



**HAL**  
open science

# Modélisation et caractérisation de matériaux actifs pour la conception de dispositifs magnéto-électriques

Nicolas Galopin

► **To cite this version:**

Nicolas Galopin. Modélisation et caractérisation de matériaux actifs pour la conception de dispositifs magnéto-électriques. Physique [physics]. Université Paris Sud - Paris XI, 2007. Français. NNT : . tel-00274483v2

**HAL Id: tel-00274483**

**<https://theses.hal.science/tel-00274483v2>**

Submitted on 17 Dec 2008 (v2), last revised 6 Feb 2014 (v3)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre : 8901



U.F.R. des Sciences d'Orsay

Thèse présentée par

**Nicolas GALOPIN**

pour obtenir le grade de

**Docteur en Sciences de l'Université Paris XI**

Spécialité :

**Génie Électrique**

Sujet de la thèse :

**Modélisation et caractérisation de  
matériaux actifs pour la conception de  
dispositifs magnéto-électriques**

Thèse soutenue le 11 décembre 2007 devant le jury composé de :

Richard BARRUÉ	Président
Anouar BELAHCEN	Examineur
Frédéric BOUILLAULT	Examineur
Laurent DANIEL	Examineur
François HENROTTE	Rapporteur
Afef KEDOUS-LEBOUC	Rapporteur



---

“... rapprocher les découvertes et les ordonner entre elles afin que plus  
d’hommes soient éclairés et que chacun participe, selon sa portée, à la  
lumière de son siècle.”

Diderot.

A mon père,  
A ma famille.



---

## Remerciements

Il est temps pour moi de mettre un terme à ces travaux en rendant hommage aux personnes ayant contribué, de près ou de loin, à la trajectoire suivie durant ces trois années. Je me suis fixé la contrainte de faire tenir cet exercice, difficile, sur une seule page afin d'éviter tout débordement sentimental nuisible, à mon sens, à la sincérité du message. Que ceux qui ne s'y retrouvent pas me pardonnent.

Je tiens tout d'abord à remercier M. Richard Barrué qui m'a fait l'honneur de présider mon jury de thèse ainsi que Mme Afef Kedous-Lebouc et M. François Henrotte pour le travail qu'ils ont réalisé en tant que rapporteurs, malgré leurs emplois du temps chargés. Je remercie également M. Anouar Belahcen pour l'intérêt qu'il a porté à mon travail.

Frédéric Bouillault a encadré ce travail et m'a fait bénéficier de sa grande expérience. Je le remercie pour ses encouragements, ses conseils pertinents et pour la liberté qu'il a su me laisser. Je le remercie particulièrement pour la confiance qu'il m'a accordée dès mon DEA et pour m'avoir initié dans ce monde de la recherche.

Cette thèse m'a permis de travailler étroitement avec Laurent Daniel. Il a su me faire profiter de son expérience et m'a toujours encourager dans les moments difficiles. J'ai beaucoup appris à ses côtés et pu profiter de ses précieux conseils. Je tiens à lui témoigner ma profonde reconnaissance et mon amitié sincère.

M. Adel Razek m'a accueilli dans son département de recherche "MOCOSEM", je le remercie pour ses conseils et son soutien durant ces trois années.

Je remercie également M. Lionel Pichon, responsable de l'équipe "ICHAMS", pour les moyens développés pour le bon déroulement de cette thèse et surtout pour ses conseils et son oreille attentive.

M. Mondher Besbes était présent au début de cette thèse et M. Xavier Minger à la fin. Je les remercie pour leur précieuse participation, leur disponibilité et les conseils dont ils n'ont pas été avares.

Je remercie également M. Yves Bernard pour ses conseils et remarques, ainsi que messieurs Claude Marchand, Laurent Santandrea et Éric Berthelot pour leur aide et bonne humeur communicative.

Je remercie également mes camarades, ses nombreux doctorants sans qui la vie au laboratoire ne serait pas ce qu'elle est et avec qui j'ai partagé de nombreuses discussions au cours de mes pauses "jus d'orange". De peur d'en oublier, je préfère lâchement les remercier collectivement.

Je remercie également toutes celles et tous ceux du laboratoire qui ont fait de ces années de présence au laboratoire de belles années.



# Table des matières

<b>Notations</b>	<b>xiv</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Introduction au comportement électro-magnéto-élastique</b>	<b>5</b>
1.1 Équations d'équilibre . . . . .	7
1.1.1 Équations d'équilibre électromagnétique . . . . .	7
1.1.2 Équation d'équilibre mécanique . . . . .	9
1.2 Relations de comportement . . . . .	10
1.2.1 Comportement mécanique . . . . .	10
1.2.2 Comportement électromagnétique . . . . .	10
1.2.3 Phénomènes de couplages . . . . .	12
1.3 Comportement électro-magnéto-élastique . . . . .	18
1.3.1 Comportement magnéto-mécanique . . . . .	18
1.3.2 Comportement électro-mécanique . . . . .	21
1.4 Matériaux actifs du génie électrique . . . . .	23
1.4.1 Matériaux magnétostrictifs . . . . .	23
1.4.2 Matériaux piézoélectriques . . . . .	27
1.4.3 Comparaison matériaux magnétostrictifs/piézoélectriques . . .	29
<b>2 Caractérisation du comportement magnéto-mécanique</b>	<b>33</b>
2.1 Principe et état de l'art de la caractérisation magnéto-mécanique . . .	35
2.1.1 Critères d'analyse . . . . .	36
2.1.2 Bancs expérimentaux de référence . . . . .	37
2.1.3 Conclusion . . . . .	42
2.2 Banc de mesure magnéto-mécanique réalisé au LGEP . . . . .	42
2.2.1 Objectifs . . . . .	42
2.2.2 Partie mécanique . . . . .	43
2.2.3 Partie magnétique . . . . .	44
2.2.4 Dimensionnement . . . . .	44
2.3 Procédure expérimentale . . . . .	53
2.3.1 Principe . . . . .	53
2.3.2 Mesures mécaniques . . . . .	53
2.3.3 Mesures magnétiques . . . . .	55
2.3.4 Pilotage et acquisition . . . . .	56
2.4 Résultats de mesure . . . . .	57
2.4.1 Comportement mécanique . . . . .	57

---

2.4.2	Comportement magnétique . . . . .	59
2.4.3	Comportement magnéto-mécanique . . . . .	60
2.5	Conclusion . . . . .	68
<b>3</b>	<b>Modélisation électro-magnéto-mécanique de matériaux actifs</b>	<b>71</b>
3.1	Problématique/Contexte . . . . .	73
3.2	Comportement électro-mécanique . . . . .	73
3.2.1	Coefficients piézo-électriques . . . . .	73
3.2.2	Lois de comportement piézoélectrique . . . . .	74
3.3	Comportement magnéto-mécanique . . . . .	75
3.3.1	Coefficients piézo-magnétiques . . . . .	75
3.3.2	Lois de comportement magnéto-mécanique . . . . .	76
3.3.3	Modèle de déformation de magnétostriction . . . . .	79
3.3.4	Identification et influence des paramètres du modèle . . . . .	82
3.4	Approche éléments finis . . . . .	84
3.4.1	Problème électro-mécanique . . . . .	85
3.4.2	Problème magnéto-mécanique . . . . .	92
3.4.3	Problème couplé électro-magnéto-mécanique . . . . .	101
3.4.4	Algorithme de résolution . . . . .	103
3.5	Conclusion . . . . .	109
<b>4</b>	<b>Application aux dispositifs à base de matériaux actifs</b>	<b>111</b>
4.1	Actionneur pour le contrôle de déplacement . . . . .	113
4.1.1	Description du dispositif . . . . .	114
4.1.2	Analyse numérique de l'actionneur de contrôle de déplacement	114
4.1.3	Conclusion . . . . .	120
4.2	Structures composites magnéto-électriques pour la mesure de champ	120
4.2.1	Description des structures composites . . . . .	120
4.2.2	Solutions analytiques . . . . .	121
4.2.3	Comparaison solutions analytique/numérique . . . . .	125
4.2.4	Conclusion . . . . .	129
4.3	Capteur de déplacement magnéto-électrique . . . . .	130
4.3.1	Description du dispositif . . . . .	130
4.3.2	Analyse numérique du capteur . . . . .	131
4.3.3	Conclusion . . . . .	138
4.4	Conclusion . . . . .	138
	<b>Conclusion - Perspectives</b>	<b>141</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>145</b>
	<b>Annexes</b>	<b>153</b>
<b>A</b>	<b>Note sur le calcul des efforts globaux d'origine électromagnétique</b>	<b>155</b>
A.1	Le tenseur de Maxwell . . . . .	157
A.1.1	Milieux continus non polarisables . . . . .	157
A.1.2	Milieux continus polarisables . . . . .	160
A.2	Travaux virtuels . . . . .	162

---

---

A.2.1	Circuit inductif . . . . .	163
A.2.2	Circuit capacitif . . . . .	166
<b>B</b>	<b>Note sur la plateforme de caractérisation</b>	<b>171</b>
B.1	Circuit magnétique de la plateforme de caractérisation . . . . .	173
B.1.1	Dimensions du circuit magnétique de la plateforme de caractérisation . . . . .	173
B.2	Propriétés des matériaux du circuit magnétique . . . . .	176
B.3	Principe d'acquisition d'une courbe anhystérétique . . . . .	176
B.3.1	Désaimantation point par point . . . . .	176
B.3.2	Évaluation des points . . . . .	178
<b>C</b>	<b>Loi de comportement magnéto-mécanique bidimensionnelle</b>	<b>181</b>
C.1	Hypothèses des états plans . . . . .	183
C.1.1	États plans de contraintes . . . . .	183
C.1.2	États plans de déformation . . . . .	184
C.2	Modèle bidimensionnel de déformation de magnétostriction . . . . .	184
C.3	Loi de comportement magnétique dans l'hypothèse des états plans . . . . .	185
C.3.1	Loi de comportement magnétique dans l'état plan de contraintes	185
C.3.2	Loi de comportement magnétique dans l'état plan de déformations . . . . .	186
<b>D</b>	<b>Note sur les formulations éléments finis</b>	<b>187</b>
D.1	Problème électro-magnéto-mécanique 2D . . . . .	189
D.1.1	Formulation variationnelle magnéto-mécanique . . . . .	189
D.1.2	Formulation éléments finis . . . . .	190
D.2	Note sur la méthode de Newton-Raphson . . . . .	194



# Table des figures

1.1	<i>Surface de séparation <math>\Gamma</math> entre deux milieux <math>\Omega_1</math> et <math>\Omega_2</math></i>	8
1.2	<i>Principaux modes de magnétostriction</i>	17
1.3	<i>Sollicitation mécanique de structures cristallines</i>	18
1.4	<i>Domaines magnétiques dans des cristaux de fer-silicium d'après [Hubert et Schäfer, 1998]</i>	18
1.5	<i>Séparation de domaines par une paroi à <math>180^\circ</math></i>	19
1.6	<i>Illustration du processus d'aimantation d'un monocristal</i>	20
1.7	<i>Influence de l'état de contraintes sur l'orientation des moments magnétiques d'une substance ferromagnétique isotrope ([du Trémolet de Lacheisserie, 1999a])</i>	21
1.8	<i>Influence de l'état de contraintes sur la déformation de magnétostriction d'un monocristal ferromagnétique (les déformations élastiques ne sont pas représentées)</i>	21
1.9	<i>Domaines ferroélectriques d'une céramique PZT, d'après [Setter, 2002]</i>	22
1.10	<i>Illustration du processus de polarisation d'un matériau ferroélectrique</i>	23
1.11	<i>Compression d'une céramique ferroélectrique initialement polarisée, d'après [Lynch, 1996]</i>	24
1.12	<i>Magnétostriction à température ambiante, <math>\lambda_{\parallel} - \lambda_{\perp}</math>, pour des polycristaux <math>RFe_2</math> (+ - : signe de la magnétostriction) d'après [Engdahl, 2000]</i>	25
1.13	<i>Illustration de moteurs magnétostrictifs linéaire et rotatif</i>	27
2.1	<i>Principe de la caractérisation magnéto-mécanique uniaxiale : des efforts uniaxiaux, un flux magnétique et des grandeurs homogènes et mesurables</i>	36
2.2	<i>Représentation schématique simplifiée du dispositif de caractérisation développé par [Moffett et al., 1991]</i>	38
2.3	<i>Porte échantillon du dispositif de caractérisation quasi-statique des matériaux magnétostrictifs développé au KTH [Kvarnsjö et Engdahl, 1991]</i>	39
2.4	<i>Description schématique du dispositif de caractérisation [Benbouzid, 1994]</i>	40
2.5	<i>Machine de traction/compression électromécanique</i>	43
2.6	<i>Dispositif de sollicitation magnétique</i>	45
2.7	<i>Partie mécanique modélisée et maillage correspondant</i>	47

2.8	<i>Distribution des contraintes (Von-Mises) pour une force appliquée de 10 kN, un coefficient de frottement <math>f</math> de 0,2 et un échantillon de longueur 30 mm</i>	48
2.9	<i>Partie magnétique modélisée et maillage correspondant</i>	49
2.10	<i>Distribution du champ magnétique et de l'induction magnétique pour la configuration retenue</i>	50
2.11	<i>Effet de la longueur de l'échantillon <math>L_{ech}</math> sur l'homogénéité du champ de contraintes</i>	51
2.12	<i>Effet des entrefers <math>e</math> sur la réponse du circuit magnétique</i>	51
2.13	<i>Effet de la longueur de l'échantillon <math>L_{ech}</math> sur l'homogénéité du champ magnétique</i>	52
2.14	<i>Effet de la longueur de l'échantillon <math>L_{ech}</math> sur la pression magnétique moyenne (Terfenol-D)</i>	53
2.15	<i>Principe de mesure de l'expérience magnéto-mécanique, les mors et la machine d'essai ne sont pas représentés</i>	54
2.16	<i>Échantillon de Terfenol-D instrumenté</i>	55
2.17	<i>Principe de mesure du champ magnétique <math>\mathbf{H}</math> par sonde à effet Hall</i>	56
2.18	<i>Dispositif de caractérisation magnéto-mécanique en situation d'essai. L'éprouvette instrumentée est disposée au centre, entre les deux colonnes magnétique</i>	58
2.19	<i>Dispositif de mesure magnétique en situation d'essai. Au bout de la tige en plastique se trouve la sonde à effet Hall.</i>	58
2.20	<i>Repérage des directions de l'échantillon</i>	59
2.21	<i>Essai de compression d'échantillons de Terfenol-D</i>	59
2.22	<i>Caractéristiques du comportement magnétique</i>	60
2.23	<i>Mesure du comportement magnétique à contrainte nulle d'échantillons de Terfenol-D</i>	60
2.24	<i>Mesure de la déformation de magnétostriction à contrainte nulle d'échantillons de Terfenol-D</i>	61
2.25	<i>Illustration de l'effet <math>\Delta E</math> sur un essai de compression d'un échantillon de Terfenol-D</i>	62
2.26	<i>Fluctuation de l'effort mécanique appliqué au cours d'une mesure hystérétique sur un échantillon de Terfenol-D</i>	63
2.27	<i>Ligne typique de chargement mécanique quasi-statique</i>	64
2.28	<i>Influence d'une contrainte de compression sur la mesure de la déformation de magnétostriction d'un barreau de Terfenol-D, comportement hystérétique (<math>a = 0</math> MPa <math>b = 0,4</math> MPa <math>c = 0,6</math> MPa <math>d = 1,2</math> MPa <math>e = 2,7</math> MPa <math>f = 4,6</math> MPa <math>g = 6,2</math> MPa <math>h = 9,6</math> MPa)</i>	65
2.29	<i>Influence d'une contrainte de compression sur la mesure de la déformation de magnétostriction d'un barreau de Terfenol-D, comportement hystérétique (<math>h = 9,6</math> MPa <math>i = 11,7</math> MPa <math>j = 19,6</math> MPa <math>k = 26,3</math> MPa <math>l = 33,1</math> MPa <math>m = 39,1</math> MPa <math>n = 44,3</math> MPa <math>o = 52,3</math> MPa <math>p = 58,7</math> MPa <math>q = 65,3</math> MPa <math>r = 83,5</math> MPa <math>s = 122,1</math> MPa)</i>	65
2.30	<i>Évolution de la déformation de magnétostriction en fonction de la contrainte mécanique appliquée, pour différentes valeurs de champ magnétique et d'induction magnétique</i>	66

2.31	<i>Influence d'une contrainte de compression sur la mesure de la déformation de magnétostriction d'un barreau de Terfenol-D, comportement anhystérétique . . . . .</i>	66
2.32	<i>Illustration schématique de la déformation de magnétostriction mesurée <math>S(B, \sigma)</math> . . . . .</i>	67
2.33	<i>Influence d'une contrainte de compression uniaxiale sur le comportement magnétique du Terfenol-D . . . . .</i>	68
2.34	<i>Perméabilité magnétique relative du Terfenol-D en fonction de la contrainte mécanique appliquée pour différentes amplitudes de champ magnétique . . . . .</i>	69
3.1	<i>Couplages thermodynamiques . . . . .</i>	77
3.2	<i>Mesures de déformation de magnétostriction sur un échantillon de Terfenol-D . . . . .</i>	78
3.3	<i>Définition des angles d'Euler . . . . .</i>	80
3.4	<i>Réseaux de courbes expérimentales (traits pleins) et reconstitués (traits pointillés) d'échantillons de Terfenol-D, d'après [Azoum, 2005] . . . . .</i>	84
3.5	<i>Reconstruction du réseau de courbe <math>S_{//} = f(B)</math> . . . . .</i>	84
3.6	<i>Domaine d'étude du problème électro-mécanique . . . . .</i>	87
3.7	<i>Éléments géométriques . . . . .</i>	88
3.8	<i>Domaine d'étude du problème magnéto-mécanique . . . . .</i>	94
3.9	<i>Répartition du champ source <math>T^s</math> pour une bobine circulaire de hauteur constante . . . . .</i>	97
3.10	<i>Déplacement virtuel d'un nœud d'un élément tétraédrique . . . . .</i>	100
3.11	<i>Méthode de résolution du problème couplé électro-magnéto-mécanique direct . . . . .</i>	102
3.12	<i>Domaine d'étude du problème couplé électro-magnéto-mécanique direct . . . . .</i>	102
3.13	<i>Domaine d'étude du problème couplé électro-magnéto-mécanique indirect . . . . .</i>	103
3.14	<i>Profil des matrices globales pour le même problème (nn nombre d'éléments non nuls de la matrice) . . . . .</i>	104
3.15	<i>Schéma de principe du couplage électro-magnéto-mécanique . . . . .</i>	108
4.1	<i>Dispositif de contrôle de déplacement . . . . .</i>	114
4.2	<i>Déplacement <math>\delta</math> à une excitation magnétique . . . . .</i>	114
4.3	<i>Domaine d'étude bidimensionnelle et maillage correspondant du dispositif de contrôle de déplacement . . . . .</i>	115
4.4	<i>Influence des coefficients élastiques sur l'évolution du déplacement <math>\delta</math> . . . . .</i>	115
4.5	<i>Caractéristiques magnétiques des matériaux du circuit magnétique . . . . .</i>	116
4.6	<i>Distribution de l'induction magnétique, du champ magnétique, des forces nodales de magnétostriction et déplacement total . . . . .</i>	117
4.7	<i>Influence des paramètres géométriques sur le déplacement <math>\delta</math> . . . . .</i>	118
4.8	<i>Définition du paramètre de largeur pour l'analyse tridimensionnelle . . . . .</i>	119
4.9	<i>Comparaison 2D - 3D des déplacements <math>\delta</math> en fonction de l'induction magnétique . . . . .</i>	119
4.10	<i>Illustration de différentes configurations de composites magnéto-électriques stratifiés . . . . .</i>	121
4.11	<i>Structures composites stratifiées retenues . . . . .</i>	121

4.12	<i>Profil des contraintes et des déformations de la structure trilame . . .</i>	122
4.13	<i>Profil des contraintes et des déformations de la structure bilame . . .</i>	123
4.14	<i>Domaines d'étude et maillage correspondant des structures composites</i>	125
4.15	<i>Distribution des équipotentiels (<math>A</math>), de l'induction magnétique, des forces de magnétostriction et de la déformée totale . . . . .</i>	127
4.16	<i>Distribution du potentiel électrostatique pour différentes valeurs du champ magnétique (Bilame : amplifié 500 fois; Trilame : amplifié 1000 fois) . . . . .</i>	128
4.17	<i>Tension électrique sur les électrodes des structures composites . . . .</i>	129
4.18	<i>Nombre d'itérations en fonction de l'induction magnétique pour la structure trilame et une erreur <math>\varepsilon_r &lt; 1.10^{-3}</math> . . . . .</i>	129
4.19	<i>Capteur de déplacement magnéto-électrique [Ueno et Higuchi, 2005] .</i>	131
4.20	<i>Principe du capteur : circulation du flux magnétique (gauche) et sa variation avec le déplacement de la plaque ferromagnétique (droite) .</i>	131
4.21	<i>Dispositif expérimental pour la mesure de sensibilité . . . . .</i>	133
4.22	<i>Domaine d'étude et maillage correspondant . . . . .</i>	133
4.23	<i>Distribution des équipotentiels et du champ d'induction magnétique .</i>	134
4.24	<i>Distribution des déplacements et du potentiel électrique . . . . .</i>	135
4.25	<i>Distribution du potentiel électrique, électrode en parallèle . . . . .</i>	136
4.26	<i>Réponse du capteur de déplacement magnéto-électrique . . . . .</i>	137
4.27	<i>Réponse du capteur de déplacement magnéto-électrique suite à une précontrainte . . . . .</i>	138
A.1	<i>Variation continue des propriétés électromagnétiques à l'interface de deux domaines <math>\Omega_1</math> et <math>\Omega_2</math> . . . . .</i>	162
A.2	<i>Circuit inductif, <math>a</math> est un paramètre géométrique lié principalement à la position du noyau . . . . .</i>	163
A.3	<i>Énergie et densité d'énergie magnétique . . . . .</i>	164
A.4	<i>Circuit capacitif, <math>a</math> est un paramètre géométrique lié principalement à la position des électrodes . . . . .</i>	166
A.5	<i>Énergie et densité d'énergie électrique . . . . .</i>	167
B.1	<i>Circuit magnétique de la plateforme de caractérisation . . . . .</i>	173
B.2	<i>Dimensions des culasses en Ferrite . . . . .</i>	174
B.3	<i>Colonne Magnétique . . . . .</i>	174
B.4	<i>Dimensions des colonnes magnétiques . . . . .</i>	175
B.5	<i>Platine de maintien . . . . .</i>	175
B.6	<i>Dimensions du maintien amagnétique . . . . .</i>	176
B.7	<i>Semelle de maintien . . . . .</i>	176
B.8	<i>Dimensions de la semelle de maintien . . . . .</i>	177
B.9	<i>Principe d'acquisition d'une courbe anhystérétique . . . . .</i>	179
B.10	<i>Distributions de <math>I_c</math> pour un courant maximum <math>I_m = 5A</math> et <math>N_p = 100</math> .</i>	180
B.11	<i>Principe d'évaluation de l'induction magnétique . . . . .</i>	180
C.1	<i>Configuration typique adaptée à l'hypothèse d'états plan de contraintes</i>	183
C.2	<i>Configuration typique adaptée à l'hypothèse d'états plan de déformations</i>	184
D.1	<i>Domaine d'étude du problème magnéto-mécanique . . . . .</i>	190

# Liste des tableaux

1.1	Magnétostriction à saturation $\lambda_s$ , température de Curie $T_c$ et induction magnétique à saturation $B_{sat}$ de quelques matériaux polycristallins d'après [du Trémolet de Lacheisserie, 1999b], [Kellog et al., 2003], [Kedous-Lebouc, 2006]. . . . .	26
1.2	Caractéristiques principales de quelques matériaux piézoélectriques. $\epsilon_r$ permittivité diélectrique relative, $T_c$ température de Curie, $d_{33}$ constante de charge (proportionnalité entre la charge et la contrainte à champ nul ou constant) et $k_{33}$ coefficient de couplage électromécanique (aptitude à transformer l'énergie électrique en énergie mécanique selon la direction de polarisation) ([Setter, 2002]). . . . .	28
1.3	Exemples d'application des matériaux piézoélectriques. . . . .	29
1.4	Comparaison céramiques PZT / matériaux à magnétostriction géante, d'après [du Trémolet de Lacheisserie, 1999b] et [Setter, 2002]. . . . .	30
1.5	Rappels de quelques effets de couplages associés aux matériaux (Non-grisé : terme de couplage $\rightarrow$ matériaux actifs). . . . .	32
2.1	<i>Propriétés magnétiques et mécaniques des matériaux utilisés. <math>B_{sat}</math> induction magnétique à saturation, <math>\mu_r</math> perméabilité relative, <math>E</math> module d'Young et <math>\nu</math> coefficient de Poisson, d'après [Hubert et al., 2005], [Etrema, 2005] et [Kedous-Lebouc, 2006]. . . . .</i>	46
2.2	<i>Caractéristiques des jauges de déformations utilisées . . . . .</i>	54
2.3	<i>Coefficients d'élasticité des échantillons . . . . .</i>	57
3.1	Coefficients $\beta_n$ du modèle polynomial obtenus par minimisation de la fonctionnelle $f_{\beta_n}$ , pour du Terfenol-D . . . . .	83
3.2	<i>Nombre d'itération nécessaire pour obtenir la convergence de la méthode du point fixe modifiée (Barreau de Terfenol-D, <math>B_{moy} = 0,6 T</math>) en fonction de <math>\alpha</math> et <math>\mu_{pf}</math>, [Azoum, 2005] (–divergence) . . . . .</i>	109
4.1	<i>Description des paramètres matériaux utilisés pour l'actionneur de contrôle de déplacement . . . . .</i>	116
4.2	<i>Description des paramètres matériaux utilisés et déplacement <math>\delta</math> obtenu (<math>Db = 4 mm</math> et <math>a_1 = 15 mm</math>) . . . . .</i>	118
4.3	<i>Description des paramètres matériaux utilisés pour l'analyse des structures composites . . . . .</i>	126
4.4	<i>Description des paramètres matériaux utilisés pour l'analyse du capteur de déplacement . . . . .</i>	132

B.1 *Propriétés des matériaux du circuit magnétique* . . . . . 178

# Notations

$H$	Champ magnétique.
$B$	Induction magnétique.
$M$	Aimantation.
$H^c$	Champ magnétique coercitif.
$E$	Champ électrique.
$D$	Induction électrique.
$P$	Polarisation électrique.
$J$	Densité de courant.
$a$	Potentiel vecteur magnétique.
$\phi$	Potentiel scalaire électrique.
$\sigma$	Tenseur des contraintes.
$S$	Tenseur des déformations.
$S^e$	Tenseur des déformations élastiques.
$S^\mu$	Tenseur des déformations de magnétostriction.
$S^\mu_{//}$	Tenseur des déformations de magnétostriction mesurée parallèlement au champ magnétique.
$S^\mu_\perp$	Tenseur des déformations de magnétostriction mesurée perpendiculairement au champ magnétique.
$u$	Déplacement (mécanique).
$T$	Tenseur de Maxwell.
$F$	Force Globale.
$f$	Densité de force.
$f_s$	Densité de force surfacique.
$W$	Énergie potentielle.
$W_{co}$	Co-énergie potentielle.
$w$	Densité d'énergie potentielle.
$w_{co}$	Densité de co-énergie potentielle.
$I$	Identité d'ordre 2.
$\nabla$	Opérateur différentiel.
$\nabla^s$	Opérateur gradient symétrique.
$\partial_x$ ou $\frac{\partial}{\partial x}$	Dérivation par rapport à $x$ .

## Paramètres matériaux

$\chi^m$	Tenseur des susceptibilité magnétique.
$\mu$	Tenseur des perméabilité magnétique.
$\nu$	Tenseur des reluctivité magnétique.
$\chi^e$	Tenseur des susceptibilité électrique.
$\varepsilon$	Tenseur des permittivité diélectrique.
$\varrho$	Conductivité électrique.
$\mathbb{C}$	Tenseur des modules élastiques.
$Y$	Module d'Young.
$\nu$	Coefficient de Poisson.
$\mu^*$ $\lambda^*$	Coefficient de Lamé.
$\rho_m$	Masse volumique.
$\lambda_s$	Déformation de magnétostriction à saturation.
$T_c$	Température de Curie.
$B_{sat}$	Induction magnétique à saturation.
$\alpha_{ikl}$	Coefficients piézo-électriques.
$\gamma_{ikl}$	Coefficients piézo-magnétiques.
$\beta_n$	Coefficients polynomiaux du modèle de déformation de magnétostriction.
$\nu^c$	Tenseur des reluctivités équivalentes de magnétostriction.

## Convention de notation pour les éléments finis

$n_a$	Nombre d'arêtes du domaine d'étude.
$n_n$	Nombre de nœuds du domaine d'étude.
$n_m$	Nombre de nœuds mécaniques du domaine d'étude.
$n_e$	Nombre d'éléments du domaine d'étude.
$n_\phi$	Nombre de nœuds "électriques" du domaine d'étude.
$n_a^e$	Nombre d'arêtes de l'élément.
$n_n^e$	Nombre de nœuds de l'élément.
$\Omega_e$	Domaine de l'élément.
$w_n$	Fonction de forme nodale.
$w_a$	Fonction de forme d'arête.
$[\mathbf{J}]$	Matrice Jacobienne.
$ \mathbf{J} $	Déterminant de la matrice Jacobienne.

---

## Convention de notation pour les tenseurs symétriques

On utilise dans ce document la notation de Voigt détaillée dans [François et al., 1991] et rappelée brièvement ci-dessous :

Tenseur d'ordre 2 : Notation tensorielle  $\mathbb{S} : S_{ij}, (i, j) \in \mathcal{A}^2, \mathcal{A} = \{1, 2, 3\}$   
Notation vectorielle  $\mathbf{S} : S_i, i \in \mathcal{B}, \mathcal{B} = \{1, \dots, 6\}$   
avec  $\mathbf{S} = \{S_{11} \ S_{22} \ S_{33} \ 2S_{23} \ 2S_{31} \ 2S_{12}\}^t$   
et  $\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_{11} \ \sigma_{22} \ \sigma_{33} \ \sigma_{23} \ \sigma_{31} \ \sigma_{12}\}^t$

Tenseur d'ordre 4 : Notation tensorielle  $\mathbb{C} : C_{ijkl}, (i, j, k, l) \in \mathcal{A}^4, \mathcal{A} = \{1, 2, 3\}$   
Notation vectorielle  $\mathbf{C} : C_{ij}, (i, j) \in \mathcal{B}^2, \mathcal{B} = \{1, \dots, 6\}$

$$\text{avec : } \mathbf{C} = \begin{pmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & 2C_{1123} & 2C_{1131} & 2C_{1112} \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & 2C_{2223} & 2C_{2231} & 2C_{2212} \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & 2C_{3323} & 2C_{3331} & 2C_{3312} \\ 2C_{2311} & 2C_{2322} & 2C_{2333} & 4C_{2323} & 4C_{2331} & 4C_{2312} \\ 2C_{3111} & 2C_{3122} & 2C_{3133} & 4C_{3123} & 4C_{3131} & 4C_{3112} \\ 2C_{1211} & 2C_{1222} & 2C_{1233} & 4C_{1223} & 4C_{1231} & 4C_{1212} \end{pmatrix}$$



# Introduction

LE VINGTIÈME siècle a vu le vecteur électricité se répandre au point de devenir indispensable au fonctionnement de nos sociétés. Le développement des dispositifs électromagnétiques de façon de plus en plus intensive nécessite l'emploi de matériaux de plus en plus performants. Ainsi, la maîtrise des pertes d'énergie dans les machines électriques, ou la réduction de la masse des matériels électriques dans les systèmes embarqués, passe par un choix adéquat des matériaux utilisés pour leur fabrication.

Les principaux éléments constitutifs des dispositifs électromagnétiques sont les matériaux diélectriques et ferromagnétiques. Cette étude porte sur deux points du comportement de ces matériaux. Le premier point concerne la déformation de magnétostriction (resp. d'électrostriction) apparaissant à l'application d'un champ magnétique (resp. électrique). Ces déformations spontanées sont intrinsèques à ces matériaux. Bien que de faible amplitude, ces déformations sont généralement nuisibles au fonctionnement des dispositifs électromagnétiques. On sait par exemple que la déformation de magnétostriction est l'une des sources du bruit émis par les machines électriques, en particulier les transformateurs. Le second point est l'effet de l'application d'une contrainte mécanique sur le comportement magnétique (resp. diélectrique). L'application d'une contrainte conduit à une modification des propriétés magnétiques (resp. diélectriques) de ces matériaux. Cette modification du comportement magnétique (resp. diélectrique) peut avoir une incidence sur les performances des dispositifs électromagnétiques. Il est à noter que les sources potentielles de contraintes sont nombreuses, qu'elles soient héritées des procédés de fabrication ou associées aux conditions de fonctionnement.

Pour certains matériaux, les déformations induites par les champs électromagnétiques peuvent atteindre des amplitudes considérables (de l'ordre de  $10^{-3}$ ). C'est le cas notamment de certaines céramiques piézoélectriques et de certains alliages de terres rares et de métaux de transition, communément appelés matériaux à magnétostriction géante. Ces matériaux sont appelés matériaux actifs, car ils sont le siège d'une conversion d'énergie. Cette conversion d'énergie résulte des couplages entre les propriétés électromagnétiques et mécaniques au sein de ces matériaux. Les matériaux

actifs sont à la base du fonctionnement d'applications nécessitant soit une conversion de type actionneur magnétique-mécanique (resp. électrique-mécanique) soit une conversion de type capteur mécanique-magnétique (resp. mécanique-électrique). Ces applications emploient généralement un seul élément actif. Cependant, la conception de nouvelles architectures à base de matériaux actifs peut tirer partie d'une association d'éléments actifs, notamment de matériaux à magnétostriction géante et piézoélectriques. L'association de ces matériaux actifs conduit à un effet couplé appelé "Effet Magnéto-Électrique". La présence d'un champ magnétique engendre une déformation du matériau magnétostrictif, qui, transmise au matériau piézoélectrique, est à l'origine d'une polarisation électrique. Inversement, un champ électrique dans un matériau piézoélectrique peut induire une modification de l'aimantation dans le matériau magnétostrictif.

La conception d'une nouvelle génération de structures actives utilisant cet effet demande le développement de modèles de comportement fiables, ainsi que d'outils de modélisation robustes pour la résolution des problèmes couplés dans le but d'optimiser ces structures. L'étude présentée ici concerne ce couplage magnéto-électrique résultant d'une association de matériaux magnétostrictifs et piézoélectriques. L'objectif consiste à obtenir un modèle magnéto-électrique capable de rendre compte de ces effets de couplage. On verra que ce modèle consiste à obtenir la formulation de problèmes magnéto-mécanique et électro-mécanique résolue simultanément par une méthode numérique basée sur les éléments finis.

Les difficultés associées à la résolution de ce problème sont de plusieurs natures. Il s'agit tout d'abord de définir des lois de comportement magnéto-élastique macroscopique. Ces lois doivent décrire le plus précisément possible le comportement couplé des matériaux considérés, et être par ailleurs facilement intégrable dans un logiciel de calcul des champs. Il s'agit en l'occurrence de définir des termes du second ordre relatifs à l'effet des contraintes sur le comportement magnétique ou à l'effet du champ magnétique sur l'état de déformation. Ces effets s'ajoutent aux effets non-couplés, termes du premier ordre, dont dépendent essentiellement les matériaux considérés (l'aimantation dépend principalement du champ magnétique appliqué et la déformation de la contrainte).

L'établissement de ces lois de comportement nécessite l'obtention de données expérimentales. Ces données expérimentales doivent décrire le plus précisément possible l'état magnéto-élastique d'un échantillon sollicité simultanément par une contrainte mécanique et par un champ magnétique. L'une des difficultés majeures dans la conception de ce type d'expérimentation réside dans la maîtrise des conditions aux limites, en particulier du point de vue mécanique.

Il s'agit également de définir des formulations adaptées à la résolution de ce type de problème fortement non-linéaire. L'utilisation de méthodes robustes pour la résolution numérique est alors nécessaire.

Ce document est décomposé en quatre chapitres.

Le premier chapitre présente le cadre dans lequel s'inscrit ce travail. Après un bref rappel des comportements électromagnétiques et élastiques, les phénomènes de couplage électro-mécanique et magnéto-mécanique sont introduits. Les principaux matériaux actifs envisagés dans cette étude sont ensuite présentés.

---

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude expérimentale du comportement magnéto-élastique. Une description des principaux bancs expérimentaux présentés dans la littérature permet de définir les objectifs à atteindre pour la mise au point de notre propre plate-forme de caractérisation. Une description ainsi qu'une analyse de la plate-forme sont développées, suivie de résultats sur des échantillons de Terfenol-D. Les résultats obtenus sur cette plateforme peuvent notamment permettre l'identification de lois de comportement macroscopique du type de celles proposées dans le troisième chapitre.

Ce troisième chapitre traite de la modélisation du comportement magnéto-élastique et du comportement électro-élastique. Les lois de comportement sont tout d'abord établies et la formulation des problèmes correspondant détaillée pour une résolution par la méthode des éléments finis. L'effet magnéto-électrique est obtenu par couplage des deux problèmes. Ces outils de modélisation sont appliqués dans le quatrième chapitre sur des dispositifs particuliers.

La première application étudiée concerne le contrôle de micro-déplacement. Elle permet d'illustrer le potentiel des matériaux à magnétostriction géante ainsi que celui des outils développés. Les deux dernières applications sont relatives à l'effet magnéto-électrique, obtenu à partir de structures composites stratifiées. Elles permettent une validation des outils développés et mettent en évidence l'intérêt d'une telle combinaison de matériaux actifs.



# Chapitre 1

## Introduction au comportement électro-magnéto-élastique

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Équations d'équilibre</b> . . . . .	<b>7</b>
1.1.1	Équations d'équilibre électromagnétique . . . . .	7
1.1.2	Équation d'équilibre mécanique . . . . .	9
<b>1.2</b>	<b>Relations de comportement</b> . . . . .	<b>10</b>
1.2.1	Comportement mécanique . . . . .	10
1.2.2	Comportement électromagnétique . . . . .	10
1.2.3	Phénomènes de couplages . . . . .	12
<b>1.3</b>	<b>Comportement électro-magnéto-élastique</b> . . . . .	<b>18</b>
1.3.1	Comportement magnéto-mécanique . . . . .	18
1.3.2	Comportement électro-mécanique . . . . .	21
<b>1.4</b>	<b>Matériaux actifs du génie électrique</b> . . . . .	<b>23</b>
1.4.1	Matériaux magnétostrictifs . . . . .	23
1.4.2	Matériaux piézoélectriques . . . . .	27
1.4.3	Comparaison matériaux magnétostrictifs/piézoélectriques . .	29

---



CE CHAPITRE vise à préciser le cadre dans lequel s'inscrit ce travail. Les équations d'équilibre associées aux phénomènes électromagnétiques et mécaniques sont rappelées dans le cadre de l'approximation des milieux continus. Ceci permettra par la suite de présenter les phénomènes de couplages multiphysiques, en abordant principalement les comportements électro-mécanique et magnéto-mécanique et en distinguant auparavant les notions de couplage global et de couplage local. Les matériaux actifs sont finalement introduits, en privilégiant ceux ayant une vocation particulière dans le domaine du génie électrique.

## 1.1 Équations d'équilibre

Dans cette partie, nous abordons les modèles mathématiques pour décrire l'évolution de systèmes électromagnétiques et mécaniques. Nous rappelons les équations nécessaires pour le calcul des grandeurs physiques concernées et détaillons les conditions de passages associées.

### 1.1.1 Équations d'équilibre électromagnétique

Les équations de base pour la modélisation des phénomènes électromagnétiques sont les équations de Maxwell ([Maxwell, 1885a], [Maxwell, 1885b]). Celles-ci constituent un système d'équations aux dérivées partielles qui lie entre eux les phénomènes magnétiques et électriques, et unifie tous les principes de l'électromagnétisme. Dans l'approximation des milieux continus, ces équations sont :

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (1.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (1.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.4)$$

où  $\rho$  représente la densité volumique de charge électrique ( $C/m^3$ ). Dans ces équations on peut distinguer deux types de champs de vecteurs :

- Les champs d'intensité :
  - $\mathbf{H}$  le champ magnétique ( $A/m$ ),
  - $\mathbf{E}$  le champ électrique ( $V/m$ ),
- Les densités de flux :
  - $\mathbf{B}$  la densité de flux magnétique ou induction magnétique ( $T$ ),
  - $\mathbf{D}$  la densité de flux électrique ou induction électrique ( $C/m^2$ ),
  - $\mathbf{J}$  la densité de courant ( $A/m^2$ ).

L'équation (1.1), appelée loi de Faraday, rend compte des phénomènes d'induction tandis que l'équation (1.2) est une généralisation de la loi d'Ampère ( $\nabla \times \mathbf{H} =$

$\mathbf{J}$ ). Ce sont des équations de couplage électromagnétique, alors que les équations (1.3) et (1.4) constituent des équations dites de conservation.

Le terme  $\partial_t \mathbf{D}$  dans l'équation (1.2) est appelé densité de courant de déplacement. Ce terme est au centre de la théorie des ondes électromagnétiques ([Jackson, 1999]). Il implique qu'une variation temporelle du champ électrique induit une variation spatiale du champ magnétique (équation (1.2)). De même, l'équation (1.1) implique qu'une variation temporelle du champ magnétique crée une variation spatiale du champ électrique. Les champs magnétiques et électriques sont donc intimement liés et l'on parle de couplage électromagnétique. La symétrie entre les phénomènes magnétiques et électriques serait complète s'il existait des charges magnétiques<sup>1</sup>.

Cependant, pour les applications où les fréquences  $f$  mises en jeu sont très faibles, les phénomènes étudiés deviennent invariant dans le temps. Les dérivées temporelles dans les équations de Maxwell s'annulent et il apparaît un découplage entre les phénomènes magnétiques et électriques. On parle alors d'approximation quasi-statique. L'étude des phénomènes magnétiques devient l'objet de la magnétostatique et celle des phénomènes électriques l'objet de l'électrostatique ([Stratton, 1961], [Durand, 1968]).

Dans cette approximation quasi-statique, les équations (1.1) et (1.2) se réduisent à :

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \tag{1.5}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \tag{1.6}$$

Tandis que l'équation de la conservation de la charge (1.3) devient :

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \tag{1.7}$$

### Conditions de passage

Lors du passage d'un milieu à un autre, les champs électromagnétiques subissent des discontinuités et ne sont par conséquent pas différentiables. Cependant, il est possible de définir des conditions de passage des champs entre deux milieux.

Considérons deux milieux continus  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  quelconques, séparés par une interface  $\Gamma$  (figure 1.1). La normale  $\mathbf{n}$  à  $\Gamma$  est orientée de  $\Omega_1$  vers  $\Omega_2$ .

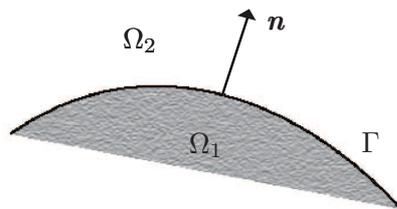


Figure 1.1 – Surface de séparation  $\Gamma$  entre deux milieux  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$

---

<sup>1</sup>L'absence de preuve d'existence de charge magnétique est à l'origine de l'équation (1.4), qui jusqu'à ce jour est toujours vraie ([Fryberger, 1985])

Les conditions traduisant la continuité des champs à l'interface  $\Gamma$  sont alors définies par les relations (1.8) ([Fournet, 1985]) :

$$\begin{aligned} (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2)|_{\Gamma} \times \mathbf{n} &= \mathbf{0} & (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2)|_{\Gamma} \times \mathbf{n} &= \mathbf{J}_s \\ (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2)|_{\Gamma} \cdot \mathbf{n} &= \rho_s & (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2)|_{\Gamma} \cdot \mathbf{n} &= 0 \end{aligned} \quad (1.8)$$

Ces conditions de passage indiquent que la composante normale de  $\mathbf{B}$  et la composante tangentielle de  $\mathbf{E}$  sont continues à travers  $\Gamma$ . Par contre, si des densités de charges  $\rho_s$  ou de courant  $\mathbf{J}_s$  sont présentes à l'interface  $\Gamma$  entre les deux milieux, la composante normale de  $\mathbf{D}$  et la composante tangentielle de  $\mathbf{H}$  sont discontinues.

### 1.1.2 Équation d'équilibre mécanique

L'évolution de tout système mécanique soumis à l'action d'efforts mécaniques volumiques et/ou surfaciques respecte le principe fondamental de la dynamique. Dans l'approximation des milieux continus les équations d'équilibre mécanique sont définies par :

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} = \rho_m \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \quad \text{sur } \Omega \quad (1.9)$$

où  $\boldsymbol{\sigma}$  est le champ de contrainte,  $\mathbf{f}$  les forces volumiques,  $\mathbf{u}$  le vecteur des déplacements,  $\rho_m$  la masse volumique et  $\Omega$  le domaine d'étude considéré. Cette équation décrit le mouvement de tous les points d'un solide en réponse à l'action de forces extérieures agissant sur le solide.

Dans l'approximation quasi-statique, l'équation (1.9) se réduit à :

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = -\mathbf{f} \quad \text{sur } \Omega \quad (1.10)$$

#### Conditions aux limites

Dans l'évolution d'un système mécanique, les conditions aux limites portent sur les déplacements et les contraintes imposées à l'interface délimitant le solide considéré. Elles se traduisent par les relations suivantes :

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{f}_s \quad \text{sur } \Gamma_{\boldsymbol{\sigma}} \quad (1.11)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 \quad \text{sur } \Gamma_u \quad (1.12)$$

avec  $\mathbf{f}_s$  les forces surfaciques imposées et  $\mathbf{u}_0$  les déplacements imposés.  $\Gamma_{\boldsymbol{\sigma}}$  et  $\Gamma_u$  délimitent les parties de l'interface du solide où sont imposés les efforts et les déplacements.

## 1.2 Relations de comportement

Les champs, définis par les équations d'équilibre magnétique et mécanique, sont liés par des relations constitutives, dites lois de comportement. Ces lois décrivent les caractéristiques des matériaux, et sans elles les systèmes d'équations (1.1)-(1.4) et (1.9) seraient indéterminés. Dans la section suivante, nous présentons une rapide description phénoménologique de ces lois de comportement dans le cas de matériaux standards.

### 1.2.1 Comportement mécanique

Lorsqu'on applique un effort extérieur à un matériau, il se déforme. L'état mécanique est alors décrit par deux grandeurs, le tenseur des contraintes  $\sigma$  et le tenseur des déformations élastiques  $S^e$ , qui sont des tenseurs d'ordre 2. Ces deux variables d'état sont reliées par une loi de comportement faisant intervenir un tenseur d'ordre 4, le tenseur de rigidité  $\mathbb{C}$ , caractéristique du matériau considéré.

$$\sigma = \mathbb{C} : S^e \tag{1.13}$$

Dans le cadre de l'élasticité linéaire le tenseur  $\mathbb{C}$  est une constante et l'équation (1.13) est appelée loi de Hooke. Par la suite, la gamme des déformations envisagées étant relativement faible (ordre de grandeur de  $10^{-3}$ ), la restriction à l'hypothèse des petites perturbations (HPP) semble justifiée.

### 1.2.2 Comportement électromagnétique

Dans le cadre de l'électromagnétisme, les lois de comportement sont données généralement sous les formes suivantes :

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \tag{1.14}$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \tag{1.15}$$

$$\mathbf{J} = \varrho \mathbf{E} \tag{1.16}$$

où  $\mu$  est la perméabilité magnétique ( $H/m$ ),  $\varepsilon$  la permittivité diélectrique ( $F/m$ ) et  $\varrho$  la conductivité électrique ( $\Omega^{-1} m^{-1}$ ).  $\mu$ ,  $\varepsilon$  et  $\varrho$  sont des tenseurs d'ordre 2 et leur valeur n'est pas nécessairement constante. Ces lois de comportement sont caractéristiques des milieux considérés.

#### 1.2.2.1 Milieux ferromagnétiques

Un matériau ferromagnétique soumis à un champ magnétique s'aimante. Les grandeurs utilisées pour décrire l'état magnétique sont le champ magnétique  $\mathbf{H}$ , l'induction magnétique  $\mathbf{B}$  et l'aimantation  $\mathbf{M}$ . Ces trois grandeurs sont reliées par la relation :

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) \tag{1.17}$$

où  $\mu_0$  est la perméabilité du vide<sup>2</sup>.

La relation de comportement peut donc s'exprimer comme la relation entre l'induction magnétique et le champ magnétique :

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (1.18)$$

ou de façon équivalente par la relation :

$$\mathbf{M} = \chi^m \mathbf{H} \quad (1.19)$$

avec  $\chi^m$  la susceptibilité magnétique, tenseur d'ordre 2. La perméabilité magnétique et la susceptibilité magnétique sont reliées par la relation :

$$\mu = \mu_0 (\mathbf{I} + \chi^m) \quad (1.20)$$

L'aimantation  $\mathbf{M}$  et l'induction magnétique  $\mathbf{B}$  sont généralement des fonctions non-linéaires du champ magnétique  $\mathbf{H}$ . À la différence du comportement mécanique, les niveaux de champ étudiés nécessitent souvent de prendre en compte cette non-linéarité dans la modélisation.

### 1.2.2.2 Milieux diélectriques

Quand on soumet un matériau diélectrique à un champ électrique, il se polarise. Les grandeurs utilisées pour définir l'état électrique sont le champ électrique  $\mathbf{E}$ , l'induction électrique  $\mathbf{D}$  et la polarisation électrique  $\mathbf{P}$ . Ces trois grandeurs sont liées par la relation :

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (1.21)$$

où  $\varepsilon_0$  est la permittivité du vide<sup>3</sup>.

La relation de comportement peut donc s'exprimer par une relation entre l'induction électrique et le champ électrique :

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \quad (1.22)$$

ou de façon équivalente par la relation :

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi^e \mathbf{E} \quad (1.23)$$

avec  $\chi^e$  la susceptibilité électrique, tenseur d'ordre 2. La permittivité électrique et la susceptibilité électrique sont reliées par la relation :

$$\varepsilon = \varepsilon_0 (\mathbf{I} + \chi^e) \quad (1.24)$$

La polarisation  $\mathbf{P}$  et l'induction électrique  $\mathbf{D}$  sont généralement des fonctions non-linéaires du champ électrique  $\mathbf{E}$ .

<sup>2</sup>Dans le système d'unité international [B.I.P.M., 2006]  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} (H/m)$ .

<sup>3</sup>Dans le système d'unité international  $\varepsilon_0 \approx 1/(36\pi) \cdot 10^{-9} (F/m)$ .

### 1.2.3 Phénomènes de couplages

Jusqu'à présent, on s'est intéressé, de façon découplée, aux comportements électromagnétique et mécanique. Cependant, des couplages ont lieu entre les états électromagnétiques et mécaniques. Ces couplages se manifestent principalement de deux façons : une déformation induite par une sollicitation magnétique (resp. électrique) et une modification de l'état magnétique (resp. électrique) sous l'effet des contraintes. Il convient alors de distinguer deux niveaux de couplages. Les couplages dits globaux et ceux dits locaux ([Hirsinger et Billardon, 1995]).

On parle de couplage global dès que la solution d'une équation d'équilibre vient induire une modification de la solution d'une autre équation d'équilibre. Typiquement, ce cas est celui où l'on cherche la solution d'équilibre d'une structure mécanique soumise à des efforts d'origine électromagnétique.

Le couplage local quant à lui intervient dans la définition des lois de comportement. Le couplage local se définit alors par la relation existant entre, au minimum, deux lois de comportement : la modification d'une variable d'état intervenant sur plusieurs lois à la fois. Ainsi, dans le cas où des phénomènes magnétiques, mécaniques et électriques coexistent, différents couplages électro-magnéto-mécaniques peuvent être mises en évidence par les fonctionnelles suivantes :

$$\mathbf{B} = \mathcal{F}(\mathbf{H}, \mathbb{S}, \mathbf{E}) \quad (1.25) \quad \sigma = \mathcal{F}(\mathbf{H}, \mathbb{S}, \mathbf{E}) \quad (1.26) \quad \mathbf{D} = \mathcal{F}(\mathbf{H}, \mathbb{S}, \mathbf{E}) \quad (1.27)$$

Les phénomènes résultants sont observables au niveau macroscopique, mais proviennent essentiellement d'interactions microscopiques.

#### 1.2.3.1 Couplage global - Efforts d'origine électromagnétique

Différentes formulations permettent de calculer les efforts exercés sur un matériau plongé dans une distribution de champ électromagnétique. Selon les circonstances, elles peuvent conduire à des distributions d'efforts électromagnétiques différentes ([Müller, 1990], [Henrotte et Hameyer, 2004]), cependant les résultantes globales sont identiques. Les formulations basées sur les notions de sources équivalentes, courants fictifs... , ne feront pas l'objet d'un développement dans ce document. Ces formulations constituent des extensions des concepts introduits pour modéliser la polarisation des matériaux magnétiques et diélectriques. Le lecteur pourra toutefois se reporter à [Arzéliès, 1963] et [Barré, 2003] pour une description détaillée de ces formulations.

Nous allons dans la suite, nous attacher principalement à deux formulations : celle dite du Tenseur de Maxwell et celle issue de l'application du principe des travaux virtuels. Nous établirons alors leur expression dans le cadre de l'électrostatique et de la magnétostatique.

#### Le tenseur de Maxwell

Cette formulation permet de calculer les actions électromagnétiques globales, en se basant sur la possibilité d'exprimer certaines densités de force  $\mathbf{f}$  à partir de la divergence d'un tenseur de contrainte.

$$\mathbf{f} = \nabla \cdot \mathbb{T} \quad (1.28)$$

L'intégrale de volume de la densité de force permet alors de remonter à la force globale agissant sur le solide considéré.

$$\mathbf{F} = \int_{\Omega} \mathbf{f} d\Omega = \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbb{T} d\Omega \quad (1.29)$$

Comme nous allons le voir, cette formulation est très pratique car aucune connaissance sur la matière contenue dans le domaine considéré n'est nécessaire. Pour le besoin de l'exposé, nous nous limitons au cas des milieux polarisables. Plus de détails et de compléments sont toutefois disponibles en Annexe A.

Dans les milieux polarisables, la présence de sources de champ supplémentaire (cf. §1.2.2.1 et §1.2.2.2) doit être prise en compte dans la formulation des efforts globaux par la méthode du tenseur de Maxwell. Cette présence de différents milieux dans le domaine considéré implique différentes valeurs de permittivité diélectrique et de perméabilité magnétique. Par conséquent, une densité volumique de force, liée aux gradients de perméabilité magnétique et de permittivité diélectrique, doit être ajoutée aux forces de volume de Lorentz ([Arzeliès, 1963]) :

$$\mathbf{f} = \rho \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B} - \frac{\mathbf{E}^2}{2} \nabla \varepsilon - \frac{\mathbf{H}^2}{2} \nabla \mu \quad (1.30)$$

L'expression du tenseur de Maxwell est alors définie, dans l'approximation quasi-statique, par les relations suivantes (voir Annexe A) :

$$\begin{aligned} \mathbb{T} &= \varepsilon \mathbf{E} \mathbf{E} + \frac{1}{\mu} \mathbf{B} \mathbf{B} - \frac{1}{2} \left( \varepsilon \mathbf{E}^2 + \frac{1}{\mu} \mathbf{B}^2 \right) \mathbb{I} \\ &= \mathbf{D} \mathbf{E} + \mathbf{B} \mathbf{H} - \frac{1}{2} \left( \frac{\mathbf{D}^2}{\varepsilon} + \frac{1}{\mu} \mathbf{B}^2 \right) \mathbb{I} \end{aligned} \quad (1.31)$$

Conformément à (1.29), les actions électromagnétiques globales agissant sur un solide, sont déterminées par l'intégration de la densité de force. L'utilisation du théorème de Green-Ostrogradsky permet alors de passer d'une intégrale de volume à une intégrale de surface, où la surface  $\Sigma$  délimite le domaine  $\Omega$  contenant le solide considéré.

$$\mathbf{F} = \int_{\Omega} \mathbf{f} d\Omega = \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbb{T} d\Omega = \oint_{\Sigma} \mathbb{T} \cdot \mathbf{n} d\Sigma \quad (1.32)$$

Les forces volumiques définies, il est possible de spécifier des densités de forces surfaciques induites par un changement de caractéristiques à l'interface entre deux milieux. La discontinuité des champs aux interfaces des différents milieux (1.8), et donc l'impossibilité d'évaluer les dérivées partielles, nécessite de prendre quelques précautions (voir Annexe A). Les forces surfaciques entre deux milieux  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  dans

le cadre de la magnétostatique et de l'électrostatique (voir Annexe A) sont définies par les relations suivantes :

$$\mathbf{f}_s^e = \left( \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_1} \right) D_n^2 - \frac{1}{2} (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) E_t^2 \right) \cdot \mathbf{n} \quad (1.33)$$

$$\mathbf{f}_s^m = \left( \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\mu_2} - \frac{1}{\mu_1} \right) B_n^2 - \frac{1}{2} (\mu_2 - \mu_1) H_t^2 \right) \cdot \mathbf{n} \quad (1.34)$$

On peut remarquer que si les milieux de part et d'autre de l'interface sont identiques, alors les densités de forces surfaciques sont nulles.

Le tenseur de Maxwell permet de déterminer la force globale s'exerçant sur un solide. Néanmoins, on peut tout de même définir des densités de forces surfaciques entre deux milieux (voir Annexe A).

### Les travaux virtuels

Les forces électromagnétiques globales peuvent être déterminées par l'application du principe des travaux virtuels ([Woodson et Melcher, 1968b]), sans pour cela déduire explicitement une densité volumique d'efforts.

D'après la loi de la conservation de l'énergie, dans un système électromécanique de nature "inductive", la variation de l'énergie électrique due à la variation du flux magnétique  $\delta\phi$  s'équilibre avec le travail des forces magnétiques  $F^m$  sur un déplacement du système, que nous symboliserons par le paramètre  $a$ , et la variation de l'énergie magnétique  $\delta W^m$  emmagasinée :

$$i \delta\phi = \delta W^m + F^m \delta a \quad (1.35)$$

où  $i$  est le courant électrique. Étant donné que l'énergie magnétique est fonction du flux magnétique  $\phi$  et de la géométrie  $a$ , nous avons :

$$\delta W^m = \frac{\partial W^m}{\partial \phi} \delta\phi + \frac{\partial W^m}{\partial a} \delta a \quad (1.36)$$

Par identification avec l'équation (1.35), on déduit que la force magnétique globale exercée sur le système correspond à la dérivation de l'énergie magnétique par rapport au paramètre géométrique, tout en maintenant le flux magnétique constant.

$$F^m = - \left. \frac{\partial W^m(\phi, a)}{\partial a} \right|_{\phi=cst} \quad (1.37)$$

Une analyse duale, basée sur la co-énergie magnétique, conduira à une autre expression de la force magnétique globale :

$$W^m + W_{co}^m = i \phi \quad F^m = \left. \frac{\partial W_{co}^m(i, a)}{\partial a} \right|_{i=cst} \quad (1.38)$$

On notera dans ce cas que c'est le courant  $i$  qui est maintenu constant pendant l'opération de dérivation. La même analyse peut être effectuée pour un système électromécanique de nature "capacitive". La force électrique globale  $F^e$  sera alors obtenue en considérant constant, pendant l'opération de dérivation, soit la charge  $q$  soit le potentiel électrique  $v$  :

$$F^e = - \left. \frac{\partial W^e(q, a)}{\partial a} \right|_{q=cst} \qquad F^e = \left. \frac{\partial W_{co}^e(v, a)}{\partial a} \right|_{v=cst} \qquad (1.39)$$

L'utilisation analytique des relations (1.37)-(1.39) nécessite une expression explicite des énergies ou coénergies en fonction des variables d'état électromagnétique et du paramètre géométrique. Cela n'est possible que pour des systèmes possédant une géométrie simple. Nous verrons, au chapitre 3, comment l'utilisation des méthodes de modélisation numérique permet d'appliquer cette méthode à des géométries complexes.

**Note sur le paramètre géométrique  $a$  :** Le paramètre  $a$  est souvent rapporté à la largeur d'un entrefer, mais ce paramètre peut aussi être utilisé pour représenter n'importe quel changement dans la géométrie d'un système :

- la position des interfaces entre différents milieux (pouvant impliquer une déformation des milieux),
- la position d'un corps rigide relativement à un autre (position angulaire d'un rotor par rapport au stator d'une machine électrique),
- toute déformation de structure.

Plus loin, nous verrons que ce paramètre correspond à une variable distribuée spatialement, associée à la déformation d'une structure plutôt qu'au mouvement d'un seul point. Par conséquent, la force<sup>4</sup> correspondante agit en tout lieu où  $a$  est non nul. La force devient ainsi spatialement distribuée.

### 1.2.3.2 Couplages locaux

Les forces électromagnétiques sont reliées à la géométrie de la structure, et en cela responsable d'un effet de forme sur la déformation totale ([Eringen et Maugin, 1990], [Billardon et Hirsinger, 1995]). À ce couplage global vient s'ajouter un couplage local, intrinsèque aux matériaux magnétiques et diélectriques. Ces phénomènes de couplages locaux ont deux manifestations principales : une déformation induite par l'application d'un champ électromagnétique et l'effet des contraintes sur l'état électromagnétique du matériau.

<sup>4</sup>Électrique ou magnétique définie dans le cadre des travaux virtuels.

### Couplage magnéto-mécanique

Un matériau ferromagnétique est le lieu d'un couplage magnéto-mécanique, qui se manifeste sous deux formes principales :

- **La déformation de magnétostriction**, réponse d'un solide à un changement de son aimantation. Cette déformation induite non-linéaire dite de Joule ([Joule, 1847a], [Joule, 1847b]), ne dépend que de l'état magnétique du matériau ([du Trémolet de Lacheisserie, 1993]). Elle correspond à un couplage local d'état, il est donc possible de lui adjoindre une loi de comportement. La magnétostriction peut avoir une valeur positive ( $\lambda_s > 0$ )<sup>5</sup>, une valeur négative ( $\lambda_s < 0$ ) ou encore changer de signe au cours du processus d'aimantation.
- **L'effet Villari**, effet inverse de la déformation de magnétostriction, correspondant à l'influence des contraintes mécaniques sur l'état magnétique du matériau ([Villari, 1865]). L'état de contraintes induira une dégradation ou une amélioration du comportement magnétique du matériau. Dans tous les cas, l'influence sur le comportement magnétique de l'application d'une contrainte n'est pas symétrique en traction et en compression.

Le mécanisme fondamental responsable du couplage magnéto-mécanique est le couplage spin-orbite associé aux symétries du réseau cristallin ; i.e. le couplage entre les moments magnétiques élémentaires, orbital et de spin, de l'électron et les déformations du réseau cristallin. Il convient alors de distinguer deux types de magnétostriction des matériaux ferromagnétiques. La magnétostriction spontanée et la magnétostriction induite. La première découle de la transition de l'état désordonné à l'état ordonné au passage de la température de Curie  $T_c$ <sup>6</sup>. Une déformation apparaît, s'accompagnant d'une variation de volume (figure 1.2). La seconde correspond à la déformation sous champ magnétique, c'est la déformation de magnétostriction induite (figure 1.2). Lorsque l'on parlera de magnétostriction c'est à cette dernière que l'on fera référence.

On peut noter que la déformation de magnétostriction est également à l'origine d'autres effets : effet  $\Delta E$ , effet Invar et Elinvar, effets Wiedemann, . . . , au sujet desquels le lecteur pourra trouver de plus amples informations dans [Coudерchon, 1994] et [du Trémolet de Lacheisserie, 1999a].

Ces phénomènes de couplage magnéto-mécanique sont fortement non-linéaires. Cependant, et malgré la complexité des mécanismes physiques mis en jeu, les propriétés magnéto-mécaniques des matériaux ferromagnétiques peuvent parfois être formellement décrites à l'aide de formulations linéaires. On parle alors de *piézomagnétisme*. Typiquement, cela consiste à définir le comportement du matériau autour d'un point de fonctionnement, défini par une précontrainte mécanique et/ou une

---

<sup>5</sup> $\lambda_s$  est le coefficient de magnétostriction à saturation.

<sup>6</sup>La température de Curie  $T_c$  est la température au delà de laquelle un corps ferromagnétique perd son magnétisme spontané, le milieu ne possède plus de polarisation magnétique. Au dessus de cette température les matériaux sont dans un état désordonné dit paramagnétique. Ce changement d'état est réversible.

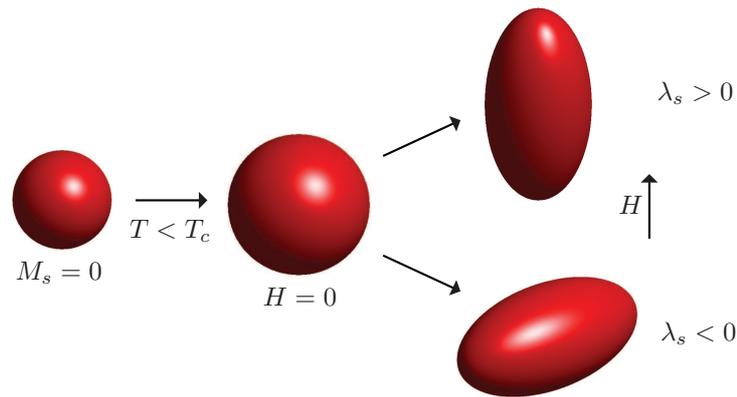


Figure 1.2 – Principaux modes de magnétostriction

polarisation magnétique statique.

### Couplage électro-mécanique

Dans les milieux diélectriques, les phénomènes de couplage électro-mécanique ont deux manifestations principales :

- **Une déformation induite** apparaît en présence d'un champ électrique. Cette déformation non-linéaire, l'*électrostriction*, est intrinsèque au matériau et ne dépend que de son état électrique ([Nogarède, 2005]).
- **L'effet des contraintes** sur le comportement électrique. C'est le phénomène symétrique de la déformation d'électrostriction. La principale manifestation de cet effet correspond à une polarisation électrique du milieu sous l'action d'une contrainte mécanique appliquée.

Ce couplage électro-mécanique se manifeste selon un processus fortement non-linéaire. Cependant, les phénomènes de couplage électro-mécanique les plus utilisés sont connus sous le vocable de *piézoélectricité*. La piézoélectricité correspond à une description linéarisée du couplage électro-mécanique. Le matériau est soumis à un champ électrique statique et à une précontrainte mécanique, permettant d'obtenir un comportement linéaire autour d'un point de fonctionnement. La piézoélectricité est ainsi définie par :

- **L'effet piézoélectrique direct**, qui correspond à la polarisation électrique du matériau sous l'action d'une contrainte mécanique ([Curie et Curie, 1880a], [Curie et Curie, 1880b]),
- **L'effet piézoélectrique inverse**, phénomène symétrique de l'effet direct, défini par la déformation d'un matériau diélectrique en réponse à l'action d'un champ électrique extérieur ([Lippmann, 1881], [Curie et Curie, 1881]).

Ces phénomènes sont observés dans certains cristaux naturels, tel que le Quartz ( $SiO_2$ ), ou dans des céramiques synthétiques comme les céramiques ferroélectriques. L'origine de ces phénomènes résulte essentiellement de l'asymétrie induite des charges du réseau cristallin. En première analyse, cette asymétrie peut être attribuée au déplacement relatif du barycentre des charges positives et négatives, porté par les ions de la maille cristalline (figure 1.3). Ceci suppose que la maille cristalline élémentaire soit dépourvue de centre de symétrie et que le cristal soit non conducteur.

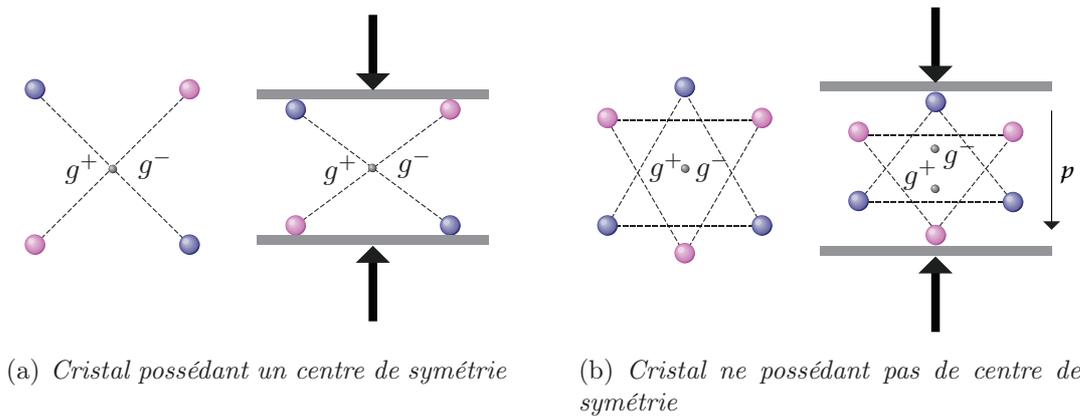


Figure 1.3 – Sollicitation mécanique de structures cristallines

## 1.3 Comportement électro-magnéto-élastique

### 1.3.1 Comportement magnéto-mécanique

En l'absence de champ magnétique extérieur, l'aimantation d'un milieu ferromagnétique s'aligne spontanément suivant des directions dites de facile aimantation. L'existence de ces directions de facile aimantation oriente les structures en domaines ([Cullity, 1972], [Brissonneau, 1997]). D'un domaine à l'autre, seule la direction de l'aimantation change, l'aimantation reste uniforme de norme  $M_s$  caractéristique du matériau (figure 1.4).

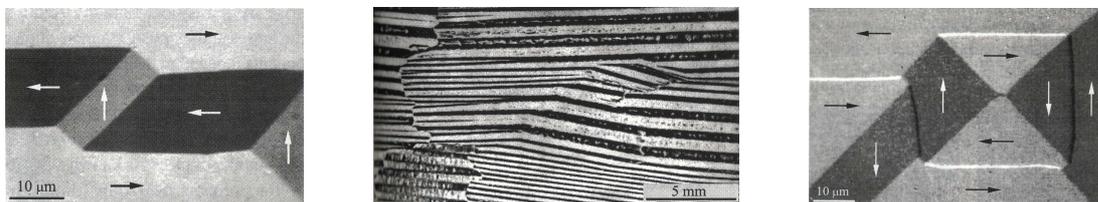
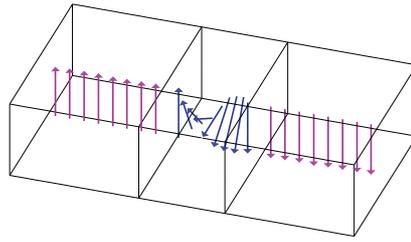


Figure 1.4 – Domaines magnétiques dans des cristaux de fer-silicium d'après [Hubert et Schäfer, 1998]

Les domaines sont séparés par des parois magnétiques, zones de transition où la direction de l'aimantation évolue progressivement sur quelques centaines de mailles cristallines (figure 1.5)<sup>7</sup>.

