



Contribution à l'étude des milieux poreux

Mladen Boreli

► To cite this version:

Mladen Boreli. Contribution à l'étude des milieux poreux. Modélisation et simulation. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1954. Français. NNT: . tel-00277067

HAL Id: tel-00277067

<https://theses.hal.science/tel-00277067>

Submitted on 5 May 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

POUR OBTENIR

LE TITRE D'INGÉNIEUR-DOCTEUR

PAR

MLADEN M. BORELI

1^{re} THÈSE

CONTRIBUTION A L'ÉTUDE DES MILIEUX POREUX

2^e THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

CONCENTRATION DE FOND ET TRANSPORT DES MATÉRIAUX EN SUSPENSION

Soutenues le 14 janvier 1954, devant la Commission d'Examen

MM. KRAVTCHENKO *Président.*

KUNTZMANN

SANTON

CRAYA

} *Examineurs.*

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

POUR OBTENIR

LE TITRE D'INGÉNIEUR-DOCTEUR

PAR

MLADEN M. BORELI

1^{re} THÈSE

CONTRIBUTION A L'ÉTUDE DES MILIEUX POREUX

2^e THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

CONCENTRATION DE FOND ET TRANSPORT DES MATÉRIAUX EN SUSPENSION

Soutenues le 14 janvier 1954, devant la Commission d'Examen

MM. KRAVTCHENKO *Président.*

KUNTZMANN

SANTON

CRAYA

} *Examineurs.*

**CONTRIBUTION
A L'ÉTUDE DES MILIEUX POREUX**

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

Doyens honoraires : MM. GAU, FORTRAT

Doyen : M. MORET

Professeurs honoraires { MM. FLUSIN, Électrochimie, Électrométallurgie
FAVARD, Professeur à la Sorbonne
FORTIER, Professeur à la Sorbonne

PROFESSEURS

GIGNOUX.....	Géologie et Minéralogie, Membre de l'Institut.	DORIER.....	Zoologie.
FORTRAT.....	Physique générale, Correspondant de l'Institut.	HEILMANN.....	Chimie.
MORET.....	Géologie, Correspondant de l'Institut.	KRAVTCHENKO..	Mécanique rationnelle.
ANDRIEUX.....	Chimie.	BENOIT.....	Radio-électricité.
DE LITARDIÈRE.	Botanique, Correspondant de l'Institut.	CHÈNE.....	Chimie papetière.
NÉEL.....	Physique expérimentale.	NOBÉCOURT....	Micrographie papetière.
BRELOT.....	Calcul différentiel et intégral.	WEIL.....	Physique.
PARDE.....	Hydrologie fluviale.	FÉLICI.....	Physique.
ESCLANGON.....	Physique industrielle.	KUNTZMANN....	Analyse appliquée.
		DODERO.....	Électrochimie, Électrométallurgie.
		SANTON.....	Mécanique des Fluides.

PROFESSEURS SANS CHAIRE

FALLOT.....	Physique.	TRAYNARD.....	Chimie.
REULOS.....	Physique.		

Maître de Conférences honoraire : M. OFFNER, Botanique

MAITRES DE CONFÉRENCES

SILBER.....	Mécanique des Fluides.	BARBIER.....	Géologie.
SOUTIF.....	Physique.	CRAYA.....	Mécanique physique.
REEB.....	Mathématiques.	M ^{lle} LUTZ.....	Mathématiques.
GALVANI.....	Mathématiques.		

Secrétaire principal M. GRENIER
Secrétaire M. BICHET

A mes parents

A ma femme

TABLE DES MATIÈRES

PREMIERE PARTIE

	PAGES
INTRODUCTION	1
1. — But de la recherche	3
2. — Ecoulement en milieux poreux	5
3. — Enoncé du problème général; conditions aux limites	13

DEUXIEME PARTIE

ÉCOULEMENT PLAN

CHAPITRE PREMIER

Écoulement plan et transformation conforme

1. — Rappel de quelques notions classiques	17
2. — Transformation conforme	17
3. — Transformation conforme employée pour résoudre le problème de filtration	19

CHAPITRE II

Points singuliers

1. — Introduction	25
2. — Points singuliers sans ligne de suintement	26
3. — Point placé au raccordement des lignes de suintement et des limites rectilignes..	31
4. — Raccordement de la surface libre et de la ligne de suintement	34

CHAPITRE III

Quelques nouvelles solutions exactes

A) Ecoulement vers un drain placé sur un fond imperméable	45
1. — Analyse du problème	45
2. — Etude générale de la surface libre	46
3. — Solution théorique	52
4. — Détail des calculs	61

— II —

B) Barrage souterrain	65
1. — Enoncé du problème	65
2. — Solution théorique	66
3. — Prolongement analytique	71

CHAPITRE IV

Étude du problème dans la cuve à analogie

1. — Analogie hydro-électrique	73
2. — Cas étudiés dans la cuve à analogie hydro-électrique	76

TROISIEME PARTIE

MÉTHODE DE RELAXATION ET ÉCOULEMENT DE RÉVOLUTION

CHAPITRE PREMIER

Application de la méthode de relaxation à l'étude de l'écoulement en milieux poreux

1. — Principe de la méthode	85
2. — Application de la méthode de relaxation à l'étude de l'écoulement en milieux poreux	88
3. — Relaxation au point de vue technique	92

CHAPITRE II

Étude d'un puits qui n'atteint pas le fond imperméable

1. — Introduction	102
2. — Analyse préliminaire	103
3. — Résultats obtenus à partir de la méthode de relaxation	121
CONCLUSIONS GÉNÉRALES	130

AVANT-PROPOS

A la faveur d'une bourse d'études Franco-Yougoslave, j'ai pu faire un séjour de longue durée à Grenoble et préparer la présente thèse d'Ingénieur-Docteur aux Laboratoires de Mécanique des Fluides de l'Université. J'ai trouvé dans ce service tous les moyens nécessaires, tous les concours utiles pour développer et préciser les idées que j'avais conçues pendant mon séjour au Laboratoire d'Hydraulique de l'Académie Serbe des Sciences. J'évoque avec émotion les leçons de mon maître, le Professeur KNEZEVIC.

J'ai eu également le privilège de travailler comme stagiaire aux Laboratoires Dauphinois d'Hydraulique Neyrpic, où j'ai également reçu un accueil des plus empressés et où j'ai trouvé les conseillers les plus éclairés. J'adresse à la Direction des Etablissements Neyrpic, et en particulier à M. P. DANIEL, l'expression de ma gratitude pour l'hospitalité qui m'a été offerte.

Je tiens à assurer de ma respectueuse reconnaissance :

— M. F. ESCLANGON, Directeur de l'E.N.S.E.H. de Grenoble, dont les conseils et les encouragements m'ont été précieux;

— M. J. KRAVTCHEV, Directeur des Laboratoires de Mécanique des Fluides de l'E.N.S.E.H., Professeur à la Faculté des Sciences, qui a dirigé d'un bout à l'autre mon travail et à qui je suis, en particulier, redevable d'utiles conseils pour l'étude des singularités;

— Mr. Hunter ROUSE, Directeur de l'Institut de Recherches Hydrauliques de l'Université d'Etat à Iowa, à qui je dois quelques-unes des idées directrices de mes travaux consacrés à la méthode de relaxation;

— M. L. SANTON, Directeur Technique des Laboratoires de Mécanique des Fluides, Professeur à la Faculté des Sciences, qui m'a initié à la technique des cuves à analogie électrique, m'a guidé, au cours de mes essais, dont il a assuré le contrôle, et dont le concours a été essentiel pour la mise au point de la partie expérimentale de mon travail;

— M. J. KUNTZMANN, Directeur du Laboratoire de Calcul de l'E.N.S.E.H., Professeur à la Faculté des Sciences, et

— M. A. CRAYA, Maître de Conférences à la Faculté des Sciences, qui m'ont donné d'utiles conseils et ont contrôlé mes conclusions.

M. G. SAUVAGE DE SAINT-MARC a participé d'une manière essentielle à la direction de la partie technique de mon travail et a contribué à en fixer définitivement le sujet. Qu'il veuille bien trouver ici l'expression de ma profonde gratitude.

Je remercie toutes les autorités françaises qui ont contribué à me faciliter mon séjour en France.

Je remercie aussi mon Gouvernement qui a prolongé suffisamment la durée de ma mission en France, pour me permettre d'élaborer le présent travail.

Je ne saurais terminer cet avant-propos sans adresser à toute l'équipe des Laboratoires de Mécanique des Fluides, animée par M. SANTON, ma reconnaissance pour l'aide inappréciable qu'elle m'a apportée dans les moments difficiles.

Je tiens, en particulier, à exprimer tous mes remerciements à mes camarades de Laboratoire : MM. C. MARCOU, A. APTE, R. CURTET, J.-P. MILLIAT, J. DODU et à M. P. DAVID, Agent technique, dont l'aide me fut souvent précieuse.

La joie que j'éprouve à l'idée de rentrer prochainement dans mon pays n'éteint pas complètement la profonde mélancolie que je ressens au moment de quitter la France; le souvenir de son accueil ne s'effacera jamais de mon cœur.

PREMIÈRE PARTIE

INTRODUCTION

A. — BUT DE LA RECHERCHE

De tout temps, l'homme s'est efforcé de se rendre maître de l'eau, soit pour s'en défendre, soit pour l'utiliser; mais ce désir l'a conduit à élargir son champ d'investigation et à aborder tout particulièrement l'étude des écoulements souterrains qui interviennent dans de nombreuses entreprises humaines.

En effet, il s'agit là d'endiguer un fleuve ou de créer une réserve d'eau; il convient donc de réduire au maximum les fuites à travers la digue ou le barrage et d'éviter les infiltrations dangereuses pour la stabilité de tels ouvrages. Là encore, l'homme veut lutter contre l'insalubrité des terres marécageuses et, pour ce faire, installe tout un système de drainage afin de pouvoir opérer la mise en culture de cette région. Ailleurs, au contraire, le sol est aride ou semi-aride; l'homme doit donc amener l'eau et irriguer cette terre; même, il lui faut très souvent chercher l'eau dans le sol; il fore alors des puits de pompage ou projette d'audacieux barrages souterrains.

Cette importance des problèmes du mouvement de l'eau dans le sol explique l'attention que les ingénieurs apportent maintenant à cette question. Et pourtant, il a fallu attendre le milieu du XIX^e siècle pour qu'avec DARCY commence l'étude rationnelle de tels écoulements; leur nature cachée est-elle la cause de cet intérêt tardif? Peut-être; d'ailleurs, nous devons ajouter que cette étude rationnelle reste encore très schématique, car si, pour le profane, ces écoulements apparaissent même comme mystérieux, ils constituent, pour le technicien, une difficulté toujours très complexe.

Cependant, il est déjà précieux de pouvoir traiter théoriquement certains schémas simplifiés, certes, mais formateurs pour l'ingénieur, car ils développent en lui l'intuition de ces problèmes et c'est là, croyons-nous, un atout fondamental pour mener à bonne fin les travaux entrepris.

Aussi, est-ce à de tels schémas que se sont attachés les chercheurs; à leur suite, et dans la même ligne, nous avons étudié quatre cas schématiques non encore abordés: l'un se rapporte aux infiltrations à travers les digues; l'autre à un problème de drainage; le troisième, à celui du barrage souterrain; le quatrième, enfin, à un pompage dans une nappe souterraine.

Chemin faisant, nous avons chaque fois, à dessein, utilisé une méthode d'étude différente: l'une, plus théorique, fait appel au jeu des transformations conformes, la seconde tire sa source de l'analogie entre champ électrique et écoulement en milieu poreux, la troisième, enfin, est la méthode de relaxation que nous avons appliquée au calcul de l'écoulement de révolution créé par un puits dans le cas où le fond du puits

n'atteint pas le sol imperméable. Nous nous sommes efforcés, par ailleurs, de présenter aux lecteurs tous les éléments de comparaison souhaitables, et de montrer les possibilités et les limitations de chacune des méthodes utilisées. Enfin, nous avons examiné avec un grand soin, sur les conseils de M. KRAVTCHENKO, la nature des singularités rencontrées dans les réseaux plans d'infiltration examinés dans cette thèse.

Cette analyse n'intéresse peut-être pas directement l'art de l'ingénieur, mais sa partie générale éclaire néanmoins certains points obscurs qu'il était bon de préciser, afin d'éviter des erreurs toujours possibles dans l'étude de réseaux analogues et c'est là, selon nous, une justification suffisante à l'exposé que nous en avons fait.

B. — ÉCOULEMENT EN MILIEU POREUX

1. — MILIEU POREUX

On peut considérer dans le sol deux grandes catégories d'éléments :

- a) les roches;
- b) les alluvions.

Cette dernière catégorie peut être, à son tour, subdivisée en deux parties :

- 1° les sables, dont la granulométrie est comprise entre 0,05 et 2 mm, et les graviers pour lesquels elle est supérieure à 2 mm;
- 2° les argiles, qui se caractérisent par une granulométrie au-dessous de 0,005 mm.

Entre les deux se place un matériau « poudreux » dont les propriétés physiques relèvent de celles des sables et argiles.

C'est principalement la granulométrie qui détermine les propriétés physiques des alluvions : cohésion, plasticité, etc., et ce qui nous intéresse spécialement : la porosité.

C'est au sable (gravier) que l'on applique généralement l'expression de « milieu perméable », « milieu poreux », l'argile constituant ce que l'on appelle « couche imperméable », considérée comme limite du milieu poreux.

2. — L'EAU DANS LES ALLUVIONS

Le mouvement des eaux souterraines peut être de plusieurs types selon la nature des forces prépondérantes à l'action desquelles elles sont soumises. On distingue ainsi : l'eau hygroscopique, capillaire, pelliculaire, et enfin, l'eau dont le mouvement est commandé par les lois de la gravité. C'est celle-ci qui nous intéressera exclusivement.

3. — LOI DE DARCY

La première étude sérieuse sur l'écoulement en milieu poreux est due à DARCY, en 1856 (dans son article *Les fontaines publiques de la ville de Dijon*) ; l'auteur a énoncé une loi généralisant des essais effectués à l'aide de filtres. Cette loi peut être exprimée sous la forme suivante :

$$(1) \quad Q = KS \frac{\Delta h}{L},$$

où :

Q = débit à travers la section transversale;

K = une constante caractéristique du sable (coefficient de Darcy);

S = section du filtre;

h = charge piézométrique définie de la même manière que pour l'écoulement dans les canaux $h = \left(y + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} \right)$;

L = longueur du filtre.

On a exprimé également cette même loi sous la forme :

$$(2) \quad \mathfrak{J} = K \mathfrak{J};$$

$\mathfrak{J} = Q/S$ vitesse moyenne de section (qui n'est pas égale à la vitesse réelle);

$\mathfrak{J}$ = pente de la ligne piézométrique.

L'équation (2) est connue sous le nom de « loi de Darcy » ou aussi « loi linéaire de filtration ».

Les efforts de nombreux hydrauliciens ont eu deux objectifs principaux :

1° contrôler et, éventuellement, corriger l'équation (2);

2° trouver la valeur de K en fonction des caractéristiques des matériaux.

4. — LIMITE DE LA LOI DE DARCY

Comme beaucoup de lois physiques, la loi de Darcy n'est valable que dans un domaine déterminé. L'analyse dimensionnelle nous amène directement à cette conclusion. En effet, on peut établir une relation entre les différents paramètres en cause :

Δp = différence de pression à l'entrée et à la sortie du filtre (supposé horizontal);

ρ = densité du liquide;

μ = coefficient de viscosité dynamique;

Δs = longueur de l'échantillon (filtre);

g = accélération de la pesanteur (1);

$\gamma = \rho g$.

Comme caractéristique du matériau, nous nous bornerons au diamètre du grain d .

Suivant le théorème de Vachy, nous pouvons écrire la relation suivante régissant l'écoulement à travers le filtre considéré :

$$(3) \quad F \left(\frac{\Delta p}{\rho g \Delta s}, \frac{v^2}{g \Delta s}, \frac{v d}{\frac{\mu}{\rho}} \right) = 0.$$

Cette relation lie trois nombres sans dimension : le premier constitue la pente de la ligne piézométrique, le deuxième présente une certaine analogie avec le nombre de Froude, le troisième est le nombre de Reynolds. La proportionnalité de la perte de charge à la vitesse ne pourra être admise que si l'on néglige le nombre de Froude,

(1) *Remarque.* — Le fait que nous ayons décidé de ne considérer que l'action de la gravité entraîne la possibilité de négliger les forces capillaires, moléculaires, etc.

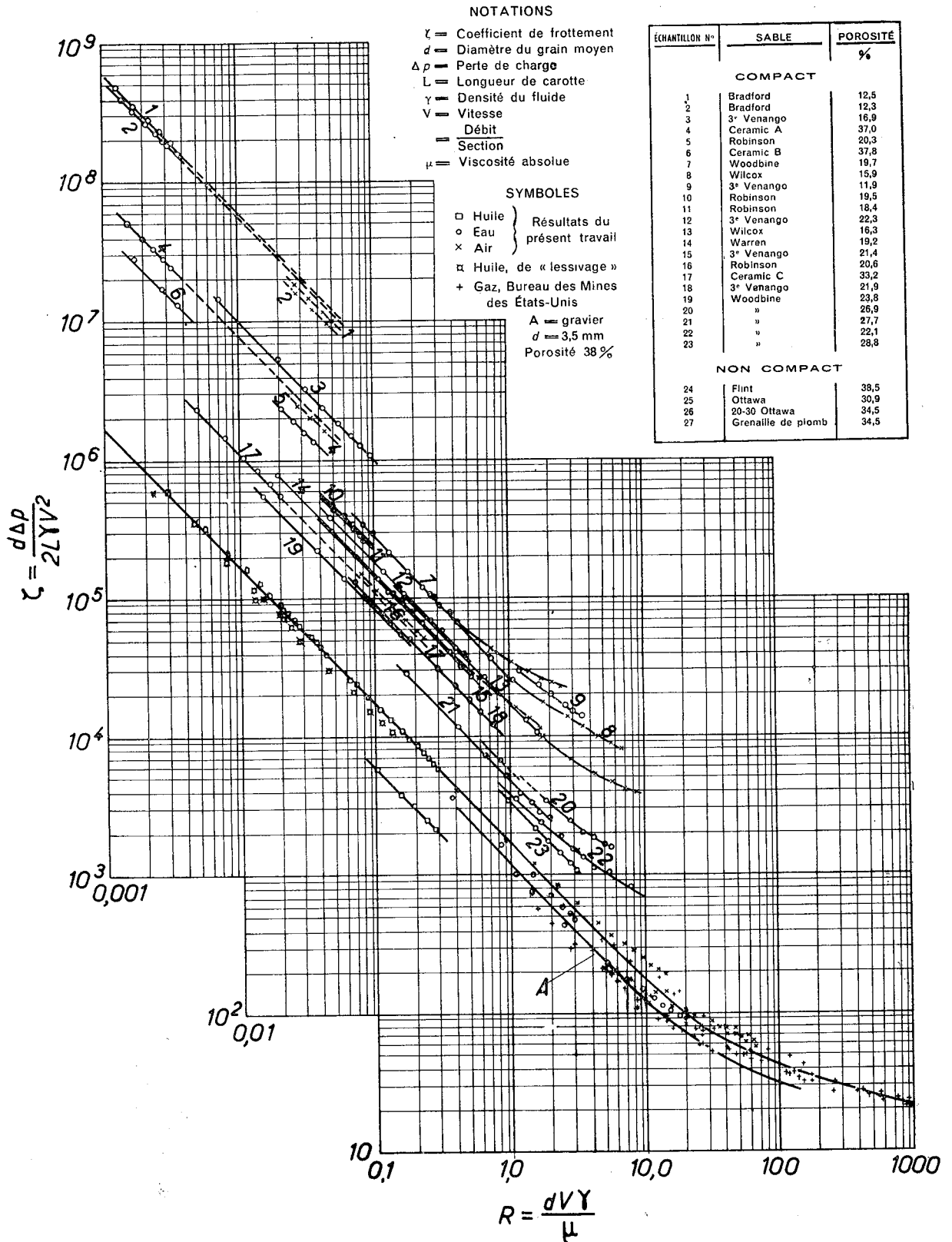


Fig. 1

c'est-à-dire, seulement si le terme $\frac{v^2}{g\Delta s}$ est négligeable. On peut également faire un diagramme analogue à celui de Nikuradse pour des conduites. Nous porterons en ordonnées le coefficient de frottement :

$$(4) \quad \xi = \frac{igd}{2v^2} = \frac{\Delta p g d}{2\Delta s \gamma v^2} = \frac{\Delta p d}{2\Delta s \rho v^2},$$

et en abscisses le nombre de Reynolds :

$$R_e = \frac{vd}{\frac{\mu}{\rho}} = \frac{vd}{\nu}.$$

Nous présentons ici deux diagrammes de ce type :

— dans le premier (1) (fig. 1) la valeur de « d », qui entre dans l'expression de ξ et R_e , est définie par :

$$(5) \quad d = \sqrt[3]{\frac{\sum n_s d_s}{\sum n_s}},$$

où d_s est la moyenne arithmétique de la largeur des mailles de deux tamis consécutifs de la série de Taylor, et n_s le nombre de grains de diamètre d_s ;

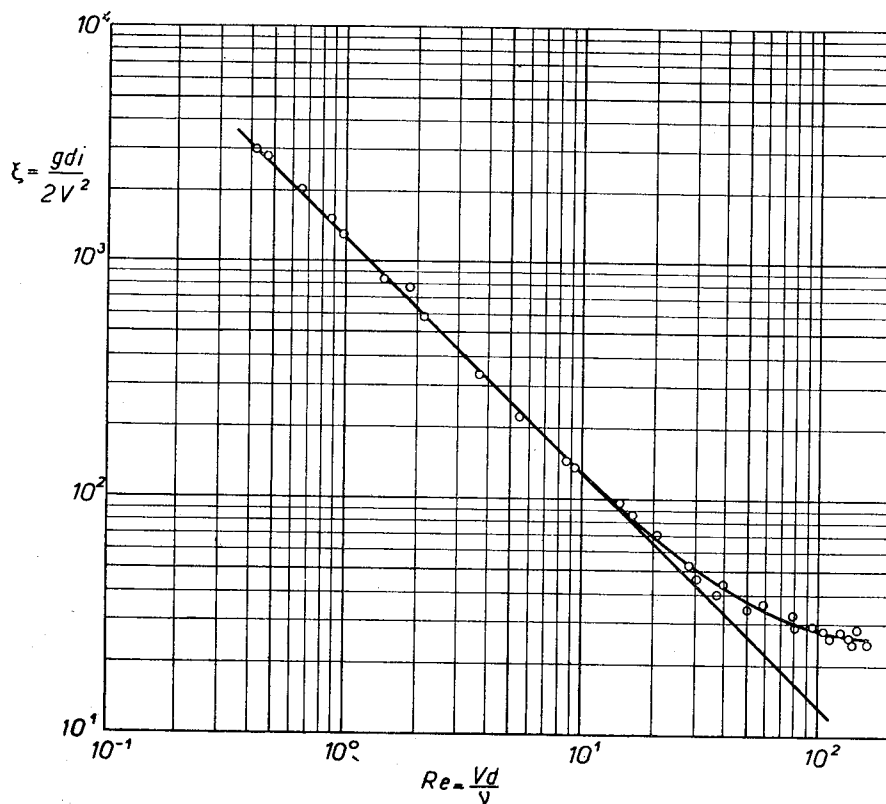


Fig. 2

— dans le second (fig. 2), nous avons consigné nos résultats expérimentaux sur lesquels nous aurons l'occasion de revenir.

(1) Cf. MUSKAT. — *The flow of homogeneous fluids through porous media*, p. 60.

VERONESE (1), à ce sujet, a établi une loi qui est linéaire pour des valeurs de $R_e < 5$ et quadratique pour des valeurs de $R_e > 200$.

L'allure générale des courbes $\xi = f(R_e)$ évoque celle des pertes de charge dans les tuyaux. Pourtant, des différences apparaissent, en particulier dans le fait suivant : alors que pour des conduites la proportionnalité du coefficient de résistance à R_e est très bien marquée jusqu'à $R_e = 2\,000$, elle cesse d'être valable pour l'écoulement en milieu poreux pour des valeurs nettement inférieures de R_e ($R_e < 5-10$), donc bien avant que la turbulence ne devienne possible. Le fait de négliger le terme $\frac{v^2}{g\Delta s}$ est plus grave dans l'analyse d'un écoulement en milieu poreux que dans celle d'un écoulement dans une conduite, car ici les variations de la section sont extrêmement importantes (elles réalisent, en quelque sorte, une infinité de convergents-divergents).

5. — CONTROLE EXPÉRIMENTAL DE LA LOI

Ce contrôle a été réalisé à l'aide de l'appareil de Darcy existant au laboratoire. Des modifications importantes, devant permettre des variations plus étendues de perte de charge ΔH et de débit, avaient été auparavant nécessaires. En effet, le sable choisi ne permettait initialement qu'une variation assez limitée, telle que :

$$40 \text{ mm} < \Delta H < 400 \text{ mm}.$$

Dans un essai préliminaire, nous avons pu déterminer la limite supérieure qui se trouvait imposée par le débit maximum insuffisant de l'appareil (qui était de l'ordre de 0,5 l/s). Nous l'avons porté à 2 l/s en changeant une partie de la tuyauterie et des vannes (*fig. 3*). Pour les faibles valeurs de ΔH , nous avons été considérablement gênés par l'imprécision des mesures. En effet, si pour les valeurs importantes de ΔH le niveau d'eau, à la sortie de l'appareil fixé par un déversoir, était pratiquement indépendant du débit, il n'en était pas de même aux faibles valeurs. D'autre part, la précision médiocre du tube manométrique pour la lecture des pressions étant de l'ordre de 0,5 mm, on ne pouvait atteindre qu'une précision globale inférieure à 2 mm.

Nous avons utilisé pour la détermination de ΔH deux pointes de mesures, l'une placée sur le déversoir, l'autre montée au-dessus d'un pot de mesure en communication avec l'entrée dans l'appareil. Cette méthode nous a permis de ramener l'erreur à moins de 0,1 mm (ceci en faisant plusieurs lectures).

En définitive, l'appareil modifié présenté dans les clichés permettait une gamme de variations de pression telle que :

$$2 \text{ mm} < \Delta H < 1\,400 \text{ mm}.$$

Les limites extrêmes de variation dans l'appareil non modifié étaient 40 mm et 400 mm, soit dans un rapport de $400/40 = 10$. Dans l'appareil modifié, ce rapport prend la valeur 700. Nous avons donc obtenu une « amplification » de $700/10 = 70$.

(1) Cf. VERONESE (cf. *Compendio d'Iraulica*, Scimemi, p. 161).

Signalons que le matériau utilisé était un gravier quartzeux à grains arrondis. Son calibre était imposé, dans une certaine mesure, par les conditions expérimentales que nous avons arrêtées par avance et telles qu'elles permettaient de passer du domaine linéaire au domaine non linéaire de la variation de $\xi = f(R_e)$ avec un même gravier.

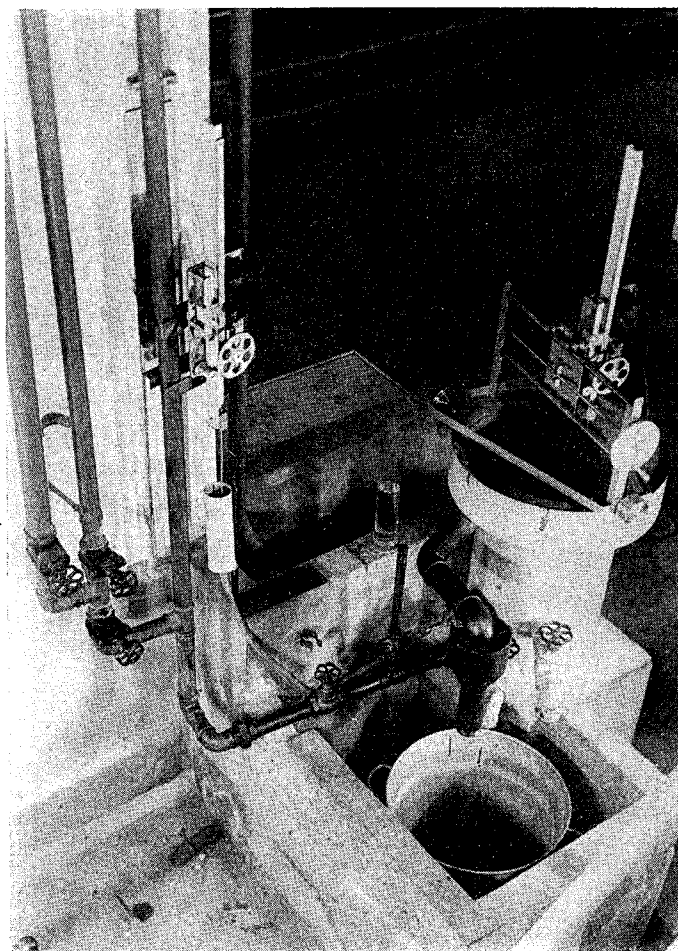


Fig. 3

La granulométrie, sensiblement uniforme, pouvait être définie par les proportions suivantes :

- 76 % entre 3 et 4 mm;
- 7 % entre 2 et 3 mm;
- 17 % entre 4 et 5 mm.

Nous avons exécuté trente-sept essais dont les résultats sont consignés dans les figures 1 et 2, le diamètre effectif d_e étant calculé avec la formule (5) en prenant comme valeur de d_s :

2,5; 3,5 et 4,5 mm.

On voit que la courbe $\xi = f(R_e)$ obtenue d'après nos points expérimentaux tend à s'écarter de la droite à partir de $R_e \sim 10$, ce qui confirmerait les résultats de l'analyse dimensionnelle ainsi que ceux des autres chercheurs.

6. — FORMULES DONNANT LE COEFFICIENT K DE DARCY EN FONCTION DES CARACTÉRISTIQUES DES MATÉRIAUX

Nous ne nous attarderons pas sur les nombreux essais ayant permis cette détermination. Nous nous bornerons à quelques considérations générales destinées à établir le rôle respectif des différentes grandeurs qui interviennent dans les formules.

L'analyse de la courbe $\xi = f(R_e)$ (fig. 1 et 2) nous donne l'allure générale de ces formules : l'équation $v = \frac{cg}{2\nu} \cdot d^2$ ($c = C^{te}$) traduit le fait que ξ est inversement proportionnel à R_e pour de faibles valeurs de celui-ci.

Soit :

$$(6) \quad K = \frac{cg}{2\nu} d^2.$$

D'après le graphique 1, nous voyons que c diminue quand P augmente. Cette variation se trouve définie par la formule de Kozeny :

$$(7) \quad K = 7,94 \frac{P^3}{(1-P)^2} \tau \cdot d_e^2;$$

P = coefficient de porosité;

τ = coefficient dépendant de la température $\tau = \frac{0,0106}{\nu}$;

d_e = diamètre effectif des grains en millimètres défini par :

$$(8) \quad \frac{1}{d_e} = \frac{3}{2} \frac{\Delta g_1}{d_1} + \sum_{i=2}^{i=r} \frac{\Delta g_i}{d_i};$$

Δg_i = poids des matériaux correspondant à la fraction i divisée par le poids total de l'échantillon;

d_i = diamètre moyen de la fraction i défini par :

$$(9) \quad \frac{1}{d_i} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{d_i'} + \frac{1}{d_i''} \right);$$

d_i' et d_i'' étant les diamètres limites supérieur et inférieur de fraction i ;

d_1 est le diamètre supérieur de la partie fine d'un tamisage effectué à l'aide d'un tamis dont le calibre est inférieur à 0,025 mm.

Il est important de souligner le rôle joué par la température. On voit, d'après les équations (7), (8) et (9), comment la variation de ν avec la température fait que τ (et par conséquent K) varie du simple au double quand t passe de 0 à 25° C. L'équation (7) montre l'influence importante de la porosité. Les équations (8) et (9) montrent, en outre, le rôle déterminant joué par le diamètre des grains. De plus, signalons que dans un mélange de matériaux divers, ce sont les fractions les plus fines qui caractérisent ce

mélange du point de vue de la porosité. On peut en avoir une idée en considérant l'équation (9). Dans la pratique, on emploie souvent comme diamètre effectif d_{10} (d_{10} représente le diamètre d'un tamis que 10 % seulement des grains d'un échantillon a traversé). Cette dernière remarque explique pourquoi l'écoulement en milieu poreux dans la nature vérifie d'une manière générale la loi de Darcy, car peu d'alluvions sont dépourvues complètement de grains fins.

7. — BASES HYDRODYNAMIQUES DU PROBLÈME DE L'INFILTRATION

La loi de Darcy s'écrit sous la forme générale :

$$(10) \quad \vec{V} = -K \vec{\text{grad}} h.$$

La vitesse pour un écoulement en milieu poreux, dans le domaine où la loi de Darcy est valable, dérive donc d'un potentiel $\varphi = -K(h - h_0)$, expression qui peut être mise, grâce au choix convenable de l'origine de h , sous la forme :

$$(11) \quad \varphi = -Kh.$$

Nous avons montré que la proportionnalité de perte de charge à la vitesse peut être admise à condition que v^2 soit négligeable. Nous aurons donc comme expression de h :

$$(12) \quad h = \frac{p}{\gamma} + y.$$

Le fait que la vitesse en milieu poreux dérive d'un potentiel implique aussi la validité de la loi de Laplace, étant donné que l'on suppose le fluide incompressible :

$$(13) \quad \begin{aligned} \nabla^2 \varphi &= 0, \\ \nabla^2 h &= 0. \end{aligned}$$

Donc, la charge hydraulique est un potentiel harmonique et ne dépendra que des conditions imposées aux limites de l'écoulement.

D'après l'équation (10), on voit que l'aspect du champ ne dépend pas de K . Les lignes de courant sont définies comme des lignes tangentes en chaque point aux vecteurs vitesses du champ. Pour un écoulement à potentiel défini par $\vec{V} = -K \vec{\text{grad}} h$, les surfaces équipotentiellles sont perpendiculaires aux vitesses et, par conséquent, aux lignes de courant.

C. — ÉNONCÉ DU PROBLÈME GÉNÉRAL ET CONDITIONS AUX LIMITES

Dans toute la suite, nous nous limiterons au cas où le domaine de l'écoulement en milieu poreux admet pour frontières des segments de droite (surface imperméable, surface du drain) et la surface libre, de forme inconnue *a priori*.

Nous choisissons l'exemple (fig. 4) d'un écoulement plan et permanent en milieu poreux isotrope qui contiendra toutes les notions qui seront introduites dans les chapitres suivants (sauf le drain).

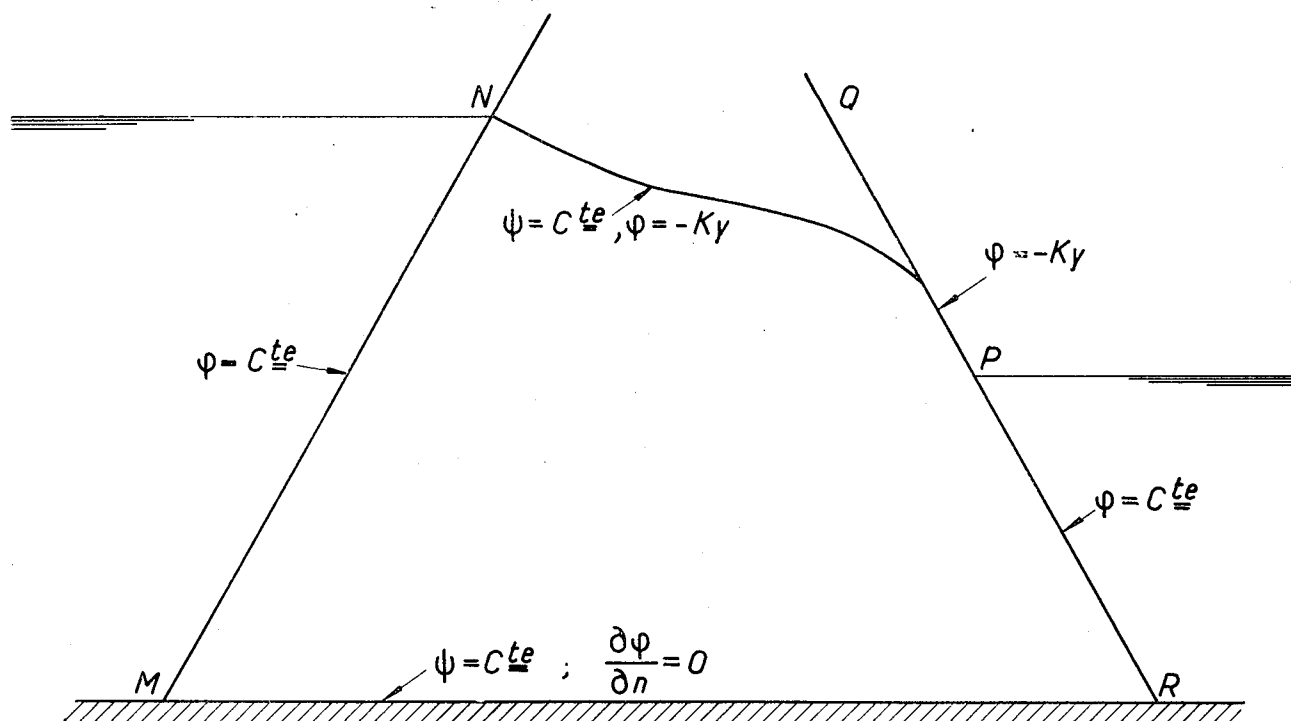


Fig. 4

Nous préciserons brièvement la nature des limites :

1° la paroi amont MN et une partie des parois aval PR sont des lignes équipotentiellles où $h = C^{te}$; donc, les lignes de courant partent perpendiculairement à cette ligne, sauf aux points M et N qui sont des points singuliers;

2° le fond imperméable MR constitue une ligne de courant $\psi = C^{te}$; le fait que les lignes équipotentiellles soient perpendiculaires en chaque point de cette ligne se traduit par l'équation :

$$(14) \quad \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0;$$

n = direction normale en un point quelconque de la ligne MR;

3° la surface libre NO, sur laquelle s'exerce la pression atmosphérique $\frac{p}{\gamma} = 0$;
la charge $h = \frac{p}{\gamma} + y$ devient, sur cette surface :

$$(15) \qquad h = y.$$

De plus, la surface libre étant une ligne de courant, le potentiel doit satisfaire à l'équation (14). La position de la surface libre n'est pas donnée *a priori*; dans chaque cas concret, il faut la déterminer en appliquant les équations (14) et (15);

4° ligne de suintement OP. L'existence d'une telle ligne doit être admise, comme nous le verrons par la suite. Sur cette limite nous avons (comme sur la surface libre) $\varphi = -Ky$ mais, étant donné qu'elle n'est pas une ligne de courant, nous aurons $\psi \neq \text{Cte}$.

Le raisonnement précédent est valable pour un écoulement de révolution (écoulement présentant un axe de symétrie) à condition que cet axe soit dans le plan de la figure (toutefois, il faudrait remplacer l'axe Oy par l'axe Oz). Cet exposé pourrait être utile pour l'étude de deux types d'écoulement :

1° écoulement plan;

2° écoulement de révolution.

DEUXIÈME PARTIE

ÉCOULEMENT PLAN

A. — ÉCOULEMENT PLAN ET TRANSFORMATION CONFORME

1. — RAPPEL DE QUELQUES NOTIONS CLASSIQUES

L'écoulement permanent en milieu poreux, pour des conditions précisées dans le chapitre précédent, dérive du potentiel φ qui satisfait à l'équation de Laplace :

$$(1) \quad \nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0.$$

On sait que toute solution qui admet des dérivées partielles premières et secondes continues dans un domaine simplement connexe (donc y est uniforme) est la partie réelle d'une fonction f , holomorphe de $z = x + iy$. La partie imaginaire de cette même fonction satisfait aussi à l'équation de Laplace.

φ et ψ sont des fonctions harmoniques conjuguées; on a :

$$(2) \quad f = \varphi + i\psi = f(z) = f(x + iy) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y),$$

f étant le potentiel complexe de l'écoulement.

Les fonctions φ et ψ étant harmoniques et conjuguées, une même fonction $f(z)$ détermine le schéma cinématique de deux *écoulements* : les fonctions φ et ψ sont interchangeables.

2. — TRANSFORMATIONS CONFORMES

Nous avons mentionné que chaque fonction analytique f de la variable complexe $z = x + iy$ donne immédiatement un réseau de lignes équipotentiels et de lignes de courant; donc, dès qu'on connaît la fonction, le problème est résolu, mais la détermination de cette fonction est très compliquée.

D'après l'examen du schéma de la *figure 4*, on voit que les conditions aux limites se traduisent par différentes conditions :

- | | |
|--|---|
| 1° $\varphi = C^{te}$, | paroi amont et partie noyée de la paroi aval; |
| 2° $\psi = C^{te}$, | fond imperméable; |
| 3° $\psi = C^{te}$, $\varphi = -Ky$, | surface libre; |
| 4° $\varphi = -Ky$, | ligne de suintement. |

Dans le cas de Dirichlet, on connaît la partie réelle de la fonction complexe sur la frontière du domaine; dans le cas où la frontière est une droite ou un cercle, la solution est donnée par la formule de Poisson-Schwartz-Villat.

Dans le cas de HILBERT, on connaît sur les limites, alternativement, la partie réelle et la partie imaginaire de la fonction complexe ou une relation linéaire entre les parties réelles et imaginaires.

Nous étudierons des problèmes où les conditions aux limites sont plus compliquées : existence d'une surface libre dont la position est inconnue *a priori*; cas d'une ligne de suintement qui n'est ni une ligne de courant, ni une ligne équipotentielle. Ce sont des difficultés spécifiques de la question.

A. — Transformation de Schwartz-Christoffel.

Nous rappelons les propriétés essentielles de cette transformation classique. Elle fait correspondre, à un domaine limité par un polygone, le demi-plan supérieur grâce à la relation :

$$(3) \quad \frac{dz}{dt} = C (t - a_1)^{\alpha_1-1} \cdot (t - a_2)^{\alpha_2-1} \dots (t - a_n)^{\alpha_n-1}$$

C = constante, en général complexe ;

$z = x + iy$ variable complexe dans le plan polygone;

$t = m + ni$ variable complexe dans le demi-plan;

$a_1, a_2, \dots, a_n$ affixes réels des images des points anguleux dans le demi-plan (signalons que trois de ces points peuvent être choisis arbitrairement),

$\pi\alpha_i$ étant l'angle du polygone correspondant au point a_i du demi-plan.

Par la suite, nous utiliserons fréquemment deux transformations particulières de Schwartz-Christoffel :

1^o transformation dite « de l'éventail »;

2^o transformation dite « damier-éventail ».

1. — TRANSFORMATION EN ÉVENTAIL (fig. 5).

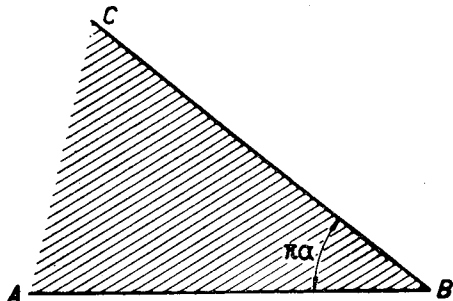


Fig. 5

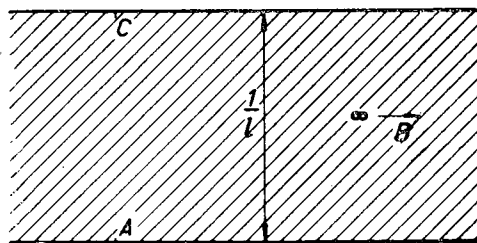


Fig. 6

Elle fait correspondre à deux demi-droites BA, BC faisant un angle $\pi \alpha$ du plan de la variable z , un demi-plan de la variable t par la relation $\frac{dz}{dt} = t^{\alpha-1}$, d'où :

$$(4) \quad z = C_1 t^\alpha + C_2.$$

2. — TRANSFORMATION DAMIER-ÉVENTAIL.

Si l'angle $\pi\alpha$ tend vers 0 (*fig. 6*), le triangle BAC se déforme en une bande de damier.

