



HAL
open science

Représentation approchée des intégrales doubles

André Michel

► **To cite this version:**

André Michel. Représentation approchée des intégrales doubles. Modélisation et simulation. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1959. Français. NNT: . tel-00277351v1

HAL Id: tel-00277351

<https://theses.hal.science/tel-00277351v1>

Submitted on 6 May 2008 (v1), last revised 6 May 2008 (v2)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

T H E S E

présentée à la Faculté des Sciences de
l'Université de Grenoble
pour obtenir

le titre de Docteur de Troisième Cycle

MATHEMATIQUES APPLIQUEES

par

André MICHEL

Licencié ès sciences Mathématiques

Titre :

REPRESENTATION APPROCHEE
DES INTEGRALES DOUBLES

Soutenue le 22 Décembre 1959

JURY : MM. KRAVTCHENKO Prés.
KUNTZMANN
VAUQUOIS

THESE

présentée à la Faculté des Sciences de
l'Université de Grenoble
pour obtenir

le titre de Docteur de Troisième Cycle

MATHEMATIQUES APPLIQUEES

par

André MICHEL

Licencié ès sciences Mathématiques

Titre :

REPRESENTATION APPROCHEE
DES INTEGRALES DOUBLES

Soutenue le 22 Décembre 1959.

Jury MM. KRAVTCHENKO Prés.
KUNTZMANN
VAUQUOIS

UNIVERSITE DE GRENOBLE

FACULTE DES SCIENCES

D O Y E N - M. MORET, Membre de l'Institut.

PROFESSEURS - MM.

MORET, Géologie et Minéralogie,
Membre de l'Institut.
NEEL, Physique Expérimentale,
Membre de l'Institut.
PARDE, Hydrologie fluviale.
DORIER, Zoologie,
HEILMANN, Chimie,
KRAVTCHENKO, Mécanique Rationnelle,
BENOIT, Radio électricité
CHENE, Chimie Papetière,
NOBECOURT, Micrographie Papetière,
WEIL, Physique,
FELICI, Electrostatique,
KUNTZMANN, Mathématiques Appliquées,
BARBIER, Géologie Appliquée,
SANTON, Mécanique des Fluides,
OZENDA, Botanique,
CHABAUTY, Calcul Différentiel et Intégral
FALLOT, Physique Industrielle,
GALVANI, Mathématiques,
TRAYNARD, Chimie,
SOUTIF, Physique,
REULOS, Physique,
CRAYA, Hydrodynamique,
REEB, Mathématiques,
BESSON, Electrochimie,
WOLFERS, Physique générale,
Mme POTIER, Botanique,
LYNTON, Professeur associé,
SOKOLOWSKY, "

PROFESSEURS
SANS CHAIRE

- MM. SILBER, Mécanique des Fluides,
MOUSSIEGT, Electronique,
Mle LUTZ, Mathématiques,
GALISSOT, Mécanique,
MICHEL, Géologie et Minéralogie,
DESSAUX, Zoologie (phys. Animale)

MAITRES DE
CONFERENCES

:- MM. AYANT, physique théorique,
BONNIER, Chimie,
BOUCHIZ, Physique Nucléaire,
PILLET, Electrotechnique,
LLIBOUTRY, Physique,
BARBIER J.C., Physique,
BLAMBERT, Calcul Numérique,
VAILLANT, Zoologie,
PAUTENET, Electrotechnique,
DREYFUS, Thermodynamique,
Mle NAIM, Mathématiques,
BUYLE-BODIN, Electronique,
PERRET, Servomécanismes,
DEPASSEL, Mécanique,
Mme SOUTIF, Physique,
DEBELMAS, Géologie,
Mme KOFLER, Botanique,
COHEN, Electrotechnique,
Mme BARBIER, Electrochimie,
BRISSONNEAU, Physique,
ARNAUD, Chimie,
VAUQUOIS, Mathématiques,
ROBLRT A., Chimie Papetière,
GERBER, Mathématiques.

SECRETARIAT PRINCIPAL - .

M. BURNET

SECRETAIRE

M..BICHET

Avant d'exposer le présent travail, dont l'originalité réside surtout dans la classification des nombreux résultats déjà obtenus, je voudrais exprimer ma gratitude à Monsieur le Professeur KUNTZMANN. Ses conseils et ses directives ont permis un aboutissement efficace de mes calculs.

Ma reconnaissance s'adresse également à Monsieur LONG, Directeur aux services centraux de recherches de la Société d'Electro-chimie de Lyon, et à Monsieur DE FROMONT, ingénieur audit centre. L'intérêt qu'ils ont bien voulu porter à mon travail a été un bénéfique encouragement.

L'étude du sujet ici traité, non seulement a nécessité l'approfondissement de certaines de mes connaissances mathématiques, mais encore m'a fait apprécier les bons services du personnel du laboratoire de Calcul de l'Université de Grenoble, enseignants, techniciens et secrétaires. Je les en remercie tous, et, en particulier Monsieur GASTINEL, dont la compétence n'a d'égale que sa disponibilité, et Madame RUBICHON à qui je suis redevable de la bonne présentation de ce fascicule.

Je remercie également Messieurs KRAVTCHENKO et VAUQUOIS d'avoir bien voulu faire partie du jury.

GRENOBLE, Décembre 1959.

CHAPITRE I

GENERALITES SUR L'EVALUATION NUMERIQUE DES INTEGRALES DOUBLES

A - RAPPEL SUR LES POLYNOMES A DEUX VARIABLES

- 1 - Polynôme plein Un polynôme à coefficients indéterminés sera dit plein s'il contient avec le terme $A_{kl} x^k y^l$ tous les termes $A_{k',l'} x^{k'} y^{l'}$ avec $k' \leq k$ et $l' \leq l$

2 - Silhouette d'un polynôme plein

On trace dans le 1^o quadrant du plan des (k,l) un quadrillage régulier de pas 1 et on marque le point (k,l) si le terme $A_{kl} x^k y^l$ existe dans le polynôme.

L'ensemble des points marqués forme la silhouette du polynôme plein.

3 - Quadrillage associé à un polynôme plein

Nous nommerons quadrillage associé au polynôme plein $\sum A_{kl} x^k y^l$ l'ensemble des points (x_i, y_j) . Les x_i sont des abscisses fixées et les y_j des ordonnées fixées et il existe une relation bi-univoque entre les couples (k,l) définissant la silhouette et les couples (i,j) définissant le quadrillage.

En d'autres termes on peut dire que le quadrillage associé à un polynôme (ou à une silhouette) est l'ensemble des points (x_k, y_l) .

4 - Détermination d'un polynôme par des valeurs (1)4 - 1 - Cas d'un polynôme plein et de ses valeurs aux sommets d'un quadrillage associé

Soient les abscisses x_0, x_1, \dots et les ordonnées y_0, y_1
Il s'agit de déterminer le polynôme plein

$$\sum A_{k,l} x^k y^l$$

par les valeurs qu'il prend aux points (x_i, y_j) -

Effectuons une translation ramenant $y_0 = 0$ -

Les conditions imposées sur les points (x_i, y_0) déterminent les termes en x^k (polynôme à une variable complet de degré n avec $(n+1)$ valeurs). Si on retranche les termes obtenus on peut mettre y en facteur et on est ramené au même problème avec un nombre de points inférieur. La détermination est unique.

Interprétons le résultat : le système linéaire en A_{kl}

$$\sum_{k,l} A_{kl} x_i^k y_j^l = P_{ij} \quad \text{pour tout } (k,l) \in S$$

tout $(i,j) \in Q$

(où P_{ij} = valeur du polynôme au point (i,j) du quadrillage Q associé à la silhouette S) est non singulier.

Désignons par u les couples (i,j) , v les couples (k,l) et par z_{uv} les produits $x_i^k y_j^l$ on peut énoncer

la matrice carrée $Z = [z_{uv}]$ est toujours non singulière.

(1) Voir KUNTZMANN - Bibliographie

4 - 2 - Premier cas particulier

Supposons les points du quadrillage Q à abscisses toutes non négatives. Supprimons de S tous les points d'abscisses impaires et de Q tous les points homologues. Soient S' et Q' les ensembles de points obtenus.

S' peut être considéré comme la silhouette d'un polynôme pour lequel $A_{kl} \equiv 0$ pour k impair, c'est-à-dire un polynôme $P(x^2, y)$. Q' est alors un quadrillage, associé à S' , dont tous les points sont à abscisses non négatives. En posant $x^2 = \xi$ et en raisonnant comme au § 4-1, on démontre que ce polynôme $P(x^2, y)$ est déterminé d'une façon unique à l'aide du quadrillage Q' .

Remarque - Dans l'hypothèse faite $x_i \geq 0$, on est sûr de ne jamais rencontrer un difficulté du type : déterminer $Ax^2 + B$ à l'aide des valeurs pour $x = +1$ et $x = -1$

Interprétons le résultat relativement aux ensembles de points Q et S . Distinguons les couples $(k, l) \in S$ pour lesquels k est pair par l'indice v_1 et les couples homologues $(i, j) \in Q$ par l'indice u_1 . Dans l'hypothèse où tous les points de Q sont à abscisses non négatives la matrice carrée $T = [z_{u_1 v_1}]$ est non singulière.

- Le résultat est le même relativement aux ordonnées.

4 - 3 - Deuxième cas particulier

Supposons les points de Q à coordonnées toutes non négatives. Supprimons de S tous les points de coordonnées impaires et de Q tous les points homologues. Soient S' et Q' les ensembles de points obtenus. S' peut être considéré comme la silhouette d'un polynôme $P(x^2, y^2)$ et Q' un quadrillage associé à S' .

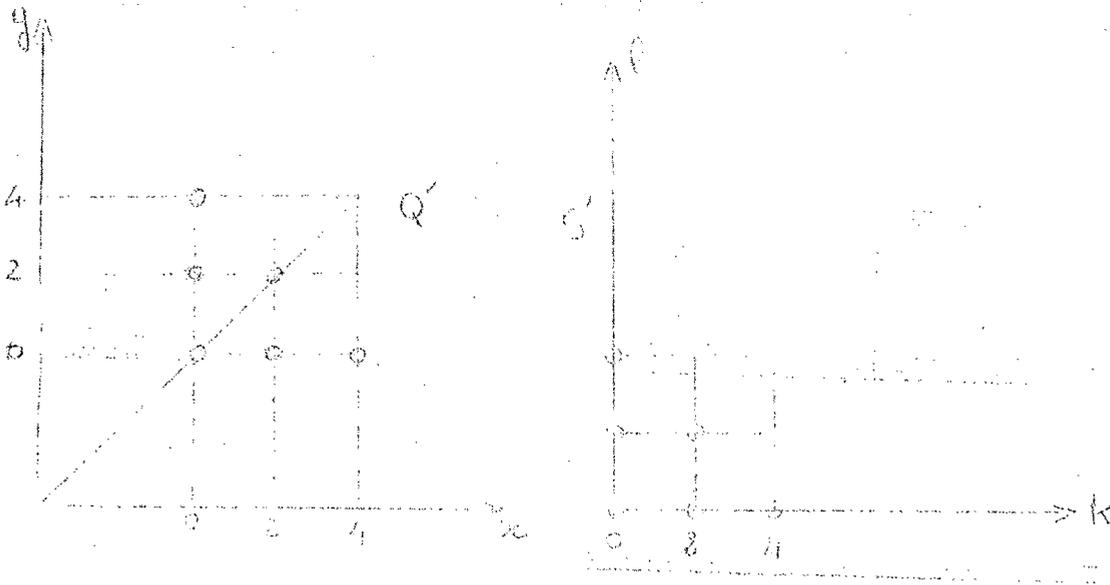
En posant $x^2 = \xi$, $y^2 = \eta$ et en raisonnant comme au § 4-1, on démontre que $P(x^2, y^2)$ est déterminé de façon unique à l'aide du quadrillage Q' .

Si donc on distingue les couples $(k, l) \in S$ pour lesquels k et l sont pairs par l'indice v^* et les couples homologues $(i, j) \in Q$ par l'indice u^* on a le résultat :

dans l'hypothèse où tous les points de Q sont à coordonnées non négatives la matrice carré $U = [z_{u^*} v^*]$ est non singulière.

4 - 4 - Troisième cas particulier

Supposons la silhouette S' du § précédent, symétrique par rapport à sa bissectrice et le quadrillage Q' du même paragraphe symétrique par rapport à la première bissectrices des axes, l'ordre de numérotation des droites étant respecté (voir fig.)



Soit à déterminer un polynôme $P(x^2, y^2)$ dont la silhouette associée soit S' , et qui vérifie $P(x^2, y^2) = P(y^2, x^2)$

C'est-à-dire que si $P(x^2, y^2) = \sum_{k,l} A_{kl} x^k y^l$ on a $A_{kl} = A_{lk}$

Il est évident que, chaque point de S' représentant un coefficient A_{kl} , si on détermine tous les termes A_{kl} tels que $k \geq 1$, le polynôme sera complètement déterminé.

Le problème peut être résolu à l'aide des valeurs que prend $P(x^2, y^2)$ aux points de Q' qui sont sur la bissectrice et en dessous de celle-ci. Autrement dit à l'aide des valeurs de $P(x^2, y^2)$ aux points (i, j) : $i \geq j$.

La démonstration se fait comme au § 4-1. Après avoir ramené à zéro y_0 , les conditions imposées sur x_i , on détermine les termes en x^k (polynôme à une variable, de puissances paires, de degré $2N$ avec $N+1$ abscisses différentes et non négatives).

Connaissant les termes en x^k , on connaît les termes en y^1 . On retranche tous ces termes connus et on met y^2 en facteur. On est alors ramené au même problème avec un nombre de points inférieur.

La démonstration est symétrique si on adopte $k \leq 1$, $i \leq j$. Interprétons le résultat : le polynôme peut s'écrire

$$P(x^2, y^2) = \sum_{(k,l) \in S'} A_{kl} [x^k y^l + x^l y^k] \quad (k,l) \in S', \quad k \geq 1$$

et il est parfaitement déterminé par les points (i, j) de Q' $i \geq j$. C'est-à-dire que le système linéaire en A_{kl}

$$\sum_{(k,l) \in S'} A_{kl} [x_i^k y_j^l + x_i^l y_j^k] = P_{ij} \quad \begin{array}{l} k \geq 1 \quad k, l \in S' \\ i \geq j \quad i, j \in Q' \end{array}$$

a une solution et une seule.

Ce résultat s'énonce encore : dans les hypothèses faites sur S' et Q' , si on désigne par \tilde{V} la classe des couples $(k,l) \in S'$ $k \geq l$ est par \tilde{u} la classe des couples $(i,j) \in Q'$ $i \geq j$, la matrice carrée $V = \begin{bmatrix} z_{\tilde{u}\tilde{v}} & t_{\tilde{u}\tilde{v}} \end{bmatrix}$ est non singulière.

$$(t_{uv} = y_j^k x_i^l)$$

B - LE PROBLEME DE L'INTEGRATION DOUBLE

On considère les formules d'intégration sur un domaine D , d'aire A , du type

$$\iint_D f(x,y) \, dx dy \simeq A \sum_{\alpha=1}^m \rho_{\alpha} f(x_{\alpha}, y_{\alpha}) \quad (I)$$

D étant bien entendu supposé quarrable et $f(x,y)$ continue et bornée d'un domaine D' contenant D et les points (x_{α}, y_{α}) . Les scalaires (ou poids) ρ_{α} ici définis sont invariants dans une homothétie de centre l'origine des axes. En remplaçant la fonction $f(x,y)$ par un polynôme plein $P(x,y) = \sum_{kl} A_{kl} x^k y^l$ de silhouette S , l'équation (I) est remplacée par un système à m inconnues ρ_{α} de M équations, M étant le nombre de points qui constituent S :

$$A \sum_{\alpha=1}^m \rho_{\alpha} x_{\alpha}^k y_{\alpha}^l = \iint_D x^k y^l \, dx dy \quad (II)$$

On dira qu'une formule (I) admet la silhouette S associée à $P(x,y)$ lorsqu'elle sera rigoureusement vraie pour ce polynôme $P(x,y)$

THEOREME I

Si on choisit pour les points (x_α, y_α) les sommets d'un quadrillage associé à une silhouette S on peut toujours écrire une formule (I) admettant S. Cette formule est unique pour le quadrillage choisi.

En effet :

appelons $\iint_D x^k y^l dx dy = g_{kl}$ le système (II) s'écrit ici

$$A \sum_{i,j} \rho_{ij} x_i^k y_j^l = g_{kl}$$

soit avec les notations du § 4-1

$$A \sum_u \rho_u z_{uv} = g_v \quad \begin{array}{l} u \in Q \\ v \in S \end{array}$$

ou encore sous forme matricielle, A étant un scalaire

$$A \cdot Z^T \rho = g$$

Z^T la transposée de la matrice Z du § 4-1.

Ce problème a donc une solution unique et bien déterminée. Le théorème I est démontré.

DOMAINE SYMETRIQUE PAR RAPPORT A UN AXE (OY par exemple)THEOREME II

Si on choisit pour les points (x_α, y_α) les sommets d'un quadrillage Q dont tous les points soient à abscisses non négatives, associé à une silhouette S, et les sommets du quadrillage Q_1 symétrique par rapport à l'axe Oy, on peut toujours écrire une formule (I) admettant S de la façon suivante : chaque couple de points symétriques est affecté d'un même scalaire ρ_α et les points de Q homologues des points de S à coordonnées impaires sont affectés de scalaires nuls. La formule (I) obtenue est unique relativement à Q.

