



HAL
open science

QUELQUES PROBLEMES TRIDIMENSIONNELS DE MECANIQUE DE LA RUPTURE FRAGILE

Veronique Lazarus

► **To cite this version:**

Veronique Lazarus. QUELQUES PROBLEMES TRIDIMENSIONNELS DE MECANIQUE DE LA RUPTURE FRAGILE. Mécanique [physics.med-ph]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 1997. Français. NNT: . tel-00273453

HAL Id: tel-00273453

<https://theses.hal.science/tel-00273453v1>

Submitted on 15 Apr 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE de DOCTORAT de l'UNIVERSITE PARIS 6

Spécialité : **Mécanique**

présentée par

Véronique LAZARUS

pour obtenir le grade de DOCTEUR de l'UNIVERSITE PARIS 6

Sujet de thèse :

QUELQUES PROBLEMES TRIDIMENSIONNELS

DE

MECANIQUE DE LA RUPTURE FRAGILE

Soutenance effectuée le 18 septembre 1997

devant le jury composé de Messieurs :

Dominique LEGUILLON

Président

Huy Duong BUI

Rapporteur

Alain EHRLACHER

Rapporteur

Michel AMESTOY

Examineur

Jean-Baptiste LEBLOND

Examineur

Remerciements

Je tiens à remercier en tout premier lieu, Monsieur Jean-Baptiste LEBLOND, mon directeur de thèse pour m'avoir transmis une part de ces vastes connaissances scientifiques. Il a fortement contribué par ses conseils, ses suggestions, sa présence et sa disponibilité à la réussite de cette thèse.

Ma gratitude s'adresse ensuite à Monsieur Dominique LEGUILLON pour les discussions enrichissantes que nous avons eues au cours de ces trois années et pour avoir accepté de présider le jury de cette thèse.

J'exprime également ma reconnaissance à Messieurs Huy Duong BUI et Alain EHRLACHER pour avoir accepté d'être rapporteurs de cette thèse et à Monsieur Michel AMESTOY pour bien avoir voulu l'examiner.

Je voudrais remercier aussi Mme. Renée GATIGNOL et M. Alain RIGOLOT, directeurs du Laboratoire de Modélisation en Mécanique pour m'avoir accueilli dans leurs locaux. J'y ai trouvé une ambiance de travail sympathique et motivante.

Monsieur YATES et son équipe m'ont permis d'effectuer des expériences de rupture dans leur laboratoire à Sheffield. Je les en remercie.

Enfin, je voudrais dire merci à tous ceux, membres du laboratoire, thésards, amis, parents, qui m'ont apporté un coup de pouce ou un brin de bonne humeur tout au long de cette thèse.

Contents

| | |
|----------------------------------------------------------------------------------|----------|
| I Propagation de fissure en mode mixte ($I + II + III$) | 1 |
| Introduction | 2 |
| 1 Développement des facteurs d'intensité de contraintes | 5 |
| 1.1 Introduction | 5 |
| 1.2 Description géométrique de la fissure et de son extension | 6 |
| 1.3 Champ de déplacements au voisinage du front initial | 6 |
| 1.4 Facteurs d'intensité de contraintes après propagation | 7 |
| 2 Calcul de l'opérateur $N(\varphi)$ - Première partie | 9 |
| 2.1 Ecriture du problème d'élasticité | 9 |
| 2.2 Méthode des développements asymptotiques raccordés | 10 |
| 2.2.1 Problème extérieur | 11 |
| 2.2.2 Problème intérieur | 11 |
| 2.2.3 Conditions de raccord | 13 |
| 2.3 Premier terme du développement intérieur | 14 |
| 2.3.1 Ecriture du problème | 14 |
| 2.3.2 Propriété d'homogénéité | 15 |
| 2.3.3 Unicité et comportement asymptotique | 16 |
| 2.4 Problème intérieur à l'ordre 1 | 17 |
| 2.5 Problème extérieur à l'ordre 1 | 17 |
| 2.5.1 Problème tridimensionnel vérifié par $\vec{u}^{(1)}$ | 18 |
| 2.5.2 Etude d'un problème analogue : ondulations coplanaires du front de fissure | 18 |
| 2.5.3 Retour au problème initial | 21 |
| 2.6 Problème intérieur à l'ordre $3/2$ | 21 |
| 2.6.1 Ecriture du problème | 21 |
| 2.6.2 Décomposition en problèmes "simples" | 22 |

| | | |
|----------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 2.6.3 | Propriétés d'homogénéité | 23 |
| 2.6.4 | Unicité et comportements asymptotiques | 23 |
| 2.7 | Développement des facteurs d'intensité de contraintes | 24 |
| 2.7.1 | Relations entre $\vec{u}(\mathbf{x}, \delta)$ et $k_p(x_3, \delta)$ pour $r \rightarrow 0$ | 24 |
| 2.7.2 | Relations entre les champs de déplacements intérieurs et les F.I.C. | 25 |
| 2.7.3 | Expression de $k_p^{(1)}(y_3)$ | 26 |
| 3 | Calcul de l'opérateur $N(\varphi)$ - Deuxième partie | 28 |
| 3.1 | Préliminaires | 28 |
| 3.1.1 | Introduction | 28 |
| 3.1.2 | Conditions de parité des fonctions $N_{pq}(\varphi)$ | 29 |
| 3.1.3 | Transformation conforme | 30 |
| 3.1.4 | Lemme fondamental | 32 |
| 3.2 | Résolution du problème plan à l'ordre 1/2 | 33 |
| 3.2.1 | Conditions aux limites sur la fissure | 33 |
| 3.2.2 | Conditions à l'infini | 34 |
| 3.2.3 | Comportement des potentiels complexes au voisinage des points z_1, z_2, z_3 | 35 |
| 3.2.4 | Application du lemme fondamental et résultat | 36 |
| 3.2.5 | Calcul des F.I.C. | 37 |
| 3.3 | Résolution du problème antiplan à l'ordre 1/2 | 38 |
| 3.3.1 | Condition à la limite sur la fissure | 38 |
| 3.3.2 | Condition à l'infini et résultat | 38 |
| 3.3.3 | Calcul de $F_{III,III}(\varphi)$ | 39 |
| 3.4 | Résolution du problème plan à l'ordre 3/2 | 40 |
| 3.4.1 | Equations d'équilibre | 40 |
| 3.4.2 | Conditions aux limites sur la fissure | 41 |
| 3.4.3 | Conditions à l'infini | 42 |
| 3.4.4 | Comportement des fonctions complexes sur l'axe des réels | 43 |
| 3.4.5 | Application du lemme fondamental et résultats | 43 |
| 3.5 | Expression de $N_{I,III}(\varphi)$ et $N_{II,III}(\varphi)$ | 44 |
| 3.6 | Résolution du problème antiplan à l'ordre 3/2 | 45 |
| 3.6.1 | Equations d'équilibre | 45 |
| 3.6.2 | Condition à la limite sur la fissure | 46 |
| 3.6.3 | Calcul des dérivées $\frac{\partial \Phi^{(1/2)}(Z, \eta)}{\partial \eta}$, $\frac{\partial \Phi^{(1/2)'}(Z, \eta)}{\partial \eta}$ et $\frac{\partial \Psi^{(1/2)}(Z, \eta)}{\partial \eta}$ | 47 |
| 3.6.4 | Comportement des fonctions au voisinage de z_1, z_2, z_3 | 48 |

| | | |
|----------|---------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 3.6.5 | Conditions à l'infini et résultats | 49 |
| 3.7 | Calcul de $N_{III,I}(\varphi)$ et de $N_{III,II}(\varphi)$ | 51 |
| 3.7.1 | Expression de $\tilde{N}_{III,I}(\varphi)$ et de $\tilde{N}_{III,II}(\varphi)$ | 51 |
| 3.7.2 | Calcul des quantités $a_0(\dots)$ | 53 |
| 3.7.3 | Calcul de $\Gamma(m)$ | 54 |
| 3.7.4 | Expression finale de $k_p N_{IIIp}(\varphi)$ | 55 |
| 3.8 | Valeurs de l'opérateur $\mathbf{N}(\varphi)$ | 56 |
| 3.8.1 | Développement limité de l'opérateur $\mathbf{N}(\varphi)$ autour de $\varphi = 0$ | 56 |
| 3.8.2 | Valeurs numériques de l'opérateur $\mathbf{N}(\varphi)$ | 56 |
| 4 | Propagation en mode mixte (I+III) ou (I+II+III) | 59 |
| 4.1 | Observations | 59 |
| 4.1.1 | Les "lentilles" de Palaniswamy et Knauss (1975) | 59 |
| 4.1.2 | La "segmentation" du front | 60 |
| 4.1.3 | Le "déversement" du front | 63 |
| 4.1.4 | Synthèse | 65 |
| 4.2 | Quelques explications qualitatives du déversement et de la segmentation du front | 66 |
| 4.2.1 | Explication de Sommer | 66 |
| 4.2.2 | Le déversement et la segmentation seraient-ils dus à des imperfections? . | 66 |
| 4.2.3 | Explication "énergétique" du déversement et de la segmentation | 67 |
| 4.3 | Critères de propagation quantitatifs pour la détermination de l'angle de bran- | |
| | chement | 68 |
| 4.3.1 | Description géométrique de l'extension | 68 |
| 4.3.2 | Première tentative de critère | 70 |
| 4.3.3 | Expression finale du critère | 71 |
| 4.3.4 | Application des critères pour k_{III}/k_I petit et $k_{II} = 0$ | 71 |
| 4.3.5 | Application des critères pour $ k_{III}/k_I \ll 1$ et $ k_{II}/k_I \ll 1$ | 73 |
| 4.3.6 | Calcul numérique pour k_{III}/k_I et k_{II}/k_I quelconques | 74 |
| 4.4 | La vitesse de déversement est-elle bien prédite par nos critères? | 74 |
| 4.4.1 | Résultats numériques | 74 |
| 4.4.2 | Que peut-on en déduire? | 75 |
| 4.4.3 | Quelles sont les raisons des écarts? | 78 |
| 4.5 | Le branchement moyen est-il bien prédit par nos critères? | 78 |
| 4.5.1 | Résultats | 78 |
| 4.5.2 | Discussion | 80 |

| | | |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 4.6 | Détermination de la rotation du front autour de la normale à la fissure | 81 |
| 4.6.1 | Echec d'un critère quantitatif | 81 |
| 4.6.2 | Critère qualitatif | 81 |
| 4.6.3 | Confrontation avec les expériences | 82 |
| 4.7 | Conclusion | 83 |
| II Fonctions de poids 3D d'une fissure d'interface semi-infinie | | 84 |
| Introduction | | 85 |
| 5 Propriétés élémentaires des fonctions de poids - Variation des facteurs d'intensité de contraintes due à une petite perturbation du front | | 88 |
| 5.1 | Définition et notations | 88 |
| 5.2 | Variation du saut de déplacement sur la fissure due à une petite perturbation du front (théorie de Bueckner-Rice) | 89 |
| 5.3 | Propriétés élémentaires des fonctions de poids | 91 |
| 5.3.1 | Parité des $h_{p_i}(x, z)$ par rapport à z | 92 |
| 5.3.2 | Propriétés d'homogénéité | 93 |
| 5.3.3 | Comportement asymptotique des h_{p_i} | 93 |
| 5.3.4 | Combinaison des propriétés précédentes | 94 |
| 5.3.5 | Parité des fonctions de poids par rapport à ε | 95 |
| 5.4 | Variation des F.I.C. due à une petite perturbation du front | 96 |
| 5.4.1 | Principe de la méthode | 96 |
| 5.4.2 | Comportement de $\delta \llbracket \bar{u} \rrbracket$ près du front | 97 |
| 5.4.3 | Comportement asymptotique de $\int_{-\infty}^{+\infty} f(z')H_p(x, z' - z)\delta a(z')dz'$ | 98 |
| 5.4.4 | Passage à la limite pour $x \rightarrow 0^-$, puis pour $\eta \rightarrow 0$ | 100 |
| 5.4.5 | Résultat final | 104 |
| 6 Equations sur les fonctions de poids et leur transformée de Fourier | | 105 |
| 6.1 | Préliminaires | 105 |
| 6.2 | Equations intégrodifférentielles sur les fonctions $W_p(u)$ | 106 |
| 6.2.1 | Choix du chargement et de l'avancée $\delta a(z)$ du front | 106 |
| 6.2.2 | Expression de $K(z)$, $K_{III}(z)$ et de $\delta K(z)$, $\delta K_{III}(z)$ en fonction des W_k | 106 |
| 6.2.3 | Ecriture des équations | 108 |
| 6.3 | Transformation de Fourier des équations intégrodifférentielles | 109 |

| | | |
|----------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 6.3.1 | Notations. Définition de la transformation de Fourier | 109 |
| 6.3.2 | Calcul de l'intégrale $I(q, \alpha) \equiv PF \int_0^{+\infty} \frac{e^{iqu}}{u^{1+i\alpha}} du$ | 110 |
| 6.3.3 | Diverses transformées de Fourier | 110 |
| 6.3.4 | Écriture des équations différentielles sur les fonctions $\widehat{W}_k(p)$ | 111 |
| 6.4 | Comportement des fonctions $\widehat{W}_k(p)$ quand $p \rightarrow 0$ | 112 |
| 6.4.1 | Limite de $\widehat{W}_k(p)$ quand $p \rightarrow 0$ | 112 |
| 6.4.2 | Comportement de $\widehat{W}_k'(p)$ pour $p \rightarrow 0$ | 113 |
| 6.4.3 | Écriture synthétique | 115 |
| 6.4.4 | Conséquences sur les constantes $\gamma_-, \gamma_{III}, \gamma_z, C_{III}, C_z$ | 115 |
| 7 | Résolution des équations, détermination des fonctions de poids | 116 |
| 7.1 | Préliminaires | 116 |
| 7.2 | Problème à l'ordre 0 | 117 |
| 7.2.1 | Écriture des équations à l'ordre 0 | 117 |
| 7.2.2 | Solution : fonctions de poids du cas homogène | 118 |
| 7.2.3 | Non unicité des solutions | 119 |
| 7.3 | Problème à l'ordre 1 | 119 |
| 7.3.1 | Écriture des équations | 119 |
| 7.3.2 | Découplage des équations | 120 |
| 7.3.3 | Résolution des équations | 121 |
| 7.3.4 | Application des conditions aux limites | 122 |
| 7.3.5 | Transformées de Fourier inverses | 123 |
| 7.4 | Expression des fonctions de poids à l'ordre 1 en ε | 125 |
| 7.5 | Détermination numérique des constantes $\gamma_+, \gamma_-, \gamma_{III}, \gamma_z, \gamma$ | 126 |
| 7.5.1 | Découplage partiel des équations différentielles | 126 |
| 7.5.2 | Principe de la méthode numérique | 127 |
| 7.5.3 | Résultats numériques | 128 |
| 7.6 | Stabilité de la forme rectiligne du front | 128 |
| 7.6.1 | $\delta\mathcal{G}$ dû à une perturbation sinusoïdale du front | 130 |
| 7.6.2 | Étude de la stabilité | 131 |
| 7.6.3 | Comparaison avec le cas homogène $\varepsilon \equiv 0$ | 132 |
| 7.7 | Annexe : Calcul de quelques intégrales | 133 |
| 7.7.1 | Calcul de $I_2 = \int_0^{+\infty} e^{-p(1+iu)} \ln p dp$ et $I_3 = \int_0^{+\infty} e^{p(1-iu)} \text{Ei}(-2p) dp$. . . | 133 |
| 7.7.2 | Propriétés de $\chi(u) \equiv \frac{i}{(1+iu)^{3/2}} \int_{-\infty}^u \ln\left(\frac{1+it}{2}\right) \frac{dt}{(1+it)^{1/2}(1-it)}$. . . | 134 |

| | | |
|----------------------|---------------------------|------------|
| 7.7.3 | Calcul de I_4 | 135 |
| Bibliographie | | 136 |

Part I

Propagation de fissure en mode mixte (*I + II + III*)

Introduction

Expérimentalement, il est avéré que quel que soit le chargement, la fissure se propage en essayant (elle n’y arrive pas toujours) de se mettre en position de mode I pur.

Dans le cas *bidimensionnel* d’une fissure chargée en mode I+II, la fissure dévie de son plan initial, ce qui se traduit par une discontinuité de la direction de propagation appelée *branchement*. Les critères qui consistent à maximiser les contraintes d’ouverture ([Erdogan and Sih, 1963]) ou à annuler le F.I.C. en mode II juste après branchement (“Principe de Symétrie Locale” (PSL) de [Goldstein and Salganik, 1974]) donnent de bonnes estimations des valeurs expérimentales de l’angle de branchement φ . Le PSL présente toutefois un avantage par rapport au premier critère car il est le seul à prédire un trajet régulier après le branchement initial (cf. par exemple la thèse de [Amestoy, 1987]).

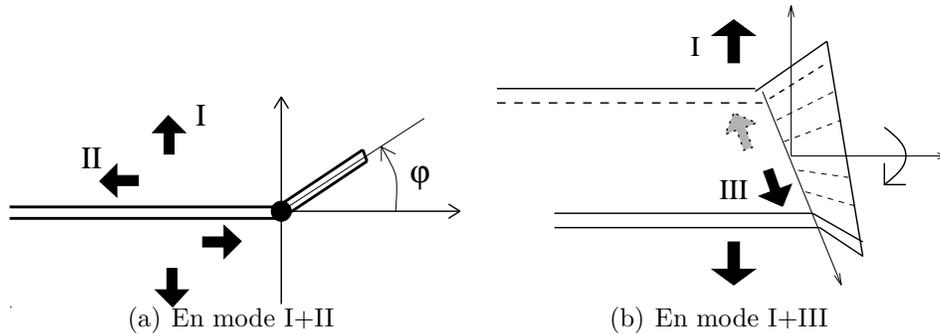


Figure 1: Divers trajets de propagation

En présence de mode III, le problème devient *tridimensionnel* car pour se mettre en mode I pur, le front de fissure doit tourner progressivement autour de la direction de propagation, ce qui implique *un angle de branchement variable le long du front*. Dans ce cas, on parle de *déversement* du front. Néanmoins, le front de fissure ne se propage pas toujours de façon aussi idéale, et dans certains cas il se brise en petits segments déversant chacun en sens inverse pour former une surface ressemblant à un “toit d’usine”. Dans ce cas, on parle de phénomène de *segmentation* du front. Nous poursuivrons ici le travail effectué par Mouchrif au cours de sa thèse sous la direction de J.B. Leblond, pour tenter, dans le cadre de la théorie de la mécanique de la rupture fragile, de donner un critère quantitatif permettant de déterminer entièrement la géométrie de l’extension dans le cas du déversement. Nous sommes obligés pour

cela d'abandonner le PSL car celui-ci, pour une fissure chargée en mode I+III, prédirait un angle de branchement nul le long de tout le front.

De même que la présence de mode III engendre une rotation du front autour de la direction de propagation, on peut envisager que la présence de mode II engendre une rotation du front autour de la direction perpendiculaire aux lèvres de la fissure, qui se traduirait par *une extension de longueur variable le long du front*.

La présente partie de cette thèse est divisée en quatre chapitres dont le contenu est brièvement présenté ci-dessous.

Chapitre 1

Pour étudier les trajets de propagation précédemment évoqués, nous nous placerons dans le cas typique d'une fissure semi-infinie ou en forme de fente infinie, initialement plane, munie d'une petite extension droite de longueur et d'angle de branchement variables le long du front. Cette étude nécessitera la connaissance des F.I.C. le long du front ainsi étendu.

Grâce aux précédents travaux de Leblond et de Mouchrif, nous les obtenons sous forme d'un développement en puissances de la longueur δ de l'extension. Ce chapitre est donc destiné à rappeler ces expressions et ne contient aucune contribution personnelle de l'auteur.

Chapitre 2

Chacun des termes du développement des F.I.C. est connu dans le cas d'une fissure semi-infinie ou en forme de fente infinie, sauf en ce qui concerne un opérateur universel $\mathbf{N}(\varphi)$ qui permet de prendre en compte les variations de la longueur de l'extension le long du front. L'objet de ce chapitre et du suivant sera la détermination de cette opérateur. Le problème à résoudre est analogue en tout point à celui qui a permis à Mouchrif de déterminer l'opérateur $\mathbf{P}(\varphi)$ décrivant l'effet des variations de l'angle de branchement le long du front; seule la forme de l'extension est différente. Nous allons donc suivre la même démarche que Mouchrif. Ce chapitre et le suivant n'apportent donc pas vraiment de nouveauté en ce qui concerne les méthodes utilisées, mais sont nécessaires à toute discussion incluant la possibilité d'une variation de la longueur de l'extension le long du front.

Le calcul de l'opérateur $\mathbf{N}(\varphi)$ nécessite la résolution d'un problème d'élasticité à priori 3D. Grâce à une technique de développements asymptotiques raccordés inspirée de celle précédemment utilisée par Leguillon (1993) pour l'étude du cas bidimensionnel, ce problème se ramène à divers problèmes d'élasticité tous 2D à l'exception d'un seul. L'opérateur $\mathbf{N}(\varphi)$ cherché résulte de la résolution d'un de ces problèmes 2D.

Chapitre 3

Ce chapitre est consacré à la résolution du problème *bidimensionnel* mis en évidence dans le chapitre précédent. La méthode utilisée est un peu différente de celle de Mouchrif et permet d'alléger quelque peu les calculs. Cette résolution utilise le formalisme de Muskhelishvili et une technique de transformation conforme déjà employée par Amestoy, Bui et Dang Van (1979), Amestoy (1987) et Amestoy et Leblond (1992) pour des problèmes similaires. Nous obtenons alors les composantes de l'opérateur $\mathbf{N}(\varphi)$ à l'aide de l'un des potentiels complexes du problème, solution d'une certaine équation intégrale. La résolution numérique de cette équation nous permet d'obtenir les différentes fonctions $N_{pq}(\varphi)$ ($p, q = I, II, III$).

Chapitre 4

Dans ce chapitre, nous allons préciser les trajets de propagation observés de façon expérimentale par divers auteurs (notamment nous-mêmes, en collaboration avec le Professeur Yates, à l'Université de Sheffield, Grande-Bretagne) sous divers chargements sollicitant la fissure en mode III, en mode I+III ou en mode I+II+III. Nous rappellerons l'explication "qualitative" de la *segmentation* et du *déversement* du front donnée par Mouchrif et proposerons des critères "quantitatifs" permettant de prédire les paramètres géométriques de l'extension dans le cas du *déversement*. La comparaison expérience-théorie donnera des résultats satisfaisants en ce qui concerne la prédiction de l'angle de branchement moyen et du déversement, mais nécessiterait des investigations supplémentaires pour la prédiction de la longueur de l'extension.

Chapter 1

Développement des facteurs d'intensité de contraintes en puissances de la longueur de l'extension

1.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons rappeler les expressions des trois premiers termes du développement des facteurs d'intensité de contraintes en puissances de la longueur de l'extension. Les trois premiers termes, d'ordre 0, 1/2 et 1, ont été explicités par Leblond (1989) et Amestoy et Leblond (1992) dans le cas bidimensionnel. Leblond (1993) a également généralisé au cas tridimensionnel l'expression des deux premiers termes, et Mouchrif (thèse, 1994) a donné l'expression du terme d'ordre 1. Ces termes font intervenir le chargement à travers le champ de contraintes près du front initial de fissure, les paramètres géométriques de la fissure et du milieu. Ces expressions sont valables dans le cas d'un milieu tridimensionnel quelconque contenant une fissure de forme arbitraire¹, munie d'une extension déviée, courbe et de longueur variable le long du front. Nous ne rappellerons pas, dans la présente thèse, l'expression de ce développement dans le cas général, mais nous nous restreindrons au cas qui nous sera utile pour l'étude du trajet de propagation en présence de mode III.

¹Dont la surface et le front sont supposés de classe C^∞ .

1.2 Description géométrique de la fissure et de son extension

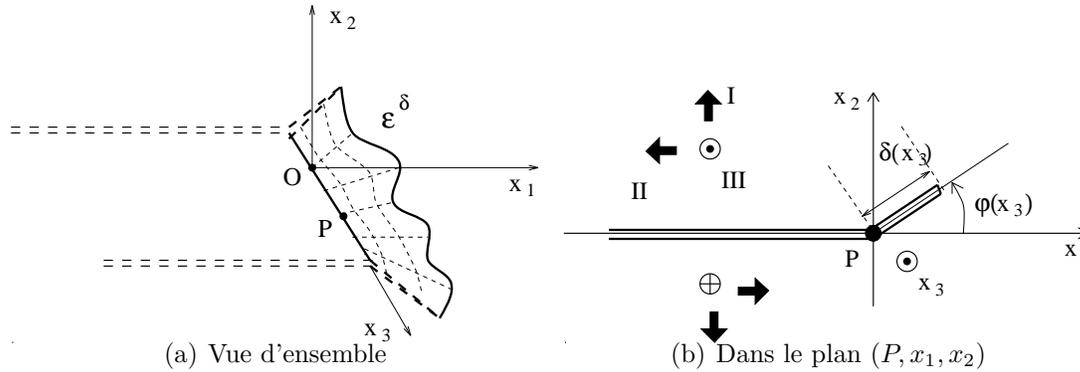


Figure 1.1: Fissure plane à front droit munie d'une extension droite de longueur et d'angle de branchement variables le long du front

Nous considérerons un domaine tridimensionnel Ω arbitraire contenant une fissure \mathcal{F} initialement semi-infinie à front droit ou en forme de fente infinie, munie d'une extension \mathcal{E}^δ droite de longueur $\delta(x_3)$ et d'angle de branchement $\varphi(x_3)$ variables le long du front (cf. Fig. 1.1). Nous poserons :

$$\delta(x_3) = \delta \cdot \eta(x_3) \quad (1.1)$$

où $\eta(x_3)$ est une fonction de x_3 donnée, et δ une constante destinée à tendre vers zéro. La géométrie d'une telle extension est donc entièrement déterminée par la donnée (outre de δ) des fonctions $\varphi(x_3)$ et $\eta(x_3)$.

1.3 Champ de déplacements au voisinage du front initial

Nous supposerons qu'avant propagation de la fissure, le chargement mécanique est invariant par translation le long de l'axe Ox_3 , de telle sorte que le comportement asymptotique des déplacements au voisinage de \mathcal{F} est invariant par rapport à x_3 et est donné par:

$$\vec{u}(\mathbf{x}) = k_p \vec{U}_p^{(1/2)}(x_1, x_2) + T_p \vec{U}_p^{(1)}(x_1, x_2) + b_p \vec{U}_p^{(3/2)}(x_1, x_2) + O(r^2) \quad (1.2)$$

pour $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \rightarrow 0$, où $\vec{U}_p^{(\alpha)} = U_p^{(\alpha)} \vec{e}_i$, $p = I, II, III$, $\alpha = 1/2, 1, 3/2$ est le $p^{\text{ième}}$ déplacement fondamental homogène de degré α dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ adaptée au front initial. Les quantités k_p et T_p , $p = I, II, III$ désignent le $p^{\text{ième}}$ F.I.C et la $p^{\text{ième}}$ contrainte non singulière respectivement. Les b_p sont des coefficients n'ayant aucune dénomination particulière. Par hypothèse, k_p , T_p et b_p , constantes dépendant du chargement, sont indépendantes de x_3 .

1.4 Facteurs d'intensité de contraintes après propagation

Au voisinage du nouveau front (c'est-à-dire après branchement et propagation), le développement des déplacements garde la même expression, compte tenu de la nouvelle position du front et du changement correspondant des valeurs des paramètres géométriques et mécaniques. Le $p^{ième}$ F.I.C. après propagation, au point de cote x_3 , sera noté $k_p(x_3, \delta)$, $p = I, II, III$. Il dépend maintenant de x_3 à cause de la dépendance vis-à-vis de x_3 de la géométrie de l'extension \mathcal{E}^δ à travers les fonctions $\varphi(x_3)$ et $\eta(x_3)$.

Pour $\delta \rightarrow 0$, on obtient le développement de $k_p(x_3, \delta)$ sous la forme suivante :

$$k_p(x_3, \delta) = k_p^*(x_3) + \sqrt{\delta\eta(x_3)} k_p^{(1/2)}(x_3) + \delta k_p^{(1)}(x_3) + O(\delta^{3/2}), \quad p = I, II, III \quad (1.3)$$

avec, en utilisant la convention de sommation sur l'indice muet :

$$\begin{aligned} \bullet \quad k_p^*(x_3) &= F_{pq}(\varphi(x_3)).k_q \\ \bullet \quad k_p^{(1/2)}(x_3) &= G_{pq}(\varphi(x_3)).T_q \\ \bullet \quad k_p^{(1)}(x_3) &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 k_p(x_3, \delta)}{\partial(\sqrt{\delta})^2} \right]_{\varphi(x'_3) \equiv \varphi(x_3)}^{\eta(x'_3) \equiv \eta(x_3)} \eta(x_3) \\ &\quad + N_{pq}(\varphi(x_3)).k_q \eta'(x_3) + P_{pq}(\varphi(x_3)).k_q \varphi'(x_3) \eta(x_3) + F_{pq}(\varphi(x_3)) \times \\ &\quad VP \int_{-\infty}^{+\infty} Z_{qr}(\Omega, x_3, x'_3) \left[(F^T.F)_{rs}(\varphi(x'_3)) \eta(x'_3) - (F^T.F)_{rs}(\varphi(x_3)) \eta(x_3) \right] k_s dx'_3 \end{aligned} \quad (1.4)$$

où VP , qui désigne la valeur principale de l'intégrale, est définie par :

$$VP \int_{-\infty}^{+\infty} \dots = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R} - [x_3 - \varepsilon, x_3 + \varepsilon]} \dots$$

Dans ces expressions, il faut distinguer deux types de termes :

- des termes *universels*, qui ne dépendent de la géométrie du problème qu'à travers l'angle de branchement. Il s'agit des fonctions matricielles $\mathbf{F}(\varphi)$, $\mathbf{G}(\varphi)$, $\mathbf{P}(\varphi)$, $\mathbf{N}(\varphi)$. Amestoy (1987) et Amestoy et Leblond (1992) ont déterminé les composantes $F_{\alpha,p}(\varphi)$ et $G_{\alpha,p}(\varphi)$, $\alpha = I, II$, $p = I, II, III$ grce à la résolution d'un problème 2D plan. Les composantes $F_{III,p}(\varphi)$ et $G_{III,p}(\varphi)$ peuvent être extraites des travaux de Sih (1965). Le calcul des opérateurs $\mathbf{P}(\varphi)$ et $\mathbf{N}(\varphi)$ nécessite la résolution de problèmes 3D apparentés. $\mathbf{P}(\varphi)$ ayant été déterminé par Mouchrif (1994), il nous reste à calculer $\mathbf{N}(\varphi)$.
- des termes *non-universels* dépendant de la totalité de la géométrie. Il s'agit des termes $\left[\frac{\partial^2 \mathbf{k}(x_3, \delta)}{\partial(\sqrt{\delta})^2} \right]_{\varphi(x'_3) \equiv \varphi(x_3)}^{\eta(x'_3) \equiv \eta(x_3)}$ et $\mathbf{Z}(\Omega, x_3, x'_3)$ que l'on pourra déterminer dans certains cas particuliers. La première expression est le troisième terme (d'ordre $\sqrt{\delta^2} = \delta$) du développement

des F.I.C. quand l'extension est de longueur constante et présente un angle de branchement uniforme le long du front.

On remarque, de plus, que les deux premiers termes du développement des F.I.C. au point de cote x_3 ne dépendent de l'angle de branchement φ et de la longueur de l'extension η qu'à travers leur valeur *locale* au point de cote x_3 . En revanche le troisième terme de ce développement dépend des valeurs de φ et de η le long de tout le front à travers deux types de termes :

- les termes $N_{pq}(\varphi(x_3)).k_q \eta'(x_3)$ et $P_{pq}(\varphi(x_3)).k_q \varphi'(x_3) \eta(x_3)$ qui prennent en compte la variation *locale* autour du point de cote x_3 de la longueur de l'extension et de l'angle de branchement;
- le terme intégral qui prend en compte la valeur de ces fonctions le long de tout le front et donc leur variation de façon *globale*.

Les deux premiers termes du développement étant de nature purement locale, tout critère portant sur ces deux premiers termes uniquement ne peut prédire, en tout point, qu'un angle de branchement indépendant des angles de branchement aux autres points. Ceci n'est pas réaliste en présence de mode III car le déversement ou la segmentation impliquent une propagation "concertée" de tous les points du front. Il est donc nécessaire de prendre en compte le troisième terme du développement en présence de mode III.

Chapter 2

Calcul de l'opérateur $\mathbf{N}(\varphi)$ - Première partie : développements asymptotiques raccordés

2.1 Ecriture du problème d'élasticité

L'opérateur universel $\mathbf{N}(\varphi)$ apparaît en facteur de $\eta'(x_3)$, dans le troisième terme du développement des F.I.C. en puissances de la longueur de l'extension. Pour que ce terme existe dans le développement des F.I.C. après propagation, il faudra donc résoudre un problème d'élasticité tridimensionnel comprenant une extension de longueur variable le long du front. Nous allons

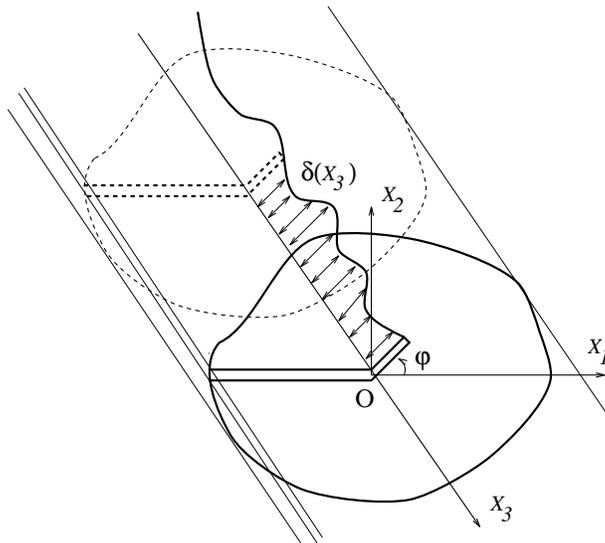


Figure 2.1: Géométrie du problème d'élasticité

donc considérer un domaine tridimensionnel contenant une fissure \mathcal{F} initialement plane à front

droit, les lèvres de la fissure étant libres de contraintes et un chargement $\{\vec{T}_d, \vec{u}_d\}$ étant exercé sur $\{\partial\Omega = \partial\Omega_T \cup \partial\Omega_u\}$ (cette fissure peut être débouchante comme sur la figure 2.1 ou non). Ce chargement et la géométrie initiale sont supposés invariants par translation parallèlement au front de fissure, si bien que pour la configuration initiale de cette dernière, le problème est en réalité bidimensionnel. On associe à cette configuration un repère adapté au front de fissure $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ (cf. Fig. 2.1). On suppose ensuite la fissure munie, dans une seconde configuration, d'une extension \mathcal{E}^δ présentant un angle de branchement uniforme $\varphi(x_3) = \varphi$ et de longueur $\delta(x_3)$ variable le long du front. Posons :

$$\delta(x_3) = \delta \eta(x_3) \quad (2.1)$$

où $\eta(x_3)$ est une fonction fixant la forme de l'extension et δ une constante destinée à tendre vers 0. Notons respectivement $\vec{u}(\mathbf{x}, \delta)$, $\vec{\varepsilon}(\mathbf{x}, \delta)$, $\vec{\sigma}(\mathbf{x}, \delta)$ le déplacement, les déformations et les contraintes au point $M(\mathbf{x})$ de composantes (x_1, x_2, x_3) du domaine Ω^δ contenant la fissure étendue.

Les équations du problème s'écrivent alors, en sommant sur les indices muets :

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_{ij,j}(\mathbf{x}, \delta) = 0 \\ \varepsilon_{ij}(\mathbf{x}, \delta) = \frac{1}{2} (u_{i,j}(\mathbf{x}, \delta) + u_{j,i}(\mathbf{x}, \delta)) \\ \sigma_{ij}(\mathbf{x}, \delta) = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}(\mathbf{x}, \delta) \end{array} \right\} \text{ dans } \Omega^\delta \quad (2.2)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{\sigma}(\mathbf{x}, \delta) \cdot \vec{n}(\mathbf{x}) = \vec{T}_d(\mathbf{x}) \text{ sur } \partial\Omega_T, \quad \vec{u}(\mathbf{x}, \delta) = \vec{u}_d(\mathbf{x}) \text{ sur } \partial\Omega_u \\ \vec{\sigma}(\mathbf{x}, \delta) \cdot \vec{n}(\mathbf{x}) = 0 \text{ sur } \mathcal{F} \cup \mathcal{E}^\delta \end{array} \right\}$$

où C désigne l'opérateur d'élasticité et $\vec{n}(\mathbf{x})$ le vecteur normal unitaire extérieur à $\partial\Omega$, \mathcal{F} ou \mathcal{E}^δ . Notons que :

$$\begin{aligned} \vec{n}(\mathbf{x}) &= \vec{e}_2 \text{ sur } \mathcal{F} \\ \vec{n}(\mathbf{x}) &= \cos \varphi \vec{e}_1 + \sin \varphi \vec{e}_2 \text{ sur } \mathcal{E}^\delta \end{aligned} \quad (2.3)$$

2.2 Méthode des développements asymptotiques raccordés

Afin d'obtenir le développement des F.I.C. en puissances de la longueur δ de l'extension, il nous faut résoudre le problème précédent pour $\delta \rightarrow 0$. Si nous faisons ceci sur la géométrie du problème initial, l'extension disparaît. Pour pallier cet inconvénient, nous allons utiliser la méthode des développements asymptotiques raccordés (d.a.r.) qui permet par un changement de variables approprié de décomposer le problème en un problème "intérieur" contenant une extension de longueur indépendante de δ et un problème "extérieur" posé sur la géométrie initiale sans extension. La solution de ce problème "intérieur", valable près du front de fissure, est reliée par des "conditions de raccord" à la solution du problème "extérieur", valable loin du front.

2.2.1 Problème extérieur

Les champs mécaniques $\vec{u}(\mathbf{x}, \delta)$, $\vec{\varepsilon}(\mathbf{x}, \delta)$, $\vec{\sigma}(\mathbf{x}, \delta)$ étant, d'après Leblond (1993), continus et différentiables en fonction de la longueur de l'extension en $\delta = 0$, les développements de ces champs en puissances de δ s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{u}(\mathbf{x}, \delta) = \vec{u}^{(0)}(\mathbf{x}) + \delta \vec{u}^{(1)}(\mathbf{x}) + O(\delta^{3/2}) \\ \vec{\varepsilon}(\mathbf{x}, \delta) = \vec{\varepsilon}^{(0)}(\mathbf{x}) + \delta \vec{\varepsilon}^{(1)}(\mathbf{x}) + O(\delta^{3/2}) \\ \vec{\sigma}(\mathbf{x}, \delta) = \vec{\sigma}^{(0)}(\mathbf{x}) + \delta \vec{\sigma}^{(1)}(\mathbf{x}) + O(\delta^{3/2}) \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} \vec{u}(\mathbf{x}, \delta) = \delta^{\gamma_e} \vec{u}^{(\gamma_e)}(\mathbf{x}) \\ \vec{\varepsilon}(\mathbf{x}, \delta) = \delta^{\gamma_e} \vec{\varepsilon}^{(\gamma_e)}(\mathbf{x}) \\ \vec{\sigma}(\mathbf{x}, \delta) = \delta^{\gamma_e} \vec{\sigma}^{(\gamma_e)}(\mathbf{x}) \end{array} \right. \quad (2.4)$$

où l'indice répété γ_e prend les valeurs 0, 1, 3/2, 2,...

En reportant ces équations dans les équations (2.2) du problème, on voit que le déplacement $\vec{u}^{(0)}(\mathbf{x})$ à l'ordre 0 est solution du problème pour la configuration initiale sans extension et que les termes suivants sont solutions du problème *homogène* suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{ij,j}^{(\gamma_e)}(\mathbf{x}) = 0 \\ \varepsilon_{ij}^{(\gamma_e)}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} (u_{i,j}^{(\gamma_e)}(\mathbf{x}, \cdot) + u_{j,i}^{(\gamma_e)}(\mathbf{x})) \\ \sigma_{ij}^{(\gamma_e)}(\mathbf{x}) = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}^{(\gamma_e)}(\mathbf{x}) \end{array} \right\} \text{ dans } \Omega \quad (2.5)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\sigma}^{(\gamma_e)}(\mathbf{x}) \cdot \vec{n}(\mathbf{x}) = \vec{0} \text{ sur } \partial\Omega_T, \quad \vec{u}^{(\gamma_e)}(\mathbf{x}) = \vec{0} \text{ sur } \partial\Omega_u \\ \vec{\sigma}^{(\gamma_e)}(\mathbf{x}) \cdot \vec{n}(\mathbf{x}) = 0 \text{ sur } \mathcal{F} \end{array} \right.$$

Malgré l'homogénéité de ces équations, leur solution $\vec{u}^{(\gamma_e)}(\mathbf{x})$, $\gamma_e \geq 1$ n'est pas nulle car elles doivent être complétées par les conditions de raccord pour $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \rightarrow 0$, qui ne sont pas identiquement nulles.

2.2.2 Problème intérieur

Afin d'"effectuer un zoom" du voisinage du front de fissure, faisons le changement de variables suivant:

$$y_1 = \frac{x_1}{\delta}; \quad y_2 = \frac{x_2}{\delta}; \quad y_3 = x_3 \quad (2.6)$$

Définissons les champs de déplacements, de déformations, de contraintes intérieurs par :

$$\vec{v}(\mathbf{y}, \delta) = \vec{u}(\mathbf{x}, \delta), \quad \vec{e}(\mathbf{y}, \delta) = \delta \vec{\varepsilon}(\mathbf{x}, \delta), \quad \vec{\tau}(\mathbf{y}, \delta) = \delta \vec{\sigma}(\mathbf{x}, \delta) \quad (2.7)$$

Le problème intérieur portant sur ces nouveaux champs, pour $\delta \rightarrow 0$, va être posé sur un domaine Ω^{int} infini contenant une fissure \mathcal{F}^{int} semi-infinie munie d'une extension \mathcal{E}^{int} de longueur $\eta(y_3)$ variable le long du front. Les équations (2.2) s'écrivent pour ces nouveaux champs de la

façon suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_{i\alpha;\alpha}(\mathbf{y}, \delta) + \delta\tau_{i3;3}(\mathbf{y}, \delta) = 0 \text{ dans } \Omega^{int} \\ e_{\alpha\beta}(\mathbf{y}, \delta) = \frac{1}{2} (v_{\alpha;\beta}(\mathbf{y}, \delta) + v_{\beta;\alpha}(\mathbf{y}, \delta)) \\ e_{3\alpha}(\mathbf{y}, \delta) = \frac{1}{2} (v_{3;\alpha}(\mathbf{y}, \delta) + \delta v_{\alpha;3}(\mathbf{y}, \delta)) \\ e_{33}(\mathbf{y}, \delta) = \delta v_{3;3}(\mathbf{y}, \delta) \end{array} \right\} \text{ dans } \Omega^{int} \quad (2.8)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_{ij}(\mathbf{y}, \delta) = C_{ijkl}e_{kl}(\mathbf{y}, \delta) \text{ dans } \Omega^{int} \\ \vec{\tau}(\mathbf{y}, \delta) \cdot \vec{n}(\mathbf{y}) = 0 \text{ sur } \mathcal{F}^{int} \cup \mathcal{E}^{int} \end{array} \right.$$

où les indices latins et grecs prennent respectivement les valeurs 1, 2, 3 et 1, 2 et où les points virgules désignent les dérivations par rapport aux coordonnées intérieures y_i .

Cherchons les solutions sous la forme d'un développement en puissances de δ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{v}(\mathbf{y}, \delta) = \delta^{\gamma_i} \vec{v}^{(\gamma_i)}(\mathbf{y}) \\ \vec{e}(\mathbf{y}, \delta) = \delta^{\gamma_i} \vec{e}^{(\gamma_i)}(\mathbf{y}) \\ \vec{\tau}(\mathbf{y}, \delta) = \delta^{\gamma_i} \vec{\tau}^{(\gamma_i)}(\mathbf{y}) \end{array} \right. \quad (2.9)$$

où l'on suppose que les exposants γ_i sont entiers et semi-entiers. En reportant ces relations dans les équations (2.8) et en identifiant les termes du même ordre en δ , on obtient pour chaque γ_i les équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_{i\alpha;\alpha}^{(\gamma_i)}(\mathbf{y}) + \tau_{i3;3}^{(\gamma_i-1)}(\mathbf{y}) = 0 \text{ dans } \Omega^{int} \\ e_{\alpha\beta}^{(\gamma_i)}(\mathbf{y}) = \frac{1}{2} (v_{\alpha;\beta}^{(\gamma_i)}(\mathbf{y}) + v_{\beta;\alpha}^{(\gamma_i)}(\mathbf{y})) \\ e_{3\alpha}^{(\gamma_i)}(\mathbf{y}) = \frac{1}{2} (v_{3;\alpha}^{(\gamma_i)}(\mathbf{y}) + v_{\alpha;3}^{(\gamma_i-1)}(\mathbf{y})) \\ e_{33}^{(\gamma_i)}(\mathbf{y}) = v_{3;3}^{(\gamma_i-1)}(\mathbf{y}) \end{array} \right\} \text{ dans } \Omega^{int} \quad (2.10)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_{ij}^{(\gamma_i)}(\mathbf{y}) = C_{ijkl}e_{kl}^{(\gamma_i)}(\mathbf{y}) \text{ dans } \Omega^{int} \\ \vec{\tau}^{(\gamma_i)}(\mathbf{y}) \cdot \vec{n}(\mathbf{y}) = 0 \text{ sur } \mathcal{F}^{int} \cup \mathcal{E}^{int} \end{array} \right.$$

On remarque que les dérivations par rapport à y_3 ne portent que sur les termes d'ordre $\gamma_i - 1$, supposés connus quand on résout le problème à l'ordre γ_i , et donc que ces problèmes ne sont pas de véritables problèmes tridimensionnels mais constituent plutôt une infinité de problèmes bidimensionnels indépendants, dont chacun est posé dans un plan $y_3 = Cste$.

Afin de faire apparaître les termes d'ordre inférieur, supposés connus, au second membre des équations, c'est-à-dire comme des forces de volume ou des forces exercées sur la fissure et

son extension, on notera $\hat{\tau}_{ij}(\vec{v}(\mathbf{y}))$ les contraintes reliées *via* la loi de comportement élastique aux déformations $\hat{e}_{ij}(\vec{v}(\mathbf{y}))$ définies par :

$$\begin{cases} \hat{e}_{\alpha\beta}(\mathbf{y}) = \frac{1}{2}(v_{\alpha;\beta}(\mathbf{y}) + v_{\beta;\alpha}(\mathbf{y})) \\ \hat{e}_{3\alpha}(\mathbf{y}) = \frac{1}{2}v_{3;\alpha}(\mathbf{y}) \\ \hat{e}_{33}(\mathbf{y}) = 0 \end{cases} \quad (2.11)$$

On notera que ces déformations \hat{e}_{ij} diffèrent des déformations e_{ij} par l'omission des termes comportant une dérivée par rapport à y_3 .

2.2.3 Conditions de raccord

La solution du problème extérieur n'est valable que loin du front de fissure alors que la solution du problème intérieur n'est valable que près de celui-ci. Ces deux solutions doivent se raccorder dans une zone "intermédiaire" (zone de raccord) qui correspond à $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \rightarrow 0$ et à $\rho = \sqrt{y_1^2 + y_2^2} \rightarrow +\infty$. Dans cette zone on doit avoir égalité des champs de déplacements extérieur et intérieur, ce qui s'écrit aussi:

$$\begin{cases} \text{Comportement pour } r \rightarrow 0 \text{ de } \vec{u}(\mathbf{x}, \delta) = \text{Comportement pour } \rho \rightarrow +\infty \text{ de } \vec{v}(\mathbf{y}, \delta) \\ \text{avec } y_1 = \frac{x_1}{\delta}; \quad y_2 = \frac{x_2}{\delta}; \quad y_3 = x_3 \end{cases} \quad (2.12)$$

Supposons de plus que chacun des termes $\vec{u}^{(\gamma_e)}(\mathbf{x})$ (resp. $\vec{v}^{(\gamma_i)}(\mathbf{y})$) admette un développement en puissances de r pour $r \rightarrow 0$ (resp. de ρ pour $\rho \rightarrow +\infty$) avec des exposants entiers et semi-entiers notés κ_e (resp. κ_i). Pour que les conditions de raccord (2.12) soient vérifiées, il faut alors que *le terme proportionnel à $\delta^{\gamma_e} r^{\kappa_e}$ dans le développement extérieur soit égal au terme proportionnel à $\delta^{\gamma_i} \rho^{\kappa_i} = \delta^{\gamma_i} \rho^{\kappa_i}$ (car $r = \delta \rho$) dans le développement intérieur*. Ce qui implique la correspondance suivante entre les exposants de r et de ρ et les puissances de δ des termes à identifier :

$$\kappa_e = \kappa_i; \quad \gamma_e + \kappa_e = \gamma_i \quad (2.13)$$

Rappelons que la solution à l'ordre 0 du problème extérieur est solution du problème initial sans extension; $\vec{u}^{(0)}(x)$ admet donc, pour $r \rightarrow 0$, le développement asymptotique classique qui s'écrit, en omettant les déplacements de corps rigide¹ en $O(\rho^0)$ (cf. (1.2)):

$$\vec{u}^{(0)}(\mathbf{x}) = k_p \vec{U}_p^{(1/2)}(x_1, x_2) + T_p \vec{U}_p^{(1)}(x_1, x_2) + b_p \vec{U}_p^{(3/2)}(x_1, x_2) + O(r^2) \quad (2.14)$$

Le terme dominant en δ du développement intérieur (c'est-à-dire ayant l'indice $\gamma_i = \gamma_{min}$ le plus bas) doit se raccorder avec le terme dominant du développement extérieur $k_p \vec{U}_p^{(1/2)}(x_1, x_2)$

¹ce que nous ferons systématiquement à l'avenir.

pour lequel $\gamma_e = 0$ et $\kappa_e = 1/2$. Ceci implique d'après (2.13) que $\gamma_{min} = 1/2$ et que :

$$\vec{v}^{(1/2)}(\mathbf{y}) = k_p \vec{U}_p^{(1/2)}(y_1, y_2) + O(\rho^{-1/2}) \quad (2.15)$$

quand $\rho \rightarrow +\infty$.

La solution se construit, en "accordéon", en posant successivement le problème intérieur à l'ordre 1/2, puis le problème extérieur à l'ordre 1/2 (en fait les champs mécaniques étant différentiables à x fixé par rapport à δ , la solution de ce problème est identiquement nulle, il n'y a donc pas lieu de le considérer), puis le problème intérieur à l'ordre 1, puis le problème extérieur à l'ordre 1, puis le problème intérieur à l'ordre 3/2...en appliquant la condition de raccord aux puissances de δ déjà prises en compte². Ainsi :

- $\vec{u}^{(1/2)} = 0$
- $\vec{v}^{(1)}$ pour lequel $\gamma_i = 1$ se raccorde avec $\vec{u}^{(0)}$ (et $\vec{u}^{(1/2)} = 0$). Le terme d'ordre $\kappa_i = 1$ de $\vec{v}^{(1)}$ doit être égal au terme d'ordre $\kappa_e = 1$ de $\vec{u}^{(0)}$ (pour lequel $\gamma_e = 0$) et le terme d'ordre $\kappa_i = 1/2$ de $\vec{v}^{(1)}$ doit être nul (comme le terme proportionnel à $r^{1/2}$ de $\vec{u}^{(1/2)}$);
- $\vec{u}^{(1)}$ pour lequel $\gamma_e = 1$ se raccorde avec $\vec{v}^{(1/2)}$ et $\vec{v}^{(1)}$, donc en omettant le mouvement rigidifiant correspondant au terme ($\kappa_i = 0$) de $\vec{v}^{(1)}$, avec le terme d'ordre $\kappa_i = -1/2$ de $\vec{v}^{(1/2)}$;
- $\vec{v}^{(3/2)}$ pour lequel $\gamma_i = 3/2$ se raccorde avec $\vec{u}^{(0)}$, $\vec{u}^{(1/2)} = 0$ et $\vec{u}^{(1)}$ donc avec les termes d'ordre $\kappa_e = 3/2$ de $\vec{u}^{(0)}$, ($\kappa_e = 1$ de $\vec{u}^{(1/2)}$) et $\kappa_e = 1/2$ de $\vec{u}^{(1)}$.

Si le raccordement se fait de façon *cohérente*, le choix des "fonctions de jauge" (ici, δ^{γ_i} et δ^{γ_e} avec γ_i et γ_e exposants entiers ou semi-entiers) et de la forme du comportement quand $\rho \rightarrow +\infty$ et $r \rightarrow 0$ de chacun des termes des développements intérieur et extérieur respectivement (ici en puissances entières et semi-entières de ρ et de r) est considéré comme correct à l'ordre retenu (cf. par exemple le livre de Sanchez-Hubert et Sanchez-Palencia (1992), pp. 1 à 17).

2.3 Premier terme du développement intérieur

2.3.1 Ecriture du problème

Le problème à l'ordre 1/2 est constitué des équations (2.10) écrites pour $\gamma_i = 1/2$ en tenant compte du fait que $\vec{v}^{(\gamma_i-1)} = \vec{v}^{(-1/2)} = 0$ et de la condition de raccord (2.15). Avec les notations

²Ce qui revient à supposer qu'à un ordre δ^γ donné du développement intérieur (resp. extérieur), les termes suivants du développement extérieur (resp. intérieur) dans le cheminement en "accordéon", sont négligeables pour $\delta \rightarrow 0$ dans la zone de raccord.

(2.11), le déplacement $\vec{v}^{(1/2)}$ est donc solution du problème suivant :

$$\begin{cases} \hat{\tau}_{i\alpha;\alpha}(\vec{v}^{(1/2)}(\mathbf{y})) = 0 \text{ dans } \Omega^{int} \\ \hat{\tau}_{ij}(\vec{v}^{(1/2)}(\mathbf{y})) \cdot n_j(\mathbf{y}) = 0 \text{ sur } \mathcal{F}^{int} \cup \mathcal{E}^{int} \\ \vec{v}^{(1/2)}(\mathbf{y}) = k_p \vec{U}_p^{(1/2)}(y_1, y_2) + O(\rho^{-1/2}) \text{ pour } \rho = \sqrt{y_1^2 + y_2^2} \rightarrow +\infty \end{cases} \quad (2.16)$$

Ce problème ne comporte que des dérivées par rapport à y_1 et y_2 , il constitue donc un problème bidimensionnel dans chaque plan $y_3 = Cste$, portant sur une fissure semi-infinie munie d'une extension de longueur $\eta(y_3)$ (cf. Fig. 2.2).

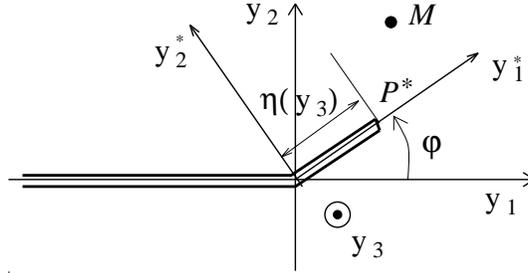


Figure 2.2: Plan $y_3 = Cste$

2.3.2 Propriété d'homogénéité

La solution de ce problème ne dépend de y_3 qu'à travers la longueur de l'extension $\eta(y_3)$. Introduisons temporairement cette dépendance dans la notation en écrivant

$$\vec{v}^{(1/2)}(\mathbf{y}) \equiv \vec{v}^{(1/2)}(y_1, y_2; \eta(y_3)),$$

et montrons que $\vec{v}^{(1/2)}$ est positivement homogène de degré 1/2 par rapport à ces arguments. Soit λ une constante positive. Le déplacement $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \vec{v}^{(1/2)}(\lambda y_1, \lambda y_2; \lambda \eta(y_3))$ vérifie les mêmes équations que $\vec{v}^{(1/2)}(y_1, y_2; \eta(y_3))$ (en particulier la même condition à l'infini car $\vec{U}_p^{(1/2)}(y_1, y_2)$ est homogène de degré 1/2). Par conséquent :

$$\vec{v}^{(1/2)}(\lambda y_1, \lambda y_2; \lambda \eta(y_3)) = \sqrt{\lambda} \vec{v}^{(1/2)}(y_1, y_2; \eta(y_3)), \text{ pour } \lambda > 0 \quad (2.17)$$

On pourra donc résoudre le problème pour une extension \mathcal{E}^1 de longueur unité, grce à la relation :

$$\vec{v}^{(1/2)}(y_1, y_2; \eta(y_3)) = \sqrt{\eta(y_3)} \vec{v}^{(1/2)}\left(\frac{y_1}{\eta(y_3)}, \frac{y_2}{\eta(y_3)}; 1\right) \quad (2.18)$$

2.3.3 Unicité et comportement asymptotique

Pour les conditions de raccord du problème extérieur à l'ordre 1, nous aurons besoin de connaître le deuxième terme du comportement en $+\infty$ de $\bar{v}^{(1/2)}$. Décomposons, pour cela, $\bar{v}^{(1/2)}$ sous la forme :

$$\bar{v}^{(1/2)}(\mathbf{y}) = k_p \bar{U}_p^{(1/2)}(y_1, y_2) + k_p \overrightarrow{\bar{v}_p^{(1/2)}}(\mathbf{y}) = k_p \bar{v}_p^{(1/2)}(\mathbf{y}). \quad (2.19)$$

Alors $\bar{U}_p^{(1/2)}(y_1, y_2)$, $p^{ième}$ déplacement fondamental homogène de degré 1/2, vérifiant les équations d'équilibre et les conditions aux limites sur la fissure \mathcal{F}^{int} initiale du problème (2.16), $\overrightarrow{\bar{v}_p^{(1/2)}}(\mathbf{y})$, $p = I, II, III$ est solution du problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\tau}_{i\alpha;\alpha}(\overrightarrow{\bar{v}_p^{(1/2)}}(\mathbf{y})) = 0 \text{ dans } \Omega^{int} \\ \hat{\tau}_{ij}(\overrightarrow{\bar{v}_p^{(1/2)}}(\mathbf{y})).n_j(\mathbf{y}) = 0 \text{ sur } \mathcal{F}^{int} \\ \hat{\tau}_{ij}(\overrightarrow{\bar{v}_p^{(1/2)}}(\mathbf{y})).n_j(\mathbf{y}) = -\hat{\tau}_{ij}\left(\bar{U}_p^{(1/2)}(y_1, y_2)\right).n_j(\mathbf{y}) \text{ sur } \mathcal{E}^{int} \\ \overrightarrow{\bar{v}_p^{(1/2)}}(\mathbf{y}) = O(\rho^{-1/2}) \text{ pour } \rho = \sqrt{y_1^2 + y_2^2} \rightarrow +\infty \end{array} \right. \quad (2.20)$$

A l'infini, "tout se passe comme si il n'y avait pas d'extension". Les $\bar{U}_{q;1}^{(1/2)}$, $q = I, II, III$ étant solutions du problème précédent en l'absence d'extension (car $\bar{U}_q^{(1/2)}$ vérifiant les équations d'équilibre et la condition de traction nulle sur les lèvres de la fissure, sa dérivée par rapport à x_1 les vérifie aussi et se comporte comme $\rho^{-1/2}$ pour $\rho \rightarrow +\infty$), $\overrightarrow{\bar{v}_p^{(1/2)}}(\mathbf{y})$ se comporte en $+\infty$ comme une combinaison linéaire de ces déplacements. En particulier pour $\eta(y_3) = 1$, le seul paramètre géométrique du problème étant l'angle φ , on a :

$$\overrightarrow{\bar{v}_p^{(1/2)}}(y_1, y_2; \eta(y_3) = 1) = A_{qp}(\varphi) \cdot \bar{U}_{q;1}^{(1/2)}(y_1, y_2) + O\left(\frac{1}{\rho}\right)$$

et d'après les conditions d'homogénéité (2.18) :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\bar{v}_p^{(1/2)}}(y_1, y_2; \eta(y_3)) &\equiv \sqrt{\eta(y_3)} \overrightarrow{\bar{v}_p^{(1/2)}}\left(\frac{y_1}{\eta(y_3)}, \frac{y_2}{\eta(y_3)}; 1\right) \\ &= \sqrt{\eta(y_3)} A_{qp}(\varphi) \cdot \bar{U}_{q;1}^{(1/2)}(y_1/\eta(y_3), y_2/\eta(y_3)) + O\left(\frac{1}{\rho}\right) \\ &= \eta(y_3) A_{qp}(\varphi) \cdot \bar{U}_{q;1}^{(1/2)}(y_1, y_2) + O\left(\frac{1}{\rho}\right) \end{aligned} \quad (2.21)$$

pour $\rho \rightarrow +\infty$.

