



HAL
open science

Intégration approchée d'une équation différentielle provenant de l'étude de l'équation d'équilibre d'une coque cylindrique

Marc Atteia

► **To cite this version:**

Marc Atteia. Intégration approchée d'une équation différentielle provenant de l'étude de l'équation d'équilibre d'une coque cylindrique. Modélisation et simulation. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1959. Français. NNT : . tel-00277360

HAL Id: tel-00277360

<https://theses.hal.science/tel-00277360>

Submitted on 6 May 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ATT E I A

J. J. G. G. G.

Integration approchée d'une équation différentielle
provenant de l'étude de l'équation d'équilibre
d'une coque cylindrique

Thèse de 3^e Cycle de Mathématiques
Appliquées soutenue le 22 Décembre 1959
à la Faculté des Sciences de Grenoble.

Jury :

M.M.	Kravtchenko :	President
	Sokolowski	
	Kuntzmann	Examineurs
	Vauquois	

A tous mes amis du
Laboratoire de Calcul.

Je tiens à exprimer ici ma reconnaissance à Monsieur le Professeur Kuntzmann pour l'enseignement que j'ai reçu au Laboratoire de Calcul de l'Institut Polytechnique, et pour tous les conseils qu'il m'a donnés pendant la préparation de ma thèse de 3^e Cycle.

J'adresse mes vifs remerciements à Monsieur Casacci, Ingénieur aux Etablissements Neyric, dont les suggestions m'ont aidé dans la première partie de mon travail.

Je suis également reconnaissant à Messieurs les Professeurs Kravtchenko Sokolowski et Vauquois qui ont bien voulu être membres du jury de ma thèse.

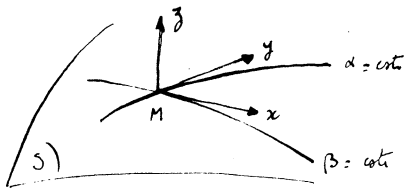
Marc Attala.

Equations d'équilibre des coques.

§1 Nous allons établir les équations classiques d'équilibre élastique des coques.

Considérons une coque d'épaisseur petite devant sa courbure et ses dimensions superficielles. Appelons (S) la surface moyenne de la coque et supposons (S) paramétrisée par deux familles de courbes $\alpha = \text{cte}$; $\beta = \text{cte}$.

On détermine en tout point $M \in S$ un trièdre mobile direct $Mxyz$ tel que Mx soit tangente à $\beta = \text{cte}$, My orthogonale à Mx et dans le plan tangent à S en M , Mz orthogonale à Mx et My . (i, j, k vecteurs unitaires de Mx, My, Mz)



Si M se déplace sur une courbe $c \in S$ et si t représente le temps

$$\frac{di}{dt} = \omega_1 i \quad \frac{dj}{dt} = \omega_2 j \quad \frac{dk}{dt} = \omega_3 k$$

$$\omega = \omega_1 \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \omega_2 \frac{\partial \beta}{\partial t} \quad \omega_1 = p_1 i + q_1 j + r_1 k \quad \omega_2 = p_2 i + q_2 j + r_2 k$$

Prends pour familles de courbes $\alpha = \text{cte}$, $\beta = \text{cte}$, les lignes de courbure de (S). Les lignes se coupent à angle droit.

Donnons la coque à des efforts tels que tout point $M \in S$ subisse un petit déplacement $MM_1 = ui + vj + wk$. Sur la surface déformée (S₁) les lignes $\alpha = \text{cte}$, $\beta = \text{cte}$ sont devenues des lignes qui se coupent sous un angle χ très peu différent de $\frac{\pi}{2}$. Posons $\cos \chi = \bar{\omega}$. — Nous donnerons au paramètre la même valeur sur (S) et sur (S₁) pour deux lignes correspondantes. Sur (S) $\frac{\partial M}{\partial \alpha} = Ai$; $\frac{\partial M}{\partial \beta} = Bj$. Considérons le trièdre trirectangle direct M, x, y, z , dont les vecteurs unitaires sont i, j, k ; M, x , sera tangente à $\beta = \text{cte}$, M, y , orthogonale à M, x ,

et dans le plan tangent en M , $\vec{a}(S_1)$.

(2)

Sur (S_1) $\frac{\partial M_1}{\partial \alpha} = A(1+\varepsilon_1)\vec{i}$, $\frac{\partial M_1}{\partial \beta} = B(1+\varepsilon_2)(\bar{\omega}\vec{i} + \sin\chi\vec{j}_1)$

§ 2 Calcul des rayons de courbure $\frac{1}{R'_1}$ et $\frac{1}{R'_2}$, le long de $\beta = \text{cte}$.

et $\alpha = \text{cte}$ sur (S_1)

En utilisant les notations de Gauss de la théorie des surfaces nous savons que :

$-dM_1 \cdot dh_1 = \frac{dM_1^2}{R_n}$ $h_1 = \frac{M'_1 \wedge M''_1}{|M'_1 \wedge M''_1|}$ Si $dM_1 \cdot dh_1 = 1$ alors $\frac{1}{R_n} = -\frac{1}{dM_1^2}$

$dM_1 = \frac{\partial M_1}{\partial \alpha} \delta\alpha + \frac{\partial M_1}{\partial \beta} \delta\beta = [A(1+\varepsilon_1)\delta\alpha + B(1+\varepsilon_2)\bar{\omega}\delta\beta]\vec{i} + B(1+\varepsilon_2)\sin\chi\vec{j}_1\delta\beta$

$\frac{dh_1}{dt} = \omega' \wedge h_1$ car $h_1 = k_1$ $dh_1 = (\omega'_1 \delta\alpha + \omega'_2 \delta\beta) \wedge h_1$

Si ω' est le vecteur rotation instantané du trièdre M, x, y, z , et si

$\omega'_1 = p'_1\vec{i} + q'_1\vec{j}_1 + r'_1\vec{k}_1$; $\omega'_2 = p'_2\vec{i} + q'_2\vec{j}_1 + r'_2\vec{k}_1$; Donc $dh_1 = (q'_1\delta\alpha + q'_2\delta\beta)\vec{i} - (p'_1\delta\alpha + p'_2\delta\beta)\vec{j}_1$

$dM_1 \cdot dh_1 = q_1 A(1+\varepsilon_1)\delta\alpha^2 + [q'_1 B(1+\varepsilon_2)\bar{\omega} + q'_2 A(1+\varepsilon_1) - p'_1 B(1+\varepsilon_2)\sin\chi] \delta\alpha\delta\beta$
 $+ [q'_2 B(1+\varepsilon_2)\bar{\omega} - p'_2 B(1+\varepsilon_2)\sin\chi] \delta\beta^2$

$dM_1^2 = [A(1+\varepsilon_1)]^2 \delta\alpha^2 + 2AB(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)\bar{\omega}\delta\alpha\delta\beta + [B(1+\varepsilon_2)]^2 \delta\beta^2$

lorsque $\delta\beta = 0$ $\frac{1}{R'_1} = -\frac{1}{dM_1^2}$; $\frac{1}{R'_1} = -\frac{1}{A^2(1+\varepsilon_1)^2 \delta\alpha^2}$ avec $q'_1 [A(1+\varepsilon_1)]^2 \delta\alpha = 1$

$$\frac{1}{R'_1} = -\frac{q'_1}{A(1+\varepsilon_1)} \approx -\frac{q'_1}{A} (1-\varepsilon_1)$$

Notons $\delta_y M_1$ le déplacement pris le long de M, y . Lorsque $\delta_y M_1 = 0$ — c.à.d

lorsque $A(1+\varepsilon_1)\delta\alpha + B(1+\varepsilon_2)\bar{\omega}\delta\beta = 0$ — $\frac{1}{R'_2} = -\frac{1}{dM_1^2}$

$dM_1 \cdot dh_1 = q'_1 A(1+\varepsilon_1) \frac{B^2}{A^2} \frac{(1+\varepsilon_2)^2}{(1+\varepsilon_1)^2} \bar{\omega}^2 \delta\beta^2 + [q'_1 B(1+\varepsilon_2)\bar{\omega} + q'_2 A(1+\varepsilon_1) - p'_1 B(1+\varepsilon_2)\sin\chi] [-\frac{B}{A} \frac{1+\varepsilon_2}{1+\varepsilon_1} \bar{\omega}] \delta\beta^2$
 $+ [q'_2 B(1+\varepsilon_1)\bar{\omega} - p'_2 B(1+\varepsilon_2)\sin\chi] \delta\beta^2 = 1$

En négligeant les termes de la forme $\bar{\omega}\varepsilon_1, \bar{\omega}\varepsilon_2, \varepsilon_1\varepsilon_2, \varepsilon_1^2, \varepsilon_2^2$ et en notant que $\sin\chi \approx 1$

$\frac{1}{\delta\beta^2} \approx B(1+\varepsilon_2) \left(-\frac{p'_2}{A} + \frac{p'_1 B \bar{\omega}}{A} \right)$ $\frac{1}{R'_2} = -\frac{1}{B^2(1+\varepsilon_2)^2} B(1+\varepsilon_2) \left(\frac{p'_1 B \bar{\omega}}{A} - p'_2 \right)$

$$\frac{1}{R'_2} \approx -\frac{p'_1}{A} \bar{\omega} + \frac{p'_2}{B} (1-\varepsilon_2)$$

Pour étudier la déformation de (S) nous avons introduit les quantités ε_1 et ε_2 qui définissent les allongements d'un élément de ligne $\alpha = \text{cote}$ et $\beta = \text{cote}$ appartenant à (S). Nous mesurons le changement de courbure des courbes $\alpha = \text{cote}$, $\beta = \text{cote}$ tracées sur (S) en considérant

$$\kappa_1 = -\frac{q_1'}{A} - \frac{1}{R_1} \quad \kappa_2 = \frac{q_2'}{B} - \frac{1}{R_2} \quad \tau = \frac{k_1'}{A}$$

Nous verrons plus loin, en effet, que $\frac{q_1'}{A} \varepsilon_1$ est négligeable devant $\frac{q_1'}{A}$ et $\frac{k_1'}{A} \omega$, $\frac{k_2'}{B} \varepsilon_2$ sont négligeables devant $\frac{k_2'}{B}$ dans le cas des petits déplacements

Alors $\frac{1}{R_1'} \approx -\frac{q_1'}{A}$ $\frac{1}{R_2'} \approx \frac{k_2'}{B}$ —

§3 Détermination des quantités $p_1, q_1, \varepsilon_1, p_2, q_2, \varepsilon_2, p_1', \dots, \varepsilon_2', \kappa_1, \kappa_2, \tau$

en fonction de A, B, R_1, R_2 , sur (S) rapportée à ses lignes de courbure.

Soit P un point fixe par rapport aux axes fixes $P = M + U$ M.E.S.

L'égalité $dP = M'_\alpha \delta\alpha + M'_\beta \delta\beta + U'_\alpha \delta\alpha + U'_\beta \delta\beta + (\omega_1 \delta\alpha + \omega_2 \delta\beta) \wedge U = 0$ est vraie quels que soient $\delta\alpha$ et $\delta\beta$ Donc : $U'_\alpha = -M'_\alpha - \omega_1 \wedge U$; $U'_\beta = -M'_\beta - \omega_2 \wedge U$.

Ecrivons que $U''_{\alpha\beta} = U''_{\beta\alpha}$ quel que soit U.

$$U''_{\alpha\beta} = -M''_{\alpha\beta} - \omega_2 \wedge M'_\alpha - \frac{\partial \omega_1}{\partial \beta} \wedge U - \omega_1 \wedge (\omega_2 \wedge U) \quad ; \quad U''_{\beta\alpha} = -M''_{\beta\alpha} - \omega_1 \wedge M'_\beta - \frac{\partial \omega_2}{\partial \alpha} \wedge U - \omega_2 \wedge (\omega_1 \wedge U)$$

c. à d :

$$\begin{cases} M''_{\beta\alpha} - M''_{\alpha\beta} + \omega_1 \wedge M'_\beta - \omega_2 \wedge M'_\alpha = 0 \\ \frac{\partial \omega_2}{\partial \alpha} - \frac{\partial \omega_1}{\partial \beta} = \omega_1 \wedge \omega_2 \end{cases}$$

Supposons (S) rapportée à ses lignes de courbure.

$$-\frac{A}{R_1} - \varepsilon_1 B = 0 \quad p_1 B = 0 \quad -\frac{\partial B}{\partial \alpha} + \varepsilon_2 A = 0 \quad -q_2 A = 0$$

D'après ce que nous avons vu plus haut : $q_1 = -\frac{A}{R_1}$ $p_2 = \frac{B}{R_2}$

Alors :

$$\begin{cases} p_1 = 0 ; q_1 = -\frac{A}{R_1} ; \varepsilon_1 = -\frac{1}{B} \frac{\partial A}{\partial \beta} \\ p_2 = \frac{B}{R_2} ; q_2 = 0 ; \varepsilon_2 = \frac{1}{A} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \end{cases}$$

$$AB \bar{\omega} = A \left(\frac{\partial u}{\partial \beta} - \frac{v}{A} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \right) + B \left(\frac{\partial v}{\partial \alpha} - \frac{u}{B} \frac{\partial A}{\partial \beta} \right) ; \quad \bar{\omega} = \frac{1}{A} \frac{\partial v}{\partial \alpha} + \frac{1}{B} \frac{\partial u}{\partial \beta} - \frac{u}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} - \frac{v}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha}$$

Calculons maintenant κ_1, κ_2, τ . Il nous faut connaître $p_1', \dots, \varepsilon_2'$.

Par rapport aux axes fixes $d_i = \frac{\partial d_i}{\partial \alpha} \delta\alpha + \frac{\partial d_i}{\partial \beta} \delta\beta = (\omega_1' \delta\alpha + \omega_2' \delta\beta) \wedge i$

$$\frac{\partial i_i}{\partial \alpha} = \omega'_1 \Lambda_i ; \quad \frac{\partial i_i}{\partial \beta} = \omega'_2 \Lambda_i ; \quad \frac{\partial i_i}{\partial \alpha} \cdot j_i = (\omega'_1 \Lambda_i) \cdot j_i = \omega'_1 \cdot (i, \Lambda j) = \omega'_1 \cdot k_i = \varepsilon'_1 \text{ etc...} \quad (4)$$

Donc : $p'_1 = \frac{\partial i_i}{\partial \alpha} \cdot k_i$; $p'_2 = \frac{\partial i_i}{\partial \beta} \cdot k_i$;

Remarque : $\frac{\partial i_i}{\partial \alpha} = \omega'_1 \Lambda_i \Rightarrow \frac{\partial i_i}{\partial \alpha} \cdot k_i = (\omega'_1 \Lambda_i) \cdot k_i = -\omega'_1 \cdot j_i = -q'_1$

Donc : $q'_1 = -\frac{\partial i_i}{\partial \alpha} \cdot k_i = \frac{\partial k_i}{\partial \alpha} \cdot i_i$; De même : $p'_1 = \frac{\partial i_i}{\partial \alpha} \cdot k_i = -\frac{\partial k_i}{\partial \alpha} \cdot j_i$ etc...

Nous avons vu que :

$$\begin{cases} A(1+\varepsilon_1) i_i = (A+\lambda) i + \mu j + \nu k \\ B(1+\varepsilon_2) (\bar{\omega} i_i + \sin X j_i) = \lambda' i + (\mu' + B) j + \nu' k \end{cases}$$

avec $\left\{ \begin{array}{l} \lambda = \frac{\partial u}{\partial \alpha} - \frac{A w}{R_1} + \frac{\nu}{B} \frac{\partial A}{\partial \beta} ; \mu = \frac{\partial v}{\partial \alpha} - \frac{u}{B} \frac{\partial A}{\partial \beta} ; \nu = \frac{\partial w}{\partial \alpha} + \frac{A u}{R_1} \\ \lambda' = \frac{\partial v}{\partial \beta} - \frac{\nu}{A} \frac{\partial B}{\partial \alpha} ; \mu' = \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{u}{A} \frac{\partial B}{\partial \alpha} - \frac{B w}{R_2} ; \nu' = \frac{\partial w}{\partial \beta} + \frac{B v}{R_2} \end{array} \right.$

Remarquons que $\varepsilon_1 = \frac{\lambda}{A}$; $\varepsilon_2 = \frac{\mu'}{B}$; $\bar{\omega} = \frac{\lambda'}{B} + \frac{\mu}{A}$

$\lambda, \mu, \dots, \nu'$ sont des fonctions linéaires de u, v, w et de leurs dérivées partielles sans terme constant.

$$\begin{cases} i_i = \frac{1-\varepsilon_1}{A} [(A+\lambda) i + \mu j + \nu k] = i + \frac{\mu}{A} j + \frac{\nu}{A} k \\ j_i = \frac{1-\varepsilon_2}{B} [\lambda' i + (\mu' + B) j + \nu' k] \\ k_i = i, \Lambda j_i \end{cases}$$

$i_i = i + \frac{\mu}{A} j + \frac{\nu}{A} k$; $j_i = -\frac{\mu}{A} i + j + \frac{\nu'}{B} k$; $k_i = -\frac{\nu}{A} i - \frac{\nu'}{B} j + k$

La matrice - orthogonale - qui fait passer de i, j, k à i_i, j_i, k_i est une matrice de rotation.

$$\frac{\partial i_i}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\mu}{A} j + \frac{\nu}{A} k \right) + \omega'_1 \Lambda \left(i + \frac{\mu}{A} j + \frac{\nu}{A} k \right)$$

$$\frac{\partial j_i}{\partial \alpha} = -\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\mu}{A} i \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\nu'}{B} k \right) + \omega'_1 \Lambda \left(-\frac{\mu}{A} i + j + \frac{\nu'}{B} k \right)$$

$$\frac{\partial i_i}{\partial \alpha} = \left(\frac{\partial \mu}{\partial \alpha} \frac{\nu}{A} - \frac{\nu \mu}{A} \right) i + \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{\mu}{A} + \nu_i - \frac{\nu \nu'}{A} \right] j + \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\nu}{A} \right) - q'_1 + \frac{\mu \mu}{A} \right] k$$

$$\frac{\partial j_i}{\partial \alpha} = \left[-\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\mu}{A} \right) + q'_1 \frac{\nu'}{B} - \nu_i \right] i - \left[\frac{\nu \mu}{A} + \frac{\mu \nu'}{B} \right] j + \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\nu'}{B} \right) + p'_1 + \frac{q'_1 \mu}{A} \right] k$$

$p'_1 = \frac{\partial j_i}{\partial \alpha} \cdot k_i = \frac{\nu}{A} \nu_i + \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\nu'}{B} \right) + \frac{q'_1 \mu}{A}$; $q'_1 = -\frac{\partial i_i}{\partial \alpha} \cdot k_i = \frac{\nu \nu'}{B} - \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\nu}{A} \right) + q'_1$; $\nu'_i = \frac{\partial j_i}{\partial \alpha} \cdot j_i = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\mu}{A} \right) + \nu_i - q'_1 \frac{\nu'}{B}$

Donc :

$$\begin{cases} \mu'_1 = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} + \frac{\nu}{R_2} \right) - \frac{1}{B} \frac{\partial A}{\partial \beta} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} + \frac{u}{R_1} \right) - \frac{1}{R_1} \left(\frac{\partial v}{\partial \alpha} - \frac{u}{B} \frac{\partial A}{\partial \beta} \right) \\ q'_1 = -\frac{A}{R_1} - \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} + \frac{u}{R_1} \right) - \frac{1}{B} \frac{\partial A}{\partial \beta} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} + \frac{\nu}{R_2} \right) \\ \nu'_1 = -\frac{1}{B} \frac{\partial A}{\partial \beta} + \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial v}{\partial \alpha} - \frac{u}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} \right) + \frac{A}{R_1} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} + \frac{\nu}{R_2} \right) \end{cases}$$

En remplaçant p_i par p_i' etc. dans les formules donnant p_i' etc. on obtient

$$\left\{ \begin{aligned} p_i' &= \frac{B}{R_2} + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial W}{\partial \beta} + \frac{v}{R_2} \right) + \frac{1}{A} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial W}{\partial \alpha} + \frac{u}{R_1} \right) \\ q_i' &= -\frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial W}{\partial \alpha} + \frac{u}{R_1} \right) + \frac{1}{A} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial W}{\partial \beta} + \frac{v}{R_2} \right) - \frac{B}{AR_2} \left(\frac{\partial v}{\partial \alpha} - \frac{u}{B} \frac{\partial A}{\partial \beta} \right) \\ r_i' &= \frac{1}{A} \frac{\partial B}{\partial \alpha} + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial v}{\partial \alpha} - \frac{u}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} \right) - \frac{B}{R_2} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial W}{\partial \alpha} + \frac{u}{R_1} \right) \end{aligned} \right. \quad (5)$$

et

$$\left\{ \begin{aligned} \kappa_1 &= -\frac{1}{R_1} - \frac{q_i'}{A} = \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial W}{\partial \alpha} + \frac{u}{R_1} \right) + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial W}{\partial \beta} + \frac{v}{R_2} \right) \\ \kappa_2 &= \frac{p_i'}{B} - \frac{1}{R_2} = \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial W}{\partial \beta} + \frac{v}{R_2} \right) + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial W}{\partial \alpha} + \frac{u}{R_1} \right) \\ \tau &= \frac{r_i'}{A} = \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial \alpha} - \frac{u}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} \right) - \frac{1}{A'B} \frac{\partial A}{\partial \beta} \frac{\partial W}{\partial \alpha} - \frac{1}{AR_1} \frac{\partial v}{\partial \alpha} \end{aligned} \right.$$

§4 Efforts et petits déplacements.

Soit un point $A \in C$, (C) étant un corps élastique. Considérons un point $B \in C$ et voisin de A . $B = A + dA$. Lorsque (C) est soumis à une tension élastique $A \rightarrow A_1$, $B \rightarrow B_1$; $A_1 = A + U$, $B_1 = B + V$, $V = U + dU$. D'où: $A_1 B_1 = dA + dU$.

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz = \text{grad } U \cdot dA \quad ; \quad dA(dx, dy, dz)$$

Posons $|dA| = r$ $dx = lr$, $dy = mr$, $dz = nr$. ; $|A_1 B_1| = r' = r$

$$r'^2 = (dA + dU)^2 = r^2 \left\{ \left[l \left(1 + \frac{\partial U}{\partial x} \right) + m \frac{\partial U}{\partial y} + n \frac{\partial U}{\partial z} \right]^2 + \left[l \frac{\partial v}{\partial x} + m \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + n \frac{\partial v}{\partial z} \right]^2 + \left[l \frac{\partial W}{\partial x} + m \frac{\partial W}{\partial y} + n \left(1 + \frac{\partial W}{\partial z} \right) \right]^2 \right\}$$

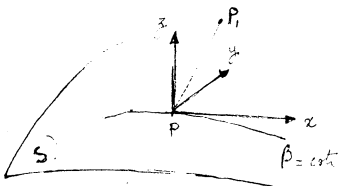
Si U représente un petit déplacement:

$$r' = r \left\{ 1 + l \left(\epsilon_x + m \epsilon_y + n \epsilon_z + \gamma_{xy} + n l \gamma_{yz} + m n \gamma_{xz} \right) \right\} \quad (l + m + n = 1)$$

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$

Alors $r_1 = r \left[1 + l \epsilon_x + m \epsilon_y + n \epsilon_z + \gamma_{yz} m n + \gamma_{zx} n l + \gamma_{xy} l m \right]$.

§5 Méthode de calcul de $\epsilon_1, \epsilon_2, \bar{\omega}$ et κ_1, κ_2, τ .



Considérons le point P_1 transformé du point $P \in S$

$$P_1 \in S, \quad P_1 = P + U \quad U = ui + vj + wk.$$

$dP_1 = dP + dU$. Calculons ces quantités par rapport aux axes

fixes.

$$dP_1 = \frac{\partial P_1}{\partial \alpha} \delta \alpha + \frac{\partial P_1}{\partial \beta} \delta \beta \quad ; \quad dP = \frac{\partial P}{\partial \alpha} \delta \alpha + \frac{\partial P}{\partial \beta} \delta \beta.$$

$$dU = \left(\frac{\partial u}{\partial \alpha} \delta \alpha + \frac{\partial u}{\partial \beta} \delta \beta \right) i + \left(\frac{\partial v}{\partial \alpha} \delta \alpha + \frac{\partial v}{\partial \beta} \delta \beta \right) j + \left(\frac{\partial w}{\partial \alpha} \delta \alpha + \frac{\partial w}{\partial \beta} \delta \beta \right) k + (\omega_1 \delta \alpha + \omega_2 \delta \beta) \wedge U$$

$$\frac{\partial P_i}{\partial \alpha} = A(1 + \varepsilon_1) i = A i + \left(\frac{\partial u}{\partial \alpha} + q_1 w - r_1 v \right) i + \left(\frac{\partial v}{\partial \alpha} + r_1 u - p_1 w \right) j + \left(\frac{\partial w}{\partial \alpha} + p_1 v - q_1 u \right) k$$

$$\frac{\partial P_i}{\partial \beta} = B(1 + \varepsilon_2) (\bar{\omega} i + \sin \chi j) = B j + \left(\frac{\partial u}{\partial \beta} + q_2 w - r_2 v \right) i + \left(\frac{\partial v}{\partial \beta} + r_2 u - p_2 w \right) j + \left(\frac{\partial w}{\partial \beta} + p_2 v - q_2 u \right) k$$

$$\frac{\partial P_i}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial P_i}{\partial \beta} = AB(1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2) \bar{\omega}$$

$$= \left(A + \frac{\partial u}{\partial \alpha} + q_1 w - r_1 v \right) \left(\frac{\partial u}{\partial \beta} + q_2 w - r_2 v \right) + \left(\frac{\partial v}{\partial \alpha} + r_1 u - p_1 w \right) \left(\frac{\partial v}{\partial \beta} + r_2 u - p_2 w \right) + \left(\frac{\partial w}{\partial \alpha} + p_1 v - q_1 u \right) \left(\frac{\partial w}{\partial \beta} + p_2 v - q_2 u \right)$$

En remplaçant $f_1, \dots, \varepsilon_i$ par leurs valeurs :

$$A(1 + \varepsilon_1) i = A i + \left(\frac{\partial u}{\partial \alpha} - \frac{A w}{R_1} + \frac{v}{B} \frac{\partial A}{\partial \beta} \right) i + \left(\frac{\partial v}{\partial \alpha} - \frac{u}{B} \frac{\partial A}{\partial \beta} \right) j + \left(\frac{\partial w}{\partial \alpha} + \frac{A}{R_1} u \right) k$$

$$A^2(1 + \varepsilon_1) = A^2 + \varepsilon A \frac{\partial u}{\partial \alpha} - \frac{\varepsilon A^2 w}{R_1} + \varepsilon \frac{A}{B} \frac{\partial A}{\partial \beta} v$$

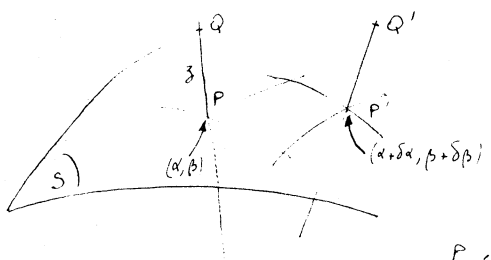
$$\varepsilon_1 = \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{v}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} - \frac{w}{R_1}$$

$$B(1 + \varepsilon_2) (\bar{\omega} i + \sin \chi j) = \left(\frac{\partial v}{\partial \beta} - \frac{v}{A} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \right) i + B j + \left(\frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{u}{A} \frac{\partial B}{\partial \alpha} - \frac{B}{R_2} w \right) j + \left(\frac{\partial w}{\partial \beta} + \frac{B v}{R_2} \right) k$$

$$B^2(1 + \varepsilon_2) = B^2 + \varepsilon B \frac{\partial v}{\partial \beta} + \varepsilon \frac{u}{A} B \frac{\partial B}{\partial \alpha} - \frac{B^2 w}{R_2}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{u}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} + \frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial \beta} - \frac{w}{R_2}$$

§ 6 Nature des efforts dans une coque ou une plaque courbée.



Considérons le point Q situé sur la normale en P à (S) surface moyenne non soumise aux efforts : $PQ = z k$.

Nous supposons que, lorsque P devient P', Q devient Q',

P et P', ayant même paramètre respectivement sur (S) et sur (S')

Q', se trouvant sur la normale en P', à (S'). Alors : $P'Q' = z k'$.

ces hypothèses déterminent le déplacement que nous faisons subir à (S),

α, β, z peuvent alors être considérés comme les paramètres d'une famille de surfaces triple-orthogonales.

$\alpha = \text{cté}, \beta = \text{cté}$ sont des surfaces développables. $z = \text{cté}$ est une surface parallèle à (S)

Au point P' voisin de P, $P' \in S$. $P'Q' = (z + \delta z) k'$ $k' = k + \delta k$.

P' a pour coordonnées sur (S) : $\alpha + \delta \alpha, \beta + \delta \beta$.

Différentions par rapport aux axes fixes : $dQ' = dQ = \frac{\partial Q}{\partial \alpha} \delta \alpha + \frac{\partial Q}{\partial \beta} \delta \beta$

$$dQ = dP + (z + \delta z) dk + \delta z k = P'_\alpha \delta \alpha + P'_\beta \delta \beta + (z + \delta z) [(\omega_1 \delta \alpha + \omega_2 \delta \beta) \wedge k] + \delta z \cdot k$$

$$dQ = A \delta \alpha i + B \delta \beta j + (z + \delta z) [(q_1 \delta \alpha + q_2 \delta \beta) i - (p_1 \delta \alpha + p_2 \delta \beta) j] + \delta z \cdot k$$

$$dQ = \{ [A + (z + \delta_3) q_1] \delta\alpha + (z + \delta_3) q_2 \delta\beta \} i + \{ -(z + \delta_3) p_1 \delta\alpha + [B - p_2 (z + \delta_3)] \delta\beta \} j + \delta_3 k$$

$$dQ = A(1 - \frac{z}{R_1}) \delta\alpha i + B(1 - \frac{z}{R_2}) \delta\beta j + \delta_3 k$$

Potons $QQ' = (li + mj + nk)z$ $l^2 + m^2 + n^2 = 1$

$$\delta\alpha = \frac{lz}{A(1 - \frac{z}{R_1})} \quad \delta\beta = \frac{mz}{B(1 - \frac{z}{R_2})} \quad \delta_3 = nz$$

Appelons Q_1 la position finale celle de Q . Elle se déduit de Q , par un déplacement supplémentaire $Q_1 Q_2 = \varphi$.

Connaissant $|x| = |QQ'|$ calculons x , tel que $|x| = |Q_1 Q_2|$.

$$Q_1 Q_2 = dQ_1 \quad Q_1 = p_1 + \xi i + \mu j + (\gamma + z) k$$

$$dQ_1 = dp_1 + d\xi i + d\mu j + d(\gamma + z) k + (\omega_1 \delta\alpha + \omega_2 \delta\beta) \wedge [\xi i + \mu j + (\gamma + z) k]$$

$$dQ_1 = \{ [A(1 + \varepsilon_1) + \frac{\partial \xi}{\partial \alpha} - \mu \xi + (\gamma + z) q_1'] \delta\alpha + [B\omega + \frac{\partial \xi}{\partial \beta} - \mu \xi + (\gamma + z) q_2'] \delta\beta + \frac{\partial \xi}{\partial z} \delta_3 \} i + \{ [\frac{\partial \mu}{\partial \alpha} + \xi \xi' - (\gamma + z) p_1'] \delta\alpha + [B(1 + \varepsilon_2) + \frac{\partial \mu}{\partial \beta} + \xi \xi' - (\gamma + z) p_2'] \delta\beta + \frac{\partial \mu}{\partial z} \delta_3 \} j + \{ [\frac{\partial \gamma}{\partial \alpha} (\gamma + z) - \xi q_1' + \mu p_1'] \delta\alpha + [\frac{\partial \gamma}{\partial \beta} (\gamma + z) - \xi q_2' + \mu p_2'] \delta\beta + (\frac{\partial \gamma}{\partial z} + 1) \delta_3 \} k$$

En remplaçant $\delta\alpha, \delta\beta, \delta_3$ par leur valeur en fonction de z et en écrivant dQ_1 au carré :

$$dQ_1^2 = z^2 \left\{ \left[\frac{l}{1 - \frac{z}{R_1}} - \left[1 + \varepsilon_1 + \frac{1}{A} \frac{\partial \xi}{\partial \alpha} - \mu \frac{\xi}{A} + (\gamma + z) \frac{q_1'}{A} \right] + \frac{m}{1 - \frac{z}{R_2}} \left[\omega + \frac{1}{B} \frac{\partial \xi}{\partial \beta} - \mu \frac{\xi}{B} + \frac{q_2'}{B} (\gamma + z) \right] + n \frac{\partial \xi}{\partial z} \right]^2 + \left(\frac{l}{1 - \frac{z}{R_1}} \left[\frac{1}{A} \frac{\partial \mu}{\partial \alpha} + \xi \xi' - \frac{p_1'}{A} (\gamma + z) \right] + \frac{m}{1 - \frac{z}{R_2}} \left[1 + \varepsilon_2 + \frac{1}{B} \frac{\partial \mu}{\partial \beta} + \xi \xi' - (\gamma + z) \frac{p_2'}{B} \right] + n \frac{\partial \mu}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{l}{1 - \frac{z}{R_1}} \left[\frac{1}{A} \frac{\partial \gamma}{\partial \alpha} - \xi \frac{q_1'}{A} + \mu \frac{p_1'}{A} \right] + \frac{m}{1 - \frac{z}{R_2}} \left[\frac{1}{B} \frac{\partial \gamma}{\partial \beta} - \xi \frac{q_2'}{B} + \mu \frac{p_2'}{B} \right] + n \left(\frac{\partial \gamma}{\partial z} + 1 \right) \right)^2 \right\}$$

Potons : $\alpha = \varepsilon_1 + \frac{1}{A} \left(\frac{\partial \xi}{\partial \alpha} + q_1' \gamma - \xi \mu \right) + \frac{q_1' z}{A}$; $\theta = \varepsilon_2 + \frac{1}{B} \left(\frac{\partial \mu}{\partial \beta} + \xi \xi' - p_2' \gamma \right) - \frac{p_2' z}{B}$; $\varphi = \frac{\partial \xi}{\partial z}$

$\beta = \omega + \frac{1}{B} \left(\frac{\partial \xi}{\partial \beta} + q_2' \gamma - \xi \mu \right) + \frac{q_2' z}{B}$; $\delta = \frac{1}{A} \left(\frac{\partial \mu}{\partial \alpha} + \xi \xi' - p_1' \gamma \right) - \frac{p_1' z}{A}$; $\rho = \frac{\partial \mu}{\partial z}$

$\chi = \frac{1}{B} \left(\frac{\partial \gamma}{\partial \beta} - \xi \frac{q_2'}{B} + \mu \frac{p_2'}{B} \right)$; $\psi = \frac{1}{A} \left(\frac{\partial \gamma}{\partial \alpha} - \xi \frac{q_1'}{A} + \mu \frac{p_1'}{A} \right)$; $\gamma = \frac{\partial \gamma}{\partial z}$

$$dQ_1^2 = z^2 \left\{ \left[\frac{l}{1 - \frac{z}{R_1}} (1 + \alpha) + \frac{m\beta}{1 - \frac{z}{R_2}} + n\gamma \right]^2 + \left[\frac{l\delta}{1 - \frac{z}{R_1}} + \frac{m(1 + \theta)}{1 - \frac{z}{R_2}} + n\rho \right]^2 + \left[\frac{l\psi}{1 - \frac{z}{R_1}} + \frac{m\chi}{1 - \frac{z}{R_2}} + n(1 + \gamma) \right]^2 \right\}$$

$$dQ_1^2 = z^2 \left\{ \left[l + \frac{l}{1 - \frac{z}{R_1}} - \left(\frac{\alpha}{R_1} + \alpha \right) + \frac{m\beta}{1 - \frac{z}{R_2}} + n\gamma \right]^2 + \left[\frac{l\delta}{1 - \frac{z}{R_1}} + m + \frac{m}{1 - \frac{z}{R_2}} \left(\frac{\theta}{R_2} + \theta \right) + n\rho \right]^2 + \left[\frac{l\psi}{1 - \frac{z}{R_1}} + \frac{m\chi}{1 - \frac{z}{R_2}} + n + n\gamma \right]^2 \right\}$$

$$dQ_1^2 = z^2 = z^2 \left\{ l^2 + m^2 + n^2 + \frac{2l^2}{1 - \frac{z}{R_1}} \left(\frac{\alpha}{R_1} + \alpha \right) + \frac{2lm\beta}{1 - \frac{z}{R_2}} + 2ln\gamma + \frac{2m^2}{1 - \frac{z}{R_2}} \left(\frac{\theta}{R_2} + \theta \right) + \frac{2ml\delta}{1 - \frac{z}{R_1}} + 2mnp + \frac{2nl\psi}{1 - \frac{z}{R_1}} + \frac{2nm\chi}{1 - \frac{z}{R_2}} + 2n^2\gamma \right\}$$

On en déduit :

$$\epsilon_x = \frac{1}{1 - \frac{z}{R_1}} \left(\frac{z}{R_1} + \alpha \right) = \frac{1}{1 - \frac{z}{R_1}} \left[\epsilon_1 - z \kappa_1 + \frac{1}{A} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + q_1 \zeta - \epsilon_1 \mu \right) \right]$$

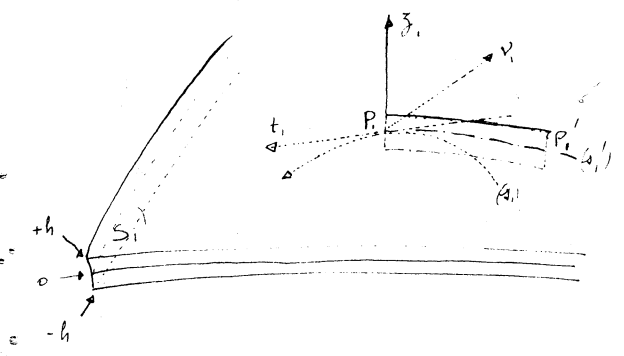
$$\epsilon_y = \frac{1}{1 - \frac{z}{R_2}} \left(\frac{z}{R_2} + \theta \right) = \frac{1}{1 - \frac{z}{R_2}} \left[\epsilon_2 - z \kappa_2 + \frac{1}{B} \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} + q_2 \zeta - \epsilon_2 \nu \right) \right]; \quad \epsilon_z = \psi = \frac{\partial \zeta}{\partial z}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial \beta}{1 - \frac{z}{R_2}} + \frac{\delta}{1 - \frac{z}{R_1}} = \frac{1}{1 - \frac{z}{R_2}} \left[\omega + \frac{1}{B} \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} + q_2 \zeta - \epsilon_2 \mu \right) + z \left(\frac{q_2}{B} + \frac{\epsilon_2}{A} \right) \right] + \frac{1}{1 - \frac{z}{R_1}} \left[-\frac{1}{A} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} + q_1 \zeta - \epsilon_1 \nu \right) \right] - z \left(\frac{1}{1 - \frac{z}{R_1}} + \frac{1}{1 - \frac{z}{R_2}} \right)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\chi}{1 - \frac{z}{R_2}} + \rho = \frac{\partial \mu}{\partial z} + \frac{1}{1 - \frac{z}{R_2}} \left[\frac{1}{B} \left(\frac{\partial \xi}{\partial z} - q_2 \zeta + \mu \nu \right) \right]$$

$$\gamma_{zx} = \chi + \frac{\varphi}{1 - \frac{z}{R_1}} = \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{1}{1 - \frac{z}{R_1}} \left[\frac{1}{A} \left(\frac{\partial \eta}{\partial z} - q_1 \zeta + \mu \nu \right) \right]$$

§ 8 Caractérisation des efforts dans une coque ou une plaque courbées.



