



HAL
open science

Sur les solutions exactes des équations du mouvement avec surface libre d'un liquide pesant

Robert Gerber

► **To cite this version:**

Robert Gerber. Sur les solutions exactes des équations du mouvement avec surface libre d'un liquide pesant. Modélisation et simulation. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1955. tel-00277437

HAL Id: tel-00277437

<https://theses.hal.science/tel-00277437>

Submitted on 6 May 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° D'ORDRE :
64

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS-SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

M. ROBERT GERBER

Licencié ès Sciences Mathématiques,
Ingénieur du Génie Maritime

1^{re} THÈSE. — SUR LES SOLUTIONS EXACTES DES ÉQUATIONS DU MOUVEMENT AVEC SURFACE LIBRE D'UN LIQUIDE PESANT.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

“ TRAVAUX RÉCENTS SUR LA THÉORIE LINÉARISÉE DE LA HOULE ”

Soutenues le 1^{er} avril 1955 devant la commission d'examen.

M. J. PÉRÈS *Président.*
M. J. LERAY
M. J. KRAVTCHENKO }
M. J. KUNTZMANN *Examineurs.*
M. F. GALLISSOT }

PARIS

GAUTHIER-VILLARS, ÉDITEUR-IMPRIMEUR-LIBRAIRE

Quai des Grands-Augustins, 55

1955

Avec mon respectueux souvenir,

Gerber

N° D'ORDRE :

64

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS-SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

M. ROBERT GERBER

Licencié ès Sciences Mathématiques,
Ingénieur du Génie Maritime

1^{re} THÈSE. — SUR LES SOLUTIONS EXACTES DES ÉQUATIONS DU MOUVEMENT AVEC SURFACE LIBRE D'UN LIQUIDE PESANT.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

“ TRAVAUX RÉCENTS SUR LA THÉORIE LINÉARISÉE DE LA HOULE ”

Soutenues le 1^{er} avril 1955 devant la commission d'examen.

M. J. PÉRÈS *Président.*
M. J. LERAY }
M. J. KRAVTCHEKHO } *Examineurs.*
M. J. KUNTZMANN }
M. F. GALLISSOT }

PARIS
GAUTHIER-VILLARS, ÉDITEUR-IMPRIMEUR-LIBRAIRE
Quai des Grands-Augustins, 55

1955

UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

FACULTÉ DES SCIENCES

Doyens honoraires

MM. GAU
FORTRAT

Doyen

M. MORET, Correspondant de l'Institut.

Professeurs honoraires

MM. FAYARD, Professeur à la Sorbonne (Math.)
FORTIER, Professeur à la Sorbonne (Méc. des Fluides).
GIGNOUX, Membre de l'Institut (Géologie).
BRELOT, Professeur à la Sorbonne (Math.).
De LITARDIÈRE, Correspondant de l'Institut Botanique.

Professeurs

MM. FORTRAT..... Physique générale, Corresp. de l'Institut.
MORET..... Géologie et Minéralogie, Corresp. de l'Institut.
ANDRIEUX..... Chimie, Corresp. de l'Institut.
NÉEL..... Physique expérimentale, Membre de l'Institut.
CHABAUTY..... Calcul différentiel et intégral.
PARDE..... Hydrologie fluviale.
N..... Physique industrielle.
DORIER..... Zoologie.
HELLMANN..... Chimie.
KRAVTCHEŃKO... Mécanique rationnelle.
BENOIT..... Radio-Électricité.
CHENE..... Chimie papetière.

NOBECOURT..... Micrographie papetière.
WEIL..... Physique.
FELICI..... Physique.
KUNTZMANN..... Analyse appliquée.
DODERO..... Electrochimie et Electro-metallurgie.
SANTON..... Mécanique des fluides.
BARBIER..... Géologie appliquée.
OZENDA..... Botanique.

Professeurs sans chaire

MM. FALLOT..... Physique.
REULOS..... Physique.
TRAYNARD..... Chimie.
SILBER..... Mécanique des fluides.
GALVANI..... Mathématiques.

Maître de conférences honoraires

M. OFFNER..... Botanique.

Maîtres de conférences

MM. REEB..... Mathématiques.
SOUTIF..... Physique.
CRAYA..... Mécanique physique.
M^{lle} LUTZ..... Mathématiques.
MM. AYANT..... Physique théorique.
MICHEL..... Géologie.
GALLISSOT..... Mécanique.

Secrétaire principal

M. GRENIER

Secrétaire

M. BICHET

A MA FEMME

PREMIÈRE THÈSE.

*Sur les solutions exactes des équations
du mouvement avec surface libre d'un liquide pesant.*

INTRODUCTION.

Considérons le mouvement irrotationnel et avec ligne libre d'un fluide parfait et pesant dans un plan vertical. Il existe à l'intérieur du domaine du fluide en mouvement un potentiel harmonique des vitesses, défini par des conditions sur la frontière. La difficulté du problème harmonique aux limites qui se pose ainsi pour cette fonction-potentiel tient à la forme de la condition sur la ligne libre, et à ce que le domaine du mouvement, qui est limité par cette ligne libre et par des parois solides, n'est pas entièrement connu *a priori*.

Cette dernière difficulté conduit à introduire le plan ζ du potentiel complexe dans lequel l'image du domaine fluide, qui est une bande rectiligne, est connue. Le mouvement est alors défini par la connaissance d'une fonction $z(\zeta)$, analytique et univalente dans cette bande, dont elle effectue la représentation conforme sur le domaine de l'écoulement dans le plan z du mouvement. De plus, sur l'image du profil libre, que l'on peut supposer être un côté de la bande, la fonction $z(\zeta)$ doit vérifier une condition frontière (F), déduite de la relation à la ligne libre.

Relativement à cette fonction $z(\zeta)$ divers problèmes se posent.

On peut chercher à construire des fonctions $z(\zeta)$ univalentes dans une bande rectiligne et satisfaisant à la condition frontière (F) sur l'un des côtés. De telles fonctions constituent alors des exemples de

solutions du problème du mouvement, lorsqu'on suppose le domaine fluide indéterminé *a priori*. Récemment H. Lewy ⁽¹⁾ et F. John ⁽²⁾, ont réussi à donner la forme générale de la solution de ce problème indéterminé, et ce dernier auteur a construit un exemple explicite d'une classe d'écoulements périodiques qui entrent dans un des types de mouvements que nous étudions.

On peut aussi s'imposer certains éléments du domaine de l'écoulement et M. H. Villat ⁽³⁾ a montré que lorsqu'on se donne la forme de la ligne libre, la détermination du mouvement revient à la résolution d'une équation intégrale, dont il est parvenu à former la solution.

Mais le problème qui se pose naturellement est celui de la détermination des écoulements, qui s'effectuent sur des parois connues. Ce problème a été considéré par M. H. Poncin dans sa Thèse ⁽⁴⁾. Cet auteur a montré que si l'on se fixe une fonction qui caractérise la forme générale des parois, la fonction $z(\zeta)$ est définie dans la bande par un problème mixte aux limites qui, dans certaines conditions, admet des solutions, ce qui établit alors l'existence d'écoulements sur des parois ayant même allure que des parois données. Il est d'ailleurs à remarquer que les théorèmes d'existence de M. Poncin concernent principalement les mêmes types de mouvements que ceux que nous considérons : ce sont des écoulements relativement rapides dans des canaux.

Nous nous sommes proposé d'étudier les solutions exactes des équations des écoulements qui ont lieu sur une paroi fixée, les hypothèses que nous serons amenés à introduire faisant d'ailleurs que le schéma que nous envisageons se rapporte aux écoulements dans un canal découvert.

⁽¹⁾ H. LEWY, *On steady free surface flow in a gravity field* (*Comm. Pure. Applied. Math.*, t. 5, 1952, p. 413-414).

⁽²⁾ F. JOHN, *Two-dimensional potential flows with a free boundary* (*Comm. Pure. Applied. Math.*, t. 6, 1953, p. 497-503).

⁽³⁾ H. VILLAT, *Sur l'écoulement des fluides pesants* (*Ann. Éc. Norm. Sup.*, t. 32, 1915, p. 177-214).

⁽⁴⁾ H. PONCIN, *Sur le mouvement d'un fluide pesant dans un plan vertical* (*Publ. scient. et techn. Minist. Air*, n° 16, 1932).

Lorsque le fond est rectiligne et horizontal, ce problème se ramène à celui des ondes, qui a été résolu en toute rigueur par Struik ⁽⁵⁾ dans le cas périodique, et qui vient de recevoir une solution pour l'onde solitaire dont l'existence a été établie par K. O. Friedrichs et D. H. Hyers ⁽⁶⁾.

Quand le fond du canal est quelconque le problème qui intervient est un problème de représentation conforme : la fonction inconnue $z(\zeta)$, univalente dans la bande rectiligne du plan ζ , transforme un des côtés de la bande en la paroi donnée dans le plan du mouvement et sur l'autre côté elle vérifie la condition frontière (F).

De plus, pour achever de déterminer la fonction $z(\zeta)$ il nous faudra, outre le débit ψ_0 , se fixer un deuxième paramètre. Bien qu'il soit usuel dans les études sur les canaux de se donner la valeur de l'énergie totale, nous avons pris pour la commodité des raisonnements la valeur V_0 de la vitesse en un point particulier du profil libre comme deuxième paramètre.

Pour établir nos théorèmes d'existence et d'unicité, nous utilisons des relations intégrodifférentielles, dues à M. Villat, qui nous permettent de réduire le problème de représentation conforme à une équation fonctionnelle unique à laquelle s'applique la théorie du point fixe de Schauder et Leray.

Dans le chapitre I, à partir des propriétés de la correspondance des frontières dans une représentation conforme, dues à M. Leray et précisées par M. J. Kravtchenko dans sa Thèse ⁽⁷⁾, nous montrons que si la paroi admet une courbure bornée les solutions éventuelles satisfont à certaines conditions de régularité, et que celles-ci vérifient alors le système Σ des équations intégrodifférentielles de M. Villat.

Inversement nous établissons que toute solution de ce système Σ détermine un mouvement du type voulu, pourvu que les paramètres V_0 et ψ_0 satisfassent à une condition qui assure le non-recouvrement du domaine fluide.

⁽⁵⁾ STRUIK, *Math. Ann.*, t. 95, 1926, p. 595-634.

⁽⁶⁾ K. O. FRIEDRICHS et D. H. HYERS, *The existence of solitary waves (Comm. Pure. Applied. Math.*, t. 7, p. 517-560, 1954).

⁽⁷⁾ *J. Math. pures et appl.*, t. 20, 1941, p. 35-301.

Enfin, en vue des raisonnements qui suivent, nous effectuons des limitations *a priori* des solutions et, en particulier, nous montrons sur le système Σ que la vitesse peut se limiter supérieurement et inférieurement sur tout le domaine du mouvement, en fonction d'une minorante et d'une majorante de la vitesse sur le profil libre.

Le chapitre II est consacré à l'étude d'un cas particulier simple : c'est celui des écoulements à périodicité géométrique et qui sont symétriques par rapport aux verticales de crête et de creux. Les fonctions inconnues sont alors définies sur un segment et le système Σ peut se mettre sous la forme d'une équation fonctionnelle unique

$$(1) \quad x = V(x),$$

où x est un élément d'un espace de Banach.

Les modes de démonstration utilisés exigent la vérification de deux catégories de propriétés de l'équation (1); les premières concernent la complète continuité de la transformation V ; les secondes consistent en une limitation *a priori* de l'ensemble des solutions.

Nous avons pu mettre l'équation fonctionnelle (1) sous une forme qui satisfait aux propriétés précédentes, pourvu que la pente de la paroi conserve un signe constant sur une demi-période et si, de plus, on ne considère que la classe des mouvements pour lesquels la pente de la ligne libre est de même sens que celle de la paroi.

On obtient ainsi un théorème d'existence concernant les écoulements du type précédent, moyennant une condition pour les paramètres V_0 et ψ_0 qui exprime que l'on a affaire à des mouvements rapides.

Dans le chapitre III, nous donnons un théorème d'unicité pour le problème des mouvements précédents. Pour cela nous adaptons les raisonnements de M. Weinstein sur les jets plans et nous utilisons des résultats dus à M. C. Jacob.

Nous considérons au chapitre IV le cas des écoulements uniformes à l'infini, sur un fond ayant des asymptotes horizontales.

Une difficulté provient alors de la présence du point à l'infini à la frontière du domaine de définition des inconnues et une étude *a priori* des solutions au voisinage de ce point est nécessaire pour garantir la régularité des transformations utilisées.

Lorsque la paroi et le profil décroissent constamment avec une allure asymptotique suffisamment régulière pour la paroi, et si le nombre sans dimensions $\frac{\gamma\psi_0}{V_0^3}$ est inférieur à 1, des artifices nous ont permis de réduire le système intégrodifférentiel du problème à une équation fonctionnelle à laquelle s'applique la théorie du point fixe de Schauder et Leray.

Nous obtenons ainsi un théorème d'existence qui concerne encore les mouvements rapides dont la pente conserve un signe constant.

Enfin, nous établissons au chapitre V un théorème sur le prolongement analytique qui assure que le profil libre est une courbe analytique.

En résumé, nos résultats (*) concernant des classes d'écoulement, à deux paramètres, du type torrentiel, sur des parois à pente de sens constant. Sont donc exclus en particulier de notre théorie des problèmes tels que celui du déversoir.

En s'intéressant à mes recherches et en acceptant d'en présenter les premiers résultats à l'Académie M. Henri Villat m'a donné de précieux encouragements qui m'ont incité à poursuivre mes efforts. Je tiens également à dire ici tout le parti que j'ai tiré de l'étude de ses Mémoires consacrées aux écoulements des liquides pesants.

M. Villat m'a encore fait l'honneur d'accepter de publier ma Thèse dans le *Journal de Mathématiques* qu'il dirige.

Aussi je le prie de trouver ici l'hommage de ma respectueuse gratitude.

M. le Doyen Pérès a bien voulu témoigner un intérêt constant et bienveillant pour mon travail. Il y avait là pour moi un encouragement des plus efficace. J'ai tenté, sans doute en vain, de m'inspirer du modèle de rédaction que constituent ses Ouvrages classiques pour présenter mes propres résultats.

De plus, M. Pérès a bien voulu accepter la présidence du jury de

(*) L'essentiel de mes résultats a fait l'objet de Notes aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, (t. 233, 1951, p. 1261 et 1560; t. 235, 1952, p. 693 et 1601). Ces résultats ont été également résumés par M. Kravtchenko au *VIII^e Congrès international de Mécanique théorique et appliquée* (1953, p. 244-245).

ma Thèse à Grenoble, malgré les très lourds devoirs de sa charge parisienne.

Je le prie d'agréer l'expression de ma respectueuse reconnaissance pour cet honneur dont je sens tout le prix.

Les résultats de M. Jean Leray m'ont fourni l'instrument essentiel de mes recherches. M. Leray a bien voulu examiner mon manuscrit et plusieurs améliorations de ma rédaction définitive sont la conséquence de ses directives et de ses observations. Sa présence dans mon Jury a été pour moi une très grande récompense de mes efforts.

J'ai été très sensible à ces marques de sollicitude; que M. Leray veuille bien accepter mes remerciements respectueux et les plus vifs pour l'aide précieuse qu'il m'a ainsi apportée.

Le sujet et les idées directrices de mes recherches m'ont été indiqués par M. Julien Kravtchenko et plusieurs de mes résultats sont le fruit de ses suggestions orales ou de la lecture de ses travaux, en particulier de sa Thèse.

Au terme de ce travail qui a été poursuivi sous sa direction, je suis heureux de pouvoir lui exprimer ici ma profonde reconnaissance pour l'aide si efficace qu'il n'a cessé de m'apporter.

M. Kuntzmann, Professeur à la Faculté des Sciences de Grenoble, et M. Gallissot, Maître de Conférences, ont témoigné de leur intérêt pour mes recherches en acceptant d'être Membres de mon jury. Je les en remercie vivement.

CHAPITRE I.

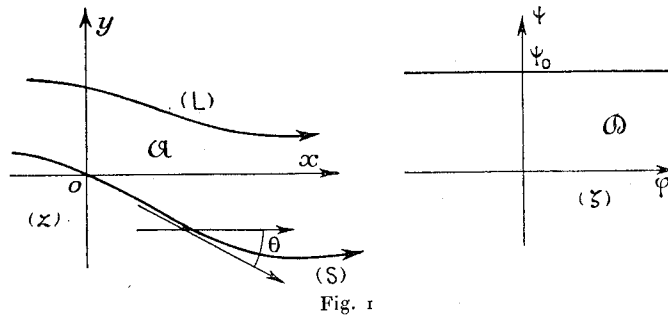
SCHEMA DU MOUVEMENT. PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES.

1. MOUVEMENTS ÉTUDIÉS. NOTATIONS. POTENTIEL COMPLEXE. — Nous considérons le schéma suivant du mouvement d'un liquide dans un canal.

Dans le plan vertical Oxy , où Oy est orienté suivant la verticale ascendante, un fluide parfait et pesant, de densité ρ , est animé d'un mouvement irrotationnel et permanent. Le domaine fluide est limité par une paroi (S) , qui est fixée, et par une ligne libre (L) , de forme

a priori inconnue. (S) et (L) sont des courbes simples, sur lesquelles y est une fonction bornée de x , x variant de $-\infty$ à $+\infty$, et la distance de ces deux courbes est différente de zéro.

On suppose de plus que la vitesse ne s'annule pas sur la ligne libre.



La paroi (S) est prise rectifiable et douée d'une tangente continue et l'on désigne par l l'abscisse curviligne d'un point de (S), le sens des l croissants étant celui de l'écoulement qui est supposé s'effectuer de la gauche vers la droite. Soit alors θ l'angle algébrique que fait avec Ox la tangente orientée à (S). Cette courbe est définie à une translation près par la donnée de la fonction $\theta = \theta[l]$, l variant de $-\infty$ à $+\infty$, et l'on suppose pour achever de déterminer (S) que le point d'abscisse curviligne zéro a été amené à l'origine du plan Oxy .

Les hypothèses faites entraînent l'existence du potentiel des vitesses $\varphi(x, y)$ et de la fonction de courant $\psi(x, y)$, qui sont des fonctions harmoniques conjuguées. On introduit la variable complexe $z = x + iy$ et le potentiel complexe est alors défini par

$$\zeta(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y),$$

les constantes arbitraires étant choisies de manière que $\zeta(o)$ soit nul.

Les composantes u et v suivant les axes du vecteur vitesse $\vec{V}(x, y)$ sont alors données par

$$\frac{d\zeta}{dz} = u - iv.$$

D'après cela le module V de \vec{V} est égal à $\left| \frac{d\zeta}{dz} \right|$. Nous appellerons U

l'angle algébrique que fait le vecteur \vec{V} avec Ox ; on a donc

$$\arg \frac{d\zeta}{dz} = -U.$$

La fonction $\zeta(z)$ est holomorphe sur le domaine fluide que nous désignons par \mathcal{A} ; elle réalise la représentation conforme de \mathcal{A} sur la bande \mathcal{D} du plan ζ qui est définie par

$$-\infty < \varphi < +\infty, \quad 0 < \psi < \psi_0$$

le nombre positif ψ_0 mesurant le débit total de l'écoulement.

Dans cette correspondance entre les domaines \mathcal{A} et \mathcal{D} , les courbes (S) et (L) ont respectivement pour image les droites $\psi = 0$ et $\psi = \psi_0$; les origines des deux plans se correspondent, ainsi que les points à l'infini des deux domaines ($\varphi = -\infty$ et $x = +\infty$ d'une part, $\varphi = +\infty$ et $x = +\infty$ d'autre part).

2. FONCTION $\omega(\zeta)$. — Introduisons la fonction $\omega(\zeta)$ qui est définie par

$$(1.1) \quad \frac{d\zeta}{dz} = V_0 e^{-i\omega(\zeta)},$$

le nombre positif V_0 désignant la mesure d'une vitesse arbitrairement fixée.

La fonction $\omega(\zeta)$ est holomorphe sur \mathcal{D} ; elle détermine à une constante près, au moyen de (1.1), la fonction $z(\zeta)$ qui effectue l'application conforme que l'on vient de définir de \mathcal{D} sur \mathcal{A} . La partie réelle de ω est égale à l'argument U du vecteur vitesse dans le plan z ; sa partie imaginaire, que nous appellerons T , a pour valeur $\log \frac{V}{V_0}$. On a donc

$$\omega = U + iT = \arg \vec{V} + i \log \frac{V}{V_0}.$$

La courbe (L) est une ligne de courant à pression constante et les hypothèses faites sur le mouvement entraînant la relation de Bernoulli, on a sur (L), en désignant par γ l'accélération de la pesanteur

$$V dV + \gamma dy = 0.$$

Les fonctions $U(\varphi, \psi)$ et $T(\varphi, \psi)$ ont alors sur l'image de (L) des limites que nous appellerons $f(\varphi)$ et $g(\varphi)$, et qui vérifient la relation classique

$$(1.2) \quad \frac{dg}{d\varphi} = -\frac{\gamma}{V_0^3} e^{-3g(\varphi)} \sin f(\varphi).$$

Soit maintenant $l = l(\varphi)$ la fonction inconnue qui établit la correspondance entre la courbe (S) à tangente continue et son image dans l'application conforme de \mathcal{A} sur \mathcal{D} ; cette fonction est continue et il en résulte que la partie réelle de ω a sur le côté inférieur de \mathcal{D} une limite continue qui est ⁽⁹⁾

$$U(\varphi, 0) = \theta[l(\varphi)].$$

En résumé, à un mouvement de l'espèce envisagée, et de débit ψ_0 , il correspond une fonction $\omega(\zeta)$, holomorphe sur la bande \mathcal{D} ($0 < \psi < \psi_0$, $-\infty < \varphi < +\infty$) et qui jouit des propriétés suivantes :

1° $\omega(\zeta)$ définit à une constante près, au moyen de (1.1), une fonction $z(\zeta)$ qui est univalente sur \mathcal{D} .

2° La constante étant choisie de manière que $z(0)$ soit nul, la fonction $z(\zeta)$ ainsi déterminée transforme le côté inférieur de \mathcal{D} en la courbe donnée (S), avec correspondance des points à l'infini.

3° Sur le côté supérieur de \mathcal{D} , ω a une limite continue $f(\varphi) + ig(\varphi)$ qui vérifie (1.2).

Inversement, une fonction $\omega(\zeta)$ qui satisfait aux conditions précédentes détermine un écoulement du type considéré sur la paroi (S) et de débit ψ_0 . En effet, la fonction univalente $z(\zeta)$ construite à partir de ω , réalise la représentation conforme de la bande \mathcal{D} sur un domaine

⁽⁹⁾ Dans son travail, cité dans l'introduction, M. H. Poncin se donne *a priori* la fonction $U(\varphi, 0)$. La fonction $\omega(\zeta)$, analytique dans la bande \mathcal{D} , est alors définie par les conditions suivantes sur la frontière; elle a une partie réelle prenant des valeurs données sur le côté inférieur et sur le côté supérieur elle a une limite continue qui vérifie (1.2). Une méthode d'approximations successives permet à M. Poncin de construire une solution de ce problème mixte, moyennant certaines limitations des données. Par un choix convenable de la fonction $U(\varphi, 0)$; il correspond alors à cette solution un écoulement sur une paroi de forme générale voisine de celle d'une paroi donnée.

simplement connexe \mathcal{A} du plan z qui est limité par (S) et par une courbe (L), sur laquelle la condition à la ligne libre est vérifiée.

Nous étudierons le problème de la détermination de la fonction $\omega(\zeta)$; les méthodes que nous utiliserons reposent sur la connaissance *a priori* de quelques propriétés de ω sur la frontière de \mathcal{D} que nous établirons dans la suite de ce chapitre.

Une condition suffisante d'univalence de $z(\zeta)$. — Pour terminer ce paragraphe nous allons indiquer une condition suffisante, qui nous sera utile par la suite, pour que la fonction $z(\zeta)$ déterminée par (1.1) soit univalente sur un domaine convexe d du plan ζ . Il suffit pour cela que l'intégrale de l'expression $V_0^{-1} e^{i\omega(\zeta)}$ ne soit pas nulle le long d'un chemin particulier joignant intérieurement à d deux points quelconques d'affixes ζ_1 et ζ_2 de ce domaine. Le domaine étant convexe, on peut prendre pour chemin d'intégration le segment d'extrémités ζ_1 et ζ_2 . Sur ce segment, l'argument de $dz = V_0^{-1} e^{i\omega(\zeta)} d\zeta$ est égal à une constante près à la partie réelle U de ω ; la fonction $\omega(\zeta)$ étant continue, il s'ensuit que $z(\zeta)$ est univalente si l'oscillation de U sur d est inférieure ou égale à π , et $U(\varphi, \psi)$ étant harmonique, cette condition est satisfaite lorsque l'oscillation de U sur la frontière de d est inférieure ou égale à π ⁽¹⁰⁾.

3. CONSTRUCTION D'UN MODULE DE CONTINUITÉ POUR $l(\varphi)$. — Nous nous proposons de construire un module de continuité pour la fonction inconnue $l(\varphi)$, qui établit la correspondance entre (S) et son image dans l'application conforme de \mathcal{A} sur \mathcal{D} . La fonction $\theta[l]$ étant fixée, de la connaissance de ce module de continuité il résultera un module de continuité pour la fonction $\theta[l(\varphi)]$, qui est en partie réelle de ω sur le côté inférieur de \mathcal{D} .

Rappelons que (S) est une courbe à tangente continue et que la distance de (S) et de (L) est supposée être différente de zéro. Soit

⁽¹⁰⁾ Ces raisonnements peuvent être utiles dans d'autres types de problèmes plans avec ligne libre. M. Mladen Boreli s'en est servi dans sa Thèse *Contribution à l'étude des milieux poreux* en cours d'impression dans la *Collection scientifique et technique du Ministère de l'Air* (II^e partie, chap. C).

alors δ une minorante, non nulle, de cette distance⁽¹¹⁾. De plus, nous ferons l'hypothèse qu'il existe un nombre positif et non nul a , tel que

$$(1.3) \quad |\theta[l]| \leq \frac{\pi}{2} - a.$$

Soit enfin \mathcal{B} une bande indéfinie du plan z , limitée par deux horizontales Δ_1 et Δ_2 de distance Δ , et telle que le domaine fluide appartienne à \mathcal{B} .

Ceci posé, nous montrerons que $l(\varphi)$ admet un module de continuité du type

$$(1.4) \quad |l(\varphi) - l(\varphi')| \leq \frac{C_1}{\left| \log \frac{1}{|\varphi - \varphi'|} \right|^p} \quad \text{si } |\varphi - \varphi'| < C_2,$$

où p est un nombre positif, fixé arbitrairement, et C_1 et C_2 deux nombres finis, non nuls, positifs, qui dépendent des grandeurs p, a, Δ, δ .

Pour établir ce résultat nous utiliserons deux lemmes dus à M. J. Kravtchenko⁽¹²⁾ que nous allons faire connaître, et qui précisent des résultats de M. J. Leray sur la correspondance des frontières dans l'application conforme d'un domaine borné sur un demi-plan.

PREMIER LEMME. — *Considérons un domaine borné Γ , simplement connexe, d'étendue intérieure σ , de frontière Γ' , situé dans le plan de la variable $Z = X + iY$. Soit $Z = Z(\mathfrak{C})$ la fonction analytique qui réalise l'application conforme de Γ sur le demi-plan supérieur $\mathfrak{C} = t + i\tau$. Soient t_1, t_2, t_3, t_4 , quatre points de l'axe réel du plan \mathfrak{C} avec $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$ et soient $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ les images de ces points. Appelons $\Lambda(\widehat{\alpha_2 \alpha_3}, \widehat{\alpha_1 \alpha_4})$ la plus courte longueur des chemins tracés dans le plan Z intérieurement à Γ et joignant $\widehat{\alpha_2 \alpha_3}$ à $\widehat{\alpha_1 \alpha_4}$. Ceci étant, on a l'inégalité*

$$\Lambda^2(\widehat{\alpha_2 \alpha_3}, \widehat{\alpha_1 \alpha_4}) \leq \frac{4\pi\sigma}{\left| \log \frac{1}{|r|} \right|},$$

(11) Dans chaque cas particulier que nous étudierons par la suite on sera assuré a priori de l'existence d'une telle minorante.

(12) J. KRAVTCHENKO, *Représentation conforme de Helmholtz, Théorie des sillages et des proues (Thèse) (J. Math. pures et appl., t. 20, 1941, p. 139 et 151-160).*

où r désigne le rapport anharmonique des points t_3, t_2, t_4, t_1 pris dans cet ordre ⁽¹³⁾.

DEUXIÈME LEMME. — Supposons qu'un arc $\widehat{B'C'}$ de Γ' admette une tangente continue. Désignons par l_1 l'abscisse curviligne d'un point de $\widehat{B'C'}$ et soit θ_1 l'angle algébrique que fait avec OX la tangente orientée à $\widehat{B'C'}$ dans le sens direct. Supposons que l'on ait sur $\widehat{B'C'}$,

$$|\theta_1[l_1]| \leq \frac{\pi}{2} - a_1,$$

où a_1 est positif et non nul. Soient maintenant, \widehat{BC} un arc de Γ' intérieur à $\widehat{B'C'}$, d'extrémités différentes de B' et de C' et A un point appartenant à l'arc $\widehat{C'B'}$ complémentaire de $\widehat{B'C'}$ par rapport à Γ' .

(Nous supposons que les points B', B, C, C', A , sont rencontrés dans cet ordre lorsqu'on décrit Γ' dans le sens direct.) Nous appellerons $\Lambda(\widehat{BC}, \widehat{C'B'})$ la plus courte longueur des chemins tracés dans le plan Z intérieurement à Γ et joignant \widehat{BC} à $\widehat{C'B'}$. Soit enfin $Z = Z(\mathfrak{C})$ la fonction analytique qui réalise l'application conforme de Γ sur le demi-plan supérieur \mathfrak{C} , les points B, C, A ayant respectivement pour image les points de l'axe réel,

$$t = -1, \quad t = +1, \quad t = +\infty.$$

Dans cette représentation conforme la correspondance entre l'arc $\widehat{B'C'}$ et son image est déterminée par la fonction $l_1 = l_1(t)$.

Cela étant, on a sur le segment, $-1 \leq t \leq +1$, image de \widehat{BC} ,

$$(1.5) \quad |l_1(t) - l_1(t')| \leq \frac{\text{const.}}{\left| \log \frac{1}{|t - t'|} \right|^{\rho}},$$

⁽¹³⁾ M. R. Huron est parvenu à donner à la démonstration de M. J. Kravtchenko une forme entièrement élémentaire (*Ann. Fac. Sc. Toulouse*, 1951, p. 155-160).

où p est un nombre positif, choisi arbitrairement, et où la constante peut être majorée en fonction de majorantes des grandeurs $\sigma, \frac{1}{a_1}, \frac{1}{\Lambda(\widehat{BC}, \widehat{C'B'})}$.

Démonstration de la relation (1.4). — 1° Soit m un point particulier de (S), d'abscisse x_0 , et soit y_1 l'ordonnée du côté inférieur Δ_1 de la bande \mathcal{B} . Effectuons la représentation conforme de \mathcal{B} sur le cercle unitaire (C) du plan $Z = X + iY$ au moyen de la transformation

$$(1.6) \quad z = \frac{\Delta}{\pi} \log \frac{1+Z}{1-Z} + x_0 + iy_1 + i\frac{\Delta}{2},$$

où le logarithme est pris égal à sa valeur principale.

Les points $Z = -1$ et $Z = +1$, que nous appellerons A_1 et A correspondent alors aux points $\varphi = -\infty$ et $\varphi = +\infty$ de \mathcal{B} ; le diamètre imaginaire de (C) est l'image du segment

$$x = x_0, \quad y_1 \leq y \leq y_1 + \Delta.$$

Le domaine fluide \mathcal{A} a pour transformé un domaine simplement connexe Γ , de frontière Γ' , situé à l'intérieur de (C), et l'image de (S) est un arc (S_1) à tangente continue, d'extrémités A_1 et A . Soit l_1 l'abscisse curviligne d'un point de (S_1) , le sens des l_1 croissants correspondant au sens des l croissants, et soit θ_1 l'angle algébrique que fait la tangente orientée à (S_1) avec OX .

Il est aisé de vérifier qu'il existe un nombre d , positif, non nul, inférieur à 1, dépendant seulement de a et Δ , et tel que

$$\left| \arg \frac{dz(X,Y)}{dZ} \right| \leq \frac{a}{2} \quad \text{si} \quad |X| \leq d.$$

Soient alors, $D'_1, D_1; D_2, D'_2$, les droites du plan Z qui ont respectivement pour équation

$$X = -d, \quad X = -\frac{d}{2}, \quad X = +\frac{d}{2}, \quad X = +d.$$

Il suit de là que sur un arc de (S_1) appartenant à la région de (C) limitée par D'_1 et D'_2 on a

$$|\theta_1| \leq \text{Max} |\theta| + \frac{a}{2}$$

et compte tenu de (1.3), l'angle θ_1 satisfait sur cet arc à l'inégalité

$$|\theta_1| \leq \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}.$$

Nous appellerons B', B, C, C' les points d'intersection, qui sont uniques, de (S_1) avec les droites D'_1, D_1, D_2, D'_2 . Les images des points B et C sont deux points de (S) que nous désignons par b et c .

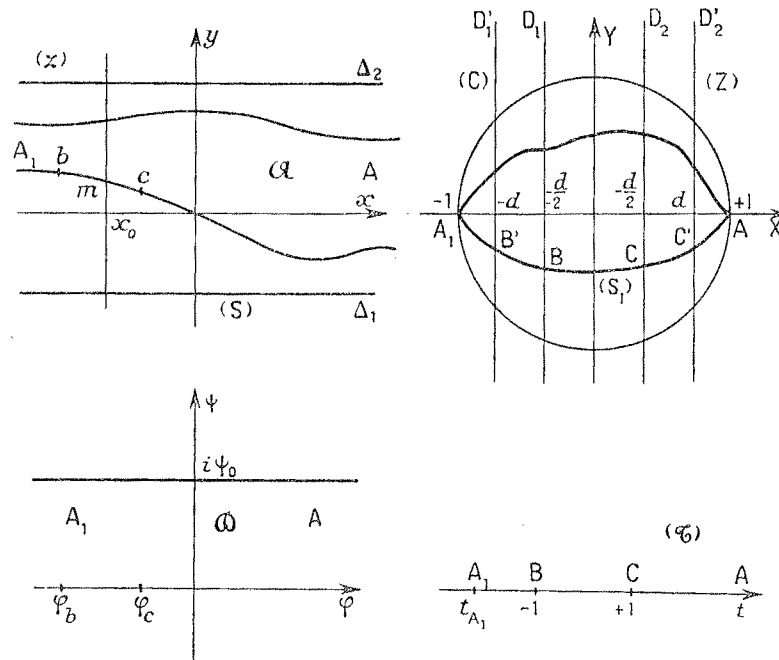


Fig. 2.

