HAL
open science

Propriété (T) et morphisme de Baum-Connes tordus par une représentation non unitaire

Maria Paula Gomez Aparicio

To cite this version:

Maria Paula Gomez Aparicio. Propriété (T) et morphisme de Baum-Connes tordus par une représentation non unitaire. Mathématiques [math]. Université Paris-Diderot - Paris VII, 2007. Français. NNT : . tel-00274378

HAL Id: tel-00274378

https://theses.hal.science/tel-00274378v1

Submitted on 18 Apr 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ PARIS 7 - DENIS DIDEROT

INSTITUT DE MATHÉMATIQUES DE JUSSIEU

Thèse de Doctorat

Spécialité : Mathématiques

présentée par

Maria-Paula Gomez-Aparicio

pour obtenir le grade de
Docteur de l'Université Paris 7

Propriété (T) et morphisme de Baum-Connes tordus par une représentation non unitaire

---

soutenue le 14 décembre 2007 devant le jury composé de :

M. Jean-Benoît Bost	Examinateur
M. Alain Connes	Examinateur
M. Vincent Lafforgue	Directeur de thèse
M. Hervé Oyono-Oyono	Rapporteur
M. Georges Skandalis	Examinateur
M. Alain Valette	Rapporteur

Résumé

Cette thèse concerne des variantes de la propriété (T) de Kazhdan et de la conjecture de Baum-Connes tordues par des représentations de dimension finie qui ne sont pas nécessairement unitaires.
Soit G un groupe localement compact et (ρ, V) une représentation de dimension finie non nécessairement unitaire de G. Dans le Chapitre 1, si ρ est irréductible, nous allons définir une version tordue de la propriété (T) en considérant des produits tensoriels par ρ de représentations unitaires de G. Nous allons alors définir deux algèbres de Banach *tordues*, $\mathcal{A}^\rho(G)$ et $\mathcal{A}^\rho_r(G)$, analogues aux C^*-algèbres de groupe, $C^*(G)$ et $C^*_r(G)$, et nous allons définir la propriété (T) *tordue par* ρ en termes de $\mathcal{A}^\rho(G)$. Nous allons ensuite montrer que la plupart des groupes de Lie semi-simples réels ayant la propriété (T) ont la propriété (T) tordue par n'importe quelle représentation irréductible de dimension finie.
Les Chapitres 2 et 3 seront consacrés au calcul de la K-théorie des algèbres tordues. Nous allons, en effet dans le Chapitre 2, définir une application d'assemblage tordue du membre de gauche du morphisme de Baum-Connes, noté $K^{\mathrm{top}}(G)$, dans la K-théorie de $\mathcal{A}^\rho_r(G)$. Nous allons ensuite montrer, dans le Chapitre 3, que ce *morphisme de Baum-Connes tordu* est bijectif pour une large classe de groupes vérifiant la conjecture de Baum-Connes.
Dans le Chapitre 4, nous allons voir que le produit tensoriel par ρ définit un morphisme de $\mathcal{A}^\rho_r(G)$ dans $C^*_r(G) \otimes \mathrm{End}(V)$ qui fournit un morphisme de groupes de $K(\mathcal{A}^\rho_r(G))$ dans $K(C^*_r(G))$. Nous allons calculer ce morphisme sur l'image de l'application d'assemblage tordue. Pour cela, nous allons définir une action de l'anneau des représentations de dimension finie de G sur $K^{\mathrm{top}}(G)$ qui sera compatible avec le produit tensoriel par ρ ainsi qu'avec le morphisme de Baum-Connes tordu.

A mis papas

Remerciements

Je voudrais tout d'abord remercier Vincent Lafforgue, mon directeur de thèse qui est à l'origine de ce travail. C'est un honneur pour moi de travailler avec lui et je ne peux qu'admirer son talent. Je lui suis infiniment reconnaissante, non seulement parce qu'il a accepté de me prendre en thèse, mais aussi parce qu'il a partagé ses idées avec moi. Il a dirigé ma thèse avec beaucoup de patience et il a dédié beaucoup de temps à mon travail en étant toujours très disponible et en venant me chercher très souvent pour que l'on discute, ce qui m'a énormément encouragée. Je le remercie aussi d'avoir lu très sérieusement beaucoup de versions préliminaires de ces travaux.

Depuis le début de ma thèse, Georges Skandalis a été très présent. Il m'a accueilli gentillement chaque fois que je venais l'embêter pour lui poser des questions et ses réponses m'ont toujours éclairci les idées. C'était un honneur pour moi de faire partie de son équipe et j'admirerai toujours son savoir ainsi que sa capacité à l'exposer et à le partager. Il a aussi dédié beaucoup de son temps à discuter avec moi à propos de mon avenir et je lui en suis très reconnaissante. Je le remercie d'avoir lu une version préliminaire de mon introduction. Elle n'aurait jamais pu être écrite sans les discussions que j'ai eu avec lui. Enfin, je le remercie énormément d'avoir accepté de faire partie de mon jury.

Je remercie Alain Valette, non seulement parce qu'il a accepté de rapporter cette thèse et de faire partie de mon jury, mais aussi pour ses commentaires en tant qu'éditeur de mon article, ainsi que pour son invitation à Neuchâtel. Hervé Oyono-Oyono a aussi accepté d'écrire un rapport sur cette thèse et de faire partie du jury, je le remercie beaucoup pour ça.

Alain Connes et Jean-Benoît Bost ont accepté de faire partie de mon jury. C'est un grand honneur pour moi de les remercier.

Presque par un coup du hasard, ou par un petit goût mathématique particulier qui s'est révélé être le bon, j'ai fait ma thèse au sein de l'équipe d'Algèbres d'Opérateurs de l'IMJ et il n'est pas nécessaire d'en faire partie pour constater qu'on ne peut travailler dans une ambiance plus stimulante (je crois même que beaucoup d'autres thésards en sont jaloux !). Je voudrais remercier Etienne Blanchard qui m'a fait sentir très à l'aise dès mon arrivée, qui s'est toujours intéressé pour mon tra-

vail et qui m'a toujours accueilli de façon très chaleureuse. Stefaan Vaes, Stephan Vassout et Andrej Zuck ont été toujours très accueillant. Pendant les réunions du GDR de Géométrie non-commutative j'ai eu le plaisir de rencontrer Jean Renault, Claire Anantharaman-Delaroche, Pierre Julg, Saad Baaj, Claire Debord, Jean Marie Lescure, Kroum Tzanev et Bertrand Monthuber. Pierre-Yves Le Gall a lu une petite partie de ma thèse et ses commentaires m'ont beaucoup aidé à la rédiger. Je remercie Nicolas Louvet de m'avoir invitée à faire un exposé à Metz en janvier prochain.

Je dois un peu de ma stabilité psychologique, après trois ans de thèse, aux autres thésards de l'équipe d'Algèbres d'Opérateurs. Ils ont souvent entendu des répétitions de mes exposés et j'ai profité de beaucoup de conversations avec eux. En particulier, les participants au groupe de travail sur la conjecture de Baum-Connes : Paulo Carrillo, avec qui j'ai fait la thèse un peu en parallèle et qui a été un soutien constant, Jean François Planchat, Athina Mageira et Jeremie Brieussel ; ils ont toujours suivi avec patience mes longs exposés. Benoit Jacob, avec qui j'ai partagé le bureau, a toujours répondu à mes questions et n'a pas arrêté de m'en poser, même si je répondais très rarement (Merci !). Pierre Clare, Pierre Fima et Cyril Houdayer, comme dit Benoit, "sont des compagnons de route" depuis le début.

Pendant mon année de DEA, j'ai eu le plaisir de suivre le cours de Max Karoubi de K-théorie, ce qui a beaucoup orienté mes recherches. Il a dirigé mon mémoire avec gentillesse et il m'a soutenue pour que je continue ; je suis donc très contente de pouvoir exprimer ma gratitude envers lui ici. Je remercie Moulay Benameur qui m'a invitée à Metz l'année de mon DEA.

Je remercie tous les membres de l'IMJ, en particulier Gilles Godefroy qui m'a accueilli de façon très chaleureuse. Et je remercie Madame Wasse dont j'admire l'efficacité. Elle a été toujours très affectueuse et c'est grâce à elle qu'on se sent vraiment faire partie de l'université. Je remercie aussi Nadine Fournaiseau et Marcelline Prosper-Cojande d'être toujours disponibles.

J'ai connu François Liret l'année de mon arrivée en France, il y a six ans, quand je suivais ses tds d'algèbre et quand je ne connaissais encore personne. Depuis, il s'est toujours occupé de moi et il m'a beaucoup encouragée à continuer. Je le remercie beaucoup d'avoir cru en moi. J'ai aussi rencontré Catherine Gille quand je suis arrivée à Paris 7. Je la remercie elle et sa famille pour leur gentillesse. J'ai eu la chance de suivre les cours de Marc Hindry et de Patrick Popescu pendant l'année de ma maîtrise et ils m'ont beaucoup encouragée.

Je remercie aussi Sylvie Paycha pour son soutien depuis la première école d'été de Villa de Leyva à laquelle j'ai participé et de m'avoir invitée parler au groupe de travail de géométrie de Clermont-Ferrand. Je remercie la fondation Elsevier, ainsi que la AFFDU, pour leur soutien financier.

Durant ces années, j'ai partagé le bureau avec des personnes exceptionnelles qui

m'ont beaucoup soutenue dans les moments difficiles. Je remercie Aicha Hachemi, Masseye Gaye et Titem Harrache ; je leur souhaite tout le bonheur qu'ils méritent et j'espère ne pas les perdre de vue.

Et puis il y a aussi toutes les participantes au séminaire "Bourbakettes" (et bon, je l'admet, maintenant je devrai écrire "tous les participants" car je remercie aussi la nouvelle équipe masculine ayant "l'esprit bourbakette", comme Yann Palu et Nicolas Billerey) avec qui ça a été un plaisir de travailler. Je tiens à remercier, plus particulièrement, mes "co-fondatrices" : Maria Carrizosa, avec qui j'ai en plus vécu pendant les deux premières années de thèse, Claire Amiot, grâce à qui je sais faire des beaux diagrammes commutatifs en latex, et Anne Moreau, qui m'a expliqué beaucoup de choses sur les algèbres de Lie. Je remercie aussi Selene Sanchez qui a maintenant pris le séminaire en main et grâce à qui il marche encore, mixte, mais il marche encore. Et puis je pense à des amis proches qui maintenant sont loin comme Mairi Chlouveraki et deux autres qui n'ont jamais pu, malgré eux, être admis dans les bourbakettes : Ernesto Mistretta et Amadeo Irigoyen. Ils font tous partie du plateau des thésards de Chevaleret où règne une très belle ambiance.

Avec la thèse se termine aussi une très belle étape de ma vie : Paris ; et je voudrais remercier les personnes qui ont rendu chaque hiver parisien supportable : David Orduz, avec qui j'ai en plus partagé la période de rédaction de la thèse, Silvia Rodriguez, Maya Goubina, Marie Pla, Aurélien Mas, Fernando Pardo, Catalina Sargón, Ana María Mora, Andrés Varón, Ernesto Camacho, Nicolas Bernal et Annalisa Panati. Leur amitié a remplacé très souvent la famille lointaine.

A mis papas, que aceptaron tenerme lejos para que yo pudiera perseguir mis sueños, sin nunca hacerme sentir el peso del vacío que debí dejar cuando me fuí. Esta tesis no hubiera nunca existido sin su confianza.... y sin la fundación Gómez, ¡claro ! Y a Sergio y Maria Jose, porque son ejemplos para mí ¡Ojala algún día pueda llegar a ser como ellos !

Et enfin à Giovanni, parce que non seulement il se lève tous les matins dix minutes plus tôt pour préparer le café pour je puisse dormir encore un peu plus, mais aussi parce qu'il a eu la patience de me supporter. Et puis parce qu'il ne s'est jamais plaint quand il a été obligé de s'intéresser aux Algèbres d'Opérateurs, pour mieux écouter chacun de mes longs discours.

Table des matières

Remerciements **vii**

Table des matières **1**

Introduction **2**

1 Propriété (T) tordue par une représentation non unitaire **23**
1.1 Propriété (T) tordue 25
1.1.1 Définitions et terminologie. 25
1.1.2 Relation avec la K-théorie 28
1.1.3 Propriété d'hérédité 28
1.2 Cas des groupes de Lie semi-simples 33

2 Morphisme de Baum-Connes tordu **47**
2.1 Rappels et notations 47
2.1.1 Actions propres 48
2.1.2 KK-théorie équivariante de Kasparov 49
2.1.3 KK-théorie banachique de Lafforgue 59
2.2 Morphisme de Baum-Connes tordu 69
2.2.1 Produits Croisés tordus 69
2.2.2 Flèche de descente tordue 71
2.2.3 Fonctorialité 80
2.2.4 Descente et action de KK^{ban} sur la K-théorie. 86
2.2.5 Construction du morphisme 88
2.2.6 Compatibilité avec la somme directe de représentations 89

3 Étude de la bijectivité du morphisme B-C tordu **95**
3.1 Cas des groupes avec un élément γ de Kasparov 96
3.1.1 Coefficients dans une algèbre propre 96
3.1.2 Élément γ de Kasparov 100

3.2 Cas des complétions inconditionnelles 102
3.2.1 Complétions inconditionnelles 103

4 Action sur $K^{\mathrm{top}}(G)$ par le produit tensoriel de ρ 109
4.1 Définitions et énoncé du théorème principal 109
4.2 Algèbres L^1. Rappels et notations 112
4.3 Démonstration du théorème 4.1.6 114

Bibliographie 123

Introduction

Un groupe localement compact a la propriété (T) si sa représentation triviale est isolée dans le dual unitaire du groupe, c'est-à-dire dans l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations unitaires munie d'une topologie naturelle : la topologie de Fell. Dans [Kaz67], Kazhdan a introduit cette propriété pour étudier la structure des réseaux dans les groupes de Lie réels. Il démontre que tout réseau d'un groupe de Lie réel qui a la propriété (T) est de type fini et il montre que $SL_n(\mathbb{R})$, pour $n \geq 3$ a la propriété (T). Les résultats de Kazhdan ont été étendus depuis et on sait maintenant que tout groupe de Lie réel simple G, de centre fini et de rang réel supérieur ou égal à 2, a la propriété (T) (cf. [dlHV89]). Ceci implique, en particulier (voir [Val02]), que si M est une variété riemannienne de la forme $M = \Gamma\backslash G/K$, où G est un groupe de Lie simple réel comme ci-dessus, K est un sous-groupe compact maximal de G et Γ est un réseau sans torsion de G, alors le groupe fondamental $\Gamma = \pi_1(M)$ de M est de type fini. Depuis, la propriété (T) a trouvé des applications dans beaucoup de domaines qui vont de la théorie des graphes à la théorie ergodique (voir [Val02] et [dlHV89]).

De nos jours, il existe beaucoup de formulations équivalentes de la propriété (T) (cf. [DK68, dlHV89, BdlHV]). En particulier, en 1981, Akemann et Walter en ont donné une caractérisation C^*-algébrique [AW81, Lemma 2] : ils ont montré qu'un groupe localement compact G a la propriété (T) si, et seulement si, il existe un idempotent p_G dans la C^*-algèbre maximale, $C^*(G)$, de G tel que, pour toute représentation unitaire π de G dans un espace de Hilbert H, $\pi(p_G)$ soit la projection orthogonale sur le sous-espace H^G de H formé des vecteurs invariants par l'action de G (voir aussi [Val92, Proposition 2], [Val84b, Lemma 3.1]). Cette caractérisation permet de démontrer beaucoup de propriétés vérifiées par les groupes ayant la propriété (T). Par exemple, dans [Val84b, Theorem 3.6], Valette l'a utilisée pour montrer que si G est un groupe localement compact et H est un sous-groupe fermé distingué de G tel que H et G/H ont la propriété (T), alors le groupe G a aussi la propriété (T). Il redémontre en plus, de façon assez directe, un résultat de Wang [Wan75, Theorem 3.7] sur l'extension de la propriété (T) : si un groupe séparable et

localement compact G a un sous-groupe fermé H de co-volume fini ayant la propriété (T), alors G a la propriété (T). On rappelle que Kazhdan avait montré l'hérédité de la propriété (T) : si un groupe localement compact G a la propriété (T) alors tout sous-groupe fermé unimodulaire et de co-volume fini Γ de G a aussi la propriété (T) (cf. [Kaz67, Theorem 3]).
D'autre part, si un groupe localement compact, et non-compact, G a la propriété (T), l'existence d'un idempotent p_G dans $C^*(G)$ comme ci-dessus, permet de distinguer la K-théorie des deux C^*-algèbres, $C^*(G)$ et $C^*_r(G)$, où on note $C^*_r(G)$ la C^*-algèbre réduite de G (cf. [Val84b, Proposition 3.4]). En effet, si on note $\lambda_G : C^*(G) \to C^*_r(G)$ la représentation régulière gauche de G et $\lambda_{G,*}$ le morphisme de groupes de $K(C^*(G))$ dans $K(C^*_r(G))$ qu'elle définit, alors, comme G n'est pas compact, λ_G n'a pas de vecteurs invariants par l'action de G non nuls et $\lambda_G(p_G) = 0$. Donc p_G définit un élément $[p_G]$ non nul dans $K(C^*(G))$ qui appartient au noyau de $\lambda_{G,*}$, et donc $\lambda_{G,*}$ n'est pas injectif.

En général, beaucoup de travaux ont montré que les idempotents dans la C^*-algèbre d'un groupe localement compact G jouent un rôle essentiel dans certains aspects de la théorie des représentations de G, parmi lesquels on peut citer l'étude des représentations intégrables et de carré intégrable (classification des séries discrètes de G par induction de Dirac (cf. [BCH94], [Val84a], [Laf02a])) ou, évidemment, l'étude des points isolés dans le dual unitaire, $\widehat{G}$, ou dans le dual unitaire tempéré, $\widehat{G_r}$, de G (cf. [Bar80], [Val84b]). Le problème d'étudier les points isolés dans le dual unitaire d'un groupe localement compact a été posé par Dixmier dans [Dix61]. À l'aide de techniques qui utilisent l'existence d'idempotents, on peut montrer que, pour certains groupes (par exemple les groupes de Lie nilpotents) toute représentation irréductible de carré intégrable est intégrable (cf. [Bar80, Theorem 3]). On peut aussi montrer, de façon assez élémentaire, un résultat de Wang qui répond de façon affirmative à une des questions posées par Dixmier : les représentations unitaires intégrables d'un groupe localement compact G définissent des points isolés de $\widehat{G}$ (cf. [Bar80, Corollary 2], [Val84b, Theorem 2.3]). Il est clair que l'apparition de la propriété (T) a mis en évidence le lien étroit qui existe entre les points isolés dans $\widehat{G}$ et la théorie des groupes, ce qui justifie pleinement leur intérêt.
Plus généralement, dans [Bar80], Barnes a montré qu'un projecteur minimal de $C^*(G)$ détermine toujours une représentation unitaire irréductible de G, dont la classe d'équivalence est un point isolé dans $\widehat{G}$. De plus, si le groupe G est σ-compact, la réciproque est vraie : tout point isolé dans $\widehat{G}$ correspond à une représentation unitaire déterminée par un projecteur minimal de $C^*(G)$. Il a montré aussi qu'il en est de même dans le cas du dual unitaire tempéré $\widehat{G_r}$, où $C^*_r(G)$ remplace $C^*(G)$ (cf.

[Bar80, Proposition 2]) [1].
De plus, dans le cas où G est unimodulaire, tout point isolé dans $\widehat{G_r}$ est une représentation de carré intégrable de G ([Bar80, Proposition 2]). Si G est un groupe de Lie semi-simple la réciproque est vraie : toute représentation de carré intégrable définit un point isolé dans $\widehat{G_r}$ et donc, un projecteur minimal dans $C_r^*(G)$, ce qui constitue un ingrédient important dans la classification des représentations de carré intégrable (ou séries discrètes) par induction de Dirac (cf. [Laf02a], [BCH94]).

Par ailleurs, Wang a montré qu'un groupe localement compact G a la propriété (T) si, et seulement si, toute représentation unitaire de dimension finie de G définit un point isolé dans $\widehat{G}$ (cf. [Wan75, Theorem 2.1]). Ce résultat implique que si G est un groupe ayant la propriété (T), alors toute représentation unitaire de dimension finie définit un idempotent minimal dans $C^*(G)$ et donc un élément dans la K-théorie de $C^*(G)$. Il est naturel alors de se demander si des phénomènes analogues apparaissent lorsqu'on étudie les représentations de dimension finie *non unitaires* d'un groupe localement compact. Dans la première partie de ce travail, nous allons voir que, effectivement dans certains cas (par exemple pour la plupart des groupes de Lie simples ayant la propriété (T)), toute représentation de dimension finie non unitaire définit un idempotent dans une certaine algèbre de Banach associée à G, qui apparaît de façon naturelle.

Dans le Chapitre 1, nous allons proposer une variante de la propriété (T) de Kazhdan en considérant des représentations d'un groupe localement compact qui s'écrivent comme le produit tensoriel d'une représentation non unitaire de dimension finie et d'une représentation unitaire. Pour ceci, étant donnée une représentation de dimension finie d'un groupe localement compact G, nous allons définir un analogue tordu de la C^*-algèbre maximale de G, $C^*(G)$, et nous allons définir la propriété (T) *tordue* en termes d'idempotents dans cette algèbre.
Les représentations de dimension finie que nous allons considérer, à partir de maintenant, ne sont pas nécessairement unitaires à moins qu'on affirme le contraire.

Définition 1. Soit G un groupe localement compact et ρ une représentation de G dans un espace vectoriel de dimension finie V muni d'une norme hermitienne. Soit $C_c(G)$ l'espace vectoriel des fonctions à support compact sur G. *L'algèbre de groupe tordue* $\mathcal{A}^\rho(G)$ est le complété (séparé) de $C_c(G)$ pour la norme définie par la formule

[1] On rappelle qu'un idempotent p dans une $*$-algèbre A est un projecteur si $p^* = p$ et il est minimal si $p.A.p = \mathbb{C}p$.

suivante, pour $f \in C_c(G)$,

$$\|f\| = \sup_{(\pi,H)} \|(\pi \otimes \rho)(f)\|_{\mathcal{L}(H\otimes V)},$$

où le supremum est pris parmi les représentations unitaires de G.

Remarque 1.

1. L'algèbre $\mathcal{A}^\rho(G)$ ainsi définie est une algèbre de Banach. C'est une C^*-algèbre si, et seulement si, la représentation (ρ, V) est unitaire. Dans ce cas, $\mathcal{A}^\rho(G) = C^*(G)$ en tant qu'algèbres de Banach. Supposons en effet que ρ soit une représentation unitaire de G. Alors on a trivialement l'inégalité de normes $\|.\|_{\mathcal{A}^\rho(G)} \leq \|.\|_{C^*(G)}$ de sorte que $\mathcal{A}^\rho(G)$ est un quotient de $C^*(G)$. Soit (ρ^*, V^*) la représentation contragrédiente de G sur l'espace dual V^* de V. Donc, comme $(V^* \otimes V)^G = \mathrm{Hom}_G(V, V)$, la représentation triviale 1_G de G est fortement contenue dans $\rho^* \otimes \rho$. Ceci implique que toute représentation unitaire π est fortement contenue dans $\pi \otimes \rho^* \otimes \rho$, et donc que toute représentation unitaire π est fortement contenue dans l'ensemble $\{\sigma \otimes \rho |\ \sigma$ une représentation unitaire$\}$. D'où $\|.\|_{C^*(G)} \leq \|.\|_{\mathcal{A}^\rho(G)}$ et $C^*(G) = \mathcal{A}^\rho(G)$, à équivalence de norme près.
2. Si on choisit une autre norme sur V, comme deux normes sur V sont toujours équivalentes, on obtient alors une norme équivalente sur $\mathcal{A}^\rho(G)$. En particulier, si G est un groupe compact, comme toute représentation de G sur un espace de Hilbert est unitarisable, alors $\mathcal{A}^\rho(G) = C^*(G)$, à équivalence de norme près.
3. Toute représentation de G de la forme $\pi \otimes \rho$, avec π une représentation unitaire, peut être prolongée, de façon évidente, en une représentation de $\mathcal{A}^\rho(G)$ sur $H \otimes V$ que nous notons $\pi \otimes \rho$, par abus de notation.
4. Soit ρ^* la représentation contragrédiente de ρ sur l'espace dual V^* de V. Si ρ et ρ^* sont conjuguées par un opérateur de V dans V^* unitaire, alors l'algèbre $\mathcal{A}^\rho(G)$ est involutive.

Nous allons donner la définition suivante de propriété (T) tordue

Définition 2. Soit G un groupe localement compact. On dit que G a la propriété (T) *tordue par* ρ s'il existe un idempotent p_G dans $\mathcal{A}^\rho(G)$ tel que $\rho(p_G) = \mathrm{Id}_V$ et, pour toute représentation unitaire π qui ne contient pas de vecteurs invariants non nuls, $(\pi \otimes \rho)(p_G) = 0$.

Le résultat principal du Chapitre 1 est énoncé dans le théorème suivant

Théorème 1. Soit G un groupe de Lie réel algébrique semi-simple de centre fini, connexe et simplement connexe (au sens algébrique), et tel que chaque facteur simple de G est ou bien de rang réel supérieur ou égal à 2, ou bien localement isomorphe à $Sp(n,1)$ pour $n \geq 2$ ou à $F_{4(-20)}$. Soit ρ une représentation irréductible de dimension finie de G. Alors G a la propriété (T) tordue par ρ.

La propriété fondamentale pour nous impliquée par les hypothèses du Théorème 1 est la décroissance uniforme des coefficients de matrice des représentations unitaires qui n'ont pas de vecteurs invariants non nuls. Ce résultat, dû à Cowling [Cow79] (voir aussi [Cow04]), pour les groupes de Lie simples ayant la propriété (T), définit une propriété plus forte que la propriété (T) et permet de construire, de façon assez explicite, un idempotent dans $\mathcal{A}^\rho(G)$ vérifiant les conditions de la définition 2.
L'idée du résultat de Cowling est la suivante : on peut montrer que si G est un groupe de Lie simple connexe avec la propriété (T), alors il existe q_G dans $]2,+\infty[$ tel que

$$\langle \pi(.)\xi, \eta \rangle \in L^{q_G+\epsilon}(G), \quad \text{pour tout } \xi, \eta \in H_\pi,$$

pour toute représentation unitaire (π, H_π) de G qui n'a pas de vecteurs invariants non nuls, et de plus,

$$\|\langle \pi(.)\xi, \eta \rangle\|_{q_G+\epsilon} \leq C_{G,\epsilon} \|\xi\| \, \|\eta\|, \quad \text{pour tout } \xi, \eta \in H_\pi.$$

On peut montrer que ceci implique l'existence d'estimées uniformes sur les coefficients de matrice correspondants à des vecteurs K-finis, pour K un compact maximale de G [2] (cf. [Cow79, Corollaire 2.2.4], voir aussi [How82, Corollary 7.2]). Ceci implique que les coefficients de matrice des représentations unitaires qui tendent vers zéro à l'infini décroissent de manière uniforme. Le résultat utilise ensuite le résultat de Howe et Moore qui montrent que pour tout groupe algébrique simple (non compact) sur un corps local, tous les coefficients de matrice des représentations unitaires sans vecteurs invariants non nuls, tendent vers zéro à l'infini (cf. [HM79]). C'est exactement ces estimations uniformes qui sont essentielles pour la preuve du Théorème 1 (voir Théorème 1.2.6).
Nous mentionnons ici que pour les groupes de Lie simples avec la propriété (T), une valeur de q_G a été explicitement calculée (voir [How82], [Li95], [LZ96] et [Oh98]). Le calcul explicite d'un tel q_G fournit une méthode pour calculer des constantes de Kazhdan pour ces groupes (voir aussi [Sha00] pour des explications à ce sujet et [Oh02] pour le cas des groupes semi-simples).

[2] Un vecteur $\xi \in H_\pi$ est K-fini si l'action de K sur ξ engendre un sous-espace de dimension finie de H_π et l'estimée est uniforme pour les vecteurs tels que cette dimension est bornée.

On rappelle que, dans [Kaz67], Kazhdan a introduit la propriété (T) pour mettre en évidence la relation qui existe entre le dual unitaire d'un groupe et la structure de ses réseaux. Dans ce sens, le résultat le plus important de son article, et sur lequel Kazhdan met l'accent, est le résultat d'hérédité. Nous allons démontrer aussi un résultat sur l'hérédité de la propriété (T) tordue (cf. Proposition 1.1.10) :

Proposition 1. Soit G un groupe localement compact et Γ un réseau cocompact de G. Soit ρ une représentation irréductible de dimension finie de G. Si G a la propriété (T) tordue par ρ alors Γ a la propriété (T) tordue par $\rho|_\Gamma$.

Les représentations considérées n'étant pas unitaires, le cas des réseaux non cocompacts est plus difficile à traiter car, dans ce cas, nous n'avons aucun contrôle sur la norme de $\rho(g)$ quand g tend vers l'infini. Nous croyons tout de même qu'un énoncé analogue à celui de la Proposition 1 pour les réseaux non cocompacts doit être vrai.

Dans le cas unitaire, une des raisons pour laquelle la propriété (T) a trouvé des applications dans des domaines tellement variés est le fait qu'elle admette plusieurs formulations équivalentes (voir par exemple [Val02] et [dlHV89]).
On remarque que si ρ est égale à la représentation triviale 1_G de G, la définition de propriété tordue donnée ci-dessus correspond à la caractérisation algébrique de la propriété (T). Au vu des travaux réalisés dans le cas unitaire, on aimerait donner une caractérisation de la propriété (T) tordue en termes de points isolés sur l'espace des représentations de dimension finie non unitaires de G. Malheureusement, on ne sait pas quelle topologie imposer sur cet espace pour avoir des bonnes propriétés et la topologie de Fell telle qu'elle est définie dans le cas des représentations unitaires ne semble plus être bien définie dans ce cadre (cf. [Fel65]). En effet, la correspondance bijective qu'il y a entre les représentations unitaires de G et les $*$-représentations, non-dégénérées, de $C^*(G)$, implique que la topologie naturelle sur $\widehat{G}$ donnée en termes de convergence uniforme sur les compacts de fonctions de type positif sur G, coïncide avec la topologie définie par Fell sur le dual de $C^*(G)$. Comme $C^*(G)$ est une C^*-algèbre, cette topologie coïncide avec la topologie de Jacobson définie en termes d'idéaux primitifs sur $C^*(G)$ (cf. [Fel60, Theorem 1.3, Theorem 1.2], [FD88, Chapter VII]). Mais cette relation étroite entre représentations de G et représentations de $C^*(G)$ n'existe plus quand on considère des représentations non unitaires.
Il est facile de montrer, tout de même, que la présence d'un idempotent p_G dans $\mathcal{A}^\rho(G)$ vérifiant les propriétés de la Définition 2 implique que le noyau de ρ ne contient jamais le noyau d'une représentation de la forme $\pi \otimes \rho$, lorsque π est une représentation unitaire de G qui n'a pas de vecteurs invariants non-nuls. Autrement

dit, la présence de p_G dans $\mathcal{A}^\rho(G)$ implique que $\mathcal{A}^\rho(G)$ s'écrit comme la somme directe d'une copie de $M_n(\mathbb{C})$ (pour n égal à la dimension de ρ) et d'un idéal bilatère de $\mathcal{A}^\rho(G)$. Cette décomposition de $\mathcal{A}^\rho(G)$ en somme directe est plus forte que l'isolement de ρ, en tant que représentation de $\mathcal{A}^\rho(G)$, pour n'importe quelle topologie.

Les résultats du Chapitre 1 s'inscrivent dans la ligne de résultats récents sur des renforcements de la propriété (T) pour les groupes de Lie simples de rang supérieur (voir par exemple les résultats de Lafforgue pour les représentations de $Sl_3(\mathbb{Q}_p)$ sur les espaces de Banach uniformément convexes [Laf07]). Nous mentionnons ici que, dans [FH06], Fisher et Hichtman, en utilisant la caractérisation de la propriété (T) en termes de 1-cohomologie donnée par les travaux de Delorme et Guichardet (cf. [Del77] [Gui72], voir [BdlHV, Chapter 2]), ont défini un renforcement de la propriété (T), qu'ils appellent propriété $F \otimes H$, et qui ressemble à la propriété (T) tordue. Nous allons parler un peu du lien qui pourrait exister entre ces deux propriétés à la fin de cette introduction.

Cependant, pour nous le plus important est la présence d'idempotents dans $\mathcal{A}^\rho(G)$ et nous allons nous concentrer sur leur étude.

De la même façon que nous avons défini un analogue tordu de la C^*-algèbre maximale d'un groupe localement compact G par rapport à une représentation de dimension finie, nous allons définir un analogue tordu de la C^*-algèbre réduite de G. La définition est la suivante

Définition 3. Soit G un groupe localement compact et ρ une représentation de G sur un espace vectoriel de dimension finie V muni d'un structure hermitienne. L'algèbre $\mathcal{A}_r^\rho(G)$ est le complété (séparé) de l'espace $C_c(G)$ des fonctions continues à support compact sur G pour la norme définie par la formule suivante : pour $f \in C_c(G)$,

$$\|f\| = \|(\lambda_G \otimes \rho)(f)\|_{\mathcal{L}(L^2(G)\otimes V)},$$

où $\lambda_G : G \to \mathcal{L}(L^2(G))$ est la représentation régulière gauche de G.

Nous obtenons ainsi une nouvelle famille d'algèbres de Banach indexée par l'ensemble des représentations de dimension finie de G. De même que dans le cas maximal, une autre norme sur V induit une norme équivalente sur $\mathcal{A}_r^\rho(G)$.

Remarque 2. Si ρ est une représentation unitaire alors $\mathcal{A}_r^\rho(G) = C_r^*(G)$. En effet, ceci vient du fait que la représentation régulière de G est "absorbante" : la représentation $\lambda_G \otimes \rho$ est unitairement équivalente à $\lambda_G \otimes \mathrm{Id}_G$, où on note Id_G la représentation

triviale G sur V ; l'opérateur d'entrelacement entre ces deux représentations est donné par l'application

$$\begin{aligned} L^2(G,V) &\to L^2(G,V) \\ f &\mapsto \big(g \mapsto f(g)\rho(g^{-1})\big), \end{aligned}$$

(en identifiant $L^2(G) \otimes V$ avec $L^2(G,V)$). Il est facile de vérifier que, $T(\lambda_G \otimes \rho)(g) = (\mathrm{Id}_G \otimes \lambda_G)(g)T$, pour tout $g \in G$.

De la même manière que dans le cas unitaire, nous allons montrer que, si le groupe G a la propriété (T) tordue par ρ, alors les algèbres $\mathcal{A}^\rho(G)$ et $\mathcal{A}^\rho_r(G)$ n'ont pas la même K-théorie. C'est exactement l'idempotent p_G de $\mathcal{A}^\rho(G)$ donné par la définition 2 qui permet de les distinguer.

Proposition 2. Soit $\rho \otimes \lambda_G : \mathcal{A}^\rho(G) \to \mathcal{A}^\rho_r(G)$ l'unique morphisme qui prolonge l'identité sur $C_c(G)$ et soit $(\rho \otimes \lambda_G)_* : \mathrm{K}(\mathcal{A}^\rho(G)) \to \mathrm{K}(\mathcal{A}^\rho_r(G))$ le morphisme induit en K-théorie. Si G a la propriété (T) tordue par ρ et G n'est pas un groupe compact alors $(\rho \otimes \lambda_G)_*$ n'est pas injectif.

La deuxième partie de ce travail est consacrée au calcul de la K-théorie des algèbres tordues pour une large classe de groupes vérifiant la conjecture de Baum-Connes. Cette classe contient en particulier les groupes de Lie semi-simples et les sous-groupes fermés des groupes de Lie semi-simples. Étant donnée ρ, une représentation de dimension finie d'un groupe localement compact G, nous allons construire un morphisme de groupes qui va du membre de gauche du morphisme de Baum-Connes vers la K-théorie de l'algèbre $\mathcal{A}^\rho_r(G)$ et nous allons montrer que, dans tous les cas où nous savons démontrer que la conjecture de Baum-Connes est vraie, ce morphisme est aussi un isomorphisme.

Historique et rappels sur la conjecture de Baum-Connes. On rappelle que la conjecture de Baum-Connes propose une façon de calculer la K-théorie de la C^*-algèbre réduite d'un groupe localement compact et plus généralement, la K-théorie des produits croisés réduits (cf. [BCH94]). Soit G un groupe localement compact et soit B une G-C^*-algèbre. Baum, Connes et Higson ont défini un morphisme d'assemblage

$$\mu^B_r : K^{\mathrm{top}}(G,B) \to K(C^*_r(G,B)),$$

où $K^{\mathrm{top}}(G,B)$ est la K-homologie G-équivariante, à valeurs dans B, du classifiant universel pour les actions propres de G, noté $\underline{E}G$. On rappelle que $K^{\mathrm{top}}(G,B)$ est donné par la formule suivante,

$$K^{\mathrm{top}}(G,B) = \varinjlim KK_G(C_0(X),B),$$

où la limite inductive est prise sur les parties X fermées de $\underline{E}G$ qui sont G-invariantes et G-compactes. En particulier, si $B = \mathbb{C}$, on note $\mu_r := \mu_r^{\mathbb{C}}$.
Pour tout groupe localement compact (et dénombrable à l'infini), ce morphisme, appelé désormais *morphisme de Baum-Connes*, peut être défini à l'aide de la KK-théorie équivariante de Kasparov (cf. [Kas88]). La conjecture de Baum-Connes affirme que μ_r est un isomorphisme pour tout groupe localement compact G. Plus généralement, la conjecture de Baum-Connes à coefficients affirme que μ_r^B est un isomorphisme pour tout groupe localement compact G et pour toute G-C^*-algèbre B.

La méthode la plus puissante pour démontrer la conjecture de Baum-Connes, appelée de façon générale méthode du "dual Dirac-Dirac", repose sur la KK-théorie équivariante de Kasparov. Elle a été introduite par Kasparov dans son preprint de 1981 (publié après dans [Kas95]) pour montrer la conjecture de Novikov sur l'invariance homotopique des signatures d'ordre supérieur des variétés différentielles, dans le cas des variétés dont le groupe fondamental est un sous-groupe discret d'un groupe de Lie connexe. Dans le cas le plus simple, cette méthode peut être décrite de la façon suivante : soient G un groupe de Lie semi-simple et K un compact maximale de G tels que G/K admette une structure spin^c. Dans ce cas, Kasparov a alors construit un élément $[d] \in KK_G(C_0(G/K), \mathbb{C})$, défini à l'aide d'un opérateur de Dirac sur G/K, et un élément $\eta \in KK_G(\mathbb{C}, C_0(G/K))$, appelé "dual-Dirac", qui vérifient l'égalité

$$[d] \otimes_{\mathbb{C}} \eta = 1,$$

dans $KK_G(C_0(G/K), C_0(G/K))$. Ceci implique que, si on pose

$$\gamma := \eta \otimes_{C_0(G/K)} [d],$$

alors l'élément γ est un idempotent de $KK_G(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ et l'image de γ par l'homomorphisme de descente [3] définit un projecteur dans $\mathrm{End}(K_*(C_r^*(G, B))$ pour toute G-C^*-algèbre B. Kasparov a démontré alors, à l'aide de l'élément γ, que μ_r^B est un morphisme injectif, ce qui implique que la conjecture de Novikov est vérifiée dans ce cadre. Il démontre en plus que l'image de μ_r^B est égale à l'image du projecteur défini par γ dans $K_*(C_r^*(G, B))$.

Dans [Tu99], Tu a énoncé la méthode du "dual Dirac-Dirac" dans une forme très générale qui utilise le fait que le morphisme de Baum-Connes à coefficients dans une algèbre propre est un isomorphisme (cf. [CEM01], voir aussi [HG04, Theorem

[3] Pour toute G-C^*-algèbre B l'homorphisme de descente est défini de $KK_G(B, B)$ dans $KK(C_r^*(G, B), C_r^*(G, B))$.

2.19]). Elle consiste à construire un élément de "Dirac" d dans $KK_G(A, \mathbb{C})$ et un élément "dual-Dirac" η dans $KK_G(\mathbb{C}, A)$, pour A une G-C^*-algèbre propre, tels que, si on pose $\gamma := \eta \otimes_A d \in KK_G(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ alors l'élément γ agit par l'identité sur $K^{\text{top}}(G)$, ou, plus précisément, $p^*(\gamma) = 1$ dans $KK_{G \ltimes \underline{E}G}(C_0(\underline{E}G), C_0(\underline{E}G))$, où $p : \underline{E}G \to \{pt\}$ est la projection de $\underline{E}G$ sur le point. Tu a montré que si un élément avec ces propriétés existe, alors le morphisme de Baum-Connes μ_r^B est injectif pour toute G-C^*-algèbre B. Si de plus $\gamma = 1$ dans $KK_G(\mathbb{C}, \mathbb{C})$, alors μ_r^B est un isomorphisme pour toute G-C^*-algèbre B.

Dans [Kas88], Kasparov a utilisé la méthode originale pour montrer l'injectivité de μ_r^B (et donc la conjecture de Novikov) pour tout groupe de Lie semi-simple G et pour toute G-C^*-algèbre B. Il démontre aussi l'injectivité pour tous les sous-groupes fermés des groupes de Lie semi-simples, la conjecture de Baum-Connes à coefficients passant aux sous-groupes fermés. Depuis, la méthode générale a été utilisée, par exemple, par Kasparov et Skandalis et puis par Higson et Kasparov, pour démontrer l'injectivité du morphisme de Baum-Connes pour une classe très vaste de groupes, notée $\mathcal{C}$ dans [Laf02b]. Nous rappelons ici que cette classe est constituée par les groupes suivants :

- les groupes localement compacts agissant de façon continue, propre et isométrique sur une variété riemannienne complète simplement connexe à courbure sectionnelle négative ou nulle (cf. [Kas88]), ou sur un immeuble de Bruhat-Tits affine (cf. [KS91]),
- les groupes discrets agissant proprement et par isométries sur un espace métrique faiblement géodésique, faiblement bolique et de géométrie co-uniforme bornée (cf. [KS03] et [Tza00] pour la terminologie co-uniforme),
- les groupes localement compacts a-T-menables, c'est-à-dire qui agissent de façon affine isométrique et propre sur un espace de Hilbert (cf. [HK01]).

La classe $\mathcal{C}$ contient, en particulier, tous les groupes moyennables, tous les groupes hyperboliques au sens de Gromov et tous les groupes p-adiques.

Pour les groupes a-T-menables, Higson et Kasparov prouvent aussi que γ est égal à 1 dans $KK_G(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ et donc la surjectivité du morphisme à coefficients (cf. [HK01], voir aussi [Jul98]).

En revanche, dès que le groupe G est non-compact et a la propriété (T), la représentation triviale de G est isolée parmi les représentations unitaires de G. Donc, dans ce cas, il est impossible de construire une homotopie entre l'élément γ

et 1 dans $KK_G(\mathbb{C}, \mathbb{C})$, ce qui a longtemps constitué une barrière pour la vérification de la conjecture. En fait, pendant longtemps la plupart des preuves de la conjecture de Baum-Connes [4] impliquaient que le morphisme analogue au morphisme de Baum-Connes, défini en remplaçant la K-théorie de $C_r^*(G)$ par la K-théorie de la C^*-algèbre maximale du groupe, $C^*(G)$, était aussi un isomorphisme et donc que les deux C^*-algèbres, $C_r^*(G)$ et $C^*(G)$, avaient la même K-théorie. Mais on sait que, dès que le groupe est non compact et a la propriété (T), on peut construire explicitement un projecteur qui distingue ces deux K-théories (cf. Chapitre 1). Il était alors évident que pour les groupes ayant la propriété (T) il fallait inventer une nouvelle méthode (voir [Jul97]).
Dans [Laf02b], Lafforgue démontre la conjecture de Baum-Connes sans coefficients pour une classe de groupes qui contient un grand nombre de groupes possédant la propriété (T). Elle contient en particulier :

- les groupes de Lie semi-simples réels,
- tous les sous-groupes discrets cocompacts de $Sp(n, 1)$, $F_{4(-20)}$ et de $SL_3(F)$ pour un corps local F,

et donc elle contient les premiers exemples de groupes infinis discrets ayant la propriété (T) (cf. [dlHV89]) et vérifiant la conjecture de Baum-Connes. On remarque ici que Julg, dans [Jul02], a montré la conjecture à coefficients pour $Sp(n, 1)$ ainsi que pour tout sous-groupe discret de $Sp(n, 1)$.