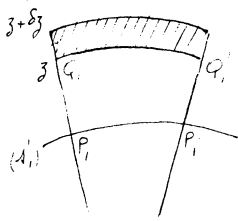
Supposons (s_1) et (s_1') d'épaisseur très petite et
 Traçons sur (s_1) une courbe (s_1) passant par le
 point P . Fixons un sens de parcours sur (s_1)
 et un sens pour la normale P, \vec{z}_1 à (s_1) .
 Formons un trièdre trirectangle direct P, t, v, z_1 .

sachant que P, v est normale à (s_1) et dans le plan tangent à (s_1) en P .
 Faisons une section normale de la coque, qui passe par P, t . Elle coupe (s_1) suivant
 la courbe (plane) (s_1') . Délimitons sur cette section une petite aire σ par les nor-
 males en P et P' ($\in s_1'$) à la courbe (s_1') . P' est un point voisin de P .
 Les tractions exercés à travers cette aire σ sur la portion de coque située
 du côté où P, v est tracée, par la portion restante se réduisent à une force
 unique R et un couple unique C .

Vecteurs $[T], [S], [N]$ les composantes de R sur P, t, v, z_1 et $[H], [G], [K]$ les composantes
 de C .

$P, P' = \delta s_1'$: Lorsque $\delta s_1' \rightarrow 0$ $[T] \rightarrow 0$ mais $\frac{[T]}{\delta s_1'}$ ne tend pas forcément vers zéro.

Posons : $\tau = \lim_{\delta s_1' \rightarrow 0} \frac{[T]}{\delta s_1'}$ etc... Remarquons que $\kappa = 0$



$d[T]_3 = X_t \delta z' \delta_3$; $Q, Q' = \delta z'$; X_t est la projection sur P_t de la force par unité d'aire qui s'exerce en P .

$Q_i = P_i + z_i n_i$, $|n_i| = 1$; $\delta Q_i = \delta P_i + z_i \delta n_i = t_i \delta z' + z_i \left(-t_i \frac{\delta z'_i}{R'_i} \right) = t_i \delta z' \left(1 - \frac{z_i}{R'_i} \right)$
 R' étant le rayon de courbure de (A_i) en P .

$|\delta Q_i| = |\delta z'_i|$; $\delta z'_i = \left(1 - \frac{z_i}{R'_i} \right) \delta z'$; $d[T]_3 = X_t \left(1 - \frac{z_i}{R'_i} \right) \delta z' \delta_3$; $[T] = \int_{-h}^{+h} X_t \left(1 - \frac{z_i}{R'_i} \right) dz' \delta_1'$

si nous supposons l'épaisseur de la coque égale à $2h$.

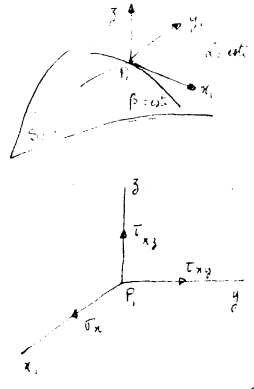
Alors : $T = \int_{-h}^{+h} X_t \left(1 - \frac{z_i}{R'_i} \right) dz'$ et de même $S = \int_{-h}^{+h} X_y \left(1 - \frac{z_i}{R'_i} \right) dz'$; $N = \int_{-h}^{+h} X_z \left(1 - \frac{z_i}{R'_i} \right) dz'$

le moment de la force $F(X_t, X_y, X_z)$ appliquée au point $(0,0,z_i)$ par rapport à P est P.M.A.F $(-z_i, X_y, z_i, X_t, 0)$. D'où : $H = \int_{-h}^{+h} -z_i X_y \left(1 - \frac{z_i}{R'_i} \right) dz'$; $G = \int_{-h}^{+h} z_i X_t \left(1 - \frac{z_i}{R'_i} \right) dz'$

En se rapportant aux axes x, y, z , relatifs à $\alpha = \text{cte}$, $\beta = \text{cte}$ en P , on obtient les

formules :

$T_1 = \int_{-h}^{+h} \sigma_x \left(1 - \frac{z_i}{R'_i} \right) dz'$	$S_1 = \int_{-h}^{+h} \tau_{xy} \left(1 - \frac{z_i}{R'_i} \right) dz'$	$N_1 = \int_{-h}^{+h} \tau_{xz} \left(1 - \frac{z_i}{R'_i} \right) dz'$
$T_2 = \int_{-h}^{+h} \sigma_y \left(1 - \frac{z_i}{R'_i} \right) dz'$	$S_2 = \int_{-h}^{+h} -\tau_{xy} \left(1 - \frac{z_i}{R'_i} \right) dz'$	$N_2 = \int_{-h}^{+h} \tau_{yz} \left(1 - \frac{z_i}{R'_i} \right) dz'$
$H_1 = \int_{-h}^{+h} -z_i \tau_{xy} \left(1 - \frac{z_i}{R'_i} \right) dz'$	$H_2 = \int_{-h}^{+h} z_i \tau_{xz} \left(1 - \frac{z_i}{R'_i} \right) dz'$	
$G_1 = \int_{-h}^{+h} z_i \sigma_x \left(1 - \frac{z_i}{R'_i} \right) dz'$	$G_2 = \int_{-h}^{+h} z_i \sigma_y \left(1 - \frac{z_i}{R'_i} \right) dz'$	



§ 9 Formules approchées pour le calcul des tensions $\sigma_x, \sigma_y, \dots$

Considérons les formules donnant $\epsilon_x, \epsilon_y, \dots$. Par définition ξ, η s'annulent avec z quels que soient α et β .

En première approximation on peut admettre que Q, Q' ne dépend pas du point $P \in S$ c-à-d :

$\frac{\partial \xi}{\partial \alpha} = \frac{\partial \mu}{\partial \alpha} = \frac{\partial \gamma}{\partial \alpha} = \frac{\partial \xi}{\partial \beta} = \frac{\partial \mu}{\partial \beta} = \frac{\partial \gamma}{\partial \beta} = 0$; Donc $\xi = \int \frac{\partial \xi}{\partial z} dz$; $\eta = \int \frac{\partial \eta}{\partial z} dz$; z et $\frac{\partial \xi}{\partial z}$ étant petits.

Où $|\xi| \ll |z| \left| \frac{\partial \xi}{\partial z} \right|$; ξ peut être négligé devant z ou devant $\frac{\partial \xi}{\partial z}$. De même pour η . D'autre part $\epsilon_1, \epsilon_2, z \kappa_1, z \kappa_2, z \tau$ sont petits.

Nous obtenons alors :

$\epsilon_x = \epsilon_1 - z \kappa_1$	$\epsilon_y = \epsilon_2 - z \kappa_2$	$\epsilon_z = \frac{\partial \gamma}{\partial z}$
$\delta_{3x} = \frac{\partial \xi}{\partial z}$	$\delta_{3y} = \frac{\partial \eta}{\partial z}$	$\delta_{2y} = \bar{\omega} - \epsilon_3 \tau$

Remarque : dans γ_{xy} $z \bar{\omega} \left(\frac{q'_x}{B} + \frac{q'_y}{A} \right) z$ sont des quantites negligees.

Rappel des equations de l'equilibre elastique.

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \rho X = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \rho Y = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \rho Z = 0 \end{cases}$$

ρ est une masse specifique
(X, Y, Z) representent une force par unite de volume.

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \gamma (\sigma_y + \sigma_z)] \quad ; \quad \epsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \gamma (\sigma_x + \sigma_z)] \quad ; \quad \epsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \gamma (\sigma_x + \sigma_y)]$$

$$\gamma_{yz} = \frac{2(1+\gamma)}{E} \tau_{yz} \quad ; \quad \gamma_{zx} = \frac{2(1+\gamma)}{E} \tau_{zx} \quad ; \quad \gamma_{xy} = \frac{2(1+\gamma)}{E} \tau_{xy}$$

E est le module d'Young, γ le coefficient de Poisson.

Posons $\theta = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$. Nous savons que : $\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ $\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$

Ecrivons l'equation de compatibilite' $\frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}$.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} [(1+\gamma)\sigma_y - \sigma\theta] + \frac{\partial^2}{\partial y^2} [(1+\gamma)\sigma_x - \sigma\theta] = 2(1+\gamma) \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial y \partial z}$$

Or $\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = -\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial \sigma_x}{\partial y}$; $\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = -\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} - \frac{\partial \sigma_z}{\partial z}$ entrainent que :

$$2 \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial y \partial z} = -\frac{\partial^2 \tau_{zx}}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y \partial z} \quad ; \quad 2 \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2}$$

$$(1+\gamma) \left[\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} \right] - \gamma \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) = (1+\gamma) \left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2} \right)$$

$$(1+\gamma) \left[\Delta \theta - \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial z^2} \right] - \gamma \left(\Delta \theta - \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \right) = 0 \quad \text{c.v.d.}$$

$$\Delta \theta - (1+\gamma) \Delta \sigma_x - \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = 0 \quad \text{de meme} : \quad \Delta \theta - (1+\gamma) \Delta \sigma_y - \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = 0 \quad ; \quad \Delta \theta - (1+\gamma) \Delta \sigma_z - \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = 0$$

et $\Delta \theta = 0 \quad \Delta \sigma_x = -\frac{1}{1+\gamma} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \quad \Delta \sigma_y = -\frac{1}{1+\gamma} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \quad \Delta \sigma_z = -\frac{1}{1+\gamma} \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}$

Etude du cas des plaques planes.

Pour determiner $\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}$, $\frac{\partial \theta}{\partial x}$, $\frac{\partial \theta}{\partial z}$ nous allons faire les hypotheses suivantes :

- les efforts varient uniformement dans la plaque c.à.d. :

$\sigma_x = \sigma_x^0 + \sigma_x^1 x + \sigma_x^2 y$ si la plaque est rapportee a un systeme de coordonnees cartesiennes.

Alors $\theta = \theta^0 + \theta^1 x + \theta^2 y$.

- A l'equilibre $\tau_{xz} = \tau_{yz} = \sigma_z = 0$ pour les surfaces $z = +h$, $z = -h$.

Les equations de l'equilibre elastique nous permettent d'ecrire :

$$\sigma_x + \sigma_{xy} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = 0$$

Comme $\tau_{z3} = 0$ pour $z = \pm h$ $\tau'_{z3} = \tau''_{z3} = 0$ $\frac{\partial \tau_{z3}}{\partial z} + \sigma'_x + \tau_{xy} = 0$

De même : $\tau'_{y3} = \tau''_{y3} = 0$ $\frac{\partial \tau_{y3}}{\partial z} + \tau'_{xy} + \sigma'_y = 0$

D'autre part : $\frac{\partial \tau_{x3}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{y3}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_3}{\partial z} = 0 \rightarrow \frac{\partial \sigma_3}{\partial z} = 0$ (Comme $\sigma_3 = 0$ pour $z = \pm h$, $\sigma_3 = 0$)

Déterminons θ $\Delta \theta = 0$ $\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = 0$ quels que soient x et y c.à.d.

$\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = -\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = 0$ θ est une fonction linéaire de z .

$\Delta \tau_{x3} = -\frac{1}{1+\eta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial z}$ $\tau_{x3} = \tau_{x3}^0$ D'où : $\frac{\partial \tau_{x3}}{\partial z} = -\frac{1}{1+\eta} \frac{\partial \theta}{\partial x} = \text{cte.}$

$\tau_{z3} = A + Bz + Cz^2$ $\tau_{z3}(h) = \tau_{z3}(-h) = 0$ Donc : $\tau_{z3} = A(z^2 - h^2)$ $A = \text{cte.}$

De même : $\tau_{y3} = B(z^2 - h^2)$ $B = \text{cte.}$

Sachant que $\epsilon_x = \epsilon_1 - 3\kappa_1$, $\epsilon_y = \epsilon_2 - 3\kappa_2$, $\sigma_3 = 0$, $\sigma_x - \eta \sigma_y = E \epsilon_x$, $\sigma_y - \eta \sigma_x = E \epsilon_y$

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\eta^2} \{ \epsilon_1 + \eta \epsilon_2 - 3(\kappa_1 + \eta \kappa_2) \}$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\eta^2} \{ \epsilon_2 + \eta \epsilon_1 - 3(\kappa_2 + \eta \kappa_1) \}$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\eta)} (\omega - 2\tau_3)$$

Puisque $\tau_{x3} = A(z^2 - h^2)$ $\frac{\partial \tau_{x3}}{\partial z} = 2A = -\frac{1}{1+\eta} \frac{\partial \theta}{\partial x}$ $\theta = \frac{E}{1-\eta} \{ \epsilon_1 + \epsilon_2 - 3(\kappa_1 + \eta \kappa_2) \}$

$\epsilon_1, \epsilon_2, \kappa_1, \kappa_2$ déterminés en un point de la surface moyenne ne dépendent pas de z .

Donc : $\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{E}{1-\eta} (\kappa_1 + \eta \kappa_2)$ $A = \frac{1}{2(1+\eta)} \frac{E}{1-\eta} \frac{\partial}{\partial x} (\kappa_1 + \eta \kappa_2)$

$$\tau_{x3} = -\frac{1}{2} \frac{E (h^2 - z^2)}{1-\eta^2} \frac{\partial}{\partial x} (\kappa_1 + \eta \kappa_2)$$

$$\tau_{y3} = -\frac{1}{2} \frac{E (h^2 - z^2)}{1-\eta^2} \frac{\partial}{\partial y} (\kappa_1 + \eta \kappa_2)$$

$$\sigma_3 = 0$$

Et :

$$T_1 = \frac{2Eh}{1-\eta^2} (\epsilon_1 + \eta \epsilon_2)$$

$$S_1 = -S_2 = \frac{Eh}{1+\eta} \omega$$

$$N_1 = -D \frac{\partial}{\partial x} (\kappa_1 + \eta \kappa_2)$$

$$T_2 = \frac{2Eh}{1-\eta^2} (\epsilon_2 + \eta \epsilon_1)$$

$$N_2 = -D \frac{\partial}{\partial y} (\kappa_1 + \eta \kappa_2)$$

$$G_1 = -D (\kappa_1 + \eta \kappa_2)$$

$$H_1 = D(1-\eta) \tau$$

$$D = \frac{2}{3} \frac{Eh^3}{1-\eta^2}$$

$$G_2 = -D (\kappa_2 + \eta \kappa_1)$$

$$H_2 = -H_1$$

§ 10 Détermination de T_1, T_2, \dots dans le cas d'une coque — 1^e approximation —

En 1^e approximation : $\epsilon_x = \epsilon_1 - 3\kappa_1$, $\epsilon_y = \epsilon_2 - 3\kappa_2$, $\gamma_{xy} = -2\tau$, $\gamma_{xz} = \frac{\partial \tau}{\partial z}$, $\gamma_{yz} = \frac{\partial \tau}{\partial z}$, $\epsilon_3 = \frac{\partial \tau}{\partial z}$

Dans cette 1^e approximation nous supposons que la surface moyenne de la coque n'est pas fortement incurvée.

Localement on peut alors considérer que les résultats énoncés ci-dessus et concernant les plaques planes sont applicables.

Considérons une portion cylindrique ou prismatique de la coque que l'on pourrait obtenir en découpant un tron fin dans l'épaisseur de la coque.

Nous supposons qu'il n'existe aucune force de masse et aucune traction sur les faces de la coque.

Aux hypothèses faites dans le cas des plaques planes nous ajouterons l'hypothèse suivante :

Nous supposons que nous pouvons choisir la section de la portion cylindrique ou prismatique assez petite pour que à l'intérieur de ce volume $\epsilon_1, \epsilon_2, \bar{\omega}, \kappa_1, \kappa_2, \tau$ puissent être considérés comme constants.

Alors on peut admettre en 1^{er} approximation que : $\tau_{x_3} = \tau_{y_3} = \sigma_3 = 0$. Ces résultats seraient rigoureux dans le cas des plaques planes.

Donc $\sigma_x = \frac{E}{1-\eta^2} \{ \epsilon_1 + \eta \epsilon_2 - \beta (\kappa_1 + \kappa_2) \}$ $\sigma_y = \frac{E}{1-\eta^2} \{ \epsilon_2 + \eta \epsilon_1 - \beta (\kappa_1 + \kappa_2) \}$ $\sigma_3 = 0$

$\epsilon_3 = \frac{\partial \bar{z}}{\partial z} = -\frac{\eta}{E} (\sigma_x + \sigma_y) = -\frac{\eta}{E} \frac{E}{1-\eta^2} (1+\eta) \{ \epsilon_1 + \epsilon_2 - \beta (\kappa_1 + \kappa_2) \}$ $\epsilon_3 = -\frac{\eta}{1-\eta} [\epsilon_1 + \epsilon_2 - \beta (\kappa_1 + \kappa_2)]$

$\gamma_{yx} = \frac{\partial \bar{z}}{\partial x} = 0$ $\gamma_{yz} = \frac{\partial H}{\partial z} = 0$

D'où :	Au 1 ^{er} ordre en h :	$T_1 = \frac{2Eh}{1-\eta^2} (\epsilon_1 + \eta \epsilon_2)$	$S_1 = -S_2 = \frac{Eh}{1+\eta} \bar{\omega}$	$T_2 = \frac{2Eh}{1-\eta^2} (\epsilon_2 + \eta \epsilon_1)$
	Au 3 ^{er} ordre en h :	$G_1 = -D \{ \kappa_1 + \eta \kappa_2 + \frac{1}{R_1^2} (\epsilon_1 + \eta \epsilon_2) \}$	$G_2 = -D \{ \kappa_2 + \eta \kappa_1 + \frac{1}{R_2^2} (\epsilon_2 + \eta \epsilon_1) \}$	
		$H_1 = D(1-\eta) (\tau + \frac{1}{2} \frac{\bar{\omega}}{R_1^2})$	$H_2 = -D(1-\eta) (\tau + \frac{1}{2} \frac{\bar{\omega}}{R_2^2})$	

Avec les hypothèses faites trois cas peuvent se présenter :

+ Les allongements $\epsilon_1, \epsilon_2, \bar{\omega}$ sont petits en face des flexions $\beta \kappa_1, \beta \kappa_2, \beta \tau$.

$G_1 = -D(\kappa_1 + \eta \kappa_2)$ $G_2 = -D(\kappa_2 + \eta \kappa_1)$ $-H_2 = H_1 = D(1-\eta)\tau$.

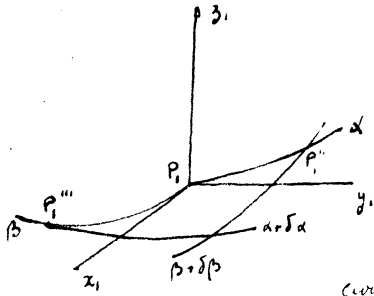
++ Les flexions $\beta \kappa_1, \beta \kappa_2, \beta \tau$ sont petites devant $\epsilon_1, \epsilon_2, \bar{\omega}$.

G_1, G_2, H_1, H_2 sont négligeables.

+++ Les allongements $\epsilon_1, \epsilon_2, \bar{\omega}$ sont comparables aux flexions $\beta \kappa_1, \beta \kappa_2, \beta \tau$.

$G_1 = -D(\kappa_1 + \eta \kappa_2)$ $G_2 = -D(\kappa_2 + \eta \kappa_1)$ $-H_2 = H_1 = D(1-\eta)\tau$.

§ 11 Equations d'équilibre d'une plaque ou d'une coque :



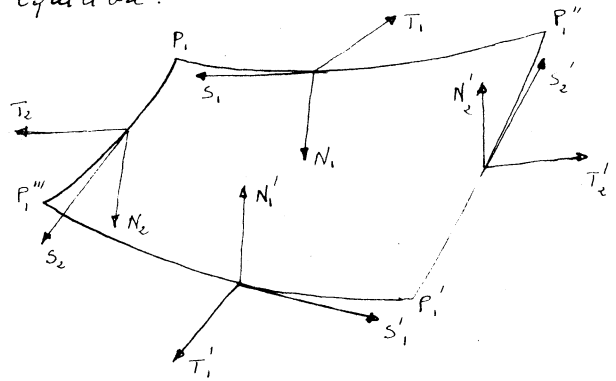
Nous traiterons le cas de la coque qui est le cas général.

Considérons une portion de coque limitée par les faces de la coque et par les surfaces engendrées par les normales à la surface moyenne de la coque le long d'un quadrilatère courbiline P, P', P'', P''' tracé sur cette surface moyenne.

Le schéma ci-contre précise la nature de P, P', P'', P''' : P, x , est tangente à $\beta = \text{cte}$, P, y , normale à P, x , et dans le plan tangent à la surface moyenne en P , P, z , normale à P, x , et P, y .

Ecrivons que la résultante et le couple du torsion agissant sur la portion de coque considérée sont nuls lorsqu'il y a équilibre.

Les efforts agissant sur P, P'' ont une résultante de composantes sur P, x, y, z : $-T, B \delta \beta, -S, B \delta \beta, -N, B \delta \beta$
 Les efforts agissant sur P''', P' ont une résultante de composantes sur P, x :



$$T, B \delta \beta + \delta \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} (T, B \delta \beta) - S, B \delta \beta \cdot \epsilon' \delta \alpha + N, B \delta \beta \cdot q' \delta \alpha$$

(ϵ' et q' tiennent compte de la rotation du trièdre de référence de sommet P''' .)

Si x' est la projection de la résultante des forces extérieures par unité de

surface sur P, x : $T, B \delta \beta + \delta \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} (T, B \delta \beta) - S, B \delta \beta \cdot \epsilon' \delta \alpha + N, B \delta \beta \cdot q' \delta \alpha - T, B \delta \beta + AB \delta \alpha \delta \beta x' = 0$

D'où en écrivant deux relations analogues pour S , et N ,

$$\textcircled{I} \begin{cases} \frac{\partial (T, B)}{\partial \alpha} - \frac{\partial (S_2 A)}{\partial \beta} - (\epsilon'_1 S_1 B + \epsilon'_2 T_2 A) + (q'_1 N_1 B + q'_2 N_2 A) + AB X' = 0 \\ \frac{\partial (S_1 B)}{\partial \alpha} + \frac{\partial (T_2 A)}{\partial \beta} - (p'_1 N_1 B + p'_2 N_2 A) + (\epsilon'_1 T_1 B - \epsilon'_2 S_2 A) + AB Y' = 0 \\ \frac{\partial (N_1 B)}{\partial \alpha} + \frac{\partial (N_2 A)}{\partial \beta} - (q'_1 T_1 B - q'_2 S_2 A) + (p'_1 S_1 B + p'_2 T_2 A) + AB Z' = 0 \end{cases}$$

D'autre part le moment des forces agissant sur $P_1''P_1$ a pour composantes :

$$-H_1 B \delta\beta, -G_1 B \delta\beta, 0$$

Celui qui agit sur $P_1''P_1$: $G_2 A \delta\alpha, -H_2 A \delta\alpha, 0$.

Celui qui agit sur $P_1'''P_1'$:

$$H_1 B \delta\beta + \delta\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} (H_1 B \delta\beta) - G_1 B \delta\beta \cdot \epsilon'_1 \delta\alpha, G_1 B \delta\beta + \delta\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} (G_1 B \delta\beta) + H_1 B \delta\beta \cdot \epsilon'_1 \delta\alpha,$$

$$-H_1 B \delta\beta \cdot q'_1 \delta\alpha + G_1 B \delta\beta \cdot p'_1 \delta\alpha.$$

Celui qui agit sur $P_1''P_1'$

$$-G_2 A \delta\alpha - \delta\beta \frac{\partial}{\partial \beta} (G_2 A \delta\alpha) - H_2 A \delta\alpha \cdot \epsilon'_2 \delta\beta, H_2 A \delta\alpha + \delta\beta \frac{\partial}{\partial \beta} (H_2 A \delta\alpha) - G_2 A \delta\alpha \cdot \epsilon'_2 \delta\beta,$$

$$G_2 A \delta\alpha \cdot q'_2 \delta\beta + H_2 A \delta\alpha \cdot p'_2 \delta\beta.$$

De plus le moment par rapport aux axes des forces qui agissent sur $P_1'''P_1'$ et $P_1''P_1'$

est : $B \delta\beta \cdot N_2 A \delta\alpha, -A \delta\alpha \cdot N_1 B \delta\beta, A \delta\alpha \cdot B \delta\beta S_1 + B \delta\beta \cdot S_2 A \delta\alpha$

Si nous appelons L, M, N les projections sur P, x, y, z , du moment des forces extérieures par unité d'aire nous pouvons écrire le système d'équations.

$$\textcircled{II} \begin{cases} \frac{\partial(H_1 B)}{\partial \alpha} - \frac{\partial(G_2 A)}{\partial \beta} - (G_1 B \epsilon'_1 + H_2 A \epsilon'_2) + (N_2 + L') AB = 0 \\ \frac{\partial(G_1 B)}{\partial \alpha} + \frac{\partial(H_2 A)}{\partial \beta} + (H_1 B \epsilon'_2 - G_2 A \epsilon'_1) - (N_1 - M') AB = 0 \\ G_1 B p'_1 + G_2 A q'_2 - (H_1 B q'_1 - H_2 A p'_2) + (S_1 + S_2) AB = 0 \end{cases}$$

Remarque sur la 1^{re} approximation :

Dans la 1^{re} approximation que nous avons définie plus haut $T_1, T_2, G_1, G_2, H_1, H_2$ s'expriment linéairement en fonction de $\epsilon_1, \epsilon_2, \kappa_1, \kappa_2$ et $\frac{1}{R'_1}, \frac{1}{R'_2}$. Dans le cas des petits déplacements T_1, \dots, H_2 s'exprimeront linéairement en fonction de u, v, w et de leurs dérivés partiels par rapport à α et β . Il n'existera pas de terme indépendant de u, v, w et de leurs dérivés partiels par rapport à α et β .

En se référant aux expressions de $p_i, q_i, \dots, \epsilon'_i$ on peut écrire le système \textcircled{II}

sous la forme :

$$\textcircled{B} \frac{1}{AB} \left\{ \frac{\partial(H_1 B)}{\partial \alpha} - \frac{\partial(G_2 A)}{\partial \beta} + G_1 \frac{\partial A}{\partial \beta} - H_2 \frac{\partial B}{\partial \alpha} \right\} + N_2 + L' = 0, \frac{1}{AB} \left\{ \frac{\partial(G_1 B)}{\partial \alpha} + \frac{\partial(H_2 A)}{\partial \beta} - H_1 \frac{\partial A}{\partial \beta} - G_2 \frac{\partial B}{\partial \alpha} \right\} - N_1 + M' = 0$$

La 3^e équation qui s'écrit : $\frac{H_1}{R_1} + \frac{H_2}{R_2} + S_1 + S_2 = 0$ est automatiquement vérifiée.

Le système (I) s'écrit alors :

(15)

$$\textcircled{A} \begin{cases} \frac{1}{AB} \left\{ \frac{\partial(T_1 B)}{\partial \alpha} - \frac{\partial(S_2 A)}{\partial \beta} + S_1 \frac{\partial A}{\partial \beta} - T_2 \frac{\partial B}{\partial \alpha} + q_1' B M' - q_2' A L' \right\} + \frac{M_1 - N_1}{R_1} + X' = 0 \\ \frac{1}{AB} \left\{ \frac{\partial(S_1 B)}{\partial \alpha} + \frac{\partial(T_2 A)}{\partial \beta} - T_1 \frac{\partial A}{\partial \beta} - S_2 \frac{\partial B}{\partial \alpha} - p_1' B M' + p_2' A L' \right\} - \frac{L_1 + N_2}{R_2} + Y' = 0 \\ \frac{1}{AB} \left\{ \frac{\partial(N_1 B)}{\partial \alpha} + \frac{\partial(N_2 B)}{\partial \beta} \right\} + \frac{T_1}{R_1} + \frac{T_2}{R_2} + Z' = 0 \end{cases}$$

Si dans le système (A) nous remplaçons N_1 et N_2 par leurs valeurs tirées du système (B), nous obtenons un système (A') dans lequel toutes les quantités inconnues pourront être exprimées en fonction de $u, v, w, \frac{\partial u}{\partial \alpha}, \dots, \frac{\partial w}{\partial \beta}$.

u, v, w seront donc solutions d'un système d'équations aux dérivées partielles.

§ 12 Deuxième approximation dans le cas d'une plaque courbée ou d'une

coque :

Cette approximation va nous permettre d'étudier le cas où la surface moyenne de la coque a une courbure appréciable. Nous supposons toujours les déplacements petits. Notre hypothèse est donc la suivante :

- $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \bar{\varepsilon}$ sont négligeables devant $3\kappa_1, 3\kappa_2, 3\bar{\varepsilon}$.

Puisque $\frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial \beta} = \frac{\partial H}{\partial \beta} = 0$, dans la 1^{re} approximation, toujours dans cette approximation

$$\bar{\varepsilon} = \int_0^3 \frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial \beta} d\beta = 0 \quad \mu = \int_0^3 \frac{\partial \mu}{\partial \beta} d\beta = 0 \quad \bar{\gamma} = \int_0^3 \frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial \beta} d\beta = -\frac{\eta}{1-\eta} [(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\bar{\varepsilon} - \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2)\bar{\varepsilon}^2]$$

Reportons cette valeur de $\bar{\gamma}$ dans ε_x sachant que :

$$\varepsilon_x = \frac{1}{1-\frac{\gamma}{R_1}} \left\{ \varepsilon_1 - 3\kappa_1 + \frac{1}{A} \left(\frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial \alpha} - \varepsilon_1' \mu + q_1' \bar{\gamma} \right) \right\} \text{ et en choisissant pour } q_1' \text{ la valeur correspondant sur la surface moyenne non soumise aux efforts.}$$

$$\text{Alors } q_1' \approx -\frac{A}{R_1} \quad \varepsilon_x \approx \varepsilon_1 - 3\kappa_1 - \frac{\delta^2 \kappa_1}{R_1} + \frac{\eta}{1-\eta} \left[(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\bar{\varepsilon} - \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2)\bar{\varepsilon}^2 \right] \frac{A}{R_1} \times \frac{1}{A}$$

$\frac{A(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\bar{\varepsilon}}{R_1}$ est négligeable devant $3\kappa_1$, et $3\kappa_2$.

$$\text{D'où : } \begin{cases} \varepsilon_x = \varepsilon_1 - 3\kappa_1 - \frac{\delta^2 \kappa_1}{R_1} - \frac{\eta}{1-\eta} \bar{\varepsilon}^2 \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{R_1} \\ \varepsilon_y = \varepsilon_2 - 3\kappa_2 - \frac{\delta^2 \kappa_2}{R_2} - \frac{\eta}{1-\eta} \bar{\varepsilon}^2 \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{R_2} \end{cases}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\bar{\omega}}{1-\frac{3}{R_2}} - \tau_3 \left(\frac{1}{1-\frac{3}{R_1}} + \frac{1}{1-\frac{3}{R_2}} \right) + \frac{\bar{z}}{1-\frac{3}{R_2}} \left(\frac{1}{B} + \frac{1}{A} \right) + \frac{1}{1-\frac{3}{R_1}} \frac{1}{A} \left(\frac{\partial H}{\partial \alpha} - p_1 \bar{z} + c_1 \bar{z} \right) + \frac{1}{1-\frac{3}{R_2}} \frac{1}{B} \left(\frac{\partial H}{\partial \beta} - p_2 \bar{z} + c_2 \bar{z} \right)$$

(16)

$$\gamma_{xy} \approx \bar{\omega} - 2\bar{z}\tau - \bar{z}^2 \tau \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

Comme $S_1 = \int_{-h}^{+h} \tau_{xy} \left(1 - \frac{3}{R_1} \right) dz$ $\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\eta)} \gamma_{xy}$ Et en admettant que $\frac{1}{R_1} \approx \frac{1}{R_2}$

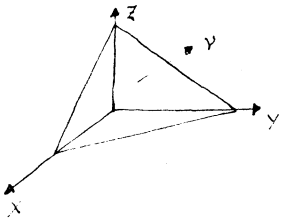
$$S_1 = \frac{Eh}{1+\eta} \bar{\omega} + D(1-\eta) \frac{\bar{z}}{R_2} - \frac{D(1-\eta)}{2} \tau \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

$$S_2 = -\frac{Eh}{1+\eta} \bar{\omega} - D(1-\eta) \frac{\bar{z}}{R_1} + \frac{1}{2} D(1-\eta) \tau \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

Pour expliciter T_1 et T_2 , il nous faut connaître τ_3 qui n'est pas forcément nul puisque nous ne pouvons plus assimiler à ce point de vue coque et plaque plane.

Nous supposons toujours que la coque n'est pas soumise à des forces de masse ni à des tractions sur ses faces.

Nous allons écrire les équations d'équilibre de la forme $\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0$ dans un système d'axes α, β, γ , les familles $\alpha = \text{cte}$, $\beta = \text{cte}$, $\gamma = \text{cte}$ formant un système triple-orthogonal comme nous l'avons vu plus haut.



L'équilibre du tétraèdre donne, de façon classique

$$X_\nu = \sigma_x \cos(\alpha, \nu) + \tau_{xy} \cos(\beta, \nu) + \tau_{xz} \cos(\gamma, \nu) \dots$$

$\cos(\alpha, \nu) = n_x \cdot n_\nu$. n_x et n_ν sont respectivement les vecteurs unitaires portés par les normales à la face $\alpha = \text{cte}$ et à la face

oblique du tétraèdre.

$$\begin{cases} n_x = \eta_{\alpha x} + \eta_{\beta x} + \eta_{\gamma x} \\ n_y = \eta_{\alpha y} + \eta_{\beta y} + \eta_{\gamma y} \end{cases} \quad \eta_{\alpha x} \text{ projection de } n_x \text{ sur } \alpha = \text{cte} \text{ etc.} \dots$$

D'où : $n_x \cdot n_y = \cos(\alpha, \nu) = \cos(\alpha, \alpha) \cos(\alpha, \nu) + \cos(\beta, \alpha) \cos(\beta, \nu) + \cos(\gamma, \alpha) \cos(\gamma, \nu)$

$$X_\nu = \left\{ \sigma_x \cos(\alpha, \alpha) + \tau_{xy} \cos(\beta, \alpha) + \tau_{xz} \cos(\gamma, \alpha) \right\} \cos(\alpha, \nu) + \left\{ \sigma_x \cos(\alpha, \beta) + \tau_{xy} \cos(\beta, \beta) + \tau_{xz} \cos(\gamma, \beta) \right\} \cos(\beta, \nu) + \left\{ \sigma_x \cos(\alpha, \gamma) + \tau_{xy} \cos(\beta, \gamma) + \tau_{xz} \cos(\gamma, \gamma) \right\} \cos(\gamma, \nu) \dots$$

$$X_\nu = X_\alpha \cos(\alpha, \nu) + X_\beta \cos(\beta, \nu) + X_\gamma \cos(\gamma, \nu) \quad \text{etc.}$$

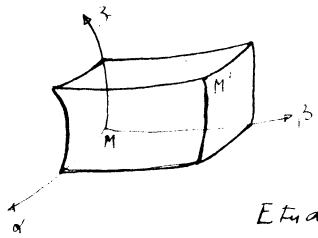
X_α est la traction exercée au point (α, β, γ) dans la direction des x sur le plan

tangent à la surface $\alpha = \text{cte}$ en ce point.