2° Effectuons maintenant l'application conforme de Γ sur le demi-plan supérieur $\mathfrak{E} = t + i\tau$, de telle manière que les points B, C, A aient pour image les points $t = -1, t = +1, t = +\infty$. Le deuxième lemme que nous avons énoncé fournit alors un module de continuité pour la fonction $l_1(t)$ qui réalise la correspondance entre l'arc \widehat{BC} de (S_1) et le segment $-1 \leq t \leq +1$.

L'aire σ de Γ est majorée par l'aire de (C) . D'autre part nous allons minorer la grandeur $\Lambda(\widehat{BC}, \widehat{C'B'})$ précédemment définie. Considérons

pour cela un chemin joignant intérieurement à Γ les arcs BC et $C'B'$. Si ce chemin atteint l'une des droites D'_1 ou D'_2 sa longueur est minorée par le nombre $\frac{d}{2}$ qui ne dépend que de a et de Δ . Si maintenant ce chemin reste à l'intérieur de la région limitée par D'_1 et D'_2 sa longueur est minorée par le produit

$$\delta \left\{ \text{Min} \left| \frac{dZ}{dz} \right| \text{ pour } -d \leq X \leq d \right\}.$$

Mais sur cette région de (C) la fonction $\left| \frac{dZ}{dz} \right|$ est minorée par un nombre non nul, dépendant de a et de Δ . La grandeur $\Lambda(\widehat{BC}, \widehat{C'B'})$ a donc une minorante non nulle, fonction des seules quantités a, Δ, δ .

Les résultats du lemme déjà cité permettent alors de conclure; la fonction $l_4(t)$ admet un module de continuité du type (4.5), où la constante ne dépend que de p, a, Δ et δ .

3° Les correspondances conformes que nous avons considérées entre \mathcal{A} et Γ d'une part, Γ et \mathcal{E} d'autre part, définissent une application conforme de \mathcal{A} sur \mathcal{E} . Soit $l = l(t)$ la fonction qui réalise la correspondance du segment $-1 \leq t \leq +1$ et de son image qui est l'arc \widehat{bc} de (S). Comme $\left| \frac{dz}{dZ} \right|$ est majorée sur \widehat{bc} (en fonction de a et Δ), $l(t)$ admet un module de continuité de la même forme que celui de $l_4(t)$, la constante dépendant toujours de a, Δ, p, δ .

4° Considérons enfin la correspondance entre le domaine \mathcal{O} du plan ζ et le demi-plan \mathcal{E} , qui est définie par l'intermédiaire des transformations conformes précédentes. Les images des points $t = -1$ et $t = +1$ sont deux points φ_b et φ_c de l'axe $O\varphi$.

L'image de $t = +\infty$ est le point $\varphi = +\infty$. Enfin, le point $\varphi = -\infty$ est l'image d'un point de l'axe réel d'affixe t_{A_1} (qui dans le plan Z a pour image le point A_1 d'affixe $Z = -1$). On a évidemment

$$-\infty < t_{A_1} < -1.$$

Cette correspondance entre les domaines considérées des plans \mathcal{E}

et ζ est donnée par

$$\zeta = \frac{\Psi_0}{\pi} \log \frac{\mathfrak{E} - t_{\Lambda_1}}{-1 - t_{\Lambda_1}} + \varphi_b$$

et l'on a pour la correspondance entre les deux axes réels

$$(1.7) \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\Psi_0}{\pi} \frac{1}{t - t_{\Lambda_1}}.$$

La fonction $t(\varphi)$ qui définit la correspondance entre les segments $\varphi_b \leq \varphi \leq \varphi_c$ et $-1 \leq t \leq +1$ vérifie donc pour $-1 \leq t \leq +1$ une inégalité de la forme

$$(1.8) \quad |t(\varphi) - t(\varphi')| \leq \text{const.} |\varphi - \varphi'|,$$

où la constante est majorée en même temps que $|t_{\Lambda_1}|$.

Pour effectuer la majoration de $|t_{\Lambda_1}|$ revenons à la représentation conforme du domaine Γ sur le demi-plan supérieur \mathfrak{E} et utilisons les conclusions du premier lemme que nous avons énoncé, en prenant

$$t_1 = -1, \quad t_2 = +1, \quad t_3 = +\infty, \quad t_4 = t_{\Lambda_1} \quad (1^4).$$

Les images de ces points sont les points B, C, A, A_1 .

Le rapport anharmonique ces points t_3, t_2, t_1, t_4 , pris dans cet ordre est égal à $\frac{2}{1 - t_{\Lambda_1}}$ et l'on a donc

$$\left| \log \frac{|1 - t_{\Lambda_1}|}{2} \right| \leq \frac{4\pi\sigma}{A^2(\widehat{CA}, \widehat{A_1B})}.$$

La longueur $\Lambda(\widehat{CA}, \widehat{A_1B})$ est minorée par d . Il s'ensuit que $|t_{\Lambda_1}|$ est bornée supérieurement en fonction de a et Δ ; il en est de même pour la constante de l'inégalité (1.8).

Il en résulte que $l(\varphi)$ admet aussi sur le segment $\varphi_b \leq \varphi \leq \varphi_c$ le module de continuité.

(1⁴) On n'a plus ici $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$, mais le résultat du lemme en question est encore valable à la condition que ces quatre points soient rencontrés dans cet ordre, lorsqu'on décrit la frontière en demi-plan supérieur \mathfrak{E} dans le sens direct. Cela résulte de ce qu'on peut par une transformation homographique, laquelle conserve le rapport anharmonique, se ramener au cas de l'énoncé.

$$(1.9) \quad |l(\varphi) - l(\varphi')| \leq \frac{C_1}{\left| \log \frac{1}{|\varphi - \varphi'|} \right|^p},$$

où la constante C_1 dépend de p , a , Δ et δ , mais est indépendante de l'abscisse x_0 du point m .

5° L'inégalité précédente est valable lorsque les points d'abscisse curviligne $l(\varphi)$ et $l(\varphi')$ appartiennent à l'arc \widehat{bc} de (S). Il est d'autre part facile de vérifier qu'il existe un nombre non nul λ , dépendant de a et Δ seuls, et tel que tout arc de (S), de longueur inférieure à λ , soit intérieur à un arc \widehat{bc} construit comme il a été indiqué, à partir d'un point m convenablement choisi. Il s'ensuit que (1.9) sera satisfaite pourvu que

$$|l(\varphi) - l(\varphi')| \leq \lambda.$$

Il existe alors un nombre C_2 , positif et non nul, tel que l'inégalité (1.9) est vérifiée quand

$$|\varphi - \varphi'| \leq C_2.$$

Ce nombre C_2 , comme λ et C_1 , dépend seulement des valeurs de p , a , Δ , δ .

Le résultat annoncé, et qui est exprimé par (1.4), est ainsi établi.

Remarque. — Le module de continuité que nous venons de construire pour $l(\varphi)$ dépend de la valeur de δ qui est inconnue *a priori*. Dans les paragraphes qui suivent nous allons améliorer ce module de continuité et montrer qu'il ne dépend en définitive que de grandeurs connues.

4. ÉQUATIONS GÉNÉRALES. EXISTENCE D'UNE DÉRIVÉE BORNÉE POUR $l(\varphi)$. — Nous ferons dans ce qui suit l'hypothèse que (S) a une courbure $\frac{d\theta}{dl} = \theta'[l]$ qui est bornée. Il suit de là et des résultats du paragraphe précédent que $\theta[l(\varphi)]$ a un module de continuité de la forme

$$(1.10) \quad |\theta[l(\varphi)] - \theta[l(\varphi')]| \leq \frac{C_1}{\left| \log \frac{1}{|\varphi - \varphi'|} \right|^p} \quad \text{si } |\varphi - \varphi'| \leq C_2,$$

où les constantes, finies et non nulles, C_1 et C_2 dépendent de Δ , a , p , δ , $\text{Max}|\theta'|$.

Sur l'image de (L) la fonction $\omega(\zeta)$ a une limite continue qui satisfait à la relation (1.2); la vitesse étant finie et non nulle sur (L) il en résulte que $g(\varphi)$ a une dérivée bornée. Nous établirons d'ailleurs au chapitre V que $\omega(\zeta)$ est prolongeable analytiquement à travers l'image de la ligne libre qui est alors une courbe analytique.

Un problème mixte harmonique dans une bande indéfinie. — La fonction $\omega(\zeta)$ est définie à l'intérieur de la bande \mathcal{D} par la connaissance des fonctions $g(\varphi)$ (valeur de la partie imaginaire de ω sur $\psi = \psi_0$) et $\theta[l(\varphi)]$ (valeur de la partie réelle de ω sur $\psi = 0$). Ces deux fonctions étant intégrables et bornées, ω peut être explicitée à l'intérieur de \mathcal{D} au moyen des intégrales que M. Villat a fait connaître⁽¹⁵⁾, et qui s'écrivent dans le cas envisagé

$$(1.11) \quad \omega(\zeta) = -\frac{i}{2\psi_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\theta[l(u)]}{\text{sh} \frac{\pi}{2\psi_0} (u - \zeta)} du \\ + \frac{i}{2\psi_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(u)}{\text{ch} \frac{\pi}{2\psi_0} (u - \zeta)} du.$$

La première de ces intégrales a une limite continue sur $\psi = \psi_0$ et la seconde intégrale a une limite continue sur $\psi = 0$. Nous allons étudier le comportement du premier terme du second membre de (1.11) lorsque ζ tend vers la valeur réelle φ , finie; pour cela nous écrivons ce terme, suivant un artifice classique, sous la forme équivalente

$$-\frac{i}{2\psi_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\theta[l(u)] - \theta[l(\varphi)]}{\text{sh} \frac{\pi}{2\psi_0} (u - \zeta)} du - \theta[l(\varphi)] \frac{i}{2\psi_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{\text{sh} \frac{\pi}{2\psi_0} (u - \zeta)}.$$

Le point d'affixe ζ étant inférieur à \mathcal{D} un calcul élémentaire

⁽¹⁵⁾ H. VILLAT, *Sur l'écoulement des fluides pesants* (Ann. Ec. Norm. Sup., t. 32, 1915, p. 177).

montre que

$$-\frac{i}{2\psi_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{\operatorname{sh} \frac{\pi}{2\psi_0} (u - \zeta)} = 1.$$

D'autre part, $\theta[l(\varphi)]$ ayant le module de continuité (1.10) où p peut être pris supérieur à 1, l'intégrale

$$-\frac{i}{2\psi_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\theta[l(u)] - \theta[l(\varphi)]}{\operatorname{sh} \frac{\pi}{2\psi_0} (u - \zeta)} du$$

a pour ζ tendant vers φ une limite continue qui est

$$-\frac{i}{2\psi_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\theta[l(u)] - \theta[l(\varphi)]}{\operatorname{sh} \frac{\pi}{2\psi_0} (u - \varphi)} du.$$

D'une manière analogue, $g(\varphi)$ ayant un module de continuité lipschitzien, le dernier terme de (1.11) a sur $\zeta = \varphi + i\psi_0$ une limite continue qui est

$$ig(\varphi) - \frac{1}{2\psi_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(u) - g(\varphi)}{\operatorname{sh} \frac{\pi}{2\psi_0} (u - \varphi)} du.$$

Des raisonnements qui précèdent, on déduit alors les résultats suivants :

1° La partie réelle de $\omega(\zeta)$ a une limite continue $f(\varphi)$ sur $\zeta = \varphi + i\psi_0$ ($-\infty < \varphi < +\infty$) et cette limite vérifie

$$(1.12) \quad f(\varphi) = -\frac{1}{2\psi_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(u) - g(\varphi)}{\operatorname{sh} \frac{\pi}{2\psi_0} (u - \varphi)} du + \frac{1}{2\psi_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\theta[l(u)]}{\operatorname{ch} \frac{\pi}{2\psi_0} (u - \varphi)} du.$$

2° La partie imaginaire de ω a sur $\zeta = \varphi$ ($-\infty < \varphi < +\infty$) une limite continue, que nous désignerons par $h(\varphi)$, et cette limite est donnée par

$$(1.13) \quad h(\varphi) = -\frac{1}{2\psi_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\theta[l(u)] - \theta[l(\varphi)]}{\operatorname{sh} \frac{\pi}{2\psi_0} (u - \varphi)} du \\ + \frac{1}{2\psi_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(u)}{\operatorname{ch} \frac{\pi}{2\psi_0} (u - \varphi)} du.$$

3° La fonction $\omega(\zeta)$ ayant une limite continue sur $\psi = 0$ ($-\infty < \varphi < +\infty$) la vitesse V y a également une limite continue et la fonction $l(\varphi)$ est dérivable. De plus, d'après (1.1), $l(\varphi)$ et $h(\varphi)$ sont liées par la relation

$$(1.14) \quad \frac{dl}{d\varphi} = \frac{1}{V_0} e^{-h(\varphi)}, \quad l(0) = 0.$$

Les quatre fonctions d'une variable réelle, $g(\varphi)$, $f(\varphi)$, $l(\varphi)$, $h(\varphi)$ vérifient ainsi le système des quatre équations (1.2), (1.12), (1.13) et (1.14) : nous verrons que celles-ci constituent les équations générales du problème considéré.

Module de continuité de $l(\varphi)$. — Les raisonnements de ce paragraphe ont permis d'établir l'existence d'une dérivée pour $l(\varphi)$; nous allons montrer maintenant que les fonctions $\left| \frac{dl}{d\varphi} \right|$ et $\left| \frac{d\varphi}{dl} \right|$ sont bornées. Ce dernier résultat signifie que la vitesse est bornée supérieurement et inférieurement sur le profil (S), et d'après (1.14) il sera la conséquence de la propriété que nous allons établir pour $|h(\varphi)|$ d'être bornée supérieurement.

La vitesse étant par hypothèse bornée supérieurement et inférieurement sur (L), $|g(\varphi)|$ est une fonction bornée et le dernier terme de (1.13) est inférieur en valeur absolue à

$$\text{Max } |g(\varphi)| \frac{1}{2\psi_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{\text{ch } \frac{\pi}{2\psi_0} (u - \varphi)} = \text{Max } |g(\varphi)|.$$

D'autre part, compte tenu du module de continuité (1.10) de $\theta[l(\varphi)]$ la fonction $h(\varphi)$ qui vérifie (1.13) est bornée sur $-\infty < \varphi < +\infty$ et le nombre $\text{Max } |h(\varphi)|$ peut être majoré en fonction des grandeurs p , $\text{Max } |g(\varphi)|$, C_1 , C_2 , ces deux dernières constantes se majorant elles-mêmes au moyen des quantités a , Δ , δ , $\text{Max } |\theta'|$.

Pour les mouvements que nous envisagerons, nous saurons majorer $|g(\varphi)|$ *a priori*. Nous ne connaissons pas par contre une minorante δ , non nulle, de la distance des courbes (S) et (L); mais nous allons montrer que le nombre $\text{Max } |h(\varphi)|$, dont nous avons

établi l'existence, peut être majoré pourvu que l'on connaisse des majorantes des seules quantités $\text{Max}|g(\varphi)|$, $\text{Max}|\theta'|$, $\frac{1}{a}$.

5. LIMITATIONS DE LA VITESSE SUR LE PROFIL (S). — Considérons un mouvement plan, irrotationnel et permanent, d'un fluide parfait, incompressible, le domaine fluide \mathcal{A} étant du type que nous avons envisagé jusqu'à maintenant. Nous supposons, en particulier, que (S) est douée d'une courbure bornée et que sur cette courbe, on a

$$(1.15) \quad |\theta[l]| \leq \frac{\pi}{2} - a \quad (a > 0).$$

Les raisonnements du paragraphe précédent ont montré que si la vitesse sur (L) est bornée supérieurement et inférieurement par des nombres finis non nuls, cette vitesse jouit alors des mêmes propriétés relativement à (S).

Désignons par V_m et V_M une minorante non nulle et une majorante de la vitesse sur (L). Nous nous proposons dans ce qui suit de construire une minorante et une majorante de la vitesse sur (S) qui ne dépendent que de V_m , V_M et des grandeurs connues ψ_0 , a , $\text{Max}|\theta'|$.

On connaît par hypothèse une majorante G de $\text{Max}|g(\varphi)|$ et le nombre fini $H = \text{Max}|h(\varphi)|$ existe. Nous allons alors chercher à majorer H en fonction de G . Pour cela nous utilisons les deux relations (1.13) et (1.14).

Le dernier terme de (1.13) est inférieur en valeur absolue à

$$G \frac{1}{2\psi_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{\text{ch} \frac{\pi u}{2\psi_0}} = G.$$

Pour majorer la première intégrale de (1.13) décomposons l'intervalle d'intégration en $I_1 = \left[\varphi - \eta \frac{\psi_0}{\pi}, \varphi + \eta \frac{\psi_0}{\pi} \right]$ et en son complémentaire I_2 , η désignant un nombre positif, non nul. La valeur absolue de la contribution de I_1 est inférieure à

$$\text{Max} \left| \frac{d}{d\varphi} \theta[l(\varphi)] \right| \frac{1}{2\psi_0} \int_{-\frac{\eta\psi_0}{\pi}}^{+\frac{\psi_0}{\pi}} \frac{u}{\text{sh} \frac{\pi u}{2\psi_0}} du,$$

ce qui est majoré par

$$\frac{2\eta\psi_0}{\pi^2} \text{Max} \left| \frac{d}{d\varphi} \theta[l(\varphi)] \right|.$$

La relation (1.14) donne

$$\left| \frac{dl}{d\varphi} \right| \leq \frac{1}{V_0} e^{\mu},$$

d'où

$$\left| \frac{d}{d\varphi} \theta[l(\varphi)] \right| \leq \frac{1}{V_0} e^{\mu} \text{Max} |\theta'|.$$

Compte tenu de cela, la contribution de I_1 dans le calcul de la première intégrale (1.13) est, en valeur absolue, inférieure à

$$\frac{2\eta\psi_0}{\pi^2 V_0} e^{\mu} \text{Max} |\theta'|.$$

Quant à la contribution de I_2 , elle est majorée par

$$\frac{2}{2\psi_0} \text{Max} |\theta| \int_{\frac{\eta\psi_0}{\pi}}^{+\infty} \frac{du}{\text{sh} \frac{\pi u}{2\psi_0}} = \frac{2}{\pi} \text{Max} |\theta| \left| \log \text{th} \frac{\eta}{4} \right|.$$

Compte tenu des résultats précédents, (1.13) permet d'écrire

$$(1.16) \quad H \leq G + \frac{2}{\pi} \text{Max} |\theta| \left| \log \text{th} \frac{\eta}{4} \right| + \frac{2\psi_0}{\pi^2 V_0} \text{Max} |\theta'| \eta e^{\mu}.$$

Prenons alors η égal à $e^{-\mu}$; η est ainsi non nul et inférieur à 1. Par suite

$$\left| \log \text{th} \frac{\eta}{4} \right| \leq |\log \eta| + \left| \log \text{th} \frac{1}{4} \right|$$

et l'inégalité (1.16) donne

$$H \leq G + \frac{2}{\pi} \left| \log \text{th} \frac{1}{4} \right| \text{Max} |\theta| + \frac{2\psi_0}{\pi^2 V_0} \text{Max} |\theta'| + \frac{2}{\pi} H \text{Max} |\theta|$$

et, eu égard à (1.15) on a

$$(1.17) \quad H \leq \frac{\pi}{2a} \left\{ G + \frac{2}{\pi} \text{Max} |\theta| \left| \log \text{th} \frac{1}{4} \right| + \frac{2\psi_0}{\pi^2 V_0} \text{Max} |\theta'| \right\}.$$

Si l'on prend le paramètre V_0 égal à 1, on a alors

$$(1.17') \quad \text{Max} |\text{Log } V| \text{ sur } (S) \leq \frac{\pi}{2a} \left\{ \text{Max} |\log V| \text{ sur } (L) + \frac{2}{\pi} \text{Max} |\theta| \left| \log \text{th} \frac{1}{4} \right| + \frac{2\psi_0}{\pi^2 V_0} \text{Max} |\theta'| \right\}.$$

Cette inégalité établit le résultat que nous avons en vue ⁽¹⁶⁾.

Remarque. — Les raisonnements que nous venons d'utiliser permettraient de minorer V sur (S) , en fonction de la seule valeur V_m d'une minorante non nulle de V sur (L) .

En effet, prenons V_0 égal à V_m et cherchons à majorer le nombre H^- qui désignera le maximum de $|h(\varphi)|$ pour h négatif.

On a $g(\varphi) = \log \frac{V \text{ sur } (L)}{V_m}$ et $g(\varphi)$ est donc positive.

Il s'ensuit que la dernière intégrale de (1.13) a une valeur positive et

$$H^- \leq \text{Max} \left| \frac{1}{2\psi_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\theta[l(u)] - \theta[l(\varphi)]}{\text{sh} \frac{\pi}{2\psi_0} (u - \varphi)} du \right|.$$

D'autre part, on a évidemment

$$\left| \frac{dl}{d\varphi} \right| \leq \frac{1}{V_m} e^{H^-}.$$

Les calculs précédents conduisent alors à l'inégalité

$$(1.17'') \quad H^- \leq \frac{\pi}{2a} \left\{ \frac{2}{\pi} \text{Max} |\theta| \left| \log \text{th} \frac{1}{4} \right| + \frac{2\psi_0}{\pi^2 V_m} \text{Max} |\theta'| \right\}$$

qui constitue une minoration de la vitesse sur (S) en fonction de V_m seul. Nous ferons également usage de cette limitation de V au chapitre III.

Il convient de signaler que les méthodes utilisées ne permettraient

⁽¹⁶⁾ Il est à remarquer qu'ayant construit une borne inférieure pour le module $\left| \frac{dz}{d\zeta} \right|$ de la transformation $z(\zeta)$ on en déduit une valeur de la minorante δ de la distance de (S) et de (L) .

pas, par contre, de majorer la vitesse sur (S) en fonction de la seule valeur d'une majorante de V sur (L).

6. MAJORATION DE L'ANGLE $f(\varphi)$. — Nous envisageons à nouveau un mouvement pour lequel la condition (1.2) est vérifiée sur la ligne (L) et nous désignons par V_m la borne inférieure, non nulle, de la vitesse sur (L).

Nous allons montrer que l'angle $f(\varphi)$ que fait la tangente orientée à (L) avec une horizontale est limité au moyen de la relation

$$(1.18) \quad |f(\varphi)| \leq \frac{\gamma \psi_0}{V_m^3} + \text{Max} |\theta|.$$

Pour cela définissons la fonction $\omega(\zeta)$ en faisant $V_0 = V_m$. Il suit de là que $g(\varphi)$ est positive et que, d'après (1.2)

$$(1.19) \quad \left| \frac{dg}{d\varphi} \right| \leq \frac{\gamma}{V_m^3}.$$

La formule (1.12) permet par ailleurs d'écrire

$$|f(\varphi)| \leq \text{Max} \left| \frac{dg}{d\varphi} \right| \frac{1}{2\psi_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u}{\text{sh} \frac{\pi u}{2\psi_0}} du + \text{Max} |\theta| \frac{1}{2\psi_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{\text{ch} \frac{\pi u}{2\psi_0}}$$

ou (17)

$$|f(\varphi)| \leq \psi_0 \text{Max} \left| \frac{dg}{d\varphi} \right| + \text{Max} |\theta|,$$

ce qui, compte tenu de (1.19), établit (1.18).

Remarque. — D'après (1.2) on a aussi

$$\left| \frac{dg}{d\varphi} \right| \leq \frac{\gamma}{V_m^3} \text{Max} |f(\varphi)|$$

(17) Pour calculer l'intégrale $-\frac{1}{2\psi_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(u-\varphi)}{\text{sh} \frac{\pi(u-\varphi)}{2\psi_0}} du$ on peut remarquer

que celle-ci représente la valeur de la partie réelle sur $\psi = \psi_0$ de la fonction holomorphe sur ω , imaginaire pure sur $\psi = 0$, et ayant sur $\psi = \psi_0$ une partie imaginaire égale à φ . Cette fonction est $i\zeta$ et par suite l'intégrale ci-dessus est égale à $-\psi_0$.

et les raisonnements qui précèdent permettent alors d'écrire

$$|f(\varphi)| \leq \frac{\gamma \psi_0}{V_m^3} \text{Max } |f(\varphi)| + \text{Max } |\theta|.$$

Ainsi lorsque

$$\frac{\gamma \psi_0}{V_m^3} < 1,$$

$\text{Max } |f(\varphi)|$ tend vers zéro quand $\text{Max } |\theta|$ tend vers zéro, ou encore si $\theta[L]$ reste petit, l'écoulement est sensiblement uniforme; si le fond est rectiligne et horizontal la seule solution est alors le mouvement uniforme.

CHAPITRE II.

CAS OU LE MOUVEMENT PRÉSENTE UNE PÉRIODICITÉ GÉOMÉTRIQUE.

THÉORÈME D'EXISTENCE.

7. ÉNONCÉ DES PROBLÈMES. PROBLÈME (P). — *Écoulement (P)*. — Dans ce chapitre et le suivant on suppose que la paroi (S) présente des ondulations qui se reproduisent périodiquement et qui admettent des axes verticaux de symétrie. Au surplus, on suppose que le profil (S) croît, ou décroît, constamment entre deux axes de symétrie successifs.

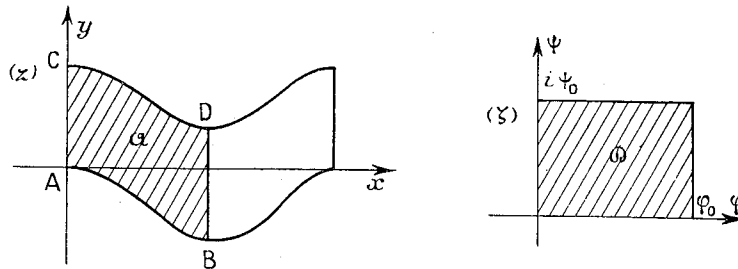


Fig. 3.

La fonction $\theta[L]$ est alors périodique et l'on désigne sa période par $2L_0$. On prend pour origine des abscisses un point de crête de (S), que l'on appelle A; avec cela la fonction $\theta[L]$ est impaire et elle est

négative ou nulle sur le segment $0 \leq l \leq L_0$. La courbe (S) ayant une tangente continue $\theta[l]$ s'annule pour $l=0$ et $l=L_0$. Nous appelons B le point de (S) d'abscisse $l=L_0$.

Nous considérons les écoulements qui ont la même périodicité géométrique et les mêmes éléments de symétrie que la paroi (S), et pour lesquels, de plus, la ligne libre est croissante entre deux verticales de symétrie où la paroi est croissante ⁽¹⁸⁾. Nous appellerons écoulements (P), les mouvements qui jouissent des propriétés géométriques précédentes.

Problème (P). — Désignons par V_0 la vitesse en un point du profil libre (L) qui est sur une verticale de crête. Nous étudierons dans ce chapitre le problème (P) de la détermination des écoulements (P) qui, sur une paroi fixée, correspondent à des valeurs données des paramètres V_0 et ψ_0 .

C'est ce nombre V_0 que nous ferons entrer dans la formule (1.1) qui définit $\omega(\zeta)$.

Il suffit évidemment de considérer le domaine du fluide en mouvement qui est limité par les verticales des points A et B. Dans ce qui suit, nous désignerons ce domaine par \mathcal{A} . Soient C et D les points de (L) qui sont sur les verticales de A et de B. L'angle $\theta[l]$ est alors négatif ou nul sur l'arc \widehat{AB} .

Dans le plan ζ l'image de \mathcal{A} est le rectangle

$$0 < \varphi < \varphi_0, \quad 0 < \psi < \psi_0,$$

où le nombre ψ_0 est donné tandis que φ_0 est inconnu. Ce rectangle sera désigné par \mathcal{D} .

Envisageons une solution du problème (P). La fonction $\omega(\zeta)$ est

⁽¹⁸⁾ Il est à remarquer que cette dernière condition élimine toute une classe d'écoulements possibles sur le profil (S). On peut d'ailleurs donner des exemples de mouvements qui ne vérifient pas cette condition. Ainsi, en effectuant un prolongement par symétrie sur les mouvements à périodicité géométrique sur un fond rectiligne et horizontal, dont l'existence a été établie par Struik (*Math. Ann.*, t. 95, 1926, p. 595-634), on obtient des écoulements pour lesquels la paroi et la ligne libre ont des sens de variation opposés.

holomorphe à l'intérieur du rectangle \mathcal{D} et, compte tenu des résultats du paragraphe 4, elle satisfait aux conditions sur la frontière ci-après :

- 1° Sur le côté supérieur, ω a une limite $f(\varphi) + ig(\varphi)$ qui vérifie (1.2).
- 2° Sur le côté inférieur, ω a une limite qui est $\theta[l(\varphi)] + ih(\varphi)$, les fonctions inconnues $l(\varphi)$, $h(\varphi)$, étant liées par (1.14) et $l(\varphi)$ vérifiant $l(0) = 0$, $l(\varphi_0) = L_0$.
- 3° La partie réelle de ω est nulle sur les côtés verticaux de \mathcal{D} .
- 4° La fonction ω est nulle au point $\psi = \psi_0$, $\varphi = 0$.
- 5° Sur le côté supérieur de \mathcal{D} la partie réelle $f(\varphi)$ de ω satisfait aux inégalités

$$-\pi \leq f(\varphi) \leq 0.$$

Inversement, les paramètres V_0 et ψ_0 étant fixés, soient, φ_0 un nombre positif, et $\omega(\zeta)$ une fonction analytique qui satisfait aux conditions précédentes sur le rectangle \mathcal{D} , défini à partir de φ_0 .

La fonction $\theta[l]$ étant par hypothèse bornée par les nombres $-\pi$ et zéro sur le segment $0 \leq l \leq L_0$, la partie réelle de $\omega(\zeta)$ est également bornée par ces nombres sur la frontière de \mathcal{D} . Un résultat du paragraphe 2 montre que la fonction $z(\zeta)$, définie par (1.1), est alors univalente sur le rectangle \mathcal{D} dont elle effectue l'application conforme sur un domaine simplement connexe du plan z .

L'image du côté inférieur de \mathcal{D} est un arc de courbe d'équation intrinsèque $\theta = \theta[l]$, $0 \leq l \leq L_0$. C'est donc l'arc \widehat{AB} de (S).

Les images des côtés verticaux de \mathcal{D} sont deux segments verticaux \widehat{AC} et \widehat{BD} .

Enfin l'image du côté supérieur de \mathcal{D} est un arc \widehat{CD} sur lequel la condition à la ligne libre est satisfaite, et la vitesse est égale à V_0 au point C.

Des symétries alternées sur les domaines \mathcal{D} et \mathcal{A} définissent alors une solution du problème (P).

Remarque. — La condition $-\pi \leq f \leq 0$ entraîne que l'image \mathcal{A} du rectangle \mathcal{D} ne se recouvre pas, et cela suffit à justifier nos raison-

nement concernant la limitation des inconnues. Mais il peut se faire que le domaine \mathcal{A} se recoupe avec son symétrique par rapport à BD , lorsque f prend sur \widehat{CD} des valeurs inférieures à $-\frac{\pi}{2}$.

Nous considérons dans ce qui suit le problème de la détermination du domaine \mathcal{A} , et nous indiquons une condition suffisante pour que l'image de \mathcal{D} soit bien un domaine simplement connexe \mathcal{A} .

Il serait facile de former une condition suffisante pour que \mathcal{A} et son symétrique ne se recoupent pas; cette condition, qui est plus stricte que celle à laquelle nous arrivons, s'obtiendrait en remplaçant dans nos calculs les inégalités $-\pi \leq f \leq 0$ par les inégalités $-\frac{\pi}{2} \leq f \leq 0$.

Plan Z. — Nous introduisons le plan auxiliaire

$$Z = X + iY = \rho e^{i\theta}$$

et nous représentons conformément \mathcal{D} sur la demi-couronne (C) qui est définie par

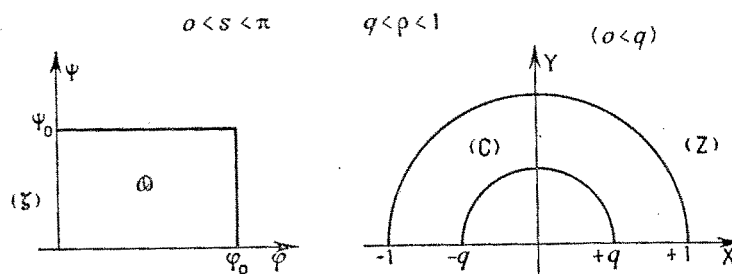


Fig. 4.

de telle manière que les demi-circonférences frontière de (C) , $\rho = q$ et $\rho = 1$, correspondent respectivement aux deux côtés horizontaux, $\psi = 0$ et $\psi = \psi_0$ de \mathcal{D} .

Cette correspondance entre les deux domaines des plans ζ et Z est donnée par

$$(2.1) \quad \zeta = i \frac{\psi_0}{\pi} \log Z + \varphi_0 + i \psi_0,$$

le logarithme étant pris égal à sa détermination principale.

Le nombre q , inférieur à 1, a pour valeur

$$(2.2) \quad q = e^{-\pi \frac{1}{\varphi_0}}.$$

La correspondance entre les deux demi-circonférences frontières et leur image est donnée par

$$(2.3) \quad \varphi = -\frac{\varphi_0}{\pi} s + \varphi_0.$$

Au moyen de cette transformation $\omega(\zeta)$ devient une fonction de Z , holomorphe sur (C) , et aucune confusion n'étant à craindre nous désignerons cette dernière fonction par $\omega(Z)$.

Aux fonctions $f(\varphi)$, $g(\varphi)$, $l(\varphi)$, $h(\varphi)$, précédemment définies, le changement de variable (2.3) fait correspondre quatre fonctions de s , qui sont définies sur le segment $0 \leq s \leq \pi$ et que nous noterons encore $f(s)$, $g(s)$, $l(s)$, $h(s)$.