On a alors :

$$(5) \quad z = C_1 (\ln t + i\pi k) + C_2.$$

Dans chaque cas particulier, on aura à préciser la détermination choisie pour le logarithme. Si la distance entre les droites CB et AB est $\frac{1}{l}$ et si l'on veut faire correspondre le point B au point $t = 0$ (comme c'est souvent très pratique), la valeur de la constante C_1 devient $C_1 = -\frac{1}{l\pi}$; la bande est supposée ici horizontale.

B. — Transformation conforme employée pour résoudre le problème de la filtration.

Considérons un écoulement dans un domaine D de la variable z , limité par un polygone, et supposons que deux côtés, et deux côtés seulement (ou une portion de ces deux côtés), soient des lignes équipotentielles, les autres limites étant des lignes de courant (*fig. 7*).

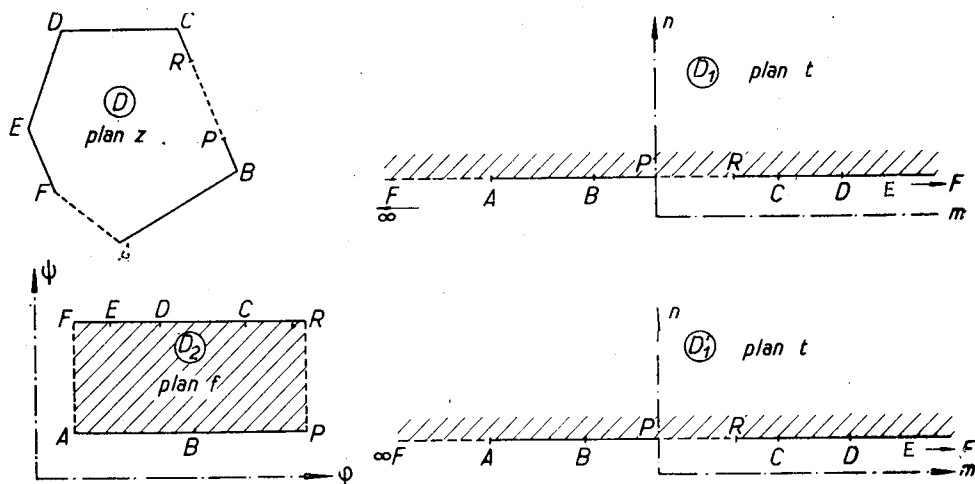


Fig. 7

Dans ce cas, un double emploi de la formule de Schwartz-Christoffel résout le problème (1) : la première de ces transformations nous permet de transformer le domaine D dans un demi-plan :

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{ou :} \\ z = F_1(t), \\ t = \Phi(z). \end{array} \right.$$

(1) *Remarque.* — Une autre manière d'opérer a été indiquée par B. DEMTCHENKO. Elle est plus générale. Celle du texte suffit pour les applications.

En employant une deuxième fois cette transformation, on transforme le rectangle D_2 , image de D dans le plan f , en un demi-plan D'_1 :

$$(7) \quad f = F_2(t) \quad (1).$$

Comme les valeurs du potentiel et débit du rectangle correspondent aux valeurs réelles (dans le plan D), on a :

$$D'_1 = D_1;$$

avec de telles conditions on peut écrire :

$$(8) \quad f = F_2[\Phi(z)].$$

En séparant les parties réelles et imaginaires de l'équation (8) on a directement l'expression des lignes de courant et du potentiel :

$$\varphi(x, y) = C^{te}; \quad \psi(x, y) = C^{te},$$

d'où la solution du problème. Donc, dans tous les cas où le domaine de l'écoulement a pour limites des segments de droites sur lesquels φ et ψ vérifient les conditions ci-dessus, un double emploi de la formule de Schwartz-Christoffel résout le problème.

Remarquons que souvent un écoulement à surface libre peut être réduit à un domaine limité par des segments de droite en employant deux transformations supplémentaires : celle de l'hodographe et celle de l'inversion; dans ce cas, on est donc ramené au problème exposé ci-dessus.

3. — HODOGRAPHE

On désigne sous ce nom la transformation :

$$(9) \quad W = \frac{df}{dz} = u - iv;$$

W = variable complexe dans le plan de l'hodographe, où u et v sont les composantes de la vitesse :

$$\vec{V} = \vec{u} + \vec{v} = u + iv \quad (2).$$

La vitesse $\vec{u} - \vec{v}$ symétrique, par rapport à l'axe réel du plan de la vitesse réelle, est appelée « vitesse complexe ». Rappelons comment se transforme la surface libre par la transformation plan z -hodographe. Pour la surface libre on a :

$$\begin{aligned} \varphi &= -Ky, \\ \frac{d\varphi}{ds} &= -K \frac{dy}{ds}, \end{aligned}$$

(1) *Remarque.* — Signalons cependant que l'équation (7) donne généralement des intégrales elliptiques; le problème sera plus facile à résoudre dans le cas où l'un des segments $A'F'$ ou $R'Q'$ va à l'infini, ce qui correspond au fait que, dans le plan physique, l'un des segments AF ou PR se réduit à un point source ou à un point puits.

(2) *Remarque.* — Nous signalons que $u + iv$ n'est pas une fonction analytique de la variable complexe z .

ds étant pris le long de la tangente à la surface libre dans le sens du mouvement. Soient u et v les coordonnées d'un point de l'image dans W de la surface libre.

Or :

$$\frac{d\phi}{ds} = V = \sqrt{u^2 + v^2} \quad \text{et} \quad \frac{dy}{ds} = -\frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}},$$

d'où l'on obtient l'équation de la surface libre dans le plan W :

$$(10) \quad u^2 + v^2 = Kv,$$

qui représente un cercle de diamètre K passant par l'origine $u = 0, v = 0$, avec le centre ayant pour abscisse 0 et pour ordonnée $\frac{K}{2}$.

Bien que la question soit classique, il nous semble opportun de donner ici l'aspect

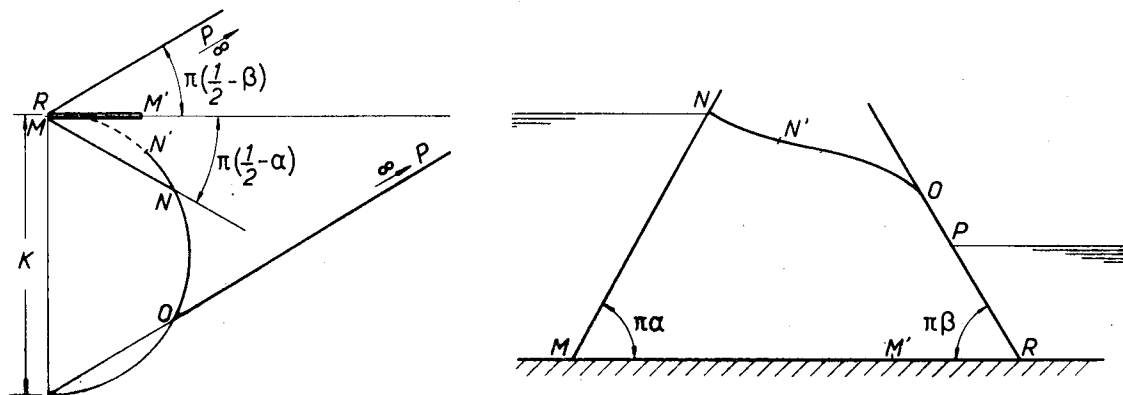


Fig. 8

de l'hodographe de la *figure 8*. Nous admettrons la démonstration rigoureuse des propriétés ci-après. Pour la commodité du lecteur, nous traçons le champ des vitesses réelles, symétrique du champ W par rapport à Ou . A l'avenir nous procéderons toujours ainsi.

Étant nulle aux points M et R , la vitesse passe par un maximum pour M' . Sur l'hodographe, la frontière MR est donc représentée par deux segments $MM'R$. La frontière MN , où la vitesse est perpendiculaire à MN , est représentée, sur le plan de l'hodographe, par une droite inclinée à $\pi \left(\frac{1}{2} - \alpha \right)$. La surface libre, représentée par un arc de cercle, peut avoir un point d'inflexion N' ou peut en être privée. Dans ce dernier cas, la partie MN' n'existe pas (la vitesse augmente constamment de N jusqu'au point O). Sur la ligne de suintement, la vitesse doit avoir toujours la composante perpendiculaire à OP constante car $K \frac{dh}{ds} = -K \sin \beta = C^te$ (s = distance dans le sens OP); par suite, la paroi aval est tangente à la surface libre au point O et la vitesse au point P doit être infiniment grande.

4. — L'INVERSION COMPLEXE

On appelle ainsi la transformation homographique :

$$(11) \quad t = m + in = \frac{1}{z} = \frac{1}{x + iy},$$

d'où :

$$m + ni = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y}{x^2 + y^2} i.$$

Rappelons qu'aux cercles passant par l'origine $x = 0, y = 0$, correspondent les droites; en particulier :

$m = \text{Cte}$ pour les cercles ayant leurs centres sur l'axe $x = 0$;

$n = \text{Cte}$ pour les cercles ayant leurs centres sur l'axe $y = 0$.

La surface libre dans le plan de l'hodographe est un cercle de rayon $\frac{K}{2}$ dont le centre est sur l'axe y et qui passe par le point $(0, 0)$. Ce cercle doit se transformer, par une inversion géométrique, en une droite :

$$n = \text{Cte} = \frac{1}{K}.$$

Le plan $\zeta = \xi + i\eta = \frac{1}{W}$ s'appelle « plan de l'hodographe inverse ». En coordonnées polaires ρ, θ on a :

$$z = \rho e^{i\theta}.$$

Le plan z_1 obtenu par l'inversion complexe est :

$$z_1 = \rho_1 e^{i\theta_1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{\rho e^{i\theta}},$$

ou :

$$(12) \quad \ln z_1 = \ln \rho_1 + \theta_1 i = -\ln \rho - \theta i,$$

d'où :

$$\ln \rho_1 = -\ln \rho;$$

$$(13) \quad \rho \rho_1 = 1;$$

$$(14) \quad \theta_1 = -\theta.$$

D'après les équations ci-dessus, on voit que pour $\rho = 1$ on a $\rho_1 = 1$, donc que le point placé sur le cercle $\rho = 1$ reste à cette distance après inversion.

Rappelons les résultats que les formules précédentes confirment, à savoir que : *l'inversion complexe est équivalente au produit d'une inversion géométrique suivie d'une symétrie, par rapport à l'axe réel.*

Voici l'intérêt de cette remarque si simple. Il est commode de construire l'image de la frontière dans le plan $u + iv$; du reste, tous les techniciens utilisent ce plan ⁽¹⁾. Une inversion géométrique de ce plan par rapport à l'origine, et de puissance 1, donne directement le plan de l'hodographe inverse sur lequel la relation $f = f(\zeta)$ applique conformément le domaine de l'écoulement.

A une symétrie près, toutes les droites qui passent par le centre d'inversion sont conservées dans l'inversion. La paroi amont, la paroi aval et le fond imperméable sont représentés dans le plan de l'hodographe par de telles droites, car la vitesse a sur ces limites une direction déterminée. La transformation de l'hodographe inverse combinée avec la transformation de Schwartz-Christoffel permet de résoudre une partie considérable des problèmes de l'écoulement en milieu poreux à surface libre.

De l'hodographe inverse on déduit z par :

$$(15) \quad z = \int \zeta df + C.$$

Si, dans le plan de l'hodographe inverse, on connaît le champ, donc, si l'on connaît f en fonction de ζ , ou l'inverse t en fonction de f , on peut porter cette dernière valeur dans l'équation $z = \int \zeta df + C$. Après intégration, on obtient la solution du problème sous la forme dite « réciproque », car on a x et y exprimés sous la forme :

$$(16) \quad \begin{cases} x = x(\varphi, \psi) \\ y = y(\varphi, \psi). \end{cases}$$

5. — TRANSFORMATION DE LEVI-CIVITA

La transformation de l'hodographe peut être exprimée sous une forme un peu différente :

$$(17) \quad \frac{df}{dz} = e^{-\omega i},$$

où ω , variable complexe de Levi-Civita :

$$(18) \quad \omega = \theta + i\tau,$$

d'où :

$$(19) \quad \frac{df}{dz} = e^{-\theta i}, \quad e^\tau = e^\tau (\cos \theta - i \sin \theta).$$

On voit immédiatement que :

$$(20) \quad e^\tau = |\vec{V}| \quad (\text{module de la vitesse});$$

$$(21) \quad \theta = \arctg \frac{v}{u} \quad (\text{argument}).$$

(1) Rappelons que dans l'exemple de la transformation hodographe, on a représenté sur la figure le champ $u + iv$, sans faire la symétrie par rapport à l'axe réel Ou .

Moyennant les variables de Levi-Civita, la condition à la surface libre peut s'écrire :

$$(22) \quad e^{\tau} = -K \sin \theta.$$

6. — ÉCOULEMENT POSSÉDANT DES LIGNES DE Suintement

Nous ferons quelques remarques sur les écoulements ayant des lignes de suintement. La ligne de suintement n'est ni une ligne équipotentielle, puisque $\varphi = -Ky$, ni une ligne de courant, puisqu'elle est traversée par un certain débit; donc, pour un écoulement comportant une ligne de suintement, nous ne connaissons pas l'image de z dans le plan f . Si l'écoulement comporte en même temps la surface libre, le problème ne peut pas être résolu par les seules transformations conformes, car, dans ce cas, on ne connaît pas non plus la frontière correspondante de l'écoulement dans le plan z .

B. — POINTS SINGULIERS

INTRODUCTION

Nous nous bornerons à l'étude des domaines poreux limités soit par des droites, soit par la surface libre. Nous nous proposons d'étudier les singularités de la fonction f au point où se raccordent deux éléments de frontières de nature différente (par exemple, une surface libre et une surface rectiligne de suintement). Ce problème est très important pour le technicien car les solutions que l'on calcule par des procédés d'approximation, tant théoriques qu'expérimentaux, ne peuvent pas être déterminées avec une bonne approximation au voisinage de singularités, dont il est important de fixer *a priori* la nature.

Dans son remarquable article « Seepage through dams », A. CASAGRANDE⁽¹⁾ donne une liste des différents cas de raccordement de la surface libre aux différentes limites, en se bornant au premier degré d'approximation, c'est-à-dire au calcul de la pente de la tangente à la surface libre, au point de jonction. La seule connaissance de cette pente est insuffisante, surtout si la courbure à la surface libre, au voisinage du point singulier étudié, est infinie. D'où l'intérêt d'une étude plus précise de ces points qui doit nous permettre de déterminer les équations approchées de la surface libre, au voisinage des points singuliers. Nous diviserons l'étude des points singuliers en trois parties :

1^o points singuliers se trouvant au raccordement de deux éléments de frontière, dont l'un n'est pas ligne de suintement;

2^o points singuliers se trouvant au raccordement des lignes de suintement et des parois rectilignes;

3^o point de suintement (raccordement de la surface libre et de la ligne de suintement).

Contrairement aux deux premiers cas qui peuvent se traiter uniquement par des transformations conformes, le troisième exige une analyse plus difficile.

Il est bon de se rappeler que les raisonnements ci-après ne valent que pour le schéma de la figure 8. Mais il serait aisé de les adapter au cas d'autres configurations.

(1) CASAGRANDE. — *New England water works Association*, June 1937, p. 303.

1. — POINT SINGULIER SANS LIGNE DE SUINTEMENT

A. — **Raccordement de la paroi amont et du fond imperméable** (point M de la *fig. 8*).

L'équation II A 4 nous donne immédiatement l'expression paramétrique du champ au voisinage du point B ⁽¹⁾, le paramètre étant la variable complexe $t = m + ni$ du demi-plan :

$$(1) \quad \begin{cases} z = C_1 t^\alpha + C_2, \\ f = C_3 t^{1/2} + C_4. \end{cases}$$

Nous supposons que le point B soit défini dans le plan z par $z = 0$, donc $x = 0$, $y = 0$, et dans le plan f par $f = 0$, donc $\varphi = 0$, $\psi = 0$. Alors, les équations (1) deviennent :

$$(2) \quad \begin{cases} z = C_1 t^\alpha \\ f = C_3 t^{1/2} \dots \end{cases}$$

Si $\alpha = \frac{1}{2}$, le point B cesse d'être un point singulier.

B. — **Raccordement de la paroi aval et du fond imperméable** (Point R de la *fig. 8*).

L'expression approximative du champ est donnée par les mêmes équations que précédemment, à condition de remplacer α par $1 - \beta$.

C. — **Raccordement de la surface libre avec la paroi amont** ⁽²⁾ (point N de la *fig. 8*).

Si la paroi amont est oblique, deux cas sont possibles :

C_1 : la pente de la surface libre décroît en valeur absolue sur une partie de la surface libre, à partir du point B (pour l'écoulement représenté sur la *fig. 8*, nous supposons l'existence d'un point d'inflexion).

C_2 : la pente de la surface libre croît en valeur absolue à partir du point B.

Dans le cas où la paroi amont est verticale, la pente de la surface libre croît nécessairement (en valeur absolue); mais ce cas doit être étudié à part, donc :

C_3 : paroi amont verticale.

1. — PAROI AMONT INCLINÉE (cas C_1 et C_2).

Rappelons qu'en utilisant la fonction ω de Levi-Civita, précédemment introduite, on a pu écrire, en chaque point de la surface libre :

$$(3) \quad |\vec{V}| = e^\tau = -K \sin \theta.$$

Il s'ensuit que le long de cette ligne : $-\pi \leq \theta \leq 0$. Mais, dans le voisinage de

(1) Dans ce qui suit, le point en question est désigné par B. La notation C_i désigne des constantes. Nous n'écrirons que la partie principale des singularités à étudier.

(2) Pour une discussion plus générale et plus complète, cf. J. Kravtchenko, G. Sauvage de Saint-Marc, M. Boreli; "Sur les singularités des écoulements plans et permanents des nappes souterraines pesantes", *La Houille Blanche*, 1955, pp. 47-62.

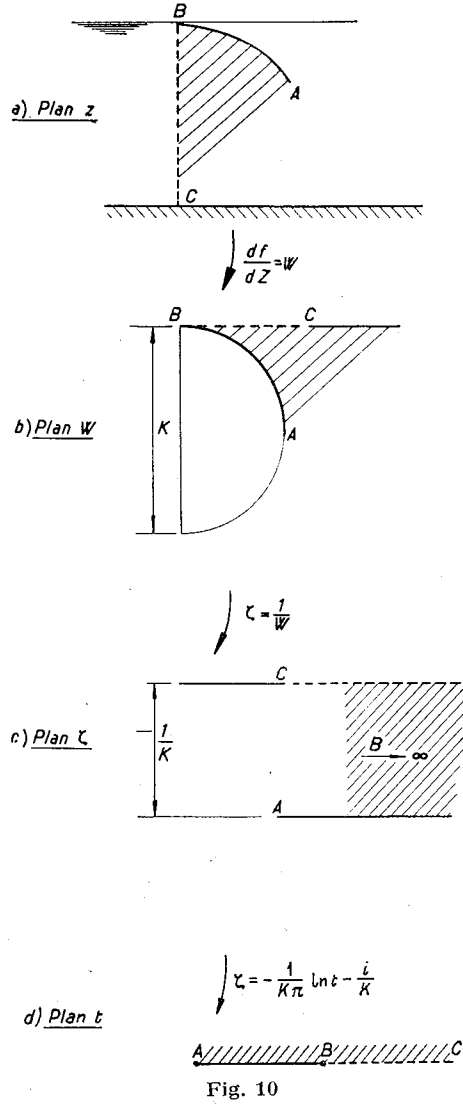
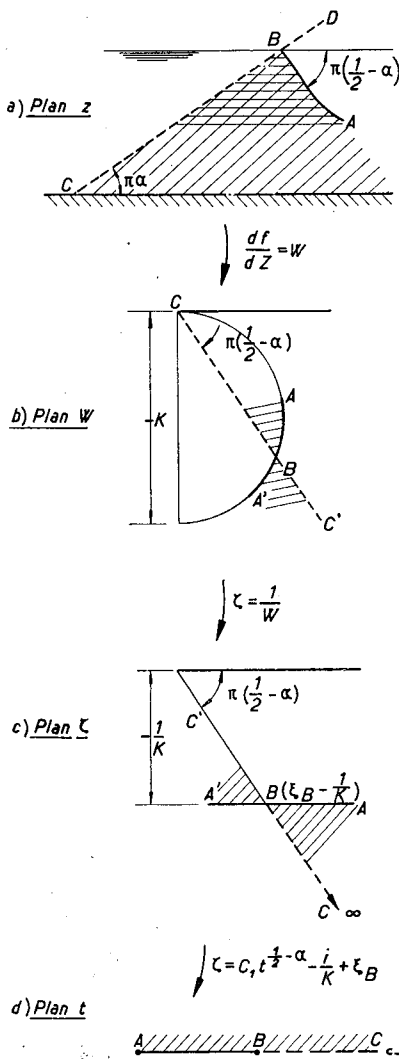
la singularité, on a aussi : $\theta > -\frac{\pi}{2}$. Cela montre que τ et $|\theta|$, c'est-à-dire V et $|\theta|$ varient dans le même sens le long de la surface libre ; sur celle-ci $|\vec{V}|$ décroît (ou croît) dans le cas C_1 (ou C_2).

Nous obtiendrons maintenant facilement les équations approchées de la surface libre en appliquant la méthode indiquée au chapitre précédent. Utilisons les transformations conformes successives :

a) Transformation du plan z en plan de l'hodographe :

$$(4) \quad \frac{df}{dz} = W.$$

Dans le cas C_1 , l'image de la ligne libre dans le plan W , au voisinage du point B , est représentée par ABC (fig. 9) et dans le cas C_2 par $A'B'C'$.



b) L'inversion par rapport au point C :

$$(5) \quad \zeta = \frac{1}{W}.$$

La surface libre est représentée dans le plan par une de la droite :

$$(6) \quad \eta = -\frac{1}{K};$$

c) La correspondance $\zeta = \zeta(t)$ est donnée par l'équation II A 4 qui, dans les deux cas C_1 et C_2 est de la forme ⁽¹⁾ :

$$(7) \quad \zeta = C_1 t^{\frac{1}{2}-\alpha} + C_2.$$

Étant donné que pour $t = 0$, $\zeta = \xi_B - \frac{i}{K}$, il en résulte :

$$(8) \quad \zeta = C_1 t^{\frac{1}{2}-\alpha} + \xi_B - \frac{i}{K};$$

d) La correspondance entre les plans t et f s'écrit ici :

$$(9) \quad f = t^2; \quad t = f^{\frac{1}{2}}.$$

De l'équation II A 15 : $z = \int \zeta df + C$, on tire, en tenant compte de (8) et de (9):

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} z = C_3 f^{2(1-\alpha)} - \frac{i}{K} f + \xi_B f + C_4, \\ C_3 = \frac{C_1}{2(1-\alpha)}. \end{array} \right.$$

Comme nous avons supposé que le point B et son image dans f sont donnés par : $z = 0$, $f = 0$ ⁽²⁾, cela entraîne : $C_4 = 0$. Mais, la surface libre étant une ligne de courant, nous avons son équation paramétrique approchée sous forme complexe :

$$(11) \quad z = x + iy = C_3 \varphi^{2(1-\alpha)} - \frac{i}{K} \varphi + \xi_B \varphi,$$

d'où, C_3 étant réel :

$$(12) \quad y = -\frac{\varphi}{K}; \quad \varphi = -Ky$$

L'équation cartésienne approchée de la surface libre est donc :

$$(13) \quad x = C_3 (-Ky)^{2(1-\alpha)} - \xi_B Ky.$$

ou :

$$(14) \quad \xi_B = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pi}{K}.$$

(1) Dans le cas C_1 (C_2) le coefficient de $t^{\frac{1}{2}-\alpha}$ dans (7) est positif (négatif); il est toujours réel.

(2) Signalons que cette hypothèse sera toujours admise.

On voit donc que la ligne libre est une courbe à tangente continue dans le voisinage de B. Si $\alpha > 1/2$, la tangente en B est horizontale; cette tangente est normale à la paroi amont si $\alpha < 1/2$.

2. — PAROI AMONT VERTICALE (cas C_3).

Le cas où la paroi amont est verticale diffère des cas précédents quant à la transformation :

$$(15) \quad \zeta = \zeta(t),$$

qui s'écrit ici :

$$(16) \quad \zeta = C_1 \ln t + C_2.$$

Étant donné que, dans le plan de l'hodographe inverse, la surface libre est portée par la droite $\eta = -\frac{1}{K}$, nous aurons :

$$(17) \quad \zeta = -\frac{1}{K\pi} \ln t - \frac{i}{K}.$$

Les autres transformations étant les mêmes que pour les cas C_1 et C_2 ($W = \frac{df}{dz}$, $\zeta = \frac{1}{W}$), nous obtiendrons aisément :

$$(18) \quad x = \frac{2}{\pi} \left[y \ln (-Ky) - C_3 y \right].$$

Il est facile d'en déduire que, alors que la tangente en B de la ligne libre est horizontale, la courbure devient infinie comme $\frac{1}{y}$. Cette circonstance rend très délicat le tracé de la surface libre dans le voisinage de la singularité, où la tangente varie très vite.

D. — Raccordement de la surface libre et de la paroi imperméable (fig. 11 et 12).

Nous nous proposons de montrer que θ_B = angle entre la tangente de la surface libre et l'axe Ox , au point B, ne peut avoir que deux valeurs :

- 1° $\theta_B = 0$: la surface libre admet une tangente horizontale;
- 2° $\theta_B = \pi(\alpha - 1)$: la paroi imperméable est tangente à la surface libre.

Étant donné que θ est limité par $-\frac{\pi}{2} < \theta < 0$, la deuxième éventualité ne peut être réalisable que si $\alpha > \frac{1}{2}$.

Prenons $\alpha > \frac{1}{2}$ et supposons maintenant que la surface libre arrive au point B avec un angle quelconque θ_B . L'angle surface-paroi est égal à :

$$\vartheta = \alpha\pi - \theta_B < \pi.$$

On sait que la vitesse en tout point anguleux, d'une ligne de courant dont l'angle est inférieur à π , est nulle. Si donc $\vartheta \neq 0$, on doit avoir $V_B = 0$. Mais, d'après l'équation I B 2, on a, le long de la surface libre :

$$(19) \quad V = -K \sin \theta.$$

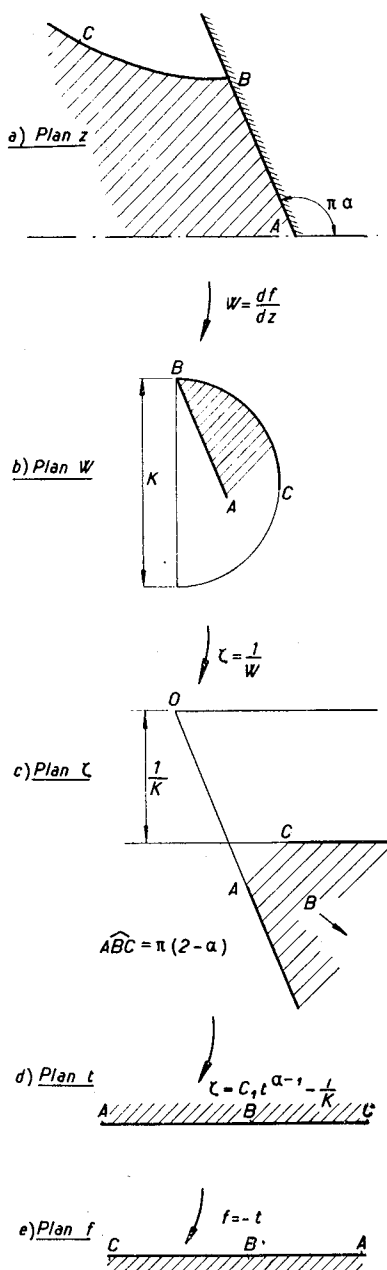


Fig. 11

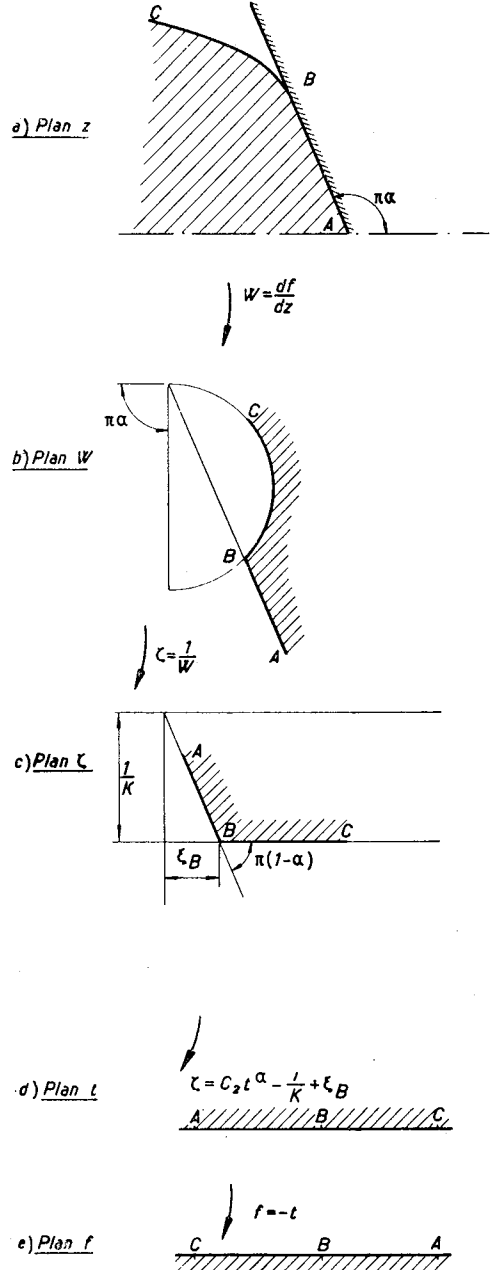


Fig. 12

Si $V_B = 0$, θ_B doit donc être également nul et la surface libre doit avoir une tangente horizontale en son extrémité. Ce fait doit avoir lieu chaque fois que ϑ est différent de π . Il reste à examiner l'éventualité où la paroi imperméable est tangente à la surface libre au point B (1). Nous étudierons les deux hypothèses.

(1) Remarque. — Dans II C 1°, nous montrerons que ce cas arrive tout à fait exceptionnellement.

1. — TANGENTE HORIZONTALE (*fig. 11*).

La transformation hodographe inverse-demi-plan nous donne, C_1 étant réel :

$$(20) \quad \zeta = C_1 t^{\alpha-1} - \frac{i}{K}.$$

La ligne CBA est une ligne de courant. Dans le plan t les points images se succèdent dans un sens opposé au sens de l'écoulement. Il faut ainsi prendre $t = -f$. Nous avons :

$$(21) \quad z = \int \zeta df = -\frac{C_1}{\alpha} (-f)^{\alpha} - \frac{i}{K} f.$$

Pour la surface libre :

$$f = \varphi.$$

Par conséquent, le long de celle-ci :

$$(22) \quad x + iy = -\frac{C_1}{\alpha} (-\varphi)^{\alpha} - \frac{i}{K} \varphi,$$

d'où :

$$(23) \quad x = -\frac{C_1}{\alpha} (Ky)^{\alpha}.$$

2. — PAROI IMPERMÉABLE TANGENTE A LA SURFACE LIBRE (*fig. 12*).

La transformation hodographe inverse-demi-plan nous donne :

$$(24) \quad \zeta = C_2 t^{\alpha} - \frac{i}{K} + \xi_B.$$

Les parties principales des autres transformations demeurent les mêmes; nous trouvons facilement :

$$(25) \quad x = -\frac{C_2}{\alpha+1} (yK)^{\alpha+1} - \xi_B yK.$$

Le cas $\alpha = \frac{1}{2}$ n'est pas un cas spécial.

2. — POINT PLACÉ AU RACCORDEMENT DES LIGNES DE Suintement
ET DES LIMITES RECTILIGNES

Avant de passer au calcul, il nous semble opportun de démontrer l'existence, dans certains cas, d'une ligne de suintement. En effet, elle doit être admise du fait que la surface libre, si $\alpha \geq \frac{\pi}{2}$ (*fig. 13 et 14*), peut ne pas atteindre la cote du niveau aval.

Supposons d'abord que la paroi aval soit inclinée vers l'amont. Les lignes de courant, dans la partie immergée, doivent aboutir perpendiculairement à RP. Cette direction est inadmissible pour la surface libre, car le long d'elle :

$$0 > \theta > -\frac{\pi}{2}.$$

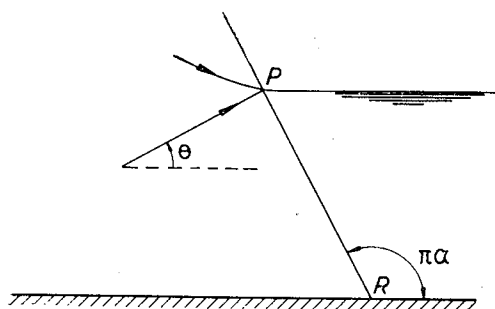


Fig. 13

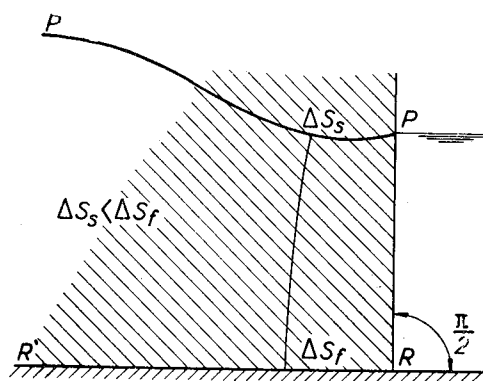


Fig. 14

D'autre part, il est impossible de supposer que la surface libre aboutisse en P en suivant toute autre direction, car il faudrait alors supposer que la vitesse est infinie en P (1). Or la valeur maximum des vitesses sur la surface libre est K (cf. le plan W); cette hypothèse est ainsi incompatible avec la réalité. La seule possibilité est alors que la surface libre aboutisse en un point de la paroi aval, point dont la cote doit être supérieure à celle du point P.

Signalons que ces conclusions s'étendent aussi au cas $\alpha = \frac{1}{2}$. On montre d'abord que si la ligne libre aboutit au point P, la vitesse doit y être nulle, la ligne libre tournant sa concavité vers le haut, dans le voisinage de P. On démontre, d'autre part, en étudiant la disposition des lignes équipotentielles au voisinage de PR, qui sont orthogonales à P'P et RR', que la vitesse doit croître de R vers P, ce qui est incompatible avec le fait que la vitesse est nulle en P.

Si l'angle $\pi\alpha < \frac{\pi}{2}$, les lignes de suintement peuvent disparaître moyennant certaines conditions.

Sur la ligne de suintement peuvent exister trois types de points singuliers (fig. 8) :

1° point P;

2° point R (si le niveau aval est nul);

3° point O de contact de la surface libre et de la ligne de suintement. Ce dernier point est désigné comme « point de suintement ». Les deux premiers cas peuvent être traités aisément, étant donné que l'on connaît les domaines de l'écoulement dans le plan z. Ce n'est pas le cas avec le point de suintement qui doit être étudié à part.

(1) Remarque. — M. MUSKAT. — *The flow of homogeneous fluids through porous media*, Michigan, 1946, p. 289.

A. — **Point commun au fond imperméable et à la paroi aval, cette dernière étant une ligne de suintement** (fig. 15).

La correspondance entre le plan z et le demi-plan est donnée par :

$$(26) \quad \frac{dz}{dt} = C_1 t^{\alpha-1} (1 + \dots).$$

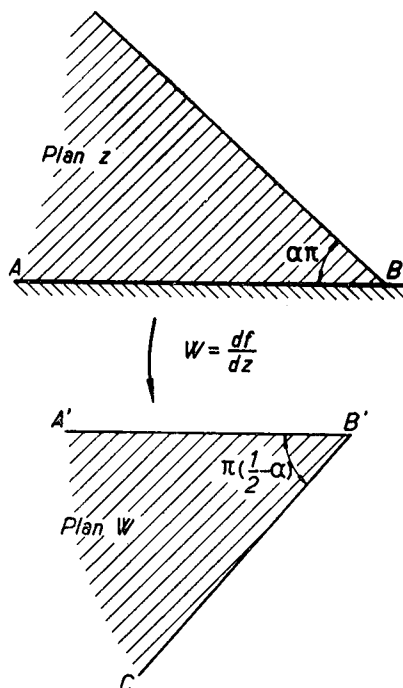


Fig. 15

Le symbole ... désigne une série entière en t , nulle avec t . Ensuite, étant donné que le long de CB la composante de la vitesse suivant CB reste constante, le triangle ABC est représenté, sur le plan de l'hodographe, par un triangle A'B'C'. Il est alors facile de transformer le domaine A'B'C' sur le demi-plan :

$$(27) \quad \frac{df}{dz} = C_2 t^{\frac{1}{2} - \alpha} (1 + \dots) + K \operatorname{tg} \pi \alpha.$$

Les équations (26) et (27) nous donnent :

$$(28) \quad \frac{df}{dt} = C_1 C_2 t^{\frac{1}{2}} (1 + \dots) + C_1 K \operatorname{tg} \pi \alpha t^{\alpha-1}.$$

En intégrant les équations (26) et (28), on obtient les équations paramétriques de z et f , donc l'aspect approximatif du champ au voisinage du point B :

$$(29) \quad \begin{cases} z = \frac{C_1}{\alpha} t^{\alpha} (1 + \dots), \\ f = 2C_1 C_2 t^{\frac{1}{2}} (1 + \dots) + \frac{C_1 K}{\alpha} \operatorname{tg} \pi \alpha \cdot t^{\alpha}. \end{cases}$$

B. — **Point placé sur la paroi aval. Raccordement de la ligne de suintement et de la partie noyée** (fig. 16).

La paroi aval étant une ligne droite, nous avons immédiatement :

$$(30) \quad \frac{dz}{dt} = a_0 + a_1 t \dots,$$

a_0, a_1 étant des constantes complexes convenables.

La fonction $\frac{df}{dz}$ peut être trouvée en utilisant l'hodographe. Le point B étant à l'infini (fig. 16), nous avons :

$$(31) \quad \frac{df}{dz} = C_0 \ln t (1 + \dots).$$

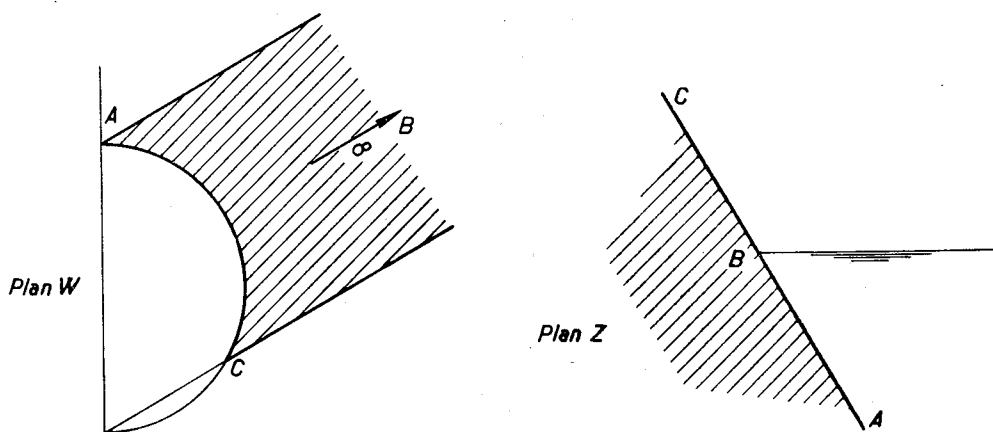


Fig. 15

Arrêtons-nous aux premiers termes des équations (30) et (31). Il est alors facile de trouver $\frac{df}{dt}$ ainsi que l'expression approximative du champ au voisinage du point B.

Nous avons :

$$(32) \quad \begin{cases} f = a_0 C_0 t (\ln t - t), \\ z = a_0 t. \end{cases}$$

C. — Point de suintement. Raccordement de la surface libre et de la ligne de suintement.

Nous avons signalé dans le chapitre précédent l'impossibilité de résoudre ce problème uniquement par des transformations conformes, impossibilité qui résulte du fait que, dans ce cas, on ne connaît *a priori*, la forme du domaine ni dans le plan $z = x + iy$ ni dans le plan $f = \varphi + i\psi$.

La méthode que nous allons utiliser est une variante de celle indiquée dans le grand ouvrage de POLOUBARINOVA-KOTCHINA⁽¹⁾. Cet auteur donne une analyse des singularités en utilisant un appareil relativement lourd, qui est celui de la théorie de Fuchs des équations différentielles régulières du second ordre. KRAVTCHENKO, SAUVAGE DE SAINT MARC⁽²⁾ et moi-même avons construit un exposé élémentaire de la théorie dans le cas simple où l'équation caractéristique de Fuchs n'a que des racines réelles. Du point de vue de la technique, cette hypothèse n'est pas restrictive puisqu'elle s'applique à tous les cas pratiquement possibles. Bien que notre apport à cette théorie soit peu original, il nous a paru opportun de présenter, dans une prochaine publication, notre

(1) POLOUBARINOVA-KOTCHINA. — *Théorie des mouvements des eaux souterraines*, Moscou, 1952, édition d'État.

(2) Cf. le mémoire cité p. 26.

variante qui nous paraît très adaptée aux besoins des techniciens. Dans ce qui suit, nous exposons la méthode de calcul que nous avons utilisée et nous supposons connus les résultats de la théorie que nous allons seulement résumer. Représentons le domaine du liquide en mouvement sur le demi-plan supérieur $n > 0$ de la variable complexe $t = m + ni$.

Nous posons maintenant :

$$(33) \quad \left\{ \begin{array}{l} F = \frac{df}{dt}, \\ Z = \frac{dz}{dt}. \end{array} \right.$$

Soient $\overline{AB}$ et $\overline{BC}$ les images dans le plan t des éléments de frontières de natures différentes (fig. 17).

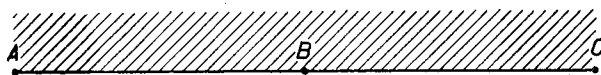


Fig. 17

On appellera a, b, c , les affixes réels des points A, B, C. D'après les hypothèses faites, chacun des intervalles $n = 0$

$$a < m < b; \quad b < m < c$$

est, ou bien l'image d'un segment rectiligne de la frontière du plan du mouvement, ou bien l'image de la surface libre.

Dans le second cas, on aura, le long de ce segment, les deux conditions simultanées :

$$(34) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi + Ky = C^{te}, \\ \psi = C^{te}. \end{array} \right.$$

Sur l'autre segment on doit avoir aussi des relations nécessairement linéaires entre φ, ψ, x, y ; par exemple, pour la ligne de suintement :

$$(35) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi + Ky = 0, \\ a_1x + b_1y = C^{te}. \end{array} \right.$$

Il en résulte que, dans chaque cas, nous pourrions représenter les deux relations entre les quantités réelles φ, ψ, x, y (à coefficients réels et constants) sous forme complexe :

$$(36) \quad \mathcal{J}_m(rz + sf) = C^{te} \text{ (réel),}$$

où r et s sont des nombres complexes convenables, le symbole $\mathcal{J}_m f$ désignant la partie imaginaire de f .

Il s'ensuit qu'en dérivant par rapport à t , on aura, le long de chacun de ces segments, deux relations du type :

$$(37) \quad \mathcal{J}_m(rZ + sF) = 0.$$

Exemple. — Ligne de suintement et surface libre (fig. 18).

En résumé, nous aurons, le long du segment AB :

$$n = 0, \quad a < m < b$$

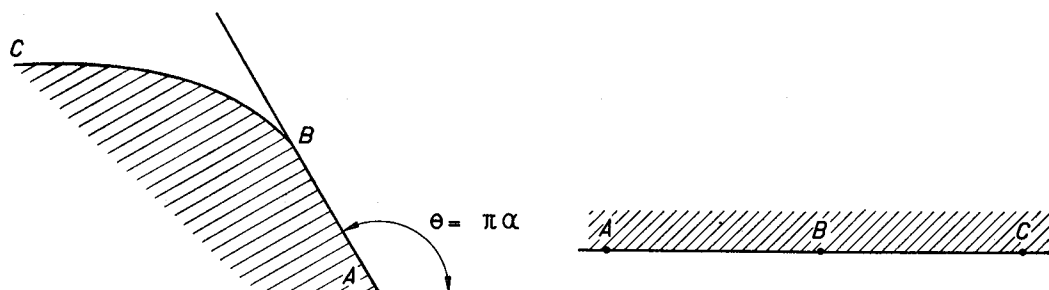


Fig. 18

et sur BC :

$$n = 0, \quad b < m < c,$$

les deux conditions simultanées $\mathcal{J}_m (iF + KZ) = 0$; $\mathcal{J}_m (Z^{-i\pi\alpha}) = 0$ et $\mathcal{J}_m (iF + KZ) = 0$ et $\mathcal{J}_m (F) = 0$ respectivement.

