Contribution à la modélisation du comportement mécanique des structures sandwichs soumises à l'impact

Steven Marguet

▶ **To cite this version:**

Steven Marguet. Contribution à la modélisation du comportement mécanique des structures sandwichs soumises à l'impact. Mécanique [physics.med-ph]. Ecole Centrale de Nantes (ECN), 2007. Français. NNT : . tel-00276946v2

HAL Id: tel-00276946

https://theses.hal.science/tel-00276946v2

Submitted on 26 May 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

École Centrale de Nantes **Université de Nantes**

ÉCOLE DOCTORALE

MECANIQUE, THERMIQUE ET GENIE CIVIL

Année 2007 *N° B.U. :*

Thèse de Doctorat

Diplôme délivré conjointement par l'École Centrale de Nantes et l'Université de Nantes

Spécialité : GÉNIE MÉCANIQUE

Steven MARGUET

le 11 décembre 2007
à l'École Centrale de Nantes

CONTRIBUTION À LA MODÉLISATION DU COMPORTEMENT MÉCANIQUE DES STRUCTURES SANDWICHS SOUMISES À L'IMPACT

Jury

Président :	ALLIX Olivier	Professeur, LMT, ENS de Cachan
Rapporteurs :	COUTELLIER Daniel	Professeur, LAMIH, Université de Valenciennes
	DESMORAT Rodrigue	Professeur, LMT, ENS de Cachan
Examinateurs :	BARRAU Jean-Jacques	Professeur, LGMT, Université Paul Sabatier
	GORNET Laurent	Maître de conférences HDR, GeM, École Centrale de Nantes
	OLLIER Gilles	Architecte naval, dirigeant de Multiplast, Vannes
	ROZYCKI Patrick	Maître de conférences, GeM, École Centrale de Nantes

Directeur de thèse : Laurent GORNET
Co-encadrant : Patrick ROZYCKI
Laboratoire : GeM, Institut de Recherche en Génie Civil et Mécanique, UMR CNRS 6183,
École Centrale de Nantes - BP 92101 - 44321 Nantes Cedex 03

Remerciements

Ces travaux de thèse ont été réalisés à l'École Centrale de Nantes au sein de l'équipe "Structures et simulations" du GeM, Institut de Recherche en Génie Civil et Mécanique.

Je tiens tout d'abord à remercier chaleureusement Messieurs Laurent GORNET, mon directeur de thèse, et Patrick ROZYCKI, mon co-encadrant, pour m'avoir fait confiance, pour leur aide précieuse et pour leur disponibilité tout au long de cette aventure. Que Monsieur Nicolas MO ES trouve ici l'expression de ma gratitude pour m'avoir accueilli au sein du laboratoire et m'avoir ainsi permis de travailler dans de très bonnes conditions.

Je veux ensuite remercier Messieurs Daniel COUTELLIER, Professeur de l'Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis, et Rodrigue DESMORAT, Professeur du LMT Cachan, pour m'avoir fait l'honneur de bien vouloir rapporter ce mémoire. Je suis également très reconnaissant à Monsieur le Professeur Olivier ALLIX du LMT Cachan d'avoir accepté de présider mon jury de thèse ainsi qu'à Messieurs Jean-Jacques BARRAU, Professeur de l'Université Paul Sabatier de Toulouse et Gilles OLLIER, Dirigeant de la société Multiplast, d'y avoir participé.

Tout ce travail n'aurait pas été possible sans le partenariat avec la société Multiplast. Un grand merci à Gilles OLLIER et à toute son équipe pour leur très bon accueil, la richesse des échanges que nous avons eus et toutes les heures de travail passées à réaliser nos très belles éprouvettes d'essais. Et puisque je parle des essais, merci Jean-Pierre pour ton aide indispensable, mais aussi et surtout, pour ton humanité, ta disponibilité... et toutes tes histoires !

Au tour maintenant de mes amis thésards, Alain, Ahmad, Céline, Grégory, Sébastien, Hans... de trouver ici un très très chaleureux "merci :) !" pour ces trois années superbes passées ensemble, pour toutes les discussions passionnantes que nous avons eues et surtout, pour leur amitié ! ! !

Enfin je veux remercier ma famille, pour toutes les heures passées à relire ce manuscrit et pour bien plus encore.

Table des matières

Remerciements **3**

Notations **7**

Introduction générale **11**

1 Cadre scientifique général de l'étude **15**
1.1 Introduction . . . 16
1.2 Cadre théorique . . . 18
1.2.1 Principe des puissances virtuelles . . . 18
1.2.2 Thermodynamique des processus irréversibles . . . 20
1.2.3 Loi de comportement . . . 22
1.3 Cadre numérique . . . 26
1.3.1 Discrétisation spatiale . . . 26
1.3.2 Discrétisation temporelle - schéma d'intégration explicite . . . 27
1.3.3 Cadre de développement Abaqus VUMAT . . . 28
1.4 Conclusion . . . 29

2 Étude des composites tissés **33**
2.1 Introduction . . . 34
2.2 Présentation du Modèle 1 . . . 38
2.2.1 Écriture théorique du Modèle 1 . . . 38
2.2.2 Exemples d'illustration . . . 40
2.2.3 Discussion . . . 46
2.3 Développement du Modèle 2 . . . 46
2.3.1 Phénomène de localisation . . . 46
2.3.2 Écriture théorique du Modèle 2 . . . 49
2.3.3 Identification . . . 53
2.4 Résultats obtenus . . . 55
2.4.1 Validations élémentaires . . . 57
2.4.2 Validations sur structures . . . 58
2.5 Conclusion . . . 62

3 Caractérisation mécanique des nids d'abeilles Nomex **67**
3.1 Introduction . . . 68
3.1.1 Nids d'abeilles Nomex . . . 68
3.1.2 Aspects multi-échelles . . . 68
3.2 Essais usuels de caractérisation des âmes . . . 73
3.2.1 Essais de compression hors plan . . . 73
3.2.2 Essais de cisaillement hors plan . . . 73
3.2.3 Essais combinés . . . 76

3.2.4 Bilan des essais . . . 77
3.3 Campagne expérimentale sur âmes Nomex . . . 78
3.3.1 Moyen d'essais . . . 78
3.3.2 Essai de compression . . . 78
3.3.3 Essai de cisaillement hors plan . . . 79
3.4 Résultats obtenus . . . 82
3.4.1 Essais de cisaillement hors plan . . . 82
3.4.2 Essais de compression hors plan . . . 86
3.5 Analyse critique de l'essai quad-blocs . . . 91
3.5.1 Démarche adoptée . . . 91
3.5.2 Effets de bords et de hauteur . . . 92
3.5.3 Effets d'interface . . . 94
3.5.4 Influence des peaux et de la procédure . . . 96
3.6 Conclusion . . . 98

4 Modélisation des âmes en nids d'abeilles Nomex 103
4.1 Introduction . . . 104
4.1.1 Revue bibliographique . . . 104
4.1.2 Modèles analytiques - micro/macro . . . 104
4.1.3 Modèles numériques - micro/macro . . . 105
4.1.4 Modèles macro complexes . . . 107
4.2 Proposition d'un modèle de comportement . . . 108
4.2.1 Hypothèses de modélisation . . . 108
4.2.2 Loi de comportement pour nids d'abeilles Nomex . . . 109
4.2.3 Bilan sur le modèle . . . 116
4.3 Identification du modèle . . . 119
4.3.1 Méthodologie d'identification . . . 119
4.3.2 Identification en cisaillement hors plan . . . 120
4.3.3 Identification en compression hors plan . . . 123
4.4 Implémentation sous ABAQUS et validations . . . 127
4.4.1 Validations élémentaires . . . 127
4.4.2 Influence de la discrétisation spatiale . . . 127
4.5 Conclusion . . . 130

5 Calculs d'impacts sur panneaux sandwichs 137
5.1 Impacts de projectiles sur panneaux sandwichs . . . 138
5.1.1 Géométrie, matériaux, discrétisation . . . 138
5.1.2 Chargement imposé . . . 140
5.1.3 Étude de l'influence de l'âme . . . 142
5.2 Impact de vague sur bras de catamaran . . . 146
5.2.1 Modélisation du bras de catamaran . . . 146
5.2.2 Modélisation de la vague . . . 147
5.2.3 Chargements imposés, condition de contact . . . 148
5.2.4 Aspects éléments finis . . . 149
5.2.5 Résultats obtenus . . . 149
5.3 Conclusion . . . 152

Conclusions et perspectives 153

Annexe 1 : Influence des paramètres du modèle NIDA 1 157

Annexe 2 : Paramétrage de l'algorithme génétique **161**

Notations

Les notions d'espace et de temps utilisées dans ce mémoire sont introduites ci-dessous. L'espace affine $\mathcal{E}$, d'espace vectoriel associé E, est modélisé par un repère de base orthonormée directe $\mathcal{B}$, d'origine O et de vecteurs de base $\boldsymbol{e}_i$ $(i = 1, 2, 3) : \mathcal{B} = (O, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2)$. Tous les phénomènes traités sont observés dans un référentiel $\mathcal{R}$, supposé galiléen et lié au laboratoire d'étude. Une base $\mathcal{B}$ et une seule, fixe au cours du temps, y est attachée. Les solides ou particules matérielles en mouvement dans $\mathcal{E}$ représentent d'autres référentiels, ou d'autres observateurs, qui se voient affecter un et un seul repère associé. Les notions de référentiel et de repère sont donc confondues dans cette étude, un référentiel n'ayant qu'un seul repère associé et réciproquement.

En ce qui concerne le temps, il est supposé exister une chronologie absolue, identique pour tous les observateurs et représentée par la variable t de $\mathbb{R}^+$. Ainsi défini, le temps est dit absolu dans le sens où il se suffit à lui même, n'étant influencé par aucun phénomène. C'est le cadre de la mécanique déterministe newtonienne classique.

Un solide S est défini comme étant un ensemble de particules qui reste le même au cours de ses transformations. À tout instant t donné, S occupe une position particulière de l'espace et se trouve dans un "état physique" donné. Ces deux aspects, position et état, définissent une configuration pour S. Deux configurations d'intérêt sont introduites :

- la configuration de référence Ω (ensemble des positions des particules de S et de leur état) qui est confondue dans cette étude avec la configuration initiale du solide observée pour $t = t^0$, l'origine des temps ;
- la configuration actuelle ω, c'est-à-dire la position et l'état du solide S au temps t.

Les grandeurs définissant l'état de S sont écrites en lettres majuscules "X" sur la configuration de référence Ω, et en lettres minuscules "x" sur la configuration actuelle ω.

Les préalables à l'étude du solide S étant définis, il est temps de présenter les notations qui seront utilisées en l'absence d'indications contraires. Celles-ci sont regroupées dans les tableaux 1, 2 et 3.

Objets			
Désignation	Type	Espace	Description
X	point	$\in \mathcal{E}$	point en configuration initiale
$\mathcal{D}$	domaine	$\in \mathcal{E}$	domaine de définition de S
$\partial\mathcal{D}$	domaine	$\in \mathcal{E}$	enveloppe de S
$\partial\mathcal{D}_u$	sous-domaine	$\subset \partial\mathcal{D}$	partie de $\partial\mathcal{D}$ à déplacement imposé
$\partial\mathcal{D}_t$	sous-domaine	$\subset \partial\mathcal{D}$	partie de $\partial\mathcal{D}$ à densité d'effort surfacique imposée ($\partial\mathcal{D}_t \cap \partial\mathcal{D}_u = \{0\}$, $\partial\mathcal{D}_t \cup \partial\mathcal{D}_u = \partial\mathcal{D}$)
$G(X) = G$ $g(X,t) = g$	grandeur grandeur	$\subset \Omega$ $\subset \omega$	
$\mathbf{X}$ $\mathbf{x}$	vecteur vecteur	$\in E$ $\in E$	$\subset \Omega$ $\subset \omega$
X x	tenseur ordre 2 tenseur ordre 2	$\in E \otimes E$ $\in E \otimes E$	$\subset \Omega$ $\subset \omega$
$\underline{X}$	vecteur	$\in \mathbb{R}^3$	coordonnées de X où de $\mathbf{X}$ dans $\mathcal{B}$ à t^0
$\underline{x}$	vecteur	$\in \mathbb{R}^3$	coordonnées de X où de $\mathbf{x}$ dans $\mathcal{B}$ à t
$\underline{\underline{X}}$	tenseur ordre 2	$\in \left(\mathbb{R}^3\right)^2$	coordonnées du tenseur X dans $\mathcal{B}$ à t^0
$\underline{\underline{x}}$	tenseur ordre 2	$\in \left(\mathbb{R}^3\right)^2$	coordonnées du tenseur x dans $\mathcal{B}$ à t

TAB. 1 – Notations générales, objets

Grandeurs physiques			
Désignation	Type	Espace	Description
$\boldsymbol{u}$	vecteur	$\in E$	déplacement du point X, $\boldsymbol{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X}$
$\dot{\boldsymbol{u}}$	vecteur	$\in E$	vitesse du point X dans $\mathcal{R}$, $\dot{\boldsymbol{u}} = \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}$
$\ddot{\boldsymbol{u}}$	vecteur	$\in E$	accélération du point X dans $\mathcal{R}$, $\ddot{\boldsymbol{u}} = \frac{\partial \dot{\boldsymbol{u}}}{\partial t}$
T	scalaire	$\in \mathbb{R}$	température
$\boldsymbol{q}$	vecteur	$\in E$	flux de chaleur
$\mathcal{P}$	scalaire	$\in \mathbb{R}$	puissance
$\mathcal{Q}$	scalaire	$\in \mathbb{R}$	puissance liée aux échanges de chaleur
E	scalaire	$\in \mathbb{R}$	énergie interne
$\mathcal{S}$	scalaire	$\in \mathbb{R}$	entropie
K	scalaire	$\in \mathbb{R}$	énergie cinétique
ϵ ou ϵ_t	tenseur ordre 2	$\in E \otimes E$	déformation totale
ϵ_e	tenseur ordre 2	$\in E \otimes E$	déformation élastique
ϵ_p	tenseur ordre 2	$\in E \otimes E$	déformation plastique
σ	tenseur ordre 2	$\in E \otimes E$	contrainte de Cauchy
τ	tenseur ordre 2	$\in E \otimes E$	contrainte de Kirchhoff
Y	scalaire	$\in \mathbb{R}$	taux de restitution d'énergie
d	scalaire	$\in [0, 1]$	endommagement
B	scalaire	$\in \mathbb{R}$	taux de restitution d'énergie d'écrouissage isotrope
β	scalaire	$\in [0, 1]$	endommagement cumulé
R	scalaire	$\in \mathbb{R}$	contrainte d'écrouissage isotrope
p	scalaire	$\in \mathbb{R}$	déformation plastique cumulée
ρ	scalaire	$\in \mathbb{R}^+$	masse volumique

TAB. 2 – Principales grandeurs physiques

Opérateurs		
Désignation	Nom	Définition
$\mathcal{H}$	Heaviside	$\mathcal{H}(x) = 1$ pour $x \geq 0$, 0 sinon
$\overline{\mathcal{H}}$	Heaviside complémentée	$\overline{\mathcal{H}}(x) = 1 - \mathcal{H}(x)$
$\mathcal{H}^s$	Heaviside stricte	$\mathcal{H}^s(x) = 1$ pour $x > 0$, 0 sinon
$\overline{\mathcal{H}}^s$	Heaviside stricte complémentée	$\overline{\mathcal{H}}^s(x) = 1 - \mathcal{H}^s(x)$
$\mathcal{S}$	Signe	$\mathcal{S}(x) = 1$ pour $x \geq 0$, -1 sinon
$\langle\rangle_{\geq 0}$	Partie positive	$\langle x\rangle_{\geq 0} = x$ pour $x \geq 0$, 0 sinon
$\overline{\langle\rangle}_{\geq 0}$	Partie négative	$\overline{\langle x\rangle}_{\geq 0} = x - \langle x\rangle_{\geq 0}$ pour $x \geq 0$, 0 sinon
$\dot{}$	dérivée temporelle	$\dot{x} = \dfrac{\partial x}{\partial t}$
$^\bullet$	dérivée particulaire	$x^\bullet = \dfrac{\partial x}{\partial t} + \mathbf{grad}(x) \cdot \dot{\boldsymbol{u}}$
∇GN	dérivée de Green Naghdi	$g^{\nabla GN} = \dfrac{\partial g}{\partial t}$ $\boldsymbol{g}^{\nabla GN} = \mathrm{R}\dfrac{\partial\left(\mathrm{R}^T\boldsymbol{g}\right)}{\partial t}$ $\mathrm{g}^{\nabla GN} = \mathrm{R}\dfrac{\partial\left(\mathrm{R}^T\,\mathrm{g}\,\mathrm{R}\right)}{\partial t}\mathrm{R}^T$ avec $\mathrm{F} = \mathrm{R}\,\mathrm{U}$
Grad ()	gradient lagrangien	$\mathrm{Grad}(g) = g_{,\boldsymbol{X}}$
grad ()	gradient eulérien	$\mathrm{grad}(g) = g_{,\boldsymbol{x}}$
Div ()	divergence lagrangienne	$\mathrm{Div}(\boldsymbol{g}) = g_{i,X_i}$
div ()	divergence eulérienne	$\mathrm{div}(\boldsymbol{g}) = g_{i,x_i}$
$\int_{\mathcal{D}} f(x)\ dx$	intégrale de volume	intègre la fonction f sur le domaine $\mathcal{D}$
$\int_{t^0}^{t} f(x)\ dx$	intégrale temporelle	intègre la fonction f de l'instant initial à l'instant actuel

Tab. 3 – Principaux opérateurs

Introduction générale

Contexte de l'étude

Les panneaux sandwichs sont aujourd'hui fréquement employés dans la fabrication de structures complexes telles que les navires, les avions ou encore les transports terrestres. Il en existe de nombreux types, mais le principe est toujours le même : placer un matériau léger et très rigide en compression et cisaillement, l'âme, entre deux peaux supportant de grands efforts dans leur plan. De cette manière, le panneau sandwich obtenu constitue un matériau structurel à la fois léger et très raide en flexion/torsion du fait de l'utilisation optimisée de la matière.
Les matériaux constitutifs disponibles sont extrêmement variés offrant ainsi de nombreux champs d'applications aux panneaux sandwichs : panneaux de structure, d'isolation acoustique, thermique, d'absorption d'énergie (amortisseurs de chocs). Les peaux peuvent être métalliques : aluminium haute performance, titane ; ou encore composites : stratifiés à fibres de carbone ou de verre noyées dans une résine époxyde par exemple. Les âmes sont en général des matériaux alvéolaires comme des mousses ou des nids d'abeilles métalliques ou plastiques : mousses d'aluminium, de polyuréthane, nids d'abeilles aluminium, titane. Un type particulier de nids d'abeilles est également très employé, il s'agit des nids d'abeilles réalisés en papier Nomex. Ils font l'objet de ces travaux.

Deux industries de pointe emblématiques ont très fortement recours à ces matériaux : la construction nautique et aérienne [Armstrong, 1974]. L'utilisation de panneaux sandwichs est systématique dans la réalisation des voiliers de course [Multiplast, 2007]. En intervenant dans la réalisation des flotteurs et des mâts, ils permettent à ces navires, dont les dimensions peuvent excéder les 36 mètres, de conserver une excellente rigidité assurant ainsi leur réactivité. Ces matériaux sont également très employés dans la construction aéronautique, domaine où le gain d'un kilogramme sur la structure se traduit par un rayon d'action augmenté de 1 mile nautique [Gay, 2006].

L'omniprésence des structures sandwichs, ne s'explique pas seulement par leurs très bonnes qualités mécaniques. Les enjeux environnementaux et de sécurité favorisent également la diffusion de ces matériaux. La diminution des masses dans les transports présente en effet le double avantage de limiter la consommation d'énergie et l'énergie cinétique à vitesse donnée. Ceci se traduit par une baisse des émissions de gaz à effet de serre et de particules et par une amélioration de la sécurité passive.

Enfin il faut signaler que leur utilisation massive est également rendue possible par une meilleure compréhension et modélisation de leur comportement mécanique. Si des modèles de comportement thermo-mécanique fiables sont disponibles depuis longtemps pour les métaux, les récents apports de la méso-modélisation pour les matériaux composites fibrés permettent de réaliser des calculs de structures composites prédictifs, prenant en compte

de manière homogénéisée les mécanismes complexes de détérioration [Allix *et al.*, 1985; Ladevèze et Le Dantec, 1992; Gornet, 1996; Lemaître *et al.*, 1999; Ladevèze *et al.*, 2000; Rozycki, 2000]. La modélisation des matériaux d'âme est elle aussi en constante amélioration [Grediac, 1993; Gibson et Ashby, 1999; Gornet *et al.*, 2005, 2006] même si, en ce qui concerne les nids d'abeilles, peu d'approches sont développées pour prendre en compte la nature non linéaire de la réponse des nids d'abeilles. Ce dernier point mérite d'être amélioré, le calcul prédictif de la réponse d'une strucutre sandwich jusqu'à la phase ultime de la rupture ne pouvant être effectué qu'avec des modèles reproduisant toute la réponse des matériaux constitutifs.

Dans le domaine du transport aérien, entre 1989 et 1993, 13427 cas d'impacts d'oiseaux sur avions ont été rapportés autour du monde [Hanssen *et al.*, 2006]. Les vitesses relatives en jeu, d'une à plusieurs centaines de mètres par seconde, conduisent à une forte puissance de choc, dommageable pour la structure. À cela peuvent être ajoutées les projections de débris de piste en phases de décollage ou d'atterrissage. Leurs conséquences pour l'intégrité des structures peuvent être dramatiques comme l'illustre le tragique accident du 25 juillet 2000, qui a touché un Concorde en phase de décollage et conduit à son crash.

Le domaine de la construction nautique n'est pas épargné non plus. Que ce soit pour le transport civil à haute vitesse ou les régates de compétition, les impacts répétés des vagues, le rebond des navires sur l'eau (slamming) sollicitent les structures sur des temps caractéristiques locaux courts de l'ordre de 10 ms [Faltinsen *et al.*, 2004; Peseux *et al.*, 2005]. Il apparaît donc nécessaire de disposer de modèles de comportement fiables pour parvenir à déterminer la bonne tenue des structures à l'impact.

C'est précisément l'objectif de ces travaux de thèse qui s'inscrivent dans la continuité des études menées au laboratoire dans les domaines :

- de la modélisation du comportement des composites unidirectionnels carbone/époxy en quasi-statique et sur la réponse élastique orthotrope fragile des nids d'abeilles Nomex ;
- et de la réponse des composites unidirectionnels et tissés en carbone et verre/époxy sous sollicitations quasi-statiques et dynamiques.

Ces travaux ont été menés à l'École Centrale de Nantes au sein de l'équipe "Structures et simulations" du GeM, Institut de Recherches en Génie Civil et Mécanique, UMR CNRS 6183, en collaboration avec les architectes du chantier naval Multiplast Yacht [Multiplast, 2007].

Objectifs des travaux de thèse

Trois objectifs ont été fixés pour ces travaux de thèse :

- améliorer la modélisation du comportement mécanique des composites tissés pour le calcul au crash proposée dans [Rozycki, 2000] ;
- concevoir une loi de comportement dédiée à la réponse non linéaire des nids d'abeilles Nomex ;
- enfin tester et valider ces modèles sur des exemples de calculs de structures.

L'organisation en cinq chapitres de ce manuscrit, suit intimement l'énoncé de ces trois objectifs. La première partie est consacrée aux cadres théorique et numérique utilisés pour le développement des modèles de comportement mécanique. Le second chapitre traite de la modélisation de la réponse des tissus composites sous sollicitations mécaniques quasi-statiques et dynamiques. Les troisième et quatrième chapitres se focalisent sur les âmes

nids d'abeilles Nomex : d'un point de vue expérimental dans un premier temps, et d'un point de vue analytique et numérique ensuite. Enfin, le chapitre 5 illustre le comportement des modèles proposés sur des exemples d'impacts de panneaux sandwichs à peaux tissées verre/époxy et âmes en nids d'abeilles Nomex.

Bibliographie

Allix, O., Gilletta, D. et Ladevèze, P. (1985).
Mechanical behaviour of elementary constituents of laminates.
In Fifth International Conference on Composite Materials, ICCM-V.

Armstrong, K. B. (1974).
Aircraft floor panel developments at british airways (1967-1973).
Composites, pages 165–173.

Faltinsen, O., Landrini, M. et Greco, M. (2004).
Slamming in marine applications.
Journal of Engineering Mathematics, 48:187–217.

Gay, D. (2006).
Matériaux composites.
Hermes, 4e édition édition.

Gibson, L. et Ashby, M. (1999).
Cellular solids - Structure and properties.
Cambridge University Press.

Gornet, L. (1996).
Simulation des endommagements et de la rupture dans les composites stratifiés.
Thèse de doctorat, École Normale Supérieure de Cachan.

Gornet, L., Marckmann, G. et Lombard, M. (2005).
Détermination des coefficients d'élasticité et de rupture d'âmes nids d'abeilles nomex : homogénéisation périodique et simulation numérique.
Mécanique et Industries, 6:595–604.

Gornet, L., Marguet, S. et Marckmann, G. (2006).
Finite element modeling of nomex honeycomb cores : Failure and effective elastic properties.
Computers, Materials and Continua, 4(2):63–74.

Grediac, M. (1993).
A finite element study of the transverse sheat in honeycomb cores.
International Journal of Solids and Structures, 30:1777–1788.

Hanssen, A., Girard, Y., Olovsson, L., Berstad, T. et Langseth, M. (2006).
A numerical model for bird strike of aluminium foam-based sandwich panels.
International Journal of Impact Engineering, 32:1127–1144.

Ladevèze, P., Allix, O., Deü, J.-F. et Lévêque, D. (2000).
Mesomodel for localisation and damage computation in laminates.
Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 183(1):105 – 122.

Ladevèze, P. et Le Dantec, E. (1992).
Damage modelling of the elementary ply for laminated composites.
Composites Science and Technology, 43:257–267.

Lemaître, J., Desmorat, R. et Sauzay, M. (1999).
Loi d'évolution de l'endommagement anisotrope.
International Journal of Solids and Structures, 327:1231–1236.

Multiplast (2007).
http ://www.multiplast-yachts.com/indexfr.cfm.

Peseux, B., Gornet, L. et Donguy, B. (2005).
Hydrodynamic impact : Numerical and experimental investigations.
Journal of Fluids and Structures, 21:277–303.

Rozycki, P. (2000).
Contribution au développement de lois de comportement pour matériaux composites soumis à l'impact.
Thèse de doctorat, LAMIH Valenciennes.

Chapitre 1

Cadre scientifique général de l'étude

Ce chapitre introduit le cadre mathématique utilisé dans ces travaux de thèse pour modéliser le comportement mécanique des peaux tissées verre/époxy et des âmes en nids d'abeilles Nomex. Le cadre théorique, qui sert de socle de développement aux lois de comportement proposées, est tout d'abord rappelé. Il regroupe la cinématique, la sthénique, la thermodynamique des processus irréversibles et enfin la formulation hypoélastique des lois de comportement en référentiel local objectif. Le cadre numérique, c'est-à-dire le code de calcul par éléments finis ABAQUS, module EXPLICIT, est ensuite détaillé avec les conséquences qu'implique le choix de l'utilisation de ce logiciel.

Sommaire

1.1 Introduction 16
1.2 Cadre théorique 18
1.3 Cadre numérique 26
1.4 Conclusion 29

1.1 Introduction

Le travail réalisé au cours de ces travaux de thèse a consisté à développer des lois de comportement pour les composites tissés et pour les âmes en nids d'abeilles Nomex. Dans l'absolu, une loi de comportement doit être écrite indépendamment de la géométrie des structures, des cas de chargement rencontrés ou encore, des coûts de calcul estimés. Elle intègre intrinsèquement la réponse du matériau sous sollicitations diverses par le biais des équations constitutives. Dans la pratique, il est illusoire d'essayer de traduire cette réponse "complète" d'un matériau. La diversité, la complexité des phénomènes physiques, la nature plus ou moins déterministe des réponses mesurées (influence d'une perturbation), les limites très fortes de l'expérimentation (informations globales ou locales, restrictions fortes sur les cas de sollicitation testés) l'interdisent. Il apparaît par conséquent nécessaire de poser des hypothèses simplificatrices.
Un moyen efficace de guider le choix des hypothèses sans sacrifier aux objectifs à atteindre consiste à définir un cahier des charges fonctionnelles. Le diagramme des inter-acteurs présenté en figure 1.1 illustre le rôle central de la loi de comportement dans un calcul de structure. Elle apparaît être à l'interface des théories mathématiques, des méthodes numériques de résolution des équations différentielles et de l'expérimentation.

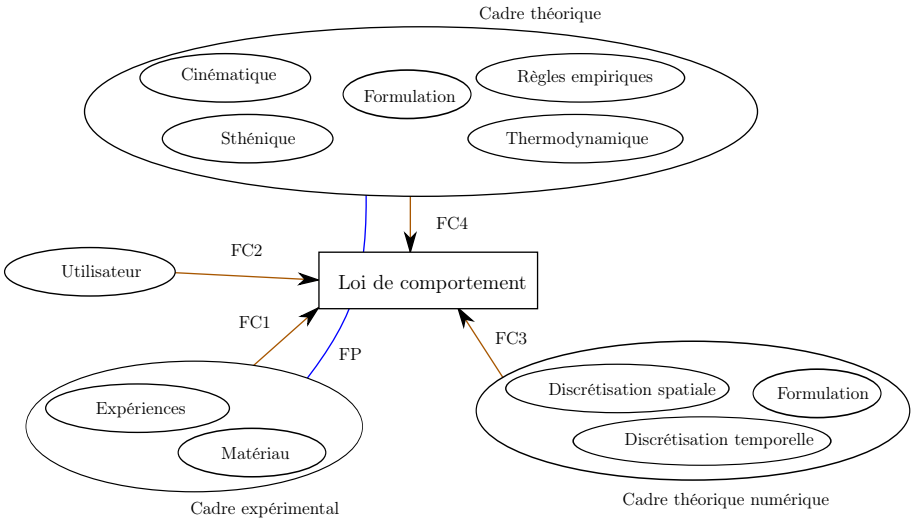


FIG. 1.1 – Diagramme des inter-acteurs général pour une loi de comportement

La fonction principale d'une loi de comportement est de traduire mathématiquement la réponse du matériau sous l'action de sollicitations extérieures. Dans la présente étude, seul le comportement mécanique des matériaux étudiés est considéré. La fonction principale de la loi de comportement se limite alors à faire le lien entre les contraintes et les forces thermodynamiques d'un côté, avec leurs duales de l'espace des déformations et variables internes d'un autre côté.
Le choix des variables de modélisation et des relations constitutives doit permettre de satisfaire les différentes Fonctions Contraintes du diagramme des inter-acteurs qui sont répertoriées dans le tableau 1.1. Sous ces conditions, la loi de comportement développée est *a priori* compatible avec tous les éléments de son environnement, c'est-à dire qu'elle est mathématiquement acceptable, qu'elle est identifiable à partir des relevés expérimentaux et qu'elle est programmable dans le code de calcul utilisé.

Dans ces travaux de thèse, le même formalisme a été utilisé pour développer les lois de comportement mécanique dédiées aux matériaux structurels composites tissés et âmes en

Fonctions principales		
Désignation	Intitulé	Critère
FP	Modéliser le comportement du matériau étudié	Prise en compte des phénomènes physiques adéquation mesure/simulation
Fonctions contraintes		
Désignation	Intitulé	Critère(s)
FC1	S'adpater au niveau de représentativité souhaité	Phénomènes physiques pris en compte, nombre de variables de modélisation
FC2	Lier les grandeurs de la cinématique, de la sthénique, et de la thermodynamique	Nombre de relations, respect de règles empiriques
FC3	Être en adéquation avec l'expérience	Grandeurs mesurées, identification
FC4	S'adapter aux outils numériques disponibles	Programmable, réponse indépendante de la discrétisation spatiale, réponse indépendante de la discrétisation temporelle

Tab. 1.1 – Fonctions contraintes exercées sur une loi de comportement

nids d'abeilles Nomex. Les deux aspects théoriques que sont le cadre théorique et le cadre numérique sont présentés dans ce chapitre. Le cadre expérimental est introduit ultérieurement en chapitre 3.

1.2 Cadre théorique

Par cadre théorique est entendu l'ensemble des relations/contraintes nécessaires à la formulation de lois de comportement.
Le principe des puissances virtuelles est tout d'abord rappelé. L'approximation au premier gradient du terme de puissance intérieure, qui suppose un "état local" du matériau, a des conséquences importantes sur l'utilisation de lois de comportement adoucissantes [Germain, 1973; Salençons, 1983; Belytschko *et al.*, 1986; Lemaître et Chaboche, 1990]. Celles-ci seront illustrées dans le chapitres 2 pour les composites tissés et dans le 4 pour les âmes en nids d'abeilles Nomex.
Les points clefs de la thermodynamique des processus irréversibles sont ensuite évoqués en préambule à l'écriture des modèles proposés [Besson *et al.*, 2001; Lemaître et Desmorat, 2004].
Enfin la formulation des lois de comportement hypoélastique en référentiel local objectif est rappelée pour préparer l'intégration des lois de comportement dans ABAQUS module EXPLICIT [HSK, 2006].

1.2.1 Principe des puissances virtuelles

L'équilibre d'un solide S peut être étudié à partir de l'introduction du principe des puissances virtuelles [Germain, 1973; Salençons, 1983]. Tout d'abord, un espace vectoriel de vitesses virtuelles admissibles est défini comme étant l'ensemble des champs de vitesses $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathcal{D}$ (le domaine spatial de définition de S) compatible avec les liaisons :

$$\mathcal{V}^* = \left\{ \dot{\boldsymbol{u}}^* \mid \dot{\boldsymbol{u}}^* \ \mathcal{C}^1 \text{ par morceaux sur } \mathcal{D} \right\} \tag{1.1}$$

Un cas particulier intéressant des champs de vitesses virtuelles est celui des champs rigidifiants définis comme étant des éléments de

$$\mathcal{V}_R^* = \left\{ \left(\dot{\boldsymbol{u}}^* \, ; \dot{\mathrm{R}}^* \right) \mid \dot{\boldsymbol{u}}^* = \dot{\mathrm{R}}^* \, \mathbf{x} + \dot{\boldsymbol{u}}_0^* \quad \forall \, \dot{\boldsymbol{u}}_0^* \in \mathcal{V}^* \text{ et } \forall \, \dot{\mathrm{R}}^* \text{ antisymétrique} \right\} \tag{1.2}$$

avec $\mathbf{x}$ vecteur position d'un point quelconque de S. Le principe des puissances virtuelles s'énonce alors en deux propositions :

- $\forall \, \dot{\boldsymbol{u}}^* \in \mathcal{V}^*$

$$\mathcal{P}_{ext}^* = \mathcal{P}_{def}^* + \mathcal{P}_{acc}^* \tag{1.3}$$

- $\forall \left(\dot{\boldsymbol{u}}^* \, ; \dot{\mathrm{R}}^* \right) \in \mathcal{V}_R^*$

$$\mathcal{P}_{def}^* = -\mathcal{P}_{int}^* = 0 \tag{1.4}$$

La relation 1.3 stipule que, dans un référentiel galiléen et à chaque instant, la puissance virtuelle des efforts extérieurs appliqués au système matériel S est égale à la somme des puissances virtuelles de déformation (puissance des efforts assurant la cohésion du système) et d'accélération. La seconde relation est directement liée au principe d'objectivité qui sera évoqué en partie 1.2.3. Lors d'un mouvement de corps rigide, ou autrement pensé, lors d'un changement de référentiel, la puissance de déformation développée dans le système matériel S est nulle. C'est une grandeur objective.
Quelques conséquences de ce principe, sont, comme indiqué dans [Salençons, 1983] par exemple, l'écriture des formes linéaires de puissance $\mathcal{P}$, la représentation des efforts et

les équations du mouvement. Ainsi la puissance virtuelle des efforts extérieurs s'exprime comme étant la somme d'un chargement de surface $\boldsymbol{t}$ sur $\partial\mathcal{D}'$ (densité surfacique d'effort, i.e. vecteur contrainte) et d'un chargement de volume $\boldsymbol{f}$ dans $\mathcal{D}'$ (densité massique d'effort) :

$$\mathcal{P}^*_{ext} = \int_{\partial\mathcal{D}'} \boldsymbol{t}\cdot\dot{\boldsymbol{u}}^*\,dx + \int_{\mathcal{D}'} \rho\,\boldsymbol{f}\cdot\dot{\boldsymbol{u}}^*\,dx \qquad \forall\,\mathcal{D}'\subset\mathcal{D} \text{ et } \forall\,\dot{\boldsymbol{u}}^*\in\mathcal{V}^* \tag{1.5}$$

$\mathcal{D}'$ étant un sous-domaine de S de frontière $\partial\mathcal{D}'$. La puissance virtuelle des quantités d'accélération s'écrit quant à elle :

$$\mathcal{P}^*_{acc} = \int_{\mathcal{D}'} \rho\,\ddot{\boldsymbol{u}}\cdot\dot{\boldsymbol{u}}^*\,dx \qquad \forall\,\mathcal{D}'\subset\mathcal{D} \text{ et } \forall\,\dot{\boldsymbol{u}}^*\in\mathcal{V}^* \tag{1.6}$$

Enfin la puissance virtuelle de déformation s'exprime de manière générale au premier gradient :

$$\mathcal{P}^*_{def} = \int_{\mathcal{D}'} \boldsymbol{a}\cdot\dot{\boldsymbol{u}}^* + \mathrm{B} : \mathrm{grad}\,(\dot{\boldsymbol{u}}^*)\,dx \qquad \forall\,\mathcal{D}'\subset\mathcal{D} \text{ et } \forall\,\dot{\boldsymbol{u}}^*\in\mathcal{V}^* \tag{1.7}$$

avec $\boldsymbol{a}$ vecteur de E et B application bilinéaire de $E\otimes E$, tous deux quelconques. L'axiome d'objectivité impose que cette quantité soit nulle pour tout mouvement virtuel rigidifiant, ce qui implique $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ et B symétrique [Germain, 1973]. Par la suite, B est assimilé au tenseur des contraintes de Cauchy : $\mathrm{B} = \sigma$. La restriction au premier gradient des vitesses virtuelles dans l'expression 1.7 constitue le principe de simplicité matérielle. Dans ce cas, l'état d'une particule du système solide S est local, il ne dépend de son voisinage qu'au premier ordre contrairement à d'autres théories d'ordres plus élevés qui se traduisent par un comportement non local. Finalement, le terme de puissance virtuelle de déformation s'écrit :

$$\mathcal{P}^*_{def} = \int_{\mathcal{D}'} \sigma : \mathrm{D}^*\,dx \qquad \forall\,\mathcal{D}'\subset\mathcal{D} \text{ et } \forall\,\dot{\boldsymbol{u}}^*\in\mathcal{V}^* \tag{1.8}$$

en remarquant que $\sigma : \mathrm{grad}\,(\dot{\boldsymbol{u}}^*) = \sigma : \mathrm{D}^*$ du fait de la symétrie de σ (D étant la partie symétrique du tenseur gradient eulérien des vitesses $\mathrm{L} = \mathrm{grad}\,(\dot{\boldsymbol{u}})$). Après définition de toutes les formes linéaires des puissances et utilisation du théorème de la divergence, le principe des puissances virtuelles devient :

$$\int_{\mathcal{D}'} [\boldsymbol{div}\,(\sigma) + \rho\,\boldsymbol{f} - \rho\,\ddot{\boldsymbol{u}}]\cdot\dot{\boldsymbol{u}}^*\,dx + \int_{\partial\mathcal{D}'} [\boldsymbol{t} - \sigma\,\boldsymbol{n}]\cdot\dot{\boldsymbol{u}}^*\,dx = 0 \qquad \forall\,\mathcal{D}'\subset\mathcal{D} \text{ et } \forall\,\dot{\boldsymbol{u}}^*\in\mathcal{V}^* \tag{1.9}$$

avec $\boldsymbol{n}$ la normale extérieure à l'enveloppe $\mathcal{D}'$. Cette équation étant vérifiée quel que soit le sous-domaine $\mathcal{D}'$ du solide S et quel que soit le champ des vitesses virtuelles $\dot{\boldsymbol{u}}^*\in\mathcal{V}^*$ les lois locales sont obtenues :

$$\begin{cases} \boldsymbol{div}\,(\sigma) + \rho\,\boldsymbol{f} - \rho\,\ddot{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{0} & \forall\,X\in\mathcal{D}\subset\omega \\ \sigma\,\boldsymbol{n} = \boldsymbol{t} & \forall\,X\in\partial\mathcal{D}\subset\omega \end{cases} \tag{1.10}$$

Cette dernière expression donne son sens physique au tenseur des contraintes de Cauchy homogène à une force actuelle par unité de surface actuelle. Ainsi, $\sigma\cdot\boldsymbol{n}$ représente le vecteur contrainte sur une facette de normale $\boldsymbol{n}$.

Cette présentation succinte du principe des puissances virtuelles a permis d'introduire les notions d'effort et de contrainte. Ainsi, la puissance apparaît comme étant le produit scalaire d'un vecteur vitesse par un vecteur force ou encore comme étant le produit doublement contracté d'un élément de l'espace des taux de déformation par un élément de l'espace des contraintes. Dans tout ce qui précède, la relation entre les espaces de déformation et de contrainte n'a pas été explicitée. C'est précisément l'un des rôles de la loi de comportement qui peut être formalisée dans le cadre de la thermodynamique des processus irréversibles.

1.2.2 Thermodynamique des processus irréversibles

Un formalisme particulièrement bien adapté à l'élaboration de lois de comportement est celui de la thermodynamique des processus irréversibles [Lemaître et Chaboche, 1990; Chaboche, 1996; Voyiadjis et Kattan, 1999; Besson *et al.*, 2001]. Celui-ci s'articule autour de deux lois fondamentales et de l'introduction de potentiels thermodynamiques. Les deux lois fondamentales sont maintenant énoncées, les potentiels thermodynamiques étant conservés pour la partie 1.2.3.

Conservation de l'énergie

La première loi fondamentale de la thermodynamique concerne la conservation de l'énergie. Tout sous-domaine $\mathcal{D}'$ du solide S possède une énergie interne définie par la relation :

$$E = \int_{\mathcal{D}'} \rho\, e\, dx \tag{1.11}$$

Elle est la somme de l'énergie interne spécifique (par unité de masse) e sur son volume. Dans le référentiel d'étude $\mathcal{R}$, S possède aussi une énergie cinétique :

$$K = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{D}'} \rho\, \dot{\boldsymbol{u}} \cdot \dot{\boldsymbol{u}}\, dx \tag{1.12}$$

À chaque instant t, le sous-domaine $\mathcal{D}'$ voit une modification de sa chaleur $\mathcal{Q}$ (une puissance) qui est due à la chaleur produite en interne (par effet Joule par exemple) et à la chaleur échangée avec l'environnement à travers sa frontière $\partial\mathcal{D}'$:

$$\mathcal{Q} = \int_{\mathcal{D}'} r\, dx - \int_{\partial\mathcal{D}'} \boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{n}\, dx \tag{1.13}$$

où r représente la puissance volumique produite en interne et $\boldsymbol{q}$ le flux de chaleur instantané. Le premier principe de la thermodynamique postule qu'à chaque instant, la variation d'énergie interne et cinétique, l'énergie totale, est égale à la somme de la puissance des efforts extérieurs appliqués au système et de la chaleur reçue :

$$\dot{E} + \dot{K} = \mathcal{P}_{ext} + \mathcal{Q} \tag{1.14}$$

En remarquant que $\mathcal{P}_{acc} = \dot{K}$ et en utilisant la relation $\mathcal{P}_{ext} = \mathcal{P}_{acc} + \mathcal{P}_{def}$ du principe des puissances virtuelles, l'équation de conservation de l'énergie devient :

$$\dot{E} = \mathcal{P}_{def} + \mathcal{Q} \tag{1.15}$$

et s'écrit :

$$\int_{\mathcal{D}'} \left[\rho\, \dot{e} - \sigma \,:\, \mathrm{D} - r + \mathrm{div}\,(\boldsymbol{q})\right] dx = 0 \tag{1.16}$$

sous forme intégrale, après utilisation du théorème de la divergence. Étant vérifiée quel que soit $\mathcal{D}'$, la forme locale en découle immédiatement : la quantité dans l'intégrale est nulle en toute particule de $\mathcal{D}$:

$$\rho\, \dot{e} - \sigma \,:\, \mathrm{D} - r + \mathrm{div}\,(\boldsymbol{q}) = 0 \qquad \forall X \in \mathcal{D} \tag{1.17}$$

Entropie, deuxième principe

Pour formaliser le deuxième principe de la thermodynamique, il est nécessaire d'introduire une nouvelle grandeur : l'entropie $\mathcal{S}$. Elle est homogène à une énergie par unité de température et mesure le "désordre" des particules. L'introduction de $\mathcal{S}$ suppose qu'il existe une température T, grandeur scalaire positive et absolue (T mesure l'agitation atomique, l'énergie cinétique du mouvement Brownien des atomes). Elle peut être définie à partir de l'entropie spécifique s qui est, concrètement, la quantité d'énergie qu'il faut apporter à 1 kg d'un système pour élever sa température d'un degré :

$$\mathcal{S} = \int_{\mathcal{D}'} \rho\, s\, dx \tag{1.18}$$

À chaque instant, l'équation de bilan de l'entropie spécifie que la variation d'entropie du solide S est la somme de l'apport extérieur d'entropie (chaleur divisée par la température $\mathcal{Q}/T$) et de la production d'entropie instantanée des particules P_s

$$\dot{\mathcal{S}} = \frac{\mathcal{Q}}{T} + P_s = \int_{\mathcal{D}'} \frac{r}{T}\, dx - \int_{\partial\mathcal{D}'} \frac{\boldsymbol{q}}{T} \cdot \boldsymbol{n}\, dx + \int_{\mathcal{D}'} p_s\, dx \tag{1.19}$$

où p_s représente la densité volumique d'entropie produite à chaque instant par une particule. La forme locale est obtenue par application du théorème de la divergence :

$$\rho\, \dot{s} - \frac{r}{T} + \operatorname{div}\left(\frac{\boldsymbol{q}}{T}\right) - p_s = 0 \qquad \forall X \in \mathcal{D} \tag{1.20}$$

En remplaçant r par son expression obtenue à partir de la relation 1.17 du premier principe de la thermodynamique, le bilan en entropie se réécrit sous la forme suivante :

$$\sigma \,:\, \mathrm{D} - \rho\,(\dot{e} - T\,\dot{s}) - \frac{\boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{grad}\,(T)}{T} - T\,p_s = 0 \qquad \forall X \in \mathcal{D} \tag{1.21}$$

Le second principe fondamental de la thermodynamique postule que la production d'entropie des particule p_s est positive ou nulle : $p_s \geq 0$. Ainsi, à chaque instant et pour chaque particule l'inégalité

$$\sigma \,:\, \mathrm{D} - \rho\,(\dot{e} - T\,\dot{s}) - \frac{\boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{grad}\,(T)}{T} \geq 0 \qquad \forall X \in \mathcal{D} \tag{1.22}$$

doit être vérifiée. L'introduction du potentiel thermodynamique énergie libre specifique d'Helmholtz $\psi = e - T\,s$, conduit à la relation

$$\sigma \,:\, \mathrm{D} - \rho\left(\dot{\psi} + s\,\dot{T}\right) - \frac{\boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{grad}\,(T)}{T} \geq 0 \qquad \forall X \in \mathcal{D} \tag{1.23}$$

connue sous le nom d'inégalité de Clausius-Duhem et qui joue un rôle très important pour la formulation des lois de comportement. Cette inégalité fait apparaître deux termes distincts : la dissipation volumique intrisèque ϕ_{int}

$$\phi_{int} = \sigma \,:\, \mathrm{D} - \rho\left(\dot{\psi} + s\,\dot{T}\right) \tag{1.24}$$

et la dissipation volumique d'origine thermique ϕ_{th} :

$$\phi_{th} = -\frac{\boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{grad}\,(T)}{T} \tag{1.25}$$

Ces deux termes doivent être individuellement positifs ou nuls pour respecter l'inégalité de Clausius-Duhem, ce qui démontre que le flux de chaleur $\boldsymbol{q}$ est de sens opposé au gradient de température $\boldsymbol{grad}\,(T)$.
Finalement, l'état du solide S peut être défini en chaque particule à partir de grandeurs de types différents :

- les données : la configuration de référence Ω, l'histoire du chargement mécanique ($\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{t}$, $\dot{\boldsymbol{u}}_{imp}$ ou $\ddot{\boldsymbol{u}}_{imp}$) et thermique ($r$, $\boldsymbol{q}_{imp}$) appliqué sur le système S ;
- les inconnues principales : l'histoire de la transformation F (le tenseur gradient de la transformation : $\mathrm{F} = \mathrm{Grad}\,(\mathbf{x})$) et de la température T du système matériel S ;
- les inconnues secondaires : directement déduites des inconnues principales à partir des condition initiales (ρ ; D...) ;
- les inconnues auxiliaires : l'histoire des grandeurs constitutives (σ, e, s, p_s, $\boldsymbol{q}$...).

1.2.3 Loi de comportement

La loi de comportement représente l'ensemble des relations liants les variables auxiliaires aux inconnues principales ou secondaires. Le même formalisme est employé dans la suite pour élaborer les lois de comportement dédiées aux composites tissés et aux âmes en nids d'abeilles Nomex (état local, formulation hypoélastique en référentiel local objectif).

Méthode de l'état local

Le choix de n'utiliser que le premier gradient dans la relation 1.7 conduit à introduire la méthode de l'état local présentée dans [Germain, 1973; Lemaître *et al.*, 1999; Coirier, 2001] et qui peut se formuler : "l'état thermodynamique d'un système matériel est déterminé en un point et à instant donné par la connaissance des valeurs d'un certain nombre de variables appelées variables d'état à cet instant et en ce point".
Ces variables "d'état" se scindent en variables observables : les inconnues principales ou éventuellement secondaire du problème (ϵ, T) et les variables internes, non directement mesurables, et directement liées aux phénomènes dissipatifs. Ces dernières peuvent être de natures différentes mais sont rassemblées sous la forme du vecteur des variables internes $\boldsymbol{\alpha}$ par souci de commodité.

Chacune des variables d'état se voit affecter une variable duale dans l'espace des forces thermodynamiques (vecteur des forces thermodynamique $\boldsymbol{J}$). À un instant donné, le produit scalaire $\dot{\alpha}_i \cdot J_i$ fournit la puissance dissipée par le phénomène irréversible associé. Le tableau 1.2 fait le bilan des différentes grandeurs thermodynamiques définissant l'état d'une particule [Lemaître *et al.*, 1999].

Variables d'état		Forces thermodynamiques
Variables observables	Variables internes	
ϵ		σ
T		s
	$\boldsymbol{\alpha}$	$\boldsymbol{J}$

TAB. 1.2 – Classification des variables de modélisation

Formulation hypoélastique

Une loi de comportement hypoélastique fournit un taux de contraintes $\mathrm{c}^{\nabla X}$ en fonction du taux des vitesses de déformation D et des variables internes selon :

$$\mathrm{c}^{\nabla X} = \Lambda^{\mathrm{c},X}\,(\mathrm{D}\,;\boldsymbol{\alpha}) \tag{1.26}$$

Pour être valable, la relation 1.26 doit être objective, c'est-à-dire indépendante du référentiel d'observation [Simo et Hugues, 1998; Besson *et al.*, 2001]. Autrement dit la loi de comportement ne doit pas changer en fonction de l'observateur. De plus, l'opérateur $\Lambda^{c,X}$ doit être une fonction isotrope de ses arguments [Bernstein, 1960; Trusdell, 1963; Besson *et al.*, 2001]. Les conditions nécessaires à l'objectivité d'une relation sont le recours à des grandeurs objectives d'une part, et l'utilisation d'opérateurs objectifs d'autre part.
Une grandeur est objective si elle respecte les règles de changement de référentiel (changement de repère puisque le repère est ici attaché au référentiel) :

- pour un champ de scalaires : $g'(X,t) = g(X,t)$;
- pour un champ de vecteurs : $\boldsymbol{g}'(X,t) = \mathrm{Q}(X,t)\,\boldsymbol{g}(X,t)$;
- et pour un champ de tenseurs d'ordre 2 :
  $\mathrm{g}'(X,t) = \mathrm{Q}(X,t)\,\mathrm{g}(X,t)\,\mathrm{Q}^T(X,t)$,

où $\mathrm{Q}(X,t)$ représente la rotation entre les référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$. Le tenseur des taux de déformation D, les tenseurs des contraintes de Cauchy σ et de Kirchhoff τ, sont objectifs [Belytschko *et al.*, 2000].
De son côté, un opérateur est objectif si, appliqué à une grandeur objective, il fournit une autre grandeur objective. Pratiquement cette condition impose que l'opérateur de dérivation temporelle "∇^X" de la relation 1.26 soit objectif. Si l'on considère un vecteur $\boldsymbol{u}$ fixe dans $\mathcal{R}$, sa dérivée par rapport au temps est tout simplement nulle : $\dot{\underline{u}} = \underline{0}$. Par contre, la dérivée par rapport au temps du même vecteur $\boldsymbol{u}$ lu dans $\mathcal{R}'$: $\underline{u'} = \mathrm{Q}\,\underline{u}$, vaut : $\dot{\underline{u}}' = \dot{\mathrm{Q}}\,\mathrm{Q}^T\,\underline{u}'$ ce qui signifie que l'observateur attaché à $\mathcal{R}'$ voit $\boldsymbol{u}$ changer au cours du temps. La dérivée temporelle d'un tenseur d'ordre 1 n'est donc pas objective.

Dans la littérature il existe un très grand nombre de dérivées temporelles objectives permettant de résoudre ce problème : les taux corotationels de Jaumann, de Green Naghdi ou encore logarithmiques et les taux en lien avec le gradient des vitesses de Cotter/Rivlin, de Oldroyd ou encore de Trusdell [Besson *et al.*, 2001; Lin, 2002; Mora, 2004; Meyer *et al.*, 2006]. Les dérivées de Jaumann et de Green Naghdi, par exemple, consistent à transporter une grandeur en référentiel dit "local objectif" [1], à la dériver par rapport au temps dans ce référentiel [2], puis à ramener le résultat obtenu dans le référentiel de départ [3] (voir figure 1.2).

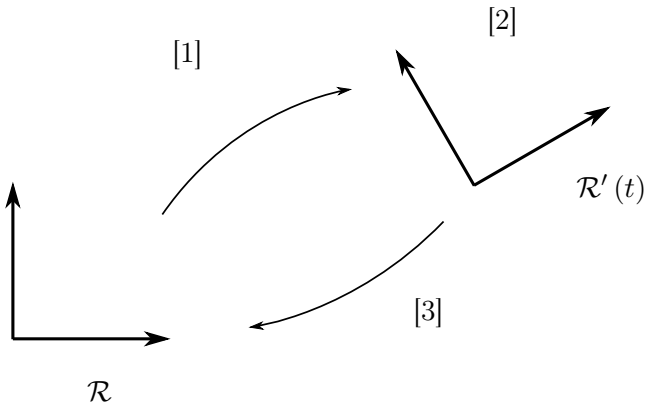


FIG. 1.2 – Dérivées temporelles en référentiel local objectif

La différence entre les deux dérivées tient dans le choix du référentiel $\mathcal{R}'$. Dans la dérivée de Jaumann le référentiel corotationnel obtenu grâce au tenseur Ω, partie antisymétrique du tenseur gradient des vitesses L, est utilisé. La dérivée de Green Naghdi fait appel au référentiel en rotation propre défini par la rotation R de la décomposition polaire

$\mathrm{F} = \mathrm{R}\,\mathrm{U} = \mathrm{V}\,\mathrm{R}$ du tenseur gradient de la transformation F. Avec ce type de formulations, les contraintes obtenues sur un cycle fermé de chargement en déformation peuvent être non nulles malgré l'utilisation d'une loi de comportement réversible [Xiao *et al.*, 1999a; Belytschko *et al.*, 2000]. Pour des chargements monotones, comme c'est le cas dans ces travaux, cet inconvénient des formulations hypoélastiques en référentiel local objectif n'est toutefois pas pénalisant [Xiao *et al.*, 1999a].

Le choix de l'opérateur de dérivation temporelle reste une question ouverte même si de nouvelles formulations, basées sur des taux de contraintes logarithmiques, permettent de s'affranchir des défauts observés sous chargements cycliques [Xiao et Bruhns, 1999; Meyer *et al.*, 2006]. Dans notre cas, le code de calcul par éléments finis ABAQUS module EXPLICIT permet d'incorporer plus facilement des lois de comportement hypoélastiques écrites en référentiel en rotation propre, c'est-à-dire s'appuyant sur la dérivée temporelle objective de Green Naghdi désignée "$^{\nabla GN}$". Celle-ci s'écrit respectivement pour les scalaires, les vecteurs, et les tenseurs d'ordre 2 :

$$\left\{\begin{array}{ll} g^{\nabla GN} & = \dot{g} \\ \mathbf{g}^{\nabla GN} & = \mathrm{R}\,\dfrac{\partial\,\left(\mathrm{R}^T\,\mathbf{g}\right)}{\partial t} \\ & = \dot{\mathbf{g}} + \mathrm{R}\,\dot{\mathrm{R}}^T\,\mathbf{g} \\ \mathrm{g}^{\nabla GN} & = \mathrm{R}\,\dfrac{\partial\,\left(\mathrm{R}^T\,\mathrm{g}\,\mathrm{R}\right)}{\partial t}\,\mathrm{R}^T \\ & = \dot{\mathrm{g}} + \mathrm{R}\,\dot{\mathrm{R}}^T\,\mathrm{g} - \dot{\mathrm{R}}\,\mathrm{R}^T\,\mathrm{g} \end{array}\right. \tag{1.27}$$

Appliquée à la relation 1.26, la loi de comportement devient (en contraintes de Cauchy par exemple) :

$$\left\{\begin{array}{rl} \sigma^{\nabla GN} & = \Lambda^{\sigma,GN}\left(\mathrm{D}\,;\boldsymbol{\alpha}\right) \\ \mathrm{R}\,\dfrac{\partial\,\left(\mathrm{R}^T\,\sigma\,\mathrm{R}\right)}{\partial t}\,\mathrm{R}^T & = \Lambda^{\sigma,GN}\left(\mathrm{D}\,;\boldsymbol{\alpha}\right) \\ \dfrac{\partial\,\left(\mathrm{R}^T\,\sigma\,\mathrm{R}\right)}{\partial\,t} & = \mathrm{R}^T\,\Lambda^{\sigma,GN}\left(\mathrm{D}\,;\boldsymbol{\alpha}\right)\,\mathrm{R} \\ \dot{\sigma}^R & = \Lambda^{\sigma,GN}\left(\mathrm{R}^T\,\mathrm{D}\,\mathrm{R}\,;\mathrm{R}^T\,\boldsymbol{\alpha}\right) \\ \dot{\sigma}^R & = \Lambda^{\sigma,GN}\left(\mathrm{D}^R\,;\boldsymbol{\alpha}^R\right) \end{array}\right. \tag{1.28}$$

avec $\sigma^R = \mathrm{R}^T\,\sigma\,\mathrm{R}$, $\mathrm{D}^R = \mathrm{R}^T\,\mathrm{D}\,\mathrm{R}$, $\boldsymbol{\alpha}^R = \mathrm{R}^T\,\boldsymbol{\alpha}$. L'équation 1.26 devant être vérifiée dans tout référentiel, il est possible d'écrire, dans un référentiel $\mathcal{R}'$, la relation :

$$\left\{\begin{array}{rll} \sigma^{\nabla GN'} & = \Lambda^{\sigma,GN}\left(\mathrm{D}'\,;\boldsymbol{\alpha}'\right) & \\ \mathrm{Q}\,\sigma^{\nabla GN}\,\mathrm{Q}^T & = \Lambda^{\sigma,GN}\left(\mathrm{Q}\,\mathrm{D}\,\mathrm{Q}^T\,;\mathrm{Q}\,\boldsymbol{\alpha}\right) & \forall\ \mathrm{Q}\text{ application orthogonale} \end{array}\right. \tag{1.29}$$

Il en découle donc, en prenant $\mathrm{Q} = \mathrm{R}^T$ toutes deux matrices orthogonales de rotation :

$$\left\{\begin{array}{rl} \mathrm{R}^T\,\sigma^{\nabla GN}\,\mathrm{R} & = \Lambda^{\sigma,GN}\left(\mathrm{R}^T\,\mathrm{D}\,\mathrm{R}\,;\mathrm{R}^T\,\boldsymbol{\alpha}\right)\ \text{soit :} \\ \mathrm{R}^T\,\Lambda^{\sigma,GN}\left(\mathrm{D}\,;\boldsymbol{\alpha}\right)\,\mathrm{R} & = \Lambda^{\sigma,GN}\left(\mathrm{R}^T\,\mathrm{D}\,\mathrm{R}\,;\mathrm{R}^T\,\boldsymbol{\alpha}\right) \end{array}\right. \tag{1.30}$$

ce qui justifie les expressions 1.28 dans lesquelles $\dot{\sigma}^R$, D^R et $\boldsymbol{\alpha}^R$ sont les taux de contrainte de Cauchy, taux de déformation et vecteur des variables internes corotationnels (par "abus de langage" pour $\boldsymbol{\alpha}^R$, ce vecteur regroupant des grandeurs de diverses natures). En remarque, la déformation corotationnelle de Stören et Rice [Stören et Rice, 1975], obtenue par intégration au cours du temps de la quantité D^R, s'écrit :

$$\epsilon^R_{nl} = \int_{t^0}^{t} \mathrm{D}^R\left(\tau\right)\,d\tau \tag{1.31}$$

Il convient de noter que dans le code éléments finis ABAQUS module EXPLICIT, la loi de comportement s'écrit dans le référentiel en rotation propre :

$$\dot{\sigma}^R = \Lambda^{\sigma,GN}\left(\mathrm{D}^R\,;\boldsymbol{\alpha}^R\right) \tag{1.32}$$

Avec ce type de relation, c'est-à-dire en intégrant le comportement dans le référentiel en rotation propre, l'opérateur $\Lambda^{\sigma,GN}$ peut être anisotrope [Besson *et al.*, 2001; Besson et Desmorat, 2004]. La démonstration de cette généralisation des formulations hypoélastiques classiques est disponible dans [Xiao *et al.*, 1999b].
C'est dans ce cadre que sont développées les lois de comportement mécanique proposées dans ce mémoire.