Ces fonctions vérifient les deux relations suivantes, que l'on déduit de (1.2), (1.14) et (2.3)

$$(2.4) \quad \frac{dg}{ds} = \frac{\gamma \varphi_0}{\pi V_0^3} e^{-3g(s)} \sin f(s),$$

$$(2.5) \quad \frac{dl}{ds} = -\frac{\varphi_0}{\pi V_0} e^{-h(s)}.$$

De plus, la fonction $\omega(\zeta)$ est nulle pour $Z = -1$, d'où il suit que $g(s)$ est nulle pour $s = \pi$; enfin $l(s)$ vérifie les conditions aux limites $l(\pi) = 0$ et $l(0) = L_0$.

Nous écrivons les relations (2.4) et (2.5) sous la forme suivante qui tient compte de ce que $g(\pi)$ et $l(\pi)$ sont nuls :

$$(2.6) \quad g(s) = -\frac{\gamma \varphi_0}{\pi V_0^3} \int_s^\pi e^{-3g(u)} \sin f(u) du,$$

$$(2.7) \quad l(s) = \frac{\varphi_0}{\pi V_0} \int_s^\pi e^{-h(u)} du.$$

Le problème (P) peut donc s'énoncer ainsi :

Définir un nombre q intérieur à 1, et une fonction $\omega(Z)$ holomorphe sur la demi-couronne (C) , de rayon intérieur q , et qui satisfait aux

conditions sur la frontière suivantes :

$$(2.8) \left\{ \begin{array}{l} 1^\circ \omega(Z) \text{ a une limite continue } f(s) + ig(s) \text{ sur la demi-circonférence} \\ \text{extérieure et cette limite vérifie (2.6);} \\ 2^\circ \text{ Sur le demi-circonférence intérieure } \omega \text{ a une limite qui est} \\ \qquad \qquad \qquad \theta[l(s)] + ih(s); \\ \qquad \qquad \qquad l(s) \text{ et } h(s) \text{ étant liées par (2.7);} \\ 3^\circ \omega(Z) \text{ est imaginaire pure sur l'axe réel;} \\ 4^\circ \text{ La fonction } l(s) \text{ vérifie} \\ \qquad \qquad \qquad l(0) = L_0; \\ 5^\circ \text{ La fonction } f(s) \text{ satisfait aux inégalités} \\ \qquad \qquad \qquad -\pi \leq f(s) \leq 0. \end{array} \right.$$

[Le nombre φ_0 qui intervient dans ces conditions est construit à partir de q au moyen de (2.2).]

Nous allons maintenant étudier certaines propriétés des fonctions holomorphes dans une demi-couronne circulaire.

8. UN PROBLÈME MIXTE HARMONIQUE DANS UNE DEMI-COURONNE CIRCULAIRE. — Considérons une fonction $\omega(Z)$, holomorphe dans la demi-couronne (C) ($q < \rho < 1$, $0 < s < \pi$) et imaginaire pure sur l'axe réel. Soit $g(s)$ la limite de sa partie imaginaire sur la demi-circonférence extérieure et soit $\Theta(s)$ la limite de sa partie réelle sur la demi-circonférence intérieure.

Cette fonction ω est prolongeable analytiquement à travers l'axe réel et elle est analytique à l'intérieur de la couronne. Ses valeurs frontières sur la demi-couronne inférieure sont alors données par

$$\Theta(s) = -\Theta(2\pi - s), \quad g(s) = g(2\pi - s).$$

Lorsque les fonctions $\Theta(s)$ et $g(s)$ sont intégrables, $\omega(Z)$ peut s'exprimer à l'intérieur de (C) au moyen des intégrales de M. Villat⁽¹⁹⁾,

(19) H. VILLAT, *Sur l'écoulement des fluides pesants* (Ann. Ec. Norm. Sup., t. 32, 1915, p. 212).

portant sur ces deux fonctions, et qui s'écrivent dans le cas présent

$$(2.9) \quad \omega(Z) = -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi g(u) d \operatorname{Log} \frac{\xi_{30}(-i \operatorname{Log} Z - u)}{\xi_{30}(-i \operatorname{Log} Z + u)} \\ - \frac{i}{\pi} \int_0^\pi \Theta(u) d \operatorname{Log} \left[\xi_{30} \left(-i \operatorname{Log} \frac{Z}{q} - u \right) \xi_{30} \left(-i \operatorname{Log} \frac{Z}{q} + u \right) \right].$$

Les fonctions elliptiques qui interviennent dans cette formule et dans les suivantes sont construites avec les périodes $2\omega_1$ et $2\omega_3$ où

$$\omega_1 = \pi, \quad \omega_3 = -2i \log q.$$

Nous allons étudier le comportement de la fonction ainsi définie lorsque le point d'affixe Z tend vers un point d'une demi-circonférence frontière.

La première des intégrales (2.9) a une limite continue sur la demi-circonférence intérieure et la seconde intégrale a une limite continue sur la demi-circonférence extérieure.

Pour étudier le comportement de la première intégrale lorsque Z tend vers le point e^{is} nous l'écrivons sous la forme suivante qui est équivalente :

$$(2.10) \quad i g(s) - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [g(u) - g(s)] d \log \frac{\xi_{30}(-i \log Z - u)}{\xi_{30}(-i \log Z + u)}.$$

Le noyau

$$\frac{d}{du} \log \frac{\xi_{30}(-i \log Z - u)}{\xi_{30}(-i \log Z + u)}$$

a une singularité polaire pour $Z = e^{iu}$. Si $g(s)$ est une fonction höldérienne, l'intégrale de l'expression (2.10) a donc une limite continue sur la demi-circonférence extérieure qui est

$$-\frac{1}{\pi} \int_0^\pi [g(u) - g(s)] d \log \frac{\xi_{30}(s - u)}{\xi_{30}(s + u)}$$

et cette limite est réelle.

Étudions maintenant ce que devient le dernier terme de (2.9) lorsque Z tend vers $q e^{is}$. Écrivons pour cela ce terme sous la forme

suivante :

$$(2.11) \quad -\frac{i}{\pi} \int_0^\pi [\Theta(u) - \Theta(s)] d \log \left[\xi_{30} \left(-i \log \frac{Z}{q} - u \right) \xi_{30} \left(-i \log \frac{Z}{q} + u \right) \right] \\ - i \frac{\Theta(s)}{\pi} \log \frac{\xi_{30} \left(-i \log \frac{Z}{q} - \pi \right) \xi_{30} \left(-i \log \frac{Z}{q} + \pi \right)}{\xi_{30}^2 \left(-i \log \frac{Z}{q} \right)}.$$

Le noyau

$$\frac{d}{du} \log \left[\xi_{30} \left(-i \log \frac{Z}{q} - u \right) \xi_{30} \left(-i \log \frac{Z}{q} + u \right) \right]$$

a une singularité polaire pour $Z = q e^{iu}$; si $\Theta(s)$ est höldérienne, l'intégrale de l'expression (2.11) a alors une limite continue sur la demi-circonférence intérieure et cette limite, qui est imaginaire, a pour expression

$$-\frac{i}{\pi} \int_0^\pi [\Theta(u) - \Theta(s)] d \log [\xi_{30}(s - u) \xi_{30}(s + u)].$$

Enfin, le dernier terme de (2.11) a pour valeur

$$\Theta(s) + \frac{2i}{\pi} \Theta(s) \log \frac{\xi_{30} \left(-i \log \frac{Z}{q} \right)}{\xi_{30} \left(-i \log \frac{Z}{q} + \pi \right)}.$$

Les résultats précédents montrent que, lorsque $\Theta(s)$ et $g(s)$ sont höldériennes, la partie réelle de ω a une limite sur $\rho = 1$, que nous appelons $f(s)$, et la partie imaginaire de ω a une limite sur $\rho = q$ que nous appelons $h(s)$. De plus, ces limites sont données par

$$(2.12) \quad f(s) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [g(u) - g(s)] N_1(u, s, q) du + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \Theta(u) N_2(u, s, q) du,$$

$$(2.13) \quad h(s) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [\Theta(u) - \Theta(s)] N_3(u, s, q) du + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi g(u) N_4(u, s, q) du \\ + \frac{2}{\pi} \Theta(s) \log \frac{\xi_{30} s}{\xi_{30}(s + i\pi)},$$

avec

$$(2.14) \quad \left\{ \begin{array}{l} N_1(u, s, q) = - \frac{d}{du} \log \frac{\zeta_{30}(s-u)}{\zeta_{30}(s+u)}, \\ N_2(u, s, q) = -i \frac{d}{du} \log [\zeta_{30}(s-u+i \log q) \zeta_{30}(s+u+i \log q)], \\ N_3(u, s, q) = -i \frac{d}{du} \log [\zeta_{30}(s-u) \zeta_{30}(s+u)], \\ N_4(u, s, q) = +i \frac{d}{du} \log \frac{\zeta_{30}(s-u+i \log q)}{\zeta_{30}(s+u+i \log q)}. \end{array} \right.$$

Les quatre intégrales des formules (2.12) et (2.13) définissent des fonctions de (s) continues sur le segment $0 \leq s \leq \pi$.

La fonction $\log \frac{\zeta_{30}^s}{\zeta_{30}(s+\pi)}$ a une singularité logarithmique pour $s=0$ et pour $s=\pi$; si $\Theta(s)$ est hölderienne et s'annule pour ces valeurs de s le dernier terme de (2.13) est donc continu pour $0 \leq s \leq \pi$.

Établissons maintenant des propriétés qui nous seront utiles, relatives au signe des noyaux N_1 et N_2 .

On a

$$N_1(u, s, q) = \frac{\zeta'_{30}(s+u)}{\zeta_{30}(s+u)} + \frac{\zeta'_{30}(s-u)}{\zeta_{30}(s-u)} = \varphi(s+u) + \varphi(s-u),$$

avec

$$\varphi(x) = \frac{p'x}{2(px - e_3)}.$$

Il suffit de construire la courbe $\varphi = \varphi(x)$ (x réel) pour voir que lorsque s et u appartiennent au segment $[0, \pi]$ le noyau N_1 est du signe de $u - s$. De plus ce noyau s'annule pour $s=0$ et $s=\pi$.

Le noyau N_2 peut être mis sous la forme

$$N_2(u, s, q) = -i \frac{d}{du} \log \left\{ \left[p \left(s - u - \frac{\omega_3}{2} \right) - e_3 \right] \left[p \left(s + u - \frac{\omega_3}{2} \right) - e_3 \right] \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Or

$$\left\{ \left[p(v-u) - e_3 \right] \left[p(v+u) - e_3 \right] \right\}^{\frac{1}{2}} = \frac{pu - p(v + \omega_3)}{pu - pv} (pv - e_3),$$

d'où

$$\begin{aligned} N_2 &= -i \frac{d}{du} \log \left\{ \frac{pu - p\left(s + \frac{\omega_3}{2}\right)}{pu - p\left(s - \frac{\omega_3}{2}\right)} \left[p\left(s - \frac{\omega_3}{2}\right) - e_3 \right] \right\} \\ &= ip'u \frac{p\left(s - \frac{\omega_3}{2}\right) - p\left(s + \frac{\omega_3}{2}\right)}{\left[pu - p\left(s - \frac{\omega_3}{2}\right) \right] \left[pu - p\left(s + \frac{\omega_3}{2}\right) \right]} \end{aligned}$$

Mais s étant réel on a

$$p\left(s \pm \frac{\omega_3}{2}\right) - e_3 = e^{\pm i\delta} \sqrt{(e_1 - e_3)(e_2 - e_3)}.$$

avec δ réel.

Cela permet d'écrire

$$N_2 = \frac{2p'u \sin \delta \sqrt{(e_1 - e_3)(e_2 - e_3)}}{\left[pu - e_3 - e^{+i\delta} \sqrt{(e_1 - e_3)(e_2 - e_3)} \right] \left[pu - e_3 - e^{-i\delta} \sqrt{(e_1 - e_3)(e_2 - e_3)} \right]}.$$

Lorsque u et s réels restent sur le segment $0, \pi$ la fonction $\delta = \arg p\left(s + \frac{\omega_3}{2}\right)$ varie de $-\pi$ à zéro et la fonction $p'u$ est négative.

Il s'ensuit que le noyau N_2 est réel et positif ($0 \leq \frac{s}{u} \leq \pi$). Il ne s'annule que pour $s = 0$ et $s = \pi$.

9. MISE EN ÉQUATIONS DU PROBLÈME (P). TRANSFORMATION V. — Considérons une solution du problème (P), le profil (S) étant supposé avoir une courbure bornée. Nous avons indiqué au chapitre I que les fonctions $g(\varphi), l(\varphi), \theta[l(\varphi)]$ ont alors une dérivée bornée; il s'ensuit que les fonctions $g(s), l(s), \theta[l(s)]$, on également une dérivée bornée. Cela permet d'exprimer $f(s)$ et $h(s)$ en fonction de $g(s)$ et $\theta[l(s)]$, au moyen des formules du paragraphe précédent. On a

$$(2.15) \quad \begin{aligned} f(s) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [g(u) - g(s)] N_1(u, s, q) du \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \theta[l(u)] N_2(u, s, q) du, \end{aligned}$$

$$(2.16) \quad \begin{aligned} h(s) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \{ \theta[l(u)] - \theta[l(s)] \} N_3(u, s, q) du \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi g(u) N_4(u, s, q) du + \frac{2}{\pi} \theta[l(s)] \log \frac{\xi_{30} s}{\xi_{30}(s + \pi)}. \end{aligned}$$

Les fonctions $f(s)$, $g(s)$, $l(s)$, $h(s)$, sont d'autre part liées par les deux relations (2.6) et (2.7). De plus $l(s)$ doit vérifier la condition

$$l(0) = L_0$$

que, compte tenu de (2.7), nous remplacerons par

$$(2.17) \quad L_0 = \frac{\varphi_0}{\pi V_0} \int_0^\pi e^{-h(u)} du.$$

Enfin $f(s)$ satisfait aux inégalités

$$(2.18) \quad -\pi \leq f(s) \leq 0.$$

Inversement, soient $f(s)$, $g(s)$, $l(s)$, $h(s)$, quatre fonctions définies et continues sur le segment $0 \leq s \leq \pi$ et soit φ_0 un nombre positif auquel nous faisons correspondre par la formule (2.2) un nombre q , positif et inférieur à 1. Supposons que ces cinq éléments vérifient le système des cinq équations (2.6), (2.7), (2.15), (2.16) et (2.17) et supposons que les inégalités (2.18) soient vérifiées.

Il existe alors une fonction $\omega(Z)$, holomorphe sur la demi-couronne (C) de rayon intérieur q , imaginaire pure sur l'axe réel, et qui, sur les demi-circonférences frontières, a des limites continues qui sont $f(s) + ig(s)$ et $\theta[l(s)] + ih(s)$.

Cette fonction $\omega(Z)$ satisfait à l'ensemble des conditions (2.8) sur la frontière de (C) et il lui correspond alors une solution du problème (P).

Nous désignerons par Σ le système des équations (2.6), (2.7), (2.15), (2.16) et (2.17). Nous venons de montrer qu'à toute solution de Σ qui vérifie les inégalités (2.18) il correspond un écoulement du type (P).

Système Σ^ .* — Nous allons remplacer Σ par un système Σ^* de cinq équations, tel que toute solution de ce nouveau système soit solution de Σ et satisfasse nécessairement à la condition (2.18).

Ainsi à une solution de Σ^* il correspondra un écoulement (P). Pour définir Σ^* substituons à (2.6) l'équation suivante :

$$(2.19) \quad g(s) = -\frac{\gamma\varphi_0}{\pi V_0^2} \int_s^\pi e^{-ig(u)} \sin f^*(u) du,$$

avec

$$\begin{aligned} f^*(s) &= f(s) & \text{si} & & -\pi \leq f(s) \leq 0, \\ f^*(s) &= 0 & \text{si} & & -\pi > f(s); \quad f(s) > 0 \end{aligned}$$

et désignons par Σ^* le système des cinq équations (2.7), (2.15), (2.16), (2.17) et (2.19).

Une solution de Σ , qui satisfait à (2.18), est évidemment une solution de Σ^* . Soit inversement une solution de Σ^* . D'après (2.19) $g(s)$ est une fonction décroissante et le noyau N_1 étant du signe de $u - s$, l'expression

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi [g(u) - g(s)] N_1(u, s, q) du$$

est négative.

D'autre part, en vertu de (2.7) et (2.17), $l(s)$ reste comprise entre zéro et L_0 quand s varie de zéro à π ; il résulte alors des hypothèses qui ont été faites sur $\theta[l]$ que $\theta[l(s)]$ est négative ou nulle. Le noyau N_2 étant positif, il s'ensuit que le terme

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \theta[l(u)] N_2(u, s, q) du$$

est également négatif.

La fonction $f(s)$ est donc négative en vertu de (2.15).

Par ailleurs, d'après (2.19), la fonction $g(s)$ est positive et l'on a

$$\left| \frac{dg}{ds} \right| \leq \frac{\gamma \varphi_0}{\pi V_0^2}$$

et par suite

$$\left| \frac{dg}{d\varphi} \right| \leq \frac{\gamma}{V_0^2}.$$

Un résultat du paragraphe 6 montre alors que

$$|f(s)| \leq \frac{\gamma \psi_0}{V_0^2} + \text{Max} |\theta[l]|.$$

Si donc nous supposons que les données satisfont à la condition

$$(2.20) \quad \frac{\gamma \psi_0}{V_0^2} + \text{Max} |\theta| \leq \pi,$$

la fonction $f(s)$, qui appartient à une solution de Σ^* vérifie les inégalités (2.18).

Il suit de là que toute solution de Σ^* est une solution de Σ , vérifiant les inégalités (2.18), pourvu que la condition (2.20) soit satisfaite.

En résumé, lorsque la condition (2.20) est satisfaite, il correspond une solution du problème (P) à toute solution de Σ^* , constituée par un nombre positif φ_0 et par quatre fonctions continues $f(s)$, $g(s)$, $l(s)$, $h(s)$ ($0 \leq s \leq \pi$).

Nous allons étudier l'existence des solutions du système Σ^* . Pour cela nous mettrons ce système sous la forme d'une équation fonctionnelle unique, à laquelle s'appliquera la théorie du point fixe de Schauder et Leray.

Transformation V. — Pour faciliter le langage, nous introduirons les espaces abstraits E , E_α , \mathcal{E} .

Par définition E comprend les fonctions continues sur le segment $0 \leq s \leq \pi$; nous appelons norme d'une fonction $\varphi(s)$ appartenant à cet espace la grandeur

$$\|\varphi(s)\| = \text{Max} |\varphi(s)|.$$

L'espace E_α sera formé des fonctions qui vérifient sur $0 \leq s \leq \pi$ une condition de Hölder d'indice α . La norme d'un élément de E_α est définie par

$$\|\varphi(s)\|_\alpha = \|\varphi(s)\| + \text{plus petite constante entrant dans la condition de Hölder d'indice } \alpha.$$

Nous supposons dans ce qui suit que l'indice α est fixé, α étant positif et inférieur à 1.

Enfin \mathcal{E} désignera l'espace produit $E \times E \times E_\alpha$ et la norme d'un point x de \mathcal{E} sera notée $\|x\|$. Les espaces que l'on vient d'introduire sont linéaires, normés et complets.

Considérons le système Σ^* que nous allons rappeler

$$\begin{aligned} f(s) &= F(s), & g(s) &= G(s), & h(s) &= H(s); \\ (2.21) \quad F(s) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [g(u) - g(s)] N_1(u, s, q) du \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \theta[l(u)] N_2(u, s, q) du, \end{aligned}$$

$$(2.22) \quad H(s) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \{ \theta[l(u)] - \theta[l(s)] \} N_3(u, s, q) du \\ + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi g(u) N_3(u, s, q) du + \frac{2}{\pi} \theta[l(s)] \log \frac{\xi_{30} s}{\xi_{30}(s + \pi)},$$

$$(2.23) \quad G(s) = - \frac{\gamma \varphi_0}{\pi V_0} \int_s^\pi e^{-2g(u)} \sin f^*(u) du,$$

$$(2.24) \quad l(s) = \frac{\varphi_0}{\pi V_0} \int_s^\pi e^{-h(u)} du,$$

$$(2.25) \quad L_0 = \frac{\varphi_0}{\pi V_0} \int_0^\pi e^{-h(u)} du.$$

Les noyaux N_1, N_2, N_3, N_4 sont donnés par (2.14) et les nombres φ_0 et q sont liés par (2.2).

Lorsqu'elles sont solution du problème (P) les fonctions $h(s)$ et $f(s)$ sont des éléments de E et $g(s)$ est un élément de E_α .

Donnons-nous alors un élément $g(s)$ de E_α et deux éléments $f(s)$ et $h(s)$ de E . La relation (2.25) définit un nombre positif φ_0 et par suite un nombre q inférieur à 1. Soit $l(s)$ la fonction construite au moyen de (2.24) avec ce nombre φ_0 et avec l'élément $h(s)$ donné. Cette fonction $l(s)$ a une dérivée bornée et c'est un élément de E_α ; elle s'annule pour $s = \pi$ et elle est égale à L_0 pour $s = 0$; enfin $l(s)$ reste comprise entre zéro et L_0 sur le segment $0 \leq s \leq \pi$. Il suit de là que $\theta[l(s)]$ a un module de continuité höldérien et s'annule aux extrémités du segment $[0, \pi]$. La fonction

$$\frac{2}{\pi} \theta[l(s)] \log \frac{\xi_{30} s}{\xi_{30}(s + \pi)}$$

est alors continue pour $0 \leq s \leq \pi$.

Considérons maintenant les intégrales des formules (2.21) et (2.22) qui sont construites avec l'élément $g(s)$ donné et avec les éléments $\theta[l(s)]$ et q que l'on vient de définir. Les fonctions $g(s)$ et $\theta[l(s)]$ ayant un module de continuité höldérien, ces intégrales fournissent des fonctions de s continues. Les formules (2.21) et (2.22) définissent ainsi deux éléments de E , $F(s)$ et $H(s)$. Enfin le second membre de (2.23) détermine une fonction dérivable $G(s)$; c'est donc un élément de E_α .

Nous désignerons par $V(x)$ la transformation que l'on vient de définir, et qui, à un élément x de \mathcal{E} , de coordonnées $f(s), h(s), g(s)$, fait correspondre un élément x' de \mathcal{E} , de coordonnées $F(s), H(s), G(s)$. La recherche des solutions du problème (P) est alors équivalente à l'étude des solutions de l'équation

$$(2.26) \quad x' = V(x)$$

qui appartiennent à \mathcal{E} .

M. J. Leray et J. Schauder ont fait connaître des critères d'existence pour les équations fonctionnelles de ce type lorsque la transformation V jouit des propriétés suivantes ⁽²⁰⁾ :

- 1° V est définie sur un espace linéaire, normé et complet;
- 2° V prend ses valeurs sur cet espace;
- 3° la transformation est complètement continue ⁽²¹⁾.

Nous avons montré que la transformation V était définie sur \mathcal{E} et qu'elle prenait ses valeurs sur cet espace; nous allons maintenant vérifier que cette transformation est complètement continue.

10. COMPLÈTE CONTINUITÉ DE V . — Supposons que la transformation V opère sur un ensemble borné de \mathcal{E} . Les grandeurs $\|h(s)\|, \|f(s)\|, \|g(s)\|_\alpha$ sont alors bornées et il est aisé d'établir les résultats successifs ci-après :

1° Les nombres φ_0 et q , donnés par (2.2) et (2.25) dépendent continûment de l'élément $h(s)$ de E , et φ_0 et $\frac{1}{1-q}$ sont bornés.

2° La fonction $l(s)$, fournie par (2.24), et par suite $\theta[l(s)]$, sont des éléments de E_α qui dépendent continûment des arguments $\varphi_0, h(s)$, et les normes $\|l(s)\|_\alpha, \|\theta[l(s)]\|_\alpha$ sont bornées.

⁽²⁰⁾ J. LERAY et J. SCHAUDER, *Topologie et équations fonctionnelles* (Ann. Éc. Norm. Sup., t. 51, 1934, p. 45-78).

⁽²¹⁾ Une application de \mathcal{E} dans \mathcal{E} est dite complètement continue si elle est continue et si elle transforme les ensembles bornés de \mathcal{E} en des ensembles compacts.

3° Le second membre de (2.23) définit une fonction $G(s)$ qui a une dérivée bornée et le nombre $\text{Max} \left| \frac{dG}{ds} \right|$ est borné. $G(s)$ considéré comme élément de E_α dépend d'une manière continue des arguments $\varphi_0, f(s), g(s)$.

4° Les fonctions $F(s)$ et $H(s)$, qui sont données (2.21) et (2.22) sont des éléments de E qui dépendent continûment du paramètre q et des arguments $\theta[l(s)]$ et $g(s)$ considérés comme éléments de E_α . En effet, envisageons l'expression

$$F_1(s) = \int_0^\pi [g(u) - g(s)] N_1(u, s, q) du$$

et supposons que les arguments q et $g(s)$ reçoivent des accroissements δq et $\delta g(s)$, ce dernier étant un élément de E_α . La fonction $F_1(s)$ subit alors une variation $\delta F_1(s)$ qui est donnée par

$$(2.27) \quad \delta F_1(s) = \int_0^\pi [\delta g(u) - \delta g(s)] N_1(u, s, q + \delta q) du \\ + \int_0^\pi [g(u) - g(s)] [N_1(u, s, q + \delta q) - N_1(u, s, q)] du.$$

Lorsque $\|\delta g(s)\|_\alpha$ tend vers zéro, le premier terme du second membre de (2.27) tend uniformément vers zéro. Par ailleurs, l'expression $(u - s)[N_1(u, s, q + \delta q) - N_1(u, s, q)]$ tend uniformément vers zéro avec δq et l'intégrale $\int_0^\pi \frac{g(u) - g(s)}{u - s} du$ est bornée quand $g(s)$ appartient à un borné de E_α . Il résulte de cela que $\|\delta F_1(s)\|$ tend vers zéro en même temps que $\|\delta g(s)\|_\alpha$ et δq .

On étudierait d'une manière semblable la continuité des éléments de E qui sont définis par les autres intégrales (2.21) et (2.22).

Construction d'un module de continuité pour $F(s)$ et $H(s)$. — Lorsque la transformation $V(x)$ opère sur borné de \mathcal{E} les fonctions $\theta[l(s)]$ et $g(s)$ sont des éléments de E_α et les quantités $\|\theta[l(s)]\|_\alpha, \|g(s)\|_\alpha, \frac{1}{1-q}$ sont bornées dans leur ensemble. De plus $\theta[l(s)]$ s'annule pour $s = 0$ et $s = \pi$.

Nous allons montrer que $F(s)$ et $H(s)$ sont alors des éléments de E_α et que les normes $\|F(s)\|_\alpha$, $\|H(s)\|_\alpha$ sont bornées dans leur ensemble.

On voit que les intégrales des formules (2.21) et (2.22) où figurent les noyaux réguliers N_2 et N_4 définissent des fonctions de s qui ont une dérivée qui se majore au moyen des quantités $\|\theta[l(s)]\|$, $\|g'(s)\|$, $\frac{1}{1-q}$.

Considérons maintenant l'expression

$$H_1(s) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \{ \theta[l(u)] - \theta[l(s)] \} N_3(u, s, q) du + \frac{2\theta[l(s)]}{\pi} \log \frac{\xi_{30}s}{\xi_{30}(s+\pi)}$$

qui représente la valeur de la partie imaginaire sur $Z = qe^{is}$ de la fonction $\omega_1(Z)$, holomorphe dans la demi-couronne (C) , $q < |Z| < 1$, $0 < s < \pi$ et qui prend les valeurs frontières suivantes : $\omega_1(Z)$ est imaginaire pure sur l'axe réel et elle est réelle sur $Z = e^{is}$; sur $Z = qe^{is}$ la partie réelle de $\omega_1(Z)$ est égale à $\theta[l(s)]$.

Si l'on fait la transformation (2.1), $\omega_1(Z)$ devient une fonction $\omega_1(\zeta)$, holomorphe dans le rectangle \mathcal{D} , $0 < \varphi < \varphi_0$, $0 < \psi < \psi_0$, du plan $\zeta = \varphi + i\psi$, et qui est réelle sur le côté supérieur et imaginaire pure sur les côtés verticaux de \mathcal{D} . Sur le côté inférieur, les parties réelle et imaginaire de $\omega_1(\zeta)$ sont respectivement égales à $\theta[l(\varphi)]$ et $H_1(\varphi)$, qui se déduisent de $\theta[l(s)]$ et $H_1(s)$ par le changement de variable (2.3).

La fonction $\theta[l(\varphi)]$ a donc sur $0 \leq \varphi \leq \varphi_0$, le module de continuité

$$(2.27') \quad |\theta[l(\varphi)] - \theta[l(\varphi')]| \leq \left(\frac{\pi}{\varphi_0} \right)^\alpha \|\theta[l(s)]\|_\alpha |\varphi - \varphi'|^\alpha.$$

On peut prolonger $\omega_1(\zeta)$ par des symétries alternées dans toute la bande, $0 < \psi < \psi_0$, où elle a la période $2\varphi_0$. Comme $\theta[l(s)]$ s'annule pour $s = 0$, $s = \pi$, $\theta[l(\varphi)]$ s'annule pour $\varphi = 0$, $\varphi = \varphi_0$ et ainsi la partie réelle $\theta[l(\varphi)]$ de $\omega_1(\zeta)$ sur le côté inférieur de la bande a partout le module de continuité (2.27').

D'après un résultat du paragraphe 4, on peut donc écrire

$$H_1(\varphi) = - \frac{1}{2\psi_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\theta[l(u)] - \theta[l(\varphi)]}{\operatorname{sh} \frac{\pi}{2\psi_0} (u - \varphi)} du.$$

Or, en reprenant les raisonnements de Priwaloff, nous montrerons au chapitre V que si $\theta[l(\varphi)]$ a le module de continuité (2.27') (quels que soient φ et φ' finis), $H_1(\varphi)$ qui est donnée par l'intégrale précédente a alors le module de continuité

$$|H_1(\varphi) - H_1(\varphi')| \leq \text{const.} \left(\frac{\pi}{\varphi_0}\right)^\alpha \|\theta[l(s)]\|_\alpha |\varphi - \varphi'|^\alpha,$$

où la constante ne dépend que de l'indice α , inférieur à 1.

Il suit de cela que $H_1(s)$ a le module de continuité

$$|H_1(s) - H_1(s')| \leq \text{const.} \|\theta[l(s)]\|_\alpha |s - s'|^\alpha.$$

On aurait un résultat analogue pour l'intégrale de (2.21) où figure N_1 .

Les résultats que nous avons établis au cours de ce paragraphe entraînent les conséquences suivantes : l'application de \mathcal{E} dans \mathcal{E} que définit $V(x)$ est continue et elle transforme un ensemble borné de \mathcal{E} en un ensemble borné de l'espace produit $E_\alpha \times E_\alpha \times E_1$; un tel ensemble est compact dans \mathcal{E} qui est l'espace produit $E \times E \times E_\alpha$ ⁽²²⁾.

La transformation V est ainsi complètement continue sur \mathcal{E} .

11. LIMITATION DES INCONNUES. — Les critères d'existence que nous allons utiliser supposent essentiellement que l'on sache effectuer, *a priori*, une limitation des solutions de l'équation fonctionnelle du problème.

Nous supposons que les données vérifient les deux conditions

$$(2.28) \quad \frac{\gamma\psi_0}{V_0^3} + \text{Max } |\theta| \leq \pi - b,$$

$$(2.29) \quad -\frac{\pi}{2} + a \leq \theta[l] \leq 0,$$

où a et b sont deux nombres positifs et non nuls, arbitrairement petits, et nous nous proposons de montrer que l'on peut majorer la norme d'une solution éventuelle de (2.26) quand on connaît des majorantes

⁽²²⁾ Parce que : 1° un sous-ensemble borné de E_β est compact dans E_α si $0 \leq \alpha < \beta \leq 1$; 2° un produit d'espaces compacts est compact.

des grandeurs sans dimensions

$$(2.30) \quad \frac{1}{a}, \quad \frac{1}{b}, \quad \frac{\gamma\psi_0}{V_0^2}, \quad \frac{\gamma L_0}{V_0^2}, \quad \frac{\psi_0}{V_0} \text{Max} |\theta'|.$$

Envisageons pour cela une solution de (2.26). La condition (2.28) étant vérifiée, la fonction $\omega(Z)$ correspondante définit une fonction $z(Z)$ qui est univalente, et cette solution détermine alors un écoulement (P) sur la paroi (S). Considérons le domaine α du fluide en mouvement qui est limité par les arcs \widehat{AB} , \widehat{CD} et par les verticales AC et BD. Compte tenu de (1.18) et (2.28), sur l'image de \widehat{CD} on a $-\pi \leq f(s) \leq 0$, ce qui montre que la ligne libre est décroissante sur l'arc \widehat{CD} . D'autre part, d'après (2.23), la vitesse qui est égale à V_0 au point C, est croissante sur \widehat{CD} et elle y satisfait à la condition

$$(2.31) \quad V dV = \gamma dy.$$

La majoration des solutions éventuelles se fera alors en plusieurs étapes que nous allons indiquer.

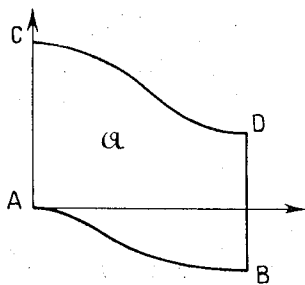


Fig. 5.

1° *Majoration de la longueur AC.* — La fonction $\omega(Z)$ est imaginaire pure sur l'axe réel; sa partie réelle est négative sur la demi-circonférence intérieure où elle est égale à $\theta[l(s)]$; sa partie imaginaire est d'après (2.23) positive sur la demi-circonférence extérieure. On peut donc écrire

$$\omega(Z) = \omega_1(Z) + \omega_2(Z),$$

où $\omega_1(Z)$ et $\omega_2(Z)$ sont analytiques sur (C) , imaginaires pures sur l'axe réel, et où de plus :

$\omega_1(Z)$ a une partie réelle nulle sur la demi-circonférence intérieure et une partie imaginaire positive sur la demi-circonférence extérieure.

$\omega_2(Z)$ a une partie imaginaire nulle sur la demi-circonférence extérieure et une partie réelle négative sur la demi-circonférence intérieure.

Des prolongements analytiques à travers l'axe réel et à travers la circonférence de rayon q montrent que la partie imaginaire de $\omega_1(Z)$ est positive sur le segment $-1, -q$ de l'axe réel.