Il est à noter également que l'énergie élastique du déplacement $\overrightarrow{\bar{v}_p^{(1/2)}}(\mathbf{y})$ étant finie (cf. (2.20₄)), $\overrightarrow{\bar{v}_p^{(1/2)}}$ et par suite la solution du problème intérieur à l'ordre 1/2 sont uniques. De plus, les tractions exercées sur l'extension étant régulières à la pointe P^* de celle-ci, $\overrightarrow{\bar{v}_p^{(1/2)}}(\mathbf{y})$ admet le comportement habituel (1.2) près du front et donc pour chaque $p = I, II, III$:

$$\exists F_{qp}(\varphi, \eta(y_3)), \quad q = I, II, III \text{ tels que } \overrightarrow{\bar{v}_p^{(1/2)}}(\mathbf{y}) \sim F_{qp}(\varphi, \eta(y_3)) \bar{U}_q^*(1/2)(y_1^*, y_2^*)$$

pour $\rho^* = \sqrt{(y_1^*)^2 + (y_2^*)^2} \rightarrow 0$, où (y_1^*, y_2^*, y_3) désignent les coordonnées dans le repère $(P^*, \bar{e}_1^*, \bar{e}_2^*, \bar{e}_3)$ adapté au front de l'extension (cf. Fig. 2.2) et $\bar{U}_q^{*(1/2)} \equiv U_{q_i}^{(1/2)} \bar{e}_i^*$ (mêmes notations qu'au paragraphe 1.3). D'après (2.19), $U_{q_i}^{(1/2)}$ engendrant des contraintes régulières pour $\rho^* \rightarrow 0$, on a :

$$\overrightarrow{v_p^{(1/2)}}(\mathbf{y}) \sim \overrightarrow{\tilde{v}_p^{(1/2)}}(\mathbf{y}) \sim F_{qp}(\varphi) \bar{U}_q^{*(1/2)}(y_1^*, y_2^*) \text{ pour } \rho^* \rightarrow 0 \quad (2.22)$$

Il apparaît ici que les fonctions $F_{qp}(\varphi)$ ne dépendent en réalité que de φ et pas de $\eta(y_3)$ du fait de l'homogénéité de degré 1/2 des fonctions $\overrightarrow{v_p^{(1/2)}}$ et $U_{q_i}^{(1/2)}$.

2.4 Problème intérieur à l'ordre 1

D'après les condition de raccord du §2.2.3, on a :

$$\vec{v}^{(1)}(\mathbf{y}) = T_p \cdot \bar{U}_p^{(1)}(y_1, y_2) + O(\rho^{-1/2}) \text{ pour } y \rightarrow +\infty \quad (2.23)$$

Le déplacement $\vec{v}^{(1)}(\mathbf{y})$ est donc solution du système suivant (cf. (2.10) et (2.11)) :

$$\begin{cases} \hat{\tau}_{i\alpha;\alpha}(\vec{v}^{(1)}(\mathbf{y})) = 0 \text{ dans } \Omega^{int} \\ \hat{\tau}_{ij}(\vec{v}^{(1)}(\mathbf{y})) \cdot n_j(\mathbf{y}) = 0 \text{ sur } \mathcal{F}^{int} \cup \mathcal{E}^{int} \\ \vec{v}^{(1)}(\mathbf{y}) = T_p \bar{U}_p^{(1)}(y_1, y_2) + O(\rho^{-1/2}) \text{ pour } \rho = \sqrt{y_1^2 + y_2^2} \rightarrow +\infty \end{cases} \quad (2.24)$$

Par un raisonnement analogue à celui dont on a déduit la condition d'homogénéité de $\vec{v}^{(1/2)}$, on obtient celle de $\vec{v}^{(1)}$ qui s'écrit :

$$\vec{v}^{(1)}(\lambda y_1, \lambda y_2; \lambda \eta(x_3)) = \lambda \vec{v}^{(1)}(y_1, y_2; \eta(x_3)) \text{ pour } \lambda > 0. \quad (2.25)$$

De plus, comme pour $\vec{v}^{(1/2)}$, on peut établir l'existence de constantes $G_{pq}(\varphi)$ (indépendantes de $\eta(y_3)$) telles que :

$$\overrightarrow{v}^{(1)}(\mathbf{y}) \sim \sqrt{\eta(y_3)} T_p G_{qp}(\varphi) \bar{U}_q^{*(1/2)}(y_1^*, y_2^*) \text{ pour } \rho^* \rightarrow 0 \quad (2.26)$$

2.5 Problème extérieur à l'ordre 1

Notre objectif est de déterminer les champs "intérieurs" afin d'en extraire les F.I.C. Par conséquent, il faut déterminer le comportement de $\vec{u}^{(1)}(\mathbf{x})$ pour $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \rightarrow 0$ à un ordre suffisant pour pouvoir établir les conditions de raccord. Or à δ fixé, $\vec{u}(\mathbf{x}, \delta)$ a le comportement (1.2) habituel pour $r \rightarrow 0$ dans le repère adapté au nouveau front. De plus, d'après (2.4) $\vec{u}^{(1)}(\mathbf{x}) = \left. \frac{\partial \vec{u}(\mathbf{x}, \delta)}{\partial \delta} \right|_{\delta=0^+}$. La première idée est donc de dériver le comportement pour $r \rightarrow 0$ de $\vec{u}(\mathbf{x}, \delta)$ par rapport à δ et de prendre sa valeur en $\delta = 0^+$. Mais cette opération n'est pas

légitime si $\varphi \neq 0$ car, en raison de l'existence du coin, le développement de $\vec{u}(\mathbf{x}, \delta)$ n'est alors valable que pour $r < \delta = 0$.

Néanmoins, nous allons voir que $\vec{u}^{(1)}$, deuxième terme du développement de \vec{u} dans le cas où l'extension a une longueur $\delta(x_3) = \delta \cdot \eta(x_3)$ et présente un angle de branchement uniforme φ , vérifie les mêmes équations que le deuxième terme du développement de la solution \vec{u}' en déplacement dans le cas où l'extension a une certaine longueur $\delta \cdot f(x_3)$ et présente un angle de branchement *nul* (ondulations coplanaires du front). Pour ce dernier problème, nous pourrions déterminer le comportement pour $r \rightarrow 0$ de $\vec{u}'^{(1)}(\mathbf{x}) = \left. \frac{\partial \vec{u}'(\mathbf{x}, \delta)}{\partial \delta} \right|_{\delta=0^+}$ par dérivation du comportement de $\vec{u}'(\mathbf{x}, \delta)$ pour $r \rightarrow 0$, et en déduire du fait de l'analogie, le comportement de $\vec{u}^{(1)}$ pour $r \rightarrow 0$.

2.5.1 Problème tridimensionnel vérifié par $\vec{u}^{(1)}$

D'après les conditions de raccord du §2.2.3 et (2.21), on doit avoir, pour $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \rightarrow 0$:

$$\vec{u}^{(1)}(x_1, x_2, x_3) = \eta(x_3) k_p A_{qp}(\varphi) \cdot \vec{U}_{q,1}^{(1/2)}(x_1, x_2) + O(\sqrt{r}), \quad (2.27)$$

équation qui vient compléter le système (2.5) pour $\gamma_e = 1$. On a donc :

$$\vec{u}^{(1)}(\mathbf{x}) = \vec{U}_q(\mathbf{x}, \{k_p A_{qp}(\varphi) \eta(x_3)\}) \quad (2.28)$$

où $\vec{U}_q(\mathbf{x}, \{f(x_3)\})$, $f(x_3)$ fonction arbitraire de x_3 , est solution du problème suivant :

$$\begin{cases} \sigma_{ij,j}(\vec{U}_q(\mathbf{x}, \{f\})) = 0 \text{ dans } \Omega \\ \vec{\sigma}(\vec{U}_q(\mathbf{x}, \{f\})) \cdot \vec{n}(\mathbf{x}) = \vec{0} \text{ sur } \delta\Omega_T, \quad \vec{U}_q(\mathbf{x}, \{f\}) = \vec{0} \text{ sur } \delta\Omega_u \\ \vec{\sigma}(\vec{U}_q(\mathbf{x}, \{f\})) \cdot \vec{n}(\mathbf{x}) = \vec{0} \text{ sur } \mathcal{F} \\ \vec{U}_q(\mathbf{x}, \{f\}) \sim f(x_3) \vec{U}_{q,1}^{(1/2)}(\mathbf{x}) \text{ pour } r \rightarrow 0 \end{cases} \quad (2.29)$$

Le problème est cette fois-ci tridimensionnel. Mouchrif a étudié le cas des petites ondulations coplanaires du front de fissure et a montré que la dérivée du déplacement par rapport à cette perturbation vérifie les mêmes équations que \vec{U}_q . Nous allons reprendre ici son étude par souci de complétude en changeant toutefois un peu le formalisme utilisé.

2.5.2 Etude d'un problème analogue : ondulations coplanaires du front de fissure

Plaçons nous dans le cas où l'extension de longueur $\varepsilon \cdot f(x_3)$ (ε étant un petit paramètre) présente un angle de branchement nul. Notons $\vec{u}'(\mathbf{x}, \varepsilon)$ le déplacement en \mathbf{x} de ce nouveau problème et $\vec{u}'^{(1)}(\mathbf{x})$ sa dérivée par rapport à ε en $\varepsilon = 0$. Comme $\varphi = 0$, on pourra ici dériver le comportement de $\vec{u}'(\mathbf{x}, \varepsilon)$ pour $r \rightarrow 0$ et prendre sa valeur en $\varepsilon = 0$ afin d'obtenir le comportement

pour $r \rightarrow 0$ de $\vec{u}'^{(1)}(\mathbf{x})$. Grâce au lien entre $\vec{u}'^{(1)}(\mathbf{x})$ et les \vec{U}_q , on en déduira le comportement pour $r \rightarrow 0$ des \vec{U}_q .

Comportement de $\vec{u}'(\mathbf{x}, \varepsilon)$ pour $r \rightarrow 0$

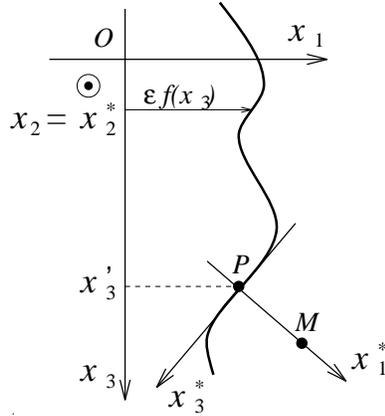


Figure 2.3: Ondulations coplanaires du front

Le déplacement $\vec{u}'(\mathbf{x}, \varepsilon)$ en $M(x_1, x_2, x_3)$ a le comportement (1.2) habituel dans le repère $(P, \vec{e}_1^*, \vec{e}_2^*, \vec{e}_3^*)$ adapté au nouveau front pour $\|\vec{PM}\| \rightarrow 0$. On a donc (cf. Fig. 2.3) :

$$\vec{u}'(\mathbf{x}, \varepsilon) = k_p(x'_3, \varepsilon) \cdot U_{p_i}^{(1/2)}(x_1^*, x_2) \vec{e}_i^* + T_p(x'_3, \varepsilon) \cdot U_{p_i}^{(1)}(x_1^*, x_2) \vec{e}_i^* + b_p(x'_3, \varepsilon) \cdot U_{p_i}^{(3/2)}(x_1^*, x_2) \vec{e}_i^* + O((r^*)^2) \quad (2.30)$$

où $(x_1^*, x_2, x_3^* = 0)$ désignent les coordonnées de M dans le repère $(P, \vec{e}_1^*, \vec{e}_2^*, \vec{e}_3^*)$, x'_3 la coordonnée selon \vec{e}_3 de P , $U_{p_i}^\alpha$ la $i^{\text{ème}}$ composante du $p^{\text{ème}}$ déplacement fondamental homogène de degré α .

Or, les correspondances entre ancien et nouveau repères sont les suivantes :

$$\begin{cases} \vec{e}_1^* = \vec{e}_1 - \varepsilon f'(x'_3) \vec{e}_3; & \vec{e}_2^* = \vec{e}_2; & \vec{e}_3^* = \varepsilon f'(x'_3) \vec{e}_1 + \vec{e}_3 \\ \begin{cases} x_1^* = \vec{PM} \cdot \vec{e}_1^* & = (x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3 - \varepsilon f(x'_3) \vec{e}_1 - x'_3 \vec{e}_3) \cdot \vec{e}_1^* \\ & = x_1 - \varepsilon f(x'_3) + \varepsilon f'(x'_3) \cdot (x'_3 - x_3) \\ x_2^* & = x_2 \end{cases} \end{cases} \quad (2.31)$$

et $k_p(x'_3, \varepsilon) = k_p^{(1)}(x'_3) + \varepsilon k_p^{(2)}(x'_3) + O(\varepsilon^{3/2})$; le terme en $\varepsilon^{1/2}$ étant nul à cause de la propriété $\mathbf{G}(0) = \mathbf{0}$ (cf. (1.4)). En dérivant l'expression (2.30) par rapport à ε en négligeant les termes correspondant à un mouvement rigidifiant, puis en appliquant l'expression obtenue à $\varepsilon = 0$ (alors $x'_3 = x_3$), on obtient pour $r \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} \vec{u}'^{(1)}(\mathbf{x}) &= \left. \frac{\partial \vec{u}'(\mathbf{x}, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \\ &= -f(x_3) k_p \vec{U}_{p,1}^{(1/2)}(x_1, x_2) + k_p^{(1)}(x_3) \vec{U}_p^{(1/2)}(x_1, x_2) \\ &\quad + k_p f'(x_3) \vec{\Omega}_{13} \cdot \vec{U}_p^{(1/2)}(x_1, x_2) - f(x_3) b_p \vec{U}_{p,1}^{(3/2)}(x_1, x_2) + O(r) \end{aligned} \quad (2.32)$$

où $\vec{U}_p^{(\alpha)}(x_1, x_2) = U_{p_i}^{(\alpha)}(x_1, x_2)\vec{e}_i$ et

$$\vec{\Omega}_{13} = \vec{e}_1 \otimes \vec{e}_3 - \vec{e}_3 \otimes \vec{e}_1. \quad (2.33)$$

Le terme où apparaît $\vec{\Omega}_{13}$ provient de la dérivation des vecteurs de base \vec{e}_i^* par rapport à ε .

De plus, en appliquant (1.4) à $\delta = \varepsilon$, $\varphi = 0$ et à $\eta(x_3) = f(x_3)$ on a :

$$\begin{aligned} k_p^{(1)}(x_3) &= \left[\frac{\partial k_p(x_3, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right]^{f(x'_3) \equiv f(x_3)} f(x_3) + N_{pq}(0) \cdot k_q f'(x_3) \\ &+ VP \int_{-\infty}^{+\infty} Z_{pq}(\Omega, x_3, x'_3) [f(x'_3) - f(x_3)] k_q dx'_3 \end{aligned} \quad (2.34)$$

car, en l'absence de terme en $\varepsilon^{1/2}$ dans le développement de $k_p(x_3, \varepsilon)$, on a $\frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 k_p(x_3, \varepsilon)}{\partial (\sqrt{\varepsilon})^2} \right]^{f(x'_3) \equiv f(x_3)}$
 $\equiv \left[\frac{\partial k_p(x_3, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right]^{f(x'_3) \equiv f(x_3)}$. Ce terme représente la dérivée de $k_p(x_3, \varepsilon)$ par rapport à la longueur de la fissure pour une extension coplanaire et de longueur uniforme. Pour une telle extension le problème, initialement bidimensionnel par hypothèse, le demeure ultérieurement; les résultats de Leblond (1989) (voir aussi Leguillon (1993)) sont donc applicables et donnent :

$$\left[\frac{\partial k_p(x_3, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right]^{f(x'_3) \equiv f(x_3)} = I_{pq}(\varphi = 0) b_q + \bar{k}_{pq} k_q \quad (2.35)$$

où $I_{pq}(\varphi)$ est un opérateur universel et les coefficients non-universels \bar{k}_{pq} dépendent de la géométrie du problème et en particulier de la partition du bord $\partial\Omega = \partial\Omega_u \cup \partial\Omega_T$, mais pas du chargement.

En insérant les relations (2.34) et (2.35) dans (2.32) et en éliminant les termes en b_p qui se compensent nécessairement car d'après la théorie de Bueckner-Rice (cf. Partie II), $\vec{u}'^{(1)}$ ne dépend du chargement qu'à travers les F.I.C. initiaux, on obtient pour $r \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} \vec{u}'^{(1)}(\mathbf{x}) &= -f(x_3) k_q \vec{U}_{q,1}^{(1/2)}(x_1, x_2) + k_q \mathcal{K}_{pq}(x_3, \{f\}) \cdot \vec{U}_p^{(1/2)}(x_1, x_2) \\ &+ f'(x_3) k_q \vec{\Omega}_{13} \cdot \vec{U}_q^{(1/2)}(x_1, x_2) + O(r) \end{aligned} \quad (2.36)$$

où :

$$\mathcal{K}_{pq}(x_3, \{f\}) \equiv \bar{k}_{pq} f(x_3) + N_{pq}(0) f'(x_3) + VP \int_{-\infty}^{+\infty} Z_{pq}(\Omega, x_3, x'_3) [f(x'_3) - f(x_3)] dx'_3 \quad (2.37)$$

En se limitant au terme principal de (2.36) on a :

$$\vec{u}'^{(1)}(\mathbf{x}) \sim -f(x_3) k_q \vec{U}_{q,1}^{(1/2)}(x_1, x_2) \quad (2.38)$$

On a donc par comparaison avec (2.29) ($\vec{U}_{q,1}^{(1/2)}$ vérifiant les équations d'équilibre et les conditions aux limites car $\vec{U}_q^{(1/2)}$ les vérifie) :

$$\vec{u}'^{(1)}(\mathbf{x}) = -k_q \vec{\mathcal{U}}_q(\mathbf{x}, \{f\}) \quad (2.39)$$

On déduit alors de (2.36) le comportement de $\vec{\mathcal{U}}_q(\mathbf{x}, \{f\})$ pour $r \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{U}}_q(\mathbf{x}, \{f\}) &= f(x_3) \vec{U}_{q,1}^{(1/2)}(x_1, x_2) - \mathcal{K}_{pq}(x_3, \{f\}) \cdot \vec{U}_p^{(1/2)}(x_1, x_2) \\ &\quad - f'(x_3) \vec{\Omega}_{13} \cdot \vec{U}_q^{(1/2)}(x_1, x_2) + O(r) \end{aligned} \quad (2.40)$$

2.5.3 Retour au problème initial

D'après (2.28) et (2.40), on a donc pour $r \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} \vec{u}^{(1)}(\mathbf{x}) &= k_p A_{qp}(\varphi) \eta(x_3) \vec{U}_{q,1}^{(1/2)}(x_1, x_2) - k_s A_{qs}(\varphi) \mathcal{K}_{pq}(x_3, \{\eta(x_3)\}) \cdot \vec{U}_p^{(1/2)}(x_1, x_2) \\ &\quad - k_p A_{qp}(\varphi) \eta'(x_3) \vec{\Omega}_{13} \cdot \vec{U}_q^{(1/2)}(x_1, x_2) + O(r) \end{aligned} \quad (2.41)$$

Le passage au cas coplanaire $\varphi = 0$ pour lequel on a pu calculer la dérivée du déplacement par rapport à la longueur de l'extension pour une longueur égale à 0, nous a donc permis de pallier la difficulté mentionnée en début de section et de déterminer le comportement quand $r \rightarrow 0$ du second terme du développement extérieur.

2.6 Problème intérieur à l'ordre 3/2

2.6.1 Ecriture du problème

Les conditions de raccord impliquent (cf. §2.2.3), en tenant compte des relations (2.14) et (2.41) donnant le comportement de $\vec{u}^{(0)}$ et de $\vec{u}^{(1)}$ pour $r \rightarrow 0$, que $\vec{v}^{(3/2)}$ se comporte de la façon suivante quand $\rho \rightarrow +\infty$:

$$\begin{aligned} \vec{v}^{(3/2)}(\mathbf{y}) &= b_p \vec{U}_p^{(3/2)}(y_1, y_2) - k_s A_{qs}(\varphi) \mathcal{K}_{pq}(y_3, \{\eta(y_3)\}) \vec{U}_p^{(1/2)}(y_1, y_2) \\ &\quad - k_p A_{qp}(\varphi) \cdot \eta'(y_3) \cdot \vec{\Omega}_{13} \cdot \vec{U}_q^{(1/2)}(y_1, y_2) + o(\sqrt{\rho}) \end{aligned} \quad (2.42)$$

Le déplacement $\vec{v}^{(3/2)}(\mathbf{y})$ est donc solution du système suivant (cf. (2.10) et (2.11)) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} \hat{\tau}_{\beta\alpha;\alpha}(\vec{v}^{(3/2)}(\mathbf{y})) = -(\lambda + \mu) \vec{v}_{3;3\beta}^{(1/2)}(\mathbf{y}) \\ \hat{\tau}_{3\alpha;\alpha}(\vec{v}^{(3/2)}(\mathbf{y})) = -(\lambda + \mu) \vec{v}_{\alpha;3\alpha}^{(1/2)}(\mathbf{y}) \end{array} \right\} \text{ dans } \Omega^{int} \\ \left. \begin{array}{l} \hat{\tau}_{\alpha\beta}(\vec{v}^{(3/2)}(\mathbf{y})) \cdot n_\beta(\mathbf{y}) = -\lambda \vec{v}_{3;3}^{(1/2)}(\mathbf{y}) \cdot n_\alpha(\mathbf{y}) \\ \hat{\tau}_{\alpha 3}(\vec{v}^{(3/2)}(\mathbf{y})) \cdot n_\alpha(\mathbf{y}) = -\mu \vec{v}_{\alpha;3}^{(1/2)}(\mathbf{y}) \cdot n_\alpha(\mathbf{y}) \end{array} \right\} \text{ sur } \mathcal{F}^{int} \cup \mathcal{E}^{int} \\ \vec{v}^{(3/2)}(\mathbf{y}) = b_p \vec{U}_p^{(3/2)}(y_1, y_2) - k_s A_{qs}(\varphi) \mathcal{K}_{pq}(y_3, \{\eta(y_3)\}) \vec{U}_p^{(1/2)}(y_1, y_2) \\ \quad - k_p A_{qp}(\varphi) \cdot \eta'(y_3) \cdot \vec{\Omega}_{13} \cdot \vec{U}_q^{(1/2)}(y_1, y_2) + o(\sqrt{\rho}) \text{ pour } \rho \rightarrow +\infty \end{array} \right. \quad (2.43)$$

Jusqu'à présent nous avons fait l'hypothèse que les comportements quand $r \rightarrow 0$ et $\rho \rightarrow +\infty$ se décomposaient en puissances entières et semi-entières de r et ρ , hypothèse qui était nécessaire à l'établissement des conditions de raccord et qui sera vérifiée lors de la résolution effective des

divers problèmes dans le chapitre suivant. Nous verrons par la suite que cette hypothèse n'est plus valide ici à cause de la présence de forces de volume engendrant des contraintes d'ordre $O(\rho^{-1})$ et donc des déplacements d'ordre $O(\ln \rho)$ en $+\infty$. C'est pourquoi nous avons écrit le terme complémentaire dans (2.43₅) sous la forme $o(\sqrt{\rho})$ et non $O(\rho^{-1/2})$ comme dans (2.16) et (2.24).

2.6.2 Décomposition en problèmes "simples"

Posons :

$$\vec{v}^{(3/2)}(\mathbf{y}) = k_p \eta'(y_3) \cdot \vec{v}_p^{(3/2)}(\mathbf{y}) - k_s A_{qs}(\varphi) \mathcal{K}_{pq}(y_3, \{\eta\}) \vec{v}_p^{(3/2)}(\mathbf{y}) + b_p \vec{v}_p^{(3/2)}(\mathbf{y}) \quad (2.44)$$

alors $\vec{v}_p^{(3/2)}(\mathbf{y})$ vérifie le système :

$$\begin{cases} \hat{\tau}_{i\alpha;\alpha}(\vec{v}_p^{(3/2)}(\mathbf{y})) = 0 \text{ dans } \Omega^{int} \\ \hat{\tau}_{ij}(\vec{v}_p^{(3/2)}(\mathbf{y})) \cdot n_j(\mathbf{y}) = 0 \text{ sur } \mathcal{F}^{int} \cup \mathcal{E}^{int} \\ \vec{v}_p^{(3/2)}(\mathbf{y}) = \vec{U}_p^{(1/2)}(y_1, y_2) + O(\rho^{-1/2}) \text{ pour } \rho = \sqrt{y_1^2 + y_2^2} \rightarrow +\infty, \end{cases} \quad (2.45)$$

système qui est identique au système vérifié par $\vec{v}_p^{(1/2)}(\mathbf{y})$. D'où :

$$\vec{v}_p^{(3/2)}(\mathbf{y}) = \vec{v}_p^{(1/2)}(\mathbf{y}) \quad (2.46)$$

On a ici pu remplacer $o(\sqrt{\rho})$ par $O(\rho^{-1/2})$ car les forces de volume sont nulles.

De même, le déplacement $\vec{v}_p^{(3/2)}$ vérifie :

$$\begin{cases} \hat{\tau}_{i\alpha;\alpha}(\vec{v}_p^{(3/2)}(\mathbf{y})) = 0 \text{ dans } \Omega^{int} \\ \hat{\tau}_{ij}(\vec{v}_p^{(3/2)}(\mathbf{y})) \cdot n_j(\mathbf{y}) = 0 \text{ sur } \mathcal{F}^{int} \cup \mathcal{E}^{int} \\ \vec{v}_p^{(3/2)}(\mathbf{y}) = \vec{U}_p^{(3/2)}(y_1, y_2) + O(\rho^{-1/2}) \text{ pour } \rho = \sqrt{y_1^2 + y_2^2} \rightarrow +\infty \end{cases} \quad (2.47)$$

Et enfin, $\vec{v}_p^{(3/2)}$ est solution de :

$$\begin{cases} \left. \begin{aligned} \hat{\tau}_{\beta\alpha;\alpha}(\vec{v}_p^{(3/2)}(\mathbf{y})) &= -(\lambda + \mu) \frac{\partial \vec{v}_{p3;\beta}^{(1/2)}}{\partial \eta(y_3)}(\mathbf{y}) \\ \hat{\tau}_{3\alpha;\alpha}(\vec{v}_p^{(3/2)}(\mathbf{y})) &= -(\lambda + \mu) \frac{\partial \vec{v}_{p\alpha;\alpha}^{(1/2)}}{\partial \eta(y_3)}(\mathbf{y}) \end{aligned} \right\} \text{ dans } \Omega^{int} \\ \left. \begin{aligned} \hat{\tau}_{\alpha\beta}(\vec{v}_p^{(3/2)}(\mathbf{y})) \cdot n_\beta(\mathbf{y}) &= -\lambda \frac{\partial \vec{v}_{p3}^{(1/2)}}{\partial \eta(y_3)}(\mathbf{y}) \cdot n_\alpha(\mathbf{y}) \\ \hat{\tau}_{\alpha 3}(\vec{v}_p^{(3/2)}(\mathbf{y})) \cdot n_\alpha(\mathbf{y}) &= -\mu \frac{\partial \vec{v}_{p\alpha}^{(1/2)}}{\partial \eta(y_3)}(\mathbf{y}) \cdot n_\alpha(\mathbf{y}) \end{aligned} \right\} \text{ sur } \mathcal{F}^{int} \cup \mathcal{E}^{int} \\ \vec{v}_p^{(3/2)}(\mathbf{y}) &= -A_{qp}(\varphi) \cdot \vec{\Omega}_{13} \cdot \vec{U}_q^{(1/2)}(\mathbf{y}) + o(\sqrt{\rho}) \text{ pour } \rho \rightarrow +\infty \end{cases} \quad (2.48)$$

$$\text{car } \frac{\partial \vec{v}_p^{(1/2)}}{\partial y_3} = \eta'(y_3) \frac{\partial \vec{v}_p^{(1/2)}}{\partial \eta(y_3)}.$$

2.6.3 Propriétés d'homogénéité

Les champs de déplacements $\vec{v}_p^{(3/2)}$, $\vec{v}_p'^{(3/2)}$, $\vec{v}_p''^{(3/2)}$ ne dépendent de y_3 qu'à travers la longueur de l'extension $\eta(y_3)$. On montre comme pour les champs intérieurs d'ordre 1/2 et 1, que $\vec{v}_p^{(3/2)}$, $\vec{v}_p'^{(3/2)}$ sont homogènes de degré 1/2 et que $\vec{v}_p''^{(3/2)}$ est homogène de degré 3/2 par rapport au triplet d'arguments $(y_1, y_2; \eta(y_3))$.

2.6.4 Unicité et comportements asymptotiques

Ecrivons :

$$\vec{v}_p''^{(3/2)}(\mathbf{y}) = \vec{U}_p^{(3/2)}(y_1, y_2) + \vec{v}_p''^{(3/2)}(\mathbf{y})$$

$\vec{v}_p''^{(3/2)}$ se comportant alors comme $O(\rho^{-1/2})$ en $+\infty$, la solution en $\vec{v}_p''^{(3/2)}$, et donc en $\vec{v}_p'^{(3/2)}$ est unique. Les tractions engendrées par $\vec{U}_p^{(3/2)}(y_1, y_2)$ étant régulières en P^* (cf. Fig. 2.2), $\vec{v}_p''^{(3/2)}$ et par suite $\vec{v}_p'^{(3/2)}$ ont le comportement classique en pointe de fissure; soit en notant $I_{qp}(\varphi, \eta(y_3))$ les F.I.C. associés et d'après la condition d'homogénéité sur $\vec{v}_p''^{(3/2)}$:

$$\begin{aligned} \vec{v}_p''^{(3/2)}(\mathbf{y}) &\sim I_{qp}(\varphi, \eta(y_3)) \cdot \vec{U}_q^{*(1/2)}(y_1^*, y_2^*) \\ &\sim \eta(y_3) I_{qp}(\varphi) \cdot \vec{U}_q^{*(1/2)}(y_1^*, y_2^*) \end{aligned} \quad (2.49)$$

pour $\rho^* \rightarrow 0$. Nous verrons par la suite que l'opérateur $\mathbf{I}(\varphi)$ est bien le même que celui que l'on a introduit en (2.35).

Par ailleurs, posons :

$$\vec{v}_p^{(3/2)}(\mathbf{y}) = -A_{qp}(\varphi) \vec{\Omega}_{13} \cdot \vec{U}_q^{(1/2)}(y_1, y_2) + \vec{v}_p^{(3/2)}(\mathbf{y});$$

on peut alors montrer que $\vec{v}_p^{(3/2)}(\mathbf{y})$ est solution d'un problème avec des forces volumiques d'ordre $O(\rho^{-2})$ pour $\rho \rightarrow +\infty$ (ceci vient du fait que $\vec{v}_p^{(1/2)} - \eta(y_3) A_{qp} \vec{U}_{q;1}^{(1/2)} = O(\rho^{-1})$ d'après (2.21)) qui engendrent des contraintes $O(\rho^{-1})$ et donc des déplacements $O(\ln \rho)$. Le $o(\sqrt{\rho})$ dans les équations peut donc être remplacé par $O(\ln \rho)$. Malgré le fait que l'énergie élastique de ce problème n'est pas finie, nous verrons dans le chapitre suivant que l'unicité de $\vec{v}_p^{(3/2)}$ est néanmoins assurée.

De plus, d'après (2.22), $\vec{v}_p^{(1/2)} = O(\sqrt{\rho^*})$ pour $\rho^* \rightarrow 0$ d'où :

$$\frac{\partial \vec{v}_p^{(1/2)}}{\partial \eta(y_3)} = O\left(\frac{1}{\sqrt{\rho^*}}\right)$$

Les contraintes $\hat{\tau}_{ij}(\vec{v}_p^{(3/2)})$ se comportent donc, d'après (2.48) en $O\left(\frac{1}{\sqrt{\rho^*}}\right)$ près du front et les déplacements en $O(\sqrt{\rho^*})$.

2.7 Développement des facteurs d'intensité de contraintes

2.7.1 Relations entre $\vec{u}(\mathbf{x}, \delta)$ et $k_p(x_3, \delta)$ pour $r \rightarrow 0$

Avec les notations de la figure 2.4 le repère adapté au nouveau front est le repère orthonormé direct $(P, \vec{e}_1^0, \vec{e}_2^0, \vec{e}_3^0)$. Dans ce repère le champ de déplacement $\vec{u}(\mathbf{x}, \delta)$ a le comportement habituel (1.2) quand $M(\mathbf{x})$ s'approche du front. On a donc :

$$\vec{u}(\mathbf{x}, \delta) = k_p(x'_3, \delta) \cdot U_{p_i}^{(1/2)}(x_1^0, x_2^0) \vec{e}_i^0 + O(r^0) \quad (2.50)$$

pour $r^0 = \sqrt{(x_1^0)^2 + (x_2^0)^2} \rightarrow 0$, où (x_1^0, x_2^0, x_3^0) désigne les coordonnées de M dans le repère $(P, \vec{e}_1^0, \vec{e}_2^0, \vec{e}_3^0)$ et $k_p(x'_3, \delta)$ le $p^{\text{ième}}$ F.I.C. au point P du front de l'extension, de coordonnées x'_3 selon \vec{e}_3 . Or, la base $(\vec{e}_1^0, \vec{e}_2^0, \vec{e}_3^0)$ s'écrit en fonction de la base orthonormée $(\vec{e}_1^*, \vec{e}_2^*, \vec{e}_3)$ adaptée

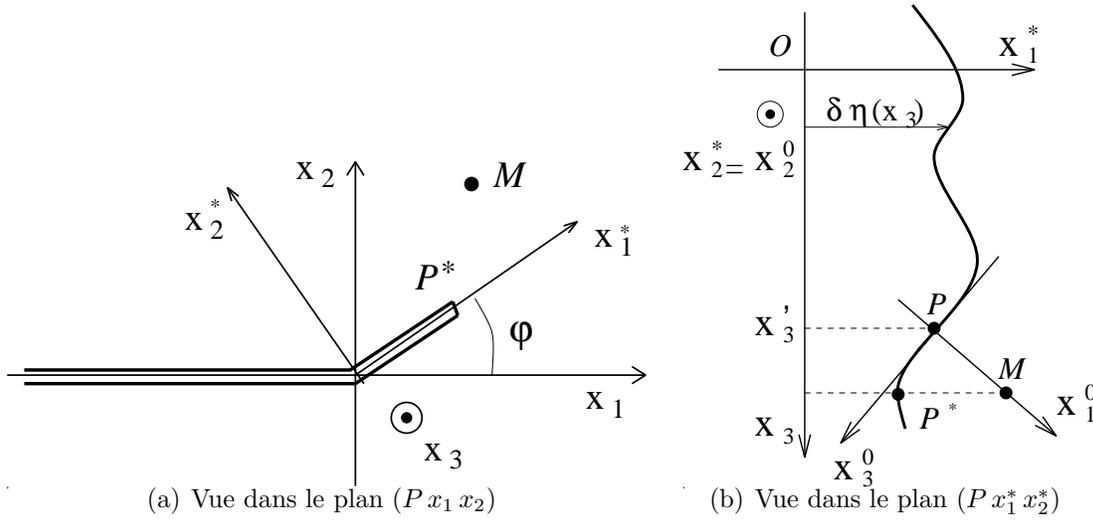


Figure 2.4: Repère adapté au front de l'extension

à nos problèmes intérieurs de la façon suivante (pour $\delta \rightarrow 0$) :

$$\begin{aligned} \vec{e}_1^0 &= \vec{e}_1^* - \delta \eta'(x'_3) \vec{e}_3 \\ \vec{e}_2^0 &= \vec{e}_2^* \\ \vec{e}_3^0 &= \delta \eta'(x'_3) \vec{e}_1^* + \vec{e}_3 \end{aligned} \quad (2.51)$$

En notant (x_1^*, x_2^*, x_3) les coordonnées de M dans le repère $(P^*, \vec{e}_1^*, \vec{e}_2^*, \vec{e}_3)$, on a de plus :

$$x_1^0 = x_1^*(1 + O(\delta^2)), \quad x_2^0 = x_2^* \quad (2.52)$$

D'où en développant (2.50) à l'ordre $\delta^{3/2}$ pour $\delta \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} \vec{u}(\mathbf{x}, \delta) &= k_p^*(x_3) \cdot \vec{U}_p^{*(1/2)}(x_1^*, x_2^*) + \sqrt{\delta \eta(x_3)} k_p^{(1/2)}(x_3) \cdot \vec{U}_p^{*(1/2)}(x_1^*, x_2^*) + \\ &\delta \left[k_p^{(1)}(x_3) \cdot \vec{U}_p^{*(1/2)}(x_1^*, x_2^*) + k_p^*(x_3) \eta'(x_3) \vec{\Omega}_{13}^* \cdot \vec{U}_p^{*(1/2)}(x_1^*, x_2^*) \right] + O(\delta^{3/2} \sqrt{r^*}) + O(r^*) \end{aligned} \quad (2.53)$$

pour $r^* \rightarrow 0$, où :

$$\overrightarrow{U}_p^{*(1/2)}(x_1^*, x_2^*) = U_{p_i}(x_1^*, x_2^*) \bar{e}_i^* \text{ avec les notations du §1.3} \quad (2.54)$$

et

$$\overrightarrow{\Omega}_{13}^* = \bar{e}_1^* \otimes \bar{e}_3^* - \bar{e}_3^* \otimes \bar{e}_1^* \quad (2.55)$$

Le terme faisant apparaître $\overrightarrow{\Omega}_{13}^*$ provient de la dérivation des vecteurs \bar{e}_i^0 par rapport à δ .

2.7.2 Relations entre les champs de déplacements intérieurs et les F.I.C.

D'après (2.6) et (2.7), on a :

$$\vec{u}(\mathbf{x}, \delta) = \vec{v}(\mathbf{y}, \delta) \text{ avec } y_1 = \frac{x_1}{\delta}; \quad y_2 = \frac{x_2}{\delta}; \quad y_3 = x_3$$

Le développement de $\vec{v}(\mathbf{y}, \delta)$ pour $\delta \rightarrow 0$ et $\rho^* = \frac{r^*}{\delta} \rightarrow 0$ s'obtient donc en écrivant celui de $\vec{u}(\mathbf{x}, \delta)$ avec les nouvelles variables :

$$y_1^* = \frac{x_1^*}{\delta}; \quad y_2^* = \frac{x_2^*}{\delta}; \quad y_3 = x_3, \quad (2.56)$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} \vec{v}(\mathbf{y}, \delta) = & \sqrt{\delta} k_p^*(y_3) \cdot \overrightarrow{U}_p^{*(1/2)}(y_1^*, y_2^*) + \delta \sqrt{\eta(y_3)} k_p^{(1/2)}(y_3) \cdot \overrightarrow{U}_p^{*(1/2)}(y_1^*, y_2^*) + \\ & \delta^{3/2} \left[k_p^{(1)}(y_3) \cdot \overrightarrow{U}_p^{*(1/2)}(y_1^*, y_2^*) + k_p^*(y_3) \eta'(y_3) \overrightarrow{\Omega}_{13} \cdot \overrightarrow{U}_p^{*(1/2)}(y_1^*, y_2^*) \right] + O(\delta^2) + O(\rho^*) \end{aligned} \quad (2.57)$$

On en déduit que, pour $\rho^* \rightarrow 0$:

$$\begin{cases} \vec{v}^{(1/2)}(\mathbf{y}, \delta) = k_p^*(y_3) \cdot \overrightarrow{U}_p^{*(1/2)}(y_1^*, y_2^*) + O(\rho^*) \\ \vec{v}^{(1)}(\mathbf{y}, \delta) = \sqrt{\eta(y_3)} k_p^{(1/2)}(y_3) \cdot \overrightarrow{U}_p^{*(1/2)}(y_1^*, y_2^*) + O(\rho^*) \\ \vec{v}^{(3/2)}(\mathbf{y}, \delta) = k_p^{(1)}(y_3) \cdot \overrightarrow{U}_p^{*(1/2)}(y_1^*, y_2^*) + k_p^*(y_3) \eta'(y_3) \overrightarrow{\Omega}_{13} \cdot \overrightarrow{U}_p^{*(1/2)}(y_1^*, y_2^*) + O(\rho^*) \end{cases} \quad (2.58)$$

Par comparaison avec (2.22) et (2.26) nous obtenons les expressions suivantes des deux premiers termes du développement des F.I.C :

$$\begin{aligned} k_p^*(y_3) &= F_{pq}(\varphi) k_q \\ k_p^{(1/2)}(y_3) &= G_{pq}(\varphi) T_q \end{aligned} \quad (2.59)$$

Ces expressions sont (bien sûr!) les mêmes que les expressions (1.4) du chapitre 1.

2.7.3 Expression de $k_p^{(1)}(y_3)$

La combinaison des équations (2.44), (2.46), (2.22), (2.49) et de (2.58) conduit à :

$$k_p \eta'(y_3) \cdot \left[\vec{v}_p^{(3/2)} - F_{qp}(\varphi) \vec{\Omega}_{13}^* \cdot \vec{U}_q^{*(1/2)}(y_1^*, y_2^*) \right] = \left[k_q^{(1)}(y_3) - b_p \cdot I_{qp}(\varphi) \eta(y_3) + A_{rp}(\varphi) k_p \mathcal{K}_{sr}(y_3, \{\eta\}) \cdot F_{qs}(\varphi) \right] \vec{U}_q^{*(1/2)}(y_1^*, y_2^*) + O(\rho^*) \quad (2.60)$$

Les k_p étant des quantités indépendantes, le terme entre crochets du premier membre est donc une combinaison linéaire des déplacements fondamentaux $\vec{U}_q^{*(1/2)}(y_1^*, y_2^*)$ dont les coefficients dépendent a priori, d'après la forme du deuxième membre, de φ et de η . $\vec{v}_p^{(3/2)}(y_1, y_2; \eta(y_3))$ et $\vec{U}_q^{*(1/2)}(y_1^*, y_2^*)$ étant homogènes de degré 1/2, ces coefficients ne dépendent en fait que de φ . Il existe donc des constantes $\tilde{N}_{qp}(\varphi)$, $p, q = I, II, III$ telles que :

$$\vec{v}_p^{(3/2)} = \tilde{N}_{qp}(\varphi) \vec{U}_q^{*(1/2)}(y_1^*, y_2^*) + F_{qp}(\varphi) \vec{\Omega}_{13}^* \cdot \vec{U}_q^{*(1/2)}(y_1^*, y_2^*) + O(\rho^*) \quad (2.61)$$

Cette équation montre que le développement de $\vec{v}_p^{(3/2)}$ ne présente pas la forme habituelle à cause de la présence du terme $F_{qp}(\varphi) \vec{\Omega}_{13}^* \cdot \vec{U}_q^{*(1/2)}(y_1^*, y_2^*)$. Celui-ci provient du fait que les forces de volume intervenant dans le problème (2.48) définissant $\vec{v}_p^{(3/2)}$ sont singulières en P^* .

En reportant (2.61) dans (2.60) et en remplaçant \mathcal{K}_{sr} par son expression (2.37), on obtient l'expression de $k_q^{(1)}$ suivante :

$$\begin{aligned} k_q^{(1)}(y_3) &= k_p \cdot \tilde{N}_{qp}(\varphi) \eta'(y_3) + b_p \cdot I_{qp}(\varphi) \eta(y_3) \\ &\quad - A_{rp}(\varphi) k_p \left[\bar{k}_{sr} \eta(y_3) + N_{sr}(0) \cdot \eta'(y_3) \right] \cdot F_{qs}(\varphi) \\ &\quad - A_{pr}(\varphi) k_p \cdot VP \int_{-\infty}^{+\infty} Z_{sr}(\Omega, y_3, y'_3) [\eta(y'_3) - \eta(y_3)] dy_3 \cdot F_{qs}(\varphi) \end{aligned} \quad (2.62)$$

Par ailleurs d'après (1.4) l'expression de $k_q^{(1)}(y_3) = k_q^{(1)}(x_3)$ vaut :

$$\begin{aligned} k_q^{(1)}(x_3) &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 k_q(x_3, \delta)}{\partial (\sqrt{\delta})^2} \right]_{\varphi(x'_3) \equiv \varphi(x_3)}^{\eta(x'_3) \equiv \eta(x_3)} \eta(x_3) \\ &\quad + N_{qp}(\varphi) \cdot k_p \eta'(x_3) + F_{qp}(\varphi) \times \\ &\quad VP \int_{-\infty}^{+\infty} Z_{pr}(\Omega, x_3, x'_3) (F^T \cdot F)_{rs}(\varphi) [\eta(x'_3) - \eta(x_3)] k_s dx'_3 \end{aligned} \quad (2.63)$$

Dans le cas particulier $\eta(y'_3) = \eta(y_3) = Cste$ où le membre de droite précédent se réduit à son premier terme, le problème est alors bidimensionnel; l'expression de $k_q^{(1)}$ est donnée par Leblond (1989) sous la forme suivante :

$$\mathbf{k}^{(1)}(y_3) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 \mathbf{k}(y_3, \delta)}{\partial (\sqrt{\delta})^2} \right]_{\varphi(y'_3) \equiv \varphi(y_3)}^{\eta(y'_3) \equiv \eta(y_3)} \eta(y_3) = \left[\mathbf{I}(\varphi) \cdot \mathbf{b} + \mathbf{F}(\varphi) \cdot \bar{\mathbf{k}} \cdot (\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F})(\varphi) \cdot \mathbf{k} \right] \eta(y_3) \quad (2.64)$$

Par identification avec l'expression (2.62) écrite pour $\eta(y'_3) = \eta(y_3) = Cste$ nous obtenons alors :

$$\mathbf{A}(\varphi) = -(\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F})(\varphi) \quad (2.65)$$

En tenant compte de ces résultats et en identifiant (2.62) et (2.63) on obtient l'expression de l'opérateur $\mathbf{N}(\varphi)$ en fonction de $\tilde{\mathbf{N}}(\varphi)$:

$$\mathbf{N}(\varphi) = \tilde{\mathbf{N}}(\varphi) + \mathbf{F}(\varphi) \cdot \mathbf{N}(0) \cdot (\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F})(\varphi) \quad (2.66)$$

où $\tilde{N}_{qp}(\varphi)$ peut être extrait du comportement (2.61) de $\vec{v}_p^{(3/2)}$ près du front de l'extension. La valeur de $\mathbf{N}(0)$ peut elle être tirée des travaux de Gao et Rice (1986).

Les problèmes à résoudre dans le chapitre suivant sont donc le problème (2.16) intérieur d'ordre 1/2 et le problème (2.48) vérifié par $\vec{v}_p^{(3/2)}$. Contrairement à Mouchrif qui a résolu ces problèmes en utilisant des décompositions du style de (2.19) et calculé les champs $\vec{v}_p^{(1/2)}$ et $\vec{v}_p^{(3/2)}$, pour lesquels la condition à l'infini était transposée par superposition en forces de volume et en tractions sur les lèvres de la fissure, nous allons résoudre les problèmes "initiaux" (sur les champs $\vec{v}_p^{(1/2)}(\mathbf{y})$ et $\vec{v}_p^{(3/2)}$) pour lesquels les chargements volumique et surfacique sont moins lourds. Certes, l'énergie élastique de ces problèmes "initiaux" n'est pas finie, mais nous avons vu dans les paragraphes 2.3.3 et 2.6.4 grce à des décompositions du type mentionné ci-dessus que ces champs sont néanmoins uniques; ceci nous autorise à résoudre directement les problèmes "initiaux" pour lesquels les calculs sont un peu moins lourds.

Chapter 3

Calcul de l'opérateur $\mathbf{N}(\varphi)$ - Deuxième partie : résolution dans le plan complexe

3.1 Préliminaires

3.1.1 Introduction

Dans le présent chapitre, nous allons calculer les champs de déplacements $\vec{v}_p^{(3/2)}$ afin d'en extraire les valeurs des quantités $\tilde{N}_{pq}(\varphi)$ puis $N_{pq}(\varphi)$, $p, q = I, II, III$. Pour cela nous aurons besoin de déterminer dans un premier temps les champs intérieurs d'ordre 1/2. Grâce aux conditions d'homogénéité explicitées dans le chapitre précédent, il suffit de résoudre ces divers problèmes pour une fissure munie d'une extension de longueur unité.

Nous utiliserons pour la résolution le formalisme complexe de Muskhelishvili (1953) et une technique de transformation conforme déjà utilisée par Amestoy, Bui et Dang Van (1979) et adaptée par Mouchrif au calcul de l'opérateur $\mathbf{P}(\varphi)$. Le problème intérieur à l'ordre 1/2 est identique au problème intérieur du même ordre de Mouchrif et le problème intérieur à l'ordre 3/2 en diffère par l'expression des forces de volumes et des conditions aux limites. Néanmoins, nous résoudrons les problèmes un peu différemment en conservant les conditions à l'infini et non pas en les ramenant par une décomposition adéquate sur les lèvres de l'extension, ce qui a le mérite de simplifier quelque peu les calculs.

Cette résolution aboutit à l'expression de l'opérateur $\mathbf{N}(\varphi)$ après résolution d'une équation intégrale portant sur un des potentiels de Muskhelishvili. Cette forme intégrale nous permettra d'obtenir les valeurs de $\mathbf{N}(\varphi)$ sous forme d'un développement limité pour les petites valeurs de l'angle de branchement φ et numériquement pour les autres.

3.1.2 Conditions de parité des fonctions $N_{pq}(\varphi)$

Symétrie par rapport au plan Ox_1x_2

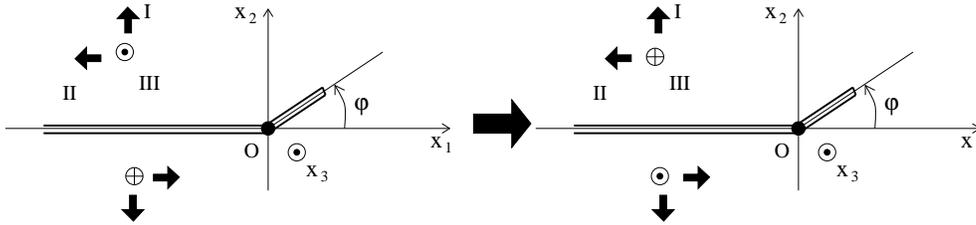


Figure 3.1: Symétrie par rapport au plan Ox_1x_2

Dans cette symétrie, l'angle de branchement reste le même et $\eta'(x_3)$ est changé en $-\eta'(x_3)$. Les F.I.C, avant et après branchement, des modes I et II sont inchangés et ceux du mode III changent de signe. On doit donc avoir les égalités suivantes quels que soient k_I, k_{II}, k_{III} (cf. (1.4)):

$$\begin{aligned} N_{I,I}(\varphi)k_I + N_{I,II}(\varphi)k_{II} + N_{I,III}(\varphi)k_{III} &= -[N_{I,I}(\varphi)k_I + N_{I,II}(\varphi)k_{II} - N_{I,III}(\varphi)k_{III}] \\ N_{II,I}(\varphi)k_I + N_{II,II}(\varphi)k_{II} + N_{II,III}(\varphi)k_{III} &= -[N_{II,I}(\varphi)k_I + N_{II,II}(\varphi)k_{II} - N_{II,III}(\varphi)k_{III}] \\ N_{III,I}(\varphi)k_I + N_{III,II}(\varphi)k_{II} + N_{III,III}(\varphi)k_{III} &= N_{III,I}(\varphi)k_I + N_{III,II}(\varphi)k_{II} - N_{III,III}(\varphi)k_{III} \end{aligned}$$

Ce qui implique la *nullité* des quantités $N_{I,I}(\varphi)$, $N_{I,II}(\varphi)$, $N_{II,I}(\varphi)$, $N_{II,II}(\varphi)$ et $N_{III,III}(\varphi)$. La forme matricielle de l'opérateur $\mathbf{N}(\varphi)$ est donc la suivante :

$$\mathbf{N}(\varphi) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & N_{I,III}(\varphi) \\ 0 & 0 & N_{II,III}(\varphi) \\ N_{III,I}(\varphi) & N_{III,II}(\varphi) & 0 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Symétrie par rapport au plan Ox_1x_3

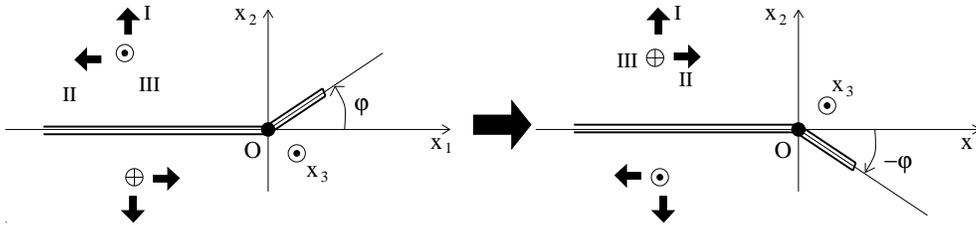


Figure 3.2: Symétrie par rapport au plan Ox_1x_3

Dans cette symétrie, l'angle de branchement change de signe et $\eta'(x_3)$ est inchangé. Les F.I.C. du mode I sont inchangés et ceux des modes II et III changent de signe. Par conséquent,

pour tout triplet k_I, k_{II}, k_{III} on doit avoir (en tenant compte des termes nuls) :

$$\begin{aligned} N_{I,III}(\varphi)k_{III} &= -N_{I,III}(-\varphi)k_{III} \\ N_{II,III}(\varphi)k_{III} &= N_{II,III}(-\varphi)k_{III} \\ N_{III,I}(\varphi)k_I + N_{III,II}(\varphi)k_{II} &= -[N_{III,I}(-\varphi)k_I - N_{III,II}(-\varphi)k_{II}] \end{aligned}$$

Donc, les fonctions $N_{II,III}(\varphi)$ et $N_{III,II}(\varphi)$ sont *paires* et les fonctions $N_{I,III}(\varphi)$ et $N_{III,I}(\varphi)$ sont *impaires* par rapport à φ .

3.1.3 Transformation conforme

Les problèmes à résoudre sont posés sur un domaine infini contenant une fissure semi-infinie munie d'une extension de longueur unité et présentant un angle de branchement φ . Nous poserons

$$\varphi \equiv \pi m \quad (3.2)$$

où m appartient à l'intervalle $[-1, 1]$. Notons $Z_1 = 0^-$ et $Z_3 = 0^+$ les affixes des points anguleux et $Z_2 = e^{im\pi}$ et $Z_4 = -\infty$ celles des extrémités. Nous allons nous ramener par l'intermédiaire d'une transformation conforme à des problèmes posés sur une variable z appartenant au demi-plan complexe Π^- correspondant aux parties imaginaires négatives.

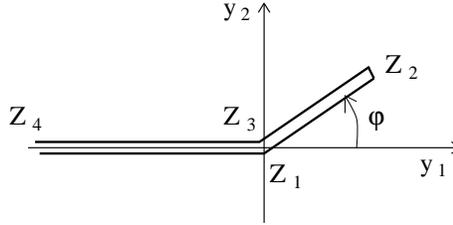


Figure 3.3: Géométrie du problème dans le plan physique

La transformation de Dudukalenko et Romalis (1973) ramène l'extérieur d'une fissure de longueur initiale $2l$ munie d'une extension déviée de longueur s sur l'extérieur du cercle unité du plan ξ . Elle s'écrit :

$$Z \equiv Z(\xi) = R e^{im\alpha} \frac{(\xi - e^{i\alpha})(\xi - e^{-i\alpha})}{\xi} \left(\frac{\xi - e^{-i\alpha}}{\xi - e^{i\alpha}} \right)^m$$

où les constantes R et α sont définies par :

$$\begin{aligned} l &= 2R \left(\cos \frac{\alpha + \beta}{2} \right)^{1-m} \left(\cos \frac{\alpha - \beta}{2} \right)^{1+m} \\ s &= 4R \left(\sin \frac{\alpha + \beta}{2} \right)^{1+m} \left(\sin \frac{\alpha - \beta}{2} \right)^{1-m} \\ \sin \beta &= m \sin \alpha \end{aligned}$$

Dans notre cas pour lequel $s = 1$ et $l \rightarrow +\infty$ ces relations impliquent que $R \rightarrow +\infty$ et $\alpha \rightarrow 0$ (et $\beta \rightarrow 0$) avec :

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} R\alpha^2(1-m)^{1-m}(1+m)^{1+m} = 1$$

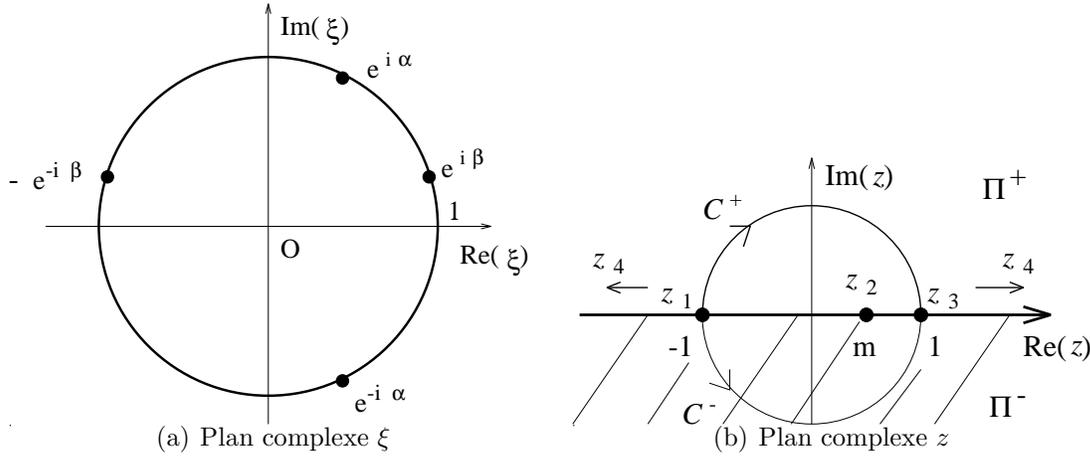


Figure 3.4: Géométrie du problème dans les divers plans complexes

En effectuant de plus la transformation $\xi = e^{i\alpha z}$, on ramène, compte tenu du fait que $\alpha \rightarrow 0$, l'extérieur du cercle unité du plan ξ sur le demi-plan Π^- du plan z . La transformation conforme recherchée est donc la suivante :

$$Z = \omega(z) = \mathcal{A} \left(\frac{z+1}{z-1} \right)^m (1-z^2) \text{ avec } \mathcal{A} \equiv \frac{1}{1-m^2} \left(\frac{1-m}{1+m} \right)^m \quad (3.3)$$

Elle envoie les lèvres de la fissure sur la droite des réels du plan z . En particulier, les points anguleux Z_1 et Z_3 correspondent aux points d'affixe $z_1 = -1$ et $z_3 = 1$ et les extrémités Z_2 et Z_4 à ceux d'affixe $z_2 = m$ et $z_4 = \pm\infty$.