Lois complémentaires

Potentiel thermodynamique - énergie libre
Le potientiel thermodynamique énergie libre spécifique d'Helmholtz dont l'existence est postulée, est une fonction des variables d'état : $\psi = \psi\left(\epsilon^R_{nl}\,;T\,;\boldsymbol{\alpha}^R\right)$. Pour être acceptable d'un point de vue thermodynamique, il doit être concave par rapport à la température et convexe par rapport aux variables observables. Avec ces variables, l'inégalité de Clausius-Duhem, définie par la relation 1.23, se réécrit sur tout sous-domaine $\mathcal{D}'$ de $\mathcal{S}$:

$$\begin{array}{l}\left(\sigma^R - \rho\,\dfrac{\partial\,\psi}{\partial\,\epsilon^R_{nl}}\right) : \mathrm{D}^R - \rho\left(\dfrac{\partial\,\psi}{\partial\,T} + s\right)\dot{T} - \rho\,\dfrac{\partial\,\psi}{\partial\,\boldsymbol{\alpha}^R}\cdot\dot{\boldsymbol{\alpha}}^R - \dfrac{\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{grad}\,(T)}{T} \geq 0 \\ \forall X \in \mathcal{D}'\end{array} \tag{1.33}$$

Cette dernière relation devant être vérifiée quels que soient le tenseur des taux de déformation D^R et le taux de température $\dot{T}$, les deux premières lois d'état sont obtenues :

$$\left\{\begin{array}{rl}\sigma^R &= \rho\,\dfrac{\partial\,\psi}{\partial\,\epsilon^R_{nl}} \\ s &= -\dfrac{\partial\,\psi}{\partial\,T}\end{array}\right. \tag{1.34}$$

Par analogie, les autres forces thermodynamiques, duales de $\boldsymbol{\alpha}^R$, sont définies par les relations suivantes, relations qui complètent les lois d'état :

$$\boldsymbol{J}^R = \rho\,\frac{\partial\,\psi}{\partial\,\boldsymbol{\alpha}^R} \tag{1.35}$$

Les forces thermodynamiques sont maintenant connues comme étant des fonctions des variables d'état. Il reste à déterminer l'évolution des variables internes qui, contrairement aux variables d'état observables, ne sont pas connues *a priori*. Ces lois d'évolution sont construites à partir du potentiel de dissipation Φ.

Potentiel thermodynamique - potentiel de dissipation
Encore une fois, il est supposé exister un potentiel de dissipation convexe Φ, fonction des forces thermodynamiques associées aux variables internes : $\Phi = \Phi\left(\sigma^R\,;s\,;\boldsymbol{J}^R\right)$. L'inégalité de Clausius-Duhem (1.33) devient grâce aux lois d'état :

$$\phi = -\boldsymbol{J}^R\cdot\dot{\boldsymbol{\alpha}}^R - \frac{\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{grad}\,(T)}{T} \geq 0 \tag{1.36}$$

où le terme $\phi_{int} = -\boldsymbol{J}^R\cdot\dot{\boldsymbol{\alpha}}^R$ correspond à la puissance dissipée intrinsèquement par unité de volume en dehors de la dissipation thermique. En se basant sur le principe de Hill [Hill,

1958], qui postule qu'au cours d'un processus irréversible, la dissipation est maximale, il est possible de définir le potentiel thermodynamique de dissipation Φ par minimisation de l'opposée de la dissipation intrinsèque ϕ. Le lagrangien suivant est alors formé :

$$\mathcal{L}\left(\phi\,;\lambda\right) \;=\; -\phi + \lambda\,\Phi\left(\sigma^R\,;T\,;\boldsymbol{J}^R\right) \tag{1.37}$$

avec λ un multiplicateur de Lagrange positif ou nul. Les conditions d'optimalité, aussi appelées conditions de Kuhn et Tuckker, permettent alors d'obtenir les lois d'évolution qui relient les variables flux aux forces thermodynamiques associées :

$$\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{\partial\,\mathcal{L}}{\partial\,\lambda} & = \Phi \;=\; 0 \\ \dfrac{\partial\,\mathcal{L}}{\partial\,\boldsymbol{J}^R} & = -\dfrac{\partial\,\phi}{\partial\,\boldsymbol{J}^R} + \lambda\,\dfrac{\partial\,\Phi}{\partial\,\boldsymbol{J}^R} \;=\; 0 \end{array}\right. \tag{1.38}$$

La première de ces équations stipule que lors d'un phénomène irréversible, le potentiel de dissipation reste nul. La seconde donne les lois d'évolution :

$$\frac{\partial\,\phi}{\partial\,\boldsymbol{J}^R} \;=\; -\dot{\boldsymbol{\alpha}}^R \;=\; \lambda\,\frac{\partial\,\Phi}{\partial\,\boldsymbol{J}^R} \tag{1.39}$$

Ainsi il devient possible de déterminer à chaque instant et pour chacune des particules du système matériel S l'évolution des variables internes, si tant est que la forme du potentiel de dissipation $\Phi \;=\; \Phi\left(\sigma^R\,;T\,;\boldsymbol{J}^R\right)$ est connue. Il convient de noter que si les phénomènes de dissipation sont découplés, la relation 1.37 peut être transformée sous la forme

$$\mathcal{L}\left(\phi\,;\lambda\right) \;=\; -\phi + \sum_{k=1}^{n}\,\lambda_k\,\Phi_k\left(\boldsymbol{J}^R\right) \tag{1.40}$$

où chacun des multiplicateurs λ_k est associé au phénomène irréversible k de potentiel de dissipation Φ_k [Chaboche, 1996; Voyiadjis et Deliktas, 2000].

1.3 Cadre numérique

Les développements numériques ont été réalisés, dans ce travail, à l'aide du code éléments finis ABAQUS, module EXPLICIT. Ce logiciel se scinde en deux modules principaux : le module STANDARD (module avec solveur de type implicite, permettant la résolution de problèmes quasi-statique, dynamique, d'instabilité...) et le module "EXPLICIT" (incorporant un solveur du même nom) [HSK, 2006].
L'objectif premier de cette thèse étant le développement de modèles de comportement dédiés à la réponse de panneaux sandwichs sollicités sous chargements dynamiques, le module EXPLICIT d'ABAQUS a été naturellement retenu.

1.3.1 Discrétisation spatiale

Dans le cas d'un système matériel S, le principe des puissances virtuelles (équation 1.3) s'énonce à chaque instant sous forme eulérienne :

$$\int_{\mathcal{D}}\,\boldsymbol{f}\cdot\dot{\boldsymbol{u}}^*\,dx + \sum_i\,\boldsymbol{t}\cdot\dot{\boldsymbol{u}}^* - \int_{\mathcal{D}}\,\rho\,\ddot{\boldsymbol{u}}\cdot\dot{\boldsymbol{u}}^*\,dx - \int_{\mathcal{D}}\,\sigma^R\;:\mathrm{D}^{R^*}\,dx \;=\; 0 \tag{1.41}$$

quel que soit $\dot{\boldsymbol{u}}^*$ champ de vitesses virtuelles et quelle que soit la configuration ω considérée. L'interpolation des champs continus sur le domaine $\mathcal{D}$ à partir de la matrice des fonctions de forme N conduit à la forme discrétisée de la relation 1.41 :

$$\boldsymbol{F}_{ext} + \boldsymbol{T}_{ext} + \boldsymbol{F}_{int} \;=\; \boldsymbol{F}_{acc} \tag{1.42}$$

avec

- $\boldsymbol{F}_{ext} = \int_{\mathcal{D}} \mathrm{N}^T \boldsymbol{f}\, dx\,;$
- $\boldsymbol{T}_{ext} = \int_{\partial\mathcal{D}} \mathrm{N}^T \boldsymbol{t}\, dx\,;$
- $\boldsymbol{F}_{int} = \int_{\mathcal{D}} \mathrm{grad}\,(\mathrm{N}) : \sigma^R\, dx\,;$
- $\boldsymbol{F}_{acc} = \int_{\mathcal{D}} \mathrm{N}^T \rho\, \mathrm{N}\, \ddot{\boldsymbol{u}}\, dx = \mathrm{M}\, \ddot{\boldsymbol{u}}.$

Dans la configuration de référence Ω, toutes les variables sont supposées être connues. Elles évoluent ensuite au cours du temps en fonction du chargement appliqué sur le domaine. Pour évaluer la valeur des grandeurs au cours du chargement, plusieurs types de schémas d'intégration en temps peuvent être employés : méthodes implicites, méthodes explicites, θ méthodes, éléments finis en temps [Bathe, 1995; Chaboche et Cailletaud, 1996; Belytschko *et al.*, 2000].

1.3.2 Discrétisation temporelle - schéma d'intégration explicite

Dans le code Abaqus module Explicit l'équation 1.42 est discrétisé en temps conformément au schéma 1.3 [Belytschko *et al.*, 2000; HSK, 2006]. La prédiction en vitesse obéit

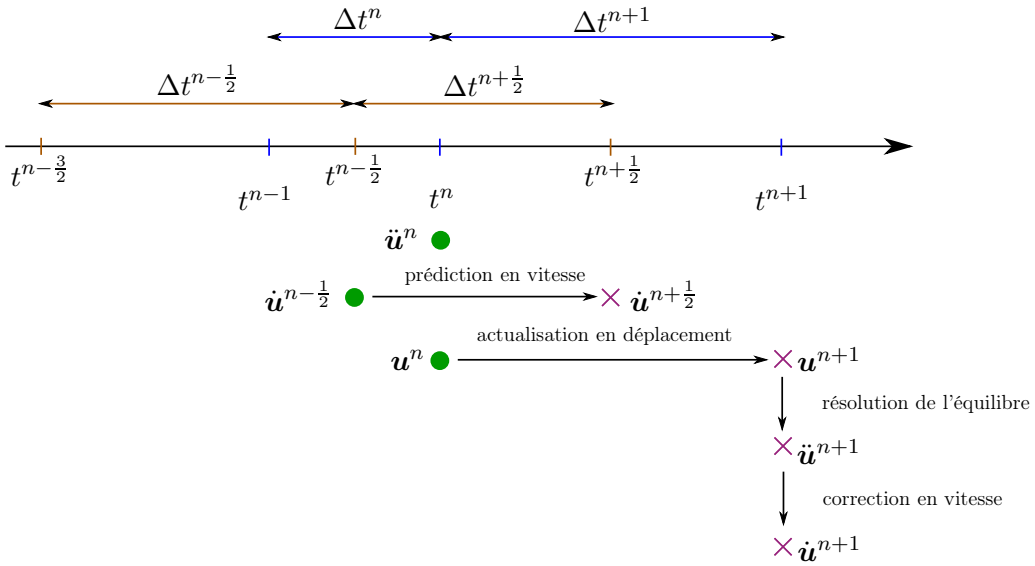


Fig. 1.3 – Discrétisation du temps

à la relation $\dot{\boldsymbol{u}}^{n+\frac{1}{2}} = \dot{\boldsymbol{u}}^{n-\frac{1}{2}} + \Delta t^{n+\frac{1}{2}}\, \ddot{\boldsymbol{u}}^n$. Elle permet l'actualisation du champ des déplacements :

$$\boldsymbol{u}^{n+1} = \boldsymbol{u}^n + \Delta t^{n+1}\, \dot{\boldsymbol{u}}^{n+\frac{1}{2}} \tag{1.43}$$

ou encore le calcul du tenseur des taux de déformation D^{n+1}.
L'intégration des lois de comportement et la connaissance du chargement extérieur permettent de calculer les efforts intérieurs $\boldsymbol{F}_{int}^{n+1}$ et extérieurs $\boldsymbol{F}_{ext}^{n+1}$ et $\boldsymbol{T}_{ext}^{n+1}$ appliqués au système au temps t^{n+1}. Le champ d'accélération est alors obtenu simplement par la relation :

$$\ddot{\boldsymbol{u}}^{n+1} = \mathrm{M}^{-1} \left(\boldsymbol{F}_{ext}^{n+1} + \boldsymbol{T}_{ext}^{n+1} - \boldsymbol{F}_{int}^{n+1} \right) \tag{1.44}$$

Il permet la phase de correction des vitesses $\dot{\boldsymbol{u}}^{n+1} = \dot{\boldsymbol{u}}^{n+\frac{1}{2}} + \left(t^{n+1} - t^{n+\frac{1}{2}} \right) \ddot{\boldsymbol{u}}^{n+1}$.
L'initialisation du processus s'effectue de la manière suivante :

- $\Delta t^1 = \Delta t^0 = \Delta t^{\frac{1}{2}}$;
- $\ddot{\boldsymbol{u}}^0 = \ddot{\boldsymbol{u}}^0_{imp}$ si l'accélération est imposée 0 sinon ;
- $\dot{\boldsymbol{u}}^0 = \dot{\boldsymbol{u}}^0_{imp}$ si la vitesse est imposée 0 sinon ;
- $\dot{\boldsymbol{u}}^{\frac{1}{2}} = \dot{\boldsymbol{u}}^0 + \frac{1}{2}\Delta t^1\,\ddot{\boldsymbol{u}}^0$; $\dot{\boldsymbol{u}}^{-\frac{1}{2}} = \dot{\boldsymbol{u}}^0 - \frac{1}{2}\Delta t^0\,\ddot{\boldsymbol{u}}^0$.

Si le pas de temps d'intégration est constant au cours du calcul, le schéma d'intégration des différences finies centrées est retrouvé.
Ce schéma d'intégration numérique n'est pas inconditionnellement stable. Pour assurer sa convergence, la condition de Courant Friedrich Levy (CFL) doit être vérifiée [Bathe, 1995; Belytschko *et al.*, 2000; Geradin et Rixen, 2006]. Celle-ci stipule que dans le cadre des éléments finis, l'onde ne doit pas pouvoir se propager de plus d'un élément par pas de temps d'intégration. Elle se traduit par la relation

$$\Delta t \leq \Delta t_c = \frac{2}{\omega_{max}} \tag{1.45}$$

où ω_{max} représente la plus grande des valeurs propres calculées sur l'ensemble des éléments du modèle et Δt_c le pas de temps d'intégration maximal autorisé (pas de temps critique). Cette condition de stabilité peut conduire à des pas de temps très petits et par conséquent à des coûts de calculs prohibitifs. Dans le cas non linéaire il est très difficile d'établir les conditions à respecter sur le pas de temps d'intégration pour assurer la convergence du schéma explicite. Dans la pratique, celui-ci est pris égal à $\epsilon\,\Delta t_c$ avec ϵ inférieur à 1 et Δt_c le pas de temps critique déterminé sans non-linéarités [HSK, 2006].
Les techniques de discrétisations spatiale et temporelle ont été brièvement rappelées ; le contexte de développement de lois de comportement va être présenté.

1.3.3 Cadre de développement ABAQUS VUMAT

Le code de calcul ABAQUS, module EXPLICIT, permet d'intégrer des lois de comportement utilisateur par l'intermédiaire de la sous-routine VUMAT programmée en langage Fortran 77. C'est dans ce cadre que les lois de comportement présentées dans les chapitres suivants sont développées. Il est donc essentiel de bien préciser dès maintenant quelles sont les entrées et sorties cette la sous-routine.

Données d'entrée VUMAT

Les données d'entrée de la sous-routine VUMAT ont été listées en partie 1.2.3. Il s'agit pour les principales d'entre elles :

- du tenseur des contraintes de Cauchy corotationnelle au temps t^n : σ^{R^n} ;
- des variables internes et forces thermodynamiques au même instant (exprimées dans le repère global) : α et $\boldsymbol{J}$;
- du pas de temps d'intégration : Δt^{n+1} ;
- et enfin, de l'incrément de déformation corotationnelle $\Delta\,\epsilon_{nl}^{R^{n+1}} = \Delta\,t^{n+1}\;\mathrm{D}^{R^{n+1}}$.

Ces informations sont fournies en chaque point d'intégration, si bien qu'une boucle est réalisée pour actualiser les grandeurs en chacun des points de Gauss du domaine de définition $\mathcal{D}$.

Données de sorties VUMAT

L'intégration du comportement, réalisée sur la base des données d'entrée présentées ci-dessus, fait appel à une relation du type

$$\left\{\begin{array}{l} \sigma^{R^{n+1}} = \sigma^{R^n} + \Delta t^{n+1}\,\dot{\sigma}^{R^{n+1}} \\ \Delta t^{n+1}\,\dot{\sigma}^{R^{n+1}} = \Lambda^{\sigma,GN}\left(\Delta\epsilon_{nl}^{R^{n+1}}\,;\boldsymbol{\alpha}^{R^{n+1}}\right) \end{array}\right. \tag{1.46}$$

en ce qui concerne les contraintes. L'intégration des variables internes et des forces thermodynamiques associées est réalisée à partir des lois d'état et des lois d'évolution dérivées des potentiels thermodynamiques énergie libre d'Helmoltz ψ et dissipation Φ. Finalement, les grandeurs rendues au code de calcul sont :

- $\sigma^{R^{n+1}}$ les contraintes de Cauchy actualisées en référentiel local objectif ;
- $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{J}$ les variables utilisateur exprimées dans le repère global (variables internes, forces thermodynamiques associées...) ;
- et W_{elas}^{n+1} et W_{inelas}^{n+1} les énergies interne et associée aux processus irréversibles.

1.4 Conclusion

En conclusion de ce premier chapitre, il est important de retenir que les lois de comportement proposées dans ce document sont de type hypoélastique en référentiel local objectif en rotation propre (associé à la dérivée temporelle de Green Naghdi). Les lois sont développées suivant le cadre de la thermodynamique des processus irréversibles et sont intégrées au code de calcul Abaqus module Explicit.

Bibliographie

Bathe, K. (1995).
Finite Element Procedures.
Prentice Hall.

Belytschko, T., Bažant, Z., Huyn, Y. et Woong, C. (1986).
Strain softening materials finite element solutions.
Computers and Structures, 23(2):163–180.

Belytschko, T., Liu, W. et Moran, B. (2000).
Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures.
Wiley.

Bernstein, B. (1960).
Relation between hypo-elasticity and elasticity.
Transactions of the Society of Rheology, 4:23–28.

Besson, J., Cailletaud, G., Chaboche, J. et Forest, S. (2001).
Mécanique non linéaire des matériaux.
Hermès Science.

Besson, J. et Desmorat, R. (2004).
Numerical implementation of constitutive models.
ENSMP.

Chaboche, J. (1996).
Thermodynamic formulation of constitutive equations and application to the viscoplasticity and viscoelasticity of metals and polymers.
International Journal of Solids and Structures, 34(18):2239–2254.

Chaboche, J. et Cailletaud, G. (1996).
Integration methods for complex plastic constitutive equations.
Computer Methods in Applied Mechanics Engineering, 133:125–155.

COIRIER, J. (2001).
Mécanique des milieux continus : Cours et exercices corrigés.
Sciences Sup. Dunod, 2 édition.

GERADIN, M. et RIXEN, D. (2006).
Mechanical Vibrations : Theory and Application to Structural Dynamics.
John Wiley & Sons Inc.

GERMAIN, P. (1973).
Cours de Mécanique des Milieux Continus.
Masson et Cie.

HILL, R. (1958).
A general theory of uniqueness and stability in elastic-plastic solids.
Journal of Mechanics, Physics and Solids, 6:236–249.

HSK (2006).
Abaqus reference manual, volume 6.5.
Hibbit, Karlsson & Sorensen Inc.

LEMAÎTRE, J. et CHABOCHE, J. (1990).
Mechanics of solid materials.
Cambridge University Press.

LEMAÎTRE, J. et DESMORAT, R. (2004).
Engineering Damage Mechanics : Ductile, Creep, Fatigue and Brittle Failures.
Springer.

LEMAÎTRE, J., DESMORAT, R. et SAUZAY, M. (1999).
Loi d'évolution de l'endommagement anisotrope.
International Journal of Solids and Structures, 327:1231–1236.

LIN, R. (2002).
Numerical study of consistency of rate constitutive equations with elasticity at finite deformation.
International Journal for Numerical Methods In Engineering, 55:1053–1077.

MEYER, A., XIAO, H. et BRUHNS, O. (2006).
Choice of objective rate in single parameter hypoelastic deformation cycles.
Computers and Structures, 84:1134–1140.

MORA, V. (2004).
Étude de l'intégration temporelle du tenseur taux de déformation. Application à la modélisation de l'élastoplasticité en grandes transformations.
Thèse de doctorat, Université de Bretagne-Sud.

SALENÇONS, J. (1983).
Mécanique des milieux continus - Tome 1 généralités.
École Polytechnique.

SIMO, J. et HUGUES, T. (1998).
Computational Inelasticity.
Springer.

Stören, S. et Rice, J. (1975).
Localized necking thin sheets.
Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 23(6):421–441.

Trusdell, C. (1963).
Remarks on hypo-elasticity.
Journal of Research National Bureau Standards, 67:141–143.

Voyiadjis, G. et Deliktas, B. (2000).
A coupled anisotropic damage model for the inelastic response of composite materials.
Computer Methods in Applied Mechanics Engineering, 183:159–199.

Voyiadjis, G. et Kattan, P. (1999).
Advances in damage mechanics : metals and metal matrix composites.
Elsevier.

Xiao, H. et Bruhns, O.T., M. A. (1999).
Existence and uniqueness of the integrable-exactly hypoelastic equation and its significance to finite inelasticity.
Acta Mechanica, 138:31–50.

Xiao, H., Bruhns, O. et Meyer, A. (1999a).
Self-consistant eulerian rate type elasto-plasticity models based upon the logarithmic stress rate.
International Journal of Plasticity, 15:479–520.

Xiao, H., Bruhns, O. et Meyers, A. (1999b).
A natural generalization of hypoelasticity and eulerian rate type formulation of hyperelasticity.
Journal of Elasticity, 56:59–93.

Chapitre 2

Étude des composites tissés

Ce chapitre porte sur la modélisation du comportement mécanique des composites tissés soumis à des sollicitations quasi-statiques et dynamiques. Après une brève introduction sur les matériaux composites fibrés et leurs mécanismes de dégradation, un premier modèle de comportement développé dans [Rozycki, 2000] et nommé Modèle 1, est présenté. Une discussion est alors menée sur l'intérêt de faire évoluer ce modèle afin de le rendre plus robuste vis-à-vis du phénomène de dépendance au maillage. Un nouveau modèle de comportement, le Modèle 2, est proposé ainsi qu'une démarche d'identification de ses paramètres. Des simulations éléments finis illustrent la pertinence du modèle développé.

Sommaire

2.1 Introduction 34
2.2 Présentation du Modèle 1 38
2.3 Développement du Modèle 2 46
2.4 Résultats obtenus 55
2.5 Conclusion 62

2.1 Introduction

Les matériaux composites occupent une place très importante dans la réalisation de nombreuses structures comme les transports terrestres, ferroviaires, maritimes ou aériens par exemple. Obtenus par association d'un renfort extrêmement rigide et d'une matrice permettant de transférer les efforts au renfort, ils permettent de constituer des matériaux structurels offrant de très bonnes propriétés mécaniques pour de faibles masses volumiques. Ces qualités, l'amélioration des procédés de mise en forme, mais également la meilleure connaissance de leur comportement thermo-mécanique expliquent largement leur essor. Les modélisations classiques linéaires orthotropes fragiles de leur comportement mécanique sont présentées dans [Gay, 2006; Berthelot, 2005].
Dans ces travaux nous nous intéressons aux structures composites stratifiées obtenues par empilement de plis tissés de type verre ou carbone/époxy. Les mécanismes de dégradation de ces matériaux, maintenant bien identifiés, ont été recencés et modélisés à partir des années 1980 [Ladevèze, 1986; Ladevèze et Le Dantec, 1992; Ladevèze *et al.*, 1998]. Ils se scindent en cinq modes principaux représentés sur la figure 2.1.

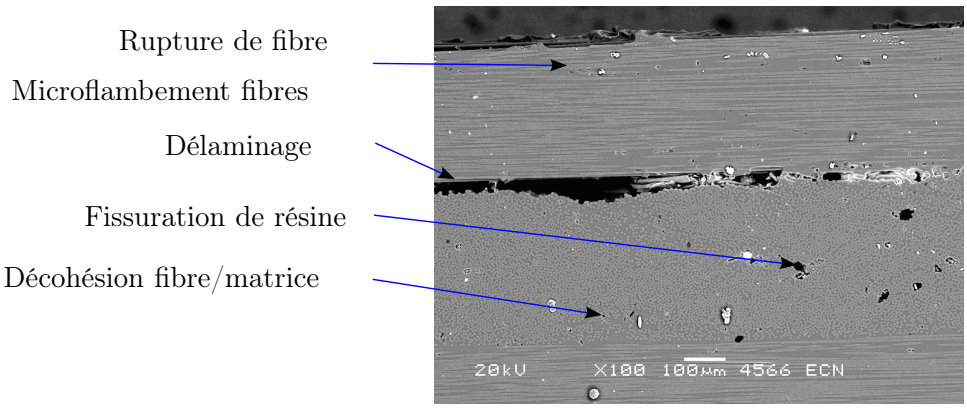


FIG. 2.1 – Mécanismes de dégradation d'une éprouvette composites stratifiés $[0\ 90]_S$

La rupture fragile des fibres en traction, les microflambements locaux des fibres en compression, la microfissuration de la résine sous chargement de cisaillement et enfin la décohésion fibres/matrice sont les phénomènes physiques qui se produisent à l'échelle microscopique et qui entrainent la ruine des structures. Les figures 2.2 et 2.3 illustrent les effets de ces phénomènes à l'échelle macroscopique sous la forme de courbes de réponse contrainte/déformation [Rozycki, 2000]. La première représente la réponse d'une éprouvette verre/époxy tissés avec fibres orientées à 0 et 90° par rapport à la direction de la charge. La seconde fait la même chose pour une éprouvette donc les fibres sont orientées à ±45° par rapport à la direction de la charge, ce qui correspond à une sollicitation du pli élémentaire de type cisaillement.

L'éprouvette à 0° fait apparaître un comportement non linaire fragile qui s'explique par une sollicitation privilégiée des fibres en tension. L'éprouvette de cisaillement met en avant la chute régulière du module d'élasticité, la présence de déformations irréversibles et de boucles d'hystérésis qui sont la manifestation de la dégradation de la résine [Linhone, 1995].
Enfin pour les stratifiés un cinquième mode de dégradation est à considérer : le délaminage entre plis. Des études et modélisation de ce phénomène sont présentées dans [Allix *et al.*, 1985; Gornet, 1996; Lévêque, 1998; Coutellier *et al.*, 2006; Prombut *et al.*, 2006].

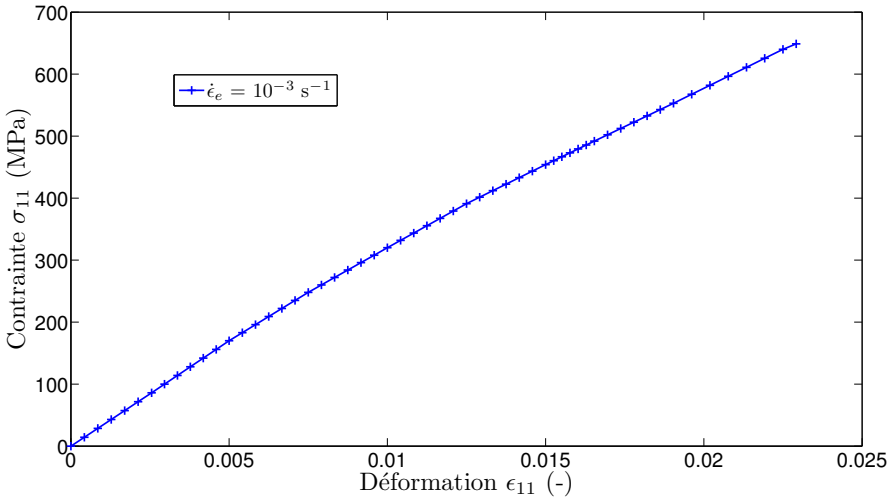


FIG. 2.2 – Courbe typique de réponse d'un tissu verre/époxy en traction

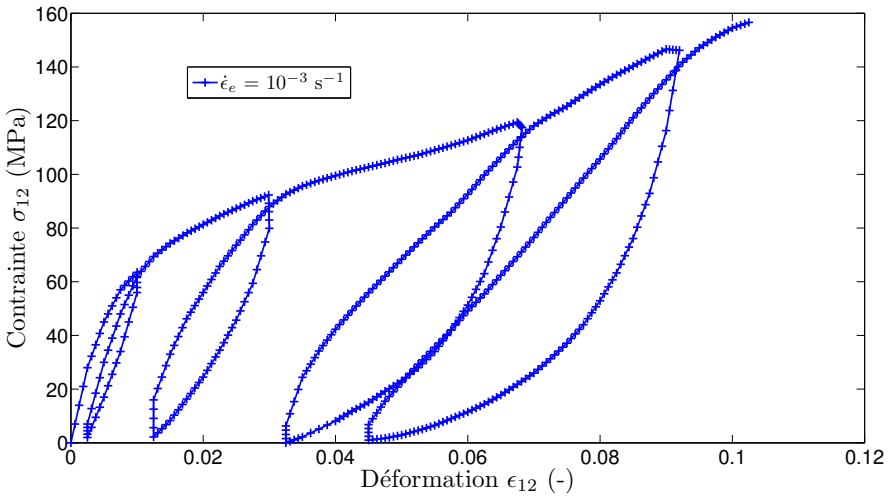


FIG. 2.3 – Courbe typique de réponse d'un tissu verre/époxy en cisaillement cyclique

La modélisation du comportement mécanique des structures composites stratifiées jusqu'à la phase ultime de la rupture est un problème très fortement multi-échelles. Sur l'exemple particulier des structures nautiques, la figure 2.4 montre que l'amplitude des dimensions à prendre en compte atteint facilement six décades :

- échelle de la structure (macro) : 10^1 m ;
- échelle de la coque : 10^{-1} m ;
- échelle de la peau : 10^{-2} m ;
- échelle du pli élémentaire (méso) : 10^{-3} m ;
- échelle des fibres (micro) : 10^{-5} m,

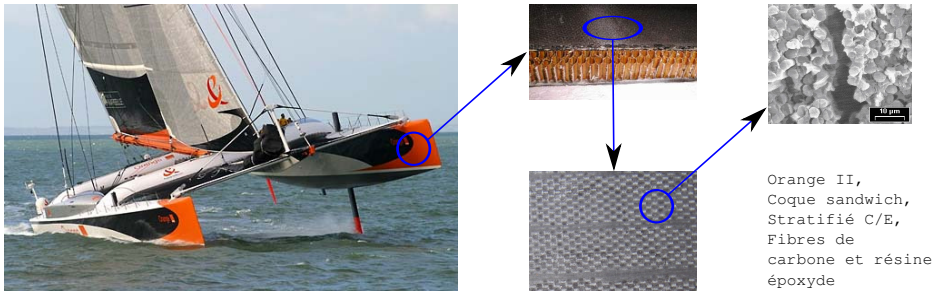


FIG. 2.4 – Modélisation des structures composites : un problème multi-échelles - photo [Multiplast, 2007]

Un moyen efficace de concilier toutes les échelles en présence consiste à développer les modèles de comportement à l'échelle intermédiaire du pli élémentaire, l'échelle méso [Allix *et al.*, 1985; Ladevèze, 1986]. De cette manière, les conséquences des phénomènes se produisant à l'échelle des constituants (fibres et résine) - échelle micro - sont prises en compte de manière homogénéisée globale à l'échelle supérieure du pli élémentaire [Ladevèze et Le Dantec, 1992]. Des liens entre les échelles micro et méso s'appuyant sur des techniques d'homogénéisation ont été récemment développés [Ladevèze et Lubineau, 2001, 2003; Ladevèze *et al.*, 2006]. La méso modélisation apparaît donc comme le bon compromis entre échelles et représentation des phénomènes physiques.

Dans ce contexte, le développement des lois de comportement est réalisé dans le repère d'orthotropie du pli élémentaire défini en figure 2.5 où $(O, \boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y)$ est le repère global

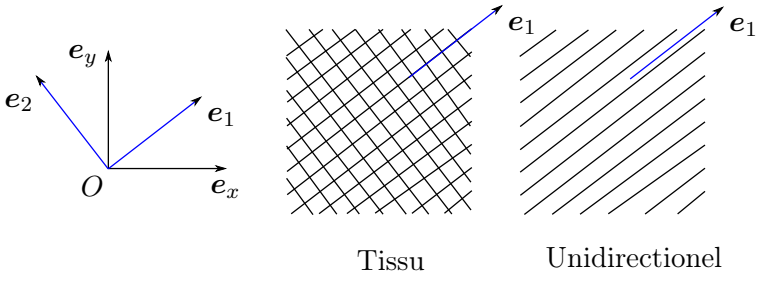


FIG. 2.5 – Repère d'orthotropie du pli élémentaire

d'étude du stratifié et où $(O, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$ constitue le repère local attaché au pli élémentaire représenté ($\boldsymbol{e}_1$: direction de chaine et $\boldsymbol{e}_2$: direction de trame) [Hochard *et al.*, 2001, 2005]. La caractérisation du comportement mécanique des composites tissés fait intervenir principalement trois types d'essais : essai de traction sur éprouvette telle que $\langle \boldsymbol{e}_x \,;\, \boldsymbol{e}_1 \rangle = 0^o$ (avec

ici $\boldsymbol{e}_x$ la direction d'application de la charge), compression sur éprouvette identique, et enfin traction sur éprouvette telle que $\langle \boldsymbol{e}_x \,;\, \boldsymbol{e}_1 \rangle = 45^o$ [Gay, 2006; Bordreuil et Hochard, 2004].

L'influence de la vitesse de déformation sur le comportement mécanique des composites unidirectionnels et tissés a été récemment investiguée et modélisée dans [Rozycki, 2000; Johnson, 2001]. Les courbes de réponses tracées en figures 2.6 et 2.7 illustrent l'influence de ce paramètre dans une plage de vitesses de déformation allant de $10^{-3}\,\mathrm{s}^{-1}$ à $2\,10^{3}\,\mathrm{s}^{-1}$ pour des éprouvettes tissées à 0^o et à 45^o de type verre/époxy.

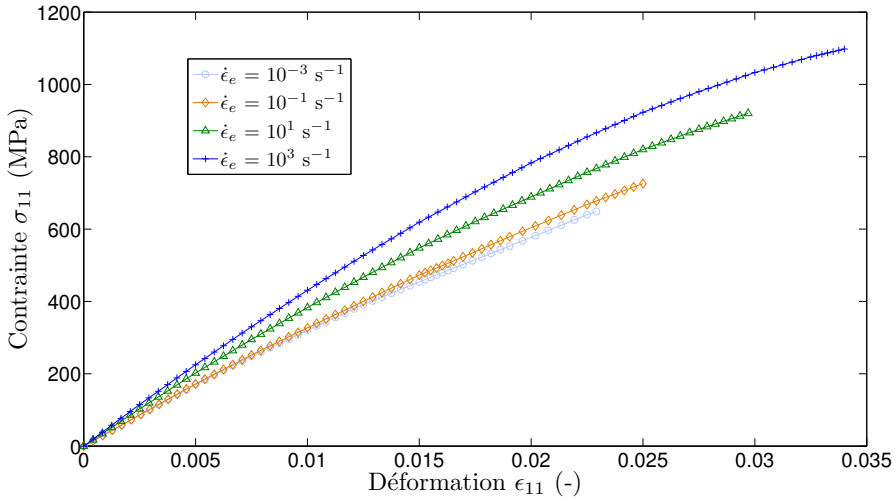


FIG. 2.6 – Influence de la vitesse de déformation sur la réponse de tissus verre/époxy - traction [0]

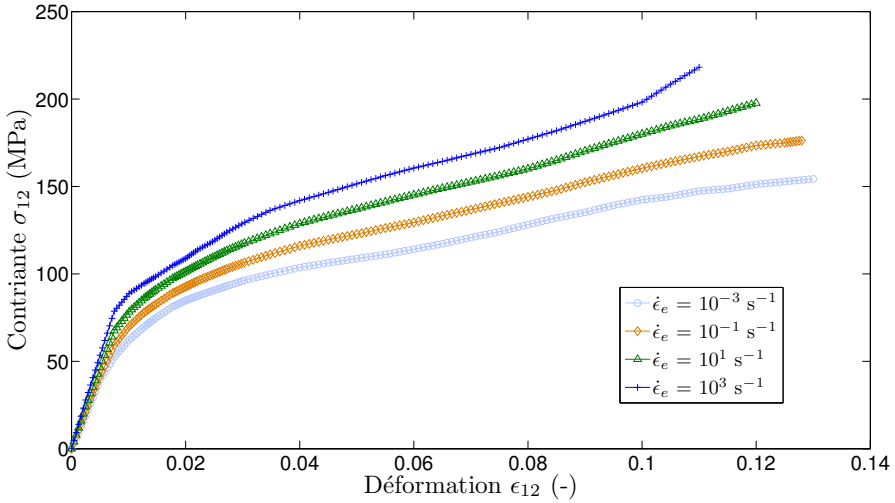


FIG. 2.7 – Influence de la vitesse de déformation sur la réponse de tissus verre/époxy - cisaillement [±45]

Dans le domaine réversible des réponses, les modules d'élasticité croissent avec la vitesse de déformation. Une fois les processus irréversibles amorcés, les contraintes et déformations à rupture augmentent elles aussi avec $\dot{\epsilon}_e$. En cisaillement, la contrainte "d'écoulement" devient plus forte avec la vitesse de déformation, traduisant ainsi un comportement de type

viscoplastique du pli en cisaillement. La nature visco-élastique de la résine époxy est l'hypothèse retenue pour expliquer ce phénomène de dépendance à la vitesse [Maire, 1992; Rozycki, 2000].

En bilan de cette première partie très générale sur le comportement mécanique des composites, les points suivants peuvent être retenus :

- l'échelle méso est employée pour le développement des lois de comportement ;
- à cette échelle, le pli élémentaire possède un comportement orthotrope ;
- trois cas de chargement sont à considérer :
  - traction dans le sens des fibres ;
  - compression dans le sens des fibres ;
  - cisaillement par traction sur éprouvettes avec fibres orientées à 45^o par rapport à la direction de la charge,
- plusieurs mécanismes de dégradation sont à prendre en compte de manière globale, homogénéisée à l'échelle méso :
  - chute des modules d'élasticité ;
  - présence de déformations irréversibles en cisaillement,
- enfin la réponse est fortement dépendante à la vitesse de déformation :
  - sur le module initial d'élasticité ;
  - sur les contraintes et déformations à rupture ;
  - sur le régime d'écoulement en cisaillement.

Les modèles développés pour prendre en compte ces différents aspects, baptisés MODÈLE 1 et MODÈLE 2 dans la suite, sont maintenant présentés.

2.2 Présentation du MODÈLE 1

Point de départ de ces travaux de thèse, le MODÈLE 1 développé par [Rozycki, 2000] au LAMIH est tout d'abord présenté. Des résultats obtenus par simulations éléments finis illustrent l'aptitude du modèle à reproduire les phénomènes physiques observés mais font également apparaître un phénomène de dépendance de la réponse au maillage.

2.2.1 Écriture théorique du MODÈLE 1

Cas quasi-statique

La loi de comportement est écrite en déformation sous l'hypothèse des contraintes planes :

$$\underline{\sigma} = \underline{\underline{\Lambda}}\,\underline{\epsilon}^e \tag{2.1}$$

avec $\underline{\epsilon}_e$ le vecteur des déformations élastiques du plan, $\underline{\sigma}$ le vecteur des contraintes de Cauchy associées et $\underline{\underline{\Lambda}}$ la matrice raideur endommagée du comportement orthotrope. Cette expression dérive du potentiel thermodynamique énergie libre d'Helmoltz ψ qui sera introduit ultérieurement. Sous forme développée, la relation 2.1 devient :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sqrt{2}\,\sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{E_1\,(1-d_1)}{1-\nu_{12}\,\nu_{21}} & \dfrac{\nu_{12}\,E_2}{1-\nu_{12}\,\nu_{21}} & 0 \\ \dfrac{\nu_{21}\,E_1}{1-\nu_{12}\,\nu_{21}} & \dfrac{E_2\,(1-d_2)}{1-\nu_{12}\,\nu_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & 2\,G_{12}\,(1-d_{12}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{e11} \\ \epsilon_{e22} \\ \sqrt{2}\,\epsilon_{e12} \end{bmatrix}. \tag{2.2}$$

$\underline{\epsilon}_e = \left[\epsilon_{e11}\ \epsilon_{e22}\ \sqrt{2}\,\epsilon_{e12}\right]^T$, $\underline{\sigma} = \left[\sigma_{11}\ \sigma_{22}\ \sqrt{2}\,\sigma_{12}\right]^T$, E_1, E_2 et G_{12} sont les modules d'élasticité, ν_{12} et ν_{21} les coefficients de Poisson, et enfin d_1, d_2 et d_{12} sont les variables d'endommagement comprises entre 0 et 1 et traduisant l'affaiblissement des propriétés mécaniques.

L'approche proposée consiste à considérer comme étant endommagés, non pas les modules d'élasticité, mais les coefficients de la matrice raideur de la loi de comportement [Linhone, 1995; Rozycki, 2000]. Elle a pour avantage de découpler, dans le calcul, les endommagements de leurs duales thermodynamiques, les taux de restitution d'énergie $\underline{Y}$.

Afin de calculer les forces thermodynamiques et de prendre en compte le phénomène assimilable à un écoulement plastique observé en cisaillement, l'énergie libre d'Helmoltz est choisie sous la forme :

$$\rho\psi \;=\; \frac{1}{2}\underline{\epsilon_e}^T.\underline{\underline{\Lambda}}\,(\underline{d})\;\underline{\epsilon_e} \;+\; \frac{Q}{\beta+1}\,p^\beta \tag{2.3}$$

avec ρ la masse volumique, p la déformation plastique cumulée et Q et β des paramètres matériaux associés à un écrouissage isotrope non linéaire. Dans cette relation, les déformations élastiques ϵ_{e11} et ϵ_{e22} sont égales aux déformations totales, les fibres bloquant l'écoulement plastique. Ce n'est pas le cas en cisaillement où $\epsilon_{e12} \;=\; \epsilon_{t12} - \epsilon_{p12}$; ϵ_{p12} étant la déformation plastique de cisaillement. Les lois d'état sont alors obtenues par dérivation du potentiel énergie libre :

$$\left\{\begin{array}{l} Y_1 \;=\; -\rho\,\dfrac{\partial\,\psi}{\partial\,d_1} \;=\; \dfrac{1}{2}\,E_1\;(\epsilon_{e11})^2 \\ Y_2 \;=\; -\rho\,\dfrac{\partial\,\psi}{\partial\,d_2} \;=\; \dfrac{1}{2}\,E_2\;(\epsilon_{e22})^2 \\ Y_{12} \;=\; -\rho\,\dfrac{\partial\,\psi}{\partial\,d_{12}} \;=\; 2\,G_{12}\;(\epsilon_{t12}-\epsilon_{p12})^2 \\ R \;=\; \rho\,\dfrac{\partial\,\psi}{\partial\,p} \;=\; Q\,p^\beta \end{array}\right. \tag{2.4}$$

Elles donnent les expressions des taux de restitution d'énergie $\underline{Y}$ et de la variable d'écrouissage R duale de la déformation plastique cumulée p. Les équations d'évolution des variables d'endommagement sont définies sur la base de considérations expérimentales :

$$\left\{\begin{array}{l} d_1 \;=\; \dfrac{\langle \underline{Y_1} - Y_{1o}\rangle_{\geq 0}}{Y_{1c}} \text{ si } Y_1 < Y_{1r},\; d_1 \;=\; 1 \text{ sinon}\,; \\ d_2 \;=\; \dfrac{\langle \underline{Y_2} - Y_{2o}\rangle_{\geq 0}}{Y_{2c}} \text{ si } Y_2 < Y_{2r},\; d_2 \;=\; 1 \text{ sinon}\,; \\ d_{12} \;=\; \dfrac{\langle \ln\,(\underline{Y_{12}}) - \ln\,(Y_{12o})\rangle_{\geq 0}}{Y_{12c}} \text{ si } Y_{12} < Y_{12r},\; d_{12} \;=\; 1 \text{ sinon.} \end{array}\right. \tag{2.5}$$

L'évolution plus lente de l'endommagement en cisaillement explique la forme en logarithme népérien adoptée. Dans ces expressions, la fonction $\underline{x}$ représente le maximum de la variable x au cours du temps, elle permet de mémoriser l'état d'endommagement. Y_{io}, Y_{ic} et Y_{ir}, $(i \;=\; 1, 2, 12)$, sont des paramètres représentant les taux de restitution d'énergie critique qui servent à contrôler respectivement : l'initiation de l'endommagement, la vitesse d'évolution de l'endommagement et enfin la rupture. L'introduction de la plasticité se fait par la définition d'un potentiel de dissipation ici assimilé à la surface de charge de plasticité (plasticité associée). De manière classique :

$$f \;=\; \frac{|\sigma_{12}|}{1-d_{12}} - R - \sigma^y \tag{2.6}$$

avec σ^y le seuil initial de plasticité. Les lois d'évolution sont alors :

$$\left\{\begin{array}{l} \dot{\epsilon}_{p12} \;=\; \dot{\lambda}_p\,\dfrac{\partial\,f}{\partial\,\sigma_{12}} \\ \dot{p} \;=\; -\dot{\lambda}_p\,\dfrac{\partial\,f}{\partial\,R} \end{array}\right. \tag{2.7}$$

avec $\dot{\lambda}_p$ un multiplicateur de plasticité vérifiant les conditions de Kuhn et Tucker $f\,\dot{\lambda}_p = 0$, $f \leq 0$, $\dot{\lambda}_p \geq 0$ et déterminé à partir de la condition de consistance $\dot{f} = 0$ au cours de l'écoulement plastique :

$$\dot{\lambda}_p = \frac{f}{\partial_{\sigma_{12}} f\, 2\, G_{12}\, (1 - d_{12})\, \partial_{\sigma_{12}} f + \partial_R f\, \partial_p R\, \partial_R f} \tag{2.8}$$

Extension au cas des chargements dynamiques

Pour prendre en compte l'influence de la vitesse de déformation sur la réponse mesurée, des ajustements sont nécessaires. La première étape de la construction d'un modèle adapté consiste à définir une mesure de la vitesse de déformation. La forme retenue pour le MODÈLE 1 est basée sur le second invariant du tenseur des déformations élastiques [Rozycki, 2000; Coutellier et Rozycki, 2000] :

$$\dot{\epsilon}_e = \sqrt{\frac{4}{3}\left(\dot{\epsilon}_{e11}^2 + \dot{\epsilon}_{e22}^2 + \dot{\epsilon}_{e11}\,\dot{\epsilon}_{e22} + \dot{\epsilon}_{e12}^2\right)} \tag{2.9}$$

L'extension du modèle quasi-statique au cas dynamique est ensuite réalisée à la manière d'un modèle de Johnson-Cook [Johnson et Cook, 1985] par le paramétrage de certaines grandeurs en fonction de la vitesse de déformation. Ainsi, les modules d'élasticité E_1, E_2 et G_{12}, les paramètres d'évolution de l'endommagement : taux de restitution d'énergie d'initiation Y_{oi}, d'évolution Y_{ci} et de rupture Y_{ri} et la contrainte d'initiation de l'écoulement plastique σ^y deviennent des fonctions de la vitesse de déformation :

$$\xi\left(\dot{\epsilon}_e\right) = \xi\left(\dot{\epsilon}_{ref}\right)\left[1 + D_\xi\, \ln\left(\frac{\dot{\epsilon}_e}{\dot{\epsilon}_{ref}}\right) + \ln\left(m_\xi\right)\right]^{n_\xi} \tag{2.10}$$

avec ξ n'importe lequel des paramètres cités ci-dessus et $\dot{\epsilon}_{ref}$ une vitesse de déformation de référence correspondant ici à la vitesse utilisée en quasi-statique soit 10^{-3} s^{-1}. D_ξ, n_ξ et m_ξ sont des coefficients propres à chacun des paramètres ξ.

Algorithme d'intégration

L'intégration numérique des équations de comportement est réalisée de manière très classique à l'aide d'un algorithme de type prédicteur/correcteur précédé d'une phase d'adaptation des paramètres du modèle à la vitesse de déformation [Simo et Hugues, 1998; Rozycki, 2000]. La méthode d'intégration développée est présentée en algorithme 1.

Il a été intégré dans ABAQUS, module EXPLICIT, sous la forme d'une sous-routine de comportement Fortran 77 au format VUMAT. Les résultats qui suivent sont obtenus pour les valeurs de jeu de paramètres référencées en tableau 2.1 (les paramètres D et m non renseignés correspondent à une simplification de la dépendance à la vitesse de déformation du paramètre associé). Elles ont été identifiées à partir d'une base de données d'essais réalisés sur composites tissés verre/époxy, selon une démarche présentée en détails dans [Rozycki, 2000].

2.2.2 Exemples d'illustration

Afin de mettre en évidence les qualités et limites du MODÈLE 1, des simulations numériques de validations élémentaires au niveau du point d'intégration et d'essais sur éprouvettes virtuelles ont été menées avec le logiciel ABAQUS module EXPLICIT.

Entrées : état au temps t^n ; $\Delta\underline{\epsilon}^{t,n+1}$
Sorties : état au temps t^{n+1}

Calcul des paramètres "visqueux" :
Calcul de la vitesse de déformation élastique $\dot{\epsilon}_e$ (relation 2.9)
Calcul des paramètres $\xi\left(\dot{\epsilon}_e\right)$ (relation 2.10)

Prédiction élastique :
Calcul des taux de restitution d'énergie $\underline{Y}$ en supposant que tout l'incrément de déformation est de nature élastique (relations 2.4)
Calcul des endommagements $\underline{d}$ (relations 2.5)
Calcul des contraintes $\underline{\sigma}$ (relation 2.2)
Évaluation du critère de plasticité f (équation 2.6)

si $f > 0$ **alors**
  Correction plastique :
  tant que $|f| > tol$ ***et*** $j < niterm$ **faire**
    Calcul du multiplicateur de plasticité $\dot{\lambda}_p$ (relation 2.8)
    Actualisation des variables plastiques ϵ_{p12}, p et R (relations 2.7 et 2.4)
    Recalcul du taux de restitution d'énergie Y_{12}, de l'endommagement d_{12}, de la contrainte σ_{12}
    Actualisation du critère f, $j = j + 1$
  fin
fin

Algorithme 1 : Intégration du comportement des tissus - MODÈLE 1

Paramètres du MODÈLE 1					
Paramètre	Unité	Valeur	D	m	n
$E_1 = E_2$	MPa	30686	0,0212	-	1
G_{12}	MPa	6386	0,0151	-	1
$\nu_{12} = \nu_{21}$	-	0,13	-	-	-
σ^y	MPa	16,4	0,058	-	1
Q	MPa	17830	-	-	-
β	-	0,81	-	-	-
$Y_{o1} = Y_{o2}$	MPa	1,59	0,0457	0,97	1/2
$Y_{c1} = Y_{c2}$	MPa	0,073	0,0265	0,81	1/2
$Y_{r1} = Y_{r2}$	MPa	2,85	0,0534	0,925	1/2
Y_{o12}	MPa	0,098	0,098	-	1/2
Y_{c12}	MPa	5,13	0,015	-	1/2
Y_{r12}	MPa	5,9	0,015	-	1/2
ρ	$\mathrm{T\,mm^{-3}}$	$1{,}9\,10^{-9}$	-	-	-

TAB. 2.1 – Valeur des paramètres du MODÈLE 1

Validations élémentaires

Cette première partie a pour objectifs de vérifier la bonne intégration du modèle au code de calcul et sa capacité à reproduire le comportement mesuré expérimentalement.

L'éprouvette virtuelle en traction est une plaque carrée de 10 mm de côté et de 0,1 mm d'épaisseur. Elle est discrétisée avec un seul élément plaque S4R d'ABAQUS qui est un élément à quatre noeuds, six degrés de liberté par noeud et à intégration réduite. Ce choix permet de ne faire appel qu'à un seul point d'intégration sur le modèle, ce qui permet bien de tester le comportement local, en dehors de tout effet de structure.
Des essais de traction isostatique sont simulés dans une gamme de vitesses imposées évoluant de 10^{-3} s^{-1} (vitesse de déformation de référence) à 10^{3} s^{-1}. L'angle entre la direction des fibres de trame et la direction du vecteur vitesse imposé est de 0^o pour les éprouvettes de traction et de 45^o pour les éprouvettes de cisaillement.

Les résultats obtenus sont présentés en figure 2.8 pour la traction et en figure 2.9 pour le cisaillement.

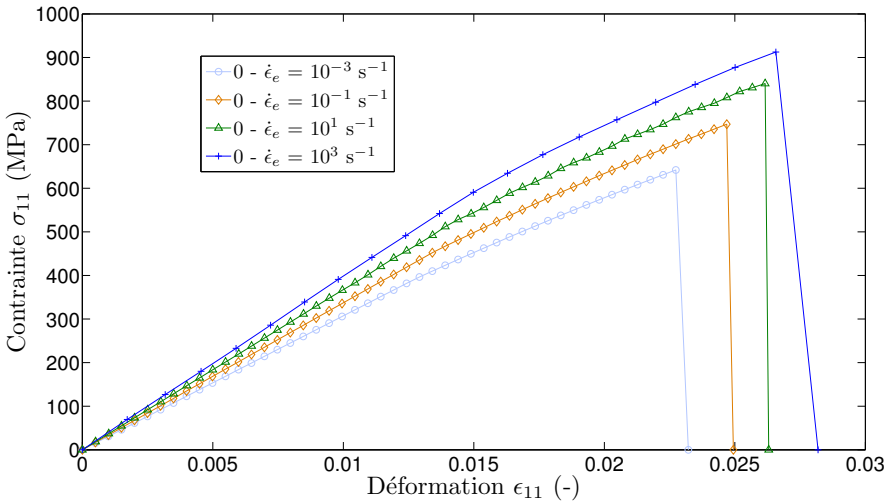


FIG. 2.8 – Réponse en traction du MODÈLE 1 au niveau du point d'intégration sous sollicitations quasi-statiques et dynamiques

La comparaison de ces courbes de simulation numérique avec les courbes expérimentales tracées en figures 2.6 et 2.7 démontre le très bon comportement du modèle. Les aspects non linéaires, l'influence de la vitesse de déformation, la rupture du pli sont des phénomènes très bien reproduits, aussi bien dans le sens des fibres qu'en cisaillement. Les courbes obtenues lors de ces calculs étant très satisfaisantes, elles serviront de base à la création de pseudo données expérimentales pour identifier le MODÈLE 2 qui sera présenté dans la partie 2.3.

Simulations d'essais de caractérisation

Dans cette seconde partie, l'objectif principal est de tester la robustesse du modèle sur des calculs de structures. Pour cela, des éprouvettes virtuelles dont la géométrie présentée en figure 2.10 s'inspire des travaux présentés dans [Ladevèze *et al.*, 2000] sur les modèles d'endommagement à effet retard sont créées. Il s'agit d'éprouvettes plates de 0,1 mm d'épaisseur, de section enveloppe 50 x 10 mm entaillées au centre sur une profondeur

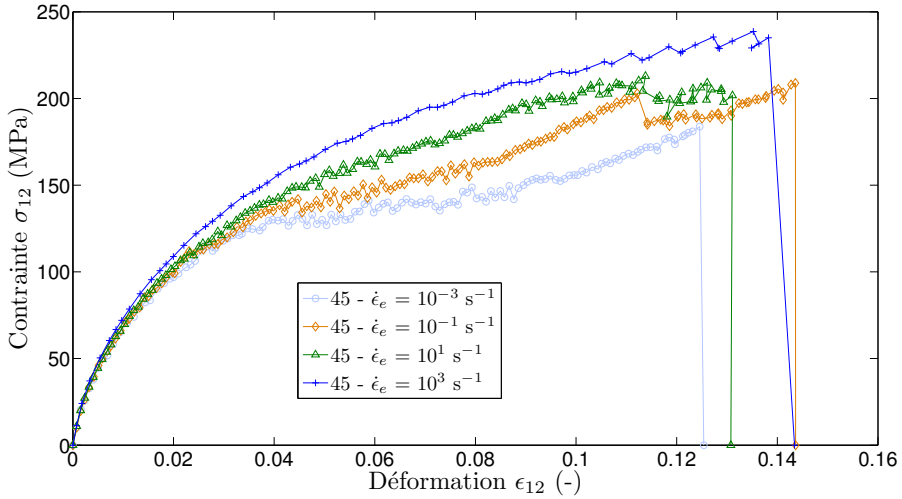


FIG. 2.9 – Réponse en cisaillement du MODÈLE 1 au niveau du point d'intégration sous sollicitations quasi-statiques et dynamiques

totale de 1 mm (0,5 mm de chaque côté soit 10 % de la largeur de l'éprouvette) et sur une longueur de 5 mm (soit là aussi 10 % de la longueur de l'éprouvette).

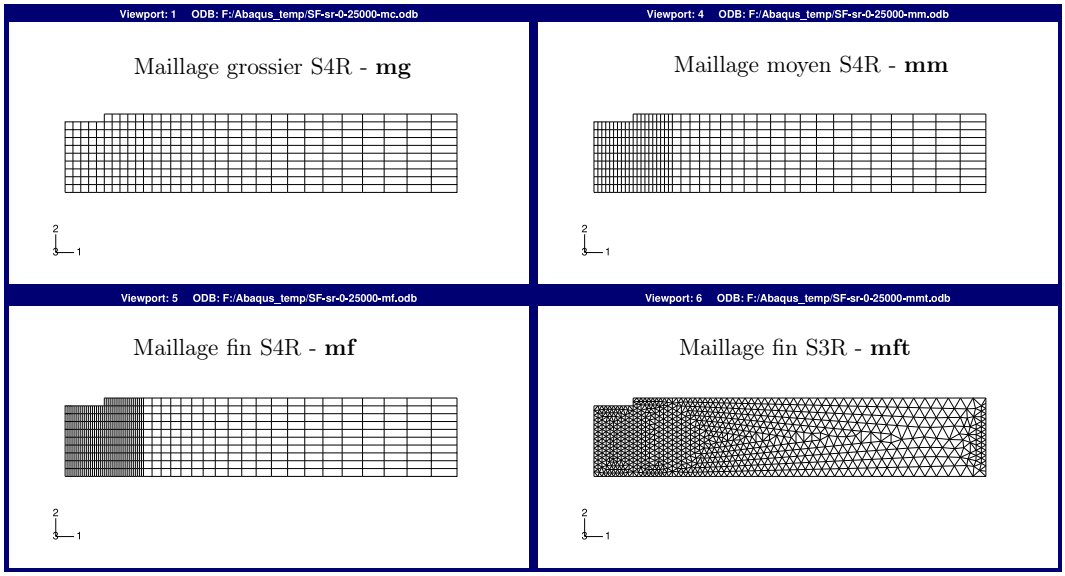


FIG. 2.10 – Géométrie et maillages des éprouvettes virtuelles

Les modèles géométriques sont maillées avec des éléments à intégration réduite S4R et S3R (éléments triangulaires d'ABAQUS, module EXPLICIT). Trois niveaux de discrétisation sont mis en place pour les maillages à base d'éléments quadrangulaires S4R : grossier (**mg**), moyen (**mm**) et fin (**mf**) (voir figure 2.10) et un seul pour le maillage basé sur les éléments S3R : fin (**mft**). Pour diminuer les coûts de calcul, seul le quart de la géométrie des éprouvettes est représenté, des conditions limites de type symétrie permettant de reproduire l'intégralité de la structure. Le chargement est réalisé sous la forme d'une vitesse imposée sur l'arête opposée à l'entaille. Du fait des conditions de symétrie, ceci revient à étirer l'éprouvette des deux côtés ce qui permet de faire propager le front d'onde vers le

centre de l'éprouvette c'est-à-dire vers l'entaille.
Encore une fois deux orientations des fibres sont utilisées : à 0 et 45^o par rapport à la vitesse imposée.

Dans une première phase, les valeurs des paramètres $\underline{Y}_r$ qui font office de critère de rupture sont fixées de manière à neutraliser ce critère, c'est-à-dire à un niveau très élevé. La rupture n'est alors possible que si le niveau d'endommagement atteint 1.
Dans une seconde phase, les valeurs des paramètres $\underline{Y}_r$ sont réinitialisées à leurs niveaux obtenus lors de la phase d'identification locale (voir tableau 2.1). Les figures 2.11 et figures 2.12 présentent la réponse de ce type d'éprouvettes pour une vitesse de sollicitation de 1000 s^{-1} en terme de contraintes et de déformations macroscopiques moyennes.