On peut aussi prolonger analytiquement $\omega_2(Z)$ à travers l'axe réel et à travers la circonférence de rayon 1 . On voit alors que la partie réelle U_2 de ω_2 est négative sur la demi-couronne supérieure et positive sur la demi-couronne inférieure. Sur le segment $-1, -q$, de l'axe réel, on a donc $\frac{\partial U_2}{\partial Y} \leq 0$. Soit T_2 la partie imaginaire de ω_2 ; sur le segment considéré, on a alors $\frac{\partial T_2}{\partial X} \geq 0$. Comme T_2 est nulle au point $Z = -1$ il résulte de cela que T_2 est positive sur le segment $-1, -q$ de l'axe des X .

Il suit des deux résultats précédents que la partie imaginaire de $\omega(Z)$ est positive sur ce segment. *Cela montre que la vitesse est supérieure ou égale à V_0 sur le côté AC.* On a donc

$$\text{Longueur AC} \leq \frac{\psi_0}{V_0}.$$

2° *Majoration de la vitesse sur \widehat{CD} .* — Désignons par y_A, y_B, y_C, y_D , les ordonnées des points A, B, C, D. D'après la relation (2.31), qui est satisfaite sur l'arc \widehat{CD} , on a sur cet arc

$$V_0^2 \leq V^2 \leq V_0^2 + 2\gamma |y_C - y_D|.$$

Mais

$$(2.32) \quad |y_C - y_D| \leq |y_A - y_B| + |AC| \leq L_0 + \frac{\psi_0}{V_0},$$

d'où l'on a sur \widehat{CD} ,

$$(2.33) \quad V_0^2 \leq V^2 \leq V_0^2 + 2\gamma \left(L_0 + \frac{\psi_0}{V_0} \right).$$

3° *Limitation des nombres* $\varphi_0, \frac{1}{1-q}$. — D'après les résultats du paragraphe 6, et compte tenu de la condition (2.28), l'angle f que fait la tangente orientée à \widehat{CD} avec Ox satisfait sur cet arc aux inégalités

$$-\pi + b \leq f \leq 0.$$

Soient alors x_c et x_D les abscisses des points C et D; il suit de ces inégalités que l'on a

$$\text{Longueur } \widehat{CD} \leq \frac{|y_c - y_D|}{\operatorname{tg} \frac{f}{2}} + |x_c - x_D|$$

et eu égard à (2.32) et à ce que $|x_c - x_D| \leq L_0$ ceci s'écrit

$$(2.34) \quad \text{Longueur } \widehat{CD} \leq \frac{2\psi_0}{bV_0} + \left(1 + \frac{2}{b}\right)L_0.$$

On a d'autre part

$$(2.34') \quad \varphi_0 \leq \text{Longueur } \widehat{CD} \{ \text{Max } V \text{ sur } (L) \}.$$

Les limitations que l'on vient d'établir pour la longueur de \widehat{CD} et pour la vitesse sur \widehat{CD} permettent alors de majorer le nombre φ_0 . La formule (2.2) donne ensuite une majorante pour le rapport $\frac{1}{1-q}$.

4° *Majoration de* $\|g(s)\|_\alpha$. — Les inégalités (2.33) donnent.

$$(2.35) \quad \|g(s)\| \leq \frac{1}{2} \log \left(1 + 2 \frac{\gamma L_0}{V_0^2} + 2 \frac{\gamma \psi_0}{V_0^3} \right).$$

Ensuite, on a d'après (2.23)

$$\left\| \frac{dg}{ds} \right\| \leq \frac{\gamma \varphi_0}{\pi V_0^3}$$

et compte tenu des résultats qui précèdent [formules (2.33), (2.34) et (2.34')]]

$$\left\| \frac{dg}{ds} \right\| \leq \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{2}{b} \frac{\gamma \psi_0}{V_0^3} + \left(1 + \frac{2}{b} \right) \frac{\gamma L_0}{V_0^2} \right\} \sqrt{1 + 2 \frac{\gamma L_0}{V_0^2} + 2 \frac{\gamma \psi_0}{V_0^3}}.$$

Enfin, on a

$$\|g(s)\|_{\alpha} \leq \|g(s)\| + \left\| \frac{dg}{ds} \right\|.$$

5° *Majoration de $\|h(s)\|$.* — La majoration que nous avons établie pour $\|g(s)\|$ nous permet de construire, au moyen de la formule (1.17) une majorante de $\|h(s)\|$ qui ne dépend que des grandeurs (2.30).

La grandeur $\|f(s)\|$ est inférieure à π . Les résultats que nous venons d'établir permettent alors de conclure que la norme $\|x\| = \|f(s)\| + \|h(s)\| + \|g(s)\|_{\alpha}$ d'une solution de (2.26) peut être majorée en fonction des grandeurs (2.30).

Remarque. — Désignons par const. des nombres positifs qui sont majorés en fonction des quantités $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{\psi_0}{V_0^2}$, $\frac{L_0}{V_0^2}$, $\frac{\psi_0}{V_0}$. Il résulte des calculs qui précèdent que la norme $\|g(s)\|_{\alpha}$ vérifie une condition de la forme

$$\|g(s)\|_{\alpha} < \text{const. } \gamma$$

et d'après la formule (1.17), $h(s)$ satisfait alors à l'inégalité

$$\|h(s)\| < \text{const. } \{ \gamma + \text{Max } |\theta| + \text{Max } |\theta'| \}.$$

Enfin, en vertu de (1.18) on a

$$\|f(s)\| < \text{const. } \{ \gamma + \text{Max } |\theta| \}.$$

Cela montre que la majorante que nous avons construite pour une solution du problème (P) est de la forme

$$(2.35') \quad \|x\| < \text{const. } \{ \gamma + \text{Max } |\theta| + \text{Max } |\theta'| \}.$$

12. EXISTENCE D'UNE SOLUTION DU PROBLÈME (P). — Indiquons l'essentiel de la théorie de l'indice total de M. Leray, dont nous allons faire usage.

Soit une équation de la forme

$$(2.36) \quad x = V(x),$$

où x est un élément d'un espace de Banach \mathcal{E} et $V(x)$ une application complètement continue de \mathcal{E} dans \mathcal{E} . On associe à cette équation la

transformation

$$(2.37) \quad \xi = x - V(x).$$

Soit alors D un domaine borné de \mathcal{E} dont la frontière ne contient aucune solution de (2.36). On appelle indice total des solutions de (2.36) contenues dans D , le degré topologique de la transformation (2.37) au point zéro, et relativement à D . Cet indice total reste constant quand on modifie continûment la transformation V , sans qu'aucune de ses solutions ne vienne sur la frontière de D .

Des théorèmes d'existence peuvent alors s'obtenir par le procédé suivant : on transforme continûment l'équation sans qu'aucune de ses solutions n'atteigne la frontière de D en une équation assez simple pour que l'on sache déterminer l'indice total de ses solutions appartenant à D . Si cet indice diffère de zéro, l'indice total des solutions de (2.36) contenues dans D qui lui est égal, diffère de zéro; l'équation (2.36) a alors au moins une solution sur D .

Nous allons appliquer les critères d'existence précédents à l'équation (2.26) du problème (P). Pour cela introduisons un paramètre réel et positif K et envisageons l'équation

$$(2.38) \quad x = V(x, K)$$

qui s'obtient en remplaçant dans le système Σ^* les éléments γ et $\theta[l]$ par $K\gamma$ et $K\theta[l]$. L'équation (2.38) est donc l'équation du problème (P), pour les données V_0 et ψ_0 , lorsque l'accélération de la pesanteur est égale à $K\gamma$ et quand l'arc \widehat{AB} de (S) a pour équation $\theta = K\theta[l]$, $0 \leq l \leq L_0$.

Il est aisé de s'assurer que la transformation $V(x, K)$ est uniformément continue en K sur un borné de \mathcal{E} . D'autre part, les résultats du paragraphe 11 montrent que, si les inégalités (2.28) et (2.29) sont vérifiées, les solutions éventuelles de (2.38) sont bornées dans leur ensemble lorsque K prend ses valeurs sur le segment $[0, 1]$. On conclut de là que l'indice total des solutions de (2.26) est égal à l'indice total des solutions de l'équation

$$(2.39) \quad x = V(x, 0)$$

qui correspond à la valeur zéro du paramètre K .

Il est aisé de voir que l'équation

$$(2.40) \quad x = \lambda V(x, 0),$$

où λ désigne un paramètre, a, quel que soit λ , la seule solution $x = 0$.

Lorsque λ est égal à zéro, le second membre de (2.40) est indépendant de l'argument x et l'indice total des solutions vaut $+1$. L'indice total des solutions de (2.39) vaut donc aussi $+1$, et il résulte alors des raisonnements précédents de l'indice total des solutions de l'équation (2.26) du problème (P) est égal à $+1$.

CONCLUSION. — *Il existe au moins un écoulement du type (P) sur le fond (S) à courbure bornée, pourvu que les données satisfassent aux deux conditions (2.28) et (2.29).*

Faisons remarquer que la condition (2.28) exprime que le nombre de Froude $\frac{\gamma\psi_0}{V_0^3}$ doit être suffisamment petit, ou encore que l'écoulement considéré doit être relativement rapide.

CHAPITRE III.

CAS OÙ LE MOUVEMENT PRÉSENTE UNE PÉRIODICITÉ GÉOMÉTRIQUE.

THÉORÈME D'UNICITÉ.

15. Préliminaires. — Au cours du précédent chapitre nous avons établi que le problème (P) admet au moins une solution, lorsque les données sont assujetties à certaines conditions. Dans ce chapitre, nous nous proposons d'étudier le nombre de ces solutions et, en particulier d'indiquer des cas où la solution est unique.

Les modes de démonstration de ce théorème d'unicité reposent sur l'hypothèse supplémentaire que la courbure de (S) vérifie une condition de Hölder, dont l'indice sera désigné par ν .

Dans une première partie nous montrons que, moyennant cette hypothèse, la transformation V admet une différentielle de Fréchet, dans le voisinage de tout élément de \mathcal{S} auquel il correspond une solution du problème (P), qui ne se réduit pas à un écoulement uniforme.

Nous réduisons ensuite la discussion de l'équation linéaire et homogène ainsi obtenue à un problème mixte harmonique, du type envisagé par M. Weinstein, et, en adaptant des raisonnements de M. C. Jacob, nous montrons que dans certains cas ce problème n'admet pas d'autre solution que zéro. Les méthodes de Schauder et de M. Leray permettent alors de conclure.

14. DIFFÉRENTIATION DE LA TRANSFORMATION V. — Nous nous proposons dans ce paragraphe d'étudier la transformation V dans le voisinage d'un point de \mathcal{E} .

Soit x un point de \mathcal{E} , auquel V fait correspondre un point x' de cet espace, et soit $x + \Delta x$ un point voisin de x qui a pour transformé le point $x + \Delta x'$.

Nous montrerons en particulier qu'il existe une transformation $W(x, \Delta x)$, linéaire, homogène, et complètement continue par rapport à Δx , qui constitue la différentielle de Fréchet de V, en tout point x auquel il correspond un écoulement (P) qui ne se réduit pas à un écoulement uniforme.

Rappelons que par définition la transformation $W(x, \Delta x)$ linéaire et homogène par rapport à l'argument Δx , est la différentielle de Fréchet de $V(x)$ au point x , si l'on a

$$V(x + \Delta x) = V(x) + W(x, \Delta x) + R(x, \Delta x),$$

le rapport $\frac{\|R(x, \Delta x)\|}{\|\Delta x\|}$ tendant vers zéro en même temps que $\|\Delta x\|$.

Les propriétés annoncées résulteront de la différentiation des équations du problème (P) que nous allons effectuer.

Notations. — Nous désignons les coordonnées de x par $f(s)$, $h(s)$, $g(s)$ et celles de son transformé x' par $F(s)$, $H(s)$, $G(s)$. Les autres éléments qui s'introduisent dans la transformation sont $l(s)$, φ_0 , q .

Nous appelons $\Delta f(s)$, $\Delta h(s)$, $\Delta g(s)$ les coordonnées de l'élément Δx de \mathcal{E} ; $\Delta f(s)$, $\Delta h(s)$ sont des éléments de E et $\Delta g(s)$ est un élément de E_x . Lorsque les arguments $f(s)$, $h(s)$, $g(s)$ reçoivent les accroissements $\Delta f(s)$, $\Delta h(s)$, $\Delta g(s)$ les éléments φ_0 , q , $l(s)$, $\theta[l(s)]$, $F(s)$, $H(s)$, $G(s)$ subissent des accroissements $\Delta\varphi_0$, Δq , $\Delta l(s)$, $\Delta\theta[l(s)]$, $\Delta F(s)$, $\Delta H(s)$, $\Delta G(s)$.

Les parties principales de ces accroissements, que la différentiation des équations va mettre en évidence seront désignées par $\delta\varphi_0$, δq , $\delta l(s)$, $\delta\theta[l(s)]$, $\delta F(s)$, $\delta H(s)$, $\delta G(s)$.

Enfin nous appellerons $\delta x'$ le point de coordonnées $\delta F(s)$, $\delta H(s)$, $\delta G(s)$.

Éléments $\delta\varphi_0$, δq , $\delta l(s)$, $\delta\theta[l(s)]$. — L'élément φ_0 est donné par (2.25); $\delta\varphi_0$ est défini par cette relation différentiée qui s'écrit

$$(3.1) \quad 0 = \frac{\delta\varphi_0}{\pi V_0} \int_0^\pi e^{-h(u)} du - \frac{\varphi_0}{\pi V_0} \int_0^\pi e^{-h(u)} \Delta h(u) du.$$

Les parties principales δq et $\delta l(s)$ des accroissements Δq et $\Delta l(s)$ sont ensuite obtenues par différentiation de (2.2) et (2.24).

$$(3.2) \quad \frac{\delta q}{q} = + \frac{\pi\psi_0}{\varphi_0^2} \delta\varphi_0,$$

$$(3.3) \quad \delta l(s) = \frac{\delta\varphi_0}{\pi V_0} \int_s^\pi e^{-h(u)} du - \frac{\pi V_0}{\varphi_0} \int_s^\pi e^{-h(u)} \Delta h(u) du.$$

La fonction $\delta l(s)$ qui est dérivable est un élément de E_α et compte tenu de (3.1) elle vérifie

$$(3.4) \quad \delta l(0) = 0, \quad \delta l(\pi) = 0.$$

Enfin la partie principale de la variation de $\theta[l(s)]$ est

$$(3.5) \quad \delta\theta[l(s)] = \theta'[l(s)] \delta l(s).$$

Nous faisons l'hypothèse que $\theta'[l]$ a un module de continuité höldérien, d'indice ν , et $l(s)$ et $\delta(s)$ sont des éléments de E_α ; il s'ensuit que $\delta\theta[l(s)]$ appartient à l'espace $E_{2\nu}$.

Nous désignerons dans ce qui suit par $\eta(\lambda)$ des grandeurs numériques positives qui tendent vers zéro lorsque le nombre λ tend vers zéro.

En tenant compte de ce que

$$e^{-h-\Delta h} = e^{-h} - \Delta h e^{-h} + \Delta h \eta(\Delta h)$$

et en utilisant les formules (2.2), (2.24), (2.25), (3.1), (3.2) et (3.3) qui définissent φ_0 , q , $l(s)$, $\delta\varphi_0$, δq , $\delta l(s)$ on obtient sans difficulté les

relations

$$(3.6) \quad |\Delta\varphi_0 - \delta\varphi_0| = \|\Delta h(s)\| \eta[\|\Delta h(s)\|],$$

$$(3.7) \quad |\Delta q - \delta q| = \quad \quad \quad \text{»}$$

$$\left| \frac{d}{ds} \Delta l - \frac{d\delta l}{ds} \right| = \quad \quad \quad \text{»}$$

cette dernière, eu égard aux conditions (3.4), donnant

$$(3.8) \quad \|\Delta l(s) - \delta l(s)\|_\alpha = \|\Delta h(s)\| \eta[\|\Delta h(s)\|].$$

Éléments $\delta F(s)$ et $\delta H(s)$. — Les éléments $F(s)$ et $H(s)$ sont donnés respectivement par les formules (2.21) et (2.22). Nous allons calculer la partie principale des accroissements des quantités qui entrent dans ces expressions.

1° On a déjà indiqué que la partie principale $\delta\theta[l(s)]$ de $\theta[l(s)]$ est égale à $\theta'[l(s)]\delta l(s)$, et que c'est un point de l'espace $E_{\alpha\gamma}$.

2° Les noyaux $N_2(u, s, q)$, $N_4(u, s, q)$ admettent des dérivées par rapport à q , qui sont des fonctions continues de u et de s , ($0 \leq u \leq s \leq \pi$).

Nous désignerons ces dérivées par $N'_2(u, s, q)$ et $N'_4(u, s, q)$.

Les noyaux $N_1(u, s, q)$ et $N_3(u, s, q)$ ont des dérivées en q , $N'_1(u, s, q)$ et $N'_3(u, s, q)$, qui sont continues en u et s , sauf pour $u = s$ où elles ont une singularité polaire.

Les parties principales des variations des noyaux N_1, N_2, N_3, N_4 , quand la partie principale de l'accroissement de q est δq sont

$$\begin{aligned} \delta q N'_2(u, s, q), & \quad \delta q N'_4(u, s, q), \\ \delta q N'_1(u, s, q), & \quad \delta q N'_3(u, s, q) \quad (u \neq s). \end{aligned}$$

3° L'expression $\log \frac{\xi_{30}s}{\xi_{30}(s+\pi)}$ qui figure dans le dernier terme de (2.22) peut se mettre sous la forme

$$\log \frac{s \tilde{\xi}_{30}}{(\pi-s) \tilde{\xi}_{30}(\pi+s)} + \log \frac{\pi-s}{s}.$$

Sur le segment $0 \leq s \leq \pi$, la quantité $\log \frac{s \tilde{\xi}_{30}}{(\pi-s) \tilde{\xi}_{30}(\pi+s)}$ est une fonction continue, de s qui, par rapport à q , a des dérivées continues.

La partie principale de l'accroissement de $\log \frac{\xi_{30}s}{\xi_{30}(s+\pi)}$ est alors

$$\delta q \frac{\partial}{\partial q} \log \frac{s \xi_{30}s}{(\pi-s) \xi_{30}(\pi+s)}.$$

Les résultats qui précèdent permettent de définir $\delta F(s)$ et $\delta H(s)$ au moyen des expressions suivantes, linéaires et homogènes par rapport aux arguments $\Delta g(s)$, $\delta l(s)$, δq ,

$$(3.9) \quad \begin{aligned} \delta F(s) = & \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [\Delta g(u) - \Delta g(s)] N_1(u, s, q) du \\ & + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \theta[l(u)] \delta l(u) N_2(u, s, q) du \\ & + \frac{\delta q}{\pi} \int_0^\pi [g(u) - g(s)] N'_1(u, s, q) du \\ & + \frac{\delta q}{\pi} \int_0^\pi \theta[l(u)] N'_2(u, s, q) du, \end{aligned}$$

$$(3.10) \quad \begin{aligned} \delta H(s) = & \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \{ \theta'[l(u)] \delta l(u) - \theta'[l(s)] \delta l(s) \} N_3(u, s, q) du \\ & + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \Delta g(u) N_4(u, s, q) du + \frac{\delta q}{\pi} \int_0^\pi g(u) N'_4(u, s, q) du \\ & + \frac{\delta q}{\pi} \int_0^\pi \{ \theta[l(u)] - \theta[l(s)] \} N'_3(u, s, q) du \\ & + \frac{2}{\pi} \theta'[l(s)] \delta l(s) \log \frac{\xi_{30}s}{\xi_{30}(s+\pi)} \\ & + \frac{2}{\pi} \theta[l(s)] \delta q \frac{\partial}{\partial q} \log \frac{s \xi_{30}s}{(\pi-s) \xi_{30}(\pi+s)}. \end{aligned}$$

Les noyaux N_2, N_4, N'_2, N'_4 sont réguliers; les noyaux N_1, N_3, N'_1, N'_3 ont une singularité polaire pour $s = u$.

L'expression $\log \frac{\xi_{30}s}{\xi_{30}(s+\pi)}$ a une singularité logarithmique pour $s = 0$ et $s = \pi$ et l'expression $\frac{\partial}{\partial q} \log \frac{s \xi_{30}s}{(\pi-s) \xi_{30}(\pi+s)}$ est une fonction continue de s .

Comme $\Delta g(s)$ est un élément de E_α et $\theta'[l(s)] \delta l(s)$ un élément de $E_{2\alpha}$, $\delta l(s)$ s'annulant pour $s = 0$ et $s = \pi$, les formules qui précèdent ont un sens et définissent deux fonctions continues $\delta F(s)$ et $\delta H(s)$ ($0 \leq s \leq \pi$).

ment de vérifier que

$$\|\delta I_1 - \delta I\| \leq \text{const.} [\|\Delta l(s) - \delta l(s)\|_\alpha + |\Delta q - \delta q|],$$

en désignant par const. des nombres bornés en fonction du point x .

Cette dernière inégalité, compte tenu des formules (3.7) et (3.8) donne

$$(3.17) \quad \|\delta I_1 - \delta I\| = \|\Delta h(s)\| \eta[\|\Delta h(s)\|].$$

Pour établir les formules (3.11) il reste à montrer que les normes $\|\delta I_1 - \Delta I\|$ vérifient des relations de la forme

$$(3.18) \quad \|\delta I_1 - \Delta I\| \leq [\|\Delta l(s)\|_\alpha + |\Delta q|] \eta[\|\Delta l(s)\|_\alpha + |\Delta q|].$$

Nous n'effectuerons cette vérification que lorsque I désigne l'expression

$$(3.19) \quad I = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \{\theta[l(u)] - \theta[l(s)]\} N_3(u, s, q) du.$$

C'est dans ce cas où l'établissement de la relation (3.18) est la plus délicate, et les raisonnements que nous ferons seraient simplifiés si l'on considérait les autres termes entrant dans les formules qui fournissent $F(s)$ et $H(s)$.

On a, I étant donnée par (3.19),

$$(3.20) \quad \Delta I = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \{\theta[l(u) + \Delta l(u)] - \theta[l(s) + \Delta l(s)]\} N_3(u, s, q + \Delta q) du \\ - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \{\theta[l(u)] - \theta[l(s)]\} N_3(u, s, q) du$$

et

$$(3.21) \quad \delta I_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \{\theta'[l(u)] \Delta l(u) - \theta'[l(s)] \Delta l(s)\} N_3(u, s, q) du \\ + \frac{\Delta q}{\pi} \int_0^\pi \{\theta[l(u)] - \theta[l(s)]\} N'_3(u, s, q) du.$$

Posons

$$(3.22) \quad \theta[l(s) + \Delta l(s)] = \theta[l(s)] + \Delta l(s) \theta'[l(s)] + r[l(s), \Delta l(s)],$$

$$(3.23) \quad N_3(u, s, q + \Delta q) = N_3(u, s, q) + \Delta q N'_3(u, s, q) + R(u, s, q, \Delta q).$$

Nous allons indiquer quelques propriétés des éléments $r[l, \Delta l]$ et $R[u, s, q, \Delta q]$ ainsi définis, qui seront utiles à la suite des raisonnements.

1° Le noyau $R[u, s, q, \Delta q]$ a une singularité polaire pour $u = s$ et le rapport

$$(3.24) \quad \frac{(u-s)R(u, s, q, \Delta q)}{\Delta q}$$

tend uniformément vers zéro lorsque Δq tend vers zéro.

2° Les fonctions $\theta[l(s)]$, $\theta[l(s) + \Delta l(s)]$ appartiennent à E_x et $\theta'[l(s)]\Delta l(s)$ est un élément de $E_{2\nu}$. Il s'ensuit que $r[l(s), \Delta l(s)]$ est un élément de $E_{2\nu}$. De plus les normes $\|\theta[l(s) + \Delta l(s)]\|_\alpha$, $\|\theta'[l(s)]\Delta l(s)\|_{2\nu}$, $\|\theta[l(s)]\|_\alpha$, et par conséquent $\|r[l(s), \Delta l(s)]\|_{2\nu}$, sont bornées en même temps que $\|\Delta l(s)\|_\alpha$.

Si l'on pose

$$(3.25) \quad h[t, l, \Delta l] = \theta'[l + t\Delta l] - \theta'[l],$$

On a

$$(3.26) \quad r[l, \Delta l] = \Delta l \int_0^1 h[t, l, \Delta l] dt.$$

Comme $\theta'[l]$ vérifie une condition de Hölder d'indice ν (3.25) montre que

$$|h[t, l, \Delta l]| \leq \text{const. } |\Delta l|^\nu \quad (0 \leq t \leq 1),$$

et d'après (3.26)

$$|r[l, \Delta l]| \leq \text{const. } |\Delta l|^{1+\nu},$$

d'où

$$(3.27) \quad \|r[l(s), \Delta l(s)]\| \leq \text{const. } \|\Delta l(s)\|^{1+\nu}.$$

Les formules (3.20), (3.21), (3.22) et (3.23) permettent de mettre l'expression $\Delta I - \delta I_1$ sous la forme suivante, qui a un sens en vertu des propriétés que nous venons d'indiquer pour $r[l(s), \Delta l(s)]$ et $R(u, s, q, \Delta q)$,

$$(3.28) \quad \begin{aligned} \Delta I - \delta I_1 = & \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \{ \theta[l(u) + \Delta l(u)] - \theta[l(s) + \Delta l(s)] \} R(u, s, q, \Delta q) du \\ & + \frac{\Delta q}{\pi} \int_0^\pi \{ \theta'[l(u)]\Delta l(u) - \theta'[l(s)]\Delta l(s) \} N'_3(u, s, q) du \\ & + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \{ r[l(u), \Delta l(u)] - r[l(s), \Delta l(s)] \} N_2(u, s, q) du. \\ & + \frac{\Delta q}{\pi} \int_0^\pi \{ r[l(u), \Delta l(u)] - r[l(s), \Delta l(s)] \} N'_3(u, s, q) du. \end{aligned}$$

Nous allons étudier les normes dans E des quantités qui figurent au deuxième membre de (3.28).

1° D'après les propriétés de $R(u, s, q, \Delta q)$ déjà signalées, la norme du premier terme est de la forme $\Delta q \eta(\Delta q)$ lorsque $\|\Delta l(s)\|_z$ reste bornée.

2° On a l'inégalité

$$\| \theta' [l(s)] \Delta l(s) \|_{xy} \leq \| \theta' [l(s)] \|_{xy} \| \Delta l(s) \|_z,$$

ce qui montre que le second terme du deuxième membre de (3.28) a une norme majorée par l'expression $\text{const. } \Delta q \| \Delta l(s) \|_z$ où la constante dépend de $\| \theta' [l(s)] \|_{xy}$.

3° Considérons maintenant les deux derniers termes de (3.28) qui sont de la forme

$$(3.29) \quad \int_0^\pi \frac{r[l(u), \Delta l(u)] - r[l(s), \Delta l(s)]}{u-s} K(u, s, q, \Delta q) du.$$

le noyau $K(u, s, q, \Delta q)$ étant régulier et borné.

En décomposant l'intervalle d'intégration en $[s - \varepsilon, s + \varepsilon]$ où ε est positif, non nul et en son complémentaire, on voit que la norme de (3.29) est majorée par

$$(3.30) \quad \text{const.} \{ \varepsilon \| r[l(s), \Delta l(s)] \|_{xy} + |\log \varepsilon| \| r[l(s), \Delta l(s)] \| \}.$$

On a montré que $\| r[l(s), \Delta l(s)] \|_{xy}$ était bornée et que $\| r[l(s), \Delta l(s)] \|$ satisfaisait à la relation (3.27). Il suit de cela que l'expression (3.30) a une majorante du type

$$\text{const.} \{ \varepsilon + |\log \varepsilon| \| \Delta l(s) \|^{1+\nu} \}.$$

Prenons ε égal à $\| \Delta l(s) \|^{1+\nu}$; cette dernière majorante s'écrit alors

$$\text{const.} \| \Delta l(s) \| \{ \| \Delta l(s) \|^{\nu} + (1 + \nu) \| \Delta l(s) \|^{\nu} |\log \| \Delta l(s) \| | \}$$

ce qui est de la forme

$$\| \Delta l(s) \| \eta [\| \Delta l(s) \|]$$

et par conséquent aussi de la forme

$$\| \Delta l(s) \|_z \eta [\| \Delta l(s) \|_z].$$

Les calculs qui précèdent établissent le résultat annoncé. La norme $\|\Delta I - \delta I_1\|$ vérifie la condition

$$\|\Delta I - \delta I_1\| = \{\|\Delta l(s)\|_\alpha + |\Delta q|\} \eta[\|\Delta l(s)\|_\alpha + |\Delta q|].$$

Compte tenu des remarques que nous avons faites, les formules (3.11) se trouvent justifiées.

Élément $\delta G(s)$. — La fonction $G(s)$ est donnée par la formule (2.23) que nous allons rappeler

$$(3.31) \quad \frac{dG}{ds} = \frac{\gamma \varphi_0}{\pi V_0^3} e^{-3g(s)} \sin f^*(s), \quad G(\pi) = 0.$$

Désignons par $\Delta f^*(s)$ la variation de $f^*(s)$

$$(3.32) \quad \Delta f^*(s) = [f(s) + \Delta f(s)]^* - f^*(s)$$

et soit $\delta G^*(s)$, la partie principale de la variation de $G(s)$ lorsque, φ_0 , $g(s)$, $f^*(s)$ ont des accroissements $\delta\varphi_0$, $\Delta g(s)$, $\Delta f^*(s)$. On a par différentiation de (3.31)

$$(3.33) \quad \begin{aligned} \frac{d}{ds} \delta G^* &= \frac{\gamma \delta\varphi_0}{\pi V_0^3} e^{-3g(s)} \sin f^*(s) - \frac{3\gamma\varphi_0}{\pi V_0^3} e^{-3g(s)} \sin f^*(s) \Delta g(s) \\ &+ \frac{\gamma\varphi_0}{\pi V_0^3} e^{-3g(s)} \cos f^*(s) \Delta f^*(s), \quad \delta G(\pi) = 0. \end{aligned}$$

Eu égard aux propriétés de la différentiation, on voit que

$$\left| \frac{d}{ds} \Delta G - \frac{d}{ds} \delta G^* \right| \leq \text{const.} \cdot |\Delta\varphi_0 - \delta\varphi_0| + (\Delta\varphi_0 + \|\Delta f^*\| + \|\Delta g\|) \eta(\Delta\varphi_0 + \|\Delta f^*\| + \|\Delta g\|),$$

ce qui, compte tenu de (3.6), et des conditions

$$\Delta G(\pi) = \delta G(\pi) = 0$$

entraîne

$$(3.34) \quad \frac{\|\Delta G(s) - \delta G^*(s)\|_\alpha}{\|\Delta h(s)\| + \|\Delta f^*(s)\| + \|\Delta g(s)\|_\alpha} = \eta[\|\Delta h(s)\| + \|\Delta f^*(s)\| + \|\Delta g(s)\|_\alpha]$$

Les raisonnements que nous utiliserons supposent essentiellement que $\delta F(s)$, $\delta H(s)$, $\delta G(s)$ sont construits à l'aide de transformations linéaires et homogènes par rapport aux arguments $\Delta g(s)$, $\Delta h(s)$, $\Delta g^*(s)$. Nous sommes ainsi conduits à définir $\delta G(s)$ en substituant $\Delta f(s)$

à $\Delta f^*(s)$ dant (3.33). Nous posons donc

$$(3.35) \quad \frac{d}{ds} \delta G = \frac{\gamma \delta \varphi_0}{\pi V_0^3} e^{-3g(s)} \sin f^*(s) - \frac{3\gamma \varphi_0}{\pi V_0^3} e^{-3g(s)} \sin f^*(s) \Delta g(s) \\ + \frac{\gamma \varphi_0}{\pi V_0^3} e^{-3g(s)} \cos f^*(s) \Delta f(s), \quad \delta G(\pi) = 0,$$

et nous allons indiquer des cas où la norme $\|\delta G - \delta G^*\|_\alpha$ vérifie une relation du type

$$\|\delta G - \delta G^*\|_\alpha = \|\Delta x\| \eta(\|\Delta x\|).$$

Comme d'après (3.33) et (3.35) on a

$$(3.36) \quad \left| \frac{d}{ds} \delta G(s) - \frac{d}{ds} \delta G^*(s) \right| = \left| \frac{\gamma \varphi_0}{\pi V_0^3} e^{-3g(s)} \cos f^*(s) [\Delta f(s) - \Delta f^*(s)] \right| \\ \leq \text{const.} |\Delta f(s) - \Delta f^*(s)|,$$

ceci nous amène à comparer les éléments $\Delta f^*(s)$ et $\Delta f(s)$.