La dérivée de $\omega(z)$ vaut :

$$\omega'(z) = 2\mathcal{A}(m-z) \left(\frac{z+1}{z-1} \right)^m \quad (3.4)$$

et la quantité $\omega(t)/\overline{\omega'(t)}$ (qui nous sera utile par la suite) vaut sur l'axe des réels :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \frac{\omega(t)}{\overline{\omega'(t)}} = [1 + (e^{2im\pi} - 1)I(t)]Q(t) \quad (3.5)$$

où $I(t)$ est la fonction caractéristique de l'intervalle $[-1, 1]$, valant 1 pour $t \in [-1, 1]$ et 0 ailleurs, et :

$$Q(t) = \frac{1}{2} \frac{1-t^2}{m-t} \quad (3.6)$$

Remarquons de plus que $\omega'(m) = 0$ et que par conséquent le développement de $\omega(z)$ pour $z \rightarrow m$ est de la forme :

$$\omega(z) = \omega(m) + \frac{\omega''(m)}{2}(z-m)^2 + \dots + \frac{\omega^{(k)}(m)}{k!}(z-m)^k + \dots \quad (3.7)$$

3.1.4 Lemme fondamental

Pour la résolution des divers problèmes nous nous servirons constamment du lemme fondamental suivant :

Énoncé :

Soit $t_1, \dots, t_i, \dots, t_N$ un ensemble fini de points de l'axe des réels.

Soient $f(z)$ et $g(z)$ deux fonctions complexes analytiques sur Π^- , continues sur $\Pi^- \cup (\mathbb{R} - \{t_1, \dots, t_i, \dots, t_N\})$, faiblement singulières¹ en $t_1, \dots, t_i, \dots, t_N$, bornées à l'infini et telles que :

$$\forall t \in \mathbb{R} - \{t_1, \dots, t_i, \dots, t_N\}, \quad f(t) = \overline{g(t)}.$$

Alors $f(z)$ et $g(z)$ sont constantes et conjuguées l'une de l'autre.

Démonstration :

Afin de pouvoir appliquer le théorème de Liouville², nous allons construire une fonction $\phi(z)$ analytique et bornée dans \mathcal{C} en posant :

$$\phi(z) = \begin{cases} f(z) & \text{sur } \Pi^- \\ \overline{g(z)} \equiv \overline{g(\overline{z})} & \text{sur } \Pi^+ \end{cases}$$

Nous allons montrer que cette fonction analytique sur $\Pi^- \cup \Pi^+$ peut être prolongée en une fonction analytique sur \mathcal{C} tout entier.

Il est clair vu l'hypothèse $f(t) = \overline{g(t)} = \overline{g(t)}$ sur \mathbb{R} , que ϕ est continue sur $\mathcal{C} - \{t_1, \dots, t_i, \dots, t_N\}$. De plus, on peut montrer en utilisant par exemple le théorème de Morera³, que ϕ est analytique sur $\mathcal{C} - \{t_1, \dots, t_i, \dots, t_N\}$.

Posons alors $v_i(z) = (z - t_i) \cdot \phi(z)$ pour chacun des points faiblement singuliers. Cette fonction est analytique sur $\mathcal{C} - \{t_1, \dots, t_i, \dots, t_N\}$ et sa limite quand $z \rightarrow t_i$ est nulle. La fonction $v_i(z)$ peut donc être prolongée par continuité pour $z \rightarrow t_i$ en une fonction analytique au voisinage de t_i et valant zéro en ce point. Son développement en série entière s'écrit alors autour de t_i : $v_i(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n (z - t_i)^n$ et celui de $\phi(z)$: $\phi(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n (z - t_i)^{n-1}$. On peut donc prolonger ainsi $\phi(z)$ en une fonction analytique sur \mathcal{C} . La fonction $\phi(z)$ étant de plus bornée d'après les hypothèses du lemme, on peut lui appliquer le théorème de Liouville. $\phi(z)$ est donc constante, soit $\phi(z) \equiv C$. Par suite en écrivant pour tout $z \in \Pi^-$, $g(z) = \overline{g(\overline{z})} = \overline{\phi(\overline{z})} = \overline{C}$, on obtient le résultat escompté :

$$f(z) = \overline{g(\overline{z})} = C, \quad \forall z \in \Pi^-.$$

¹C'est-à-dire se comportant comme $O(|z - t_i|^{\alpha_i})$ avec $-1 < \alpha_i$ pour $z \rightarrow t_i$.

²Si f est analytique et bornée dans \mathcal{C} , alors f est constante sur \mathcal{C} .

³Si f est continue sur un ouvert simplement connexe et si $\int_{\mathcal{C}} f(z) dz = 0$ sur tout contour fermé, alors f est analytique.

3.2 Résolution du problème plan à l'ordre 1/2

Quoique ce problème ait déjà été résolu par Amestoy, Bui et Dang Van (1979), nous le reprenons ici par souci de complétude.

Le problème (2.16) peut se décomposer en un problème plan (portant sur les composantes 1 et 2 de $\vec{v}^{(1/2)}$) et un problème antiplan (portant uniquement sur la troisième composante de $\vec{v}^{(1/2)}$). Le problème plan s'écrit, avec $\vec{v}^{(1/2)} \equiv v_1^{(1/2)}\vec{e}_1 + v_2^{(1/2)}\vec{e}_2$:

$$\begin{cases} \hat{\tau}_{\beta\alpha;\alpha}(\vec{v}^{(1/2)}(\mathbf{y})) = 0 \text{ dans } \Omega^{int} \\ \hat{\tau}_{\alpha\beta}(\vec{v}^{(1/2)}(\mathbf{y})) \cdot n_\beta(\mathbf{y}) = 0 \text{ sur } \mathcal{F}^{int} \cup \mathcal{E}^{int} \\ \vec{v}^{(1/2)}(\mathbf{y}) = k_p \vec{U}_p^{(1/2)}(y_1, y_2) + O(\rho^{-1/2}) \text{ pour } \rho = \sqrt{y_1^2 + y_2^2} \rightarrow +\infty \end{cases} \quad (3.8)$$

où p ne prend que les valeurs I et II .

Les champs mécaniques de ce problème plan sont reliés aux potentiels complexes de Muskhelishvili, notés $\Phi^{(1/2)}(Z) = \phi^{(1/2)}(z)$ et $\Psi^{(1/2)}(Z) = \psi^{(1/2)}(z)$, par les relations :

$$\begin{aligned} \hat{\tau}_{11}(\vec{v}^{(1/2)}(\mathbf{y})) + \hat{\tau}_{22}(\vec{v}^{(1/2)}(\mathbf{y})) &= 4\text{Re} \left(\Phi^{(1/2)'}(Z) \right) \\ \hat{\tau}_{22}(\vec{v}^{(1/2)}(\mathbf{y})) - \hat{\tau}_{11}(\vec{v}^{(1/2)}(\mathbf{y})) + 2i\hat{\tau}_{12}(\vec{v}^{(1/2)}(\mathbf{y})) &= 2 \left(\overline{Z} \Phi^{(1/2)''}(Z) + \Psi^{(1/2)'}(Z) \right) \\ 2\mu \left(v_1^{(1/2)} + iv_2^{(1/2)} \right) &= (3 - 4\nu)\Phi^{(1/2)}(Z) - Z\overline{\Phi^{(1/2)'}}(Z) - \overline{\Psi^{(1/2)}}(Z) \end{aligned} \quad (3.9)$$

Il s'agit alors de trouver $\phi^{(1/2)}(z)$ et $\psi^{(1/2)}(z)$ satisfaisant aux conditions aux limites du problème.

3.2.1 Conditions aux limites sur la fissure

Les conditions aux limites sur la fissure s'expriment en fonction des potentiels complexes de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dS} \left[\Phi^{(1/2)}(Z) + Z\overline{\Phi^{(1/2)'}}(Z) + \overline{\Psi^{(1/2)}}(Z) \right] &= 0 \text{ sur } Z_4Z_1Z_2Z_3Z_4 \\ \implies \Phi^{(1/2)}(Z) + Z\overline{\Phi^{(1/2)'}}(Z) + \overline{\Psi^{(1/2)}}(Z) &= Cste \text{ sur } Z_4Z_1Z_2Z_3Z_4 \end{aligned}$$

où S désigne l'abscisse curviligne le long des lèvres de la fissure. En passant dans le plan complexe z par la transformation conforme (3.3) cette relation devient :

$$\phi^{(1/2)}(t) + \frac{\omega(t)}{\omega'(t)} \overline{\phi^{(1/2)'}}(t) + \overline{\psi^{(1/2)}}(t) = Cste \text{ pour } t \in \mathbb{R} \quad (3.10)$$

Afin de pouvoir écrire cette condition sous la forme du lemme " $f(t) = \overline{g(t)}$ " où f et g sont des fonctions analytiques, posons :

$$\chi^{(1/2)}(z) = \frac{e^{2im\pi} - 1}{2i\pi} \int_{-1}^1 \frac{Q(t)\overline{\phi^{(1/2)'}}(t)}{t - z} dt \quad (3.11)$$

Les conditions de convergence de cette intégrale seront précisées ultérieurement (au §3.2.3). Notons $\chi^{(1/2)}(t^\pm)$ la limite pour $z \in \Pi^\pm \rightarrow t \in \mathbb{R}$ de $\chi^{(1/2)}(z)$. La formule de Plemelj implique alors :

$$(e^{2im\pi} - 1)Q(t)\overline{\phi^{(1/2)'(t)}}I(t) = \chi^{(1/2)}(t^+) - \chi^{(1/2)}(t^-) = \overline{\chi^{(1/2)}(t^-)} - \chi^{(1/2)}(t^-)$$

où $\overline{\chi^{(1/2)}(z)}$ désigne, comme d'habitude, la fonction $\overline{\chi^{(1/2)}(\bar{z})}$ analytique sur Π^+ .

En injectant ce résultat dans (3.10), compte tenu de (3.5), on obtient :

$$\phi^{(1/2)}(t) - \chi^{(1/2)}(t^-) = \overline{-Q(t)\phi^{(1/2)'(t)} - \psi^{(1/2)}(z) - \overline{\chi^{(1/2)}(t^-)}} + Cste \quad (3.12)$$

Nous allons maintenant regarder si les fonctions de part et d'autre de l'égalité vérifient les hypothèses du lemme fondamental.

3.2.2 Conditions à l'infini

On peut aisément montrer que

$$\Phi_I(Z) = \sqrt{\frac{Z}{2\pi}}, \quad \Psi_I(Z) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{Z}{2\pi}} \quad (3.13)$$

sont les potentiels de Muskhelishvili associés au déplacement fondamental $\vec{U}_I^{(1/2)}$, et que

$$\Phi_{II}(Z) = -i\sqrt{\frac{Z}{2\pi}}, \quad \Psi_{II}(Z) = \frac{3i}{2}\sqrt{\frac{Z}{2\pi}} \quad (3.14)$$

sont ceux associés à $\vec{U}_{II}^{(1/2)}$. La racine carrée est définie ici par :

$$\sqrt{Z} = \sqrt{|Z|} e^{i(\arg Z)/2} \text{ avec } \arg Z \in]-\pi, \pi[\quad (3.15)$$

La condition à l'infini s'écrit donc en fonction des potentiels de Muskhelishvili du problème de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \Phi^{(1/2)}(Z) &= k_I \Phi_I(Z) + k_{II} \Phi_{II}(Z) + O(Z^{-1/2}) \\ \Psi^{(1/2)}(Z) &= k_I \Psi_I(Z) + k_{II} \Psi_{II}(Z) + O(Z^{-1/2}) \end{aligned} \quad (3.16)$$

pour $|Z| \rightarrow +\infty$, ou encore, dans le plan complexe z :

$$\begin{aligned} \phi^{(1/2)}(z) &= k_I \phi_I(z) + k_{II} \phi_{II}(z) + \sqrt{\frac{\mathcal{A}}{2\pi}} m(ik_I + k_{II}) + O(z^{-1}) \\ \psi^{(1/2)}(z) &= k_I \psi_I(z) + k_{II} \psi_{II}(z) + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mathcal{A}}{2\pi}} m(ik_I - 3k_{II}) + O(z^{-1}), \end{aligned} \quad (3.17)$$

pour $|z| \rightarrow +\infty$.

Les fonctions $\phi_p(z)$ et $\psi_p(z)$ ($p = I, II$) apparaissant dans ces équations, correspondent au développement de $\Phi_p(Z)$ et $\Psi_p(Z)$ à l'ordre $O(z)^4$ et valent :

$$\begin{aligned}\phi_I(z) &= \sqrt{\frac{\mathcal{A}}{2\pi}} iz, & \phi_{II}(z) &= \sqrt{\frac{\mathcal{A}}{2\pi}} z \\ \psi_I(z) &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mathcal{A}}{2\pi}} iz, & \psi_{II}(z) &= -\frac{3}{2} \sqrt{\frac{\mathcal{A}}{2\pi}} z\end{aligned}\tag{3.18}$$

On voit donc que les fonctions intervenant dans l'égalité (3.12) ne sont pas bornées à l'infini. Néanmoins on a pour $|z| \rightarrow +\infty$ (en sommant sur l'indice muet) :

$$\begin{aligned}\phi^{(1/2)}(z) - k_p \phi_p(z) &= O(1) \\ \psi^{(1/2)}(z) - k_p \psi_p(z) &= O(1) \\ Q(z) \cdot \phi^{(1/2)'}(z) - \frac{z}{2} k_p \phi_p'(z) &= O(1)\end{aligned}\tag{3.19}$$

De plus, en remplaçant les fonctions $\phi_p(z)$ et $\psi_p(z)$ par leur valeur on montre que $\forall t \in \mathbb{R}$:

$$\frac{t}{2} k_p \phi_p'(t) + k_p \psi_p(t) = -\overline{k_p \phi_p(t)}$$

On peut donc ajouter la conjuguée de ce terme à l'équation (3.12) pour obtenir :

$$\begin{aligned}\phi^{(1/2)}(t) - k_p \phi_p(t) - \chi^{(1/2)}(t^-) &= \\ \frac{-Q(t) \phi^{(1/2)'}(t) + \frac{t}{2} k_p \phi_p'(t) - \psi^{(1/2)}(z) + k_p \psi_p(t) - \overline{\chi^{(1/2)}(t^-)} + Cste}{} &= \end{aligned}\tag{3.20}$$

Les fonctions de part et d'autre de l'égalité sont maintenant bornées à l'infini (on vérifie immédiatement que $\chi^{(1/2)}(z) = O(1/z)$ à l'infini et de même pour $\overline{\chi^{(1/2)}(z)}$).

Il reste à vérifier, pour pouvoir appliquer le lemme fondamental, que les membres de l'égalité sont bien continus sur $\Pi^- \cup \mathbb{R}$ sauf éventuellement en un ensemble discret de points de \mathbb{R} où ils peuvent être faiblement singuliers.

3.2.3 Comportement des potentiels complexes au voisinage des points

z_1, z_2, z_3

Il est clair que les fonctions de part et d'autre de l'égalité (3.20) sont continues sur $\Pi^- \cup (\mathbb{R} - \{z_1, z_2, z_3\})$. Mais que se passe-t-il au voisinage des points z_1, z_2, z_3 ?

Au voisinage du point anguleux Z_1 de la fissure initiale, les contraintes sont $O(|Z - Z_1|^\alpha)$, avec $\alpha > -1/2$. D'où, $\Phi^{(1/2)'}(Z) = O(|Z - Z_1|^\alpha)$ et $\Phi^{(1/2)}(Z) - \Phi^{(1/2)}(Z_1) = O(|Z - Z_1|^{\alpha+1})$ avec $\alpha + 1 > 1/2$ pour $Z \rightarrow Z_1$. De plus, pour $z \rightarrow z_1 = -1$, $|Z - Z_1| = O(|z + 1|^{m+1})$ avec $m + 1 > 0$ et donc $\phi^{(1/2)}(z) - \phi^{(1/2)}(z_1) = O(|z + 1|^{\alpha'})$ où l'exposant α' est strictement positif.

⁴C'est-à-dire qu'on n'a pas $\Phi_p(Z) = \phi_p(z)$ pour tout z mais seulement $\Phi_p(Z) = \phi_p(z) + O(1)$ pour $|z| \rightarrow +\infty$.

Par dérivation par rapport à z on obtient alors $\phi^{(1/2)'}(z) = O(|z + 1|^{\alpha' - 1})$ avec $\alpha' - 1 > -1$. Par conséquent $\phi^{(1/2)'}(z)$ est faiblement singulière en $z_1 = -1$ et de même en $z_3 = 1$. $\phi^{(1/2)}(z)$ est, quant à elle, continue en ces points. Quant au potentiel $\Psi^{(1/2)}(Z) = \psi^{(1/2)}(z)$, il doit se comporter comme $\Phi^{(1/2)}(Z) = \phi^{(1/2)}(z)$ en $z = \pm 1$ d'après (3.5), (3.6) et (3.10).

Au voisinage de la pointe Z_2 de la fissure, les contraintes admettent un développement en puissances de $|Z - Z_2|$ faisant intervenir les exposants $-1/2, 0, 1/2, 1, 3/2, \dots$. Le potentiel $\Phi^{(1/2)}(Z)$ admet donc un développement en puissances de $Z - Z_2$ avec les exposants $0, 1/2, 1, 3/2, \dots$. Comme de plus, $Z - Z_2 = O((z - m)^2)$ (cf. (3.7)), $\phi^{(1/2)}(z)$ admet un développement en puissances de $z - m$ avec les exposants $0, 1, 2, 3, \dots$ ce qui implique que $\phi^{(1/2)}(z)$ est indéfiniment dérivable au voisinage de $z_2 = m$.

Revenons maintenant à la définition (3.11) de $\chi^{(1/2)}(z)$. Il est clair, $\phi^{(1/2)'}(z)$ étant faiblement singulière en $z = \pm 1$ que l'intégrale est bien définie en ces points. Néanmoins $Q(t)$ a un pôle simple en $z = m$ (cf. (3.6)), l'intégrale n'est donc pas convergente en ce point. En fait, la fonction $\chi^{(1/2)}(z)$ doit être comprise comme la limite quand $\varepsilon \rightarrow 0^+$ de $\int_{-1}^{+1} \frac{Q_\varepsilon(t) \overline{\phi^{(1/2)'}(t)}}{t - z} dt$ où $Q_\varepsilon(t) = \frac{t^2 - 1}{2(t - m + i\varepsilon)}$. Nous conserverons toutefois la notation initiale pour ne pas alourdir inutilement l'écriture.

Il faut de plus vérifier que $\chi^{(1/2)}(z)$ satisfait les hypothèses du lemme sur l'axe des réels. $\phi^{(1/2)'}$ étant faiblement singulière en ± 1 et Q s'y annulant (cf. (3.6)), l'intégrale définissant $\chi^{(1/2)}(z)$ est convergente aux points extrémités $t = \pm 1$ et finie et continue en $z = \pm 1$.

Par ailleurs, les pôles z et $m - i\varepsilon$ appartiennent au plan Π^- et l'intégrande peut être remplacée par une fonction analytique sur Π^+ en substituant $\overline{\phi^{(1/2)'}(t)}$ à $\overline{\phi^{(1/2)'}(t)}$ (ce qui est possible car sur \mathbb{R} , $\bar{t} = t$). L'intégrale sur l'intervalle $[-1, 1]$ est donc égale à l'intégrale prise sur le demi-cercle orienté C^+ du demi-plan Π^+ (cf. Fig. 3.3.4(b)). Le point d'affixe $z_2 = m$ n'appartenant pas à ce contour, l'intégrale y est continue.

Le membre de gauche de l'équation (3.20) vérifie donc bien les hypothèses de singularité faible en z_1, z_2, z_3 imposées par le lemme sur l'axe des réels. Il en est de même du membre de droite en vertu de leur égalité sur \mathbb{R} .

3.2.4 Application du lemme fondamental et résultat

Le membre de gauche et le conjugué de celui de droite de l'équation (3.20) sont bien analytiques sur Π^- . D'après les §3.2.2 et §3.2.3, les hypothèses du lemme fondamental sont donc bien vérifiées et par conséquent :

$$\phi^{(1/2)}(z) - k_p \phi_p(z) - \chi(z) = Cste \text{ sur } \Pi^-$$

La constante est déterminée par le comportement (3.17₁) à l'infini de la fonction $\phi^{(1/2)}(z)$ et vaut $\sqrt{\frac{\mathcal{A}}{2\pi}} m(ik_I + k_{II})$. D'où :

$$\phi^{(1/2)}(z) = \sqrt{\frac{\mathcal{A}}{2\pi}} (ik_I + k_{II})(z + m) + \frac{e^{2im\pi} - 1}{2i\pi} \int_{C^+} \frac{Q(t)\overline{\phi^{(1/2)'}}(t)}{t - z} dt \quad (3.21)$$

et par dérivation, on obtient l'expression intégrale suivante de la dérivée $\phi^{(1/2)'}(z)$:

$$\phi^{(1/2)'}(z) = \phi_0^{(1/2)'}(z) + \mathcal{L}\phi^{(1/2)'}(z) \quad (3.22)$$

où :

$$\phi_0^{(1/2)'}(z) = \sqrt{\frac{\mathcal{A}}{2\pi}} (ik_I + k_{II}) \quad (3.23)$$

et l'opérateur \mathcal{L} est défini par :

$$\mathcal{L}f(z) = \frac{e^{2im\pi} - 1}{2i\pi} \int_{C^+} \frac{Q(t)\overline{f}(t)}{(t - z)^2} dt \quad (3.24)$$

Amestoy, Bui et Dang Van (1979) ont montré que cette opérateur est contractant pour la norme $\|f\| = \sup_{z \in C^-} |(z^2 - 1)f(z)|$ où C^- est le demi-cercle $|z| = 1$, $\text{Im}z < 0$ (cf. Fig. 3.3.4(b)). En appliquant le théorème du point fixe, on obtient alors la dérivée de $\phi^{(1/2)}(z)$ sous forme de série :

$$\phi^{(1/2)'}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathcal{L}^n [\phi_0^{(1/2)'}(z)] \quad (3.25)$$

la convergence de la série étant à comprendre au sens de la norme précédemment introduite.

3.2.5 Calcul des F.I.C.

La formule d'Andersson (1969) relie les F.I.C. au potentiel $\phi^{(1/2)}$ de Muskhelishvili; elle s'écrit ici

$$k_I^* - ik_{II}^* = 2\sqrt{\pi}\phi^{(1/2)'}(m) e^{-im\pi/2} [\omega''(m)]^{-1/2}$$

Or:

$$\sqrt{\omega''(m)} = \sqrt{-1} \sqrt{\frac{2}{1 - m^2}} e^{im\pi/2}$$

Pour déterminer s'il faut prendre $\sqrt{-1} = i$ ou $\sqrt{-1} = -i$, écrivons la formule d'Andersson pour $m = 0$ c'est-à-dire pour un angle de branchement nul. Alors $\phi^{(1/2)'}(m = 0) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} (ik_I + k_{II})$ (cf. (3.22), (3.23), (3.24) et l'expression (3.3) de \mathcal{A}) et $k_I^* - ik_{II}^* = k_I - ik_{II}$, d'où $\sqrt{-1} = i$ et l'expression finale des F.I.C. après branchement :

$$k_I^* - ik_{II}^* = -i\sqrt{2\pi(1 - m^2)} e^{-im\pi} \phi^{(1/2)'}(m) \quad (3.26)$$

On retrouve évidemment la même expression que Mouchrif et, du fait de l'universalité de l'opérateur $\mathbf{F}(\varphi)$ reliant les F.I.C. juste après branchement aux F.I.C. initiaux (cf. (1.4)), la même expression, aux notations près, que celle d'Amestoy et Leblond (1992).

3.3 Résolution du problème antiplan à l'ordre 1/2

Ce problème a été résolu par Sih (1965) et n'est repris ici que par souci de complétude.

Le problème antiplan correspond au problème (2.16) écrit pour $\vec{v}^{(1/2)} \equiv v_3^{(1/2)} \vec{e}_3$. Il s'écrit :

$$\begin{cases} \hat{\tau}_{3\alpha;\alpha}(v_3^{(1/2)}(\mathbf{y})\vec{e}_3) = 0 \text{ dans } \Omega^{int} \\ \hat{\tau}_{3\beta}(v_3^{(1/2)}(\mathbf{y})\vec{e}_3) \cdot n_\beta(\mathbf{y}) = 0 \text{ sur } \mathcal{F}^{int} \cup \mathcal{E}^{int} \\ v_3^{(1/2)}(\mathbf{y})\vec{e}_3 = k_{III} \vec{U}_{III}^{(1/2)}(y_1, y_2) + O(\rho^{-1/2}) \text{ pour } \rho = \sqrt{y_1^2 + y_2^2} \rightarrow +\infty \end{cases} \quad (3.27)$$

La solution étant proportionnelle à k_{III} , notons $F^{(1/2)}(Z)$ le potentiel complexe associé aux champs mécaniques par les relations:

$$\begin{aligned} \mu v_3^{(1/2)}(\mathbf{y}) &= k_{III} \operatorname{Re} F^{(1/2)}(Z) \\ \hat{\tau}_{13}(v_3^{(1/2)}(\mathbf{y})\vec{e}_3) - i\hat{\tau}_{23}(v_3^{(1/2)}(\mathbf{y})\vec{e}_3) &= k_{III} F^{(1/2)'}(Z) \end{aligned} \quad (3.28)$$

et $f^{(1/2)}(z) \equiv F^{(1/2)}(\omega(z))$ le même potentiel mais exprimé en fonction de la variable z .

3.3.1 Condition à la limite sur la fissure

La condition sur la fissure initiale et son extension s'écrit comme suit en fonction du potentiel $F^{(1/2)}(Z)$ et de l'abscisse curviligne S le long des lèvres de la fissure :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dS} \left(\operatorname{Im} F^{(1/2)}(Z) \right) &= 0 \text{ sur } Z_4 Z_1 Z_2 Z_3 Z_4 \\ \implies F^{(1/2)}(Z) - \overline{F^{(1/2)}(Z)} &= Cste \text{ sur } Z_4 Z_1 Z_2 Z_3 Z_4 \end{aligned}$$

ou encore dans le plan z :

$$f^{(1/2)}(t) = \overline{f^{(1/2)}(t)} + Cste \text{ pour } t \in \mathbb{R} \quad (3.29)$$

3.3.2 Condition à l'infini et résultat

On montre aisément que le potentiel $F_{III}(Z)$ associé au déplacement fondamental $\vec{U}_{III}^{(1/2)}$ vaut :

$$F_{III}(Z) = -2i \sqrt{\frac{Z}{2\pi}} \quad (3.30)$$

La condition à l'infini s'écrit donc :

$$F^{(1/2)}(Z) = F_{III}(Z) + O(Z^{-1/2}) \text{ pour } |Z| \rightarrow +\infty \quad (3.31)$$

Dans le plan complexe z elle devient :

$$f^{(1/2)}(z) = f_{III}(z) + 2 \sqrt{\frac{\mathcal{A}}{2\pi}} m + O(z^{-1}) \text{ avec } f_{III}(z) = 2 \sqrt{\frac{\mathcal{A}}{2\pi}} z \quad (3.32)$$

pour $|z| \rightarrow +\infty^5$. La différence $f^{(1/2)}(z) - f_{III}(z)$ est donc bornée à l'infini. En retranchant la quantité $f_{III}(t) = \overline{f_{III}(t)}$ de part et d'autre de l'égalité (3.29), on obtient :

$$f^{(1/2)}(t) - f_{III}(t) = \overline{f^{(1/2)}(t)} - \overline{f_{III}(t)} + Cste \text{ pour } t \in \mathbb{R} \quad (3.33)$$

Les termes de part et d'autre de l'égalité sont maintenant bornés à l'infini. De plus, il est clair que $f_{III}(z)$ est continu sur \mathbb{R} et $\bar{v}^{(1/2)}(\mathbf{y})$ étant continu au voisinage de la fissure, le potentiel $f^{(1/2)}(z)$ qui lui est directement lié l'est aussi. Par ailleurs, les fonctions sont bien analytiques sur Π^- . Toutes les hypothèses du lemme fondamental sont donc vérifiées par les fonctions de part et d'autre de l'égalité (3.33); ces fonctions sont donc constantes dans Π^- . La constante peut être déterminée par le comportement (3.32) de $f^{(1/2)}(z)$ pour $|z| \rightarrow +\infty$. On obtient ainsi :

$$f^{(1/2)}(z) = 2 \sqrt{\frac{\mathcal{A}}{2\pi}}(z + m) \quad (3.34)$$

3.3.3 Calcul de $F_{III,III}(\varphi)$

Nous pouvons en guise de vérification recalculer la composante $F_{III,III}(\varphi)$ de l'opérateur \mathbf{F} , valeur que l'on peut extraire par ailleurs du travail de Sih (1965).

On a d'une part, d'après (3.28₁) et (3.34) :

$$v_3^{(1/2)}(\mathbf{y}) = \frac{2}{\mu} k_{III} \sqrt{\frac{\mathcal{A}}{2\pi}} \operatorname{Re}(z + m) \quad (3.35)$$

D'autre part, on a d'après (2.22):

$$v_3^{(1/2)}(\mathbf{y}) \sim k_{III} F_{III,III}(\varphi) U_{III_3}^{(1/2)}(y_1^*, y_2^*) \text{ pour } \rho^* \rightarrow 0$$

où $\rho^* = |Z^*|$, $Z^* = e^{-im\pi}(\omega(z) - \omega(m))$. De plus, $U_{III_3}^{(1/2)}(y_1^*, y_2^*) = \frac{2}{\mu} \operatorname{Im} \sqrt{\frac{Z^*}{2\pi}}$. Or comme $\omega'(m) = 0$ (cf. (3.4)), on a pour $z \rightarrow m$:

$$Z^* = e^{-im\pi} \frac{\omega''(m)}{2} (z - m)^2 + O((z - m)^3)$$

Par conséquent :

$$v_3^{(1/2)}(\mathbf{y}) \sim k_{III} F_{III,III}(\varphi) \frac{2}{\mu} \operatorname{Im} \left[(z - m) \sqrt{\frac{e^{-im\pi} \omega''(m)}{4\pi}} \right] \quad (3.36)$$

En identifiant alors les termes dominants des comportements (3.35) et (3.36) de $v_3^{(1/2)}(\mathbf{y})$ pour $z \rightarrow m$, on obtient après simplification, en remplaçant $\omega''(m)$ par sa valeur et en déterminant le signe de la racine carrée grâce à la propriété évidente $F_{III,III}(\varphi = 0) = 1$:

$$F_{III,III}(\varphi) = \left(\frac{1 - m}{1 + m} \right)^{m/2} ; \quad \varphi = m\pi \quad (3.37)$$

résultat qui est bien identique à celui de Sih (1965).

⁵Ici encore, on n'a pas $F_{III}(Z) = f_{III}(z)$ pour tout z mais seulement pour $|z| \rightarrow +\infty$.

3.4 Résolution du problème plan à l'ordre 3/2

Comme le problème intérieur à l'ordre 1/2, le problème (2.48) dont nous allons extraire les composantes de l'opérateur $\mathbf{N}(\varphi)$, peut se décomposer en un problème plan et un problème antiplan. Grâce aux conditions d'homogénéité (cf. §2.6.3), nous pouvons nous contenter de résoudre le problème pour $\eta(x_3) = 1$. Le problème plan auquel nous nous intéressons dans la présente section consiste à trouver $\vec{v}_p^{(3/2)} \equiv v_{p1}^{(3/2)}\vec{e}_1 + v_{p2}^{(3/2)}\vec{e}_2$ vérifiant les équations (2.48), qui se réduisent dans ce cas à :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\tau}_{\beta\alpha;\alpha}(\vec{v}_p^{(3/2)}(\mathbf{y})) = -(\lambda + \mu) \frac{\partial v_{p3;\beta}^{(1/2)}}{\partial \eta}(\mathbf{y}) \text{ dans } \Omega^{int} \\ \hat{\tau}_{\alpha\beta}(\vec{v}_p^{(3/2)}(\mathbf{y})) \cdot n_\beta(\mathbf{y}) = -\lambda \frac{\partial v_{p3}^{(1/2)}}{\partial \eta}(\mathbf{y}) \cdot n_\alpha(\mathbf{y}) \text{ sur } \mathcal{F}^{int} \cup \mathcal{E}^{int} \\ \vec{v}_p^{(3/2)}(\mathbf{y}) = -A_{qp}(\varphi) \cdot \vec{\Omega}_{13} \cdot \vec{U}_q^{(1/2)}(\mathbf{y}) + o(\sqrt{\rho}) \text{ pour } \rho \rightarrow +\infty \end{array} \right. \quad (3.38)$$

où les dérivées par rapport à η sont à prendre en $\eta = 1$.

Les déplacements $\vec{v}_p^{(1/2)}$ et $\vec{U}_p^{(1/2)}(\mathbf{y})$ n'ayant pas de composantes selon \vec{e}_3 pour $p = I, II$, la seule solution non nulle correspond à $p = III$. La condition à l'infini s'écrit alors :

$$\vec{v}_{III}^{(3/2)}(\mathbf{y}) = -A_{III,III}(\varphi) \cdot U_{III_3}^{(1/2)}(\mathbf{y})\vec{e}_1 + o(\sqrt{\rho}) \stackrel{(2.65)}{=} F_{III,III}^2(\varphi) \cdot U_{III_3}^{(1/2)}(\mathbf{y})\vec{e}_1 + o(\sqrt{\rho}) \quad (3.39)$$

3.4.1 Equations d'équilibre

Posons :

$$P(Z) \equiv p(z) = -(\lambda + \mu) \frac{\partial v_{III_3}^{(1/2)}}{\partial \eta}(\mathbf{y}) \quad (3.40)$$

D'après (3.28₁) et (2.18), on a :

$$v_{III_3}^{(1/2)}(y_1, y_2; \eta) = \sqrt{\eta} \frac{1}{\mu} \operatorname{Re} F^{(1/2)}(Z/\eta)$$

où $F^{(1/2)}$ est le potentiel calculé au §3.3. En dérivant alors cette relation par rapport à η puis en prenant sa valeur pour $\eta = 1$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} P(Z) &= -\frac{\lambda + \mu}{2\mu} \operatorname{Re} \left[f^{(1/2)}(z) - 2 \frac{\omega(z)}{\omega'(z)} f^{(1/2)'}(z) \right] \\ &= -\frac{\lambda + \mu}{\mu} \sqrt{\frac{\mathcal{A}}{2\pi}} \operatorname{Re} \left(\frac{1 - m^2}{z - m} \right) \end{aligned} \quad (3.41)$$

Les forces de volume valant $-P_{;\beta}(Z)$, les équations d'équilibre conduisent à l'existence d'une fonction ϕ (fonction d'Airy) telle que $\hat{\tau}_{11} = P + \phi_{;22}$, $\hat{\tau}_{22} = P + \phi_{;11}$ et $\hat{\tau}_{12} = -\phi_{;12}$. Les équations de Beltrami impliquent alors, compte tenu de $\Delta P = 0$ (P étant la partie réelle d'une fonction

analytique), que $\Delta \Delta \phi = 0$. Le formalisme de Muskhelishvili est alors applicable à cette fonction d'Airy. Il existe donc deux potentiels complexes, que nous noterons $\Phi^{(3/2)}(Z)$ et $\Psi^{(3/2)}(Z)$, tels que :

$$\begin{aligned} \hat{\tau}_{11} \left(\overrightarrow{v_{III}}^{(3/2)}(\mathbf{y}) \right) + \hat{\tau}_{22} \left(\overrightarrow{v_{III}}^{(3/2)}(\mathbf{y}) \right) &= 2 \left[\Phi^{(3/2)'}(Z) + \overline{\Phi^{(3/2)'}}(Z) + P(Z) \right] \\ \hat{\tau}_{22} \left(\overrightarrow{v_{III}}^{(3/2)}(\mathbf{y}) \right) - \hat{\tau}_{11} \left(\overrightarrow{v_{III}}^{(3/2)}(\mathbf{y}) \right) + 2i\hat{\tau}_{12} \left(\overrightarrow{v_{III}}^{(3/2)}(\mathbf{y}) \right) &= 2 \left[\overline{Z\Phi^{(3/2)'}}(Z) + \Psi^{(3/2)'}(Z) \right] \end{aligned} \quad (3.42)$$

Soit \vec{n} la normale à une ligne paramétrée par une abscisse curviligne S croissante dans le sens du vecteur \vec{t} défini par $\vec{t} = \vec{e}_3 \wedge \vec{n}$, ces expressions impliquent alors que :

$$(\hat{\tau}_{1\alpha} + i\hat{\tau}_{2\alpha}) \left(\overrightarrow{v_{III}}^{(3/2)}(\mathbf{y}) \right) . n_\alpha = P(Z) . (n_1 + in_2) - i \frac{d}{dS} \left(\Phi^{(3/2)}(Z) + Z\overline{\Phi^{(3/2)'}}(Z) + \overline{\Psi^{(3/2)}(Z)} \right) \quad (3.43)$$

Dans le plan complexe z , on utilisera les potentiels complexes définis par $\phi^{(3/2)}(z) \equiv \Phi^{(3/2)}(Z)$ et $\psi^{(3/2)}(z) \equiv \Psi^{(3/2)}(Z)$.

3.4.2 Conditions aux limites sur la fissure

Les conditions aux limites (3.38₂) sur la fissure $\mathcal{F}^{int} \cup \mathcal{E}^{int}$ s'écrivent en utilisant la relation (3.43) et la définition (3.40) de $P(Z)$:

$$\frac{d}{dS} \left(\phi^{(3/2)}(Z) + Z\overline{\phi^{(3/2)'}}(Z) + \overline{\psi^{(3/2)}(Z)} \right) = (1 - 2\nu)P(Z) . (n_2 - in_1)$$

où S est l'abscisse curviligne sur la fissure orientée dans le sens $Z_4Z_1Z_2Z_3Z_4$ et \vec{n} la normale orientée de la fissure vers la matière.

Ecrivons alors cette relation dans le plan complexe z où la fissure correspond à l'axe des réels. On a $dS = |\omega'(t)|dt$. Or $|\omega'(t)|$ et $n_2 - in_1$ valent, pour les différentes parties de l'extension :

- Pour $t < -1$ (portion Z_4Z_1) : $|\omega'(t)| = \omega'(t); \quad n_2 - in_1 = -1$
- Pour $-1 < t < m$ (portion Z_1Z_2) : $|\omega'(t)| = e^{-im\pi}\omega'(t); \quad n_2 - in_1 = -e^{im\pi}$
- Pour $m < t < 1$ (portion Z_2Z_3) : $|\omega'(t)| = -e^{-im\pi}\omega'(t); \quad n_2 - in_1 = e^{im\pi}$
- Pour $1 < t$ (portion Z_3Z_4) : $|\omega'(t)| = -\omega'(t); \quad n_2 - in_1 = 1$

Le produit $|\omega'(t)|(n_2 - in_1)$ est donc égal à $-\omega'(t)$ sur tout l'axe des réels. La condition sur la fissure s'écrit donc finalement, compte tenu de (3.4) et (3.41) :

$$\frac{d}{dt} \left(\phi^{(3/2)}(t) + \frac{\omega(t)}{\omega'(t)} \overline{\phi^{(3/2)'}}(t) + \overline{\psi^{(3/2)}(t)} \right) = V(t) \text{ pour tout } t \in \mathbb{R} \quad (3.45)$$

avec :

$$V(z) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \mathcal{A}^{3/2}(1 - m^2) \left(\frac{z+1}{z-1} \right)^m \quad (3.46)$$

Posons :

$$\chi^{(3/2)}(z) \equiv \frac{e^{2im\pi} - 1}{2i\pi} \int_{-1}^1 \frac{d(Q(t)\overline{\phi^{(3/2)'(t)}})}{dt} \frac{dt}{t-z} \quad (3.47)$$

où le pôle m de $Q(t)$ est déplacé comme dans la définition de $\chi^{(1/2)}$ dans Π^- , en remplaçant m par $m^- \equiv m - i\varepsilon$ et en comprenant la définition comme la limite pour $\varepsilon \rightarrow 0^+$ (la convergence de cette intégrale sera démontrée plus tard). D'après la formule de Plemelj, on a :

$$(e^{2im\pi} - 1)I(t) \frac{d(Q(t)\overline{\phi^{(3/2)'(t)}})}{dt} = \chi^{(3/2)}(t^+) - \chi^{(3/2)}(t^-) = \overline{\chi^{(3/2)}(t^-)} - \chi^{(3/2)}(t^-)$$

En insérant ce résultat dans (3.45) en tenant compte de l'expression (3.5) de $\frac{\omega(t)}{\omega'(t)}$, on obtient la relation suivante sur \mathbb{R} :

$$\phi^{(3/2)'}(t) - \chi^{(3/2)}(t^-) - V(t) = -\frac{d[Q(t)\phi^{(3/2)'(t)}]}{dt} - \overline{\chi^{(3/2)}(t^-)} - \psi^{(3/2)'(t)} \quad (3.48)$$

Il nous reste à vérifier que les fonctions de part et d'autre de l'égalité satisfont bien les hypothèses du lemme.

3.4.3 Conditions à l'infini

En utilisant la relation (3.42)₁ et la condition à l'infini (3.39), on obtient le comportement suivant de $\text{Re}(\phi^{(3/2)'(z)}/\omega'(z))$ pour $|z| \rightarrow +\infty$:

$$\text{Re}\left(\frac{\phi^{(3/2)'(z)}}{\omega'(z)}\right) = \frac{1}{4} \left[F_{III,III}^2(\varphi) (\hat{\tau}_{11} + \hat{\tau}_{22}) (U_{III_3}^{(1/2)}(\mathbf{y}) \vec{e}_1) - 2P(Z) \right] + O(1/Z)$$

En calculant alors les contraintes associées à $U_{III_3}^{(1/2)}(\mathbf{y}) \vec{e}_1$, en remplaçant $F_{III,III}(\varphi)$ par son expression (3.37), puis en passant dans le plan complexe z et en remplaçant $P(Z) = p(z)$ par sa valeur donnée par (3.41), on obtient :

$$\text{Re}\left(\frac{\phi^{(3/2)'(z)}}{\omega'(z)}\right) = \frac{1}{4} \left[\frac{2\mathcal{A}(1-m^2)}{\sqrt{2\pi}} \frac{\lambda + \mu}{\mu} \text{Re}\left(\frac{1}{i\sqrt{Z}}\right) - 2P(Z) \right] + O(1/Z) = O\left(\frac{1}{Z}\right) = O\left(\frac{1}{z^2}\right)$$

Les termes d'ordre $O(1/\sqrt{Z})$ se sont donc éliminés entre eux. Comme la fonction $\Phi^{(3/2)'(Z)} = \phi^{(3/2)'(z)}/\omega'(z)$ est analytique, on peut montrer que sa partie imaginaire a le même comportement à l'infini que sa partie réelle (car elles vérifient les équations de Cauchy-Riemann). $\phi^{(3/2)'(z)}/\omega'(z)$ est donc d'ordre $O(1/z^2)$ et par suite :

$$\phi^{(3/2)'(z)} = O\left(\frac{1}{z}\right) \quad (3.49)$$

Ce qui implique en particulier que $\phi^{(3/2)'(z)}$ et $\frac{d[Q(z)\phi^{(3/2)'(z)}]}{dz}$ sont bien bornés à l'infini.

Par un raisonnement analogue utilisant la deuxième relation de (3.42), on montre que $\psi^{(3/2)'}(z)$ est elle aussi bornée à l'infini.

Par ailleurs, on a (pour $z \rightarrow +\infty$) :

$$V(z) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \mathcal{A}^{3/2}(1 - m^2) + O\left(\frac{1}{z}\right) \text{ et } \chi^{(3/2)}(z) = O\left(\frac{1}{z}\right) \quad (3.50)$$

3.4.4 Comportement des fonctions complexes sur l'axe des réels

Les résultats de cette section s'obtiennent de façon analogue à ceux de la section 3.2.3. On montre ainsi que $\phi^{(3/2)'}(z)$ est faiblement singulière en $z = \pm 1$ et indéfiniment dérivable en $z = m$. Notons que ceci assure la convergence de l'intégrale (3.47) définissant $\chi^{(3/2)}(z)$ en $t = \pm 1$ et en $t = m$ (car on a déplacé le pôle m dans Π^-) et sa faible singularité en $z = \pm 1$.

Par ailleurs, l'intégrale dans la définition de $\chi^{(3/2)}$ peut être remplacée par l'intégrale sur le demi-cercle C^+ . On montre ainsi la continuité de $\chi^{(3/2)}$ au point $z = m$. Le membre de gauche de l'équation (3.48) vérifie donc bien les hypothèses de faible singularité du lemme sur l'axe des nombres réels. L'égalité des deux membres sur \mathbb{R} assure le même résultat pour le membre de droite.

3.4.5 Application du lemme fondamental et résultats

Les fonctions de part et d'autre de l'égalité (3.48) sont bien analytiques dans Π^- . De plus, elles vérifient les autres hypothèses du lemme d'après les §3.4.3 et §3.4.4. On a donc :

$$\phi^{(3/2)'}(z) - \chi^{(3/2)}(z) - V(z) = Cste \text{ dans } \Pi^-$$

La constante peut être déterminée en examinant le comportement (3.49) et (3.50) des fonctions à l'infini et vaut $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \mathcal{A}^{3/2}(1 - m^2)$. Le résultat final s'ensuit :

$$\phi^{(3/2)'}(z) = \phi_0^{(3/2)'}(z) + \mathcal{L}\phi^{(3/2)'}(z) \quad (3.51)$$

où :

$$\phi_0^{(3/2)'}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \mathcal{A}^{3/2}(1 - m^2) \left[1 - \left(\frac{z+1}{z-1} \right)^m \right] \quad (3.52)$$

et \mathcal{L} est l'opérateur déjà défini en (3.24). De même que $\phi^{(1/2)'}(z)$, $\phi^{(3/2)'}(z)$ peut s'écrire sous forme de série :

$$\phi^{(3/2)'}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathcal{L}^n \phi_0^{(3/2)'}(z) \quad (3.53)$$

la convergence de la série étant à comprendre au sens de la norme $\|f\| = \sup_{z \in C^-} |(z^2 - 1)f(z)|$.

3.5 Expression de $N_{I,III}(\varphi)$ et $N_{II,III}(\varphi)$

La relation (2.61) reliant le champ de déplacements à la fonction $\tilde{\mathbf{N}}(\varphi)$ s'écrit de la façon suivante pour $p = III$:

$$\overrightarrow{v_{III}}^{(3/2)} = \tilde{N}_{qIII}(\varphi) \overrightarrow{U_q^*}^{(1/2)}(y_1^*, y_2^*) + F_{III,III}(\varphi) \cdot U_{III3}^{(1/2)}(y_1^*, y_2^*) \bar{e}_1^* + O(\rho^*) \quad (3.54)$$

pour $\rho^* = |Z^*| = |e^{-im\pi}(Z - e^{im\pi})| \rightarrow 0$.

Afin de relier les composantes de $\tilde{\mathbf{N}}(\varphi)$ au comportement des potentiels complexes pour $|Z^*| \rightarrow 0$, calculons les contraintes $\hat{\tau}_{11} + \hat{\tau}_{22}$ associées à chacun des membres de l'équation précédente. Le premier membre devient alors d'après (3.42₁) et (3.40):

$$\hat{\tau}_{11}(\overrightarrow{v_{III}}^{(3/2)}(\mathbf{y})) + \hat{\tau}_{22}(\overrightarrow{v_{III}}^{(3/2)}(\mathbf{y})) = 2 \left[\Phi^{(3/2)'}(Z) + \overline{\Phi^{(3/2)'}}(Z) - (\lambda + \mu) \frac{\partial v_{III3}^{(1/2)}}{\partial \eta}(\mathbf{y}) \right] \quad (3.55)$$

Or d'après (2.22), $v_{III3}^{(1/2)} \sim F_{III,III}(\varphi) U_{III3}^{(1/2)}(y_1^*, y_2^*)$ pour $\rho^* \rightarrow 0$. De plus, on a :

$$\frac{\partial U_{III3}^{(1/2)}(y_1^*, y_2^*)}{\partial y_1^*} = - \frac{\partial U_{III3}^{(1/2)}(y_1^*, y_2^*)}{\partial \eta}$$

Par conséquent, on obtient :

$$\begin{aligned} \hat{\tau}_{11}(\overrightarrow{v_{III}}^{(3/2)}(\mathbf{y})) + \hat{\tau}_{22}(\overrightarrow{v_{III}}^{(3/2)}(\mathbf{y})) = \\ 2 \left[\Phi^{(3/2)'}(Z) + \overline{\Phi^{(3/2)'}}(Z) + (\lambda + \mu) F_{III,III}(\varphi) \frac{\partial U_{III3}^{(1/2)}(y_1^*, y_2^*)}{\partial y_1^*} \right] + O(1) \end{aligned} \quad (3.56)$$

Quant au second membre de (3.54), on obtient en calculant les contraintes associées au champ de déplacement $U_{III3}^{(1/2)}(y_1^*, y_2^*) \bar{e}_1^*$ l'expression suivante :

$$(\hat{\tau}_{11} + \hat{\tau}_{22}) \left(U_{III3}^{(1/2)}(y_1^*, y_2^*) \bar{e}_1^* \right) = 2(\lambda + \mu) \frac{\partial U_{III3}^{(1/2)}}{\partial y_1^*} \quad (3.57)$$

En regroupant les deux précédents résultats, on constate que les termes en $\frac{\partial U_{III3}^{(1/2)}}{\partial y_1^*}$ s'éliminent à gauche et à droite de (3.54), et l'on obtient donc :

$$2 \left[\Phi^{(3/2)'}(Z) + \overline{\Phi^{(3/2)'}}(Z) \right] = \tilde{N}_{qIII}(\varphi) (\hat{\tau}_{11} + \hat{\tau}_{22}) \left(\overrightarrow{U_q^*}^{(1/2)}(y_1^*, y_2^*) \right) + O(1), \quad (3.58)$$

expression qui est identique à celle qui s'applique à un problème d'élasticité plane sans forces de volume, ni tractions sur les lèvres de la fissure, avec des F.I.C. valant $\tilde{N}_{qIII}(\varphi)$, $q = I, II$. La formule d'Andersson reste donc valable, d'où :

$$\tilde{N}_{I,III}(\varphi) - i\tilde{N}_{II,III}(\varphi) = -i\sqrt{2\pi(1-m^2)} e^{-im\pi} \phi^{(3/2)'}(m) \quad (3.59)$$

et d'après (2.66) :

$$N_{I,III}(\varphi) - iN_{II,III}(\varphi) = -i\sqrt{2\pi(1-m^2)}e^{-im\pi}\phi^{(3/2)'}(m) - \frac{2}{2-\nu} \left(\frac{1-m}{1+m}\right)^m [F_{I,II}(\varphi) - iF_{II,II}(\varphi)] \quad (3.60)$$

car selon Gao et Rice (1986) :

$$N_{I,III}(0) = N_{III,III}(0) = 0 \text{ et } N_{II,III}(0) = -\frac{2}{2-\nu} \quad (3.61)$$

3.6 Résolution du problème antiplan à l'ordre 3/2

Le problème antiplan consiste à trouver un champ de déplacements $\vec{v}^{(3/2)}$ n'ayant qu'une composante selon \vec{e}_3 , que nous noterons $v_3^{(3/2)}$, solution des équations (2.48) qui s'écrivent dans ce cas :

$$\left\{ \begin{array}{l} \widehat{\tau}_{3\alpha;\alpha}(\vec{v}^{(3/2)}(\mathbf{y})) = -(\lambda + \mu) \frac{\partial v_{\alpha;\alpha}^{(1/2)}}{\partial \eta}(\mathbf{y}) \text{ dans } \Omega^{int} \\ \widehat{\tau}_{3\beta}(\vec{v}^{(3/2)}(\mathbf{y})) \cdot n_{\beta}(\mathbf{y}) = -\mu \frac{\partial v_{\alpha}^{(1/2)}}{\partial \eta}(\mathbf{y}) \cdot n_{\alpha}(\mathbf{y}) \text{ sur } \mathcal{F}^{int} \cup \mathcal{E}^{int} \\ v_3^{(3/2)}(\mathbf{y}) = k_p A_{qp}(\varphi) \cdot U_{q_1}^{(1/2)}(\mathbf{y}) + o(\sqrt{\rho}) \text{ pour } \rho \rightarrow +\infty. \end{array} \right. \quad (3.62)$$

Grce aux conditions d'homogénéité (cf. §2.6.3), on peut supposer $\eta = 1$ et donc prendre les dérivées partielles par rapport à η en $\eta = 1$.

La solution du problème antiplan à l'ordre 1/2 n'engendre que des composantes de déplacements selon \vec{e}_3 , le champ $\vec{v}^{(1/2)}$ apparaissant dans les seconds membres des équations précédentes est donc la solution $\vec{v}^{(1/2)}(y_1, y_2; \eta)$ du problème plan à l'ordre 1/2 pour η quelconque, qui est reliée, grce aux conditions d'homogénéité, aux potentiels $\Phi^{(1/2)}(Z) = \phi^{(1/2)}(z)$ et $\Psi^{(1/2)}(Z) = \psi^{(1/2)}(z)$ (dont le premier a été calculé au §3.2) correspondant au cas $\eta = 1$.

3.6.1 Equations d'équilibre

Le but de cette section est d'écrire l'équation d'équilibre sous la forme " $\Delta[\dots] = 0$ " afin de pouvoir introduire un potentiel analytique complexe $F^{(3/2)}(Z)$ tel que $[\dots] = \text{Re}(F^{(3/2)}(Z))$.

Soient $\Phi^{(1/2)}(Z, \eta)$ et $\Psi^{(1/2)}(Z, \eta)$ les potentiels de Muskhelishvili associés aux déplacements $\vec{v}^{(1/2)}(y_1, y_2; \eta)$. On a alors d'après la loi de comportement :

$$\begin{aligned} 2(\lambda + \mu)v_{\alpha;\alpha}^{(1/2)}(y_1, y_2; \eta) &= (\widehat{\tau}_{11} + \widehat{\tau}_{22}) \left(\vec{v}^{(1/2)}(y_1, y_2; \eta) \right) \\ &= 4\text{Re} \left[\Phi^{(1/2)'}(Z, \eta) \right] \end{aligned} \quad (3.63)$$

De plus, on a la propriété suivante pour toute fonction analytique $f(Z)$:

$$4\text{Re}(f'(Z)) = \Delta \left(\text{Re}[\overline{Z}f(Z)] \right)$$

Par ailleurs, $\widehat{\tau}_{3\alpha}(\overline{v}^{(3/2)}(\mathbf{y})) = \mu v_{3;\alpha}^{(3/2)}(\mathbf{y})$. Par conséquent l'équation d'équilibre s'écrit aussi :

$$\Delta \left[\mu v_3^{(3/2)} + \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\overline{Z} \frac{\partial \Phi^{(1/2)}(Z, \eta)}{\partial \eta} \right) \right] = 0 \quad (3.64)$$

D'où l'existence d'un potentiel analytique complexe $F^{(3/2)}(Z)$ tel que :

$$\mu v_3^{(3/2)} = \operatorname{Re} \left[F^{(3/2)}(Z) - \frac{1}{2} \overline{Z} \frac{\partial \Phi^{(1/2)}(Z, \eta)}{\partial \eta} \right] \quad (3.65)$$

Quant aux contraintes, on peut vérifier qu'elles s'expriment en fonction de $F^{(3/2)}(Z)$ et $\Phi^{(1/2)}(Z, \eta)$ comme suit :

$$\begin{aligned} (\widehat{\tau}_{31} - i\widehat{\tau}_{32})(\overline{v}^{(3/2)}(\mathbf{y})) &= \mu (v_{3;1}^{(3/2)} - iv_{3;2}^{(3/2)}) \\ &= F^{(3/2)'}(Z) - \frac{1}{2} \overline{Z} \frac{\partial \Phi^{(1/2)'}}{\partial \eta}(Z, \eta) - \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi^{(1/2)}(Z, \eta)}{\partial \eta} \end{aligned} \quad (3.66)$$

Soit \vec{n} la normale à une ligne paramétrée par une abscisse curviligne S croissante dans le sens du vecteur \vec{t} défini par $\vec{t} = \vec{e}_3 \wedge \vec{n}$; le résultat précédent implique alors que :

$$\begin{aligned} (\widehat{\tau}_{31} \cdot n_1 + \widehat{\tau}_{32} \cdot n_2)(\overline{v}^{(3/2)}(\mathbf{y})) &= \frac{d(\operatorname{Im} F^{(3/2)}(Z))}{dS} \\ &\quad - \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\left(\overline{Z} \frac{\partial \Phi^{(1/2)'}}{\partial \eta}(Z, \eta) + \frac{\partial \Phi^{(1/2)}(Z, \eta)}{\partial \eta} \right) \cdot (n_1 + in_2) \right] \end{aligned} \quad (3.67)$$

3.6.2 Condition à la limite sur la fissure

Les tractions sur les lèvres de la fissure s'expriment en fonction de $F^{(3/2)}(Z)$ en appliquant l'expression (3.67) à ces lèvres. Nous choisirons, comme précédemment, la normale \vec{n} dirigée vers la matière et donc l'abscisse curviligne S dans le sens $Z_4 Z_1 Z_2 Z_3 Z_4$.

D'autre part, les tractions imposées sur les lèvres de la fissure (voir (3.62₂)) s'obtiennent en fonction des potentiels $\Phi^{(1/2)}(Z, \eta)$ et $\Psi^{(1/2)}(Z, \eta)$ grce à la relation (3.9₃) écrite pour $\overline{v}^{(1/2)}(y_1, y_2; \eta)$. On trouve finalement que la condition à la limite sur la fissure s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{d(\operatorname{Im} F^{(3/2)}(Z))}{dS} &= -\frac{1}{2} \operatorname{Im} \left[(n_2 + in_1) \left(2(1 - 2\nu) \frac{\partial \Phi^{(1/2)}(Z, \eta)}{\partial \eta} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2Z \frac{\partial \Phi^{(1/2)'}}{\partial \eta}(Z, \eta) - \frac{\partial \Psi^{(1/2)}(Z, \eta)}{\partial \eta} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.68)$$

Ecrivons alors cette relation dans le plan complexe z où la fissure correspond à l'axe des réels. On a $dS = |\omega'(t)| dt$ et les relations suivantes donnant, selon les différentes parties de

l'extension, $\omega(t)$ en fonction de $\overline{\omega(t)}$, $|\omega'(t)|$ en fonction de $\omega'(t)$ et $n_2 + in_1$:

- Pour $t < -1$: $\omega(t) = \overline{\omega(t)}$; $|\omega'(t)| = \omega'(t)$; $n_2 + in_1 = -1$
- Pour $-1 < t < m$: $\omega(t) = \overline{\omega(t)} e^{2im\pi}$; $|\omega'(t)| = e^{-im\pi} \omega'(t)$; $n_2 + in_1 = -e^{-im\pi}$
- Pour $m < t < 1$: $\omega(t) = \overline{\omega(t)} e^{2im\pi}$; $|\omega'(t)| = -e^{-im\pi} \omega'(t)$; $n_2 + in_1 = e^{-im\pi}$
- Pour $1 < t$: $\omega(t) = \overline{\omega(t)}$; $|\omega'(t)| = -\omega'(t)$; $n_2 + in_1 = 1$

(3.69)

On obtient ainsi finalement en posant $f^{(3/2)}(z) = F^{(3/2)}(Z)$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\text{Im} f^{(3/2)}(t) \right) &= \text{Im} W_1(t) \text{ pour } t \in \mathbb{R}, |t| > 1 \\ \frac{d}{dt} \left(\text{Im} f^{(3/2)}(t) \right) &= \text{Im} W_1(t) + W_2(t) \text{ pour } t \in \mathbb{R}, |t| < 1 \end{aligned}$$

ou encore, sous forme synthétique :

$$\frac{d}{dt} \left(\text{Im} f^{(3/2)}(t) \right) = \text{Im} W_1(t) + I(t) W_2(t) \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}, \quad (3.70)$$

la fonction $I(t)$ étant toujours la fonction caractéristique de l'intervalle $[-1, 1]$, et les fonctions $W_1(z)$ et $W_2(z)$ étant définies par :

$$\begin{aligned} W_1(z) &= \omega'(z) \left[(1 - 2\nu) \frac{\partial \Phi^{(1/2)}(Z, \eta)}{\partial \eta} + \frac{1}{2} \frac{\partial \Psi^{(1/2)}(Z, \eta)}{\partial \eta} + \omega(z) \frac{\partial \Phi^{(1/2)'}(Z, \eta)}{\partial \eta} \right] \\ W_2(z) &= \text{Im} \left\{ \omega'(z) (e^{-2im\pi} - 1) \left[(1 - 2\nu) \frac{\partial \Phi^{(1/2)}(Z, \eta)}{\partial \eta} + \omega(z) \frac{\partial \Phi^{(1/2)'}(Z, \eta)}{\partial \eta} \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.71)$$

Posons :

$$\Gamma(z) \equiv \frac{1}{2i\pi} \int_{-1}^1 W_2(t) \frac{dt}{t - z}, \quad (3.72)$$

intégrale dont nous discuterons la convergence plus tard. D'après la formule de Plemelj, la condition à la limite sur la fissure devient :

$$f^{(3/2)'}(t) - W_1(t) + 2i\Gamma(t) = \overline{f^{(3/2)'}(t) - W_1(t) + 2i\overline{\Gamma}(t)} \quad (3.73)$$

Il nous reste alors à regarder si l'intégrale $\Gamma(t)$ est bien définie et si les hypothèses du lemme fondamental sont vérifiées par cette égalité.

