



HAL
open science

Mise en équations et résolution des réseaux électriques en régime transitoire par la méthode tensorielle

Arnold Kaufmann

► **To cite this version:**

Arnold Kaufmann. Mise en équations et résolution des réseaux électriques en régime transitoire par la méthode tensorielle. Modélisation et simulation. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1954. Français. NNT: . tel-00277449

HAL Id: tel-00277449

<https://theses.hal.science/tel-00277449>

Submitted on 6 May 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ

PAR

LE COMMANDANT A. KAUFMANN

INGÉNIEUR DIPLOMÉ DE L'UNIVERSITÉ DE GRENOBLE
DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

— 3 —

1^{re} THÈSE

MISE EN ÉQUATIONS ET RÉOLUTION DES RÉSEAUX ÉLECTRIQUES
EN RÉGIME TRANSITOIRE PAR LA MÉTHODE TENSORIELLE

MEDIA

2^e THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

ANALOGIES DANS LES SYSTÈMES LINÉAIRES

Soutenues le 18 janvier 1954 devant la Commission d'Examen

— 3 —

Jury	{	MM. L. NEEL	}	<i>Président.</i>
		F. ESCLANGON		<i>Examineurs.</i>
		J. KUNTZMANN		

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ

PAR

LE COMMANDANT A. KAUFMANN

INGÉNIEUR DIPLOMÉ DE L'UNIVERSITÉ DE GRENOBLE
DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

— 3 —

1^{re} THÈSE

MISE EN ÉQUATIONS ET RÉOLUTION DES RÉSEAUX ÉLECTRIQUES
EN RÉGIME TRANSITOIRE PAR LA MÉTHODE TENSORIELLE

MEDIA

2^e THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

ANALOGIES DANS LES SYSTÈMES LINÉAIRES

Soutenues le 18 janvier 1954 devant la Commission d'Examen

— 3 —

Jury	{	MM. L. NEEL	}	<i>Président.</i>
		F. ESCLANGON		<i>Examineurs.</i>
		J. KUNTZMANN		

*Au Professeur Kuntzmann
avec la profonde reconnaissance
de son élève -*

6/aw7

MISE EN ÉQUATIONS
ET RÉOLUTION DES RÉSEAUX ÉLECTRIQUES
EN RÉGIME TRANSITOIRE
PAR LA MÉTHODE TENSORIELLE

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

Doyens honoraires : MM. GAU, FORTRAT

Doyen : M. MORET, Correspondant de l'Institut

Professeurs honoraires { MM. FAVARD, Mathématiques, Professeur à la Sorbonne
FORTIER, Mécanique des Fluides, Professeur à la Sorbonne
GIGNOUX, Géologie, Membre de l'Institut
BRELOT, Mathématiques, Professeur à la Sorbonne
DE LITARDIÈRE, Botanique, Correspondant de l'Institut

PROFESSEURS :

FORTRAT.....	Physique générale, Correspondant de l'Institut.	BENOIT.....	Radio-électricité.
MORET.....	Géologie et Minéralogie, Correspondant de l'Institut.	CHÈNE.....	Chimie papetière.
ANDRIEUX.....	Chimie, Correspondant de l'Institut.	NOBÉCOURT....	Micrographie papetière.
NÉEL.....	Physique expérimentale, Membre de l'Institut.	WEIL.....	Physique.
PARDE.....	Hydrologie fluviale.	FÉLICI.....	Physique.
ESCLANGON....	Physique industrielle.	KUNTZMANN....	Analyse appliquée.
DORIER.....	Zoologie.	DODERO.....	Électrochimie et Électrometallurgie.
HEILMANN.....	Chimie.	CHABAUTY....	Calcul différentiel et intégral.
KRAVTCHENKO..	Mécanique rationnelle.	BARBIER.....	Géologie appliquée.
		SANTON.....	Mécanique des Fluides.
		OZENDA.....	Botanique.

PROFESSEURS SANS CHAIRE :

FALLOT.....	Physique.	SILBER.....	Mécanique des Fluides.
REULOS.....	Physique.	GALVANL.....	Mathématiques.
TRAYNARD.....	Chimie.		

Maître de Conférences honoraire : M. OFFNER, Botanique

MAITRES DE CONFÉRENCES :

REEB.....	Mathématiques.	AYANT.....	Physique.
SOUTIF.....	Physique.	MICHEL.....	Géologie.
CRAYA.....	Mécanique, Physique.	GALLISSOT....	Mécanique.
LUTZ (M ^{lle})....	Mathématiques.		

Secrétaire principal M. GRENIER

Secrétaire M. BICHET

A mes Maîtres de l'Université de Grenoble,

je leur dois tant.

A Yvette, ma femme.

TABLE DES MATIÈRES

	PAGES
INTRODUCTION.....	1
CHAPITRE PREMIER	
Considérations générales abstraites	5
1. — Preamble	5
2. — Énoncés de définitions et propriétés	5
3. — Démonstration des lois de Kirchhoff	9
4. — Résumé synthétique des propriétés fondamentales	13
CHAPITRE II	
Repères de courants de maille	15
5. — Obtention d'un repère de courants de maille	15
6. — Présence de tenseurs dans les repères de mailles	18
7. — Considérations énergétiques	21
8. — Autre expression mathématique de l'invariant fondamental	22
9. — Mise en place des valeurs initiales	23
10. — Détermination de la matrice de connexion	29
11. — Processus de résolution	32
12. — Réduction par les sous-matrices	33
13. — Exemples	34
CHAPITRE III	
Repères de différences de potentiel entre paires de nœuds	45
14. — Obtention d'un repère de différences de potentiel entre paires de nœuds	45
15. — Présence de tenseurs dans les repères de paires de nœuds	47
16. — Propriétés dualistiques	49
17. — Mise en place des valeurs initiales	49
18. — Détermination de la matrice de connexion	50
19. — Processus de résolution	54
20. — Réduction par les sous-matrices	55
21. — Exemples	56

CHAPITRE IV

	PAGES
Repères complets	64
22. — Équations dans un repère complet construit sur les mailles	64
23. — Présence de tenseurs dans les repères complets	67
24. — Considérations énergétiques	69
25. — Autre expression mathématique de l'invariant fondamental	69
26. — Obtention d'un repère complet construit sur les mailles	79
27. — Mise en place des valeurs initiales	77
28. — Détermination de la matrice de connexion	78
29. — Processus de résolution	78
30. — Exemple	80
31. — Équations dans un repère complet construit sur les paires de nœuds	86
32. — Processus de résolution	90
33. — Tableaux des correspondances dualistiques	91
<i>Annexe I</i>	93
<i>Annexe II</i>	95
<i>Annexe III</i>	97
<i>Annexe IV</i>	98
BIBLIOGRAPHIE	99

INTRODUCTION

Il y a une centaine d'années, KIRCHHOFF et OHM énoncèrent des lois simples et fondamentales qui suffirent pendant longtemps, aux physiciens et ingénieurs, pour poser et résoudre les équations des réseaux électriques linéaires. Les premiers réseaux ne faisaient intervenir que des résistances pures et des piles; on en vint bientôt à insérer des inductances, puis des capacités; d'algébriques, les équations devinrent différentielles. L'introduction par MAXWELL des courants de maille donna de nouvelles facilités et rapprocha la théorie des réseaux des considérations chères, depuis LAGRANGE, aux mécanistes de l'époque. L'emploi du principe de superposition, joint aux notions données par KIRCHHOFF, OHM et MAXWELL, devait suffire longtemps encore pour l'étude des phénomènes permanents, continus ou sinusoïdaux. C'est surtout depuis le développement donné aux applications de l'électronique, que les outils mathématiques jusqu'alors employés, ne semblèrent plus suffisamment commodes. Tout se compliqua encore lorsqu'on se préoccupa de connaître les valeurs instantanées des tensions et courants en régime transitoire. Enfin, la présence d'éléments non symétriques tels que tubes électroniques, gyrateurs, servo-mécanismes, machines tournantes, qui violent le principe de réciprocité de Maxwell, exige un outil mathématique plus général et plus puissant pour mettre en équations les réseaux qui contiennent de tels appareils.

C'est le grand mérite de l'américain Gabriel KRON d'avoir introduit, à la fois, l'analyse tensorielle et le calcul matriciel, comme moyens de mettre en équations et de résoudre commodément les réseaux électriques symétriques ou non, ou leurs analogues formels de la physique. On a reproché à cet éminent ingénieur, de manquer de rigueur; il n'est pas attaquant, à notre avis, sur le terrain qu'il n'a jamais voulu abandonner : celui de l'ingénieur. Mais il ne faut pas voir seulement dans l'emploi des tenseurs, un outil de calcul commode et systématique; il faut reconnaître que l'on est en présence d'un « outil de pensée », d'un merveilleux moyen de classement des entités physiques. L'emploi de ces concepts très généraux n'éloigne pas des considérations purement naturelles chères aux physiciens. On se propose surtout de réaliser une « économie de la pensée »; mieux encore, on se propose de débarrasser le physicien et l'ingénieur, du souci de la mise en équations en la rendant automatique, de telle sorte que l'attention se porte surtout sur l'interprétation des matrices impédance ou admittance qui définissent totalement le réseau linéaire. Cette interprétation est capitale car elle permet de garder le contact avec les phénomènes naturels mêmes, lorsque le malheureux physicien ou ingénieur est accablé par le nombre et l'enchevêtrement des paramètres. Par ailleurs,

quel excellent exercice de pensée que le calcul tensoriel et combien son pouvoir de classification peut améliorer le jugement même dans des domaines autres que ceux de la mathématique et de la physique ! C'est un moyen bien commode pour la pensée humaine que l'emploi de l'analogie; on doit admettre que l'on associe mieux des phénomènes apparemment distincts lorsqu'on sait y définir des tenseurs. Enfin, combien de lois ne sont que des relations, combien de grandeurs ont été mal comprises ou mal enseignées ! Même le physicien le plus ennemi de l'emploi des mathématiques doit reconnaître qu'on ne connaît pas une grandeur ou une loi si l'on ne sait pas comment elle se transforme.

Pragmatiquement les tenseurs et matrices sont commodes; dans l'abstrait comme dans la nature, ils aident fortement au classement des concepts, qu'on nous pardonne donc de les apprécier.

Notre contribution consiste à présenter une justification plus rigoureuse des travaux de KRON et de ses prédécesseurs, mais aussi à montrer comment la théorie tensorielle des réseaux est parfaitement adaptée à l'étude des réseaux dissymétriques, en régime transitoire, dans le cas très général où les conditions initiales ne sont pas toutes nulles. Nous avons été aidé considérablement par les travaux de M. BAYARD. Nous avons d'ailleurs suivi plus volontiers, dans nos démonstrations, la manière de voir de BAYARD plutôt que celle de KRON. Sans enlever la puissance des idées de KRON, nous n'avons pas utilisé ses réseaux primitif et intermédiaire. Nous avons aussi montré comment faire apparaître des invariants qui jouent un rôle primordial. Au lieu des puissances active et réactive dont la qualité d'invariant n'a de sens qu'en régime permanent sinusoïdal, nous avons fait apparaître un invariant opérationnel fondamental.

On verra plus loin que nous avons employé l'écriture usuelle des mathématiciens lorsqu'ils étudient les espaces vectoriels, puis l'écriture indicielle avec indices muets, et enfin l'écriture matricielle. Nous avons voulu cette diversité pour pouvoir, d'une part, rester dans l'abstrait lorsque c'était nécessaire et, d'autre part, passer facilement de l'analytique au calcul. En ce qui concerne l'écriture matricielle les symboles employés sont ceux qu'on rencontre dans plusieurs ouvrages écrits avec M. DENIS-PAPIN. Ces symboles, qui, de prime abord, alourdissent l'écriture, ont la faculté d'éviter une confusion des propriétés des matrices; ainsi, on distinguera, en les écrivant dans les relations où elles se rencontrent, les matrices carrées, rectangles ou colonnes. On verra aussi que nous préférons la transformation de Carson-Laplace à celle de Laplace, malgré les recommandations de la Société des Électriciens. On se rendra compte qu'il est bien commode, en ce qui concerne les réseaux, d'écrire que la transformée d'une constante est cette constante.

Les exemples que nous avons choisis pour illustrer nos explications sont simplement destinés à lever l'excès d'abstraction qu'introduit fatalement toute théorie assez générale. Ces exemples concernent exclusivement des réseaux électriques mais on en obtiendrait facilement dans tous les analogues formels.

On trouvera en annexe la bibliographie importante que nous avons consultée.

Nous serions heureux que les physiciens ne nous reprochent pas un point de vue trop mathématique et que les mathématiciens nous pardonnent de ne pas oublier la

matière et la nature. Les nœuds et les branches de nos réseaux serviront peut-être à une conciliation des points de vue.

Sans les conseils et les encouragements de :

MM. KUNTZMANN, Professeur à la Faculté des Sciences de Grenoble;

REEB, Maître de Conférences en cette Faculté;

GALISSOT, Chargé de Cours en cette Faculté,

notre travail n'aurait pu être mené à bien; qu'ils trouvent ici nos remerciements les plus vifs.

CHAPITRE PREMIER

CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES ABSTRAITES

1. — PRÉAMBULE

Pour donner aux propositions et aux démonstrations toute leur généralité nous les énoncerons dans un domaine abstrait, celui des espaces vectoriels. La simplicité des démonstrations et la clarté des conclusions, que l'on obtient grâce à l'analyse linéaire, nous a incité à l'employer. C'est d'ailleurs le prologue normal à l'étude des tenseurs que nous rencontrerons.

Que le physicien et l'ingénieur nous pardonnent les entités abstraites que nous mettrons en avant, elles ne nous empêcheront pas, quand il le faudra, de reprendre contact avec la nature, mais nous prétendons que les démonstrations seront plus faciles dans l'abstrait. D'ailleurs, puisque la théorie que nous développerons doit être valable, tout aussi bien, pour des réseaux réels que pour leurs analogues formels, il est peut-être bon, dès le départ, de rechercher dans de purs concepts une généralisation dont nous pourrions tirer grand profit.

2. — ÉNONCÉS DE DÉFINITIONS ET PROPRIÉTÉS

Définition I.

Nous appelons «réseau» une figure qui comprend des branches et des nœuds. Chaque branche a exactement une origine et une extrémité qui, chacune, est un nœud. Nous dirons que ce réseau possède :

	B	branches	b^1, b^2, \dots, b^B
et	N	nœuds	$n_1, n_2, \dots, n_N,$

ce qui caractérise la façon de désigner les branches et les nœuds.

Au couple (b^i, n_j) , on associe l'entier $+1$, -1 ou zéro, selon que n_j est l'extrémité de b^i , l'origine de b^i , ou qu'aucune de ces éventualités n'a lieu ⁽¹⁾.

(1) Donc, si n_j est simultanément, origine ou extrémité, on pose $(b^i, n_j) = 0$.

La matrice des nombres (b^i, n_j) , soit :

$$(2.1) \quad \Delta_j \quad \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, B, \\ j = 1, 2, \dots, N, \end{array}$$

s'appellera « matrice de structure ».

Nous donnons, avec la *figure* (2.1), l'exemple d'un réseau concret. Le réseau de cette figure n'est pas « applicable », mais ceci n'a aucune importance (1).

Dans nos considérations, la notion d'applicabilité ne joue aucun rôle et l'on introduira aucune restriction à ce sujet.

La matrice de structure de ce réseau sera facilement établie. Nous avons numéroté les branches avec des lettres et les nœuds avec des chiffres (tableau ci-contre).

Définition II.

On désigne respectivement par \mathcal{B} et \mathcal{N} les espaces vectoriels (sur un corps K) ayant pour bases respectives $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_B$ et $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \dots, \vec{n}_N$. On désigne par \mathcal{B}^* et \mathcal{N}^* les duals de \mathcal{B} et \mathcal{N} ; les bases conjuguées seront désignées par $\vec{b}^1, \vec{b}^2, \dots, \vec{b}^B$ et $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \dots, \vec{n}_N$.

Définition III.

A la matrice Δ_j on associe la transformation linéaire $\delta : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{N}$ définie par la matrice Δ_j , relativement aux bases $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_B$ et $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \dots, \vec{n}_N$.

A δ correspond l'application transposée $\delta^* : \mathcal{N}^* \rightarrow \mathcal{B}^*$. Rappelons que δ^* , par rapport aux bases $\vec{b}^1, \vec{b}^2, \dots, \vec{b}^B$, est exprimée par la transposée de la matrice Δ_j .

Si l'on représente le produit intérieur ou scalaire de deux vecteurs \vec{x} et \vec{y} par le symbole $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$, où \vec{y} appartient à un espace dual de celui de \vec{x} , nous aurons, par définition, en ce qui concerne tout vecteur $\vec{\beta}$ de \mathcal{B} et tout vecteur \vec{v} de \mathcal{N}^* :

$$(2.2) \quad \langle \delta \vec{\beta}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{\beta}, \delta^* \vec{v} \rangle.$$

Définition IV.

On pose :

$$(2.3) \quad \delta \mathcal{B} = \mathcal{T} \quad \text{et} \quad \text{dimension de } \mathcal{T} = P;$$

$$(2.4) \quad \delta^{-1}(0) = \mathcal{M} \quad \text{et} \quad \text{dimension de } \mathcal{M} = M;$$

$$(2.5) \quad \mathcal{N}/\mathcal{T} = \mathcal{S} \quad \text{et} \quad \text{dimension de } \mathcal{S} = S.$$

(1) Par « applicable » il faut entendre ici « applicable sur un plan », de telle sorte que les branches ne soient jamais sécantes entre elles.