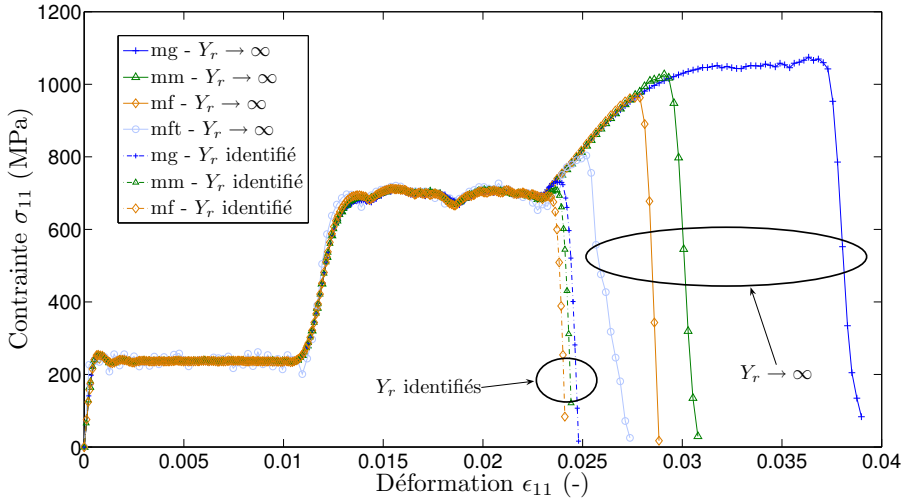


FIG. 2.11 – Réponses macroscopiques sur éprouvettes virtuelles en traction [0] - MODÈLE 1, critère de rupture inactif ($Y_r \to \infty$) puis actif (Y_r identifié)

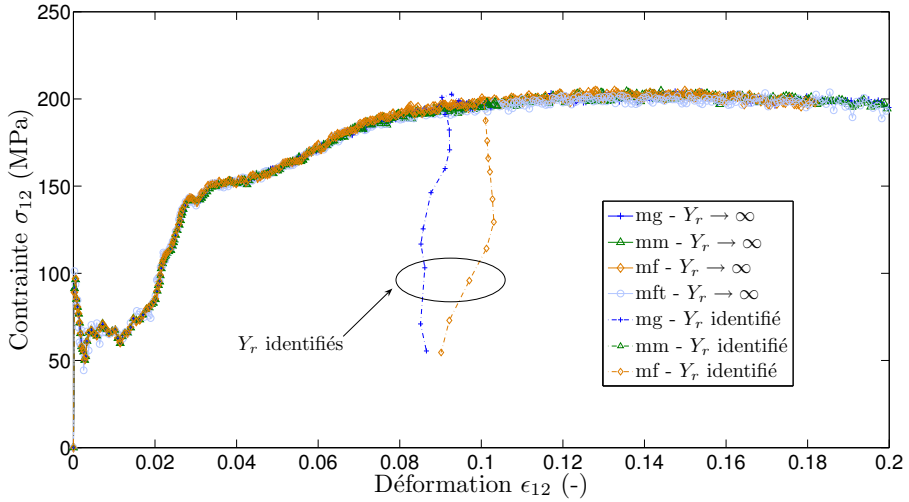


FIG. 2.12 – Réponses macroscopiques sur éprouvettes virtuelles en cisaillement [±45] - MODÈLE 1, critère de rupture inactif ($Y_r \to \infty$) puis actif (Y_r identifié)

Globalement, la réponse est conforme à ce qui est attendu, c'est-à-dire à ce qui a été

obtenu avec les simulations réalisées au niveau du point d'intégration. Par contre, en traction il apparaît une très forte dépendance de la contrainte et de la déformation à rupture à la discrétisation spatiale. Plus le maillage est fin (**mf** et **mft**) et plus la structure s'effondre rapidement. De plus, lorsque les paramètres $\underline{Y}_r$ prennent leurs valeurs identifiées au niveau local, il n'y a plus dépendance au maillage, mais la rupture se produit bien avant ce qui est observé expérimentalement c'est-à-dire pour une contrainte avoisinant les 700 MPa au lieu des 1000 MPa. Plus grave, même en l'absence de paramètre pilotant la rupture (cas où les $\underline{Y}_r$ sont choisis très grands), c'est-à-dire même quand le matériau peut se déformer fortement sans se briser, la structure s'effondre, pour les maillages fins, avant d'atteindre les niveaux de contrainte et de déformation relevés expérimentalement (soit 1000 MPa environ à 10^3 s^{-1} pour 3,1 % de déformation). Relever les paramètres $\underline{Y}_r$ ne constitue donc pas une solution au problème dans ce cas.
Pour ce qui concerne le cisaillement, une faible dépendance au maillage est visible sur la rupture qui se produit de manière un peu précoce lorsque les paramètres $\underline{Y}_r$ prennent leurs valeurs identifiées (niveau de déformation de 0,01 au lieu de 0,012).

En focalisant l'attention sur les champs d'endommagement dans le sens des fibres d_1 et de cisaillement d_{12} présentés respectivement en figures 2.13 et 2.14, il apparaît une dépendance de la réponse au maillage dans le sens où la zone rompue est confinée dans une bande d'un seul élément. Ce phénomène de localisation des déformations est un problème bien connu des modèles adoucissants - à module de comportement tangent négatif - tels que les modèles d'endommagement ou de plasticité à écrouissage négatif [Rice, 1980; Gornet, 1996; de Borst, 2004]. Il se traduit par une zone de rupture confinée dans une bande constituée d'un seul élément en largeur. Raffiner le maillage conduit à diminuer la largeur de la bande de localisation et par conséquent à diminuer l'énergie de rupture par diminution du volume du support. En fait cette énergie tend vers zéro lorsque le maillage devient infiniment fin [de Borst, 2004]. Il y a donc dépendance de l'énergie dissipée lors de la rupture à la discrétisation spatiale, ce qui est inacceptable d'un point de vue physique [Belytschko et Bažant, 1985].

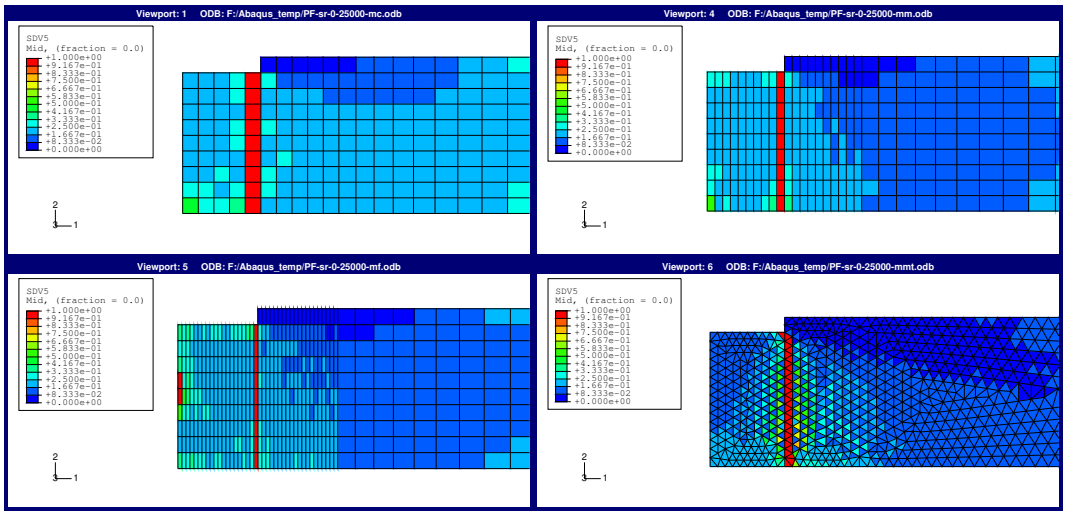


FIG. 2.13 – Champs d'endommagement d_1 sur les éprouvettes virtuelles - MODÈLE 1, présence d'une zone de localisation dans le sens des fibres

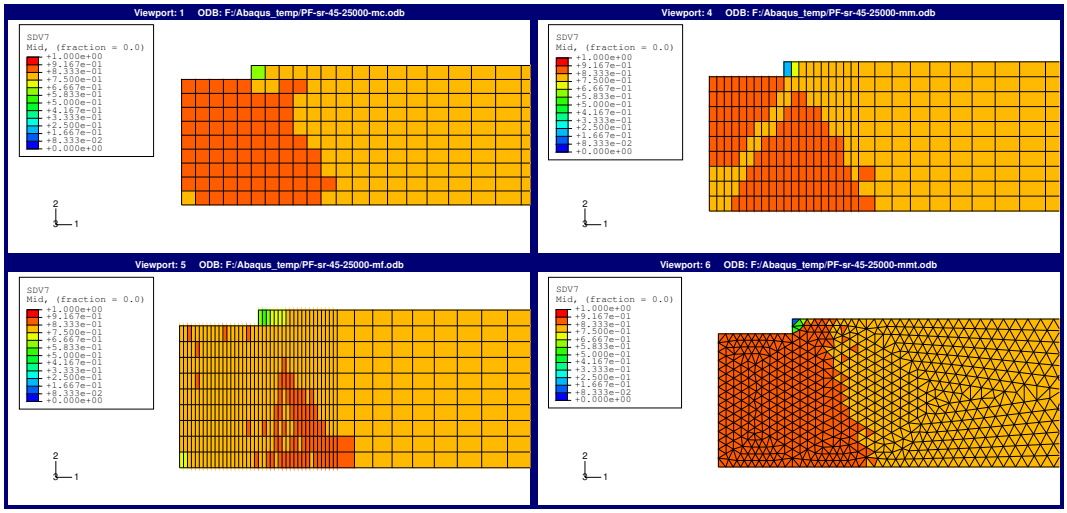


FIG. 2.14 – Champs d'endommagement d_{12} sur les éprouvettes virtuelles - MODÈLE 1

2.2.3 Discussion

Le MODÈLE 1 ne permet pas d'évaluer correctement la quantité d'énergie dissipée lors de la rupture. Le phénomène de localisation aboutit à une sous-estimation du niveau d'endommagement sur le reste de la structure, c'est-à-dire sur tout le maillage "non rompu", dont les conséquences dans le cadre d'un calcul de dimensionnement de sandwich sont difficiles à évaluer *a priori*.
Pour le calcul d'une plaque composite il peut être accepté de mésestimer le comportement post-rupture de la plaque en considérant que la structure est rompue et n'assure par conséquent plus son rôle d'intégrité physique. Dans le cadre d'un sandwich par contre, la présence de deux peaux et de l'âme laisse penser qu'il convient de bien représenter l'évolution du stratifié, y compris après rupture, de manière à transmettre les bons niveaux d'efforts aux différents éléments du sandwich. Pour cette raison, faire évoluer le MODÈLE 1 de manière à le rendre "insensible" au phénomène de localisation qui se traduit par une dépendance de la réponse au maillage est nécessaire. Le MODÈLE 2, corrigeant ce problème, est maintenant présenté.

2.3 Développement du MODÈLE 2

Comme cela vient d'être montré, le postulat de l'état local classiquement utilisé montre des limites. Il apparaît par conséquent nécessaire de modifier les équations du comportement pour éviter le phénomène de dépendance au maillage. Les stratégies envisageables sont tout d'abord rappelées, discutées, puis un modèle de comportement est proposé et mis en oeuvre dans ABAQUS.

2.3.1 Phénomène de localisation

Causes et description du phénomène

Historiquement les modèles de comportement adoucissants continus - de type plasticité ou endommagement - ont été introduits de manière à capturer la zone de localisation des déformations observée expérimentalement lors de la striction des métaux par exemple [Stören et Rice, 1975]. Un problème inhérent à ce type de modèles impliquant un module

de comportement tangent négatif, vient du changement de nature des équations d'équilibre [Lasry et Belytschko, 1988; Belytschko et Lasry, 1989]. En statique, en l'absence de forces d'inertie, le problème initialement elliptique devient hyperbolique tandis qu'en dynamique, le problème initialement hyperbolique devient elliptique. Ceci conduit à des problèmes mals posés qui se traduisent par une perte d'unicité de la solution et à l'apparition d'une discontinuité [Rudnicki et Rice, 1975; Lasry et Belytschko, 1988; Belytschko et Lasry, 1989]. Dans le contexte de la méthode des éléments finis, cette perte d'unicité de la solution du problème aux conditions limites et initiales se traduit par un nombre fini de solutions - du fait de la discrétisation spatiale. Ainsi un scénario particulier est privilégié naturellement et arbitrairement aux dépens des autres. Il y a alors dépendance de la solution au maillage, cette dépendance n'étant pas due à la méthode de résolution employée, mais au changement de nature des équations à résoudre.

Dès 1958, Hill [Hill, 1958] a formalisé des critères de stabilité permettant de détecter les changements de nature des équations d'équilibre. Ainsi le critère, dit de stabilité matérielle et défini par la relation $\dot{\epsilon} \ : \dot{\sigma} > 0$, est un critère local qui peut être ramené dans le cas limite à la relation $\det(\Lambda^{sym}) = 0$, Λ^{sym} étant la partie symétrique du tenseur de comportement tangent. Si Λ perd sa nature de tenseur défini positif comme c'est le cas pour un comportement adoucissant alors il y a perte de stabilité matérielle, instabilité locale qui peut conduire à l'instabilité structurelle définie par le critère $\int_{\mathcal{D}} \dot{\epsilon} \ : \ \dot{\sigma} \, dx > 0$ (dans le cas non linéaire géométrique, ou en présence de lois d'écoulement non associées par exemple, la perte d'ellipticité des équations peut précéder l'instabilité matérielle [Rudnicki et Rice, 1975; de Borst, 2004]).
Le critère de perte d'ellipticité pour les problèmes statiques est le suivant : $\det(\boldsymbol{n}.\Lambda\,\boldsymbol{n}) = 0$ où $\boldsymbol{n}$ est le vecteur normal à une surface de discontinuité supposée exister [Rice, 1980]. Dans ce cas, la nature elliptique du problème, qui doit normalement interdire toute discontinuité, est perdue. Si l'expression précédente est vérifiée alors une solution discontinue devient possible. La discrétisation spatiale conduit alors à un phénomène de localisation.

Quoi qu'il arrive, les conséquences de la perte d'unicité de la solution, déjà évoquées un peu plus haut, sont une prédiction d'une zone rompue d'épaisseur nulle, surface de discontinuité en 3D. Le calcul numérique converge vers cette épaisseur nulle en introduisant au passage une dépendance au maillage et une énergie dissipée qui tend vers zéro avec le raffinage du maillage.

Pour se limiter au cas de la dynamique qui nous intéresse, une autre manière de voir le phénomène de localisation est la suivante. Dans un milieu continu unidimensionnel, la vitesse de propagation des ondes est définie par : $c = \sqrt{E/\rho}$ avec E le module d'élasticité du milieu et ρ sa masse volumique. Si E devient négatif, ce qui arrive si le comportement est adoucisssant, alors la vitesse de propagation des ondes devient complexe. Autrement dit, dans le contexte des éléments finis, un élément qui passe le point d'instabilité matérielle voit la vitesse d'onde devenir imaginaire, ce qui bloque toute propagation d'information dans l'élément, celle-ci se retrouve "piégée" [Belytschko et Lasry, 1989]. Il y a alors localisation de la déformation et par conséquent, dépendance de la réponse au maillage.

Méthodes de régularisation

Il existe principalement quatre familles de solutions destinées à régulariser le problème de localisation des déformations :

– l'utilisation de milieux de Cosserat [de Borst et Sluys, 1991] ;

- le recours à des lois de comportement non locales (modèle non local intégral) [Pijaudier-Cabot et Bažant, 1987; Rodriguez-Ferran *et al.*, 2004; Germain, 2006] ;
- l'emploi de méthodes de gradients étendus (modèle non local différentiel) [Lasry et Belytschko, 1987, 1988; Peerlings *et al.*, 1998], [Rodriguez-Ferran *et al.*, 2005] ;
- et enfin l'utilisation de lois de comportement dépendantes à la vitesse de déformation [Wang et Sluys, 2000; Ladevèze *et al.*, 2000].

Toutes ces familles ont en commun d'introduire, explicitement ou implicitement dans les équations du comportement, une grandeur caractéristique qui pilote la taille de la zone de localisation indépendamment de la discrétisation spatiale réalisée.

Milieux de Cosserat : Cette solution consiste à enrichir la cinématique et la sténique du milieu continu en introduisant les rotations et les contraintes couples. Les problèmes de localisation dans les milieux de Cosserat ont été notamment étudiés par Sluys et de Borst [de Borst et Sluys, 1991].

Lois de comportement non local : Les lois de comportement non local, largement introduites dans [Pijaudier-Cabot et Bažant, 1987] consistent à considérer que certaines variables, en un point donné, dépendent de l'état de ce point mais aussi de son voisinage. Un choix classique en endommagement non local se base sur l'utilisation d'une déformation non locale $\underline{\tilde{\epsilon}}$ ou encore d'une variable dépendante de l'histoire (variable d'écrouissage isotrope de la surface d'endommagement par exemple) [Strömberg et Ristinmaa, 1996; Rodriguez-Ferran *et al.*, 2004; Di Luzio et Bažant, 2005]. La version non locale $\tilde{g}$ d'une grandeur locale g est calculée à partir de la relation :

$$\tilde{g}(x) = \frac{1}{\phi(x)} \int_V \phi(y,x)\, g(y)\, dy,\ \phi(x) = \int_V \phi(y,x)\, dy \tag{2.11}$$

avec $\phi(y,x)$ une fonction de pondération qui, de manière générale, dépend de la distance du point x au point y, d'une longueur caractéristique l_c et est isotrope. Un exemple de fonction ϕ est le suivant :

$$\phi(y,x) = \left[1 - \left(\frac{|x-y|}{l_c}\right)^2\right]^2 \text{ si } |x-y| < l_c,\ 0 \text{ sinon.} \tag{2.12}$$

En dehors de la zone d'influence définie par l_c, il n'y a aucune influence du domaine sur la valeur de la variable $\tilde{g}$. L'aspect régularisant de ces modèles apparaît de manière assez intuitive : en pondérant certaines variables locales par leur entourage sur une longueur caractéristique qui n'est pas en lien avec la taille du maillage, il n'y a plus de blocage de l'information, par conséquent plus de localisation des déformations et plus de dépendance au maillage. Une application de cette méthode au cas des composites a été proposée récemment dans [Germain, 2006].

Méthodes de gradients étendus : Ici l'idée est de ne pas s'arrêter au premier ordre pour le calcul des déformations. Ainsi, l'expression habituelle du tenseur des petites déformations $\epsilon = u_{,X}$ est remplacée par $\tilde{\epsilon} = u_{,X} + \alpha\, u_{,XXX} = \epsilon + \alpha\, \epsilon_{,XX}$ d'où le nom de gradient étendu [Lasry et Belytschko, 1987, 1988; Peerlings *et al.*, 1998; Rodriguez-Ferran *et al.*, 2005]. α est un paramètre qui contrôle la zone de localisation, il est implicitement lié à la grandeur interne nécessaire à la régularisation du modèle.

Lois de comportement dépendantes à $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\boldsymbol{e}}$: En dynamique, les comportements plastique (avec écrouissage négatif) et endommageable provoquent la localisation des déformations par blocage de la propagation d'onde. L'aspect régularisant de la viscoplasticité

a été étudié en détail dans [Needleman, 1988] à la fois sur des problèmes quasi-statiques et dynamiques. En essence, Needlemann démontre qu'avec un modèle viscoplastique, la vitesse de déformation plastique $\dot{\epsilon}_p$ dépend de l'état de contrainte, de l'histoire mais pas de variables flux (dérivées par rapport au temps) comme c'est le cas en plasticité du fait de la condition de consistance et du comportement. Cette propriété du modèle viscoplastique permet de sauvegarder la nature elliptique des équations en quasi-statique et hyperbolique en dynamique, à la condition que les contraintes restent faibles devant la raideur du matériau. Dans le dernier cas de la dynamique, la vitesse de l'onde reste réelle. La viscoplasticité permet donc intrinsèquement de régulariser le problème en assurant l'unicité de la solution [Wang et Sluys, 2000].

En ce qui concerne l'endommagement, P. Ladevèze a évoqué l'utilisation de modèles visqueux de type retard dès 1992 [Ladevèze, 1992]. O. Allix et J.-F. Deü ont alors proposé d'imposer, dans le cadre dynamique, une borne supérieure à la vitesse d'endommagement permettant ainsi de régulariser le problème [Allix et Deü, 1997; Ladevèze *et al.*, 2000]. Cette approche a été également mise en œuvre en quasi-statique [Gornet, 1996]. Un exemple de définition d'une telle vitesse d'endommagement est donné par la relation :

$$\dot{d} = \frac{1}{\tau}\left(1 - e^{-\alpha \langle f(Y) - d \rangle_{\geq 0}}\right) \tag{2.13}$$

avec $f(Y)$ une fonction du taux de restitution d'énergie, τ un paramètre matériau qui correspond à l'inverse de la vitesse d'endommagement maximal (τ en s) et α un paramètre qui pilote l'aspect plus ou moins fragile de la rupture, celle-ci étant plus brutale pour α élevé. Allix *et al.* ont récemment proposé un lien entre la vitesse maximale d'endommagement $1/\tau$ et une longueur caractéristique qui pilote la zone de localisation [Allix *et al.*, 2003]. À partir d'une analyse de perturbation harmonique, ils ont établi l'ordre de grandeur suivant :

$$l_c \simeq \frac{\tau}{\alpha}\sqrt{\frac{E}{\rho}} \tag{2.14}$$

La longueur caractéristique l_c étant en général choisie égale à l'épaisseur du pli élémentaire dans les méso modèles dédiés aux composites, connaissant τ il devient possible d'estimer α avec cette formule d'approximation et réciproquement.

Solution retenue pour le modèle 2

Dans le cadre des travaux réalisés lors de cette thèse, l'approche par modèle d'endommagement à effet retard a été retenue pour régulariser le Modèle 1. C'est en effet le seul choix en adéquation avec l'utilisation du code de calcul par éléments finis Abaqus, code qui ne permet pas, à un instant donné, d'accèder aux informations sur tout le maillage.

2.3.2 Écriture théorique du Modèle 2

Présentation analytique

Pour ce modèle, le potentiel thermodynamique énergie libre d'Helmoltz est identique à celui de l'expression 2.3. Les lois d'évolution qui en découlent sont donc strictement

identiques. Elles sont rapidement rappelées ci-dessous par commodité :

$$\left\{\begin{array}{l} \sigma_{11} = \dfrac{E_1\,(1-d_1)}{1-\nu_{12}\,\nu_{21}}\,\epsilon_{e11} + \dfrac{\nu_{12}\,E_2}{1-\nu_{12}\,\nu_{21}}\,\epsilon_{e22} \\ \sigma_{22} = \dfrac{E_2\,(1-d_2)}{1-\nu_{12}\,\nu_{21}}\,\epsilon_{e22} + \dfrac{\nu_{21}\,E_1}{1-\nu_{12}\,\nu_{21}}\,\epsilon_{e11} \\ \sigma_{12} = 2\,G_{12}\,(1-d_{12})\,(\epsilon_{t12}-\epsilon_{p12}) \\ Y_1 = -\rho\,\dfrac{\partial\,\psi}{\partial\,d_1} = \dfrac{1}{2}\,E_1\,(\epsilon_{e11})^2 \\ Y_2 = -\rho\,\dfrac{\partial\,\psi}{\partial\,d_2} = \dfrac{1}{2}\,E_2\,(\epsilon_{e22})^2 \\ Y_{12} = -\rho\,\dfrac{\partial\,\psi}{\partial\,d_{12}} = 2\,G_{12}\,(\epsilon_{t12}-\epsilon_{p12})^2 \\ R = \rho\,\dfrac{\partial\,\psi}{\partial\,p} = Q\,p^{\beta} \end{array}\right. \tag{2.15}$$

avec $\epsilon_{ei} = \epsilon_{ti}$ pour $i = 1, 2$. Les lois d'évolution d'endommagement sont maintenant formulées en taux sur le modèle de l'expression 2.13 :

$$\left\{\begin{array}{l} \dot{d}_1 = \dfrac{1}{\tau_1}\left(1 - e^{-\alpha_1\left\langle \frac{\sqrt{Y_1}-\sqrt{Y_{o1}}}{\sqrt{Y_{c1}}-\sqrt{Y_{o1}}} - d_1 \right\rangle_{\geq 0}}\right) \\ \dot{d}_2 = \dfrac{1}{\tau_2}\left(1 - e^{-\alpha_2\left\langle \frac{\sqrt{Y_2}-\sqrt{Y_{o2}}}{\sqrt{Y_{c2}}-\sqrt{Y_{o2}}} - d_2 \right\rangle_{\geq 0}}\right) \\ \dot{d}_{12} = \dfrac{1}{\tau_{12}}\left(1 - e^{-\alpha_{12}\left\langle \frac{\ln Y_{12}-\ln Y_{o12}}{\ln Y_{c12}-\ln Y_{o12}} - d_{12} \right\rangle_{\geq 0}}\right),\ Y_{12} \neq 0 \end{array}\right. \tag{2.16}$$

En ce qui concerne la plasticité, un modèle viscoplastique s'appuyant sur la théorie de la viscoplasticité proposée dans [Perzyna, 1966] a été retenu pour traduire la rigidification de la réponse en cas de chargement rapide. Le potentiel de dissipation Φ est obtenu sous la forme d'une fonction puissance du critère de plasticité :

$$\Phi = \frac{K}{m+1}\left\langle \frac{f}{K} \right\rangle_{\geq 0}^{m+1} \tag{2.17}$$

avec f toujours écrit sous la forme $f = f = \dfrac{|\sigma_{12}|}{1-d_{12}} - R - \sigma^y$. Dans l'expression de Φ, K est un paramètre qui régule l'intensité du phénomène viscoplastique et m est un paramètre matériau associé à une viscosité. Il définit implicitement une grandeur interne. Les lois d'évolution sont alors, pour les variables associées à la plasticité :

$$\left\{\begin{array}{l} \dot{\epsilon}_{p12} = \dfrac{\partial\,\Phi}{\partial\,\sigma_{12}} = \dot{\lambda}_p\,\dfrac{\partial\,f}{\partial\,\sigma_{12}} \\ \dot{p} = -\dfrac{\partial\,\Phi}{\partial\,R} = -\dot{\lambda}_p\,\dfrac{\partial\,f}{\partial\,R} \end{array}\right. \tag{2.18}$$

avec $\dot{\lambda}_p$ le multiplicateur qui est cette fois-ci une fonction explicite de l'état de contrainte (dont l'écart par rapport au domaine admissible provoque l'écoulement viscoplastique) et d'écrouissage :

$$\dot{\lambda}_p = \left\langle \frac{f}{K} \right\rangle_{\geq 0}^{m} \tag{2.19}$$

Enfin il reste à préciser que de manière à prendre en compte l'influence de la vitesse de déformation sur les modules d'élasticité et sur l'endommagement du stratifié, les paramètres E_1, E_2, G_{12}, $\underline{Y}_o$ et $\underline{Y}_c$, rassemblés sous la forme d'un vecteur $\underline{\xi}$ sont dépendants à $\dot{\epsilon}_e$ selon la relation :

$$\xi\left(\dot{\epsilon}_e\right) = \xi\left(\dot{\epsilon}_{ref}\right)\left[1 + D_\xi \ln\left(\frac{\dot{\epsilon}_e}{\dot{\epsilon}_{ref}}\right) + DD_\xi \ln\left(\frac{\dot{\epsilon}_e}{\dot{\epsilon}_{ref}}\right)^2\right] \tag{2.20}$$

directement inspirée des travaux réalisés dans [Rozycki, 2000]. L'intégration numérique du modèle est maintenant présentée.

Traitement algorithmique

L'algorithme d'intégration utilisé ici diffère assez fortement de celui présenté en partie 2.2.1. En ce qui concerne le cisaillement, un couplage fort est réalisé entre plasticité et endommagement. Ceci permet d'assurer strictement l'équilibre sur la totalité des variables thermodynamiques à la fin du pas de temps. L'intégration du comportement dans la direction des fibres n'est quant à elle pas modifiée.

L'algorithme d'intégration du cisaillement se décompose toujours en deux étapes qui sont la prédiction et la correction, constituant ainsi un algorithme de type "return mapping" [Simo et Hugues, 1998]. À l'issue de la première phase, l'état de contrainte et de taux de restitution d'énergie est utilisé pour former un résidu sur les variables de l'espace des déformations, variables intégrées au cours du temps à l'aide d'un schéma inconditionnellement stable d'Euler implicite. Concrètement, les expressions suivantes sont obtenues :

$$\begin{cases} \kappa_1^k = d_{12}^{n+1,k} - d_{12}^n - \Delta t^{n+1}\, \dot{d}_{12}^{n+1,k} \\ \kappa_2^k = \epsilon_{p12}^{n+1} - \epsilon_{p12}^n - \Delta t^{n+1}\, \dot{\epsilon}_{p12}^{n+1,k} \\ \kappa_3^k = p^{n+1,k} - p^n - \Delta t^{n+1}\, \dot{p}^{n+1,k} \end{cases} \tag{2.21}$$

avec $\underline{\kappa}$ le vecteur résidu de l'intégration temporelle du comportement et la notation $x^{n+1,k}$ qui représente l'estimation à l'itération k de la solution pour la variable x au temps t^{n+1}. Sous forme condensée cette relation s'écrit :

$$\underline{\kappa}^k = \underline{\chi}^{n+1,k} - \underline{\chi}^n - \Delta t^{n+1}\, \underline{\dot{\chi}}^{n+1,k} \tag{2.22}$$

À noter que dans l'expression précédente, le vecteur $\underline{\dot{\chi}}^{n+1,k}$ est une expression explicite d'une grandeur basée sur l'hypothèse de prédiction élastique : $\epsilon_{e12}^{n+1,0} = \epsilon_{t12}^{n+1} - \epsilon_{p12}^{n+1,0}$ où $\epsilon_{p12}^{n+1,0} = \epsilon_{p12}^n$, grandeur qui permet d'évaluer $\sigma_{12}^{n+1,0}$ et $Y_{12}^{n+1,0}$.
L'annulation du résidu s'effectue de manière classique par linéarisation des équations au cours d'un processus de Newton Raphson :

$$\underline{\kappa}^{k+1} = \underline{0} = \underline{\kappa}^k + \frac{\partial\, \underline{\kappa}}{\partial\, \underline{\chi}}\, \delta\underline{\chi}^{n+1,k} \tag{2.23}$$

La résolution de cette équation donne l'incrément de variables $\delta\underline{\chi}^{n+1,k}$ utilisé pour actualiser ces dernières $\underline{\chi}^{n+1,k+1} = \underline{\chi}^{n+1,k} + \delta\underline{\chi}^{n+1,k}$. Le processus est répété jusqu'à ce que le résidu soit annulé à une tolérance fixée par l'utilisateur du modèle. La méthode d'intégration numérique est maintenant synthétisée en algorithme 2.

En remarque, une extension de cet algorithme, non présentée ici, permet de distinguer les comportements de traction et de compression dans le sens des fibres [Marguet *et al.*, 2006]. Pour cela, le signe de la contrainte au début de chaque pas de temps sert à déterminer le comportement adéquat. La non linéarité de la réponse est traitée de la même manière qu'en traction avec de pseudo variables d'endommagement dédiées d_{c1} et d_{c2}.

Entrées : état au temps t^n ; $\Delta\underline{\epsilon}^{t,n+1}$
Sorties : état au temps t^{n+1}

Calcul des paramètres "visqueux" :
Calcul de la vitesse de déformation élastique $\dot{\epsilon}_e$ (relation 2.9)
Calcul des paramètres $\xi\left(\dot{\epsilon}_e\right)$ (relation 2.20)

Prédiction élastique :
$k = 0$
Hypothèses : $\epsilon_{p12}^{n+1,k} = \epsilon_{p12}^{n,k}$, $d_{12}^{n+1,k} = d_{12}^{n}$ et $p^{n+1,k} = p^n$
Calcul de forces thermodynamiques : $\sigma_{12}^{n+1,k}$, $Y_{12}^{n+1,k}$ et $R^{n+1,k}$ (relation 2.15)
Calcul du critère de plasticité $f^{n+1,k}$ et du multiplicateur $\dot{\lambda}_p^{n+1,k}$ (relation 2.6 et équation 2.19)
Calcul des flux : $\dot{d}_{12}^{n+1,k}$, $\dot{\epsilon}_{p12}^{n+1,k}$, $\dot{p}_{12}^{n+1,k}$ (relations 2.16 et 2.18)
Constitution du résidu et de sa norme $\underline{\kappa}^k$ et $||\underline{\kappa}^k||$, $j = 0$ (équation 2.21)

si $||\underline{\kappa}^k|| > tol$ **alors**
  Correction plastique :
  tant que $|||\underline{\kappa}^k|| > tol$ ***et*** $j < niterm$ **faire**
    Calcul du résidu tangent $\dfrac{\partial\,\underline{\kappa}}{\partial\,\underline{\chi}}$
    Calcul de l'incrément $\delta\underline{\chi}^{n+1,k}$
    Actualisation des variables $\underline{\chi}^{n+1,k} = \underline{\chi}^{n+1,k} + \delta\underline{\chi}^{n+1,k}$ soit $d_{12}^{n+1,k}$ et $\epsilon_{p12}^{n+1,k}$, $p^{n+1,k}$
    Recalcul des forces thermodynamiques $\sigma_{12}^{n+1,k}$ et de $Y_{12}^{n+1,k}$
    Recalcul du critère de plasticité $f^{n+1,k}$ et du multiplicateur $\dot{\lambda}_p^{n+1,k}$
    Recalcul des flux : $\dot{d}_{12}^{n+1,k}$, $\dot{\epsilon}_{p12}^{n+1,k}$, $\dot{p}_{12}^{n+1,k}$
    Constitution du résidu et de sa norme $\underline{\kappa}^k$ et $||\underline{\kappa}^k||$ $k = k+1$, $j = j+1$
  fin
fin

Algorithme 2 : Intégration du comportement de cisaillement du MODÈLE 2

2.3.3 Identification

Démarche adoptée

L'identification du modèle est réalisée à partir des courbes pseudo expérimentales générées afin de disposer d'une base de données de réponses virtuelles. Il s'agit d'essais de tractions et de cisaillements cycliques simulés avec le MODÈLE 1 au niveau du point d'intégration. Le chargement cyclique permet de solliciter l'aspect endommagement du modèle tandis que les différentes vitesses de sollicitations, de 10^{-3} à 10^{3} s^{-1}, font travailler la nature viscoplastique du modèle et les paramètres dépendant à $\dot{\epsilon}_e$.
Les paramètres du modèle sont identifiés au niveau local du point d'intégration exceptés $\underline{\alpha}$ et $\underline{\tau}$. Ceux-ci sont tout d'abord estimés à partir de l'équation 2.14 établie dans [Allix *et al.*, 2003].
La rupture des composites étant de nature fragile, il est décidé de fixer le paramètre α à 1000 dans un premier temps ($\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_{12} = 1000$). De plus, dans les calculs effectués, l'épaisseur du pli est de 0,1 mm. Au regard des remarques précédentes, ces valeurs conduisent à prendre une longueur caractéristique $l_c = 0,1$ mm. Connaissant E_1, E_2, G_{12} et ρ, il devient très simple de calculer les paramètres $\underline{\tau}$ du modèle, paramètres qui définissent la vitesse maximale d'endommagement. Les résultats rassemblés en tableau 2.2 sont obtenus avec $\rho = 1{,}9\,10^{-9}$ T mm^{-3}.

Détermination du paramètre τ			
	Module d'élasticité	Vitesse d'onde	τ
Sens des fibres	30780 MPa	4025 m s^{-1}	25 μs
Cisaillement	6400 MPa	2600 m s^{-1}	38 μs

TAB. 2.2 – Détermination de la vitesse maximale d'endommagement $1/\tau_i$ $(i = 1, 2, 12)$

Pour le reste des paramètres, l'identification est faite par minimisation d'une fonction coût Γ. Celle-ci est définie comme étant l'erreur en contrainte au sens des moindres carrés entre les données pseudo expérimentales d'entrée et la réponse du modèle sollicité avec la consigne de déformation pseudo expérimentale. Mathématiquement, la fonction coût s'écrit :

$$\Gamma = \sum_{i=1}^{n} \left(\underline{\sigma}_i^{xp} - \underline{\sigma}_i^{th}\left(\underline{\Omega}\right)\right)^T \underline{\underline{k}}_i \left(\underline{\sigma}_i^{xp} - \underline{\sigma}_i^{th}\left(\underline{\Omega}\right)\right) \tag{2.24}$$

avec n le nombre de courbes d'essais sur lesquelles porte l'identification ; $\underline{\Omega}$ le vecteur des paramètres du modèle ; $\underline{\underline{k}}_i$ une matrice diagonale de coefficients de pondération ; enfin $\underline{\sigma}_i^{xp}$ et $\underline{\sigma}_i^{th}\left(\underline{\Omega}\right)$ les vecteurs des contraintes de Cauchy expérimentales et théoriques relatifs à l'essai i et au jeu de paramètres $\underline{\Omega}$. Des contraintes linéaires et découplées portant sur le vecteur $\underline{\Omega}$ sont introduites pour définir l'espace admissible des paramètres :

$$\begin{cases} b_{i;inf} - \Omega_i \leq 0 \\ \Omega_i - b_{i;sup} \leq 0 \end{cases} \tag{2.25}$$

En pratique l'identification est réalisée en deux phases, l'une pour le comportement dans la direction des fibres, l'autre pour le comportement de cisaillement. L'optimisation est réalisée à l'aide d'un algorithme de recherche directe disponible dans le logiciel Matlab [Matlab, 2007]. Son fonctionnement est expliqué succinctement en algorithme 3.

Cet algorithme d'optimisation, sans calcul explicite de gradient comme c'est le cas avec les méthodes de descente classique, a été choisi pour sa simplicité de mise en œuvre ; pour sa robustesse : en cas de jeu de paramètres conduisant à un coût imaginaire, le calcul se

Entrées : Vecteur initial des paramètres $\underline{\Omega}^0$
Sorties : Vecteur résultat $\underline{\Omega}^k$

Initialisation :
$k = j = 0$, calcul de la fonction coût Γ^k associée à $\underline{\Omega}^k$
Choix d'une direction de recherche $\underline{r}^k$ (vecteur unitaire de l'espace de paramètres choisi arbitrairement)
Choix d'une amplitude recherche $a^k \underline{\underline{A}}$ (a^k est un réel et $\underline{\underline{A}}$ est une matrice diagonale qui permet de pondérer l'amplitude de recherche à la plage admissible de chacun des paramètres)

Recherche directe :
tant que $\Gamma^k > tol$ ***et*** $j < niterm$ **faire**
  Translation dans l'espace des paramètres, $\underline{\Omega}^{k+1} = \underline{\Omega}^k + a^k \underline{\underline{A}}\,\underline{r}^k$
  Évaluation du nouveau coût Γ^{k+1}
  si $\Gamma^{k+1} < \Gamma^k$ **alors**
    Phase d'extension :
    Augmentation de l'amplitude de recherche $a^{k+1} > a^k$
    Conservation de la direction de recherche $\underline{r}^{k+1} = \underline{r}^k$
    $k = k+1$, $j = j+1$, calcul de $\underline{\Omega}^k$ et de sa fonction coût Γ^k associée
  sinon
    Conservation de l'amplitude de recherche $a^{k+1} = a^k$
    Phase de changement de direction-contraction :
    pour *Un nombre fini de fois* **faire**
      1. Changement de la direction de recherche $\underline{r}^{k+1} \neq \underline{r}^k$ selon des règles empiriques
      2. Calcul de $\underline{\Omega}^{k+1}$ et de sa fonction coût Γ^{k+1} associée
      si $\Gamma^{k+1} < \Gamma^k$ **alors**
        $k = k+1$, $j = j+1$, sortir de la boucle
      fin
    fin
    si $\Gamma^{k+1} > \Gamma^k$ **alors**
      Contraction de l'amplitude de recherche $a^{k+1} < a^k$
      Réinitialisation de la direction de recherche $\underline{r}^{k+1} = \underline{r}^k$
      Retour à l'étape 1.
    fin
  fin
fin

Algorithme 3 : Méthode de recherche directe

poursuit simplement dans une autre direction ; et pour sa capacité à traiter de nombreux paramètres [Lewis *et al.*, 2000]. Avec cette méthode, il n'existe par contre absolument aucune garantie de converger vers un optimum global. Pour ces travaux, le jeu de paramètres résultats est condidéré comme acceptable sous les conditions suivantes :

- l'erreur obtenue pour Γ est faible, i.e. le modèle reproduit fidèlement les mesures expérimentales ;
- le modèle d'intégration se comporte correctement : nombre d'itérations à convergence satisfaisant ;
- l'ordre de grandeur des paramètres est "physiquement acceptable".

Résultats obtenus

L'approche pragmatique adoptée donne des résultats très satisfaisants qui sont sans doute la conséquence d'un avantage très fort : le vecteur initial des paramètres n'est pas choisi au hasard, il s'agit du vecteur des paramètres du Modèle 1. Avec cette connaissance il est possible de restreindre très rapidement l'espace de recherche des paramètres et d'arriver à un résultat plus que satisfaisant comme le démontre les figures 2.15 et 2.16.

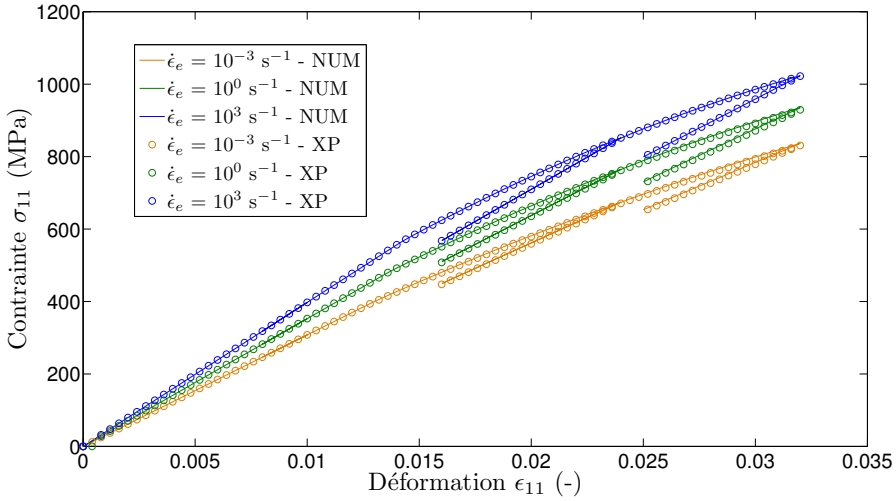


Fig. 2.15 – Courbes de réponses pseudo expérimentales et courbes numériques Modèle 2 - traction [0]

Ces courbes sont obtenues avec le jeu de paramètres référencé en tableau 2.3.

Au vue de la qualité de l'identification, il apparaît que l'introduction de la viscoplasticité, de l'endommagement à effet retard et de la méthode d'intégration couplée proposée en cisaillement sont des choix pertinents.

Le modèle étant maintenant identifié au niveau local, il reste à tester sa bonne intégration au code de calcul par éléments finis Abaqus, module Explicit, et à affiner les valeurs des paramètres qui pilotent la rupture, les paramètres $\underline{\alpha}$ et $\underline{\tau}$ du modèle d'endommagement à effet retard.

2.4 Résultats obtenus

La démarche utilisée ici est similaire à celle employée en partie 2.2.2 afin de qualifier le Modèle 1. Des calculs sont réalisés au niveau du point d'intégration pour vérifier la bonne intégration de la loi de comportement dans le code de calcul Abaqus, module Explicit.

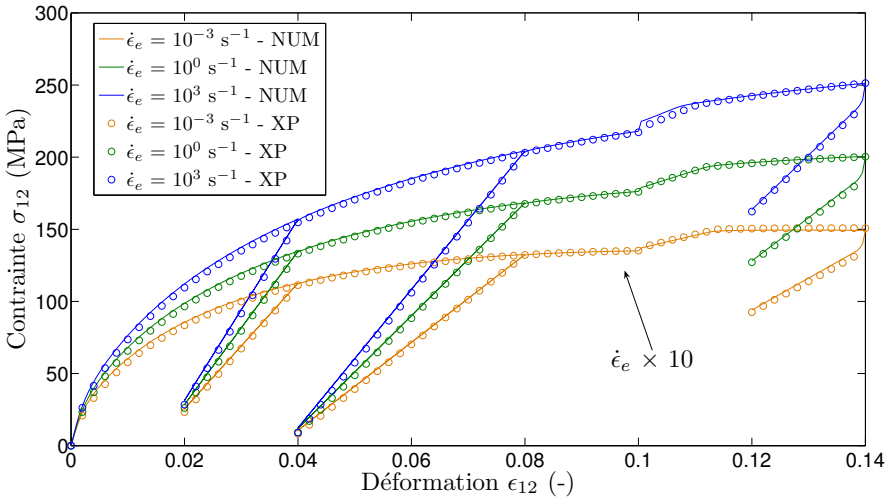


FIG. 2.16 – Courbes de réponses pseudo expérimentales et courbes numériques MODÈLE 2 - cisaillement [±45]

Paramètres du MODÈLE 2				
Paramètre	Unité	Valeur	D	DD
$E_1 = E_2$	MPa	30780	0,021	-
G_{12}	MPa	6396	0,015	-
$\nu_{12} = \nu_{21}$	-	0,13	-	-
σ^y	MPa	3,36	-	-
Q	MPa	17316	-	-
β	-	0,79	-	-
K	MPa	10,59	-	-
m	MPa	13,46	-	-
$Y_{o1} = Y_{o2}$	MPa	2,523	0,0417	-
$Y_{c1} = Y_{c2}$	MPa	275,38	-0,018	$2\,10^{-4}$
Y_{o12}	MPa	0,0088	0,017	-
Y_{c12}	MPa	281	0,079	0,0064
$\alpha_1 = \alpha_2$	-	1000	-	-
$\tau_1 = \tau_2$	μs	25	-	-
α_{12}	-	1000	-	-
τ_{12}	μs	38	-	-
ρ	T mm^{-3}	$1{,}9\,10^{-9}$	-	-

TAB. 2.3 – Valeur des paramètres déterminés par identification

Consécutivement, des simulations numériques sur éprouvettes virtuelles sont menées afin de calibrer les valeurs du critère de rupture local et de s'assurer du bon comportement de la loi.

2.4.1 Validations élémentaires

L' exemple de la coque carrée avec encastrement iso-statique et vitesse imposée variable est repris de la partie 2.2.2. Les réponses obtenues au niveau du point d'intégration sont tracées en figures 2.17 pour la traction et figures 2.18 pour le cisaillement.

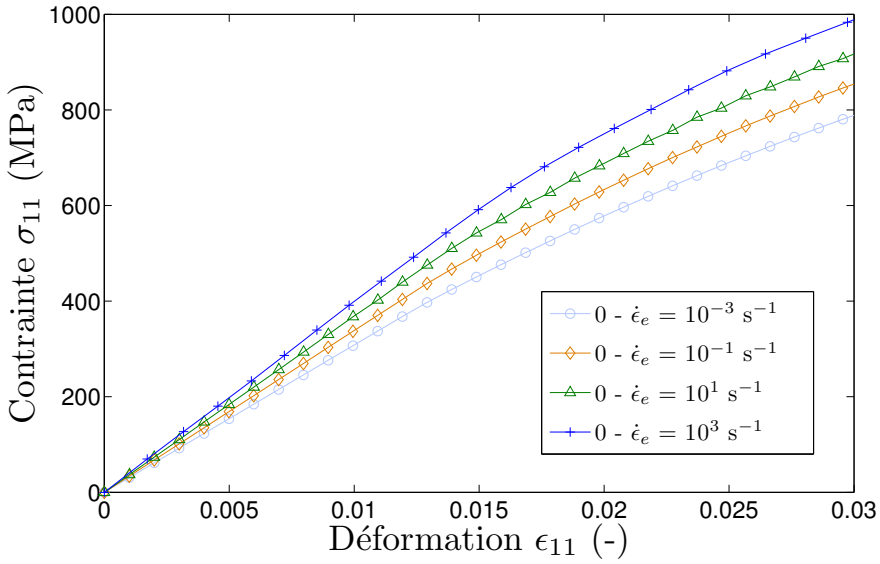


FIG. 2.17 – Réponse du MODÈLE 2 au niveau du point d'intégration sous sollicitations quasi-statiques et dynamiques - traction [0]

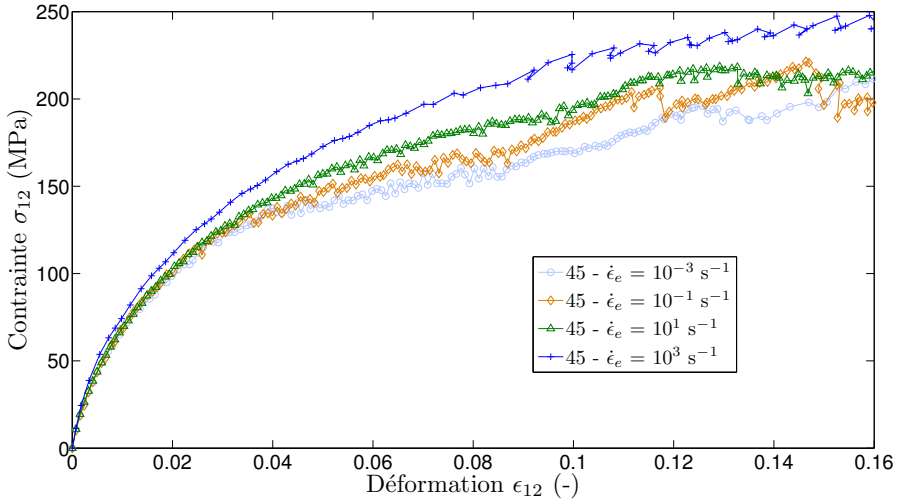


FIG. 2.18 – Réponse du MODÈLE 2 au niveau du point d'intégration sous sollicitations quasi-statiques et dynamiques - cisaillement [±45]

Ces courbes sont bien identiques à celle obtenues sous Matlab lors de la phase d'iden-

tification.

2.4.2 Validations sur structures

Les maillages des éprouvettes virtuelles et les conditions limites utilisés, sont les mêmes que dans la partie 2.2.2 (voir figure 2.10). Si pour le MODÈLE 1 ces calculs visaient en partie à voir l'influence des paramètres $\underline{Y}_r$ mettant fin aux calculs d'endommagement au niveau local, le premier objectif est ici de déterminer les paramètres $\underline{\alpha}$ et $\underline{\tau}$ qui pilotent la rupture du pli élémentaire, sans interrompre l'évaluation des endommagements. La différence est importante, avec le MODÈLE 2 et quoi qu'il arrive, la rupture du pli survient lorsque l'endommagement atteint sa limite 1.

Les réponses des éprouvettes sollicitées à $\dot{\epsilon}_e = 10^3$ s^{-1} sont tracées pour les quatre maillages réalisés en figures 2.19 et figures 2.20. Les mêmes grandeurs de représentation qu'en partie 2.2.2 sont utilisées.

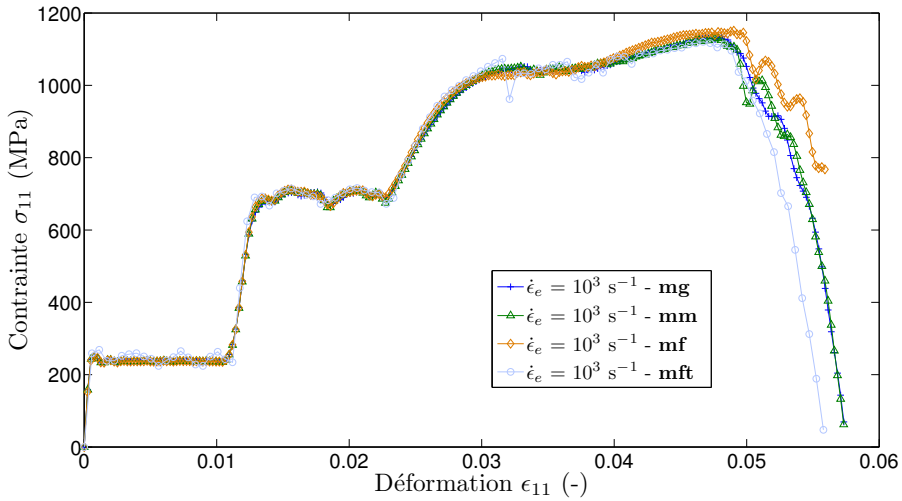


FIG. 2.19 – Réponses macroscopiques sur éprouvettes virtuelles - MODÈLE 2, traction

Première constatation, quel que soit le maillage mis en œuvre, la réponse sur la structure est identique : même aspect général, contraintes et déformations à rupture strictement identiques. D'un point de vue quantitatif, ces courbes se superposent pratiquement parfaitement (aux oscillations dues aux allers et retours des ondes dans la structure près) avec celles du comportement local tracées en figures 2.17 et 2.18.
L'observation des champs d'endommagements d_1 et d_{12} tracés en figures 2.21 et figures 2.22, confirme les observations réalisées sur les courbes de réponses macroscopiques.

La distribution de l'endommagement est indépendante au maillage. De plus, les zones très fortement endommagées ne sont pas restreintes à des bandes d'un seul élément de largeur. Le phénomène de localisation des déformations est donc régularisé, ce qui explique sans doute l'indépendance de la réponse à la discrétisation spatiale. D'un point de vue physique, ceci signifie que la rupture de la structure consomme une quantité finie d'énergie qui est dissociée du maillage utilisé et qui ne tend pas vers zéro lorsque le maillage est très fortement raffiné. Il peut aussi être observé que, contrairement aux résultats issus du MODÈLE 1, la zone de rupture est unique.

Reste la difficile question de la détermination des paramètres $\underline{\alpha}$ et $\underline{\tau}$. À la vue des résul-

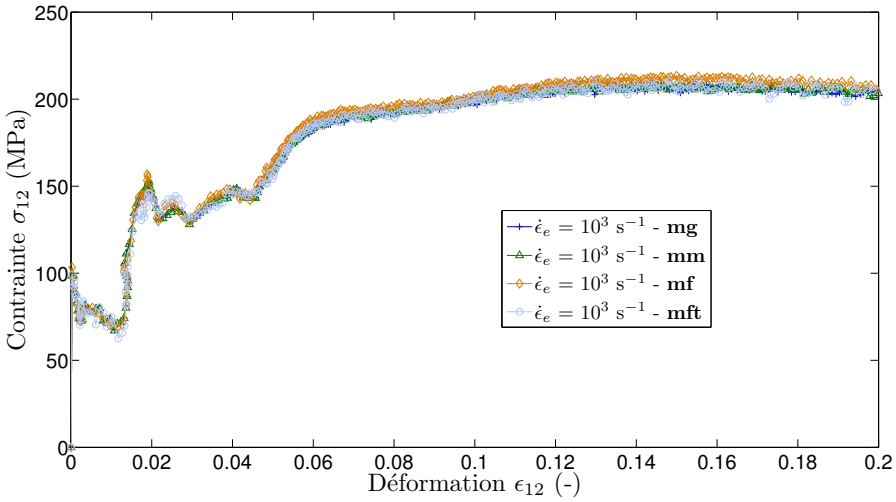


FIG. 2.20 – Réponses macroscopiques sur éprouvettes virtuelles - MODÈLE 2, cisaillement

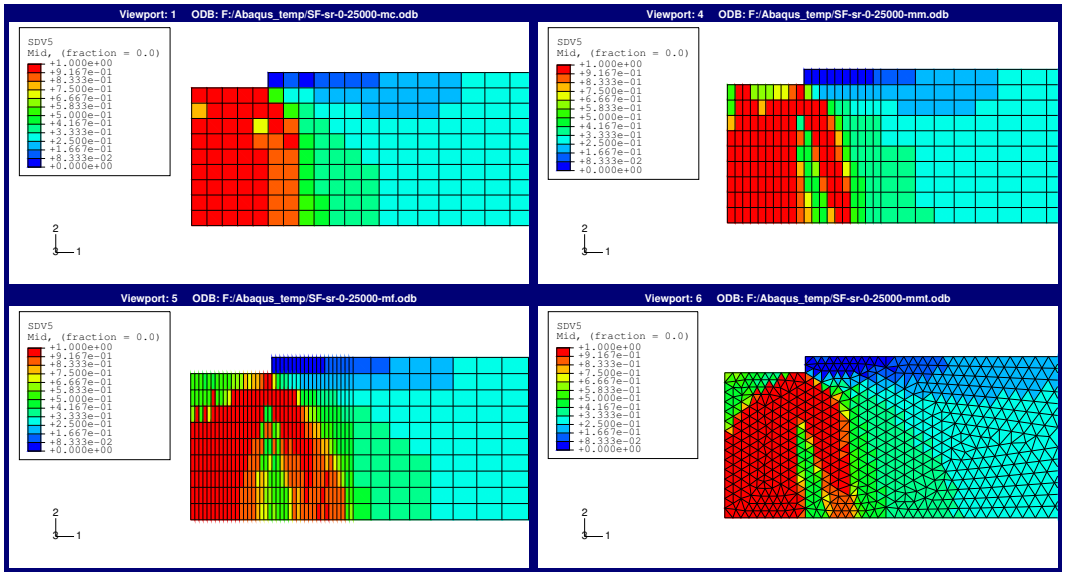


FIG. 2.21 – Champs d'endommagement d_1 sur les éprouvettes virtuelles - MODÈLE 2, absence de localisation

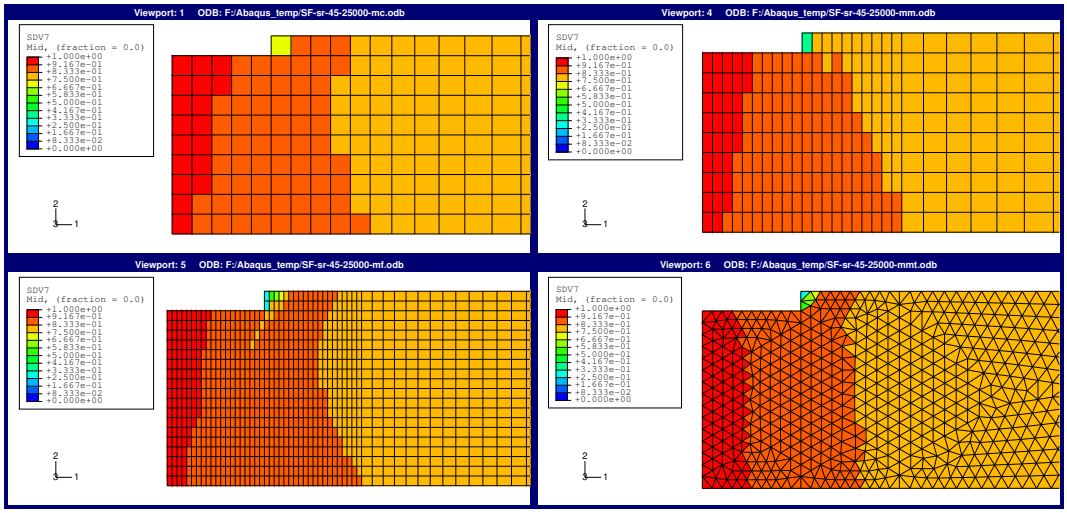


FIG. 2.22 – Champs d'endommagement d_{12} sur les éprouvettes virtuelles - MODÈLE 2, absence de localisation

tats obtenus il apparaît que le choix d'un fort α pour reproduire un comportement fragile est bien indiqué (un calcul mené avec α égal à 1 montre que l'éprouvette s'effondre à un niveau d'effort quasiment double du niveau actuel et de manière bien plus ductile). Pour τ la formule 2.14 proposée dans [Allix *et al.*, 2003] donne des résultats qui permettent de visualiser clairement la zone d'endommagement élevé, la zone de localisation "physique" (par opposition à la localisation numérique qui est la conséquence du changement de nature des équations du problème). Pour calibrer τ sur des bases plus physiques, il conviendrait sans doute de réaliser des analyses non locales sur l'éprouvette pour cartographier la présence des fissures ou encore de mesurer la vitesse de propagation du front de fissure lors de la rupture afin de déterminer la vitesse maximale du front d'endommagement.

La figure 2.23 montre la possibilité de piloter la rupture à partir des paramètres α et τ. Les courbes contrainte/déformation présentées sont obtenues sur une éprouvette à 0^o avec maillage mm pour deux jeux de paramètres α, τ et toujours pour une vitesse de sollicitation $\dot{\epsilon}_e = 10^3$ s^{-1}. En haut, la courbe de réponse est tracée, en bas les champs d'endommagement sont comparés (le champ des d_1 obtenu pour $\alpha = 1000$ étant à gauche).

La courbe de réponse obtenue pour $\alpha = 100$ et $\tau = 1$ μs est identique à celle obtenue avec les valeurs $\alpha = 1000$ et $\tau = 25$ μs utilisées précédemment, excepté pour la rupture qui a lieu bien avant. Ceci est relativement attendu étant donné qu'en divisant τ par un facteur 25, la vitesse maximale d'endommagement est multipliée par un même facteur. D'un point de vue quantitatif, la rupture avec le second calcul se produit pour une contrainte d'approximativement 1000 MPa et une déformation de 0,032. C'est exactement ce qui est observé expérimentalement en figure 2.6.
Les profils d'endommagement varient par contre assez fortement d'une simulation à l'autre. Le calcul avec les nouveaux paramètres ne localise toujours pas, mais en rendant le matériau plus fragile la rupture devient pilotée par la concentration de contrainte. En effet, cette fois-ci l'éprouvette ne casse pas au centre comme c'était le cas avant mais sur une ligne très légèrement oblique, partant de l'angle vif. Cette diffusion moindre de l'endommagement semble être en adéquation avec la nature plus fragile du matériau. Dernier point, la longueur caractéristique du modèle est proportionnelle à τ/α (voir équation 2.14). Dans

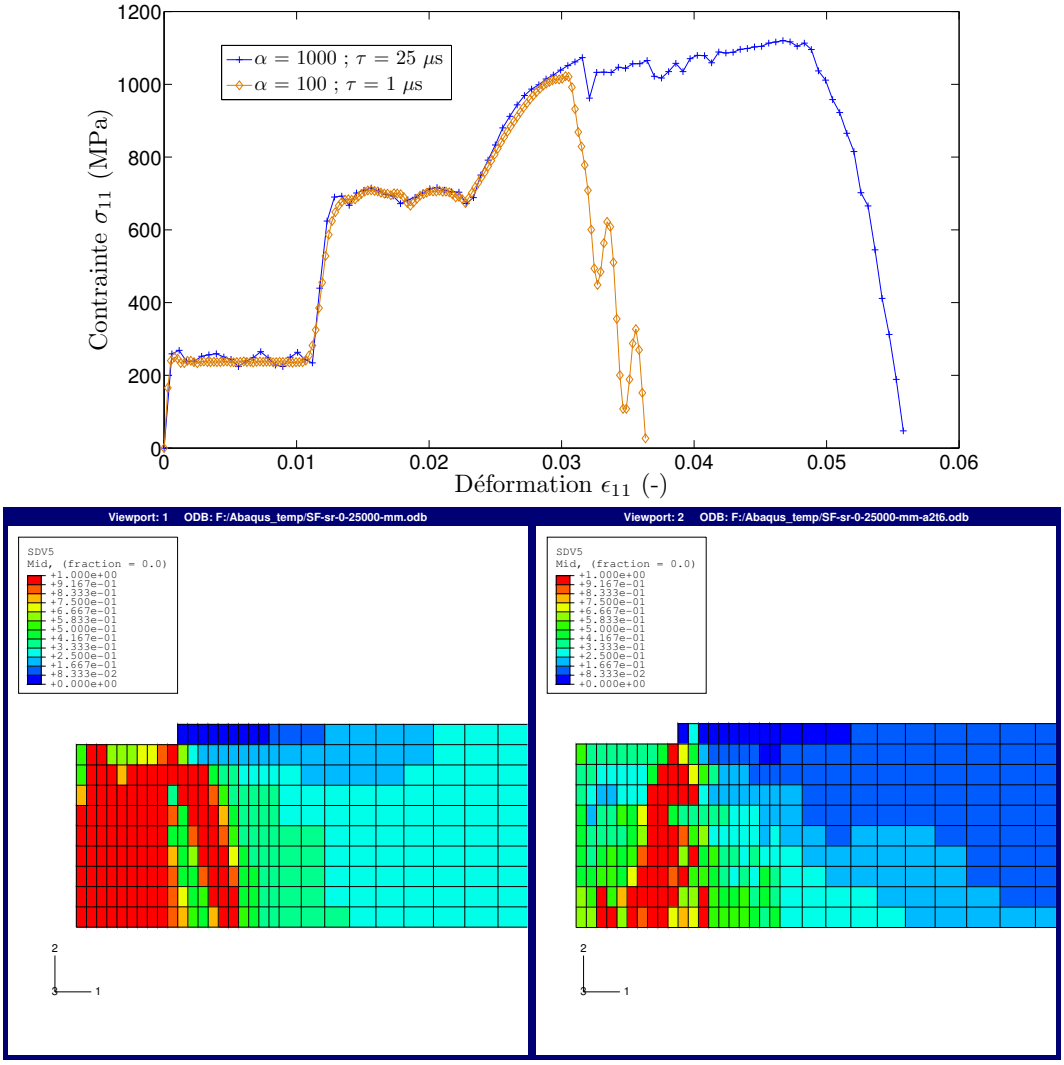


FIG. 2.23 – Influence des paramètres $\underline{\alpha}$ et $\underline{\tau}$ sur la rupture de l'éprouvette

le premier cas, $\tau/\alpha = 2{,}5\,10^{-8}$ et dans le second cas $\tau/\alpha = 1\,10^{-8}$. Conclusion, la longueur caractéristique associée au modèle est plus grande pour le premier calcul... ce qui est effectivement vérifié sur la figure 2.23, la bande d'éléments très fortement endommagés étant plus grande dans le premier cas que dans le second.