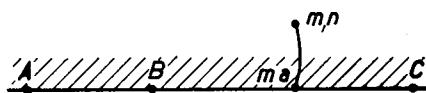


Fig. 19

Pour des raisons physiques, on peut supposer, pour les fonctions Z et F , les propriétés analytiques suivantes :

— si le point t tend vers un point m_0 à l'intérieur du segment BC (pour fixer les idées), suivant un chemin intérieur au demi-plan (cf. fig. 19),

$$Z(t) \quad \text{et} \quad F(t)$$

tendent de façon continue vers des limites déterminées $Z(m_0)$ et $F(m_0)$. Il en résulte immédiatement, d'après le principe de symétrie de Schwartz, que les fonctions :

$$(38) \quad \begin{cases} P(t) = r_2 Z + s_2 F, \\ Q(t) = p_2 Z + q_2 F \end{cases}$$

sont analytiques, holomorphes à l'intérieur du segment BC. De plus, il en résultera que les fonctions F et Z possèdent la même propriété sur le même intervalle (sauf les extrémités), si :

$$\begin{vmatrix} r_2 & s_2 \\ p_2 & q_2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

condition toujours remplie.

Nous nous proposons d'étudier maintenant la nature de la singularité au point $t = b$. Nous rappelons l'essentiel du raisonnement que nous avons indiqué :

1° il est clair qu'en posant :

$$(39) \quad W = \frac{F}{Z}$$

on a, par exemple, le long de BC :

$$(40) \quad J_m \left(\frac{r_2 + s_2 W}{p_2 + q_2 W} \right) = 0.$$

Il s'ensuit que la transformation homographique :

$$(41) \quad W_1 = \frac{r_2 + s_2 W}{p_2 + q_2 W}$$

fait correspondre à BC un segment de l'axe réel du plan W_1 lorsque le point t décrit le segment BC. Par conséquent, le point W décrit un arc de cercle, ou éventuellement, un segment de droite.

Dans le cas général, les coefficients r, s, p, q sont quelconques et les deux arcs de cercle décrits par le point W , lorsque t parcourt ABC, n'ont pas de points communs.

Mais, dans le cas dont nous nous occupons, W n'est autre que la vitesse complexe. On sait alors que l'image de l'axe réel du plan t est une ligne continue, formée d'arcs de cercles et de segments de droites;

2° on peut alors démontrer que les fonctions F et Z présentent au point B la singularité du type :

$$(42) \quad \begin{cases} Z = C_1 U_1 + C_2 U_2, \\ F = C_3 U_1 + C_4 U_2; \end{cases}$$

$$(43) \quad C_j = R_j e^{i\varphi_j \pi} \quad (j = 1, 2, 3, 4),$$

où :

$$(44) \quad \begin{cases} U_1 = (t - b)^{\lambda_1} u_1(t - b), \\ U_2 = (t - b)^{\lambda_2} u_2(t - b). \end{cases}$$

Les exposants λ_1 et λ_2 sont des constantes généralement complexes si les r, p, q, s sont quelconques. Les fonctions u_1 et u_2 sont des fonctions holomorphes, non nulles pour $t = b$. Rien ne nous empêche de supposer que l'ensemble des deux fonctions de u_1 et u_2 est réel pour t réel. On peut même prendre :

$$u_1(b) = u_2(b) = 1;$$

3° nous rappelons que, suivant les hypothèses du 1°, les exposants caractéristiques sont nécessairement réels; cette propriété est la conséquence de la continuité de W le long de ABC;

4° de même, il est possible de démontrer que les fonctions :

$$(45) \quad \begin{cases} Z_1 = C_1 U_1 & \text{ou} & C_2 U_2, \\ F_1 = C_3 U_1 & \text{ou} & C_4 U_2, \end{cases}$$

satisfont l'équation (37), ce qui rend très aisée la détermination des exposants λ_1 et λ_2 comme nous le verrons dans l'exemple qui suit;

5° le cas $\lambda_1 = \lambda_2$ à un entier près doit être examiné à part. Alors :

$$U_2 = (t - b)^{\lambda_1} u_2(t - b) \log(t - b)$$

POINT DE SUINTEMENT.

Les équations caractéristiques sont rappelées dans la *figure 20*.

Fig. 20

Si l'affixe du point B dans le demi-plan est nul, les équations (43), (44), (45) deviennent :

$$(46) \quad \begin{cases} Z_1 = C_1 U_1, & F_1 = C_3 U_1, \\ U_1 = t^\lambda u_1(t), \\ C_1 = R_1 e^{\varphi_1 i \pi} & C_3 = R_3 e^{\varphi_3 i \pi} \end{cases}$$

Les équations (46), avec les équations caractéristiques (*fig. 20*), nous permettent de trouver l'exposant λ ainsi que des valeurs de φ_1 et φ_3 :

a) l'équation $J_m(Z_1 e^{-\pi i \alpha}) = 0$, compte tenu du fait que, pour le segment AB, $t = e^{i\pi} |t|$ devient :

$$J_m(R_1 e^{i\pi\varphi_1} \cdot e^{i\pi\lambda} \cdot e^{-\pi i \alpha}) = 0.$$

Donc :

$$(47) \quad R_1 \sin. \pi(-\alpha + \varphi_1 + \lambda) = 0;$$

b) l'équation $J_m(iF + KZ) = 0$, avec $t = e^{i\pi} |t|$ peut s'écrire :

$$J_m\left(e^{\frac{\pi}{2}} \cdot R_3 e^{\pi\varphi_3 i} \cdot e^{\pi i \lambda} + KR_1 e^{\pi\varphi_1 i} \cdot e^{\pi i \lambda}\right) = 0.$$

D'où :

$$(48) \quad R_3 \sin \pi \left(\frac{1}{2} + \varphi_3 + \lambda\right) + KR_1 \sin \pi (\varphi_1 + \lambda) = 0;$$

c) l'équation $J_m(F) = 0$, avec $t = |t|$, peut s'exprimer :

$$J_m(R_3 e^{\pi\varphi_3 i}) = 0.$$

D'où :

$$(49) \quad R_3 \sin \pi \varphi_3 = 0;$$

d) l'équation $J_m(iF + KZ) = 0$, avec $t = |t|$, nous donne :

$$J_m\left(e^{\frac{\pi}{2}} \cdot R_3 e^{\pi\varphi_3 i} + KR_1 e^{\pi\varphi_1 i}\right) = 0,$$

d'où :

$$(50) \quad R_3 \sin \pi \left(\frac{1}{2} + \varphi_3\right) + R_1 K \sin \pi \varphi_1 = 0.$$

Avant de chercher les exposants, il faut discuter deux éventualités, à savoir si R_1 ou R_3 peuvent être nuls :

1° supposons $R_1 = 0$; les équations (47), (48), (49) et (50) deviennent :

$$(48_a) \quad \sin \pi \left(\frac{1}{2} + \varphi_3 + \lambda \right) = 0;$$

$$(49_a) \quad \sin \pi \varphi_3 = 0;$$

$$(50_a) \quad \sin \pi \left(\frac{1}{2} + \varphi_3 \right) = 0.$$

Les équations (49_a) et (50_a) sont en contradiction, d'où :

$$R_1 \neq 0;$$

2° Supposons maintenant $R_3 = 0$; les équations [(47)... (50)] deviennent :

$$(47_b) \quad \sin \pi (-\alpha + \varphi_1 + \lambda) = 0;$$

$$(48_b) \quad \sin \pi (\varphi_1 + \lambda) = 0;$$

$$(49_b) \quad \sin \pi \varphi_1 = 0.$$

De (47_b) nous avons ⁽¹⁾ :

$$\varphi_1 + \lambda = \alpha.$$

En portant dans l'équation (48_b) nous aurons :

$$\sin \pi \alpha = 0,$$

ce qui exige :

$$\alpha = 0.$$

Par conséquent, la constante R_3 ne peut pas être nulle, sauf pour le cas particulier, pratiquement sans intérêt, où la paroi est horizontale.

Trouvons maintenant les valeurs des inconnues λ , φ_1 et φ_3 .

De (47) et (49) nous tirons :

$$\varphi_3 = 0, \quad \varphi_1 = \alpha - \lambda.$$

Avec de telles conditions, (48) et (50) deviennent :

$$(51) \quad \begin{cases} R_3 \cos \pi \lambda + K R_1 \sin \pi \alpha = 0, \\ R_3 + K R_1 \sin \pi (\alpha - \lambda) = 0; \end{cases}$$

éliminons R_1 et R_3 en formant le déterminant :

$$(52) \quad \begin{vmatrix} \cos \pi \lambda & K \sin \pi \alpha \\ 1 & K \sin \pi (\alpha - \lambda) \end{vmatrix} = 0;$$

$$\cos \pi \lambda \cdot \sin \pi (\alpha - \lambda) - \sin \pi \alpha = 0,$$

(1) Nous négligeons les termes additifs tels que $k\pi$ aux seconds membres, k étant un entier quelconque.

ce qui se réduit à :

$$(53) \quad \sin \pi (\alpha - 2\lambda) = \sin \pi \alpha.$$

L'équation (53) est vérifiée par deux valeurs de λ , conformément à la théorie, car F_1 et Z_1 peuvent être exprimées en fonction, soit de U_1 , soit de U_2 .

Les valeurs des exposants sont :

$$(54) \quad \begin{cases} \lambda_1 = 0 + n_1\pi, \\ \lambda_2 = \alpha - \frac{1}{2} + n_2\pi, \end{cases}$$

où n_1 et n_2 sont des nombres entiers $0, \pm 1, \pm 2, \dots$. On voit donc que λ n'est déterminé, qu'à un entier additif près, ce qui est conforme à la théorie générale. Le choix de la détermination ne peut se faire qu'en tenant compte des conditions physiques; cela peut s'effectuer aisément dans chaque cas particulier (nous pouvons nous reporter, à ce sujet, au cas 1 D, où le raccordement de la surface libre avec la paroi imperméable permet deux angles; dans ce cas, l'exposant de Z peut-être $\alpha - 1$ ou α).

Nous avons donc la solution, comme le montre une discussion un peu longue que nous omettons, sous forme :

$$(55) \quad \begin{cases} Z = C_1 t^{\alpha - \frac{1}{2}} (1 + a t \dots) + C_2 (1 + b t + \dots), \\ F = C_3 t^{\alpha - \frac{1}{2}} (1 + c_1 t \dots) + C_4 (1 + d_1 t \dots). \end{cases}$$

Pour trouver les valeurs des constantes nous utiliserons l'hodographe ⁽¹⁾, et nous effectuerons les mêmes transformations que dans les cas précédents.

Paroi aval inclinée : (fig. 21).

$$\frac{1}{2} < \alpha < 1$$

Faisons d'abord l'inversion par rapport au point D de l'hodographe ⁽¹⁾ :

$$(56) \quad \zeta = \frac{1}{W - K i}.$$

La correspondance : plan ζ , demi-plan est donnée par l'équation :

$$(57) \quad \zeta = - P t^{\alpha - \frac{1}{2}} + \frac{i}{K} - \frac{1}{K} \operatorname{tg} (\alpha \pi),$$

où P est une constante réelle arbitraire.

Les équations (56) et (57) nous donnent :

$$\frac{1}{W - K i} = - P t^{\alpha - \frac{1}{2}} + \frac{i}{K} - \frac{1}{K} \operatorname{tg} (\alpha \pi),$$

(1) *Remarque.* — Dans ce cas, il faut utiliser l'hodographe analytique $W = u - iv$ et effectuer l'inversion complexe. A noter que les formules (43), où l'on a déterminé φ_1 et φ_2 , nous donnent déjà les arguments de C_j . Mais il semble intéressant de reprendre la question à partir de (55).

d'où :

$$(58) \quad W = \frac{df}{dz} = \frac{F}{Z} = \frac{-PKit^{\alpha-\frac{1}{2}} - i \operatorname{tg}(\alpha\pi)}{-Pt^{\alpha-\frac{1}{2}} + \frac{i}{K} - \frac{1}{K} \operatorname{tg}(\alpha\pi)}.$$

Arrêtons-nous aux premiers termes des développements en série des équations (55).
Nous avons :

$$(59) \quad \frac{F}{Z} = \frac{-PKit^{\alpha-\frac{1}{2}} - i \operatorname{tg}(\alpha\pi)}{-Pt^{\alpha-\frac{1}{2}} + \frac{i}{K} - \frac{1}{K} \operatorname{tg}(\alpha\pi)} = \frac{C_3 t^{\alpha-\frac{1}{2}} + C_4}{C_1 t^{\alpha-\frac{1}{2}} + C_2}.$$

Les numérateurs et dénominateurs des deux membres de l'équation (59) sont identiques à un facteur près. On en déduit :

$$(60) \quad \begin{cases} \frac{C_3}{C_1} = Ki, \\ \frac{C_4}{C_2} = \frac{i \operatorname{tg} \alpha\pi}{\frac{1}{K} \operatorname{tg} \alpha\pi - \frac{i}{K}}, \\ \frac{C_4}{C_1} = \frac{i \operatorname{tg}(\alpha\pi)}{P}. \end{cases}$$

Mais on a vu ci-dessus que φ_3 et φ_4 sont nuls ; (46) montre que C_4 et C_3 sont réelles.
De (60) on tire a une constante multiplicative réelle près :

$$(61) \quad \begin{cases} C_1 = -Pi & C_2 = -\frac{1}{K} - \frac{i}{K} \operatorname{tg}(\alpha\pi) \\ C_3 = PK & C_4 = \operatorname{tg}(\alpha\pi) \end{cases}$$

d'où :

$$(62) \quad \begin{cases} F = PKt^{\alpha-\frac{1}{2}} + \operatorname{tg}(\alpha\pi) \\ Z = -PKit^{\alpha-\frac{1}{2}} - \frac{1}{K} - \frac{i}{K} \operatorname{tg}(\alpha\pi) \end{cases}$$

En intégrant nous obtenons l'expression approchée du champ au voisinage du point B :

$$(63) \quad \begin{cases} f = \frac{PK}{\alpha + \frac{1}{2}} t^{\alpha+\frac{1}{2}} + \operatorname{tg}(\alpha\pi) t. \\ z = \frac{-Pi}{\alpha + \frac{1}{2}} t^{\alpha+\frac{1}{2}} - \frac{t}{K} - \frac{i}{K} \operatorname{tg}(\alpha\pi) t. \end{cases}$$

De (63) il résulte que la ligne libre (t réel et > 0) est définie par les équations paramétriques approchées :

$$x = -\frac{t}{K}; \quad y = -\frac{t}{K} \operatorname{tg} \alpha\pi - \frac{P}{\alpha + \frac{1}{2}} t^{\alpha+\frac{1}{2}}, \quad t > 0.$$

Il en résulte que si $\alpha > \frac{1}{2}$, la ligne libre est tangente à la surface de suintement;
si $\alpha < \frac{1}{2}$, la ligne libre a en B une tangente verticale. Dans les deux cas, la ligne libre présente en B une courbure infinie; (59) et (60) montrent que pour $t = 0$, $W = -K \sin \pi \alpha e^{-i\pi \alpha}$ ou $K i$ selon que $\alpha \gtrless \frac{1}{2}$.

Cas $\alpha = \frac{1}{2}$. Paroi verticale.

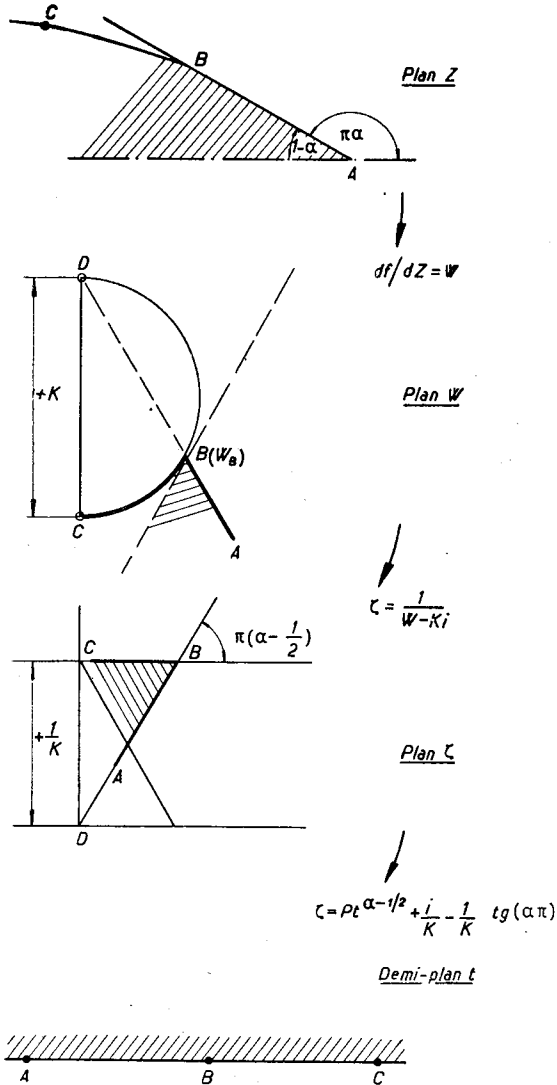


Fig. 21

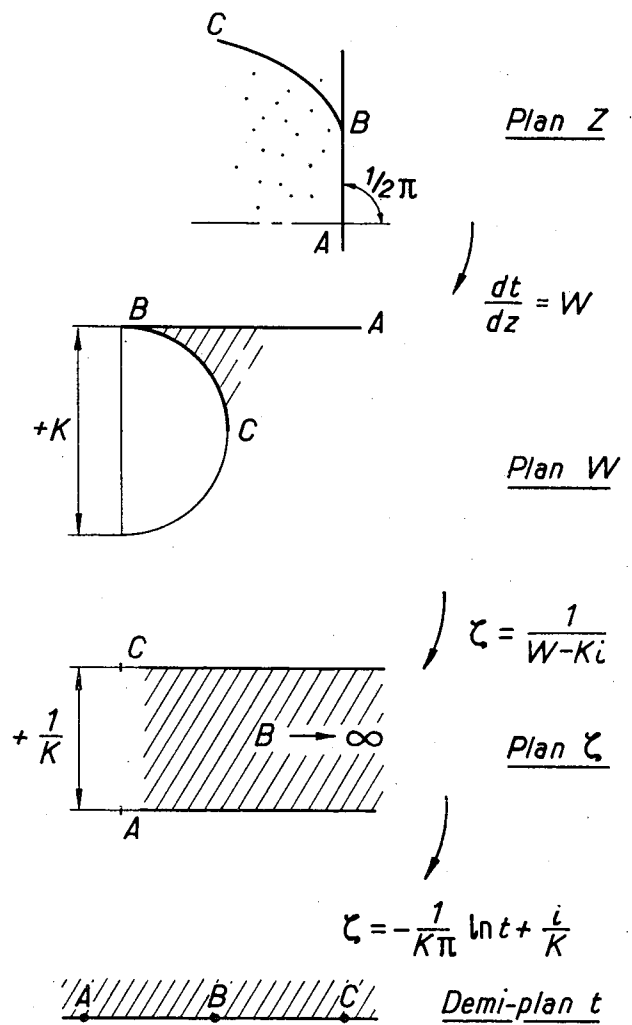


Fig. 22

Dans ce cas, les exposants deviennent :

$$\lambda_1 = 0,$$

$$\lambda_2 = 0.$$

L'équation caractéristique a donc deux racines égales, ce qui transforme les équations (42) et (46) en :

$$(64) \quad \begin{cases} \frac{dz}{dt} = Z = C_1 u_1(t) + C_2 u_2(t) \ln t, \\ \frac{df}{dt} = F = C_3 u_1(t) + C_4 u_2(t) \ln t. \end{cases}$$

Pour trouver les valeurs de $C_1 \dots C_4$, nous procéderons d'une manière analogue à celle indiquée précédemment (*fig. 22*). L'inversion par rapport au point B se traduit par :

$$(65) \quad \frac{1}{W - Ki} = \zeta.$$

La transformation $\zeta \rightarrow t$ nous donne :

$$(66) \quad \zeta = -\frac{1}{K\pi} \ln t + \frac{i}{K},$$

où $J_m \ln t = \pi$ si $t \rightarrow 0$ par des valeurs négatives.

Des équations (65) et (66) on tire :

$$(67) \quad \frac{1}{W - Ki} = -\frac{1}{K\pi} \ln t + \frac{i}{K},$$

d'où :

$$(68) \quad W = \frac{df}{dz} = K \frac{i \ln t}{\ln t - \pi i}.$$

En combinant les équations (64) et (68), nous pourrions écrire :

$$(69) \quad W = \frac{F}{Z} = \frac{K i \ln t}{\ln t - \pi i} = \frac{(C_3 + C_4 \ln t)}{(C_1 + C_2 \ln t)}.$$

Les numérateurs et dénominateurs des deux membres de l'équation (69) étant les mêmes à un facteur Ω près, nous aurons :

$$(70) \quad \begin{cases} C_3 = 0, & C_4 \Omega = Ki, \\ C_1 \Omega = -\pi i, & C_2 \Omega = 1. \end{cases}$$

D'où :

$$(71) \quad \begin{cases} F = \frac{df}{dt} = \frac{Ki}{\Omega} \ln t, \\ Z = -\frac{\pi i}{\Omega} + \frac{1}{\Omega} \ln t. \end{cases}$$

Nous pouvons trouver le facteur Ω car nous savons que la surface libre doit être représentée, sur le plan $t = m + ni$, par :

$$n = 0, \quad 0 < m < \epsilon,$$

et que cette surface, d'autre part, représente une ligne de courant $\psi = 0$. Pour t réel et > 0 , F doit être aussi réel. Nous avons donc :

$$\Omega = iP\pi,$$

où P est une constante arbitraire réelle.

D'où :

$$(72) \quad \begin{cases} F = \frac{df}{dt} = \frac{K}{\pi P} \ln t, \\ Z = \frac{dz}{dt} = -\frac{1}{P} - \frac{i}{\pi P} \ln t. \end{cases}$$

En intégrant, nous obtenons :

$$(73) \quad f = \frac{K}{\pi P} (t \ln t - t) ;$$

$$(74) \quad z = -\frac{t}{P} - \frac{i}{\pi P} (t \ln t - t).$$

La surface libre est représentée par $f = \varphi$.

De l'équation (73) nous tirons :

$$(75) \quad \varphi = \frac{K}{\pi P} (t \ln t - t) ; \quad t \ln t - t = \frac{\pi \varphi P}{K} ;$$

en portant cette expression dans l'équation (74) nous obtenons :

$$(76) \quad z = x + iy = -\frac{t}{P} - i \frac{\varphi}{K},$$

d'où

$$(77) \quad y = -\frac{\varphi}{K},$$

ce qui redonne (34₁).

Les équations paramétriques de la surface libre sont donc :

$$(78) \quad \begin{cases} y = -\frac{1}{\pi P} (t \ln t - t), \\ x = -\frac{t}{P}. \end{cases}$$

On vérifie que :

$$t \rightarrow 0, \quad x \rightarrow 0, \quad y \rightarrow 0, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\ln t}{1} \rightarrow \infty, \quad \frac{d^2y}{dx^2} \rightarrow \infty.$$

Ainsi, la surface libre se raccorde verticalement à la paroi; en pratique, ce fait peut ne pas être aperçu dans beaucoup de cas, car sa courbure est infinie comme $\frac{1}{x}$.

Cet exemple, comme celui du point d'entrée, nous montre combien le seul fait de connaître la pente de la tangente à la paroi est insuffisant et peut nous conduire à des conclusions qui sont inexploitable dans la pratique.

C. — QUELQUES CAS NOUVEAUX DE SOLUTION EXACTE

PREMIER CAS

1. — DRAIN PLACÉ SUR UN FOND IMPERMÉABLE

A. — Analyse du problème.

Le schéma de l'écoulement vers un drain placé sur un fond imperméable est représenté sur la *figure 23*.

Le plan est rapporté au système de coordonnées cartésiennes xOy . Nous supposons que le milieu poreux est isotrope et caractérisé par un certain coefficient de

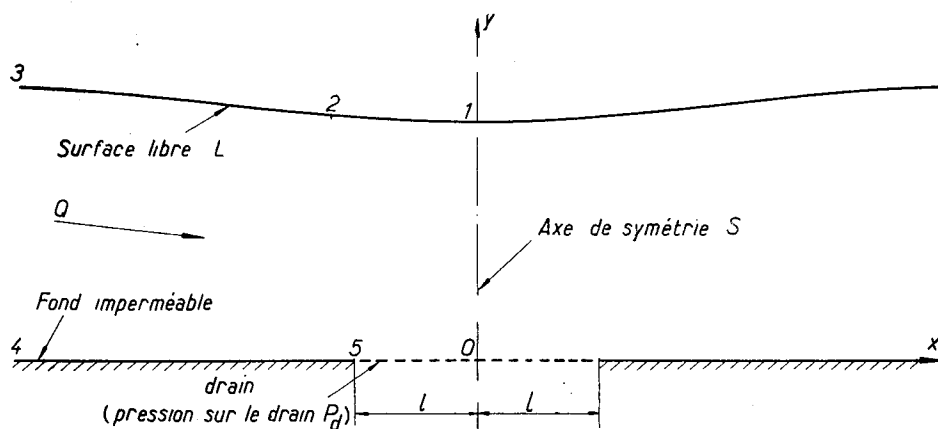


Fig. 23

Darcy K. L'écoulement étant symétrique par rapport à l'axe Oy , il suffit de considérer la moitié de l'écoulement; l'axe de symétrie est une ligne de courant. L'écoulement est limité par :

- 1° un fond imperméable $y = 0$, $-l \geq x > -\infty$ constituant une ligne de courant;
- 2° un drain $y = 0$, $-l \leq x \leq 0$, qui représente une ligne équipotentielle sur laquelle règne une pression constante p_d ;
- 3° l'axe de symétrie $x = 0$, qui est une ligne $\psi = C^{te}$, désigné par S; (1).
- 4° la surface libre L (dont la position est inconnue *a priori*), qui joint le point à l'infini au point 1 de S, de cote inconnue, *a priori*.

(1) *Remarque.* — On peut supposer que l'axe de symétrie est une paroi physiquement imperméable. Il s'agit alors de l'écoulement vers un drain placé à l'amont d'un noyau imperméable (barrage souterrain). De même, le schéma de la *figure 23* peut représenter de façon approximative l'écoulement à travers une digue dont le parement amont est vertical. Cette possibilité d'extension des résultats résulte du fait qu'à une distance suffisamment grande, les lignes équipotentielles du schéma envisagé sont sensiblement verticales.

Quatre paramètres déterminent cet écoulement plan :

1° le débit Q (dimension $L^3 T^{-1} L^{-1} = L^2 T^{-1}$);

2° la hauteur piézométrique sur le drain $\frac{P_d}{\gamma}$ (p_d étant la pression sur le drain et

γ le poids spécifique de l'eau) (dimension de $\frac{P_d}{\gamma} = L$).

3° longueur du drain $2l$ (dimension L);

4° coefficient de Darcy K (dimension LT^{-1}).

Étant donné qu'il s'agit d'un problème mécanique qui dépend de deux grandeurs fondamentales (longueur et temps), nous pouvons former deux nombres sans dimension qui déterminent l'écoulement. Les questions générales qui se posent sont alors :

1° forme de la surface libre (en particulier la cote du point 1), connaissant Q , $2l$, $\frac{P_d}{\gamma}$, K ;

2° vitesse et pression en chaque point de l'écoulement.

Dans la pratique, on s'attache surtout à résoudre la première question et, éventuellement, on détermine la vitesse et la pression en chaque point frontière. Ces valeurs pourront être données en fonction de deux nombres sans dimension déterminés à partir des grandeurs Q , $\frac{P_d}{\gamma}$, K , l et qu'il n'est pas nécessaire d'explicitier immédiatement.

Nous diviserons l'étude de l'écoulement en deux parties :

1° étude générale de la surface libre;

2° solution du problème par les transformations conformes.

B. — Étude générale de la surface libre.

1. — UNIVALENCE DE LA FONCTION $z(f)$ (1).

Dans le cas où une paroi n'est pas fixée, il est possible, en principe, que la solution indéterminée du problème donne des solutions physiquement inacceptables. C'est

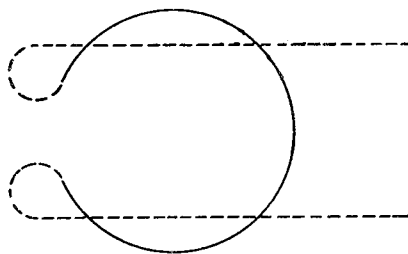


Fig. 24

ainsi que dans le cas des sillages, Marcel BRILLOUIN a pu construire un exemple où (fig. 24) les lignes libres recoupaient les parois solides. Nous ignorons si de tels paradoxes se présentent dans la théorie qui nous occupe. Nous nous proposons ici d'écarter cette

(1) Cette analyse est due à R. GERBER, qui m'en a fait part de vive voix.

éventualité et de montrer que la fonction $z = z(f)$ est univalente (z plan du mouvement, f plan de potentiel complexe). En effet, il s'agit d'écarter l'éventualité de la figure 25.

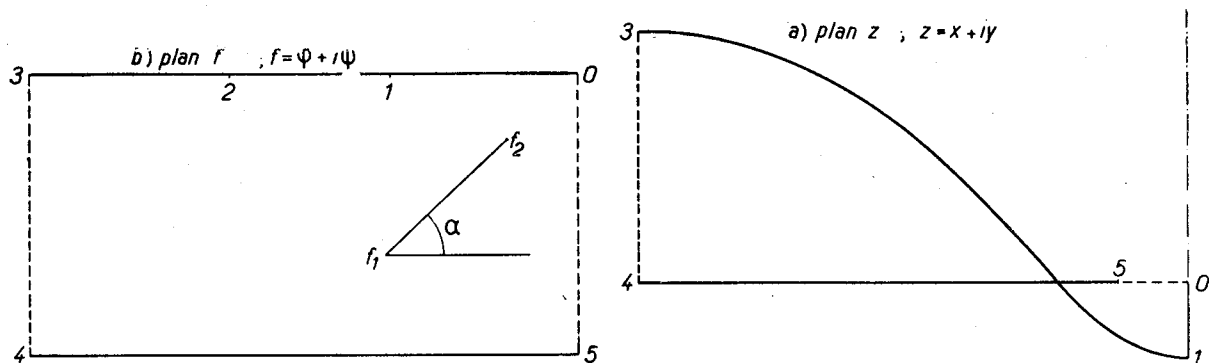


Fig. 25

Dans le rectangle $f = \varphi + i\psi$ de la figure 25, l'angle θ (angle entre le vecteur vitesse et Ox) peut varier entre $-\frac{\pi}{2}$ et 0 :

$$(1) \quad -\frac{\pi}{2} < \theta \leq 0.$$

Le rectangle est un domaine convexe, donc le segment f_1, f_2 doit se trouver complètement dans le rectangle. Nous avons alors d'après (19), p. 23, pour condition d'univalence :

$$(2) \quad z(f_2) - z(f_1) = e^{i\alpha} \int_{f_1}^{f_2} e^{-\tau} (\cos \theta + i \sin \theta) d\rho \neq 0,$$

ou l'on a posé : $df = e^{i\alpha} d\rho$.

Le second membre est différent de zéro si la surface libre ne recoupe pas le fond ; car alors $z(f_1) \neq z(f_2)$ si $f_1 \neq f_2$.

Or :

$$\int e^{-\tau} \cos \theta d\rho \neq 0,$$

car le terme placé sous le signe $\int$ est toujours positif, en vertu de (1).

De même :

$$\int e^{-\tau} \sin \theta d\rho \neq 0,$$

car le terme placé sous le signe $\int$ est toujours négatif, en vertu de (1). Ainsi, tout danger de recouplement est éliminé.

2. — θ ANALYSE.

Nous nous proposons d'étudier l'allure des courbes $\theta = C^te$ pour l'écoulement en question. Regardons la vitesse complexe de Levi-Civita définie par II A 18 :

$$(3) \quad \frac{df}{dz} = e^{-\omega i}, \quad \omega = \theta + i\tau;$$

θ l'angle du vecteur vitesse avec Ox (argument) ⁽¹⁾;

$\tau = \ln V =$ logarithme de l'intensité de la vitesse.

Considérons tout d'abord les lignes $\theta = \text{Cte}$ au voisinage d'un point d'inflexion de la ligne libre, où $f = f_2$. Sur la surface libre nous avons :

$$(4) \quad e^\tau = -K \sin \theta.$$

Faisons la dérivation. Nous obtenons :

$$(5) \quad e^\tau \cdot \frac{d\tau}{d\varphi} = -K \cos \theta \frac{d\theta}{d\varphi}.$$

Au point d'inflexion, $f = f_2$:

$$(6) \quad \frac{d\tau}{d\varphi} = 0, \quad \frac{d\theta}{d\varphi} = 0.$$

Par conséquent :

$$(7) \quad \omega'(f) = \frac{d\omega}{df} = \frac{d\theta}{d\varphi} + i \frac{d\tau}{d\varphi} = 0.$$

Puis, en dérivant (5) :

$$(8) \quad e^\tau \left(\frac{d\tau}{d\varphi} \right)^2 + e^\tau \frac{d^2\tau}{d\varphi^2} = K \sin \theta \left(\frac{d\theta}{d\varphi} \right)^2 - K \cos \theta \frac{d^2\theta}{d\varphi^2}.$$

Pour $f = f_2$ l'équation (8) devient, d'après (6) :

$$(9) \quad e^\tau \frac{d^2\tau}{d\varphi^2} = -K \cos \theta \frac{d^2\theta}{d\varphi^2}.$$

Les équations (4) et (9) donnent :

$$(10) \quad \operatorname{tg} \theta_2 \frac{d^2\tau}{d\varphi^2} = \frac{d^2\theta}{d\varphi^2}.$$

En dérivant l'équation (7) et en utilisant l'expression (10), nous avons :

$$\omega''(f_2) = \frac{d^2\theta}{d\varphi^2} (1 + i \cotg \theta_2).$$

Donc, dans le voisinage de ce point, le développement de ω s'écrit :

$$(11) \quad \omega(f) = \theta_2 + i\tau_2 + \frac{(f - f_2)^2}{2} \left(\frac{d^2\theta}{d\varphi^2} \right)_2 (1 + i \cotg \theta_2).$$

(1) Des raisonnements analogues à ceux du texte ont été souvent utilisés dans la théorie des sillages; cf., en particulier, les travaux de MM. LERAY, JACOB et KRAVTCHEKO dont on trouvera l'analyse dans la thèse de M. KRAVTCHEKO : *Sur le problème de représentation conforme de Helmholtz*. Journal des Math., 1941.

Il en résulte qu'au point $f - f_2 = \rho e^{i\alpha}$:

$$\theta = \theta_2 + \left(\frac{d^2\theta}{d\varphi^2} \right) \cdot \frac{\rho^2}{2} (\cos 2\alpha - \sin 2\alpha \cotg \theta_2),$$

la ligne $\theta = \theta_2$, issue de f_2 , est définie par l'équation :

$$(12) \quad \begin{cases} \tg 2\alpha = \tg \theta_2, \\ \alpha = \frac{\theta_2}{2} + k \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

qui permet de déterminer l'angle que fait la ligne $\theta = C^te$ avec la frontière au point d'inflexion (désigné ici par 2).

Dans le II B, nous avons démontré qu'au point de raccordement de la surface libre avec la paroi imperméable, la surface libre peut être soit horizontale, soit tangente à la paroi. Par conséquent, dans notre cas, les deux valeurs de l'angle θ_1 au point 1 sont $\left(-\frac{\pi}{2} \leq \theta < 0 \right)$:

$$1^\circ \theta_1 = 0;$$

$$2^\circ \theta_1 = -\frac{\pi}{2}.$$

a) $\theta_1 = 0$.

Les deux points anguleux (1) et (5) de la ligne de courant sont en même temps deux points logarithmiques pour ω ; des lignes $\theta = C^te$ partent en éventail de ces points. Le long de la limite (0-1), $\theta = -\frac{\pi}{2}$. Sur les limites (3-4) et (4-5), $\theta = 0$.

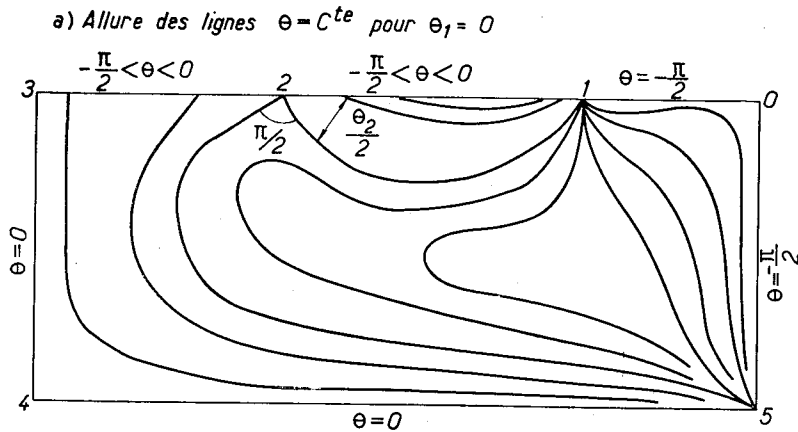


Fig. 26

Le long de la surface libre, du point 1 au point 2 (1), θ est négatif et sa valeur diminue. Elle augmente ensuite jusqu'à 0, du point 2 au point 3. Du point 2 partent deux lignes $\theta = \theta_2$ qui font entre elles l'angle $\frac{\pi}{2}$. De plus, la valeur de θ sur la surface libre est minimum au point 2 et la position des lignes $\theta_2 = C^te$ est donnée par l'équation (12). Grâce à ces remarques, nous pouvons tracer aisément les lignes $\theta_2 = C^te$ (fig. 26).

$$b) \theta = -\frac{\pi}{2}.$$

(1) Dans le chapitre suivant, nous montrerons que la surface libre ne peut avoir qu'un point d'inflexion.

La figure 26 bis donne l'allure des courbes $\theta = C^{te}$ dans le plan f . Nous constatons que les points 2 et 1 se confondent et que θ diminue sur la surface libre de 3 à 1.

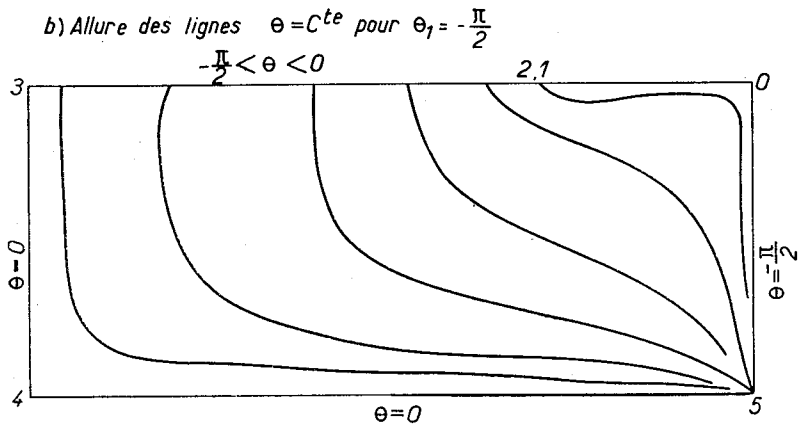


Fig. 26 *bis*

3. — ÉTUDE DES POINTS D'INFLEXION.

Il peut être facilement démontré que les écoulements à surface libre avec deux points anguleux sur les lignes de courant ne peuvent avoir qu'un point d'inflexion sur la surface libre. De chaque point d'inflexion doivent partir deux lignes $\theta = C^te$ qui doivent aboutir la première à 1, la deuxième à 5 (*fig. 27*).

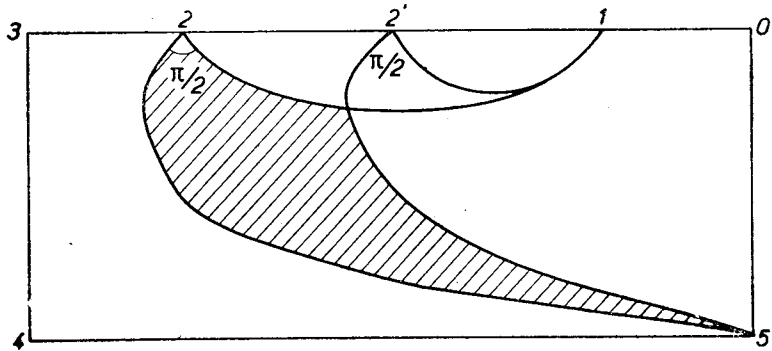


Fig. 27

L'hypothèse de deux points d'inflexion entraîne l'existence d'une surface fermée à l'intérieur du rectangle, formée par les lignes $\theta = C^{\text{te}}$. Cette hypothèse est inadmissible, car il existerait alors dans le domaine du liquide en mouvement un domaine à la frontière duquel θ serait constant et égal à θ_2 (cf. la *fig. 27*). Par conséquent, *la surface libre peut avoir au maximum un point d'inflexion.*

4. — ÉTUDE DE L'ÉVENTUALITÉ $\theta_1 = -\frac{\pi}{2}$.

Considérons la variation de la pression :

$$(13) \quad C^{te} - \frac{p}{\gamma} = y + \frac{\phi}{K}.$$

Pour le point 1 la pression a la valeur de la pression atmosphérique, tandis que pour le point 0 elle est égale à p_d . Nous pouvons donc écrire le long de 1-0 :

$$(14) \quad \int_1^0 \left(dy + \frac{d\varphi}{K} \right) = - \frac{p_d}{\gamma}.$$

Supposons maintenant que l'angle $\theta_1 = -\frac{\pi}{2}$. Nous constatons que :

a) la valeur de la vitesse augmente entre les points 1 et 0. En effet (fig. 28) :

— regardons le plan du potentiel complexe en analysant les variations de θ et τ de la variable complexe de Levi-Civita. Sur la surface libre, θ varie de $\theta = 0$ à $\theta = -\frac{\pi}{2}$.

Sur la limite 1-0 ainsi que sur le drain, $\theta = -\frac{\pi}{2}$.

Sur les deux autres limites (3-4) et (4-5), $\theta = 0$. La valeur maximum de θ se trouve donc sur le contour 3-4 et 4-5; la valeur minimum sur 1-0 et 0-5. Mais θ est harmonique

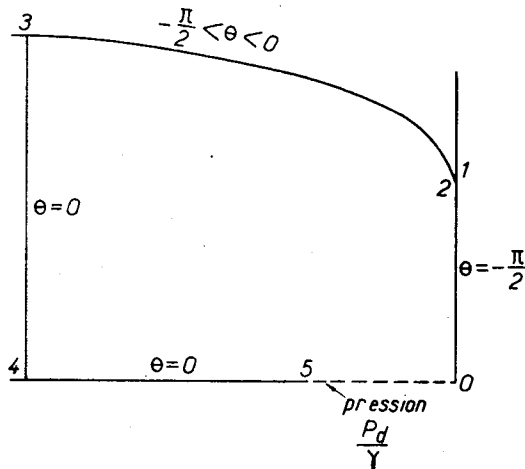


Fig. 28

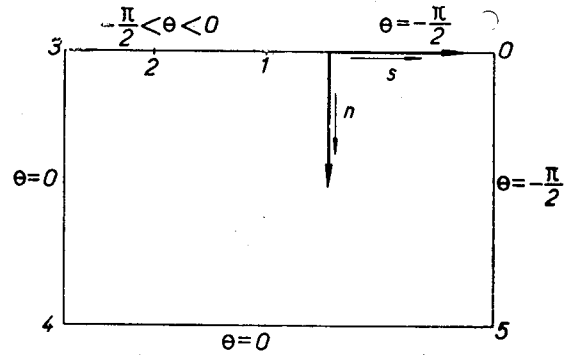


Fig. 29

dans le rectangle du plan f ; les maxima et minima de θ sont atteints sur la frontière de celui-ci. Par conséquent, suivant la direction de la normale intérieure à la frontière (1-0), nous avons :

$$(15) \quad \frac{d\theta}{ds} > 0.$$

L'équation (15) indique le sens de la variation de la variable τ conjuguée de θ . C'est ainsi que nous avons d'après les relations de Cauchy :

$$(16) \quad \frac{d\tau}{ds} > 0;$$

ds se déduit de la direction de n par une rotation de $+\frac{\pi}{2}$ (fig. 29), c'est-à-dire dans le sens de 1-0.