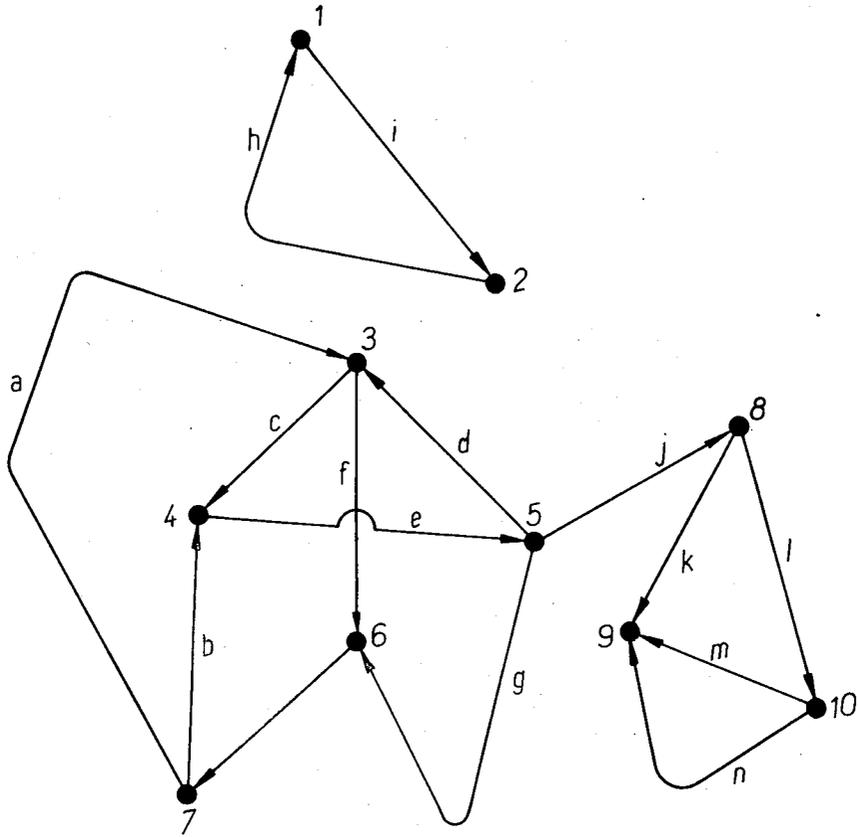


Fig. 2.1

(La flèche désigne l'extrémité de la branche)

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>g</i>	<i>h</i>	<i>i</i>	<i>j</i>	<i>k</i>	<i>l</i>	<i>m</i>	<i>n</i>
1	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	-1	1	0	0	0	0	0
3	1	0	-1	1	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	1	1	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	-1	1	0	-1	0	0	-1	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0
7	-1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	-1	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	-1

De ces définitions, il résulte les deux relations topologiques fondamentales :

$$(2.6) \quad P = N - S;$$

$$(2.7) \quad M = B - P.$$

THÉORÈME A.

Si :

$$(2.8) \quad \langle \vec{\beta}, \vec{v} \rangle = 0,$$

pour $\vec{v} \in \mathcal{B}^*$ fixe et $\vec{\beta}$ quelconque dans \mathcal{M} , alors il existe v' de \mathcal{N}^* tel que :

$$(2.9) \quad \vec{v} = \delta^* \vec{v}'.$$

Réciproquement, on a :

$$(2.10) \quad \langle \vec{\beta}, \delta^* \vec{v}' \rangle = 0,$$

quel que soit $\vec{\beta} \in \mathcal{M}$ et $\vec{v}' \in \mathcal{N}^*$.

Démonstration.

La réciproque est évidente ; en effet :

$$(2.11) \quad \langle \vec{\beta}, \delta^* \vec{v}' \rangle = \langle \delta \vec{\beta}, \vec{v}' \rangle = 0,$$

apparaît immédiatement en utilisant (2.2).

Avant de démontrer la partie directe, on remarquera que \vec{v}' n'est certainement pas unique. Démontrons maintenant la partie directe.

Compte tenu de la réciproque déjà démontrée, il suffit de démontrer que :

$$(2.12) \quad \dim (\text{Annulateur de } \mathcal{M}) = \dim \delta^* \mathcal{N}^*,$$

où « dim » veut dire « dimension de », et :

$$(2.13) \quad \text{Annulateur de } \mathcal{M} = \text{sous-espace de } \mathcal{B}^* \text{ qui s'annule sur } \mathcal{M}.$$

Or :

$$(2.14) \quad \dim (\text{Annulateur de } \mathcal{M}) = B - M;$$

d'autre part :

$$(2.15) \quad \dim \delta^* \mathcal{N}^* = \dim \delta \mathcal{B}$$

(ces deux nombres sont, en effet, égaux au rang de la matrice de structure). Mais :

$$(2.16) \quad \dim \delta \mathcal{B} = P = B - M \quad [\text{d'après (2.7)}].$$

Définition V.

On appelle « sous-réseau » d'un réseau donné, une sous-collection de branches et de nœuds de ce dernier réseau, telle que cette sous-collection contienne avec chaque branche les extrémités de cette branche, et avec chaque nœud, toutes les branches du réseau ayant ce nœud comme origine ou extrémité.

Ainsi, sur le réseau concret de la *figure* (2.1), les branches h et i forment un sous-réseau de la collection.

Définition VI [sous-réseau propre (minimum)].

Un sous-réseau propre est un sous-réseau ne contenant aucun sous-réseau non vide, plus petit.

Le sous-réseau formé avec les branches h et i sur la *figure* (2.1) est un sous-réseau propre.

THÉORÈME B.

Le nombre de sous-réseaux propres est égal à S .

Démonstration.

Il suffit de démontrer le théorème dans le cas où le nombre de sous-réseaux est égal à 1. Soit n_i un nœud quelconque. Visiblement \vec{n}^i n'est pas dans \mathcal{R} (car $\vec{n}^i \alpha_j \in \mathcal{R}$ implique $\varepsilon \alpha_j = 0$). Donc, $S \geq 1$. Il reste à démontrer que $S \leq 1$. Par conséquent il suffit de démontrer que pour tout couple $(n_i, n_j) : \vec{n}^i - \vec{n}^j \in \mathcal{R}$. Mais on peut trouver une suite de branches b^{i_1}, \dots, b^{i_p} telles que :

- 1° n_i soit un nœud de b^{i_1} ;
- 2° n_j soit un nœud de b^{i_p} ;
- 3° b^{i_k} et $b^{i_{k+1}}$ aient un nœud n_{j_k} commun ($k \leq p - 1$).

On pose $\varepsilon^{ik} = +1$ ou -1 , selon que n_{j_k} est extrémité ou origine de b^{i_k} ($k \leq p - 1$), et $\varepsilon^{ip} = +1$ ou -1 selon que n_j est extrémité ou origine de b^{i_p} . D'où :

$$(2.17) \quad \delta \sum \varepsilon^{ik} \vec{b}_{i_k} = \vec{n}^i - \vec{n}^j \quad \text{C.Q.F.D.}$$

3. — DÉMONSTRATION DES LOIS DE KIRCHHOFF

Un courant \vec{i} dans le réseau est défini par les intensités \bar{i}^a attachées aux branches b^a . Il est naturel d'attacher au courant défini par les \bar{i}^a , le vecteur de \mathcal{B} ayant pour composante \bar{i}^a dans le repère $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n$.

Nous allons démontrer que :

$$(3.1) \quad \delta \vec{i} = 0 \quad \text{où} \quad \vec{i} \in \mathcal{M}.$$

En effet, prenons un nœud n_c ; l'intensité amenée dans ce nœud par la branche b^a est égale à :

$$(3.2) \quad (\vec{b}_a, \vec{n}^c) \bar{i}^a \quad (\text{sans sommation}),$$

d'où, pour toutes les branches qui arrivent en ce-nœud :

$$(3.3) \quad (\vec{b}_a, \vec{n}^c) \bar{i}^a = \Delta_a^c \bar{i}^a = 0 \quad (\text{avec sommation}) \quad \begin{array}{l} a = 1, 2, \dots, B, \\ c = 1, 2, \dots, N, \end{array}$$

soit :

$$(3.4) \quad \delta \vec{i} = 0.$$

L'équation (3.1) constitue la *première loi de Kirchhoff ou loi des nœuds*. La forme analytique (3.3) en est l'expression usuelle.

Les dénominations suivantes seront adoptées :

\bar{i}^a , courant dans la branche b^a ou « courant de branche » d'indice a . On donnera à \bar{i}^a et b^a le même sens ;

\vec{i} , vecteur des courants dans les branches ou « vecteur courants de branche ».

Formation des différences de potentiel.

Considérons les potentiels v'_q $q = 1, 2, \dots, N$ aux nœuds n_1, n_2, \dots, n_N , nous leur associons le vecteur $\vec{v}' \in \mathcal{U}^*$ de composantes \vec{v}'_q dans le repère $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \dots, \vec{n}_N$; la différence de potentiel entre l'extrémité et l'origine de la branche b^a sera :

$$(3.5) \quad \bar{v}_a = v'_{q_2} - v'_{q_1},$$

en désignant par n_{q_1} l'origine et par n_{q_2} l'extrémité de b^a .

Le vecteur $\vec{v} \in \mathcal{B}^*$, ayant pour composantes \bar{v}_a $a = 1, 2, \dots, B$ dans le repère $\vec{b}^1, \vec{b}^2, \dots, \vec{b}^B$, vérifie :

$$(3.6) \quad \vec{v} = \delta^* \vec{v}'.$$

Les dénominations suivantes seront adoptées :

\bar{v}'_q , potentiel du nœud n^q ;

\bar{v}_a , « différence de potentiel » entre les extrémités de branche b^a ;

\vec{v}' , vecteur des potentiels des nœuds ;

\vec{v} , « vecteur des différences de potentiel » entre les extrémités de branche.

Maintenant, soit un vecteur courant de branche arbitraire \vec{i} et un autre vecteur différence de potentiel \vec{v} entre les extrémités de branche, également arbitraire ; nous allons démontrer une relation fondamentale :

$$(3.7) \quad \langle \vec{i}, \vec{v} \rangle = 0;$$

nous nous en servons un peu plus loin pour démontrer la deuxième loi de Kirchhoff.

La démonstration est immédiate, c'est purement et simplement une conséquence du théorème A [formules (2.8) et (2.9)].

Repère de paires de nœuds.

Prenons dans \mathcal{N} un repère formé de P vecteurs \vec{u}^α $\alpha = 1, 2, \dots, P$ ou $\vec{u}^\alpha \in \mathcal{X}$ et de $N - P$ vecteurs convenablement choisis parmi $\vec{n}^1, \vec{n}^2, \dots, \vec{n}^N$. Prenons aussi dans \mathcal{N}^* le repère \vec{u}_β $\beta = 1, 2, \dots, N$ ou $\vec{u}_\beta \in \mathcal{X}^*$ conjugué du premier. On obtiendra la correspondance :

(3.8) δ donne \rightarrow

	$\vec{u}^1 \ \vec{u}^2 \ \dots \ \vec{u}^P$	S autres vecteurs \vec{n}^α
\vec{b}_1	$[\mathcal{O}]$	$[0]$
\vec{b}_2		
\vdots		
\vdots		
\vec{b}_B		

Ainsi :

(3.9) $\delta \vec{i} = 0$ s'écrira $\mathcal{O}_a^{\bar{a}} \bar{i}^a = 0$ $\alpha = 1, 2, \dots, P,$
 $a = 1, 2, \dots, B.$

Réciproquement, si (3.9) est satisfait, toutes les quantités représentées par les \bar{i}^a sont des courants de branche.

Maintenant, δ^* donne la transposée de $[\mathcal{O}]$:

(3.10) δ^* donne \rightarrow

	$\vec{b}^1 \ \vec{b}^2 \ \dots$	$\dots \ \vec{b}^B$
\vec{u}_1	$[\mathcal{O}]'$	
\vec{u}_2		
\vdots		
\vdots		
\vec{u}_P		
\vec{u}_{P+1}	$[0]$	
\vdots		
\vdots		
\vec{u}_N		

Il en résulte que :

$$(3.11) \quad \vec{v} = \delta^* \vec{v}' \quad \text{s'écrira} \quad \bar{v}_a = \mathcal{O}_a^\beta v_\beta \quad \beta = 1, 2, \dots, P,$$

$$(3.12) \quad \bar{v}_a = \mathcal{O}_a^\beta v_\beta \quad a = 1, 2, \dots, B.$$

Repère de mailles.

Choisissons dans \mathcal{B} un repère formé de M vecteurs $\vec{i}_\alpha \quad \alpha = 1, 2, \dots, M$ ou $\vec{i}_\alpha \in \mathcal{M}$ et de $B - M = P$ vecteurs convenablement choisis parmi les vecteurs $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_B$. Considérons la matrice dont les éléments \mathcal{C}_α^a sont définis par :

$$(3.13) \quad \vec{i}_\alpha = \mathcal{C}_\alpha^a \vec{b}_a \quad \alpha = 1, 2, \dots, M,$$

$$a = 1, 2, \dots, B;$$

on a :

$$(3.14) \quad \bar{i}^a = \mathcal{C}_\alpha^a i^\alpha \quad \alpha = 1, 2, \dots, M,$$

$$a = 1, 2, \dots, B,$$

où i^α est la composante du vecteur courant selon \vec{i}_α et que nous nommerons « composante du courant dans la maille α ».

La relation (3.7) peut s'écrire :

$$(3.15) \quad \bar{v}_a \bar{i}^a = 0 \quad a = 1, 2, \dots, B.$$

Portons (3.14) dans (3.15), il vient :

$$(3.16) \quad \mathcal{C}_\alpha^a \bar{v}_a i^\alpha = 0 \quad a = 1, 2, \dots, B, \quad \alpha = 1, 2, \dots, M,$$

et puisque les i^α sont quelconques et indépendants des différences de potentiel de branche \bar{v}_a :

$$(3.17) \quad \mathcal{C}_\alpha^a \bar{v}_a = 0 \quad a = 1, 2, \dots, B, \quad \alpha = 1, 2, \dots, M.$$

Réciproquement, d'après (2.10), si (3.17) est satisfait, toutes les quantités représentées par les \bar{v}_a peuvent former un système de différences de potentiel de branche.

L'équation (3.17) constitue la deuxième loi de Kirchhoff ou loi des mailles.

Enfin, portons (3.12) dans (3.17), il vient :

$$(3.18) \quad \mathcal{C}_\alpha^a \mathcal{O}_a^\beta v_\beta = 0 \quad \alpha = 1, 2, \dots, M, \quad \beta = 1, 2, \dots, P, \quad a = 1, 2, \dots, B,$$

et puisque les v_β sont non tous nuls :

$$(3.19) \quad \mathcal{C}_\alpha^a \mathcal{O}_a^\beta = 0 \quad \alpha = 1, 2, \dots, M,$$

$$\beta = 1, 2, \dots, P,$$

$$a = 1, 2, \dots, B,$$

relation d'orthogonalité entre les matrices \mathcal{C}_α^a et \mathcal{O}_a^β .

La manière pratique de choisir un repère de paires de nœuds ou un repère de mailles sera donnée plus loin aux paragraphes 10 et 18. Nous utiliserons la notion d'arbre.

4. — RÉSUMÉ SYNTHÉTIQUE DES PROPRIÉTÉS FONDAMENTALES

Nous appellerons « caractère topologique » d'un réseau l'ensemble des cinq nombres entiers positifs :

$$S, B, N, P, M$$

définis ainsi :

S est le nombre de sous-réseaux ;

B est le nombre de branches ;

N est le nombre de nœuds ;

P est le nombre de paires de nœuds linéairement indépendantes ;

M est le nombre de mailles linéairement indépendantes.

A. — Entre les cinq nombres S, B, N, P, M existent les deux relations fondamentales suivantes :

$$(4.1) \quad P = N - S;$$

$$(4.2) \quad M = B + S - N.$$

B. — Si l'on associe à chaque branche un courant orienté $\bar{i}^a \quad a = 1, 2, \dots, B$ et une différence de potentiel orientée $\bar{v}_a \quad a = 1, 2, \dots, B$ entre les deux nœuds qui la limitent, il est possible d'écrire deux groupes d'équations constituant les deux lois de Kirchhoff :

Premier groupe.

En prenant P paires de nœuds linéairement indépendantes auxquelles on associera P différences de potentiel, on peut choisir un système de P équations :

$$(4.3) \quad \mathcal{O}_a^\alpha \bar{i}^a = 0 \quad \alpha = 1, 2, \dots, P, \quad a = 1, 2, \dots, B;$$

ce sont les équations des nœuds de la théorie de Kirchhoff.

Les coefficients \mathcal{O}_a^α sont des nombres et forment une matrice dite « matrice de connexion des paires de nœuds ». Les P différences de potentiel entre paires de nœuds satisferont à la relation :

$$(4.4) \quad \bar{v}_a = \mathcal{O}_a^\alpha v_\alpha \quad \alpha = 1, 2, \dots, P, \quad a = 1, 2, \dots, B;$$

Deuxième groupe.

En prenant M mailles linéairement indépendantes auxquelles on associera M courants, on peut choisir un système de M équations :

$$(4.5) \quad \mathcal{C}_\beta^a \bar{v}_a = 0 \quad \beta = 1, 2, \dots, M, \quad a = 1, 2, \dots, B;$$

ce sont les équations de mailles de la théorie de Kirchhoff.