D'après le théorème de conjugaison classique :

$$X_\alpha = A_\alpha = A_\alpha \cos(\alpha, x) + A_\beta \cos(\beta, x) + A_\gamma \cos(\gamma, x) \text{ etc...}$$

Considérons le parallélépipède curviligne Π limité par la surface Σ



$$\iint_{\Sigma} X_\nu dS = \iint_{\Sigma} [X_\alpha \cos(\alpha, \nu) + X_\beta \cos(\beta, \nu) + X_\gamma \cos(\gamma, \nu)] dS$$

$$\iint_{\Sigma} X_\nu dS = \iiint_{\Pi} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha} [X_\alpha \cdot M'_\beta \Delta M'_\gamma] + \frac{\partial}{\partial \beta} [X_\beta \cdot M'_\alpha \Delta M'_\gamma] + \frac{\partial}{\partial \gamma} [X_\gamma \cdot M'_\alpha \Delta M'_\beta] \right\} d\alpha d\beta d\gamma$$

Étudions $\iint_{\Sigma} z_\nu dS$ pour déterminer σ_z

Si le corps est en équilibre et si pz est la projection sur oz de la force de volume unitaire à Π , nous pouvons écrire que :

$$pz + \frac{1}{(M'_\alpha, M'_\beta, M'_\gamma)} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha} [(M'_\beta \Delta M'_\gamma) \cdot z_\alpha] + \frac{\partial}{\partial \beta} [(M'_\alpha \Delta M'_\gamma) \cdot z_\beta] + \frac{\partial}{\partial \gamma} [(M'_\alpha \Delta M'_\beta) \cdot z_\gamma] \right\} = 0$$

$$\begin{cases} z_\alpha = A_\alpha = \tau_x \cos(\alpha, \beta) + \tau_{xy} \cos(\beta, \beta) + \tau_{x\beta} \cos(\beta, \beta) \\ z_\beta = B_\beta = \tau_{xy} \cos(\alpha, \beta) + \sigma_y \cos(\beta, \beta) + \tau_{y\beta} \cos(\beta, \beta) \\ z_\gamma = C_\gamma = \tau_{x\beta} \cos(\alpha, \beta) + \tau_{y\beta} \cos(\beta, \beta) + \sigma_\beta \cos(\beta, \beta) \end{cases}$$

Considérons le point M de coordonnées : $x = x(\alpha, \beta, \gamma)$ $y = y(\alpha, \beta, \gamma)$ $z = z(\alpha, \beta, \gamma)$

$$M_\alpha = \frac{\partial x}{\partial \alpha} i + \frac{\partial y}{\partial \alpha} j + \frac{\partial z}{\partial \alpha} k \quad i, j, k \text{ étant les vecteurs unitaires de } Oxyz \text{ repère fixe.}$$

Posons : $\alpha = \frac{M'_\alpha}{|M'_\alpha|} \quad \cos(\alpha, z) = \alpha \cdot k = \frac{1}{|M'_\alpha|} \frac{\partial z}{\partial \alpha}$

Comme $k = M'_\beta = M'_\alpha \frac{\partial \alpha}{\partial \beta} + M'_\beta \frac{\partial \beta}{\partial \beta} + M'_\gamma \frac{\partial \gamma}{\partial \beta} \quad k \cdot \alpha = |M'_\alpha| \frac{\partial \alpha}{\partial \beta} = 1$

Donc : $\cos(\alpha, z) = \frac{1}{|M'_\alpha|} \frac{\partial z}{\partial \alpha} = |M'_\alpha| \frac{\partial \alpha}{\partial z}$

Calculons $\frac{\partial}{\partial \alpha} (\cos(\alpha, z)) \quad \frac{\partial}{\partial \alpha} (\cos(\alpha, z)) = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{|M'_\alpha|} \right) \cdot \frac{\partial z}{\partial \alpha} + \frac{1}{|M'_\alpha|} \frac{\partial^2 z}{\partial \alpha^2}$

Pour déterminer $\frac{\partial^2 z}{\partial \alpha^2}$ nous remarquons que $M'_\alpha \cdot M'_\beta = 0 \Rightarrow M''_{\alpha\alpha} \cdot M'_\beta + M'_\alpha \cdot M''_{\alpha\beta} = 0$

Donc :
$$\begin{cases} M''_{\alpha\alpha} \cdot M'_\beta = -M'_\alpha \cdot M''_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \beta} (M'^2_{\alpha\alpha}) \\ M''_{\alpha\alpha} \cdot M'_\gamma = -M'_\alpha \cdot M''_{\alpha\gamma} = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \gamma} (M'^2_{\alpha\alpha}) \\ M''_{\alpha\alpha} \cdot M'_\alpha = +\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \alpha} (M'^2_{\alpha\alpha}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 x}{\partial \alpha^2} \cdot \frac{\partial x}{\partial \beta} + \frac{\partial^2 y}{\partial \alpha^2} \cdot \frac{\partial y}{\partial \beta} + \frac{\partial^2 z}{\partial \alpha^2} \cdot \frac{\partial z}{\partial \beta} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial \beta} (M'_\alpha)^2 \\ \frac{\partial^2 x}{\partial \alpha^2} \cdot \frac{\partial x}{\partial \beta} + \frac{\partial^2 y}{\partial \alpha^2} \cdot \frac{\partial y}{\partial \beta} + \frac{\partial^2 z}{\partial \alpha^2} \cdot \frac{\partial z}{\partial \beta} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial \beta} (M'_\alpha)^2 \\ \frac{\partial^2 x}{\partial \alpha^2} \cdot \frac{\partial x}{\partial \alpha} + \frac{\partial^2 y}{\partial \alpha^2} \cdot \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial^2 z}{\partial \alpha^2} \cdot \frac{\partial z}{\partial \alpha} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial \alpha} (M'_\alpha)^2 \end{cases}$$

En multipliant respectivement ces équations par : $\frac{\partial \beta}{\partial \beta}$, 1, $\frac{\partial \alpha}{\partial \beta}$ et en remarquant

$$\text{que : } \begin{cases} \frac{\partial z}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial \beta}{\partial \beta} + \frac{\partial x}{\partial \beta} + \frac{\partial z}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial \beta} = 1 \\ \frac{\partial y}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial \beta}{\partial \beta} + \frac{\partial y}{\partial \beta} + \frac{\partial y}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial \beta} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial \beta}{\partial \alpha} + 1 + \frac{\partial z}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial \beta} = 0 \end{cases} \quad \text{et que } \frac{\partial \beta}{\partial \beta} = \frac{1}{M'_\beta} \frac{\partial z}{\partial \beta} \text{ etc...}$$

On obtient :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \alpha^2} = -\frac{1}{c} \left[\frac{\partial z}{\partial \beta} \frac{1}{M'_\beta} \frac{\partial}{\partial \beta} (M'_\alpha)^2 + \frac{1}{(M'_\alpha)^2} \frac{\partial}{\partial \beta} (M'_\alpha)^2 - \frac{\partial z}{\partial \alpha} \frac{1}{(M'_\alpha)^2} \frac{\partial}{\partial \alpha} (M'_\alpha)^2 \right]$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} [\cos(\alpha, \beta)] = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{|M'_\alpha|} \right) \cdot \frac{\partial z}{\partial \alpha} + \frac{1}{|M'_\alpha|} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\frac{\partial z}{\partial \alpha} \frac{1}{(M'_\alpha)^2} \frac{\partial}{\partial \alpha} (M'_\alpha)^2 - \frac{1}{(M'_\alpha)^2} \frac{\partial}{\partial \beta} (M'_\alpha)^2 - \frac{\partial z}{\partial \beta} \frac{1}{M'_\beta} \frac{\partial}{\partial \beta} (M'_\alpha)^2 \right]$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} [\cos(\alpha, \beta)] = -\frac{1}{c |M'_\alpha|} \left[\frac{1}{(M'_\alpha)^2} \frac{\partial}{\partial \beta} (M'_\alpha)^2 + \frac{1}{(M'_\beta)^2} \frac{\partial z}{\partial \beta} \frac{\partial}{\partial \beta} (M'_\alpha)^2 \right]$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial \alpha} [\cos(\alpha, \beta)] = -\frac{1}{|M'_\alpha|} \frac{\partial |M'_\alpha|}{\partial \beta}}$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial \alpha} [\cos(\beta, \beta)] = 0}$$

On montrera de même que

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial \beta} [\cos(\alpha, \beta)] = 0 \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial \beta} [\cos(\beta, \beta)] = -\frac{1}{|M'_\beta|} \frac{\partial |M'_\beta|}{\partial \beta}}$$

Comme $\cos(\beta, \beta) = 1$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial \beta} [\cos(\beta, \beta)] = \frac{\partial}{\partial \alpha} [\cos(\beta, \beta)] = \frac{\partial}{\partial \beta} [\cos(\beta, \beta)] = 0}$$

$$\text{D'autre part } \frac{\partial}{\partial \beta} [\cos(\alpha, \beta)] = \frac{1}{|M'_\alpha|} \frac{\partial}{\partial \alpha} |M'_\alpha| \cdot \cos(\beta, \beta) \quad \text{Or } M'_\beta = k \quad \frac{\partial}{\partial \alpha} |M'_\beta| = 0$$

$$\text{et } \boxed{\frac{\partial}{\partial \beta} [\cos(\alpha, \beta)] = 0}$$

Remarque : Nous avons conduit le calcul de $\frac{\partial}{\partial \alpha} [\cos(\alpha, \beta)]$ de façon générale

sans tenir compte du fait que la ligne z était orthogonale à $\alpha = \text{cote}$, $\beta = \text{cote}$

afin de pouvoir déduire des résultats analogues à ceux que nous avons

trouvés si nous avions : $x = x(\alpha, \beta, \gamma)$ $y = y(\alpha, \beta, \gamma)$ $z = z(\alpha, \beta, \gamma)$

et ceci de la même façon.

Comme nous l'avons vu plus haut en calculant la quantité $\varphi\varphi'$:

$$M'_\alpha = A(1 - \frac{z}{R_1})i, \quad M'_\beta = B(1 - \frac{z}{R_2})j, \quad M'_\gamma = k.$$

Alors si nous supposons que $z = 0$

$$\frac{1}{(M'_\alpha, M'_\beta, M'_\gamma)} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha} [(M'_\beta \wedge M'_\gamma) \tau_{x_3}] + \sigma_x \left[-\frac{1}{|M'_\gamma|} \frac{\partial |M'_\alpha|}{\partial z} \right] (M'_\beta \wedge M'_\gamma) + \frac{\partial}{\partial \beta} [(M'_\gamma \wedge M'_\alpha) \tau_{y_3}] \right. \\ \left. + \sigma_y \left[-\frac{1}{|M'_\beta|} \frac{\partial |M'_\alpha|}{\partial z} \right] (M'_\gamma \wedge M'_\alpha) + \frac{\partial}{\partial \gamma} \{ (M'_\alpha \wedge M'_\beta) \sigma_z \} \right\} = 0$$

$$D'ou: \quad \frac{\partial}{\partial \alpha} [B(1 - \frac{z}{R_2}) \tau_{x_3}] + \frac{\partial}{\partial \beta} [A(1 - \frac{z}{R_1}) \tau_{y_3}] + \frac{\partial}{\partial \gamma} [AB(1 - \frac{z}{R_1})(1 - \frac{z}{R_2}) \sigma_z] \\ + \frac{AB}{R_1} (1 - \frac{z}{R_2}) \sigma_x + \frac{AB}{R_2} (1 - \frac{z}{R_1}) \sigma_y = 0$$

Pour obtenir une approximation de σ_z nous substituons dans l'équation précédente les valeurs de σ_x , σ_y , τ_{x_3} , τ_{y_3} données par la 1^{re} approximation et nous intégrons le résultat obtenu par rapport à z . La constante d'intégration se détermine en remarquant que $\sigma_z = 0$ pour $z = \pm h$.

— Dans tous les calculs nous considérons comme négligeables les termes de la forme $\frac{\varepsilon z}{R_i}$ comme nous l'avons dit plus haut.

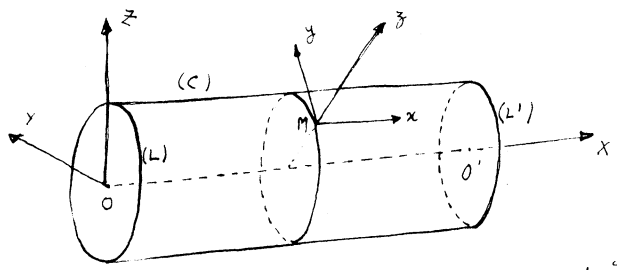
$$\text{Alors:} \quad \sigma_x = \frac{E}{1-\eta^2} (\varepsilon_x + \eta \varepsilon_y) + \frac{\eta}{1-\eta} \sigma_z \quad \sigma_y = \frac{E}{1-\eta^2} (\varepsilon_y + \eta \varepsilon_x) + \frac{\eta}{1-\eta} \sigma_z \\ \sigma_z = -\frac{1}{2} \frac{E}{1-\eta^2} (h^2 - z^2) \left[\frac{\kappa_1 + \eta \kappa_2}{R_1} + \frac{\kappa_2 + \eta \kappa_1}{R_2} \right]$$

Et finalement:

$$T_1 = \frac{2Eh}{1-\eta^2} (\varepsilon_1 + \eta \varepsilon_2) + D \left\{ \kappa_1 \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) - \frac{1}{2} \frac{\eta}{1-\eta} (\kappa_1 + \kappa_2) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{\eta}{R_2} \right) - \frac{\eta}{1-\eta} \left[\frac{\kappa_1 + \eta \kappa_2}{R_1} + \frac{\kappa_2 + \eta \kappa_1}{R_2} \right] \right\} \\ T_2 = \frac{2Eh}{1-\eta^2} (\varepsilon_2 + \eta \varepsilon_1) + D \left\{ \kappa_2 \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) - \frac{1}{2} \frac{\eta}{1-\eta} (\kappa_1 + \kappa_2) \left(\frac{1}{R_2} + \frac{\eta}{R_1} \right) - \frac{\eta}{1-\eta} \left[\frac{\kappa_1 + \eta \kappa_2}{R_1} + \frac{\kappa_2 + \eta \kappa_1}{R_2} \right] \right\}$$

Chapitre II

Equilibre d'un cylindre encastré en ses deux extrémités et soumis à une pression hydrostatique.



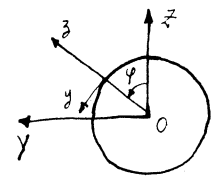
Considérons un cylindre (C) circulaire, encastré en ses deux extrémités (L) et (L'). Ce cylindre sera repéré par rapport à un système de coordonnées cartésiennes

oxyz. A tout point $M \in C$ on associera un trièdre trirectangle direct $Mx'y'z'$ tel que Mx' soit parallèle à ox - dirigé suivant l'axe de (C) - et de même sens, Mz' normal au cylindre et dirigé vers l'extérieur de (C).

M sera défini sur le cylindre par les deux paramètres α et φ .

$$M \begin{cases} x = a \\ y = a \sin \varphi \\ z = a \cos \varphi \end{cases} \quad \begin{matrix} 0 \leq \alpha \leq l \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{matrix}$$

a est le rayon du cercle, section droite de (C).



l est la longueur de (C).

§1 Détermination en fonction de u, v, w de toutes les quantités qui interviennent dans les équations d'équilibre élastique du cylindre.

Nous avons déjà vu qu'en 1^{re} approximation les équations d'équilibre d'une coque sont :

$$\textcircled{A} \begin{cases} \frac{1}{AB} \left\{ \frac{\partial(T_1 B)}{\partial \alpha} - \frac{\partial(S_2 A)}{\partial \beta} + S_1 \frac{\partial A}{\partial \beta} - T_2 \frac{\partial B}{\partial \alpha} + q'_1 B M' - q'_2 A L' \right\} + \frac{M' - N_1}{R_1} + X' = 0 \\ \frac{1}{AB} \left\{ \frac{\partial(S_1 B)}{\partial \alpha} + \frac{\partial(T_2 A)}{\partial \beta} - T_1 \frac{\partial A}{\partial \beta} - S_2 \frac{\partial B}{\partial \alpha} - p'_1 B M' + p'_2 A L' \right\} - \frac{L' - N_2}{R_2} + Y' = 0 \\ \frac{1}{AB} \left\{ \frac{\partial(N_1 B)}{\partial \alpha} + \frac{\partial(N_2 A)}{\partial \beta} \right\} + \frac{M'}{R_1} + \frac{T_2}{R_2} + Z' = 0 \end{cases}$$

$$\textcircled{B} \begin{cases} \frac{1}{AB} \left\{ \frac{\partial(H_1 B)}{\partial \alpha} - \frac{\partial(G_2 A)}{\partial \beta} + G_1 \frac{\partial A}{\partial \beta} - H_2 \frac{\partial B}{\partial \alpha} \right\} + N_2 + L' = 0 \\ \frac{1}{AB} \left\{ \frac{\partial(G_1 B)}{\partial \alpha} + \frac{\partial(H_2 A)}{\partial \beta} - H_1 \frac{\partial A}{\partial \beta} - G_2 \frac{\partial B}{\partial \alpha} \right\} - N_1 + M' = 0 \end{cases}$$

D) autre part :

$$\begin{cases} T_1 = \frac{2Eh}{1-\eta^2} (\epsilon_1 + \eta \epsilon_2) & S_1 = -S_2 = \frac{Eh}{1+\eta} \bar{\omega} & G_1 = -D \{ \kappa_1 + \eta \kappa_2 \} & H_1 = -H_2 = D(1-\nu) \tau \\ T_2 = \frac{2Eh}{1-\eta^2} (\epsilon_2 + \eta \epsilon_1) & & G_2 = -D \{ \kappa_2 + \eta \kappa_1 \} & \end{cases}$$

avec $D = \frac{2}{3} \frac{Eh^3}{1-\eta^2}$

Ayant remarqué que les lignes $\alpha = \text{cte}$ et $\varphi = \text{cte}$ étaient des lignes de courbure du cylindre nous pouvons écrire :

$$\epsilon_1 = \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\nu}{AB} \frac{\partial A}{\partial \varphi} - \frac{w}{R_1} \quad ; \quad \epsilon_2 = \frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{u}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} - \frac{w}{R_2} \quad ; \quad \bar{\omega} = \frac{1}{A} \frac{\partial v}{\partial \alpha} + \frac{1}{B} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{u}{AB} \frac{\partial A}{\partial \varphi} - \frac{\nu}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha}$$

R_1 et R_2 sont respectivement les rayons de courbure de $\varphi = \text{cte}$ et $\alpha = \text{cte}$.

$$\begin{cases} p_1' = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \frac{\nu}{R_2} \right) - \frac{1}{B} \frac{\partial A}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} + \frac{u}{R_1} \right) - \frac{1}{R_1} \left(\frac{\partial v}{\partial \alpha} - \frac{u}{B} \frac{\partial A}{\partial \varphi} \right) \\ q_1' = -\frac{A}{R_1} - \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} + \frac{u}{R_1} \right) - \frac{1}{B} \frac{\partial A}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \frac{\nu}{R_2} \right) \\ r_1' = -\frac{1}{B} \frac{\partial A}{\partial \varphi} + \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial v}{\partial \alpha} - \frac{u}{AB} \frac{\partial A}{\partial \varphi} \right) + \frac{A}{R_1} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \frac{\nu}{R_2} \right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_2' = \frac{B}{R_2} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \frac{\nu}{R_2} \right) + \frac{1}{A} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} + \frac{u}{R_1} \right) \\ q_2' = -\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} + \frac{u}{R_1} \right) + \frac{1}{A} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \frac{\nu}{R_2} \right) - \frac{B}{AR_2} \left(\frac{\partial v}{\partial \alpha} - \frac{u}{B} \frac{\partial A}{\partial \varphi} \right) \\ r_2' = \frac{1}{A} \frac{\partial B}{\partial \alpha} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial v}{\partial \alpha} - \frac{u}{AB} \frac{\partial A}{\partial \varphi} \right) - \frac{B}{R_2} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} + \frac{u}{R_1} \right) \end{cases}$$

$$\frac{1}{R_1} = -\frac{q_1'}{A} (1-\epsilon_1) \quad \frac{1}{R_2} = \frac{p_2'}{B} (1-\epsilon_2) - \frac{p_1'}{A} \bar{\omega} \quad \frac{1}{R_1} = -\frac{q_1'}{A} \quad \frac{1}{R_2} = \frac{p_2'}{B}$$

$$\begin{cases} \kappa_1 = \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} + \frac{u}{R_1} \right) + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \frac{\nu}{R_2} \right) \\ \kappa_2 = \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \frac{\nu}{R_2} \right) + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} + \frac{u}{R_1} \right) \\ \tau = \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial \alpha} - \frac{u}{AB} \frac{\partial A}{\partial \varphi} \right) - \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \varphi} \frac{\partial w}{\partial \alpha} - \frac{1}{AR_1} \frac{\partial v}{\partial \alpha} \end{cases}$$

Remarque : Dans les formules précédentes et dans tout ce qui suit nous négligeons les produits des composantes des vecteurs déplacement et de leurs dérivées par rapport à α ou φ , effectués deux à deux.

INSTITUT IMAG
 Informatique, Mathématiques Appliquées de Grenoble
 CNRS - INPG - USMG
 B.P. 68
 38000 SAINT MARTIN D'HIERES CEDEX

Puisque les coordonnées de M sont $(x, a \sin \varphi, a \cos \varphi)$ celles de M'_x sont $(1, 0, 0)$ et celles de M'_y $(0, a \cos \varphi, -a \sin \varphi)$

$M'_x = I - i$ I, j, k sont les vecteurs unitaires de OXYZ.

i, j, k sont les vecteurs unitaires de Mxyz.

Donc $A = 1$

$M'_y = a \cos \varphi J - a \sin \varphi K$; $i = I$; $j = \frac{\partial M}{\partial a} = \frac{\partial M}{a \partial \varphi}$

$j = \cos \varphi J - \sin \varphi K$; $k = i \wedge j$

Ainsi : $\begin{pmatrix} i \\ j \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ J \\ K \end{pmatrix}$

$M'_y = a \cos^2 \varphi j + 2a \sin \varphi \cos \varphi k + a \sin^2 \varphi j - a \sin \varphi \cos \varphi k$. $M'_y = a j$

Et $B = a$

D'après le choix des paramètres, il est clair que : $\frac{1}{R_1} = 0$ $R_2 = -a$

$\left\{ \begin{aligned} p'_1 &= \frac{1}{a} \left(\frac{\partial w}{\partial a \partial \varphi} - \frac{\partial v}{\partial a} \right) & q'_1 &= -\frac{\partial w}{\partial a^2} & r'_1 &= -\frac{\partial v}{\partial a^2} \\ p'_2 &= -1 + \frac{1}{a} \left(\frac{\partial w}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right) & q'_2 &= -\frac{\partial w}{\partial a \partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial a} & r'_2 &= \frac{\partial v}{\partial a \partial \varphi} + \frac{\partial w}{\partial a} \\ \varepsilon_1 &= \frac{\partial u}{\partial a} & \varepsilon_2 &= \frac{1}{a} \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} + w \right) & \bar{w} &= \frac{\partial v}{\partial a} + \frac{1}{a} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \\ \kappa_1 &= \frac{\partial w}{\partial a^2} & \kappa_2 &= \frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial w}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right) & \tau &= \frac{1}{a} \left(\frac{\partial w}{\partial a \partial \varphi} - \frac{\partial v}{\partial a} \right) \end{aligned} \right.$

Si nous supposons le cylindre soumis à une pression hydrostatique :

$X' = Y' = 0$; $Z' = a(1 - \cos \varphi)$ $L' = M' = N' = 0$

D'autre part : $\frac{1}{R'_1} = \frac{\partial w}{\partial a^2}$ $\frac{1}{R'_2} = -\frac{1}{a} + \frac{w}{a^2} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial w}{\partial \varphi^2}$

Et l'on a aussi :

$\left\{ \begin{aligned} T_1 &= \frac{2Eh}{1-\eta^2} \left[\frac{\partial u}{\partial a} + \eta \frac{1}{a} \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} + w \right) \right] ; S_1 = -S_2 = \frac{Eh}{1+\eta} \left(\frac{\partial v}{\partial a} + \frac{1}{a} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) ; T_2 = \frac{2Eh}{1-\eta^2} \left[\frac{1}{a} \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} + w \right) + \eta \frac{\partial u}{\partial a} \right] \\ G_1 &= -D \left\{ \frac{\partial w}{\partial a^2} + \frac{\eta}{a^2} \left(\frac{\partial w}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right) \right\} ; G_2 = -D \left\{ \frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial w}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right) + \eta \frac{\partial w}{\partial a^2} \right\} \\ H_1 &= -H_2 = \frac{D(1-\eta)}{a} \left(\frac{\partial w}{\partial a \partial \varphi} - \frac{\partial v}{\partial a} \right) \\ N_1 a &= a \frac{\partial G_1}{\partial a} + \frac{\partial H_2}{\partial \varphi} + (H_1 r'_1 a - G_2 r'_2) = a \frac{\partial G_1}{\partial a} + \frac{\partial H_2}{\partial \varphi} \\ N_2 &= \frac{1}{a} \frac{\partial G_2}{\partial \varphi} - \frac{\partial H_1}{\partial a} + (G_1 r'_1 + \frac{1}{a} H_2 r'_2) = \frac{1}{a} \frac{\partial G_2}{\partial \varphi} - \frac{\partial H_1}{\partial a} \end{aligned} \right.$

§ 2 Détermination du système d'équations aux dérivées partielles qui

vérifie les composantes du déplacement.

La 1^{re} équation du système (A) s'écrit en remplaçant toutes les quantités qu'elle contient par des fonctions de u, v, w et de leurs dérivées partielles:

$$\frac{2Eh a}{1-\eta^2} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\eta}{a} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \varphi} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] + \frac{Eh}{1+\eta} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \varphi} + \frac{1}{a} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \right) = 0$$

c.à.d. :
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\eta}{2a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{1+\eta}{2a} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \varphi} + \frac{\eta}{a} \frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

La 2^e équation du système (A) s'écrit :

$$\frac{Eh a}{1+\eta} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{a} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \varphi} \right) + \frac{2Eh}{1-\eta^2} \left[\frac{1}{a} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) + \eta \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \varphi} \right] - \frac{D}{a} \left\{ \frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial \varphi^3} - \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} \right) + \eta \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial \varphi} \right\} - \frac{D(1-\eta)}{a} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial \varphi} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) = 0$$

c.à.d. :
$$\frac{1+\eta}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \varphi} + a \frac{1-\eta}{2} \left(1 + \frac{2h^2}{3a^2} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{a} \left(1 + \frac{h^2}{3a^2} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{a} \frac{\partial w}{\partial \varphi} - \frac{h^2}{3a} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial \varphi} - \frac{h^2}{3a^3} \frac{\partial^3 w}{\partial \varphi^3} = 0$$

La 3^e équation du système (A) s'écrit :

$$-D \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^4} + \frac{\eta}{a^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2 \partial \varphi^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2 \partial \varphi} \right) \right\} - \frac{1}{a^2} D \left\{ \frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^4} - \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^3} \right) + \eta \frac{\partial^2 w}{\partial x^2 \partial \varphi^2} \right\} - \frac{2}{a} \frac{D(1-\eta)}{a} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2 \partial \varphi^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2 \partial \varphi} \right) - \frac{2Eh}{a(1-\eta^2)} \left[\frac{1}{a} \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} + w \right) + \eta \frac{\partial u}{\partial x} \right] + a(1-\cos \varphi) = 0$$

c.à.d. :
$$\eta a \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{h^2}{3} (2-\eta) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2 \partial \varphi} - \frac{h^2}{3a^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^3} + w + \frac{a^2 h^2}{3} \frac{\partial^2 w}{\partial x^4} + \frac{2h^2}{3} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2 \partial \varphi^2} + \frac{h^2}{3a^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^4} + \frac{a^3(1-\eta^2)}{2Eh} (1-\cos \varphi) = 0$$

Nous devons donc résoudre le système :

(D)
$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\eta}{2a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{1+\eta}{2a} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \varphi} + \frac{\eta}{a} \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \\ \frac{1+\eta}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \varphi} + a \frac{1-\eta}{2} \left(1 + \frac{2h^2}{3a^2} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{a} \left(1 + \frac{h^2}{3a^2} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{a} \frac{\partial w}{\partial \varphi} - \frac{h^2}{3a} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial \varphi} - \frac{h^2}{3a^3} \frac{\partial^3 w}{\partial \varphi^3} = 0 \\ \eta a \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{h^2}{3} (2-\eta) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2 \partial \varphi} - \frac{h^2}{3a^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^3} + w + \frac{a^2 h^2}{3} \frac{\partial^2 w}{\partial x^4} + \frac{2h^2}{3} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2 \partial \varphi^2} + \frac{h^2}{3a^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^4} + \frac{a^3(1-\eta^2)}{2Eh} (1-\cos \varphi) = 0 \end{cases}$$

auquel on doit ajouter les conditions aux limites :

(E)
$$u(0) = u(l) = v(0) = v(l) = w(0) = w(l) = w'_x(0) = w'_x(l) = 0$$

§ 3 Résolution du système d'équations aux dérivées partielles (D)

avec les conditions aux limites (E)

Dans le système différentiel (D) nous remarquons que les dérivées partielles de v par rapport à y sont d'ordre impair quand celles de u et w sont d'ordre pair et inversement ;

Nous allons séparer les variables en posant :

$$u(x, y) = u_0(x) + u_1(x) \cos y, \quad v(x, y) = v_0(x) + v_1(x) \sin y, \quad w(x, y) = w_0(x) + w_1(x) \cos y.$$

Nous obtenons les deux systèmes différentiels :

$$\text{(D)} \begin{cases} \frac{d^2 u_0}{dx^2} + \frac{\eta}{a} \frac{dw_0}{dx} = 0 & (1) \\ a \frac{(1-\eta)}{2} \left(1 + \frac{2h^2}{3a^2}\right) \frac{dv_0}{dx^2} = 0 & (2) \\ \eta a \frac{du_0}{dx} + w_0 + \frac{a^2 h^2}{3} \frac{d^4 w_0}{dx^4} + \frac{a^3 (1-\eta^2)}{2Eh} = 0 & (3) \end{cases}$$

$$\text{(E')} \quad u_0(0) = u_1(l) = v_0(0) = v_1(l) = w_0(0) = w_1(l) = (w_0)'_{x=0} = (w_1)'_{x=l} = 0$$

$$\text{(D')} \begin{cases} \frac{d^2 u_1}{dx^2} - \frac{1-\eta}{2a^2} u_1 + \frac{1+\eta}{2a} \frac{dv_1}{dx} + \frac{\eta}{a} \frac{dw_1}{dx} = 0 & (1'') \\ \frac{1+\eta}{2} \frac{du_1}{dx} - a \frac{1-\eta}{2} \left(1 + \frac{2h^2}{3a^2}\right) \frac{dv_1}{dx^2} + \frac{1}{a} \left(1 + \frac{h^2}{3a^2}\right) v_1 - \frac{h^2}{3a} \frac{d^2 w_1}{dx^2} + \frac{1}{a} \left(1 + \frac{h^2}{3a^2}\right) w_1 = 0 & (2'') \\ \eta a \frac{du_1}{dx} - \frac{h^2}{3} (2-\eta) \frac{d^2 v_1}{dx^2} + \left(1 + \frac{h^2}{3a^2}\right) v_1 + \frac{a^2 h^2}{3} \frac{d^4 w_1}{dx^4} - \frac{2h^2}{3} \frac{d^2 w_1}{dx^2} + \left(1 + \frac{h^2}{3a^2}\right) w_1 = \frac{a^3 (1-\eta^2)}{2Eh} & (3'') \end{cases}$$

$$\text{(E'')} \quad u_1(0) = u_1(l) = v_1(0) = v_1(l) = w_1(0) = w_1(l) = (w_1)'_{x=0} = (w_1)'_{x=l} = 0$$

Étudions le système (D') associé au système (E').

(2) nous conduit à : $\frac{d^2 v_0}{dx^2} = 0$ Comme $v_0(0) = v_0(l) = 0$ $v_0 \equiv 0$

$$\frac{d^2 u_0}{dx^2} + \frac{\eta}{a} \frac{dw_0}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{du_0}{dx} + \frac{\eta}{a} w_0 = c \quad \text{c est une constante}$$

$$\eta a \frac{du_0}{dx} + w_0 + \frac{a^2 h^2}{3} \frac{d^4 w_0}{dx^4} + \frac{a^3 (1-\eta^2)}{2Eh} = 0$$

D'où :

$$\begin{cases} \frac{d^4 w_0}{dx^4} + \frac{3(1-\eta^2)}{a^2 h^2} w_0 = -\frac{3a(1-\eta^2)}{2Eh^3} - \frac{3\eta c}{a h^2} \\ w_0(0) = w_0(l) = (w_0)'_{x=0} = (w_0)'_{x=l} = 0 \end{cases}$$

Ayant déterminé w_0 à l'aide de l'équation précédente, on calcule u_0 et au moyen des conditions initiales on peut calculer la constante c .

Étudions maintenant le système (D) associé aux conditions aux limites (E).

Pour simplifier l'écriture nous le noterons ainsi :

$$\begin{cases} u''_{x^2} - \frac{1-\eta}{2a^2} u + \frac{1+\eta}{2a} v'_x + \frac{\eta}{a} w'_x = 0 & (1) \\ \frac{1+\eta}{2} u'_x - \frac{a(1-\eta)}{2} \left(1 + \frac{2h^2}{3a^2}\right) v''_{x^2} + \frac{1}{a} \left(1 + \frac{h^2}{3a^2}\right) v - \frac{h^2}{3a} w''_{x^2} + \frac{1}{a} \left(1 + \frac{h^2}{3a^2}\right) w = 0 & (2) \\ \eta a u'_x - \frac{h^2}{3} (2-\eta) v''_{x^2} + \left(1 + \frac{h^2}{3a^2}\right) v + \frac{a^2 h^2}{3} w''_{x^4} - \frac{2h^2}{3} w''_{x^2} + \left(1 + \frac{h^2}{3a^2}\right) w = \frac{a^3(1-\eta^2)}{2Eh} & (3) \end{cases}$$

En éliminant $v+w$ des équations (2) et (3) on obtient :

$$\frac{1-\eta}{2} u'_x - \frac{a}{2} \left[1-\eta - \frac{2h^2}{3a^2}\right] v''_{x^2} - \frac{ah^2}{3} w''_{x^4} + \frac{h^2}{3a} w''_{x^2} = - \frac{a^2(1-\eta^2)}{2Eh} \quad (4)$$

Intégrons l'équation (4) :

$$\frac{1-\eta}{2} u - \frac{a}{2} \left[1-\eta - \frac{2h^2}{3a^2}\right] v'_{x^2} - \frac{ah^2}{3} w'''_{x^4} + \frac{h^2}{3a} w'_{x^2} = - \frac{a^2(1-\eta^2)}{2Eh} x + A \quad (4')$$

Dérivons l'équation (4) :

$$\frac{1-\eta}{2} u''_{x^2} - \frac{a}{2} \left[1-\eta - \frac{2h^2}{3a^2}\right] v'''_{x^2} - \frac{ah^2}{3} w^{(5)}_{x^4} + \frac{h^2}{3a} w'''_{x^2} = 0 \quad (4'')$$

Portons u''_{x^2} tiré de (4'') et u tiré de (4') dans (1)

$$\begin{cases} u''_{x^2} = \frac{a}{1-\eta} \left(1-\eta - \frac{2h^2}{3a^2}\right) v'''_{x^2} + \frac{2ah^2}{3(1-\eta)} w^{(5)}_{x^4} - \frac{2h^2}{3a(1-\eta)} w'''_{x^2} \\ - \frac{1-\eta}{2a} u = - \frac{1}{2a} \left(1-\eta - \frac{2h^2}{3a^2}\right) v'_{x^2} - \frac{h^2}{3a} w'''_{x^4} + \frac{h^2}{3a^3} w'_{x^2} + \frac{1-\eta^2}{2Eh} x - \frac{A}{a^2} \end{cases}$$

On obtient :

$$\left[\frac{1+\eta}{2a} - \frac{1}{2a} \left(1-\eta - \frac{2h^2}{3a^2}\right) \right] v'_x + \frac{a}{1-\eta} \left(1-\eta - \frac{2h^2}{3a^2}\right) v'''_{x^2} + \left(\frac{\eta}{a} + \frac{h^2}{3a^2}\right) w'_x - \left[\frac{2h^2}{3a(1-\eta)} + \frac{h^2}{3a} \right] w'''_{x^2} + \frac{2ah^2}{3(1-\eta)} w^{(5)}_{x^4} + \frac{1-\eta^2}{2Eh} x - \frac{A}{a^2} = 0$$

En simplifiant cette équation et en l'intégrant :

$$\frac{a}{1-\eta} \left[1-\eta - \frac{2h^2}{3a^2}\right] v''_{x^2} + \frac{1}{a} \left(\eta + \frac{h^2}{3a^2}\right) (v+w) - \frac{h^2}{3a} \frac{3-\eta}{1-\eta} w''_{x^2} + \frac{2ah^2}{3(1-\eta)} w^{(4)}_{x^4} + \frac{1-\eta^2}{2Eh} x^2 - \frac{Ax}{a^2} + B = 0 \quad (x)$$

Éliminons u'_x entre (2) et (3) :

$$a \left[\eta(1-\eta) - (\eta^2 - \eta + 2) \frac{h^2}{3a^2} \right] v''_{x^2} + \frac{1-\eta}{a} \left(1 + \frac{h^2}{3a^2}\right) (v+w) - \frac{2h^2}{3a} w''_{x^2} + \frac{ah^2(1+\eta)}{3} w^{(4)}_{x^4} - \frac{a^2(1+\eta)^2(1-\eta)}{2Eh} = 0 \quad (y)$$

Écrivons l'équation (x) sous la forme :

$$\lambda_1 v''_{x^2} + \lambda_2 (v+w) + \lambda_3 w''_{x^2} + \lambda_4 w^{(4)}_{x^4} + \lambda_5 x^2 + \lambda_6 x + \lambda_7 = 0$$

et l'équation (y) sous la forme :

$$\mu_1 v''_{x^2} + \mu_2 (v+w) + \mu_3 w''_{x^2} + \mu_4 w^{(4)}_{x^4} + \mu_5 = 0$$

Éliminons $(v+w)$ entre (x) et (y). On obtient :

$$(\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1) v_{\alpha^2}'' + (\lambda_3 \mu_2 - \lambda_2 \mu_3) w_{\alpha^2}'' + (\lambda_4 \mu_2 - \lambda_2 \mu_4) w_{\alpha^4}^{(4)} + \lambda_5 \mu_2 \alpha^2 + \lambda_6 \mu_2 \alpha + \lambda_7 \mu_2 - \lambda_2 \mu_5 = 0 \quad (x')$$

Éliminons v_{α^2}'' entre (x) et (y).

$$(\lambda_2 \mu_1 - \lambda_1 \mu_2)(v+w) + (\lambda_3 \mu_1 - \lambda_1 \mu_3) w_{\alpha^2}'' + (\lambda_4 \mu_1 - \lambda_1 \mu_4) w_{\alpha^4}^{(4)} + \lambda_5 \mu_1 \alpha^2 + \lambda_6 \mu_1 \alpha + \lambda_7 \mu_1 - \lambda_1 \mu_5 = 0 \quad (y')$$

Intégrons deux fois (x') et éliminons v entre l'équation obtenue et (y') :

$$(\lambda_2 \mu_1 - \lambda_1 \mu_2) v + (\lambda_2 \mu_3 - \lambda_3 \mu_2) w + (\lambda_2 \mu_4 - \lambda_4 \mu_2) w_{\alpha^2}'' - \lambda_5 \mu_2 \alpha^4 - \lambda_6 \mu_2 \alpha^3 - (\lambda_7 \mu_2 - \lambda_2 \mu_5) \alpha^2 + F\alpha + G = 0$$

Où :

$$(\lambda_2 \mu_3 - \lambda_3 \mu_2 + \lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1) w + (\lambda_2 \mu_4 - \lambda_4 \mu_2 + \lambda_1 \mu_3 - \lambda_3 \mu_1) w_{\alpha^2}'' + (\lambda_1 \mu_4 - \lambda_4 \mu_1) w_{\alpha^4}^{(4)} - \lambda_5 \mu_2 \alpha^4 - \lambda_6 \mu_2 \alpha^3 + (\lambda_2 \mu_5 - \lambda_7 \mu_2 - \lambda_5 \mu_1) \alpha^2 + (F - \lambda_6 \mu_1) \alpha + G + \lambda_1 \mu_5 - \lambda_7 \mu_1 = 0$$

Que nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} & (1-\eta)^2 \left(1 + \frac{h^2}{3a^2}\right) \left(1 + \eta + \frac{h^2}{3a^2}\right) w - \frac{4h^2}{3} (1-\eta) \left[1 + \frac{h^2}{3a^2} - \frac{3-\eta}{4}\right] w_{\alpha^2}'' + \frac{a^2 h^2}{3} (1-\eta) \left(1 + \frac{2h^2}{3a^2}\right) w_{\alpha^4}^{(4)} \\ & - (1-\eta^2) \frac{(1+\eta)}{2Eh^2 a} \left(1 + \frac{h^2}{3a^2}\right) \alpha^4 + \frac{1-\eta}{a^3} \left(1 + \frac{h^2}{3a^2}\right) A \alpha^3 - \alpha^2 \left\{ \frac{a(1+\eta)(1-\eta^3)}{2Eh} + \frac{B(1-\eta)}{a} - \frac{h^2}{3a^2} \left[\frac{a(1+\eta)(1+\eta^2)}{2Eh} - \frac{B(1-\eta)}{a} \right] \right\} \\ & + \alpha \left\{ F + \frac{A}{a} \left[\eta(1-\eta) - (\eta^2 - \eta + 2) \frac{h^2}{3a^2} \right] \right\} + G - a(1-\eta) \left[\frac{a^2(1+\eta)^2}{2Eh} - B\eta \right] + \frac{h^2}{3a^2} \left[\frac{2a^3(1+\eta)^2}{2Eh} + B a (\eta^2 - \eta + 2) \right] = 0 \\ & w(0) = w(\ell) = w_{\alpha}'(0) = w_{\alpha}'(\ell) = 0 \quad \text{et d'autre part} \quad u(0) = u(\ell) = v(0) = v(\ell) = 0 \end{aligned}$$

Ainsi nous pouvons déterminer complètement la solution du problème que nous nous sommes proposé.

Chapitre III

Etude d'une équation différentielle.