<sup>7</sup>On parlera de paroi à 180° pour les parois séparant deux domaines dont l'aimantation est parallèle et de parois à 90° pour les autres.

Figure 1.5 – Séparation de domaines par une paroi à  $180^\circ$ 

Sans entrer dans les détails, on peut souligner que l'état d'équilibre magnétique des matériaux ferromagnétiques est lié à la compétition de différentes contributions énergétiques ([Hubert et Schäfer, 1998]). Les états magnétiques et mécaniques de la matière aimantée sont intimement liés.

### 1.3.1.1 Processus d'aimantation

Lorsqu'un champ magnétique est appliqué, les moments magnétiques tendent à s'aligner suivant la direction du champ. Deux mécanismes sont à l'œuvre : le mouvement des parois, c'est à dire le changement de taille des domaines, et la rotation de l'aimantation à l'intérieur des domaines. Pour beaucoup de matériaux<sup>8</sup>, les mouvements de parois se produisent essentiellement pour les champs faibles, tandis que les rotations de l'aimantation dans les domaines apparaissent pour des champs magnétiques plus intenses. Ce réarrangement de l'aimantation s'accompagne d'une modification des dimensions de l'échantillon, c'est la magnétostriction. On peut illustrer les processus d'aimantation par les étapes suivantes (figure 1.6).

Initialement le matériau est supposé être dans un état macroscopique désaimanté. La distribution de l'aimantation dans le matériau est telle que la moyenne volumique de l'aimantation est nulle.

**Étape 1 :** Les domaines favorablement orientés dans la direction du champ magnétique appliqué vont croître en volume aux dépens des domaines moins bien orientés. Le début de la courbe d'aimantation est dominé par des mécanismes de mouvements de parois à  $180^\circ$ , puis par des mouvements de parois à  $90^\circ$  (figure 1.6).

**Étape 2 :** Le coude de la courbe d'aimantation annonce le début de la rotation de l'aimantation dans les domaines.

**Étape 3 :** À l'état saturé, le matériau est théoriquement mono-domaine avec l'aimantation  $\mathbf{M}$  parallèle au champ magnétique  $\mathbf{H}$ .

Ces trois mécanismes se chevauchent dans la pratique. Les déplacements de parois à  $180^\circ$  ne développent pas de magnétostriction, contrairement aux déplacements

<sup>8</sup>Matériaux à anisotropie magnétocristalline élevée.

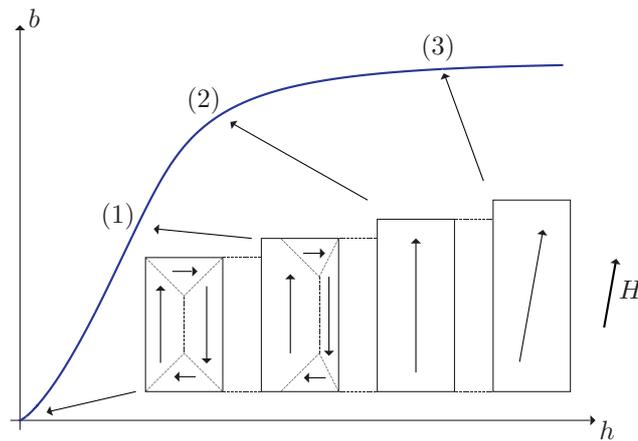


Figure 1.6 – *Illustration du processus d'aimantation d'un monocristal*

de parois à  $90^\circ$  et à la rotation des moments. Le mécanisme d'aimantation s'accompagne d'une dissipation. Les courbes d'aimantation (tout comme les courbes de magnétostriction) se présentent sous la forme d'un cycle d'hystérésis.

### 1.3.1.2 Influence de l'état de contraintes

L'application d'une contrainte peut fortement modifier l'équilibre magnétique. Elle ne permettra pas d'aimanter un matériau ferromagnétique initialement désaimanté, mais elle modifiera fortement la configuration en domaines. Suivant le signe de la contrainte (compression ou traction) et celui de la magnétostriction on favorise une direction de facile aimantation, parallèle ou bien perpendiculaire à la contrainte appliquée (figure 1.7). Ainsi, partant d'une distribution isotrope de moments magnétiques sans champ ni contrainte, une distribution anisotrope des moments découle de la simple application d'une contrainte<sup>9</sup>. Pour un matériau à magnétostriction positive ( $\lambda_s > 0$ ), les moments magnétiques tendent à s'aligner perpendiculairement à la direction d'application d'une contrainte de compression, tandis que pour un matériau à magnétostriction négative ( $\lambda_s < 0$ ), les moments magnétiques tendent à s'aligner parallèlement à la compression. Ainsi, selon la configuration (direction d'application de la contrainte et du champ magnétique) il sera plus ou moins facile d'aimanter le matériau. La contrainte a donc induit une anisotropie magnétique.

Outre son influence sur le comportement magnétique, cet effet peut être mis à profit pour augmenter l'amplitude de la déformation de magnétostriction. Ainsi, l'application d'une contrainte de compression ( $\sigma < 0$ ) sur un matériau à magnétostriction positive ( $\lambda_s > 0$ ) favorise l'établissement de directions d'aimantations perpendiculaires à la direction de la contrainte (figure 1.8). L'application d'un champ magnétique, colinéaire à la direction d'application de la contrainte, va de nouveau modifier la configuration en domaines. Cette réorganisation des domaines est alors essentiellement induite par des mouvements de parois à  $90^\circ$ , afin d'aligner l'aimantation avec la direction du champ magnétique. Comparativement au même matériau non contraint, l'application d'un état de compression permet d'augmenter significa-

---

<sup>9</sup>L'aimantation globale reste nulle car il y a autant de moments selon une direction que dans la direction opposée.

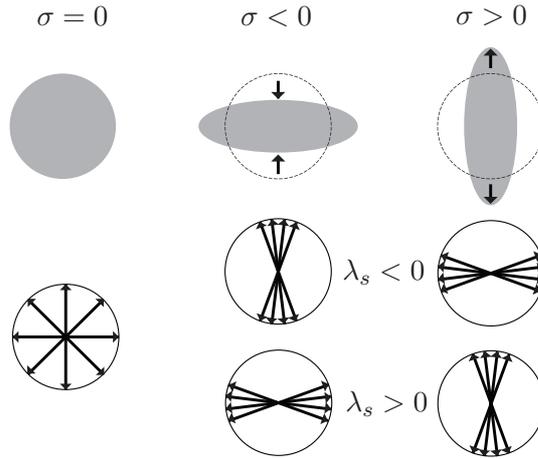


Figure 1.7 – Influence de l'état de contraintes sur l'orientation des moments magnétiques d'une substance ferromagnétique isotrope ([du Trémolet de Lacheisserie, 1999a])

tivement les déformations de magnétostriction ( $\Delta l_2 > \Delta l_1$ ).

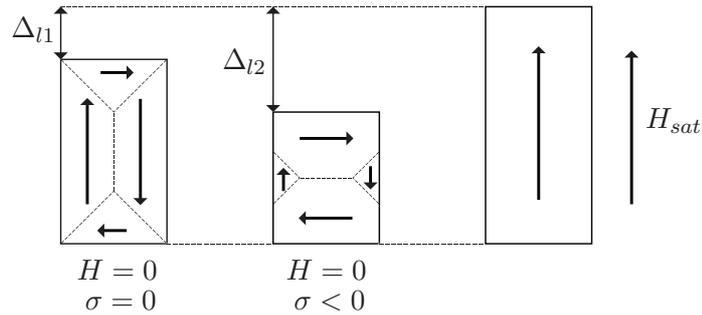


Figure 1.8 – Influence de l'état de contraintes sur la déformation de magnétostriction d'un monocristal ferromagnétique (les déformations élastiques ne sont pas représentées)

Il est à noter qu'il existe un état de contraintes, fonction du matériau, permettant d'atteindre une déformation de magnétostriction maximale.

### 1.3.2 Comportement électro-mécanique

Les phénomènes de couplage électro-mécanique sont présents dans les structures cristallines dont la maille élémentaire ne présente pas de centre de symétrie<sup>10</sup> ([Setter, 2002]). Par la suite, nous nous attachons principalement à décrire le comportement des matériaux ferroélectriques.

<sup>10</sup>Parmi les 21 classes cristallines non-centrosymétriques, 20 sont susceptibles de présenter le phénomène de piézoélectricité.

## 1.3.2.1 Matériaux ferroélectriques

Les matériaux ferroélectriques sont des composés très polarisables non centrosymétriques, dans lesquels existe un champ électrique local très fort, non nul même en l'absence de champ électrique appliqué, dû à une polarisation. Certains matériaux ferroélectriques présentent une structure en domaines, à l'intérieur desquels tous les dipôles électriques sont alignés dans la même direction. Dans chaque domaine la polarisation électrique est donc uniforme de norme  $P_s$ . Comme chaque direction a la même probabilité d'apparaître, la polarisation électrique résultante à travers tout le matériau est nulle. Cependant, si par exemple au cours du processus de fabrication le matériau est refroidi en présence d'un champ électrique, la polarisation tend à s'aligner suivant la direction du champ. Au final, une polarisation électrique macroscopique rémanente résulte de la contribution de chaque domaine ferroélectrique.



Figure 1.9 – Domaines ferroélectriques d'une céramique PZT, d'après [Setter, 2002]

## 1.3.2.2 Processus de polarisation

Lorsqu'un champ électrique est appliqué, les moments dipolaires tendent à s'aligner selon la direction du champ afin de minimiser l'énergie électrostatique. L'application du champ électrique  $\mathbf{E}$  conduit à une réorganisation de la structure en domaine, qui s'accompagne d'une modification des dimensions du matériau. Ce processus de polarisation peut alors être illustré par les étapes suivantes (figure 1.10).

**Étape 1 :** Initialement, le matériau est polarisé de telle façon que la polarisation soit négative (1). L'application d'un champ électrique, de direction opposée à la direction de polarisation du matériau, tend à favoriser les domaines ferroélectriques dont l'orientation de la polarisation électrique est voisine de celle du champ appliqué. La polarisation du matériau tend à diminuer et une déformation de celui-ci apparaît (2). Pour une certaine valeur de champ électrique, le champ coercitif  $E_c$ , la déformation atteint un minimum local.

**Étape 2 :** L'augmentation continue de l'intensité du champ électrique induit un changement de signe de la polarisation électrique. Les domaines favorablement orientés dans la direction du champ électrique appliqué, vont croître en volume aux dépens de ceux moins bien orientés. Une déformation provoquée par les mouvements de parois accompagne la polarisation du matériau. Quand les directions de la polarisation et du champ électrique coïncident, le matériau est dit saturé et la déformation atteint son maximum (3) (pour cette direction

du champ électrique appliqué).

**Étape 3 :** L'annulation du champ électrique induit une diminution monotone de la polarisation et de la déformation associée. Aucun renversement de polarisation n'a alors lieu. La situation à champ électrique nul (4) est similaire au point initial (1) exceptée l'inversion de la polarisation électrique.

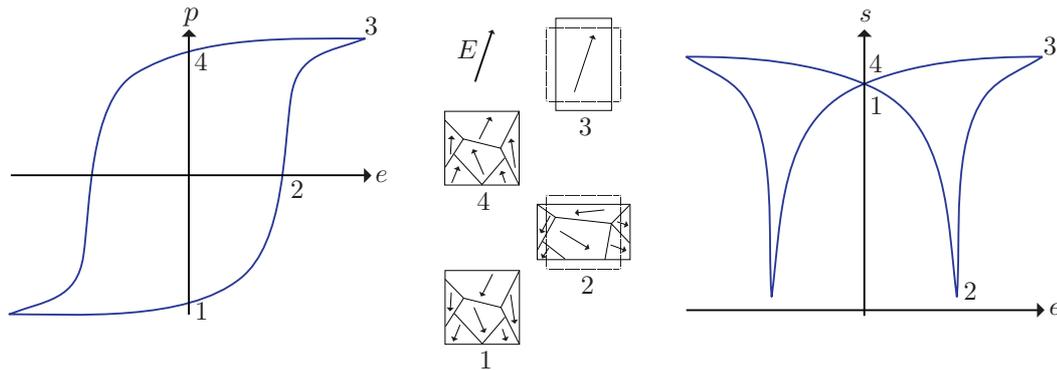


Figure 1.10 – Illustration du processus de polarisation d'un matériau ferroélectrique

L'évolution de la polarisation en fonction du champ électrique apparaît sous la forme d'un cycle d'hystérésis.

### 1.3.2.3 Influence de l'état de contraintes

L'application d'une contrainte peut modifier fortement le comportement des matériaux ferroélectriques ([Lynch, 1996]). Une contrainte de compression, de direction opposée à la direction de polarisation, induit une réorganisation de la structure en domaines. Pour de faibles valeurs de contrainte la réponse est élastique (linéaire et réversible). Pour des valeurs plus importantes, la polarisation tourne. Cela introduit une déformation rémanente qui subsiste quand la contrainte s'annule. Si le matériau est initialement polarisé, il est possible d'observer une déformation rémanente mais également une baisse de la polarisation rémanente (figure 1.11). Ce phénomène est celui de la dépolarisation mécanique.

## 1.4 Matériaux actifs du génie électrique

Les matériaux actifs sont des matériaux qui possèdent la capacité de réaliser une conversion d'énergie. Dans le domaine du génie électrique, deux types de matériaux se détachent : les matériaux magnétostrictifs et les matériaux piézoélectriques.

### 1.4.1 Matériaux magnétostrictifs

Les phénomènes de couplage magnéto-élastique sont présents au sein de tous les matériaux ferromagnétiques. Plus ou moins prononcés, ces phénomènes concernent les métaux purs tels que le Fer (Fe), le Nickel (Ni) et le Cobalt (Co) ainsi que

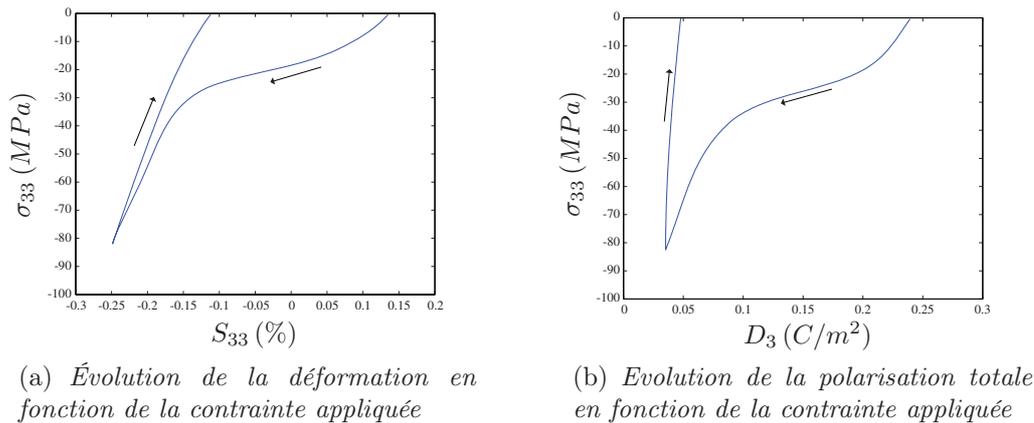


Figure 1.11 – Compression d'une céramique ferroélectrique initialement polarisée, d'après [Lynch, 1996]

leurs alliages. Pour ces métaux, la déformation de magnétostriction reste en général inférieure à  $10^{-4}$ .

### Les matériaux à magnétostriction géante

Durant les années 1960, l'équipe russe de K.P. Belov ([Belov et al., 1965]) découvrit l'existence, au sein de certains métaux, de déformations de magnétostriction supérieures de deux ordres de grandeurs à celle des métaux de transition (Fe, Ni, Co). Ces métaux, appartenant à la famille des terres rares (Terbium, Dysprosium, Gadolinium . . .), présentent ce comportement sous température cryogénique, en raison des très basses températures de Curie des terres rares, et nécessitent l'utilisation de champs magnétiques importants. En conséquence, il est techniquement très difficile d'exploiter ces propriétés magnétostrictives.

Cette découverte relança la recherche, durant les années 1970, de matériaux à forte déformation de magnétostriction à température ambiante. L'équipe de A. E. Clark du Naval Ordnance Laboratory, aujourd'hui NSWC, étudia des alliages à base de métaux de transition et de terres rares ([Clark, 1980]), de composition typique  $RFe_2$  où R est une terre rare (figure 1.12). Les alliages  $SmFe_2$  et  $TbFe_2$  offrent les plus importantes déformations de magnétostriction, respectivement négative et positive, à température ambiante. Cependant, leur forte anisotropie magnéto-cristalline nécessite des champs magnétiques importants pour l'obtention de déformations élevées. La réalisation d'alliages ternaires combinant un élément de transition à deux terres rares, de magnétostriction de signe identique mais de constantes d'anisotropie de signes opposées, aboutit à des déformations de magnétostriction dites *géantes* sous champ magnétique modéré et à température ambiante.

Le Terfenol-D (Terbium Fer Naval Ordnance Laboratory - Dysprosium) ([Abundi et Clark, 1977]) de composition typique<sup>11</sup>  $Tb_{1-x}Dy_xFe_y$ , est le matériau à magnétostriction géante le plus communément utilisé. Il présente à ce jour le meilleur compromis, à température ambiante, entre de larges déformations et des champs magnétiques faibles. Le Terfenol-D a une structure cristalline cubique où les axes

<sup>11</sup> Avec  $0,7 \leq x \leq 0,73$  et  $1,9 \leq y \leq 2$ .

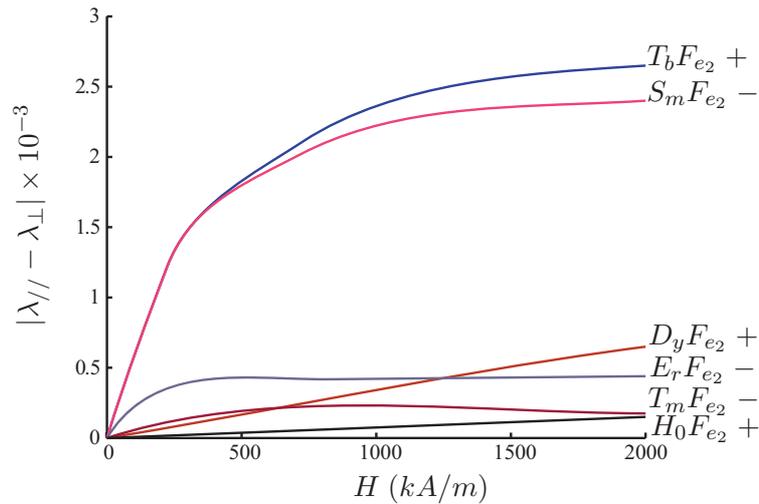


Figure 1.12 – Magnétostriction à température ambiante,  $\lambda_{||} - \lambda_{\perp}$ , pour des polycristaux  $RFe_2$  (+ - : signe de la magnétostriction) d'après [Engdahl, 2000]

$\langle 111 \rangle$  sont les directions de facile aimantation ([Clark et Teter, 1988]).

Disponible sous différentes formes (couches minces [Quandt et al., 1994], poudres composites [Sandlund et al., 1994] ...) les barreaux cylindriques sont les plus couramment employés dans la conception d'applications ([Engdahl, 2000]).

Le Terfenol-D est un alliage fragile. Sa résistance à la compression est assez élevée, de l'ordre de 700 MPa, mais sa résistance à la traction est faible, de l'ordre de 25 MPa. Cette fragilité à la traction implique que, sous sa forme massive, le Terfenol-D doit toujours travailler sous contraintes de compression.

Ces dernières années, un nouveau composé à base de Gallium (Ga) fait l'objet de beaucoup d'études ([Clark et al., 2000]). Le Galfenol (Gallium Fer Naval Ordnance Laboratory), de composition typique  $Fe_{1-x}Ga_x$ <sup>12</sup>, possède une déformation de magnétostriction relativement élevée, quoique cinq fois moindre que celle du Terfenol-D, sous champ magnétique faible. Il possède une induction magnétique à saturation équivalente à celle du Fer-Silicium, présente très peu d'hystérésis et une température de Curie élevée. Mécaniquement il possède une haute résistance à la traction (500 MPa), une bonne ductilité et une bonne usinabilité.

#### 1.4.1.1 Applications

Les applications des matériaux à magnétostriction géante peuvent être classées en deux catégories principales :

**Les actionneurs** où la conversion magnétique-mécanique est exploitée. On peut distinguer les moteurs magnétostrictifs linéaires tels que ceux conçus par Kiesewetter [Kiesewetter, 1988]. Basé sur le principe du *Inch-Worm*<sup>13</sup>, il est constitué d'un tube cylindrique formant un stator à l'intérieur duquel est bridé un

<sup>12</sup>Avec  $0.15 \leq x \leq 0.28$ .

<sup>13</sup>Mouvement rappelant le déplacement d'un ver ou d'une chenille et à l'origine de nombreux dispositifs.

	$\lambda_s(10^{-6})$	$T_c$ (K)	$B_{sat}$ (T)
Fer ( <i>Fe</i> )	-9	1043	2.16
Nickel ( <i>Ni</i> )	-36	631	0.63
Cobalt ( <i>Co</i> )	-62	1403	1.72
Permalloy 45 ( <i>FeNi</i> <sub>0.45</sub> )	+27	713	1.6
Permendur 49 ( <i>Fe</i> <sub>0.49</sub> <i>Co</i> <sub>0.49</sub> <i>V</i> <sub>0.02</sub> )	+70	1253	2.34
<i>TbFe</i> <sub>2</sub>	+1750	698	1.1
Terfenol-D ( <i>Tb</i> <sub>0.3</sub> <i>Dy</i> <sub>0.7</sub> <i>Fe</i> <sub>2</sub> )	+1500	653	1
Galfenol ( <i>Fe</i> <sub>0.81</sub> <i>Ga</i> <sub>0.18</sub> )	+350	948	1,61

Tableau 1.1 – Magnétostriction à saturation  $\lambda_s$ , température de Curie  $T_c$  et induction magnétique à saturation  $B_{sat}$  de quelques matériaux polycristallins d'après [du Trémolet de Lacheisserie, 1999b], [Kellog et al., 2003], [Kedous-Lebouc, 2006].

barreau cylindrique de Terfenol-D. Des mouvements de va-et-vient sont effectués en alimentant séquentiellement une série de bobinages indépendants disposés le long du stator. La section du Terfenol-D diminue et le matériau se trouve désolidarisé du tube. En alimentant successivement les bobinages, cette zone contractée se propage le long du barreau qui se déplace tout entier dans le tube (figure 1.13(a)). Ce type d'actionneur est recherché pour le positionnement précis d'objet.

Des moteurs magnétostrictifs à mouvements rotatifs ont aussi été mis au point ([Vranish et al., 1991]). Pour ces moteurs également basés sur la technique du *Inch-Worm*, des couples importants à faibles vitesses, ainsi que des couples élevés à l'arrêt, sont disponibles. Ces moteurs utilisent les mouvements combinés de plusieurs barreaux magnétostrictifs afin de mettre en rotation un arbre, via l'actionnement de pièces d'entraînement (figure 1.13(b)). Le prototype mis au point par Vranish, d'un volume de  $26 \times 11,5 \times 10,8 \text{ cm}^3$  est capable de développer un couple de 12,2 N.m à une vitesse de 0,5 tr/mn, et dispose d'une précision angulaire de  $800 \mu\text{rad}$ .

Enfin, une application potentiellement importante des actionneurs magnétostrictifs concerne le contrôle actif du bruit et des vibrations ([Gros, 1999], [Zhang et al., 2004]).

**Les capteurs** où la conversion mécanique-magnétique est mise à profit. De nombreux capteurs de position, de forces et de couples, ainsi que de pression ([Hartemann, 1999], [Pasquale, 2003]) ont été étudiés et certains ont fait l'objet d'une commercialisation. Les variations des propriétés magnétiques induites par une contrainte sont mises à profit, en mesurant la tension induite dans une bobine de mesure de flux liée à l'échantillon magnétostrictif. Il est à noter que la réalisation de capteurs magnétostrictifs ne nécessite pas de matériaux à magnétostriction géante, mais plutôt des matériaux capables de transformer l'énergie élastique en énergie magnétique avec un rendement tendant vers l'unité.

Enfin, l'une des applications les plus importantes du Terfenol-D est le sonar ; application ayant fait l'objet d'importantes recherches, et l'une des plus développées.

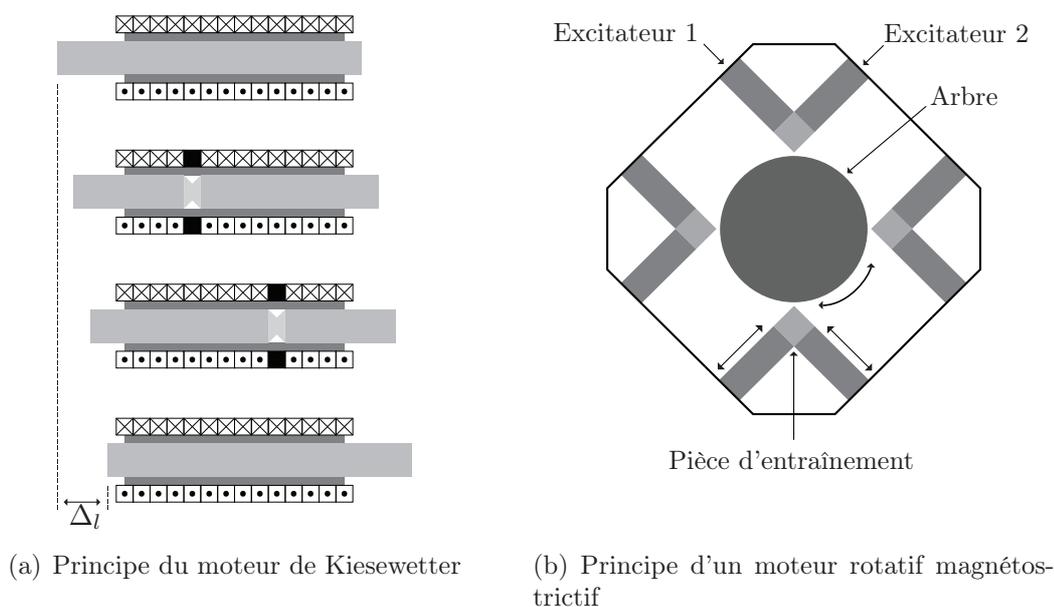


Figure 1.13 – Illustration de moteurs magnétostrictifs linéaire et rotatif

Différentes configurations ont été définies. Toutes associent le mouvement unidirectionnel d'un barreau de Terfenol-D, soit à celui d'un piston pour générer une onde longitudinale (configuration *Tonpilz* [Meeks et Timme, 1977]), soit à la déformation d'une coque pour produire des ondes radiales ([Engdahl, 2000]). D'autres dispositifs à base de matériaux à magnétostriction géante font l'objet de développement pour répondre aux besoins spécifiques de certaines applications de l'aérospatiale (amplification de déplacement, micro-pompes ...) ([Claeyssen et Lhermet, 2002], [Lundgren et al., 1993]).

Les applications grand public sont peu nombreuses. On peut néanmoins citer le Soundbug<sup>14</sup>, dispositif à base de Terfenol-D qui permet de transformer toute surface solide en haut parleur. La surface amplifie les vibrations, produites par le vibreur collé à l'aide d'une ventouse, et les transmet à l'air ambiant générant ainsi du son.

## 1.4.2 Matériaux piézoélectriques

Au même titre que les effets magnétostrictifs, les effets piézoélectriques peuvent être vus comme des transferts entre l'énergie électrique et l'énergie mécanique. De tels transferts ont lieu seulement si le milieu peut être polarisé. Les matériaux piézoélectriques peuvent être classés en deux familles principales : les polymères et les céramiques (mono-cristallines et poly-cristallines).

Les monocristaux classiques, tel que le quartz ( $SiO_2$ ), sont relativement peu performants. Ils présentent une permittivité relative  $\epsilon_r$  ainsi que des constantes piézoélectriques peu élevées. Cependant, la découverte dans les années 1990 de monocristaux aux propriétés piézoélectriques élevées, notamment les *PMN – PT* et

<sup>14</sup><http://www.etrema-usa.com/products/audio/soundbug.cfm>

	Polymère	Monocristaux			Polycristaux	
	PVDF	Quartz	$LiNbO_3$	PMN-PT	PZT douce	PZT dure
$\varepsilon_r$	12	4,5	29		4800	1150
$T_c$ (K)	453	846	1483	<453	458	590
$d_{33}$ (pc/N)	2500	2	6	20	640	240
$k_{33}$ %	14	10	23	>90	72	65

Tableau 1.2 – Caractéristiques principales de quelques matériaux piézoélectriques.  $\varepsilon_r$  permittivité diélectrique relative,  $T_c$  température de Curie,  $d_{33}$  constante de charge (proportionnalité entre la charge et la contrainte à champ nul ou constant) et  $k_{33}$  coefficient de couplage électromécanique (aptitude à transformer l'énergie électrique en énergie mécanique selon la direction de polarisation) ([Setter, 2002]).

les *PZN – PT*, a créé un regain d'intérêt pour ces matériaux ([Cheng et al., 2000]). Ces matériaux restent cependant difficiles et coûteux à fabriquer.

En 1969, l'effet piézoélectrique a été mis en évidence sur des films de polymères, de type polyfluorure de vinilydène (*PVDF*), étirés sous fort champ électrique.

### Les céramiques PZT

Les matériaux de la famille des céramiques présentent actuellement les meilleures propriétés piézoélectriques. Il en résulte une utilisation intensive de ces matériaux. Cette famille comporte de nombreux composés, on peut citer les Titanates de Barium ( $BaTiO_3$ ) ancêtres des céramiques actuelles, découverts dans les années 1940, ou encore les Titanates de Plomb ( $PbTiO_3$ ). Les excellentes propriétés piézoélectriques de ces matériaux proviennent de leur cristallisation en structure Pérovskite.

En pratique, on n'utilise jamais le Zircono-Titanate de Plomb pur. Les compositions de ( $PbZr_{1-x}Ti_xO_3$ ) sont souvent modifiées par l'adjonction d'un ou de plusieurs ions de différente valence, on parle alors de *dopage*. Suivant le type de *dopage*, deux grandes familles de céramiques se distinguent ([Setter, 2002]) :

**Les céramiques dures**, issues du dopage par des ions accepteurs, typiquement  $F_e^{3+}$ ,  $N_a^+$ ... elles se caractérisent par de faibles pertes mécaniques et diélectriques, ainsi que par de faibles permittivités électriques et coefficients piézoélectriques. La difficulté à les polariser et dépolariser en fait des candidates idéales pour des applications sous environnement difficile.

**Les céramiques douces**, issues d'un dopage par des ions donneurs, par exemple  $N_b^{5+}$ ,  $L_a^{3+}$ ... cette famille se caractérise par des coefficients de couplage électromécanique et des permittivités électriques élevés. Elles se distinguent aussi par des pertes plus importantes, et une polarisation et une dépolarisation plus facile.

Suivant le type d'application, l'une ou l'autre des familles sera privilégiée. Typiquement, les céramiques *dures* sont utilisées pour des applications de puissance exigeant de faibles pertes énergétiques, les céramiques *douces* sont employées pour des applications à bas niveau d'excitation ou nécessitant de larges bandes de réponse en fréquence.

Effet piézoélectrique direct	Générateur haute tension	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Allume-gaz</li> <li>• Allumage des explosifs</li> <li>• Jauge de Contrainte</li> <li>• Mesure de pressions</li> <li>• Microphones de téléphone</li> </ul>
	Capteurs	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Contrôle non destructif</li> <li>• Filtres électromécaniques</li> <li>• Sonars</li> <li>• Transformateurs piézoélectriques</li> </ul>
Effet piézoélectrique inverse	Transducteur	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Actionneur de soupapes</li> <li>• Dispositifs de positionnement</li> <li>• Moteurs piézoélectriques</li> <li>• Résonateurs</li> <li>• Tête d'impression d'imprimantes</li> </ul>
	Actionneurs	

Tableau 1.3 – Exemples d'application des matériaux piézoélectriques.

#### 1.4.2.1 Applications

Depuis leur découverte, le nombre d'applications utilisant les matériaux piézoélectriques est en continuelle augmentation. Ces applications, de la plus anodine à la plus aboutie, peuvent être classées en trois catégories principales, selon qu'il s'agisse de l'effet piézoélectrique direct et/ou inverse qui est mis en jeu. Le tableau 1.3 donne un aperçu non exhaustif des applications concernées.

Tout comme les matériaux à magnétostriction géante, les matériaux piézoélectriques font l'objet d'applications spécifiques pour répondre aux besoins de l'aérospatiale, notamment le contrôle actif de vibrations et/ou de bruit des fuselages et des ailes d'avions.

#### 1.4.3 Comparaison matériaux magnétostrictifs/piézoélectriques

Les matériaux piézoélectriques sont à ce jour les matériaux actifs les plus couramment utilisés. Ceci est particulièrement justifié par une plus grande maturité technologique, une meilleure disponibilité et à un coût réduit. Les matériaux piézoélectriques, et plus particulièrement les céramiques multicouches, ont pour principal avantage de fournir des déformations importantes variant linéairement avec le champ appliqué, et ce sur une bande passante importante. Cependant, les matériaux à magnétostriction géante, et en l'occurrence le Terfenol-D, semblent présenter des performances plus intéressantes que les céramiques piézoélectriques dans certaines conditions. À cause de la faible valeur de sa rigidité et à sa capacité à travailler sous de larges précontraintes, la déformation dynamique à la résonance du Terfenol-D ( $2.10^{-3}$  en quasi-statique et le double en résonance) est supérieure à celle des céramiques piézoélectriques. Cette particularité du Terfenol-D est un avantage pour produire des résonateurs basse fréquence de taille réduite dans le sens longitudinal. De plus, une forte densité d'énergie est fournie au sein du matériau actif et il re-

	Matériaux piézoélectriques	Matériaux magnétostrictifs
Mécanique	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Déformations : 0,1 – 0,6 %</li> <li>• Forces : 500 – 30000 <i>N</i></li> <li>• Bande passante : 0 – <i>GHz</i></li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Déformations : 0,1 – 0,6 %</li> <li>• Forces : 500 – 5000 <i>N</i></li> <li>• Bande passante : 0 – 50 <i>kHz</i></li> </ul>
Thermique	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Température de Curie : <math>\approx 300^{\circ}C</math></li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Température de Curie : <math>\approx 400^{\circ}C</math></li> </ul>
Énergétique	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Densités d'énergie : <math>\approx 1 \text{ kJ}/m^3</math></li> <li>• Consommations : Très faible</li> <li>• Commande : Champ électrique 1 – 2 <i>kV</i> multicouches <math>\approx 200 \text{ V}</math></li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Densités d'énergie : <math>\approx 200 \text{ kJ}/m^3</math></li> <li>• Consommations : Faible</li> <li>• Commande : Champ magnétique <math>\approx 200 \text{ kA}/m</math></li> </ul>
Comportement	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Très bonne linéarité (piézoélectricité)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Fortement non linéaire</li> </ul>

Tableau 1.4 – Comparaison céramiques PZT / matériaux à magnétostriction géante, d'après [du Trémolet de Lacheisserie, 1999b] et [Setter, 2002].

quiert des tensions faibles (la commande se faisant en courant) (tableau 1.4). La principale limitation du Terfenol-D, sous forme massive, incombe aux courants de Foucault limitent la bande passante à quelques dizaines de kiloHertz. L'emploi de lames minces peut permettre de dépasser cette limitation, mais augmentera sensiblement les coûts induits par l'usinage et les pertes de matériaux. La mise en œuvre de dispositifs magnétostrictifs présente trois principaux inconvénients, comparative-ment aux dispositifs piézoélectriques :

- l'utilisation d'aimant de polarisation, de bobinages d'excitations et de circuits magnétiques (pour refermer les lignes de champ magnétique), implique des dispositifs plus lourds et moins compacts, ce qui induit une réduction de la bande passante du système,
- le maintien d'une déformation en quasi-statique implique la consommation d'énergie par l'actionneur, induite par la circulation d'un courant non nul dans les enroulements,
- un échauffement par effet Joule est provoqué par les courants que nécessite l'alimentation des bobinages.

### Vers une association d'éléments actifs...

Les applications conventionnelles à base de matériaux actifs, emploient un unique élément actif pour réaliser les fonctions de capteur ou d'actionneur. Or, les propriétés des matériaux piézoélectriques et magnétostrictifs font que ceux-ci peuvent être considérés de façon complémentaire. La conception de systèmes hybrides piézoélectrique-magnétostrictif présente des avantages uniques, inaccessible avec un seul élément actif. Les propriétés de ces matériaux étant utilisées pour ajouter des fonctionnalités ou augmenter les performances d'un système ([Downey, 2003]).

Les recherches antérieures concernant la conception de systèmes hybrides se sont orientées principalement selon deux axes : l'amélioration de l'efficacité énergétique et celle de la bande passante. Le gain énergétique provient du fait qu'une réponse mécanique peut être obtenue en consommant moins d'énergie électrique, si l'énergie disponible est partagée entre différents éléments actifs avec des propriétés électriques complémentaires ([Janocha et Clephas, 1996]) (un matériau piézoélectrique est principalement capacitif tandis qu'un matériau magnétostrictif est principalement inductif). Le second point, a fait l'objet du développement de la bande passante de sonars ([Butler et Tito, 2000]), avec la mise au point de dispositif à double résonance. La fréquence de résonance haute est contrôlée par l'actionneur piézoélectrique tandis que l'actionneur magnétostrictif contrôle la fréquence de résonance basse. De telles structures permettent alors la création d'ondes de pression dans une gamme de fréquences plus basse que les dispositifs conventionnels.

Dernièrement, la conception de composites stratifiés piézoélectrique/magnétostrictifs a mis en évidence des effets magnéto-électriques géants ([Dong et al., 2003a]). Ces effets correspondent à une polarisation électrique ( $\mathbf{P}$ ) en réponse à l'application d'un champ magnétique ( $\mathbf{H}$ ), et inversement, à une aimantation ( $\mathbf{M}$ ) en réponse à l'application d'un champ électrique ( $\mathbf{E}$ ). Selon les configurations retenues, portant sur le choix des directions de polarisation des couches magnétostrictives et piézoélectriques, l'effet magnéto-électrique obtenu est plus ou moins marqué.

Les matériaux actifs ont un potentiel élevé en terme d'applications. Nous nous restreignons pour cette étude aux couplages électro-mécanique et magnéto-mécanique, mais d'autres types de couplages existent (tableau 1.5) et ceux-ci peuvent être prépondérants au sein de certains matériaux (alliage à mémoire de forme, fluides électromagnéto-rhéologique...).

De nombreux outils de modélisation numérique prennent en compte le comportement électro-mécanique (piézoélectricité), et permettent une conception efficace des dispositifs. Il n'en est pas de même du comportement magnéto-mécanique où les fortes non-linéarités doivent être prises en compte (bien que l'on puisse noter l'existence de codes de calculs reposant sur le piézomagnétisme).

Notre objectif est de disposer d'outils de modélisation numérique, basées sur la méthode des éléments finis, pour la modélisation de structures utilisant des matériaux actifs. Ces outils nécessite des lois pour décrire le comportement des matériaux. L'approche macroscopique permet une définition de ces lois directement intégrable dans les codes de calculs. Cependant, elle nécessite de s'appuyer sur des données expérimentales pour leur établissement. Le chapitre suivant aborde ce problème de la caractérisation pour le cas des matériaux magnétostrictifs.

Sortie Entrée	Déformation	Courant électrique	Champ magnétique	Température
Contrainte	Élasticité Compliance	Effet des contraintes	Effet des contraintes	
Champ électrique	Électrostriction	Permittivité Conductivité	Effet électro-magnétique	Effet électro-calorique
Induction	Magnétostriction	Effet magnéto-électrique	Perméabilité Reluctivité	Effet magnéto-calorique
Chaleur	Dilatation thermique	Pyroélectricité	Effet magnéto-calorique	Chaleur spécifique

Tableau 1.5 – Rappels de quelques effets de couplages associés aux matériaux (Non-grisé : terme de couplage → matériaux actifs).

# Chapitre 2

## Caractérisation du comportement magnéto-mécanique

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Principe et état de l'art de la caractérisation magnéto-mécanique . . . . .</b>	<b>35</b>
2.1.1	Critères d'analyse . . . . .	36
2.1.2	Bancs expérimentaux de référence . . . . .	37
2.1.3	Conclusion . . . . .	42
<b>2.2</b>	<b>Banc de mesure magnéto-mécanique réalisé au LGEP . . . . .</b>	<b>42</b>
2.2.1	Objectifs . . . . .	42
2.2.2	Partie mécanique . . . . .	43
2.2.3	Partie magnétique . . . . .	44
2.2.4	Dimensionnement . . . . .	44
<b>2.3</b>	<b>Procédure expérimentale . . . . .</b>	<b>53</b>
2.3.1	Principe . . . . .	53
2.3.2	Mesures mécaniques . . . . .	53
2.3.3	Mesures magnétiques . . . . .	55
2.3.4	Pilotage et acquisition . . . . .	56
<b>2.4</b>	<b>Résultats de mesure . . . . .</b>	<b>57</b>
2.4.1	Comportement mécanique . . . . .	57
2.4.2	Comportement magnétique . . . . .	59
2.4.3	Comportement magnéto-mécanique . . . . .	60
<b>2.5</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>68</b>

---



UNE MODÉLISATION fine de dispositifs à base de matériaux actifs nécessite la connaissance des relations de comportement du matériau actif considéré. Or, en l'état actuel, les caractéristiques relatives aux matériaux magnétostrictifs sont soit indisponibles soit entachées d'incertitude.

Le couplage magnéto-mécanique est un phénomène local difficile à mesurer<sup>1</sup>. L'obtention de données repose sur un nombre limité de méthodes. Ces méthodes de mesure se répartissent en deux grandes familles, les méthodes de résonance et les méthodes statiques. Bien sur, elles ne suffisent pas à obtenir une image complète des matériaux considérés, mais permettent de décrire en partie leur comportement. Les méthodes de résonance se limitent à l'obtention de paramètres spécifiques au matériau (la déformation de magnétostriction à saturation par exemple). Les méthodes statiques donnent une description du comportement du matériau, par l'acquisition de caractéristique liant les grandeurs magnétiques et mécaniques. La suite de notre étude nécessite la description du comportement magnéto-mécanique de matériaux magnétostrictifs. Nous limiterons donc notre étude à l'utilisation des méthodes statiques pour la suite de notre étude. Le lecteur pourra toutefois se reporter à [Greenough et Wharton, 1997], [du Trémolet de Lacheisserie, 1999b] et [Fiorillo, 2004] pour plus de détail sur les méthodes de caractérisation.

Une étude bibliographique montre que plusieurs équipes dans le monde se sont intéressées à la définition du couplage magnéto-mécanique. Ces études se sont principalement consacrées à l'étude du comportement de tôles ferromagnétiques faiblement magnétostrictives (*FeSi*, *FeCo*,...), et portent essentiellement sur une caractérisation sous sollicitations uniaxiales ([Moses, 1981], [Gourdin et al., 1998], [Belahcen, 2004]). Les études multiaxiales ([Schneider et Richardson, 1982], [Pearson et al., 2000], [Maurel, 2002]) concernent principalement la prise en compte d'un état de contraintes multiaxiales sur le comportement magnétique. Cependant, à notre connaissance les dispositifs de mesure dédiés à l'étude des matériaux actifs sont rarement détaillés. Ce qui rend parfois délicate la comparaison des résultats et leur extrapolation à des situations différentes de leur domaine d'application initial.

Ces constatations nous ont convaincus du besoin de développer notre propre dispositif expérimental, avec pour objectif d'être en mesure d'explorer un domaine de sollicitation magnéto-mécanique aussi large que possible, et permettant la caractérisation de différents matériaux actifs.

## 2.1 Principe et état de l'art de la caractérisation magnéto-mécanique

Une des principales difficultés rencontrée dans cette démarche expérimentale est de pouvoir créer des sollicitations, magnétique et mécanique, homogènes dans un volume de matériau donné. Par ailleurs, ce volume doit être d'une taille suffisante pour être accessible à la mesure. La mesure des différentes grandeurs physiques impose l'existence d'une zone où les états homogènes magnétique et mécanique coïncident,

---

<sup>1</sup>On peut noter que malgré l'existence de standards relatifs aux procédures de caractérisation, tant d'un point de vue magnétique ([60404-3, 1992]) que d'un point de vue mécanique ([6892, 1998]), il n'en existe à ce jour aucun relatif à la définition du comportement couplé magnéto-mécanique.

ou se chevauchent. On doit connaître le tenseur des contraintes  $\sigma$  et des déformations  $\mathbb{S}$  dans la zone excitée magnétiquement ainsi que les valeurs prises par les champs d'excitation magnétique  $H$  et d'induction magnétique  $B$ .

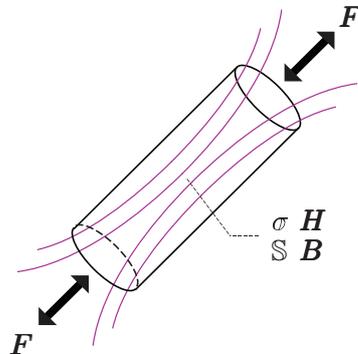


Figure 2.1 – *Principe de la caractérisation magnéto-mécanique uniaxiale : des efforts uniaxiaux, un flux magnétique et des grandeurs homogènes et mesurables*

L'accès à ces données est limité par les dimensions des capteurs disponibles. Au cours de la phase de conception de l'essai, on cherchera donc à obtenir la zone homogène en contrainte et en champ magnétique la plus étendue possible dans l'éprouvette.

Nous allons analyser les différentes expériences présentées dans la littérature, principalement celles liées à la modélisation des comportements magnéto-élastique des matériaux fortement magnétostrictif, pour souligner les difficultés de la mise en place de telles expériences et en montrer les limitations.

### 2.1.1 Critères d'analyse

Pour pouvoir établir une discrimination des différents bancs de mesure décrit dans la littérature, et ainsi situer par la suite notre dispositif, nous avons établi des critères d'homogénéité relatifs aux grandeurs magnétiques et mécaniques.

#### 2.1.1.1 Critères mécaniques

Trois critères principaux ont été retenus pour la réalisation des états de contraintes mécaniques :

- **C1** : Il existe une distribution de contraintes et de déformations homogènes dans la zone centrale de l'éprouvette,
- **C2** : Le niveau de contrainte maximal se situe dans la zone centrale de l'éprouvette. Ceci interdit toute concentration de contrainte en dehors de la zone d'essai,
- **C3** : La stabilité de l'état de contraintes est assurée lors des sollicitations magnétiques.

Le point **C1** est important pour pouvoir estimer contrainte et déformation dans une zone de dimensions suffisantes. La présente étude ainsi que les expériences de référence se limitent à l'analyse du couplage magnéto-mécanique uniaxial dans le domaine d'élasticité. Le critère **C2** sera a priori vérifié, les seules zones susceptibles d'une concentration de contrainte se limitant aux zones de contact aux extrémités de l'échantillon. Le point **C3** est un point important. Lorsqu'un échantillon est sollicité magnétiquement, tout en étant à la fois sous sollicitation mécanique, il développe un effort. Il est donc nécessaire de corriger la variation d'effort, ce qui demande une certaine réactivité du contrôle de l'effort appliqué.

### 2.1.1.2 Critères magnétiques

Pour l'homogénéité du champ magnétique, nous utiliserons les critères suivants :

- **C4** : Il existe une distribution de champ d'excitation et d'induction magnétique homogènes mesurables dans une zone de dimensions suffisantes,
- **C5** : La zone de mesure magnétique homogène coïncide, totalement ou en partie, avec la zone homogène en contrainte.

Le point **C4** est lié à l'interprétation et à la comparaison des résultats issus de différentes éprouvettes. Le point **C5** fait apparaître la difficulté de conception d'une expérience de caractérisation du couplage magnéto-mécanique. En effet, supposons que l'on dispose d'un dispositif permettant la création et la mesure d'état magnétique avec des conditions d'homogénéité a priori satisfaisante. Si ce dispositif est utilisé dans une zone mécaniquement non homogène, l'état magnétique sera perturbé par des variations locales de perméabilité magnétique induites par l'état de contraintes. Le critère **C5** doit donc être associé à l'analyse d'homogénéité mécanique.

En pratique, il existe deux possibilités pour vérifier ces critères d'homogénéité. Soit la zone d'aimantation homogène est fixée et l'on impose de créer un champ de contrainte homogène qui englobe cette zone. Soit les dimensions de la zone mécaniquement homogène sont fixées et l'on cherche à réaliser une aimantation homogène à l'intérieur de celle-ci.

### 2.1.2 Bancs expérimentaux de référence

On trouve peu de détail dans la littérature concernant les expériences relatives à la définition du comportement magnéto-mécanique des matériaux actifs. Nous analysons ici les dispositifs de mesure existants grâce aux articles que nous avons pu collecter dans la littérature. Nous nous limitons à une analyse qualitative de ces dispositifs<sup>2</sup>, et utilisons les critères définis ci-dessus pour notre analyse.

Nous avons retenu trois expériences [Moffett et al., 1991], [Kvarnsjö et Engdahl, 1991] et [Benbouzid, 1994] qui utilisent un dispositif de sollicitations mécaniques différent. Toutes ont pour point commun d'utiliser des éprouvettes massives.

---

<sup>2</sup>Ceci est principalement dû à l'absence soit de données géométriques pour certaines, soit de la définition des conditions de sollicitation.

2.1.2.1 Montage réalisé par [Moffett et al., 1991]

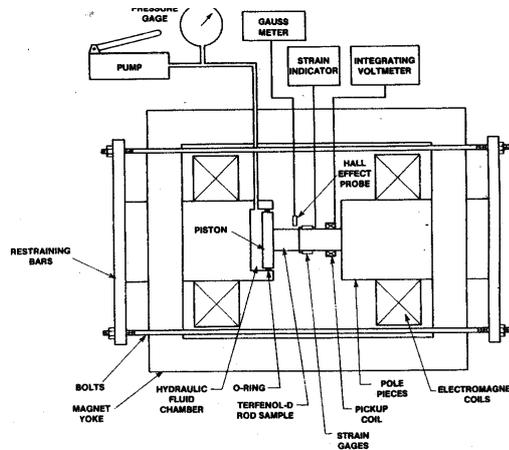


Figure 2.2 – Représentation schématique simplifiée du dispositif de caractérisation développé par [Moffett et al., 1991]

**Description mécanique** Des éprouvettes cylindriques de Terfenol-D, d'une longueur de  $114,5\text{ mm}$  et de diamètre  $38,1\text{ mm}$ , sont disposées entre deux pièces polaires (figure 2.2). Celles-ci ont été modifiées afin de fournir des contraintes de compression à un échantillon. L'une des pièces polaires contient un piston mis en action par une pompe hydraulique manuelle. L'ensemble pièce polaire-piston-échantillon est finalement maintenu entre deux plaques d'acier raccordées par quatre tiges. La contrainte appliquée est déterminée par mesure de la pression du fluide dans la chambre du piston. Une contrainte maximale de  $-74\text{ MPa}$  peut être appliquée à un échantillon de Terfenol-D. La déformation est mesurée par des jauges de déformation uniaxiale collées sur l'éprouvette.

**Description magnétique** Les sollicitations magnétiques sont produites par un électro-aimant au centre duquel est placé l'éprouvette à caractériser. Des culasses magnétiques permettent de canaliser le champ magnétique. Un échantillon de Terfenol-D peut être soumis à des champs magnétiques atteignant une intensité de  $400\text{ kA/m}$ . Une sonde à effet Hall positionnée au voisinage de l'échantillon est utilisée pour mesurer le champ magnétique. L'induction magnétique est déterminée par intégration de la tension induite aux bornes d'une bobine entourant l'éprouvette.

**Analyse** Aucune information n'est disponible sur l'homogénéité des sollicitations, tant magnétique que mécanique. A priori, l'homogénéité de la contrainte mécanique semble assurée par la structure retenue (critère **C1**). Cependant, l'homogénéité du champ magnétique apparaît délicate à obtenir sur une partie de l'éprouvette. La présence du piston à une extrémité de l'éprouvette ayant pour effet de modifier la distribution du champ magnétique au voisinage. Aussi, bien que les dimensions de l'éprouvette soient assez importantes, la zone utile à la caractérisation semble être relativement réduite. On peut néanmoins supposer que les zones homogènes en contraintes et en champ magnétique se recouvrent suffisamment pour permettre les mesures (critère **C5**).

L'effort mécanique étant appliqué par un système piston-pompe hydraulique manuel, sa stabilité pendant les sollicitations magnétiques est mise en doute. En raison du manque de réactivité des systèmes hydrauliques le critère **C3** n'est a priori pas vérifié.

Le principal défaut de cette expérience réside dans la stabilité des efforts appliqués, fournis par l'association piston-pompe hydraulique, pendant les sollicitations magnétiques. Par ailleurs, la connaissance de l'état de contraintes dans la zone de mesure magnétique reste assez imprécise avec le système de mesure adopté. Il est à noter que la mesure de la déformation se limite à la composante longitudinale. Cette expérience orientée vers la caractérisation sous contrainte de compression de matériaux actifs, utilise des échantillons massifs aux dimensions importantes, ce qui représente un investissement important étant donné le coût du Terfenol-D.

### 2.1.2.2 Montage réalisé par [Kvarnsjö et Engdahl, 1991]

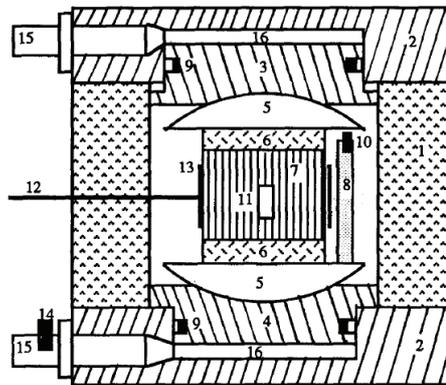


Figure 2.3 – Porte échantillon du dispositif de caractérisation quasi-statique des matériaux magnétostrictifs développé au KTH [Kvarnsjö et Engdahl, 1991]

**Description mécanique** Des éprouvettes cylindriques sont placées à l'intérieur d'un porte échantillon (figure 2.4), de hauteur  $104\text{ mm}$  et de largeur  $104\text{ mm}$ . Ce porte échantillon est composé d'une partie hydraulique permettant l'application de sollicitations mécaniques. La pression de l'huile issue du système hydraulique, est transmise à l'éprouvette par un piston mobile. Les éprouvettes, de dimensions maximales  $30\text{ mm}$  de diamètre et  $25\text{ mm}$  de longueur, peuvent ainsi subir des contraintes de compression uniaxiale atteignant  $90\text{ MPa}$  (diamètre  $30\text{ mm}$ ). La déformation est mesurée par des jauges de déformation uniaxiale et la contrainte appliquée est déterminée à partir de la mesure de la pression d'huile avec un capteur piézorésistif.

**Description magnétique** L'excitation magnétique est assurée par un électro-aimant, entre les pôles duquel est placé le porte échantillon. L'éprouvette peut ainsi être exposée à des champs magnétiques d'intensité atteignant  $1200\text{ kA/m}$ . Les mesures magnétiques sont effectuées par une sonde à effet Hall, pour le champ magnétique, et par une bobine de mesure de flux, pour l'induction magnétique.

**Analyse** La conception du porte échantillon est basée sur une analyse éléments finis, magnétique et mécanique, avec l'intention d'obtenir une distribution homogène du champ magnétique et de la contrainte mécanique dans l'éprouvette. Toutefois, on ne peut rigoureusement évaluer les dimensions de cette zone homogène. A priori les critères **C1**, **C4** et **C5** sont vérifiés, mais on ne peut vérifier les dimensions utiles aux mesures magnétiques.

Le système hydraulique peut fournir des contraintes importantes, mais la stabilité de l'effort appliqué n'est aucunement assurée pendant les sollicitations magnétiques à cause du manque de réactivité des systèmes hydrauliques (par ailleurs il n'est pas souligné si un asservissement est réalisé sur l'effort appliqué). Le critère **C3** n'est donc pas vérifié.

Cette expérience est conçue pour solliciter sur une large gamme de contrainte et de champ magnétique des éprouvettes de Terfenol-D. Les critères d'homogénéité semblent vérifiés, mais la stabilité de l'effort appliqué est compromise. Enfin, la mesure de la déformation se limite à la seule composante longitudinale.

### 2.1.2.3 Montage réalisé par [Benbouzid, 1994]

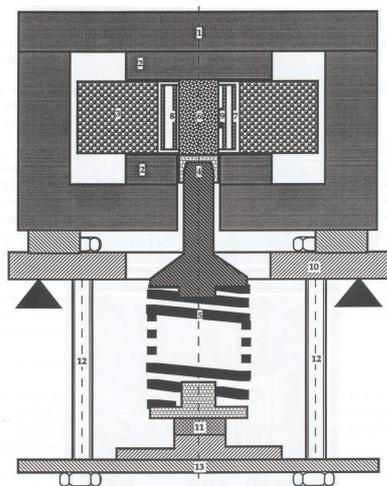


Figure 2.4 – Description schématique du dispositif de caractérisation [Benbouzid, 1994]

**Description mécanique** Les éprouvettes caractérisées sont principalement des barreaux de Terfenol-D, de diamètre de l'ordre de  $15\text{ mm}$  et de longueur comprise entre  $50$  et  $100\text{ mm}$ . La contrainte mécanique uniaxiale est appliquée par un ressort pour charges extra-fortes. Les barreaux caractérisés peuvent ainsi être soumis à des contraintes de compression pouvant atteindre  $60\text{ MPa}$ . La déformation, selon l'axe du barreau, est obtenue par une jauge de déformation uniaxiale.

**Description magnétique** Le circuit magnétique est constitué par un empilement de tôles d'acier, maintenues par des mâchoires en Aluminium, et refermé par des pièces polaires composées de tôles d'acier de forte perméabilité magnétique.

L'excitation magnétique, réalisée par une bobine centrale de 1500 spires, peut soumettre les barreaux à caractériser à des champs magnétiques d'intensité pouvant atteindre  $400 \text{ kA/m}$ . La détermination du champ magnétique se fait selon le principe du Gaussmètre, par l'intermédiaire de deux bobines connectées à une carte électronique d'intégration. L'induction magnétique est mesurée par la même carte électronique en intégrant la tension induite aux bornes d'un bobinage entourant l'échantillon.

**Analyse** Une analyse numérique de la structure retenue a été effectuée par Benbouzid afin de confirmer sa validité. La répartition uniforme des champs d'excitation et d'induction magnétique s'avère assurée à l'intérieur du barreau, il est d'ailleurs souligné une quasi-nullité des composantes radiales. Le critère **C4** semble vérifié. Cependant, les dimensions de la zone magnétiquement homogènes ne sont pas précisées.

L'uniformité de la contrainte mécanique à l'intérieur du barreau ainsi que la déformation semble obtenue. Du fait de sollicitations uniaxiales, les zones homogènes en contrainte et en champ magnétique semblent a priori s'accorder (critère **C5**). Néanmoins, l'effort étant produit par un ressort pour charges extra-fortes, la stabilité en contrainte pendant les sollicitations magnétiques ne peut être assurée et l'obtention de caractéristiques à contrainte nulle paraît impossible. Le critère **C3** n'est donc pas vérifié.

On peut d'ailleurs s'étonner que malgré la réalisation d'un banc expérimental dédié à la caractérisation magnéto-mécanique du Terfenol-D, les résultats présentés sont issus de l'expérience réalisé au KTH<sup>3</sup> [Kvarnsjö et Engdahl, 1991] dans le cadre d'échanges avec le LEG<sup>4</sup>.

Nous avons ici principalement décrit les bancs expérimentaux employés pour la caractérisation magnéto-mécanique de matériaux massifs sous contraintes de compression. Plusieurs bancs expérimentaux ont aussi été conçus pour l'étude du comportement magnéto-mécanique de tôles ferromagnétiques. Les matériaux étudiés avec ces bancs sont essentiellement des alliages de *FeSi* ([Permiakov et al., 2002], [Hubert et al., 2003] et [Belahcen, 2004]). Le principe de caractérisation sous contrainte de traction reste identique à ceux décrits ci-dessus. Néanmoins, les difficultés liés à leur mise en œuvre, outre le contrôle de l'effort appliqué, sont liées à la mesure de déformation d'origine magnétique du même ordre de grandeur que les déformations d'origine thermique (de l'ordre de  $10^{-6}$ ). À ce jour, le banc de caractérisation développé au LMT-Cachan<sup>5</sup> [Hubert et al., 2003] est le seul à assurer des efforts contrôlés grâce à l'emploi d'un système à masses pesantes. Appliquer ce système à la caractérisation sous contrainte de compression d'échantillons massifs est cependant difficile à mettre en œuvre. Il nécessite une phase de conception délicate pour la réalisation d'un dispositif d'application de la contrainte, et des volumes de masses pesantes importants (bien que l'on puisse adapter la section des échantillons).

---

<sup>3</sup>The Royal Institute of Technology, Stockholm - Suède.

<sup>4</sup>Laboratoire d'Électrotechnique de Grenoble, Grenoble - France.

<sup>5</sup>Laboratoire de Mécanique et Technologie, Cachan - France.

### 2.1.3 Conclusion

Faute de données suffisantes, nous ne pouvons aller davantage dans l'analyse des différentes expériences. Néanmoins, cette analyse des dispositifs expérimentaux présentés dans la littérature fait ressortir les points suivants :

- D'un point de vue mécanique, il ressort que la stabilité de l'effort appliqué pendant les sollicitations magnétiques n'est pas rigoureusement, voire jamais, assurée. Ceci est principalement lié au choix des dispositifs de sollicitation mécanique dont l'absence d'asservissement en effort, pour au moins deux des dispositifs, ne permet pas une correction des variations d'efforts. Au niveau de la connaissance des déformations, il est notable que les auteurs se limitent à la composante longitudinale.
- D'un point de vue magnétique, toutes les expériences ont recours à la création de champs magnétiques importants, nécessaires à la caractérisation du Terfenol-D. Les zones homogènes en champ sont cependant mal définies.

Compte tenu des objectifs liés à la modélisation du comportement magnéto-mécanique des matériaux actifs, nous avons retenu la configuration imposant des sollicitations magnétique et mécanique uniaxiales, mais avec une mesure multiaxiale de la réponse magnéto-mécanique.

## 2.2 Banc de mesure magnéto-mécanique réalisé au LGEP

Pour pouvoir mener à bien la modélisation du comportement magnéto-mécanique de matériaux actifs, nous proposons de développer un dispositif expérimental. La fonction essentielle que doit assurer notre dispositif est, pour un état de contraintes uniaxial, mesurer le comportement magnéto-mécanique "local".

### 2.2.1 Objectifs

Les matériaux visés sont essentiellement des matériaux à magnétostriction géante sous forme massive. Cela concerne notamment le Terfenol-D, matériau faisant l'objet d'un grand intérêt. Un alliage de *FeCo* pour son intérêt dans la conception de dispositifs électromagnétiques à haute performance sera aussi étudié. Notre dispositif devra donc être capable de s'adapter à une gamme de matériaux aux propriétés magnétiques et magnétostrictives différentes.

L'utilisation des matériaux actifs tel que le Terfenol-D se faisant essentiellement sous contraintes de compression uniaxiale, le développement de notre dispositif sera d'abord orienté vers ce type de sollicitation mécanique. Il devra néanmoins permettre le passage à l'étude sous contrainte de traction, au moyen de quelques ajustements.

De façon à clarifier notre objectif, nous le scindons en fonctions magnétiques et mécaniques que doit remplir notre dispositif expérimental. Ces fonctions sont

les critères  $C_1$  à  $C_5$  du §2.1.1. Nous leur ajoutons des objectifs pour la réponse magnéto-mécanique :

- La contrainte appliquée à l'éprouvette doit être mesurable, et la mesure de la déformation ne doit pas se limiter à une seule composante.
- Il faut pouvoir mesurer les grandeurs magnétiques, excitation  $H$  et induction  $B$ , dans la région de l'éprouvette homogène magnétiquement et mécaniquement.

### 2.2.2 Partie mécanique

L'application de contrainte de compression ou de traction est réalisée par une machine universelle d'essais mécaniques ZWICK/ROELL Z030 (figure 2.5). Cette machine électromécanique permet de solliciter des éprouvettes en traction-compression uniaxiale. La structure de la machine est constituée d'un bâti et d'une traverse permettant l'application d'effort d'une capacité maximale de 30 kN. Les essais sont commandés et contrôlés sous environnement informatique, via un logiciel spécifique à la machine. Ce dispositif est asservi de façon à contrôler soit le déplacement de l'éprouvette, soit l'effort appliqué à celle-ci.



Figure 2.5 – Machine de traction/compression électromécanique

### 2.2.3 Partie magnétique

Tout dispositif de caractérisation magnétique est constitué par les éléments suivants : un système d'aimantation de l'éprouvette (sous forme d'une onde contrôlée du champ magnétique  $\mathbf{H}$  ou de l'induction magnétique  $\mathbf{B}$ ), un circuit magnétique disposé autour de l'éprouvette (circuit habituellement fermé afin de canaliser le champ magnétique pour diminuer les Ampères-tours et réduire le champ démagnétisant indésirable car souvent inhomogène ([Brissonneau, 1997])) et un système d'acquisition et de traitement des signaux électriques.

Les bancs de mesure habituellement utilisés pour la caractérisation des tôles magnétiques sont des adaptations du banc d'essai à bande unique, standard fixé par la Commission Électrotechnique Internationale (CEI) ([60404-3, 1992]) pour sa simplicité et sa bonne reproductibilité. Plusieurs configurations sont possibles et celle formée par une seule éprouvette entre deux culasses a été validée par plusieurs travaux, notamment expérimentaux ([Girgis et al., 1998]) et de modélisation ([Nakata et al., 1986]). Les modélisations par éléments finis montrent qu'il est alors préférable d'utiliser deux culasses, au lieu d'une seule, car une meilleure homogénéité du champ magnétique dans la zone analysée de l'éprouvette est obtenue. La conception de notre dispositif s'est donc inspirée des directives de la norme CEI.

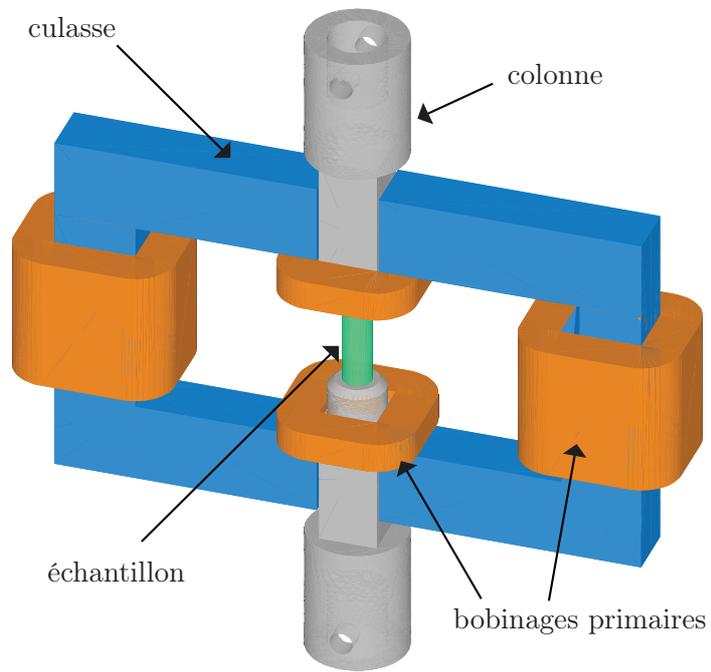
Le circuit magnétique est composé de deux culasses en ferrite de haute perméabilité, de type  $MnZn$  (réf : *Thomson B50*) chacune en forme de U, assurant la fermeture du flux magnétique (figure 2.6(a)). Quatre bobinages (un entourant chaque culasse et deux au voisinage de l'éprouvette) associés à un amplificateur de puissance produisent le champ magnétique. L'éprouvette à caractériser est disposée entre deux colonnes magnétiques (Permendur 49 :  $Fe_{49}Co_{49}V_2$ ), permettant la transmission des efforts appliqués par la machine de traction/compression, d'une part, et la fermeture du circuit magnétique, d'autre part. L'ensemble du dispositif magnétique est mis en place et maintenu en position sur la machine grâce à un ensemble de fixation amagnétique [Plexiglas] (figure 2.6(b)), pour ne pas perturber l'excitation et les mesures magnétiques. Les quatre entrefers présents dans le circuit magnétique, entre les culasses et les colonnes, sont contrôlés à l'aide de cales étalon et d'un dispositif de réglage par vis.

Les éventuelles fuites de champ magnétique étant susceptibles de perturber l'électronique de pilotage de la machine de traction/compression, la partie supérieure des colonnes magnétiques a été réalisée en alliage non magnétique (*Dural* :  $Al_{95}Cu_4Mg_1$ ).

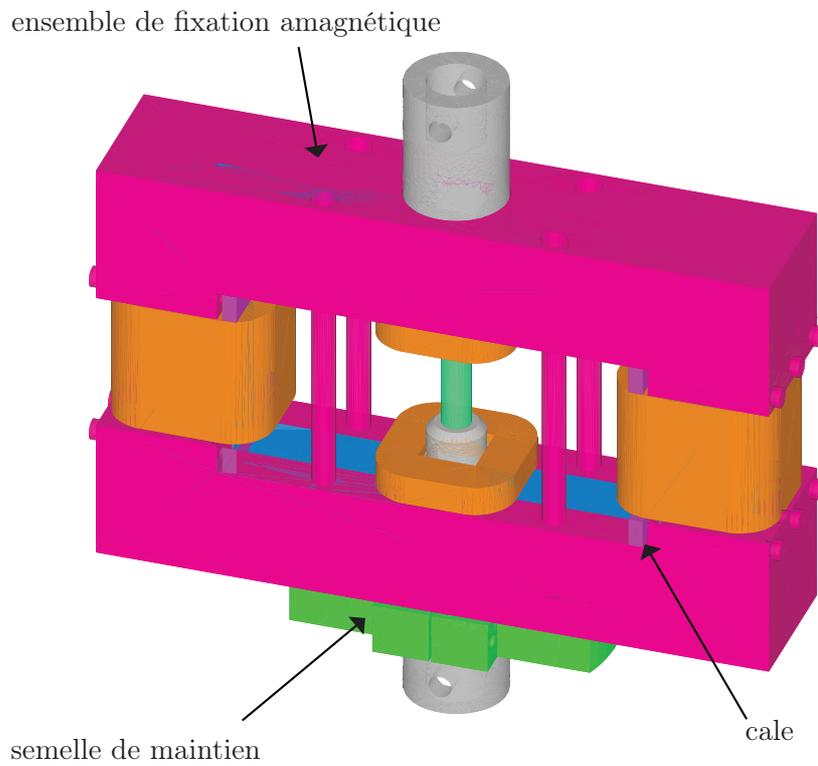
### 2.2.4 Dimensionnement

Une étape de dimensionnement a été effectuée afin de vérifier la validité de la structure retenue, conformément aux fonctions objectifs définies précédemment ([Galopin et al., 2007a]). L'essentiel de cette étape d'analyse a été effectuée avec le logiciel de calcul par éléments finis ANSYS.