En effet le système (II) s'écrit ici

$$A \sum_{i,j} \rho_{ij} \left[x_i^k y_j^l + (-1)^k x_i^k y_j^l \right] = \varepsilon_{kl}$$

- pour k impair ces équations sont identiquement vérifiées

- pour k pair

$$2 A \sum_{i,j} \rho_{ij} x_i^k y_j^l = \varepsilon_{kl}$$

introduisons les notations du § 4-2

$$2 A \sum_u \rho_u z_{uv_1} = \varepsilon_{v_1}$$

système rectangulaire qui se décompose en deux

$$2 A \left[\sum_{u_1} \rho_{u_1} z_{u_1 v_1} + \sum_{u_2} \rho_{u_2} z_{u_2 v_1} \right] = \varepsilon_{v_1}$$

on peut donc toujours choisir $\int u_2 \equiv 0$ et résoudre

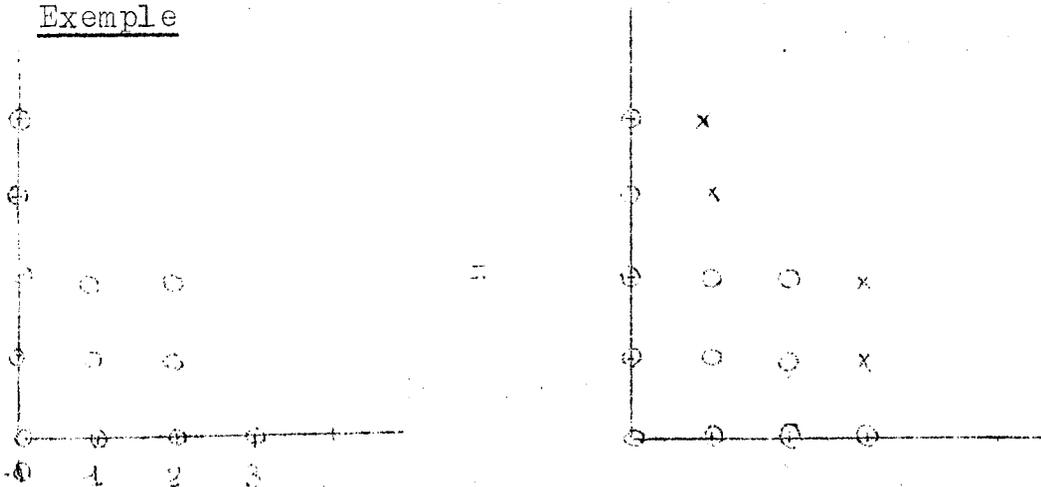
le système carré :

$$2 A T \int_1^p = g \quad (\text{où } T^T \text{ est la transposée de } T, \text{ § 4-2})$$

Or u_2 définit la classe des points de Q homologues des points de S à abscisses impaires. Le théorème II est démontré.

Remarques - 1 - Souvent la formule obtenue admet plus que la silhouette S car on peut inclure dans S tous les points d'une parallèle à abscisse impaire, jusqu'à la même hauteur que la parallèle d'abscisse paire immédiatement à gauche.

Exemple



2 - Pour la construction d'un quadrillage $(Q + Q_1)$ au sens du théorème II, puisque la silhouette S est formée de couples de parallèles en nombres égaux de points, on peut pratiquement distribuer ces parallèles deux à deux de part et d'autre de l'axe Oy .

3 - Tout ce qui est dit par rapport à l'axe Oy est vrai pour une symétrie par rapport à Ox. Résultat dual.

DOMAINES SYMETRIQUES PAR RAPPORT AUX DEUX AXES DE COORDONNE

THEOREME III

Si on choisit pour les points (x_α, y_α) les sommets d'un quadrillage Q dont tous les points soient à coordonnées non négatives associé à une silhouette S, et les sommets des quadrillages Q_1^+ Q_2^{++} Q_3^{+++} symétriques de Q par rapport aux axes et à l'origine, on peut toujours écrire une formule (I) de la façon suivante :

chaque groupement de quatre points est affecté d'un même scalaire P_α et les points de Q homologues des points de S à coordonnées impaires sont affectés de sclaïres nuls. La formule (I) obtenue est unique relativement à Q.

En effet, le système (II) s'écrit ici

$$A \sum_{i,j} P_{ij} \left[x_i^k y_j^l + (-1)^k x_i^k y_j^l + (-1)^l x_i^k y_j^l + (-1)^{k+l} x_i^k y_j^l \right] = g_i$$

pour k, l ou les 2, impaires, équations identiquement vérifiées.

Pour k, l pairs tous deux on a avec les notations du § 4-3

$$4 A \sum_u \rho_u z_{uv}^* = g_{v^*}$$

ystème rectangulaire qui se décompose en deux sur l'indice u

$$4 A \left[\sum_{u^*} \rho_{u^*} z_{u^* v^*} + \sum_{u^{**}} \rho_{u^{**}} z_{u^{**} v^*} \right] = g_{v^*}$$

on peut toujours choisir $\rho_{u^{**}} \equiv 0$ et résoudre le système carré

restant $4 A U^T \rho = g$ (où U^T est la transposée de U § 4-3)

or u^{**} définit les points de Q homologues des points de S à coordonné non paires toutes les deux. Le théorème III est démontré.

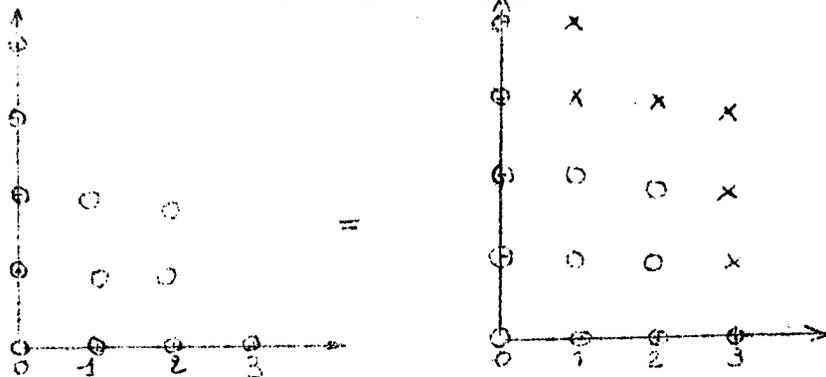
Remarque

La formule obtenue admet en général plus que la silhouette S car on peut compléter cette dernière de la façon suivante :

toute parallèle d'abscisse impaire peut être aussi élevée qu sa voisine immédiatement à gauche

toute parallèle d'ordonnée impaire peut être aussi longue que sa voisine immédiatement en dessous

Exemple



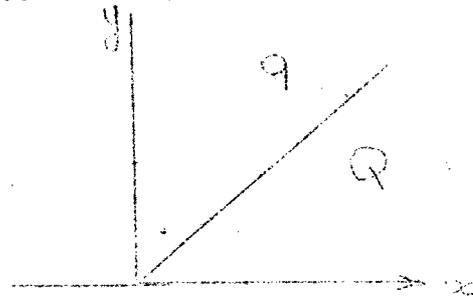
DOMAINES SYMETRIQUES PAR RAPPORT AUX AXES ET BISSECTRICES

Le théorème précédent est applicable. On sait donc écrire une formule (I) à l'aide des quadrillages ($Q + Q_1 + Q_2 + Q_3$) précédemment définis en résolvant un système du type

$$4 A \sum_{ij} f_{ij} x_i^k y_j^l = g_{kl} \quad (i, j, k, l \text{ pairs})$$

Soit q le quadrillage symétrique de Q par rapport à la première bissectrice. Une formule (I) écrite à l'aide de ($q + q_1 + q_2 + q_3$) résulte de la résolution du système

$$4 A \sum_{ji} \sigma_{ji} y_j^k x_i^l = g_{kl}$$



or dans le cas présent $g_{kl} = g_{lk}$. On conclut que la formule à laquelle on aboutit est identique à la précédente et que $f_{ij} = \sigma_{ji}$. On peut donc envisager le problème suivant : écrire une formule à l'aide des huit quadrillages construits à partir de Q et q , chaque groupement de huit points étant affecté d'un même scalaire. Ce problème s'écrit

$$\sum_{ij} f_{ij} [x_i^k y_j^l + x_i^l y_j^k] = g_{kl} \quad \text{à un facteur constant près}$$

et se résout relativement à Q et S .

Cas particulier

La silhouette S est symétrique par rapport à sa bissectrice et le quadrillage Q possède la même symétrie en respectant l'ordre de numérotation au sens du § 4-4.

La réunion de (Q + q) redonne Q et chaque point peut être considéré d'un double point de vue : appartenance à Q ou à q.

Le système linéaire s'écrit

$$\sum_{ij} [x_i^k y_j^l + x_i^l y_j^k] = g_{kl} \quad \begin{array}{l} (k,l) \in S \\ i,j,k,l \text{ pairs} \\ (i,j) \in Q \end{array}$$

Comme $g_{kl} = g_{lk}$ ce système possède la particularité d'avoir certains couples d'équations identiques. Donc, si on résout le système rectangulaire

$$\sum_{ij} [x_i^k y_j^l + x_i^l y_j^k] = g_{kl} \quad k \geq l$$

le système complet est résolu. Introduisons les notations du § 4-4.

$$\sum_{\hat{u}} [\hat{z}_{\hat{u}\hat{v}} + \hat{t}_{\hat{u}\hat{v}}] = g_{\hat{v}}$$

Décomposons l'indice u en deux classes \hat{u} , \tilde{u}

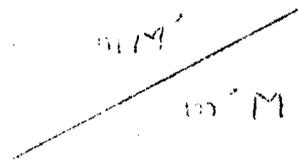
$$\sum_{\hat{u}} \hat{\rho}_{\hat{u}} [\hat{z}_{\hat{u}\hat{v}} + \hat{t}_{\hat{u}\hat{v}}] + \sum_{\tilde{u}} \tilde{\rho}_{\tilde{u}} [\tilde{z}_{\tilde{u}\hat{v}} + \tilde{t}_{\tilde{u}\hat{v}}] = g_{\hat{v}}$$

On peut toujours choisir $\tilde{\rho}_{\tilde{u}} \equiv 0$ et résoudre le système.

$$V^T \hat{\rho} = g \quad (\text{où } V^T \text{ est la transposée de } V, \text{ § 4-4})$$

Le problème est donc résolu, \approx repérant les points de Q $i < j$. Géométriquement cela s'interprète ainsi

Considérons un point M de Q et M' son symétrique. Au point M est affecté le poids f_M et au point M' le poids zéro.



Considérons un point m de q ayant même coordonnées que M' et m' son symétrique. Au point m est affecté le poids f_M à cause sa symétrie avec M et au point m' le poids zéro

d'où

THEOREME IV (domaines symétriques par rapport aux axes et bissectri

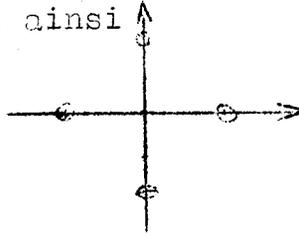
Soit S une silhouette symétrique par rapport à sa bissect Q un quadrillage associé respectant symétrie et ordre de numérotati. Si on choisit pour les points x_α, y_α les sommets de Q et des trois quadrillages Q_1, Q_2, Q_3 construits par symétrie par rapport aux axes à l'origine on peut toujours écrire une formule (I), qui admette S , de la façon suivante :

- chaque groupement de 8 points symétriques est affecté d'un même scalaire f_α
- les points de Q homologues des points de S à coordonnées impaires étant affectés de sclaies nuls (théorème III)

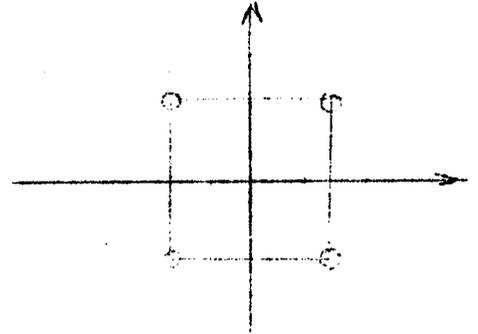
La formule (I) obtenue est unique relativement à Q .

Pratiquement, par la suite, nous utiliserons trois sortes de groupement que nous numérotons ainsi

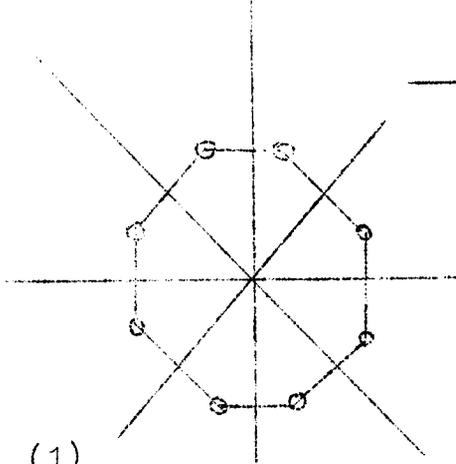
groupement de type 1



groupement de type 2



groupement de type 3



Un théorème fondamental (1)

On sait qu'une transformation du domaine D en un domaine D' schématisée par $[u,v] = J. [x, y]$ transforme l'intégrale

$$\iint_D f(x,y) \, dx dy \quad \text{en} \quad \iint_{D'} g \left\{ J. [x,y] \right\} |J| \, dx dy$$

g étant une fonction continue sur D' et J le jacobien de la transformation supposé non singulier. En particulier si J est constant les relations fonctionnelles

$$L [f(x,y)] = \iint_D f(x,y) \, dx dy - \sum_{\alpha} \int_{\alpha} f(x_{\alpha}, y_{\alpha})$$

et $L \left[g \left\{ J [x,y] \right\} \right]$ s'annulent par les mêmes classes de fonctions.

(1) Voir PRESTON C. HALMER in M T A C (11) 1957 pp. 59,67

C'est le cas de la transformation affine qui permet d'étendre les résultats obtenus pour le carré et le cercle respectivement au rectangle et à l'ellipse

Produit cartésien de deux régions

Soit x un point du domaine D_1 et y un point du domaine D_2 .
Envisageons les deux fonctionnelles

$$\int_{D_1} f(x, l) dx - \sum \rho_\alpha f(x_\alpha, l) = L_1 [f(x, l)]$$

$$\int_{D_2} f(k, y) dy - \sum \sigma_\beta f(k, y_\beta) = L_2 [f(k, y)]$$

Définissons une troisième fonctionnelle

$$\iint_{D_1 D_2} f(x, y) dx dy - \sum \sum \rho_\alpha \sigma_\beta f(x_\alpha, y_\beta) = L [f(x, y)]$$

D étant le domaine produit cartésien des deux domaines D_1 et D_2 , on peut écrire

$$\int_{D_2} L_1 [f(x, y)] dy + \sum \rho_\alpha \left\{ L_2 [f(x_\alpha, y)] \right\}$$

$$= \int_{D_1} L_2 [f(x, y)] dx + \sum \sigma_\beta \left\{ L_1 [f(x, y_\beta)] \right\} = L [f(x, y)]$$

Si $f(x,y)$ est telle que $L_1 f(x,y) = 0$ pour tout point y du domaine D_2 et $L_2 f(x,y) = 0$ pour tout point x du domaine D_1 , $L f(x,y)$ est nécessairement nulle pour tout point du domaine (x,y) du domaine D , et nécessairement nulle pour le produit cartésien des classes de fonctions définies dans D_1 et D_2 qui annulent respectivement L_1 et L_2 .

Application

Considérons les formules de quadratures sur un segment $(-1, +1)$

Poncelet $I = 2 [f(0)]$

Trapezes $I = f(1) + f(-1)$

Stapson $I = \frac{1}{3} [f(-1) + 4 f(0) + f(+1)]$

qu'on peut schématiser de la façon suivante sous forme de vecteurs

lignes : $P = 2 [0 \quad 1 \quad 0]$

$T = 1 [1 \quad 0 \quad 1]$

$S = \frac{1}{3} [1 \quad 4 \quad 1]$

on peut d'après le résultat suivant "spatialiser" ces formules sur le carré de côté 1 centré en l'origine en respectant la convention suivante : la somme des coefficients obtenus doit être égale à l'aire du carré (4) de la façon suivante :

$$T^T \cdot T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{formule 2.1.1. du chapitre II})$$

$$S^T \cdot S = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 4 & 16 & 4 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.3.0. \text{ chapitre II})$$

$$\frac{1}{2} \{ P^T \cdot T + T^T \cdot P \} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.1.2. \text{ chapitre II})$$

$$\frac{1}{3} \{ T^T \cdot T + 2 P^T \cdot P \} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.2.1.)$$

$$\frac{2}{3} [T^T \cdot P + P^T \cdot T + \frac{1}{2} P^T \cdot P] = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.2.2.)$$

(voir BUCKINGHAM bibliographie)

FORMULES DU TYPE DE GAUSS. LES THEOREMES DE GEORGIEFF

Dans son fascicule (voir bibliographie) sur les procédés de quadrature utilisant un nombre de points minimum, GEORGIEFF introduit les fonctions suivantes

$$I_{ij} = \iint_D x^i y^j dx dy \quad \Delta = \begin{vmatrix} I_{00} & I_{10} & I_{01} \\ I_{10} & I_{20} & I_{11} \\ I_{01} & I_{11} & I_{02} \end{vmatrix}$$

$$F(x, y, z ; u, v, w) = - \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 0 & z & x & y \\ w & I_{00} & I_{10} & I_{01} \\ u & I_{10} & I_{20} & I_{11} \\ v & I_{01} & I_{11} & I_{02} \end{vmatrix}$$

et ses résultats sont les suivants :

I - Il existe une infinité de formules du type $\sum_{\alpha=1}^3 \rho_{\alpha} f(x_{\alpha}, y_{\alpha})$

vraies pour un polynôme plein de degré 2. Il faut et il suffit que les trois points soient solutions du système

$$F(x_k, y_k, 1 ; x_1, y_1, 1) = 0 \quad k < 1 \quad k, 1 = 1, 2, 3$$

les paramètres ρ_{α} étant positifs et égaux à

$$\frac{1}{F(x_{\alpha}, y_{\alpha}, 1 ; x_{\alpha}, y_{\alpha}, 1)}$$

II - Il existe une infinité de formules du type $\int \sum_{\alpha=1}^3 f(x_\alpha, y_\alpha)$ vraies pour un polynôme de degré 2. Il faut et il suffit que les trois points précédents solutions du système $F(x_k, y_k, 1 ; x_1, y_1, 1) = 0$ soient pris sur l'ellipse

$$F(x, y, 1 ; x, y, 1) = \frac{3}{I_{00}} \quad (E)$$

le paramètre $\int = \frac{I_{00}}{3}$

Pratiquement, tout point (ξ, η) de l'ellipse (E) peut servir de point de départ, les deux autres étant définis par intersection de (E) avec la droite $F(x, y, 1 ; \xi, \eta, 1) = 0$

D'autres résultats concernant les formules de cubatures à 4 points sont démontrés mais l'auteur suppose alors le domaine d'intégration symétrique par rapport à l'origine.

I - Il existe une infinité de formules du type $\sum_{\alpha=1}^4 \int_{\alpha} f(x_\alpha, y_\alpha)$ vraies pour un polynôme plein de degré 3. Il faut et il suffit les 4 points soient sommets d'un parallélogramme circonscrit à l'ellipse $f(x, y ; x, y) = 1$ (E) où

$$f = - \frac{I_{00}}{\int} \begin{vmatrix} 0 & x & y \\ \xi & I_{20} & I_{11} \\ \eta & I_{11} & I_{02} \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \int = \begin{vmatrix} I_{20} & I_{11} \\ I_{11} & I_{02} \end{vmatrix}$$

les paramètres \int_{α} étant alors positifs et égaux à

$$f_{\alpha} = \frac{I_{00}}{2 f(x_{\alpha}, y_{\alpha}; x_{\alpha}, y_{\alpha})}$$

II - Il existe une infinité de formules du type $f \sum_{\alpha=1}^4 f(x_{\alpha}, y_{\alpha})$ où $f = \frac{I_{00}}{4}$ vraies pour un polynôme plein de degré 3. Il faut et il suffit que les 4 points soient sommets d'un parallélogramme circonscrit à l'ellipse (\mathcal{E}) et inscrit à l'ellipse $f = 2$, chacun des points de cette deuxième ellipse pouvant servir de sommet.