Au paragraphe 3 du Chapitre II nous avons obtenu l'équation différentielle et les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} W^{(4)}(x) + 3 \frac{(1-\eta^2)}{a^2 h^2} W(x) = -\frac{3a(1-\eta^2)}{2Eh^3} - \frac{3\eta c}{ah^2} & \textcircled{1} \\ W(0) = W(l) = W'_{x=0} = W'_{x=l} = 0 \end{cases}$$

Nous savons d'autre part que : $u'_x + \frac{\eta}{a} W = c$ $\textcircled{2}$

Potons $x = sl$ $x \in [0, l] \rightarrow s \in [0, 1]$

$$W(x) = W(sl) = \theta(s) \quad ; \quad \frac{u'_s}{l} + \frac{\eta}{a} W = c \quad u'_s + \frac{\eta l}{a} W = c_l = cl$$

L'équation $\textcircled{1}$ s'écrit après le changement de variable :

$$\theta^{(4)}(s) + \frac{3(1-\eta^2)l^4}{a^2 h^2} \theta(s) = -\frac{3a(1-\eta^2)l^4}{2Eh^3} - \frac{3\eta c_l l^3}{ah^2} \quad c_l \text{ a la dimension d'une longueur}$$

$$\frac{3(1-\eta^2)l^4}{a^2 h^2} = k^2 \quad - \frac{a(1-\eta^2)l^4}{2Eh^3} - \frac{\eta c_l l^3}{ah^2} = m$$

$$\textcircled{I} \quad \theta^{(4)}(s) + k^2 \theta(s) = 3m \quad ; \quad \theta(0) = \theta(1) = \theta'(0) = \theta'(1) = 0$$

k est sans dimension, m a la dimension d'une longueur.

A.-31 Détermination de la solution du système \textcircled{I}

Les racines caractéristiques de l'équation $\theta^{(4)} + k^2 \theta = 3m$ sont données par :

$$r^4 + k^2 = 0 \quad \text{c.à.d.} : \quad r_0 = \sqrt[4]{\frac{k^2}{2}}(1+i) \quad r_h = (i)^h r_0 \quad h = 0, 1, 2, 3$$

Donc : $\theta(s) = \frac{3m}{k^2} + \sum_0^3 A_i e^{r_i s}$

Les coefficients A_i sont déterminés par les conditions aux limites qui s'écrivent :

$$\textcircled{II} \quad \sum_0^3 A_i = -\frac{3m}{k^2} \quad ; \quad \sum_0^3 A_i r_i = 0 \quad ; \quad \sum_0^3 A_i e^{r_i} = -\frac{3m}{k^2} \quad ; \quad \sum_0^3 A_i r_i e^{r_i} = 0$$

Potons : $\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ r_0 & r_1 & r_2 & r_3 \\ e^{r_0} & e^{r_1} & e^{r_2} & e^{r_3} \\ r_0 e^{r_0} & r_1 e^{r_1} & r_2 e^{r_2} & r_3 e^{r_3} \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} \quad \Gamma = \begin{pmatrix} -\frac{3m}{k^2} \\ 0 \\ -\frac{3m}{k^2} \\ 0 \end{pmatrix}$

Le système (II) s'écrit: $\Delta \cdot A = P$

Calculons la matrice Δ^{-1} dont nous écrivons les termes sous la forme $\frac{\delta_{ij}}{\Delta}$

$$\delta_{00} = \begin{vmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ e^{z_1} & e^{z_2} & e^{z_3} \\ z_1 e^{z_1} & z_2 e^{z_2} & z_3 e^{z_3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} iz_0 & -z_0 & -iz_0 e^{-iz_0} \\ e^{iz_0} & e^{-z_0} & e^{-iz_0} \\ iz_0 e^{iz_0} & -z_0 e^{-z_0} & -iz_0 e^{-iz_0} \end{vmatrix}$$

$$\delta_{00} = z_0^2 [i(1-i) e^{-z_0(1+i)} - zi + i(1+i) e^{(-1+i)z_0}]$$

$$\delta_{00} = k [2 - (1-i) e^{-i\sqrt{2}k} - (1+i) e^{-\sqrt{2}k}]$$

δ_{10} s'obtient à partir de δ_{00} en changeant z_1 en iz_1 , z_2 en iz_2 , z_3 en iz_3 et en changeant le signe du terme ainsi obtenu.

Ceci revient, après avoir changé le signe de δ_{00} , à multiplier les coefficients des exponentielles de δ_{00} par $i^2 = -1$ et les exposants de ces exponentielles par i .

De même pour δ_{20}, δ_{30} .

Ainsi :

$$\begin{cases} \delta_{00} = k [2 - (1-i) e^{-i\sqrt{2}k} - (1+i) e^{-\sqrt{2}k}] \\ \delta_{10} = k [2 - (1-i) e^{\sqrt{2}k} - (1+i) e^{-i\sqrt{2}k}] \\ \delta_{20} = k [2 - (1-i) e^{i\sqrt{2}k} - (1+i) e^{\sqrt{2}k}] \\ \delta_{30} = k [2 - (1-i) e^{-\sqrt{2}k} - (1+i) e^{i\sqrt{2}k}] \end{cases}$$

$$\delta_{01} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ e^{z_1} & e^{z_2} & e^{z_3} \\ z_1 e^{z_1} & z_2 e^{z_2} & z_3 e^{z_3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ e^{iz_0} & e^{-z_0} & e^{-iz_0} \\ iz_0 e^{iz_0} & -z_0 e^{-z_0} & -iz_0 e^{-iz_0} \end{vmatrix}$$

$$\delta_{01} = -z_0 [(1-i) e^{-i(1+i)z_0} + zi - (1+i) e^{(-1+i)z_0}]$$

Par des considérations analogues à celles faites plus haut on déduit $\delta_{11}, \delta_{21}, \delta_{31}$

$$\begin{cases} \delta_{01} = \sqrt{2}k [1-i - e^{-i\sqrt{2}k} + i e^{-\sqrt{2}k}] \\ \delta_{11} = -\sqrt{2}k [1+i - e^{i\sqrt{2}k} - i e^{\sqrt{2}k}] \\ \delta_{21} = -\sqrt{2}k [1-i - e^{i\sqrt{2}k} + i e^{\sqrt{2}k}] \\ \delta_{31} = \sqrt{2}k [1+i - e^{-i\sqrt{2}k} - i e^{-\sqrt{2}k}] \end{cases}$$

$$\delta_{02} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ e^{z_1} & e^{z_2} & e^{z_3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ iz_0 & -z_0 & -iz_0 \\ iz_0 e^{iz_0} & -z_0 e^{-z_0} & -iz_0 e^{-iz_0} \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} \delta_{02} = k [-(1+i) e^{\frac{\sqrt{k}}{2}(1-i)} + e e^{-\frac{\sqrt{k}}{2}(1+i)} - (1-i) e^{-\frac{\sqrt{k}}{2}(1-i)}] \\ \delta_{12} = k [e e^{\frac{\sqrt{k}}{2}(1-i)} - (1+i) e^{\frac{\sqrt{k}}{2}(1+i)} - (1-i) e^{-\frac{\sqrt{k}}{2}(1+i)}] \\ \delta_{22} = k [e e^{\frac{\sqrt{k}}{2}(1+i)} - (1+i) e^{-\frac{\sqrt{k}}{2}(1-i)} - (1-i) e^{\frac{\sqrt{k}}{2}(1-i)}] \\ \delta_{32} = k [e e^{-\frac{\sqrt{k}}{2}(1-i)} - (1+i) e^{-\frac{\sqrt{k}}{2}(1+i)} - (1-i) e^{\frac{\sqrt{k}}{2}(1+i)}] \end{cases}$$

$$\delta_{03} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ e^{z_1} & e^{z_2} & e^{z_3} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ iz_0 & -z_0 & -iz_0 \\ e^{iz_0} & e^{-z_0} & e^{-iz_0} \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} \delta_{03} = \sqrt{2}k [(1-i) e^{-\frac{\sqrt{k}}{2}(1+i)} + i e^{\frac{\sqrt{k}}{2}(1-i)} - e^{-\frac{\sqrt{k}}{2}(1-i)}] \\ \delta_{13} = -\sqrt{2}k [(1+i) e^{\frac{\sqrt{k}}{2}(1-i)} - i e^{-\frac{\sqrt{k}}{2}(1+i)} - e^{\frac{\sqrt{k}}{2}(1+i)}] \\ \delta_{23} = -\sqrt{2}k [(1-i) e^{\frac{\sqrt{k}}{2}(1+i)} + i e^{-\frac{\sqrt{k}}{2}(1-i)} - e^{\frac{\sqrt{k}}{2}(1-i)}] \\ \delta_{33} = \sqrt{2}k [(1+i) e^{-\frac{\sqrt{k}}{2}(1-i)} - i e^{\frac{\sqrt{k}}{2}(1+i)} - e^{-\frac{\sqrt{k}}{2}(1+i)}] \end{cases}$$

Nous pouvons facilement calculer Δ

$$\Delta = \delta_{00} + \delta_{10} + \delta_{20} + \delta_{30} = k \{ 8 - (1-i) [e \cos \sqrt{k} + e \operatorname{Ch} \sqrt{k}] - (1+i) [-e \cos \sqrt{k} + e \operatorname{Ch} \sqrt{k}] \}$$

$$\Delta = k \{ 8 - 4 (\cos \sqrt{k} + \operatorname{Ch} \sqrt{k}) \}$$

$$\Delta = 4k \{ 2 - (\cos \sqrt{k} + \operatorname{Ch} \sqrt{k}) \} = 8k \left[\sin \frac{\sqrt{k}}{2} - \operatorname{Sh} \frac{\sqrt{k}}{2} \right] \left[\sin \frac{\sqrt{k}}{2} + \operatorname{Sh} \frac{\sqrt{k}}{2} \right]$$

Determinons θ maintenant ; Pour cela calculons $A_2 e^{z_2} + A_3 e^{z_3}$

$$A_2 = - \frac{3m}{k^2 \Delta} [\delta_{00} + \delta_{02}] \quad A_3 = - \frac{3m}{k^2 \Delta} [\delta_{30} + \delta_{32}]$$

$$A_2 e^{z_2} + A_3 e^{z_3} = e^{\frac{\sqrt{k}}{2} z_2} [A_2 e^{\frac{\sqrt{k}}{2} z_2} + A_3 e^{-\frac{\sqrt{k}}{2} z_3}]$$

$$= - \frac{3m}{k \Delta} e^{\frac{\sqrt{k}}{2} z_2} \left\{ e e^{\frac{i\sqrt{k}}{2}(1-i)} - (1-i) e^{\frac{i\sqrt{k}}{2}(1-i)} - (1+i) e^{\frac{\sqrt{k}}{2}(-2+i)} + e e^{-\frac{\sqrt{k}}{2}[1+i(1-i)]} - (1+i) e^{\frac{\sqrt{k}}{2}[1-i(1-i)]} \right. \\ \left. - (1-i) e^{-\frac{\sqrt{k}}{2}[1-i(1+i)]} + e e^{-i\frac{\sqrt{k}}{2}} - (1+i) e^{-\frac{\sqrt{k}}{2}(1-2)} - (1-i) e^{\frac{\sqrt{k}}{2}(-2-i)} + e e^{-\frac{\sqrt{k}}{2}[1-i(1-i)]} \right. \\ \left. - (1-i) e^{\frac{\sqrt{k}}{2}[1+i(1-i)]} - (1+i) e^{-\frac{\sqrt{k}}{2}[1+i(1+i)]} \right\}$$

$$A_0 e^{\varepsilon_0 t} + A_3 e^{\varepsilon_3 t} = -\frac{3m}{k\Delta} e^{\sqrt{\frac{k}{2}} t} \left\{ 4 \cos \sqrt{\frac{k}{2}} s - 2 \cos \sqrt{\frac{k}{2}} (s-2) - 2 \sin \sqrt{\frac{k}{2}} (s-2) - 2 e^{-2\sqrt{\frac{k}{2}}} \cos \sqrt{\frac{k}{2}} s \right. \\ \left. + 2 e^{-2\sqrt{\frac{k}{2}}} \sin \sqrt{\frac{k}{2}} s + 4 e^{-\sqrt{\frac{k}{2}}} \cos \sqrt{\frac{k}{2}} (s-1) - 2 e^{\sqrt{\frac{k}{2}}} \cos \sqrt{\frac{k}{2}} (s-1) + 2 e^{\sqrt{\frac{k}{2}}} \sin \sqrt{\frac{k}{2}} (s-1) - 2 e^{-\sqrt{\frac{k}{2}}} \cos \sqrt{\frac{k}{2}} (s+1) \right. \\ \left. - 2 e^{-\sqrt{\frac{k}{2}}} \sin \sqrt{\frac{k}{2}} (s+1) \right\}$$

Remarques : + Nous constatons que $A_0 e^{\varepsilon_0 t} + A_3 e^{\varepsilon_3 t}$ est réel car $\delta_{30} = \bar{\delta}_{00}$

$$\delta_{02} = \bar{\delta}_{01}, \quad \varepsilon_3 = \bar{\varepsilon}_0.$$

++ A_2 s'obtient à partir de A_0 en changeant le signe des exposants qui interviennent dans A_0 . Il en est de même de A_3 calculé à partir de A_1 .

Ainsi $A_1 e^{\varepsilon_1 t} + A_2 e^{\varepsilon_2 t}$ s'obtient à partir de $A_0 e^{\varepsilon_0 t} + A_3 e^{\varepsilon_3 t}$ en changeant le signe des exposants et des arguments des sinus et des cosinus qui interviennent dans $A_0 e^{\varepsilon_0 t} + A_3 e^{\varepsilon_3 t}$.

$$A_1 e^{\varepsilon_1 t} + A_2 e^{\varepsilon_2 t} = -\frac{3m}{k\Delta} e^{-\sqrt{\frac{k}{2}} t} \left\{ 4 \cos \sqrt{\frac{k}{2}} s - 2 \cos \sqrt{\frac{k}{2}} (s-2) + 2 \sin \sqrt{\frac{k}{2}} (s-2) - 2 e^{2\sqrt{\frac{k}{2}}} \cos \sqrt{\frac{k}{2}} s \right. \\ \left. - 2 e^{2\sqrt{\frac{k}{2}}} \sin \sqrt{\frac{k}{2}} s + 4 e^{\sqrt{\frac{k}{2}}} \cos \sqrt{\frac{k}{2}} (s-1) - 2 e^{-\sqrt{\frac{k}{2}}} \cos \sqrt{\frac{k}{2}} (s-1) - 2 e^{-\sqrt{\frac{k}{2}}} \sin \sqrt{\frac{k}{2}} (s-1) - 2 e^{\sqrt{\frac{k}{2}}} \cos \sqrt{\frac{k}{2}} (s+1) \right. \\ \left. + 2 e^{\sqrt{\frac{k}{2}}} \sin \sqrt{\frac{k}{2}} (s+1) \right\}$$

$$\theta = \frac{3m}{k^2} - \frac{12m}{k\Delta} \left\{ 2 \cos \sqrt{\frac{k}{2}} s \operatorname{Ch} \sqrt{\frac{k}{2}} s + 2 \cos \sqrt{\frac{k}{2}} (s-2) \operatorname{Ch} \sqrt{\frac{k}{2}} (s-2) - \cos \sqrt{\frac{k}{2}} s \operatorname{Ch} \sqrt{\frac{k}{2}} (2-s) \right. \\ \left. - \cos \sqrt{\frac{k}{2}} (2-s) \operatorname{Ch} \sqrt{\frac{k}{2}} s - \sin \sqrt{\frac{k}{2}} s \operatorname{Sh} \sqrt{\frac{k}{2}} (2-s) + \sin \sqrt{\frac{k}{2}} (2-s) \operatorname{Sh} \sqrt{\frac{k}{2}} s - \cos \sqrt{\frac{k}{2}} (s-1) \operatorname{Ch} \sqrt{\frac{k}{2}} (s+1) \right. \\ \left. - \cos \sqrt{\frac{k}{2}} (s+1) \operatorname{Ch} \sqrt{\frac{k}{2}} (s-1) - \sin \sqrt{\frac{k}{2}} (s-1) \operatorname{Sh} \sqrt{\frac{k}{2}} (s+1) + \sin \sqrt{\frac{k}{2}} (s+1) \operatorname{Sh} \sqrt{\frac{k}{2}} (s-1) \right\}$$

$$\Delta = 4k [2 - \cos \sqrt{2k} - \operatorname{Ch} \sqrt{2k}]$$

Pour déterminer la constante m , calculons c_1 .

$$u'_0 = c_1 - \frac{\eta}{a} l \theta \quad u = c_1 s - \frac{\eta l}{a} \int_0^s \theta(v) dv + D \quad u(0) = 0 \Rightarrow D = 0$$

$$u(l) = 0 \Rightarrow c_1 = \frac{\eta l}{a} \int_0^l \theta(v) dv$$

En remarquant que : $\frac{d}{dv} (\sin v \operatorname{Ch} v + \cos v \operatorname{Sh} v) = 2 \cos v \operatorname{Ch} v$;

$$\frac{d}{dv} (\sin v \operatorname{Ch} v) = \cos v \operatorname{Ch} v + \sin v \operatorname{Sh} v \quad ; \quad \frac{d}{dv} (\cos v \operatorname{Sh} v) = -\sin v \operatorname{Sh} v + \cos v \operatorname{Ch} v.$$

nous pouvons calculer $\int_0^l \theta(v) dv$.

$$\int \theta(v) dv = \frac{3m}{k^2} v - \frac{12m}{k\Delta} \sqrt{\frac{c}{k}} \left\{ \sin \sqrt{\frac{k}{2}} v \operatorname{Ch} \sqrt{\frac{k}{2}} v + \cos \sqrt{\frac{k}{2}} v \operatorname{Sh} \sqrt{\frac{k}{2}} v + \sin \sqrt{\frac{k}{2}} (v-1) \operatorname{Ch} \sqrt{\frac{k}{2}} (v-1) \right.$$

$$+ \cos \sqrt{\frac{k}{2}} (v-1) \operatorname{Sh} \sqrt{\frac{k}{2}} (v-1) - \sin \sqrt{\frac{k}{2}} (v-2) \operatorname{Ch} \sqrt{\frac{k}{2}} v - \cos \sqrt{\frac{k}{2}} v \operatorname{Sh} \sqrt{\frac{k}{2}} (v-2) - \sin \sqrt{\frac{k}{2}} (v+1) \operatorname{Ch} \sqrt{\frac{k}{2}} (v-1)$$

$$\left. - \cos \sqrt{\frac{k}{2}} (v-1) \operatorname{Sh} \sqrt{\frac{k}{2}} (v+1) \right\}$$

$$C_1 = \frac{\eta l}{a} \left\{ \frac{3m}{k^2} - \frac{12m}{k\Delta} \sqrt{\frac{c}{k}} [4 \sin \sqrt{\frac{k}{2}} \operatorname{Ch} \sqrt{\frac{k}{2}} + \cos \sqrt{\frac{k}{2}} \operatorname{Sh} \sqrt{\frac{k}{2}} - 2 \sin e \sqrt{\frac{k}{2}} - 2 \operatorname{Sh} e \sqrt{\frac{k}{2}}] \right\}$$

$$C_1 = \frac{\eta l}{a} \frac{3m}{k^2} \left\{ 1 - \frac{16k}{\Delta} \sqrt{\frac{c}{k}} (\operatorname{Sh} \sqrt{\frac{k}{2}} - \sin \sqrt{\frac{k}{2}}) (\cos \sqrt{\frac{k}{2}} - \operatorname{Ch} \sqrt{\frac{k}{2}}) \right\}$$

$$3m = - \frac{3a(1-\eta^2) l^4}{2Eh^3} - \frac{3\eta l^3}{ah^2} C_1 = - \frac{3a(1-\eta^2) l^4}{2Eh^3} - \frac{3\eta^2 l^4}{a^2 h^2} \frac{3m}{k^2} \left\{ 1 - \frac{16k}{\Delta} \sqrt{\frac{c}{k}} (\operatorname{Sh} \sqrt{\frac{k}{2}} - \sin \sqrt{\frac{k}{2}}) (\cos \sqrt{\frac{k}{2}} - \operatorname{Ch} \sqrt{\frac{k}{2}}) \right\}$$

$$3m \left\{ 1 + \frac{3\eta^2 l^4}{a^2 h^2} \frac{a^2 h^2}{3l^4(1-\eta^2)} \left[1 - \frac{16k}{\Delta} \sqrt{\frac{c}{k}} \frac{(\operatorname{Sh} \sqrt{\frac{k}{2}} - \sin \sqrt{\frac{k}{2}}) (\cos \sqrt{\frac{k}{2}} - \operatorname{Ch} \sqrt{\frac{k}{2}})}{8k (\sin \sqrt{\frac{k}{2}} - \operatorname{Sh} \sqrt{\frac{k}{2}}) (\sin \sqrt{\frac{k}{2}} + \operatorname{Sh} \sqrt{\frac{k}{2}})} \right] \right\} = - \frac{3a(1-\eta^2) l^4}{2Eh^3}$$

$$3m = - \frac{3a(1-\eta^2) l^4}{2Eh^3} \times \frac{1}{1 + \frac{\eta^2}{1-\eta^2} \left[1 - 2 \sqrt{\frac{c}{k}} \frac{\operatorname{Ch} \sqrt{\frac{k}{2}} - \cos \sqrt{\frac{k}{2}}}{\operatorname{Sh} \sqrt{\frac{k}{2}} + \sin \sqrt{\frac{k}{2}}} \right]}$$

Graphique: Nous avons tracé la courbe $\theta(s)$ dans le cas suivant:

$$E = 2,041 \cdot 10^{10} \text{ c.g.s.} ; \quad \eta = 0,268 \quad (\text{Acier})$$

$$h = 30 \text{ mm} , \quad a = 3 \text{ m} , \quad l = 3 \text{ m}.$$

Remarque: Nous aurions pu déterminer plus rapidement θ en écrivant que:

$$2A = a_0 - ia_3 \quad 2A_3 = a_0 + ia_3 \quad (a_0, a_3 \text{ réels})$$

$$A_0 e^{2is} + A_3 e^{2is} = e^{\sqrt{\frac{k}{2}} s} (a_0 \cos \sqrt{\frac{k}{2}} s + a_3 \sin \sqrt{\frac{k}{2}} s)$$

$$A_1 e^{2is} + A_2 e^{2is} = e^{\sqrt{\frac{k}{2}} s} (a_1 \cos \sqrt{\frac{k}{2}} s + a_2 \sin \sqrt{\frac{k}{2}} s)$$

$$\theta = \frac{3m}{k^2} + [(a_0 + a_1) \operatorname{Ch} \sqrt{\frac{k}{2}} s + (a_0 - a_1) \operatorname{Sh} \sqrt{\frac{k}{2}} s] \cos \sqrt{\frac{k}{2}} s + [(a_3 + a_2) \operatorname{Ch} \sqrt{\frac{k}{2}} s + (a_3 - a_2) \operatorname{Sh} \sqrt{\frac{k}{2}} s] \sin \sqrt{\frac{k}{2}} s$$

Les conditions aux limites déterminent assez simplement: $a_0 + a_1 = c_0$, $a_0 - a_1 = c_1$,

$$a_3 + a_2 = c_2 \quad a_3 - a_2 = c_3$$

On trouve:

$$\theta = \frac{3m}{k^2} \left\{ 1 - \operatorname{Ch} \sqrt{\frac{k}{2}} s \cos \sqrt{\frac{k}{2}} s + \frac{\operatorname{Ch} \sqrt{\frac{k}{2}} - \cos \sqrt{\frac{k}{2}}}{\operatorname{Sh} \sqrt{\frac{k}{2}} + \sin \sqrt{\frac{k}{2}}} (\operatorname{Sh} \sqrt{\frac{k}{2}} s \cos \sqrt{\frac{k}{2}} s - \operatorname{Ch} \sqrt{\frac{k}{2}} s \sin \sqrt{\frac{k}{2}} s) \right.$$

$$\left. + \frac{\operatorname{Sh} \sqrt{\frac{k}{2}} - \sin \sqrt{\frac{k}{2}}}{\operatorname{Sh} \sqrt{\frac{k}{2}} + \sin \sqrt{\frac{k}{2}}} \operatorname{Sh} \sqrt{\frac{k}{2}} s \sin \sqrt{\frac{k}{2}} s \right\} \quad \text{Nous constatons que cette formule ne}$$

fait pas apparaître les symétries du problème aussi nettement que celle qui a été calculée plus haut.

32 Résolution approchée du système différentiel : $\begin{cases} \theta^{(4)} + k^2 \theta = 3m \\ \theta(0) = \theta(1) = \theta'(0) = \theta'(1) = 0 \end{cases}$

Nous choisissons pour approximation de $\theta^{(4)}$: $D^4 \tau_n = \frac{\tau_{n+2} - 4\tau_{n+1} + 6\tau_n - 4\tau_{n-1} + \tau_{n-2}}{h^4}$

où τ_n est la valeur approchée de $\theta(nh)$.

Au point τ_n $\theta^{(4)} + k^2 \theta = 3m \Rightarrow \tau_{n+2} - 4\tau_{n+1} + (6 + k^2 h^4) \tau_n - 4\tau_{n-1} + \tau_{n-2} = 3m h^4$

D'autre part pour exprimer les conditions aux limites nous choisissons pour approximation

de θ' : $D^2 \tau_n = \frac{1}{2h} (\tau_{n+1} - \tau_{n-1}) - \frac{1}{12h} (\tau_{n+2} - 2\tau_{n+1} + 2\tau_{n-1} - \tau_{n-2})$

Les nombres τ_n sont les solutions du système linéaire :

$$\begin{cases} \tau_{-2} - 8\tau_{-1} + 8\tau_0 - \tau_2 = 0 \\ \tau_0 = 0 \\ \tau_{-2} - 4\tau_{-1} + (6 + k^2 h^4) \tau_0 - 4\tau_1 + \tau_2 = 3m h^4 \\ \dots \\ \tau_{n-2} - 4\tau_{n-1} + (6 + k^2 h^4) \tau_n - 4\tau_{n+1} + \tau_{n+2} = 3m h^4 \quad \textcircled{III} \\ \dots \\ \tau_{N-2} - 4\tau_{N-1} + (6 + k^2 h^4) \tau_N - 4\tau_{N+1} + \tau_{N+2} = 3m h^4 \\ \tau_N = 0 \\ \tau_{N-2} - 8\tau_{N-1} + 8\tau_{N+1} - \tau_{N+2} = 0 \end{cases}$$

Pour déterminer la solution de ce système, considérons l'équation aux différences

finies : $\tau_{n-2} - 4\tau_{n-1} + (6 + k^2 h^4) \tau_n - 4\tau_{n+1} + \tau_{n+2} = 3m h^4$.

Elle admet pour solution : $\tau = \frac{3m}{k^2} + \sum_0^3 \beta_j e^{q_j x}$

avec $e^{(n-2)q_j h} - 4 e^{(n-1)q_j h} + (6 + k^2 h^4) e^{nq_j h} - 4 e^{(n+1)q_j h} + e^{(n+2)q_j h} = 0$

c-à-d : $2 \operatorname{Ch}(2q_j h) - 8 \operatorname{Ch}(q_j h) + 6 + k^2 h^4 = 0$; $4 \operatorname{Ch}^2 q_j h - 8 \operatorname{Ch} q_j h + 4 + k^2 h^4 = 0$

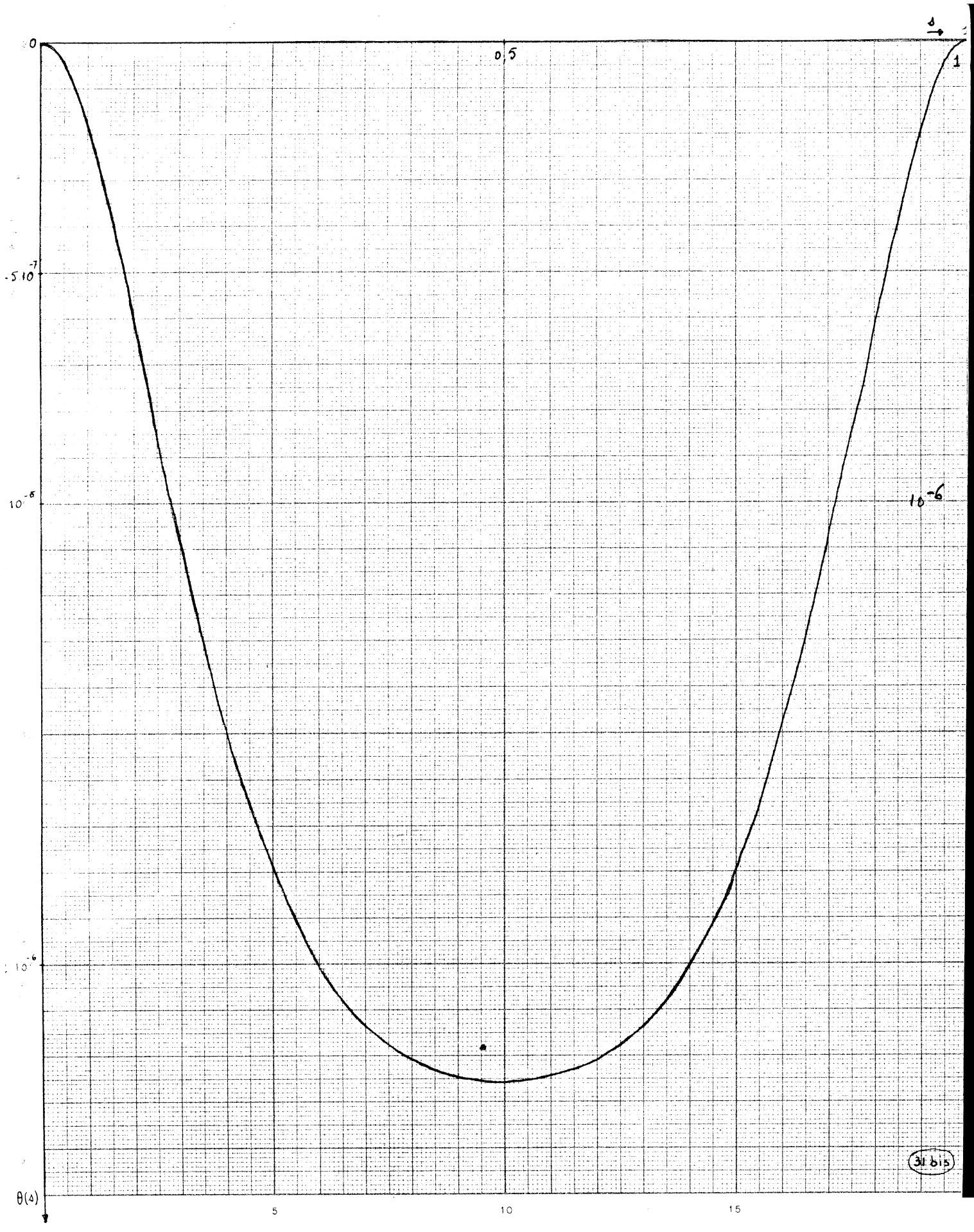
$\operatorname{Ch} q_j h = 1 + \varepsilon_j i \frac{k h^2}{2} \quad \varepsilon_0 = \varepsilon_2 = +1 \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_3 = -1$

Les conditions aux limites du problème nous conduisent au système :

$\sum_0^3 \beta_j = -\frac{3m}{k^2} ; \sum_0^3 \beta_j \varepsilon_j = 0 ; \sum_0^3 \beta_j e^{q_j} = -\frac{3m}{k^2} ; \sum_0^3 \beta_j e^{q_j} \varepsilon_j = 0 \quad \textcircled{IV}$

$\beta_j = e^{-2q_j h} - 8 e^{-q_j h} + 8 e^{q_j h} - e^{2q_j h} = 16 \operatorname{Sh} q_j h - 2 \operatorname{Sh} 2q_j h$

$\beta_j = 4 \operatorname{Sh} q_j h [4 - \operatorname{Ch} q_j h]$



31 bis

D'après la formule qui nous donne $\text{Ch } d_j$ on voit que :

$$\beta_3 = \bar{\beta}_0 ; \beta_1 = \bar{\beta}_2 ; \beta_1 = -\beta_3 ; \beta_2 = -\beta_0$$

Le système (IV) peut s'écrire sous la forme matricielle : $DB = P$.

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ e^{d_0} & e^{d_1} & e^{d_2} & e^{d_3} \\ \beta_0 e^{d_0} & \beta_1 e^{d_1} & \beta_2 e^{d_2} & \beta_3 e^{d_3} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} B_0 \\ B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix}$$

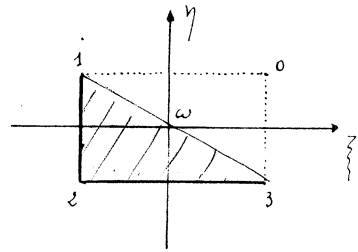
Si $D^{-1} = \left(\frac{d_{ij}}{D} \right)$ $B_0 = -\frac{3m}{k^2 D} (d_{00} + d_{02})$ $B_1 = -\frac{3m}{k^2 D} (d_{10} + d_{12})$ etc...

Pour calculer les d_{ij} posons : $d_j = u_j + i v_j$ $\beta_j = p_j + i q_j$

$$d_{00} = \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ e^{d_1} & e^{d_2} & e^{d_3} \\ \beta_1 e^{d_1} & \beta_2 e^{d_2} & \beta_3 e^{d_3} \end{vmatrix} = \beta_1 (\beta_3 - \beta_2) e^{d_2 + d_3} + \beta_2 (\beta_1 - \beta_3) e^{d_1 + d_3} + \beta_3 (\beta_2 - \beta_1) e^{d_1 + d_2}$$

$$d_{00} = 2 [p_0^2 + q_0^2 - p_0(p_0 - iq_0) e^{-2i v_0} - iq_0(p_0 - iq_0) e^{-2u_0}]$$

Associons à d_{00} la configuration indiquée ci-contre qui indique comment sont disposés dans le plan complexe $\alpha_0, \dots, \alpha_3$ ou β_0, \dots, β_3 l'un par rapport à l'autre.



Notons (1, 2, 3) les indices des α_j ou β_j dans l'ordre où on les rencontre en se déplaçant sur une ligne du déterminant $|d_{00}|$.

A d_{10} correspond une configuration en trait plein symétrique de la précédente par rapport à ωy . Changeons dans d_{00} , p_0 en $(-p_0)$ et u_0 en $-u_0$. On obtient une expression qui correspond à la permutation (0, 3, 2). La permutation (0, 3, 2) comporte une inversion par rapport à la permutation (0, 1, 3) qui correspond à $|d_{00}|$.

Or le mineur d_{10} est égal au déterminant $|d_{00}|$ affecté du signe moins.

Donc en effectuant dans d_{00} le changement de p_0 en $(-p_0)$ et celui de u_0 en $(-u_0)$, On obtient d_{10} .

On verrait de même que pour obtenir d_{20} à partir de d_{00} il suffit de changer p_0 en $(-p_0)$, q_0 en $(-q_0)$, u_0 en $(-u_0)$, v_0 en $(-v_0)$ dans d_{00} .

Pour obtenir d_{30} à partir de d_{00} , il suffit de changer v_0 en $(-v_0)$ et q_0 en $(-q_0)$ dans d_{00} .

Ainsi :

$$\begin{cases} d_{00} = 2 [p_0^2 + q_0^2 - p_0(p_0 - iq_0) e^{-2iv_0} - iq_0(p_0 - iq_0) e^{-2u_0}] \\ d_{10} = 2 [p_0^2 + q_0^2 - p_0(p_0 + iq_0) e^{-2iv_0} + iq_0(p_0 + iq_0) e^{2u_0}] \\ d_{20} = 2 [p_0^2 + q_0^2 - p_0(p_0 - iq_0) e^{2iv_0} - iq_0(p_0 - iq_0) e^{2u_0}] \\ d_{30} = 2 [p_0^2 + q_0^2 - p_0(p_0 + iq_0) e^{2iv_0} + iq_0(p_0 + iq_0) e^{-2u_0}] \end{cases}$$

Calculons maintenant d_{02}

$$d_{02} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \beta_1 e^{\alpha_1} & \beta_2 e^{\alpha_2} & \beta_3 e^{\alpha_3} \end{vmatrix} = \beta_3(\beta_2 - \beta_1) e^{\alpha_3} + \beta_2(\beta_1 - \beta_3) e^{\alpha_2} + \beta_1(\beta_3 - \beta_2) e^{\alpha_1}$$

$$d_{02} = (p_0 - iq_0)(-2iq_0) e^{u_0 - iv_0} - (p_0 + iq_0)(-2)(p_0 - iq_0) e^{-u_0 - iv_0} + (-p_0 + iq_0)(2p_0) e^{-u_0 + iv_0}$$

$$\begin{cases} d_{02} = 2 [(p_0^2 + q_0^2) e^{-(u_0 + iv_0)} - p_0(p_0 - iq_0) e^{-u_0 + iv_0} - iq_0(p_0 - iq_0) e^{u_0 - iv_0}] \\ d_{12} = 2 [(p_0^2 + q_0^2) e^{u_0 - iv_0} - p_0(p_0 + iq_0) e^{u_0 + iv_0} + iq_0(p_0 + iq_0) e^{-(u_0 + iv_0)}] \\ d_{22} = 2 [(p_0^2 + q_0^2) e^{u_0 + iv_0} - p_0(p_0 - iq_0) e^{u_0 - iv_0} - iq_0(p_0 - iq_0) e^{-u_0 + iv_0}] \\ d_{32} = 2 [(p_0^2 + q_0^2) e^{-(u_0 - iv_0)} - p_0(p_0 + iq_0) e^{-(u_0 + iv_0)} + iq_0(p_0 + iq_0) e^{u_0 + iv_0}] \end{cases}$$

On obtient en effet d_{12} , d_{22} , d_{32} à partir de d_{02} par les mêmes changements que ceux que nous avons faits plus haut.

Calculons le déterminant D :

$$D = d_{00} + d_{10} + d_{20} + d_{30} = 2 [4(p_0^2 + q_0^2) - p_0(p_0 - iq_0) 2 \cos 2v_0 - iq_0(p_0 - iq_0) 2 \operatorname{ch} 2u_0 - p_0(p_0 + iq_0) 2 \cos 2v_0 + iq_0(p_0 + iq_0) 2 \operatorname{ch} 2u_0]$$

$$D = 16 [p_0^2 \sin^2 v_0 - q_0^2 \operatorname{Sh}^2 u_0] = 16 [p_0 \sin v_0 - q_0 \operatorname{Sh} u_0] [p_0 \sin v_0 + q_0 \operatorname{Sh} u_0]$$

Nous pouvons maintenant calculer $\tau_n = \frac{3m}{k^2} + \frac{3}{0}j$; $B_j e^{q \cdot nh}$ ($x = nh$).