Étant donné que :

$$\tau = \ln V,$$

la vitesse doit augmenter constamment du point 1 au point 0, donc :

$$(17) \quad \frac{dV}{ds} > 0;$$

b) la vitesse sur la frontière (0-1) est toujours supérieure à K. De :

$$\frac{df}{dz} = e^{-i\omega} = e^{\tau - i\theta},$$

nous pouvons tirer :

$$(18) \quad dy = e^{-\tau} \sin \theta d\varphi,$$

le long de 0-1; or, sur ce segment :

$$\theta = -\frac{\pi}{2}; \quad \sin \theta = -1,$$

d'où :

$$(19) \quad dy = -e^{-\tau} d\varphi.$$

Sur la surface libre nous aurons :

$$(20) \quad e^{\tau} = -K \sin \theta,$$

et pour le point 1 :

$$\theta = -\frac{\pi}{2}, \quad e^{\tau_0} = K.$$

D'après (17) la vitesse augmente constamment le long de la paroi 1-0, donc :

$$(21) \quad \begin{cases} e^{\tau} > e^{\tau_0} = K, \\ e^{-\tau} d\varphi < \frac{d\varphi}{K}. \end{cases}$$

On en déduit, comme $dy < 0$ et $d\varphi > 0$ dans le sens 1,0 (cf. (19)) :

$$(22) \quad \begin{cases} dy > -\frac{d\varphi}{K}; & dy + \frac{d\varphi}{K} > 0; \\ \int_1^0 \left(dy + \frac{d\varphi}{K} \right) > 0. \end{cases}$$

Si nous comparons l'expression (22) à l'expression (14) nous constatons que la tangente verticale à la surface au point 1 peut exister seulement si la pression sur le drain est négative, donc inférieure à la pression atmosphérique.

C. — Solution analytique.

1. — PLAN GÉNÉRAL.

Les méthodes que nous avons données dans II A nous permettent de résoudre le problème posé. Nous rappellerons la marche du calcul qui est la suivante (fig. 30) :

a) transformation du plan du mouvement dans le plan de l'hodographe. Cette transformation est définie par :

$$(23) \quad \frac{df}{dz} = W;$$

b) inversion du plan de l'hodographe. Elle conduit à un domaine limité par des segments de droite et se traduit par l'équation :

$$(24) \quad \zeta = \frac{1}{W};$$

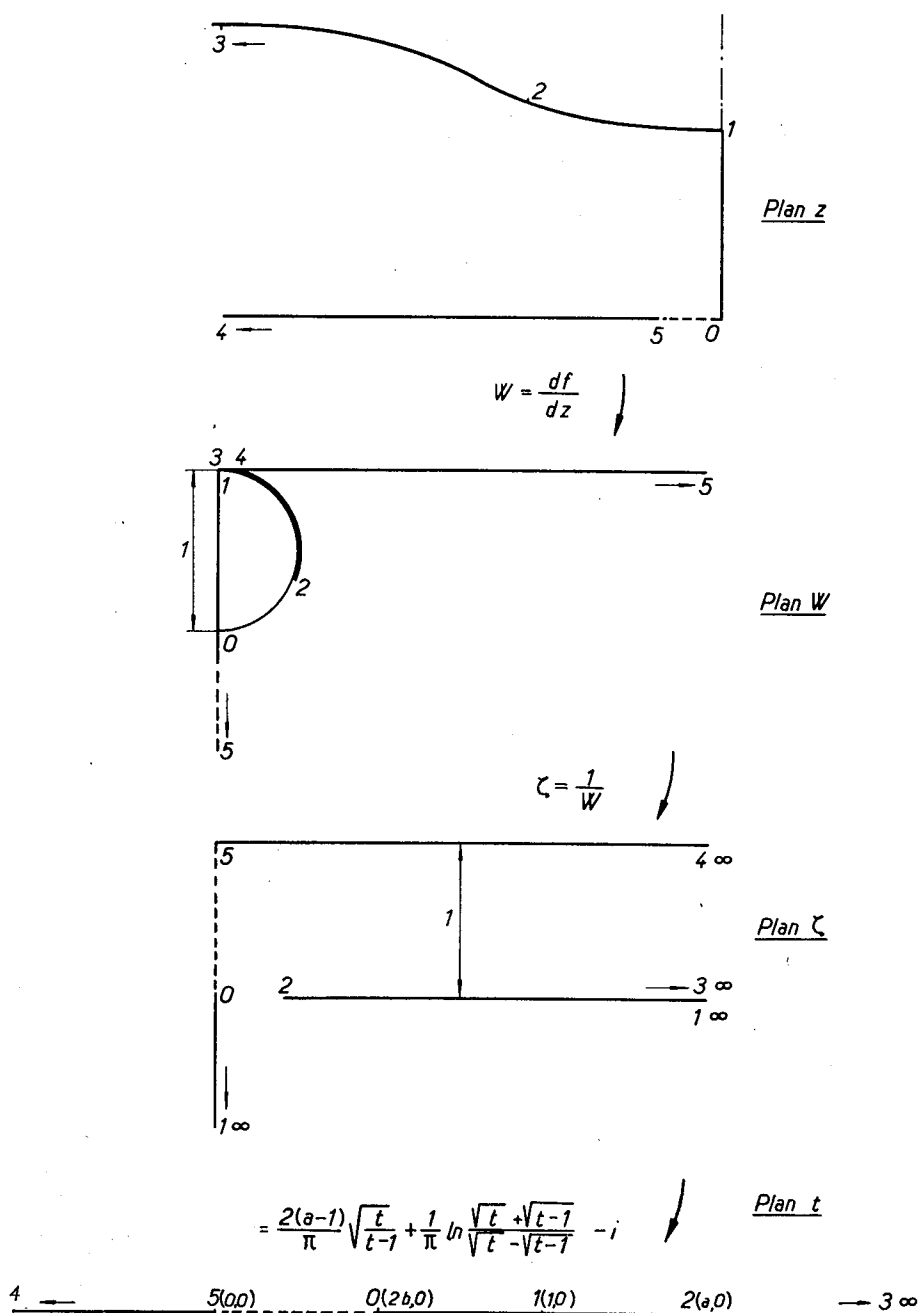


Fig. 30

c) transformation $\zeta = F(t)$ est donnée par l'équation II A 3 (transformation de Schwartz-Christoffel). Le problème est donc, en principe, résolu. Toutefois, nous pouvons nous attendre à d'importantes difficultés de calcul.

Signalons que, dans ce qui va suivre, nous utiliserons des valeurs réduites des vitesses V et du débit obtenues en divisant par K les valeurs réelles V_s :

$$(25) \quad V = \frac{V_s}{K}; \quad q = \frac{Q}{K}.$$

V et q sont les vitesses et débit réduits, V_s et Q leur valeurs réelles. Pour obtenir les valeurs réduites, il suffit de prendre $K = 1$. Cette manière de travailler est intéressante dans le cas où l'on cherche la solution générale d'un problème. En effet, la vitesse réduite est sans dimension; le plan W est donc adimensionnel. Dans le plan de l'hodographe, la surface libre est représentée, pour $K = 1$, par un cercle du rayon $1/2$.

Le débit réduit a la dimension d'une longueur. En introduisant les valeurs réduites, le nombre des paramètres diminue de 1.

L'écoulement est déterminé par :

q = débit réduit;

l = longueur du drain;

$\frac{P_d}{\gamma}$ = pression sur le drain.

2. — TRANSFORMATION (plan ζ -demi-plan t).

Nous utiliserons ici la transformation de Schwartz-Christoffel qui permet de faire correspondre à un polygone un demi-plan supérieur, grâce à la relation :

$$(26) \quad \frac{d\zeta}{dt} = -G (t - a_1)^{-\alpha_1} (t - a_2)^{-\alpha_2} \dots (t - a_n)^{-\alpha_n}.$$

La signification de tous les éléments de cette équation a été donnée dans II A 3.

Dans notre cas, les valeurs de $a_1, a_2 \dots a_n$ et $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n$ sont :

— point 1	$a_1 = 1,$	$\alpha_1 = \frac{3}{2};$
— point 2	$a_2 = a,$	$\alpha_2 = -1;$
— points 3 et 4	$a_3 = \infty; a_4 = -\infty,$	$\alpha_{3,4} = +1;$
— point 5	$a_5 = 0,$	$\alpha = \frac{1}{2}.$

Le paramètre a reste pour le moment arbitraire.

Nous avons donc :

$$(27) \quad \frac{d\zeta}{dt} = -G t^{-\frac{1}{2}} (t - 1)^{-\frac{3}{2}} (t - a).$$

En intégrant, nous obtenons :

$$(28) \quad \zeta = G \left[-2(a - 1) \sqrt{\frac{t}{t - 1}} - \ln \frac{\sqrt{t} + \sqrt{t - 1}}{\sqrt{t} - \sqrt{t - 1}} + k\pi i \right];$$

le logarithme se réduit à sa détermination principale pour $t = m > 1$ et k ne peut avoir que l'une des trois valeurs :

$$\begin{aligned} k &= +1, \\ k &= 0, \\ k &= -1. \end{aligned}$$

Pour trouver la valeur de k , on examinera la surface libre L. Sur le plan ζ , elle est représentée par une droite définie par :

$$(29_a) \quad 0 < \xi_2 < \xi < \infty;$$

$$(29_b) \quad \eta = -1$$

(ξ_2 étant l'abscisse du point 2), et sur le demi-plan par :

$$m > 1, \quad n = 0;$$

pour $m > 1$ nous obtenons :

$$(30) \quad -2(a-1)\sqrt{\frac{m}{m-1}} < 0 \quad \text{et réel, car } a > 1;$$

$$(31) \quad -\ln \frac{\sqrt{m} + \sqrt{m-1}}{\sqrt{m} - \sqrt{m-1}} < 0 \quad \text{et réel, car } \frac{\sqrt{m} + \sqrt{m+1}}{\sqrt{m} - \sqrt{m-1}} > 1.$$

La condition (29_a) exige :

$$(32) \quad G < 0.$$

Les conditions (29_b) et (32) donnent :

$$(32_b) \quad k = +1, \quad G = -\frac{1}{\pi}.$$

Nous avons alors :

$$(33) \quad \zeta = \frac{2(a-1)}{\pi} \sqrt{\frac{t}{t-1}} + \frac{1}{\pi} \ln \frac{\sqrt{t} + \sqrt{t-1}}{\sqrt{t} - \sqrt{t-1}} - i.$$

3. — SOLUTION DÉTERMINÉE.

Sur le demi-plan, le potentiel complexe f est donné par :

$$(34) \quad f = -\arg \operatorname{ch} \left(\frac{t-b}{b} \right) + \pi i;$$

$2b$ est l'abscisse du point 0 qui correspond au point commun au drain et à la paroi verticale imperméable. Cela revient à prendre pour image dans f de l'écoulement la demi-bande : $-\infty \leq \varphi \leq 0$, $0 \leq \psi \leq \pi$, dont le bord supérieur correspond à la ligne de courant 0-1-2-3. La détermination du second membre de (34) est ainsi fixée pour t réel : $\arg \operatorname{ch}$ est réel pour $t > 2b$. Le débit est pris égal à π ; on passe au cas général en multipliant le second membre de (34) par $\frac{q}{\pi}$.

De l'équation (34) nous tirons :

$$(35) \quad t = b \operatorname{ch} (\pi i - f) + b.$$

Nous savons que (équat. II A 15) :

$$z = \int \zeta df + C.$$

Nous portons dans cette équation les valeurs de t et de ζ tirées respectivement de (34) et (33), ce qui devrait permettre théoriquement de trouver la fonction z , donc d'obtenir la solution générale sous la forme dite indéterminée. En d'autres termes, à un jeu de paramètres arbitraires a , b , nous avons fait correspondre un écoulement du type, considéré, dont la formule précédente permettrait de calculer les paramètres. Le problème déterminé que nous allons aborder, consiste à trouver a et b , connaissant les paramètres hydrauliques.

Numériquement, nous ne pouvons intégrer que suivant le contour (fond imperméable, surface libre, drain, etc.) mais il se trouve justement que les conditions sur les contours sont essentielles pour la technique (forme de la surface libre, cote du point 1, pressions et vitesses sur le fond imperméable et sur le drain).

Le calcul peut être facilité par voie géométrique, comme nous le montrerons dans la suite.

Mais, déjà, une voie analytique nous permet de trouver certaines relations extrêmement importantes. Ce sont les relations entre les paramètres du demi-plan t : a et b , les paramètres hydrauliques, l (longueur de drain), q (débit), p_a (pression sur le drain) et y_1 (cote du point 1), ainsi que les valeurs de toutes les constantes; cela est essentiel dans le domaine pratique, car on rend ainsi le problème déterminé.

4. — CHOIX DES NOMBRES HYDRAULIQUES SANS DIMENSION.

Avant de procéder à l'intégration, nous devons résoudre maintenant le problème du choix des nombres hydrauliques sans dimension.

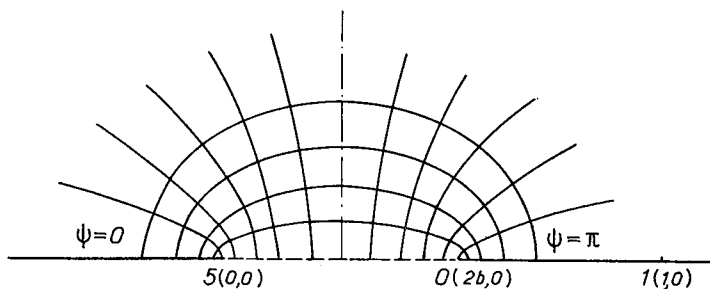


Fig. 31

Regardons le demi-plan (*fig. 31*). La correspondance entre φ , ψ et t , pour t réel, s'écrit :

$$(36) \quad \varphi = -\arg \operatorname{ch} \frac{t-b}{b}, \text{ pour } t = m > 2b.$$

et :

$$(37) \quad \psi = \arccos - \left[\frac{t-b}{b} \right], \text{ pour } 0 \leq m \leq 2b.$$

L'équation (37) montre bien que pour $t = 0$, $\psi = 0$, et pour $t = 2b$, $\psi = \pi$. Or, le terme $\psi = \pi$ correspond au débit q .

Par conséquent, dans tous les cas, q doit intervenir dans les paramètres sans dimension. Introduisons alors les rapports :

$$\frac{l}{q}, \quad \frac{p_a}{\gamma q}, \quad \frac{y_1^{(1)}}{q} \dots$$

L'intégrale $z = \int \zeta df + C$ devient pour le débit q :

$$(38) \quad \frac{z}{q} = \frac{1}{\pi} \int \zeta df + C.$$

5. — RELATIONS ENTRE PRINCIPAUX PARAMÈTRES PHYSIQUES ET MATHÉMATIQUES.

En effectuant l'intégration de la relation (38) (cf. l'appendice de ce chapitre), nous avons obtenu les expressions suivantes pour :

a) *la cote du point 1* [équat. (62)].

$$(39) \quad \frac{y_1}{q} = \frac{2(a-1)}{\pi} + \frac{2}{\pi} \ln(1 + \sqrt{1-2b});$$

b) *la longueur du drain* [équat. (74)] ⁽²⁾.

$$(40) \quad \frac{2l}{q} = \frac{4(a-1)}{\pi^2} \ln \frac{1 + \sqrt{2b}}{1 - \sqrt{2b}} + \frac{8}{\pi^2} \Phi(\sqrt{2b}),$$

où :

$$(40') \quad \Phi(\sqrt{2b}) = \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{2b}} \frac{1}{\sqrt{2b}} \ln \frac{1 + \sqrt{2b}}{1 - \sqrt{2b}} d(\sqrt{2b}),$$

est une intégrale de Spence;

c) *pression sur le drain*.

L'équation $\varphi = -K(h - h_o)$ appliquée le long du drain (avec $K = 1$) nous donne :

$$\varphi = 0 = -\left(\frac{p_a}{\gamma} - h_o\right).$$

d'où :

$$h_o = \frac{p_a}{\gamma};$$

En introduisant cette valeur dans l'équation $\varphi = -(h - h_o)$ nous obtenons, pour le point 1 :

$$(41) \quad \varphi_1 = -\left(y_1 - \frac{p_a}{\gamma}\right),$$

(1) *Remarque.* — Comme l'écoulement est donné par deux nombres sans dimension, il doit exister une relation entre les trois paramètres $\frac{p_a}{q}, \frac{y_1}{q}, \frac{l}{q}$ relation qui peut être trouvée en éliminant a et b entre (39), (40) et (43).

(2) Rappelons que la longueur du drain (fig. 23) est égale à $2l$.

qui nous permet de trouver $\frac{p_d}{\gamma}$ car, de cette équation, nous tirons immédiatement :

$$(42) \quad \frac{p_d}{\gamma q} = \frac{y_1}{q} + \frac{\varphi_1}{q},$$

φ_1 peut être calculé aisément, à partir de l'équation (36), divisée par π , pour $t = m = 1$.

Si nous portons la valeur de φ_1 ainsi obtenue et celle de y_1 exprimée par l'équation (39), dans l'équation (42) nous aurons la valeur suivante de $\frac{p_d}{\gamma q}$:

$$(43) \quad \frac{p_d}{\gamma q} = \frac{2(a-1)}{\pi} + \frac{2}{\pi} \ln(1 + \sqrt{1-2b}) - \frac{1}{\pi} \arg \operatorname{ch} \frac{1-b}{b}.$$

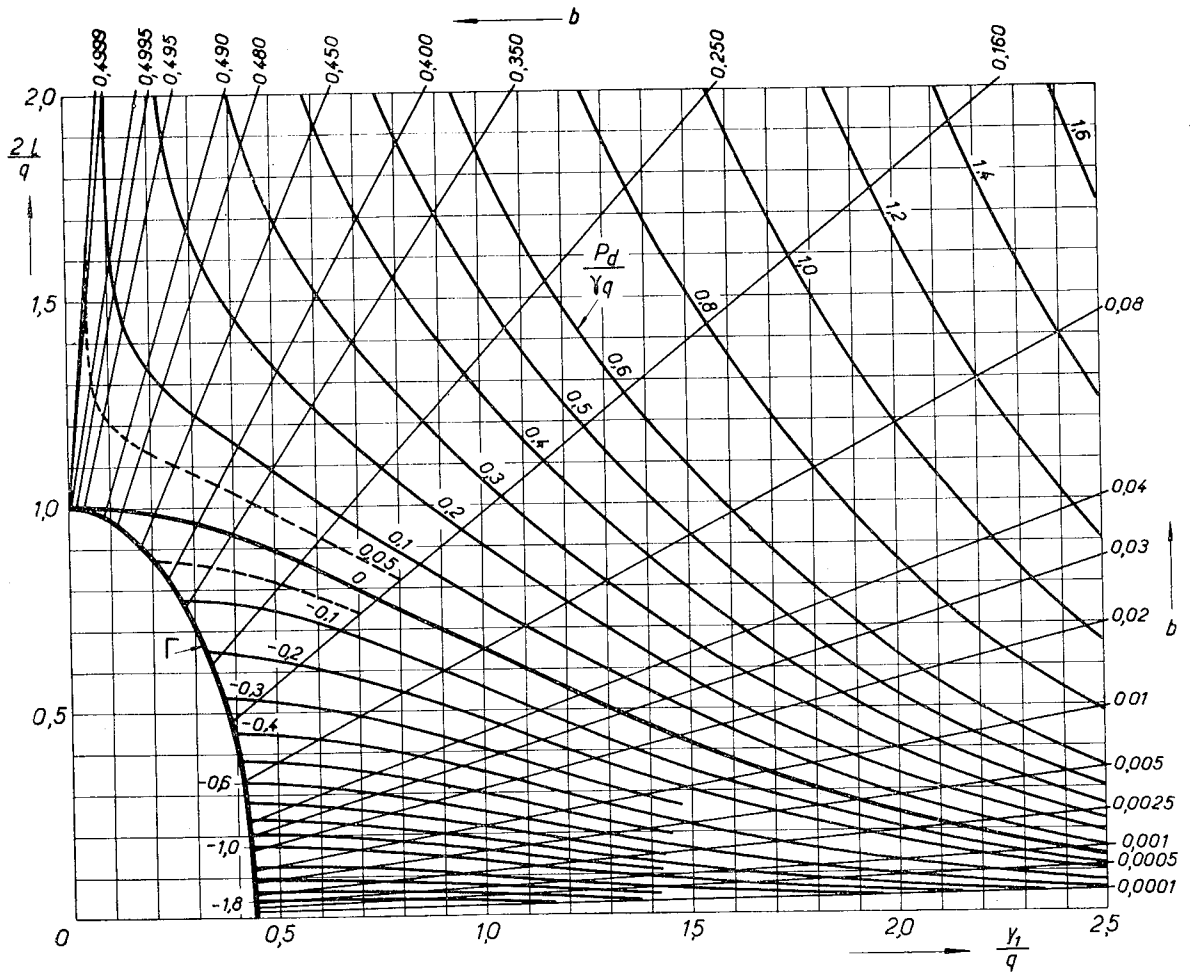


Fig. 32

En donnant différentes valeurs à a et b , nous pouvons trouver facilement, à partir des équations (39), (40) et (43), les valeurs de $\frac{y_1}{q}$, $\frac{2l}{q}$, $\frac{p_d}{\gamma q}$ correspondantes et les tracer sur un graphique (fig. 32).

Nous constatons, sur cette figure, que les courbes $\left(\frac{2l}{q}\right) = F\left(\frac{y_1}{q}\right)^{(1)}$, correspondant à des valeurs constantes de $\left(\frac{p_d}{\gamma q}\right) < 1$, présentent des points d'arrêt distribués le long d'une courbe Γ . Le régime critique relatif à chaque point de Γ est caractérisé par la relation $a = 1$. Le point d'inflexion 2 se confond alors avec 1; il y a une discontinuité de fonctionnement du régime. Si, à partir d'un point de Γ , nous augmentons q ou $\frac{p_d}{\gamma}$ au-delà de la valeur critique correspondante en maintenant l constant, le schéma ci-dessus devient physiquement inacceptable, car l'aspiration d'air se produit à travers le drain.

Le même diagramme nous permet de trouver facilement b et a correspondant à des paramètres hydrauliques donnés. Donnons-nous, par exemple, $\frac{2l}{q}$ et $\frac{p_d}{\gamma q}$. Les lignes $b = \text{Cte}$ sont données sur le graphique. Pour trouver a , il suffit d'employer l'équation (39) et l'équation (40) avec $b = \text{Cte}$:

$$\frac{2(a-1)}{\pi} = \left(\frac{y_1}{q} - \frac{y_\Gamma}{q}\right),$$

où $\frac{y_1}{q}$ = abscisse du point B de rencontre de la courbe $\frac{p_d}{\gamma q} = \text{Cte}$ et de la droite $\frac{2l}{q} = \text{Cte}$; $\frac{y_\Gamma}{q}$ = valeur de l'abscisse de l'intersection de la courbe Γ avec la droite $b = \text{Cte}$ correspondante au point B.

6. SURFACE LIBRE ET INTÉGRATION GRAPHIQUE.

Pour obtenir la surface libre, il faudrait intégrer l'équation (38) :

$$(44) \quad \frac{z}{q} = \frac{x}{q} + i \frac{y-y_1}{q} = \frac{1}{\pi} \int \zeta d\varphi = \frac{1}{\pi} \int (\xi + i\eta) d\varphi = \frac{1}{\pi} \int_{\varphi_1}^{\varphi} \xi d\varphi + \frac{i}{\pi} \int_{\varphi_1}^{\varphi} \eta d\varphi.$$

D'après l'équation (33), en y posant $t = m > 1$ et l'équation (44), nous avons :

$$(45) \quad \frac{x}{q} = \frac{1}{\pi} \int_{\varphi_1}^{\varphi} \xi d\varphi = \frac{1}{\pi} \int_{\varphi_1}^{\varphi} \frac{2(a-1)}{\pi} \sqrt{\frac{m}{m-1}} d\varphi + \frac{1}{\pi^2} \int_{\varphi_1}^{\varphi} \ln \frac{\sqrt{m} + \sqrt{m-1}}{\sqrt{m} - \sqrt{m-1}} d\varphi;$$

$$(46) \quad \frac{y-y_1}{q} = \frac{1}{\pi} \int_{\varphi_1}^{\varphi} \eta d\varphi = -\frac{1}{\pi} (\varphi - \varphi_1).$$

Compte tenu des équations (41) et (51), nous pouvons trouver l'intégrale du premier terme de l'équation (45) :

$$(47) \quad \frac{2(a-1)}{\pi^2} \int_{\varphi_1}^{\varphi} \sqrt{\frac{m}{m-1}} d\varphi = \frac{2(a-1)}{\pi} \left[\ln \frac{-\sqrt{m-1} + \sqrt{m-2b}}{\sqrt{m-1} + \sqrt{m-2b}} \right]_1^m.$$

(1) Ces courbes sont dessinés en traits forts. La valeur correspondante de $\frac{p}{\gamma q}$ est indiquée sur le graphique.

On a représenté en traits plus fins les courbes d'équation $\Phi\left(\frac{2l}{q}, \frac{y_1}{q}\right) = b = \text{Cte}$. Ces courbes sont, d'ailleurs, des droites, comme on le voit en éliminant a entre (39) et (40).

Le deuxième membre de l'équation (45) n'est pas intégrable; nous devons avoir recours à des méthodes d'intégration approchées qui se heurtent à des difficultés au voisinage des points singuliers ($\zeta \rightarrow \infty$).

La méthode d'approximation qui nous semble la plus simple est la méthode graphique utilisant l'hodographe inverse, qui n'est autre qu'une interprétation vectorielle de l'équation (44) :

$$(48) \quad \vec{x} + \vec{y} = \int \vec{\zeta} d\varphi = \Sigma \vec{\xi} \Delta\varphi + \Sigma \vec{\eta} \Delta\varphi$$

ou, dans notre cas, $\Delta\varphi$ étant un accroissement, fixé une fois pour toutes, de φ :

$$(49) \quad \frac{x}{q} = \frac{1}{\pi} \sum \xi_{\text{moy}} \Delta\varphi.$$

L'équation (49) est inutilisable lorsque $\zeta \rightarrow \infty$ (ce qui correspond au point où la vitesse tend vers 0). Dans notre cas, c'est pour le point 1. Pourtant, la discontinuité vient seulement du terme $\sqrt{\frac{m}{m-1}}$ (car $\ln \frac{\sqrt{m} + \sqrt{m-1}}{\sqrt{m} - \sqrt{m-1}}$ se réduit à 0 pour $m = 1$), pour lequel nous avons trouvé l'expression finie de l'intégrale [équat. (47)].

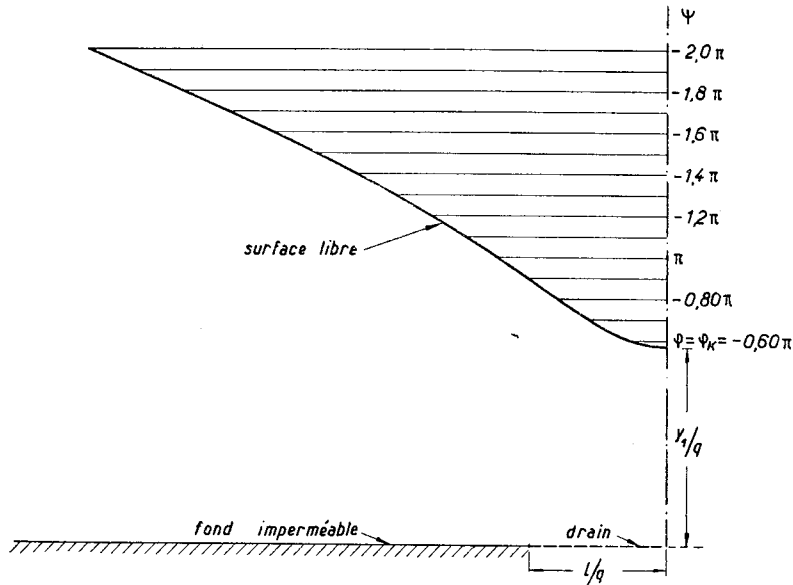


Fig. 33

Grâce à l'emploi de la méthode graphique, nous avons surmonté toutes les difficultés provenant de l'existence du point singulier 1. Nous donnons quelques indications sur la technique que nous avons employée pour l'intégration de l'équation (49) afin d'obtenir la surface libre dans un cas concret :

1° nous trouvons sur le demi-plan les valeurs de l'abscisse m_n correspondant à $\varphi_n = \varphi_k + n \Delta\varphi$ en utilisant l'équation (36) explicitée en m , $\varphi_k = k \Delta\varphi$, n et k étant des nombres entiers. L'abscisse m du point où le potentiel est $\varphi = \varphi_k$ est désignée par m_k . Signalons que la valeur du potentiel du point 1 se trouve entre $(k - 1) \Delta\varphi$ et $k \Delta\varphi$;

2° si nous introduisons la valeur de m_n obtenue d'après la première opération dans l'équation (33), nous trouverons la valeur ξ_n correspondant à φ_n .

3° en utilisant l'équation (46) et (49) nous trouvons les abscisses et ordonnées des points de la surface libre pour $|\varphi| > |\varphi_k|$ (φ en valeurs absolues car $\varphi < 0$ sur surface libre);

4° pour un point de potentiel $\frac{\varphi_k}{\pi}$ (dans le plan $\frac{z}{q}$) situé au voisinage du point singulier 1, la méthode graphique ne peut plus être utilisée. L'abscisse de ce point peut alors être calculée en faisant la somme de deux termes : l'un donné par l'équation (47) (valeur de l'intégrale 1 de m à m_k), l'autre calculée approximativement à partir de l'expression :

$$(50) \quad 2 \frac{\varphi_k - \varphi_1}{\pi^2} \sqrt{\frac{m_k - 1}{m_k}},$$

qu'on obtient en remarquant que $\ln \frac{1+x}{1-x} \approx 2x$ pour x petit.

Un exemple de cette méthode est donné sur la *figure 33* pour $a = 2$, $b = 0,25$;

$$\frac{l}{q} = 0,660; \quad \frac{y_1}{q} = 0,976; \quad \frac{p_d}{\gamma q} = 0,414; \quad \varphi_1 = -0,565 \pi; \quad \varphi_k = -0,60 \pi$$

ANNEXE

DÉTAIL DES CALCULS

1. — COTE DU POINT 1.

Pour obtenir cette cote, il faut effectuer l'intégration de l'équation (38) le long de la ligne 0-1. Cette ligne est donnée sur le demi-plan par :

$$n = 0, \quad 0 < 2b < m = t < 1.$$

Étant donné qu'il s'agit d'une ligne de courant, nous avons :

$$\psi = C^{te} = \pi; \quad d\psi = d\varphi; \quad 0 < \varphi < \varphi_1.$$

De l'équation (36) nous avons :

$$(51) \quad d\varphi = -\frac{dm}{\sqrt{m^2 - 2mb}}.$$

D'autre part, de l'équation (33) nous avons $0 < t = m < 1$:

$$\zeta = \frac{-2(a-1)}{\pi} i \sqrt{\frac{m}{1-m}} + \frac{1}{\pi} \ln \frac{\sqrt{m} + i\sqrt{1-m}}{\sqrt{m} - i\sqrt{1-m}} - i,$$

ce qui se réduit aisément à :

$$(52) \quad \zeta = \frac{-2(a-1)}{\pi} i \sqrt{\frac{m}{1-m}} - \frac{2i}{\pi} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{m}{1-m}}.$$

Les équations (38), (51) et (52) donnent :

$$(53) \quad \frac{z}{q} = i \frac{y_1}{q} = \frac{i}{\pi} \int_{2b}^1 \left[\frac{(2a-1)}{\pi} \sqrt{\frac{m}{1-m}} + \frac{2}{\pi} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{m}{1-m}} \right] \frac{dm}{\sqrt{m^2 - 2mb}}.$$

Désignons par :

$$(54) \quad I_1 = \frac{2(a-1)}{\pi^2} \int_{2b}^1 \frac{dm}{\sqrt{1-m} \sqrt{m-2b}} = \frac{2(a-1)}{\pi};$$

$$(55) \quad I_2 = \frac{2}{\pi^2} \int_{2b}^1 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{m}{1-m}} \cdot \frac{dm}{\sqrt{m^2 - 2mb}}.$$

L'intégrale I_2 se simplifie en posant ⁽¹⁾ :

$$(56) \quad m = u^2, \quad \alpha^2 = 2b;$$

$$I_2 = \frac{4}{\pi^2} \int_{\alpha}^1 \frac{\operatorname{arc} \sin u}{\sqrt{u^2 - \alpha^2}} du,$$

que nous écrivons en intégrant par parties :

$$(57) \quad I_2 = \frac{4}{\pi^2} \left[\operatorname{arc} \sin u \operatorname{arg} \operatorname{ch} \frac{u}{\alpha} \right]_{\alpha}^1 - \frac{4}{\pi^2} \int_{\alpha}^1 \frac{\operatorname{arg} \operatorname{ch} \frac{u}{\alpha}}{\sqrt{1-u^2}} du$$

$$= \frac{2}{\pi} \operatorname{arg} \operatorname{ch} \frac{1}{\alpha} - \mathcal{J}(\alpha);$$

$$(58) \quad \mathcal{J}(\alpha) = \frac{2}{\pi^2} \int_{\alpha}^1 \frac{2 \operatorname{arg} \operatorname{ch} \frac{u}{\alpha}}{\sqrt{1-u^2}} du;$$

$$(59) \quad \mathcal{J}'(\alpha) = -\frac{4}{\pi^2} \frac{\operatorname{arg} \operatorname{ch}_{\alpha}^{\alpha}}{\sqrt{1-\alpha^2}} - \frac{2}{\alpha \pi^2} \int_{\alpha}^1 \frac{2u du}{\sqrt{(1-u^2)(u^2-\alpha^2)}}$$

$$= -\frac{2}{\alpha \pi^2} \int_{\alpha}^1 \frac{2u du}{\sqrt{(1-u^2)(u^2-\alpha^2)}}$$

Posons :

$$u^2 = \frac{1+\alpha^2}{2} + \frac{1-\alpha^2}{2} z;$$

$$(60) \quad \mathcal{J}'(\alpha) = -\frac{2}{\alpha \pi^2} \int_{-1}^1 \frac{\left(\frac{1-\alpha^2}{2}\right) dz}{\left(\frac{1-\alpha^2}{2}\right) \sqrt{1-z^2}} = -\frac{2}{\alpha \pi^2} \int_{-1}^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = -\frac{2}{\pi \alpha};$$

d'autre part, pour :

$$\alpha = 1, \quad \mathcal{J}(\alpha) = 0;$$

(1) Cette intégrale est calculée suivant les conseils de M. le Professeur KUNTZMANN.

donc :

$$\mathcal{J}(\alpha) = -\frac{2}{\pi} \ln \alpha = \frac{2}{\pi} \ln \frac{1}{\alpha};$$

donc :

$$(61) \quad I_2 = \frac{2}{\pi} \arg \operatorname{ch} \frac{1}{\alpha} = \frac{2}{\pi} \ln \frac{1}{\alpha} = \frac{2}{\pi} \ln (1 + \sqrt{1 - \alpha^2})$$

Les intégrales (53) et (61) nous donnent la cote du point 1 :

$$(62) \quad \frac{y_1}{q} = \frac{2(a-1)}{\pi} + \frac{2}{\pi} \ln (1 + \sqrt{1 - 2b}).$$

2. — DRAIN.

Le drain est une ligne équipotentielle particulière $\varphi = 0$. Il est représenté sur le demi-plan par :

$$n = 0, \quad 0 \leq m \leq 2b < 1.$$

De l'équation (38) nous avons :

$$(63) \quad \frac{z}{q} = -\frac{l}{q} = \frac{1}{\pi} \int_0^5 \zeta df = -\frac{1}{\pi} i \int_{\psi=0}^{\psi=\pi} \zeta d\psi.$$

$d\psi$ peut être aisément trouvé à l'aide de l'équation (37) :

$$(64) \quad d\psi = \frac{dm}{\sqrt{2mb - m^2}}.$$

Moyennant les équations (52), (63) et (64), compte tenu de ce que :

— pour $\psi = 0 : m = 0$,

— et pour $\psi = \pi : m = 2b$,

nous trouvons :

$$(65) \quad -\frac{2l}{q} = I_a + I_b,$$

où :

$$(66) \quad I_a = -\frac{4(a-1)}{\pi^2} \int_0^{2b} \sqrt{\frac{m}{1-m}} \cdot \frac{dm}{\sqrt{2mb - m}} = -\frac{4(a-1)}{\pi^2} \ln \frac{1 + \sqrt{2b}}{1 - \sqrt{2b}},$$

$$(67) \quad I_b = -\frac{4}{\pi^2} \int_0^{2b} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{m}{1-m}} \cdot \frac{dm}{\sqrt{2mb - m^2}}.$$

Posant $m = u^2$, $\alpha^2 = 2b$, nous obtenons :

$$(68) \quad I_b = -\frac{8}{\pi^2} \int_0^\alpha \frac{\operatorname{arc} \sin u}{\sqrt{\alpha^2 - u^2}} du,$$

que nous intégrons, cette fois aussi, par parties :

$$(69) \quad I_b = - \left[\frac{8}{\pi^2} \arcsin u \cdot \arcsin \frac{u}{\alpha} \right]_0^\alpha + \frac{8}{\pi^2} \int_0^\alpha \frac{\arcsin \frac{u}{\alpha}}{\sqrt{1-u^2}} du \\ = - \frac{4}{\pi} \arcsin \alpha + I(\alpha).$$

Pour obtenir l'intégrale $I(\alpha)$ il faut appliquer la même méthode de calcul que pour l'intégrale donnée par l'équation (58). Nous avons :

$$(70) \quad I(\alpha) = \frac{4}{\pi^2} \arcsin \alpha - \frac{4}{\pi^2} \mathcal{J}(\alpha),$$

avec :

$$(71) \quad \mathcal{J}(\alpha) = \int_0^\alpha \frac{1}{\alpha} \ln \frac{(1+\alpha)}{(1-\alpha)} d\alpha.$$

Les équations (69) et (70) donnent :

$$(72) \quad I_b = - \frac{4}{\pi^2} \mathcal{J}(\alpha).$$

L'intégrale (71) n'est autre qu'une des intégrales de Spence ⁽¹⁾, car nous pouvons la réduire à :

$$L(u) = \int_1^u \frac{\ln u}{u-1} du ;$$

d'où, d'après (40') :

$$(73) \quad \mathcal{J}(\alpha) = \int_1^{1+\alpha} \frac{\ln u}{u-1} du - \int_1^{1-\alpha} \frac{\ln u}{u-1} du \\ = [L(1+\alpha) - L(1-\alpha)] = 2\Phi(\alpha) = 2\Phi(\sqrt{2b}),$$

où $\Phi(\alpha)$ est une des intégrales de Spence ⁽²⁾ et que nous pouvons calculer par la série :

$$(73) \quad \Phi(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^{2n-1}}{(2n-1)^2}.$$

Les équations (65), (66) et (72) nous permettent de trouver l'expression donnant la longueur du drain :

$$(74) \quad \frac{2l}{q} = \frac{4(a-1)}{\pi^2} \ln \frac{1+\sqrt{2b}}{1-\sqrt{2b}} + \frac{8}{\pi^2} \Phi(\sqrt{2b}).$$

(1) *Remarque.* — Voir A. FLETCHER, I. C. P. MILLER et L. ROSENHEAD, *An index of Mathematical tables*, p. 349.

(2) *Remarque.* — Consultez NEWMANN, *The Higher Trigonometry superationals of second order*, Cambridge, 1892, pp. 64-65.

DEUXIÈME CAS

2. — BARRAGE SOUTERRAIN

A. Énoncé du problème.

Le schéma de l'écoulement est représenté sur la *figure 34*. L'écoulement est limité par :

- 1° un fond imperméable $y = 0$;
- 2° un barrage (noyau) imperméable supposé infiniment mince et ayant une hauteur h ;

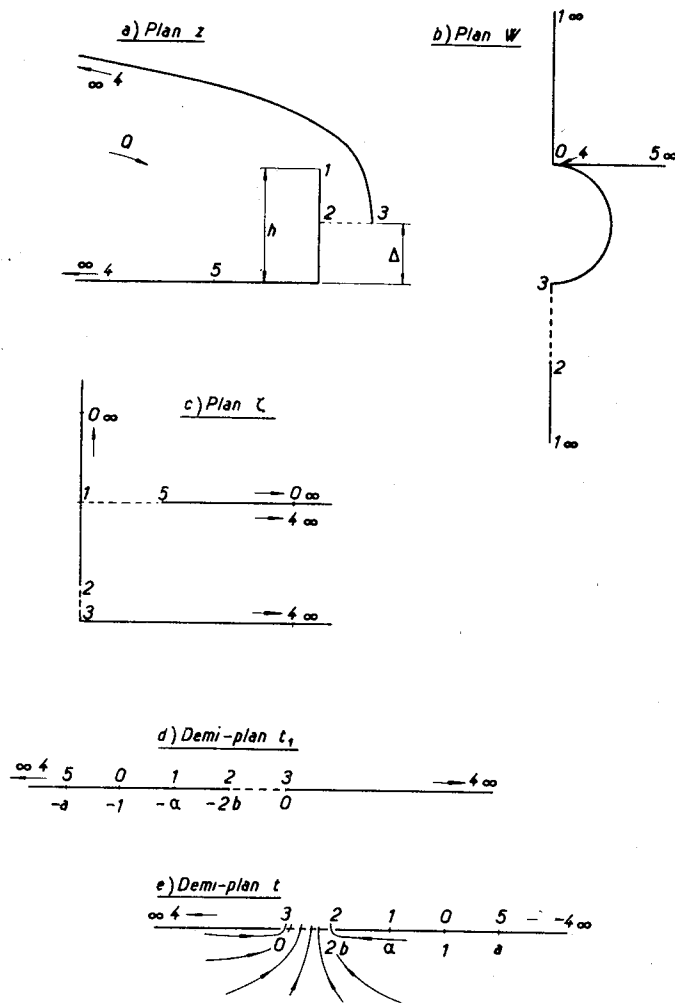


Fig. 34

3° un drain horizontal placé au niveau $y = \Delta$ dont la longueur utile l est inconnue *a priori*;

4° une surface libre dont la position est inconnue *a priori*, qui joint le point à l'infini à un point du drain.

L'écoulement est déterminé par quatre paramètres : le débit Q , le coefficient de Darcy K , la hauteur du barrage h et la cote du drain Δ . Les paramètres dépendent de deux grandeurs fondamentales : longueur et temps; on peut donc réduire les paramètres à deux nombres sans dimension.

En particulier, nous étudierons le problème où le drain est au niveau du fond imperméable. Dans de telles conditions, l'écoulement est défini par un seul paramètre sans dimension.

L'étude de l'écoulement vers un drain placé sur un fond imperméable pourra nous être, dans le cas présent, d'une grande utilité. Nous rappelons qu'il est intéressant :

1° d'utiliser des valeurs réduites de la vitesse et du débit $\left(V = \frac{V_{s^2}}{K} q = \frac{Q}{K} \right)$, ce qui revient à donner à K la valeur $K = 1$;

2° de diviser les longueurs par $q = \frac{Q}{K}$ afin d'obtenir des nombres sans dimension.

Le paramètre qui détermine l'écoulement que nous allons étudier ($\Delta = 0$) pourra donc s'écrire $\frac{h}{q}$.

B. — Solution théorique.

1. TRANSFORMATIONS.

Nous emploierons les mêmes transformations que dans le cas précédent (voir fig. 34) :

a) *Correspondance entre le plan z et le plan W , donnée par la relation (23).*

Les coordonnées des points dans le plan de W sont :

— point 0.....	$u = 0$	$v = 0$;
— point 1.....	$u = \infty$	$v = \infty$;
— point 2.....	$u = 0$	$v = v_2 > 1$;
— point 3.....	$u = 0$	$v = 1$;
— point 4.....	$u = 0$	$v = 0$;
— point 5.....	$u = u_5$	$v = 0$.