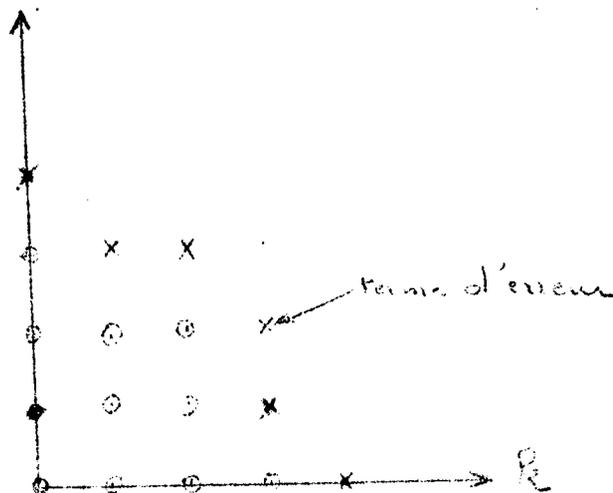
ECRITURE D'UN TERME D'ERREUR

On applique la formule (I) aux monômes (k,l) représentés par des points n'appartenant pas à la silhouette S , la somme $(k + l)$ étant minimum

$$\mathcal{E} = A \left\{ \sum_{ij} f_{ij} x_i^k y_j^l - \iint_D x^k y^l dx dy \right\} \frac{M_{kl}}{k! l!} \quad \begin{matrix} (k,l) \in S \\ (i,j) \in Q \end{matrix}$$

M_{kl} représentant la dérivée $\frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial y^l} f$ prise en un point de D .

Exemple



CHAPITRE II

DOMAINES RECTANGULAIRES

1 - Position du rectangle

$$- a \leq x \leq + a$$

$$- b \leq y \leq + b$$

les équations (2) s'écrivent

$$\sum_{\alpha} \rho_{\alpha} x_{\alpha}^i y_{\alpha}^j = \begin{cases} \frac{a^i b^j}{(i+1)(j+1)} & \text{i et j sont pair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On peut classer les formules en deux catégories :

- les formules résultant d'un choix à priori de groupements de points (x_{α}, y_{α})
- les formules résultant d'une solution de compatibilité entre les inconnues ρ_{α} et les paramètres inhérents au choix des groupements de points (x_{α}, y_{α}) . [Formules du type de Gauss]

2 - Pavage du plan

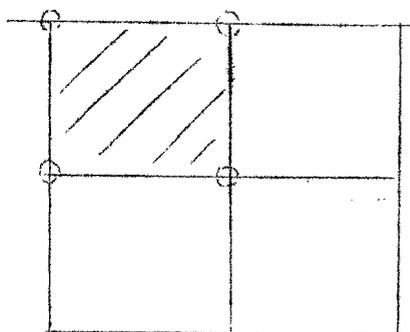
Certaines des formules de la première catégorie, lorsque le nombre de groupements choisis est restreint, peuvent donner lieu à des considérations de pavage du plan par rectangles élémentaires. Les dimensions a et b deviennent alors des pas sur les variables x et y , c'est-à-dire des quantités petites. On appellera densité de points d'une formule de pavage du plan la somme des fractions obtenues de la façon suivante : à chaque point utilisé (x_α, y_α) est attaché l'inverse du nombre de rectangles auxquels appartient ce point.

2 - 1 - Formules de pavage à un groupement

Ces formules n'introduisent qu'une inconnue et la seule équation est (A_{00})

2.1.1. - Maille rectangle

Un groupement du type 2 (voir chapitre I)

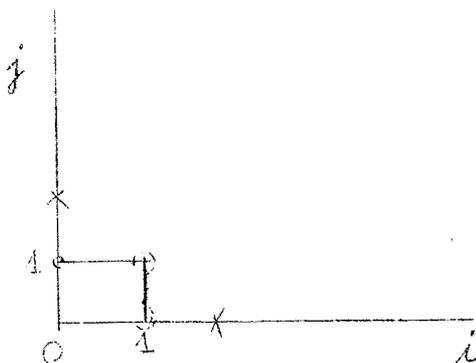


$$\rho = \frac{1}{4} \quad (A_{00})$$

$$I = ab [f(a,b) + f(-a,b) + f(-a,-b) + f(a,-b)]$$

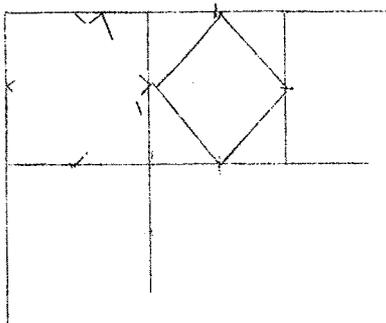
Densité de points 1

silhouette



terme d'erreur $\xi = \frac{4}{3} ab(a^2 M_{20} + b^2 M_{02}) + \frac{8}{9} ab^3 M_{22} \dots$

2.1.2 - Maille losange



un groupement de type 1

$$\rho = \frac{1}{4}$$

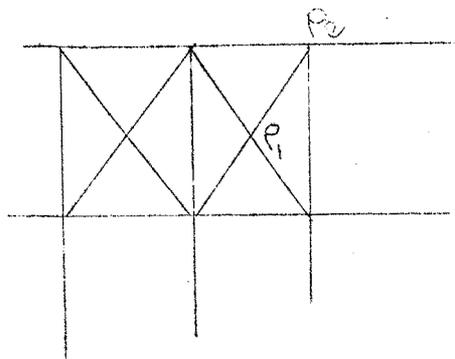
$$I = ab [f(a,0) + f(0,b) + f(-a,0) + f(0,-b)]$$

densité 2 silhouette identique à la précédente

terme d'erreur $\xi = \frac{ab}{3}(a^2 M_{20} + b^2 M_{02}) - \frac{1}{9} ab^3 M_{22} \dots$

2 - 2 Formules de pavage à un groupement plus le centre

2.2.1. - Maille losange et rectangle



deux inconnues ρ_1 au centre

ρ_2 au sommet

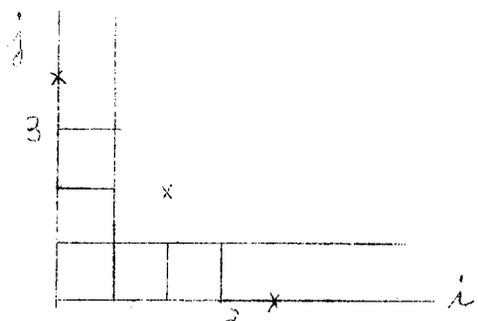
$$\rho_1 + 4 \rho_2 = 1 \quad (A_{00})$$

$$4 \rho_2 = \frac{1}{3} \quad (A_{20}) \text{ et } (A_{02})$$

$$I = \frac{ab}{3} \left[8 f(0,0) + f(a,b) + f(a,-b) + f(-a,-b) + f(-a,b) \right]$$

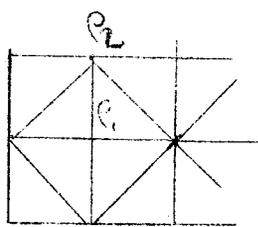
densité de points 2

silhouette



terme d'erreur $\xi = \frac{ab}{45} \left[a^4 M_{40} + 10 a^2 b^2 M_{22} + b^4 M_{04} \right] \dots\dots$

2.2.2. - Deuxième formule



p_1 au centre p_2 aux points cardinaux

$$p_1 + 4 p_2 = 1 \quad (A_{00})$$

$$2 p_2 = \frac{1}{3} \quad (A_{20}) \text{ et } (A_{02})$$

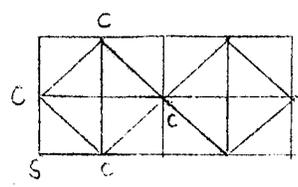
$$I = \frac{2ab}{3} \left[2 f(0,0) + f(a,0) + f(-a,0) + f(0,b) + f(0,-b) \right]$$

densité 3

silhouette identique à la précédente

$$\xi = \frac{ab}{45} \left[a^4 M_{40} - 5 a^2 b^2 M_{22} + b^4 M_{04} \right] \dots\dots$$

2 - 3 - Formule-combinaison des deux précédentes



Maille double rectangle et losange

3 inconnues p_1 au centre

p_2 aux points cardinaux C

p_3 aux sommets S

$$f_1 + 4f_2 + 4f_3 = 1 \quad (A_{00})$$

$$2f_2 + 4f_3 = \frac{1}{3} \quad (A_{20}) \text{ et } (A_{02})$$

$$4f_3 = \frac{1}{6}$$

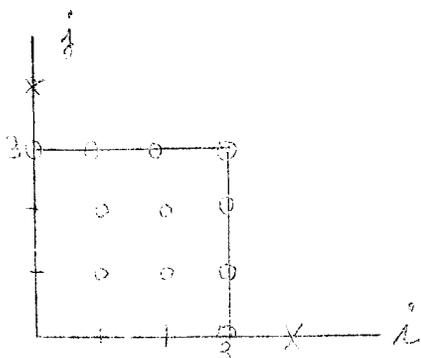
$$f_1 = \frac{16}{36} \quad f_2 = \frac{4}{36} \quad f_3 = \frac{1}{36}$$

$$I = \frac{ab}{9} \left[16 f(o,o) + 4 \sum f(S) + \sum f(C) \right]$$

$f(S)$ valeur de $f(x,y)$ aux sommets des rectangles

$f(C)$ valeur de $f(x,y)$ aux points cardinaux

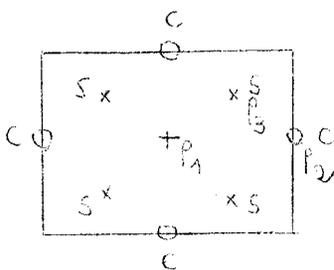
densité 4 . Silhouette carrée de côté 3



$$\xi = \frac{ab}{45} (a^4 M_{40} + b^4 M_{04}) + \ominus^8 \dots$$

2 - 4 - Autre formule de même silhouette

On utilise le groupement formé des sommets d'un rectangle homothétique $[0, \frac{1}{2}]$



$$f_1 + 4f_2 + 4f_3 = 1 \quad (A_{00})$$

$$2f_2 + f_3 = \frac{1}{3} \quad (A_{20}) \text{ et } (A_{02})$$

$$\frac{1}{4} f_3 = \frac{1}{9} \quad (A_{22})$$

$$f_1 = -\frac{10}{18} \quad f_2 = \frac{8}{18} \quad f_3 = -\frac{1}{18}$$

$$I = \frac{2ab}{9} \left[-10 f(0,0) + 8 \sum f(S) - \sum f(C) \right]$$

densité de points 7

$$\xi = -\frac{ab}{30} (a^4 M_{40} + b^4 M_{04}) + \ominus^8 \dots\dots$$

3 - Formules globales

Il existe un grand nombre de ces formules. BUCKINGHAM dans son livre "Numerical Méthods" (chez Pitmann, Londres) en donne un répertoire varié. Cependant, ces formules semblent avoir l'inconvénient d'exiger un travail trop long pour la précision obtenue.

3 - 1 - Formules à 3 groupements

- groupement de type 2 défini par $(x) = \frac{a}{3}$ $(y) = \frac{b}{3}$

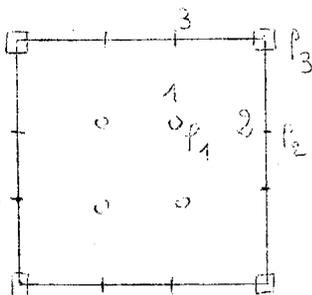
inconnue ρ_1

- groupement de type 3 défini par $(x) = a,$ $(y) = \frac{b}{3}$

et $(x) = \frac{a}{3},$ $(y) = b$

inconnue ρ_2

- groupement de type 2 les sommets du rectangle



$$4 \rho_1 + 8 \rho_2 + 4 \rho_3 = 1 \quad (A_{00})$$

$$\frac{4}{9} \rho_1 + \frac{40}{9} \rho_2 + 4 \rho_3 = \frac{1}{3} \quad (A_{20}) \text{ et } (A_{02})$$

$$\frac{4}{81} \rho_1 + \frac{8}{9} \rho_2 + 4 \rho_3 = \frac{1}{9} \quad (A_{22})$$

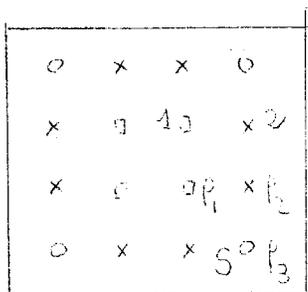
$$\rho_1 = \frac{9}{64} \quad \rho_2 = \frac{3}{64} \quad \rho_3 = \frac{1}{64}$$

$$I = \frac{ab}{16} \left[9 \sum f(1) + 3 \sum f(2) + \sum f(3) \right]$$

silhouette identique à celle de la formule 2.3

$$= \frac{4ab}{405} (a^4 M_{40} + b^4 M_{04}) + 0^8 \dots$$

On peut écrire une autre formule avec une configuration homothétique de la précédente, homothétie $(0, \frac{3}{4})$



$$4 p_1 + 8 p_2 + 4 p_3 = 1 \quad (A_{00})$$

$$\frac{4}{16} p_1 + \frac{40}{16} p_2 + \frac{36}{16} p_3 = \frac{1}{3} \quad (A_{20}) \text{ et } (A_{02})$$

$$\frac{4}{256} p_1 + \frac{72}{256} p_2 + \frac{324}{256} p_3 = \frac{1}{9} \quad (A_{22})$$

$$p_1 = \frac{121}{2304} \quad p_2 = \frac{143}{2304} \quad p_3 = \frac{169}{2304}$$

$$I = \frac{ab}{576} \left[121 \sum f(1) + 143 \sum f(2) + 169 \sum f(3) \right]$$

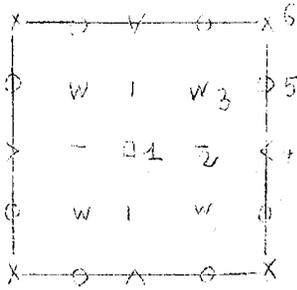
$$\mathcal{E} = - \frac{13}{23 \cdot 040} ab (a^4 M_{40} + b^4 M_{04}) + 0^8 \dots$$

silhouette identique à celle de la formule 2.3

Ces formules ont l'intérêt d'utiliser des coefficients p_α rationnels.

3 - 2 Formule à 5 groupements plus le centre

6 inconnues p_α permettent d'écrire une formule vraie pour tout polynôme à silhouette carrée de côté 5. Le rectangle est partagé en 16 rectangles égaux.



$$f_1 + 4f_2 + 4f_3 + 4f_4 + 8f_5 + 4f_6 = 1 \quad (A_{00})$$

$$\frac{1}{2}f_2 + f_3 + 2f_4 + 3f_5 + 4f_6 = \frac{1}{3} \quad (A_{20})$$

$$\frac{1}{8}f_2 + \frac{1}{4}f_3 + 2f_4 + \frac{17}{4}f_5 + 4f_6 = \frac{1}{5} \quad (A_{40})$$

$$\frac{1}{4}f_3 + 2f_5 + 4f_6 = \frac{1}{9} \quad (A_{22})$$

$$\frac{1}{16}f_3 + \frac{20}{16}f_5 + 4f_6 = \frac{1}{15} \quad (A_{42})$$

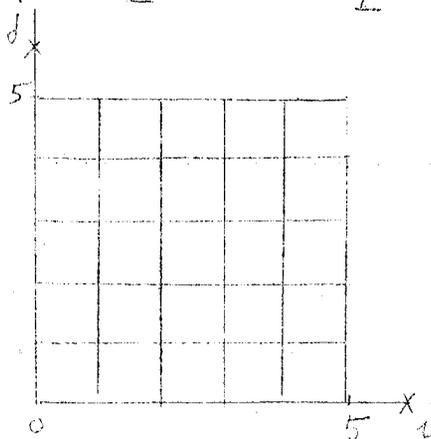
$$\frac{1}{64}f_3 + \frac{1}{2}f_5 + 4f_6 = \frac{1}{25} \quad (A_{44})$$

$$f_1 = \frac{144}{8050} \quad f_2 = \frac{384}{8050} \quad f_3 = \frac{1024}{8050} \quad f_4 = \frac{84}{8050} \quad f_5 = \frac{224}{8050}$$

$$f_6 = \frac{48}{8050}$$

$$I = \frac{ab}{2025} \left[144 f(1) + 384 \sum f(2) + 1024 \sum f(3) + 84 \sum f(4) + 224 \sum f(5) + 48 \sum f(6) \right]$$

silhouette carrée
de côté 5



terme d'erreur $\epsilon = \frac{ab}{5760} \left[a^6 M_{60} + b^6 M_{06} \right] + o^{10} \dots\dots$

4 - Formules du type de Gauss

L'application des théorèmes de M. GEORGIEFF est simple dans le cas du rectangle.