Cette étape de dimensionnement s'est focalisée sur deux types de matériaux pour les échantillons : un alliage de  $FeCo$  et du Terfenol-D. L'alliage de fer-cobalt (Imphy *AFK - 502*) a déjà fait l'objet d'une étude à l'aide d'un autre banc de caractérisation [Hubert et al., 2005]. Ces résultats non-linéaires ont été utilisés pour



(a) *Circuit magnétique*



(b) *Circuit magnétique + ensemble de fixation*

Figure 2.6 – *Dispositif de sollicitation magnétique*

définir le comportement magnétique de ce matériau lors des calculs numériques. Les propriétés du Terfenol-D, produit par la compagnie Etrema, ont été définies d'après les informations du fabricant [Etrema, 2005]. Concernant les propriétés du reste du circuit magnétique, des valeurs standard ont été utilisées. Elles sont détaillées dans le tableau 2.1. Les propriétés magnétiques des culasses et des colonnes sont considérées linéaires (la non saturation du circuit magnétique, à l'exception de l'échantillon, est contrôlée pour chaque calcul effectué).

	$B_{sat}$ (T)	$\mu_r$	E (GPa)	$\nu$
Terfenol-D	1	4	100	0.3
Permendur 49	2.34	non linéaire	210	0.29
Ferrite	0.5	3500	-	-

Tableau 2.1 – *Propriétés magnétiques et mécaniques des matériaux utilisés.  $B_{sat}$  induction magnétique à saturation,  $\mu_r$  perméabilité relative,  $E$  module d'Young et  $\nu$  coefficient de Poisson, d'après [Hubert et al., 2005], [Etrema, 2005] et [Kedous-Lebouc, 2006].*

Pour cette étape de dimensionnement nous définissons deux spécifications principales que doit vérifier la conception du banc. L'une est attachée aux fonctions objectifs définies précédemment, l'autre est associée à l'effet de forme :

1. La zone de mesure est définie par une zone de 15 mm de haut minimum (en raison des contraintes liées à l'instrumentation) disposée au centre de l'éprouvette. Les sollicitations magnétiques et mécaniques doivent être homogènes dans cette zone. Les critères d'homogénéité retenus sur les sollicitations magnétique et mécanique sont les suivants :

$$C_h = \frac{H_{max} - H_{min}}{H_{max}} < 5\% \quad (2.1)$$

$$C_\sigma = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{\sigma_{max}} < 5\% \quad (2.2)$$

2. L'effet de forme doit être contrôlé. En effet, la déformation mesurée  $\mathbb{S}^m$  est la combinaison de la déformation de magnétostriction  $\mathbb{S}^\mu$ , de la déformation élastique  $\mathbb{S}^\sigma$  associée à la contrainte appliquée et de la déformation élastique  $\mathbb{S}^{fm}$  induite par les efforts d'origine électromagnétique :

$$\mathbb{S}^m = \mathbb{S}^\mu + \mathbb{S}^\sigma + \mathbb{S}^{fm} \quad (2.3)$$

Une estimation correcte de la déformation de magnétostriction suppose donc d'effectuer une correction de la grandeur mesurée, en tenant compte de la contrainte appliquée d'une part, et de l'effet des forces d'origine magnétique d'autre part.

### 2.2.4.1 Pré-dimensionnement

Une étape de pré-dimensionnement a été réalisée dans le but de déterminer les sections des culasses en ferrite et la hauteur des colonnes. Les principaux buts étant

d'éviter la saturation du circuit magnétique (en dehors des échantillons) et tout risque de flambage (quasi nul pour la structure et les dimensions des échantillons retenues). À partir de ce pré-dimensionnement, il sera possible d'évaluer l'hétérogénéité des sollicitations magnétiques et mécaniques dans la zone de mesure de l'échantillon. Les imperfections dimensionnelles des pièces utilisées n'étant pas prise en compte dans cette modélisation, les inhomogénéités consécutives à une dissymétrie, telle qu'une excentration des colonnes de chargement, ne pourront être considérées dans cette analyse. Ce pré-dimensionnement s'appuie sur deux types d'analyse : une analyse mécanique (élasticité, flambage...) et une analyse magnétique.

### Simulation mécanique

Le principe de cette simulation est de valider la structure retenue (absence de flambage...) en prenant en compte les caractéristiques des matériaux constitutifs du dispositif, et en considérant la présence entre l'éprouvette et les colonnes de contacts avec ou sans frottement. Le domaine mécanique retenu, un quart du dispositif mécanique, correspond à un quart de l'éprouvette et un quart des colonnes haute et basse (figure 2.7). Les contacts ont un coefficient de frottement compris entre 0 et 0,3.

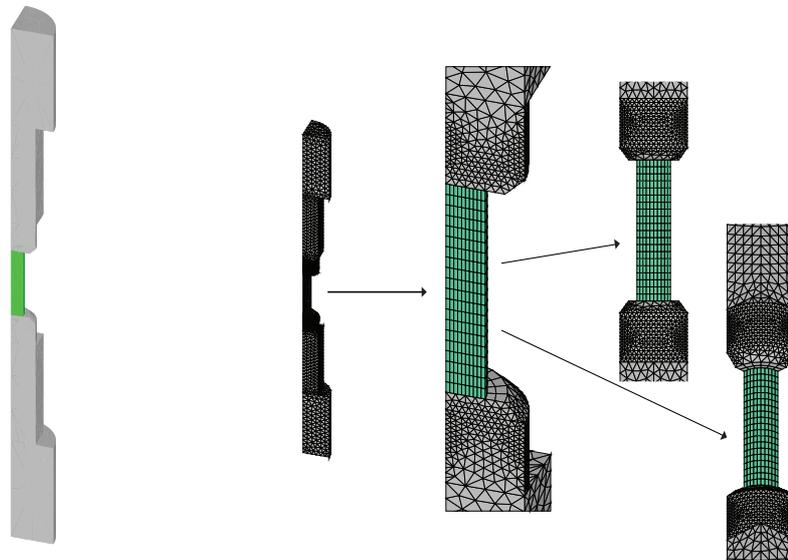


Figure 2.7 – *Partie mécanique modélisée et maillage correspondant*

L'effet du coefficient de frottement est confiné dans la zone proche du contact et disparaît complètement dans la zone de mesure, quelle que soit la longueur de l'échantillon considérée (figure 2.8). La contrainte maximale dans l'éprouvette est obtenue systématiquement au niveau des contacts avec les colonnes. Cette concentration de contrainte ne perturbera pas les contraintes dans la zone de mesure magnétique, où l'uniformité des contraintes mécaniques est assurée sur la quasi totalité de l'échantillon (figure 2.8). Par ailleurs, aucun effet de flambage n'est à signaler avec la hauteur de colonne choisie.

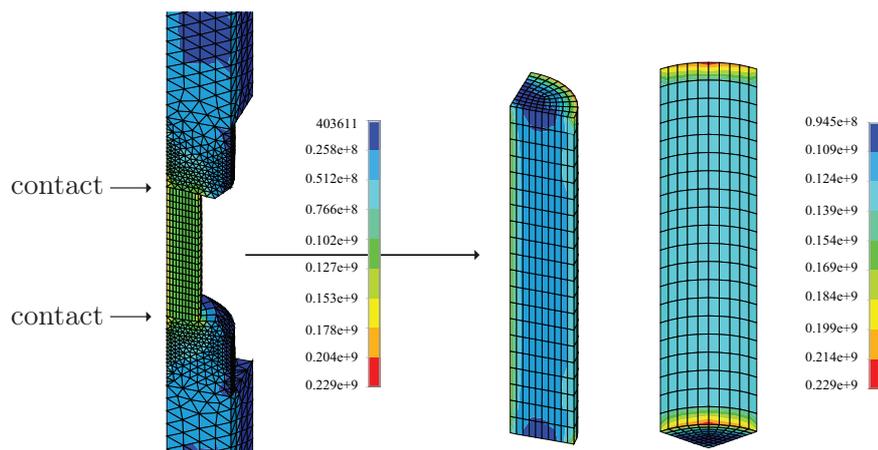


Figure 2.8 – *Distribution des contraintes (Von-Mises) pour une force appliquée de 10 kN, un coefficient de frottement  $f$  de 0,2 et un échantillon de longueur 30 mm*

### Simulation magnétique

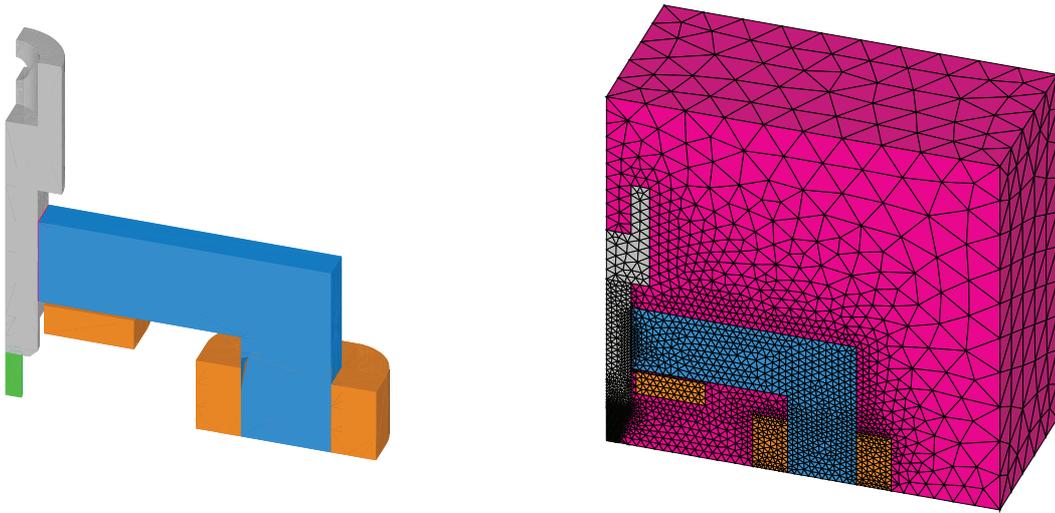
Un des objectifs de cette expérience est de pouvoir caractériser des matériaux aux propriétés magnéto-mécaniques fortement distinctes, notamment le Terfenol-D et un alliage de  $FeCo$ . Une des caractéristiques principales du Terfenol-D est sa très faible perméabilité magnétique relative, en comparaison aux matériaux ferromagnétiques classiques. Cela introduit une forte perturbation de l'uniformité des grandeurs magnétiques par l'importance des fuites. Les grandeurs mécaniques risquent alors de ne plus être uniformes. Les alliages de  $FeCo$  quant à eux possèdent une induction magnétique à saturation importante. Il est donc nécessaire de dimensionner en conséquence le circuit magnétique pour, d'une part, créer des champs magnétiques importants utiles à la caractérisation du Terfenol-D et, d'autre part, éviter la saturation du circuit magnétique (en dehors de l'éprouvette).

La partie modélisée représente un huitième du circuit magnétique, constituée du quart d'une colonne, de la culasse et des bobinages ainsi que du huitième de l'éprouvette (figure 2.9). Un maillage simplifié, pour diminuer le temps de calcul, a permis l'obtention des dimensions du circuit magnétique. Une deuxième version, au maillage plus dense, a servi à l'optimisation des dimensions finales du circuit magnétique (figure 2.9).

L'analyse des résultats de simulation met en évidence une répartition uniforme du champ magnétique  $\mathbf{H}$  (figure 2.10(a)) et de l'induction magnétique  $\mathbf{B}$  (figure 2.10(b)) dans l'éprouvette<sup>6</sup>. Cette répartition quasi-uniaxiale des champs, les composantes radiales étant pratiquement nulles, est réalisée sur une large zone de l'éprouvette. On peut noter qu'une part importante des Ampère-tours sert à magnétiser les entrefers entre la culasse et la colonne magnétique (pour cette étape de l'analyse une valeur de 0,5 mm a été prise pour l'entrefer). La minimisation de cet entrefer<sup>7</sup> pendant les phases expérimentales passera par l'utilisation de cale étalon (figure 2.6(b)), permettant un réglage fin des entrefers. Dans le cas d'échantillons de Terfenol-D, le comportement magnétique induit une circulation importante du champ magnétique

<sup>6</sup>Les résultats présentés ici sont obtenus pour les mêmes conditions d'excitation.

<sup>7</sup>Et donc de la consommation d'Ampère-tours.

Figure 2.9 – *Partie magnétique modélisée et maillage correspondant*

$\mathbf{H}$  dans l'échantillon, pour pouvoir décrire au mieux l'état de saturation (figure 2.10(a), figure 2.10(b)). Ces champs magnétiques importants sont obtenus par l'intermédiaire de bobinages composés de  $N_1 = 600$  spires, pour les bobinages autour des culasses, et  $N_2 = 265$  spires pour les bobinages au voisinage de l'échantillon. La non saturation du circuit magnétique est alors assurée en choisissant des culasses ayant une section de  $20 \times 27 \text{ mm}^2$  et en réalisant la partie magnétique des colonnes en Permendur 49 ( $Fe_{49}Co_{49}V_2$ ).

Nous allons par la suite tester l'influence de la longueur de l'échantillon  $L_{ech}$ , du frottement entre l'échantillon et les colonnes magnétiques et l'épaisseur des entrefers  $e$  sur la qualité de l'homogénéité des grandeurs à mesurer. Le calcul par éléments finis permet, par ailleurs, d'évaluer l'impact des forces d'origine magnétique, et donc l'effet de forme [§1.2.3.2].

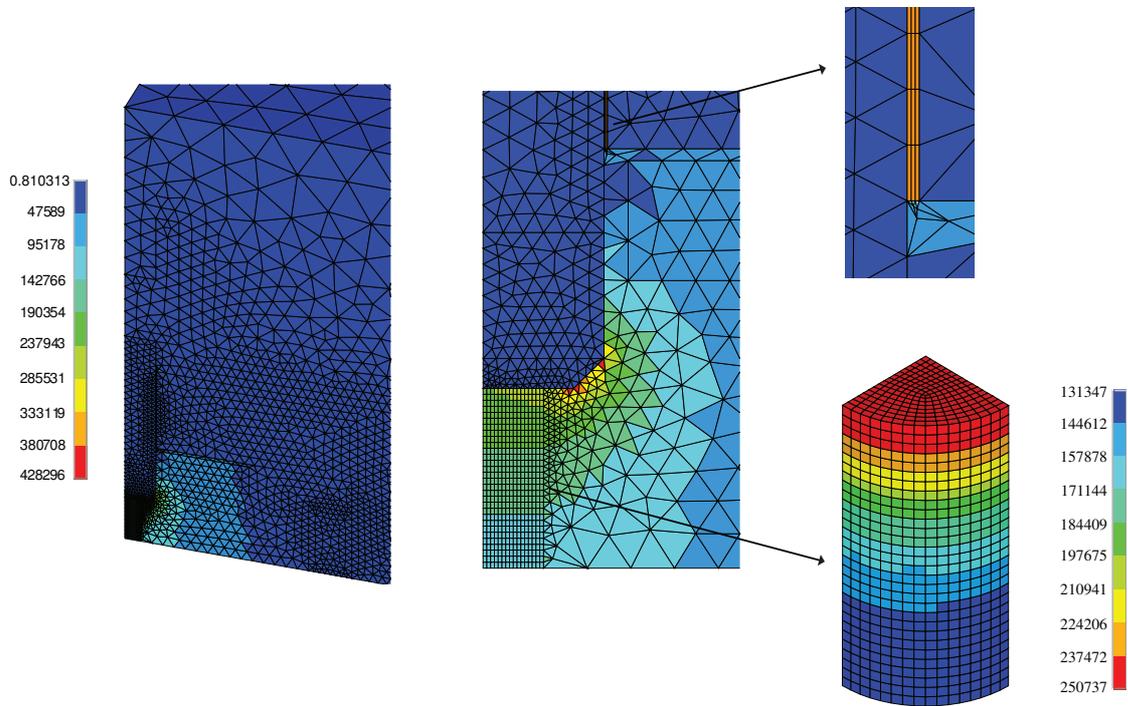
Les dimensions ainsi que les principales données caractéristiques du circuit magnétique retenue à l'issue de cette étape de pré-dimensionnement sont détaillées en Annexe B.

#### 2.2.4.2 Homogénéité des contraintes

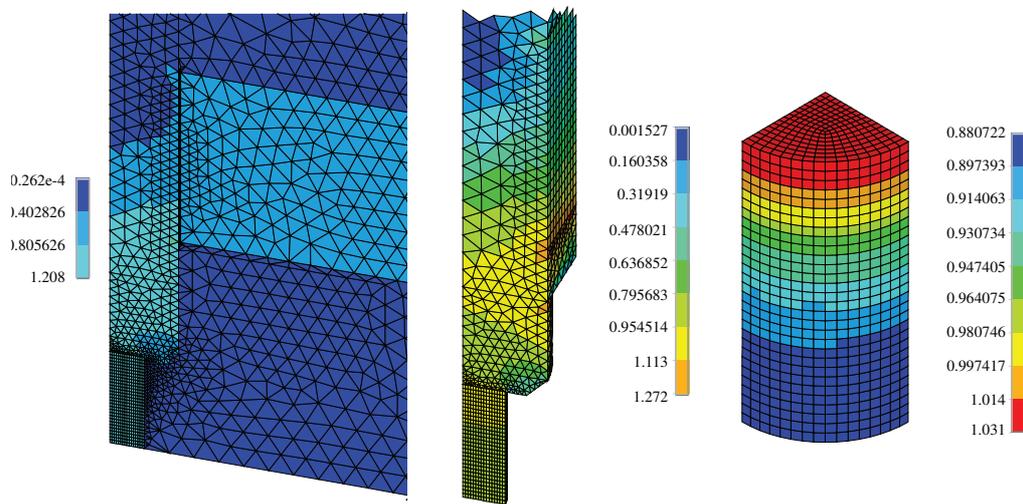
L'étape de pré-dimensionnement a montré une bonne uniformité de la contrainte mécanique dans l'échantillon, malgré une augmentation de la contrainte obtenue au voisinage de la zone de contact entre l'éprouvette et les colonnes. Nous allons quantifier cette homogénéité à l'aide du critère défini par la relation (2.2). Pour cela nous considérons un coefficient de frottement prenant des valeurs comprises entre 0 et 0,3, et des échantillons de longueur variant entre  $20 \text{ mm}$  et  $40 \text{ mm}$ .

Il ressort que la valeur prise par le coefficient de frottement, quelle que soit la longueur de l'échantillon, n'a aucune incidence sur l'homogénéité du champ de contrainte dans l'éprouvette. De même, pour toutes les longueurs d'échantillons considérées, le critère d'homogénéité en contrainte, relation (2.2), est largement respecté (figure 2.11).

## 2. Caractérisation du comportement magnéto-mécanique



(a) Distribution du champ magnétique  $\mathbf{H}$  dans le cas d'un échantillon de Terfenol-D de 30 mm de longueur et d'un entrefer de 0,5 mm



(b) Distribution du champ d'induction magnétique  $\mathbf{B}$  dans le cas d'un échantillon de Terfenol-D de 30 mm de longueur et d'un entrefer de 0,5 mm

Figure 2.10 – Distribution du champ magnétique et de l'induction magnétique pour la configuration retenue

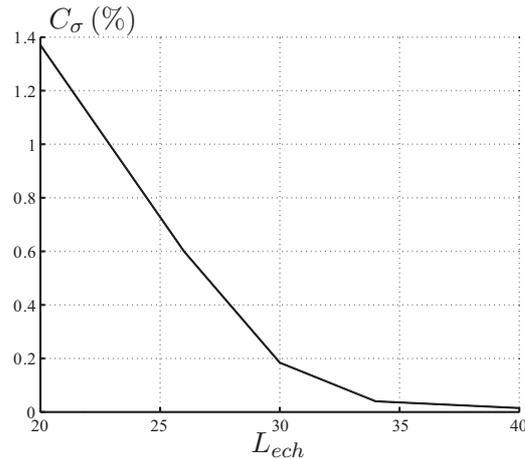
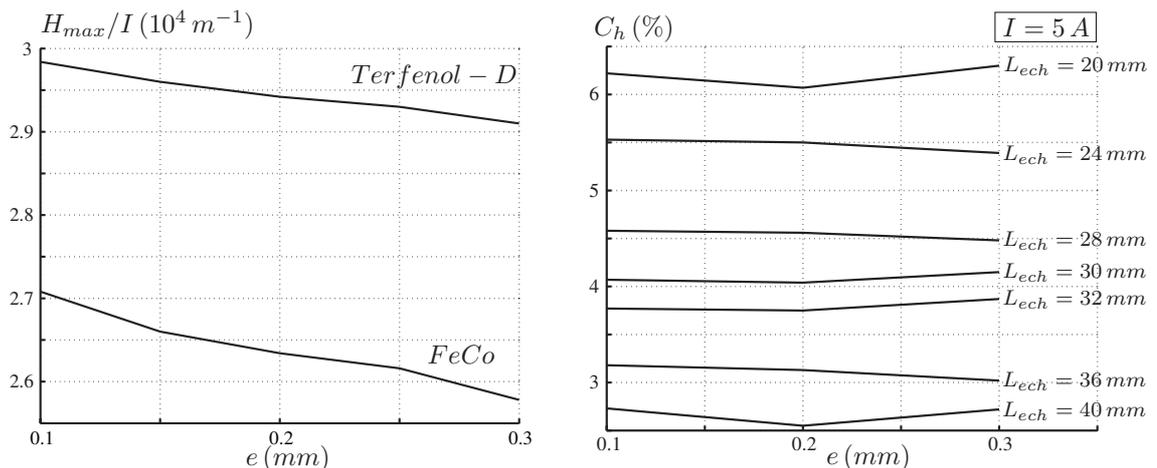


Figure 2.11 – Effet de la longueur de l'échantillon  $L_{ech}$  sur l'homogénéité du champ de contraintes

### 2.2.4.3 Homogénéité du champ magnétique

Comme il est montré par la phase de pré-dimensionnement, la quasi-uniaxialité du champ magnétique  $\mathbf{H}$  dans l'éprouvette est assurée. Son homogénéité dans la zone de mesure, et par conséquent la définition de cette zone, est liée à la longueur de l'échantillon  $L_{ech}$  et à l'effet des entrefers  $e$  dans le circuit magnétique.

Comme on pouvait s'y attendre, les entrefers  $e$  affectent le niveau de champ magnétique dans la zone de mesure de l'échantillon (figure 2.12(a)). L'augmentation de l'épaisseur des entrefers a pour conséquence naturelle la diminution, à courant fixé, de l'amplitude du champ magnétique. En revanche, l'épaisseur de ces entrefers agit très peu sur l'homogénéité du champ magnétique, comme l'illustre la figure 2.12(b) dans le cas du Terfenol-D pour différentes longueurs  $L_{ech}$  de l'échantillon.



(a) Effet de l'entrefer  $e$  sur le niveau de champ magnétique dans l'échantillon

(b) Effet de l'entrefer  $e$  sur l'homogénéité du champ magnétique dans la zone de mesure (Terfenol-D)

Figure 2.12 – Effet des entrefers  $e$  sur la réponse du circuit magnétique

La section maximale des échantillons a été fixée à  $100 \text{ mm}^2$ . Comme indiqué

sur la figure 2.13, l'homogénéité du champ magnétique dans l'échantillon n'est pas assurée dans le cas d'échantillons aux dimensions réduites. Le cas du Terfenol-D, pour lequel les fuites magnétiques sont plus importantes, est plus contraignant que celui de l'alliage de  $FeCo$ . Une longueur minimale de  $26\text{ mm}$  permet de respecter le critère fixé par la relation (2.1).

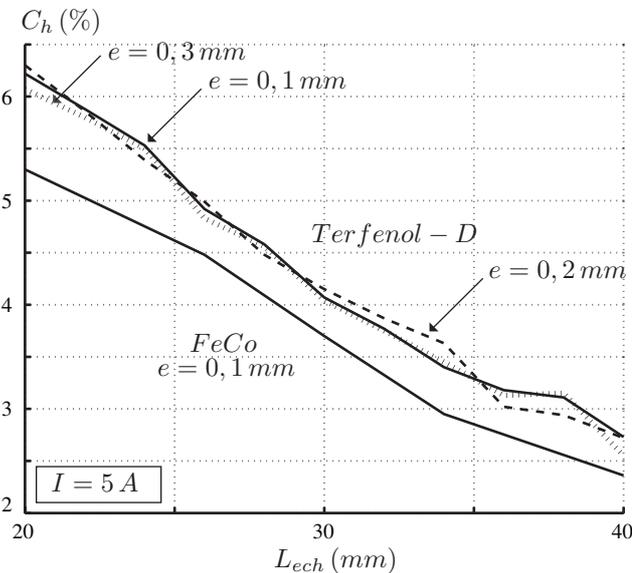


Figure 2.13 – Effet de la longueur de l'échantillon  $L_{ech}$  sur l'homogénéité du champ magnétique

#### 2.2.4.4 Influence des forces d'origine magnétique

Une estimation correcte de la déformation de magnétostriction suppose d'effectuer une correction de la grandeur mesurée (relation 2.3). La déformation élastique associée à l'application d'une contrainte est aisément définie à partir de la loi de Hooke. La part due aux forces magnétiques est à déterminer. Les distributions des champs magnétiques  $\mathbf{H}$  et d'induction magnétique  $\mathbf{B}$  dans l'échantillon induisent une distribution de forces magnétiques agissant principalement sur les surfaces libres de l'échantillon. La densité de force surfacique peut être obtenue par la relation (1.34).

Il est notable que l'épaisseur  $e$  des entrefers a peu d'influence sur l'amplitude des forces d'origine magnétique (figure 2.14). Par contre, la longueur des échantillons  $L_{ech}$  agit de manière notable, à épaisseur d'entrefer fixée, sur l'amplitude des forces magnétiques (figure 2.14) (obtenues à partir de la relation 1.34). Bien que l'effet de l'épaisseur d'entrefer ainsi que la longueur de l'échantillon agissent de manière sensible sur le niveau des efforts d'origine magnétique, ce niveau reste très faible dans tous les cas étudiés. La pression magnétique calculée ne dépasse pas  $40\text{ Pa}$ . Cette valeur correspond à des déformations élastiques négligeables devant l'amplitude de la déformation de magnétostriction, supérieure à  $10^{-6}$ .

#### 2.2.4.5 Optimisation de la longueur d'échantillon

Les différentes analyses ont permis de mettre en évidence le rôle joué par la longueur de l'échantillon. Le critère relatif à l'homogénéité du champ de contrainte

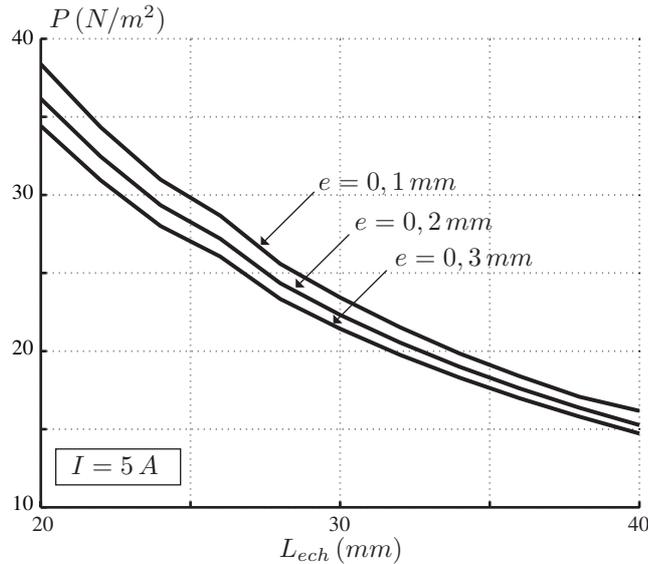


Figure 2.14 – Effet de la longueur de l'échantillon  $L_{ech}$  sur la pression magnétique moyenne (Terfenol-D)

(2.2) est toujours respecté, quelle que soit la longueur de l'échantillon. Le second critère, concernant l'homogénéité de la sollicitation magnétique (2.1), est respecté pour une longueur minimale de  $26 mm$ . Cette longueur assure alors une zone de mesure homogène en champ magnétique et en contrainte de  $15 mm$  minimum. En conséquence, une longueur d'éprouvette de  $30 mm$  a été adoptée comme standard pour cette expérience.

## 2.3 Procédure expérimentale

### 2.3.1 Principe

Les zones homogènes en contrainte et en champ magnétique coïncident sur une zone répartie autour du centre de l'éprouvette. Celle-ci est donc instrumentée sur ses surfaces libres afin de remonter aux états magnétiques et mécaniques locaux, en réponse aux sollicitations magnétiques et mécaniques (figure 2.15). Il faut cependant rappeler que les mesures magnétiques réalisées ici sont uniaxiales, c'est à dire qu'on n'a accès qu'aux composantes de  $\mathbf{H}$  et  $\mathbf{B}$  parallèles à l'axe central de l'éprouvette (axe  $x$  sur la figure 2.15).

### 2.3.2 Mesures mécaniques

Nous détaillons ici les données accessibles pendant les essais, du point de vue des sollicitations et des mesures mécaniques.

#### 2.3.2.1 Sollicitation mécanique

La machine d'essai ZWICK est équipée de capteurs d'effort (capacité  $10 kN$  et  $2,5 kN$ ) et de déplacement de la traverse. L'expérience est réalisée en imposant soit

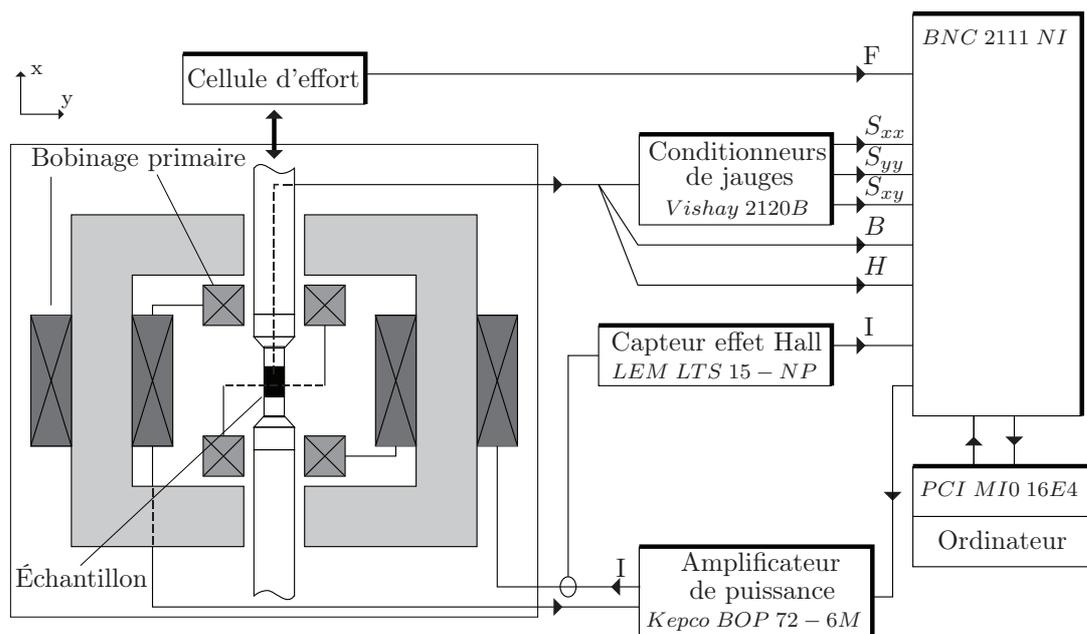


Figure 2.15 – Principe de mesure de l'expérience magnéto-mécanique, les mors et la machine d'essai ne sont pas représentés

un effort constant soit un déplacement constant de la traverse. L'asservissement contrôle que l'effort correspond à la valeur imposée, ou que la différence entre le déplacement de la traverse et le déplacement imposé est nulle.

### 2.3.2.2 Mesures de déformations par jauge

Au cours des essais, les déformations de l'éprouvette que l'on cherche à mesurer correspondent à de faibles déformations ( $< 2 \cdot 10^{-3}$ ). Pour estimer ces déformations nous utilisons des jauges de déformation de type rosette, disposées de part et d'autre de l'éprouvette. Les déformations estimées par l'intermédiaire de jauges permettent de suivre l'essai à tout instant, même pour de très faibles déformations. Les jauges utilisées sont de marque Vishay de type rosette à  $45^\circ$ . Leurs caractéristiques sont détaillées dans le tableau 2.2.

CEA-06-125UR-120	
Paramètre	Valeur
$R (24^\circ C)$	$120,0 \Omega \pm 0,4\%$
$K (24^\circ C)$	$2,075 \pm 0,5\%$
Sensibilité transverse	$0,8 \pm 0,2\%$
$K (nominal)$	$2,08 \pm 1\%$

Tableau 2.2 – Caractéristiques des jauges de déformations utilisées

Le pont de jauges associé est un pont de marque Vishay (*Vishay 2120B*). Les jauges sont branchées en montage quart de pont. Deux des jauges de la rosette coïncident avec les directions longitudinale et transversale de l'éprouvette, la troisième

étant positionnée à 45° des deux précédentes.

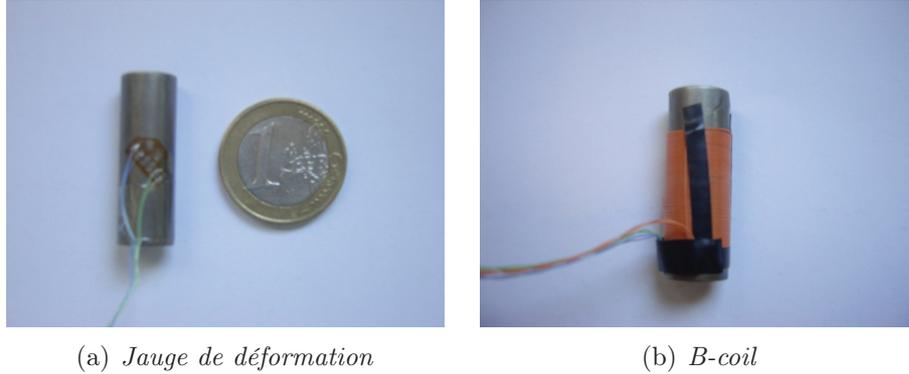


Figure 2.16 – Échantillon de Terfenol-D instrumenté

### 2.3.3 Mesures magnétiques

Le dispositif magnétique que nous avons réalisé comprend seulement la partie nécessaire à l'excitation magnétique de l'éprouvette. Nous détaillons maintenant les méthodes de sollicitation et de mesures.

#### 2.3.3.1 Sollicitation magnétique

Le courant électrique injecté dans les bobinages du circuit magnétique est issu d'un amplificateur de puissance (*Kepeco BOP 72 – 6M*). Le signal amplifié, pouvant être de nature quelconque, est généralement sinusoïdal de faible fréquence (quasi-statique  $f = 0,5 \text{ Hz}$ ). Le signal obtenu est mesuré à l'aide d'un capteur à effet Hall (*LEM LTS 15 – NP*) placée entre le générateur de courant et le bobinage primaire. Cette sonde délivre un signal analogique.

#### 2.3.3.2 Mesures de l'état magnétiques

L'induction magnétique  $\mathbf{B}$  dans l'éprouvette est mesurée par un bobinage secondaire, bobiné autour de l'éprouvette dans la zone homogène. Le courant électrique injecté dans les bobinages va provoquer l'aimantation de l'éprouvette. Les variations d'induction magnétique qui traverse le bobinage secondaire génèrent alors une f.e.m à ses bornes. La tension  $u$  mesurée est ensuite intégrée en fonction du temps pour obtenir le flux magnétique dans l'éprouvette. On obtient ainsi l'induction magnétique  $b$  dans l'éprouvette à un instant  $t$  pour une éprouvette de section  $S_e$  et pour  $N_3$  spires du bobinage secondaire, conformément à la loi de Faraday-Lenz :

$$u(t) = -N_3 S_e \frac{db(t)}{dt} \quad (2.4)$$

$$b(t) = -\frac{1}{N_3 S_e} \int_0^t u(t') dt' \quad (2.5)$$

La mesure du champ magnétique  $\mathbf{H}$  à partir de la mesure du courant injecté dans les bobinages n'est pas possible car il n'existe pas de contour d'intégration où  $\mathbf{H}$  est uniforme. Une autre méthode consiste à mesurer le champ magnétique dans l'air en plusieurs points, au voisinage de l'éprouvette. Puis, par extrapolation et continuité de la composante tangentielle du champ, on en déduit sa valeur dans l'éprouvette. Concrètement on utilise deux sondes à effet Hall (*AHS P15A*) disposées au voisinage de l'éprouvette, au centre de la zone homogène (figure 2.17). Le champ magnétique dans l'air en ces deux points est déterminé par mesure de la tension issue des sondes. L'expérience montre que le champ dans l'air au voisinage de l'éprouvette varie très peu. Une sonde à effet Hall est alors suffisante pour déterminer le champ magnétique dans la tôle, considéré équivalent au champ magnétique dans l'air au voisinage de l'éprouvette.

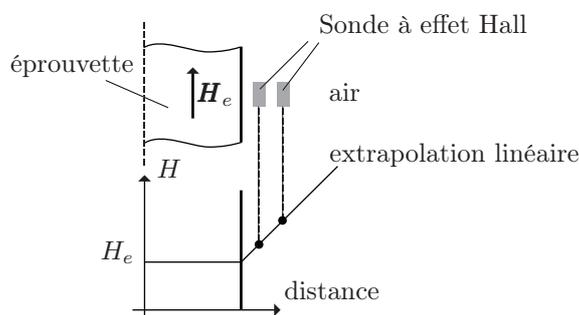


Figure 2.17 – Principe de mesure du champ magnétique  $\mathbf{H}$  par sonde à effet Hall

### 2.3.4 Pilotage et acquisition

La génération, l'acquisition et le traitement des signaux de mesure sont faits via une carte d'acquisition (*PCI MIO 16E4*) piloté par le logiciel *LABVIEW*® sur PENTIUM IV. La carte d'acquisition est une carte d'acquisition 12 bits, avec 8 voies différentielles. Ce système programmable est adapté à nos besoins selon un traitement automatique des signaux défini par les principales spécificités suivantes :

- une synchronisation de la génération et de l'acquisition,
- la génération de signaux multi-périodique (hystérésis), d'ondes évanescences (désaimantation et courbe anhystérétique)<sup>8</sup>,
- l'acquisition du signal sur un nombre multiple de périodes pour éviter l'utilisation de fenêtres d'observation. Le gain de chacune des voies est adapté au niveau de tension de celles-ci, ce qui supprime l'amplificateur de remise à niveau en entrée,
- un filtrage passe bas du type Butterworth, utilisé uniquement pour la mesure de déformations, avec une fréquence de coupure et un ordre réglable,
- un réglage du gain des sondes et du gain des conditionneurs de jauges,
- une phase d'initialisation pour la détermination des offsets des sondes (élimination systématique de l'offset des sondes),
- l'intégration numérique des tensions (mesure de l'induction magnétique, équation 2.5), auxquelles on a préalablement soustrait leur valeur moyenne pour

---

<sup>8</sup>Voir Annexe B.

- résoudre le problème de la constante d'intégration,
- la visualisation après traitement des données relatives à l'essai,
  - l'enregistrement des mesures dans un format lisible par un logiciel de traitement de données, pour permettre les dernières opérations de dépouillement avant le tracé des caractéristiques.

## 2.4 Résultats de mesure

Cette partie rassemble les résultats obtenus à partir d'éprouvettes de Terfenol-D polycristallin ( $Tb_{0.3}Dy_{0.7}Fe_2$ ). Les éprouvettes caractérisées sont des échantillons disponibles sous deux formes : un cylindre de longueur  $30\text{ mm}$  et de diamètre  $10\text{ mm}$  et une forme cubique de longueur  $30\text{ mm}$  et de section  $100\text{ mm}^2$ . On notera par la suite,  $DL$  (ou  $0^\circ$ ) la direction longitudinale et  $DT$  (ou  $90^\circ$ ) la direction transversale des échantillons (figure 2.20). Pour tout les résultats présentés par la suite, la fréquence de l'excitation magnétique est fixée à  $0,5\text{ Hz}$ .

### 2.4.1 Comportement mécanique

Des essais de compression en élasticité (contrainte maximale appliquée de  $120\text{ MPa}$  pour une limite d'élasticité en compression de  $700\text{ MPa}$ ) ont permis de mesurer les coefficients d'élasticité des échantillons (figure 2.21).

Les déformations sont mesurées parallèlement ( $DL$ ) et perpendiculairement ( $DT$ ) à la contrainte. Une procédure d'optimisation implantée sous  $MATLAB^{\text{®}}$ , permet de déduire les coefficients d'élasticité à l'aide d'une régression linéaire dans la zone linéaire (entre  $60\text{ MPa}$  et  $120\text{ MPa}$ ). Les résultats sont reportés dans le tableau 2.3. L'erreur relative est estimée à partir d'un calcul d'incertitude sur l'instrumentation de mesure.

$$S_{//}^{exp} = \frac{\sigma}{Y^{exp}} \quad \text{et} \quad S_{\perp}^{exp} = -\frac{\nu^{exp}}{Y^{exp}}\sigma \quad (2.6)$$

Échantillon	Module d'Young $Y$ (GPa)	Coefficient de Poisson $\nu$
Échantillon 1	$93 \pm 4\%$	0.296
Échantillon 2	$96 \pm 4\%$	0.293

Tableau 2.3 – Coefficients d'élasticité des échantillons

Dans la littérature le module d'Young est défini soit à champ magnétique constant ( $Y^H$ ), soit à induction magnétique constante ( $Y^B$ ) [Engdahl, 2000]. Il prend alors une valeur comprise entre  $18$  et  $50\text{ GPa}$  pour le premier cas ( $Y^H$ ), et entre  $50$  et  $90\text{ GPa}$  pour le second cas ( $Y^B$ ). Or, le module d'Young doit être déterminé dans la partie linéaire de la courbe déformation-contrainte, pour s'affranchir de la déformation de magnétostriction induite par la contrainte appliquée (comme nous allons le voir un peu plus bas).

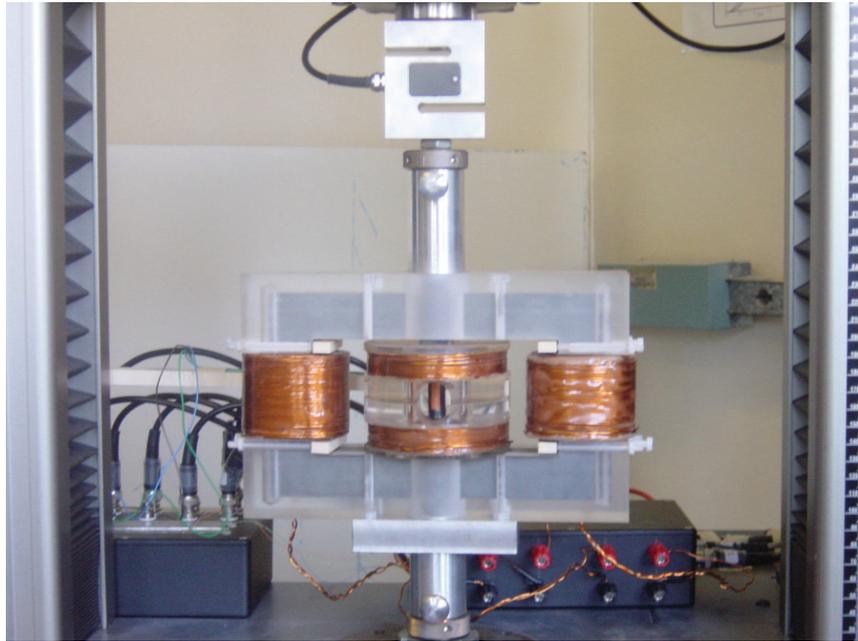


Figure 2.18 – *Dispositif de caractérisation magnéto-mécanique en situation d'essai. L'éprouvette instrumentée est disposée au centre, entre les deux colonnes magnétique*

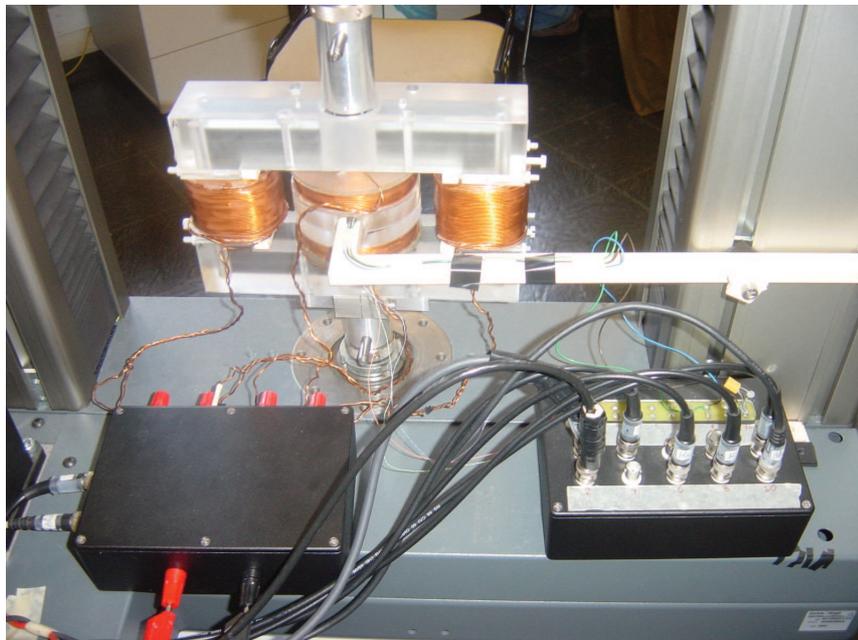


Figure 2.19 – *Dispositif de mesure magnétique en situation d'essai. Au bout de la tige en plastique se trouve la sonde à effet Hall.*

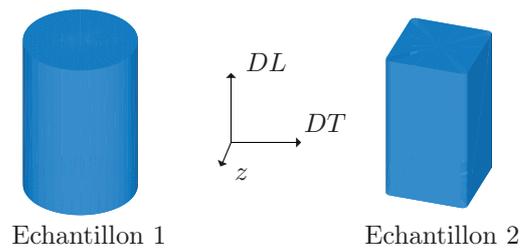


Figure 2.20 – Repérage des directions de l'échantillon

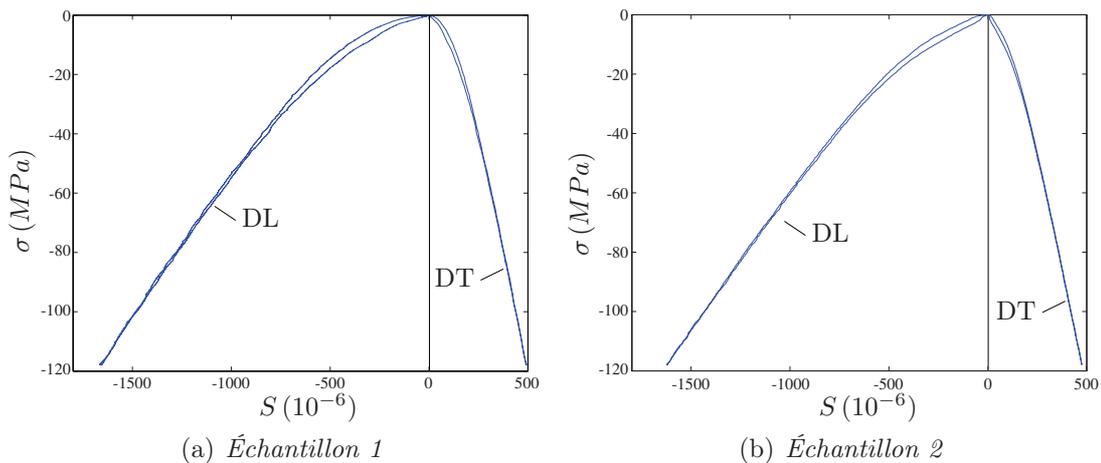


Figure 2.21 – Essai de compression d'échantillons de Terfenol-D

## 2.4.2 Comportement magnétique

Dans ce travail on s'est intéressé à la fois à l'aspect hystérétique et à l'aspect anhystérétique du comportement magnétique (figure 2.22).

Afin de s'affranchir des effets d'hystérésis, on souhaite isoler pour une valeur de champ magnétique, une valeur unique de l'induction magnétique. On fait pour cela osciller le champ magnétique appliqué en amplitude décroissante autour d'une valeur visée. On atteint ainsi une valeur stabilisée de l'aimantation. En répétant cette opération pour plusieurs valeurs du champ d'excitation, on obtient point par point une caractéristique magnétique dite anhystérétique (voir Annexe B). Cette courbe peut être assimilée à la part réversible du comportement magnétique du matériau.

Les mesures ont été réalisées sur des éprouvettes identiques à celles utilisées pour les essais de compression. Les résultats sont présentés sur la figure 2.23, les barres d'erreur ont été estimées à partir d'un calcul d'incertitude sur l'instrumentation de mesure.

Ces mesures mettent en évidence le caractère atypique du comportement magnétique du Terfenol-D. Une induction magnétique à saturation peu importante, comparativement aux matériaux ferromagnétiques classiques, associée à des champs magnétiques importants caractérise ce matériau.

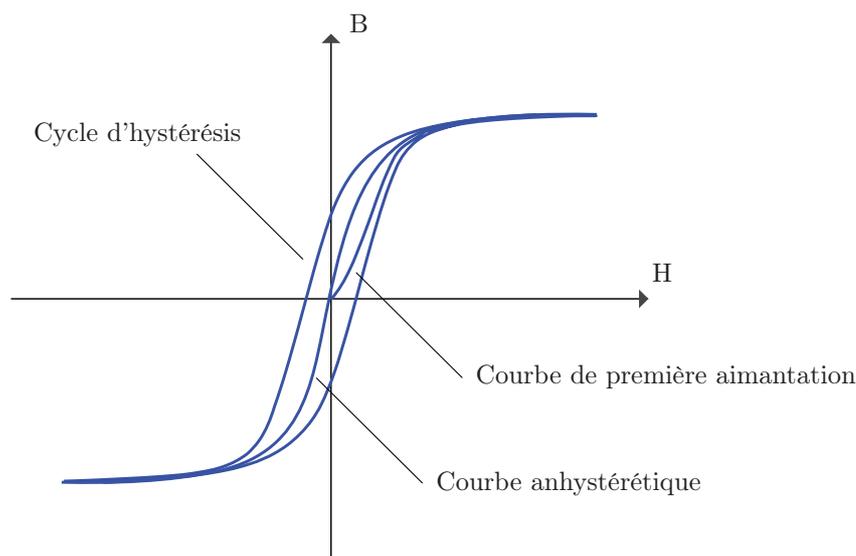


Figure 2.22 – Caractéristiques du comportement magnétique

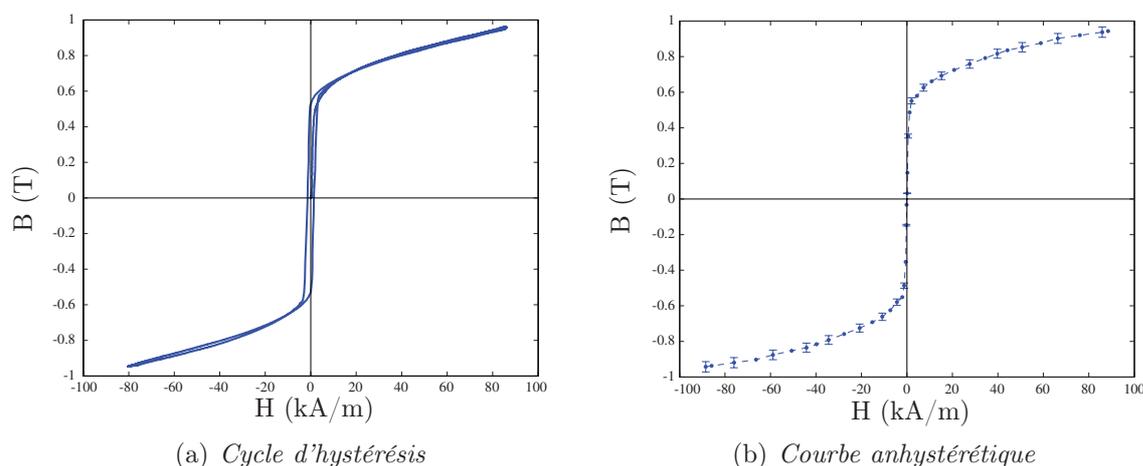


Figure 2.23 – Mesure du comportement magnétique à contrainte nulle d'échantillons de Terfenol-D

### 2.4.3 Comportement magnéto-mécanique

Nous n'avons présenté jusqu'à présent que les propriétés magnétiques et mécaniques découplées du Terfenol-D. L'objet de ce paragraphe est de mettre en évidence expérimentalement les effets de couplage magnéto-mécanique.

#### 2.4.3.1 Déformation de magnétostriction à contrainte nulle

Les jauges d'extensométrie (sens longitudinal et sens transversal) collées sur chacune des éprouvettes, permettent d'avoir accès en continu à une déformation d'origine magnétique. On a vu (§2.2.4) que cette déformation a deux origines possibles : l'effet des forces magnétiques et la magnétostriction. Seule cette dernière nous intéresse, il convient d'évaluer la déformation associée aux efforts magnétiques afin de la retrancher des mesures effectuées. Nous avons vu (paragraphe 2.2.4.4) que ces

déformations sont négligeables, si bien que la déformation de magnétostriction peut être directement identifiée à la déformation mesurée ([Galopin et al., 2007a]).

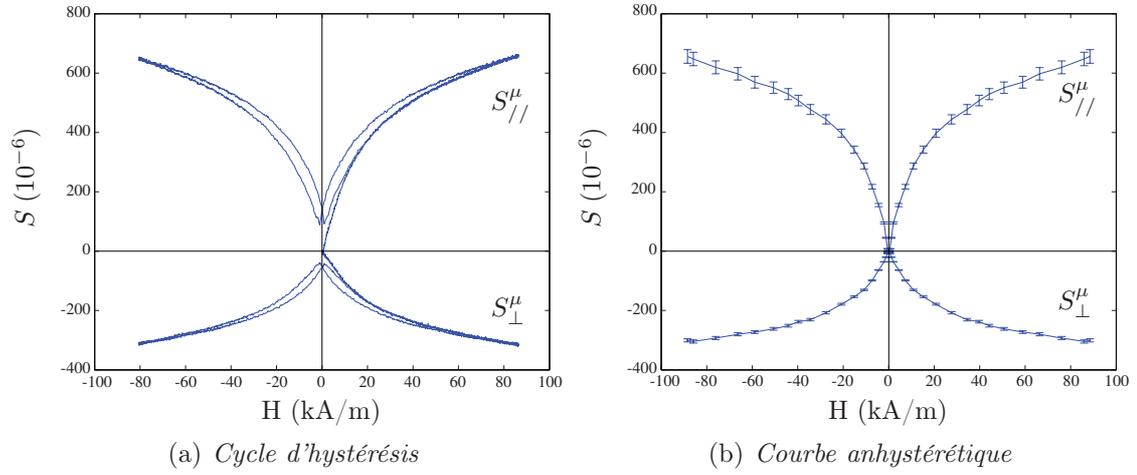


Figure 2.24 – Mesure de la déformation de magnétostriction à contrainte nulle d'échantillons de Terfenol-D

Les mesures effectuées mettent en évidence le caractère fortement non-linéaire du comportement magnétostrictif en fonction du champ magnétique (figure 2.24). Celui-ci est associé à une déformation de magnétostriction élevée, qui en l'absence de pré-contrainte, est environ 10 fois plus importante que pour les matériaux ferromagnétiques classiques. On peut également noter que la déformation de magnétostriction transversale  $S_{\perp}^{\mu}$  est moitié moindre que la déformation de magnétostriction longitudinale  $S_{//}^{\mu}$  (figure 2.24).

### 2.4.3.2 Déformation de magnétostriction sous contraintes à champ nul

La déformation de magnétostriction sous contrainte à champ nul permet de mettre en évidence ce qui est communément appelé l'effet  $\Delta E$ . L'effet  $\Delta E$  est souvent vu comme une perte apparente de linéarité dans le comportement élastique d'un échantillon désaimanté. Il peut aussi être interprété comme la conséquence de l'état de contraintes sur la déformation de magnétostriction  $S^{\mu}$  (§1.2.3.2). L'application d'une contrainte induit une réorganisation de la distribution en domaines du matériau. L'équilibre magnétique du matériau est par conséquent modifié. Il en résulte une déformation de magnétostriction, déformation spontanée associée à l'évolution de la micro structure en domaines. La déformation totale est alors la somme d'une déformation élastique  $S^e$  et de la déformation de magnétostriction  $S^{\mu}$ .

$$\mathbb{S} = \mathbb{S}^e + \mathbb{S}^{\mu} \quad (2.7)$$

Le module d'Young, représentatif du comportement élastique du matériau, ne dépend pas de l'état magnétique du matériau.

L'effet  $\Delta E$  est très marqué pour le Terfenol-D. La figure 2.25(a) met en évidence cet effet pour une contrainte de compression avec la déformation totale mesurée dans la direction parallèle à la contrainte appliquée.

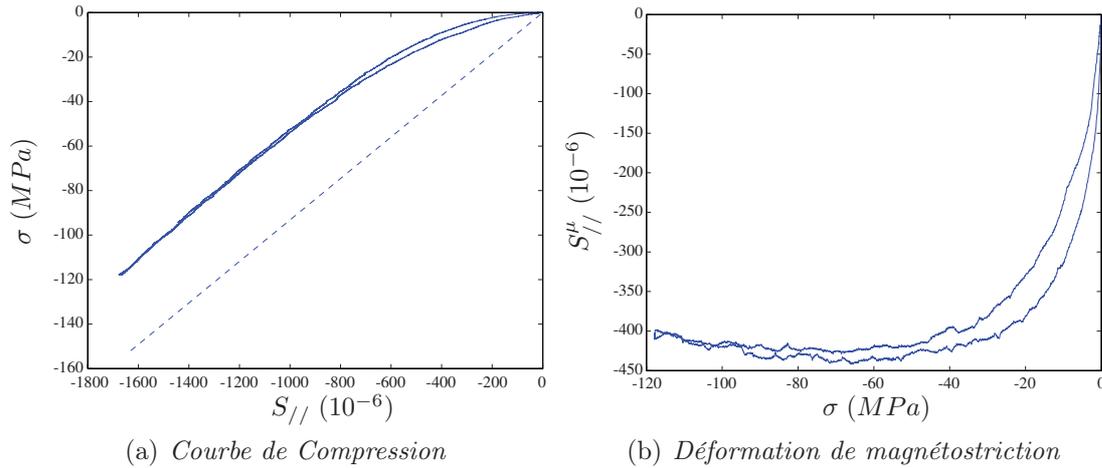


Figure 2.25 – Illustration de l'effet  $\Delta E$  sur un essai de compression d'un échantillon de Terfenol-D

Le comportement linéaire attendu a été reporté sur la figure 2.25(a) à partir de la connaissance du module d'Young  $Y^{exp}$ . À partir de la mesure de la déformation totale et de la contrainte appliquée, il est donc possible de déduire la part de la déformation de magnétostriction :

$$S_{//}^{\mu} = S_{//}^{mes} - \frac{\sigma_{//}}{Y^{exp}} \quad (2.8)$$

La déformation de magnétostriction ainsi obtenue, lissée par moyenne mobile afin d'atténuer le bruit de mesure, est représentée sur la figure 2.25(b). Le niveau obtenu pour la déformation de magnétostriction à saturation est autour de  $450 \cdot 10^{-6}$ . On observe une déformation de magnétostriction qui atteint son niveau maximal pour une contrainte d'environ  $-20 \text{ MPa}$ .

### 2.4.3.3 Déformation de magnétostriction sous contraintes et sous champs

La mesure de la déformation de magnétostriction sous contrainte est un exercice délicat. Le contrôle de l'effort appliqué est la principale difficulté. En effet, les déformations d'autre nature que la magnétostriction doivent être maîtrisées au cours de l'essai, en particulier les déformations élastiques associées au chargement mécanique. La déformation de magnétostriction, d'un ordre de grandeur compris entre  $10^{-6}$  et  $10^{-3}$  selon le matériau caractérisé, induit une contrainte qui perturbera la contrainte appliquée. Le manque de stabilité et de contrôle de l'effort conduisent dans tous les cas à la présence d'une déformation élastique d'amplitude non négligeable et variable dans le temps.

Ce problème de la stabilité de l'effort s'associe à celui de la durée de mesure, lorsque l'on s'intéresse au comportement magnéto-mécanique anhystérétique. Si le temps d'acquisition d'un cycle d'hystérésis est de l'ordre de la seconde, celui d'une courbe anhystérétique est de l'ordre de l'heure en raison des nombreuses aimantations-désaimantations successives nécessaires.

Il paraît donc nécessaire, pour mesurer une déformation de magnétostriction

sous contraintes, de disposer d'un pilotage en effort indépendant de la valeur du champ magnétique. Un pilotage en déplacement conduit en effet à confondre la part de déplacement associée à la contrainte et celle associée à la déformation de magnétostriction. On est ainsi amené à asservir le déplacement de la traverse en fonction de la déformation de magnétostriction, qui dépend elle-même du champ appliqué. La contrainte appliquée dépend alors du niveau de champ magnétique au cours d'un cycle, et la stabilité du chargement mécanique au cours du temps est problématique.

Dans le cas du comportement hystérétique, le temps de mesure est beaucoup plus court, et ces problèmes de stabilité du chargement dans le temps sont moins marqués dans le cas de matériaux ferromagnétiques classiques. Pour ces matériaux, des mesures de déformations d'origine magnétique sous contraintes sont alors envisageables. Néanmoins, dans le cas du Terfenol-D les variations d'effort en cours d'essai sont importantes.

Nous avons prévu de travailler à effort contrôlé, cependant la machine d'essai mécanique ne permet pas à ce jour de garantir une stabilité satisfaisante de l'effort appliqué. Ce problème bien identifié est en partie relatif au correcteur de la boucle d'asservissement en effort. Ce correcteur, un simple proportionnel, ne permet pas de corriger les variations d'effort pendant les phases de caractérisation magnétique. Ainsi, lors d'un essai sous contrainte de compression correspondant à un effort de  $200N$ , les déformations d'origine magnétique induisent une variation d'effort maximal de  $150N$  (figure 2.26). Une analyse complète de la chaîne d'asservissement a permis de mettre en évidence que l'ajout d'un correcteur dérivateur permettrait de corriger de manière notable les fluctuations d'effort (figure 2.26). Ce problème est à ce jour en cours de résolution, mais les mesures que nous présentons par la suite sont des mesures dites à "traverse bloquée".

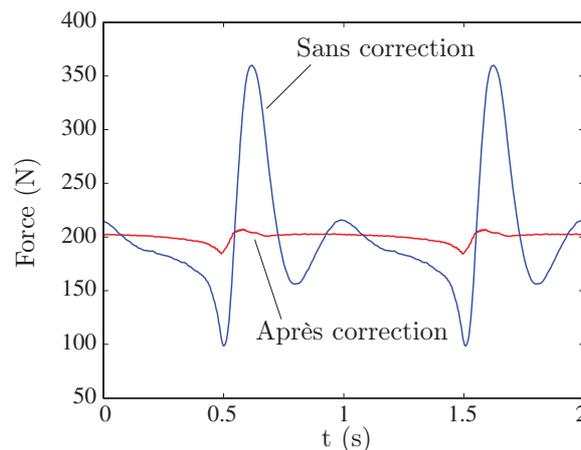


Figure 2.26 – Fluctuation de l'effort mécanique appliqué au cours d'une mesure hystérétique sur un échantillon de Terfenol-D

Le principe est d'imposer un chargement mécanique de l'éprouvette à une valeur cible de contrainte, puis de bloquer tout déplacement de la traverse (figure 2.27). Ce principe est utilisé pour caractériser l'effort maximum développé par les trans-

ducteurs [Dapino, 1999]. Cependant, cette méthode suppose que la déformation de magnétostriction est indépendante de l'état de contraintes, ce qui n'est pas le cas. Ces mesures permettent néanmoins de rendre compte de l'effet d'une contrainte uniaxiale de compression sur le comportement magnétostrictif<sup>9</sup>.

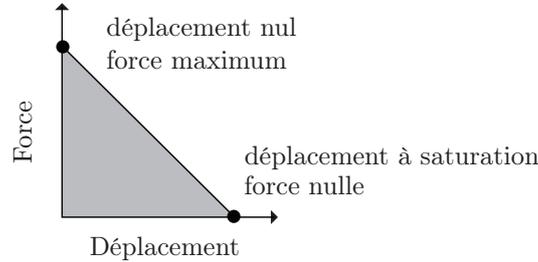


Figure 2.27 – Ligne typique de chargement mécanique quasi-statique

Les essais sous contraintes réalisés par la suite, sont effectués avec le principe de “traverse bloquée”. On impose une contrainte à l'échantillon et on bloque tout déplacement de la traverse pendant la sollicitation magnétique. Il faut noter que l'échantillon peut tout de même se déformer grâce à l'élasticité de la chaîne d'application de l'effort (colonne magnétique, capteur d'effort...). La déformation totale  $\mathbb{S}$  de l'échantillon au cours de l'essai peut être vue comme la somme d'une déformation élastique  $\mathbb{S}^e$ , d'une déformation de magnétostriction induite par l'application de la contrainte  $\mathbb{S}^\mu(0, \sigma)$  (cf. §2.4.3.2) et d'une déformation de magnétostriction induite par le champ magnétique appliqué  $\mathbb{S}_\sigma^\mu(\mathbf{H})$  pour une contrainte donnée.

$$\mathbb{S} = \mathbb{S}^e + \mathbb{S}^\mu(0, \sigma) + \mathbb{S}_\sigma^\mu(\mathbf{H}) \quad (2.9)$$

Cependant, après chargement de l'éprouvette, la déformation est mise à zéro par équilibrage du pont de jauges. La déformation mesurée pendant la sollicitation magnétique correspond alors à la déformation de magnétostriction  $\mathbb{S}_\sigma^\mu(\mathbf{H})$  induite par la sollicitation magnétique pour une contrainte donnée.

L'effet d'une contrainte de compression sur la déformation de magnétostriction du Terfenol-D a un caractère non-monotone. L'augmentation de la contrainte entraîne dans un premier temps, l'augmentation de l'amplitude de la déformation de magnétostriction (figure 2.28). Puis à partir d'une certaine valeur de contrainte, l'effet inverse se produit : l'augmentation continue de la contrainte induit une diminution de l'amplitude de la déformation de magnétostriction (figure 2.29). On note également que la déformation de magnétostriction est très sensible aux faibles niveaux de contraintes. Cependant, cet effet de la contrainte sur la déformation de magnétostriction atteint très rapidement un maximum. La déformation de magnétostriction maximum est obtenue pour une valeur d'environ  $-10 \text{ MPa}$  (figure 2.30) (les mesures de déformations n'ont pas été filtrées d'où les légères fluctuations présentes sur les figures).

---

<sup>9</sup>Il convient de souligner que cette méthode est celle utilisée par tous les dispositifs existants pour caractériser les matériaux à magnétostriction géante.

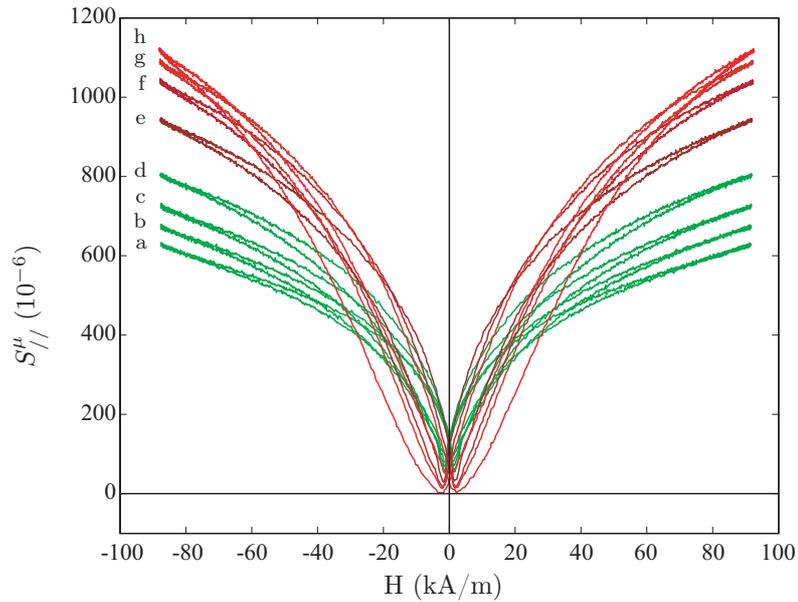


Figure 2.28 – Influence d’une contrainte de compression sur la mesure de la déformation de magnétostriction d’un barreau de Terfenol-D, comportement hystérétique ( $a = 0 \text{ MPa}$ ,  $b = 0,4 \text{ MPa}$ ,  $c = 0,6 \text{ MPa}$ ,  $d = 1,2 \text{ MPa}$ ,  $e = 2,7 \text{ MPa}$ ,  $f = 4,6 \text{ MPa}$ ,  $g = 6,2 \text{ MPa}$ ,  $h = 9,6 \text{ MPa}$ )

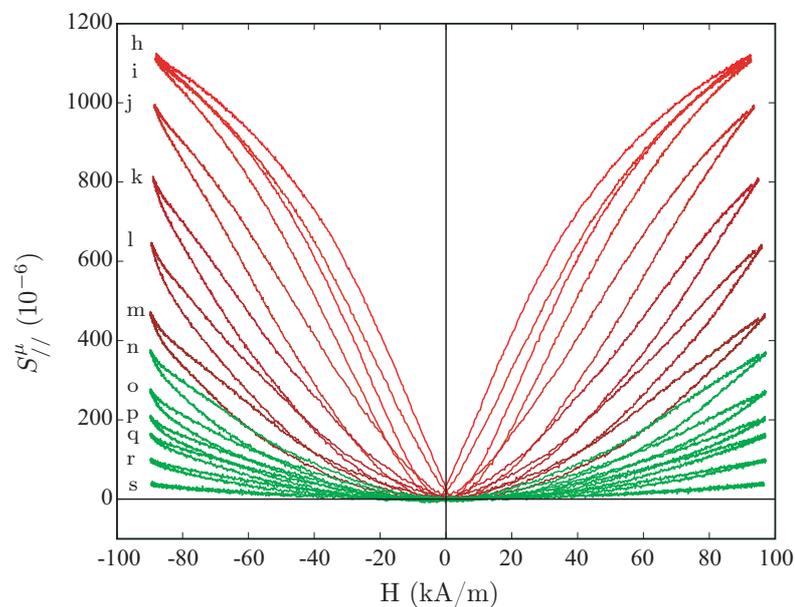


Figure 2.29 – Influence d’une contrainte de compression sur la mesure de la déformation de magnétostriction d’un barreau de Terfenol-D, comportement hystérétique ( $h = 9,6 \text{ MPa}$ ,  $i = 11,7 \text{ MPa}$ ,  $j = 19,6 \text{ MPa}$ ,  $k = 26,3 \text{ MPa}$ ,  $l = 33,1 \text{ MPa}$ ,  $m = 39,1 \text{ MPa}$ ,  $n = 44,3 \text{ MPa}$ ,  $o = 52,3 \text{ MPa}$ ,  $p = 58,7 \text{ MPa}$ ,  $q = 65,3 \text{ MPa}$ ,  $r = 83,5 \text{ MPa}$ ,  $s = 122,1 \text{ MPa}$ )

## 2. Caractérisation du comportement magnéto-mécanique

Ce résultat concorde avec celui obtenu à l'essai sous contraintes et champ nul (§2.4.3.2). La déformation de magnétostriction semble saturée pour une contrainte d'environ  $-20 \text{ MPa}$ .