Les coefficients \mathcal{C}_β^a sont des nombres et forment une matrice dite « matrice de connexion des mailles ». Les M courants de maille satisferont à la relation :

$$(4.6) \quad \bar{i}^a = \mathcal{C}_\beta^a i^\beta \quad a = 1, 2, \dots, B, \quad \beta = 1, 2, \dots, M.$$

Les matrices d'éléments \mathcal{O}_a^α et \mathcal{C}_β^a satisfont à la relation d'orthogonalité :

$$(4.7) \quad \mathcal{O}_a^\alpha \mathcal{C}_\beta^a = 0 \quad \begin{array}{l} a = 1, 2, \dots, B, \\ \alpha = 1, 2, \dots, P, \\ \beta = 1, 2, \dots, M. \end{array}$$

REPÈRES DE COURANTS DE MAILLE

5. — OBTENTION D'UN REPÈRE DE COURANTS DE MAILLE

Nous appellerons « *branche à impédance* » d'un réseau électrique, une branche contenant une force électromotrice \bar{e} , une inductance \bar{L} , une résistance \bar{R} , une élastance \bar{S} ($S = \frac{1}{C}$, où C est une capacité), tous ces éléments étant disposés en *série* [figure (5.1)]. Nous nous placerons dans le cas général où les éléments \bar{L} , \bar{R} et \bar{S} sont

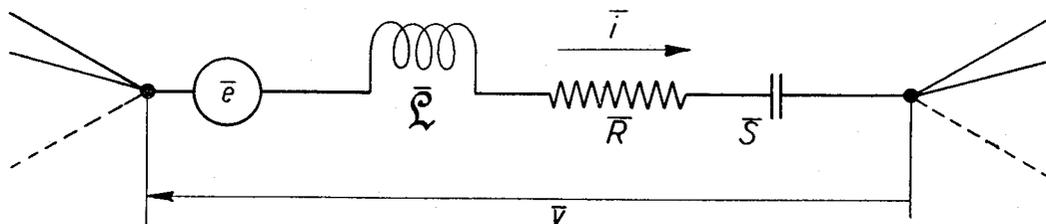


Fig. 5.1

des constantes localisées électriques ou leurs analogues formels. Les grandeurs \bar{e} , \bar{L} , \bar{R} , \bar{S} seront non toutes nulles dans une branche, autrement il ne s'agirait pas d'une branche mais d'un court-circuit.

Considérons un réseau électrique de caractère topologique S, B, N, P, M , formé en totalité de « branches à impédance ». Choisissons arbitrairement sur ce réseau un sens pour chacun des B courants de branche $\bar{i}^a \quad a = 1, 2, \dots, B$.

La loi d'Ohm appliquée à chacune des branches de ce réseau nous permet d'écrire :

$$(5.1) \quad \bar{v}_a + \bar{e}_a = \bar{L}_{ab} \frac{d\bar{i}^b}{dt} + \bar{R}_{ab} \bar{i}^b + \bar{S}_{ab} \int \bar{i}^b dt \quad a, b, = 1, 2, \dots, B,$$

avec :

$$(5.2) \quad \int \bar{i}^b dt = \int_0^t \bar{i}^b dt + \bar{q}_0^b,$$

où les $\bar{L}_{aa}, \bar{R}_{aa}, \bar{S}_{aa}$ sont les constantes localisées propres à la branche a et $\bar{L}_{ab}, \bar{R}_{ab}, \bar{S}_{ab}$ ($a \neq b$) sont les coefficients de couplage du courant \bar{i}^b dans la branche a . Dans le cas général où nous nous placerons, ces constantes ne formeront pas nécessairement des tableaux symétriques.

\bar{v}_a est la différence de potentiel orientée arbitrairement entre les sommets de la branche a ;

\bar{e}_a est la somme des forces électromotrices dans la branche a ;

\bar{i}^a est le courant circulant dans la branche a ;

\bar{i}_0^a est la valeur de \bar{i}^a pour $t = + 0$;

\bar{q}^a est la charge dans la branche a ;

\bar{q}_0^a est la valeur de \bar{q}^a pour $t = + 0$.

Prenons la « transformation de Carson-Laplace » définie par :

$$(5.3) \quad g(p) = p \int_0^{\infty} e^{-pt} h(t) dt = \mathbf{L} h(t),$$

et adoptons l'écriture (1) :

(5.4)

$$(5.5) \quad \bar{I}^a(p) = \mathbf{L} \bar{i}^a(t), \quad \bar{Q}^a(p) = \mathbf{L} \bar{q}^a(t), \quad \bar{V}_a(p) = \mathbf{L} \bar{v}_a(t), \quad \bar{E}_a(p) = \mathbf{L} \bar{e}_a(t).$$

(5.6)

(5.7)

En tenant compte des charges \bar{q}_0^b et des courants \bar{i}_0^b , les équations (5.1) deviennent, après transformation :

$$(5.8) \quad \bar{V}_a + \bar{E}_a = \left(\bar{\mathcal{L}}_{ab} p + \bar{R}_{ab} + \frac{\bar{S}_{ab}}{p} \right) \bar{I}^b + \bar{S}_{ab} \bar{q}_0^b - \bar{\mathcal{L}}_{ab} p \bar{i}_0^b \quad a, b = 1, 2, \dots, B.$$

Nous appellerons « forces électromotrices de départ » de la branche a , la quantité :

$$(5.9) \quad \bar{E}_{0a} = \bar{S}_{ab} \bar{q}_0^b - \bar{\mathcal{L}}_{ab} p \bar{i}_0^b \quad a, b = 1, 2, \dots, B.$$

Finalement, les équations (3.8) s'écriront :

$$(5.10) \quad \bar{V}_a + \bar{E}_a - \bar{E}_{0a} = \bar{Z}_{ab} \bar{I}^b \quad a, b = 1, 2, \dots, B,$$

où nous appelons « matrice impédance de branches » du réseau le tableau formé avec les B^2 éléments \bar{Z}_{ab} :

$$(5.11) \quad \bar{Z}_{ab} = \bar{\mathcal{L}}_{ab} p + \bar{R}_{ab} + \frac{\bar{S}_{ab}}{p} \quad a, b = 1, 2, \dots, B.$$

Maintenant, choisissons M courants de maille i^α $\alpha = 1, 2, \dots, M$ linéairement indépendants et constituant un repère appelé « repère de courants de maille ».

Entre les courants de maille i^α et les courants de branche \bar{i}^a , on peut établir des relations telles que (4.6) :

$$(5.12) \quad \bar{i}^a = \mathcal{C}_\alpha^a i^\alpha \quad a = 1, 2, \dots, B, \quad \alpha = 1, 2, \dots, M.$$

(1) Tout le long de notre mémoire les fonctions du temps figureront en minuscules et leurs transformées de Carson-Laplace en majuscules.

La matrice singulière dont les éléments sont \mathcal{C}_α^a est la « matrice de connexion de mailles ».

Étant donné que les éléments constituant la matrice \mathcal{C}_α^a sont des constantes, nous pouvons écrire :

$$(5.13) \quad \bar{I}^a = \mathcal{C}_\alpha^a I^\alpha \quad a = 1, 2, \dots, B, \quad \alpha = 1, 2, \dots, M.$$

En portant (5.13) dans (5.10), il viendra :

$$(5.14) \quad \bar{V}_a + \bar{E}_a - \bar{E}_{0a} = \bar{Z}_{ab} \mathcal{C}_\beta^b I^\beta \quad \begin{array}{l} a, b = 1, 2, \dots, B, \\ \beta = 1, 2, \dots, M. \end{array}$$

Réalisons la « connexion des branches en mailles » en effectuant la multiplication contractée de (5.14) par \mathcal{C}_α^a :

$$(5.15) \quad \mathcal{C}_\alpha^a \bar{V}_a + \mathcal{C}_\alpha^a (\bar{E}_a - \bar{E}_{0a}) = \bar{Z}_{ab} \mathcal{C}_\alpha^a \mathcal{C}_\beta^b I^\beta \quad \begin{array}{l} a, b = 1, 2, \dots, B, \\ \alpha, \beta = 1, 2, \dots, M. \end{array}$$

Mais, d'après la propriété topologique (4.5) :

$$(5.16) \quad \mathcal{C}_\alpha^a \bar{V}_a = 0 \quad a = 1, 2, \dots, B, \quad \alpha = 1, 2, \dots, M.$$

Il vient, finalement :

$$(5.17) \quad \mathcal{C}_\alpha^a \bar{E}_a - \mathcal{C}_\alpha^a \bar{E}_{0a} = \bar{Z}_{ab} \mathcal{C}_\alpha^a \mathcal{C}_\beta^b I^\beta \quad a, b = 1, 2, \dots, B, \quad \alpha, \beta = 1, 2, \dots, M.$$

Appelons :

$$(5.18) \quad E_\alpha = \mathcal{C}_\alpha^a \bar{E}_a, \quad \text{force électromotrice de la maille } \alpha;$$

$$(5.19) \quad E_{0\alpha} = \mathcal{C}_\alpha^a \bar{E}_{0a}, \quad \text{force électromotrice de départ de la maille } \alpha;$$

$$(5.20) \quad Z_{\alpha\beta} = \mathcal{C}_\alpha^a \mathcal{C}_\beta^b \bar{Z}_{ab}, \quad \text{élément } \alpha\beta \text{ de la « matrice impédance de maille ».}$$

Ainsi, finalement, les M équations de mailles s'écriront :

$$(5.21) \quad E_\alpha - E_{0\alpha} = Z_{\alpha\beta} I^\beta \quad \alpha, \beta = 1, 2, \dots, M.$$

Le calcul donnera pour valeur des I^α :

$$(5.22) \quad I^\alpha = (Z^{-1})^{\alpha\beta} (E_\beta - E_{0\beta}) \quad \alpha, \beta = 1, 2, \dots, M,$$

où $(Z^{-1})^{\alpha\beta}$ est l'élément $\alpha\beta$ de la matrice inverse de la matrice formée avec les éléments $Z_{\alpha\beta}$.

Et les courants de branche seront donnés par :

$$(5.23) \quad \bar{I}^a = \mathcal{C}_\alpha^a I^\alpha = \mathcal{C}_\alpha^a (Z^{-1})^{\alpha\beta} (E_\beta - E_{0\beta}) \quad a = 1, 2, \dots, P, \quad \alpha, \beta = 1, 2, \dots, M.$$

6. — PRÉSENCE DE TENSEURS DANS LES REPÈRES DE MAILLES

Nous énoncerons plusieurs théorèmes :

THÉORÈME I.

Les produits contractés :

$$E_{\alpha} I^{\alpha}, \quad E_{0\alpha} I^{\alpha}, \quad (E_{\alpha} - E_{0\alpha}) I^{\alpha} \quad \alpha = 1, 2, \dots, M$$

sont des invariants lorsqu'on passe d'un repère de mailles à un autre et leur valeur respective est :

$$\bar{E}_a \bar{I}^a, \quad \bar{E}_{0a} \bar{I}^a, \quad (\bar{E}_a - \bar{E}_{0a}) \bar{I}^a \quad a = 1, 2, \dots, B.$$

Démonstration.

Montrons que :

$$(6.1) \quad E_{\alpha} I^{\alpha} = \bar{E}_a \bar{I}^a \quad a = 1, 2, \dots, B, \quad \alpha = 1, 2, \dots, M.$$

Il suffit de se reporter à (5.13) et (5.18) et d'écrire :

$$(6.2) \quad E_{\alpha} I^{\alpha} = \mathcal{C}_{\alpha}^a \bar{E}_a I^{\alpha} = \bar{E}_a \mathcal{C}_{\alpha}^a I^{\alpha} = \bar{E}_a \bar{I}^a \quad \begin{array}{l} a = 1, 2, \dots, B, \\ \alpha = 1, 2, \dots, M. \end{array}$$

Pour un autre repère de mailles défini par la matrice de connexion $\mathcal{C}'_{\lambda}{}^a$, on aura encore :

$$(6.3) \quad E'_{\lambda} I'^{\lambda} = \mathcal{C}'_{\lambda}{}^a \bar{E}_a I'^{\lambda} = \bar{E}_a \mathcal{C}'_{\lambda}{}^a I'^{\lambda} = \bar{E}_a \bar{I}^a \quad \begin{array}{l} a = 1, 2, \dots, B, \\ \lambda = 1, 2, \dots, M, \end{array}$$

et, finalement :

$$(6.4) \quad E_{\alpha} I^{\alpha} = E'_{\lambda} I'^{\lambda} = \bar{E}_a \bar{I}^a \quad a = 1, 2, \dots, B, \quad \alpha, \lambda = 1, 2, \dots, M.$$

De la même manière :

$$(6.5) \quad E_{0\alpha} I^{\alpha} = E'_{0\lambda} I'^{\lambda} = \bar{E}_{0a} \bar{I}^a;$$

$$(6.6) \quad (E_{\alpha} - E_{0\alpha}) I^{\alpha} = (E'_{\lambda} - E'_{0\lambda}) I'^{\lambda} = (\bar{E}_a - \bar{E}_{0a}) \bar{I}^a \quad \begin{array}{l} a = 1, 2, \dots, B, \\ \alpha, \lambda = 1, 2, \dots, M. \end{array}$$

Conséquence.

Il existe une forme bilinéaire invariante dans les repères de mailles. En effet, dans deux repères de mailles distincts on pourra écrire :

$$(6.7) \quad E_{\alpha} - E_{0\alpha} = Z_{\alpha\beta} I^{\beta}, \quad E'_{\lambda} - E'_{0\lambda} = Z'_{\lambda\mu} I'^{\mu} \quad \alpha, \beta, \lambda, \mu = 1, 2, \dots, M;$$

donc, d'après (6.6) :

$$(6.9) \quad K = Z_{\alpha\beta} I^\alpha I^\beta = Z'_{\lambda\mu} I'^\lambda I'^\mu \quad \alpha, \beta, \lambda, \mu = 1, 2, \dots, M.$$

Nous appellerons K « invariant opérationnel fondamental » des repères de mailles.

THÉORÈME II.

Le déterminant $\det Z_{\alpha\beta}$ est un pseudo-scalaire de poids 2 :

$$(6.10) \quad \det Z_{\alpha\beta} = (\det C_\alpha^\lambda)^2 \cdot \det Z'_{\lambda\mu} \quad \alpha, \beta, \lambda, \mu = 1, 2, \dots, M$$

(sans sommation).

Pour tous les repères où $\det C_\alpha^\lambda = 1$, alors $\det Z_{\alpha\beta}$ peut être considéré comme un invariant.

Démonstration.

Écrivons qu'entre deux repères de mailles existe la transformation non singulière :

$$(6.11) \quad I^\alpha = C_\lambda^\alpha I'^\lambda \quad \alpha, \lambda = 1, 2, \dots, M;$$

alors, on a :

$$(6.12) \quad Z_{\alpha\beta} = C_\alpha^\lambda C_\beta^\mu Z'_{\lambda\mu} \quad \text{ou en écriture matricielle : } \boxed{Z} = \boxed{C}' \boxed{Z'} \boxed{C}$$

$$(6.13) \quad \alpha, \beta, \lambda, \mu = 1, 2, \dots, M.$$

La théorie des déterminants donne bien :

$$(6.14) \quad \det Z_{\alpha\beta} = (\det C_\alpha^\lambda)^2 \cdot \det Z'_{\lambda\mu},$$

et si :

$$(6.15) \quad \det C_\lambda^\alpha = 1 :$$

$$(6.16) \quad \det Z_{\alpha\beta} = \det Z'_{\lambda\mu}.$$

On constate donc la présence, dans les repères de mailles, des êtres mathématiques suivants :

— tenseurs une fois covariants :

$$(6.17) \quad E_\alpha = C_\lambda^\alpha E'^\lambda, \quad E_{0\alpha} = C_\lambda^\alpha E'_{0\lambda}, \quad E_\alpha - E_{0\alpha} = C_\lambda^\alpha (E^\lambda - E'^{0\lambda})$$

$$(6.18) \quad \alpha, \lambda = 1, 2, \dots, M;$$

$$(6.19) \quad \alpha, \lambda = 1, 2, \dots, M;$$

— tenseur une fois contravariant :

$$(6.20) \quad I^\alpha = C_\lambda^\alpha I'^\lambda \quad \alpha, \lambda = 1, 2, \dots, M;$$

— tenseur deux fois covariant :

$$(6.21) \quad Z_{\alpha\beta} = C_{\alpha}^{\lambda} C_{\beta}^{\mu} Z'_{\lambda\mu} \quad \alpha, \beta, \lambda, \mu = 1, 2, \dots, M;$$

— formule invariante :

$$(6.22) \quad E_{\alpha} - E_{0\alpha} = Z_{\alpha\beta} I^{\beta}, \quad E'_{\lambda} - E'_{0\lambda} = Z'_{\lambda\mu} I'^{\mu} \quad \alpha, \beta, \lambda, \mu = 1, 2, \dots, M;$$

— invariants :

$$(6.23) \quad E_{\alpha} I^{\alpha} = E'_{\lambda} I^{\lambda}, \quad E_{0\alpha} I^{\alpha} = E'_{0\lambda} I'^{\lambda}, \quad (E_{\alpha} - E_{0\alpha}) I^{\alpha} = (E'_{\lambda} - E'_{0\lambda}) I'^{\lambda}$$

$$(6.24)$$

$$(6.25) \quad \alpha, \lambda = 1, 2, \dots, M;$$

— invariant opérationnel fondamental :

$$(6.26) \quad K = Z_{\alpha\beta} I^{\alpha} I^{\beta} = Z'_{\lambda\mu} I'^{\lambda} I'^{\mu} \quad \alpha, \beta, \lambda, \mu = 1, 2, \dots, M;$$

— pseudo-scalaire de poids 2 :

$$(6.27) \quad \det Z_{\alpha\beta} = (\det C_{\alpha}^{\lambda})^2 \cdot \det Z'_{\lambda\mu}.$$

Ainsi, toutes les grandeurs et lois considérées sont connues en ce qui concerne la façon dont elles se transforment.

Cas où la matrice impédance de maille est identiquement singulière.