4 - 1 - Formules à trois points

$$I_{00} = 4ab \quad I_{20} = \frac{4a^2}{3} \quad I_{02} = \frac{4b^2}{3} \quad \Delta = \frac{64}{9} a^3 b^3$$

les équations $F(x_k, y_k, 1; x_e, y_e, 1) = 0$ s'écrivent

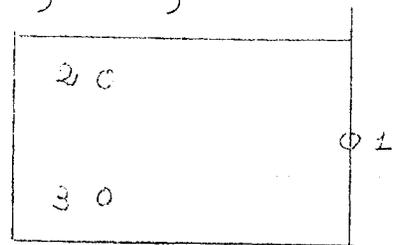
$$x_k x_e + y_k y_e + \frac{1}{3} = 0$$

Une solution simple est

$x_1 = a$	$y_1 = 0$
$x_2 = \frac{a}{3}$	$y_2 = \frac{2b}{3}$
$x_3 = -\frac{a}{3}$	$y_3 = -\frac{2b}{3}$

d'où les poids

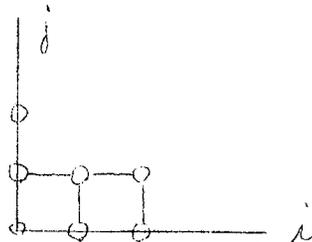
$$p_\alpha = \frac{1}{3x_\alpha^2 + 3y_\alpha^2 + 1}$$



$$p_1 = ab \quad p_2 = \frac{3}{2} ab = p_3$$

$$I = 4ab \left[\frac{f(a,0)}{4} + \frac{3}{8} f\left(-\frac{a}{3}, \frac{2b}{3}\right) + \frac{3}{8} f\left(-\frac{a}{3}, -\frac{2b}{3}\right) \right]$$

salhouette



terme d'erreur $\mathcal{E} = \frac{2}{9} a^2 b^3 M_{12} + \frac{2}{27} a^3 b^3 M_{22} \dots\dots\dots$

On peut construire une formule à 3 points avec des poids égaux

$$p = \frac{4ab}{3}$$

les trois points devant satisfaire le même système que précédemment et situés sur l'ellipse

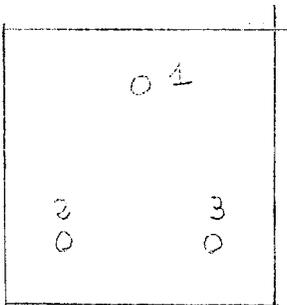
$$F(x,y,1 ; x,y,1) = \frac{3}{I_{00}}$$

soit $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{2}{3}$

Une solution simple $x_1 = 0 \quad y_1 = b\sqrt{\frac{2}{3}}$

$$x_2 = \frac{a}{\sqrt{2}} \quad y_2 = -\frac{b}{\sqrt{6}}$$

$$x_3 = -\frac{a}{\sqrt{2}} \quad y_3 = -\frac{b}{\sqrt{6}}$$

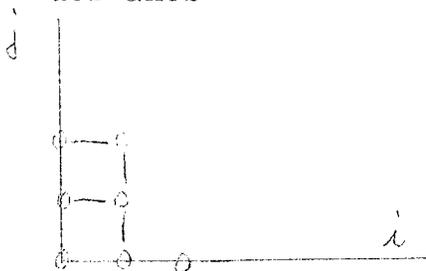


$$I = \frac{4ab}{3} \left[f\left(0, b\sqrt{\frac{2}{3}}\right) + f\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{-b}{\sqrt{6}}\right) + f\left(-\frac{a}{\sqrt{2}}, -\frac{b}{\sqrt{6}}\right) \right]$$

terme d'erreur

$$\epsilon = \frac{2}{3\sqrt{6}} a^3 b^2 M_{21} + \frac{2}{27} a^3 b^3 M_{22} \dots\dots$$

silhouette symétrique de la précédente par rapport à la bissectrice des axes



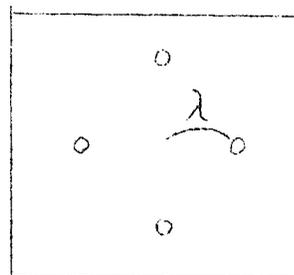
4 - 2 - Formules à un groupement

Avec un groupement de type 1 à un paramètre λ on peut écrire les équations

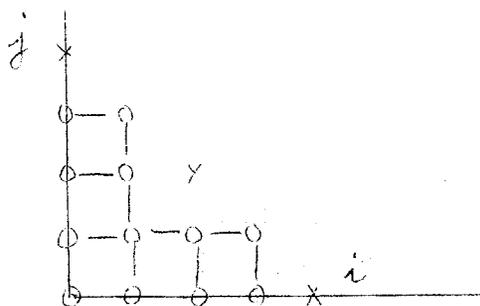
$$4\rho = 1 \quad (A_{00})$$

$$2\rho\lambda^2 = \frac{1}{3} \quad (A_{20}) \text{ et } (A_{02})$$

$$\rho = \frac{1}{4} \quad \lambda = \sqrt{\frac{2}{3}}$$



$$I = ab \left[f\left(0, \sqrt{\frac{2}{3}}\right) + f\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}, 0\right) + f\left(0, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right) + f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}, 0\right) \right]$$



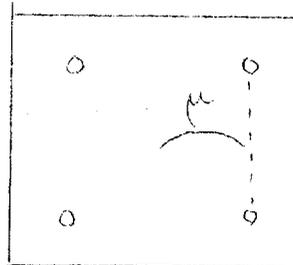
terme d'erreur $\mathcal{E} = \frac{ab}{270} (a^4 M_{40} - 30 a^2 b^2 M_{22} + b^4 M_{04}) \dots\dots\dots$

Avec un groupement de type 2

$$4\rho = 1 \quad (A_{00})$$

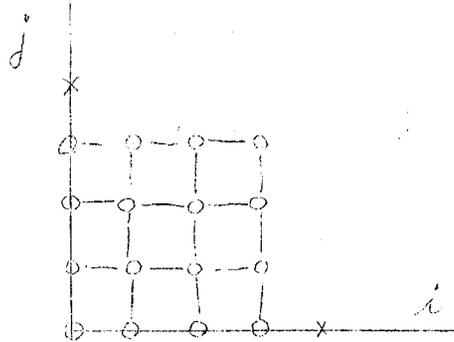
$$4\rho\mu^2 = \frac{1}{3} \quad (A_{20}) \text{ et } (A_{02})$$

$$\rho = \frac{1}{4} \quad \mu = \frac{1}{\sqrt{3}}$$



On remarque ici que l'équation (A_{22}) est satisfaite, ce qui donne une silhouette plus étendue que la précédente

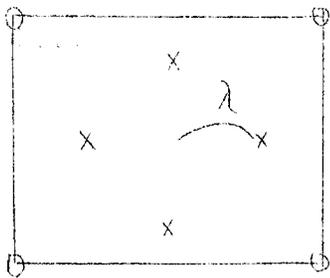
$$I = ab \left[f\left(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}}\right) + f\left(-\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{-a}{\sqrt{3}}, \frac{-b}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{a}{\sqrt{3}}, -\frac{b}{\sqrt{3}}\right) \right]$$



terme d'erreur $\mathcal{E} = -\frac{2}{135} ab \left[a^4 M_{40} + b^4 M_{04} \right] \dots\dots$

4 - 3 - Formules à deux groupements

En combinant les deux configurations précédentes on ne peut écrire une formule intéressante. Mais si on fixe $\mu = 1$ par exemple, λ est alors égale à $\frac{1}{\sqrt{2}}$



La silhouette est identique à la précédent

$$I = \frac{ab}{9} \left[8 \sum f(C) + \sum f(S) \right]$$

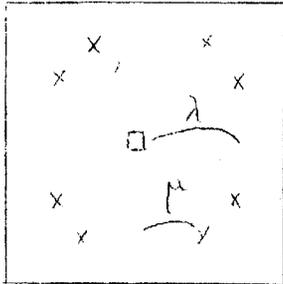
avec $f(C) = f\left(\pm \frac{a}{\sqrt{2}}, \pm \frac{b}{\sqrt{2}}\right)$

l'erreur est $\mathcal{E} = \frac{ab}{270} (a^4 M_{40} + b^4 M_{04})$

Il est plus intéressant d'envisager le centre du rectangle comme un groupement.

4 - 4 - Formule à deux groupements dont le centre

en choisissant un groupement de type 3 octogone à 2 paramètres λ, μ



deux inconnues ρ_1 au centre

et ρ_2

$$\rho_1 + 8 \rho_2 = 1 \quad (A_{00})$$

$$4 \rho_2 (\lambda^2 + \mu^2) = \frac{1}{3} \quad (A_{20})$$

$$8 \rho_2 \lambda^2 \mu^2 = \frac{1}{9} \quad (A_{22})$$

$$4 \rho_2 (\lambda^4 + \mu^4) = \frac{1}{5} \quad (A_{40})$$

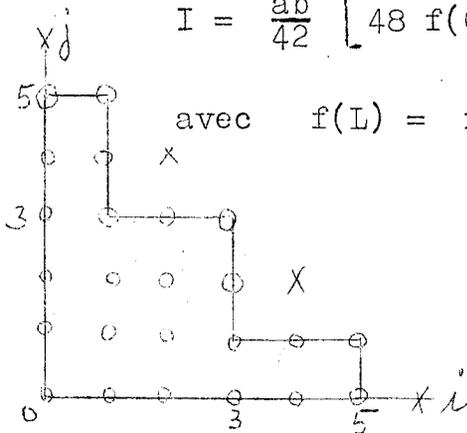
Une solution de compatibilité

$$\lambda = \sqrt{\frac{7 + \sqrt{14}}{15}} \quad \mu = \sqrt{\frac{7 - \sqrt{14}}{15}}$$

$$\rho_1 = \frac{48}{168} \quad \rho_2 = \frac{15}{168}$$

$$I = \frac{ab}{42} \left[48 f(0,s) + 15 \sum f(L) \right]$$

avec $f(L) = f(\lambda a, \mu b)$ et $f(\mu a, \lambda b)$

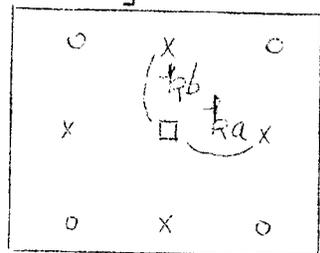


terme d'erreur $\mathcal{E} = -\frac{38ab}{4725} [M_{60}^a + M_{06}^b] - \frac{ab}{810} [M_{42}^{ab} + M_{24}^{ba}] \dots$

4 - 5 - Formules à trois groupements dont le centre

4.5.1. - Deux groupements de types 1 et 2 situés sur un rectangle intérieur homothétique $[0, h]$

- ρ_1 au centre
- ρ_2 aux points cardinaux
- ρ_3 aux sommets



$$\rho_1 + 4\rho_2 + 4\rho_3 = 1 \quad (A_{20})$$

$$k^2(2\rho_2 + 4\rho_3) = \frac{1}{3} \quad (A_{20}) \text{ et } (A_{02})$$

$$4k^4\rho_3 = \frac{1}{9} \quad (A_{22})$$

$$k^4(2\rho_2 + 4\rho_3) = \frac{1}{5} \quad (A_{04} \text{ et } A_{40})$$

Une solution de compatibilité $k = \sqrt{\frac{5}{5}}$

$$\rho_1 = \frac{64}{324} \quad \rho_2 = \frac{40}{324} \quad \rho_3 = \frac{25}{324}$$

$$I = \frac{ab}{81} \left[64 f(0,0) + 40 \sum f(C) + 25 \sum f(S) \right]$$

silhouette carrée de côté 5

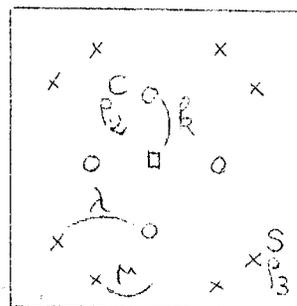
Cette formule a la propriété de vérifier les équations (A_{42}) et (A_{44})

terme d'erreur

$$\epsilon = - \frac{ab}{7875} \left[a^6 M_{60} + b^6 M_{06} \right] + 0^{10} \dots\dots$$

4.5.2. - En prenant un groupement de type 1 à un paramètre k et un groupement de type 3 à 2 paramètres, λ et μ , on obtient une formule à 13 points [MINEUR]

ρ_1 au centre
 ρ_2 pour la croix
 ρ_3 pour l'octogone



$$\rho_1 + 4 \rho_2 + 8 \rho_3 = 1 \quad (A_{00})$$

$$2 \rho_2 k^2 + 4 \rho_3 (\lambda^2 + \mu^2) = \frac{1}{3} \quad (A_{20})$$

$$2 \rho_2 k^4 + 4 \rho_3 (\lambda^4 + \mu^4) = \frac{1}{5} \quad (A_{04})$$

$$8 \rho_3 \lambda^2 \mu^2 = \frac{1}{9} \quad (A_{22})$$

$$2 \rho_2 k^6 + 4 \rho_3 (\lambda^6 + \mu^6) = \frac{1}{7} \quad (A_{06})$$

$$4 \rho_3 \lambda^2 \mu^2 (\lambda^2 + \mu^2) = \frac{1}{15} \quad (A_{42})$$

en posant $S = \lambda^2 + \mu^2$ on obtient les solutions de compatibilit.
 en annulant les 3 déterminants extraits de la matrice

$$P = \lambda^2 \mu^2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & S & \frac{1}{3} \\ k^2 & S^2 - 2P & \frac{1}{5} \\ 0 & 2P & \frac{1}{9} \\ k^4 & S^3 - 3PS & \frac{1}{7} \\ 0 & PS & \frac{1}{15} \end{bmatrix}$$

on trouve $S = \frac{6}{5}$ $P = \frac{9}{31}$ $k^2 = \frac{12}{35}$

soit $k = 2 \sqrt{\frac{3}{35}} = 0,585\ 540\ 043$

$$\lambda = \sqrt{\frac{3}{5} \left(1 + \sqrt{\frac{6}{31}}\right)} = 0,929\ 797\ 072$$

$$\mu = \sqrt{\frac{3}{5} \left(1 - \sqrt{\frac{6}{31}}\right)} = 0,579\ 685\ 426$$

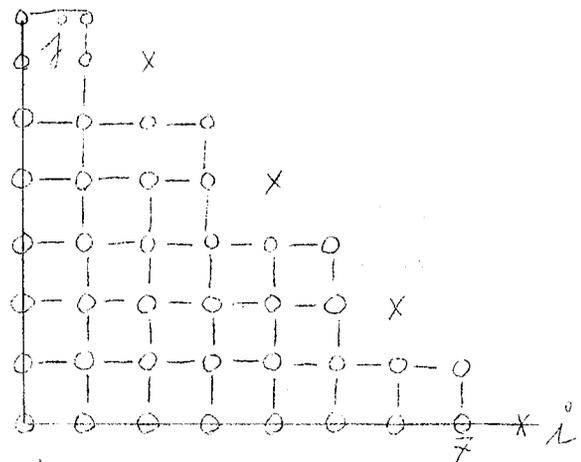
$$\rho_1 = \frac{8}{648} \qquad \rho_2 = \frac{98}{648} \qquad \rho_3 = \frac{31}{648}$$

$$I = \frac{ab}{162} \left[8 f(0,0) + 98 \sum f(C) + 31 \sum f(S) \right]$$

avec $f(C)$ = valeur de $f(x,y)$ aux sommets de la croix

$f(S)$ = valeur de $f(x,y)$ aux sommets de l'octogone

selon cette

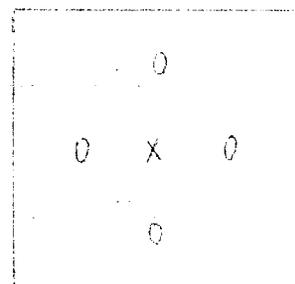
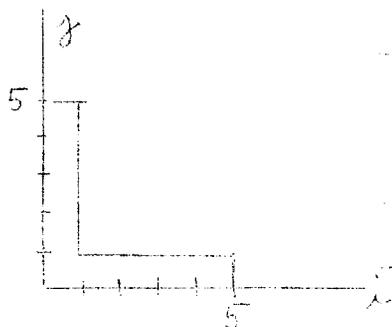


$$\begin{aligned} E &< 4ab \frac{4! 10^{-5}}{8!} (a^3 M_{30} + b^3 M_{03}) + \frac{13 \cdot 10^{-4}}{6! 2!} (a^2 b^6 M_{26} + a^6 b^2 M_{62}) \\ &- \frac{8 \cdot 10^{-3}}{4! 6!} (a^4 b^4) \end{aligned}$$

5 - Quelques formules de Gauss de type non classique

Nous citerons en conclusion quelques formules obtenues par combinaison de groupements de points. Le peu d'intérêt de ces formules provient du fait que leurs silhouettes sont étendues le long des axes i et j sans être étendues le long de la bissectrice, l'équation (A_{22}) étant impossible à vérifier.

Toutes ces formules, sauf indication contraire, auront la silhouette suivante :



5 - 1 - Combinaisons avec le centre

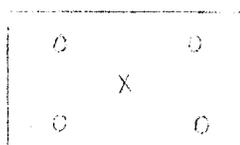
$$\lambda = \sqrt{\frac{3}{5}} \quad \rho_1 = -\frac{2}{18} \quad \rho_2 = \frac{5}{18}$$

$$= -a^2 b^2 \left[\frac{M_{22}}{9} + \frac{1}{180} (a^2 M_{42} + b^2 M_{24}) \right] - \frac{1}{7875} (a^6 M_{60} + b^6 M_{06}) \dots$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{3}{5}} \quad \rho_1 = \frac{16}{36} \quad \rho_2 = \frac{5}{36}$$

$$\mathcal{E} = \left[\frac{4}{45} M_{22} + \frac{1}{225} (a^2 M_{42} + b^2 M_{24}) \right] a^2 b^2 - \frac{4}{7875} (a^6 M_{60} + b^6 M_{06}) \dots$$

(on connaît déjà la formule $\lambda = \sqrt{\frac{1}{3}} \quad \rho_1 = 0 \quad \rho_2 = \frac{1}{4}$ voir 4,2)

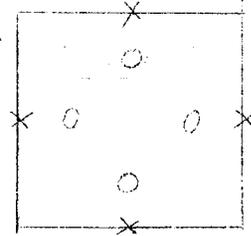


5 - 2 - Combinaisons avec les milieux des côtés

$$\lambda = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\rho_1 = \frac{5}{12}$$

$$\rho_2 = -\frac{2}{12}$$

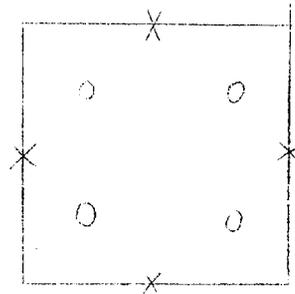


$$= -a^2b^2 \left[\frac{M_{22}}{9} + \frac{1}{180} (a^2M_{42} + b^2M_{24}) \right] - \frac{13}{47250} (a^6M_{60} + b^6M_{06})$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{9 - \sqrt{41}}{10}}$$

$$\rho_1 = \frac{4 + \sqrt{41}}{60}$$

$$\rho_2 = \frac{11 - \sqrt{41}}{60}$$



(variante de la formule 4,2)

$$\lambda^2 = \frac{77 - \sqrt{3129} - 2\sqrt{7\sqrt{3129} - 329}}{35}$$

$$\mu^2 = \frac{77 - \sqrt{3129} - 2\sqrt{7\sqrt{3129} - 329}}{35}$$

$$\rho_1 = \frac{\sqrt{3129} + 42}{936}$$

$$\rho_2 = \frac{75 - \sqrt{3129}}{468}$$

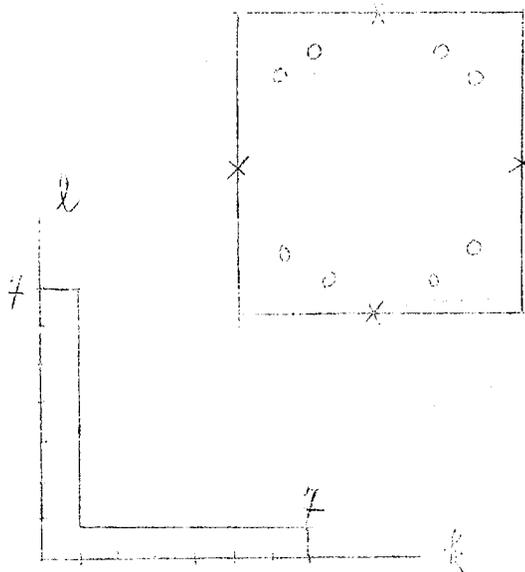
soit encore

$$\lambda = 0,725\ 866\ 930$$

$$\mu = 0,273\ 685\ 789$$

$$\rho_1 = 0,104\ 634\ 043$$

$$\rho_2 = 0,040\ 731\ 913$$



5 - 3 - Combinaisons avec les sommets

On connaît déjà la formule 4,3

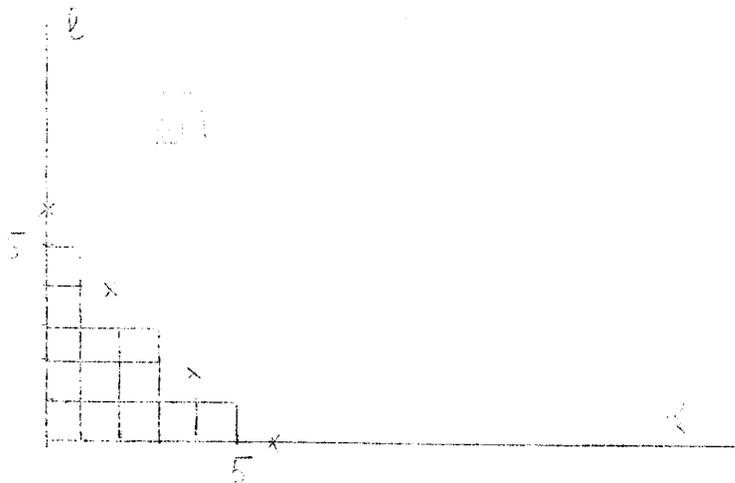
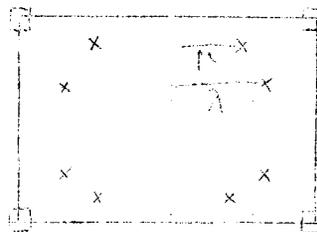
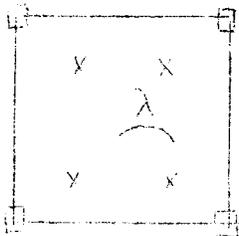
$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \rho_1 = \frac{5}{24} \quad \rho_2 = \frac{1}{24}$$