Finalement il ressort de cette étude qu'il apparaît bien possible de régler la rupture du pli élémentaire via les paramètres α et τ du modèle. Cette phase de calibrage n'est toutefois possible que sur un calcul structurel forcément plus coûteux qu'un calcul local réalisé au niveau du point d'intégration. Mieux, des ordres de grandeurs tout à fait acceptables physiquement peuvent être obtenus en termes de contrainte et déformation à rupture.

2.5 Conclusion

En conclusion, l'utilisation du MODÈLE 2, pour des composites tissés soumis à des chargements quasi-statique et dynamique, parvient à améliorer significativement la simulation numérique jusqu'à rupture de ces matériaux. Les phénomènes de rupture précoce des éprouvettes et surtout de localisation et de dépendance au maillages, présents dans le MODÈLE 1, sont corrigés. Ce résultat est la conséquence de l'utilisation d'un modèle à effet retard qui induit deux différences fondamentales entre les deux modèles :

- la vitesse maximale d'endommagement est bornée dans le MODÈLE 2, ce qui n'est pas le cas du MODÈLE 1 ;
- le critère de rupture est local dans le MODÈLE 1 (paramètre Y_r) ; il est non local dans le MODÈLE 2 (piloté par $\underline{\alpha}$ et $\underline{\tau}$, la rupture n'apparaissant que pour $d = 1$).

Nous allons maintenant nous intéresser à la caractérisation et à la modélisation du comportement mécanique des âmes en nids d'abeilles Nomex. Dans le chapitre suivant, les essais de caractérisation sont présentés ainsi que les principaux résultats obtenus.

Bibliographie

ALLIX, O. et DEÜ, J.-F. (1997).
Delayed-damage modelling for fracture predicition of laminated composites under dynamic loading.
Engineering Transactions, 45(1):29 – 46.

ALLIX, O., FEISSEL, P. et THEVENET, P. (2003).
A delay damage mesomodel of laminates under dynamic loading : Basic aspects and identification issues.
Computers and Structures, 81(12):1177 – 1191.

ALLIX, O., GILLETTA, D. et LADEVÈZE, P. (1985).
Mechanical behaviour of elementary constituents of laminates.
In Fifth International Conference on Composite Materials, ICCM-V.

BELYTSCHKO, T. et BAŽANT, Z. (1985).
Wave propagation in a strain softening bar : exact solution.
Journal of Engineering Mechanics, 111:381–389.

BELYTSCHKO, T. et LASRY, D. (1989).
Study localization limiters for strain softening dynamics.
Computers and Structures, 33(3):707–715.

Berthelot, J. (2005).
Matériaux composites.
4e édition édition.

Bordreuil, C. et Hochard, C. (2004).
Finite element computation of woven ply laminated composite structures up to rupture.
Applied Composite Materials, 11(3):127 – 143.

Coutellier, D. et Rozycki, P. (2000).
Multi-layered multi-material finite element for crashworthiness studies.
Composites : Part A, 31:841–851.

Coutellier, D., Walrick, J. et Geoffroy, P. (2006).
Presentation of a methodology for delamination detection within laminated structures.
Composites Science and Technology, 66:837–845.

de Borst, R. (2004).
Encyclopedia of Computational Mechanics - Damage, Material Instabilities, and Failure.
Wiley.

de Borst, R. et Sluys, L. (1991).
Localisation in a cosserat continuum under static and dynamic loading conditions.
Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 90(1-3):805 – 827.

Di Luzio, G. et Bažant, Z. (2005).
Spectral analysis of localization in nonlocal and over-nonlocal materials with softening plasticity or damage.
International Journal of Solids and Structures, 42:6071–6100.

Gay, D. (2006).
Matériaux composites.
Hermes, 4e édition édition.

Germain, N. (2006).
Modélisation non locale de l'endommagement dans les structures composites.
Thèse de doctorat, ENSMP - Centre des Matriaux.

Gornet, L. (1996).
Simulation des endommagements et de la rupture dans les composites stratifiés.
Thèse de doctorat, École Normale Supérieure de Cachan.

Hill, R. (1958).
A general theory of uniqueness and stability in elastic-plastic solids.
Journal of Mechanics, Physics and Solids, 6:236–249.

Hochard, C., Aubourg, P. et Charles, J. (2001).
Modelling of the mechanical behaviour of woven-fabric cfrp laminates up to failure.
Composites Science and Technology, 61(2):221 – 230.

Hochard, C., Payan, J. et Montagnier, O. (2005).
Design and computation of laminated composite structures.
Composites Science and Technology, 65:467–474.

Johnson, A. (2001).
Modelling fabric reinforced composites under impact loads.
Composites - Part A : Applied Science and Manufacturing, 32(9):1197 – 1206.

JOHNSON, G. et COOK, W. (1985).
Fracture characteristics of three metals subjected to various strains, strain rates, temperatures and pressures.
Engineering Fracture Mechanics, 21(1):31–48.

LADEVÈZE, P. (1986).
Sur la mécanique de l'endommagement des composites.
In Bathias C. and Menkès C.

LADEVÈZE, P. (1992).
A damage computational method for composite structures.
Computers and Structures, 44:79 – 87.

LADEVÈZE, P., ALLIX, O., DEÜ, J.-F. et LÉVÊQUE, D. (2000).
Mesomodel for localisation and damage computation in laminates.
Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 183(1):105 – 122.

LADEVÈZE, P., ALLIX, O., GORNET, L., LÉVÊQUE, D. et PERRET, L. (1998).
A computation damage mechanics approach for laminates : Identification and comparison with experimental results.
Elsevier.

LADEVÈZE, P. et LE DANTEC, E. (1992).
Damage modelling of the elementary ply for laminated composites.
Composites Science and Technology, 43:257–267.

LADEVÈZE, P. et LUBINEAU, G. (2001).
On a damage mesomodel for laminates : micro-meso relationships, possibilities and limits.
Composites Science and Technology, 61:2149–2158.

LADEVÈZE, P. et LUBINEAU, G. (2003).
On a damage mesomodel for laminates : micromechanics basis and improvement.
Mechanics of Materials, 35:763–775.

LADEVÈZE, P., LUBINEAU, G. et MARSAL, D. (2006).
Towards a bridge between the micro- and the mesomechanics of delamination for laminated composites.
Composites Science and Technology, 66:298–712.

LASRY, D. et BELYTSCHKO, T. (1987).
Gradient type localization limiters for strain softening materials.
In Advances in inelastic analysis, symposium, ASME winter annual meeting, dec 1987, Boston.

LASRY, D. et BELYTSCHKO, T. (1988).
Localization limiters transient problems.
International Journal of Solids and Structures, 24(6):581–597.

LÉVÊQUE, D. (1998).
Analyse de la tenue au délaminage des composites stratifiés : identification d'un modèle d'interface interlaminaire.
Thèse de doctorat, ENS de Cachan.

LEWIS, R., TORCZON, V. et TROSSET, M. (2000).
Direct search methods : then and now.
International Journal of Computational and Applied Mathematics, 124:191–207.

Linhone, C. (1995).
Un modèle de comportement elastoplastique endommageable pour les structures composites stratifiées.
Thèse de doctorat, ONERA.

Maire, J.-F. (1992).
Étude théorique et expérimentale du comportement des matériaux composites en contraintes planes.
Thèse de doctorat, Université de Franche-Comté, Besançon.

Marguet, S., Rozycki, P. et Gornet, L. (2006).
A rate dependent constitutive model for glass-fibre/epoxy-matrix woven fabrics.
Computers, Materials and Continua, 4(3):119–135.

Matlab (2007).
Genetic algorithm and direct search toolbox 2 user's guide.
Rapport technique, The MathWorks.

Multiplast (2007).
http ://www.multiplast-yachts.com/indexfr.cfm.

Needleman, A. (1988).
Material rate dependence and mesh sensitivity in localization problems.
Computer Methods in Applied Mechanics Engineering, 67:69–85.

Peerlings, R., de Borst, R., Brekelmans, W. et Geers, M. (1998).
Gradient-enhanced damage modelling of concrete fracture.
Mechanics of Cohesive-Frictional Materials, 3(4):323 – 342.

Perzyna, P. (1966).
Fundamental problems in viscoplasticity.
Advances in Applied Mechanics, 9:243–377.

Pijaudier-Cabot, G. et Bažant, Z. (1987).
Nonlocal damage theory.
ASCE Journal of Engineering Mechanics, 113(10):1512–1533.

Prombut, P., Michel, L., Lachaud, F. et Barrau, J. (2006).
Delamination of multidirectional composite laminates at 0 theta ply interfaces.
Engineering Fracture Mechanics, 73:2427–2442.

Rice, J. (1980).
Note some features theory localization deformation.
International Journal of Solids and Structures, 16(7):597–605.

Rodriguez-Ferran, A., Morata, I. et Huerta, A. (2004).
Efficient and reliable nonlocal damage models.
Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 193:3431–3455.

Rodriguez-Ferran, A., Morata, I. et Huerta, A. (2005).
A new damage model based on non-local displacements.
International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 29:473–493.

ROZYCKI, P. (2000).
Contribution au développement de lois de comportement pour matériaux composites soumis à l'impact.
Thèse de doctorat, LAMIH Valenciennes.

RUDNICKI, J. et RICE, J. (1975).
Conditions for the localization of deformation in pressure sensitive dilatent materials.
Journal of Mechanics, Physics and Solids, 23:371–394.

SIMO, J. et HUGUES, T. (1998).
Computational Inelasticity.
Springer.

STÖREN, S. et RICE, J. (1975).
Localized necking thin sheets.
Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 23(6):421–441.

STRÖMBERG, L. et RISTINMAA, M. (1996).
FE-formulation of a non local plasticity theory.
Computer Methods in Applied Mechanics Engineering, 136:127–144.

WANG, W. et SLUYS, L. (2000).
Formulation of an implicit algorithm for finite deformation viscoplasticity.
International Journal of Solids and Structures, 37:7329–7348.

Chapitre 3

Caractérisation mécanique des nids d'abeilles Nomex

Ce chapitre est consacré à la caractérisation expérimentale du comportement mécanique hors plan des âmes en nids d'abeilles Nomex. La simulation numérique des principaux essais disponibles dans la littérature nous a conduit à proposer un essai de cisaillement sur éprouvette quad-blocs. La campagne expérimentale, menée sur des âmes en nids d'abeilles Nomex à cellules de sections hexagonale (NIDA-H-12,7) et rectangulaire (NIDA-R-40), valide l'approche retenue et met en évidence le comportement très fortement non linéaire de ces matériaux en compression hors plan. Une discussion sur les espaces de représentation des résultats obtenus démontre l'intérêt d'utiliser les contraintes de Kirchhoff et déformations non linéaires en référentiel en rotation propre. Enfin, une étude détaillée des essais de cisaillement permet de proposer des critères de conception d'éprouvette en évaluant les effets de bords libres, les effets d'interface et les effets de structure.

Sommaire

3.1 Introduction 68
3.2 Essais usuels de caractérisation des âmes 73
3.3 Campagne expérimentale sur âmes Nomex 78
3.4 Résultats obtenus 82
3.5 Analyse critique de l'essai quad-blocs 91
3.6 Conclusion 98

3.1 Introduction

Les âmes en nids d'abeilles Nomex sont des matériaux composites très fortement multi-échelles. Après une présentation de leurs applications, de leurs constituants et principaux procédés de fabrication, une revue des essais de caractérisation des propriétés mécaniques macroscopiques des âmes en nids d'abeilles Nomex est proposée. Les essais de compression et de cisaillement hors plan réalisés au cours de ces travaux, mettant en œuvre des éprouvettes manufacturées par la société Multiplast [Multiplast, 2007], sont alors présentés. Ils portent sur deux types d'âmes :

- nids d'abeilles à cellules de section hexagonale de diamètre 6,4 mm, de hauteur 12,7 mm, de masse volumique 64 kg m^{-3}, d'épaisseur de simple paroi 52 μm : NIDA-H-12,7 ;
- nids d'abeilles à cellules de section rectangulaire de diamètre 6,4 mm, de hauteur 40 mm, de masse volumique 64 kg m^{-3}, d'épaisseur de simple paroi 52 μm : NIDA-R-40.

Les résultats obtenus par analyse d'images montrent la qualité de la cinématique appliquée. Sur cette base, les courbes de réponse en contrainte/déformation illustrent la nature fortement anisotrope et non linéaire du comportement mécanique des nids d'abeilles Nomex. Enfin, une étude portant sur la conception des éprouvettes de cisaillement hors plan fait ressortir les points à respecter pour éviter l'influence de nombreux effets physiques pouvant parasiter les mesures.

3.1.1 Nids d'abeilles Nomex

Les âmes en nids d'abeilles Nomex ont été introduites dans les années 1950-60 après l'invention, par la firme américaine Du Pont de Nemours [Pinzelli, 1993], du papier Nomex. Leurs principales caractéristiques sont une très bonne rigidité hors plan, une masse volumique très faible, une absence de sensibilité à la corrosion, de très faibles conductivités thermique et électrique et enfin, une très bonne résistance au feu. Toutes ces raisons les ont rapidement imposées dans des applications diverses comme les panneaux structurels sandwichs, largement utilisés par l'industrie aéronautique [Parneix et Lucas, 2000], et les systèmes d'isolation thermique et électrique [Hentschel, 1975; de Nemours, 2003b].

Un peu de la même manière que pour les composites, les âmes en nids d'abeilles Nomex peuvent être envisagées comme un matériau multi-échelles impliquant trois niveaux de représentation : l'échelle microscopique des matériaux constitutifs, l'échelle mésoscopique du papier, et enfin l'échelle macroscopique du bloc de nids d'abeilles.

3.1.2 Aspects multi-échelles

L'échelle micro désigne l'échelle des fibres synthétiques aramide, de diamètre avoisinant les 10 nm, et de la résine phénolique. Les fibres aramide sont des fibres organiques à haute résistance mécanique et thermique. Elles sont de deux sortes : les para-aramide (Kevlar) et les méta-aramide (Nomex). Leur coût très faible et leur très bonne tenue au feu (non détérioration des propriétés mécaniques pour une température inférieure à 400^{o}C) explique leur succès. Les résines phénoliques sont elles aussi réputées pour leur très bonne tenue au feu et pour leur coût modique. Des propriétés de références de ces deux matériaux constitutifs, issues de [Chatain, 2001b,a], sont rassemblées en tableaux 3.1 et 3.2.

L'échelle méso se réfère au papier Nomex, qui est le matériau composite obtenu par assemblage de fibres aramide courtes, le renfort, et de la résine phénolique, la matrice. Le papier de référence pour la fabrication des nids d'abeilles est le papier calandré (passé sous

Propriétés mécaniques de quelques fibres				
Type de fibre	ρ ($g\,cm^{-3}$)	E (GPa)	σ_R (MPa)	A (%)
Verre E	2,6	73	2500	3,5
Carbone HM	1,81	392	2740	0,7
Para-aramide	1,44	60	2900	3,8
Para-aramide HM	1,45	120	2900	1,9
Méta-aramide	-	-	-	-

TAB. 3.1 – Caractéristiques de quelques fibres usuelles [Chatain, 2001b]

Caractéristiques mécaniques d'une résine phénolique usuelle			
Grandeur	Unité	Valeur nominale	Intervalle (±)
E	MPa	3000	200
ρ	$g\,cm^{-3}$	1,125	0,05
σ_R	MPa	55	15
ν	-	0,4	0
$A\%$	%	2,25	0,25

TAB. 3.2 – Caractéristiques d'une résine phénolique représentative [Chatain, 2001a]

rouleau [Agassant et Hinault, 2001]) type E 410 d'épaisseur variant de 0,05 à 0,76 mm [de Nemours, 2003a]. Ses principales propriétés mécaniques sont référencées en tableau 3.3 pour deux épaisseurs : 0,51 et 0,76 mm.

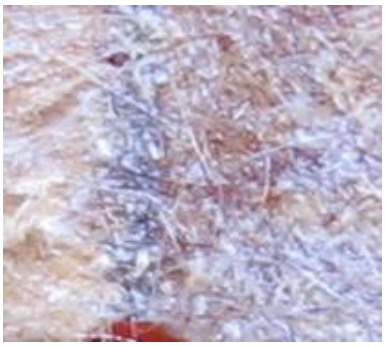
Caractéristiques mécaniques de papiers Nomex		
Type de papier	E 410 0,51 mm	E 410 0,76 mm
Module d'élasticité (MPa)	-	-
Contrainte à rupture longi (MPa)	118,8	110
Contrainte à rupture trans (MPa)	69	78
Masse volumique ($kg\,m^{-3}$)	0,547	0,847

TAB. 3.3 – Principales propriétés mécaniques de deux papiers Nomex [de Nemours, 2003a]

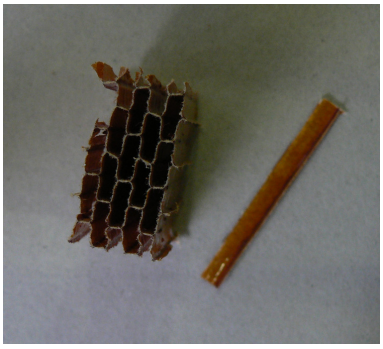
Ces données sont incomplètes et peu d'études accessibles ont été réalisées sur la caractérisation du comportement mécanique du papier Nomex. Les auteurs des articles [Tsujii *et al.*, 1995; Foo *et al.*, 2007] insistent sur l'aspect anisotrope du comportement mécanique du papier Nomex et sur la forte incidence de cette anisotropie sur les caractéristiques macroscopiques des nids d'abeilles (voir figure 3.1 pour illustration). En conséquence la mise en œuvre de modèles multi-échelles pour les nids d'abeilles Nomex est un problème complexe, en partie faute de données d'entrée, que ce soit pour le massage micro/méso ou bien encore méso/macro.

Des essais de traction sur des bandes de nids d'abeilles Nomex de 3 mm de large ont été réalisés au laboratoire sur micro-machine de traction (capacité de la cellule de force de 200 N) et filmés sous microscope optique pour analyse d'images. Sur une base de données formée à partir de 15 essais, un module d'élasticité moyen de 2400 MPa a pu être identifié avec une dispersion de ±400 MPa. Ce module est en parfait accord avec les

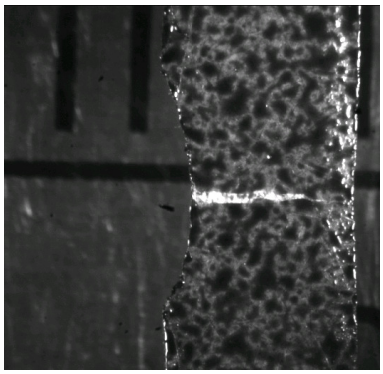
travaux présentés dans [Aminanda, 2004]. Faute de matière première et devant la difficulté à réaliser des éprouvettes, l'anisotropie du papier Nomex n'a toutefois pas pu être mise en évidence.



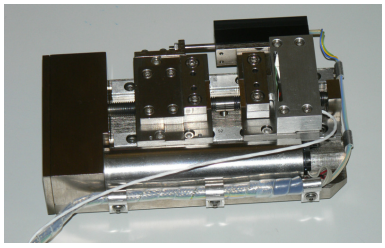
(a) Aspect fibré du papier Nomex



(b) Découpe d'éprouvette



(c) Rupture d'éprouvette



(d) Micro-machine de traction

FIG. 3.1 – Étude du papier constitutif

L'échelle macroscopique concerne les blocs de nids d'abeilles Nomex. Ils peuvent être obtenus de plusieurs manières, l'une d'entre elles, issue du catalogue du constructeur Hexcel, étant présentée en figure 3.2 [Hexcel, 1999].

Après une première étape de mise en forme des feuilles de papier Nomex par passage sous rouleaux [Dzalba Lyndis, 1974], les alvéoles sont formées par collages successifs de différentes couches. L'ensemble est ensuite trempé dans un bain de résine phénolique avant d'être passé en cuisson. Un autre type de procédé, où le collage des feuilles par bandes précède la mise en forme des cellules, est présenté dans [Kim et Lee, 1997; Parneix et Lucas, 2000].

La figure 3.3 présente les deux types de nids d'abeilles étudiés dans ces travaux de thèse, les NIDA-H-12,7 et NIDA-R-40. Le repère d'étude $(O\,;\boldsymbol{e}_1\,;\boldsymbol{e}_2\,;\boldsymbol{e}_3)$ qui sera systématiquement utilisé y est attaché. $\boldsymbol{e}_1$ et $\boldsymbol{e}_2$ sont les vecteurs de base du plan, rattachés respectivement aux directions L et W, L étant la direction parallèle aux doubles parois issues du collage des feuilles de papier Nomex. $\boldsymbol{e}_3$ est le vecteur de la direction normale hors plan aussi désignée T.

Des irrégularités de forme des alvéoles apparaissent très nettement. Elles ne sont pas prises en compte dans ces travaux. Des études portant sur cet aspect sont disponibles dans la littérature [Schraad et Triantafyllidis, 1997a,b; Zhu *et al.*, 2006].

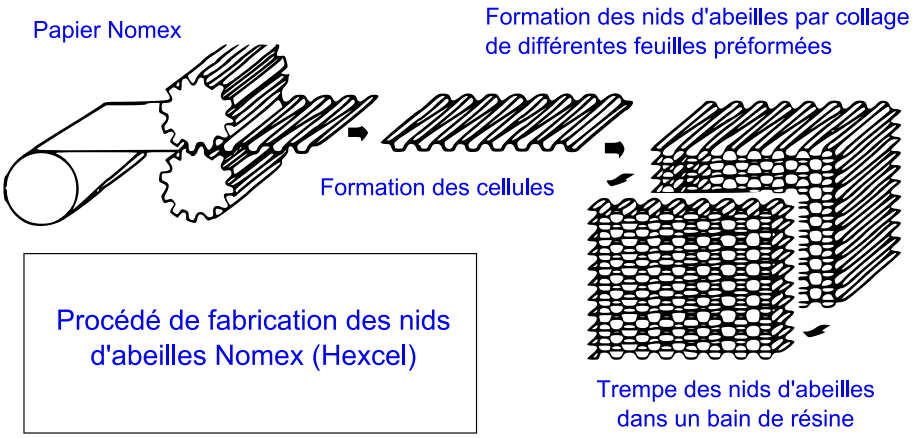


FIG. 3.2 – Procédé de fabrication des nids d'abeilles Nomex

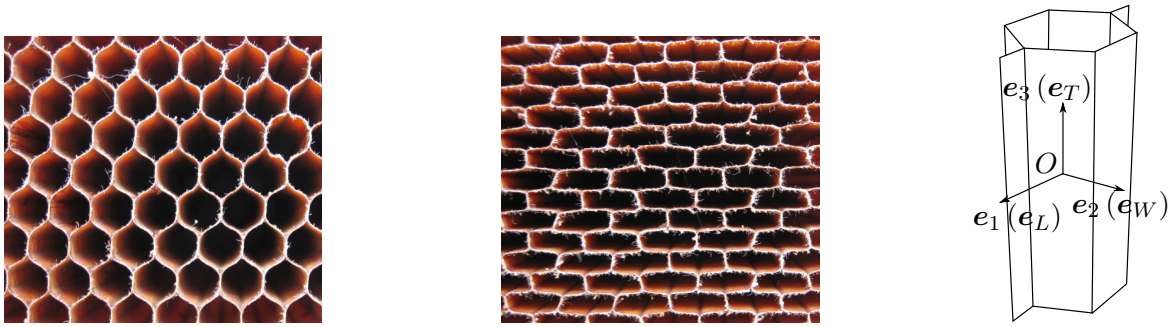


FIG. 3.3 – Photographies des blocs Nomex étudiés - repère d'étude

Les figures 3.4, 3.5 et 3.6 sont prises au microscope optique avec un grossissement de 400. Elles montrent les détails d'une simple paroi, d'une double paroi et du raccord entre simples et double parois pour des nids d'abeilles à cellules hexagonales.

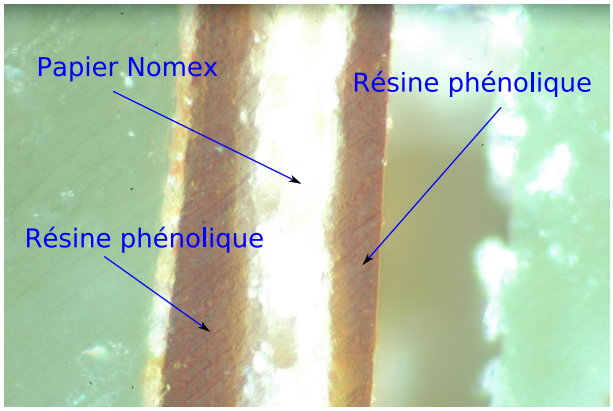


FIG. 3.4 – Photographie de détail de nids d'abeilles Nomex - simple paroi

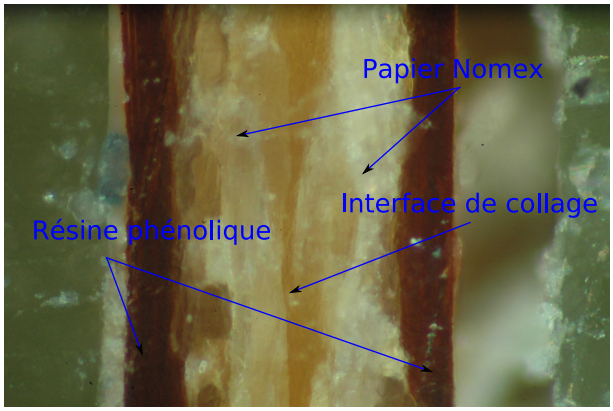


FIG. 3.5 – Photographie de détail de nids d'abeilles Nomex - double paroi

Ces images mettent en évidence l'aspect sandwich des parois de nids d'abeilles. Au niveau des raccords entre simples et double parois, la présence de ménisques de résine peut être remarquée. Si ces ménisques sont pleins pour les nids d'abeilles à cellules rectangulaires NIDA-R-40, où l'angle entre simples et double parois est de 90^o, une bulle de gaz est emprisonnée entre le papier et la résine pour les nids d'abeilles à cellules hexagonales NIDA-H-12,7 (figure 3.6). L'angle étant plus fermé, il est possible que la résine se solidifie avant de migrer à coeur. La prise en compte de ces raidisseurs est une difficulté supplémentaire à la réalisation d'étude à l'échelle microscopique [Simone et Gibson, 1998; Aminanda, 2004]. En cas d'approche multi-échelles, elle est pourtant essentielle dans le sens où l'effondrement des âmes en nids d'abeilles Nomex est lié à une perte de stabilité des parois et des arrêtes verticales sous charge de compression [Kelsey *et al.*, 1958; Wierzbicki et Abramowicz, 1983; Zhang et Ashby, 1992; Gibson et Ashby, 1999; Aminanda, 2004; Gornet *et al.*, 2007].

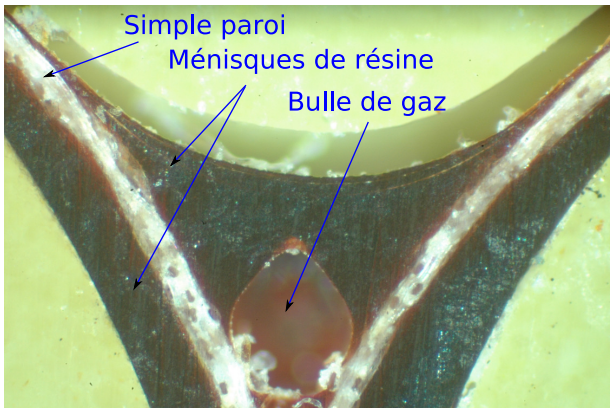


FIG. 3.6 – Photographie de détail de nids d'abeilles Nomex - raccord entre simples et double parois

3.2 Essais usuels de caractérisation des âmes

Dans cette partie les essais les plus utilisés pour caractériser des propriétés mécaniques hors plan de matériaux d'âmes sont simulés par éléments finis. Les simulations éléments finis tridimensionnelles mettent en évidence les limites des essais de cisaillement mono-blocs, bi-blocs et sur poutre en flexion trois et quatre points. Leur analyse conduit à proposer des essais de cisaillement sur éprouvettes quad-blocs.

3.2.1 Essais de compression hors plan

Des protocoles d'essais de compression hors plan sont présentés dans les normes ASTM C365-94 [ASTM, 2000b] et internationale ISO 488 [ISO, 2001]. Les points essentiels suivants sont à retenir :

- section transverse de l'éprouvette suffisamment importante : $S = 2580$ mm^2 pour un diamètre de cellule $\Phi < 6$ mm et $S > 5800$ mm^2 pour $\Phi \geq 6$ mm ;
- renfort éventuel des bords libres de l'éprouvette avec une résine : une telle éprouvette conduit à un essai dit "stabilisé" ;
- utilisation de plateaux de compression rotulés pour assurer une bonne homogénéité du champ des déplacements imposés ;
- utilisation d'un moyen de mesure précis pour l'écrasement (0,025 mm) ;
- enfin, prescription d'une vitesse d'écrasement suffisamment faible : 0,5 mm min^{-1}.

Hexcel, le fabricant de nids d'abeilles Nomex [Hexcel, 1999] montre que les essais stabilisés conduisent à des modules d'élasticité et à des contraintes ultimes supérieurs aux résultats obtenus dans le cas non stabilisé.
Cet essai est peu discuté dans la littérature. Il est repris dans les travaux menés ici.

3.2.2 Essais de cisaillement hors plan

Pour caractériser la rigidité et la résistance des matériaux alvéolaires en cisaillement, il existe une grande diversité d'essais directement liée aux géométries d'éprouvettes. Ces essais sont comparés sur la base de simulations numériques portant sur des blocs de nids d'abeilles Nomex supposés homogènes et de propriétés mécaniques principales : $E_1 = 10$ MPa, $E_2 = 10$ MPa, $E_3 = 157{,}4$ MPa, $G_{12} = 0{,}5$ MPa, $G_{13} = 37{,}2$ MPa et enfin $G_{23} = 24$ MPa. La direction de cisaillement est la direction 13, les dimensions d'un bloc sont $L = 152{,}4$ mm, $h = 12{,}7$ mm et $B = 50$ mm.

Les peaux utilisées sont en acier de module d'élasticité $E = 210000$ MPa et de coefficient de Poisson $\nu = 0{,}3$.

Éprouvette de flexion trois et quatre points

L'essai structurel associé est présenté dans la norme ASTM C393-94 [ASTM, 1994]. Le module de cisaillement G est déduit d'une relation issue de la résistance des matériaux. L'essai est présenté en figure 3.7.

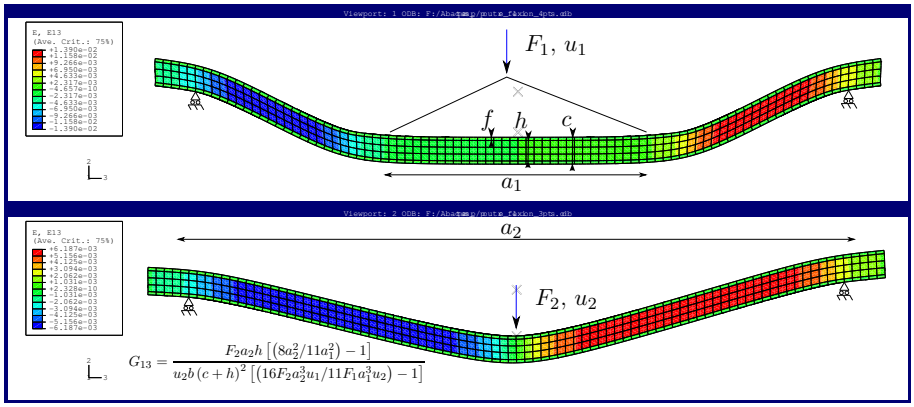


FIG. 3.7 – Essais de flexion trois et quatre points - champ de cisaillement ϵ_{e13}

De manière générale les résultats obtenus sont assez proches des modules de cisaillement déterminés par les méthodes analytiques de déplacements et de forces [Nordstrand et Carlsson, 1997]. Cependant, cette méthode de caractérisation se révèle coûteuse du fait de la nécessité de réaliser de nombreux essais pour tenir compte de la dispersion naturelle des résultats et calibrer les paramètres d'influence des peaux.

Éprouvette mono-bloc ASTM

L'éprouvette mono-bloc de la norme ASTM C273-94 [ASTM, 2000a] a été initialement développée pour l'armée américaine. L'hypothèse d'homogénéité du champ de cisaillement est utilisée pour post-traiter les mesures bien que le chargement de l'éprouvette selon la diagonale du bloc implique clairement un champ non homogène comme le montre la figure 3.8.

Si pour des ratios d'aspect élevés ($L/h > 12$ conformément à la norme) cette hypothèse est globalement vérifiée, il n'en reste pas moins vrai que le champ de cisaillement n'est pas "pur". La rupture prématurée des éprouvettes du fait de surcontraintes très locales sur les bords libres a été clairement établie dans [Kelsey *et al.*, 1958] et plus récemment dans [Grediac et Dufort, 2002]. De plus, ces mêmes auteurs ont montré que la flexion des peaux, difficilement évitable malgré des épaisseurs importantes, conduit à sous-estimer le déplacement relatif des peaux mesuré avec le LVDT (Linear Variable Differential Transformer). Par conséquent le module de cisaillement identifié est plus important que ceux obtenus par les modèles analytiques. Une solution classiquement préconisée au problème de flexion des peaux [Kelsey *et al.*, 1958] consiste à utiliser des éprouvettes plus courtes et plus épaisses pour réduire le moment de flexion induit, mais ceci se fait au détriment du ratio d'aspect et peut conduire à une prédominance des effets de bords comme il sera vu un peu plus tard.

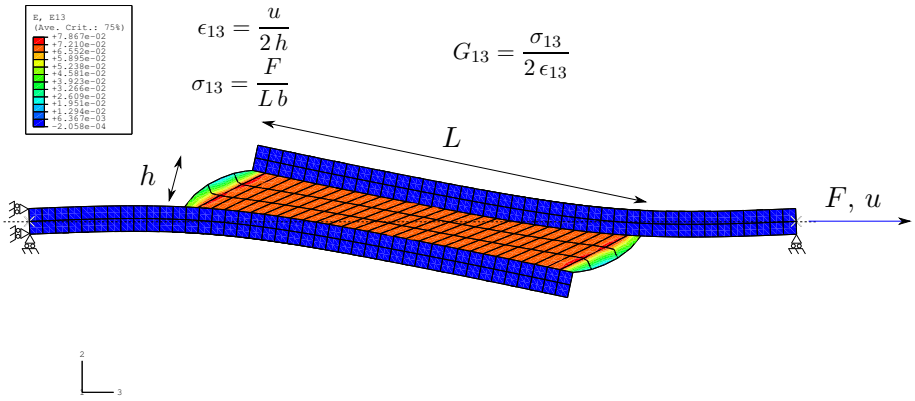


FIG. 3.8 – Essai ASTM - champ de cisaillement ϵ_{e13}

Éprouvette bi-blocs

Cette éprouvette a été initialement conçue avec l'idée d'imposer un champ de cisaillement "pur" au matériau à caractériser. Dans [Kelsey *et al.*, 1958], l'auteur montre toutefois qu'elle conduit à sous-estimer le module de cisaillement identifié d'un facteur pouvant atteindre 2. L'explication donnée concerne la cinématique de l'essai. La compression de l'éprouvette entre plateaux d'un côté, et mors de l'autre, provoque la rotation des peaux externes, nettement visible en figure 3.9. Cette rotation conduit à un champ de déformations non homogène du fait de l'apparition de contraintes de traction et de compression hors plan.

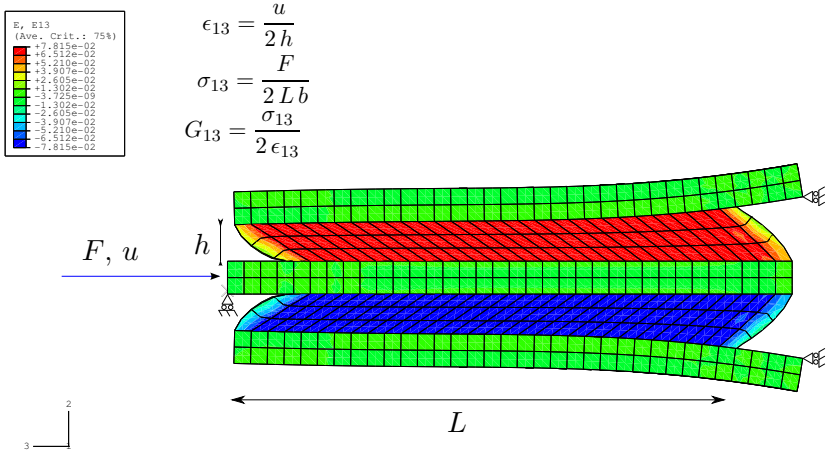


FIG. 3.9 – Essai bi-blocs - champ de cisaillement ϵ_{e13}

La présence d'effets de bords non négligeables, qui sera démontrée ultérieurement, explique elle aussi cette chute du module de cisaillement mesuré en cas de ratio d'aspect insuffisamment élevé sur les blocs cisaillés.

Éprouvette quad-blocs

Dans [Kelsey *et al.*, 1958], l'éprouvette de cisaillement quad-blocs est rapidement évoquée comme un moyen d'éviter la rotation des peaux qui est si préjudiciable aux éprouvettes bi-blocs. En effet une telle éprouvette est prise entre mors sur la machine d'essais, et la cinématique des peaux s'en trouve plus contrainte ce qui est bien visible en figure 3.10.

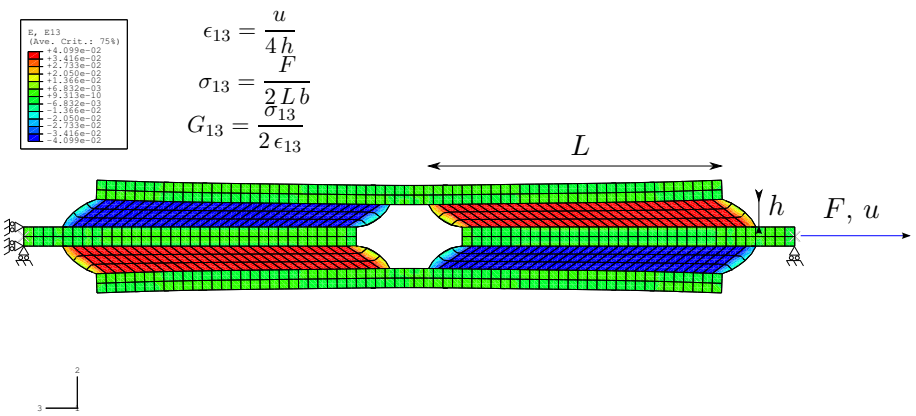


FIG. 3.10 – Essai quad-blocs - champ de cisaillement ϵ_{e13}

Plus récemment, Wada *et al.* [Wada *et al.*, 2003] ont utilisé des éprouvettes de cisaillement quad-blocs afin de caractériser le module de cisaillement de mousses acryliques. Les auteurs mettent en évidence un phénomène de flexion des peaux au niveau du raccord entre les deux étages de doubles blocs de cisaillement mais ne quantifient pas son influence. Ils concluent sur la dépendance du module de cisaillement identifié au ratio d'aspect des blocs cisaillés sans donner d'explication.

3.2.3 Essais combinés

Les essais présentés jusqu'à présent sont des essais unidirectionnels. Ils ne permettent pas de déterminer l'enveloppe de rupture des matériaux d'âmes pour des chargements combinés. Pour palier cette insuffisance, des essais multi-axiaux sont nécessaires. Deux d'entre eux sont maintenant présentés.

Essai ARCAN

L'essai ARCAN tout d'abord couple, de manière proportionnelle, la compression et un cisaillement hors plan. Des descriptions détaillées de ce type d'essais ont été données dans [Petras et Sutcliffe, 2000; Mohr et Doyoyo, 2003, 2004], ou encore dans [Cognard *et al.*, 2006] dans le cas de la caractérisation d'assemblages collés. Le principe est de comprimer une éprouvette inclinée par rapport à la direction de la charge conformément à la figure 3.11. Il est alors possible d'obtenir la réaction couplée compression/cisaillement jusqu'à la rupture et de déterminer ainsi, l'enveloppe de rupture du matériau.

Essai bi-axial

Enfin, dernier essai investigué ici, l'essai bi-axial est présenté. L'éprouvette, très proche de celle utilisée pour l'essai ARCAN, est sollicitée suivant deux directions grâce à un moyen d'essai incluant deux vérins orthogonaux de chargement conformément à la figure 3.12. Un

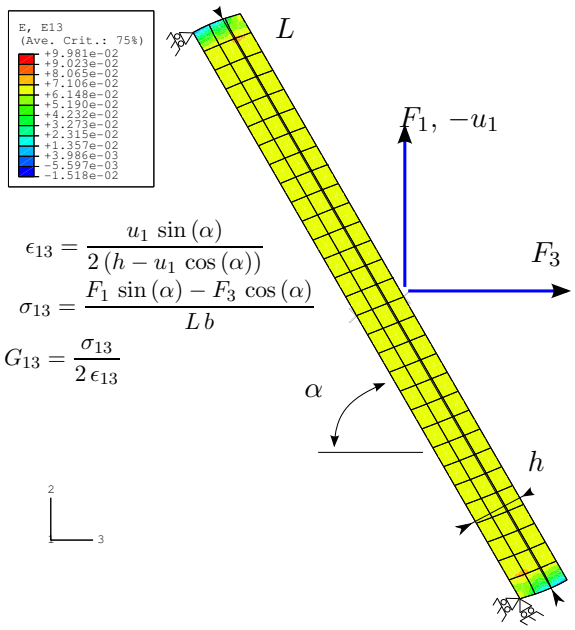


FIG. 3.11 – Essai ARCAN - champ de cisaillement ϵ_{e13}

tel essai est présenté dans [Deshpande et Fleck, 2001; Hong *et al.*, 2006a,b]. Il possède l'avantage, par rapport à l'essai ARCAN, de pouvoir piloter indépendamment compression et cisaillement.

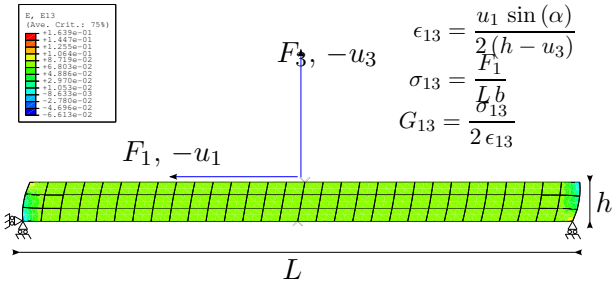


FIG. 3.12 – Essai bi-axial - champ de cisaillement ϵ_{e13}

3.2.4 Bilan des essais

En bilan de cette revue bibliographique, consacrée aux essais de caractérisation du module de rigidité et de la résistance des matériaux alvéolaires en cisaillement hors plan, les résulats obtenus pour les essais simulés sont rassemblés en tableau 3.4.

Il ressort de l'analyse des résultats que seul l'essai de cisaillement ARCAN fait mieux que l'essai quad-blocs sur l'identification du module de cisaillement, et encore, en supposant le système d'orientation indéformable. À partir de cette étude, en tenant compte des moyens d'essais disponibles au laboratoire et en accord avec nos partenaires de Multiplast, des essais de caractérisation ont été menés au laboratoire sur NIDA-H-12,7 et NIDA-R-40. Ces essais sont maintenant présentés.

Essais usuels de cisaillement pour matériaux alvéolaires		
Essai	G_{13} (MPa)	$100\,\frac{\lvert G-37{,}2\rvert}{37{,}2}$ (%)
Flexion 3 et 4 points	21,2	43
Mono-bloc ASTM	32,3	13
Bi-blocs	33,6	9,7
Quad-blocs	34,6	6,9
ARCAN	35	5,8
Bi-axial	33,6	9,6

TAB. 3.4 – Modules de cisaillement identifiés par simulation numérique d'essais usuels de cisaillement

3.3 Campagne expérimentale sur âmes Nomex

3.3.1 Moyen d'essais

Les essais ont été réalisés sur une machine de traction hydraulique quasi-statique MTS d'une capacité de 250 kN. La mesure des efforts a été assurée par une cellule de force de capacité : 25 kN ± 125 N, le choix d'un capteur à capacité réduite étant en adéquation avec les niveaux d'efforts observés lors des essais. Les déplacements ont été quant à eux enregistrés en utilisant le capteur magnétique inductif de la machine de traction hydraulique [O'Connor, 1984], ce qui était acceptable étant donné le faible niveau d'effort à rupture comparativement à la capacité de la machine. Ce capteur permet de mesurer des déplacements sur une plage de ± 75 mm avec une précision de 1 %.

La technique expérimentale d'analyse d'image a également été utilisée sur quelques essais de compression et de cisaillement afin de vérifier :

- si l'absence de rotulage des plateaux induisait une inhomogénéité du champ des déformations en compression ;
- si le champ de déformation était bien un cisaillement "pur" sur les éprouvettes de cisaillement quad-blocs.

Pour cela, une caméra numérique a été mise en œuvre conjointement au logiciel d'interpolation d'images IcaSoft développé par F. Morestin et son équipe [Mguil-Touchal *et al.*, 1997].

3.3.2 Essai de compression

Le protocole expérimental mis en place pour caractériser le comportement mécanique normal hors plan en compression des NIDA-H-12,7 et NIDA-R-40 est présenté ci-dessous.

Géométrie des éprouvettes

Les éprouvettes utilisées sont présentées à la verticale en figure 3.13. La légende est la suivante :

1. Peaux carbone/époxy TR-50 stratifiées $[\ 0\ 90\ ]_S$ (0,32 mm d'épaisseur par couche soit 1,28 mm par peau)
2. Âmes en nids d'abeilles Nomex à cellules de diamètre 6,4 mm ; d'épaisseur de simples parois 52 μm et de masse volumique 64 kg m^{-3} :

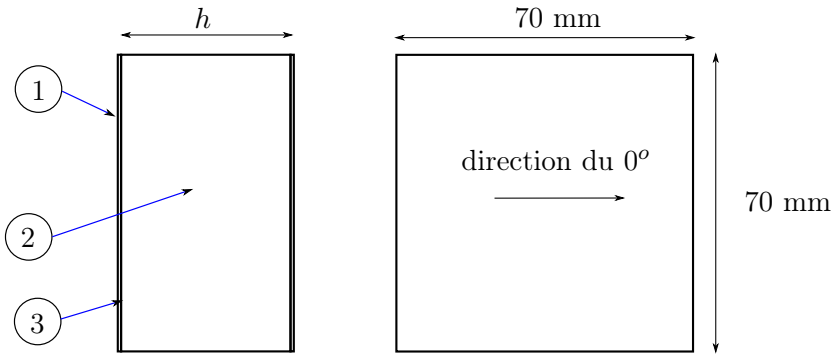


FIG. 3.13 – Plan des éprouvettes de compression

- NIDA-H-12,7-ET : nids d'abeilles à cellules hexagonales de hauteur $h = \mathbf{12{,}7}$ mm ;
- NIDA-R-40-ET : nids d'abeilles à cellules rectangulaires de hauteur $h = \mathbf{40}$ mm

3. Interface âme/peaux type Redux 300 g m^{-2}

Conditions d'essais

Les éprouvettes sont placées entre deux plateaux de compression et écrasées à vitesse pilotée. Plusieurs vitesses de déformation macroscopique sont investiguées : chargement quasi-statique à 0,001 s^{-1} et vitesses de déformation plus importantes : 0,01 ; 0,1 ; 1 et 10 s^{-1} (les deux dernières n'étant réalisées que pour les NIDA-H-ET). Pour un jeu de conditions d'essai donné, un minimum de trois essais est réalisé dans le but de s'assurer de la reproductibilité des résultats obtenus.

Post-traitement des mesures

Les données enregistrées sont post-traitées suivant le protocole présenté en figure 3.14 avec l'hypothèse que la section S reste constante au cours de l'essai. Dans ce cas, les contraintes de Cauchy σ et de Piola Kirchhoff 1 PK_I sont confondues ($S = S_0$).

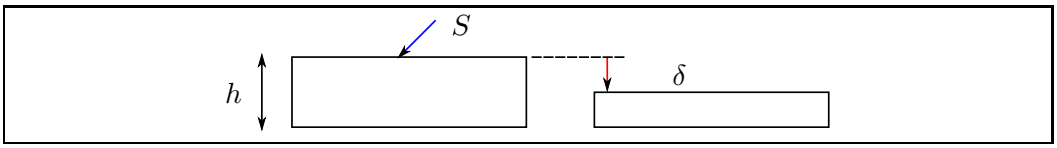
3.3.3 Essai de cisaillement hors plan

La géométrie des éprouvettes de cisaillement, les conditions d'essais et méthodes de post-traitement sont maintenant présentées.

Géométrie des éprouvettes

Le plan détaillé des éprouvettes quad-blocs est présenté sur la figure 3.15.
La légende est la suivante :

1. Peaux carbone/époxy TR-50 stratifiées $[\ 0\ 90\ ]_S$ (0,32 mm d'épaisseur par couche soit 1,28 mm par peau)
2. Âmes en nids d'abeilles Nomex à cellules de diamètre 6,4 mm ; d'épaisseur de simples parois 52 μm et de masse volumique 64 kg m^{-3} avec deux orientations L et W :
   - NIDA-H-12,7-GL et NIDA-H-12,7-GW : nids d'abeilles à cellules hexagonales de hauteur $h = \mathbf{12{,}7}$ mm ;
   - NIDA-R-40-GL et NIDA-R-40-GW : nids d'abeilles à cellules rectangulaires de hauteur $h = \mathbf{40}$ mm



Analyse en linéaire	Écrasement : $\delta = u$ Déformation : $\epsilon = \dfrac{\delta}{h}$ Contrainte de Cauchy : $\sigma = \dfrac{F}{S}$ Module d'élasticité : $E_3 = \dfrac{\sigma}{\epsilon}$
Analyse en non linéaire	Déformation non linéaire corotationnelle : $\epsilon_{nl}^R = \ln(1+\epsilon)$ Contraite de Cauchy corotationnelle : $\sigma^R = \sigma$ Contrainte de Kirchhoff corotationnelle : $\tau^R = J\,\sigma^R = (1+\epsilon)\,\sigma^R$ Module d'élasticité : $E_3 = \dfrac{\sigma^R}{\epsilon_{nl}^R}$

FIG. 3.14 – Post-traitement pour les éprouvettes de compression

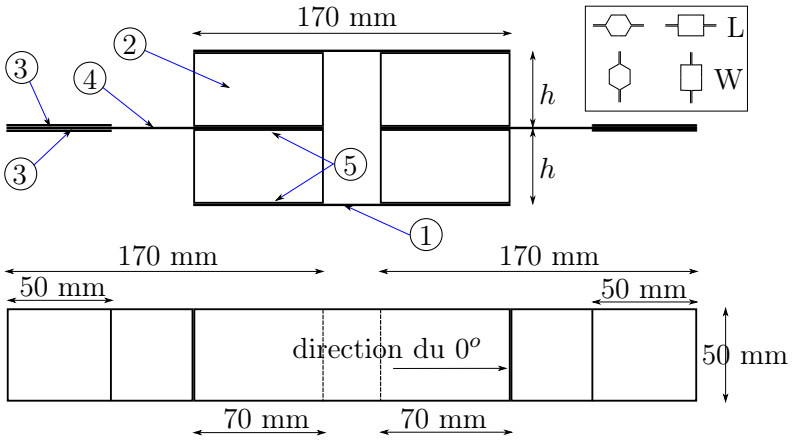


FIG. 3.15 – Plan des éprouvettes de cisaillement

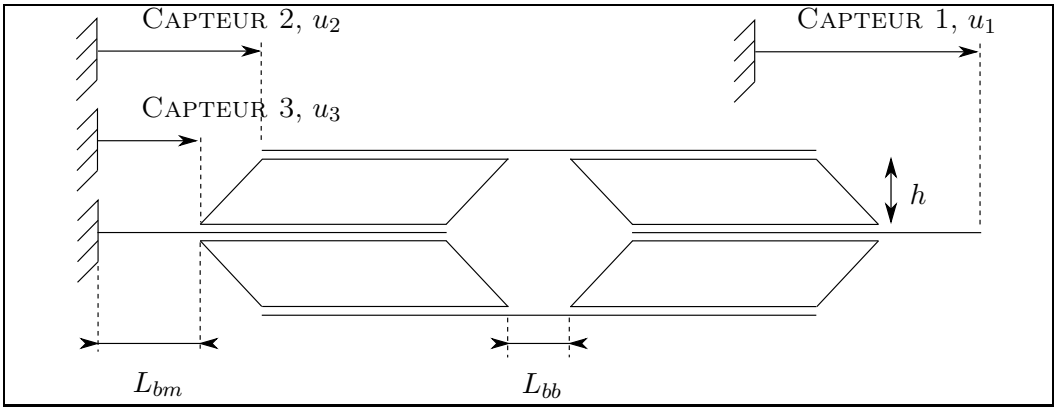
3. Talons verre/époxy pour prise de l'éprouvette entre mors
4. Peaux carbone/époxy TR-50 stratifiées $[\,0\;90\;90\;0\,]_S$ (0,32 mm d'épaisseur par couche soit 2,56 mm par peau)
5. Interface âme/peaux type Redux 300 $\mathrm{g\,m^{-2}}$

Conditions d'essais

Les éprouvettes sont placées entre mors puis étirées jusqu'à rupture. En cisaillement hors plan, seuls des essais quasi-statiques à vitesse de déformation macroscopique moyenne de 0,001 $\mathrm{s^{-1}}$ sont menés. Tout comme pour les essais de compression, la reproductibilité des essais est vérifiée.

Post-traitement des données

Les mesures sont post-traitées suivant la procédure présentée sur la figure 3.16. Il faut noter que lors des essais seul le Capteur 1 équipait les éprouvettes. Les grandeurs ont donc été évaluées à partir de la mesure de δ_1. L'intérêt des Capteurs 2 et 3 sera présenté dans la partie 3.5.4 pour affiner l'analyse de cet essai.



Analyse en linéaire	$\delta_1 = \dfrac{u_1}{2}$, $\delta_2 = u_2 - u_3$ Déformation : $\epsilon_1 = \dfrac{\delta_1}{2\,h}$, $\epsilon_2 = \dfrac{\delta_2}{2\,h}$ Contrainte de Cauchy : $\sigma = \dfrac{F}{2\,S}$ Module de cisaillement : $G_{c1} = \dfrac{\sigma}{2\,\epsilon_1}$, $G_{c2c3} = \dfrac{\sigma}{2\,\epsilon_2}$
Analyse en non linéaire	Déformation non linéaire corotationnelle : $\epsilon^R_{nl} = -\epsilon + 2\arctan(\epsilon)$ [Gilormini et Roudier, 1993] Contrainte de Cauchy corotationnelle : $\sigma^R = \dfrac{1-\epsilon^2}{1+\epsilon^2}\,\sigma$ Contrainte de Kirchhoff corotationnelle : $\tau^R = J\,\sigma^R = \sigma^R$ Module de cisaillement "corotationnel" : $G^R = \dfrac{\sigma^R}{2\,\epsilon^R_{nl}}$

Fig. 3.16 – Post-traitement pour éprouvettes de cisaillement

L'égalité entre contrainte de Cauchy σ et contrainte de Kirchhoff τ s'explique par l'aspect isovolume du cisaillement. Par contre, et contrairement au cas de la compression, il y a bien rotation des fibres matérielles ce qui se traduit par une différence entre les

grandeurs lues dans le référentiel d'étude et les mêmes grandeurs exprimées dans le repère associé au référentiel en rotation propre : $\sigma^R \neq \sigma$ et $\tau^R \neq \tau$.

3.4 Résultats obtenus

Les résultats des essais de cisaillement et de compression hors plan sont maintenant présentés.

3.4.1 Essais de cisaillement hors plan

Dans un premier temps l'analyse d'images démontre la qualité du champ des déformations imposées, jusitifiant de ce fait les hypothèses de dépouillement basées sur l'utilisation du CAPTEUR 1. Dans un deuxième temps, les réponses contraintes/déformations sont tracées et commentées.

Exploitation de l'analyse d'images

Un mouchetis est appliqué à la bombe de peinture sur les flancs d'éprouvettes quadblocs. La figure 3.17 présente sur la gauche, une demie éprouvette NIDA-H-12,7-GW munie de son mouchetis ; le champ des déplacements u_2 au centre et le champ des déformations de cisaillement de Green Lagrange GL_{12} à droite. Ces trois images sont prises à un niveau de déplacement de 0,47 mm. Leur résolution est de 512×1024 pixels.

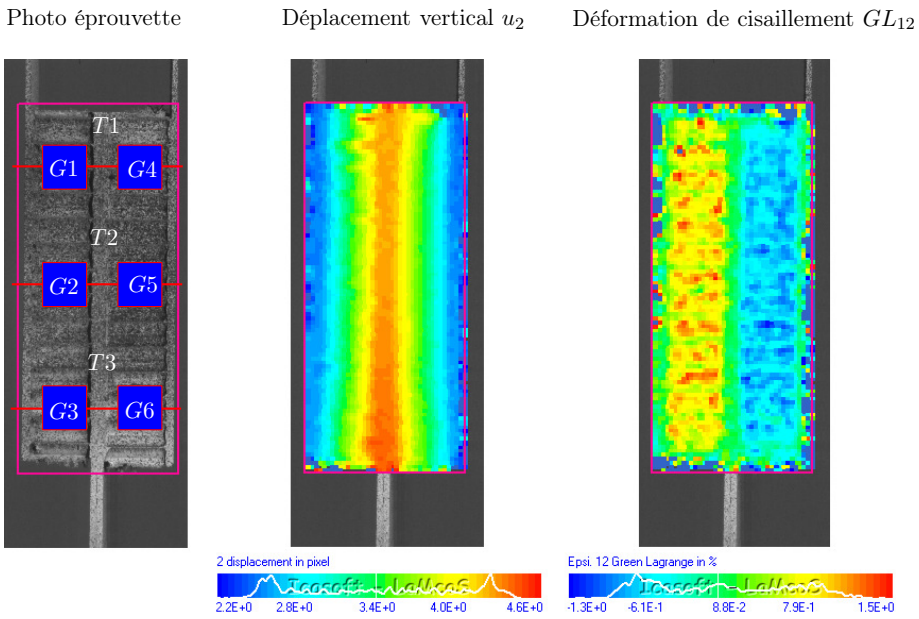


FIG. 3.17 – Éprouvette de cisaillement avec mouchetis/Champ des déplacements u_2/Champ des déformations de cisaillement de Green Lagrange GL_{12}

Le champ des déplacements verticaux u_2 apparaît être globalement bien symétrique sur les deux blocs de nids d'abeilles Nomex par rapport à la peau stratifiée centrale. Le tracé en figure 3.18 des déplacements le long de trois tranches d'éprouvettes, matérialisées par les lignes horizontales rouges $T1$, $T2$ et $T3$ sur la figure 3.17, permet de caractériser la cinématique. Les trois lignes de déplacement mettent bien en évidence les cinq zones franchies : peau carbone externe (manifestée par un plateau), bloc de nids d'abeilles (évolution

linéaire du déplacement), peau carbone centrale (plateau central), bloc de nids d'abeilles (évolution linéaire des déplacements), peau carbone externe (plateau). Les déplacements sont plus importants le long de la ligne $T3$ que le long des lignes $T1$ et $T2$. Cet écart, de l'ordre de 0,2 mm au niveau de la peau carbone centrale (10 pixels) montre que les peaux subissent une légère extension, ce qui signifie qu'elles manquent de rigidité par rapport aux âmes. Cette observation est confirmée par le fait que le déplacement moyen des peaux carbones extérieures est légèrement plus important que la moitié du déplacement de la peau carbone centrale. Pour que cela soit possible, il faut nécessairement qu'il y ait extension des peaux. Un moyen simple de résoudre ce défaut consiste à avoir recours aux CAPTEUR 2 et CAPTEUR 3 présentés dans la figure 3.16.

De son côté, le champ des déformations de cisaillement présente des zones rectangulaires horizontales. Celles-ci sont la manifestation des écarts de distance entre le flanc de l'éprouvette et la caméra du fait des alvéoles. Plus globalement, le champ semble être homogène mis à part sur les bords libres où la corrélation d'images fonctionne mal. Ce point est vérifié en post-traitant le film au moyen de six rosettes virtuelles Gi placées conformément au schéma de la figure 3.17, c'est-à-dire trois le long de chacun des blocs de cisaillement ($G1$, $G2$, $G3$ à gauche et $G4$, $G5$, $G6$ à droite).