Pour les groupes de Lie semi-simples réels, Lafforgue construit une variante de l'algèbre de Schwartz généralisée qui est une sous-algèbre dense et stable par calcul fonctionnel holomorphe dans $C_r^*(G)$. Pour tous les sous-groupes discrets cocompacts de $Sp(n, 1)$, $F_{4(-20)}$ et de $SL_3(F)$ pour un corps local F, Lafforgue utilise le fait que ces groupes possèdent la propriété (RD) (cf. [Laf00], [dlH88]). Dans ce cas, une variante de l'algèbre de Jolissaint associée à G (cf. [Jol90]) est aussi une sous-algèbre de Banach dense et stable par calcul fonctionnel holomorphe dans $C_r^*(G)$. L'argument utilisé par Lafforgue reste valable dans le cas des sous-groupes discrets cocompacts de $SL_3(\mathbb{H})$ et de $E_{6(-26)}$ car ils possèdent aussi la propriété (RD) (cf. [Cha03]). Dans les deux cas mentionnés ci-dessus, la propriété essentielle dans la preuve de Lafforgue, vérifiée par les deux sous-algèbres de $C_r^*(G)$ qu'il construit,

[4] Il faut excepter, en particulier, la preuve de [Was87] concernant les groupes de Lie linéaires connexes réductifs, la preuve de [Val84a] pour le K_1 des revêtements finis de $SU(n, 1)$, la preuve de [BHP97] dans le cas de GL_n d'un corps non-archimédien de caractéristique 0 et celle de [BBV99] pour les groupes à 1 relator, qui consistent à calculer explicitement et à identifier les deux membres du morphisme μ_r.

est le fait d'être une complétion inconditionnelle de $C_c(G)$, l'espace des fonctions à support compact sur G. On rappelle qu'une complétion de $C_c(G)$ est une complétion inconditionnelle si c'est la complétion pour une norme d'algèbre telle que $\|f\|$ ne dépende que de $g \mapsto |f(g)|$ (cf. Définition 3.2.1). Si B est une G-C^*-algèbre et $\mathcal{B}(G)$ est une complétion inconditionnelle de $C_c(G)$, on note $\mathcal{B}(G,B)$ la complétion de $C_c(G,B)$ pour la norme

$$\|f\| = \|g \mapsto \|f(g)\|_B\|_{\mathcal{B}(G)}.$$

Pour toute complétion inconditionnelle $\mathcal{B}(G)$ de $C_c(G)$ et pour toute G-C^*-algèbre B, Lafforgue construit une variante du morphisme de Baum-Connes à coefficients

$$\mu_{\mathcal{B}}^B : K^{\mathrm{top}}(G,B) \to K(\mathcal{B}(G,B)).$$

Sa construction repose sur la construction d'un bifoncteur G-équivariant, $KK_G^{\mathrm{ban}}(A,B)$, pour A et B des G-algèbres de Banach, qui lui permet de construire une théorie équivariante pour les algèbres de Banach analogue à la KK-théorie équivariante de Kasparov (mais pour laquelle on n'a pas un produit analogue au produit de Kasparov). Il construit en plus une application ι de $KK_G(A,B)$ dans $KK_G^{\mathrm{ban}}(A,B)$, dans le cas où A et B sont des G-C^*-algèbres. Il démontre ensuite une égalité à peine plus faible que $\iota(\gamma) = 1$ dans $KK_G^{\mathrm{ban}}(\mathbb{C},\mathbb{C})$ pour une classe de groupes qu'il note $\mathcal{C}'$, qui est contenue dans la classe $\mathcal{C}$ (d'où l'existence d'un élément γ) et qui contient, en particulier, tous les groupes de Lie semi-simples réels, ainsi que tous les sous-groupes fermés d'un groupe de Lie semi-simple réel. Nous rappelons ici que la classe $\mathcal{C}'$ est constituée par les groupes a-T-menables et par tous les groupes localement compacts agissant de façon continue, isométrique et propre sur un des espaces suivants :

- sur une variété riemannienne complète simplement connexe, dont la courbure sectionnelle est négative ou nulle et bornée inférieurement, et dont la dérivée du tenseur de courbure (suivant la connexion induite de la connexion de Levi-Civita sur le fibré tangent) est bornée, ou
- sur un immeuble affine de Bruhat-Tits uniformément localement fini, ou
- sur un espace métrique uniformément localement fini, faiblement géodésique, faiblement bolique et vérifiant une condition supplémentaire de bolicité forte.

L'égalité $\iota(\gamma) = 1$ dans $KK_G^{\mathrm{ban}}(\mathbb{C},\mathbb{C})$ implique que $\mu_{\mathcal{B}}^B$ est un isomorphisme pour tout groupe G dans la classe $\mathcal{C}'$, pour toute complétion inconditionnelle $\mathcal{B}(G)$ et pour toute G-C^*-algèbre B. En particulier, comme l'algèbre $L^1(G)$ est une complétion inconditionnelle de $C_c(G)$, le morphisme de $K^{\mathrm{top}}(G,B)$ dans la K-théorie des

algèbres de Banach $L^1(G,B)$ construit par Lafforgue, est un isomorphisme pour toute G-C^*-algèbre B et pour tout groupe de la classe $\mathcal{C}'$, ce qui répond de manière affirmative à une conjecture de Bost (cf. [Laf02b, Introduction]). Le fait d'avoir alors une complétion inconditionnelle de $C_c(G)$ qui soit une sous-algèbre dense de $C_r^*(G)$ et stable par calcul fonctionnel holomorphe implique que le morphisme de Baum-Connes sans coefficients, μ_r, est un isomorphisme.
On rappelle que si A et B sont deux algèbres de Banach telles que A est une sous-algèbre de B, alors on dit que A est stable par calcul fonctionnel holomorphe dans B si tout élément de A a le même spectre dans A et dans B. L'importance de cette notion est que si A est une sous-algèbre dense et stable par calcul fonctionnel holomorphe dans B, alors elles ont la même K-théorie, c'est-à-dire que si on note $i : A \to B$ l'inclusion alors $i_* : K(A) \to K(B)$ est un isomorphisme (voir l'appendice A de [Bos90]).

Dans [CEN03], Chabert, Echterhoff et Nest ont étendu les résultats de Lafforgue aux groupes presque connexes.

Morphisme de Baum-Connes tordu. Revenons maintenant aux algèbres de groupe tordues. De la même façon que nous avons défini des analogues des C^*-algèbres, $C^*(G)$ et $C_r^*(G)$, tordus par rapport à une représentation de dimension finie, dans le Chapitre 2 nous allons définir, pour toute G-C^*-algèbre B, des produits croisés tordus, maximal et réduit, de B et G, qui seront des généralisations des produits croisés $C^*(G,B)$ et $C_r^*(G,B)$ (cf. Définition 2.1.6, [Ped79, 7.6]). Ces produits croisés tordus sont définis de la manière suivante

Définition 4. Soit (ρ, V) une représentation de dimension finie de G. On considère l'application

$$\begin{aligned} C_c(G,B) &\to C_c(G, B \otimes \mathrm{End}(V)) \\ b &\mapsto (g \mapsto b(g) \otimes \rho(g)). \end{aligned}$$

Le produit croisé de G et B tordu par ρ (resp. produit croisé réduit), que l'on note $B \rtimes^\rho G$ (resp. $B \rtimes_r^\rho G$), est l'adhérence de l'image de $C_c(G,B)$ dans $C^*(G,B) \otimes \mathrm{End}(V)$ (resp. $C_r^*(G,B) \otimes \mathrm{End}(V)$), où $\otimes$ denote le produit tensoriel minimal de C^*-algèbres.

Remarque 3. 1. Ces définitions impliquent en particulier que, si $B = \mathbb{C}$, alors

$$\mathbb{C} \rtimes^\rho G = \mathcal{A}^\rho(G) \quad \text{et} \quad \mathbb{C} \rtimes_r^\rho G = \mathcal{A}_r^\rho(G),$$

de sorte que les algèbres tordues définies dans le Chapitre 1, sont des cas particuliers des produits croisés tordus.

2. Il est clair que, si on note $\lambda_{G,B}$ la représentation régulière gauche covariante de B (cf. Définition 2.1.6), elle induit un unique morphisme de C^*-algèbres de $C^*(G,B)$ dans $C^*_r(G,B)$, encore noté $\lambda_{G,B}$, et donc un unique morphisme d'algèbres de Banach

$$\lambda_{G,B} \otimes \rho : B \rtimes^{\rho} G \to B \rtimes^{\rho}_{r} G,$$

(cf. Chapitre 1 section 1.1.2).

3. Si ρ est une représentation unitaire de G, les produits croisés tordus sont égaux aux produits croisés classiques $C^*_r(G,B)$ et $C^*(G,B)$, et donc, si G est compact, $B \rtimes^{\rho} G = C^*(G,B)$ (qui est égal à $B \rtimes^{\rho}_{r} G = C^*_r(G,B)$).

Nous allons ensuite construire deux morphismes de la K-homologie G-équivariante de $\underline{E}G$ à coefficients dans B dans la K-théorie des produits croisés tordus

$$\mu^B_{\rho} : K^{\mathrm{top}}(G,B) \to K(B \rtimes^{\rho} G) \quad \text{et} \quad \mu^B_{\rho,r} : K^{\mathrm{top}}(G,B) \to K(B \rtimes^{\rho}_{r} G),$$

que nous allons appeler *morphismes de Baum-Connes tordus*, maximal et réduit respectivement.
Ils seront construits de sorte que si ρ est une représentation unitaire de G, le morphisme $\mu^B_{\rho,r}$ coïncide avec le morphisme de Baum-Connes classique.

Le Chapitre 3 est consacré à l'étude de la bijectivité des morphismes μ^B_{ρ} et $\mu^B_{\rho,r}$ pour une large classe de groupes vérifiant la conjecture de Baum-Connes. Nous allons procéder de la façon suivante :

Dans la Section 3.1, nous allons utiliser la méthode du "dual Dirac-Dirac". Pour ceci, nous allons d'abord montrer que le morphisme de Baum-Connes tordu à coefficients dans une C^*-algèbre propre est un isomorphisme pour tout groupe localement compact. Nous allons ensuite nous servir de ceci pour étudier l'injectivité de μ^B_{ρ} dans le cas des groupes pour lesquels on peut construire un élément γ de Kasparov. Le théorème est le suivant

Théorème 2. Soit G un groupe localement compact tel que pour toute partie G-compacte Y de $\underline{E}G$, il existe une G-C^*-algèbre propre A et des éléments $\eta \in KK_G(\mathbb{C}, A)$ et $d \in KK_G(A, \mathbb{C})$ tels que $\gamma := \eta \otimes_A d \in KK_G(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ vérifie $p^*(\gamma) = 1$ dans $KK_{G \ltimes Y}(C_0(Y), C_0(Y))$, où p est la projection de Y vers le point. Alors, pour toute représentation ρ de dimension finie et pour toute G-C^*-algèbre B, les morphismes μ^B_{ρ} et $\mu^B_{\rho,r}$ sont injectifs.

Nous démontrons aussi un théorème pour la surjectivité de μ_ρ^B dans le cas où l'élément γ est égal à 1 :

Théorème 3. Soit G un groupe localement compact. Supposons qu'il existe une G-C^*-algèbre propre A, et des éléments $\eta \in KK_G(\mathbb{C}, A)$ et $d \in KK_G(A, \mathbb{C})$ tels que, si on pose $\gamma := \eta \otimes_A d \in KK_G(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ on a $\gamma = 1$. Soit B une G-C^*-algèbre. Alors, pour toute représentation ρ de dimension finie de G, μ_ρ^B et $\mu_{\rho,r}^B$ sont des isomorphismes.

On remarque que dans le cas où $\gamma = 1$, on a $K(B \rtimes^\rho G) = K(B \rtimes_r^\rho G)$, pour toute représentation de dimension finie ρ.

En particulier, ces deux théorèmes impliquent que pour tous les groupes de la classe $\mathcal{C}$, μ_ρ^B et $\mu_{\rho,r}^B$ sont injectifs et ce sont des isomorphismes pour tout groupe a-T-menable.

Dans la Section 3.2 nous allons montrer que si G est un groupe localement compact tel que $C_r^*(G)$ admette une sous-algèbre dense, stable par calcul fonctionnel holomorphe et qui soit une complétion inconditionnelle de $C_c(G)$, alors il existe une sous-algèbre dense et stable par calcul fonctionnel holomorphe de $\mathcal{A}_r^\rho(G)$ qui est aussi une complétion inconditionnelle de $C_c(G)$. Nous allons utiliser ceci pour montrer le théorème suivant :

Théorème 4. Soit G un groupe localement compact satisfaisant les deux conditions suivantes :

1. il existe une complétion inconditionnelle de $C_c(G)$ qui est une sous-algèbre dense de $C_r^*(G)$ stable par calcul fonctionnel holomorphe ;
2. pour toute complétion inconditionnelle $\mathcal{B}(G)$ de $C_c(G)$ le morphisme $\mu_\mathcal{B}$: $K^{\mathrm{top}}(G) \to K(\mathcal{B}(G))$ est un isomorphisme.

Soit ρ une représentation de dimension finie de G. Alors le morphisme de Baum-Connes réduit tordu par ρ

$$\mu_{\rho,r} : K^{\mathrm{top}}(G) \to K(\mathcal{A}_r^\rho(G)),$$

est un isomorphisme.

En appliquant le Théorème 0.02 de [Laf02b] qui dit que pour tout groupe de la classe $\mathcal{C}'$, le morphisme $\mu_\mathcal{B}$ est bijectif pour toute complétion inconditionnelle $\mathcal{B}(G)$, on obtient alors que $\mu_{\rho,r}$ est un isomorphisme pour tout groupe de Lie réductif réel et pour tout groupe de la classe $\mathcal{C}'$ ayant la propriété (RD). En particulier, $\mu_{\rho,r}$ est un isomorphisme pour tout groupe hyperbolique et pour tous les sous-groupes

discrets et cocompacts de $SL_3(\mathbb{H})$, de $E_{6(-26)}$ et de $SL_3(F)$, où F est un corps local.

Pour terminer, dans le Chapitre 4, étant donné un groupe localement compact G, nous allons définir une action de l'anneau des représentations *non unitaires* de dimension finie de G, que l'on note $R_F(G)$, sur le membre de gauche du morphisme de Baum-Connes, $K^{\text{top}}(G)$, qui généralise l'action induite par produit tensoriel par une représentation de dimension finie dans le cas des groupes compacts.
En général, pour toute représentation de dimension finie (ρ, V) de G, on aimerait définir un endomorphisme de $K(C_r^*(G))$ qui soit analogue au morphisme induit par produit tensoriel par ρ sur l'anneau des représentations de G. Ceci définirait un espèce d'analogue en K-théorie des foncteurs de translation de Zuckerman, dans lesquels le produit tensoriel par une représentation de dimension finie intervient [5] (cf. [Zuc77], [KV95, Chapter VII]). Cependant, comme ρ n'est pas supposée unitaire, le produit tensoriel par ρ induit un morphisme de $C_c(G)$ dans $C_r^*(G) \otimes \text{End}(V)$ qui n'est pas définit sur $C_r^*(G)$ et dont le domaine de définition est l'algèbre tordue $\mathcal{A}_r^\rho(G)$. On a donc un morphisme d'algèbres de Banach de $\mathcal{A}_r^\rho(G)$ dans $C_r^*(G) \otimes \text{End}(V)$, qui, par équivalence de Morita, induit un morphisme en K-théorie

$$\Lambda_\rho : K(\mathcal{A}_r^\rho(G)) \to K(C_r^*(G)).$$

D'autre part, il existe une action de $R_F(G)$ sur $K^{\text{top}}(G)$ définie de façon très naturelle. On rappelle que, dans le cas des représentations unitaires, cette action a été définie par Kasparov. En effet, pour tout groupe localement compact G, l'anneau des représentations de Kasparov $KK_G(\mathbb{C}, \mathbb{C})$, défini dans [Kas88] et noté $R(G)$, est le groupe abélien formé des classes d'homotopie de représentations de Fredholm unitaires de G, sur lequel le produit de Kasparov définit une structure d'anneau commutatif. L'anneau des représentations unitaires de dimension finie de G s'envoie sur $R(G)$; si G est un groupe compact, cette application est un isomorphisme (voir par exemple [Hig98, Paragraph 8]). De plus, pour toutes G-C^*-algèbres A et B, le produit de Kasparov définit une structure de $R(G)$-module sur le groupe $KK_G(A, B)$. En particulier, si X est un G-espace propre (et G-compact), le groupe $KK_G(C_0(X), \mathbb{C})$ est muni d'une structure de module sur $R(G)$. En passant à la limite inductive, il est clair que le produit de Kasparov définit alors une structure de $R(G)$-module sur $K^{\text{top}}(G)$, ce qui définit une action de l'anneau des représentations *unitaires* de dimension finie de G sur $K^{\text{top}}(G)$. Nous allons généraliser cette action au cas des représentations non unitaires de G.

Supposons d'abord que G soit un groupe de Lie connexe et K un sous-groupe maximale de G tels que l'espace G/K soit une variété de dimension paire munie

[5] Dans le cadre de la K-théorie les foncteurs de Zuckerman ont été considérés par Bost.

d'une structure spin G-équivariante. Dans ce cas, il est clair que $K^{\mathrm{top}}(G)$ est muni d'une structure de module sur $R_F(G)$. En effet, $K^{\mathrm{top}}(G)$ est isomorphe à $R(K)$, l'anneau des représentations unitaires de K et toute représentation de dimension finie ρ non unitaire définit un endomorphisme de $R(K)$: comme K est un groupe compact, la restriction de ρ sur K est équivalente à une représentation unitaire de K et donc $\rho|K$ définit un élément de $R(K)$. Le produit tensoriel par $\rho|K$,

$$\begin{aligned} R(K) &\to R(K) \\ [\sigma] &\mapsto [\rho|K \otimes \sigma], \end{aligned}$$

induit un endomorphisme de $K^{\mathrm{top}}(G)$ qui définit l'action $R_F(G)$ sur $K^{\mathrm{top}}(G)$.

Dans le cas général, nous allons définir aussi un endomorphisme

$$\Upsilon_\rho : K^{\mathrm{top}}(G) \to K^{\mathrm{top}}(G),$$

pour toute représentation de dimension finie ρ d'un groupe localement compact G, qui coïncide avec le produit tensoriel par ρ lorsque G est compact ou lorsque ρ est unitaire, et avec le produit tensoriel par $\rho|K$, dans le cas où G est un groupe de Lie connexe et K est un compact maximal vérifiant les conditions ci-dessus.

Le résultat principal du Chapitre 4 est énoncé dans le théorème suivant

Théorème 5. Soit G un groupe localement compact et ρ une représentation non unitaire de dimension finie de G. Alors le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} K^{\mathrm{top}}(G) \arrow[r, "\mu_{\rho,r}"] \arrow[d, "\Upsilon_\rho"'] & K(\mathcal{A}_r^\rho(G)) \arrow[d, "\Lambda_\rho"] \\ K^{\mathrm{top}}(G) \arrow[r, "\mu_r"] & K(C_r^*(G)), \end{tikzcd}$$

est commutatif.

Dans [Val88], Valette a défini une action sur $K^{\mathrm{top}}(G)$ pour des représentations non unitaires de dimension finie de G qui coïncide avec l'action donné par $\Upsilon : \rho \mapsto \Upsilon_\rho$ sur $K^{\mathrm{top}}(G)$. Dans le cas des groupes de Lie connexes, il a défini aussi une action de $R_F(G)$ sur l'image de l'élément γ de Kasparov dans $K(C_r^*(G))$ qu'il a interprété ensuite en termes de foncteurs de Zuckerman.

Finalement, pour conclure cette Introduction, nous allons donner maintenant quelques commentaires ainsi que quelques développements futurs possibles.

Tout d'abord, nous rappelons que, dans [FH06], Fisher et Hitchman ont défini une propriété analogue à la propriété (T) tordue en utilisant la caractérisation de celle-ci en termes de 1-cohomologie [6] et en considérant aussi des produits tensoriels d'une représentation de dimension finie avec une représentation unitaire. Il serait souhaitable de trouver une relation entre ces deux variantes de la propriété (T). Une première idée naïve serait d'abord de donner une définition de la propriété (T) tordue par ρ en termes de morphismes presque équivariants : soient (π, H_π), (σ, H_σ) des représentations de G, ϵ un nombre réel positif et K une partie compacte de G. Un morphisme $\phi : H_\pi \to H_\sigma$ est (ϵ, K)-G-équivariant si

$$|\phi(\pi(g)\xi) - \sigma(g)\phi(\xi)| < \epsilon,$$

pour tout élément unitaire $\xi \in H_\pi$ et pour tout $g \in K$. On pourrait dire alors que G a la propriété (T) tordue par ρ, où (ρ, V) est une représentation de dimension finie, si la condition suivante est satisfaite : pour toute représentation unitaire (π, H_π) telle que pour tout $\epsilon > 0$ et pour toute partie compacte K de G il existe un morphisme $\phi : V \to V \otimes H_\pi$ qui est (ϵ, K)-G-équivariant, il existe un morphisme $\psi : V \to V \otimes H_\pi$ qui est G-équivariant.
La caractérisation algébrique de la propriété (T) tordue implique celle définie à travers les morphismes presque G-équivariants [7].
Dans le cas unitaire, on sait que les deux caractérisations sont équivalentes et si G est un groupe tel que 1_G soit isolée dans $\widehat{G}$, on peut construire explicitement un idempotent p_G dans $C^*(G)$ qui, pour toute représentation unitaire sans vecteurs invariants non nuls, soit la projection orthogonale sur l'espace des vecteurs G-invariants. Cet idempotent est construit comme la projection spectrale d'éléments auto-adjoints dans $C^*(G)$ associés à un sous-ensemble compact de G (cf. [Val84b, Theorem 3.2]). Cependant, dans le cas non unitaire, on ne sait pas comment généraliser cette construction car elle utilise des arguments de positivité propres aux C^*-algèbres qui ne peuvent pas être généralisés au cadre des algèbres de Banach (qui ne sont même pas involutives).
La preuve de l'existence d'un idempotent vérifiant les conditions de la Définition 2, pour les groupes de Lie qui vérifient les hypothèses du Théorème 1, est basée sur la décroissance uniforme des coefficients de matrice des représentations unitaires, et donc sur une propriété plus forte que la propriété (T). C'est cette propriété qui

[6] Pour la caractérisation cohomologique de la propriété (T) voir [Val02] et [BdlHV].
[7] La réciproque donnerait une caractérisation topologique de la propriété (T) tordue.

nous permet de construire explicitement l'idempotent.

D'autre part, on rappelle que dans le Chapitre 1 nous avons montré que toute représentation de dimension finie irréductible ρ d'un groupe de Lie simple G ayant la propriété (T), définit un idempotent dans l'algèbre tordue par ρ, $\mathcal{A}^\rho(G)$, ce qui, dans un sens, veut dire que la représentation ρ est isolée dans l'ensemble des représentations de la forme $\rho \otimes \pi$, où π parcourt l'ensemble des représentations unitaires de G.
De façon plus générale, pour tout groupe localement compact G et pour toute représentation de dimension finie ρ, on aimerait étudier le comportement de ρ dans l'ensemble des représentations de G qui ont la même croissance que ρ, c'est-à-dire les représentations π qui vérifient l'inégalité $\|\pi(g)\| \leq \|\rho(g)\|$, pour tout $g \in G$.
Plus précisément, par exemple dans le cas où $G = SL_3(\mathbb{R})$ et ρ est la représentation standard de G dans $\mathbb{C}^3$, si on note E_ρ l'ensemble des représentations π qui satisfont que $\|\pi(g)\| \leq \|\rho(g)\|$ pour tout $g \in G$, on pourrait considérer la complétion de $C_c(G)$ pour la norme donnée par :

$$\|f\| = \sup_{(\pi, H_\pi) \in E_\rho} \|\pi(f)\|_{\mathcal{L}(H_\pi)} \ , \qquad f \in C_c(G).$$

L'idée serait de montrer qu'il existe un idempotent dans cette nouvelle algèbre de Banach qui projette sur la composante ρ-typique de toute représentation π de G ayant la même croissance que ρ, c'est-à-dire, qui satisfait : $\|\pi(g)\| \leq \|\rho(g)\|$ pour tout $g \in G$. On remarque qu'une représentation de la forme $\rho \otimes \pi$ satisfait la relation demandée, donc c'est une généralisation du cas que nous étudions dans cette thèse.

Revenons maintenant aux résultats du Chapitre 3. En résumant, nous avons obtenu que pour tout groupe G de la classe $\mathcal{C}$, les morphismes μ_ρ^B et $\mu_{\rho,r}^B$ sont injectifs pour toute représentation de dimension finie ρ et pour toute G-C^*-algèbre B. De plus, ce sont des isomorphismes si l'élément γ est égal à 1. D'autre part, nous avons montré que si G est un groupe appartenant à la classe $\mathcal{C}'$ et s'il existe une complétion inconditionnelle de $C_c(G)$ qui est une sous-algèbre de $C_r^*(G)$ dense et stable par calcul fonctionnel holomorphe, alors $\mu_{\rho,r}$ est un isomorphisme, pour tout ρ. Au vu de ces résultats, on peut espérer avoir l'énoncé suivant :

Pour tout groupe G appartenant à la classe $\mathcal{C}$ et pour toute représentation de dimension finie ρ, le morphisme $\mu_{\rho,r}$ est un isomorphisme.

En fait, on peut espérer que $\mu_{\rho,r}$ soit un isomorphisme dans les mêmes cas où le morphisme de Baum-Connes est un isomorphisme et cet énoncé ne semble pas être

plus facile à démontrer que la conjecture de Baum-Connes. En effet, la construction des algèbres tordues $A \rtimes_r^\rho G$ n'est pas plus fonctorielle en G que la construction de $C_r^*(G, A)$, mais reste fonctorielle en A, et ces algèbres tordues, à différence des complétions inconditionnelles, ne sont pas plus stables que les C^*-algèbres de groupes par le produit de Schur (cf. [Laf02a]). On rappelle que Higson, Lafforgue et Skandalis dans [HLS02] ont donné un contre-exemple de la surjectivité du morphisme de Baum-Connes à coefficients, ce qui nous laisse penser que le morphisme tordu ne doit pas être un isomorphisme pour tous les groupes localement compacts. On espère au moins que le morphisme tordu soit un isomorphisme dans tous les cas où la conjecture de Baum-Connes est vraie. Dans ce sens, il serait évidement souhaitable de vérifier si les résultat de [CEN03] sur les groupes presque connexes s'appliquent aussi au cas du morphisme tordu. En particulier, le résultat concernant les groupes de Lie réels réductifs (dont la partie semi-simple n'est pas nécessairement de centre fini) qui étend les résultats de Lafforgue, semble bien s'appliquer dans notre cadre, à condition de vérifier des résultats analogues aux résultats obtenus par Chabert, Echterhoff et Nest par exemple pour les champs continus de C^*-algèbres (cf. [CEN03, Proposition 4.6]).
Il serait aussi intéressant de montrer que le morphisme tordu est stable par extensions (cf. [OO01], [Cha00]).

Chapitre 1

Propriété (T) tordue par une représentation non unitaire

Ce chapitre est, à quelques modifications près, le texte d'un article [GA07] paru dans la revue *Journal of Lie Theory* dans lequel nous définissons une version tordue de la propriété (T) de Kazhdan en considérant des produits tensoriels de représentations unitaires par des représentations irréductibles de dimension finie *non unitaires* d'un groupe topologique. Nous démontrons, en utilisant la décroissance uniforme des coefficients de matrices des représentations unitaires d'un groupe de Lie réel simple G, ayant la propriété (T) de Kazhdan, que toute représentation irréductible de dimension finie ρ de G est isolée, dans un sens que nous précisons, parmi les représentations de la forme $\rho \otimes \pi$, où π parcourt les représentations unitaires irréductibles de G.
Le cas où $G = SL_m(\mathbb{R})$ et $m \geq 3$ a été présenté par l'auteur lors de l'école d'été intitulée "Topological and Geometric Methods for Quantum Field Theory" pendant l'été 2005 à Villa de Leyva en Colombie et va être publié dans les comptes-rendus de celle-ci [GA05].

Introduction

Un groupe topologique G a la propriété (T) de Kazhdan si sa représentation triviale est isolée dans son dual unitaire, $\widehat{G}$. En 1967, Kazhdan a introduit cette propriété pour étudier la structure des réseaux dans les groupes de Lie réels. Il démontre que tout réseau d'un groupe de Lie réel G qui a la propriété (T), est de type fini [Kaz67]. Plus tard, en 1981, Akemann et Walter on donné une caractérisation C^*-algébrique de la propriété (T) [AW81, Lemma 2]. Ils démontrent qu'un groupe topologique localement compact G a la propriété (T) si et seulement s'il existe un

idempotent p dans la C^*-algèbre maximale $C^*(G)$ de G tel que pour toute représentation (π, H) unitaire de G, $\pi(p)$ soit la projection orthogonale sur le sous-espace de H formé des vecteurs G-invariants (voir aussi [Val92, Proposition 2]).
Dans cet article, on va définir un renforcement de la propriété (T) en considérant des produits tensoriels de représentations unitaires par des représentations irréductibles non unitaires de dimension finie. Pour ceci, on va définir, pour toute représentation irréductible de dimension finie d'un groupe topologique, un analogue *tordu* de la C^*-algèbre maximale de G, que l'on va noter $\mathcal{A}^\rho(G)$, et on va définir une propriété (T) *tordue* en termes de celle-ci.

Définition 1.0.1. Soient G un groupe localement compact et (ρ, V) une représentation irréductible de dimension finie de G. Soit $C_c(G)$ l'espace vectoriel des fonctions continues à support compact sur G et soit $\mathcal{A}^\rho(G)$ la complétion de $C_c(G)$ pour la norme $\|.\|_{\mathcal{A}^\rho(G)}$ donnée par :

$$\|f\|_{\mathcal{A}^\rho(G)} = \sup_{(\pi, H_\pi)} \|(\rho \otimes \pi)(f)\|_{\mathcal{L}(V \otimes H_\pi)},$$

pour $f \in C_c(G)$ et où (π, H_π) est une représentation unitaire de G.
On dira que G a la propriété (T) *tordue par* ρ s'il existe un idempotent p_G dans $\mathcal{A}^\rho(G)$ tel que : $\rho(p_G) = \mathrm{Id}_V$ et, pour toute π représentation unitaire de G qui ne contient pas la représentation triviale, $(\rho \otimes \pi)(p_G) = 0$.

Si un groupe G a la propriété (T) tordue par ρ, on dira alors que ρ est *isolée parmi les représentation de la forme* $\rho \otimes \pi$, où π est une représentation unitaire irréductible de G, terminologie que l'on justifiera (voir la proposition 1.1.5).

De plus, pour toute représentation irréductible de dimension finie ρ on va définir, de la même façon, un analogue *tordu* de $C_r^*(G)$, la C^*-algèbre réduite de G, que l'on notera $\mathcal{A}_r^\rho(G)$, et on démontrera que si G a la propriété (T) tordue ρ, alors les algèbres $\mathcal{A}^\rho(G)$ et $\mathcal{A}_r^\rho(G)$ n'ont pas la même K-théorie, l'intérêt pour nous étant de calculer la K-théorie de ces algèbres.
On démontre aussi que la propriété (T) tordue par une représentation ρ est héritée par tout réseau cocompact du groupe : Si G a (T) tordue par ρ et Γ est un réseau cocompact de G, alors Γ a la propriété (T) tordue par $\rho|_\Gamma$.
On ne sait pas encore si tout groupe localement compact ayant la propriété (T) a aussi la propriété (T) tordue par toute représentation irréductible de dimension finie, mais la dernière partie de l'article est consacrée à la démonstration du fait que, au moins, beaucoup de groupes de Lie ayant la propriété (T) ont aussi la propriété (T) tordue par n'importe quelle représentation irréductible de dimension finie. On sait que tout groupe de Lie G réel simple connexe de centre fini de rang réel ≥ 2

ou localement isomorphe à $Sp(n,1)$ pour $n \geq 2$ ou à $F_{4(-20)}$, a la propriété (T) [dlHV89]. Plus fort encore, il vérifie une décroissance uniforme des coefficients de matrice des représentations unitaires de G qui n'ont pas de vecteurs invariants non nuls [Cow79]. On utilise cette propriété donnée par le théorème 1.2.6, pour montrer le résultat suivant :

Théorème 1.0.2. *Soit G un groupe de Lie réel algébrique semi-simple de centre fini, connexe et simplement connexe (au sens algébrique), et tel que chaque facteur simple de G est ou bien de rang réel supérieur ou égal à 2, ou bien localement isomorphe à $Sp(n,1)$ pour $n \geq 2$ ou à $F_{4(-20)}$, et soit ρ une représentation irréductible de dimension finie de G. Alors G a la propriété (T) tordue par ρ.*

David Fisher et Theron Hitchman définisent dans [FH06] une propriété, qu'ils appellent $F \otimes H$ en termes de 1-cohomologie, qui ressemble à la propriété (T) tordue par ρ, mais on ne connaît pas d'implication entre les deux propriétés.

Remerciements. Je voudrais remercier Vincent Lafforgue pour ses nombreuses suggestions et sa grande disponibilité et Bachir Bekka pour ses éclaircissements dans le cas des groupes de rang 1.

1.1 Propriété (T) tordue

1.1.1 Définitions et terminologie.

On rappelle la définition de propriété (T) *tordue* énoncée dans l'introduction :

Définition 1.1.1. Soient G un groupe localement compact et (ρ, V) une représentation irréductible de dimension finie de G, où V est un espace vectoriel complexe muni d'une norme hermitienne. Soit $C_c(G)$ l'espace vectoriel des fonctions continues à support compact sur G et soit $\mathcal{A}^\rho(G)$ la complétion de $C_c(G)$ pour la norme $\|.\|_{\mathcal{A}^\rho(G)}$ donnée par :

$$\|f\|_{\mathcal{A}^\rho(G)} = \sup_{(\pi, H_\pi)} \|(\rho \otimes \pi)(f)\|_{\mathcal{L}(V \otimes H_\pi)},$$

pour $f \in C_c(G)$, où (π, H_π) varie parmi les représentations unitaires de G.
Le groupe G a la propriété (T) tordue par ρ s'il existe un idempotent p_G dans $\mathcal{A}^\rho(G)$ tel que : $\rho(p_G) = \mathrm{Id}_V$ et, pour toute représentation π unitaire de G qui n'a pas de vecteurs invariants non nuls, $(\rho \otimes \pi)(p_G) = 0$.

Remarque 1.1.2. L'algèbre $\mathcal{A}^\rho(G)$ est une algèbre de Banach et toute représentation du groupe G de la forme $\rho\otimes\pi$ avec π unitaire peut être prolongée, de façon évidente, en une représentation de $\mathcal{A}^\rho(G)$ que l'on note aussi, par abus de notation, $\rho\otimes\pi$.

Remarque 1.1.3. Si G a la propriété (T) tordue par (ρ, V), alors, pour toute (π, H) représentation unitaire de G, $(\rho\otimes\pi)(p_G)$ est la projection de $V\otimes H$ sur $V\otimes H^G$ parallèlement à $V\otimes(H^G)^\perp$, où H^G est le sous-espace de H formé des vecteurs G-invariants. En effet, il suffit d'écrire π de la forme $\pi_0\oplus\pi_1$, où π_1 est la sous-représentation de π sur $(H^G)^\perp$ qui ne contient pas la représentation triviale et π_0 est la sous-représentation de π qui a pour espace H^G et qui est équivalente à la représentation triviale de G, que l'on note 1_G.

Définition 1.1.4. Soit G un groupe localement compact, $\widehat{G}$ son dual unitaire et (ρ, V) une représentation irréductible de G. On définit une nouvelle topologie sur $\widehat{G}$, que l'on appelle *tordue par* ρ, de la manière suivante : Si P est un sous-ensemble de $\widehat{G}$ et $\pi\in\widehat{G}$ alors π est dans l'adhérence tordue par ρ de P, si $\rho\otimes\pi$ est contenu dans l'adhérence de $\rho\otimes P := \{\rho\otimes\pi' | \pi'\in P\}$ dans l'ensemble des représentations de $\mathcal{A}^\rho(G)$ muni de la topologie de Jacobson (cf. [Dix96, Jac45]). On note $\widehat{G}^\rho$ l'espace $\widehat{G}$ muni de cette topologie.

Proposition 1.1.5. *Soit G un groupe topologique localement compact et ρ une représentation irréductible de dimension finie de G. Si G a la propriété (T) tordue par ρ alors la représentation triviale de G est isolée dans $\widehat{G}^\rho$.*

Démonstration. Supposons que G a la propriété (T) tordue par ρ et soit p_G l'idempotent dans $\mathcal{A}^\rho(G)$ qui vérifie les propriétés données par la définition 1.1.1. On a alors que $p_G\in\bigcap_{1_G\not\subseteq\pi}\mathrm{Ker}(\rho\otimes\pi)$ et $\rho(p_G)\neq 0$ donc

$$\bigcap_{1_G\not\subseteq\pi}\mathrm{Ker}(\rho\otimes\pi)\not\subseteq\mathrm{Ker}(\rho).$$

Ceci implique que $\mathrm{Ker}(\rho)$, en tant qu'idéal primitif, est isolé pour la topologie de Jacobson dans l'ensemble des idéaux bilatères de $\mathcal{A}^\rho(G)$ de la forme $\mathrm{Ker}(\rho\otimes\pi)$ avec π unitaire. Par conséquent, 1_G est isolée dans $\widehat{G}^\rho$. □

Cette proposition justifie la terminologie utilisée :
Si un groupe topologique G a la propriété (T) tordue par une représentation irréductible de dimension finie ρ, on dira alors que ρ est *isolée parmi les représentations de la forme* $\rho\otimes\pi$, où π est une représentation unitaire irréductible de G.

Remarque 1.1.6. Si $\rho = 1_G$, alors G a la propriété (T) tordue par 1_G s'il existe un idempotent p_G dans la C^*-algèbre maximale de G, tel que pour toute représentation

unitaire π de G, $\pi(p_G)$ soit la projection sur l'espace des vecteurs G-invariants. Dans ce cas, la proposition 1.1.5 est une équivalence et c'est le résultat connu qui dit qu'un groupe localement compact a la propriété (T) usuelle si et seulement si $C^*(G)$ s'écrit comme une somme directe de C^*-algèbres de la forme :

$$C^*(G) = \mathrm{Ker}(1_G) \oplus I,$$

où I est un idéal bilatère fermé de $C^*(G)$ [AW81], [Val84b].

L'objectif principal de cet article est de prouver que beaucoup de groupes de Lie qui ont la propriété (T), vérifient aussi la propriété (T) tordue par n'importe quelle représentation irréductible de dimension finie.
En s'inspirant de la remarque précédente, pour tout groupe topologique localement compact G et toute représentation irréductible de dimension finie ρ de G, on considère l'espace vectoriel $C_c(G)$ formé des fonctions continues à support compact sur G et on définit deux nouvelles complétions de celui-ci de la manière suivante :
Soit $\mathcal{A}'_G$ la complétion de $C_c(G)$ par rapport à la norme $\|.\|_{\mathcal{A}'_G}$ donnée par :

$$\|f\|_{\mathcal{A}'_G} = \sup_{(\pi, H_\pi)} \|(\rho \otimes \pi)(f)\|_{\mathcal{L}(V \otimes H_\pi)},$$

pour $f \in C_c(G)$, où (π, H_π) varie parmi les représentations unitaires de G qui ne contiennent pas la représentation triviale.
Et soit $\mathcal{A}''_G$ la complétion de $C_c(G)$ pour la norme $\|.\|_{\mathcal{A}''_G}$ donnée par :

$$\|f\|_{\mathcal{A}''_G} = \|\rho(f)\|_{\mathrm{End}(V)},$$

pour tout $f \in C_c(G)$.
On remarque alors qu'on a deux morphismes d'algèbres de Banach :

$$\Theta_1 : \mathcal{A}^\rho(G) \to \mathcal{A}'_G \quad \text{and} \quad \Theta_2 : \mathcal{A}^\rho(G) \to \mathcal{A}''_G.$$

Soit $\Theta : \mathcal{A}^\rho(G) \to \mathcal{A}'_G \oplus \mathcal{A}''_G$ le prolongement à $\mathcal{A}^\rho(G)$ du morphisme donné sur $C_c(G)$ par : $\Theta(f) = (\Theta_1(f), \Theta_2(f))$. C'est un morphisme d'algèbres de Banach.

On a alors l'équivalence évidente suivante :

Proposition 1.1.7. *Le groupe G a la propriété (T) tordue par ρ si et seulement si le morphisme d'algèbres de Banach Θ est un isomorphisme.*

1.1.2 Relation avec la K-théorie

Soient G un groupe topologique et (ρ, V) une représentation irréductible de dimension finie de G. De la même façon que l'on a défini l'algèbre $\mathcal{A}^\rho(G)$, qui est l'analogue *tordu par* ρ de la C^*-algèbre maximale de G, on peut définir une algèbre de Banach *réduite tordue par* ρ de G comme étant la complétion de $C_c(G)$ pour la norme :

$$\|f\|_{\mathcal{A}^\rho_r(G)} = \|\rho \otimes L_G(f)\|_{\mathcal{L}(V \otimes \mathrm{L}^2(G))},$$

pour $f \in C_c(G)$ et où L_G est la représentation régulière gauche de G dans $\mathrm{L}^2(G)$. On note $\mathcal{A}^\rho_r(G)$ cette complétion.
On a alors un unique morphisme d'algèbres de Banach

$$\rho \otimes L_G : \mathcal{A}^\rho(G) \to \mathcal{A}^\rho_r(G),$$

qui prolonge l'identité sur $C_c(G)$. Soit

$$(\rho \otimes L_G)_* : \mathrm{K}(\mathcal{A}^\rho(G)) \to \mathrm{K}(\mathcal{A}^\rho_r(G)),$$

le morphisme en K-théorie induit par $\rho \otimes L_G$.

Proposition 1.1.8. *Si G a la propriété (T) tordue par ρ et G n'est pas un groupe compact alors les algèbres $\mathcal{A}^\rho(G)$ et $\mathcal{A}^\rho_r(G)$ n'ont pas la même K-théorie, c'est-à-dire que $(\rho \otimes L_G)_*$ n'est pas injectif.*

Démonstration. Supposons que G soit un groupe localement compact non-compact ayant la propriété (T) tordue par une représentation ρ. Il existe alors un idempotent non-nul $p_G \in \mathcal{A}^\rho(G)$ tel que $\rho(p_G) = \mathrm{Id}_V$ et, pour toute représentation π unitaire de G qui ne contient pas la représentation triviale, $(\rho \otimes \pi)(p_G) = 0$. Comme G n'est pas compact on peut prendre $\pi = L_G$ et, par conséquent, $(\rho \otimes L_G)(p_G) = 0$, ce qui montre que $(\rho \otimes L_G)_*$ n'est pas un morphisme injectif.

□

1.1.3 Propriété d'hérédité

On va démontrer que la propriété (T) tordue par une représentation irréductible de dimension finie est héritée par les réseaux cocompacts du groupe. Pour qu'un énoncé de ce style ait un sens, on a d'abord besoin du lemme suivant :

Lemme 1.1.9. *Si Γ est un réseau cocompact d'un groupe topologique localement compact G ayant la propriété (T) tordue par une représentation irréductible de dimension finie (ρ, V), alors $\rho|_\Gamma$ est une représentation irréductible de Γ.*

Démonstration. Soit $\mathrm{Hom}_\Gamma(V|_\Gamma, V|_\Gamma)$ l'ensemble des morphismes Γ-invariants de $V|_\Gamma$ dans $V|_\Gamma$. On a un morphisme injectif de $\mathrm{Hom}_\Gamma(V|_\Gamma, V|_\Gamma)$ dans $\mathrm{Hom}_G(V, V \otimes \mathrm{L}^2(G/\Gamma))$, où $L^2(G/\Gamma)$ est l'espace de la représentation régulière quasi-invariante de G. En effet, soit $T \in \mathrm{Hom}_\Gamma(V|_\Gamma, V|_\Gamma)$ et F_T la fonction continue sur G à valeurs dans $\mathrm{End}(V)$ telle que $F_T(g) = \rho(g)T\rho(g)^{-1}$, pour tout $g \in G$. Comme T est Γ-équivariant, F_T est une fonction continue (qui est en plus G-équivariante) sur G/Γ à valeurs dans $\mathrm{End}(V)$. Comme G/Γ est compact, F_T appartient à $\mathrm{L}^2(G/\Gamma, \mathrm{End}(V))$. Soit

$$F(T) : V \to \mathrm{L}^2(G/\Gamma, V),$$

tel que $F(T)(v)(x) = F_T(x)v$, pour tout $v \in V$ et tout $x \in G/\Gamma$. C'est une application linéaire continue G-équivariante, donc

$$F(T) \in \mathrm{Hom}_G(V, \mathrm{L}^2(G/\Gamma, V)) = \mathrm{Hom}_G(V, \mathrm{L}^2(G/\Gamma) \otimes V).$$

De plus, si on note 1 l'identité de G, alors $F_T(1) = T$ et donc, la correspondance $T \mapsto F(T)$ définit un morphisme injectif de $\mathrm{Hom}_\Gamma(V|_\Gamma, V|_\Gamma)$ dans $\mathrm{Hom}_G(V, V \otimes \mathrm{L}^2(G/\Gamma))$. Ceci implique que,

$$\dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{Hom}_\Gamma(V|_\Gamma, V|_\Gamma)) \leq \dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{Hom}_G(V, V \otimes \mathrm{L}^2(G/\Gamma))).$$

Mais le fait que le groupe G ait la propriété (T) tordue par ρ implique que

$$\mathrm{Hom}_G(V, V \otimes \mathrm{L}^2(G/\Gamma)) = \mathrm{Hom}_G(V, V),$$

car, en effet, on peut écrire

$$\mathrm{L}^2(G/\Gamma) = \mathrm{L}^2(G/\Gamma)_0 \oplus \mathrm{L}^2(G/\Gamma)_1,$$

où $\mathrm{L}^2(G/\Gamma)_0$ est la sous-représentation triviale de $L^2(G/\Gamma)$ engendrée par la fonction constante égale à 1 et $\mathrm{L}^2(G/\Gamma)_1$ est son orthogonal, qui ne contient pas 1_G. Si en plus G a (T) tordue par ρ,

$$\mathrm{Hom}_G(V, V \otimes \mathrm{L}^2(G/\Gamma)_1) = 0,$$

d'où,

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_G(V, V \otimes \mathrm{L}^2(G/\Gamma)) &= \mathrm{Hom}_G(V, V) \\ &= \mathbb{C}.\mathrm{Id}_V, \end{aligned}$$

car V est une représentation irréductible de G, d'où le lemme.

□

Proposition 1.1.10. *Soit G un groupe localement compact et Γ un réseau cocompact de G. Soit ρ une représentation irréductible de dimension finie de G. Si G a la propriété (T) tordue par ρ alors Γ a la propriété (T) tordue par $\rho|_\Gamma$.*

Démonstration. Supposons que G a la propriété (T) tordue par ρ et soit Γ un réseau cocompact de G. L'existence de Γ implique que G est unimodulaire. Soit dg une mesure de Haar sur G telle que G/Γ soit de mesure 1. Par abus de notation, on notera de la même façon la représentation ρ de G et sa restriction à Γ. On rappelle que l'on note $\mathcal{A}^\rho(G)$ (resp. $\mathcal{A}^\rho(\Gamma)$) la complétion de $C_c(G)$ (resp. $C_c(\Gamma)$) pour la norme donnée, pour $f \in C_c(G)$ (resp. $f \in C_c(\Gamma)$), par :

$$\|f\| = \sup_{(\pi, H_\pi)} \|(\rho \otimes \pi)(f)\|_{\mathcal{L}(V \otimes H_\pi)},$$

où le supremum est pris parmi les représentations unitaires de G (resp. de Γ).
Si (π, H) est une représentation de G (resp. de Γ) on note H^G (resp. H^Γ) le sous-espace de H formé des vecteurs invariants.
Soit p_G l'idempotent de $\mathcal{A}^\rho(G)$ tel que pour toute (π, H_π) représentation unitaire de G, $(\rho \otimes \pi)(p_G)$ est la projection de $V \otimes H_\pi$ sur $V \otimes H_\pi^G$.
Supposons qu'il existe une fonction $f \in C_c(G)$ telle que

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} f(g\gamma)\rho(\gamma) = \rho(g^{-1}), \tag{1.1.1}$$

pour tout $g \in G$ (ce qui implique que $\int_G f(g)\rho(g)dg = \mathrm{Id}_V$).