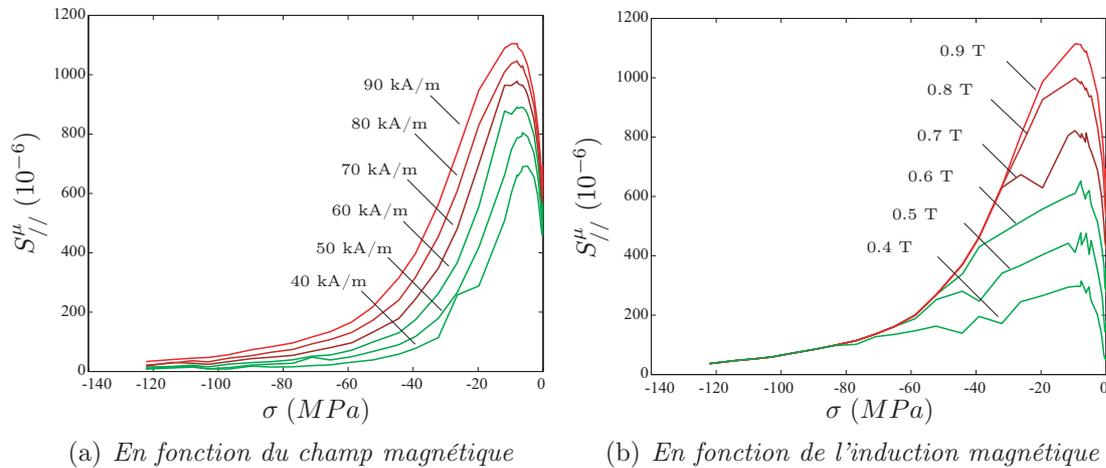


Figure 2.30 – Évolution de la déformation de magnétostriction en fonction de la contrainte mécanique appliquée, pour différentes valeurs de champ magnétique et d'induction magnétique

Ce comportement sous contrainte de compression du Terfenol-D, peut être mis en évidence dans l'évolution de la déformation de magnétostriction en fonction de l'induction magnétique (figure 2.31(a)). L'effet de saturation de la magnétostriction par la contrainte appliquée y est représenté par un comportement atypique. À partir d'un niveau de précontrainte, la déformation de magnétostriction semble ne plus dépendre de la contrainte appliquée (figure 2.31(a)). Par ailleurs, on constate à partir de cette représentation que la déformation de magnétostriction dans le cas du Terfenol-D semble être proportionnelle au carré de l'induction magnétique  $\propto B^2$ .

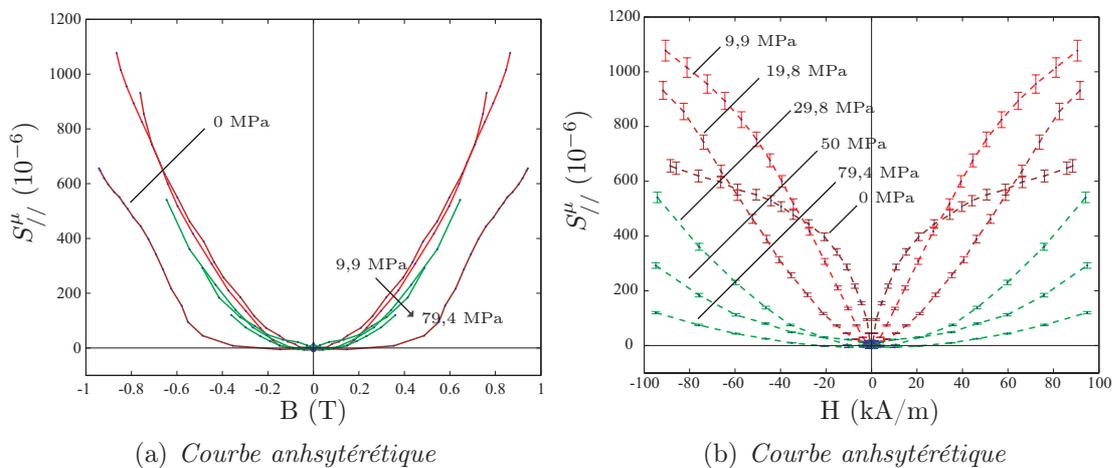


Figure 2.31 – Influence d'une contrainte de compression sur la mesure de la déformation de magnétostriction d'un barreau de Terfenol-D, comportement anhystérique

Une représentation schématique permet d'illustrer ce comportement (figure 2.32). Une représentation très simple d'une configuration en domaine bidimensionnelle y est associée. Si nous faisons l'hypothèse que la saturation magnétique ( $M_s$ ) est atteinte pour des champs magnétiques importants, la configuration en domaine et par conséquent la valeur de la déformation de magnétostriction sont strictement identiques quel que soit l'état de contraintes initial. La déformation de magnétostriction à saturation  $S_{sat}$  est donc une valeur de référence que toutes les courbes doivent atteindre.

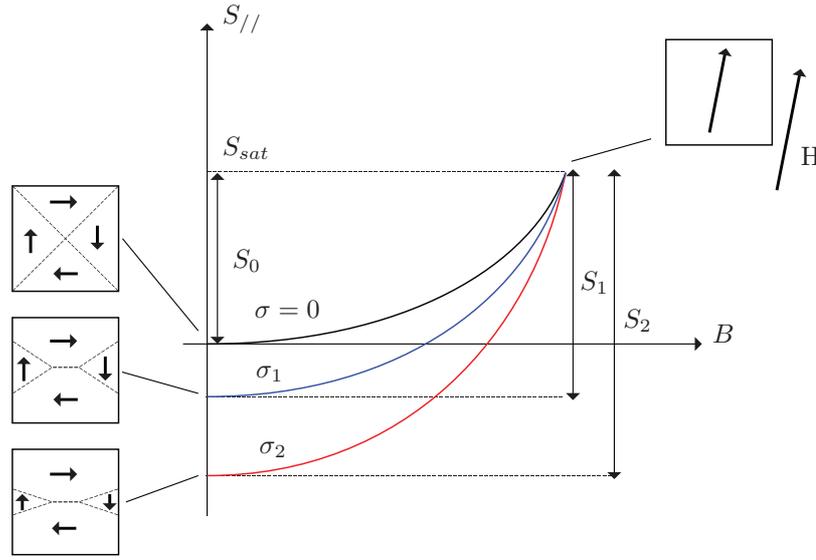


Figure 2.32 – Illustration schématique de la déformation de magnétostriction mesurée  $S(B, \sigma)$

Si nous négligeons la déformation élastique, la déformation totale mesurée correspond à la somme d'une déformation de magnétostriction induite par la contrainte  $S^\mu(\sigma, 0)$  et une déformation de magnétostriction sous champ pour un état de contrainte donné  $S^\mu_\sigma(\mathbf{B})$  :

$$\mathbb{S} = \mathbb{S}^\mu(\sigma, 0) + \mathbb{S}^\mu_\sigma(\mathbf{B}) \quad (2.10)$$

L'application d'une contrainte de compression  $\sigma_1$  induit une réorganisation de la structure en domaines qui sous l'effet d'un champ conduit à une déformation d'amplitude  $S_1$ . Pour une contrainte de compression plus importante, la déformation de magnétostriction obtenue sous champ sera plus importante (figure 2.32). Cependant, si cette contrainte ( $\sigma_2$ ) est suffisante pour saturer la magnétostriction (cf. figure 2.25(b)), les déformations de magnétostriction obtenues sous champ pour toutes valeurs de contrainte supérieures à  $\sigma_2$  seront identiques. À partir d'une valeur de contrainte, la déformation de magnétostriction sous champ devient indépendante de la contrainte appliquée.

#### 2.4.3.4 Comportement magnétique sous contraintes

L'effet des contraintes sur le comportement magnétique est l'effet magnéto-mécanique le plus étudié, en raison de son importance dans le fonctionnement des

dispositifs électromécaniques.

L'asservissement en effort de la machine d'essai mécanique ne permet pas de garantir une stabilité suffisamment satisfaisante de l'effort appliqué (voir §2.4.3.3). Ce problème étant à ce jour en cours de résolution, on adoptera donc ici aussi le principe de caractérisation à "traverse bloquée". Les résultats permettront cependant de rendre compte de l'effet d'une contrainte de compression uniaxiale sur le comportement magnétique du Terfenol-D.

On voit ainsi, figure 2.33, qu'une contrainte uniaxiale de compression tend à dégrader le comportement magnétique. De plus, l'augmentation de la contrainte tend à linéariser le comportement magnétique (notamment dans le cas de forte contrainte). On peut analyser ces résultats en terme de variation de la perméabilité magnétique vis-à-vis de la contrainte mécanique appliquée (figure 2.34). On constate tout d'abord que le Terfenol-D se caractérise par une faible perméabilité magnétique relative, contrairement aux matériaux ferromagnétiques classiques (FeSi, ...). Ce résultat est conforme à ce que l'on pouvait attendre au regard de [Benbouzid, 1994]. En outre, l'augmentation de la contrainte conduit à une forte diminution de la perméabilité magnétique. Cependant, pour des champs magnétiques importants ( $\approx 40 \text{ kA/m}$ ) la perméabilité magnétique relative devient de plus en plus proche de 1 et dépend de moins en moins de l'état de contraintes (figure 2.34).

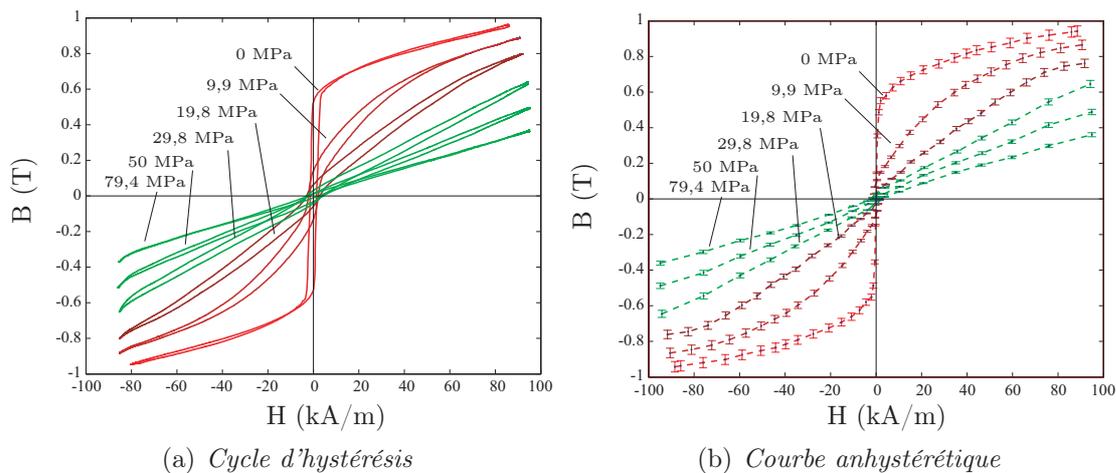


Figure 2.33 – Influence d'une contrainte de compression uniaxiale sur le comportement magnétique du Terfenol-D

## 2.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons mis au point un dispositif expérimental dédié à la caractérisation du comportement magnéto-mécanique des matériaux actifs. Ce dispositif adapté à la caractérisation sous contrainte de matériaux ferromagnétiques, combine l'utilisation d'un circuit magnétique à une machine d'essai mécanique. Ce dispositif est dans un premier temps orienté vers la caractérisation de matériaux massifs sous contrainte de compression. Son adaptation à l'étude de tôles ferromagnétiques sous contrainte de traction est réalisable. Le dispositif, associé à une

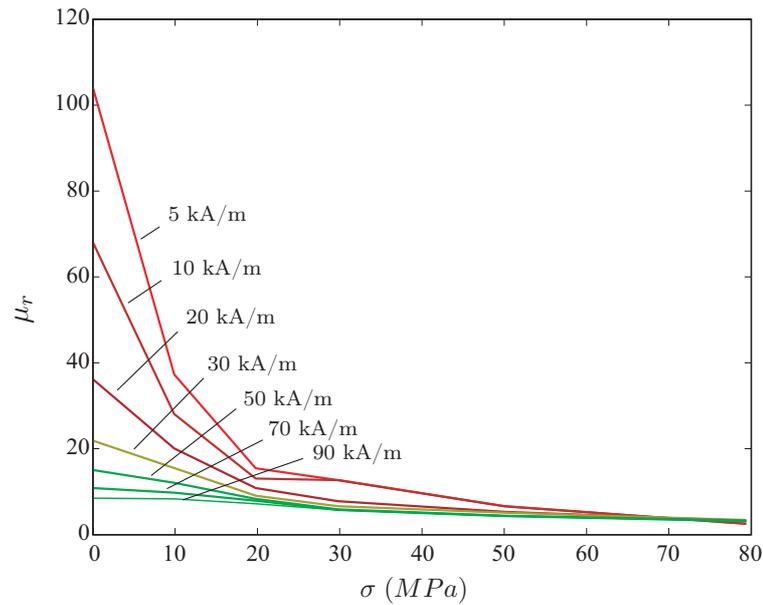


Figure 2.34 – *Perméabilité magnétique relative du Terfenol-D en fonction de la contrainte mécanique appliquée pour différentes amplitudes de champ magnétique*

instrumentation adaptée, permet de mesurer le comportement magnéto-mécanique dans une zone homogène en champ magnétique et en contrainte.

Nous avons donc à notre disposition un outil expérimental permettant d'étudier le comportement de matériaux actifs massifs sur une large gamme de contraintes et de sollicitations magnétiques uniaxiales.

Les résultats portant sur le Terfenol-D présentés dans ce chapitre sont encourageants car ils montrent la pertinence des choix effectués au cours de la conception de ce dispositif expérimental.

Cependant, la stabilité et le contrôle de l'effort appliqué à l'échantillon pendant les phases de sollicitation magnétique ne sont à ce jour pas satisfaisants. Le problème, bien identifié, est attaché au correcteur présent dans l'asservissement en effort de la machine d'essai. Ce problème, en cours de résolution, permettra sous peu d'obtenir des résultats satisfaisants et ainsi fournir une base de données expérimentales de matériaux fortement magnétostrictif. Cette base de données pourra alors appuyer le développement de modèles de comportement magnéto-mécanique des matériaux actifs, qu'il concerne une approche macroscopique ou multi-échelle ([Daniel et Galopin, umis]). Ce point de la modélisation par une approche macroscopique fait l'objet du chapitre suivant.



# Chapitre 3

## Modélisation électro-magnéto-mécanique de matériaux actifs

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Problématique/Contexte . . . . .</b>	<b>73</b>
<b>3.2</b>	<b>Comportement électro-mécanique . . . . .</b>	<b>73</b>
3.2.1	Coefficients piézo-électriques . . . . .	73
3.2.2	Lois de comportement piézoélectrique . . . . .	74
<b>3.3</b>	<b>Comportement magnéto-mécanique . . . . .</b>	<b>75</b>
3.3.1	Coefficients piézo-magnétiques . . . . .	75
3.3.2	Lois de comportement magnéto-mécanique . . . . .	76
3.3.3	Modèle de déformation de magnétostriction . . . . .	79
3.3.4	Identification et influence des paramètres du modèle . . . . .	82
<b>3.4</b>	<b>Approche éléments finis . . . . .</b>	<b>84</b>
3.4.1	Problème électro-mécanique . . . . .	85
3.4.2	Problème magnéto-mécanique . . . . .	92
3.4.3	Problème couplé électro-magnéto-mécanique . . . . .	101
3.4.4	Algorithme de résolution . . . . .	103
<b>3.5</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>109</b>

---



LE CHAPITRE précédent a présenté le comportement magnéto-élastique du Terfenol-D, comportement fortement non-linéaire, et ses propriétés magnétostrictives. Ici on se concentre sur la modélisation de ce matériau en association avec d'autres matériaux actifs, en l'occurrence piézoélectriques. L'objectif est d'obtenir un outil de modélisation numérique apte à modéliser des structures basées sur l'utilisation conjointe de ces matériaux.

### 3.1 Problématique/Contexte

Les matériaux ont un rôle majeur dans les avancées technologiques. Ils permettent d'aboutir à des dispositifs plus performants ou à des structures innovantes tirant partie de leurs propriétés. L'étude des problèmes physiques résulte alors fréquemment de la résolution de systèmes d'équations aux dérivées partielles, qui ne peuvent être résolus analytiquement en raison de la complexité des dispositifs étudiés. Pour une étude fine des dispositifs, des méthodes numériques doivent alors être utilisées pour résoudre les problèmes. La méthode des éléments finis ([Zienkiewicz, 1971]) est une méthode adéquate pour traiter ce type de problème.

La conception d'outils de modélisation pour l'étude de structures à base de matériaux actifs, nécessite de disposer :

- de lois de comportement adaptées décrivant finement le comportement de ces matériaux (prise en compte des comportements fortement couplés, des non-linéarités...),
- de méthodes de calcul numérique robustes pour la résolution des problèmes couplés.

Une fois ces ingrédients réunis, il est nécessaire de valider les modèles développés. Il s'agit de confronter les résultats de simulation à des résultats de l'expérience ou de solutions analytiques sur des structures simples.

## 3.2 Comportement électro-mécanique

Nous rappelons ici les équations relatives au comportement piézo-électrique.

### 3.2.1 Coefficients piézo-électriques

En vertu du premier principe de la thermodynamique, l'énergie interne d'un système électro-mécanique, incluant le travail des efforts extérieurs, le travail du champ électrique et de l'énergie thermique, est définie par la relation :

$$dU = \sigma_{ij}dS_{ij} + E_idD_i + Td\theta \quad (3.1)$$

où  $U$  représente l'énergie interne,  $\theta$  l'entropie et  $T$  la température ( $T = T_0 + \delta T$  avec  $T_0$  la température de référence et  $\delta T$  une petite variation de la température

$\delta T \ll T_0$ ). Par la suite, la convention d'Einstein est adoptée pour la sommation sur les indices répétés. L'enthalpie libre  $G$  (fonction d'état de Gibbs) associée au milieu électro-mécanique, peut s'écrire :

$$G = U - E_i D_i - T\theta \quad (3.2)$$

En tenant compte de l'équation (3.1), la différentielle de l'énergie libre (équation 3.2) s'écrit :

$$dG = \sigma_{ij} dS_{ij} - D_i dE_i - \theta d\delta T \quad (3.3)$$

De (3.3) il découle les relations suivantes :

$$\sigma_{ij} = \left. \frac{\partial G}{\partial S_{ij}} \right|_{\mathbf{E}, T} \quad D_i = - \left. \frac{\partial G}{\partial E_i} \right|_{S, T} \quad \theta = - \left. \frac{\partial G}{\partial \delta T} \right|_{S, \mathbf{E}} \quad (3.4)$$

En considérant que l'équation (3.3) est une différentielle totale exacte, une seconde dérivation conduit aux relations de Maxwell ([Callen, 1985]) pour un système électro-mécanique suivantes :

$$\left. \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial E_m} \right|_{S, T} = - \left. \frac{\partial D_m}{\partial S_{ij}} \right|_{\mathbf{E}, T} \quad \left. \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \delta T} \right|_{S, \mathbf{E}} = - \left. \frac{\partial \theta}{\partial S_{ij}} \right|_{\mathbf{E}, T} \quad \left. \frac{\partial D_m}{\partial \delta T} \right|_{S, \mathbf{E}} = \left. \frac{\partial \theta}{\partial E_m} \right|_{S, T} \quad (3.5)$$

Ces relations permettent d'établir l'égalité entre les coefficients définissant d'une part, l'effet des contraintes sur le comportement électrique, et d'autre part, l'effet d'un champ électrique sur la déformation du matériau. On peut ainsi établir 9 relations, dont six définissent des coefficients de couplage :

$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial S_{kl}} &= C_{ijkl} & \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial E_n} &= -\alpha_{ijn} & \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \delta T} &= -\tau_{ij} \\ \frac{\partial D_m}{\partial S_{kl}} &= \alpha_{mkl} & \frac{\partial D_m}{\partial E_n} &= \varepsilon_{mn} & \frac{\partial D_m}{\partial \delta T} &= \varsigma_m \\ \frac{\partial \theta}{\partial S_{kl}} &= \tau_{kl} & \frac{\partial \theta}{\partial E_n} &= \varsigma_n & \frac{\partial \theta}{\partial \delta T} &= \Theta \end{aligned} \quad (3.6)$
--

Ces coefficients sont les coefficients élastiques ( $C_{ijkl}$ ), piézoélectriques ( $\alpha_{ijn}$ ), diélectriques ( $\varepsilon_{mn}$ ), pyroélectrique ( $\varsigma_m$ ), de dilatation thermique ( $\tau_{ij}$ ) et de chaleur spécifique ( $\Theta$ ).

Ainsi, outre les contributions d'origine purement élastique, électrostatique et thermique, la mise en jeu d'un couplage électro-mécanique se traduit formellement, dans le développement de l'enthalpie libre, par des termes de couplages entre les différentes énergies en présence.

### 3.2.2 Lois de comportement piézoélectrique

Par la suite nous considérons un processus adiabatique et quasi-statique, seuls les termes de couplage piézoélectrique sont considérés.

Les couplages électro-élastique sont généralement décrits par le comportement piézoélectrique (§1.2.3.2), décrivant un comportement linéaire dans une certaine

gamme de variation. Dans le comportement électro-élastique linéaire, l'équation de l'élasticité linéaire et l'équation de la charge en électrostatique sont couplées par l'intermédiaire des coefficients piézoélectriques. Avec les variables d'états définies précédemment, nous aboutissons au système d'équations suivant<sup>1</sup> :

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}(\mathbf{E}, \mathbb{S}) &= C_{ijkl}^{\mathbf{E}} S_{kl} - \alpha_{kij} E_k \\ D_i(\mathbf{E}, \mathbb{S}) &= \alpha_{ikl} S_{kl} + \varepsilon_{ij}^{\mathbb{S}} E_j\end{aligned}\quad (3.7)$$

Selon le choix des variables indépendantes, des formes alternatives au système d'équations précédent peuvent être obtenues ([Std, 1998]).

### 3.3 Comportement magnéto-mécanique

Dans le but de modéliser par les méthodes numériques les phénomènes de couplage magnéto-élastique, nous cherchons à établir, à partir d'hypothèses simples, des lois de comportement couplé. Cependant, ces lois doivent rendre compte avec suffisamment d'exactitude du couplage magnéto-élastique.

#### 3.3.1 Coefficients piézo-magnétiques

L'énergie interne d'un système magnéto-mécanique peut être définie par la relation suivante :

$$dU = S_{ij} d\sigma_{ij} + B_m dH_m + T d\theta \quad (3.8)$$

L'enthalpie libre associée au système magnéto-mécanique, peut s'écrire :

$$G = U - \sigma_{ij} S_{ij} - H_m B_m - T\theta \quad (3.9)$$

En tenant compte de l'équation (3.8), la différentielle de l'énergie libre (équation 3.9) s'écrit :

$$dG = -\sigma_{ij} dS_{ij} - H_m dB_m - \theta d\delta T \quad (3.10)$$

On déduit de cette équation les relations suivantes :

$$\sigma_{ij} = -\left. \frac{\partial G}{\partial S_{ij}} \right|_{\mathbf{B}, T} \quad H_m = -\left. \frac{\partial G}{\partial B_m} \right|_{\mathbb{S}, T} \quad \theta = -\left. \frac{\partial G}{\partial \delta T} \right|_{\mathbb{S}, \mathbf{B}} \quad (3.11)$$

Considérant que l'équation (3.10) est une différentielle totale exacte, les relations de Maxwell pour un système magnéto-mécanique peuvent être définies par :

$$\left. \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial B_m} \right|_{\mathbb{S}, T} = \left. \frac{\partial H_m}{\partial S_{ij}} \right|_{\mathbf{B}, T} \quad \left. \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \delta T} \right|_{\mathbb{S}, \mathbf{B}} = \left. \frac{\partial \theta}{\partial S_{ij}} \right|_{\mathbf{B}, T} \quad \left. \frac{\partial H_m}{\partial \delta T} \right|_{\mathbb{S}, \mathbf{B}} = \left. \frac{\partial \theta}{\partial B_m} \right|_{\mathbb{S}, T} \quad (3.12)$$

Ces relations mettent en évidence l'égalité entre les coefficients définissant d'une part, l'effet des contraintes sur le comportement magnétique, et d'autre part, l'effet

<sup>1</sup>Les lettres en exposant des coefficients (i.e.  $x$ ) rappelles que ceux-ci sont obtenus à  $x$  constant.

d'un champ magnétique sur la déformation du matériau. À partir de ces relations, on peut définir les 9 coefficients associés au milieu magnéto-mécanique considéré :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial S_{kl}} &= C_{ijkl} & \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial B_n} &= \gamma_{ijn} & \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \delta T} &= \tau_{ij} \\
 \frac{\partial H_m}{\partial S_{kl}} &= \gamma_{mkl} & \frac{\partial H_m}{\partial B_n} &= \nu_{mn} & \frac{\partial H_m}{\partial \delta T} &= \vartheta_m \\
 \frac{\partial \theta}{\partial S_{kl}} &= \tau_{kl} & \frac{\partial \theta}{\partial B_n} &= \vartheta_n & \frac{\partial \theta}{\partial \delta T} &= \Theta
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

Ces coefficients sont les coefficients piézomagnétiques ( $\gamma_{ijn}$ ), de reluctivités magnétiques ( $\nu_{mn}$ ) et pyromagnétique ( $\vartheta_m$ ). Une fois encore, on remarque que la mise en jeu d'un couplage se traduit formellement par des termes de couplages entre les différentes énergies en présence. La figure 3.1 illustre cette symétrie entre les couplages associés aux systèmes électro-mécanique et magnéto-mécanique.

### 3.3.2 Lois de comportement magnéto-mécanique

Les résultats de mesure effectués sur des échantillons de Terfenol-D, §2.4, mettent en évidence un comportement fortement couplé entre les propriétés magnétiques et mécaniques (figure 3.2(a)). Cette forte interaction entre les comportements et surtout la forte non-linéarité, rendent compliquées la modélisation de tels phénomènes. En revanche, l'évolution de la déformation de magnétostriction en fonction de l'induction magnétique (figure 3.2(b)) montre deux particularités importantes :

- la déformation de magnétostriction semble ne plus dépendre de la contrainte à partir d'un niveau de précontrainte,
- la déformation de magnétostriction à une allure parabolique ( $\mathbb{S} \propto \mathbf{B}^2$ ).

Par conséquent, il semble judicieux de développer un modèle simple de déformation de magnétostriction, indépendant de la contrainte appliquée et en dépendance quadratique de l'induction magnétique. Cependant, il faut se garder de toute généralisation. Ce comportement est particulier au Terfenol-D pour lequel l'effet de la contrainte sature très rapidement.

Par la suite nous considérons des comportements anhystérétiques, adiabatiques et isothermes.

#### 3.3.2.1 Loi de comportement mécanique

En se plaçant dans le cadre de l'élasticité linéaire, il est possible de décomposer la déformation totale  $\mathbb{S}$  en une déformation élastique  $\mathbb{S}^e$ , due aux contraintes, et une déformation de magnétostriction  $\mathbb{S}^\mu$ , supposée dépendre seulement de l'induction

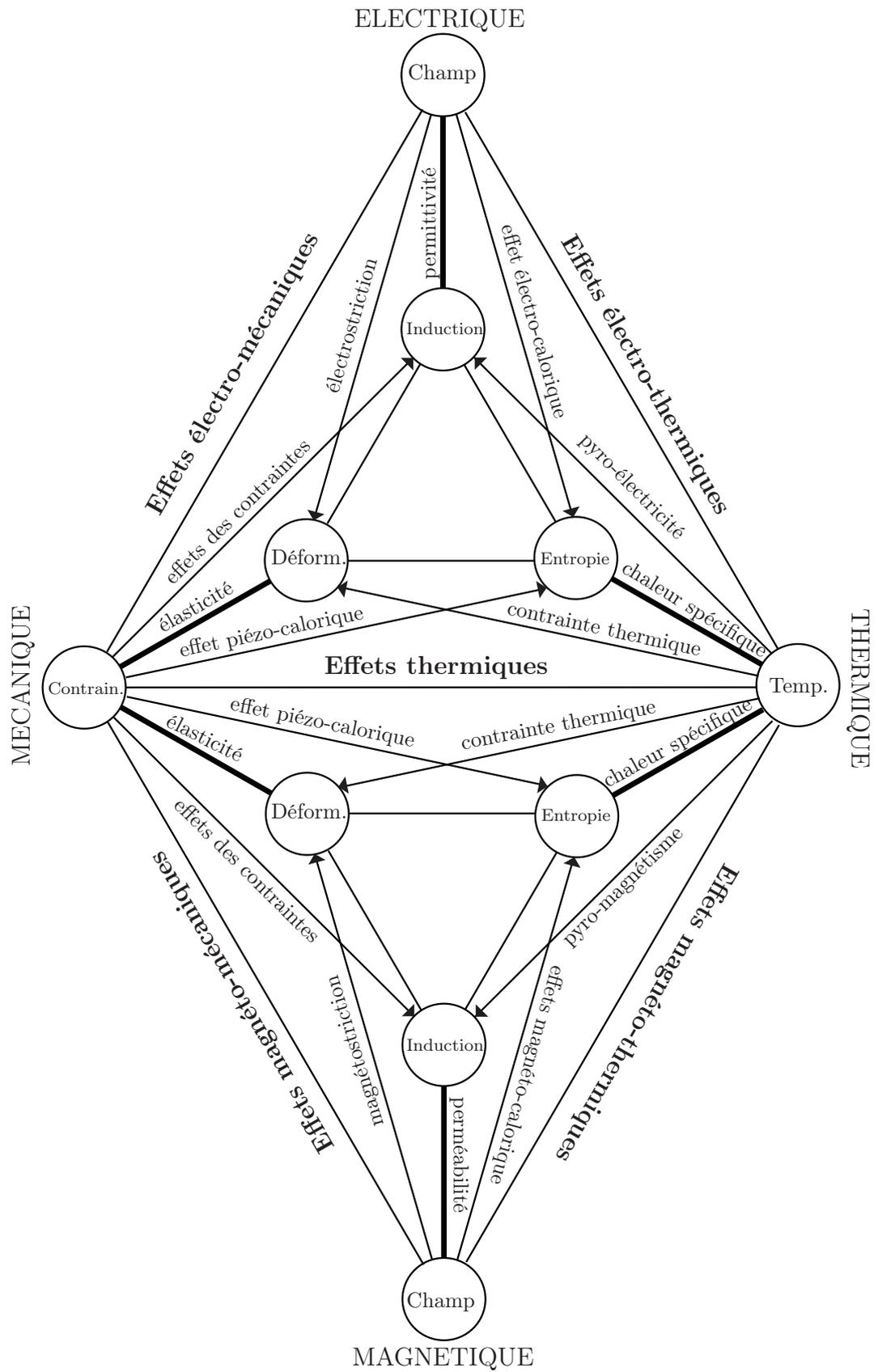


Figure 3.1 – Couplages thermodynamiques

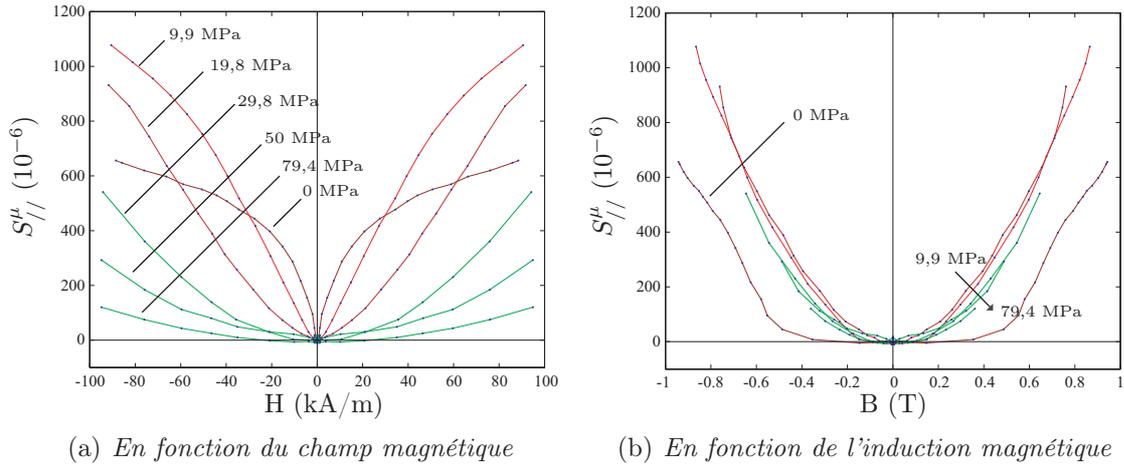


Figure 3.2 – Mesures de déformation de magnétostriction sur un échantillon de Terfenol-D

magnétique, ([Hirsinger et Billardon, 1995]) :

$$S_{kl} = S_{kl}^e(\sigma) + S_{kl}^{\mu}(\mathbf{B}) \quad (3.14)$$

Avec ces hypothèses, la loi de Hooke s'écrit :

$$\sigma_{ij}(\mathbf{B}, \mathbb{S}) = C_{ijkl}(S_{kl} - S_{kl}^{\mu}(\mathbf{B})) \quad (3.15)$$

où  $S_{kl}$  est la déformation totale et  $C_{ijkl}$  le tenseur de rigidité élastique, défini dans le cas de matériaux isotrope par :

$$C_{ijkl} = \frac{Y^*}{1 + \nu^*} \left( \frac{\nu^*}{1 - 2\nu^*} \delta_{kl} \delta_{ij} + \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \right) \quad (3.16)$$

avec  $Y^*$  le module d'Young,  $\nu^*$  le coefficient de Poisson et  $\delta$  le symbole de Kronecker. Cette loi de comportement nécessite pour être utilisée, l'établissement d'un modèle associé à la déformation de magnétostriction.

#### 3.3.2.2 Loi de comportement magnétique

À partir de la définition des coefficients piézomagnétiques (3.13) et de la loi de comportement mécanique, il est possible de déterminer une loi définissant le comportement magnétique. En intégrant les coefficients piézomagnétiques (3.13) par rapport à la déformation, on obtient :

$$H_i(\mathbf{B}, \mathbb{S}) = H_i^0(\mathbf{B}, 0) + \int_0^{S_{kl}} \gamma_{ikl} dS'_{kl} \quad (3.17)$$

Pour les comportements magnéto-mécanique, les fortes non-linéarités doivent être prises en considération dans l'établissement des lois de comportement (à l'inverse

du comportement électro-mécanique (§3.2.2)). Dans ce cas, la loi de comportement magnétique s'écrit :

$$\begin{aligned} H_i(\mathbf{B}, \mathbb{S}) &= H_i^0(\mathbf{B}, 0) - C_{klnp} \frac{\partial S_{np}^\mu(\mathbf{B})}{\partial B_i} S_{kl} \\ &= H_i^0(\mathbf{B}, 0) - H_i^c(\mathbf{B}, \mathbb{S}) \end{aligned} \quad (3.18)$$

où  $H_i^c(\mathbf{B}, \mathbb{S})$  correspond à un champ magnétique coercitif induit par l'effet des contraintes, et  $H_i^0(\mathbf{B}, 0)$  le champ magnétique à déformation nulle. Ce dernier terme est identifié à partir de caractéristiques expérimentales qui doivent être obtenues à déformation nulle. On peut les obtenir si le dispositif de caractérisation est capable de bloquer tout déplacement de l'échantillon. Or, expérimentalement l'élasticité de la chaîne d'application de l'effort empêche l'obtention de ces caractéristiques. Il semble plus approprié d'explicitier la loi de comportement non pas à déformation nulle, mais à contrainte nulle, soit  $\mathbb{S} = \mathbb{S}^\mu$ . Ce que peuvent réaliser plus facilement les bancs de caractérisation. En changeant les bornes d'intégration en conséquence, l'équation (3.17) devient :

$$\begin{aligned} H_i(\mathbf{B}, \mathbb{S}) &= H_i^0(\mathbf{B}, \mathbb{S}^\mu) - C_{klnp} \frac{\partial S_{np}^\mu(\mathbf{B})}{\partial B_i} (S_{kl} - S_{kl}^\mu(\mathbf{B})) \\ &= H_i^0(\mathbf{B}, \mathbb{S}^\mu) - H_i^c(\mathbf{B}, \mathbb{S}) \end{aligned} \quad (3.19)$$

De cette façon, la loi de comportement magnétique est explicitée à partir de courbes expérimentales correspondant à un comportement à contrainte nulle.

### 3.3.3 Modèle de déformation de magnétostriction

Les lois de comportement mécanique et magnétique établies précédemment, sont liées par un terme de couplage représentant l'effet des contraintes sur le comportement magnétique et la déformation de magnétostriction. Ce terme de couplage nécessite la définition d'une loi relative au comportement magnétostrictif. Nous reprenons ici un modèle ayant déjà fait l'objet de développement au LGEP ([Azoum, 2005]).

#### 3.3.3.1 Hypothèses

Le modèle développé pendant les travaux de thèse de Karim Azoum fait les hypothèses suivantes :

- le comportement magnétostrictif est isotrope et les déformations principales de magnétostriction sont isochores ([Hirsinger, 1994], [Jiles, 1991], [Delaere, 2002]),
- les déformations de magnétostriction sont des fonctions quadratiques de l'induction magnétique ([Jiles, 1995]),

– le comportement magnétostrictif est réversible.

Ce modèle indépendant de la contrainte est adapté au Terfenol-D pour lequel l'effet des contraintes sature très rapidement. La deuxième hypothèse ne permet pas de rendre compte du phénomène de saturation de la déformation de magnétostriction, ce qui la limite aux faibles valeurs de l'induction magnétique. Un modèle basé sur des fonctions polynomiales paires d'ordre supérieur<sup>2</sup> est mieux à même de décrire ce comportement par un choix adapté des coefficients polynomiaux ([Galopin et al., 2006b]).

### 3.3.3.2 Modèle tensoriel polynomial

En fonction des hypothèses précédentes, le tenseur des déformations de magnétostriction défini dans le référentiel lié à la direction de l'induction magnétique  $(B_{\parallel}, B_{\perp_1}, B_{\perp_2})^3$  peut se mettre sous la forme suivante ([Hirsinger, 1994]) :

$$\begin{aligned} \mathbb{S}^{\mu}(\mathbf{B}) &= \begin{pmatrix} S_{\parallel}^{\mu}(\mathbf{B}) & 0 & 0 \\ 0 & S_{\perp_1}^{\mu}(\mathbf{B}) & 0 \\ 0 & 0 & S_{\perp_2}^{\mu}(\mathbf{B}) \end{pmatrix} \\ &= \sum_{n=0}^N \beta_n \mathbf{B}^{2(n+1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.20)$$

Ce modèle, équivalent au comportement élastique isotrope d'un matériau incompressible soumis à une contrainte uniaxiale selon son axe longitudinal, est seulement valide dans le repère de l'induction magnétique. Il est donc nécessaire de l'exprimer dans le repère associé au matériau, pour que les déformations de magnétostriction soient exploitables<sup>4</sup>. La méthode des angles d'Euler permet de décrire ce changement de base, en exprimant les composantes du tenseur de déformation, définies dans le repère de l'induction magnétique, dans la base du matériau (figure 3.3).

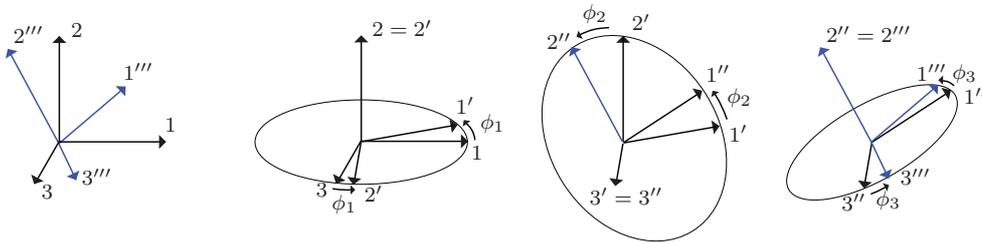


Figure 3.3 – Définition des angles d'Euler

Le tenseur de déformation de magnétostriction dans le repère associé au matériau s'écrit sous la forme matricielle suivante :

<sup>2</sup>La déformation de magnétostriction est un phénomène de symétrie pair.

<sup>3</sup>La composante  $B_{\parallel}$  étant prise parallèle à la direction de  $\mathbf{B}$ .

<sup>4</sup>Ceci pour pouvoir prendre en compte le phénomène de magnétostriction quelle que soit la distribution de l'induction magnétique dans le matériau.

$$\mathbb{S}^\mu(\mathbf{B}) = \sum_{n=0}^N \beta_n \mathbf{B}^{2n} \begin{pmatrix} B_1^2 - \frac{B_2^2 + B_3^2}{2} & \frac{3}{2} B_1 B_2 & \frac{3}{2} B_1 B_3 \\ \frac{3}{2} B_2 B_1 & B_2^2 - \frac{B_1^2 + B_3^2}{2} & \frac{3}{2} B_2 B_3 \\ \frac{3}{2} B_3 B_1 & \frac{3}{2} B_3 B_2 & B_3^2 - \frac{B_1^2 + B_2^2}{2} \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

La forme indicielle associée est définie par la relation 3.22 :

$$S_{kl}^\mu(\mathbf{B}) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^N \beta_n \mathbf{B}^{2n} (3B_k B_l - \delta_{kl} \mathbf{B}^2) \quad (3.22)$$

L'expression du tenseur de déformation de magnétostriction est maintenant définie. Nous allons à présent l'intégrer dans l'expression des lois de comportement magnéto-mécanique définies précédemment.

### 3.3.3.3 Intégration dans les lois de comportement

À partir de la connaissance du tenseur de déformation de magnétostriction, il est possible de définir une expression du champ coercitif intervenant dans la définition de la loi de comportement magnétique (3.19).

$$H_i^c(\mathbf{B}, \mathbb{S}) = 2\mu^* \frac{\partial S_{kl}^\mu(\mathbf{B})}{\partial B_i} (S_{kl} - S_{kl}^\mu) \quad (3.23)$$

où, par souci de simplification, nous utilisons les coefficients de Lamé dans l'écriture. Ces coefficients<sup>5</sup> sont définis par les relations suivantes :

$$\mu^* = \frac{Y^*}{2(1 + \nu^*)} \quad \lambda^* = \frac{Y^* \nu^*}{(1 + \nu^*)(1 - 2\nu^*)} \quad (3.24)$$

À partir de l'expression du tenseur de déformation de magnétostriction, il est possible d'expliciter le champ coercitif  $H_i^c(\mathbf{B}, \mathbb{S})$  par le produit d'un tenseur de reluctivités équivalentes et de l'induction magnétique :

$$H_i^c(\mathbf{B}, \mathbb{S}) = \nu_{ij}^c(\mathbf{B}, \mathbb{S}) B_j \quad (3.25)$$

où  $\nu_{ij}^c(\mathbf{B}, \mathbb{S})$  correspond au tenseur des reluctivités équivalentes de magnétostriction, induites par l'effet des contraintes appliquées. Ce tenseur peut à son tour être décomposé en un produit de deux tenseurs, dépendant respectivement de l'induction magnétique et de la déformation élastique :

$$\nu_{ij}^c(\mathbf{B}, \mathbb{S}) = \Psi_{ik}^c(\mathbf{B}) \Gamma_{kj}^c(\mathbb{S} - \mathbb{S}^\mu) \quad (3.26)$$

<sup>5</sup>Ces coefficients constituent un autre paramétrage des modules élastiques pour les matériaux homogènes isotropes, et sont liés aux coefficients élastiques du matériau.

Ces deux tenseurs sont définis par les relations (3.27) et (3.28) :

$$\Psi_{ij}^c(\mathbf{B}) = \sum_{n=0}^N \beta_n \mathbf{B}^{2n} \left( \delta_{ij} + n \frac{B_i B_j}{\mathbf{B}^2} \right) \quad (3.27)$$

$$\Gamma_{ij}^c(\mathbb{S}) = 2\mu^* (3S_{ij} - \delta_{ij} tr(\mathbb{S})) \quad (3.28)$$

où  $tr$  désigne la trace du tenseur. Cette écriture permet d'une part, de rendre compréhensible l'expression du tenseur de reluctivités équivalentes, et d'autre part, de faciliter son intégration dans un code de calcul. Cette écriture générique montre que le tenseur de reluctivités équivalentes est fonction des coefficients du modèle polynomial de déformation de magnétostriction. On peut noter qu'en raison de la dépendance en contrainte, ce tenseur est anisotrope.

Ce modèle est indépendant de la contrainte appliquée, et est donc valable à partir d'une contrainte de référence  $\sigma^{ref}$ , cas du Terfenol-D, ou pour des matériaux dont l'effet de la contrainte est négligeable voire nulle sur le comportement magnétostrictif. Les lois de comportement magnéto-mécanique dans le cadre bidimensionnel sont définies en Annexe C.

### 3.3.4 Identification et influence des paramètres du modèle

Afin de modéliser le comportement magnéto-mécanique à l'aide du modèle présenté, il est nécessaire de connaître les paramètres indispensables à son utilisation. Ces paramètres sont de trois types :

- les "modules" élastiques (module d'Young et coefficient de Poisson) du matériau modélisé,
- une caractéristique magnétique  $\mathbf{B} = f(\mathbf{H})$  à contrainte nulle ( $\nu_{bh}(\mathbf{B})$ ),
- les coefficients  $\beta_n$  du modèle de déformation de magnétostriction.

Les deux premiers types de paramètres s'identifient aisément à l'aide de résultats expérimentaux. Pour l'identification des coefficients  $\beta_n$ , une procédure d'optimisation a été mise en place pendant les travaux de thèse de Karim Azoum ([Azoum, 2005]). Cette optimisation est réalisée à partir de la connaissance d'un réseau de courbe  $\mathbf{H}(\mathbf{B}, \sigma)$ , dont la loi de comportement<sup>6</sup> peut être définie par :

$$H_i(\mathbf{B}, \sigma) = H_i(\mathbf{B}, \sigma^{ref}) - \frac{\partial S_{kl}^\mu(\mathbf{B})}{\partial B_i} (\sigma_{kl} - \sigma_{kl}^{ref}) \quad (3.29)$$

Puisque la loi de comportement magnétique  $\mathbf{H}(\mathbf{B}, \sigma)$  dépend explicitement de  $\mathbb{S}^\mu$ , il est possible de déterminer, dans le cadre d'étude unidimensionnelle, les coefficients  $\beta_n$  du modèle de déformation de magnétostriction.

---

<sup>6</sup>Cette loi de comportement est recalée sur la courbe expérimentale obtenue à une contrainte de référence  $\sigma^{ref}$ , contrainte pour laquelle le comportement magnétostrictif ne dépend plus de la contrainte appliquée. Pour l'établissement de cette loi de comportement magnétique, une autre écriture des coefficients piézomagnétiques est utilisée, prenant en compte l'induction magnétique et la contrainte comme variables d'états :  $\left. \frac{\partial H_i}{\partial \sigma_{kl}} \right|_{\mathbf{B}} = - \left. \frac{\partial S_{kl}}{\partial B_i} \right|_{\sigma}$

La méthode d'optimisation repose sur une régression polynomiale au sens des moindres carrés, entre les valeurs expérimentales  $H(B_{\parallel}, \sigma_{\parallel})$  et les valeurs calculées  $\hat{H}(B_{\parallel}, \sigma_{\parallel})$ . Cette méthode d'optimisation, valable pour toutes les contraintes de compression supérieures à la contrainte de référence  $\sigma^{ref}$ , est définie par la fonctionnelle suivante :

$$f_{\beta_n} = \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \left( H \left( (B_{\parallel}^i)^j, \sigma_{\parallel}^i \right) - \hat{H} \left( (B_{\parallel}^i)^j, \sigma_{\parallel}^i \right) \right)^2 \quad (3.30)$$

avec<sup>7</sup> :

$$\begin{aligned} \hat{H} \left( (B_{\parallel}^i)^j, \sigma_{\parallel}^i \right) = & H \left( (B_{\parallel}^i)^j, \sigma^{ref} \right) \\ & - \left( \sum_{n=0}^N 2(n+1)\beta_n \left( (B_{\parallel}^i)^j \right)^{2n+1} \right) (\sigma_{\parallel}^i - \sigma^{ref}) \end{aligned} \quad (3.31)$$

où  $l$  et  $m$  représente respectivement le nombre de contraintes appliquées et le nombre de points expérimentaux.  $N$  définit l'ordre du polynôme du modèle de déformation de magnétostriction.

La minimisation de la fonctionnelle  $f_{\beta_n}$  par rapport aux coefficients  $\beta_n$  permet ainsi de déterminer les coefficients du modèle. Les valeurs numériques des coefficients  $\beta_n$ , adaptés à un modèle de déformation de magnétostriction du second et quatrième ordre, sont données dans le tableau (3.3.4).

Ordre du modèle	Coefficient du modèle de magnétostriction
2 <sup>ième</sup>	$\beta_0 = 24.10^{-4}$
4 <sup>ième</sup>	$\beta_0 = 27.10^{-4} \quad \beta_1 = -94.10^{-5}$

Tableau 3.1 – Coefficients  $\beta_n$  du modèle polynomial obtenus par minimisation de la fonctionnelle  $f_{\beta_n}$ , pour du Terfenol-D

Les modèles du second et quatrième ordre restent très proches pour des inductions magnétiques inférieures à  $0,6T$ . Le comportement parabolique du modèle du second ordre ne permet pas, en effet, de rendre compte de la saturation du matériau. Néanmoins, il reste adapté pour des modélisations sous faible niveau d'induction magnétique. Le modèle du quatrième ordre rend compte de l'effet de saturation, et permet de décrire assez précisément les comportements magnétique (figure 3.4(a)) et magnétostrictif (figures 3.4(b) - 3.5) sous contraintes. L'ajout de coefficients d'ordre supérieur dans le modèle ( $\beta_2, \beta_3, \dots$ ) peut encore améliorer la modélisation.

Une alternative à la détermination des coefficients  $\beta_n$  du modèle, peut être réalisée à partir d'un réseau de courbe  $\mathbb{S}^{\mu}(\mathbf{B}, \sigma)$ , tout en utilisant la même procédure

<sup>7</sup>L'expression du modèle de déformation de magnétostriction dans le référentiel de l'induction magnétique est utilisée. L'expression de la déformation de magnétostriction dans le référentiel lié au matériau (3.22), a été établie à partir de celle dans le référentiel de l'induction. Par conséquent, d'un référentiel à un autre les coefficients  $\beta_n$  sont identiques, seule l'expression de la déformation de magnétostriction change.

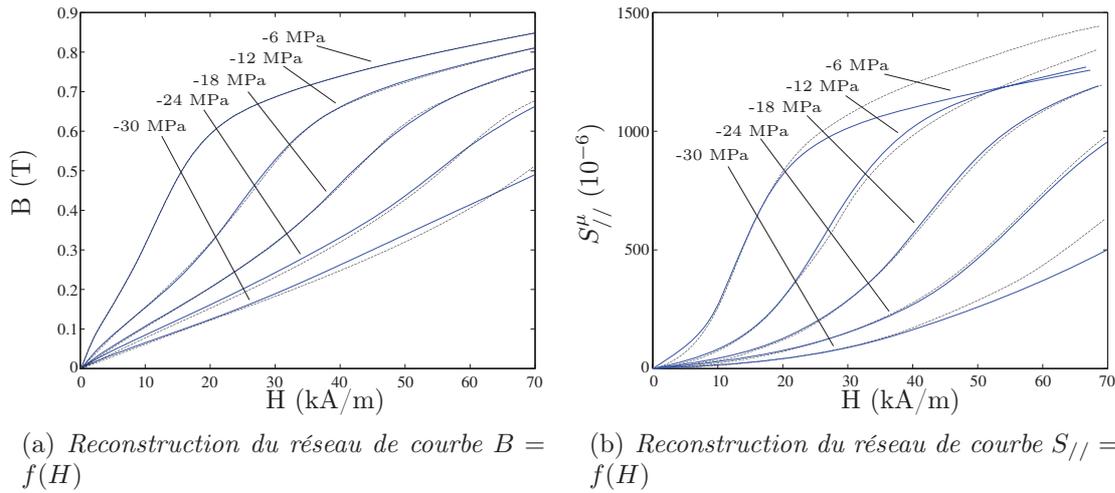


Figure 3.4 – Réseaux de courbes expérimentales (traits pleins) et reconstitués (traits pointillés) d'échantillons de Terfenol-D, d'après [Azoum, 2005]

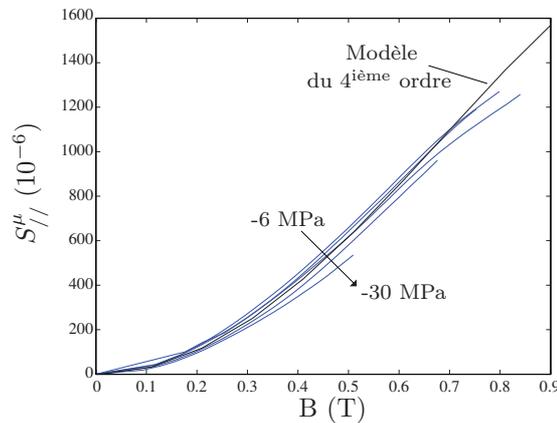


Figure 3.5 – Reconstruction du réseau de courbe  $S_{//} = f(B)$

d'optimisation. Les résultats obtenus avec cette procédure sont cependant moins bons.

### 3.4 Approche éléments finis

L'établissement de modèles numériques est une étape essentielle pour disposer d'outils de calcul adaptés à la modélisation de dispositifs à base de matériaux actifs. Or, il n'existe à ce jour aucun logiciel de modélisation permettant de prendre en compte le comportement couplé et non-linéaire des matériaux magnétostrictifs. De même, aucun logiciel ne permet l'étude de structures associant divers matériaux actifs. Les potentialités offertes par de tels outils permettraient pourtant de favoriser le développement et l'amélioration de structures innovantes basées sur l'utilisation de ces matériaux.

La résolution des problèmes couplés, magnétostrictif et piézoélectrique, conduit implicitement à la résolution de systèmes d'équations aux dérivées partielles. La résolution numérique de tels problèmes s'appuie généralement sur des méthodes du

type différences finies, éléments finis, volumes finis. . . Nous avons retenu la méthode des éléments finis pour sa facilité d'utilisation et d'intégration des lois de comportement.

Notre objectif est d'obtenir un outil apte à modéliser des structures combinant des matériaux magnétostrictifs et piézoélectriques. La première étape est de disposer de formulations associées aux problèmes magnéto-mécanique et piézo-électrique. Une combinaison de ces formulations peut ensuite être envisagée pour une résolution couplée de ces problèmes.

### 3.4.1 Problème électro-mécanique

La formulation du problème électro-mécanique tient compte des phénomènes de couplage au travers des lois de comportement piézo-électrique définies précédemment (paragraphe 3.2.2). La formulation associée à ce problème peut être obtenue à partir de la minimisation d'une fonctionnelle d'énergie. Sa forme discrétisée, dans le cadre de la méthode des éléments finis, sera explicitée par la suite.

#### 3.4.1.1 Hypothèses

Nous donnons ici les hypothèses sur lesquelles repose la formulation du problème magnéto-mécanique.

- on considère un régime quasi-statique,
- on se place dans l'hypothèse des petites perturbations (faibles déformations, faibles déplacements),
- les phénomènes sont réversibles. Les phénomènes dissipatifs ne sont par conséquent pas considérés dans l'établissement de la formulation du problème.

#### 3.4.1.2 Choix des variables d'état

Pour la définition des lois de comportement piézo-électrique, le champ électrique  $\mathbf{E}$  et la déformation  $\mathbb{S}$  ont été choisis comme variables d'état. Elles conduisent naturellement à une formulation en potentiel scalaire magnétique  $\phi$ , pour la variable d'état électrique, et à une formulation en déplacement  $\mathbf{u}$ , pour la variable d'état mécanique. Par la suite, nous utilisons la notation vectorielle pour les tenseurs d'ordres 2 et 4 (contrainte, déformation. . .). Conformément aux hypothèses, la relation liant le potentiel scalaire électrique au champ électrique est donnée par :

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi \quad (3.32)$$

Dans l'hypothèse des petites perturbations (HPP), faibles déformations et déplacements, le vecteur de déformation est relié au vecteur déplacement par :

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad \text{avec} \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} \\ &= \nabla^s \mathbf{u} \end{aligned} \quad (3.33)$$

où  $\nabla^s$  désigne l'opérateur gradient symétrique défini par :

$$\nabla^s = \begin{pmatrix} \partial_x & 0 & 0 \\ 0 & \partial_y & 0 \\ 0 & 0 & \partial_z \\ 0 & \partial_z & \partial_y \\ \partial_z & 0 & \partial_x \\ \partial_y & \partial_x & 0 \end{pmatrix} \quad (3.34)$$

### 3.4.1.3 Formulation variationnelle du problème électro-mécanique

Le problème électro-mécanique peut être défini, dans un cadre quasi-statique, par la minimisation d'une fonctionnelle d'énergie, équivalente à la résolution des équations d'équilibre (1.5) et (1.10). Cette fonctionnelle d'énergie, intégrant les phénomènes de couplage piézoélectrique, est définie en terme de champ électrique  $\mathbf{E}$  et de déformation  $\mathbf{S}$  par :

$$E(\mathbf{E}, \mathbf{S}) = W(\mathbf{E}, \mathbf{S}) - T \quad (3.35)$$

où  $W(\mathbf{E}, \mathbf{S})$  désigne l'énergie potentielle électro-élastique et  $T$  le travail des sources électriques et mécaniques, définies par :

$$W(\mathbf{E}, \mathbf{S}) = \int_{\Omega_p} \left( \int_0^{\mathbf{E}} \mathbf{D}(\mathbf{E}', 0) d\mathbf{E}' + \int_0^{\mathbf{S}} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{E}, \mathbf{S}') d\mathbf{S}' \right) d\Omega_p \quad (3.36)$$

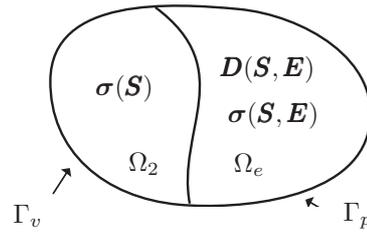
$$T = \int_{\Omega_e} \phi \rho d\Omega_e + \int_{\Gamma_d} \phi (\mathbf{D} \cdot \mathbf{n}) d\Gamma_d + \int_{\Omega_p} \mathbf{u} \mathbf{f}^\Omega d\Omega_p + \int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{u} \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) d\Gamma_\sigma \quad (3.37)$$

avec  $\rho$  la densité de charge électrique,  $\mathbf{f}$  le vecteur densité de forces volumiques et  $\mathbf{n}$  le vecteur normal. Les conditions aux limites associées au problème électro-mécanique sont :

$$\text{Conditions aux limites électriques : } \begin{cases} \mathbf{E} \times \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \Gamma_e, \\ \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} = \rho_s & \text{sur } \Gamma_d. \end{cases} \quad (3.38)$$

$$\text{Conditions aux limites mécaniques : } \begin{cases} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{f}^\Gamma & \text{sur } \Gamma_\sigma, \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_0 & \text{sur } \Gamma_u. \end{cases} \quad (3.39)$$

$\Gamma_p = \Gamma_e \cup \Gamma_d$  et  $\Gamma_v = \Gamma_\sigma \cup \Gamma_u$  sont les limites associées au domaine d'étude défini par  $\Omega_p = \Omega_e \cup \Omega_2$  (figure 3.6).  $\mathbf{f}^\Gamma$  est associé aux densités de forces surfaciques.


 Figure 3.6 – *Domaine d'étude du problème électro-mécanique*

En tenant compte de l'expression des lois de comportement piézo-électrique (3.7), l'énergie potentielle électro-élastique  $W(\mathbf{E}, \mathbf{S})$  s'écrit :

$$W(\mathbf{E}, \mathbf{S}) = \int_{\Omega_p} \left( \frac{1}{2} \mathbf{E} [\boldsymbol{\varepsilon}^s] \mathbf{E} + \frac{1}{2} \mathbf{S} [\mathbf{C}^E] \mathbf{S} - \mathbf{S} [\boldsymbol{\alpha}]^t \mathbf{E} \right) d\Omega_p \quad (3.40)$$

où  $[\boldsymbol{\varepsilon}^s]$  est le tenseur des permittivité diélectrique à déformation constante,  $[\mathbf{C}^E]$  le tenseur d'élasticité à champ électrique constant et  $[\boldsymbol{\alpha}]$  le tenseur des coefficients piézoélectriques. Trois termes sont alors identifiables dans l'écriture de l'énergie potentielle : un terme d'énergie purement électrique, un terme d'énergie purement mécanique et un terme d'énergie mutuelle liée au couplage des comportements électrique et mécanique.

$$\begin{aligned} W(\mathbf{E}, \mathbf{S}) &= \int_{\Omega_p} \frac{1}{2} \mathbf{E} [\boldsymbol{\varepsilon}^s] \mathbf{E} d\Omega_p && : \text{énergie d'origine} \\ & && \text{électrique} \\ &+ \int_{\Omega_p} \frac{1}{2} \mathbf{S} [\mathbf{C}^E] \mathbf{S} d\Omega_p && : \text{énergie d'origine} \\ & && \text{mécanique} \\ &- \int_{\Omega_p} \mathbf{S} [\boldsymbol{\alpha}]^t \mathbf{E} d\Omega_p && : \text{énergie de couplage} \end{aligned} \quad (3.41)$$

Par application du principe des travaux virtuels, on déduit de la fonctionnelle d'énergie (3.35) les formulations électrique (3.42) et mécanique (3.43) du problème électro-mécanique, associées à des variations élémentaires  $\delta\phi$  et  $\delta\mathbf{u}$ .

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega_p} \nabla \delta\phi [\boldsymbol{\varepsilon}^s] \nabla \phi d\Omega_p + \int_{\Omega_p} \mathbf{S} [\boldsymbol{\alpha}]^t \nabla \delta\phi d\Omega_p \\ &- \int_{\Omega_e} \delta\phi \rho d\Omega_e - \int_{\Gamma_d} \delta\phi (\mathbf{D} \cdot \mathbf{n}) d\Gamma_d = 0 \quad \forall \delta\phi \end{aligned} \quad (3.42)$$

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega_p} \mathbf{S}(\delta \mathbf{u}) [\mathbf{C}^E] \mathbf{S} d\Omega_p + \int_{\Omega_p} \mathbf{S}(\delta \mathbf{u}) [\boldsymbol{\alpha}]^t \nabla \phi d\Omega_p \\
 & + \partial_u \left( \int_{\Omega_p} \left( \int_0^E \mathbf{D}(\mathbf{E}', 0) d\mathbf{E}' \right) d\Omega_p \right) - \int_{\Omega_p} \delta \mathbf{u} \mathbf{f}^\Omega d\Omega_p - \int_{\Gamma_\sigma} \delta \mathbf{u} \mathbf{f}^\Gamma d\Gamma_\sigma = 0 \quad \forall \delta \mathbf{u}
 \end{aligned} \tag{3.43}$$

Les deuxièmes termes dans les formulations électrique (3.42) et mécanique (3.43) correspondent aux termes de couplage entre les comportements électrique et mécanique. Le troisième terme de la formulation mécanique (3.43) correspond aux forces électrostatiques s'exerçant sur le milieu diélectrique. Celles-ci sont souvent négligeables dans le comportement piézoélectrique et ne seront pas prises en compte par la suite.

#### 3.4.1.4 Formulation éléments finis du problème électro-mécanique

L'étude de l'interaction électro-mécanique pour une structure quelconque peut être très complexe, et dans la plupart des cas, l'utilisation des méthodes numériques est indispensable. La méthode des éléments finis, retenue ici, consiste à définir un domaine d'étude restreint et discrétisé sur lequel on cherche la solution de la formulation d'un problème. On travaille ainsi sur un espace de fonctions de dimensions finies, se rapportant à la résolution d'un système d'équations algébriques, donnant dès lors une solution approchée du problème étudié.

Nous nous limitons ici à décrire la formulation éléments finis tridimensionnelle du problème électro-mécanique. La formulation adaptée à une analyse bidimensionnelle de problèmes électro-mécanique est décrite en Annexe D.

La discrétisation spatiale du domaine d'étude  $\Omega_p$  est réalisée par des volumes élémentaires. Ceux-ci sont de forme simple comme des hexaèdres, tétraèdres, prismes. Chaque élément, noté  $\Omega_e$ , est constitué de  $n_n^e$  nœuds,  $n_a^e$  arêtes et  $n_f^e$  facette. Le maillage du domaine  $\Omega_T$  est alors formé de l'ensemble de ces entités. On notera  $n_n$ ,  $n_a$ ,  $n_f$  et  $n_e$  respectivement le nombre de nœuds, d'arêtes, de facettes et d'éléments du maillage. Par la suite nous considérons un maillage formé exclusivement de tétraèdres (figure 3.7).

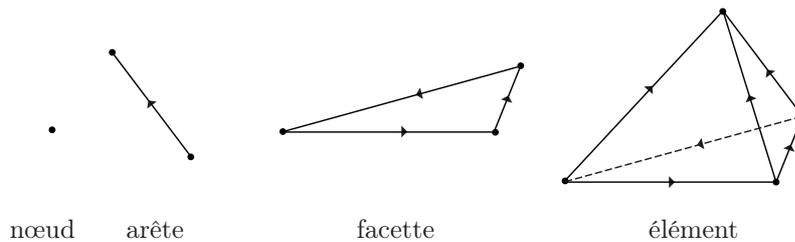


Figure 3.7 – *Éléments géométriques*

### Discrétisation électrique

Compte tenu de la discrétisation, le potentiel scalaire électrique  $\phi$  est approximé à partir de sa connaissance en chaque nœud du maillage. L'interpolation permettant de déterminer le potentiel scalaire en un point quelconque d'un élément  $\Omega_e$  du domaine d'étude  $\Omega_p$  est donnée par :

$$\phi = \sum_{n=1}^{n_\phi} \tilde{\phi}_n w_n \quad (3.44)$$

où le coefficient  $\tilde{\phi}_n$  correspond à la valeur du potentiel électrostatique au nœud  $n$  et  $w_n$  la fonction de forme associée au nœud  $n$ .  $n_\phi$  désigne le nombre de nœuds "électriques". Le champ électrique est par conséquent relié au potentiel scalaire électrique par les dérivées (3.32) des fonctions de forme, tel que :

$$E_n^j = -\partial_j \sum_{n=1}^{n_\phi} \tilde{\phi}_n w_n \quad j = \{x, y, z\} \quad (3.45)$$

Ce qui peut se mettre sous la forme suivante :

$$\{\mathbf{E}\} = -[\mathbf{G}_\phi]\{\phi\} \quad (3.46)$$

avec :

$$[\mathbf{G}_\phi] = \begin{bmatrix} \{\mathbf{w}_x\}^t \\ \{\mathbf{w}_y\}^t \\ \{\mathbf{w}_z\}^t \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} \{\mathbf{w}_x\} &= \{\partial_x w_1, \dots, \partial_x w_{n_\phi}\}^t \\ \{\mathbf{w}_y\} &= \{\partial_y w_1, \dots, \partial_y w_{n_\phi}\}^t \\ \{\mathbf{w}_z\} &= \{\partial_z w_1, \dots, \partial_z w_{n_\phi}\}^t \end{aligned} \quad (3.47)$$

$$\{\mathbf{E}\} = \{\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \dots, \mathbf{E}_{n_\phi}\}^t = \{E_1^x, E_1^y, E_1^z, E_2^x, \dots, E_{n_\phi}^z\}^t \quad (3.48)$$

$$\{\phi\} = \{\phi_1, \dots, \phi_{n_\phi}\}^t \quad (3.49)$$

### Discrétisation mécanique

Le déplacement  $\mathbf{u}$  est approximé à partir de sa connaissance en chaque nœud du maillage appartenant au domaine mécanique  $\Omega_p$ . On notera  $n_m$  le nombre de nœuds associés au domaine mécanique. L'interpolation est définie par :

$$u_j = \sum_{n=1}^{n_m} u_{jn} w_n \quad j = \{1, 2, 3\} \quad (3.50)$$

avec  $u_{jn}$  la composante  $j$  du déplacement au nœud  $n$  et  $w_n$  la fonction de forme associée au nœud  $n$ . Cette écriture peut se mettre sous la forme :

$$\mathbf{u} = \sum_{n=1}^{n_m} \mathbf{W}_n \tilde{\mathbf{u}}_n = [\mathbf{W}]\{\tilde{\mathbf{u}}\} \quad (3.51)$$

avec :

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{W}] &= \left[ \begin{array}{ccc|ccc|ccc} w_1 & 0 & 0 & w_2 & 0 & 0 & \dots & w_{n_m} & 0 & 0 \\ 0 & w_1 & 0 & 0 & w_2 & 0 & \dots & 0 & w_{n_m} & 0 \\ 0 & 0 & w_1 & 0 & 0 & w_2 & \dots & 0 & 0 & w_{n_m} \end{array} \right] \\
 &= [w_1 \mathbf{I}, w_2 \mathbf{I}, \dots, w_{n_m} \mathbf{I}] \\
 &= [\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2, \dots, \mathbf{W}_{n_m}]
 \end{aligned} \tag{3.52}$$

$$\{\mathbf{u}\} = \{\tilde{\mathbf{u}}_1, \tilde{\mathbf{u}}_2, \dots, \tilde{\mathbf{u}}_{n_m}\}^t = \{\tilde{u}_x^1, \tilde{u}_y^1, \tilde{u}_z^1, \tilde{u}_x^2, \dots, \tilde{u}_z^{n_m}\}^t \tag{3.53}$$

Dans ces définitions, la quantité  $[\mathbf{W}]$  représente la matrice  $(3 \times 3n_m)$  des fonctions de forme nodales tridimensionnelles  $w_n(x, y, z)$  ( $n = 1, 2, \dots, n_m$ ), composée de  $n_m$  sous-matrices diagonales  $\mathbf{W}_n$  ( $n = 1, 2, \dots, n_m$ ) et où  $\mathbf{I}$  représente la matrice identité d'ordre 3. La variable  $\{\tilde{\mathbf{u}}\}$  correspond au vecteur des déplacements nodaux, renfermant les  $3n_m$  approximations des déplacements physiques réels  $\tilde{u}_j^n$  ( $n = 1, 2, \dots, n_m; j = x, y, z$ ) des points nodaux, réunis dans les sous-vecteurs nodaux  $\tilde{\mathbf{u}}_n$  ( $n = 1, 2, \dots, n_m$ ).