Sur la partie droite de la figure 3.18, les deux courbes du haut correspondent aux moyennes des cisaillements, obtenues à partir des trois mesures de déformation de gauche ($G1$, $G2$ et $G3$) et des trois jauges de droite ($G4$, $G5$ et $G6$). Les quatre courbes du bas sont des moyennes pour les déformations GL_{11} et GL_{22}, là aussi sur les blocs de gauche et de droite.

Il convient de noter sur la figure 3.18 qu'il existe un facteur supérieur à dix entre les niveaux des déformations de cisaillement GL_{12} et les deux autres GL_{11} et GL_{22}. Sur cet exemple, les deux blocs inférieurs de l'éprouvette quad-blocs sont donc bien sollicités très majoritairement en cisaillement hors plan. Il apparait également qu'avant la ligne verticale rouge, les réponses des deux blocs de nids d'abeilles, le bloc de gauche et le bloc de droite, sont très proches l'une de l'autre. L'éprouvette travaille donc de manière bien symétrique sur à peu près le quart de sa réponse et il est possible d'identifier le module de cisaillement hors plan sur la base des hypothèses de post-traitement présentées précédemment.
À partir de la ligne rouge, les réponses des deux blocs de cisaillement divergent. En l'absence d'essais plus instrumentés, il est difficile d'expliquer rigoureusement ce phénomène. Par contre, une hypothèse peut être émise : cet écart des deux réponses est sans doute la manifestation du passage d'une réponse matériau à une réponse structurelle de l'éprouvette. En effet, il est tout à fait possible que l'un des quatre blocs de nids d'abeilles s'affaiblisse, localisant ainsi les déformations et perturbant la cinématique de l'essai en rendant l'éprouvette asymétrique. Cette hypothèse semble d'ailleurs consolidée par l'observation de la rupture de l'éprouvette qui ne se produit que dans un seul bloc de nids d'abeilles et conduit à une réponse purement structurelle de type flexion.

Exploitation des mesures globales

Les courbes de réponse en cisaillement hors plan obtenues pour des NIDA-H-12,7-GR et NIDA-H-12,7-GL sont tracées en figure 3.19 et en figure 3.20 pour les NIDA-R-40-GW et NIDA-R-40-GL. L'espace : contrainte de Kirchhoff corotationnelle τ^R (identique à la contrainte de Cauchy corotationnelle σ^R) et déformation non linéaire corotationnelle de cisaillement ϵ^R_{nl} est employé.

Les essais apparaissent être répétables lorsque l'on compare les courbes d'essais réalisés

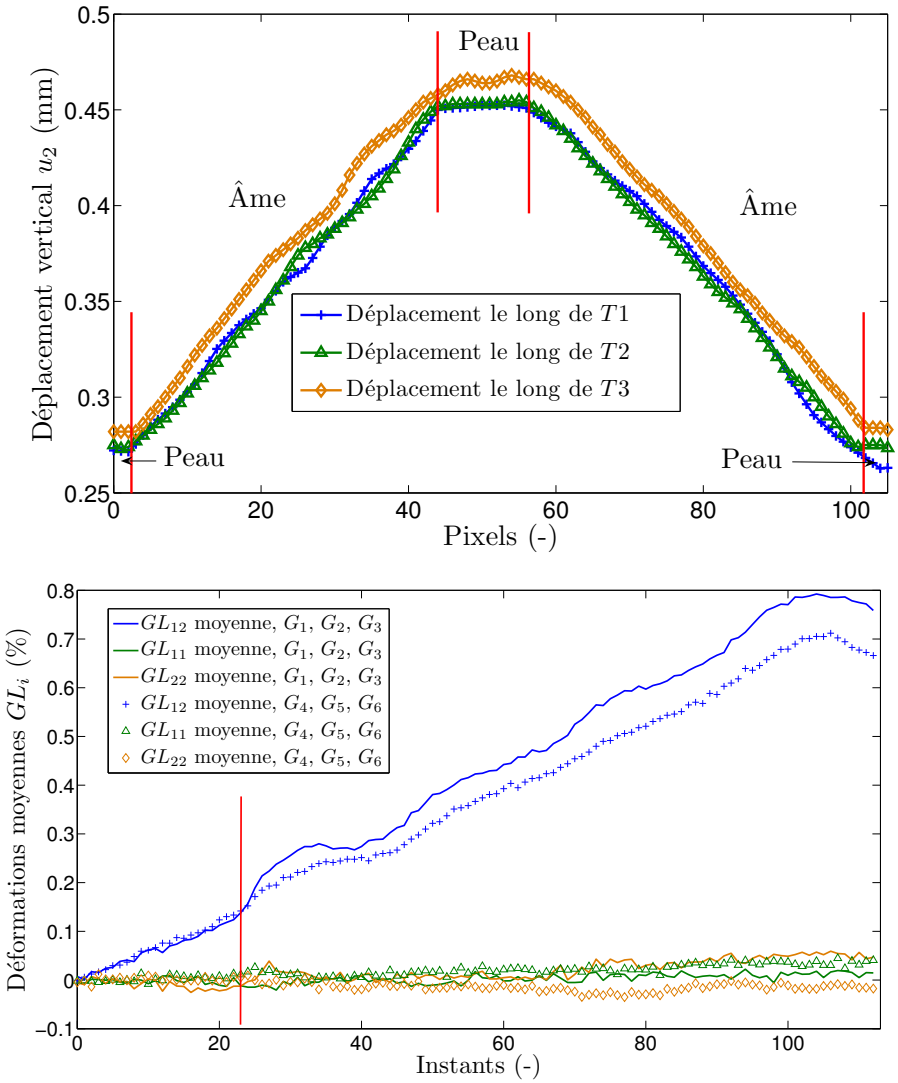


FIG. 3.18 – Déplacements sur trois tranches d'éprouvette/Déformations moyennes sur les deux blocs inférieurs de l'éprouvette

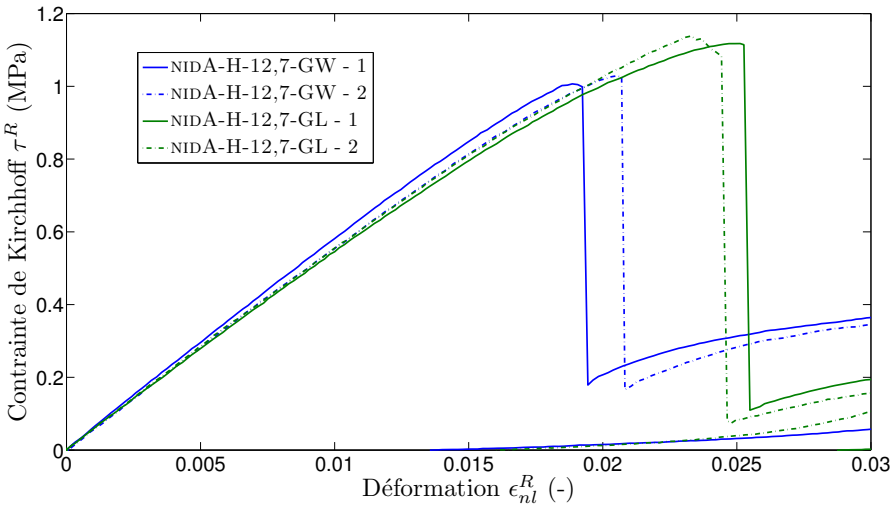


FIG. 3.19 – Réponses en cisaillement des NIDA-H-12,7

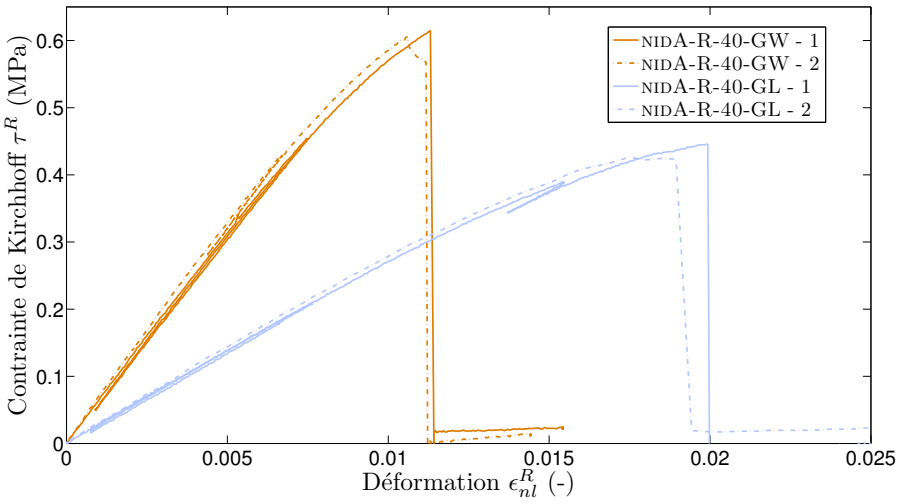


FIG. 3.20 – Réponses en cisaillement des NIDA-R-40

dans des conditions identiques. Quel que soit le type de nids d'abeilles considéré, les courbes de réponse présentent toutes le même aspect : une première phase de réponse linéaire ; une seconde phase non linéaire qui s'accompagne, en cas de décharge de l'éprouvette, d'un retour à contrainte et déformation nulles ; une rupture "fragile" manifestée par la chute très brutale de la contrainte, et enfin, une reprise d'effort marquée par une augmentation de la contrainte après la chute de rupture.

La seconde phase se manifeste physiquement par des craquements de l'éprouvette et par l'apparition de zones "blanchies" qui sont sans doute une manifestation de la plastification locale de la résine phénolique (voir la figure 3.23 un peu plus loin). La troisième étape correspond à la rupture de l'un des blocs de nids d'abeilles Nomex. Instantanément, une fissure occupant toute la largeur de l'éprouvette se propage sur toute la longueur d'un bloc. À partir de ce point, l'éprouvette se déforme en flexion et la réponse mesurée n'a plus de rapport avec un quelconque cisaillement de nids d'abeilles. La reprise d'effort de la quatrième phase peut être attribuée à cette nouvelle cinématique et au frottement des deux "lèvres" de la fissure du bloc Nomex rompu.

Bilan sur les essais de cisaillement

L'exploitation de l'analyse d'images met en évidence un très bon comportement des éprouvettes quad-blocs sur la première partie de la réponse. La cinématique de cisaillement est respectée, ce qui laisse espérer une identification correcte des modules de cisaillement. Cependant il semblerait que les éprouvettes quad-blocs soient sensibles à un phénomène d'affaiblissement de l'un des blocs avant les autres, conduisant à une réponse de structure. Une instrumentation plus riche, permettant de mesurer les déplacements relatifs sur chacun des blocs, apporterait un gain d'informations exploitables. Ce dernier point sera discuté plus tard en partie 3.5.
Les résultats des essais de compression sont maintenant examinés.

3.4.2 Essais de compression hors plan

Après analyse des images enregistrées, il apparaît que le champ de déformation est bien homogène. Les mesures des capteurs de force et de déplacement sont alors exploitées pour tracer les réponses en contraintes/déformations.

Exploitation de l'analyse d'images

De la même manière qu'en cisaillement, un essai de compression est filmé. Le suivi des déplacements de trois points de la peau carbone/époxy est assuré en post-traitement. Les résultats sont présentés en figure 3.21 sous la forme d'une photographie de l'éprouvette munie de son mouchetis en haut et de courbes de déplacement en fonction du temps en bas.

Pour une éprouvette de 12,7 mm de hauteur, les trois courbes de déplacement se superposent pratiquement parfaitement jusqu'à 6 mm d'écrasement. Cette réponse atteste de la bonne homogénéité du champ de déplacements imposés.

Exploitation des mesures globales

Les courbes de réponse des éprouvettes NIDA-H-12,7-ET sont tracées sur la figure 3.22 dans deux espaces de représentation : contrainte de Cauchy σ^R et contrainte de Kirchhoff τ^R corotationnelles en fonction de la déformation non linéaire corotationnelle ϵ^R_{nl}.

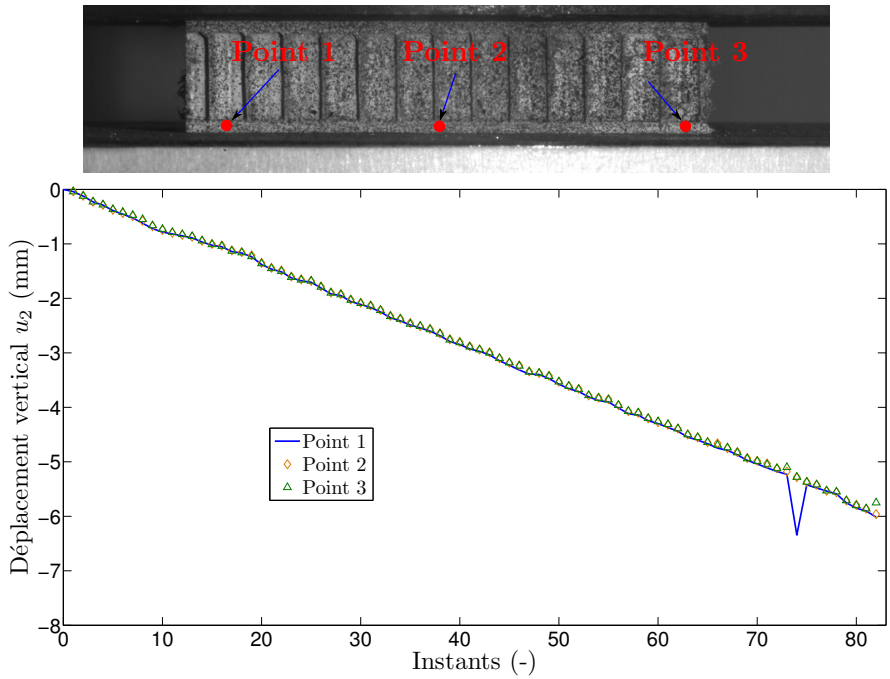


FIG. 3.21 – Comparaison des déplacements verticaux de trois points

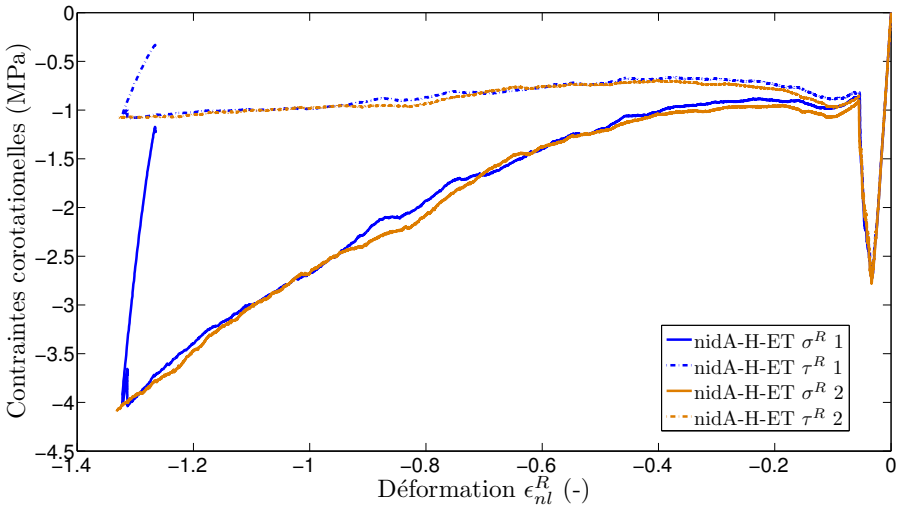


FIG. 3.22 – Réponses en compression des nids d'abeilles NIDA-H-12,7

Tout d'abord, la reproductibilité des essais est tout à fait satisfaisante. Ensuite, la différence entre les deux espaces de représentation - contrainte de Cauchy σ^R et de Kirchhoff τ^R corotationnelles - n'est visible que pour des niveaux d'écrasement élevés, c'est-à-dire pour des niveaux tels que J, le déterminant du tenseur gradient de la transformation F, est fortement différent de 1. En compression uniaxiale, $J = 1+\epsilon$, si bien que la contrainte de Kirchhoff $\tau = J\,\sigma$ est plus faible que la contrainte de Cauchy σ.
La cinématique d'écrasement des nids d'abeilles peut être divisée en cinq étapes (voir aussi la figure 3.24 un peu plus loin) : (1) réponse linéaire réversible ; (2) réponse non linéaire avec retour à l'origine en cas de décharge élastique (chute du module d'élasticité apparent) ; (3) effondrement de la réponse (apparition de déformation irréversible en cas de décharge et module apparent plus faible qu'avant pic) ; (4) reprise d'effort et écoulement sur une plage d'écrasement modérée, et enfin, (5) augmentation forte de la réponse en effort (observée dans l'espace de Cauchy), progression de la chute du module d'élasticité apparent en cas de décharges.

Si les deux premières étapes sont similaires à celles de la réponse des nids d'abeilles sollicités en cisaillement, le reste de la réponse diffère assez fortement. La troisième étape, l'effondrement de la réponse en effort, est consécutive à l'apparition d'un mode d'instabilité local sur les parois de nids d'abeilles visible figure 3.23. Cette observation a été faite par

FIG. 3.23 – Apparition d'un mode macroscopique de flambement sur éprouvette NIDA-R-40 sollicitée en compression

de nombreux auteurs [Wierzbicki et Abramowicz, 1983; Zhang et Ashby, 1992; Aminanda, 2004; Bunyawanichakul *et al.*, 2005; Gornet *et al.*, 2007]. Une fois le pli d'instabilité initié, les nids d'abeilles ne sont plus capables d'opposer de résistance à l'écrasement tant que le pli ne s'est pas refermé sur lui même. C'est ce qui arrive à l'étape (4). Ensuite, des formations successives de plis se traduisent par un plateau et aboutissent à un niveau de compaction des nids d'abeilles entre les peaux qui fait monter progressivement l'effort de réaction. En remarque, cette augmentation de l'effort n'est plus visible directement quand la réponse est exprimée en terme de la contrainte de Kirchhoff. Cette propriété intéressante est utilisée pour développer le modèle non linéaire proposé dans le chapitre 4.

La réponse des âmes en nids d'abeilles à cellules de section rectangulaire NIDA-R-40 est maintenant analysée à partir de la figure 3.24.

Les courbes présentées ici sont très similaires aux précédentes. Deux points diffèrent tout de même assez fortement : la phase d'effondrement en effort, bien plus abrupte que pour les nids d'abeilles à cellules hexagonales et la phase de densification, qui commence pratiquement immédiatement après l'instabilité.

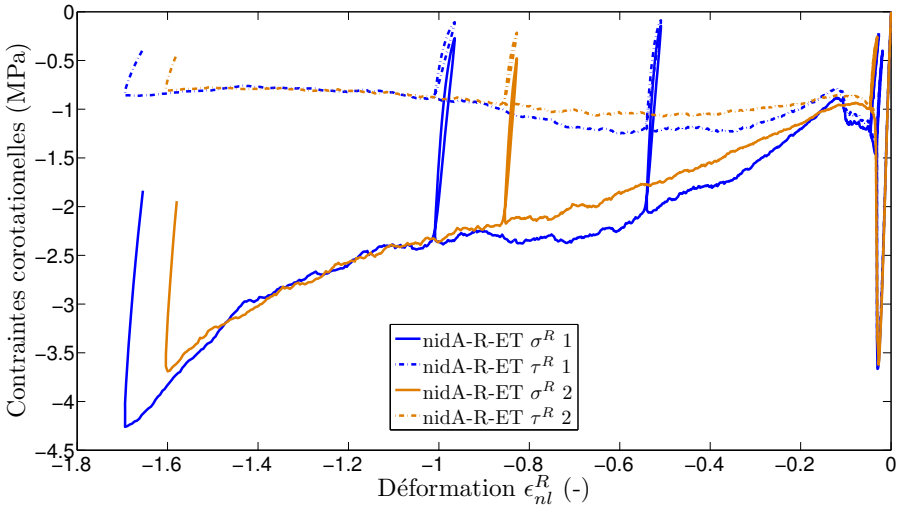


FIG. 3.24 – Réponse en compression des nids d'abeilles NIDA-R-40

Pour ce qui concerne l'instabilité, il est important de remarquer que les nids d'abeilles à cellules rectangulaires possèdent une hauteur de **40** mm contre **12,7** mm pour les nids d'abeilles à cellules hexagonales. Ils peuvent donc emmagasiner plus d'énergie élastique avant instabilité et se décharger par conséquent plus brutalement lorsqu'apparaît la rupture par instabilité.

Bilan sur les essais de compression

Pour conclure sur l'analyse des résultats obtenus en compression hors plan, il peut être intéressant de s'attarder sur deux points particuliers. Premièrement, l'influence de la vitesse de déformation macroscopique sur la réponse à l'écrasement des nids d'abeilles Nomex est présentée en figure 3.25. Aucune augmentation significative de la contrainte au pic n'est

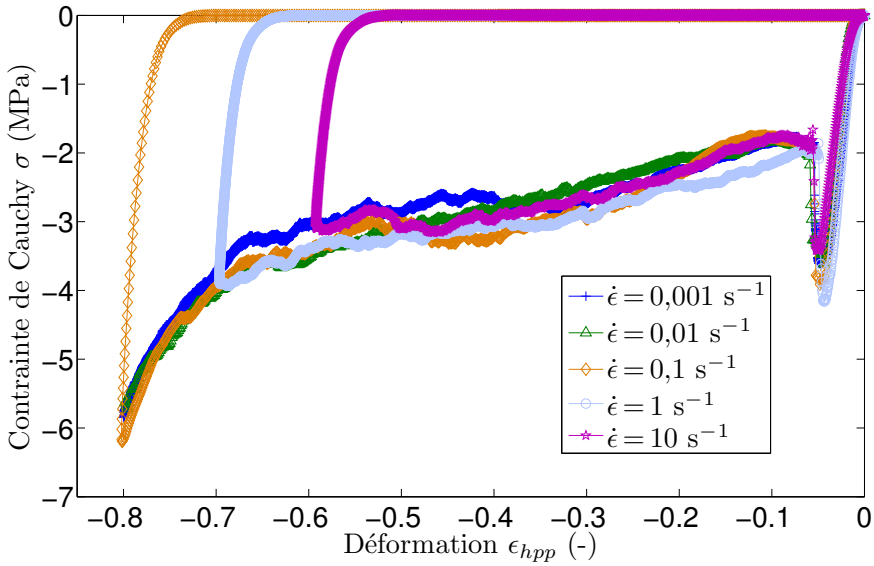


FIG. 3.25 – Influence de la vitesse de déformation

mise en évidence par ces essais. La même remarque s'applique au module d'élasticité initial et à la contrainte d'écoulement post-pic. Une étude plus approfondie mettant en œuvre un nombre plus important d'éprouvettes et des vitesses de déformation plus élevées serait nécessaire. Néanmoins, dans un premier temps et pour ces travaux, il apparaît acceptable de considérer la réponse des nids d'abeilles Nomex comme étant indépendante à la vitesse de déformation dans la plage 10^{-3} à 10 s^{-1}.

Le deuxième point concerne le pic d'instabilité. La figure 3.26 présente, de manière schématique, la première partie de la réponse des nids d'abeilles Nomex. L'énergie volu-

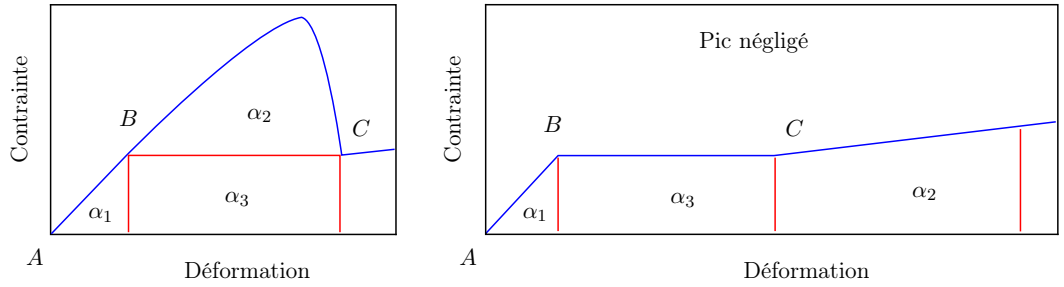


FIG. 3.26 – Répartition de l'énergie fournie au cours de l'écrasement de nids d'abeilles Nomex

mique fournie au bloc de nids d'abeilles Nomex, correspond à l'aire sous la courbe. Cette aire est scindée en plusieurs parties : α_1 énergie fournie avant le début du pic (de A à B), α_2 énergie fournie sur le pic exclusivement (de B à C, zone supérieure) et enfin, α_3 énergie fournie sous le pic exclusivement (de B à C, zone inférieure). La tableau 3.5 quantifie ces énergies volumiques pour deux NIDA-H et deux NIDA-R, la part d'énergie relative étant définie par la relation $\alpha_2/(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)$ sur un volume unitaire.

Analyse de l'énergie emmagasinée par le pic				
Type nidA	α_1 (mJ mm^{-3})	α_2 (mJ mm^{-3})	α_3 (mJ mm^{-3})	Part relative α_2 (%)
NIDA-R - 1	0,0062	0,0304	0,0283	47
NIDA-R - 2	0,0047	0,0396	0,0288	55
NIDA-H - 1	0,0043	0,0494	0,0394	53
NIDA-H - 2	0,0058	0,0617	0,0422	56

TAB. 3.5 – Analyse de la répartition de l'énergie fournie lors de la rupture des nids d'abeilles Nomex

La part d'énergie fournie entre les points A et C va, à plus de 50 %, dans la formation du pic d'instabilité. Cette quantité d'énergie n'apparaît donc pas négligeable.

Afin d'évaluer l'influence du pic d'instabilité sur la durabilité des structures sandwichs soumises à l'écrasement, un modèle de comportement dédié à la réponse des nids d'abeilles prenant en compte cette instabilité est proposé dans le chapitre 4.

3.5 Analyse critique de l'essai quad-blocs

3.5.1 Démarche adoptée

Cette dernière partie est consacrée à l'analyse critique de l'essai de cisaillement quad-blocs proposé dans cette étude. Les effets de plusieurs caractéristiques des éprouvettes sur le module de cisaillement macroscopique identifié sont investigués : dimensions des blocs de nids d'abeilles, interface âme/peau, enfin, type et dimensions des peaux. Pour cela, des modèles numériques sont réalisés afin de mener des campagnes d'essais virtuels. Une géométrie "type" d'éprouvette quad-blocs est présentée en figure 3.27.

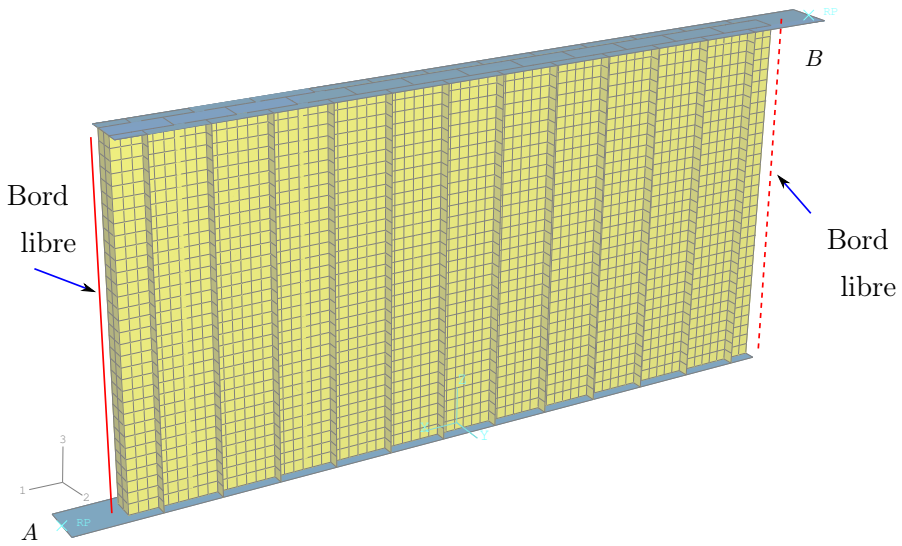


FIG. 3.27 – Quart d'éprouvette quad-blocs

Cette géométrie, fortement simplifiée par rapport à une géométrie "type" d'alvéole de nids d'abeilles réelle, est discrétisée en éléments finis plaques à 4 noeuds et 6 degrés de liberté par noeud S4 sous ABAQUS (module STANDARD). Le niveau de discrétisation est choisi après étude de convergence, la taille des éléments étant la même pour tous les modèles étudiés (le nombre d'éléments d'une alvéole ne dépendant alors que de sa hauteur). De plus, afin d'économiser les ressources de calcul, seul le quart de la géométrie est représenté, le reste de l'éprouvette étant pris en compte sous la forme de conditions de symétries. La présence d'une seule ligne de cellules répond, elle aussi, à cet impératif de réduction des coûts de calcul. En l'absence de défauts, et comme cela a été vérifié préalablement, les modules de cisaillement identifiés sur des modèles numériques comportant une ou plusieurs rangées de cellules sont rigoureusement identiques.
En l'absence d'indications contraires, la liaison entre âme et peau est modélisée par des conditions d'égalité portant sur les déplacements des noeuds d'interface, ce qui correspond à une interface rigide indéformable d'épaisseur nulle.
Le papier Nomex est supposé avoir un comportement mécanique homogénéisé élastique isotrope de module d'élasticité E_N : 2400 MPa et de coefficient de Poisson ν_N : 0,4 [Aminanda, 2004]. L'épaisseur des simples parois est de 76 μm. Les peaux sont obtenues par stratification de plis composites unidirectionnels carbone/époxy, le pli élémentaire ayant pour caractéristiques : $E_1 = 134$ GPa, $E_2 = 8$ GPa, $G_{12} = 3,87$ GPa, $G_{23} = 3,25$ GPa et $G_{31} = 3,87$ GPa (avec $\boldsymbol{e}_1$ la direction des fibres et $\boldsymbol{e}_2$ la direction transverse dans le plan du pli).

Enfin, le chargement se fait de la même manière qu'expérimentalement c'est-à-dire aux points A et B de la figure 3.27 sous la forme de déplacements imposés : $u_1 = u_{imp}$, u_2, u_3, θ_1, θ_2 et θ_3 nuls en A ; u_1, u_2, θ_1, θ_2 et $\theta_3 = 0$ en B. Les simulations sont réalisées sous l'hypothèse des petits déplacements et petites déformations.

3.5.2 Effets de bords et de hauteur

Pour cette première étude, quatre hauteurs de blocs de nids d'abeilles sont testées : 4 ; 12,7 ; 40 et 90 mm. Le nombre de cellules cisaillées par bloc varie de 1 à 96 cellules. Les nids d'abeilles sont des NIDA-R de diamètre 6,4 mm et les peaux sont indéformables. Les résultats obtenus sont présentés sur la figure 3.28 pour des sollicitations suivant les directions L et W. Le module de cisaillement identifié est exprimé en fonction du nombre de cellules par bloc pour les quatre hauteurs modélisées et les deux directions du matériau. Les segments verticaux symbolisent le nombre de cellules nécessaires pour obtenir un ratio d'aspect L/h égal à 12 (conformément aux recommandations de la norme ASTM C273-94 [ASTM, 2000a]).

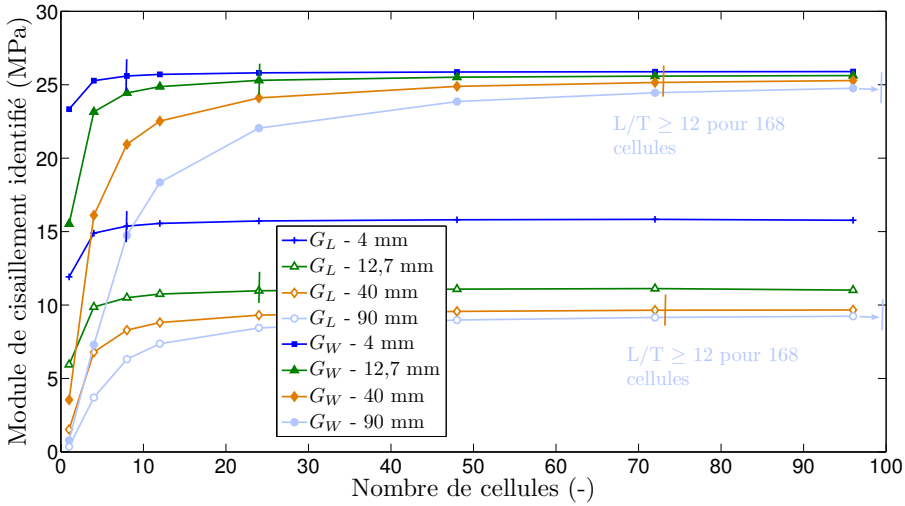


FIG. 3.28 – Influence du nombre de cellules cisaillées et de la hauteur de bloc sur le module de cisaillement identifié

Deux aspects intéressants ressortent de ces courbes :
- la forte influence de la hauteur des âmes en nids d'abeilles sur le module identifié : plus le bloc de nids d'abeilles est épais et plus son module de cisaillement macroscopique équivalent est faible ;
- la forte influence du nombre de cellules cisaillées : les modules de cisaillement identifiés tendent asymptotiquement vers une valeur stabilisée et ce, d'autant plus rapidement que la hauteur de bloc est faible.

L'influence de la hauteur de bloc sur le module de cisaillement est un point qui n'est pas traité dans les catalogues des constructeurs [Hexcel, 1999; Euro-Composite, 2006]. Si des facteurs de correction existent pour calculer les contraintes à rupture en fonction de la hauteur des nids d'abeilles, aucune mention concernant les répercutions sur les modules de cisaillement hors plan n'apparaît [Hexcel, 1999; Euro-Composite, 2006]. Cet aspect est pourtant important, notamment en ce qui concerne la hauteur de référence de 12,7 mm de

la norme ASTM C273-94 [ASTM, 2000a]. En effet, comme il sera montré ultérieurement, l'interface âme/peau peut représenter une part non négligeable de la hauteur de bloc sur une telle dimension (jusqu'à 1 mm de ménisque de résine). En contraignant la cinématique de cisaillement, elle peut conduire à surévaluer le module de cisaillement déterminé expérimentalement. Sachant que dans la construction nautique les hauteurs de blocs employés peuvent atteindre 90 mm, le risque d'utiliser des modules de cisaillement trop importants pour les calculs de dimensionnement n'est pas négligeable.

La hauteur n'influe pas seulement sur le module de cisaillement identifié, elle joue également sur le nombre de cellules nécessaires pour obtenir un module de cisaillement stabilisé. Autrement dit, plus la hauteur de bloc est grande, plus la longueur doit l'être. Ceci correspond en fait au ratio d'aspect du bloc de nids d'abeilles, le rapport longueur sur épaisseur de bloc L/h. Ce phénomène est explicable par la présence d'effets de bords libres (voir figure 3.27). En l'absence de contraintes cinématiques, les bords des blocs Nomex stockent moins d'énergie de déformation que le coeur. Si le nombre de cellules cisaillées est insuffisant, alors l'influence de ces deux bords libres par bloc devient prépondérante dans la réponse de l'éprouvette. Elle est même aggravée avec la hauteur de bloc, la liberté de mouvement des arêtes augmentant.
La figure 3.29 illustre cet effet en présentant la répartition d'énergie élastique par cellule pour trois éprouvettes comportant : 8, 12 et 24 cellules (ratios d'aspect respectifs : 1,3 ; 1,9 et 3,8). Les nids d'abeilles sont des NIDA-R de 40 mm de hauteur. En insert au centre, le champ d'énergie de déformation est présenté pour l'éprouvette à 12 cellules.

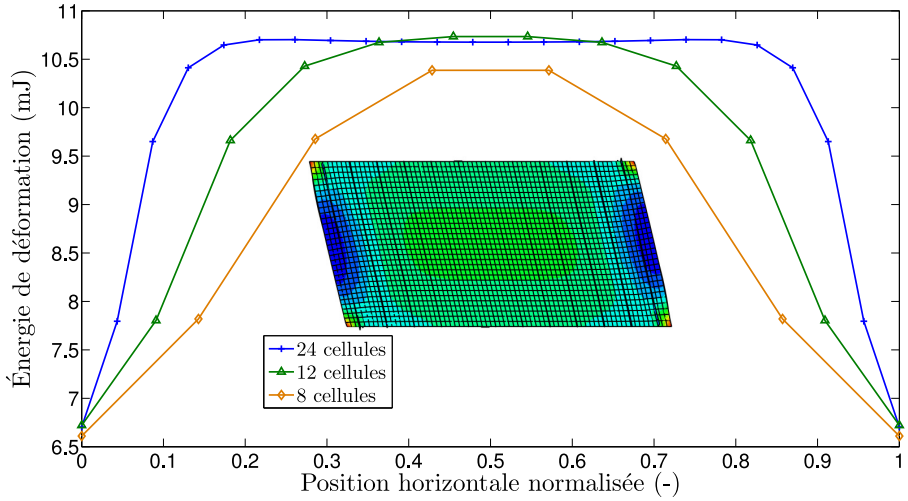


FIG. 3.29 – Effets de bords libres

L'effet de bord est présent sur environ cinq cellules pour chacun des bords libres d'un bloc de nids d'abeilles, si bien que dans le cas de l'éprouvette à huit cellules, aucune zone de l'éprouvette n'est réellement sollicitée en cisaillement. Pour donner un ordre de grandeur, sur une éprouvette ASTM C273-94 avec bloc de nids d'abeilles de taille d'alvéole 6,4 mm, de hauteur $h = 12,7$ mm et de ratio d'aspect $L/h = 12$, la longueur L du bloc est de 152,4 mm pour une zone d'influence des bords libres de $2 \times 5 \times 6,4 = 64$ mm ; soit plus d'un tiers de l'éprouvette affecté par l'effet de bord. Malgré tout, la figure 3.28 démontre que le rapport de 12 préconisé par ASTM est suffisant pour obtenir un module de cisaillement identifié satisfaisant (les petits segments verticaux tracés sur la figure 3.28 correspondent au ratio d'aspect de 12, ratio pour lequel le module est déjà pratiquement

stabilisé). Un rapport d'aspect trop important, s'il est intéressant d'un point de vue de l'effet de bord, conduit pour sa part à une forte augmentation de la sollicitation dans les peaux, et donc à l'apparition de déformations supplémentaires.

En complément de cette première étude numérique, des essais de cisaillement ont été menés sur des éprouvettes quad-blocs entaillées. Chacun des blocs de l'éprouvette (type NIDA-R-40) voit sa section être amoindrie suivant les proportions : 1/7, 2/7, 3/7, 4/7, 5/7 et $6/7^{ième}$. Les modules de cisaillement identifiés sont rassemblés en figure 3.30.

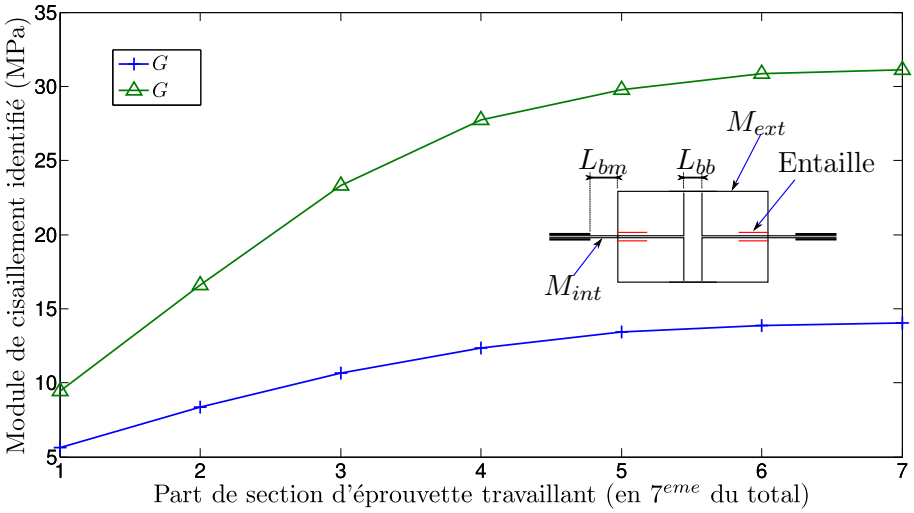


FIG. 3.30 – Effets de bords libres - étude expérimentale

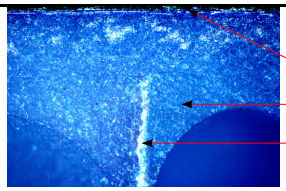
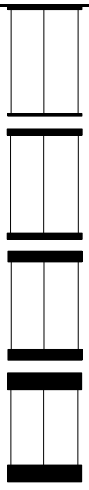
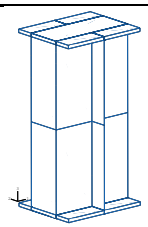
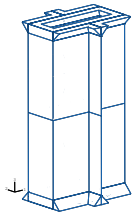
Ils augmentent fortement avec la section effective des blocs de nids d'abeilles Nomex, ce qui est en adéquation avec les résultats des simulations numériques (figure 3.28).

En conclusion de cette partie, les études numériques et expérimentales réalisées montrent que l'influence des bords libres ne peut être atténuée que si le nombre de cellules cisaillées est suffisamment important. Ceci justifie les ratios d'aspect élevés préconisés dans certaines normes de caractérisation. Au delà du ratio d'aspect, les calculs numériques mettent en évidence la dépendance du module de cisaillement à la hauteur de bloc cisaillé. Cet aspect n'est généralement pas pris en compte, ce qui peut poser problème étant donné que pour une faible hauteur, le module de cisaillement est surestimé. Cette surestimation est aggravée par les conditions limites d'interface âme/peaux. Ce point est maintenant étudié plus en détail.

3.5.3 Effets d'interface

L'influence de l'interface âme/peau sur la réponse des éprouvettes est mise en évidence au moyen de plusieurs modèles numériques qui ont en commun : des peaux indéformables et un bloc de **12** cellules de nids d'abeilles NIDA-R de 12,7 mm de hauteur. Les interfaces prises en considération sont rassemblées dans le tableau 3.6.

Elles correspondent à deux manières différentes d'appréhender l'interface. La première suppose que le ménisque de résine bride totalement le mouvement des alvéoles sur une hauteur plus ou moins importante (cas 1 à 4). La seconde se rapporte à une interface de type résine époxy, répartie uniformément sur la surface de jonction ou formant des ménisques entre alvéoles et peaux (cas 5 et 6). Pour ces deux derniers cas, le volume de

Étude de l'interface âme/peau			
Cas	Interface	Illustration	Hauteur de bloc effective (mm)
0	Photographie d'interface (microscope optique)		
1	Non modélisée		12,7
2	Non modélisée		12,2
3	Non modélisée		11,7
4	Non modélisée		11,4
5	Résine répartie 0,25 mm		12,7
6	Résine ménisque 0,65 mm		12,7

TAB. 3.6 – Différents modèles d'interfaces mis en œuvre

résine est identique, seule la répartition change. Il est déterminé à partir des propriétés du pli d'interface et conduit à une hauteur de résine de 0,25 mm pour la répartition uniforme et de 0,65 mm en tête de ménisque. Les propriétés mécaniques de l'interface, prises dans [Hexcel, 2007] sous la référence HexPly 108, sont les suivantes : $E = 3540$ MPa, $\sigma^R = 59$ MPa et $\rho = 1260$ kg m^{-3}.
Les modules de cisaillement G_W identifiés à partir de ces modèles numériques sont portés dans le tableau 3.7. Le cas de référence correspond au modèle avec prise en compte de la résine d'interface sous forme de ménisques. Les modules de cisaillement relatifs sont calculés par rapport à ce cas (le n^{o}6).

Le fait de considérer une interface infiniment rigide d'épaisseur nulle (cas n^{o}1) laissant l'épaisseur des blocs de nids d'abeilles de 12,7 mm intacte conduit à sous-estimer fortement le module de cisaillement macroscopique équivalent - 8,5 % d'écart relatif avec le module de référence. Autre manière de voir les choses, réaliser des essais de cisaillement hors plan de caractérisation des âmes en nids d'abeilles Nomex sur de faibles hauteurs, conduit à surestimer les modules identifiés du fait de l'influence de l'interface qui rigidifie la réponse en contraignant l'âme.
D'un point de vue modélisation maintenant, une manière simple de prendre en compte l'interface, sans la modéliser pour autant, consiste à réduire la hauteur de bloc cisaillé tout en conservant le post-traitement avec hauteur de 12,7 mm. Un tel modèle rend compte du bridage des mouvements de l'âme à proximité des peaux sans alourdir la modélisation, la difficulté étant alors de définir la réduction de hauteur. Ce n'est toutefois une solution que pour des études de cisaillement exclusivement.

Influence de l'interface sur le module G_W

Cas	Module G_W (MPa)	Écart relatif G_W (%)
1	24	8,5
2	24,9	5,4
3	26	1,2
4	26,6	-1,1
5	24,7	6
6	26,3	0

TAB. 3.7 – Modules de cisaillement identifiés en fonction de l'interface

En bilan de cette étude, il peut être retenu qu'avec de faibles hauteurs d'âme, le risque est grand de voir les effets d'interface parasiter les résultats obtenus. Augmenter la hauteur est la seule solution envisageable expérimentalement, mais elle conduit à de grandes dimensions d'éprouvettes du fait du ratio d'aspect fixé à une valeur élevée pour limiter les effets de bords. Autre inconvénient de cette solution, le niveau d'effort transmis aux peaux qui, en augmentant, risque de provoquer leur déformation. Ce point est maintenant testé, lui aussi à partir d'une approche numérique.

3.5.4 Influence des peaux et de la procédure

Les deux études précédentes mettent en évidence l'importance d'utiliser des blocs de nids d'abeilles à hauteur élevée et à fort ratio d'aspect pour les éprouvettes de cisaillement. Le respect de ces deux points permet de limiter respectivement l'influence de l'interface

de collage et l'influence des bords libres non contraints cinématiquement, mais le coût en matière est élevé. Le volume de matériau à caractériser est plus important et les peaux nettement plus sollicitées. C'est ce dernier point qui est maintenant investigué.

Cette étude se focalise sur trois axes : géométrie des peaux, type et procédure de post-traitement des essais en fonction du nombre de capteurs mis en place. Le paramétrage de l'étude est disponible sur la figure de dépouillement des essais de cisaillement précédemment présentée en tableau 3.16.
L_{bm} représente la distance entre le bord du bloc de nids d'abeilles Nomex et les mors de la machine d'essais et L_{bb} l'écart entre les deux rangées de blocs de nids d'abeilles. Le CAPTEUR 1 correspond au capteur magnétique du vérin de la machine d'essais. Les CAPTEUR 2 et CAPTEUR 3 sont des LVDT virtuels qui peuvent être mis en place dans le cas d'essais améliorés. Les procédures de détermination du module de cisaillement sont également dispsonibles en tableau 3.16 (calcul de G_{c1} et de G_{c2c3}).

Les propriétés du pli élémentaire des peaux composites sont décrites dans la partie 3.5.1. La stratification des peaux placées entre mors est double de celles des peaux extérieures. Les blocs de nids d'abeilles sont modélisés comme des solides homogènes orthotropes équivalents de module de cisaillement $G = 37{,}2$ MPa (l'écart relatif est alors $e_r = 100 \times |G - G_c| \,/\, G$). Ils sont discrétisés dans ABAQUS, module STANDARD, avec des éléments à 20 noeuds et interpolation quadratique C3D20. Les résultats obtenus pour deux géométries de blocs de nids d'abeilles : **70** et **280** mm de long, sont rassemblés en tableau 3.8.

Type de peaux ext	L_{bm}/L_{bb} (mm)	G_{c1}/G_{c2c3} (MPa)	Écart relatif G_{c1}/G_{c2c3} (%)
Bloc de nids d'abeilles $12{,}7 \times 50 \times$ **70** mm			
$[0\,90\,0]_4$	50/30	32,7/34,5	12/7,3
$[0\,90\,0]_8$	50/30	33,6/34,5	9,8/7,3
$[0\,90\,0]_4$	5/5	33,8/34,6	9,2/7,1
$[0\,90\,0]_4$	0/0	33,9/34,6	8,7/7
Indéformables	50/30	35,9/35,9	3,4/3,4
Bloc de nids d'abeilles $12{,}7 \times 50 \times$ **280** mm			
$[0\,90\,0]_4$	5/10	25,2/33	32,2/11,3
Indéformables	5/10	36,8/36,8	0,8/0,8

TAB. 3.8 – Modules de cisaillement identifiés en fonction de l'éprouvette et du protocole

Premier constat, les peaux infiniment rigides ne permettent pas d'obtenir le module de cisaillement du bloc sans erreur du fait de la présence d'effets de bords libres (0,8 % d'erreur relative). Deuxième constat, augmenter le ratio d'aspect de manière à limiter l'effet de bord peut dégrader le module obtenu en accentuant la déformation des peaux. Les épaisseurs alors nécessaires pour limiter l'erreur deviennent rapidement très importantes, d'autant plus que les nids d'abeilles à caractériser sont épais.

En ce qui concerne la procédure, utiliser deux capteurs LVDT pour mesurer précisément le déplacement relatif des parties haute et basse, d'un des bloc de nids d'abeilles placé côté encastrement, améliore très sensiblement les résultats, bien plus que le fait d'épaissir les peaux.

3.6 Conclusion

L'analyse de l'essai quad-blocs fait émerger un certain nombre de points à respecter afin d'obtenir des résultats satisfaisants en ce qui concerne l'identification des modules de cisaillement d'âmes en nids d'abeilles Nomex :

- d'un point de vue des blocs de matériau :
  - utilisation de blocs de nids d'abeilles à ratio d'aspect élevé : le $L/h \geq 12$ de la norme ASTM C273-94 [ASTM, 2000a] semble être un bon compromis coût/qualité ;
  - utilisation de blocs de nids d'abeilles suffisamment hauts afin de limiter l'influence de l'interface : la hauteur de 12,7 mm apparaît être très insuffisante, du moins pour les nids d'abeilles testés ici ; prévoir au moins 40 à 50 mm de haut ;
- d'un point de vue des peaux :
  - prévoir des peaux extérieures profilées en "T" ou en "U" afin de limiter la flexion au niveau de la jonction entre les deux groupes de deux blocs peut être une idée à creuser (cette recommandation peut aussi s'appliquer aux essais standards) ;
  - limiter au maximum l'écart entre ces deux groupes, tout en conservant assez d'espace pour réaliser des essais de fatigue alternée par exemple ;
  - préférer des peaux acier aux peaux composites : module d'élasticité relativement élevé mais surtout beaucoup plus simple à mettre en œuvre ;
- d'un point de vue instrumentation :
  - utiliser deux capteurs LVDT pour mesurer le déplacement relatif entre parties haute et basse sur un bloc.

Finalement un tel essai devient assez coûteux, ne serait-ce que par la grande quantité de matière nécessaire. Pour des caractérisations classiques, le surcoût d'un tel essai n'apparaît pas forcément justifié eu égard à toutes les hypothèses simplificatrices posées dans les modèles numériques volumineux. En effet, dans ce cas, les phénomènes physiques pris en compte sont en général extrêment simplifiés, les interfaces ne sont pas modélisées, les cas de chargement ne sont que des cas tests arbitraires... Une précision forte des données d'entrée des propriétés mécaniques des nids d'abeilles Nomex ne se justifie sans doute alors plus. Par contre, pour l'étude en fatigue des matériaux alvéolaires, l'essai quad-blocs reste malgré tout l'un des essais de caractérisation les plus intéressants car permettant de solliciter le plus "proprement" l'éprouvette.

Bibliographie

AGASSANT, J. et HINAULT, R. (2001).
Calandrage.
Rapport technique, Techniques de l'Ingénieur.

AMINANDA, Y. (2004).
Contribution à l'analyse et à la modélisation de structures sandwichs impactées.
Thèse de doctorat, École Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace.

ASTM (1994).
Astm c393-94 standard test method for flexural properties of sandwich constructions.
Rapport technique, American Society for Testing and Materials.

ASTM (2000a).
Astm c273-94 standard test method for shear properties of sandwich core materials.
Rapport technique, American Society for Testing and Materials.

ASTM (2000b).

Astm c365-94 standard test method for flatwise compressive properties of sandwich cores. Rapport technique, American Society for Testing and Materials.

Bunyawanichakul, P., Castanie, B. et Barrau, J. (2005).
Experimental and numerical analysis of inserts in sandwich structures.
Applied Composite Materials, 12:177–191.

Chatain, M. (2001a).
Plastiques et composites - am 5000.
Rapport technique, Techniques de l'Ingénieur.

Chatain, M. (2001b).
Polyamides aromatiques - a 3985.
Rapport technique, Techniques de l'Ingénieur.

Cognard, J., Davies, P., Sohier, L. et Creac'hcadec, R. (2006).
A study of the non-linear behaviour of adhesively-bonded composite assemblies.
Composite Structures, 76(1-2):34–46.

de Nemours, D. P. (2003a).
Nomex type 410.
Rapport technique, DuPont de Nemours.

de Nemours, D. P. (2003b).
Nomex type 411.
Rapport technique, DuPont de Nemours.

Deshpande, V. et Fleck, N. (2001).
Multi-axial yield behaviour of polymer foams.
Acta Materialia, 49(10):1859 – 1866.

Dzalba Lyndis, S. (1974).
Matériaux sandwich aérospatiaux em dash 3.
Matériaux et Techniques, 62(12):559–567.

Euro-Composite (2006).
http ://www.euro-composites.com/.

Foo, C., Chai, G. et Seah, L. (2007).
Mechanical properties of nomex material and nomex honeycomb structure.
Composite Structures, 80:588–594.

Gibson, L. et Ashby, M. (1999).
Cellular solids - Structure and properties.
Cambridge University Press.

Gilormini, P. et Roudier, P. (1993).
Abaqus and finite strain.
Rapport technique, Laboratoire de Mécanique et de Technologie de Cachan.

Gornet, L., Marguet, S. et Marckmann, G. (2007).
Modeling of nomex honeycomb cores, linear and nonlinear behaviours.
Mechanics of Advanced Materials and Structures.

GREDIAC, M. et DUFORT, L. (2002).
Experimental evidence of parasitic effects in the shear test on sandwich beams.
Experimental Mechanics, 42(2):186 – 193.

HENTSCHEL, R. (1975).
Nomex aramid papers properties uses.
In Tappi paper, Synthetics conference, Atlanta.

HEXCEL (1999).
Hexweb honeycomb attributes and properties.
Rapport technique, Hexcel.

HEXCEL (2007).
Hexply 108.
Rapport technique, Hexcel.

HONG, S.-T., PAN, J., TYAN, T. et PRASAD, P. (2006a).
Quasi-static crush behaviour of aluminium honeycomb specimens under compression dominant combined loads.
International Journal of Plasticity, 22:73–109.

HONG, S.-T., PAN, J., TYAN, T. et PRASAD, P. (2006b).
Quasi-static crush behaviour of aluminium honeycomb specimens under non-proportional compression dominant combined loads.
International Journal of Plasticity, 22:1062–1088.

ISO (2001).
Iso 1922 : Rigid cellular plastics - determination of shear strength.
Rapport technique, International Standard Organization.

KELSEY, S., GELLATLY, R. et CLARK, B. (1958).
Shear modulus foil honeycomb cores.
Aircraft Engineering, 30:294–302.

KIM, D. et LEE, J. (1997).
Compressive mechanical properties of the nomex / thermoset honeycomb cores.
Polymers for Advanced Technologies, 8(1):1–7.

MGUIL-TOUCHAL, S., MORESTIN, F. et BRUNET, M. (1997).
Various experimental applications of digital image correlation method.
pages 45 – 58, Rhodes, Greece.

MOHR, D. et DOYOYO, M. (2003).
A new method for the biaxial testing of cellular solids.
Experimental Mechanics, 43(2):173–182.

MOHR, D. et DOYOYO, M. (2004).
Experimental investigation on the plasticity of hexagonal aluminum honeycomb under multiaxial loading.
Journal of Applied Mechanics, 71:375–385.

MULTIPLAST (2007).
http ://www.multiplast-yachts.com/indexfr.cfm.

Nordstrand, T. et Carlsson, L. (1997).
Evaluation of transverse shear stiffness of structural core sandwich plates.
Composite Structures, 37(2):145 – 153.

O'Connor, D. (1984).
An evaluation of test methods for shear modulus of sandwich cores.
The International Journal of Cement Composites and Lightweight Concrete, 6(1):3–12.

Parneix, P. et Lucas, D. (2000).
Les matériaux composites en construction navale militaire - am 5660.
Rapport technique, Techniques de l'Ingénieur.

Petras, A. et Sutcliffe, M. (2000).
Indentation failure analysis of sandwich beams.
Composite Structures, 50(3):311 – 318.

Pinzelli, R. (1993).
Composites sandwich en nids d'abeilles nomex résistance maximale et poids minimal.
Composites, (5):6–14.

Schraad, M. et Triantafyllidis, N. (1997a).
Scale effects in media with periodic and nearly periodic microstructures, part i : macroscopic properties.
Journal of Applied Mechanics, 64:751–762.

Schraad, M. et Triantafyllidis, N. (1997b).
Scale effects in media with periodic and nearly periodic microstructures, part i : macroscopic properties.
Journal of Applied Mechanics, 64:763–771.

Simone, A. et Gibson, L. (1998).
Effects of solid distribution on the stiffness and strength of metallic foams.
Acta Materialia, 46(6):2139 – 2150.

Tsujii, Y., Tanaka, K. et Nishida, Y. (1995).
Analysis of mechanical properties of aramid honeycomb core (investigation on the compression strength and the shear modulus).
Nippon Kikai Gakkai Ronbunshu, A Hen : Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Part A, 61(587):1608–1614.

Wada, A., Kawasaki, T., Minoda, Y., Kataoka, A., Tashiro, S. et Fukuda, H. (2003).
A method to measure shearing modulus of the foamed core for sandwich plates.
Composite Structures, 60:385–390.

Wierzbicki, T. et Abramowicz, W. (1983).
On crushing mechanics thin walled structures.
Journal of Applied Mechanics, 50(4A):727–734.

Zhang, J. et Ashby, M. (1992).
Out-of-plane properties of honeycombs.
International Journal of Mechanical Sciences, 34(6):475–489.

Zhu, H., Thorpe, S. et Windle, A. (2006).
The effect of cell irregularity on the high strain compression of 2d voronoi honeycombs.
Solids and Structures, 43:1061–1078.

Chapitre 4

Modélisation des âmes en nids d'abeilles Nomex

Ce chapitre présente le modèle de comportement mécanique développé pour les âmes en nids d'abeilles Nomex. Après un bref aperçu des modèles existants, les hypothèses de modélisation retenues dans ces travaux sont présentées. Elles conduisent à proposer une loi macroscopique homogénéisée combinant, avec un très fort couplage, plasticité et endommagement. Une stratégie d'identification, basée sur l'utilisation d'algorithmes génétiques, permet de déterminer les paramètres du modèle. Les résultats obtenus démontrent la très bonne adéquation modèle/expérience. Finalement, des simulations numériques menées avec le code éléments finis Abaqus, module Explicit permettent de définir les conditions d'utilisation du modèle.

Sommaire

4.1 Introduction 104
4.2 Proposition d'un modèle de comportement 108
4.3 Identification du modèle 119
4.4 Implémentation sous Abaqus et validations 127
4.5 Conclusion 130

4.1 Introduction

La revue bibliographique présentée ci-dessous met en évidence le travail très important réalisé depuis les années 1950 sur la caractérisation du comportement mécanique supposé élastique orthotrope fragile des âmes en nids d'abeilles [Kelsey *et al.*, 1958; Armstrong, 1974; Wierzbicki et Abramowicz, 1983; Akay et Hanna, 1990; Zhang et Ashby, 1992a,b; Grediac, 1993; Burton et Noor, 1997; Gibson et Ashby, 1999; ASTM, 2000a,b; Mohr et Doyoyo, 2004a; Gornet *et al.*, 2005, 2006; Pahr et Rammerstorfer, 2006]. Les études expérimentales, les études d'homogénéisations analytique ou numérique sont nombreuses, mais paradoxalement peu de travaux sont disponibles concernant la modélisation du comportement mécanique non linéaire des âmes Nomex.

Dans une deuxième partie, un modèle de comportement mécanique attachant un soin particulier à la représentation des aspects non linéaires est proposé, identifié puis validé sur la base des essais réalisés au laboratoire.

4.1.1 Revue bibliographique

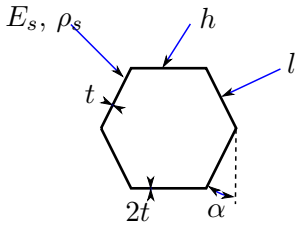
Depuis leur apparition dans les années 1950-60, les structures en nids d'abeilles constitués de papier Nomex font l'objet de nombreuses études [Hentschel, 1975; Pinzelli, 1993; Chatain, 2001; Berthelot, 2005; Gay, 2006]. Dans un premier temps, la caractérisation expérimentale de leurs propriétés élastiques orthotropes [ASTM, 2000a,b] (voir chapitre 3), en fournissant des données "globales" de dimensionnement, a permis aux bureaux d'études d'employer massivement ces matériaux dans les applications de pointe [Berthelot, 2005; Gay, 2006]. Cependant la grande diversité des nids d'abeilles (forme des cellules, hauteur des blocs, taille des parois, matériaux employés...) a conduit à développer des outils permettant d'obtenir les propriétés macroscopiques des blocs de nids d'abeilles à partir de la géométrie des cellules et de leur matériau constitutif. Dans cette optique, des approches d'homogénéisation analytique et numérique ont été développées. Elles donnent, dans l'ensemble, de bonnes estimations des propriétés mécaniques macroscopiques [Gibson et Ashby, 1999; Grediac, 1993; Gornet *et al.*, 2005].