On veut construire un idempotent $p_\Gamma \in \mathcal{A}^\rho(\Gamma)$, tel que pour toute représentation (π, H) unitaire de Γ, $(\rho \otimes \pi)(p_\Gamma)$ soit la projection de $V \otimes H$ sur $V \otimes H^\Gamma$.
Soit une suite $(p_G^n)_n$ dans $C_c(G)$ qui converge vers p_G dans $\mathcal{A}^\rho(G)$, soit (π, H) une représentation unitaire de Γ et soit $(\mathrm{Ind}(\pi), \mathrm{Ind}(H))$ la représentation unitaire de G obtenue par induction unitaire de π. On note $\pi' := \mathrm{Ind}(\pi)$ et $H' := \mathrm{Ind}(H)$ pour simplifier les notations.

Soit $\{v_i\}_{i=1,\dots,n}$ une base de V et soit $\{v_i^*\}_{i=1,\dots,n}$ la base de V^* duale. Soient α et β les applications linéaires continues suivantes

$$\begin{aligned}
\alpha : V \otimes H &\to V \otimes H' \\
v \otimes \xi &\mapsto \sum_{i=1}^n v_i \otimes \big(g \mapsto \sum_{\gamma \in \Gamma} v_i^*(\rho(g\gamma)v) f(g\gamma)\pi(\gamma)\xi\big), \\
\beta : V \otimes H' &\to V \otimes H \\
v \otimes s &\mapsto \int_G \rho(g^{-1})v \otimes f(g^{-1})s(g)dg.
\end{aligned}$$

Il est facile de voir que l'égalité $\sum_{\gamma\in\Gamma} f(g\gamma)\rho(\gamma) = \rho(g^{-1})$ implique que l'image par α de $V\otimes H^\Gamma$ est contenue dans $V\otimes (H')^G$, ainsi que l'image par β de $V\otimes (H')^G$ est contenue dans $V\otimes H^\Gamma$. Elle implique aussi que $\alpha\circ\beta$ agit par l'identité sur $V\otimes (H')^G$ et que $\beta\circ\alpha$ agit par l'identité sur $V\otimes H^\Gamma$.

D'autre part, pour $v\in V$ et $\xi\in H$,

$$(\rho\otimes\pi')(p_G^n)\circ\alpha(v\otimes\xi) = \int_G p_G^n(g)\sum_{i=1}^n \rho(g)v_i\otimes\Big(x\mapsto \sum_{\gamma\in\Gamma} v_i^*\big(\rho(g^{-1}x\gamma)v\big)f(g^{-1}x\gamma)\pi(\gamma)\xi\Big)dg,$$

et donc,

$$\beta\circ(\rho\otimes\pi')(p_G^n)\circ\alpha(v\otimes\xi) = \sum_{\gamma\in\Gamma}\int_{G\times G} p_G^n(g)\sum_{i=1}^n \rho(x^{-1}g)v_i\otimes v_i^*\big(\rho(g^{-1}x)\rho(\gamma)v\big)f(x^{-1})f(g^{-1}x\gamma)\pi(\gamma)\xi\, dgdx.$$

Or,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n \rho(x^{-1}g)v_i\otimes v_i^*\big(\rho(g^{-1}x)\rho(\gamma)v\big)\pi(\gamma)\xi &= \sum_{i=1}^n v_i\otimes v_i^*\big(\rho(\gamma)v\big)\pi(\gamma)\xi\\ &= \rho(\gamma)v\otimes\pi(\gamma)\xi.\end{aligned}$$

Ceci implique,

$$\beta\circ(\rho\otimes\pi')(p_G^n)\circ\alpha(v\otimes\xi) = \sum_{\gamma\in\Gamma}\int_{G\times G} p_G^n(g)f(x^{-1}g^{-1})f(x\gamma)(\rho\otimes\pi)(\gamma)(v\otimes\xi)dxdg.$$

Posons, pour $\gamma\in\Gamma$ et $n\in\mathbb{N}$,

$$p_\Gamma^n(\gamma) = \int_{G\times G} p_G^n(g)f(x^{-1}g^{-1})f(x\gamma)dxdg.$$

La suite $(p_\Gamma^n)_n$ appartient à $C_c(\Gamma)$ et elle converge dans $\mathcal{A}^\rho(\Gamma)$ car :

$$\|p_\Gamma^n\|_{\mathcal{A}^\rho(\Gamma)} = \sup_{(\pi,H)}\|\beta\circ(\rho\otimes\pi')(p_G^n)\circ\alpha\|_{\mathcal{L}(V\otimes H)},$$

où le supremum est pris parmi les représentations π unitaires de Γ et π' est la représentation de G induite de π.
Donc,

$$\|p_\Gamma^n\|_{\mathcal{A}^\rho(\Gamma)} \leq \sup_{(\pi,H)} \max(\|\beta \circ \rho(p_G^n) \circ \alpha\|_{\mathrm{End}(V)}, \|\beta \circ (\rho \otimes \pi_1')(p_G^n) \circ \alpha\|_{\mathcal{L}(V \otimes H_1')}),$$

où on a écrit $\pi' = \pi_0' \oplus \pi_1'$ avec π_0' équivalente à 1_G et π_1' ne contenant pas 1_G. Mais $\lim_{n\to\infty} \beta \circ \rho(p_G^n) \circ \alpha = \mathrm{Id}_V$ et $\lim_{n\to\infty} \beta \circ (\rho \otimes \pi_1')(p_G^n) \circ \alpha = 0$, donc la suite $(p_\Gamma^n)_n$ est une suite de Cauchy pour la norme $\|\|_{\mathcal{A}^\rho(\Gamma)}$.

Soit p_Γ la limite de $(p_\Gamma^n)_n$ dans $\mathcal{A}^\rho(\Gamma)$.
On a alors l'égalité :

$$(\rho \otimes \pi)(p_\Gamma) = \beta \circ (\rho \otimes \pi')(p_G) \circ \alpha.$$

Comme on a que $\alpha(V \otimes H^\Gamma) \subset V \otimes (H')^G$, $\beta(V \otimes (H')^G) \subset V \otimes H^\Gamma$ et que de plus $\alpha \circ \beta = \mathrm{Id}_{V \otimes (H')^G}$ et $\beta \circ \alpha = \mathrm{Id}_{V \otimes H^\Gamma}$, alors $(\rho \otimes \pi)(p_\gamma)$ est bien la projection orthogonale de $V \otimes H$ sur le sous-espace $V \otimes H^\Gamma$.

Montrons maintenant qu'il existe une fonction f à support compact sur G et vérifiant l'équation (1.1.1).
Soit $p : G \to G/\Gamma$ la projection canonique. On doit montrer qu'il existe une fonction f continue à support compact telle que, pour tout $x \in G/\Gamma$,

$$\sum_{g \in p^{-1}(x)} f(g)\rho(g) = \mathrm{Id}_V.$$

Soit $(U_i)_{i=1,\dots,q}$ un recouvrement ouvert de G/Γ (que l'on peut prendre fini car G/Γ est compact) tel que $p^{-1}(U_i)$ soit homéomorphe à $U_i \times \Gamma$ et soient, pour tout $i = 1, \dots, q$, $s_i : p^{-1}(U_i) \to U_i \times \Gamma$ les homéomorphismes correspondants. Comme ρ est une représentation irréductible de Γ, l'ensemble des $\rho(\gamma)$ avec γ parcourant Γ, engendre $\mathrm{End}(V)$ (théorème de Burnside [Lan02, Chapter XVII, Corollary 3.3]) ; si m est la dimension de V, on peut trouver un sous-ensemble Δ de Γ de cardinal m^2 tel que l'ensemble $\{\rho(\gamma) | \gamma \in \Delta\}$ forme une base de $\mathrm{End}(V)$. Il est clair alors que pour tout $i = 1, \dots, q$, il existe une fonction continue à support compact $f_i : U_i \times \Gamma \to \mathbb{C}$ telle que

$$\sum_{\gamma \in \Delta} f_i(u, \gamma)\rho(\gamma) = \rho(u^{-1}),$$

pour tout $u \in U_i$.
Pour tout $i = 1, \dots, q$, soit $\tilde{f}_i = f_i \circ s_i$ et soit $(\delta_i)_{i=1,\dots,q}$ une partition de l'unité

associée à $(U_i)_{i=1,\dots,q}$.
On pose pour tout $g \in G$,

$$f(g) = \sum_{i=1}^{q} (\delta_i \circ p)(g) \tilde{f}_i(g).$$

Comme $\tilde{f}_i$ appartient à $C_c(p^{-1}(U_i))$ pour tout i, alors $(\delta_i \circ p)\tilde{f}_i$ est aussi à support compact sur $p^{-1}(U_i)$ et la fonction f ainsi définie est à support compact sur G et vérifie l'équation (1.1.1).

□

1.2 Cas des groupes de Lie semi-simples

Tout au long de cette section G sera la composante connexe des points réels d'un groupe algébrique simplement connexe (c'est-à-dire que tout revêtement algébrique de G est isomorphe à G) de façon à ce que G soit produit direct de ses facteurs simples [Mar91, Proposition I.1.4.10]. On suppose en plus que tout facteur direct simple de G est soit de rang au moins 2, soit localement isomorphe à $Sp(n,1)$ pour $n \geq 2$ ou à $F_{4(-20)}$. Le groupe G a alors la propriété (T) de Kazhdan usuelle (c'est-à-dire que 1_G est isolée dans le dual unitaire de G) [dlHV89] et vérifie, en fait, une propriété plus forte de décroissance uniforme de coefficients de matrice de représentations unitaires [Cow79].
Soit $\rho : G \to \mathrm{Aut(V)}$ une représentation irréductible de dimension finie de G dans un espace vectoriel complexe V de dimension m. On considère le complexifié $G(\mathbb{C})$ de G et le complexifié de l'algèbre de Lie de G, $\mathfrak{g}$, que l'on note $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$. On notera de la même façon la représentation de $\mathfrak{g}$ définie par ρ sur V et ρ elle même. Soit $\mathfrak{u}$ une forme réelle compacte de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ compatible avec $\mathfrak{g}$ et soit U le sous-groupe de Lie connexe de $G(\mathbb{C})$ qui a pour algèbre de Lie $\mathfrak{u}$. Le groupe U est un sous-groupe compact maximal de $G(\mathbb{C})$ qui est invariant par la conjugaison complexe sur $G(\mathbb{C})$ [Kna02]. Soit K le sous-groupe compact maximal de G donné par $U \cap G$. On considère sur V un produit hermitien invariant par l'action de U (unique à constante près car V est irréductible), c'est-à-dire tel que $\rho_{\mathbb{C}}(U)$ soit contenu dans les matrices unitaires de $\mathrm{GL}(V)$, où $\rho_{\mathbb{C}}$ est le complexifié de ρ. Pour un élément $M \in \mathrm{End}(V)$, notons M^* son adjoint par rapport à ce produit hermitien.

On considère toujours la norme d'opérateur sur $\mathrm{End}(V)$ que l'on notera $\|.\|_{\mathrm{End}(V)}$ et une mesure de Haar sur G, dg pour $g \in G$.
Soit $\omega : G \to \mathrm{Aut}(V')$ une représentation fidèle de G qui contient ρ et telle que V' soit muni d'un produit hermitien de sorte que $\omega_{\mathbb{C}}(U)$ soit contenu dans le groupe unitaire de $\mathrm{GL}(V')$. On définit une longueur l sur G (c'est-à-dire une fonction sur G

à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ telle que $l(1) = 0$, $l(gh) \leq l(g) + l(h)$ et $l(g) = l(g^{-1})$, $\forall g, h \in G$) de la façon suivante :

$$l(g) = \log(\max(\|\omega(g)\|_{\mathrm{End}(V)}, \|\omega(g^{-1})\|_{\mathrm{End}(V)})), \forall g \in G.$$

Cette longueur définit une semi-métrique d sur G donnée par $d(g, x) = l(g^{-1}x)$, pour $g, x \in G$. Soit $B_q = \{g \in G | l(g) \leq q\}$ pour tout $q \in \mathbb{N}$.

Le but de cette section est de démontrer que le groupe G a la propriété (T) tordue par ρ.

Soient $\mathcal{A}^\rho(G)$, $\mathcal{A}'_G$ et $\mathcal{A}''_G$ définies comme dans la section précédente que l'on note $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$ et $\mathcal{A}'$ respectivement pour simplifier les notations. Soit Θ le morphisme d'algèbres de Banach

$$\Theta : \mathcal{A} \to \mathcal{A}' \oplus \mathcal{A}''.$$

Théorème 1.2.1. *Le morphisme d'algèbres de Banach Θ est un isomorphisme.*

Remarque 1.2.2. Si on munit $\mathcal{A}' \oplus \mathcal{A}''$ de la norme donnée par : $\|(x, y)\| = \max(\|x\|_{\mathcal{A}'}, \|y\|_{\mathcal{A}''})$ pour $x \in \mathcal{A}'$, $y \in \mathcal{A}''$, alors Θ est un morphisme d'algèbres de Banach isométrique et donc pour prouver le théorème il suffit de démontrer que l'image est dense. En effet, toute représentation unitaire de G, (π, H_π), peut s'écrire comme somme directe de deux sous-représentations : la partie de π qui ne contient pas de vecteurs invariants non nuls (et donc qui ne contient pas 1_G) que l'on va noter π_1, et la partie de π qui est multiple de 1_G, notée π_0. Alors, pour tout $f \in C_c(G)$,

$$\begin{aligned}
\|f\|_{\mathcal{A}} &= \sup_{\pi}(\max(\|(\rho \otimes \pi_1)(f)\|_{\mathcal{L}(V \otimes H_{\pi_1})}, \|\rho \otimes \pi_0(f)\|_{\mathcal{L}(V \otimes H_{\pi_0})})) \\
&= \max(\sup_{\pi \not\supseteq 1_G} \|(\rho \otimes \pi)(f)\|_{\mathcal{L}(V \otimes H)}, \|\rho(f)\|_{\mathrm{End}(V)}) \\
&= \|\Theta(f)\|_{\mathcal{A}' \oplus \mathcal{A}''}.
\end{aligned}$$

Remarque 1.2.3. On remarque aussi que ρ définit une représentation irréductible et fidèle, car isométrique, de $\mathcal{A}''$ dans $\mathrm{End}(V)$. On a alors que $\mathcal{A}'' = \mathrm{End}(V)$ (Théorème de Burnside cf. [Lan02, Chapter XVII, Corollary 3.3]).

On a le lemme suivant :

Lemme 1.2.4. *Il existe une matrice E non nulle dans $\mathrm{End}(V)$ et il existe une suite de fonctions continues à support compact sur G, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que, $\lim_{n \to \infty} \rho(f_n) = E$ et $\lim_{n \to \infty} \sup_{\pi} \|(\rho \otimes \pi)(f_n)\|_{\mathcal{L}(V \otimes H_\pi)} = 0$, où le supremum est pris parmi les représentations unitaires de G qui ne contiennent pas la représentation triviale.*

Montrons d'abord que le lemme 1.2.4 implique le Théorème 1.2.1.
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite donnée par le lemme 1.2.4 et $E \in \mathrm{End}(V)$ non nulle telle que $\lim_{n\to\infty} \rho(f_n) = E$. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{A}$ car

$$\|f_n\|_{\mathcal{A}} = \max(\|\rho(f_n)\|_{\mathrm{End}(V)}, \sup_{\pi \not\supseteq 1_G} \|(\rho\otimes\pi)(f_n)\|_{\mathcal{L}(V\otimes H_\pi)}),$$

et comme $\lim_{n\to\infty} \sup_{\pi\not\supseteq 1_G} \|(\rho\otimes\pi)(f_n)\|_{\mathcal{L}(V\otimes H_\pi)} = 0$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy pour $\|.\|_{\mathcal{A}}$ et donc elle converge dans $\mathcal{A}$. Soit p la limite de f_n quand n tend vers l'infini. On a que $\rho(p) = E$ et pour toute représentation unitaire π de G, qui n'a pas de vecteurs invariants non nuls, $(\rho\otimes\pi)(p) = 0$, donc $\Theta(p) = (0, E)$. Soit $\mathcal{S}$ l'idéal bilatère engendré par p dans $\mathcal{A}$ et Q l'idéal bilatère engendré par E dans $\mathrm{End}(V)$. Comme ρ définit un morphisme surjectif de $\mathcal{A}$ vers $\mathrm{End}(V)$ (cf. Remarque 1.2.3), on a que $\Theta(\mathcal{S})$ contient $0 \oplus Q$. Or, tout idéal bilatère non nul de $\mathrm{End}(V)$ est égal à $\mathrm{End}(V)$ tout entier. On a donc que $0 \oplus \mathrm{End}(V) = 0 \oplus \mathcal{A}''$ est contenu dans $\Theta(\mathcal{S})$ et donc dans $\Theta(\mathcal{A})$. Ceci montre alors que $\Theta(\mathcal{A}) = \mathcal{A}' \oplus \mathcal{A}''$, car $\mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ est d'image dense, et donc que Θ est un isomorphisme en tenant compte de la remarque 1.2.2.

Démonstration. On va maintenant montrer le lemme 1.2.4. On remarque d'abord le lemme suivant :

Lemme 1.2.5. *Soit f une fonction à support compact sur G et (π, H_π) une représentation unitaire de G. On a l'inégalité suivante :*

$$\|(\rho\otimes\pi)(f)\|_{\mathcal{L}(V\otimes H_\pi)} \leq \sup m^2 \int_G |f(g)|\|\rho(g)\|_{\mathrm{End}(V)}|\langle\pi(g)\xi,\eta\rangle|dg, \tag{1.2.1}$$

où le supremum est pris parmi les vecteurs unitaires ξ, η de H_π.

Démonstration. Soit $\{v_i\}_{i=1,..,m}$ une base orthonormale de V. On a alors les inégalités

suivantes :

$$\begin{aligned}
\|(\rho\otimes\pi)(f)\|_{\mathcal{L}(V\otimes H_\pi)} &\leq \sup_{\substack{x,y\in V\otimes H_\pi\\ \|x\|=\|y\|=1}} |\langle \int_G f(g)(\rho\otimes\pi)(g)dgx, y\rangle| \\
&\leq \sup_{\xi_j,\eta_k\in H_\pi} |\Big\langle \big(\int_G f(g)\rho(g)\otimes\pi(g)dg\big)(\sum_{j=1}^m v_j\otimes\xi_j), (\sum_{k=1}^m v_k\otimes\eta_k)\Big\rangle| \\
&\leq \sup_{\xi_j,\eta_k\in H_\pi} \int_G |f(g)| \sum_{j,k=1}^m |\langle\rho(g)v_j, v_k\rangle||\langle\pi(g)\xi_j,\eta_k\rangle|dg \\
&\leq \sup_{\xi_j,\eta_k\in H_\pi} \int_G |f(g)|\|\rho(g)\|_{\mathrm{End}(V)} \sum_{j,k=1}^m |\langle\pi(g)\xi_j,\eta_k\rangle|dg,
\end{aligned}$$

où les supremums sont pris parmi des vecteurs $\xi_j,\eta_k\in H_\pi$, pour $j,k\in\{1,...,m\}$, tels que $\sum_{j=1}^m\|\xi_j\|^2=1$ et $\sum_{k=1}^m\|\eta_k\|^2=1$.
Or, pour tous $\xi_j,\eta_k\in H_\pi$ avec $j,k\in\{1,..,m\}$ tels que $\sum_{j=1}^m\|\xi_j\|^2=1$ et $\sum_{k=1}^m\|\eta_k\|^2=1$, si on pose $\xi'_j:=\frac{\xi_j}{\|\xi_j\|}$ et $\eta'_k:=\frac{\eta_k}{\|\eta_k\|}$,

$$\begin{aligned}
&\int_G |f(g)|\|\rho(g)\|_{\mathrm{End}(V)} \sum_{j,k=1}^m |\langle\pi(g)\xi_j,\eta_k\rangle|dg \\
&\qquad = \int_G |f(g)|\|\rho(g)\|_{\mathrm{End}(V)} \sum_{j,k=1}^m \|\xi_j\|\|\eta_k\||\langle\pi(g)\xi'_j,\eta'_k\rangle|dg \\
&\qquad \leq \sum_{j,k=1}^m \|\xi_j\|\|\eta_k\| \sup_{\substack{\xi,\eta\in H_\pi\\ \|\xi\|=\|\eta\|=1}} \int_G |f(g)|\|\rho(g)\|_{\mathrm{End}(V)}|\langle\pi(g)\xi,\eta\rangle|dg \\
&\qquad \leq m^2 \sup_{\substack{\xi,\eta\in H_\pi\\ \|\xi\|=\|\eta\|=1}} \int_G |f(g)|\|\rho(g)\|_{\mathrm{End}(V)}|\langle\pi(g)\xi,\eta\rangle|dg,
\end{aligned}$$

d'où,

$$\|(\rho\otimes\pi)(f)\|_{\mathcal{L}(V\otimes H_\pi)} \leq m^2 \sup_{\substack{\xi,\eta\in H_\pi\\ \|\xi\|=\|\eta\|=1}} \int_G |f(g)|\|\rho(g)\|_{\mathrm{End}(V)}|\langle\pi(g)\xi,\eta\rangle|dg.$$

□

On veut utiliser la décroissance uniforme des coefficients de matrice des représentations unitaires, ne contenant pas la triviale, donnée par le théorème suivant (voir [Cow79, Corollaire 2.4.3 et Théorème 2.5.3], [How82, corollaire 2.7 et proposition 6.3], [Oh02, proposition 2.7 et théorème 4.11]) :

Théorème 1.2.6 (M. Cowling)**.** *Soit G un groupe de Lie réel semi-simple connexe à centre fini tel que, tout sous-groupe distingué $G_i \neq 1$ soit tel que* $\mathrm{rang}_{\mathbb{R}}(G_i) \geq 2$, *ou $G_i = Sp(n,1)$ pour $n \geq 2$, ou $G_i = F_{4(-20)}$ et soit K un sous-groupe compact maximal de G. Alors il existe une fonction continue K-bi-invariante ϕ sur G à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ qui tend vers zéro à l'infini et telle que, pour toute représentation unitaire π de G dans un espace de Hilbert H_π, qui ne contient pas de vecteurs invariants non nuls, et pour tous vecteurs unitaires ξ, η dans H_π, on a l'estimation suivante :*

$$\forall g \in G, |\langle \pi(g)\xi, \eta\rangle| \leqslant \phi(g)\delta_K(\xi)\delta_K(\eta)$$

où $\delta_K(v) = (\dim\langle Kv\rangle)^{1/2} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ et $\langle Kv\rangle$ est le sous-espace de V engendré par l'action de K sur v, pour $v \in H_\pi$.

On note $\widehat{K}$ l'ensemble des classes d'équivalence de représentations irréductibles de K.
On rappelle que toute représentation (μ, H_μ) de K s'écrit comme somme directe de représentations irréductibles. L'espace H_μ s'écrit alors comme une somme directe de la forme :

$$H_\mu = \bigoplus_{[\sigma]\in\widehat{K}} H_\sigma^{\oplus r_\sigma},$$

où $[\sigma]$ est la classe de la représentation (σ, H_σ) dans $\widehat{K}$ et r_σ est sa multiplicité dans la décomposition de μ.
Le sous-espace $H_\sigma^{\oplus r_\sigma}$ de H_μ est alors appelé la composante σ-*typique* de μ.
Si (σ, H_σ) est une représentation irréductible de dimension n_σ, la projection P_σ : $H_\mu \to H_\mu$ sur la partie σ-typique de μ est donnée par :

$$P_\sigma = n_\sigma \mu(\chi_{\sigma^*}) \tag{1.2.2}$$

où χ_σ est le caractère de σ et $\chi_{\sigma^*}(t) = \overline{\chi_\sigma(t)} = \chi_\sigma(t^{-1})$ est le caractère de sa représentation contragrédiente dans l'espace dual de H_σ (cf. [Ser78, Chapitre 2, Partie I]).

Soit $\mathcal{I} \subset \widehat{K}$ l'ensemble des K-types de V, c'est-à-dire l'ensemble des représentations irréductibles de K qui apparaissent dans la décomposition de $(\rho|_K, V)$ en somme directe de représentations irréductibles.

Pour toute représentation π de G, on note $\mathcal{J}_G(\pi)$ l'ensemble des K-types de π vue comme représentation de G. Avec cette notation $\mathcal{I} = \mathcal{J}_G(\rho)$.
En particulier, si π est une représentation de $G \times G$, on notera $\mathcal{J}_{G\times G}(\pi) \subset \widehat{K} \times \widehat{K}$ l'ensemble des $(K \times K)$-types de π vue comme représentation de $G \times G$.

On considère la représentation régulière $L \times R$ de $G \times G$ sur $C_c(G)$, qui est donnée par la formule :

$$L \times R : G \times G \to \mathcal{L}(C_c(G)),\ (L \times R)(t, t')f(g) = f(t^{-1}gt').$$

Définition 1.2.7. Soit f une fonction continue à support compact sur G. L'ensemble des K-types à gauche et à droite de f est l'ensemble des classes de représentations irréductibles de $K \times K$ qui apparaissent dans la décomposition de $f \in C_c(G)$ quand on décompose la représentation régulière $L \times R$, restreinte à $K \times K$, en somme directe de représentations irréductibles.

Lemme 1.2.8. *Il existe une fonction ϕ continue sur G, bi-invariante par K, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, qui tend vers zéro à l'infini et telle que pour toute fonction f continue à support compact sur G ayant des K-types à gauche et à droite contenus dans $\mathcal{J}_{G\times G}(\rho \otimes \rho^*)$ et pour toute représentation unitaire de G, π, sans vecteurs invariants non nuls, on a :*

$$\|(\rho \otimes \pi)(f)\|_{\mathcal{L}(V\otimes H_\pi)} \leq \sup_{\xi,\eta\in H_\pi} m^2 \int_G |f(g)| \|\rho(g)\|_{\mathrm{End}(V)} \phi(g)\delta_K(\xi)\delta_K(\eta)dg,$$

où le sup est pris parmi les vecteurs $\xi, \eta \in H_\pi$ unitaires ayant des K-types appartenant à $\mathcal{J}_G(\rho \otimes \rho^*)$.

Démonstration. On va d'abord montrer que le supremum dans l'inégalité (1.2.1) peut être pris parmi les vecteurs unitaires $\xi, \eta \in H_\pi$ ayant des K-types appartenant à $\mathcal{J}_G(\rho \otimes \rho^*)$.
Soit (μ, H_μ) une représentation unitaire de G et f une fonction continue à support compact sur G. On remarque tout d'abord que pour tout ξ,$\eta \in H_\mu$ et pour toute $\sigma \in \widehat{K}$, la projection du vecteur $\mu(f)\xi$ sur la composante σ-typique de H_μ est égale à

$$P_\sigma(\mu(f)\xi) = n_\sigma \mu(\chi_{\sigma^*} * f)\xi,$$

et $n_\sigma(\chi_{\sigma^*} * f)$ est exactement la projection de f sur la composante σ-typique de la représentation régulière gauche L de G sur $C_c(G)$. Donc $\chi_{\sigma^*} * f$ est non nul si et seulement si σ est un K-type à gauche de f. De même,

$$P_\sigma(\mu(f)^*\eta) = n_\sigma \mu(f * \chi_\sigma)^*\xi,$$

et $n_\sigma(f * \chi_\sigma)$ étant la projection de f sur la composante σ^*-typique de la représentation régulière droite R de G sur $C_c(G)$, il est non nul si et seulement si σ^* est un K-type à droite de f.

Soient $\mathcal{K}_{f,L}$ et $\mathcal{K}_{f,R^*}$ les deux sous-ensembles de $\widehat{K}$ définis par :

$$\mathcal{K}_{f,L} = \{\sigma \in \widehat{K} |\, \sigma \text{ est } K\text{-type à gauche de } f\}$$
$$\mathcal{K}_{f,R^*} = \{\sigma \in \widehat{K} |\, \sigma^* \text{est } K\text{-type à droite de } f\}.$$

Comme les projections P_σ sur les espaces σ-typiques sont des projections orthogonales (Lemme de Schur [Ser78]), alors :

$$\|\mu(f)\|_{\mathcal{L}(H_\mu)} = \sup_{z,y} |\langle \mu(f)z, y\rangle|,$$

où z et y parcourent les vecteurs unitaires de H_μ tels que l'ensemble des K-types de z est contenu dans $\mathcal{K}_{f,R^*}$ et l'ensemble des K-types de y est contenu dans $\mathcal{K}_{f,L}$.

Soit (π, H) une représentation unitaire de G. On considère le produit tensoriel $(\rho \otimes \pi, V \otimes H)$.
Supposons maintenant que les K-types à gauche de f soient contenus dans l'ensemble des K-types de V et les K-types à droite de f soient contenus dans l'ensemble des K-types de V^*. Alors, $\mathcal{K}_{f,L} \subset \mathcal{I}$ et comme

$$\mathcal{K}_{f,R^*} \subset \{\sigma \in \widehat{K} |\, \sigma^* \text{est } K\text{-type de } V^*\},$$

on a aussi que $\mathcal{K}_{f,R^*} \subset \mathcal{I}$. D'où l'inégalité,

$$\|(\rho \otimes \pi)(f)\|_{\mathcal{L}(V\otimes H)} \leq \sup_{z,y} |\int_G f(g)\langle(\rho \otimes \pi)(g)z, y\rangle dg|,$$

où le supremum est pris parmi les vecteurs unitaires z, $y \in V \otimes H$ ayant des K-types appartenant à l'ensemble des K-types de V.

De plus, si H' est le sous-espace vectoriel de H formé des vecteurs dont les K-types sont parmi les K-types de $V \otimes V^*$, tout vecteur de $H \otimes V$ dont les K-types sont parmi ceux de V appartient à $H' \otimes V$ (car $\mathrm{Hom}_K(V \otimes V^*, H) = \mathrm{Hom}_K(V, V \otimes H)$, où Hom_K désigne l'espace des morphismes de représentations K-invariants). Donc l'inégalité (1.2.1) devient :

$$\|(\rho \otimes \pi)(f)\|_{\mathcal{L}(V\otimes H)} \leq \sup_{\xi,\eta} m^2 \int_G |f(g)| \|\rho(g)\|_{\mathrm{End}(V)} |\langle \pi(g)\xi, \eta\rangle| dg,$$

où ξ et η sont des vecteurs unitaires de H qui ont des K-types appartenant à l'ensemble des K-types de $V \otimes V^*$, $\mathcal{J}_G(\rho \otimes \rho^*)$.

Considérons une fonction ϕ continue, K-bi-invariante sur G et à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, qui tend vers zéro à l'infini, donnée par le théorème 1.2.6. Alors on a pour toute représentation unitaire π qui ne contient pas la triviale :

$$\|(\rho \otimes \pi)(f)\|_{\mathcal{L}(V \otimes H)} \leq m^2 \sup_{\xi,\eta} \int_G |f(g)| \|\rho(g)\|_{\mathrm{End}(V)} \phi(g) \delta_K(\xi) \delta_K(\eta) dg,$$

où ξ et η parcourent les vecteurs unitaires de H qui sont K-finis et qui ont des K-types contenus dans $\mathcal{J}_G(\rho \otimes \rho^*)$.

□

On cherche maintenant une suite de fonctions $f_n \in C_c(G)$ ayant des K-types à gauche et à droite contenus dans $\mathcal{J}_{G \times G}(\rho \otimes \rho^*)$. Pour simplifier la notation, on note $\mathcal{J} := \mathcal{J}_{G \times G}(\rho \otimes \rho^*)$. On a le lemme suivant :

Lemme 1.2.9. *Il existe une matrice non nulle $E \in \mathrm{End}(V)$ et il existe une suite de fonctions $f_n \in C_c(G)$ ayant des K-types à gauche et à droite contenus dans $\mathcal{J}$ et une constante positive D telles que, pour tout entier n, le support de f_n soit contenu dans $G \backslash B_n$, $\lim_{n \to \infty} \rho(f_n) = E$ et*

$$\int_G |f_n(g)| ||\rho(g)||_{\mathrm{End}(V)} dg \leq D.$$

Démonstration. On considère la décomposition de Cartan de $\mathfrak{g}$ donnée par la forme réelle compacte $\mathfrak{u}$. $\mathfrak{g}$ s'écrit alors

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p},$$

où $\mathfrak{k} = \mathfrak{g} \cap \mathfrak{u}$ et $\mathfrak{p} = \mathfrak{g} \cap i\mathfrak{u}$, et $\mathfrak{p}$ est non nul car G n'est pas compact. Alors pour tout $x \in \mathfrak{u}$, $\rho(x)$ est une matrice anti-hermitienne et pour tout $x \in i\mathfrak{u}$, $\rho(x)$ est hermitienne.
Soit $X \in \mathfrak{p}$ non nul et $a := \exp(X)$. Par conséquent $\rho(a) = \exp(\rho(X))$ est une matrice hermitienne (donc diagonalisable dans une base orthonormale de V) à valeurs propres strictement positives que l'on notera, sans tenir compte des multiplicités, $\nu_1, ..., \nu_m$, où $\nu_i \in \mathbb{R}_+^*$ pour tout $1 \leq i \leq m$.
De plus, comme ω est une représentation fidèle de G qui envoie U dans les matrices

unitaires de $\mathrm{End}(V')$, $\omega(X)$ est une matrice hermitienne non nulle. On a que $l(\exp(tX)) = t\|\omega(X)\|_{\mathrm{End}(V')}$, car $\|\omega(\exp(tX))\|_{\mathrm{End}(V')} = \exp(t\|\omega(X)\|_{\mathrm{End}(V')})$, pour tout réel t. Quitte à remplacer a par a^k pour k un entier assez grand, on peut même supposer $l(a) \geq 2$.
Posons $a_n = a^n$, pour tout entier positif n. On a alors que $l(a_n) = n\|\omega(X)\|_{\mathrm{End}(V')} = nl(a)$, donc $l(a_n) \geq 2n$ et a_n appartient à $G\backslash B_n$.
De plus on a, pour tout n, $\rho(a_n) = \rho(a)^n$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ dans la même base que $\rho(a)$ et ses valeurs propres sont ${\nu_1}^n, ..., {\nu_m}^n$. Comme $\|\rho(a_n)\|_{\mathrm{End}(V)} = \max\limits_{1\leq i\leq m}(\nu_i^n)$ et que $\nu_i > 0$, pour tout $i = 1...m$, on a que $\frac{\rho(a_n)}{\|\rho(a_n)\|_{\mathrm{End}(V)}}$ tend vers une matrice de $\mathrm{End}(V)$ non nulle, que l'on note E'.

Soit maintenant f une fonction continue positive à support compact sur G telle que le support de f soit contenu dans $B_1 \cap \{g \in G|\ \|\rho(g) - \mathrm{Id}\|_{\mathrm{End}(V)} \leq \frac{1}{2}\}$ et telle que $\int_G f(g)dg = 1$.
Soit f_n dans $C_c(G)$ définie de la façon suivante : pour tout g dans G

$$f_n(g) = \frac{f(a_n^{-1}g)}{\|\rho(a_n)\|_{\mathrm{End}(V)}}.$$

On a donc que $\mathrm{supp} f_n \subset a_n(\mathrm{supp} f)$ et f_n est dans $C_c(G)$, pour tout n. De plus, on a que pour tout g appartenant au support de f_n,

$$l(g) \geq l(a_n) - 1,$$

donc le support de f_n est contenu dans $G\backslash B_n$.
D'autre part, on voit facilement que

$$\rho(f_n) = \frac{\rho(a_n)}{\|\rho(a_n)\|_{\mathrm{End}(V)}} \int_G f(g)\rho(g)dg.$$

Posons $J := \int_G f(g)\rho(g)dg$. J est une matrice inversible de $\mathrm{End}(V)$. En effet, on a que

$$\begin{aligned}
\|\int_G f(g)\rho(g)dg - \mathrm{Id}_{\mathrm{End}(V)}\|_{\mathrm{End}(V)} &\leq \int_G f(g)\|\rho(g) - \mathrm{Id}_{\mathrm{End}(V)}\|_{\mathrm{End}(V)}dg \\
&\leq \sup_{g\in \mathrm{supp}(f)} \|\rho(g) - \mathrm{Id}_{\mathrm{End}(V)}\|_{\mathrm{End}(V)} \\
&\leq \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Par conséquent, $\rho(f_n)$ tend vers $E'J$ qui est encore une matrice non nulle de $\mathrm{End}(V)$. Par ailleurs, on a que,

$$\begin{aligned}
&\int_G f_n(g)\|\rho(g)\|_{\mathrm{End}(V)}dg \\
&\qquad \leq \frac{1}{\|\rho(a_n)\|_{\mathrm{End}(V)}}\int_G f(g)\|\rho(a_n)\|_{\mathrm{End}(V)}\|\rho(g)\|_{\mathrm{End}(V)}dg \\
&\qquad \leq \int_G f(g)\|\rho(g)\|_{\mathrm{End}(V)}dg \\
&\qquad \leq \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

On a donc trouvé une suite de fonctions f_n dans $C_c(G)$, une matrice $E = E'J$ dans $\mathrm{End}(V)$ non nulle et une constante D tels que $\lim_{n\to\infty}\rho(f_n) = E$, $\int_G |f_n(g)|\|\rho(g)\|_{\mathrm{End}(V)}dg \leq D$ et tels que le support de f_n, pour tout n, soit contenu dans $G\backslash B_n$. On va montrer qu'on peut prendre les fonctions f_n ayant des K-types, à droite et à gauche, contenus dans $\mathcal{J}$.

Soit une fonction $f \in C_c(G)$. D'après la formule (1.2.2), qui donne la projection sur les composantes σ-typiques d'une représentation de G, pour $\sigma \in \widehat{K}$, la fonction $\tilde{f}$ définie par la formule suivante :

$$\begin{aligned}
\tilde{f} &= \sum_{\phi_1,\phi_2\in\mathcal{I}} n_{\phi_1\otimes\phi_2^*}(L\times R)(\chi_{\phi_1^*\otimes\phi_2})(f) \\
&= \sum_{\phi_1,\phi_2\in\mathcal{I}} n_{\phi_1}\chi_{\phi_1^*} * f * n_{\phi_2}\chi_{\phi_2^*}.
\end{aligned}$$

est la projection de f sur les $K\times K$-types de $V\otimes V^*$.

On utilise ceci pour obtenir, pour tout n, une fonction $\tilde{f}_n$ qui est donnée par la projection de f_n sur les $K\times K$-types de $V\otimes V^*$. On a alors une suite de fonctions $(\tilde{f}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ayant des K-types à gauche et à droite appartenant à $\mathcal{J}$.

On va maintenant vérifier que la nouvelle suite satisfait les conditions du lemme 1.2.9.

L'application $\rho : C_c(G) \to \mathrm{End}(V) \backsimeq V\otimes V^*$ est un morphisme de représentations de $G\times G$ et, pour tous t, t' dans G le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
C_c(G) \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "(L\times R)(t,t')"'] & V\otimes V^* \arrow[d, "(\rho\otimes\rho^*)(t,t')"] \\
C_c(G) \arrow[r, "\rho"'] & V\otimes V^*
\end{tikzcd}$$

Par conséquent, comme $\lim_{n\to\infty} \rho(f_n) = E$, $\lim_{n\to\infty} \rho(\tilde{f}_n)$ est égal à la projection de E sur les $(K \times K)$-types de $V \otimes V^*$, et cette projection n'est rien d'autre que E elle même, c'est à dire que $\lim_{n\to\infty} \rho(\tilde{f}_n) = E$.
De plus, on a que,

$$\begin{aligned}
&\int_G |\tilde{f}_n(g)| \|\rho(g)\|_{\mathrm{End}(V)} dg \\
&\qquad \leq \int_G \sum_{\phi_1,\phi_2 \in I} n_{\phi_1}.n_{\phi_2^*} \int_{K\times K} |\chi_{\phi_1^*}(t)\chi_{\phi_2}(t')| |f_n(t^{-1}gt')| \|\rho(g)\| dt dt' dg \\
&\qquad \leq \sum_{\phi_1,\phi_2 \in I} n_{\phi_1}.n_{\phi_2^*} \int_{K\times K} |\chi_{\phi_1^*}(t)\chi_{\phi_2}(t')| \int_G |f_n(t^{-1}gt')| \|\rho(g)\| dg dt dt' \\
&\qquad \leq D \sum_{\phi_1,\phi_2 \in I} n_{\phi_1}.n_{\phi_2^*} \int_{K\times K} |\chi_{\phi_1^*}(t)\chi_{\phi_2}(t')| dt dt' \\
&\qquad \leq D',
\end{aligned}$$

où D' est une constante qui ne dépend pas de n. Comme le support de $\tilde{f}_n$ est contenu dans $K(\mathrm{supp} f_n)K$ pour tout n, et les B_n sont invariants par l'action à gauche et à droite de K, le support de $\tilde{f}_n$ est contenu dans $G \backslash B_n$. □

Soient maintenant $E \in \mathrm{End}(V)$ non nulle et $f_n \in C_c(G)$ tels que $\lim_{n\to\infty} \rho(f_n) = E$, avec le support de f_n contenu dans $G\backslash B_n$, f_n ayant des K-types à gauche et à droite contenus $\mathcal{J}$, et tels que $\int_G |f_n(g)| \|\rho(g)\|_{\mathrm{End}(V)} dg \leq D$, pour une constante uniforme D.
D'après le lemme 1.2.8, si π est une représentation unitaire de G qui ne contient pas la triviale, on a que, pour tout entier naturel n,

$$\|(\rho \otimes \pi)(f_n)\|_{\mathcal{L}(V\otimes H)} \leq m^2 \sup_{\xi,\eta} \int_G |f_n(g)| \|\rho(g)\|_{\mathrm{End}(V)} \phi(g) \delta_K(\xi) \delta_K(\eta) dg,$$

où ξ et η parcourent les vecteurs unitaires de H qui ont des K-types contenus dans l'ensemble des K-types de $V \otimes V^*$ et ϕ est une fonction continue et positive sur G qui s'annule à l'infini et qui ne dépend ni de f_n ni de π.
De plus, on a une constante positive D telle que $\int_G |f_n(g)| \|\rho(g)\|_{\mathrm{End}(V)} \leq D$ et, comme le support de f_n est contenu dans $G\backslash B_n$, l'inégalité au-dessus s'écrit :

$$\|(\rho \otimes \pi)(f_n)\|_{\mathcal{L}(V\otimes H)} \leq m^2 D \sup_{\xi,\eta} \sup_{g\in G\backslash B_n} \phi(g) \delta_K(\xi) \delta_K(\eta), \tag{1.2.3}$$

où ξ et η parcourent les vecteurs unitaires de H qui ont des K-types appartenant à l'ensemble des K-types de $V \otimes V^*$, ensemble qui ne dépend pas de n.

On veut montrer que le membre de droite de cette inégalité tend vers zéro quand n tend vers l'infini. Pour ceci, on a besoin du lemme suivant qui assure que, pour tout $v \in H$ ayant des K-types contenus dans un ensemble fixé S, la dimension du sous-espace de H engendré par l'action de K sur v, que l'on note $\delta_K(v)$, est bornée en fonction de S.

Lemme 1.2.10. *Soit $v \in W$, où (μ, W) est une représentation de K. Alors,*

$$\delta_K(v) = \dim\langle Kv\rangle \leq \sum_{[\sigma]} (\dim \sigma)^2,$$

où la somme est prise parmi les $[\sigma] \in \widehat{K}$ qui sont des K-types de v.

Démonstration. Soit $C_r^*(K)$ la C*-algèbre réduite de K. Toute représentation irréductible σ de K, apparaît $\dim(\sigma)$ fois dans la décomposition de la représentation régulière de K en somme directe de représentations irréductibles (cf. [Ser78]). En fait, l'application

$$\begin{aligned} C_r^*(K) &\xrightarrow{\simeq} \bigoplus_{[\sigma]\in\widehat{K}} \mathrm{End}(H_\sigma) \\ f &\mapsto (\sigma(f))_\sigma, \end{aligned}$$

est un isomorphisme de C*-algèbres. Soit ψ l'application continue de $C_r^*(K)$ vers W qui envoie f dans $\mu(f)v \in \langle Kv\rangle$. On a donc que,

$$\begin{aligned} \langle Kv\rangle &= \psi(C_r^*(K)) \\ &= \psi(\bigoplus_{[\sigma]\in\widehat{K},} \mathrm{End}(H_\sigma)), \end{aligned}$$

où la somme directe est prise parmi les $[\sigma]$ qui sont des K-types de v.
On a alors que

$$\dim\langle Kv\rangle \leq \sum_{[\sigma]} (\dim \sigma)^2,$$

où la somme est prise parmi les $[\sigma] \in \widehat{K}$ qui sont des K-types de v. □

Maintenant on est prêt pour conclure. Le membre de droite de (1.2.3) tend vers zéro quand n tend vers l'infini, car la fonction ϕ tend vers zéro à l'infini, et donc la norme de $(\rho \otimes \pi)(f_n)$ tend vers zéro quand n tend vers l'infini.
On a donc trouvé une matrice E non nulle dans $\mathrm{End}(V)$ et une suite de fonctions f_n dans $C_c(G)$ tels que $\lim_{n\to\infty} \rho(f_n) = E$ et le supremum sur toutes les représentations

unitaires π de G, qui ne contiennent pas la triviale, de $\|(\rho\otimes\pi)(f_n)\|_{\mathcal{L}(V\otimes H_\pi)}$ tend vers zéro quand n tend vers l'infini. Ceci termine la démonstration du lemme 1.2.4, donc celle du théorème 1.2.1. Par la proposition 1.1.7, G a alors la propriété (T) tordue par ρ, ce qui termine la démonstration du théorème 1.0.2 énoncé dans l'introduction. $\square$

Chapitre 2

Morphisme de Baum-Connes tordu

Dans le chapitre 1, étant donnés un groupe localement compact G et une représentation de dimension finie de G, (ρ, V), nous avons défini des analogues tordus par la représentation ρ de deux C^*-algèbres de groupe associées à G : la C^*-algèbre maximale et la C^*-algèbre réduite. Ces nouvelles algèbres tordues, qui ne sont plus des C^*-algèbres si le groupe G n'est pas compact mais qui sont toujours des algèbres de Banach, apparaissaient de façon très naturelle dans l'étude de l'isolement de ρ dans un ensemble de représentations de la forme $\rho \otimes \pi$, où π parcourt un ensemble de représentations unitaires de G. Nous avons alors montré, dans certains cas, que, comme dans le cas des C^*-algèbres de groupe, le fait d'avoir la propriété (T) implique l'existence d'un idempotent dans l'algèbre tordue maximale qui distingue la K-théorie des deux algèbres tordues par rapport à la même représentation ρ. Il est naturel alors de vouloir calculer la K-théorie de ces algèbres tordues. Dans ce chapitre, nous allons construire les outils qui, dans le chapitre 3, vont nous permettre de calculer la K-théorie des algèbres tordues pour une large classe de groupes vérifiant la conjecture de Baum-Connes.