Nous étudions la différentiation de V en un point x qui est solution du problème (P). Cela entraîne que $f(s)$ vérifie les inégalités

$$-\pi + b \leq f(s) \leq 0 \quad (b > 0)$$

et par suite que

$$f^*(s) = f(s).$$

Désignons par $e(\|\Delta f\|)$ le sous-ensemble du segment $[0, \pi]$ (qui peut être vide) sur lequel

$$|f(s)| \leq \|\Delta f(s)\|,$$

Sur le complémentaire de $e(\|\Delta f\|)$ on a

$$|f(s)| > \|\Delta f(s)\|$$

et [si $\|\Delta f(s)\|$ est inférieur à b],

$$-\pi < f(s) + \Delta f(s) \leq 0.$$

On a alors sur cet ensemble

$$f^*(s) = f(s), \quad [f(s) + \Delta f(s)]^* = f(s) + \Delta f(s)$$

et $\Delta f^*(s)$ étant défini par (3.32)

$$\Delta f^*(s) = \Delta f(s).$$

Enfin sur $e(\|\Delta f\|)$ on a

$$|\Delta f^*(s) - \Delta f(s)| \leq \|\Delta f(s)\|.$$

Les résultats qui précèdent et l'inégalité (3.36) montrent que la grandeur $\left| \frac{d}{ds} \delta G^* - \frac{d}{ds} \delta G \right|$ satisfait aux relations suivantes :

$$(3.37) \quad \begin{cases} \left| \frac{d}{ds} \delta G^* - \frac{d}{ds} \delta G \right| \leq \text{const.} \|\Delta f(s)\| & \text{sur } e(\|\Delta f\|), \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad = 0 & \text{sur } \pi - e(\|\Delta f\|). \end{cases}$$

Si nous désignons par $|e(\|\Delta f\|)|$ la mesure de l'ensemble $e(\|\Delta f\|)$ les conditions (3.37) entraînent que $\delta G(s) - \delta G^*(s)$ vérifie une condition de Hölder, d'indice α inférieur à 1, avec une constante qui est égale à ⁽²³⁾

$$(3.38) \quad \text{const.} \|\Delta f(s)\| |e(\|\Delta f(s)\|)|^{1-\alpha}.$$

Compte tenu des conditions $\delta G(\pi) = \delta G^*(\pi) = 0$, ceci entraîne l'inégalité

$$(3.39) \quad \|\delta G(s) - \delta G^*(s)\|_{\alpha} \leq \text{const.} \|\Delta f(s)\| |e(\|\Delta f\|)|^{1-\alpha}.$$

Supposons maintenant que la solution considérée du problème (P) ne soit pas identiquement nulle (ce qui d'ailleurs ne pourrait se produire que si $\theta[l] \equiv 0$). La fonction $f(s)$ est alors continue, négative, et elle ne s'annule que pour $s = 0$ et $s = \pi$ ⁽²⁴⁾. Il s'ensuit que la grandeur $|e(\|\Delta f\|)|$ tend vers zéro lorsque $\|\Delta f(s)\|$ tend vers zéro. Il

⁽²³⁾ En effet si $\left| \frac{d\varphi}{ds} \right| < C$ sur e de mesure $|e|$ et $\frac{d\varphi}{ds} = 0$ ailleurs, on a

$$|\varphi(s) - \varphi(s')| < C |s - s'| \quad \text{et} \quad |\varphi(s) - \varphi(s')| < C |e|$$

et l'on vérifie que

$$\text{Inf} \{ C |s - s'|, C |e| \} \leq C |e|^{1-\alpha} |s - s'|^{\alpha} \quad (0 < \alpha < 1).$$

⁽²⁴⁾ Cette dernière propriété se vérifie sur l'équation (2.15). On a déjà fait remarquer que pour une solution du problème (P) la première intégrale de cette équation était négative ou nulle. D'autre part, le noyau $N_2(u, s, q)$ qui est positif ne s'annule que pour $s = 0$ et $s = \pi$. Si la fonction continue $\theta[l(s)]$ qui ne prend pas de valeurs positives, n'est pas identiquement nulle, $f(s)$ est alors négative et ne s'annule pas à l'intérieur du segment $[0, \pi]$.

résulte alors de (3.39) que

$$\|\delta G(s) - \delta G^*(s)\|_x = \|\Delta f(s)\| \eta[\|\Delta f(s)\|]$$

et en tenant compte de (3.34) on a

$$(3.40) \quad \frac{\|\Delta G(s) - \delta G(s)\|_x}{\|\Delta f(s)\| + \|\Delta h(s)\| + \|\Delta g(s)\|_x} = \eta[\|\Delta f(s)\| + \|\Delta h(s)\| + \|\Delta g(s)\|_x].$$

Transformation $W(x, \Delta x)$. — Nous désignerons par $W(x, \Delta x)$ l'ensemble des transformations au moyen desquelles nous venons de définir un point $\delta x'$ de \mathcal{E} , de coordonnées $\delta F(s)$, $\delta H(s)$, $\delta G(s)$ à partir des éléments x et Δx de cet espace, dont les coordonnées sont respectivement $f(s)$, $h(s)$, $g(s)$ et $\Delta f(s)$, $\Delta h(s)$, $\Delta g(s)$.

Les formules qui entrent dans ces transformations montrent que $W(x, \Delta x)$ est linéaire et homogène par rapport à l'argument Δx . D'autre part, lorsque x est une solution non nulle du problème (P), les normes $\|\delta F(s) - \Delta F(s)\|$, $\|\delta H(s) - \Delta H(s)\|$, $\|\delta G(s) - \Delta G(s)\|_x$ sont de la forme $\|\Delta x\| \eta(\|\Delta x\|)$, ce qui établit que le rapport $\frac{\|V(x + \Delta x) - V(x) - W(x, \Delta x)\|}{\|\Delta x\|}$ tend vers zéro quand $\|\Delta x\|$ tend vers zéro.

La transformation $W(x, Wx)$ est alors la différentielle de Fréchet de $V(x)$ au point x .

Enfin les raisonnements que nous avons utilisés pour établir la complète continuité de $V(x)$ montreraient que $W(x, \Delta x)$ est également complètement continue par rapport à Δx .

Envisageons maintenant l'équation linéaire et homogène en δx ,

$$(3.41) \quad \delta x = W(x, \delta x),$$

où δx est un élément quelconque de \mathcal{E} et x un élément de cet espace qui constitue une solution du problème (P).

La démonstration de notre théorème d'unicité nécessite que nous sachions indiquer des cas où cette équation n'admet pas d'autre solution que zéro.

Nous allons dans le paragraphe qui suit montrer que ce problème se ramène à la résolution d'un problème linéaire aux limites pour une fonction harmonique.

15. SUR LA RÉOLUTION DE L'ÉQUATION $\delta x = W(x, \delta x)$ AU MOYEN D'UN PROBLÈME AUX LIMITES. — Nous ferons tout d'abord une remarque concernant la forme des seconds membres des relations (3.9) et (3.10) qui définissent $\delta F(s)$ et $\delta H(s)$. Cette remarque qui permettra d'alléger l'écriture sera aussi utile à la suite des raisonnements.

Désignons respectivement par $I_1\{\theta[l(s)], g(s), q\}$ et $I_2\{\theta[l(s)], g(s), q\}$ les seconds membres des formules (2.21) et (2.22) qui déterminent $F(s)$ et $H(s)$ à partir des éléments $\theta[l(s)], g(s), q$. Ces fonctionnelles I_1 et I_2 sont d'ailleurs linéaires par rapport à $\theta[l(s)]$ et $g(s)$.

Considérons alors les seconds membres des relations (3.9) et (3.10). Si nous groupons les termes qui contiennent $\theta'[l] \delta l$ et Δg nous obtenons les expressions

$$I_1\{\theta'[l] \delta l, \Delta g, q\} \quad \text{et} \quad I_2\{\theta'[l] \delta l, \Delta g, q\}.$$

Les termes qui restent contiennent δq en facteur et il résulte des propriétés des noyaux N'_1, N'_2, N'_3, N'_4 , et des éléments $\theta[l(s)], g(s)$ que ces termes représentent les expressions

$$\delta q \frac{\partial}{\partial q} I_1\{\theta[l], g, q\}, \quad \delta q \frac{\partial}{\partial q} I_2\{\theta[l], g, q\}.$$

Cela permet d'écrire les formules (3.9) et (3.10) de la manière suivante :

$$(3.42) \quad \begin{aligned} \delta F(s) = & I_1\{\theta'[l(s)] \delta l(s), \Delta g(s), q\} \\ & + \delta q \frac{\partial}{\partial q} I_1\{\theta[l(s)], g(s), q\}, \end{aligned}$$

$$(3.43) \quad \begin{aligned} \delta H(s) = & I_2\{\theta'[l(s)] \delta l(s), \Delta g(s), q\} \\ & + \delta q \frac{\partial}{\partial q} I_2\{\theta[l(s)], g(s), q\}. \end{aligned}$$

Équation $\delta x = W(x, \delta x)$. — La résolution de cette équation revient à trouver deux nombres réels $\delta \varphi_0, \delta q$ et quatre fonctions $\delta f(s)$ et $\delta h(s), \delta g(s), \delta l(s)$ [$\delta f(s)$ et $\delta h(s)$ appartenant à E , $\delta g(s)$ et $\delta l(s)$ à E_α] qui vérifient le système linéaire et homogène des équations obtenues en faisant

$$\Delta f = \delta F = \delta f, \quad \Delta g = \delta G = \delta g, \quad \Delta h = \delta H = \delta h$$

dans les formules (3.1), (3.2), (3.3), (3.9), (3.10) et (3.35).

Ce système s'écrit, compte tenu de la remarque précédente

$$(3.44) \quad \begin{aligned} \delta f(s) = & I_1 \{ \theta'[l(s)] \delta l(s), \delta g(s), q \} \\ & + \delta q \frac{\partial}{\partial q} I_1 \{ \theta[l(s)], g(s), q \}, \end{aligned}$$

$$(3.45) \quad \begin{aligned} \delta h(s) = & I_2 \{ \theta'[l(s)] \delta l(s), \delta g(s), q \} \\ & + \delta q \frac{\partial}{\partial q} I_2 \{ \theta[l(s)], g(s), q \} \end{aligned}$$

$$(3.46) \quad 0 = \frac{\partial \varphi_0}{\pi V_0} \int_0^\pi e^{-h(u)} du - \frac{\varphi_0}{\pi V_0} \int_0^\pi e^{-h(u)} \delta h(u) du,$$

$$(3.47) \quad \delta l(s) = \frac{\partial \varphi_0}{\pi V_0} \int_s^\pi e^{-h(u)} du - \frac{\varphi_0}{\pi V_0} \int_s^\pi e^{-h(u)} \delta h(u) du,$$

$$(3.48) \quad \frac{\delta q}{q} = + \frac{\pi \psi_0}{\varphi_0^2} \delta \varphi_0,$$

$$(3.49) \quad \begin{aligned} \frac{d}{ds} \delta g = & \frac{\gamma \partial \varphi_0}{\pi V_0^2} e^{-3g(s)} \sin f^*(s) - \frac{3 \gamma \varphi_0}{\pi V_0^2} e^{-3g(s)} \sin f^*(s) \delta g(s) \\ & + \frac{\gamma \varphi_0}{\pi V_0^2} e^{-3g(s)} \cos f^*(s) \delta f(s), \quad \delta g(\pi) = 0. \end{aligned}$$

Nous allons maintenant transformer la résolution de ce système en la recherche d'une fonction harmonique, assujettie à certaines conditions linéaires aux limites.

Fonction $\delta\omega(Z)$. — Nous commencerons par montrer que les deux équations (3.44) et (3.45) expriment le fait qu'il existe une fonction $\delta\omega(Z)$, holomorphe dans la demi-couronne (C), imaginaire pure sur l'axe réel, et qui prend les valeurs sur la frontière suivante :

$$(3.50) \quad \begin{cases} \delta\omega(e^{is}) = \delta f(s) + i \delta g(s), \\ \delta\omega(qe^{is}) = \theta'[l(s)] \delta l(s) - \frac{\delta q}{q} \frac{dh}{ds} + i \left\{ \delta h(s) + \frac{\delta q}{q} \frac{d\theta[l(s)]}{ds} \right\}. \end{cases}$$

Cette fonction $\delta\omega(Z)$ représentera d'ailleurs la partie principale de la variation de $\omega(Z)$, définie à partir des éléments $\theta[l(s)]$, $g(s)$, q , lorsque ceux-ci subissent des variations de partie principale $\theta'[l(s)] \delta l(s)$, $\delta g(s)$, δq .

1° Soit $\delta\omega_1(Z)$ la fonction holomorphe dans (C), imaginaire pure sur l'axe réel, qui a $\theta'[l(s)] \delta l(s)$ pour partie réelle sur $Z = qe^{is}$, et $\delta g(s)$ pour partie imaginaire sur $Z = e^{is}$. Les éléments $\delta g(s)$ et $\theta'[l(s)] \delta l(s)$

appartenant respectivement aux espaces E_z et E_{ω} , la fonction $\delta\omega_1(Z)$ a des limites continues sur les demi-circonférences frontières de (C) et ces limites sont

$$(3.51) \quad \begin{cases} \delta\omega_1(e^{is}) = I_1 \{ \theta'[l(s)] \delta l(s), \delta g(s), q \} + i \delta g(s), \\ \delta\omega_1(qe^{is}) = \theta'[l(s)] \delta l(s) + i I_2 \{ \theta'[l(s)] \delta l(s), \delta g(s), q \}. \end{cases}$$

2° Supposons maintenant que les éléments $\theta[l(s)]$ et $g(s)$ restent fixés mais que le paramètre q varie. $\omega(Z)$ est alors fonction de q et nous la désignerons par $\omega(Z, q)$.

Les noyaux de la formule (2.9) ont une dérivée par rapport à q , qui est régulière à l'intérieur de la demi-couronne $C(q)$ de rayon intérieur q . Il suit de cela que la fonction $\frac{\partial\omega}{\partial q}$ existe et est analytique à l'intérieur de $C(q)$.

Nous poserons

$$(3.52) \quad \delta\omega_2(Z) = \delta q \frac{\partial\omega(Z, q)}{\partial q},$$

$\delta\omega_2$ étant alors la partie principale de la variation de $\omega(Z)$ lorsque q reçoit l'accroissement δq .

Les dérivées relativement à q des noyaux de la formule (2.9) ont sur $Z = qe^{is}$ des limites qui ont pour seule singularité un pôle pour $u = s$. Comme $\theta[l(s)]$ et $g(s)$ sont höldériennes, $\delta\omega_2$ a donc une limite continue sur $Z = qe^{is}$ que nous allons calculer.

Posons

$$\Omega(Z) = \frac{\partial\omega}{\partial q} + \frac{Z}{q} \frac{\partial\omega}{\partial Z}.$$

Cette fonction $\Omega(Z)$ est analytique dans $C(q)$, et sur $Z = qe^{is}$ elle a une limite continue qui est

$$\Omega(qe^{is}) = \left[\frac{\partial\omega}{\partial q} \right]_{Z=qe^{is}} + e^{is} \left[\frac{\partial\omega}{\partial Z} \right]_{Z=qe^{is}}$$

le deuxième membre de cette égalité pouvant se mettre sous la forme $\frac{\partial}{\partial q} \omega(qe^{is}, q)$.

On a donc

$$\left[\frac{\partial\omega}{\partial q} \right]_{Z=qe^{is}} = \frac{\partial}{\partial q} \omega(qe^{is}, q) - e^{is} \left[\frac{\partial\omega}{\partial Z} \right]_{Z=qe^{is}}.$$

Comme

$$\omega(qe^{is}, q) = \theta[l(s)] + iI_2\{\theta[l(s)], g(s), q\},$$

on a

$$\frac{\partial}{\partial q} \omega(qe^{is}, q) = i \frac{\partial}{\partial q} I_2\{\theta[l(s)], g(s), q\}.$$

D'autre part

$$-e^{is} \left[\frac{\partial \omega}{\partial Z} \right]_{Z=qe^{is}} = \frac{i}{q} \frac{d}{ds} \omega(qe^{is}, q) = \frac{i}{q} \frac{d\theta[l(s)]}{ds} - \frac{1}{q} \frac{dh}{ds}.$$

Il résulte des calculs qui précèdent que la fonction définie par (3.52), a sur $Z = qe^{is}$ la limite suivante :

$$(3.53) \quad \delta\omega_2(qe^{is}) = -\frac{\partial q}{q} \frac{dh}{ds} + i \left\{ \frac{\partial q}{q} \frac{d\theta[l(s)]}{ds} + \frac{\partial}{\partial q} I_2\{\theta[l(s)], g(s), q\} \right\}.$$

Enfin $\delta\omega_2$ est imaginaire pure sur l'axe réel, et sur la circonférence de rayon 1, elle a une limite qui est réelle et qui a pour valeur

$$\delta\omega_2(e^{is}) = \partial q \left[\frac{\partial \omega}{\partial q} \right]_{Z=e^{is}} = \partial q \frac{\partial \omega(e^{is}, q)}{\partial q},$$

ce qui peut s'écrire

$$(3.54) \quad \delta\omega_2(e^{is}) = \partial q \frac{\partial}{\partial q} I_1\{\theta[l(s)], g(s), q\}.$$

Considérons alors la fonction

$$(3.55) \quad \delta\omega(Z) = \delta\omega_1(Z) + \delta\omega_2(Z).$$

Cette fonction est analytique dans la demi-couronne (C); elle est imaginaire pure sur l'axe réel, et elle a des limites continues sur les demi-circonférences frontières, qui, compte tenu des formules (3.44), (3.45), (3.51), (3.53) et (3.54) ont les valeurs (3.50).

Fonction β . — En adaptant des raisonnements de M. Weinstein⁽²⁵⁾ nous allons maintenant définir à partir de cette fonction $\delta\omega$, une fonction β , harmonique dans le rectangle \mathcal{O} du plan ζ , et astreinte à vérifier certaines conditions linéaires aux limites, lorsque les éléments

(25) M. Weinstein a fait les calculs pour le jet en l'absence de forces de pesanteur. Nous avons adapté les calculs de cet auteur au cas présent en utilisant des résultats de M. C. Jacob.

$\delta f(s), \delta g(s), \delta h(s), \delta l(s), \delta \varphi_0, \delta q$ sont solution du système des équations (3.44) à (3.49).

Remarque. — Nous avons défini des correspondances conformes entre les domaines $\mathcal{O}, \mathcal{A}, \mathcal{C}$ des plans ζ, z, Z et les quantités que nous envisageons dans ce qui suit peuvent alors être considérées comme des fonctions de l'un ou de l'autre des arguments ζ, z, Z à l'intérieur du domaine correspondant. Nous ne précisons donc pas dans l'écriture l'argument dont sont fonction ces quantités.

Nous définissons tout d'abord la quantité $\delta \zeta$ au moyen de la relation (2.1) différenciée

$$(3.56) \quad \delta z = \frac{\delta \varphi_0}{\varphi_0} (\zeta - i\psi_0)$$

et nous introduisons la quantité δz , qui est déterminée à une constante près par

$$(3.57) \quad \frac{d \delta z}{dz} = i \delta \omega + \frac{d \delta \zeta}{d \zeta} = i \delta \omega + \frac{\delta \varphi_0}{\varphi_0}.$$

Enfin nous posons

$$(3.58) \quad \gamma = \delta \zeta - \frac{d \zeta}{dz} \delta z,$$

avec

$$(3.58') \quad \gamma = \alpha + i\beta.$$

La quantité γ est alors une fonction analytique de ζ à l'intérieur du rectangle \mathcal{O} , et nous allons établir les conditions que sa partie imaginaire β , qui est harmonique, est assujettie à vérifier sur la frontière.

Remarque. — Les quantités $\delta \zeta$ et δz sont les parties principales (à une constante près pour δz) des variations que subissent en un point Z fixe, $\zeta(Z)$ et $z(Z)$ quand $g(s), l(s), \varphi_0$, reçoivent des accroissements de partie principale $\delta g(s), \delta l(s), \delta \varphi_0$. La quantité γ est alors la partie principale de la variation de $\zeta(z)$ en un point z fixe. Cette interprétation de γ permet de prévoir que cette fonction doit vérifier des conditions simples aux limites.

Un problème harmonique aux limites pour β :

1° *Condition sur le côté inférieur du rectangle \mathcal{O} .* — Exprimons δh

en fonction de $\delta\varphi_0$ et de $\frac{d\delta l}{ds}$, à l'aide de l'équation (3.47), dérivée relativement à s ,

$$\delta h = \frac{\delta\varphi_0}{\varphi_0} + \frac{\pi V_0}{\varphi_0} e^h \frac{d\delta l}{ds}$$

et portons cette valeur de δh , dans l'expression (3.50) qui donne la valeur de $\delta\omega$ sur l'image du côté inférieur de \mathcal{O} . On obtient

$$\delta\omega(qe^{i\theta}) = \theta'[l] \delta l - \frac{\delta q}{q} \frac{dh}{ds} + i \left\{ \frac{\pi V_0}{\varphi_0} e^h \frac{d\delta l}{ds} + \frac{\delta\varphi_0}{\varphi_0} + \frac{\delta q}{q} \frac{d\theta[l(s)]}{ds} \right\}.$$

La formule (3.57) donne alors

$$(3.59) \quad \frac{d\delta z}{dz} = i\theta'[l] \delta l - \frac{\pi V_0}{\varphi_0} e^h \frac{d\delta l}{ds} - \frac{\delta q}{q} \frac{d\theta[l(s)]}{ds} - i \frac{\delta q}{q} \frac{dh}{ds}.$$

Sur l'image du côté inférieur de \mathcal{O} on a

$$(3.60) \quad dz = e^{i\theta} dl$$

et d'autre part, de l'équation (2.24) il suit que

$$(3.61) \quad \frac{dl}{ds} = - \frac{\varphi_0}{\pi V_0} e^{-h}.$$

Portons dans (3.59) les valeurs de dz et de ds tirées de (3.60) et (3.61). On obtient comme expression de $d\delta z$ sur la portion de frontière considérée

$$\begin{aligned} d\delta z &= e^{i\theta} \{ i\theta' dl \delta l + d\delta l \} + (d\theta + i dh) \frac{\varphi_0}{\pi V_0} \frac{\delta q}{q} e^{i\theta-h} \\ &= d[e^{i\theta} \delta l] - i \frac{\varphi_0}{\pi V_0} \frac{\delta q}{q} d e^{i\omega}, \end{aligned}$$

d'où, en faisant un choix particulier de la constante d'intégration

$$(3.62) \quad \delta z = e^{i\theta} \delta l - i \frac{\varphi_0}{\pi V_0} \frac{\delta q}{q} e^{i\omega}.$$

Compte tenu de (3.62) et de ce que

$$\frac{d\zeta}{dz} = V_0 e^{-i\omega},$$

la formule (3.58) donne

$$\gamma(\varphi) = \frac{\delta\varphi_0}{\varphi_0} (\varphi - i\psi_0) - V_0 e^i \delta l + \frac{i}{\pi} \frac{\delta q}{q} \varphi_0,$$

d'où, $\delta\varphi_0$ et δq étant liés par (3.2)

$$(3.63) \quad \gamma(\varphi) = \frac{\delta\varphi_0}{\varphi_0} \varphi - V_0 e^i \delta l.$$

Cela montre que γ est réelle, et par suite que β est nulle, sur le côté inférieur du rectangle \mathcal{O} .

2° *Condition sur les côtés $\varphi = \text{const.}$* — Sur un de ces côtés, on a

$$dz = i dy, \quad \delta\omega = i \delta T$$

et d'après (3.57)

$$d \delta x + i d \delta y = -i dy \left(\delta T + \frac{\delta\varphi_0}{\varphi_0} \right),$$

en posant

$$\delta z = \delta x + i \delta y.$$

On voit que δx est constante sur les segments considérés, cette valeur constante étant d'ailleurs nulle comme le montre la formule (3.62) appliquée aux points $\psi = 0, \varphi = 0$ ou $\psi = 0, \varphi = \varphi_0$ (en ces points δl est nulle et ω est imaginaire).

Comme sur $\varphi = 0$ et $\varphi_0 = \varphi_0$, $\frac{d\zeta}{dx}$ est réelle et que la partie réelle de $d\zeta$ y est constante, la formule (3.58) permet de conclure que α est constante sur ces segments.

On y a donc la condition suivante pour β ⁽²⁶⁾

$$\frac{\partial\beta}{\partial\varphi} = 0 \quad \text{sur } \varphi = 0 \quad \text{et } \varphi = \varphi_0 \quad (0 < \psi < \psi_0).$$

Remarque. — D'après (3.63), α est nulle au point $\varphi = 0, \psi = 0$ [où $\delta l(0) = 0$]. La valeur constante de α sur le côté $\varphi = 0$ est donc zéro.

⁽²⁶⁾ L'interprétation de γ que nous avons indiquée permet de retrouver immédiatement les conditions aux limites auxquelles doit satisfaire β sur les côtés inférieur et latéraux de \mathcal{O} .

3° *Condition sur le côté supérieur de \mathcal{O} .* — Sur cette portion de frontière on a

$$dz = \frac{1}{V_0} e^{-g} (\cos f + i \sin f) d\varphi, \quad \delta\omega = \delta f + i \delta g.$$

La formule (3.57) donne alors

$$\frac{d\delta z}{d\varphi} = \frac{1}{V_0} e^{-g} (\cos f + i \sin f) \left(i \delta f - \delta g + \frac{\partial \varphi_0}{\varphi_0} \right),$$

d'où, en séparant le réel et l'imaginaire

$$(3.64) \quad \frac{d\delta y}{d\varphi} = \frac{1}{V_0} e^{-g} \left(\cos f \delta f - \sin f \delta g + \sin f \frac{\partial \varphi_0}{\varphi_0} \right).$$

L'équation (3.49) permet d'exprimer δf en fonction de δg et $\partial \varphi_0$,

$$\cos f \delta f = 3 \sin f \delta g - \frac{\partial \varphi_0}{\varphi_0} \sin f + \frac{\pi V_0^3}{\gamma \varphi_0} e^{3g} \frac{d\delta g}{ds}$$

ou

$$(3.65) \quad \cos f \delta f = 3 \sin f \delta g - \frac{\partial \varphi_0}{\varphi_0} \sin f - \frac{V_0^3}{\gamma} e^{3g} \frac{d\delta g}{d\varphi}.$$

En éliminant $\cos f \delta f$ entre (3.64) et (3.65) on obtient

$$(3.66) \quad \frac{d\delta y}{d\varphi} = \frac{1}{V_0} e^{-g} \left(2 \sin f \delta g - \frac{V_0^3}{\gamma} e^{3g} \frac{d\delta g}{d\varphi} \right).$$

Tirons $\sin f$ de la relation

$$\frac{d\delta g}{d\varphi} = - \frac{\gamma}{V_0^3} e^{-3g} \sin f,$$

ce qui permet de donner à (3.66) la forme suivante

$$\frac{d\delta y}{d\varphi} = - \frac{V_0^2}{\gamma} \frac{d}{d\varphi} (e^{2g} \delta g),$$

d'où ⁽²⁷⁾

$$(3.67) \quad \delta y = - \frac{V_0^2}{\gamma} e^{2g} \delta g + \text{const.}$$

⁽²⁷⁾ La constante d'intégration de la formule (3.67) est en fait déterminée; elle s'obtiendrait en intégrant (3.57) sur le segment $\varphi = 0$, et en tenant compte de la valeur de δy pour $\varphi = \psi = 0$, qui est donnée par (3.62).

D'autre part (3.58) donne

$$\delta z = (\delta \zeta - \gamma) \frac{dz}{d\zeta}$$

ou sur $\psi = \psi_0$,

$$\delta z = \left(\frac{\partial \varphi_0}{\varphi_0} \varphi - \alpha - i\beta \right) \frac{e^{-g}}{V_0} (\cos f + i \sin f),$$

d'où il suit, en séparant le réel et l'imaginaire

$$(3.68) \quad \delta y = \frac{1}{V_0} e^{-g} \left(-\beta \cos f - \alpha \sin f + \frac{\partial \varphi_0}{\varphi_0} \varphi \sin f \right).$$

En égalant les deux expressions (3.67) et (3.68) de δy , on obtient

$$(3.69) \quad \delta g = \frac{\gamma}{V_0^3} e^{-3g} \left(\beta \cos f + \alpha \sin f - \frac{\partial \varphi_0}{\varphi_0} \varphi \sin f \right) + \text{const. } e^{-2g}.$$

En vertu d'une remarque précédente α est nulle au point $\varphi = 0$, $\psi = \psi_0$. En ce point, δg , g et f sont également nulles. Cela montre que la constante d'intégration qui figure dans la formule (3.69) a pour valeur

$$- \frac{\gamma}{V_0^3} \beta(0, \psi_0),$$

On a donc

$$(3.70) \quad \delta g = \frac{\gamma}{V_0^3} e^{-3g} \left(\beta \cos f + \alpha \sin f - \frac{\partial \varphi_0}{\varphi_0} \varphi \sin f \right) - \frac{\gamma}{V_0^3} \beta(0, \psi_0) e^{-2g}.$$

Par ailleurs les quantités $\delta \omega$, $\delta \zeta$, γ sont liées par ⁽²⁸⁾

$$(3.71) \quad \frac{d\gamma}{d\zeta} + i \frac{d\omega}{d\zeta} (\gamma - \delta \zeta) = -i \delta \omega,$$

dont on tire sur $\psi = \psi_0$,

$$(3.72) \quad \frac{d\alpha}{d\varphi} - \beta \frac{df}{d\varphi} - \alpha \frac{dg}{d\varphi} + \frac{\partial \varphi_0}{\varphi_0} \varphi \frac{dg}{d\varphi} = \delta g.$$

⁽²⁸⁾ En éliminant δz entre (3.57) et (3.58) on a

$$\frac{d}{dz} \left[\frac{dz}{d\zeta} (\gamma - \delta \zeta) \right] + \frac{d\delta \zeta}{d\zeta} = -i \delta \omega.$$

et en remplaçant $\frac{dz}{d\zeta}$ par $\frac{1}{V_0} e^{-i\omega}$ cela donne (3.71).

Éliminons δg entre (3.70) et (3.72) et tenons compte des relations

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \varphi} = \frac{\partial \beta}{\partial \psi}, \quad \frac{\delta g}{\delta \varphi} = -\frac{\gamma}{V_0^3} e^{-\beta g} \sin f.$$

Cela donne sur $\psi = \psi_0$,

$$(3.73) \quad \frac{d\beta}{d\psi} = \left(\frac{df}{d\varphi} + \frac{\gamma}{V_0^3} e^{-\beta g} \sin f \right) \beta - \frac{\gamma}{V_0^3} \beta(0, \psi_0) e^{-\beta g}.$$

En résumé, à une solution de l'équation $\delta x = W(x, \delta x)$ il correspond une fonction $\beta(\varphi, \psi)$, harmonique dans le rectangle \mathcal{O} du plan $\zeta = \varphi + i\psi$, et qui satisfait aux conditions sur la frontière ci-après :

- 1° β est nulle sur $\psi = 0$, $0 \leq \varphi \leq \varphi_0$.
- 2° La dérivée normale $\frac{\partial \beta}{\partial \varphi}$ est nulle sur les côtés $\varphi = 0$, $\varphi = \varphi_0$.
- 3° Sur le côté, $\psi = \psi_0$, $0 \leq \varphi \leq \varphi_0$, β vérifie la condition (3.73).

Conséquence. — Supposons que la seule solution du problème linéaire et homogène que l'on vient de poser pour β , soit $\beta = 0$. Comme α est nulle au point, $\varphi = \Psi = 0$, la fonction $\gamma = \alpha + i\beta$ est identiquement nulle et, compte tenu de ce que $\delta l(s)$ vérifie les conditions aux limites (3.4), les formules (3.63) (3.47), (3.70) et (3.49), montrent successivement que les éléments $\delta \varphi_0$, $\delta l(s)$, $\delta h(s)$, $\delta g(s)$, $\delta f(s)$ sont nuls.

La seule solution de l'équation $\delta x = W(x, \delta x)$ est alors $\delta x = 0$.

Nous allons maintenant indiquer des cas où le problème posé pour β n'admet pas d'autre solution que $\beta = 0$.

16. CAS OÙ LE PROBLÈME MIXTE HARMONIQUE POSÉ POUR β N'ADMET PAS D'AUTRE SOLUTION QUE ZÉRO. — Les quantités u et v , coordonnées du vecteur vitesse dans le plan z , sont des fonctions harmoniques de φ et Ψ à l'intérieur du rectangle \mathcal{O} .

Sur les côtés verticaux de \mathcal{O} on a

$$(3.74) \quad \frac{\partial u}{\partial \varphi} = 0.$$

Sur le côté supérieur de \mathcal{O} , u vérifie la relation, signalée par

M. C. Jacob,

$$(3.75) \quad \frac{\partial u}{\partial \psi} = u \left(\frac{df}{d\varphi} + \frac{\gamma}{V_0^3} e^{-3\epsilon} \cos f \right) - \frac{\gamma}{V_0^3} u(o, \psi_0) e^{-2\epsilon}$$

qui s'obtient à partir de deux relations

$$\begin{aligned} u(\varphi, \psi_0) &= V_0 e^{\epsilon(\varphi)} \cos f(\varphi), \\ v(\varphi, \psi_0) &= V_0 e^{\epsilon(\varphi)} \sin f(\varphi), \end{aligned}$$

en tenant compte de (1.2), et de ce que u et $-v$ sont conjuguées.

Cette relation (3.75), que vérifie $u(\varphi, \psi_0)$ est identique à la relation (3.73), à laquelle satisfait $\beta(\varphi, \psi_0)$ ⁽²⁹⁾.

Domaine d. — Nous appellerons domaine d , un domaine contenu à l'intérieur du rectangle \mathcal{D} , dont la frontière est constituée par des arcs $\beta=0$ et par un sous-ensemble de la frontière de \mathcal{D} , et pour lequel, de plus le produit

$$(3.76) \quad \beta(o, \psi_0) \beta(\varphi, \psi_0)$$

est positif ou nul sur la portion de sa frontière qui appartient au segment $\psi = \psi_0$, $0 < \varphi < \varphi_0$.

⁽²⁹⁾ En combinant (3.73) et (3.75) la condition que vérifie sur la ligne libre s'écrit sous la forme suivante que nous utiliserons dans ce qui suit :

$$(a) \quad \begin{cases} \beta \frac{\partial u}{\partial \psi} - u \frac{\partial \beta}{\partial \psi} = \frac{\gamma}{V_0 V^2} (u \beta_0 - \beta u_0), \\ u_0 = u(o, \psi_0) = V_0, \quad \beta_0 = \beta(o, \psi_0). \end{cases}$$

Cette dernière relation peut se retrouver par des raisonnements directs qui nous ont été signalés par M. Leray et que nous allons indiquer.

Désignons par les symboles δ_z et δ_ζ une variation à z constant et une variation à ζ constant; on a

$$(b) \quad \begin{cases} \delta_z \zeta = \gamma = \alpha + i\beta, \\ \delta_\zeta = \delta_z - \gamma \frac{\partial}{\partial \zeta} = \delta_z - \alpha \frac{\partial}{\partial \varphi} - \beta \frac{\partial}{\partial \psi}. \end{cases}$$

Sur la ligne libre on aura

$$(c) \quad \delta_\zeta (u^2 + v^2 + 2\gamma y) = 2 \delta C \quad (\delta C = \text{const.}).$$

Compte tenu de (b), des relations

$$(d) \quad \delta_z y = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = \frac{v}{V^2}, \quad \frac{\partial y}{\partial \psi} = \frac{u}{V^2}$$

Il est facile de voir qu'il existe un tel domaine d . Si $\beta(o, \psi_0)$ est nul ou si $\beta(\varphi, \psi_0)$ n'a pas de zéro on prendra d identique à \mathcal{O} . Dans le cas contraire, il partira du côté supérieur de \mathcal{O} , et intérieurement à ce domaine, une ou des lignes $\beta = 0$, qui compléteront la frontière d'un domaine du type considéré.

Conditions pour que β soit nulle. — Supposons que l'argument $U(\varphi, \psi)$ du vecteur \vec{V} reste compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et zéro (sans atteindre la valeur $-\frac{\pi}{2}$) sur \mathcal{O} et sa frontière. Nous savons d'ailleurs imposer *a priori* des conditions aux données pour qu'il en soit ainsi.

La quantité $u(\varphi, \psi)$ est alors positive et non nulle sur \mathcal{O} et sur sa frontière.