Les efforts menés, concernant la modélisation du comportement macroscopique irréversible des âmes en nids d'abeilles, ont été beaucoup moins importants. Implicitement, il ressort qu'une fois posée l'hypothèse d'une réponse de type élastique fragile orthotrope en petites déformations, le principal enjeu des recherches effectuées a été de trouver des méthodes nourrissant les modèles associés [Gibson et Ashby, 1999]. Ces derniers, s'ils sont bien adaptés à des études de pré-dimensionnement, ne sont cependant pas assez complets pour prédire la réponse des structures en cas de chargements complexes. Dans le cas de chargements sur structures sandwichs par exemple, l'évaluation correcte des efforts repris par les peaux et l'âme nécessite l'emploi de modèles capables de reproduire le comportement des nids d'abeilles jusqu'à la phase ultime de la rupture. Quelques modèles dédiés à la réponse non linéaire des âmes en nids d'abeilles ont toutefois vu le jour [Schreyer *et al.*, 1994; Anand et Gu, 2000; Horrigan *et al.*, 2000; Aminanda, 2004; Mohr et Doyoyo, 2004b; Xue et Hutchinson, 2004].

4.1.2 Modèles analytiques - micro/macro

Les modèles analytiques ont été les premiers à être développés pour les âmes en nids d'abeilles Nomex. Les travaux de [Kelsey *et al.*, 1958] ont permis de mieux connaître la réponse élastique orthotrope des structures en nids d'abeilles. Ceux de [Mcfarland, 1963;

Wierzbicki et Abramowicz, 1983] ont donné une évaluation de leurs capacités d'absorption d'énergie en cours d'écrasement par analyse du processus de formation des plis successifs. Ce domaine de recherche est notamment essentiel pour les applications de type absorbeurs de chocs, certaines études portant même sur le calibrage des contraintes d'écoulement grâce au choix des caractéristiques d'entrées des nids d'abeilles comme le type de résine par exemple [Shafizadeh et Seferis, 2000].
Consécutivement, les travaux de [Zhang et Ashby, 1992a,b; Gibson et Ashby, 1999] et [Burton et Noor, 1997] se sont appuyés sur une équivalence en énergie entre milieu alvéolaire et milieu fictif homogène équivalent pour déterminer les propriétés élastiques des blocs de nids d'abeilles. En faisant appel à la théorie de l'instabilité élastique [Timoshenko et Gere, 1961], ils ont également déterminé les contraintes limites en compression et cisaillement. Quelques résultats de ces travaux sont présentés en tableau 4.1 :

Propriétés macroscopiques		
Illustration	Elasticité	Rupture
	$\frac{E_3}{E_s} = \frac{\rho}{\rho_s}$ $\frac{G_{31}}{G_s} = \frac{\cos^2(\alpha)}{2}\frac{\rho}{\rho_s}$ $\frac{G_{32}}{G_s} \geq \frac{(1+\sin^2(\alpha))}{2}\frac{\rho}{\rho_s}$ $\frac{G_{32}}{G_s} \leq \frac{(1+\sin^2(\alpha))^2}{4}\frac{\rho}{\rho_s}$	$\sigma_3^{instabilité} = 4,26\ \cos^2(\alpha)$ $(1+\sin(\alpha))^2\ E_s\frac{\rho}{\rho_s}$ $\sigma_3^{rupture} = \sigma_s^{rupture}\frac{\rho}{\rho_s}$ $\sigma_{31}^{instabilité} = 1,26\ \cos^3(\alpha)$ $(1+\sin(\alpha))^2\ E_s\left(\frac{\rho}{\rho_s}\right)^3$ $\sigma_{23}^{instabilité} = 1,26\ \cos^2(\alpha)$ $(1+\sin(\alpha))^3\ E_s\left(\frac{\rho}{\rho_s}\right)^3$

TAB. 4.1 – Quelques résultats d'homogénéisation analytique [Zhang et Ashby, 1992b]

avec $\frac{\rho}{\rho_s} = \frac{2\,t}{l\,\cos(\alpha)\ (1+\sin(\alpha))}$. Les bornes supérieures sont issues des équivalences en énergie sous chargement de type déplacement et les bornes inférieures sous chargement en effort. $\sigma_s^{rupture}$ est la contrainte à rupture en traction du papier Nomex, $\sigma_3^{rupture}$ correspond à la limite ultime du bloc de nids d'abeilles Nomex en traction et $\sigma_3^{instabilité}$ représente la limite en compression, c'est-à-dire la valeur de la contrainte à partir de laquelle l'instabilité apparaît.

Avec l'essor des méthodes numériques, la détermination des propriétés macro à partir de données micro s'est affinée. C'est ce qui est exposé maintenant.

4.1.3 Modèles numériques - micro/macro

Basés sur la théorie de l'homogénéisation des milieux périodiques ou sur des éprouvettes virtuelles de grandes dimensions, de nombreux modèles numériques utilisant la méthode des éléments finis ont été développés pour déterminer les caractéristiques des âmes en nids d'abeilles Nomex. La détermination des propriétés de cisaillement hors plan à partir de modèles éléments finis a été proposée par [Grediac, 1993]. Le concept a été ensuite étendu de manière à obtenir toutes les propriétés élastiques tridimensionnelles des nids d'abeilles Nomex [Burton et Noor, 1997; Hohe et Becker, 2001; Gornet *et al.*, 2005]. L'enveloppe à rupture des structures sandwichs a été prédite par la simulation d'éprouvettes virtuelles [Mohr et Doyoyo, 2004a] puis par analyse des modes de flambement [Gornet *et al.*, 2005,

2006; Pahr et Rammerstorfer, 2006] dans le cadre de la méthode de l'homogénéisation périodique.
La plupart de ces approches utilisent la périodicité de la géométrie des structures en nids d'abeilles afin de les remplacer par un milieu continu se comportant de manière équivalente. Dans le cadre linéaire de la technique d'homogénéisation périodique, la détermination des propriétés du milieu continu équivalent repose sur les étapes suivantes :

- choix d'un Volume Élémentaire Représentatif (VER, voir figure 4.1) Ω qui permet, en imposant des conditions de périodicité sur la partie $\partial\Omega_p$ de sa frontière $\partial\Omega$, de retrouver la structure alvéolaire infinie ;
- réalisation de six chargements macroscopiques élémentaires, puis de chargements supplémentaires obtenus par combinaisons linéaires des précédents (dans le cas des âmes en nids d'abeilles Nomex, la présence de trois plans de symétrie confère au milieu homogène équivalent un comportement mécanique orthotrope qui nécessite trois chargement complémentaires pour être identifié) ;
- calcul de l'énergie de déformation du VER et détermination des propriétés du milieu macroscopique équivalent par application du théorème de Hill Mandel [Hill, 1963; Mandel, 1965] qui postule que la moyenne de l'énergie de déformation sur le milieu microscopique réel est égale à l'énergie de déformation du milieu macroscopique équivalent : $W_{MACRO} = \overline{W}_{micro}$.

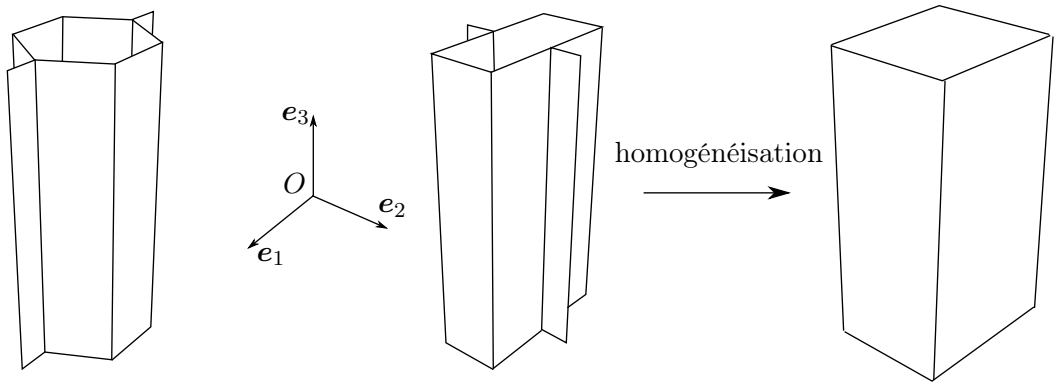


FIG. 4.1 – VER : cellules à sections hexagonale et rectangulaire

Au niveau microscopique, le problème mécanique s'écrit :

$$\left\{\begin{array}{lll} \boldsymbol{Div}\left(\sigma\left(X\right)\right) & = \mathbf{0} & \forall\, X \in \Omega \quad \text{(équilibre)} \\ \sigma\left(X\right) & = \mathrm{K}_{micro} : \epsilon\left(X\right) & \forall\, X \in \Omega \quad \text{(comportement)} \\ \epsilon\left(X\right) & = \mathrm{Grad}^{S}\left(\boldsymbol{u}\left(X\right)\right) & \forall\, X \in \Omega \quad \text{(cinématique)} \\ \sigma\left(X\right)\cdot\boldsymbol{n} & = \mathbf{0} & \forall\, X \in \partial\Omega \quad \text{(limites)} \\ \boldsymbol{u}\left(X\right) & = \mathrm{E}_{imp}\,\mathbf{X} + \boldsymbol{u}_p\left(X\right) & \forall\, X \in \partial\Omega_p \quad \text{(périodicité)} \end{array}\right. \tag{4.1}$$

sous l'hypothèse des petites perturbations, avec $\boldsymbol{u}_p$ un champ de déplacements périodiques sur $\partial\Omega_p$. Pour déterminer les caractéristiques du comportement macroscopique, il reste à

définir ce dernier ; puis à introduire le principe de Hill Mandel :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathrm{E} \\ \\ \begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{33} \\ \sqrt{2}E_{12} \\ \sqrt{2}E_{23} \\ \sqrt{2}E_{31} \end{bmatrix} \end{array} \right. = \mathrm{K}_{MACRO}^{-1} : \Sigma \quad \text{soit :} \quad = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & -\frac{\nu_{13}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{21}}{E_2} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{31}}{E_3} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{12}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{23}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{31}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_{11} \\ \Sigma_{22} \\ \Sigma_{33} \\ \sqrt{2}\Sigma_{12} \\ \sqrt{2}\Sigma_{23} \\ \sqrt{2}\Sigma_{31} \end{bmatrix} \tag{4.2}$$

et

$$\Sigma \ : \ \mathrm{E} = \frac{1}{V} \int_{\Omega} \sigma\left(X\right) \ : \epsilon\left(X\right) \ dX \tag{4.3}$$

avec E et Σ les champs macro de déformations et de contraintes dans le milieu fictif équivalent. Finalement un système de neuf équations à neuf inconnues est obtenu. Sa résolution fournit le comportement mécanique du milieu équivalent. Il est également possible de déterminer l'enveloppe de rupture des nids d'abeilles par analyse d'instabilité [Gornet *et al.*, 2005]. Les observation disponibles dans [Zhang et Ashby, 1992b; Aminanda, 2004] montrent en effet que le flambement des parois est le mode d'effondrement privilégié des nids d'abeilles Nomex. Nos propres études expérimentales confirment ces observations (voir chapitre 3). Sur cette base, des études ont été menées afin de déterminer les limites en compression/cisaillement combinés [Petras et Sutcliffe, 1999; Gornet *et al.*, 2007].

4.1.4 Modèles macro complexes

Si les deux familles de modélisation présentées ci-dessus donnent des résultats très satisfaisants, une modélisation de ces âmes jusqu'à la phase ultime de la rupture doit également être menée. Dans le cadre de courses nautiques par exemple, il peut tout à fait être imaginé qu'après un incident de course n'ayant pas entraîné la ruine ultime de la structure, le skippeur souhaite disposer d'informations sur l'état mécanique de la coque. À partir de conditions limites estimées, la simulation numérique doit alors être en mesure, grâce à l'utilisation de lois de comportement adaptées, de fournir les bons niveaux de chargement. Ceci implique de disposer d'un modèle de comportement prenant en compte à la fois les réponses pré et post-instabilité observées expérimentalement lors de l'écrasement d'âmes en nids d'abeilles Nomex.

Sur la thématique de l'indentation, un modèle remplaçant le milieu alvéolaire par un réseau de ressorts non-linéaires a été proposé dans [Aminanda, 2004; Aminanda *et al.*, 2005]. Cette approche permet de prendre en compte l'aspect local et rigidifiant des arêtes verticales des nids d'abeilles. Elle est également adaptables à des matériaux très divers. Elle impose toutefois une rupture de "chaîne numérique" dans la phase de conception des structures, l'âme issue des modèles CAO devant être remplacée par un réseau de ressorts hors plan. Avec un tel modèle, le cisaillement transverse n'est cependant pas pris en compte.

Dans d'autres approches [Anand et Gu, 2000; Mohr et Doyoyo, 2004b], les âmes en nids d'abeilles sont modélisées sous la forme d'un milieu continu élasto-plastique équivalent. L'identification du modèle, sur la base d'essais ARCAN, permet aux auteurs de

proposer des critères de plasticité bien adaptés à la réponse hors plan de ces matériaux. Donnant de très bons résultats sous sollicitations mixtes de compression/cisaillement pour des formes variées de cellules, ce modèle n'est toutefois pas capable de reproduire le pic d'instabilité observé lors de l'écrasement de nids d'abeilles Nomex. Enfin, d'autres modèles dédiés à la réponse à l'écrasement de nids d'abeilles ou de mousses, et négligeant le pic d'instabilité, sont disponibles dans la littérature [Schreyer *et al.*, 1994; Santosa et Wierzbicki, 1998; Horrigan *et al.*, 2000; Xue et Hutchinson, 2004].

Le modèle développé pour les âmes en nids d'abeilles Nomex dans ces travaux va maintenant être présenté.

4.2 Proposition d'un modèle de comportement

L'objectif du modèle proposé est de permettre de simuler la réponse non linéaire des âmes en nids d'abeilles Nomex jusqu'à la rupture. Les hypothèses simplificatrices retenues pour le développement sont tout d'abord présentées. L'écriture théorique du modèle est ensuite détaillée ainsi que l'influence de ses paramètres.

4.2.1 Hypothèses de modélisation

De par sa position centrale dans le problème à résoudre, la loi de comportement mécanique dédiée à la réponse non linéaire jusqu'à la phase ultime de la rupture des âmes en nids d'abeilles Nomex doit respecter un certain nombre de contraintes :

- respect du formalisme thermodynamique évoqué en chapitre 1 ;
- formulation hypoélastique en référentiel en rotation propre (compatibilité avec ABAQUS, module EXPLICIT) ;
- formulation sur la base de grandeurs mesurables expérimentalement.

En plus de ces contraintes devant être obligatoirement vérifiées, des hypothèses simplificatrices sont émises.

Tout d'abord, les âmes en nids d'abeilles Nomex sont modélisées sous la forme d'un milieu continu orthotrope équivalent. Cette approche permet de simplifier très fortement la modélisation géométrique des âmes et de limiter les coûts de calcul. Elle permet également de recourir aux théories d'endommagement et de plasticité pour représenter le comportement macroscopique mesuré expérimentalement. L'anisotropie éventuellement induite lors des transformations du milieu est négligée, c'est-à-dire que même très fortement écrasées, les âmes en nids d'abeilles sont supposées conserver un comportement orthotrope.

Conformément aux discussions du chapitre 3, la loi est développée dans l'espace des contraintes de Kirchhoff et des taux de déformation en rotation propre :
$\dot{\tau}^R = \Lambda^{\tau,GN}\left(\mathrm{D}^R\ ;\ \boldsymbol{\alpha}^R\right)$, ou, sous forme intégrée, $\tau^R = f\left(\epsilon_{nl}^R\ ;\ \boldsymbol{\alpha}^R\right)$. Dans cette étude, les phénomènes thermiques sont négligés.

Enfin, les sollicitations rencontrées dans le cadre d'une utilisation des nids d'abeilles Nomex en âmes sandwichs étant principalement de type cisaillement et compression hors plan, un soin particulier est apporté à la modélisation du comportement mécanique selon ces composantes. Le comportement "plan" est réduit au cas élastique linéaire. De nombreuses études, portant sur le comportement plan complexe quasi-statique et dynamique des structures alvéolaires, sont disponibles dans la littérature [Triantafyllidis et Schraad, 1998; Ruan *et al.*, 2003; Hohe et Becker, 2003; Okumura *et al.*, 2004]. Elles mettent en

œuvre des modèles microscopiques complexes, la plupart du temps dédiés à des matériaux métalliques à comportement élasto-plastique.

Toutes les hypothèses principales du modèle étant maintenant formulées, la loi de comportement est présentée.

4.2.2 Loi de comportement pour nids d'abeilles Nomex

La manière la plus simple de construire un modèle de comportement consiste à suivre le formalisme thermodynamique. Les variables de modélisation sont introduites dans un premier temps. La définition du premier potentiel thermodynamique, l'énergie libre d'Helmholtz, permet de préciser les lois d'états donnant les forces thermodynaniques en fonction de leurs duales de l'espace des déformations. L'introduction du potentiel de dissipation, lié aux phénomènes irréversibles, complète la description du comportement mécanique du matériau. Les lois d'évolution qui en découlent pilotent la dégradation des âmes en nids d'abeilles Nomex.

Variables de modélisation

Les variables utilisées pour modéliser le comportement mécanique non linéaire des âmes en nids d'abeilles Nomex sont rassemblées dans le tableau 4.2 selon le formalisme proposé dans [Lemaître et Chaboche, 1990]. Pour simplifier les notations, les tenseurs symétriques des contraintes de Kirchhoff en référentiel en rotation propre τ^R et les déformations non linéaires associées ϵ^R_{nl} sont remplacés, dans les expressions suivantes, par les vecteurs $\boldsymbol{\tau}$ et $\boldsymbol{\epsilon}$.

Variables de modélisation			
Variables d'état		Variables duales	Théories associées
Observables	Internes		
$\boldsymbol{\epsilon} = [\epsilon_{11}\ \epsilon_{22}\ \epsilon_{33}\ \sqrt{2}\,\epsilon_{12}\ \sqrt{2}\,\epsilon_{23}\ \sqrt{2}\,\epsilon_{31}]$		$\boldsymbol{\tau} = [\tau_{11}\ \tau_{22}\ \tau_{33}\ \sqrt{2}\,\tau_{12}\ \sqrt{2}\,\tau_{23}\ \sqrt{2}\,\tau_{31}]$	élasticité
	$\boldsymbol{\epsilon}_p = [0\ 0\ \epsilon_{p33}\ 0\ \sqrt{2}\,\epsilon_{p23}\ \sqrt{2}\,\epsilon_{p31}]$	$-\boldsymbol{\tau} = -[\tau_{11}\ \tau_{22}\ \tau_{33}\ \sqrt{2}\,\tau_{12}\ \sqrt{2}\,\tau_{23}\ \sqrt{2}\,\tau_{31}]$	plasticité
	p	R	écrouissage de plasticité
	$\boldsymbol{d} = [d_{33}\ d_{23}\ d_{13}]$	$\boldsymbol{Y} = [Y_{33}\ Y_{23}\ Y_{13}]$	endommagement
	$\boldsymbol{\beta} = [\beta_{33}\ \beta_{23}\ \beta_{13}]$	$\boldsymbol{B}$ $[B_{33}\ B_{23}\ B_{13}]$	écrouissage d'endommagement

TAB. 4.2 – Variables de modélisation du comportement mécanique des âmes en nids d'abeilles Nomex

$\boldsymbol{\epsilon}_p$ représente le vecteur des déformations plastiques. Celles-ci n'apparaissent qu'en compression et cisaillement hors plan. Les déformations élastiques sont obtenues par la soustraction des déformations plastiques aux déformations totales observables : $\boldsymbol{\epsilon}_e = \boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}_p$. p est la déformation plastique cumulée. Sa duale R traduit l'augmentation du domaine d'admissibilité en compression hors plan. $\boldsymbol{d}$ et $\boldsymbol{\beta}$ sont des vecteurs de variables d'endom-

magement et d'endommagement cumulé. Tout comme pour la plasticité, seuls les termes hors plan, c'est-à-dire d_{33}, d_{23}, d_{31}, β_{33}, β_{23} et β_{31} sont non nuls.

Énergie libre, lois d'état

L'énergie libre d'Helmholtz, la densité massique d'énergie ψ, est choisie sous la forme :

$$\left\{\begin{array}{ll} \rho\,\psi\left(\boldsymbol{\epsilon},\boldsymbol{\epsilon}_p,\boldsymbol{d},\boldsymbol{\beta},p\right) & = \dfrac{1}{2}\left(\boldsymbol{\epsilon}^T-\boldsymbol{\epsilon}_p^T\right)\,\Lambda\,\left(\boldsymbol{d}\right)\,\left(\boldsymbol{\epsilon}-\boldsymbol{\epsilon}_p\right) \\ & + \dfrac{1}{2}\,\boldsymbol{\beta}^T\,\mathrm{Y}_c\,\boldsymbol{\beta} \\ & + \dfrac{1}{2}\,p\,K\,p \end{array}\right. \tag{4.4}$$

avec ρ la masse volumique du milieu homogène équivalent ; Λ la matrice de rigidité du comportement orthotrope ; K un coefficient matériau qui traduit l'intensité de l'évolution de l'écrouissage en plasticité et Y_c, une matrice diagonale 3×3 de coefficients matériaux qui régulent l'intensité de l'évolution de l'écrouissage en d'endommagement ($\mathrm{diag}\left(\mathrm{Y}_c\right) = \{Y_{c33}\,Y_{c23}\,Y_{c31}\}$). Dans cette expression le terme $\left(\boldsymbol{\epsilon}^T-\boldsymbol{\epsilon}_p^T\right)\,\Lambda\,\left(\boldsymbol{d}\right)\,\left(\boldsymbol{\epsilon}-\boldsymbol{\epsilon}_p\right)$ représente la densité volumique d'énergie élastique stockée par le matériau au point considéré. Le terme $p\,K\,p$ correspond à la densité d'énergie stockée par écrouissage plastique. Il permet de faire grandir la taille du domaine admissible en plasticité en fonction de la déformation plastique cumulée p. K est le module d'écrouissage.
$\boldsymbol{\beta}^T\,\mathrm{Y}_c\,\boldsymbol{\beta}$ représente la densité volumique d'énergie stockée dans le matériau par écrouissage en endommagement. $\boldsymbol{\beta}$ est une sorte d'endommagement cumulé, il est à l'endommagement ce que la déformation plastique cumulée p est à la plasticité [Dragon et Halm, 2004]. $\boldsymbol{B}$, sa duale définie dans l'espace des taux de restitution d'énergie, est le terme d'écrouissage de la surface d'endommagement. Y_c régule la vitesse d'évolution de l'endommagement, il est appelé taux de restitution d'énergie critique.

Cette approche diffère de celle adoptée en chapitre 2 pour la modélisation du comportement mécanique des composites tissés. La variable $\boldsymbol{\beta}$ était assimilée à la variable $\boldsymbol{d}$, l'effet mémoire étant obtenu par prise du maximum des valeurs du taux de restitution d'énergie $\boldsymbol{Y}$ au cours de l'histoire pour calculer l'état d'endommagement $\boldsymbol{d}\,(d\,(t) = f\left[\sup_{\tau\leq t} Y\,(\tau)\right])$. Elle présente l'intérêt de distinguer l'énergie dissipée globalement lors du processus d'endommagement de celle stockée à long terme se traduisant par une augmentation du domaine de non endommagement [Dragon et Halm, 2004].

Les contraintes de Kirchhoff sont déduites des déformations par dérivation de l'énergie libre par rapport aux déformations élastiques ($\boldsymbol{\tau} = \rho\,\partial_{(\boldsymbol{\epsilon}-\boldsymbol{\epsilon}_p)}\,\psi$) :

$$\left\{\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{c}\tau_{11}\\ \tau_{22}\\ \tau_{33}\end{array}\right\} = \left[\begin{array}{ccc}\Lambda_{11} & \Lambda_{12} & \Lambda_{13}\\ \Lambda_{21} & \Lambda_{22} & \Lambda_{23}\\ \Lambda_{31} & \Lambda_{32} & \Lambda_{33}\,(1-d_{33})\end{array}\right]\left\{\begin{array}{c}\epsilon_{11}\\ \epsilon_{22}\\ \epsilon_{33}-\epsilon_{p33}\end{array}\right\} \\ \\ \left\{\begin{array}{c}\sqrt{2}\,\tau_{12}\\ \sqrt{2}\,\tau_{23}\\ \sqrt{2}\,\tau_{31}\end{array}\right\} = \left[\begin{array}{ccc}\Lambda_{44} & 0 & 0\\ 0 & \Lambda_{55}\,(1-d_{23}) & 0\\ 0 & 0 & \Lambda_{66}\,(1-d_{31})\end{array}\right]\left\{\begin{array}{c}\sqrt{2}\,\epsilon_{12}\\ \sqrt{2}\,\epsilon_{23}-\sqrt{2}\,\epsilon_{p23}\\ \sqrt{2}\,\epsilon_{31}-\sqrt{2}\,\epsilon_{p31}\end{array}\right\} \end{array}\right. \tag{4.5}$$

($\Lambda_{12} = \Lambda_{21}$, $\Lambda_{23} = \Lambda_{32}$ et $\Lambda_{13} = \Lambda_{31}$).

Les coefficients de la matrice symétrique Λ s'expriment en fonction des modules d'élasticité :

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \frac{E_1\,(\nu_{23}\,\nu_{32}-1)}{\Delta} & \frac{E_2\,(\nu_{12}+\nu_{13}\,\nu_{32})}{\Delta} & \frac{E_3\,(\nu_{13}+\nu_{12}\,\nu_{23})}{\Delta} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{E_1\,(\nu_{21}+\nu_{23}\,\nu_{31})}{\Delta} & \frac{E_2\,(\nu_{13}\,\nu_{31}-1)}{\Delta} & \frac{E_3\,(\nu_{23}+\nu_{13}\,\nu_{21})}{\Delta} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{E_1\,(\nu_{31}+\nu_{21}\,\nu_{32})}{\Delta} & \frac{E_2\,(\nu_{32}+\nu_{12}\,\nu_{31})}{\Delta} & \frac{E_3\,(\nu_{12}\,\nu_{21}-1)}{\Delta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\,G_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\,G_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\,G_{31} \end{bmatrix} \tag{4.6}$$

avec $\Delta = 1-\nu_{12}\,(\nu_{21}-\nu_{23}\,\nu_{31})-\nu_{23}\,\nu_{32}-\nu_{13}\,(\nu_{31}+\nu_{21}\,\nu_{32})$. Les coefficients de Λ peuvent être déterminés analytiquement à partir des propriétés mécaniques du papier constitutif en première approximation [Honig et Stronge, 2002].

Les lois d'états complémentaires concernent les taux de restitution d'énergie $\boldsymbol{Y} = -\rho\,\partial_{\boldsymbol{d}}\,\psi$, la variable d'écrouissage plastique $R = \rho\,\partial_p\,\psi$ et les écrouissages en endommagement $\boldsymbol{B} = \rho\,\partial_{\boldsymbol{\beta}}\,\psi$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} Y_{33} = \dfrac{1}{2}\,(\epsilon_{33}-\epsilon_{p33})\,\Lambda_{33}\,(\epsilon_{33}-\epsilon_{p33}) \\ Y_{23} = 2\,(\epsilon_{23}-\epsilon_{p23})\,\Lambda_{55}\,(\epsilon_{23}-\epsilon_{p23}) \\ Y_{31} = 2\,(\epsilon_{31}-\epsilon_{p31})\,\Lambda_{66}\,(\epsilon_{31}-\epsilon_{p31}) \end{array} \right. \\ \left\{ R = K\,p \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} B_{33} = Y_{c33}\,\beta_{33} \\ B_{23} = Y_{c23}\,\beta_{23} \\ B_{31} = Y_{c31}\,\beta_{31} \end{array} \right. \end{array} \right. \tag{4.7}$$

Les phénomènes dissipatifs sont maintenant présentés.

Potentiel de dissipation, lois d'évolution

Dans cette étude, les aspects non linéaires modélisés concernent le cisaillement et la compression hors plan. La définition d'un potentiel de dissipation, obtenu par pénalisation de la dissipation intrinsèque permet d'obtenir les lois d'évolution. Ce potentiel est l'élément clef de la modélisation de la dégradation des âmes en nids d'abeilles Nomex. C'est lui qui introduit les couplages entre les différents phénomènes observés.

Dissipation mécanique intrinsèque

La dissipation mécanique intrinsèque volumique s'écrit sous la forme

$$\left\{ \begin{array}{rl} \phi & = \tau_{33}\,\dot{\epsilon}_{p33} + Y_{33}\,\dot{d}_{33} - R\,\dot{p} - B_{33}\,\dot{\beta}_{33} \\ & + \tau_{23}\,\dot{\epsilon}_{p23} + Y_{23}\,\dot{d}_{23} - B_{23}\,\dot{\beta}_{23} \\ & + \tau_{31}\,\dot{\epsilon}_{p31} + Y_{31}\,\dot{d}_{31} - B_{31}\,\dot{\beta}_{31} \end{array} \right. \tag{4.8}$$

Elle prend en compte les différents phénomènes dissipatifs participant à la dégradation des âmes en nids d'abeilles Nomex :

- en cisaillements hors plan ($i = \{23\ 31\}$) :
  - $\tau_i\,\dot{\epsilon}_{pi}$ représente la puissance volumique dissipée par écoulement plastique ;
  - $Y_i\,\dot{d}_i$ est la puissance volumique dissipée par endommagement ;
  - $B_i\,\dot{\beta}_i$ représente la puissance volumique stockée à long terme par écrouissage en endommagement,

- en compression hors plan :
  - $\tau_{33}\,\dot{\epsilon}_{p33}$ représente la puissance volumique dissipée par écoulement plastique ;
  - $Y_{33}\,\dot{d}_{33}$ est la puissance volumique dissipée par endommagement ;
  - $R\,\dot{p}$ est la puissance stockée à long terme sous forme d'écrouissage plastique ;
  - $B_{33}\,\dot{\beta}_{33}$ représente la puissance volumique stockée à long terme par écrouissage en endommagement.

En cisaillement hors plan, les âmes en nids d'abeilles Nomex sont de nature élastique endommageable. Cet aspect de la réponse correspond aux termes $Y_i\,\dot{d}_i$ et $B_i\,\dot{\beta}_i$ de la dissipation intrinsèque. D'un point de vue expérimental, après la rupture du bloc Nomex, une contrainte résiduelle d'écoulement très faible est observée (cf figures 3.19 et 3.20). Elle est le résultat du frottement entre les deux lèvres du bloc de nids d'abeilles rompu. Elle n'est en aucun cas relative à la réponse du matériau (au sens "local"). Cette contrainte est toutefois modélisée pour conserver un minimum de rigidité, le niveau extrêmement faible n'influençant pas la réponse globale du bloc de nids d'abeilles (terme $\tau_i\,\dot{\epsilon}_{pi}$).

En compression hors plan, les âmes en nids d'abeilles Nomex exhibent une réponse complexe caractérisée à la fois par une chute régulière du module d'élasticité (termes $Y_{33}\,\dot{d}_{33}$ et $B_{33}\,\dot{\beta}_{33}$), une augmentation progressive des déformations irréversibles ($\tau_{33}\,\dot{\epsilon}_{p33}$) et une rigidification en contrainte ($R\,\dot{p}$). L'imbrication de ces phénomènes est assez forte. Elle sera présentée en détail un peu plus tard, lors de l'introduction des surfaces de charge d'endommagement et de plasticité.

Potentiel de dissipation

Ce potentiel est défini comme étant une fonction des forces thermodynamiques. Il peut être éventuellement paramétré par des variables internes [Lemaître et Chaboche, 1990]. Il est obtenu par pénalisation de l'opposée de la dissipation intrinsèque et s'écrit dans notre cas :

$$\left\{\begin{array}{ll} \Phi\left(\boldsymbol{\tau}\,;\boldsymbol{Y}\,;R\,;\boldsymbol{B}\,;p\,;\boldsymbol{d}\right) & = \mathcal{L}\left(-\phi\right) \\ & = -\phi \\ & + \lambda_{p33}\,F_{p33}\left(\tau_{33}\,;R\,;d_{33}\right) + \lambda_{d33}\,F_{d33}\left(Y_{33}\,;B_{33}\,;d_{33}\,;p\right) \\ & + \lambda_{p23}\,F_{p33}\left(\tau_{23}\,;d_{23}\right) + \lambda_{d23}\,F_{d23}\left(Y_{23}\,;B_{23}\,;d_{23}\right) \\ & + \lambda_{p31}\,F_{p33}\left(\tau_{31}\,;d_{31}\right) + \lambda_{d31}\,F_{d31}\left(Y_{31}\,;B_{31}\,;d_{31}\right) \end{array}\right. \tag{4.9}$$

avec $\boldsymbol{F}_p$ et $\boldsymbol{F}_d$ des surfaces potentielles relatives à la plasticité et à l'endommagement ; $\boldsymbol{\lambda}_p$ et $\boldsymbol{\lambda}_d$ des multiplicateurs de Lagrange positifs ou nuls. L'écriture de l'équation 4.9 suppose le découplage des directions. En exemple, la dégradation des âmes en nids d'abeilles Nomex en cisaillement hors plan 23 se fait indépendamment des chargements en cisaillement 31 et en compression normale hors plan 33. Un couplage pourraît être éventuellement introduit sur la base d'essais de caractérisation de type ARCAN.

En ce qui concerne les phénomènes de dissipation, le couplage entre endommagement et plasticité se fait de manière indirecte par le paramétrage des surfaces potentielles $\boldsymbol{F}_p$ et $\boldsymbol{F}_d$ par les variables internes. Ce point sera détaillé ultérieurement. Pour la suite, nous nous plaçons dans le cadre des théories de plasticité et d'endommagement associées, c'est-à-dire que les surfaces potentielles $\boldsymbol{F}_p$ et $\boldsymbol{F}_d$ sont assimilées aux surfaces de charge $\boldsymbol{f}_p$ et $\boldsymbol{f}_d$ qui déterminent l'état thermodynamiquement admissible du matériau dans l'espace des forces thermodynamiques. L'écoulement s'effectue donc perpendiculairement à ces surfaces qui sont maintenant détaillées. La décomposition additive des surface de dissipation nous place dans le cadre quasi-standard des matériaux standards généralisés [Germain, 1973; Lemaître et Chaboche, 1990].

Surfaces de charge

C'est finalement par l'intermédiaire de ces surfaces de charge, convexes dans l'espace des forces thermodynamiques pour assurer *a priori* la positivité de la dissipation intrinsèque (f_{p33}, f_{p23}, f_{p31}, f_{d33}, f_{d23} et f_{d31}), que sont pilotés les phénomènes dissipatifs. Celles-ci sont définies par les relations :

$$\left\{\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l} f_{p33} = \dfrac{\langle \tau_{33} \rangle_{\leq 0}}{1 - d_{33}} - \tau_{o33} - R \\ f_{p23} = (|\tau_{23}| - \tau_{o23})\ \mathcal{H}\left(d_{23} - d_{c23}\right) \\ f_{p31} = (|\tau_{31}| - \tau_{o31})\ \mathcal{H}\left(d_{31} - d_{c31}\right) \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} f_{d33} = \left[Y_{33}\, \kappa\left(p\right) - Y_{o33}\right]\, \xi\left(d_{33}\right) - B_{33} \\ f_{d23} = \left(Y_{23} - Y_{o23} - B_{23}\right)\, \overline{\mathcal{H}}\left(d_{23} - d_{c23}\right) \\ f_{d31} = \left(Y_{31} - Y_{o31} - B_{31}\right)\, \overline{\mathcal{H}}\left(d_{31} - d_{c31}\right) \end{array}\right. \end{array}\right. \tag{4.10}$$

avec $\boldsymbol{\tau}_o$ le vecteur des contraintes de Kirchhoff déclenchant l'écoulement plastique, $\boldsymbol{Y}_o$ le vecteur des taux de restitution d'énergie amorçant l'endommagement, $\boldsymbol{d}_c$ un vecteur de niveaux d'endommagements critiques permettant de réaliser le couplage plasticité endommagement. Toutes ces variables sont des paramètres matériaux identifiés sur la base des essais réalisés au laboratoire. Il peut être remarqué que la surface de charge f_{p33} est paramétrée par l'endommagement d_{33} avec l'introduction classique des contraintes effectives [Lemaître et Chaboche, 1990; Ladevèze et Le Dantec, 1992]. Le terme $\langle \tau \rangle_{\leq 0}$ permet de limiter le phénomène de plasticité à la compression.

Il reste à préciser que $\kappa\left(p\right)$ et $\xi\left(d_{33}\right)$ sont des fonctions introduites pour modéliser l'instabilité observée en compression normale hors plan sur les âmes en nids d'abeilles Nomex. En première description, κ peut être vu comme une pénalisation, par la plasticité, de l'énergie disponible pour endommager le matériau. ξ représente une pénalisation, par l'endommagement, de la surface de charge relative à l'état admissible du matériau en endommagement.

La justification de l'écriture des surfaces de charge $\boldsymbol{f}_p$ et $\boldsymbol{f}_d$ (expression 4.10) est maintenant présentée.

Surfaces de charge, chargement de cisaillement hors plan

L'emploi de la fonction $\mathcal{H}$ dans l'expression des surfaces de charge de plasticité f_{p23} et f_{p31} permet de ne rendre possible l'écoulement plastique qu'une fois un niveau d'endommagement critique atteint (d_{c23} et d_{c31}). En dessous de ce niveau, seul le phénomène d'endommagement est activé. De la même manière, l'utilisation de la fonction $\overline{\mathcal{H}}$, dans l'écriture des surfaces de charge d'endommagement f_{d23} et f_{d31}, n'autorise l'endommagement qu'en dessous du niveau critique.
En cas d'écoulement plastique, la contrainte reste figée à la valeur d'écoulement (τ_{o23} ou τ_{o31}). Ceci permet, en cas de compaction très forte dans le plan, d'obtenir une contrainte de Cauchy très élevée ($\sigma = \tau/J$), et donc d'assurer la transmission des efforts par compaction.
En cas d'évolution de l'endommagement, le terme d'écrouissage (B_{23} ou B_{31}) met en évidence l'augmentation du domaine admissible en force thermodynamique (Y_{23} ou Y_{31}) au cours de l'évolution du dommage.

Surfaces de charge, chargement normal hors plan

C'est ici la partie la plus délicate du modèle. Les résultats d'essais présentés en partie 3.4.2 du chapitre 3 montrent que le comportement des âmes en nids d'abeilles Nomex en compression normale hors plan est tout d'abord élastique endommageable. La faible non linéarité

observée s'explique par une chute du module d'élasticité, sans présence de déformation irréversible. À partir du pic d'instabilité, correspondant à la formation d'un pli, se produisent à la fois une chute du module d'élasticité apparent et une augmentation très rapide de la déformation irréversible (cf les décharges sur la figure 4.2). Finalement, une fois le pli d'instabilité replié sur lui même, les âmes en nids d'abeilles voient une forte augmentation des déformations irréversibles associée à une faible diminution du module d'élasticité.

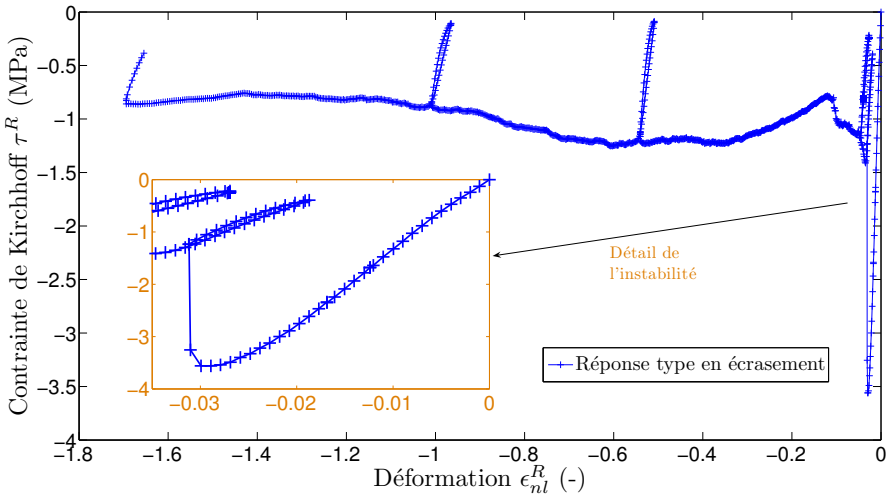


FIG. 4.2 – Réponse typique de nids d'abeilles en compression

Dans les expressions 4.10, les surfaces de charge f_{p33} et f_{d33}, rappelées ici par commodité, sont paramétrées par les fonctions $\kappa(p)$ et $\xi(d_{33})$:

$$\left\{\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l} f_{p33} = \dfrac{\langle\tau_{33}\rangle_{\leq 0}}{1-d_{33}} - \tau_{o33} - R \\ f_{d33} = \left[Y_{33}\,\kappa(p) - Y_{o33}\right]\,\xi(d_{33}) - B_{33} \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} \kappa(p) = 1 + (Y_p\,p)^n \\ \xi(d_{33}) = \dfrac{a_2 - a_1}{\pi}\,\arctan\left[\beta_d\,(d_{33} - d_{c33})\right] + \dfrac{a_2 + a_1}{2} \end{array}\right. \end{array}\right. \tag{4.11}$$

En réglant correctement les paramètres Y_{o33} et τ_{o33} c'est-à-dire les seuils d'endommagement et de plasticité, il est possible de commencer par endommager le matériau ($Y_{33} > Y_{o33}$), puis d'y coupler un peu plus tard l'écoulement plastique ($\tau_{33}/(1-d_{33}) > \tau_{o33}$) de manière à provoquer l'effondrement de la réponse.

Le terme $\kappa(p)$ dans l'expression de f_{d33} permet de faire augmenter très fortement le terme "$Y_{33}\,\kappa(p)$" avec la déformation plastique cumulée p. Ceci se traduit alors par une hausse de l'endommagement en phase instable, en adéquation avec les observations expérimentales. Plus précisément, le paramètre n de l'équation 4.11 régule l'aspect plus au moins discontinu du pic d'instabilité, et Y_p joue sur la pente d'instabilité. Tout le problème est ensuite de mettre fin à ce régime instable.

Pour cela, le terme "$\xi(d_{33})$", dans l'expression de f_{d33}, permet, en choisissant judicieusement les paramètres a_1, a_2, d_{c33} et β_d, de faire diminuer la valeur du potentiel de dissipation d'endommagement tout entier. Il y a donc toujours risque d'endommagement, mais le niveau est de moins en moins élevé. Ceci permet de stopper la phase d'instabilité.

Une étude d'influence des paramètres du modèle est disponbile en annexe 1. Il ressort de cette étude qu'il existe un lien très fort entre les paramètres du modèle et leurs effets

sur la réponse globale de l'âme homogénéisée. Ceci peut être vu comme un atout pour la phase d'identification. En effet, si une méthode relativement automatique est proposée ultérieurement, il est également possible de déterminer un jeu de paramètres satisfaisant sans l'assistance de méthodes d'optimisation. La difficulté essentielle à cette identification manuelle est due au paramètre β_d qui couple les aspects endommagement et plasticité, et qui, par conséquent, influe à la fois sur les réponses post-pic et pré-pic.
Les lois d'évolution sont maintenant dérivées des conditions d'optimalité du potentiel de dissipation $\Phi\left(\boldsymbol{\tau}\,;\boldsymbol{Y}\,;R\,;\boldsymbol{B}\,;p\,;\boldsymbol{d}\right)$.

Lois d'évolution

Pour assurer la maximisation de la densité d'énergie volumique dissipée, il faut minimiser Φ. Les conditions d'existence d'un minimum pour Φ aboutissent aux conditions de Karush Kuhn et Tucker ($i = \{33\,23\,31\}$) [Kuhn et Tucker, 1951] :

$$\left\{\begin{array}{lll} \lambda_{pi} \geq 0 & f_{pi} \leq 0 & \lambda_{pi}\, f_{pi} \;=\; 0 \\ \lambda_{di} \geq 0 & f_{di} \leq 0 & \lambda_{di}\, f_{di} \;=\; 0 \end{array}\right. \tag{4.12}$$

et aux lois d'évolution ($\partial_{\boldsymbol{J}}\,\Phi = 0$ avec $\boldsymbol{J}$ forces thermodynamiques) :

$$\left\{\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} \dot{\epsilon}_{p33} = \lambda_{p33}\,\partial_{\tau_{33}}\,f_{p33} = -\dfrac{\lambda_{p33}}{1-d_{33}} \\ \dot{\epsilon}_{p23} \;=\; \lambda_{p23}\,\partial_{\tau_{23}}\,f_{p23} \;=\; \lambda_{p23}\,\mathcal{S}\left(\tau_{23}\right)\,\mathcal{H}\left(d_{23}-d_{c23}\right) \\ \dot{\epsilon}_{p31} \;=\; \lambda_{p31}\,\partial_{\tau_{31}}\,f_{p31} \;=\; \lambda_{p31}\,\mathcal{S}\left(\tau_{31}\right)\,\mathcal{H}\left(d_{31}-d_{c31}\right) \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} \dot{d}_{33} = \lambda_{d33}\,\partial_{Y_{33}}\,f_{d33} = \lambda_{d33}\,\kappa\left(p\right)\,\xi\left(d_{33}\right) \\ \dot{d}_{23} \;=\; \lambda_{d23}\,\partial_{Y_{23}}\,f_{d23} \;=\; \lambda_{d23}\,\overline{\mathcal{H}}\left(d_{23}-d_{c23}\right) \\ \dot{d}_{31} \;=\; \lambda_{d31}\,\partial_{Y_{31}}\,f_{d31} \;=\; \lambda_{d31}\,\overline{\mathcal{H}}\left(d_{31}-d_{c31}\right) \end{array}\right. \\ \left\{\;\dot{p} = -\lambda_{p33}\,\partial_R\,f_{p33} = \lambda_{p33}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} \dot{\beta}_{33} = -\lambda_{d33}\,\partial_{B_{33}}\,f_{d33} = \lambda_{d33} \\ \dot{\beta}_{23} \;=\; -\lambda_{d23}\,\partial_{B_{23}}\,f_{d23} \;=\; \lambda_{d23}\,\overline{\mathcal{H}}\left(d_{23}-d_{c23}\right) \\ \dot{\beta}_{31} \;=\; -\lambda_{d31}\,\partial_{B_{31}}\,f_{d31} \;=\; \lambda_{d31}\,\overline{\mathcal{H}}\left(d_{31}-d_{c31}\right) \end{array}\right. \end{array}\right. \tag{4.13}$$

Si $f \leq 0$ et $\lambda = 0$, aucun processus irréversible ne se produit tandis que si $\lambda > 0$ alors $f = 0$, il y a dissipation d'énergie.

La détermination des multiplicateurs de Lagrange λ_{pi} et λ_{di} est réalisée par la linéarisation des conditions de consistances qui postulent que, lors d'un phénomène irréversible, la vitesse d'évolution des surfaces de charge est nulle :

$$\left\{\begin{array}{ll} \dot{f}_{pi} & = 0 \\ \dot{f}_{di} & = 0 \end{array}\right. \tag{4.14}$$

soit, après linéarisation et dans le cas de la compression normale hors plan pour illustration :

$$\left\{\begin{array}{l} f_{p33}\left(\tau_{33}+\delta\tau_{33}, d_{33}+\delta d_{33}, R+\delta R\right) \;=\; 0 \;= \\ \qquad f_{p33}\left(\tau_{33}, d_{33}, R\right) + \\ \qquad \partial_{\tau_{33}}\,f_{p33}\,\delta\tau_{33} + \partial_{d_{33}}\,f_{p33}\,\delta d_{33} + \partial_R\,f_{p33}\,\delta R \\ f_{d33}\left(Y_{33}+\delta Y_{33}, d_{33}+\delta d_{33}, p+\delta p, B_{33}+\delta B_{33}\right) \;=\; 0 \;= \\ \qquad f_{d33}\left(Y_{33}, d_{33}, p, B_{33}\right) + \\ \qquad \partial_{Y_{33}}\,f_{d33}\,\delta Y_{33} + \partial_{d_{33}}\,f_{d33}\,\delta d_{33} + \partial_p\,f_{d33}\,\delta p + \partial_{B_{33}}\,f_{d33}\,B_{33} \end{array}\right. \tag{4.15}$$

Ces expressions permettent de calculer les multiplicateurs de plasticité λ_{p33} et d'en-

dommagement λ_{d33} grace à l'introduction des lois d'évolution :

$$\begin{cases} \left(\partial_{\tau_{33}} f_{p33}\, \partial_{\epsilon_{p33}} \tau_{33}\, \partial_{\tau_{33}} f_p\right)\, \delta\lambda_{p33} & \\ -\left(\partial_R f_{p33}\, \partial_p R\, \partial_R f_{p33}\right)\, \delta\lambda_{d33} & = -\left\langle f_{p33}\right\rangle_{>0} \\ \left(\partial_{Y_{33}} f_{d33}\, \partial_{\epsilon_{p33}} Y_{33}\, \partial_{\tau_{33}} f_{p33} - \partial_p f_{d33}\, \partial_R f_{p33}\right)\, \delta\lambda_{p33} & \\ +\left(\partial_{d_{33}} f_{d33}\, \partial_{Y_{33}} f_{d33} - \partial_{B_{33}} f_{d33}\, \partial_{\beta_{33}} B_{33}\, \partial_{B_{33}} f_{d33}\right)\, \delta\lambda_{d33} & = -\left\langle f_{d33}\right\rangle_{>0} \end{cases} \tag{4.16}$$

Les multiplicateurs sont utilisés pour actualiser les variables de l'espace des déformations qui permettent à leur tour de calculer les variables de l'espace des contraintes et d'évaluer les critères d'endommagement et de plasticité.

Algorithmes d'intégration

L'intégration numérique du comportement mécanique des âmes en nids d'abeilles Nomex entre les temps t_n et t_{n+1} est présentée en deux étapes.

Intégration du cisaillement hors plan

La méthode d'intégration numérique utilisée en cisaillement hors plan est basée sur la linéarisation de la condition de consistance (équation 4.14). Cette méthode, dite de retour radial [Simo et Hugues, 1998], est présentée en algorithme 4.

Intégration de comportement normal hors plan

L'intégration numérique de la partie réponse normale hors plan de la loi de comportement s'effectue en deux étapes au moyen du même algorithme que celui utilisé ci-dessus [Simo et Hugues, 1998]. Dans une phase de prédiction élastique, tout l'incrément de déformation est supposé être associé à des phénomènes réversibles. Les niveaux de la contrainte τ_{33} et du taux de restitution d'énergie Y_{33} sont évalués à partir de l'incrément de déformation réversible. Les critères de plasticité f_{p33} et d'endommagement f_{d33} sont ensuite calculés. Si au moins l'un des deux est positif, alors cela signifie qu'il y a processus irréversible et dissipation d'énergie. Une phase de correction, visant à ramener l'état thermodynamique du matériau à un statut admissible est réalisée. Pour cela, les conditions de consistance : $\dot{f}_{p33} = 0$ et $\dot{f}_{d33} = 0$ (avec $\lambda_{p33} \geq 0$ et $\lambda_{d33} \geq 0$) sont linéarisées pour déterminer les multiplicateurs de plasticité et d'endommagement conformément à l'équation 4.16. La démarche d'intégration est présentée en algorithme 5 (les indices 33 sont enlevés pour plus de lisibilité).

4.2.3 Bilan sur le modèle

Pour conclure cette partie consacrée à la présentation du modèle de comportement mécanique dédié à la réponse non linéaire des âmes en nids d'abeilles Nomex, il convient de bien insister sur la dissociation entre les théories mathématiques employées et les phénomènes physiques observés. Ces derniers sont en effet la manifestation macroscopique de phénomènes microscopiques. En ce qui concerne les nids d'abeilles Nomex, il est difficile de dire s'il y a, ou non, apparition de microfissures expliquant la chute des modules de cisaillement. L'utilisation des théories de l'endommagement et de la plasticité doit donc être vue comme un artifice mathématique pour reproduire la réponse globale du matériau structurel.

Les différents paramètres du modèle sont synthétisés dans le tableau 4.3.
Le modèle fait intervenir 22 paramètres qui se répartissent de la manière suivante :
- 7 paramètres pour les phénomènes réversibles ;
- 9 paramètres pour les phénomènes irréversibles en compression normale hors plan ;
- et 6 paramètres pour les phénomènes irréversibles en cisaillement hors plan.

Entrées : état au temps t^n ; $\delta\epsilon^{n+1}$
Sorties : état au temps t^{n+1}
Prédiction élastique :

$$\left\{\begin{array}{l} \epsilon^{n+1} = \epsilon^n + \delta\epsilon^{n+1} \\ \epsilon_p^{n+1} = \epsilon_p^n \\ d^{n+1} = d^n \,;\, \beta^{n+1} = \beta^n \,;\, B^{n+1} = B^n \end{array}\right.$$

Actualisation de l'état d'endommagement :

$$\left\{\begin{array}{l} Y^{n+1} = 2\left(\epsilon^{n+1} - \epsilon_p^{n+1}\right)\Lambda\left(\epsilon^{n+1} - \epsilon_p^{n+1}\right) \\ f_d = \left(Y^{n+1} - Y_o - B^{n+1}\right)\overline{\mathcal{H}}\left(d_i - d_{ci}\right) \\ j_d = 0 \end{array}\right.$$

si $f_d > 0$ **alors**
  tant que $|f_d| > tol$ *et* $j_d < niterm$ **faire**

$$\left\{\begin{array}{l} \delta\lambda_d = \dfrac{f_d}{\partial_B f_d\, \partial_\beta B\, \partial_B f_d} \\ d^{n+1} = \max\left(d_c \,;\, d^{n+1} + \delta\lambda_d\, \partial_Y f_d\right) \\ \beta^{n+1} = \max\left(d_c \,;\, \beta^{n+1} - \delta\lambda_d\, \partial_B f_d\right) \\ B^{n+1} = B^{n+1} - \partial_\beta B\, \delta\lambda_d\, \partial_B f_d \\ f_d = \left(Y^{n+1} - Y_o - B^{n+1}\right)\overline{\mathcal{H}}\left(d_i - d_{ci}\right) \\ j_d = j_d + 1 \end{array}\right.$$

  fin
fin
Actualisation de l'état plastique :

$$\left\{\begin{array}{l} \tau^{n+1} = 2\,\Lambda\left(1 - d^{n+1}\right)\left(\epsilon^{n+1} - \epsilon_p^{n+1}\right) \\ f_p = \left(|\tau^{n+1}| - \tau_o\right)\mathcal{H}\left(d_i - d_{ci}\right) \\ j_p = 0 \end{array}\right.$$

si $f_p > 0$ **alors**
  tant que $|f_p| > tol$ *et* $j_p < niterm$ **faire**

$$\left\{\begin{array}{l} \delta\lambda_p = -\dfrac{f_p}{\partial_\tau f_p\, \partial_{\epsilon_p} \tau\, \partial_\tau f_p} \\ \epsilon_p^{n+1} = \epsilon_p^{n+1} + \delta\lambda_p\, \partial_\tau f_p \\ \tau^{n+1} = 2\,\Lambda\left(1 - d^{n+1}\right)\left(\epsilon^{n+1} - \epsilon_p^{n+1}\right) \\ f_p = \left(|\tau^{n+1}| - \tau_o\right)\mathcal{H}\left(d_i - d_{ci}\right) \\ j_p = j_p + 1 \end{array}\right.$$

  fin
fin

Algorithme 4 : Intégration du comportement de cisaillement hors plan

Entrées : état au temps t^n ; $\delta\epsilon^{n+1}$
Sorties : état au temps t^{n+1}

Prédiction élastique :

$$\left\{\begin{array}{lll} \epsilon^{n+1} = \epsilon^n + \delta\epsilon^{n+1} & & \\ \epsilon_p^{n+1} = \epsilon_p^n\,; & p^{n+1} = p^n\,; & R^{n+1} = R^n \\ d^{n+1} = d^n\,; & \beta^{n+1} = \beta^n\,; & B^{n+1} = B^n \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} Y^{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(\epsilon^{n+1} - \epsilon_p^{n+1}\right)\Lambda_{33}\left(\epsilon^{n+1} - \epsilon_p^{n+1}\right) \\ \tau^{n+1} = \Lambda_{33}\left(1 - d^{n+1}\right)\left(\epsilon^{n+1} - \epsilon_p^{n+1}\right) \end{array}\right.$$

Calcul des critères :

$$\left\{\begin{array}{l} f_p = -\dfrac{\tau^{n+1}}{1 - d^{n+1}} - \tau_{o33} - R^{n+1} \\ f_d = \left[Y^{n+1}\,\kappa\left(p\right) - Y_{o33}\right]\,\xi\left(d^{n+1}\right) - B^{n+1} \\ f = \sqrt{\langle f_p\rangle_+^2 + \langle f_d\rangle_+^2} \\ j = 0 \end{array}\right.$$

si $f > 0$ **alors**
  Correction :
  tant que $|f| > tol$ *et* $j < niterm$ **faire**
    1. Calcul des termes de dérivées partielles :
       $\partial_\tau f_p$, $\partial_{\epsilon_p}\tau$, $\partial_R f_p$, $\partial_p R$, $\partial_Y f_d$,
       $\partial_{\epsilon_p} Y$, $\partial_p f_d$, $\partial_d f_d$, $\partial_B f_d$ et $\partial_\beta B$
    2. Résolution du système aux multiplicateurs (équation 4.16)
    3. Actualisation des variables internes :
       $d^{n+1} = d^{n+1} + \delta\lambda_d\,\partial_Y f_d$, $\beta^{n+1} = \beta^{n+1} - \delta\lambda_d\,\partial_B f_d$,
       $\epsilon_p^{n+1} = \epsilon_p^{n+1} + \delta\lambda_p\,\partial_\tau f_p$ et $p^{n+1} = p^{n+1} - \delta\lambda_p\partial_R f_p$
    4. Actualisation des forces thermodynamiques :
       $Y^{n+1} = 1/2\left(\epsilon^{n+1} - \epsilon_p^{n+1}\right)\Lambda_{33}\left(\epsilon^{n+1} - \epsilon_p^{n+1}\right)$,
       $B^{n+1} = Y_c\,\beta^{n+1}$,
       $\tau^{n+1} = \Lambda_{33}\left(1 - d^{n+1}\right)\left(\epsilon^{n+1} - \epsilon_p^{n+1}\right)$
       et $R^{n+1} = K\,p^{n+1}$
    5. Recalcul des critères et incrémentation de j
  fin
fin

Algorithme 5 : Intégration du comportement normal hors plan

Liste des paramètres du modèle	
Aspect du comportement	Paramètres
Comportement Plan	
Élasticité anisotrope	E_1 ; E_2 ; ν_{12} ; G_{12}
Cisaillement hors plan	
Élasticité	G_{13} ; G_{23}
Endommagement	Y_{13o} ; Y_{23o} ; d_{13c} ; d_{23c}
Ecoulement plastique	τ_{13o} ; τ_{23o}
Compression hors plan	
Élasticité	E_3
Endommagement	Y_{o33} ; Y_{c33}
Plasticité	τ_{o33} ; K ; n
Couplage endommagement/plasticité	Y_p ; d_c ; a_2 ; β_d

TAB. 4.3 – Paramètres du modèle pour nids d'abeilles Nomex

Le nombre de ces paramètres peut paraître important, mais il convient de rappeler la nature orthotrope du comportement (9 paramètres dans le cas général de la seule élasticité linéaire réversible), sa nature très fortement non linéaire et la réponse en deux phases distinctes pour trois directions privilégiées : normale hors plan et les deux cisaillements hors plan.

4.3 Identification du modèle

4.3.1 Méthodologie d'identification

La méthode d'identification utilisée ici consiste, comme dans le chapitre 2, à minimiser l'écart entre les réponses expérimentale et numérique. La fonction objectif Γ à minimiser est rappelée ci-dessous avec les contraintes définissant l'espace des paramètres admissibles :

$$\begin{cases} \Gamma = \sum_{i=1}^{n} \left(\boldsymbol{\tau}_i^{xp} - \boldsymbol{\tau}_i^{th}\left(\boldsymbol{\Omega}\right) \right)^T \mathrm{k}_i \left(\boldsymbol{\tau}_i^{xp} - \boldsymbol{\tau}_i^{th}\left(\boldsymbol{\Omega}\right) \right) \\ b_{i;inf} - \Omega_i \leq 0 \\ \Omega_i - b_{i;sup} \leq 0 \end{cases} \tag{4.17}$$

avec n le nombre de courbes d'essais sur lesquelles porte l'identification ; $\boldsymbol{\Omega}$ le vecteur des paramètres du modèle ; k_i une matrice diagonale de coefficients de pondération ; enfin $\boldsymbol{\tau}_i^{xp}$ et $\boldsymbol{\tau}_i^{th}\left(\boldsymbol{\Omega}\right)$ les vecteurs des contraintes de Kirchhoff, issues des données expérimentales et du modèle, relatifs à l'essai i et au jeu de paramètres $\boldsymbol{\Omega}$. $b_{i;inf}$ et $b_{i;sup}$ sont les bornes inférieure et supérieure du paramètre Ω_i.

L'opération de minimisation est réalisée à l'aide d'algorithmes génétiques disponibles dans le logiciel de calcul Matlab en version 7.1 [Matlab, 2007]. Ceux-ci consistent à faire évoluer une population de jeux de paramètres $\mathcal{P}\left(\boldsymbol{\Omega}\right)$ à partir de règles empiriques [Goldberg, 1989]. Chaque jeu de paramètres constitue un individu dont les gènes sont ces fameux paramètres. La démarche à suivre pour la mise en œuvre de la méthode est la suivante :

1. Définition de la fonction objectif à minimiser, de l'espace admissible des paramètres et du niveau de précision souhaité sur les paramètres (définition de décimales de troncature pour accélérer la convergence)

2. Tirage aléatoire d'une population initiale de jeux de paramètres $\mathcal{P}^0(\mathbf{\Omega})$ répartis de manière uniforme sur l'espace des paramètres admissibles
3. Évaluation de la fonction objectif pour chacun des individus
4. Création d'une nouvelle génération de jeux de paramètres (c'est cette étape qui donne son nom à la méthode, et il existe de très nombreuses possibilités qui ne sont pas détaillées ici) :
   – sauvegarde d'un certain nombre des meilleurs individus ;
   – sélection dans les individus restants"aptes à la reproduction" ;
   – croisement des individus sélectionnés (nombreuses règles possibles) ;
   – mutation des individus (perturbation des valeurs de leurs paramètres)
5. Retour à l'étape 3 jusqu'à ce qu'un critère soit atteint (critère en nombre maximal de générations, critère de temps de calcul, critère en nombre d'itérations sans amélioration du meilleur des individus...)