2.1 Rappels et notations

Dans cette section, pour fixer les notations, nous allons rappeler quelques définitions, que nous allons utiliser plus tard. On commence par donner la définition d'une action propre d'un groupe localement compact ainsi que quelques exemples. Ensuite, nous allons donner les définitions ainsi que les propriétés principales de la KK-théorie équivariante de Kasparov et nous allons terminer par rappeler la définition et les propriétés principales de la KK-théorie banachique de Lafforgue. Toutes les C^*-algèbres que l'on considère sont des C^*-algèbres séparables et les groupes localement compacts sont dénombrables à l'infini.

2.1.1 Actions propres

Soit G un groupe localement compact. Un espace topologique séparé muni d'une action par homéomorphismes de G est appelé un *G-espace*.

Définition 2.1.1. L'action de G sur un G-espace X est *propre*, si l'application

$$\begin{aligned} G \times X &\to X \times X \\ (g, x) &\mapsto (g.x, x) \end{aligned}$$

est une application propre, c'est-à-dire que la pre-image d'un compact est compacte. Dans ce cas, on dit que X est un espace *G-propre*.

De façon équivalente, si X est un G-espace localement compact alors, l'action de G sur X est propre, si et seulement si, pour tous sous-ensembles compacts K et L de X, l'ensemble

$$\{g \in G | g.K \cap L \neq \emptyset\}$$

est relativement compact dans G.

Exemples 2.1.2.
1. Si $p : X \to Y$ est un recouvrement localement trivial de groupe G, alors l'action de G sur X est propre (et libre).
2. Si G est compact, alors toute action de G est propre.
3. Si G est groupe de Lie connexe et K est un sous-groupe compact maximal de G, alors l'action de G sur le quotient G/K est propre.

Espace classifiant pour les actions propres. Soit G un groupe localement compact.

Définition 2.1.3. Un espace G-propre X est *universel* si pour tout espace G-propre Y il existe une application continue G-équivariante de Y dans X unique à homotopie G-équivariante près.

Pour tout groupe localement compact G, un tel espace G-propre universel existe et est unique à homotopie G-équivariante près (cf. [BCH94], [KS03]). On le note $\underline{E}G$.

Exemples 2.1.4.
1. Si G un groupe compact, alors on peut prendre $\underline{E}G = \{pt\}$.
2. Si G est un groupe de Lie connexe, alors $\underline{E}G = G/K$, où K est un sous-groupe compact maximal.

3. Si G est un groupe discret et sans torsion (ou G est continu sans sous-groupes compacts), alors toute action de G propre est libre et elle définit alors un recouvrement de groupe G. Dans ce cas, $\underline{E}G = EG$, où EG est le recouvrement universel de l'espace classifiant des fibrés G-principaux, usuellement noté BG (cf. [Hus94]).

2.1.2 KK-théorie équivariante de Kasparov

Dans une série d'articles (cf. [Kas80], [Kas88], [Kas95]), G. Kasparov a défini un bifoncteur de la catégorie des C^*-algèbres, munies d'une action continue d'un groupe localement compact, dans la catégorie des groupes abéliens, qui regroupe à la fois la K-théorie et la K-homologie des C^*-algèbres. Il utilise ce "K-bifoncteur" pour calculer la K-théorie des C^*-algèbres de groupe pour des groupes de Lie connexes moyennables ainsi que pour les sous-groupes discrets. Il l'utilise aussi pour montrer la conjecture de Novikov sur l'invariance homotopique des signatures d'ordre supérieur pour des variétés lisses dont le groupe fondamental est un sous-groupe discret d'un groupe de Lie connexe. Nous allons rappeler ici les définitions ainsi que les propriétés principales de cette KK-théorie équivariante, que nous allons utiliser dans la construction de notre morphisme tordu. On renvoie le lecteur vers [Ska91], vers [Val02] ou vers [Hig90], pour des expositions de cette théorie.

Si A et B sont des C^*-algèbres, la norme de C^*-algèbre sur le produit tensoriel algébrique $A \otimes_{\mathbb{C}}^{alg} B$ que l'on va toujours considérer est la minimale (cf. [Hig90, 1.1]). On note alors $A \otimes B$ la C^*-algèbre produit tensoriel par rapport à cette norme.

Produit croisés. On rappelle que si G est un groupe localement compact, une G-C^*-algèbre A est une C^*-algèbre munie d'une action continue de G, c'est-à-dire qu'il existe un homomorphisme continu α de G dans le groupe des $*$-automorphismes de A, que l'on note $\mathrm{Aut}(A)$, muni de la topologie de la convergence en norme point par point. Pour simplifier les notations, si A est une G-C^*-algèbre, on note, pour tout $g \in G$ et pour tout $a \in A$,

$$g(a) := \alpha(g)(a),$$

ou, plus simplement encore, $ga := \alpha(g)(a)$.

Soit G un groupe localement compact et soit A une G-C^*-algèbre. L'espace vectoriel des fonctions à support compact sur G à valeurs dans A, noté $C_c(G, A)$, est munie d'une structure d'algèbre involutive : on définit la multiplication par la

formule, pour $f_1, f_2 \in C_c(G, A)$ et $g \in G$,

$$f_1 * f_2(g) = \int_G f_1(t)t(f_2(t^{-1}g))dt,$$

où dg est la mesure de Haar invariante à gauche sur G, et l'involution est définie par la formule, pour $f \in C_c(G, A)$ et $g \in G$,

$$f^*(g) = g(f(g^{-1}))^*\Delta(g^{-1}),$$

où Δ est la fonction modulaire de G (c'est-à-dire que $dg^{-1} = \Delta(g)^{-1}dg$).

Intuitivement, il est parfois utile de noter tout élément $g \mapsto f(g)$ de $C_c(G, A)$ par l'intégrale formelle $\int_G f(g)e_g dg$, où e_g est une lettre formelle satisfaisant :
- $e_g e_{g'} = e_{gg'}$,
- $e_g^* = e_g^{-1} = e_{g^{-1}}$,
- et $e_g a e_g^* = g.a$ pour $a \in A$.

Nous allons utiliser très souvent cette notation.

De même, pour une G-C^*-algèbre A, on définit

$$L^2(G, A) := \{f \in C_c(G, A) | \int_G f(g)^* f(g)dg \quad \text{converge en } A\}.$$

L'espace $L^2(G, A)$ muni de la norme $\|f\| = \|\int_G f(g)^* f(g)dg\|_A^{\frac{1}{2}}$ est un espace de Banach.

Définition 2.1.5. Une *représentation covariante* d'une G-C^*-algèbre A est un couple (π, σ) de représentations de A et de G, respectivement, dans le même espace de Hilbert, que l'on note $H_{(\pi,\sigma)}$, tel que :

$$\sigma(g)\pi(a)\sigma(g)^* = \pi(g.a),$$

où $a \in A$ et $g \in G$.

Il est clair que toute représentation covariante (π, σ) d'une G-C^*-algèbre induit, par intégration, une représentation de l'algèbre $C_c(G, A)$, que l'on note encore (π, σ) par abus de notation. Elle induit donc une pre-C^*-norme sur cette algèbre involutive.

Définition 2.1.6. (cf. [Bla98, 10.1], [Ped79, 7.7]) Le *produit croisé maximal* de A et G, noté $C^*(G, A)$, est le complété séparé de $C_c(G, A)$ pour la norme donnée par la formule suivante :

$$\|f\| = \sup_{(\pi,\sigma)} \|(\pi, \sigma)(f)\|_{\mathcal{L}(H_{(\pi,\sigma)})},$$

où $f \in C_c(G, A)$ et $\|.\|_{\mathcal{L}(H_{(\pi,\sigma)})}$ est la norme d'opérateur.

Le *produit croisé réduit* de A et G, noté $C_r^*(G, A)$, est l'adhérence de l'image de la représentation régulière

$$\lambda_{G,A} : C_c(G, A) \to \mathcal{L}(L^2(G, A))$$

donnée par la formule : $\lambda_{G,A}(f)(h)(t) = \int_G t^{-1}(f(s))h(s^{-1}t)ds$, pour $f \in C_c(G, A)$ et $h \in L^2(G, A)$. Intuitivement, nous notons tout élément $g \mapsto h(g)$ de $L^2(G, A)$ par l'intégrale formelle $\int_G e_g h(g)dg$, car on veut que A agisse à droite sur $L^2(G, A)$. Avec cette notation la formule qui détermine la représentation régulière $\lambda_{G,A}$ ci-dessus devient claire.

Remarque 2.1.7.
- Si $A = \mathbb{C}$, alors le produit croisé de $\mathbb{C}$ et G est égal à $C^*(G)$, la C^*-algèbre maximale de G et le produit croisé réduit est égal à $C_r^*(G)$, la C^*-algèbre réduite de G.
- La représentation $\lambda_{G,A}$ induit un morphisme d'algèbres de Banach

$$\lambda_{G,A} : C^*(G, A) \to C_r^*(G, A),$$

que l'on note $\lambda_{G,A}$ par abus de notation et qui prolonge l'identité sur $C_c(G, A)$.

Modules hilbertiens On rappelle maintenant la définition d'un module hilbertien.

Définition 2.1.8. Soit B une C^*-algèbre. Un *B-module hilbertien* est un B-module à droite E muni d'un produit scalaire

$$\langle ., . \rangle_B : E \times E \to B$$

qui vérifie les propriétés suivantes :

1. $\langle x, \lambda y \rangle_B = \lambda \langle x, y \rangle_B$, pour tout $x, y \in E$, $\lambda \in \mathbb{C}$,
2. $\langle x, yb \rangle_B = \langle x, y \rangle_B b$, pour tout $x, y \in E$, $b \in B$,
3. $\langle y, x \rangle_B = \langle x, y \rangle_B^*$, pour tout $x, y \in E$,
4. $\langle x, x \rangle_B \geq 0$ pour tout $x \in E$ et si $\langle x, x \rangle = 0$, alors $x = 0$,
5. E est complet pour la norme $\|x\| = \|\langle x, x \rangle_B\|^{\frac{1}{2}}$ (on ne considère que des modules séparés en tant qu'espaces de Banach).

On remarque que les trois premières propriétés impliquent :

$$\langle \lambda x, y \rangle_B = \overline{\lambda} \langle x, y \rangle_B \quad \text{et} \quad \langle xb, y \rangle_B = b^* \langle x, y \rangle_B,$$

pour tout $x, y \in E$, $b \in B$.
De plus, si E est un B-module hilbertien, on a que

$$\|xb\| \leq \|x\|b\| \quad \text{et} \quad \|\langle x, y\rangle_B\| \leq \|x\|\|y\|,$$

pour tout $x, y \in E$.

Exemples 2.1.9. 1. La C^*-algèbre B est un B-module hilbertien. Le produit scalaire est donné par : $\langle x, y\rangle = x^*y$ pour tout $x, y \in B$.

2. Si n est un entier, B^n est un B-module hilbertien. Le produit scalaire est donné par : $\langle (x)_i, (y_i)\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i^* y_i$, pour $(x_i)_i, (y_i)_i \in B^n$.
3. Si X est un compact, les $C(X)$-modules hilbertiens s'identifient avec les champs continus d'espaces de Hilbert au-dessus de X : à tout champ continu on associe le module des sections continues qui s'annulent à l'infini (cf. [DD63]).
4. Si B est une G-C^*-algèbre, l'espace $L^2(G, B)$ défini ci-dessus, est un B-module hilbertien. L'action à droite de B est donné par multiplication à droite sur B et le produit scalaire à valeurs dans B est donné par la formule

$$\begin{aligned} \langle ., .\rangle_B : L^2(G, B) \times L^2(G, B) &\to B \\ (f_1, f_2) &\mapsto \int_G f_1(g)^* f_2(g) dg. \end{aligned}$$

On donne maintenant la définition d'opérateur borné sur un module hilbertien.

Définition 2.1.10. Soit B une C^*-algèbre et soient E_1 et E_2 deux B-modules hilbertiens. On note $\mathcal{L}_B(E_1, E_2)$ l'ensemble des applications $T : E_1 \to E_2$ qui admettent un adjoint, c'est-à-dire, les applications telles qu'il existe une application $T^* : E_2 \to E_1$ telle que

$$\langle Tx_1, x_2\rangle_B = \langle x_1, T^* x_2\rangle_B,$$

pour tout $x_1 \in E_1$, $x_2 \in E_2$.
Si E est un B-module hilbertien, on pose $\mathcal{L}_B(E) := \mathcal{L}_B(E, E)$.

On remarque que si $T \in \mathcal{L}_B(E_1, E_2)$ alors T et T^* sont automatiquement linéaires et B-linéaires (cf. [Bla98, 13.2]) et $\mathcal{L}_B(E)$ muni de la norme d'opérateur est une C^*-algèbre.

Définition 2.1.11. Soit E un B-module hilbertien. Si $x, y \in E$, on note $\theta_{x,y}$ l'opérateur défini par

$$\theta_{x,y}(z) = x\langle y, z\rangle, \quad \text{pour} \quad z \in E.$$

Les éléments de la forme $\theta_{x,y}$ appartiennent à $\mathcal{L}_B(E)$ ($\theta_{x,y}^* = \theta_{y,x}$) et ils sont appelés *opérateurs de rang* 1.
Si $T \in \mathcal{L}_B(E)$, alors,

$$T\theta_{x,y} = \theta_{Tx,y} \quad \text{et} \quad \theta_{x,y}T = \theta_{x,T^*y},$$

de sorte que l'espace vectoriel engendré par les opérateurs de rang 1 est un idéal de $\mathcal{L}_B(E)$ dont les éléments sont appelés *opérateurs de rang fini* sur E.
L'ensemble des *opérateurs compacts* de E, noté $\mathcal{K}_B(E)$, est alors l'adhérence pour la norme d'opérateur de l'espace des opérateurs de rang fini.

Produits tensoriels. On peut définir deux types de produits tensoriels de modules hilbertiens (cf. [Ska91]). Soient A et B deux C^*-algèbres.

Définition 2.1.12. Soient E_1 et E_2 deux modules hilbertiens sur A et sur B respectivement. On note $A \otimes_{\mathbb{C}}^{alg} B$ le produit tensoriel algébrique. Le $A \otimes B$-module hilbertien $E_1 \otimes E_2$ est le complété séparé du produit tensoriel algébrique $E_1 \otimes_{\mathbb{C}}^{alg} E_2$ pour la norme $\|x\| = \|\langle x, x\rangle\|^{\frac{1}{2}}$, où $\langle , \rangle$ denote le produit scalaire donné par la formule

$$\langle x_1 \otimes x_2, y_1 \otimes y_2\rangle = \langle x_1, y_1\rangle \otimes \langle x_2, y_2\rangle,$$

pour $x_1, y_1 \in E_1$, $x_2, y_2 \in E_2$. On appelle cette construction ***produit tensoriel externe*** de modules hilbertiens.

Définition 2.1.13. Soient E_1 un A-module hilbertien, E_2 un B-module hilbertien et $\pi : A \to \mathcal{L}_B(E_2)$ un $*$-homomorphisme. Le B-module hilbertien $E_1 \otimes_A E_2$ est le complété séparé du produit tensoriel algébrique $E_1 \otimes_{\mathbb{C}}^{alg} E_2$ pour la norme $\|x\| = \|\langle x, x\rangle\|^{\frac{1}{2}}$, où $\langle , \rangle$ denote le produit scalaire donné par

$$\langle x_1 \otimes x_2, y_1 \otimes y_2\rangle = \langle x_2, \pi(\langle x_1, y_1\rangle)y_2\rangle$$

pour $x_1, y_1 \in E_1$, $x_2, y_2 \in E_2$. L'action de B est donnée par la formule :

$$(x_1 \otimes x_2)b = x_1 \otimes x_2 b,$$

pour tout $x_1 \in E_1$, $x_2 \in E_2$ et $b \in B$. Cette construction est appelée ***produit tensoriel interne*** de modules hilbertiens. On remarque que dans ce cas, si $a \in A$, $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$ alors

$$x_1 \otimes \pi(a)x_2 = x_1 a \otimes x_2.$$

Nous allons utiliser souvent cette construction.

KK-théorie équivariante de Kasparov. On suppose maintenant que G est un groupe localement compact et A et B sont des G-C^*-algèbres.

Définition 2.1.14. Un G-(A,B)-*bimodule équivariant* est la donnée d'un couple (E,π) où :

- E est un B-module hilbertien $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-gradué (ie. $E = E^{(0)} \oplus E^{(1)}$) muni d'une action continue de G compatible avec la graduation et telle que

  $$\begin{aligned} &- \langle gx, gy\rangle_B = g.\langle x, y\rangle, \quad \forall g \in G, x, y \in E, \\ &- g.(xb) = (g.x)(g.b), \quad \forall b \in B. \end{aligned}$$

  Un B-module hilbertien muni d'une action continue de G vérifiant les propriétés ci-dessus est appelé un *G-module hilbertien sur B*.
- $\pi : A \to \mathcal{L}_B(E)$ est un $*$-homomorphisme tel que

  $$\begin{aligned} &- \pi(A) \subset \mathcal{L}_B(E)^{(0)}, \\ &- g.(\pi(a)x) = \pi(g.a)g.x, \quad \forall g \in G, a \in A, x \in E, \end{aligned}$$

Si B est une G-C^*-algèbre et E est un G-module hilbertien sur B, alors G agit sur $\mathcal{L}_B(E)$ (resp. sur $\mathcal{K}_B(E)$) par la formule suivante

$$(gT)x = gTg^{-1}x,$$

pour $T \in \mathcal{L}_B(E)$ (resp. $T \in \mathcal{K}_B(E)$), $g \in G$ et $x \in E$. On remarque que, en général, l'action de G sur $\mathcal{L}_B(E)$ est continue pour la topologie forte mais elle n'est pas continue pour la norme ; par contre, l'action de G sur $\mathcal{K}_B(E)$ est toujours continue.

Définition 2.1.15. Un élément $T \in \mathcal{L}_B(E)$ est dit *G-continu* si, pour tout $x \in E$, l'application $g \mapsto g.T$ est continue pour la norme. En particulier, si $T \in \mathcal{K}_B(E)$, ou $T \in \pi(A)$, alors T est G-continu.

Exemple 2.1.16. Soit B est une G-C^*-algèbre et E est un G-module hilbertien sur B. On considère l'espace $C_c(G,E)$ des fonctions à support compact sur G à valeurs dans E muni des opérations suivantes : pour $f, f_1, f_2 \in C_c(G,E)$, $b \in B$ et $g, t \in G$,

$$\begin{aligned} &(fb)(g) = f(g).b, \\ &g(f)(t) = g(f(g^{-1}t)), \\ &\langle f_1, f_2\rangle_B = \int_G \langle f_1(g), f_2(g)\rangle_B dg. \end{aligned}$$

La complétion de $C_c(G,E)$ pour la norme $\|f\| = \|\langle f, f\rangle_B\|_B^{\frac{1}{2}}$ est un G-module hilbertien sur B noté $L^2(G,E)$. En particulier, $L^2(G,B)$ est un G-module hilbertien sur B.

Nous pouvons maintenant rappeler la définition de cycle :

Définition 2.1.17 (G. Kasparov)**.** Un *cycle G-équivariant sur* (A, B) est la donnée d'un triplet (E, π, T), où :

- (E, π) est un G-(A, B)-bimodule équivariant,
- $T \in \mathcal{L}_B(E)$ est impair (ie. $T \in \mathcal{L}_B(E)^{(1)}$) et satisfait les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} &- \forall a \in A, \quad \pi(a)(T^2 - 1), \quad [\pi(a), T] \in \mathcal{K}_B(E), \\ &- T \text{ est } G\text{-continu et } \quad \forall g \in G, \quad gT - T \in \mathcal{K}_B(E). \end{aligned}$$

Un cycle est *dégénéré* si pour tout $a \in A$, $\pi(a)(T^2 - 1) = 0$ et $[\pi(a), T] = 0$.
Pour simplifier les notations, on note (E, T) le cycle (E, π, T) quand on n'a pas besoin de spécifier la représentation π.
On note $E_G(A, B)$ l'ensemble des cycles équivariants sur (A, B).

Définition 2.1.18. Supposons maintenant qu'on a une troisième G-C^*-algèbre C et $\theta : B \to C$ un $*$-homomorphisme G-équivariant. Soit $\alpha = (E, T)$ un cycle équivariant sur (A, B). On pose

$$\theta_*(E) := E \otimes_B C$$

le C-module hilbertien obtenu par produit tensoriel interne et

$$\theta_*(\alpha) := (\theta_*(E), \theta_*(T)),$$

où $\theta_*(T) = T \otimes 1$, avec $1 \in \mathcal{L}_C(C)$ l'opérateur identité. Cette construction définit une application

$$\theta_* : E_G(A, B) \to E_G(A, C).$$

Pour toute algèbre de Banach B, on note $B[0, 1]$ l'algèbre des fonctions continues sur $[0, 1]$ à valeurs dans B munie de la norme du supremum. Pour tout $t \in [0, 1]$, on note $\sigma_t : B[0, 1] \to B$ l'évaluation en t.

Définition 2.1.19. Deux cycles α et β dans $E_G(A, B)$ sont *homotopes* s'il existe un cycle δ dans $E_G(A, B[0, 1])$ tel que $\sigma_{0,*}(\delta) = \alpha$ et $\sigma_{1,*}(\delta) = \beta$. Une *homotopie* est alors un élément de $E_G(A, B[0, 1])$.

Définition 2.1.20. On note $KK_G(A, B)$ l'ensemble des classes d'homotopie d'éléments de $E_G(A, B)$. C'est un groupe abélien pour la somme directe de cycles (ie. si (E, π, T) et (E', π', T') sont des cycles équivariants sur A et B, alors leur somme directe $(E \oplus E', \pi \oplus \pi', T \oplus T')$ est un cycle équivariant sur A et B).
Dans le cas où le groupe G est trivial, on le note $KK(A, B)$.

Fonctorialité. Avec les définitions précédentes, $KK_G(A,B)$ définit un bifoncteur de la catégorie des G-C^*-algèbres dans la catégorie des groupes abéliens. Ce foncteur est contravariant en A et covariant en B. En effet, si $\alpha = (E, \pi, T)$ est un cycle dans $KK_G(A,B)$, un $*$-homomorphisme G-équivariant $\theta : C \to A$ définit un cycle

$$\theta^*(\alpha) := (E, \pi \circ \theta, T) \in KK_G(C,B).$$

Si $\theta : B \to C$ est un $*$-homomorphisme G-équivariant, alors

$$\theta_*(\alpha) := (\theta_*(E), \pi \otimes 1, T \otimes 1) \in KK_G(A,C).$$

Exemples 2.1.21. 1. Si $\theta : A \to B$ est un $*$-homomorphisme G-équivariant, alors on note $[\theta]$ la classe du cycle $(B, \theta, 0)$ dans $KK_G(A,B)$ qu'il définit. Tout $*$-homomorphisme G-équivariant définit alors un cycle équivariant et on peut alors penser les éléments de $KK_G(A,B)$ comme étant des morphisme G-équivariants généralisés.

2. La K-théorie est un cas particulier de la KK-théorie : pour toute C^*-algèbre B,
$$KK(\mathbb{C}, B) = K_0(B).$$

Remarque 2.1.22. De la même façon que pour toute C^*-algèbre B on peut définir des groupes de K-théorie d'ordre supérieur $K_n(B)$ pour tout $n \geq 1$, pour toutes G-C^*-algèbres A et B, on peut définir des groupes $KK_{G,n}(A,B)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Soient A et B des G-C^*-algèbres. On pose :

$$KK_{G,n}(A,B) := KK_G(A, B(\mathbb{R}^n)),$$

où $B(\mathbb{R}^n)$ désigne l'espace des fonctions continues sur $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans B qui tendent vers 0 à l'infini. Donc,

$$KK_{G,0}(A,B) = KK_G(A,B).$$

Dans le cas particulier où $n = 1$, on peut définir les groupes $KK_{G,1}(A,B)$ de la façon suivante : $E_{G,1}(A,B)$ est l'ensemble des cycles équivariants gradués de façon triviale et $KK_{G,1}(A,B)$ est l'ensemble des classes d'homotopie d'éléments dans $E_{G,1}(A,B)$.

Kasparov a montré le théorème de périodicité suivant :

Théorème 2.1.23 (Périodicité de Bott)**.** *Soient A et B deux G-C^*-algèbres et $n, m \geq 0$, alors :*

– *si $n+m$ est pair, $KK_G(A(\mathbb{R}^m), B(\mathbb{R}^n)) \simeq KK_G(A,B)$,*

– *si* $n + m$ *est impair,* $KK_G(A(\mathbb{R}^m), B(\mathbb{R}^n)) \simeq KK_G(A, B(\mathbb{R})) \simeq KK_G(A(\mathbb{R}), B) \simeq KK_{G,1}(A, B)$.

Définition 2.1.24. Soit X une espace G-propre (cf. 2.1.1) et G-compact (c'est-à-dire que X/G est un espace compact). La K-homologie G-équivariante (d'ordre 0) de X est, par définition,

$$K_{G,0}(X) := KK_G(C_0(X), \mathbb{C}).$$

Si l'espace X n'est pas G-compact, on pose

$$K_{G,0}(X) := \varinjlim KK_G(C_0(Y), \mathbb{C}),$$

où la limite inductive est prise sur les parties Y qui sont G-invariantes, G-compacts et fermées de X.

Le théorème suivant décrit les propriétés les plus importantes de la KK-théorie équivariante, dont le produit de Kasparov.

Théorème 2.1.25 (G. Kasparov, [Kas88])**.** *Soit G un groupe localement compact et soient A, B, C des G-C^*-algèbres. Il existe une application bilinéaire appelée* produit de Kasparov *: pour $i, j \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$,*

$$\begin{aligned} KK_{G,i}(A, B) \times KK_{G,j}(B, C) &\to KK_{G,i+j}(A, C) \\ (x, y) &\mapsto x \otimes_B y \end{aligned}$$

qui est associative et fonctorielle.
De plus, pour toute G-C^*-algèbre D, il existe un homomorphisme d'extension de scalaires :

$$\begin{aligned} \sigma_D : KK_{G,i}(A, B) &\to KK_{G,i}(A \otimes D, B \otimes D) \\ (E, \pi, T) &\mapsto (E \otimes D, \pi \otimes 1, T \otimes 1) \end{aligned}$$

et deux homomorphismes de descente :

$$\begin{aligned} j^G &: KK_{G,i}(A, B) \to KK_i(C^*(G, A), C^*(G, B)) \\ j_r^G &: KK_{G,i}(A, B) \to KK_i(C_r^*(G, A), C_r^*(G, B)). \end{aligned}$$

Ces morphismes sont tous fonctoriels.

Nous énumérons dans la remarque suivante, les propriétés les plus importantes de cette théorie et que nous allons utiliser plus tard.

Remarque 2.1.26. 1. Le produit de Kasparov induit, en particulier, une action de la KK-théorie sur la K-théorie, c'est-à-dire un homomorphisme

$$\begin{aligned} KK(A,B) &\to \mathrm{Hom}(K_i(A), K_i(B)) \\ x &\mapsto \big(p \mapsto p \otimes_A x\big), \end{aligned}$$

pour $i = 0, 1$.

2. De plus, on a que :
   – si $\alpha : A \to B$ est un morphisme de G-C^*-algèbres et y est un élément de $KK_{G,i}(B, C)$, alors

$$[\alpha] \otimes_B y = \alpha^*(y) \in KK_{G,i}(A, C),$$

   – si $\beta : B \to C$ est un morphisme de G-C^*-algèbres et x est un élément de $KK_{G,i}(A, B)$, alors

$$x \otimes_B [\beta] = \beta_*(x) \in KK_{G,i}(A, C).$$

3. Si $x \in KK_{G,i}(A, B)$ et $y \in KK_G(\mathbb{C}, \mathbb{C})$, alors

$$\sigma_A(y) \otimes_A x = x \otimes_B \sigma_B(y),$$

où,

$$\sigma_A : KK_G(\mathbb{C}, \mathbb{C}) \to KK_G(A, A) \quad \text{et} \quad \sigma_B : KK_G(\mathbb{C}, \mathbb{C}) \to KK_G(B, B),$$

sont les morphismes d'extension de scalaires. En particulier, si on prend $A = B = \mathbb{C}$, on remarque que $KK_G(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ est un anneau commutatif unitaire ($1 = [\mathrm{Id}_{\mathbb{C}}]$). Les groupes $KK_{G,i}(A, B)$, $KK_i(C^*(G, A), C^*(G, B))$ et $KK_i(C_r^*(G, A), C_r^*(G, B))$ sont des modules sur cet anneau.

4. Si $x = (E, \pi, T) \in E_G(A, B)$ et $y = (E', \pi', T') \in E_G(B, C)$, alors

$$x \otimes_B y = (E \otimes_B E', \pi \otimes 1, H)$$

Pour la définition de H, on renvoie le lecteur à [Kas88] (voir aussi [Con94, Chapter IV Appendix A]). Dans le cas simple où l'opérateur F (ou F') est trivial, l'opérateur H s'écrit facilement $H = 1 \otimes F'$ (resp. $H = F \otimes 1$).

5. On peut donner facilement la définition de la descente, par exemple dans le cas des produits croisés maximaux, d'une façon explicite : soit

$$\alpha = (E, \pi, T) \in KK_G(A, B).$$

On considère l'espace $C_c(G,E)$ des fonctions à support compact sur G à valeurs dans E, qui admet une structure de $C_c(G,B)$-module à droite. On définit un produit scalaire sur $C_c(G,E)$ à valeurs dans $C_c(G,B)$ par la formule suivante :

$$\langle x,y\rangle(g) = \int_G s(\langle x(s), y(s^{-1}g)\rangle_B)ds,$$

où $x,y \in C_c(G,E)$. Le complété séparé de $C_c(G,E)$ pour la norme

$$\|x\| = \|\langle x,x\rangle\|^{\frac{1}{2}}_{C^*(G,B)},$$

est un $C^*(G,B)$-module hilbertien noté $C^*(G,E)$. Pour $a \in C_c(G,A)$, $x \in C_c(G,E)$ et $g \in G$, on pose

$$(a.x)(g) := (\tilde{\pi}(a)x)(g) := \int_G \pi(a(s))s\big(x(s^{-1}g)\big)ds$$

et $(\tilde{T}x)(g) = T(x(g))$. Alors, dans ce cas,

$$j^G(\alpha) := (C^*(G,E), \tilde{\pi}, \tilde{T}).$$

Le cas des produits croisés réduits s'écrit aussi de façon explicite et est complètement analogue.

2.1.3 KK-théorie banachique de Lafforgue

Dans [Laf02b], Lafforgue a défini une théorie similaire à la KK-théorie équivariante de Kasparov mais pour les algèbres de Banach qui a permis de pour prouver la conjecture de Baum-Connes pour des groupes infinis discrets ayant la propriété (T). On rappelle qu'une preuve de la conjecture, pour un groupe localement compact G, qui utilise la méthode du "dual Dirac-Dirac" (cf. introduction), et donc la KK-théorie de Kasparov, implique forcément l'existence d'un isomorphisme entre la K-théorie de la C^*-algèbre maximale de G et la K-théorie de sa C^*-algèbre réduite. De plus, elle utilise le fait que l'on puisse construire une homotopie entre un élément, appelé élément γ de Kasparov, et l'identité dans $KK_G(\mathbb{C},\mathbb{C})$, ce qu'il n'est pas possible dès que le groupe a la propriété (T). L'idée principale de la KK-théorie de Lafforgue, dite désormais "banachique", est de remplacer les représentations unitaires de G dans des espaces de Hilbert dans la définition de $KK_G(\mathbb{C},\mathbb{C})$ par des représentations isométriques de G dans des espaces de Banach. Dans ce cadre, il n'existe pas de difficulté analogue à la propriété (T) (cf. [Laf02b, Introduction]). Lafforgue construit la KK-théorie banachique, à partir de

la KK-théorie équivariante de Kasparov, en remplaçant les modules hilbertiens par des paires de modules de Banach en dualité.

Dans la suite une algèbre de Banach B est un espace de Banach muni d'une structure de $\mathbb{C}$-algèbre telle que $\|ab\|_B \leq \|a\|_B\|b\|_B$ pour $a, b \in B$. Elle est *non-dégénérée* si le sous-espace vectoriel BB est dense dans B. On va considérer des algèbres de Banach qui ne sont pas nécessairement unifères (c'est-à-dire qu'elles ne possèdent pas nécessairement un élément unité). Si B est une algèbre de Banach, on note $\tilde{B}$ l'algèbre unitarisée de B, c'est-à-dire $\tilde{B} = B \oplus \mathbb{C}$ munie du produit $(a, \lambda).(b, \mu) = (ab + \lambda b + \mu a, \lambda\mu)$ et de la norme $\|(b, \lambda)\|_{\tilde{B}} = \|b\|_B + |\lambda|$, pour $a, b \in B$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. L'élément unité de $\tilde{B}$ est $1_{\tilde{B}} = (0, 1)$. On identifie alors B avec son image dans $\tilde{B}$ par l'homomorphisme $b \mapsto (b, 0)$.

Modules de Banach. Un *B-module de Banach* à droite (resp. à gauche) sur une algèbre de Banach B est un espace de Banach E, avec une norme que l'on note $\|.\|_E$, muni d'une structure de B-module à droite (reps. à gauche) telle que, pour $x \in E$, $b \in B$,

$$\|xb\|_E \leq \|x\|_E\|b\|_B$$

(reps. $\|bx\|_E \leq \|b\|_B\|x\|_E$).
Un B-module de Banach est *non-dégénéré* si le sous-espace vectoriel EB (resp. BE) de E est dense dans E.

Si B et C sont deux algèbres de Banach, un morphisme d'algèbres $\theta : B \to C$ est un *morphisme d'algèbres de Banach* si $\|\theta(b)\|_C \leq \|b\|_B$, c'est-à-dire que l'on ne considère que les morphismes d'algèbres de Banach qui sont de norme inférieure où égale à 1.

Soit B une algèbre de Banach et soient E et F des B-modules de Banach, à gauche ou à droite. Un *morphisme de B-modules* de Banach de E dans F est une application linéaire continue $f : E \to F$ qui est un morphisme de B-modules au sens algébrique. On pose :

$$\|f\| = \sup_{x \in E, \|x\|_E = 1} \|f(x)\|_F.$$

Produit tensoriel projectif. Si B est une algèbre de Banach, E est un B-module de Banach à droite et F est un B-module de Banach à gauche, on note $E \otimes_B^\pi F$ le complété séparé du produit tensoriel algébrique $E \otimes_{\mathbb{C}}^{alg} F$ pour la plus grande semi-norme $\|.\|$ telle que $\|x \otimes by - xb \otimes y\| = 0$ et $\|x \otimes y\| \leq \|x\|_E\|y\|_F$ pour $x \in E$,

$y \in F$ et $b \in B$.

Fonctorialité. Soient B et C deux algèbres de Banach et soit $\theta : B \to C$ un morphisme d'algèbres de Banach. Étant donné E un B-module de Banach à droite non-dégénéré, on définit un C-module de Banach à droite de la façon suivante : on pose

$$\theta_*(E) := E \otimes^{\pi}_{\tilde{B}} \tilde{C}.$$

La structure de C-module sur $\theta_*(E)$ est donnée par la formule

$$(x \otimes c')c = x \otimes c'c,$$

pour $x \in E$, $c \in C$ et $c' \in \tilde{C}$. Ceci fait de $\theta_*(E)$ un C-module de Banach à droite non-dégénéré (cf. [Laf02b, 1.1]).

B-paires. Pour définir la KK-théorie banachique, Lafforgue introduit la notion de paire de modules de Banach en dualité sur une algèbre de Banach B, car, contrairement aux espaces de Hilbert, les espaces de Banach ne sont pas autoduaux. Cette notion est à la base de son travail.

Définition 2.1.27. Soit B une algèbre de Banach. Une *B-paire* est la donnée d'un couple d'espaces de Banach $E = (E^<, E^>)$ où :
- $E^>$ est un B-module de Banach à droite non-dégénéré,
- $E^<$ est un B-module de Banach à gauche non-dégénéré,

et d'un crochet

$$\langle ., . \rangle : E^< \times E^> \to B$$

qui est une application $\mathbb{C}$-bilinéaire telle que :

1. $\langle b\xi, x\rangle = b\langle \xi, x\rangle$,
2. $\langle \xi, xb\rangle = \langle \xi, x\rangle b$,
3. $\|\langle \xi, x\rangle\|_B \leq \|\xi\|_{E^<}\|x\|_{E^>}$,

pour tout $\xi \in E^<$, $x \in E^>$ et $b \in B$.

Si E et F sont deux B-paires leur somme directe

$$E \oplus F := (E^< \oplus F^<, E^> \oplus F^>),$$

est une B-paire : la norme de $(x, y) \in E^> \oplus F^>$ est $\|x\| + \|y\|$, la norme de $(\xi, \eta) \in E^< \oplus F^<$ est $\|\xi\| + \|\eta\|$ et le crochet est $\langle (\xi, \eta), (x, y)\rangle = \langle \xi, x\rangle + \langle \eta, y\rangle$.

Définition 2.1.28. Soient E, F et G des B-paires. Un *morphisme de B-paires* $f : E \to F$ est un couple $(f^<, f^>)$, où :

– $f^> : E^> \to F^>$ est un morphisme de B-modules à droite,
– $f^< : F^< \to E^<$ est un morphisme de B-modules à gauche,
tel que

$$\langle \eta, f^>(x) \rangle = \langle f^<(\eta), x \rangle,$$

pour tout $x \in E^>$ et pour tout $\eta \in F^<$.
On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'espace des morphismes de B-paires de E dans F, ou $\mathcal{L}_B(E, F)$ quand on veut spécifier l'algèbre B sur laquelle les modules sont définis. C'est un espace de Banach muni de la norme

$$\|f\| = \max(\|f^<\|, \|f^>\|).$$

Si $f = (f^<, f^>)$ est un morphisme de B-paires de E dans F et $g = (g^<, g^>)$ est un morphisme de B-paires de F dans G, la composée de f et g est

$$g \circ f := (f^< \circ g^<, g^> \circ f^>).$$

Elle appartient à $\mathcal{L}(E, G)$.

Pour $\xi \in E^<$ et $y \in F^>$, on note $|y\rangle\langle\xi| \in \mathcal{L}(E, F)$ le morphisme de B-paires défini par les formules

$$\begin{aligned} |y\rangle\langle\xi|^> : E^> &\to F^> \\ x &\mapsto y\langle \xi, x \rangle \\ |y\rangle\langle\xi|^< : F^< &\to E^< \\ \eta &\mapsto \langle \eta, y \rangle \xi. \end{aligned}$$

On dit qu'un élément de $\mathcal{L}_B(E, F)$ est un *opérateur de rang fini* s'il s'écrit comme combinaison linéaire de morphismes de la forme $|y\rangle\langle\eta|$. On note $\mathcal{K}_B(E, F)$ l'adhérence dans $\mathcal{L}_B(E, F)$ de l'espace des opérateurs de rang fini. Un morphisme de B-paires est dit *compact* s'il appartient à $\mathcal{K}_B(E, F)$. On pose $\mathcal{L}_B(E) = \mathcal{L}_B(E, E)$ et $\mathcal{K}_B(E) = \mathcal{K}_B(E, E)$.

Exemple 2.1.29. Si B est une C^*-algèbre et E est un B-module hilbertien avec produit scalaire $\langle ., . \rangle : E \times E \to B$, alors la norme sur E définie par

$$\|x\|_E = \|\langle x, x \rangle\|_B^{\frac{1}{2}},$$

fait de E un espace de Banach. De plus, on a que $\|xb\|_E \leq \|x\|_E \|b\|_B$ pour tout $b \in B$ et $x \in E$, donc E est un B-module de Banach à droite qui est en plus non-dégénéré.

On note $\overline{E}$ le B-module de Banach à gauche tel qu'il existe une isométrie $\mathbb{C}$-antilinéaire $* : E \to \overline{E}$ vérifiant

$$b^* x^* = (xb)^*$$

pour $x \in E$ et $b \in B$. On pose $\langle x^*, y\rangle = \langle x, y\rangle$ pour $x, y \in E$. Lafforgue a montré que, sous ces hypothèses, $(\overline{E}, E)$ est une B-paire.
Si de plus F est un deuxième B-module hilbertien et $f : E \to F$ est un morphisme de B-modules hilbertiens, on considère $f^* : F \to E$ l'adjoint de f et on note $\overline{f}^*$ l'application $(*)f^*(*)^{-1} : \overline{F} \to \overline{E}$. Alors $(\overline{f}^*, f)$ est un morphisme de B-paires de $(\overline{E}, E)$ vers $(\overline{F}, F)$ et $(\overline{f}^*, f)$ est compact si f est compact ([Laf02b, Proposition 1.1.4]).
Nous allons nous servir beaucoup de cette construction dans ce travail.

Définition 2.1.30. Soient A et B deux algèbres de Banach. Un (A, B)-*bimodule de Banach* est la donnée d'un couple (E, π) où E est une B-paire et π est un morphisme d'algèbres de Banach de A dans $\mathcal{L}_B(E)$. Autrement dit, $E = (E^<, E^>)$ est un (A, B)-bimodule de Banach si :
- $E^>$ est muni d'une structure de A-module de Banach à gauche,
- $E^<$ est muni d'une structure de A-module de Banach à droite,
- ces structures commutent avec les structures de B-module de Banach,
- $\langle \xi a, x\rangle = \langle \xi, ax\rangle$, pour $a \in A$, $\xi \in E^<$ et $x \in E^>$.

KK-théorie banachique. Considérons maintenant un groupe localement compact G. Dorénavant, une longueur sur G sera une fonction continue $\ell : G \to [0, +\infty[$ telle que $\ell(g_1 g_2) \leq \ell(g_1) + \ell(g_2)$ pour tous $g_1, g_2 \in G$.

Une algèbre de Banach B est une G-*algèbre* de Banach si elle est munie d'une action par automorphismes isométriques de G.

Soient A et B deux G-algèbres de Banach et ℓ une longueur sur G.

Définition 2.1.31. Un (G, ℓ)-(A, B)-*bimodule de Banach* est la donnée d'un couple (E, π) où :
- $E = (E^<, E^>)$ est une B-paire muni d'une action continue de G telle que :

$$- \|gx\|_{E^>} \leq e^{\ell(g)} \|x\|_{E^>},$$
$$- \|g\xi\|_{E^<} \leq e^{\ell(g^{-1})} \|\xi\|_{E^<},$$

pour tout $g \in G$, $\xi \in E^<$ et $x \in E^>$,

$$\begin{aligned} &- g(xb) = (gx)(gb), \\ &- g(b\xi) = (gb)(g\xi), \\ &- g(\langle \xi, x \rangle) = \langle g\xi, gx \rangle \end{aligned}$$

pour tout $g \in G$, $x \in E^>$, $\xi \in E^<$ et $b \in B$.
Une B-paire avec ces propriétés est appelée une (G, ℓ)-*B-paire*.

- $\pi : A \to \mathcal{L}_B(E)$ est un morphisme d'algèbres de Banach G-équivariant.

Si E et F sont des (G, ℓ)-B-paires, $T \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in G$, on note

$$g(T) := (gT^< g^{-1}, gT^> g^{-1}) \in \mathcal{L}(E, F).$$

De même que pour les bimodules hilbertiens, si la B-paire E est $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-graduée (ie. $E^<$ et $E^>$ sont des espaces de Banach $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-gradués), on demande en plus que l'action continue de G sur E préserve la graduation.

Nous pouvons maintenant donner la définition de cycle banachique équivariant.

Définition 2.1.32 (V. Lafforgue)**.** Un *cycle banachique* (G, ℓ)*-équivariant* sur (A, B) est la donnée d'un triplet (E, π, T) où :
- (E, π) est un (G, ℓ)-(A, B)-bimodule de Banach $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-gradué,
- $T \in \mathcal{L}_B(E)$ est impair et satisfait les propriétés suivantes :
  - $\forall a \in A, \quad \pi(a)(\mathrm{Id}_E - T^2), \quad [\pi(a), T] \in \mathcal{K}_B(E)$,
  - l'application $g \mapsto \pi(a)(T - g(T))$ est continue de G dans $\mathcal{K}_B(E)$.

De même que dans le cas des cycles hilbertiens 2.1.17, on note (E, T) le cycle banachique (E, π, T) à moins que l'on ait besoin de spécifier la représentation π.
On note $E^{\mathrm{ban}}_{G,\ell}(A, B)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de cycles banachiques G-équivariants, et par rapport à la longueur ℓ, sur (A, B).

Définition 2.1.33. Supposons maintenant qu'on a une troisième G-algèbre de Banach C et un morphisme d'algèbres de Banach $\theta : B \to C$ qui est G-équivariant. Soit $E = (E^<, E^>)$ une B-paire. On pose

$$\theta(E)_* := (\theta_*(E^<), \theta_*(E^>)) = (\tilde{C} \otimes^{\pi}_{\tilde{B}} E^<, E^> \otimes^{\pi}_{\tilde{B}} \tilde{C}).$$

Alors $\theta_*(E)$ est une C-paire appelée *image directe* de E par le morphisme θ :

– le crochet est défini par la formule

$$\langle c \otimes \xi, x \otimes c' \rangle = c\theta(\langle \xi, x \rangle)c' \in C,$$

pour $c, c' \in \tilde{C}$, $x \in E^{>}$ et $\xi \in E^{<}$.

Si $F = (F^{<}, F^{>})$ est une autre B-paire et $f = (f^{<}, f^{>})$ est un morphisme de B-paires de E dans F, alors

$$\theta_*(f) := (1 \otimes f^{<}, f^{>} \otimes 1)$$

est un morphisme de C-paires de $\theta_*(E)$ dans $\theta_*(F)$ et si f est un morphisme compact, alors $\theta_*(f)$ est compact.
Dans ce cas, si (E, π, T) est un cycle banachique équivariant sur (A, B) alors, pour tout $a \in A$, comme $\pi(a)$ appartient à $\mathcal{L}_B(E)$, $\theta_*(\pi(a))$ appartient à $\mathcal{L}_C(E)$ et donc $(\theta_*(E), \theta_* \circ \pi, \theta_*(T))$ est un cycle banachique équivariant sur (A, C). Ceci définit une application

$$\theta_* : E^{\mathrm{ban}}_{G,\ell}(A, B) \to E^{\mathrm{ban}}_{G,\ell}(A, C).$$

Définition 2.1.34. Deux cycles $\alpha, \beta \in E^{\mathrm{ban}}_{G,\ell}(A, B)$ sont *homotopes* s'il existe un cycle $\delta \in E^{\mathrm{ban}}_{G,\ell}(A, B[0,1])$ tel que $\sigma_{0,*}(\delta) = \alpha$ et $\sigma_{1,*}(\delta) = \beta$, où, comme dans la cas hilbertien, on note $\sigma_t : B[0,1] \to B$ l'évaluation en $t \in [0,1]$.