3.6.3 Calcul des dérivées $\frac{\partial \Phi^{(1/2)}(Z, \eta)}{\partial \eta}$, $\frac{\partial \Phi^{(1/2)'}(Z, \eta)}{\partial \eta}$ et $\frac{\partial \Psi^{(1/2)}(Z, \eta)}{\partial \eta}$

Les potentiels $\Phi^{(1/2)}(Z, \eta)$ et $\Psi^{(1/2)}(Z, \eta)$ sont, comme $\overline{v}^{(1/2)}(y_1, y_2; \eta)$, homogènes de degré 1/2 (cf. (2.17) et (3.9₃)). On en déduit les expressions suivantes des diverses dérivées par rapport

à η prises en $\eta = 1$, en fonction des potentiels de Muskhelishvili $\Phi^{(1/2)}(Z) = \phi^{(1/2)}(z)$ et $\Psi^{(1/2)}(Z) = \psi^{(1/2)}(z)$ correspondant à la solution pour $\eta = 1$:

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad \frac{\partial \Phi^{(1/2)}(Z, \eta)}{\partial \eta} &= \frac{1}{2} \Phi^{(1/2)}(Z) - Z \Phi^{(1/2)'}(Z) \\
 &= \frac{1}{2} \phi^{(1/2)}(z) - \frac{\omega(z)}{\omega'(z)} \phi^{(1/2)'}(z) \\
 \bullet \quad \frac{\partial \Phi^{(1/2)'}(Z, \eta)}{\partial \eta} &= -\frac{1}{2} \Phi^{(1/2)'}(Z) - Z \Phi^{(1/2)''}(Z) \\
 &= -\frac{1}{2\omega'(z)} \phi^{(1/2)'}(z) + \frac{\omega(z)\omega''(z)}{\omega'(z)^3} \phi^{(1/2)'}(z) - \frac{\omega(z)}{\omega'(z)^2} \phi^{(1/2)''}(z) \\
 \bullet \quad \frac{\partial \Psi^{(1/2)}(Z, \eta)}{\partial \eta} &= \frac{1}{2} \Psi^{(1/2)}(Z) - Z \Psi^{(1/2)'}(Z) \\
 &= \frac{1}{2} \psi^{(1/2)}(z) - \frac{\omega(z)}{\omega'(z)} \psi^{(1/2)'}(z)
 \end{aligned} \tag{3.74}$$

3.6.4 Comportement des fonctions au voisinage de z_1, z_2, z_3

En se servant des relations (3.74), du comportement du potentiel $\phi^{(1/2)'}(z)$ établi au §3.2.3 et de (3.4), on montre sans difficulté que $W_2(t)$ est faiblement singulière en $t = \pm 1$ et admet un pôle double en $t = m$. Comme pour $\chi^{(1/2)}$ et $\chi^{(3/2)}$, la définition de $\Gamma(z)$ doit donc être comprise comme la limite pour $\varepsilon \rightarrow 0^+$ de la même intégrale mais où l'on a remplacé le pôle double m par $m^- = m - i\varepsilon$. L'intégrale définissant $\Gamma(z)$ est par conséquent continue au point $z = m$. De plus, $W_2(t)$ étant faiblement singulière en $t = \pm 1$, $\Gamma(z)$ l'est également.

Par ailleurs, toujours en se servant de (3.74) et du §3.2.3, on montre que $W_1(z)$ est *faiblement singulière* en $z = \pm 1$. Par contre, en $z = m$ (c.à.d. en $Z = Z_2$) l'hypothèse de faible singularité n'est plus vérifiée. En effet les déplacements et $\Phi^{(1/2)}(Z)$ étant $O(\sqrt{|Z - Z_2|})$ pour $Z \rightarrow Z_2$, on a d'après (3.9₃) :

$$\Psi^{(1/2)}(Z) = -\bar{Z} \Phi^{(1/2)'}(Z) + O(\sqrt{|Z - Z_2|})$$

où le premier terme du membre de droite est $O(|Z - Z_2|^{-1/2})$.

En reportant ce résultat dans l'expression (3.71₁) de $W_1(z)$, et en utilisant (3.74), on obtient :

$$W_1(z) = \omega'(z) \Phi^{(1/2)''}(Z) \left(\frac{1}{2} - e^{2im\pi} \right) + O(1) \tag{3.75}$$

où $\omega'(z) \Phi^{(1/2)''}(Z) = O((z - m)^{-2})$ car $\Phi^{(1/2)''}(Z) = O((Z - Z_2)^{-3/2}) = O((z - m)^{-3})$ et $\omega'(z) = O(z - m)$ d'après (3.4).

De plus, le comportement de $F^{(3/2)'}(Z)$ s'obtient à partir de (3.66) sachant que $\frac{\partial \Phi^{(1/2)}(Z, \eta)}{\partial \eta}$ et les contraintes $\hat{\tau}_{3\alpha}$ se comportent comme $O(|Z - Z_2|^{-1/2})$; on a ainsi :

$$F^{(3/2)'}(Z) = \frac{e^{-im\pi}}{2} \frac{\partial \Phi^{(1/2)'}(Z, \eta)}{\partial \eta} + O((Z - Z_2)^{-1/2}) \tag{3.76}$$

Par passage au plan complexe z , on en déduit que :

$$f^{(3/2)'}(z) = -\frac{1}{2}\omega'(z)\Phi^{(1/2)''}(Z) + O(1) \quad (3.77)$$

où, ici encore, le premier terme du membre de droite est $O((z-m)^{-2})$.

Au voisinage du point $z = m$, le premier membre de l'équation (3.73) s'écrit donc :

$$f^{(3/2)'}(z) - W_1(z) + 2i\Gamma(z) = 2ie^{im\pi} \sin(m\pi)\omega'(z)\Phi^{(1/2)''}(Z) + O(1) \quad (3.78)$$

Le terme $e^{im\pi} \omega'(z)\Phi^{(1/2)''}(Z)$ étant une fonction analytique et se comportant comme $(z-m)^{-2}$ pour $z \rightarrow m$, il admet autour de ce point, un développement de Laurent de la forme suivante :

$$e^{im\pi} \omega'(z)\Phi^{(1/2)''}(Z) = \frac{C_{-2}}{(z-m)^2} + \frac{C_{-1}}{z-m} + O(1) \quad (3.79)$$

Nous verrons par la suite que la détermination des constantes C_{-2} et C_{-1} est inutile.

En écrivant alors (3.73) sous la forme suivante :

$$f^{(3/2)'}(t) - W_1(t) + 2i\Gamma(t) - 2i \sin(m\pi) \left(\frac{C_{-2}}{(t-m)^2} + \frac{C_{-1}}{t-m} \right) =$$

$$f^{(3/2)'}(t) - W_1(t) + 2i\bar{\Gamma}(t) + 2i \sin(m\pi) \left(\frac{\overline{C_{-2}}}{(t-m)^2} + \frac{\overline{C_{-1}}}{t-m} \right), \quad (3.80)$$

on obtient une égalité pour laquelle les fonctions vérifient les hypothèses de faible singularité du lemme fondamental sur l'axe des réels.

3.6.5 Conditions à l'infini et résultats

Pour pouvoir appliquer le lemme fondamental, il nous reste à vérifier que chacun des membres de l'égalité (3.80) est bien borné à l'infini.

Il est clair que $\Gamma(z) = O(1/z)$ pour $|z| \rightarrow +\infty$.

Pour déterminer le comportement de $W_1(z)$ pour $|z| \rightarrow +\infty$, la première idée est de déterminer le comportement de $\frac{\partial \Phi^{(1/2)}(Z, \eta)}{\partial \eta}$ et de $\frac{\partial \Psi^{(1/2)}(Z, \eta)}{\partial \eta}$ en écrivant ces termes en fonction de $\Phi^{(1/2)}(Z)$ et de $\Psi^{(1/2)}(Z)$ grce aux relations (3.74), puis d'utiliser les relations (3.16) donnant le comportement des potentiels $\Phi^{(1/2)}(Z)$ et $\Psi^{(1/2)}(Z)$ pour $|Z| \rightarrow +\infty$. Mais ces relations ne nous donnent pas ces potentiels à un ordre suffisant pour pouvoir déterminer le terme constant du développement (nécessaire à la détermination de la constante du lemme fondamental).

D'après (2.21) et (2.19), le déplacement plan d'ordre 1/2 se comporte de la façon suivante à l'infini :

$$\vec{v}^{(1/2)}(y_1, y_2; \eta) = k_p \vec{U}_p^{(1/2)}(y_1, y_2) + \eta k_p A_{qp}(\varphi) \cdot \vec{U}_{q;1}^{(1/2)}(y_1, y_2) + O\left(\frac{1}{\rho}\right) \quad (3.81)$$

On peut montrer en utilisant les relations de définition des potentiels de Muskhelishvili que les potentiels associés aux déplacements $\vec{U}_{q;1}^{(1/2)}$ ($q = I, II$) s'obtiennent à partir des potentiels $\Phi_p(Z)$ et $\Psi_p(Z)$ (introduits au §3.2.2) associés aux déplacements $\vec{U}_q^{(1/2)}$, par les relations suivantes :

$$\Phi\left(\vec{U}_{q;1}^{(1/2)}\right) = \Phi'_q(Z) \text{ et } \Psi\left(\vec{U}_{q;1}^{(1/2)}\right) = \Phi'_q(Z) + \Psi'_q(Z) \quad (3.82)$$

Par conséquent, les potentiels de Muskhelishvili $\Phi^{(1/2)}(Z, \eta)$ et $\Psi^{(1/2)}(Z, \eta)$ associés aux déplacements $\vec{v}^{(1/2)}(y_1, y_2; \eta)$ se comportent comme suit pour $|Z| \rightarrow +\infty$:

$$\begin{aligned} \Phi^{(1/2)}(Z, \eta) &= k_p \Phi_p(Z) + \eta k_p A_{qp}(\varphi) \Phi'_q(Z) + O\left(\frac{1}{Z}\right) \\ \Psi^{(1/2)}(Z, \eta) &= k_p \Psi_p(Z) + \eta k_p A_{qp}(\varphi) (\Phi'_q(Z) + \Psi'_q(Z)) + O\left(\frac{1}{Z}\right) \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi^{(1/2)}(Z, \eta)}{\partial \eta} &= k_p A_{qp}(\varphi) \Phi'_q(Z) + O\left(\frac{1}{Z}\right) \\ \frac{\partial \Psi^{(1/2)}(Z, \eta)}{\partial \eta} &= k_p A_{qp}(\varphi) (\Phi'_q(Z) + \Psi'_q(Z)) + O\left(\frac{1}{Z}\right) \end{aligned} \quad (3.83)$$

et, par dérivation par rapport à Z :

$$\frac{\partial \Phi^{(1/2)'}(Z, \eta)}{\partial \eta} = k_p A_{qp}(\varphi) \Phi''_q(Z) + O\left(\frac{1}{Z^2}\right) \quad (3.84)$$

Il suffit alors d'injecter ces trois dernières équations dans l'expression (3.71₁) de $W_1(z)$, de remplacer les potentiels $\Phi_p(Z)$ et $\Psi_p(Z)$ par leur valeur, de passer au plan complexe z (pour lequel on a $O(1/\sqrt{Z}) = O(1/z)$ pour $|z| \rightarrow +\infty \Leftrightarrow |Z| \rightarrow +\infty$), pour obtenir *le comportement de $W_1(z)$ à l'ordre $O(1)$* .

La condition à l'infini (3.62₃) du présent problème peut s'écrire par définition des potentiels de Muskhelishvili $\Phi_q(Z)$ et $\Psi_q(Z)$ associés aux champs $\vec{U}_q^{(1/2)}$ ($q = I, II$) de la façon suivante :

$$2\mu\nu v_3^{(3/2)} = k_p A_{qp} \operatorname{Re} \left[(3 - 4\nu) \Phi_q(Z) - Z \overline{\Phi'_q(Z)} - \overline{\Psi_q(Z)} + o(\sqrt{Z}) \right] \quad (3.85)$$

D'après la définition (3.65) de la fonction complexe $f^{(3/2)}(z) = F^{(3/2)}(Z)$ et le comportement à l'infini de $\frac{\partial \Phi^{(1/2)}(Z, \eta)}{\partial \eta}$ (cf. (3.83₁)), on obtient alors :

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} f^{(3/2)}(z) &= k_p A_{qp} \operatorname{Re} \left[(3 - 4\nu) \Phi_q(Z) - \Psi_q(Z) + o(\sqrt{Z}) \right] \\ \Rightarrow 2 f^{(3/2)}(z) &= k_p A_{qp} [(3 - 4\nu) \Phi_q(Z) - \Psi_q(Z)] + C + o(\sqrt{Z}) \end{aligned}$$

où C est une constante imaginaire pure. D'où :

$$2 f^{(3/2)}(z) = k_p A_{qp} [(3 - 4\nu) \Phi_q(Z) - \Psi_q(Z)] + o(\sqrt{Z}) \quad (3.86)$$

et par suite on obtient facilement le comportement de $f^{(3/2)'}(z)$.

En regroupant alors les divers comportements obtenus, on obtient pour $|z| \rightarrow +\infty$:

$$f^{(3/2)'}(z) - W_1(z) = \sqrt{\frac{2\mathcal{A}}{\pi}} k_p A_{IIp} + o(1) \quad (3.87)$$

Les membres de l'équation (3.80) vérifient donc toutes les conditions du lemme fondamental. Par conséquent, en déterminant la constante grce aux comportements des fonctions à l'infini, on voit que $f^{(3/2)'}(z)$ vaut :

$$f^{(3/2)'}(z) = \sqrt{\frac{2\mathcal{A}}{\pi}} k_p A_{IIp} + W_1(z) - 2i\Gamma(z) + 2i \sin(m\pi) \left(\frac{C_{-2}}{(t-m)^2} + \frac{C_{-1}}{t-m} \right) \quad (3.88)$$

3.7 Calcul de $N_{III,I}(\varphi)$ et de $N_{III,II}(\varphi)$

3.7.1 Expression de $\tilde{N}_{III,I}(\varphi)$ et de $\tilde{N}_{III,II}(\varphi)$

D'après l'équation (2.61) écrite pour $p = I, II$ et la définition (3.65) de $F^{(3/2)}(Z)$, on a pour $\rho^* \rightarrow 0$:

$$\operatorname{Re} \left[F^{(3/2)}(Z) - \frac{1}{2} \bar{Z} \frac{\partial \Phi^{(1/2)}(Z, \eta)}{\partial \eta} \right] = \mu \left[k_p \tilde{N}_{IIIp}(\varphi) U_{III_3}^{(1/2)}(y_1^*, y_2^*) - k_p^* U_{p_1}^{(1/2)}(y_1^*, y_2^*) \right] + O(\rho^*)$$

En exprimant alors les déplacements fondamentaux d'ordre 1/2 en fonction des potentiels complexes Φ_p, Ψ_p (cf. (3.13) et (3.14)) et F_{III} (cf. (3.30)), on obtient :

$$k_p \tilde{N}_{IIIp}(\varphi) \cdot \operatorname{Re} \left(-2i \sqrt{\frac{Z^*}{2\pi}} \right) = \operatorname{Re} \left\{ F^{(3/2)}(Z) - \frac{\bar{Z}}{2} \frac{\partial \Phi^{(1/2)}(Z, \eta)}{\partial \eta} + \sqrt{\frac{Z^*}{2\pi}} \left[\left(\frac{5}{4} - 2\nu \right) k_I^* + i \left(2\nu - \frac{9}{4} \right) k_{II}^* \right] - \frac{\bar{Z}^*}{4\sqrt{2\pi Z^*}} (k_I^* - i k_{II}^*) \right\} \quad (3.89)$$

où la racine carrée $\sqrt{Z^*}$ est définie par (3.15). Son développement en puissances de $z - m$ s'écrit donc (d'après (3.7) et puisque $z \in \Pi^-$ implique que $\operatorname{Arg}(z - m) \in [-\pi, 0]$) :

$$\sqrt{Z^*} = \frac{i}{\sqrt{1-m^2}} (z - m) + O((z - m)^2) \quad (3.90)$$

Pour pouvoir extraire $\tilde{N}_{IIIp}(\varphi)$ de l'équation (3.89), il va falloir déterminer le comportement de $F^{(3/2)}(Z) - \frac{1}{2} \bar{Z} \frac{\partial \Phi^{(1/2)}(Z, \eta)}{\partial \eta}$ quand $|Z^*| \rightarrow 0$. Pour ce faire écrivons que :

$$F^{(3/2)}(Z) - \frac{1}{2} \bar{Z} \frac{\partial \Phi^{(1/2)}(Z, \eta)}{\partial \eta} = \left[F^{(3/2)}(Z) - \frac{e^{-im\pi}}{2} \frac{\partial \Phi^{(1/2)}(Z, \eta)}{\partial \eta} \right] - \frac{\bar{Z} - e^{-im\pi}}{2} \frac{\partial \Phi^{(1/2)}(Z, \eta)}{\partial \eta} \quad (3.91)$$

Le comportement du deuxième terme s'obtient en remarquant que pour $\rho^* \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned}\Phi^{(1/2)}(Z) &= e^{im\pi} k_p^* \Phi_p(Z^*) + O(\rho^*) \\ &= e^{im\pi} (k_I^* - ik_{II}^*) \sqrt{\frac{Z^*}{2\pi}} + O(\rho^*),\end{aligned}$$

la multiplication par $e^{im\pi}$ provenant du fait que les déplacements ont le comportement habituel dans le repère adapté à la pointe de l'extension, repère obtenu par une rotation du repère de départ d'angle $m\pi$. D'après (3.74₁), on obtient alors :

$$\frac{\partial \Phi^{(1/2)}(Z, \eta)}{\partial \eta} = -e^{im\pi} \frac{1}{2\sqrt{2\pi Z^*}} (k_I^* - ik_{II}^*) + O(1) \quad (3.92)$$

Par conséquent, $\frac{\partial \Phi^{(1/2)}(Z, \eta)}{\partial \eta}$ est d'ordre $O(1/\sqrt{Z^*})$. De plus, en prenant la primitive de (3.76), on montre qu'il en est de même pour $F^{(3/2)}(Z)$, mais que la différence $F^{(3/2)}(Z) - \frac{e^{-im\pi}}{2} \frac{\partial \Phi^{(1/2)}(Z, \eta)}{\partial \eta}$ est d'ordre $O(\sqrt{Z^*})$ (en négligeant le mouvement de corps rigide). En passant dans le plan complexe z et en exprimant $\sqrt{Z^*}$ en fonction de $z - m$ grce à (3.90), on obtient :

$$\begin{aligned}F^{(3/2)}(Z) - \frac{e^{-im\pi}}{2} \frac{\partial \Phi^{(1/2)}(Z, \eta)}{\partial \eta} = \\ \left[a_0 \left(f^{(3/2)'}(z), m \right) - \frac{e^{-im\pi}}{2} a_0 \left(\omega'(z) \frac{\partial \Phi^{(1/2)'}}{\partial \eta}(\omega(z), \eta), m \right) \right] (z - m) + O((z - m)^2)\end{aligned} \quad (3.93)$$

où la notation $a_n(f(z), z_0)$ désigne le coefficient du terme en $(z - z_0)^n$ dans le développement en série de Laurent de la fonction f autour du point z_0 .

En reportant alors (3.91), (3.92) et (3.93) dans (3.89), en utilisant (3.90) pour exprimer $\sqrt{Z^*}$ en fonction de $z - m$, puis en simplifiant par $z - m$, on obtient :

$$\begin{aligned}k_p \tilde{N}_{IIIp}(\varphi) &= \sqrt{\frac{\pi(1 - m^2)}{2}} \left[a_0 \left(f^{(3/2)'}(z), m \right) - \frac{e^{-im\pi}}{2} a_0 \left(\omega'(z) \frac{\partial \Phi^{(1/2)'}}{\partial \eta}(\omega(z), \eta), m \right) \right] \\ &\quad + \left(\frac{5}{8} - \nu \right) ik_I^* - \left(\nu - \frac{9}{8} \right) k_{II}^*\end{aligned} \quad (3.94)$$

D'après l'expression (3.88) de $f^{(3/2)'}$ (z) et compte tenu de (3.71₁), il nous faut donc calculer $a_0 \left(\omega'(z) \frac{\partial \Phi^{(1/2)'}}{\partial \eta}(\omega(z), \eta), m \right)$, $a_0 \left(\omega'(z) \frac{\partial \Phi^{(1/2)'}}{\partial \eta}(y_3), m \right)$, $a_0 \left(\omega'(z) \omega(z) \frac{\partial \Phi^{(1/2)'}}{\partial \eta}(\omega(z), \eta), m \right)$, $a_0 \left(\omega'(z) \frac{\partial \Psi^{(1/2)'}}{\partial \eta}(\omega(z), \eta), m \right)$ et $\Gamma(m)$.

3.7.2 Calcul des quantités $a_0(\dots)$

Pour obtenir les quantités faisant intervenir $\Phi^{(1/2)}(Z)$, nous nous ramenons aux fonctions $\phi^{(1/2)}(z)$ grce aux relations (3.74), puis nous cherchons le terme constant du développement des divers termes quand $z \rightarrow m$. Pour cela, nous utilisons le fait que $\phi^{(1/2)}(z)$ est indéfiniment dérivable en $z = m$ (cf. §3.2.3) et le développement (3.7) de $\omega(z)$. Nous obtenons ainsi :

$$\begin{aligned} a_0 \left(\omega'(z) \frac{\partial \Phi^{(1/2)'}}{\partial \eta}(\omega(z), \eta), m \right) &= \frac{e^{im\pi}}{2\omega''^2(m)} \left[\frac{\omega^{(4)}(m)}{3} - \frac{\omega^{(3)}(m)}{2\omega''(m)} \right] \phi^{(1/2)'}(m) \\ &\quad + \frac{e^{im\pi}}{2} \left[\frac{\omega^{(3)}(m)}{\omega''^2(m)} \phi^{(1/2)''}(m) - \frac{\phi^{(1/2)'''}}{\omega''(m)}(m) \right] \\ a_0 \left(\omega'(z) \frac{\partial \Phi^{(1/2)}}{\partial \eta}(\omega(z), \eta), m \right) &= -e^{im\pi} \phi^{(1/2)'}(m) \\ a_0 \left(\omega'(z)\omega(z) \frac{\partial \Phi^{(1/2)'}}{\partial \eta}(\omega(z), \eta), m \right) &= e^{im\pi} a_0 \left(\omega'(z) \frac{\partial \Phi^{(1/2)'}}{\partial \eta}(\omega(z), \eta), m \right) + \frac{e^{im\pi}}{2} \phi^{(1/2)'}(m) \end{aligned} \quad (3.95)$$

Pour obtenir $a_0 \left(\omega'(z) \frac{\partial \Psi^{(1/2)}}{\partial \eta}(\omega(z), \eta), m \right)$, nous allons, comme ci-dessus, utiliser la relation (3.74₃) pour nous ramener à la fonction $\psi^{(1/2)}(z)$, puis relier le comportement de cette fonction pour $z \rightarrow m$ à celui de $\phi^{(1/2)}(z)$. Premièrement, $\Phi^{(1/2)'}(Z) = \phi^{(1/2)'}/\omega'(z)$ étant d'ordre $O(1/(z-m))$, alors que $v^{(1/2)}$ et $\Phi^{(1/2)}(Z)$ sont continus en m , $\psi^{(1/2)}(z)$ est d'ordre $O(1/(z-m))$ d'après (3.9₃). Par conséquent, $\psi^{(1/2)}(z)$ admet un développement de la forme suivante :

$$\psi^{(1/2)}(z) = \frac{\beta_{-1}}{z-m} + \beta_0 + \beta_1(z-m) + O((z-m)^2)$$

On en déduit que :

$$a_0 \left(\omega'(z) \frac{\partial \Psi^{(1/2)}}{\partial \eta}(y_3), m \right) = \beta_{-1}\omega''(m) - \beta_1\omega(m)$$

Déterminons alors les coefficients β_{-1} et β_1 en fonction de $\phi^{(1/2)}(z)$. Les développements de $\phi^{(1/2)}(z)$ et de $\psi^{(1/2)}(z)$ doivent tre valables au voisinage de la pointe de l'extension, et en particulier sur les livres de l'extension. Ils doivent donc vérifier la condition à la limite (3.10) écrite pour $|t| < 1$, ce qui implique, compte tenu de (3.7) et du fait que $\phi^{(1/2)}$ est indéfiniment différentiable en m :

$$\begin{aligned} \beta_{-1} &= e^{-2im\pi} \frac{1-m^2}{2} \phi^{(1/2)'}(m) \\ \beta_1 &= -\overline{\phi^{(1/2)'}}(m) - \frac{1}{2} e^{-2im\pi} \phi^{(1/2)'}(m) - e^{-2im\pi} m \phi^{(1/2)''}(m) + e^{-2im\pi} \frac{1-m^2}{4} \phi^{(1/2)'''}(m) \end{aligned}$$

et par suite :

$$\begin{aligned}
 a_0 \left(\omega'(z) \frac{\partial \Psi^{(1/2)}(\omega(z), \eta)}{\partial \eta}, m \right) &= \omega(m) \overline{\phi^{(1/2)'(m)}} + \frac{1}{2} e^{-2im\pi} \left[\omega(m) + (1 - m^2) \omega''(m) \right] \phi^{(1/2)'(m)} \\
 &\quad + e^{-2im\pi} m \omega(m) \phi^{(1/2)''(m)} - e^{-2im\pi} \frac{1 - m^2}{4} \omega(m) \phi^{(1/2)'''(m)}
 \end{aligned} \tag{3.96}$$

En remplaçant $f^{(3/2)'}$ par son expression (3.88) et en reportant (3.95) et (3.96) dans (3.94), on obtient :

$$\begin{aligned}
 k_p \tilde{N}_{IIIp}(\varphi) &= \left(\frac{5}{8} - \nu \right) i k_I^* + \left(\frac{9}{8} - \nu \right) k_{II}^* + \sqrt{\frac{(1 - m^2)\pi}{2}} \left\{ \sqrt{\frac{2\mathcal{A}}{\pi}} k_p A_{IIIp} - 2i\Gamma(m) \right. \\
 &\quad + \left[\left(2\nu - \frac{1}{2} \right) e^{im\pi} - \frac{1}{4} e^{-im\pi} \right] \phi^{(1/2)'(m)} + \frac{1}{2} e^{im\pi} \overline{\phi^{(1/2)'(m)}} \\
 &\quad \left. + i \sin(m\pi) \left[\frac{1 - m^2}{2} \phi^{(1/2)'''(m)} - 2m \phi^{(1/2)''(m)} \right] \right\}
 \end{aligned} \tag{3.97}$$

Il ne nous reste donc qu'à déterminer $\Gamma(m)$...

3.7.3 Calcul de $\Gamma(m)$

Nous avons vu au §3.6.4 que $\Gamma(z)$ est continu pour $z \rightarrow m$; par conséquent $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \Gamma(m^-) = \Gamma(m)$, $m^- = m - i\varepsilon$. Or, en remplaçant $W_2(t)$ par son expression (3.71₂), les dérivées partielles $\frac{\partial \Phi^{(1/2)}(Z, \eta)}{\partial \eta}$ et $\frac{\partial \Phi^{(1/2)'(Z, \eta)}(Z, \eta)}{\partial \eta(y_3)}$ par leur expression (3.74₁) et (3.74₂) en fonction de $\phi^{(1/2)}(t)$, puis en intégrant par parties, on obtient :

$$\begin{aligned}
 \Gamma(m^-) &= \frac{\mathcal{A}}{i\pi} \sin(m\pi) \left\{ \int_{-1}^1 \frac{1 - t^2}{t - m^-} \left(\frac{1 + t}{1 - t} \right)^m \left[-3\nu \operatorname{Re} \left(\phi^{(1/2)'(t)} \right) \right] dt \right. \\
 &\quad \left. + \int_{-1}^1 \frac{1 - t^2}{(t - m^-)^2} \left(\frac{1 + t}{1 - t} \right)^m \operatorname{Re} \left(\frac{2\nu - 1}{2} \phi^{(1/2)}(t) + \frac{\omega(t)}{\omega'(t)} \phi^{(1/2)'(t)} \right) dt \right\}
 \end{aligned}$$

On écrit alors la suite d'égalités suivante :

$$\begin{aligned}
 &2 \int_{-1}^1 \frac{1 - t^2}{t - m^-} \left(\frac{1 + t}{1 - t} \right)^m \operatorname{Re} \left(\phi^{(1/2)'(t)} \right) dt \\
 &= \int_{-1}^1 \frac{1 - t^2}{t - m^-} \left(\frac{1 + t}{1 - t} \right)^m \phi^{(1/2)'(t)} dt + \int_{-1}^1 \frac{1 - t^2}{t - m^-} \left(\frac{1 + t}{1 - t} \right)^m \overline{\phi^{(1/2)'(t)}} dt \quad (\bar{t} = t) \\
 &= -2i\pi a_{-1} \left(\frac{1 - t^2}{t - m} \left(\frac{1 + t}{1 - t} \right)^m \phi^{(1/2)'(t), m} \right) \\
 &\quad + \int_{C^-} \frac{1 - t^2}{t - m} \left(\frac{1 + t}{1 - t} \right)^m \phi^{(1/2)'(t)} dt + \int_{C^+} \frac{1 - t^2}{t - m} \left(\frac{1 + t}{1 - t} \right)^m \overline{\phi^{(1/2)'(t)}} dt \quad (\text{théorème des résidus}) \\
 &= -2i\pi a_{-1} \left(\frac{1 - t^2}{t - m} \left(\frac{1 + t}{1 - t} \right)^m \phi^{(1/2)'(t), m} \right) \\
 &\quad + 2 \operatorname{Re} \left[\int_{C^+} \frac{1 - t^2}{t - m} \left(\frac{1 + t}{1 - t} \right)^m \overline{\phi^{(1/2)'(t)}} dt \right]
 \end{aligned}$$

et l'on fait de même pour la deuxième intégrale apparaissant dans l'expression de $\Gamma(m^-)$. On obtient ainsi des expressions dans lesquelles on peut remplacer m^- par m par passage à la limite $\varepsilon \rightarrow 0^+$. On obtient alors :

$$\begin{aligned} \Gamma(m) = & -\mathcal{A} \sin(m\pi) a_{-1} \left(\frac{1-t^2}{t-m} \left(\frac{1+t}{1-t} \right)^m \left[-3\nu \phi^{(1/2)'}(t) \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{t-m} \left(\frac{2\nu-1}{2} \phi^{(1/2)}(t) + \frac{\omega(t)}{\omega'(t)} \phi^{(1/2)'}(t) \right) \right], m \right) \\ & + \frac{\mathcal{A}}{i\pi} \sin(m\pi) \operatorname{Re}(e^{im\pi} I) \end{aligned}$$

où :

$$I = \int_{C^+} \frac{1-t^2}{t-m} \left(\frac{t+1}{t-1} \right)^m \left[\left(\frac{t^2-1}{2(t-m)^2} - 3\nu \right) \overline{\phi^{(1/2)'}}(t) + \frac{2\nu-1}{2(t-m)} \overline{\phi^{(1/2)}}(t) \right] dt \quad (3.98)$$

Le résidu se calcule de façon analogue aux termes $a_0(\dots)$ évalués au §3.7.2 et l'on obtient finalement :

$$\begin{aligned} \Gamma(m) = & \sin(m\pi) \left\{ \left(2\nu - \frac{1}{2} \right) \phi^{(1/2)'}(m) - m \phi^{(1/2)''}(m) + \frac{1-m^2}{4} \phi^{(1/2)'''}(m) \right\} \\ & + \frac{\mathcal{A}}{i\pi} \sin(m\pi) \operatorname{Re}(e^{im\pi} I) \end{aligned} \quad (3.99)$$

On en déduit, *via* (3.97), la valeur des fonctions $\tilde{N}_{IIIp}(\varphi)$:

$$\begin{aligned} k_p \tilde{N}_{IIIp}(\varphi) = & \left(\frac{5}{8} - \nu \right) i k_I^* + \left(\frac{9}{8} - \nu \right) k_{II}^* + \sqrt{\frac{(1-m^2)\pi}{2}} \\ & \times \left\{ \sqrt{\frac{2\mathcal{A}}{\pi}} k_p A_{IIIp} + \left(2\nu - \frac{3}{4} \right) e^{-im\pi} \phi^{(1/2)'}(m) \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} e^{im\pi} \overline{\phi^{(1/2)'}}(m) - \frac{2\mathcal{A}}{\pi} \sin(m\pi) \operatorname{Re}(e^{im\pi} I) \right\} \end{aligned} \quad (3.100)$$

On remarque que les termes en $\phi^{(1/2)''}(m)$ et $\phi^{(1/2)'''}(m)$ se sont éliminés et que $k_p \tilde{N}_{IIIp}(\varphi)$ ne dépend donc que de $\phi^{(1/2)'}(m)$, que l'on peut exprimer en fonction de k_I^* et de k_{II}^* grce à la relation (3.26).

3.7.4 Expression finale de $k_p N_{IIIp}(\varphi)$

En utilisant la nullité de $F_{III,I}(\varphi)$, $F_{III,II}(\varphi)$ (cf. Sih, 1965), $N_{III,I}(0)$ et $N_{III,III}(0)$ (cf. Gao et Rice, 1986), on voit que l'expression (2.66) implique que :

$$N_{IIIp}(\varphi) = \tilde{N}_{IIIp}(\varphi) + F_{III,III}(\varphi) \cdot N_{III,II}(0) \cdot (\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F})_{IIIp}(\varphi) \quad (3.101)$$

La fonction $F_{III,III}(\varphi)$ est donnée par (3.37) et d'après Gao et Rice (1986) :

$$N_{III,II}(0) = \frac{2(1-\nu)}{2-\nu} \quad (3.102)$$

d'où, d'après (3.100) :

$$k_p N_{IIIp}(\varphi) = k_{II}^* + \frac{\nu}{2-\nu} \left(\frac{1-m}{1+m} \right)^{m/2} k_p A_{IIp} - \sqrt{\frac{2}{\pi(1-m^2)}} \left(\frac{1-m}{1+m} \right)^m \sin(m\pi) \operatorname{Re} \left(e^{im\pi} I \right) \quad (3.103)$$

où l'on rappelle que l'intégrale I est donnée par (3.98).

Par une intégration par parties, on peut réécrire cette intégrale en fonction de $\overline{\phi^{(1/2)}}(t)$ uniquement; on obtient ainsi :

$$I = - \int_{C^+} \left(\frac{t+1}{t-1} \right)^m \left[6\nu + \left(2\nu + \frac{5}{2} \right) \frac{1-t^2}{(t-m)^2} + m \frac{1-t^2}{(t-m)^3} + \frac{3(1-t^2)^2}{2(t-m)^4} \right] \overline{\phi^{(1/2)}}(t) dt \quad (3.104)$$

3.8 Valeurs de l'opérateur $\mathbf{N}(\varphi)$

3.8.1 Développement limité de l'opérateur $\mathbf{N}(\varphi)$ autour de $\varphi = 0$

Les formules précédemment obtenues permettent d'obtenir les différentes composantes de l'opérateur $\mathbf{N}(\varphi)$ sous forme de développements limités pour les petites valeurs de $\varphi = \pi m$. L'opérateur \mathcal{L} défini par (3.24), donnant $\phi^{(1/2)'}(m)$ (cf. (3.25)) et $\phi^{(3/2)'}(m)$ (cf. (3.53)) sous forme de série, est d'ordre $O(m)$. Par conséquent, pour obtenir $\mathbf{N}(\varphi)$ à un ordre $O(m^k)$ donné, il suffit de tronquer les séries après les $k+1$ premiers termes.

Limitons nous au premier ordre. Les développements limités de l'opérateur $\mathbf{F}(\varphi)$ sont disponibles dans le travail d'Amestoy et Leblond (1992), et les différentes intégrales sont alors calculables analytiquement. On obtient ainsi (après quelques pages de calcul supplémentaires) :

$$\begin{cases} N_{I,III}(\varphi) = \frac{2\nu-1}{2-\nu} m\pi + O(m^3) \\ N_{II,III}(\varphi) = -\frac{2}{2-\nu} + O(m^2) \\ N_{III,I}(\varphi) = \frac{2(1-\nu)^2}{2-\nu} m\pi + O(m^3) \\ N_{III,II}(\varphi) = \frac{2(1-\nu)}{2-\nu} + O(m^2) \end{cases} \quad (3.105)$$

3.8.2 Valeurs numériques de l'opérateur $\mathbf{N}(\varphi)$

Pour déterminer les valeurs numériques de l'opérateur $\mathbf{N}(\varphi)$ pour des valeurs arbitraires de l'angle φ , nous avons repris le programme de Mouchrif ayant servi pour la détermination de l'opérateur $\mathbf{P}(\varphi)$. Il faut, dans un premier temps, déterminer numériquement $\phi^{(1/2)'}(z)$ et $\phi^{(3/2)'}(z)$ sur le demi-cercle C^- . Pour cela, nous utilisons leurs expressions (3.25) et (3.53) sous forme de série. On calcule alors $\phi^{(1/2)}(z)$ sur C^- grâce à la relation (3.21). Le calcul des intégrales $\mathcal{L}f$ et I sur le demi-cercle C^+ se fait par la méthode de Gauss. Les intégrandes étant

faiblement singulières en $t = \pm 1$, le découpage du demi-cercle C^+ doit être plus fin près de ces points. C'est pourquoi nous avons choisi des intervalles de longueur décroissant comme une suite géométrique du milieu $e^{i\pi/2} = i$ du demi-cercle C^+ vers les extrémités 1 et -1 .

En pratique, le demi-cercle C^+ est divisé en 100 intervalles. Les séries déterminant $\phi^{(1/2)'}(z)$ et $\phi^{(3/2)'}(z)$ sont considérés comme convergentes quand la norme du terme générique devient inférieure à 10^{-7} .

Le tableau 3.1 donne les valeurs des composantes $\mathbf{N}(\varphi)$ pour $\nu = 0.3$, pour les valeurs positives de φ . Les valeurs pour les angles φ négatifs s'obtiennent grce aux conditions de parité (cf. §3.1.2). Les erreurs numériques sont estimées à 2.10^{-3} environ. Pour les petites valeurs de φ , les valeurs numériques diffèrent de moins de 2.10^{-4} de celles déduites des développements limités (3.105).

| φ | N_{13} | N_{23} | N_{31} | N_{32} |
|-----------|--------------|--------------|-------------|--------------|
| .000E+00 | .000000E+00 | -.117647E+01 | .000000E+00 | .823529E+00 |
| .250E+01 | -.102648E-01 | -.117638E+01 | .251404E-01 | .821931E+00 |
| .500E+01 | -.204971E-01 | -.117610E+01 | .501851E-01 | .817143E+00 |
| .750E+01 | -.306645E-01 | -.117563E+01 | .750392E-01 | .809188E+00 |
| .100E+02 | -.407353E-01 | -.117497E+01 | .996088E-01 | .798104E+00 |
| .125E+02 | -.506785E-01 | -.117410E+01 | .123802E+00 | .783946E+00 |
| .150E+02 | -.604642E-01 | -.117302E+01 | .147528E+00 | .766779E+00 |
| .175E+02 | -.700637E-01 | -.117171E+01 | .170701E+00 | .746687E+00 |
| .200E+02 | -.794498E-01 | -.117016E+01 | .193237E+00 | .723763E+00 |
| .225E+02 | -.885970E-01 | -.116834E+01 | .215055E+00 | .698117E+00 |
| .250E+02 | -.974817E-01 | -.116625E+01 | .236082E+00 | .669867E+00 |
| .275E+02 | -.106082E+00 | -.116386E+01 | .256245E+00 | .639146E+00 |
| .300E+02 | -.114380E+00 | -.116116E+01 | .275480E+00 | .606096E+00 |
| .325E+02 | -.122357E+00 | -.115811E+01 | .293725E+00 | .570866E+00 |
| .350E+02 | -.129999E+00 | -.115469E+01 | .310928E+00 | .533618E+00 |
| .375E+02 | -.137294E+00 | -.115089E+01 | .327039E+00 | .494517E+00 |
| .400E+02 | -.144233E+00 | -.114667E+01 | .342016E+00 | .453737E+00 |
| .425E+02 | -.150808E+00 | -.114202E+01 | .355825E+00 | .411455E+00 |
| .450E+02 | -.157015E+00 | -.113690E+01 | .368435E+00 | .367853E+00 |
| .475E+02 | -.162852E+00 | -.113131E+01 | .379824E+00 | .323116E+00 |
| .500E+02 | -.168321E+00 | -.112520E+01 | .389976E+00 | .277428E+00 |
| .525E+02 | -.173423E+00 | -.111857E+01 | .398882E+00 | .230976E+00 |
| .550E+02 | -.178164E+00 | -.111139E+01 | .406539E+00 | .183944E+00 |
| .575E+02 | -.182553E+00 | -.110363E+01 | .412951E+00 | .136515E+00 |
| .600E+02 | -.186597E+00 | -.109529E+01 | .418126E+00 | .888674E-01 |
| .625E+02 | -.190309E+00 | -.108635E+01 | .422082E+00 | .411753E-01 |
| .650E+02 | -.193702E+00 | -.107678E+01 | .424837E+00 | -.639224E-02 |
| .675E+02 | -.196791E+00 | -.106659E+01 | .426420E+00 | -.536729E-01 |
| .700E+02 | -.199591E+00 | -.105574E+01 | .426862E+00 | -.100512E+00 |
| .725E+02 | -.202120E+00 | -.104425E+01 | .426197E+00 | -.146763E+00 |
| .750E+02 | -.204396E+00 | -.103209E+01 | .424468E+00 | -.192288E+00 |
| .775E+02 | -.206438E+00 | -.101927E+01 | .421716E+00 | -.236960E+00 |
| .800E+02 | -.208265E+00 | -.100578E+01 | .417990E+00 | -.280660E+00 |

Table 3.1: Valeurs numériques des composantes de l'opérateur $\mathbf{N}(\varphi)$

Chapter 4

Trajets de propagation en mode mixte (I+III) ou (I+II+III) - Propositions de critères de propagation.

4.1 Observations

Par souci de complétude et pour bien cadrer notre étude, nous allons, dans un premier temps, donner un panorama assez complet des expériences de rupture menées en présence de mode III, dont certaines nous sont dues. Néanmoins dans nos critères, nous ne considérerons que deux cas de propagation : le cas de la segmentation où le front se transforme en deux types de zones déversant chacune en sens inverse et le cas du déversement où tout le front de fissure tourne autour de la direction de propagation pour se rapprocher du mode I pur. Nous ne parlerons de la segmentation que de façon qualitative alors que nous tenterons de prédire quantitativement les paramètres géométriques de l'extension dans le cas du déversement.

4.1.1 Les "lentilles" de Palaniswamy et Knauss (1975)

Palaniswamy et Knauss (1975) ont observé, sous chargement en mode III pur, le développement de la fissure suivant des "lentilles" centrées sur le front de fissure. La géométrie de ces lentilles est fort compliquée et nous n'avons malheureusement pu accéder aux photos originales de l'article afin de les inclure dans la présente thèse. Néanmoins, grossièrement, tout se passe comme si seul un ensemble discret de points du front s'était propagé, chacun des points se propageant pour former une surface en forme de pièce de monnaie de plus en plus grande qui donne l'apparence d'une "assiette" imbriquée sur la fissure initiale, la surface de ces "assiettes" se rapprochant du mode I.

4.1.2 La "segmentation" du front

Suresh et Tschegg (1987) ont réalisé des essais de traction-torsion sur des éprouvettes cylindriques en céramique contenant une fissure circonférentielle extérieure. Ils ont observé une surface de rupture lisse et plane en traction pure (mode I) et une surface très irrégulière en présence de torsion (mode I+III) (cf. Figures 4.1). L'irrégularité de cette surface est sans doute due à l'interférence des chemins de propagation des divers points du front. Ils ont, de plus, remarqué que plus il y a de mode III, plus le taux de restitution critique (pour lequel la fissure commence à se propager) est grand (cf. figure 9 de leur article). Ils en ont conclu qu'en présence de mode III, les frottements sont importants et tendent à réduire le chargement effectif que subit le front de fissure.

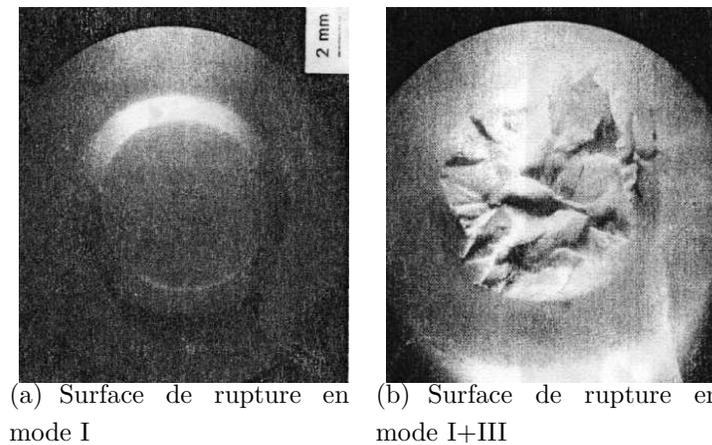


Figure 4.1: Figure 4 de l'article de Suresh et Tshegg (1987)

Des expériences en traction prédominante+torsion sur des éprouvettes de verre cylindriques contenant une fissure en forme de pièce de monnaie ont été réalisées par Sommer (1969). Son dispositif expérimental consistait à mettre le cylindre en torsion et à créer du mode I en injectant un liquide sous pression dans la fissure, ce qui présentait le mérite de réduire considérablement les frottements entre les lèvres de la fissure, frottements qui auraient probablement eu pour effet de détruire l'aspect de la surface de rupture. Sommer a observé dans ce cas, comme on peut le voir sur les figures 4.2, une transformation progressive de la surface de l'extension en "toit d'usine" (cf. Fig. 4.3); on dit qu'il y a "segmentation" du front.

L'extension est alors formée de deux types de zones :

- des surfaces principales (A) dont le front tourne progressivement autour de la direction de propagation pour se rapprocher le plus possible du mode I;
- des surfaces secondaires (B) aussi appelées "fracture lances" par Sommer (car elles évoquent la forme d'une lance médiévale), qui relie les zones (A) entre elles.

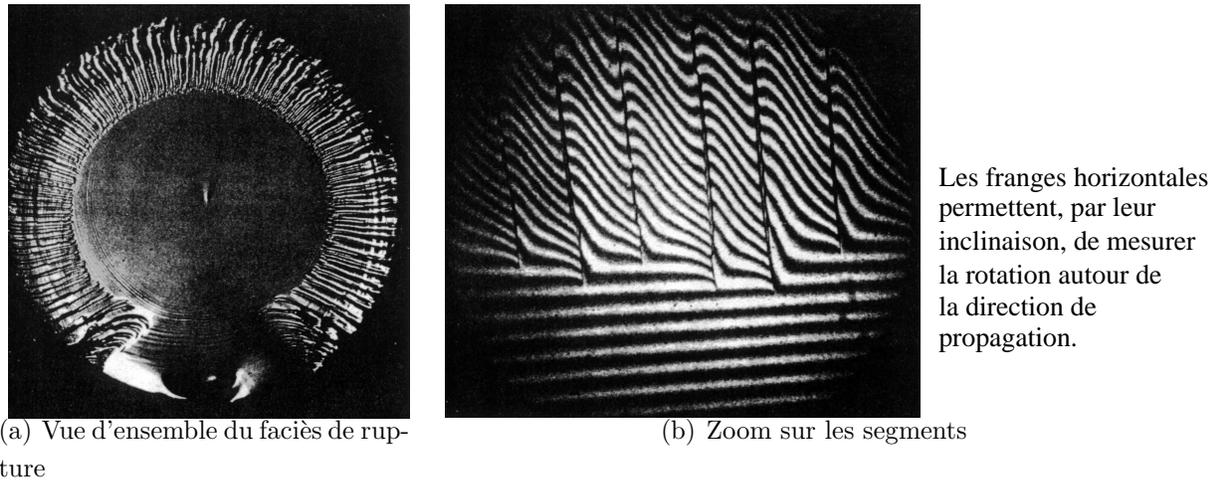


Figure 4.2: Figures 1 et 2 de l'article de Sommer (1969)

Ceci implique un angle de branchement variable le long du front initial, dont la valeur moyenne est nulle (la fissure se propage donc *en moyenne* de manière coplanaire).

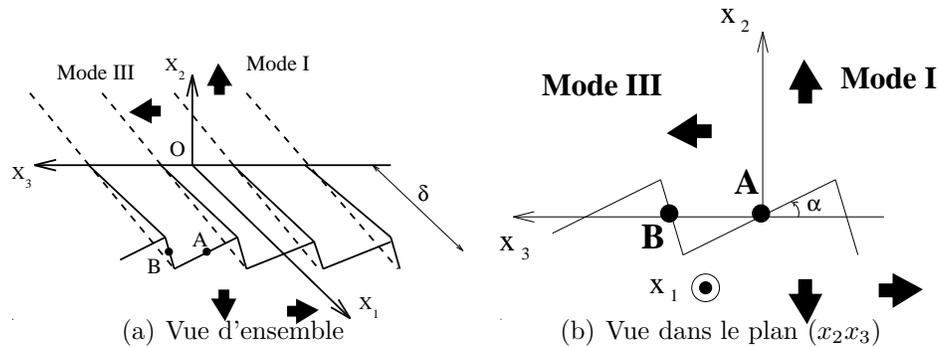


Figure 4.3: Segmentation du front

Par ailleurs, Hourlier et Pineau (1979) ont effectué des expériences en mode I cyclique + mode III permanent et ont, eux aussi, observé la segmentation du front, en faisant de plus l'intéressante remarque que les surfaces de type (A) avancent plus vite que les surfaces de type (B), ce qui conduit à penser que les surfaces de type (A) sont "favorisées" par rapport aux surfaces de type (B) et que ces dernières existent uniquement pour assurer la continuité géométrique de la fissure entre deux zones (A).

Ces phénomènes de "segmentation" ou de "lentilles" ont été également observés en géophysique. Pollard et Aydin (1988) nous en donnent quelques jolies photos (fig. 4.4.4(a) pour un exemple de segmentation et fig. 4.4.4(b) pour un faciès ressemblant, de par le caractère brutal de la rotation du front autour de la direction de propagation, aux lentilles de Palaniswamy et Knauss) ainsi que Pollard, Segall et Delaney (1982) (cf. figure 1 de leur article). Ces derniers

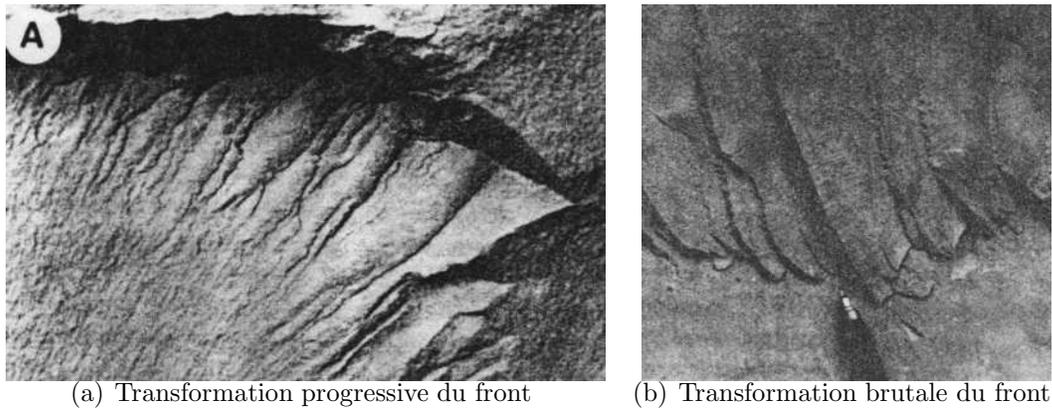


Figure 4.4: Figure 9 de l'article de Pollard et Aydin (1988)

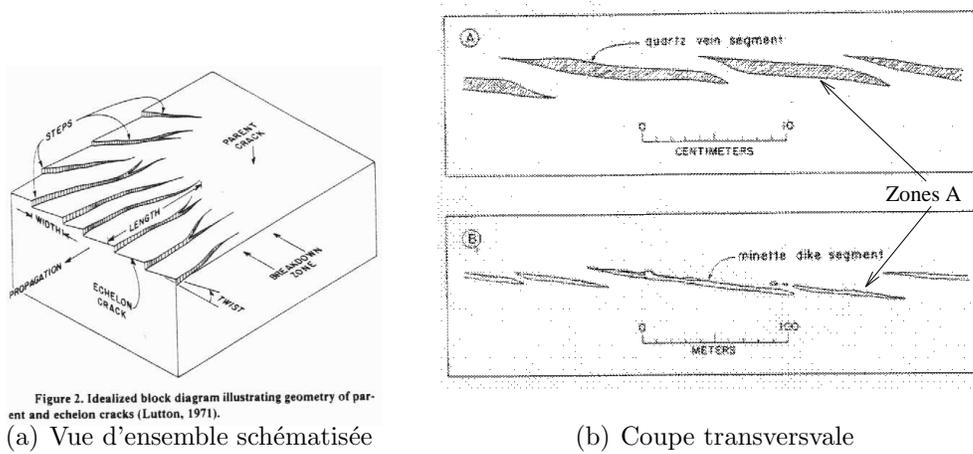


Figure 4.5: Figures 2 et 3 de l'article de Pollard *et al.* (1982)

nous donnent également des coupes dans le plan (x_2x_3) dans lesquels on ne voit pas les zones (B) (cf. Fig. 4.5), ce qui montre encore une fois que les zones de type (B) avancent moins vite que celles de type (A). Ils font également l'intéressante remarque que la distance entre deux zones (B), c'est-à-dire la largeur des zones (A), varie considérablement. Elle peut aller d'une dizaine de centimètres à une centaine de mètres. Dans les expériences de Sommer (1969) et de Hourlier et Pineau (1979), elles étaient d'environ 0,05 mm et 0,5 mm respectivement, donc beaucoup plus petites que celles observées en géophysique.

4.1.3 Le "déversement" du front

Des expériences réalisées sur des corps peu épais dans la direction du front de fissure (de l'ordre de 2 cm) par Yates et Mohammed (1994) ont montré le développement d'une seule zone de type (A) sous un chargement de mode (I+III); tout le front a progressivement tourné autour de la direction de propagation, pour se retrouver finalement en situation de mode I pur.

Afin de vérifier si les valeurs de la "vitesse de déversement" $d\alpha/d\delta$ (cf. Figs. 4.3 pour la définition de α et δ) qu'ils ont obtenues en fatigue sont les mêmes que celles qu'on obtiendrait en rupture fragile, nous avons en collaboration avec le Professeur Yates refait des expériences au sein du laboratoire Sirius de l'Université de Sheffield, en mode (I+III) mais sous chargement monotone. Nous avons de plus réalisé des expériences de fatigue en mode mixte général (I+II+III) afin d'avoir des résultats expérimentaux de la propagation du front dans ce cas de figure (qui, à notre connaissance, ne sont pas disponibles dans la littérature actuelle). Ces dernières expériences ayant été effectuées sous chargement cyclique, il était possible d'interrompre l'expérience quand la fissure s'était quelque peu propagée et de mesurer, après rupture brutale du ligament subsistant, la longueur de propagation $\delta(x_3)$ le long de tout le front (en vue de la mise en évidence éventuelle d'une rotation du front autour de la normale à la fissure).

Pour les expériences en fatigue, nous avons utilisé un acier, alors que pour les expériences en rupture brutale, nous avons choisi du plexiglas pour sa fragilité.

Le dispositif expérimental consiste en un parallélépipède fissuré soumis à un chargement de flexion quatre points. L'orientation de la fissure (ou plus exactement de l'entaille) initiale est donnée par deux angles β et γ représentés sur la figure 4.6 (schéma sur lequel les proportions ne sont pas respectées). Soit $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ la base orthonormée directe adaptée au front de fissure initial (\vec{x}_3 parallèle au front, \vec{x}_2 orthogonale aux lèvres, \vec{x}_1 dans la direction de propagation). On approche alors le problème par celui d'une fissure en forme de fente infinie de largeur $2a$ (a étant la profondeur de l'entaille) placée dans un milieu infini soumis à un chargement $\vec{\sigma} = \sigma^\infty \vec{j} \otimes \vec{j}$ à l'infini (cf. Fig. 4.6 pour la définition de la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$). On exprime alors le chargement $\vec{\sigma} = \sigma^\infty \vec{j} \otimes \vec{j}$ dans la base $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ adaptée au front de fissure; puis on en déduit, par les formules correspondant au cas de la fente infinie, l'expression des facteurs d'intensité de

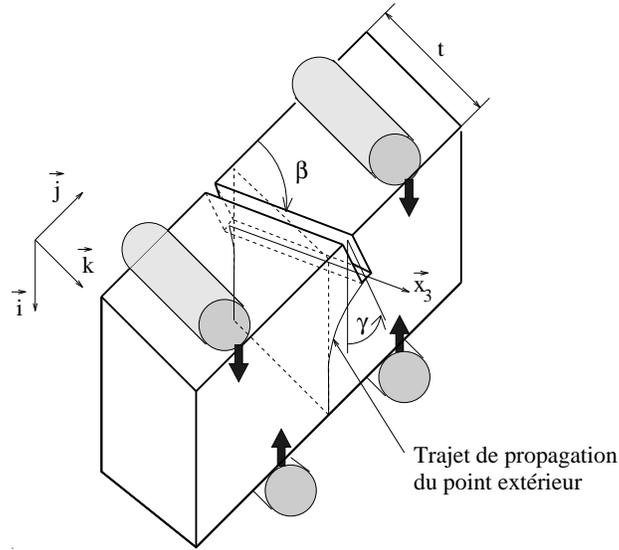


Figure 4.6: Dispositif expérimental

contraintes k_I, k_{II}, k_{III} , des contraintes non singulières T_I, T_{II} , des constantes b_I, b_{II} suivantes (la connaissance de T_{III} et de b_{III} sera inutile) :

| | | |
|------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------|
| $\frac{k_{II}}{k_I} = \tan \tilde{\gamma}$ | $T_I = -\frac{k_I}{\sqrt{\pi a}} + \sigma_{11}^\infty = -\frac{k_I}{\sqrt{\pi a}} + \sigma^\infty \sin^2 \beta \sin^2 \tilde{\gamma}$ | $b_I = \frac{3 k_I}{4 a}$ |
| $\frac{k_{III}}{k_I} = \frac{1}{\tan \beta \cdot \cos \tilde{\gamma}}$ | $T_{II} = \sigma_{13}^\infty = \sigma^\infty \sin \tilde{\gamma} \sin \beta \cos \beta$ | $b_{II} = \frac{3 k_{II}}{4 a}$ |

(4.1)

où $\tilde{\gamma}$, angle orienté entre les vecteurs \vec{i} et \vec{x}_1 , est relié à γ par la relation :

$$\cos \tilde{\gamma} = \frac{\cos \gamma}{\sqrt{\cos^2 \gamma + \sin^2 \gamma \sin^2 \beta}} \quad (4.2)$$

Les photos 4.7 montrent les faciès de rupture pour diverses conditions expérimentales. Sur la photo 4.7(a), on voit la moitié du barreau, sur les photos 4.7(b) et 4.7(c) l'extrémité de ce barreau a été scié après les expériences. Les observations suivantes peuvent être faites :

- pour $\beta = 90^\circ$ et $\gamma = 0^\circ$, la fissure se trouve initialement en mode I pur et se propage de façon rectiligne;
- pour $\beta \neq 90^\circ$ et $\gamma = 0^\circ$ (cf. Fig. 4.4.7(a)), l'entaille initiale est soumise à du mode (I+III). Durant la propagation, le front tourne progressivement autour de la direction de propagation pour se retrouver finalement en mode I pur ($\beta = 90^\circ$); l'angle de branchement moyen est nul (ce qui correspond à une propagation verticale du milieu du front). En sus de ce déversement progressif, on observe au début de la propagation, de petites facettes qui semblent avoir tourné de manière brutale pour se placer directement en situation de mode I.