Faisons la somme $B_0 e^{\alpha_0 x} + B_3 e^{\alpha_3 x}$ qui est réelle car $B_3 = \overline{B_0}$ et $\alpha_3 = \overline{\alpha_0}$

$$B_0 = -\frac{6m}{k^2 D} \left\{ (p_0^2 + q_0^2) [1 + e^{-u_0 + iv_0}] - p_0(p_0 - iq_0) [e^{-2iv_0} + e^{-u_0 - iv_0}] - iq_0(p_0 - iq_0) [e^{-2u_0} + e^{u_0 - iv_0}] \right\}$$

$$B_3 = -\frac{6m}{k^2 D} \left\{ (p_0^2 + q_0^2) [1 + e^{-u_0 + iv_0}] - p_0(p_0 + iq_0) [e^{2iv_0} + e^{-u_0 + iv_0}] + iq_0(p_0 + iq_0) [e^{-2u_0} + e^{u_0 + iv_0}] \right\}$$

$$B_0 e^{\alpha_0 x} + B_3 e^{\alpha_3 x} =$$

$$-\frac{12m}{k^2 D} \left\{ p_0^2 [e^{u_0 x} (\cos v_0 x - \cos v_0(x-2)) + e^{u_0(x-1)} (\cos v_0(x-1) - \cos v_0(x+1))] \right. \\ \left. + q_0^2 [e^{u_0 x} \cos v_0 x + e^{u_0(x-1)} \cos v_0(x-1) - e^{u_0(x-2)} \cos v_0 x - e^{u_0(x+1)} \cos v_0(x-1)] \right. \\ \left. + p_0 q_0 [e^{u_0(x-2)} \sin v_0 x + e^{u_0(x+1)} \sin v_0(x-1) - e^{u_0 x} \sin v_0(x-2) - e^{u_0(x-1)} \sin v_0(x+1)] \right\}$$

$B_1 e^{\alpha_1 x} + B_2 e^{\alpha_2 x}$ s'obtient en changeant u_0 en $(-u_0)$ et q_0 en $(-q_0)$ dans l'expression précédente.

Donc :

$$\tau(x) = \frac{3m}{k^2} - \frac{24m}{k^2 D} \left\{ p_0^2 [(\cos v_0 x - \cos v_0(2-x)) \text{Ch} u_0 x + (\cos v_0(1-x) - \cos v_0(1+x)) \text{Ch} u_0(1-x)] \right. \\ \left. + p_0 q_0 [\sin v_0(2-x) \text{Sh} u_0 x + \sin v_0(1+x) \text{Sh} u_0(1-x) - \sin v_0 x \text{Sh} u_0(2-x) - \sin v_0(1-x) \text{Sh} u_0(1+x)] \right. \\ \left. + q_0^2 [(\text{Ch} u_0 x - \text{Ch} u_0(2-x)) \cos v_0 x + (\text{Ch} u_0(1-x) - \text{Ch} u_0(1+x)) \cos v_0(1-x)] \right\}$$

$x = nh \quad D = 16 (p_0^2 \sin^2 v_0 - q_0^2 \text{Sh}^2 u_0)$

Déterminons u_0, v_0, p_0, q_0

$$\text{Sh} [(u_0 + iv_0)h] = 1 + \varepsilon_j i \frac{kh^2}{2} = 2 \text{Sh}^2 \left[\frac{u_0 + iv_0}{2} h \right] + 1 \quad ; \quad \text{Posons } \boxed{\gamma = \sqrt{\frac{k}{2}} \frac{h}{2}}$$

$$\text{Sh} \left[\frac{u_0 + iv_0}{2} h \right] = \gamma(1+i) \Rightarrow \begin{cases} \text{Sh} \frac{u_0 h}{2} \cos \frac{v_0 h}{2} = \gamma \\ \text{Ch} \frac{u_0 h}{2} \sin \frac{v_0 h}{2} = \gamma \end{cases}$$

$$\frac{\gamma^2}{\text{Sh}^2 \frac{u_0 h}{2}} + \frac{\gamma^2}{\text{Ch}^2 \frac{u_0 h}{2}} = +1 \quad ; \quad \frac{\text{Ch} u_0 h}{\text{Sh}^2 u_0 h} = \frac{1}{4\gamma^2} \quad ; \quad \text{Ch}^2 u_0 h - 4\gamma^2 \text{Ch} u_0 h - 1 = 0$$

$$\text{Ch} u_0 h = 2\gamma^2 + \sqrt{1 + 4\gamma^4} = \kappa$$

$$e^{2u_0 h} - 2\kappa e^{u_0 h} + 1 = 0 \quad e^{u_0 h} = \kappa \pm \sqrt{\kappa^2 - 1} \quad \text{On est le signe + car}$$

car $e^{u_0 h} > 0$.

$$u_0 = \frac{1}{h} \text{Log} (\kappa + \sqrt{\kappa^2 - 1})$$

$$\frac{y^2}{\sin^2 v_0 h} - \frac{y^2}{\cos^2 v_0 h} = 1 \quad ; \quad \frac{\cos v_0 h}{\sin^2 v_0 h} = \frac{1}{4y^2} \quad ; \quad \cos^2 v_0 h + 4y^2 \cos v_0 h - 1 = 0$$

$$\cos v_0 h = -2y^2 + \sqrt{1+4y^4}$$

$$p_0 + iq_0 = \text{Sh} v_0 h (4 - \text{Ch} v_0 h) = (\text{Sh} v_0 h \cos v_0 h + i \text{Ch} v_0 h \sin v_0 h) / (4 - \text{Ch} v_0 h \cos v_0 h - i \text{Sh} v_0 h \sin v_0 h)$$

$$p_0 = \frac{1}{2} [8 \text{Sh} v_0 h \cos v_0 h - \text{Sh} 2v_0 h \cos v_0 h] \quad ; \quad q_0 = \frac{1}{2} [8 \text{Ch} v_0 h \sin v_0 h - \text{Ch} 2v_0 h \sin v_0 h]$$

Graphiques: Nous avons construit les courbes donnant l'erreur $y(x) = \theta(x) - \tilde{z}(x)$

où $x = nh$ dans les trois cas suivants:

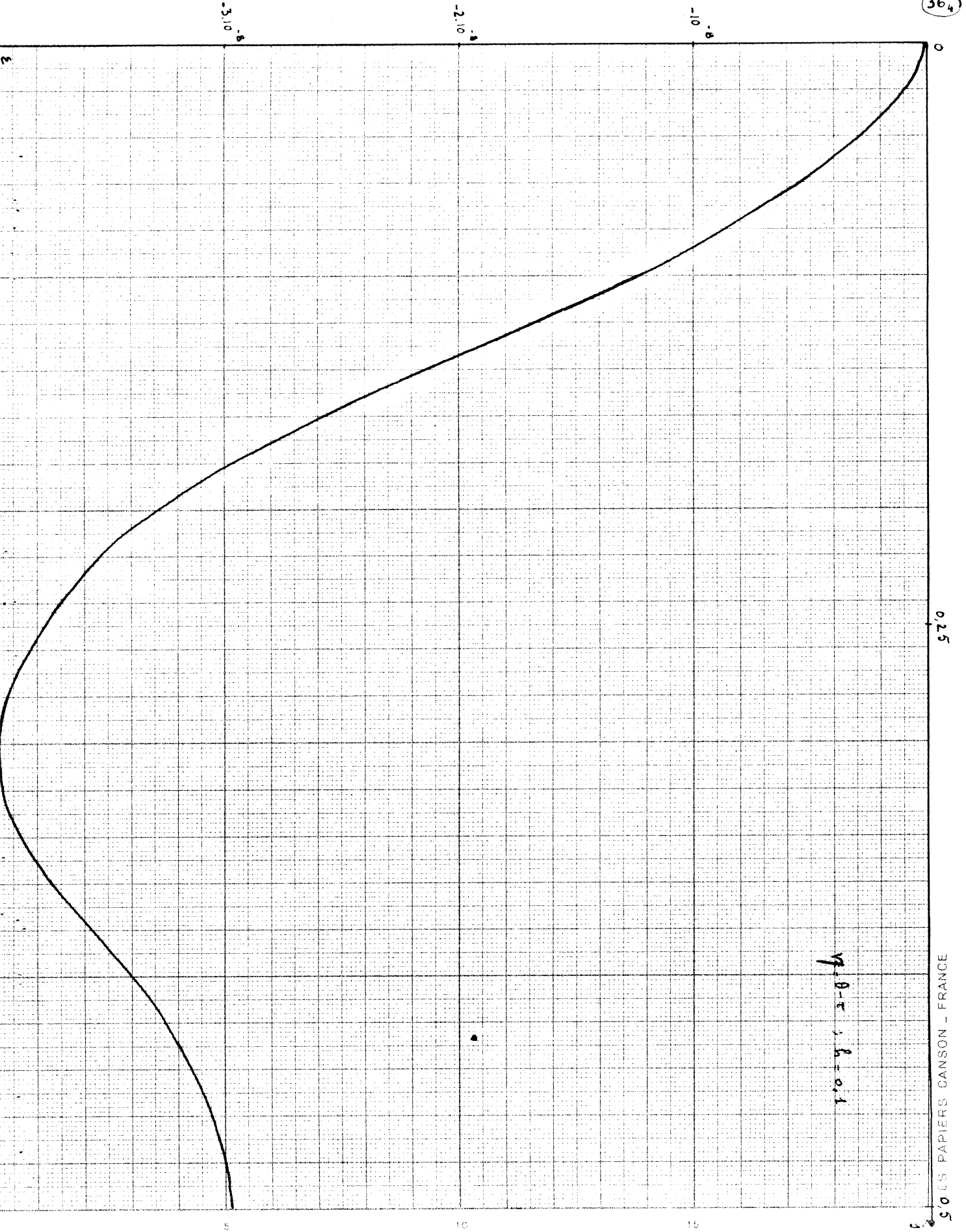
$$h = 0,01 \quad ; \quad h = 0,05 \quad ; \quad h = 0,1.$$

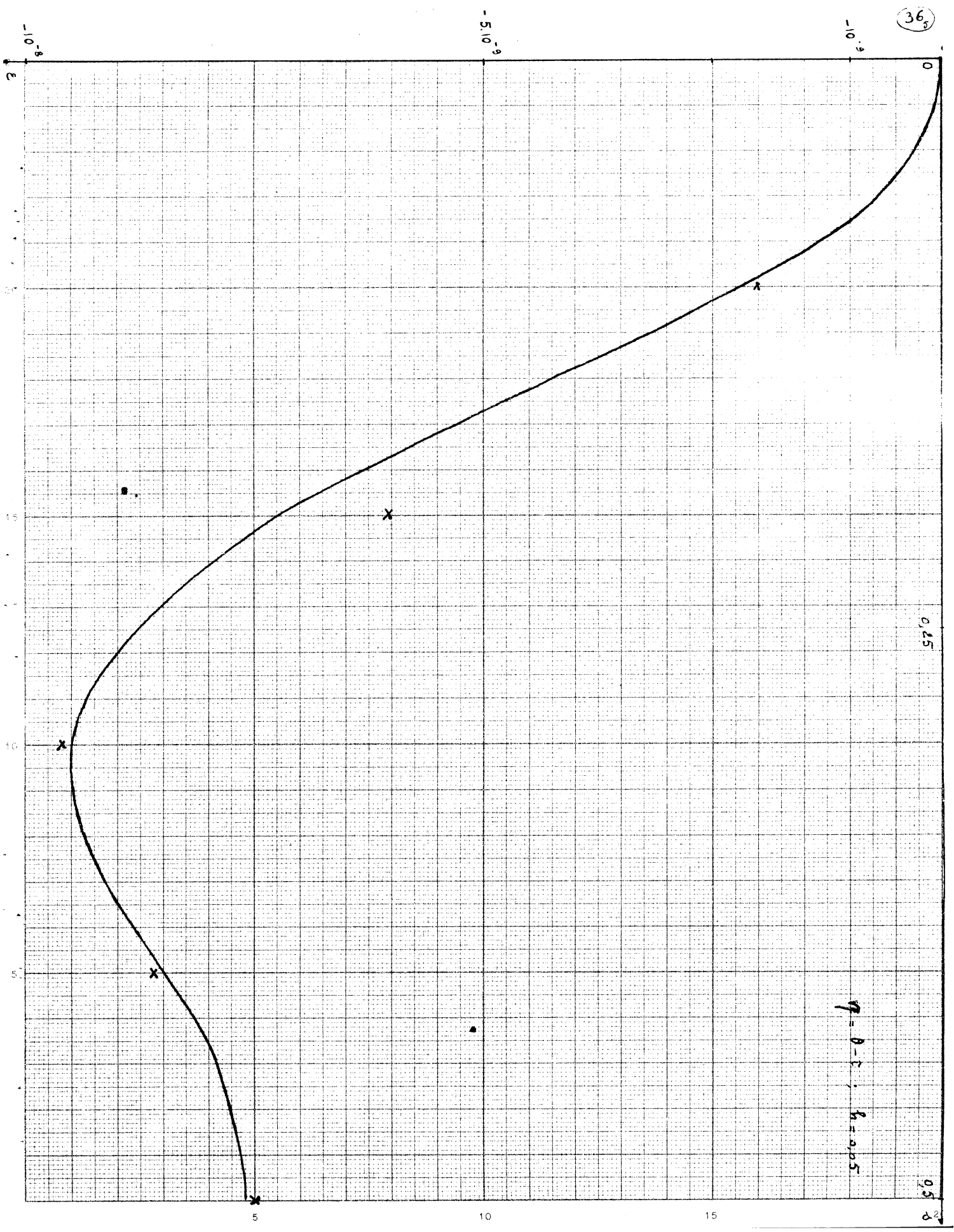
Nous constatons que ces trois courbes ont une forme analogue.

x	$10^6 \tau(x); h=0,1$	$\tau(x) \cdot 10^6; h=0,05$	$\tau(x) \cdot 10^6; h=0,01$	$\theta(x) \cdot 10^6$
-0,2	-9,22266819			
-0,1	-1,57742541	-1,5453936		
-0,05		-1,51451209		
-0,02			-1,0101525	
-0,01			-0,01031437	
0	0	0	0	0
+0,01			-0,00035562	-0,00058563
+0,02			-0,003651038	-0,00651146
+0,03			-0,007483566	-0,01246553
+0,04			-0,013235672	-0,01900442
+0,05		-1,0707175	-0,01718513	-0,02500404
+0,06			-0,027152511	-0,027154914
+0,07			-0,03511421	-0,035117669
+0,08			-0,43734617	-0,4373595
+0,09			-0,52660163	-0,52660332
+0,1	-0,60582767	-0,61621620	-0,61032732	-0,61040901
+0,11			-0,7103009	-0,71049076
+0,12			-0,80475172	-0,80491115
+0,13			-0,91756066	-0,91770093
+0,14			-0,91924421	-0,91940661
+0,15		-1,07128218	-1,07130369	-1,071308751
+0,16			-1,16609958	-1,16609492
+0,17			-1,25038740	-1,25038351
+0,18			-1,3164710	-1,31646404
+0,19			-1,40867354	-1,408674510
+0,20	-1,4091595	-1,47559390	-1,48259209	-1,4827551
+0,21			-1,55235747	-1,55259756
+0,22			-1,61820432	-1,61851570
+0,23			-1,67397173	-1,674031041
+0,24			-1,73770144	-1,737804137
+0,25		-1,71207108	-1,79145392	-1,79175417
+0,26			-1,84124221	-1,84160125
+0,27			-1,89722690	-1,89759262
+0,28			-1,92951172	-1,92950245
+0,29			-1,96823916	-1,96861332
+0,30	-1,964156614	-1,99445417	-2,00355654	-2,00394261
+0,31			-2,03568243	-2,03603906
+0,32			-2,06470156	-2,06507936
+0,33			-2,09067132	-2,09124521
+0,34			-2,11454973	-2,11472074
+0,35		-2,1264725	-2,13332234	-2,13560160
+0,36			-2,15307124	-2,15433404
+0,37			-2,17047304	-2,17063086
+0,38			-2,18439920	-2,18535136
+0,39			-2,19771346	-2,19806034
+0,40	-2,17521382	-2,20050240	-2,20357672	-2,20911134
+0,41			-2,21511583	-2,21665145
+0,42			-2,22649215	-2,22681200
+0,43			-2,23539270	-2,23471733
+0,44			-2,23815537	-2,23947511
+0,45		-2,23630750	-2,24386677	-2,24410320
+0,46			-2,24760021	-2,24752116
+0,47			-2,25044753	-2,25075772
+0,48			-2,25245760	-2,25274577
+0,49			-2,25351341	-2,25392334
+0,50	-2,22451354	-2,24561340	-2,25410680	-2,25431332

x	$\eta(x) \cdot 10^{10}; h = 0,01$	$\eta(x) \cdot 10^{10}; h = 0,05$	$\eta(x) \cdot 10^{10}; h = 0,1$
0	0		
0,01	0		
0,02	- 0,0110		
0,03	- 0,0326		
0,04	- 0,0770		
0,05	- 0,1420	- 4,3228	
0,06	- 0,2305		
0,07	- 0,3448		
0,08	- 0,4798		
0,09	- 0,6369		
0,10	- 0,8102	- 21,9281	- 125,8133
0,11	- 0,9986		
0,12	- 1,2003		
0,13	- 1,4087		
0,14	- 1,6233		
0,15	- 1,8381	- 48,0462	
0,16	- 2,0524		
0,17	- 2,2611		
0,18	- 2,4624		
0,19	- 2,6546		
0,20	- 2,8342	- 72,8161	- 329,8956
0,21	- 3,0009		
0,22	- 3,1518		
0,23	- 3,2868		
0,24	- 3,4053		
0,25	- 3,5065	- 89,1349	
0,26	- 3,5904		
0,27	- 3,6572		
0,28	- 3,7073		
0,29	- 3,7416		
0,30	- 3,7507	- 94,8774	- 395,7600
0,31	- 3,7557		
0,32	- 3,7580		
0,33	- 3,7591		
0,34	- 3,7101		
0,35	- 3,6726	- 92,1155	
0,36	- 3,6280		
0,37	- 3,5782		
0,38	- 3,5246		
0,39	- 3,4688		
0,40	- 3,4122	- 85,1954	- 338,9212
0,41	- 3,3562		
0,42	- 3,3025		
0,43	- 3,2515		
0,44	- 3,2054		
0,45	- 3,1643	- 78,7570	

x	$\eta(x) \cdot 10^{10}; h = 0,01$	$\eta(x) \cdot 10^{10}; h = 0,05$	$\eta(x) \cdot 10^{10}; h = 0,1$
0,46	- 3,1297		
0,47	- 3,1019		
0,48	- 3,0817		
0,49	- 3,0693		
0,50	- 3,0652	- 76,1992	- 296,9968





$\eta = 0.5 ; h = 0.05$

0.25

0.5

-10⁻⁹

-5.10⁻⁹

-10⁻⁹

3

0

10

15

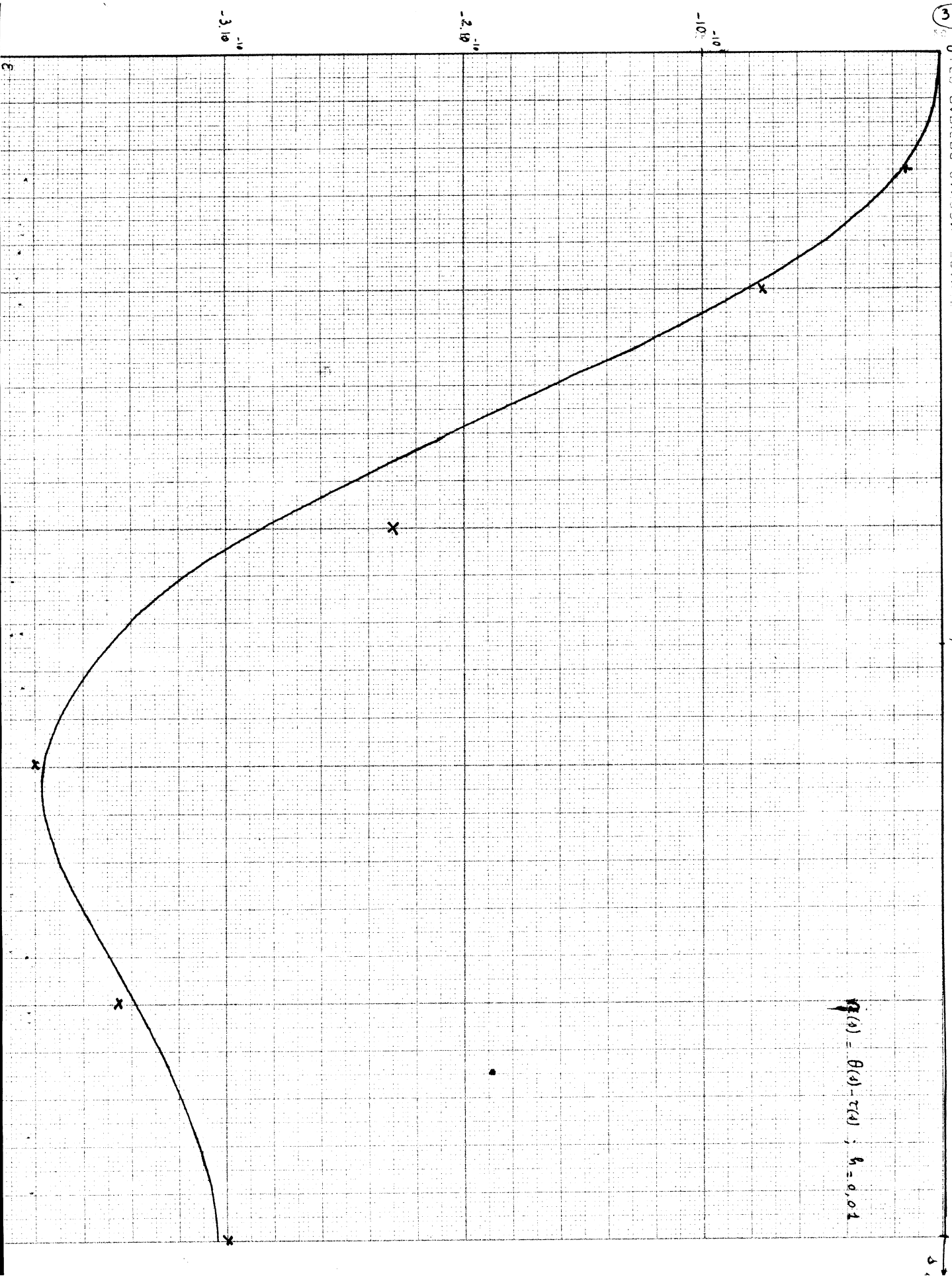
20

5

10

15

20



$$f(x) = f(x) - c(x) ; h = 0.01$$

B. — Détermination de l'erreur faite dans l'intégration approchée
du système différentiel (I) (37)

Posons $\theta(x) - \tau(x) = \varepsilon(x) \quad x = nh$

$$\begin{cases} \theta^{(4)} + k^2 \theta = 3m & \textcircled{1} \\ \theta(0) = \theta(1) = \theta'(0) = \theta'(1) = 0 & \textcircled{2} \end{cases} \quad \begin{cases} D^4 \tau + k^2 \tau = 3m & \textcircled{1'} \\ \tau_0 = \tau_N = D\tau_0 = D\tau_N = 0 & \textcircled{2'} \end{cases}$$

$$D^4 \tau = \tau^{(4)}(x) + \gamma(x) \quad ; \quad D\tau(x) = \tau'(x) + \zeta(x).$$

Soustrayons l'équation $\textcircled{1}$ de l'équation $\textcircled{1'}$

$$\theta^{(4)} - D^4 \tau + k^2 \theta - k^2 \tau = 0 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon^{(4)} + k^2 \varepsilon = \gamma(x)$$

$$\varepsilon(0) = \theta(0) - \tau_0 = 0 \quad ; \quad \varepsilon(1) = 0.$$

$$\varepsilon'(0) = \theta'(0) - (D\tau_0 - \zeta(0)) \quad \varepsilon'(0) = \zeta(0) \quad \text{De même} \quad \varepsilon'(1) = \zeta(1)$$

$\varepsilon(x)$ vérifie le système différentiel :

$$\begin{cases} \varepsilon^{(4)}(x) + k^2 \varepsilon(x) = \gamma(x) \\ \varepsilon(0) = \varepsilon(1) = 0 \\ \varepsilon'(0) = \varepsilon'(1) = \zeta_0 \end{cases} \quad \textcircled{V}$$

Pour déterminer la solution de ce problème nous allons utiliser la fonction de Green qui lui est associée.

§1 Fonction de Green associée à un système différentiel :

Considérons le système linéaire et homogène :

$$\begin{cases} L(u) \equiv p_0 \frac{d^4 u}{dx^4} + p_1 \frac{d^3 u}{dx^3} + \dots + p_{n-1} \frac{du}{dx} + p_n u = 0 \\ U_i(u) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

$$p_i = p_i(x) \quad ; \quad u = u(x) \quad x \in [a, b]$$

$U_i(u) = A_i(u) + B_i(u)$ $A_i(u)$ est une fonction linéaire et homogène des dérivées jusqu'à l'ordre $(n-1)$ calculées au point a , $B_i(u)$ une fonction linéaire et homogène des dérivées jusqu'à l'ordre $(n-1)$ calculées au point b .

Nous supposons que le système précédent est incompatible c.à.d qu'il n'admet aucune solution non identiquement nulle, qui, soit continue - ainsi que ses (n-1) premières dérivées - dans l'intervalle d'intégration [a,b].

Considérons la fonction G(x,t) qui possède les propriétés suivantes :

- (i) G(x,t) est continue ainsi que ses (n-1) premières dérivées par rapport à x dans [a,b].
- (ii) La dérivée d'ordre (n-1) est discontinue pour x=t et le saut de discontinuité est égal à $\frac{1}{p_0(t)}$.
- (iii) G(x,t) satisfait formellement le système différentiel en tous les points de [a,b].

Soit $u_1(x) \dots u_n(x)$ un ensemble de solutions indépendantes de $L(u) = 0$.

D'après (iii) G(x,t) peut s'écrire :

$$G(x,t) = \begin{cases} \sum_1^n a_i u_i(x) & \text{pour } a \leq x < t \\ \sum_1^n b_i u_i(x) & \text{pour } t < x \leq b \end{cases}$$

D'après (i)
$$\begin{cases} \sum_1^n [a_i u_i(x) - b_i u_i(x)] = 0 \\ \dots \dots \dots \\ \sum_1^n [a_i u_i^{(n-2)}(x) - b_i u_i^{(n-2)}(x)] = 0 \end{cases}$$

D'après (ii)
$$\sum_1^n [a_i u_i^{(n-1)}(x) - b_i u_i^{(n-1)}(x)] = -\frac{1}{p_0(t)}$$

Posons $c_i = a_i - b_i$. Les équations précédentes s'écrivent :

$$\sum_1^n c_i u_i(t) = \dots = \sum_1^n c_i u_i^{(n-2)}(t) = 0 \quad \sum_1^n c_i u_i^{(n-1)}(t) = -\frac{1}{p_0(t)}$$

Le discriminant du système précédent est égal au Wronskien des $u_i(x)$ lorsque $x=t$. Comme le système de solutions $u_i(x)$ est un système de solutions linéairement indépendantes, le discriminant du système précédent n'est pas nul. Les coefficients c_i peuvent être déterminés de façon unique.

Considérons maintenant les conditions aux limites :

$$U_i(G) = \sum_j [a_j A_i(u_j) + b_j B_i(u_j)] = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

ou
$$\sum_j b_j U_i(u_j) = \sum_j c_j A_i(u_j)$$

Puisque les n conditions aux limites sont linéairement indépendantes et que le système différentiel est incompatible, le système ci-dessus admet une solution (b_1, \dots, b_n) unique.

Comme la solution (c_1, \dots, c_n) est unique, $G(x, t)$ est unique.

+ Solution d'un système linéaire non homogène.

$$\textcircled{B} \begin{cases} L(y) = r(x) \\ U_i(y) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad \text{quand le système } \textcircled{A} \begin{cases} L(u) = 0 \\ U_i(u) = 0 \end{cases} \text{ est incompatible}$$

Si \textcircled{A} est incompatible, \textcircled{B} admet une solution et une seule.

Supposons connue la fonction de Green de \textcircled{A} .

La solution de \textcircled{B} est : $y(x) = \int_a^b G(x, t) r(t) dt$

Comme $\frac{\partial^{n-i} G(x, t)}{\partial x^{n-i}}$ est uniformément continue dans $[a, b]$ pour $i = 1, 2, \dots, (n-1)$

$$y^{(n-1)}(x) = \int_a^b \frac{\partial^{n-1} G(x, t)}{\partial x^{n-1}}$$

Mais $y^{(n)}(x)$ est discontinue pour $x = t$.

$$y^{(n)}(x) = \frac{\partial}{\partial x} \int_a^x \frac{\partial^{n-1} G(x, t)}{\partial x^{n-1}} r(t) dt + \frac{\partial}{\partial x} \int_x^b \frac{\partial^{n-1} G(x, t)}{\partial x^{n-1}} r(t) dt$$

$$= \int_a^b \frac{\partial^n G(x, t)}{\partial x^n} r(t) dt + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\frac{\partial^{n-1} G(x, t)}{\partial x^{n-1}} \right]_{t=x-\epsilon}^{t=x+\epsilon} r(t)$$

$$= \int_a^b \frac{\partial^n G(x, t)}{\partial x^n} r(t) dt + \frac{r(x)}{p_0(x)} \quad \text{D'où : } L(y) = \int_a^b L(G) r(t) dt + r(x) = r(x)$$

puisque $L(G) = 0$.

Puisque $U_i(y)$ ne contient aucune dérivée de y d'ordre supérieur à $(n-1)$:

$$\begin{cases} U_i(y) = \int_a^b U_i(G) r(t) dt = 0 \quad \text{car } U_i(G) = 0 \\ i = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad y(x) \text{ est bien solution de } \textcircled{B}.$$

++ Solution d'un système linéaire donné sous sa forme générale.

$$\begin{cases} L(y) = r(x) \\ U_i(y) = \gamma_i \quad i = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad \gamma_i \text{ est une constante.}$$

Considérons la fonction $G_i(x)$ solution unique du système :

$$\begin{cases} L(G_i) = 0 \\ U_i(G_i) = \dots = U_{i-1}(G_i) = U_{i+1}(G_i) = \dots = U_n(G_i) = 0 \quad U_i(G_i) = 1 \end{cases}$$

Nous vérifions immédiatement que la solution de (C) est :

$$y(x) = \int_a^b G(x,t) r(t) dt + \sum_j \gamma_j G_j(x)$$

+++ Propriété de la fonction de Green :

Nous allons montrer que si $H(x,t)$ est la fonction de Green du système différentiel adjoint : $H(x,t) = G(t,x)$

Considérons $L(u) = p_0 \frac{d^2 u}{dx^2} + p_1 \frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}} + \dots + p_{n-1} \frac{du}{dx} + p_n u$

L'expression différentielle adjointe est :

$$\bar{L}(v) = (-1)^n \frac{d^n(p_0 v)}{dx^n} + (-1)^{n-1} \frac{d^{n-1}(p_1 v)}{dx^{n-1}} + \dots + \frac{d(p_{n-1} v)}{dx} + p_n v$$

$L(u)$ et $\bar{L}(v)$ sont liés par la relation : $vL(u) + u\bar{L}(v) = \frac{d}{dx} [P(u,v)]$ (a)

$$\begin{aligned} P(u,v) = & u \left[p_{n-1} v - \frac{d(p_{n-2} v)}{dx} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{d^{n-1}(p_0 v)}{dx^{n-1}} \right] \\ & + \frac{du}{dx} \left[p_{n-2} v - \frac{d(p_{n-3} v)}{dx} + \dots + (-1)^{n-2} \frac{d^{n-2}(p_0 v)}{dx^{n-2}} \right] \\ & + \dots + \frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}} p_0 v \end{aligned}$$

Si nous intégrons (a) entre a et b on obtient la formule de Green :

$$\int_a^b [vL(u) - u\bar{L}(v)] dx = [P(u,v)]_a^b$$

Divisons $[a,b]$ en trois parties : $[a, t_1], (t_1, t_2), (t_2, b)$ et considérons les fonctions de Green : $u = G(x, t_1), v = H(x, t_2)$

$G(x, t_1), H(x, t_2)$ vérifient respectivement les systèmes de conditions aux limites $U_i(u) = 0$ et $V_i(v) = 0$

Dans chacun des intervalles $[a, t_1 - \eta_1], [t_1 + \eta_2, t_2 - \eta_3], [t_2 + \eta_4, b]$, $L(G) = \bar{L}(H) = 0$

et $\int_a^b [HL(G) + G\bar{L}(H)] dx = 0$

D'où : $\lim_{\eta_1 \rightarrow 0} [P(G,H)]_a^{t_1 - \eta_1} + \lim_{\substack{\eta_2 \rightarrow 0 \\ \eta_3 \rightarrow 0}} [P(G,H)]_{t_1 + \eta_2}^{t_2 - \eta_3} + \lim_{\eta_4 \rightarrow 0} [P(G,H)]_{t_2 + \eta_4}^b = 0$

D'après la formule qui explicite $P(u, v)$ on voit que dans $P[G, H]$ le seul terme qui introduise une discontinuité lorsque $\eta_1 \rightarrow 0, \eta_2 \rightarrow 0, \eta_3 \rightarrow 0, \eta_4 \rightarrow 0$ est :

(41)

$$p_0 \left(H \frac{d^{n-1}G}{dx^{n-1}} - G \frac{d^{n-1}H}{dx^{n-1}} \right)$$

Donc : $p_0(t_1) H(t_1, t_2) \lim_{\substack{\eta_1 \rightarrow 0 \\ \eta_2 \rightarrow 0}} \left[\frac{d^{n-1}G}{dx^{n-1}} \right]_{t_1-\eta_1}^{t_1+\eta_2} - p_0(t_2) G(t_2, t_1) \lim_{\substack{\eta_3 \rightarrow 0 \\ \eta_4 \rightarrow 0}} \left[\frac{d^{n-1}H}{dx^{n-1}} \right]_{t_2-\eta_3}^{t_2+\eta_4} = 0$

Et puisque : $p_0(t_1) \lim_{\substack{\eta_1 \rightarrow 0 \\ \eta_2 \rightarrow 0}} \left[\frac{d^{n-1}G}{dx^{n-1}} \right]_{t_1-\eta_1}^{t_1+\eta_2} = p_0(t_2) \lim_{\substack{\eta_3 \rightarrow 0 \\ \eta_4 \rightarrow 0}} \left[\frac{d^{n-1}H}{dx^{n-1}} \right]_{t_2-\eta_3}^{t_2+\eta_4} = 1$

$$H(t_1, t_2) = G(t_2, t_1)$$

Nous avons démontré cette formule pour $t_1 < t_2$. On aurait pu le faire de même pour $t_1 > t_2$. Pour T $x \in [a, b]$ et T $t \in [a, b]$ $H(x, t) = G(x, t)$

§2 Détermination de la fonction de Green du système différentiel :

$\varepsilon^{(4)}(x) + k^2 \varepsilon(x) = 0 ; \varepsilon(0) = \varepsilon(1) = 0 ; \varepsilon'(0) = \varepsilon'(1) = 0$

Notons $G(x, t)$ la fonction de Green de ce problème.

$$G(x, t) = \begin{cases} \sum_{j=0}^3 \lambda_j v_j(x) & \text{si } 0 \leq x < t \\ \sum_{j=0}^3 \mu_j v_j(x) & \text{si } t < x \leq 1 \end{cases} \quad v_j(x) = e^{r_j x} ; r_j^4 + k^2 = 0 ;$$

+ Notons $\lambda_j - \mu_j = \nu_j$ D'après les propriétés (i) et (ii) de $G(x, t)$

$\sum_{j=0}^3 \nu_j e^{r_j t} = 0 ; \sum_{j=0}^3 \nu_j r_j e^{r_j t} = 0 ; \sum_{j=0}^3 \nu_j r_j^2 e^{r_j t} = 0 ; \sum_{j=0}^3 \nu_j r_j^3 e^{r_j t} = 1$ (Y)

Le déterminant de ce système est un déterminant de Van der Monde. Et on a

$$D = \begin{vmatrix} e^{r_0 t} & e^{r_1 t} & e^{r_2 t} & e^{r_3 t} \\ r_0 e^{r_0 t} & r_1 e^{r_1 t} & r_2 e^{r_2 t} & r_3 e^{r_3 t} \\ r_0^2 e^{r_0 t} & r_1^2 e^{r_1 t} & r_2^2 e^{r_2 t} & r_3^2 e^{r_3 t} \\ r_0^3 e^{r_0 t} & r_1^3 e^{r_1 t} & r_2^3 e^{r_2 t} & r_3^3 e^{r_3 t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ r_0 & r_1 & r_2 & r_3 \\ r_0^2 & r_1^2 & r_2^2 & r_3^2 \\ r_0^3 & r_1^3 & r_2^3 & r_3^3 \end{vmatrix} \quad \text{car } e^{\sum_{j=0}^3 r_j t} = e^0 = 1$$

$$D_{\nu_0} = \begin{vmatrix} 0 & e^{r_1 t} & e^{r_2 t} & e^{r_3 t} \\ 0 & r_1 e^{r_1 t} & r_2 e^{r_2 t} & r_3 e^{r_3 t} \\ 0 & r_1^2 e^{r_1 t} & r_2^2 e^{r_2 t} & r_3^2 e^{r_3 t} \\ 1 & r_1^3 e^{r_1 t} & r_2^3 e^{r_2 t} & r_3^3 e^{r_3 t} \end{vmatrix} = -e^{(r_1+r_2+r_3)t} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ r_1 & r_2 & r_3 \\ r_1^2 & r_2^2 & r_3^2 \end{vmatrix} = -r_0^3 e^{-r_0 t} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ i & -1 & -i \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$D_{\nu_0} = -\left(\frac{k}{2}\right)^3 (1+i)^3 e^{-r_0 t} \times 4i = 8\left(\frac{k}{2}\right)^3 e^{-r_0 t} (1+i)$$

D'où :
$$v_0 = \frac{4k}{D} r_0 e^{-r_0 t}$$

Multiplications dans le déterminant qui donne v_0, r_1, r_2, r_3 par i . Nous obtenons v_1

De même pour v_2 et v_3 .
$$v_1 = \frac{4k}{D} r_1 e^{-r_1 t} \quad v_2 = \frac{4k}{D} r_2 e^{-r_2 t} \quad v_3 = \frac{4k}{D} r_3 e^{-r_3 t}$$

Nous pouvons très facilement calculer D maintenant.

$$D = \sum_{j=0}^3 r_j^3 e^{r_j t} D v_j = \sum_{j=0}^3 r_j^3 e^{r_j t} 4k r_j e^{-r_j t} = 4k \sum_{j=0}^3 r_j^4 = 4k (-4k^4) = -16k^5$$

$$D = -16k^5$$

++ Pour calculer les coefficients λ_j et μ_j nous allons utiliser la propriété (III)

de (I) :

$$\sum_{j=0}^3 \lambda_j = 0 ; \sum_{j=0}^3 \lambda_j r_j = 0 ; \sum_{j=0}^3 \mu_j e^{r_j} = 0 ; \sum_{j=0}^3 \mu_j r_j e^{r_j} = 0 \quad (V'')$$