Dans [Laf02b], Lafforgue donne la définition de la KK-théorie banachique suivante :

Définition 2.1.35. On note $KK^{\mathrm{ban}}_{G,\ell}(A, B)$ l'ensemble des classes d'homotopie d'éléments de $E^{\mathrm{ban}}_{G,\ell}(A, B)$. C'est un groupe abélien pour la somme directe de cycles définie de façon évidente. Si (E, T) est un cycle dans $E^{\mathrm{ban}}_{G,\ell}(A, B)$, on note $[(E, T)]$ sa classe dans $KK^{\mathrm{ban}}_{G,\ell}(A, B)$. Dans le cas où $\ell = 0$, on omet ℓ dans la notation, dans le cas où G est trivial, on le note $KK^{\mathrm{ban}}(A, B)$.

Fonctorialité. Avec les définitions précédentes, il est clair que $KK^{\mathrm{ban}}_{G,\ell}(A, B)$ définit un bifoncteur de la catégorie des G-algèbres de Banach dans la catégorie des groupes abéliens qui est contrevariant en A et covariant en B. En effet, si $\alpha = [(E, \pi, T)]$ est un cycle dans $KK^{\mathrm{ban}}_{G,\ell}(A, B)$, un morphisme de G-algèbres de Banach $\theta : C \to A$ définit un élément

$$\theta^*(\alpha) := [(E, \pi \circ \theta, T)] \in KK^{\mathrm{ban}}_{G,\ell}(C, B).$$

Si $\theta : B \to C$ est un morphisme de G-algèbres de Banach, alors

$$\theta_*(\alpha) := [(\theta_*(E), \theta_* \circ \pi, \theta_*(T))] \in KK^{\mathrm{ban}}_{G,\ell}(A, C).$$

Exemples 2.1.36. 1. Si $\theta : A \to B$ est un morphisme G-équivariant de G-algèbres de Banach, on note $[\theta]$ l'élément de $KK_G^{\mathrm{ban}}(A, B)$ défini par $(B, \theta, 0)$, où B muni du crochet $\langle b, b' \rangle = bb'$ est une B-paire qui définit un G-(A, B)-bimodule de façon évidente et que l'on considère graduée de façon triviale.

2. Pour toute algèbre de Banach non-dégénérée, Lafforgue a démontré l'existence d'un isomorphisme
$$\zeta : K_0(B) \to KK^{\mathrm{ban}}(\mathbb{C}, B),$$
fonctoriel en B tel que, dans le cas où B est unifère et p est un idempotent de $M_n(B)$, alors $\zeta(p) = ((B^n p, pB^n), 0)$.

L'existence d'une structure multiplicative dans KK^{ban}, qui ressemble, par exemple, à celle donnée par le produit de Kasparov dans le cas hilbertien, reste un problème ouvert. Cependant, Lafforgue a montré que KK^{ban} agit sur la K-théorie :

Théorème 2.1.37 (V. Lafforgue, [Laf02b])**.** *Il existe un unique homomorphisme*
$$\Sigma : KK^{\mathrm{ban}}(A, B) \to \mathrm{Hom}(K_i(A), K_i(B)),$$
pour $i = 0, 1$, qui est fonctoriel en A et en B et qui est l'inverse du morphisme ζ (cf. exemple 2.1.36) dans le cas où $A = \mathbb{C}$.
De plus, pour toute G-algèbre de Banach D, il existe un morphisme d'extension de scalaires :
$$\begin{aligned} \sigma_D^{\mathrm{ban}} : KK_{G,\ell}^{\mathrm{ban}}(A, B) &\to KK_{G,\ell}^{\mathrm{ban}}(A \otimes^\pi D, B \otimes^\pi D) \\ (E, T) &\mapsto (E \otimes^\pi D, T \otimes^\pi 1). \end{aligned}$$

Compatibilité avec la KK-théorie de Kasparov. Si A et B sont des G-C^*-algèbres et E est un G-(A, B)-bimodule de Kasparov, soit $\overline{E}$ le B-module de Banach à gauche non-dégénéré déterminé par E (cf. example 2.1.29). Alors G agit de façon continue sur E et $\|gx\|_E \leq \|x\|_E$ pour tout $g \in G$ et pour tout $x \in E$. D'après [Laf02b, proposition 1.14], le couple $(\overline{E}, E)$ est alors une G-B-paire et l'action G-équivariante de A sur E fait de $(\overline{E}, E)$ un G-(A, B)-bimodule de Banach. Pour toute longueur ℓ sur G, on note ι l'application
$$\iota : KK_G(A, B) \to KK_{G,\ell}^{\mathrm{ban}}(A, B),$$
déterminée par l'application
$$\begin{aligned} E_G(A, B) &\to E_{G,\ell}^{\mathrm{ban}}(A, B) \\ (E, T) &\mapsto \big((\overline{E}, E), (\overline{T}^*, T)\big). \end{aligned}$$

On a alors que la KK-théorie banachique est compatible à la KK-théorie de Kasparov. En effet, Lafforgue démontre, par exemple, que KK^{ban} et la KK-théorie de Kasparov agissent de la même façon sur la K-théorie, c'est-à-dire que, pour tout $\alpha \in KK(A, B)$ et pour tout $p \in K_i(A)$,

$$p \otimes_A \alpha \quad \text{et} \quad \Sigma(\iota(\alpha))(p)$$

sont égaux dans $K_i(B)$.

Morphisme de descente. Lafforgue construit aussi une variante "banachique" du morphisme de descente. On rappelle que le morphisme de descente permet de passer de la KK-théorie équivariante à la KK-théorie, non-équivariante, des produits croisés. On doit alors, tout d'abord, définir une variante des produits croisés dans le cadre des algèbres de Banach qui, pour un groupe localement compact G et une G-algèbre de Banach A, généralise l'algèbre $L^1(G, A)$ des fonctions intégrables sur G à valeurs dans A. Lafforgue introduit alors la notion de complétion inconditionnelle :

Définition 2.1.38. Une complétion de $C_c(G)$ est une *complétion inconditionnelle* si c'est la complétion pour une norme $\|.\|$ telle que, pour tout $f_1, f_2 \in C_c(G)$,

$$|f_1(g)| \leq |f_2(g)|, \quad \forall g \in G \quad \text{implique que} \quad \|f_1\| \leq \|f_2\|.$$

Une norme vérifiant cette propriété est appelée *norme inconditionnelle.*

Exemples 2.1.39.

1. L'algèbre $L^1(G)$ est une complétion inconditionnelle de $C_c(G)$.
2. On rappelle qu'un groupe discret Γ a la propriété (RD), introduite par P. Jolissaint dans [Jol90], par rapport à la longueur ℓ, s'il existe des constantes $C, s \in \mathbb{R}^+$ telles que, pour tout $f \in C_c(\Gamma)$, on a

$$\|\lambda_\Gamma(f)\|_{\ell^2(\Gamma)} \leq C\|f\|_{\ell,s},$$

où λ_Γ est la représentation régulière de Γ dans $l^2(\Gamma)$ et, pour $f \in C_c(\Gamma)$,

$$\|f\|_{\ell,s} := (\sum_{\gamma\in\Gamma} |f(\gamma)|^2(1+\ell(\gamma))^{2s})^{\frac{1}{2}},$$

définit une norme l^2 pondérée sur Γ.
Si Γ a la propriété (RD) alors, pour un s assez grand,

$$H^s_\ell(\Gamma) := \{f : \Gamma \to \mathbb{C} \mid \|f\|_{\ell,s} < \infty\}$$

est une algèbre de Banach pour la convolution de fonctions et c'est une complétion inconditionnelle de $C_c(\Gamma)$.

3. Soit G un groupe de Lie semi-simple réel. On note $\mathcal{S}_s(G)$ le complété-séparé de $C_c(G)$ pour la norme
$$\|f\|_{\mathcal{S}_s(G)} = \sup_{g\in G} |f(g)|\Phi(g)^{-1}(1+\log\|g\|)^s,$$
où Φ est une fonction d'Harish-Chandra sur G, $\|.\|$ est une norme matricielle sur G, $s \in \mathbb{R}^+$ et $f \in C_c(G)$. Alors, pour un s assez grand, $\mathcal{S}_s(G)$ est une algèbre de Banach pour la convolution et c'est aussi une complétion inconditionnelle de $C_c(G)$ (cf. [Laf02b, Chapitre 4]).

4. La C^*-algèbre réduite d'un groupe localement compact G n'est pas en général un complétion inconditionnelle de $C_c(G)$.

La définition suivante permet de construire des variantes banachiques des produits croisés, définis dans la définition 2.1.6 dans le cas hilbertien, relatifs à toute norme inconditionnelle.

Définition 2.1.40. Soit $\mathcal{B}(G)$ une complétion inconditionnelle de $C_c(G)$ et soit A une G-algèbre de Banach. Pour toute longueur ℓ sur G, on note $\mathcal{B}_\ell(G,A)$ le complété-séparé de $C_c(G,A)$ par rapport à la norme :
$$\|f\|_{\mathcal{B}_\ell(G,A)} = \|g \mapsto e^{\ell(g)}\|f(g)\|_A\|_{\mathcal{B}(G)}.$$
Si $\ell = 0$, on note $\mathcal{B}(G,A)$.

Lafforgue démontre alors le théorème suivant :

Théorème 2.1.41 (V. Lafforgue, [Laf02b])**.** *Pour toute complétion inconditionnelle $\mathcal{B}(G)$ et pour toutes G-algèbres de Banach A et B, il existe un homomorphisme de descente*
$$j_{\mathcal{B}} : KK^{\mathrm{ban}}_{G,\ell}(A,B) \to KK^{\mathrm{ban}}(\mathcal{B}_\ell(G,A), \mathcal{B}(G,B))$$
fonctoriel en A et en B, compatible aux images directes et à l'homotopie.

Remarque 2.1.42. Lafforgue démontre aussi que le morphisme de descente banachique est compatible avec le produit de Kasparov et avec l'action de KK^{ban} sur la K-théorie. L'énoncé est le suivant :
Soit $\mathcal{B}(G)$ une complétion inconditionnelle. Si A, B et C sont des G-C^*-algèbres et $\alpha \in KK_G(A,B)$ et $\beta \in KK_G(B,C)$, alors,
$$\Sigma(j_{\mathcal{B}}(\alpha \otimes_B \beta)) = \Sigma(j_{\mathcal{B}}(\beta)) \circ \Sigma(j_{\mathcal{B}}(\alpha)),$$
dans $\mathrm{Hom}\big(K(\mathcal{B}(G,A)), K(\mathcal{B}(G,C)\big)$.

2.2 Morphisme de Baum-Connes tordu

Nous sommes maintenant prêts pour définir le morphisme de Baum-Connes tordu par une représentation non-unitaire.

2.2.1 Produits Croisés tordus

Soit G un groupe localement compact et soit dg une mesure de Haar à gauche sur G. Étant donnée une G-C^*-algèbre A, on rappelle que l'on note $C_c(G, A)$ l'espace vectoriel des fonctions continues à support compact sur G à valeurs dans A, muni de la structure d'algèbre donnée par la convolution de fonctions :

$$(f_1 * f_2)(g) = \int_G f_1(g_1)g_1(f_2(g_1^{-1}g))dg_1,$$

pour $f_1, f_2 \in C_c(G, A)$. On représente tout élément $g \mapsto a(g)$ de $C_c(G, A)$ par l'intégrale formelle $\int_G a(g)e_g dg$, où e_g est une lettre formelle qui satisfait les propriétés données dans la section 2.1.2. Étant donnée une représentation de dimension finie (ρ, V) de G, on considère l'application suivante :

$$\begin{aligned} C_c(G, A) &\to C_c(G, A) \otimes \mathrm{End}(V) \\ \int_G a(g)e_g dg &\mapsto \int_G a(g)e_g \otimes \rho(g)dg. \end{aligned}$$

Définition 2.2.1. Le produit croisé (resp. produit croisé réduit) de A et G tordu par la représentation ρ, noté $A \rtimes^\rho G$ (resp. $A \rtimes_r^\rho G$), est le complété (séparé) de $C_c(G, A)$ pour la norme :

$$\| \int_G a(g)e_g dg\|_{A \rtimes^\rho G} = \| \int_G a(g)e_g \otimes \rho(g)dg\|_{C^*(G,A)\otimes \mathrm{End}(V)},$$

(resp. $\|.\|_{C_r^*(G,A)\otimes \mathrm{End}(V)}$) où $C^*(G, A) \otimes \mathrm{End}(V)$ (resp.$C_r^*(G, A) \otimes \mathrm{End}(V)$) est le produit tensoriel minimal de C^*-algèbres.

Remarque 2.2.2.

1. Si ρ est une représentation unitaire, alors

$$A \rtimes^\rho G = C^*(G, A) \quad \text{et} \quad A \rtimes_r^\rho G = C_r^*(G, A).$$

2. Si $A = \mathbb{C}$, alors

$$\mathcal{A}^\rho(G) := \mathbb{C} \rtimes^\rho G \quad \text{et} \quad \mathcal{A}_r^\rho(G) := \mathbb{C} \rtimes_r^\rho G,$$

(cf. Chapitre 1).

3. Soit $C^*(G,A)\otimes V$ le module hilbertien construit par produit tensoriel hilbertien externe sur $C^*(G,A)\otimes\mathbb{C}=C^*(G,A)$. L'application

$$e_g\mapsto\big(h\otimes v\mapsto e_g*h\otimes\rho(g)v\big),$$

pour $g\in G$, $h\in C_c(G,A)$ et $v\in V$, induit un morphisme d'algèbres de Banach

$$A\rtimes^\rho G\to\mathcal{L}_{C^*(G,A)}(C^*(G,A)\otimes V).$$

La même application induit aussi un morphisme d'algèbres de Banach

$$A\rtimes^\rho_r G\to\mathcal{L}_{C^*_r(G,A)}(C^*_r(G,A)\otimes V),$$

où $C^*_r(G,A)\otimes V$ est le $C^*_r(G,A)$-module hilbertien construit par produit tensoriel externe.

Définition 2.2.3. Soient B et C deux G-C^*-algèbres ρ une représentation de dimension finie de G et $\theta:B\to C$ un morphisme G-équivariant de C^*-algèbres. On note $\tilde\theta$ l'application linéaire continue de $C_c(G,B)$ dans $C_c(G,C)$ telle que pour tout $f\in C_c(G,B)$,

$$\tilde\theta(f)(g)=\theta(f(g)).$$

Le lemme suivant dit que cette construction est fonctorielle.

Lemme 2.2.4. *L'application $\tilde\theta$ se prolonge en un morphisme d'algèbres de Banach $\theta\rtimes^\rho G:B\rtimes^\rho G\to C\rtimes^\rho G$ (resp. $\theta\rtimes^\rho_r G:B\rtimes^\rho_r G\to C\rtimes^\rho_r G$).*

Démonstration. En effet,

$$\begin{aligned}\|(\theta\rtimes^\rho G)(f)\|_{C\rtimes^\rho G}&=\|\int_G\theta(f(g))e_g\otimes\rho(g)dg\|_{C^*(G,C)\otimes\mathrm{End}(V)}\\&\le\|(C^*(G,\theta)\otimes\mathrm{Id}_V)\int_G f(g)e_g\otimes\rho(g)dg\|_{C^*(G,C)\otimes\mathrm{End}(V)}\\&\le\|C^*(G,\theta)\otimes\mathrm{Id}_V\|_{\mathrm{Hom}(C^*(G,B)\otimes\mathrm{End}(V),C^*(G,C)\otimes\mathrm{End}(V))}\|f\|_{B\rtimes^\rho G},\end{aligned}$$

où $C^*(G,\theta):C^*(G,B)\to C^*(G,C)$ est le morphisme induit par θ. Autrement dit, on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}C_c(G,B)\arrow[r]\arrow[d,"\tilde\theta"]&B\rtimes^\rho G\arrow[r]&C^*(G,B)\otimes\mathrm{End}(V)\arrow[d,"C^*(G,\theta)\otimes\mathrm{Id}_V"]\\C_c(G,C)\arrow[r]&C\rtimes^\rho G\arrow[r]&C^*(G,C)\otimes\mathrm{End}(V).\end{tikzcd}$$

Il en est de même dans le cas du produit croisé tordu réduit. □

Soit $\underline{E}G$ l'espace classifiant de G pour les actions propres (cf. 2.1.3). Pour toute G-C^*-algèbre A, on note $K^{\text{top}}(G, A)$ la K-homologie G-équivariante de $\underline{E}G$ à valeurs dans A introduite dans [BCH94], c'est-à-dire :

$$K^{\text{top}}(G, A) = \varinjlim KK_G(C_0(X), A),$$

où la limite inductive est prise parmi les G-sous-espace propres X, fermés de $\underline{E}G$ et tels que X/G soit compact.
Le but de cette section est de construire, pour tout groupe localement compact G, pour toute représentation ρ de dimension finie de G et pour toute G-C^*-algèbre A, deux morphismes de groupes :

$$\mu_\rho^A : K^{\text{top}}(G, A) \to K(A \rtimes^\rho G) \quad \text{et} \quad \mu_{\rho,r}^A : K^{\text{top}}(G, A) \to K(A \rtimes_r^\rho G).$$

2.2.2 Flèche de descente tordue

Soit G un groupe localement compact et soit (ρ, V) une représentation de dimension finie de G. Pour toutes G-C^*-algèbres A et B, on veut définir des variantes des morphismes de descente définis et notés j^G et j_r^G par Kasparov dans [Kas88, Theorem 3.11] (cf. 2.1.25) :

$$j_\rho : KK_G(A, B) \to KK^{\text{ban}}(A \rtimes^\rho G, B \rtimes^\rho G)$$
$$j_{\rho,r} : KK_G(A, B) \to KK^{\text{ban}}(A \rtimes_r^\rho G, B \rtimes_r^\rho G).$$

On remarque que, comme $A \rtimes^\rho G$ et $B \rtimes^\rho G$ sont des algèbres de Banach, ces morphismes ont nécessairement une image dans KK^{ban} et non pas dans la KK-théorie de Kasparov. La construction est analogue à la construction de la descente banachique dans le cas des complétions inconditionnelles introduites dans [Laf02b, Section 1.5].

Soient A et B deux G-C^* algèbres et soit E un G-(A, B)-bimodule de Kasparov. On rappelle que l'on note $\overline{E}$ le G-B-module de Banach à gauche non-dégénéré déterminé par E (cf. exemple 2.1.29 et [Laf02b, Section 1.1]) tel qu'il existe une isométrie $\mathbb{C}$-antilinéaire $* : E \to \overline{E}$ vérifiant $b^*x^* = (xb)^*$ pour $x \in E$ et $b \in B$. On définit alors un crochet $\langle ., . \rangle : \overline{E} \times E \to B$ que l'on note $\langle ., . \rangle$ par abus de notation, par : $\langle x^*, y \rangle = \langle x, y \rangle$, pour $x, y \in E$, de sorte que $(\overline{E}, E)$ soit un $G - (A, B)$-bimodule de Banach. Si $T \in \mathcal{L}_B(E)$ l'application $\overline{T}^* = (*)T^*(*)^{-1}$ définit un élément de $\mathcal{L}_B(\overline{E})$. On rappelle que pour toute longueur ℓ sur le groupe G, on note ι l'application :

$$\iota : KK_G(A, B) \to KK_{G,\ell}^{\text{ban}}(A, B),$$

déterminée par l'application :

$$\begin{aligned} E_G(A,B) &\to E^{\mathrm{ban}}_{G,\ell}(A,B) \\ (E,T) &\mapsto \big((\overline{E},E),(\overline{T}^*,T)\big). \end{aligned}$$

Si B est une algèbre de Banach, E est un B-module de Banach à droite et F est une B-module de Banach à gauche, on rappelle que l'on note $E \otimes^{\pi}_{B} F$ le produit tensoriel projectif (cf. 2.1).

On considère l'espace vectoriel $C_c(G,E)$ (resp. $C_c(G,\overline{E})$) des fonctions continues à support compact sur G à valeurs dans E (resp. à valeurs dans $\overline{E}$) et on note $x \in C_c(G,E)$ sous la forme $x = \int_G x(g)e_g dg$ (resp. $\xi \in C_c(G,\overline{E})$ sous la forme $\xi = \int_G e_g \xi(g) dg$).

Soient $C^*(G,E)$ et $C^*_r(G,E)$ les complétés de $C_c(G,E)$ définis comme dans [Kas88, Definition 3.8] (cf. remarque 2.1.26 point 5). On considère alors le module hilbertien $C^*(G,E) \otimes \mathrm{End}(V)$ défini sur le produit tensoriel de C^*-algèbres $C^*(G,B) \otimes \mathrm{End}(V)$ et construit par produit tensoriel externe (cf. définition 2.1.12). De même, soit $C^*_r(G,E) \otimes \mathrm{End}(V)$ le $(C^*_r(G,B) \otimes \mathrm{End}(V))$-module hilbertien.

Définition 2.2.5. On note $E \rtimes^{\rho} G$ (resp. $E \rtimes^{\rho}_{r} G$) l'adhérence de l'image de $C_c(G,E)$ dans $C^*(G,E) \otimes \mathrm{End}(V)$ (resp. $C^*_r(G,E) \otimes \mathrm{End}(V)$) par l'application suivante :

$$\begin{aligned} C_c(G,E) &\to C_c(G,E) \otimes \mathrm{End}(V) \\ \int_G x(g)e_g dg &\mapsto \int_G x(g)e_g \otimes \rho(g) dg. \end{aligned}$$

De même, on note $\overline{E} \rtimes^{\rho} G$ (resp. $\overline{E} \rtimes^{\rho}_{r} G$) l'adhérence de l'image de $C_c(G,\overline{E})$ dans $C^*(G,E) \otimes \mathrm{End}(V)$ (resp. $C^*_r(G,E) \otimes \mathrm{End}(V)$) par l'application :

$$\begin{aligned} C_c(G,\overline{E}) &\to C_c(G,\overline{E}) \otimes \mathrm{End}(V) \\ \int_G e_g \xi(g) dg &\mapsto \int_G e_g \xi(g) \otimes \rho(g) dg. \end{aligned}$$

On veut définir une structure de $B \rtimes^{\rho} G$-paire (resp. $B \rtimes^{\rho}_{r} G$-paire) sur le couple $(\overline{E} \rtimes^{\rho} G, E \rtimes^{\rho} G)$ (resp. $(\overline{E} \rtimes^{\rho}_{r} G, E \rtimes^{\rho}_{r} G)$) que l'on note $E \rtimes^{\rho} G$ (resp. $E \rtimes^{\rho}_{r} G$) par abus de notation. On donne alors la définition suivante, qui est complètement analogue à la définition [Laf02b, Définition 1.5.3] :

Définition 2.2.6. Soient $x = \int_G x(g)e_g dg$ dans $C_c(G,E)$, $\xi = \int_G e_g \xi(g) dg$ dans $C_c(G,\overline{E})$ et $b = \int_G b(g)e_g dg$ dans $C_c(G,B)$.

On pose

$$\begin{aligned} x.b &= \int_G \int_G x(t)t(b(t^{-1}g))dte_g dg \\ b.\xi &= \int_G e_g \int_G g^{-1}(b(t))\xi(t^{-1}g)dtdg \\ \langle \xi, x\rangle &= \int_G \int_G t(\langle \xi(t), x(t^{-1}g)\rangle)dte_g dg. \end{aligned}$$

Ceci définit une structure de $B \rtimes^\rho G$-paire (resp. $B \rtimes^\rho_r G$-paire) sur $(\overline{E} \rtimes^\rho G, E \rtimes^\rho G)$ (resp. $(\overline{E} \rtimes^\rho_r G, E \rtimes^\rho_r G)$).

Maintenant, comme on a supposé de plus que E est muni d'une structure de A-B-bimodule hilbertien, pour A une G-C^*-algèbre, on va montrer la proposition suivante :

Proposition 2.2.7. *La paire $E \rtimes^\rho G$ (resp. $E \rtimes^\rho_r G$) est un $(A \rtimes^\rho G, B \rtimes^\rho G)$-bimodule (resp. $(A \rtimes^\rho_r G, B \rtimes^\rho_r G)$-bimodule) de Banach.*

Démonstration. Soit $a = \int_G a(g)e_g dg \in C_c(G, A)$. L'algèbre $C_c(G, A)$ agit sur $C_c(G, E)$ de la façon suivante :

$$\begin{aligned} a.x &= \int_G \int_G a(t)t(x(t^{-1}g))dte_g dg, \\ \xi.a &= \int_G e_g \int_G (t^{-1}g)^{-1}(\xi(t)a(t^{-1}g))dtdg. \end{aligned}$$

On doit montrer que, avec ces formules, $E \rtimes^\rho G$ est un $A \rtimes^\rho G$-module de Banach à gauche, $\overline{E} \rtimes^\rho G$ un $A \rtimes^\rho G$-module de Banach à droite, que ces structures commutent avec les structures de $B \rtimes^\rho G$-modules qui découlent de la définition précédente et que, pour tout élément a de $A \rtimes^\rho G$,

$$\langle \xi a, x\rangle = \langle \xi, ax\rangle,$$

pour tout $\xi \in \overline{E} \rtimes^\rho G$ et pour tout $x \in E \rtimes^\rho G$. Mais ceci découle immédiatement du fait que $\begin{pmatrix} A \rtimes^\rho G & E \rtimes^\rho G \\ \overline{E} \rtimes^\rho G & B \rtimes^\rho G \end{pmatrix}$ est un sous-espace de

$$\begin{pmatrix} C^*(G, A) & C^*(G, E) \\ C^*(G, E) & C^*(G, B) \end{pmatrix} \otimes \mathrm{End}(V)$$

et que l'inclusion est une isométrie.
Le même raisonnement montre l'énoncé pour les produits croisés réduits.

□

Considérons maintenant un élément de $E_G(A,B)$ que l'on note (E,T).
Soit $T \rtimes^\rho G : E \rtimes^\rho G \to E \rtimes^\rho G$ (resp. $T \rtimes_r^\rho G : E \rtimes_r^\rho G \to E \rtimes_r^\rho G$) le morphisme de $B \rtimes^\rho G$-paires (resp. $B \rtimes_r^\rho G$-paires) défini sur $x \in C_c(G,E)$ et sur $\xi \in C_c(G,\overline{E})$ de la façon suivante :

$$(T \rtimes^\rho G)^> x(g) = T^>(x(g)),$$
$$(T \rtimes^\rho G)^< \xi(g) = T^<(\xi(g)),$$

(resp. $T \rtimes_r^\rho G$). Alors,

$$\|T \rtimes^\rho G\|_{\mathcal{L}(E \rtimes^\rho G)} \leq \|T\|_{\mathcal{L}(E)},$$

(de même pour le produit croisé réduit). Ces opérateurs sont analogues aux opérateurs $\mathcal{A}(G,T)$ et $\tilde{T}$ définis dans [Laf02b, Définition 1.5.3] et [Kas88, Theorem 3.11] respectivement.

Lemme 2.2.8. *L'élément $(E \rtimes^\rho G, T \rtimes^\rho G)$ (resp. $(E \rtimes_r^\rho G, T \rtimes_r^\rho G)$) ainsi défini appartient à $E^{\mathrm{ban}}(A \rtimes^\rho G, B \rtimes^\rho G)$ (resp. $E^{\mathrm{ban}}(A \rtimes_r^\rho G, B \rtimes_r^\rho G)$).*

Démonstration. On va montrer le lemme dans le cas du produit croisé maximal, le cas réduit étant complètement analogue.
On doit montrer que, pour tout élément $a \in C_c(G,A)$ et pour tout $g \in G$, les opérateurs $[a, T \rtimes^\rho G]$, $a(1-(T \rtimes^\rho G)^2)$ et $a(g(T \rtimes^\rho G) - T \rtimes^\rho G)$ sont des opérateurs compacts de $E \rtimes^\rho G$.
On remarque d'abord que l'opérateur $|y\rangle\langle\eta| \in \mathcal{K}_{B \rtimes^\rho G}(E \rtimes^\rho G)$, pour $\eta \in C_c(G,\overline{E})$ et $y \in C_c(G,E)$, agit sur $x \in C_c(G,E)$ et $\xi \in C_c(G,\overline{E})$ par les formules suivantes :

$$|y\rangle\langle\eta|^>(x)(g) = \int_G K_s^>(s(x(s^{-1}g)))ds,$$
$$|y\rangle\langle\eta|^<(\xi)(g) = \int_G (s^{-1}g)^{-1}(K_{s^{-1}g}^<(\xi(s)))ds,$$

où $K_g = \int_G |y(s)\rangle\langle g(\eta(s^{-1}g))|ds$, pour tout $g \in G$, appartient à $\mathcal{K}_B(E)$.

Définition 2.2.9. Étant donné un élément $S = (S_g)_{g \in G} \in C_c(G, \mathcal{K}_B(E))$, où E est vu comme la B-paire $(\overline{E}, E)$, on définit un opérateur $\widehat{S}$ dans $\mathcal{L}_{B \rtimes^\rho G}(E \rtimes^\rho G)$ de la manière suivante :

$$\widehat{S}^>(x)(g) = \int_G S_s^>(s(x(s^{-1}g)))ds,$$
$$\widehat{S}^<(\xi)(g) = \int_G (s^{-1}g)^{-1}(S_{s^{-1}g}^<(\xi(s)))ds,$$

pour $x \in C_c(G,E)$ et $\xi \in C_c(G,\overline{E})$.

Proposition 2.2.10. *L'application qui à un élément S dans $C_c(G, \mathcal{K}_B(E))$ associe l'élément $\widehat{S}$ dans $\mathcal{L}_{B\rtimes^\rho G}(E \rtimes^\rho G)$ défini ci-dessus, induit un morphisme d'algèbres de Banach de $\mathcal{K}(E) \rtimes^\rho G$ dans $\mathcal{K}(E \rtimes^\rho G)$.*

Nous allons démontrer cette proposition plus tard. Remarquons d'abord qu'on a le lemme suivant

Lemme 2.2.11. *Pour tout $a \in C_c(G, A)$ et pour tout $g \in G$, posons :*

$$\begin{aligned} S_1 &= \big(t \mapsto a(t)(t(T) - T) + [a(t), T]\big), \\ S_2 &= \big(t \mapsto a(t)t(1 - T^2)\big), \\ \text{et} \quad S_3 &= \big(t \mapsto a(t)t((gT) - T)\big), \end{aligned}$$

de sorte que $S_i \in C_c(G, \mathcal{K}(E))$ pour $i = 1, .., 3$. Alors,

$$\begin{aligned} &[a, T \rtimes^\rho G] = \widehat{S}_1, \\ &a(1 - (T \rtimes^\rho G)^2) = \widehat{S}_2, \\ &a(g(T \rtimes^\rho G) - T \rtimes^\rho G) = \widehat{S}_3, \end{aligned}$$

où, pour $i = 1, .., 3$, $\widehat{S}_i$ est l'élément de $\mathcal{L}_{B\rtimes^\rho G}(E \rtimes^\rho G)$ donné à partir de S_i par la définition 2.2.9.

Démonstration. Soit $a \in C_c(G, A)$. Pour $x = \int_G x(g)e_g dg \in C_c(G, E)$, calculons $[a, T \rtimes^\rho G]^>(x)$:

$$\begin{aligned} [a, T \rtimes^\rho G]^>(x) = &\int_G \Big(\int_G a(t)t(T^>(x(t^{-1}g)))dt\Big)e_g dg \\ &- (T \rtimes^\rho G)^>\Big(g \mapsto \int_G a(t)t(x(t^{-1}g))dt\Big), \end{aligned}$$

donc, pour tout $g \in G$,

$$\begin{aligned} [a, T \rtimes^\rho G]^>(x)(g) &= \int_G a(t)t(T^>(x(t^{-1}g))) - T^>(a(t)t(x(t^{-1}g)))dt, \\ &= \int_G \big(a(t)(t(T) - T)^> + [a(t), T]^>\big)(t(x(t^{-1}g)))dt. \end{aligned}$$

De même, pour $\xi = \int_G e_g \xi(g)dg \in C_c(G, \overline{E})$, on a :

$$\begin{aligned} [a, T \rtimes^\rho G]^<(\xi) &= ((T \rtimes^\rho G)^<(\xi))a - ((T \rtimes^\rho G)^<(\xi a)), \\ &= \int_G e_g \int_G (t^{-1}g)^{-1}(T^<(\xi(t))a(t^{-1}g))dtdg \\ &\quad -(T \rtimes^\rho G)^<(\int_G e_g \int_G (t^{-1}g)^{-1}(\xi(t)a(t^{-1}g))dtdg), \end{aligned}$$

donc, pour tout $g \in G$,

$$\begin{aligned}
[a, T \rtimes^\rho G]^<(\xi)(g) &= \int_G (t^{-1}g)^{-1}\big(T^<(\xi(t))a(t^{-1}g)\big)dt \\
&\qquad - \int_G T^<\big((t^{-1}g)^{-1}(\xi(t)a(t^{-1}g))\big)dt \\
&= \int_G (t^{-1}g)^{-1}\Big(T^<(\xi(t))a(t^{-1}g) - T^<(\xi(t)a(t^{-1}g)), \\
&\qquad -(t^{-1}g)T^<(\xi(t)a(t^{-1}g)) + T^<(\xi(t)a(t^{-1}g))\Big)dt \\
&= \int_G (t^{-1}g)^{-1}\Big([a(t^{-1}g), T]^<\xi(t), \\
&\qquad + \big(a(t^{-1}g)((t^{-1}g)T - T)\big)^<\xi(t)\Big)dt.
\end{aligned}$$

Donc, si pour tout $t \in G$ on pose

$$S_1(t) := a(t)(t(T) - T) + [a(t), T],$$

de sorte que S_1 définisse un élément de $C_c(G, \mathcal{K}(E))$, alors $[a, T \rtimes^\rho G] = \widehat{S}_1$.

Calculons maintenant $a(1 - T \rtimes^\rho G^2)^>$. Soit $x \in C_c(G, E)$, on a :

$$\big(a(1 - T \rtimes^\rho G^2)\big)^>(x) = ax - a(T \rtimes^\rho G^{2,>})x,$$

donc, pour tout $g \in G$,

$$\begin{aligned}
&\big(a(1 - T \rtimes^\rho G^2)\big)^>(x)(g), \\
&\qquad = \int_G a(t)t(x(t^{-1}g))dt - \int_G a(t)t\big(T^{2,>}x(t^{-1}g)\big)dt, \\
&\qquad = \int_G a(t)t\big((1 - T^{2,>})x(t^{-1}g)\big)dt, \\
&\qquad = \int_G a(t)t(1 - T^{2,>})tx(t^{-1}g)dt.
\end{aligned}$$

De même, pour $\xi \in C_c(G, \overline{E})$,

$$(a(1 - T \rtimes^\rho G^2))^<(\xi) = \xi a - (T \rtimes^\rho G^{2,<})(\xi a),$$

d'où, pour tout $g \in G$, on a :

$$\begin{aligned}
(a(1 - T \rtimes^\rho G^2))^<(\xi)(g) &= \xi a(g) - T^{2,<}(\xi a(g)),\\
&= \int_G (t^{-1}g)^{-1}(\xi(t)a(t^{-1}g)) - T^{2,<}((t^{-1}g)^{-1}\xi(t)a(t^{-1}g))dt,\\
&= \int_G (t^{-1}g)^{-1}\Big(\xi(t)a(t^{-1}g) - (t^{-1}g)T^{2,<}(\xi(t)a(t^{-1}g))\Big)dt,\\
&= \int_G (t^{-1}g)^{-1}\Big((t^{-1}g)(1 - T^{2,<})(\xi(t)a(t^{-1}g))\Big)dt,\\
&= \int_G (t^{-1}g)^{-1}\Big(a(t^{-1}g)(t^{-1}g)(1 - T^2)^<(\xi(t))\Big)dt.
\end{aligned}$$

Si, pour tout $t \in G$, on pose

$$S_2(t) := a(t)t(1 - T^2),$$

alors $S_2 \in C_c(G, \mathcal{K}(E))$ et $a(1 - T \rtimes^\rho G^2) = \widehat{S}_2$.

Prenons maintenant $g \in G$. De la même façon, on calcule $a(g(T \rtimes^\rho G) - T \rtimes^\rho G)$. Par exemple, pour $x \in C_c(G, E)$,

$$\begin{aligned}
a(g(T \rtimes^\rho G) - T \rtimes^\rho G)^> x(s),&\\
&= \int_G a(t)t(g(T^>)(x(t^{-1}s))) - a(t)tT^>(t(x(t^{-1}s)))dt,\\
&= \int_G a(t)t((gT^>) - T^>)(t(x(t^{-1}s)))dt,
\end{aligned}$$

et si on pose :

$$S_3(t) := a(t)t((gT) - T),$$

alors $S_3 \in C_c(G, \mathcal{K}(E))$ et $a(g(T \rtimes^\rho G) - T \rtimes^\rho G) = \widehat{S}_3$. □

Nous allons maintenant montrer la proposition 2.2.10 qui, grâce au lemme 2.2.11, implique le lemme 2.2.8. La démonstration repose sur le lemme suivant analogue au lemme 1.5.6 de [Laf02b] :

Lemme 2.2.12. *Soit $S = (S_g)_{g \in G} \in C_c(G, \mathcal{K}(E))$, où E est vu comme B-paire. Soit $\widehat{S} \in \mathcal{L}_{B \rtimes^\rho G}(E \rtimes^\rho G)$ l'opérateur défini comme dans la définition 2.2.9. Alors,*

$$\|\widehat{S}\|_{\mathcal{L}_{B \rtimes^\rho G}(E \rtimes^\rho G)} \leq \int_G \|S_g\|_{\mathcal{K}(E)} \|\rho(g)\|_{\mathrm{End}(V)} dg, \tag{2.2.1}$$

et $\widehat{S}$ est un opérateur compact. Plus précisément, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un $n \in \mathbb{N}$, et pour $i = 1, ..., n$ il existe des éléments $y_i \in C_c(G, E)$, $\xi_i \in C_c(G, \overline{E})$ tels que, si on pose pour tout $g \in G$,

$$K_g = \int_G \sum_{i=1}^{n} |y_i(t)\rangle\langle g(\xi_i(t^{-1}g))|dt,$$

alors :

- *$K = (K_g)_{g\in G} \in C_c(G, \mathcal{K}(E))$,*
- *si on considère y_i et ξ_i comme des éléments de $E \rtimes^\rho G$ et $\overline{E} \rtimes^\rho G$ respectivement, on a $\widehat{K} = \sum_{i=1}^{n} |y_i\rangle\langle\xi_i|$,*
- *et*

$$\int_G \|S_g - K_g\|_{\mathcal{K}(E)} \|\rho(g)\|_{\mathrm{End}(V)} dg \leq \epsilon. \tag{2.2.2}$$

Démonstration. Montrons d'abord que l'inégalité (2.2.1) est vraie. Pour ceci, on considère l'algèbre suivante : $\begin{pmatrix} \mathcal{K}(E) & E \\ \overline{E} & B \end{pmatrix}$. Le produit croisé tordu par ρ de G avec cette algèbre vérifie l'égalité :

$$\begin{pmatrix} \mathcal{K}(E) & E \\ \overline{E} & B \end{pmatrix} \rtimes^\rho G = \begin{pmatrix} \mathcal{K}(E) \rtimes^\rho G & E \rtimes^\rho G \\ \overline{E} \rtimes^\rho G & B \rtimes^\rho G \end{pmatrix}.$$

Ceci implique que $\mathcal{K}(E) \rtimes^\rho G$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E \rtimes^\rho G)$. Plus précisément, d'après [Kas88, Theorem 3.7] on a que le produit tensoriel de C^*-algèbres $C^*(G, \mathcal{K}(E)) \otimes \mathrm{End}(V)$ est une sous-algèbre du produit tensoriel $\mathcal{K}(C^*(G, E)) \otimes \mathrm{End}(V)$, et donc elle agit sur le module hilbertien $C^*(G, E) \otimes \mathrm{End}(V)$. D'autre part, par définition $\mathcal{K}(E) \rtimes^\rho G$ est une sous-algèbre fermée de $C^*(G, \mathcal{K}(E)) \otimes \mathrm{End}(V)$ (pour la norme de produit tensoriel de C^*-algèbres $\|.\|_{C^*(G,\mathcal{K}(E))\otimes\mathrm{End}(V)}$) et $E \rtimes^\rho G$ est un sous-module fermé de $C^*(G, E) \otimes \mathrm{End}(V)$ par construction. Ceci implique que $\mathcal{K}(E) \rtimes^\rho G$ agit aussi sur $E \rtimes^\rho G$ et c'est donc une sous-algèbre fermée de $\mathcal{L}(E \rtimes^\rho G)$, d'où l'égalité :

$$\|\widehat{S}\|_{\mathcal{L}(E\rtimes^\rho G)} = \|S\|_{\mathcal{K}(E)\rtimes^\rho G}.$$

De plus,

$$\begin{aligned} \|S\|_{\mathcal{K}(E)\rtimes^\rho G} &= \| \int_G S_g e_g \otimes \rho(g) dg\|_{C^*(G,\mathcal{K}(E))\otimes\mathrm{End}(V)}, \\ &\leq \| \int_G S_g e_g \otimes \rho(g) dg\|_{L^1(G,\mathcal{K}(E)\otimes\mathrm{End}(V))}, \\ &\leq \int_G \|S_g \otimes \rho(g)\|_{\mathcal{K}(E)\otimes\mathrm{End}(V)} dg. \end{aligned}$$

Donc,

$$\|S\|_{\mathcal{K}(E)\rtimes^\rho G} \leq \int_G \|S_g\|_{\mathcal{K}(E)}\|\rho(g)\|_{\mathrm{End}(V)}dg,$$

d'où l'inégalité (2.2.1).

Montrons maintenant que $\widehat{S}$ est compact. En utilisant des partitions de l'unité, on voit facilement qu'il suffit de montrer le résultat pour les éléments S dans $C_c(G,\mathcal{K}(E))$ de la forme $S_g = f(g)|y\rangle\langle\xi|$, pour $g \in G$, avec $f \in C_c(G)$, $y \in E$ et $\xi \in \overline{E}$.
Soit f une fonction à support compact sur G. Soit $\epsilon > 0$. Il existe une fonction positive $\chi \in C_c(G)$ à support compact contenu dans un voisinage de l'identité 1 de G, telle que $\int_G \chi = 1$, et telle que les conditions suivantes soient vérifiées [1]

$$\int_G |f(g) - \chi * f(g)|\, \|\rho(g)\|_{\mathrm{End}(V)}dg\|y\|_E\|\xi\|_{\overline{E}} < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{et}$$
$$\int_G \Big(\int_G |\chi(t)f(t^{-1}g)|\, \|\xi - t\xi\|_E dt\Big)\, \|\rho(g)\|_{\mathrm{End}(V)}dg\|y\|_E < \frac{\epsilon}{2}.$$

Prenons $n = 1$ et pour tout $g \in G$, posons

$$y_1(g) = \chi(g)y \quad \text{et} \quad \xi_1(g) = f(g)g^{-1}(\xi),$$

de sorte que $K_g = \int_G |\chi(t)y\rangle\langle f(t^{-1}g)t(\xi)|dt$ définisse un opérateur $\widehat{K}$ de $\mathcal{K}(E \rtimes^\rho G)$. On a alors,

$$\begin{aligned}
\|S_g - K_g\|_{\mathcal{K}(E)} &= \Big\|f(g)|y\rangle\langle\xi| - \int_G \chi(t)f(t^{-1}g)|y\rangle\langle t\xi|dt\Big\|_{\mathcal{K}(E)},\\
&\leq \Big\|f(g)|y\rangle\langle\xi| - \int_G \chi(t)f(t^{-1}g)|y\rangle\langle\xi|dt\Big\|_{\mathcal{K}(E)}\\
&\qquad + \Big\|\int_G \chi(t)f(t^{-1}g)|y\rangle\langle\xi|dt - \int_G \chi(t)f(t^{-1}g)|y\rangle\langle t\xi|dt\Big\|_{\mathcal{K}(E)},\\
&\leq \Big\|\big(f(g) - \chi * f(g)\big)|y\rangle\langle\xi|\Big\|_{\mathcal{K}(E)} + \int_G \Big\|\,|\chi(t)f(t^{-1}g)y\rangle\langle\xi - t\xi|\Big\|_{\mathcal{K}(E)}dt,\\
&\leq |f(g) - \chi * f(g)|\, \|y\|_E\, \|\xi\|_{\overline{E}} + \int_G \Big|\chi(t)f(t^{-1}g)\Big|\, \|y\|_E\, \|\xi - t\xi\|_{\overline{E}}dt.
\end{aligned}$$

[1] Pour que ces conditions soient vérifiées il suffit que le support de χ soit assez proche de 1.

On a alors les inégalités suivantes

$$\begin{aligned}
\|\widehat{S}-\widehat{K}\|_{\mathcal{L}(E\rtimes^{\rho}G)} &\leq \int_G \|S_g-K_g\|_{\mathcal{K}(E)}\|\rho(g)\|_{\mathrm{End}(V)}dg,\\
&\leq \int_G \Big(\big|f(g)-\chi*f(g)\big|\,\|y\|_E\,\|\xi\|_{\overline{E}}\\
&\qquad + \int_G \big|\chi(t)f(t^{-1}g)\big|\,\|y\|_E\,\|\xi-t\xi\|_{\overline{E}}dt\Big)\|\rho(g)\|_{\mathrm{End}(V)}dg\\
&< \epsilon.
\end{aligned}$$

D'où l'inégalité 2.2.2.