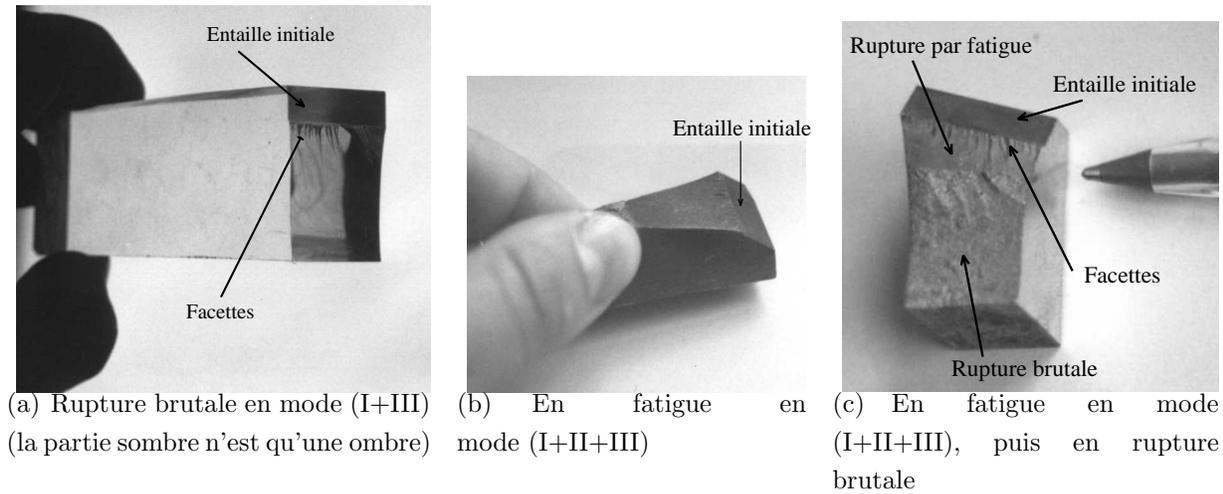


Figure 4.7: Déversement du front

- pour $\beta \neq 90^0$ et $\gamma \neq 0^0$ (cf. Figs. 4.4.7(b) et 4.4.7(c)), l'entaille initiale est sollicitée en mode mixte (I+II+III). On observe dans ce cas un branchement moyen non nul auquel se superpose un déversement général. Là aussi le front de fissure se retrouve finalement en mode I pur et l'on observe de petites facettes en début de propagation (non visibles sur la photo 4.4.7(b)).

Pour connaître la longueur de l'extension le long du front, nous avons interrompu les expériences en fatigue en cours de propagation et achevé la rupture à froid sous chargement monotone (cf. Fig. 4.7(c)). Ceci nous a permis de constater que $\delta(x_3)$ est uniforme le long du front dans le cas du chargement en mode (I+II+III). C'est pourquoi, pour la détermination de l'angle de branchement, nous noterons tout simplement δ la longueur de l'extension à un instant donné.

4.1.4 Synthèse

Notre point de vue, résultant des observations précédentes, est donc que toute fissure recherche la direction de mode I pur. En mode (I+II), le branchement permet d'atteindre immédiatement cet objectif. En présence de mode III, les choses deviennent plus complexes. Dans certains cas, notamment quand la fissure est soumise *principalement* à du mode III, seuls quelques points discrets du front se propagent (est-ce dû aux frottements qui deviennent trop importants?) pour former de nouveaux fronts chargés en mode I pur. Dans les autres cas, si *possible*, tout le front de la fissure tourne progressivement autour de la direction de propagation pour réduire le mode III. Mais si la géométrie ne le permet pas (comme dans les expériences sur éprouvettes axisymétriques de Sommer), ou si le front est trop *large* pour y parvenir, il se segmente, les zones (A) (se rapprochant du mode I) étant majoritaires et les zones (B) n'étant là qu'en raison

de la nécessité géométrique de relier deux zones (A) entre elles.

4.2 Quelques explications qualitatives du déversement et de la segmentation du front

4.2.1 Explication de Sommer

Sommer remarque que dans ses expériences de torsion, plus la fissure croît, c'est-à-dire plus le rayon R de la pièce de monnaie devient grand, plus l'angle, qu'il note ϕ , que font les directions des contraintes principales avec le plan initial horizontal de la fissure devient grand. La fissure ayant naturellement tendance à se placer perpendiculairement à la direction de la contrainte principale la plus élevée, ceci expliquerait la rotation progressive des parties principales du front (correspondant aux zones (A)) autour de la direction de propagation. Il en déduit que α doit être, comme ϕ , proportionnel à R et identifie la vitesse de déversement $\frac{d\alpha}{d\delta}$ (voir Figures 4.3 pour les définitions de α et de δ) à $\frac{d\phi}{dR}$. Mais, on voit clairement sur la figure 4 de l'article que α n'est pas de la forme aR , mais $aR + b$ avec $b \neq 0$, ce qui invalide son interprétation. De plus, les expériences de Yates et Mohammed (1994) et celles que nous avons réalisées à Sheffield montrent une rotation du front autour de la direction de propagation alors que l'angle ϕ que font les contraintes principales avec la fissure initiale reste constant au cours de la propagation. Son explication n'est donc pas applicable dans le cas général.

4.2.2 Le déversement et la segmentation seraient-ils dus à des imperfections?

En l'absence de mode II, le Principe de Symétrie Local (qui consiste, rappelons-le à annuler le F.I.C. k_{II}^* du mode II juste après branchement) implique un angle de branchement nul en tout point du front. Pour pouvoir expliquer le déversement ou la segmentation (qui impliquent, on l'a vu, un branchement fonction de la position sur le front), il faut donc, soit abandonner ce principe, soit supposer que des imperfections (dues à des impuretés, des inhomogénéités dans le matériau...) de la forme de la fissure (lèvres ou front) engendrent du mode II et donc un branchement.

L'explication de Meade et Keer (1984), reprise et corrigée par Gao et Rice (1986), ou encore celle de Xu *et al.* (1994) s'appuient sur la seconde alternative. Les premiers suggèrent que la segmentation résulte de petites perturbations coplanaires du front. En effet, une telle perturbation sous mode (I+III) engendre du mode II de signe opposé sur les versants d'une petite "bosse" et donc des branchements de signes opposés sur les deux versants de la "bosse", ce qui amorcerait la segmentation du front. Mais dans les expériences de Yates et Mohammed et dans

les nôtres, on observe en mode (I+III) une rotation du front autour de la direction de propagation qui implique un angle de branchement nul au milieu de la zone avec des branchements opposés de part et d'autre de ce point. Si l'on reprend l'explication de Gao et Rice (1986), cela voudrait dire qu'il y avait dans tous les échantillons une imperfection au *milieu* du front, ce qui n'a bien sûr pas de sens physiquement. Nous pensons au contraire que le déversement du front provient de l'attitude "naturelle" de la fissure, qui est de se propager de manière à se placer en situation de mode I pur, la segmentation du front (ou la surface irrégulière obtenue par Suresh et Tshegg, 1987) étant due au fait que le front se trouve dans l'incapacité physique de se propager dans sa totalité en tendant vers le mode d'ouverture. Ceci est particulièrement clair dans les expériences de Sommer (et de Suresh et Tshegg) où la géométrie axisymétrique ne permet pas au front de se placer, d'un seul bloc, en situation de mode I pur.

Xu *et al.* (1994), quant à eux, semblent penser que la segmentation est due à de petites perturbations non coplanaires des lèvres de la fissure. Ils s'attachent à montrer, par une simulation numérique, que s'il y a une amorce de segmentation du front en présence de mode (I+III) celle-ci tend à s'amplifier, mais ils fixent par le choix de la perturbation initiale les paramètres géométriques de l'extension et ne prédisent pas la vitesse de déversement du front, prédiction qui sera précisément l'un des objets de nos critères de propagation. De plus, les zones (A) et (B) jouent des rôles absolument similaires dans leur simulation numérique, ce qui est contredit par l'expérience.

Notre point de vue, résultant de la discussion précédente, est que le déversement et la segmentation ne sont pas dus à des imperfections, mais correspondent à l'"envie" qu'a la fissure de se rapprocher du mode I pur et que *le Principe de Symétrie Locale* (de par, précisément, son caractère local) *ne peut expliquer le phénomène de déversement*.

4.2.3 Explication "énergétique" du déversement et de la segmentation

Dans cette section, nous allons reprendre l'explication qualitative que donne Mouchrif dans sa thèse et montrer que *le déversement est énergétiquement favorisé*, c'est-à-dire que dans le cas du mode (I+III), le taux de restitution d'énergie est plus important pour une extension de type (A) que pour une extension coplanaire, et plus important pour une extension coplanaire que pour une extension de type (B). Ceci n'a rien d'évident à priori car si l'on prend l'exemple de la zone (A), on se rapproche du mode I et on s'éloigne du mode III progressivement sur une telle extension du fait du déversement, alors que le taux de restitution d'énergie \mathcal{G} est une fonction croissante de k_I et de k_{III} , si bien qu'il est difficile de dire si le déversement du front provoque une augmentation ou une diminution de \mathcal{G} .

Plaçons-nous dans le cadre des hypothèses de la formule (1.4) et supposons de plus que la fissure initiale est semi-infinie et située dans un milieu infini. L'opérateur non-universel $\mathbf{Z}(\Omega, x_3, x'_3)$ est alors donné par Gao et Rice (1986). Calculons le taux de restitution d'énergie d'un point situé au milieu d'une zone (A) ou (B), pour lequel $\varphi(x_3) = 0$, $\eta(x_3) = 1$, $\eta'(x_3) = 0$ en utilisant la formule d'Irwin. Nous souhaitons montrer que ce taux de restitution n'est pas maximum pour $\varphi'(x_3)$ identiquement nul. Pour cela il suffit de développer les différentes quantités de l'expression (1.4) à l'ordre 1 par rapport à la fonction $\varphi(x'_3)$. La connaissance des valeurs des composantes de $\mathbf{P}(0)$ calculées par Mouchrif permet de prendre en compte la dérivée de la fonction $\varphi(x_3)$. Nous obtenons ainsi :

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(x_3, \delta) &= \frac{1 - \nu^2}{E} [k_I + \delta k_I^{(1)}(x_3)]^2 + \frac{1 + \nu}{E} [k_{III} + \delta k_{III}^{(1)}(x_3)]^2 + O(\delta^{3/2}) \\ &= \mathcal{G}_0(\delta) - \frac{4(1 - \nu^2)}{(2 - \nu)E} k_I k_{III} \varphi'(x_3) \delta + O(\delta^{3/2}) \end{aligned} \quad (4.3)$$

où $\mathcal{G}_0(\delta)$ désigne la valeur de $\mathcal{G}(x_3, \delta)$ pour une fonction $\varphi(x'_3)$ uniformément nulle (extension coplanaire). En appliquant cette relation aux points A et B de la figure 4.3, qui correspond à la segmentation dans le cas $k_{III} > 0$, on obtient :

$$\mathcal{G}(B, \delta) < \mathcal{G}_0(\delta) < \mathcal{G}(A, \delta) \quad (4.4)$$

car $\varphi'(A) < 0$ et $\varphi'(B) > 0$. Mouchrif aboutit donc à la conclusion suivante :

"La théorie énergétique prévoit donc bien que la propagation de surfaces de type (A) est plus favorisée que celles de plans horizontaux, elle-même plus favorisée que celle de surfaces de type (B), ce qui fournit une première explication qualitative du phénomène de segmentation du front."

Qualitative car elle ne fournit aucun moyen de calculer la "vitesse de déversement" $\frac{d\alpha}{d\delta}$ (cf. Fig. 4.3).

4.3 Critères de propagation quantitatifs pour la détermination de l'angle de branchement moyen et de la vitesse de déversement

Dans tout ce qui suit, faute de savoir comment prendre en compte les zones de type (B), nous nous restreindrons au cas du déversement (où, rappelons-le, il n'existe pas de telle zone).

4.3.1 Description géométrique de l'extension

Nous allons maintenant introduire les paramètres géométriques permettant de décrire l'extension en début de propagation. Pour cela, nous procéderons en deux temps : premièrement nous con-

sidérons le cas $k_{II} = 0$ pour lequel l'angle de branchement moyen est nul, puis nous étendrons les résultats au cas général.

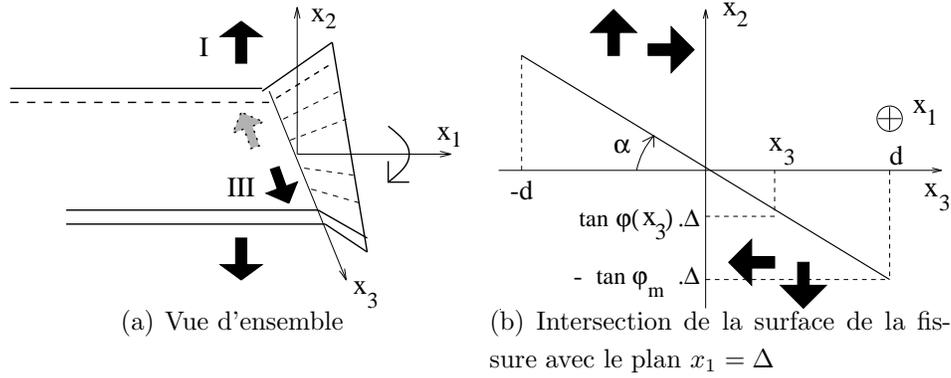


Figure 4.8: Déversement en mode (I+III)

Soit d la demi-largeur du front initial, on a (cf. figure 4.6):

$$d = \frac{t}{2 \sin \beta} \quad (4.5)$$

La figure 4.8 décrit l'extension dans le cas $k_{II} = 0$ pour δ petit et nous permet d'introduire certaines notations. On remarque expérimentalement qu'en cours de propagation, l'intersection de la surface de propagation et d'un plan $x_1 = Cste = \Delta$ reste une droite. On a donc (cf. Fig. 4.4.8(b)), d'après le théorème de Thalès, la relation suivante :

$$-\frac{\tan \varphi(x_3) \cdot \Delta}{\tan \varphi_m \cdot \Delta} = \frac{x_3}{d},$$

ce qui implique que l'angle de branchement le long du front soit de la forme :

$$\varphi(x_3) = -\arctan\left(\frac{x_3}{d} \tan \varphi_m\right) \quad (4.6)$$

Il suffit donc de déterminer l'angle de branchement maximum $\varphi_m = \varphi(x_3 = d)$ pour déterminer la géométrie de l'extension dans ce cas. Les expérimentateurs ne donnent cependant pas cet angle, mais plutôt la "vitesse de déversement" $\frac{d\alpha}{d\delta}$ que l'on peut relier à φ_m par la relation suivante (cf. figure 4.8):

$$\frac{d\alpha}{d\delta} = \frac{\tan \varphi_m}{d} \quad (4.7)$$

En effet, pour $x_3 \ll d$ (c'est-à-dire au voisinage du milieu du front) $\varphi(x_3) \sim -\frac{x_3}{d} \tan \varphi_m$. Puisque cet angle y est petit, l'élévation h du front à cet endroit vaut $\delta\varphi(x_3)$ et d'après la figure 4.8, l'angle α (qui est petit car δ est petit) vaut $\alpha = -\frac{h}{x_3} = -\frac{\delta\varphi(x_3)}{x_3} = \frac{\delta}{d} \tan \varphi_m$ et donc $\frac{d\alpha}{d\delta} = \frac{\tan \varphi_m}{d}$.

Quand $k_{II} \neq 0$, l'extension a la même allure, mais l'angle de branchement moyen φ_0 , correspondant au branchement du milieu $x_3 = 0$ du front, n'est plus nul et l'on a :

$$\begin{cases} \varphi(x_3) = \varphi_0 - \arctan\left(\frac{x_3}{d} \tan \varphi_m\right) \\ \frac{d\alpha}{d\delta} = \frac{\tan \varphi_m}{d} \end{cases} \quad (4.8)$$

Dans ce cas, la géométrie de l'extension est déterminée par la donnée du couple (φ_0, φ_m) ou $(\varphi_0, \frac{d\alpha}{d\delta})$.

Remarquons que d'après les expériences, $\varphi_0 = \varphi_m = 0$ en mode I pur et que $\varphi_0 = 0$ en l'absence de mode II. De plus, notons que pour des raisons de symétrie :

- φ_0 est impair par rapport à k_{II}/k_I , pair par rapport à k_{III}/k_I ;
- φ_m est impair par rapport à k_{III}/k_I , pair par rapport à k_{II}/k_I ;

et qu'expérimentalement, on observe :

- $\varphi_0 < 0$ pour $k_{II} > 0$ (c'est-à-dire $\gamma > 0$);
- $\varphi_m > 0$ pour $k_{III} > 0$ (c'est-à-dire $0 < \beta < 90^\circ$).

4.3.2 Première tentative de critère

En mode (I+III), malgré le fait que tous les points du front soient chargés de la même manière, leur trajet de propagation est différent. Or, un critère "local" (portant sur chacun des points du front considérés indépendamment) conduirait inmanquablement au même chemin de propagation pour tous les points du front, et est donc condamné d'avance à l'échec. Il faut donc trouver un critère de type "global", c'est-à-dire prenant en compte tous les points du front.

Mouchrif a proposé, en mode (I+III), le critère "global" suivant :

$$\int_{front} \mathcal{G}(x_3, \delta) dx_3 \text{ maximum par rapport à } \varphi_m \quad (4.9)$$

qui implique de maximiser chacun des termes successifs du développement de l'intégrale en puissances de δ . En supposant alors $\varphi(x_3)$ petit et de la forme (4.6), on obtient grce à la formule d'Irwin et à (1.4), pour $\delta \rightarrow 0$:

$$\int_{front} \mathcal{G}^*(x_3) dx_3 = A - B \cdot \varphi_m^2$$

où A et B sont des constantes dépendant du coefficient de Poisson ν et du module d'Young E . B étant positif, le critère implique $\varphi_m = 0$ et par conséquent $\varphi(x_3)$ identiquement nul. "Il faut donc", dixit Mouchrif, "conclure à l'échec de ce critère".

Ceci n'a rien de surprenant car Mouchrif applique son critère pour une extension du front de longueur tendant vers 0, alors que, contrairement au cas du mode (I+II), où la fissure passe instantanément en mode I pur dès qu'elle se propage, nous avons vu qu'en présence de mode III, il lui faut un certain temps pour atteindre cette situation. On ne peut donc pas non plus, par analogie avec le critère $k_{II}^* = 0$, appliquer un critère du style " $k_{III}^* = 0$ ". Aussi, notre idée qui découle de la discussion précédente est d'introduire une longueur de propagation caractéristique δ_c au bout de laquelle appliquer les critères...

4.3.3 Expression finale du critère

Plaçons-nous dans le cadre des expériences de Sheffield et dans le cas du mode mixte général (k_{II} pouvant éventuellement être nul). Nous utiliserons dans ce qui suit, les notations du paragraphe 4.3.1.

Nous proposons pour déterminer le couple (φ_0, φ_m) de résoudre le système suivant en supposant $\varphi(x_3)$ de la forme (4.6) et $\delta(x_3) = \delta$:

$$\begin{cases} \frac{1}{2d} \int_{-d}^d \mathcal{G}(x_3, \delta) dx_3 \text{ maximum par rapport à } \varphi_m \\ k_{II}(x_3 = 0, \delta) = 0 \end{cases} \quad (4.10)$$

ou bien encore :

$$\begin{cases} \frac{1}{2d} \int_{-d}^d k_I(x_3, \delta) dx_3 \text{ maximum par rapport à } \varphi_m \\ k_{II}(x_3 = 0, \delta) = 0 \end{cases} \quad (4.11)$$

pour $\delta = \delta_c$, où la longueur δ_c correspond à la longueur des petites facettes révélées par les expériences réalisées à Sheffield (cf. figures 4.7). Physiquement, cette distance s'interprète comme la distance au bout de laquelle tous les points du front ont "pris connaissance" du comportement de leurs "voisins" et cessent de se mouvoir indépendamment les uns des autres pour se propager de "façon concertée".

Fixer δ permet de pallier la difficulté mentionnée dans la précédente section sur la première partie du critère. Quant à la deuxième partie du critère, elle est inspirée du principe de symétrie locale. La différence est qu'on l'applique après une longueur de propagation δ ne tendant pas vers 0, mais fixée à $\delta = \delta_c$. Nous verrons en effet dans la section 4.5 que cette deuxième solution donne de bien meilleurs résultats que la première, quand on les confronte avec l'expérience.

4.3.4 Application des critères pour k_{III}/k_I petit et $k_{II} = 0$

Dans ce cas la seconde partie du critère prédit un angle de branchement moyen φ_0 nul. De plus, φ_m est alors du même ordre que k_{III}/k_I en raison de son imparité vis-à-vis de ce paramètre (cf. §4.3.1), notons ε cet ordre. On peut alors écrire (cf. (4.6)) :

$$\varphi(x_3) = -\frac{x_3}{d} \varphi_m + O(\varepsilon^3) \quad (4.12)$$

Le but de cette section étant de déterminer φ_m au premier ordre en k_{III}/k_I , il va falloir calculer les intégrales $\int_{-d}^d \mathcal{G}(x_3, \delta) dx_3$ ou $\int_{-d}^d k_I(x_3, \delta) dx_3$ à l'ordre $O(\varepsilon^2)$ ¹. Nous allons maintenant indiquer comment ces développements peuvent être obtenus.

Parmi les différents termes intervenant dans le développement (1.4) des facteurs d'intensité de contraintes $k_p(x_3, \delta)$ on distingue :

- Le terme $\left[\frac{\partial^2 \mathbf{k}(x_3, \delta)}{\partial (\sqrt{\delta})^2} \right]_{\varphi(x'_3) \equiv \varphi(x_3)}^{\eta(x'_3) \equiv \eta(x_3)}$ pour lequel on utilisera l'expression obtenue par Leblond (1989) dans le cas 2D (cf. (2.64)). Amestoy et Leblond (1992) nous donnent le développement en puissances de φ de l'opérateur universel $I(\varphi)$. De plus, dans le cas d'une fente infinie de largeur $2a$ soumise à un champ de contraintes uniforme à l'infini, on peut montrer que les quantités \bar{k}_{pq} valent : $\bar{k}_{I,I} = \bar{k}_{II,II} = -\frac{1}{8a}$, $\bar{k}_{I,II} = \bar{k}_{II,I} = 0$.
- L'opérateur non universel $\mathbf{Z}(\Omega, x_3, x'_3)$ pour lequel on utilisera faute de mieux, les expressions suivantes obtenues par Rice (1986) dans le cas d'une fissure semi-infinie dans un milieu infini :

$$Z_{I,I} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{(x'_3 - x_3)^2}, \quad Z_{II,II} = \frac{1}{2\pi} \frac{2-3\nu}{2-\nu} \frac{1}{(x'_3 - x_3)^2}, \quad Z_{III,III} = \frac{1}{2\pi} \frac{2+\nu}{2-\nu} \frac{1}{(x'_3 - x_3)^2},$$

les termes non diagonaux étant nuls.

- Les opérateurs universels \mathbf{F} , \mathbf{G} , \mathbf{P} dont les développements en puissances de φ ont été déterminés, comme nous l'avons déjà vu, par Amestoy, Leblond et Mouchrif.
- Les constantes (facteurs d'intensité, etc...) liées au comportement des champs mécaniques près du front de fissure, que l'on obtient en assimilant la fissure initiale à une fente infinie de largeur $2a$ soumise à un champ de contraintes $\sigma^\infty \vec{j} \otimes \vec{j}$ uniforme à l'infini. Leur expression est donnée par (4.1) avec $\tilde{\gamma} = 0$ (car $\gamma = 0$, de manière que k_{II} soit nul).

Critère " $\frac{1}{2d} \int_{-d}^d \mathcal{G}(x_3, \delta_c) dx_3$ maximum "

On obtient (après quelques pages de calcul supplémentaires) :

$$\begin{aligned} \frac{E}{1-\nu^2} \frac{1}{2d} \int_{-d}^d \mathcal{G}(x_3, \delta_c) dx_3 = & \left(1 - \frac{\varphi_m^2}{6}\right) k_I^2 + \frac{k_{III}^2}{1-\nu} - \frac{2\sqrt{2}}{3\pi} k_I^2 \varphi_m^2 \sqrt{\frac{\delta_c}{a}} + \left(\frac{1}{2} + \frac{8}{3\pi^2} \varphi_m^2\right) k_I^2 \frac{\delta_c}{a} \\ & + \frac{k_{III}^2}{1-\nu} \frac{\delta_c}{2a} + \frac{4}{2-\nu} k_I k_{III} \varphi_m \frac{\delta_c}{d} - \frac{1}{\pi} \frac{2-3\nu}{2-\nu} k_I^2 \varphi_m^2 \frac{\delta_c}{d} + O(\varepsilon^3) \end{aligned} \quad (4.13)$$

¹Et non $O(\varepsilon)$, en raison de l'opération de maximisation qui entraîne une dérivation.

qui est maximum pour² :

$$\varphi_m = \frac{4}{(2-\nu) \left(\frac{1}{3} + \frac{4\sqrt{2}}{3\pi} \sqrt{\frac{\delta_c}{a}} - \frac{16}{3\pi^2} \frac{\delta_c}{a} + \frac{2}{\pi} \frac{2-3\nu}{2-\nu} \frac{\delta_c}{d} \right)} \frac{\delta_c k_{III}}{d k_I} + O\left(\frac{k_{III}^3}{k_I^3}\right) \quad (4.14)$$

c'est-à-dire pour une vitesse de déversement valant :

$$\frac{d\alpha}{d\delta} = \frac{\varphi_m}{d} = \frac{4}{(2-\nu) \left(\frac{1}{3} + \frac{4\sqrt{2}}{3\pi} \sqrt{\frac{\delta_c}{a}} - \frac{16}{3\pi^2} \frac{\delta_c}{a} + \frac{2}{\pi} \frac{2-3\nu}{2-\nu} \frac{\delta_c}{d} \right)} \frac{\delta_c k_{III}}{d^2 k_I} + O\left(\frac{k_{III}^3}{k_I^3}\right) \quad (4.15)$$

Critère " $\frac{1}{2d} \int_{-d}^d k_I(x_3, \delta_c) dx_3$ maximum"

On a de même :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2d} \int_{-d}^d k_I(x_3, \delta_c) dx_3 = & \left(1 - \frac{\varphi_m^2}{8}\right) k_I - \frac{2\sqrt{2}}{3\pi} k_I \varphi_m^2 \sqrt{\frac{\delta_c}{a}} + \left(1 + \frac{5\varphi_m^2}{24}\right) k_I \frac{\delta_c}{4a} \\ & + 2k_{III} \varphi_m \frac{\delta_c}{d} - \frac{3\delta_c}{4\pi d} k_I \frac{2-3\nu}{2-\nu} \varphi_m^2 + O(\varepsilon^3) \end{aligned} \quad (4.16)$$

qui est maximum pour³ :

$$\varphi_m = \frac{8}{1 + \frac{16\sqrt{2}}{3\pi} \sqrt{\frac{\delta_c}{a}} - \frac{5}{12} \frac{\delta_c}{a} + \frac{6}{\pi} \frac{2-3\nu}{2-\nu} \frac{\delta_c}{d}} \frac{\delta_c k_{III}}{d k_I} + O\left(\frac{k_{III}^3}{k_I^3}\right) \quad (4.17)$$

c'est-à-dire pour :

$$\frac{d\alpha}{d\delta} = \frac{8}{1 + \frac{16\sqrt{2}}{3\pi} \sqrt{\frac{\delta_c}{a}} - \frac{5}{12} \frac{\delta_c}{a} + \frac{6}{\pi} \frac{2-3\nu}{2-\nu} \frac{\delta_c}{d}} \frac{\delta_c k_{III}}{d^2 k_I} + O\left(\frac{k_{III}^3}{k_I^3}\right) \quad (4.18)$$

4.3.5 Application des critères pour $|k_{III}/k_I| \ll 1$ et $|k_{II}/k_I| \ll 1$

Supposons dans ce paragraphe $|k_{III}/k_I|$ et $|k_{II}/k_I|$ de l'ordre de ε où ε est une constante petite devant 1. Notre objectif est de déterminer φ_0 et φ_m au premier ordre en ε . Comme φ_m et φ_0 sont nuls pour $k_{II} = 0$ et $k_{III} = 0$ respectivement, et d'après leurs conditions de parité par rapport à k_{III}/k_I et k_{II}/k_I (cf. fin du §4.3.1), on peut supposer $k_{II} = 0$ pour le calcul au premier ordre de φ_m et $k_{III} = 0$ pour le calcul au premier ordre de φ_0 . Les développements (4.14)-(4.15) et (4.17)-(4.18) de φ_m et $\frac{d\alpha}{d\delta}$ restent donc valables, à ceci près que le terme résiduel $O\left(\frac{k_{III}^3}{k_I^3}\right)$ doit être remplacé par $O\left(\frac{k_{II}^2}{k_I^2}\right)$.

²Il s'agit bien d'un maximum car le terme proportionnel à φ_m^2 est négatif.

³On vérifie là aussi que le terme proportionnel à φ_m^2 est négatif.

Quant au calcul de φ_0 , on a :

$$k_{II}(x_3 = 0, \delta_c) = \frac{\varphi_0}{2}k_I + k_{II} + \frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{2\delta_c}{a}}\varphi_0k_I + \frac{\delta_c}{4a}\left(k_{II} - \frac{\varphi_0}{2}k_I\right) + O(\varepsilon^2) \quad (4.19)$$

qui est nul pour :

$$\varphi_0 = -\frac{1 + \frac{\delta_c}{4a}}{\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{2\delta_c}{a}} - \frac{\delta_c}{8a}}\frac{k_{II}}{k_I} + O(\varepsilon^2) \quad (4.20)$$

4.3.6 Calcul numérique pour k_{III}/k_I et k_{II}/k_I quelconques

Afin de vérifier que les développements obtenus pour $\frac{d\alpha}{d\delta}$ dans le cas $|k_{III}/k_I|$ et $|k_{II}/k_I|$ petits restent valables y compris pour des rapports de l'ordre de 1, nous avons effectué numériquement le calcul de $\int_{-d}^d k_I(x_3, \delta_c)dx_3$ en tenant compte des termes non linéaires⁴, dans le cas $k_{II} = 0$ et pour les rapports k_{III}/k_I des expériences de Yates et Mohammed (1994). Les résultats obtenus sont sensiblement les mêmes que ceux obtenus par le développement limité (4.18). Par exemple :

- pour $k_{III}/k_I = 0.577$, on obtient $\frac{d\alpha}{d\delta} = 0.061$ rad/mm par le développement limité et $\frac{d\alpha}{d\delta} = 0.0614$ rad/mm numériquement;
- pour $k_{III}/k_I = 1$, on obtient $\frac{d\alpha}{d\delta} = 0.072$ rad/mm par le développement limité et $\frac{d\alpha}{d\delta} = 0.0737$ rad/mm numériquement.

Aussi, nous admettons que les valeurs de φ_m données par les développements (4.14) et (4.17) restent valables y compris pour des valeurs de k_{III}/k_I aux alentours de 1 et pour $k_{II} \neq 0$. Ceci nous permet d'avoir un "découplage partiel" des deux parties du critère : nous pouvons dans un premier temps calculer φ_m grce aux développements (4.14) ou (4.17), puis calculer numériquement φ_0 en supposant φ_m connu pour le calcul de $k_{II}(x_3 = 0, \delta_c)$.

4.4 La vitesse de déversement est-elle bien prédite par nos critères?

4.4.1 Résultats numériques

Nous avons tracé pour chaque condition de chargement, un graphe donnant la vitesse de déversement obtenue par les critères " $\frac{1}{2d} \int_{-d}^d \mathcal{G}(x_3, \delta_c)dx_3$ maximum" (trait continu) et " $\frac{1}{2d} \int_{-d}^d k_I(x_3, \delta_c)dx_3$

⁴Ceci implique de résoudre une équation intégrale du même type que celle qui permet de calculer l'opérateur $\mathbf{N}(\varphi)$, afin d'évaluer $\mathbf{I}(\varphi)$ pour des valeurs arbitraires de φ .

maximum” (trait pointillé) en fonction de δ_c (formules (4.15) et (4.18)). Les deux traits verticaux correspondent à une estimation de l’intervalle dans lequel est comprise la longueur δ_c des facettes⁵ (seule est donc ”utile” la partie des courbes comprise entre ces traits). La ligne horizontale (trait discontinu) correspond à la valeur expérimentale. Les graphes 4.10 correspondent aux expériences réalisées par l’équipe du Professeur Yates pour lesquels les longueurs des facettes n’ont pas été mesurées; l’intervalle [3 mm, 4 mm] correspond à des mesures faites à partir d’une photo et est donc très approximatif.

Notons, de plus, que pour les expériences en rupture brutale, chacun des graphes correspond à un essai donné, alors que pour les expériences en fatigue, chacun des graphes correspond à une moyenne sur différents essais réalisés sur des éprouvettes identiques. On observe, en effet expérimentalement, que les expériences en fatigue sont plus ”constantes” que celles en rupture brutale, dans le sens que deux essais réalisés sur des éprouvettes quasi-identiques, peuvent donner (cf. Figs. 4.11(a)-4.11(b), 4.11(c)-4.11(d)), 4.11(e)-4.11(f)) des valeurs de la vitesse de déversement, mais aussi de la longueur des facettes différentes en rupture brutale, alors qu’en fatigue, ces valeurs restent quasiment les mêmes.

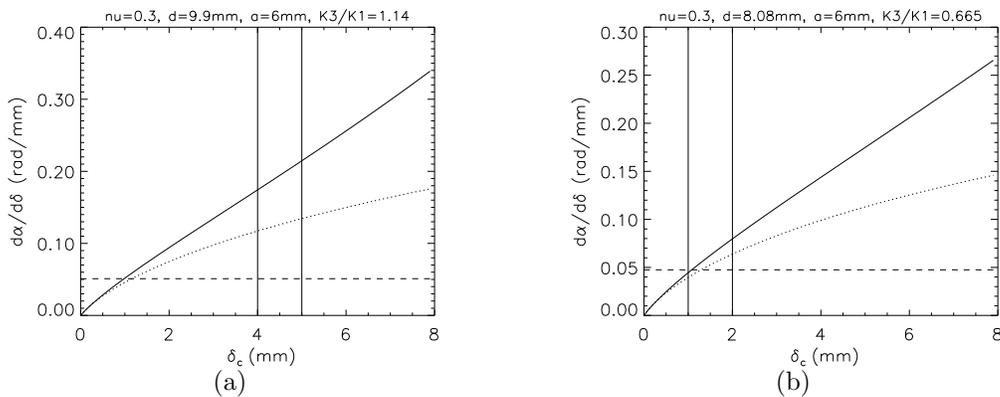


Figure 4.9: Rupture par fatigue sur un acier en mode (I+II+III)

4.4.2 Que peut-on en déduire?

Il est à noter que les expériences ont été réalisées sur un nombre restreint d’échantillons du même type et que par conséquent, certains résultats demanderaient à être confirmés. On peut néanmoins en déduire certaines tendances.

On voit que dans l’ensemble la concordance entre les valeurs données par les formules (4.15) ou (4.18) et la valeur expérimentale est acceptable.

⁵Le milieu de l’intervalle correspond à la moyenne des longueurs des différentes facettes. Sa largeur a été déterminée à partir de l’écart-type entre ces différentes longueurs.

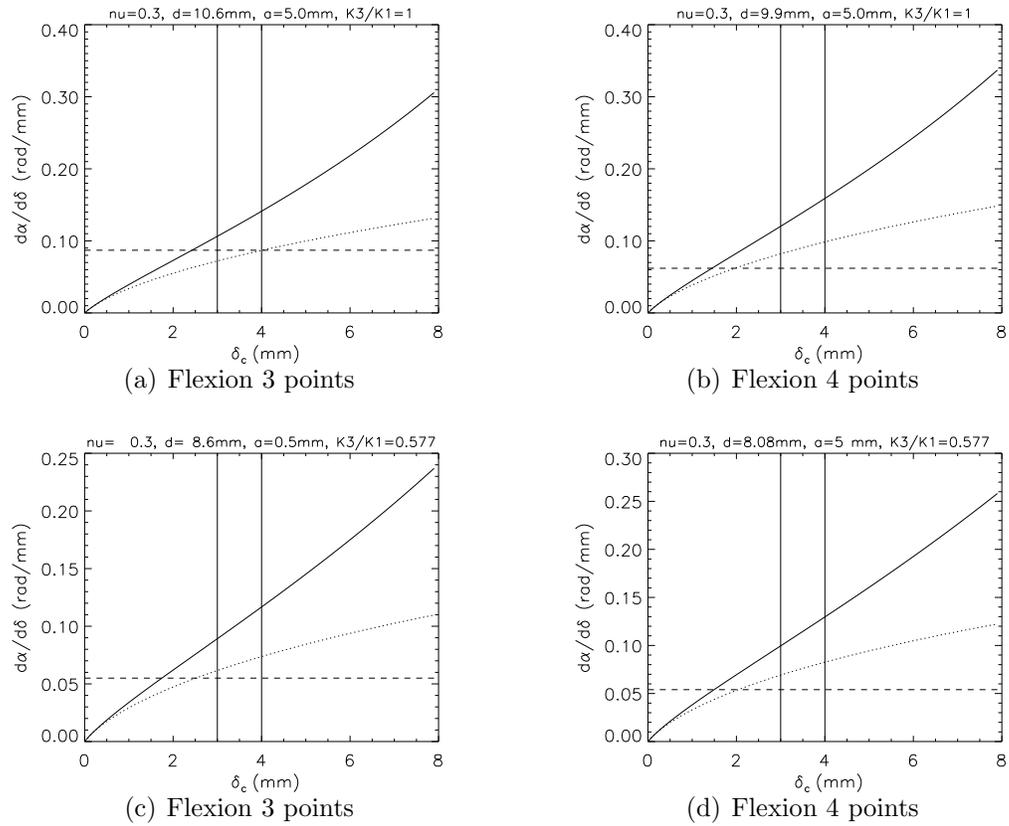


Figure 4.10: Rupture par fatigue sur un acier en mode (I+III)

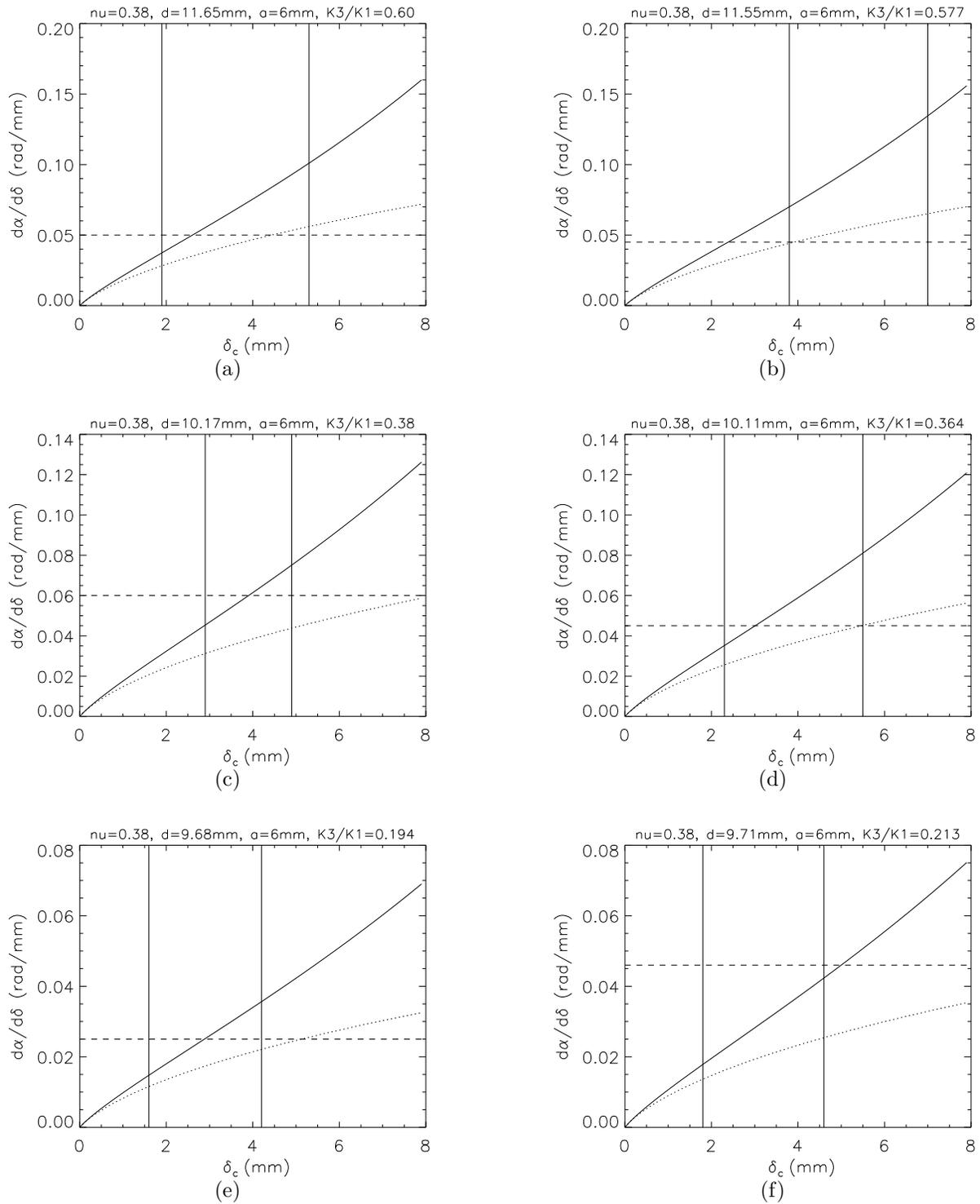


Figure 4.11: Rupture brutale sur du plexiglas en mode (I+III)

Par ailleurs, on remarque que pour les expériences en fatigue (Fig. 4.9 et 4.10), c'est le critère " $\frac{1}{2d} \int_{-d}^d k_I(x_3, \delta_c) dx_3$ maximum"⁶ qui donne les meilleurs résultats. Pour les expériences en rupture brutale, si l'on écarte l'essai représenté sur la courbe 4.4.11(b), c'est le critère " $\frac{1}{2d} \int_{-d}^d \mathcal{G}(x_3, \delta_c) dx_3$ maximum" qui semble donner les meilleurs résultats. Nous pouvons relier ce résultat au fait que bien souvent la loi de propagation porte sur le facteur d'intensité de contraintes du mode I en fatigue et le seuil de propagation sur le taux de restitution d'énergie \mathcal{G} en rupture brutale.

4.4.3 Quelles sont les raisons des écarts?

Toutefois, les écarts entre prédiction et théorie ne sont pas tout à fait négligeables et ne peuvent venir uniquement des incertitudes de mesure. Elles peuvent néanmoins s'expliquer par diverses raisons.

La première peut venir des approximations faites lors du calcul des intégrales $\int_{-d}^d k_I(x_3, \delta) dx_3$ et $\int_{-d}^d \mathcal{G}(x_3, \delta) dx_3$, que ce soit pour l'estimation des opérateurs non-universels ou pour la détermination des grandeurs caractérisant le champ de contraintes en pointe de fissure. On peut par ailleurs se demander s'il est légitime d'appliquer la formule (1.4) établie pour $\delta \rightarrow 0$ à $\delta = \delta_c$ qui est de l'ordre du dixième de la taille de l'échantillon mais de l'ordre de la profondeur a de l'entaille initiale.

4.5 Le branchement moyen est-il bien prédit par nos critères?

4.5.1 Résultats

Expérimentalement, nous avons effectué deux séries de quatre essais chacune, avec des chargements en mode (I+II+III) différents. Elles ont été effectuées sur des échantillons contenant une entaille orientée à $\beta = 45^\circ$, $\tilde{\gamma} = 28.9^\circ$ pour la première et $\beta = 60^\circ$, $\tilde{\gamma} = 29.8^\circ$ pour la deuxième (l'angle $\tilde{\gamma}$ étant relié à γ par la relation (4.2)). Remarquons au passage que les graphes 4.4.9(a) et 4.4.9(b) correspondent au déversement obtenu dans ces deux cas de chargement.

Pour vérifier la validité des valeurs de φ_0 obtenues par le développement (4.20), nous avons également calculé numériquement la valeur de φ_0 annulant $k_{II}(x_3 = 0, \delta_c)$. Les résultats obtenus sont regroupés dans les tableaux suivants.

⁶Ou plus exactement, puisqu'il s'agit de fatigue, " $\frac{1}{2d} \int_{-d}^d \Delta k_I(x_3, \delta_c) dx_3$ maximum"

Cas $\beta = 45^0$, $\tilde{\gamma} = 28.9^0$

Expérimentalement, on obtient :

$$\delta_c = 4,5 \pm 0,5 \text{ mm}, \varphi_m \sim 26.9^0 \text{ et } \boxed{\varphi_0 = -26,8^0 \pm 1^0} \quad (4.21)$$

et théoriquement (avec $d = 9,9 \text{ mm}$, $a = 6 \text{ mm}$) :

| Critère | $k_{II}^* = 0$ | $k_{II}^* + \sqrt{\delta_c} k_{II}^{(1/2)} = 0$ | $k_{II}^* + \sqrt{\delta_c} k_{II}^{(1/2)} + \delta_c k_{II}^{(1)} = 0$ |
|----------------------------------|----------------|-------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------|
| φ_0 donné par (4.20) | -63^0 | $-24.5^0 \pm 1^0$ | $-31.5^0 \pm 0,5^0$ |
| φ_0 obtenu numériquement | -45^0 | $-28^0 \pm 0,5^0$ | $-28^0 \pm 0,5^0$ |

 Table 4.1: Cas $k_{II}/k_I = 0.55$, $k_{III}/k_I = 1.14$

Les incertitudes sur les résultats théoriques proviennent des incertitudes de mesure sur δ_c .

Cas $\beta = 60^0$, $\tilde{\gamma} = 29.8^0$

Expérimentalement, on obtient :

$$\delta_c = 1,5 \pm 0,5 \text{ mm}, \varphi_m \sim 21^0 \text{ et } \boxed{\varphi_0 = -30^0 \pm 2^0} \quad (4.22)$$

et théoriquement (avec $d = 8,08$ mm, $a = 6$ mm) :

| Critère | $k_{II}^* = 0$ | $k_{II}^* + \sqrt{\delta_c} k_{II}^{(1/2)} = 0$ | $k_{II}^* + \sqrt{\delta_c} k_{II}^{(1/2)} + \delta_c k_{II}^{(1)} = 0$ |
|----------------------------------|----------------|-------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------|
| φ_0 donné par (4.20) | -65.5^0 | $-34^0 \pm 3^0$ | $-38^0 \pm 2^0$ |
| φ_0 obtenu numériquement | -46^0 | $-36^0 \pm 1^0$ | $-35^0 \pm 1^0$ |

 Table 4.2: Cas $k_{II}/k_I = 0.57$, $k_{III}/k_I = 0.665$

4.5.2 Discussion

On remarque dans un premier temps que les résultats obtenus sont assez peu différents que l'on prenne en compte les deux ou les trois premiers termes du développement de $k_{II}(x_3 = 0, \delta_c)$ (correspondant aux deux dernières colonnes des tableaux 4.1 et 4.2). On peut donc espérer que le rajout du quatrième terme du développement ne modifierait pas cette prédiction.

Par ailleurs, on voit que l'angle φ_0 prédit par le critère classique $k_{II}^*(x_3 = 0) = 0$ est beaucoup trop grand par rapport à la valeur expérimentale. En annulant le facteur d'intensité de contraintes $k_{II}(x_3 = 0, \delta_c)$ au bout d'une longueur de propagation correspondant à la longueur des facettes δ_c , les résultats deviennent alors très proches de la valeur expérimentale. La présence de mode III (qui crée les facettes) semble donc avoir un effet d'atténuation sur le branchement moyen, qui ne peut être pris en compte qu'en prenant δ fini dans le développement de $k_{II}(x_3 = 0, \delta)$ en puissances de δ .

D'autre part, même si l'écart entre la valeur de φ_0 donnée par le développement et celle donnée numériquement est grande quand on annule uniquement $k_{II}^* = 0$, il devient plus petit quand on rajoute les termes suivants. La formule analytique (4.20) semble donc, encore une fois, donner des résultats raisonnables.

Quant aux écarts entre valeurs théoriques et expérimentales, ils peuvent s'expliquer de la même façon qu'au §4.4.3.

4.6 Détermination de la rotation du front autour de la normale à la fissure

4.6.1 Echec d'un critère quantitatif

Supposons maintenant $\delta'(x_3) \neq 0$ et $\delta(x_3) = \delta\eta(x_3)$ de la forme suivante :

$$\delta(x_3) = \delta(1 + \eta'.x_3) \quad (4.23)$$

ce qui introduit un paramètre géométrique η' supplémentaire (en plus de φ_m et φ_0) pour l'extension, décrivant une rotation du front autour de la normale à la fissure.

Notre idée est de déterminer ce dernier paramètre en maximisant $\frac{1}{2d} \int_{-d}^d \mathcal{G}(x_3, \delta) dx_3$ ou $\frac{1}{2d} \int_{-d}^d k_I(x_3, \delta) dx_3$ non seulement par rapport à φ_m mais aussi par rapport à η' . Mais en faisant cela pour k_{III}/k_I et k_{II}/k_I petits, nous constatons que l'on obtient un minimum et non un maximum de ces intégrales par rapport à η' . Pour le voir, il suffit d'étudier le signe du terme proportionnel à η'^2 dans le développement des intégrales. La longueur $\delta(x_3)$ y intervient sous la forme $\sqrt{\delta(x_3)}$ dans le deuxième terme du développement des F.I.C. en puissances de δ , et de façon linéaire dans le troisième terme. Le terme proportionnel à η'^2 provient donc uniquement du deuxième terme. Par exemple, dans le développement de $\frac{1}{2d} \int_{-d}^d k_I(x_3, \delta) dx_3$, il vaut (d'après le développement de $\mathbf{G}(\varphi)$ donné par Amestoy et Leblond (1992)) :

$$-T_I \sqrt{\frac{2\delta_c}{\pi}} \frac{\varphi_0^2}{12} \eta'^2 d^2$$

Son signe et par suite l'existence d'un maximum ou d'un minimum dépendrait donc du signe de la contrainte non-singulière T_I , ce qui ne paraît pas avoir de sens physiquement. On en conclut que ce terme quadratique en η' n'a pas été calculé correctement. Peut-être les termes suivants du développements des F.I.C. en puissances de δ , et notamment le cinquième terme, en δ^2 , qui peut parfaitement engendrer des termes en $\varphi_0^2 \eta'^2$, rendraient-ils ce terme constamment négatif (pour les valeurs de δ_c considérées, résultant des expériences) et permettraient de conclure à l'existence d'un maximum?

4.6.2 Critère qualitatif

Supposons que, malgré les résultats de la section précédente, le maximum recherché existe et regardons pour quelles valeurs de η' les quantités $k_I(x_3 = 0, \delta_c)$ et $\mathcal{G}(x_3 = 0, \delta_c)$ sont maximales. Le terme quadratique en η' étant inconnu (mais supposé négatif pour avoir un maximum), on

ne peut, grce au terme linéaire, déterminer que le *signe* de η' réalisant le maximum. C'est l'objet de cette section.

Plaçons nous toujours dans le cas k_{III}/k_I et k_{II}/k_I petits.

Que prédit " $k_I(x_3 = 0, \delta_c)$ maximum"?

On a en négligeant les termes d'ordre supérieur :

$$k_I(x_3 = 0, \delta_c) \sim k_{I0}(x_3 = 0, \delta_c) + \delta_c N_{I,III}(\varphi_0) k_{III} \eta' + \delta_c P_{I,III}(\varphi_0) k_{III} \varphi' \quad (4.24)$$

où $k_{I0}(x_3 = 0, \delta_c)$ correspond au cas $\eta' = \varphi' = 0$.

Supposons k_{III}/k_I et k_{II}/k_I positifs (les autres cas s'obtiennent par parité), ce qui implique $\varphi_0 < 0$. Alors $N_{I,III}(\varphi_0)$ est positif (cf. conditions de parité du §4.3.1 et le tableau 3.1) et $k_I(x_3 = 0, \delta_c)$ est maximum pour :

$$\eta' > 0.$$

Que prédit " $\mathcal{G}(x_3 = 0, \delta_c)$ maximum"?

Pour le calcul de $\mathcal{G}(x_3 = 0, \delta_c)$, nous allons supposer ici $k_{II}^* = 0$ et non plus $k_{II}(\delta_c) = 0$ comme précédemment pour simplifier, mais des conclusions analogues (contradiction) seraient atteintes avec le critères $k_{II}(\delta_c) = 0$.

On a alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(x_3 = 0, \delta_c) = & \mathcal{G}_0(x_3 = 0, \delta_c) \\ & + 2\delta_c \eta' \left[\frac{1 - \nu^2}{E} k_I^*(x_3 = 0) N_{I,III}(\varphi_0) k_{III} + \right. \\ & \left. \frac{1 + \nu}{E} k_{III}^*(x_3 = 0) N_{III,I}(\varphi_0) k_I + \frac{1 + \nu}{E} k_{III}^*(x_3 = 0) N_{III,II}(\varphi_0) k_{II} \right] + \\ & 2\delta_c \varphi' \left[\frac{1 - \nu^2}{E} k_I^*(x_3 = 0) P_{I,III}(\varphi_0) k_{III} \right. \\ & \left. \frac{1 + \nu}{E} k_{III}^*(x_3 = 0) P_{III,I}(\varphi_0) k_I + \frac{1 + \nu}{E} k_{III}^*(x_3 = 0) P_{III,II}(\varphi_0) k_{II} \right] \end{aligned} \quad (4.25)$$

où \mathcal{G}_0 ne dépend ni de φ' , ni de η' .

En étudiant le terme en facteur de η' , l'on s'aperçoit qu'il est de l'ordre de 10^{-4} donc très petit. On en conclut que $\mathcal{G}(x_3 = 0, \delta_c)$ est maximum pour $\eta' \sim 0$.

Les critères $k_I(x_3 = 0, \delta_c)$ et $\mathcal{G}(x_3 = 0, \delta_c)$ ne conduisent donc pas à la même prédiction. Les expériences réalisées en mode (I+II+III) doivent nous permettre de choisir l'un ou l'autre des critères et par suite, le critère " $\int_{-d}^d \mathcal{G}(x_3, \delta_c) dx_3$ maximum" ou " $\int_{-d}^d k_I(x_3, \delta_c) dx_3$ maximum".

4.6.3 Confrontation avec les expériences

Dans nos expériences de fatigue, nous avons constaté que $\eta' = 0$, ce qui voudrait donc dire que le "bon" choix est de maximiser $\int_{-d}^d \Delta \mathcal{G}(x_3, \delta_c) dx_3$. Mais nous avons vu par ailleurs que

dans ces expériences de fatigue, pour la prédiction de la vitesse de déversement, c'est le critère $\int_{-d}^d \Delta k_I(x_3, \delta_c) dx_3$ qui semble fournir les résultats les plus proches des valeurs expérimentales. Nous aboutissons donc à une contradiction.

Doit-on en conclure que la loi régissant la longueur de l'extension n'est pas la même que celle qui régit le déversement? La longueur de l'extension ne serait-elle pas plutôt gouvernée par une loi de type "local" même en présence de mode III? Il est clair, en effet, qu'une loi "locale" prédirait une avancée uniforme, tous les points du front subissant le même chargement. On peut, par exemple, songer en fatigue à une loi du style "loi de Paris" et en rupture brutale à des critères du type " $\mathcal{G} = \mathcal{G}_c$ " ou " $k_I = k_{Ic}$ ".

4.7 Conclusion

Les critères "globaux" de déversement (4.10) et (4.11), qui introduisent une longueur δ_c que nous interprétons physiquement comme la longueur au bout de laquelle tous les points du front agissent de "concert", donnent des valeurs acceptables de la vitesse de déversement. Les deux critères donnent de plus des valeurs voisines. Toutefois, l'expérience semble donner plutôt raison au critère " $\frac{1}{2d} \int_{-d}^d \Delta k_I(x_3, \delta_c) dx_3$ maximum" en fatigue et au critère " $\frac{1}{2d} \int_{-d}^d \mathcal{G}(x_3, \delta_c) dx_3$ maximum" en rupture brutale. De plus, nous avons constaté un bon accord entre les valeurs de φ_0 prédites par le critère $k_{II}(x_3 = 0, \delta_c)$ et les valeurs expérimentales. Seul le problème de la détermination de la rotation éventuelle du front de fissure autour de la normale à la fissure a abouti sur une contradiction : le même critère ne saurait prévoir à la fois la rotation du front autour de la direction de propagation (déversement) et celle (nulle expérimentalement) autour de la normale à la fissure. Ce constat négatif pourrait pousser à conclure que le calcul de l'opérateur $\mathbf{N}(\varphi)$ était en fin de compte inutile. Cette conclusion est exagérément pessimiste dans la mesure où ce calcul était précisément nécessaire pour aboutir à ce constat, qui n'était nullement évident *a priori*.

Néanmoins, nos critères ne sont pas "autonomes", dans le sens où l'on ne peut les appliquer sans avoir fait des essais pour mesurer la longueur δ_c . Dès lors, se pose le problème de la détermination théorique de cette valeur. Une chose est sûre, c'est que, tout comme la distance séparant deux zones de type (B) dans le cas de la segmentation, cette distance ne peut être prédite dans le cadre strict de la mécanique de la rupture fragile. En effet la seule longueur caractéristique $(k_{Ic}/E)^2$ (où k_{Ic} désigne la ténacité du matériau et E le module d'Young) intervenant dans cette théorie est beaucoup trop petite (de l'ordre de $0,1 \mu\text{m}$ pour un acier courant) par rapport aux longueurs expérimentales.

Part II

Fonctions de poids 3D d'une fissure d'interface semi-infinie

Introduction

De nombreux auteurs ont donné l'expression des fonctions de poids tridimensionnelles (en abrégé 3D) de Bueckner d'une fissure semi-infinie, dans un domaine élastique infini *homogène*. Citons notamment le travail de Bueckner (1987) lui-même, qui a calculé non seulement les fonctions de poids *restreintes* (c'est-à-dire pour des forces opposées appliquées sur deux points situés en vis-à-vis sur les lèvres de la fissure), mais aussi les fonctions de poids *complètes* (c'est-à-dire pour des forces appliquées n'importe où dans le solide). Un apport remarquable de la méthode de Bueckner est qu'il a simplifié considérablement le traitement mathématique en ne s'intéressant qu'aux champs mécaniques près du front de fissure (méthode qu'il qualifie de *spéciale* dans sa terminologie), et non à la solution complète du problème d'élasticité (méthode dite *générale*).