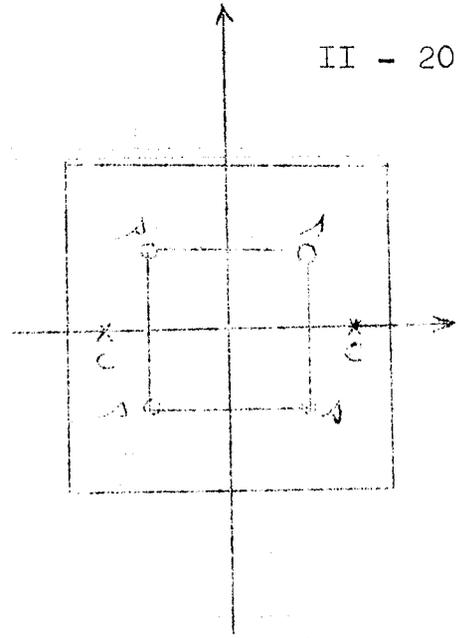
$$\mathcal{E} = a^2 b^2 \left[\frac{4M_{22}}{45} + \frac{2}{225} (a^2 M_{42} + b^2 M_{24}) \right] + \frac{4}{23625} (a^6 M_{60} + b^6 M_{06})$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{4 + \sqrt{11}}{15}} \quad \mu = \sqrt{\frac{4 - \sqrt{11}}{15}}$$

$$\rho_1 = \frac{5}{44} \quad \rho_2 = \frac{1}{44}$$

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{7875} (a^6 M_{60} + b^6 M_{06}) + \frac{a^2 b^2}{405} (a^2 M_{42} + b^2 M_{24}) \dots\dots$$



FORMULE DE COLLATZ (voir Bibliographie)

- f_1 au centre
 f_2 aux points C définis par un paramètre λ
 f_3 aux points s sommets d'un rectangle défini par 2 paramètres (λ, μ)

$$f_1 + 2f_2 + 4f_3 = 1 \quad (A_{00})$$

$$2f_2\lambda^2 + 4f_3\lambda^2 = \frac{1}{3} \quad (A_{20})$$

$$4f_3\mu^2 = \frac{1}{3} \quad (A_{02})$$

$$2f_2\lambda^4 + 4f_3\lambda^4 = \frac{1}{5} \quad (A_{40})$$

$$4f_3\lambda^2\mu^2 = \frac{1}{9} \quad (A_{22})$$

$$4f_3\mu^4 = \frac{1}{5} \quad (A_{04})$$

Compatibilité $\lambda = \sqrt{\frac{1}{3}}$ $\mu = \sqrt{\frac{3}{5}}$ $\nu = \sqrt{\frac{14}{15}}$

qui donne $f_1 = \frac{2}{7}$ $f_2 = \frac{5}{63}$ $f_3 = \frac{5}{36}$

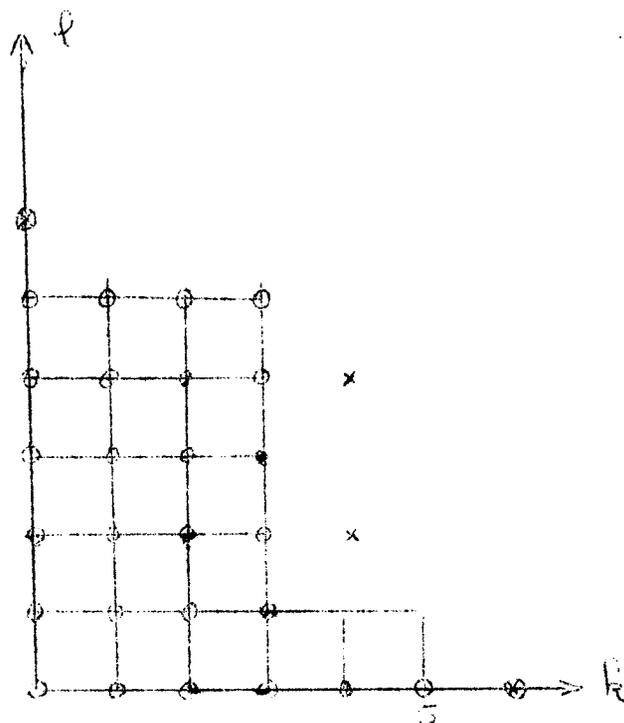
d'où la formule

$$I = \frac{ab}{63} \left[72 f(0,0) + 20 \sum f(c) + 35 \sum f(s) \right]$$

terme d'erreur

$$\xi = \frac{ab}{212.625} \left[8a^6 M_{60} - 525 a^4 b^2 M_{42} - 63 b^6 M_{06} \right] \dots$$

silhouette



DOMAINES CIRCULAIRES

1 - Position du cercle (O)

centre origine des coordonnées Rayon R

L'équation (2) du chapitre (I) donne

$$\sum_{\alpha} \rho_{\alpha} x_{\alpha}^i y_{\alpha}^j = \iint_{(O)} x^i y^j dx dy$$

c'est-à-dire

$$\sum_{\alpha} \rho_{\alpha} x_{\alpha}^i y_{\alpha}^j = \begin{cases} 0 & \text{si } i \text{ ou } j \text{ ou les deux sont impairs} \\ \frac{1}{p+q+1} \left(\frac{R}{2}\right)^{2(p+q)} \frac{2p! \cdot 2q!}{p! \cdot (p+q)! \cdot q!} & \end{cases}$$

pour $i = 2p$
 $j = 2q$

on exposera certains résultats en coordonnées polaires.
Les notations seront alors $[r, \varphi]$ pour rayon vecteur et angle polaire et on écrira $F(r_{\alpha}, \varphi_{\alpha})$ au lieu de $f(x_{\alpha}, y_{\alpha})$.

Nous classerons les formules comme dans le cas des rectangles en deux catégories :

- 1) Choix à priori de groupements de points. Ces formules deviennent rapidement sans intérêt.
- 2) Formules du type de Gauss

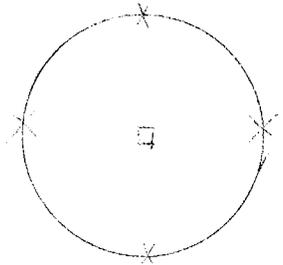
2 - Formules à cinq et sept points

2 - 1 - Un groupement de type 1 plus le centre.

deux inconnues ρ_1 au centre
 ρ_2 aux points cardinaux

$$\rho_1 + 4 \rho_2 = 1 \quad (A_{00})$$

$$2 \rho_2 = \frac{1}{4} \quad (A_{20}) \text{ ou } (A_{02})$$



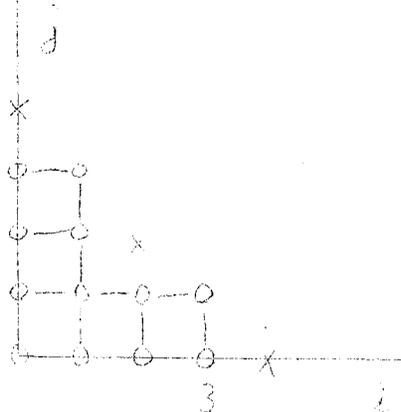
d'où la formule en polaires

$$I = \frac{\pi R^2}{8} \left[4 F(0,0) + \sum_{n=1}^4 F \left(R, \frac{n\pi}{2} \right) \right]$$

terme d'erreur

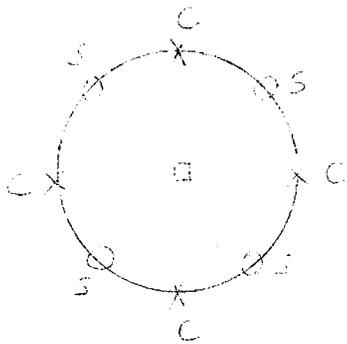
$$\mathcal{E} = \frac{\pi R^6}{192} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right]^{(2)} M(x,y) + O^5 \dots\dots\dots$$

algorithme



2 - 2 - Un groupement de type 2 complet et un groupement de type 1 incomplet plus le centre.

On peut choisir les points équidistants sur le cercle c'est-à-dire les sommets d'un hexagone inscrit. On sera amené cependant à écrire simultanément les équations (A_{20} et A_{02}). Ce qui explique que l'accroissement du nombre de points n'étend pas la silhouette de validité qui sera identique à la précédente



3 inconnues

ρ_1 au centre
 ρ_2 aux points C
 ρ_3 aux points S

$$\rho_1 + 2\rho_2 + 4\rho_3 = 1 \quad (A_{00})$$

$$4\rho_3 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \quad (A_{20})$$

$$2\rho_2 + 4\rho_3 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \quad (A_{02})$$

$$\rho_1 = \frac{6}{12} \quad \rho_2 = \rho_3 = \frac{1}{12}$$

d'où en polaires

$$I = \frac{\pi R^2}{12} \left[6 F(0,0) + \sum_{n=0}^5 F\left(R, \frac{\Delta}{6} + \frac{n\pi}{3}\right) \right]$$

terme d'erreur $\mathcal{E} = \frac{\pi R^6}{384} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^{(2)} M(x,y) + O^5 \dots$

3 - Formules du type de Gauss3 - 1 - Formules de GEORGIEFF à trois points

Le système des trois équations de GEORGIEFF s'écrit ici
 puisque $I_{00} = \pi R^2$ $I_{20} = I_{02} = \frac{\pi R^4}{4}$ $I_{11} = 0$

$$\text{et } \sigma = \frac{\pi^2 R^8}{16}$$

$$x_1 x_2 + y_1 y_2 + \frac{R^2}{4} = 0$$

$$x_1 x_3 + y_1 y_3 + \frac{R^2}{4} = 0$$

$$x_2 x_3 + y_2 y_3 + \frac{R^2}{4} = 0$$

On peut envisager la solution formée de trois points intérieurs
 au cercle

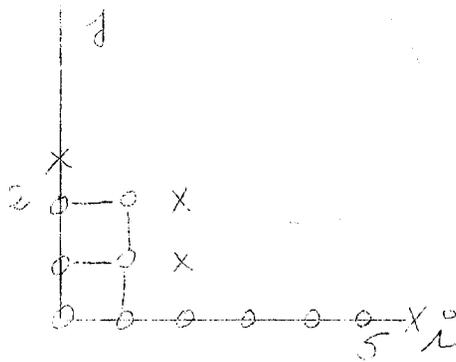
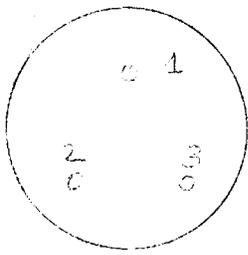
$$x_1 = 0 \qquad x_2 = \frac{R}{\sqrt{2}} \qquad x_3 = -\frac{R}{\sqrt{2}}$$

$$y_1 = \frac{R}{2} \qquad y_2 = -\frac{R}{2} \qquad y_3 = -\frac{R}{2}$$

avec les poids $\rho_i = \frac{\pi R^4}{4x_i^2 + 4y_i^2 + R^2}$

d'où la formule en coordonnées cartésiennes

$$I = \frac{\pi R^2}{4} \left[2 f\left(0, \frac{R}{2}\right) + f\left(\frac{R}{\sqrt{2}}, -\frac{R}{2}\right) + f\left(-\frac{R}{\sqrt{2}}, -\frac{R}{2}\right) \right]$$



terme d'erreur

$$\mathcal{E} = \pi R^5 \left[-\frac{1}{16} M_{21} + \frac{R}{192} M_{22} \dots \right]$$

$$-\frac{R}{384} M_{04} - \frac{R^2}{46080} M_{60}$$

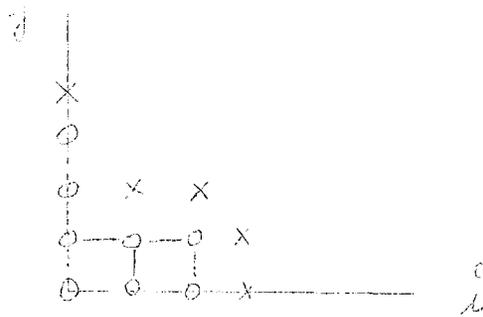
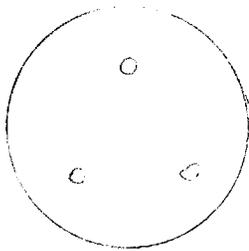
Les formules de GEORGIEFF à poids égaux $\rho = \frac{I_{00}}{3} = \frac{\pi R^2}{3}$ sont plus symétriques. Il suffit de prendre les intersections du cercle (C)

$$x^2 + y^2 = \frac{R^2}{2}$$

avec la droite $4\xi x + 4\eta y + R^2 = 0$
 ξ, η étant les coordonnées d'un point quelconque du cercle (C).

Pour $\xi = \frac{R}{\sqrt{2}}$ $\eta = 0$ on peut écrire la formule en coordonnées cartésiennes

$$I = \frac{\pi R^2}{3} \left[f\left(\frac{R}{\sqrt{2}}, 0\right) + f\left(-\frac{R}{2\sqrt{2}}, \frac{R\sqrt{6}}{4}\right) + f\left(-\frac{R}{2\sqrt{2}}, -\frac{R\sqrt{6}}{4}\right) \right]$$



terme d'erreur

$$\mathcal{E} = \pi R^5 \left[\frac{\sqrt{2}}{96} M_{30} - \frac{\sqrt{2}}{32} M_{12} - \frac{R}{768} M_{04} - \frac{R}{384} M_{22} \dots \right]$$

APPEL dans les annales de la Faculté de Toulouse (Tome IV 1890) avait déjà donné la même formule en coordonnées polaires

$$I = \frac{\pi R^2}{3} \left[F\left(\frac{R}{\sqrt{2}}, \frac{\pi}{2}\right) + F\left(\frac{R}{\sqrt{2}}, -\frac{\pi}{6}\right) + F\left(\frac{R}{\sqrt{2}}, \frac{7\pi}{6}\right) \right]$$

En résumé pour avoir une formule vraie pour tout polynôme $\sum A_{ij} x^i y^j$ $i + j \leq 2$ à trois points et à poids tous égaux il suffit de prendre les sommets d'un triangle équilatéral inscrit dans le cercle de rayon $\frac{R}{\sqrt{2}}$

3 - 2 - Formules de GEORGIEFF à 4 points

Les formules du chapitre I s'écrivent

$$\int = \frac{\pi R^6}{16} \quad f(x, y ; u, v) = \frac{4}{R^2} ux + \frac{4}{R^2} vy$$

Pour écrire une formule à 4 points vraie pour tout polynôme $\sum A_{ij} x^i y^j$ $i + j \leq 3$ il faut et il suffit que les 4 points soient sommets d'un parallélogramme circonscrit au cercle

$$x^2 + y^2 = \frac{R^2}{4}$$

les poids étant alors égaux à

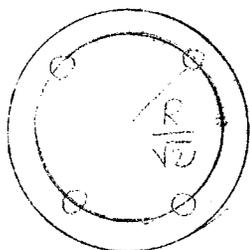
$$\rho_{\alpha} = \frac{\pi R^2}{2f(x_{\alpha}, y_{\alpha}; x_{\alpha}, y_{\alpha})}$$

Les formules à 4 points et à poids tous égaux ($\rho = \frac{\pi R^2}{4}$) s'obtiennent en prenant les sommets de parallélogrammes circonscrit au cercle $x^2 + y^2 = \frac{R^2}{4}$ et inscrit dans le cercle $x^2 + y^2 = \frac{R^2}{2}$

Exemples

3.2.1. - en coordonnées polaires

$$I = \frac{\pi R^2}{4} \sum_{n=0}^3 F\left(\frac{R}{\sqrt{2}}, \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}\right)$$



terme d'erreur

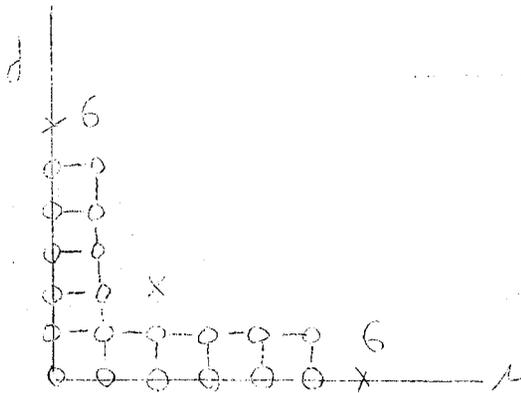
$$\varepsilon = -\frac{\pi R^6}{384} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^{(2)} M(x, y).$$

silhouette identique à 3.1

3.2.2. - Autre formule en polaires

$$I = \frac{\pi R^2}{4} \sum_{n=0}^3 F\left(\frac{R}{\sqrt{2}}, \frac{n\pi}{2}\right)$$

silhouette un peu plus étendue que la précédente

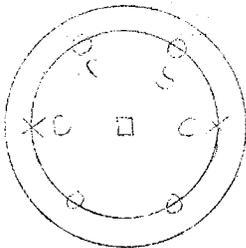


terme d'erreur

$$\mathcal{E} = - \frac{\pi R^6}{96} \left[M_{22} + 480 R^2 (M_{60} + M_{06}) \dots \right]$$