Nous n'avons pas trouvé une condition nécessaire et suffisante pour que :

$$(6.28) \quad \det Z_{\alpha\beta} \equiv 0,$$

qui soit plus simple que cette expression elle-même. Toutefois, étant donné que $\det Z_{\alpha\beta}$ est un pseudo-scalaire, on peut affirmer que la matrice $Z_{\alpha\beta}$ sera singulière dans n'importe quel repère si, dans au moins un repère, ce déterminant a une ligne ou une colonne identiquement nulle. Une ligne nulle d'indice r correspondra à une maille d'indice r pour laquelle :

$$(6.29) \quad Z_{r1} \equiv Z_{r2} \equiv \dots \equiv Z_{rr} \equiv \dots \equiv Z_{rM} \equiv 0,$$

c'est-à-dire, une maille dans laquelle l'impédance propre est nulle et dans laquelle tous les autres courants de maille sont sans influence. Une colonne nulle d'indice r correspondra à une maille d'indice r pour laquelle :

$$(6.30) \quad Z_{1r} \equiv Z_{2r} \equiv \dots \equiv Z_{rr} \equiv \dots \equiv Z_{Mr} \equiv 0,$$

c'est à dire, une maille dans laquelle l'impédance propre est nulle et telle encore que le courant i^r est sans influence sur les autres mailles.

Dans le cas particulier où $\det Z_{\alpha\beta} \equiv 0$, il apparaît alors que certains courants de branche du réseau prennent, dans l'hypothèse linéaire, une valeur infinie ou indéterminée. On donnera plus loin un exemple (§ 13, exemple 3).

7. — CONSIDÉRATIONS ÉNERGÉTIQUES

Le point de vue purement mathématique et formel où nous nous sommes placés est conforme aux résultats obtenus en partant d'un point de vue admis axiomatiquement par les physiciens, à savoir, l'invariance de l'énergie instantanée fournie au réseau. Nous avons montré qu'il n'était pas nécessaire de postuler un invariant pour mettre en évidence certains tenseurs

Énonçons encore un théorème :

THÉORÈME III.

Si l'on admet que l'énergie instantanée fournie au réseau a pour expression :

$$(7.1) \quad w = \bar{e}_a \bar{i}^a \quad a = 1, 2, \dots, B,$$

il en résulte que :

$$(7.2) \quad w = e_\alpha i^\alpha = e'_\lambda i'^\lambda \quad \alpha, \lambda = 1, 2, \dots, M,$$

et il existe un invariant :

$$(7.3) \quad K' = E_\alpha I^\alpha = E'_\lambda I'^\lambda = \bar{E}_a \bar{I}^a \quad \begin{array}{l} a = 1, 2, \dots, B, \\ \alpha, \lambda = 1, 2, \dots, M. \end{array}$$

Démonstration.

Choisissons un premier repère de mailles i^α $\alpha = 1, 2, \dots, M$, soit :

$$(7.4) \quad i^a = \mathcal{C}_\alpha^a i^\alpha.$$

En portant (7.4) dans (7.1), il vient :

$$(7.5) \quad w = \bar{e}_a \bar{i}^a = \bar{e}_a \mathcal{C}_\alpha^a i^\alpha = e_\alpha i^\alpha \quad a = 1, 2, \dots, B, \quad \alpha = 1, 2, \dots, M,$$

où, par définition :

$$(7.6) \quad e_\alpha = \mathcal{C}_\alpha^a \bar{e}_a \quad a = 1, 2, \dots, B, \quad \alpha = 1, 2, \dots, M.$$

En choisissant un autre repère de mailles i'^λ $\lambda = 1, 2, \dots, M$, on obtiendra :

$$(7.7) \quad w = \bar{e}_a \bar{i}^a = \bar{e}_a \mathcal{C}'_\lambda{}^a i'^\lambda = e'_\lambda i'^\lambda \quad a = 1, 2, \dots, B, \quad \lambda = 1, 2, \dots, M.$$

Maintenant, écrivons :

$$(7.8) \quad \mathbf{L} \bar{i}^a = \mathcal{C}_\alpha^a \mathbf{L} i^\alpha \quad \text{soit} \quad \bar{I}^a = \mathcal{C}_\alpha^a I^\alpha \quad a = 1, 2, \dots, B, \quad \alpha = 1, 2, \dots, M,$$

$$(7.9) \quad \mathbf{L} e_\alpha = \mathcal{C}_\alpha^a \mathbf{L} \bar{e}_a \quad \text{soit} \quad E_\alpha = \mathcal{C}_\alpha^a \bar{E}_a$$

et similairement à (7.5) :

$$(7.10) \quad \bar{E}_a \bar{I}^a = \bar{E}_a \mathcal{C}_\alpha^a I^\alpha = \mathcal{C}_\alpha^a E_\alpha I^\alpha = E_\alpha I^\alpha \quad \begin{array}{l} a = 1, 2, \dots, B, \\ \alpha = 1, 2, \dots, M. \end{array}$$

Corollaire.

Les f.e.m. de départ se transforment comme les f.e.m. appliquées ; on aura encore :

$$(7.11) \quad K = (E_\alpha - E_{0\alpha}) I^\alpha = (E'_\lambda - E'_{0\lambda}) I'^\lambda = (\bar{E}_a - \bar{E}_{0a}) \bar{I}^a \quad \begin{array}{l} a = 1, 2, \dots, B, \\ \alpha, \lambda = 1, 2, \dots, M. \end{array}$$

8. — AUTRE EXPRESSION MATHÉMATIQUE DE L'INVARIANT FONDAMENTAL

Pour faire apparaître la structure mathématique du réseau de mailles en prenant des « courants de départ I_0^β de maille » au lieu de « f.e.m. » de départ, nous poserons :

$$(8.1) \quad E_{0\alpha} = Z_{\alpha\beta} I_0^\beta = S_{\alpha\beta} q_0^\beta - \mathcal{L}_{\alpha\beta} p I_0^\beta \quad \alpha, \beta = 1, 2, \dots, M,$$

où la matrice, formée avec les éléments $Z_{\alpha\beta}$, n'est pas identiquement singulière.

Les équations (5.21) prendront alors la forme :

$$(8.2) \quad E_\alpha = Z_{\alpha\beta} (I^\beta + I_0^\beta) \quad \alpha, \beta = 1, 2, \dots, M.$$

Écrivons (1) :

$$(8.3) \quad K' = E_\alpha I^\alpha = Z_{\alpha\beta} I^\alpha (I^\beta + I_0^\beta) \quad \alpha, \beta = 1, 2, \dots, M.$$

Changeons de repère par translation du repère :

$$(8.4) \quad I^\alpha = \mathbf{I}^\alpha + \mathbf{I}_0^\alpha \quad \alpha = 1, 2, \dots, M;$$

il vient :

$$(8.5) \quad \begin{aligned} K' &= Z_{\alpha\beta} (\mathbf{I}^\alpha + \mathbf{I}_0^\alpha) (\mathbf{I}^\beta + \mathbf{I}_0^\beta + I_0^\beta) \\ &= Z_{\alpha\beta} \mathbf{I}^\alpha \mathbf{I}^\beta + [(Z_{\alpha\beta} + Z_{\beta\alpha}) \mathbf{I}_0^\beta + Z_{\alpha\beta} I_0^\beta] \mathbf{I}^\alpha + Z_{\alpha\beta} \mathbf{I}_0^\alpha (\mathbf{I}_0^\beta + I_0^\beta) \quad \alpha, \beta = 1, 2, \dots, M. \end{aligned}$$

Choisissons \mathbf{I}_0^α de telle sorte que les termes en \mathbf{I}^α disparaissent :

$$(8.6) \quad (Z_{\alpha\beta} + Z_{\beta\alpha}) \mathbf{I}_0^\beta + Z_{\alpha\beta} I_0^\beta = 0,$$

soit :

$$(8.7) \quad \mathbf{I}_0^\beta = -A^{\beta\gamma} Z_{\gamma\delta} I_0^\delta,$$

où $A^{\beta\gamma}$ est tel que :

$$(8.8) \quad A^{\beta\gamma} (Z_{\gamma\epsilon} + Z_{\epsilon\gamma}) = \delta_\epsilon^\beta \quad (\text{symbole de Kronicker}) \quad \beta, \gamma, \epsilon = 1, 2, \dots, M.$$

(1) On a donc :

$$K = K' - K'_0 \quad \text{où} \quad K'_0 = E_{0\alpha} I^\alpha \quad \alpha = 1, 2, \dots, M.$$

Autrement dit, la matrice symétrique formée avec les éléments $A^{\beta\gamma}$ est l'inverse de la matrice symétrique $Z_{\gamma\varepsilon} + Z_{\varepsilon\gamma}$; nous la supposons aussi non identiquement singulière.

En posant :

$$(8.9) \quad Y^{\beta\gamma} Z_{\gamma\varepsilon} = \delta_{\varepsilon}^{\beta} \quad \beta, \gamma, \varepsilon = 1, 2, \dots, M,$$

on aurait, d'autre part ,

$$(8.10) \quad \begin{aligned} I_0^{\beta} &= - Y^{\beta\gamma} (Z_{\varepsilon\gamma} + Z_{\gamma\varepsilon}) I_0^{\varepsilon} \\ &= - (\delta_{\varepsilon}^{\beta} + Y^{\beta\gamma} Z_{\gamma\varepsilon}) I_0^{\varepsilon} \quad \beta, \lambda, \varepsilon = 1, 2, \dots, M. \end{aligned}$$

Donc :

$$(8.11) \quad I_0^{\beta} + I_0^{\beta} = - Y^{\beta\gamma} Z_{\gamma\varepsilon} I_0^{\varepsilon} \quad \beta, \gamma, \varepsilon = 1, 2, \dots, M.$$

Portons (8.6) et (8.11) dans (8.5); on obtient :

$$(8.12) \quad K' = Z_{\alpha\beta} I^{\alpha} I^{\beta} - Z_{\alpha\beta} Y^{\beta\gamma} Z_{\gamma\varepsilon} I_0^{\alpha} I_0^{\varepsilon} \quad \alpha, \beta, \gamma, \varepsilon = 1, 2, \dots, M,$$

mais, d'après (8.9) :

$$(8.13) \quad Z_{\alpha\beta} Y^{\beta\gamma} = \delta_{\alpha}^{\gamma} \quad \alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \dots, M.$$

Ainsi :

$$(8.14) \quad \begin{aligned} K' &= Z_{\alpha\beta} I^{\alpha} I^{\beta} - \delta_{\alpha}^{\gamma} Z_{\gamma\varepsilon} I_0^{\alpha} I_0^{\varepsilon} \\ &= Z_{\alpha\beta} I^{\alpha} I^{\beta} - Z_{\gamma\alpha} I_0^{\alpha} I_0^{\gamma} \\ &= Z_{\alpha\beta} I^{\alpha} I^{\beta} - Z_{\alpha\beta} I_0^{\alpha} I_0^{\beta} \quad (\text{pur et simple échange d'indices muets}) \\ &= Z_{\alpha\beta} (I^{\alpha} I^{\beta} - I_0^{\alpha} I_0^{\beta}) \end{aligned}$$

$$\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon = 1, 2, \dots, M.$$

La forme bilinéaire :

$$(8.15) \quad K' = E_{\alpha} I^{\alpha} = Z_{\alpha\beta} (I^{\alpha} I^{\beta} - I_0^{\alpha} I_0^{\beta}) \quad \alpha, \beta = 1, 2, \dots, M,$$

montre la structure bien particulière de l'invariant lorsque les q_0 et i_0 ne sont pas tous nuls.

9. — MISE EN PLACE DES VALEURS INITIALES

Si l'on se reporte à (5.9) on voit qu'il est nécessaire de s'imposer les quantités \bar{q}_0^b et \bar{i}_0^b là où les quantités \bar{S}_{ab} et \bar{L}_{ab} ne sont pas nulles. Les valeurs \bar{q}_0^b et \bar{i}_0^b ainsi définies seront appelées « valeurs initiales héritées » tandis que les autres, correspondant aux \bar{S}_{ab} et \bar{L}_{ab} nulles, seront appelées « valeurs initiales ignorées ».

En chaque nœud, la deuxième loi de Kirchhoff doit être satisfaite si l'on veut vérifier à l'instant $t = +0$ le principe de continuité des courants et ainsi, si :

$$\mathcal{O}_a^{\alpha} \quad a = 1, 2, \dots, B, \quad \alpha = 1, 2, \dots, P$$

est une matrice de connexion de paire de nœuds quelconque, on doit avoir :

$$(9.1) \quad \mathcal{O}_a^\alpha \bar{i}^a = 0 \quad a = 1, 2, \dots, B, \quad \alpha = 1, 2, \dots, P.$$

Ceci constitue une condition nécessaire pour que les valeurs initiales des courants fournies par le calcul contiennent bien les valeurs initiales héritées.

La recherche d'une condition générale nécessaire et suffisante présente de grosses difficultés. Celles-ci s'aplanissent si l'on s'impose qu'aucun courant \bar{i}^a ne soit percussionnel. Montrons d'abord sur un exemple qu'il est possible, dans le cas général où nous nous plaçons, d'envisager l'existence de courants percussionnels dans certains réseaux. L'exemple de la *figure* (9.1) en fait foi. On a, pour équations de mailles :

$$(9.2) \quad \begin{aligned} rI^2 &= 0, \\ -rI^1 + \mathcal{L}pI^2 &= \mathcal{L}pi_0, \end{aligned}$$

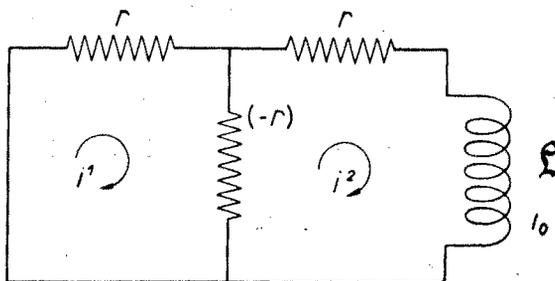


Fig. 9.1

si la résistance commune aux mailles 1 et 2 est négative (1). Le courant I^1 a pour valeur :

$$(9.3) \quad I^1 = -\frac{\mathcal{L}}{r} pi_0;$$

ainsi, i^1 est percussionnel et l'on ne retrouve pas $\lim_{p \rightarrow \infty} I^1 = i_0^1$.

Nous donnerons d'abord une méthode commode pour obtenir des conditions particulières nécessaires et suffisantes lorsque l'on a aucun courant percussionnel, enfin une condition générale nécessaire et suffisante, mais toujours dans le cas d'absence de courants percussionnels.

Matrice de continuité.

Nous mettrons en évidence le rôle d'une certaine matrice qui nous permet d'obtenir dans quelles branches on a $\lim_{p \rightarrow \infty} \bar{I}^a = \bar{i}_0^a$, où \bar{i}_0^a est une valeur héritée, ceci dans le cas où il n'existe aucun courant percussionnel.

(1) Possible dans certains réseaux non passifs.

Partons de (5.8), faisons une multiplication contractée par \mathcal{C}_α^a , il vient, après annulation de $\mathcal{C}_\alpha^a \bar{V}_a$:

$$(9.4) \quad \mathcal{C}_\alpha^a \bar{E}_a = \left(\mathcal{C}_\alpha^a \bar{\mathcal{L}}_{ab} p + \mathcal{C}_\alpha^a \bar{R}_{ab} + \mathcal{C}_\alpha^a \frac{\bar{S}_{ab}}{p} \right) \bar{I}^b + \mathcal{C}_\alpha^a \bar{S}_{ab} \bar{q}_0^b - \mathcal{C}_\alpha^a \bar{\mathcal{L}}_{ab} p \bar{i}_0^b$$

$$a, b = 1, 2, \dots, B, \quad \alpha = 1, 2, \dots, M.$$

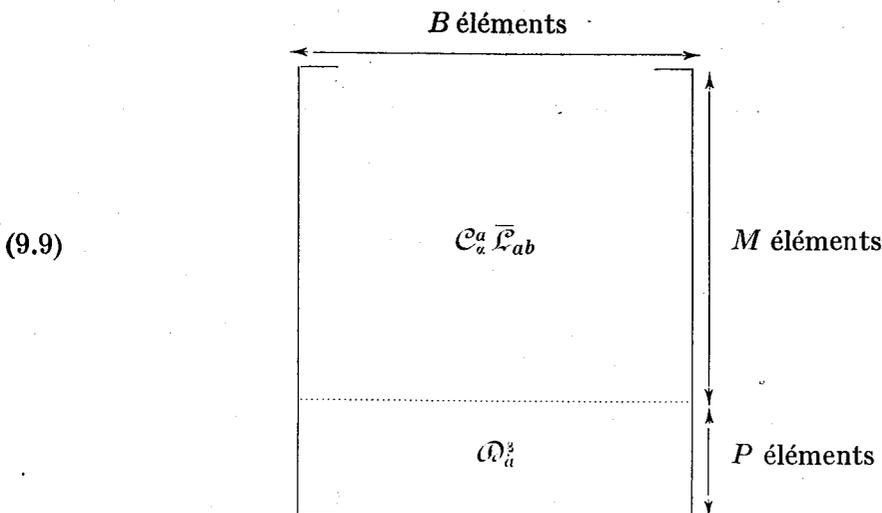
Si $\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\bar{E}_a}{p} = 0$ et $\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\bar{I}^a}{p} = 0$, par hypothèse, on obtient, en divisant les deux membres de (9.4) par p et en faisant $p \rightarrow \infty$:

$$(9.5) \quad \mathcal{C}_\alpha^a \bar{\mathcal{L}}_{ab} \left(\frac{\bar{I}^a}{p \rightarrow \infty} - \bar{i}_0^a \right) = 0 \quad \begin{array}{l} a, b = 1, 2, \dots, B, \\ \alpha = 1, 2, \dots, M. \end{array}$$

A ces M équations homogènes en $\left(\frac{\bar{I}^a}{p \rightarrow \infty} - \bar{i}_0^a \right)$ nous ajouterons P équations formées par:

$$(9.6) \quad \mathcal{O}_\alpha^\beta \bar{I}^a = 0, \quad \mathcal{O}_\alpha^\beta \bar{i}_0^a = 0 \quad \text{soit} \quad \mathcal{O}_\alpha^\beta \left(\frac{\bar{I}^a}{p \rightarrow \infty} - \bar{i}_0^a \right) = 0 \quad \begin{array}{l} a = 1, 2, \dots, B, \\ \beta = 1, 2, \dots, P, \end{array}$$

et nous obtiendrons une matrice carrée:



que nous écrirons H_{ab} et que nous appellerons, vu son rôle, « matrice de continuité ».