Pour ordonner le classement des composantes du déplacement associées à chaque nœud, il est possible d'écrire le vecteur des déformations  $\{\mathbf{S}\}$  comme la combinaison d'une matrice de permutation  $[\mathbf{P}]$  et de l'opérateur différentiel  $\{\nabla_u\}$  appliqué au vecteur des déplacements  $\{\mathbf{u}\}$  :

$$\{\mathbf{S}\} = [\mathbf{P}]\{\nabla_u\} \tag{3.54}$$

définis par :

$$[\mathbf{P}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.55}$$

$$\{\nabla_u\} = \{\partial_x u_x, \partial_y u_x, \partial_z u_x, \partial_x u_y, \dots, \partial_z u_z\}^t \tag{3.56}$$

Compte tenu de l'expression (3.51), on peut expliciter le vecteur des déformations  $\{\mathbf{S}\}$  en fonction du vecteur des déplacements nodaux  $\{\mathbf{u}\}$  de l'élément par :

$$\begin{aligned}
 \{\mathbf{S}\} &= [\mathbf{P}][\nabla \mathbf{W}]\{\mathbf{u}\} \\
 &= [\mathbf{G}_u]\{\mathbf{u}\}
 \end{aligned} \tag{3.57}$$

où :

$$[\nabla \mathbf{W}] = \begin{bmatrix} \nabla_{\mathbf{w}} & 0 & 0 \\ 0 & \nabla_{\mathbf{w}} & 0 \\ 0 & 0 & \nabla_{\mathbf{w}} \end{bmatrix} \quad \nabla_{\mathbf{w}} = \begin{bmatrix} \partial_x w_1 & \partial_x w_2 & \dots & \partial_x w_{n_m}^e \\ \partial_y w_1 & \partial_y w_2 & \dots & \partial_y w_{n_m}^e \\ \partial_z w_1 & \partial_z w_2 & \dots & \partial_z w_{n_m}^e \end{bmatrix} \tag{3.58}$$

### Formulation mécanique discrétisée du problème électro-mécanique

La discrétisation choisie, conduit à la forme discrète de la formulation mécanique (3.43) du problème électro-mécanique, qui doit être vérifiée pour n'importe quelle variation arbitraire des déplacements  $\delta \mathbf{u}$  (3.43) :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_p} [\mathbf{G}_u]^t [\mathbf{C}^E] [\mathbf{G}_u] \{\mathbf{u}\} d\Omega_p + \int_{\Omega_p} [\mathbf{G}_u]^t [\boldsymbol{\alpha}]^t [\mathbf{G}_\phi] \{\phi\} d\Omega_p \\ - \int_{\Omega_p} [\mathbf{W}]^t \{\mathbf{f}^\Omega\} d\Omega_p - \int_{\Gamma_\sigma} [\mathbf{W}]^t \{\mathbf{f}^\Gamma\} d\Gamma_\sigma = 0 \end{aligned} \quad (3.59)$$

Après assemblage, la formulation mécanique discrétisée se réduit à la résolution d'un ensemble d'équations algébriques défini par le système matriciel suivant :

$$[\mathbf{K}_{uu}] \{\mathbf{u}\} + [K_{u\phi}] \{\phi\} = \{\mathbf{f}\} \quad (3.60)$$

où  $\{\mathbf{f}\}$  est le vecteur des forces nodales correspondant aux efforts extérieurs appliqués.

### Formulation électrique discrétisée du problème électro-mécanique

En accord avec la discrétisation retenue, la formulation électrique (3.42) du problème électro-mécanique, qui doit être vérifiée pour n'importe quelle variation arbitraire du potentiel électrostatique  $\delta \phi$ , s'écrit :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_p} -[\mathbf{G}_\phi]^t [\boldsymbol{\varepsilon}^S] [\mathbf{G}_\phi] \{\phi\} d\Omega_p + \int_{\Omega_p} \{\mathbf{u}\}^t [\mathbf{G}_u]^t [\boldsymbol{\alpha}]^t [\mathbf{G}_\phi] d\Omega_p \\ - \int_{\Omega_e} [\mathbf{W}]^t \rho d\Omega_e - \int_{\Gamma_d} [\mathbf{W}]^t \rho_s d\Gamma_d = 0 \end{aligned} \quad (3.61)$$

Après assemblage, le système d'équations algébriques à résoudre est défini par le système matriciel suivant :

$$[\mathbf{K}_{\phi\phi}] \{\phi\} + [K_{u\phi}]^t \{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{Q}\} \quad (3.62)$$

où  $\{\mathbf{Q}\}$  est le vecteur des charge électriques nodales.

La résolution du problème électro-mécanique est alors équivalente à résoudre le système matriciel suivant :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{u\phi} \\ \mathbf{K}_{u\phi}^t & \mathbf{K}_{\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{Q} \end{pmatrix} \quad (3.63)$$

dont les expressions élémentaires des matrices et seconds membres, définies dans l'élément de référence, sont :

$$\mathbf{K}_{uu}^e = \int_{\Omega_e} [\nabla \mathbf{W}]^t [\mathbf{P}]^t [\mathbf{C}^E] [\mathbf{P}] [\nabla \mathbf{W}] |\mathbf{J}| d\Omega_e \quad (3.64)$$

$$\mathbf{K}_{u\phi}^e = \int_{\Omega_e} [\nabla \mathbf{W}]^t [\mathbf{P}]^t [\boldsymbol{\alpha}]^t [\mathbf{B}_\phi] |\mathbf{J}| d\Omega_e \quad (3.65)$$

$$\mathbf{K}_{\phi\phi}^e = - \int_{\Omega_e} [\mathbf{B}_\phi]^t [\boldsymbol{\varepsilon}^s] [\mathbf{B}_\phi] |\mathbf{J}| d\Omega_e \quad (3.66)$$

$$\mathbf{f} = \int_{\Omega_e} [\mathbf{W}]^t \{ \mathbf{f}^\Omega \} |\mathbf{J}| d\Omega_e + \int_{\Gamma_e} [\mathbf{W}]^t \{ \mathbf{f}^\Gamma \} |\mathbf{J}| d\Gamma_e \quad (3.67)$$

$$\mathbf{Q} = \int_{\Omega_e} [\mathbf{W}]^t \rho |\mathbf{J}| d\Omega_e + \int_{\Gamma_e} [\mathbf{W}]^t \rho_s d\Gamma_e \quad (3.68)$$

L'application des conditions aux limites électriques dépend du problème considéré. Les conditions à imposer sont la conservation de la composante tangentielle du champ électrique à travers la surface (3.38) et de la composante normale du déplacement électrique. Lorsqu'une électrode est déposée sur le matériau piézoélectrique, une condition de type Dirichlet ( $\phi = \phi_0$ ) est imposée si l'électrode est mise à la masse ( $\phi_0 = 0$ ), et une condition de type Neumann (3.38) est imposée si l'électrode est en circuit ouvert ( $\rho_s = 0$ ).

### 3.4.2 Problème magnéto-mécanique

La formulation du problème magnéto-mécanique doit prendre en compte les phénomènes de couplage magnéto-mécanique au travers des lois de comportement définies précédemment (paragraphe 3.3.2). La minimisation d'une fonctionnelle d'énergie permet d'établir la formulation de ce problème. Par la suite, nous décrirons sa forme discrétisée par la méthode des éléments finis.

#### 3.4.2.1 Hypothèses

Afin d'établir la formulation du problème magnéto-mécanique, nous définissons les hypothèses sur lesquelles repose le modèle proposé.

- on considère un régime quasi-statique, on se place donc dans le domaine de la magnétostatique et de l'élastostatique,
- on se place dans l'hypothèse des petites perturbations (faibles déformations, faibles déplacements),
- les phénomènes sont réversibles (pas d'hystérésis).

Ces hypothèses impliquent que les phénomènes dissipatifs, comme par exemple les courants de Foucault, ne sont pas considérés.

### 3.4.2.2 Choix des variables d'état

Pour la définition des lois de comportement magnéto-mécanique, l'induction magnétique  $\mathbf{B}$  et la déformation  $\mathbf{S}$  ont été choisies comme variables d'état. Elles conduisent naturellement à une formulation en potentiel vecteur magnétique  $\mathbf{a}$ , pour la variable d'état magnétique, et à une formulation en déplacement  $\mathbf{u}$ , pour la variable d'état mécanique. Par la suite, nous utilisons la notation vectorielle pour les tenseurs d'ordre 2 et 4 (contrainte, déformation...) c.f. notations. Le potentiel vecteur magnétique est lié à l'induction magnétique par<sup>8</sup> :

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{a} \quad (3.69)$$

Son unicité est assurée par l'ajout d'une jauge définissant sa divergence, ici la jauge de Coulomb :

$$\nabla \cdot \mathbf{a} = 0 \quad (3.70)$$

De même que pour le problème électro-mécanique, les déplacements sont liés aux déformations par la relation (3.33).

### 3.4.2.3 Formulation variationnelle du problème magnéto-mécanique

Dans un cadre quasi-statique, la résolution des équations d'équilibre (1.6) et (1.10) qui régissent le problème magnéto-mécanique est équivalente à minimiser une fonctionnelle d'énergie, en terme d'induction magnétique  $\mathbf{B}$  et de déformation  $\mathbf{S}$ , définie par :

$$E(\mathbf{B}, \mathbf{S}) = W(\mathbf{B}, \mathbf{S}) - T \quad (3.71)$$

où  $W(\mathbf{B}, \mathbf{S})$  dénote l'énergie potentielle magnéto-élastique et  $T$  le travail des sources magnétiques et mécaniques. Deux écritures permettent de définir l'expression de l'énergie potentielle magnéto-élastique. En considérant la densité d'énergie magnéto-élastique  $w(\mathbf{B}, \mathbf{S})$ , ces écritures sont définies par les relations (3.72) et (3.73) suivantes :

$$\left. \frac{\partial w(\mathbf{B}, \mathbf{S})}{\partial \mathbf{S}} \right|_{\mathbf{B}} = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{B}, \mathbf{S}) \Rightarrow w(\mathbf{B}, \mathbf{S}) = w(\mathbf{B}, \mathbf{S}^\mu) + \int_{\mathbf{S}^\mu}^{\mathbf{S}} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{B}, \mathbf{S}') d\mathbf{S}' \quad (3.72)$$

$$\left. \frac{\partial w(\mathbf{B}, \mathbf{S})}{\partial \mathbf{B}} \right|_{\mathbf{S}} = \mathbf{H}(\mathbf{B}, \mathbf{S}) \Rightarrow w(\mathbf{B}, \mathbf{S}) = \int_0^{\mathbf{B}} \mathbf{H}(\mathbf{B}', \mathbf{S}) d\mathbf{B}' + w(0, \mathbf{S}) \quad (3.73)$$

<sup>8</sup>La relation (3.69) découle de l'équation de Maxwell définissant la conservation du flux magnétique (1.4).

Le travail  $T$  des sources magnétiques et mécaniques est défini par :

$$T = \int_{\Omega_T} \mathbf{a} \cdot \mathbf{j} d\Omega_T + \int_{\Gamma_h} \mathbf{a} \cdot (\mathbf{H} \times \mathbf{n}) d\Gamma_a + \int_{\Omega_M} \mathbf{u} \cdot \mathbf{f}^\Omega d\Omega_M + \int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{u} \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) d\Gamma_\nu \quad (3.74)$$

avec  $\mathbf{j}$  le vecteur densité de courant,  $\mathbf{f}^\Omega$  le vecteur densité de forces volumiques et  $\mathbf{n}$  le vecteur normal. Les conditions aux limites associées au problème magnéto-mécanique sont de deux types :

$$\text{Conditions aux limites magnétiques : } \begin{cases} \mathbf{H} \times \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \Gamma_h, \\ \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \Gamma_b. \end{cases} \quad (3.75)$$

$$\text{Conditions aux limites mécaniques : } \begin{cases} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{f}^\Gamma & \text{sur } \Gamma_\sigma, \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_0 & \text{sur } \Gamma_u. \end{cases} \quad (3.76)$$

$\Gamma_a = \Gamma_h \cup \Gamma_b$  et  $\Gamma_v = \Gamma_\sigma \cup \Gamma_u$  sont les limites associées aux domaines d'étude et définies par  $\Omega_T = \Omega_M \cup \Omega_0$  et  $\Omega_M = \Omega_m \cup \Omega_1$  (figure 3.8).  $\mathbf{f}^\Gamma$  est associé aux densités de forces surfaciques.

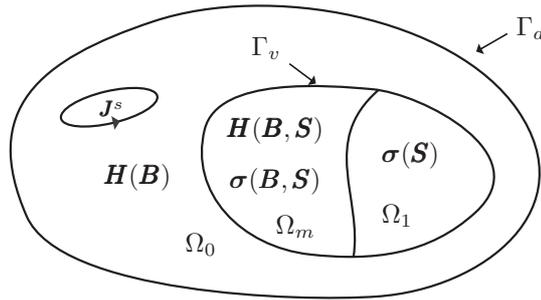


Figure 3.8 – *Domaine d'étude du problème magnéto-mécanique*

À partir de l'expression de la densité d'énergie (3.72) et des lois de comportement magnéto-élastique (3.15) et (3.19), l'énergie potentielle magnéto-élastique  $W(\mathbf{B}, \mathbf{S})$  s'écrit :

$$W(\mathbf{B}, \mathbf{S}) = \int_{\Omega_T} \left( \int_0^{\mathbf{B}} \mathbf{H}(\mathbf{B}', \mathbf{S}^\mu) d\mathbf{B}' + \int_{\mathbf{S}^\mu}^{\mathbf{S}} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{B}, \mathbf{S}') d\mathbf{S}' \right) d\Omega_T \quad (3.77)$$

Ce qui, associé à l'hypothèse d'élasticité linéaire, se met sous la forme :

$$W(\mathbf{B}, \mathbf{S}) = \int_{\Omega_T} \left( \int_0^{\mathbf{B}} \mathbf{H}(\mathbf{B}', \mathbf{S}^\mu) d\mathbf{B}' + \frac{1}{2} (\mathbf{S} - \mathbf{S}^\mu) \mathbf{C} (\mathbf{S} - \mathbf{S}^\mu) \right) d\Omega_T \quad (3.78)$$

On peut identifier trois termes dans l'écriture de l'énergie potentielle (équation 3.79), un terme d'énergie d'origine magnétique, un terme d'énergie d'origine mécanique et un terme d'énergie liée au couplage des comportements magnétique et mécanique.

$$\begin{aligned}
 W(\mathbf{B}, \mathbf{S}) &= \int_{\Omega_T} \left( \int_0^{\mathbf{B}} \mathbf{H}(\mathbf{B}', \mathbf{S}^\mu) d\mathbf{B}' + \frac{1}{2} \mathbf{S}^\mu \mathbf{C} \mathbf{S}^\mu \right) d\Omega_T & : \text{énergie d'origine} \\
 & & \text{magnétique} \\
 &+ \int_{\Omega_M} \frac{1}{2} \mathbf{S} \mathbf{C} \mathbf{S} d\Omega_M & : \text{énergie d'origine} \\
 & & \text{mécanique} \\
 &- \int_{\Omega_m} \mathbf{S} \mathbf{C} \mathbf{S}^\mu d\Omega_m & : \text{énergie} \\
 & & \text{de couplage}
 \end{aligned} \tag{3.79}$$

Par application du principe des travaux virtuels, on déduit de la fonctionnelle d'énergie (3.71) les formulations magnétique (3.80) et mécanique (3.81) du problème magnéto-mécanique, associées à des variations élémentaires  $\delta \mathbf{a}$  et  $\delta \mathbf{u}$ <sup>9</sup>.

$$\begin{aligned}
 &\int_{\Omega_T} \nabla \times \delta \mathbf{a} [\boldsymbol{\nu}_{bh}(B)] \nabla \times \mathbf{a} d\Omega_T + \int_{\Gamma_h} \delta \mathbf{a} \cdot (\mathbf{H} \times \mathbf{n}) d\Gamma_h \\
 &- \int_{\Omega_m} \nabla \times \delta \mathbf{a} \cdot \mathbf{H}^c(\mathbf{B}, \mathbf{S}) d\Omega_m - \int_{\Omega_T} \delta \mathbf{a} \cdot \mathbf{J} d\Omega_a = 0 \quad \forall \delta \mathbf{a}
 \end{aligned} \tag{3.80}$$

$$\begin{aligned}
 &\int_{\Omega_1} \mathbf{S}(\delta \mathbf{u}) [\mathbf{C}] \mathbf{S} d\Omega_1 + \partial_u \left( \int_{\Omega_T} \left( \int_0^{\mathbf{B}} \mathbf{H}(\mathbf{B}', \mathbf{S}^\mu) d\mathbf{B}' \right) d\Omega_T \right) \\
 &- \int_{\Omega_m} \mathbf{S}(\delta \mathbf{u}) [\mathbf{C}] \mathbf{S}^\mu d\Omega_m - \int_{\Omega_M} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{f}^\Omega d\Omega_M - \int_{\Gamma_\sigma} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{f}^\Gamma d\Gamma_\sigma = 0 \quad \forall \delta \mathbf{u}
 \end{aligned} \tag{3.81}$$

où  $[\boldsymbol{\nu}_{bh}(B)]$  est le tenseur des reluctivités magnétiques et  $[\mathbf{C}]$  le tenseur d'élasticité. Les second et troisième termes de l'équation (3.81) représentent respectivement les forces magnétiques, données par l'application du principe des travaux virtuels, et les forces équivalentes de magnétostriction ([Delaere et al., 2000], [Belahcen, 2004]). Ces forces équivalentes de magnétostriction sont des forces fictives qui résulte de l'écriture de la formulation du problème magnéto-mécanique. Elles n'ont aucune origine physique et représentent un terme source équivalent à celui qui générerait une déformation de magnétostriction.

#### 3.4.2.4 Formulation éléments finis du problème magnéto-mécanique

Nous nous limitons ici aussi à décrire la formulation éléments finis tridimensionnelle du problème magnéto-mécanique. La formulation adaptée à une analyse

<sup>9</sup>Pour obtenir ces formulations, l'expression de l'énergie potentielle magnéto-élastique établie à partir de la relation (3.73) permet d'établir directement l'expression (3.80) associée à une variation élémentaire  $\delta \mathbf{a}$ , tandis l'expression (3.81) peut être obtenue directement en considérant l'énergie potentielle magnéto-élastique obtenue par la relation (3.72).

bidimensionnelle de problèmes magnéto-mécaniques est détaillé en Annexe D. Par la suite, nous considérons une discrétisation spatiale du domaine d'étude  $\Omega_T$  formée exclusivement par des éléments tétraédriques.

### Discrétisation magnétique

Compte tenu de la discrétisation, le potentiel vecteur magnétique  $\mathbf{a}$  est approximé à partir de sa circulation sur les arêtes du maillage. On utilise en conséquence des éléments d'arêtes, éléments de Whitney d'ordre 1 ([Bossavit, 1993]), pour interpoler le potentiel vecteur magnétique en un point quelconque d'un élément  $\Omega_e$  du domaine d'étude  $\Omega_T$ . Cette interpolation est définie par :

$$\mathbf{a} = \sum_{a=1}^{n_a} \bar{a}_a \mathbf{w}_a \quad (3.82)$$

où le coefficient  $\bar{a}_a$  correspond à la circulation de  $\mathbf{a}$  le long de l'arête  $a$  et  $\mathbf{w}_a$  la fonction de forme vectorielle, égale à 1 sur l'arête  $a$  et à 0 sur toutes les autres, définie par :

$$\mathbf{w}_a = w_i \nabla w_j - w_j \nabla w_i \quad (3.83)$$

avec  $w_i$  et  $w_j$  les fonctions de forme associées aux nœuds  $i$  et  $j$  de l'arête  $a$ . La fonction  $\mathbf{w}_a$  est continue sur chaque élément et sa composante tangentielle est continue au passage de chaque facette du maillage.

### Discrétisation mécanique

Le déplacement  $\mathbf{u}$  est approximé à partir de sa connaissance en chaque nœud du maillage appartenant au domaine mécanique  $\Omega_M$ . Par conséquent, nous reprenons la notation (3.51) adoptée pour la discrétisation mécanique du problème électro-mécanique.

### Formulation magnétique discrétisée du problème magnéto-mécanique

En accord avec la discrétisation retenue, la formulation magnétique (3.80) du problème magnéto-mécanique, qui doit être vérifiée pour une variation arbitraire du potentiel vecteur magnétique  $\delta \mathbf{a}$ , s'écrit :

$$\begin{aligned} & \sum_{a'=1}^{n_a} \int_{\Omega_T} \{\nabla \times \mathbf{w}_{a'}\}^t [\boldsymbol{\nu}_{bh}(\mathbf{B})] \{\nabla \times \mathbf{w}_{a'}\} \bar{a}_{a'} d\Omega_T + \int_{\Gamma_h} \{\mathbf{w}_a\}^t \cdot \{\mathbf{H} \times \mathbf{n}\} d\Gamma_h \\ & - \int_{\Omega_m} \{\nabla \times \mathbf{w}_a\}^t \{\mathbf{H}^c(\mathbf{B}, \mathbf{S})\} d\Omega_m - \int_{\Omega_T} \{\mathbf{w}_a\}^t \{\mathbf{J}\} d\Omega_T = 0 \quad \forall a \in [1, n_a] \end{aligned} \quad (3.84)$$

L'intégrale sur la frontière  $\Gamma_h$  s'annule naturellement par la condition aux limites homogène sur le champ définie par (3.75). En tenant compte de la relation (3.25), le troisième terme de (3.84) s'écrit :

$$- \int_{\Omega_m} \{\nabla \times \mathbf{w}_a\}^t [\boldsymbol{\nu}^c(\mathbf{B}, \mathbf{S})] \{\nabla \times \mathbf{w}_{a'}\} \bar{a}_{a'} d\Omega_m \quad (3.85)$$

Le système d'équations algébriques à résoudre est alors défini, après assemblage, par le système matriciel suivant :

$$[\mathbf{M}(\mathbf{B}, \mathbf{S})] \{\mathbf{A}\} = \{\mathbf{J}^s\} \quad (3.86)$$

avec  $[\mathbf{M}(\mathbf{B}, \mathbf{S})]$  la matrice de rigidité magnétique,  $\{\mathbf{A}\}$  le vecteur inconnu de la circulation de  $\mathbf{a}$  le long des arêtes et  $\{\mathbf{J}^s\}$  le vecteur source associé à la densité de courant électrique.

Pour définir le terme source, nous adoptons la méthode de calcul par un champ source  $\mathbf{T}^s$  ([Kladas et Tegopoulos, 1992]), tel que :

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{T}^s &= \mathbf{J}^s & \text{dans } \Omega_{T_s} \\ \mathbf{T}^s \times \mathbf{n} &= 0 & \text{sur } \Gamma_{T_s} \end{aligned} \quad (3.87)$$

où  $\Omega_{T_s}$  définit le domaine occupé par l'inducteur et  $\Gamma_{T_s}$  sa surface. On impose comme source une densité de courant  $\mathbf{J}^s$  uniforme dans la section droite d'un inducteur. La densité de courant source étant connue, il est possible de faire un calcul direct de  $\mathbf{T}^s$ . Dans ce cas, le champ de vecteur  $\mathbf{T}^s$  est orienté selon une direction orthogonale à la normale de la section droite de l'inducteur. Ce champ est calculé analytiquement et ensuite interpolé sur les arêtes du maillage. Les éléments d'arêtes pour interpoler  $\mathbf{T}^s$  permettent par ailleurs de prendre en compte de façon très simple la condition sur  $\Gamma_{T_s}$  (3.87), en imposant simplement  $\mathbf{T}^s = 0$  sur les arêtes du maillage de  $\Gamma_{T_s}$ . La figure 3.9, donne un exemple de répartition de  $\mathbf{T}^s$  pour une bobine circulaire de hauteur constante.

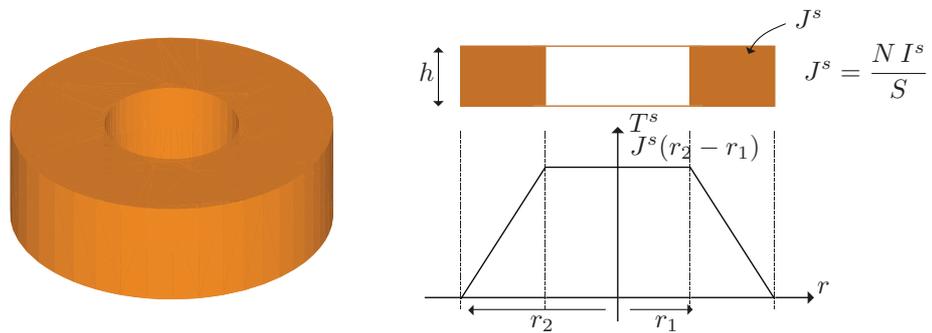


Figure 3.9 – Répartition du champ source  $T^s$  pour une bobine circulaire de hauteur constante

Les expressions élémentaires de la matrice de rigidité magnétique et des seconds membres, sont définies dans l'élément de référence, tel que  $\Omega_T = \bigcup_{e=1}^{n_e} \Omega_e$ , par :

$$\begin{aligned}
 M_{aa'}^e(\mathbf{B}, \mathbf{S}) &= \sum_{a'=1}^{n_a^e} \int_{\Omega_e} \{\nabla \times \mathbf{w}_a\}^t [\mathbf{J}] [\boldsymbol{\nu}_{bh}(\mathbf{B}) - \boldsymbol{\nu}^c(\mathbf{B}, \mathbf{S})] [\mathbf{J}]^t \{\nabla \times \mathbf{w}_{a'}\} \frac{1}{|\mathbf{J}|} d\Omega_e \\
 &= N_{aa'}(\mathbf{B}) - J_{aa'}^c(\mathbf{B}, \mathbf{S}) \quad \forall a \in [1, n_a^e]
 \end{aligned} \tag{3.88}$$

$$J_a^e = \sum_{a'=1}^{n_a^e} \int_{\Omega_e} \{\nabla \times \mathbf{w}_a\}^t [\mathbf{J}] [\mathbf{J}]^{-1} \{\mathbf{w}_{a'}\} T_{a'}^s d\Omega_e \quad \forall a \in [1, n_a^e] \tag{3.89}$$

où  $[\mathbf{J}]$  est la matrice Jacobienne et  $|\mathbf{J}|$  son déterminant. On notera dans cette écriture, que toutes les non-linéarités sont contenues dans la matrice de rigidité magnétique.

### Formulation mécanique discrétisée du problème magnéto-mécanique

Compte tenu de la discrétisation mécanique, la forme discrète de la formulation mécanique (3.81) du problème magnéto-mécanique, qui doit être vérifiée pour une variation arbitraire des déplacements  $\delta \mathbf{u}$ , s'écrit :

$$\begin{aligned}
 &\sum_{n'=1}^{n_m} \int_{\Omega_1} \mathbf{W}_{n'}^t [\nabla^s]^t [\mathbf{C}] [\nabla^s] \mathbf{W}_{n'} \tilde{\mathbf{u}}_{n'} d\Omega_1 + \partial_u \left( \int_{\Omega_T} \left( \int_0^{\mathbf{B}} \mathbf{H}(\mathbf{B}', \mathbf{S}) d\mathbf{B}' \right) d\Omega_T \right) \\
 &- \int_{\Omega_m} \mathbf{W}_n^t [\nabla^s]^t [\mathbf{C}] \{\mathbf{S}^\mu\} d\Omega_m - \int_{\Omega_M} \mathbf{W}_n^t \tilde{\mathbf{f}}_n^\Omega d\Omega_M - \int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{W}_n^t \tilde{\mathbf{f}}_n^\Gamma d\Gamma_\sigma = 0 \\
 &\quad \forall n \in [1, n_m]
 \end{aligned} \tag{3.90}$$

avec  $\{\mathbf{f}\}$  le vecteur des forces nodales :

$$\{\mathbf{f}\} = \{\tilde{\mathbf{f}}_1, \tilde{\mathbf{f}}_2, \dots, \tilde{\mathbf{f}}_{n_m}\}^t = \{\tilde{f}_1^x, \tilde{f}_1^y, \tilde{f}_1^z, \tilde{f}_2^x, \dots, \tilde{f}_{n_m}^z\}^t \tag{3.91}$$

et  $\{\mathbf{S}^\mu\}$  le vecteur des déformations de magnétostriction :

$$\{\mathbf{S}^\mu\} = \{\tilde{\mathbf{S}}_1^\mu, \tilde{\mathbf{S}}_2^\mu, \dots, \tilde{\mathbf{S}}_{n_e^\mu}^\mu\}^t = \{\tilde{S}_{11}^\mu, \tilde{S}_{21}^\mu, \tilde{S}_{31}^\mu, \tilde{S}_{41}^\mu, \tilde{S}_{51}^\mu, \tilde{S}_{61}^\mu, \tilde{S}_{12}^\mu, \dots, \tilde{S}_{6n_e^\mu}^\mu\}^t \tag{3.92}$$

où  $n_e^\mu$  désigne le nombre d'éléments associés au domaine magnétostrictif. Après assemblage, la formulation mécanique discrétisée se ramène à la résolution d'un ensemble d'équations algébriques défini par le système matriciel suivant :

$$[\mathbf{K}]\{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{f}^\sigma\} + \{\mathbf{f}^\mu\} + \{\mathbf{f}^{mf}\} \tag{3.93}$$

dans lequel la quantité  $[\mathbf{K}]$  est la matrice de rigidité mécanique, de dimensions  $(3n_m \times 3n_m)$ ,  $\{\mathbf{f}^\sigma\}$  le vecteur des charges appliquées réunissant les forces volumiques et surfaciques,  $\{\mathbf{f}^\mu\}$  le vecteur des forces nodales équivalentes de magnétostriction et  $\{\mathbf{f}^{mf}\}$  le vecteur des forces nodales magnétiques.

En utilisant la notation (3.57), les expressions élémentaires de la matrice de rigidité mécanique et des seconds membres sont définies dans l'élément de référence, tel que  $\Omega_M = \bigcup_{e=1}^{n_e} \Omega_e$ , par :

$$\mathbf{K}^e = \int_{\Omega_e} [\nabla \mathbf{W}]^t [\mathbf{P}]^t [\mathbf{C}] [\mathbf{P}] [\nabla \mathbf{W}] |\mathbf{J}| d\Omega_e \quad (3.94)$$

$$\mathbf{f}^{\mu e} = \int_{\Omega_e} [\nabla \mathbf{W}]^t [\mathbf{P}]^t [\mathbf{C}] \tilde{\mathbf{S}}^\mu |\mathbf{J}| d\Omega_e \quad (3.95)$$

$$\mathbf{f}^{\sigma e} = \int_{\Omega_e} [\mathbf{W}]^t \tilde{\mathbf{f}}^\Omega |\mathbf{J}| d\Omega_e + \int_{\Gamma_e} [\mathbf{W}]^t \tilde{\mathbf{f}}^\Gamma |\mathbf{J}| d\Gamma_e \quad \forall n \in [1, n_m^e] \quad (3.96)$$

Nous avons jusqu'ici omis, volontairement, de détailler le terme lié aux forces magnétiques. La méthode adoptée pour établir la formulation mécanique du problème magnéto-mécanique, conduit naturellement à l'emploi des méthodes basées sur l'approche énergétique. Elles ne font aucune hypothèse sur l'origine microscopique des forces (§1.2.3.1), et semblent, à la vue des comparaisons avec les résultats expérimentaux, les plus justifiées ([Ren, 1994], [Barré et Brochet, 2006]). Nous avons choisi d'utiliser la méthode basée sur l'application locale des travaux virtuels ([Ren et Razek, 1992]), méthode directement applicable dans une modélisation par éléments finis et prenant en compte le comportement non-linéaire des matériaux.

### Forces magnétiques : application locale des travaux virtuels

Selon le principe des travaux virtuels, la force magnétique agissant sur un solide est égale à la variation de l'énergie magnétique (respectivement la coénergie magnétique) par rapport à un déplacement virtuels tout en maintenant le flux magnétique (respectivement le courant) constant (1.37), (1.38). Dans le problème magnéto-mécanique, cela se traduit par la présence du terme ci-dessous dans la formulation mécanique discrétisée :

$$\{\mathbf{f}^{mf}\} = -\partial_u \left( \int_{\Omega_T} \left( \int_0^{\mathbf{B}} \mathbf{H}(\mathbf{B}', \mathbf{S}^\mu) d\mathbf{B}' \right) d\Omega_T \right) \quad (3.97)$$

La condition de maintenir le flux magnétique constant pendant l'opération de dérivation est équivalente dans la méthode des éléments finis, d'après le théorème de Stokes<sup>10</sup>, à maintenir la circulation du potentiel vecteur magnétique constante sur

<sup>10</sup> $\phi = \oint_C \mathbf{a} \, dl$

une arête en 3D<sup>11</sup>. L'application de ce principe au niveau des éléments du maillage, en association avec un déplacement virtuel d'un nœud  $n$  ( $n = [1, \dots, n_m]$ ) tout en gardant fixes les nœuds avoisinants (figure 3.10), permet de calculer les forces magnétiques exercées au nœud du maillage.

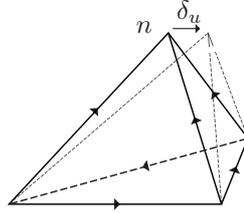


Figure 3.10 – Déplacement virtuel d'un nœud d'un élément tétraédrique

La force magnétique nodale  $\mathbf{f}_n^{mf}$  exercée au nœud  $n$  est alors obtenue par dérivation de l'énergie magnétique, emmagasinée dans les éléments entourant ce nœud, par rapport au déplacement  $\mathbf{u}$  à flux magnétique constant :

$$\mathbf{f}_n^{mf} = \sum_{e \supset n} \mathbf{f}_n^e = - \sum_{e \supset n} \partial_{u_n} W^e(\mathbf{a}, \mathbf{u}) \quad (3.98)$$

où  $\mathbf{f}_n^e$  dénote la contribution d'un élément  $e$  à la force nodale  $\mathbf{f}_n^{mf}$  exercée au nœud  $n$ . Dans le cas linéaire, l'énergie magnétique emmagasinée dans un élément, conformément à la discrétisation choisie (3.82), est donné par :

$$\begin{aligned} W^e &= \sum_{a=1}^{n_a^e} \sum_{a'=1}^{n_a^e} \frac{1}{2} \int_{\Omega_e} a_a^t \{ \nabla \times \mathbf{w}_a \}^t [\mathbf{J}] [\boldsymbol{\nu}_{bh}] [\mathbf{J}]^t \{ \nabla \times \mathbf{w}_{a'} \} a_{a'} \frac{1}{|\mathbf{J}|} d\Omega_e \\ &= \sum_{a=1}^{n_a^e} \sum_{a'=1}^{n_a^e} \frac{1}{2} a_a^t N_{aa'} a_{a'} \\ &= \frac{1}{2} \{ \mathbf{a}^e \}^t [\mathbf{N}^e] \{ \mathbf{a}^e \} \end{aligned} \quad (3.99)$$

où  $[\mathbf{N}^e]$  est la matrice de rigidité élémentaire et  $\{ \mathbf{a}^e \}$  le vecteur des circulations du potentiel vecteur magnétique le long des arêtes de l'élément. En remplaçant (3.99) dans (3.98), il apparaît que dériver l'énergie magnétique emmagasinée dans l'élément revient à dériver localement la matrice Jacobienne et son déterminant.

$$\begin{aligned} \partial_{u_n} N_{aa'}^e &= \sum_{a'=1}^{n_a^e} \int_{\Omega_e} \left( \{ \nabla \times \mathbf{w}_a \}^t \partial_{u_n} ([\mathbf{J}] [\boldsymbol{\nu}_{bh}] [\mathbf{J}]^t) \{ \nabla \times \mathbf{w}_a \} \frac{1}{|\mathbf{J}|} \right. \\ &\quad \left. + \{ \nabla \times \mathbf{w}_a \}^t [\mathbf{J}] [\boldsymbol{\nu}_{bh}] [\mathbf{J}]^t \{ \nabla \times \mathbf{w}_a \} \partial_{u_n} \left( \frac{1}{|\mathbf{J}|} \right) \right) d\Omega_e \quad \forall a \in [1, n_a^e] \end{aligned} \quad (3.100)$$

<sup>11</sup>Cette condition est assurée, dans la méthode des éléments finis, par l'utilisation d'éléments de Whitney ([Ren et Razek, 1992]). Maintenir le flux constant est équivalent à imposer la circulation du potentiel vecteur magnétique constante le long des arêtes d'une facette en 3D, ou à maintenir la différence de potentiel vecteur magnétique constante sur les extrémités d'une arête en 2D.

avec :

$$\begin{aligned} \partial_{u_n} ([\mathbf{J}] [\boldsymbol{\nu}_{bh}] [\mathbf{J}]^t) &= \partial_{u_n} [\mathbf{J}] [\boldsymbol{\nu}_{bh}] [\mathbf{J}]^t + [\mathbf{J}] [\boldsymbol{\nu}_{bh}] \partial_{u_n} [\mathbf{J}]^t \\ &= [\mathbf{J}] ([\boldsymbol{\nu}_{bh}] \partial_{u_n} [\mathbf{J}]^t [\mathbf{J}]^{-t} + [\mathbf{J}]^{-1} \partial_{u_n} [\mathbf{J}] [\boldsymbol{\nu}_{bh}]) [\mathbf{J}]^t \end{aligned} \quad (3.101)$$

Par conséquent, la force magnétique  $\mathbf{f}_n^{mf}$  locale au nœud  $n$  est obtenue par contribution de tous les éléments avoisinant ce nœud pendant l'opération d'assemblage. Cette méthode calcule les forces magnétiques aux nœuds du maillage. Ces forces nodales seront donc directement intégrées comme un terme source dans l'équation (3.93) du problème magnéto-mécanique.

Cette méthode peut facilement être étendue au cas des matériaux non-linéaires. Partant de l'expression classique de l'énergie magnétique, la force magnétique élémentaire au nœud  $n$  dans l'élément de référence est alors définie par :

$$\mathbf{f}_n^e = - \left( \frac{1}{2} \{ \mathbf{a}^e \}^t \partial_{u_n} [\mathbf{N}^e] \{ \mathbf{a}^e \} + \int_{\Omega_e} \left( \int_0^{\mathbf{B}} \mathbf{H}(\mathbf{B}', \mathbf{S}) d\mathbf{B}' \right) \partial_{u_n} |\mathbf{J}| d\Omega_e \right) \quad (3.102)$$

Ceci implique que l'on peut calculer des forces magnétiques volumiques dans les régions saturées où apparaissent des gradients de perméabilité magnétique.

### 3.4.3 Problème couplé électro-magnéto-mécanique

Nous venons d'établir deux systèmes d'équations algébriques (3.103) et (3.104) relatifs à la résolution de problèmes magnéto-mécanique et électro-mécanique.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}(\mathbf{B}, \mathbf{S}) & 0 \\ 0 & \mathbf{K} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{J}^s \\ \mathbf{f}^\sigma + \mathbf{f}^{mf}(\mathbf{B}) + \mathbf{f}^\mu(\mathbf{B}) \end{pmatrix} \quad (3.103)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{u\phi} \\ \mathbf{K}_{u\phi}^t & \mathbf{K}_{\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{Q} \end{pmatrix} \quad (3.104)$$

Ces systèmes d'équations sont résolus si dans le problème étudié sont présents soit des matériaux magnétostrictifs (3.103), soit des matériaux piézoélectriques (3.104). Pour étudier un dispositif comportant ces deux types de matériaux, une résolution couplée des deux problèmes est nécessaire. Cette résolution couplée peut alors être réalisée de deux façons : un couplage direct ou un couplage indirect.

#### 3.4.3.1 Couplage direct

Le couplage direct consiste à résoudre simultanément les systèmes d'équations relatifs aux formulations magnétique, mécanique et électrique. Cette résolution peut alors être effectuée par deux méthodes équivalentes (3.105) (3.106).

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}(\mathbf{B}, \mathbf{S}) & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{K}' & \mathbf{K}_{u\phi} \\ 0 & \mathbf{K}_{u\phi}^t & \mathbf{K}_{\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{u} \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{J}^s \\ \mathbf{f}^\sigma + \mathbf{f}^{mf}(\mathbf{B}) + \mathbf{f}^\mu(\mathbf{B}) \\ \mathbf{Q} \end{pmatrix} \quad (3.105)$$

$$\begin{cases} [\mathbf{N}(\mathbf{B})] \{\mathbf{a}\} = \{\mathbf{J}^s\} + \{\mathbf{J}^c(\mathbf{B}, \mathbf{S})\} \\ [\mathbf{K}'] \{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{f}^\sigma + \mathbf{f}^{mf}(\mathbf{B}) + \mathbf{f}^\mu(\mathbf{B}) - \mathbf{K}_{u\phi} \phi\} \\ [\mathbf{K}_{\phi\phi}] \{\phi\} = \{\mathbf{Q} - \mathbf{K}_{u\phi}^t \mathbf{u}\} \end{cases} \quad (3.106)$$

où  $\mathbf{K}'$  est défini sur le domaine  $\Omega_{1'}$  tel que  $\Omega_{1'} = \Omega_1 \cup \Omega_2$  (figure 3.12). Dans le système (3.106) les derniers termes des seconds membres représentent respectivement une densité de courant équivalente induite par l'effet des contraintes sur le matériau, des forces piézo-électriques équivalentes et la création d'une densité de charges électriques équivalentes.

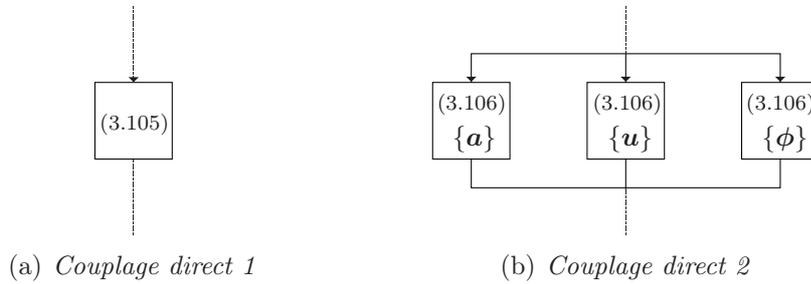


Figure 3.11 – Méthode de résolution du problème couplé électro-magnéto-mécanique direct

D'un point de vue résolution numérique, les deux systèmes sont équivalents (figure 3.11). Néanmoins, la matrice du système (3.105) est mal conditionnée en raison des ordres de grandeurs différents entre les trois grandeurs physiques, particulièrement mécanique et électrique. Il est possible d'améliorer le conditionnement de la matrice en ajustant les unités des grandeurs physiques. Bien que le nombre d'itérations soit moindre pour le système (3.105), le temps de calcul est significativement réduit pour le système (3.106).

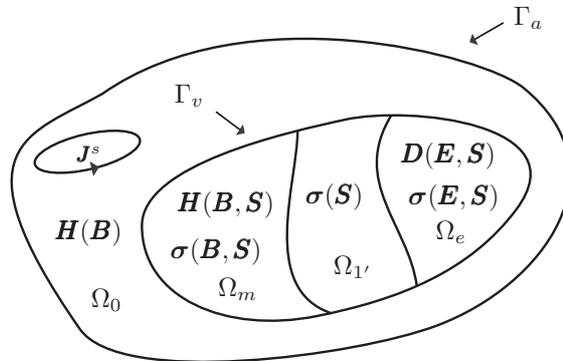


Figure 3.12 – Domaine d'étude du problème couplé électro-magnéto-mécanique direct

### 3.4.3.2 Couplage indirect

Si les électrodes disposées sur le matériau piézoélectrique sont en circuit ouvert (typiquement le cas d'une amplification de tension), le vecteur des charges électriques nodales ( $\mathbf{Q}$ ) est nulle. L'équation électrique se réduit alors à :

$$\{\phi\} = -[\mathbf{K}_{\phi\phi}]^{-1}[\mathbf{K}_{u\phi}]^t\{\mathbf{u}\} \quad (3.107)$$

On peut alors écrire :

$$[\mathbf{K}_{uu} - \mathbf{K}_{u\phi} \mathbf{K}_{\phi\phi}^{-1} \mathbf{K}_{u\phi}^t]\{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{f}\} \quad (3.108)$$

où le second terme de la matrice de rigidité dans l'équation (3.108) peut être assimilé à une rigidité piézoélectrique équivalente induite par la présence d'un potentiel électrostatique sur les électrodes. En conséquence, l'influence de l'effet piézoélectrique inverse est considérée dans la matrice de rigidité globale de la structure. La résolution d'un problème électro-magnéto-mécanique se réduit alors à la résolution d'un problème magnéto-mécanique, où la matrice de rigidité mécanique  $[\mathbf{K}]$  est telle que  $\Omega_{1'} = \Omega_1 \cup \Omega_p$  (figure 3.13). Le potentiel électrostatique est obtenu après convergence du processus itératif.

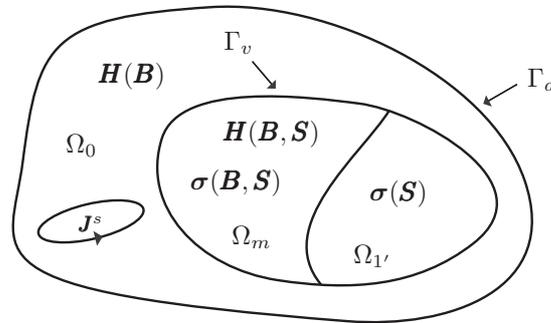


Figure 3.13 – *Domaine d'étude du problème couplé électro-magnéto-mécanique indirect*

L'inconvénient de cette écriture est de ne plus disposer d'une matrice creuse (figure 3.14). L'inversion de la matrice  $[\mathbf{K}_{\phi\phi}]$  crée un remplissage partiel de la matrice de rigidité.

### 3.4.4 Algorithme de résolution

Le problème magnéto-mécanique (3.103) est très fortement non-linéaire en raison des comportements magnétique et magnétostrictif. La résolution d'un tel système nécessite l'utilisation d'un algorithme itératif. Le choix de l'algorithme de résolution conditionne la difficulté de mise en œuvre mais aussi la convergence vers la solution du problème.

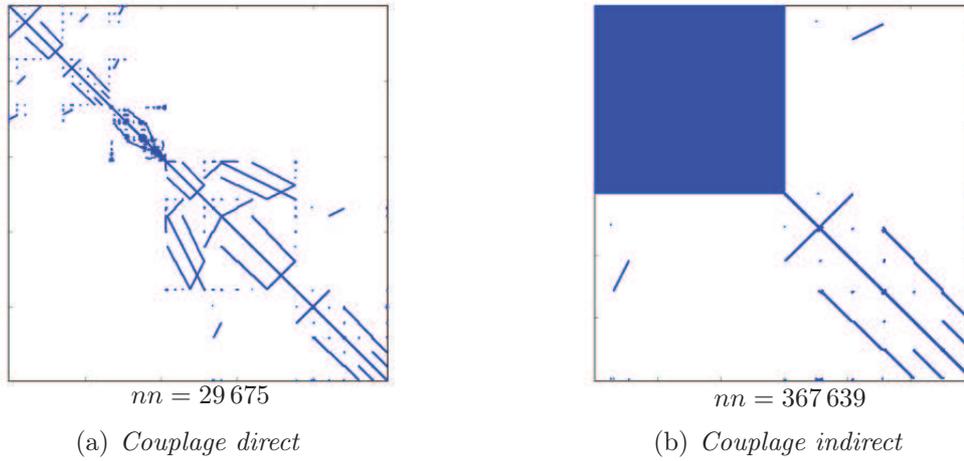


Figure 3.14 – Profil des matrices globales pour le même problème ( $nn$  nombre d'éléments non nuls de la matrice)

#### 3.4.4.1 Méthode du point fixe modifiée

Cette méthode est une méthode itérative de type point fixe. Elle est robuste et la convergence de cet algorithme, bien que lente, est quasi-inconditionnelle ([Hantila, 1975], [Ossart et Ionita, 1999]). Cette méthode consiste à reporter toutes les non-linéarités dans le second membre, ce qui permet d'obtenir une matrice de rigidité constante à chaque itération.

La méthode du point fixe modifiée s'appuie sur une relation constitutive fictive définie par :

$$\mathbf{B} = \boldsymbol{\mu}_{pf}(\mathbf{H} + \mathbf{M}_{pf}) \quad (3.109)$$

où  $\boldsymbol{\mu}_{pf}$  est une perméabilité magnétique fictive<sup>12</sup>, dont dépend la convergence de l'algorithme, et  $\mathbf{M}_{pf}$  un terme source fictif, similaire à l'aimantation réelle des matériaux magnétiques, corrigé à chaque itération de calcul en accord avec le comportement magnétique  $\mathbf{B}(\mathbf{H})$ .

L'aimantation fictive  $\mathbf{M}_{pf}$  est donc recalculée à chaque itération  $i$  par :

$$\mathbf{M}_{pf}^i = \frac{1}{\boldsymbol{\mu}_{pf}} \mathbf{B}^{i-1} - \mathbf{H}(\mathbf{B}^{i-1}) \quad (3.110)$$

L'équation magnétique du système (3.103) devient :

$$[\mathbf{N}(\boldsymbol{\nu}_{pf})]\{\mathbf{a}\} = \{\mathbf{J}^s\} + \{\mathbf{J}^{pf}\} \quad (3.111)$$

<sup>12</sup>Pour des raisons physiques  $\boldsymbol{\mu}_{pf}$  ne pourra être inférieure à la perméabilité magnétique de l'air. Il est par ailleurs possible de mettre en évidence une valeur optimale de  $\boldsymbol{\mu}_{pf}$ , dépendant du matériau modélisé, qui assure une convergence plus rapide de l'algorithme ([Ossart et Ionita, 1999]).

avec :

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_a^{pf}(\mathbf{B}, \mathbf{S}) &= \sum_{a'=1}^{n_a^e} \int_{\Omega_e} \{\nabla \times \mathbf{w}_a\}^t [\mathbf{J}] ([\boldsymbol{\nu}^c(\mathbf{B}, \mathbf{S})] + [\boldsymbol{\nu}_{pf}] - [\boldsymbol{\nu}_{bh}(\mathbf{B})]) \\ &[\mathbf{J}]^t \{\nabla \times \mathbf{w}_{a'}\} a_{a'} \frac{1}{|\mathbf{J}|} d\Omega_e \quad \forall a \in [1, n_a^e] \end{aligned} \quad (3.112)$$

où le terme  $[\boldsymbol{\nu}^c(\mathbf{B}, \mathbf{S})]$  est déterminé à partir de la relation (3.26) et  $[\boldsymbol{\nu}_{bh}(\mathbf{B})]$  est déterminé à partir d'une courbe expérimentale. La méthode du point fixe modifiée est un processus itératif. Par conséquent, la solution du problème magnéto-mécanique doit être mise à jour à chaque itération, tel que :

$$\mathbf{a}^i = \mathbf{a}^{i-1} + \Delta \mathbf{a}^i \quad (3.113)$$

$$\mathbf{u}^i = \mathbf{u}^{i-1} + \Delta \mathbf{u}^i \quad (3.114)$$

On doit alors résoudre le système matriciel suivant :

$$\left[ \begin{array}{cc} \mathbf{N}(\boldsymbol{\nu}_{pf}) & 0 \\ 0 & \mathbf{K} \end{array} \right] \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{a}^i \\ \Delta \mathbf{u}^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{J}^s + \mathbf{J}^{pf}(\mathbf{B}^{i-1}, \mathbf{S}^{i-1}) - \mathbf{N}(\boldsymbol{\nu}_{pf}) \mathbf{a}^{i-1} \\ \mathbf{f}^\sigma + \mathbf{f}^{mf}(\mathbf{B}^{i-1}) + \mathbf{f}^\mu(\mathbf{B}^{i-1}) - \mathbf{K} \mathbf{u}^{i-1} \end{pmatrix} \quad (3.115)$$

### 3.4.4.2 Méthode de Newton-Raphson

La méthode de Newton-Raphson est une extension de la méthode de Newton adaptée aux systèmes d'équations matricielles. Comparée aux méthodes d'approximation successive, méthode du point fixe modifiée, sa convergence est rapide<sup>13</sup> parce que la solution est trouvée par des fonctions tangentes au lieu de simple linéarisation des comportements non-linéaires ([Chari et Silvester, 1980]).

La méthode consiste à déterminer itérativement le zéro d'une fonction à partir de son développement en série de Taylor au 1<sup>er</sup> ordre. Pour une fonction  $F(x)$ , au voisinage d'un point quelconque  $x^i$  ce développement s'écrit :

$$F(x^i + \Delta x) = F(x^i) + \left[ \frac{dF}{dx}(x^i) \right] \Delta x \quad (3.116)$$

L'algorithme consiste ensuite à construire une suite de problèmes linéaires, en annulant le développement en série de Taylor au voisinage de la solution obtenue à l'itération précédente. Ainsi, la solution à l'itération  $i + 1$ ,  $x^{i+1}$ , vérifie  $F(x^{i+1} + \Delta x^i) = 0$  avec  $\Delta x^{i+1} = x^{i+1} - x^i$ . L'équation à résoudre est donc :

$$\left[ \frac{dF}{dx}(x^i) \right] \Delta x = -F(x^i) \quad (3.117)$$

<sup>13</sup>Quadratique au voisinage de la solution.

Appliquée au problème magnéto-mécanique, le système matriciel à résoudre est défini par :

$$\begin{aligned}
 & \left[ \begin{array}{cc} N + \frac{\partial N}{\partial \mathbf{a}^{i-1}} \mathbf{a}^{i-1} - \frac{\partial \mathbf{J}^c}{\partial \mathbf{a}^{i-1}} & \frac{\partial N}{\partial \mathbf{u}^{i-1}} \mathbf{a}^{i-1} - \frac{\partial \mathbf{J}^c}{\partial \mathbf{u}^{i-1}} \\ -\frac{\partial \mathbf{f}^{mf}}{\partial \mathbf{a}^{i-1}} - \frac{\partial \mathbf{f}^\mu}{\partial \mathbf{a}^{i-1}} & \mathbf{K} - \frac{\partial \mathbf{f}^{mf}}{\partial \mathbf{u}^{i-1}} - \frac{\partial \mathbf{f}^\mu}{\partial \mathbf{u}^{i-1}} \end{array} \right] \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{a}^i \\ \Delta \mathbf{u}^i \end{pmatrix} \\
 & = \begin{pmatrix} \mathbf{J}^s + \mathbf{J}^c - N \mathbf{a}^{i-1} \\ \mathbf{f}^\sigma + \mathbf{f}^{mf} + \mathbf{f}^\mu - \mathbf{K} \mathbf{u}^{i-1} \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.118}$$

où  $\mathbf{J}^c$  est un vecteur pouvant être interprété comme une densité de courant induite par l'effet des contraintes sur le matériau, issu de la relation (3.25). Les dérivées partielles présentes dans le Jacobien de (3.118) sont définies par :

$$\frac{\partial N}{\partial \mathbf{a}} = 2 \frac{\partial \nu_{bh}(\mathbf{B})}{\partial \mathbf{B}^2} \frac{[N]}{\nu_{bh}(\mathbf{B})} \mathbf{B}^2 \tag{3.119}$$

$$\frac{\partial \mathbf{J}^c}{\partial \mathbf{a}} = \int_{\Omega_e} \{ \nabla \times \mathbf{w}_a \}^t [\mathbf{J}] \frac{\partial \mathbf{H}^c(\mathbf{B}, \mathbf{S})}{\partial \mathbf{B}} |\mathbf{J}| d\Omega_e \tag{3.120}$$

$$\frac{\partial \mathbf{f}^\mu}{\partial \mathbf{u}} = \int_{\Omega_e} [\nabla \mathbf{W}]^t [\mathbf{P}]^t [\mathbf{C}] \mathbf{S}^\mu(\mathbf{B}) \partial_u |\mathbf{J}| d\Omega_e \tag{3.121}$$

On peut par ailleurs mettre en évidence que la matrice du système (3.118) est symétrique. En effet, on peut dans un premier temps constater que  $\partial_u \mathbf{J}^c$  et  $\partial_a \mathbf{f}^\mu$  sont transposés l'un de l'autre.

$$\frac{\partial \mathbf{J}^c}{\partial \mathbf{u}} = \int_{\Omega_e} \{ \nabla \times \mathbf{w}_a \}^t [\mathbf{J}] \frac{\partial \mathbf{S}^\mu(\mathbf{B})}{\partial \mathbf{B}} [\mathbf{C}]^t [\mathbf{P}] [\nabla \mathbf{W}] d\Omega_e \tag{3.122}$$

$$\frac{\partial \mathbf{f}^\mu}{\partial \mathbf{a}} = \int_{\Omega_e} [\nabla \mathbf{W}]^t [\mathbf{P}]^t [\mathbf{C}] \frac{\partial \mathbf{S}^\mu(\mathbf{B})}{\partial \mathbf{B}} [\mathbf{J}]^t \{ \nabla \times \mathbf{w}_a \} d\Omega_e \tag{3.123}$$

avec, en tenant des relations (3.25)-(3.28) limitées<sup>14</sup> à un modèle de déformation de magnétostriction d'ordre 2 :

$$\frac{\partial H_i^c(\mathbf{B}, \mathbf{S})}{\partial B_p} = -3\mu^* \beta_0^2 (B_i B_p + 3 \delta_{ip} \mathbf{B}^2) + \nu_{ip}^c(\mathbf{B}, \mathbf{S}) \tag{3.124}$$

$$\frac{\partial S_{kl}^\mu(\mathbf{B})}{\partial B_i} = \frac{3}{2} \beta_0 (\delta_{ki} B_l + \delta_{li} B_k) - \delta_{kl} B_i \tag{3.125}$$

On peut aussi montrer que les termes  $\partial_u \mathbf{M} \mathbf{a}$  et  $-\partial_a \mathbf{f}^{mf}$  sont également transposés quel que soit l'état magnétique du matériau. En effet, la matrice de rigidité

<sup>14</sup>Les relations générales sont explicitées en Annexe D (relations (D.30) et (D.31)).

magnétique  $\mathbf{M}$  est obtenue par dérivation de l'énergie magnétique par rapport au potentiel vecteur magnétique  $\mathbf{a}$  :

$$\partial_a W(\mathbf{a}, \mathbf{u}) = \mathbf{N} \mathbf{a} \quad (3.126)$$

Étant donné que  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{u}$  sont des variables indépendantes, nous avons :

$$\begin{aligned} \partial_a \partial_u W(\mathbf{a}, \mathbf{u}) &= \partial_u \partial_a W(\mathbf{a}, \mathbf{u}) \\ \partial_u \mathbf{N} \mathbf{a} &= -\partial_a \mathbf{f}^{mf} \end{aligned} \quad (3.127)$$

L'expression de la dérivation de la force magnétique, conformément à la relation (3.102), s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{f}^{mf}}{\partial \mathbf{a}} &= - \int_{\Omega_e} \left( \frac{1}{2} \partial_a \boldsymbol{\nu}_{bh}(\mathbf{B}) \partial_u \mathbf{B}^2 |\mathbf{J}| + \frac{\boldsymbol{\nu}_{bh}(\mathbf{B})}{2} \partial_{u,a} \mathbf{B}^2 |\mathbf{J}| \right. \\ &\quad \left. + \partial_a \left( \int_0^B \mathbf{H}(\mathbf{B}') d\mathbf{B}' \right) \partial_u |\mathbf{J}| \right) d\Omega_e \end{aligned} \quad (3.128)$$

En tenant compte des égalités ci-dessous :

$$\begin{cases} \partial_a \boldsymbol{\nu}_{bh}(\mathbf{B}) = 2 \frac{\partial \boldsymbol{\nu}_{bh}(\mathbf{B})}{\partial \mathbf{B}^2} \{\mathbf{a}\}^t \{\nabla \times \mathbf{w}_a\}^t \{\nabla \times \mathbf{w}_a\} \\ \partial_{u,a} \mathbf{B}^2 = 2 \{\mathbf{a}\}^t \{\nabla \times \mathbf{w}_a\}^t \partial_u ([\mathbf{J}] [\mathbf{J}]^t) \{\nabla \times \mathbf{w}_a\} \\ \partial_a \left( \int_0^B \mathbf{H}(\mathbf{B}') d\mathbf{B}' \right) = \{\mathbf{a}\}^t \{\nabla \times \mathbf{w}_a\}^t [\boldsymbol{\nu}_{bh}(\mathbf{B})] \{\nabla \times \mathbf{w}_a\} \end{cases} \quad (3.129)$$

La variation de la force magnétique par rapport au déplacement  $\partial_v \mathbf{f}^{mf}$ , est homogène à la rigidité mécanique dont l'expression est définie par :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{f}^{mf}}{\partial \mathbf{v}} &= - \int_{\Omega_e} \left( \frac{1}{2} \partial_v \boldsymbol{\nu}_{bh}(\mathbf{B}) \partial_u \mathbf{B}^2 |\mathbf{J}| + \frac{1}{2} \boldsymbol{\nu}_{bh}(\mathbf{B}) \partial_{u,v}^2 \mathbf{B}^2 |\mathbf{J}| + \frac{1}{2} \boldsymbol{\nu}_{bh}(\mathbf{B}) \partial_u \mathbf{B}^2 \partial_v |\mathbf{J}| \right. \\ &\quad \left. + \partial_v \left( \int_0^B \mathbf{H}(\mathbf{B}', \mathbf{S}) d\mathbf{B}' \right) \partial_u |\mathbf{J}| + \left( \int_0^B \mathbf{H}(\mathbf{B}', \mathbf{S}) d\mathbf{B}' \right) \partial_{u,v}^2 |\mathbf{J}| \right) d\Omega_e \end{aligned} \quad (3.130)$$

avec :

$$\begin{cases} \partial_{u,v}^2 \mathbf{B}^2 = \{\mathbf{a}\}^t \{\nabla \times \mathbf{w}_a\}^t \partial_{u,v}^2 ([\mathbf{J}] [\mathbf{J}]^2) \{\nabla \times \mathbf{w}_a\} \{\mathbf{a}\} \\ \partial_v \left( \int_0^B \mathbf{H}(\mathbf{B}', \mathbf{S}) d\mathbf{B}' \right) = \frac{1}{2} \{\mathbf{a}\}^t \{\nabla \times \mathbf{w}_a\}^t \partial_v ([\mathbf{J}] [\boldsymbol{\nu}_{bh}(\mathbf{B})] [\mathbf{J}]^2) \{\nabla \times \mathbf{w}_a\} \{\mathbf{a}\} \end{cases} \quad (3.131)$$

où  $\mathbf{v}$  est une direction arbitraire qui n'est pas obligatoirement égale à  $\mathbf{u}$ . En comparaison avec la matrice de rigidité mécanique, ce terme est généralement très faible.

## 3.4.4.3 Algorithme couplé électro-magnéto-mécanique

Le problème électro-mécanique est un problème linéaire, il pose donc moins de difficulté de résolution. L'algorithme de couplage entre les problèmes magnéto-mécanique et électro-mécanique peut se résumer selon le schéma de principe présenté sur la figure (3.15).

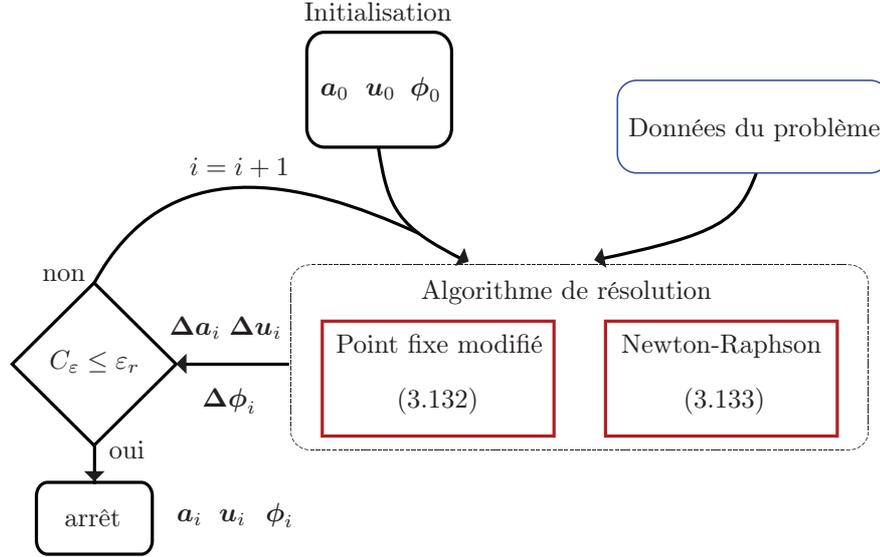


Figure 3.15 – Schéma de principe du couplage électro-magnéto-mécanique

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N}(\nu_{pf}) & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{K}' & \mathbf{K}_{u\phi} \\ 0 & \mathbf{K}_{u\phi}^t & \mathbf{K}_{\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{a}^i \\ \Delta \mathbf{u}^i \\ \Delta \phi^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{J}^s + \mathbf{J}^{pf}(\mathbf{B}^{i-1},) - \mathbf{N}(\nu_{pf}) \mathbf{a}^{i-1} \\ \mathbf{f}^\sigma + \mathbf{f}^{mf}(\mathbf{B}^{i-1}) + \mathbf{f}^\mu(\mathbf{B}^{i-1}) - \mathbf{K} \mathbf{u}^{i-1} \\ \mathbf{Q} - \mathbf{K}_{\phi\phi} \phi^{i-1} \end{pmatrix} \quad (3.132)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N} + \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \mathbf{a}^{i-1}} \mathbf{a}^{i-1} - \frac{\partial \mathbf{J}^c}{\partial \mathbf{a}^{i-1}} & \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \mathbf{u}^{i-1}} \mathbf{a}^{i-1} - \frac{\partial \mathbf{J}^c}{\partial \mathbf{u}^{i-1}} & 0 \\ -\frac{\partial \mathbf{f}^{mf}}{\partial \mathbf{a}^{i-1}} - \frac{\partial \mathbf{f}^\mu}{\partial \mathbf{a}^{i-1}} & \mathbf{K}' - \frac{\partial \mathbf{f}^{mf}}{\partial \mathbf{u}^{i-1}} - \frac{\partial \mathbf{f}^\mu}{\partial \mathbf{u}^{i-1}} & \mathbf{K}_{u\phi} \\ 0 & \mathbf{K}_{u\phi}^t & \mathbf{K}_{\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{a}^i \\ \Delta \mathbf{u}^i \\ \Delta \phi^i \end{pmatrix} \quad (3.133)$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{J}^s + \mathbf{J}^c - \mathbf{N} \mathbf{a}^{i-1} \\ \mathbf{f}^\sigma + \mathbf{f}^{mf} + \mathbf{f}^\mu - \mathbf{K}' \mathbf{u}^{i-1} - \mathbf{K}_{u\phi} \phi^{i-1} \\ \mathbf{Q} - \mathbf{K}_{\phi\phi} \phi^{i-1} - \mathbf{K}_{u\phi}^t \mathbf{u}^{i-1} \end{pmatrix}$$

Ce schéma itératif est poursuivi jusqu'à ce que le critère d'erreur  $C_\varepsilon$  soit inférieur à l'erreur fixée par  $\varepsilon_r$ . Ce critère d'erreur est défini de la façon suivante :

$$C_\varepsilon = \frac{|\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_{i-1}|}{|\mathbf{a}_i|} + \frac{|\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_{i-1}|}{|\mathbf{u}_i|} \quad (3.134)$$

La méthode du point fixe modifiée est une méthode robuste avec un grand rayon de convergence, asymptotiquement linéaire. La méthode de Newton-Raphson est utilisée pour sa convergence généralement plus rapide, néanmoins selon les cas traités

cette convergence n'est pas toujours assurée. Il est possible d'augmenter le domaine de convergence, voir d'accélérer la convergence, en relaxant la solution. À chaque itération du processus, on exprime les solutions magnétique et mécanique en fonction, respectivement, de celles obtenues à l'itération précédente et des résidus pondérés par un coefficient de relaxation  $\alpha$ , tel que :

$$\mathbf{a}^i = \mathbf{a}^{i-1} + \alpha \Delta \mathbf{a}^i \quad (3.135)$$

$$\mathbf{u}^i = \mathbf{u}^{i-1} + \alpha \Delta \mathbf{u}^i \quad (3.136)$$

Le domaine et la vitesse de convergence de la méthode du point fixe modifiée peuvent aussi être améliorés en ajustant la valeur de la perméabilité magnétique fictive  $\mu_{pf}$ . La valeur de  $\mu_{pf}$  conduira, selon le niveau d'induction magnétique dans le matériau concerné, à une convergence plus ou moins rapide (Tableau 3.4.4.3).

$\alpha \backslash \mu_{pf}$	$\mu_0$	$15 \mu_0$	$17 \mu_0$	$18 \mu_0$	$19 \mu_0$	$33 \mu_0$	$36 \mu_0$	$71 \mu_0$	$89 \mu_0$
1	87	26	-	-	-	-	-	-	-
0,9	88	29	27	24	-	-	-	-	-
0,5	115	45	43	41	40	30	-	-	-
0,2	262	82	79	78	76	67	67	63	-
0,1	492	142	139	138	137	129	129	125	124

Tableau 3.2 – Nombre d'itération nécessaire pour obtenir la convergence de la méthode du point fixe modifiée (Barreau de Terfenol-D,  $B_{moy} = 0,6 T$ ) en fonction de  $\alpha$  et  $\mu_{pf}$ , [Azoum, 2005] (– divergence)

Pour de plus ample détails sur le choix de la valeur à assignée à  $\mu_{pf}$  on pourra consulter [Ossart et Ionita, 1999] et [Azoum, 2005].