Ce système peut encore s'écrire :

$$\sum_{j=0}^3 \lambda_j = 0 ; \sum_{j=0}^3 \lambda_j r_j = 0 ; \sum_{j=0}^3 \lambda_j e^{r_j} = \sum_{j=0}^3 \mu_j e^{r_j} ; \sum_{j=0}^3 \lambda_j r_j e^{r_j} = \sum_{j=0}^3 \mu_j r_j e^{r_j} \quad (V''')$$

$$\sum_{j=0}^3 \mu_j e^{r_j} = \frac{4k}{D} \sum_{j=0}^3 r_j e^{r_j(1-t)}$$

$$= \frac{4k}{D} \frac{1}{\sqrt{2}} \left[(1+i) e^{\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(1-t)} + (-1+i) e^{\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)(1-t)} - (1+i) e^{\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(1-t)} + (1-i) e^{\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)(1-t)} \right]$$

$$= \frac{4k}{D} \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ e^{\frac{\sqrt{2}}{2}(1-t)} [2 \cos \frac{\sqrt{2}}{2}(1-t) - 2 \sin \frac{\sqrt{2}}{2}(1-t)] - e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}(1-t)} [2 \cos \frac{\sqrt{2}}{2}(1-t) + 2 \sin \frac{\sqrt{2}}{2}(1-t)] \right\}$$

$$\sum_{j=0}^3 \mu_j e^{r_j} = -\frac{1}{k} \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\text{Sh} \frac{\sqrt{2}}{2}(1-t) \cos \frac{\sqrt{2}}{2}(1-t) - \text{th} \frac{\sqrt{2}}{2}(1-t) \text{Ch} \frac{\sqrt{2}}{2}(1-t) \right]$$

$$\sum_{j=0}^3 r_j e^{r_j} \mu_j = \frac{4k}{D} \sum_{j=0}^3 r_j^2 e^{r_j(1-t)} = \frac{4k}{D} \frac{1}{\sqrt{2}} \left[2i e^{\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(1-t)} - 2i e^{\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)(1-t)} + 2i e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(1-t)} - 2i e^{\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)(1-t)} \right]$$

$$= \frac{4k}{D} \left[e^{\frac{\sqrt{2}}{2}(1-t)} (-2) \sin \frac{\sqrt{2}}{2}(1-t) + e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}(1-t)} \cdot 2 \sin \frac{\sqrt{2}}{2}(1-t) \right]$$

$$\sum_{j=0}^3 r_j e^{r_j} \mu_j = +\frac{1}{k} \text{Sh} \frac{\sqrt{2}}{2}(1-t) \sin \frac{\sqrt{2}}{2}(1-t)$$

Remplaçons le système (V'''). On peut l'écrire :

$$\Delta \cdot \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sum \mu_j e^{r_j} \\ \sum \mu_j r_j e^{r_j} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nous avons déjà calculé Δ^{-1} . Donc :

$$G(x,t) = \sum_{j=0}^3 \lambda_j e^{r_j x} = \frac{1}{\Delta} \sum_{j=0}^3 \mu_j e^{r_j} \left\{ e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(1-x)} - (1+i) e^{\frac{\sqrt{2}}{2}[1+x-i(1-x)]} - (1-i) e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}[1-x-i(1+x)]} \right.$$

$$- (1+i) e^{\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)(1-x)} + i e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}[1+x+i(1-x)]} + e^{\frac{\sqrt{2}}{2}[1-x-i(1+x)]}$$

$$- (1-i) e^{\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(1-x)} - i e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}[1+x-i(1-x)]} + e^{\frac{\sqrt{2}}{2}[1-x-i(1+x)]}$$

$$\left. + (1+i) e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)(1-x)} - i e^{\frac{\sqrt{2}}{2}[1+x+i(1-x)]} - e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}[1-x+i(1+x)]} \right\}$$

$$G_1(x,t) = \frac{2k}{\Delta} \sum_j y_j e^{y_j x} \left\{ 2e^{-\sqrt{\frac{k}{2}(1-x)}} \cos\sqrt{\frac{k}{2}(1-x)} - e^{\sqrt{\frac{k}{2}(1+x)}} [\cos\sqrt{\frac{k}{2}(1-x)} + \sin\sqrt{\frac{k}{2}(1-x)}] \right.$$

$$- e^{-\sqrt{\frac{k}{2}(1+x)}} [\cos\sqrt{\frac{k}{2}(1+x)} + \sin\sqrt{\frac{k}{2}(1+x)}] + 2e^{\sqrt{\frac{k}{2}(1-x)}} \cos\sqrt{\frac{k}{2}(1-x)} - e^{\sqrt{\frac{k}{2}(1-x)}} [\cos\sqrt{\frac{k}{2}(1+x)} - \sin\sqrt{\frac{k}{2}(1+x)}] \left.$$

$$- e^{-\sqrt{\frac{k}{2}(1+x)}} [\cos\sqrt{\frac{k}{2}(1-x)} - \sin\sqrt{\frac{k}{2}(1-x)}] \right\}$$

$$+ \frac{2\sqrt{2k}}{\Delta} \sum_j y_j y_j e^{y_j x} \left\{ e^{-\sqrt{\frac{k}{2}(1-x)}} [\cos\sqrt{\frac{k}{2}(1-x)} - \sin\sqrt{\frac{k}{2}(1-x)}] + e^{\sqrt{\frac{k}{2}(1+x)}} \sin\sqrt{\frac{k}{2}(1-x)} \right.$$

$$- e^{-\sqrt{\frac{k}{2}(1-x)}} \cos\sqrt{\frac{k}{2}(1+x)} - e^{\sqrt{\frac{k}{2}(1-x)}} [\cos\sqrt{\frac{k}{2}(1-x)} + \sin\sqrt{\frac{k}{2}(1-x)}] + e^{-\sqrt{\frac{k}{2}(1+x)}} \sin\sqrt{\frac{k}{2}(1-x)} + e^{\sqrt{\frac{k}{2}(1-x)}} \cos\sqrt{\frac{k}{2}(1+x)} \left. \right\}$$

$$G_1(x,t) = f(x)\varphi(t) + g(x)\psi(t) \quad 0 \leq x < t$$

$$f(x) = 2 \cos\sqrt{\frac{k}{2}(1-x)} \operatorname{Ch}\sqrt{\frac{k}{2}(1-x)} - \cos\sqrt{\frac{k}{2}(1-x)} \operatorname{Ch}\sqrt{\frac{k}{2}(1+x)} - \sin\sqrt{\frac{k}{2}(1-x)} \operatorname{Sh}\sqrt{\frac{k}{2}(1+x)} - \cos\sqrt{\frac{k}{2}(1+x)} \operatorname{Ch}\sqrt{\frac{k}{2}(1-x)} + \sin\sqrt{\frac{k}{2}(1+x)} \operatorname{Sh}\sqrt{\frac{k}{2}(1-x)}$$

$$g(x) = \sin\sqrt{\frac{k}{2}(1-x)} \operatorname{Ch}\sqrt{\frac{k}{2}(1+x)} + \cos\sqrt{\frac{k}{2}(1+x)} \operatorname{Sh}\sqrt{\frac{k}{2}(1-x)} - \cos\sqrt{\frac{k}{2}(1-x)} \operatorname{Sh}\sqrt{\frac{k}{2}(1-x)} - \sin\sqrt{\frac{k}{2}(1-x)} \operatorname{Ch}\sqrt{\frac{k}{2}(1-x)}$$

$$\varphi(t) = -\frac{4}{k\Delta} \sqrt{\frac{k}{2}} [\operatorname{Sh}\sqrt{\frac{k}{2}(1-t)} \cos\sqrt{\frac{k}{2}(1-t)} - \sin\sqrt{\frac{k}{2}(1-t)} \operatorname{Ch}\sqrt{\frac{k}{2}(1-t)}]$$

$$\psi(t) = \frac{8}{k\Delta} \sqrt{\frac{k}{2}} \operatorname{Sh}\sqrt{\frac{k}{2}(1-t)} \sin\sqrt{\frac{k}{2}(1-t)}$$

$$\Delta = 4k [2 - \operatorname{Ch}\sqrt{2k} - \cos\sqrt{2k}]$$

$$G_2(x,t) = \sum_0^3 j \mu_j e^{y_j x} = \sum_0^3 j (\lambda_j - y_j) e^{y_j x} = G_1(x,t) - \sum_0^3 j y_j e^{y_j x}$$

Comme avant $\sum_0^3 j y_j e^{y_j x}$ nous en déduisons facilement $\sum_0^3 j y_j e^{y_j x}$

$$\sum_0^3 j y_j e^{y_j x} = -\frac{1}{k^2} \sqrt{\frac{k}{2}} [\operatorname{Sh}\sqrt{\frac{k}{2}(x-t)} \cos\sqrt{\frac{k}{2}(x-t)} - \sin\sqrt{\frac{k}{2}(x-t)} \operatorname{Ch}\sqrt{\frac{k}{2}(x-t)}]$$

$$G_2(x,t) = f(x)\varphi(t) + g(x)\psi(t) + h(x,t) \quad t < x \leq 1$$

$$h(x,t) = \frac{1}{k^2} \sqrt{\frac{k}{2}} [\operatorname{Sh}\sqrt{\frac{k}{2}(x-t)} \cos\sqrt{\frac{k}{2}(x-t)} - \sin\sqrt{\frac{k}{2}(x-t)} \operatorname{Ch}\sqrt{\frac{k}{2}(x-t)}]$$

+ Propriété de $G(x,t)$

Le système (II) $\varepsilon^{(4)}(x) + k^2 \varepsilon(x) = 0$; $\varepsilon(0) = \varepsilon(1) = 0$; $\varepsilon'(0) = \varepsilon'(1) = 0$ est auto-adjoint

Donc si $H(x,t)$ est la fonction de Green du système adjoint : $H(x,t) = G(x,t)$

$$G(x,t) = G(t,x)$$

Nous allons déduire maintenant une propriété de $G(x,t)$ tenant compte de la symétrie de $\varepsilon(x)$ par rapport à $x = \frac{1}{2}$.

Posons $y = 1-x$. $\varepsilon(x) = \varepsilon(1-y) = \eta(y)$. $\varepsilon^{(4)}(x) = \varepsilon^{(4)}(1-y) = \eta^{(4)}(y)$

Donc (I) → (II) $\eta_1^{(4)}(y) + h^2 \eta_1(y) = 0$ $\eta_1'(0) = \eta_1'(1) = 0$ $\eta_1(0) = \eta_1(1) = 0$

La fonction de Green du système (II) est:

$$G(y, v) = \begin{cases} G_1(y, v) & 0 \leq y < v \\ G_2(y, v) & v < y \leq 1 \end{cases} \quad \text{c.-à-d.} \quad \begin{cases} 1-v < x \leq 1 \\ 0 \leq x < 1-v \end{cases}$$

Posons $w = 1-v$

$$G(y, v) = G(1-x, 1-w) = \begin{cases} G_1(1-x, 1-w) & w < x \leq 1 \\ G_2(1-x, 1-w) & 0 \leq x < w \end{cases}$$

D'où :

$$\begin{cases} G_1(1-x, 1-t) = G_2(x, t) \\ G_2(1-x, 1-t) = G_1(x, t) \end{cases}$$

Graphiques: Nous avons construit $G(x, t)$ pour $x = 0, 1$; $x = 0, 2$; $x = 0, 3$; $x = 0, 4$; $x = 0, 5$

Nous pouvons vérifier que:

$$G(x, 0) = G(t, 0) = G(0, t) = 0 \quad ; \quad G(x, 1) = G(t, 1) = G(1, t) = 0 ;$$

$$G'_x(x, 0) = G'_x(t, 0) = G'_x(0, t) = 0 \quad ; \quad G'_x(x, 1) = G'_x(t, 1) = G'_x(1, t) = 0 .$$

§3 Détermination de la fonction d'erreur locale $y(x)$.

Nous avons posé $D^4 \tau(x) = \tau^{(4)}(x) + \gamma(x)$

$$D^4 \tau(x) = \frac{\tau(x-2h) - 4\tau(x-h) + 6\tau(x) - 4\tau(x+h) + \tau(x+2h)}{h^4} = \frac{1}{h^4} \delta^4 \tau(x) \quad (x = nh)$$

$\delta^4 \tau(x)$ est la différence centrale d'ordre 4.

$$\text{Or } \tau^{(4)}(x) = \frac{1}{h^4} \left[\delta^4 \tau - \frac{1}{6} \delta^6 \tau + \frac{7}{240} \delta^8 \tau - \frac{41}{7560} \delta^{10} \tau + \frac{479}{453600} \delta^{12} \tau - \frac{559}{277200} \delta^{14} \tau + \frac{266681}{5054048000} \delta^{16} \tau - \frac{63397}{6810804000} \delta^{18} \tau + \frac{514.639}{257297040000} \delta^{20} \tau + \dots \right]^*$$

$$\tau(x) = \sum_0^3 B_j e^{a_j x} \quad \delta^{2n} \tau(x) = \sum_0^{2n} (-1)^k C_{2n}^k E^k \left[\sum_0^3 B_j e^{a_j(x-nh)} \right] \quad (E^k f(x) = f(x+kh))$$

$$\delta^{2n} \tau(x) = \sum_0^3 B_j e^{a_j(x-nh)} \sum_0^{2n} (-1)^k C_{2n}^k e^{a_j kh} = \sum_0^3 B_j e^{a_j(x-nh)} (1 + e^{a_j h})^{2n}$$

$$\delta^{2n} \tau(x) = \sum_0^3 B_j e^{a_j x} (e^{\frac{a_j h}{2}} - e^{-\frac{a_j h}{2}})^{2n} = \sum_0^3 B_j e^{a_j x} e^{2n} \text{sh}^2 \frac{a_j h}{2}$$

Comme $e^2 \text{sh}^2 \frac{a_j h}{2} = \varepsilon_j k h^2$; $\varepsilon_0 = \varepsilon_2 = 1$; $\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = -1$

$$\delta^{2n} \tau(x) = (i)^n k^n h^{2n} \sum_0^3 (\varepsilon_j)^n B_j e^{a_j x}$$

* Cf Journal of Mathematics and Physics XXII, 1, pp 115-135.

	$10^4 G_2(0,9; 1-t)$	$10^4 G_2(0,1; 1-t)$
t	$10^4 G_1(0,1; t)$	$10^4 G_1(0,9; t)$
0	1,56482522	- 1,99942357
0,05	- 0,22052350	- 1,77552844
0,10	- 1,12479632	- 1,36141405
0,15	- 1,38503215	- 0,92277795
0,20	- 1,27923912	- 0,54656933
0,25	- 1,00860865	- 0,26559683
0,30	- 0,70170798	- 0,08003788
0,35	- 0,42893850	0,02626175
0,40	- 0,21966040	0,07486620
0,45	- 0,07773427	0,08637377
0,50	0,00637459	0,07739791
0,55	0,04726981	0,05973894
0,60	0,05960298	0,04079076
0,65	0,05555938	0,02449380
0,70	0,04402463	0,01239633
0,75	0,03073337	0,00458494
0,80	0,01888307	0,00038558
0,85	0,00987417	- 0,00117671
0,90	0,00398411	- 0,00112479
0,95	0,00088729	- 0,00042884
1	0	0

	$10^3 G_2(0,8; 1-t)$	$10^3 G_2(0,2; 1-t)$
t	$10^3 G_1(0,2; t)$	$10^3 G_1(0,8; t)$
0	1,30980421	- 1,36141804
0,05	0,52122348	- 0,92278301
0,10	0,03855859	- 0,54656934
0,15	- 0,20911707	- 0,26558625
0,20	- 0,29723915	- 0,08001187
0,25	- 0,29065349	0,02630671
0,30	- 0,23787668	0,07493073
0,35	- 0,17100898	0,08645303
0,40	- 0,10848596	0,07747785
0,45	- 0,05877974	0,05979188
0,50	- 0,02394445	0,04077097
0,55	- 0,00248023	0,02433494
0,60	0,00863125	0,01201318
0,65	0,01265235	0,00388346
0,70	0,01241317	- 0,00071394
0,75	0,01005097	- 0,00269821
0,80	0,00700336	- 0,00297239
0,85	0,00413144	- 0,00229948
0,90	0,00188830	- 0,00127923
0,95	0,00048126	- 0,00038131
1	0	0

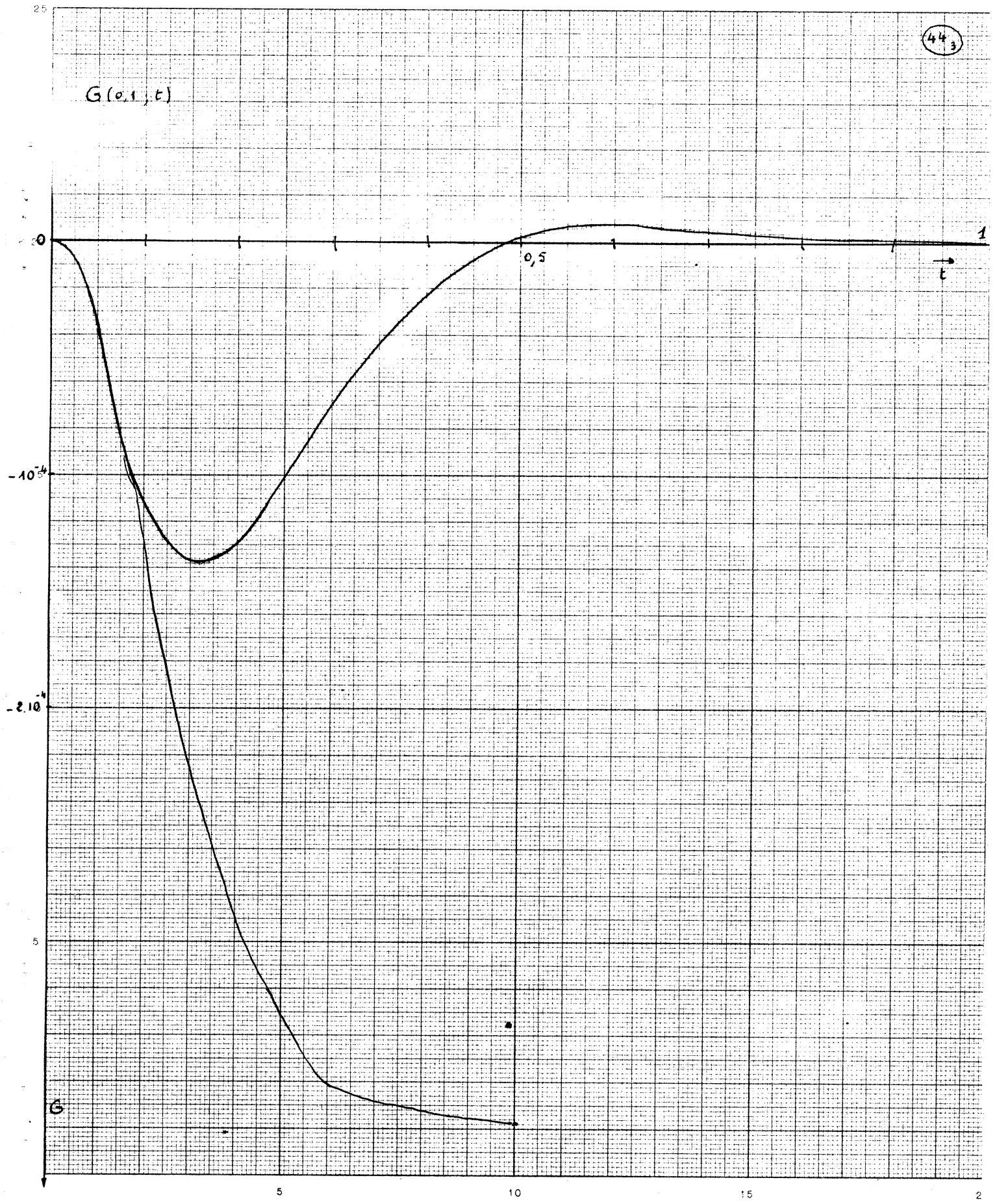
	$10^3 G_2(0,7; 1-t)$	$10^2 G_2(0,3; 1-t)$
t	$10^3 G_1(0,3; t)$	$10^2 G_1(0,7; t)$
0	+ 4,10104234	- 5,46588242
0,05	+ 2,47369216	- 2,65615135
0,10	+ 1,23963341	- 0,80037889
0,15	+ 0,41213266	+ 0,26291487
0,20	- 0,07139416	+ 0,74930736
0,25	- 0,30076767	+ 0,86470024
0,30	- 0,36412362	+ 0,77510941
0,35	- 0,35375321	+ 0,59836522
0,40	- 0,26172839	+ 0,40817094
0,45	- 0,18116043	+ 0,24364446
0,50	- 0,11005847	+ 0,11997458
0,55	- 0,05582968	+ 0,03781948
0,60	- 0,01933285	- 0,00952458
0,65	+ 0,00198377	- 0,03129212
0,70	+ 0,01194035	- 0,03641236
0,75	+ 0,01455178	- 0,03215995
0,80	+ 0,01241317	- 0,02378766
0,85	+ 0,00852901	- 0,01472225
0,90	+ 0,00440246	- 0,00701708
0,95	+ 0,00124416	- 0,00185821
1	0	0

	$10^3 G_2(0,6; 1-t)$	$10^3 G_2(0,4; 1-t)$
t	$10^3 G_1(0,4; t)$	$10^3 G_1(0,6; t)$
0	+ 7,73915413	- 3,00819170
0,05	+ 5,97691295	+ 2,62255904
0,10	+ 4,07507621	+ 7,48662065
0,15	+ 2,43680076	+ 8,64189406
0,20	+ 1,20131819	+ 7,74778509
0,25	+ 0,37075838	+ 5,98213568
0,30	- 0,09524589	+ 4,08170945
0,35	- 0,31624495	+ 2,43750679
0,40	- 0,37271912	+ 1,20124129
0,45	- 0,35739174	+ 0,37926527
0,50	- 0,26224962	- 0,09576705
0,55	- 0,18009000	- 0,31655981
0,60	- 0,10856300	- 0,37271910
0,65	- 0,05476760	- 0,33707683
0,70	- 0,01933285	- 0,26172839
0,75	+ 0,00046718	- 0,17959680
0,80	+ 0,00863125	- 0,10848596
0,85	+ 0,00924349	- 0,05567349
0,90	+ 0,00596029	- 0,02196604
0,95	+ 0,00193943	- 0,00475553
1	0	0

	$10^3 G_2(0,5; 1-t)$
t	$10^3 G_1(0,5; t)$
0	7,48066029
0,05	6,63565578
0,10	7,73979150
0,15	5,97564931
0,20	4,07709786
0,25	2,45463622
0,30	1,19974583
0,35	0,37171707
0,40	-0,09575703
0,45	-0,31634609
0,50	-0,37255843
0,55	-0,33717302
0,60	-0,26224962
0,65	-0,18063822
0,70	-0,11105847
0,75	-0,05763822
0,80	-0,02394446
0,85	-0,00601914
0,90	0,00063745
0,95	0,00098320
1	0

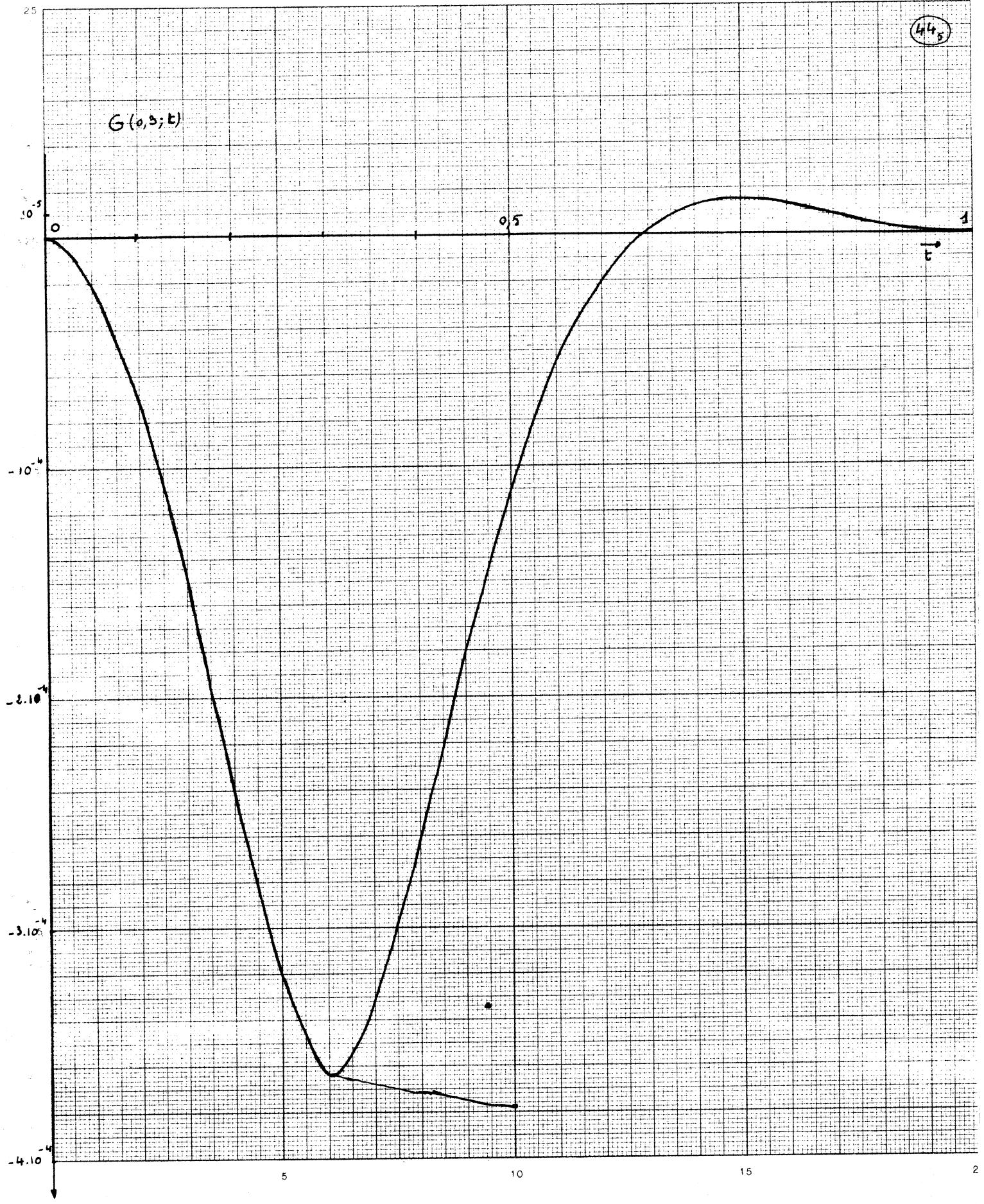
443

$G(\sigma, t)$



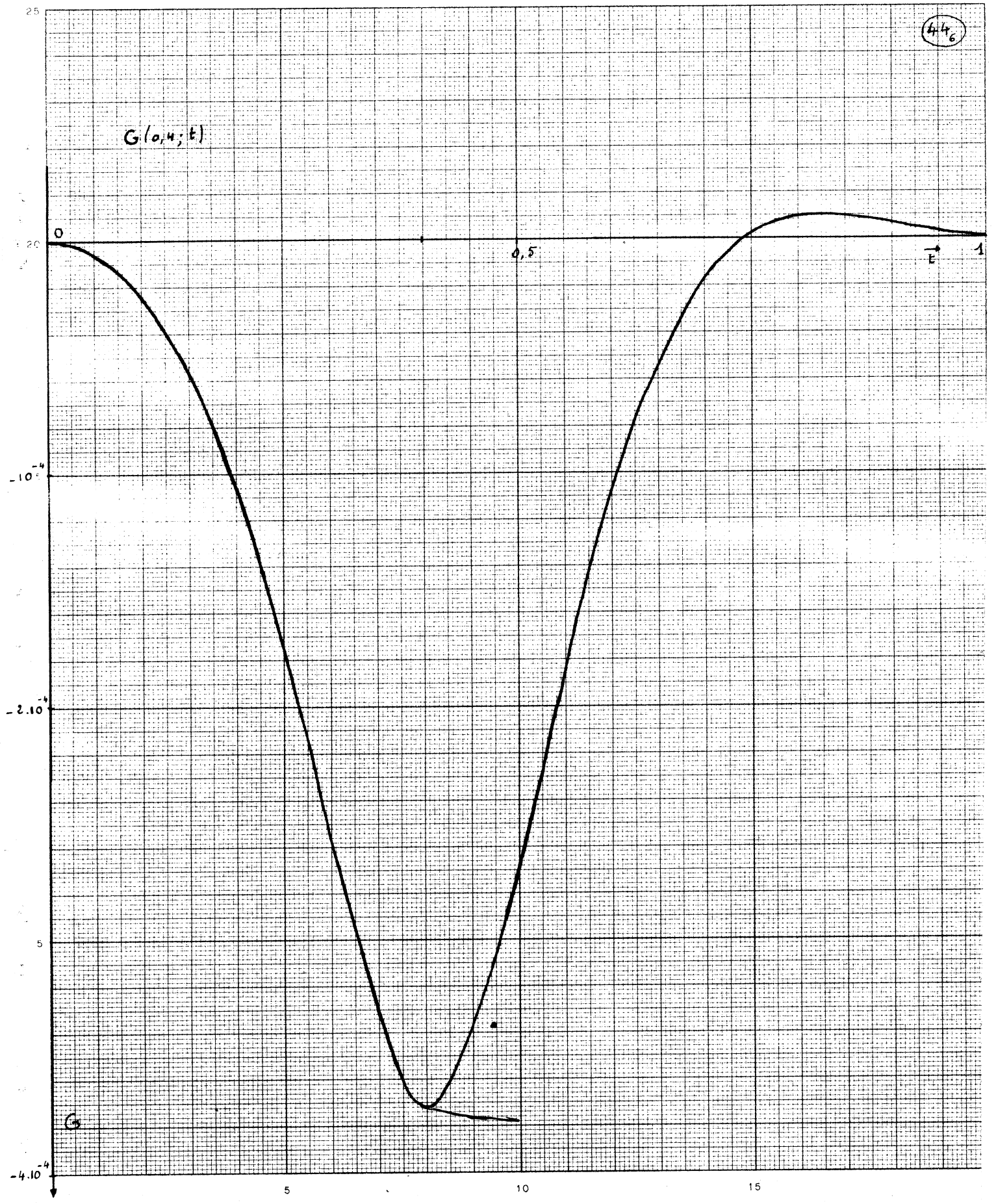
445

$G(\theta, \theta; t)$

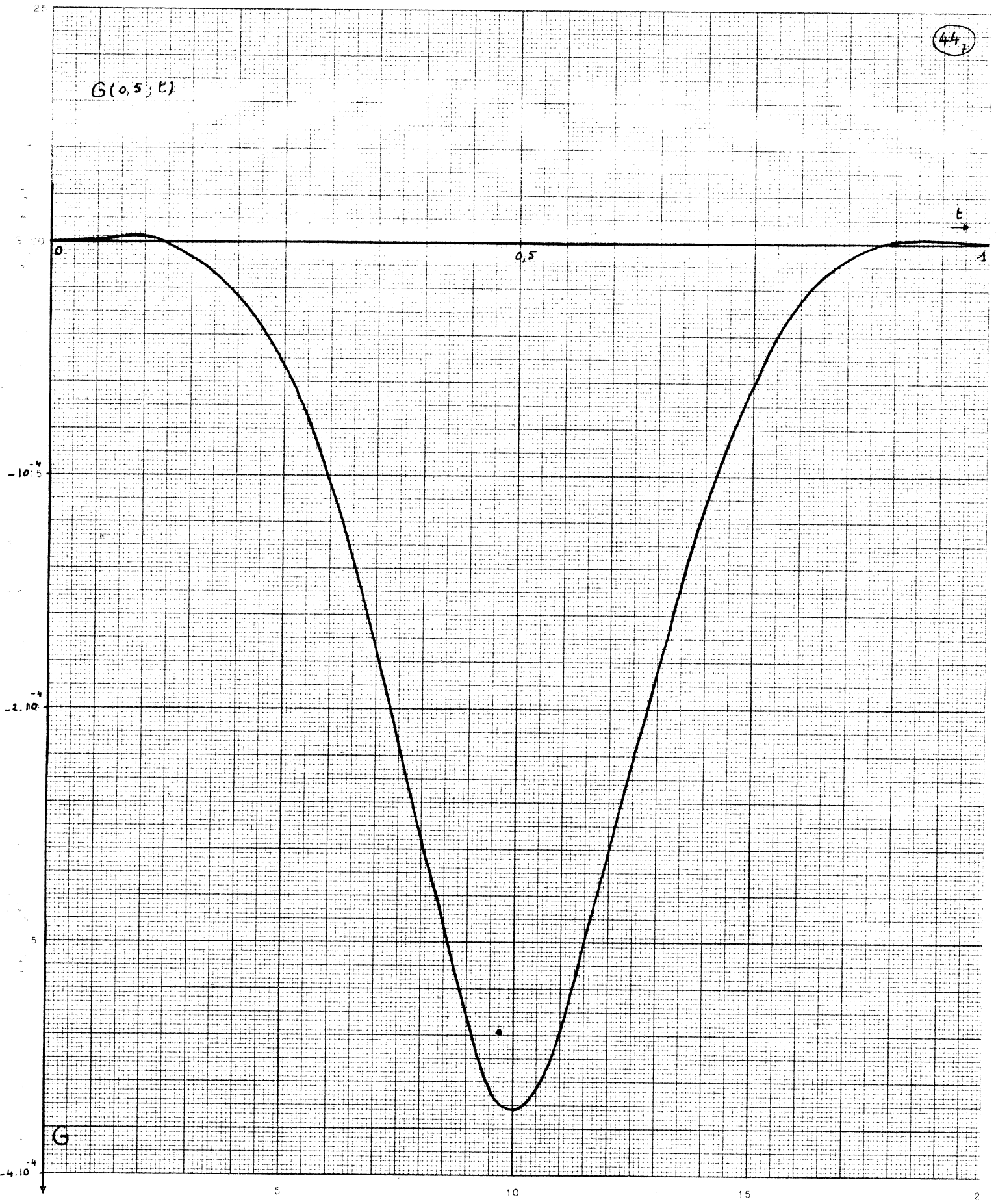


446

$G(\sigma, \eta; t)$



$G(0,5;t)$



G

5

10

15

2

Si n est pair $\sum_{j=0}^3 (\epsilon_j)^n B_j e^{q_j x} = \tau_1(x) = \tau(x) - \frac{3m}{k^2}$

Si n est impair $\sum_{j=0}^3 (\epsilon_j)^n B_j e^{q_j x} = i \tau_2(x) = B_0 e^{q_0 x} + B_2 e^{q_2 x} - (B_1 e^{q_1 x} + B_3 e^{q_3 x})$

Calculons $\tau_2(x)$

$$B_0 e^{q_0 x} - B_3 e^{q_3 x} = -\frac{6m}{k^2 D} \left\{ (p_0^2 + q_0^2) [e^{u_0 x} x \operatorname{erf} \sin v_0 x + e^{u_0(x-1)} x \operatorname{erf} \sin v_0(x-1)] \right. \\ \left. - p_0^2 [e^{u_0 x} x \operatorname{erf} \sin v_0(x-2) + e^{u_0(x-1)} x \operatorname{erf} \sin v_0(x+1)] - [e^{u_0(x-2)} x \operatorname{erf} \sin v_0 x + e^{u_0(x+1)} x \operatorname{erf} \sin v_0(x-1)] \right\} q_0^2 \\ + i p_0 q_0 [e^{u_0 x} x \operatorname{erf} \cos v_0(x-2) + e^{u_0(x-1)} x \operatorname{erf} \cos v_0(x+1) - e^{u_0(x-2)} x \operatorname{erf} \cos v_0 x - e^{u_0(x+1)} x \operatorname{erf} \cos v_0(x-1)] \}$$

On obtient $B_1 e^{q_1 x} - B_2 e^{q_2 x}$ en changeant u_0 en $-u_0$ et q_0 en $(-q_0)$ dans l'expression précédente. Donc :

$$\tau_2(x) = -\frac{24m}{k^2 D} \left\{ p_0^2 [(\sin v_0 x + \sin v_0(2-x)) \operatorname{Sh} u_0 x + (\sin v_0(1-x) + \sin v_0(1+x)) \operatorname{Sh} u_0(1-x)] \right. \\ \left. + q_0^2 [\sin v_0 x (\operatorname{Sh} u_0 x + \operatorname{Sh} u_0(2-x)) + \sin v_0(1-x) (\operatorname{Sh} u_0(1-x) + \operatorname{Sh} u_0(1+x))] \right\} \\ + p_0 q_0 [\cos v_0(2-x) \operatorname{Ch} u_0 x + \cos v_0(1+x) \operatorname{Ch} u_0(1-x) - \cos v_0 x \operatorname{Ch} u_0(2-x) - \cos v_0(1-x) \operatorname{Ch} u_0(1+x)] \}$$

Ainsi :

$$\delta^4 \tau = k^3 h^6 \tau_2(x) ; \delta^8 \tau = k^4 h^8 \tau_1(x) ; \delta^{10} \tau = -k^5 h^{10} \tau_2(x) ; \delta^{12} \tau = -k^6 h^{12} \tau_1(x) \dots$$

$$y(x) = \frac{1}{h^4} \delta^4 \tau - \frac{1}{h^4} \left[\delta^4 \tau - \frac{1}{6} \delta^6 \tau + \frac{7}{240} \delta^8 \tau + \dots \right]$$

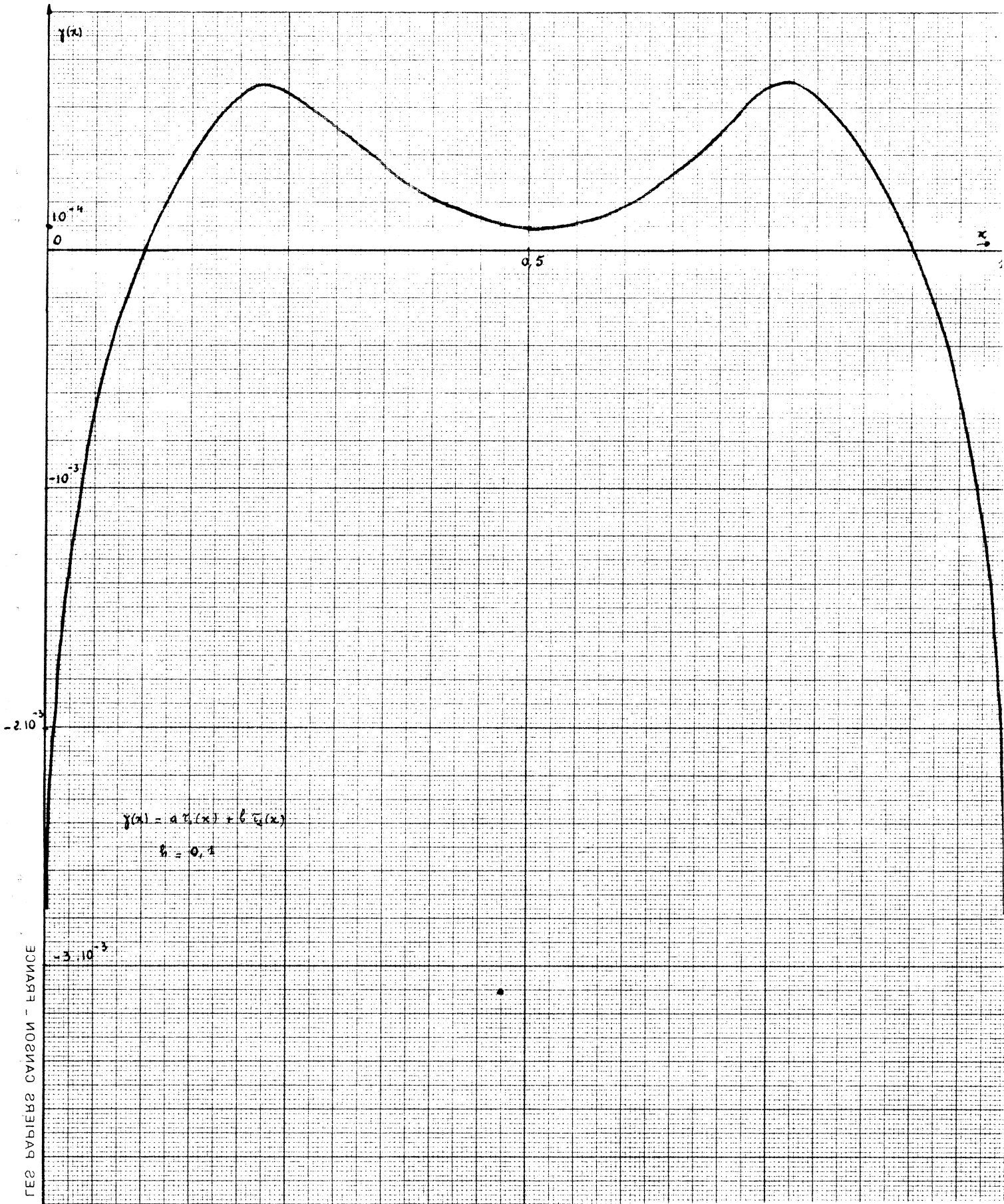
$$y(x) = a \tau_1(x) + b \tau_2(x) \\ a = \frac{1}{6} k^3 h^2 - \frac{41}{7560} k^5 h^6 + \frac{59}{277200} k^7 h^{10} - \frac{63397}{6810804000} k^9 h^{14} + \dots \\ b = -\frac{7}{240} k^4 h^4 + \frac{479}{435600} k^6 h^8 - \frac{266681}{6054048000} k^8 h^{12} + \frac{514639}{257297040000} k^{10} h^{16} + \dots$$