Le système homogène :

$$(9.10) \quad H_{ab} \left(\frac{\bar{I}^b}{p \rightarrow \infty} - \bar{i}_0^b \right) = 0 \quad a, b = 1, 2, \dots, B$$

nous donne, dans chaque cas, en l'absence de percusion, le moyen d'étudier la continuité.

Prenons pour exemple le petit réseau de la *figure* (9.2); il a pour caractère topologique 1, 3, 2, 1, 2 et, avec les repères de branches et de mailles indiqués sur les *figures* (9.3) et (9.4), on a, pour matrice de connexion :

$$(9.11) \quad [C] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Il vient :

$$(9.12) \quad [C]' \begin{bmatrix} \mathcal{L} \\ \mathcal{L}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{L} & \mathcal{M} \\ 0 & \mathcal{M} & \mathcal{L}' \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 0 & \mathcal{L} & \mathcal{M} \\ 0 & -\mathcal{L} + \mathcal{M} & \mathcal{L}' - \mathcal{M} \end{bmatrix}.$$

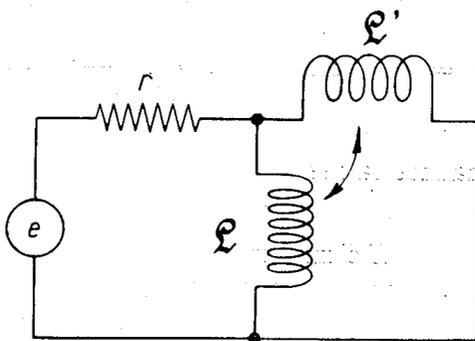


Fig. 9.2

Par ailleurs :

$$(9.13) \quad \bar{i}^a - \bar{i}^b - \bar{i}^c = 0,$$

donc :

$$(9.14) \quad [C] = [1 \quad -1 \quad 1].$$

On aura pour matrice de continuité :

$$(9.15) \quad [H] = \begin{bmatrix} 0 & \mathcal{L} & \mathcal{M} \\ 0 & -\mathcal{L} + \mathcal{M} & \mathcal{L}' - \mathcal{M} \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix},$$

et :

$$(9.16) \quad \det [H] = \mathcal{L}(\mathcal{L}' - \mathcal{M}) - \mathcal{M}(-\mathcal{L} + \mathcal{M}) = \mathcal{L}\mathcal{L}' - \mathcal{M}^2.$$

En résolvant le réseau on trouverait que la condition particulière nécessaire et suffisante pour qu'il n'y ait pas de percussions, quels que soient les i_0 , est :

$$(9.17) \quad \mathcal{L}\mathcal{L}' - \mathcal{M}^2 \neq 0;$$

c'est justement ici la condition pour que l'on ait bien :

$$(9.18) \quad \lim_{p \rightarrow \infty} I^a = \bar{i}_0^a, \quad \lim_{p \rightarrow \infty} I^b = \bar{i}_0^b, \quad \lim_{p \rightarrow \infty} I^c = \bar{i}_0^c.$$

Comme nous l'avons annoncé plus haut, il est possible de donner une condition générale nécessaire et suffisante, limitée au cas où il n'y a pas de percussions. Auparavant,

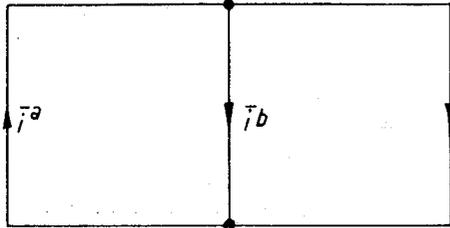


Fig. 9.3

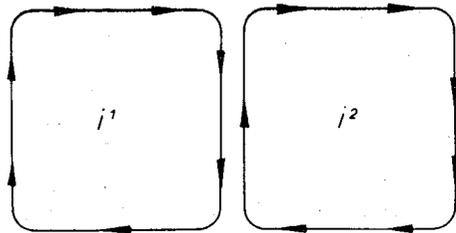


Fig. 9.4

donnons encore un contre-exemple. Montrons qu'il est possible que certaines branches aient une influence inductive sur certaines autres branches d'une maille sans qu'il y ait influence sur la maille.

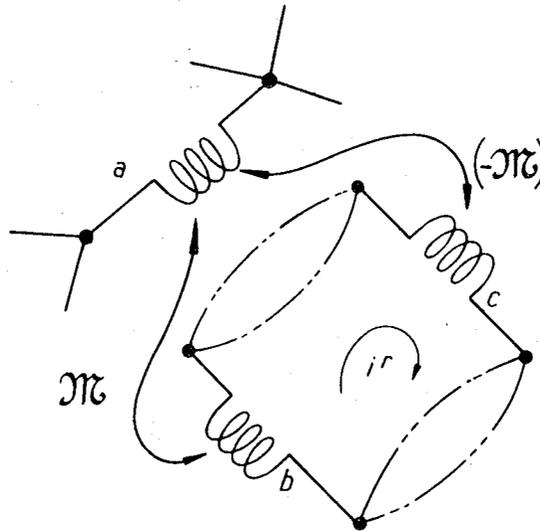


Fig. 9.5

La figure (9.5) montre un tel cas. Il suffit que :

$$(9.19) \quad \bar{L}_{ab} = -\bar{L}_{ac} = M$$

et la branche *a* est sans influence sur la maille *r*.

Énonçons maintenant le théorème suivant :

THÉORÈME.

1° Si, dans le réseau où l'on se donne les valeurs initiales héritées et les f.e.m. appliquées, aucun courant de maille n'est percussionnel ;

2° si, de plus, il n'existe dans aucun repère une maille contenant la branche b n'ayant aucun effet sur les autres mailles, alors le courant \bar{i}^b est tel que :

$$(9.20) \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \bar{I}^b = \bar{i}_0^b.$$

La seconde condition est nécessaire et suffisante si la première est satisfaite.

Démonstration.

La première condition permet d'écrire :

$$(9.21) \quad \mathcal{L}_{\alpha\beta} \left(\lim_{p \rightarrow \infty} I^\beta - i_0^\beta \right) \quad \alpha, \beta = 1, 2, \dots, M.$$

S'il existe une maille n'ayant pas d'inductance, on peut faire passer dans cette maille une intensité arbitraire sans cesser de vérifier (9.21) et l'intensité initiale dans les branches qu'elle contient ne peut être déterminée.

D'une manière générale, on peut, par un choix convenable d'un repère de mailles, faire apparaître R mailles ayant chacune une inductance non nulle et $M - R$ mailles ayant chacune une inductance nulle. La matrice dont les éléments sont $\mathcal{L}_{\alpha\beta}$ s'écrira alors :

$$(9.22) \quad \begin{array}{|c|c|} \hline \overbrace{\hspace{10em}}^{R} & \overbrace{\hspace{10em}}^{M-R} \\ \hline & [0] \\ \hline \end{array}$$

Le rang de cette matrice étant R , il en résulte que les R premières quantités $\lim_{p \rightarrow \infty} I^\beta - i_0^\beta$ sont nulles.

D'après les hypothèses faites, il ne circule dans la branche b que certaines des R premières intensités de maille, ce qui achève la démonstration.

Lorsqu'un réseau est résolu, il y a donc lieu de vérifier que l'on retrouve bien, effectivement, dans les branches, les conditions imposées. Ainsi, on doit vérifier :

$$(9.23) \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \bar{I}^a = \bar{i}_0^a \quad a = 1, 2, \dots, B$$

dans les branches où \bar{i}_0 est une valeur héritée, c'est-à-dire où existe une inductance.

Par ailleurs, pour vérifier les relations :

$$(9.24) \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \bar{Q}^a = \left(\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\bar{I}^a}{p} \right) + \bar{q}_0^a = \bar{q}_0^a,$$

on devra donc avoir :

$$(9.25) \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\bar{I}^a}{p} = 0 \quad a = 1, 2, \dots, B$$

dans les branches où existent des capacités.

Nous rappellerons que, dans de nombreux problèmes, les conditions initiales sont introduites par un état quasi-permanent précédant l'état considéré. Pour déterminer ces conditions initiales on utilisera, avec profit, un théorème du calcul opérationnel valable pour certaines fonctions (voir annexe II, p. 95) :

$$(9.26) \quad \lim_{p \rightarrow 0} g(p) = \lim_{t \rightarrow \infty} h(t).$$

Les valeurs quasi-permanentes $\lim_{t \rightarrow \infty} i(t)$ dans les inductances et $\lim_{t \rightarrow \infty} q(t)$ dans les capacités, constitueront les valeurs héritées par le nouveau réseau.

10. — DÉTERMINATION DE LA MATRICE DE CONNEXION

Rappelons d'abord ce que l'on appelle « arbre » et « cordes » d'un réseau.

On appelle « arbre » le schéma obtenu en joignant dans chaque sous-réseau tous les nœuds sans former aucun circuit fermé.

On appelle « corde » d'un « arbre » une branche du réseau qui n'appartient pas à l'arbre.

Pour former M mailles linéairement indépendantes dans un réseau de caractère S, B, N, P, M , on réalisera d'abord un arbre, lequel est formé de $P = N - S$ branches, et l'on formera $M = B - P$ circuits fermés de telle sorte que chaque circuit ne contienne qu'une seule corde. Les M mailles étant ainsi définies on pourra, tout à loisir, considérer si cela est utile, qu'une maille repasse p fois sur son propre itinéraire fermé.

Les mailles ainsi concrétisées et définies satisfont bien à la définition (2.4). En effet, prenons une maille $\mathcal{M}_{(1)}$; dans l'expression $\delta \mathcal{M}_{(1)}$ les nœuds non utilisés ont pour élément dans δ le nombre zéro et les autres, $+1$ ou -1 , suivant qu'on entre ou qu'on sort, ce qui fait bien zéro pour tout circuit fermé.

Former un arbre est une condition suffisante pour obtenir un repère de mailles mais cette condition n'est pas nécessaire et l'on peut considérer qu'il y a une infinité non dénombrable de repères de mailles construits sans arbre.

Les figures (10.1), (10.2) et (10.3) donnent un exemple simple de la manière d'obtenir des mailles linéairement indépendantes. Le réseau a pour caractère 1, 8, 5, 4, 4. On voit facilement comment, à partir de l'arbre [figure (10.2)], on détermine les mailles [figure (10.3)].

Les M mailles étant choisies, on peut obtenir la matrice de connexion de deux manières :

- en additionnant les d.d.p. de branche le long de chaque maille ;
- ou encore en exprimant les courants de branche en fonction des courants de maille.

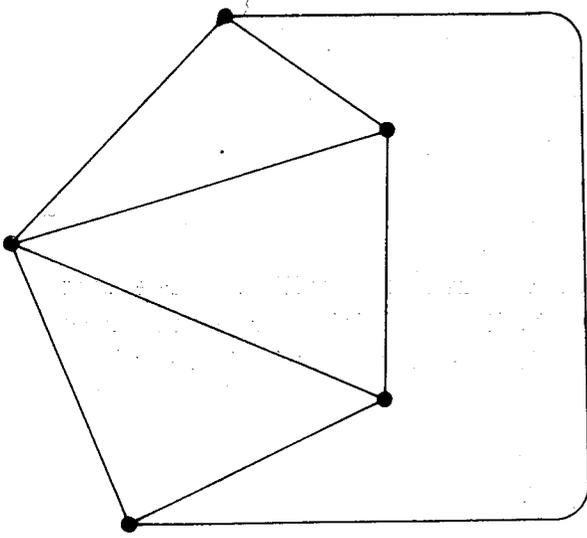


Fig. 10.1

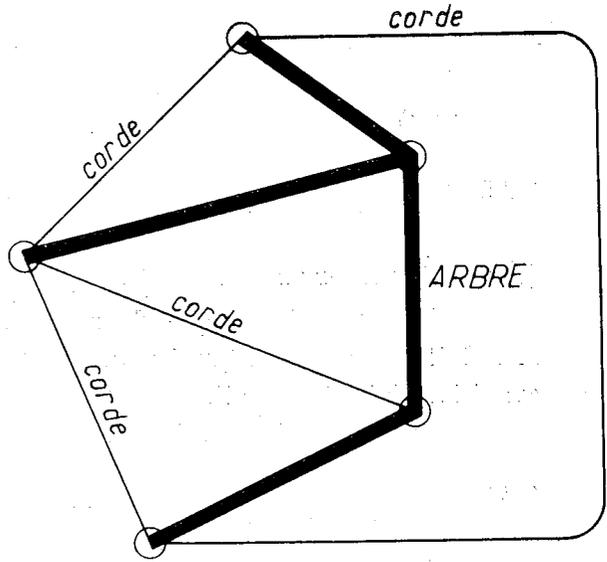


Fig. 10.2

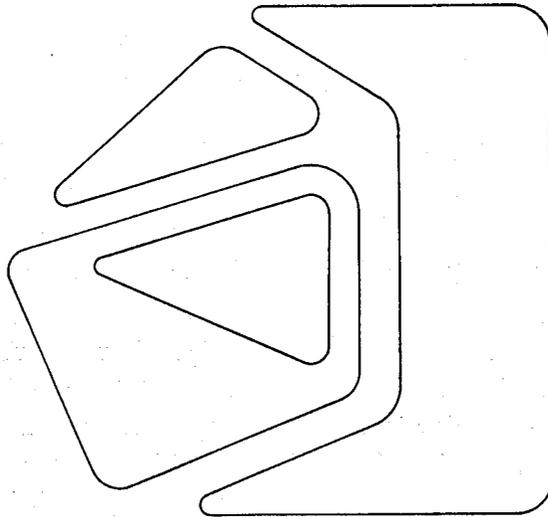


Fig. 10.3

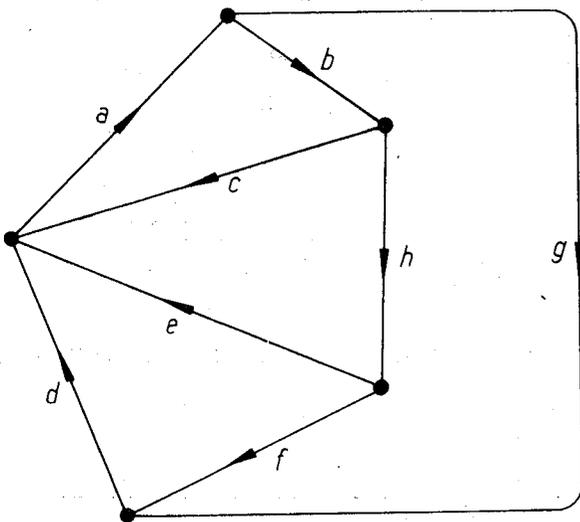


Fig. 10.4

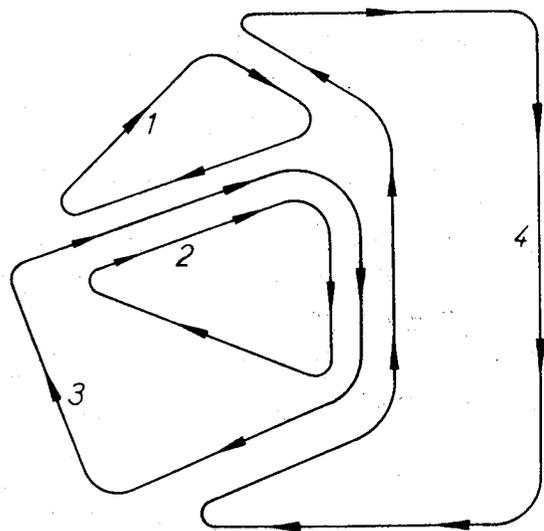


Fig. 10.5

Comme exemple nous reprendrons le réseau des *figures* (10.1) et (10.3) en donnant un sens arbitraire aux courants de branche et de maille [*figures* (10.4) et (10.5)].

Première méthode.