La connaissance de ces fonctions de poids a permis à Gao et Rice (1986) d'étudier la stabilité de la forme rectiligne du front d'une fissure plane semi-infinie, en cours de propagation coplanaire. Leur démarche consiste à relier les facteurs d'intensité de contraintes du front légèrement perturbé à l'intérieur du plan de la fissure, à la perturbation, aux facteurs d'intensité initiaux et aux fonctions de poids 3D de la fissure semi-infinie. L'étude de la stabilité découle de ce calcul des facteurs d'intensité de contraintes le long du front perturbé.

La question que nous envisageons ici est d'étendre cette démarche à une fissure de même forme, mais située entre deux milieux élastiques de caractéristiques différentes (*fissure d'interface*). Or seules les fonctions de poids bidimensionnelles (en abrégé 2D) d'une fissure d'interface semi-infinie sont connues. Il s'agit donc dans un premier temps de déterminer les fonctions de poids 3D pour cette même géométrie. Seules les fonctions de poids *restreintes* seront calculées. La méthode de résolution sera de type *spécial*; elle diffère néanmoins de celle de Bueckner (1987), et s'inspire des travaux de Gao et Rice (Rice, 1985, Gao et Rice, 1986 et Rice, 1989) d'une part, et de Leblond *et al.* (1996) d'autre part. Etant donnée la complexité du problème, on peut raisonnablement penser que le calcul des fonctions de poids *complètes* serait inextricable. Il est à noter que bien que la résolution du problème d'élasticité ne soit pas complète, il s'agit de la première de son genre, c'est-à-dire concernant un problème 3D comportant une fissure d'interface.

La présente partie de ce mémoire est divisée en 3 chapitres. Les deux premiers chapitres constituent les deux étapes d'une sorte de grande "boucle autocohérente" qui nous mènera à

des équations portant sur les fonctions de poids. Le troisième chapitre s'attache à résoudre ces équations, puis à étudier, en guise d'application, la stabilité de la forme rectiligne du front.

Chapitre 1

Le but de ce chapitre est d'établir l'expression de la variation des facteurs d'intensité de contraintes due à une petite perturbation coplanaire arbitraire du front. La méthode est similaire à celle de Gao et Rice (1986) et consiste à utiliser la formulation de Rice de la théorie des fonctions de poids de Bueckner, qui relie ces fonctions à la variation du saut de déplacement à travers la fissure due à un mouvement infinitésimal du front. La différence est qu'ici, seules quelques propriétés élémentaires des fonctions de poids, que nous expliciterons dans un premier temps, sont connues, alors que l'expression explicite de ces fonctions était disponible chez Gao et Rice dès le début.

L'expression de la variation des facteurs d'intensité de contraintes est alors obtenue, sous forme intégrale, en fonction des facteurs d'intensité initiaux, de la forme de la perturbation et de constantes $\gamma_+, \gamma_-, \gamma_{III}, \gamma_z, \gamma$ reliées aux fonctions de poids par leur comportement près du front de fissure.

Chapitre 2

Ce chapitre constitue la deuxième étape de notre grande "boucle autocohérente". Elle consiste à appliquer la formule établie dans le chapitre 1 au chargement particulier qui sert à la définition des fonctions de poids, et à une perturbation particulière qui conserve la géométrie du problème, à savoir une rotation infinitésimale du front autour de la direction normale aux lèvres de la fissure. L'idée de cette procédure provient du travail de Leblond *et al.* (1996). La variation des facteurs d'intensité de contraintes induite par ce mouvement s'exprime alors en fonction des dérivées des fonctions de poids. Nous obtenons ainsi des équations intégrodifférentielles sur les fonctions de poids qui font apparaître les constantes $\gamma_+, \gamma_-, \gamma_{III}, \gamma_z, \gamma$.

La transformée de Fourier, prise le long du front, de ces équations intégrodifférentielles, donne alors des équations différentielles ordinaires où apparaissent toujours les constantes $\gamma_+, \gamma_-, \gamma_{III}, \gamma_z, \gamma$. Mais ces constantes sont aussi, rappelons-le, reliées au comportement asymptotique des fonctions de poids près du front de fissure, et les transformées de Fourier de ces fonctions doivent s'annuler à l'infini. En écrivant ces conditions, nous "bouclerons la boucle" et disposerons d'une méthode permettant de déterminer les constantes $\gamma_+, \gamma_-, \gamma_{III}, \gamma_z, \gamma$, puis les fonctions de poids.

Chapitre 3

Le problème ayant été bien posé dans les deux premiers chapitres de la présente partie, nous nous attacherons dans ce chapitre à le résoudre.

Les équations font intervenir une constante ε qui traduit (avec trois autres constantes) la différence de nature des matériaux de part et d'autre de l'interface. En pratique, cette constante est petite devant 1. En effectuant un développement au premier ordre en ε nous obtenons les solutions de façon entièrement explicite et analytique. Pour des valeurs arbitraires de ε , seul un calcul numérique demeure possible. Ce calcul fournit, pour ε petit, des résultats identiques aux résultats analytiques.

L'étude de la stabilité se fait alors comme chez Gao et Rice (1986) et conduit à un résultat analogue : la forme rectiligne du front est stable vis-à-vis de petites perturbations sinusoïdales de toutes les longueurs d'onde. On examine aussi la question de savoir si l'inhomogénéité (caractérisée par le paramètre ε) favorise ou défavorise cette stabilité.

Chapter 5

Propriétés élémentaires des fonctions de poids - Variation des facteurs d'intensité de contraintes due à une petite perturbation du front

5.1 Définition et notations

Nous considérons une fissure d'interface plane semi-infinie à front droit située entre deux matériaux élastiques isotropes. Les deux matériaux, de coefficients d'élasticité μ_1, ν_1 et μ_2, ν_2 , occupent respectivement les demi-espaces $y > 0$ et $y < 0$ et sont soudés le long du demi-plan $y = 0, x > 0$ (saut de déplacement et saut de traction nuls à travers l'interface). La fissure est située dans le demi-plan $y = 0, x < 0$.

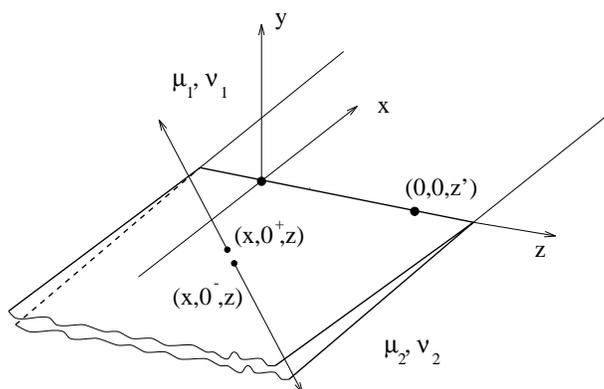


Figure 5.1: Fissure d'interface semi-infinie à front droit

Nous définissons alors les *facteurs d'intensité de contraintes* $K_I(z), K_{II}(z), K_{III}(z)$ au point

z du front comme dans le travail d'Hutchinson *et al.* (1987), par l'expression suivante du saut de déplacement $[[\vec{u}]](x, z) = \vec{u}(x, 0^+, z) - \vec{u}(x, 0^-, z)$ à travers la fissure quand $x \rightarrow 0^-$:

$$\left\{ \begin{array}{l} [[u_y + iu_x]](x, z) \sim \frac{2[(1 - \nu_1)/\mu_1 + (1 - \nu_2)/\mu_2]}{(1 + 2i\varepsilon) \cosh(\pi\varepsilon)} K(z) \sqrt{\frac{|x|}{2\pi}} |x|^{i\varepsilon}, K(z) \equiv (K_I + iK_{II})(z) \\ [[u_z]](x, z) \sim 2 \left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} \right) K_{III}(z) \sqrt{\frac{|x|}{2\pi}} \end{array} \right. \quad (5.1)$$

où

$$\varepsilon \equiv \frac{1}{2\pi} \ln \frac{\mu_1 + (3 - 4\nu_1)\mu_2}{\mu_2 + (3 - 4\nu_2)\mu_1} \quad (5.2)$$

est une constante reliée à la différence de nature entre les deux matériaux. Notons que si le matériau est homogène ($\mu_1 = \mu_2$, $\nu_1 = \nu_2$), alors $\varepsilon = 0$, mais la réciproque n'est pas vraie.

Le *taux de restitution d'énergie* s'écrit alors :

$$G(z) = \Lambda |K(z)|^2 + \Lambda' K_{III}^2(z), \quad \Lambda \equiv \frac{(1 - \nu_1)/\mu_1 + (1 - \nu_2)/\mu_2}{4 \cosh^2(\pi\varepsilon)}, \quad \Lambda' \equiv \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} \right) \quad (5.3)$$

Enfin, la *fonction de poids* $h_{p_i}(x, z; z')$, $p = I, II, III$, $i = x, y, z$ est définie comme le $p^{\text{ième}}$ facteur d'intensité de contraintes, au point de cote z' du front, dû à l'application d'un doublet de forces unitaires dans les directions $\pm \vec{e}_i$ aux points de coordonnées $(x, 0^\pm, z)$ des lèvres de la fissure. Ces fonctions sont donc définies pour tout $x < 0$ et pour tout $(z', z) \in \mathbb{R}^2$. Vu l'invariance du problème par translation selon \vec{e}_z , elles ne dépendent en fait que des deux variables x et $z' - z$:

$$h_{p_i}(x, z; z') \equiv h_{p_i}(x, z' - z) \quad (5.4)$$

Nous serons, par ailleurs, naturellement amenés à utiliser la fonction de poids complexe combinant mode I et mode II :

$$h_i(x, z) \equiv h_{I_i}(x, z) + ih_{II_i}(x, z). \quad (5.5)$$

5.2 Variation du saut de déplacement sur la fissure due à une petite perturbation du front (théorie de Bueckner-Rice)

Le but de cette section est de déterminer la variation du saut de déplacement sur la fissure engendrée par une petite perturbation coplanaire $\delta a(z)$ du front sous chargement (\vec{T}_d, \vec{u}_d) constant (forces \vec{T}_d données sur $\partial\Omega_T$, lèvres de la fissure libres de contraintes, déplacements \vec{u}_d

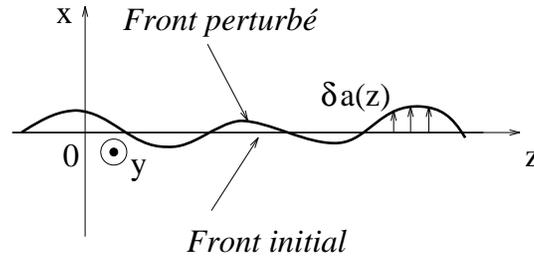


Figure 5.2: Fissure d'interface semi-infinie à front légèrement perturbé

donnés sur $\partial\Omega_u$). Notons que $\delta a(z)$ peut prendre des valeurs négatives car les perturbations envisagées ici sont purement virtuelles et incluent la possibilité d'un recul du front.

Le raisonnement de Rice (1985) pour une fissure dans un milieu homogène s'étend sans difficulté à une fissure d'interface. Les coefficients apparaissant dans l'expression (5.3) du taux de restitution d'énergie en fonction des facteurs d'intensité de contraintes constituent la seule différence. Nous allons néanmoins, par souci de complétude, reprendre ce raisonnement dans le cas d'une fissure d'interface.

Pour ce faire, posons $\delta a(z) = \delta A g(z)$ où $g(z)$ est une fonction de z donnée et δA une grandeur infiniment petite. Appliquons en plus du chargement (\vec{T}_d, \vec{u}_d) supposé constant au cours du temps, un doublet de forces ponctuelles¹ $\pm \vec{P}$ sur les lèvres de la fissure aux points $(x, 0^\pm, z)$. Etudions des variations virtuelles de ces forces ponctuelles, ainsi que de la géométrie du front. On a :

$$\delta W_{ext} = \delta W + \int_{-\infty}^{+\infty} G(z', \vec{P}) \delta A g(z') dz' \quad (5.6)$$

où δW_{ext} désigne le travail des forces extérieures, δW l'accroissement de l'énergie de déformation entre l'état initial et final, et $G(z', \vec{P})$ le taux de restitution d'énergie en présence des forces $\pm \vec{P}$. Cette équation est valable aussi bien pour des variations du front que des variations de $\pm \vec{P}$. En effet,

1. pour une variation du front sous chargement constant, l'équation n'est autre que la définition de G ;
2. pour une variation de $\pm \vec{P}$ avec $\delta A=0$, l'équation se réduit à $\delta W_{ext} = \delta W$ qui n'est autre que le principe des puissances virtuelles.

Or, avec sommation sur l'indice i :

$$\delta W_{ext} = P_i \delta[u_i](x, z) + \int_{\partial\Omega_T} \vec{T}_d \cdot \delta \vec{u} dS = P_i \delta[u_i](x, z) - \delta \Phi, \quad \Phi = - \int_{\partial\Omega_T} \vec{T}_d \cdot \vec{u} dS$$

¹Cf. remarque à la fin du paragraphe

car le chargement (\vec{T}_d, \vec{u}_d) est constant au cours du temps (Φ désigne l'énergie potentielle des forces données \vec{T}_d). En faisant alors une transformation de Legendre, l'équation (5.6) devient :

$$\delta[W + \Phi - P_i \cdot \llbracket u_i \rrbracket(x, z)] = -\delta P_i \cdot \llbracket u_i \rrbracket(x, z) - \int_{-\infty}^{+\infty} G(z', \vec{P}) \delta A g(z') dz'$$

Le terme $W + \Phi - P_i \cdot \llbracket u_i \rrbracket(x, z)$ ne dépend que du couple de variables indépendantes (A, \vec{P}) , le membre de gauche est donc une différentielle exacte. Par suite, l'égalité des dérivées croisées donne :

$$\frac{\partial \llbracket u_i \rrbracket(x, z)}{\partial A} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial G}{\partial P_i}(z', \vec{P}) g(z') dz'$$

Cette égalité étant vraie pour tout \vec{P} , elle est vraie en particulier pour $\vec{P} = \vec{0}$. On obtient alors, en multipliant l'égalité par δA , l'accroissement de $\llbracket u_i \rrbracket(x, z)$ dû à une perturbation $\delta a(z)$ du front sous chargement constant (en l'absence des forces \vec{P}) au premier ordre en δA :

$$\delta \llbracket u_i \rrbracket(x, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial G}{\partial P_i}(z', \vec{P} = \vec{0}) \delta a(z') dz' \quad (5.7)$$

Or, d'après le principe de superposition, les facteurs d'intensité de contraintes, $K_p(z', \vec{P})$ au point z' , en présence d'un doublet de forces $\pm \vec{P}$ sur les lèvres de la fissure, s'écrivent de la façon suivante, avec sommation sur l'indice i :

$$K_p(z', \vec{P}) = K_p(z') + P_i h_{p_i}(x, z; z'), \quad p = I, II, III$$

où les $K_p(z')$ désignent les F.I.C. initiaux (pour $\vec{P} = \vec{0}$) au point z' .

Par conséquent, en dérivant cette relation par rapport à P_i et en utilisant (5.3), on obtient, au premier ordre en $\delta a(z)$:

$$\begin{aligned} \delta \llbracket u_i \rrbracket(x, z) &= 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \{ \Lambda [K_I(z') h_{I_i}(x, z' - z) + K_{II}(z') h_{II_i}(x, z' - z)] + \\ &\quad \Lambda' K_{III}(z') h_{III_i}(x, z' - z) \} \delta a(z') dz', \quad i = x, y, z \end{aligned} \quad (5.8)$$

Remarque : En fait, on montre que si l'on applique une force strictement ponctuelle \vec{P} en un point M , le déplacement est infini, donc non défini, en ce point. Pour pallier à cette difficulté, on peut reprendre le raisonnement précédent en appliquant une répartition uniforme de forces $\pm \vec{P} / \pi R^2$ sur un disque \mathcal{D} de rayon R centré en $(x, 0^\pm, z)$. Le travail de ces forces s'écrit alors $P_i \frac{1}{\pi R^2} \cdot \int_{\mathcal{D}} \delta \llbracket u_i \rrbracket dS = P_i \cdot \delta(VM \llbracket u_i \rrbracket)$ où $VM \llbracket u_i \rrbracket$ désigne la valeur moyenne de $\llbracket u_i \rrbracket$ sur le disque \mathcal{D} . Il faut alors remplacer $\llbracket u_i \rrbracket(x, z)$ par $VM \llbracket u_i \rrbracket$ dans l'équation (5.7). En passant à la limite $R \rightarrow 0$ dans l'équation obtenue on obtient, le résultat (5.7) ($\delta \llbracket u_i \rrbracket$ redevenant défini puisque \vec{P} est pris nul) et par suite le même résultat final (5.8).

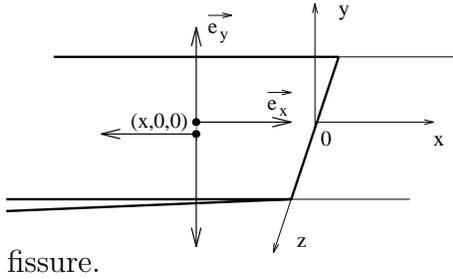
5.3 Propriétés élémentaires des fonctions de poids

En vertu de la propriété $h_{p_i}(x, z; z') \equiv h_{p_i}(x, z' - z)$, il est toujours possible de placer les points d'application du doublet en $(x, 0^\pm, 0)$ et le point d'observation des F.I.C. en z . La fonction de poids qui en résulte est alors $h_{p_i}(x, z)$.

5.3.1 Parité des $h_{p_i}(x, z)$ par rapport à z

Les propriétés de parité par rapport à z s'obtiennent par symétrie par rapport au plan $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$. Différents cas sont à envisager suivant l'orientation du doublet de forces $\pm \vec{e}_i$.

Doublet dans le plan (\vec{e}_x, \vec{e}_y)



Appelons \vec{u} le déplacement dû à ce doublet de forces. Alors on a les propriétés de symétrie suivantes, où $\alpha = x$ ou y :

$$u_\alpha(x, z) = u_\alpha(x, -z)$$

Le déplacement $u_\alpha(x, z)$ désigne le déplacement sur la lèvres supérieure (en $(x, 0^+, z)$) ou inférieure (en $(x, 0^-, z)$) de la fissure.

D'où en considérant le comportement du saut de déplacement

(5.1) quand $x \rightarrow 0^-$:

$$h_\alpha(x, z) = h_\alpha(x, -z), \quad h_\alpha = h_{I_\alpha} + ih_{II_\alpha}, \quad \alpha = x, y \quad (5.9)$$

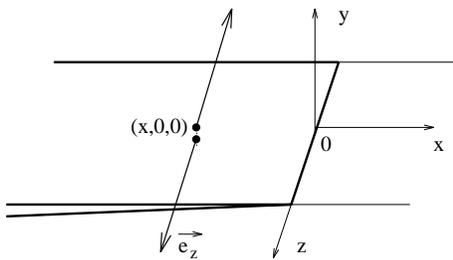
De même, on a

$$u_z(x, z) = -u_z(x, -z)$$

d'où

$$h_{III_\alpha}(x, z) = -h_{III_\alpha}(x, -z), \quad \alpha = x, y \quad (5.10)$$

Doublet dans la direction \vec{e}_z



Soit \vec{u}^- le déplacement dû à un doublet de forces $\mp \vec{e}_z$ en $(x, 0^\pm, 0)$, et soit \vec{u}^+ le déplacement dû à un doublet de forces $\pm \vec{e}_z$ en $(x, 0^\pm, 0)$. On a les propriétés de symétrie suivantes, où $\alpha = x$ ou y :

$$u_\alpha^-(x, z) = u_\alpha^+(x, -z)$$

d'où, comme les F.I.C. engendrés par un doublet $\mp \vec{e}_z$ sont opposés à ceux dûs à un doublet $\pm \vec{e}_z$, et d'après le comportement du déplacement quand $x \rightarrow 0^-$:

$$h_z(x, z) = -h_z(x, -z), \quad h_z = h_{I_z} + ih_{II_z} \quad (5.11)$$

De même, on a

$$u_z^-(x, z) = -u_z^+(x, -z)$$

d'où

$$h_{III_z}(x, z) = h_{III_z}(x, -z) \quad (5.12)$$

5.3.2 Propriétés d'homogénéité

On obtient une nouvelle solution d'un problème d'élasticité en multipliant toutes les distances et les déplacements par une quantité $\lambda > 0$. Dans une telle transformation les contraintes restent inchangées, et les forces ponctuelles, qui sont homogènes à une contrainte multipliée par une surface, sont multipliées par λ^2 .

Par conséquent, en notant \vec{u} le déplacement dû à un doublet de forces ponctuelles unitaires en $(x, 0^\pm, 0)$ des lèvres de la fissure, et $\vec{\tilde{u}}$ le déplacement dû à des forces ponctuelles de norme λ^2 en $(\lambda x, 0^\pm, 0)$ des lèvres de la fissure, on a en tout couple de points $(x', 0^\pm, z)$, $x' < 0$:

$$\begin{aligned} \llbracket \hat{u}_y + i\hat{u}_x \rrbracket(\lambda x', \lambda z) &= \lambda \llbracket u_y + iu_x \rrbracket(x', z) \\ \llbracket \hat{u}_z \rrbracket(\lambda x', \lambda z) &= \lambda \llbracket u_z \rrbracket(x', z). \end{aligned}$$

En utilisant le comportement près du front du saut des déplacements sur les lèvres de la fissure (cf. (5.1)), et la linéarité des F.I.C. par rapport au chargement, on obtient les propriétés d'homogénéité des fonctions de poids :

$$h_i(\lambda x, \lambda z) = \lambda^{-3/2-i\epsilon} h_i(x, z) \quad (5.13)$$

$$h_{III_i}(\lambda x, \lambda z) = \lambda^{-3/2} h_{III_i}(x, z) \quad (5.14)$$

pour $i = x, y, z$ et $\lambda > 0$. On rappelle que h_i est donnée par (5.5).

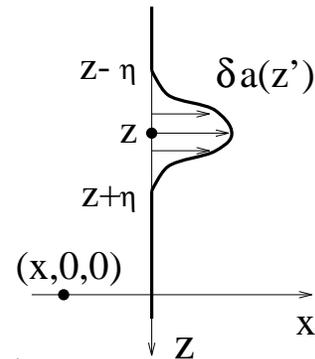
5.3.3 Comportement asymptotique des h_{p_i}

Rappelons que $h_{p_i}(x, z)$ est le $p^{i\text{ème}}$ F.I.C. dû à un doublet de forces $\pm \vec{e}_i$ appliqué aux points $(x, 0^\pm, 0)$ des lèvres de la fissure. On cherche à connaître le comportement de ces F.I.C. quand le doublet de forces s'approche du front, i.e. quand $x \rightarrow 0^-$.

L'idée ici est de relier le comportement des fonctions de poids à celui bien connu, du saut de déplacement près du front. Pour cela, nous allons utiliser la formule (5.8) donnant l'accroissement du saut de déplacement dû à une perturbation du front pour un $z' \mapsto \delta a(z')$ particulier, nul partout sauf dans un voisinage $]z-\eta, z+\eta[$ de z , avec $z \neq 0$.

Dans ce cas, le membre de gauche, $\delta \llbracket u_i \rrbracket(x, z')$, a le comportement classique (cf. 5.1) quand $x \rightarrow 0^-$, pourvu que $z' \notin]z-\eta, z+\eta[$. En prenant η assez petit pour que $0 \notin]z-\eta, z+\eta[$ (ce qui est possible puisque $z \neq 0$), on a donc, $\delta \llbracket u_y + iu_x \rrbracket(x, 0) \propto |x|^{1/2+i\epsilon}$ et $\delta \llbracket u_z \rrbracket(x, 0) \propto |x|^{1/2}$ où \propto signifie "proportionnel à".

Quant au membre de droite de (5.8), l'intégrale $2 \int_{-\infty}^{+\infty} \{\dots\} \delta a(z') dz'$ qui y figure peut être remplacée, pour $\eta \rightarrow 0$, par $\{\dots\} \delta \bar{a}$ où $\delta \bar{a} \equiv 2 \int_{z-\eta}^{z+\eta} \delta a(z') dz'$, il se ramène donc à une somme de termes proportionnels aux $K_p(z) h_{p_i}(x, z)$.



Nous pouvons donc écrire les limites $H_+(0^-, z)$ et $H_-(0^-, z)$ sous la forme suivante :

$$H_+(0, z) \equiv \gamma_+ |z|^{-2-2i\varepsilon}; H_-(0, z) \equiv \gamma_- z^{-2} \quad (5.18)$$

où γ_+ et γ_- sont des constantes complexes inconnues.

Nous pouvons, de même, définir deux fonctions complexes H_{III} et H_z , et une fonction réelle H par :

$$\begin{cases} (h_{III_y} + ih_{III_x})(x, z) \equiv (|x|/2\pi)^{1/2} |x|^{i\varepsilon} H_{III}(x, z) \\ (h_{I_z} + ih_{II_z})(x, z) \equiv (|x|/2\pi)^{1/2} H_z(x, z) \\ h_{III_z}(x, z) \equiv (|x|/2\pi)^{1/2} H(x, z) \end{cases} \quad (5.19)$$

où :

- $H_{III}(x, z)$ est impaire par rapport à z , positivement homogène de degré $-2 - i\varepsilon$;
- $H_z(x, z)$ est impaire par rapport à z , positivement homogène de degré $-2 - i\varepsilon$;
- $H(x, z)$ est paire par rapport à z , positivement homogène de degré -2 .

Comme précédemment, nous pouvons écrire les limites $H_{III}(0^-, z)$, $H_z(0^-, z)$ et $H(0^-, z)$ sous la forme suivante :

$$\begin{cases} H_{III}(0, z) \equiv \gamma_{III} z |z|^{-3-i\varepsilon} \\ H_z(0, z) \equiv \gamma_z z |z|^{-3-i\varepsilon} \\ H(0, z) \equiv \gamma z^{-2} \end{cases} \quad (5.20)$$

où γ_{III} et γ_z sont des constantes complexes inconnues, alors que γ est une constante réelle inconnue.

5.3.5 Parité des fonctions de poids par rapport à ε

Ces propriétés, qui nous seront utiles dans la résolution des équations, s'obtiennent en effectuant une symétrie par rapport au plan $(0, \vec{e}_x, \vec{e}_z)$, qui échange les matériaux. En effet, d'après (5.2), échanger les matériaux de part et d'autre de l'interface conduit à changer le signe de ε .

En raisonnant alors comme pour les conditions de parité par rapport à z , pour chaque chargement $\pm \vec{e}_i$, $i = x, y, z$, on obtient les résultats suivants :

- $h_{II_x}, h_{III_x}, h_{I_y}, h_{II_z}, h_{III_z}$ sont paires par rapport à ε ;
- $h_{I_x}, h_{II_y}, h_{III_y}, h_{I_z}$ sont impaires par rapport à ε .

Par conséquent, on voit en utilisant les notations introduites en §5.3.4, que les fonctions H_+ , H_- , H_z , H_{III} , H vérifient les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} H_+(x, z, -\varepsilon) = \overline{H_+(x, z, \varepsilon)}; H_-(x, z, -\varepsilon) = \overline{H_-(x, z, \varepsilon)} \\ H_z(x, z, -\varepsilon) = -\overline{H_z(x, z, \varepsilon)}; H_{III}(x, z, -\varepsilon) = -\overline{H_{III}(x, z, \varepsilon)} \\ H(x, z, -\varepsilon) = H(x, z, \varepsilon) \end{cases} \quad (5.21)$$

où l'indication de dépendance vis-à-vis de ε a été introduite temporairement. D'après les équations (5.18) et (5.20), les constantes $\gamma_+, \gamma_-, \gamma_{III}, \gamma_z, \gamma$ vérifient des propriétés similaires :

$$\gamma_+(-\varepsilon) = \overline{\gamma_+(\varepsilon)}, \gamma_-(-\varepsilon) = \overline{\gamma_-(\varepsilon)}, \gamma_z(-\varepsilon) = -\overline{\gamma_z(\varepsilon)}, \gamma_{III}(-\varepsilon) = -\overline{\gamma_{III}(\varepsilon)}, \gamma(-\varepsilon) = \gamma(\varepsilon) \quad (5.22)$$

5.4 Variation des F.I.C. due à une petite perturbation du front

5.4.1 Principe de la méthode

Réécrivons dans un premier temps, les relations (5.8) donnant $\delta \llbracket \vec{u} \rrbracket$ en fonction de $\delta a(z)$ avec les nouvelles notations introduites :

$$\delta \llbracket u_y + iu_x \rrbracket (x, z) = \left(\frac{|x|}{2\pi} \right)^{1/2} |x|^{i\varepsilon} \int_{-\infty}^{+\infty} [\Lambda(\overline{K}(z'))H_+(x, z' - z) + K(z')H_-(x, z' - z) + 2\Lambda'K_{III}(z')H_{III}(x, z' - z)]\delta a(z')dz' \quad (5.23)$$

$$\delta \llbracket u_z \rrbracket (x, z) = \left(\frac{|x|}{2\pi} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} [\Lambda(\overline{K}(z'))H_z(x, z' - z) + K(z')\overline{H}_z(x, z' - z) + 2\Lambda'K_{III}(z')H(x, z' - z)]\delta a(z')dz' \quad (5.24)$$

Nous nous placerons, dans un premier temps, en un point z où $\delta a(z) = 0$. Nous étendrons le traitement à la fin, sans difficulté majeure, au cas général.

Afin d'obtenir l'accroissement des F.I.C. engendré par cette perturbation, sous chargement constant, nous allons chercher le comportement de chacun des membres quand $x \rightarrow 0^-$. Il est clair que le membre de gauche est relié à la variation des F.I.C. Quant au membre de droite, la dépendance par rapport à x est plus complexe et provient des fonctions $H_p(x, z' - z)$, $p = +, -, III, z, \emptyset$ (le symbole \emptyset signifie qu'il s'agit de la fonction sans indice, i.e. de $H(x, z' - z)$) dont nous ne connaissons *a priori* le comportement pour $x \rightarrow 0^-$ que si $z' \neq z$ (cf §5.3.3). Il faudra donc découper l'intervalle d'intégration $] -\infty, +\infty[$ en $\mathbb{R}-]z - \eta, z + \eta[$ (intervalle ne contenant pas z) et $[z - \eta, z + \eta]$, où η est une constante positive destinée à tendre vers 0 finalement. Le traitement de l'intégrale sur $[z - \eta, z + \eta]$ dépend de la parité de $H_p(x, z' - z)$ par rapport à $z' - z$.

Nous allons donc procéder de la façon suivante :

- premièrement, nous expliciterons le comportement de $\delta \llbracket \vec{u} \rrbracket$ quand $x \rightarrow 0^-$ en fonction de la variation des F.I.C.;
- deuxièmement, nous établirons les résultats nécessaires aux passages à la limite $x \rightarrow 0^-$ puis $\eta \rightarrow 0$. f désignant une fonction de classe C^∞ telle que $f(z) = 0$, le comportement pour $x \rightarrow 0^-$, à η fixé, des intégrales $\int_{\mathbb{R}-]z-\eta, z+\eta[} f(z')H_p(x, z' - z)dz'$ sera entièrement

déterminé, alors que celui de $\int_{z-\eta}^{z+\eta} f(z')H_p(x, z' - z)dz'$ ne sera déterminé qu'à un terme $O(\eta)$ près.

- finalement nous passerons à la limite $x \rightarrow 0^-$ à η constant dans les relations (5.23) et (5.24), puis à la limite $\eta \rightarrow 0$. Nous obtiendrons ainsi les relations, faisant intervenir les constantes $\gamma_+, \gamma_-, \gamma_{III}, \gamma_z, \gamma$, donnant $\delta K, \delta K_{III}$ en fonction des facteurs d'intensité de contraintes initiaux K, K_{III} et de la perturbation $\delta a(z')$.

5.4.2 Comportement de $\delta \llbracket \vec{u} \rrbracket$ près du front

Avant perturbation du front, le saut de déplacement se comporte pour $x \rightarrow 0^-$ de la manière suivante (cf. (5.1) et (5.3)) :

$$\begin{cases} \llbracket u_y + iu_x \rrbracket (x, z) \sim 8 \Lambda \frac{\cosh(\pi\varepsilon)}{(1 + 2i\varepsilon)} K(z) \sqrt{\frac{|x|}{2\pi}} |x|^{i\varepsilon} \\ \llbracket u_z \rrbracket (x, z) \sim 8 \Lambda' K_{III}(z) \sqrt{\frac{|x|}{2\pi}} \end{cases} \quad (5.25)$$

Après propagation, le saut de déplacement $\llbracket \vec{u} + \delta \vec{u} \rrbracket (x, z)$ se comporte de manière analogue pour $x \rightarrow 0^-$ (cf. 5.1) dans le repère adapté au nouveau front de fissure ($M, \vec{e}_x^*, \vec{e}_y, \vec{e}_z^*$) (cf. fig. 5.3). Rappelons que $\delta a(z)$ est supposé nul pour le moment.

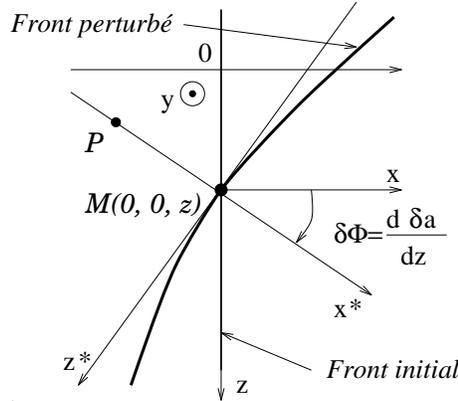


Figure 5.3: Repère adapté au front de fissure perturbé

Décomposons les vecteurs dans les deux bases : $\vec{OP} = x\vec{e}_x + z\vec{e}_z = x^*\vec{e}_x^*, \vec{u} = u_x\vec{e}_x + u_y\vec{e}_y + u_z\vec{e}_z = u_x^*\vec{e}_x^* + u_y\vec{e}_y + u_z^*\vec{e}_z^*$. On a alors, quand $x^* \rightarrow 0^-$, i.e. quand le point P s'approche du front :

$$\begin{cases} \llbracket (u_y + \delta u_y) + i(u_x^* + \delta u_x^*) \rrbracket (x^*, z^* = 0) \sim 8 \Lambda \frac{\cosh(\pi\varepsilon)}{(1 + 2i\varepsilon)} (K(z) + \delta K(z)) \sqrt{\frac{|x^*|}{2\pi}} |x^*|^{i\varepsilon} \\ \llbracket u_z^* \rrbracket (x^*, z^* = 0) \sim 8 \Lambda' (K_{III}(z) + \delta K_{III}(z)) \sqrt{\frac{|x^*|}{2\pi}} \end{cases} \quad (5.26)$$

En écrivant alors les composantes de \vec{u} dans la nouvelle base en fonction des anciennes, compte tenu de ce que $|\delta\Phi| = \left| \frac{d\delta a}{dz} \right| \ll 1$ et en combinant les équations (5.25) et (5.26), on obtient :

$$\delta \llbracket u_y + iu_x \rrbracket (x, z) = 8 \delta K(z) \frac{\Lambda \cosh(\pi\varepsilon)}{1 + 2i\varepsilon} \sqrt{\frac{|x|}{2\pi}} |x|^{i\varepsilon} + 8i \Lambda' K_{III}(z) \frac{d\delta a}{dz} \sqrt{\frac{|x|}{2\pi}} + O(|x|^{3/2}) \quad (5.27)$$

$$\begin{aligned} \delta \llbracket u_z \rrbracket (x, z) &= 8 \delta K_{III}(z) \Lambda' \sqrt{\frac{|x|}{2\pi}} - 8 \Lambda \cosh(\pi\varepsilon) \operatorname{Im} \left(\frac{K(z) |x|^{i\varepsilon}}{1 + 2i\varepsilon} \right) \frac{d\delta a}{dz} \sqrt{\frac{|x|}{2\pi}} \\ &+ O(|x|^{3/2}) \end{aligned} \quad (5.28)$$

5.4.3 Comportements asymptotiques des diverses intégrales

Pour déterminer ces divers comportements, il faut utiliser le lemme suivant :

Lemme préliminaire

Pour tout $p \in \{+, -, III, z, \emptyset\}$, il existe une constante C_p positive telle que :

$$|H_p(x, z' - z)| \leq \frac{C_p}{x^2 + (z' - z)^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall (z' - z) \in \mathbb{R}$$

Démonstration

D'après les conditions d'homogénéité sur les fonctions H_p (cf. §5.3.4), on a :

$$\begin{aligned} |H_p(x, z' - z)| &= \left| H_p \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + (z' - z)^2}} \cdot \sqrt{x^2 + (z' - z)^2}, \frac{z' - z}{\sqrt{x^2 + (z' - z)^2}} \cdot \sqrt{x^2 + (z' - z)^2} \right) \right| \\ &= \frac{1}{x^2 + (z' - z)^2} \cdot \left| H_p \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + (z' - z)^2}}, \frac{z' - z}{\sqrt{x^2 + (z' - z)^2}} \right) \right| \end{aligned}$$

Le point $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + (z' - z)^2}}, \frac{z' - z}{\sqrt{x^2 + (z' - z)^2}} \right)$ appartenant au demi-cercle de centre $(0, z)$ et de rayon unité, on peut majorer $\left| H_p \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + (z' - z)^2}}, \frac{z' - z}{\sqrt{x^2 + (z' - z)^2}} \right) \right|$ par une constante C_p , d'où le résultat attendu.

Comportement des intégrales $\int_{\mathbb{R}-]z-\eta, z+\eta[} f(z') H_p(x, z' - z) dz'$ **pour** $x \rightarrow 0^-$ **à** η **fixé**

Faisons le raisonnement pour H_+ par exemple, le comportement des autres intégrales s'obtient alors de façon analogue.

D'après le lemme préliminaire :

$$|H_+(x, z' - z)| \leq \frac{C_+}{(z' - z)^2} \quad \forall x \quad \forall (z' - z) \in \mathbb{R}-]z - \eta, z + \eta[$$

Comme de plus, les fonctions $f(z')$ considérées seront toujours bornées, le terme sous l'intégrale est majoré par une fonction intégrable de z' sur l'intervalle $\mathbb{R}-]z - \eta, z + \eta[$.

Par ailleurs, d'après (5.18), $\lim_{x \rightarrow 0^-} H_+(x, z' - z) = \gamma_+ |z' - z|^{-2-2i\varepsilon}$ qui est une fonction intégrable de z' sur l'intervalle considéré.

Par conséquent, d'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue on a :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \int_{\mathbb{R}-]z-\eta, z+\eta[} f(z') H_+(x, z' - z) dz' = \int_{\mathbb{R}-]z-\eta, z+\eta[} f(z') \frac{\gamma_+}{|z' - z|^{2i\varepsilon+2}} dz', \quad \forall \eta > 0 \quad (5.29)$$

De même, $\forall \eta > 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \int_{\mathbb{R}-]z-\eta, z+\eta[} f(z') H_-(x, z' - z) dz' = \int_{\mathbb{R}-]z-\eta, z+\eta[} f(z') \frac{\gamma_-}{(z' - z)^2} dz' \quad (5.30)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \int_{\mathbb{R}-]z-\eta, z+\eta[} f(z') H_{III}(x, z' - z) dz' = \int_{\mathbb{R}-]z-\eta, z+\eta[} f(z') \frac{\gamma_{III}(z' - z)}{|z' - z|^{i\varepsilon+3}} dz' \quad (5.31)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \int_{\mathbb{R}-]z-\eta, z+\eta[} f(z') H_z(x, z' - z) dz' = \int_{\mathbb{R}-]z-\eta, z+\eta[} f(z') \frac{\gamma_z(z' - z)}{|z' - z|^{i\varepsilon+3}} dz' \quad (5.32)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \int_{\mathbb{R}-]z-\eta, z+\eta[} f(z') H(x, z' - z) dz' = \int_{\mathbb{R}-]z-\eta, z+\eta[} f(z') \frac{\gamma}{(z' - z)^2} dz' \quad (5.33)$$

Comportement des intégrales $\int_{z-\eta}^{z+\eta} f(z') H_p(x, z' - z) dz'$ pour $H_p(x, z)$ paire par rapport à z (cas $p = +, -$ ou \emptyset)

On a $f(z') = f'(z)(z' - z) + O((z' - z)^2)$ pour $z' \rightarrow z$ car $f(z) = 0$. Par conséquent, pour η petit, on peut décomposer l'intégrale où apparaît H_+ par exemple, comme suit :

$$\int_{z-\eta}^{z+\eta} f(z') H_+(x, z' - z) dz' = f'(z) \int_{z-\eta}^{z+\eta} (z' - z) H_+(x, z' - z) dz' + O(\eta)$$

car $\int_{z-\eta}^{z+\eta} O((z' - z)^2) H_+(x, z' - z) dz'$ est majoré, d'après le lemme préliminaire, par un terme indépendant de x et proportionnel à η . Le premier terme du second membre, quant à lui, est nul car $(z' - z) H_+(x, z' - z)$ est impaire par rapport à $z' - z$.

On obtient, par conséquent, pour η suffisamment petit :

$$\int_{z-\eta}^{z+\eta} f(z') H_+(x, z' - z) dz' = O(\eta) \quad (5.34)$$

Et, de même :

$$\int_{z-\eta}^{z+\eta} f(z') H_-(x, z' - z) dz' = O(\eta) \quad (5.35)$$

$$\int_{z-\eta}^{z+\eta} f(z') H(x, z' - z) dz' = O(\eta) \quad (5.36)$$

Comportement des intégrales $\int_{z-\eta}^{z+\eta} f(z')H_p(x, z' - z)dz'$ **pour** $H_p(x, z)$ **impaire par rapport à** z **(cas** $p = III$ **ou** z **)**

On a toujours, comme ci-dessus :

$$\int_{z-\eta}^{z+\eta} f(z')H_p(x, z' - z)dz' = f'(z) \int_{z-\eta}^{z+\eta} (z' - z)H_p(x, z' - z)dz' + O(\eta) \quad (5.37)$$

Par contre, le premier terme du second membre n'est plus nul. On connaît néanmoins son comportement à η fixé quand $x \rightarrow 0^-$. En effet, en effectuant le changement de variable $z' - z = -tx$, grâce aux propriétés d'homogénéité et de parité de H_{III} et de H_z , on obtient :

$$\int_{z-\eta}^{z+\eta} (z' - z) H_p(x, z' - z)dz' = 2|x|^{-i\varepsilon} \int_0^{\eta/|x|} t H_p(-1, t)dt$$

On se ramène donc à l'étude quand $X \rightarrow +\infty$ de fonctions $F_p(X)$ définies par :

$$F_p(X) \equiv \int_0^X t H_p(-1, t)dt, \quad p = III, z.$$

Or, $F_p'(X) = XH_p(-1, X) \stackrel{\S 5.3.4}{=} X^{-1-i\varepsilon} H_p(-1/X, 1) \stackrel{\S 5.3.4}{=} X^{-1-i\varepsilon} (\gamma_p + O(1/X))$ quand $X \rightarrow \infty$ pour $p = III, z$.

Par conséquent, on obtient par intégration :

$$F_p(X) = -\gamma_p \frac{X^{-i\varepsilon}}{i\varepsilon} + C_p/2 + O(1/X), \quad \text{quand } X \rightarrow +\infty, \text{ pour } p = III, z \quad (5.38)$$

où C_{III} et C_z sont deux constantes d'intégration que l'on déterminera par la suite. Et finalement, il vient :

$$\int_{z-\eta}^{z+\eta} f(z')H_p(x, z' - z)dz' = f'(z) \left[-\frac{2\gamma_p}{i\varepsilon} \eta^{-i\varepsilon} + C_p |x|^{-i\varepsilon} + O\left(\frac{|x|}{\eta}\right) \right] + O(\eta) \quad (5.39)$$

quand $x \rightarrow 0^-$ à η fixé, pour $p = III$ ou z

Remarque : Le terme $O(\eta)$ provenant du développement de Taylor autour de z de la fonction $z' \mapsto f(z')$ est identiquement nul si $f(z')$ est linéaire par rapport à $z' - z$.

5.4.4 Passage à la limite pour $x \rightarrow 0^-$, puis pour $\eta \rightarrow 0$

Remarquons dans un premier temps, que $\delta K(z)$ et $\delta K_{III}(z)$ peuvent se décomposer, par linéarité, en deux termes :

$$\begin{aligned} \delta K(z) &= [\delta K(z)]_{K_{III}=0} + [\delta K(z)]_{K=0} \\ \delta K_{III}(z) &= [\delta K_{III}(z)]_{K_{III}=0} + [\delta K_{III}(z)]_{K=0} \end{aligned}$$

où :

- $[\delta K(z)]_{K_{III}=0}$ (resp. $[\delta K_{III}(z)]_{K_{III}=0}$) représente la perturbation de $K(z)$ (resp. $K_{III}(z)$) si le chargement initial implique $K_{III} \equiv 0$;
- $[\delta K(z)]_{K=0}$ (resp. $[\delta K_{III}(z)]_{K=0}$) représente la perturbation de $K(z)$ (resp. $K_{III}(z)$) si le chargement initial implique $K \equiv 0$.

Il s'agit alors de passer à la limite pour $x \rightarrow 0^-$ dans chacun des termes des équations (5.23) et (5.24) dans chacun des cas $K(z) \equiv 0$ et $K_{III}(z) \equiv 0$.

Calcul de $[\delta K(z)]_{K_{III}=0}$

D'après (5.23) et (5.27), on a pour $x \rightarrow 0^-$ quand $K_{III} \equiv 0$:

$$\begin{aligned} \delta [u_y + iu_x](x, z) &= 8 [\delta K(z)]_{K_{III}=0} \frac{\Lambda \cosh(\pi\varepsilon)}{1 + 2i\varepsilon} \sqrt{\frac{|x|}{2\pi}} |x|^{i\varepsilon} + O(|x|^{3/2}) \\ &= \sqrt{\frac{|x|}{2\pi}} |x|^{i\varepsilon} \int_{-\infty}^{+\infty} \Lambda (\overline{K}(z') H_+(x, z' - z) + K(z') H_-(x, z' - z)) \delta a(z') dz' \end{aligned}$$

D'où, après simplification par $\Lambda \sqrt{\frac{|x|}{2\pi}} |x|^{i\varepsilon}$:

$$\frac{8 \cosh(\pi\varepsilon)}{1 + 2i\varepsilon} [\delta K(z)]_{K_{III}=0} + O(|x|) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\overline{K}(z') H_+(x, z' - z) + K(z') H_-(x, z' - z)) \delta a(z') dz'$$

D'après les équations (5.29)-(5.30) et (5.34)-(5.35), il vient par passage à la limite pour $x \rightarrow 0^-$:

$$\frac{8 \cosh(\pi\varepsilon)}{1 + 2i\varepsilon} [\delta K(z)]_{K_{III}=0} = \int_{\mathbb{R}-]z-\eta, z+\eta[} \left(\frac{\overline{K}(z') \gamma_+}{|z' - z|^{2i\varepsilon+2}} + \frac{K(z') \gamma_-}{(z' - z)^2} \right) \delta a(z') dz' + O(\eta)$$

Et enfin, par passage à la limite pour $\eta \rightarrow 0$, on obtient :

$$\frac{8 \cosh(\pi\varepsilon)}{1 + 2i\varepsilon} [\delta K(z)]_{K_{III}=0} = VP \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\overline{K}(z') \frac{\gamma_+}{|z' - z|^{2i\varepsilon+2}} + K(z') \frac{\gamma_-}{|z' - z|^2} \right) \delta a(z') dz' \quad (5.40)$$

où VP désignant la valeur principale de l'intégrale, est définie par :

$$VP \int_{-\infty}^{+\infty} (...) = \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}-]z-\eta, z+\eta[} (...)$$

L'existence de cette VP est assurée par le passage à la limite lui-même, et peut être retrouvée en intégrant le comportement près de z des termes sous l'intégrale, puis en passant à la limite $\eta \rightarrow 0$.

Calcul de $[\delta K(z)]_{K \equiv 0}$

D'après (5.23) et (5.27), on a pour $x \rightarrow 0^-$ quand $K \equiv 0$:

$$\begin{aligned} \delta [u_y + iu_x](x, z) &= 8 [\delta K(z)]_{K \equiv 0} \frac{\Lambda \cosh(\pi\varepsilon)}{1 + 2i\varepsilon} \sqrt{\frac{|x|}{2\pi}} |x|^{i\varepsilon} + 8i \Lambda' K_{III}(z) \frac{d\delta a}{dz} \sqrt{\frac{|x|}{2\pi}} + O(|x|^{3/2}) \\ &= \left(\frac{|x|}{2\pi}\right)^{1/2} |x|^{i\varepsilon} \int_{-\infty}^{+\infty} 2\Lambda' K_{III}(z') H_{III}(x, z' - z) \delta a(z') dz' \end{aligned}$$

En simplifiant par $\sqrt{\frac{|x|}{2\pi}}$, puis en écrivant le comportement du dernier membre pour $x \rightarrow 0^-$ en se servant des équations (5.31) et (5.39) précédemment établies, il vient :

$$\begin{aligned} 8 [\delta K(z)]_{K \equiv 0} \frac{\Lambda \cosh(\pi\varepsilon)}{1 + 2i\varepsilon} |x|^{i\varepsilon} + 8i \Lambda' K_{III}(z) \frac{d\delta a}{dz} + O(|x|^{1/2}) \\ = 2\Lambda' |x|^{i\varepsilon} \left[\int_{\mathbb{R}^-]z-\eta, z+\eta[} K_{III}(z') \frac{\gamma_{III}(z' - z)}{|z' - z|^{i\varepsilon+3}} \delta a(z') dz' + \varepsilon_\eta(x) \right] \\ + 2\Lambda' |x|^{i\varepsilon} \left\{ K_{III}(z) \frac{d\delta a}{dz} \left[-\frac{2\gamma_{III}}{i\varepsilon} \eta^{-i\varepsilon} + C_{III} |x|^{-i\varepsilon} + O\left(\frac{|x|}{\eta}\right) \right] + O(\eta) \right\} \end{aligned} \quad (5.41)$$

où $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_\eta(x) = 0$. La difficulté ici est que, contrairement au cas précédent, il coexiste dans cette expression des termes oscillants en $|x|^{i\varepsilon}$ et des termes indépendants de x . Comme nous ne connaissons rien du comportement pour $x \rightarrow 0^-$ du terme $O(\eta)$, nous ne pouvons donc pas passer directement à la limite quand $x \rightarrow 0$.

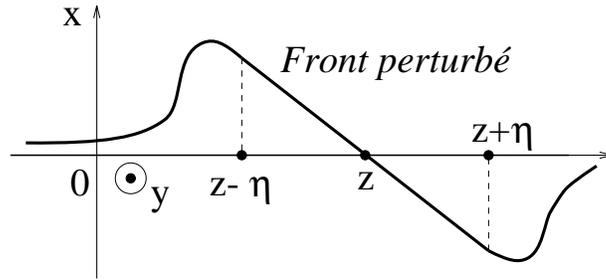


Figure 5.4: Perturbation linéaire dans $[z - \eta, z + \eta]$

Afin de déterminer C_{III} , constante indépendante des F.I.C. initiaux et de la forme de $\delta a(z')$, appliquons l'équation précédente à un chargement initial impliquant des F.I.C. uniformes et à une perturbation $\delta a(z')$ linéaire dans l'intervalle $[z - \eta, z + \eta]$ (cf. Fig.5.4). Le terme $O(\eta)$ dans l'équation précédente est alors nul (cf. remarque de la fin de §5.4.3). En identifiant alors entre eux les termes indépendants de x , on obtient :

$$C_{III} = 4i \quad (5.42)$$

Compte-tenu de ce résultat, l'équation (5.41) devient, de nouveau dans le cas général :

$$\begin{aligned} 8 [\delta K(z)]_{K \equiv 0} &= \frac{\Lambda \cosh(\pi\varepsilon)}{1 + 2i\varepsilon} |x|^{i\varepsilon} + O(|x|^{1/2}) \\ &= 2\Lambda' |x|^{i\varepsilon} \left[\int_{\mathbb{R}^-]z-\eta, z+\eta[} K_{III}(z') \frac{\gamma_{III}(z' - z)}{|z' - z|^{i\varepsilon+3}} \delta a(z') dz' + \varepsilon_\eta(x) \right] \\ &\quad + 2\Lambda' |x|^{i\varepsilon} \left\{ K_{III}(z) \frac{d\delta a}{dz} \left[-\frac{2\gamma_{III}}{i\varepsilon} \eta^{-i\varepsilon} + O\left(\frac{|x|}{\eta}\right) \right] + O(\eta) \right\} \end{aligned}$$

On peut alors la simplifier par $|x|^{i\varepsilon}$ et passer à la limite $x \rightarrow 0^-$, ce qui conduit à :

$$\begin{aligned} 8 [\delta K(z)]_{K \equiv 0} &= \frac{\Lambda \cosh(\pi\varepsilon)}{1 + 2i\varepsilon} \\ &= 2\Lambda' \int_{\mathbb{R}^-]z-\eta, z+\eta[} K_{III}(z') \frac{\gamma_{III}(z' - z)}{|z' - z|^{i\varepsilon+3}} \delta a(z') dz' + 2\Lambda' \left\{ K_{III}(z) \frac{d\delta a}{dz} \left[-\frac{2\gamma_{III}}{i\varepsilon} \eta^{-i\varepsilon} \right] + O(\eta) \right\} \end{aligned}$$

Et enfin, par passage à la limite pour $\eta \rightarrow 0$, on obtient :

$$[\delta K(z)]_{K \equiv 0} = \frac{\Lambda'}{4\Lambda} \frac{1 + 2i\varepsilon}{\cosh(\pi\varepsilon)} PF \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma_{III} \frac{K_{III}(z')(z' - z)}{|z' - z|^{i\varepsilon+3}} \delta a(z') dz' \quad (5.43)$$

où PF , désignant la partie finie (au sens d'Hadamard) de l'intégrale, est définie par :

$$PF \int_{-\infty}^{+\infty} [\dots] = \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^-]z-\eta, z+\eta[} [\dots] - \frac{2\gamma_{III}}{i\varepsilon} K_{III}(z) \frac{d\delta a}{dz}(z) \eta^{-i\varepsilon} \quad (5.44)$$

Le passage à la limite $x \rightarrow 0^-$, puis $\eta \rightarrow 0$ assure en lui-même l'existence de cette limite; le terme divergent peut-être retrouvé, en intégrant le comportement près de z du terme sous l'intégrale.

Calcul de $[\delta K_{III}(z)]_{K \equiv 0}$ et de $[\delta K_{III}(z)]_{K_{III} \equiv 0}$:

Un raisonnement analogue au précédent conduit à :

$$C_z = -4i \frac{\cosh(\pi\varepsilon)}{1 - 2i\varepsilon} \quad (5.45)$$

et à :

$$[\delta K_{III}(z)]_{K \equiv 0} = \frac{1}{4} VP \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma \frac{K_{III}(z')}{(z' - z)^2} \delta a(z') dz' \quad (5.46)$$

$$[\delta K_{III}(z)]_{K_{III} \equiv 0} = \frac{\Lambda}{4\Lambda'} \operatorname{Re} \left[PF \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma_z \frac{\overline{K}(z')(z' - z)}{|z' - z|^{i\varepsilon+3}} \delta a(z') dz' \right] \quad (5.47)$$

avec :

$$PF \int_{-\infty}^{+\infty} [\dots] = \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^-]z-\eta, z+\eta[} [\dots] - \frac{2\gamma_z \overline{K}(z)}{i\varepsilon} \frac{d\delta a}{dz}(z) \eta^{-i\varepsilon} \quad (5.48)$$

5.4.5 Résultat final

Il faut maintenant éliminer l'hypothèse $\delta a(z) = 0$. Pour cela, on considère que l'avancée du front se fait en deux étapes :

1. une avancée uniforme de longueur $\delta a(z)$ qui engendre un accroissement des F.I.C. de la forme $\frac{dK}{da}\delta a(z)$ (resp. $\frac{dK_{III}}{da}\delta a(z)$), où $\frac{dK}{da}$ (resp. $\frac{dK_{III}}{da}$) représente la dérivée de K (resp. K_{III}) par rapport à la longueur de fissure dans ces conditions;
2. puis, une avancée de $\delta a(z') - \delta a(z)$ nulle en $z' = z$.

En regroupant alors les différents résultats précédemment obtenus, nous obtenons finalement, au premier ordre en δa , les expressions suivantes de l'accroissement des facteurs d'intensité de contraintes engendré, sous chargement constant, par la perturbation coplanaire $\delta a(z)$:

$$\begin{aligned} \delta K(z) &= \frac{dK(z)}{da}\delta a(z) + \frac{1 + 2i\varepsilon}{8 \cosh(\pi\varepsilon)} \left\{ \gamma_+ VP \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{K}(z') \frac{\delta a(z') - \delta a(z)}{|z' - z|^{2+2i\varepsilon}} dz' \right. \\ &+ \gamma_- VP \int_{-\infty}^{+\infty} K(z') \frac{\delta a(z') - \delta a(z)}{(z' - z)^2} dz' \\ &+ \left. \frac{2}{1 - \nu} \gamma_{III} PF \int_{-\infty}^{+\infty} K_{III}(z') (z' - z) \frac{\delta a(z') - \delta a(z)}{|z' - z|^{3+i\varepsilon}} dz' \right\} \end{aligned} \quad (5.49)$$

$$\begin{aligned} \delta K_{III}(z) &= \frac{dK_{III}(z)}{da}\delta a(z) + \frac{\gamma}{4} VP \int_{-\infty}^{+\infty} K_{III}(z') \frac{\delta a(z') - \delta a(z)}{(z' - z)^2} dz' \\ &+ \frac{(1 - \nu)}{4} \text{Re} \left[\gamma_z PF \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{K}(z') (z' - z) \frac{\delta a(z') - \delta a(z)}{|z' - z|^{3+i\varepsilon}} dz' \right] \end{aligned} \quad (5.50)$$

où ν est défini par :

$$1 - \nu \equiv \frac{\Lambda}{\Lambda'} = \frac{(1 - \nu_1)/\mu_1 + (1 - \nu_2)/\mu_2}{(1/\mu_1 + 1/\mu_2) \cosh^2(\pi\varepsilon)} \quad (5.51)$$

(notation cohérente avec le cas homogène où ν est identique au coefficient de Poisson).

Chapter 6

Equations sur les fonctions de poids et leur transformée de Fourier

6.1 Préliminaires

Posons :

$$W_k(u) = H_k(-1, u), \quad k = +, -, III, z, \emptyset \quad (6.1)$$

et remarquons, premièrement, que, grâce aux conditions d'homogénéité sur les fonctions de poids (cf. §5.3.4), l'étude de ces fonctions de 2 variables se ramène à l'étude des fonctions d'une seule variable $W_k(u)$, $k = +, -, III, z, \emptyset$. En effet, $H_k(x, z) = H_k(-|x|, |x|\frac{z}{|x|}) = |x|^{\lambda_k} H_k(-1, z/|x|)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_^*$, où λ_k est le degré d'homogénéité de la fonction H_k . La parité, le comportement en $+\infty$ des fonctions $W_k(u)$ se déduisent donc directement de ceux obtenus pour les fonctions H_k dans le paragraphe §5.3.4.

Le but de ce chapitre est d'établir un système d'équations permettant de déterminer les fonctions W_k et par suite, les fonctions de poids d'une fissure d'interface semi-infinie. L'idée, ici, dérive de celle utilisée par Leblond *et al.* (1996) .

Les équations (5.49) et (5.50) précédemment obtenues, relient l'accroissement des F.I.C. dû à une petite perturbation coplanaire du front sous chargement constant, aux constantes $\gamma_+, \gamma_-, \gamma_{III}, \gamma_z, \gamma$, aux facteurs d'intensité de contraintes initiaux et à la perturbation. Ces F.I.C., avant et après perturbation, s'expriment à l'aide des fonctions de poids si le chargement consiste en des forces ponctuelles sur les lèvres de la fissure, et si la perturbation $\delta a(z)$ ne modifie pas la géométrie de la fissure. Nous obtiendrons ainsi des équations intégrodifférentielles sur les fonctions de poids, puis, par transformation de Fourier selon l'axe Oz , des équations différentielles faisant intervenir les constantes $\gamma_+, \gamma_-, \gamma_{III}, \gamma_z, \gamma$.