Introduisons avec M. Friedrichs l'intégrale

$$(3.77) \quad I = \int_C \left(\beta \frac{d\beta}{dn} - \frac{\beta^2}{u} \frac{du}{dn} \right) d\sigma,$$

où C désigne le contour d'un domaine d précédemment défini, et $\frac{d}{dn}$ la dérivée suivant la normale extérieure à ce contour. Cette intégrale a un sens, u ne s'annulant pas sur C , et compte tenu de ce que u et β

et de ce que sur la ligne libre

$$(e) \quad \frac{\partial}{\partial \varphi} (u^2 + v^2 + 2\gamma y) = 0,$$

(c) s'écrit

$$(f) \quad \delta_z (u^2 + v^2) - \beta \frac{\partial}{\partial \psi} (u^2 + v^2 + 2\gamma y) = 2 \delta C.$$

Au point $\varphi = 0, \psi = \psi_0$ on a

$$\delta_z (u^2 + v^2) = 0, \quad v = 0, \quad u = V_0.$$

d'où la valeur de la constante δC ,

$$\delta C = -\frac{\gamma \beta_0}{V_0}.$$

Comme

$$\delta_z u = \delta_z \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \delta_z \psi = \frac{\partial \beta}{\partial y}, \quad \delta_z v = -\frac{\partial \beta}{\partial x}.$$

(f) donne

$$u \frac{\partial \beta}{\partial y} - v \frac{\partial \beta}{\partial x} - \beta \left(u \frac{\partial u}{\partial \psi} + v \frac{\partial v}{\partial \psi} + \gamma \frac{\partial y}{\partial \psi} \right) = -\frac{\gamma \beta_0}{V_0}$$

sont harmoniques, elle est égale à l'intégrale double

$$(3.78) \quad \mathcal{J} = \iint_d \left[\left(\frac{\partial \beta}{\partial \varphi} - \frac{\beta}{u} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\partial \beta}{\partial \psi} - \frac{\beta}{u} \frac{\partial u}{\partial \psi} \right)^2 \right] d\varphi d\psi.$$

Nous allons utiliser les conditions que vérifient β et u sur la frontière de d pour calculer l'intégrale I.

1° Sur les lignes $\beta = 0$ la quantité intégrée est nulle.

2° Sur les portions de frontière qui appartiennent aux segments $\varphi = 0$ et $\varphi = \varphi_0$, on a

$$\frac{du}{dn} = \frac{d\beta}{dn} = 0$$

et la quantité intégrée est également nulle.

3° Sur le côté supérieur de \mathcal{O} , en vertu des conditions (3.73) et (3.75), on a

$$\beta \frac{\partial \beta}{\partial \psi} - \frac{\beta^2}{u} \frac{\partial u}{\partial \psi} = -\frac{\gamma}{V_0^3} \beta(0, \psi_0) \beta(\varphi, \psi_0) e^{-2s} + \frac{\gamma}{V_0^3} \frac{\beta^2(\varphi, \psi_0)}{u(\varphi, \psi_0)} u(0, \psi_0) e^{-2s}.$$

Mais sur la partie de la frontière de d , qui appartient à ce côté, et que nous noterons d' , on a par hypothèse

$$\beta(0, \psi_0) \beta(\varphi, \psi_0) \geq 0.$$

Il suit alors des résultats qui précèdent l'inégalité ci-après

$$(3.79) \quad I \leq \frac{\gamma}{V_0^3} u(0, \psi_0) \int_{d'} \frac{\beta^2}{u} e^{-2s} |d\varphi|.$$

ou

$$(h) \quad V^2 \frac{\partial \beta}{\partial \psi} - \beta \left(u \frac{\partial u}{\partial \psi} + v \frac{\partial v}{\partial \psi} + \gamma \frac{u}{V^2} \right) = -\frac{\gamma \beta_0}{V_0}.$$

D'autre part d'après la relation de Bernoulli

$$u \frac{\partial u}{\partial \varphi} + v \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \gamma \frac{\partial \gamma}{\partial \varphi} = 0$$

ou

$$(k) \quad -u \frac{\partial v}{\partial \psi} + v \frac{\partial u}{\partial \psi} + \gamma \frac{v}{V^2} = 0$$

et en éliminant $\frac{\partial v}{\partial \psi}$ entre (h) et (k), on obtient la relation (a) que nous avons eu vue.

Posons $\beta = \eta u$, η étant donc une fonction continue sur d et sa frontière. Remplaçons β par ηu dans les formules (3.78) et (3.79) et exprimons que \mathcal{J} , qui est égale à I vérifie l'inégalité (3.79); il vient

$$(3.80) \quad \iint_d u^2 \left[\left(\frac{\partial \eta}{\partial \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial \psi} \right)^2 \right] d\varphi d\psi \leq \frac{\gamma}{V_0^2} \int_u \eta^2 u e^{-2g} |d\varphi|,$$

d'où il suit

$$(3.81) \quad \iint_d \left[\left(\frac{\partial \eta}{\partial \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial \psi} \right)^2 \right] d\varphi d\psi \leq A \int_u \eta^2 |d\varphi|,$$

en posant

$$(3.82) \quad A = \frac{\gamma}{V_0^2} \frac{\text{Max } u(\varphi, \psi_0) e^{-2g(\varphi)}}{\text{Min } u^2(\varphi, \psi)}.$$

Sur les arcs $\beta = 0$, la quantité η est nulle; il résulte alors des propriétés de la frontière de d , que sur d' on a

$$(3.83) \quad \eta(\varphi, \Psi_0) = \int_{\psi_1}^{\psi_0} \frac{\partial \eta}{\partial \psi} d\Psi \quad (0 < \psi_1 < \psi_0).$$

L'inégalité de Schwartz fournit la relation

$$\eta^2(\psi, \psi_0) \leq (\psi_0 - \psi_1) \int_{\psi_1}^{\psi_0} \left(\frac{\partial \eta}{\partial \psi} \right)^2 d\psi \leq \psi_0 \int_{\psi_1}^{\psi_0} \left(\frac{\partial \eta}{\partial \psi} \right)^2 d\psi,$$

d'où résulte l'inégalité

$$(3.84) \quad \int_u \eta^2(\varphi, \psi_0) |d\varphi| \leq \psi_0 \int_d \left(\frac{\partial \eta}{\partial \psi} \right)^2 d\varphi d\psi.$$

Les formules (3.81) et (3.84) permettent alors de conclure que la quantité

$$(3.85) \quad \left(\frac{\partial \eta}{\partial \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial \psi} \right)^2$$

est nulle sur d lorsque le nombre $A\psi_0$ est inférieur à 1.

Si la quantité (3.85) est nulle sur d , η y est aussi nulle (η s'annulant sur une portion de frontière de d), donc β est identiquement nulle sur d , et par suite sur \mathcal{D} .

Limitation du nombre A. — Nous allons maintenant montrer que l'on peut imposer *a priori* des conditions aux données du problème (P),

qui assureront que pour toute solution de ce problème la quantité u ne s'annule pas, et que le nombre A vérifie l'inégalité

$$(3.86) \quad A\psi_0 < 1.$$

Rappelons que par hypothèse l'angle $\theta[l]$ vérifie la condition

$$(3.87) \quad -\frac{\pi}{2} + a \leq \theta[l] \leq 0,$$

où a est positif, non nul.

D'après un résultat du chapitre I, $f(\varphi)$ satisfait alors aux limitations suivantes :

$$(3.88) \quad -\frac{\pi}{2} + a - \frac{\gamma\psi_0}{V_0^3} \leq f(\varphi) \leq 0.$$

Il suit des inégalités (3.87) et (3.88) que l'argument du vecteur \vec{V} n'atteint pas sur \mathcal{D} et sa frontière la valeur $-\frac{\pi}{2}$ pourvu que

$$(3.89) \quad \frac{\gamma\psi_0}{V_0^3} < a.$$

Cette inégalité entraîne donc que u ne s'annule pas sur \mathcal{D} et sa frontière.

Effectuons la majoration du nombre $A\Psi_0$. On a

$$\frac{\gamma}{V_0^2} u(\varphi, \psi_0) e^{-2g(\varphi)} = \frac{\gamma \cos f(\varphi)}{V(\varphi, \psi_0)}$$

et comme V_0 minore la vitesse sur (L)

$$(3.90) \quad \text{Max} \frac{\gamma}{V_0^2} u(\varphi, \psi_0) e^{-2g(\varphi)} \leq \frac{\gamma}{V_0}.$$

Par suite la condition (3.86) sera vérifiée lorsque sera satisfaite l'inégalité

$$(3.91) \quad \frac{\gamma\psi_0}{V_0^3} \leq \text{Min} \frac{u^2(\varphi, \psi)}{V_0^2}.$$

La quantité $u(\varphi, \psi)$ atteint son minimum sur le côté supérieur ou sur le côté inférieur de \mathcal{D} .

1° Si u atteint son minimum sur le côté supérieur on a

$$\text{Min} u^2 \geq V_0^2 \text{Min} \cos^2 f$$

et d'après (3.87)

$$(3.92) \quad \text{Min } u^2 \geq V_0^2 \sin^2 \left(a - \frac{\gamma \psi_0}{V_0^3} \right).$$

2° Si ce minimum est atteint sur le côté inférieur, on a alors

$$\text{Min } u^2 \geq \text{Min } \cos^2 \theta [L] \text{ Min } V^2 \text{ sur } (S) \geq \sin^2 a V_0^2 e^{-2H^-},$$

en désignant par H^- une majorante de $|h(\varphi)|$ pour $h(\varphi)$ négatif.

Au paragraphe 3 nous avons calculé une valeur de H^- [(formule (1.17'')] ce qui donne alors

$$(3.93) \quad \text{Min } u^2 \geq V_0^2 \sin^2 a e^{-\frac{\pi}{2a} \left\{ \left| \log \text{th } \frac{1}{4} \right| \frac{2}{\pi} \text{Max } |\theta| + \frac{2\psi_0}{\pi^2 V_0} \text{Max } |\theta'| \right\}}.$$

Il résulte des formules (3.91), (3.92) et (3.93), que la condition (3.86) est vérifiée toutes les fois que les deux inégalités ci-après sont satisfaites :

$$(3.94) \quad \frac{\gamma \psi_0}{V_0^3} \leq \sin^2 \left(a - \frac{\gamma \psi_0}{V_0^3} \right),$$

$$(3.95) \quad \frac{\gamma \psi_0}{V_0^3} \leq \sin^2 a e^{-\frac{\pi}{2a} \left\{ \left| \log \text{th } \frac{1}{4} \right| \frac{2}{\pi} \text{Max } |\theta| + \frac{2\psi_0}{\pi^2 V_0} \text{Max } |\theta'| \right\}}.$$

Conclusion. — Les raisonnements qui précèdent montrent que l'équation linéaire et homogène

$$\delta x = W(x, \delta x)$$

n'admet pas d'autre solution que $\delta x = 0$, lorsque x est une solution du problème (P), pour des données qui satisfont aux conditions (3.89), (3.94) et (3.95).

On s'assure aisément que ces conditions sont vérifiées lorsque les deux nombres sans dimensions

$$\mu = \frac{\gamma \psi_0}{V_0^3}, \quad \lambda = \frac{\psi_0}{V_0} \text{Max } |\theta'|$$

sont inférieurs à deux nombres positifs $\mu_1(a)$ et $\lambda_1(a)$, lesquels sont des fonctions décroissantes de la quantité $a \left(a = \frac{\pi}{2} - \text{Max } |\theta| \right)$.

Si l'on suppose que ψ_0 est fixé, il suffira pour qu'il en soit ainsi que le paramètre V_0 soit assez grand.

17. UN THÉORÈME D'UNICITÉ POUR LE PROBLÈME (P). — Envisageons l'équation

$$(3.96) \quad x = V(x)$$

du problème (P), posé pour des éléments $\theta[l]$, γ , V_0 , Ψ_0 , qui satisfont aux inégalités (3.89), (3.94) et (3.95). Nous supposons de plus que $\theta[l]$ n'est pas identiquement nulle et que cette fonction est douée d'une dérivée höldérienne.

Les conditions du théorème d'existence du chapitre II sont en particulier satisfaites et il s'ensuit que les solutions de (3.96) appartiennent à un borné de \mathcal{E} et que l'indice total de ces solutions a la valeur $+1$.

D'autre part, si x est une solution de (3.96), la transformation $V(x)$ admet en ce point une différentielle de Fréchet, $W(x, \delta x)$ complètement continue, et l'équation linéaire et homogène

$$(3.97) \quad \delta x = W(x, \delta x)$$

a la seule solution $\delta x = 0$.

La théorie des équations fonctionnelles de J. Schauder et de M. Leray établit alors les propositions suivantes :

1° Les solutions de (3.96) sont isolées, et comme elles appartiennent à un ensemble borné, elles sont en nombre fini.

2° L'indice d'une solution x de cette équation est égal à l'indice de la solution $\delta x = 0$ de l'équation (3.97) correspondante, cet indice étant d'ailleurs égal à $+1$ ou -1 .

3° Si $V_1(x)$ est une transformation suffisamment voisine de $V(x)$ sur tout borné de \mathcal{E} , et si x est une solution de (3.96), il existe une solution x_1 de l'équation

$$x = V_1(x)$$

qui est arbitrairement voisine de x .

Supposons alors que l'indice de la solution $\delta x = 0$ de (3.97) soit égal à $+1$, lorsque x est une solution de (3.96). Il s'ensuivra que l'indice de chacune des solutions de (3.96) vaudra $+1$, et l'indice total des solutions de cette équation sera égal à la somme des indices

de ces solutions, qui sont en nombre fini, ce qui entraîne que cet indice total sera égal au nombre des solutions de (3.96). Comme cet indice total a la valeur $+1$, l'unicité de la solution en résultera.

Nous allons donc chercher à préciser la valeur de l'indice de la solution $\delta x = 0$ de (3.97), quand x est une solution de (3.96). Pour cela nous transformerons continûment l'équation linéaire et homogène (3.97), de manière à ne pas introduire d'autre solution que zéro en une équation dont la solution aura un indice connu. Ce dernier indice sera alors égal à l'indice de la solution de (3.97).

Voici comment nous effectuons cette transformation de l'équation (3.97). Nous introduisons un nombre réel et positif K , et nous considérons le problème (P), posé pour les paramètres V_0, ψ_0 , lorsque l'accélération de la pesanteur a pour valeur $K\gamma$ et quand la fonction $\theta[l]$ est remplacée par $K\theta[l]$.

Nous désignerons par

$$(3.98) \quad x = V(x, K)$$

et

$$(3.99) \quad \delta x = W(x, \delta x, K),$$

les équations qui correspondent, par introduction du paramètre K , aux équations (3.96) et (3.97).

Si $x(K)$ est une solution de (3.98), et si K est différent de zéro, la transformation $W[x(K), \delta x, K]$ est la différentielle de Fréchet de $V(x, K)$ au point $x(K)$. D'autre part, lorsque K est inférieur à 1, il est facile de voir que sont encore satisfaites les conditions du paragraphe 16 qui assurent que l'équation

$$(3.100) \quad \delta x = W[x(K), \delta x, K]$$

a la seule solution $\delta x = 0$.

Les propositions de la théorie des équations fonctionnelles rappelées au début de ce paragraphe, permettent alors de conclure que si x est une solution de (3.96) il existe, pour $0 < K \leq 1$, une solution $x(K)$ de (3.98), qui est continue par rapport à K , et qui se réduit à x pour $K = 1$.

Considérons l'équation

$$(3.101) \quad \delta x = W[x(K), \delta x, K]$$

construite avec cette solution $x(K)$. Cette équation est définie pour $0 < K \leq 1$, elle admet la seule solution $\delta x = 0$, et pour $K = 1$ elle se réduit à l'équation (3.97).

Lorsque δx appartient à un borné de \mathcal{E} , le second membre de (3.101) est uniformément continu par rapport à $x(K)$ et à K . Comme $x(K)$ est continue en K ($0 < K \leq 1$) il s'ensuit que le second membre de (3.101) est uniformément continu par rapport à K pour $0 < K \leq 1$.

D'après la remarque de la fin du paragraphe 11, lorsque K tend vers zéro, $x(K)$ tend vers zéro, et il s'ensuit que l'équation (3.101) se réduit alors continûment en l'équation

$$(3.102) \quad \delta x = W(0, \delta x, 0)$$

qui admet la seule solution $\delta x = 0$, comme on le vérifie facilement sur les formules (3.44), (3.45) et (3.49).

De l'ensemble des propriétés de l'équation (3.101) que nous venons d'établir, il résulte que l'indice de la solution de (3.97) est égal à l'indice de la solution de (3.102).

Or l'équation

$$\delta x = \lambda W(0, \delta x, 0),$$

où λ est un paramètre, admet la seule solution $\delta x = 0$ quel que soit λ .

L'indice cherché est donc égal à l'indice de la solution de l'équation

$$\delta x = 0$$

qui vaut évidemment $+1$.

Les raisonnements de ce paragraphe permettent alors de conclure :

Si la paroi (S) à courbure höldérienne n'est pas rectiligne et horizontale, la solution du problème (P) est unique quand les paramètres V_0 et ψ_0 vérifient les conditions (3.89), (3.94) et (3.95).

CHAPITRE IV.

CAS DU MOUVEMENT UNIFORME A L'INFINI.

18. MOUVEMENTS ÉTUDIÉS. PROBLÈME (P_1). PROPRIÉTÉS DES SOLUTIONS. —
Problème (P_1). — Nous considérons dans ce chapitre des mouvements

pour lesquels la paroi (S) et la ligne libre (L) admettent des asymptotes horizontales. De plus, nous supposons que le fond (S) du canal est décroissant dans le sens de l'écoulement, et nous limitons notre étude aux mouvements où le profil (L) jouit de cette même propriété⁽³⁰⁾. Nous appellerons écoulements (P₁) les mouvements qui possèdent les propriétés géométriques précédentes.

La relation de Bernoulli montre que pour ces mouvements la vitesse sur (L) a une limite aux deux points à l'infini, et nous désignons par V₀ la limite de cette vitesse en amont de (L). Nous étudierons le problème (P₁) de la détermination des écoulements (P₁) qui, sur une paroi (S) donnée et ayant les propriétés requises, correspondent à des valeurs fixées des paramètres V₀ et ψ₀. Nous nous proposons, en particulier, d'indiquer des cas où le problème (P₁) admet une solution.

Propriétés des solutions. — Dans le chapitre I nous avons établi des propriétés de la fonction ω(ζ) sur la frontière de la bande \mathcal{D} , les deux points à l'infini de \mathcal{D} exclus. Nous allons maintenant indiquer certaines propriétés des solutions éventuelles du problème (P₁) en ces deux points à l'infini.

L'existence d'asymptotes horizontales pour (L) entraîne que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin f(\varphi) d\varphi$ est finie et que g(φ) est continue pour φ = ±∞, nulle pour φ = -∞, si, comme nous le supposons la fonction ω(ζ) a été définie en prenant pour paramètre V₀ de la formule (1.1) la vitesse en amont de (L).

D'autre part g(φ) est dérivable et elle est liée à f(φ) par la relation (1.2) que, compte tenu des propriétés ci-dessus, nous écrivons sous la forme suivante :

$$(4.1) \quad g(\varphi) = -\frac{\gamma}{V_0^3} \int_{-\infty}^{\varphi} e^{-3g(u)} \sin f(u) du.$$

Nous envisons toujours des paroi (S) douées d'une courbure bornée et pour lesquelles θ[l], qui est négative, vérifie la condition (1.15).

⁽³⁰⁾ Il est à remarquer que, comme dans le cas des écoulements à périodicité géométrique cette dernière condition élimine toute une classe de mouvements possibles sur la paroi.

De plus, du fait de l'existence d'asymptotes distinctes pour (S) et (L), il existe une minorante δ , non nulle, de la distance de ces deux courbes.

D'après un résultat du chapitre I les fonctions $|h(\varphi)|$, $\left|\frac{dl}{d\varphi}\right|$, $\left|\frac{d\varphi}{dl}\right|$ sont alors bornées sur $-\infty < \varphi < +\infty$, et il s'ensuit que $l(\varphi)$ tend vers l'infini lorsque $|\varphi|$ tend vers l'infini. Si nous supposons que $\theta[l]$ tend vers zéro quand $|l|$ tend vers l'infini $\theta[l(\varphi)]$ est alors une fonction de φ continue sur $[-\infty, +\infty]$, nulle pour $\varphi = \pm\infty$.

Enfin $l(\varphi)$ et $h(\varphi)$ sont liées par la relation (1.14) que nous écrivons

$$(4.2) \quad l(\varphi) = \frac{1}{V_0} \int_0^\varphi e^{-h(u)} du.$$

Les fonctions $g(\varphi)$ et $\theta[l(\varphi)]$ ayant des limites pour $\varphi = -\infty$ et $\varphi = +\infty$, la fonction $\omega(\zeta)$ a également des limites aux deux points à l'infini de \mathcal{D} , et celles-ci sont

$$\omega(-\infty) = 0, \quad \omega(+\infty) = ig(+\infty).$$

Cela montre que la vitesse est uniforme et horizontale aux deux points à l'infini du domaine fluide, avec une valeur égale à V_0 en amont. La hauteur de l'écoulement en ce point, que nous notons H_0 , est donc connue et égale à $\frac{\psi_0}{V_0}$. D'autre part, $h(\varphi)$ est alors continue aux deux points $\varphi = -\infty$, $\varphi = +\infty$ et

$$h(-\infty) = 0, \quad h(+\infty) = g(+\infty).$$

La connaissance de la hauteur du domaine de l'écoulement en amont permet de limiter *a priori* la fonction $g(\varphi)$ pour un mouvement (P_1). Soit pour cela Δ la différence des cotes amont et aval de (S); nous définissons une vitesse V_1 en posant

$$(4.3) \quad V_1^2 = V_0^2 + 2\gamma(H_0 + \Delta).$$

On a alors sur (L)

$$V_0 \leq V \leq V_1$$

et par suite

$$|g(\varphi)| \leq G,$$

avec

$$(4.4) \quad G = \log \frac{V_1}{V_0}.$$

La formule (1.17), où G a la valeur précédente fournit une majorante H de la grandeur $\text{Max } |h(\varphi)|$, et il suit les inégalités

$$\left| \frac{dl}{d\varphi} \right| \leq \frac{1}{V_0} e^H, \quad \left| \frac{d\varphi}{dl} \right| \leq V_0 e^H.$$

Nous désignerons par M une majorante commune des trois nombres $H, V_0 e^H, \frac{1}{V_0} e^H$.

On a alors

$$(4.5) \quad \left| \frac{d}{d\varphi} \theta[l(\varphi)] \right| \leq M \text{Max } |\theta'|,$$

$$(4.6) \quad |l(\varphi)| \geq \frac{|\varphi|}{M}.$$

La formule (4.5) donne un module de continuité de $\theta[l(\varphi)]$ pour toute valeur finie de φ ; par ailleurs $\theta[l]$ tend par hypothèse vers zéro lorsque l tend vers plus ou moins l'infini et l'inégalité, (4.6) permet alors de construire un module de continuité de $\theta[l(\varphi)]$ aux deux points $\varphi = -\infty$ et $\varphi = +\infty$. Le nombre M ayant été défini à partir des seules données, nous connaissons donc *a priori* un module de continuité de $\theta[l(\varphi)]$ pour toute valeur finie ou infinie de φ .

Équations générales. — Il a été établi au chapitre I que les autres éléments $f(\varphi), g(\varphi), h(\varphi), l(\varphi)$, vérifiaient les deux relations intégrales (1.12) et (1.13).

Ces quatre fonctions inconnues, qui sont définies et continues sur $[-\infty, +\infty]$, sont donc solution du système des quatre équations (1.12), (1.13) (4.1) et (4.2). De plus, $f(\varphi)$ satisfait pour un écoulement (P_1) aux inégalités

$$(4.7) \quad -\pi \leq f(\varphi) \leq 0.$$

Nous désignerons par Σ_1 le système des quatre équations (1.12), (1.13), (4.1) et (4.2).

Soit inversement une solution de Σ_1 qui satisfait aux inégalités (4.7), formée par quatre fonctions $f(\varphi), g(\varphi), h(\varphi), l(\varphi)$, continues sur $[-\infty, +\infty]$, les fonctions $f(\varphi), g(\varphi), h(\varphi)$ étant de plus finies. D'après les résultats du chapitre I, il correspond à cette solution un écoulement avec ligne libre décroissante sur la paroi (S), et le débit

de cet écoulement est égal à ψ_0 ⁽³¹⁾. La fonction $g(\varphi)$ étant finie et continue sur $[-\infty, +\infty]$, la vitesse a une limite finie, non nulle, en amont et en aval de (L) et la relation de Bernoulli montre alors que cette ligne libre est douée d'asymptotes horizontales. Enfin, d'après (4.1), $g(-\infty)$ est nulle et la vitesse en amont de (L) a la valeur V_0 . L'écoulement considéré constitue donc une solution du problème (P₁).

Nous étudierons l'existence des solutions du système Σ_1 , mais les raisonnements utilisés supposent essentiellement que l'élément inconnu $f(\varphi)$ soit recherché dans une classe de fonctions ayant un module de continuité à l'infini, fixé *a priori*. Soit

$$|f(\varphi)| < C\Phi(\varphi)$$

ce module de continuité. Les propriétés précises de $\Phi(\varphi)$ seront définies page suivante.

Cette condition imposée à l'inconnue $f(\varphi)$ permettra en effet d'introduire au lieu de Σ_1 , un nouveau système, que nous appellerons $\Sigma_{C,\Phi}$, dont la forme dépendra de la constante C, et de la fonction Φ , et auquel s'appliquera la théorie du point fixe de Schauder-Leray ⁽³²⁾.

Nous allons maintenant définir le système $\Sigma_{C,\Phi}$ et nous montrerons qu'il est possible, moyennant certaines conditions, de choisir le module de continuité $C\Phi(\varphi)$ de $f(\varphi)$ à l'infini, de telle manière que toute solution de $\Sigma_{C,\Phi}$ soit une solution de Σ_1 . Nous montrerons ensuite que le système $\Sigma_{C,\Phi}$ admet au moins une solution.

Il est à remarquer que ce mode de démonstration nous permettra de connaître un module de continuité à l'infini pour la solution du problème (P₁) dont nous établirons l'existence.

19. MISE EN ÉQUATIONS DU PROBLÈME (P₁). SYSTÈME $\Sigma_{C,\Phi}$. — *Module de continuité de $\theta[l]$ à l'infini.* — Pour les parois que nous considérons,

⁽³¹⁾ Les inégalités (4.7) et $-\frac{\pi}{\lambda} < \theta[l] \leq 0$ entraînent que la partie réelle de $\omega(\zeta)$ reste comprise entre $-\pi$ et zéro sur la frontière de ω , d'où l'univalence de $z(\zeta)$ (*cf.* la fin du paragraphe 2).

⁽³²⁾ C'est en particulier pour avoir une transformation complètement continue que nous avons dû avoir recours à l'artifice consistant à introduire le système $\Sigma_{C,\Phi}$.

la fonction $\theta[l]$ a une dérivée $\theta'[l]$; elle tend vers zéro lorsque l tend vers plus ou moins l'infini, et l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \theta[l] dl$ est finie.

Nous ferons de plus l'hypothèse que $\theta[l]$ a un module de continuité à l'infini de la forme

$$(4.8) \quad |\theta[l]| \leq \Psi(l) \quad (-\infty < l < +\infty),$$

où la fonction $\Psi(l)$ jouit des propriétés suivantes :

$$(4.9) \quad \left\{ \begin{array}{l} a. \Psi(l) \text{ est continue sur } -\infty \leq l \leq +\infty; \text{ elle est positive, croissante} \\ \text{pour } l \text{ négatif, décroissante pour } l \text{ positif et} \\ \Psi(-\infty) = \Psi(+\infty) = 0; \\ b. \text{ L'intégrale } \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(l) dl \text{ est finie.} \\ c. \Psi(l) \text{ admet une dérivée } \Psi'(l) \text{ et le rapport } \frac{\Psi'(l)}{\Psi(l)} \text{ a une limite} \\ \text{(nulle, finie ou infinie) lorsque } l \text{ tend vers plus ou moins l'infini.} \end{array} \right.$$

Il est alors loisible de supposer que ⁽³³⁾

$$(4.10) \quad \left| \frac{\Psi'(l)}{\Psi(l)} \right| \leq \alpha M,$$

où le nombre α est donné, et que nous supposons vérifier les inégalités

$$(4.11) \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2\Psi_0}.$$

⁽³³⁾ Si $\Psi(l)$ ne vérifiait pas (4.10) on définirait $\Psi_1(l)$ par

$$\left| \frac{\Psi_1'(l)}{\Psi_1(l)} \right| = \text{Inf} \left\{ \frac{|\Psi'(l)|}{|\Psi(l)|}, \alpha M \right\}, \quad \text{Sgn} \frac{\Psi_1'}{\Psi_1} = \text{Sgn} \frac{\Psi'}{\Psi}, \quad \Psi_1(0) = \Psi(0).$$

Il est aisé de s'assurer que $\Psi_1(l)$ satisfait aux conditions (4.9, a), (4.10), et que $\Psi_1(l) \geq \Psi(l)$. D'autre part, eu égard à (4.9, c), pour $|l|$ assez grande, $\Psi_1(l)$ vérifie une et une seule des deux relations

$$\frac{\Psi_1'}{\Psi_1} = \frac{\Psi'}{\Psi}, \quad \frac{\Psi_1'}{\Psi_1} = \alpha M.$$

Le paramètre α étant non nul, et $\Psi(l)$ satisfaisant à (4.9, b), $\Psi_1(l)$ satisfait aussi à la condition (4.9, b).

Système $\Sigma_{C, \Phi}$. — Soient, C un nombre positif, non nul, et $\Phi(\varphi)$ une fonction continue sur $[-\infty, +\infty]$, et qui possède les propriétés (4.9, a) et (4.9, b) relativement à la variable φ . Nous nous proposons de montrer que l'on peut choisir C et $\Phi(\varphi)$ de telle manière qu'il existe une solution du problème (P_1) pour laquelle

$$(4.12) \quad |f(\varphi)| \leq C \Phi(\varphi).$$

Une telle inégalité donne un module de continuité à l'infini pour $f(\varphi)$.

Supposons que la condition (4.12) soit vérifiée par une solution de Σ_1 satisfaisant à (4.7). Les éléments $f(\varphi)$ et $g(\varphi)$ satisfont par ailleurs à l'équation (4.1), aux inégalités (4.7), et $g(\varphi)$ est positive. Il résulte de (4.1) et (4.12) que les deux fonctions $f(\varphi)$ et $g(\varphi)$ vérifient la relation

$$(4.13) \quad g(\varphi) = \frac{\gamma}{\sqrt{v_0^3}} \int_{-\infty}^{\varphi} \text{Inf} \{ -e^{-2g(u)} \sin f^*(u), C \Phi(u) \} du,$$

où le symbole $\text{Inf} \{ \varphi_1(u), \varphi_2(u) \}$ désigne la fonction de u , qui est l'enveloppe inférieure des deux fonctions positives $\varphi_1(u), \varphi_2(u)$.

Nous désignerons par $\Sigma_{C, \Phi}$, le système des quatre équations (4.12), (4.13), (4.2) et (4.13). La forme de ce système dépend du choix des éléments C et $\Phi(\varphi)$.

Une solution du problème (P_1) qui satisfait à la condition (4.12) est formée de quatre fonctions $f(\varphi), g(\varphi), h(\varphi), l(\varphi)$, qui vérifient le système $\Sigma_{C, \Phi}$.

Soit inversement une solution de $\Sigma_{C, \Phi}$. D'après (4.13), $g(\varphi)$ et $\frac{dg}{d\varphi}$ sont positives et

$$\left| \frac{dg}{d\varphi} \right| \leq \frac{\gamma}{\sqrt{v_0^3}}.$$

En vertu d'un résultat du paragraphe 6 si les données vérifient la condition

$$(4.14) \quad \frac{\gamma \psi_0}{\sqrt{v_0^3}} + \text{Max} |l| \leq \pi$$

on est alors assuré que

$$|f(\varphi)| \leq \pi.$$

D'autre part, $\frac{dg}{d\varphi}$ étant positive, et $\theta[l]$ étant négative, l'équation (4.12) entraîne que $f(\varphi)$ est négative. Il suit des résultats qui précèdent que, moyennant (4.14), on a

$$-\pi \leq f(\varphi) \leq 0$$

et la relation obtenue en remplaçant $f^*(u)$ par $f(u)$ dans (4.13) est alors vérifiée par toute solution de $\Sigma_{c,\Phi}$.

Une solution de $\Sigma_{c,\Phi}$ sera ainsi une solution de Σ_1 vérifiant les inégalités (4.7), pourvu qu'elle satisfasse à la condition (4.12). En effet, $g(\varphi)$ étant positive, (4.12) entraînera alors

$$\text{Inf} \{ -e^{-3g(u)} \sin f^*(u), C\Phi(u) \} = -e^{-3g(u)} \sin f(u)$$

et l'équation (4.1) sera vérifiée.

Nous allons déterminer les éléments C et $\Phi(\varphi)$ de telle manière que toute solution de $\Sigma_{c,\Phi}$ satisfasse à la condition (4.12) et nous établirons ensuite que ce système $\Sigma_{c,\Phi}$ admet au moins une solution. On pourra alors conclure à l'existence d'un écoulement (P_1) correspondant au choix des données.

Détermination de C et de $\Phi(\varphi)$. — Considérons la fonction $\Phi_1(\varphi)$ qui est définie par ⁽³⁴⁾

$$(4.15) \quad \Phi_1(\varphi) = \Psi \left(\frac{\varphi}{M} \right).$$

Cette fonction jouit des propriétés (4.9) relativement à la variable φ , et, compte tenu de (4.10), elle vérifie

$$(4.16) \quad \left| \frac{\Phi_1'(\varphi)}{\Phi_1(\varphi)} \right| \leq \alpha.$$

Nous prendrons alors pour $\Phi(\varphi)$ une fonction qui satisfasse aux conditions (4.9) (relativement à φ), et aux deux relations ci-après

$$(4.17) \quad \left| \frac{\Phi'(\varphi)}{\Phi(\varphi)} \right| \leq \alpha,$$

$$(4.18) \quad \Phi(\varphi) \geq \Phi_1(\varphi).$$

⁽³⁴⁾ Rappelons que le nombre M , qui a été défini au paragraphe précédent, ne dépend que des données du problème.

Il existe au moins une telle fonction $\Phi(\varphi)$: c'est $\Phi_1(\varphi)$.

Envisageons maintenant une solution du système $\Sigma_{c,\Phi}$ qui correspond au choix que l'on vient de faire de $\Phi(\varphi)$ et supposons que les données vérifient la condition (4.14). Cette solution détermine alors un écoulement qui ne diffère d'un écoulement (P_1) que par le fait que la condition sur l'image de (L) est remplacée par la relation (4.13).