Le point 5 correspond à l'endroit où la vitesse est maximum, sur le fond imperméable (la vitesse étant nulle pour le point 4 doit passer par un maximum pour s'annuler de nouveau au point 0).

b) *Inversion par rapport au point 4 [elle est définie par (24)].*

Il est intéressant de remarquer que l'hodographe inverse de l'écoulement que nous considérons est voisin de l'hodographe inverse de l'écoulement vers un drain placé sur un fond imperméable. Nous verrons ci-dessous les raisons de cette similitude.

c) *Correspondance plan ζ — demi-plan t .*

Comme le domaine étudié est représenté dans le plan ζ par la même figure que dans le cas étudié au II C 1°, il est logique de ramener ce cas au cas précédent, afin d'utiliser au maximum les résultats des calculs déjà effectués.

Dans ce but, nous avons fait la transformation de Schwartz-Christoffel (II A 3) sur un demi-plan supérieur auxiliaire t_1 , les affixes et les exposants étant :

$$\begin{array}{lll} \text{point 5} & \text{exposant} = + 1; & \text{affixe} = - a; \\ \text{point 0} & \text{exposant} = - \frac{3}{2}; & \text{affixe} = - 1; \\ \text{point 3} & \text{exposant} = - \frac{1}{2}; & \text{affixe} = 0. \end{array}$$

La correspondance $\zeta = \zeta(t_1)$ est donnée alors par :

$$(75) \quad \frac{d\zeta}{dt_1} = G_1 t_1^{-\frac{1}{2}} (t_1 + 1)^{-\frac{3}{2}} (t_1 + a).$$

Faisons maintenant la transformation :

$$(76) \quad t = - t_1$$

et remplaçons t_1 par $-t$ dans l'équation (75). Nous aurons :

$$-\frac{d}{dt} = G_1 t_1^{\frac{1}{2}} \cdot i \cdot (t - 1)^{-\frac{3}{2}} \cdot (-i) \cdot (t - a) \cdot (-1),$$

d'où

$$(77) \quad \frac{d\zeta}{dt} = G_1 t^{-\frac{1}{2}} (t - 1)^{-\frac{3}{2}} (t - a).$$

L'équation (77) est identique à l'équation (27), ce qui nous permet d'écrire immédiatement l'intégrale :

$$(78) \quad \zeta = G_1 \left(2(a - 1) \sqrt{\frac{t}{t - 1}} + \ln \frac{\sqrt{t} + \sqrt{t - 1}}{\sqrt{t} - \sqrt{t - 1}} + G_2 \right).$$

Comme $\frac{d}{dt} > 0$ lorsque $t = m > a$, il s'ensuit que la constante G_1 doit être positive.

L'écartement entre les droites 3-4 et 4-5 étant 1, G_1 ne peut donc prendre que la valeur :

$$G_1 = \frac{1}{\pi},$$

D'autre part, pour $t = m = 0$, ζ doit être $-i$, comme le montre la fig. 34; donc $G_2 = 0$ et :

$$(79) \quad \zeta = \frac{2(a - 1)}{\pi} \sqrt{\frac{t}{t - 1}} + \frac{1}{\pi} \ln \frac{\sqrt{t} + \sqrt{t - 1}}{\sqrt{t} - \sqrt{t - 1}}.$$

Le logarithme doit se réduire à sa détermination arithmétique pour $t > a$. Il est essentiel de noter que (79) fait correspondre le domaine des plans ζ au demi-plan inférieur t .

Dans le demi-plan, le champ f est donné par l'équation :

$$(80) \quad f = f(t) = -\arg \operatorname{ch} \frac{t-b}{b} + \pi i,$$

qui ne diffère que par un signe de l'équation (34), du champ que nous avons étudié dans le chapitre précédent.

2. — INTÉGRATION.

a) Drain.

L'équation (38) devient ici :

$$(81) \quad \frac{x}{q} = \frac{l}{q} = \frac{1}{\pi} \int_{2b}^0 \zeta df = \frac{1}{\pi} \int_{2b}^0 i \eta \, id\psi = -\frac{1}{\pi} \int_{\psi=\pi}^{\psi=2\pi} \eta d\psi.$$

Dans ce domaine, $0 < m < 1$:

$$(82) \quad \eta = \frac{2(a-1)}{\pi} \sqrt{1-m} + \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{m} - 1.$$

En dérivant ψ :

$$(83) \quad \psi = \arccos \frac{m-b}{b} + \pi$$

et en introduisant la valeur obtenue ainsi que celle donnée par (82) dans l'équation (81), on obtient aisément :

$$(84) \quad \frac{l}{q} = -\frac{2(a-1)}{\pi^2} \ln \frac{1+\sqrt{2b}}{1-\sqrt{2b}} - \frac{4}{\pi^2} \Phi(\sqrt{2b}) + 1,$$

où $(\Phi \sqrt{2b})$, une des intégrales de Spence, est définie par l'équation (73).

b) Intégration le long de la ligne 0-1-2 figurant le barrage.

La dénivellation Δ est définie par l'intégrale :

$$(85) \quad \frac{y_1}{q} = \frac{\Delta}{q} = \frac{1}{\pi} \int_{\varphi=\varphi_0}^{\varphi=0} \eta \, d\varphi.$$

η est donné par l'équation (82) :

$$\varphi = -\arg \operatorname{ch} \frac{m-b}{b}; \quad d\varphi = -\frac{dm}{\sqrt{m^2-2bm}},$$

ce qui conduit à :

$$(86) \quad \frac{y_1}{q} = -\frac{2(a-1)}{\pi^2} \int_1^{2b} \sqrt{1-m} \frac{dm}{\sqrt{m^2-2bm}} - \frac{2}{\pi^2} \int_1^{2b} \arcsin \sqrt{m} \frac{dm}{\sqrt{m^2-2bm}} - \frac{1}{\pi} \int_{\varphi=\varphi_0}^{\varphi=0} d\varphi.$$

Soit, compte tenu de (54), (55) et (64) :

$$(87) \quad \frac{\Delta}{q} = \frac{2(a-1)}{\pi} + \frac{2}{\pi} \ln(1 + \sqrt{1-2b}) + \frac{\varphi_0}{\pi};$$

où φ_0 est le potentiel du point 0 défini par $m = 1, n = 0$:

$$(88) \quad \varphi_0 = -\arg \operatorname{ch} \frac{1-b}{b} < 0.$$

Pour le cas où le drain est au niveau du fond imperméable, il faut écrire la condition $\Delta = 0$, ce qui nous fournit une relation entre a et b :

$$(89) \quad \frac{2(a-1)}{\pi} = \arg \operatorname{ch} \frac{1-b}{b} - \frac{2}{\pi} \ln(1 + \sqrt{1-2b}).$$

c) *Hauteur du barrage h .*

L'intégrale qui nous permet de trouver la hauteur h du barrage est du même type que l'intégrale (85). Elle n'en diffère que par ses limites :

$$(90) \quad \frac{h}{q} = \frac{1}{\pi} \int_{\varphi=\varphi_s}^{\varphi=\varphi_1} \eta d\varphi.$$

Le potentiel φ_1 , qui correspond au point 1, peut être trouvé sachant que la vitesse y est infiniment grande. Pour ce point nous avons $\zeta = 0$, ou encore $\xi = 0, \eta = 0$, ce qui exige que le second membre de l'équation (82) s'annule. Nous en déduisons la condition :

$$(91) \quad \frac{2(a-1)}{\pi} = \frac{1 - \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{m_1}}{\sqrt{1-m_1}},$$

m_1 étant l'abscisse du point 1 dans le demi-plan. Le potentiel φ_1 est alors :

$$(92) \quad \varphi_1 = -\arg \operatorname{ch} \frac{m_1-b}{m_1}.$$

Les équations (89), (91), (92) nous permettent de trouver les valeurs de a, m_1 et φ_1 correspondant à une valeur donnée de b . Revenons à l'intégrale (90); nous avons :

$$(93) \quad \frac{h}{q} = -\frac{2(a-1)}{\pi^2} \int_1^{m_1} \sqrt{\frac{m}{1-m}} \cdot \frac{dm}{\sqrt{m^2-2bm}} - \frac{2}{\pi^2} \int_1^{m_1} \arcsin \sqrt{m} \frac{dm}{\sqrt{m^2-2bm}} \\ - \frac{1}{\pi} \int_{\varphi=\varphi_0}^{\varphi=\varphi_1} d\varphi$$

ou :

$$(94) \quad \frac{h}{q} = \mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2 + \mathcal{J}_3.$$

Les valeurs de ces intégrales sont :

$$(94a) \quad \mathcal{J}_1 = \frac{4(a-1)}{\pi^2} \left[\frac{\pi}{2} - \arctg \sqrt{\frac{m_1 - 2b}{1 - m_1}} \right];$$

$$(94b) \quad \mathcal{J}_2 = \frac{4}{\pi^2} \int_{m_1}^1 \frac{\arcsin \sqrt{m}}{\sqrt{m-2b}} d\sqrt{m} = \frac{2}{\pi} \ln(1 + \sqrt{1-2b}) - \frac{4}{\pi^2} \int_{2b}^{m_1} \frac{\arcsin \sqrt{m}}{\sqrt{m-2b}} d\sqrt{m};$$

$$(94c) \quad \mathcal{J}_3 = \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{\pi}.$$

d) Relation entre $\frac{l}{q}$ et $\frac{h}{q}$ pour le cas où le drain repose sur la couche imperméable.

La relation entre $\frac{l}{q}$ et $\frac{h}{q}$ a été déterminée à l'aide des équations (84), (89), (91), (92) et (94). La courbe de variation de $\frac{l}{q}$ en fonction de $\frac{h}{q}$ a été dessinée sur le graphique (fig. 35). Celui-ci comporte également les lignes :

$$c\pi = \frac{2(a-1)}{\pi} = f_1\left(\frac{h}{q}\right),$$

$$b = f_2\left(\frac{h}{q}\right),$$

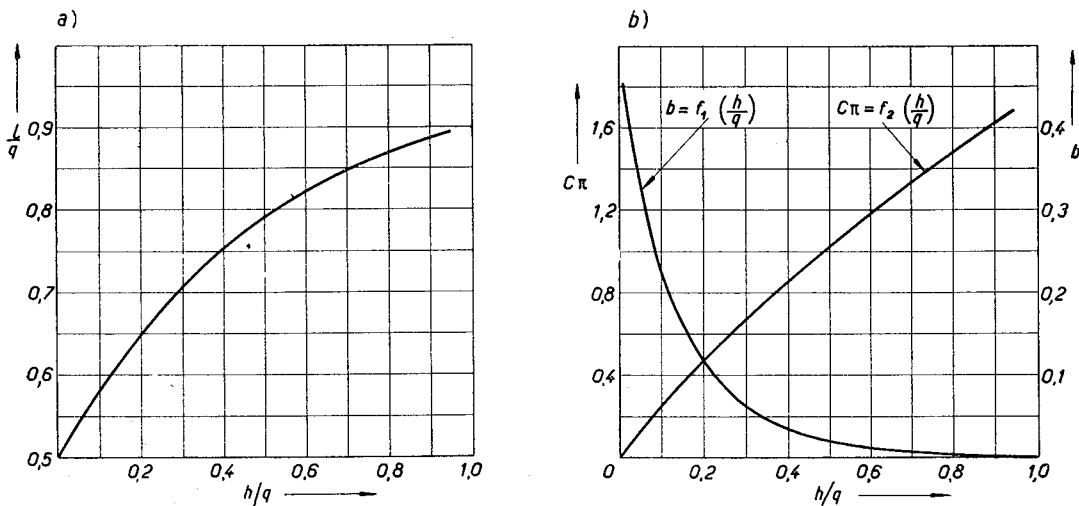


Fig. 35

qui lie les paramètres analytiques a et b aux paramètres hydrauliques.

Nous avons calculé, de plus, la valeur de la vitesse au point 2, soit à la naissance du drain, en fonction de l/q .

Nous avons enfin comparé la courbe $\frac{V_{max}}{K} = f\left(\frac{l}{q}\right)$ (K étant le coefficient de Darcy

et V_{max} étant la vitesse maximum au drain) à celle obtenue par analogie électrique, pour des conditions analogues.

La figure 36 montre que les deux courbes sont très proches l'une de l'autre.

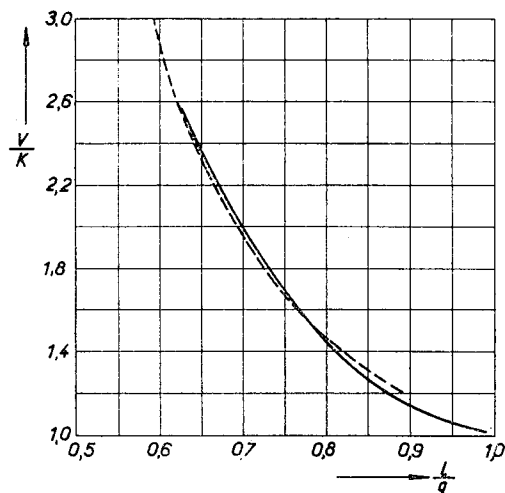


Fig. 36

3. — PROLONGEMENT ANALYTIQUE.

Il paraît, à première vue, étrange que les deux problèmes étudiés ci-dessus aient des solutions presque semblables. Nous expliquerons ici les raisons de cette similitude en démontrant que l'écoulement vers un barrage souterrain est voisin du prolongement analytique, à travers la surface libre, d'un écoulement vers un drain placé en amont d'un barrage.

Nous montrerons tout d'abord que la surface libre est analytique.

Sur la surface libre nous avons, en effet, la condition :

$$u^2 + \left(v + \frac{K}{2}\right)^2 = \frac{K^2}{4}.$$

Posons alors :

$$u - i \left(v + \frac{K}{2}\right) = u_1 - i v_1 = e^{-i\omega_1},$$

$$\omega_1 = \theta_1 + i \tau_1.$$

Sur la ligne libre nous avons :

$$u_1^2 + v_1^2 = \frac{K^2}{4} = e^{2\tau_1},$$

$$\tau_1 = \ln \frac{K}{2} = \text{Cte.}$$

La fonction τ_1 , et par suite ω_1 , est donc prolongeable analytiquement à travers la surface libre, c'est-à-dire son image dans le plan f , sauf peut-être en ses extrémités, car τ_1 est constant sur la ligne $\psi = 0$; le prolongement se fera par symétrie si l'on prend $\frac{K}{2} = 1$.

Rappelons qu'il n'y a que deux lignes frontières qui permettent des constructions simples : la droite, où le prolongement se fait par symétrie, et le cercle où le prolongement se fait au moyen d'une inversion par rapport au centre du cercle considéré. Il est commode, dans notre cas, d'opérer dans le plan de l'hodographe puisque la surface libre est représentée, dans ce plan, par un cercle de rayon $K/2$.

Considérons à nouveau la figure qui représente l'écoulement vers un drain et la figure de l'hodographe correspondant.

Dans le plan de l'hodographe, les frontières du domaine obtenu par le prolongement sont (fig. 37) :

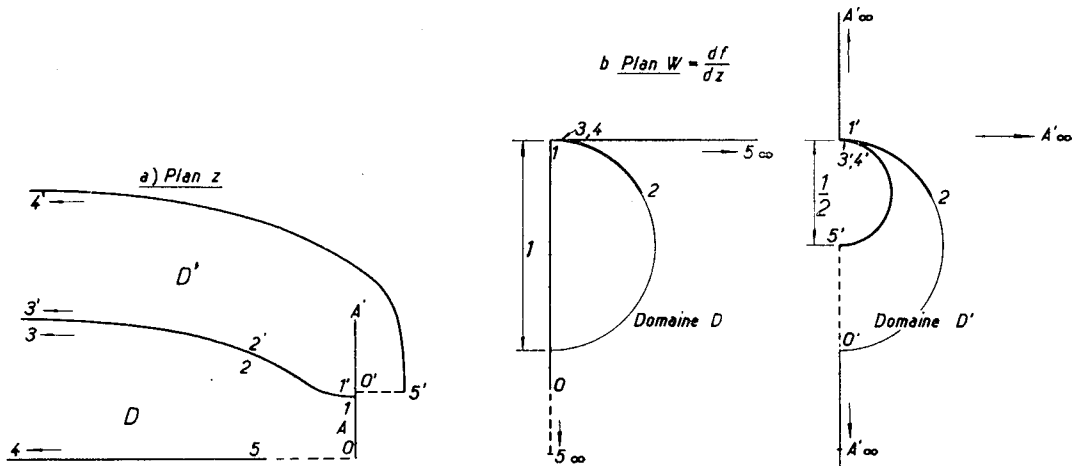


Fig. 37

- la ligne 4-5, qui représente le fond imperméable, devient le cercle de rayon $\frac{K}{4}$ (ou, avec des valeurs réduites, un cercle de rayon $1/4$);
- le drain devient $0' 5'$;
- la surface libre demeure inchangée;
- les points extérieurs au cercle deviennent intérieurs, et inversement;
- le centre du cercle, qui représente un point particulier de la paroi, part à l'infini (point A). Au point correspondant du plan initial (plan z), la vitesse est donc infiniment grande.

Il est maintenant facile de trouver l'ensemble du domaine prolongé dans le plan initial. La ligne $1' A$ doit représenter une droite verticale telle qu'en A une vitesse infinie. La ligne $A 0'$ doit être de nouveau une ligne droite verticale. Or, on a ici un barrage (palplanche). La ligne $0' 4'$ représente un drain horizontal. Le cercle $3' 5'$ représenterait la surface libre si le rayon était K ou 1 . Pour l'obtenir, il faut simplement effectuer une homothétie de rapport 2 dans le plan de l'hodographe. Le domaine prolongé donne bien l'aspect de l'écoulement vers un barrage souterrain.

L'ensemble de la figure comprenant l'écoulement initial et celui obtenu par prolongement, donne l'écoulement vers un barrage avec un drain amont et un drain aval. La moitié du débit déverse, l'autre moitié passe par le drain. Sur la ligne d'interface, qui est une ligne à pression constante, la vitesse est :

$$V = 2 K \sin \alpha;$$

α = la pente de la ligne d'interface.

D. — ÉTUDE DU PROBLÈME DANS LA CUVE A ANALOGIE

1. — ANALOGIE HYDRO-ÉLECTRIQUE

La résolution des problèmes de filtration par voie analytique nécessite, comme nous l'avons déjà vu, des conditions aux limites très simples (même dans le cas d'un écoulement plan, isotrope).

Si le plan de l'écoulement est plus compliqué, une solution exacte est pratiquement impossible. C'est alors qu'on doit avoir recours à des solutions approximatives, parmi lesquelles la méthode de l'analogie *hydro-électrique* occupe une position privilégiée. En effet, l'écoulement en milieu poreux isotrope (si les lois de filtration sont linéaires) et un champ électrique satisfont à la même loi de Laplace. Les correspondances entre grandeurs analogues seront définies par les relations suivantes :

POUR LE MILIEU POREUX	POUR LE CHAMP ÉLECTRONIQUE
$\vec{v} = - K \vec{\text{grad}} h$	$\vec{i} = - c \vec{\text{grad}} E$

où :

v = vitesse de filtration..... $\rightarrow$ i = densité de courant;
 K = coefficient de perméabilité $\rightarrow$ c = coefficient de conductivité;

$h = - \frac{\varphi}{K} = y + \frac{p}{\gamma} = \text{charge} \dots\dots \rightarrow E = \text{potentiel}.$

Nous illustrerons notre analogie par un exemple. Soit le cas d'un écoulement à travers une digue représentée sur la *figure 38*. Les lignes MN et PR sont des équipotentielles. Elles doivent l'être aussi dans le modèle électrique (M'N' et P'R' sont constitués par de bons conducteurs de section suffisamment importante pour que le potentiel soit constant et ne dépende pas du point de raccordement). Le fond imperméable MR (ligne de courant) est constitué, sur le modèle, par un isolant.

La ligne de suintement OP est caractérisée par $h = y$. Pour satisfaire à cette condition, il faut prendre, pour matérialiser Q'P', un conducteur de conductibilité moyenne ⁽¹⁾ et de section constante; de plus, il faudra fixer le point Q' de telle manière que Q' soit au même niveau que le point M.

(1) La conductibilité doit être petite par rapport à celle des électrodes et grande par rapport à celle des électrolytes.

La surface libre, comme une ligne de courant, doit être représentée par un isolant permettant des déformations, car sa position est inconnue, *a priori*, et la vérification de la loi $h = y$ (contrairement avec ce qui se passe à la ligne de suintement $O'P'$) ne peut être obtenue que par tâtonnements.

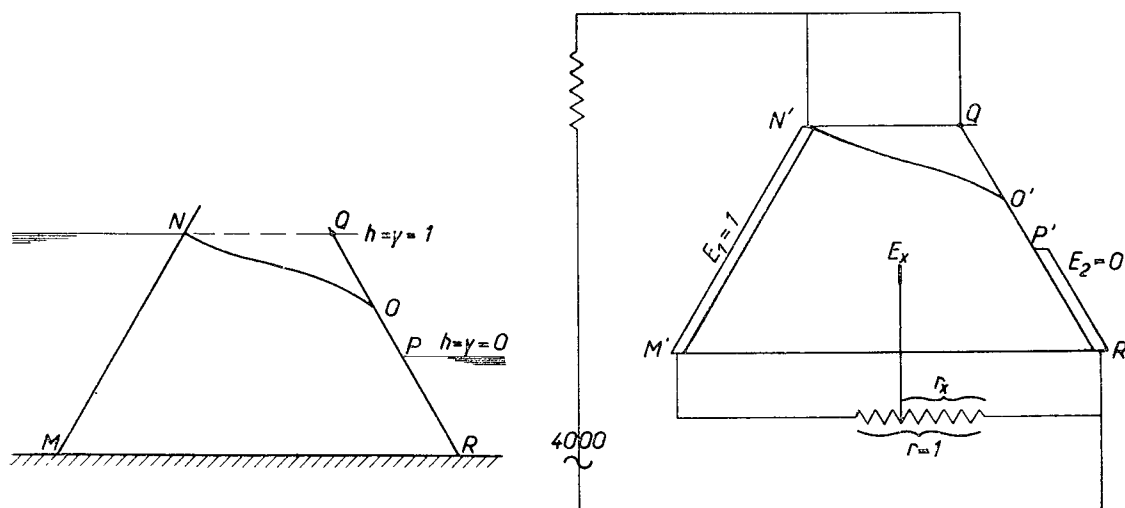


Fig. 38

Enfin, le corps même du barrage est constitué par un matériau conducteur ayant une conductivité assez faible (électrolytes, papier conducteur, etc.).

Nous rappelons que lorsque l'équilibre électrique est réalisé dans l'appareil, c'est-à-dire quand le galvanomètre indicateur est au zéro, il existe, entre les différentes grandeurs (potentiel, résistance), la relation :

$$\frac{E_x - E_2}{E_1 - E_2} = E_x = \frac{r_x}{r}.$$

Une ligne équipotentielle est le lieu géométrique des points obtenus de telle façon que :

$$\frac{r_x}{r} = \text{Cte.}$$

La cuve à analogie électrique permet l'étude d'un écoulement plan ou d'un écoulement de révolution. Nous utiliserons, dans l'étude qui suit, la première possibilité.

Le principe de la méthode d'analogie électrique est connu. Pourtant, de nombreuses difficultés peuvent compliquer l'application de cette méthode. Elles peuvent provenir :

- a) de l'appareillage utilisé;
- b) de la façon dont a été construit le modèle électro-dynamique;
- c) du mode de « prospection » du champ qui permettra la vérification de l'équation $h = y$ (surface libre).

A. — Appareillage.

La *figure 39* montre l'appareil du Laboratoire d'Hydraulique de l'Institut Polytechnique de Grenoble que nous avons utilisé. La partie électronique est constituée par un générateur basse fréquence et un voltmètre amplificateur. En effet, les courants continus et alternatifs (50 Hz) provoquent une polarisation des électrodes. Par contre,

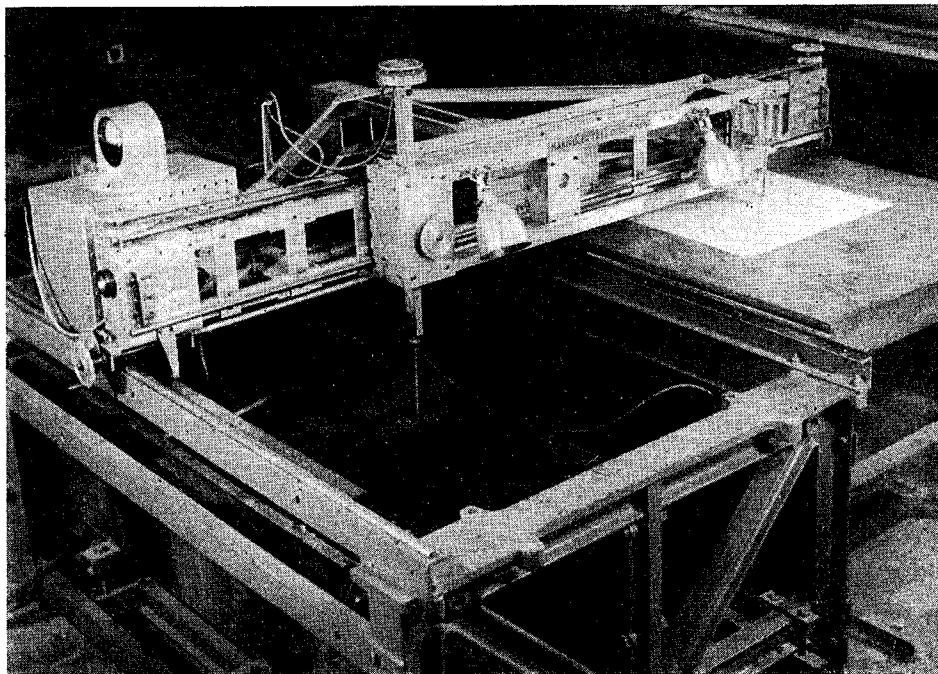


Fig. 39

avec les courants de fréquence supérieure, la diminution de la résistance capacitive rend l'exécution du modèle très difficile. La fréquence 5 000 adoptée pour l'appareil de l'Institut Polytechnique correspond à un compromis intéressant entre les divers avantages et inconvénients. La stabilisation électronique est très importante. Ce n'est qu'après une mise sous-tension de plusieurs heures qu'on peut espérer un régime de fonctionnement stable. Le contrôle et l'étalonnage du potentiomètre sont des opérations indispensables. La sonde est isolée sur toute la longueur, sauf à son extrémité qui est constituée par une boule de métal fondu de $\varnothing = 1$ mm.

Le système mécanique de l'appareil (voir *fig. 39*) permet le mouvement de la sonde dans trois axes rectangulaires et la transposition, suivant une échelle 1/1, du modèle électrodynamique sur un plan.

B. — Modèle électrodynamique.

Pour les deux cas étudiés (*fig. 40* et *44*) nous avons procédé d'une façon identique en projetant, sur un fond horizontal constitué par une plaque de verre, une tranche verticale du barrage étudié.

Les électrodes, constituées par du profilé d'aluminium en forme de U de 40 mm, étaient collées sur le verre même, à l'aide d'une mince couche de graisse. La propriété parfaite des électrodes a une grande importance; en particulier, on doit veiller à éviter l'oxydation et à éliminer les bulles gazeuses qui apparaissent, au bout d'un certain temps de fonctionnement, sur les surfaces immergées de ces électrodes; sinon, on risque d'obtenir un resserrement des équipotentiels au voisinage des électrodes.

L'électrolyte employé était de l'eau potable ordinaire suivant la profondeur de 30 mm (il est recommandé d'éliminer l'air dissous en faisant bouillir l'eau, par exemple). Le fond imperméable était constitué par une lame de plexiglas reposant sur une plaque de bois verni.

C. — Construction de la surface libre.

Le choix de la paroi déformable constituant la surface libre (*fig. 38*) est réputé comme un des problèmes délicats parmi ceux qui se posent à propos des études en analogie électrique. Divers procédés ont été utilisés : WYCKOFF et REED ont employé un papier conducteur (bristol enduit de douze à vingt couches d'Aquadaq); M. SOUSSA et HUARD DE LA MARRE ont employé le papier conducteur « Teledeltos ». Son emploi présente certains inconvénients :

1° le papier est très mince (la couche conductrice est de l'ordre de 0,1 mm). En admettant une tolérance faible de l'ordre de 0,01 mm, il faudrait considérer l'influence non négligeable du défaut d'homogénéité du papier, sur l'allure du champ;

2° les seules possibilités de variation de la surface libre sont celles qui sont permises par le découpage du papier.

Les résultats obtenus par HUARD DE LA MARRE ⁽¹⁾ à l'aide de ce procédé sont, malgré tout, très encourageants; en particulier, le débit obtenu dans le problème de la filtration à travers des digues à parois verticales ne différait, au maximum, que de 4 % du débit réel.

Dans nos essais, la paroi déformable représentant la surface libre était constituée par une bande de caoutchouc mousse de 3 mm d'épaisseur et de 30 mm de hauteur, collée au mastic à l'aide de la « vaseline jaune filante ». Dans les zones de forte courbure et au voisinage des électrodes, l'épaisseur du caoutchouc avait été diminuée pour obtenir une meilleure adaptation, la partie lisse étant placée vers l'intérieur du modèle.

Les déformations de la surface libre s'obtenaient aisément; la variation de la longueur de caoutchouc se faisait au niveau des points d'inflexion (la surface libre étant, en effet, constituée par différents segments se raccordant aux points d'inflexion).

2. — CAS ÉTUDIÉS DANS LA CUVE A ANALOGIE HYDRO-ÉLECTRIQUE

Nous avons étudié, par cette méthode, deux cas voisins des cas étudiés par les transformations conformes. Nous allons analyser succinctement les deux problèmes.

(1) HUARD DE LA MARRE. — *Nouvelles méthodes pour le calcul expérimental des écoulements dans les massifs poreux*. La Houille Blanche, n° A, 1953.

A. — Écoulement à travers une digue à noyau partiel imperméable ⁽¹⁾.

L'écoulement envisagé peut intéresser les techniciens au point de vue du fonctionnement du drain. En effet, à la naissance de celui-ci (point C de la *fig. 40*) la vitesse V dans le cas d'un barrage dépourvu de noyau imperméable, a une valeur théorique infiniment grande. Nous avons étudié cette vitesse en fonction de la hauteur h du noyau.

Simultanément, nous avons étudié la variation de deux paramètres caractérisant cet écoulement : le débit Q et la longueur utile du drain en fonction de la variation de hauteur h du noyau imperméable.

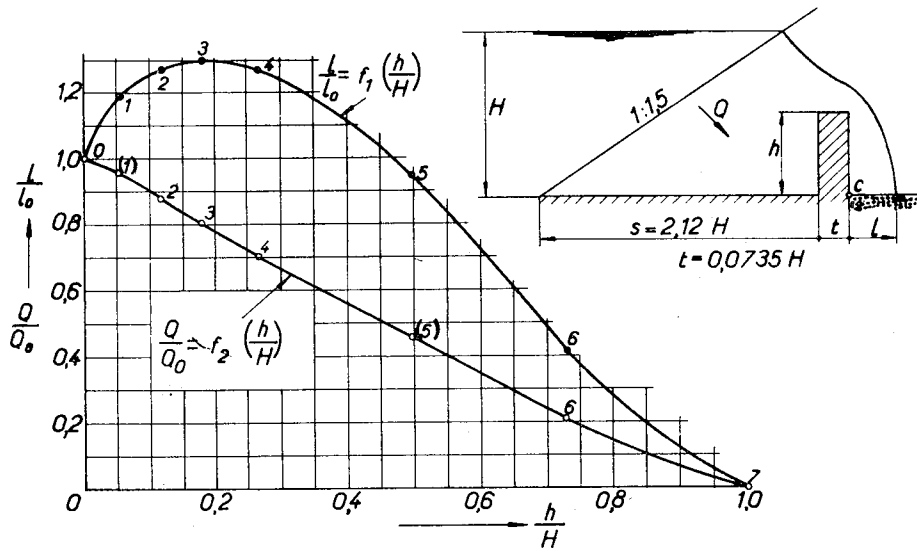


Fig. 40

Nous avons étudié sept cas, en prenant pour référence le cas $h = 0$, pour lequel nous avons prouvé que l'équation de Kozeny $Q_0 = 2 K l_0$ est satisfaite, avec une bonne approximation (l'erreur étant inférieure à 0,5 %) ⁽²⁾. Grâce à cette référence, nous avons rapporté le débit Q et la longueur utile du drain à Q_0 et à l_0 . La hauteur du noyau était comparée à la charge H . Ceci nous a permis de généraliser nos résultats. Ce processus se justifie d'autant plus que, dans notre étude, les paramètres s , α , t (dont la signification est précisée sur la figure; α étant l'angle fond-paroi amont; $tg \alpha = \frac{2}{3}$) étaient constants.

La *figure 40* donne le schéma de l'ensemble des cas étudiés et les courbes représentant Q/Q_0 et l/l_0 en fonction de h/H . On voit que Q/Q_0 diminue à peu près linéairement en fonction de h/H . Au contraire, l/l_0 passe par un maximum de l'ordre de 1,3 pour de faibles valeurs de h/H et décroît ensuite régulièrement jusqu'à zéro.

La *figure 41* donne les variations du rapport $\frac{V_{max}}{K}$ (K = coefficient de Darcy) en fonction de h/H . On voit que ce rapport, infini pour $h = 0$, diminue très rapidement et que, pour des valeurs de $h/H = 0,05$, il n'est plus que 2,58. L'intérêt du noyau partiel

(1) Remarque. — Pour obtenir l'écoulement traité par les transformations conformes, il faut prendre le noyau infiniment mince et rejeter la paroi amont de la digue à l'infini.

(2) Remarque. — Le taux d'erreur obtenu dans le cas $h = 0$ caractérise assez justement la précision de la méthode employée.

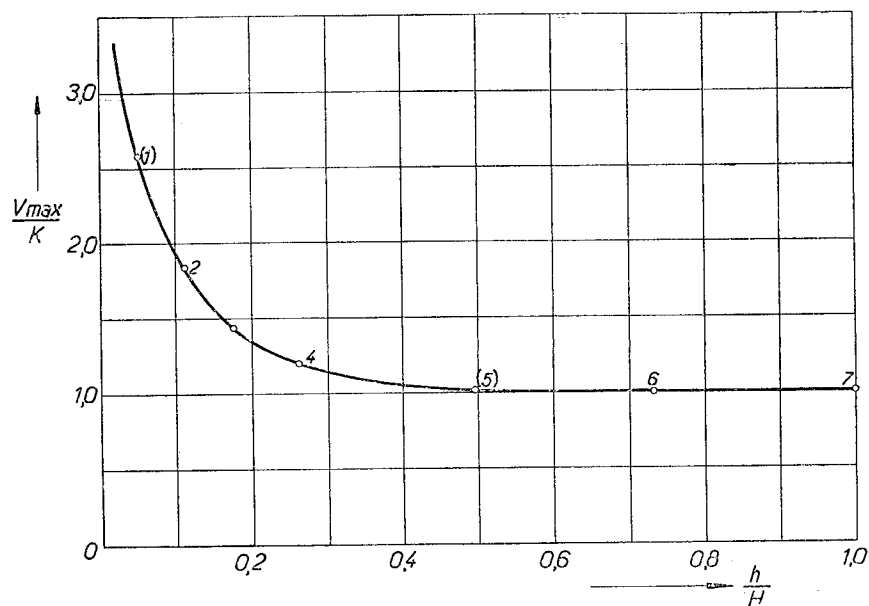


Fig. 41

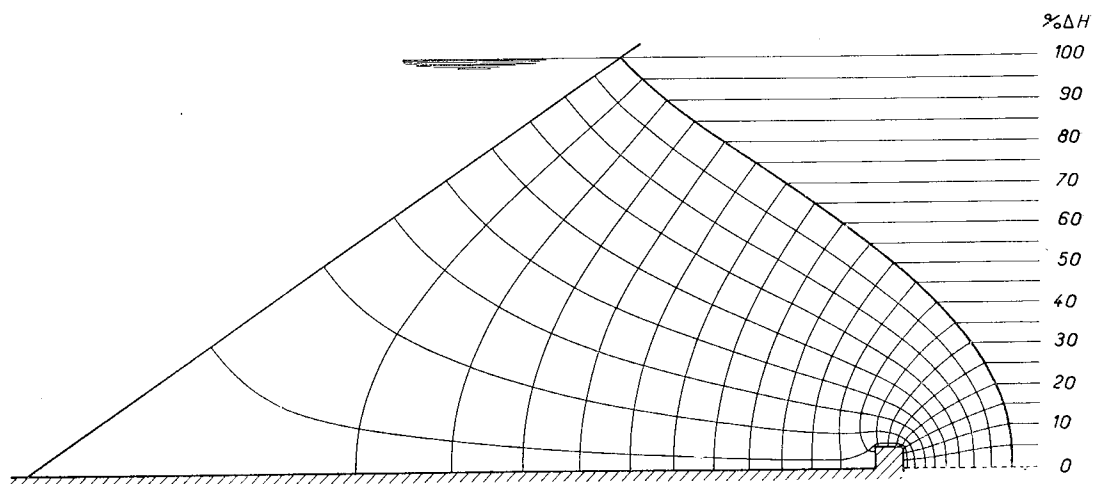


Fig. 42

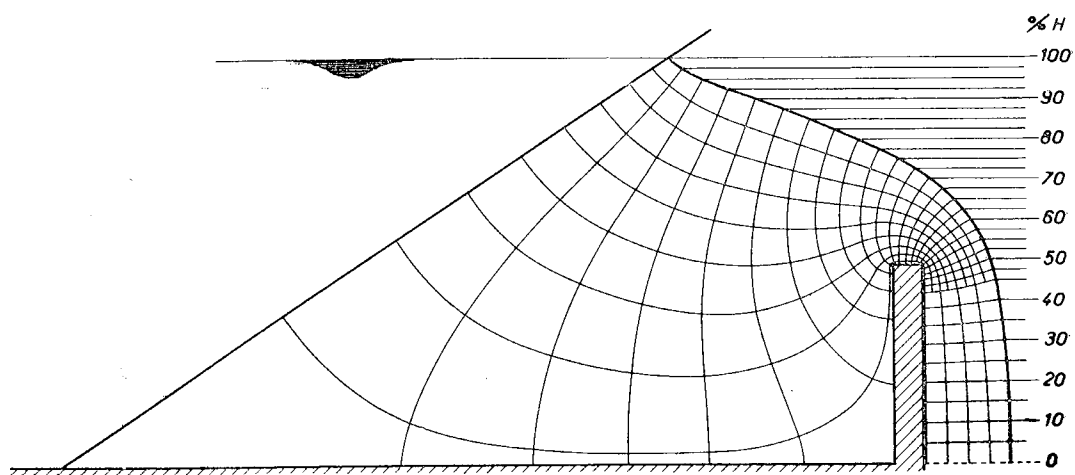


Fig. 43

de faible hauteur est considérable à ce point de vue. Signalons que ces résultats sont en accord avec ceux obtenus par les transformations conformes (fig. 36).

Pour deux cas ⁽¹⁾ (cas 1, fig. 42) et (cas 5, fig. 43), nous avons tracé des réseaux complets des lignes de courant et des lignes équipotentielles.

Pour d'autres cas, le réseau n'a été tracé que dans une partie de l'écoulement, dans le but de déterminer le débit. Connaissant le nombre des réseaux « n » compris entre deux lignes équipotentielles écartées de « ΔH », il est facile de trouver le débit suivant la formule :

$$\frac{Q}{K} = n \Delta H.$$

B. — Drain en amont du noyau imperméable ⁽²⁾ (fig. 44).

Les paramètres qui définissent l'écoulement sont H , s , α , l , K (coefficient de Darcy) et p_a (pression sur le drain). Ces valeurs dépendent de deux grandeurs fondamentales : longueur et temps; le problème est défini par quatre paramètres indépendants.

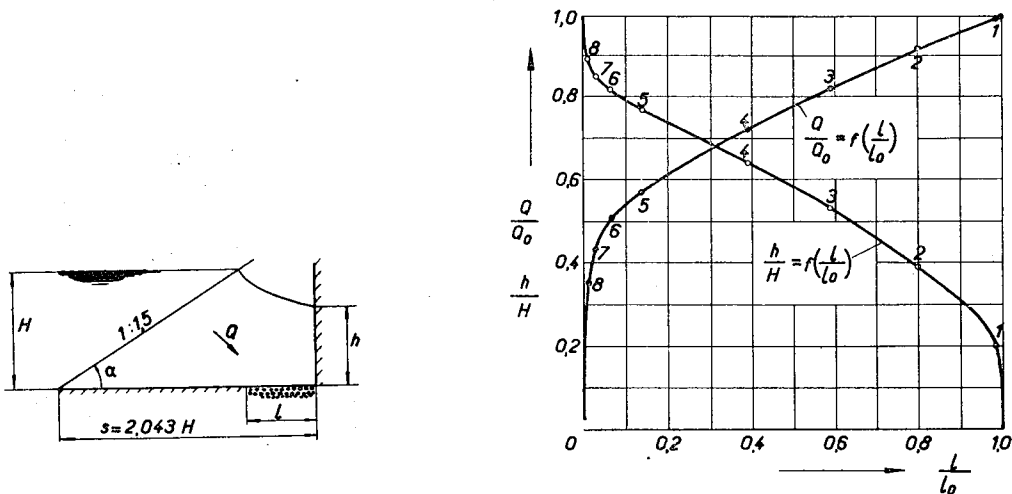


Fig. 44

Dans notre étude, nous avons supposé $p_a = p$ = pression atmosphérique, $\alpha = C^{te}$ et $s = C^{te}$; nous avons étudié les variations du débit et de la hauteur mouillée du noyau en fonction de la longueur du drain « l » (dont l'origine est fixée en permanence au noyau imperméable).

Le débit d'infiltration et la longueur du drain ont été représentés par leurs valeurs réduites, obtenues en les divisant respectivement par Q_0 et l_0 , valeurs qui correspondent au cas du débit et de la longueur du drain, choisies de telle manière que la surface libre atteigne le point commun au drain et au noyau imperméable. La figure 45 montre la manière suivant laquelle Q et l sont obtenus (dans ce cas, également, la relation $Q_0 = 2 K l$ a été vérifiée d'une manière satisfaisante). La hauteur mouillée du noyau était rapportée à la profondeur d'eau H en amont de la digue.

(1) *Remarque.* Le numéro de chaque cas est désigné par un chiffre entre parenthèses au voisinage des points expérimentaux des figures 40 et 41.

(2) *Remarque.* — Le type voisin où la paroi amont, rejetée à l'infini, a été étudié par les transformations conformes (chap. 3).