3 - 3 - Formule à 7 points

En choisissant un groupement de type 1 incomplet et 2 complet plus le centre, sur un cercle de rayon kR on peut élaborer une formule à silhouette carrée de côté 3



ρ_1 au centre

ρ_2 aux points C

ρ_3 aux points S

$$\rho_1 + 2 \rho_2 + 4 \rho_3 = 1 \quad (A_{00})$$

$$2k^2 \rho_2 + 4k^2 \rho_3 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \quad (A_{20})$$

$$4k^2 \rho_3 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \quad (A_{02})$$

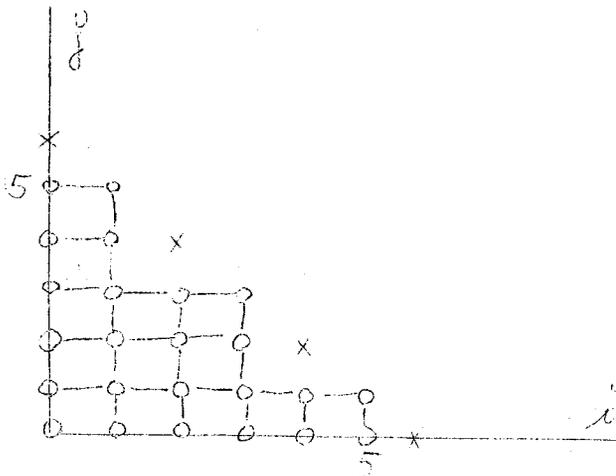
$$4k^4 \rho_3 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{24} \quad (A_{22})$$

solution de compatibilité

$$k = \sqrt{\frac{2}{3}} \quad \rho_1 = \frac{2}{8} \quad \rho_2 = \rho_3 = \frac{1}{8}$$

d'où la formule en polaires

$$I = \frac{\pi R^2}{8} \left[2 F(0,0) + \sum_{n=0}^5 F\left(R\sqrt{\frac{2}{3}}, n \frac{\pi}{3}\right) \right]$$



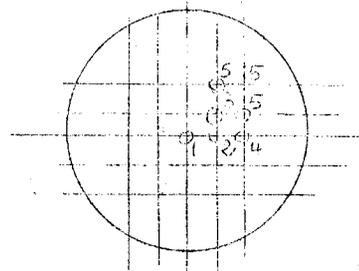
la silhouette obtenue est en réalité plus étendue que celle escomptée

le terme d'erreur peut s'écrire

$$\mathcal{E} = - \frac{\pi R^8}{414.720} \left[M_{60} + 75 M_{42} - 45 M_{24} + 9 M_{06} \right] \dots + 0^8$$

3 - 4 - Etablissement d'une formule vraie pour $i + j \leq 7$

On aura à vérifier 6 équations. On est donc amené à choisir 5 groupements dont le centre, numérotés comme l'indique la figure. La maille régulière a pour longueur λR



On a le système

$$\rho_1 + 4\rho_2 + 4\rho_3 + 4\rho_4 + 8\rho_5 = 1 \quad (A_{00})$$

$$2\lambda^2\rho_2 + 4\lambda^2\rho_3 + 8\lambda^2\rho_4 + 20\lambda^2\rho_5 = \frac{1}{4} \quad (A_{20})$$

$$(A_{02})$$

$$2\lambda^4\rho_2 + 4\lambda^4\rho_3 + 32\lambda^4\rho_4 + 68\lambda^4\rho_5 = \frac{1}{8} \quad (A_{22})$$

$$4\lambda^4\rho_3 + 32\lambda^4\rho_5 = \frac{1}{24} \quad (A_{40})$$

$$(A_{04})$$

$$2\lambda^6\rho_2 + 4\lambda^6\rho_3 + 128\lambda^6\rho_4 + 260\lambda^6\rho_5 = \frac{5}{64} \quad (A_{42})$$

$$(A_{24})$$

$$4\lambda^6\rho_3 + 80\lambda^6\rho_5 = \frac{1}{64} \quad (A_{60})$$

$$(A_{06})$$

dont la solution de compatibilité est

$$\lambda = \frac{\sqrt{5 \pm \sqrt{5}}}{4}$$

la solution $\lambda = \frac{\sqrt{5 - \sqrt{5}}}{4}$ donne seule des points tous intérieurs au cercle.

Résolution du système

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 16 & 34 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \\ \rho_4 \\ \rho_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{4} \cdot \frac{\lambda}{2} \cdot -2 \\ \frac{1}{8} \cdot \frac{\lambda}{4} \cdot -2 \\ \frac{1}{24} \cdot \frac{\lambda}{4} \cdot -4 \\ \frac{1}{64} \cdot \frac{\lambda}{4} \cdot -6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 24 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda^{-2} \\ \frac{\lambda^{-4}}{8} - \frac{\lambda^{-2}}{8} \\ \frac{\lambda^{-4}}{16} \\ \frac{\lambda^{-4}}{96} \\ \frac{\lambda^{-6}}{256} - \frac{\lambda^{-4}}{96} \end{bmatrix}$$

avec $\lambda^{-2} = \frac{4(5 + \sqrt{5})}{5}$ $\lambda^{-4} = \frac{32(3 + \sqrt{5})}{5}$

$$\lambda^{-6} = \frac{512(5 + 2\sqrt{5})}{25}$$

on trouve

$$p_1 = \frac{1}{10} - \frac{\sqrt{5}}{50} \qquad p_2 = \frac{1}{10} - \frac{11\sqrt{5}}{450} \qquad p_3 = \frac{1}{15} + \frac{\sqrt{5}}{225}$$

$$p_4 = \frac{1}{40} + \frac{17\sqrt{5}}{1800} \qquad p_5 = \frac{1}{60} + \frac{7\sqrt{5}}{9000}$$

soit encore

$$\left. \begin{array}{l} p_1 = 0,055 \quad 278 \quad 640 \quad 42 \\ p_2 = 0,045 \quad 340 \quad 560 \quad 52 \\ p_3 = 0,076 \quad 604 \quad 746 \quad 57 \\ p_4 = 0,046 \quad 118 \quad 419 \quad 80 \\ p_5 = 0,034 \quad 058 \quad 306 \quad 50 \end{array} \right\}$$

$$\lambda = 0,415.626.937$$

CHAPITRE IV

DOMAINES PARABOLIQUES

1 - Position du domaine

Nous considérons la parabole

$$y = b \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right)$$

qui limite un domaine d'aire $A = \frac{4}{3} ab$

Explicitons l'équation (2) du chapitre I dans le cas présent

$$A \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} x_{\alpha}^i y_{\alpha}^j = \iint_D x^i y^j dx dy \quad (A_{ij})$$

on a

$$\iint_D x^i y^j dx dy = \int_{-a}^{+a} \frac{b^{j+1}}{j+1} \sum_{p=0}^{j+1} (-1)^p C_{j+1}^p \frac{x^{2p+i}}{a^{2p}} dx$$

Cette intégrale est nulle pour i impair. On a le résultat suivant après division par $\frac{4}{3} ab$

$$\sum_{\alpha=1}^m \rho_{\alpha} x_{\alpha}^i y_{\alpha}^j = \begin{cases} 0 & \text{si } i \text{ impair} \\ \frac{3}{2} \frac{a^i b^j}{(j+1)} \sum_{p=0}^{j+1} (-1)^p \frac{C_{j+1}^p}{2^{p+i+1}} & \text{sinon} \end{cases}$$

2 - Formules globales

Nous ne citerons que deux formules

2.1. - Formule à cinq points

Formule donnée par TYLER dans "Numerical Integration of function of several variables" Canadian J. Math. Vol. 5 (1959) pages 393-412. Elle utilise les points :

$$\left[0,0\right] ; \left[\pm a,0\right] ; \left[0,\frac{b}{2}\right] ; \left[0,b\right]$$

$$\sum_{\alpha=1}^5 f_{\alpha} = 1 \quad (A_{00})$$

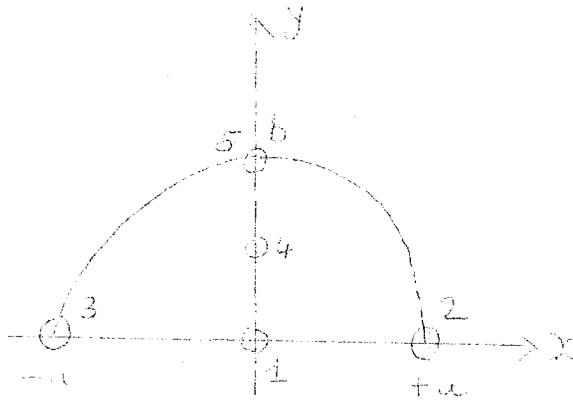
$$p_2 - p_3 = 0 \quad (A_{10})$$

$$\frac{1}{2} p_4 + p_5 = \frac{2}{5} \quad (A_{01})$$

$$p_2 + p_3 = \frac{1}{5} \quad (A_{20})$$

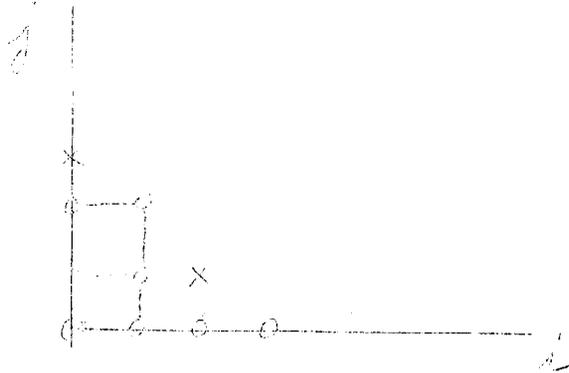
$$\frac{1}{4} p_4 + p_5 = \frac{8}{35} \quad (A_{02})$$

$$p_1 = p_5 = \frac{2}{35} \quad p_2 = p_3 = \frac{1}{10} \quad p_4 = \frac{24}{35}$$



$$I = \frac{2ab}{105} \left[7 \left\{ f(a,0) + f(-a,0) \right\} + 4 f(0,0) + 48 f\left(0,\frac{b}{2}\right) + 4 f(0,b) \right]$$

silhouette

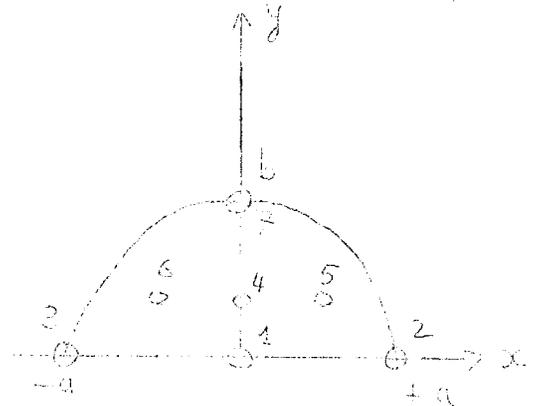


terme d'erreur

$$\mathcal{E} = \frac{2ab^2}{945} \left[18 a^2 M_{12} + b^2 M_{03} \right] + O^4 \dots\dots$$

2.2. - Formule à 7 points

Les points sont numérotés comme l'indique la figure. Les points 4, 5 et 6 sont sur une droite d'ordonnée μb . Les points 5 et 6 ont pour abscisse $\pm \frac{1}{2} a$



En choisissant à priori $\rho_3 = \rho_2$ $\rho_5 = \rho_6$ et $\mu = \frac{4}{9}$ on vérifie le système de 6 équations à 5 inconnues

$$\rho_1 + 2\rho_2 + \rho_4 + 2\rho_5 + \rho_7 = 1 \quad (A_{00})$$

$$\mu(\rho_4 + 2\rho_5) + \rho_7 = \frac{2}{5} \quad (A_{01})$$

$$2\rho_2 + \frac{1}{2}\rho_5 = \frac{1}{5} \quad (A_{20})$$

$$\mu^2(\rho_4 + 2\rho_5) + \rho_7 = \frac{8}{35} \quad (A_{02})$$

$$\frac{1}{2} \mu \rho_5 = \frac{2}{35} \quad (A_{21})$$

$$\mu^3 (\rho_4 + 2\rho_5) + \rho_7 = \frac{16}{105} \quad (A_{03})$$

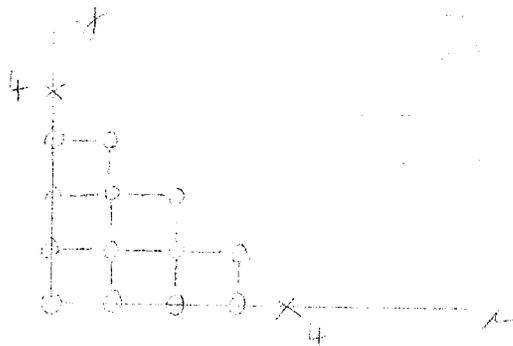
$$\rho_1 = \frac{100}{700} \quad \rho_2 = \rho_3 = \frac{25}{700} \quad \rho_4 = \frac{126}{700} \quad \rho_5 = \rho_6 = \frac{180}{700}$$

$$\rho_7 = \frac{64}{700}$$

d'où la formule

$$I = \frac{4ab}{2100} \left[100 f(0,0) + 25 \left\{ f(a,0) + f(-a,0) \right\} + 126 f\left(0, \frac{4}{9} b\right) \right. \\ \left. + 180 \left\{ f\left(\frac{a}{2}, \frac{4}{9} b\right) + f\left(-\frac{a}{2}, \frac{4}{9} b\right) \right\} + 64 f(0,b) \right]$$

silhouette



termme d'erreur $\mathcal{E} = \frac{ab}{299.376} (297 a^4 M_{40} + 128 b^4 M_{04}) + \dots$

3 - Formules du type de Gauss

3.1 - Formules de Georgieff à trois points

La fonction $I(x, y, z, u, v, w)$ (voir chapitre I) s'écrit ici :

$$\frac{(I_{00})^2}{5 \Delta} \left[z \left\{ w \frac{a^2 b^2}{35} - \frac{2a^2 b}{5} v \right\} + \frac{60b^2}{5 x 35} ux + y \left\{ a^2 v - \frac{2a^2 b w}{5} \right\} \right]$$

$$\text{avec } I_{00} = \frac{4}{3} ab \quad \Delta = \frac{4 \times 64}{9 \times 25 \times 35} a^5 b^5$$

le système d'équation

$$F(x_k, y_k, 1; x_1, y_1, 1) = 0$$

devient

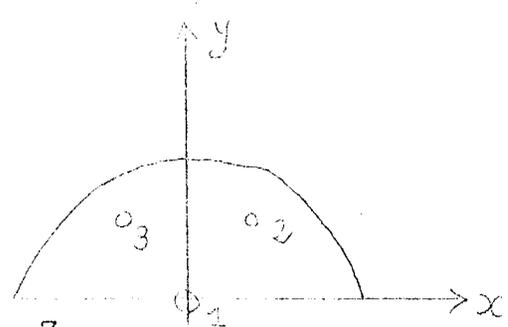
$$\frac{12b^2}{35} x_k x_1 + y_k \left\{ a^2 y_1 - \frac{2a^2 b}{5} \right\} - \frac{2a^2 b}{5} y_1 + \frac{8a^2 b^2}{35} = 0$$

Une solution intéressante avec des poids rationnels peut s'écrire ainsi :

$$\begin{aligned} x_1 = 0 & \quad x_2 = a \sqrt{2/7} = -x_3 \\ y_1 = 0 & \quad y_2 = \frac{4}{7} b = y_3 \end{aligned}$$

$$\rho_\alpha = \frac{1}{F(x_\alpha, y_\alpha, 1; x_\alpha, y_\alpha, 1)}$$

$$\text{soit } \rho_1 = \frac{6}{15} ab \quad \rho_2 = \rho_3 = \frac{7}{15} ab$$



4 - 1 - Recherche d'une formule globale de degré 7

On considère les 10 groupements de points numérotés comme l'indique la figure

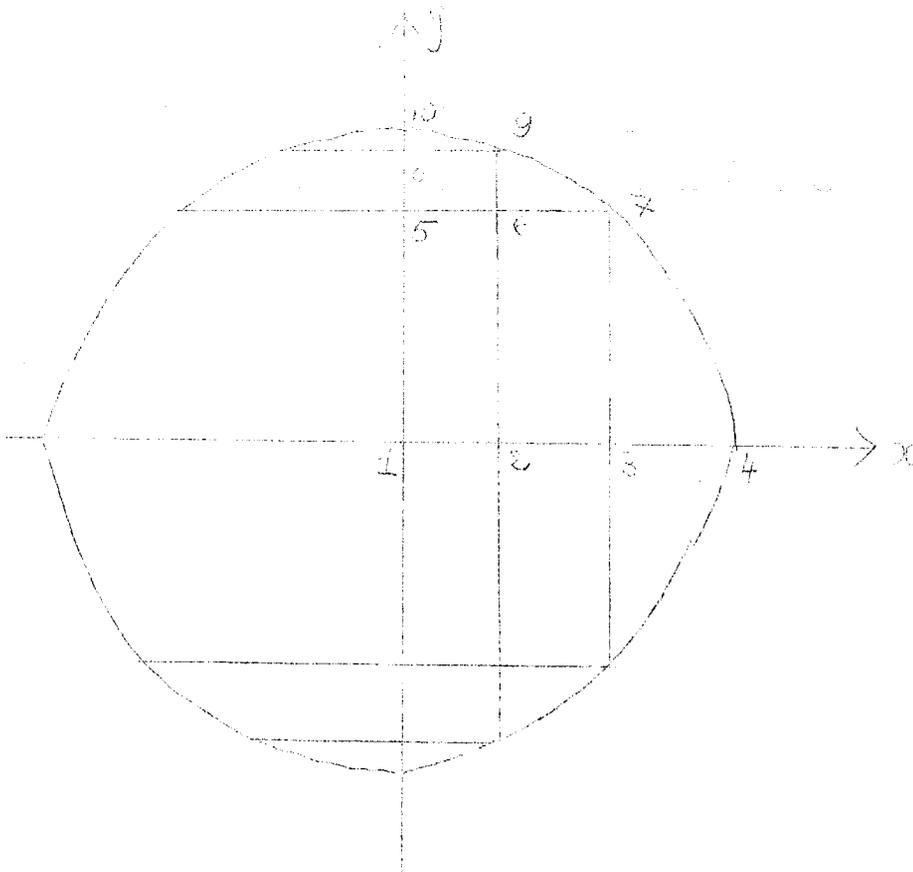
$$1(0,0) \qquad 6\left(\frac{a}{3}, \frac{5b}{9}\right)$$

$$2\left(\frac{a}{3}, 0\right) \qquad 7\left(\frac{2a}{3}, \frac{5b}{9}\right)$$

$$3\left(\frac{2a}{3}, 0\right) \qquad 8\left(0, \frac{8b}{9}\right)$$

$$4(a,0) \qquad 9\left(\frac{a}{3}, \frac{8b}{9}\right)$$

$$5\left(0, \frac{5b}{9}\right) \qquad 10(0, b)$$



le système à résoudre s'écrit :