## 3.5 Conclusion

On a cherché à établir dans ce chapitre une modélisation décrivant le comportement de structures associant des matériaux piézoélectriques et magnétostrictifs. Une approche à partir du traitement de deux problèmes distincts a été proposée. Les termes de couplage multi-physique sont tout d'abord mis en évidence à partir du formalisme thermodynamique. Ces termes de couplage, associés à quelques hypothèses sur le comportement des matériaux, donnent accès aux lois de comportement piézo-électrique et magnéto-mécanique. Cette dernière nécessite l'établissement d'un modèle de déformation de magnétostriction. Un modèle polynomial fonction de l'induction magnétique permet de rendre compte du comportement anhystérétique considéré. L'effet des contraintes sur le comportement magnétique des matériaux est alors décrit par une reluctivité équivalente de magnétostriction. Les paramètres de la modélisation sont identifiés sur des réseaux de courbes issus de l'expérimentation.

Les formulations des problèmes électro-mécanique et magnéto-mécanique sont établies par une approche variationnelle. La modélisation numérique de ces problèmes repose sur une discrétisation par la méthode des éléments finis. Le couplage entre les deux problèmes est ensuite décrit selon deux méthodes, dont l'une se réduit à la résolution du problème magnéto-mécanique. Les algorithmes de résolution, basés sur la méthode du point fixe modifiée et la méthode de Newton-Raphson, sont finalement détaillés.

L'étape suivante consiste à valider la modélisation retenue sur des résultats expérimentaux ou à partir de solutions analytiques. Une fois ce travail réalisé, les formulations développées peuvent être utilisées pour modéliser des structures à base de matériaux actifs. Ces étapes font l'objet du prochain chapitre.

# Chapitre 4

## Application aux dispositifs à base de matériaux actifs

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Actionneur pour le contrôle de déplacement . . . . .</b>	<b>113</b>
4.1.1	Description du dispositif . . . . .	114
4.1.2	Analyse numérique de l'actionneur de contrôle de déplacement	114
4.1.3	Conclusion . . . . .	120
<b>4.2</b>	<b>Structures composites magnéto-électriques pour la mesure de champ . . . . .</b>	<b>120</b>
4.2.1	Description des structures composites . . . . .	120
4.2.2	Solutions analytiques . . . . .	121
4.2.3	Comparaison solutions analytique/numérique . . . . .	125
4.2.4	Conclusion . . . . .	129
<b>4.3</b>	<b>Capteur de déplacement magnéto-électrique . . . . .</b>	<b>130</b>
4.3.1	Description du dispositif . . . . .	130
4.3.2	Analyse numérique du capteur . . . . .	131
4.3.3	Conclusion . . . . .	138
<b>4.4</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>138</b>

---



LE CHAPITRE précédent a présenté le développement d'une modélisation associant les comportements magnéto-mécanique et électro-mécanique. L'approche utilisée consiste à traiter deux problèmes distincts, couplés par des méthodes numériques basées sur les éléments finis. Les outils numériques développés permettent d'analyser le comportement de structures utilisant conjointement des matériaux magnétostrictifs et piézoélectriques, ou bien encore seulement l'un des deux. Il est maintenant nécessaire d'effectuer une validation des outils développés.

Cette validation fait l'objet de ce chapitre, qui par ailleurs permettra une présentation succincte des possibilités offertes par une utilisation conjointe des matériaux magnétostrictifs et piézoélectriques. Une première validation est effectuée par l'étude de structures composites stratifiées magnéto-électriques, où la solution analytique obtenue est comparée aux résultats de modélisation numérique. L'une des structures composites est à la base du fonctionnement d'un capteur de position. Une nouvelle étape de validation est ainsi réalisée avec une comparaison entre les résultats issus de la modélisation numérique et ceux de l'expérimentation. Une dernière application permet quant à elle d'illustrer le potentiel des matériaux à magnétostriction géante.

## 4.1 Actionneur pour le contrôle de déplacement

Dans cette partie nous présentons une application permettant d'illustrer le potentiel des matériaux à magnétostriction géante, ainsi que celui des outils de modélisation développés. Le dispositif étudié par la suite, reprend une structure initialement développée pour l'activation de pompe hydraulique ([Lhermet et al., 2004]).

Cette structure utilise comme éléments actifs des matériaux piézoélectriques. Il existe déjà sur le marché de très bon logiciels, comportant une définition du comportement piézoélectrique, qui permettent la modélisation de cette structure. Dans cette configuration, nos outils de modélisation n'apporteront rien de supplémentaire. Cependant, si l'on souhaite passer d'un élément actif piézoélectrique à un élément actif magnétostrictif, aucun logiciel n'est disponible pour modéliser ce type de structure en considérant le comportement magnéto-élastique non-linéaire. Nos outils peuvent nous permettre de modéliser ces structures incluant des matériaux à magnétostriction géante.

L'application visée ici est de contrôler des micro-déplacements, permettant le positionnement de petits miroirs. Ces miroirs constituent une pièce maîtresse des systèmes d'optique adaptative, utilisés dans les grands télescopes terrestres<sup>1</sup> pour corriger les effets des turbulences atmosphériques<sup>2</sup>. Pour contrôler ces miroirs, un système de pistons actionné par des matériaux piézoélectriques est utilisé. L'actionneur étudié a pour objectif de remplacer ces systèmes à piston pour éviter l'emploi de haute tension. Cet actionneur reprend donc le principe du système d'actionnement de pompe hydraulique, mais les dimensions et les matériaux sont adaptés à l'application visée.

---

<sup>1</sup>Tel que le VLT un ensemble de 4 télescopes géants au nord du Chili.

<sup>2</sup>Les turbulences atmosphériques conduisent à une qualité d'image dégradée qui fait que l'on a l'impression que les étoiles scintillent dans le ciel. L'optique adaptative est une technique qui permet de corriger en temps réel ces turbulences, correspondant à des déformations évolutives et non-prédictives d'un front d'onde, grâce à un miroir déformable.

### 4.1.1 Description du dispositif

Ce dispositif est constitué d'un barreau magnétostrictif et d'un corps élastique en forme d'ellipsoïde (figure 4.1). Un bobinage entourant le barreau magnétostrictif crée l'excitation magnétique. La finalité du dispositif, pour l'application retenue, est d'obtenir un déplacement  $\delta$  maximum en réponse à une excitation magnétique donnée (figure 4.2) ([Galopin et al., 2006a]). Une première solution passe par l'utilisation d'une pré-contrainte du barreau magnétostrictif. Cette pré-contrainte assurée par l'ellipsoïde permet, pour une excitation magnétique donnée, de développer une déformation de magnétostriction plus importante (figure 3.2).

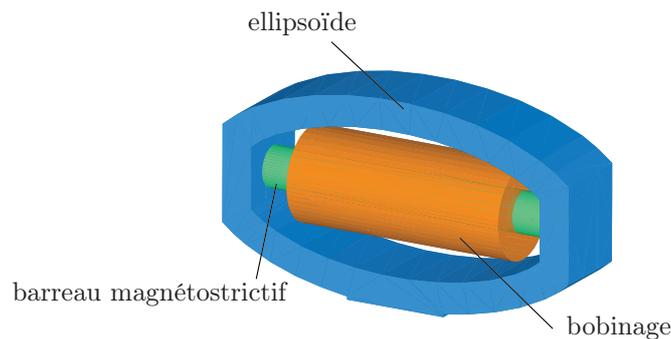


Figure 4.1 – *Dispositif de contrôle de déplacement*

Cet objectif de déplacement maximum pour une excitation magnétique donnée, peut être atteint en optimisant la géométrie de la structure et par un choix judicieux des matériaux constitutifs de l'ellipsoïde. La contrainte est que le flux magnétique doit être canalisé par l'ellipsoïde, ce qui impose l'utilisation de matériaux ferromagnétiques.

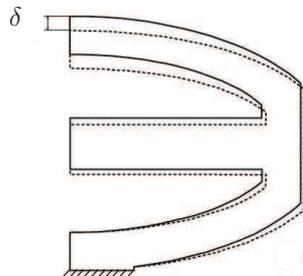


Figure 4.2 – *Déplacement  $\delta$  à une excitation magnétique*

### 4.1.2 Analyse numérique de l'actionneur de contrôle de déplacement

Pour notre objectif de déplacement maximum à une excitation donnée, le choix des dimensions de la structure est essentiel. Nous choisissons d'imposer comme limite la quantité de matériaux magnétostrictifs utilisée. Le but de cette analyse est donc de réaliser, succinctement, une étude de sensibilité aux paramètres géométriques de l'ellipsoïde afin de répondre à notre objectif. Nous proposons dans un premier temps une étude paramétrique bidimensionnelle préparatoire à une étude tridimensionnelle complète, mais plus coûteuse en temps de calcul.

### 4.1.2.1 Analyse bidimensionnelle

Dans le cadre bidimensionnel, la géométrie de l'actionneur est supposée infiniment longue dans la troisième dimension. Le barreau magnétostrictif est alors assimilé à une plaque infiniment longue et d'épaisseur égale au diamètre du barreau. Nous verrons dans le cadre tridimensionnel, que cet hypothèse aura des conséquences sur le déplacement  $\delta$  maximum pouvant être atteint.

Le domaine d'étude considéré pour l'analyse numérique bidimensionnelle du dispositif est défini en figure 4.3. Des conditions aux limites de type "encastrement" ( $u_x = u_y = 0$ ) sont prescrites au pied de l'ellipsoïde pour maintenir le dispositif en position. Le dispositif est étudié dans l'hypothèse des contraintes planes.

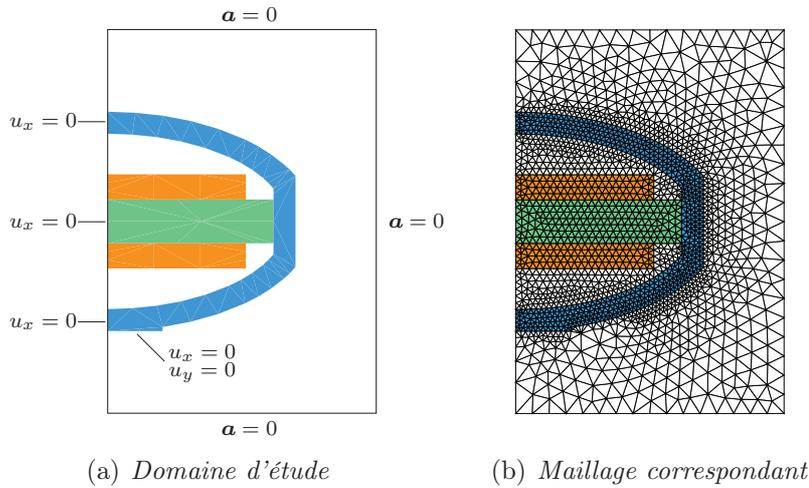


Figure 4.3 – *Domaine d'étude bidimensionnelle et maillage correspondant du dispositif de contrôle de déplacement*

Le choix du matériau constitutif de l'ellipsoïde doit nécessairement se faire dans la famille des matériaux ferromagnétiques, afin de canaliser le flux magnétique. Les coefficients élastiques sont tous à peu près équivalents pour les matériaux de cette catégorie<sup>3</sup>.

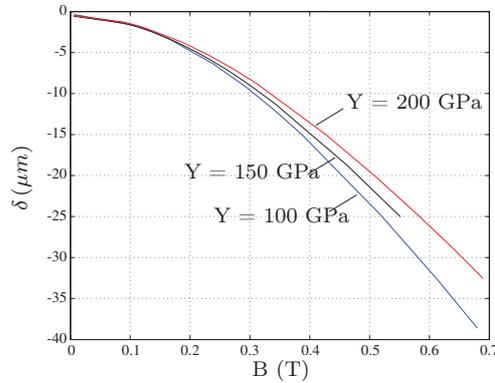


Figure 4.4 – *Influence des coefficients élastiques sur l'évolution du déplacement  $\delta$*

<sup>3</sup>Les modules d'Young du FeSi, du FeCo et du FeNi par exemple, sont d'environ 210 GPa, 210 GPa et 220 GPa respectivement.

#### 4. Application aux dispositifs à base de matériaux actifs

Compte tenu de la gamme des matériaux utiles à la réalisation de l'ellipsoïde, le déplacement  $\delta$  sera peu influencé par le choix du matériau (figure 4.4). Par la suite, on ne cherchera donc pas à optimiser le choix des matériaux, et nous nous restreignons à un acier classique (XC-48). Les paramètres matériaux utilisés pour la modélisation de ce dispositif sont détaillés dans le tableau 4.1.

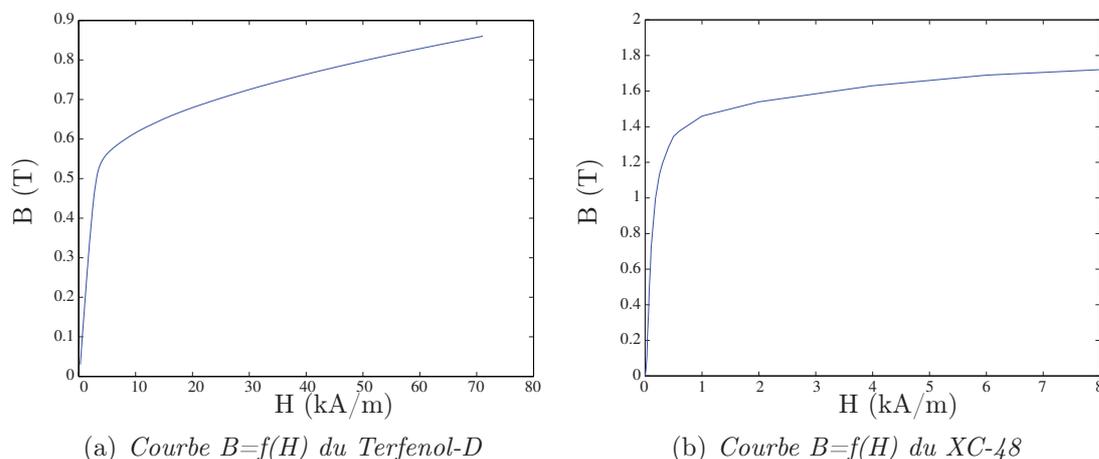


Figure 4.5 – Caractéristiques magnétiques des matériaux du circuit magnétique

Comme le montre la figure 4.6(a), le flux magnétique est canalisé par l'ellipsoïde. Celle-ci permet ainsi de réaliser une fermeture efficace du champ magnétique (figure 4.6(b)). La circulation de l'induction magnétique induit une déformation du barreau magnétostrictif (Terfenol-D), qui implique un déplacement  $\delta$  de l'ellipsoïde (figure 4.6(d)).

La forme de l'ellipsoïde a en contre-partie beaucoup plus d'incidence sur le déplacement  $\delta$  maximum pouvant être produit pour une excitation donnée. Une étude de sensibilité des paramètres géométriques de l'ellipsoïde peut donner une indication sur l'optimisation de la forme à réaliser. Cette étude de sensibilité fait intervenir plusieurs paramètres représentatifs de la géométrie de l'ellipsoïde. La figure 4.7(a) détaille différents paramètres considérés dans cette étude de sensibilité. Plusieurs de ces paramètres sont liés entre eux, et certains ne seront donc pas considérés directe-

Matériau magnétostrictif (Terfenol-D Etrema)			
Module d'Young	Y	(GPa)	100
Coefficient de Poisson	$\nu$	-	0,3
Perméabilité magnétique	$\mu/\mu_0$	-	Non-linéaire (Figure 4.5(a))
Ellipsoïde (XC-48)			
Module d'Young	Y	(GPa)	200
Coefficient de Poisson	$\nu$	-	0,29
Perméabilité magnétique	$\mu/\mu_0$	-	Non-linéaire (Figure 4.5(b))

Tableau 4.1 – Description des paramètres matériaux utilisés pour l'actionneur de contrôle de déplacement

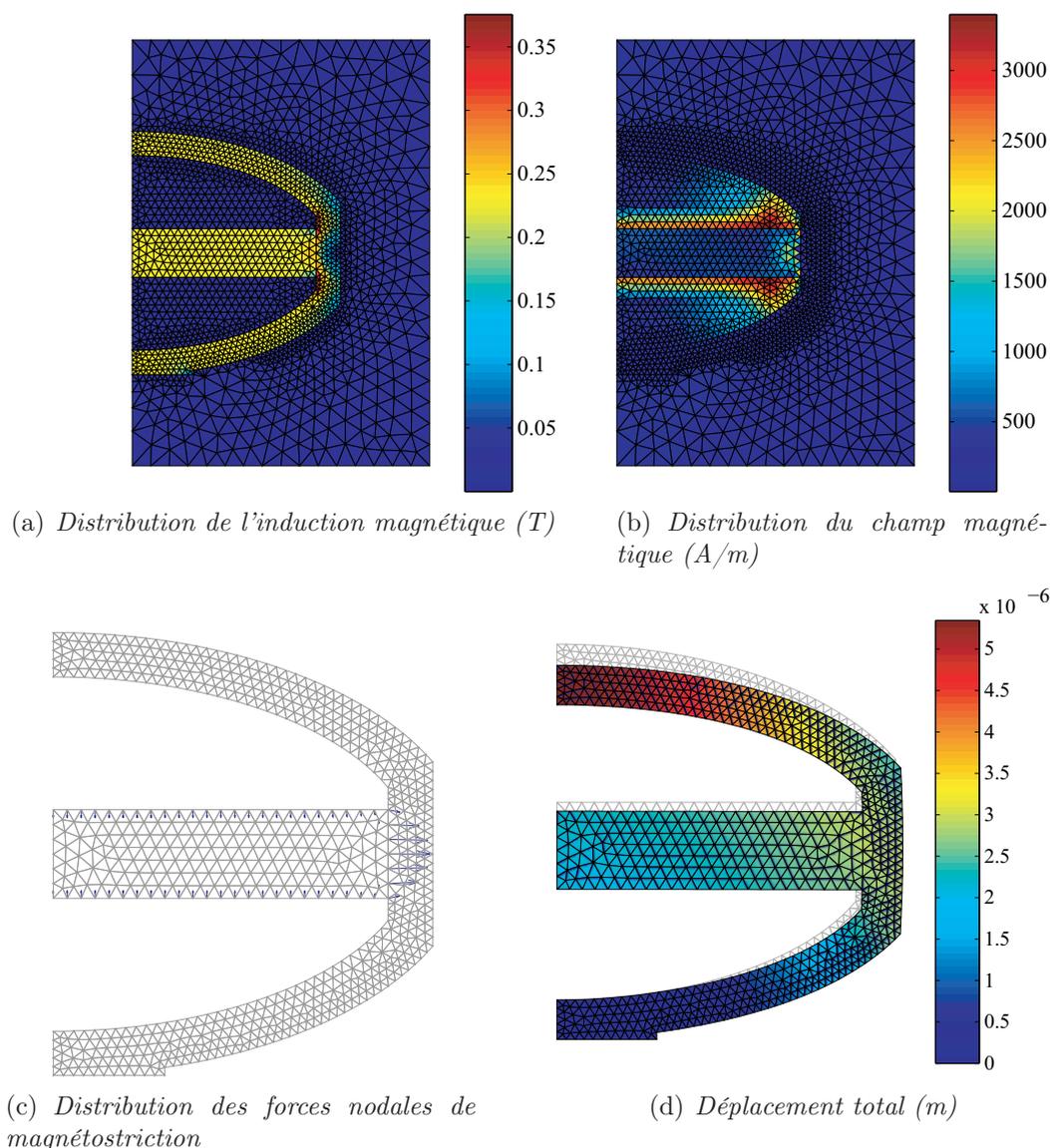


Figure 4.6 – Distribution de l'induction magnétique, du champ magnétique, des forces nodales de magnétostriction et déplacement total

ment. On rappelle que l'on maintient constante la quantité de matériau magnétostrictif pour toute l'analyse. Le diamètre et la longueur du barreau de Terfenol-D ne sont donc pas pris en compte dans l'étude de sensibilité.

L'évolution du déplacement  $\delta$  en fonction de l'induction magnétique, pour les différentes configurations retenues (tableau 4.2), est représentée figure 4.7(b). Cette évolution est non-linéaire à cause du comportement du barreau magnétostrictif. De cette analyse de sensibilité, il ressort que la configuration n°3 est celle qui présente le plus grand déplacement à excitation magnétique donnée (tableau 4.2)<sup>4</sup>. Elle correspond à une épaisseur réduite et à un aplatissement de la forme de l'ellipsoïde. Il ressort de cette analyse de sensibilité le constat suivant :

<sup>4</sup>La configuration n°1 correspond à la configuration initiale.

## 4. Application aux dispositifs à base de matériaux actifs

- la diminution de l'épaisseur  $e_p$  entraîne l'augmentation du déplacement  $\delta$ ,
- l'augmentation de la hauteur de l'ellipsoïde ( $b_1$ ) induit une diminution du déplacement  $\delta$ .

Une première analyse de la structure nous permet d'identifier dans quelle direction conduire l'optimisation. Cependant, cette analyse ne nous permet d'avoir accès qu'à un aspect qualitatif et non quantitatif du comportement de la structure, en raison des hypothèses bidimensionnelles adoptées. Elle apporte toutefois un début de réponse avant le passage à une étude tridimensionnelle. Ce qui permet de minimiser le temps de calcul.

Paramètres	configuration				
	1	2	3	4	5
$b_1$ (mm)	7	7	7	8	9
$e_p$ (mm)	4	3	2	2	2
$\delta$ ( $\mu\text{m}$ ) à 0,5 T	-21,85	-23,54	-32,78	-29,28	-26,36

Tableau 4.2 – Description des paramètres matériaux utilisés et déplacement  $\delta$  obtenu ( $D_b = 4$  mm et  $a_1 = 15$  mm)

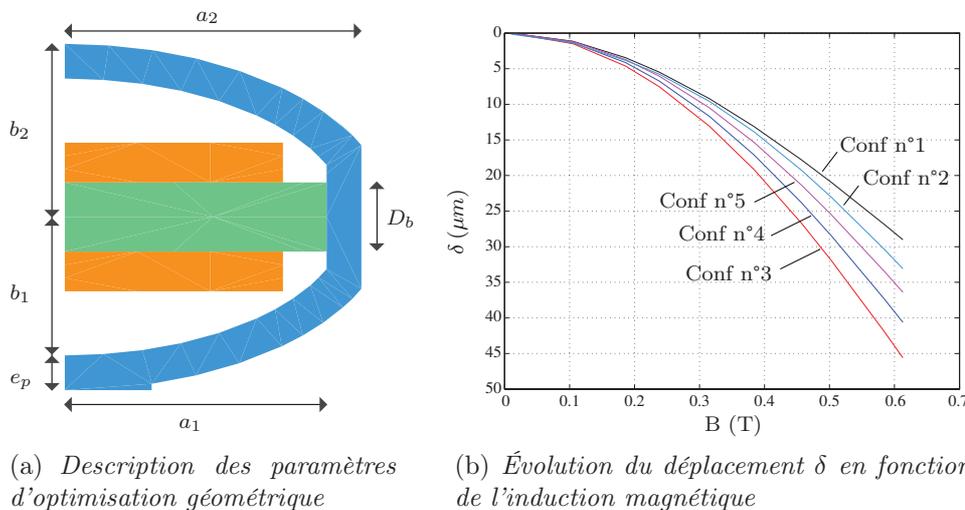


Figure 4.7 – Influence des paramètres géométriques sur le déplacement  $\delta$

### 4.1.2.2 Analyse tridimensionnelle

L'étude bidimensionnelle réalisée précédemment limite l'interprétation des résultats, car elle suppose que la structure est infinie dans la troisième dimension. Elle implique par conséquent une sur-évaluation de la section du barreau magnétostrictif. Une étude tridimensionnelle a donc été conduite en s'appuyant sur les résultats issus de l'analyse bidimensionnelle.

Dans le cadre tridimensionnel, un nouveau paramètre géométrique pour l'analyse de sensibilité s'ajoute à ceux identifiés au cours de l'analyse bidimensionnelle. La

largeur de l'ellipsoïde (figure 4.8) et son épaisseur influent sur le déplacement  $\delta$  maximum. L'étude tridimensionnelle a donc été effectuée pour deux largeurs de l'ellipsoïde, en se limitant aux structures correspondant à la configuration initiale et à la configuration n°3 pour laquelle le déplacement  $\delta$  obtenu est maximum.

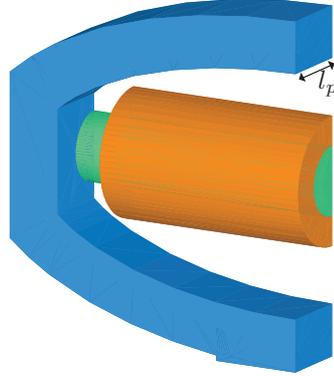


Figure 4.8 – Définition du paramètre de largeur pour l'analyse tridimensionnelle

La figure 4.9 illustre l'évolution du déplacement  $\delta$  en fonction de l'induction magnétique pour deux largeurs ( $l_p$ ) de l'ellipsoïde. Les déplacements obtenus, pour les deux configurations retenues, sont nettement inférieurs à ceux issus de l'analyse bidimensionnelle. Cette différence s'explique par la sur-évaluation de la section du barreau magnétostrictif dans le cadre bidimensionnel. Nous aurions pu dans l'analyse bidimensionnelle adapter les dimensions du barreau magnétostrictif dans le but de conserver les sections. Cependant, comme l'étude bidimensionnelle avait pour principal objectif de fournir une indication sur la sensibilité du déplacement  $\delta$  à certains paramètres géométriques de l'ellipsoïde, cette adaptation n'était pas nécessaire pour l'identification. Les déplacements  $\delta$  obtenus pour une excitation magnétique donnée auraient simplement été moindres.

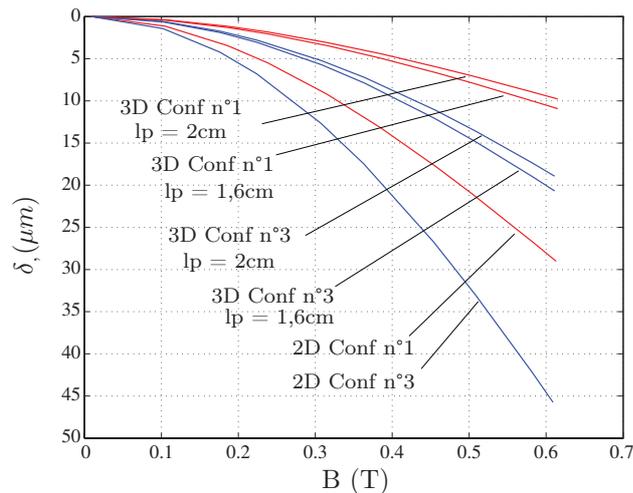


Figure 4.9 – Comparaison 2D - 3D des déplacements  $\delta$  en fonction de l'induction magnétique

Le déplacement  $\delta$  est toujours plus important pour la configuration n°3 que pour la configuration initiale (figure 4.9). On s'aperçoit qu'en ajustant la largeur

( $l_p$ ) de l'ellipsoïde il est possible d'obtenir des déplacements plus importants (figure 4.9). On se rend donc compte qu'en diminuant l'épaisseur ( $e_p$ ) et la largeur ( $l_p$ ) de l'ellipsoïde, tout en aplatissant légèrement celle-ci (paramètre  $b_1$ ), il est possible d'augmenter significativement les déplacements. En ajustant ces paramètres, il est possible d'obtenir une gamme de déplacement associée à une gamme d'excitation magnétique. L'ajustement de ces paramètres est cependant limité par la nécessité de créer une pré-contrainte suffisante du barreau magnétostrictif.

### 4.1.3 Conclusion

L'analyse effectuée ici a exposée les possibilités offertes par les matériaux à magnétostriction géante, dans une application originale de contrôle de déplacement. Le dispositif étudié s'avère potentiellement intéressant pour des applications nécessitant du micro-positionnement. Une étude de sensibilité succincte de la géométrie de la structure a mis en avant le gain, en terme de déplacement, réalisable pour obtenir un déplacement maximum à une excitation magnétique donnée. Ce dispositif ne se limite pas à la configuration présentée ici. Il est possible d'ajouter un aimant permanent dans la structure, ce qui permettrait de travailler autour d'un point de fonctionnement tout en limitant les pertes dans le bobinage. De même, des analyses temporelles et fréquentielles permettraient d'identifier la dynamique et la bande passante de la structure.

## 4.2 Structures composites magnéto-électriques pour la mesure de champ

Les composites stratifiés composés de couches d'un matériau piézoélectrique et d'un matériau magnétostrictif sont les structures les plus simples réalisables à partir de ces matériaux actifs. La présence d'un champ magnétique engendre une déformation du matériau magnétostrictif, qui, transmise au matériau piézoélectrique, est associée à une variation de la polarisation électrique. Inversement, un champ électrique dans un matériau piézoélectrique peut induire une modification de l'aimantation dans le matériau magnétostrictif. Cet effet est appelé "Effet Magnéto-Électrique".

Cet effet existe aussi dans certains matériaux à phase unique, comme indiqué pour la première fois par P. Curie en 1894 [Curie, 1894]. Cependant, les effets observés expérimentalement sont trop faibles pour pouvoir être utilisés dans des applications pratiques ([Folen et al., 1961]). Des matériaux composites à trois phases, Terfenol-D/PZT/Polymers, ont aussi été mis au point ([Nan et al., 2002]). Ces matériaux sont constitués de particules de Terfenol-D ( $\approx 20\mu m$ ) et de PZT ( $\approx 6\mu m$ ) mélangées et noyées dans une matrice de polymers (PVDF). Toutefois, les études ont montré que les couplages magnéto-électriques restent plus faibles que ceux obtenus avec les composites stratifiés.

### 4.2.1 Description des structures composites

Différentes configurations de composites magnéto-électriques stratifiés peuvent être définies. Ces configurations sont fonction de l'ordonnement des couches (1

couche PZT / 1 couche Terfenol-D / 1 couche PZT ...) et du choix de la polarisation de ces couches (transverse T ou longitudinale L) (figure 4.10). Selon la configuration choisie, le couplage magnéto-électrique obtenu est plus ou moins important ([Dong et al., 2003b]).

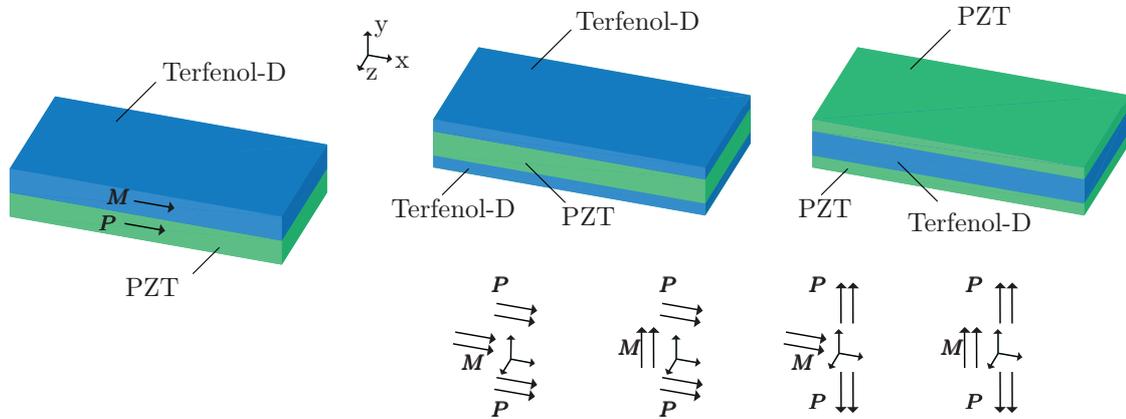


Figure 4.10 – Illustration de différentes configurations de composites magnéto-électriques stratifiés

Pour la suite de l'étude, nous retenons deux structures ([Galopin et al., 2006c], [Galopin et al., 2007b]) : un bilame PZT/Terfenol-D et un multicouche PZT/Terfenol-D/PZT (figure 4.11). Le principe de fonctionnement est identique pour les deux structures. Plongée dans un champ magnétique, la couche magnétostrictive se déforme. Cette déformation est transmise à la (aux) couche(s) piézoélectrique(s), ce qui induit un champ électrique. Pour ces deux structures le même volume de matériaux actifs est utilisé.

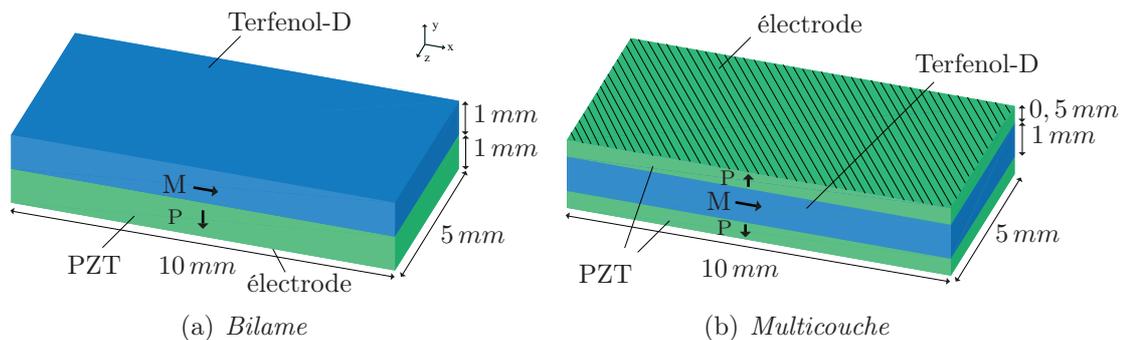


Figure 4.11 – Structures composites stratifiées retenues

### 4.2.2 Solutions analytiques

Dans l'optique de valider le modèle développé, nous allons établir une solution analytique pour la modélisation de ces structures composites. Pour les hypothèses de travail, nous adoptons la théorie des poutres, compte tenu de la géométrie, et négligeons l'effet piézoélectrique inverse. Étant données les symétries des structures composites, on se limite à une étude bidimensionnelle.

La déformation  $S$  des composites est alors approximée par la relation suivante :

$$S(y) = S^0 + \frac{y}{R} \quad (4.1)$$

avec  $S^0$  la déformation de la fibre neutre suivant la direction  $x$  et  $R$  sa courbure. À partir des équations d'équilibre mécanique (principe fondamental de la statique) nous pouvons établir les relations liant les déformations des couches piézoélectriques aux déformations de la couche magnétostrictive. Nous commençons par établir les relations liant les déformations de la couche magnétostrictive aux déformations de la (des) couche(s) piézoélectrique(s) dans le cas du trilame puis dans le cas du bi-lame. Par la suite, nous définissons la relation permettant d'obtenir les potentiels électriques sur les électrodes à partir des déformations de la (des) couche(s) piézo-électriques.

#### 4.2.2.1 Solution analytique du trilame

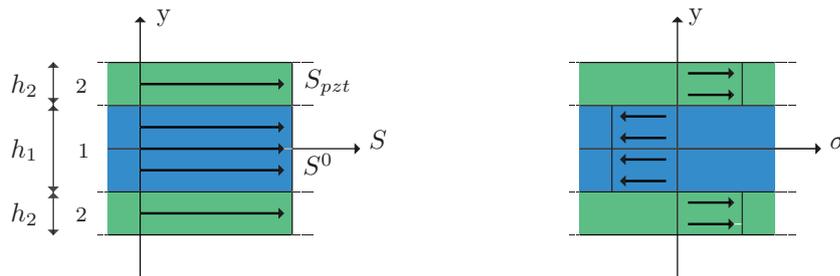
Dans la configuration de la structure trilame, la courbure est nulle. Les déformations dans les couches piézoélectrique et magnétostrictive s'écrivent (figure 4.12(a)) :

$$\begin{cases} \text{couche piézoélectrique :} & S = S^0 = S_1^e \\ \text{couche magnétostrictive :} & S = S_2^e + S^\mu = S^0 \end{cases} \quad (4.2)$$

avec  $S^e$  la déformation élastique. Les contraintes dans les différentes couches sont données par la loi de Hooke (figure 4.12(b)) :

$$\begin{cases} \text{couche piézoélectrique :} & \sigma_2 = Y_2 S^0 \\ \text{couche magnétostrictive :} & \sigma_1 = Y_1 (S^0 - S^\mu) \end{cases} \quad (4.3)$$

où  $Y_1$  et  $Y_2$  sont les modules d'Young des matériaux magnétostrictif et piézoélectrique.



(a) Profil des déformations totales du trilame

(b) Profil des contraintes du trilame

Figure 4.12 – Profil des contraintes et des déformations de la structure trilame

De l'équilibre des forces, il découle la relation liant la déformation de la fibre neutre  $S^0$  à la déformation de magnétostriction  $S^\mu$  :

$$\int_{-\frac{h_1}{2}-h_2}^{\frac{h_1}{2}+h_2} \sigma dy = 0 \Rightarrow \int_{-\frac{h_1}{2}-h_2}^{-\frac{h_1}{2}} \sigma_2 dy + \int_{-\frac{h_1}{2}}^{\frac{h_1}{2}} \sigma_1 dy + \int_{\frac{h_1}{2}}^{\frac{h_1}{2}+h_2} \sigma_2 dy = 0 \quad (4.4)$$

$$S^0 = \frac{Y_1 h_1}{2Y_2 h_2 + Y_1 h_1} S^\mu \quad (4.5)$$

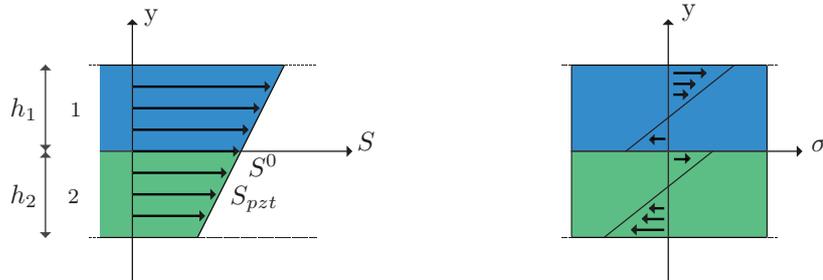
#### 4.2.2.2 Solution analytique du bilame

Dans la configuration bilame, la courbure est non nulle. Les déformations des couches piézoélectrique et magnétostrictive s'écrivent donc (figure 4.13(a)) :

$$\begin{cases} \text{couche piézoélectrique :} & S = S_2^e = S^0 + \frac{y}{R} \\ \text{couche magnétostrictive :} & S = S_1^e + S^\mu = S^0 + \frac{y}{R} \end{cases} \quad (4.6)$$

Les contraintes dans les couches piézoélectrique et magnétostrictive s'écrivent :

$$\begin{cases} \text{couche piézoélectrique :} & \sigma_2 = Y_2 \left( S^0 + \frac{y}{R} \right) \\ \text{couche magnétostrictive :} & \sigma_1 = Y_1 \left( S^0 + \frac{y}{R} - S^\mu \right) \end{cases} \quad (4.7)$$



(a) Profil des déformations totales du bilame

(b) Profil des contraintes du bilame

Figure 4.13 – Profil des contraintes et des déformations de la structure bilame

Pour établir la relation liant la déformation de la fibre neutre  $S^0$  à la déformation de magnétostriction  $S^\mu$ , nous utilisons l'équilibre des forces et l'équilibre des moments<sup>5</sup>.

$$\text{Equilibre des forces : } \int_{-h_2}^{h_1} \sigma dy = 0 \Rightarrow \int_{-h_2}^0 \sigma_2 dy + \int_0^{h_1} \sigma_1 dy = 0 \quad (4.8)$$

<sup>5</sup>La différence de rigidité des deux matériaux implique que lorsqu'un des deux matériaux tend à se déformer, la présence du second entraîne une flexion de l'ensemble.

$$\Rightarrow S^0 (Y_2 h_2 + Y_1 h_1) + \frac{1}{2R} (Y_1 h_1^2 - Y_2 h_2^2) = Y_1 h_1 S^\mu \quad (4.9)$$

$$\text{Equilibre des moments : } \int_{-h_2}^{h_1} \sigma y dy = 0 \Rightarrow \int_{-h_2}^0 \sigma_2 y dy + \int_0^{h_1} \sigma_1 y dy = 0 \quad (4.10)$$

$$\Rightarrow S^0 \left( Y_1 \frac{h_1^2}{2} - Y_2 \frac{h_2^2}{2} \right) + \frac{1}{3R} (Y_2 h_2^3 + Y_1 h_1^3) = Y_1 \frac{h_1^2}{2} S^\mu \quad (4.11)$$

$$\frac{1}{R} = \frac{6}{\kappa} Y_1 Y_2 h_1 h_2 (h_1 + h_2) \quad (4.12)$$

$$S^0 = \frac{Y_1 h_1}{\kappa} (Y_1 h_1^3 + 4Y_2 h_2^3 + 3Y_2 h_1 h_2^2) S^\mu \quad (4.13)$$

avec :  $\kappa = Y_1^2 h_1^4 + Y_2^2 h_2^4 + 4 Y_1 Y_2 h_1 h_2 (h_1^2 + h_2^2) + 6 Y_1 Y_2 h_1^2 h_2^2$

Dans le cas où  $h_1 = h_2 = h$ , les relations précédentes se simplifient :

$$S^0 = \frac{Y_1 (Y_1 + 7 Y_2)}{Y_1^2 + Y_2^2 + 14 Y_1 Y_2} S^\mu \quad (4.14)$$

#### 4.2.2.3 Relation déformation - potentiel électrique

On considère les couches piézoélectriques en configuration capteur (i.e. les électrodes sont connectées à un circuit électrique pour la mesure de tension, équivalent à un circuit ouvert). Comme pour la modélisation numérique, on considère l'équation (3.7) pour obtenir le potentiel électrique sur les électrodes issu de la déformation des structures composites. On fait alors les hypothèses suivantes :

1. Le champ électrique est unidirectionnel :  $\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E_3 \end{pmatrix}$
2.  $S_{22} = S_{33} = -\nu S_{11}$
3.  $\mathbf{D} = 0$

La dernière hypothèse est une hypothèse forte qui en toute rigueur n'est pas nécessairement vérifiée. Celle-ci découle du fait que, dans la configuration capteur adoptée ici, le flux de  $\mathbf{D}$  sur électrode doit être nul :

$$\mathbf{K}_{u\phi}^t \mathbf{u} + \mathbf{K}_{\phi\phi} \phi = \mathbf{Q} = 0 \quad (4.15)$$

La manière la plus simple pour que le flux de  $\mathbf{D}$  soit nul, est donc d'imposer que l'induction électrique  $\mathbf{D}$  soit nulle. Pour la solution analytique, nous posons donc :

$$\boldsymbol{\alpha} \mathbf{S} + \boldsymbol{\varepsilon}^S \mathbf{E} = \mathbf{D} = 0 \quad (4.16)$$

On peut donc en déduire la relation liant le champ électrique à la déformation moyenne de la couche piézoélectrique :

$$E_3 = -\frac{(\alpha_{31}(1-\nu) - \alpha_{33}\nu)}{\varepsilon_{33}} S_{11} \quad (4.17)$$

avec  $S_{11}$  la déformation moyenne de la couche piézoélectrique, considérée à mi-épaisseur de la couche. On remonte ensuite au potentiel sur l'électrode par :

$$\phi = E_3 h_2 \quad (4.18)$$

### 4.2.3 Comparaison solutions analytique/numérique

Les domaines d'étude considérés pour l'analyse numérique des structures composites sont définis par la figure 4.14. Des conditions aux limites mécaniques de type encastrement ( $u_x = u_y = 0$ ) sont imposées pour maintenir en position les structures composites. Les conditions aux limites magnétiques imposées sont équivalentes à la création d'un champ magnétique uniforme (en l'absence de matériau ferromagnétique), tel que celui créé par un solénoïde infini parcouru par un courant constant. Les propriétés des matériaux utilisés pour cette modélisation sont détaillées dans le tableau 4.3.

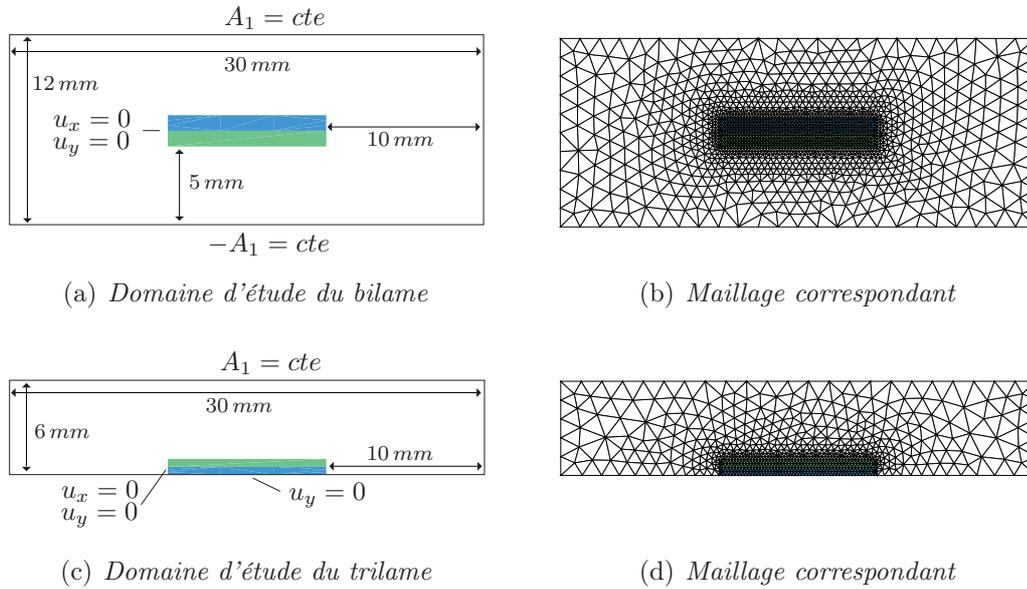


Figure 4.14 – Domaines d'étude et maillage correspondant des structures composites

Les équipotentielles (figure 4.15(a) et 4.15(b)) résultant de cette excitation, montrent la concentration du flux magnétique dans la couche magnétostrictive. L'induction magnétique traversant cette couche (figure 4.15(c) et 4.15(d)) soumet alors celle-ci à l'action de forces de magnétostriction équivalentes (figure 4.15(e) et 4.15(f)). L'action de ces forces équivalentes induit une déformation longitudinale de la couche magnétostrictive (direction d'application du champ). Dans le cas du bilame cela se traduit par une flexion (figure 4.15(g)) induite par la différence de rigidité des matériaux constituant les deux couches. En revanche, dans le cas du trilame la

#### 4. Application aux dispositifs à base de matériaux actifs

Matériau piézoélectrique (EB10)			
élasticité	$C_{11}$	$(10^{10} N/m^2)$	13,31
	$C_{13}$	$(10^{10} N/m^2)$	8,02
	$C_{33}$	$(10^{10} N/m^2)$	12,13
	$C_{44}$	$(10^{10} N/m^2)$	2,57
Constante électrique	$\varepsilon_{11}/\varepsilon_0$	-	1028
	$\varepsilon_{33}/\varepsilon_0$	-	900
Constante piézoélectrique	$\alpha_{31}$	$(C/m^2)$	-3,4
	$\alpha_{33}$	$(C/m^2)$	18,38
	$\alpha_{15}$	$(C/m^2)$	13,29
Perméabilité magnétique	$\mu/\mu_0$	-	1
Matériau magnétostrictif (Terfenol-D Etrema)			
Module d'Young	$Y$	$(GPa)$	100
Coefficient de Poisson	$\nu$	-	0,3
Perméabilité magnétique	$\mu/\mu_0$	-	Non-linéaire (Figure 4.5(a))

Tableau 4.3 – Description des paramètres matériaux utilisés pour l'analyse des structures composites

symétrie de la structure annule tout effet de flexion. Il en résulte un allongement de l'ensemble (figure 4.15(h)).

Le comportement des structures bilame et trilame est illustré figure 4.16 pour différentes sollicitations magnétiques appliquées. Ces différentes sollicitations correspondent à une induction magnétique dans la couche magnétostrictive évoluant entre  $0,16 T$  et  $0,77 T$ . À la déformation des structures est associée la distribution du potentiel électrique dans les couches piézoélectriques. On peut noter la présence d'une zone de concentration du potentiel électrique dans la couche piézoélectrique du bilame.

L'évolution de la tension électrique récupérée sur les électrodes en fonction de l'induction magnétique est représentée figure 4.17(a). Il apparaît, aussi bien pour la solution analytique que pour la solution numérique, que le potentiel électrique est plus important pour le trilame que pour le bilame. L'évolution de la tension électrique est une fonction non-linéaire de l'induction magnétique dans la couche magnétostrictive. Cependant, si on regarde cette évolution en fonction du champ magnétique appliqué, on constate, pour une certaine amplitude du champ magnétique, un comportement linéaire (figure 4.17(b)), aussi bien pour le bilame que pour le trilame.

On peut noter des écarts entre les solutions analytiques et les solutions numériques. Ces écarts peuvent s'expliquer par les approximations utilisées pour établir les solutions analytiques. Tout d'abord, la distribution de l'induction magnétique dans la couche magnétostrictive n'est pas homogène sur toute la couche. Or, on considère pour la solution analytique une induction magnétique homogène dans toute la couche magnétostrictive. De plus, on considère que l'induction électrique  $\mathbf{D}$  est nulle dans la couche piézoélectrique, pour l'établissement de la solution analytique. Cette condition, liée à la l'annulation du flux de  $\mathbf{D}$  n'est pas nécessairement vérifiée.

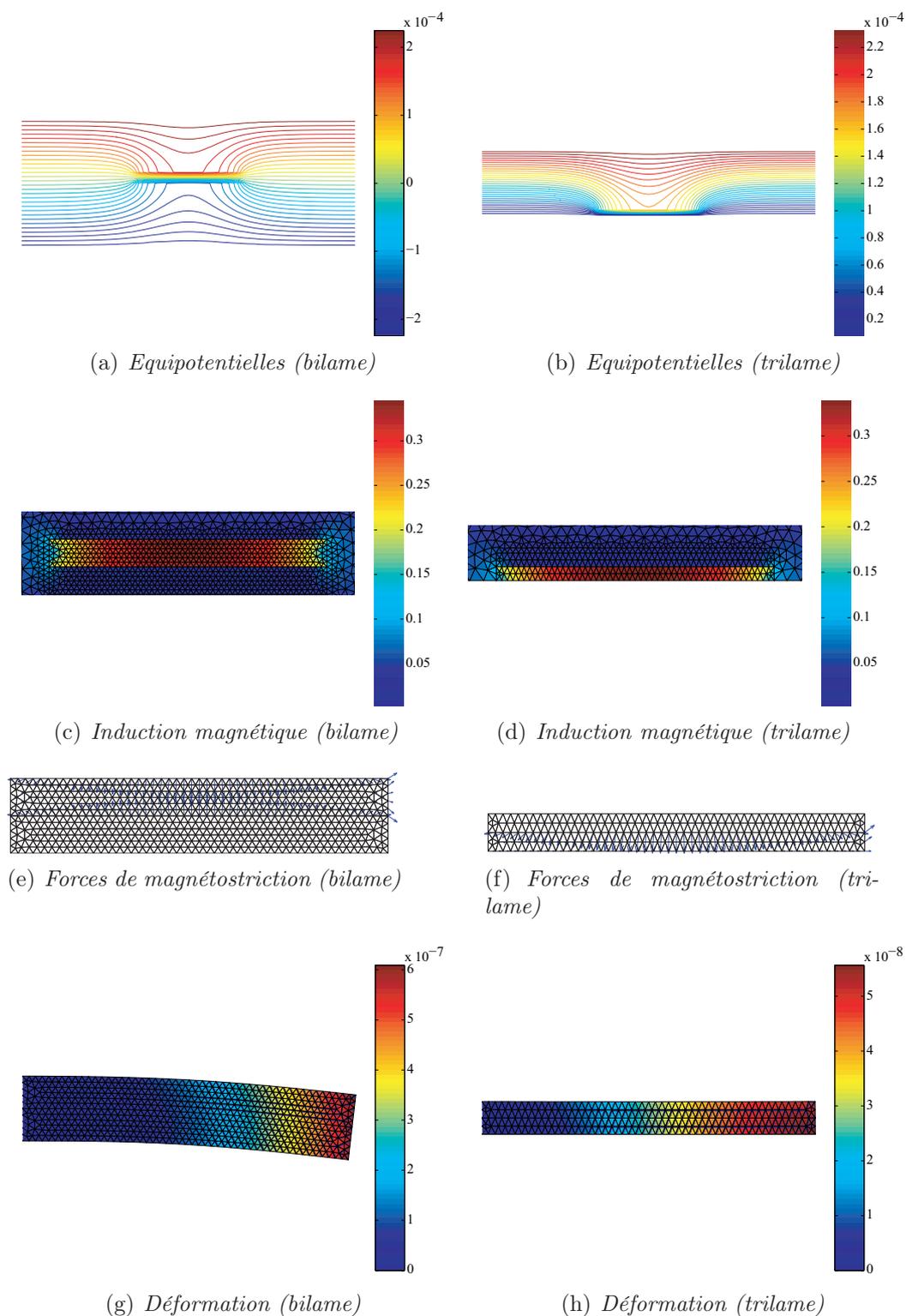


Figure 4.15 – Distribution des équipotentiels ( $A$ ), de l'induction magnétique, des forces de magnétostriction et de la déformée totale

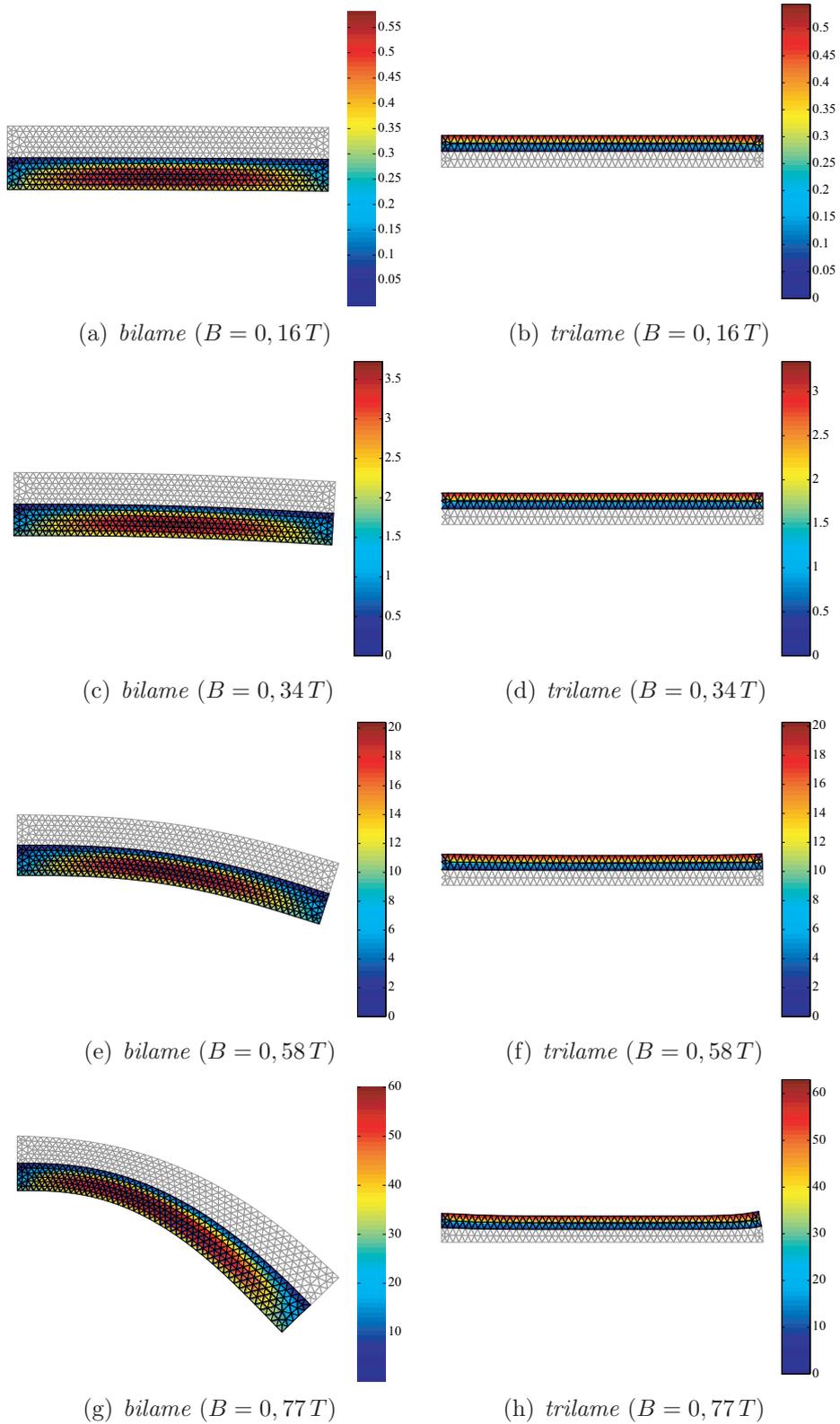


Figure 4.16 – Distribution du potentiel électrostatique pour différentes valeurs du champ magnétique (*Bilame* : amplifié 500 fois ; *Trilame* : amplifié 1000 fois)

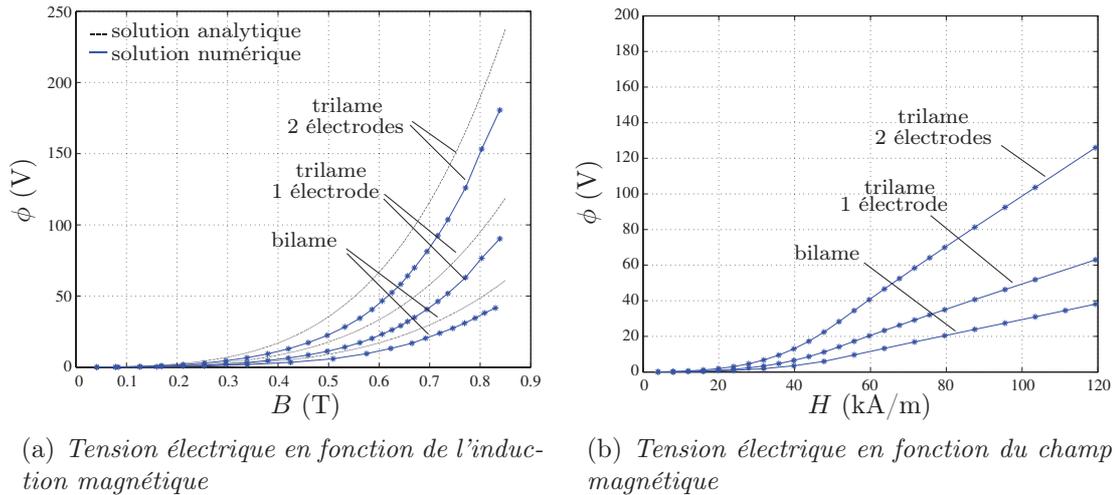


Figure 4.17 – Tension électrique sur les électrodes des structures composites

#### 4.2.3.1 Note sur les algorithmes de résolution

La solution du problème magnéto-électrique peut être obtenue par les algorithmes se basant sur les méthodes du point fixe modifié ou de Newton-Raphson présentées au §3.4.4. Du point de vue du nombre d'itérations nécessaire pour obtenir la convergence, la méthode de Newton-Raphson est plus rapide que la méthode du point fixe modifiée (figure 4.18). Néanmoins, pour des inductions magnétiques importantes le nombre d'itérations entre des deux méthodes devient équivalent.

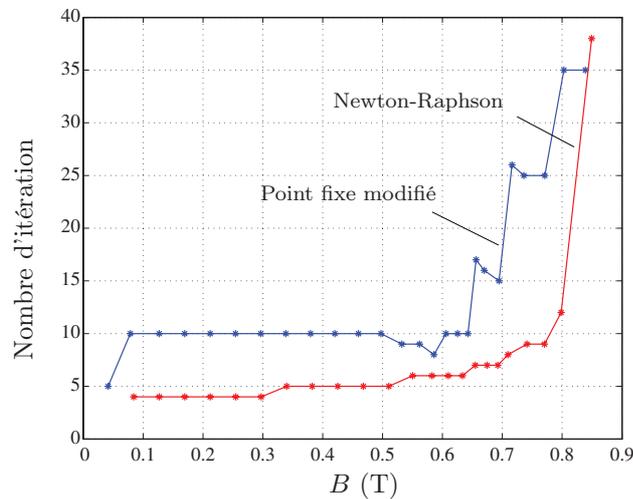


Figure 4.18 – Nombre d'itérations en fonction de l'induction magnétique pour la structure trilame et une erreur  $\varepsilon_r < 1.10^{-3}$

#### 4.2.4 Conclusion

Cette analyse donne une description du fonctionnement de structures composites magnéto-électriques. Ces structures permettent une conversion magnétique-

électrique efficace de par le très bon couplage entre les propriétés mécaniques, magnétiques et électriques.

### 4.3 Capteur de déplacement magnéto-électrique

Comme nous l'avons vu au §4.2, l'association de couches piézoélectriques et de couches de Terfenol-D peut fournir des capteurs magnétiques. Le très bon couplage entre les propriétés mécaniques, magnétiques et électriques induit des potentiels électriques suffisamment importants, même pour de faibles variations du champ magnétique, pour être exploités. De plus, la réalisation de telles structures est relativement simple. L'utilisation de ces composites ne se limite pas à la mesure de champs magnétiques. Ils peuvent être un élément du fonctionnement d'application nécessitant une conversion magnéto-électrique.

Une des applications, exploitant un composite stratifié magnéto-électrique, consiste en un capteur de déplacement magnéto-électrique conçu pour détecter les déplacements d'un objet ferromagnétique. Ce capteur est proposé pour détecter les déplacements d'objets ferromagnétiques dans des environnements sous haute température, environnements où les capteurs magnétiques conventionnels ne sont pas aptes à fonctionner (Sonde à effet Hall, capteur GMR). Les applications d'un tel capteur incluent la détection dans la motorisation automobile ou dans les machineries utilisées pour la mise en forme des matériaux.

#### 4.3.1 Description du dispositif

Ce capteur de déplacement est constitué d'un composite en configuration trichouche, de deux culasses ferromagnétiques et d'un aimant permanent ([Ueno et Higuchi, 2005]) (figure 4.19(b)). Le composite stratifié est composé d'une couche magnétostrictive collée avec deux couches piézoélectriques (figure 4.19(a)). L'orientation de l'aimantation de la couche magnétostrictive, utilisée comme électrode de masse, est dirigée selon la direction  $x$ . La direction de polarisation des couches piézoélectriques est orthogonale à la direction d'aimantation de la couche magnétostrictive (direction  $y$  selon l'épaisseur des couches). La configuration en sandwich du composite à l'avantage de réduire les effets de courbure (figure 4.15(h)), provenant de la magnétostriction ou de la dilatation thermique. Le composite est maintenu aux culasses en fer par l'action des forces magnétiques issues de la circulation du flux magnétique.

Dans cette structure, le flux magnétique se divise entre un objet ferromagnétique (ici une plaque) et le circuit magnétique. Le rôle du circuit magnétique est de canaliser une partie du flux magnétique produit par l'aimant permanent dans la couche magnétostrictive. Une faible variation de l'entrefer, épaisseur entre l'objet et le capteur, induit alors un changement du flux magnétique dans la couche magnétostrictive, qui est associé à une variation de la déformation de magnétostriction (figure 4.20). Cette déformation produit à son tour un champ électrique dans le matériau piézoélectrique. Le champ magnétique dans la couche magnétostrictive varie fortement même pour de faibles variations d'entrefer.

Les propriétés des matériaux utilisés pour la réalisation du circuit magnétique

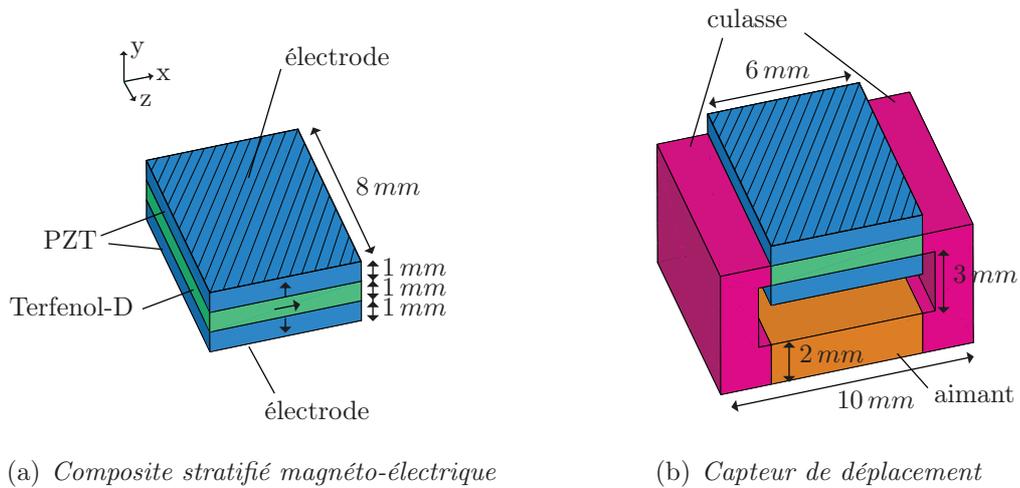


Figure 4.19 – Capteur de déplacement magnéto-électrique [Ueno et Higuchi, 2005]

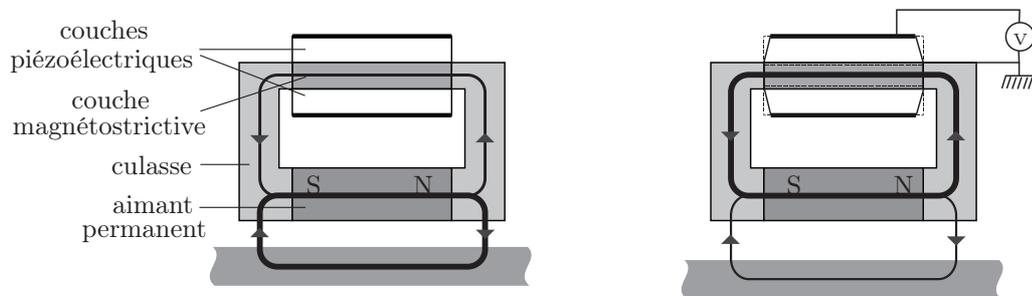


Figure 4.20 – Principe du capteur : circulation du flux magnétique (gauche) et sa variation avec le déplacement de la plaque ferromagnétique (droite)

sont rapportées dans le tableau 4.3.1. Les caractéristiques relatives aux couches piézoélectriques sont insuffisamment détaillées dans [Ueno et Higuchi, 2005], aussi nous utilisons par la suite un matériau piézoélectrique (EB10) se rapprochant le plus des informations fournies.

### 4.3.2 Analyse numérique du capteur

L'analyse numérique ([Galopin et al., 2007b]) vise à simuler le comportement électro-magnéto-mécanique du capteur, et à déterminer sa sensibilité au déplacement pour la comparer avec celle issue de l'expérimentation ([Ueno et Higuchi, 2005]). La géométrie du capteur de déplacement permet, si on néglige les flux de fuite, de limiter son étude au cadre bidimensionnel.

#### 4.3.2.1 Dispositif expérimental

La sensibilité du capteur de déplacement magnéto-électrique est mesurée par un dispositif expérimental développé au Department of Precision Machinery Engineering de l'Université de Tokyo [Ueno et Higuchi, 2005] (figure 4.21). La sensibilité

#### 4. Application aux dispositifs à base de matériaux actifs

Matériau piézoélectrique (P188)			
élasticité	$C_{11}$	$(10^{10} N/m^2)$	13,22
	$C_{13}$	$(10^{10} N/m^2)$	8,37
	$C_{33}$	$(10^{10} N/m^2)$	12
	$C_{44}$	$(10^{10} N/m^2)$	2,95
Constante électrique	$\varepsilon_{11}/\varepsilon_0$	-	1440
	$\varepsilon_{33}/\varepsilon_0$	-	837
Constante piézoélectrique	$\alpha_{31}$	$(C/m^2)$	-4,3
	$\alpha_{33}$	$(C/m^2)$	16,7
	$\alpha_{15}$	$(C/m^2)$	11,8
Perméabilité magnétique	$\mu/\mu_0$	-	1
Matériau magnétostrictif (Terfenol-D Etrema)			
Module d'Young	$Y$	$(GPa)$	100
Coefficient de Poisson	$\nu$	-	0,3
Perméabilité magnétique	$\mu/\mu_0$	-	Non-linéaire (Figure 4.5(a))
Culasse (Fe-Si)			
Module d'Young	$Y$	$(GPa)$	210
Coefficient de Poisson	$\nu$	-	0,3
Perméabilité magnétique	$\mu/\mu_0$	-	Non-linéaire (Figure 4.5(b))
Aimant permanent (SmCo)			
Induction rémanente	$B_r$	(T)	0,8

Tableau 4.4 – Description des paramètres matériaux utilisés pour l'analyse du capteur de déplacement

du capteur est obtenue en mesurant à la fois le déplacement d'une pièce ferromagnétique mobile (le capteur étant choisi comme repère fixe (figure 4.21(b))), et la tension électrique entre les électrodes des couches piézoélectriques. Le mouvement de la plaque ferromagnétique est obtenue par un actionneur piézoélectrique, qui permet d'obtenir une oscillation  $\delta e$  de la plaque autour d'un entrefer  $e$  (figure 4.21(a)). Ce mouvement de la plaque est mesuré par un capteur de déplacement à fibre optique (figure 4.21(a)). La sensibilité du capteur est alors définie par la relation suivante :

$$Sensibilite = \left. \frac{\Delta V}{\Delta \delta e} \right|_e \quad (4.19)$$

Un circuit électrique adapté aux mesures de tension est utilisé pour mesurer la tension électrique sur les électrodes en condition électrique équivalente à un circuit ouvert.

#### 4.3.2.2 Analyse numérique et comparaison expérimentale

Le domaine d'étude considéré pour l'analyse numérique est défini par la figure 4.22. L'hypothèse des contraintes planes est utilisée pour la suite de l'étude. Des conditions aux limites de type encastrement sont définies pour les déplacements nœuds des faces extérieures des culasses. Ces conditions sont justifiées par la présence

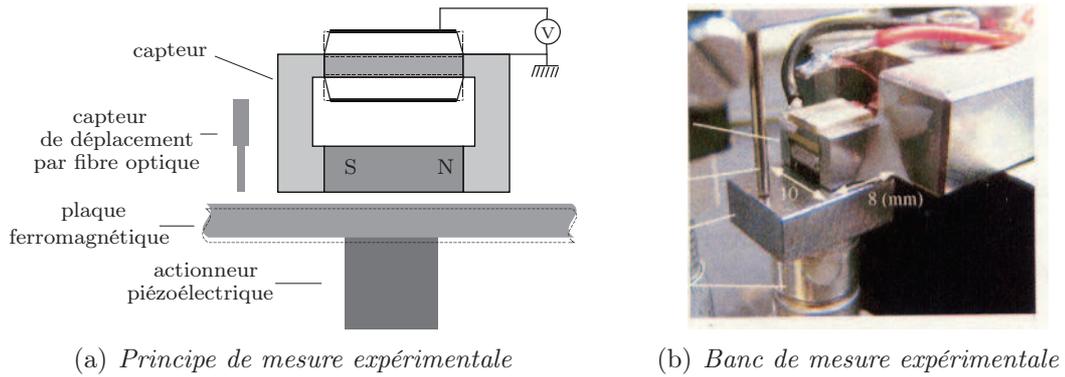


Figure 4.21 – Dispositif expérimental pour la mesure de sensibilité

d'un étau pour maintenir en position le capteur.