On écrira :

$$\begin{aligned}
 (10.1) \quad & \bar{v}_a + \bar{v}_b + \bar{v}_c = 0 \quad (\text{maille 1}), \\
 & -\bar{v}_c + \bar{v}_e + \bar{v}_h = 0 \quad (\text{maille 2}), \\
 & -\bar{v}_c + \bar{v}_d + \bar{v}_f + \bar{v}_h = 0 \quad (\text{maille 3}), \\
 & -\bar{v}_b - \bar{v}_f + \bar{v}_g - \bar{v}_h = 0 \quad (\text{maille 4}),
 \end{aligned}$$

soit :

$$(10.2) \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{v}_a \\ \bar{v}_b \\ \bar{v}_c \\ \bar{v}_d \\ \bar{v}_e \\ \bar{v}_f \\ \bar{v}_g \\ \bar{v}_h \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

ou, en écriture abrégée :

$$(10.3) \quad [C]' \bar{v} = \{0\}.$$

Deuxième méthode.

$$\begin{aligned}
 (10.4) \quad & \bar{i}^a = i^1 \\
 & \bar{i}^b = i^1 - i^4 \\
 & \bar{i}^c = i^1 - i^2 - i^3 \\
 & \bar{i}^d = i^3 \\
 (10.5) \quad & \bar{i}^e = i^2 \\
 & \bar{i}^f = i^3 - i^4 \\
 & \bar{i}^g = i^4 \\
 & \bar{i}^h = i^2 + i^3 - i^4
 \end{aligned}$$

soit

$$\begin{Bmatrix} \bar{i}^a \\ \bar{i}^b \\ \bar{i}^c \\ \bar{i}^d \\ \bar{i}^e \\ \bar{i}^f \\ \bar{i}^g \\ \bar{i}^h \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i^1 \\ i^2 \\ i^3 \\ i^4 \end{Bmatrix}$$

ou, en écriture abrégée :

$$(10.6) \quad \{i\} = [C] i.$$

11. — PROCESSUS DE RÉOLUTION

— Établir la matrice de connexion :

$$(11.1) \quad \mathcal{C}_\alpha^a \quad [\mathcal{C}].$$

— Établir la matrice impédance de branche :

$$(11.2) \quad \bar{Z}_{ab} \quad \boxed{\bar{Z}}.$$

— Établir la matrice des f.e.m. de départ de branche :

$$(11.3) \quad \bar{E}_{0\alpha} \quad \{ \bar{E}_0 \}.$$

— Établir la matrice des f.e.m. totales de branche :

$$(11.4) \quad \bar{E}_\alpha - \bar{E}_{0\alpha} \quad \{ \bar{E} \} - \{ \bar{E}_0 \}.$$

— Calculer les matrices du repère de mailles :

$$(11.5) \quad E_\alpha - E_{0\alpha} = \mathcal{C}_\alpha^a (\bar{E}_\alpha - \bar{E}_{0\alpha}) \quad \{ E \} - \{ E_0 \} = [\mathcal{C}]' (\{ \bar{E} \} - \{ \bar{E}_0 \});$$

$$(11.6) \quad Z_{\alpha\beta} = \mathcal{C}_\alpha^a \mathcal{C}_\beta^b \bar{Z}_{ab} \quad \boxed{Z} = [\mathcal{C}]' \boxed{\bar{Z}} [\mathcal{C}].$$

— Inverser la matrice impédance :

$$(11.7) \quad (Z^{-1})^{\alpha\gamma} Z_{\gamma\beta} = \delta_\beta^\alpha \quad \boxed{Z}^{-1} \boxed{Z} = \boxed{1}.$$

— Calculer les courants de maille :

$$(11.8) \quad I^\alpha = (Z^{-1})^{\alpha\beta} (E_\beta - E_{0\beta}) \quad \{ I \} = \boxed{Z}^{-1} (\{ E \} - \{ E_0 \}).$$

— Calculer les courants de branche :

$$(11.9) \quad \bar{I}^a = \mathcal{C}_\alpha^a I^\alpha \quad \{ \bar{I} \} = [\mathcal{C}] \{ I \}.$$

— Vérifier les valeurs initiales héritées :

$$(11.10) \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \bar{I}^a = \bar{i}_0^a \quad \text{dans les branches contenant des inductances ;}$$

$$(11.11) \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\bar{I}^a}{p} = 0 \quad \text{dans les branches contenant des capacités.}$$

12. — RÉDUCTION PAR LES SOUS-MATRICES

L'emploi des sous-matrices permet le calcul fractionné d'une partie des courants de maille. Proposons-nous de calculer m courants de maille sur les M que possède le réseau. Écrivons, après un choix convenable du numérotage des mailles :

$$(12.1) \quad E_\alpha - E_{0\alpha} = Z_{\alpha\beta} I^\beta + Z_{\alpha\delta} I^\delta \quad \{ E_1 \{ - \} E_{01} \} = \boxed{Z_1} \{ I_1 \} + [Z_2] \{ I_2 \};$$

$$(12.2) \quad E_\gamma - E_{0\gamma} = Z_{\gamma\beta} I^\beta + Z_{\gamma\delta} I^\delta \quad \{ E_2 \{ - \} E_{02} \} = [Z_3] \{ I_1 \} + \boxed{Z_4} \{ I_2 \}$$

$$\alpha, \beta = 1, 2, \dots, m, \quad \gamma, \delta = m + 1, m + 2, \dots, M.$$

Sortons I^δ de (12.2) :

$$(12.3) \quad I^\delta = - (Z_{\alpha\gamma}^{-1})^{\delta\gamma} Z_{\gamma\beta} I^\beta + (Z_{\gamma\delta}^{-1})^{\delta\gamma} [E_\gamma - E_{0\gamma}];$$

$$(12.4) \quad \{ I_2 \} = - \boxed{Z_4}^{-1} [Z_3] \{ I_1 \} + \boxed{Z_4}^{-1} (\{ E_2 \} - \{ E_{02} \}),$$

et portons ce résultat dans (12.1) :

$$(12.5) \quad E_\alpha - E_{0\alpha} = Z_{\alpha\beta} I^\beta - Z_{\alpha\delta} (Z_{\gamma\delta}^{-1})^{\delta\gamma} Z_{\gamma\beta} I^\beta + Z_{\alpha\delta} (Z_{\gamma\delta}^{-1})^{\delta\gamma} [E_\gamma - E_{0\gamma}]$$

$$= [Z_{\alpha\beta} - Z_{\alpha\delta} (Z_{\gamma\delta}^{-1})^{\delta\gamma} Z_{\gamma\beta}] I^\beta + Z_{\alpha\delta} (Z_{\gamma\delta}^{-1})^{\delta\gamma} [E_\gamma - E_{0\gamma}]$$

$$\alpha, \beta = 1, 2, \dots, m, \quad \gamma, \delta = m + 1, m + 2, \dots, M;$$

$$(12.6) \quad \{ E_1 \} - \{ E_{01} \} = \boxed{Z_1} \{ I_1 \} - [Z_2] \boxed{Z_4}^{-1} [Z_3] \{ I_1 \} + [Z_2] \boxed{Z_4}^{-1} (\{ E_2 \} - \{ E_{02} \})$$

$$= \left(\boxed{Z_1} - [Z_2] \boxed{Z_4}^{-1} [Z_3] \right) \{ I_1 \} + [Z_2] \boxed{Z_4}^{-1} (\{ E_2 \} - \{ E_{02} \}).$$

Posons :

$$(12.7) \quad Z_{\alpha\beta}^* = Z_{\alpha\beta} - Z_{\alpha\delta} (Z_{\gamma\delta}^{-1})^{\delta\gamma} Z_{\gamma\beta} \quad \boxed{Z^*} = \boxed{Z_1} - [Z_2] \boxed{Z_4}^{-1} [Z_3]$$

$$(12.8) \quad \alpha, \beta = 1, 2, \dots, m, \quad \gamma, \delta = m + 1, m + 2, \dots, M.$$

Il vient, finalement, pour les m variables I^α :

$$(12.9) \quad E_\alpha - E_{0\alpha} = Z_{\alpha\beta}^* I^\beta + Z_{\alpha\delta} (Z_{\gamma\delta}^{-1})^{\delta\gamma} [E_\gamma - E_{0\gamma}];$$

$$(12.10) \quad \{ E_1 \} - \{ E_{01} \} = \boxed{Z^*} \{ I_1 \} + [Z_2] \boxed{Z_4}^{-1} (\{ E_2 \} - \{ E_{02} \}),$$

soit :

$$(12.11) \quad I^\beta = \left(Z_{\alpha\beta}^* \right)^{\beta\alpha} [E_\alpha - E_{0\alpha}] - \left(Z_{\alpha\beta}^* \right)^{\beta\alpha} Z_{\alpha\delta} (Z_{\gamma\delta}^{-1})^{\delta\gamma} [E_\gamma - E_{0\gamma}];$$

$$(12.12) \quad \{ I_1 \} = \boxed{Z^*}^{-1} (\{ E_1 \} - \{ E_{01} \}) - \boxed{Z^*}^{-1} [Z_2] \boxed{Z_4}^{-1} (\{ E_2 \} - \{ E_{02} \}),$$

ce qui donne les m courants I^β et ne nécessite l'inversion que d'une matrice d'ordre $M - m$ et d'une matrice d'ordre m . Les $M - m$ courants I^δ seront ensuite obtenus au moyen de (12.3). Ce procédé de calcul est particulièrement commode lorsque l'on peut choisir $M - m$ mailles où toutes les f.e.m. appliquées ou de départ sont nulles. A noter que si l'on peut s'arranger, par un choix judicieux des mailles, pour que la matrice Z_4 soit une matrice diagonale, alors les calculs sont encore plus commodes.

13. — EXEMPLES

PREMIER EXEMPLE. — Réseau symétrique.

Soit un réseau linéaire symétrique que nous avons représenté sur la *figure* (13.1). Son caractère topologique est :

$$(13.1) \quad S = 1, \quad B = 6, \quad N = 4, \quad P = 3, \quad M = 3.$$

Nous supposons qu'à la suite de commutations appropriées, il y avait, à l'origine des temps $t = +0$, les valeurs héritées suivantes :

$$\text{branche } c: \quad \bar{q}_0^c \neq 0;$$

$$\text{branche } e: \quad \bar{i}_0^e \neq 0;$$

$$\text{branche } f: \quad \bar{q}_0^f = 0.$$

Cet état initial aurait pu être obtenu, par exemple, en ouvrant la branche CD et en appliquant dans la branche AD une f.e.m. continue e_0 jusqu'au régime semi-permanent. Au temps $t = 0$ on aurait supprimé e_0 et fermé la branche CD , ce qui donnerait :

$$(13.2)$$

$$(13.3) \quad \bar{q}_0^c = \frac{e_0}{S} \frac{r'}{r' + r''}, \quad \bar{i}_0^e = \frac{e_0}{r' + r''}, \quad \bar{q}_0^f = 0.$$

$$(13.4)$$

Suivons, pas à pas, le processus de résolution donné au paragraphe 11.

Entre le repère de branche [*figure* (13.2)] et le repère arbitraire de mailles que nous avons choisi [*figure* (13.3)] on peut écrire les relations :

$$\begin{array}{l} (13.5) \quad \bar{i}^a = i^1 \\ (13.6) \quad \bar{i}^b = -i^1 + i^2 \\ (13.7) \quad \bar{i}^c = -i^1 + i^3 \\ \bar{i}^d = i^2 \\ \bar{i}^e = i^2 - i^3 \\ \bar{i}^f = i^3 \end{array} \quad \text{soit} \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{i}^a \\ \bar{i}^b \\ \bar{i}^c \\ \bar{i}^d \\ \bar{i}^e \\ \bar{i}^f \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} i^1 \\ i^2 \\ i^3 \end{array} \right\}$$

ou, en écriture abrégée :

$$\{\bar{i}\} = [C] \{i\}.$$

Fig. 13.1

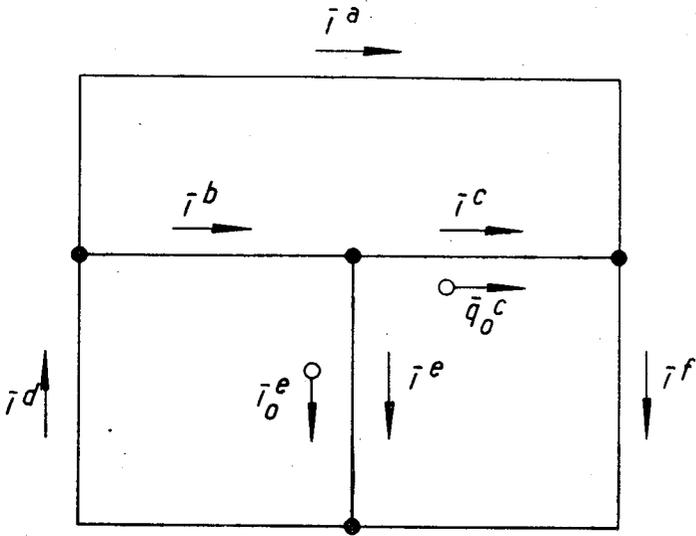
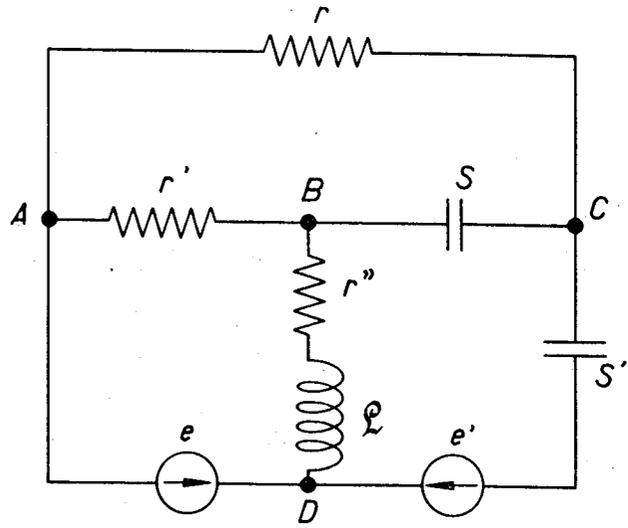
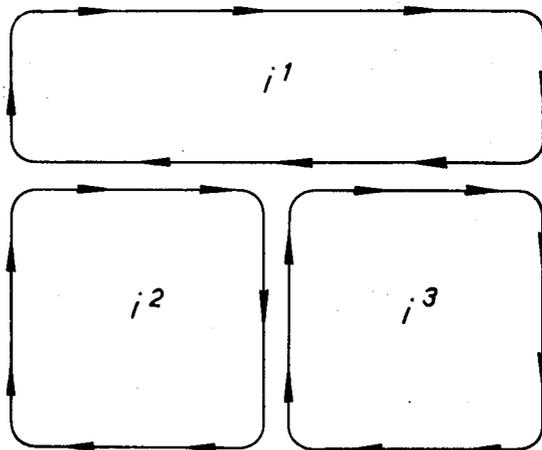


Fig. 13.2

Fig. 13.3



Écrivons la matrice impédance de branche :

$$(13.8) \quad \boxed{\bar{Z}} = \begin{bmatrix} r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r' & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{S}{p} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r'' + \mathcal{L}^2 p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{S'}{p} \end{bmatrix}$$

Puis la matrice colonne des f.e.m. de départ de branche :

$$(13.9) \quad \begin{pmatrix} \bar{E}_{0a} \\ \bar{E}_{0b} \\ \bar{E}_{0c} \\ \bar{E}_{0d} \\ \bar{E}_{0e} \\ \bar{E}_{0f} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S' \end{bmatrix} \begin{pmatrix} + \\ + \\ q_0 \\ + \\ + \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$- \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathcal{L}^2 p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} + \\ + \\ + \\ + \\ i_0 \\ + \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ S q_0 \\ 0 \\ -\mathcal{L}^2 p i_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Les valeurs marquées d'une croix (+) sont les valeurs initiales « ignorées », ceci pour les distinguer des valeurs « héritées ».

Nous pouvons maintenant écrire la matrice colonne des f.e.m. totales de branche :

$$(13.10) \quad \begin{pmatrix} \bar{E}_a - \bar{E}_{0a} \\ \bar{E}_b - \bar{E}_{0b} \\ \bar{E}_c - \bar{E}_{0c} \\ \bar{E}_d - \bar{E}_{0d} \\ \bar{E}_e - \bar{E}_{0e} \\ \bar{E}_f - \bar{E}_{0f} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -E \\ 0 \\ E' \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ S q_0 \\ 0 \\ -\mathcal{L}^2 p i_0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -S q_0 \\ -E \\ \mathcal{L}^2 p i_0 \\ E' \end{pmatrix}$$

Calculons maintenant les matrices $\{E\} - \{E_0\}$ et \boxed{Z} dans le repère de mailles choisi :

$$(13.11) \quad \begin{Bmatrix} E_1 - E_{01} \\ E_2 - E_{02} \\ E_3 - E_{03} \end{Bmatrix} = [\mathcal{C}]' \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -Sq_0 \\ -E \\ \mathcal{L}pi_0 \\ E' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Sq_0 \\ -E + \mathcal{L}pi_0 \\ E' - Sq_0 - \mathcal{L}pi_0 \end{Bmatrix};$$

$$(13.12) \quad \boxed{Z} = [\mathcal{C}]' \boxed{\bar{Z}} [\mathcal{C}] = \begin{bmatrix} r + r' + \frac{S}{p} & -r' & -\frac{S}{p} \\ -r' & r' + r'' + \mathcal{L}p & -r'' - \mathcal{L}p \\ -\frac{S}{p} & -r'' - \mathcal{L}p & r'' + \mathcal{L}p + \frac{S+S'}{p} \end{bmatrix}.$$

Le calcul de l'inverse de \boxed{Z} donne :

$$(13.13) \quad \boxed{Z}^{-1} = \frac{1}{\boxed{Z}} \begin{bmatrix} r' \mathcal{L}p + [r' r'' + \mathcal{L}(S + S')] + \frac{(r' + r'')(S + S')}{p} & r' \mathcal{L}p + (r' r'' + \mathcal{L}^2 S) + \frac{r' (S + S') + r'' S}{p} & r' \mathcal{L}p + (r' r'' + \mathcal{L}^2 S) + \frac{(r' + r'') S}{p} \\ r' \mathcal{L}p + (r' r'' + \mathcal{L}^2 S) + \frac{r' (S + S') + r'' S}{p} & (r + r') \mathcal{L}p + rr'' + r' r'' + \mathcal{L}^2 S + \frac{(r + r') (S + S') + r'' S}{p} + \frac{SS'}{p^2} & (r + r') \mathcal{L}p + rr'' + r' r'' + \mathcal{L}^2 S + \frac{(r' + r'') S}{p} \\ r' \mathcal{L}p + (r' r'' + \mathcal{L}^2 S) + \frac{(r' + r'') S}{p} & (r + r') \mathcal{L}p + rr'' + r' r'' + \mathcal{L}^2 S + \frac{(r' + r'') S}{p} & (r + r') \mathcal{L}p + rr'' + r' r'' + r'' r + \mathcal{L}^2 S + \frac{(r' + r'') S}{p} \end{bmatrix}$$

où :

$$(13.14) \quad |Z| = rr' \mathcal{L}p + (rr' r'' + r \mathcal{L}S + r \mathcal{L}S' + r' \mathcal{L}S') \\ + [r(r' + r'')(S + S') + r' r'' S' + \mathcal{L}SS'] \frac{1}{p} \\ + \frac{(r' + r'') SS'}{p^2}.$$