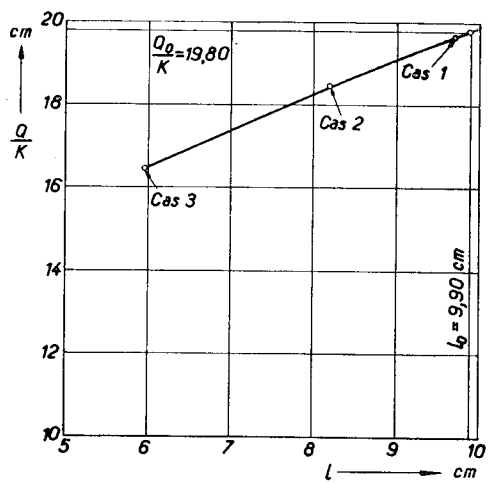


Fig. 45

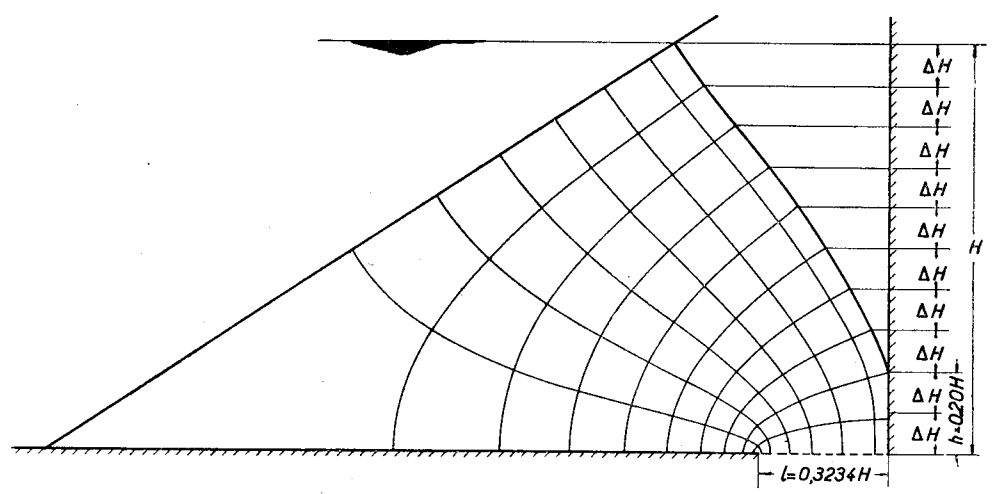


Fig. 46

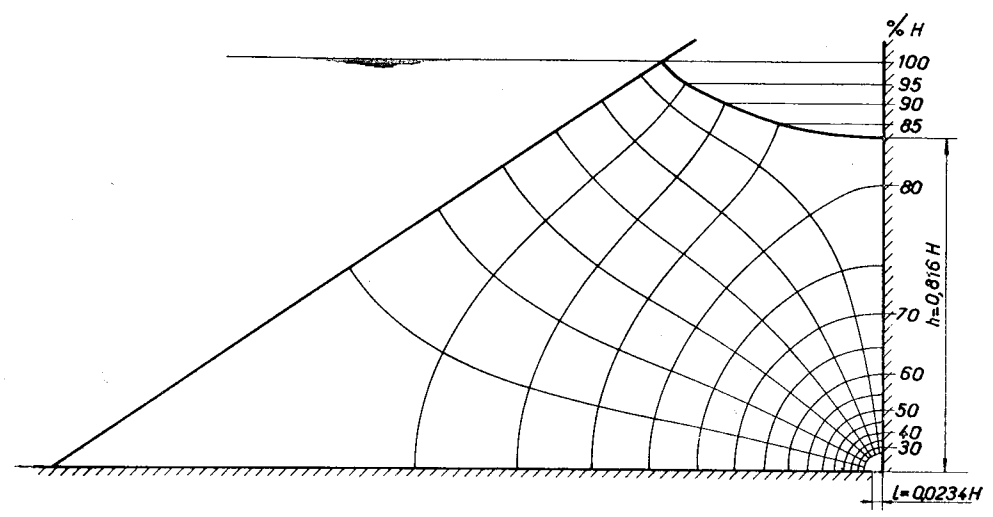


Fig. 47

Les principaux résultats sont consignés sur le diagramme de la *figure 44*. D'après ce diagramme, on voit que le débit reste important (ici, $Q_o = 0,64 \text{ KH}$) jusqu'à une longueur du drain très faible, la hauteur mouillée ayant toujours une valeur appréciable. Il en résulte que ce dispositif ne peut être employé pour un usage normal de la digue. Au contraire, l'allure des courbes Q/Q_o et h/H montre l'intérêt pratique de l'emploi d'un drain de secours de faible longueur pour exécuter une réparation sur le noyau. Signalons, par exemple, que la hauteur mouillée réduite atteint une valeur de 0,80 pour

$$\frac{l}{l_o} = 0,1 \quad (l_o = 0,33 \text{ H}).$$

Le diagramme réalisé, en supposant une pression atmosphérique sur le drain, peut être employé aussi avec une bonne approximation dans le cas d'un drainage forcé. On voit qu'en doublant le débit du drain pour $l/l_o = 0,1$ on peut faire en sorte que la surface libre n'atteigne pas le noyau imperméable, ce qui augmente l'intérêt pratique d'un drain de secours en amont du noyau imperméable. Dans les deux cas (cas 1, *fig. 46*) et (cas 6, *fig. 47*), nous avons tracé les réseaux complets des lignes de courant et des lignes équipotentiels.

TROISIÈME PARTIE

MÉTHODE DE RELAXATION
ET ÉCOULEMENT DE RÉVOLUTION

A. — APPLICATION DE LA MÉTHODE DE RELAXATION A L'ÉTUDE DE L'ÉCOULEMENT EN MILIEUX POREUX

1. — PRINCIPE DE LA MÉTHODE

La méthode de relaxation est une méthode pour résoudre, par approximations successives, les systèmes d'équations linéaires. On peut aussi l'utiliser pour la résolution numérique de problèmes aux dérivées partielles quand on a remplacé ces dérivées par des différences finies.

L'application de cette méthode à l'étude des écoulements est due à SOUTHWELL. Ses considérations sont fondées sur la notion de « membrane analogue » de Prandtl et sur la « net analogue » que nous exposerons par la suite. Nous montrerons que cette « net analogue » peut nous conduire à un résultat douteux. Dans ce qui suit, nous exposerons la méthode de relaxation d'une manière purement mathématique.

Prenons le cas le plus général d'une équation elliptique linéaire aux dérivées partielles du second ordre :

$$(1) \quad A(x,y) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + B(x,y) \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + C(x,y) \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + D(x,y) \frac{\partial z}{\partial x} + E(x,y) \frac{\partial z}{\partial y} + F(x,y)z + G(x,y) = 0.$$

Supposons que la fonction z soit une fonction analytique. En utilisant la formule de Taylor nous pouvons exprimer la fonction, au voisinage du point 0, au moyen des dérivées partielles de cette fonction (*fig. 48*).

De même, connaissant les valeurs de z pour les points qui entourent 0, on peut trouver par la même formule les valeurs approximatives des dérivées du premier et deuxième ordres.

Par exemple pour obtenir $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, on procédera comme suit :

$$z_2 = z_0 + a \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{a^2}{2!} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \frac{\partial^n z}{\partial x^n},$$

$$z_4 = z_0 - a \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{a^2}{2!} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-a)^n}{n!} \frac{\partial^n z}{\partial x^n},$$

d'où :

$$(2) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} (z_2 + z_4 - 2z_0) + \frac{2}{a^2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a^{2n}}{2n!} \cdot \frac{\partial^{2n} z}{\partial x^{2n}}.$$

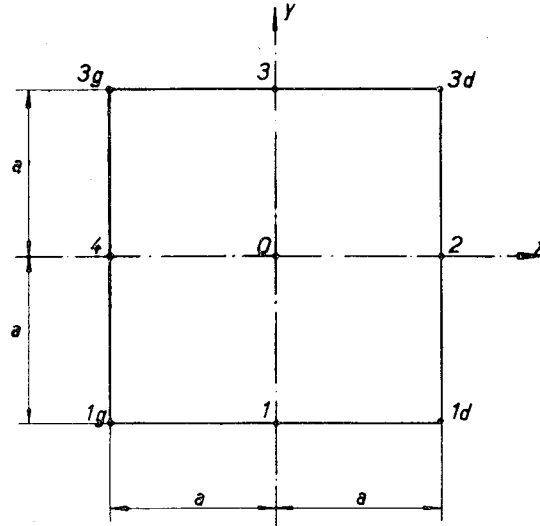


Fig. 48

Si l'on suppose que les contributions des dérivées d'ordre supérieur à deux (en occurrence trois) sont négligeables, nous obtenons :

$$(3) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} (z_2 + z_4 - 2z_0).$$

On trouve de même :

$$(4) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{a^2} (z_1 + z_3 - 2z_0);$$

$$(5) \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2a} (z_2 - z_4);$$

$$(6) \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2a} (z_3 - z_1);$$

$$(7) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{1}{4a^2} [z_{3d} - z_{3g} - (z_{1d} - z_{1g})].$$

Pour le point 0, on peut facilement trouver les valeurs de A (x_0, y_0), B (x_0, y_0)...

En les introduisant dans l'équation (1) avec les valeurs approximatives des dérivées [équat. (3) à (7)], on obtient :

$$(8) \quad \frac{A(x_0, y_0)}{a^2} (z_2 + z_4 - 2z_0) + \frac{B(x_0, y_0)}{a^2} (z_1 + z_3 - 2z_0) + \frac{C(x_0, y_0)}{4a^2} [z_{3d} - z_{3g} - (z_{1d} - z_{1g})] \\ + \frac{D(x_0, y_0)}{2a} (z_2 - z_4) + \frac{E(x_0, y_0)}{2a} (z_3 - z_1) + z_0 F(x_0, y_0) + G(x_0, y_0) = \varepsilon.$$

Si la valeur de z_0 est correcte, ε doit être extrêmement petit. Si elle ne l'est pas, l'équation aux dérivées partielles [équat. (1)] n'est pas satisfaite. Mais l'équation (8) nous donne en même temps la valeur de correction de z_0 pour annuler ε . La quantité $a^2\varepsilon = \Delta$ s'appelle habituellement « résidu ».

Supposons maintenant que nous devons résoudre le problème suivant : trouver les valeurs de z à l'intérieur d'un domaine (fig. 49). Le champ z satisfait à l'équation (1). Les valeurs de z sur le contour de D sont supposées connues. La solution de ce problème

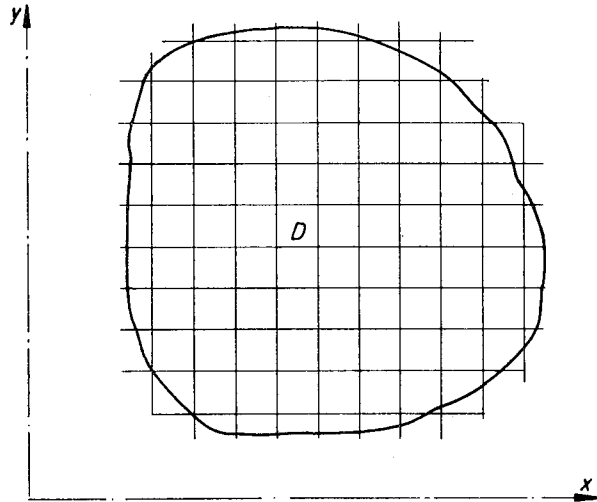


Fig. 49

peut être obtenue en utilisant l'équation (8) de la manière suivante, dite « de relaxation ». On couvre le domaine D par un réseau (normalement à mailles carrées), dans lequel les intersections des lignes entre elles constituent les nœuds du réseau.

Pour chaque nœud on essaie une valeur de z et l'on détermine Δ à l'aide de l'équation (8). Généralement, $\Delta \neq 0$. On corrige la valeur de z de manière à annuler Δ pour chaque nœud, suivant (8), en commençant par ceux qui ont des résidus les plus élevés. Pour toute variation de la valeur de z , on a une variation des résidus de tous les nœuds qui entourent le point défini par z_0 ; l'annulation de Δ dans tous les nœuds n'est obtenue qu'au prix d'approximations successives et longues. On a alors des valeurs approchées de z dans chaque nœud, donc la solution approximative du problème. On verra ci-après comment interviennent dans le calcul les conditions aux limites.

Nous ne continuerons pas dans ce chapitre l'analyse de la méthode de relaxation dans le cas général [équat. (1)] que nous avons exposé. Mais cette brève analyse permet déjà de voir :

1° la puissance de la méthode de relaxation. Toutes les équations elliptiques aux dérivées partielles linéaires du deuxième ordre à deux variables indépendantes peuvent être résolues par ce procédé. Il est évident que le plan x, y peut être tout à fait quelconque et qu'on peut prendre aussi bien comme variables indépendantes le temps, la vitesse, etc.;

2° les difficultés d'ordre technique que l'on pourra rencontrer en appliquant cette méthode à des problèmes concrets. En effet, on signale ⁽¹⁾ que certains écoulements

(1) *Applications of the relaxation technique in fluid mechanics*, by John S. Mc NOWN, EN YUN Hsu, and CHIA-SHUN YIH. Proceedings ASCE, July, 1953.

ne peuvent être déterminés par la méthode de relaxation qu'après quelques centaines d'heures de travail.

Le mécanisme de cette méthode n'est qu'imparfaitement rigoureux. Obtenir une précision donnée dans un minimum de temps, tel est le mobile de chercheurs utilisant la méthode de relaxation.

2. — APPLICATION DE LA MÉTHODE DE LA RELAXATION A L'ÉTUDE DE L'ÉCOULEMENT EN MILIEU POREUX

A. — Généralités.

Rappelons que, si la loi linéaire de filtration est valable, l'écoulement en milieu poreux satisfait à l'équation de Laplace ⁽¹⁾ qui devient pour un écoulement plan :

$$(9) \quad \nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$$

et, pour un écoulement de révolution ⁽²⁾ :

$$(10) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0.$$

Cette équation est du type de l'équation (1).

D'autre part, les conditions aux limites peuvent être exprimées soit par φ (lignes équipotentielles, lignes de suintement), soit par une expression renfermant φ (lignes de courant où l'on a, d'après l'équation I 14, $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$).

Nous concevons donc que la méthode de relaxation soit applicable à l'étude de l'écoulement en milieu poreux.

B. — Expression du résidu.

En appliquant les équations [(2), (4) et (5)], nous pouvons facilement obtenir l'expression du résidu pour un point à l'intérieur du champ dans le cas où les points 1-4 sont à une distance égale du point central 0 :

1° dans le cas d'un écoulement plan le résidu a pour expression :

$$(11) \quad \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 - 4\varphi_0 = a^2 \nabla^2 \varphi.$$

Les points 0-4 forment une étoile de relaxation ou simplement étoile, qui est régulière dans ce cas;

(1) *Remarque.* — Dans la suite, pour simplifier, on désignera sous nom de potentiel la valeur de la charge $h = \varphi/K$. Étant donné qu'il s'agit d'écoulement dans un milieu isotrope, aucune confusion n'est possible.

(2) *Remarque.* — Signalons que la fonction de courant ψ et le potentiel φ pour un écoulement de révolution ne sont pas harmoniques. C'est ainsi que nous aurons, pour ψ :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0.$$

2° dans le cas d'un écoulement de révolution nous avons :

$$(12) \quad a^2 \nabla^2 \varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 - 4\varphi_0 + \frac{\varphi_2 - \varphi_4}{2n}$$

ou :

$$n = \frac{r}{a} \quad (\text{fig. 50}).$$

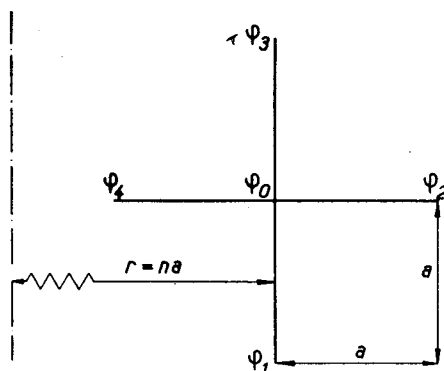


Fig. 50

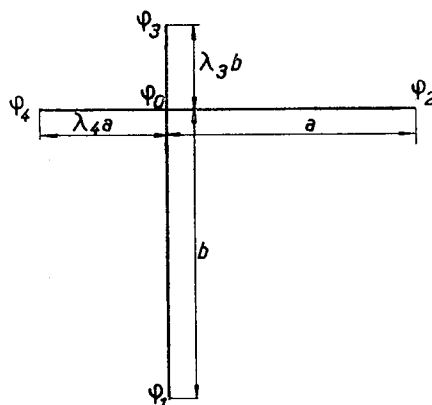


Fig. 51

C. — Étoiles irrégulières.

Étudions le cas où les quatre nœuds qui entourent le point central ne sont pas à la même distance de celui-ci. En appliquant la formule de Taylor nous obtenons facilement les expressions pour les résidus dans ce cas (fig. 51) :

1° l'écoulement plan :

$$(13) \quad a^2 \nabla^2 \varphi = \frac{2}{1 + \lambda_4} \left[\varphi_2 - \varphi_0 + \frac{\varphi_4 - \varphi_0}{\lambda_4} \right] + \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{2}{1 + \lambda_3} \left[\varphi_1 - \varphi_0 + \frac{\varphi_3 - \varphi_0}{\lambda_3} \right];$$

2° l'écoulement de révolution :

$$(14) \quad a^2 \nabla^2 \varphi = \frac{1}{1 + \lambda_4} \left[(\varphi_2 - \varphi_0) \left(2 + \frac{\lambda_4}{n} \right) + \frac{\varphi_4 - \varphi_0}{\lambda_4} \left(2 - \frac{1}{n} \right) \right] + \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{2}{1 + \lambda_3} \left[(\varphi_1 - \varphi_0) + \frac{\varphi_3 - \varphi_0}{\lambda_3} \right].$$

L'expression du résidu donnée par l'équation (13) ou (14) diffère sensiblement de la forme classique du résidu pour une étoile irrégulière qui, dans le cas d'un écoulement de révolution, serait :

$$(15) \quad a^2 \nabla^2 \varphi = (\varphi_2 - \varphi_0) + \frac{\varphi_4 - \varphi_0}{\lambda_4} + \frac{\varphi_2 - \varphi_4}{n(1 + \lambda_4)} + \frac{a}{b} \left[\varphi_1 - \varphi_0 + \frac{\varphi_3 - \varphi_0}{\lambda_3} \right].$$

À la base de l'équation (15) sont les notions de « membrane analogue » et « treillis analogue ». Nous allons rappeler rapidement les raisonnements qui y conduisent.

D. — **Membrane analogue et treillis analogue** ⁽¹⁾ (**net analogue**).

PRANDTL a imaginé une « membrane analogue » qui permet de donner à l'équation de Laplace, pour un écoulement plan, une signification mécanique. Désignons par ω un déplacement transversal d'un point d'une membrane continue, non pesante, ayant une tension par unité de longueur, uniforme T . Or, on peut alors montrer (ω étant infiniment petit) que si la membrane est en équilibre en absence de force transversale externe, l'équation suivante est satisfaite :

$$(16) \quad \nabla^2 \omega = 0.$$

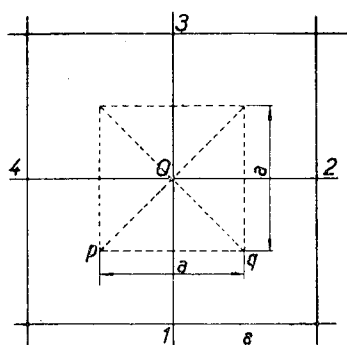


Fig. 52

Les solutions φ de l'équation de Laplace pour un écoulement plan et les solutions ω de l'équation (16) sont analogues. Remplaçons la membrane par un treillis (fig. 52). Le bras 0-1 subit une force égale à celle que subit la membrane le long de $p-q$, et de même pour des autres bras. La composante transversale de la force, qui prend naissance lors d'un déplacement relatif d'un point « n » par rapport au point 0, est proportionnelle à ce déplacement. L'équilibre, pour l'ensemble du treillis et pour ces déplacements, s'écrit :

$$(17) \quad \sum_1^n \Delta \omega = 0.$$

Si l'équilibre n'est pas réalisé, on doit introduire une certaine force, dite « force résiduelle » :

$$(18) \quad \sum_1^n \Delta \omega = \Delta.$$

Mais l'analogie permet d'écrire :

$$(19) \quad \sum_1^4 \Delta \varphi = \sum_1^4 (\varphi_n - \varphi_0) = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 - 4 \varphi_0 = \Delta.$$

Dans le cas d'une étoile irrégulière, le problème devient plus complexe. On peut admettre que le raisonnement par le « treillis analogue », qui nous conduit aux formules correctes exprimant les résidus dans le cas des étoiles régulières, est applicable aux étoiles irrégulières. L'équation d'équilibre d'un treillis à bras inégaux, dont les déplacements relatifs sont $\Delta \omega$, s'écrit :

$$\sum_1^n \frac{\Delta \omega}{\lambda_n} = 0, \quad \lambda_n = \frac{a_n}{a_1}.$$

Si l'analogie restait valable dans ce cas on aurait :

$$(20) \quad \sum_1^n \frac{\Delta \varphi}{\lambda_n} = 0 \quad \text{ou} \quad \sum_1^n \frac{(\varphi_n - \varphi_0)}{\lambda_n} = 0,$$

ce qui est équivalent, avec la formule (15), pour un écoulement plan ($n \rightarrow \infty$).

(1) R. V. SOUTHWELL. — *Relaxation Methods in Theoretical Physics*, Oxford, Clarendon Press, 1946.

Nous allons procéder rapidement à une comparaison des formules (13) et (20) (pour un écoulement plan) :

1° avec des mailles rectangles $a = \frac{b}{2}$, $\lambda_3 = \lambda_4 = 1$, nous trouvons :

— avec la formule (13), que $x^2 - y^2$ est harmonique;

— avec la formule (20), que $x^2 - 2y^2$ est harmonique;

2° avec une seule variable x , si $\lambda_3 = 0,5$ on trouve que $Y' = 2x$ a pour solution :

$$Y = x^2 \quad \text{si l'on applique la formule (13),}$$

et pour solution :

$$Y = \frac{3}{4} x^2 \quad \text{si l'on applique la formule (20).}$$

E. — Conditions aux limites.

Pour les cas où les limites sont des lignes équipotentielles $\varphi = C^{\text{te}}$ ou des lignes de suintement $\varphi = z$, la vérification de ces conditions est immédiate.

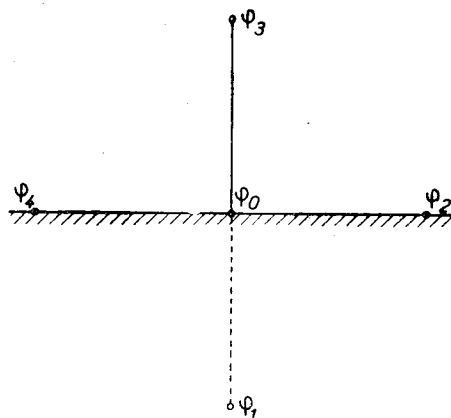


Fig. 53

Il en est différemment avec les lignes de courant pour lesquelles la vérification de la condition $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$ est plus délicate.

Pour le cas de la *figure 53* (si le nœud se trouve sur le fond imperméable); en faisant :

$$\lambda_4 = 1; a = b; \quad \frac{\varphi_1 - \varphi_0}{\lambda_1 a} \approx \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0,$$

dans (14), en y permutant les indices 1 et 3 et en prenant ensuite $\lambda_1 = 0$, on a :

$$(21) \quad a^2 \nabla^2 \varphi = \varphi_2 + \varphi_4 - 2\varphi_0 + 2(\varphi_3 - \varphi_0) + \frac{\varphi_2 - \varphi_4}{2n}.$$

Comparons ceci à la formule classique. Pour le cas de la *figure 53* elle donne :

$$(22) \quad a^2 \nabla^2 \varphi = \varphi_2 + \varphi_4 - 2\varphi_0 + (\varphi_3 - \varphi_0) + \frac{\varphi_2 - \varphi_4}{2n}.$$

Ce qui n'est pas en accord avec le résultat obtenu en appliquant le principe de prolongement par symétrie par rapport au fond imperméable. Ce dernier donne un résultat identique à celui donné par l'équation (21).

3. — RELAXATION TECHNIQUE

A. — Introduction.

Comme on l'a déjà indiqué, la méthode de relaxation est une méthode sûre mais qui exige un long travail. Quatre éléments conditionnent la durée de ce travail :

- 1° le nombre de nœuds;
- 2° le choix judicieux des valeurs du potentiel;
- 3° le procédé employé pour l'annulation des résidus;
- 4° dans le cas où une paroi n'est pas donnée *a priori* (surface libre), le temps nécessaire dépend du procédé utilisé pour rechercher la position définitive de cette paroi.

B. — Nombre de nœuds.

1. — GÉNÉRALITÉS.

Le travail et le temps nécessaire dépendent en grande partie du nombre de nœuds. Nous donnons certains renseignements généraux sur ce nombre ainsi que des indications qui permettent de diminuer le nombre de nœuds pour une précision donnée.

La méthode de relaxation n'est qu'une méthode approximative : en effet, en prenant $\sum_1^4 (\varphi_n - n \varphi_0)$ pour exprimer $a^2 \nabla^2 \varphi$ (pour un écoulement plan), on néglige la somme :

$$(23) \quad \Delta E = 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a^{2n}}{2n!} \left(\frac{\partial^{2n} \varphi}{\partial x^{2n}} + \frac{\partial^{2n} \varphi}{\partial y^{2n}} \right).$$

ΔE est d'autant plus grand, pour une longueur de maille donnée, que les dérivées d'ordre supérieur à 3 sont plus grandes. La méthode de relaxation doit donc rencontrer des difficultés au voisinage des points singuliers. Il en est de même pour un puits, où ΔE est :

$$(24) \quad \Delta E = K \left(\frac{a}{r} \right)^{2n} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n-1} \right).$$

Pour a donné, ΔE augmente en s'approchant du puits. En principe, la longueur de maille sera diminuée à l'approche des points singuliers et du puits. Le passage d'un réseau fin utilisé au voisinage des points singuliers, à un réseau plus grand, s'effectue par des étoiles irrégulières et c'est la raison pour laquelle une formule plus précise de résidus, dans ce cas, peut nous rendre de grands services.

Nous montrerons, sur un exemple, l'avantage de la formule (14) par rapport à la formule classique (15).

Le cas d'un puits artésien, où l'on connaît l'expression exacte du débit (équation de Dupuit), peut servir de point de comparaison. Supposons que φ_{n-1} et φ_{n+1} de la *figure 54*

soient des valeurs correctes; on peut alors calculer deux valeurs de φ qui satisfont respectivement les équations (14) et (15). En associant φ_{n-1} et φ_{n+1} avec les valeurs de φ_n obtenues dans chaque cas, il est possible de calculer q_1 , le débit par unité de longueur à travers une surface cylindrique de rayon $\left(n - \frac{1}{4}\right)a$ et q_2 , le débit à travers une surface cylindrique de rayon $\left(n + \frac{1}{2}\right)a$. Ces débits sont, en général, différents des valeurs correctes du débit q .

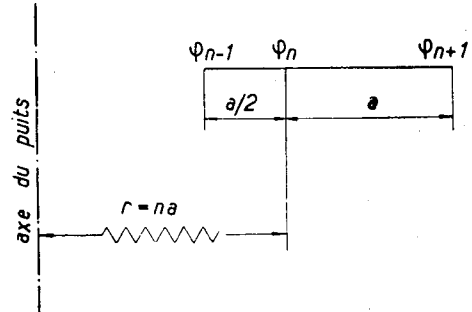


Fig. 54

Les valeurs absolues des erreurs q_1 et q_2 par rapport à q , si q_1 et q_2 sont calculés par l'équation (15), seront désignées par Δq_1 et Δq_2 et l'erreur moyenne par Δq . Les valeurs correspondantes, calculées par l'équation (14), seront désignées par $\Delta q'$.

Le tableau 1 montre l'avantage de l'équation (14). Pour une même erreur il nous faut un « n » beaucoup plus grand si l'on utilise l'équation (15) que si l'on utilise l'équation (14), ce qui veut dire que, dans le premier cas, il nous faut augmenter beaucoup le nombre de petites mailles.

TABEAU 1.

n	1	2	3	4	5	6
$\Delta q \%$	11,2	6,01	4,07	3,11	2,40	2,01
$\Delta q' \%$	11,2	2,65	1,20	0,72	0,43	0,33
$\Delta q'/\Delta q$	1,0	0,440	0,298	0,232	0,179	0,164

2. — ÉTOILES RECTANGULAIRES.

Dans le cas où les variations de la fonction inconnue φ sont susceptibles d'être beaucoup plus élevées dans une direction particulière, l'emploi d'un réseau rectangulaire, dont les longs bras sont dans la direction pour laquelle le gradient de φ est petit ou sensiblement constant, pourra être avantageux. On pourra ainsi réduire notablement le nombre de nœuds.

Quand nous opérons avec des étoiles rectangulaires, afin de préciser de plus en plus le potentiel, nous sommes conduits à augmenter le degré d'annulation du résidu, car les faibles différences de potentiel sont encore amplifiées dans le sens des longs bras. Mais, dans de telles conditions, l'avantage du faible nombre de nœuds disparaît devant le travail supplémentaire occasionné pour l'annulation des résidus dans ce cas.

C'est alors que l'on doit presque inévitablement utiliser périodiquement des étoiles régulières; le passage d'un système à l'autre est aisé dans le sens mailles serrées → mailles plus larges.

La réduction du nombre de nœuds, grâce à l'emploi des étoiles rectangulaires, peut être de l'ordre de 30 à 40 % (voir les cas du puits n'atteignant pas le fond imperméable étudié par la méthode de relaxation).

3. — POIDS CORRESPONDANTS.

Nous faisons ici une suggestion qui pourrait être très utile pour le traitement des points singuliers. La méthode consiste essentiellement dans l'introduction des poids correspondants à chaque bras. Cette méthode permet d'éviter un réseau trop fin au voisinage des points singuliers.

Dans la *figure 55*, qui représente l'écoulement autour d'un angle droit, on connaît le potentiel. Nous pouvons calculer les résidus aux points A, B et C. Pour chacun d'eux,

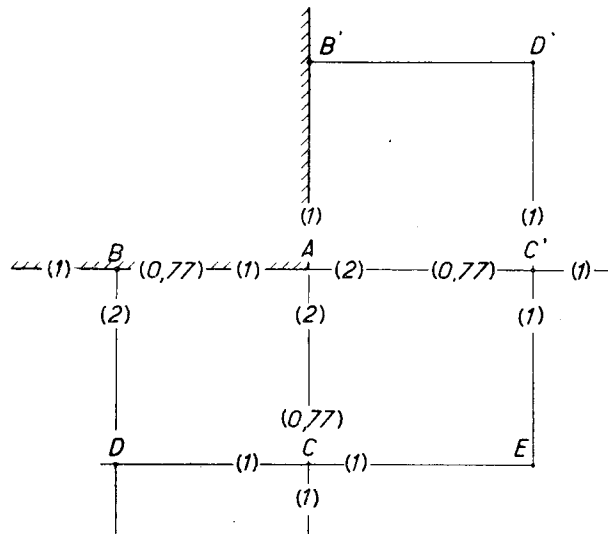


Fig. 55

cette différence provient, en grande partie, du bras qui contient la singularité. On peut trouver un certain poids correspondant pour ce bras, afin d'annuler le résidu. Pour le point B, la différence $\varphi_A - \varphi_B$ doit être multipliée par 0,77 au lieu de 1. Les poids correspondant aux bras pour les différents points sont notés, sur la *figure 55*, autour des points considérés.

En appliquant la formule de Taylor, nous assimilons la fonction φ à une forme polynomiale. Dans le cas de la méthode de relaxation, cette approximation se fait par des paraboles du type général :

$$(25) \quad \begin{cases} \varphi(r, z = C^{te}) = L_1 r^2 + M_1 r + N_1, \\ \varphi(r = C^{te}, z) = L_2 z^2 + M_2 z + N_2. \end{cases}$$

Nous avons à résoudre une équation de Laplace dans un certain domaine, connaissant la condition aux limites.

Puisque l'on sait que ce sont les limites les plus proches qui déterminent principalement la forme des lignes équipotentiels dans leur voisinage, le domaine ayant été divisé en plusieurs parties, on pourra déterminer approximativement la forme des lignes équipotentiels d'une de ces parties en ne tenant compte que de l'influence des conditions aux limites de cette partie.

Il est assez normal de penser à remplacer l'expression parabolique par une expression faisant intervenir les conditions spéciales au voisinage des limites de l'écoulement considéré.

En particulier, dans le cas d'un puits, cette expression, devant contenir un terme à allure logarithmique, pourra, dans le voisinage de la singularité, prendre la forme générale :

(26)
$$\varphi = Lr^2 + M \log r + N.$$

En posant :

$$K = \left(\frac{r_2}{r_0}\right)^2 - 1, \quad m = 1 - \left(\frac{r_4}{r_0}\right)^2,$$
$$l = \frac{\log \frac{r_2}{r_0}}{\log \frac{r_0}{r_4}},$$

on a :

(27)
$$a^2 \nabla^2 \varphi = 4 L a^2 = (\varphi_2 - \varphi_0) \left(\frac{a}{r}\right)^2 \frac{4}{K - ml} - (\varphi_0 - \varphi_4) \left(\frac{a}{r}\right)^2 \frac{4}{K/l - m}.$$

Pour le cas représenté sur la *figure 54* on a (tabl. 2) :

TABLEAU 2

<i>n</i>	1	2	3	4
<i>A_i</i>	1,7778	1,5788	1,5091	1,4628
<i>B_i</i>	1,7778	2,2255	2,3716	2,4443

C. — **Choix des valeurs préliminaires du potentiel.**

Il est évident que le processus d'annulation des résidus est d'autant plus facile que les valeurs essayées pour le potentiel sont déjà suffisamment approchées. La connaissance du champ dans les différents domaines d'écoulement, l'utilisation des différentes formules approximatives des écoulements en question ou des écoulements semblables, peuvent nous rendre des services extrêmement utiles. Nous donnerons plus de détails à ce sujet dans le cas particulier d'un puits n'atteignant pas de couche imperméable (III B 2).

D. — **Annulation du résidu.**

1. — **COEFFICIENTS DE CORRECTION (« Relaxation patterns »).**

Pour faciliter le travail de résidus, on emploie très souvent des « relaxation patterns ». Ce processus donne, en effet, la variation du résidu, si φ_n varie de 1.

L'équation (14) nous permet facilement d'obtenir tous les cas possibles. Les cas les plus fréquents sont désignés sur la *figure 56*.

2. — ANNULATION PAR MAJORATION (« Over relaxation »),

Si, dans un domaine de l'écoulement, tous les résidus sont de même signe, on doit s'attendre à ce que la correction du potentiel d'un nœud puisse être beaucoup plus importante que celle qui résulte de la formule (19) et l'on gagnera du temps en faisant des corrections très fortes.

3. — ANNULATION SIMULTANÉE (« Block relaxation »).

Si les résidus pour tous les nœuds placés sur une verticale ou sur une horizontale sont de même signe et sensiblement de mêmes valeurs, ils peuvent être annulés quelquefois d'une manière très simple. Nous le montrerons sur un exemple. Soit à étudier l'écoulement à travers un filtre à étranglement (*fig. 57*). Dans ce cas, pour commencer à éliminer les résidus au voisinage de l'étranglement en les accumulant vers la partie supérieure, supposons que, pour les nœuds placés au voisinage immédiat de cette limite, les résidus sont tous les mêmes et égaux à $-\Delta\varphi$. Pour les annuler, il suffit d'augmenter les valeurs du potentiel à l'entrée d'une valeur $+\Delta\varphi$. Dans le cas d'un écoulement à surface libre, le problème est un peu plus compliqué, mais, comme nous le verrons par la suite, c'est grâce à l'« Annulation simultanée » que nous avons pu obtenir des gains de temps importants.

4. — PASSAGE A UN RÉSEAU FIN.

Le processus d'annulation du résidu se poursuit généralement en même temps que la division du réseau. En effet, il est illusoire d'obtenir, au prix d'un long travail par la méthode de relaxation, un résidu très faible avec un gros réseau ou encore, ce qui est pire, de laisser un résidu important avec un réseau très fin. Les valeurs du potentiel, dans les nœuds supplémentaires créés en resserrant les mailles, peuvent être obtenues, dans le cas d'un écoulement plan, facilement en construisant un réseau incliné de 45° sur le réseau primitif (*fig. 58*).

Pour le cas de l'écoulement de révolution la manière la plus simple, à notre avis, est la suivante (*fig. 58*), le procédé de l'inclinaison du réseau n'étant pas valable :

— on obtient les valeurs de $\varphi_a, \varphi_b, \varphi_c, \varphi_d$ en utilisant une interpolation curviligne obtenue en traçant les courbes à potentiel suivant une verticale ou une horizontale. La valeur de φ_o peut être obtenue facilement en utilisant l'équation (12).

E. — Surface libre.

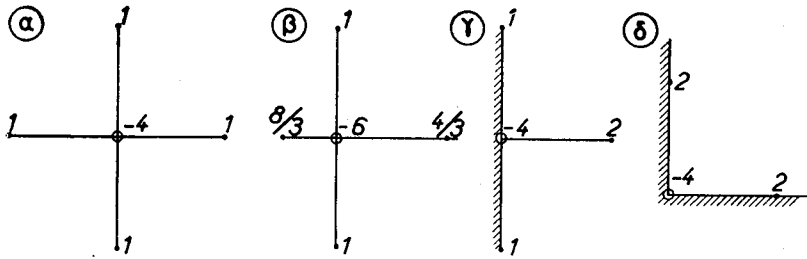
1. — INTRODUCTION.

La position de la surface libre n'est pas, *à priori*, connue et il faut la déterminer par tâtonnements, afin que le potentiel vérifie trois conditions :

— en tous points :

$$(28) \quad \nabla^2 \varphi = 0;$$

a) Ecoulement plan



b) Ecoulement de révolution

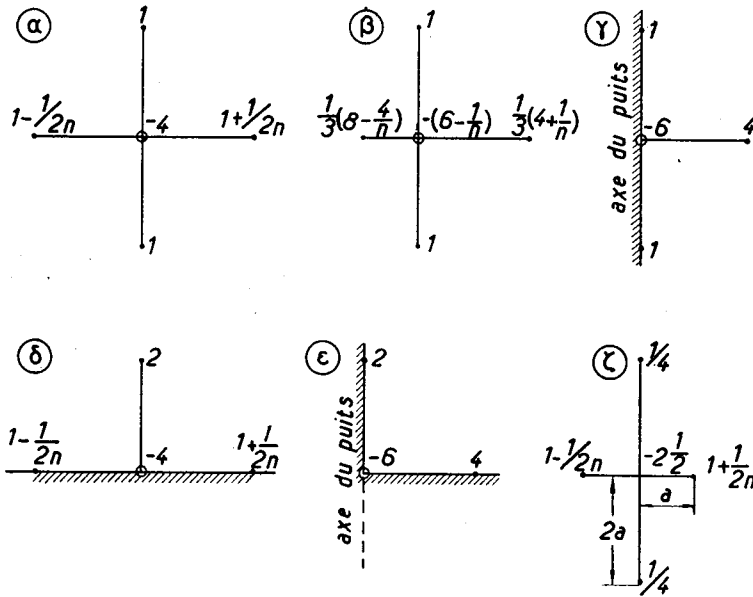


Fig. 56

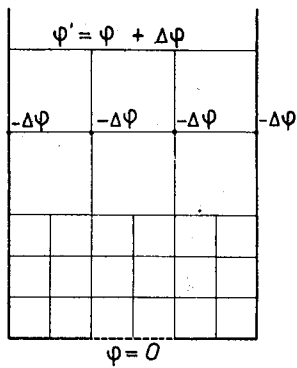


Fig. 57

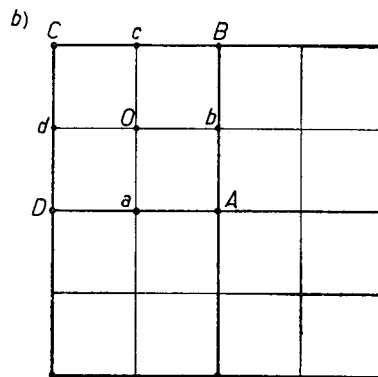


Fig. 58

— sur les lignes de courant :

$$(29) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0;$$

— sur la surface libre :

$$(30) \quad \varphi = z.$$

La méthode de tâtonnements offre trois possibilités :

- a) satisfaire les équations (28) et (29) et contrôler si l'équation (30) est vérifiée. C'est la méthode employée dans les cuves à analogie électrique;
 - b) satisfaire les équations (28) et (30) et contrôler si l'équation (29) est vérifiée (1);
 - c) satisfaire les équations (29) et (30) et contrôler si l'équation (28) est vérifiée.
- L'avantage de cette dernière méthode réside dans les points suivants :

- 1° le nombre de résidus à annuler est plus petit, car cette annulation n'a pas à être faite pour les nœuds situés au voisinage immédiat de la surface libre;
- 2° le sens de la variation de la surface libre est très visible.

2. — ÉTOILES AU VOISINAGE DE LA SURFACE LIBRE.

Pour satisfaire les équations (29) et (30), il suffit de prendre une valeur du potentiel pour un nœud au voisinage de la surface libre, égal à la cote d'un point placé au pied de la perpendiculaire abaissée de ce point sur la surface (*fig. 59*).

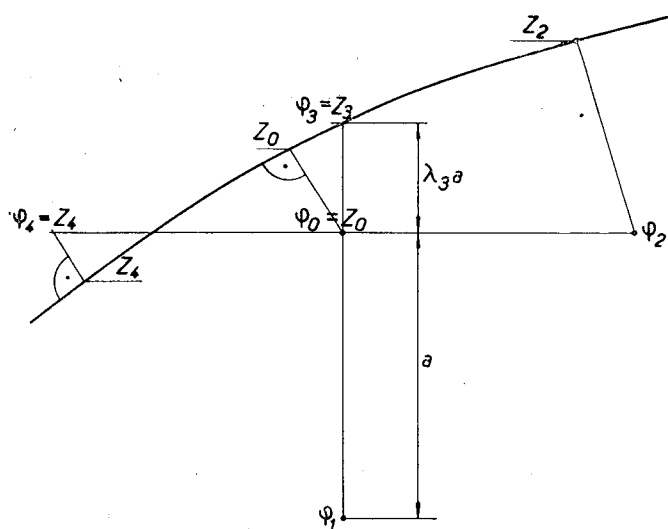


Fig. 59

Pourtant, il nous semble opportun de donner au sujet des étoiles, au voisinage de la surface libre, certaines indications supplémentaires. La surface libre, comme une limite curviligne, est caractérisée par la présence des étoiles irrégulières dont le traitement est toujours plus difficile. Il est possible de réduire sensiblement les irrégularités des étoiles si l'on tient compte du fait que la surface libre est analytique; on peut donc

(1) N. S. BOULTON. — *The flow Pattern near a gravity well in a uniform water-bearing medium*. Journal of the Institution of Civil Engineers, p. 548.

prolonger la fonction inconnue à travers cette surface. Ceci est spécialement intéressant dans le cas où la pente $\operatorname{tg} \alpha$ de la surface libre est assez faible. C'est alors que l'on peut introduire des nœuds fictifs placés en dehors de la surface libre.

Nous donnerons la forme de l'expression du résidu pour les nœuds placés au voisinage de la surface libre :

a) pour le cas représenté sur la *figure 59*, nous avons :

$$(31) \quad a^2 \nabla^2 \varphi = \varphi_2 + \varphi_4 - 2\varphi_0 + \frac{\varphi_2 - \varphi_4}{2n} + \left(\varphi_1 - \varphi_0 + \frac{\varphi_3 - \varphi_0}{\lambda_3} \right) \cdot \frac{2}{1 + \lambda_3};$$

en tenant compte que :

$$\frac{\varphi_3 - \varphi_0}{\lambda_3} = a \sin^2 \alpha,$$

nous aurons :

$$(32) \quad a^2 \nabla^2 \varphi = \varphi_2 + \varphi_4 - 2\varphi_0 + \frac{\varphi_2 - \varphi_4}{2n} + (\varphi_1 - \varphi_0 + a \sin^2 \alpha) \cdot \frac{2}{1 + \lambda_3};$$

b) pour le cas où le nœud est placé sur la surface libre, nous avons :

$$(33) \quad a^2 \nabla^2 \varphi = 2 \left(\varphi_1 + \varphi_2 - 2\varphi_0 + a \sin^2 \alpha - a \sin \alpha \cos \alpha + \frac{a \sin \alpha \cos \alpha}{2n} \right).$$

Pour tous les autres cas possibles qui peuvent apparaître au voisinage immédiat du puits, nous pourrions facilement d'après les formules (13) et (14), obtenir la forme du résidu.

Signalons, au sujet de la surface libre, un inconvénient supplémentaire de la formule (15). L'expression incorrecte du résidu fait varier dans un sens incorrect la position de la surface libre, car cette position doit être obtenue en annulant le résidu pour toutes les étoiles le long de la surface libre.

3. — RÉGLAGE DE LA SURFACE LIBRE.

La détermination la plus directe de la position de la surface libre est d'une extrême importance, car le temps nécessaire à cette détermination, est, peut-être, de l'ordre de 70 % du temps utilisé pour la solution complète du problème d'un écoulement à surface libre.

Supposons qu'on ait annulé les résidus partout, sauf pour les nœuds, au voisinage de la surface libre. Supposons, pour ces points, d'abord que le résidu ait même signe en tout point. Soit le point A fixe (*fig. 60*). Les résidus positifs montrent que les valeurs des potentiels, au voisinage de la surface libre, sont trop petites; pour les augmenter, il faut déplacer vers le haut la surface libre et, au contraire, si les résidus sont négatifs, il faut l'abaisser. Il s'agit, en l'occurrence, d'un type particulier d'annulation simultanée.