Nous examinerons enfin le comportement en 0 des transformées de Fourier des fonctions $W_k(u)$, dont la connaissance s'avérera nécessaire pour déterminer les constantes $\gamma_+, \gamma_-, \gamma_{III}, \gamma_z, \gamma$, puis les fonctions de poids.

6.2 Equations intégrodifférentielles sur les fonctions $W_p(u)$

Elles s'obtiennent en écrivant les équations (5.49) et (5.50) pour le chargement particulier et la perturbation particulière décrits ci-dessous.

6.2.1 Choix du chargement et de l'avancée $\delta a(z)$ du front

Faisons subir au front initial une perturbation de la forme :

$$\delta a(z') = \delta\theta \cdot (z' - z) \text{ où } \delta\theta \ll 1$$

Cette avancée représente une rotation d'angle $\delta\theta$ autour de l'axe parallèle à \vec{e}_y passant par le point P de coordonnées $(0, 0, z)$.

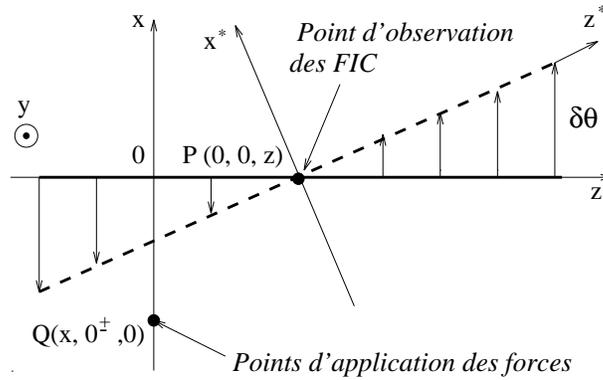


Figure 6.1: Rotation coplanaire du front de fissure

Rappelons que la fonction de poids $h_{p_i}(x, z)$, $p \in \{I, II, III\}$, $i \in \{x, y, z\}$ est la $p^{\text{ième}}$ F.I.C. au point de cote z du front dû à l'application d'un doublet de forces $\pm\vec{e}_i$ aux points $Q(x, 0^\pm, 0)$ des lèvres de la fissure. Appliquons, successivement, sur les lèvres de la fissure aux points $Q(x, 0^\pm, 0)$, un doublet de forces unitaires $\pm(\vec{e}_y + i\vec{e}_x)$, $\pm(\vec{e}_y - i\vec{e}_x)$ ¹, et enfin $\pm\vec{e}_z$. Nous obtiendrons ainsi, pour chacun de ces chargements, les F.I.C. initiaux et après perturbation, en fonction des h_{p_i} et par suite, des W_k qui sont des combinaisons de ces h_{p_i} (cf. §5.3.4 et (6.1)).

6.2.2 Expression de $K(z)$, $K_{III}(z)$ et de $\delta K(z)$, $\delta K_{III}(z)$ en fonction des W_k

Pour le chargement $\pm(\vec{e}_y + i\vec{e}_x)$

Avant perturbation, les F.I.C. s'écrivent, avec $u = \frac{z}{|x|}$:

$$K(z) = h_y(x, z) + ih_x(x, z) \quad (6.2)$$

¹On étend les chargements possibles à des chargements complexes par linéarité : ainsi, la réponse, en déplacements et contraintes, à une force ponctuelle $i\vec{e}_x$, vaut i fois la réponse à une force ponctuelle \vec{e}_x .

$$\begin{aligned}
 &= (|x|/2\pi)^{1/2}|x|^{-i\varepsilon-2} W_+(u) \\
 K_{III}(z) &= h_{III_y}(x, z) + ih_{III_x}(x, z) \\
 &= (|x|/2\pi)^{1/2}|x|^{-2} W_{III}(u)
 \end{aligned} \tag{6.3}$$

où l'on a toujours, $K = K_I + iK_{II}$, $h_j = h_{I_j} + ih_{II_j}$, $j = x, y, z$.

Après perturbation, la fissure est toujours d'interface, semi-infinie à front droit et le chargement $\pm(\vec{e}_y + i\vec{e}_x)$ se décompose dans la base $(\vec{e}_x^*, \vec{e}_y^*, \vec{e}_z^*)$ adaptée au nouveau front de fissure de la façon suivante (cf. Fig. 6.1) :

$$\begin{aligned}
 \vec{e}_x &= \cos(\delta\theta)\vec{e}_x^* + \sin(\delta\theta)\vec{e}_z^* = \vec{e}_x^* + \delta\theta\vec{e}_z^* + O((\delta\theta)^2) \\
 \vec{e}_y &= \vec{e}_y^* \\
 \vec{e}_z &= -\sin(\delta\theta)\vec{e}_x^* + \cos(\delta\theta)\vec{e}_z^* = -\delta\theta\vec{e}_x^* + \vec{e}_z^* + O((\delta\theta)^2)
 \end{aligned} \tag{6.4}$$

tandis que le vecteur joignant le point d'observation des F.I.C. au point d'application du doublet s'écrit :

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{PQ} &= (x \cos(\delta\theta) + z \sin(\delta\theta)) \vec{e}_x^* + (x \sin(\delta\theta) - z \cos(\delta\theta)) \vec{e}_z^* \\
 &= (x + z\delta\theta) \vec{e}_x^* + (x\delta\theta - z) \vec{e}_z^* + O((\delta\theta)^2)
 \end{aligned} \tag{6.5}$$

Par linéarité des F.I.C. par rapport au chargement et en développant à l'ordre $O(\delta\theta)$, on obtient les F.I.C. après perturbation :

$$\begin{aligned}
 K(z) + \delta K(z) &= h_y(x + z\delta\theta, -x\delta\theta + z) + i[h_x(x + z\delta\theta, -x\delta\theta + z) + \delta\theta.h_z(x + z\delta\theta, -x\delta\theta + z)] \\
 &= h_y(x, z) + i h_x(x, z) + \delta\theta \left[ih_z(x, z) + z \frac{\partial(h_y + ih_x)}{\partial x}(x, z) - x \frac{\partial(h_y + ih_x)}{\partial z}(x, z) \right]
 \end{aligned}$$

Et, par suite :

$$\delta K(z) = \delta\theta. \left[z \frac{\partial(h_y + ih_x)}{\partial x}(x, z) - x \frac{\partial(h_y + ih_x)}{\partial z}(x, z) + ih_z(x, z) \right] \tag{6.6}$$

De même :

$$\delta K_{III}(z) = \delta\theta. \left[z \frac{\partial(h_{III_y} + ih_{III_x})}{\partial x}(x, z) - x \frac{\partial(h_{III_y} + ih_{III_x})}{\partial z}(x, z) + ih_{III_z}(x, z) \right] \tag{6.7}$$

Comme les fonctions h_{p_i} sont toutes positivement homogènes, on peut utiliser le théorème d'Euler pour éliminer les dérivées par rapport à x et se ramener à des dérivées par rapport à z , et par suite aux dérivées des fonctions $W_k(u)$. Nous obtenons ainsi, avec $u = \frac{z}{|x|}$:

$$\delta K(z) = \delta\theta. \sqrt{\frac{|x|}{2\pi}} |x|^{-i\varepsilon-2} \left\{ (u^2 + 1)W'_+(u) + (i\varepsilon + \frac{3}{2})uW_+(u) + iW_z(u) \right\} \tag{6.8}$$

$$\delta K_{III}(z) = \delta\theta. \sqrt{\frac{|x|}{2\pi}} |x|^{-2} \left\{ (u^2 + 1)W'_{III}(u) + \frac{3}{2}uW_{III}(u) + iW(u) \right\} \tag{6.9}$$

Pour le chargement $\pm(\vec{e}_y - i\vec{e}_x)$

Avant perturbation, le facteur K s'écrit, avec $u = -\frac{z}{x}$:

$$\begin{aligned} K(z) &= h_y(x, z) - ih_x(x, z) \\ &= (|x|/2\pi)^{1/2} |x|^{-i\varepsilon-2} \overline{W}_-(u) \end{aligned} \quad (6.10)$$

$$\begin{aligned} K_{III}(z) &= h_{III_y}(x, z) - ih_{III_x}(x, z) \\ &= (|x|/2\pi)^{1/2} |x|^{-2} \overline{W}_{III}(u) \end{aligned} \quad (6.11)$$

Après perturbation, on obtient de la même façon que pour le chargement $\pm(\vec{e}_y + i\vec{e}_x)$:

$$\delta K(z) = \delta\theta \cdot \sqrt{\frac{|x|}{2\pi}} |x|^{-i\varepsilon-2} \left\{ (u^2 + 1) \overline{W}'_-(u) + (i\varepsilon + \frac{3}{2}) u \overline{W}_-(u) - iW_z(u) \right\} \quad (6.12)$$

$$\delta K_{III}(z) = \delta\theta \cdot \sqrt{\frac{|x|}{2\pi}} |x|^{-2} \left\{ (u^2 + 1) \overline{W}'_{III}(u) + \frac{3}{2} u \overline{W}_{III}(u) - iW(u) \right\} \quad (6.13)$$

Pour le chargement $\pm\vec{e}_z$

Avant perturbation, les F.I.C s'écrivent, avec $u = -\frac{z}{x}$:

$$\begin{aligned} K(z) &= h_z(x, z) \\ &= (|x|/2\pi)^{1/2} |x|^{-i\varepsilon-2} W_z(u) \end{aligned} \quad (6.14)$$

$$\begin{aligned} K_{III}(z) &= h_{III_z}(x, z) \\ &= (|x|/2\pi)^{1/2} |x|^{-2} W(u) \end{aligned} \quad (6.15)$$

Après perturbation, on obtient de la même façon que pour le chargement $\pm(\vec{e}_y + i\vec{e}_x)$:

$$\begin{aligned} \delta K(z) &= \delta\theta \cdot \sqrt{\frac{|x|}{2\pi}} |x|^{-i\varepsilon-2} \times \\ &\quad \left\{ (u^2 + 1) W'_z(u) + (i\varepsilon + \frac{3}{2}) u W_z(u) + \frac{\overline{W}_-(u) - W_+(u)}{2i} \right\} \end{aligned} \quad (6.16)$$

$$\delta K_{III}(z) = \delta\theta \cdot \sqrt{\frac{|x|}{2\pi}} |x|^{-2} \left\{ (u^2 + 1) W'(u) + \frac{3}{2} u W(u) + \frac{\overline{W}_{III}(u) - W_{III}(u)}{2i} \right\} \quad (6.17)$$

6.2.3 Ecriture des équations

En injectant les relations (6.8), (6.9), (6.12), (6.13), (6.16), (6.17), dans les équations (5.49) et (5.50), et en exprimant les F.I.C. avant perturbation en fonctions des $W_p(u')$, on obtient le système d'équations intégrodifférentielles sur les fonctions W_+ , W_- , W_{III} , W_z , W suivant :

$$\begin{aligned} (u^2 + 1) W'_+(u) + (i\varepsilon + \frac{3}{2}) u W_+(u) + iW_z(u) &= \frac{1 + 2i\varepsilon}{8 \cosh(\pi\varepsilon)} \times \\ \left\{ 2 \frac{\gamma_{III}}{(1-\nu)} PF \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{W_{III}(u') du'}{|u' - u|^{i\varepsilon+1}} + VP \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\gamma_+ W_-(u')}{|u' - u|^{2i\varepsilon}} + \gamma_- W_+(u') \right] \frac{du'}{u' - u} \right\} \end{aligned} \quad (6.18)$$

$$(u^2 + 1)\overline{W}'_-(u) + (i\varepsilon + \frac{3}{2})u\overline{W}_-(u) - iW_z(u) = \frac{1 + 2i\varepsilon}{8 \cosh(\pi\varepsilon)} \times \left\{ 2 \frac{\gamma_{III}}{1 - \nu} PF \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\overline{W}_{III}(u') du'}{|u' - u|^{i\varepsilon+1}} + VP \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\gamma_+ \overline{W}_+(u')}{|u' - u|^{2i\varepsilon}} + \gamma_- \overline{W}_-(u') \right] \frac{du'}{u' - u} \right\} \quad (6.19)$$

$$(u^2 + 1)W'_{III}(u) + \frac{3}{2}uW_{III}(u) + iW(u) = \frac{1}{8} \left\{ 2 VP \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\gamma W_{III}(u')}{(u' - u)} du' + (1 - \nu) PF \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\gamma_z W_-(u')}{|u' - u|^{i\varepsilon+1}} + \frac{\overline{\gamma}_z W_+(u')}{|u' - u|^{-i\varepsilon+1}} \right] du' \right\} \quad (6.20)$$

$$(u^2 + 1)W'_z(u) + (i\varepsilon + \frac{3}{2})uW_z(u) + \frac{\overline{W}_-(u) - W_+(u)}{2i} = \frac{1 + 2i\varepsilon}{8 \cosh(\pi\varepsilon)} \times \left\{ \frac{2\gamma_{III}}{1 - \nu} PF \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{W(u') du'}{|u' - u|^{i\varepsilon+1}} + VP \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\gamma_+ \overline{W}_z(u')}{|u' - u|^{2i\varepsilon}} + \gamma_- W_z(u') \right] \frac{du'}{u' - u} \right\} \quad (6.21)$$

$$(u^2 + 1)W'(u) + \frac{3}{2}uW(u) + \frac{\overline{W}_{III}(u) - W_{III}(u)}{2i} = \frac{1}{4} \left\{ VP \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\gamma W(u')}{(u' - u)} du' + (1 - \nu) \operatorname{Re} \left[PF \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\gamma_z \overline{W}_z(u') du'}{|u' - u|^{i\varepsilon+1}} \right] \right\} \quad (6.22)$$

où $\operatorname{Re}[\dots]$ désigne la partie réelle de [...].

Il s'agit d'un système à quatre fonctions inconnues complexes (W_+, W_-, W_{III}, W_z) et une fonction inconnue réelle W . La décomposition de ce système en parties réelles et en parties imaginaires donnerait un système à 9 équations et 9 fonctions inconnues réelles (les 9 fonctions de poids, h_{p_i} , $p = I, II, III$, $i = x, y, z$).

6.3 Transformation de Fourier des équations intégrodifférentielles

6.3.1 Notations. Définition de la transformation de Fourier

Nous définirons la transformée de Fourier le long du front d'une fonction f , par :

$$TF(f)(p) = \widehat{f}(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ipu} f(u) du \quad (6.23)$$

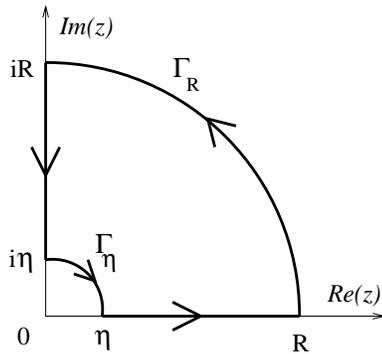
La transformée de Fourier inverse vaut alors :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ipu} \widehat{f}(p) dp \quad (6.24)$$

Les membres de gauche des équations (6.18) à (6.22) ont des transformées de Fourier "élémentaires". Le calcul des transformées de Fourier des membres de droite est plus complexe, à cause de la présence des intégrales. Néanmoins, elles découlent toutes de la détermination de l'intégrale $I(q, \alpha) = PF \int_0^{+\infty} \frac{e^{iqu}}{u^{1+i\alpha}} du$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{R}_+^*$.

6.3.2 Calcul de l'intégrale $I(q, \alpha) \equiv PF \int_0^{+\infty} \frac{e^{iqu}}{u^{1+i\alpha}} du$

Par définition de la Partie Finie d'une intégrale :



$$\begin{aligned} I(q, \alpha) &\equiv PF \int_0^{+\infty} \frac{e^{iqu}}{u^{1+i\alpha}} du \\ &= \lim_{\eta \rightarrow 0} \left[\int_{\eta}^{+\infty} \frac{e^{iqu}}{u^{1+i\alpha}} du - (\text{partie divergente}) \right] \\ &= \lim_{\eta \rightarrow 0} \left[\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\eta}^R \frac{e^{iqu}}{u^{1+i\alpha}} du - (\text{partie divergente}) \right] \end{aligned}$$

La fonction $z \mapsto \frac{e^{iqz}}{z^{1+i\alpha}}$ étant analytique sur \mathcal{C}^* , l'intégrale sur le contour fermé représenté sur la figure ci-contre est nulle et

donc :

$$\int_{\eta}^R \frac{e^{iqu}}{u^{1+i\alpha}} du = - \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iqz}}{z^{1+i\alpha}} dz + \int_{i\eta}^{iR} \frac{e^{iqz}}{z^{1+i\alpha}} dz - \int_{\Gamma_\eta} \frac{e^{iqz}}{z^{1+i\alpha}} dz$$

On montre sans difficulté que la dernière intégrale (sur le quart de cercle Γ_R) a une limite nulle quand $R \rightarrow +\infty$. La première (sur le quart de cercle Γ_η) se comporte comme $i(1 - e^{\pi\alpha/2})/(\alpha\eta^{i\alpha}) + O(\eta)$ quand $\eta \rightarrow 0$, elle est donc oscillante pour $\eta \rightarrow 0$. La deuxième (sur le segment $[i\eta, iR]$ de l'axe des imaginaires purs) se ramène par le changement de variable $y = -iqz$, puis par passage à la limite pour $R \rightarrow +\infty$ à la fonction Γ d'Euler (cf. Gradshteyn et Ryzhik §8.310.1), plus une partie oscillante pour η .

Ceci nous conduit finalement à :

$$I(q, \alpha) \equiv PF \int_0^{+\infty} \frac{e^{iqu}}{u^{1+i\alpha}} du = ie^{\frac{\pi\alpha}{2}} \frac{q^{i\alpha}}{\alpha} \Gamma(1 - i\alpha), \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad q \in \mathbb{R}_+^* \quad (6.25)$$

où $\Gamma(z)$, fonction Gamma d'Euler est définie par :

$$\Gamma(z) \equiv \int_0^{+\infty} e^{-y} y^{z-1} dy, \quad \forall z \in \mathcal{C}, \operatorname{Re}(z) > 0 \quad (6.26)$$

6.3.3 Diverses transformées de Fourier

Outre les transformations de Fourier "élémentaires" des membres de gauche des équations (6.18) à (6.22), il faut déterminer la transformée de Fourier de termes de la forme $VP \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(u')}{u - u'} du'$,

$$VP \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(u')}{(u - u')|u' - u|^{2i\varepsilon}} du', \quad PF \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(u')}{|u - u'|^{i\varepsilon+1}} du'.$$

Calcul de $TF \left[VP \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(u')}{u - u'} du' \right]$ et de $TF \left[VP \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(u')}{(u - u')|u' - u|^{2i\varepsilon}} du' \right]$:

Le produit de convolution se transformant en produit simple par la transformée, on a :

$$TF \left[VP \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(u')}{(u - u')|u - u'|^{2i\varepsilon}} du' \right] (p) = \hat{f}(p) \cdot TF \left(VP \frac{1}{u|u|^{2i\varepsilon}} \right) (p)$$

En se servant alors du fait que l'intégrale sur un intervalle centré en 0 d'une fonction impaire est nulle, il vient :

$$\begin{aligned} TF \left[VP \frac{1}{u|u|^{2i\varepsilon}} \right] (p) &= VP \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ipu}}{u|u|^{2i\varepsilon}} du \\ &= 2i \int_0^{+\infty} \frac{\sin(pu)}{u^{2i\varepsilon+1}} du \end{aligned}$$

Remarquons à ce stade que cette fonction est impaire et que donc, d'après (6.25) :

$$\begin{aligned} TF \left[VP \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(u')}{(u-u')|u'-u|^{2i\varepsilon}} du' \right] (p) &= \hat{f}(p) \operatorname{sgn}(p) [I(|p|, 2\varepsilon) - \overline{I(|p|, -2\varepsilon)}] \\ &= i\hat{f}(p) \operatorname{sgn}(p) |p|^{2i\varepsilon} \Gamma(1-2i\varepsilon) \frac{\sinh(\pi\varepsilon)}{\varepsilon} \end{aligned} \quad (6.27)$$

où $\operatorname{sgn}(p)$ désigne le signe de p .

En appliquant la formule précédente avec $\varepsilon = 0$, on obtient :

$$TF \left[VP \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(u')}{u-u'} du' \right] (p) = \hat{f}(p) i\pi \operatorname{sgn}(p) \quad (6.28)$$

Calcul de $TF \left[PF \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(u')}{|u'-u|^{1+i\varepsilon}} du' \right]$:

De même que ci-dessus, on peut ramener cette transformée de Fourier aux fonctions $I(|p|, \varepsilon)$ et $I(|p|, -\varepsilon)$, et on obtient :

$$TF \left[PF \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(u')}{|u'-u|^{1+i\varepsilon}} du' \right] = 2i\hat{f}(p) \frac{|p|^{i\varepsilon}}{\varepsilon} \Gamma(1-i\varepsilon) \cosh\left(\frac{\pi\varepsilon}{2}\right) \quad (6.29)$$

6.3.4 Ecriture des équations différentielles sur les fonctions $\widehat{W}_k(p)$

En injectant les résultats du §6.3.3 dans les équations intégrodifférentielles (6.18) à (6.22), on obtient le système d'équations différentielles suivant sur les fonctions $\widehat{W}_+(p)$, $\widehat{W}_-(p)$, $\widehat{W}_{III}(p)$, $\widehat{W}_z(p)$, $\widehat{W}(p)$:

$$\begin{aligned} p \widehat{W}_+'' + \left(\frac{1}{2} - i\varepsilon\right) \widehat{W}_+' + \left[\frac{\frac{1}{2} + i\varepsilon}{4 \cosh(\pi\varepsilon)} \gamma_- \pi \operatorname{sgn}(p) - p \right] \widehat{W}_+ + \widehat{W}_z &= \frac{\frac{1}{2} + i\varepsilon}{\cosh(\pi\varepsilon)} \times \\ \left\{ \frac{\gamma_{III}}{1-\nu} \cosh\left(\frac{\pi\varepsilon}{2}\right) \frac{|p|^{i\varepsilon}}{\varepsilon} \Gamma(1-i\varepsilon) \widehat{W}_{III} - \frac{\sinh(\pi\varepsilon)}{4\varepsilon} \operatorname{sgn}(p) |p|^{2i\varepsilon} \Gamma(1-2i\varepsilon) \gamma_+ \widehat{W}_- \right\} \end{aligned} \quad (6.30)$$

$$\begin{aligned} p \overline{\widehat{W}_-}'' + \left(\frac{1}{2} - i\varepsilon\right) \overline{\widehat{W}_-}' + \left[\frac{\frac{1}{2} + i\varepsilon}{4 \cosh(\pi\varepsilon)} \gamma_- \pi \operatorname{sgn}(p) - p \right] \overline{\widehat{W}_-} - \widehat{W}_z &= \frac{\frac{1}{2} + i\varepsilon}{\cosh(\pi\varepsilon)} \times \\ \left\{ -\frac{\gamma_{III}}{1-\nu} \cosh\left(\frac{\pi\varepsilon}{2}\right) \frac{|p|^{i\varepsilon}}{\varepsilon} \Gamma(1-i\varepsilon) \overline{\widehat{W}_{III}} - \frac{\sinh(\pi\varepsilon)}{4\varepsilon} \operatorname{sgn}(p) |p|^{2i\varepsilon} \Gamma(1-2i\varepsilon) \gamma_+ \overline{\widehat{W}_+} \right\} \end{aligned} \quad (6.31)$$

$$\begin{aligned}
 p \widehat{W}_{III}'' + \frac{1}{2} \widehat{W}_{III}' + \left[\frac{\gamma}{4} \pi \operatorname{sgn}(p) - p \right] \widehat{W}_{III} + \widehat{W} \\
 = \frac{1-\nu}{4\varepsilon} \cosh\left(\frac{\pi\varepsilon}{2}\right) \left[\gamma_z |p|^{i\varepsilon} \Gamma(1-i\varepsilon) \widehat{W}_- - \overline{\gamma_z} |p|^{-i\varepsilon} \Gamma(1+i\varepsilon) \widehat{W}_+ \right]
 \end{aligned} \tag{6.32}$$

$$\begin{aligned}
 p \widehat{W}_z'' + \left(\frac{1}{2} - i\varepsilon\right) \widehat{W}_z' + \left[\frac{\frac{1}{2} + i\varepsilon}{4 \cosh(\pi\varepsilon)} \gamma_- \pi \operatorname{sgn}(p) - p \right] \widehat{W}_z - \frac{\overline{\widehat{W}_-} - \widehat{W}_+}{2} = \frac{\frac{1}{2} + i\varepsilon}{\cosh(\pi\varepsilon)} \times \\
 \left\{ \frac{\gamma_{III}}{1-\nu} \cosh\left(\frac{\pi\varepsilon}{2}\right) \frac{|p|^{i\varepsilon}}{\varepsilon} \Gamma(1-i\varepsilon) \widehat{W} + \frac{\sinh(\pi\varepsilon)}{4\varepsilon} \operatorname{sgn}(p) |p|^{2i\varepsilon} \Gamma(1-2i\varepsilon) \gamma_+ \overline{\widehat{W}_z} \right\}
 \end{aligned} \tag{6.33}$$

$$\begin{aligned}
 p \widehat{W}'' + \frac{1}{2} \widehat{W}' + \left[\frac{\gamma}{4} \pi \operatorname{sgn}(p) - p \right] \widehat{W} + \frac{\overline{\widehat{W}_{III}} + \widehat{W}_{III}}{2} \\
 = -\frac{1-\nu}{2\varepsilon} \cosh\left(\frac{\pi\varepsilon}{2}\right) \operatorname{Re} \left[\gamma_z |p|^{i\varepsilon} \Gamma(1-i\varepsilon) \overline{\widehat{W}_z} \right]
 \end{aligned} \tag{6.34}$$

Rappelons que les constantes $\gamma_+, \gamma_-, \gamma_{III}, \gamma_z, \gamma$ sont liées aux fonctions de poids $h_{p_i}(x, z)$ par leur comportement pour $x \rightarrow 0$ ou $z \rightarrow +\infty$ (cf. remarque du §5.3.3), c'est-à-dire au comportement pour $u \rightarrow +\infty$ des fonctions $W_k(u)$. Le système d'équations ci-dessus n'est donc pas linéaire. Néanmoins, si l'on fixe les constantes $\gamma_+, \gamma_-, \gamma_{III}, \gamma_z, \gamma$ il le devient, et nous obtenons ainsi une famille de solutions dépendant de ces constantes. La bonne solution sera celle qui correspond au bon comportement asymptotique des fonctions de poids, c'est-à-dire au bon comportement des $\widehat{W}_k(p)$ pour $p \rightarrow 0$ (et également pour $p \rightarrow \infty$).

6.4 Comportement des fonctions $\widehat{W}_k(p)$ quand $p \rightarrow 0$

Le système d'équations différentielles étant d'ordre 2, nous aurons besoin de connaître la limite des fonctions $\widehat{W}_k(p)$ et de leur dérivée quand $p \rightarrow 0$. La limite des fonctions découle des fonctions de poids 2D, la limite des dérivées découle du comportement des $W_k(u)$ quand $u \rightarrow \infty$.

6.4.1 Limite de $\widehat{W}_k(p)$ quand $p \rightarrow 0$

D'après la définition de la transformée de Fourier, on a :

$$\widehat{W}_k(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} W_k(u) du$$

Or, $W_k(u)$ est relié aux F.I.C. en 0 dus à l'application d'un doublet de forces en $(-1, 0^\pm, u)$ (cf. (6.1) et §5.3.4). Par conséquent, par superposition, $\widehat{W}_k(0)$ est relié aux F.I.C. dus à l'application de doublets de forces tout le long de la droite $(x = -1, y = 0^\pm)$, F.I.C. qui sont justement les fonctions de poids 2D.

Pour le cas 2D plan (c'est-à-dire pour des charges ponctuelles dans le plan (\vec{e}_x, \vec{e}_y)), on déduit des travaux de J.W. Hutchinson *et al.* (1987), les fonctions de poids 2D d'une fissure d'interface droite semi-infinie, et par suite les valeurs en 0 des fonctions \widehat{W}_+ , \widehat{W}_- , \widehat{W}_{III} .

Pour le cas 2D antiplan (c'est-à-dire pour des charges ponctuelles $\pm\vec{e}_z$), on peut montrer que la solution en contraintes du problème d'élasticité du cas homogène, est solution en contraintes du problème d'élasticité avec une fissure d'interface. La seule condition non triviale à vérifier est la condition de continuité des déplacements sur l'interface. Notons u_z la solution en déplacement du cas *homogène*; cette condition s'écrit alors, compte-tenu des lois de comportement de part et d'autre de l'interface :

$$\frac{\mu}{\mu_1}u_z(x, 0^+) = \frac{\mu}{\mu_2}u_z(x, 0^-) \quad \forall x > 0$$

Elle est vérifiée car u_z vérifie $u_z(x, 0^+) = -u_z(x, 0^-) = u_z(x, 0^-) = 0$, par symétrie par rapport au plan $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_z)$ et continuité sur l'interface.

Par conséquent, dans le cas 2D antiplan, les F.I.C. d'une fissure d'interface sont égaux aux F.I.C. du cas homogène. Par suite, les valeurs de $\widehat{W}(0)$ et de $\widehat{W}_z(0)$ se déduisent de celles du cas homogène.

On obtient finalement :

$$\begin{cases} \widehat{W}_+(0) = 0; \widehat{W}_-(0) = 4 \cosh(\pi\varepsilon); \widehat{W}_{III}(0) = 0 \\ \widehat{W}_z(0) = 0; \widehat{W}(0) = 2 \end{cases} \quad (6.35)$$

6.4.2 Comportement de $\widehat{W}_k'(p)$ pour $p \rightarrow 0$

Remarquons premièrement, que la transformée de Fourier conserve la parité des fonctions, et que par conséquent \widehat{W}_+ , \widehat{W}_- , \widehat{W} sont des fonctions paires, alors que \widehat{W}_z , \widehat{W}_{III} sont des fonctions impaires. Remarquons, de plus, que la dérivée d'une fonction paire est impaire, et vice-versa.

On peut donc supposer $p \geq 0$ dans les démonstrations qui suivent sans nuire à la généralité des résultats.

En dérivant sous le signe \int la transformée de Fourier de $\widehat{W}_k(p)$, puis en ramenant les intégrales sur l'intervalle $[0, +\infty[$, on obtient :

$$\widehat{W}_k'(p) = \begin{cases} -\frac{2}{p^2} \int_0^{+\infty} u W_k\left(\frac{u}{p}\right) \sin(u) du & \text{si } W_k(u) \text{ est paire par rapport à } u \\ \frac{2i}{p^2} \int_0^{+\infty} u W_k\left(\frac{u}{p}\right) \cos(u) du & \text{si } W_k(u) \text{ est impaire par rapport à } u \end{cases} \quad (6.36)$$

La différence entre le cas W_k paire et le cas W_k impaire réside dans le fait que la limite quand $p \rightarrow 0$ du terme sous l'intégrale est intégrable sur $[0, +\infty[$ dans le premier cas, mais pas en 0 dans le deuxième. Comme pour le passage à la limite pour $x \rightarrow 0^-$ du premier chapitre (cf. §5.4.3), il va falloir distinguer les cas W_k paire et impaire.

Cas $W_k(u)$ paire :

D'après les conditions d'homogénéité de H_k et leur comportement asymptotique (cf. §5.3.4 et (6.1)), on a, quand $p \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} W_+ \left(\frac{u}{p} \right) &\sim \gamma_+ \left(\frac{p}{u} \right)^{2+2i\varepsilon} \\ W_- \left(\frac{u}{p} \right) &\sim \gamma_- \left(\frac{p}{u} \right)^2 \\ W \left(\frac{u}{p} \right) &\sim \gamma \left(\frac{p}{u} \right)^2 \end{aligned} \quad (6.37)$$

Les expressions asymptotiques, quand $p \rightarrow 0$, des termes sous les intégrales (6.36) sont donc intégrables. Par conséquent, on peut "permuter signe f et comportement asymptotique". On se trouve ainsi ramené à des intégrales de la forme $I(1, \alpha)$, et d'après (6.25) on a, en tenant compte de la parité des fonctions dérivées pour prendre en compte les valeurs négatives de p , quand $p \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} \widehat{W}_+'(p) &\sim -\operatorname{sgn}(p) |p|^{2i\varepsilon} \gamma_+ \frac{\sinh(\pi\varepsilon)}{\varepsilon} \Gamma(1 - 2i\varepsilon) \\ \widehat{W}_-'(p) &\sim -\operatorname{sgn}(p) \pi \gamma_- \\ \widehat{W}'(p) &= -\operatorname{sgn}(p) \pi \gamma \end{aligned} \quad (6.38)$$

Cas $W_k(u)$ impaire :

L'indice k prend, ici, les valeurs z ou III . La fonction sous l'intégrale se comporte alors quand $p \rightarrow 0$ de la façon suivante :

$$W_k \left(\frac{u}{p} \right) \sim \gamma_k \left(\frac{p}{u} \right)^{2+i\varepsilon}, \quad k = z, III \quad (6.39)$$

Cette expression asymptotique reportée dans l'intégrale (6.36) n'est pas intégrable en $u = 0$. Découpons donc l'intervalle d'intégration $[0, +\infty[$ en $[0, \eta] \cup [\eta, +\infty[$ où η est une constante positive destinée à tendre vers 0.

Sur $[\eta, +\infty[$, l'expression asymptotique de l'intégrand est intégrable, on peut donc y "permuter signe f et comportement asymptotique".

Sur $[0, \eta]$, on écrit :

$$\int_0^\eta u \cos(u) W_k(u/p) du = p^2 F_k \left(\frac{\eta}{p} \right) - \int_0^\eta u (1 - \cos(u)) W_k(u/p) du$$

où F_k est la fonction introduite en §5.4.3. Elle se comporte donc quand $p \rightarrow 0$ à η fixé selon (5.38).

Quant à l'intégrale du second membre, l'expression asymptotique de l'intégrand quand $p \rightarrow 0$ est maintenant intégrable en 0. On peut donc, ici encore, "permuter signe f et comportement asymptotique".

Par passage à la limite $p \rightarrow 0$ dans (6.36), on obtient donc pour $k = z, III$ et tout η :

$$\widehat{W}'_k(p) \sim iC_k - 2\gamma_k p^{i\varepsilon} \left(\frac{\eta^{-i\varepsilon}}{\varepsilon} - i \int_{\eta}^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u^{1+i\varepsilon}} du \right) + 2i\gamma_k p^{i\varepsilon} \int_0^{\eta} \frac{\cos(u) - 1}{u^{1+i\varepsilon}} du$$

En passant à la limite $\eta \rightarrow 0$, en reconsidérant les p négatifs, et en se ramenant aux fonctions $I(1, \varepsilon)$ et $I(1, -\varepsilon)$, on obtient le comportement des fonctions \widehat{W}'_k quand $p \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} \widehat{W}'_k(p) &= iC_k + 2i\gamma_k |p|^{i\varepsilon} PF \int_0^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u^{i\varepsilon+1}} du \\ &= iC_k - 2\frac{\gamma_k}{\varepsilon} \cosh\left(\frac{\pi\varepsilon}{2}\right) \Gamma(1 - i\varepsilon) |p|^{i\varepsilon} + O(p), \quad \text{pour } k = z, III \end{aligned} \quad (6.40)$$

où $C_{III} = 4i$ et $C_z = -4i \frac{\cosh(\pi\varepsilon)}{1 - 2i\varepsilon}$ d'après (5.42) et (5.45).

6.4.3 Ecriture synthétique

Regroupons les résultats des deux précédentes sections, en intégrant le comportement asymptotique des fonctions \widehat{W}'_k pour $p \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} \widehat{W}_+(p) &= -\gamma_+ \frac{\sinh(\pi\varepsilon) \Gamma(1 - 2i\varepsilon)}{\varepsilon (1 + 2i\varepsilon)} |p|^{2i\varepsilon+1} + o(p) \\ \widehat{W}_-(p) &= 4 \cosh(\pi\varepsilon) - \pi\gamma_- |p| + o(p) \\ \widehat{W}_{III}(p) &= -4p - 2\frac{\gamma_{III}}{\varepsilon} \cosh\left(\frac{\pi\varepsilon}{2}\right) \frac{\Gamma(1 - i\varepsilon)}{1 + i\varepsilon} p |p|^{i\varepsilon} + o(p) \\ \widehat{W}_z(p) &= 4 \frac{\cosh(\pi\varepsilon)}{1 - 2i\varepsilon} p - 2\frac{\gamma_z}{\varepsilon} \cosh\left(\frac{\pi\varepsilon}{2}\right) \frac{\Gamma(1 - i\varepsilon)}{1 + i\varepsilon} p |p|^{i\varepsilon} + o(p) \\ \widehat{W}(p) &= 2 - \pi\gamma |p| + o(p) \end{aligned} \quad (6.41)$$

6.4.4 Conséquences sur les constantes $\gamma_-, \gamma_{III}, \gamma_z, C_{III}, C_z$

Les équations différentielles sur les fonctions \widehat{W}_k doivent être vérifiées pour tout p , donc en particulier, au voisinage de 0. En reportant les équations (6.35), (6.38), (6.40) dans les équations différentielles (6.30) à (6.34), et en identifiant les termes du même ordre en p , on obtient :

$$\begin{cases} (1 + 2i\varepsilon) \gamma_- \in \mathbb{R}; & (1 + 2i\varepsilon) \gamma_{III} + (1 - \nu) \cosh(\pi\varepsilon) \gamma_z = 0 \\ C_{III} = 4i; & C_z = -4i \frac{\cosh(\pi\varepsilon)}{1 - 2i\varepsilon} \end{cases} \quad (6.42)$$

On retrouve donc ainsi les valeurs des constantes C_{III} et C_z .

Chapter 7

Résolution des équations différentielles, détermination des fonctions de poids

7.1 Préliminaires

Rappelons que les fonctions $\widehat{W}_k(p)$ qui nous donneront les fonctions de poids doivent :

- (1) vérifier les équations différentielles (6.30) à (6.34);
- (2) avoir le bon comportement asymptotique quand $p \rightarrow 0$,
et donc, vérifier les équations (6.41); (7.1)
- (3) être les transformées de Fourier de fonctions régulières,
donc avoir une limite nulle quand $p \rightarrow +\infty$.

Les fonctions recherchées étant toutes paires ou impaires, on supposera dans tout ce qui suit $p > 0$.

Comme nous l'avons déjà mentionné, le système d'équations différentielles sur les fonctions \widehat{W}_k n'est pas linéaire à cause de la présence des constantes $\gamma_+, \gamma_-, \gamma_{III}, \gamma_z, \gamma$ qui sont liées au comportement en $p \rightarrow 0$ de ces mêmes fonctions. Néanmoins, à $\gamma_+, \gamma_-, \gamma_{III}, \gamma_z, \gamma$ fixés, le système devient un système d'équations différentielles linéaires d'ordre 2, à 9 fonctions inconnues réelles (les parties réelles et imaginaires de $\widehat{W}_+, \widehat{W}_-, \widehat{W}_{III}, \widehat{W}_z$ et la fonction \widehat{W}) et 9 équations réelles (les parties réelles et imaginaires des 4 premières équations, plus la cinquième). Un tel système possède une solution unique si l'on se donne le comportement pour $p \rightarrow 0$ des fonctions \widehat{W}_k et de leur dérivée \widehat{W}_k' , solution unique dépendant des "paramètres" $\gamma_+, \gamma_-, \gamma_{III}, \gamma_z, \gamma$. On obtient donc ainsi, pour chaque quintuplet $(\gamma_+, \gamma_-, \gamma_{III}, \gamma_z, \gamma)$, une solution vérifiant les équations différentielles et les bonnes conditions pour $p \rightarrow 0$.

Pour que cette solution soit effectivement solution de notre problème, il faut que sa transformée de Fourier inverse existe, c'est-à-dire que sa limite quand $p \rightarrow +\infty$ soit nulle. En imposant ces conditions, nous espérons au départ fixer les constantes $\gamma_+, \gamma_-, \gamma_{III}, \gamma_z, \gamma$ de façon unique. Nous verrons que ce n'est pas possible, et que nous aurons besoin de la solution du

cas homogène ($\varepsilon \equiv 0$) pour pouvoir déterminer, par continuité, la bonne solution. De ce fait, cette méthode ne permet pas de retrouver les fonctions de poids du cas homogène. Qu'il n'y ait pas unicité dans le cadre de l'élasticité linéaire paraît paradoxal; ce phénomène provient du fait qu'on ne résout le problème que partiellement et non dans sa totalité.

| Matériaux 1 et 2 | ε |
|------------------------------------|---------------|
| Al ₂ O ₃ /Cu | -0.028 |
| MgO/Au | -0.0036 |
| Si/Cu | 0.0105 |
| MgO/Ni | 0.0049 |
| Al ₂ O ₃ /Ti | -0.039 |
| Al ₂ O ₃ /Nb | -0.019 |

Table 7.1: Quelques valeurs de ε pour diverses interfaces

Dans la pratique $|\varepsilon| \ll 1$ (cf. Table 7.1 extraite de [Hutchinson *et al.*, 1987]), d'où l'idée de chercher la solution sous forme d'un développement autour de $\varepsilon = 0$. Nous chercherons donc les fonctions sous la forme :

$$\widehat{W}_k(p) = \widehat{W}_k^0(p) + \varepsilon \widehat{W}_k^1(p) + \varepsilon^2 \widehat{W}_k^2(p) + \dots \quad (7.2)$$

$$\gamma_k = \gamma_k^0 + \varepsilon \gamma_k^1 + \varepsilon^2 \gamma_k^2 + \dots \quad (7.3)$$

où $k = +, -, III, z, \emptyset$.

On vérifiera que la solution du cas homogène ($\varepsilon = 0$) est bien, comme prévu, solution du problème à l'ordre 0, mais que néanmoins ce problème n'a pas une solution unique. Quant à la solution du problème à l'ordre 1, elle sera donnée de façon entièrement analytique et élémentaire à une primitive du type $\int \frac{\ln x}{x+a} dx$ près.

Pour les "grandes" valeurs de ε , nous déterminerons les constantes γ_k numériquement, ce qui nous permettra de vérifier le calcul analytique pour $\varepsilon \rightarrow 0$.

En guise d'application, nous étudierons la stabilité de la forme rectiligne du front initial vis-à-vis de petites perturbations coplanaires de ce front.

7.2 Problème à l'ordre 0

7.2.1 Ecriture des équations à l'ordre 0

Il s'agit d'écrire le problème (7.1) à l'ordre 0, i.e. pour $\varepsilon \equiv 0$.

Les fonctions \widehat{W}_k doivent être continues en $\varepsilon = 0$, i.e. avoir une limite finie quand $\varepsilon \rightarrow 0$, ce qui implique d'après (6.41) que les constantes γ_{III}^0 et γ_z^0 doivent être nulles. Le comportement de ces fonctions pour $p \rightarrow 0^+$ à l'ordre 0 en ε s'écrit alors de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
 \widehat{W}_+^0(p) &= -\gamma_+^0 \pi p + o(p) \\
 \widehat{W}_-^0(p) &= 4 - \pi \gamma_-^0 p + o(p) \\
 \widehat{W}_{III}^0(p) &= -4p - 2\gamma_{III}^1 p + o(p) \\
 \widehat{W}_z^0(p) &= 4p - 2\gamma_z^1 p + o(p) \\
 \widehat{W}^0(p) &= 2 - \pi \gamma^0 p + o(p)
 \end{aligned} \tag{7.4}$$

Les équations différentielles (6.30) à (6.34) s'écrivent alors :

$$p \widehat{W}_+^{0''} + \frac{1}{2} \widehat{W}_+^{0'} + \left[\frac{\gamma_-^0 \pi}{8} - p \right] \widehat{W}_+^0 + \widehat{W}_z^0 = \frac{1}{2} \left[\frac{\gamma_{III}^1}{1-\nu} \widehat{W}_{III}^0 - \frac{\pi}{4} \gamma_+^0 \widehat{W}_-^0 \right] \tag{7.5}$$

$$p \widehat{W}_-^{0''} + \frac{1}{2} \widehat{W}_-^{0'} + \left[\frac{\gamma_-^0 \pi}{8} - p \right] \widehat{W}_-^0 - \widehat{W}_z^0 = \frac{1}{2} \left[-\frac{\gamma_{III}^1}{1-\nu} \widehat{W}_{III}^0 - \frac{\pi}{4} \gamma_+^0 \widehat{W}_+^0 \right] \tag{7.6}$$

$$p \widehat{W}_{III}^{0''} + \frac{1}{2} \widehat{W}_{III}^{0'} + \left[\frac{\gamma^0 \pi}{4} - p \right] \widehat{W}_{III}^0 + \widehat{W}^0 = \frac{1-\nu}{4} \left[\gamma_z^1 \widehat{W}_-^0 - \gamma_z^1 \widehat{W}_+^0 \right] \tag{7.7}$$

$$p \widehat{W}_z^{0''} + \frac{1}{2} \widehat{W}_z^{0'} + \left[\frac{\gamma_-^0 \pi}{8} - p \right] \widehat{W}_z^0 - \frac{\widehat{W}_-^0 - \widehat{W}_+^0}{2} = \frac{1}{2} \left[\frac{\gamma_{III}^1}{1-\nu} \widehat{W}^0 + \frac{\pi}{4} \gamma_+^0 \widehat{W}_-^0 \right] \tag{7.8}$$

$$p \widehat{W}^{0''} + \frac{1}{2} \widehat{W}^{0'} + \left[\frac{\gamma^0 \pi}{4} - p \right] \widehat{W}^0 + \frac{\widehat{W}_{III}^0 + \widehat{W}_z^0}{2} = -\frac{1-\nu}{2} \operatorname{Re} \left[\gamma_z^1 \widehat{W}_z^0 \right] \tag{7.9}$$

7.2.2 Solution : fonctions de poids du cas homogène

La solution du cas homogène donnée notamment par Gao et Rice (1986) s'écrit, avec nos notations :

$$\begin{aligned}
 W_+^0(u) &= -\frac{4\nu}{\pi(2-\nu)} \frac{1-u^2}{(1+u^2)^2} & W_-^0(u) &= \frac{4}{\pi(1+u^2)} + \frac{4\nu}{\pi(2-\nu)} \frac{1-u^2}{(1+u^2)^2} \\
 W_{III}^0(u) &= W_z^0(u) = i \frac{8\nu}{\pi(2-\nu)} \frac{u}{(1+u^2)^2} & W^0(u) &= \frac{2}{\pi(1+u^2)} - \frac{4\nu}{\pi(2-\nu)} \frac{1-u^2}{(1+u^2)^2}
 \end{aligned} \tag{7.10}$$

Les transformées de Fourier de ces fonctions valent alors (pour $p > 0$) :

$$\begin{aligned}
 \widehat{W}_+^0(p) &= -\frac{4\nu p}{2-\nu} e^{-p} & \widehat{W}_-^0 &= \left(4 + \frac{4\nu p}{2-\nu} \right) e^{-p} \\
 \widehat{W}_{III}^0(p) &= \widehat{W}_z^0(p) = -\frac{4\nu p}{2-\nu} e^{-p} & \widehat{W}^0(p) &= \left(2 - \frac{4\nu p}{2-\nu} \right) e^{-p}
 \end{aligned} \tag{7.11}$$

Par conséquent, étant donné le comportement quand $p \rightarrow 0$ de ces fonctions (cf. (7.4)), les constantes $\gamma_+, \gamma_-, \gamma_{III}, \gamma_z, \gamma$ valent à l'ordre le plus bas :

$$\begin{aligned}
 \gamma_+^0 &= \frac{4\nu}{\pi(2-\nu)}; & \gamma_-^0 &= \frac{8(1-\nu)}{\pi(2-\nu)}; & \gamma^0 &= \frac{2(2+\nu)}{\pi(2-\nu)} \\
 \gamma_{III}^0 &= 0; & \gamma_z^0 &= 0; & \gamma_{III}^1 &= -\frac{4(1-\nu)}{2-\nu}; & \gamma_z^1 &= \frac{4}{2-\nu}
 \end{aligned} \tag{7.12}$$

Remarquons qu'étant donné que $\gamma_{III}^0 = \gamma_z^0 = 0$, on détermine en fait γ_{III}^1 et γ_z^1 dès l'ordre 0.

On vérifie alors, que ces fonctions vérifient les équations différentielles (7.5) à (7.8), et sont donc bien solutions de notre problème.

On obtient de plus, grce à (6.42) et aux conditions de parité par rapport à ε (cf. §5.3.5), la valeur de γ_-^1 , donc un élément de la solution à l'ordre 1 (autre que les valeurs de γ_{III}^1 et γ_z^1 qui se rapportent en fait à l'ordre 0) :

$$\gamma_-^1 = -2i\gamma_-^0 = -\frac{16i}{\pi} \frac{1-\nu}{2-\nu} \quad (7.13)$$

7.2.3 Non unicité des solutions

En cherchant les solutions des équations (7.5) à (7.9), vérifiant le bon comportement en 0 et de la forme $e^{-p}[A + Bp]$ en $+\infty$, on trouve au moins cinq solutions différentes. En voici une :

$$\begin{aligned} \widehat{W}_+^0(p) &= \frac{4\nu p}{2-\nu} e^{-p} & \widehat{W}_-^0 &= 4 \left(1 - \frac{(8-3\nu)p}{2-\nu} \right) e^{-p} \\ \widehat{W}_{III}^0(p) &= \widehat{W}_z^0(p) = -\frac{4\nu p}{2-\nu} e^{-p} & \widehat{W}^0(u) &= \left(2 - \frac{4(4-3\nu)p}{2-\nu} \right) e^{-p} \end{aligned} \quad (7.14)$$

On voit donc que les équations écrites ne sont pas suffisantes pour déterminer les fonctions de poids du cas homogène. Ce qui n'est pas surprenant car nous ne résolvons pas le problème d'élasticité entièrement.

7.3 Problème à l'ordre 1

7.3.1 Ecriture des équations

Remarquons, premièrement, que la fonction $\widehat{W}(p)$ est paire par rapport à ε (cf. §5.3.5). Par conséquent, \widehat{W}^1 et γ^1 sont nuls, et l'équation différentielle (6.34) sur la fonction \widehat{W} est donc identiquement nulle à l'ordre 1 en ε . En développant alors les équations (6.30) à (6.33) à l'ordre 1 en ε , on obtient les équations différentielles suivantes sur $\widehat{W}_+^1, \widehat{W}_-^1, \widehat{W}_{III}^1, \widehat{W}_z^1$:

$$\begin{aligned} p\widehat{W}_+^1'' + \frac{1}{2}\widehat{W}_+^1' + \left[\frac{\gamma_-^0\pi}{8} - p \right] \widehat{W}_+^1 + \widehat{W}_z^1 + \frac{\pi}{8}\gamma_+^0\widehat{W}_-^1 - \frac{\gamma_{III}^1}{2(1-\nu)}\widehat{W}_{III}^1 = \\ i\widehat{W}_+^0' - \left[\frac{\gamma_+^1}{2} + i\gamma_+^0(\ln p + C + 1) \right] \frac{\pi}{4}\widehat{W}_-^0 + \left[\gamma_{III}^2 + i\gamma_{III}^1(\ln p + C + 2) \right] \frac{\widehat{W}_{III}^0}{2(1-\nu)} \end{aligned} \quad (7.15)$$

$$\begin{aligned} p\widehat{W}_-^1'' + \frac{1}{2}\widehat{W}_-^1' + \left[\frac{\gamma_-^0\pi}{8} - p \right] \widehat{W}_-^1 + \widehat{W}_z^1 + \frac{\pi}{8}\gamma_+^0\widehat{W}_+^1 + \frac{\gamma_{III}^1}{2(1-\nu)}\widehat{W}_{III}^1 = \\ -i\widehat{W}_-^0' + \left[\frac{\gamma_+^1}{2} + i\gamma_+^0(\ln p + C + 1) \right] \frac{\pi}{4}\widehat{W}_+^0 + \left[\gamma_{III}^2 + i\gamma_{III}^1(\ln p + C + 2) \right] \frac{\widehat{W}_{III}^0}{2(1-\nu)} \end{aligned} \quad (7.16)$$

$$p\widehat{W}_{III}^1'' + \frac{1}{2}\widehat{W}_{III}^1' + \left[\frac{\gamma^0\pi}{4} - p \right] \widehat{W}_{III}^1 + \gamma_z^1 \frac{1-\nu}{4} [\widehat{W}_+^1 - \widehat{W}_-^1] = \frac{1-\nu}{4} [\gamma_z^2 + i\gamma_z^1(C + \ln p)] (\widehat{W}_-^0 + \widehat{W}_+^0) \quad (7.17)$$

$$p\widehat{W}_z^1'' + \frac{1}{2}\widehat{W}_z^1' + \left[\frac{(\gamma_-^0 + \gamma_+^0)\pi}{8} - p \right] \widehat{W}_z^1 + \frac{\widehat{W}_-^1 + \widehat{W}_+^1}{2} = i\widehat{W}_z^0' + \left[\frac{\gamma_+^1}{2} + i\gamma_+^0(\ln p + C + 1) \right] \frac{\pi}{4}\widehat{W}_z^0 + [\gamma_{III}^2 + i\gamma_{III}^1(\ln p + C + 2)] \frac{\widehat{W}^0}{2(1-\nu)} \quad (7.18)$$

où $C = -\Gamma'(1)$ est la constante d'Euler (cf. Gradshteyn et Ryzhik, §8.367) qui provient ici du développement des fonctions Γ autour du point unité.

D'autre part, les comportements asymptotiques (6.35) et (6.38)-(6.40) pour $p \rightarrow 0$ s'écrivent sur les fonctions à l'ordre 1 en ε :

$$\begin{aligned} \widehat{W}_+^1(0) &= \widehat{W}_-^1(0) = \widehat{W}_{III}^1(0) = \widehat{W}_z^1(0) = 0 \\ \widehat{W}_+^1'(p) &\sim -\pi [2i(\ln p + C)\gamma_+^0 + \gamma_+^1] \\ \widehat{W}_-^1'(p) &\sim -\pi\gamma_-^1 \\ \widehat{W}_{III}^1'(p) &\sim -2\gamma_{III}^2 - 2i\gamma_{III}^1(\ln p + C) \\ \widehat{W}_z^1'(p) &\sim 8i - 2\gamma_z^2 - 2i\gamma_z^1(\ln p + C) \end{aligned} \quad (7.19)$$

Il s'agit alors de trouver les fonctions \widehat{W}_+^1 , \widehat{W}_-^1 , \widehat{W}_{III}^1 , \widehat{W}_z^1 , et les constantes γ_+^1 , γ_{III}^2 , γ_z^2 (γ_-^1 ayant déjà été déterminée, cf.(7.13) et γ^1 étant nulle car γ est comme W paire par rapport à ε), qui vérifient les équations différentielles, le bon comportement pour $p \rightarrow 0$, et qui s'annulent pour $p \rightarrow +\infty$. Remarquons que le problème à l'ordre 1 est linéaire (contrairement à celui à l'ordre 0) car les constantes (γ_+^0 , γ_-^0 , γ^0 , γ_{III}^1 , γ_z^1) qui sont en facteur des fonctions recherchées, sont connues. Il y aura donc unicité de la solution à l'ordre 1.

7.3.2 Découplage des équations

Le système d'équations à l'ordre 1 en ε se découple, en considérant les combinaisons linéaires des équations (7.15) à (7.18) suivantes :

$$\begin{cases} (7.15) + (7.16) + 2 \times (7.18) & (1-\nu) [(7.15) - (7.16)] + 2 \times (7.17) \\ (7.15) + (7.16) - 2 \times (7.18) & (7.15) - (7.16) - 2 \times (7.17) \end{cases} \quad (7.20)$$

Les équations obtenues portent alors sur les fonctions $\widehat{f}_1, \widehat{f}_2, \widehat{f}_3, \widehat{f}_4$ définies pour $p > 0$, par :

$$\begin{cases} \widehat{f}_1(p) \equiv (\widehat{W}_+^1 + \widehat{W}_-^1 + 2\widehat{W}_z^1)(p) & \widehat{f}_2(p) \equiv \left(\widehat{W}_+^1 - \widehat{W}_-^1 + \frac{2}{1-\nu}\widehat{W}_{III}^1 \right)(p) \\ \widehat{f}_3(p) \equiv (\widehat{W}_+^1 + \widehat{W}_-^1 - 2\widehat{W}_z^1)(p) & \widehat{f}_4(p) \equiv (\widehat{W}_+^1 - \widehat{W}_-^1 - 2\widehat{W}_{III}^1)(p) \end{cases} \quad (7.21)$$

et s'écrivent, compte tenu des valeurs des γ_k^0 :

$$\begin{cases} \left[p \frac{d^2}{dp^2} + \frac{1}{2} \frac{d}{dp} + \left(\frac{3}{2} - p \right) \right] \begin{pmatrix} \widehat{f}_1(p) \\ \widehat{f}_2(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1(p) \\ F_2(p) \end{pmatrix} \\ \left[p \frac{d^2}{dp^2} + \frac{1}{2} \frac{d}{dp} - \left(\frac{1}{2} + p \right) \right] \begin{pmatrix} \widehat{f}_3(p) \\ \widehat{f}_4(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_3(p) \\ F_4(p) \end{pmatrix} \end{cases} \quad (7.22)$$

où les seconds membres sont de la forme suivante :

$$\begin{cases} F_1(p) = e^{-p} [(a_1 + b_1 p) + (c_1 + d_1 p) \ln p] & F_2(p) = e^{-p} [(a_2 + b_2 p) + (c_2 + d_2 p) \ln p] \\ F_3(p) = e^{-p} [a_3 + c_3 \ln p] & F_4(p) = e^{-p} [a_4 + c_4 \ln p] \end{cases} \quad (7.23)$$

Les quantités a_1, b_1, \dots, c_4 sont des constantes que l'on obtient en explicitant les seconds membres des équations différentielles (7.15) à (7.18) (elles dépendent donc linéairement des trois inconnues $\gamma_+^1, \gamma_{III}^2, \gamma_z^2$). Le problème revient donc à résoudre deux types d'équations différentielles du second ordre.

7.3.3 Résolution des équations

A $\gamma_+^1, \gamma_-^1, \gamma_{III}^2, \gamma_z^2$ fixés, nous voyons que chacune des fonctions $\widehat{f}_i, i = 1, 2, 3, 4$ s'obtient par superposition de la solution générale du cas sans second membre (qui dépend de deux constantes d'intégration) et d'une solution particulière. Les conditions aux limites en 0 et en $+\infty$ permettront alors de déterminer les constantes d'intégration et les constantes $\gamma_+^1, \gamma_{III}^2, \gamma_z^2$.

Pour cette résolution, nous nous servons d'un logiciel de calcul formel (*Maple*). Nous résolvons ainsi chacune des deux équations avec comme seconds membres successifs $0, e^{-p}, e^{-p} \ln p, p e^{-p}, p e^{-p} \ln p$. Les solutions obtenues sont alors réinjectées dans les équations à titre de vérification.

Nous obtenons, après simplification :

- pour $k = 1$ ou 2 , c'est-à-dire pour le premier type d'équation différentielle:

$$\begin{aligned} \widehat{f}_k(p) &= A_k \sqrt{p} e^{-p} + B_k [e^p + i \sqrt{2\pi} e^{-p} \operatorname{erf}(i \sqrt{2p}) \sqrt{p}] + e^{-p} \left(a_k + b_k \frac{1-2p}{2} \right) \\ &+ \left(c_k + \frac{d_k}{2} \right) \left[2 \sqrt{p} e^{-p} \int_0^p \frac{e^{2x} \operatorname{Ei}(-2x)}{\sqrt{x}} dx + e^{-p} \ln p - e^p \operatorname{Ei}(-2p) \right] \\ &+ d_k e^{-p} \left(\frac{1}{2} + 2p - p \ln p \right) \end{aligned} \quad (7.24)$$

- pour $k = 3$ ou 4 , c'est-à-dire pour le deuxième type d'équation :

$$\begin{aligned} \widehat{f}_k(p) &= [A_k - c_k(2 + C + \ln 2)] e^p + B_k e^p \operatorname{erf}(\sqrt{2p}) \\ &+ (2c_k - a_k) e^{-p} + c_k [e^p \operatorname{Ei}(-2p) - e^{-p} \ln p] \end{aligned} \quad (7.25)$$

où :

- $\operatorname{erf}(x)$, appelée "Error function" en anglais, est définie par $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-s^2} ds$ (cf. Gradshteyn et Ryzhik (1980), §8.25);
- $\operatorname{Ei}(x)$ est définie pour tout $x < 0$ par $\operatorname{Ei}(x) = - \int_1^{+\infty} \frac{e^{xt}}{t} dt = - \int_{-x}^{+\infty} \frac{e^{-s}}{s} ds$ (cf. Gradshteyn et Ryzhik (1980), §8.211)

et où les A_k et les B_k sont des constantes arbitraires.