La formule (4.13) entraîne que la vitesse V sur (L) vérifie

$$|V dV| \leq \gamma dy, \quad \frac{dV}{dy} \leq 0$$

et le domaine fluide ne se recoupant pas, il s'ensuit les inégalités

$$V_0 \leq V \leq V_1,$$

où la valeur V_1 est donnée par (4.3).

Il résulte de cela les limitations suivantes pour toute solution de $\Sigma_{c,\Phi}$,

$$(4.19) \quad |g(\varphi)| \leq G,$$

$$(4.20) \quad |h(\varphi)| \leq M, \quad \left| \frac{dl}{d\varphi} \right| \leq M, \quad \left| \frac{d\varphi}{dl} \right| \leq M,$$

où les nombres G et M, qui ont été définis au paragraphe 18 ne dépendent que des éléments donnés (S), V_0 , Ψ_0 .

Une solution de $\Sigma_{c,\Phi}$ vérifie donc (4.6), ce qui, eu égard à (4.8) et (4.15), entraîne $|\theta[l(\varphi)]| \leq \Psi \left(\frac{\varphi}{M} \right)$, ou

$$(4.21) \quad \theta[l(\varphi)] \leq \Phi_1(\varphi).$$

D'autre part, d'après (4.13), on a pour cette solution

$$(4.22) \quad \left| \frac{dg}{d\varphi} \right| \leq C \frac{\gamma}{V_0^3} \Phi(\varphi).$$

Nous allons utiliser les deux inégalités (4.21) et (4.22) pour construire un module de continuité à l'infini de l'élément $f(\varphi)$, lequel vérifie l'équation (1.12).

Compte tenu de (4.21) on a

$$(4.23) \quad \left| \frac{1}{2\Psi_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\theta[l(u+\varphi)]}{\operatorname{ch} \frac{\pi u}{2\Psi_0}} du \right| \leq \Phi_1(\varphi) \frac{1}{2\Psi_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Phi_1(u+\varphi) du}{\Phi_1(\varphi) \operatorname{ch} \frac{\pi u}{2\Psi_0}}.$$

Il suit de (4.16) que

$$\left| \frac{\Phi_1(u + \varphi)}{\Phi_1(\varphi)} \right| \leq e^{\alpha |u|}$$

et α vérifiant (4.11) l'intégrale

$$\frac{1}{2\Psi_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Phi_1(u + \varphi)}{\Phi_1(\varphi)} \frac{du}{\operatorname{ch} \frac{\pi u}{2\psi_0}}$$

est bornée pour $-\infty \leq \varphi \leq +\infty$.

On peut d'ailleurs écrire

$$(4.24) \quad \left| \frac{1}{2\psi_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\theta |l(u + \varphi)|}{\operatorname{ch} \frac{\pi u}{2\psi_0}} du \right| \leq \Lambda \Phi_1(\varphi),$$

où Λ est un nombre positif, fini, qui ne dépend que des paramètres α et Ψ_0 .

D'autre part, eu égard à (4.22), on a

$$|g(u + \varphi) - g(\varphi)| \leq \frac{\gamma C}{V_0^3} \left| \int_0^u \Phi(\varphi + \nu) d\nu \right|$$

et par suite

$$(4.25) \quad \left| \frac{1}{2\psi_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(u + \varphi) - g(u)}{\operatorname{sh} \frac{\pi u}{2\psi_0}} du \right| \leq \frac{\gamma C}{V_0^3} \Phi(\varphi) \frac{1}{2\psi_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left| \int_0^u \frac{\Phi(\varphi + \nu)}{\Phi(\varphi)} d\nu \right|}{\left| \operatorname{sh} \frac{\pi u}{2\psi_0} \right|} du.$$

L'inégalité (4.17) entraîne

$$\frac{\Phi(\varphi + \nu)}{\Phi(\varphi)} \leq e^{\alpha |\nu|},$$

d'où il suit que

$$(4.26) \quad \frac{\left| \int_0^u \frac{\Phi(\varphi + \nu)}{\Phi(\varphi)} d\nu \right|}{\left| \operatorname{sh} \frac{\pi u}{2\psi_0} \right|} \leq \frac{e^{\alpha |u|} - 1}{\alpha \left| \operatorname{sh} \frac{\pi u}{2\psi_0} \right|}$$

et l'inégalité (4.25) donne alors

$$\left| \frac{1}{2\psi_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(u+\varphi) - g(\varphi)}{\operatorname{sh} \frac{\pi u}{2\psi_0}} du \right| \leq \frac{\gamma C}{V_0^3} \Phi(\varphi) \frac{1}{2\psi_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\alpha|u|-1}}{\alpha \left| \operatorname{sh} \frac{\pi u}{2\psi_0} \right|} du.$$

Le nombre α vérifiant (4.11) on a

$$(4.27) \quad \frac{1}{2\psi_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\alpha|u|-1}}{\alpha \left| \operatorname{sh} \frac{\pi u}{2\psi_0} \right|} du = B(\alpha, \psi_0),$$

où $B(\alpha, \psi_0)$ est un nombre positif et fini, qui dépend de α et de ψ_0 .

Les résultats qui précèdent montrent que

$$(4.28) \quad \left| \frac{1}{2\psi_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(u+\varphi) - g(\varphi)}{\operatorname{sh} \frac{\pi u}{2\psi_0}} du \right| \leq C \frac{\gamma}{V_0^3} B(\alpha, \psi_0) \Phi(\varphi).$$

Des formules (4.12), (4.24) et (4.28), et compte tenu de l'inégalité (4.18), on tire la relation suivante :

$$(4.29) \quad |f(\varphi)| \leq C \Phi(\varphi) \left[\frac{\gamma B(\alpha, \psi_0)}{V_0^3} + \frac{A}{C} \right].$$

Si la condition

$$(4.30) \quad \frac{\gamma B(\alpha, \psi_0)}{V_0^3} < 1$$

est satisfaite on pourra alors choisir C assez grand pour que $f(\varphi)$ satisfasse nécessairement à la condition (4.12).

En résumé, à tout ensemble des quatre éléments $\theta[l]$, ψ_0 , V_0 , α , satisfaisant aux conditions (4.8), (4.9), (4.11), (4.14) et (4.30), nous avons montré que l'on peut associer une constante positive, finie, C et une fonction $\Phi(\varphi)$ jouissant des propriétés (4.9) (relativement à φ), et cela de telle manière que toute solution du système $\Sigma_{C, \Phi}$, correspondant aux données $\theta[l]$, V_0 , ψ_0 précédentes, vérifie la relation (4.12) et soit par suite une solution de Σ_1 satisfaisant aux inégalités (4.7).

Nous allons maintenant chercher à préciser la forme de condition (4.30).

On vérifie facilement que $B(\alpha, \psi_0)$, qui est donnée par (4.27), est une fonction continue et croissante de α pour $0 < \alpha < \frac{\pi}{2\psi_0}$.

De plus, $B(\alpha, \psi_0)$ a pour $\alpha = 0$ une limite qui est

$$(4.31) \quad B(0, \psi_0) = \frac{1}{2\psi_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u}{\operatorname{sh} \frac{\pi u}{2\psi_0}} du$$

ou

$$(4.32) \quad B(0, \psi_0) = \psi_0.$$

Il résulte des calculs précédents que la quantité

$$(4.33) \quad \frac{\gamma}{V_0^3} B(\alpha, \psi_0)$$

croît de $\frac{\gamma\psi_0}{V_0^3}$ à $+\infty$ lorsque α croît de zéro à $\frac{\pi}{2\psi_0}$.

Cela montre qu'il existe un nombre α , positif et non nul, qui vérifie la relation (4.30), pourvu que les données satisfassent à la condition

$$(4.34) \quad \frac{\gamma\psi_0}{V_0^3} < 1.$$

On peut alors conclure : les hypothèses de régularité à l'infini de $\theta[l]$, (4.8) et (4.9), étant vérifiées, il existe un système $\Sigma_{c,\varphi}$ jouissant des propriétés qui ont été énoncées, toutes les fois que les données satisfont aux conditions (4.14) et (4.34).

Remarque. — La condition (4.34) étant vérifiée soit $\beta > 0$ tel que

$$\frac{\gamma}{V_0^3} B(\beta, \psi_0) < 1.$$

Les raisonnements qui précèdent montrent que $f(\varphi)$ possède à l'infini le moins fort des deux modules de continuité suivants :

$$|f(\varphi)| < \operatorname{const.} e^{-\beta|\varphi|},$$

$$|f(\varphi)| < \Psi\left(\frac{\varphi}{M}\right).$$

Ainsi l'allure à l'infini de la solution ne dépend que des paramètres V_0 et ψ_0 lorsque la pente de la paroi tend vers zéro

suffisamment rapidement (décroissance exponentielle d'exposant assez grand). Dans le cas contraire elle dépend de l'allure asymptotique de la paroi.

20. ÉQUATION FONCTIONNELLE DU PROBLÈME. TRANSFORMATION V_1 . — Nous nous proposons maintenant de montrer que le système $\Sigma_{c,\Phi}$ admet au moins une solution et pour cela nous allons mettre ce système sous la forme d'une équation fonctionnelle à laquelle s'appliquera la théorie du point fixe de Schauder et Leray.

Espaces E, E_ν . — Nous introduirons tout d'abord les espaces abstraits E et E_ν .

Nous appellerons dans ce qui suit E l'espace des fonctions de la variable φ qui sont continues et finies sur $[-\infty, +\infty]$, la norme d'un élément $\lambda(\varphi)$ de E étant définie par

$$\|\lambda(\varphi)\| = \text{Max} |\lambda(\varphi)|.$$

Cet espace est linéaire, normé et complet.

Soit ν un nombre positif inférieur à 1 ; E_ν comprend par définition les éléments $\lambda(\varphi)$ de E qui vérifient une inégalité du type

$$(4.35) \quad |\lambda(\varphi) - \lambda(\varphi')| \leq \text{const.} |\varphi - \varphi'|^\nu \quad \text{si} \quad |\varphi - \varphi'| < 1$$

et pour un élément $\lambda(\varphi)$ de E nous définissons une norme $\|\lambda(\varphi)\|_\nu$ en posant

$$(4.36) \quad \|\lambda(\varphi)\|_\nu = \|\lambda(\varphi)\| + \text{plus petite constante entrant dans l'inégalité (4.35)}.$$

L'espace E_ν est évidemment linéaire et normé ; il est d'autre part facile de voir que cet espace est complet.

Transformation V_1 . — Il sera commode pour la suite des raisonnements d'introduire la fonction inconnue qui est définie par

$$(4.37) \quad k(\varphi) = h(\varphi) - \frac{1}{2\psi_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(u)}{\text{ch} \frac{\pi}{2\psi_0} (u - \varphi)} du.$$

Le système $\Sigma_{c,\Phi}$ peut alors se mettre sous la forme suivante :

$$(4.38) \quad g(\varphi) = G(\varphi), \quad k(\varphi) = K(\varphi),$$

$$G(\varphi) = \frac{\gamma}{V_0^3} \int_{-\infty}^{\varphi} \text{Inf} \{ -e^{-\lambda g(u)} \sin f^*(u), C\Phi(u) \} du,$$

$$(4.39) \quad f(\varphi) = -\frac{1}{2\psi_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(u) - g(\varphi)}{\text{sh} \frac{\pi}{2\psi_0} (u - \varphi)} du$$

$$+ \frac{1}{2\psi_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{0[l(u)]}{\text{ch} \frac{\pi}{2\psi_0} (u - \varphi)} du,$$

$$(4.40) \quad K(\varphi) = -\frac{1}{2\psi_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{0[l(u)] - 0[l(\varphi)]}{\text{sh} \frac{\pi}{2\psi_0} (u - \varphi)} du,$$

$$(4.41) \quad l(\varphi) = \frac{1}{V_0} \int_0^{\varphi} e^{-h(u)} du,$$

$$(4.42) \quad h(\varphi) = k(\varphi) + \frac{1}{2\psi_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(u)}{\text{ch} \frac{\pi}{2\psi_0} (u - \varphi)} du.$$

Considérons une solution de ce système. La fonction $g(\varphi)$ est, en vertu de (4.38) un élément de E_1 ; en conséquence elle vérifie aussi une inégalité de la forme (4.35) où ν est un membre positif et inférieur à 1. Il suit de cela que $g(\varphi)$ est un élément de E_* .

D'autre part, les fonctions $g(\varphi)$ et $k(\varphi)$ sont des éléments de E lorsqu'elles appartiennent à une solution du problème (P_1) et nous avons indiqué que si $g(\varphi)$ appartenait à E il en était de même pour la fonction de φ qui est déterminée par l'intégrale de la formule (4.37). Il s'ensuit que $k(\varphi)$ est également un élément de E .

Donnons-nous alors un élément $k(\varphi)$ de E et un élément $g(\varphi)$ de E_* , l'indice ν étant supposé fixé, mais inférieur à 1.

Les formules (4.42) et (4.41) déterminent successivement une fonction $h(\varphi)$, qui est bornée, et une fonction $l(\varphi)$ qui a une dérivée bornée et qui tend vers plus ou moins l'infini en même temps que φ .

Portons maintenant les valeurs des deux éléments $g(\varphi)$ et $l(\varphi)$ précédents dans les seconds membres des formules (4.39) et (4.40). Les propriétés qui ont été indiquées pour les intégrales de ces

formules montrent que (4.39) détermine alors une fonction $f(\varphi)$, continue pour $-\infty < \varphi < +\infty$, et que (4.40) fournit un élément de E , que nous appelons $K(\varphi)$.

Enfin le deuxième membre de (4.38) définit, à partir de $f(\varphi)$ et de $g(\varphi)$, un élément de E_1 , et par suite de E_v , que nous notons $G(\varphi)$.

Nous désignerons par V_1 la transformation que nous venons de définir, et qui, à un point x de l'espace $E \times E_v$, et de coordonnées $k(\varphi)$, $g(\varphi)$, fait correspondre un point x' , de coordonnées $K(\varphi)$ et $G(\varphi)$, de ce même espace.

Nous appellerons dans ce qui suit \mathcal{E} l'espace $E \times E_v$, et la norme d'un point x de \mathcal{E} , que nous notons $\|x\|$ peut être définie par

$$\|x\| = \|k(\varphi)\| + \|g(\varphi)\|_v.$$

La résolution du système $\Sigma_{c,\Phi}$ est alors équivalente à la recherche des solutions de l'équation

$$(4.43) \quad x = V_1(x)$$

qui appartiennent à \mathcal{E} .

En vue d'appliquer les critères d'existence de la théorie des équations fonctionnelles de Schauder et Leray à l'équation (4.43) nous allons montrer que la transformation V_1 est complètement continue.

Complète continuité de V_1 . — La transformation V_1 définit une application de \mathcal{E} dans \mathcal{E} . Nous commencerons par établir que cette application est continue, puis nous vérifierons que V_1 transforme les ensembles bornés de \mathcal{E} en des ensembles compacts de cet espace.

Continuité de V_1 . — Soit x un point de \mathcal{E} de coordonnées $k(\varphi)$ et $g(\varphi)$, et soit $x + \Delta x$ un point voisin dont les coordonnées sont $k(\varphi) + \Delta k(\varphi)$, $g(\varphi) + \Delta g(\varphi)$. Nous désignerons par le symbole Δ les accroissements que reçoivent les éléments $h(\varphi)$, $l(\varphi)$, $\theta[l(\varphi)]$, $K(\varphi)$, $G(\varphi)$, lorsque $k(\varphi)$ et $g(\varphi)$ subissent les accroissements $\Delta k(\varphi)$ et $\Delta g(\varphi)$. Enfin nous désignerons par const. des grandeurs numériques qui sont bornées sur un voisinage borné de x et par $\eta(\|\Delta x\|)$ des quantités qui tendent vers zéro en même temps que la norme $\|\Delta x\| = \|\Delta k(\varphi)\| + \|\Delta g(\varphi)\|_v$.

La formule qui fournit $h(\varphi)$ montre que

$$|\Delta h(\varphi)| \leq \text{const.} \|\Delta x\|,$$

puis d'après (4.41)

$$(4.44) \quad \left| \frac{d}{d\varphi} \Delta l \right| \leq \text{const.} \|\Delta x\|, \quad \Delta l(0) = 0$$

et

$$(4.45) \quad |\Delta l(\varphi)| \leq \text{const.} \|\Delta x\| |\varphi|,$$

d'où eu égard à ce que $\theta[l]$ a une dérivée bornée

$$(4.46) \quad |\Delta \theta[l(\varphi)]| \leq \text{const.} \|\Delta x\| |\varphi|.$$

D'autre part, d'après (4.41) on a

$$|l(\varphi)| \geq \frac{|\varphi|}{\text{const.}} \quad \text{et} \quad |\theta[l(\varphi)]| \leq \Phi_2(\varphi),$$

où $\Phi_2(\varphi)$ est continue sur $[-\infty, +\infty]$, nulle pour $\varphi = \pm\infty$.

Il suit de cela que

$$(4.47) \quad |\Delta \theta[l(\varphi)]| \leq 2\Phi_2(\varphi)$$

et les deux inégalités (4.46) et (4.47) permettent de conclure que

$$(4.48) \quad |\Delta \theta[l(\varphi)]| \leq \text{const.} \eta(\|\Delta x\|).$$

Enfin on a

$$(4.49) \quad \left| \frac{d}{d\varphi} \Delta \theta[l(\varphi)] \right| \leq \text{const.}$$

Il est aisé de vérifier que les formules (4.48) et (4.49) entraînent les inégalités ci-après

$$(4.50) \quad |\Delta f(\varphi)| \leq \text{const.} \eta(\|\Delta x\|),$$

$$(4.51) \quad |\Delta K(\varphi)| \leq \text{const.} \eta(\|\Delta x\|).$$

Il résulte de cette dernière formule la continuité de la coordonnée $K(\varphi)$ de l'image du point x .

Étudions maintenant la continuité de la coordonnée $G(\varphi)$ qui est un élément de E_v .

On a

$$\frac{dG}{d\varphi} = \frac{\gamma}{V_0^3} \text{Inf} \{ -e^{-3g(\varphi)} \sin f(\varphi), C\Phi(\varphi) \}, \quad G(-\infty) = 0$$

et par suite

$$(4.52) \quad \Delta G(-\infty) = 0,$$

$$(4.53) \quad \left| \frac{d}{d\varphi} \Delta G \right| \leq \text{const. } \Phi(\varphi),$$

$$(4.54) \quad \left| \frac{d}{d\varphi} \Delta G \right| \leq \text{const. } \Delta[-e^{g(\varphi)} \sin f^*(\varphi)],$$

cette dernière inégalité, compte tenu de (4.50), pouvant se mettre sous la forme

$$(4.54') \quad \left| \frac{d}{d\varphi} \Delta G \right| \leq \text{const. } \eta(\|\Delta x\|).$$

La fonction $\Phi(\varphi)$ a une intégrale qui est finie sur $[-\infty, +\infty]$; il résulte alors des formules (4.52), (4.53) et (4.54') que $\Delta G(\varphi)$ vérifie une inégalité du type

$$(4.55) \quad |\Delta G(\varphi)| \leq \text{const. } \eta(\|\Delta x\|).$$

Enfin $\Delta G(\varphi)$ satisfait d'après (4.54') à la condition

$$|\Delta G(\varphi) - \Delta G(\varphi')| \leq \text{const. } \eta(\|\Delta x\|) |\varphi - \varphi'|^{\nu} \quad \text{si } |\varphi - \varphi'| < 1.$$

Il suit de (4.54') et (4.55) que

$$(4.56) \quad \|\Delta G(\varphi)\|_{\nu} \leq \text{const. } \eta(\|\Delta x\|).$$

Cette dernière inégalité établit la continuité de la coordonnée $G(\varphi)$ de l'image du point x .

En conclusion, V_1 définit une application continue de \mathcal{E} dans \mathcal{E} .

Complète continuité de V_1 . — Nous supposons maintenant que la transformation V_1 opère sur un ensemble borné de \mathcal{E} et nous désignerons par const. des grandeurs numériques, finies, qui ne dépendent que de l'ensemble borné considéré.

On a par hypothèse

$$\|K(\varphi)\| + \|g(\varphi)\|_{\nu} \leq \text{const.},$$

ce qui entraîne successivement les inégalités

$$(4.57) \quad \begin{aligned} \|h(\varphi)\| &\leq \text{const.}, & \left| \frac{dl}{d\varphi} \right| &< \text{const.}, \\ \left| \frac{d\varphi}{dl} \right| &< \text{const.}, & |l(\varphi)| &> \frac{|\varphi|}{\text{const.}}, \end{aligned}$$

$$(4.58) \quad \left| \frac{d}{d\varphi} \theta[l] \right| < \text{const.},$$

Un raisonnement déjà utilisé permet de conclure, compte tenu de (4.57), qu'il existe $\Phi_3(\varphi)$, continue sur $[-\infty, +\infty]$, nulle pour $\varphi = \pm \infty$, et telle que

$$(4.59) \quad | \theta[l(\varphi)] | \leq \Phi_3(\varphi)$$

lorsque V_1 opère sur l'ensemble borné considéré.

Construction d'un module de continuité pour $K(\varphi)$. — Nous allons nous servir des résultats qui précèdent pour construire un module de continuité, en tout point de $[-\infty, +\infty]$, pour la fonction $K(\varphi)$ qui est donnée par

$$(4.60) \quad K(\varphi) = -\frac{1}{2\psi_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\theta[l(u+\varphi)] - \theta[l(\varphi)]}{\operatorname{sh} \frac{\pi u}{2\psi_0}} du.$$

Il suit de (4.58) les deux inégalités ci-après

$$\begin{aligned} | \{ \theta[l(u+\varphi)] - l(\varphi) \} \theta | - \{ \theta[l(u+\varphi')] - \theta[l(\varphi')] \} | &\leq \operatorname{const.} |u|, \\ \dots\dots\dots &\leq \operatorname{const.} |\varphi - \varphi'|. \end{aligned}$$

Soit alors ε un nombre positif; les deux dernières formules permettent d'écrire

$$(4.61) \quad \begin{aligned} |K(\varphi) - K(\varphi')| &< \operatorname{const.} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \frac{u}{\operatorname{sh} \frac{\pi u}{2\psi_0}} du \\ &+ \operatorname{const.} |\varphi - \varphi'| \int_{+\varepsilon}^{+\infty} \frac{du}{\operatorname{sh} \frac{\pi u}{2\psi_0}} \\ &< \operatorname{const.} \left\{ \varepsilon + |\varphi - \varphi'| \log \operatorname{th} \frac{\pi \varepsilon}{2\psi_0} \right\} \end{aligned}$$

et si l'on prend ε égal à $|\varphi - \varphi'|$ cela montre que $K(\varphi)$ possède à distance finie un module de continuité du type

$$(4.62) \quad |K(\varphi) - K(\varphi')| < \operatorname{const.} |\varphi - \varphi'| \log |\varphi - \varphi'|.$$

Soit d'autre part A un nombre positif avec

$$0 < \varepsilon < A.$$

On a, compte tenu de (4.58) et (4.59)

$$(4.63) \quad |K(\varphi)| < \text{const. } \varepsilon + F(A) \\ + \text{const.} \left\{ \int_{-\lambda}^{-\varepsilon} + \int_{+\varepsilon}^{+\lambda} \right\} \frac{\Phi_3(u + \varphi) + \Phi_3(\varphi)}{\text{sh } \frac{\pi u}{2\phi_0}} du,$$

où $F(A)$ est une fonction du nombre positif A qui tend vers zéro lorsque A devient infini.

Il est possible de choisir ε , A , puis un nombre B de telle manière que le second membre de (4.63) soit inférieur à un nombre η , non nul, arbitrairement petit, pourvu que

$$|\varphi| > B.$$

La fonction $K(\varphi)$ s'annule donc pour $\varphi = \pm\infty$, et elle a en ces deux points un module de continuité qui ne dépend de l'ensemble borné de \mathcal{E} que l'on envisage.

Les résultats qui viennent d'être établis montrent qu'à un ensemble borné de \mathcal{E} la transformation V_1 fait correspondre des fonctions $K(\varphi)$ qui ont un module d'égale continuité en tout point de $[-\infty, +\infty]$. Celles-ci forment donc un sous-ensemble compact de E .

L'élément $G(\varphi)$ appartient à un ensemble compact de E_1 . — Quel que soit le point x de \mathcal{E} la fonction $G(\varphi)$ qui est égale au second membre de (4.38) vérifie les deux relations

$$(4.64) \quad \left| \frac{dG}{d\varphi} \right| \leq \frac{\gamma}{V_0^3},$$

$$(4.65) \quad \left| \frac{dG}{d\varphi} \right| \leq \frac{\gamma C}{V_0^3} \Phi(\varphi).$$

D'après (4.64) l'élément $G(\varphi)$ appartient à un ensemble borné de E_1 . D'autre part la fonction $\Phi(\varphi)$ a une intégrale qui est bornée sur $[-\infty, +\infty]$ et (4.65) permet alors de construire un module d'égale continuité aux deux points $\varphi = -\infty$ et $\varphi = +\infty$, valable pour tout élément $G(\varphi)$. Ces deux propriétés de $G(\varphi)$ justifient notre assertion : l'élément $G(\varphi)$ appartient à un ensemble compact de E_1 ⁽³⁵⁾.

⁽³⁵⁾ En effet, soit une suite G_n d'éléments bornés sur E_1 et qui ont de plus un module d'égale continuité à l'infini. Du fait de l'égale continuité en tout point

On conclut des résultats qui viennent d'être établis que V_1 transforme les ensembles bornés de \mathcal{E} en des ensembles compacts de cet espace.

21. THÉORÈME D'EXISTENCE. — Les théorèmes d'existence que nous énoncerons pour le problème (P_1) résulteront de la limitation que nous allons effectuer des solutions de l'équation (4.43).

Limitation des inconnues. — Envisageons une solution de l'équation (4.43) qui correspond à des éléments donnés qui satisfont aux conditions

$$(4.66) \quad -\frac{\pi}{2} + a \leq \theta[l] \leq 0 \quad (a > 0),$$

$$(4.67) \quad |\theta[l]| + \frac{\gamma\psi_0}{\sqrt{g}} \leq \pi.$$

Ces inégalités étant vérifiées cette solution détermine un écoulement sur (S) qui ne diffère d'un mouvement (P_1) que par le fait que la condition sur la ligne libre est remplacée par la relation (4.38).

Des raisonnements qui ont été déjà utilisés montrent alors que les normes $\|g(\varphi)\|$ et $\|h(\varphi)\|$ sont limitées supérieurement par les nombres G et H qui sont donnés par les formules (4.17), (4.3) et (4.4).

D'autre part, l'équation (4.37) donne

$$\|k(\varphi)\| \leq \|h(\varphi)\| + \|g(\varphi)\|.$$

de $[-\infty, +\infty]$, on peut extraire une suite convergente sur E .

On a pour cette suite

$$(a) \quad \|G_m - G_n\| < \varepsilon_N \quad \text{si } m, n > N \quad (\varepsilon_N \rightarrow 0 \text{ si } N \rightarrow \infty)$$

et aussi

$$(b) \quad |[G_n(\varphi) - G_m(\varphi)] - [G_n(\varphi') - G_m(\varphi')]| \leq \text{const.} |\varphi - \varphi'|.$$

De (a) et (b) on tire

$$|[G_n(\varphi) - G_m(\varphi)] - [G_n(\varphi') - G_m(\varphi')]| \leq \text{const.} \varepsilon_N^{1-\nu} |\varphi - \varphi'|^\nu$$

et ν étant inférieur à 1,

$$\|G_n(\varphi) - G_m(\varphi)\|_{\nu} \rightarrow 0 \quad \text{si } m, n \rightarrow +\infty.$$

L'espace E_ν , étant complet; la suite considérée converge donc sur E_ν .

Enfin, d'après (4.38) on a

$$\left| \frac{dg}{d\varphi} \right| \leq \frac{\gamma}{V_0^3}.$$

Il suit des résultats qui précèdent que, eu égard aux formules qui définissent G et H, on peut limiter *a priori* la norme

$$\|x\| = \|k(\varphi)\| + \|g(\varphi)\|,$$

d'une solution de (4.43) si l'on connaît des majorantes des grandeurs

$$(4.68) \quad \frac{1}{a}, \quad \frac{\gamma\Delta}{V_0^2}, \quad \frac{\gamma\Psi_0}{V_0^3}, \quad \frac{\Psi_0}{V_0} \text{Max} |\theta'|.$$

Existence d'une solution de l'équation $x = V_1(x)$. — Soit K un nombre positif et envisageons l'équation

$$(4.69) \quad x = V_1(x, K)$$

qui est obtenue en remplaçant dans les formules qui déterminent V_1 le paramètre γ par $K\gamma$ et la fonction donnée $\theta[l]$ par $K\theta[l]$.

Il est aisé de s'assurer que la transformation $V_1(x, K)$ est uniformément continue par rapport à K sur tout borné de \mathcal{E} .

Pour K nul la transformation $V_1(x, 0)$ est indépendante de son argument.

Enfin, lorsque les conditions (4.66) et (4.67) sont satisfaites les résultats qui ont été établis au début de ce paragraphe montrent que les solutions de l'équation (4.69) sont bornées dans leur ensemble, quand K prend ses valeurs sur le segment (0, 1).

L'indice total des solutions de (4.43) vaut donc + 1 et cette équation admet au moins une solution.

Existence d'une solution du problème (P₁). — Compte tenu des raisonnements du paragraphe 19 nous pouvons alors conclure :

Il existe au moins un écoulement du type (P₁) lorsque la paroi vérifie à l'infini la condition de régularité (4.8), (4.9) et si les paramètres V_0 et Ψ_0 satisfont à l'inégalité

$$(4.70) \quad \frac{\gamma\Psi_0}{V_0^3} < 1.$$

Il est à remarquer que dans la théorie approchée cette dernière condition caractérise les écoulements torrentiels.

CHAPITRE V.

SUR LA NATURE ANALYTIQUE DE LA LIGNE LIBRE.

22. ÉNONCÉ D'UN LEMME SUR LE PROLONGEMENT ANALYTIQUE. — *Introduction.* — Considérons un mouvement irrotationnel et permanent d'un liquide pesant dans un plan vertical, et supposons que sur un arc (L) le fluide en mouvement soit en contact avec un milieu à pression constante.

La fonction $\omega(\zeta)$ correspondante, que nous avons introduite au paragraphe 2, est analytique à l'intérieur d'une bande du plan ζ du potentiel complexe, limitée par deux droites parallèles. Sur l'image de (L), à l'exception des points où la vitesse s'annule, $\omega(\zeta)$ a une limite continue, $f(\varphi) + ig(\varphi)$, qui vérifie la relation

$$(5.1) \quad \frac{dg}{d\varphi} = \text{const. } e^{-ig(\varphi)} \sin f(\varphi).$$

Supposons alors que $\omega(\zeta)$ soit prolongeable analytiquement à travers les côtés de la bande, en tout point sur le voisinage duquel cette fonction a une limite qui satisfait à la relation (5.1). Il s'ensuivra que toute ligne libre à pression constante sera une courbe analytique et régulière, en dehors des points où la vitesse s'annule et des points de raccordement à des parois frontières.

Le deuxième membre de (5.1) est analytique par rapport aux arguments $f(\varphi)$ et $g(\varphi)$, et la propriété précédente concernant le prolongement de $\omega(\zeta)$ résultera d'un lemme plus général sur le prolongement analytique que nous établirons dans la suite de ce chapitre, et que nous allons maintenant énoncer.

Un lemme sur le prolongement analytique. — Soit $\omega(\zeta)$ une fonction holomorphe sur un domaine simplement connexe \mathcal{D} du plan $\zeta = \xi + i\eta$, limité par une courbe de Jordan Γ . Une origine et un sens

de parcours étant choisis sur Γ , désignons par s l'abscisse curviligne d'un point de Γ , et faisons les hypothèses suivantes :

1. La courbe Γ est analytique et régulière dans le voisinage d'un point M , d'abscisse curviligne s_0 .

2. Dans le voisinage de M , la fonction $\omega(\zeta)$ a une limite continue sur Γ , que nous appelons $f(s) + ig(s)$, et $g(s)$ est dérivable et vérifie la relation

$$(5.2) \quad \frac{dg}{ds} = \Psi[f(s), g(s), s],$$

où $\Psi(f, g, s)$ est une fonction analytique de ses arguments autour du système de valeurs

$$f=f(s_0), \quad g=g(s_0), \quad s=s_0.$$

Cela étant, la fonction $\omega(\zeta)$ est prolongeable analytiquement en M à travers la frontière Γ .

Les modes de démonstration que nous utiliserons permettront d'ailleurs de construire une minorante, non nulle, du rayon de convergence au point M de $\omega(\zeta)$, lorsque l'on connaît en ce point un module de continuité de cette fonction ⁽³⁶⁾.

Un énoncé particulier du lemme. — Si nous effectuons une application conforme du domaine \mathcal{D} sur un demi-plan, le transformé de Γ est une droite, et la correspondance des frontières est analytique dans

⁽³⁶⁾ Les résultats de ce chapitre ont fait l'objet d'une Note aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris* (t. 233, 1951, p. 1560-1562).

Depuis la présentation de cette Note, j'ai eu connaissance de la démonstration que Hans Lewy a donnée d'un théorème analogue sur le prolongement analytique. Cette démonstration qui a été publiée dans les *Proceedings of the American Mathematical Society* de 1952 (vol. 3, p. 111-113) avait été présentée à la Société en avril 1951.

La démonstration de cet auteur, qui est particulièrement concise et élégante, utilise les propriétés de convergence des équations différentielles dépendant d'un paramètre. Le résultat en est un peu plus général que le nôtre, le second membre de la relation (5.2) pouvant être également fonction de $\frac{df}{ds}$. Par contre ces modes de démonstration ne semblent pas permettre de préciser le rayon de convergence sur Γ de la fonction prolongée.

le voisinage de M et de son image, que nous supposons à distance finie. La fonction $\omega(\zeta)$ est alors transformée en une fonction qui satisfait aux conditions du lemme précédent, dans le cas particulier où \mathcal{O} est un demi-plan. D'autre part, il est loisible de supposer que la limite de $\omega(\zeta)$ en M est nulle.