□

En appliquant le lemme 2.2.12 à S_1, S_2 et S_3 on termine la démonstration du fait que $(E\rtimes^{\rho}G, T\rtimes^{\rho}G)$ est un élément de $E^{\mathrm{ban}}(A\rtimes^{\rho}G, B\rtimes^{\rho}G)$. □

Définition 2.2.13. Pour toutes G-C^*-algèbres A et B et pour toute représentation de dimension finie ρ de G, on définit un morphisme de groupes de $KK_G(A,B)$ dans $KK^{\mathrm{ban}}(A\rtimes^{\rho}G, B\rtimes^{\rho}G)$ (resp. $KK^{\mathrm{ban}}(A\rtimes^{\rho}_r G, B\rtimes^{\rho}_r G)$) que l'on note j_ρ (resp. $j_{\rho,r}$) par la formule suivante : pour $[E,T]\in KK_G(A,B)$, on pose

$$j_\rho([E,T]) := [E\rtimes^{\rho}G, T\rtimes^{\rho}G] \quad \text{et} \quad j_{\rho,r}([E,T]) := [E\rtimes^{\rho}_r G, T\rtimes^{\rho}_r G].$$

On appelle ce morphisme *morphisme de descente tordu* (resp. *morphisme de descente tordu réduit*).

2.2.3 Fonctorialité

La proposition suivante montre la fonctorialité des morphismes de descente tordus.

Proposition 2.2.14. *Les applications*

$$\begin{aligned}
j_\rho &: KK_G(A,B)\to KK^{\mathrm{ban}}(A\rtimes^{\rho}G, B\rtimes^{\rho}G),\\
j_{\rho,r} &: KK_G(A,B)\to KK^{\mathrm{ban}}(A\rtimes^{\rho}_r G, B\rtimes^{\rho}_r G),
\end{aligned}$$

définies dans la définition 2.2.13 sont des morphismes fonctoriels en A et en B. De plus, ils sont tels que si $A=B$ alors $j_\rho(1_A)=1_{A\rtimes^{\rho}G}$ et $j_{\rho,r}(1_A)=1_{A\rtimes^{\rho}_r G}$.

Démonstration. On voit facilement que $j_\rho(1_A)=1_{A\rtimes^{\rho}G}$. Montrons maintenant que j_ρ est fonctoriel. La démonstration pour $j_{r,\rho}$ est complètement analogue.

Soit θ_1 un morphisme de G-C^*-algèbres de A_1 dans A. Notons $\theta_1 \rtimes^\rho G$ le morphisme d'algèbres de Banach de $A_1 \rtimes^\rho G$ dans $A \rtimes^\rho G$ qu'il définit. Il est facile de voir que pour tout $\alpha \in KK_G(A, B)$ on a,

$$j_\rho(\theta_1^*(\alpha)) = (\theta_1 \rtimes^\rho G)^*(j_\rho(\alpha)),$$

ce qui donne la fonctorialité en A.
Soit maintenant $\theta : B \to C$ un morphisme de G-C^*-algèbres. On va montrer que pour tout $\alpha \in KK_G(A, B)$,

$$j_\rho(\theta_*(\alpha)) = (\theta \rtimes^\rho G)_*(j_\rho(\alpha)),$$

dans $KK^{\mathrm{ban}}(A \rtimes^\rho G, C \rtimes^\rho G)$.
Soit (E, T) un représentant de α dans $E_G(A, B)$. Par définition,

$$\begin{aligned}(\theta \rtimes^\rho G)_*(j_\rho(E))^> &= E \rtimes^\rho G \otimes^\pi_{\widetilde{B \rtimes^\rho G}} \widetilde{C \rtimes^\rho G},\\ (\theta \rtimes^\rho G)_*(j_\rho(E))^< &= \widetilde{C \rtimes^\rho G} \otimes^\pi_{\widetilde{B \rtimes^\rho G}} \overline{E} \rtimes^\rho G,\end{aligned}$$

où $\otimes^\pi$ est le produit tensoriel projectif, et,

$$\begin{aligned}j_\rho(\theta_*(E))^> &= (E \otimes_B C) \rtimes^\rho G\\ j_\rho(\theta_*(E))^< &= (\overline{E \otimes_B C}) \rtimes^\rho G,\end{aligned}$$

où $\otimes$ est le produit tensoriel hilbertien interne.
On note

$$\begin{aligned}(\theta \rtimes^\rho G)_*(j_\rho(E)) &:= (\theta \rtimes^\rho G)_*(j_\rho(E))^> \quad \text{et} \quad j_\rho(\theta_*(E)) := j_\rho(\theta_*(E))^>,\\ (\theta \rtimes^\rho G)_*(j_\rho(\overline{E})) &:= (\theta \rtimes^\rho G)_*(j_\rho(E))^< \quad \text{et} \quad j_\rho(\theta_*(\overline{E})) := j_\rho(\theta_*(E))^<,\end{aligned}$$

pour simplifier les notations.
D'après [Kas88, Lemma 3.10], l'application

$$\begin{aligned}\tau : C_c(G, E) \otimes C_c(G, C) &\to C_c(G, E \otimes C)\\ x \otimes c &\mapsto \big(g \mapsto \int_G x(s) \otimes sc(s^{-1}g)ds\big),\end{aligned}$$

définit un isomorphisme de $C^*(C, G)$-modules hilbertiens

$$C^*(G, E) \otimes_{C^*(G,B)} C^*(G, C) \to C^*(G, E \otimes_B C).$$

On a alors,

$$\begin{aligned}\|\tau(x\otimes c)\|_{(E\otimes_B C)\rtimes^\rho G} &= \|\tau(x\otimes c)\|_{C^*(G,E\otimes_B C)\otimes \mathrm{End}(V)}\\ &\leq \|x\|_{C^*(G,E)\otimes\mathrm{End}(V)}\|c\|_{C^*(G,C)\otimes\mathrm{End}(V)}\end{aligned}$$

ce qui implique que $\|\tau(x\otimes c)\|_{(E\otimes_B C)\rtimes^\rho G} \leq \|x\otimes c\|_{(E\rtimes^\rho G\otimes^\pi_{\widetilde{B\rtimes^\rho G}}\widetilde{C\rtimes^\rho G})}$.
L'application τ définit alors un morphisme de $C\rtimes^\rho G$-modules de Banach à droite de norme inférieure ou égale à 1 :

$$\tau : (E\rtimes^\rho G)\otimes^\pi_{\widetilde{B\rtimes^\rho G}}(\widetilde{C\rtimes^\rho G}) \to (E\otimes_B C)\rtimes^\rho G,$$

que l'on note encore τ par abus de notation. On note $\overline{\tau}$ l'analogue de τ pour $\overline{E}$.
On va alors construire l'homotopie cherchée à l'aide de cônes de la manière suivante (cf. [Par06, Section 1.9].
Soit

$$E\rtimes^\rho_\theta G = \{(h,x)\in j_\rho(\theta_*(E))[0,1]\times(\theta\rtimes^\rho G)_*(j_\rho(E))|h(0)=\tau(x)\}$$

muni de la norme $\|(h,x)\| = \max\big(\sup_{t\in[0,1]}\|h(t)\|, \|x\|\big)$, le cône associé à τ.
De même, on définit

$$\overline{E}\rtimes^\rho_\theta G = \{(h,x)\in j_\rho(\theta_*(\overline{E}))[0,1]\times(\theta\rtimes^\rho G)_*(j_\rho(\overline{E}))|h(0)=\overline{\tau}(x)\},$$

qui est le cône associé à $\overline{\tau}$.
Alors le couple

$$(\overline{E}\rtimes^\rho_\theta G, E\rtimes^\rho_\theta G)$$

définit un $(A\rtimes^\rho G, (C\rtimes^\rho G)[0,1])$-bimodule de Banach que l'on note $E\rtimes^\rho_\theta G$ par abus de notation.

D'autre part, on définit un opérateur $T\rtimes^\rho_\theta G\in\mathcal{L}(E\rtimes^\rho_\theta G)$ de la façon suivante :

$$\begin{aligned}(T\rtimes^\rho_\theta G)^>(h,e\otimes c) &= \big(t\mapsto(\theta_*(T)\rtimes^\rho G)^> h(t), (\theta\rtimes^\rho G)_*(T\rtimes^\rho G)^>(x)\big)\\ &= \Big((g,t)\mapsto\theta_*(T)^>(h(t)(g)), (g\mapsto T^>(e(g)))\otimes c\Big),\end{aligned}$$

pour $(h,e\otimes c)\in E\rtimes^\rho_\theta G$, et on définit $(T\rtimes^\rho_\theta G)^<$ de façon analogue.

Remarque 2.2.15. L'opérateur $(T\rtimes^\rho_\theta G)$ ainsi défini est le "cône" du couple d'opérateurs $\big((\theta\rtimes^\rho G)_*(T\rtimes^\rho G), \theta_*(T)\rtimes^\rho G\big)$, noté

$$Z\Big((\theta\rtimes^\rho G)_*(T\rtimes^\rho G), \theta_*(T)\rtimes^\rho G\Big)$$

et défini dans [Par06, Definition 1.9.14].

Lemme 2.2.16. *L'élément* $(E \rtimes_\theta^\rho G, T \rtimes_\theta^\rho G)$ *appartient à* $E^{\mathrm{ban}}(A \rtimes^\rho G, (C \rtimes^\rho G)[0,1])$ *et il réalise une homotopie entre* $j_\rho(\theta_*(\alpha))$ *et* $(\theta \rtimes^\rho G)_*(j_\rho(\alpha))$.

Démonstration. On doit d'abord montrer que pour tout $a \in A \rtimes^\rho G$ et pour tout $g \in G$, les opérateurs suivants :

$$[a, (T \rtimes_\theta^\rho G)], \quad a(1 - (T \rtimes_\theta^\rho G)^2), \quad a(g(T \rtimes_\theta^\rho G) - T \rtimes_\theta^\rho G)$$

sont des opérateurs compacts de $E \rtimes_\theta^\rho G$.

Soit $a \in A \rtimes^\rho G$ et $g \in G$. Pour $S = (S_t)_{t \in G} \in C_c(G, \mathcal{K}(E))$, on note $\theta_*(S) := (\theta_*(S)_t)_{t \in G}$ l'élément de $C_c(G, \mathcal{K}(\theta_*(E))$ tel que $\theta_*(S)_t = \theta_*(S_t)$.
On rappelle que, étant donné $S = (S_t)_t \in C_c(G, \mathcal{K}(E))$, on note $\widehat{S}$ l'élément de $\mathcal{L}_{B \rtimes^\rho G}(E \rtimes^\rho G)$ associé à S et donné par la définition 2.2.9.

On considère l'application suivante :

$$\begin{aligned} \psi : C_c(G, \mathcal{K}(E)) &\to \mathcal{L}(E \rtimes_\theta^\rho G) \\ S &\mapsto \Big((h,x) \mapsto \big(t \mapsto \widehat{\theta_*(S)}(h(t)), (\theta \rtimes^\rho G)_*(\widehat{S})x\big)\Big). \end{aligned}$$

Soient S_1, S_2 et S_3 les éléments de $C_c(G, \mathcal{K}(E))$ donnés par le lemme 2.2.11 tels que :

$$\widehat{S_1} = [a, T \rtimes^\rho G] \ , \ \widehat{S_2} = a(1 - (T \rtimes^\rho G)^2) \ \text{ et } \ \widehat{S_3} = a(g(T \rtimes^\rho G) - T \rtimes^\rho G).$$

Par des calculs, il est facile de vérifier les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} &\psi(S_1) = [a, (T \rtimes_\theta^\rho G)], \\ &\psi(S_2) = a(1 - (T \rtimes_\theta^\rho G)^2) \\ \text{et} \quad &\psi(S_3) = a(g(T \rtimes_\theta^\rho G) - T \rtimes_\theta^\rho G). \end{aligned}$$

En effet, on a par exemple, pour $x \in C_c(G, E)$ et $\xi \in C_c(G, \overline{E})$,

$$\begin{aligned} [a, \theta_*(T) \rtimes^\rho G]^> x(t) &= \int_G (\theta_*(S_{1,s})^>)(s(x(s^{-1})))ds, \\ [a, \theta_*(T) \rtimes^\rho G]^< \xi(t) &= \int_G (s^{-1}t)^{-1}(\theta_*(S_{1,s^{-1}t})^<)(\xi(s))ds, \end{aligned}$$

pour tout $t \in G$, donc,

$$[a, \theta_*(T) \rtimes^\rho G] = \widehat{\theta_*(S_1)}.$$

De même,

$$[a, (\theta \rtimes^\rho G)_*(T \rtimes^\rho G)] = (\theta \rtimes^\rho G)_*(\widehat{S_1}).$$

Et donc, les opérateurs $[a, (T \rtimes^\rho_\theta G)]$, $a(1 - (T \rtimes^\rho_\theta G)^2)$ et $a(g(T \rtimes^\rho_\theta G) - T \rtimes^\rho_\theta G)$ appartiennent à l'image de ψ.

D'autre part, pour tout $S = (S_t)_t \in C_c(G, \mathcal{K}(E))$,

$$\|\psi(S)\|_{\mathcal{L}(E \rtimes^\rho_\theta G)} \leq \max\Big(\|\widehat{\theta_*(S)}\|_{\mathcal{L}(\theta_*(E) \rtimes^\rho G)}, \|(\theta \rtimes^\rho G)_*(\widehat{S})\|_{\mathcal{L}((\theta \rtimes^\rho G)_*(E \rtimes^\rho G))}\Big),$$

donc, l'application ψ induit un morphisme d'algèbre de Banach de $\mathcal{K}(E) \rtimes^\rho G$ dans $\mathcal{L}(E \rtimes^\rho_\theta G)$. En effet, on a les estimations suivantes :

$$\begin{aligned}\|(\theta \rtimes^\rho G)_*(\widehat{S})\|_{\mathcal{L}((\theta \rtimes^\rho G)_*(E \rtimes^\rho G))} &= \|\widehat{S} \otimes 1\|_{\mathcal{L}(E \rtimes^\rho G \otimes^\pi_{\widetilde{B \rtimes^\rho G}} \widetilde{C \rtimes^\rho G})}, \\ &\leq \|S\|_{\mathcal{K}(E) \rtimes^\rho G},\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\|\widehat{\theta_*(S)}\|_{\mathcal{L}(\theta_*(E) \rtimes^\rho G)} &= \|\theta_*(S)\|_{\mathcal{K}(\theta_*(E)) \rtimes^\rho G}, \\ &\leq \|S\|_{\mathcal{K}(E) \rtimes^\rho G},\end{aligned}$$

qui impliquent que

$$\|\psi(S)\|_{\mathcal{L}(E \rtimes^\rho_\theta G)} \leq \|S\|_{\mathcal{K}(E) \rtimes^\rho G}.$$

On note ψ le morphisme

$$\mathcal{K}(E) \rtimes^\rho G \to \mathcal{L}(E \rtimes^\rho_\theta G),$$

par abus de notation. On va montrer que l'image de ψ est contenue dans $\mathcal{K}(E \rtimes^\rho_\theta G)$. Soient $S \in C_c(G, \mathcal{K}(E))$ et $\epsilon > 0$. Il existe $n \in \mathbb{N}$ et pour $i = 1, ..., n$, il existe $y_i \in C_c(G, E)$, $\xi_i \in C_c(G, \overline{E})$ tels que l'élément $K = (K_g)_{g \in G} \in C_c(G, \mathcal{K}(E))$ défini par la formule suivante :

$$K_g = \int_G \sum_{i=1}^n |y_i(t)\rangle\langle g(\xi_i(t^{-1}g))| dt,$$

vérifie l'inégalité :

$$\int_G \|S_g - K_g\|_{\mathcal{K}(E)} \|\rho(g)\|_{\mathrm{End}(V)} dg < \epsilon,$$

(voir lemme 2.2.12).
L'image par ψ de K est un opérateur compact de $E \rtimes_\theta^\rho G$. En effet, pour tout $s \in G$, $\theta_*(K_s) = \int_G \sum_{i=1}^n |y_i(t) \otimes 1\rangle\langle s(1 \otimes \xi_i(t^{-1}s)|dt$, d'où, pour tout $x \in C_c(G, \theta_*(E)^>)$,

$$\begin{aligned}
\widehat{\theta_*(K)}^>(x)(g) &= \int_G \theta_*(K_s)^> s(x(s^{-1}g))ds, \\
&= \int_G \int_G \sum_{i=1}^n |y_i(t) \otimes 1\rangle\langle s(1 \otimes \xi_i(t^{-1}s))|^> s(x(s^{-1}g))dtds, \\
&= \sum_{i=1}^n \big(|g \mapsto y_i(g) \otimes 1\rangle\langle g \mapsto 1 \otimes \xi_i(g)|^>(x)\big)(g),
\end{aligned}$$

et de façon analogue, pour $\xi \in C_c(G, \theta_*(E)^<)$, on trouve,

$$\begin{aligned}
\widehat{\theta_*(K)}^<(\xi)(g) &= \int_G (s^{-1}g)^{-1}\theta_*(K_{s^{-1}g})^<(\xi(s))ds, \\
&= \sum_{i=1}^n \big(|g \mapsto y_i(g) \otimes 1\rangle\langle g \mapsto 1 \otimes \xi_i(g)|^<(\xi)\big)(g),
\end{aligned}$$

d'où,

$$\widehat{\theta_*(K)} = \sum_{i=1}^n |g \mapsto y_i(g) \otimes 1\rangle\langle g \mapsto 1 \otimes \xi_i(g)|.$$

De plus,

$$\begin{aligned}
(\theta \rtimes^\rho G)_*(\widehat{K}) &= (1 \otimes \widehat{K}^<, \widehat{K}^> \otimes 1), \\
&= \sum_{i=1}^n |y_i \otimes 1\rangle\langle 1 \otimes \xi_i|,
\end{aligned}$$

et donc pour $(h, x) \in E \rtimes_\theta^\rho G$,

$$\begin{aligned}
&\psi(K)^>(h, x) = \\
&\quad \Big(t \mapsto \sum_{i=1}^n |g \mapsto y_i(g) \otimes 1\rangle\langle g \mapsto 1 \otimes \xi_i(g)|^>(h(t)), \sum_{i=1}^n |y_i \otimes 1\rangle\langle 1 \otimes \xi_i|^> x\Big), \\
&\quad = \sum_{i=1}^n \Big|\big(t \mapsto (g \mapsto y_i(g) \otimes 1), y_i \otimes 1\big)\Big\rangle\Big\langle\big(t \mapsto (g \mapsto 1 \otimes \xi_i(g)), 1 \otimes \xi_i\big)\Big|.
\end{aligned}$$

On en déduit que $\psi(K) \in \mathcal{K}(E \rtimes_\theta^\rho G)$.

Le fait que ψ soit un morphisme d'algèbres de Banach, implique alors que $\psi(S)$ est un opérateur compact de $E \rtimes_\theta^\rho G$. En effet, on a les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned}\|\psi(S) - \psi(K)\|_{\mathcal{L}(E \rtimes_\theta^\rho G)} &\leq \|S - K\|_{\mathcal{K}(E) \rtimes^\rho G}, \\ &\leq \int_G \|S_g - K_g\|_{\mathcal{K}(E)} \|\rho(g)\|_{\mathrm{End}(V)} < \epsilon.\end{aligned}$$

Comme les opérateurs

$$[a, (T \rtimes_\theta^\rho G)], \quad a(1 - (T \rtimes_\theta^\rho G)^2) \quad \text{et} \quad a(g(T \rtimes_\theta^\rho G) - T \rtimes_\theta^\rho G)$$

appartiennent à l'image de ψ, on a alors montré que ce sont des opérateurs compacts de $E \rtimes_\theta^\rho G$ et donc que $(E \rtimes_\theta^\rho G, T \rtimes_\theta^\rho G)$ appartient à $E^{\mathrm{ban}}(A \rtimes^\rho G, (C \rtimes^\rho G)[0,1])$. Il est clair qu'il réalise une homotopie entre $j_\rho(\theta_*(\alpha))$ et $(\theta \rtimes^\rho G)_*(j_\rho(\alpha))$.

□

Ceci termine la démonstration de la proposition 2.2.14 et donc de la fonctorialité du morphisme de descente tordu. □

2.2.4 Descente et action de KK^{ban} sur la K-théorie.

Soient A et B deux algèbres de Banach. On rappelle que l'on note Σ l'homomorphisme de $KK^{\mathrm{ban}}(A, B)$ dans $\mathrm{Hom}(K(A), K(B))$ défini dans [Laf02b] et qui donne l'action de la KK-théorie banachique sur la K-théorie. La proposition suivante montre que les morphismes de descente tordus construits dans la section 2.2.2 sont compatibles avec Σ.

Proposition 2.2.17. *Soient G un groupe localement compact, A, B, C des G-C^*-algèbres, $\alpha \in KK_G(A, B)$, $\beta \in KK_G(B, C)$, et $\alpha \otimes_B \beta$ leur produit de Kasparov qui est un élément de $KK_G(A, B)$. On a alors,*

$$\Sigma(j_\rho(\alpha \otimes_B \beta)) = \Sigma(j_\rho(\beta)) \circ \Sigma(j_\rho(\alpha))$$

dans $\mathrm{Hom}(K(A \rtimes^\rho G), K(B \rtimes^\rho G))$. *De même dans le cas du produit croisé réduit.*

Démonstration. La démonstration découle de la fonctorialité de j_ρ et de $j_{\rho,r}$ et du lemme suivant démontré dans [Laf02b, Proposition 1.6.10] qui dit que tout élément de KK-théorie est le produit de Kasparov d'un élément qui provient d'un vrai morphisme et d'un élément de KK-théorie qui est l'inverse d'un morphisme.

Lemme 2.2.18. *Soient G un groupe localement compact, A et B deux G-C^*-algèbres et $\alpha \in KK_G(A, B)$. Il existe une G-C^*-algèbre A_1, des morphisme G-équivariants $\theta : A_1 \to A$, $\eta : A_1 \to B$, et un élément $\alpha_1 \in KK_G(A, A_1)$ tels que :*

1. *$[\theta] \otimes_A \alpha_1 = \mathrm{Id}_{A_1}$ et $\alpha_1 \otimes_A [\theta] = \mathrm{Id}_A$, où $[\theta] \in KK_G(A_1, A)$ est induit par le morphisme θ (c'est-à-dire que α_1 est l'inverse en KK-théorie G-équivariante d'un morphisme),*
   et
2. *$\theta^*(\alpha) = [\eta]$, où $[\eta] \in KK_G(A_1, A)$ est l'élément induit par le morphisme η.*

La fonctorialité du morphisme de descente j_ρ et de l'action de KK^{ban} sur la K-théorie donnée par Σ impliquent la proposition (2.2.17). La démonstration est la même que celle de [Laf02b, Proposition 1.6.9] : on applique le lemme (2.2.18) à G, A, B et α. Comme j_ρ et Σ sont fonctoriels on a

$$\begin{aligned}\Sigma(j_\rho(\alpha_1)) \circ j_\rho(\theta)_* &= \Sigma(j_\rho(\theta)^*(j_\rho(\alpha_1))),\\ &= \Sigma(j_\rho(\theta^*(\alpha_1))),\\ &= \mathrm{Id}_{K(A_1 \rtimes^\rho G)}, \ \text{ car } \ \theta^*(\alpha_1) = \mathrm{Id}_{A_1}.\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}j_\rho(\theta)_* \circ \Sigma(j_\rho(\alpha_1)) &= \Sigma(j_\rho(\theta)_*(j_\rho(\alpha_1)),\\ &= \Sigma(j_\rho(\theta_*(\alpha_1))),\\ &= \mathrm{Id}_{K(A \rtimes^\rho G)} \ \text{ car } \ \theta_*(\alpha_1) = \mathrm{Id}_A.\end{aligned}$$

Donc,

$$j_\rho(\theta)_* : K(A_1 \rtimes^\rho G) \to K(A \rtimes^\rho G)$$

est inversible. De plus, $\theta^*(\alpha \otimes_B \beta) = \eta^*(\beta)$ dans $KK_G(A_1, C)$ et donc,

$$\Sigma(j_\rho(\alpha \otimes \beta)) \circ j_\rho(\theta)_* = \Sigma(j_\rho(\beta)) \circ j_\rho(\eta)_*,$$

et ceci implique que

$$\Sigma(j_\rho(\alpha \otimes \beta)) = \Sigma(j_\rho(\beta)) \circ j_\rho(\eta)_* \circ j_\rho(\theta)_*^{-1}.$$

De la même façon, on montre, en prenant $C = B$ et $\beta = \mathrm{Id}$, que

$$\Sigma(j_\rho(\alpha)) = j_\rho(\eta)_* \circ j_\rho(\theta)_*^{-1}$$

Ceci implique la proposition.
La même démonstration vaut pour la descente dans le cas du produit croisé réduit.

□

2.2.5 Construction du morphisme

Soit G un groupe localement compact et B une G-C^*-algèbre. On rappelle que l'on note $\underline{E}G$ le classifiant de G pour les actions propres et $K^{\mathrm{top}}(G,B)$ la K-homologie G-équivariante de $\underline{E}G$ à valeurs dans B (cf. section 2.1). On rappelle que $K^{\mathrm{top}}(G,B) = \varinjlim KK_G(C_0(X),B)$, où X décrit les parties G-compactes de $\underline{E}G$, c'est-à-dire les parties fermées de $\underline{E}G$, G-invariantes et telles que X/G soit compact.

Définition 2.2.19. Soient G un groupe localement compact et X une partie G-compacte de $\underline{E}G$. Soit c une fonction continue à support compact sur X et à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ telle que $\int_G c(g^{-1}x)dg = 1$, pour tout $x \in X$ (une fonction avec ces propriétés existe d'après [Tu99] et elle est appelée "fonction de cut-off" sur X). Soit p la fonction sur $G \times X$ définie par la formule

$$p(g,x) = \sqrt{c(x)c(g^{-1}x)}.$$

La fonction p définit alors un projecteur de $C_c(G, C_0(X))$, que l'on note p par abus de notation. L'élément de $K(C_0(X) \rtimes^\rho G)$ qu'il définit est appelé *élément de Mischenko* associé à X. On le note Δ_ρ.
Soit

$$\Sigma : KK^{\mathrm{ban}}(C_0(X) \rtimes^\rho G, B \rtimes^\rho G) \to \mathrm{Hom}(K(C_0(X) \rtimes^\rho G), K(B \rtimes^\rho G))$$

le morphisme provenant de l'action de KK^{ban} sur la K-théorie défini dans [Laf02b] (cf. théorème 2.1.37). On a alors une suite de morphismes

$$KK_G(C_0(X),B) \xrightarrow{j_\rho} KK^{\mathrm{ban}}(C_0(X) \rtimes^\rho G, B \rtimes^\rho G) \xrightarrow{\Sigma(.)(\Delta_\rho)} K(B \rtimes^\rho G).$$

De même que dans [Laf02b] section 1.7, en passant à la limite inductive on définit un morphisme

$$\mu_\rho^B : K^{\mathrm{top}}(G,B) \to K(B \rtimes^\rho G),$$

et on l'appelle *morphisme de Baum-Connes tordu par la représentation ρ.*

Remarque 2.2.20. La fonctorialité des morphismes Σ et j_ρ implique que le morphisme de Baum-Connes tordu par ρ, défini ci-dessus, est fonctoriel en B. En effet, soit $\theta : B \to C$ un morphisme de G-C^*-algèbres. Soit $\alpha \in KK_G(C_0(X),B)$. On a les égalités suivantes,

$$\begin{aligned}
(\theta \rtimes^\rho G)_*(\mu_\rho^B(\alpha)) &= (\theta \rtimes^\rho G)_*(\Sigma(j_\rho(\alpha))(\Delta_\rho)),\\
&= \Sigma\big((\theta \rtimes^\rho G)_*(j_\rho(\alpha))\big)(\Delta_\rho),\\
&= \Sigma\big(j_\rho(\theta_*(\alpha))\big)(\Delta_\rho),\\
&= \mu_\rho^C(\theta_*(\alpha)).
\end{aligned}$$

Définition 2.2.21. Pour toute G-C^*-algèbre B, soit $\lambda_{G,B} \otimes \rho$ le morphisme d'algèbres de Banach de $B \rtimes^{\rho} G$ dans $B \rtimes_r^{\rho} G$ (cf. définition 4). Soit

$$(\lambda_{G,B} \otimes \rho)_* : K(B \rtimes^{\rho} G) \to K(B \rtimes_r^{\rho} G)$$

le morphisme induit par $\lambda_{G,B} \otimes \rho$ en K-théorie. On définit un morphisme de Baum-Connes tordu *réduit*,

$$\mu_{\rho,r}^B : K^{\mathrm{top}}(G, B) \to K(B \rtimes_r^{\rho} G),$$

en posant $\mu_{\rho,r}^B := (\lambda_{G,B} \otimes \rho)_* \circ \mu_{\rho}^B$.

Remarque 2.2.22. Il est facile de voir que, si X est une partie G-compacte de $\underline{E}G$ et si on note $\Delta_{\rho,r}$ l'élément de $K(C_0(X) \rtimes_r^{\rho} G)$ défini par la fonction p, alors le morphisme de Baum-Connes tordu réduit vérifie l'égalité

$$\mu_{\rho,r}^B(x) = \Sigma\big(j_{\rho,r}(x)\big)(\Delta_{\rho,r}),$$

pour tout $x \in KK_G(C_0(X), B)$.

2.2.6 Compatibilité avec la somme directe de représentations

On va maintenant montrer un lemme qui montre que le morphisme de Baum-Connes tordu est compatible avec la somme directe de représentations, ce qui terminera le chapitre 2. On utilisera ce résultat dans l'étude de la bijectivité du morphisme (cf. chapitre 3).

Lemme 2.2.23. *Soient ρ et ρ' deux représentations de dimension finie de G et B une G-C^*-algèbre. Alors il existe des morphismes*

$$i_{\rho'} : B \rtimes^{\rho\oplus\rho'} G \to B \rtimes^{\rho'} G \quad \textit{et} \quad i_{\rho} : B \rtimes^{\rho\oplus\rho'} G \to B \rtimes^{\rho} G,$$

qui prolongent l'identité sur $C_c(G, B)$ et tels que les diagrammes suivants,

$$\begin{tikzcd} K^{\mathrm{top}}(G,B) \arrow[r, "\mu^B_{\rho\oplus\rho'}"] \arrow[dr, "\mu^B_{\rho'}"'] & K(B \rtimes^{\rho\oplus\rho'} G) \arrow[d, "i_{\rho',*}"] \\ & K(B \rtimes^{\rho'} G), \end{tikzcd} \quad \textit{et} \quad \begin{tikzcd} K^{\mathrm{top}}(G,B) \arrow[r, "\mu^B_{\rho\oplus\rho'}"] \arrow[dr, "\mu^B_{\rho}"'] & K(B \rtimes^{\rho\oplus\rho'} G) \arrow[d, "i_{\rho,*}"] \\ & K(B \rtimes^{\rho} G), \end{tikzcd}$$

soient commutatifs.

Démonstration. Il est clair que pour toute G-C^*-algèbre A et pour toute fonction $f \in C_c(G, A)$,

$$\|f\|_{A \rtimes^{\rho} G} \leq \|f\|_{A \rtimes^{\rho \oplus \rho'} G},$$

donc $\mathrm{Id}_{C_c(G,A)}$ s'étend en un morphisme d'algèbres de Banach

$$i_\rho : A \rtimes^{\rho \oplus \rho'} G \to A \rtimes^{\rho} G.$$

En fait, on a que $A \rtimes^{\rho \oplus \rho'} G = A \rtimes^{\rho} G \cap A \rtimes^{\rho'} G$, à équivalence de norme près.
De même, si E est un A-module de Banach et $f \in C_c(G, E)$,

$$\|f\|_{E \rtimes^{\rho} G} \leq \|f\|_{E \rtimes^{\rho \oplus \rho'} G},$$

et $\mathrm{Id}_{C_c(G,E)}$ s'étend en un morphisme de A-modules de Banach, que l'on note aussi i_ρ, de $E \rtimes^{\rho \oplus \rho'} G$ dans $E \rtimes^{\rho} G$.
On doit montrer que

$$\mu_\rho^B = i_{\rho,*} \circ \mu_{\rho \oplus \rho'}^B.$$

Pour ceci, on va d'abord montrer que, pour tout $\alpha \in KK_G(A, B)$, les éléments $j_\rho(\alpha)$ et $j_{\rho \oplus \rho'}(\alpha)$ ont la même image dans $KK^{\mathrm{ban}}(A \rtimes^{\rho \oplus \rho'} G, B \rtimes^{\rho} G)$. C'est le lemme suivant :

Lemme 2.2.24. *Pour tout $\alpha \in KK_G(A, B)$, on a l'égalité,*

$$i_\rho^*(j_\rho(\alpha)) = i_{\rho,*}(j_{\rho \oplus \rho'}(\alpha)),$$

dans $KK^{\mathrm{ban}}(A \rtimes^{\rho \oplus \rho'} G, B \rtimes^{\rho} G)$.

Il est clair alors que le lemme 2.2.24 implique le lemme 2.2.23. En effet, pour X une partie G-compacte de $\underline{E}G$ et pour un élément α dans $KK_G(C_0(X), B)$,

$$\mu_{\rho \oplus \rho'}^B(\alpha) = \Sigma(j_{\rho \oplus \rho'}(\alpha))(\Delta_{\rho \oplus \rho'}),$$

donc, on a les égalités suivantes,

$$\begin{aligned}
i_{\rho,*}(\mu_{\rho \oplus \rho'}^B(\alpha)) &= i_{\rho,*} \circ \Sigma(j_{\rho \oplus \rho'}(\alpha))(\Delta_{\rho \oplus \rho'}), \\
&= \Sigma(i_{\rho,*}(j_{\rho \oplus \rho'}(\alpha)))(\Delta_{\rho \oplus \rho'}), \\
&= \Sigma(i_\rho^*(j_\rho(\alpha)))(\Delta_{\rho \oplus \rho'}), \\
&= \Sigma(j_\rho(\alpha))(i_{\rho,*}(\Delta_{\rho \oplus \rho'})), \\
&= \Sigma(j_\rho(\alpha))(\Delta_\rho) = \mu_\rho^B(\alpha).
\end{aligned}$$

Démonstration du lemme 2.2.24. Soit (E, T) un représentant de α. Alors

$$i_\rho^*(j_\rho(E)) = E \rtimes^\rho G,$$

où $E \rtimes^\rho G$ est un $(A \rtimes^{\rho\oplus\rho'} G, B \rtimes^\rho G)$-bimodule de Banach, l'action de $A \rtimes^{\rho\oplus\rho'} G$ étant donnée par i_ρ, et

$$\begin{aligned} i_{\rho,*}(j_{\rho\oplus\rho'}(E))^> &= (E \rtimes^{\rho\oplus\rho'} G)^> \otimes^\pi_{\widetilde{B\rtimes^{\rho\oplus\rho'}G}} (\widetilde{B \rtimes^\rho G}), \\ i_{\rho,*}(j_{\rho\oplus\rho'}(E))^< &= (\widetilde{B \rtimes^\rho G}) \otimes^\pi_{\widetilde{B\rtimes^{\rho\oplus\rho'}G}} (E \rtimes^{\rho\oplus\rho'} G)^<. \end{aligned}$$

On considère l'application suivante,

$$\begin{aligned} \tau : C_c(G, E) \otimes_{C_c(G,B)} C_c(G, B) &\to C_c(G, E) \\ x \otimes b &\mapsto xb. \end{aligned}$$

On a alors,

$$\begin{aligned} \|\tau(x \otimes b)\|_{E\rtimes^\rho G} &\leq \|x\|_{E\rtimes^\rho G}\|b\|_{B\rtimes^\rho G}, \\ &\leq \|x\|_{E\rtimes^{\rho\oplus\rho'}G}\|b\|_{B\rtimes^\rho G}, \end{aligned}$$

et donc τ définit une application,

$$(E \rtimes^{\rho\oplus\rho'} G) \otimes^\pi_{\widetilde{B\rtimes^{\rho\oplus\rho'}G}} \widetilde{B \rtimes^\rho G} \to E \rtimes^\rho G,$$

que l'on note encore τ par abus de notation.
Comme

$$\|\tau(x \otimes b)\|_{E\rtimes^\rho G} \leq \|x \otimes b\|_{(E\rtimes^{\rho\oplus\rho'}G)\otimes^\pi_{\widetilde{B\rtimes^{\rho\oplus\rho'}G}}(\widetilde{B\rtimes^\rho G})},$$

l'application τ définit un morphisme de $B \rtimes^\rho G$-modules de Banach à droite de norme inférieure ou égale à 1.

De même, il existe un morphisme de $B \rtimes^\rho G$-modules de Banach (à gauche)

$$\overline{\tau} : \widetilde{B \rtimes^\rho G} \otimes^\pi_{\widetilde{B\rtimes^{\rho\oplus\rho'}G}} (\overline{E} \rtimes^{\rho\oplus\rho'} G) \to \overline{E} \rtimes^\rho G,$$

de norme inférieure ou égale à 1.
On va construire une homotopie entre $(i_{\rho,*}(j_{\rho\oplus\rho'}(\alpha))$ et $j_\rho(\alpha)$ en utilisant les cônes associés à ces morphismes.
Soit,

$$\mathcal{C}(\tau)^> = \{(h, x) \in (E \rtimes^\rho G)[0, 1] \times i_{\rho,*}(j_{\rho\oplus\rho'}(E))^> | h(0) = \tau(x)\},$$

le cône associé à τ, et

$$\mathcal{C}(\tau)^< = \{(h,x) \in (\overline{E} \rtimes^\rho G)[0,1] \times i_{\rho,*}(j_{\rho\oplus\rho'}(E))^< | h(0) = \overline{\tau}(x)\},$$

le cône associé à $\overline{\tau}$.
On pose

$$\mathcal{C}(\tau) := (\mathcal{C}(\tau)^<, \mathcal{C}(\tau)^>),$$

qui est un $\big(A \rtimes^{\rho\oplus\rho'} G, (B \rtimes^\rho G)[0,1]\big)$-bimodule de Banach.
Soit $\mathcal{C}(\tau,T) \in \mathcal{L}(\mathcal{C}(\tau))$, l'opérateur sur $\mathcal{C}(\tau)$ défini par la formule suivante :

$$\mathcal{C}(\tau,T)^>(h, e\otimes b) = \Big(t \mapsto (T \rtimes^\rho G)(h(t)), \big((T \rtimes^{\rho\oplus\rho'} G)^> e \otimes b\big)\Big),$$

pour $(h, e\otimes b) \in \mathcal{C}(\tau)$ et de façon analogue on définit $\mathcal{C}(\tau,T)^<$. On a alors le lemme suivant :

Lemme 2.2.25. *L'élément $(\mathcal{C}(\tau), \mathcal{C}(\tau,T))$ défini ci-dessus est un élément de $E^{\mathrm{ban}}(A \rtimes^{\rho\oplus\rho'} G, (B \rtimes^\rho G)[0,1])$.*

Démonstration. On doit montrer que pour tout $a \in C_c(G,A)$ et pour tout $g \in G$, les opérateurs,

$$[a, \mathcal{C}(\tau,T)], \quad a(1-(\mathcal{C}(\tau,T))^2) \quad \text{et} \quad a(g(\mathcal{C}(\tau,T)) - \mathcal{C}(\tau,T))$$

sont des opérateurs compacts de $\mathcal{C}(\tau)$.
Pour tout $S = (S_g)_{g\in G} \in C_c(G, \mathcal{K}(E))$ on considère l'opérateur $\widehat{S}_\rho$ (resp. $\widehat{S}_{\rho\oplus\rho'}$) appartenant à $\mathcal{L}_{B\rtimes^\rho G}(E \rtimes^\rho G)$ (resp. $\mathcal{L}_{B^{\rho\oplus\rho'}\rtimes G}(E^{\rho\oplus\rho'} \rtimes G)$) associé à S par la définition 2.2.9 appliquée à la représentation ρ (resp. $\rho\oplus\rho'$).
On a alors une application ψ de $C_c(G,\mathcal{K}(E))$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{C}(\tau))$ définie sur $\mathcal{C}(\tau)^>$ par la formule suivante : pour tout $S \in C_c(G,\mathcal{K}(E))$ et tout $(h, e\otimes b) \in \mathcal{C}(\tau)^>$,

$$\psi(S)^>(h, e\otimes b) = \Big(t \mapsto \widehat{S}^>_\rho(h(t)), \widehat{S}^>_{\rho\oplus\rho'}(e) \otimes b\Big),$$

et $\psi(S)^<$ défini de façon analogue.

Or, pour tout $(h, e\otimes b) \in C_c(G,E) \times (C_c(G,E) \otimes C_c(G,B))$,

$$\begin{aligned}\|\psi(S)^>(h, e\otimes b)\|_{\mathcal{C}(\tau)^>} \\ = \max\Big(\sup_{t\in[0,1]} \|\widehat{S}^>_\rho(h(t))\|_{E\rtimes^\rho G}, \|\widehat{S}^>_{\rho\oplus\rho'}(e)\otimes b\|_{i_{\rho,*}(j_\rho(E))^>}\Big),\end{aligned}$$

et donc,

$$\begin{aligned}\|\psi(S)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{C}(\tau))} &\leq \max\Big(\|\widehat{S}_\rho\|_{\mathcal{L}(E\rtimes^\rho G)}, \|\widehat{S}_{\rho\oplus\rho'}\|_{\mathcal{L}(E\rtimes^{\rho\oplus\rho'}G)}\Big),\\ &\leq \int_G \|S_g\|\|(\rho\oplus\rho')(g)\|_{\mathrm{End}(\mathrm{V}\oplus\mathrm{V}')}dg.\end{aligned}$$

L'application ψ définit alors un morphisme d'algèbres de Banach de l'algèbre $\mathcal{K}(E)\rtimes^{\rho\oplus\rho'}G$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{C}(\tau))$, car $\|\widehat{S}_{\rho\oplus\rho'}\|_{\mathcal{L}(E\rtimes^{\rho\oplus\rho'}G)} = \|S\|_{\mathcal{K}(E)\rtimes^{\rho\oplus\rho'}G}$ (voir la démonstration du lemme 2.2.12).
De plus, si on pose, pour tout $a\in C_c(G,A)$, pour tout $g\in G$ et pour tout $g_1\in G$,

$$\begin{aligned}&S_1(g_1) := a(g_1)(g_1(T)-T)+[a(g_1),T]),\\ &S_2(g_1) := a(g_1)g_1(1-T^2)),\\ \text{et}\quad &S_3(g_1) := a(g_1)g_1((gT)-T)),\end{aligned}$$

de sorte que,

$$\begin{aligned}&\widehat{S}_1 = [a, T\rtimes^\rho G],\\ &\widehat{S}_2 = a(1-(T\rtimes^\rho G)^2),\\ \text{et}\quad &\widehat{S}_3 = a(g(T\rtimes^\rho G)-T\rtimes^\rho G),\end{aligned}$$

(voir lemme 2.2.11), alors, par des calculs simples, on obtient,

$$\begin{aligned}&\psi(S_1) = [a,\mathcal{C}(\tau,T)],\\ &\psi(S_2) = a(1-(\mathcal{C}(\tau,T))^2),\\ \text{et}\quad &\psi(S_3) = a(g(\mathcal{C}(\tau,T))-\mathcal{C}(\tau,T)).\end{aligned}$$

On va maintenant montrer que l'image de ψ est contenue dans les opérateurs compacts de $\mathcal{C}(\tau)$. Soit $S=(S_g)_{g\in G}\in C_c(G,\mathcal{K}(E))$ et soit $\epsilon>0$. D'après le lemme 2.2.12 il existe $n\in\mathbb{N}$ et pour $i=1,..,n$, il existe des éléments $y_i\in C_c(G,E)$ et $\xi_i\in C_c(G,\overline{E})$ tels que, l'élément $K=(K_g)_{g\in G}$ de $C_c(G,\mathcal{K}(E))$ définit par la formule,

$$K_g = \int_G \sum_{i=1}^n |y_i(g_1)\rangle\langle g(\xi_i(g_1^{-1}g))|dt,$$

vérifie l'inégalité,

$$\int_G \|S_g-K_g\|_{\mathcal{K}(E)}\|(\rho\oplus\rho')(g)\|_{\mathrm{End}(V\oplus V')}dg<\epsilon.$$

D'où,

$$\begin{aligned}\|\psi(S)-\psi(K)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{C}(\tau))} &\leq \int_G \|S_g - K_g\| \|(\rho\oplus\rho')(g)\|_{\mathrm{End}(V\oplus V')} dg,\\ &\leq \epsilon.\end{aligned}$$

Mais, $\psi(K)$ appartient à $\mathcal{K}(\mathcal{C}(\tau))$, car

$$\begin{aligned}\psi(K) =& \Big(\sum_{i=1}^n |t\mapsto y_i\rangle\langle t\mapsto \xi_i|, \sum_{i=1}^n |g\mapsto y_i(g)\otimes 1\rangle\langle g\mapsto 1\otimes\xi_i(g)|\Big),\\ =& \sum_{i=1}^n \Big|\big(t\mapsto y_i, g\mapsto y_i(g)\otimes 1\big)\Big\rangle\Big\langle\big(t\mapsto \xi_i, g\mapsto 1\otimes\xi_i(g)\big)\Big|.\end{aligned}$$

On conclut alors que pour tout $a\in C_c(G,A)$ et pour tout $g\in G$, les opérateurs $[a,\mathcal{C}(\tau,T)]$, $a(1-(\mathcal{C}(\tau,T))^2)$ et $a(g(\mathcal{C}(\tau,T))-\mathcal{C}(\tau,T))$ sont compacts car ils appartiennent à l'image de $C_c(G,\mathcal{K}(E))$ par ψ qui est contenue dans l'algèbre des opérateurs compacts de $\mathcal{C}(\tau)$.

□

Le cycle $(\mathcal{C}(\tau),\mathcal{C}(\tau,T))$ appartient donc à $E^{\mathrm{ban}}(A\rtimes^{\rho\oplus\rho'} G,(B\rtimes^{\rho} G)[0,1])$ et réalise une homotopie entre $i_\rho^*(j_\rho(\alpha))$ et $i_{\rho,*}(j_{\rho\oplus\rho'}(\alpha))$, ceci termine la démonstration du lemme 2.2.24. □

Ceci implique alors que $\mu_\rho^B = i_{\rho,*}\circ\mu_{\rho\oplus\rho'}^B$, pour toute G-C^*-algèbre B et donc termine la démonstration du lemme 2.2.23.