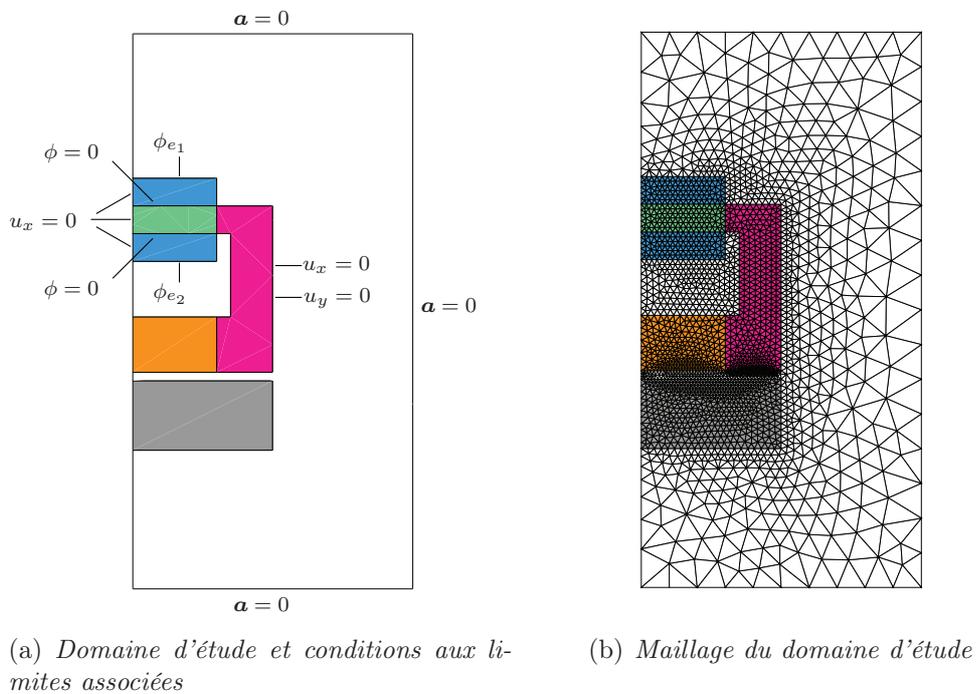


Figure 4.22 – Domaine d'étude et maillage correspondant

La figure 4.23 illustre le comportement magnétique pour différents entrefers. Pour une très faible valeur de l'épaisseur de l'entrefer, le flux magnétique est partagé entre la couche magnétostrictive et la plaque ferromagnétique. L'augmentation de l'épaisseur de l'entrefer minimise le flux magnétique circulant dans la plaque ferromagnétique, ce qui a pour conséquence l'augmentation de l'induction magnétique dans la couche magnétostrictive. Il est à noter que l'induction magnétique dans la couche magnétostrictive semble quasi-homogène (figure 4.23(b), 4.23(d) et 4.23(f)).

En réaction à la variation de flux magnétique, la couche magnétostrictive se déforme (les résultats sont présentés sur la figure 4.24). Cette déformation essentiellement due à la magnétostriction (les forces magnétiques agissant sur la couche magnétostrictive étant relativement faibles) est transmise aux couches piézoélectriques.

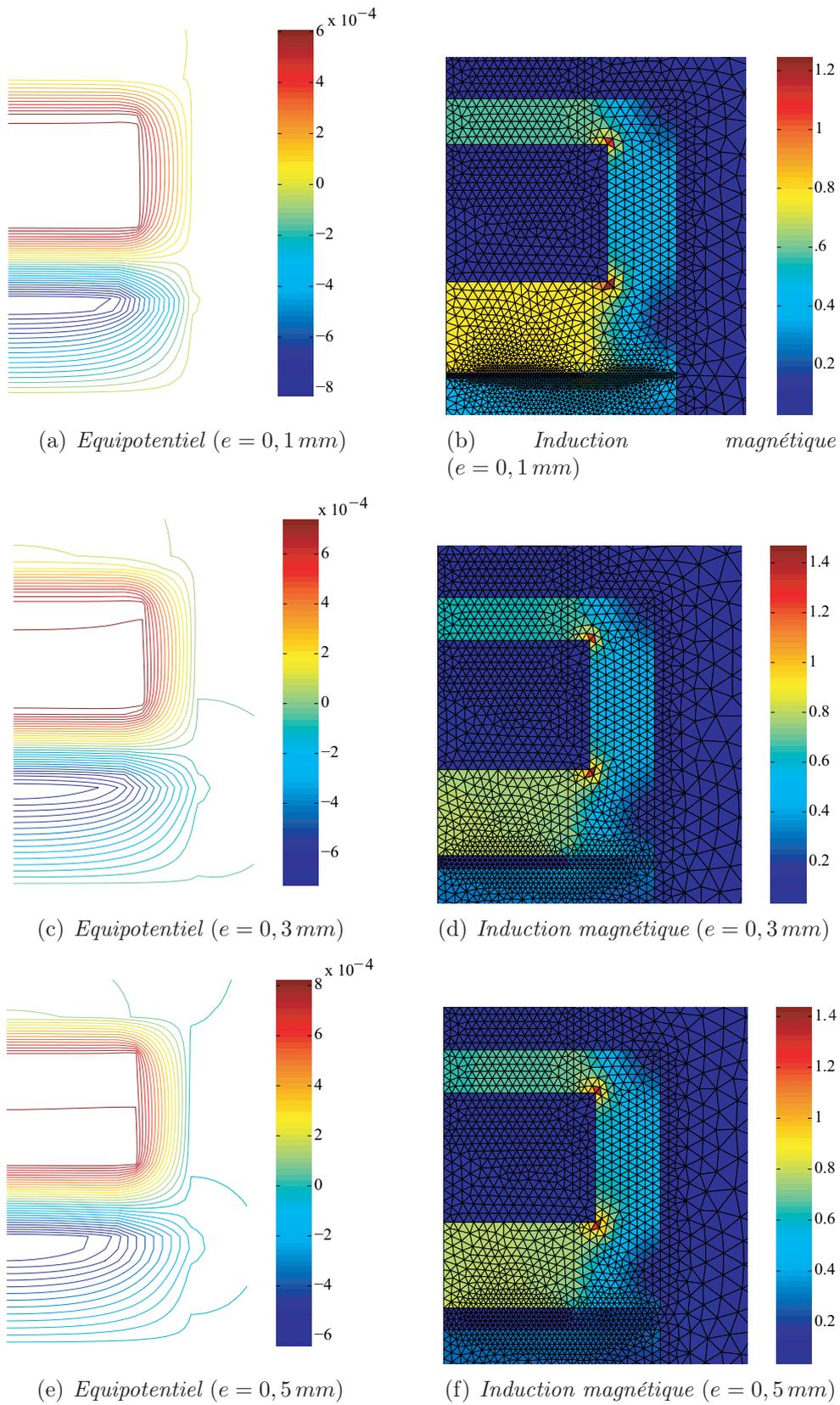


Figure 4.23 – Distribution des équipotentiels et du champ d'induction magnétique

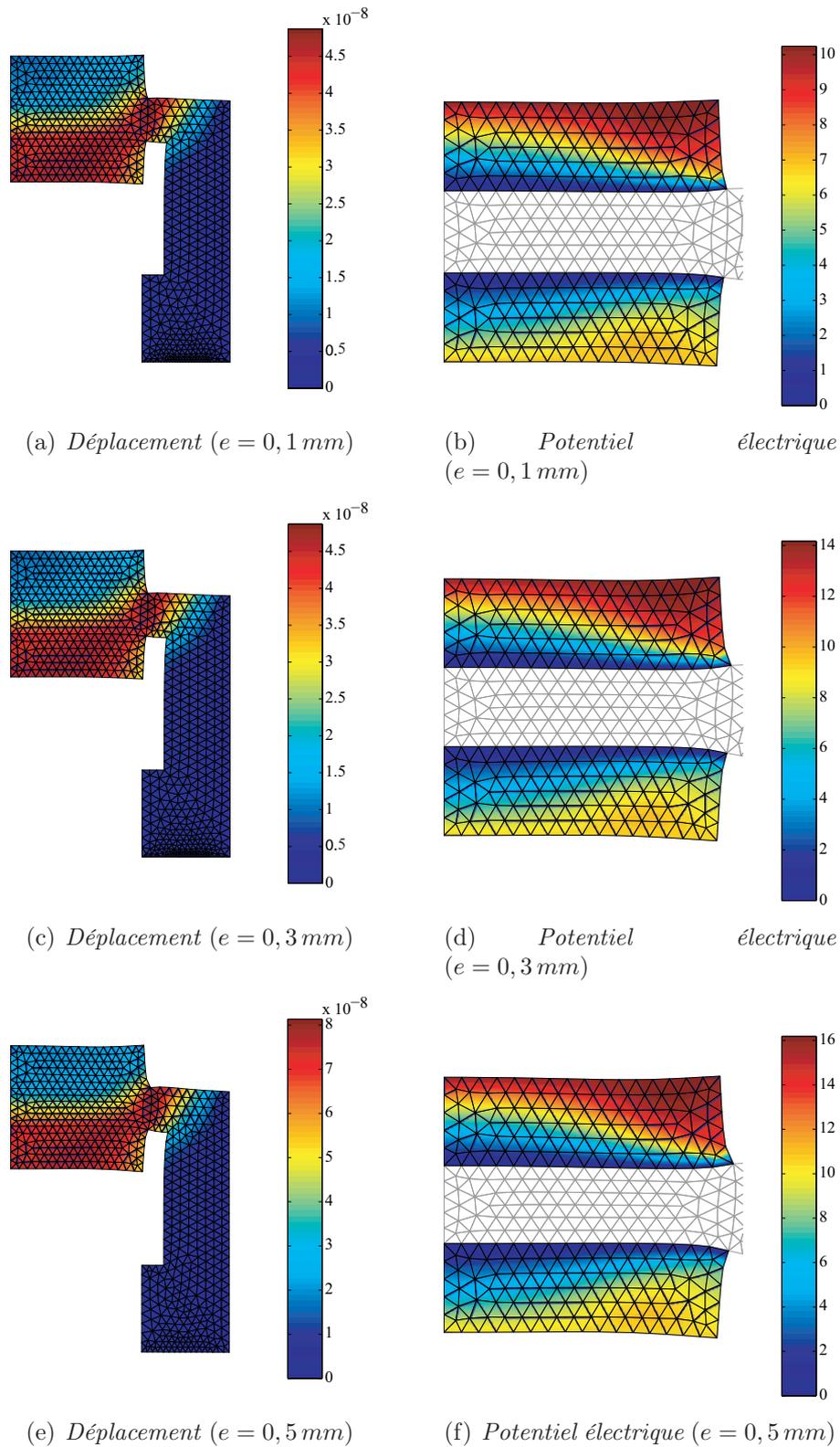


Figure 4.24 – Distribution des déplacements et du potentiel électrique

La déformation des couches piézoélectriques produit un champ électrique dans les couches, et en conséquence un potentiel électrique sur les électrodes<sup>6</sup>. En raison d'un léger effet de flexion du composite, le potentiel électrique n'est pas identique au sein des deux couches piézoélectriques, avec un potentiel électrique légèrement supérieur pour la couche piézoélectrique supérieure. L'augmentation de l'épaisseur de l'entrefer à pour conséquence l'augmentation du potentiel électrique sur les électrodes.

Expérimentalement, l'étude de la sensibilité est réalisée avec les électrodes des couches piézoélectriques connectées en parallèles. Cependant, l'analyse numérique permet de considérer les cas où les électrodes des couches piézoélectriques sont connectées soit en série soit en parallèle (la prise en compte de la mise en parallèle des électrodes dans la méthode des éléments finis s'effectue en imposant les potentiels aux nœuds de l'électrode 1 ( $\phi_1 \neq 0$ ) et les potentiels aux nœuds de l'électrode 2 ( $\phi_2 \neq 0$ ) à la même valeur  $\phi_1 = \phi_2$ ). Dans le cas d'une connexion des électrodes en série la distribution du potentiel électrique correspond à celles obtenues aux figures 4.24(b), 4.24(d) et 4.24(f). Dans le cas d'une connexion en parallèle des électrodes, la distribution du potentiel électrique obtenue est différente (figure 4.25(a), 4.25(a) et 4.25(c)). On remarque que le fait d'imposer les mêmes potentiels électriques sur les électrodes conduit à une distribution du potentiel électrique dans les couches piézoélectriques quasi-équivalente, avec une concentration aux extrémités des couches (figure 4.25(a), 4.25(a) et 4.25(c)). Ce qui n'est pas le cas pour la connexion en série des électrodes, où, bien que la répartition des potentiels soit quasi-équivalente dans les deux couches piézoélectriques, l'amplitude des potentiels dans la couche piézoélectrique inférieure est moins élevée que dans la couche supérieure.

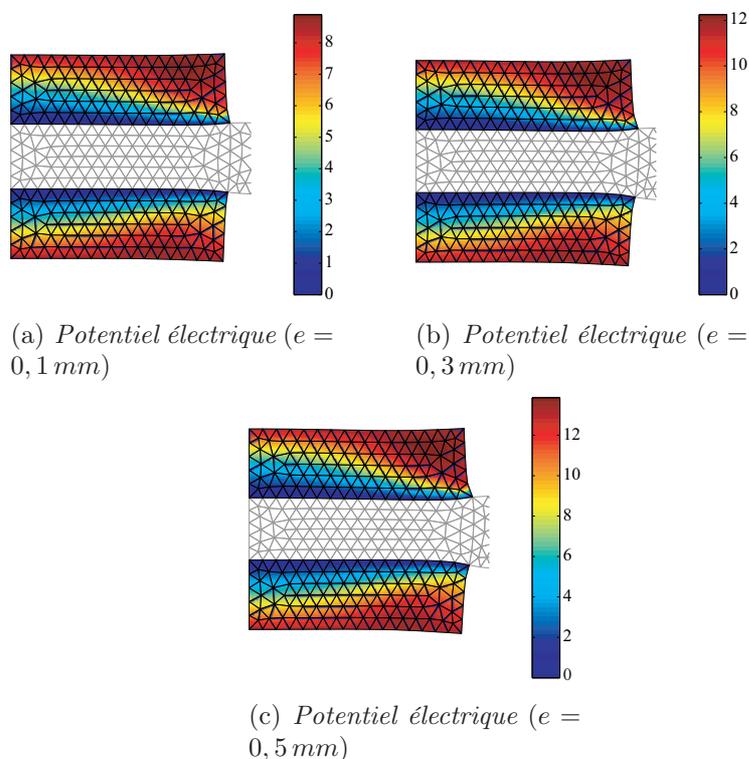


Figure 4.25 – *Distribution du potentiel électrique, électrode en parallèle*

<sup>6</sup>Pour l'instant les électrodes sont considérées indépendantes l'une de l'autre.

L'évolution de la tension électrique et de la sensibilité en fonction de l'entrefer sont représentées aux figures 4.26(a) et 4.26(b). On remarque, dans le cas d'une connexion en parallèle des électrodes (ce qui correspond au cas expérimental), que la sensibilité du capteur issue de la modélisation est en bon accord avec les résultats expérimentaux. Des différences sont cependant observées pour de faibles valeurs des épaisseurs de l'entrefer. Ces écarts peuvent en partie s'expliquer par les paramètres matériaux utilisés pour la modélisation dont les valeurs peuvent ne pas correspondre parfaitement à celles du dispositif expérimental, notamment celles liées à l'aimant permanent et aux couches piézoélectriques. De même, l'influence du collage des couches piézoélectriques et magnétostrictives n'est pas pris en considération. Enfin, la façon dont le capteur est maintenu pendant les essais expérimentaux n'est pas clairement définie, et pose problème pour le traitement des conditions aux limites mécaniques.

La figure 4.26(b) met en évidence que sur une certaine plage de variation de l'épaisseur de l'entrefer, la sensibilité au déplacement du capteur peut être considérée inversement proportionnelle à l'inverse de l'épaisseur de l'entrefer. On peut par ailleurs noter que la mise en série des électrodes des couches piézoélectriques conduit à récupérer des tensions électriques plus importantes et à une sensibilité plus grande.

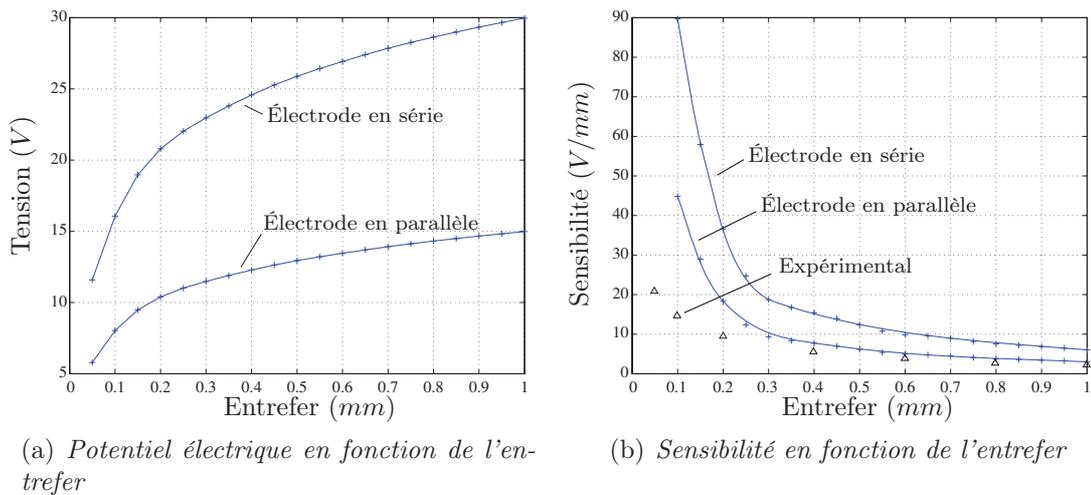


Figure 4.26 – Réponse du capteur de déplacement magnéto-électrique

#### 4.3.2.3 Effet d'une précontrainte

La couche magnétostrictive de la structure composite du capteur est, dans la configuration initiale, libre de contrainte. Or, nous avons vu l'effet de la contrainte sur le comportement magnétostrictif du Terfenol-D (figure 3.2(b)).

Supposons que la couche de Terfenol-D du capteur puisse être pré-contraint par l'intermédiaire d'un ensemble externe. Pour une valeur identique de l'induction magnétique dans la couche magnétostrictive, la déformation de magnétostriction est plus importante. En conséquence, pour une épaisseur d'entrefer identique, le potentiel électrique récupéré sur les électrodes des couches piézoélectriques est plus important (figure 4.27). On remarque également que la sensibilité du capteur dans

le cas pré-contraint est plus importante. En adaptant la pré-contrainte, il est donc possible d'obtenir une gamme de sensibilité plus ou moins importante.

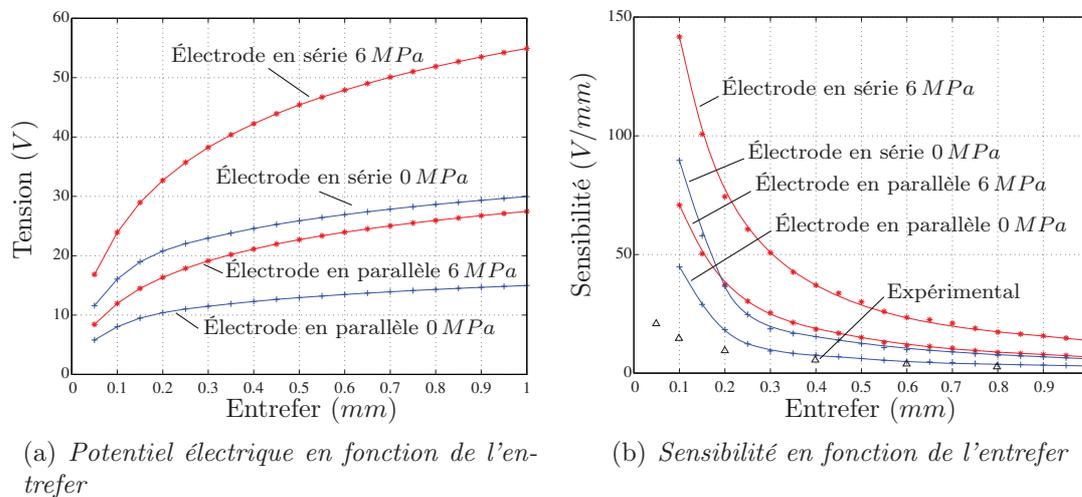


Figure 4.27 – Réponse du capteur de déplacement magnéto-électrique suite à une précontrainte

### 4.3.3 Conclusion

Cette analyse permet une bonne description du mode de fonctionnement du capteur de déplacement. Elle permet en outre de réaliser une nouvelle étape de validation du modèle développé qui peut être utile pour concevoir et optimiser de nouvelles structures. Quelques écarts sont cependant observés avec les résultats expérimentaux. Ils peuvent être attribués en partie à la définition imparfaite des conditions aux limites mécaniques. Les propriétés de l'aimant permanent peuvent aussi ne pas correspondre parfaitement à celles utilisées dans le dispositif expérimental. Enfin, l'influence du collage des couches piézoélectriques avec la couche magnétostrictive n'a pas été prise en considération.

## 4.4 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons modélisé des structures reposant sur l'utilisation de matériaux actifs. Les modélisations des différentes structures présentées se sont appuyées sur les outils développés au chapitre précédent. Un dispositif de contrôle de déplacement micro-métrique a souligné l'intérêt des matériaux à magnétostriction géante, et le potentiel des outils développés. Une étude de sensibilité aux paramètres géométriques du dispositif, met en évidence le gain en terme de déplacement maximum réalisable avec cette structure.

L'accent a ensuite été porté sur l'utilisation conjointe de matériaux à magnétostriction géante et piézoélectriques. L'analyse de structures composites stratifiées a mis en évidence une conversion magnéto-électrique importante, résultant d'un très bon couplage entre les propriétés magnétiques, électriques et mécaniques. Cette

conversion peut être utile pour la mise au point de capteurs magnétiques de haute sensibilité.

Un composite stratifié de ce type est à la base du fonctionnement d'un dispositif conçu pour détecter le déplacement d'objets ferromagnétiques. Ce dispositif basé sur la variation du flux magnétique dans une couche magnétostrictive, permet de remonter au déplacement de l'objet détecté par le potentiel électrique induit sur les électrodes des couches piézoélectriques. L'analyse de la sensibilité du capteur est en accord avec les résultats expérimentaux. Toutefois, quelques écarts sont observés notamment pour les faibles valeurs d'entrefer. Par ailleurs, il est mis en évidence une augmentation de la sensibilité du capteur en effectuant une pré-contrainte de la couche magnétostrictive du composite stratifié.



# Conclusion - Perspectives

LES matériaux actifs constituent un domaine de recherche dynamique, grâce aux possibilités offertes par leur utilisation, et ouvert, à cause de la complexité de leur caractérisation et de leur modélisation. Dans le domaine du génie électrique, ces matériaux rendent possible la conception de nouveaux dispositifs exploitant leurs propriétés électromagnétiques et élastiques fortement couplées. Un dialogue entre expérimentation et modélisation est indispensable pour la mise au point d'outils de conception performants. Dans ce cadre, l'étape de caractérisation doit permettre d'identifier des lois de comportement performantes. Ce type d'approche ayant pour vocation le dimensionnement de dispositifs électromagnétiques, ces lois de comportement doivent être intégrées dans des logiciels de calcul de structures.

Ce travail de thèse s'inscrit dans cette démarche de forte interaction entre modélisation et approche expérimentale. La mise en place d'une plateforme de caractérisation magnéto-mécanique et des travaux de modélisation numérique ont donc été menés de front.

Dans un premier temps, la plateforme de caractérisation a été présentée. Cette plateforme a été prioritairement dédiée à la caractérisation sous contrainte de compression uniaxiale d'échantillons massifs, mais son adaptation à l'étude de tôles ferromagnétiques sous contrainte de traction est réalisable. Cette plate-forme permet d'identifier la réponse magnéto-mécanique (induction magnétique, déformation), hystérétique et anhystérétique, d'un matériau ferromagnétique soumis à une sollicitation magnéto-mécanique (champ magnétique, contrainte). Certaines limites de cette plateforme ont été discutées, mais elle constitue déjà un outil quantitatif pour l'élaboration, l'identification et la validation de modèles de comportement magnéto-mécanique.

Les données issues de l'étape de caractérisation permettent ensuite l'identification de termes de couplage magnéto-mécanique, à travers l'utilisation du formalisme thermodynamique. Les lois de comportement macroscopique obtenues peuvent être introduites dans une approche éléments finis. Elles ont l'avantage d'intégrer la forte non-linéarité du comportement magnéto-mécanique. Dans l'objectif de modéliser des dispositifs magnéto-électriques, la piézoélectricité a également été introduite dans l'outil développé.

Le code de calcul éléments finis mis au point a été validé et exploité sur différents dispositifs électro-magnéto-mécaniques. Une première application à un dispositif de contrôle de micro-déplacement permet de valider les méthodes mises en

œuvre et met en avant les possibilités de l'outil de modélisation obtenu. L'étude de composites stratifiés magnéto-électriques met ensuite en évidence les potentialités de telles structures pour la mise au point de capteurs magnétiques de haute sensibilité. Les travaux menés peuvent permettre de tester différentes configurations pour ces composites. Enfin, dans le cadre d'une collaboration avec l'Université de Tokyo, un dispositif de détection du déplacement d'objets ferromagnétiques a été étudié. Malgré certaines imprécisions sur la connaissance des conditions expérimentales, la modélisation est en bon accord avec les mesures.

Ces travaux ont mis en évidence l'intérêt d'une forte interaction modèles-essais pour l'élaboration et la validation de lois de comportement magnéto-mécanique. Les perspectives portent donc naturellement à la fois sur les aspects expérimentaux et numériques.

Le modèle de déformation de magnétostriction utilisé est, comme la plupart des modèles, indépendant de la contrainte. Ce modèle est adéquat pour le Terfenol-D, mais il ne l'est pas pour la majorité des matériaux ferromagnétiques dont la déformation de magnétostriction dépend fortement de l'état de contraintes. Il semble donc indispensable de prendre en considération cet effet de la contrainte sur la déformation de magnétostriction. Il sera alors peut-être plus judicieux de considérer le comportement magnéto-mécanique avec le champ magnétique comme variable d'état. Cette évolution impose la définition d'une nouvelle loi de comportement magnétique, ainsi qu'un changement de la formulation éléments finis du problème magnétique.

Par ailleurs, le modèle actuel est limité à une description anhystérétique du comportement magnétique, c'est à dire à la part réversible de ce comportement. Cette limitation le prive, pour l'instant, de la description des phénomènes d'hystérésis, fortement présents dans le comportement des matériaux ferromagnétiques. L'utilisation du modèle de Jiles-Atherton à partir des courbes anhystérétiques obtenues est une piste envisageable.

L'étude des structures composites magnéto-électriques nécessite aussi d'adapter la modélisation à l'analyse harmonique, afin d'obtenir la réponse fréquentielle de ce type de structures. L'association des outils de modélisation développés à des outils d'optimisation ([Makni et al., 2007]) conduirait à un outil intégré pour la conception de dispositifs à base de matériaux actifs.

Pour les aspects expérimentaux, un objectif à court terme est le contrôle de l'effort appliqué. La solution envisagée consiste à utiliser un élément piézoélectrique dans la chaîne d'application de l'effort pour contrôler les variations d'efforts. Cette solution a l'avantage de fournir une grande réactivité, supérieure à celle de la machine d'essai, et de réaliser un asservissement indépendant du système, directement sur les variations d'efforts.

Un développement à plus long terme, concerne la mesure de champ de déformation, par exemple par des techniques de corrélation d'images. Ce type de mesure,

---

appliqué à des matériaux fortement hétérogènes (comme les matériaux composites) permettrait de fournir des outils de validation locale, et pas seulement globale, pour les modèles de comportement magnéto-mécanique.

Enfin, si on souhaite mettre en place un outil multi-physique complet pour la modélisation des dispositifs électromagnétiques, l'intégration des aspects thermiques, tant d'un point de vue expérimental que numérique, est indispensable. Le développement d'une caractérisation magnéto-thermo-mécanique paraît envisageable sur la base de la plateforme de caractérisation au prix de quelques adaptations.

On l'a donc vu le domaine des matériaux actifs fait intervenir de nombreux phénomènes de couplage multi-physique, et l'absence de modèles entièrement satisfaisant à ce jour nécessite de nombreux développements.



# Bibliographie

- [60404-3, 1992] IEC Standard Publication 60404-3 (1992). *Methods of measurement of magnetic properties of magnetic sheet and strip by means of a single sheet tester*. Geneva : IEC Central Office.
- [6892, 1998] ISO 6892 (1998). *Matériaux métalliques : Essai de traction à température ambiante*. Organisation Internationale de Normalisation.
- [Abbundi et Clark, 1977] R. Abbundi et A.E. Clark (1977). Anomalous thermal expansion and magnetostriction of single crystal  $Tb_{0.27}Dy_{0.73}Fe_2$ . *IEEE Transactions on Magnetics*, 13(5) :1519–1520.
- [Arzeliès, 1963] H. Arzeliès (1963). *Électricité : Le point de vue macroscopique et relativiste*. Gauthier-Villars.
- [Azoum, 2005] K. Azoum (2005). *Contribution à la modélisation numérique de phénomènes magnéto-élastiques : étude de dispositifs à base de matériaux magnétostrictifs*. Thèse de doctorat, Université Paris-Sud XI, Orsay.
- [Barré, 2003] O. Barré (2003). *Contribution à l'étude des formulations de calcul de la force magnétique en magnétostatique, approche numérique et validation expérimentale*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lille et Université des Sciences et Technologies de Lille, France.
- [Barré et Brochet, 2006] O. Barré et P. Brochet (2006). Discrimination de différentes formulations du calcul de la force magnétique. *Revue Internationale de Génie Electrique*, 9(1) :87–113.
- [Belahcen, 2004] A. Belahcen (2004). *Magnetoelasticity, magnetic forces and magnetostriction in electrical machines*. Thèse de doctorat, Helsinki University of Technology, Finlande.
- [Belov et al., 1965] K.P. Belov, R.Z. Levitin, et B.K. Ponomarev (1965). Magnetostriction of rare earth metals in the paramagnetic, antiferromagnetic and ferromagnetic regions. *Sov. Phys - JETP (Engl. Transl.)*, 49 :1733–1740.
- [Benbouzid, 1994] M.E.H. Benbouzid (1994). *Modélisation de la magnétostriction géante et application aux dispositifs électromagnétiques à base de Terfenol-D*. Thèse de doctorat, Institut national polytechnique de Grenoble, France.
- [Billardon et Hirsinger, 1995] R. Billardon et L. Hirsinger (1995). Magnetostriction and so-called form effect. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 140-144(3) :2199–2200.
- [B.I.P.M, 2006] B.I.P.M (2006). *Le système international d'unités*. Bureau International des Poids et Mesures.

- [Bossavit, 1993] A. Bossavit (1993). *Électromagnétisme en vue de la modélisation*. Springer-Verlag, Paris.
- [Brissonneau, 1997] P. Brissonneau (1997). *Magnétisme et matériaux magnétiques pour l'électrotechnique*. Hermès.
- [Butler et Tito, 2000] S.C. Butler et F.A. Tito (2000). A broadband hybrid magnetostrictive/piezoelectric transducer array. *OCEANS 2000 MTS/IEEE*, 3 :1469–1475.
- [Callen, 1985] H.B. Callen (1985). *Thermodynamics and an introduction to thermostatistics, Second Edition*. John Wiley & Sons.
- [Chari et Silvester, 1980] M.V.K. Chari et P.P. Silvester (1980). *Finite elements in electrical and magnetic field problems*. John Wiley & Sons.
- [Cheng et al., 2000] K.C. Cheng, H.L.W. Chan, C.L. Choy, Q.R. Yin, H.S. Lu, et Z.W. Yin (2000). Piezoelectric coefficients of PMN-0.33PT single crystals. *Proceedings of the 12th IEEE International Symposium on applications of ferroelectrics*, 2 :533–536.
- [Claeyssen et Lhermet, 2002] F. Claeyssen et N. Lhermet (2002). Actuators based on giant magnetostrictive materials. *Actuator 2002, 8th International Conference on New Actuators, Bremen, Allemagne*, pages 148–153.
- [Clark, 1980] A.E. Clark (1980). *Ferromagnetic materials, Vol.1 : Magnetostriction rare earth  $Fe_2$  compounds*. North-Holland, Amsterdam.
- [Clark et al., 2000] A.E. Clark, J.B. Restorff, M. Wun-Fogle, T.A. Lograsso, et D.L. Schlagel (2000). Magnetostrictive properties of body centered cubic Fe-Ga and Fe-Ga-Al alloys. *IEEE Transactions on Magnetics*, 36(5) :3238–3240.
- [Clark et Teter, 1988] A.E. Clark et J.P. Teter (1988). Magnetostriction jumps in twinned  $Tb_{0.3} Dy_{0.7} Fe_{1.9}$ . *Journal of Applied Physics*, 63(8) :3910–3912.
- [Couderechon, 1994] G. Couderechon (1994). Alliages Fer-Nickel et Fer-Cobalt : Propriétés magnétiques. *Techniques de l'ingénieur*, D2 130.
- [Cullity, 1972] B.D. Cullity (1972). *Introduction to magnetic Materials*. Addison-Wesley Publishing Company, London.
- [Curie, 1894] P. Curie (1894). Sur la symétrie dans les phénomènes physiques. *J. Phys. III*, 3 :393.
- [Curie et Curie, 1880a] J. Curie et P. Curie (1880a). Développement, par pression, de l'électricité polaire dans les cristaux hémiedres à faces inclinées. *Comptes-rendus de l'Académie des Sciences*, 91 :294–295.
- [Curie et Curie, 1880b] J. Curie et P. Curie (1880b). Sur l'électricité polaire dans les cristaux hémiedres à faces inclinées. *Comptes-rendus de l'Académie des Sciences*, 91 :383–387.
- [Curie et Curie, 1881] J. Curie et P. Curie (1881). Contractions et dilatations produites par des tensions électriques dans les cristaux hémiedres à faces inclinées. *Comptes-rendus de l'Académie des Sciences*, 93 :1137–1140.
- [Daniel et Galopin, umis] L. Daniel et N. Galopin (Soumis). A constitutive law for magnetostrictive materials and its application to Terfenol-D single and polycrystals. *The European Physical Journal - Applied Physics*.

- 
- [Dapino, 1999] M.J. Dapino (1999). *Nonlinear and hysteretic magnetomechanical model for magnetostrictive transducers*. Thèse de doctorat, Iowa State University, U.S.A.
- [Delaere, 2002] K. Delaere (2002). *Computational and experimental analysis of electric machine vibrations caused by magnetic forces and magnetostriction*. Thèse de doctorat, Université Catholique de Louvain, Belgique.
- [Delaere et al., 2000] K. Delaere, W. Heylen, K. Hameyer, et R. Belmans (2000). Local magnetostriction forces for finite element analysis. *IEEE Transactions on Magnetics*, 36(5) :3115–3118.
- [Dong et al., 2003a] S. Dong, J.F. Li, et D. Viehland (2003a). Giant magnetoelectric effect in laminate composites. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and frequency control*, 50(10) :1236–1239.
- [Dong et al., 2003b] S. Dong, J.F. Li, et D. Viehland (2003b). Longitudinal and transverse magnetoelectric voltage coefficients of magnetostrictive/piezoelectric laminate composite : Theory. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and frequency control*, 50(10) :1253–1261.
- [Downey, 2003] P.R. Downey (2003). *Hybrid PMN-PT/Terfenol-D broadband transducers in mechanical series configuration*. Master thesis, Ohio State University.
- [du Trémolet de Lacheisserie, 1993] E. du Trémolet de Lacheisserie (1993). *Magnetostriction - Theory and applications of magnetoelasticity*. CRC Press.
- [du Trémolet de Lacheisserie, 1999a] E. du Trémolet de Lacheisserie (1999a). *Magnétisme : I - Fondements*. Presses Universitaires de Grenoble.
- [du Trémolet de Lacheisserie, 1999b] E. du Trémolet de Lacheisserie (1999b). *Magnétisme : II - Matériaux et applications*. Presses Universitaires de Grenoble.
- [Durand, 1968] E. Durand (1968). *Magnétostatique*. Masson, Paris.
- [Engdahl, 2000] Göran Engdahl (2000). *Handbook of giant magnetostrictive materials*. Academic Press.
- [Eringen et Maugin, 1990] A.C. Eringen et G.A. Maugin (1990). *Electrodynamics of continua - I : Foundations and solid media*. Springer Verlag, New York.
- [Etrema, 2005] Etrema (2005). *Terfenol-D data sheet*. <http://etrema-usa.com/documents/Terfenol.pdf>.
- [Fiorillo, 2004] F. Fiorillo (2004). *Measurement and characterization of magnetic materials*. Elsevier series in Electromagnetism.
- [Folen et al., 1961] V.J. Folen, G. T. Rado, et E.W. Stalder (1961). Anisotropy of the magnetoelectric effect in  $C_rO$ . *Physical Review Letters*, 6(11) :607–608.
- [Fournet, 1985] G. Fournet (1985). *Électromagnétisme à partir des équations locales*. Masson.
- [François et al., 1991] D. François, A. Pineau, et A. Zaoui (1991). *Élasticité et plasticité*. Hermes, Paris.
- [Fryberger, 1985] D. Fryberger (1985). Magnetic monopoles. *IEEE Transactions on Magnetics*, 21(2) :84–101.
-

- [Galopin et al., 2006a] N. Galopin, K. Azoum, M. Besbes, F. Bouillault, et L. Daniel (2006a). Conception et modélisation d'un dispositif de contrôle de déplacement utilisant un matériau à magnétostriction géante. *Revue de l'Électricité et de l'Électronique*, 10 :44–51.
- [Galopin et al., 2006b] N. Galopin, K. Azoum, M. Besbes, F. Bouillault, L. Daniel, O. Hubert, et F. Alves (2006b). Caractérisation et modélisation des déformations induites par les forces magnétiques et par la magnétostriction. *Revue Internationale de Génie Electrique*, 9(4) :499–514.
- [Galopin et al., 2007a] N. Galopin, L. Daniel, F. Bouillault, et M. Besbes (2007a). Numerical analysis for the design of a magneto-elastic characterisation device. *Przeglad Elektrotechniczny*, 83(6) :44–47.
- [Galopin et al., 2006c] N. Galopin, X. Mininger, F. Bouillault, et L. Daniel (2006c). Modélisation par éléments finis de dispositifs basés sur l'utilisation de matériaux actifs. *2ème Conférence Interdisciplinaire sur les Matériaux, Matériaux 2006*.
- [Galopin et al., 2007b] N. Galopin, X. Mininger, F. Bouillault, et L. Daniel (2007b). Finite element modelling of magneto-electric sensors. *16th Conference on the Computation of Electromagnetic Fields, Compumag 2007*.
- [Girgis et al., 1998] R. Girgis, K. Gramm, J. Sievert, et M.G. Wickramasekara (1998). The single sheet tester. its acceptance, reproducibility and application issues on grain-oriented steel. *J. Phys. IV*, 8(Pr 2) :729–732.
- [Gourdin et al., 1998] C. Gourdin, L. Hirsinger, G. Barbier, et R. Billardon (1998). Experimental identification of the coupling between the anhysteretic magnetic and magnetostrictive behaviours. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 177-181(1) :201–202.
- [Greenough et Wharton, 1997] R.D. Greenough et A.D. Wharton (1997). Methods and techniques to characterise Terfenol-D. *Journal of Alloys and Compounds*, 258(1-2) :114–117.
- [Gros, 1999] L. Gros (1999). *Modélisation, conception et caractérisation de pots vibrants magnétostrictifs. Application au contrôle actif des vibrations*. Thèse de doctorat, Institut national polytechnique de Grenoble, France.
- [Hantila, 1975] I.F. Hantila (1975). A method for solving stationary magnetic field in non-linear media. *Rev. Roum. Sci. Techn.- Electrotechn. et Energ.*, 20(3) :397–407.
- [Hartemann, 1999] P. Hartemann (1999). Effets et matériaux magnétostrictifs. *Techniques de l'Ingénieur - Électronique*, Dossier E1880(E3).
- [Henrotte et Hameyer, 2004] F. Henrotte et K. Hameyer (2004). Computation of electromagnetic force densities : Maxwell stress tensor vs. virtual work principle. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 168(1-2) :235–243.
- [Hirsinger, 1994] L. Hirsinger (1994). *Etude des déformations magnéto-élastiques dans les matériaux ferromagnétiques doux. Application à l'étude des déformations d'une structure de machine électrique*. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie, France.
- [Hirsinger et Billardon, 1995] L. Hirsinger et R. Billardon (1995). Magneto-elastic finite element analysis including magnetic forces and magnetostriction effects. *IEEE Transactions on Magnetics*, 31(3) :1877–1880.

- 
- [Hubert et al., 2005] O. Hubert, M. Chaabane, J. Jumel, V. Maurel, F. Alves, A.D. Bensalah, M. Besbes, K. Azoum, L. Daniel, et F. Bouillault (2005). A new experimental set-up for the characterisation of magneto-mechanical behaviour of materials submitted to biaxial stresses. Application to FeCo alloys. *Przeglad Elektrotechniczny*, 81(5) :19–23.
- [Hubert et al., 2003] O. Hubert, L. Daniel, et R. Billardon (2003). Experimental analysis of the magnetoelastic anisotropy of a non-oriented silicon iron alloy. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 254-255(1) :352–354.
- [Hubert et Schäfer, 1998] A. Hubert et R. Schäfer (1998). *Magnetic domains*. Springer Verlag.
- [Imbert, 1984] J.F. Imbert (1984). *Analyse des structures par éléments finis*. Cepadues, Paris.
- [Jackson, 1999] J.D. Jackson (1999). *Classical electrodynamics*. John Wiley & Sons.
- [Janocha et Clephas, 1996] H. Janocha et B. Clephas (1996). Hybrid actuator with piezoelectric and magnetostrictive material. *Actuator 96, 5th International Conference on New Actuators, Bremen, Allemagne*, pages 304–307.
- [Jiles, 1991] D.C. Jiles (1991). *Introduction to Magnetism and Magnetic Materials*. Chapman & Hall, London.
- [Jiles, 1995] D.C. Jiles (1995). Theory of the magnetomechanical effect. *J. Phys. D : Appl. Phys.*, 28(8) :1537–1546.
- [Joule, 1847a] J.P. Joule (1847a). On the effects of magnetism upon the dimensions of iron and steel bars. *Philosophical Magazine, sér. 3*, 30(199) :76–87.
- [Joule, 1847b] J.P. Joule (1847b). On the effects of magnetism upon the dimensions of iron and steel bars. *Philosophical Magazine, sér. 3*, 30(201) :225–241.
- [Kedous-Lebouc, 2006] A. Kedous-Lebouc (2006). *Matériaux magnétiques en génie électrique - Tome 1*. Hermes Science.
- [Kellog et al., 2003] R.A. Kellog, A. Flatau, A.E. Clark, M. Wun-Fogle, et T. Lograsso (2003). Quasi-static transduction characterization of galfenol. *Proceedings of IMECE'03 : 2003 ASME International Mechanical Engineering Congress, Washington D.C, U.S.A.*
- [Kiesewetter, 1988] L. Kiesewetter (1988). Terfenol in linear motors. *Proceedings of the 2nd International Conference on Giant Magnetostrictive Alloys, Marbella, Espagne*.
- [Kladas et Tegopoulos, 1992] A.G. Kladas et J.A. Tegopoulos (1992). A new scalar potential formulation for 3-D magnetostatics necessitating no source field calculation. *IEEE Transactions on Magnetics*, 28(2) :1103–1106.
- [Kvarnsjö et Engdahl, 1991] L. Kvarnsjö et G. Engdahl (1991). Nonlinear 2-D transient modeling of Terfenol-D rods. *IEEE Transactions on Magnetics*, 27(6) :5349–5351.
- [Lhermet et al., 2004] N. Lhermet, F. Clayessen, et H. Fabbro (2004). Components based on smart materials for aircraft electro-hydraulic actuators. *ACTUATOR 2004, 9th International conference on new actuators, Bremen, Germany*.
-

- [Lippmann, 1881] G. Lippmann (1881). Principe de conservation de l'électricité. *Annales de chimie et de physique*, 24 :145–178.
- [Lundgren et al., 1993] A. Lundgren, H. Tiberg, L. Kvarnsjö, et A. Bergqvist (1993). A magnetostrictive electric generator. *IEEE Transactions on Magnetics*, 29(6) :3150–3152.
- [Lynch, 1996] C.S Lynch (1996). The effect of uniaxial stress on the electro-mechanical response of 8/65/35 PLZT. *Acta Mater.*, 44(10) :4137–4148.
- [Makni et al., 2007] Z. Makni, M. Besbes, et C. Marchand (2007). Multiphysics design methodology of permanent-magnet synchronous motors. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 56(4) :1524–1530.
- [Maurel, 2002] V. Maurel (2002). *Influence de l'état mécanique multiaxial induit par la découpe sur les propriétés d'usage des tôles magnétiques*. Thèse de doctorat, Ecole Normale Supérieure de Cachan, France.
- [Maxwell, 1885a] J.C. Maxwell (1885a). *Traité d'électricité et de magnétisme - Tome 1*. Gauthier-Villars.
- [Maxwell, 1885b] J.C. Maxwell (1885b). *Traité d'électricité et de magnétisme - Tome 2*. Gauthier-Villars.
- [Meeks et Timme, 1977] S.M. Meeks et R.W. Timme (1977). Rare earth iron magnetostrictive underwater sound transducer. *Journal of the Acoustical Society of America*, 62(5) :1158–1164.
- [Müller, 1990] W. Müller (1990). Comparison of different methods of force calculation. *IEEE Transactions on Magnetics*, 26(2) :1058–1061.
- [Moffett et al., 1991] M.B. Moffett, A.E. Clark, M. Wun-Fogle, J. Linberg, J.P. Tetter, et E.A. McLaughlin (1991). Characterization of Terfenol-D for magnetostrictive transducers. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 89(3) :1448–1455.
- [Moses, 1981] A.J. Moses (1981). Effect of stress on the magnetic properties of grain-oriented silicon-iron magnetized in various directions. *IEEE Transactions on Magnetics*, 17(6) :2872–2874.
- [Nakata et al., 1986] T. Nakata, N. Takahashi, Y. Kawase, M. Nakano, M. Miura, et J.D. Sievert (1986). Numerical analysis and experimental study of the error of magnetic field and strength measurements with single sheet testers. *IEEE Transactions on Magnetics*, 22(5) :400–402.
- [Nan et al., 2002] C.W. Nan, L. Liu, N. Cai, J. Zhai, Y. Ye, Y.H. Linn, L.J. Dong, et C.X. Xiang (2002). A three-phase magnetoelectric composite of piezoelectric ceramics, rare-earth iron alloys, and polymer. *Applied Physics Letter*, 81(20) :3831–3833.
- [Nogarède, 2005] B. Nogarède (2005). *Électrodynamique appliquée*. Dunod, Paris.
- [Ossart et Ionita, 1999] F. Ossart et V. Ionita (1999). Convergence de la méthode du point fixe modifiée pour le calcul de champ magnétique avec hystérésis. *The European Physical Journal - Applied Physics*, 5 :63–69.
- [Pasquale, 2003] M. Pasquale (2003). Mechanical sensors and actuators. *Sensors and Actuators A : Physical*, 106(1-3) :142–148.

- 
- [Pearson et al., 2000] J. Pearson, P.T. Squire, M.G. Maylin, et J.G. Gore (2000). Biaxial stress effects on the magnetic properties of pure iron. *IEEE Transactions on Magnetics*, 36(5) :3251–3253.
- [Permiakov et al., 2002] V. Permiakov, A. Pulnikov, L. Dupré, M. De Wulf, et J. Melkebeek (2002). Magnetic properties of Fe-Si steel depending on compressive and tensile stresses under sinusoidal and distorted excitations. *Journal of Applied Physics*, 93(10) :6689–6691.
- [Quandt et al., 1994] E. Quandt, B. Gerlach, et K. Seemann (1994). Preparation and applications of magnetostrictive thin films. *Journal of Applied Physics*, 76(10) :7000–7002.
- [Ren, 1994] Z. Ren (1994). Comparison of different force calculation methods in 3D finite element modelling. *IEEE Transactions on Magnetics*, 30(5) :3471–3474.
- [Ren et Razek, 1992] Z. Ren et A. Razek (1992). Local force computation in deformable bodies using edge elements. *IEEE Transactions on Magnetics*, 28(2) :1212–1215.
- [Sandlund et al., 1994] L. Sandlund, M. Fahlander, T. Cedell, A.E. Clark, J.B. Restorff, et M. Wun-Fogle (1994). Magnetostriction, elastic moduli and coupling factor of composite Terfenol-D. *Journal of Applied Physics*, 75(10) :5656–5658.
- [Schneider et Richardson, 1982] C. Schneider et J. Richardson (1982). Biaxial magnetoelasticity in steels. *Journal of Applied Physics*, 53(11) :8136–8138.
- [Setter, 2002] N. Setter (2002). *Piezoelectric materials in devices*. EPFL, Lausanne.
- [Std, 1998] IEEE Std (1998). *IEEE standard on piezoelectricity*. ANSI / IEEE Std 176-1987.
- [Stratton, 1961] J.M. Stratton (1961). *Théorie de l'électromagnétisme*. Dunod, Paris.
- [Ueno et Higuchi, 2005] T. Ueno et T. Higuchi (2005). Magnetic sensor for high temperature using a laminate composite of magnetostrictive material and piezoelectric material. In *Smart Structures and Materials 2005*, volume 5761, pages 156–163. Proceedings of SPIE.
- [Villari, 1865] E. Villari (1865). Change of magnetization by tension and by electric current. *Annalen der Physik und Chemie, Leipzig*, 128.
- [Vranish et al., 1991] J.M. Vranish, D.P. Naik, J.B. Restorff, et J.P. Teter (1991). Magnetostrictive direct drive rotary motor development. *IEEE Transactions on Magnetics*, 27(6) :5355–5357.
- [Wignall et al., 1988] A.N. Wignall, A.J. Gilbert, et S.J. Yang (1988). Calculation of forces on magnetised ferrous cores using the maxwell stress tensor. *IEEE Transactions on Magnetics*, 24(1) :459–462.
- [Woodson et Melcher, 1968a] H.H Woodson et J.R. Melcher (1968a). *Electromechanical dynamics - Part I : discrete systems*. John Wiley & Sons.
- [Woodson et Melcher, 1968b] H.H Woodson et J.R. Melcher (1968b). *Electromechanical dynamics - Part II : fields, forces and motion*. John Wiley & Sons.
- [Zhang et al., 2004] T. Zhang, C. Jiang, H. Zhang, et H. Xu (2004). Giant magnetostrictive actuators for active vibration control. *Smart Materials and Structures*, 13(3) :473–477.
-

[Zienkiewicz, 1971] O.C. Zienkiewicz (1971). *The finite element method in engineering science*. Mc Graw-Hill, Maidenhead.

# Annexes



# Annexe A

## Note sur le calcul des efforts globaux d'origine électromagnétique

### Sommaire

---

<b>A.1</b>	<b>Le tenseur de Maxwell</b>	<b>157</b>
A.1.1	Milieux continus non polarisables	157
A.1.2	Milieux continus polarisables	160
<b>A.2</b>	<b>Travaux virtuels</b>	<b>162</b>
A.2.1	Circuit inductif	163
A.2.2	Circuit capacitif	166

---



ON reprend ici les méthodes utilisées pour le calcul des efforts globaux d'origine électromagnétique. Le tenseur de Maxwell est développé dans le cadre des milieux non-polarisables puis polarisables. Une attention est alors portée sur la détermination des densités de forces surfaciques. La méthode des Travaux Virtuels est appliquée aux cas particuliers de deux circuits : l'un de nature inductive et l'autre de nature capacitive. L'accent est porté sur les comportements linéaire et non-linéaire de ces circuits.

## A.1 Le tenseur de Maxwell

Cette formulation propose de calculer les actions électromagnétiques globales comme résultantes de la divergence d'un tenseur. Pour cela, la méthode se base sur la possibilité d'exprimer certaines densités de force  $\mathbf{f}$  à partir de la divergence d'un tenseur de contraintes.

$$\mathbf{f} = \nabla \cdot \mathbb{T} \quad (\text{A.1})$$

L'intégrale de volume de la densité de force permet alors de remonter à la force globale agissant sur le solide considéré.

$$\mathbf{F} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \, d\Omega = \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbb{T} \, d\Omega \quad (\text{A.2})$$

Comme nous allons le voir, cette formulation est très pratique car aucune connaissance sur la matière contenue dans le domaine considéré n'est nécessaire.

Dans un premier temps, le calcul est décrit dans le cadre des milieux non polarisables. Il sera par la suite utilisé pour introduire les forces électromagnétiques surfaciques en présence de milieux polarisables.

### A.1.1 Milieux continus non polarisables

Considérons un milieu non polarisable (cf. §1.1.1), où seuls des courants réels et des charges électriques demeurent. Dans ce cas, afin d'associer le tenseur de Maxwell aux forces de volume de Lorentz, multiplions vectoriellement (1.1) par  $\varepsilon_0 \mathbf{E}$  et (1.2) par  $\mathbf{B}$  :

$$(\nabla \times \mathbf{E}) \times \varepsilon_0 \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \times \varepsilon_0 \mathbf{E} \quad (\text{A.3})$$

$$(\nabla \times \mathbf{H}) \times \mathbf{B} = \left( \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \times \mathbf{B} \quad (\text{A.4})$$

En transposant et en additionnant ces deux relations, on obtient :

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 (\nabla \times \mathbf{E}) \times \mathbf{E} + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} - \mathbf{J} \times \mathbf{B} \\ + \varepsilon_0 \left( \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \times \mathbf{E} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \times \mathbf{B} \right) = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

En posant l'identité vectorielle pour un vecteur  $\mathbf{\Gamma}$  quelconque :

$$(\nabla \times \mathbf{\Gamma}) \times \mathbf{\Gamma} = (\mathbf{\Gamma} \cdot \nabla) \mathbf{\Gamma} - \frac{1}{2} \nabla (\mathbf{\Gamma} \cdot \mathbf{\Gamma}) \quad (\text{A.6})$$

Et en identifiant :

$$\left( \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \times \mathbf{E} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \times \mathbf{B} \right) = - \frac{\partial (\mathbf{E} \times \mathbf{B})}{\partial t} \quad (\text{A.7})$$

L'équation (A.5) devient :

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 \left( (\mathbf{E} \cdot \nabla) \mathbf{E} - \frac{1}{2} \nabla (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}) \right) + \frac{1}{\mu_0} \left( (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} - \frac{1}{2} \nabla (\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}) \right) \\ = \mathbf{J} \times \mathbf{B} + \varepsilon_0 \frac{\partial (\mathbf{E} \times \mathbf{B})}{\partial t} \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Passons temporairement en notation indicielle :

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 \left( \underbrace{E_n \frac{\partial}{\partial x_n} E_m}_{(a)} - \underbrace{\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_m} E_k E_k}_{(c)} \right) + \frac{1}{\mu_0} \left( \underbrace{B_n \frac{\partial}{\partial x_n} B_m}_{(b)} - \underbrace{\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_m} B_k B_k}_{(c)} \right) \\ = J_k B_k + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} E_k B_k \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Le premier terme (a) peut s'écrire :

$$E_n \frac{\partial}{\partial x_n} E_m = \frac{\partial}{\partial x_n} (E_n E_m) - E_m \frac{\partial}{\partial x_n} E_n \quad (\text{A.10})$$

Et en appliquant l'identité (1.3), le dernier terme du second membre dans (A.10) devient :

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \rightarrow E_m \frac{\partial}{\partial x_n} E_n = \frac{\rho}{\varepsilon_0} E_m \quad (\text{A.11})$$

Le terme (b) peut lui aussi être décomposé sous la forme :

$$B_n \frac{\partial}{\partial x_n} B_m = \frac{\partial}{\partial x_n} (B_n B_m) - \underbrace{B_m \frac{\partial}{\partial x_n} B_n}_{=0} \quad (\text{A.12})$$

par application de l'identité (1.4) :

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \rightarrow \frac{\partial}{\partial x_n} B_n = 0 \quad (\text{A.13})$$

Le terme (c) dans (A.9) peut lui se transformer en utilisant la relation :

$$\frac{\partial}{\partial x_m} = \delta_{mn} \frac{\partial}{\partial x_n} \quad (\text{A.14})$$

où  $\delta_{mn}$  est le symbol de Kronecker. L'expression (A.9) peut alors se mettre sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_n} \left( \varepsilon_0 (E_n E_m) + \frac{1}{\mu_0} (B_n B_m) - \frac{1}{2} \delta_{mn} \left( \varepsilon_0 E_k E_k + \frac{1}{\mu_0} B_k B_k \right) \right) \\ = \rho E_m + J_k B_k + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} E_k B_k \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

où  $\varepsilon_0$  et  $\mu_0$ , étant des termes constants, peuvent être placés dans l'expression de la dérivée. À partir de cette relation, l'expression d'un tenseur de contraintes électromagnétiques  $T_{mn}$ , identifié aux forces de volume de Lorentz, peut être exprimé :

$$\begin{aligned} f_m &= \rho E_m + J_k B_k \\ &= \frac{\partial}{\partial x_n} T_{mn} - \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} E_k B_k \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

avec :

$$T_{mn} = \varepsilon_0 E_n E_m + \frac{1}{\mu_0} B_n B_m - \frac{1}{2} \delta_{mn} \left( \varepsilon_0 E_k E_k + \frac{1}{\mu_0} B_k B_k \right) \quad (\text{A.17})$$

Soit en notation vectorielle :

$$\mathbf{f} = \rho \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B} = \nabla \cdot \mathbb{T} - \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t} \quad (\text{A.18})$$

avec :

$$\mathbb{T} = \varepsilon_0 \mathbf{E} \mathbf{E} + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \mathbf{B} - \frac{1}{2} \left( \varepsilon_0 \mathbf{E}^2 + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}^2 \right) \mathbb{I} \quad (\text{A.19})$$

où  $\mathbb{I}$  est le tenseur identité et  $\mathbf{G} = \varepsilon_0 (\mathbf{E} \times \mathbf{B})$  la quantité de mouvement électromagnétique. Dans l'approximation quasi-statique, sollicitations électromagnétiques de faibles fréquences, ce terme est négligeable. Conformément à (A.2), les actions électromagnétiques globales agissant sur un solide, sont alors déterminées par l'intégration de la densité de force. L'utilisation du théorème de Green-Ostrogradsky permet alors de passer d'une intégrale de volume à une intégrale de surface, où la surface  $\Sigma$  délimite le domaine  $\Omega$  contenant le solide considéré.

$$\mathbf{F} = \int_{\Omega} \mathbf{f} d\Omega = \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbb{T} d\Omega = \oint_{\Sigma} \mathbb{T} \cdot \mathbf{n} d\Sigma \quad (\text{A.20})$$

Par analogie avec les méthodes associées à l'exploitation du tenseur des contraintes en mécanique, il est possible de mettre en évidence des forces normales et tangentielles homogènes à une force surfacique ([Stratton, 1961], [Barré, 2003]). En électrostatique et en magnétostatique une écriture plus parlante est possible, en

écrivait le tenseur  $\mathbb{T}$  dans un repère  $(\mathbf{n}, \mathbf{t}, \mathbf{n} \times \mathbf{t})$  tel que l'induction magnétique et le champ électrique soient des vecteurs du plan  $(\mathbf{n}, \mathbf{t})$  [Wignall et al., 1988] :

$$\mathbb{T} \cdot \mathbf{n}_e = \frac{\varepsilon_0}{2} (E_n^2 - E_t^2) \mathbf{n}_e + \varepsilon_0 E_n E_t \mathbf{t}_e \quad (\text{A.21})$$

$$\mathbb{T} \cdot \mathbf{n}_b = \frac{1}{2\mu_0} (B_n^2 - B_t^2) \mathbf{n}_b + \frac{1}{\mu_0} B_n B_t \mathbf{t}_b \quad (\text{A.22})$$

avec  $\mathbf{E} = E_n \mathbf{n}_e + E_t \mathbf{t}_e$  et  $\mathbf{B} = B_n \mathbf{n}_b + B_t \mathbf{t}_b$ .

### A.1.2 Milieux continus polarisables

Dans les milieux polarisables, la présence de sources de champ supplémentaire doit être prise en compte dans la formulation des efforts globaux par la méthode du tenseur de Maxwell. Pour cela considérons un domaine comprenant au minimum un milieu polarisable (cf. §1.1.2), restreint à un comportement linéaire et incompressible. Cette présence de différents milieux dans le domaine considéré engendre différentes valeurs de permittivité diélectrique et/ou de perméabilité magnétique. Par conséquent, dans les régions en présence de saut ou de gradient de permittivité diélectrique et/ou de perméabilité magnétique une densité volumique de force supplémentaire doit être prise en compte. Celle-ci s'ajoute alors aux forces de volume de Lorentz par l'intermédiaire de deux termes, liés aux gradients de perméabilité magnétique et de permittivité diélectrique [Arzeliès, 1963].

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= q\mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B} - \frac{\mathbf{E}^2}{2} \nabla \varepsilon - \frac{\mathbf{H}^2}{2} \nabla \mu \\ &= \mathbf{f}^{lor} + \mathbf{f}^\nabla \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

Cette densité volumique de force supplémentaire s'écrit sous forme indicielle :

$$f_{mn}^\nabla = -\delta_{mn} \frac{1}{2} \left( E_k E_k \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_n} + H_k H_k \frac{\partial \mu}{\partial x_n} \right) \quad (\text{A.24})$$

La combinaison de cette notation à celle de (A.15), définie pour des milieux électromagnétiques quelconques dans l'approximation quasi-statique, donne :

$$\begin{aligned} f_m &= \frac{\partial}{\partial x_n} \left( \varepsilon E_m E_n - \frac{1}{2} \delta_{mn} (\varepsilon E_k E_k) \right) - \frac{1}{2} \delta_{mn} \left( E_k E_k \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_n} \right) \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_n} \left( \frac{1}{\mu} B_m B_n - \frac{1}{2} \delta_{mn} \left( \frac{B_k B_k}{\mu} \right) \right) - \frac{1}{2} \delta_{mn} \left( H_k H_k \frac{\partial \mu}{\partial x_n} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

en identifiant avec  $xdy + ydx = d(xy)$ , l'expression (A.25) devient :

$$\begin{aligned} f_m &= \frac{\partial}{\partial x_n} \left( \varepsilon E_m E_n + \frac{1}{\mu} B_m B_n \right) - \frac{1}{2} \delta_{mn} \frac{\partial}{\partial x_n} (\varepsilon E_k E_k + \mu H_k H_k) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_n} \left( \varepsilon E_m E_n + \frac{1}{\mu} B_m B_n - \frac{1}{2} \delta_{mn} (\varepsilon E_k E_k + \mu H_k H_k) \right) \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

L'expression du tenseur de Maxwell dans un milieu polarisable linéaire est alors identique à celle associée au milieu non polarisable :

$$\begin{aligned}\mathbb{T} &= \varepsilon \mathbf{E} \mathbf{E} + \frac{1}{\mu} \mathbf{B} \mathbf{B} - \frac{1}{2} \left( \varepsilon \mathbf{E}^2 + \frac{1}{\mu} \mathbf{B}^2 \right) \mathbb{I} \\ &= \mathbf{D} \mathbf{E} + \mathbf{B} \mathbf{H} - \frac{1}{2} \left( \frac{\mathbf{D}^2}{\varepsilon} + \frac{1}{\mu} \mathbf{B}^2 \right) \mathbb{I}\end{aligned}\tag{A.27}$$

En écrivant le tenseur  $\mathbb{T}$  dans un repère  $(\mathbf{n}, \mathbf{t}, \mathbf{n} \times \mathbf{t})$  tel que les inductions et les champs électromagnétiques soit des vecteurs du plan  $(\mathbf{n}, \mathbf{t})$ , une forme plus pratique est obtenue respectivement dans le cadre de l'électrostatique et de la magnétostatique :

$$\mathbb{T} \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\varepsilon} D_n^2 - \varepsilon E_t^2 \right) \mathbf{n} + (D_n E_t) \mathbf{t}\tag{A.28}$$

$$\mathbb{T} \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\mu} B_n^2 - \mu H_t^2 \right) \mathbf{n} + (D_n H_t) \mathbf{t}\tag{A.29}$$

avec  $\mathbf{E} = E_n \mathbf{n} + E_t \mathbf{t}$ ,  $\mathbf{D} = D_n \mathbf{n} + D_t \mathbf{t}$ ,  $\mathbf{H} = H_n \mathbf{n} + H_t \mathbf{t}$  et  $\mathbf{B} = B_n \mathbf{n} + B_t \mathbf{t}$ .

Les forces volumiques définies, il est possible de spécifier des densités de forces surfaciques induites par un changement de caractéristiques à l'interface entre deux milieux. La discontinuité des champs aux interfaces des différents milieux (1.8), et donc l'impossibilité d'évaluer les dérivées partielles, nécessite de prendre quelques précautions. Un artifice est alors utilisé pour employer la méthode du tenseur de Maxwell [Woodson et Melcher, 1968a]. Considérons une interface séparant deux domaines  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  (A.1). Celle-ci est alors assimilée à un volume d'épaisseur négligeable  $\delta l$ , dont les propriétés électromagnétiques évoluent de manière continue d'un domaine à l'autre.

L'objectif est de calculer la force qui s'exerce sur ce volume lorsque l'épaisseur tend vers 0, se restreignant ainsi à la surface de discontinuité. La force volumique étant exprimée à partir de la divergence du tenseur de Maxwell, le passage à la limite ( $\delta l \rightarrow 0$ ) permet d'exprimer une force par unité de surface :

$$\begin{aligned}d\mathbf{f} &= \lim_{\delta l \rightarrow 0} \int_{\Omega} \mathbf{f} d\Omega \\ &= \lim_{\delta l \rightarrow 0} \int_{\Sigma} \mathbb{T} \cdot \mathbf{n} d\Sigma \\ &= (\mathbb{T}^{\Omega_2} - \mathbb{T}^{\Omega_1}) \cdot \mathbf{n} d\Sigma\end{aligned}\tag{A.30}$$

On associe alors le saut du tenseur de Maxwell à l'interface à une force surfacique [Woodson et Melcher, 1968a] :

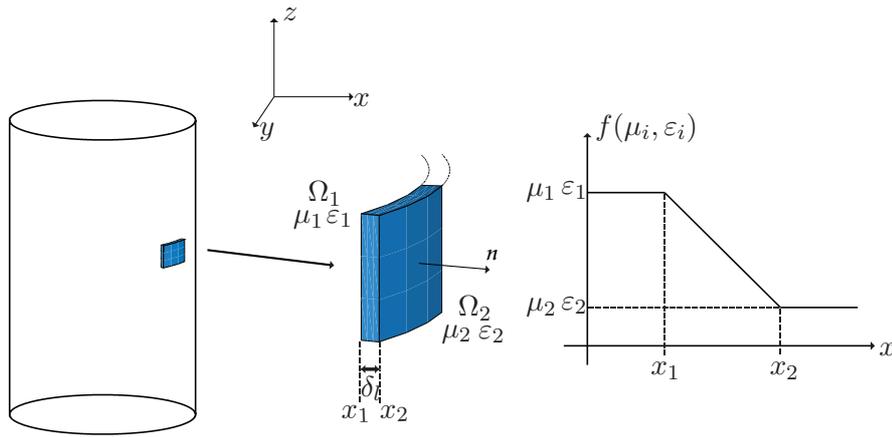


Figure A.1 – Variation continue des propriétés électromagnétiques à l'interface de deux domaines  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$

$$\mathbf{f}_s = (\mathbb{T}^{\Omega_2} - \mathbb{T}^{\Omega_1}) \cdot \mathbf{n} \quad (\text{A.31})$$

De même que pour les milieux non polarisables, en écrivant le tenseur de Maxwell dans un repère  $(\mathbf{n}, \mathbf{t}, \mathbf{n} \times \mathbf{t})$  et en assimilant le domaine  $\Omega_2$  au vide, dans le cadre de l'électrostatique et de la magnéto-statique l'expression (A.31) s'écrit :

$$\mathbf{f}_s^e = \left( \frac{1}{2\epsilon_0} \left( 1 - \frac{1}{\epsilon_r} \right) D_n^2 - \frac{\epsilon_0}{2} (1 - \epsilon_r) E_t^2 \right) \cdot \mathbf{n} \quad (\text{A.32})$$

$$\mathbf{f}_s^m = \left( \frac{1}{2\mu_0} \left( 1 - \frac{1}{\mu_r} \right) B_n^2 - \frac{\mu_0}{2} (1 - \mu_r) H_t^2 \right) \cdot \mathbf{n} \quad (\text{A.33})$$

Il faut bien noter que le tenseur de Maxwell possède une signification physique seulement s'il est intégré sur une surface fermée délimitant l'objet sur lequel on souhaite connaître la force globale. Il est donc important de ne pas confondre les relations (A.28) et (A.29) avec une densité de forces surfaciques. Les relations précédentes, (A.32) et (A.33), semblent être plus réaliste. Si les milieux de part et d'autre de l'interface sont identiques alors les densités de forces volumiques sont nulles.

## A.2 Travaux virtuels

Les forces électromagnétiques globales peuvent être déterminées par l'application du principe des travaux virtuels [Woodson et Melcher, 1968b], sans pour cela déduire explicitement une densité volumique d'efforts. Nous allons par la suite considérer deux exemples, simples mais très représentatifs, afin d'établir des relations liées aux forces magnétiques et électriques.

### A.2.1 Circuit inductif

Considérons le circuit inductif de la figure A.2 constitué d'un bobinage alimenté par une source de tension, d'une culasse magnétique et d'un noyau magnétique mobile relié à un ressort. Quand le courant traverse le bobinage, l'ensemble culasse-entrefer-noyau forme un circuit magnétique pour le flux magnétique  $\phi$ .