La "toolbox genetic algorithms" proposée dans Matlab est utilisée pour réaliser l'optimisation. Le choix des divers ingrédients composant l'algorithme génétique est présenté en annexe 2. Une fois obtenu un individu "idéal", une méthode de minimisation classique peut être utilisée afin d'affiner les résultats. Dans le cas présenté ici, la méthode de recherche directe, utilisée en partie 2.3.3 du chapitre 2 peut être réemployée sur un espace des paramètres admissibles restreint, le meilleur des candidats obtenus par algorithme génétique fournissant le point de départ de la recherche.

Enfin les résultats présentés dans cette partie concernent les deux nids d'abeilles testés expérimentalement :
– NIDA-H-12,7 : nids d'abeilles à cellules hexagonales de diamètre 6,4 mm ; de hauteur 12,7 mm ; d'épaisseur de simples parois 52 μm et de densité 64 kg m^{-3} ;
– NIDA-R-40 : nids d'abeilles à cellules rectangulaires de taille 6,4 mm ; de hauteur 40 mm ; d'épaisseur de simples parois 52 μm et de densité 64 kg m^{-3}.

4.3.2 Identification en cisaillement hors plan

Mise en œuvre

L'identification du modèle de comportement de cisaillement hors plan porte sur les paramètres : G_i (MPa) ; Y_{oi} (MPa) ; Y_{ci} (MPa) ; d_{ci} (m^2 m^{-2}) et τ_{oi} (MPa) ($i = 13, 23$). Elle est réalisée en trois étapes :

1. Détermination de la contrainte d'écoulement post-rupture τ_{oi} définie arbitrairement différente de zéro
2. Détermination des quatre autres paramètres par minimisation de l'erreur en contrainte avec les algorithmes génétiques
3. Optimisation avec méthode de recherche directe, le meilleur des candidats obtenus à l'étape 2 servant de point de départ

Les bornes inférieures $\boldsymbol{b}_{inf}$ et supérieures $\boldsymbol{b}_{sup}$ du vecteur des paramètres $\mathbf{\Omega}$, ainsi que les décimales de troncature, sont présentées en tableau 4.4 ($i = 13, 23$).

Le choix d'imposer une contrainte post-rupture τ_{oi} *a priori* permet d'éliminer le paramètre d_{ci} de la phase d'identification réduisant ainsi le processus à 3 paramètres G_i, Y_{oi} et Y_{ci}. En effet, il suffit pour cela de ne considérer que la partie avant rupture dans la réponse en cisaillement présentée en figures 3.19 et 3.20 de la partie 3.4.1 du chapitre 3. d_{ci} est tout simplement le dernier niveau d'endommagement calculé, c'est lui qui pilote l'initiation du régime plastique.

Espace de définition des paramètres, précision				
Paramètres Unités	G_i (MPa)	Y_{oi} (MPa)	Y_{ci} (MPa)	d_{ci} (-)
Décimales de troncature	1	4	4	2
$\boldsymbol{b}_{inf}$	1	0	0,001	0
$\boldsymbol{b}_{sup}$	51	0,5	0,501	1

TAB. 4.4 – Bornes inférieures et supérieures, décimales de troncature des paramètres - cisaillement NIDA-H-12,7

Résutats obtenus

Le cas particulier des nids d'abeilles NIDA-H-12,7 sollicités suivant la direction L (direction forte pour les nids d'abeilles à cellules hexagonales) est considéré ici. La valeur de la contrainte d'écoulement post-rupture τ_{oi3} est fixée à $0,1$ MPa et les courbes expérimentales sont limitées à leur domaine pré-rupture.

Avec toutes ces restrictions, l'algorithme génétique se révèle être extrêmement performant. L'introduction des décimales de troncature permet de "terminer" l'identification plus rapidement et conduit à des résultats répétables. Sur les dix populations générées aléatoirement, huit d'entre elles aboutissent à un jeu optimal de paramètres très satisfaisant après un maximum de deux cents générations. Les paramètres sont extrêmement proches les uns des autres et les écarts ne sont pas tangibles sur la réponse tracée.

Pour illustrer le processus d'évolution génétique, la figure 4.3 présente les coûts moyens et du meilleur des individus au fil des générations.

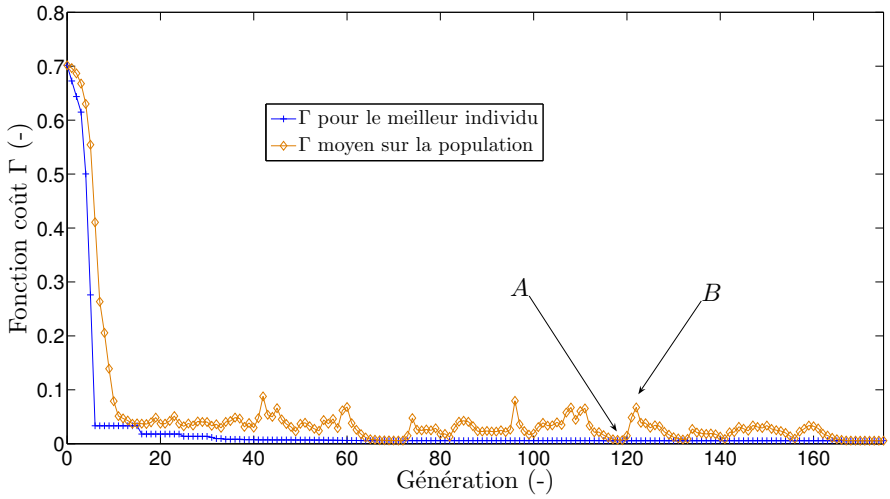


FIG. 4.3 – Évolution des coûts au cours des générations

Au début très "mauvais", les individus s'améliorent très rapidement grâce aux règles d'évolution de l'algorithme génétique. Le risque pointé au point A de la figure 4.3, est d'atteindre une certaine "consanguinité" dans la population, consanguinité qui se traduit par un faible écart entre coût moyen sur la population et coût associé au meilleur des individus. Pour remédier à ce problème d'uniformisation, les individus peuvent subir des "mutations",

c'est-à-dire des modifications arbitraires et aléatoires de leur génome indépendamment de leurs "parents" [Goldberg, 1989]. C'est ce qui se produit entre les points A et B, permettant un enrichissement de la population par une plus forte dispersion des individus. Le coût moyen devient par conséquent moins satisfaisant, mais cela permet d'aller explorer d'autres pistes dans l'espace des paramètres admissibles.

La comparaison des réponses "contraintes expérimentales" et "contraintes théoriques", en figure 4.4, montre la très bonne adéquation modèle/expérience sur toute la plage de réponse (la réponse expérimentale post-rupture ayant été remplacée par une contrainte d'écoulement constante).

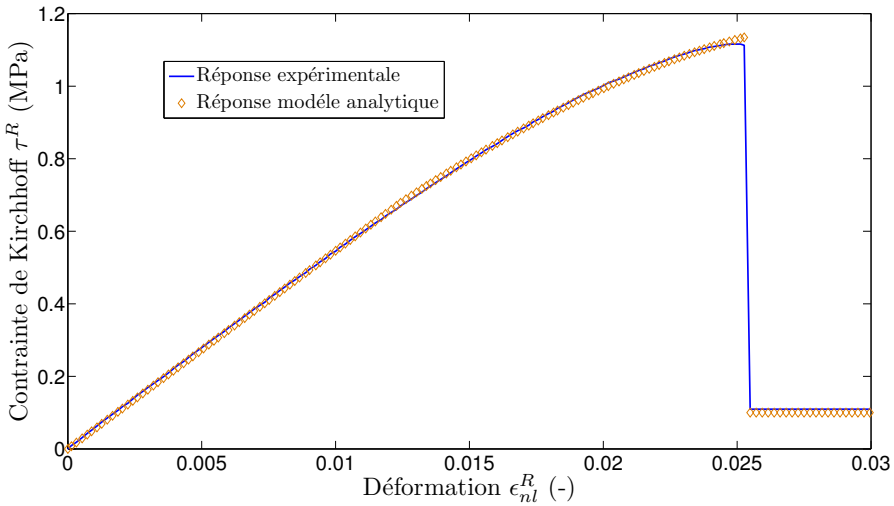


FIG. 4.4 – Comparaison modèle expérience pour le cisaillement L des NIDA-H-12,7

Cette démarche d'identification est également appliquée avec succès sur les âmes en nids d'abeilles Nomex NIDA-H-12,7-W, NIDA-R-40-L et NIDA-R-40-W. Les résultats sont synthétisés en tableau 4.5.

Récapitulatif : paramètres de cisaillement du modèle						
Paramètres Unités	G_{i3} (MPa)	Y_{oi3} (MPa)	Y_{ci3} (MPa)	d_{ci3} (-)	τ^{pr}_{i3} (MPa)	Coût (-)
$\mathbf{\Omega}_{\text{NIDA-H-12,7-L}}$	27,4	0,0083	0,14836	0,18	0,1	0,0052
$\mathbf{\Omega}_{\text{NIDA-H-12,7-W}}$	28,1	0,01	0,16	0,11	0,166	0,0054
$\mathbf{\Omega}_{\text{NIDA-R-40-L}}$	14,9	0	0,05	0,22	0,017	0,0036
$\mathbf{\Omega}_{\text{NIDA-R-40-W}}$	34,6	0	0,04	0,19	0,011	0,0032

TAB. 4.5 – Bilan des jeux de paramètres identifiés - cisaillement

En bilan de cette première partie d'identification, il apparaît que, pour les quatre comportements mécaniques de cisaillement hors plan identifiés, les optimisations par algorithmes génétiques permettent de déterminer un jeu de paramètres satisfaisant, rapidement et avec une excellente reproductibilité. Même s'il n'est pas possible de montrer que ce dernier correspond à un minimum global, les résultats obtenus illustrent l'aptitude des jeux de paramètres identifiés à reproduire les mesures expérimentales, ce qui est bien l'objectif visé. Enfin, d'un point de vue plus pratique, il est à noter ici que le temps de calcul effectif pour

obtenir un jeu de paramètres optimal, en se basant sur une population de 50 individus, ne dépasse pas 10 minutes par tirage aléatoire sur un Pentium 4 cadencé à 2 GHz et doté de 1 Go de mémoire vive (ce qui est dû en partie aussi aux critères d'arrêt employés). Ce faible temps s'explique à la fois, par le nombre relativement faible de points des courbes de réponse en cisaillement hors plan, par la définition de décimales de troncature qui permettent d'éviter une optimisation sur des décimales non pertinentes et enfin, par la bonne adéquation modèle/expérience qui fait qu'il n'existe pas un grand nombre de jeux de paramètres permettant au modèle de se comporter correctement vis à vis de l'expérience. Enfin, dans le cas général, il est conseillé de réaliser un nombre de tirages plus important [Goldberg, 1989; Matlab, 2007]. Ici cela n'a pas semblé être nécessaire au vu des bons résultats obtenus.

4.3.3 Identification en compression hors plan

Mise en œuvre

L'identification du modèle de comportement mécanique en compression hors plan porte sur les paramètres : E_3 (MPa) ; Y_{o33} (MPa) ; Y_{c33} (MPa) ; τ_{o33} (MPa) ; n (-) ; Y_p (-) ; d_{c33} ($\mathrm{m^2\,m^{-2}}$) ; K (MPa) ; β_d (-) et a_2 (-). Le protocole suivant est établi pour mener à bien l'identification :

1. Restriction des courbes expérimentales à leur partie antérieure à l'instabilité
2. Imposition de contraintes sur le comportement :
   - $d_{c33} = 1$ (pas de limite au phénomène d'endommagement) ;
   - $\tau_{o33} = 10^6$ (pas d'écoulement plastique) ;
   - $a_2 = 1$ (pas d'atténuation de l'endommagement en cours de réponse) ;
   - n ; Y_p ; K et β_d quelconques dans leur espace de définition
3. Détermination du module d'élasticité E_3 ainsi que des paramètres du modèle d'endommagement Y_{o33} et Y_{c33}. Les valeurs trouvées lors de cette étape sont conservées ultérieurement
4. Restriction des courbes expérimentales à leurs parties pré **et** instable
5. Détermination des paramètres τ_{o33}, n et Y_p, toujours avec $a_2 = 1$. Une fois identifiés, les paramètres sont conservés pour réaliser la dernière étape de l'identification
6. Prise en compte de toute la réponse de compression des nids d'abeilles
7. Identification des paramètres d_{c33}, Y_p, β_d et a_2
8. Enfin réoptimisation globale par méthode de recherche directe à partir du meilleur jeu de paramètres obtenu lors des étapes précédentes

L'espace des paramètres admissibles est défini dans le tableau 4.6 ainsi que les décimales de troncature utilisées.

Ensuite, trois courbes sont générées à partir de la réponse totale des nids d'abeilles présentée en figure 3.22 de la partie partie 3.4.2 du chapitre 3. La première s'arrête au pic d'instabilité (un peu avant la contrainte maximale). La seconde prend en compte le pic avec ses phases de montée et de descente. Elle prend fin avec le congé qui précède la reprise d'effort. La troisième courbe est tout simplement la réponse totale.

Résutats obtenus

Pour la première étape d'identification portant sur les paramètres E_3, Y_{o33}, Y_{c33} et sur la seule réponse des nids d'abeilles dans leur phase pré-instabilité, sept des dix tirages réalisés

Espace de définition des paramètres, précision					
Paramètres Unités	E_3 (MPa)	Y_{o33} (MPa)	Y_{c33} (MPa)	τ_{o33} (MPa)	n (-)
Décimale troncature	1	4	4	1	1
$\boldsymbol{b}_{inf}$	1	0	0,001	2	1
$\boldsymbol{b}_{sup}$	201	0,05	0,501	6	3
Paramètres Unités	Y_p (-)	d_{c33} (-)	K (MPa)	β_d (-)	a_2 (-)
Décimale troncature	1	2	1	0	4
$\boldsymbol{b}_{inf}$	10	0	1	1	-1
$\boldsymbol{b}_{sup}$	1000	0,99	100	10000	-0,001

TAB. 4.6 – Bornes inférieures et supérieures, décimales de troncature des paramètres - compression

aboutissent à des vecteurs de paramètres résultats sensiblement identiques. Le meilleur jeu de paramètres résultat est présenté en tableau 4.7.

Première étape				
Tirage Unités	E_3 (MPa)	Y_{o33} (MPa)	Y_{c33} (MPa)	Coût (-)
-	89,4	0,022	0,2642	0,0112

TAB. 4.7 – Identification en compression des NIDA-H-12,7 - $1^{ière}$ étape

Dans la seconde étape d'identification, la méthode est réitérée en portant cette fois-ci sur les paramètres τ_{o33}, n et Y_p ; la réponse incluant la chute de contrainte post-pic, jusqu'à la stabilisation. Le meilleur des jeux de paramètres obtenus est présenté dans le tableau 4.8. Sur les dix tirages réalisés, cinq aboutissent à des jeux de paramètres proches de celui du tableau 4.8.

Deuxième étape				
Tirage Unités	τ_{o33} (MPa)	n (-)	Y_p (-)	Coût (-)
-	2,8	1,9	75,8	0,037

TAB. 4.8 – Identification en compression des NIDA-H-12,7 - 2^{nd} étape

La dernière étape porte sur l'identification des paramètres d_{c33}, K, β_d, a_2 et sur la totalité de la réponse de compression des nids d'abeilles. Les résultats sont disponibles dans le tableau 4.9.

On remarque que la reproductibilité est moins bonne que dans les étapes précédentes. Seuls deux tirages aboutissent à un résultat satisfaisant. Dix tirages n'étant pas exhaustifs, les résultats pourraient encore être améliorés avec plus de tentatives. Le deuxième tirage donne toutefois un très bon jeu de paramètres. À l'issue de cette dernière étape, une procédure d'optimisation par méthode de recherche directe est relancée sur la totalité des paramètres. Le vecteur de départ est le meilleur des jeux de paramètres obtenus jusqu'à

Troisième étape					
Tirage Unités	d_{c33} (-)	K (MPa)	β_d (-)	a_2 (-)	Coût (-)
1	0,73	11,6	24	-0,1526	0,0765
2	0,76	14,4	26	-0,1821	0,0696
3	0,83	20,4	3433	-0,0014	0,1179
4	0,78	7,4	9402	-0,001	0,0947
5	0,79	7,9	33	-0,9562	0,0845
6	0,29	1	51	-0,001	0,6656
7	0,71	11,9	8	-0,3518	0,109
8	0,32	4,7	3	-0,2224	0,3223
9	0,82	16,2	4577	-0,0014	0,1102
10	0,99	1	32	-0,1567	0,7376

TAB. 4.9 – Identification en compression des NIDA-H-12,7 - $3^{\grave{i}eme}$ étape

présent et les bornes sont réduites autour de ce dernier. Les résultats sont présentés dans le tableau 4.10.

Dernière phase d'identification					
Paramètres Unités	E_3 (MPa)	Y_{o33} (MPa)	Y_{c33} (MPa)	τ_{o33} (MPa)	n (-)
Départ	89,4	0,022	0,2642	2,8	1,9
Résultat	91,9	0,0103	0,3241	2,8	2
Paramètres Unités	Y_p (-)	d_{c33} (-)	K (MPa)	β_d (-)	a_2 (-)
Départ	78,8	0,76	14,4	26	-0,1821
Résultat	97	0,76	22,6	26	-0,13

TAB. 4.10 – Identification en compression des NIDA-H-12,7 - dernière étape

Le vecteur de paramètres, après optimisation par la méthode de recherche directe, produit un coût $\Gamma = 0,0463$ à comparer à celui du point de départ de 0,0696. Les jeux de paramètres optimaux, obtenus pour le modèle dédié à la réponse de compression hors plan des nids d'abeilles Nomex à cellules hexagonales NIDA-H-12,7 et à cellules rectangulaires NIDA-R-40, sont rassemblés en tableau 4.11.

Les réponses associées à ces deux jeux de paramètres sont tracées sur la figure 4.5. La très bonne adéquation entre modèle et expérience est nettement visible. D'un point de vue thermodynamique, la dissipation reste bien positive avec un pic très net lors de l'instabilité.

En conclusion les algorithmes génétiques sont très efficaces pour déterminer des coefficients de modèles permettant de reproduire les mesures expérimentales (cf figures 4.4 et 4.5).

Récapitulatif : comportement normal hors plan					
Paramètres Unités	E_3 (MPa)	Y_{o33} (MPa)	Y_{c33} (MPa)	τ_{o33} (MPa)	n (-)
NIDA-H-12,7	91,9	0,0103	0,3241	2,8	2
NIDA-R-40	140	0,0034	0,8	3,7	2
Paramètres Unités	Y_p (-)	d_{c33} (-)	K (MPa)	β_d (-)	a_2 (-)
NIDA-H-12,7	97	0,76	22,6	26	-0,13
NIDA-R-40	316	0,77	19,9	1500	-0,0014

TAB. 4.11 – Paramètres du modèle de compression pour NIDA-H-12,7 et nidA-R

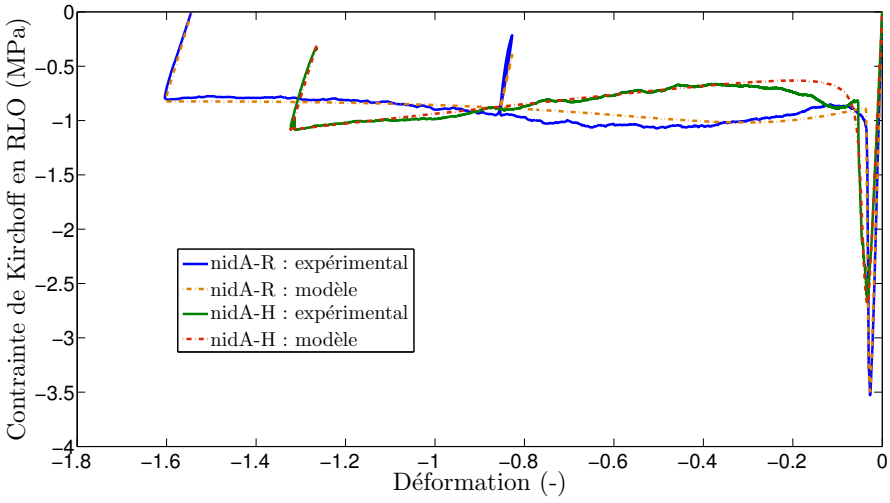


FIG. 4.5 – Réponse en contrainte de nids d'abeilles en compression

4.4 Implémentation sous ABAQUS et validations

Dans une première partie, la bonne intégration du modèle au code éléments finis ABAQUS, module EXPLICIT est vérifiée au niveau du point d'intégration. Une étude portant sur l'influence de la discrétisation spatiale sur la réponse est ensuite menée.

4.4.1 Validations élémentaires

Le modèle est intégré au code de calcul par éléments finis ABAQUS, module EXPLICIT, par le biais d'une routine Fortran 77 VUMAT. Les contraintes de Cauchy sont déduites simplement des contraintes de Kirchhoff par la relation $\tau = J\,\sigma$.
La figure 4.6 représente la réponse obtenue en soumettant un élément C3D8R à intégration réduite (un seul point d'intégration) à un chargement de compression alterné sinusoïdal croissant. Comme attendu, une parfaite corrélation est obtenue avec l'enveloppe expérimentale.

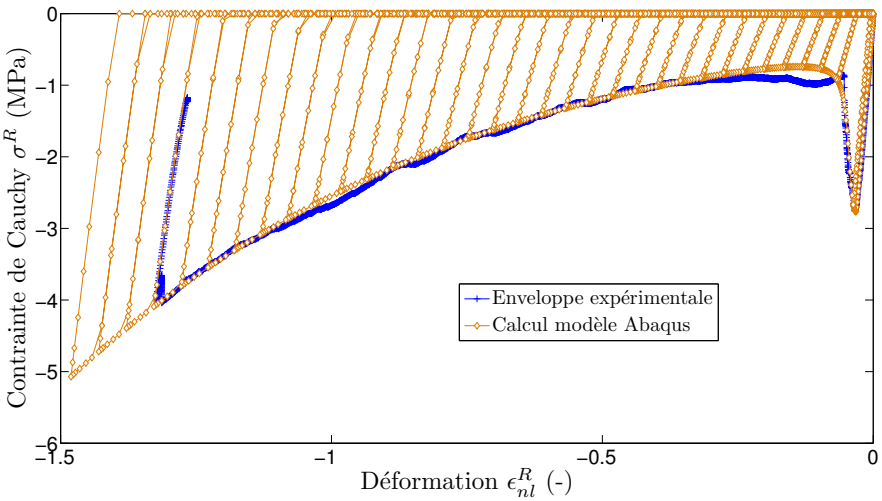


FIG. 4.6 – Réponse ABAQUS de NIDA-H-12,7 sollicité cycliquement en compression

Les figures figures 4.7 et 4.8 présentent la progression de l'endommagement et de l'énergie dissipée massique en fonction de la déformation. L'endommagement poursuit bien sa progression, y compris après l'instabilité et l'énergie dissipée est bien strictement croissante au cours de la transformation. Pour ces deux grandeurs, les traits horizontaux, visibles régulièrement lors de la réponse, correspondent aux décharges élastiques (blocage de la propagation de l'endommagement et absence de puissance dissipée).

En conclusion, la réponse du modèle de comportement mécanique proposé dans ce chapitre est conforme aux relevés expérimentaux. Les déformations irréversibles, la perte progressive de rigidité, le pic d'instabilité sous tout à fait bien reproduits.

4.4.2 Influence de la discrétisation spatiale

Dans cette partie, l'influence de la discrétisation spatiale sur les résultats obtenus est étudiée. Le cas du cube sollicité en compression est repris pour mener l'étude. Les conditions de chargement suivantes sont appliquées : écrasement perpendiculairement à la section des alvéoles (suivant T) à la vitesse de 900 mm s^{-1} pendant 1 ms - soit une vitesse de déformation macroscopique moyenne de 900 s^{-1}. Cinq maillages sont réalisés à partir d'éléments C3D8R. Ils sont détaillés en tableau 4.12.

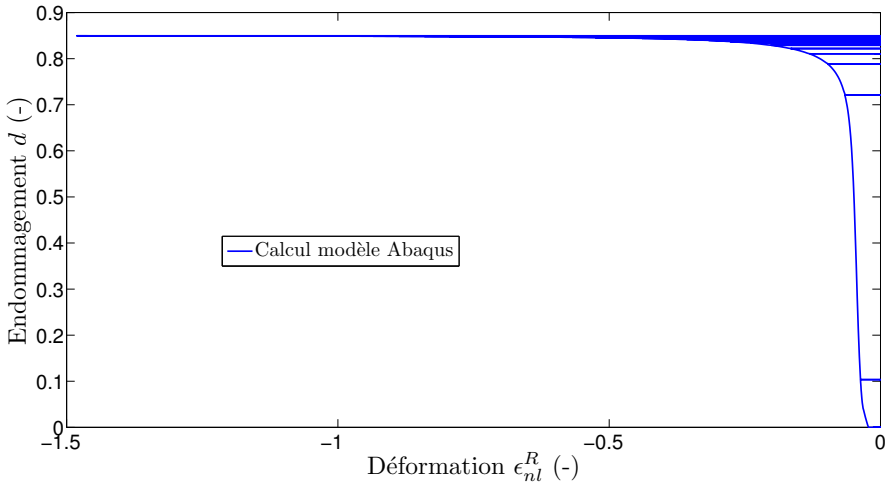


FIG. 4.7 – Évolution de l'endommagement au cours d'un écrasement cyclique

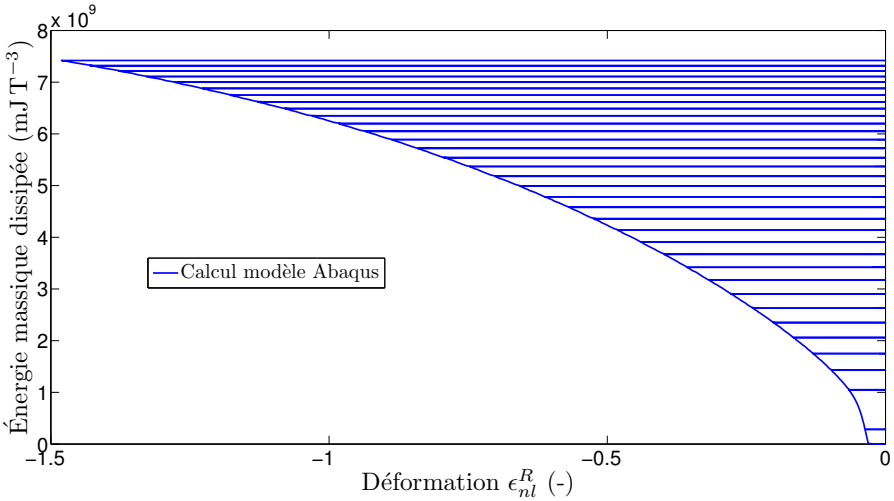


FIG. 4.8 – Évolution de l'énergie massique dissipée au cours d'un écrasement cyclique

Définition des maillages	
Cube 1 (L) × 1 (W) × (T) (mm)	
Maillage	Taille éléments (mm)
MAILLAGE 1	$1 \times 1 \times 1$
MAILLAGE 2	$0{,}5 \times 0{,}5 \times 0{,}5$
MAILLAGE 3	$0{,}2 \times 0{,}2 \times 0{,}2$
MAILLAGE 4	$0{,}1 \times 0{,}1 \times 0{,}1$
MAILLAGE 5	$0{,}1 \times 0{,}1 \times 1$

TAB. 4.12 – Maillages utilisés pour l'étude de la dépendance à la discrétisation spatiale du modèle

Les réponses, force de réaction à l'encastrement en fonction du déplacement de la face pilotée en vitesse, sont tracées en figure 4.9 pour chacun des maillages.

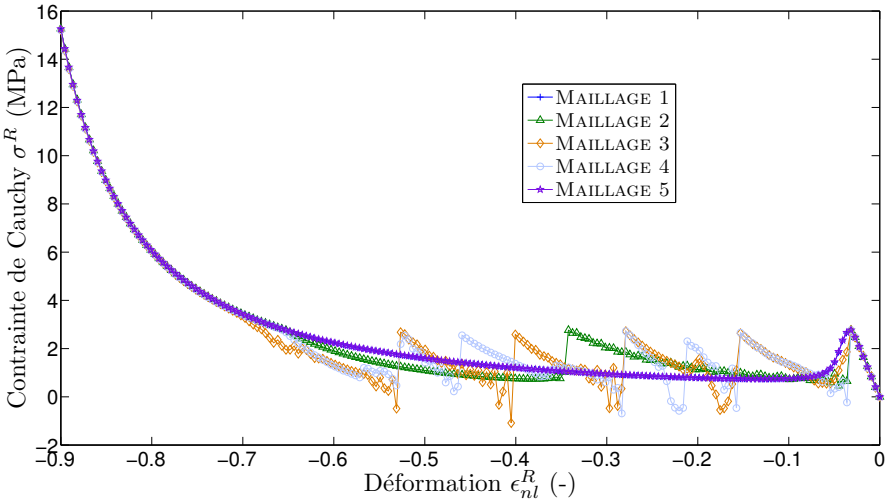


FIG. 4.9 – Influence du maillage sur la réponse du modèle - force déplacement

Si pour le MAILLAGE 1 la réponse est conforme à la réponse globale analytique du modèle développé, ce qui est attendu étant donné qu'il n'y a qu'un seul point d'intégration, ce n'est pas le cas pour les maillages plus fins qui font apparaître des pics successifs. Ainsi, les réponses obtenues avec les MAILLAGE 2 et MAILLAGE 3 présentent autant de pics qu'il y a de points d'intégration dans la direction d'écrasement, soit respectivement 2 et 5. Ceci correspond à un mode d'effondrement de la structure par couches successives. La séquence d'écrasement se déroule de la manière suivante :

1. Réponse pré-instabilité homogène sur la structure (à la transmission d'onde près - calcul explicite)
2. Atteinte de l'instabilité sur la bande d'éléments la plus chargée
3. Adoucissement de la réponse dans cette bande qui se traduit par une chute de contrainte brutale, par une décharge des parties voisines et finalement, par la localisation des déformations
4. Écrasement de la bande de localisation jusqu'à rattraper le niveau de contrainte des éléments environnants
5. Relocalisation dans une autre bande d'éléments et répétition du processus jusqu'à ce que tout le massif soit écrasé

En conséquence, la réponse du modèle apparaît être dépendante à la discrétisation spatiale de la géométrie de la structure à étudier. La bande de localisation ne possède pas une taille physique mais est pilotée par le maillage. Cette séquence n'est pas respectée pour le maillage le plus fin (MAILLAGE 4) qui exhibe moins de pics d'instabilité qu'il n'y a de points d'intégration suivant T (voir figure 4.9). La figure 4.10 présente les champs d'endommagement de compression d_{33} obtenus à quatre instants successifs pour ce maillage au moment où apparaît la localisation : 0,35 ; 0,355 ; 0,36 et 0,365 μs (les échelles sont modifiées pour bien faire apparaître les gradients d'endommagement).

Sur la troisième image, une première bande de localisation apparaît en rouge très distinctement (gradient très marqué). Juste après, image 4, deux bandes de localisation sont visibles. Cette fois-ci chacune d'entre elles correspond à un niveau de dommage local $d_{33} > d_{c33}$ (le module tangent a été négatif). Il y a localisation sur deux bandes distinctes.

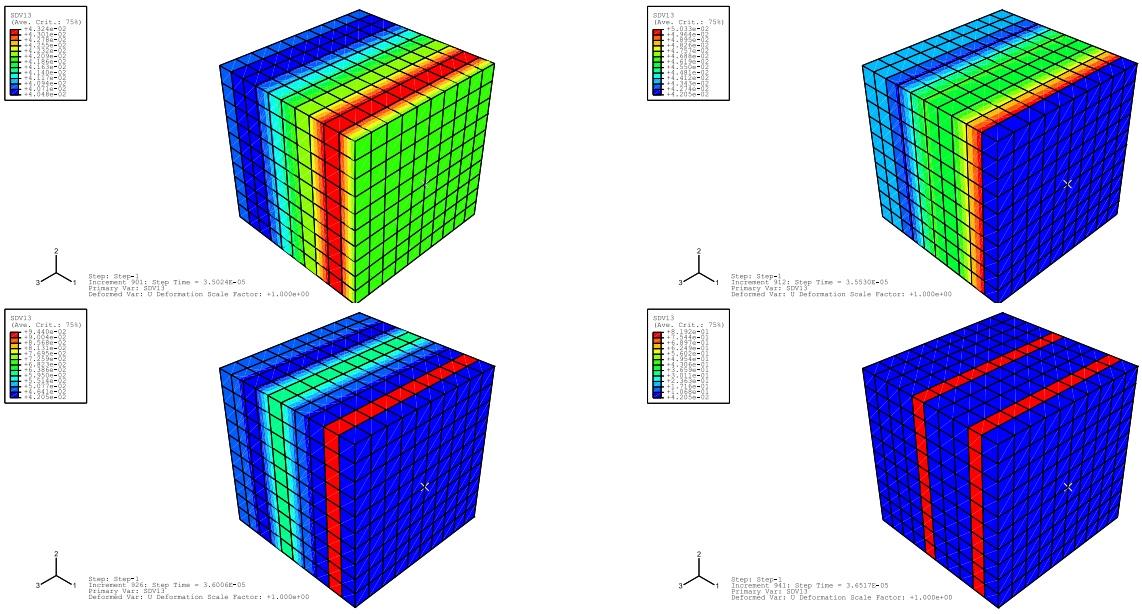


FIG. 4.10 – Illustration de la localisation sur MAILLAGE 4

Les oscillations consécutives aux pics d'instabilité sont dues à la décharge élastique, dans le domaine affaibli, des zones n'ayant pas atteint l'instabilité.

Il convient de noter que la réponse obtenue avec un maillage fin dans le plan et ne comportant qu'un seul point d'intégration suivant la direction normale hors plan, le MAILLAGE 5, est identique à la réponse obtenue avec un seul élément C3D8R. Il est donc possible de contourner le défaut de localisation du modèle de manière assez simple.

Le défaut de localisation du modèle était prévisible. Les essais expérimentaux réalisés ont permis de mesurer la réponse globale des âmes en nids d'abeilles mais sans prendre en compte la localisation observée lors des formations successives de plis ; c'est-à-dire sans définir de longueur caractéristique.

L'utilisation d'un seul élément à intégration réduite dans l'épaisseur de l'âme permet de reproduire la réponse globale des nids d'abeilles et donc de transférer les bons niveaux d'efforts aux peaux adjacentes. Cette solution peut aussi être vue comme une forme extrême de modèle non local, dans laquelle la grandeur caractéristique serait de l'ordre de la hauteur de l'âme et la fonction de pondération serait constante, égale à 1 sur la taille du domaine d'influence. Cette solution, bien que non satisfaisante d'un point de vue théorique, donne de très bons résultats en pratique et est bien adaptée aux calculs de structures de grandes dimensions. Elle ne permet toutefois pas d'accéder à l'état local de l'âme.

4.5 Conclusion

En bilan de ce chapitre consacré à la modélisation du comportement mécanique des nids d'abeilles Nomex, il peut être retenu qu'un modèle élasto-plastique endommageable basé sur la thermodynamique des processus irréversibles a été proposé. Afin d'identifier les paramètres du modèle, une méthode de minimisation de l'erreur en contrainte entre modèle et expérience, basée sur l'utilisation conjointe d'algorithmes génétiques et de recherche directe, a été mise en œuvre. Moyennant un nombre suffisant de tirages, elle donne

des résultats très satisfaisants.

Du point de vue de l'utilisation, si le modèle donne entière satisfaction au niveau du point d'intégration, son caractère adoucissant se traduit par un phénomène de localisation qui aboutit à une dépendance au maillage en cas d'utilisation dans un code de calcul par éléments finis. La régularisation de la réponse par l'utilisation de théories "visqueuses", comme la viscoplasticité [Perzyna, 1966], [Duvaut et Lions, 1972] ou encore l'endommagement à effet retard [Ladevèze *et al.*, 2000], n'apparaît pas ici opportune. En effet, dans la plage - certes restreinte - des vitesses de déformation investiguées, aucune dépendance au temps n'a été mise en évidence. De plus, le couplage entre endommagement et plasticité, dans le cadre de modèles visqueux, n'est pas simple à mettre en œuvre même si des pistes sont présentées dans [Wang *et al.*, 1997]. Une formulation "consistante" de la viscoplasticité, avec introduction du terme de vitesse dans la surface de charge, pourrait éventuellement être étendue à l'endommagement et fournir une piste de régularisation du modèle dédié aux nids d'abeilles.
Une autre piste de développement serait de régulariser la réponse avec une théorie non locale [Pijaudier-Cabot et Bažant, 1987; Strömberg et Ristinmaa, 1996; Bažant, 2002] - la question de la forme du domaine d'influence dans le cas d'un matériau initialement orthotrope restant ouverte. Une telle théorie, en introduisant explicitement une grandeur interne dans le modèle éléments finis, serait peut être capable de capturer la longueur du premier pli qui servirait ici de longueur caractéristique. Ainsi, une connaissance de l'état local des nids d'abeilles devrait pouvoir être atteinte.

Bibliographie

Akay, M. et Hanna, R. (1990).
A comparison of honeycomb-core and foam-core carbon-fibre/epoxy sandwich panels.
Composites, 21(4):325–331.

Aminanda, Y. (2004).
Contribution à l'analyse et à la modélisation de structures sandwichs impactées.
Thèse de doctorat, École Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace.

Aminanda, Y., Castanié, B., Barrau, J. et Thevenet, P. (2005).
Experimental analysis and modelling of the crushing of honeycomb cores.
Applied Composite Materials, 12:213–227.

Anand, L. et Gu, C. (2000).
Granular materials : constitutive equations and strain localization.
Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 48(8):1701 – 1733.

Armstrong, K. B. (1974).
Aircraft floor panel developments at british airways (1967-1973).
Composites, pages 165–173.

ASTM (2000a).
Astm c273-94 standard test method for shear properties of sandwich core materials.
Rapport technique, American Society for Testing and Materials.

ASTM (2000b).
Astm c365-94 standard test method for flatwise compressive properties of sandwich cores.
Rapport technique, American Society for Testing and Materials.

BAŽANT, Z. (2002).
Scaling of Structural Strength.
Hermes Penton Science.

BERTHELOT, J. (2005).
Matériaux composites.
4e édition édition.

BURTON, W. S. et NOOR, A. (1997).
Assessment of continuum models for sandwich panel honeycomb cores.
Computer Methods in Applied Mechanics Engineering, 145:341–360.

CHATAIN, M. (2001).
Plastiques et composites - am 5000.
Rapport technique, Techniques de l'Ingénieur.

DRAGON, A. et HALM, D. (2004).
Damage mechanics : some modelling challenges.
Center of excellence for advanced materials and structures.

DUVAUT, G. et LIONS, J. (1972).
Les inéquations en Mécanique et en Physique.
Dunod.

GAY, D. (2006).
Matériaux composites.
Hermes, 4e édition édition.

GERMAIN, P. (1973).
Cours de Mécanique des Milieux Continus.
Masson et Cie.

GIBSON, L. et ASHBY, M. (1999).
Cellular solids - Structure and properties.
Cambridge University Press.

GOLDBERG, D. E. (1989).
Genetic Algorithms in Search, Optimzation & Machine Learning.
Addison-Wesley.

GORNET, L., MARCKMANN, G. et LOMBARD, M. (2005).
Détermination des coefficients d'élasticité et de rupture d'âmes nids d'abeilles nomex : homogénéisation périodique et simulation numérique.
Mécanique et Industries, 6:595–604.

GORNET, L., MARCKMANN, G., MARGUET, S., KAMRAN-ALI, S. et REGOIN, J. (2007).
Une approche expérimentale et numérique dédiées à l'identification des propriétés mécaniques des âmes en nids d'abeilles nomex.
In Jounées Nationales sur les Composites, Marseille.

GORNET, L., MARGUET, S. et MARCKMANN, G. (2006).
Finite element modeling of nomex honeycomb cores : Failure and effective elastic properties.
Computers, Materials and Continua, 4(2):63–74.

Grediac, M. (1993).
A finite element study of the transverse sheat in honeycomb cores.
International Journal of Solids and Structures, 30:1777–1788.

Hentschel, R. (1975).
Nomex aramid papers properties uses.
In Tappi paper, Synthetics conference, Atlanta.

Hill, R. (1963).
Elastic properties of reinforced solids : some theoretical principles.
Journal of Mechanics and Solids, 11:357–372.

Hohe, J. et Becker, W. (2001).
A refined analysis of the effective elasticity tensor for general cellular sandwich cores.
International Journal of Solids and Structures, 38(21):3689 – 3717.

Hohe, J. et Becker, W. (2003).
Geometrically nonlinear stress-strain behaviour of hyperelastic solid foams.
Computational Materials Science, 28:443–453.

Honig, A. et Stronge, W. (2002).
In-plane dynamic crushing of honeycomb. part i : Crush band initiation and wave trapping.
International Journal of Mechanical Sciences, 44(8):1665 – 1696.

Horrigan, D., Aitken, R. et Moltschaniwskyj, G. (2000).
Modelling crushing due to impact honeycomb sandwiches.
Sandwich Structures Materials, 2(2):131–151.

Kelsey, S., Gellatly, R. et Clark, B. (1958).
Shear modulus foil honeycomb cores.
Aircraft Engineering, 30:294–302.

Kuhn, H. et Tucker, A. (1951).
In Proceedings of the second Berkeley Symposium on Mathematical Studies and Probability, pages 481–492. University of California Press, Berkeley, California.

Ladevèze, P., Allix, O., Deü, J.-F. et Lévêque, D. (2000).
Mesomodel for localisation and damage computation in laminates.
Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 183(1):105 – 122.

Ladevèze, P. et Le Dantec, E. (1992).
Damage modelling of the elementary ply for laminated composites.
Composites Science and Technology, 43:257–267.

Lemaître, J. et Chaboche, J. (1990).
Mechanics of solid materials.
Cambridge University Press.

Mandel, J. (1965).
Une généralisation de la théorie de la plasticité de w.t. koiter.
International Journal of Solids and Structures, 1:273–295.

Matlab (2007).
Genetic algorithm and direct search toolbox 2 user's guide.
Rapport technique, The MathWorks.

MCFARLAND, R. (1963).
Hexagonal cell structure under post buckling axial loading.
AIAA Journal, 1:1380–1385.

MOHR, D. et DOYOYO, M. (2004a).
Deformation-induced folding systems in thin-walled monolithic hexagonal metallic honeycomb.
International Journal of Solids and Structures, 41:3353–3377.

MOHR, D. et DOYOYO, M. (2004b).
Large plastic deformation of metallic honeycomb : orthotropic rate-independent constitutive model.
International Journal of Solids and Structures, 41:4435–4456.

OKUMURA, D., OHNO, N. et NOGUCHI, H. (2004).
Elastoplastic microscopic bifurcation and post-bifurcation behavior of periodic cellular solids.
Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 52:641–666.

PAHR, D. et RAMMERSTORFER, F. (2006).
Buckling of honeycomb sandwiches : Periodic finite element considerations.
CMES, 12(3):229–241.

PERZYNA, P. (1966).
Fundamental problems in viscoplasticity.
Advances in Applied Mechanics, 9:243–377.

PETRAS, A. et SUTCLIFFE, M. (1999).
Failure mode maps for honeycomb sandwich panels.
Composite Structures, 44:237–252.

PIJAUDIER-CABOT, G. et BAŽANT, Z. (1987).
Nonlocal damage theory.
ASCE Journal of Engineering Mechanics, 113(10):1512–1533.

PINZELLI, R. (1993).
Composites sandwich en nids d'abeilles nomex résistance maximale et poids minimal.
Composites, (5):6–14.

RUAN, D., LU, G., WANG, B. et YU, T. (2003).
In-plane dynamic crushing of honeycombs - a finite element study.
Internationa Journal of Impact Engineering, 28:161–182.

SANTOSA, S. et WIERZBICKI, T. (1998).
Crash behaviour of box colums filled with aluminium honeycomb or foam.
Computers and Structures, 68:343–367.

SCHREYER, H., ZUO, Q. et MAJI, A. (1994).
Anisotropic plasticity model for foams and honeycombs.
Journal of Engineering Mechanics, 120(9):1913–1930.

SHAFIZADEH, J. et SEFERIS, J. (2000).
Scaling of honeycomb compressive yield stresses.
Composites - Part A : Applied Science and Manufacturing, 31(7):681 – 688.

Simo, J. et Hugues, T. (1998).
Computational Inelasticity.
Springer.

Strömberg, L. et Ristinmaa, M. (1996).
FE-formulation of a non local plasticity theory.
Computer Methods in Applied Mechanics Engineering, 136:127–144.

Timoshenko, S. et Gere, J. (1961).
Theory of elastic stability.
McGraw-Hill Companies, 2 édition.

Triantafyllidis, N. et Schraad, M. (1998).
Onset of failure in aluminium honeycombs under general in-plane loading.
Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 46(6):1089–1124.

Wang, W., Sluys, L. et De Borst, R. (1997).
Viscoplasticity for instabilities due to strain softening and strain-rate softening.
International Journal for Numerical Methods in Engineering, 40(20):3839 – 3864.

Wierzbicki, T. et Abramowicz, W. (1983).
On crushing mechanics thin walled structures.
Journal of Applied Mechanics, 50(4A):727–734.

Xue, Z. et Hutchinson, J. (2004).
Constitutive model for quasi-static deformation of metallic sandwich cores.
International Journal for Numerical Methods in Engineering, 61(13):2205 – 2238.

Zhang, J. et Ashby, M. (1992a).
Buckling of honeycombs under in-plane biaxial stresses.
International Journal of Mechanical Sciences, 34(6):491–509.

Zhang, J. et Ashby, M. (1992b).
Out-of-plane properties of honeycombs.
International Journal of Mechanical Sciences, 34(6):475–489.

Chapitre 5

Calculs d'impacts sur panneaux sandwichs

Après la présentation des modèles développés pour les composites tissés verre/époxy et la réponse des âmes en nids d'abeilles Nomex, respectivement en chapitres 2 et 4, cette partie propose deux exemples d'illustration. Le premier concerne une étude d'impacts de projectiles rigides sur panneaux sandwichs. L'accent est mis sur la comparaison des résultats obtenus en considérant ou non, le pic d'instabilité observé dans la réponse des nids d'abeilles Nomex. Le second est une étude de faisabilité sur la modélisation d'un impact de vague sur bras de catamaran. Les résultats obtenus montrent qu'il est possible de caractériser l'état de dégradation de la structure.

Sommaire

5.1 Impacts de projectiles sur panneaux sandwichs 138
5.2 Impact de vague sur bras de catamaran 146
5.3 Conclusion 152

5.1 Impacts de projectiles sur panneaux sandwichs

5.1.1 Géométrie, matériaux, discrétisation

Le panneau sandwich étudié est de section carrée de 50 mm de côté pour 18,7 mm d'épaisseur. Il se compose de deux peaux composites verre/époxy stratifiées en [0 0 45 45 0 0 45 45 0 0] - chacun des plis ayant une épaisseur de 0,3 mm, ce qui donne une épaisseur de 3 mm par peau - et d'une plaque de nids d'abeilles Nomex à cellules hexagonales de diamètre 6,4 mm et d'épaisseur 12,7 mm. Les interfaces entre âme et peaux sont d'épaisseur nulle et parfaitement rigides.

Le composite tissé employé est celui étudié en chapitre 2. Sa masse volumique est de 1900 $\mathrm{kg\,m^{-3}}$. À noter, que tous les paramètres du modèle sont similaires à ceux du tableau 2.3 du chapitre 2, exceptés les paramètres de régulation des modèles d'endommagement à effet retard $\boldsymbol{\alpha}$ et $\boldsymbol{\tau}$. Les valeurs employées sont $\alpha_i = 100$ et $\tau_i = 3\,10^{-6}$ pour $i = 1, 2, 12$. Ces paramètres sont ceux présentés en partie 2.4.2 du chapitre 2.
Pour le bloc de nids d'abeilles Nomex de masse volumique de 64 $\mathrm{kg\,m^{-3}}$, deux matériaux différents sont considérés :

- NIDA 1 : le matériau étudié en chapitre 4, avec prise en compte du pic d'instabilité ;
- NIDA 2 : un matériau similaire ne connaissant pas de pic d'instabilité et obtenu en modifiant certains paramètres du modèle :
  - $\sigma_{o33} = 0{,}6$ MPa : afin de provoquer l'écoulement plastique plus rapidement ;
  - $K = 0{,}3$ MPa : pour limiter le phénomène de durcissement de la réponse en phase plastique ;
  - et $Y_p = 0$: qui permet de découpler l'endommagement et la plasticité.

La réponse en écrasement est présentée en figure 5.1 pour ces deux âmes. Le NIDA 2 présente une réponse similaire à celle d'une mousse [Rivallant *et al.*, 2006]. L'endommagement

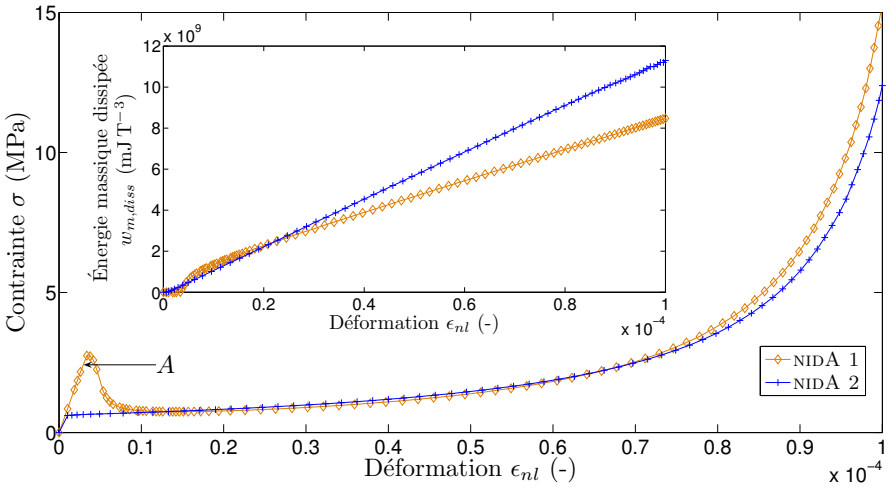


FIG. 5.1 – Comparaison des réponses à l'écrasement des NIDA 1 et NIDA 2

reste nul avec le NIDA 2, toute la dissipation d'énergie étant réalisée par écoulement plastique. Les nids d'abeilles commencent à dissiper plus rapidement (σ_{033} plus faible que pour le NIDA 1) et la dissipation reste linéaire au cours de l'écrasement (l'écrouissage isotrope est linéaire : "$R = K\,p$"). L'endommagement est par contre le premier processus irréversible rencontré pour le NIDA 1. Au pic d'instabilité l'énergie dissipée augmente très fortement

mais croît plus lentement ensuite, ce qui est dû à la pénalisation de l'endommagement par la plasticité, d'une part (très faible niveau de puissance dissipée $Y\,\dot{d}$) et à la chute du module d'élasticité limitant la dissipation plastique, d'autre part ($R\,\dot{p}$ limité). En remarque, l'évolution des déformations plastiques est similaire pour les deux modèles - les courbes sont justes décalées du fait de l'amorçage plus rapide de l'écoulement plastique pour le NIDA 2 - ce qui n'est pas le cas pour l'évolution des déformations plastiques cumulées qui est bien moindre pour le NIDA 1 du fait du couplage avec l'endommagement.

En ce qui concerne les conditions limites "statiques", la structure est tout simplement encastrée tout au long du choc sur le pourtour de sa face inférieure. Les déplacements et les rotations sont bridés dans toutes les directions de l'espace sur les quatre arêtes de la plaque inférieure. Les conditions limites "dynamiques" sont imposées sur l'impacteur : type, vitesse d'impact et masse ; les deux dernières informations fournissant l'énergie du choc.

L'intégration temporelle est réalisée via un pas de temps Δt pris égal à 0,95 fois le pas de temps critique Δt_c fourni par le code de calcul ABAQUS, module EXPLICIT. La discrétisation spatiale fait intervenir des éléments S4R pour les plaques composites, C3D8R pour l'âme en nids d'abeilles Nomex et un mélange de S4R et S3R indéformables pour l'impacteur qui est considéré comme étant un solide rigide. Conformément aux conclusions du chapitre 4 sur le problème de dépendance au maillage du modèle d'âme, un seul élément est utilisé suivant l'épaisseur de la plaque de nids d'abeilles Nomex. L'élément C3D8R ne possédant qu'un seul point d'intégration, le problème est ainsi résolu.
À noter ici, qu'en vue d'économiser des ressources de calcul et de faciliter les post-traitements, la stratification des peaux présentées plus haut est transformée en stratification équivalente [0 45 0 45 0], chacun des plis ayant une épaisseur de 0,6 mm. Toujours avec cette même idée de réduire les coûts de calculs, seul le quart de la plaque est pris en compte, des conditions de symétries adéquates étant mises en place sur les arêtes des plaques composites et surfaces d'âme concernées. Le maillage du modèle est tracé en figure 5.2 avec l'un des impacteurs présentés plus tard.

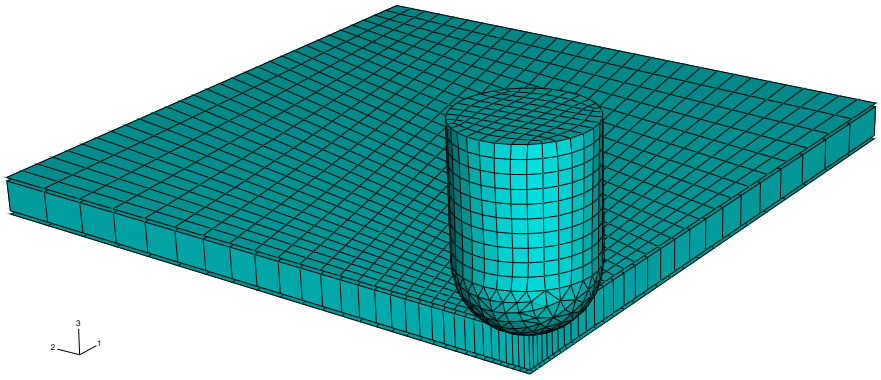


FIG. 5.2 – Modèle géométrique pour le calcul de sandwichs impactés

Enfin, des conditions d'égalité portant sur les degrés de liberté de translation sont imposées aux noeuds des éléments S4R des plaques composites, de manière à ce qu'ils bougent de concert avec leurs homologues de la plaque de nids d'abeilles. Ces contraintes permettent de modéliser l'interface parfaite.

5.1.2 Chargement imposé

La question du chargement est une question complexe et de grande importance. Gustin et ses associés [Gustin *et al.*, 2005] ont étudié la réponse de structures sandwichs soumises à des impacts de projectiles. Ils montrent qu'en fonction de l'énergie de choc, plusieurs scénari de rupture de la structure sont rencontrés :

- en dessous d'un premier niveau : aucun dommage, la structure travaille dans son domaine élastique ;
- en dessous d'un second niveau : pénétration totale ou partielle de la peau supérieure ;
- en dessous d'un troisème niveau : pénétration totale de la peau supérieure et partielle de l'âme ;
- enfin, pour des niveaux d'énergie plus élevés : pénétration totale de la peau supérieure et de l'âme, pénétration partielle ou totale de la peau inférieure.

À ces observations peuvent être ajoutés d'autres phénomènes, comme des délaminages par exemple [Johnson *et al.*, 2001]. Au delà de ce critère énergétique, il peut être intéressant de considérer un autre facteur. En effet, pour une même énergie d'impact, énergie cinétique de l'impacteur au moment du choc $w_i = 1/2\, m_i\, \dot{u}_i^2$, la puissance du choc, égale en première approximation au rapport de l'énergie apportée sur la durée du choc $p_i = w_i/\Delta t_i$, peut être fortement variable en fonction du ratio $m_i/\dot{u}_i$. Plus la vitesse de l'impacteur est élevée au moment du choc et plus la puissance apportée est importante, le phénomène se produisant sur un temps plus court. Dans la réponse du sandwich, cet aspect se répercute sur les vitesses de déformation locales dans la structure. Si le modèle d'âme est "statique", ce n'est pas le cas des tissus composites verre/époxy qui voient leurs rigidités et déformations à rupture augmenter avec $\dot{\epsilon}_e$.

Un facteur également très important, pour la réponse à l'impact des structures sandwichs, est la forme de l'impacteur. Plus la zone de contact est réduite et plus la pression exercée localement sur la peau est importante. En fonction de la géométrie de l'impacteur, les mécanismes de ruine peuvent être radicalement différents. Pour illustrer ces propos les six cas de chargement détaillés en tableau 5.1 sont simulés (l'impacteur ayant un corps cylindrique de rayon R_c se terminant en tête par une portion de sphère de rayon R_t). Le

Conditions d'impacts				
Chargement	$\dot{u}_i^0$	m_i	w_i	Type impacteur
Dénomination	($\mathrm{m\,s^{-1}}$)	(kg)	(J)	R_c (mm)/R_t (mm)
CAS 1	100	$1\,10^{-3}$	5	25/25
CAS 1	1	10	5	25/25
CAS 2	100	$1\,10^{-3}$	5	75/565
CAS 2	1	10	5	75/565
CAS 3	100	$1\,10^{-3}$	5	75/∞
CAS 3	1	10	5	75/∞

TAB. 5.1 – Description des conditions d'impact

CAS 1 correspond donc à un impacteur à tête hémisphérique de faible diamètre, le CAS 2 est associé à un impacteur de grand diamètre dont la tête est une portion de sphère de grand rayon et enfin, le CAS 3 met en œuvre un impacteur cylindrique de grand diamètre. Les simulations vont donc du cas le plus critique au cas le plus favorable pour la structure. Dernière remarque, les durées simulées sont de 0,1 ms pour la vitesse d'impact de 100 $\mathrm{m\,s^{-1}}$ et de 10 ms pour la vitesse d'impact de 1 $\mathrm{m\,s^{-1}}$. La figure 5.3 présente la réponse

des sandwichs sous la forme “vitesse d’impacteur normalisée - temps normalisé” en haut et “endommagement des nids d’abeilles sous impacteur - temps normalisé” en bas.

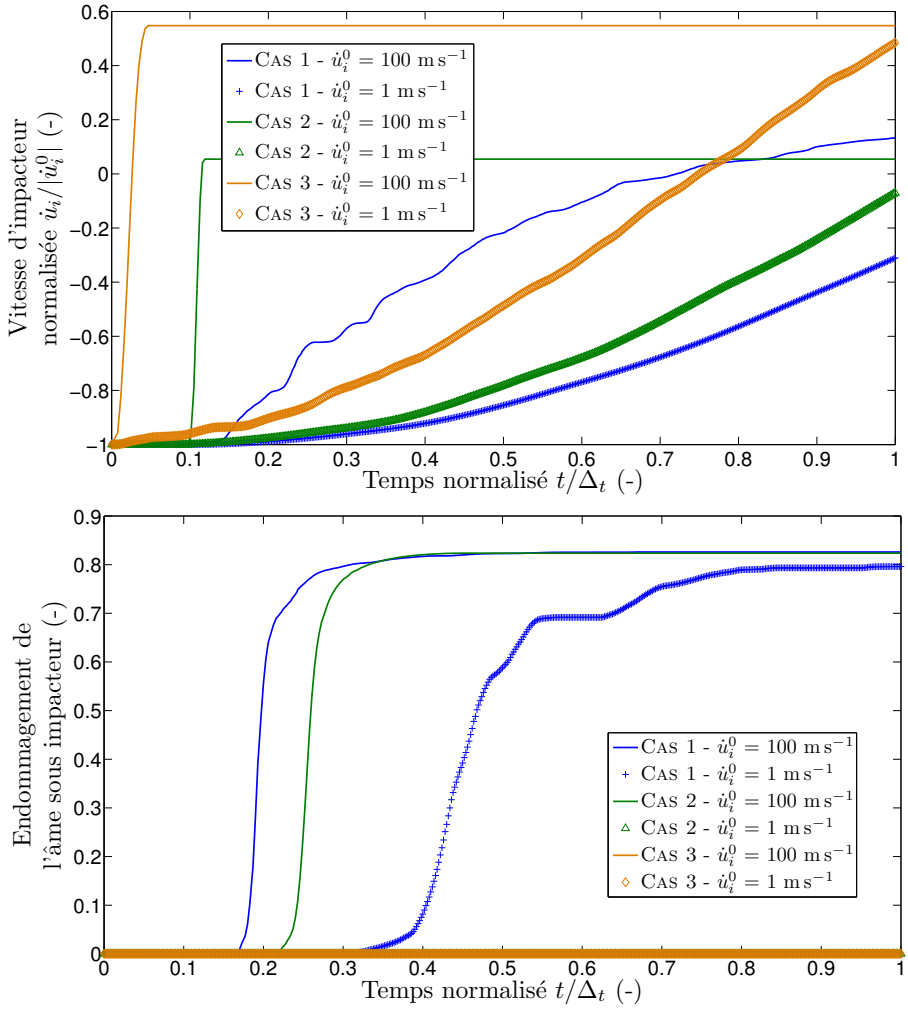


Fig. 5.3 – Influence du cas de chargement sur la réponse du sandwich

L’énergie d’impact imposée ici est très faible : les 5 J correspondent à une chute libre d’une hauteur de 51 mm pour la masse de 10 kg et de 510 m pour la masse de 1 mg. C’est équivalent à l’énergie d’une personne de 60 kg tombant de 8 mm de haut, ce qui semble ridicule. Pourtant les courbes montrent que, dans certains cas, l’âme dépasse son point d’instabilité, elle est durement affectée.

C’est ce qui arrive dans le Cas 1 à haute ($100\ \mathrm{m\,s^{-1}}$) et basse ($1\ \mathrm{m\,s^{-1}}$) vitesses. L’endommagement atteint rapidement une valeur importante supérieure à 0,7. Il peut aussi être remarqué que l’impacteur ralentit assez lentement, ce qui est une conséquence directe de sa forme, la surface de contact augmentant doucement avec l’écrasement.