Nous pourrions donc démontrer le lemme, énoncé sous la forme particulière suivante :

Soit $\omega(\zeta)$ une fonction holomorphe dans le demi-plan supérieur du plan $\zeta = \xi + i\eta$, et qui, dans le voisinage de l'origine, a sur l'axe réel une limite continue $f(\xi) + ig(\xi)$ nulle pour $\xi = 0$, $g(\xi)$ étant dérivable et vérifiant la relation

$$(5.3) \quad \frac{dg}{d\xi} = \Psi[f(\xi), g(\xi), \xi],$$

où $\Psi(f, g, \xi)$ est une fonction analytique de ses arguments autour du système de valeurs

$$f = g = \xi = 0.$$

La fonction $\omega(\zeta)$ est alors prolongeable à l'origine à travers l'axe réel.

Transformation $z = z(\zeta)$. — Désignons par R un nombre positif, non nul, strictement inférieur aux rayons des cercles de convergence associés de la fonction analytique $\Psi(f, g, \xi)$ aux points $f = g = \xi = 0$, et soit λ une constante numérique positive, inférieure à 1, supposée fixée, et dont nous préciserons la valeur par la suite.

La fonction $\omega(\zeta)$ étant continue sur \mathcal{O} et sa frontière dans le voisinage de l'origine où elle prend la valeur zéro, et $\Psi(f, g, \xi)$ étant une fonction continue de ses arguments, il existe un nombre ρ , positif, non nul, et tel que les conditions ci-après soient satisfaites :

$$(5.4) \quad \rho \leq \lambda R,$$

$$(5.5) \quad |\omega(\zeta)| \leq \lambda R \quad \text{si} \quad |\zeta| \leq \rho, \quad \eta \geq 0,$$

$$(5.6) \quad \rho |\Psi[f(\xi), g(\xi), \xi]| \leq 4\lambda R \quad \text{sur} \quad -\rho \leq \xi \leq +\rho.$$

Soit alors C la demi-circonférence du plan ζ qui est définie par

$$|\zeta| < \rho, \quad \eta > 0.$$

Effectuons la représentation conforme de C sur la bande \mathcal{B} d'un plan $z = x + iy$, d'équations

$$0 < y < \pi, \quad -\infty < x < +\infty$$

et cela de telle manière que le diamètre réel de C ait pour image l'axe réel du plan ζ et que les origines des deux plans se correspondent.

Cette représentation est déterminée par la relation

$$(5.7) \quad z = \rho \log \frac{\rho + \zeta}{\rho - \zeta}$$

et la correspondance entre les deux axes réels est donnée par

$$(5.8) \quad \xi = \xi(x),$$

avec

$$(5.9) \quad \xi(x) \equiv \rho \operatorname{th} \frac{x}{4}.$$

Au moyen de cette transformation $\omega(\zeta)$ devient une fonction de z , que nous appellerons $\Omega(z)$, qui est holomorphe à l'intérieur de la bande.

Sur l'axe réel, $\Omega(z)$ a une limite continue, que nous notons $f(x) + ig(x)$, qui vérifie la relation déduite de (5.3) au moyen du changement de variable (5.8). Cette relation, compte tenu de (5.9), s'écrit

$$\frac{dg}{dx} = \frac{\rho}{4} \left[1 - \frac{\xi^2(x)}{\rho^2} \right] \Psi[f(x), g(x), \xi(x)]$$

ou

$$(5.10) \quad \frac{dg}{dx} = \Phi[f(x), g(x), \xi(x)],$$

en posant

$$(5.10') \quad \frac{\rho}{4} \left(1 - \frac{\xi^2}{\rho^2} \right) \Psi(f, g, \xi) = \Phi(f, g, \xi).$$

Il résulte de cette formule, et des propriétés qui ont été indiquées pour $\Psi(f, g, \xi)$, que $\Phi(f, g, \xi)$ est une fonction analytique de ses arguments autour du système de valeurs $f = g = \xi = 0$, et le nombre R représente encore une minorante des rayons de convergence associés en ces points.

D'autre part, d'après (5.4) et (5.9) on a

$$(3.11) \quad |\zeta(x)| \leq \lambda R$$

et eu égard à (5.6) et (5.10')

$$(3.12) \quad |\Phi[f(x), g(x), \zeta(x)]| \leq \lambda R, \quad -\infty < x < +\infty.$$

Enfin, (5.5) entraîne que sur \mathcal{B} et sa frontière, l'inégalité

$$(3.13) \quad |\Omega(z)| \leq \lambda R$$

est satisfaite.

On montrera que $\Omega(z)$ est prolongeable à travers l'axe réel dans la bande

$$-r < y < 0, \quad -\infty < x < +\infty,$$

où r est un nombre positif et non nul qui ne dépend que de la fonction $\Phi(f, g, \zeta)$, du nombre R , et de la constante λ . Il s'ensuivra que $\omega(\xi)$ sera prolongeable à travers l'axe réel, dans le voisinage de l'origine, et il est facile de vérifier qu'en ce point le rayon de convergence de $\omega(\xi)$ sera au moins égal à $\rho \operatorname{tg} \frac{r}{4}$, cette dernière quantité étant en définitive construite à partir de la connaissance de $\Psi(f, g, \zeta)$ dans le voisinage de $f = g = \zeta = 0$ et de celle d'un module de continuité de $\omega(\zeta)$ à l'origine [à cause de (5.5), pour préciser la valeur de ρ , il est nécessaire de connaître un tel module de continuité].

Cette possibilité de prolongement de $\Omega(z)$ résultera de la propriété que nous établirons pour $f(x)$ et $g(x)$ d'être des fonctions analytiques, ayant un rayon de convergence uniformément minoré, par rapport à x , par le nombre r .

Nous allons maintenant indiquer le système des équations auxquelles satisfont $f(x)$ et $g(x)$.

Équations du problème. — Appelons $\theta(x)$ la limite continue de la partie réelle de $\Omega(z)$ sur le côté supérieur de la bande. Comme, d'après (5.10), $g(x)$ a en tout x un module de continuité lipschitzien, $f(x)$ peut s'exprimer à l'aide des intégrales de M. Villat portant sur $g(x)$ et $\theta(x)$. Celles-ci s'écrivent

$$(3.14) \quad f(x) = \frac{1}{3\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(u) - g(x)}{\operatorname{sh} \frac{u-x}{2}} du + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\theta(u)}{\operatorname{ch} \frac{u-x}{2}} du.$$

D'autre part $f(x)$ et $g(x)$ vérifient l'équation

$$(5.15) \quad \frac{dg}{dx} = \Phi[f(x), g(x), \xi(x)],$$

où $\xi(x)$ est donnée par (5.9) et où $\Phi(f, g, \xi)$ est une fonction analytique de ses arguments pour

$$(5.16) \quad |f| \leq R, \quad |g| \leq R, \quad |\xi| \leq R.$$

Enfin les conditions suivantes, établies précédemment, sont satisfaites

$$(5.17) \quad \left\{ \begin{array}{l} |\theta(x)| \leq \lambda R, \\ |f(x)| \leq \lambda R, \quad |g(x)| \leq \lambda R, \quad |\xi(x)| \leq \lambda R, \\ |\Phi[f(x), g(x), \xi(x)]| \leq \lambda R, \\ -\infty < x < +\infty. \end{array} \right.$$

Nous montrerons que, moyennant les hypothèses précédentes sur $\Phi(f, g, \xi)$ et les inégalités (5.17), les deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$ qui vérifient les relations (5.14) et (5.15) admettent des dérivées de tous les ordres, et qu'il existe une série entière, de rayon de convergence supérieur à un nombre r , non nul, qui est majorante pour les développements tayloriens de $f(x)$ et $g(x)$, pour tout x fini.

Nous allons maintenant établir certaines propriétés des intégrales (5.14), qui seront utiles à la suite des raisonnements.

23. SUR CERTAINES PROPRIÉTÉS A LA FRONTIÈRE DES FONCTIONS HARMONIQUES ET CONJUGUÉS DANS UNE BANDE RECTILIGNE. — *Espace H_α .* — Pour abrégier le langage nous introduirons l'espace H_α . Le nombre α étant supposé fixé, inférieur à 1, H_α comprendra les fonctions continues et bornées pour $-\infty < x < +\infty$, et qui vérifient une condition du type

$$(5.18) \quad |\varphi(x) - \varphi(x')| \leq \text{const.} |x - x'|^\alpha.$$

Pour un élément $\varphi(x)$ de H_α on définit une norme en posant $\|\varphi(x)\|_\alpha = \text{Max} |\varphi(x)| +$ plus petite constante entrant dans l'inégalité (5.18).

Indiquons ici quelques propriétés faciles à vérifier, qui seront utiles à la suite des raisonnements :

1° Lorsque $\varphi_1(x)$ et $\varphi_2(x)$ appartiennent à H_α , il en est de même

pour la fonction $\varphi_1(x) \varphi_2(x)$ et

$$\|\varphi_1(x) \varphi_2(x)\|_{\alpha} \leq \|\varphi_1(x)\|_{\alpha} \|\varphi_2(x)\|_{\alpha}.$$

2° Si $\varphi(x) = \sum_1^{\infty} \varphi_n(x)$ est une série de fonctions qui converge pour toute valeur de x , si les φ_n sont des éléments de H_{α} , et si la série $\sum_1^{\infty} \|\varphi_n(x)\|_{\alpha}$ est convergente, alors $\varphi(x)$ est un élément de H_{α} et

$$\|\varphi(x)\|_{\alpha} \leq \sum_1^{\infty} \|\varphi_n(x)\|_{\alpha}.$$

3° Soient des fonctions $f_i(x)$, $1 \leq i \leq k$, qui appartiennent à H_{α} , et soit $\Psi(f_i)$ une fonction analytique des arguments f_i pour $f_i = f_i(x)$. Posons

$$\varphi(x) = \Psi[f_i(x)].$$

Pour toute valeur de x , $\varphi(x)$ est développable en une série de terme général

$$a_{n_1 \dots n_i \dots n_k} [f_1(x)]^{n_1} \dots [f_i(x)]^{n_i} \dots [f_k(x)]^{n_k}.$$

Ce terme général est alors un élément de H_{α} dont la norme est inférieure à

$$|a_{n_1 \dots n_i \dots n_k}| \|f_1(x)\|_{\alpha}^{n_1} \dots \|f_i(x)\|_{\alpha}^{n_i} \dots \|f_k(x)\|_{\alpha}^{n_k}$$

et d'après un résultat précédent, si la série $\Psi(f_i)$ converge absolument pour $f_i = \|f_i(x)\|_{\alpha}$, la fonction $\varphi(x)$ est un élément de H_{α} .

Les raisonnements qui précèdent montrent, en particulier, que si $S(f_i)$ est une série à coefficients positifs, majorante pour la série $\Psi(f_i)$, et si $S[\|f_i(x)\|_{\alpha}]$ converge, on a

$$\|\varphi(x)\|_{\alpha} \leq S[\|f_i(x)\|_{\alpha}].$$

4° Si $\varphi(x)$ est bornée et admet une dérivée $\varphi'(x)$ bornée, $\varphi(x)$ est un élément de H_{α} , et si F est une majorante des quantités $\text{Max } |\varphi(x)|$ et $\text{Max } |\varphi'(x)|$, on a ⁽³⁷⁾

$$\|\varphi(x)\|_{\alpha} \leq 3F.$$

⁽³⁷⁾ En effet, $\varphi(x)$ vérifie les deux inégalités

$$|\varphi(x) - \varphi(x')| \leq F|x - x'|, \quad |\varphi(x) - \varphi(x')| \leq 2F,$$

En particulier, la fonction $\xi(x)$ qui est définie par (5.9) a des dérivées de tous les ordres et l'on vérifie que

$$|\xi(x)| \leq \rho, \quad |\xi^{(n)}(x)| \leq \rho \frac{n!}{2^n},$$

ce qui, compte tenu de l'inégalité (5.4), permet d'écrire

$$(5.19) \quad \|\xi(x)\|_\alpha \leq 3\lambda R, \quad \|\xi^{(n)}(x)\|_\alpha \leq 3\lambda R \frac{(n+1)!}{2^{n+1}}.$$

Intégrale I(x). — Désignons par $I(x)$ la fonction de x qui est déterminée par la seconde intégrale de la formule (5.14).

La fonction $\theta(x)$ étant intégrable et bornée, $I(x)$ a des dérivées bornées de tous les ordres et

$$|I^{(n)}(x)| \leq \frac{1}{2\pi} \text{Max } |\theta(l)| \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{d^n}{dx^n} \left[\frac{1}{\text{ch} \frac{u-x}{2}} \right] \right| du.$$

On a

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{\text{ch} \frac{u}{2}} = 1$$

et l'on vérifie que

$$\left| \frac{d^n}{du^n} \frac{1}{\text{ch} \frac{u}{2}} \right| \text{ch} \frac{u}{2} \leq \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2^n} \leq n!$$

d'où, eu égard à (5.17), il suit que

$$|I(x)| \leq \lambda R, \quad |I^{(n)}(x)| \leq n! \lambda R.$$

Il résulte de cela que $I(x)$ et ses dérivées appartiennent à H_α et

$$(5.20) \quad \|I(x)\|_\alpha \leq 3\lambda R, \quad \|I^{(n)}(x)\|_\alpha \leq 3\lambda R (n+1)!$$

Intégrale J[g(x)]. — Nous désignons par $J[g(x)]$ la première

ce qui entraîne

$$|\varphi(x) - \varphi(x')| \leq (2F)^{1-\alpha} F^\alpha |x - x'|^\alpha$$

et

$$\|\varphi(x)\|_\alpha \leq 2^{1-\alpha} F + F \leq 3F.$$

intégrale de la formule (5.14) :

$$\mathcal{J}[g(x)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(u) - g(x)}{\operatorname{sh} \frac{u-x}{2}} du.$$

Lorsque $g(x)$ appartient à H_α , $\mathcal{J}[g(x)]$ est une fonction de x continue, bornée et

$$(5.21) \quad |\mathcal{J}[g(x)]| \leq \|g(x)\|_\alpha \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|u|^\alpha}{\left| \operatorname{sh} \frac{u}{2} \right|} du \leq \pi \|g(x)\|_\alpha.$$

D'après un théorème de Priwaloff⁽³⁸⁾, on sait que si deux fonctions harmoniques et conjuguées dans un cercle, l'une d'elles vérifie sur la frontière une condition de Hölder, d'indice inférieur à 1, l'autre fonction vérifie alors une condition du même type.

En utilisant les raisonnements de Priwaloff nous allons montrer que $\mathcal{J}[g(x)]$ appartient à H_α , où α est inférieur à 1, lorsque $g(x)$ est un élément de cet espace.

Nous montrerons, de plus, que l'on peut calculer la constante relative à $\mathcal{J}[g(x)]$ de la condition (5.18) en fonction de celle relative à $g(x)$.

Démonstration. — Posons

$$(5.22) \quad \delta(x, \Delta) = \mathcal{J}[g(x + \Delta)] - \mathcal{J}[g(x)]$$

et décomposons l'ensemble d'intégration en deux ensembles

$$e_1 = [x - 2|\Delta|, x + 2|\Delta|], \quad e_2 = [-\infty, x - 2|\Delta|] + [x + 2|\Delta|, +\infty].$$

Sur e_1 , $|x - u|$ et $|x + \Delta - u|$ sont inférieurs à $3|\Delta|$. La fonction $g(x)$ vérifiant la condition

$$(5.23) \quad |g(x) - g(x')| \leq C|x - x'|^\alpha,$$

l'intégration sur e_1 donne pour $|\delta(x, \Delta)|$ une contribution inférieure à

$$2C \frac{1}{2\pi} \int_{-3|\Delta|}^{+3|\Delta|} \frac{|u|^\alpha}{\left| \operatorname{sh} \frac{u}{2} \right|} du,$$

⁽³⁸⁾ Bull. Soc. Math. Fr., t. 44, 1916, p. 100-103.

ce qui est majoré par le nombre

$$(5.24) \quad \frac{4 \cdot 3^\alpha}{\alpha \pi} C |\Delta|^\alpha.$$

Pour intégrer sur e_2 nous écrivons

$$(5.25) \quad \begin{aligned} & \frac{g(u) - g(x + \Delta)}{\operatorname{sh} \frac{u - x - \Delta}{2}} - \frac{g(u) - g(x)}{\operatorname{sh} \frac{u - x}{2}} \\ &= [g(u) - g(x + \Delta)] \left\{ \frac{1}{\operatorname{sh} \frac{u - x - \Delta}{2}} - \frac{1}{\operatorname{sh} \frac{u - x}{2}} \right\} \\ & \quad + \frac{g(x + \Delta) - g(x)}{\operatorname{sh} \frac{u - x}{2}}. \end{aligned}$$

L'intégrale du dernier terme du second membre de (5.25) est nulle sur e_2 .

On vérifie d'autre part que

$$\left| \left(\frac{1}{\operatorname{sh} x} - \frac{1}{\operatorname{sh} y} \right) : \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right) \right| \leq \frac{3\sqrt{3}}{4},$$

d'où il suit l'inégalité

$$\begin{aligned} & |g(u) - g(x + \Delta)| \left| \frac{1}{\operatorname{sh} \frac{u - x - \Delta}{2}} - \frac{1}{\operatorname{sh} \frac{u - x}{2}} \right| \\ & \leq \frac{3\sqrt{3}}{4} |g(u) - g(x + \Delta)| \frac{2|\Delta|}{|(u - x)(u - x - \Delta)|} \end{aligned}$$

et compte tenu de la condition (5.23) vérifiée par $g(x)$, ce dernier terme est inférieur à

$$\frac{3\sqrt{3}}{2} C \frac{|\Delta| |u - x - \Delta|^\alpha}{|u - x| |u - x - \Delta|}$$

ou à

$$\frac{3\sqrt{3}}{2} C \frac{|\Delta|}{\left| 1 - \frac{|\Delta|}{|x - u|} \right|^{1-\alpha} |u - x|^{2-\alpha}}.$$

Sur e_2 , où $|u - x| \geq 2|\Delta|$, cette dernière expression est inférieure à

$$\frac{3\sqrt{3}}{2^\alpha} C \frac{|\Delta|}{|u - x|^{2-\alpha}}.$$

Il résulte de (5.25) et des calculs qui précèdent que l'intégration sur e_2 donne pour $|\delta(x, \Delta)|$ une contribution inférieure à

$$(5.26) \quad \frac{3\sqrt{3}}{2^z} C |\Delta| \frac{2}{2\pi} \int_{2|\Delta|}^{+\infty} \frac{d\rho}{\rho^{2-z}} = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi(1-\alpha)} C |\Delta|^\alpha.$$

La quantité $|\delta(x, \Delta)|$ est alors majorée par la somme des deux quantités (5.24) et (5.26)

$$(5.27) \quad |\delta(x, \Delta)| \leq \left\{ \frac{2 \cdot 3^z}{\alpha\pi} + \frac{3\sqrt{3}}{2\pi(1-\alpha)} \right\} C |\Delta|^\alpha.$$

Cette dernière formule établit le résultat annoncé.

En rapprochant ce résultat de celui qui est exprimé par la formule (5.21) on a la propriété suivante, que nous utiliserons dans la suite des raisonnements :

Si $g(x)$ appartient à H_α , $\mathcal{J}[g(x)]$ est aussi un élément de cet espace et

$$(5.28) \quad \|\mathcal{J}[g(x)]\|_\alpha \leq A_\alpha \|g(x)\|_\alpha,$$

avec

$$(5.29) \quad A_\alpha = \pi + \frac{2 \cdot 3^z}{\alpha\pi} + \frac{2\sqrt{3}}{2\pi(1-\alpha)}.$$

Dérivée de $\mathcal{J}[g(x)]$. — Si maintenant $g(x)$ admet une dérivée $g'(x)$, qui appartient à H_α , $\mathcal{J}[g(x)]$ est dérivable et

$$(5.30) \quad \frac{d}{dx} \mathcal{J}[g(x)] = \mathcal{J}[g'(x)].$$

On peut en effet écrire

$$\mathcal{J}[g(x)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(x+u) - g(x)}{\operatorname{sh} \frac{u}{2}} du$$

et les hypothèses faites sur $g(x)$ et $g'(x)$ permettent de dériver sous le signe somme.

24. EXISTENCE DES DÉRIVÉES SUCCESSIVES DE $f(x)$ ET $g(x)$. — D'après (5.15) et (5.17) $g(x)$ est bornée et admet une dérivée bornée avec

$$|g(x)| \leq \lambda R, \quad |g'(x)| \leq \lambda R.$$

Il suit de cela que $g(x)$ est un élément de H_x et

$$\|g(x)\|_x \leq 3\lambda R.$$

En vertu d'un résultat du paragraphe précédent, $\mathcal{J}[g(x)]$ appartient alors à H_x et

$$\|\mathcal{J}[g(x)]\|_x \leq 3A_x\lambda R.$$

La fonction $f(x)$ qui est donnée par

$$(5.31) \quad f(x) = \mathcal{J}[g(x)] + I(x)$$

est donc aussi un élément de H_x , et compte tenu de (5.20)

$$\|f(x)\|_x \leq 3A_x\lambda R + 3\lambda R.$$

Enfin $\xi(x)$ appartient à H_x avec

$$\|\xi(x)\|_x \leq 3\lambda R.$$

Choisissons la valeur de la constante numérique λ égale à

$$(5.32) \quad \lambda = \frac{1}{6(1+A_x)}.$$

Il résultera alors des inégalités précédentes les majorations suivantes :

$$(5.33) \quad \|g(x)\|_x \leq \frac{R}{2}, \quad \|f(x)\|_x \leq \frac{R}{2}, \quad \|\xi(x)\|_x \leq \frac{R}{2}.$$

Supposons maintenant que $f(x)$ et $g(x)$ admettent des dérivées jusqu'à l'ordre n qui soient des éléments de H_x . Les hypothèses faites sur la fonction $\Phi(f, g, \xi)$ et les propriétés de $\xi(x)$, entraînent que $\Phi[f(x), g(x), \xi(x)]$ est une fonction de x qui admet une dérivée d'ordre n .

De plus, cette dérivée d'ordre n se présente comme un polynome par rapport aux dérivées $f^{(i)}(x)$, $g^{(i)}(x)$, $\xi^{(i)}(x)$ ($1 \leq i \leq n$), et les coefficients de ce polynome sont des fonctions analytiques des arguments $f(x)$, $g(x)$, $\xi(x)$, qui convergent absolument pour $|f(x)| \leq R$, $|g(x)| \leq R$, $|\xi(x)| \leq R$.

D'après un résultat du paragraphe précédent, et eu égard aux

conditions (5.33), ces coefficients sont alors des éléments de H_α , et par suite $\frac{d^n}{dx^n} \Phi[f(x), g(x), \xi(x)]$ est aussi un élément de cet espace.

La fonction $g(x)$, qui vérifie (5.10), est donc dérivable jusqu'à l'ordre $n + 1$, et la dérivée $g^{(n+1)}(x)$ qui est donnée par

$$(5.34) \quad g^{(n+1)}(x) = \frac{d^n}{dx^n} \Phi[f(x), g(x), \xi(x)]$$

est un élément de H_α .

En vertu d'une propriété indiquée au paragraphe 25, cela entraîne que $\mathcal{J}[g(x)]$ admet une dérivée d'ordre $n + 1$, donnée par la formule

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} \mathcal{J}[g(x)] = \mathcal{J}[g^{(n+1)}(x)]$$

et qui appartient à H_α .

La relation (5.31) montre ensuite que $f^{(n+1)}(x)$ existe et que c'est un élément de H_α . On a d'ailleurs

$$(5.35) \quad f^{(n+1)}(x) = \mathcal{J}[g^{(n+1)}(x)] + I^{(n+1)}(x).$$

Les hypothèses ayant servi au raisonnement qui précède étant satisfaites lorsque n est égal à zéro, on conclut que $f(x)$ et $g(x)$ ont des dérivées de tous les ordres, qui appartiennent à H_α , et qui sont données par récurrence au moyen des formules (5.34) et (5.35).

Nous allons maintenant construire des majorantes des grandeurs $\|f^{(n)}(x)\|_\alpha$, $\|g^{(n)}(x)\|_\alpha$.

25. MAJORATION DES DÉRIVÉES SUCCESSIVES DE $f(x)$ ET $g(x)$. CES FONCTIONS SONT ANALYTIQUES. — La dérivée $f^{(n+1)}(x)$ vérifie la relation (5.35), et il résulte alors des formules (5.20), (5.28) et (5.32) que l'on a

$$(5.36) \quad \|f^{(n+1)}(x)\|_\alpha \leq A_\alpha \|g^{(n+1)}(x)\|_\alpha + \frac{R}{2(1 + A_\alpha)} (n + 2)!$$

Nous poserons

$$(5.37) \quad \begin{cases} \mu = \text{plus grande des quantités } \|f(x)\|_\alpha, \|g(x)\|_\alpha, \|\xi(x)\|_\alpha. \\ \mu_n = \text{» } \|f^{(n)}(x)\|_\alpha, \|g^{(n)}(x)\|_\alpha, \|\xi^{(n)}(x)\|_\alpha. \end{cases}$$

Le nombre A_α est supérieur à 1 et $\|\xi^{(n)}(x)\|_\alpha$ satisfait à l'inégalité (5.19); d'autre part $g^{(n+1)}(x)$ vérifie (5.34). Compte tenu de

cela et de (5.36) on a l'inégalité

$$(5.38) \quad \mu_{n+1} \leq A_x \left\| \frac{d^n}{dx^n} \Phi[f(x), g(x), \xi(x)] \right\|_x + \frac{R}{2(1+A_x)} (n+2)!$$

qui va nous permettre de calculer par récurrence des majorantes des nombres μ_n .

Introduisons la variable indépendante y , et désignons par $S[y]$ la série entière à coefficients positifs, déduite de la série obtenue en faisant $f=g=\xi=y$ dans le développement de $\Phi(f, g, \xi)$ par rapport à ses arguments. Il résulte des propriétés de $\Phi(f, g, \xi)$ que $S[y]$ converge absolument pour $y \leq R$.

Envisageons alors l'expression

$$(5.39) \quad \frac{d^n}{dx^n} S[y(x)]$$

écrite en considérant $S[y(x)]$ comme fonction d'une fonction indéterminée $y(x)$, supposée dérivable jusqu'à l'ordre n .

Si dans l'expression (5.39) nous remplaçons respectivement $y(x)$ par le nombre $\frac{R}{2}$, qui d'après (5.33) majore μ , et $y'(x), \dots, y^{(n)}(x)$, par des majorantes des nombres μ_1, \dots, μ_n , nous obtenons, en vertu d'un résultat du paragraphe 25, une majorante de la grandeur

$$\left\| \frac{d^n}{dx^n} \Phi[f(x), g(x), \xi(x)] \right\|_x.$$

En rapprochant ceci de la relation (5.38) on voit que les nombres positifs $H_n (1 \leq n \leq +\infty)$, qui sont définis par la formule de récurrence

$$(5.40) \quad \left\{ \begin{array}{l} H_1 = A_x S\left[\frac{R}{2}\right] + \frac{R}{2(1+A_x)} \times 2, \\ H_{n+1} = A_x \left[\frac{d^n}{dx^n} S[y(x)] \right]_{y(x)=\frac{R}{2}, y^{(i)}(x)=\mu_i} + \frac{R}{2(1+A_x)} (n+2)! \end{array} \right. \quad (1 \leq i \leq n)$$

majorent les μ_n , et par suite aussi les grandeurs $\text{Max}|f^{(n)}(x)|$, $\text{Max}|g^{(n)}(x)|$.

Si donc la série de terme général

$$(5.41) \quad \frac{H_n}{n!} x^n$$

a un rayon de convergence non nul, les fonctions $f(x)$ et $g(x)$ seront analytiques pour toute valeur de x , et elles auront un rayon de convergence uniformément minoré par celui de cette série.

Étudions la convergence de la série (5.41). Posons

$$(5.42) \quad h(x) = \frac{R}{2(1+A_x)} \left[2 + \sum_1 (n+2)! \frac{x^n}{n!} \right] = \frac{R}{1+A_x} \frac{1}{(1-x)}$$

et considérons l'équation différentielle

$$(5.43) \quad \frac{dy}{dx} = A_x S[y(x)] + h(x).$$

Le second membre de cette équation est analytique en x et y au voisinage de $x=0$, $y = \frac{R}{2}$. Il existe donc une solution, que nous appelons $y_0(x)$, qui est analytique pour x assez petit, et qui pour $x=0$ prend la valeur $y_0(0) = \frac{R}{2}$. On va montrer que $y_0(x)$ se développe suivant la série (5.41).

Soit

$$(5.44) \quad y_0(x) = \frac{R}{2} + \frac{B_1}{1} x + \dots + \frac{B_n}{n!} x^n + \dots$$

le développement de $y_0(x)$.

Il résulte des propriétés des séries $S[y]$ et $y_0(x)$ que $S[y_0(x)]$ est développable en une série de x , pour x voisin de zéro.

Ce développement peut s'écrire

$$S[y_0(x)] = S[y_0(0)] + \dots + \frac{x^n}{n!} \left[\frac{d^n}{dx^n} S[y_0(x)] \right]_{y(x)=y_0(0), y^{(i)}(x)=y_0^{(i)}(0)} + \dots$$

(1 ≤ i ≤ n)

et compte tenu de (5.44)

$$(5.45) \quad S[y(x)] = S\left[\frac{R}{2}\right] + \dots + \frac{x^n}{n!} \left[\frac{d^n}{dx^n} S[y(x)] \right]_{y(x)=\frac{R}{2}, y^{(i)}(x)=B_i} + \dots$$

(1 ≤ i ≤ n)

Le développement de $y'_0(x)$ est d'autre part

$$(5.46) \quad y'_0(x) = B_1 + \dots + B_{n+1} \frac{x^n}{n!} + \dots$$

et celui de $h(x)$ est donné par (5.42).

Portons les développements (5.42), (5.45) et (5.46) dans l'équation (5.43) que vérifie $y_0(x)$. Par identification des deux membres, on obtient la relation de récurrence suivante qui détermine les coefficients

$$(5.47) \quad \left\{ \begin{array}{l} B_1 = A_x S\left[\frac{R}{2}\right] + \frac{R}{2(1+A_x)} \times 2, \\ B_{n+1} = A_x \left[\frac{d^n}{dx^n} S[y(x)] \right]_{y(x)=\frac{R}{2}, y^{(i)}(x)=B_i} + \frac{R}{2(1+A_x)} (n+2)! \end{array} \right. \quad (1 \leq i \leq n)$$

On voit que cette formule de récurrence est identique à la formule (5.40) qui définit les nombres H_n . Il s'ensuit que

$$B_n = H_n \quad (1 \leq n \leq +\infty),$$

et la série $y_0(x)$, qui a un rayon de convergence non nul, est donc majorante pour les développements tayloriens de $f(x)$ et $g(x)$ autour de toute valeur de x .

On en conclut que $f(x)$ et $g(x)$ sont analytiques pour tout x , et elles ont un rayon de convergence qui est uniformément minoré par celui de $y_0(x)$ pour x . La méthode des majorantes permet enfin de calculer une minorante r de dernier rayon de convergence; on trouve

$$2r = 1 - \exp \left\{ - \frac{R}{2 \left[A_x S[R] + \frac{8R}{(1+A_x)} \right]} \right\}.$$

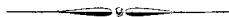


TABLE DES MATIÈRES.

INTRODUCTION.

CHAPITRE I.

SCHÉMA DU MOUVEMENT. PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES.

| | Pages. |
|--|--------|
| 1. Mouvements étudiés. Notations. Potentiel complexe..... | 6 |
| 2. Fonction $\omega(\zeta)$ | 8 |
| 3. Construction d'un module de continuité pour $l(\varphi)$ | 10 |
| 4. Équations générales. Existence d'une dérivée bornée pour $l(\varphi)$ | 17 |
| 5. Limitations de la vitesse sur le profil (S)..... | 21 |
| 6. Majoration de l'angle $f(\varphi)$ | 24 |

CHAPITRE II.

CAS OU LE MOUVEMENT PRÉSENTE UNE PÉRIODICITÉ GÉOMÉTRIQUE.

THÉORÈME D'EXISTENCE.

| | |
|--|----|
| 7. Énoncé des problèmes. Problème (P)..... | 25 |
| 8. Un problème mixte harmonique dans une demi-couronne circulaire... | 30 |
| 9. Mise en équations du problème (P). Transformation V..... | 34 |
| 10. Complète continuité de V..... | 39 |
| 11. Limitation des inconnues..... | 42 |
| 12. Existence d'une solution du problème (P)..... | 46 |

CHAPITRE III.

CAS OU LE MOUVEMENT PRÉSENTE UNE PÉRIODICITÉ GÉOMÉTRIQUE.

THÉORÈME D'UNICITÉ.

| | |
|---|----|
| 13. Préliminaires..... | 48 |
| 14. Différentiation de la transformation V..... | 49 |
| 15. Sur la résolution de l'équation $\delta x = W(x, \delta x)$ au moyen d'un problème aux limites..... | 61 |
| 16. Cas où le problème mixte posé pour β n'admet pas d'autre solution que zéro..... | 70 |
| 17. Un théorème d'unicité pour le problème (P)..... | 77 |

CHAPITRE IV.

CAS DU MOUVEMENT UNIFORME A L'INFINI.

| | Pages. |
|--|--------|
| 18. Mouvements étudiés. Problème (P_1) . Propriétés des solutions..... | 79 |
| 19. Mise en équations du problème (P_1) . Système $\Sigma_{c, \Phi}$ | 83 |
| 20. Équation fonctionnelle du problème. Transformation V_1 | 91 |
| 21. Théorème d'existence..... | 98 |

CHAPITRE V.

SUR LA NATURE ANALYTIQUE DE LA LIGNE LIBRE.

| | |
|---|-----|
| 22. Énoncé d'un lemme sur le prolongement analytique..... | 100 |
| 23. Sur certaines propriétés à la frontière des fonctions harmoniques et conjuguées dans une bande rectiligne..... | 105 |
| 24. Existence des dérivées successives de $f(x)$ et $g(x)$ | 110 |
| 25. Majoration des dérivées successives de $f(x)$ et $g(x)$. Ces fonctions sont analytiques..... | 112 |



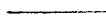
DEUXIÈME THÈSE



PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ



Travaux récents sur la théorie linéarisée de la houle



Grenoble, le 9 février 1955.

LE PRÉSIDENT DE LA THÈSE,

J. PÉRÈS.

Vu et approuvé :

Grenoble, le 9 février 1955.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

L. MORET.

Vu et permis d'imprimer :

Grenoble, le 10 février 1955.

LE RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE GRENOBLE,

H. PARISELLE.



145787 Paris. — Imp. GAUTHIER-VILLARS, 55, quai des Grands-Augustins.

Dépôt légal *imprimeur*, 1955, n° 1071.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS
145787 Quai des Grands-Augustins, 55.