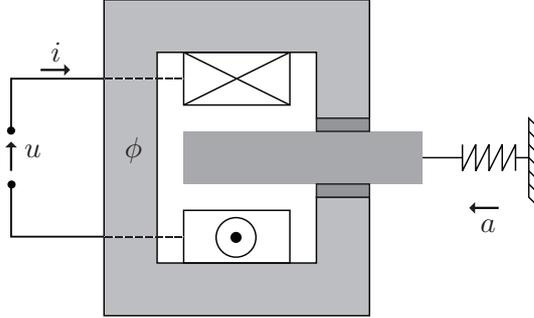


Figure A.2 – *Circuit inductif*,  $a$  est un paramètre géométrique lié principalement à la position du noyau

L'énergie magnétique  $W^m$ , de densité  $w^m$ , et la co-énergie magnétique  $W_{co}^m$ , de densité  $w_{co}^m$ , sont définies respectivement par (figure A.3) :

$$\begin{aligned} W^m &= \int_{\Omega} \left( \int_0^b \mathbf{h}(\mathbf{b}') \cdot d\mathbf{b}' \right) d\Omega = \int_{\Omega} w^m d\Omega = \int_{\Omega} (\mathbf{h} \cdot \mathbf{b} - w_{co}^m) d\Omega \\ &= \int_0^{\Phi} i d\Phi' = \varphi i - W_{co}^m \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$

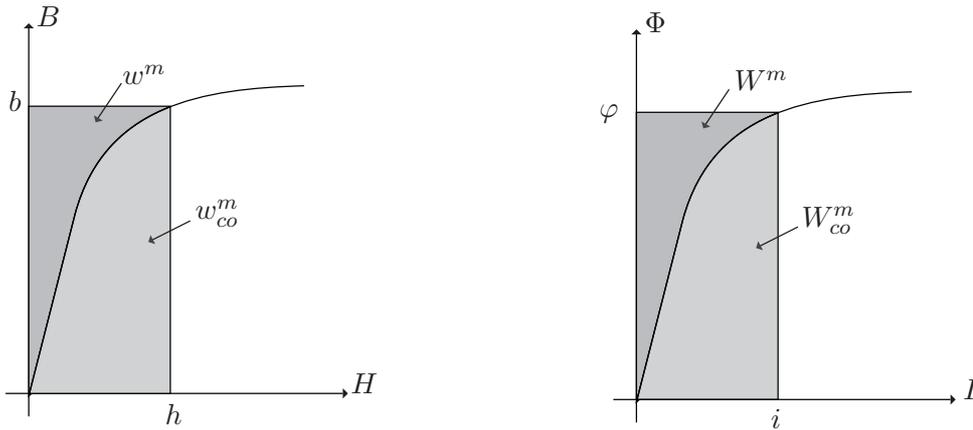
$$\begin{aligned} W_{co}^m &= \int_{\Omega} \left( \int_0^h \mathbf{b}(\mathbf{h}') \cdot d\mathbf{h}' \right) d\Omega = \int_{\Omega} w_{co}^m d\Omega = \int_{\Omega} (\mathbf{h} \cdot \mathbf{b} - w^m) d\Omega \\ &= \int_0^i \Phi di' = \varphi i - W^m \end{aligned} \quad (\text{A.35})$$

où  $\varphi = N\phi$  avec  $N$  le nombre de spires de la bobine et  $\phi$  le flux embrassé par une spire. L'équation électrique relative au circuit inductif s'écrit :

$$u = Ri + N \frac{d\phi}{dt} \quad (\text{A.36})$$

avec  $u$  la tension de la source électrique et  $R$  la résistance du bobinage. L'énergie électrique délivrée par la source pendant une durée  $\delta t$  est :

$$\delta W_{el} = u i \delta t = Ri^2 \delta t + i \delta \varphi \quad (\text{A.37})$$



(a) Densité d'énergie  $w^m$  et de co-énergie  $w_{co}^m$  magnétique

(b) Énergie  $W^m$  et co-énergie  $W_{co}^m$  magnétique

Figure A.3 – Énergie et densité d'énergie magnétique

La variation d'énergie magnétique est définie par :

$$\delta W^m = \delta \left( \int_0^\varphi i \, d\varphi' \right) = \delta \left( \int_0^\varphi \varphi' \frac{\mathfrak{R}(\varphi', a)}{N^2} \, d\varphi' \right) \quad (\text{A.38})$$

où  $\mathfrak{R}(\varphi, a)$ , reluctivité du circuit magnétique pouvant dépendre à la fois du flux magnétique  $\varphi$  et de la géométrie  $a$ , est liée à l'inductance  $\mathfrak{L}$  et au nombre de spires  $N$  par :

$$\mathfrak{R} = \frac{N^2}{\mathfrak{L}} \quad (\text{A.39})$$

### A.2.1.1 Cas linéaire

Quand l'ensemble du circuit magnétique (culasse et noyau) est supposé avoir un comportement linéaire, la reluctivité du circuit magnétique  $\mathfrak{R}$  dépend seulement de la géométrie  $\mathfrak{R}(a)$ . Dans ce cas, la variation d'énergie magnétique peut être calculée explicitement.

$$\begin{aligned} \delta W^m &= \delta \left( \frac{1}{2} \varphi^2 \frac{\mathfrak{R}(a)}{N^2} \right) \\ &= \varphi \frac{\mathfrak{R}(a)}{N^2} \delta \varphi + \frac{\varphi^2}{2 N^2} \delta \mathfrak{R}(a) \\ &= i \delta \varphi + \frac{\varphi^2}{2 N^2} \delta \mathfrak{R}(a) \end{aligned} \quad (\text{A.40})$$

La variation de la reluctivité dans (A.40) peut seulement être causée par un changement de la géométrie, soit :

$$\delta W^m = i \delta \varphi + \frac{\varphi^2}{2 N^2} \frac{\partial \mathfrak{R}(a)}{\partial a} \delta a \quad (\text{A.41})$$

En écrivant l'équation (A.41) sous la forme :

$$i \delta\varphi = \delta W^m - \frac{\varphi^2}{2N^2} \frac{\partial \mathfrak{R}(a)}{\partial a} \delta a \quad (\text{A.42})$$

Et en substituant (A.42) dans (A.37), l'expression de la conservation d'énergie apparaît :

$$\delta W_{el} = Ri^2 \delta t + \delta W^m + F^m \delta a \quad (\text{A.43})$$

L'énergie électrique  $\delta W_{el}$  délivrée par la source est ainsi partiellement transformée en chaleur, partiellement stockée en énergie magnétique et partiellement utilisée en travail mécanique. Ainsi, dans le cas linéaire l'expression de la force magnétique est :

$$F^m = -\frac{\varphi^2}{2N^2} \frac{\partial \mathfrak{R}(a)}{\partial a} = -\frac{\phi^2}{2} \frac{\partial \mathfrak{R}(a)}{\partial a} \quad (\text{A.44})$$

Dans le cas d'un mouvement de corps rigide, les composantes  $F_x^m$ ,  $F_y^m$  et  $F_z^m$  de la force globale  $F^m$  sont obtenues en substituant respectivement  $\partial a$  par  $\partial x$ ,  $\partial y$  et  $\partial z$ . En comparant (A.44) à (A.41), l'expression de la force globale peut être obtenue par dérivation de l'énergie ; expression connue sous l'appellation de *travaux virtuels* pour les forces magnétiques.

$$F^m = -\left. \frac{\partial W^m(\varphi, a)}{\partial a} \right|_{\varphi=cst} \quad (\text{A.45})$$

Une analyse duale, basée sur la co-énergie magnétique, conduira à une autre expression de la force magnétique globale :

$$F^m = \left. \frac{\partial W_{co}^m(\varphi, a)}{\partial a} \right|_{i=cst} \quad (\text{A.46})$$

Supposons que l'alimentation du circuit inductif (figure A.2) est court-circuitée ( $u = 0$ ) et qu'il n'est le lieu d'aucune perte (par effet Joule ou de friction), alors le flux magnétique ne peut changer et le système magnéto-mécanique est dit conservatif. L'énergie stockée dans le circuit oscille alors entre la partie mécanique et la partie magnétique  $F \delta a = -\delta W^m$ . Cependant, physiquement le flux magnétique ne sera pas constant. Pour que l'expression (A.45) soit valide, le flux magnétique ne doit être considéré constant que dans l'expression de la dérivée partielle. Il en est de même avec le courant  $i$  dans le cas de l'expression (A.46).

### A.2.1.2 Cas non linéaire

Dans le cas d'un comportement non linéaire du circuit magnétique, la loi de conservation (A.43) est toujours valide, de même que le principe des travaux virtuels

(A.45).

$$\begin{aligned}
F^m &= - \left. \frac{\partial W^m(\varphi, a)}{\partial a} \right|_{\varphi=cst} \\
&= - \left. \frac{\partial}{\partial a} \left( \int_0^\varphi i \, d\varphi' \right) \right|_{\varphi=cst} \\
&= - \left. \frac{\partial}{\partial a} \left( \int_0^\varphi \varphi' \frac{\mathfrak{R}(\varphi, a)}{N^2} \, d\varphi' \right) \right|_{\varphi=cst} \\
&= - \int_0^\varphi \varphi' \left. \frac{\partial \mathfrak{R}(\varphi, a)}{\partial a} \right|_{\varphi=cst} \, d\varphi'
\end{aligned} \tag{A.47}$$

où la reluctivité magnétique  $\mathfrak{R}(\phi, a)$  est fonction à la fois de la géométrie  $a$  (terme de dérivation) et au flux magnétique  $\phi$  (terme d'intégration). De même, l'expression non linéaire de la force à partir de la co-énergie magnétique (A.46) devient :

$$\begin{aligned}
F^m &= - \left. \frac{\partial W_{co}^m(\varphi, a)}{\partial a} \right|_{i=cst} \\
&= - \left. \frac{\partial}{\partial a} \left( \int_0^i \varphi \, di' \right) \right|_{i=cst} \\
&= - \left. \frac{\partial}{\partial a} \left( \int_0^i \frac{N^2 i'}{\mathfrak{R}(i, a)} \, di' \right) \right|_{i=cst} \\
&= - \int_0^i N^2 i' \left. \frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{1}{\mathfrak{R}(i, a)} \right) \right|_{i=cst} \, di'
\end{aligned} \tag{A.48}$$

## A.2.2 Circuit capacitif

La même analyse peut-être conduite pour établir l'expression des forces électriques à partir du principe des travaux virtuels. Pour cela, toujours dans un souci de simplicité, considérons le circuit capacitif de la figure A.4 et cherchons la force globale agissant sur le milieu diélectrique.

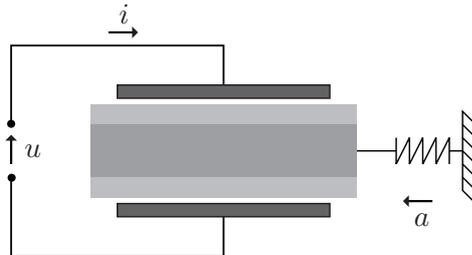
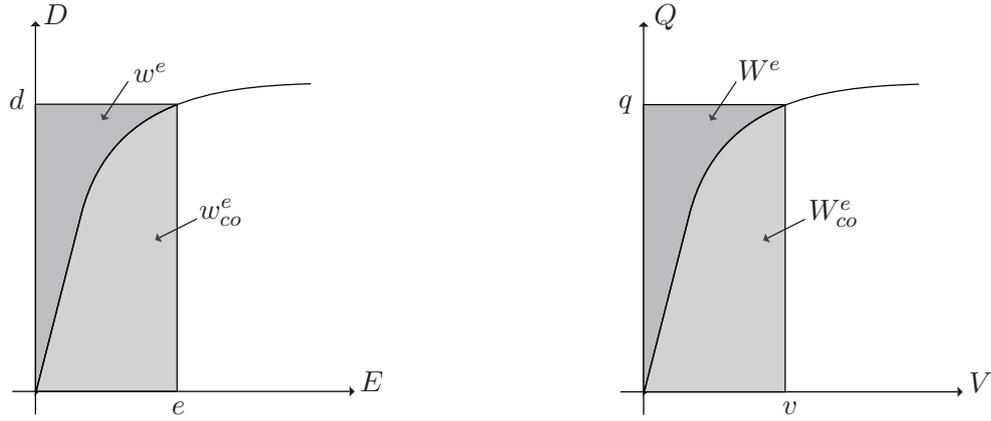


Figure A.4 – Circuit capacitif,  $a$  est un paramètre géométrique lié principalement à la position des électrodes



(a) Densité d'énergie  $w^e$  et de co-énergie  $w_{co}^e$  électrique

(b) Énergie  $W^e$  et co-énergie  $W_{co}^e$  électrique

Figure A.5 – Énergie et densité d'énergie électrique

L'énergie électrique  $W^e$  et la co-énergie électrique  $W_{co}^e$  sont respectivement définies par les expressions suivantes (figure A.5) :

$$\begin{aligned} W^e &= \int_{\Omega} \left( \int_0^d \mathbf{e}(\mathbf{d}') \cdot d\mathbf{d}' \right) d\Omega = \int_{\Omega} (\mathbf{e} \cdot \mathbf{d} - w_{co}^e) d\Omega \\ &= \int_0^q v dq' = qv - W_{co}^e \end{aligned} \quad (\text{A.49})$$

$$\begin{aligned} W_{co}^e &= \int_{\Omega} \left( \int_0^e \mathbf{d}(\mathbf{e}') \cdot d\mathbf{e}' \right) d\Omega = \int_{\Omega} (\mathbf{e} \cdot \mathbf{d} - w^e) d\Omega \\ &= \int_0^v q dv' = qv - W^e \end{aligned} \quad (\text{A.50})$$

où  $q$  et  $v$  sont les charges sur les électrodes et le potentiel électrique. L'équation électrique relative au circuit de la figure A.4 s'écrit :

$$u = Ri + v \quad (\text{A.51})$$

L'énergie électrique fournie par la source est :

$$\delta W_{el} = ui \delta t = Ri^2 \delta t + v \delta q \quad (\text{A.52})$$

et la variation d'énergie électrique stockée par la capacité s'écrit :

$$\delta W^e = \delta \left( \int_0^q v dq' \right) = \delta \left( \int_0^q \frac{q'}{C(q, a)} dq' \right) \quad (\text{A.53})$$

où  $C(q, a)$  est la capacité électrique.

### A.2.2.1 Cas linéaire

Quand le milieu diélectrique est supposé avoir un comportement linéaire, la capacité  $C$  ne dépend plus que de la géométrie  $C(a)$ . L'expression (A.53) peut alors être définie explicitement :

$$\begin{aligned}\delta W^e &= \frac{q}{C(a)} \delta q + \frac{q^2}{2} \delta \left( \frac{1}{C(a)} \right) \\ &= v \delta q + \frac{q^2}{2} \delta \left( \frac{1}{C(a)} \right)\end{aligned}\tag{A.54}$$

La variation de la capacité pouvant seulement être induite par un changement de géométrie, l'expression (A.54) devient :

$$\delta W^e = v \delta q + \frac{q^2}{2} \frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{1}{C(a)} \right) \delta a\tag{A.55}$$

En substituant le terme  $v \delta q$  dans (A.52), l'expression de la conservation de l'énergie s'écrit :

$$\delta W_{el} = R i^2 \delta t + \delta W^e + F^e \delta a\tag{A.56}$$

L'énergie électrique  $\delta W_{el}$  délivrée par la source est ainsi partiellement transformée en chaleur, partiellement stockée en énergie électrique et partiellement utilisée en travail mécanique. Ainsi, dans le cas linéaire l'expression de la force électrique est :

$$F^e = -\frac{q^2}{2} \frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{1}{C(a)} \right)\tag{A.57}$$

En comparant (A.57) à (A.55), l'expression de la force électrique globale par l'application des travaux virtuels s'écrit :

$$F^e = -\frac{\partial W^e}{\partial a} \Big|_{q=cst}\tag{A.58}$$

L'analyse duale par la co-énergie électrique conduira à une seconde expression de la force électrique globale :

$$F^e = \frac{\partial W^e}{\partial a} \Big|_{v=cst}\tag{A.59}$$

### A.2.2.2 Cas non linéaire

Dans le cas d'un comportement non linéaire du milieu diélectrique, la loi de conservation (A.56) et le principe des travaux virtuels (A.58) sont toujours valides.

L'expression de la force électrique devient alors :

$$\begin{aligned}
F^e &= - \left. \frac{\partial W^e(q, a)}{\partial a} \right|_{q=cst} \\
&= - \left. \frac{\partial}{\partial a} \left( \int_0^q v \, dq' \right) \right|_{q=cst} \\
&= - \left. \frac{\partial}{\partial a} \left( \int_0^q \frac{q'}{C(q, a)} \, dq' \right) \right|_{q=cst} \\
&= - \int_0^q q' \left. \frac{\partial C(q, a)}{\partial a} \right|_{q=cst} dq'
\end{aligned} \tag{A.60}$$

où la capacité électrique  $C(q, a)$  est fonction à la fois de la géométrie  $a$  (terme de dérivation) et de la charge électrique  $q$  (terme d'intégration). De même, l'expression non linéaire de la force à partir de la co-énergie électrique (A.59) devient :

$$\begin{aligned}
F^e &= - \left. \frac{\partial W_{co}^e(v, a)}{\partial a} \right|_{v=cst} \\
&= - \left. \frac{\partial}{\partial a} \left( \int_0^v q \, dv' \right) \right|_{v=cst} \\
&= - \left. \frac{\partial}{\partial a} \left( \int_0^v C(q, a) v' \, dv' \right) \right|_{v=cst} \\
&= - \int_0^q v' \left. \frac{\partial}{\partial a} (C(q, a)) \right|_{v=cst} dv'
\end{aligned} \tag{A.61}$$



# Annexe B

## Note sur la plateforme de caractérisation

### Sommaire

---

<b>B.1</b>	<b>Circuit magnétique de la plateforme de caractérisation . . .</b>	<b>173</b>
B.1.1	Dimensions du circuit magnétique de la plateforme de caractérisation . . . . .	173
<b>B.2</b>	<b>Propriétés des matériaux du circuit magnétique . . . . .</b>	<b>176</b>
<b>B.3</b>	<b>Principe d'acquisition d'une courbe anhystérétique . . . . .</b>	<b>176</b>
B.3.1	Désaimantation point par point . . . . .	176
B.3.2	Évaluation des points . . . . .	178

---



DANS un premier temps, nous décrivons ici les dimensions du circuit magnétique de la plateforme de caractérisation. Nous rappelons par la suite les principales propriétés de ce circuit. Par la suite, nous présentons la méthode employée pour l'acquisition du comportement magnéto-élastique anhystérétique.

## B.1 Circuit magnétique de la plateforme de caractérisation

Le circuit magnétique est composé de deux culasses en ferrite, de deux colonnes magnétiques (dont l'une des parties est amagnétique) et de quatre enroulements formant le bobinage primaire nécessaire à l'excitation magnétique de l'échantillon. A ce dispositif est adjoint un ensemble de pièces amagnétiques nécessaires à la mise en place et au maintien en position du circuit magnétique (figure B.1).

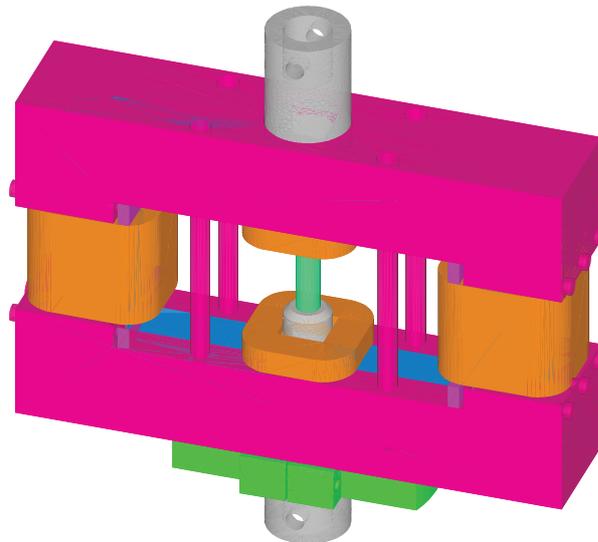


Figure B.1 – *Circuit magnétique de la plateforme de caractérisation*

Nous décrivons ci-dessous les dimensions des principaux constituants de l'ensemble du dispositif magnétique.

### B.1.1 Dimensions du circuit magnétique de la plateforme de caractérisation

#### B.1.1.1 Dimensions des culasses

Les culasses en forme de U sont constituées de ferrite haute perméabilité de type  $M_n Z_n$ . Les dimensions de ces culasses sont définies à la figure B.2.

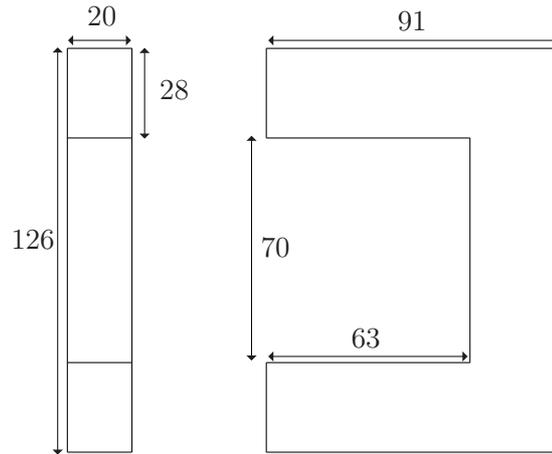


Figure B.2 – Dimensions des culasses en Ferrite

### B.1.1.2 Dimensions des colonnes magnétiques

Les colonnes magnétique (figure B.3) sont formées de deux parties, l'une magnétique et l'autre amagnétique. La partie magnétique (partie inférieure) est constitué d'un alliage de  $FeCo$  (Permendur 49 :  $Fe_{49}Co_{49}V_2$ ). La partie amagnétique (partie supérieure) est réalisée à partir d'un alliage non-magnétique (Dural :  $Al_{95}Cu_4Mg_1$ ). C'est cette partie amagnétique qui maintient l'ensemble du circuit magnétique sur la machine de traction/compression, par un système de fixation par goupille. Les dimensions des colonnes sont définies en figure B.4.

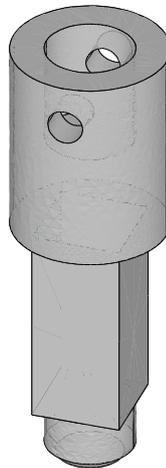


Figure B.3 – Colonne Magnétique

### B.1.1.3 Dimensions des platines de maintien

Pour la mise en position du circuit magnétique dans la machine de traction/compression, un ensemble de pièces amagnétiques à été conçu. Le circuit magnétique (principalement culasse et bobinages d'excitation) est placé à l'intérieur de deux platines (figure B.5). Ces deux platines, fabriquées à partir de Plexiglass, comprennent

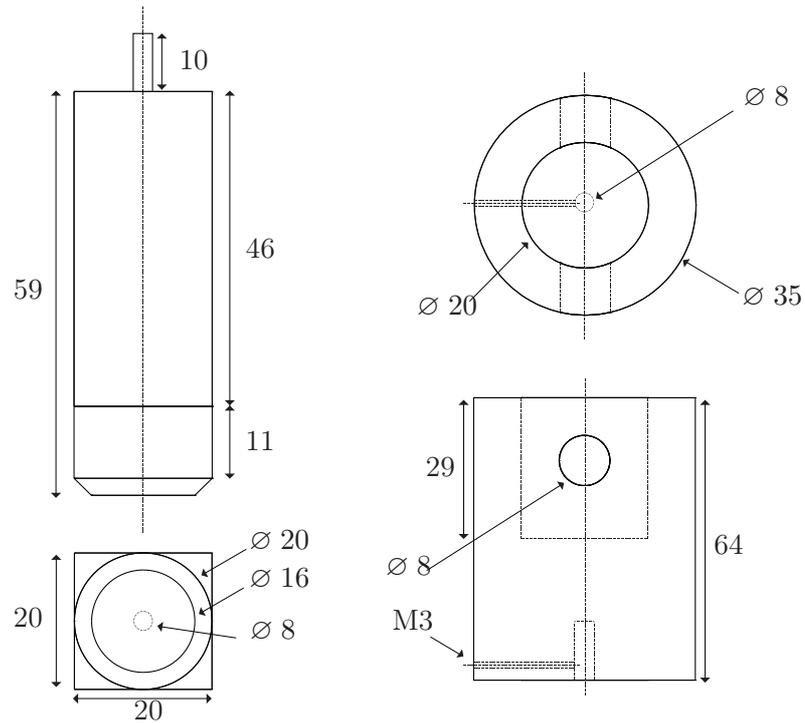


Figure B.4 – Dimensions des colonnes magnétiques

un ensemble de cales qui permet le réglage des entrefers entre les colonnes magnétiques et les culasses. Les dimensions de ces platines sont données à la figure B.6.

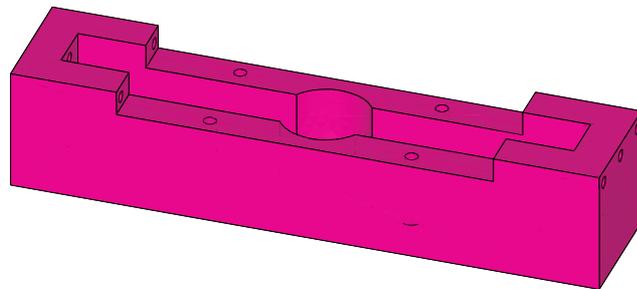


Figure B.5 – Platine de maintien

#### B.1.1.4 Dimensions de la semelle de maintien

L'ensemble formé par l'association du circuit magnétique et des platines de maintien, est mis en place sur une semelle de maintien (figure B.7). Cette semelle est ensuite fixée à la colonne magnétique basse, elle-même mise en place sur le bâti de la machine de traction/compression. Les dimensions de la semelle de maintien sont indiquées à la figure B.8.

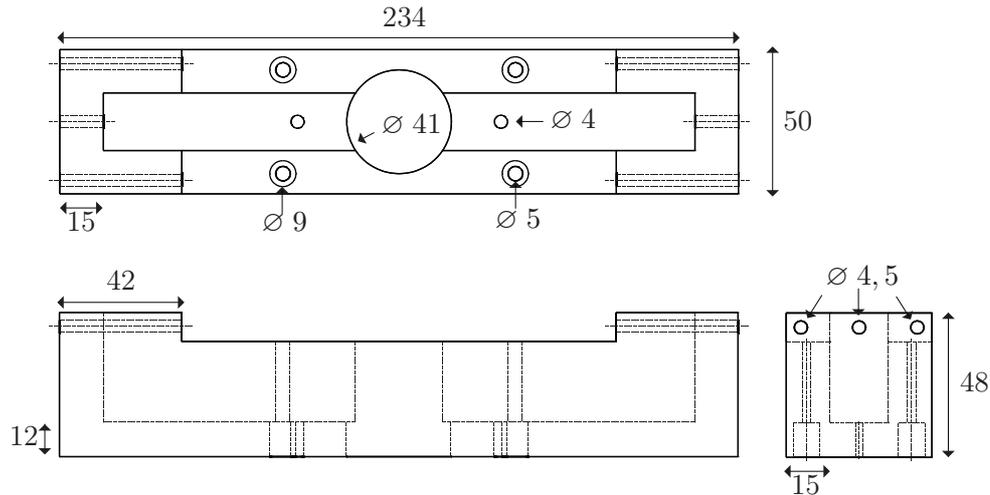


Figure B.6 – Dimensions du maintien amagnétique

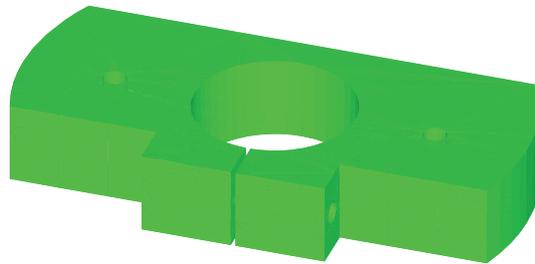


Figure B.7 – Semelle de maintien

## B.2 Propriétés des matériaux du circuit magnétique

Les propriétés des matériaux du circuit magnétique sont détaillées dans le tableau B.1.

## B.3 Principe d'acquisition d'une courbe anhystérique

Nous présentons ici la méthode employée pour réaliser l'acquisition de courbe anhystérique du comportement magnétique. Nous détaillons la méthode utilisée pour créer l'excitation magnétique, ainsi que le traitement de la mesure pour évaluer le point ainsi obtenu.

### B.3.1 Désaimantation point par point

Une courbe anhystérique correspond à un ensemble de points issus de désaimantations successives autour de points visés. On fait pour cela osciller le champ magnétique appliqué en amplitude décroissante autour d'une valeur visée. Cette onde de champ d'amplitude décroissante est générée selon le principe suivant (figure B.9) :

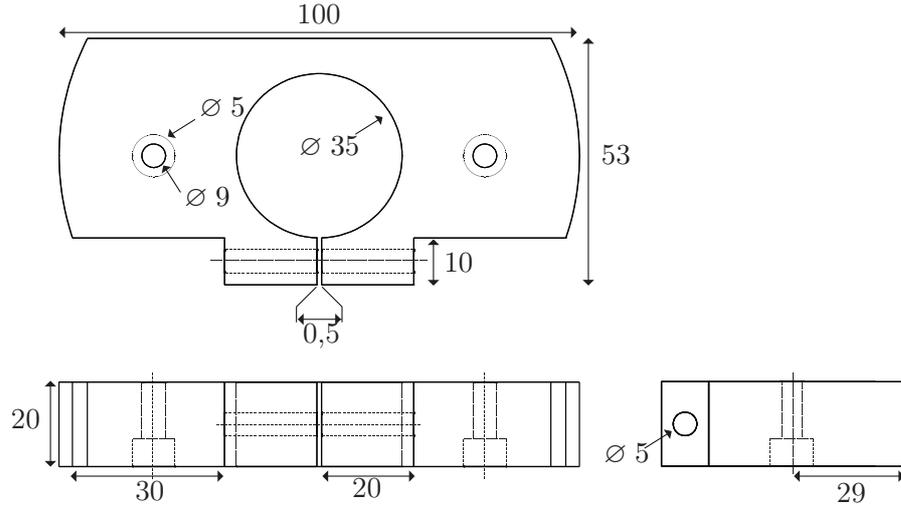


Figure B.8 – Dimensions de la semelle de maintien

Pente initiale → Cycle majeur → Onde évanescente

Les fonctions générées par la carte d'entrées-sorties, que l'on assimilera au courant injecté dans les bobinages, sont définies par :

$$\text{Pente initiale : } i(t) = ct^2 \quad (\text{B.1})$$

$$\text{Cycle majeur : } i(t) = I_m \sin(w(t + \Delta t)) \quad (\text{B.2})$$

$$\text{Onde évanescente : } i(t) = I_m \sin(wt) e^{-kwt} + I_c (1 - e^{-kwt}) \quad (\text{B.3})$$

où  $c$  et  $\Delta t$  sont définis<sup>1</sup> par :

$$c = I_m \pi f^2 \alpha \cos(w(t_1 + \Delta t)) \quad (\text{B.4})$$

$$\Delta t = \frac{1}{w} \left( \text{atan} \left( \frac{\pi}{\alpha} - \frac{2\pi}{\alpha} \right) \right) \quad (\text{B.5})$$

avec  $f$  la fréquence,  $I_m$  le courant maximum (courant de crête),  $w$  la pulsation et  $k$  le facteur d'amortissement de l'onde évanescente.  $t_1$  correspond à la durée de la pente initiale et  $\alpha$  est un paramètre positif définissant cette durée. Ils sont liés à la période  $T$  par :

$$t_1 = \frac{T}{\alpha} \quad (\text{B.6})$$

Le terme  $Ic$  dans l'expression B.3, correspond au courant cible en fin de désaimantation. Plusieurs méthodes peuvent être définies pour déterminer la valeur de ce

<sup>1</sup>Les expressions de ces termes sont obtenues en imposant la continuité de l'onde de courant générée

Culasses (Thomson B50)			
Perméabilité relative initiale	$\mu_i$	-	$2500 \pm 20\%$
Induction magnétique à saturation	$B_{sat}$	(T)	0.48
Température de Curie	$T_c$	(°C)	> 200
Colonnes magnétiques (Permendur 49)			
Module d'Young	Y	(GPa)	210
Coefficient de Poisson	$\nu$	-	0,29
Perméabilité magnétique	$\mu/\mu_0$	-	Non-linéaire
Induction magnétique à saturation	$B_{sat}$	(T)	2,34
Température de Curie	$T_c$	(°C)	940
Colonnes magnétiques (Dural)			
Module d'Young	Y	(GPa)	73
Résistance à la traction	$\sigma_r$	(MPa)	420-500
Bobinages primaires			
Spires sur les culasses	$N_1$	-	600
Spires au voisinage de l'échantillon	$N_2$	-	265

Tableau B.1 – Propriétés des matériaux du circuit magnétique

courant au point désiré. Nous avons préféré retenir une méthode consistant à définir le nombre de point décrivant la courbe anhystérétique. Avec cette méthode, deux fonctions permettent de générer le courant cible, selon que l'on souhaite obtenir une courbe entière ou une demi-courbe (un quadrant).

$$\text{Demi-courbe : } I_c = I_m \left( \frac{n}{N_p} \right)^3 \quad (\text{B.7})$$

$$\text{Courbe entière : } I_c = I_m \left( \frac{2 * n - N_p}{N_p} \right)^3 \quad (\text{B.8})$$

avec :  $n \in \mathbb{N}^+$  tel que  $n = \{1, N_p\}$ .

Le choix d'une distribution cubique permet d'obtenir des courbes anhystérétiques constituées de points distribués de manière homogène (figure B.10).

### B.3.2 Évaluation des points

Une fois la désaimantation autour du point accomplie, les valeurs obtenues par l'instrumentation de mesure doivent être estimées dans le référentiel définissant les variables. Pour cela, on génère de nouveau une onde pour obtenir le cycle majeur (figure B.11). La valeur de l'induction magnétique au point  $i$  est alors obtenue par la loi de Faraday-lenz :

$$b_i = \frac{1}{N_{coil} S_{coil}} \int_{t_1}^{t_2} e(t) dt + B_{max} \quad (\text{B.9})$$

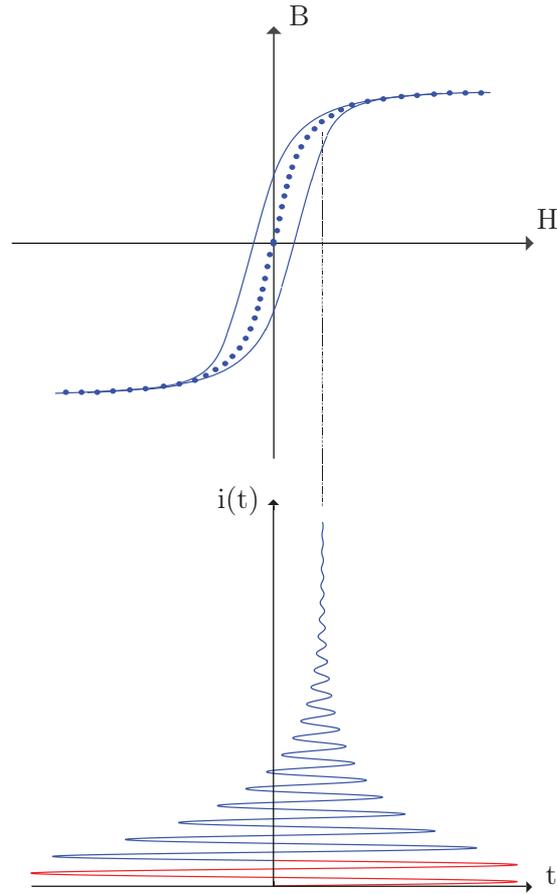


Figure B.9 – *Principe d'acquisition d'une courbe anhystérétique*

où  $N_{coil}$  et  $S_{coil}$  correspondent au nombre de spires et à la section de la bobine de mesure de flux (B-coil). Pour estimer la valeur de l'induction magnétique  $B_{max}$ , soit on la déduit de la connaissance du cycle d'hystérésis majeur (issue d'une mesure antérieure), soit de nouveau par la loi de Faraday-Lenz :

$$B_{max} = \frac{1}{2 N_{coil} S_{coil}} \int_{t_2}^{t_3} e(t) dt \quad (\text{B.10})$$

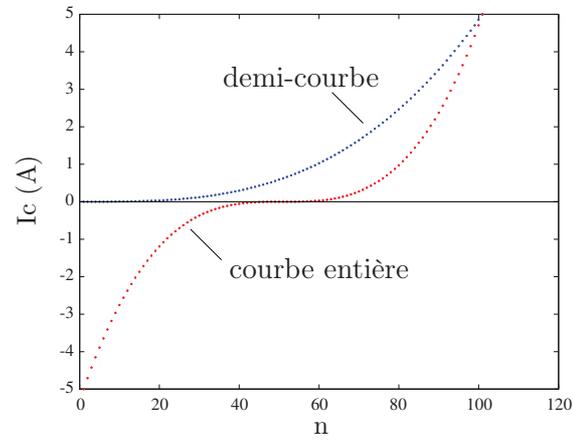


Figure B.10 – Distributions de  $I_c$  pour un courant maximum  $I_m = 5A$  et  $N_p = 100$

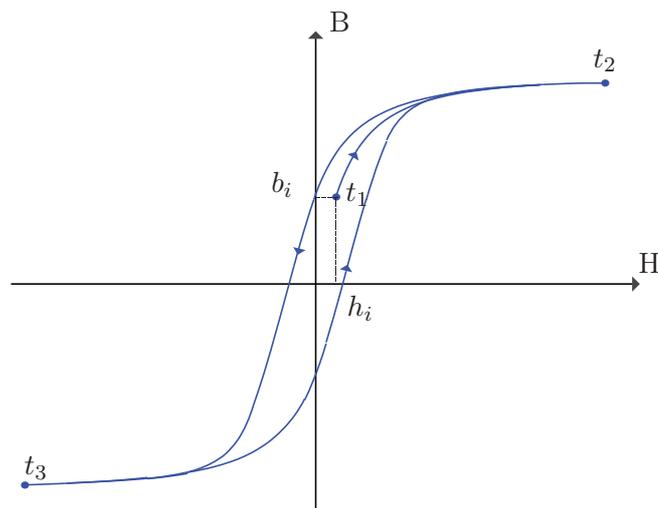


Figure B.11 – Principe d'évaluation de l'induction magnétique

# Annexe C

## Loi de comportement magnéto-mécanique bidimensionnelle

### Sommaire

---

<b>C.1</b>	<b>Hypothèses des états plans . . . . .</b>	<b>183</b>
C.1.1	États plans de contraintes . . . . .	183
C.1.2	États plans de déformation . . . . .	184
<b>C.2</b>	<b>Modèle bidimensionnel de déformation de magnétostriction</b>	<b>184</b>
<b>C.3</b>	<b>Loi de comportement magnétique dans l'hypothèse des états plans . . . . .</b>	<b>185</b>
C.3.1	Loi de comportement magnétique dans l'état plan de contraintes	185
C.3.2	Loi de comportement magnétique dans l'état plan de déformations . . . . .	186

---



NOUS développons ici les lois de comportement magnéto-mécanique, et plus particulièrement le comportement magnétique couplé, dans le cadre bidimensionnel. On se propose dans un premier temps de rappeler les hypothèses attachées aux états plans de contraintes et de déformations [Imbert, 1984]. Nous précisons par la suite le modèle de déformation de magnétostriction restreint au cadre bidimensionnel. La loi de comportement magnétique couplé est ensuite formulée dans les hypothèses d'états plans de contraintes et de déformations.

## C.1 Hypothèses des états plans

Nous rappelons brièvement les hypothèses attachées aux états plans de contraintes et de déformations. Suivant l'état plan d'approximation utilisé, la matrice d'élasticité du matériau s'écrit :

$$[\mathbf{C}] = \begin{bmatrix} \lambda' + 2\mu^* & \lambda' & 0 \\ \lambda' & \lambda' + 2\mu^* & 0 \\ 0 & 0 & \mu^* \end{bmatrix} \quad (\text{C.1})$$

$$\text{avec : } \begin{cases} \lambda' = \lambda^* & \text{états plan de déformations} \\ \lambda' = 2\frac{\lambda^*\mu^*}{\lambda^* + 2\mu^*} & \text{états plan de contraintes} \end{cases} \quad (\text{C.2})$$

où  $\lambda^*$  et  $\mu^*$  sont les coefficients de Lamé définies par les relations (3.24). Les tenseurs de contraintes et de déformations s'écrivent en notation vectorielle :

$$\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{12}\}^t \quad (\text{C.3})$$

$$\mathbf{S} = \{S_{11}S_{22}2S_{12}\}^t \quad (\text{C.4})$$

### C.1.1 États plans de contraintes

L'état plan de contraintes est une approximation utilisée afin de modéliser des corps élastiques plans et minces sollicités dans leur plan, telles que des plaques (figure C.1).

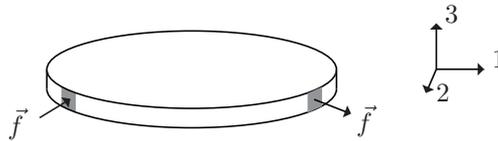


Figure C.1 – Configuration typique adaptée à l'hypothèse d'états plan de contraintes

Les hypothèses de base de l'état plan de contraintes sont définies par :

$$\sigma_{33} = \sigma_{32} = \sigma_{31} = 0 \quad (\text{C.5})$$

Il en résulte que :

$$S_{31} = S_{32} = 0 \quad (\text{C.6})$$

Néanmoins, la composante du tenseur de déformation  $S_{33}$  n'est pas nulle. Elle dépend des autres composantes du tenseur des déformations, et son expression peut être déterminée à partir de la loi de comportement ( $\sigma = \mathbf{C} : \mathbb{S}$ ) en imposant  $\sigma_{33} = 0$  :

$$S_{33} = -\frac{\lambda^*}{2\mu^* + \lambda^*} (S_{11} + S_{22}) \quad (\text{C.7})$$

### C.1.2 États plans de déformation

L'état plan de déformations est utilisée pour modéliser les corps élastiques sollicités hors de leur plan. On s'intéresse alors à l'état de contraintes dans une tranche quelconque du matériau (figure C.2).

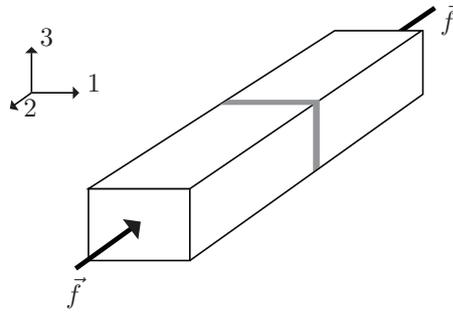


Figure C.2 – Configuration typique adaptée à l'hypothèse d'états plan de déformations

Les hypothèses de base de l'état plan de déformations sont définies par :

$$S_{33} = S_{32} = S_{31} = 0 \quad (\text{C.8})$$

Il en résulte que :

$$\sigma_{31} = \sigma_{32} = 0 \quad (\text{C.9})$$

En conséquence, la composante du tenseur de contraintes  $\sigma_{33}$  n'est pas nulle. On peut alors la déduire des autres composantes du tenseur des contraintes, en imposant  $S_{33} = 0$  dans la loi de comportement mécanique :

$$\sigma_{33} = \frac{\lambda^*}{2(\lambda^* + \mu^*)} (\sigma_{11} + \sigma_{22}) \quad (\text{C.10})$$

## C.2 Modèle bidimensionnel de déformation de magnétostriction

Il est possible d'établir l'expression du modèle bidimensionnel de déformation de magnétostriction à partir de son expression tridimensionnelle. Dans le cadre bidimensionnel, la composante  $B_3$  de l'induction magnétique est nulle, ce qui implique

que  $S_{31}^\mu = S_{32}^\mu = 0$ . Dans le cadre bidimensionnel, le tenseur de déformation de magnétostriction s'écrit :

$$\mathbb{S}^\mu(\mathbf{B}) = \sum_{n=0}^N \beta_n \mathbf{B}^{2n} \begin{pmatrix} B_1^2 - \frac{B_2^2}{2} & \frac{3}{2}B_1B_2 & 0 \\ \frac{3}{2}B_2B_1 & B_2^2 - \frac{B_1^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{B_1^2}{2} - \frac{B_2^2}{2} \end{pmatrix} \quad (\text{C.11})$$

### C.3 Loi de comportement magnétique dans l'hypothèse des états plans

Dans le cadre bidimensionnel, la loi de comportement couplée magnétique doit être ré-écrite, afin de tenir compte des hypothèses attachées aux états plan.

#### C.3.1 Loi de comportement magnétique dans l'état plan de contraintes

Dans le cadre des hypothèses de l'état plan de contraintes, nous avons :

$$\begin{aligned} \sigma_{33} = \sigma_{23} = \sigma_{13} &= 0 \\ B_3 &= 0 \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

En accord avec ces hypothèses, le champ coercitif de la loi de comportement couplée magnétique (3.23) s'écrit :

$$\mathbf{H}^c(\mathbf{B}, \mathbb{S}) = 2\mu^* \frac{\partial \mathbb{S}^\mu(\mathbf{B})}{\partial \mathbf{B}} \begin{bmatrix} 2S_{11}^e - S_{22}^e - S_{33}^e & 3S_{12}^e \\ 3S_{21}^e & 2S_{22}^e - S_{11}^e - S_{33}^e \end{bmatrix} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} \quad (\text{C.13})$$

avec  $S_{ij}^e = S_{ij} - S_{ij}^\mu$ . En exprimant la composante  $S_{33}^e$  de la déformation élastique conformément à (C.7), l'expression du tenseur des reluctivités équivalentes (3.26) peut se mettre sous la forme :

$$\nu_{ij}^c(\mathbf{B}, \mathbb{S}) = \Psi_{ik}^c(\mathbf{B}) \Gamma_{kj}^c(\mathbb{S} - \mathbb{S}^\mu) \quad (\text{C.14})$$

$$\text{avec : } \begin{cases} \Psi_{ij}^c(\mathbf{B}) = \sum_{n=0}^N \beta_n \mathbf{B}^{2n} \left( \delta_{ij} + n \frac{B_i B_j}{\mathbf{B}^2} \right) \\ \Gamma_{ij}^c(\mathbb{S}) = 2\mu^* \left( 3S_{ij} - \frac{2\mu^*}{2\mu^* + \lambda^*} \delta_{ij} \text{tr}(\mathbb{S}) \right) \end{cases} \quad (\text{C.15})$$

### C.3.2 Loi de comportement magnétique dans l'état plan de déformations

Dans le cadre des hypothèses de l'état plan de contraintes, nous avons :

$$\begin{aligned} S_{33} = S_{23} = S_{13} &= 0 \\ B_3 &= 0 \end{aligned} \quad (\text{C.16})$$

En accord avec ces hypothèses, le champ coercitif induit par l'effet des contraintes sur le matériau (3.23) s'écrit :

$$\mathbf{H}^c(\mathbf{B}, \mathbb{S}) = 2\mu^* \frac{\partial \mathbb{S}^\mu(\mathbf{B})}{\partial \mathbf{B}} \begin{bmatrix} 2S_{11}^e - S_{22}^e & 3S_{12}^e \\ 3S_{21}^e & 2S_{22}^e - S_{11}^e \end{bmatrix} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} \quad (\text{C.17})$$

avec  $S_{ij}^e = S_{ij} - S_{ij}^\mu$ . L'expression du tenseur des reluctivités équivalentes (3.26) se met sous la forme :

$$\nu_{ij}^c(\mathbf{B}, \mathbb{S}) = \Psi_{ik}^c(\mathbf{B}) \Gamma_{kj}^c(\mathbb{S} - \mathbb{S}^\mu) \quad (\text{C.18})$$

$$\text{avec : } \begin{cases} \Psi_{ij}^c(\mathbf{B}) = \sum_{n=0}^N \beta_n \mathbf{B}^{2n} \left( \delta_{ij} + n \frac{B_i B_j}{\mathbf{B}^2} \right) \\ \Gamma_{ij}^c(\mathbb{S}) = 2\mu^* (3S_{ij} - \delta_{ij} \text{tr}(\mathbb{S})) \end{cases} \quad (\text{C.19})$$

# Annexe D

## Note sur les formulations éléments finis

### Sommaire

---

<b>D.1</b>	<b>Problème électro-magnéto-mécanique 2D . . . . .</b>	<b>189</b>
D.1.1	Formulation variationnelle magnéto-mécanique . . . . .	189
D.1.2	Formulation éléments finis . . . . .	190
<b>D.2</b>	<b>Note sur la méthode de Newton-Raphson . . . . .</b>	<b>194</b>

---



NOUS proposons dans une première partie de décrire les problèmes magnéto-mécanique et électro-mécanique dans le cadre bidimensionnel et les formulations éléments finis adaptées. Quelques éléments concernant la méthode de Newton-Raphson sont par la suite abordés.

## D.1 Problème électro-magnéto-mécanique 2D

Dans l'approche bidimensionnelle, la troisième composante des champs électromagnétiques est nulle et le tenseur des déformations se limitent à la connaissance de trois composantes. Cependant, les problèmes à résoudre restent identiques à l'approche tridimensionnelle. Par la suite nous utilisons la notation vectorielle pour les tenseurs d'ordre 2 et 4.

### D.1.1 Formulation variationnelle magnéto-mécanique

Le problème magnéto-mécanique à résoudre est défini par la minimisation d'une fonctionnelle d'énergie :

$$E = W(\mathbf{B}, \mathbf{S}) - T \quad (\text{D.1})$$

où  $W(\mathbf{B}, \mathbf{S})$  et  $T$  sont définis respectivement par les relations (??) et (3.74).

L'application du principe des travaux virtuels conduit alors à résoudre les formulations magnétiques et mécaniques, associées au problème magnéto-mécanique (figure D.1), pour des variations élémentaires  $\delta \mathbf{a}$  et  $\delta \mathbf{u}$  :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_T} \nabla \times \delta \mathbf{a} [\nu(\mathbf{B})] \nabla \times \mathbf{a} \, d\Omega_T + \int_{\Gamma_h} \delta \mathbf{a} \cdot (\mathbf{H} \times \mathbf{n}) \, d\Gamma_h \\ & - \int_{\Omega_m} \nabla \times \delta \mathbf{a} \cdot \mathbf{H}^c(\mathbf{B}, \mathbf{S}) \, d\Omega_m - \int_{\Omega_T} \nabla \times \delta \mathbf{a} \mathbf{B}_r \, d\Omega_T - \int_{\Omega_T} \delta \mathbf{a} \cdot \mathbf{J} \, d\Omega_a = 0 \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_1} \mathbf{S}(\delta \mathbf{u}) [\mathbf{C}] \mathbf{S} \, d\Omega_1 + \partial_u \left( \int_{\Omega_T} \left( \int_0^{\mathbf{B}} \mathbf{H}(\mathbf{B}', \mathbf{S}) \, d\mathbf{B}' \right) \, d\Omega_T \right) \\ & - \int_{\Omega_m} \mathbf{S}(\delta \mathbf{u}) [\mathbf{C}] \mathbf{S}^\mu \, d\Omega_m - \int_{\Omega_M} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{f}^\Omega \, d\Omega_M - \int_{\Gamma_\sigma} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{f}^\Gamma \, d\Gamma_\sigma = 0 \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

où le terme en  $\mathbf{B}_r$  dans l'équation (D.2) est associé à la présence d'aimant permanent dans le problème considéré. La loi de comportement magnétique pour des aimants permanents est alors définie par :

$$\mathbf{B} = \mu_a \mathbf{H} + \mathbf{B}_r \quad \Rightarrow \quad \mathbf{H} = \nu_a (\mathbf{B} - \mathbf{B}_r) \quad (\text{D.4})$$

avec  $\nu_a$  est le tenseur des reluctivités magnétiques de l'aimant permanent et  $\mathbf{B}_r$  l'induction magnétique rémanente. Les conditions aux limites magnétique et mécanique

du problème sont définies par les relations (3.75) et (3.76), où  $\Gamma_a = \Gamma_h \cup \Gamma_b$  et  $\Gamma_v = \Gamma_\sigma \cup \Gamma_u$  sont les limites associées aux domaines d'étude, défini par  $\Omega_T = \Omega_M \cup \Omega_0$  et  $\Omega_M = \Omega_m \cup \Omega_1$  (figure D.1).

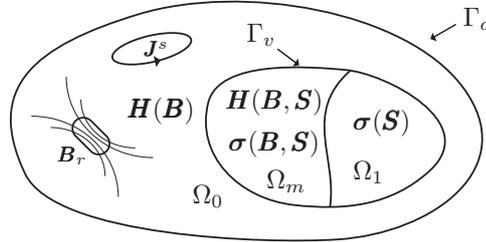


Figure D.1 – *Domaine d'étude du problème magnéto-mécanique*

Le problème électro-mécanique est identique à celui traité au paragraphe 3.4.1.

## D.1.2 Formulation éléments finis

La discrétisation spatiale du domaine d'étude  $\Omega_T$  est réalisée par des éléments nodaux du premier ordre. Ceux-ci sont de formes simples comme des triangles, des quadrangles... Chaque élément, noté  $\Omega_e$ , comporte de  $n_n^e$  noeuds. Le maillage du domaine  $\Omega_T$  est alors formé de  $n_n$  noeuds et de  $n_e$  éléments.

### D.1.2.1 Discrétisation magnétique

Compte tenu de la discrétisation, le potentiel vecteur magnétique  $\mathbf{a}$  est approximé à partir de sa connaissance au noeud du maillage. L'interpolation du potentiel vecteur magnétique en un point quelconque du domaine d'étude est définie par :

$$\mathbf{a} = \sum_{n=1}^{n_n} \tilde{a}_n w_n \quad (\text{D.5})$$

### D.1.2.2 Discrétisation mécanique

Le déplacement  $\mathbf{u}$  est approximé à partir de sa connaissance en chaque noeud du maillage appartenant au domaine mécanique  $\Omega_M$ . On notera  $n_m$  le nombre de noeud associé au domaine mécanique. La fonction d'interpolation est définie par :

$$u_j = \sum_{n=1}^{n_m} u_{jn} w_n \quad j = \{1, 2\} \quad (\text{D.6})$$

avec  $u_{jn}$  la composante  $j$  du déplacement au noeud  $n$  et  $w_n$  la fonction de forme associée aux noeuds  $n$ . Cette écriture peut se mettre sous la forme :

$$\mathbf{u} = \sum_{n=1}^{n_m} \mathbf{W}_n \tilde{u}_n = [\mathbf{W}] \{\tilde{\mathbf{u}}\} \quad (\text{D.7})$$

avec :

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{W}] &= \left[ \begin{array}{cc|cc|ccc} w_1 & 0 & w_2 & 0 & \dots & w_{n_m} & 0 \\ 0 & w_1 & 0 & w_2 & \dots & 0 & w_{n_m} \end{array} \right] \\
 &= [w_1 \mathbf{I}, w_2 \mathbf{I}, \dots, w_{n_m} \mathbf{I}] \\
 &= [\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2, \dots, \mathbf{W}_{n_m}]
 \end{aligned} \tag{D.8}$$

$$\{\mathbf{u}\} = \{\tilde{\mathbf{u}}_1, \tilde{\mathbf{u}}_2, \dots, \tilde{\mathbf{u}}_{n_m}\}^t = \{\tilde{u}_x^1, \tilde{u}_y^1, \tilde{u}_x^2, \dots, \tilde{u}_y^{n_m}\}^t \tag{D.9}$$

### D.1.2.3 Formulation magnétique discrétisé

En accord avec la formulation magnétique du problème magnéto-mécanique (D.2), on doit calculer :

$$\int_{\Omega_T} \nabla \times \mathbf{a} [\boldsymbol{\nu}(\mathbf{B})] \nabla \times \mathbf{a} d\Omega_T \tag{D.10}$$

Ce qui dans le cadre bidimensionnel est équivalent à<sup>1</sup> :

$$\int_{\Omega_T} (\partial_y a_z - \partial_x a_z) \begin{bmatrix} \nu_{xx} & \nu_{xy} \\ \nu_{xy} & \nu_{yy} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \partial_y a_z \\ -\partial_x a_z \end{pmatrix} d\Omega_T \tag{D.11}$$

$$\Rightarrow \int_{\Omega_T} (\nu_{xx} \partial_y^2 a_z - 2 \nu_{xy} \partial_x a_z \partial_y a_z + \nu_{yy} \partial_x^2 a_z) d\Omega_T \tag{D.12}$$

Or, nous cherchons à travailler à partir de :

$$\int_{\Omega_T} (\partial_x a_z \partial_y a_z) \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \partial_x a_z \\ \partial_y a_z \end{pmatrix} d\Omega_T \tag{D.13}$$

$$\Rightarrow \int_{\Omega_T} (\alpha \partial_x^2 a_z + 2 \beta \partial_x a_z \partial_y a_z + \gamma \partial_y^2 a_z) d\Omega_T \tag{D.14}$$

Ce qui conduit à :

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nu_{yy} & -\nu_{xy} \\ -\nu_{xy} & \nu_{xx} \end{bmatrix} \tag{D.15}$$

En accord avec cette notation et la discrétisation retenue, la formulation magnétique (D.2) du problème magnéto-mécanique, qui doit être vérifiée pour n'importe quelle variation arbitraire du potentiel vecteur magnétique  $\boldsymbol{\delta a}$ , s'écrit :

<sup>1</sup>On suppose que la densité de courant  $J^s$  injectée dans les bobinages est telle que  $\mathbf{J}^s = J^s \mathbf{e}_z$ , ce qui implique que  $\mathbf{a} = a_z(x, y) \mathbf{e}_z$ .

$$\begin{aligned}
& \sum_{n'=1}^{n_n} \int_{\Omega_T} \{\nabla w_n\}^t [\boldsymbol{\nu}(\mathbf{B})] \{\nabla w_{n'}\} \tilde{a}_{n'} d\Omega_T + \int_{\Gamma_h} \{\nabla w_n\}^t \cdot \{\mathbf{H} \times \mathbf{n}\} d\Gamma_h \\
& - \int_{\Omega_m} \{\nabla w_n\}^t \{\mathbf{H}^c(\mathbf{B}, \mathbf{S})\} d\Omega_m - \int_{\Omega_T} \{w_n\}^t \{\mathbf{J}\} d\Omega_T \\
& - \int_{\Omega_T} \{\nabla w_n\}^t [\boldsymbol{\nu}_a] \{\mathbf{B}_r\} d\Omega_T = 0 \quad \forall n \in [1, n_n]
\end{aligned} \tag{D.16}$$

L'intégrale sur la frontière  $\Gamma_h$  s'annule naturellement par la condition aux limites homogène sur le champ définie par (3.75). En tenant compte de la définition du champ coercitif (C.13) ou (C.17), le système d'équations algébriques à résoudre est défini, après assemblage, par le système matriciel suivant :

$$[\mathbf{M}(\mathbf{B}, \mathbf{S})]\{\mathbf{A}\} = \{\mathbf{J}^s\} \tag{D.17}$$

où les expressions élémentaires de la matrice de rigidité magnétique et du second membre, sont définies dans l'élément de référence, tel que  $\Omega_T = \bigcup_{e=1}^{n_e} \Omega_e$ , par :

$$\begin{aligned}
M_{nn'}^e(\mathbf{B}, \mathbf{S}) &= \sum_{n'=1}^{n_n^e} \int_{\Omega_e} \{\nabla w_n\}^t [\mathbf{J}]^{-t} [\boldsymbol{\nu}(\mathbf{B}) - \boldsymbol{\nu}^c(\mathbf{B}, \mathbf{S})] [\mathbf{J}]^{-1} \{\nabla w_{n'}\} |\mathbf{J}| d\Omega_e \\
& \quad \forall n \in [1, n_n^e]
\end{aligned} \tag{D.18}$$

$$J_n^e = \sum_{n'=1}^{n_n^e} \int_{\Omega_e} (w_n J_{n'}^s + \{\nabla w_n\}^t [\mathbf{J}]^{-t} [\boldsymbol{\nu}_a] \{\mathbf{B}_r\}) |\mathbf{J}| d\Omega_e \quad \forall n \in [1, n_n^e] \tag{D.19}$$

#### D.1.2.4 Formulation mécanique discrétisée

La formulation mécanique discrétisée est identique à celle obtenue dans l'approche tridimensionnel. Cette formulation se réduit à la résolution d'un ensemble d'équations algébriques défini par le système matriciel suivant :

$$[\mathbf{K}]\{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{f}^\sigma\} + \{\mathbf{f}^\mu\} + \{\mathbf{f}^{mf}\} \tag{D.20}$$

où les expressions élémentaires de la matrice de rigidité mécanique et des seconds membres sont définies dans l'élément de référence par (3.94)-(3.96). Cependant, dans le cas bidimensionnel le vecteur des forces nodales  $\{\mathbf{f}\}$  et le vecteur des déformations de magnétostriction  $\{\mathbf{S}^\mu\}$  s'écrivent :

$$\{\mathbf{f}\} = \{\tilde{\mathbf{f}}_1, \tilde{\mathbf{f}}_2, \dots, \tilde{\mathbf{f}}_{n_m}\}^t = \{\tilde{f}_1^x, \tilde{f}_1^y, \tilde{f}_2^x, \dots, \tilde{f}_{n_m}^y\}^t \tag{D.21}$$

$$\{\mathbf{S}^\mu\} = \{\tilde{\mathbf{S}}_1^\mu, \tilde{\mathbf{S}}_2^\mu, \dots, \tilde{\mathbf{S}}_{n_e^\mu}^\mu\}^t = \{\tilde{S}_{11}^\mu, \tilde{S}_{21}^\mu, \tilde{S}_{61}^\mu, \tilde{S}_{12}^\mu, \dots, \tilde{S}_{6n_e^\mu}^\mu\}^t \tag{D.22}$$

Dans ce cas, les matrices de permutation  $[\mathbf{P}]$  et  $[\nabla \mathbf{W}]$  sont explicitées comme suit :

$$[\mathbf{P}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{D.23})$$

$$[\nabla \mathbf{W}] = \begin{bmatrix} \nabla_{\mathbf{w}} & 0 \\ 0 & \nabla_{\mathbf{w}} \end{bmatrix} \quad \nabla_{\mathbf{w}} = \begin{bmatrix} \partial_x w_1 & \partial_x w_2 & \dots & \partial_x w_{n_m}^e \\ \partial_y w_1 & \partial_y w_2 & \dots & \partial_y w_{n_m}^e \end{bmatrix} \quad (\text{D.24})$$

### Forces magnétiques

Les forces magnétiques sont obtenues, conformément à la méthode basée sur l'application locale des travaux virtuels, par la relation (3.98). Dans le cas linéaire, l'énergie magnétique emmagasinée dans un élément, conformément à la discrétisation choisie, s'écrit :

$$W^e = \frac{1}{2} \{\mathbf{a}^e\}^t [\mathbf{M}^e] \{\mathbf{a}^e\} \quad (\text{D.25})$$

Les forces magnétiques nodales s'exerçant au noeud d'un élément, sont alors associées à la dérivée locale de la matrice Jacobienne et de son déterminant [Ren et Razek, 1992] par :

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^{mf} = & -\frac{1}{2} \{\mathbf{a}^e\}^t \sum_{n'=1}^{n_n^e} \int_{\Omega_e} \left( \{\nabla w_n\}^t \partial_{u_n} ([\mathbf{J}]^{-t} [\boldsymbol{\nu}] [\mathbf{J}]^{-1}) \{\nabla w_{n'}\} |\mathbf{J}| \right. \\ & \left. + \{\nabla w_n\}^t [\mathbf{J}]^{-t} [\boldsymbol{\nu}] [\mathbf{J}]^{-1} \{\nabla w_{n'}\} \partial_{u_n} |\mathbf{J}| \right) d\Omega_e \{\mathbf{a}^e\} \quad \forall n \in [1, n_n^e] \end{aligned} \quad (\text{D.26})$$

avec :

$$\begin{aligned} \partial_u [\mathbf{J}]^{-1} &= [\mathbf{J}]^{-1} \partial_u [\mathbf{J}] [\mathbf{J}]^{-1} \\ \partial_{u_n} ([\mathbf{J}]^{-t} [\boldsymbol{\nu}] [\mathbf{J}]^{-1}) &= -[\mathbf{J}]^{-t} (\partial_{u_n} [\mathbf{J}]^t [\mathbf{J}]^{-t} [\boldsymbol{\nu}] + [\boldsymbol{\nu}] [\mathbf{J}]^{-1} \partial_{u_n} [\mathbf{J}]) [\mathbf{J}]^{-1} \end{aligned} \quad (\text{D.27})$$

Dans le cas non-linéaire, on se reportera à l'équation (3.102).

#### D.1.2.5 Formulation électrique discrétisée

La formulation électrique discrétisée du problème électro-mécanique est identique au cas tridimensionnel, qui consiste à résoudre le système matriciel suivant :

$$[\mathbf{K}_{u\phi}^t] \{u\} + [\mathbf{K}_{\phi\phi}] \{\phi\} = \{\mathbf{Q}\} \quad (\text{D.28})$$

où les expressions élémentaires des différents termes sont données dans l'élément de référence par (3.65), (3.66) et (3.68). Cependant, les matrices de permutation  $[\mathbf{P}]$ ,  $[\nabla \mathbf{W}]$  et  $[\mathbf{B}_\phi]$  sont définies respectivement par (D.23), (D.24) et :

$$[\mathbf{B}_\phi] = \begin{bmatrix} \{\mathbf{w}_x\}^t \\ \{\mathbf{w}_y\}^t \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} \{\mathbf{w}_x\} &= \{\partial_x w_1, \dots, \partial_x w_{n_e}\}^t \\ \{\mathbf{w}_y\} &= \{\partial_y w_1, \dots, \partial_y w_{n_e}\}^t \end{aligned} \quad (\text{D.29})$$

## D.2 Note sur la méthode de Newton-Raphson

L'utilisation de la méthode de Newton-Raphson pour la résolution des problèmes magnéto-mécaniques non-linéaires, implique de connaître les dérivées par rapport au potentiel vecteur magnétique  $\mathbf{a}$  et au vecteur déplacement  $\mathbf{u}$  de certains termes. Le vecteur  $\{\mathbf{J}^c\}$ , assimilé à une densité de courant induite par l'effet des contraintes sur le matériau magnétostrictif, nécessite la connaissance de deux termes  $\partial_B \mathbf{H}^c(\mathbf{B}, S)$  et  $\partial_B \mathbf{S}^\mu(\mathbf{B})$  lors de sa dérivation par rapport au potentiel vecteur magnétique  $\mathbf{a}$  et au déplacement  $\mathbf{u}$  (voir (3.120) et (3.122)).

La forme générale de ces deux termes est définie par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_i^c(\mathbf{B}, S)}{\partial B_p} = & \nu_{ip} + 2\mu^* \left( \sum_{n=0}^N \left( n \beta_n \mathbf{B}^{2(n-1)} \right. \right. \\ & \left. \left. \left( \delta_{ip} B_k + \delta_{kp} B_i + 2\delta_{ik} B_p + 2(n-1) \frac{B_i B_k B_p}{\mathbf{B}^2} \right) \right) \Gamma_{kj}^c(S) B_j \right. \\ & \left. - \frac{3}{2} \sum_{\substack{n=0 \\ l=0}}^{N,L} \left( \beta_n \beta_l \mathbf{B}^{2(n+l)} \left( (4n+4l+4nl+1) B_i B_p + 3 \delta_{ip} \mathbf{B}^2 \right) \right) \right) \end{aligned} \quad (\text{D.30})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_{kl}^\mu(\mathbf{B})}{\partial B_i} = & \sum_{n=0}^N \beta_n \mathbf{B}^{2n} \left( n \mathbf{B}^{-2} (3 B_k B_l - \delta_{kl} \mathbf{B}^2) \right. \\ & \left. + \frac{3}{2} (\delta_{ki} B_l + \delta_{li} B_k) - \delta_{kl} B_i \right) \end{aligned} \quad (\text{D.31})$$

où  $\Gamma_{kj}^c(S)$  est définie par (3.28) dans le cas tridimensionnel, et par (C.15) ou (C.19) dans le cas bidimensionnel.

“Don’t forget to smell the flowers  
along the way.”  
R.H.

Gif-sur-Yvette, le 15 décembre 2007.

## Résumé

La thèse porte sur la caractérisation expérimentale et la modélisation de matériaux à magnétostriction géante et sur leur association avec des matériaux piézoélectriques. Une plateforme de caractérisation dédiée à l'étude du couplage magnéto-mécanique a été réalisée. Cette plateforme permet la création dans un échantillon ferromagnétique massif d'une zone homogène de sollicitations magnétique et mécanique. Une instrumentation adaptée mesure la réponse magnéto-mécanique de l'échantillon à ces sollicitations. Cette plateforme a été utilisée pour caractériser le comportement d'échantillons de Terfenol-D, un matériau à magnétostriction géante. Les résultats obtenus montrent notamment la très forte influence de la contrainte appliquée sur le comportement magnétique et sur la déformation de magnétostriction du matériau.

Un modèle de couplage magnéto-élastique, s'appuyant sur la définition de coefficients de couplage thermodynamique, est proposé pour décrire le comportement anhystérétique du Terfenol-D. A partir de la minimisation d'une fonctionnelle d'énergie, les formulations éléments finis relatives aux problèmes magnéto-élastique et électro-élastique sont établies. La formulation éléments finis du problème magnéto-électrique est ensuite obtenue par couplage des deux problèmes. Quelques applications sont enfin abordées, notamment celle de structures composites magnéto-électriques associant des couches magnétostrictives à des couches piézoélectriques. L'étude de ces structures composites met en avant l'intérêt d'une telle association de matériaux actifs.

**Mots-clefs :** : Couplages magnéto-élastiques, déformation de magnétostriction, caractérisation expérimentale, lois de comportement, modélisation éléments finis, structures composites magnéto-électriques.

## Summary

This study deals with the experimental characterization and the modelling of giant magnetostrictive materials and on their association with piezoelectric materials. An experimental benchmark dedicated to the survey of magneto-mechanics coupling has been achieved. This platform allows the creation in a bulk ferromagnetic sample of a homogeneous area of magnetic and mechanical sollicitations. An adapted instrumentation measures the magneto-mechanical response of the sample to these sollicitations. This experimental benchmark has been used to characterise the behaviour of Terfenol-D samples, a giant magnetostrictive material. The gotten results show the very strong influence of the applied stress on the magnetic behaviour and on the magnetostriction strain of the material.

A model of magneto-elastic coupling, based on the definition of thermodynamic coupling coefficients, is proposed to describe the anhysteretic behaviour of the Terfenol-D. From the minimisation of functional energy, finite element formulation of the magneto-elastic and electro-elastic problems are established. Specific considerations allow to establish finite element formulation of magneto-electric problem by coupling the two problems. Some applications are finally studied, especially magneto-electric composite structures associating magnetostrictive layers to piezoelectric layers. The survey of these composite structures shows the interest of a such association of active materials.

**Keywords :** : Magneto-elastic couplings, magnetostriction strain, experimental characterisation, constitutive laws, finite element modelisation, magneto-electric composite structures.