7.3.4 Application des conditions aux limites

Pour $k = 1$ ou 2 :

- la condition limite en $p = +\infty$ implique $B_k = 0$;
- la condition $\widehat{f}_k(0) = 0$ donne $B_k = -a_k - \frac{b_k + d_k}{2} + (C + \ln 2)(c_k + \frac{d_k}{2})$
(Pour le voir, on écrit $e^p \operatorname{Ei}(-2p) - e^{-p} \ln p = -2e^p \int_p^{+\infty} e^{-2x} \ln x dx$, puis on se sert de la formule §4.331 de Gradshteyn et Ryzhik (1980) donnant la valeur de l'intégrale pour $p \rightarrow 0$);
- la condition (7.19) sur le comportement des dérivées $\widehat{W}_+'(p)$ quand $p \rightarrow 0$ implique $A_1 = A_2 = 0$.

En écrivant alors les constantes $a_1, a_2, \dots, d_1, d_2$ en fonction de γ_{III}^2 et γ_+^1 grce à la relation (6.42) liant γ_{III}^2 et γ_z^2 , on obtient les valeurs de γ_{III}^2 et de γ_+^1 suivantes :

$$\gamma_{III}^2 = 4i(1 - \ln 2) \frac{1 - \nu}{2 - \nu} \quad \text{et} \quad \gamma_+^1 = i \frac{8 \ln 2}{\pi} \frac{\nu}{2 - \nu} \quad (7.26)$$

et, grce à (6.42), celle de γ_z^2 :

$$\gamma_z^2 = 4i \frac{1 + \ln 2}{2 - \nu} \quad (7.27)$$

Rappelons par souci de complétude, l'expression de γ_-^1 et de γ^1 :

$$\gamma_-^1 = -\frac{16i}{\pi} \frac{1 - \nu}{2 - \nu} \quad \text{et} \quad \gamma^1 = 0 \quad (7.28)$$

Ces équations déterminent entièrement les deux termes prépondérants du développement des constantes $\gamma_+, \gamma_-, \gamma_{III}, \gamma_z, \gamma$ en puissances de ε .

$k = 3$ ou 4 :

- la condition limite en $p = +\infty$ implique $A_k + B_k - c_k(2 + C + \ln 2) = 0$;
- la condition $\widehat{f}_k(0) = 0$ donne $A_k = a_k$;
- les fonctions \widehat{f}_3 et \widehat{f}_4 ainsi déterminées vérifient la condition (7.19) sur le comportement des dérivées $\widehat{W}_+'(p)$ quand $p \rightarrow 0$. Ceci n'est pas étonnant, étant donné que pour la détermination des constantes γ_+^1 , γ_-^1 , γ_{III}^2 , γ_z^2 nous nous sommes servis des relations (6.42) obtenues en écrivant les équations différentielles pour $p \rightarrow 0$ en tenant compte des comportements asymptotiques des fonctions.

d'où la détermination des constantes d'intégration, $A_k = a_k$ et $B_k = c_k(2 + C + \ln 2) - a_k$ et des fonctions \widehat{f}_3 et \widehat{f}_4 .

Expression des fonctions $\widehat{f}_1, \widehat{f}_2, \widehat{f}_3, \widehat{f}_4$

Les fonctions $\widehat{f}_1, \widehat{f}_2, \widehat{f}_3, \widehat{f}_4$ sont donc entièrement déterminées. Précisons leur expression finale avant d'en chercher la transformée de Fourier inverse :

$$\begin{aligned}\widehat{f}_1 &= -4i \left[2\sqrt{p}e^{-p} \int_0^p \frac{e^{2x}\text{Ei}(-2x)}{\sqrt{x}} dx - e^p \text{Ei}(-2p) \right] \\ &\quad - 4i(C + \ln 2p)e^{-p} - \frac{16i\nu}{2-\nu}pe^{-p}(C + \ln 2p) \\ \widehat{f}_2 &= 4i \left[2\sqrt{p}e^{-p} \int_0^p \frac{e^{2x}\text{Ei}(-2x)}{\sqrt{x}} dx - e^p \text{Ei}(-2p) \right] + 4i(C + \ln 2p)e^{-p} \\ \widehat{f}_3 &= 4i \left[e^p \text{Ei}(-2p) - e^{-p}(C + \ln 2p) \right] \\ \widehat{f}_4 &= -\widehat{f}_3\end{aligned}$$

7.3.5 Transformées de Fourier inverses

Rappelons que la transformée de Fourier inverse s'écrit : $f(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iup} \widehat{f}(p) dp$.

Les fonctions $\widehat{f}_1, \widehat{f}_2, \widehat{f}_3, \widehat{f}_4$ ont été calculées pour $p > 0$, il faut donc ramener les intégrales d'intégration sur $[0, +\infty[$. $\widehat{W}_+^1 + \widehat{W}_-^1$ étant paire par rapport à p , on a :

$$(W_+^1 + W_-^1)(u) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} (\widehat{W}_+^1(p) + \widehat{W}_-^1(p)) \cos(pu) dp$$

En se servant, de plus des relations (7.21) entre les fonctions $\widehat{f}_1, \widehat{f}_2, \dots$ et $\widehat{W}_+^1, \widehat{W}_-^1, \dots$, on obtient :

$$(W_+^1 + W_-^1)(u) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} (\widehat{f}_1(p) + \widehat{f}_3(p)) \cos(pu) dp$$

et finalement, les fonctions \widehat{f}_k étant imaginaires pures :

$$(W_+^1 + W_-^1)(u) = \frac{i}{2\pi} \operatorname{Im} \int_0^{+\infty} (\widehat{f}_1(p) + \widehat{f}_3(p)) e^{-iup} dp$$

De même, le calcul des fonctions $W_+^1, W_-^1, W_{III}^1, W_z^1$ est ramené au calcul des intégrales $\int_0^{+\infty} \widehat{f}_k(p) e^{-iup} dp$, $k = 1, 2, 3, 4$, par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} (W_+^1 - W_-^1)(u) &= \frac{i}{\pi(2-\nu)} \operatorname{Im} \int_0^{+\infty} [(1-\nu)\widehat{f}_2(p) + \widehat{f}_4(p)] e^{-iup} dp \\ W_{III}^1(u) &= \frac{1-\nu}{2\pi(2-\nu)} \operatorname{Re} \int_0^{+\infty} (\widehat{f}_2(p) - \widehat{f}_4(p)) e^{-iup} dp \\ W_z^1(u) &= \frac{1}{4\pi} \operatorname{Re} \int_0^{+\infty} (\widehat{f}_1(p) - \widehat{f}_3(p)) e^{-iup} dp \end{aligned}$$

Le calcul des intégrales $\int_0^{+\infty} \widehat{f}_k(p) e^{-iup} dp$, $k = 1, 2, 3, 4$, quant à lui, se ramène, à l'aide éventuellement d'une intégration par parties, au calcul des quatre intégrales suivantes :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{+\infty} e^{-p(1+iu)} dp, \quad I_2 = \int_0^{+\infty} e^{-p(1+iu)} \ln p \, dp, \\ I_3 &= \int_0^{+\infty} e^{p(1-iu)} \operatorname{Ei}(-2p) \, dp, \quad I_4 = \int_0^{+\infty} e^{-p(1+iu)} \sqrt{p} \int_0^p \frac{e^{2x} \operatorname{Ei}(-2x)}{\sqrt{x}} dx \, dp. \end{aligned}$$

Le calcul de I_1 est trivial. Celui des autres intégrales est détaillé dans l'annexe §7.7. Le calcul de I_2 et de I_3 est relativement aisé, et conduit à des expressions entièrement élémentaires. Le calcul de I_4 est plus long et plus complexe, et conduit à une expression faisant intervenir la fonction $\chi(u)$ définie par :

$$\chi(u) \equiv \frac{i}{(1+iu)^{3/2}} \int_{-\infty}^u \ln \left(\frac{1+it}{2} \right) \frac{dt}{(1+it)^{1/2}(1-it)}. \quad (7.29)$$

L'intégrale apparaissant ici ne peut pas s'exprimer en termes de fonctions élémentaires car elle se ramène à des primitives de la forme $\int \frac{\ln x}{x+a} dx$. Nous l'avons néanmoins évaluée numériquement pour $u > 0$ (cf. Fig 7.1). La courbe pour $u < 0$ s'en déduit par parité, grce à l'égalité $\chi(-u) = \overline{\chi(u)}$, démontrée en annexe §7.7, qui implique que $\operatorname{Re} \chi$ est paire et $\operatorname{Im} \chi$ impaire.

Nous obtenons alors :

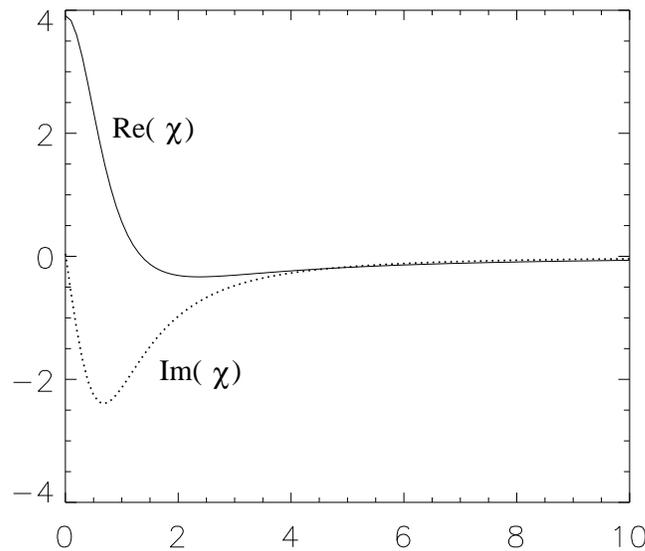
$$\int_0^{+\infty} \widehat{f}_1(p) e^{-iup} dp = 4i \chi(u) + \frac{8i\nu(1-iu)^2}{(2-\nu)(1+u^2)^2} \left[\ln \left(\frac{1+u^2}{4} \right) + 2i \arctan u - 2 \right] \quad (7.30)$$

$$\int_0^{+\infty} \widehat{f}_2(p) e^{-iup} dp = -4i \chi(u) \quad (7.31)$$

$$\int_0^{+\infty} \widehat{f}_3(p) e^{-iup} dp = - \int_0^{+\infty} \widehat{f}_4(p) e^{-iup} dp \quad (7.32)$$

$$= \frac{4i}{1+u^2} \left[\ln \left(\frac{1+u^2}{4} \right) + 2i \arctan u \right] \quad (7.33)$$

Il ne reste plus qu'à rassembler les différents résultats obtenus, pour donner l'expression finale des fonctions de poids $h_{p_i}(x, z)$, au premier ordre en ε .


 Figure 7.1: Fonction $\chi(u)$

7.4 Expression des fonctions de poids à l'ordre 1 en ε

En utilisant les relations (6.2)-(6.3), (6.10)-(6.11), (6.14)-(6.15) reliant les fonctions de poids aux fonctions $W_+, W_{III}, W_-, W_z, W$, et en les développant autour de $\varepsilon = 0$, on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} h_y(x, z) \equiv (h_{I_y} + ih_{III_y})(x, z) = \frac{|x|^{-3/2}}{2\sqrt{2\pi}} \left[(1 - i\varepsilon \ln |x|)(W_+^0 + W_-^0) + \varepsilon(W_+^1 - W_-^1) \right] + O(\varepsilon^2) \\ h_x(x, z) \equiv (h_{I_x} + ih_{III_x})(x, z) = -\frac{i|x|^{-3/2}}{2\sqrt{2\pi}} \left[(1 - i\varepsilon \ln |x|)(W_+^0 - W_-^0) + \varepsilon(W_+^1 + W_-^1) \right] + O(\varepsilon^2) \\ (h_{III_y} + ih_{III_x})(x, z) = \frac{|x|^{-3/2}}{\sqrt{2\pi}} \left[W_{III}^0 + \varepsilon W_{III}^1 \right] + O(\varepsilon^2) \\ h_z(x, z) \equiv (h_{I_z} + ih_{III_z})(x, z) = \frac{|x|^{-3/2}}{\sqrt{2\pi}} \left[(1 - i\varepsilon \ln |x|)W_z^0 + \varepsilon W_z^1 \right] + O(\varepsilon^2) \\ h_{III_z}(x, z) = \frac{|x|^{-3/2}}{\sqrt{2\pi}} W^0 + O(\varepsilon^2) \end{array} \right. \quad (7.34)$$

où les valeurs des fonctions $W_+^0, \dots, W_+^1, \dots$ sont prises au point $u \equiv z/|x|$.

On rappelle que l'expression des fonctions W_+^0, W_-^0, \dots est donnée par :

$$\begin{aligned} W_+^0(u) &= -\frac{4\nu}{\pi(2-\nu)} \frac{1-u^2}{(1+u^2)^2} & W_-^0(u) &= \frac{4}{\pi(1+u^2)} + \frac{4\nu}{\pi(2-\nu)} \frac{1-u^2}{(1+u^2)^2} \\ W_{III}^0(u) = W_z^0(u) &= i \frac{8\nu}{\pi(2-\nu)} \frac{u}{(1+u^2)^2} & W^0(u) &= \frac{2}{\pi(1+u^2)} - \frac{4\nu}{\pi(2-\nu)} \frac{1-u^2}{(1+u^2)^2} \end{aligned} \quad (7.35)$$

Après quelques calculs, nous obtenons l'expression finale suivante des fonctions W_+^1, W_-^1, \dots :

$$\begin{aligned}
 (W_+^1 + W_-^1)(u) &= \frac{2i}{\pi} \left\{ \operatorname{Re} \chi(u) + \frac{1}{(2-\nu)(1+u^2)^2} \times \right. \\
 &\quad \left. \left[4\nu(2u \arctan u - 1 + u^2) + \ln \left(\frac{1+u^2}{4} \right) (u^2(2-3\nu) + 2 + \nu) \right] \right\} \\
 (W_+^1 - W_-^1)(u) &= -\frac{4i}{\pi(2-\nu)} \left\{ (1-\nu) \operatorname{Re} \chi(u) + \frac{1}{1+u^2} \ln \left(\frac{1+u^2}{4} \right) \right\} \\
 W_{III}^1(u) &= \frac{2(1-\nu)}{\pi(2-\nu)} \left\{ \operatorname{Im} \chi(u) - \frac{2}{1+u^2} \arctan u \right\} \\
 W_z^1(u) &= -\frac{1}{\pi} \left\{ \operatorname{Im} \chi(u) - \frac{4\nu}{(2-\nu)(1+u^2)^2} u \left[\ln \left(\frac{1+u^2}{4} \right) - 2 \right] + \right. \\
 &\quad \left. \frac{\arctan u}{1+u^2} \left(\frac{4\nu}{2-\nu} \frac{1-u^2}{1+u^2} - 2 \right) \right\}
 \end{aligned} \tag{7.36}$$

avec

$$\chi(u) \equiv \frac{i}{(1+iu)^{3/2}} \int_{-\infty}^u \ln \left(\frac{1+it}{2} \right) \frac{dt}{(1+it)^{1/2}(1-it)}, \tag{7.37}$$

fonction dont le graphe est donné en Fig. 7.1 pour $u > 0$.

7.5 Détermination numérique des constantes $\gamma_+, \gamma_-, \gamma_{III}, \gamma_z, \gamma$

On ne s'intéresse plus ici seulement au développement à l'ordre 1 ou 2 de ces constantes, mais on cherche la solution exacte pour ε quelconque. De plus, on ne cherche que les constantes $\gamma_+, \gamma_-, \gamma_{III}, \gamma_z, \gamma$ (à titre de vérification du calcul au 1^{er} ordre) et non plus les fonctions de poids.

7.5.1 Découplage partiel des équations différentielles

Les équations différentielles (6.30) à (6.34) peuvent se découpler partiellement, en trois systèmes de deux équations différentielles chacun.

Le premier, obtenu par (6.30) + (6.31) et $\frac{1}{2i} [(6.32) - \overline{(6.32)}]$, porte sur les fonctions $f_1 =$

$\widehat{W}_+ + \overline{\widehat{W}_-}$ et $g_1 = \text{Im}(\widehat{W}_{III})$ (en se limitant ici encore à $p > 0$) :

$$\left\{ \begin{array}{l} p \frac{d^2 f_1}{dp^2} + \left(\frac{1}{2} - i\varepsilon \right) \frac{df_1}{dp} + \left[\frac{\frac{1}{2} + i\varepsilon}{\cosh(\pi\varepsilon)} \left(\frac{\sinh(\pi\varepsilon)}{4\varepsilon} p^{2i\varepsilon} \Gamma(1 - 2i\varepsilon) \gamma_+ \overline{f_1} + \frac{\gamma_- \pi}{4} f_1 \right) - p f_1 \right] = \\ \frac{\frac{1}{2} + i\varepsilon}{\cosh(\pi\varepsilon)} \frac{2i\gamma_{III}}{\varepsilon(1-\nu)} \cosh\left(\frac{\pi\varepsilon}{2}\right) \Gamma(1 - i\varepsilon) p^{i\varepsilon} g_1 \quad (7.38) \\ p \frac{d^2 g_1}{dp^2} + \frac{1}{2} \frac{dg_1}{dp} + \left(\frac{\gamma\pi}{4} - p \right) g_1 = -\frac{1-\nu}{4\varepsilon} \cosh\left(\frac{\pi\varepsilon}{2}\right) \text{Im} \left[\overline{\gamma_z} p^{-i\varepsilon} \Gamma(1 + i\varepsilon) f_1 \right] \end{array} \right.$$

Le deuxième, obtenu par (6.30) - (6.31) + 2 × (6.33) et $\frac{1}{2} [(6.32) + \overline{(6.32)}] + (6.34)$, porte sur les fonctions $f_2 = \widehat{W}_+ - \overline{\widehat{W}_-} + 2\widehat{W}_z$ et $g_2 = \text{Re}(\widehat{W}_{III}) + \widehat{W}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} p \frac{d^2 f_2}{dp^2} + \left(\frac{1}{2} - i\varepsilon \right) \frac{df_2}{dp} - \left[\frac{\frac{1}{2} + i\varepsilon}{\cosh(\pi\varepsilon)} \left(\frac{\sinh(\pi\varepsilon)}{4\varepsilon} p^{2i\varepsilon} \Gamma(1 - 2i\varepsilon) \gamma_+ \overline{f_2} - \frac{\gamma_- \pi}{4} f_2 \right) + (p - 1) f_2 \right] = \\ \frac{\frac{1}{2} + i\varepsilon}{\cosh(\pi\varepsilon)} \frac{2\gamma_{III}}{\varepsilon(1-\nu)} \cosh\left(\frac{\pi\varepsilon}{2}\right) \Gamma(1 - i\varepsilon) p^{i\varepsilon} g_2 \quad (7.39) \\ p \frac{d^2 g_2}{dp^2} + \frac{1}{2} \frac{dg_2}{dp} + \left(\frac{\gamma\pi}{4} - p + 1 \right) g_2 = -\frac{1-\nu}{4\varepsilon} \cosh\left(\frac{\pi\varepsilon}{2}\right) \text{Re} \left[\overline{\gamma_z} p^{-i\varepsilon} \Gamma(1 + i\varepsilon) f_2 \right] \end{array} \right.$$

Le troisième, obtenu par (6.30) - (6.31) - 2 × (6.33) et $\frac{1}{2} [(6.32) + \overline{(6.32)}] - (6.34)$, porte sur les fonctions $f_3 = \widehat{W}_+ - \overline{\widehat{W}_-} - 2\widehat{W}_z$ et $g_3 = \text{Re}(\widehat{W}_{III}) - \widehat{W}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} p \frac{d^2 f_3}{dp^2} + \left(\frac{1}{2} - i\varepsilon \right) \frac{df_3}{dp} - \left[\frac{\frac{1}{2} + i\varepsilon}{\cosh(\pi\varepsilon)} \left(\frac{\sinh(\pi\varepsilon)}{4\varepsilon} p^{2i\varepsilon} \Gamma(1 - 2i\varepsilon) \gamma_+ \overline{f_3} - \frac{\gamma_- \pi}{4} f_3 \right) + (p + 1) f_3 \right] = \\ \frac{\frac{1}{2} + i\varepsilon}{\cosh(\pi\varepsilon)} \frac{2\gamma_{III}}{\varepsilon(1-\nu)} \cosh\left(\frac{\pi\varepsilon}{2}\right) \Gamma(1 - i\varepsilon) p^{i\varepsilon} g_3 \quad (7.40) \\ p \frac{d^2 g_3}{dp^2} + \frac{1}{2} \frac{dg_3}{dp} + \left(\frac{\gamma\pi}{4} - p - 1 \right) g_3 = -\frac{1-\nu}{4\varepsilon} \cosh\left(\frac{\pi\varepsilon}{2}\right) \text{Re} \left[\overline{\gamma_z} p^{-i\varepsilon} \Gamma(1 + i\varepsilon) f_3 \right] \end{array} \right.$$

7.5.2 Principe de la méthode numérique

Les fonctions $\widehat{W}_+, \overline{\widehat{W}_-}, \dots$ sont solutions des 3 systèmes d'équations différentielles (7.38), (7.39), (7.40). Elles doivent s'annuler en $+\infty$. Leur comportement pour $p \rightarrow 0$ est relié aux constantes $\gamma_+, \gamma_-, \gamma_{III}, \gamma_z, \gamma$.

Numériquement, on procède en deux étapes :

1. Intégration des équations différentielles d'ordre 2 à $\gamma_+, \gamma_-, \gamma_{III}, \gamma_z, \gamma$ fixés, en partant des bonnes valeurs des fonctions f_i, g_i et de leur dérivée en $p = \eta$ où $\eta > 0$ et $\eta \gg 1$ ¹. Ces valeurs sont données par le comportement pour $p \rightarrow 0$ des fonctions f_i, g_i et f'_i, g'_i obtenu à partir des équations (6.35) et (6.38)-(6.40);

¹Nous ne pouvons pas partir de $p \equiv 0$ car le comportement des fonctions y est oscillant.

2. Ajustement des constantes $\gamma_+, \gamma_-, \gamma_{III}, \gamma_z, \gamma$ pour que la limite des fonctions f_i et g_i quand $p \rightarrow +\infty$ soit nulle. La solution de ces équations étant du "type $e^{\pm p}$ ", on demande que $\lim_{p \rightarrow +\infty} f(p)e^{-p} = 0$ pour éliminer la composante de "type e^{+p} ". On fait cela, en réalité pour p_∞ "grand" (étant donné que la décroissance est exponentielle, p_∞ compris entre 5 et 10 suffit). La fonction est alors de l'ordre de e^{-p_∞} en p_∞ , d'où la condition $|f(p_\infty).e^{-p_\infty}|$ inférieur à une constante α telle que $\alpha \sim e^{-2p_\infty}$.

Pour la première étape, nous utilisons une méthode de Runge-Kutta d'ordre 5 avec optimisation du pas de calcul.

Pour la deuxième étape, nous utilisons une méthode de Newton incrémentant les constantes $\gamma_+, \gamma_- \dots$

Il est clair, vu la non-unicité des solutions du problème à l'ordre 0 en ε , que si l'on démarre la méthode de Newton avec des valeurs quelconques des constantes $\gamma_+, \gamma_- \dots$, on risque de trouver des solutions qui ne sont pas les bonnes. Si l'on cherche une solution pour ε "pas trop grand", comme cela est généralement le cas dans la réalité (cf. Table 7.1), il faut donc prendre comme valeurs de départ des constantes $\gamma_+, \gamma_-, \gamma_{III}, \gamma_z, \gamma$, celles obtenues par le développement autour de $\varepsilon = 0$. Si l'on cherchait des solutions pour des ε "plus grands", il faudrait procéder par incrémentation sur ε en partant d'un ε proche de 0. Nous serions alors confrontés à des temps de calcul relativement grands. Mais cela n'aurait pas grand intérêt, car dans la réalité ε est généralement proche de 0. Nous nous sommes donc limités dans la pratique à $\varepsilon \in [0, 0.1]$. Les valeurs pour les ε négatifs s'obtiennent grâce aux conditions de parité par rapport à ε établies dans le paragraphe 5.3.5.

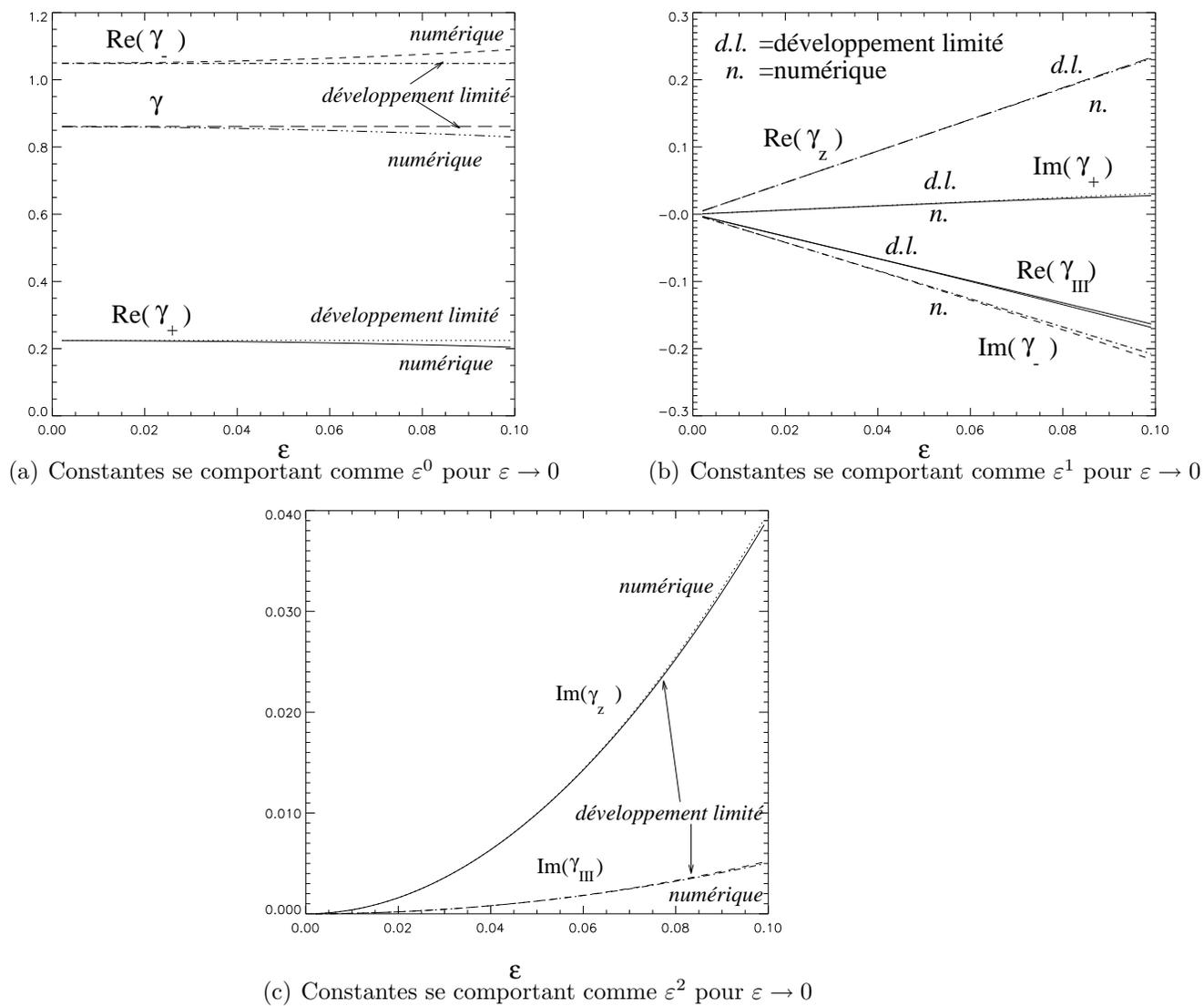
7.5.3 Résultats numériques

Nous avons tracé les courbes donnant les constantes $\gamma_+, \gamma_-, \gamma_{III}, \gamma_z, \gamma$ en fonction de ε dans l'intervalle $[0, 0.1]$. Les résultats obtenus sont donnés Figures 7.2.

Les courbes obtenues par la résolution numérique des équations "exactes" et celles obtenues par la résolution des problèmes développés autour de $\varepsilon = 0$ sont très proches. Leur différence est de l'ordre attendu, c'est-à-dire de l'ordre $O(\varepsilon^2)$ pour $\text{Re}(\gamma_+), \text{Re}(\gamma_-), \gamma$, $O(\varepsilon^3)$ pour $\text{Im}(\gamma_+), \text{Im}(\gamma_-), \text{Re}(\gamma_{III}), \text{Re}(\gamma_z)$, $O(\varepsilon^4)$ pour $\text{Im}(\gamma_{III}), \text{Im}(\gamma_z)$. Ce qui valide notre calcul analytique.

7.6 Stabilité de la forme rectiligne du front

Il s'agit de voir ici, si le front initialement droit, tend à retrouver sa forme initiale au cours de la propagation après avoir subi une petite perturbation coplanaire. Pour ce faire, nous utilisons la démarche de Rice (1985) et de Gao et Rice (1986). Elle consiste à comparer le taux de restitution d'énergie des points les plus avancés d'une perturbation sinusoïdale au taux de


 Figure 7.2: Constantes γ_+ , γ_- , γ_{III} , γ_z , γ en fonction de ε

restitution des points les plus reculés. Pour que la configuration rectiligne soit stable, il faut que les points les plus reculés avancent plus vite que les points les plus avancés, c'est-à-dire que le taux de restitution d'énergie après perturbation soit plus grand pour les premiers que pour les derniers. On suppose ici que la vitesse de propagation est régie uniquement par la valeur du taux de restitution et ne dépend pas du type de chargement.

Il faut donc, dans un premier temps, calculer la variation du taux de restitution d'énergie due à une petite perturbation sinusoïdale. Pour ce faire nous disposons des expressions (5.49) et (5.50), maintenant entièrement déterminées, reliant les F.I.C. après perturbation aux F.I.C. initiaux et de la relation (5.3) entre le taux de restitution $\delta\mathcal{G}$ et les F.I.C. L'étude de la stabilité en découle grce à l'introduction d'une longueur caractéristique dans le problème. Les relations obtenues nous permettront de plus, de voir si l'inhomogénéité favorise ou défavorise la stabilité par rapport au cas homogène où $\varepsilon \equiv 0$.

7.6.1 $\delta\mathcal{G}$ dû à une perturbation sinusoïdale du front

Nous cherchons à calculer la variation du taux de restitution d'énergie due à une perturbation sinusoïdale de la forme suivante :

$$\delta a(z) = \delta A \cdot \cos(pz) = \delta A \cdot \frac{e^{ipz} + e^{-ipz}}{2} \quad \text{avec } \delta A \text{ infinitésimal et } z \in \mathbb{R}.$$

le chargement étant supposé constant au cours de cette propagation (cas de la propagation subcritique par exemple) et tel que les F.I.C. avant propagation soient indépendants de z .

Calculons premièrement, les accroissements $\delta K(z, p)$ et $\delta K_{III}(z, p)$ des F.I.C. au point z du front, dus à une perturbation (virtuelle car complexe) de la forme $\delta a(z) = \delta A \cdot e^{ipz}$. Les expressions (5.49) et (5.50) pour $\delta a(z) = \delta A \cdot e^{ipz}$ nécessitent le calcul des intégrales $VP \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ipx} - 1}{x^2 |x|^{2i\eta}} dx$ avec $\eta = 0$ ou ε , et $PF \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{e^{ipx} - 1}{|x|^{3+i\eta}} dx$. Ces intégrales se ramènent par intégration par parties, aux intégrales déjà calculées dans le paragraphe 6.3.3. Il vient pour $\delta A \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} e^{-ipz} \frac{\delta K}{\delta A}(z, p) &= \frac{dK}{da} - \frac{1 + 2i\varepsilon}{8 \cosh(\pi\varepsilon)} \left\{ \gamma_+ \bar{K} \frac{|p|^{1+2i\varepsilon}}{\varepsilon(1+2i\varepsilon)} \Gamma(1-2i\varepsilon) \sinh(\pi\varepsilon) + \gamma_- K \pi |p| \right. \\ &\quad \left. + \frac{4\gamma_{III}}{1-\nu} K_{III} \frac{p |p|^{i\varepsilon}}{\varepsilon(1+i\varepsilon)} \Gamma(1-i\varepsilon) \cosh\left(\frac{\pi\varepsilon}{2}\right) \right\} + O(\delta A) \\ \frac{\delta K_{III}}{\delta A}(z, p) &= \frac{dK_{III}}{da} e^{ipz} - \frac{\gamma}{4} K_{III} |p| \pi e^{ipz} \\ &\quad - \frac{1-\nu}{2\varepsilon} \cosh\left(\frac{\pi\varepsilon}{2}\right) \operatorname{Re} \left\{ \gamma_z \bar{K} \frac{p |p|^{i\varepsilon}}{1+i\varepsilon} \Gamma(1-i\varepsilon) e^{ipz} \right\} + O(\delta A) \end{aligned}$$

Et, en utilisant (5.3) et (5.51), on obtient l'accroissement du taux de restitution d'énergie $\delta\mathcal{G}(z)$ dû à une avancée (réelle) $\delta a(z) = \delta A \cdot \cos(pz)$ pour $\delta A \rightarrow 0$:

$$\frac{1}{\Lambda'} \frac{\delta\mathcal{G}}{\delta A}(z) = (1-\nu) \operatorname{Re} \left\{ \bar{K} \frac{\delta K(z, p) + \delta K(z, -p)}{\delta A} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 & +K_{III} \frac{\delta K_{III}(z, p) + \delta K_{III}(z, -p)}{\delta A} + O(\delta A) \\
 = & \cos(pz) \left[\frac{1}{\Lambda'} \frac{d\mathcal{G}}{da} - \frac{\gamma}{2} K_{III}^2 \pi |p| - (1 - \nu) \gamma_- |K|^2 \pi |p| \frac{1 + 2i\varepsilon}{4 \cosh(\pi\varepsilon)} \right. \\
 & \left. - \frac{\tanh(\pi\varepsilon)}{4\varepsilon} (1 - \nu) \operatorname{Re} \left(\gamma_+ \overline{K}^2 |p|^{1+2i\varepsilon} \Gamma(1 - 2i\varepsilon) \right) \right] + O(\delta A) \quad (7.41)
 \end{aligned}$$

Remarquons que malgré l'apparente présence de termes complexes dans cette égalité, $\delta\mathcal{G}$ est bien réel car le produit $(1 + 2i\varepsilon)\gamma_-$ est réel (cf. (6.42)).

On remarque, de plus, comme Gao et Rice (1986) dans le cas homogène, que malgré la coexistence de termes en $\sin(pz)$ et en $\cos(pz)$ dans les expressions $\frac{1}{2}(\delta K(z, p) + \delta K(z, -p))$ et $\frac{1}{2}(\delta K_{III}(z, p) + \delta K_{III}(z, -p))$ donnant la variation des F.I.C. due à une avancée $\delta a(z) = \delta A \cos(pz) = \delta A \frac{e^{ipz} + e^{-ipz}}{2}$, les termes en $\sin(pz)$ disparaissent dans l'expression de $\delta\mathcal{G}$. Cela signifie que $\delta\mathcal{G}(z)$ est en phase ou en opposition de phase avec $\delta a(z) = \delta A \cos(pz)$.

7.6.2 Etude de la stabilité

Pour qu'il y ait *stabilité vis-à-vis de la forme initiale du front*, il faut que $\delta\mathcal{G}$ soit en opposition de phase avec $\delta a(z) = \delta A \cos(pz)$.

Dans l'expression (7.41) précédemment obtenue, on remarque la présence du terme $|p|^{2i\varepsilon} = \cos(2\varepsilon \ln |p|) + i \sin(2\varepsilon \ln |p|)$. Or, $1/|p|$, longueur d'onde (à un facteur 2π près) de notre perturbation est homogène à une longueur. Pour que le terme $|p|^{2i\varepsilon}$ ait un sens, il doit donc nécessairement se compléter avec un terme de la forme $a^{2i\varepsilon}$ où a est homogène à une longueur. Ce terme ne peut provenir que de \overline{K}^2 qui est homogène à $\left[MT^{-2}L^{-1/2-i\varepsilon}\right]^2 = M^2T^{-4}L^{-1+2i\varepsilon}$ où M désigne l'unité de masse, T celle de temps, L celle de longueur.

Dans tout problème réel, il existe une longueur caractéristique a , qui peut-être une taille caractéristique de la fissure ou du corps. Plaçons nous, par exemple, dans le cas d'une fissure en forme de fente infinie, la longueur caractéristique s'identifie alors à la largeur a de la fente. Notre modèle de fissure semi-infinie reste valable si la longueur d'onde des perturbations est petite devant cette taille caractéristique, c'est-à-dire si $|pa| \gg 1$, situation dans laquelle nous nous placerons dorénavant.

Alors dans (7.41), le terme $\frac{d\mathcal{G}}{da}$ (dont l'ordre de grandeur est le module des F.I.C. au carré divisé par la longueur caractéristique) devient négligeable devant les autres car le rapport de ces autres termes à $\frac{d\mathcal{G}}{da}$ est de l'ordre de $|pa|$.

De plus, le F.I.C. initial K peut se mettre sous la forme (cf. [Hutchinson *et al.*, 1987]):

$$K = K^0 (1 + 2i\varepsilon) a^{-i\varepsilon} = (K_I^0 + iK_{II}^0) (1 + 2i\varepsilon) a^{-i\varepsilon}$$

où (K_I^0, K_{II}^0) s'interprètent comme les F.I.C., en mode I et II, dans le cas $\varepsilon \equiv 0$. Ceci rejoint l'idée de Rice (1988) de définir des F.I.C. ayant des unités réelles se découplant en mode I et en mode II, en multipliant le F.I.C. complexe par un terme homogène à une longueur à la

puissance $+i\varepsilon$. Quant à K_{III} , rappelons que contrairement à K , il est identique au F.I.C. en mode III du cas homogène (cf. §6.4.1), il est donc inutile d'introduire une nouvelle notation.

En développant alors l'expression (7.41) à l'ordre 0 en ε , on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Lambda'} \frac{\delta \mathcal{G}}{\delta A}(z) = & -\pi |p| \cos(pz) \left\{ \frac{\gamma^0}{2} K_{III}^2 + \frac{1-\nu}{4} \left[\gamma_+^0 (K_I^{02} - K_{II}^{02}) \cos(2\varepsilon \ln |pa|) \right. \right. \\ & \left. \left. + 2\gamma_+^0 K_I^0 K_{II}^0 \sin(2\varepsilon \ln |pa|) + \gamma_-^0 (K_I^{02} + K_{II}^{02}) \right] \right\} + O(\varepsilon) + O(\delta A) \quad (7.42) \end{aligned}$$

Remarquons qu'on ne peut pas simplifier les termes $\cos(2\varepsilon \ln |pa|)$ et $\sin(2\varepsilon \ln |pa|)$ car $|pa| \gg 1$ mais $\varepsilon \ll 1$ si bien qu'on ne sait rien de l'ordre de grandeur de leur produit.

La stabilité découle alors de l'étude du signe du terme en facteur de $-\pi |p| \cos(pz)$, pour tout triplet de réels $(K_I^0, K_{II}^0, K_{III})$. Ce terme est la somme de $\frac{\gamma^0}{2} K_{III}^2$ toujours positif, et d'une forme quadratique du couple (K_I^0, K_{II}^0) dont la matrice associée s'écrit, à un facteur $\frac{1-\nu}{4}$ près :

$$\begin{pmatrix} \gamma_+^0 \cos(2\varepsilon \ln |pa|) + \gamma_-^0 & \gamma_+^0 \sin(2\varepsilon \ln |pa|) \\ \gamma_+^0 \sin(2\varepsilon \ln |pa|) & -\gamma_+^0 \cos(2\varepsilon \ln |pa|) + \gamma_-^0 \end{pmatrix}$$

En utilisant l'inégalité² $-1 < \nu \leq 1/2$ et les expressions (7.12) des constantes γ_+^0, γ_-^0 à l'ordre 0, on montre que tous les mineurs principaux de cette matrice sont positifs, et que la forme quadratique associée est donc positive. Il en résulte la positivité du terme en facteur de $-\cos(pz)$ pour tout triplet $(K_I^0, K_{II}^0, K_{III})$, et donc *la stabilité de la forme rectiligne du front par rapport à toute perturbation coplanaire de longueur d'onde petite devant la longueur caractéristique du problème.*

7.6.3 Comparaison avec le cas homogène $\varepsilon \equiv 0$

L'accroissement du taux de restitution d'énergie dans le cas homogène s'obtient en écrivant l'équation (7.42) pour $\varepsilon \equiv 0$. On obtient alors :

$$\begin{aligned} \left. \frac{1}{\Lambda'} \frac{\delta \mathcal{G}}{\delta A}(z) \right|_{\varepsilon \equiv 0} = & -\pi |p| \cos(pz) \left\{ \frac{\gamma^0}{2} K_{III}^2 + \frac{1-\nu}{4} \left[\gamma_+^0 (K_I^{02} - K_{II}^{02}) + \gamma_-^0 (K_I^{02} + K_{II}^{02}) \right] \right\} \\ & + O(\delta A) \end{aligned}$$

On remarque au passage que si l'on remplace $\gamma_+^0, \gamma_-^0, \gamma^0$ par leurs valeurs données par (7.12), on retrouve bien le résultat de Gao et Rice (1986).

²le coefficient ν défini en (5.51) ne correspond pas au coefficient de Poisson d'un matériau réel. Néanmoins pour $\varepsilon \ll 1$, il est équivalent à la moyenne des coefficients de Poisson ν_1 et ν_2 des deux matériaux de part et d'autre de l'interface d'où l'inégalité car ν_1 et ν_2 la vérifient.

La différence entre le cas d'une fissure d'interface et le cas homogène est donc traduite par la quantité :

$$\begin{aligned} \left. \frac{1}{\Lambda'} \frac{\delta \mathcal{G}}{\delta A}(z) - \frac{1}{\Lambda'} \frac{\delta \mathcal{G}}{\delta A}(z) \right|_{\varepsilon=0} &= -\pi |p| \cos(pz) \frac{1-\nu}{4} \left[\gamma_+^0 (K_I^{02} - K_{II}^{02}) (\cos(2\varepsilon \ln |pa|) - 1) \right. \\ &\quad \left. + 2\gamma_+^0 K_I^0 K_{II}^0 \sin(2\varepsilon \ln |pa|) \right] + O(\varepsilon) + O(\delta A) \end{aligned} \quad (7.43)$$

L'étude du signe du terme entre crochets [...] permet de savoir si l'inhomogénéité caractérisée par $\varepsilon \neq 0$ favorise ou défavorise la stabilité. Si ce terme est positif, c'est que le terme en facteur de $-\cos(pz)$ dans (7.42) est plus grand, donc "plus positif", quand $\varepsilon \neq 0$, c'est-à-dire que la stabilité est favorisée par l'inhomogénéité, et vice-versa. Pour l'étude de ce signe, nous allons considérer quelques cas particuliers.

- Cas $K_{II}^0 = 0$:

Il est clair que la différence est négative et donc que la stabilité est défavorisée dans ce cas.

- Cas $K_I^0 = 0$:

La différence est positive, l'inhomogénéité favorise donc la stabilité.

- Cas $K_I^0 = K_{II}^0$:

La différence est alors positivement proportionnelle à $K_I^{02} \sin(2\varepsilon \ln |pa|)$. La stabilité est alors favorisée si $\sin(2\varepsilon \ln |pa|)$ est positif, c'est-à-dire si

$$\ln |pa| \in \left[\frac{n\pi}{\varepsilon}, \frac{\pi}{2\varepsilon} + \frac{n\pi}{\varepsilon} \right], \quad n \in \mathbb{N}.$$

Nous envisageons dans l'avenir d'étudier la stabilité de la forme du front d'une fissure d'interface en forme de pièce de monnaie par une démarche analogue.

7.7 Annexe : Calcul de quelques intégrales

7.7.1 Calcul de $I_2 = \int_0^{+\infty} e^{-p(1+iu)} \ln p \, dp$ et $I_3 = \int_0^{+\infty} e^{p(1-iu)} \text{Ei}(-2p) \, dp$

I_2 se ramène aux intégrales $\int_0^{+\infty} e^{-p} \cos(pu) \ln p \, dp$ et $\int_0^{+\infty} e^{-p} \sin(pu) \ln p \, dp$ qui sont données dans Gradshteyn et Ryzhik (1980), §4.441. On en tire :

$$I_2 = -\frac{1-iu}{2(1+u^2)} \left[\ln(1+u^2) + 2i \arctan u + 2C \right] \quad (7.44)$$

Du fait que $\text{Ei}(-2p) = -\int_1^{+\infty} \frac{e^{-2pt}}{t} dt$, en intervertissant les deux intégrales intervenant dans I_3 , on se ramène à l'intégration d'une exponentielle, puis d'une fraction rationnelle. Il vient finalement :

$$I_3 = \frac{1}{1-iu} \ln \left(\frac{1+iu}{2} \right) = \frac{1+iu}{2(1+u^2)} \left[\ln \left(\frac{1+u^2}{4} \right) + 2i \arctan u \right] \quad (7.45)$$

7.7.2 Propriétés de $\chi(u) \equiv \frac{i}{(1+iu)^{3/2}} \int_{-\infty}^u \ln\left(\frac{1+it}{2}\right) \frac{dt}{(1+it)^{1/2}(1-it)}$

Cette intégrale apparaîtra dans le calcul de I_4 .

Parité de $\chi(u)$

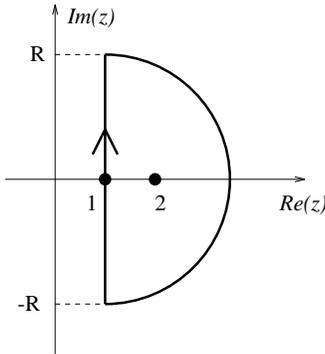
Montrons dans un premier temps que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \ln\left(\frac{1+it}{2}\right) \frac{dt}{(1+it)^{1/2}(1-it)} = 0$$

Démonstration :

Par changement de variable $z = 1 + it$, on se ramène à :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \ln\left(\frac{1+it}{2}\right) \frac{dt}{(1+it)^{1/2}(1-it)} = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{1-iR}^{1+iR} \frac{i \ln\left(\frac{z}{2}\right) dz}{z^{1/2}(z-2)}$$



En intégrant, alors, $\ln\left(\frac{z}{2}\right) \frac{1}{z^{1/2}(z-2)}$ sur le contour fermé, ci-contre, contenant le pôle $(2, 0)$ de résidu nul (car $\ln\left(\frac{z}{2}\right)$ s'annule en $z = 2$), on obtient le résultat attendu, compte tenu de ce que l'intégrale sur

le demi-cercle tend vers 0 quand R tend vers $+\infty$.

Par un simple changement de variable $t = -x$, on obtient alors:

$$\chi(-u) = \overline{\chi(u)} \quad (7.46)$$

c'est-à-dire que $\text{Re}(\chi(u))$ est paire, et $\text{Im}(\chi(u))$ impaire.

Remarque : Le changement de variable $z = 1 + it$, suivi de $z' = \sqrt{z}$, permet de voir que l'intégrale figurant dans $\chi(u)$ se ramène à une primitive du type $\int \frac{\ln x}{x+a} dx$, qui n'est pas exprimable au moyen de fonctions élémentaires.

Comportement en $u = \pm\infty$ de $\chi(u)$

Le terme sous l'intégrale de $\chi(u)$ se comporte comme $\frac{\ln|t|}{|t|^{3/2}}$ en ∞ et donc par intégration et compte tenu du terme multiplicatif $\frac{i}{(1+iu)^{3/2}}$, $\chi(u)$ se comporte comme $u^{-2} \ln|u|$ en $-\infty$ (elle tend donc vers 0). Par parité, elle se comporte de la même façon en $+\infty$.

7.7.3 Calcul de I_4

Rappelons l'expression de I_4 :

$$I_4 = \int_0^{+\infty} e^{-p(1+iu)} \sqrt{p} dp \int_0^p e^{2x} \frac{\text{Ei}(-2x)}{\sqrt{x}} dx$$

Une première étape consiste à intervertir les intégrales sur p et x , pour se ramener à :

$$\int_x^{+\infty} \sqrt{p} e^{-p(1+iu)} dp = \int_x^{+\infty} \sqrt{p} e^{-p} \cos(pu) dp - i \int_x^{+\infty} \sqrt{p} e^{-p} \sin(pu) dp$$

Les intégrales du second membre sont données dans Gradshteyn et Ryzhik (1980) §3.944.2 et §3.944.4 et l'on obtient finalement :

$$I_4 = \frac{1}{(1+iu)^{3/2}} \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{e^{2x} \text{Ei}(-2x)}{\sqrt{x}} \Gamma(3/2, (1+iu)x) dx}_{\phi(u)}$$

où $\Gamma(\alpha, x) \equiv \int_x^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt$ désigne la fonction Γ -incomplète (voir Gradshteyn et Ryzhik (1980) §8.350). Or :

$$\frac{d\phi}{du} = -i(1+iu)^{1/2} \int_0^{+\infty} x e^{x(1-iu)} \text{Ei}(-2x) dx$$

En procédant alors comme pour le calcul de I_3 , on obtient :

$$\frac{d\phi}{du} = i \frac{(1+iu)^{1/2}}{(1-iu)^2} \left[\ln \left(\frac{1+iu}{2} \right) + \frac{1-iu}{1+iu} \right]$$

D'où, en intégrant par parties :

$$I_4 = -\frac{1}{2} \chi(u) + \frac{1}{1+u^2} \ln \left(\frac{1+iu}{2} \right) + \frac{A}{(1+iu)^{3/2}}$$

où A est une constante d'intégration. Pour la déterminer, il faut se souvenir que I_4 apparaît dans les fonctions $W_k^1(u)$, dont les termes prépondérants sont proportionnels à $u^{-2} \ln |u|$ quand $u \rightarrow +\infty$ (cf. (6.37), (6.39) en remplaçant $\frac{u}{p}$ par u , et en identifiant les termes d'ordre ε pour $\varepsilon \rightarrow 0$). Comme, de plus, $\chi(u)$ se comporte aussi comme $u^{-2} \ln |u|$, le terme en $(1+iu)^{-3/2}$ qui prédomine doit disparaître, donc A être nul.

Par conséquent :

$$\begin{aligned} I_4 &= -\frac{1}{2} \chi(u) + \frac{1}{1+u^2} \ln \left(\frac{1+iu}{2} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \chi(u) + \frac{1}{2(1+u^2)} \left[\ln \left(\frac{1+u^2}{4} \right) + 2i \arctan u \right] \end{aligned} \quad (7.47)$$

Bibliography

- [Amestoy, 1987] Amestoy, M. (1987). *Propagation de fissures en élasticité plane*. Thèse de Doctorat d'Etat, Université Pierre et Marie Curie - Paris VI.
- [Amestoy *et al.*, 1979] Amestoy, M., Bui, H.-D., and Dang Van, K. (1979). Déviation infinitésimale d'une fissure dans une direction arbitraire. *Comptes Rendus Acad. Sc. Paris*, **289B**, p. 99–102.
- [Amestoy and Leblond, 1992] Amestoy, M. and Leblond, J.-B. (1992). Crack Paths in Plane Situations - II. Detailed Form of the Expansion of the Stress Intensity Factors. *International Journal of Solids and Structures*, **29**, p. 465–501.
- [Andersson, 1969] Andersson, H. (1969). Stress intensity factors at the tips of a star-shaped contour in an infinite tensile sheet. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **17**, p. 405–417.
- [Aydin and Pollard, 1988] Aydin, A. and Pollard, D.-D. (1988). Progress in understanding jointing over the past century. *Geological Society of America Bulletin*, **100**, p. 1181–1204.
- [Bueckner, 1970] Bueckner, H.-F. (1970). A novel principle for the computation of stress intensity factors. *Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik*, **50**, p. 529–546.
- [Bueckner, 1987] Bueckner, H.-F. (1987). Weight functions and fundamental fields for the penny-shaped and the half-plane crack in three-space. *International Journal of Solids and Structures*, **23**, p. 57–93.
- [Bui, 1978] Bui, H.-D. (1978). *Mécanique de la rupture fragile*. Masson, Paris.
- [D.-D. Pollard and Delaney, 1982] D.-D. Pollard, P. S. and Delaney, P.-T. (1982). Formation and interpretation of dilatant echelon cracks. *Geological Society of America Bulletin*, **93**, p. 1291–1303.
- [Dudukalenko and Romalis, 1973] Dudukalenko, V.-V. and Romalis, N.-B. (1973). Direction of crack growth under plane-stress-state conditions. *Izv. An. SSSR. MTT*, **8**, p. 129–136.

- [Erdogan and Sih, 1963] Erdogan, G. and Sih, G.-C. (1963). On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear. *ASME J. Basic Engng*, **85**, p. 519–527.
- [Gao, 1992] Gao, H. (1992). Three-dimensional slightly nonplanar cracks. *Journal of Applied Mechanics*, **59**, p. 335–343.
- [Gao and Rice, 1986] Gao, H. and Rice, J.-R. (1986). Shear stress intensity factors for planar crack with slightly curved front. *ASME Journal of Applied Mechanics*, **53**, p. 774–778.
- [Gao and Rice, 1987] Gao, H. and Rice, J.-R. (1987). Nearly circular connections of elastic half spaces. *Journal of Applied Mechanics*, **54**, p. 627–634.
- [Goldstein and Salganik, 1974] Goldstein, R.-V. and Salganik, R.-L. (1974). Brittle fracture of solids with arbitrary cracks. *International Journal of Fracture*, **10**, p. 507–523.
- [Gradsteyn and Ryzhik, 1980] Gradsteyn, I.-S. and Ryzhik, I.-M. (1980). *Tables of Integrals, Series, and Products*. Academic Press, New-York.
- [Hourlier and Pineau, 1979] Hourlier, F. and Pineau, A. (1979). Fissuration par fatigue sous sollicitations polymodales (mode I ondulé + mode III permanent) d’un acier pour rotors 26 NCDV 14. *Mémoires Scientifiques de la Revue de Métallurgie*, p. 175–185.
- [Hutchinson *et al.*, 1987] Hutchinson, J.-W., Mear, M.-E., and Rice, J.-R. (1987). Crack paralleling an interface between dissimilar materials. *ASME Journal of Applied Mechanics*, **54**, p. 828–832.
- [Lazarus and Leblond, 1997] Lazarus, V. and Leblond, J.-B. (1997). Three-dimensional crack-face weight functions for the semi-infinite interface crack. In *Advances in Fracture Research*, B.-L. Karihaloo, Y.-W. Mai, M.-I. Ripley, and R.-O. Ritchie, Eds., **4**, p. 1811–1822, (Proceedings of ICF9, Sydney, Australia).
- [Leblond, 1989] Leblond, J.-B. (1989). Crack Paths in Plane Situations - I. General Form of the Expansion of the Stress Intensity Factors. *International Journal of Solids and Structures*, **25**, p. 1311–1325.
- [Leblond, 1993] Leblond, J.-B. (1993). Crack Kinking and Curving in Three-Dimensional Elastic Solids - Application to the Study of Crack Path Stability in Hydraulic Fracturing. In *Mixed-Mode Fatigue and Fracture*, H.-P. Rossmannith and K.-J. Miller, Eds., p. 219–243, (Proceedings of an International Conference held in Vienna, Austria).
- [Leblond *et al.*, 1996] Leblond, J.-B., Mouchrif, S.-E., and Perrin, G. (1996). The tensile tunnel-crack with a slightly wavy front. *International Journal of Solids and Structures*, **33**, p. 1995–2022.

- [Leguillon, 1993] Leguillon, D. (1993). Asymptotic and numerical analysis of crack branching in non-isotropic materials. *European Journal of Mechanics A/Solids*, **12**, p. 33–51.
- [Meade and Keer, 1981] Meade, K.-P. and Keer, L.-M. (1981). On the problem of a pair of point forces applied to the faces of a semi-infinite plane crack. *Journal of Elasticity*, **14**, p. 3–14.
- [Meade and Keer, 1984] Meade, K.-P. and Keer, L.-M. (1984). Stress intensity factors for a semi-infinite plane crack with a wavy front. *Journal of Elasticity*, **14**, p. 79–92.
- [Mouchrif, 1994] Mouchrif, S.-E. (1994). *Trajets de propagation de fissures en mécanique linéaire tridimensionnelle de la rupture fragile*. Thèse de Doctorat, Université Pierre et Marie Curie - Paris VI.
- [Muskhelishvili, 1953] Muskhelishvili, N.-I. (1953). *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity*. Noordhoff, Groningen.
- [Palaniswamy and Knauss, 1975] Palaniswamy, K. and Knauss, W.-G. (1975). Crack extension in brittle solids. *Mechanics Today, Pergamon Press*, **4**, p. 87.
- [Rice, 1972] Rice, J.-R. (1972). Some remarks on elastic crack-tip stress fields. *International Journal of Solids and Structures*, **8**, p. 751–758.
- [Rice, 1985] Rice, J.-R. (1985). First-order variation in elastic fields due to variation in location of a planar crack front. *ASME Journal of Applied Mechanics*, **52**, p. 571–579.
- [Rice, 1988] Rice, J.-R. (1988). Elastic fracture mechanics concepts for interfacial cracks. *ASME Journal of Applied Mechanics*, **55**, p. 98–103.
- [Rice, 1989] Rice, J.-R. (1989). Weight function theory for three-dimensional elastic crack analysis. In *Fracture Mechanics : Perspectives and Directions (Twentieth Symposium)*, R.-P. Wei and R.-P. Gangloff, Eds., p. 29–57, Philadelphia. American Society for Testing and Materials STP 1020.
- [Sanchez-Hubert and Sanchez-Palencia, 1992] Sanchez-Hubert, J. and Sanchez-Palencia, E. (1992). *Introduction aux méthodes asymptotiques et à l'homogénéisation*. Masson, Paris.
- [Sih, 1965] Sih, G.-C. (1965). Stress distribution near internal crack tips for longitudinal shear problems. *Journal of Applied Mechanics*, p. 51–58.
- [Sommer, 1969] Sommer, E. (1969). Formation of fracture 'lances' in glass. *Engineering Fracture Mechanics*, **1**, p. 539–546.

- [Suresh and Tschegg, 1987] Suresh, S. and Tschegg, E.-K. (1987). Combined Mode I - Mode III Fracture of Fatigue-Precracked Alumina. *Journal of the American Ceramic Society*, **70**, p. 726–733.
- [Williams, 1952] Williams, M.-L. (1952). Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension. *Journal of Applied Mechanics*, **19**, p. 526.
- [Xu *et al.*, 1994] Xu, G., Bower, A.-F., and Ortiz, M. (1994). An analysis of non-planar crack growth under mixed mode loading. *International Journal of Solids and Structures*, **16**, p. 2167–2193.
- [Yates and Mohammed, 1994] Yates, J.-R. and Mohammed, R.-A. (1994). Crack propagation under mixed mode (I+III) loading. In *Fourth International Conference on Biaxial/Multiaxial Fatigue*, **II**, p. 99–106, Saint-Germain-en-Laye (France).ESIS, Société Française de Métallurgie et de Matériaux.