Nous calculerons maintenant les courants de maille :

$$(13.15) \quad \begin{pmatrix} I^1 \\ I^2 \\ I^3 \end{pmatrix} = \boxed{Z}^{-1} \begin{pmatrix} Sq_0 \\ -E + \mathcal{L}pi_0 \\ E' - Sq_0 - \mathcal{L}pi_0 \end{pmatrix},$$

soit :

$$(13.16) \quad I^1 = -\frac{1}{|Z|} \left(r' \mathcal{L}p + r' r'' + \mathcal{L}S + \frac{r'(S + S') + r'' S}{p} \right) E \\ + \frac{1}{|Z|} \left(r' \mathcal{L}p + r' r'' + \mathcal{L}S + \frac{(r' + r'') S}{p} \right) E' \\ + \frac{1}{|Z|} \left(\mathcal{L}SS' + \frac{(r' + r'') SS'}{p} \right) q_0 \\ + \frac{1}{|Z|} r' \mathcal{L}S' i_0, \\ I^2 = -\frac{1}{|Z|} \left((r + r') \mathcal{L}p + rr'' + r' r'' + \mathcal{L}S + \frac{(r + r')(S + S') + r'' S}{p} + \frac{SS'}{p^2} \right) E \\ + \frac{1}{|Z|} \left((r + r') \mathcal{L}p + rr'' + r' r'' + \mathcal{L}S + \frac{(r' + r'') S}{p} \right) E' \\ + \frac{1}{|Z|} \left(-r \mathcal{L}Sp - rr'' S + \frac{r' SS'}{p} \right) q_0 \\ + \frac{1}{|Z|} \left((rS + rS' + r' S') \mathcal{L} + \frac{SS' \mathcal{L}}{p} \right) i_0, \\ I^3 = -\frac{1}{|Z|} \left((r + r') \mathcal{L}p + rr'' + r' r'' + \mathcal{L}S + \frac{r' + r''}{p} S \right) E \\ + \frac{1}{|Z|} \left((r + r') \mathcal{L}p + rr' + r' r'' + r'' r + \mathcal{L}S + \frac{(r' + r'') S}{p} \right) E' \\ - \frac{1}{|Z|} (r \mathcal{L}Sp + rr' S + rr'' S) q_0 \\ - \frac{1}{|Z|} rr' \mathcal{L}pi_0,$$

et enfin les six courants de branche, sauf :

$$(13.17) \quad \bar{I}a = I^1, \quad \bar{I}d = I^2, \quad \bar{I}t = I^3,$$

déjà calculés ci-dessus :

$$\begin{aligned}
 \bar{I}^b &= -I^1 + I^2 \\
 &= -\frac{1}{|Z|} \left(r \mathcal{L}p + rr'' + \frac{r(S+S')}{p} + \frac{SS'}{p^2} \right) E \\
 &\quad + \frac{1}{|Z|} (r \mathcal{L}p + rr'') E' \\
 &\quad - \frac{1}{|Z|} \left(r \mathcal{L}Sp + rr'' S + \mathcal{L}SS' + \frac{r'' SS'}{p} \right) q_0 \\
 &\quad + \frac{1}{|Z|} \left((rS + rS') \mathcal{L} + \frac{\mathcal{L}SS'}{p} \right) i_0, \\
 \bar{I}^c &= -I^1 + I^3 \\
 &= -\frac{1}{|Z|} \left(r \mathcal{L}p + rr'' - \frac{r' S'}{p} \right) E \\
 (13.18) \quad &\quad + \frac{1}{|Z|} (r \mathcal{L}p + rr' + rr'') E' \\
 &\quad - \frac{1}{|Z|} \left(r \mathcal{L}Sp + rr' S + rr'' S - \mathcal{L}SS' - \frac{(r' + r'') SS'}{p} \right) q_0 \\
 &\quad - \frac{1}{|Z|} (rr' \mathcal{L}p + r' \mathcal{L}S) i_0, \\
 \bar{I}^e &= I^2 - I^3 \\
 &= -\frac{1}{|Z|} \left(\frac{rS + rS' + r' S'}{p} + \frac{SS'}{p^2} \right) E \\
 &\quad + \frac{1}{|Z|} rr' E' \\
 &\quad + \frac{1}{|Z|} \left(rr' S + \frac{r' SS'}{p} \right) q_0 \\
 &\quad + \frac{1}{|Z|} \left(rr' \mathcal{L}p + (rS + rS' + r' S') \mathcal{L} + \frac{SS' \mathcal{L}}{p} \right) i_0.
 \end{aligned}$$

Vérifions que les valeurs initiales des fonctions obtenues comprennent bien celles qui ont été héritées :

$$\begin{aligned}
 \bar{i}_0^a &= \lim_{p \rightarrow \infty} \bar{I}^a = -\frac{E + E'}{r}, \\
 \bar{i}_0^b &= \lim_{p \rightarrow \infty} \bar{I}^b = -\frac{E + E'}{r'} - \frac{S}{r'} q_0, \\
 \bar{i}_0^c &= \lim_{p \rightarrow \infty} \bar{I}^c = -\frac{E + E'}{r'} - \frac{S}{r'} q_0 - i_0, \\
 \bar{i}_0^d &= \lim_{p \rightarrow \infty} \bar{I}^d = \frac{r + r'}{rr'} (E' - E) - \frac{S}{r'} q_0, \\
 \bar{i}_0^e &= \lim_{p \rightarrow \infty} \bar{I}^e = i_0 \quad (\text{héritée}), \\
 \bar{i}_0^f &= \lim_{p \rightarrow \infty} \bar{I}^f = \frac{r + r'}{rr'} (E' - E) - \frac{S}{r'} q_0 - i_0.
 \end{aligned}$$

(13.19)

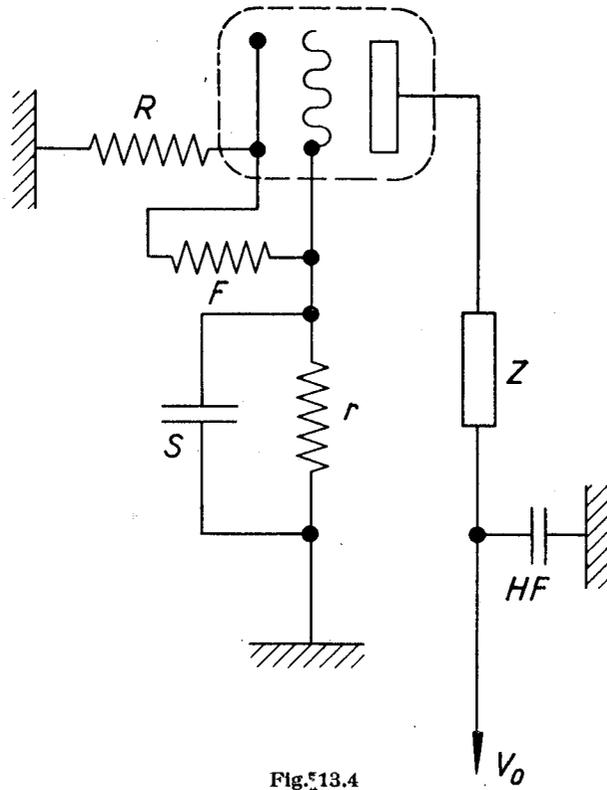


Fig. 5.13.4

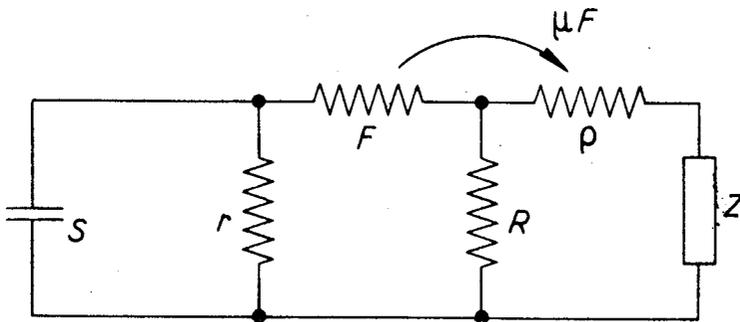


Fig. 13.5

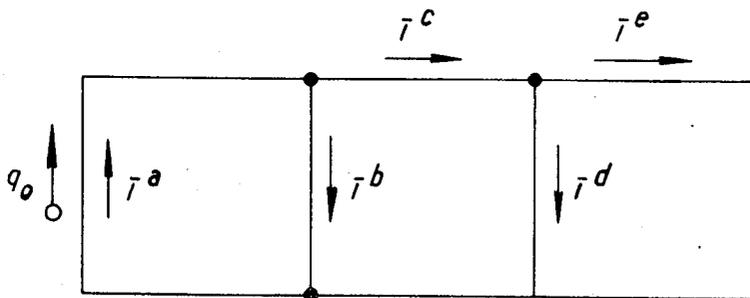


Fig. 13.6

Par ailleurs, on a bien, dans les branches contenant des capacités :

$$(13.20) \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\bar{I}^c}{p} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\bar{I}^f}{p} = 0.$$

Toutes les conditions initiales imposées sont donc vérifiées.

DEUXIÈME EXEMPLE. — Réseau non symétrique.

Nous avons pris comme exemple [figure (13.4)] l'étude de la décharge d'un condensateur S aux bornes d'entrée d'un tube électronique (triode ou pentode théorique) monté en réaction de courant dans la cathode (résistance R). Pour permettre la mise en équations (1) nous avons inséré une résistance auxiliaire F entre cathode et grille. Tous calculs faits on fera tendre F vers ∞ .

Le réseau équivalent est donné par la figure (13.5) ; il a pour caractère topologique :

$$S = 1, \quad B = 5, \quad N = 3, \quad P = 2, \quad M = 3.$$

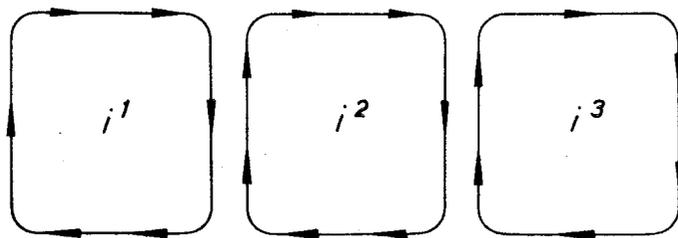


Fig. 13.7

Matrice de connexion [figures (13.6) et (13.7)].

$$(13.21) \quad \begin{aligned} \bar{i}^a &= i^1 \\ \bar{i}^b &= -i^1 + i^2 \\ \bar{i}^c &= i^2 \\ \bar{i}^d &= i^2 - i^3 \\ \bar{i}^e &= i^3 \end{aligned} \quad \text{soit} \quad \begin{pmatrix} \bar{i}^a \\ \bar{i}^b \\ \bar{i}^c \\ \bar{i}^d \\ \bar{i}^e \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} i^1 \\ i^2 \\ i^3 \end{pmatrix}.$$

Matrice impédance de branche.

$$(13.23) \quad \boxed{\bar{Z}} = \begin{bmatrix} \frac{S}{p} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & \mu F & 0 & \rho + z \end{bmatrix}.$$

(1) Voir référence K45.

Matrice des f.e.m. de branche.

(Aucune f.e.m. appliquée, une seule f.e.m. de départ) :

$$(13.24) \quad \begin{pmatrix} \bar{E}_a - \bar{E}_{0a} \\ \bar{E}_b - \bar{E}_{0b} \\ \bar{E}_c - \bar{E}_{0c} \\ \bar{E}_d - \bar{E}_{0d} \\ \bar{E}_e - \bar{E}_{0e} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Sq_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Matrice des f.e.m. de maille.

$$(13.25) \quad \begin{pmatrix} E_1 - E_{01} \\ E_2 - E_{02} \\ E_3 - E_{03} \end{pmatrix} = [C]' \begin{pmatrix} Sq_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Sq_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Matrice impédance de maille.

$$(13.26) \quad [Z] = [C]' [\bar{Z}] [C] = \begin{bmatrix} r + \frac{S}{p} & -r & 0 \\ -r & r + R + F & -R \\ 0 & -R + \mu F & \rho + R + z \end{bmatrix}.$$

Inversion.

$$(13.26 \text{ bis}) \quad [Z]^{-1} = \frac{1}{|Z|} \begin{bmatrix} r\rho + rR + rz + R\rho + Rz + F(\rho + z + (\mu + 1)R) & r(\rho + R + z) & rR \\ r(\rho + R + z) & \left(r + \frac{S}{p}\right)(\rho + R + z) & R\left(r + \frac{S}{p}\right) \\ rR - \mu rF & R\left(r + \frac{S}{p}\right) - \mu F\left(r + \frac{S}{p}\right) & rR + \frac{Sr}{p} + \frac{SR}{p} + F\left(r + \frac{S}{p}\right) \end{bmatrix},$$

avec :

$$(13.27) \quad |Z| = rR(\rho + z) + Fr(\rho + z + (\mu + 1)R) + \frac{S}{p}[r\rho + rR + rz + R\rho + Rz + F(\rho + z + (\mu + 1)R)].$$

Courants de maille.

$$\begin{pmatrix} I^1 \\ I^2 \\ I^3 \end{pmatrix} = [Z]^{-1} \begin{pmatrix} Sq_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

soit :

$$(13.28) \quad \begin{aligned} I^1 &= \frac{1}{|Z|} [r\rho + rR + rz + R\rho + Rz + F(\rho + z + (\mu + 1)R)] Sq_0, \\ I^2 &= \frac{1}{|Z|} [r(\rho + R + z)] Sq_0, \\ I^3 &= \frac{1}{|Z|} [rR - \mu rF] Sq_0. \end{aligned}$$

Courants de branche.

D'après (13.21) et (13.28) :

$$(13.29)$$

$$(13.30) \quad \bar{I}^a = I^1, \quad \bar{I}^c = I^2, \quad \bar{I}^e = I^3,$$

$$(13.31)$$

et :

$$(13.32) \quad \bar{I}^b = -I^1 + I^2 = -\frac{1}{|Z|} [R\rho + Rz + F(\rho + z + (\mu + 1)R)] Sq_0;$$

$$(13.33) \quad \bar{I}^d = I^2 - I^3 = \frac{1}{|Z|} [r\rho + rz + \mu rF] Sq_0.$$

Vérification des conditions initiales.

$$(13.34) \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\bar{I}^a}{p} = 0, \quad \text{ce que montre (13.29).}$$

Cas où $E = \infty$.

Pour une réaction de courant dans la cathode on suppose $F = \infty$; il vient alors :

$$(13.35) \quad \begin{aligned} \bar{I}^a &= \lim_{F \rightarrow \infty} \bar{I}^a = \frac{S}{r + \frac{S}{p}} q_0 = \frac{S}{r} \frac{p}{p + \frac{S}{r}} q_0, \\ \bar{I}^b &= \lim_{F \rightarrow \infty} \bar{I}^b = -\frac{S}{r} \frac{p}{p + \frac{S}{r}} q_0, \\ \bar{I}^c &= \lim_{F \rightarrow \infty} \bar{I}^c = 0, \\ \bar{I}^d &= \lim_{F \rightarrow \infty} \bar{I}^d = \frac{\mu r S q_0}{(\rho + z + (\mu + 1)R) \left(r + \frac{S}{p} \right)} = \frac{\mu S}{(\rho + z + (\mu + 1)R)} \cdot \frac{p}{p + \frac{S}{r}} q_0, \\ \bar{I}^e &= \lim_{F \rightarrow \infty} \bar{I}^e = \frac{-\mu r S q_0}{(\rho + z + (\mu + 1)R) \left(r + \frac{S}{p} \right)} = \frac{-\mu S}{(\rho + z + (\mu + 1)R)} \cdot \frac{p}{p + \frac{S}{r}} q_0. \end{aligned}$$

La manière dont le condensateur se décharge exponentiellement dans le circuit d'entrée apparaît nettement, tandis qu'un phénomène identique se produit dans le

circuit de sortie, si z est une résistance pure ou une inductance avec ou sans pertes ; si z est un circuit bouchon il peut se produire des oscillations amorties, d'autant plus amorties que ρ et μ sont élevés. Dans cet exemple aucun courant initial n'est hérité et l'on a :

$$(13.36) \quad \bar{i}_0^a = \bar{i}_0^b = \frac{S}{r} q_0, \quad \bar{i}_0^c = 0, \quad \bar{i}_0^d = -\bar{i}_0^e = -\frac{\mu S}{\rho + z + (\mu + 1) R} q_0.$$

Enfin, le coefficient d'amplification $-\frac{\bar{V}_e}{\bar{V}_a}$ a pour valeur :

$$(13.37) \quad k = -\frac{\bar{V}_e}{\bar{V}_a} = -\frac{z\bar{i}^e}{Sq_0} = \frac{\mu}{1 + \frac{\rho}{z} + (\mu + 1) \frac{R}{z}}$$

c'est le résultat qu'on obtiendrait en appliquant une f.e.m. quelconque e dans la branche a et en comparant cette f.e.m. à la d.d.p. aux bornes de la branche e .