Remarques. — Le déplacement est beaucoup plus grand que celui donné par le résidu. La raison en est assez simple. Supposons qu'on ait l'élévation de la surface libre,

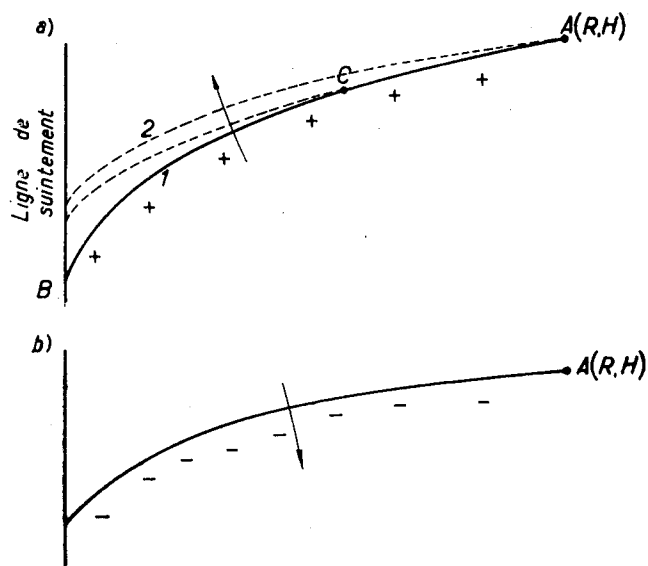


Fig. 60

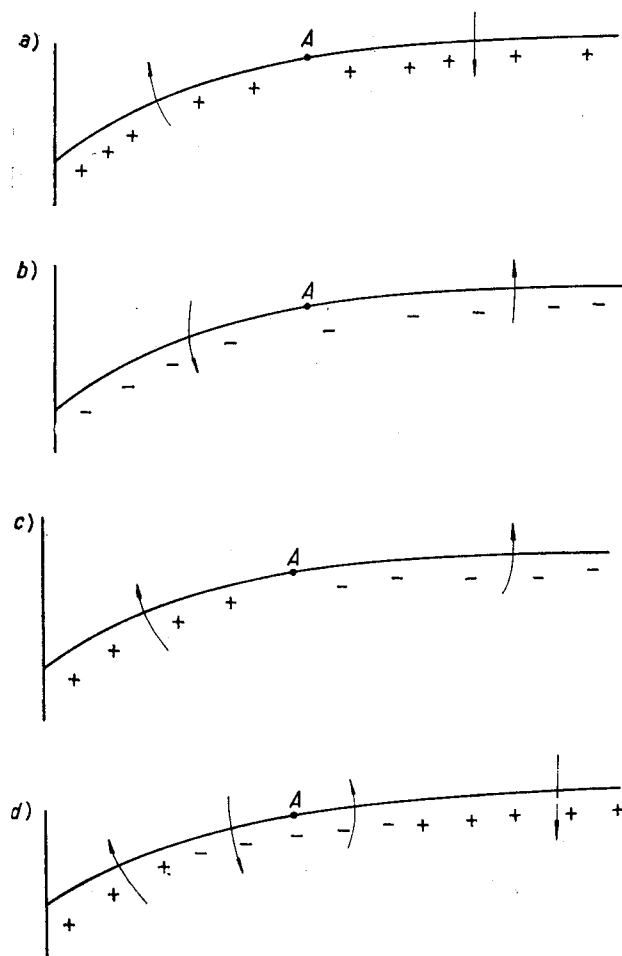


Fig. 61

dans le cas représenté sur la *figure 60*, en faisant une rotation autour du point C; l'augmentation du potentiel sur une limite crée une « vague de résidus » (positive, dans ce cas) qui exige que l'on augmente les valeurs du potentiel partout; pour annuler les résidus, il faudrait élever la surface libre beaucoup plus que dans le cas où CB demeurerait inchangé.

Nous verrons que, pour certaines études, il est intéressant de fixer le *point extrême* (point A de la *fig. 60*). Dans ce cas, il faudrait effectuer des déplacements très importants de la surface libre qui seront gênants. En effet, si les déplacements sont petits, ils retentiront seulement sur les nœuds placés à une faible distance de la surface libre. Au contraire, si les déplacements sont grands, ils auront une action à une distance plus importante. Ce sont les raisons pour lesquelles nous avons toujours fait les déplacements de la surface libre en la faisant pivoter autour d'un point qui se trouve à une distance moyenne. Les différents cas de la déformation de la surface libre, d'après les signes des résidus des nœuds placés à son voisinage, font l'objet de la *figure 61*.

B. — L'ÉTUDE D'UN PUITIS QUI N'ATTEINT PAS LE FOND IMPERMÉABLE

INTRODUCTION

Le problème du puits n'atteignant pas la couche imperméable est un problème qui passionne les hydrauliciens depuis fort longtemps. Citons parmi les plus connus : MUSKAT [1], THÉVENET [2] ⁽¹⁾, CLAVENAD [3], BROUCHON, POCHET et PORCHET [4], KOZENY [5], FORCHHEIMER [6] et BABOUSHKINE. Les travaux de tous ces auteurs ont abouti à une expression du débit en fonction du rayon du puits, de la distance du fond du puits à la couche imperméable et de la hauteur d'eau dans ce puits.

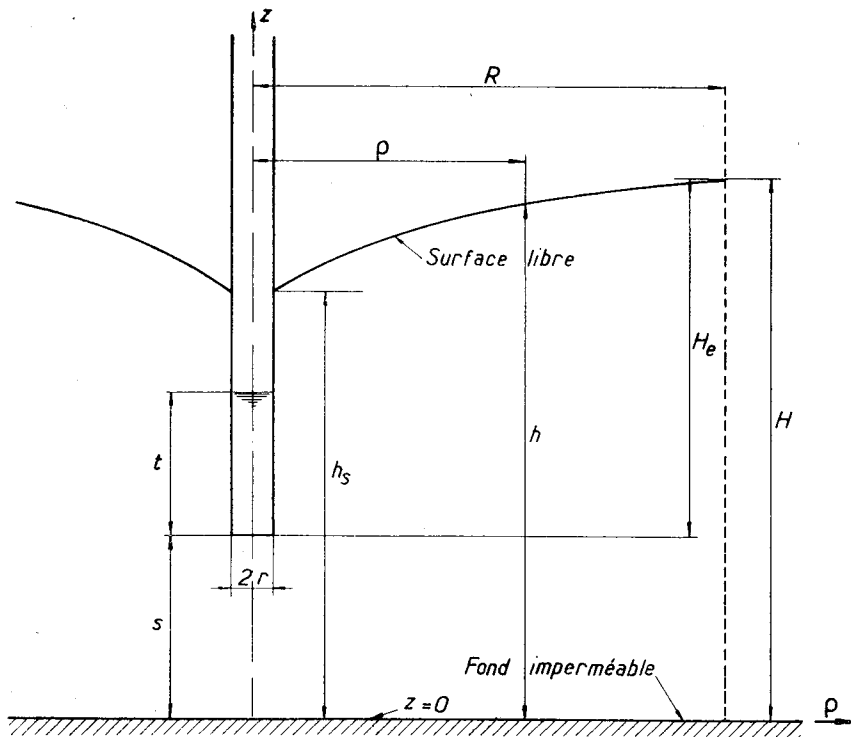


Fig. 62

Dans notre étude, nous nous sommes assignés deux buts principaux :

1° l'analyse critique des formules existantes (particulièrement celles de Kozeny et de Forchheimer, actuellement les plus utilisées), leur contrôle par référence à des

(1) Voir la liste bibliographique à la fin du chapitre.

points obtenus par la méthode de relaxation et, éventuellement, la recherche d'une formule nouvelle;

2° l'étude du problème de la surface libre au voisinage du puits; à notre avis, celle-ci n'a été jamais abordée, jusqu'à présent, avec suffisamment de rigueur.

Nos travaux ont été effectués aux Laboratoires de Mécanique des Fluides de l'E. N. S. E. H. de Grenoble, sous la direction du professeur Hunter ROUSE (1).

Les différents cas de puits ont été traités par la méthode de relaxation.

Dans III B nous avons exposé les principes généraux de la méthode de relaxation appliquée à l'étude des écoulements en milieu poreux. Dans ce qui suit nous exposerons, en particulier, cette application à l'étude du problème d'un puits n'atteignant pas le fond imperméable et, d'une façon plus générale, nous résumerons tous les résultats obtenus à ce sujet.

Nous avons divisé cette étude en deux parties :

1° dans une analyse préliminaire, nous montrons comment nous avons abordé le problème général;

2° nous commentons ensuite les résultats obtenus par la méthode de relaxation et la mise en équations de ces résultats.

Le schéma d'ensemble de l'écoulement est représenté sur la *figure 62* qui explicite les notations utilisées.

1. — ANALYSE PRÉLIMINAIRE

A. — Hypothèses de base.

1° le milieu poreux est isotrope, caractérisé par le coefficient de porosité k ;

2° la loi de Darcy est valable dans tout le domaine, donc l'écoulement dépend d'un potentiel satisfaisant l'équation de Laplace;

3° le fond et les parois latérales du puits sont perméables au liquide sans perte de charge;

4° la surface libre part d'un point de la paroi latérale du puits et rejoint le point à l'infini :

5° l'influence de la capillarité est négligeable.

B. — Analyse débit-surface.

1. — EXPRESSION DU DÉBIT ET DES COORDONNÉES DE LA SURFACE LIBRE EN FONCTION DES PARAMÈTRES ESSENTIELS DU PUITS.

Les paramètres t, s, r, k sont des données du problème. Si l'on connaît, de plus, un point (H, R) de la surface libre, l'écoulement est complètement déterminé. La surface libre peut donc être exprimée par une relation de la forme :

$$(1) \quad \Phi_1(t, s, r, k, H, R, h, \rho) = 0.$$

(1) Director Iowa Institute of Hydraulic Research, U.S.A.

Si la surface libre rejoint le point à l'infini, le couple des variables $H \rightarrow \infty$, $R \rightarrow \infty$ peut être remplacé par *un seul* paramètre, le débit Q , ce qui diminue de 1 le nombre des paramètres dans l'équation (1) :

$$(2) \quad \Phi_2(t, s, r, k, Q, h, \rho) = 0.$$

Nous désignerons les paramètres t, s, r, k, Q comme paramètres *essentiels* du problème. Le problème étant purement cinématique, l'écoulement dépend seulement de deux grandeurs fondamentales : longueur et temps. La relation (2) peut donc être représentée par une relation entre cinq paramètres sans dimension. Les combinaisons que l'on peut faire pour obtenir ces paramètres peuvent être quelconques. Pour l'instant nous pouvons écrire, par exemple :

$$(3) \quad \Phi_3\left(\frac{h}{\rho}, \frac{r}{s}, \frac{t}{s}, \frac{Q}{kr^2}, \frac{r}{\rho}\right) = 0.$$

Le but principal de notre étude sera de déterminer une équation du type (3), qui nous permettra de connaître le débit en fonction d'un point quelconque (h, ρ) de la surface libre.

Si l'on n'a pu obtenir une expression exacte de la surface libre, la valeur du débit doit changer suivant le point (h, ρ) choisi.

C'est ainsi que l'on peut montrer, par exemple, que, pour un puits allant jusqu'au fond imperméable, l'équation de Dupuit :

$$(4) \quad \frac{h^2 - l^2}{\ln \frac{\rho}{r}} = \frac{Q}{k\pi}$$

n'est pas valable au voisinage du puits. En effet, on peut tracer, par la méthode de relaxation, la surface libre et vérifier que la valeur du débit donnée par l'équation (4) en fonction de h et ρ , n'est pas constante.

Soit un second point, quelconque, (H, R) de la surface libre. On peut écrire l'équation de Dupuit :

$$(5) \quad \frac{H^2 - h^2}{\ln \frac{R}{\rho}} = \frac{Q}{k\pi}.$$

Pour un débit Q donné, (5) peut être envisagé comme l'équation de la surface libre passant par le point de référence (H, R) , le point (h, ρ) étant le point courant.

Plus on s'éloigne du puits, plus l'équation (5) devient exacte et l'équation de la surface libre, pour tous les écoulements de révolution, doit se réduire, à partir d'un certain rayon, à l'équation (5) qui devient donc, dans le cas le plus général, une limite des équations (1) et (3).

Posons dans l'équation (3) $h = H$ et $\rho = R$:

$$(6) \quad \Phi_3\left(\frac{H}{R}, \frac{r}{s}, \frac{t}{s}, \frac{Q}{kr^2}, \frac{r}{R}\right) = 0.$$

Les équations (3) et (6) nous permettent d'éliminer un paramètre, par exemple $\frac{t}{s}$. On a alors :

$$(7) \quad \Phi_4 \left(\frac{r}{s}, \frac{Q}{kr^2}, \frac{h}{\rho}, \frac{\rho}{r}, \frac{H}{R}, \frac{r}{R} \right) = 0,$$

qui a évidemment un paramètre de plus que l'équation (5).

Il est loisible de remplacer dans l'équation (7) $\frac{h}{\rho}$ et $\frac{\rho}{r}$ par $\frac{h}{\rho} \cdot \frac{\rho}{r} = \frac{h}{r}$ et $\frac{\rho}{r}$ (de même pour les autres termes), donc effectuer des groupements différents de paramètres sans dimension en multipliant ou en divisant les paramètres existants. C'est ainsi que l'on peut écrire l'équation (7) sous la forme :

$$(8) \quad \Phi_5 \left(\frac{r}{h}, \frac{r}{R}, \frac{s}{\rho}, \frac{Q}{kh^2}, \frac{H}{h}, \frac{\rho}{R} \right) = 0.$$

L'équation (8) se réduit à l'équation de Dupuit, si l'influence explicite de $\frac{r}{h}$, $\frac{r}{R}$ et $\frac{s}{\rho}$ devient négligeable. Dans de telles conditions :

$$(9) \quad \Phi_6 \left(\frac{Q}{kh^2}, \frac{H}{h}, \frac{\rho}{R} \right) = 0$$

est, en effet, l'équation de Dupuit sous la forme (5).

Comme nous l'avons déjà dit, le but principal de notre étude est d'obtenir une relation du type (3) pour l'expression de la surface libre et du débit.

Il est probable que cette relation doit être très compliquée. Aussi, le fait que nous connaissions *a priori* sa forme limite peut être d'une grande utilité.

Écrivons maintenant l'expression (3) sous une forme un peu différente :

$$(10) \quad \Phi_7 \left(\frac{t}{h}, \frac{s}{h}, \frac{r}{h}, \frac{Q}{kh^2}, \frac{\rho}{r} \right) = 0.$$

Appelons H_c une hauteur de référence correspondant à un rayon donné $R_c = Cr$, C étant une constante. L'équation (10) se simplifie :

$$(11) \quad \Phi_8 \left(\frac{t}{H_c}, \frac{s}{H_c}, \frac{r}{H_c}, \frac{Q}{kH_c^2}, C \right) = 0.$$

Supposons maintenant que le point H_c , R_c soit placé dans un domaine où l'équation de la surface libre s'exprime d'une manière simple, par exemple par l'équation (9) :

$$(12) \quad \Phi_6 \left(\frac{Q}{kh^2}, \frac{H_c}{h}, \frac{\rho}{R_c} \right) = 0,$$

où h et ρ sont les coordonnées d'un point de la surface libre dans le domaine considéré.

La relation (11) permet de calculer Q si l'on connaît r , s , t , H_c correspondant à R tel que $\frac{R_c}{r} = C$.

Par ailleurs, l'équation (12) nous permet de revenir en arrière, jusqu'à la valeur de H_e correspondant à R_e . La valeur de H_e portée dans (11) nous donnera le débit pour un point quelconque de la surface libre h, ρ .

En pratique, étant donné la complexité de la fonction (11), il sera plus commode de conserver l'ensemble des équations (11) et (12) sous une forme paramétrique, H_e étant le paramètre. Les relations (11) et (12) donnent ainsi la loi des débits et l'équation de la surface libre correspondante.

2. — CRITIQUE DES FORMULES CLASSIQUES.

Les formules de Forchheimer [6] :

$$(13) \quad \frac{Q}{k\pi} = \frac{H^2 - (t + s)^2}{2,3 \log \frac{R}{r}} \left(\frac{t + 0,5 r}{t + s} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2s + t}{t + s} \right)^{\frac{1}{4}}$$

et de Kozeny, où on pose $H_e = H - t$ (cf. fig. 62)

$$(14) \quad \frac{Q}{k\pi} = \frac{H_e^2 - t^2}{2,3 \log \frac{R}{r}} \left(1 + 7 \sqrt{\frac{r}{2H_e}} \cdot \cos \frac{\pi H_e}{2H} \right),$$

ne donnent qu'une expression tout à fait approximative de la surface libre sous la forme d'une équation du type (11), ce que l'on peut facilement voir en y posant $H = h$. En effet, l'étude nous a montré que, à partir d'une certaine abscisse, la loi de Dupuit est vérifiée avec une grande précision. Or, la formule de Forchheimer ne se réduit jamais à la formule de Dupuit; quant à la formule de Kozeny, elle attribue aux paramètres s, t , et r une influence trop importante au delà de l'abscisse où la loi de Dupuit est bien vérifiée.

On notera donc que l'équation de la surface libre ne peut pas, d'après ces formules, se réduire au type correct (9).

En admettant même que l'on puisse choisir un point autour duquel les équations de Forchheimer et de Kozeny soient bien vérifiées, la surface libre donnée par les formules et la surface libre réelle présenteront un écart en un point assez éloigné du point R_e, H_e , écart qui est une fonction du point de référence. Or, les auteurs n'ont pas indiqué les valeurs qu'ils ont choisies pour R_e et H_e .

Par conséquent, *la précision des formules de Kozeny et de Forchheimer doit varier suivant la position du point de référence.*

3. — RAYON D'INFLUENCE.

Le schéma de l'écoulement que nous avons traité (écoulement dans une nappe souterraine avec un fond horizontal et imperméable) est incompatible avec la notion de rayon d'influence.

Pour les nappes souterraines cette notion n'est concevable que dans les cas d'écoulements sur fonds ayant une pente positive.

Dans ce cas, la zone d'influence est définie par un rayon variable délimitant ainsi une zone grossièrement ellipsoïdale.

Dans le cas d'un écoulement non permanent sur fond horizontal cette zone peut être circulaire, mais elle variera en fonction du temps.

Les deux cas envisagés étant courants dans la pratique, il sera d'un grand intérêt

de ramener notre schéma d'écoulement à l'un deux. Cette assimilation sera permise grâce au fait qu'à une distance assez grande du puits tous les écoulements de révolution à surface libre satisfont pratiquement à la loi de Dupuit.

Deux écoulements de révolution ayant le même débit sont identiques à une distance suffisamment grande. Pour le puits $s = 0$ il a été démontré que la zone d'influence est assez étendue pour pouvoir admettre la validité de l'équation de Dupuit pour un écoulement voisin ayant le même débit.

C. — Choix des points pour la méthode de relaxation.

Nous allons entreprendre l'étude du puits en utilisant les équations paramétriques de la surface libre et en fixant $R_e = 112 r$.

Le problème complexe du puits n'atteignant pas le fond imperméable ne peut être résolu, dans l'état actuel de l'analyse, par la théorie pure. Seules, des méthodes expérimentales, ou de calculs approchés, peuvent nous fournir des résultats. La construction du réseau relatif à un point donné, dans le système d'axes des trois variables indépendantes adimensionnelles, demande un long travail.

C'est pourquoi nous avons cherché à limiter le nombre des points, tout en explorant le plus grand domaine possible. Nous avons pu, par une analyse des phénomènes de l'écoulement, nous contenter de sept points répartis sur une étoile à trois branches (méthode dite du « Cube »). Nous avons consigné dans le tableau I les caractéristiques concernant les cas expérimentaux retenus.

TABLEAU I

Cas traités par la méthode de relaxations

1	2	3	4	5
Cas	r	t	s	H_e
N°	mm	mm	mm	mm
1	10	0	120	452,8
2	10	80	120	462,6
3	10	160	120	458,4
4	5	80	120	461,5
5	20	80	120	467,0
6	10	80	240	461,0
7	10	80	10	460,0
8	10	80	0	460,0

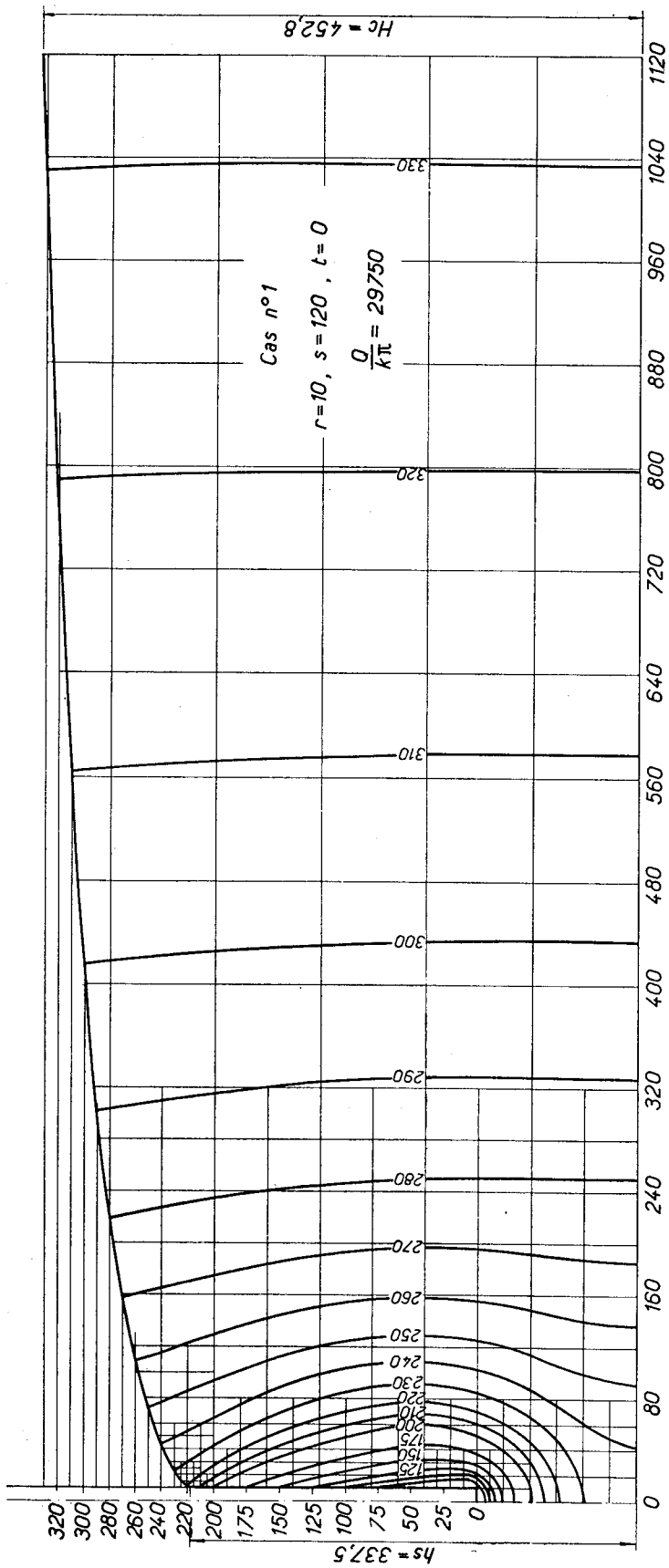


Fig. 63

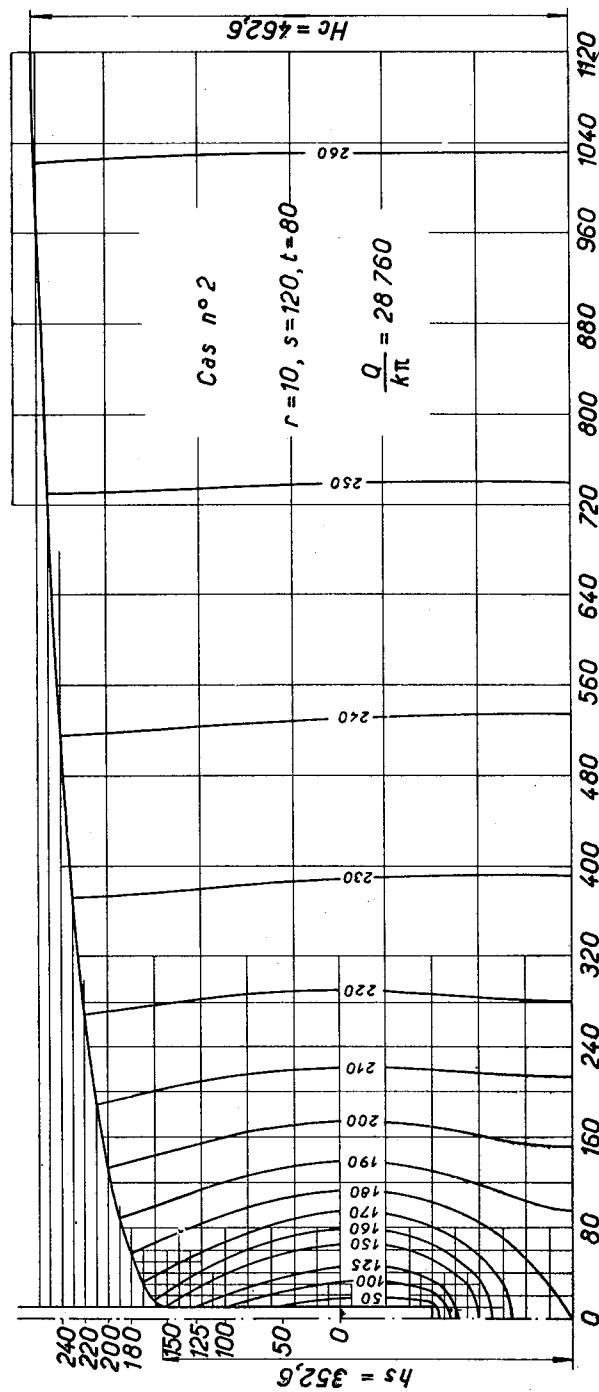


Fig. 61

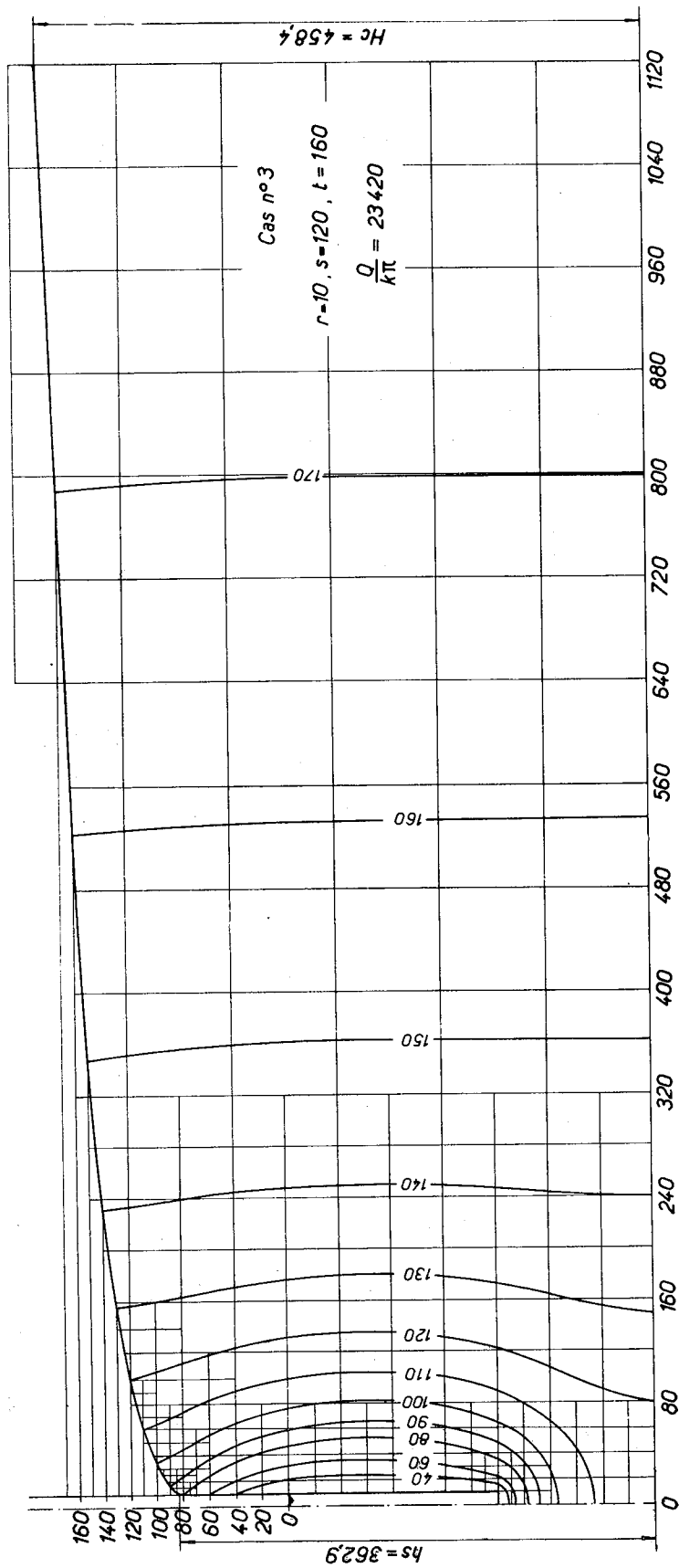


Fig. 65

Cas n° 4

$r=5, s=120, t=80$

$\frac{Q}{k\pi} = 27600$

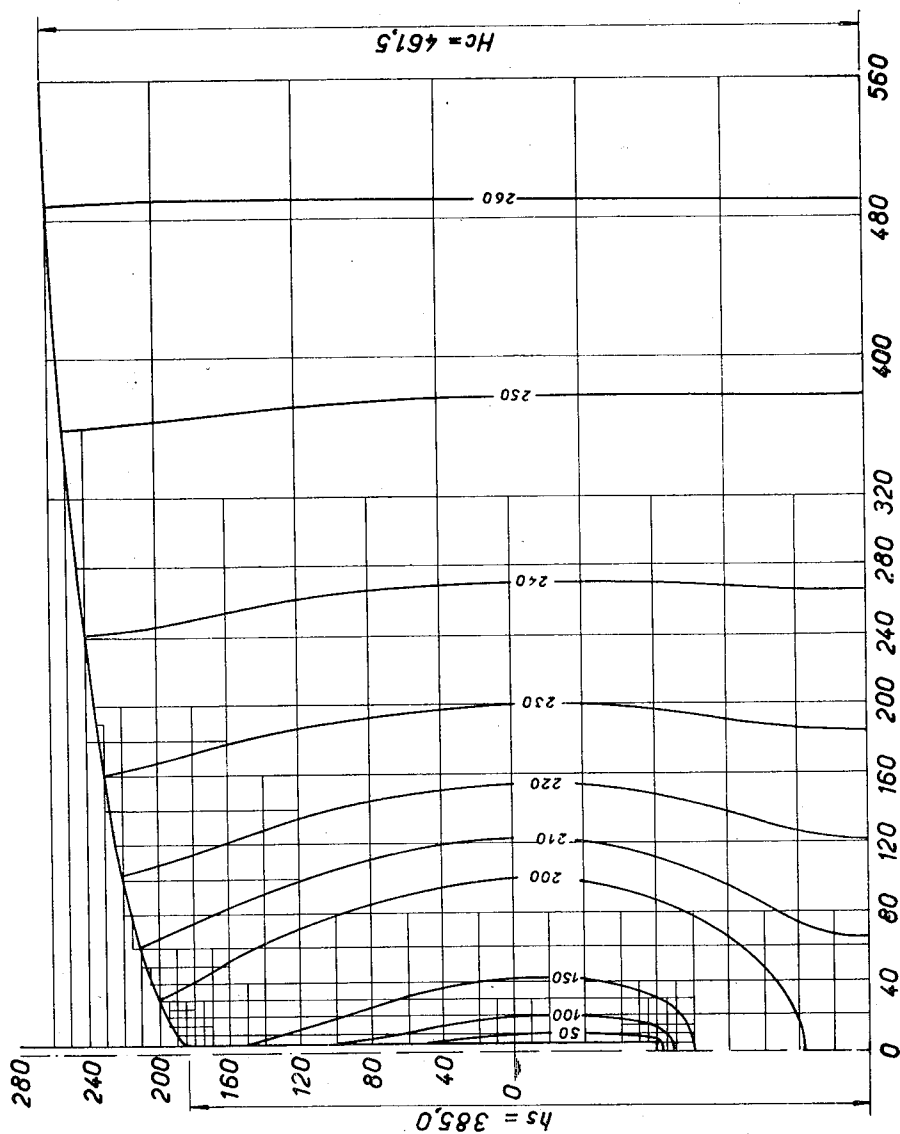


Fig. 66

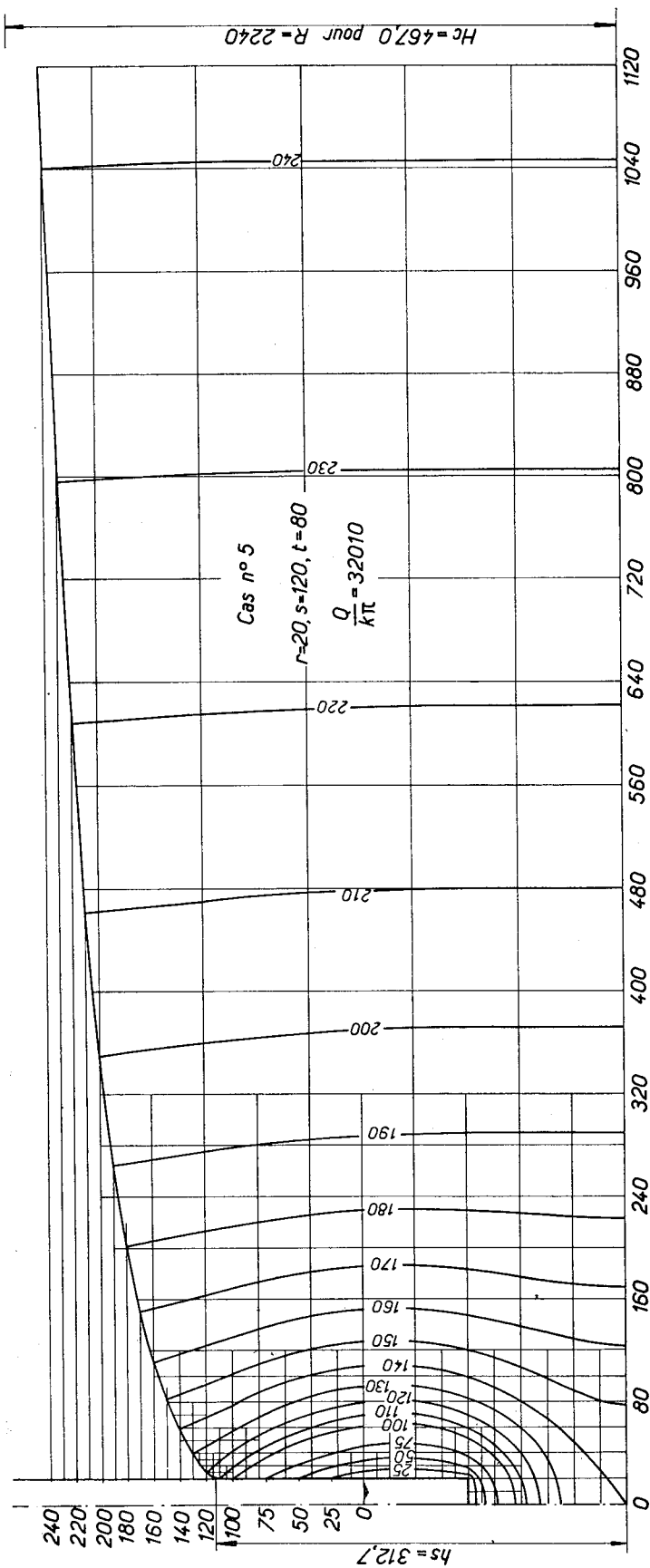


Fig. 67

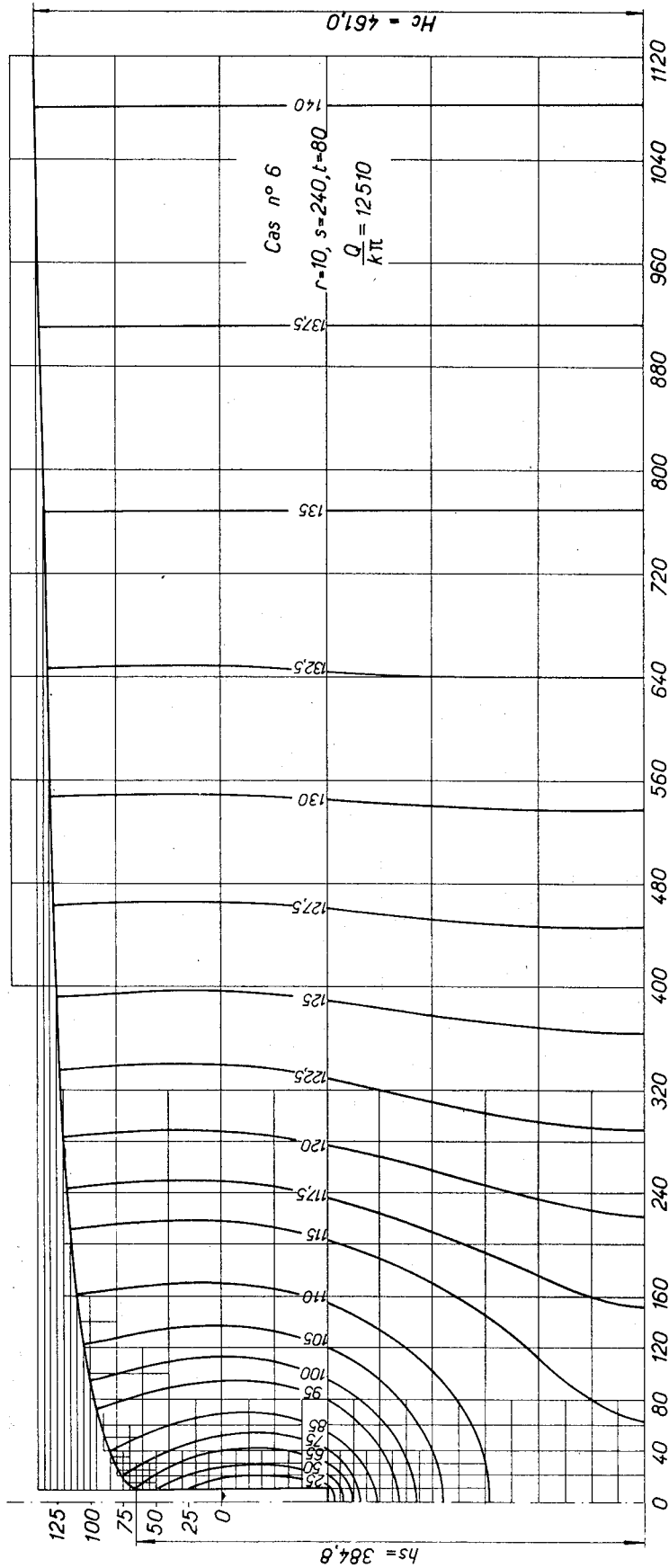


Fig. 68

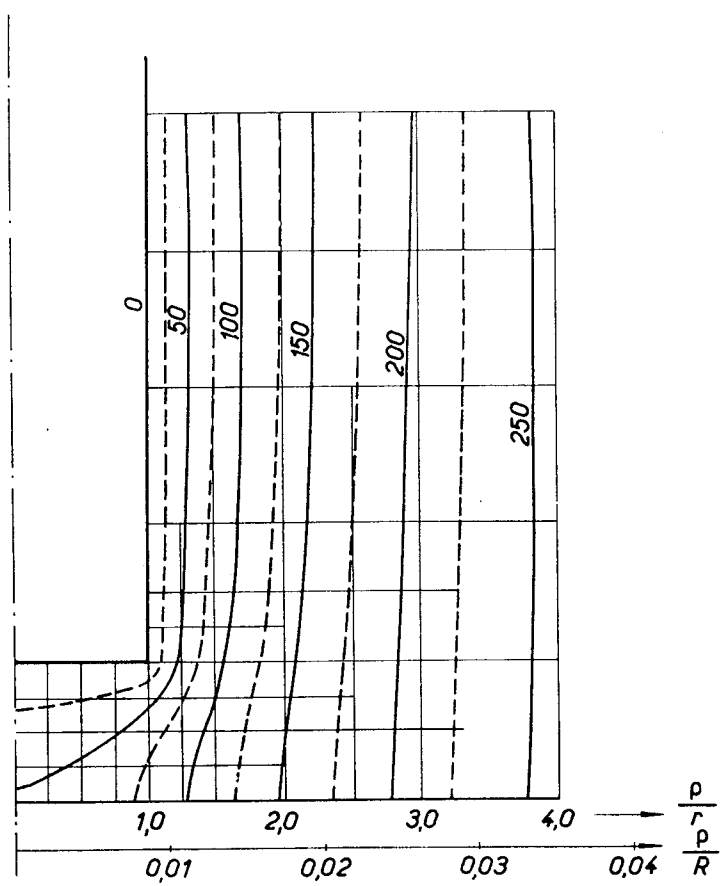


Fig. 69

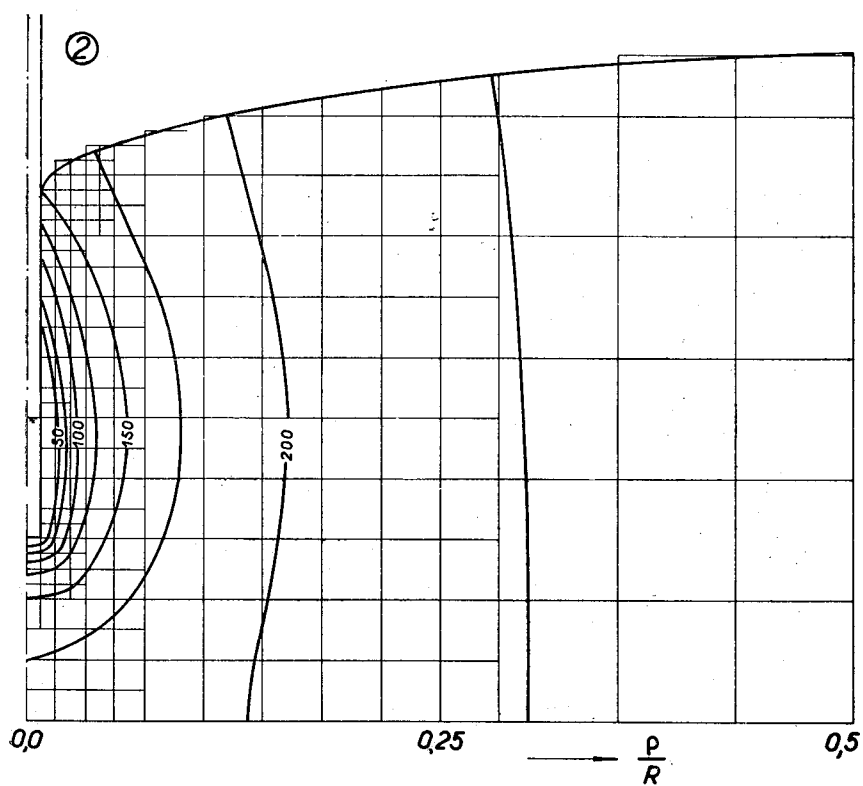
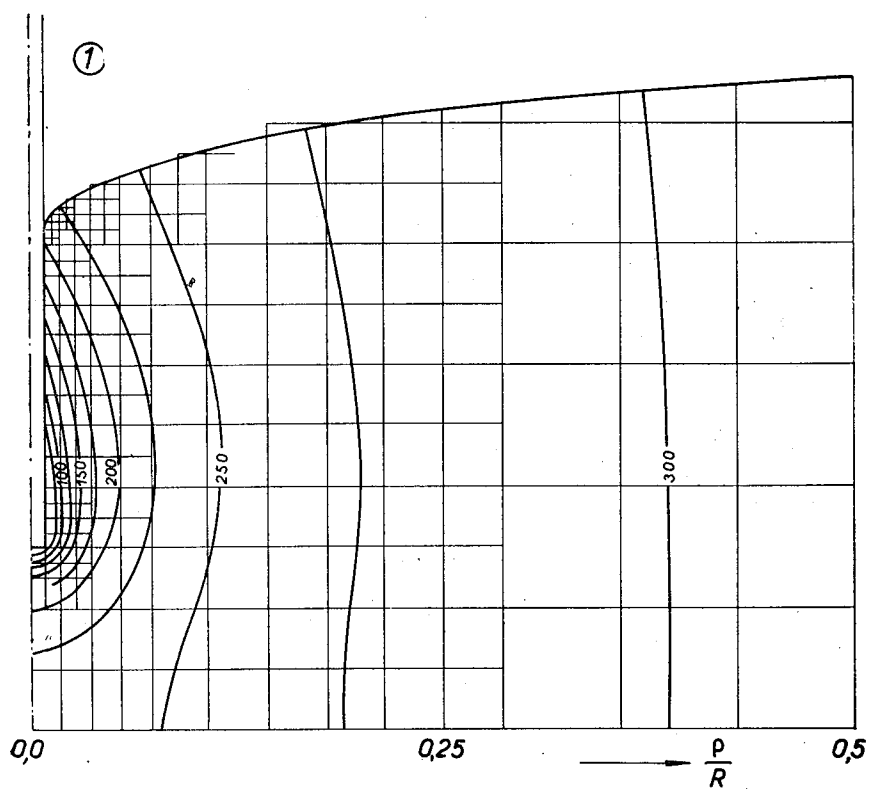