□

Chapitre 3

Étude de la bijectivité du morphisme de Baum-Connes tordu

Dans ce chapitre, nous allons montrer que le morphisme de Baum-Connes tordu par une représentation non unitaire de dimension finie que nous avons construit dans le chapitre précédent, est bijectif pour une large classe de groupes vérifiant la conjecture de Baum-Connes. Dans un premier temps, nous allons montrer que, pour toute représentation de dimension finie ρ, le morphisme de Baum-Connes tordu μ^ρ (et μ_r^ρ) est injectif pour tous les groupes de la classe $\mathcal{C}$ (cf. introduction). En effet, nous allons montrer que si G est un groupe localement compact pour lequel il existe un élément γ de Kasparov, alors μ^ρ est injectif. De plus, nous allons montrer que μ_r^ρ est surjectif pour tout groupe G appartenant à la classe $\mathcal{C}'$ (cf. introduction) et pour lequel il existe une complétion inconditionnelle de $C_c(G)$ qui soit une sous-algèbre de $C_r^*(G)$ dense et stable par calcul fonctionnel holomorphe.
Pour tout groupe localement compact G, ρ désignera toujours une représentation de dimension finie pas nécessairement unitaire et pas nécessairement irréductible.
Ce chapitre est organisé de la façon suivante : D'abord, nous allons montrer que le morphisme de Baum-Connes tordu μ^ρ à coefficients dans une algèbre propre est toujours un isomorphisme (cf. théorème 3.1.3). Nous allons ensuite utiliser ce résultat pour utiliser la méthode du "dual Dirac-Dirac" dans la forme énoncée par Tu dans [Tu99] pour montrer l'injectivité de μ^ρ dans le cas où l'on peut construire un élément γ de Kasparov et la surjectivité dans le cas où cet élément γ est égal à 1 dans $KK_G(\mathbb{C}, \mathbb{C})$.
Ensuite, dans la section 3.2, nous allons montrer que si G est un groupe tel qu'il existe une complétion inconditionnelle de $C_c(G)$ qui soit une sous-algèbre de $C_r^*(G)$ dense et stable par calcul fonctionnel holomorphe alors il existe une complétion inconditionnelle de $C_c(G)$ qui est une sous-algèbre dense et stable par calcul fonc-

tionnel holomorphe dans $\mathcal{A}_r^\rho(G)$. En utilisant les résultats de Lafforgue, nous allons alors montrer que si G est un groupe appartenant à la classe $\mathcal{C}'$ et tel qu'il existe une complétion inconditionnelle de $C_c(G)$ qui soit une sous-algèbre dense et stable par calcul fonctionnel holomorphe, alors μ_r^ρ est un isomorphisme.

3.1 Cas des groupes avec un élément γ de Kasparov

3.1.1 Coefficients dans une algèbre propre

Dans cette section, on va montrer que le morphisme de Baum-Connes tordu à coefficients dans une G-C^*-algèbre propre est un isomorphisme pour tout groupe localement compact G. Pour ceci, on rappelle d'abord les définitions suivantes :

Définition 3.1.1. Soit Z un G-espace propre. Une G-C^*-algèbre B est une $C_0(Z)$-G-C^*-algèbre au sens de Kasparov [Kas88, 1.5], s'il existe un morphisme Θ de $C_0(Z)$ dans le centre des multiplicateurs de B, G-équivariant et tel que $\Theta(C_0(Z))B = B$.

Définition 3.1.2. Une algèbre B est une G-C^*-algèbre propre si c'est une $C_0(Z)$-G-C^*-algèbre avec Z un G-espace propre (cf. 2.1.1).

Par abus de notation, si B est une G-C^*-algèbre propre on identifiera $C_0(Z)$ à son image dans le centre de $M(B)$.

De façon équivalente, Le Gall a montré que B est une G-C^*-algèbre propre si et seulement si, il existe Z un G-espace propre tel que B soit munie d'une action du groupoïde $Z \rtimes G$. On renvoie le lecteur à [LG97] pour la définition de l'action d'un groupoïde sur une C^*-algèbre. On rappelle tout de même, que si Z est un G-espace, on note $Z \rtimes G$ le groupoïde dont l'ensemble des unités est Z, l'ensemble des flèches est le produit cartésien $Z \times G$ et les applications source et but sont données, respectivement, par les applications suivantes :

$$s : (z, g) \mapsto g.z \quad \text{et} \quad r : (z, g) \mapsto z.$$

On note $(Z \rtimes G)^{(2)} := (Z \rtimes G)^{(1)} \times_{(Z \rtimes G)^{(0)}} (Z \rtimes G)^{(1)}$ l'ensemble des éléments composables de $Z \rtimes G$.
Si B est une $C_0(Z)$-G-C^*-algèbre, on note $r^*(B)$ la $C_0(Z \rtimes G)$-G-C^*-algèbre obtenue comme image réciproque de B par l'application r.

On rappelle aussi que si B est une G-C^*-algèbre propre, alors

$$C^*(G, B) = C_r^*(G, B)$$

(cf. [KS03, page 184], [HG04, page 192]).

Le but de cette section est de montrer le théorème suivant :

Théorème 3.1.3. *Si B est une G-C^*-algèbre propre, alors μ_ρ^B est un isomorphisme.*

Remarque 3.1.4. On remarque que si B est une G-C^*-algèbre propre, alors

$$B \rtimes^\rho G = B \rtimes_r^\rho G,$$

car $C^*(G,B) = C_r^*(G,B)$, donc le théorème 3.1.3 implique que le morphisme de Baum-Connes tordu réduit à coefficients dans une algèbre propre est aussi un isomorphisme.

Pour montrer le théorème 3.1.3, on va d'abord utiliser la compatibilité de la construction du morphisme de Baum-Connes tordu (cf. lemme 2.2.23) avec $\rho' := 1_G$, où on note 1_G la représentation triviale de G, pour montrer le lemme suivant :

Lemme 3.1.5. *Si B est une G-C^*-algèbre propre, les morphismes*

$$i_\rho : B \rtimes^{\rho\oplus 1_G} G \to B \rtimes^\rho G \quad \textit{et} \quad i_{1_G} : B \rtimes^{\rho\oplus 1_G} G \to C^*(G,B),$$

induisent des isomorphismes en K-théorie.

Pour montrer le lemme 3.1.5, on va utiliser un résultat de Lafforgue (cf. [Laf02b, Lemme 1.7.8]. On rappelle d'abord la définition suivante utilisée par Lafforgue :

Définition 3.1.6. Une sous-algèbre D d'une algèbre A est héréditaire si $DAD \subset D$.

De plus, on rappelle que Lafforgue a démontré l'énoncé suivant (voir [Laf02b, Lemme 1.7.10]) :

Lemme 3.1.7. *Si C est une algèbre de Banach, B est une sous-algèbre de Banach dense de C et s'il existe une sous-algèbre dense de B qui est héréditaire dans C, alors B et C ont la même K-théorie.*

On va maintenant énoncer le lemme 1.7.8 de [Laf02b] et on va re-écrire la démonstration de Lafforgue avec plus de détails par souci de commodité pour le lecteur.

Lemme 3.1.8. *Soit Z un G-espace propre tel que $Z \rtimes G$ agisse sur B et soient $s, r : Z \rtimes G \to Z$ les applications source et but, respectivement, de $Z \rtimes G$. Soit B_c la sous-algèbre de B formée des éléments b de B tels que $fb = b$ pour un certain $f \in C_c(Z)$. Alors $D = C_c(G, B_c)$, l'algèbre des sections continues à support compact dans $Z \rtimes G$ de $r^*(B)$, est une sous-algèbre héréditaire de $C^*(G,B)$.*

Démonstration. On rappelle que l'on note tout élément f de $C_c(G,B)$ par l'intégrale formelle $\int_G f(g)e_g dg$ et que $dg^{-1} = \Delta(g^{-1})dg$. Soient f_1, f_3 des éléments de $C_c(G,B)$. L'application

$$\begin{aligned} C_c(G,B) &\to C_c(G,B) \\ f_2 &\mapsto f_1 * f_2 * f_3 \end{aligned}$$

se prolonge par continuité en une application de $C_r^*(G,B)$ dans l'espace des fonctions f continues sur G à valeurs dans B qui vérifient la condition suivante : il existe une constante C telle que pour tout $g \in G$,

$$\|f(g)\|_B \Delta(g)^{\frac{1}{2}} < C.$$

En effet, soit $\mathrm{L}^2(G,B)$ muni de la structure de B-module hilbertien donnée par la formule :

$$\langle f, f' \rangle_B = \int_G f(t)^* f'(t) dt,$$

pour tout $f, f' \in \mathrm{L}^2(G,B)$. On rappelle que l'on note tout élément de $L^2(G,B)$ par l'intégrale formelle $\int_G e_g f(g) dg$ de sorte que B agisse à droite sur $L^2(G,B)$. Avec ces conventions, l'application de $C_c(G,B)$ dans $L^2(G,B)$ envoie $\int_G f(g)e_g dg$ dans $\int_G e_g f(g) dg$ donc il faut faire attention avec les formules.
Si $f = \int_G e_g f(g) dg$, on a $f^* = \int_G f(g)^* e_{g^{-1}} dg$ et donc

$$\begin{aligned} (f^* * f') &= (\int_G f(g)^* e_{g^{-1}} dg)(\int_G e_g f'(g) dg) \\ &= \int_{G \times G} f(g)^* t f'(gt) dg e_t dt. \end{aligned}$$

Si on note 1 l'identité de G, ceci implique que $f^* * f'(1) = \langle f, f' \rangle_B$. Donc, pour tout $f, f' \in C_c(G,B)$ et pour tout $g \in G$,

$$\begin{aligned} \|f * f'(g)\|_B &= \|f * (f' e_{g^{-1}})(1)\|_B \\ &= \|\langle f^*, (f' e_{g^{-1}}) \rangle_{\mathrm{L}^2(G,B)}\|_B \\ &\leq \|f^*\|_{\mathrm{L}^2(G,B)} \|f' e_{g^{-1}}\|_{\mathrm{L}^2(G,B)}. \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} \|f' e_{g^{-1}}\|_{\mathrm{L}^2(G,B)} &= \Big\| \int_G f'(tg)^* f'(tg) dt \Big\|_B^{\frac{1}{2}} \\ &= \Big\| \int_G f'(t)^* f(t) \Delta(g^{-1}) dt \Big\|_B^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \|f'\|_{L^2(G,B)} \Delta(g)^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Ceci implique que, pour $f_1, f_3, f_2 \in C_c(G,B)$ et $g \in G$, on a les inégalités suivantes

$$\begin{aligned}\|f_1 * f_2 * f_3(g)\|_B &\leq \Delta(g)^{-\frac{1}{2}}\|f_1^*\|_{L^2(G,B)}\|f_2 * f_3\|_{L^2(G,B)},\\ &\leq \Delta(g)^{-\frac{1}{2}}\|f_1^*\|_{L^2(G,B)}\|\lambda_{(G,B)}(f_2)f_3\|_{L^2(G,B)},\\ &\leq \Delta(g)^{-\frac{1}{2}}\|f_1^*\|_{L^2(G,B)}\|f_2\|_{C_r^*(G,B)}\|f_3\|_{L^2(G,B)},\end{aligned}$$

où on note $\lambda_{G,B}$ la représentation régulière de $C_r^*(G,B)$ dans $\mathcal{L}(\mathrm{L}^2(G,B))$ de sorte que $\|\lambda_{(G,B)}(f_2)\|_{\mathcal{L}(L^2(G,B))} = \|f_2\|_{C_r^*(G,B)}$. On a donc

$$\|f_1 * f_2 * f_3(g)\|_B\Delta(g)^{\frac{1}{2}} \leq \|f_1^*\|_{L^2(G,B)}\|f_2\|_{C_r^*(G,B)}\|f_3\|_{L^2(G,B)},$$

ce qu'on voulait démontrer.

Maintenant, si f_1, f_3 appartiennent à $C_c(G,B_c)$, ce sont des sections continues à support compact sur $Z \rtimes G$ de $r^*(B)$, vu comme champ continu d'algèbres au-dessus de $Z \rtimes G$; donc $r(\mathrm{supp}_{Z\rtimes G}(f_1))$ et $s(\mathrm{supp}_{Z\rtimes G}(f_3))$ sont des sous-ensembles compacts de $Z \rtimes G$. De plus, comme Z est un espace G-propre, l'application

$$(r,s) : Z \rtimes G \to Z \times Z,$$

est propre et donc le sous-ensemble de $Z \rtimes G$

$$K := \{(z,h)|r(z,h) \in r(\mathrm{supp}_{Z\rtimes G}(f_1)), s(z,h) \in s(\mathrm{supp}_{Z\rtimes G}(f_3))\}$$

est compact.
Soit ϕ l'application qui à deux éléments composables de $Z \rtimes G$ associe leur composée :

$$\begin{aligned}\phi : (Z \rtimes G)^{(2)} &\to (Z \rtimes G)^{(1)}\\ \{((z',h),(z,g))|z' = gz\} &\mapsto (z,hg).\end{aligned}$$

Si on définit un produit $*$ entre les parties de $Z \rtimes G$ de la manière suivante : pour $X, Y \subset Z \rtimes G$,

$$X * Y := \phi(X \times_{(Z\rtimes G)^{(0)}} Y),$$

alors le support du produit d'éléments de $C_c(G,B)$ est contenue dans le produit des supports. On a alors que, pour $f_2 \in C_c(G,B)$,

$$\mathrm{supp}_{Z\rtimes G}(f_1 * f_2 * f_3) \subset \mathrm{supp}_{Z\rtimes G}(f_1) * \mathrm{supp}_{Z\rtimes G}(f_2) * \mathrm{supp}_{Z\rtimes G}(f_3).$$

Or, $\mathrm{supp}_{Z\rtimes G}(f_1) * \mathrm{supp}_{Z\rtimes G}(f_2) * \mathrm{supp}_{Z\rtimes G}(f_3) \subset K$, car :

$$\begin{aligned}&\mathrm{supp}_{Z\rtimes G}(f_1) * \mathrm{supp}_{Z\rtimes G}(f_2) * \mathrm{supp}_{Z\rtimes G}(f_3)\\ &\qquad = \{(z,g) \in Z \rtimes G | g = g_1g_2g_3 \text{ avec } g_1,g_2,g_3 \in G,\\ &\qquad\quad (z,g_3) \in \mathrm{supp}_{Z\rtimes G}(f_3), (g_3z,g_2) \in \mathrm{supp}_{Z\rtimes G}(f_2),\\ &\qquad\quad (g_2g_3z,g_1) \in \mathrm{supp}_{Z\rtimes G}(f_1)\}.\end{aligned}$$

donc le support de $f_1 * f_2 * f_3$ est inclus dans un sous-ensemble compact de $Z \rtimes G$ qui ne dépend que de f_1 et f_3. On en déduit que pour $f_1, f_3 \in C_c(G, B_c)$ l'application $f_2 \mapsto f_1 * f_2 * f_3$ a pour image $C_c(G, B_c)$, car sur le support de $f_1 * f_2 * f_3$ la fonction $g \mapsto \Delta(g)$ est alors bornée. Ceci implique que $C_c(G, B_c)$ est une sous-algèbre héréditaire de $C_r^*(G, B)$. Comme, de plus, $C_r^*(G, B)$ est égal à $C^*(G, B)$ car B est propre, on en déduit que $C_c(G, B_c)$ est une algèbre héréditaire de $C^*(G, B)$. □

Démonstration du lemme 3.1.5. Maintenant, on va montrer le lemme 3.1.5. En gardant les notations du lemme précédent, l'algèbre D est une sous-algèbre dense de $B \rtimes^{\rho \oplus 1_G} G$ car B_c est dense dans $B = C_0(Z)B$. De plus, comme D est une sous-algèbre héréditaire de $C^*(G, B)$, alors $D \otimes \mathrm{End}(V)$ est héréditaire dans $C^*(G, B) \otimes \mathrm{End}(V)$ et comme $D \otimes \mathrm{End}(V) \cap B \rtimes^{\rho} G = D$ alors D est une sous-algèbre héréditaire de $B \rtimes^{\rho} G$.

En appliquant les lemmes [Laf02b, Lemme 1.7.9 et Lemme 1.7.10], on obtient alors que

$$\begin{aligned} & i_{\rho,*} : K(B \rtimes^{\rho \oplus 1_G} G) \to K(B \rtimes^{\rho} G), \\ \text{et} \quad & i_{1_G,*} : K(B \rtimes^{\rho \oplus 1_G} G) \to K(C^*(G, B)) \end{aligned}$$

sont des isomorphismes. □

Remarque 3.1.9. D'après le lemme précédent, si B est une G-C^*-algèbre propre, l'application $i_{\rho,*} \circ i_{1_G,*}^{-1}$ de $K(C^*(G, B))$ dans $K(B \rtimes^{\rho} G)$ est un isomorphisme.

Démonstration du théorème 3.1.3. On peut maintenant démontrer le théorème 3.1.3. D'après le lemme 2.2.23, $i_{1_G,*} \circ \mu^B_{\rho \oplus 1_G} = \mu^B$, où μ_B est un isomorphisme car c'est le morphisme de Baum-Connes usuel à valeurs dans une algèbre propre [CEM01]. On en déduit que $\mu^B_{\rho \oplus 1_G}$ est un isomorphisme. Comme d'autre part, $i_{\rho,*} \circ \mu^B_{\rho \oplus 1_G} = \mu^B_{\rho}$ et que $i_{\rho,*}$ est aussi un isomorphisme, on en déduit que le morphisme de Baum-Connes tordu par ρ à coefficients dans une algèbre propre, μ^B_{ρ}, est un isomorphisme.

□

3.1.2 Élément γ de Kasparov

On va maintenant utiliser le résultat obtenu pour les algèbres propres pour montrer que le morphisme de Baum-Connes tordu par n'importe quelle représentation de dimension finie de G et à coefficient dans une G-C^*-algèbre quelconque est un isomorphisme pour tout groupe localement compact G qui admet un élément γ de Kasparov égal à 1 dans $KK_G(\mathbb{C}, \mathbb{C})$. Le résultat est donné par le théorème suivant :

Théorème 3.1.10. *Soit G un groupe localement compact tel que il existe une G-C^*-algèbre propre A, et des éléments $\eta \in KK_G(\mathbb{C}, A)$ et $d \in KK_G(A, \mathbb{C})$ tels que, si on pose $\gamma := \eta \otimes_A d \in KK_G(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ on a $\gamma = 1$. Soit B une G-C^*-algèbre. Alors, pour toute représentation ρ de dimension finie de G, μ_ρ^B est un isomorphisme.*

Démonstration. On rappelle que si A, B, D sont des G-C^*-algèbres, on note σ_D le morphisme de $KK_G(A, B)$ dans $KK_G(A \otimes D, B \otimes D)$ défini dans [Kas88].
Soient A, η et d vérifiant les hypothèses du théorème. L'injectivité et la surjectivité découlent de la commutativité du diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
K^{\mathrm{top}}(G,B) \arrow[r, "\sigma_B(\eta)_*"] \arrow[d, "\mu_\rho^B"'] & K^{\mathrm{top}}(G, A\otimes B) \arrow[r, "\sigma_B(d)_*"] \arrow[d, "\mu_\rho^{B\otimes A}"] & K^{\mathrm{top}}(G,B) \arrow[d, "\mu_\rho^B"'] \\
K(B \rtimes^\rho G) \arrow[r, "\Sigma(j_\rho(\sigma_B(\eta)))"'] & K(A\otimes B \rtimes^\rho G) \arrow[r, "\Sigma(j_\rho(\sigma_B(d)))"'] & K(B \rtimes^\rho G)
\end{tikzcd} \tag{3.1.1}$$

On va démontrer d'abord la surjectivité. Supposons qu'il existe $\gamma \in KK_G(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ vérifiant les hypothèses et tel que $\gamma = 1$.

Le fait que γ soit égal à 1 implique que $\Sigma(j_\rho(\sigma_B(\gamma))) = \mathrm{Id}_{K(B\rtimes^\rho G)}$. Or $\gamma = \eta \otimes_A d$, donc $\sigma_B(\gamma) = \sigma_B(\eta) \otimes_A \sigma_B(d)$ et donc

$$\begin{aligned}
\Sigma(j_\rho(\sigma_B(\gamma))) &= \Sigma(j_\rho(\sigma_B(\eta) \otimes_{A\otimes B} \sigma_B(d))) \\
&= \Sigma(j_\rho(\sigma_B(d))) \circ \Sigma(j_\rho(\sigma_B(\eta))),
\end{aligned}$$

ce qui implique que $\Sigma(j_\rho(\sigma_B(d)))$ est surjectif.
D'autre part,

$$\Sigma(j_\rho(\sigma_B(d))) \circ \mu_\rho^{A\otimes B} = \mu_\rho^B \circ \sigma_B(d)_*,$$

et comme $A \otimes B$ est une algèbre propre car A est propre, $\mu_\rho^{A\otimes B}$ est un isomorphisme et ceci implique que μ_ρ^B est surjectif.

Montrons maintenant l'injectivité. Soit $x \in K^{\mathrm{top}}(G, B)$ tel que $\mu_\rho^B(x) = 0$. On a alors

$$\begin{aligned}
\mu_\rho^{A\otimes B}(\sigma_B(\eta)_*(x)) &= \Sigma(j_\rho(\sigma_B(\eta)))(\mu_\rho^B(x)) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

ce qui implique que $\sigma_B(\eta)_*(x) = 0$ car $\mu_\rho^{A\otimes B}$ est un isomorphisme. Mais $\sigma_B(\gamma) = \sigma_B(\eta) \otimes_{A\otimes B} \sigma_B(d)$, donc $\sigma_B(\gamma)_*(x) = 0$. De plus, le fait que $\gamma = 1$ implique que $\sigma_B(\gamma) = 1$ et donc que $\sigma_B(\gamma)_* = \mathrm{Id}_{K^{\mathrm{top}}(G,B)}$. Ceci implique que $x = 0$. $\square$

Plus généralement, le diagramme (3.1.1) permet aussi de montrer que l'existence d'un élément γ de Kasparov implique l'injectivité du morphisme de Baum-Connes tordu donnée par le théorème suivant :

Théorème 3.1.11. *Supposons que pour toute partie G-compacte Y de $\underline{E}G$, il existe une G-C^*-algèbre propre A et des éléments $\eta \in KK_G(\mathbb{C}, A)$ et $d \in KK_G(A, \mathbb{C})$ tels que $\gamma = \eta \otimes_A d \in KK_G(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ vérifie $p^*(\gamma) = 1$ dans $KK_{G\ltimes Y}(C_0(Y), C_0(Y))$, où p est la projection de Y vers le point. Alors, pour toute représentation ρ et pour toute G-C^*-algèbre B, le morphisme μ_ρ^B est injectif.*

Démonstration. Soit x un élément de $K^{\mathrm{top}}(G)$ tel que $\mu_\rho^B(x) = 0$. Soit Y une partie G-compacte de $\underline{E}G$ telle que $x \in KK_G(C_0(Y), B)$ et soient A, η, d et γ vérifiant les hypothèses du théorème. On va montrer que $x = 0$. La commutativité du diagramme (3.1.1) implique que $\sigma_B(\eta)_*(x) = 0$ car

$$\begin{aligned}\mu_\rho^{A\otimes B}(\sigma_B(\eta)_*(x)) &= \Sigma(j_\rho(\sigma_B(\eta)))(\mu_\rho^B(x)) \\ &= 0,\end{aligned}$$

et $\mu_\rho^{A\otimes B}$ est un isomorphisme (car $A\otimes B$ est une algèbre propre). Mais $\sigma_B(\eta)_*(x) = 0$ implique que $\sigma_B(\gamma)_*(x) = 0$, car $\sigma_B(\gamma) = \sigma_B(\eta) \otimes_{A\otimes B} \sigma_B(d)$.
D'autre part, l'égalité $p^*(\gamma) = 1$ dans $KK_{G\ltimes Y}(C_0(Y), C_0(Y))$ implique que $\sigma_{C_0(Y)}(\gamma)^* x = x$. Or, comme $\gamma \in KK_G(\mathbb{C}, \mathbb{C})$, on a

$$\sigma_{C_0(Y)}(\gamma) \otimes_{C_0(Y)} x = x \otimes_B \sigma_B(\gamma).$$

Ceci implique que $\sigma_B(\gamma)_* x = x$ et donc que $x = 0$. □

3.2 Cas des complétions inconditionnelles

Dans cette section, nous allons montrer que pour tout groupe appartenant à la classe $\mathcal{C}'$ de [Laf02b] (cf. introduction) et pour lequel il existe une sous-algèbre de $C_r^*(G)$ dense et stable par calcul fonctionnel holomorphe, le morphisme de Baum-Connes réduit tordu par rapport à n'importe quelle représentation de dimension finie, est bijectif. Pour ceci, nous allons d'abord montrer que si G est un groupe localement compact tel qu'il existe une complétion inconditionnelle de $C_c(G)$ qui soit une sous-algèbre de $C_r^*(G)$ dense et stable par calcul fonctionnel holomorphe alors, si ρ est une représentation de G dans un espace de dimension finie V, il existe une complétion inconditionnelle de $C_c(G)$ qui est une sous-algèbre dense et stable par calcul fonctionnel holomorphe de $\mathcal{A}_r^\rho(G)$.
Nous obtenons comme corollaire la bijectivité du morphisme de Baum-Connes tordu

réduit pour certains groupes discrets ayant la propriété (RD) (par exemple, pour tous les sous-groupes discrets cocompacts de $Sp(n,1)$, $F_{4(-20)}$, $SL_3(F)$ pour F un corps local, $SL_3(\mathbb{H})$ et $E_{6(-26)}$) et pour les groupes de Lie réels réductifs, où réductif a le même sens que dans [Laf02b] : un groupe de Lie réductif est un groupe de Lie G ayant un nombre fini de composantes connexes, dont l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est somme directe d'une algèbre de Lie abélienne $\mathfrak{g}_{ab}$ et d'une algèbre de Lie semi-simple $\mathfrak{g}_{ss}$, de sorte que G admette un sous-groupe fermé G_{ss} d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_{ss}$ et de centre fini. On remarque que cette classe est un peu plus large que celle des groupes réductifs au sens algébrique.
Tout au long de cette section V sera un espace de dimension finie égale à m. Ici, le fait que V soit de dimension finie est indispensable.

3.2.1 Complétions inconditionnelles

On rappelle la définition de complétion inconditionnelle introduite dans [Laf02b].

Définition 3.2.1. Soit G un groupe localement compact. Une algèbre de Banach $\mathcal{B}(G)$ est une complétion inconditionnelle de $C_c(G)$, si elle contient $C_c(G)$ comme sous-algèbre dense et si, quels que soient $f_1, f_2 \in C_c(G)$ tels que $|f_1(g)| \leq |f_2(g)|$ pour tout $g \in G$, on a $\|f_1\|_{\mathcal{B}(G)} \leq \|f_2\|_{\mathcal{B}(G)}$, autrement dit, si pour tout $f \in C_c(G)$, $\|f\|_{\mathcal{B}(G)}$ ne dépend que de $(g \mapsto |f(g)|)$.

Définition 3.2.2. Soit B une algèbre de Banach et C une sous-algèbre dense. Soit A une sous-algèbre de B qui est une complétion de C pour une norme telle que $\|x\|_B \leq \|x\|_A$ pour tout $x \in C$. L'algèbre A est une sous-algèbre faiblement pleine de B relativement à C, si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathrm{M}_n(C)$,

$$\rho_{\mathrm{M}_n(A)}(x) = \rho_{\mathrm{M}_n(B)}(x),$$

où ρ denote le rayon spectral.

Remarque 3.2.3. Une sous-algèbre faiblement pleine d'une algèbre de Banach est dense.

L'intérêt de cette notion est donné par la proposition suivante démontrée dans [Laf02b, Lemme 1.7.2] :

Proposition 3.2.4. *Soient A, B, C comme dans la définition 3.2.2. Notons $\theta : C \to B$ et $\theta_1 : C \to A$ les inclusions évidentes. Soit τ l'unique morphisme d'algèbres de Banach de A dans B tel que $\tau \circ \theta_1 = \theta$. Si A est une sous-algèbre faiblement pleine de B alors le morphisme induit par τ en K-théorie*

$$\tau_* : K(A) \to K(B),$$

est surjectif.

Remarque 3.2.5. La notion de *faiblement pleine* est un peu plus faible que le fait d'être stable par calcul fonctionnel holomorphe, mais, grâce à la proposition 3.2.4, elle est suffisante pour nos propos. Comparer avec la notion de sous-algèbre dense et *pleine* définie dans [Laf02b, Définition 4.4.5]. Voir aussi le théorème A.2.1 et la proposition A.2.2 de [Bos90].

On veut montrer le théorème suivant :

Théorème 3.2.6. *Soit G un groupe localement compact et (ρ, V) une représentation de dimension finie de G. Soit $C_c(G)$ l'espace des fonctions continues à support compact sur G. S'il existe une sous-algèbre faiblement pleine de $C_r^*(G)$ qui est une complétion inconditionnelle de $C_c(G)$, alors il existe une sous-algèbre faiblement pleine de $\mathcal{A}_r^\rho(G)$ qui est aussi une complétion inconditionnelle de $C_c(G)$.*

Soient G un groupe localement compact et (ρ, V) une représentation de dimension finie de G. Supposons qu'il existe $\mathcal{B}(G)$ une complétion inconditionnelle de $C_c(G)$ qui est une sous-algèbre faiblement pleine de $C_r^*(G)$ et notons $\mathfrak{i}$ l'inclusion. On note $\mathcal{B}(G, \mathrm{End}(V))$ la complétion de $C_c(G, \mathrm{End}(V))$ pour la norme

$$\|f\|_{\mathcal{B}(G,\mathrm{End}(V))} = \|g \mapsto \|f(g)\|_{\mathrm{End}(V)}\|_{\mathcal{B}(G)},$$

pour $f \in C_c(G, \mathrm{End}(V))$.
D'après [Laf02b, Proposition 1.6.4], il existe un morphisme d'algèbres de Banach de $\mathcal{B}(G, \mathrm{End}(V))$ dans $C_r^*(G, \mathrm{End}(V))$ prolongeant $\mathrm{Id}_{C_c(G,\mathrm{End}(V))}$. On note τ ce morphisme.

Lemme 3.2.7. *L'algèbre de Banach $\mathcal{B}(G, \mathrm{End}(V))$ est une sous-algèbre faiblement pleine de $C_r^*(G, \mathrm{End}(V))$.*

Démonstration. Soit $m = \dim_{\mathbb{C}}(V)$. Comme $\mathcal{B}(G)$ est faiblement pleine dans $C_r^*(G)$, on a

$$\rho_{\mathrm{M}_n(\mathcal{B}(G))}(x) = \rho_{\mathrm{M}_n(C_r^*(G))}(x),$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathrm{M}_n(C_c(G))$. Donc, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, et pour tout $x \in \mathrm{M}_{km}(C_c(G))$,

$$\rho_{\mathrm{M}_k(\mathrm{M}_m(\mathcal{B}(G)))}(x) = \rho_{\mathrm{M}_k(\mathrm{M}_m(C_r^*(G)))}(x).$$

Or, on a des isomorphismes d'algèbres de Banach à équivalence de norme près (resp. de C^*-algèbres)

$$\mathcal{B}(G, \mathrm{End}(V)) \simeq \mathrm{M}_m(\mathcal{B}(G)) \quad \text{et} \quad C_r^*(G, \mathrm{End}(V)) \simeq \mathrm{M}_m(C_r^*(G)),$$

et donc ceci implique que $\mathcal{B}(G, \mathrm{End}(V))$ est faiblement pleine dans $C_r^*(G, \mathrm{End}(V))$. $\square$

Considérons maintenant la complétion de $C_c(G)$ pour la norme donnée par :

$$\|f\|_{\mathcal{B}^\rho(G)} = \|g \mapsto |f(g)|\|\rho(g)\|_{\mathrm{End}(V)}\|_{\mathcal{B}(G)},$$

pour $f \in C_c(G)$. On note cette algèbre $\mathcal{B}^\rho(G)$ et on remarque que c'est une complétion inconditionnelle.

Théorème 3.2.8. *L'algèbre $\mathcal{B}^\rho(G)$ est une sous-algèbre faiblement pleine de $\mathcal{A}_r^\rho(G)$.*

Démonstration. On considère l'application suivante :

$$\begin{aligned} C_c(G) &\to C_c(G, \mathrm{End}(V)) \\ f &\mapsto (g \mapsto f(g)\rho(g)), \end{aligned}$$

et on note τ_1 le morphisme d'algèbres de Banach de $\mathcal{B}^\rho(G)$ dans $\mathcal{B}(G, \mathrm{End}(V))$ qu'elle induit.
Soit $\tau_2 : \mathcal{A}_r^\rho(G) \to C_r^*(G) \otimes \mathrm{End}(V)$ le morphisme isométrique induit par l'application $f \mapsto \int_G f(g) e_g \otimes \rho(g) dg$. On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{B}(G, \mathrm{End}(V)) \arrow[r, "\tau"'] & C_r^*(G, \mathrm{End}(V)) \arrow[r, "\simeq"] & C_r^*(G) \otimes \mathrm{End}(V) \\ \mathcal{B}^\rho(G) \arrow[u, "\tau_1"'] \arrow[rr, "\psi"'] & & \mathcal{A}_r^\rho(G), \arrow[u, "\tau_2"'] \end{tikzcd}$$

où $\psi : \mathcal{B}^\rho(G) \to \mathcal{A}_r^\rho(G)$ est l'unique morphisme continu d'algèbres de Banach prolongeant $\mathrm{Id}_{C_c(G)}$. On veut montrer que ψ est un morphisme faiblement plein.

Le morphisme $\tau_1 : \mathcal{B}^\rho(G) \to \mathcal{B}(G, \mathrm{End}(V))$ est isométrique, donc pour tout pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathrm{M_n}(C_c(G))$,

$$\rho_{\mathrm{M_n}(\mathcal{B}^\rho(G))}(x) = \rho_{\mathrm{M_n}(\mathcal{B}(G, \mathrm{End}(V)))}(\mathrm{M_n}(\tau_1)(x)).$$

De plus, comme $\mathcal{B}(G)$ est pleine dans $C_r^*(G)$, le lemme 3.2.7 implique,

$$\rho_{\mathrm{M_n}(\mathcal{B}(G, \mathrm{End}(V)))}(\mathrm{M_n}(\tau_1)(x)) = \rho_{\mathrm{M_n}(C_r^*(G, \mathrm{End}(V))}(\mathrm{M_n}(\tau \circ \tau_1)(x))$$

et par commutativité du diagramme on a

$$\rho_{\mathrm{M_n}(C_r^*(G, \mathrm{End}(V)))}(\mathrm{M_n}(\tau \circ \tau_1)(x)) = \rho_{\mathrm{M_n}(C_r^*(G) \otimes \mathrm{End}(V))}(\mathrm{M_n}(\tau_2 \circ \psi)(x)).$$

Or, comme τ_2 est isométrique le membre de droite de la dernière égalité est égal à $\rho_{\mathrm{M_n}(\mathcal{A}_r^\rho(G))}(\mathrm{M_n}(\psi)(x))$, d'où l'égalité

$$\begin{aligned} \rho_{\mathrm{M_n}(\mathcal{B}^\rho(G))}(x) &= \rho_{\mathrm{M_n}(\mathcal{A}_r^\rho(G))}(\mathrm{M_n}(\psi)(x)), \\ &= \rho_{\mathrm{M_n}(\mathcal{A}_r^\rho(G))}(x) \end{aligned}$$

la dernière égalité provenant du fait que $x \in \mathrm{M_n}(C_c(G))$ et que $\mathrm{M_n}(\psi)$ prolonge $\mathrm{Id}_{\mathrm{M_n}(C_c(G))}$. $\square$

On donne maintenant une proposition qui nous permettra d'appliquer les résultats précédents à l'étude de la bijectivité du morphisme de Baum-Connes tordu réduit.

Proposition 3.2.9. *On a le diagramme commutatif suivant :*

$$\begin{tikzcd} K^{\mathrm{top}}(G) \arrow[r, "\mu_{\mathcal{B}^\rho}"] \arrow[dr, "\mu_{\rho,r}"'] & K(\mathcal{B}^\rho(G)) \arrow[d, "\psi_*"] \\ & K(\mathcal{A}_r^\rho(G)) \end{tikzcd}$$

où $\mu_{\mathcal{B}^\rho}$ est la variante du morphisme de Baum-Connes définit dans [Laf02b, Section 1.7.1] pour les complétions inconditionnelles, et $\psi : \mathcal{B}^\rho(G) \to \mathcal{A}_r^\rho(G)$ est l'unique morphisme d'algèbres de Banach prolongeant l'identité.

Démonstration. La démonstration est analogue à celle de la proposition 1.7.6 de [Laf02b]. Soit A une G-C^*-algèbre et soit

$$\psi_A : \mathcal{B}^\rho(G, A) \to A \rtimes_r^\rho G,$$

l'analogue de ψ à coefficients dans A qui prolonge l'identité sur $C_c(G, A)$. On rappelle que l'on note ι l'application

$$\iota : KK_G(A, \mathbb{C}) \to KK_G^{\mathrm{ban}}(A, \mathbb{C}),$$

définie par Lafforgue (cf. 2.1.3).
On a alors que, pour tout élément $\alpha \in KK_G(A, \mathbb{C})$,

$$\psi_*(j_{\mathcal{B}^\rho}(\iota(\alpha))) = \psi_A^*(j_r^\rho(\alpha)),$$

dans $KK^{\mathrm{ban}}(\mathcal{B}^\rho(G, A), \mathcal{A}_r^\rho(G))$.
En effet, on construit facilement une homotopie entre les éléments $\psi_*(j_\rho(\iota(\alpha)))$ et $\psi_A^*(j_r^\rho(\alpha))$ de $E^{\mathrm{ban}}(\mathcal{B}^\rho(G, A), \mathcal{A}_r^\rho(G))$, à l'aide de cônes et en remarquant les deux faits suivants :

1. Si E est un G-$(A, \mathbb{C})$-bimodule de Banach et $S = (S_g)_{g \in G}$ appartient à $C_c(G, \mathcal{K}(E))$, alors

$$\begin{aligned} \|\widehat{S}\|_{\mathcal{L}(E \rtimes_r^\rho G)} &\leq \|g \mapsto \|S_g\|_{\mathcal{K}(E)} \|\rho(g)\|_{\mathrm{End}(V)}\|_{L^1(G)} \\ &= \|g \mapsto \|S_g\|_{\mathcal{K}(E)}\|_{L^{1,\rho}(G)}, \end{aligned}$$

où on note $L^{1,\rho}(G)$ la complétion de $C_c(G)$ pour la norme L^1 pondérée :

$$\|f\|_{L^{1,\rho}(G)} = \int_G |f(g)| \|\rho(g)\|_{\mathrm{End}(V)} dg,$$

qui est une complétion inconditionnelle de $C_c(G)$.

2. Dans le lemme 1.5.6 de [Laf02b], on peut choisir les y_i et les ξ_i tels que

$$\|g \mapsto \|S_g - S_{0,g}\|_{\mathcal{K}(E)}\|_{\mathcal{B}^\rho(G)} + \|g \mapsto \|S_g - S_{0,g}\|_{\mathcal{K}(E)}\|_{L^{1,\rho}(G)} \leq \epsilon.$$

En particulier, pour tout sous-espace X de $\underline{E}G$ fermé et G-compact, on a l'égalité

$$\psi_*(j_{\mathcal{B}^\rho}(\iota(\alpha))) = \psi^*_{C_0(X)}(j^\rho_r(\alpha)),$$

dans $KK^{\mathrm{ban}}(\mathcal{B}^\rho(G, C_0(X)), \mathcal{A}^\rho_r(G))$ pour tout $\alpha \in KK_G(C_0(X), \mathbb{C})$. Ceci implique alors que $\mu_{\rho,r} = \psi_* \circ \mu_{\mathcal{B}^\rho}$. □

Nous pouvons maintenant montrer le résultat principal de cette section qui est donné par le théorème suivant.

Théorème 3.2.10. *Soit G un groupe localement compact satisfaisant les deux conditions suivantes :*

1. *il existe une complétion inconditionnelle de $C_c(G)$ qui est une sous-algèbre faiblement pleine de $C^*_r(G)$;*
2. *pour toute complétion inconditionnelle $\mathcal{B}(G)$ de $C_c(G)$ le morphisme défini par Lafforgue $\mu_{\mathcal{B}} : K^{\mathrm{top}}(G) \to K(\mathcal{B}(G))$ est un isomorphisme.*

Soit ρ une représentation de dimension finie de G. Alors le morphisme de Baum-Connes réduit tordu par rapport à ρ

$$\mu_{\rho,r} : K^{\mathrm{top}}(G) \to K(\mathcal{A}^\rho_r(G)),$$

est un isomorphisme.

Démonstration. Soit $\mathcal{B}(G)$ une complétion inconditionnelle de $C_c(G)$ stable par calcul fonctionnel holomorphe dans $C^*_r(G)$. Soit $\mathcal{B}^\rho(G)$ la complétion inconditionnelle de $C_c(G)$ définie comme ci-dessus. Alors, d'après le théorème 3.2.8, le morphisme d'algèbres de Banach $\psi : \mathcal{B}^\rho(G) \to \mathcal{A}^\rho_r(G)$ induit un isomorphisme en K-théorie. De plus, d'après la proposition 3.2.9, $\mu_{\rho,r} = \psi_* \circ \mu_{\mathcal{B}^\rho}$, donc $\mu_{\rho,r}$ est bien un isomorphisme. □

Dans [Laf02b], Lafforgue a démontré que les groupes appartenant à la classe $\mathcal{C}'$ (cf. introduction) vérifient la condition 2 du théorème 3.2.10 (cf. [Laf02b, Théorème 0.0.2]). De plus, il a montré que si G est un groupe de Lie réductif réel, une variante de l'algèbre de Schwartz généralisée (cf. [Laf02b, Chapitre 4] et section 2.1 exemple 2.1.39 numéro 3.), qui est une complétion inconditionnelle de $C_c(G)$, est aussi une sous-algèbre de Banach faiblement pleine de $C_r^*(G)$. De plus, si un groupe discret Γ a la propriété (RD), une variante de l'algèbre de Jolissaint, $H^s(\Gamma)$ (cf. section 2.1 exemple 2.1.39 numéro 2.), qui est aussi une complétion inconditionnelle, est une sous-algèbre de Banach faiblement pleine de $C_r^*(\Gamma)$. On a alors le corollaire suivant :

Corollaire 3.2.11. *Pour toute représentation de dimension finie ρ, le morphisme de Baum-Connes réduit tordu $\mu_{\rho,r}$ est un isomorphisme pour les groupes suivants :*

- *les groupes réductifs réels,*
- *tous les groupes discrets appartenant à la classe $\mathcal{C}'$ et possédant la propriété (RD), donc, en particulier les sous-groupes discrets cocompacts de $Sp(n,1)$, $F_{4(-20)}$, $Sl_3(F)$ où F est un corps local, $Sl_3(\mathbb{H})$ et $E_{6(-26)}$, et tous les groupes hyperboliques.*

Chapitre 4

Action sur $K^{\mathrm{top}}(G)$ par le produit tensoriel de ρ

Soit G un groupe localement compact et soit $R_F(G)$ l'anneau des classes d'isomorphisme de représentations virtuelles de dimension finie de G. Pour toute représentation de dimension finie ρ de G et pour toute G-C^*-algèbre A, le produit tensoriel par ρ induit un morphisme d'algèbres de Banach de $A \rtimes_r^\rho G$ dans $C_r^*(G,A) \otimes \mathrm{End}(V)$ qui, par équivalence de Morita, induit un morphisme $\Lambda_{\rho,r}$ de la K-théorie de $A \rtimes_r^\rho G$ dans la K-théorie de $C_r^*(G,A)$. Dans ce chapitre, pour toute représentation de dimension finie ρ nous allons construire un endomorphisme de $K^{\mathrm{top}}(G,A)$, pour toute G-C^*-algèbre A, qui définit une action de $R_F(G)$ sur $K^{\mathrm{top}}(G,A)$. Nous allons ensuite montrer que ces deux actions de $R_F(G)$ sont compatibles avec les deux morphismes de Baum-Connes, tordu et classique, c'est-à-dire la commutativité du diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} K^{\mathrm{top}}(G,A) \arrow[r, "\mu^A_{\rho,r}"] \arrow[d, "\Upsilon_\rho"'] & K(A \rtimes_r^\rho G) \arrow[d, "\Lambda_{\rho,r}"] \\ K^{\mathrm{top}}(G,A) \arrow[r, "\mu^A_r"] & K(C_r^*(G,A)). \end{tikzcd}$$

Par simplicité, nous allons montrer un énoncé analogue pour les algèbres $L^1(G,A)$ et $L^{1,\rho}(G,A)$ qui impliquera la commutativité du diagramme ci-dessus.

4.1 Définitions et énoncé du théorème principal

Étant donné un groupe localement compact G et une représentation de dimension finie (ρ, V) de G, nous allons considérer la longueur ℓ sur G définie de la façon

suivante : pour tout $g \in G$ on pose

$$\ell(g) := \max\big(\log(\|\rho(g^{-1})\|_{\mathrm{End}(V)}), \log(\|\rho(g)\|_{\mathrm{End}(V)})\big).$$

On a alors

$$\|\rho(g)v\|_V \leq e^{\ell(g)}\|v\|_V,$$

pour tout $v \in V$ et pour tout $g \in G$. Le couple $(V, 0)$ définit alors un élément de $E^{\mathrm{ban}}_{G,\ell}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ (cf. définition 2.1.31). On note $[V]$ sa classe dans $KK^{\mathrm{ban}}_{G,\ell}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$.

Définition 4.1.1. Soit A une G-C^*-algèbre. La représentation (ρ, V) de G définit un morphisme de groupes de $K(A \rtimes^\rho_r G)$ dans $K(C^*_r(G, A))$. En effet, soit $C^*_r(G, A) \otimes V$ le $C^*_r(G, A) \otimes \mathbb{C}$-module hilbertien construit par produit tensoriel externe. D'après la définition de $A \rtimes^\rho_r G$ (cf. 2.2.1), il est clair que l'application

$$e_g \mapsto \big(h \otimes v \mapsto e_g * h \otimes \rho(g)v\big),$$

pour tout $g \in G$, $h \in C_c(G, A)$ et $v \in V$, induit un morphisme d'algèbres de Banach

$$A \rtimes^\rho_r G \to \mathcal{L}_{C^*_r(G,A)}(C^*_r(G, A) \otimes V).$$

Le produit tensoriel hilbertien $C^*_r(G, A) \otimes V$ est alors un $(A \rtimes^\rho_r G, C^*_r(G, A))$-bimodule de Banach (cf. définition 2.1.31), et le couple $(C^*_r(G, A) \otimes V, 0)$ définit alors un élément de $E^{\mathrm{ban}}(A \rtimes^\rho_r G, C^*_r(G, A))$. On note $[C^*_r(G, A) \otimes V]$ sa classe dans $KK^{\mathrm{ban}}(A \rtimes^\rho_r G, C^*_r(G, A))$. Grâce à l'action de la KK-théorie banachique sur la K-théorie (cf. théorème 2.1.37) on a le morphisme suivant

$$\Sigma([C^*_r(G, A) \otimes V]) : K(A \rtimes^\rho_r G) \to K(C^*_r(G, A)).$$

On note $\Lambda_{\rho,r}$ ce morphisme.