1	2	2	2	2	4	4	2	4	2	p_1	1
0	$\frac{1}{9}$	$\frac{8}{9}$	2	0	$\frac{4}{3}$	$\frac{8}{3}$	0	$\frac{4}{3}$	0	p_2	$\frac{1}{5}$
0	0	0	0	$\frac{50}{81}$	$\frac{100}{81}$	$\frac{100}{81}$	$\frac{128}{81}$	$\frac{256}{81}$	2	p_3	$\frac{8}{35}$
0	$\frac{2}{81}$	$\frac{32}{81}$	2	0	$\frac{4}{81}$	$\frac{64}{81}$	0	$\frac{4}{81}$	0	p_4	$\frac{3}{35}$
0	0	0	0	0	$\frac{100}{729}$	$\frac{400}{729}$	0	$\frac{256}{729}$	0	p_5	$\frac{8}{315}$
0	0	0	0	$\frac{1250}{6561}$	$\frac{2500}{6561}$	$\frac{2500}{6561}$	$\frac{8192}{6561}$	$\frac{16384}{6561}$	2	p_6	$\frac{128}{1155}$
0	$\frac{2}{729}$	$\frac{128}{729}$	2	0	$\frac{4}{729}$	$\frac{256}{729}$	0	$\frac{4}{729}$	0	p_7	$\frac{1}{21}$
0	0	0	0	0	$\frac{100}{6561}$	$\frac{1600}{6561}$	0	$\frac{256}{6561}$	0	p_8	$\frac{8}{1155}$
0	0	0	0	0	$\frac{2500}{59049}$	$\frac{10000}{59049}$	0	$\frac{16384}{59049}$	0	p_9	$\frac{128}{15015}$
0	0	0	0	$\frac{31250}{531441}$	$\frac{62500}{531441}$	$\frac{62500}{531441}$	$\frac{524288}{531441}$	$\frac{1048576}{531441}$	2	p_{10}	$\frac{1024}{15015}$

Les solutions données par le sous programme d'assemblage matriciel sur le Gamma 3 a e t

$$p_1 = 0, 147 340 660$$

$$p_6 = 0, 084 985 784 \quad 2$$

$$p_2 = 0, 014 767 727$$

$$p_7 = 0, 022 441 558 \quad 4$$

$$p_3 = 0, 109 402 600$$

$$p_8 = 0, 031 220 363 \quad 7$$

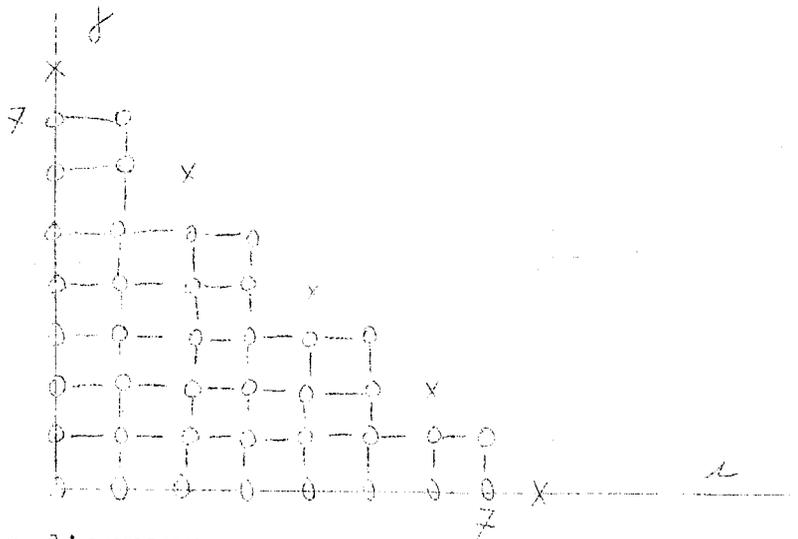
$$p_4 = 0, 009 999 999 \quad 8$$

$$p_9 = 0, 004 058 921 \quad 85$$

$$p_5 = 0, 030 484 854 \quad 3$$

$$p_{10} = 0, 007 481 594 \quad 05$$

silhouette



terme d'erreur

4 - 2 - Formules du type de Gauss

Nous ne citerons que les formules de Georgieff à 3 et 4 point

4.2.1. - Formules à trois points de degré 2

$$\Delta = \frac{(64)^2}{45 \times 105} a^5 b^5$$

$$F(x, y, z, u, v, w) = \frac{1}{\Delta} \left[zw \frac{8}{5 \times 35} a^2 b^2 + ux \frac{8b^2}{35} + \frac{a^2}{5} vy \right]$$

le système des 3 équations s'écrit ici :

$$\frac{8b^2}{7} x_k x_1 + a^2 y_k x_1 + \frac{8}{35} a^2 b^2 = 0$$

$$k < 1$$

$$k, 1 = 1, 2, 3$$

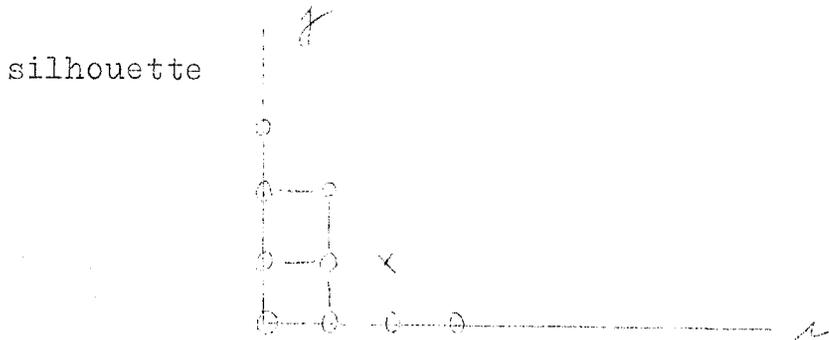
1° formule

du type $\sum_{\alpha=1}^3 \rho_{\alpha} f(x_{\alpha}, y_{\alpha})$

$$x_1 = 0 \qquad x_2 = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \qquad x_3 = -\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$$

$$y_1 = \frac{2b\sqrt{2}}{\sqrt{35}} \qquad y_2 = -\frac{2b\sqrt{2}}{\sqrt{35}} \qquad y_3 = -\frac{2b\sqrt{2}}{\sqrt{35}}$$

$$\rho_1 = \frac{4}{3} ab \qquad \rho_2 = \frac{2}{3} ab \qquad \rho_3 = \frac{2}{3} ab$$



$$\mathcal{E} = \frac{8\sqrt{2}}{45\sqrt{35}} a^3 b^2 M_{21} + O^4 \dots\dots\dots$$

2° formule

du type $\rho \sum_{\alpha=1}^3 f(x_\alpha, y_\alpha)$

$$\rho = \frac{8}{9} ab$$

Il suffit de prendre trois points de l'ellipse

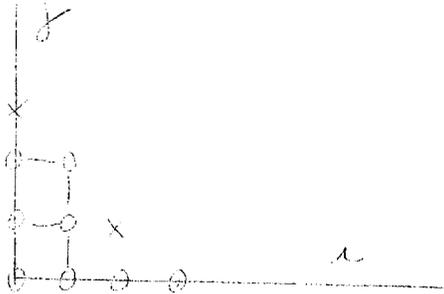
$$\frac{x^2}{\frac{a^2}{5}} + \frac{y^2}{\frac{8b^2}{35}} = 2$$

dont les coordonnées satisfont le système précédent, par exemple

$$x_1 = 0 \qquad x_2 = -\frac{a\sqrt{3}}{10} \qquad x_3 = +\frac{a\sqrt{3}}{10}$$

$$y_1 = \frac{4b}{\sqrt{35}} \qquad y_2 = -\frac{2b}{\sqrt{35}} \qquad y_3 = -\frac{2b}{\sqrt{35}}$$

silhouette



$$\xi = \frac{8ab}{15\sqrt{35}} \left[\frac{2b^3}{21} M_{03} - a^2 b M_{21} \right] + O^4 \dots$$

4.2.2. - Formule à 4 points du type

$$f \sum_{\alpha=1}^4 f(x_{\alpha}, y_{\alpha})$$

Le deuxième théorème de Georgieff s'appliquant ici avec

$$\delta = \begin{vmatrix} I_{20} & I_{11} \\ I_{11} & I_{02} \end{vmatrix}$$

$$\text{et } f(x, y ; \xi, \eta) = - \frac{I_{00}}{\delta} \begin{vmatrix} 0 & x & y \\ \xi & I_{20} & I_{11} \\ \eta & I_{11} & I_{02} \end{vmatrix}$$

on a, tous calculs faits, à considérer l'ellipse

$$f(x, y ; x, y) = \frac{5x^2}{a^2} + \frac{35y^2}{8b^2} = 1$$

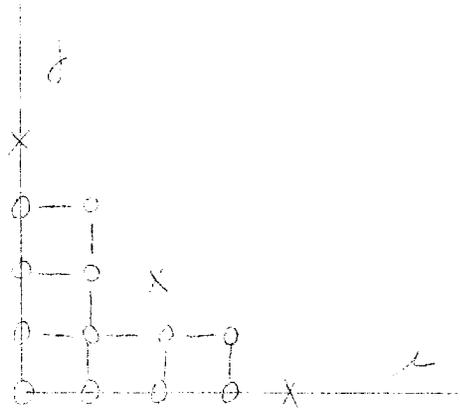
Les sommets d'un parallélogramme circonscrit fournissant une solution peuvent être

$$x = \pm \frac{a}{\sqrt{5}} \qquad y = \pm \frac{2b\sqrt{2}}{\sqrt{35}}$$

avec $f = \frac{2}{3} ab$

$$I = \frac{2}{3} ab \left\{ \sum_{+, -} f \left(\pm \frac{a}{\sqrt{5}}, \pm \frac{2b\sqrt{2}}{\sqrt{35}} \right) \right\} \quad \begin{array}{l} \sqrt{5} = 2, 236 067 977 \\ \sqrt{35} = 5, 916 079 783 \end{array}$$

silhouette



terme d'erreur

$$\mathcal{E} = \frac{8 ab}{779.625} \left\{ - 495 a^4 M_{40} + 1320 a^2 b^2 M_{22} - 637 b^4 M_{04} \right\} \dots$$

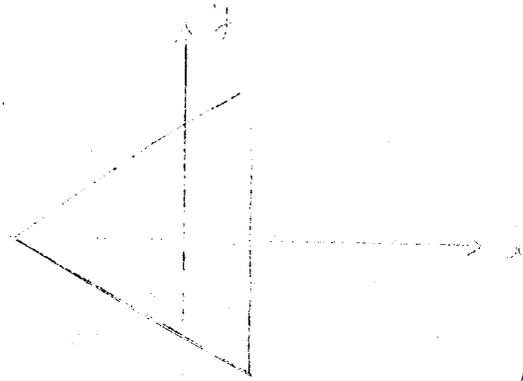
CHAPITRE V

DOMAINES TRIANGULAIRES

1 - Position du domaine

Nous envisageons ici un triangle équilatéral dont le centre de gravité est situé à l'origine des coordonnées, l'axe Ox suivant une hauteur

On choisit pour longueur du côté $h\sqrt{3}$



$$\text{Aire du domaine } A = \frac{3}{4} h^2 \sqrt{3}$$

Explicitons l'équation (2) du chapitre I

$$A \sum_{\alpha} x_{\alpha}^i y_{\alpha}^j = \iint_D x^i y^j dx dy \quad (A_{ij})$$

$$\text{On a } \int_{-h}^{+\frac{h}{2}} x^i dx \int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}(x+h)}^{+\frac{1}{\sqrt{3}}(x+h)} y^j dy$$

$$= \text{zéro si } j \text{ impair}$$

$$\text{et } \int_{-h}^{+\frac{h}{2}} \frac{2}{j+1} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{j+1} x^i (x+h)^{j+1} dx \quad \text{sinon}$$

en posant $x = h(\frac{3}{2}\mu - 1)$ on calcule aisément cette dernière intégrale,

et divisant le résultat par $\frac{3}{4} h^2 \sqrt{3}$ on peut écrire

$$\sum_{\alpha} f_{\alpha} x_{\alpha}^i y_{\alpha}^j = \begin{cases} 0 & j \text{ impair} \\ \frac{h^{i+j}}{j+1} \frac{(\sqrt{3})^{-j}}{2^{j-1}} \sum_{p=0}^{p=i} (-1)^p C_i^p \left(\frac{3}{2}\right)^p \frac{1}{p+j+1} & j \text{ par} \\ & i \text{ entier quelconque} \end{cases}$$

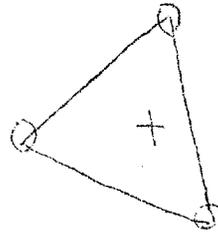
Les formules relatives aux domaines triangulaires peuvent comme dans le cas des rectangles donner lieu à des considérations de pavage du plan (voir chapitre II § 2). Par ailleurs, on est amené à considérer ici des groupements de points à symétrie ternaire.

2 - Formules globales

Une formule à 4 points telle que celle-ci

$$I = \frac{h^2 \sqrt{3}}{16} \left[9 f(0,0) + f\left(\frac{h}{2}, \frac{h\sqrt{3}}{2}\right) + f\left(\frac{h}{2}, -\frac{h\sqrt{3}}{2}\right) + f(-h,0) \right]$$

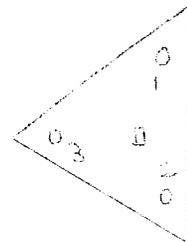
non seulement est incommode pour un pavage du plan, mais encore n'améliore pas la silhouette au delà du degré 3



$$\xi = \frac{3 h^5 \sqrt{3}}{640} \left[-M_{30} + 3 M_{12} \right] + O^4 \dots\dots\dots$$

Par contre, on peut essayer de choisir outre le centre de gravité, les sommets d'un triangle homothétique intérieur affectés du poids ρ_2

λ et ν étant respectivement abscisse et ordonnée du point 1 et $\mu = -2 \lambda$ abscisse du point 2 on a



$$\rho_1 + 3 \rho_2 = 1 \quad (A_{00})$$

$$6 \rho_2 \lambda^2 = \frac{h^2}{8} \quad (A_{20})$$

$$6 \rho_2 \nu^2 = \frac{h^2}{8} \quad (A_{02})$$

$$-6 \rho_2 \lambda^3 = -\frac{h^3}{40} \quad (A_{30})$$

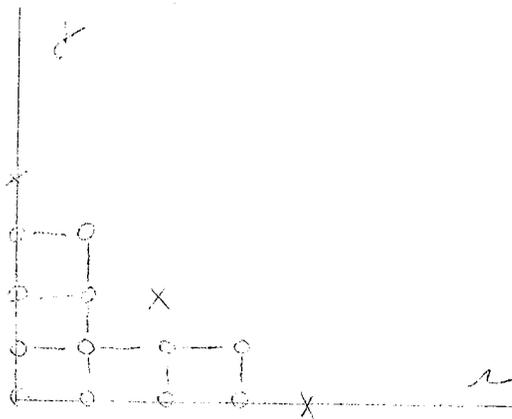
$$2 \rho_2 \lambda \nu^2 = \frac{h^3}{40} \quad (A_{12})$$

compatibilité $\lambda = \frac{h}{5}$ $\nu = \frac{h \sqrt{3}}{5}$ qui donne un poids

négatif $\rho_1 = -\frac{27}{48}$ $\rho_2 = \frac{25}{48}$

$$I = \frac{h^2 \sqrt{3}}{64} \left[-27 f(0,0) + 25 \left\{ f\left(\frac{h}{5}, \frac{h\sqrt{3}}{5}\right) + f\left(\frac{h}{5}, -\frac{h\sqrt{3}}{5}\right) + f\left(-\frac{2h}{5}, 0\right) \right\} \right]$$

silhouette



terme d'erreur $\mathcal{E} = -\frac{9 h^6 \sqrt{3}}{12.800} \left[M_{40} + 2 M_{22} + M_{04} \right] + 0^5$

3 - 2 - Autres formules à silhouette identique

3.2.1. - Formule à 6 points : sommets s du triangle intérieur homothétique $(0, \frac{1}{2})$ et milieux des côtés M

$$I = \frac{h^2 \sqrt{3}}{40} \left[9 \sum f(s) + \sum f(M) \right]$$

$$\mathcal{E} = -\frac{9h^6 \sqrt{3}}{20.480} \left[M_{40} + M_{22} + M_{04} \right] + 0^5 \dots\dots$$

3.2.2. - Formule à 7 points : les sommets S, les milieux des côtés M et le centre de gravité G

$$I = \frac{h^2 \sqrt{3}}{80} \left[27 f(G) + 8 \sum f(M) + 3 \sum f(S) \right]$$

$$\mathcal{E} = \frac{9h^6 \sqrt{3}}{10.240} \left[M_{40} + 27 M_{22} + M_{04} \right] + 0^5 \dots\dots$$

3 - Formules du type de Gauss3 - 1 - Formules de Georgieff à un groupement

$$\sum_{\alpha=1}^3 f_{\alpha} f(x_{\alpha}, y_{\alpha})$$

la Fonction $F(x, y, z ; u, v, w)$ (voir Chapitre I) s'écrit ici

$$\frac{8}{Ah^2} (ux + vy + wz \frac{h^2}{8})$$

et le système linéaire fondamental

$$x_k x_1 + y_k y_1 + \frac{h^2}{8} = 0$$

c'est-à-dire

$$x_1 x_2 + y_1 y_2 + \frac{h^2}{8} = 0$$

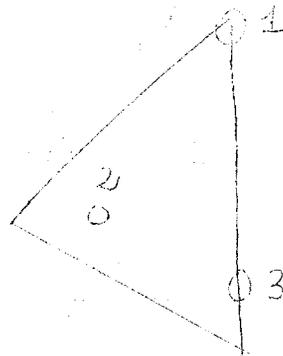
$$x_2 x_3 + y_2 y_3 + \frac{h^2}{8} = 0$$

$$x_1 x_3 + y_1 y_3 + \frac{h^2}{8} = 0$$

Exemple : $x_1 = \frac{h}{2} \quad y_1 = \frac{h\sqrt{3}}{2}$

$$x_2 = -\frac{h}{4} \quad y_2 = 0$$

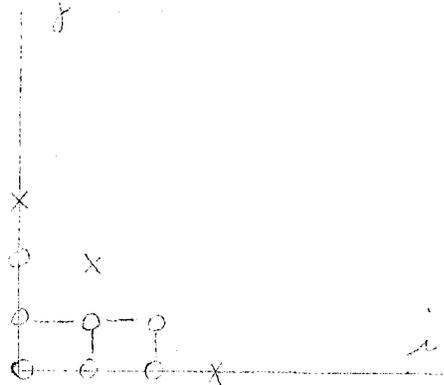
$$x_3 = \frac{h}{2} \quad y_3 = -\frac{h\sqrt{3}}{4}$$



ce qui conduit à la formule

$$I = \frac{3h^2 \sqrt{3}}{4} \left[\frac{1}{9} f\left(\frac{h}{2}, \frac{h\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{2}{3} f\left(-\frac{h}{4}, 0\right) + \frac{2}{9} f\left(\frac{h}{2}, -\frac{h\sqrt{3}}{4}\right) \right]$$

silhouette



terme d'erreur

$$\mathcal{E} = \frac{h^5 \sqrt{3}}{1280} \left[9 M_{30} + 18 M_{12} + 5\sqrt{3} M_{03} \right] + O^4 \dots\dots$$