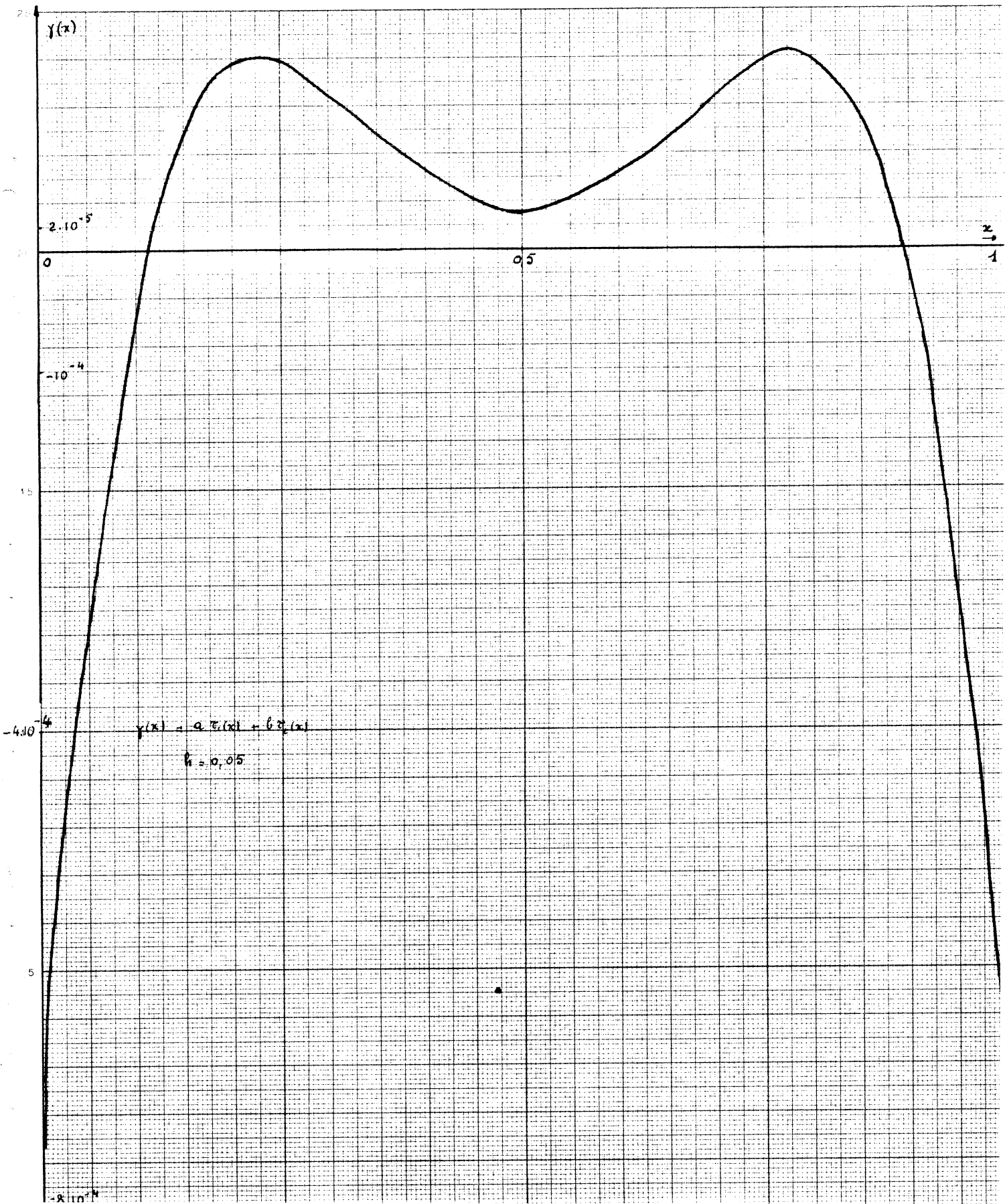
Graphiques : Nous avons construit $y(x)$ pour $x = nh$ et $h = 0,01 ; h = 0,05 ; h = 0,1$
 D'après la théorie de la résolution d'un système différentiel à l'aide de la fonction de Green nous savons que la solution du système (V) s'écrit :

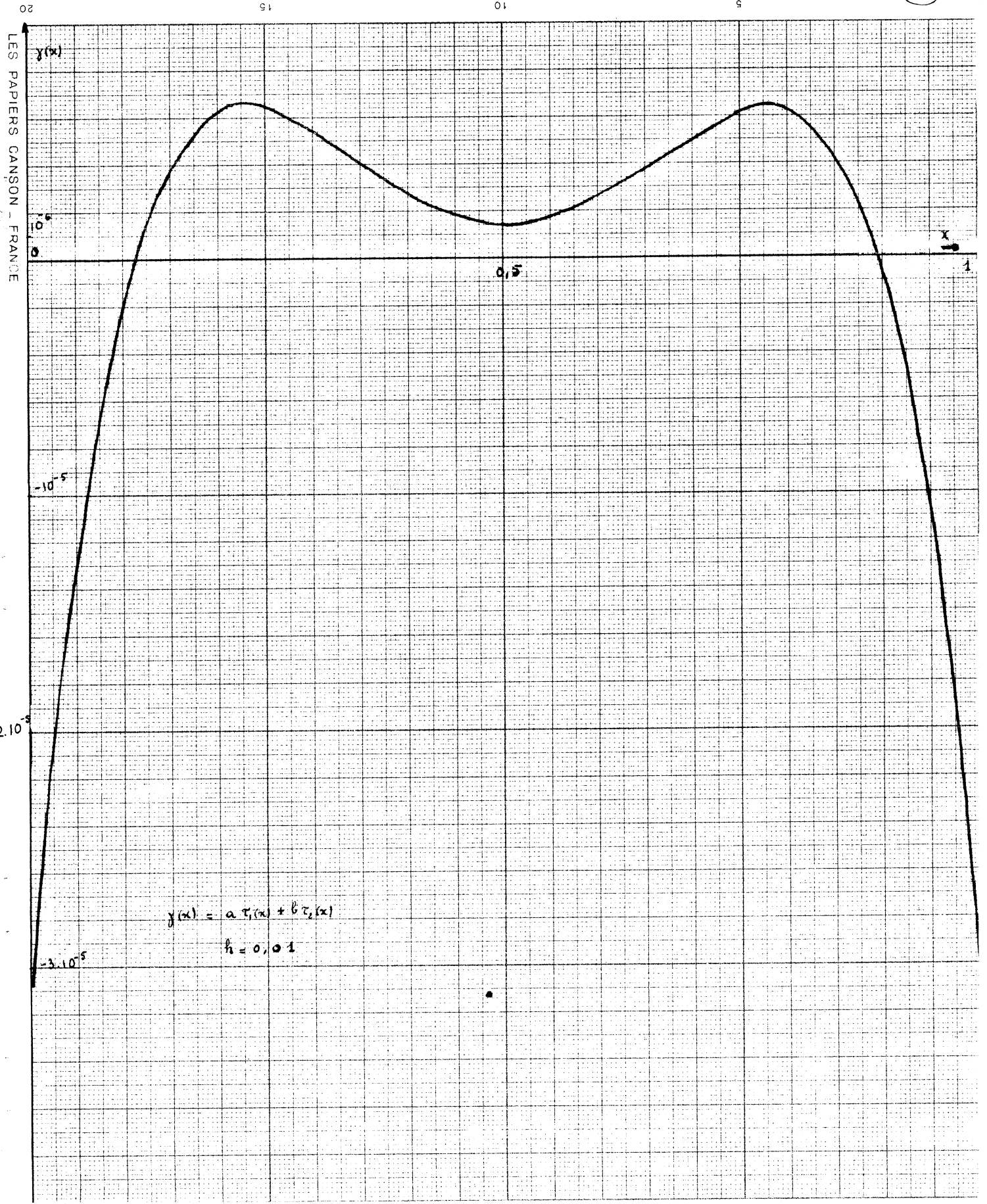
$$E(x) = \int_0^1 G(x,t) y(t) dt + \int_0^1 [\beta_1(x) + \beta_2(x)]$$

$\beta_1(x)$ et $\beta_2(x)$ vérifient les équations différentielles :

- $\beta_1^{(4)}(x) + k^2 \beta_1(x) = 0 \quad \beta_1(0) = \beta_1(1) = \beta_1'(1) = 0 ; \beta_1'(0) = 1$
- $\beta_2^{(4)}(x) + k^2 \beta_2(x) = 0 \quad \beta_2(0) = \beta_2(1) = \beta_2'(0) = 0 ; \beta_2'(1) = 1$

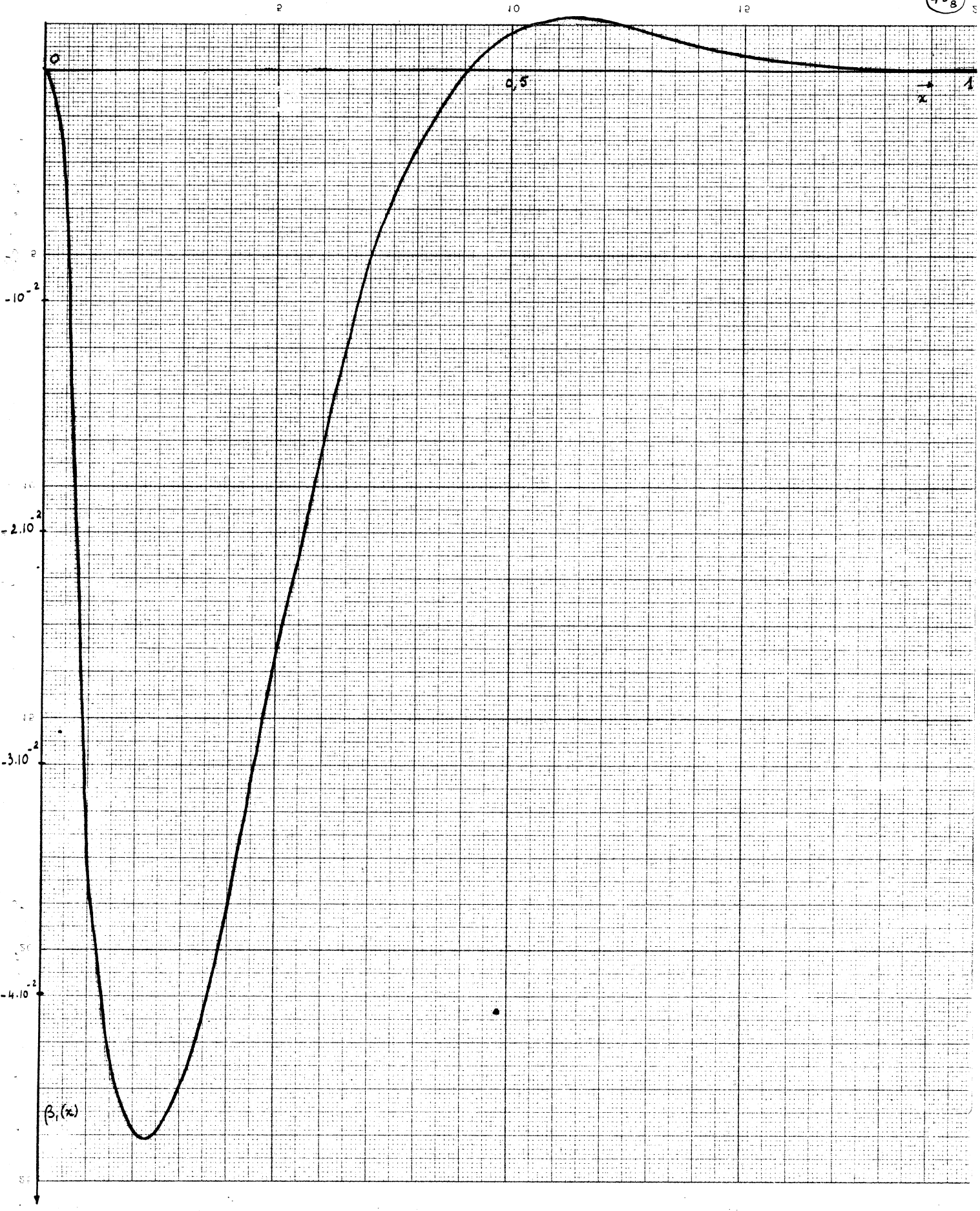






$h = 0,1$ x	$10^2 \beta_1(x)$	$10^2 \beta_2(x)$	$10^9 \gamma_0 [\beta_1(x) + \beta_2(x)]$
0	0	0	0
0,1	-4,60393069	0,00621271	-1,86904883
0,2	-3,53562459	0,03914950	-1,42137528
0,3	-1,56636011	0,11079059	-0,59171322
0,4	-0,32071805	0,19074653	-0,05283558
0,5	0,14437381	0,14437379	+0,11738070
0,6	0,19074653	-0,32071809	-0,05283560
0,7	0,11079059	-1,56636015	-0,59171323
0,8	0,03914950	-3,53562456	-1,42137526
0,9	0,00621272	-4,60393048	-1,86904874
1	0	0	0

$h = 0,05$ x	$10^2 \beta_1(x)$	$10^2 \beta_2(x)$	$10^{11} \gamma_0 [\beta_1(x) + \beta_2(x)]$
0	0	0	0
0,05	-3,46341797	0,00108091	-2,23682776
0,10	-4,60393069	0,00621271	-2,97033565
0,15	-4,38988688	0,01813206	-2,82435314
0,20	-3,53562459	0,03914950	-2,25888248
0,25	-2,50698294	0,07043568	-1,57412073
0,30	-1,56636011	0,11079059	-0,94036434
0,35	-0,82985521	0,15484008	-0,43609057
0,40	-0,32071805	0,19074653	-0,08396753
0,45	-0,01185430	0,19776762	+0,12010848
0,50	0,14437381	0,14437379	+0,18654413
0,55	0,19776763	-0,01185434	+0,12010847
0,60	0,19074653	-0,32071809	-0,08396756
0,65	0,15484008	-0,82985526	-0,43609060
0,70	0,11079059	-1,56636015	-0,94036436
0,75	0,07043568	-2,50698296	-1,57412074
0,80	0,03914950	-3,53562456	-2,25888246
0,85	0,01813206	-4,38988680	-2,82435308
0,90	0,00621272	-4,60393048	-2,97033551
0,95	0,00108091	-3,46341765	-2,23682755
1	0	0	0



$$\begin{cases} \beta_2(x) = \beta_0^{(1)} e^{r_0 x} + \beta_1^{(1)} e^{r_1 x} + \beta_2^{(1)} e^{r_2 x} + \beta_3^{(1)} e^{r_3 x} \\ \sum_0^3 \beta_i^{(1)} = 0 ; \sum_0^3 \beta_i^{(1)} r_i = 0 ; \sum_0^3 \beta_i^{(1)} e^{r_i} = 0 ; \sum_0^3 \beta_i^{(1)} r_i e^{r_i} = +1 \end{cases}$$

Si nous comparons ce système au système (V''') on voit que :

$$\beta_2(x) = \frac{4\sqrt{ek}}{\Delta} g(x) = \frac{4\sqrt{ek}}{\Delta} \left[\sin\sqrt{\frac{k}{2}}(1-x) \operatorname{Ch}\sqrt{\frac{k}{2}}(1+x) + \cos\sqrt{\frac{k}{2}}(1+x) \operatorname{Sh}\sqrt{\frac{k}{2}}(1-x) - \cos\sqrt{\frac{k}{2}}(1-x) \operatorname{Sh}\sqrt{\frac{k}{2}}(1+x) - \sin\sqrt{\frac{k}{2}}(1-x) \operatorname{Ch}\sqrt{\frac{k}{2}}(1+x) \right]$$

Par raison de symétrie : $\beta_1(x) = -\frac{4\sqrt{ek}}{\Delta} g(1-x)$

Calculons γ_0 : $\gamma_0 = [-\tau'(x)]_{x=0}$

$$\begin{aligned} \tau'(x) = & -\frac{24m}{k^2 D} \left\{ p_0^2 [-v_0 ((\sin v_0 x + \sin v_0(2-x)) \operatorname{Ch} u_0 x - (\sin v_0(1-x) + \sin v_0(1+x)) \operatorname{Ch} u_0(1-x)) \right. \\ & + u_0 ((\cos v_0 x - \cos v_0(2-x)) \operatorname{Sh} u_0 x - (\cos v_0(1-x) - \cos v_0(1+x)) \operatorname{Sh} u_0(1-x))] \\ & + q_0^2 [-v_0 ((\operatorname{Ch} u_0 x - \operatorname{Ch} u_0(x-2)) \sin v_0 x - (\operatorname{Ch} u_0(1-x) - \operatorname{Ch} u_0(1+x)) \sin v_0(1-x)) \\ & \quad \left. + u_0 (\cos v_0 x (\operatorname{Sh} u_0 x - \operatorname{Sh} u_0(x-2)) - \cos v_0(1-x) (\operatorname{Sh} u_0(1-x) + \operatorname{Sh} u_0(1+x))) \right] \\ & + p_0 q_0 [v_0 ((\cos v_0(1+x) \operatorname{Sh} u_0(1-x) - \cos v_0(2-x) \operatorname{Sh} u_0 x - \cos v_0 x \operatorname{Sh} u_0(2-x) + \cos v_0(1-x) \operatorname{Sh} u_0(1+x)) \\ & \quad \left. + u_0 (\sin v_0(2-x) \operatorname{Ch} u_0 x - \sin v_0(1+x) \operatorname{Ch} u_0(1-x) + \sin v_0 x \operatorname{Ch} u_0(2-x) - \sin v_0(1+x) \operatorname{Ch} u_0(1+x))] \right\} \end{aligned}$$

$$\tau'(0) = -\frac{24m}{k^2 D} (\operatorname{Ch} u_0 - \cos v_0) \{ 2v_0 p_0^2 \sin v_0 + 2u_0 q_0^2 \operatorname{Sh} u_0 - p_0 q_0 (2v_0 \operatorname{Sh} u_0 + 2u_0 \sin v_0) \}$$

$$\tau'(0) = -\frac{48m}{k^2 D} (\operatorname{Ch} u_0 - \cos v_0) (p_0 v_0 - u_0 q_0) (p_0 \sin v_0 - q_0 \operatorname{Sh} u_0)$$

$$\gamma_0 = \frac{3m}{k^2} \frac{(p_0 v_0 - u_0 q_0) (\operatorname{Ch} u_0 - \cos v_0)}{p_0 \sin v_0 + q_0 \operatorname{Sh} u_0}$$

34 Etude de la convergence de $\tau(x)$ vers $\theta(x)$ lorsque $h \rightarrow 0$

$$\operatorname{Sh} \alpha_0 \frac{h}{2} = \sqrt{\frac{k}{2}} \frac{h}{2} (1+i) \Rightarrow \sqrt{\frac{k}{2}} \frac{h}{2} (1+i) = \frac{\alpha_0 h}{2} + \frac{(\alpha_0 h)^3}{2^3} \frac{1}{3!} + \dots + \left(\frac{\alpha_0 h}{2}\right)^{2p+1} \frac{1}{2^{p+1}!} + \dots$$

$$|\tau_0 - \alpha_0| = 2 \left| \left(\frac{\alpha_0}{2}\right)^3 \frac{h^2}{3!} + \dots + \left(\frac{\alpha_0}{2}\right)^{2p+1} \frac{h^{2p}}{2^{p+1}!} + \dots \right|$$

$$|\tau_0 - \alpha_0| \leq \left| \left(\frac{\alpha_0}{2}\right)^3 \frac{h^2}{3!} \left\{ 1 + \left|\left(\frac{\alpha_0 h}{2}\right)^2 \frac{3!}{5!} + \dots + \left|\left(\frac{\alpha_0 h}{2}\right)^{2(p-1)} \frac{3!}{2^{p+1}!} + \dots \right\} \right|$$

$$|\tau_0 - \alpha_0| \leq \left| \left(\frac{\alpha_0}{2}\right)^3 \frac{h^2}{24} \left\{ 1 + \left|\left(\frac{\alpha_0 h}{2}\right)^2 \frac{1}{2!} + \dots + \left|\left(\frac{\alpha_0 h}{2}\right)^{2(p-1)} \frac{1}{2^{p-1}!} + \dots \right\} \right|$$

$$|\tau_0 - \alpha_0| \leq |\alpha_0|^3 \frac{h^2}{24} \operatorname{Ch} \left| \frac{\alpha_0 h}{2} \right|$$

Comme $|\alpha_0|$ et $\ln|\alpha_2 h|$ sont bornés lorsque h est petit :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad h \leq \eta \Rightarrow |\tau_0 - \alpha_0| \leq \varepsilon_0$$

Il est évident que $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad h \leq \eta \rightarrow |\tau_j - \alpha_j| \leq \varepsilon_j \quad j = 0, 1, 2, 3$.

$$++ \quad \beta_j = 16 \operatorname{Sh} \alpha_j h - \operatorname{Sh} 2 \alpha_j h$$

$$= 16 \left[\alpha_j h + \frac{(\alpha_j h)^3}{3!} + \dots + \frac{(\alpha_j h)^{2p+1}}{2p+1!} + \dots \right] - 2 \left[2 \alpha_j h + \frac{(2 \alpha_j h)^3}{3!} + \dots + \frac{(2 \alpha_j h)^{2p+1}}{2p+1!} + \dots \right]$$

$$\beta_j = 12 \alpha_j h + 16 \frac{(\alpha_j h)^3}{3!} \left[\alpha_j h + \dots + \frac{(\alpha_j h)^{2p-1}}{2p-1!} + \dots \right] - 2 \frac{(2 \alpha_j h)^3}{3!} \left[2 \alpha_j h + \dots + \frac{(2 \alpha_j h)^{2p-1}}{2p-1!} + \dots \right]$$

$$\left| \frac{\beta_j}{12h} - \alpha_j \right| \leq \left| \frac{1}{3} \alpha_j^2 h \right| \left| \alpha_j h + \dots + \frac{(\alpha_j h)^{2p-1}}{2p-1!} + \dots \right| + \left| \frac{1}{3} \alpha_j^2 h \right| \left| 2 \alpha_j h + \dots + \frac{(2 \alpha_j h)^{2p-1}}{2p-1!} + \dots \right|$$

$$\left| \frac{\beta_j}{12h} - \alpha_j \right| \leq \frac{h}{9} |\alpha_j|^2 [2 \operatorname{Sh} |\alpha_j h| + \operatorname{Sh} |2 \alpha_j h|]$$

Cette majoration nous montre que : $\forall \varepsilon'_j > 0 \quad \exists \eta'_j > 0 \quad h \leq \eta'_j \rightarrow \left| \frac{\beta_j}{12h} - \alpha_j \right| \leq \varepsilon'_j$

$$\left| \frac{\beta_j}{12h} - \alpha_j \right| = \left| \frac{\beta_j}{12h} - \alpha_j + \tau_j - \tau_j \right| \geq \left| \left| \frac{\beta_j}{12h} - \tau_j \right| - |\alpha_j - \tau_j| \right|$$

Si $h \leq \eta'_j$ deux cas peuvent se présenter :

$$\bullet \left| \frac{\beta_j}{12h} - \tau_j \right| > |\alpha_j - \tau_j| \quad \left| \frac{\beta_j}{12h} - \tau_j \right| \leq \varepsilon'_j + |\alpha_j - \tau_j| \leq \varepsilon'_j + \varepsilon_j$$

On peut donc trouver un nombre η''_j tel que si $h \leq \eta''_j$ $\left| \frac{\beta_j}{12h} - \tau_j \right| \leq \varepsilon''_j$

$$\bullet \left| \frac{\beta_j}{12h} - \tau_j \right| < |\alpha_j - \tau_j| \quad \text{Il suffit de choisir } \varepsilon_j = \varepsilon''_j \text{ pour que } \left| \frac{\beta_j}{12h} - \tau_j \right| \leq \varepsilon''_j$$

$$\text{Donc : } \forall \varepsilon''_j > 0 \quad \exists \eta''_j > 0 \quad h \leq \eta''_j \Rightarrow \left| \frac{\beta_j}{12h} - \tau_j \right| \leq \varepsilon''_j$$

+++ Les coefficients β_j qui entrent dans l'expression de $\tau(x)$ sont donnés par :

$$D' \cdot B = P \quad D' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \frac{\beta_0}{12h} & \frac{\beta_1}{12h} & \frac{\beta_2}{12h} & \frac{\beta_3}{12h} \\ e^{\alpha_0} & e^{\alpha_1} & e^{\alpha_2} & e^{\alpha_3} \\ \frac{\beta_0}{12h} e^{\alpha_0} & \frac{\beta_1}{12h} e^{\alpha_1} & \frac{\beta_2}{12h} e^{\alpha_2} & \frac{\beta_3}{12h} e^{\alpha_3} \end{pmatrix}$$

D'autre part : $\Delta \cdot A = P$ peut s'écrire $\Delta \cdot (A - B + B) = P$

$$\begin{cases} \Delta \cdot (A - B) + \Delta \cdot B = P \\ D' \cdot B = P \end{cases} \Rightarrow \Delta \cdot (A - B) = (D' - \Delta) \cdot B \quad ; \quad A - B = \Delta^{-1} (D' - \Delta) \cdot B$$

$$A - B = E \cdot B \quad E = \Delta^{-1} (D' - \Delta)$$

Tous les termes de la matrice Δ' ont un module borné.

Tous les termes de la matrice $(D'-D)$ peuvent être rendus inférieurs à un nombre $\varepsilon > 0$ aussi petit qu'on le désire - d'après ce que nous avons vu plus haut.

Puisque l'on peut rendre, ainsi, tout terme de E inférieur en module à tout nombre ^{positif} aussi petit qu'on le désire, on voit facilement que (B_j) est borné et que :

$$\forall \varepsilon''' > 0 \quad \exists \eta''' > 0 \quad h \leq \eta''' \Rightarrow |A_j - B_j| \leq \varepsilon'''$$

$$\begin{aligned} \theta(x) - \tau(x) &= \sum_j (A_j e^{\alpha_j x} - B_j e^{\alpha_j x}) = \sum_j (A_j - B_j) e^{\alpha_j x} + B_j (e^{\alpha_j x} - e^{\alpha_j x}) \\ &= \sum_j (A_j - B_j) e^{\alpha_j x} + B_j e^{\alpha_j x} [1 - e^{(\alpha_j - \gamma_j)x}] \end{aligned}$$

$$|\theta(x) - \tau(x)| \leq \sum_j |e^{\alpha_j x}| |A_j - B_j| + |B_j e^{\alpha_j x}| |1 - e^{(\alpha_j - \gamma_j)x}|$$

$$\forall x \in [0, 1] \quad |e^{\alpha_j x}| = e^{\frac{\sqrt{k}}{2} x} \leq e^{\frac{\sqrt{k}}{2}}$$

$$|1 - e^{(\alpha_j - \gamma_j)x}| = |(\alpha_j - \gamma_j)x + \frac{(\alpha_j - \gamma_j)^2 x^2}{2!} + \dots + \frac{(\alpha_j - \gamma_j)^p x^p}{p!} + \dots|$$

$$|1 - e^{(\alpha_j - \gamma_j)x}| \leq |\alpha_j - \gamma_j| |x| \left\{ 1 + |\alpha_j - \gamma_j| \frac{x}{2!} + \dots + |\alpha_j - \gamma_j|^{p-1} \frac{x^{p-1}}{p!} + \dots \right\}$$

$$|1 - e^{(\alpha_j - \gamma_j)x}| \leq \varepsilon x e^{|\alpha_j - \gamma_j|x} \leq \varepsilon e^\varepsilon \quad \text{si } h \leq \eta$$

Posons $\max_j |B_j| = M$.

$$|\theta(x) - \tau(x)| \leq 4 e^{\frac{\sqrt{k}}{2}} \varepsilon''' + 4 M e^{\frac{\sqrt{k}}{2}} \varepsilon e^\varepsilon \quad \text{quel que soit } x \in [0, 1]$$

On peut donc trouver un nombre $\eta'''' > 0$ tel que si $h \leq \eta''''$ $|\theta(x) - \tau(x)| \leq \varepsilon''''$ $\varepsilon'''' > 0$ choisi à l'avance, et ceci quel que soit $x \in [0, 1]$.

Donc $\tau(x)$ converge uniformément vers $\theta(x)$ sur $[0, 1]$ lorsque $h \rightarrow 0$.

$h=0,1$ x	$10^{-10} \eta(x) = 10^{-10} (\theta(x) - \tau(x))$		$\varepsilon(x) = \int_0^1 G y dt + \int_0^1 (\beta_1 + \beta_2)$ calculé au planimètre
0,1	-125,8		-121,5
0,2	-329,9		
0,3	-395,8		-385,0
0,4	-338,9		-333,0
0,5	-297,0		-296,0
$h=0,05$ x	$10^{-9} \eta(x) = 10^{-9} (\theta(x) - \tau(x))$	$10^{-9} \varepsilon(x)$ calculé par la méthode de Simpson	$\varepsilon(x)$ calculé au planimètre
0,1	-2,1928	-2,0215	
0,2	-7,2816	-6,0663	- 7,600
0,3	-9,4877	-9,6007	
0,4	-8,5195	-8,6311	
0,5	-7,6199	-7,4907	
$h=0,01$ x	$10^{-10} \eta(x) = 10^{-10} (\theta - \tau)$	$10^{-10} \varepsilon(x)$ calculé par méthode de Simpson	$\varepsilon(x)$ calculé au planimètre
0,1	-0,8102	-0,7541	
0,2	-2,8342	-2,3063	-281,5
0,3	-3,7607	-3,8027	
0,4	-3,4122	-3,4615	
0,5	-3,0652	-3,0197	

Nous avons calculé $\varepsilon(x) = \int_0^1 G(x,t) y(t) dt + \int_0^1 (\beta_1(x) + \beta_2(x))$ au moyen d'un planimètre pour $h=0,1$ à cause de la forme des courbes $G(x,t) y(t)$.
 L'intégration par la méthode de Simpson donnait de mauvais résultats.
 Pour la même raison nous avons amélioré le résultat obtenu pour $x=0,2$ en utilisant $h=0,05$ et $h=0,01$ en utilisant un planimètre.

Chapitre IV

§1 Étude de la partie principale de l'erreur locale :

Nous savons que : $y(x) = a \bar{r}_1(x) + b \bar{r}_2(x)$

$$\begin{cases} a = a_0 k^3 h^6 - a_1 k^5 h^6 + a_2 k^7 h^{10} - a_3 k^9 h^{14} \\ b = -b_0 k^4 h^4 + b_1 k^6 h^8 - b_2 k^8 h^{12} + b_3 k^{10} h^{16} \end{cases} \quad a_i > 0, b_i > 0$$

$$\begin{aligned} \text{Puisque } u_1 &= \frac{a_1 k^5 h^6}{a_0 k^3 h^2} & u_1 &= 302 h^4 \\ v_1 &= \frac{b_1 k^6 h^8}{b_0 k^4 h^4} & v_1 &= 350 h^4 \end{aligned}$$

$h = 0,1$	$u_1 = 0,0302$	$v_1 = 0,035$
$h = 0,05$	$u_1 = 0,00188$	$v_1 = 0,00219$
$h = 0,01$	$u_1 = 0,0000030$	$v_1 = 0,0000035$

$$u_2 = \frac{a_2 k^7 h^{10}}{a_0 k^3 h^2} \quad u_2 = 11002 h^8 \quad ; \quad v_2 = \frac{b_2 k^8 h^{12}}{b_0 k^4 h^4} \quad v_2 = 13012 h^8$$

$h = 0,1$	$u_2 = 0,00011$	$v_2 = 0,00013$
$h = 0,05$	$u_2 = 0,0000004$	$v_2 = 0,0000005$
$h = 0,01$	$u_2 = 0,000000000011$	$v_2 = 0,00000000013$

$$w_0 = \frac{b_0 k^4 h^4}{a_0 k^3 h^2} \quad w_0 = 16,86 h^2$$

$h = 0,1$	$w_0 = 0,169$
$h = 0,05$	$w_0 = 0,042$
$h = 0,01$	$w_0 = 0,00169$

En première approximation on voit que :

$$\text{si } \begin{cases} h=0,1 & y(x) \approx \frac{1}{6} k^3 h^2 \tau_1(x) - \frac{7}{240} k^4 h^4 \tau_2(x) \\ h=0,05 & y(x) \approx \frac{1}{6} k^3 h^2 \tau_1(x) \\ h=0,01 & y(x) \approx \frac{1}{6} k^3 h^2 \tau_1(x) \end{cases}$$

Ceci explique pourquoi les courbes représentant l'erreur locale dans les deux derniers cas sont approximativement dans le rapport d'affinité h^2 , comme on le constate sur les graphiques de $y(x)$ que nous avons dessinés.

D'autre part, nous pouvons faire la même remarque sur les graphiques de $y(x)$ puisque $y(x) \approx \varepsilon(x) = \int_0^1 G(x,t) y(t) dt + \int_0^1 [\beta_1(x) + \beta_2(x)]$, $\int_0^1 [\beta_1(x) + \beta_2(x)]$ étant négligeables dans les deux derniers cas.

32 Influence de l'écriture des conditions initiales sur l'exactitude de la solution approchée.

Supposons, que pour représenter la dérivée première de $\theta(h)$, nous ayons choisi l'opérateur : $\frac{\tau[(n+1)h] - \tau[(n-1)h]}{2h}$ ($n = \begin{smallmatrix} 0 \\ N \end{smallmatrix}$) — au lieu de choisir, comme nous l'avons fait : $\frac{\tau[(n-2)h] - 8\tau[(n-1)h] + 8\tau[(n+1)h] - \tau[(n+2)h]}{12h}$ ($n = \begin{smallmatrix} 0 \\ N \end{smallmatrix}$)

Alors, β_j devient : $\beta_j' = p_j' + i q_j' = Sh \alpha_j$, $p_0' = Sh u_0 h \cos x_0 h$, $q_0' = Ch u_0 h \sin x_0 h$

Or l'erreur $\varepsilon(x) = \int_0^1 G(x,t) y(t) dt + \int_0^1 [\beta_1(x) + \beta_2(x)]$ dépend de l'écriture des conditions initiales par l'intermédiaire du terme \int_0^1 qui contient p_0 et q_0 .

$$\text{En effet : } \int_0^1 = \frac{(p_0 v_0 - u_0 q_0)(Ch u_0 - \cos x_0) \frac{3m}{k^2}}{p_0 \sin x_0 + q_0 Sh u_0}$$

$$\begin{cases} 2p_0 = 8 Sh u_0 h \cos x_0 h - Sh u_0 h \cos 2x_0 h \\ 2q_0 = 8 Ch u_0 h \sin x_0 h - Ch u_0 h \sin 2x_0 h \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_0 = 3u_0 h - 12 \left(\frac{u_0^4 v_0^4}{4!} - \frac{u_0^3 v_0^2}{3!2!} + \frac{u_0^5}{5!} \right) h^5 + \dots \\ q_0 = 3v_0 h - 12 \left(\frac{v_0^5}{5!} - \frac{u_0^2 v_0^3}{2!3!} + \frac{u_0^4 v_0}{4!} \right) h^5 + \dots \end{cases}$$

Un calcul précédent nous a donné les résultats suivants :

$h = 0,1$	$\begin{cases} u_0 = 7,18547030 \\ v_0 = 6,63665585 \end{cases}$	$\begin{cases} p_0 = 2,22472480 \\ q_0 = 2,04923462 \end{cases}$
$h = 0,05$	$\begin{cases} u_0 = 7,0827542 \\ v_0 = 6,86910318 \end{cases}$	$\begin{cases} p_0 = 1,05329622 \\ q_0 = 1,03233392 \end{cases}$
$h = 0,01$	$\begin{cases} u_0 = 6,94333997 \\ v_0 = 6,93777371 \end{cases}$	$\begin{cases} p_0 = 0,208300843 \\ q_0 = 0,208133853 \end{cases}$

Ceci nous montre que nous pouvons prendre comme partie principale de p_0 et q_0 les expressions suivantes :

$$\begin{cases} p_0 \approx 3u_0 h - 12 \left(\frac{u_0 v_0^4}{4!} - \frac{u_0^3 v_0^2}{3!2!} + \frac{u_0^5}{5!} \right) h^5 \\ q_0 \approx 3v_0 h - 12 \left(\frac{v_0^5}{5!} - \frac{u_0^2 v_0^3}{2!3!} + \frac{u_0^4 v_0}{4!} \right) h^5 \end{cases}$$

Nous obtenons alors :
$$\zeta_0 \approx \frac{3m}{k^2} 12 u_0 v_0 \left(\frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} \right) (u_0^4 - v_0^4) \frac{(Ch u_0 - \cos v_0)}{p_0 \sin v_0 + q_0 Sh u_0} h^5$$

Comme $p_0 \approx q_0$ et $\begin{cases} Ch u_0 - \cos v_0 \approx 516 \\ \sin v_0 + Sh u_0 \approx 516 \end{cases}$

$$\zeta_0 \approx \frac{6m}{5k^2} (u_0^4 - v_0^4) \frac{h^5}{3v_0 h} u_0 v_0$$

Nous savons d'autre part que :

$$Ch u_0 h = 1 + \frac{(u_0 h)^2}{2!} + \varepsilon_1 = 2\gamma^2 + \sqrt{1+4\gamma^4} \quad \gamma = \sqrt{\frac{k}{2}} \frac{h}{c}$$

$$\cos v_0 h = 1 - \frac{(v_0 h)^2}{2!} + \varepsilon_2 = -2\gamma^2 + \sqrt{1+\gamma^4}$$

$$\varepsilon_1 < \frac{(u_0 h)^4}{4!} Ch u_0 h \quad ; \quad \varepsilon_2 < \frac{(v_0 h)^4}{4!} < \varepsilon_1$$

Pour $h \leq 0,1$ ε_1 et ε_2 sont négligeables

$$Ch u_0 h \approx 1 + \frac{(u_0 h)^2}{2!} \quad \cos v_0 h \approx 1 - \frac{(v_0 h)^2}{2!}$$

Donc $u_0 - v_0 \approx 4 \frac{\sqrt{1+4\gamma^4} - 1}{h^2 (u_0 + v_0)} ; \quad \sqrt{1+4\gamma^4} = 1 + 2\gamma^4 + \varepsilon_3 \quad |\varepsilon_3| < \frac{\gamma^8}{8}$

ε_3 est donc négligeable

et $\boxed{u_0 - v_0 \approx \frac{k^2 h^2}{8(u_0 + v_0)}}$. Donc : $\boxed{\zeta_0 \approx \frac{3m}{k^2} \frac{k^2 (u_0^4 + v_0^4) u_0 h^6}{60}} = \frac{3m u_0 (u_0^4 + v_0^4) h^6}{20}$

ou encore lorsque $u_0 \neq v_0 \neq \sqrt{\frac{k}{2}}$
$$\zeta_0 \approx \frac{m}{10} \left(\sqrt{\frac{k}{2}} \right)^3 h^6$$

Nous pouvons vérifier ce dernier résultat en remarquant que :

$$\frac{(\zeta_0)_{h=0,1}}{(\zeta_0)_{h=0,05}} = 62,92 \neq \left(\frac{0,1}{0,05}\right)^6 = 64$$

Cherchons une approximation de ζ_0' correspondant à $p_0' = \sin u_0 \cos v_0 h$, $q_0' = \cos u_0 \sin v_0 h$

$$\begin{cases} p_0' = u_0 h + \left(\frac{u_0^3}{3!} - \frac{u_0 v_0^2}{2!}\right) h^3 + \left(\frac{u_0 v_0^4}{4!} - \frac{u_0^3 v_0^2}{3!2!} + \frac{u_0^5}{5!}\right) h^5 + \dots \\ q_0' = v_0 h + \left(\frac{u_0^2 v_0}{2!} - \frac{v_0^3}{3!}\right) h^3 + \left(\frac{v_0^5}{5!} - \frac{u_0^2 v_0^2}{2!3!} + \frac{u_0^4 v_0}{4!}\right) h^5 + \dots \end{cases}$$

$$\zeta_0' = \frac{3m}{k^2} \left[u_0 v_0 \left(\frac{1}{3!} - \frac{1}{2!}\right) (u_0^2 + v_0^2) h^3 + \dots \right] \frac{(\sin u_0 - \cos v_0)}{p_0' \sin v_0 + q_0' \sin u_0}$$

La partie principale de ζ_0' est : $-\frac{3m}{k^2} \frac{u_0 v_0}{3} \frac{(u_0^2 + v_0^2)}{v_0 h} h^3$

Soit $\zeta_0' \approx -\frac{3m}{k^2} \frac{u_0 (u_0^2 + v_0^2)}{3} h^2$ pour h suffisamment petit.