Remarque 4.1.2. La représentation (ρ, V) étant de dimension finie, on aurait pu définir le morphisme précédent de la manière suivante : soit τ le morphisme d'algèbres de Banach de $A \rtimes^\rho_r G$ dans $C^*_r(G, A) \otimes \mathrm{End}(V)$ induit par l'application

$$e_g \mapsto e_g \otimes \rho(g),$$

pour $f \in C_c(G, A)$. On note τ_* le morphisme de groupes induit par τ de $K(A \rtimes^\rho_r G)$ dans $K\big(C^*_r(G, A) \otimes \mathrm{End}(V)\big)$. Comme $C^*_r(G, A) \otimes \mathrm{End}(V) \simeq M_n(C^*_r(G, A))$, où n est la dimension de l'espace vectoriel V, alors, par équivalence de Morita, τ induit un morphisme,

$$\tau_* : K(A \rtimes^\rho_r G) \to K(C^*_r(G, A)).$$

Il est facile de voir que τ_* est égal au morphisme $\Lambda_{\rho,r}$ défini par la proposition 4.1.1.

Remarque 4.1.3. De façon analogue, (ρ, V) définit un morphisme de groupes

$$\Lambda_\rho : K(A \rtimes^\rho G) \to K(C^*(G, A)).$$

Considérons maintenant un G-espace X qui soit G-propre et G-compact et considérons le fibré triviale G-équivariant au dessus de X de fibre V, que l'on note $\mathcal{V}$. On a alors le lemme suivant :

Lemme 4.1.4. *Le fibré $\mathcal{V}$ peut être muni d'une structure hermitienne G-équivariante.*

Démonstration. Soit $b \in C_c(X, \mathbb{R}^+)$ une fonction à support compact sur X telle que $\int_G b(g^{-1}x)dg = 1$ pour tout $x \in X$ (une fonction b avec ces propriétés existe car X/G est compact). Soit K le support de b qui est une partie compacte de X. On munit V d'une structure hermitienne quelconque au dessus de K que l'on note $\langle ., . \rangle_{1,x}$ pour tout $x \in K$. Soient $x \in X$ et v_1, v_2 appartenant à la fibre de $\mathcal{V}$ au dessus de x notée $\mathcal{V}_x$. On pose :

$$\langle v_1, v_2 \rangle_{2,x} := \int_G b(g^{-1}x) \big\langle \rho(g^{-1})v_1, \rho(g^{-1})v_2 \big\rangle_{1,g^{-1}x} dg.$$

Ceci définit une structure hermitienne G-équivariante au dessus de $\mathcal{V}$. En effet, pour $g_1 \in G$, $x \in X$ et $v_1, v_2 \in \mathcal{V}_x$

$$\begin{aligned} g_1 \big\langle v_1, v_2 \big\rangle_{2,x} &= \big\langle \rho(g_1^{-1})v_1, \rho(g_1^{-1})v_2 \big\rangle_{2,g_1^{-1}x} \\ &= \int_G b(g^{-1}g_1^{-1}x) \big\langle \rho(g^{-1}g_1^{-1})v_1, \rho(g^{-1}g_1^{-1})v_2 \big\rangle_{1,g^{-1}g_1^{-1}x} dg \\ &= \int_G b(h^{-1}x) \big\langle \rho(h^{-1})v_1, \rho(h^{-1})v_2 \big\rangle_{1,h^{-1}x} dg \\ &= \big\langle v_1, v_2 \big\rangle_{2,x}. \end{aligned}$$

□

On considère maintenant l'espace $C_0(X, \mathcal{V})$ des sections de $\mathcal{V}$ qui s'annulent à l'infini, où $\mathcal{V}$ est muni de la structure hermitienne G-équivariante, $\langle ., . \rangle_2$, définie ci-dessus.

Lemme 4.1.5. *Le couple $(C_0(X, \mathcal{V}), 0)$ définit un élément de $E_G(C_0(X), C_0(X))$. On note $[C_0(X, \mathcal{V})]$ sa classe dans $KK_G(C_0(X), C_0(X))$.*

Démonstration. En effet, $C_0(X)$ agit sur $C_0(X,\mathcal{V})$ (à gauche et à droite) par multiplication point par point. On définit un produit scalaire sur $C_0(X,\mathcal{V})$ à valeurs dans $C_0(X)$ de la façon suivante : étant données s_1 et s_2 deux sections de $\mathcal{V}$ qui s'annulent à l'infini,

$$\langle s_1, s_2\rangle = (x \mapsto \langle s_1(x), s_2(x)\rangle_{2,x}).$$

Ce produit scalaire fait de $C_0(X,\mathcal{V})$ un $C_0(X)$-module hilbertien G-équivariant. L'action de $C_0(X)$ à gauche commute avec l'action à droite trivialement.

□

Maintenant, si A est une G-C^*-algèbre, comme $[C_0(X,\mathcal{V})]$ est un élément de $KK_G(C_0(X), C_0(X))$, le produit de Kasparov par $[C_0(X,\mathcal{V})]$ induit un morphisme de groupes :

$$KK_G(C_0(X), A) \xrightarrow{[C_0(X,\mathcal{V})]\otimes_{C_0(X)}} KK_G(C_0(X), A)\ .$$

En passant à la limite inductive on obtient un morphisme

$$\Upsilon_\rho : K^{\mathrm{top}}(G,A) \longrightarrow K^{\mathrm{top}}(G,A).$$

Le but de ce chapitre est de démontrer le théorème suivant,

Théorème 4.1.6. *Le morphisme de groupes de $K^{\mathrm{top}}(G,A)$ dans lui-même induit par le produit de Kasparov par $[C_0(X,\mathcal{V})]$ rend commutatifs les deux diagrammes suivants :*

$$\begin{array}{ccc} K^{\mathrm{top}}(G,A) & \xrightarrow{\mu^A_{\rho,r}} & K(A \rtimes^\rho_r G) \\ \Upsilon_\rho \downarrow & & \downarrow \Lambda_{\rho,r} \\ K^{\mathrm{top}}(G,A) & \xrightarrow{\mu^A_r} & K(C^*_r(G,A)) \end{array} \quad \textit{et} \quad \begin{array}{ccc} K^{\mathrm{top}}(G,A) & \xrightarrow{\mu^A_\rho} & K(A \rtimes^\rho G) \\ \Upsilon_\rho \downarrow & & \downarrow \Lambda_\rho \\ K^{\mathrm{top}}(G,A) & \xrightarrow{\mu^A} & K(C^*(G,A)). \end{array}$$

4.2 Algèbres L^1. Rappels et notations

On rappelle d'abord que, pour tout groupe localement compact G, étant données des G-C^*-algèbres A, B et D, pour toute longueur ℓ sur G, on note ι le morphisme de $KK_G(A,B)$ dans $KK^{\mathrm{ban}}_{G,\ell}(A,B)$ défini par Lafforgue dans [Laf02b, Proposition 1.6.1] et σ_D le morphisme de $KK^{\mathrm{ban}}_{G,\ell}(A,B)$ dans $KK^{\mathrm{ban}}_{G,\ell}(A\otimes^\pi D, B\otimes^\pi D)$ défini dans [Laf02b, Définition 1.2.2]).

Maintenant, étant donnés un groupe localement compact G et une G-C^*-algèbre A, on rappelle que l'application identité sur l'espace des fonctions continues à support compact sur G à valeurs dans A, $C_c(G,A)$, se prolonge en un morphisme d'algèbres de Banach de $L^1(G,A)$ dans $C_r^*(G,A)$ (resp. $C^*(G,A)$), et donc $L^1(G,A)$ est une sous-algèbre dense de $C_r^*(G,A)$ (resp. $C^*(G,A)$). De même, si on note $L^{1,\rho}(G,A)$ la complétion de $C_c(G,A)$ pour la norme

$$\|f\|_{L^{1,\rho}(G,A)} = \int_G \|f(g)\|_A \|\rho(g)\|_{\mathrm{End}(V)} dg,$$

pour $f \in C_c(G,A)$, alors l'application identité de $C_c(G,A)$ se prolonge en un morphisme d'algèbres de Banach de $L^{1,\rho}(G,A)$ dans le produit croisé tordu $A \rtimes_r^\rho G$ (resp. $A \rtimes^\rho G$), et donc $L^{1,\rho}(G,A)$ est une sous-algèbre dense de $A \rtimes_r^\rho G$ (resp. $A \rtimes^\rho G$). Nous allons montrer un énoncé pour les algèbres $L^1(G,A)$ et $L^{1,\rho}(G,A)$ analogue à celui du théorème 4.1.6 qui va impliquer le théorème 4.1.6.

Remarque 4.2.1. Si ρ est une représentation unitaire, alors, pour toute G-C^*-algèbre A, $L^{1,\rho}(G,A) = L^1(G,A)$.

On rappelle que les algèbres $L^1(G)$ et $L^{1,\rho}(G)$ sont des complétions inconditionnelles de $C_c(G)$ et donc que Lafforgue a défini dans [Laf02b, Proposition-Définition 1.5.5], des morphismes de descente pour ces algèbres :

$$\begin{aligned} j_{L^1} &: KK^{\mathrm{ban}}_{G,\ell}(A,B) \to KK^{\mathrm{ban}}(L^{1,\rho}(G,A), L^1(G,B)) \\ j_{L^{1,\rho}} &: KK^{\mathrm{ban}}_{G}(A,B) \to KK^{\mathrm{ban}}(L^{1,\rho}(G,A), L^{1,\rho}(G,B)), \end{aligned}$$

pour A et B des G-C^*-algèbres et pour ℓ la longueur sur G définit par la norme de ρ.
Par abus de notation, pour toutes G-C^*-algèbre A et B, nous allons définir un troisième morphisme de "descente"

$$j_\rho : KK_G(A,B) \to KK^{\mathrm{ban}}(L^{1,\rho}(G,A), L^{1,\rho}(G,B)),$$

comme la composée de ι et $j_{L^{1,\rho}}$, c'est-à-dire $j_\rho := j_{L^{1,\rho}} \circ \iota$. Ce morphisme est l'analogue sur $L^{1,\rho}$ du morphisme de descente tordu défini dans le chapitre 2 (cf. section 2.2.2).

Soit X une partie G-compacte de $\underline{E}G$. Soit $p \in C_c(G, C_0(X))$ défini comme dans la définition 2.2.19. On rappelle que p est alors un projecteur de $C_c(G, C_0(X))$ défini à l'aide d'une fonction $c \in C_c(X, \mathbb{R}_+)$ telle que $\int_G c(g^{-1}x)dg = 1$ pour tout $x \in X$. On note Δ_ρ l'élément de $K(L^{1,\rho}(G, C_0(X)))$ qu'il définit.
On rappelle alors que, pour toute G-C^*-algèbre A, la variante du morphisme de

Baum-Connes à valeurs dans $K(L^{1,\rho}(G,A))$ définie par Lafforgue dans [Laf02b, 1.7], est donnée, à passage à la limite inductive près, par le morphisme

$$\mu^A_{L^{1,\rho}} : KK_G(C_0(X),A) \to K(L^{1,\rho}(G,A)),$$

défini par la formule

$$\mu_{L^{1,\rho}}(\alpha) = \Sigma(j_\rho(\alpha))(\Delta_\rho),$$

pour tout élément α dans $KK_G(C_0(X),A)$.

On rappelle de plus que l'on note Σ le morphisme de $KK^{\mathrm{ban}}(A,B)$ dans $\mathrm{Hom}(K(A),K(B))$ définissant l'action de la KK-théorie banachique sur la K-théorie (cf. théorème 2.1.37, [Laf02b, Proposition 1.2.9]) pour A et B des G-C^*-algèbres.

Pour montrer qu'un énoncé analogue à l'énoncé du théorème 4.1.6 pour les algèbres L^1 implique le théorème 4.1.6, on aura besoin alors du lemme de compatibilité suivant

Lemme 4.2.2. *Les diagrammes*

$$\begin{tikzcd} K^{\mathrm{top}}(G,A) \arrow[r, "\mu^A_{L^{1,\rho}}"] \arrow[dr, "\mu^A_{\rho,r}"'] & K(L^{1,\rho}(G,A)) \arrow[d, "i_*"] \\ & K(A \rtimes^\rho_r G) \end{tikzcd} \quad \textit{et} \quad \begin{tikzcd} K^{\mathrm{top}}(G,A) \arrow[r, "\mu^A_{L^{1,\rho}}"] \arrow[dr, "\mu^A_\rho"'] & K(L^{1,\rho}(G,A)) \arrow[d, "i'_*"] \\ & K(A \rtimes^\rho G) \end{tikzcd}$$

où $i : L^{1,\rho}(G,A) \to A \rtimes^\rho_r G$ (resp. $i' : L^{1,\rho}(G,A) \to A \rtimes^\rho G$) est le prolongement de l'application identité sur $C_c(G,A)$, sont commutatifs.

Démonstration. La démonstration est analogue à la démonstration de la proposition 3.2.9 du chapitre 3. □

Remarque 4.2.3. Le lemme 4.2.2 et la remarque 4.2.1 impliquent en particulier que si ρ est une représentation unitaire alors $\mu^A_{\rho,r} = \mu^A_r$ (resp. $\mu^A_\rho = \mu^A$) pour toute G-C^*-algèbre A et donc le morphisme de Baum-Connes tordu coïncide avec le morphisme de Baum-Connes classique.

4.3 Démonstration du théorème 4.1.6

Soit X une partie G-compacte de $\underline{E}G$. On va montrer le théorème suivant :

Théorème 4.3.1. *Pour toute G-C^*-algèbre A, le morphisme, noté Υ_ρ, qui à un élément $\alpha \in KK_G(C_0(X), A)$ associe le produit de Kasparov $[C_0(X, \mathcal{V})] \otimes_{C_0(X)} \alpha$ dans $KK_G(C_0(X), A)$ rend commutatif le diagramme suivant :*

$$\begin{tikzcd} KK_G(C_0(X), A) \arrow[r, "\mu^A_{\rho,r}"] \arrow[d, "\Upsilon_\rho"'] & K(A \rtimes^\rho_r G) \arrow[d, "\Lambda_{\rho,r}"] \\ KK_G(C_0(X), A) \arrow[r, "\mu^A_r"] & K(C^*_r(G, A)). \end{tikzcd}$$

La preuve repose sur un résultat analogue pour les algèbres L^1 que nous allons énoncer plus bas et qui implique aussi la commutativité du diagramme du théorème 4.1.6 pour les produits croisés maximaux de façon analogue. Pour énoncer le résultat pour les algèbres L^1, nous avons besoin de la définition suivante.

Définition 4.3.2. Pour toute G-C^*-algèbre A, la représentation (ρ, V) de G définit le morphisme de groupes suivant,

$$\Sigma\big(j_{\mathrm{L}^1}(\sigma_A([V]))\big) : K(L^{1,\rho}(G, A)) \to K(L^1(G, A)),$$

où, on rappelle que, dans ce cas,

$$\Sigma : KK^{\mathrm{ban}}\big(L^{1,\rho}(G, A), L^1(G, A)\big) \to \mathrm{Hom}\big(K(L^{1,\rho}(G, A)), K(L^1(G, A))\big).$$

En effet, $[V]$ est un élément de $KK^{\mathrm{ban}}_{G,\ell}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ et donc $j_{L^1}(\sigma_A([V]))$ appartient à $KK^{\mathrm{ban}}(L^{1,\rho}(G, A), L^1(G, A))$.

Nous allons alors montrer le théorème suivant qui est l'analogue pour les algèbres L^1 du théorème 4.3.1 annoncé dans la section 4.2.

Théorème 4.3.3. *Pour toute G-C^*-algèbre A et pour toute partie G-compacte X de $\underline{E}G$, le diagramme*

$$\begin{tikzcd} KK_G(C_0(X), A) \arrow[r, "\mu^A_{L^{1,\rho}}"] \arrow[d, "\Upsilon_\rho"'] & K(L^{1,\rho}(G, A)) \arrow[d, "\Sigma(j_{L^1}(\sigma_A([V])))"] \\ KK_G(C_0(X), A) \arrow[r, "\mu^A_{L^1}"] & K(L^1(G, A)), \end{tikzcd}$$

est commutatif.

Montrons d'abord que le théorème 4.3.3 implique le théorème 4.3.1.
Soient

$$i_1 : L^1(G, A) \to C^*_r(G, A) \quad \text{et} \quad i_2 : L^{1,\rho}(G, A) \to A \rtimes^\rho_r G,$$

les inclusions naturelles qui prolongent l'application identité sur $C_c(G,A)$. La fonctorialité de Σ implique que le morphisme $\Lambda_{\rho,r}$ de $K(A \rtimes_r^\rho G)$ dans $K(C_r^*(G,A))$ rend commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} K(L^{1,\rho}(G,A)) \arrow[r, "i_{2,*}"] \arrow[d, "\Sigma(j_{L^1}(\sigma_A([V])))"'] & K(A \rtimes_r^\rho G) \arrow[d, "\Lambda_{\rho,r}"] \\ K(L^1(G,A)) \arrow[r, "i_{1,*}"] & K(C_r^*(G,A)). \end{tikzcd}$$

En effet, il est facile de voir que

$$i_2^*([C_r^*(G,A) \otimes V]) = i_{1,*}\big(j_{L^1}(\sigma_A([V]))\big),$$

dans $KK^{\mathrm{ban}}(L^{1,\rho}(G,A), C_r^*(G,A))$. D'où,

$$\begin{aligned} \Sigma([C_r^*(G,A) \otimes V])i_{2,*} &= i_2^*\big(\Sigma([C_r^*(G,A) \otimes V)]\big), \\ &= \Sigma(i_2^*([C_r^*(G,A) \otimes V])), \\ &= \Sigma(i_{1,*}\big(j_{L^1}(\sigma_A([V]))\big), \\ &= i_{1,*}\big(\Sigma(j_{L^1}(\sigma_A([V]))\big), \end{aligned}$$

et comme $\Lambda_{\rho,r} = \Sigma([C_r^*(G) \otimes V])$ par définition, alors le diagramme est commutatif ce qui prouve que le théorème 4.3.3 implique le théorème 4.3.1. Il en est de même dans le cas des produits croisés maximaux.

La démonstration du théorème 4.3.3 repose sur le lemme et la proposition suivants.

Lemme 4.3.4. *Les éléments $\iota([C_0(X,\mathcal{V})])$ et $\sigma_{C_0(X)}([V])$ sont égaux dans $KK_{G,\ell}^{\mathrm{ban}}(C_0(X), C_0(X))$.*

Ce lemme implique en particulier que $j_{L^1}(\iota([C_0(X,\mathcal{V})]))$ et $j_{L^1}(\sigma_{C_0(X)}([V]))$ sont égaux dans $KK^{\mathrm{ban}}(L^{1,\rho}(G, C_0(X)), L^1(G, C_0(X)))$ et donc qu'ils agissent de la même manière sur $\Delta_\rho \in K(L^{1,\rho}(G, C_0(X)))$, c'est-à-dire

$$\Sigma(j_{L^1}(\iota([C_0(X,\mathcal{V})])))(\Delta_\rho) = \Sigma(j_{L^1}(\sigma_{C_0(X)}([V])))(\Delta_\rho).$$

Démonstration. Nous allons montrer que $\iota([C_0(X,\mathcal{V})])$ et $\sigma_{C_0(X)}([V])$ sont homotopes dans $E_{G,\ell}^{\mathrm{ban}}(C_0(X), C_0(X))$.
Soit s une fonction sur X à valeurs dans V qui s'annule à l'infini. On pose :

$$\begin{aligned} \|s\|_0 &:= \|s\|_{C_0(X,V)} = \sup_{x \in X} \|s(x)\|_V \\ \|s\|_1 &:= \|s\|_{C_0(X,\mathcal{V})} = \sup_{x \in X} \|s(x)\|_{\mathcal{V}}. \end{aligned}$$

Soit $\mathcal{H}_t$, pour $t \in [0,1]$, l'espace de Hilbert des fonctions sur X à valeurs dans V qui s'annulent à l'infini pour la norme :

$$\|s\|_t = t\|s\|_1 + (1-t)\|s\|_0.$$

Alors, $\mathcal{H} = (\mathcal{H}_t)_{t\in[0,1]} \in E^{\mathrm{ban}}_{G,\ell}\big(C_0(X), C_0(X)[0,1]\big)$. Il est clair que $\mathcal{H}$ réalise l'homotopie cherchée. □

Proposition 4.3.5. *Soient A et B des C^*-algèbres et soit α un élément de $KK_G(A,B)$. Alors le diagramme*

$$\begin{tikzcd}
K(L^{1,\rho}(G,A)) \arrow[r, "\Sigma(j_\rho(\alpha))"] \arrow[d, "\Sigma(j_{L^1}(\sigma_A([V])))"] & K(L^{1,\rho}(G,B)) \arrow[d, "\Sigma(j_{L^1}(\sigma_B([V])))"] \\
K(L^1(G,A)) \arrow[r, "\Sigma(j_{L^1}(\alpha))"] & K(L^1(G,B))
\end{tikzcd}$$

est commutatif.

Démonstration. Soit $\alpha \in KK_G(A,B)$. D'après le lemme 1.6.11 de [Laf02b] (voir aussi lemme 2.2.18), il existe une G-C^*-algèbre que l'on note A_1, deux morphismes G-équivariants $\theta : A_1 \to A$ et $\eta : A_1 \to B$ et un élément $\alpha_1 \in KK_G(A, A_1)$, tels que $\theta^*(\alpha_1) = \mathrm{Id}_{A_1}$ dans $KK_G(A_1,A_1)$, $\theta_*(\alpha_1) = \mathrm{Id}_A$ dans $KK_G(A,A)$, et $\theta^*(\alpha) = [\eta]$ dans $KK_G(A,B)$. On peut écrire alors le diagramme suivant en KK-théorie :

$$\begin{tikzcd}
 & A_1 \arrow[dl, "\theta"'] \arrow[dr, "\eta"] \arrow[dd, dashed, "\sigma_{A_1}([V])"] & \\
A \arrow[rr, dashed, "\alpha"] \arrow[ur, dashed, bend left, "\alpha_1"] \arrow[dd, dashed, "\sigma_A([V])"'] & & B \arrow[dd, dashed, "\sigma_B([V])"] \\
 & A_1 \arrow[dl, "\theta"'] \arrow[dr, "\eta"] & \\
A \arrow[rr, dashed, "\alpha"] \arrow[ur, dashed, bend left, "\alpha_1"] & & B
\end{tikzcd}$$

où les flèches en pointillés désignent des éléments en KK-théorie qui ne sont pas nécessairement donnés par des morphismes d'algèbres.

Lemme 4.3.6. *Comme* $[V] \in KK^{\mathrm{ban}}_{G,l}(\mathbb{C},\mathbb{C})$*, on a alors les deux égalités suivantes :*

$$\theta^*(\sigma_A([V])) = \theta_*(\sigma_{A_1}([V])) \quad \textit{et} \quad \eta^*(\sigma_B([V])) = \eta_*(\sigma_{A_1}([V])),$$

dans $KK^{\mathrm{ban}}_{G,\ell}(A_1, A)$ *et* $KK^{\mathrm{ban}}_{G,\ell}(A_1, B)$*.*

Démonstration. Le lemme découle de la fonctorialité de KK^{ban}. □

On rappelle que nous avons noté $j_\rho = j_{L^{1,\rho}} \circ \iota$ pour simplifier les notations. Le fait que Σ, j_{L^1} et $j_{L^{1,\rho}}$ soient fonctoriels nous permet, d'une part, d'écrire le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & K(L^{1,\rho}(G,A_1)) \arrow[dl, "j_\rho(\theta)_*"'] \arrow[dr, "j_\rho(\eta)_*"] \arrow[dd, "\Sigma(j_{L^1}(\sigma_{A_1}[V]))"] & \\
K(L^{1,\rho}(G,A)) \arrow[rr, "\Sigma(j_\rho(\alpha))"] \arrow[dd, "\Sigma(j_{L^1}(\sigma_A([V])))"'] & & K(L^{1,\rho}(G,B)) \arrow[dd, "\Sigma(j_{L^1}(\sigma_B([V])))"] \\
 & K(L^1(G,A_1)) \arrow[dl, "j_{L^1}(\iota(\theta))_*"'] \arrow[dr, "j_{L^1}(\iota(\eta))_*"] & \\
K(L^1(G,A)) \arrow[rr, "\Sigma(j_{L^1}(\iota(\alpha)))"] & & K(L^1(G,B))
\end{tikzcd}$$

et d'autre part de montrer que $j_{L^1}(\iota(\theta))_*$ et $j_\rho(\theta)_*$ sont inversibles (voir démonstration du Lemme 1.6.11 de [Laf02b]). On va montrer que ce diagramme est commutatif en le découpant en morceaux.

Lemme 4.3.7. *On a les égalités suivantes :*

$$j_{L^1}(\iota(\eta))_* \circ j_{L^1}(\iota(\theta))_*^{-1} = \Sigma\big(j_{L^1}(\iota(\alpha))\big),$$

et

$$j_\rho(\eta)_* \circ j_\rho(\theta)_*^{-1} = \Sigma\big(j_\rho(\alpha)\big).$$

Démonstration. Par fonctorialité et par définition de η et de θ :

$$\begin{aligned}
\Sigma(j_{L^1}(\iota(\alpha))) \circ j_{L^1}(\iota(\theta))_* &= \Sigma\big(j_{L^1}(\iota(\theta))^*(j_{L^1}(\iota(\alpha)))\big) \\
&= \Sigma\big(j_{L^1}(\iota(\theta^*(\alpha)))\big), \\
&= \Sigma\big(j_{L^1}(\iota(\eta))\big), \\
&= j_{L^1}(\iota(\eta))_*.
\end{aligned}$$

La deuxième égalité se démontre de façon complètement analogue. □

Lemme 4.3.8. *On a les égalités suivantes :*

$$\Sigma\big(j_{L^1}(\sigma_A([V]))\big) \circ j_{L^{1,\rho}}(\iota(\theta))_* = j_{L^1}(\iota(\theta))_* \circ \Sigma\big(j_{L^1}(\sigma_{A_1}([V]))\big),$$

et

$$\Sigma\big(j_{L^1}(\sigma_B([V]))\big) \circ j_{L^{1,\rho}}(\iota(\eta))_* = j_{L^1}(\iota(\eta))_* \circ \Sigma\big(j_{L^1}(\sigma_{A_1}([V]))\big).$$

Démonstration. La fonctorialité et le lemme 4.3.6 permettent d'avoir les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}\Sigma\big(j_{L^1}(\sigma_A([V]))\big) \circ j_{L^{1,\rho}}(\iota(\theta))_* &= \Sigma\big(j_{L^1}(\theta^*(\sigma_A([V])))\big),\\ &= \Sigma\big(j_{L^1}(\theta_*(\sigma_{A_1}([V])))\big),\\ &= j_{L^1}(\iota(\theta))_* \circ \Sigma\big(j_{L^1}(\sigma_{A_1}([V]))\big),\end{aligned}$$

et d'autre part :

$$\begin{aligned}j_{L^1}(\iota(\eta))_* \circ \Sigma\big(j_{L^1}(\sigma_{A_1}([V]))\big), &= \Sigma\big(j_{L^1}(\eta_*(\sigma_{A_1}([V])))\big),\\ &= \Sigma\big(j_{L^1}(\eta^*(\sigma_B([V])))\big),\\ &= \Sigma\big(j_{L^1}(\sigma_B([V]))\big) \circ j_{L^1}(\iota(\eta))_*.\end{aligned}$$

□

Maintenant on est prêt pour conclure. D'après les deux lemmes précédents, on a :

$$\begin{aligned}&\Sigma(j_{L^1}(\iota(\alpha))) \circ \Sigma\big(j_{L^1}(\sigma_A([V]))\big) \circ j_{L^{1,\rho}}(\iota(\theta))_*,\\ &\qquad = \Sigma(j_{L^1}(\iota(\alpha))) \circ j_{L^1}(\iota(\theta))_* \circ \Sigma\big(j_{L^1}(\sigma_{A_1}([V]))\big),\end{aligned}$$

et ceci implique donc que :

$$\begin{aligned}&\Sigma\big(j_{L^1}(\iota(\alpha))\big) \circ \Sigma\big(j_{L^1}(\sigma_A([V]))\big),\\ &\qquad = j_{L^1}(\iota(\eta))_* \circ \Sigma\big(j_{L^1}(\sigma_{A_1}([V]))\big) \circ j_{L^{1,\rho}}(\iota(\theta))_*^{-1},\\ &\qquad = \Sigma\big(j_{L^1}(\sigma_B([V]))\big) \circ j_{L^{1\rho}}(\iota(\eta))_* \circ j_{L^{1,\rho}}(\iota(\theta))_*^{-1},\\ &\qquad = \Sigma\big(j_{L^1}\sigma_B([V]))\big) \circ \Sigma\big(j_{L^{1,\rho}}(\iota(\alpha))\big).\end{aligned}$$

Et ceci termine la démonstration de la proposition 4.3.5. □

Démonstration du théorème 4.3.3. On va maintenant montrer le théorème 4.3.3. Nous allons noter $[\mathcal{V}] := [C_0(X, \mathcal{V})]$ pour simplifier les notations. Soit α un élément de $KK_G(C_0(X), A)$. La compatibilité de Σ avec le produit de Kasparov (voir [Laf02b, Proposition 1.6.10]) implique les égalités suivantes

$$\begin{aligned}\mu_{L^1}([\mathcal{V}] \otimes \alpha) &= \Sigma\big(j_{L^1}(\iota([\mathcal{V}] \otimes \alpha))\big)(\Delta),\\ &= \Sigma\big(j_{L^1}(\iota(\alpha))\big) \circ \Sigma\big(j_{L^1}(\iota([\mathcal{V}]))\big)(\Delta).\end{aligned}$$

Mais d'après le lemme 4.3.4 on a

$$\Sigma\big(j_{L^1}(\iota(\alpha))\big) \circ \Sigma\big(j_{L^1}(\iota([\mathcal{V}]))\big)(\Delta) = \Sigma\big(j_{L^1}(\iota(\alpha))\big) \circ \Sigma\big(j_{L^1}(\sigma_{C_0(X)}[V])\big)(\Delta),$$

et la proposition 4.3.5 appliquée à $C_0(X)$ et à A implique que le dernier membre de cette égalité est égal à

$$\Sigma\big(j_{L^1}(\sigma_A([V]))\big) \circ \Sigma\big(j_\rho(\alpha)\big)(\Delta).$$

On a alors,

$$\begin{aligned}\mu_{L^1}([\mathcal{V}] \otimes \alpha) &= \Sigma\big(j_{L^1}(\iota(\alpha))\big) \circ \Sigma\big(j_{L^1}(\sigma_{C_0(X)}[V])\big)(\Delta),\\ &= \Sigma\big(j_{L^1}(\sigma_A([V]))\big) \circ \Sigma\big(j_\rho(\alpha)\big)(\Delta),\\ &= \Sigma\big(j_{L^1}(\sigma_A([V]))\big) \circ \mu_{L^{1,\rho}}(\alpha),\end{aligned}$$

et c'est exactement ce qu'on voulait démontrer.
Dans la page suivante, nous écrivons un diagramme récapitulatif.

$$
\begin{tikzcd}
KK_G(C_0(X),A) \arrow[rr, "\Sigma\circ j_\rho"] \arrow[dr, "\Sigma\circ j_{L^1}\circ\iota"] \arrow[dd, "\Upsilon_\rho"'] & & \mathrm{Hom}\Big(K\big(L^{1,\rho}(G,C_0(X))\big),K\big(L^{1,\rho}(G,A)\big)\Big) \arrow[r, "(.)(\Delta_\rho)"] \arrow[dd, "\Sigma(j_{L^1}(\sigma_A[V]))"] & K(L^{1,\rho}(G,A)) \arrow[dd, "\Sigma(j_{L^1}(\sigma_A[V]))"'] \\
& \mathrm{Hom}\Big(K\big(L^1(G,C_0(X))\big),K\big(L^1(G,A)\big)\Big) \arrow[r, "\Sigma(j_{L^1}(\sigma_{C_0(X)}[V]))"] \arrow[d, "\Sigma(j_{L^1}(\iota[\mathcal{V}]))"] & \mathrm{Hom}\Big(K\big(L^{1,\rho}(G,C_0(X))\big),K\big(L^1(G,A)\big)\Big) \arrow[dr, "(.)(\Delta_\rho)"] & \\
KK_G(C_0(X),A) \arrow[r, "\Sigma\circ j_{L^1}\circ\iota"] & \mathrm{Hom}\Big(K\big(L^1(G,C_0(X))\big),K\big(L^1(G,A)\big)\Big) \arrow[rr, "(.)(\Delta)"] & & K(L^1(G,A))
\end{tikzcd}
$$

$\square$

Bibliographie

[AW81] C. A. Akemann and M. E. Walter, *Unbounded negative definite functions*, Canad. J. Math. **33** (1981), no. 4, 862–871.

[Bar80] B. A. Barnes, *The role of minimal idempotents in the representation theory of locally compact groups*, Proc. Edinburgh Math. Soc. (2) **23** (1980), no. 2, 229–238.

[BBV99] Cédric Béguin, Hela Bettaieb, and Alain Valette, *K-theory for C^*-algebras of one-relator groups*, K-Theory **16** (1999), no. 3, 277–298.

[BCH94] P. Baum, A. Connes, and N. Higson, *Classifying space for proper actions and K-theory of group C^*-algebras*, C^*-algebras : 1943–1993 (San Antonio, TX, 1993), Contemp. Math., vol. 167, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994, pp. 240–291.

[BdlHV] B. Bekka, P. de la Harpe, and A. Valette, *Kazhdan's property* (T), Cambridge Univ. Press, to appear.

[BHP97] P. Baum, N. Higson, and R. Plymen, *A proof of the Baum-Connes conjecture for p-adic* $\mathrm{GL}(n)$, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **325** (1997), no. 2, 171–176.

[Bla98] B. Blackadar, *K-theory for operator algebras*, second ed., Mathematical Sciences Research Institute Publications, vol. 5, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.

[Bos90] J. B. Bost, *Principe d'oka, K-théorie et systèmes dynamiques non commutatifs*, Invent. Math. **101** (1990), 261–333.

[CEM01] J. Chabert, S. Echterhoff, and R. Meyer, *Deux remarques sur l'application de Baum-Connes*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **332** (2001), no. 7, 607–610.

[CEN03] J. Chabert, S. Echterhoff, and R. Nest, *The Connes-Kasparov conjecture for almost connected groups and for linear p-adic groups*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. (2003), no. 97, 239–278.

[Cha00] J. Chabert, *Baum-Connes conjecture for some semi-direct products*, J. Reine Angew. Math. **521** (2000), 161–184.

[Cha03] I. Chatterji, *Property (RD) for cocompact lattices in a finite product of rank one Lie groups with some rank two Lie groups*, Geom. Dedicata **96** (2003), 161–177.

[Con94] A. Connes, *Noncommutative geometry*, Academic Press Inc., San Diego, CA, 1994.

[Cow79] M. Cowling, *Sur les coefficients des représentations unitaires des groupes de Lie simples*, Analyse harmonique sur les groupes de Lie (Sém., Nancy-Strasbourg 1976–1978), II, Lecture Notes in Math., vol. 739, Springer, Berlin, 1979, pp. 132–178.

[Cow04] ———, *Applications of representation theory to harmonic analysis of lie groups (and vice versa)*, Representation Theory and Complex Analysis, Lectures given at C.I.M.E session held in Venice, June 10-17 2004 (E. Casadio Tarabusi, A. D'Agnolo, and M. Picardello, eds.), Lecture Notes in Math., Springer, Berlin, 2004.

[DD63] J. Dixmier and A. Douady, *Champs continus d'espaces hilbertiens et de C^*-algèbres*, Bull. Soc. Math. France **91** (1963), 227–284.

[Del77] P. Delorme, 1-*cohomologie des représentations unitaires des groupes de Lie semi-simples et résolubles. Produits tensoriels continus de représentations*, Bull. Soc. Math. France **105** (1977), no. 3, 281–336.

[Dix61] J. Dixmier, *Points isolés dans le dual d'un groupe localement compact*, Bull. Sc. Math. **85** (1961), 91–96.

[Dix96] ———, *Les C^*-algèbres et leurs représentations*, Les Grands Classiques Gauthier-Villars. [Gauthier-Villars Great Classics], Éditions Jacques Gabay, Paris, 1996, Reprint of the second (1969) edition.

[DK68] C. Delaroche and A. Kirillov, *Sur les relations entre l'espace dual d'un groupe et la structure de ses sous-groupes fermés (d'après D. A. Kazhdan)*, Séminaire Bourbaki, Vol. 10, Soc. Math. France, Paris, 1968, pp. Exp. No. 343, 507–528.

[DK00] J. J. Duistermaat and J. A. C. Kolk, *Lie groups*, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 2000.

[dlH88] P. de la Harpe, *Groupes hyperboliques, algèbres d'opérateurs et un théorème de Jolissaint*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **307** (1988), no. 14, 771–774.

[dlHV89] P. de la Harpe and A. Valette, *La propriété* (T) *de Kazhdan pour les groupes localement compacts (avec un appendice de Marc Burger)*, Astérisque (1989), no. 175, 158, With an appendix by M. Burger.

[FD88] J. M. G. Fell and R. S. Doran, *Representations of* **-algebras, locally compact groups, and Banach* **-algebraic bundles. Vol. 1*, Pure and Applied Mathematics, vol. 125, Academic Press Inc., Boston, MA, 1988, Basic representation theory of groups and algebras.

[Fel60] J. M. G. Fell, *The dual spaces of* C^**-algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. **94** (1960), 365–403.

[Fel65] ———, *Non-unitary dual spaces of groups*, Acta Math. **114** (1965), 267–310.

[FH06] D. Fisher and T. Hitchman, *Strengthening Kazhdan's Property* (T) *by bochner methods*, preprint, 2006.

[GA05] M. P. Gomez-Aparicio, *Property* (T) *and tensor products by irreducible finite dimensional representations for* $SL_n(\mathbb{R})$ $n \geq 3$, Geometric and topological methods for quantum field theory (Sylvie Paycha and Bernardo Uribe, eds.), AMS Contemporary Mathematics, 2005.

[GA07] ———, *Sur la propriété* (T) *tordue par un produit tensoriel*, Jouranl of Lie Theory **17** (2007), 505–524.

[Gui72] A. Guichardet, *Sur la cohomologie des groupes topologiques. II*, Bull. Sci. Math. (2) **96** (1972), 305–332.

[HG04] N. Higson and E. Guentner, *Group* C^**-algebras and* K*-theory*, Noncommutative geometry, Lecture Notes in Math., vol. 1831, Springer, Berlin, 2004, pp. 137–251.

[Hig90] N. Higson, *A primer on* KK*-theory*, Operator theory : operator algebras and applications, Part 1 (Durham, NH, 1988), Proc. Sympos. Pure Math., vol. 51, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1990, pp. 239–283.

[Hig98] ———, *The Baum-Connes conjecture*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. II (Berlin, 1998), no. Extra Vol. II, 1998, pp. 637–646 (electronic).

[HK01] N. Higson and G. G. Kasparov, *E-theory and* KK*-theory for groups which act properly and isometrically on Hilbert space*, Invent. Math. **144** (2001), no. 1, 23–74.

[HLS02] N. Higson, V. Lafforgue, and G. Skandalis, *Counterexamples to the Baum-Connes conjecture*, Geom. Funct. Anal. **12** (2002), no. 2, 330–354.

[HM79] R. E. Howe and C. C. Moore, *Asymptotic properties of unitary representations*, J. Funct. Anal. **32** (1979), no. 1, 72–96.

[How82] R. Howe, *On a notion of rank for unitary representations of the classical groups*, Harmonic analysis and group representations (C.I.M.E. II ciclo 1980), Liguori, Naples, 1982, pp. 223–331.

[Hus94] D. Husemoller, *Fibre bundles*, third ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 20, Springer-Verlag, New York, 1994.

[Jac45] N. Jacobson, *A topology for the set of primitive ideals in an arbitrary ring*, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. **31** (1945), 333–338.

[Jol90] P. Jolissaint, *Rapidly decreasing functions in reduced C^*-algebras of groups*, Trans. Amer. Math. Soc. **317** (1990), no. 1, 167–196.

[Jul97] P. Julg, *Remarks on the Baum-Connes conjecture and Kazhdan's property T*, Operator algebras and their applications (Waterloo, ON, 1994/1995), Fields Inst. Commun., vol. 13, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997, pp. 145–153.

[Jul98] ———, *Travaux de N. Higson et G. Kasparov sur la conjecture de Baum-Connes*, Astérisque (1998), no. 252, Exp. No. 841, 4, 151–183, Séminaire Bourbaki. Vol. 1997/98.

[Jul02] Pierre Julg, *La conjecture de Baum-Connes à coefficients pour le groupe* $\mathrm{Sp}(n,1)$, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **334** (2002), no. 7, 533–538.

[Kas80] G. G. Kasparov, *The operator K-functor and extensions of C^*-algebras*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **44** (1980), no. 3, 571–636, 719.

[Kas88] ———, *Equivariant KK-theory and the Novikov conjecture*, Invent. Math. **91** (1988), no. 1, 147–201.

[Kas95] ———, *K-theory, group C^*-algebras, and higher signatures (conspectus)*, Novikov conjectures, index theorems and rigidity, Vol. 1 (Oberwolfach, 1993), London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 226, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995, pp. 101–146.

[Kaz67] D. A. Kazhdan, *On the connection of the dual space of a group with the structure of its closed subgroups*, Funkcional. Anal. i Priložen. **1** (1967), 71–74.

[Kna02] A. W. Knapp, *Lie groups beyond an introduction*, second ed., Progress in Mathematics, vol. 140, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2002.

[KS91] G. G. Kasparov and G. Skandalis, *Groups acting on buildings, operator K-theory, and Novikov's conjecture*, K-Theory **4** (1991), no. 4, 303–337.

[KS03] ———, *Groups acting properly on "bolic" spaces and the Novikov conjecture*, Ann. of Math. (2) **158** (2003), no. 1, 165–206.

[KV95] A. W. Knapp and D. A. Vogan, Jr., *Cohomological induction and unitary representations*, Princeton Mathematical Series, vol. 45, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1995.

[Laf00] V. Lafforgue, *A proof of property (RD) for cocompact lattices of* $\mathrm{SL}(3, \mathbf{R})$ *and* $\mathrm{SL}(3, \mathbf{C})$, J. Lie Theory **10** (2000), no. 2, 255–267.

[Laf02a] ———, *Banach KK-theory and the Baum-Connes conjecture*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. II (Beijing, 2002) (Beijing), Higher Ed. Press, 2002, pp. 795–812.

[Laf02b] ———, *K-théorie bivariante pour les algèbres de Banach et conjecture de Baum-Connes*, Invent. Math. **149** (2002), no. 1, 1–95.

[Laf07] ———, *Un renforcement de la propiété* (T), preprint, juillet 2007.

[Lan02] S. Lang, *Algebra*, third ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 211, Springer-Verlag, New York, 2002.

[LG97] P. Y. Le Gall, *Théorie de Kasparov équivariante et groupoïdes*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **324** (1997), no. 6, 695–698.

[Li95] J. S. Li, *The minimal decay of matrix coefficients for classical groups*, Harmonic analysis in China, Math. Appl., vol. 327, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1995, pp. 146–169.

[LZ96] J. S. Li and C. B. Zhu, *On the decay of matrix coefficients for exceptional groups*, Math. Ann. **305** (1996), no. 2, 249–270.

[Mar91] G. A. Margulis, *Discrete subgroups of semisimple Lie groups*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)], vol. 17, Springer-Verlag, Berlin, 1991.

[Oh98] H. Oh, *Tempered subgroups and representations with minimal decay of matrix coefficients*, Bull. Soc. Math. France **126** (1998), no. 3, 355–380.

[Oh02] ———, *Uniform pointwise bounds for matrix coefficients of unitary representations and applications to Kazhdan constants*, Duke Math. J. **113** (2002), no. 1, 133–192.

[OO01] H. Oyono-Oyono, *Baum-Connes conjecture and extensions*, J. Reine Angew. Math. **532** (2001), 133–149.

[Par06] W. Paravicini, *KK-theory for banach algebras and proper groupoids*, Ph.D. thesis, november 2006.

[Ped79] G. K. Pedersen, *C^*-algebras and their automorphism groups*, London Mathematical Society Monographs, vol. 14, Academic Press Inc. [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], London, 1979.

[Ser78] J. P. Serre, *Représentations linéaires des groupes finis*, revised ed., Hermann, Paris, 1978.

[Sha00] Y. Shalom, *Explicit Kazhdan constants for representations of semisimple and arithmetic groups*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **50** (2000), no. 3, 833–863.

[Ska91] G. Skandalis, *Kasparov's bivariant K-theory and applications*, Exposition. Math. **9** (1991), no. 3, 193–250.

[Tu99] J. L. Tu, *La conjecture de Novikov pour les feuilletages hyperboliques*, K-Theory **16** (1999), no. 2, 129–184.

[Tza00] K. Tzanev, *C^*-algèbres de Hecke et* K*-théorie*, Ph.D. thesis, Université de Paris VII, 2000.

[Val84a] A. Valette, *K-theory for the reduced C^*-algebra of a semisimple Lie group with real rank* 1 *and finite centre*, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) **35** (1984), no. 139, 341–359.

[Val84b] ———, *Minimal projections, integrable representations and property* (T), Arch. Math. (Basel) **43** (1984), no. 5, 397–406.

[Val88] Alain Valette, *Le rôle des fibrés de rang fini en théorie de Kasparov équivariante*, Acad. Roy. Belg. Cl. Sci. Mém. Collect. 8° (2) **45** (1988), no. 6.

[Val92] A. Valette, *Projections in full C^*-algebras of semisimple Lie groups*, Math. Ann. **294** (1992), no. 2, 277–287.

[Val02] ———, *Nouvelles approches de la propriété (T) de Kazhdan*, Séminaire Bourbaki, Vol. 913, Soc. Math. France, Paris, 2002.

[Wan75] P. S. Wang, *On isolated points in the dual spaces of locally compact groups*, Math. Ann. **218** (1975), no. 1, 19–34.

[Was87] A. Wassermann, *Une démonstration de la conjecture de Connes-Kasparov pour les groupes de Lie linéaires connexes réductifs*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **304** (1987), no. 18, 559–562.

[Zuc77] G. Zuckerman, *Tensor products of finite and infinite dimensional representations of semisimple Lie groups*, Ann. Math. (2) **106** (1977), no. 2, 295–308.