Fig. 70

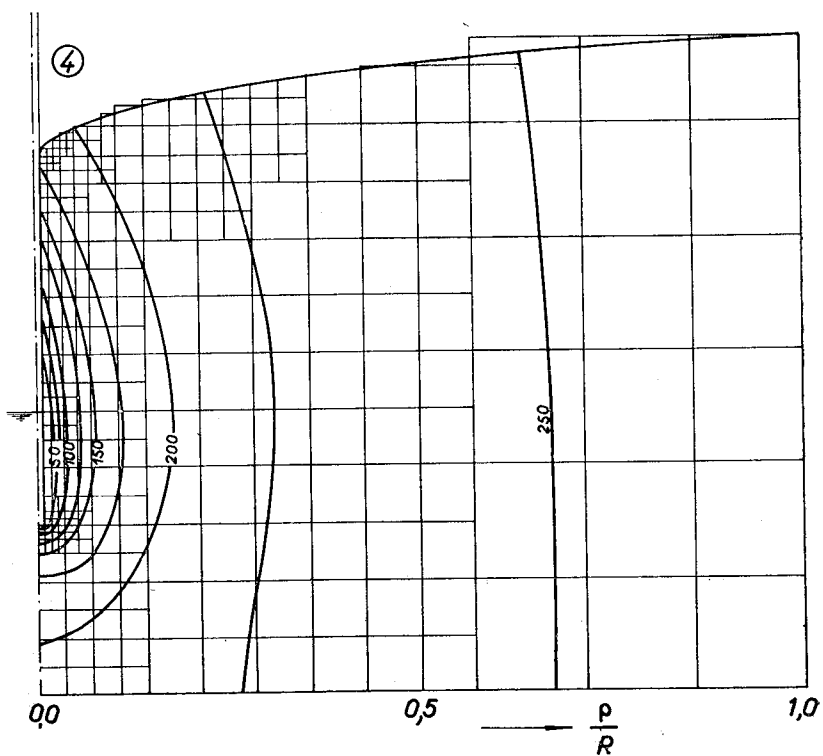
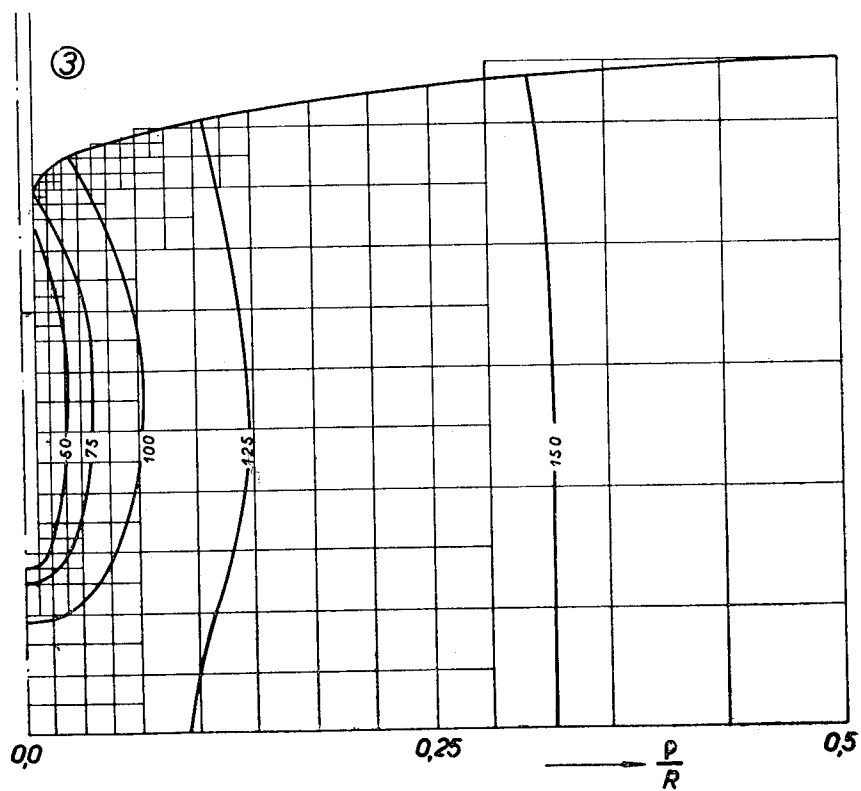


Fig. 71

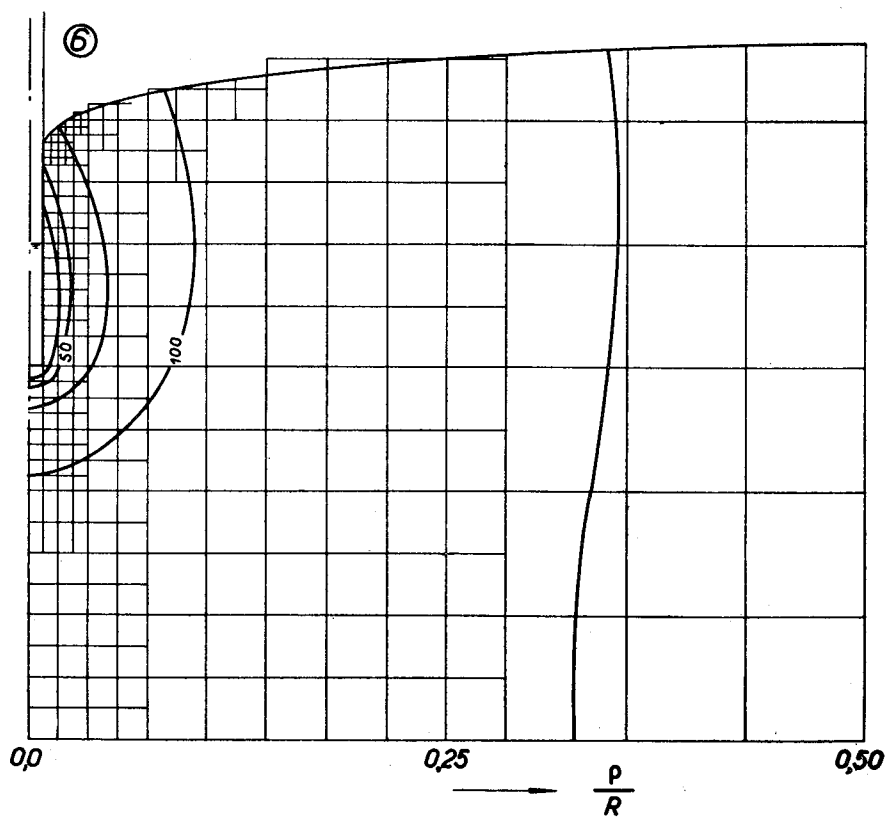
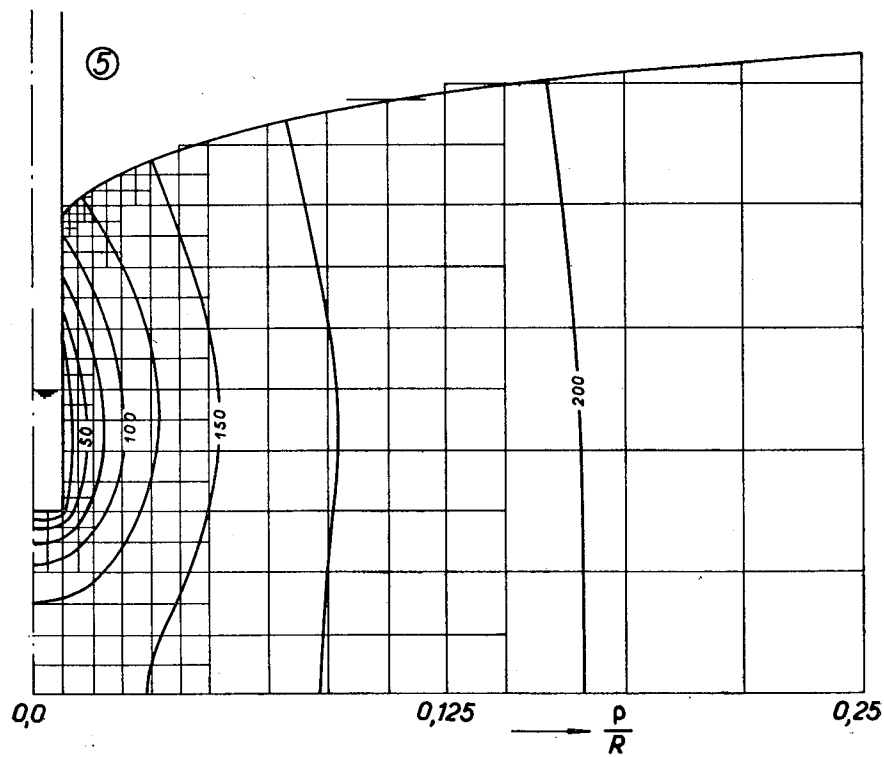


Fig. 72

Les cas étudiés sont représentés sur les *figures* 63 à 72. Le « traitement » par la méthode de relaxation a été fait pour tous les cas, sauf 5 et 7, jusqu'à $R/r = 112$.

Pour le cas 5 l'extrapolation de $\rho/r = 56$ jusqu'à $s/r = R/r = 112$ a été faite à partir de l'équation (5) de Dupuit. Le cas 7 (*fig.* 69) est traité en appliquant la méthode de relaxation au voisinage du fond du puits. Le but principal de l'étude du cas 7 était la détermination du champ pour de faibles valeurs s .

L'intervalle entre les lignes équipotentiellles représentées sur les *figures* 63-69 est plus petit que celui des figures 70-72 (qui est destinée à donner l'allure d'ensemble du champ au voisinage du puits). Mais cet intervalle est identique pour tous les cas étudiés et dans tout le domaine de l'écoulement.

D. — Application de la méthode de relaxation pour le cas du puits $s \neq 0$.

Nous préciserons maintenant certains détails touchant l'application de la méthode de relaxation à l'étude du problème du puits $s \neq 0$:

1. — DÉTERMINATION DE LA SURFACE PRÉLIMINAIRE.

Considérons les conditions expérimentales précédentes, calculons le débit, connaissant la profondeur t , de l'eau dans le puits, le rayon r du puits et la distance s du fond du puits à la couche imperméable. Ce débit est déterminé si l'on connaît la profondeur d'eau à une distance R fixe qui, d'après l'analyse que nous avons faite dans le chapitre précédent, doit être $R = C \cdot r$ (pour la constante C nous avons choisi 112). Ces données, introduites dans la formule de Forchheimer, nous ont permis de trouver un débit approximatif et, de là, la position de la surface libre par le procédé suivant :

1° dans l'intervalle $\rho = R = 112 r$, $\rho = 1,5 H$, nous avons appliqué la formule de Dupuit;

2° à partir de $\rho = 1,5 H$, jusqu'à $\rho = 10 r$, nous avons appliqué la loi logarithmique suivante, donnée par la formule :

$$\frac{\Delta r}{r} = \Delta h ;$$

3° nous avons achevé le tracé de la courbe en la raccordant approximativement jusqu'au point de suintement.

La connaissance de la surface libre nous a permis de tracer approximativement les lignes équipotentiellles [sensiblement verticales à partir d'une distance $\rho = 1,5 H$ (1)] qui sont de plus en plus incurvées à l'approche du puits.

2. — CHOIX DES VALEURS DE POTENTIEL.

Nous avons à résoudre une équation de Laplace dans un certain domaine, connaissant les conditions aux limites sur les frontières de ce domaine; nous savons que la valeur

(1) *Remarque.* — Cette distance dépend de s/H . Si s/H augmente, cette distance diminue d'abord pour augmenter sensiblement pour des valeurs de $s/H \rightarrow 1$.

du potentiel en un point quelconque dépend de l'ensemble des conditions aux limites; mais, pratiquement, en divisant le domaine en plusieurs parties, on peut déterminer approximativement la forme des lignes équipotentiels d'une de ces parties en ne tenant compte que de l'influence des conditions aux limites de cette partie, en effet, on sait que ce sont les limites les plus proches qui déterminent principalement la forme des lignes équipotentiels dans leur voisinage; dans certain cas très particuliers, on pourra même déterminer la valeur du potentiel dans une de ces parties, sans s'occuper du reste du domaine, d'où l'intérêt d'étudier successivement chaque condition aux limites (*fig. 73*).

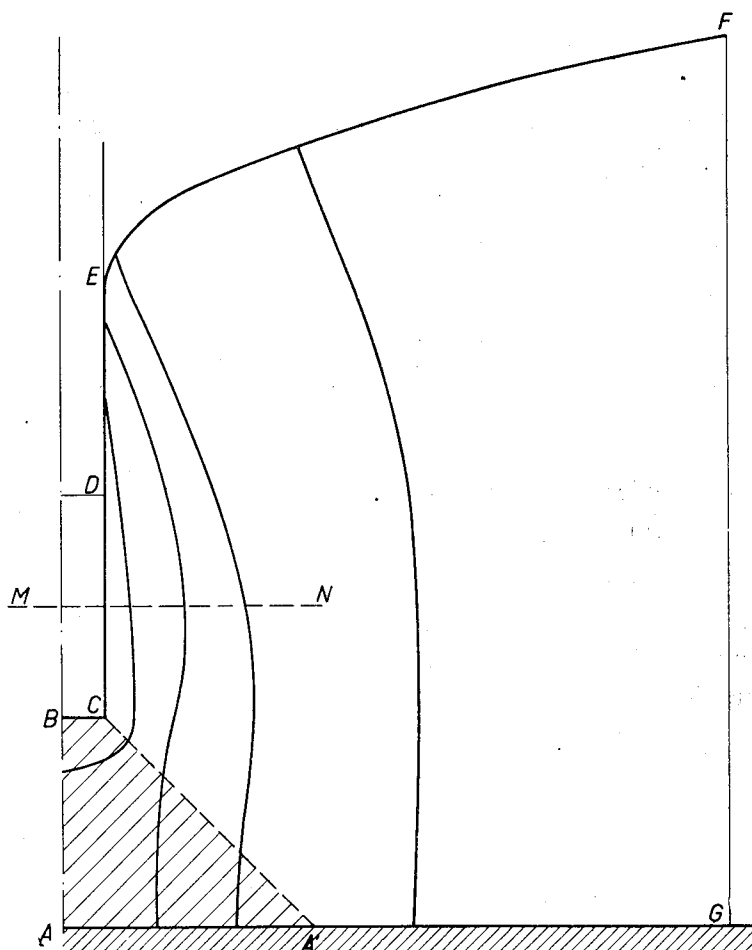


Fig. 73

Ligne équipotentielle C D.

Le gradient de potentiel suivant Oz est très faible, pour $s \leq z \leq s + t$, au voisinage de cette ligne, particulièrement à la cote

$$z = s + \frac{t}{2}.$$

En effet, nous pouvions, suivant une direction MN, appliquer aux potentiels une loi logarithmique valable pour un puits artésien $s = 0$. Il nous faut, d'autre part,

connaître une valeur du potentiel sur MN dans l'intérieur du champ; cette valeur a été estimée empiriquement à $10 r$ en traçant la ligne équipotentielle suivant les indications précédentes, données au sujet de la détermination de la surface libre préliminaire.

Signalons que les valeurs du potentiel déterminées suivant ce processus ne différaient que de quelques % des valeurs réelles.

Ces faibles variations du potentiel suivant Oz (sauf au voisinage du point C) nous ont permis de trouver les valeurs du potentiel des nœuds dans le voisinage de C D.

Ligne de suintement D E.

Elle satisfait à la loi $\varphi = z$.

La variation linéaire du potentiel caractérise un grand nombre de nœuds placés au voisinage de D E. L'analyse précédente nous permet de connaître approximativement les conditions à la cote du point D. A partir de ce niveau, et vers le haut (dans la direction Oz) φ varie à peu près linéairement jusqu'à la surface libre où $\varphi = z$, il nous a été possible d'obtenir une évaluation précise de φ .

Ligne A B.

C'est un axe de symétrie de l'écoulement et, en même temps, une ligne de courant.

Point anguleux C.

Les équipotentielles, au voisinage de ce point, sont sensiblement des cercles.

Après avoir tracé les lignes équipotentielles il était facile de déterminer les valeurs approximatives des potentiels dans les nœuds du réseau.

Signalons que c'est dans le quadrilatère C B A A' (*fig. 73*) que nous avons rencontré les plus grandes difficultés et cette zone délicate s'étend avec s . Par contre, pour les faibles valeurs de s , on peut déterminer facilement l'allure du phénomène avec une bonne approximation, comme il sera possible de s'en rendre compte dans l'étude du cas 7 où il s'agissait avant tout de connaître le champ au voisinage du fond du puits pour de faibles valeurs de s/H .

On avait supposé que les lignes équipotentielles, à partir de $\rho/r = 4$ jusqu'à la hauteur $s + t/2$, sont verticales et qu'à ce niveau le potentiel varie avec φ suivant une loi logarithmique (puits artésien). Le potentiel pour $\frac{\rho}{R} = 0,03$ a été déterminé en appliquant la loi de Dupuit.

3. — RÉSEAU.

Au voisinage du puits (sauf aux abords immédiats de la ligne C B), les étoiles étaient d'abord rectangulaires.

Au fur et à mesure que nous annulions les résidus, nous remplaçons les étoiles rectangulaires par des étoiles quadratiques.

Les grands carreaux $a = 80$ mm (*cf. fig. 67*) ont été employés au début du travail à partir de $\rho = 160$ mm, et à la fin à partir de 320 mm. Les *figures 63-72* donnent l'aspect du réseau à ce stade.

Les résidus pour les étoiles irrégulières $\rho = 80$, $\rho = 160$ (au commencement) ou $\rho = 320$ (à la fin) étaient obtenus avec la formule suivante :

$$a^2 \nabla^2 \varphi = A_l (\varphi_2 - \varphi_0) + B_l (\varphi_4 - \varphi_0) + \varphi_1 + \varphi_3 - 2\varphi_0.$$

Les valeurs de A_l et B_l sont données dans le tableau 2 de III A.

2. — RÉSULTATS OBTENUS A PARTIR DE LA MÉTHODE DE RELAXATION

A. — Détermination du débit.

Après avoir obtenu les valeurs du potentiel avec une précision de 0,1 (sauf au voisinage immédiat du puits où la précision était de l'ordre de 0,5) nous avons tracé les lignes équipotentielles, ce qui nous a permis de trouver le débit d'après la formule :

$$\frac{Q}{k\pi} = 2 \Delta h \sum \frac{\Delta l R_{\text{moy}}}{\Delta s}.$$

Les valeurs Q du débit données dans le tableau sont des valeurs moyennes de deux déterminations Q_1 et Q_2 ; les différences entre Q et Q_1 (ou Q_2) ne dépassaient jamais $\pm 0,5\%$.

Dans le tableau I nous avons aussi consigné la valeur du débit du cas supplémentaire 7. On obtient cette valeur en admettant que les débits d'un puits artésien et d'un puits de gravité sont sensiblement égaux dans leur partie inférieure jusqu'à la cote $s + \frac{t}{2}$.

Précision des résultats.

Nous pensons que les valeurs du débit sont obtenues avec une précision de l'ordre de 2 %. Cette estimation est basée sur les raisons suivantes :

- 1° les Q_1 et Q_2 ne diffèrent au maximum de Q que de 0,5 %;
- 2° pour le cas 5 nous avons effectué l'annulation du résidu et la détermination du débit de deux manières différentes :

- a) en faisant le passage du réseau fin au réseau gros, pour l'abscisse 80, par application de la formule ci-dessus;
- b) en faisant le passage du réseau fin au réseau gros, pour l'abscisse 120, en appliquant la même formule.

La différence entre les deux résultats était de l'ordre de 0,7 %.

Les valeurs du débit obtenues sont représentées sur le tableau II (col. 5) sous une forme adimensionnelle :

$$\frac{Q}{k\pi H^2}.$$

Les valeurs de t , s , r figurent aussi dans ce tableau sous cette même forme.

TABLEAU II

Débit de cas étudié et erreur sur le débit, d'après différentes formules

1	2	3	4	5	6	7	8
N ^o	$\frac{t}{H}$	$\frac{s}{H}$	$\frac{r}{H}$	$\frac{Q}{k\pi H^2}$	ΔQ_K %	ΔQ_F %	ΔQ_{17} %
1	0	0,2650	0,02208	0,145102	+ 5,7	— 67,0	— 2,6
2	0,1730	0,2594	0,02162	0,13439	+ 8,8	— 5,7	+ 0,3
3	0,3490	0,2618	0,02182	0,11145	+ 7,2	2,0	— 0,9
4	0,1733	0,2600	0,01083	0,12960	+ 4,6	— 4,2	— 0,6
5	0,1713	0,2570	0,04283	0,14677	+ 9,7	— 10,9	— 0,2
6	0,1935	0,5206	0,02160	0,058865	+ 20,8	+ 4,6	— 1,9
7	0,1739	0,0217	0,02174	0,19972	+ 0,3	+ 1,7	+ 0,4
8	0,1739	0,0000	0,02174	0,20548	0,0	3,7	0,0

On a désigné par :

ΔQ_K = erreur en % sur le débit obtenu par la formule de Kozeny, par rapport à celui obtenu par la méthode de relaxation;

ΔQ_F = erreur en % sur le débit obtenu par la formule de Forchheimer, par rapport à celui obtenu par la méthode de relaxation.

Le tableau II montre que les erreurs des deux formules employées le plus couramment pour le calcul du débit sont assez grandes; nous avons estimé qu'il était opportun d'établir une nouvelle formule.

B. — Formule de débit.

1. — EXPRESSION GÉNÉRALE DE LA FORMULE DU DÉBIT.

Nous avons pris comme type de formule celle de Kozeny, en fixant $R = 112r$

$$(15) \quad \frac{Q}{k\pi} = \frac{H_e^2 - l^2}{\ln \frac{R}{r}} (1 + \Delta q).$$

L'équation (15) présente plusieurs avantages :

a) elle a une signification physique très claire. Δq est proportionnelle à l'augmentation du débit d'un puits $s \neq 0$, par rapport à celui dont le fond repose sur la couche imperméable à une cote $z = s$. Cette augmentation est due :

1° au débit qui alimente le fond du puits;

2° à l'augmentation du débit qui traverse les parois latérales du puits, par suite de l'accentuation de la courbure des lignes potentielles, au voisinage du point singulier ($z = s, \rho = r$). Si r tend vers 0 ce phénomène ne disparaît pas. Donc, Δq ne tend pas vers 0, alors qu'il s'annule dans la formule de Kozeny;

b) elle permet de satisfaire d'une manière très simple certaines conditions aux limites. Par exemple, pour $H_e = t$, le débit devient nul pour n'importe quelle valeur de s ;

c) la fonction Δq assujettie à moins de conditions à satisfaire, peut donc être plus simple. Aussi, les erreurs assez importantes sur Δq peuvent avoir une influence beaucoup moins marquée sur Q ($\Delta q < 1$).

2. — ÉTUDE DANS LES DIFFÉRENTS PLANS.

Pour tirer parti de la méthode du cube, il a fallu obtenir des points pour lesquels deux nombres sans dimension restent constants.

D'après le tableau II on voit que cette condition n'était pas rigoureusement satisfaite, mais nous avons aisément éliminé cette difficulté en faisant la correction de $\frac{Q^2}{k\pi H^2}$ avec des formules existantes (cette correction était faite par la formule de Forchheimer pour tous les cas, sauf 1, où nous avons utilisé la formule de Kozeny).

La détermination de la variation de Δq , dans les trois sens, $\frac{t}{H}, \frac{r}{H}, \frac{s}{H}$, était obtenue très facilement, étant donné que les points sont choisis d'après la méthode du cube. On a obtenu :

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{Cas (1, 2, 3) } \dots\dots\dots & \Delta q \left(\frac{t}{H} \right) = 0,234^{(1)} ; \\ \text{Cas (8, 2, 6) } \dots\dots\dots & \Delta q \left(\frac{s}{H} \right) = 0,511 \sin \left(1,8 \frac{s}{H} \right) ; \\ \text{Cas (4, 2,) } \dots\dots\dots & \Delta q \left(\frac{r}{H} \right) = 0,132 + 4,68 \sin \left(1,8 \frac{s}{H} \right). \end{array} \right.$$

Ici, l'argument du sinus est donné en radians.

Des trois équations précédentes on tire :

$$(17) \quad \frac{Q}{k\pi} = \frac{H_e^2 - t^2}{\ln \frac{R}{r}} \left[1 + \left(0,29 + 10 \frac{r}{H} \right) \sin \left(1,8 \frac{s}{H} \right) \right],$$

(1) *Remarque.* — Si $t/H \rightarrow 0$, on constate une augmentation de la courbure des lignes potentielles au voisinage du point singulier $\rho = r, z = s$ qui doit entraîner une augmentation de Δq . Dans le cas $t = 0$, on a effectivement obtenu $\Delta q = 0,258$, mais, d'une part, en prenant la valeur 0,234, on obtient une différence du débit de l'ordre de 2 %, d'autre part, le phénomène qui cause l'augmentation de débit doit s'atténuer pour des profondeurs assez faibles. Dans la pratique, il doit toujours y avoir une certaine profondeur pour que l'on puisse pomper l'eau.

avec :

$$R = R_c = 112r.$$

Les avantages de la formule (17), par rapport à celles de Forchheimer et Kozeny sont mis en évidence sur le tableau II, où ΔQ_{17} est l'erreur obtenue en employant l'équation (17).

3. — LIMITE DE VALIDITÉ DE LA FORMULE.

Généralement, une formule empirique n'est valable que dans le domaine étudié. Toutefois, les conditions très favorables qui se présentent ici permettent de faire des extrapolations assez importantes :

a) l'extrapolation vers des valeurs de t/H très grandes est extrêmement sûre, étant donné que Δq ne dépend pas de t/H ;

b) l'extrapolation pour des $\frac{s}{H} \rightarrow 1$ est également sûre pour des raisons analogues.

En effet, dans le cas 6, $\sin(1,8 s/H)$ a déjà une valeur de 0,805 et l'on sait que la courbe $\Delta q \left(\frac{s}{H} \right)$ doit avoir une tangente horizontale quand $s/H \rightarrow 1$. Étant donné que les erreurs, d'après les formules de Forchheimer et Kozeny (toujours pour le cas 6), sont très importantes, nous pensons, qu'au moins jusqu'à $s/H = 0,9$, la formule (17) doit être d'une précision supérieure à celle des deux autres;

c) l'extrapolation, pour $r \rightarrow 0$, est aussi très commode étant donné que, pour $r = 0$, la formule ne donne qu'un débit qui est seulement de 5 % inférieur au débit du cas 4. Au contraire, nous pensons qu'il n'est pas prudent de tenter une extrapolation vers des r/H qui sont beaucoup plus grands que dans le cas 5. Nous limitons donc l'application de la formule (15) par la condition :

$$\frac{2r}{H} < 0,1.$$

Remarque. — La formule (17) n'est, en toute rigueur, que l'une des deux équations de la surface libre (en fixant $R = R_c = 112r$). Elle est du type de la formule (11). En effet, c'est seulement en la complétant avec la formule (12) ou avec une formule analogue, valable pour le domaine étudié, qui sera précisée dans la suite, que l'on peut trouver le débit si un autre point de référence ($R \neq R_c$) est donné. On notera que autour du point $R = 112$, la formule (17) suffit pour donner la valeur du débit avec une bonne approximation quel que soit H_c , donné à priori.

C. — Surface libre.

L'étude de la surface libre au voisinage du puits $s \neq 0$ n'a pas été faite antérieurement d'une manière suffisamment poussée, à notre avis. Les chercheurs se sont attachés surtout à la détermination du débit qui leur était permis grâce aux méthodes employées, à savoir : la cuve à sable.

L'emploi de la méthode de relaxation nous a permis d'effectuer une analyse complète de ce problème jusque-là non résolu.

1. — ÉQUATION DE DUPUIT.

A une distance suffisamment grande du puits, la surface libre a une forme donnée par l'équation suivante :

$$(18) \quad h_o = \sqrt{\left(H^2 - \frac{Q}{k\pi}\right) \ln \frac{R}{\rho}},$$

qui est la formule de Dupuit.

Le premier point de l'étude doit être la détermination de la distance à partir de laquelle cette équation est valable.

Soit :

$$\Delta h = \frac{h_o - h}{h_o} 100.$$

TABLEAU III

Erreur sur la surface, d'après la formule de Dupuit

Cas	Δh_o pour $\frac{R}{\rho} = 112$	Δh_o pour $\frac{R}{\rho} = 56$	Δh_o pour $\frac{R}{\rho} = 4$	ρ/h pour $\frac{R}{\rho} = 4$	Δh_o pour $\frac{R}{\rho} = 2$	ρ/h pour $\frac{R}{\rho} = 2$
1	— 32,30	— 10,0	— 0,95	0,69	— 0,28	1,38
2	— 26,1	— 8,50	— 0,83	0,66	— 0,29	1,29
3	— 15	— 5,2	— 0,63	0,66	— 0,25	1,27
4	— 33,9	— 13,6	— 0,86	0,36	— 0,77	0,60
5	— 21,5	— 4,6	— 0,17	1,27	— 0,06	2,57
6	+ 1,74	+ 2,1	+ 0,45	0,63	+ 0,20	1,24
8	272	27,7	— 4,9	0,72	— 2,0	1,31

Pour tous les cas on a cherché cette expression pour un certain nombre de points caractéristiques de la surface libre qui sont désignés dans le tableau III. Nous avons trouvé que :

$$a) \quad \frac{\partial \Delta h}{\partial \frac{\rho}{R}} < 0.$$

Quand on s'éloigne du puits, l'erreur introduite par la formule de Dupuit diminue;

$$b) \frac{\partial \Delta h}{\partial \frac{\rho}{h}} < 0.$$

Δh diminue rapidement si le rapport rayon-profondeur augmente. Signalons que, pour le puits $s = 0$, les domaines de la validité de la formule (18) sont donnés par :

$$\frac{\rho}{h} \geq (1,5);$$

$$c) \frac{\partial \Delta h}{\partial \frac{t}{h}} < 0.$$

$$d) \frac{\partial \Delta h}{\partial \frac{s}{h}} < 0.$$

L'inégalité $d)$ montre que l'erreur diminue quand s croît. En effet, elle est la plus grande pour $s = 0$. Nous pensons donc que si l'on prend les limites données pour $s = 0$, on est toujours (ou, au moins, dans le domaine étudié) assuré de l'abaissement du taux de l'erreur. Nous prenons donc comme limites de l'emploi de la formule (16) :

$$\frac{\rho}{h} > 1,5.$$

A cette condition, la surface libre se confond avec celle donnée par la formule de Dupuit à moins de 1 % près.

2. — ÉTUDE DE LA SURFACE LIBRE, POUR $\frac{\rho}{h} < 1,5$ (au voisinage du puits).

Nous avons étudié ce que devient l'expression :

$$(19) \quad \frac{\left[1 - 0,8 \left(\frac{s}{H} \right)^{\frac{3}{2}} \right] \left(1 - \frac{h}{H} \right)}{2,3 \frac{Q}{k\pi H^2} \log \frac{10 R}{H}} = \Gamma$$

qui, pour $s = 0$, doit devenir la fonction C_x de Caldwell et Babbitt [8] ⁽¹⁾.

Dans le tableau IV nous avons donné les valeurs de Γ pour certains points caractéristiques.

Les valeurs de R/ρ s'échelonnent suivant une série sensiblement géométrique afin de mettre plus en valeur la zone au voisinage immédiat du puits. D'après le tableau on voit qu'il est intéressant de séparer ce domaine en deux parties limitées par $\frac{\rho}{h}$ égal,

(1) L'équation (19)-(20) est, en effet, analogue à l'équation (8); elle exprime une zone intermédiaire où l'influence explicite de s/H se fait déjà sentir, mais pas encore celle de r/H .

approximativement, à 0,3 (cette limite est désignée par un trait fort sur le tableau).
On a trouvé :

a) $0,3 < \frac{\rho}{h} < 1,5$.

Dans ce domaine, qui inclut 80 % de la surface libre étudiée, Γ a une expression approchée de la forme :

(20) $\Gamma = 0,3 \log \frac{R}{\rho} ;$

b) $\frac{\rho}{h} < 0,3$.

Le domaine, au voisinage immédiat du puits, est beaucoup plus difficile à étudier, à cause de la proximité du point de suintement. Ce point est singulier et il a une tangente verticale.

TABLEAU IV

Surface libre au voisinage du puits

Cas	$\frac{r}{R}$ $\frac{R}{\rho}$	0,00893 112	0,0179 56	0,0357 28	0,0714 14	0,1428 7	0,2500 4	0,5000 2	1,00 1
1	Γ	0,490	0,444	0,396	0,340	0,262	0,185	0,092	0,00
	ρ/h	0,030	0,058	0,112	0,215	0,410	0,685	1,300	2,475
2	Γ	0,500	0,454	0,406	0,336	0,262	0,185	0,090	0,00
	ρ/h	0,028	0,055	0,107	0,207	0,397	0,664	1,268	2,422
3	Γ	0,518	0,466	0,412	0,343	0,260	0,186	0,089	0,000
	ρ/h	0,028	0,054	0,104	0,203	0,389	0,660	1,268	2,446
4	Γ	0,465	0,428	0,398	0,352	0,298	0,210	0,107	0,000
	ρ/h	0,0130	0,026	0,051	0,100	0,193	0,329	0,634	1,240
5	Γ	0,520	0,456	0,396	0,319	0,240	0,170	0,084	0,000
	ρ/h	0,064	0,121	0,230	0,430	0,807	1,350	2,535	4,802
6	Γ	0,620	0,540	0,455	0,358	0,251	0,172	0,087	0,000
	ρ/h	0,026	0,051	0,099	0,192	0,372	0,638	1,248	2,428
8	Γ	0,535	0,490	0,435	0,340	0,250	0,175	0,035	0,000
	ρ/h	0,034	0,064	0,122	0,224	0,415	0,682	1,295	2,435

Pour bien déterminer ce point, il faut serrer beaucoup les mailles employées dans la méthode de relaxation. En effet, nous avons toujours étudié à part le domaine au voisinage de ce point, ainsi que le montre l'exemple de la *figure 74* concernant le cas 5 du tableau I.

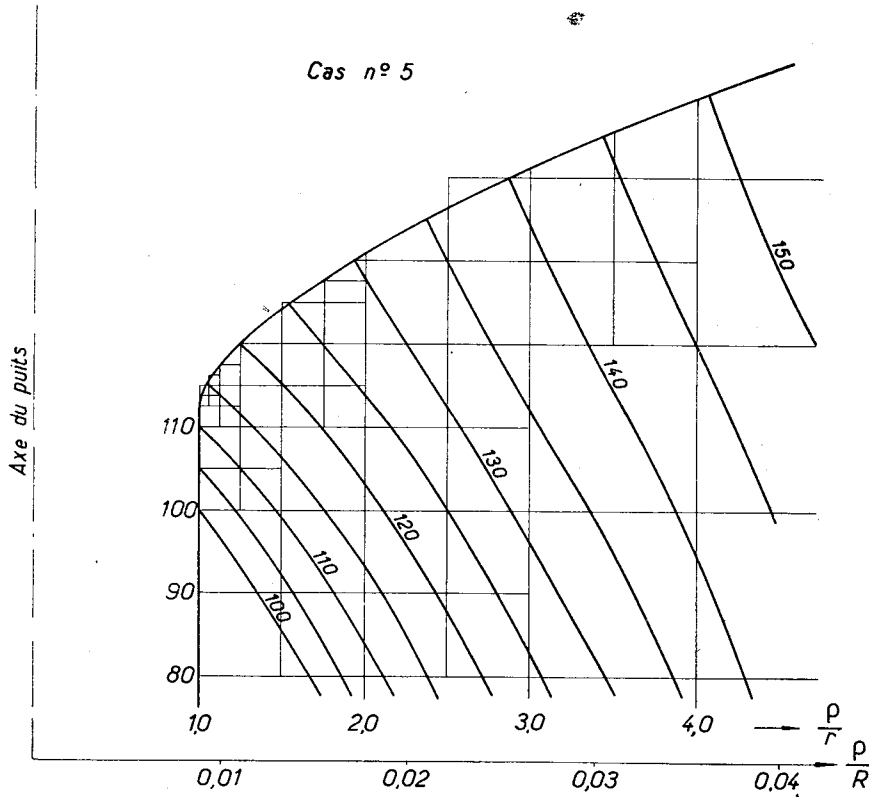


Fig. 74

Du point de vue mathématique la surface libre doit être représentée, dans ce domaine, sous la forme la plus générale de l'équation (7). Nous exprimerons Γ sous la forme :

$$(21) \quad \Gamma = \bar{C}_x + \Delta \bar{C};$$

$$\Delta \bar{C} = \frac{s}{H} \left[\log \frac{R}{10\rho} \left(1,2 \frac{s}{H} - 0,48 \right) + 0,6 \log \left(2,4 \frac{H}{R} \right) \log \frac{R}{34\rho} \right].$$

$\bar{C}_x$ diffère légèrement de la valeur de la fonction C_x de Caldwell et Babbitt. Dans ce domaine, $\bar{C}_x$ peut être exprimé par l'expression suivante :

$$(22) \quad \bar{C}_x = 0,3 \log \frac{R}{\rho} - 0,065 \left(\log \frac{R}{10\rho} \right)^2.$$

La position du point de suintement peut être tirée aisément des équations (17), (19) et (20) en posant :

$$\frac{\rho}{R} = \frac{r}{R}.$$

Il serait prudent de n'appliquer l'ensemble des formules (19), (21) et (22) que pour $0,03 < \rho/h < 0,3$, dans l'ignorance où nous sommes de ce qui se passe pour des valeurs $\rho/h < 0,03$.

CONCLUSIONS

L'écoulement que nous avons étudié est un écoulement complexe. Il n'a pu être résolu d'une seule traite. Le problème, ici, se pose d'une manière analogue à celui du puits $s = 0$. Dans ce cas, le problème du débit est facilement résolu par l'équation de Dupuit, mais l'analyse de la surface libre au voisinage du puits est beaucoup plus délicate. Elle a exigé le travail d'un grand nombre de chercheurs. Le problème du débit, dans le cas du puits $s \neq 0$, a été abordé depuis longtemps et il nous semble que la formule (17), qui amalgame les considérations antérieures, donne des résultats satisfaisants pour les besoins de la pratique dans un domaine très vaste, jusqu'à $s/H = 0,9$. Quant à la surface libre au voisinage du puits, une étude devrait être reprise dans le domaine $s/H > 0,6$ où l'on devra s'attendre à certaines difficultés.

CONCLUSIONS GÉNÉRALES

En conclusion, nous résumerons succinctement les points principaux de cet exposé en nous attachant à dégager les enseignements nouveaux qu'il comporte :

1° ayant étudié les écoulements plans à surface libre, nous avons pu fixer de façon plus complète la nature des singularités; alors que l'on se bornait habituellement à définir les angles de la tangente à la surface libre avec les frontières; ceci prend une importance toute particulière dans le cas où les parois amont ou aval sont verticales (point d'entrée, point de suintement);

2° en abordant l'étude du rôle d'un drain sur un fond imperméable, nous avons établi une abaque liant les principales caractéristiques hydrauliques (longueur du drain, débit) et nous avons démontré l'existence d'une pression critique à partir de laquelle on ne peut plus augmenter le débit sans créer d'irrégularités dans l'écoulement;

3° dans le domaine de l'analogie électrique, nous avons utilisé une technique que nous avons mise au point et qui permet les adaptations rapides, en cours de réglage, de l'élément figurant la surface libre. Nous avons pu ainsi étudier deux cas nouveaux :

- c'est, tout d'abord, celui de l'écoulement à travers une digue comportant un noyau imperméable et un drain situé en amont de ce noyau imperméable. Nous n'avons pas cru devoir pousser cette étude en raison de son intérêt limité;
- c'est, ensuite, celui de l'écoulement à travers une digue comportant des noyaux partiels. Nous avons pu montrer l'intérêt pratique de l'emploi de ces noyaux et leur influence favorable sur un drain;

4° dans l'emploi de la méthode de relaxation, nous avons utilisé une variante quant à l'expression des résidus des étoiles irrégulières et montré les conséquences importantes de cette modification;

5° enfin, nous avons pu, à l'aide de cette méthode de calcul, résoudre en grande partie le problème du puits dont le fond n'atteint pas la couche imperméable; nous avons établi en particulier, d'une façon assez rigoureuse, une formule de débit et l'équation de la surface libre au voisinage du puits.

LISTE BIBLIOGRAPHIQUE

concernant

L'ÉTUDE D'UN Puits QUI N'ATTEINT PAS LE FOND IMPERMÉABLE

- [1] MUSKAT. — *The flow of homogeneous fluids through porous media*, Michigan, 1946.
 - [2] M. THÉVENET. — *Expériences sur le débit des puits en terrains sablonneux aquifères*. *Annales des Ponts et Chaussées*, 6^e série, t. VII, 1884 (pp. 200-210).
 - [3] M. CLAVENAD et BUSSY. — *Mémoire sur la filtration*. *Annales des Ponts et Chaussées*, 6^e série, t. XIX, 1890 (pp. 212-265).
 - [4] PORCHET. — *Hydrodynamique des puits*. *Annales du Ministère de l'Agriculture*, fasc. 60 (1930).
 - [5] KOZENY. — *Wasserkraft und Wasserwirtschaft* 28, 101, 1933.
 - [6] Ph. FORCHHEIMER. — *Hydraulik*, 1930, Berlin.
 - [7] SHIN TE YANG. — *Seepage toward a well analysed by the relaxation Method*, Cambridge, mai 1949.
 - [8] BABBITT and CALDWELL. — *The free surface around, and interference between, gravity wells*, Illinois; 1948.
-



DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté

CONCENTRATION DE FOND ET TRANSPORT DES MATÉRIAUX EN SUSPENSION

Vu :

Grenoble, le 11 janvier 1954

Le Président de la Thèse :

J. KRAVTCHENKO.

Vu :

Grenoble, le 12 janvier 1954

Le Doyen de la Faculté des Sciences :

L. MORET.

Vu et permis d'imprimer :

Grenoble, le 13 janvier 1954

Le Recteur de l'Académie de Grenoble :

H. PARISELLE.

FACULTÉ DES SCIENCES

Nom du candidat : BORELI.

Prénom : Mladen.

Date de la soutenance : 14 janvier 1954.

Numéro d'ordre : N° 45.

BORELI Mladen. — Contribution à l'étude des milieux poreux. — *Paris*, Imp. du Ministère de l'Air, 1954. In-8°, 131 pages, 74 fig.

BORELI Mladen. — Contribution à l'étude des milieux poreux. — *Paris*, Imp. du Ministère de l'Air, 1954. In-8°, 131 pages, 74 fig.

BORELI Mladen. — Contribution à l'étude des milieux poreux. — *Paris*, Imp. du Ministère de l'Air, 1954. In-8°, 131 pages, 74 fig.

BORELI Mladen. — Contribution à l'étude des milieux poreux. — *Paris*, Imp. du Ministère de l'Air, 1954. In-8°, 131 pages, 74 fig.