3 - 2 - Formule à un groupement ternaire du type

$$I = \rho \sum_{\alpha=1}^3 f(x_{\alpha}, y_{\alpha})$$

$$\text{avec } \rho = \frac{h^2 \sqrt{3}}{4}$$

Il est nécessaire et suffisant de choisir un des trois points (ξ, η) sur le cercle $x^2 + y^2 = \frac{h^2}{4}$ et de déterminer les deux autres comme intersections du cercle précédent avec la droite

$$x \xi + y \eta + \frac{h^2}{8} = 0$$

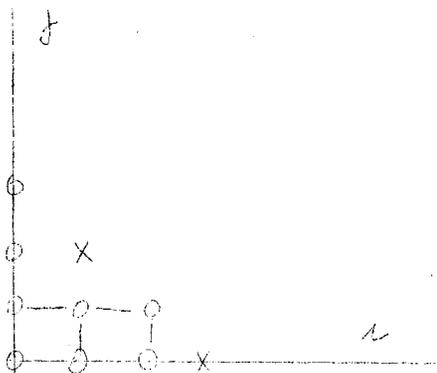
Exemple 1

$$\rho = \frac{h}{4} \quad h = \frac{h\sqrt{3}}{4}$$

on aboutit à la formule

$$I = \frac{h^2\sqrt{3}}{4} \left[f\left(\frac{h}{4}, \frac{h\sqrt{3}}{4}\right) + f\left(\frac{h}{4}, -\frac{h\sqrt{3}}{4}\right) + f\left(-\frac{h}{2}, 0\right) \right]$$

- laquelle formule peut être utilisé pour un pavage du plan
- densité 3
- silhouette améliorée par rapport à la précédente



terme d'erreur

$$\varepsilon = \frac{h^5\sqrt{3}}{1280} \left[-M_{30} + 3M_{12} \right] + O^4$$

CHAPITRE VI

TERMES D'ERREUR SOUS FORME D'INTEGRALES

REPERAGE D'UNE SILHOUETTE S

Un point de S à coordonnées (p, q) est dit point frontière s'il vérifie la condition suivante : le point $(p+1, q+1)$ n'appartient pas à S. On sait déterminer tous les points frontières de S si l'on s'en donne un (p, q) et les longueurs des droites du réseau qui forme S,

parallèles à l'axe des i d'ordonnées $j \quad 0 \leq j \leq q$
parallèles à l'axe des j d'abscisses $i \quad 0 \leq i \leq p$

Cela revient à se donner deux suites de nombres entiers $\alpha(j)$ et $\beta(i)$ définis comme abscisses et ordonnées correspondant respectivement à tout $j \quad 0 \leq j \leq q$ et tout $i \quad 0 \leq i \leq p$.

Exemple - Soit la silhouette S (voir fig.)

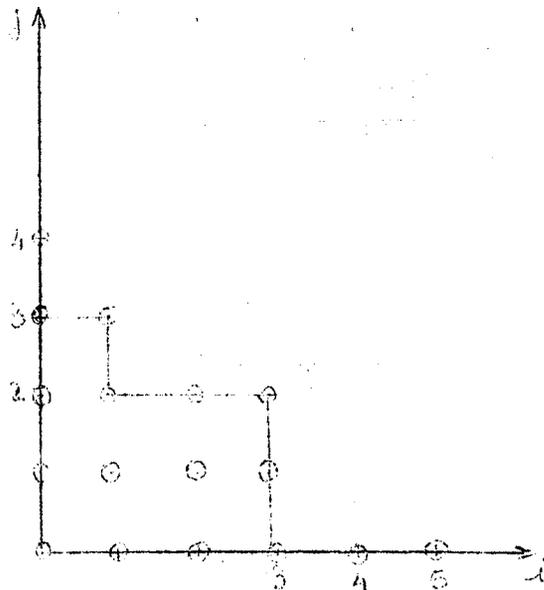
$$p = 3 \quad q = 2$$

sur le segment $0 \leq i \leq 3$

$\beta(i) = 4$	pour $i = 0$
$= 3$	$= 1$
$= 2$	$= 2$
$= 2 = q$	$= 3 = p$

sur le segment $0 \leq j \leq 2$

$\alpha(j) = 5$	pour $j = 0$
$= 3$	$= 1$
$= 3 = p$	$= 2 = q$



On peut définir la même silhouette S de la façon suivante :

$$\begin{array}{llll}
 p = 1 & q = 2 & & \\
 \beta(i) = 4 & i = 0 & \alpha(j) = 5 & j = 0 \\
 = 3 & i = 1 & = 3 & j = 1 \\
 & & = 3 & j = 2
 \end{array}$$

Remarque - Par définition on a $\alpha(j) \geq p$ et $\beta(i) \geq q$
 - A tout point (i, j) de S correspond un couple $\alpha(j) \beta(i)$
 - Si des choix différents de $p, q, \alpha(j), \beta(i)$ conduisent à la même silhouette, ils ne représentent cependant pas le même champ fonctionnel. Cela prend tout son sens dans le § suivant si on considère les points (i, j) comme des indices de dérivation.

DEVELOPPEMENT EN SERIE DE TAYLOR SUIVANT UNE SILHOUETTE S

Ecrivons successivement, avec la convention $\frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial y^j} = f_{i,j}$
 [x_0, y_0 étant un point du domaine D]

$$f(x, y) = \sum_{j=0}^q \frac{(y-y_0)^j}{j!} f_{0,j}(x, y_0) + \int_{y_0}^y \frac{(y-v)^q}{q!} f_{0,q+1}(x, v) dv \quad (1)$$

$$\begin{aligned}
 f_{0,j}(x, y_0) &= \sum_{i=0}^p \frac{(x-x_0)^i}{i!} f_{i,j}(x_0, y_0) + \sum_{i=p+1}^{\alpha(j)} \frac{(x-x_0)^i}{i!} f_{i,j}(x_0, y_0) \\
 &+ \int_{x_0}^x \frac{(x-u)^\alpha}{\alpha!} f_{\alpha+1,j}(u, y_0) du \quad (2)
 \end{aligned}$$

$$f_{0,q+1}(x,v) = \sum_{i=0}^p \frac{(x-x_0)^i}{i!} f_{i,q+1}(x_0,v) + \int_{x_0}^x \frac{(x-u)^p}{p!} f_{p+1,q+1}(u,v) du \quad (3)$$

portons 2 et 3 dans (1) on a

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^q \frac{(x-x_0)^i}{i!} \cdot \frac{(y-y_0)^j}{j!} f_{i,j}(x_0,y_0) \\ &+ \sum_{j=0}^q \sum_{i=p+1}^{\alpha(j)} \frac{(x-x_0)^i}{i!} \cdot \frac{(y-y_0)^j}{j!} f_{i,j}(x_0,y_0) \\ &+ \sum_{j=0}^q \frac{(y-y_0)^j}{j!} \int_{x_0}^x \frac{(x-u)^\alpha}{\alpha!} f_{\alpha+1,j}(u,y_0) du \\ &+ \sum_{i=0}^p \frac{(x-x_0)^i}{i!} \int_{y_0}^y \frac{(y-v)^q}{q!} f_{i,q+1}(x_0,v) dv \\ &+ \iint_{x_0 y_0}^{xy} \frac{(x-u)^p}{p!} \frac{(y-v)^q}{q!} f_{p+1,q+1}(u,v) dudv \end{aligned}$$

Considérons la fonction

$$\psi(y) = \int_{y_0}^y \frac{(y-v)^q}{q!} f_{i,q+1}(x_0, v) dv. \quad \text{On a évidemment}$$

$$\psi(y_0) = \psi'(y_0) = \dots \psi^{(q)}(y_0) = 0 \quad \text{ce qui permet d'écrire}$$

$$\psi(y) = \sum_{j=q+1}^{\beta(i)} \frac{(y-y_0)^j}{j!} \psi^{(j)}(y_0) + \int_{y_0}^y \frac{(y-v)^\beta}{\beta!} \psi^{(\beta+1)}(v) dv$$

c'est-à-dire

$$\psi(y) = \sum_{j=q+1}^{\beta(i)} \frac{(y-y_0)^j}{j!} f_{ij}(x_0, y_0) + \int_{y_0}^y \frac{(y-v)^\beta}{\beta!} f_{i,\beta+1}(x_0, v) dv$$

Reportons ce résultat dans $f(x, y)$ en arrangeant l'ordre des termes

$$f(x, y) = \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^q \frac{(x-x_0)^i}{i!} \frac{(y-y_0)^j}{j!} f_{i,j}(x_0, y_0)$$

$$+ \sum_{i=0}^p \sum_{j=q+1}^{\beta} \frac{(x-x_0)^i}{i!} \frac{(y-y_0)^j}{j!} f_{i,j}(x_0, y_0)$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=0}^q \sum_{i=p+1}^{\alpha} \frac{(x-x_0)^i}{i!} \frac{(y-y_0)^j}{j!} f_{i,j}(x_0, y_0) \\
& + \sum_{i=0}^p \frac{(x-x_0)^i}{i!} \int_{y_0}^y \frac{(y-v)^{\beta}}{\beta!} f_{i,\beta+1}(x_0, v) dv \\
& + \sum_{j=0}^q \frac{(y-y_0)^j}{j!} \int_{x_0}^x \frac{(x-u)^{\alpha}}{\alpha!} f_{\alpha+1,j}(u, y_0) du \\
& + \iint_{x_0 y_0}^{xy} \frac{(x-u)^p}{p!} \frac{(y-v)^q}{q!} f_{p+1,q+1}(u, v) dudv \tag{4}
\end{aligned}$$

Remarque - On fait implicitement, dans le calcul précédent, la convention suivante : si $\beta = q$ pour tout i , $0 \leq i \leq p$, une sommation telle que

$$\sum_{j=q+1}^{\beta} \quad \text{donne identiquement zéro.}$$

De même si $\alpha = p$ lorsque $0 \leq j \leq q$ pour la sommation

$$\sum_{i=p+1}^{\alpha}$$

C'est le cas des silhouettes rectangulaires.

On a donc développé $f(x,y)$ en un polynôme dont la silhouette est précisément S , les restes étant écrits sous forme d'intégrales.

$$f(x,y) = P(x,y) + R(x,y,x_0,y_0)$$

Considérons une formule d'intégration (I) (Chapitre 1) qui admette la silhouette S . Cette formule peut être définie par la relation fonctionnelle L

$$L [f(x,y)] = \iint_D f(x,y) dx dy - \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} f(x_{\alpha}, y_{\alpha}) \quad (5)$$

Cette fonctionnelle L est par définition nulle pour tout polynôme de silhouette S . Si donc on remplace dans (5) $f(x,y)$ par son développement (4), on aura

$$L [f] = L [R(x,y,x_0,y_0)] \quad (6)$$

Supposons $f(x,y)$ et ses dérivées partielles définies et continues respectivement en (x,y) x et y dans un rectangle, entourant le domaine D , défini par (x_1, x_2) sur x et (y_1, y_2) sur y .

Considérons les intégrales qui composent $R(x,y, x_0, y_0)$ par exemple

$$\int_{y_0}^y \frac{(y-v)^{\beta}}{\beta!} f_{i, \beta+1}(x_0, v) dv$$

Une telle intégrale peut s'écrire (1)

$$\int_{y_1}^{y_2} \frac{(y-v)^\beta}{\beta!} \varphi_{y_0 y}^{(v)} f_{i, \beta+1}^{(x_0, v)} dv \quad \text{avec } \varphi_{y_0 y}^{(v)} = \begin{cases} +1 & \text{si } y_0 \leq v < y \\ -1 & \text{si } y \leq v < y_0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

de même pour les intégrales en x avec $\varphi_{x_0 x}^{(u)}$

Explicitons l'équation (6) :

$$\iint_D \frac{(x-x_0)^i}{i!} \int_{y_1}^{y_2} \frac{(y-v)^\beta}{\beta!} \varphi_{y_0 y}^{(v)} f_{i, \beta+1}^{(x_0, v)} dv$$

$$- \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} \frac{(x_{\alpha}-x_0)^i}{i!} \int_{y_1}^{y_2} \frac{(y_{\alpha}-v)^\beta}{\beta!} \varphi_{y_0 y_{\alpha}}^{(v)} f_{i, \beta+1}^{(x_0, v)} dv$$

échangeons l'ordre des intégrations dans la première intégrale, l'expression précédente peut s'écrire

$$\int_{y_1}^{y_2} K_i(v) f_{i, \beta+1}^{(x_0, v)} dv$$

(1) Voir SARD Bibliographie

De même les intégrales en u donneront

$$\int_{x_1}^{x_2} M_j(u) f_{\alpha+1,j}(u, y_0) du \text{ et l'intégrale en u, v :}$$

$$\iint_D \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \frac{(x-u)^p}{p!} \frac{(y-v)^q}{q!} \psi_{x_0 x}^{(u)} \psi_{y_0 y}^{(v)} f_{p+1,q+1}(u, v) dudv$$

$$- \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} \left[\int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \frac{(x_{\alpha}-u)^p}{p!} \frac{(y_{\alpha}-v)^q}{q!} \psi_{x_0 x_{\alpha}}^{(u)} \psi_{y_0 y_{\alpha}}^{(v)} f_{p+1,q+1}(u, v) dudv \right]$$

c'est-à-dire :

$$\int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} N(u, v) f_{p+1,q+1}(u, v) dudv$$

en conclusion, l'erreur d'une formule (I) (chapitre 1)
peut s'écrire

$$Lf = \sum_{i=0}^p \int_{y_1}^{y_2} K_i(v) f_{i, \beta+1}(x_0, v) dv + \iint_{x_1 y_1}^{x_2 y_2} N(u, v) f_{p+1, q+1}(u, v) dudv$$

$$+ \sum_{j=0}^q \int_{x_1}^{x_2} M_j(u) f_{\alpha+1, j}(u, y_0) du$$

avec

$$K_i(v) = L \left\{ \frac{(x-x_0)^i}{i!} \frac{(y-v)^{\beta(i)}}{\beta!} \varphi_{y_0 y}^{(v)} \right\}$$

$$N(u, v) = L \left\{ \frac{(x-u)^p}{p!} \frac{(y-v)^q}{q!} \varphi_{y_0 y}^{(v)} \varphi_{x_0 x}^{(u)} \right\}$$

$$M_j(u) = L \left\{ \frac{(y-y_0)^j}{j!} \frac{(x-u)^{\alpha(j)}}{\alpha!} \varphi_{x_0 x}^{(u)} \right\}$$

- EZROKI Formes générales des erreurs fonctionnelles dans les formules d'approximations à plusieurs variables Recueil mathématique 38 (80) (389 - 416) 1956 Acad. des Sciences Moscou
- idem idem Recueil mathématique 43 (85) (9 - 27) 1957
- GEORGIEFF Formules de cubatures à nombre de termes minimal Rozprawy Matematyczne VIII 1955 Varsovie
- GREBENOUK Construction de formules pour le calcul approché des intégrales doubles dans un cercle Académie des Sciences Uzbek Trudy. Inst. Math. Mech. 9 (29-59) 1952
- GREBENOUK Construction de formules pour le calcul approché des intégrales triples dans une sphère et un ellipsoïde Académie des Sciences Uzbek Trudy. Inst. Math. Mech. 13 (43,55) et (57,69) 1954
- GREPPI Un exemple d'intégration numérique Math. Notae 14 (64,72)

- HAMMERSLEY Lagragian integrations coefficients for distance functions taken over right circular cylinders J.Math.Physics 31 (139,150) 1952
- IONESCU De la formule d'Archimède à une formule de Cubature Gaz Mat Fiz Ser A 8(3-10)
- IRWIN On quadrature and Cubature Tracys for computers X (1923)
- KOPAL
CARRUS
KAWANAGH A new formula for repeated mechanical quadratures Maths Physics 30, 44-48 1951
- KUNTZMANN Méthodes numériques DUNOD - PARIS pp. 201
- MIKELADZE Approximate formulas for multiple integrals Soobsceniya Akad.Nauk. Gruzin. SSR 13,193-200 (1952)
- MINEUR Tentatives de calcul numérique des intégrales doubles CRAS - PARIS 233 (1166,1168) 1951
- idem Annales Astrophysique 15,54-70,(1952)

VON MISES	Numerische Berechnung mehrdimensionaler Integrale	Z. Angew. Math. Mech. 34 - 201, 210
NIKOLSKI	Evaluation de l'erreur des formules de quadratures approchées	Uspehi Matem. Nauk. 5 - 2 (36) (165, 177) 1950
PEIRCE	Integration numérique sur un anneau circulaire plan	Journal Society Indust. Appl. Math. 5(66, 73) 1957
SARD	1) Remainders : function of several variables 2) Remainders as integrals of partial derivatives	Acta Mathe. 84 (1951) pp. 319-345 Proce. Amer. Math. Soc. 3 (1952) 732, 741
STEINHAUSS	Sur la cubature des troncs de bois	Colloquium Math. 1(23, 28) 1947
STYKAN	Graphical computation of Stieltjes Integrals	Doklady Akadem. Nauk. SSSR 87(893, 895) 1952

SYNGE	A simple bounding formula for integrals	Canadian J. Math. 5(46,52)1953
THACHER	Optimum quadrature formulas in s dimensions	M T A C 11 (1957) -189,194-
TORTORICI	- Resti nelle formule di cubatura	Consiglio.Naz. Ricerche. Publ.Ist.Appl. Calcolo 287 (1950)
	- Su un metodo numerico di calcolo approssimato per gli integrali doppi	idem 303 (1951)
TYLER	Numerical Integration of functions of several variables	Canadian J. Math. 5 (393,412) 1953
ZILLER	Méthodes de différenciation et d'intégration numériques	Publi.Scién. Tech. Ministère de l'Air PARIS Note n°50

VU :
GRENOBLE le 22.12.1959
le Président de la Thèse

M. KRAVTCHENKO

VU :
Grenoble le 11.12.1959
le Doyen de la Faculté des Sciences

M. MORET

VU et permis d'imprimerie 15.12.1959
Le Recteur de l'Académie de Grenoble

M. TREHIN