Ceci nous montre que le terme complémentaire $\zeta_0' [\beta_1(x) + \beta_2(x)]$ aura une influence importante dans la formule donnant $\varepsilon(x)$.

Il sera du même ordre h^2 que le terme $\int_0^1 G(x,t) \gamma(t) dt$.

Nous avons vu qu'il n'en était pas ainsi dans le cas précédent.

§ 3 Amélioration des résultats obtenus, par la méthode du changement de

pas.

(53)

Considérons un premier résultat approché τ^x calculé avec un pas h , la partie principale de l'erreur faite sur le résultat rigoureux étant ε .

Supposons que nous ayons calculé un deuxième résultat τ^{xx} avec un pas h' la partie principale de l'erreur faite sur le résultat rigoureux étant $k\varepsilon$.

$$\text{Posons } \tau^x = \tilde{\tau} + \varepsilon ; \tau^{xx} = \tilde{\tau} + k\varepsilon$$

$\tilde{\tau}$ est une approximation meilleure que τ^x et τ^{xx}

$$\varepsilon = \tau^x - \tilde{\tau} = \frac{\tau^{xx} - \tilde{\tau}}{k} \quad \text{D'où : } \boxed{\tilde{\tau} = \frac{k\tau^x - \tau^{xx}}{k-1}}$$

Nous savons que $\varepsilon(x) = \int_0^1 G(x,t) f(t) dt + \int_0^1 [\beta_1(x) + \beta_2(x)]$

$$\int_0^1 = D\tau_0 - \tau_0 \quad \text{D'après le choix de l'opérateur } D : \int_0^1 \approx h^5 \cdot 3,7 \tau^{(5)}(x)$$

Donc d'une façon générale : $\varepsilon(x) \approx h^2 A_x + h^4 B_x + h^5 C_x$

D'après les résultats obtenus précédemment, le terme $C_x h^5$ n'a aucune influence pour $h = 0,01$. Pour $h = 0,05$ $C_x h^5$ influe sur le deuxième chiffre significatif et pour $h = 0,1$ sur le 1^{er} chiffre significatif de ε .

Essayons d'améliorer le résultat τ_h correspondant à $h = 0,01$ en utilisant le résultat relatif à $h = 0,05$ soit τ_{5h} .

$$\begin{cases} \tilde{\tau}_1 + h^2 A = \tau_h \\ \tilde{\tau}_1 + 25 A h^2 = \tau_{5h} \end{cases}$$

$$\boxed{\tilde{\tau}_1 = \frac{25\tau_h - \tau_{5h}}{24}}$$

Si nous utilisons les résultats relatifs à $h = 0,01$; $h = 0,05$; $h = 0,1$

$$\begin{cases} \tilde{\tau}_2 + A h^2 = \tau_h \\ \tilde{\tau}_2 + 25 A h^2 + (5)^5 C h^5 = \tau_{5h} \\ \tilde{\tau}_2 + 100 A h^2 + (10)^5 C h^5 = \tau_{10h} \end{cases}$$

$$\rightarrow \boxed{\tilde{\tau}_2 = \frac{700 \tau_h - 32 \tau_{5h} + \tau_{10h}}{669}}$$

D'après les tableaux qui suivent, nous voyons que si τ_h nous donne m décimales exactes $\tilde{\tau}_1$ nous en donne $m+1$, au moins et en certains points $m+2$, $m+3$.

Si $\tilde{\tau}_1$ nous donne p décimales exactes, $\tilde{\tau}_2$ améliore la $(p+1)^{\text{e}}$ décimale.

34 Interprétation physique de la fonction de Green du système

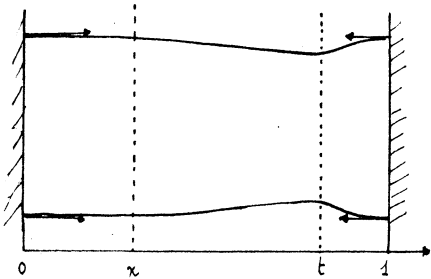
différentiel : $\varepsilon^{(4)}(x) + k^2 \varepsilon(x) = 0$; $\varepsilon(0) = \varepsilon(1) = \varepsilon'(0) = \varepsilon'(1) = 0$.

Ecrivons ce système sous la forme : $L(\varepsilon) = 0$; $U_i(\varepsilon) = 0$ $i = 0, 1, 2, 3$.

D'après ce que nous avons vu plus haut le système : $L(w) = 3m$; $U_i(w) = 0$ peut représenter le déplacement normal w de tout point de la surface moyenne d'un cylindre (C) , de faible épaisseur, encastré en ses deux extrémités et soumis à une pression uniforme p_0 .

Posons $3m = m' p_0$

Notons $m' G(x, t)$ une fonction qui représente le déplacement w en un point x de (C) , lorsque (C) est soumis à une force normale d'intensité égale à 1, en tout point du cercle d'abscisse t .



Quand on applique une pression uniforme p_0 au cylindre : $w(x) = \int_0^1 G(x, t) m' p_0 dt = \int_0^1 G(x, t) \cdot 3m dt$.

Supposons $G(x, t)$ dérivable jusqu'à l'ordre 4, sauf peut-être pour $x = t$.

Comme $m' G(x, t)$ correspond au déplacement dû à une pression extérieure nulle en dehors du point t , $L[m' G] = 0$ c.-à-d. $L(G) = 0$

D'autre part il est évident que $U_i(G) = 0$.

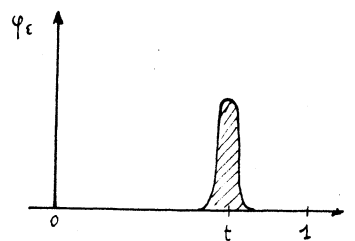
Déterminons les singularités de $G(x, t)$ pour $x = t$.

Considérons la force ponctuelle appliquée normalement à (C) en tout point x d'abscisse t , comme cas limite d'une force $\varphi_\varepsilon(x)$ nulle pour $|x-t| > \varepsilon$ et telle

que : $\int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} \varphi_\varepsilon(x) dx = 1$.

Notons $m' G_\varepsilon(x, t)$ le déplacement correspondant.

$L[m' G_\varepsilon] = m' [G_\varepsilon^{(4)} + k^2 G_\varepsilon] = m' \varphi_\varepsilon$ c.-à-d. $G_\varepsilon^{(4)} + k^2 G_\varepsilon = \varphi_\varepsilon$



Intégrons la dernière équation entre $t-\delta$ et $t+\delta$; $\delta \geq \varepsilon$

$$\int_{t-\delta}^{t+\delta} \left\{ \frac{d}{dx} [G_\varepsilon^{(3)}] + k^2 G_\varepsilon \right\} dx = \int_{t-\delta}^{t+\delta} \varphi_\varepsilon(x) dx = +1.$$

Supposons maintenant que G_ε converge, ainsi que ses deux premières dérivées, vers G et ses deux premières dérivées lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$.

Supposons d'autre part $G_{x^2}^{(2)}(x,t)$ continuellement différentiable, sauf pour $x=t$.

$$\text{Alors : } \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{t-\delta}^{t+\delta} G_\varepsilon = 0 \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} [G_\varepsilon^{(3)}]_{t-\delta}^{t+\delta} = [G_\varepsilon^{(3)}]_{t-0}^{t+0} = +1$$

La fonction G qui possède ces propriétés est la fonction de Green que nous avons déjà calculée.

Sur les graphiques de $G(x,t)$ que nous avons dessinés nous pouvons constater que le minimum de $G(x,t)$ est très accusé et a lieu pour $x=t$.

Pour des valeurs de t , assez éloignées de x , $G(x,t)$ est voisine de zéro.

Le principe de St Venant explique ceci.

Le principe s'énonce ainsi : « Les efforts qui naissent, dans un corps élastique, par l'application, sur une petite surface de ce corps, d'un système de forces statistiquement équivalent à zéro sont d'intensité négligeable à une distance grande par rapport à la dimension de la surface. »

3.5 Relation entre la fonction de Green et la matrice inverse d'un système aux différences finies.

+ Fonction de Green d'un système discret :

Considérons la relation de récurrence :

$$P(y) \equiv p_0(i) y(i+n) + p_1(i) y(i+n-1) + \dots + p_n(i) y(i) = p(i) \quad (I)$$

où $p_0(i), \dots, p_n(i), p(i)$ sont définis pour $i \in [a, b-n]$

$p_0(i) \neq 0$ en tout point de $[a, b-n]$

Les limites aux limites associées à la relation (I) sont :

$$\begin{cases} W^{(j)}(y) = A^{(j)} y + B^{(j)} y = \gamma_j, & j = 1, 2, \dots, n \\ A^{(j)}(y) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k^{(j)} y(a+k) & B^{(j)}(y) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k^{(j)} y(b+k) \end{cases} \quad (II)$$

Les relations (I) et (II) forment le système aux différences finies : (I) $\begin{cases} P(y) = p \\ W^{(j)}(y) = \gamma_j, \quad j = 1, \dots, n \end{cases}$

Définition : Par fonction de Green du système homogène (II) $\begin{cases} P(y) = 0 \\ W^{(j)}(y) = 0, \quad j = 1, \dots, n \end{cases}$

nous entendons une fonction des nombres entiers (i, ξ) notée

$G(i, \xi)$ définie pour : $a \leq i \leq b$; $a \leq \xi \leq b-n$, telle que si ξ est fixé

G considérée comme fonction de i satisfait aux conditions aux limites (II) : $W^{(j)}(G) = 0$

et à l'équation (I) $P(G) = 0$ en tous les points $i \in [a, b]$ sauf pour $i = \xi$

De plus $P[G] = 1$.

++ Existence de la fonction de Green :

Supposons que la relation (I) admette un système fondamental de solutions :

$y_1(i), \dots, y_n(i)$.

$$\text{Considérons : } u(i) = \begin{cases} u_1(i) = \sum_{k=1}^n c_k y_k(i) & i = a, a+1, \dots, \xi \\ u_2(i) = \sum_{k=1}^n d_k y_k(i) & i = \xi+1, \dots, b. \end{cases} \quad (III)$$

par analogie avec le cas d'un système différentiel.

c_1, c_2, \dots, c_n sont indépendants de i mais peuvent dépendre de ξ .

Si nous n'ajoutons rien à la définition (5), $P(G) = 0$ ne peut être vérifiée aux points $i = \xi-1, \xi-2, \dots, \xi-n+1$ car nous serions obligés de choisir $u_1(i)$ pour $i \leq \xi$ et $u_2(i)$ pour $i > \xi$ dans la même expression $P(G)$.

Pour que $P(G) = 0$ soit vérifiée en $i = \xi-1, \dots, \xi-n+1$ — à condition évidemment que $i \geq a$ — il faut et il suffit que :
$$\begin{cases} u_2(i) = u_1(i) \\ i = \xi+1, \dots, \xi+n-1 \end{cases} \quad (6)$$

D'autre part pour que $P[G] = 1$ il faut et il suffit que :

$$p_0(\xi) [u_2(\xi+n) - u_1(\xi+n)] = 1 \quad (7)$$

Posons $z_j(\xi) = p_0(\xi) [d_j(\xi) - c_j(\xi)] \quad (8)$

Les équations (6) et (7) nous conduisent à écrire le système :

$$\textcircled{III} \begin{cases} \sum_{k=1}^n z_k(\xi) y_k(\xi+j) = 0 & j = 1, 2, \dots, n-1 \quad (9) \\ \sum_{k=1}^n z_k(\xi) y_k(\xi+n) = 1 & (10) \end{cases}$$

La détermination des $z_k(\xi)$ est unique si le Wronskien des n solutions indépendantes est différent de zéro.

Examinons comment la fonction $u(i)$ satisfera aux conditions aux limites :

$$\sum_{k=1}^n c_k(\xi) A^{(j)}(y_k) + \sum_{k=1}^n d_k(\xi) B^{(j)}(y_k) = 0 \quad j = 1, \dots, n$$

c.à-d. :
$$p_0(\xi) \left[\sum_{k=1}^n d_k W^{(j)}(y_k) \right] = \sum_{k=1}^n z_k(\xi) A^{(j)}(y_k) \quad j = 1, \dots, n. \quad (11)$$

Si nous supposons le déterminant $D \neq 0$, la solution du système (11) est unique puisque les $z_k(\xi)$ sont linéairement indépendants.

$$D = \begin{vmatrix} W^{(1)}(y_1) & \dots & W^{(1)}(y_n) \\ \vdots & & \vdots \\ W^{(n)}(y_1) & \dots & W^{(n)}(y_n) \end{vmatrix}$$

Théorème : Pour que la fonction de Green du système homogène (II) existe, il faut et il suffit que les formes linéaires $W^{(j)}(y)$ soient linéairement indépendantes et que le système (II) soit incompatible.

Alors la fonction de Green est unique.

+++ Application :

Considérons le système (I) $\begin{cases} P(y) = p \\ W^{(j)}(y) = \gamma_j \end{cases} \quad j=1, 2, \dots, n$ γ_j étant une constante.

Notons $g_i(y)$ la solution du système $\begin{cases} P(y) = p \\ W^{(j)}(y) = 0 \quad j \neq i \\ W^{(i)}(y) = 1 \end{cases}$

Si le système homogène (II) est incompatible, le système (I) admet une solution unique que l'on peut écrire :

$$y(i) = \sum_a^{b-n} G(i, \xi) p(\xi) + \gamma_1 g_1(i) + \dots + \gamma_n g_n(i) \quad i = a, a+1, \dots, b.$$

La démonstration de ce théorème se réduit à une vérification :

• Considérons le cas où $i \in [a, b-n]$

$$\begin{aligned} \sum_0^n p_{n-j}(i) y(i+j) &= \sum_0^n p_{n-j}(i) \left\{ \sum_a^{b-n} G(i+j, \xi) p(\xi) + \sum_k^n \gamma_k g_k(i+j) \right\} \\ &= \sum_a^{b-n} p \left\{ \sum_0^n p_{n-j}(i) G(i+j, \xi) p(\xi) \right\} + \sum_k^n \gamma_k P(g_k) \\ &= \sum_a^{b-n} p \left\{ \sum_0^n p_{n-j}(i) G(i+j, \xi) \right\} p(\xi) = p(i) \end{aligned}$$

• Considérons le cas où $i \in [b-n+1, b]$

$$y(i) = \sum_a^{b-n} G(i, \xi) p(\xi) + \sum_k^n \gamma_k g_k(i) \text{ doit vérifier les conditions aux limites}$$

$$W^{(j)}[y(i)] = \sum_a^{b-n} W^{(j)}[G(i, \xi)] p(\xi) + \sum_k^n \gamma_k W^{(j)}[g_k(i)] = 0 + \gamma_j = \gamma_j.$$

Donc le système (I) admet bien la solution indiquée.

Nous pouvons écrire (I) sous la forme matricielle :

ou bien : $AY = P.$

Nous en déduisons facilement que $G(i, \xi)$ est le terme de A^{-1} situé dans la ligne i et la colonne ξ — $i = 1, 2, \dots, l$; $\xi = 1, 2, \dots, l$ — et que $g_k^{(i)}$ est le terme de A^{-1} situé dans la ligne i et la colonne k — $i = 1, 2, \dots, l$; $k = 1, 2, \dots, n$ —

§ 6 Conditionnement du système aux différences finies (III) du chapitre III à l'aide de la fonction de Green de ce système :

Considérons un système linéaire, donné sous la forme : $Ax - b = 0$

Notons x une solution approchée et x^* la solution rigoureuse de ce système; Considérons d'autre part $\phi_i(Ax - b) = \varepsilon$ qui est une norme de $Ax - b$ et $\psi_j(x^* - x) = \eta$ qui est une norme de $x^* - x$.

Pour définir le conditionnement du système linéaire que nous nous sommes donné on a proposé ceci: Chercher à savoir si le fait que ε soit faible entraîne que η le soit aussi.

Sachant que si $m_A = \min_{x \neq 0} \frac{\phi(Ax)}{\|x\|}$, $M_A = \max_{x \neq 0} \frac{\phi(Ax)}{\|x\|}$

— $\phi(x) = \sum_{i=1}^n |\xi_i|$ quand $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$; $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \xi_i^2}$ —

et que si $N(A) = \sqrt{\sum_{i,j} a_{ij}^2}$, $M_0(A) = \min_{i=1, \dots, n} \sqrt{\sum_{j=1}^n a_{ij}^2}$

— $A = (a_{ij})$ $i, j = 1, 2, \dots, n$ —

alors: Pour une matrice A non singulière $\frac{m_A}{M_A} \leq \frac{M_0(A)}{N(A)}$ et d'autre part, une condition nécessaire et suffisante pour que A soit orthogonale en lignes et en colonnes est que: $\frac{m_A}{M_A} = \frac{M_0(A)}{N(A)}$.

on est conduit à une définition du conditionnement C_A de A

$$C_A = \frac{m_A}{M_A} \frac{N(A)}{M_0(A)}$$

$$0 \leq C_A \leq 1$$

$$C_A = 0 \leftrightarrow \text{singularité de } A$$

$$C_A = 1 \leftrightarrow \text{orthogonalité en lignes}$$

de A .

On peut choisir aussi pour définition du conditionnement $c_A' = \frac{m_A}{M_A}$

Alors $0 \leq c_A'$

Nous allons étudier le conditionnement du système linéaire :

$$\begin{cases} L(\tau_n) \equiv \tau_{n-2} - 4\tau_{n-1} + (6+k^2h^2)\tau_n - 4\tau_{n+1} + \tau_{n+2} = 3mh^4 & n=0,1,\dots,N; h = \frac{1}{N} \\ W^{(0)}(\tau) \equiv \tau_{-2} - 8\tau_{-1} + 8\tau_1 - \tau_2 = 0 & ; W^{(1)}(\tau) \equiv \tau_0 = 0 \\ W^{(2)}(\tau) \equiv \tau_N = 0 & ; W^{(3)}(\tau) \equiv \tau_{N-2} - 8\tau_{N-1} + 8\tau_{N+1} - \tau_{N+2} = 0 \end{cases}$$

Appelons $g(ih, jh)$ la fonction de Green du système précédent :

$$g(ih, jh) = \begin{cases} \sum_{k=0}^3 a_k u_k(ih) & i \leq j \\ \sum_{k=0}^3 b_k u_k(ih) & i > j \end{cases} \quad b_k - a_k = c_k \quad u_k(ih) = e^{\alpha_k ih}$$

α_k a été déterminé plus haut :

Les c_k vérifient le système d'équations :

$$\sum_{k=0}^3 c_k e^{\alpha_k(j+1)h} = \sum_{k=0}^3 c_k e^{\alpha_k(j+2)h} = \sum_{k=0}^3 c_k e^{\alpha_k(j+3)h} = 0 \quad ; \quad \sum_{k=0}^3 c_k e^{\alpha_k(j+4)h} = 1$$

En résolvant ce système on trouve :

$$\begin{cases} c_0 = \frac{e^{-\alpha_0 h(\bar{j}+2)}}{4 \operatorname{Sh} \alpha_0 h [Ch \alpha_1 h - Ch \alpha_0 h]} & c_1 = \frac{e^{-\alpha_1 h(\bar{j}+2)}}{4 \operatorname{Sh} \alpha_1 h [Ch \alpha_2 h - Ch \alpha_0 h]} \\ c_2 = \frac{e^{-\alpha_2 h(\bar{j}+2)}}{4 \operatorname{Sh} \alpha_2 h [Ch \alpha_1 h - Ch \alpha_0 h]} & c_3 = \frac{e^{-\alpha_3 h(\bar{j}+2)}}{4 \operatorname{Sh} \alpha_3 h [Ch \alpha_1 h - Ch \alpha_0 h]} \end{cases}$$

Les conditions aux limites nous conduisent au système :

$$\begin{cases} \sum_j a_j = 0 & ; \sum_j \beta_j a_j = 0 & ; \sum_j a_j e^{\alpha_j} = - \sum_j c_j e^{\alpha_j} & ; \sum_j e^{\alpha_j} \beta_j a_j = - \sum_j c_j e^{\alpha_j} \beta_j \\ j = 0, 1, 2, 3. \end{cases}$$

c-a-d :

$$D \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sum_j c_j e^{\alpha_j} \\ \sum_j c_j \beta_j e^{\alpha_j} \end{pmatrix} \quad D^{-1} = \frac{(d_{ij})}{|D|}$$

$$a_j = \frac{d_{j0}}{D} \left(\sum_k c_k e^{\alpha_k} \right) + \frac{d_{j3}}{D} \left(\sum_k c_k e^{\alpha_k} \beta_k \right) \quad j, k = 0, 1, 2, 3.$$

Étudions ce qui se passe lorsque $h \rightarrow 0$.

D'après ce que nous avons vu dans le chapitre précédent :

$$a_k \approx \tau_k \leftrightarrow \begin{cases} u_0 \approx \sqrt{\frac{k}{c}} \\ v_0 \approx \sqrt{\frac{k}{c}} \end{cases} ; \quad \beta_j \approx 3\tau_j h \quad ; \quad c_k \approx -\frac{\nu_k}{h^3}$$

$$d_{j2} \approx 9h^2 \delta_{j2} \quad ; \quad d_{j3} \approx 3h \delta_{j3} \quad ; \quad D \approx 9h^2 \Delta$$

$$\text{Donc : } a_j \approx -\frac{9h^2 \delta_{j2}}{9h^2 \Delta} \left(\sum_k \nu_k e^{\tau_k} \right) \left(-\frac{1}{h^3} \right) + 3h \frac{\delta_{j3}}{9h^2 \Delta} \left(-\frac{3}{h^2} \right) \left(\sum_k \nu_k e^{\tau_k} \tau_k \right)$$

$$a_j \approx \frac{1}{h^3} \left[\delta_{j2} \left(\sum_k \nu_k e^{\tau_k} \right) + \delta_{j3} \left(\sum_k \nu_k \tau_k e^{\tau_k} \right) \right] \quad \text{c. à. d.} \quad a_j \approx \frac{1}{h^3} \lambda_j$$

$$\text{De même : } b_j = c_j + a_j \approx \frac{1}{h^3} (\lambda_j - \nu_j) \quad b_j \approx \frac{1}{h^3} \mu_j$$

$$\text{Et : } \begin{cases} g(ih, jh) \approx \frac{1}{h^3} G(x, t) \\ x = ih \quad ; \quad t = jh \end{cases}$$

Déterminons maintenant les fonctions $g_k(ih)$ telles que :

$$L[g_k(ih)] = 0 \quad ; \quad W^{(j)}[g_k(ih)] = 0 \quad j \neq k \quad ; \quad W^{(k)}[g_k(ih)] = 1$$

Nous savons que : $g_k(ih) = \sum_{m=0}^3 a_m e^{a_m ih}$ nous obtenons les 4 systèmes

- suivants : ① $\sum_m a_m = 0 \quad ; \quad \sum_m \beta_m a_m = 1 \quad ; \quad \sum_m e^{a_m} a_m = 0 \quad ; \quad \sum_m \beta_m e^{a_m} a_m = 0$
- ② $\sum_m a_m = 1 \quad ; \quad \sum_m \beta_m a_m = 0 \quad ; \quad \sum_m e^{a_m} a_m = 0 \quad ; \quad \sum_m \beta_m e^{a_m} a_m = 0$
- ③ $\sum_m a_m = 0 \quad ; \quad \sum_m \beta_m a_m = 0 \quad ; \quad \sum_m e^{a_m} a_m = 1 \quad ; \quad \sum_m \beta_m e^{a_m} a_m = 0$
- ④ $\sum_m a_m = 0 \quad ; \quad \sum_m \beta_m a_m = 0 \quad ; \quad \sum_m e^{a_m} a_m = 0 \quad ; \quad \sum_m \beta_m e^{a_m} a_m = 1$

$$\text{Donc : } a_{m0} = \frac{d_{m0}}{D} \quad ; \quad a_{m1} = \frac{d_{m1}}{D} \quad ; \quad a_{m2} = \frac{d_{m2}}{D} \quad ; \quad a_{m3} = \frac{d_{m3}}{D}$$

On montrerait facilement que pour h assez petit :

$$d_{m0} \approx 9h^2 \delta_{m0} \quad ; \quad d_{m1} \approx 3h \delta_{m1} \quad ; \quad d_{m2} \approx 9h^2 \delta_{m2} \quad ; \quad d_{m3} \approx 3h \delta_{m3}$$

c'est-à-dire : $g_0(ih) \approx$

$$\begin{cases} g_0(x) \approx -\frac{1}{3h} \frac{4\sqrt{k}}{\Delta} g(1-x) \quad ; \quad g_1(x) \approx \frac{4k}{\Delta} f(x) \quad ; \quad g_2(x) \approx \frac{4k}{\Delta} f(1-x) \quad ; \quad g_3(x) \approx +\frac{1}{3h} \frac{4\sqrt{k}}{\Delta} g(x) \\ x = ih \end{cases}$$

Les termes $g(ih, jh)$ et $g_k(ih)$ sont les coefficients de la matrice inverse du système aux différences finies étudié.

Calculons le conditionnement de ce système.

$$A = \begin{pmatrix} \theta & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & -8 & 0 & 8 & -1 & 0 & \\ 1 & -4 & \nu & -4 & 1 & 0 & \\ 0 & 1 & -4 & \nu & -4 & 1 & 0 \\ & & & & & & 0 \\ & & & 0 & 1 & -4 & \nu & -4 & 1 \\ & & & 0 & 1 & -8 & 0 & 8 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & c \end{pmatrix}$$

$$\nu = 6 + k^2 h^4 \quad k^2 = 928c$$

Preons pour définition du conditionnement : $\epsilon_A = \frac{M_A}{m_A} \frac{N(A)}{\mu_0(A)}$

$$M_A = \max_{x \neq 0} \frac{\phi(Ax)}{\|x\|} = \max_E \|AE\| \quad E = (\epsilon_j) \quad \epsilon_j = \pm 1$$

$$M_A = \left\{ 2 [1 + (1+8+8+1)^c] + (N+1)(1+4+\nu+4+1)^c \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$M_A = \left\{ 750 + (N+1) [256 + 32k^2 h^4 + k^4 h^8] \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$N(A) = \left\{ \sum_{ij} a_{ij}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = \left\{ (1+1+64+64+1) \times 2 + (1+16+\nu^2+16+1)(N+1) \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$N_A = \left\{ 262 + (70 + 12k^2 h^4 + k^4 h^8)(N+1) \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\mu_0(A) = \min_{i=1, \dots, n} \left(\sum_j a_{ij}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\sum_j a_{ij}^2 = \begin{cases} 1 & i = 1, 2, \dots, N+5 \\ 1 + 64 + 64 + 1 = 130 & i = 3, 4, \dots, N+3 \\ 1 + 16 + \nu^2 + 16 + 1 = 70 + 12k^2 h^4 + k^4 h^8 & i = N+4, N+5 \end{cases}$$

$$\mu_0(A) = 1$$

$$m_A = \min_{x \neq 0} \frac{\phi(Ax)}{\|x\|} = \frac{1}{\max_{i=1, \dots, n} \|A^{-1}e_i\|}$$

$$A^{-1} = (\alpha_{ij})$$

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} g(ih, jh) & j = 3, 4, \dots, N+3 \\ g_k(ih) & k=0 \rightarrow j=1 ; k=1 \rightarrow j=2 ; k=3 \rightarrow j=N+4 ; k=4 \rightarrow j=N+5 \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, N+5$$

$$\|A^{-1}e_i\| = \left[\sum_k (\alpha_{ki})^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\begin{cases} i = 1, 2, \dots, N+5 & \|A^{-1}e_i\| = \left\{ \sum_k [g_0(kh)]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \\ i = 3, 4, \dots, N+3 & \|A^{-1}e_i\| = \left\{ \sum_k [g(kh, ih)]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \\ i = N+4, N+5 & \|A^{-1}e_{N+4}\| = \left\{ \sum_k [g_2(kh)]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} ; \|A^{-1}e_{N+5}\| = \left\{ \sum_k [g_3(kh)]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \\ k = 1, 2, \dots, N+5 \end{cases}$$

Nous allons comparer maintenant les différentes quantités indiquées ci-dessus :

$$\text{Lorsque } h \text{ est suffisamment petit, } \begin{cases} \sum_k [g(kh, ih)]^2 \approx \frac{1}{h^6} \sum_k [G(kh, ih)]^2 \approx \frac{1}{h^7} \int_0^1 [G(x, t)]^2 dt \\ x = ih, k = 1, 2, \dots, N+5, N = \frac{1}{h} \end{cases}$$

En effet, la fonction $G(x,t)$ est de carré intégrable comme cela se voit clairement sur l'expression de G que nous avons donnée plus haut.

Nous savons en outre que $\theta(x) = 3m \int_0^1 G(x,t) dt$.

De $\theta(x)$ est minimum lorsque $x = \frac{1}{2}$. Puisque $3m$ est positif $\int_0^1 G(x,t) dt$ est minimum lorsque $x = \frac{1}{2}$.

Notons $U(x) = \int_0^1 G(x,t) dt = A(x) + \alpha(x)$.

$\alpha(x)$ représente l'aire négative et $\alpha(x)$ l'aire positive situées de part et d'autre de l'axe des abscisses et sur les graphiques de $G(x,t)$.

D'après le principe de St Venant que nous avons énoncé ci-dessus le minimum de $G(x,t)$ est en valeur absolue très supérieur à son maximum.

Donc $\alpha(x)$ est négligeable devant $A(x)$

Considérons $V(x) = \int_0^1 [G(x,t)]^2 dt$

On peut écrire que $V(x) = B(x) + \beta(x)$ $B(x)$ correspond à $A(x)$ c'est à dire que c'est l'aire délimitée par $[G(x,t)]^2$ et est comprise entre les deux premières zéros de $G(x,t)$. De même $\beta(x)$ correspond à $\alpha(x)$.

$\beta(x)$ est donc négligeable devant $B(x)$.

D'autre part puisque $|U(\frac{1}{2})| > |U(x)|$ lorsque $x \neq \frac{1}{2}$, $|A(\frac{1}{2})| > |A(x)|$ et $|B(\frac{1}{2})| > |B(x)|$ pour $x \neq \frac{1}{2}$

On pourra donc choisir comme approximation de $\text{Max}_{x \in [0,1]} \int_0^1 [G(x,t)]^2 dt$ la valeur $\int_0^1 G[\frac{1}{2}, t]^2 dt$.

Le calcul approché de cette aire par la méthode de Gauss en utilisant 21 points nous donne $\int_0^1 G[\frac{1}{2}, t]^2 dt = 3001 \cdot 10^{-11}$

Deux calculs analogues nous donnent d'autre part :

$\int_0^1 \left[\frac{4\sqrt{2k}}{\Delta} g(x) \right]^2 dx = 3765 \cdot 10^{-7}$; $\int_0^1 \left[\frac{4k}{\Delta} f(x) \right]^2 dx = 2235 \cdot 10^{-4}$

De même que $\sum_k [g(kh, ih)]^2 \approx \frac{1}{h^7} \int_0^1 [G(x, t)]^2 dt$

$\sum_k [g_0(kh)]^2 \approx \sum_k [g_3(kh)]^2 \approx \frac{1}{9h^3} \int_0^1 \left[\frac{4\sqrt{2k}}{\Delta} g(x) \right]^2 dx$

$\sum_k [g_1(kh)]^2 \approx \sum_k [g_2(kh)]^2 \approx \frac{1}{h} \int_0^1 \left[\frac{4k}{\Delta} f(x) \right]^2 dx$

Nous avons alors approximativement: $\rho_0 = \text{Max}_x \left\{ \frac{1}{h^7} \int_0^1 [G(x, t)]^2 dt \right\} = \frac{1}{h^7} 3001 \cdot 10^{-11}$

$\rho_1 = \frac{1}{9h^3} \int_0^1 \left[\frac{4\sqrt{2k}}{\Delta} g(x) \right]^2 dx = \frac{1}{9h^3} 418,3 \cdot 10^{-7}$; $\rho_2 = \frac{1}{h} \int_0^1 \left[\frac{4k}{\Delta} f(x) \right]^2 dx = \frac{1}{h} 2235 \cdot 10^{-4}$

Donc pour $\frac{1}{h} \geq 20$ $\rho_0 \geq 2^7 \cdot 3001 \cdot 10^{-4}$; $\rho_1 \geq 2^3 \cdot 418,3 \cdot 10^{-4}$; $\rho_2 \geq 2 \cdot 2235 \cdot 10^{-3}$

c'est-à-dire : $\rho_1 < \rho_2 < \rho_0$

et $m_A = \frac{1}{\left\{ \frac{1}{h^7} 3001 \cdot 10^{-11} \right\}^{\frac{1}{2}}}$; $m_A = \frac{h^{\frac{7}{2}}}{173 \cdot 10^{-5}}$

$C_A = \frac{h^{\frac{1}{2}}}{173 \cdot 10^{-5}} \times \frac{1}{\left\{ 750 + (N+1) [256 + 32k^2h^4 + k^4h^8] \right\}^{\frac{1}{2}}} \times \{ 262 + (70 + 12k^2h^4 + k^4h^8)(N+1) \}$

$C_A \approx \left\{ \frac{262 + (70 + 12k^2h^4)(\frac{1}{h} + 1)}{750 + (256 + 32k^2h^4)(\frac{1}{h} + 1)} \right\}^{\frac{1}{2}} \frac{h^{\frac{7}{2}}}{173 \cdot 10^{-5}}$; $h = \frac{1}{N}$

On constate que pour $h = \frac{1}{20}$ $C_A = \frac{262 + 71 \times 21}{750 + 258 \times 21} \times \frac{10^{\frac{3}{2}}}{173 \cdot (2)^{\frac{7}{2}}}$

$C_A = \frac{1753}{5418} \times \frac{10}{1384} \sqrt{5}$

$C_A = 0,0081$

Lorsque $\frac{1}{h}$ augmente c-à-d le nombre de points d'interpolation, le conditionnement du système décroît très vite, comme $h^{\frac{7}{2}}$.

On aurait pu prendre comme définition du conditionnement

$C'_A = \frac{m_A}{M_A}$. On aurait obtenu alors pour $\frac{1}{h} \geq 20$.

$C'_A \approx \frac{h^{\frac{7}{2}}}{173 \cdot 10^{-5}} \times \frac{1}{750 + (N+1) (256 + 32k^2h^4) (\frac{1}{h} + 1)}$

Pour $h = \frac{1}{20}$

$C'_A = \frac{0,081}{1753}$

x	$10^6 \cdot \tau(x) ; h = 0,05$
- 0,1	- 1,67657833
- 0,05	- 0,33967833
0	0
0,05	- 0,21339545
0,10	- 0,66631528 - 0,666
0,15	- 1,16342882
0,20	- 1,60134918 - 1,925
0,25	- 1,93979444
0,30	- 2,17618270 - 1,994
0,35	- 2,32599836
0,40	- 2,40907803 - 2,200
0,45	- 2,44091982
0,50	- 2,42786371 - 2,246
0,55	- 2,36524396
0,60	- 2,23814683
0,65	- 2,02504322
0,70	- 1,70516193
0,75	- 1,27085224
0,80	- 0,74614106
0,85	- 0,21192841
0,90	+ 0,16357283
0,95	+ 0,00009384
1,00	0
1,05	+ 0,16710169
1,10	+ 0,74961919

x	$10^6 \cdot \tau(x) ; h = 0,1$
- 0,2	- 9,93607945
- 0,1	- 1,69944560
0	0
+ 0,1	- 0,65269074
+ 0,2	- 1,56204041
+ 0,3	- 2,11631823
+ 0,4	- 2,34348180
+ 0,5	- 2,39669641
+ 0,5	- 2,34348178
+ 0,7	- 2,11631821
+ 0,8	- 1,56204040
+ 0,9	- 0,65269077
+ 1,00	0
+ 1,1	- 1,69944561
+ 1,2	- 9,93607911

-0,605
-1,449
-1,966
-2,195
-2,224

Nous avons obtenu par une méthode d'élimination (Jordan)
la solution du système linéaire :

$$(A) \begin{pmatrix} T_{-2} \\ T_{-1} \\ T_0 \\ T_1 \\ \vdots \\ T_N \\ T_{N+1} \\ T_{N+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3mh^4 \\ 3mh^4 \\ \vdots \\ 3mh^4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Les résultats prouvent bien que plus on augmente le nombre de
points d'interpolation, plus vite diminue le conditionnement du système
c.à.d que les résultats deviennent moins bons.