Dans le Cas 2, l’influence de la vitesse de l’impacteur, ou autrement dit de la puissance du choc, apparaît de manière flagrante. À basse vitesse le sandwich est préservé tandis qu’à haute vitesse il est fortement endommagé. Ce phénomène est sans doute la conséquence de deux effets combinés : la dépendance de la réponse des peaux à la vitesse de déformation d’une part, et la vitesse de propagation des ondes d’autre part. Plus $\dot{\epsilon}_e$ est

importante, et plus les peaux sont raides, transmettant ainsi des efforts plus élevés à l'âme. Second point, lorsque la vitesse d'impact augmente, l'énergie apportée est répartie sur une zone plus restreinte, le temps du phénomène physique devenant de l'ordre de grandeur du temps de propagation dans le milieu. Dans le CAS 1 - 100 $\mathrm{m\,s^{-1}}$, l'endommagement atteint sa valeur maximale en à peu près 30 μs (voir figure 5.3, le temps normalisé tel que $d_{33} = 0{,}8$ est de 0,3 ce qui, sur un temps simulé de 0,1 ms, donne un temps physique de 30 μs). Or, dans les peaux de module d'élasticité $E_1 = E_2 = 30780$ MPa et de masse volumique $\rho = 1900\ \mathrm{kg\,m^{-3}}$, la vitesse de propagation d'onde est de 4000 $\mathrm{m\,s^{-1}}$. Pour les nids d'abeilles, modélisés par un milieu continu équivalent, le module d'élasticité dans le plan se situe autour de 10 MPa. Pour une masse volumique de 64 $\mathrm{kg\,m^{-3}}$ ceci donne une vitesse de propagation d'onde de 456 $\mathrm{m\,s^{-1}}$. Conclusion, pour parcourir les 250 mm de distance qui séparent le point d'impact des bords de la plaque, il faut 62 μs dans les peaux et 548 μs dans l'âme. C'est plus que le temps de destruction de l'âme de 30 μs ! Le coeur du sandwich est donc détruit avant que ses flancs n'aient vu le moindre effort (ce qui est confirmé par la mesure de l'effort de réaction du bâti qui supporte la structure : en fin de calcul, à $t = 100$ μs, il est à 63 N alors qu'à $t = 25$ μs, l'effort exercé par l'impacteur sur le sandwich atteint son maximum à 6,71 kN).

Enfin le CAS 3 illustre l'effet de forme de l'impacteur. Du fait d'une surface de contact maximale dès le début, les nids d'abeilles du sandwich sont préservés au cours de l'impact. Autre effet, l'impacteur est stoppé très brutalement. Pour terminer avec cette étude, la figure 5.4 présente le champ d'endommagement d_{33} des nids d'abeilles sur la déformée des sandwichs en fin de calcul. Les impacts à haute vitesse (100 $\mathrm{m\,s^{-1}}$) sont présentés en haut et ceux à basse vitesse, en bas (1 $\mathrm{m\,s^{-1}}$) de la figure 5.4.

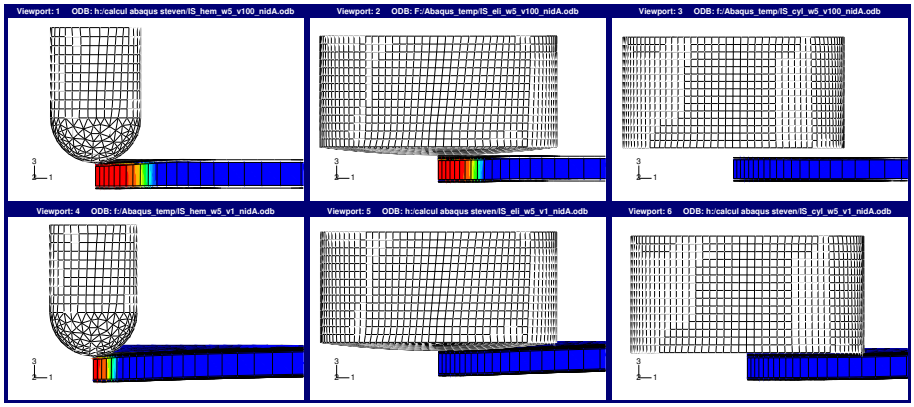


FIG. 5.4 – Endommagement de l'âme Nomex - effets de vitesse et de forme

Les observations visuelles confirment les conclusions issues de l'analyse des courbes de réponse. Finalement, une évolution du cas de chargement référencé CAS 1 - 100 $\mathrm{m\,s^{-1}}$ est retenue pour comparer les réponses obtenues avec nids d'abeilles vierges de toute histoire de chargement - NIDA 1 - et nids d'abeilles pré-écrasés - NIDA 2.

5.1.3 Étude de l'influence de l'âme

Pour cette étude, le sandwich est chargé par un impacteur identique à celui du CAS 1 présenté précédemment. Afin de limiter au maximum le temps de calcul, tout en restant dans des ordres de grandeurs admissibles, la vitesse de l'impacteur au moment du choc est de 100 $\mathrm{m\,s^{-1}}$. La seule évolution possible du chargement par rapport au CAS 1 - 100 $\mathrm{m\,s^{-1}}$

est donc l'énergie d'impact w_i via le choix de la masse de l'impacteur m_i. L'objectif étant de tester quelle peut être l'influence du modèle d'âme sur le calcul de la tenue de la structure, des chocs à haute énergie sont simulés de manière à détruire à la fois la peau supérieure et l'âme. La force exercée par le sandwich sur l'impacteur, calculée comme étant le produit de l'accélération de l'impacteur par sa masse $f_{s\to i} = \ddot{u}_i\, m_i$, sert de critère de comparaison pour les calculs menés avec les NIDA 1 et NIDA 2.
Les cas d'impacts simulés sont regroupés en tableau 5.2. Le maillage grossier est identique à celui présenté en figure 5.2, le maillage fin étant deux fois plus raffiné.

Conditons d'impacts à haute énergie				
Modèle	m_i	w_i	nidA	maillage
Dénomination	(kg)	(J)		
IMPACT 1.1	0,1	500	NIDA 1	grossier
IMPACT 1.2	0,1	500	NIDA 2	grossier
IMPACT 2.1	1	5000	NIDA 1	fin
IMPACT 2.2	1	5000	NIDA 2	fin

TAB. 5.2 – Description des conditions d'impact à haute énergie

Les réponses obtenues au cours du temps pour les impacts à 500 J sont tracées en figure 5.5. Y apparaissent : la force de réaction exercée par le sandwich sur l'impacteur (FR), l'endommagement des fibres orientées suivant $\mathbf{e}_1$ de la peau supérieure (d_1 - sup), l'endommagement de compression de l'âme pour les NIDA 1 (d_3) et enfin, l'endommagement des fibres orientées suivant $\mathbf{e}_1$ de la peau inférieure (d_1 - inf).

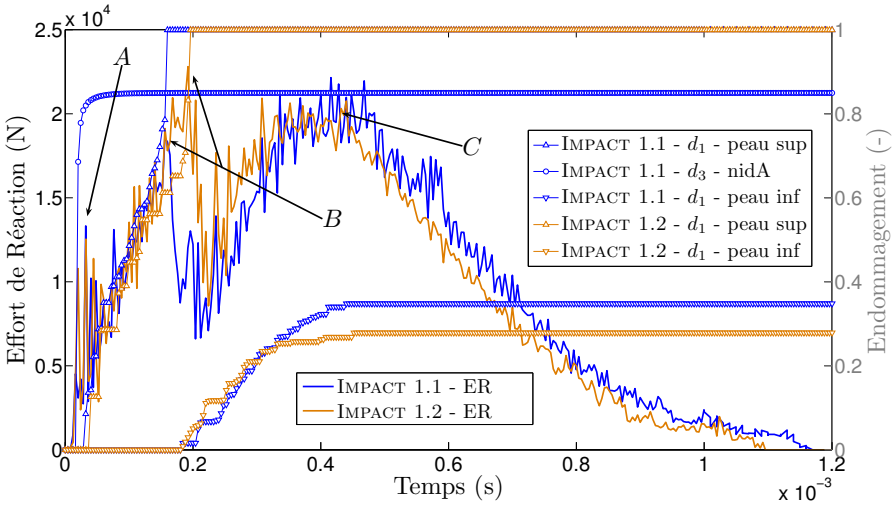


FIG. 5.5 – Réponse des sandwichs impactés avec $w_i = 500$ J

Tout d'abord, les réponses relevées sont assez similaires. Les courbes d'effort et d'endommagement ainsi que la chronologie des évènements sont semblables. Le premier phénomène observable est l'effondrement des nids d'abeilles Nomex. Au point A de la figure 5.5 l'endommagement dans les NIDA 1 a déjà atteint un point post-instabilité. Sur la courbe de réponse en effort, ceci se traduit par une moindre croissance de l'effort de réaction. L'effet de la prise en compte du pic d'instabilité dans la loi de comportement dédiée à l'âme n'est toutefois pas nul, puisque l'endommagement de la peau composite tissée verre/époxy

supérieure est plus rapide dans ce cas. La conséquence apparaît au point B : l'effondrement de la réponse en effort des NIDA 1 précède celui des NIDA 2.
Ce phénomène, même s'il est marginal d'un point de vue quantitatif, est intéressant d'un point de vue qualitatif, même s'il mériterait d'être conforté par d'autres résultats et notamment par des essais. En effet, il laisse à penser qu'une âme 1, permettant de dissiper plus d'énergie qu'une âme 2, peut conduire, dans le cadre d'une utilisation en sandwich, à de moins bonnes propriétés d'absorbtion d'énergie en cas d'impact, du fait de l'effondrement plus rapide des autres constituants, à savoir les peaux. C'est précisément ce qui arrive ici. L'endommagement de la peau supérieure, annonciateur de la perte de raideur au point B, atteint plus rapidement 1 si l'âme est modélisée avec son pic d'instabilité.
Enfin, une fois le bas du pic d'effort atteint (vers 0,25 ms), la réaction du sandwich réaugmente du fait du "contact" entre l'impacteur et la peau inférieure. L'endommagement de cette dernière augmente alors régulièrement, sans atteindre 1, du fait de l'énergie insuffisante pour traverser (point C).

Pour faire la transition avec les impacts à 5000 J d'énergie cinétique initiale, la figure 5.6 présente les déformées de sandwichs avec NIDA 1, impactés sous 5000 J à gauche, et 500 J à droite. Le gradient représenté est celui de l'endommagement de l'âme pris au temps $t = 40$ μs (dernier temps calculé à 5000 J).

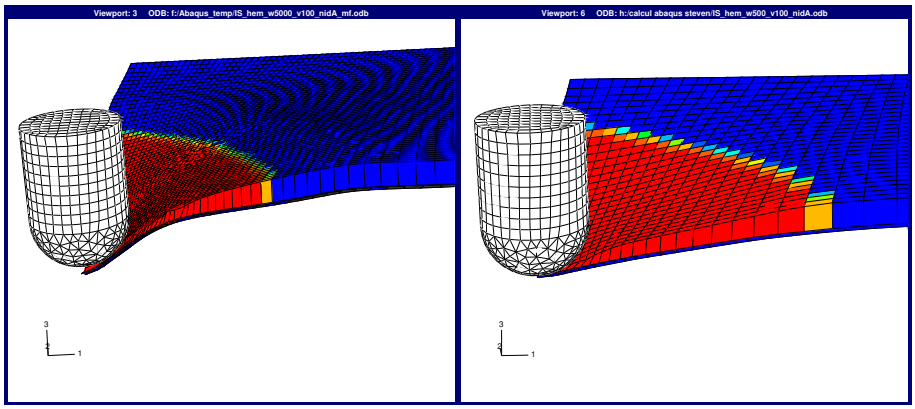


FIG. 5.6 – Endommagement des NIDA 1 sous 5000 et 500 J

L'aspect local des phénomènes dissipatifs est très fortement marqué. La zone totalement endommagée en fin de calcul, c'est-à-dire à 0,2 ms, n'est que très faiblement plus grande que celle présentée ici pour l'impact à 500 J. L'énergie de "destruction" est donc bien concentrée dans une portion faible du sandwich du fait des vitesses relatives entre onde et impact.

Le traitement des résultats employé pour réaliser la figure 5.5 est ré-utilisé pour post-traiter les impacts sous 5000 J et maillage fin en figure 5.7.

Cette fois-ci il n'apparaît aucune influence de la loi de comportement de l'âme sur la réponse du sandwich. Les évolutions des endommagements en peaux supérieure et inférieure se superposent quasiment parfaitement, conduisant à une réaction identique du sandwich. En conclusion, il apparaît que plus la puissance du choc est importante, et moins la prise en compte du pic d'instabilité de la réponse des nids d'abeilles en compression n'a d'importance. Pour terminer sur ces études d'impact, l'endommagement des peaux est affiché en figure 5.8.

La peau supérieure est représentée en haut et la peau inférieure en bas. Sont visibles de gauche à droite : l'endommagement des fibres dans la direction $\mathbf{e}_1$, dans la direction $\mathbf{e}_2$ puis

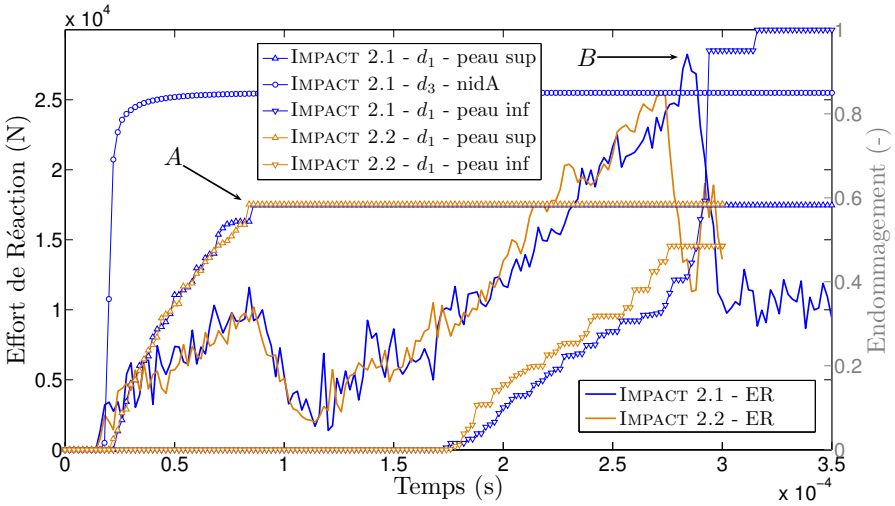


Fig. 5.7 – Réponse des sandwichs impactés avec $w_i = 5000$ J

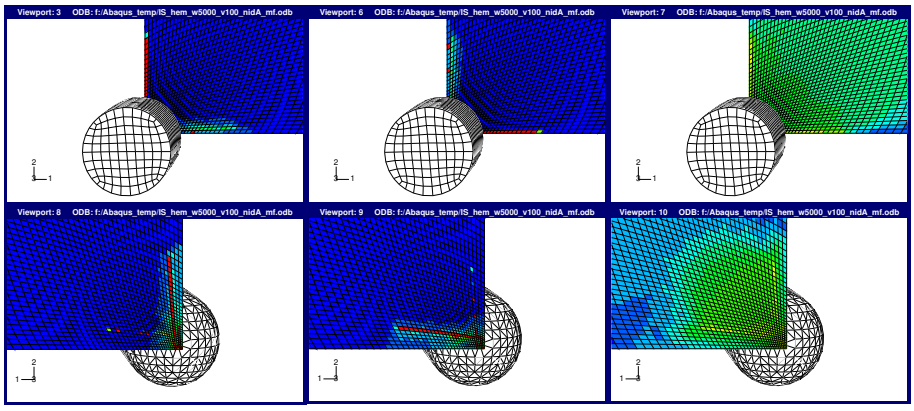


Fig. 5.8 – Endommagements des peaux sous 5000 J

l'endommagement de cisaillement d_{12}. Tout comme pour les nids d'abeilles, la zone affectée est très restreinte. Le mode de dégradation en croix classiquement observé [Rozycki, 2000; Johnson *et al.*, 2001; Gustin *et al.*, 2005], est retrouvé. De plus, la peau inférieure semble plus touchée que la peau supérieure. Elle présente une zone d'arrachement à l'écart des conditions de symétrie, ce qui implique huit fissures se regroupant au centre. Enfin la zone rompue ne fait qu'un seul élément de large. Au vu des remarques du chapitre 2, ceci signifie que le maillage utilisé est encore trop grossier pour capturer la zone de fracture et non pas qu'il y a localisation des déformations.

5.2 Impact de vague sur bras de catamaran

Dans cette dernière partie, la réponse d'un bras de catamaran soumis à un impact frontal de vague est étudiée. Cet exemple très simplifié doit être vu comme une étude de faisabilité ayant pour objectif de vérifier la capacité à mener des simulations éléments finis d'impacts hydrodynamiques sur structures nautiques. Les différents aspects du modèle : structure, fluide, chargement, éléments finis, sont tout d'abord présentés. Les résultats obtenus sont ensuite analysés.

5.2.1 Modélisation du bras de catamaran

Sur la plupart des catamarans géants [CourseAuLarge, 2003], les deux flotteurs du navire sont reliés entre eux par deux bras (voir la figure 2.4 pour illustration [Multiplast, 2007]). Un bras avant "type" de catamaran est présenté sur la figure 5.9. Il s'agit d'une structure composite sandwich cloisonnée, constituée, dans l'étude proposée ici, de peaux composites verre/époxy tissées et d'âmes en nids d'abeilles Nomex.

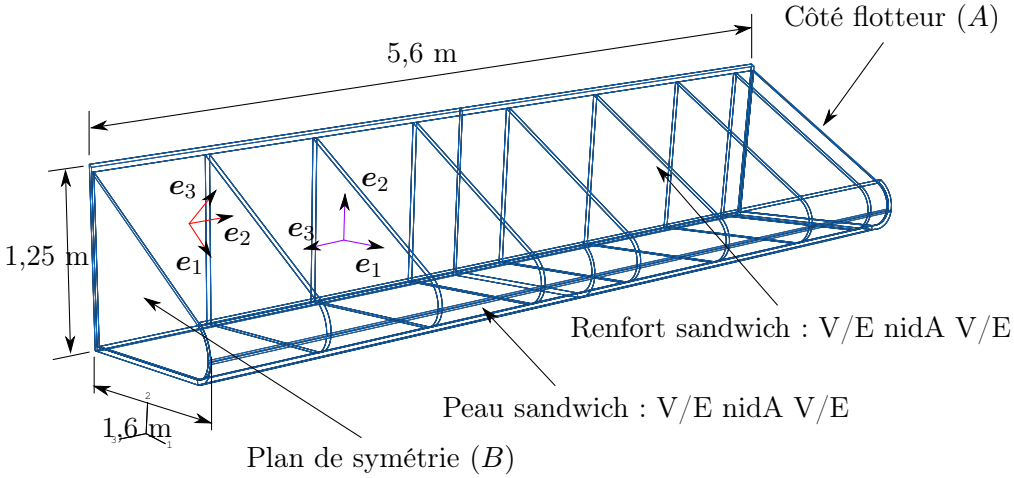


FIG. 5.9 – Demi-bras avant de catamaran

Les peaux des sandwichs sont des tissus verre/époxy équilibrés d'épaisseur 0,93 mm. Le modèle de comportement mécanique associé est le MODÈLE 2 présenté et identifié dans le chapitre 2. Les fibres sont orientées suivant les directions $\boldsymbol{e}_1$ et $\boldsymbol{e}_2$. Les âmes des sandwichs sont des nids d'abeilles Nomex à cellules hexagonales de diamètre 6,4 mm, de densité 64 kg m^{-3}) et d'épaisseur 30 mm. Le modèle de comportement mécanique associé est le modèle NIDA 1 présenté en chapitre 4. Le pic de contrainte observé en compression normale hors plan est donc bien pris en compte dans cette étude. Les alvéoles sont "extrudées" suivant la direction $\boldsymbol{e}_3$. Neuf renforts sandwichs sont disposés le long du profil pour renforcer

la structure. Ces renforts sont collés à la peau composite intérieure. Pour cela, l'égalité des degrés de liberté de translation aux interfaces "renforts/peau composite intérieure du bras" est assurée par ABAQUS.

5.2.2 Modélisation de la vague

La vague est représentée sous la forme d'une tranche de fonction sinus de longueur d'onde 25 m et d'amplitude crête à crête 3,5 m (voir la figure 5.10). Cette taille correspond à un état de la mer de type "mer forte".
L'eau est modélisée par un corps solide mou dont la réponse mécanique est gouvernée par l'équation d'état de Mie-Grüneisen à laquelle est associée la relation linéaire Us-Up d'Hugoniot. Ce modèle se prête bien à la modélisation de fluides incompressibles visqueux dont le mouvement est régi par les équations de Navier-Stokes et pour lesquels les échanges de chaleur sont négligés [HSK, 2006]. Cette approche a été utilisée pour modéliser l'impact de structures métalliques sur surface libre par [Constantinescu, 2006].

Le premier principe de la thermodynamique peut s'écrire sous forme locale :

$$\rho \frac{\partial e}{\partial t} = p \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \sigma^d : \mathrm{D}^d + \rho \mathcal{Q} \tag{5.1}$$

avec e l'énergie interne spécifique, p la pression hydrostatique, ρ la masse volumique, σ^d le déviateur des contraintes de Cauchy, D^d le déviateur des taux de déformation et $\mathcal{Q}$ la puissance échangée par chaleur. L'équation d'état de Mie-Grüneisen relie la pression hydrostatique p à l'énergie interne spécifique e et à la masse volumique ρ. Elle régit le comportement volumétrique du solide :

$$p = p_H + \Gamma_0 \rho_0 \, (e - e_H) \tag{5.2}$$

où p_H et $e_H = \dfrac{p_H \eta}{2 \rho_0}$ $(\eta = 1 - \rho_0/\rho)$ sont respectivement la pression et l'énergie interne spécifique d'Hugoniot, Γ_0 un paramètre matériau et ρ_0 la masse volumique initiale du fluide. La relation linéaire Us-Up d'Hugoniot permet de calculer p_H en fonction de la masse volumique ρ et des paramètres matériau c_0 et s :

$$p_H = \frac{\rho_0 c_0^2 \eta}{(1 - s\eta)^2} \tag{5.3}$$

Elle donne finalement, pour la pression hydrostatique p, l'expression :

$$p = \frac{\rho_0 c_0^2 \eta}{(1 - s\eta)^2} \left(1 - \frac{\Gamma_0 \eta}{2}\right) + \Gamma_0 \rho_0 e \tag{5.4}$$

Enfin il reste à préciser que la partie déviatorique du comportement mécanique du fluide est totalement découplée de la partie volumétrique. Ici, le déviateur des contraintes de Cauchy est évalué à partir du déviateur des taux de déformation via la viscosité μ :

$$\sigma^d = 2 \mu \mathrm{D}^d \tag{5.5}$$

Les équations 5.1 et 5.4 sont résolues par ABAQUS en chaque point d'intégration du fluide. Les paramètres matériau regroupés dans le tableau 5.3 sont issus de [Constantinescu, 2006].

Paramètres du modèle EOS Us-Up avec cisaillement					
Paramètres Unités	ρ_0 ($kg\,m^{-3}$)	Γ_0 (-)	c_0 ($m\,s^{-1}$)	s (-)	μ (Pa s)
Valeur	1000	0,28	1425	1,75	0,001

TAB. 5.3 – Paramètres matériau pour l'eau

5.2.3 Chargements imposés, condition de contact

Les impacts de vague simulés ici correspondent à deux cas fortement différents en terme de criticité pour la structure. Dans ces deux cas, une vague de largeur réduite frappe le centre du bras avant. Le premier impact se produit pour une vitesse relative très réduite de 2 $m\,s^{-1}$, soit un peu moins de 4 nœuds. Le second se produit à pleine vitesse, c'est-à-dire pour une vitesse relative horizontale entre le catamaran et la vague prise égale à 40 noeuds, soit environ 70 $km\,h^{-1}$ ou encore 20 $m\,s^{-1}$ (cette vitesse correspond à la vitesse maximale du navire). Le flotteur (non modélisé), est supposé imposer au bras de catamaran une vitesse d'avance horizontale de 2 ou 20 $m\,s^{-1}$ sur le plan (A) de la figure 5.9. Il ne ralentit pas au cours de son entrée dans l'eau. En plus de ce chargement constant au cours du temps, l'ensemble du bras de catamaran possède une vitesse initiale horizontale de 2 ou 20 $m\,s^{-1}$ (en conformité avec l'avance du navire) et une vitesse initiale verticale de 3 $m\,s^{-1}$ (pour prendre en compte la chute du navire sur la vague).
La vague est quant-à elle encastrée sur sa face inférieure. Tout comme pour le bras, une condition de symétrie est utilisée pour limiter les coûts de calcul. Les conditions initiales (CI) et limites (CL) énoncées ci-dessus sont rassemblées en figure 5.10.

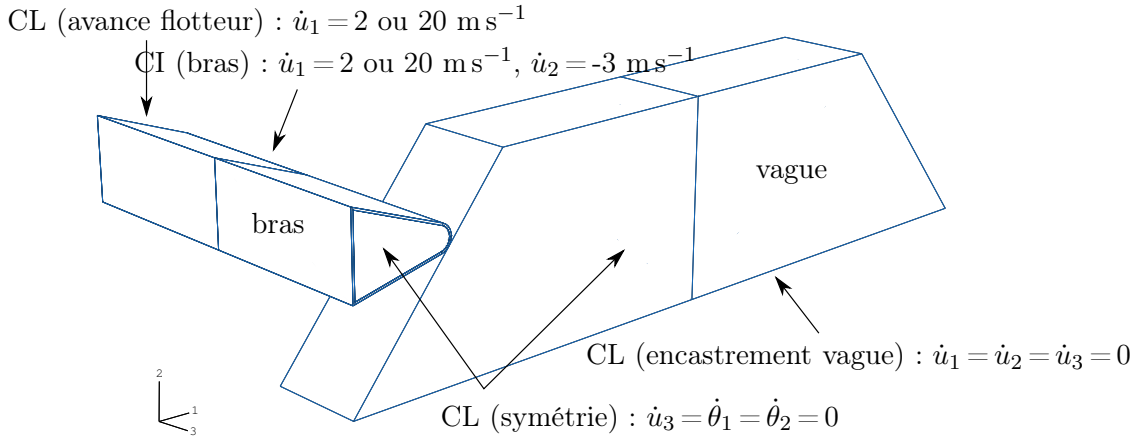


FIG. 5.10 – Chargements utilisés pour la modélisation des impacts hydrodynamiques

Le contact entre la vague et la peau extérieure du bras de catamaran est supposé être sans frottement. Il est modélisé suivant la démarche proposée dans [Constantinescu, 2006] (contact désigné "doux" autorisant une très légère interpénétration des corps [HSK, 2006]).

5.2.4 Aspects éléments finis

La vague et les âmes en nids d'abeilles Nomex sont discrétisées avec les éléments 3D à intégration réduite S8R d'Abaqus (voir chapitre 4). Pour la partie de fluide en contact avec la structure (demie vague), la formulation ALE (Arbitrary Lagrangian Eulerian) est employée. Les réglages par défaut d'Abaqus sont conservés. Les peaux composites sont maillées avec les éléments coques S4R présentés en chapitre 2. Le modèle numérique fait intervenir un total de 165000 degrés de liberté (hors variables internes).

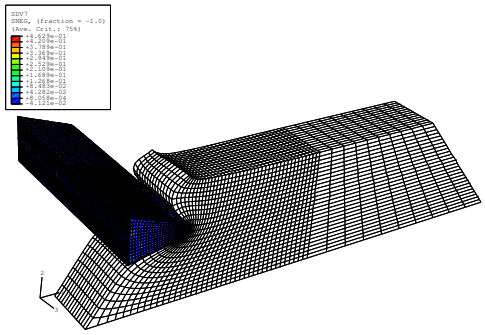
Il reste à spécifier que le calcul est mené avec un pas d'intégration pris égal à 0,85 fois le pas de temps évalué par Abaqus.

5.2.5 Résultats obtenus

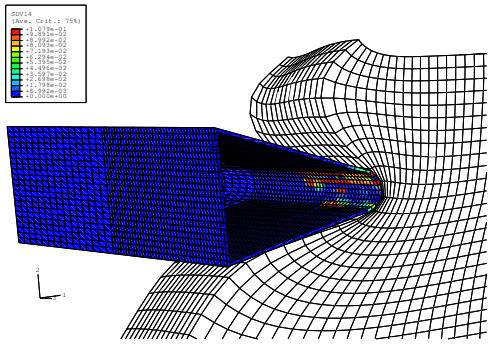
Les résultats présentés dans cette partie concernent l'état de dégradation du bras de catamaran obtenu en fin de calcul pour les deux cas de chargements traités.

Impact très basse vitesse

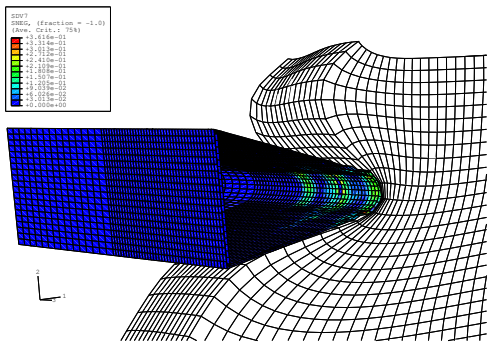
La figure 5.11 détaille l'état d'endommagement de la structure sandwich après impact de vague à 2 $\mathrm{m\,s^{-1}}$. Les endommagements des peaux, des âmes de la structure principale et des peaux de renfort y sont présentés.



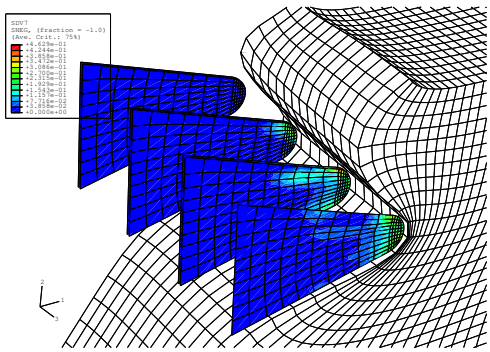
(a) Vue globale de l'impact



(b) Endommagement en cisaillement des âmes nidA 1 (d_{23})



(c) Endommagement en cisaillement des peaux V/E (d_{12})



(d) Endommagement en cisaillement des peaux V/E de renfort (d_{12})

Fig. 5.11 – Répartition de l'endommagement sur le bras de catamaran - impact très basse vitesse

La simulation numérique fait apparaître un fort endommagement des âmes en nids d'abeilles Nomex en cisaillement hors-plan 23 (figure 5.11(b)). À ce point du calcul, c'est-à-dire après 0,5 s d'impact, le dommage se concentre essentiellement sur la partie supérieure du bras en contact direct avec la vague. Par contre, et ce malgré un choc frontal, les nids d'abeilles résistent bien en compression normale hors plan. Aucun endommagement d_{33} n'apparaît.
En ce qui concerne les peaux tissées verre/époxy, les fibres ne sont pas affectées par l'impact. Globalement, les tissus résistent très bien à la charge. Par contre, la résine subit un endommagement en cisaillement 12, endommagement localisé à proximité des zones de renfort (figure 5.11(c)). La raideur apportée par les arêtes de renfort, peut donc aggraver localement l'état de détérioration des peaux. À noter également l'endommagement en cisaillement des peaux des renforts, visible très nettement sur la figure 5.11(d) (les âmes restant quant-à elles intactes).

Ce premier calcul de faisabilité montre que même à basse vitesse, la structure peut être légèrement endommagée. Sa tenue mécanique n'est à ce stade toutefois pas remise en question, les fibres n'étant absolument pas affectées et les nids d'abeilles Nomex conservant une bonne partie de leur intégrité. De plus il est important de préciser que dans les constructions navales réelles, les composites employés sont des carbone/époxy plus rigides (meilleure protection des âmes en nids d'abeilles) et plus résistants (meilleure tenue des peaux). Une phase d'identification du MODÈLE 2 sur la base de données pour tissus carbone/époxy serait nécessaire pour tirer de plus amples conclusions.

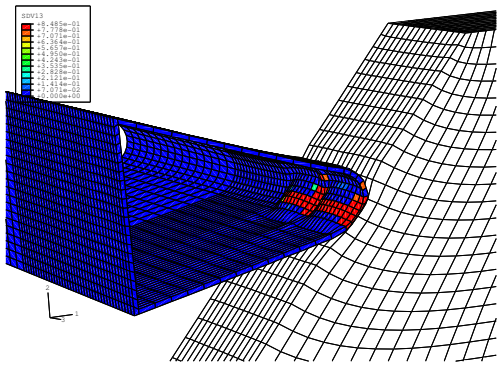
Impact haute vitesse

Les conséquences d'un impact à 40 nœuds, prédites par simulation numérique, sont maintenant évoquées. La figure 5.12 détaille l'état d'endommagement de la structure sandwich 6,7 ms après l'impact de la vague. Les divers éléments du bras de catamaran sont présentés.

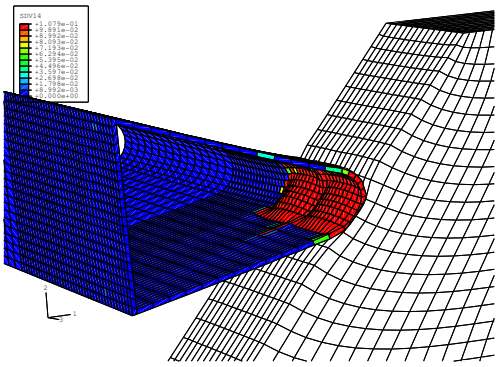
Cette fois-ci la structure est très fortement endommagée et sa tenue à la mer compromise. Les figures 5.12(a), 5.12(b) et 5.12(c) montrent que les âmes en nids d'abeilles Nomex sont totalement dégradées. La figure 5.12(a) met en évidence l'aspect très local de la rupture des nids d'abeilles Nomex en compression. Les cellules se sont en effet effondrées le long de la ligne de contact avec l'eau et le long des renforts. En cisaillement 23 par contre, la zone affectée est bien plus large comme l'illustre la figure 5.12(b). Enfin les renforts sont également aggravants en cisaillement 13. Ce sont eux qui permettent la ruine des âmes Nomex suivant cette direction de chargement (voir la figure 5.12(c), l'endommagement d_{13} est localisé entre les renforts, là où le cisaillement 13 est le plus fort).

En ce qui concerne les peaux maintenant, le niveau de dommage en cisaillement d_{12} est bien plus élevé que pour l'impact à basse vitesse. L'endommagement atteint en effet plus de 65 % à certains endroits (cf figure 5.12(d)). De plus, la figure 5.12(e) fait apparaître des dégradations de fibres entre les renforts. Ceci montre que la tenue mécanique de la structure est très sévèrement affectée par l'impact. Enfin la figure 5.12(f) met l'accent sur la très forte altération de la rigidité des renforts, diminués par un fort endommagement de cisaillement d_{12}.

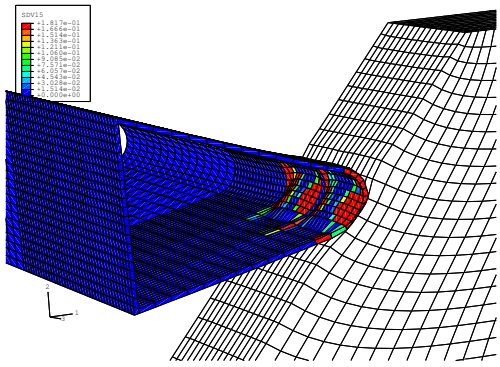
Pour pouvoir tirer plus de conclusions de ces simulations numériques, il faudrait pouvoir comparer les résultats obtenus avec des résultats expérimentaux. Cette étude, qui doit être considérée comme une première étude de faisabilité, permet toutefois de dégager quelques points intéressant sur la construction des bras de catamaran. Il apparaît en effet



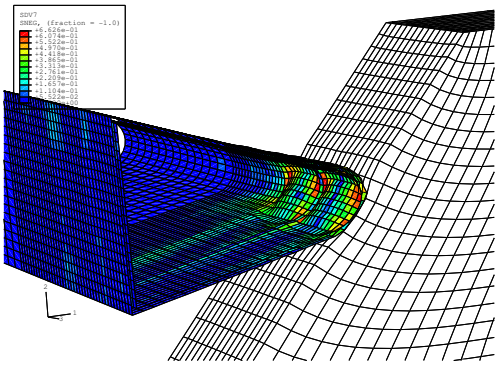
(a) Endommagement en compression des âmes NIDA 1 (d_{33})



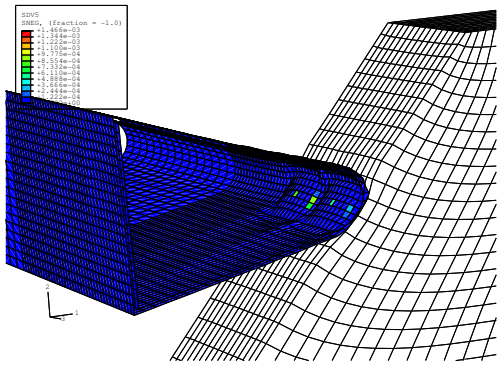
(b) Endommagement en cisaillement des âmes NIDA 1 (d_{23})



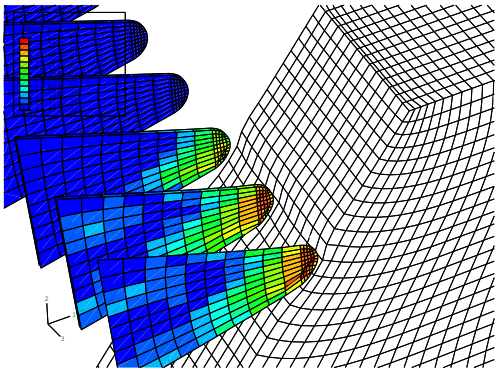
(c) Endommagement en cisaillement des âmes NIDA 1 (d_{13})



(d) Endommagement en cisaillement des peaux V/E (d_{12})



(e) Endommagement en tension des peaux V/E (d_{11})



(f) Endommagement en cisaillement des peaux V/E de renfort (d_{12})

FIG. 5.12 – Répartition de l'endommagement sur le bras de catamaran - impact haute vitesse

que les renforts peuvent contribuer à aggraver la dégradation locale de la structure. Un compromis entre raideur et tenue des bras aux chocs doit être être recherché. Dans le cas de peaux verre/époxy, la simulation numérique montre que des impacts, même à faible énergie cinétique, peuvent endommager faiblement les structures.

5.3 Conclusion

En bilan de cette partie, les modèles de comportement mécanique proposés pour les composites tissés verre/époxy et pour les âmes en nids d'abeilles Nomex montrent leur aptitude à prédire l'état de structures sandwichs soumises à des chargements complexes. La connaissance de l'état d'endommagement du sandwich se trouve améliorée par la prise en compte du pic d'instabilité dans la modélisation de la réponse des âmes. Le modèle développé permet en effet de distinguer les déformations irréversibles de la perte de rigidité, ce qui n'est pas le cas des approches avec modèle purement plastique. Des travaux incluant une partie expérimentale sur les impacts de structures sandwichs, seraient toutefois nécessaires pour valider pleinement les modèles sur chargements structurels complexes.

Bibliographie

CONSTANTINESCU, A. (2006).
Modélisation 2D de l'impact d'une structure sur l'eau. Initialisation de l'endommagement.
Thèse de doctorat, École Nationale Supérieure des Ingénieurs des Études et Techniques d'Armement (Brest, France) et l'Académie Technique Militaire (Bucarest, Roumanie).

COURSEAULARGE (2003).
The cata.
Course Au Large, 8:78–81.

GUSTIN, J., JONESON, A., MAHINFALAH, M. et STONE, J. (2005).
Low velocity impact of combination kevlar/carbon fiber sandwich composites.
Composite Structures, 69:396–406.

HSK (2006).
Abaqus reference manual, volume 6.5.
Hibbit, Karlsson & Sorensen Inc.

JOHNSON, A., PICKETT, A. et ROZYCKI, P. (2001).
Computational methods for predicting impact damage in composite structures.
Composites Science and Technology, 61:2183–2192.

MULTIPLAST (2007).
http ://www.multiplast-yachts.com/indexfr.cfm.

RIVALLANT, S., FERRERO, J. et BARRAU, J. (2006).
Dynamic buckling of foam stabilised composite skin.
Composite Structures, 72:486–493.

ROZYCKI, P. (2000).
Contribution au développement de lois de comportement pour matériaux composites soumis à l'impact.
Thèse de doctorat, LAMIH Valenciennes.

Conclusions et perspectives

Conclusion générale

Ces travaux de thèse ont porté sur la modélisation du comportement mécanique des structures sandwichs soumises à l'impact. L'étude, restreinte au cas particulier des sandwichs à peaux composites tissées et âme en nids d'abeilles Nomex, s'est articulée autour de trois objectifs principaux : développer un modèle de comportement robuste dédié à la réponse des peaux composites ; caractériser expérimentalement le comportement mécanique hors plan des nids d'abeilles Nomex ; enfin modéliser ce comportement.

Dans une première partie, un nouveau méso modèle a été proposé pour reproduire numériquement la réponse de matériaux composites soumis à des sollicitations quasi-statiques et dynamiques. Il prend en compte les mécanismes complexes de dégradation observés expérimentalement grâce à l'utilisation de théories d'endommagement et de plasticité. Ce modèle étant adoucissant, le risque d'aboutir à un problème mécanique mal posé a été évité au moyen de l'utilisation d'un modèle d'endommagement à effet retard. Le Modèle 2 développé dans ces travaux contient une longueur caractéristique intrinsèque, la hauteur de pli du méso modèle, qui permet d'obtenir une rupture non localisée dans une bande d'un seul élément de large. Tous les phénomènes de dégradation ont été conservés ainsi que la dépendance de la réponse à la vitesse de déformation. Les paramètres du Modèle 2 ont alors été identifiés au niveau local à l'aide d'une méthode d'optimisation de type "recherche directe", sur la base de données pseudo expérimentales concernant des tissus verre/époxy. Des simulations numériques d'éprouvettes virtuelles ont enfin permis d'étalonner les paramètres spécifiques au modèle d'endommagement à effet retard, paramètres pilotant l'aspect plus ou moins fragile de la rupture et la taille de la zone de fort endommagement par limitation de la vitesse maximale d'endommagement. L'indépendance de la réponse au maillage a été démontrée sur quelques exemples pour des niveaux variés de discrétisation et des types d'éléments différents.

Dans une seconde partie, le comportement mécanique hors plan de nids d'abeilles Nomex a été caractérisé expérimentalement. En compression, les courbes de réponses obtenues par des essais classiques ont fait apparaître un comportement très fortement non linéaire, décomposable en trois phases principales : (1) réponse pré-pic, (2) effondrement en effort, (3) densification. Ces observations sont la conséquence, à l'échelle macroscopique, des phénomènes de formation de plis successifs à l'échelle locale, le pic étant directement lié à une instabilité de type flambement.
Le comportement de cisaillement hors plan a été évalué au moyen d'essais prospectifs non standards impliquant des éprouvettes quad-blocs. La simulation numérique de l'essai a mis en évidence la possible présence d'effets de bords, d'interface et de structure. Elle a permis de quantifier le nombre de cellules à cisailler pour limiter l'influence des effets de bords et de montrer qu'une hauteur standard de 12,7 mm conduit à sur-évaluer le module de

cisaillement identifié du fait des effets d'interface. Des pistes d'amélioration, passant par l'emploi d'une instrumentation particulière, ont finalement été discutées.

Un modèle dédié à la réponse des nids d'abeilles Nomex a été développé à partir des mesures expérimentales. Un soin particulier a été apporté pour la partie compression hors plan, si bien que le modèle s'est révélé être capable de traduire, de manière continue, toute la réponse non linéaire, de l'état initial supposé non dégradé, à l'état compacté, en passant par le pic d'instabilité. Une procédure d'identification, basée sur la minimisation de l'erreur en contrainte par algorithmes génétiques, a été appliquée avec succès sur deux types distincts de nids d'abeilles Nomex. L'intégration dans le cadre éléments finis a fait apparaître un problème attendu de localisation et de dépendance de la réponse au maillage. Ce problème, non résolu dans ces travaux, a été contourné avec de bons résultats par l'utilisation d'éléments à intégration réduite ne comportant qu'un seul point dans la hauteur.

Pour terminer, des exemples académiques d'impacts sur plaques composites ont révélé l'aptitude des lois de comportement développées lors de ces travaux de thèse à prédire la ruine des structures sandwichs. La rupture, par fissuration en croix des peaux composites, de panneaux sandwichs impactés par des projectiles rigides a été correctement prédite. Un exemple de faisabilité concernant la simulation numérique d'un impact hydrodynamique sur bras de catamaran a été également proposé. Le modèle développé doit bien entendu être étoffé et les résultats obtenus étayés par des essais expérimentaux, mais en première approche, la dégradation de la structure semble être tout à fait réaliste. Pour compléter ces premiers travaux, d'autres études pourraient être menées à propos de l'influence de l'état résiduel post-impact sur la réponse en cas de resollicitation.

Perspectives

À l'issue des travaux réalisés au cours de cette thèse, les perspectives d'améliorations sont nombreuses et portent sur des aspects très variés.

En ce qui concerne les composites stratifiés, l'extension aux unidirectionnels du modèle développé pour les tissus constitue une première perspective d'importance, étant donnée la forte utilisation de ce type de plis. La prise en compte du phénomène de délaminage entre plis, d'une part et entre âme et peaux d'autre part, est une autre piste d'amélioration dans la modélisation des problèmes d'impact sur structures sandwichs.

D'un point de vue des nids d'abeilles Nomex maintenant, une hypothèse importante a été posée avant même la phase d'écriture du modèle : celle de l'orthotropie du comportement. Elle se justifie tout à fait pour le matériau en sortie d'usine, mais en cours d'écrasement elle est bien plus discutable... Sa remise en question impose de reposer fondamentalement l'écriture du modèle. Ce pourrait être une piste de développement à long terme. Sans aller jusqu'à cette extrémité, et à plus court terme, la régularisation de la loi de comportement est une piste réellement attrayante sur le plan scientifique. Le mode de dégradation des nids d'abeilles Nomex se fait par apparitions successives de plis, une déformée en "accordéon" étant finalement obtenue. Ce pli, pourrait être une première piste pour établir une grandeur interne, propre au matériau et nécessaire à la régularisation par modèle non local ou théorie "visqueuse" de la loi proposée ici. L'utilisation d'analyse d'instabilité, c'est-à-dire la recherche des modes de flambement, pourrait être un moyen de déterminer numériquement cette longueur interne, longueur variant avec la hauteur de bloc pourquoi pas...

Ceci amène une perspective très attractive : la descente au niveau du papier Nomex. Dans la littérature, très peu de données sont disponibles sur le comportement du papier Nomex. Ceci se comprend bien du point de vue de l'ingénieur qui dimensionne des structures dont les échelles sont bien supérieures et qui s'intéresse par conséquent aux propriétés globales du bloc ; mais c'est un frein au développement de modèles multi-échelles. Les quelques essais de caractérisation des propriétés mécaniques du papier Nomex, conduits sur micromachine de traction avec analyse d'images, ont permis d'estimer un module d'élasticité moyen autour de 2400 MPa. L'anisotropie, les modes de rupture du papier Nomex n'ont cependant pas pu être déterminés faute de matière première. Par conséquent de gros efforts restent à mener à cette échelle.
Tout l'intérêt d'une connaissance fine des propriétés de ce matériau réside dans la possiblité ultérieure de mener des campagnes d'essais virtuels permettant de limiter au maximum l'expérimentation coûteuse sur nids d'abeilles. Ce pourrait être un préalable au développement de modèles macro plus réalistes.

Annexe 1 : Influence des paramètres du modèle NIDA 1

Cette annexe présente une étude de l'influence des paramètres du modèle sur la réponse à l'écrasement de nids d'abeilles Nomex. Le modèle est chargé en déformation cyclique jusqu'à un niveau d'écrasement élevé. Le calcul de référence est réalisé avec le jeu de paramètres présenté en tableau 5.4.

Paramètres de référence pour étude d'influence									
E_3	Y_{o33}	Y_{c33}	τ_{o33}	n	Y_p	d_{c33}	K	β_d	a_2
90	0,03	0,5	5	1,5	150	0,8	20	10	-1

TAB. 5.4 – Jeu des paramètres utilisés pour l'étude d'influence

Influence de d_{c33}

La figure 5.13, met en évidence l'influence du paramètre d_{c33} qui porte sur le niveau de contrainte et sur l'état d'endommagement post-instabilité.

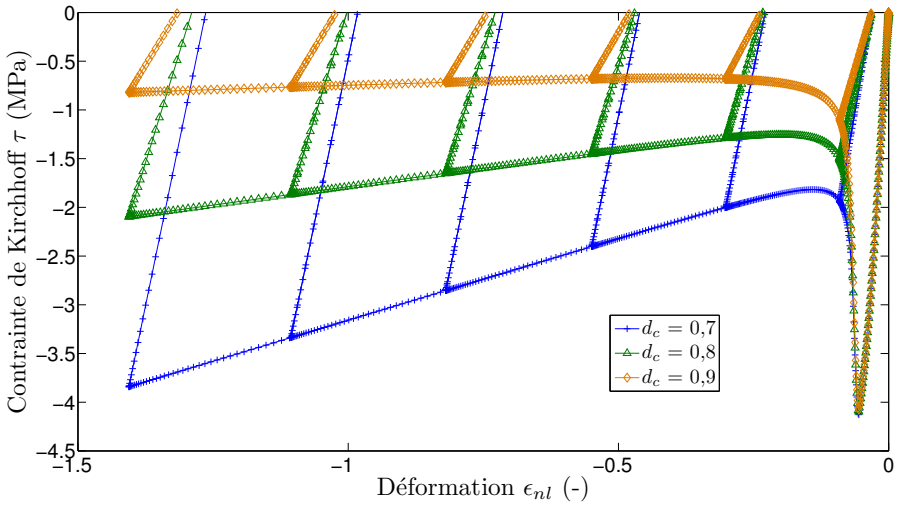


FIG. 5.13 – Influence du paramètre d_{c33} sur la réponse du modèle de compression

Influence de Y_p

La figure 5.14 présente l'influence du paramètre Y_p de l'expression 4.11 de κ sur la réponse du modèle.

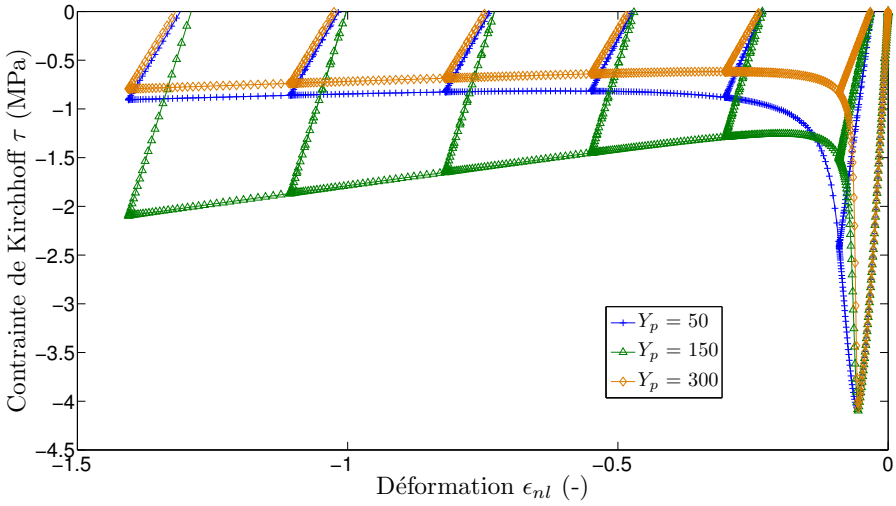


FIG. 5.14 – Influence du paramètre Y_p sur la réponse du modèle de compression

Influence de β_d

En figure 5.15 l'effet de β_d est investigué. Il est essentiel de noter que β_d a une influence sur l'ensemble de la réponse, c'est-à-dire avant et après pic. En pilotant la vitesse de changement de régime, il régule le couplage entre les phénomènes. Un β_d faible se traduit par une transition très lente entre régime pré et post-pic (voir la courbe tracée pour $\beta_d = 1$ en figure 5.15). Au contraire, un β_d important conduit à une modification très brutale de régime (courbes avec $\beta_d = 10000$ en figure 5.15).

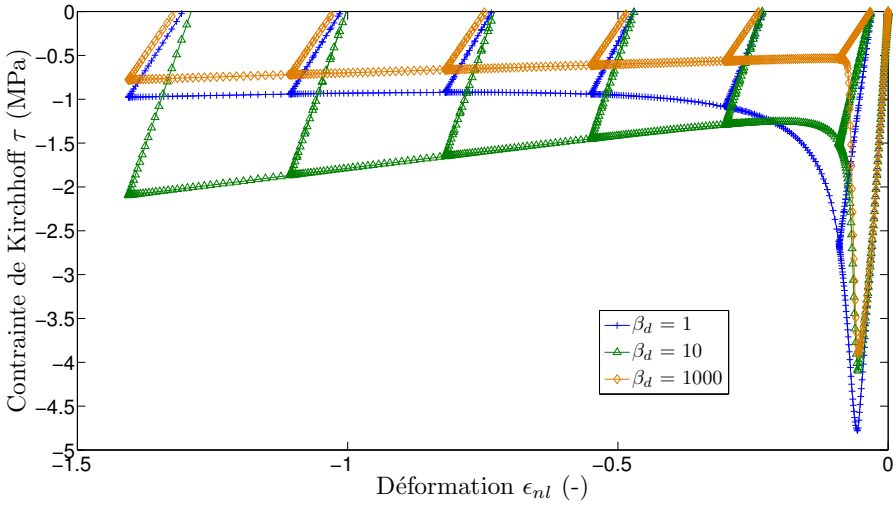


FIG. 5.15 – Influence du paramètre β_d sur la réponse du modèle de compression

Influence de a_2

Les courbes présentées en figure 5.16 illustrent l'action du paramètre a_2 de la fonction ξ (équation 4.11). Ce paramètre régule l'évolution de l'endommagement après instabilité.

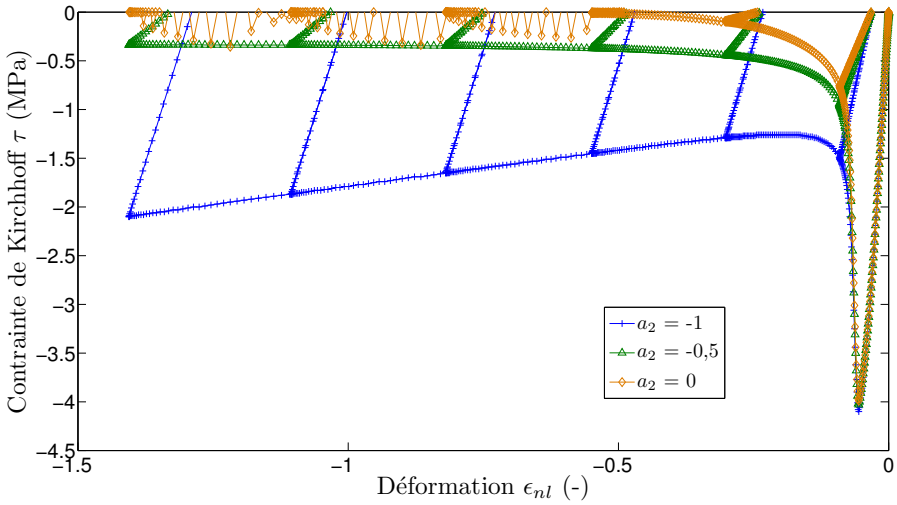


FIG. 5.16 – Influence du paramètre a_2 sur la réponse du modèle de compression

Influence de σ_{o33}, K et n

Enfin, derniers termes influents, les termes σ_{o33}, K et n. La figure 5.17 fait ressortir les points suivants : quand K augmente, l'écrouissage est plus fort (croissance après pic), plus σ_{033} est important et plus le pic d'instabilité est bas, enfin plus n est fort et moins le pic d'instabilité est "vif".

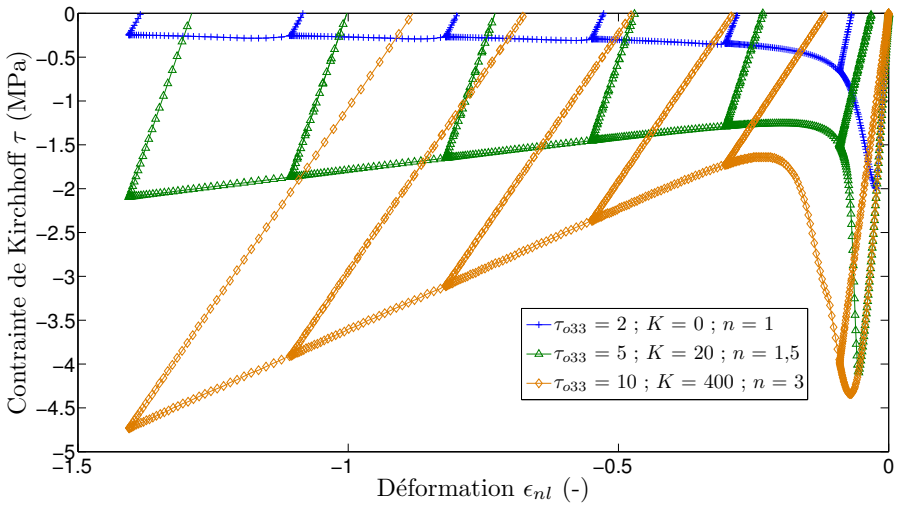


FIG. 5.17 – Influence des paramètres σ_{o33}, K et n sur la réponse du modèle de compression

Annexe 2 : Paramétrage de l'algorithme génétique

Cette annexe présente le paramétrage de l'algorithme génétique utilisé pour mener à bien l'identification des paramètres de modèle d'âme en nids d'abeilles Nomex. Les points clefs sont répertoriés en tableau 5.5.

Paramétrage de l'algorithme génétique	
Paramètres	"Valeurs"
Nombre d'individus d'une population	50
Génération aléatoire	@gacreationuniform
Nombre de survivants	5
Sélection des individus	@selectionstochunif
Croisement d'individus	@crossoverintermediate
Mutation d'individus	@mutationadaptfeasible
Ratio croisement/mutation	0,8
Fonction hybride	@patternsearch

Tab. 5.5 – Paramètres de l'algorithme génétique

La population comporte 50 individus. Systématiquement, les cinq meilleurs sont reproduits à la génération suivante. Ensuite des individus sont sélectionnés parmi les restants de manière aléatoire mais favorisant les plus efficaces. Tous les individus de la génération actuelle sont représentés sur un axe orienté par un segment de longueur inversement proportionnelle à leur valeur de fonction objectif associée. L'ordre de placement est défini aléatoirement (aspect stochastique). Un balayage à pas constant (aspect uniforme) permet de sélectionner les individus à retenir pour générer la génération suivante. Bien entendu, plus l'individu est "bon" et meilleure est sa probabilité d'être sélectionné (son segment associé étant plus long). Le ratio croisement/mutation étant fixé à 0,8, parmi les 45 individus restant après sanctuarisation des 5 meilleurs, 36 individus seront croisés et 9 individus seront mutés.

Le croisement des individus se fait par moyenne pondérée des gènes de deux individus sélectionnés au hasard. Cette opération est réalisée sur les 36 parents sélectionnés après tirage aléatoire des couples.
Enfin la mutation des 9 individus concernés consiste à perturber aléatoirement les paramètres dans une plage restreinte qui leur est propre.
Afin de limiter les possibilités, chacun des paramètres se voit affecter une précision donnée. Ainsi, par exemple, un module d'élasticité sera recherché avec une précision de 0,1 MPa. Ceci permet d'éviter d'optimiser les paramètres du modèle à une décimale non physiquement représentative.

CONTRIBUTION À LA MODÉLISATION DU COMPORTEMENT MÉCANIQUE DES STRUCTURES SANDWICHS SOUMISES À L'IMPACT

Les travaux réalisés portent sur la modélisation du comportement mécanique des structures sandwichs soumises à l'impact. Ils se restreignent au cas particulier des sandwichs à peaux composites tissées et âme en nids d'abeilles Nomex. Une loi de comportement hypoélastique dédiée aux composites tissés est développée en référentiel local objectif à l'échelle méso du pli élémentaire. Elle prend en compte l'orthotropie du pli, les phénomènes irréversibles et la dépendance de la réponse à la vitesse de déformation. Le problème de la localisation des déformations, rencontré classiquement avec les modèles adoucissants et qui conduit à la dépendance de la réponse au maillage, est traité par l'utilisation d'un modèle d'endommagement à effet retard.
Pour caractériser expérimentalement la réponse de nids d'abeilles Nomex, des essais de compression classiques et de cisaillement sur éprouvettes quad-blocs sont menés. Une étude numérique détaillée met en évidence les effets de bord, d'interface et de structure qui apparaissent et des voies d'améliorations sont discutées.
Le comportement mécanique des nids d'abeilles Nomex est alors modélisé, l'accent étant placé sur la réponse non linéaire complexe observée en compression hors plan. Le modèle proposé permet, par un couplage en endommagement et plasticité, de traduire correctement toute la phase de la réponse.
Pour terminer, les modèles développés sont testés sur des simulations d'impacts de plaques sandwichs.

Mots clefs : structures sandwichs, impact, composites tissés, nids d'abeilles Nomex, localisation, endommagement à effet retard, plasticité

CONTRIBUTION TO THE MODELLING OF THE MECHANICAL BEHAVIOUR OF SANDWICH STRUCTURES SUBJECTED TO IMPACT LOADINGS

This work deals with the modelling of the mechanical behaviour of sandwich structures submitted to impact loadings. It focuses on the study of sandwichs made of composite woven fabric skins and Nomex honeycomb core. A hypoelastic constitutive law dedicated to composite woven fabrics is developed in local objective referential at the meso scale of the elementary ply. Orthotropy, irreversibilty and strain rate dependence are taken into account. To avoid the localisation phenomena that arises when a softening law is used and that creates spurious mesh dependence, a delayed damage meso model is chosen.
To characterise the response of Nomex honeycomb core, experimental tests are performed on classical compressive specimens and on quad-blocs shearing specimens. A detailed numerical study highlights the effects of the free edges, the interfaces and the structure. It gives hints on how to improve the tests.
The mechanical behaviour of Nomex honeycomb core is then modelled and special care is paid to the non linear response in out of plan compression. Coupling damage and plasticity, enables the model to deal with the whole response in an integrated fashion.
Last, simulations of impacts on sandwich plates conclude the work.

Key words : sandwich structures , impact loadings, composite woven fabric, Nomex honeycomb core, localization, delayed damage meso model, plasticity