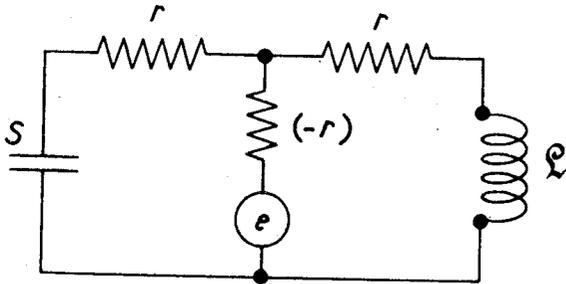


Fig. 13.8

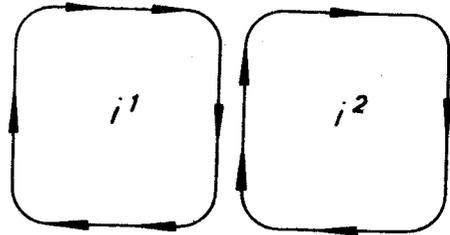


Fig. 13.9

TROISIÈME EXEMPLE. — Matrice impédance identiquement singulière.

L'exemple simple ci-dessus [figures (13.8) et (13.9)] montre que l'on peut concevoir la réalisation d'un montage où la matrice impédance de maille est singulière. En effet, si $(-r)$ est une résistance négative réalisée, par exemple, avec un effet dynatron, on a :

$$(13.38) \quad [Z] = \begin{bmatrix} \frac{S}{\rho} & r \\ r & \mathcal{L}^2 p \end{bmatrix};$$

$$(13.39) \quad |Z| = \mathcal{L}^2 S - r^2.$$

$$(13.40) \quad \text{Pour } \mathcal{L}^2 S = r^2 \quad \text{on a} \quad |Z| = 0.$$

État d'instabilité où les courants deviendraient infinis si la limitation par courbure de la caractéristique dynatron ne limitait la linéarité du phénomène et ne ramenait l'ensemble à des oscillations issues d'un système non linéaire.

REPÈRES DE DIFFÉRENCES DE POTENTIEL ENTRE PAIRES DE NŒUDS

14. — OBTENTION D'UN REPÈRE DE DIFFÉRENCES DE POTENTIEL ENTRE PAIRES DE NŒUDS

Nous appellerons « *branche à admittance* » d'un réseau électrique, une branche contenant une source de courant j , une inductance inverse Γ ($\Gamma = \frac{1}{L}$), une perditance G ($G = \frac{1}{R}$) et une capacité C , disposées en *parallèle* [figure (14.1)]. Nous nous placerons

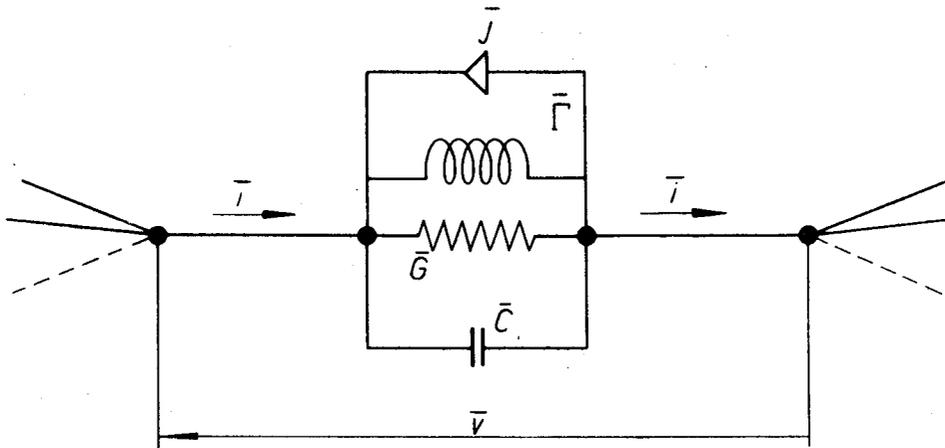


Fig. 14.1

dans le cas général où les éléments Γ , G et C seront des constantes localisées électriques ou leurs analogues formels. Les grandeurs j , Γ , G et C seront non toutes nulles, autrement il ne s'agirait pas d'une branche, mais d'un circuit ouvert.

Considérons un réseau électrique de caractère topologique S, B, N, P, M , formé en totalité de « branches à admittance ». Choisissons arbitrairement sur ce réseau un sens pour chacune des B différences de potentiel entre extrémités de branche :

$$\bar{v}_a \quad a = 1, 2, \dots, B.$$

La loi d'Ohm, duale de celle qui a été considérée au paragraphe 3, appliquée à chacune des branches de ce réseau, nous permet d'écrire :

$$(14.1) \quad \bar{i}^a + \bar{j}^a = \bar{C}^{ab} \frac{d\bar{v}_b}{dt} + \bar{G}^{ab} \bar{v}_b + \bar{\Gamma}^{ab} \int \bar{v}_b dt \quad a, b = 1, 2, \dots, B,$$

avec :

$$(14.2) \quad \int \bar{v}_b dt = \int_0^t \bar{v}_b dt + \bar{b}_{0b},$$

où les $\bar{\Gamma}^{aa}$, \bar{G}^{aa} , \bar{C}^{aa} sont les constantes localisées propres à la branche a et $\bar{\Gamma}^{ab}$, \bar{G}^{ab} , \bar{C}^{ab} ($a \neq b$) sont les coefficients de couplage de la d.d.p. \bar{v}_b dans la branche a . Dans le cas général où nous nous placerons, ces constantes ne formeront pas nécessairement des tableaux symétriques.

- \bar{i}^a est le courant circulant dans la branche a ;
- \bar{j}^a est la somme des sources de courant appliquée à la branche a ;
- \bar{v}_a est la d.d.p. entre les extrémités de la branche a ;
- \bar{v}_{0a} est la valeur de \bar{v}_a pour $t = +0$;
- \bar{b}_a est la percussion dans la branche a ;
- \bar{b}_{0a} est la valeur de \bar{b}_a pour $t = +0$.

Avec des notations similaires à celles utilisées au paragraphe 5 et en introduisant cette fois encore la « transformation de Carson-Laplace », nous aurons :

$$(14.3) \quad \bar{I}^a + \bar{J}^a = \left(\bar{C}^{ab} p + \bar{G}^{ab} + \frac{\bar{\Gamma}^{ab}}{p} \right) \bar{V}_b + \bar{\Gamma}^{ab} \bar{b}_{0b} - \bar{C}^{ab} p \bar{v}_{0b} \quad a, b = 1, 2, \dots, B.$$

Nous appellerons « intensités de départ » de la branche a , la quantité :

$$(14.4) \quad \bar{J}_0^a = \bar{\Gamma}^{ab} \bar{b}_{0b} - \bar{C}^{ab} p \bar{v}_{0b} \quad a, b = 1, 2, \dots, B,$$

et les équations (14.3) s'écriront :

$$(14.5) \quad \bar{I}^a + \bar{J}^a - \bar{J}_0^a = \bar{Y}^{ab} \bar{V}_b \quad a, b = 1, 2, \dots, B,$$

où nous appelons « matrice admittance de branche » du réseau, le tableau formé avec les B^2 éléments \bar{Y}^{ab} :

$$(14.6) \quad \bar{Y}^{ab} = \bar{C}^{ab} p + \bar{G}^{ab} + \frac{\bar{\Gamma}^{ab}}{p} \quad a, b = 1, 2, \dots, B.$$

Maintenant choisissons P différences de potentiel v_α $\alpha = 1, 2, \dots, P$ entre paires de nœuds linéairement indépendantes constituant un repère de d.d.p. entre paires de nœuds. Entre les d.d.p. v_α et les d.d.p. \bar{v}_a de branche, on peut établir des relations telles que (4.4) soit :

$$(14.7) \quad \bar{v}_a = \mathcal{O}_a^\alpha v_\alpha \quad a = 1, 2, \dots, B, \quad \alpha = 1, 2, \dots, P.$$

La matrice singulière formée avec les éléments \mathcal{O}_a^α est appelée « matrice de connexion de paires de nœuds ».

Les éléments de la matrice \mathcal{O}_a^α étant des constantes, nous pouvons écrire :

$$(14.8) \quad \bar{V}_a = \mathcal{O}_a^\alpha V_\alpha \quad a = 1, 2, \dots, B, \quad \alpha = 1, 2, \dots, P.$$

Portons (14.8) dans (14.5), il vient :

$$(14.9) \quad \bar{I}^a + \bar{J}^a - \bar{J}_0^a = \bar{Y}^{ab} \mathcal{O}_a^\alpha V_\alpha \quad a = 1, 2, \dots, B, \quad \alpha = 1, 2, \dots, P.$$

Réalisons la « connexion des branches en paires de nœuds » en effectuant la multiplication contractée de (14.9) par \mathcal{O}_a^α :

$$(14.10) \quad \mathcal{O}_a^\alpha \bar{I}^a + \mathcal{O}_a^\alpha \bar{J}^a - \mathcal{O}_a^\alpha \bar{J}_0^a = \bar{Y}^{ab} \mathcal{O}_a^\alpha \mathcal{O}_b^\beta V_\beta \quad a = 1, 2, \dots, B, \quad \alpha = 1, 2, \dots, P.$$

Mais, d'après la propriété topologique (4.3) :

$$(14.11) \quad \mathcal{O}_a^\alpha \bar{I}^a = 0 \quad a = 1, 2, \dots, B, \quad \alpha = 1, 2, \dots, P.$$

Il vient, finalement :

$$(14.12) \quad \mathcal{O}_a^\alpha \bar{J}^a - \mathcal{O}_a^\alpha \bar{J}_0^a = \bar{Y}^{ab} \mathcal{O}_a^\alpha \mathcal{O}_b^\beta V_\beta \quad \begin{array}{l} a = 1, 2, \dots, B, \\ \alpha = 1, 2, \dots, P. \end{array}$$

Appelons :

$$(14.13) \quad J^\alpha = \mathcal{O}_a^\alpha \bar{J}^a \quad \text{source de courant de la paire de nœuds } \alpha ;$$

$$(14.14) \quad J_0^\alpha = \mathcal{O}_a^\alpha \bar{J}_0^a \quad \text{intensité de départ de la p.d.n. } \alpha ;$$

$$(14.15) \quad Y^{\alpha\beta} = \mathcal{O}_a^\alpha \mathcal{O}_b^\beta \bar{Y}^{ab} \quad \text{élément } \alpha\beta \text{ de la « matrice admittance de p.d.n. ».}$$

Ainsi, finalement, les P équations de paires de nœuds s'écriront :

$$(14.16) \quad J^\alpha - J_0^\alpha = Y^{\alpha\beta} V_\beta \quad \alpha, \beta = 1, 2, \dots, P.$$

Le calcul donnera pour valeur des V_α :

$$(14.17) \quad V_\alpha = (Y^{-1})_{\alpha\beta} (J^\beta - J_0^\beta) \quad \alpha, \beta = 1, 2, \dots, P,$$

où $(Y^{-1})_{\alpha\beta}$ est l'élément $\alpha\beta$ de la matrice inverse de la matrice formée avec les éléments $Y^{\alpha\beta}$.

Et les d.d.p. de branche seront données par :

$$(14.18) \quad \bar{V}_a = \mathcal{O}_a^\alpha V_\alpha = \mathcal{O}_a^\alpha (Y^{-1})_{\alpha\beta} (J^\beta - J_0^\beta) \quad \begin{array}{l} \alpha, \beta = 1, 2, \dots, P, \\ a = 1, 2, \dots, B. \end{array}$$

15. — PRÉSENCE DE TENSEURS DANS LES REPÈRES DE PAIRES DE NŒUDS

THÉORÈME IV (dual du théorème I).

Les produits contractés :

$$(15.1) \quad J^\alpha V_\alpha, \quad J_0^\alpha V_\alpha, \quad (J^\alpha - J_0^\alpha) V_\alpha \quad \alpha = 1, 2, \dots, P$$

sont des invariants lorsqu'on passe d'un repère de p.d.n. à un autre et leur valeur respective est :

$$\bar{J}^a \bar{V}_a, \quad \bar{J}_0^a \bar{V}_a, \quad (\bar{J}^a - \bar{J}_0^a) \bar{V}_a \quad a = 1, 2, \dots, B.$$

La démonstration est la même qu'au paragraphe 6.

Conséquence.

Il existe une forme bilinéaire invariante dans les repères de paires de nœuds :

$$(15.2) \quad L = Y^{\alpha\beta} V_\alpha V_\beta = Y'^{\lambda\mu} V'_\lambda V'_\mu \quad \alpha, \beta, \lambda, \mu = 1, 2, \dots, P.$$

Nous appellerons L « invariant opérationnel fondamental » dans les repères de paires de nœuds.

THÉORÈME V (dual du théorème II).

$$(15.3) \quad \det Y^{\alpha\beta} = (\det D_\alpha^\lambda)^2 \det Y'^{\lambda\mu},$$

où D_α^λ est donné par :

$$(15.4) \quad V_\alpha = D_\alpha^\lambda V'_\lambda \quad \alpha, \lambda = 1, 2, \dots, P.$$

Finalement :

— tenseurs une fois contravariants :

$$(15.5)$$

$$(15.6) \quad J^\alpha = D_\lambda^\alpha J'^\lambda, \quad J_0^\alpha = D_\lambda^\alpha J'_0{}^\lambda, \quad J^\alpha - J_0^\alpha = D_\lambda^\alpha (J'^\lambda - J'_0{}^\lambda) \quad \alpha, \lambda = 1, 2, \dots, P;$$

$$(15.7)$$

— tenseur une fois covariant :

$$(15.8) \quad V_\alpha = D_\alpha^\lambda V'_\lambda \quad \alpha, \lambda = 1, 2, \dots, P;$$

— tenseur deux fois contravariant :

$$(15.9) \quad Y^{\alpha\beta} = D_\lambda^\alpha D_\mu^\beta Y'^{\lambda\mu} \quad \alpha, \beta, \lambda, \mu = 1, 2, \dots, P;$$

— formule invariante :

$$(15.10) \quad J^\alpha - J_0^\alpha = Y^{\alpha\beta} V_\beta, \quad J'^\lambda - J'_0{}^\lambda = Y'^{\lambda\mu} V'_\mu \quad \alpha, \beta, \lambda, \mu = 1, 2, \dots, P;$$

$$(15.11)$$

— invariants :

$$(15.12) \quad J^\alpha V_\alpha = J'^\lambda V'_\lambda, \quad J_0^\alpha V_\alpha = J'_0{}^\lambda V'_\lambda, \quad (J^\alpha - J_0^\alpha) V_\alpha = (J'^\lambda - J'_0{}^\lambda) V'_\lambda$$

$$(15.13)$$

$$(15.14) \quad \alpha, \lambda = 1, 2, \dots, P;$$

— invariant opérationnel fondamental :

$$(15.15) \quad L = Y^{\alpha\beta} V_\alpha V_\beta = Y'^{\lambda\mu} V'_\lambda V'_\mu \quad \alpha, \beta, \lambda, \mu = 1, 2, \dots, P;$$

— pseudo-scalaire de poids 2 :

$$(15.16) \quad \det Y^{\alpha\beta} = (\det D_\alpha^\lambda)^2 \det Y'^{\lambda\mu}.$$

Tout ce qui a été dit au paragraphe 6 peut être retransposé dualistiquement ici. En particulier les conditions (6.29) et (6.30) seront transposées et l'on conclura, comme

au paragraphe 6, qu'une condition suffisante pour que la matrice $Y^{\alpha\beta}$ soit singulière est qu'il existe au moins une paire de nœuds d'indice r , dans laquelle :

$$(15.17) \quad Y^{r1} \equiv Y^{r2} \equiv \dots \equiv Y^{rr} \equiv \dots \equiv Y^{rp} \equiv 0$$

ou :

$$(15.18) \quad Y^{1r} \equiv Y^{2r} \equiv \dots \equiv Y^{rr} \equiv \dots \equiv Y^{pr} \equiv 0.$$

16. — PROPRIÉTÉS DUALISTIQUES

Considérations énergétiques.

THÉORÈME VI (dual du théorème III).

On démontrera, comme au paragraphe 7 que, si l'on admet que l'énergie instantanée fournie au réseau a pour expression :

$$(16.1) \quad w = \bar{j}^a \bar{v}_a \quad a = 1, 2, \dots, B,$$

il en résulte que :

$$(16.2) \quad w = j^\alpha v_\alpha = j'^\lambda v'_\lambda \quad \alpha, \lambda = 1, 2, \dots, P,$$

et il existe un autre invariant :

$$(16.3) \quad L' = J^\alpha V_\alpha = J'^\lambda V'_\lambda = \bar{J}^a \bar{V}_a \quad \begin{array}{l} a = 1, 2, \dots, B, \\ \alpha, \lambda = 1, 2, \dots, P. \end{array}$$

Corollaire.

$$(16.4) \quad L = (J^\alpha - J_0^\alpha) V_\alpha = (J'^\lambda - J_0'^\lambda) V'_\lambda = (\bar{J}^a - \bar{J}_0^a) \bar{V}_a \quad \begin{array}{l} a = 1, 2, \dots, B, \\ \alpha, \lambda = 1, 2, \dots, P. \end{array}$$

Autre expression mathématique de l'invariant fondamental.

La transposition dualistique des calculs faits au paragraphe 8 nous donnera :

$$(16.5) \quad L' = J^\alpha V_\alpha = Y^{\alpha\beta} (\mathbf{V}_\alpha \mathbf{V}_\beta - \mathbf{V}_{0\alpha} \mathbf{V}_{0\beta}) \quad \alpha, \beta = 1, 2, \dots, P.$$

17. — MISE EN PLACE DES VALEURS INITIALES

Les d.d.p. \bar{v}_{0a} et les percussions \bar{b}_{0a} dans les branches ne peuvent être imposées que dans les branches où l'on rencontre une capacité pour les premières et une inductance pour les secondes ; ce seront les valeurs initiales « héritées », les autres seront dites « ignorées ». La manière de raisonner est celle du paragraphe 9, transposée dualistiquement. On vérifiera :

$$(17.1) \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \bar{V}_a = v_{0a} \quad \text{là où les } v_{0a} \text{ sont héritées ;}$$

$$(17.2) \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\bar{V}_a}{p} = 0 \quad \text{là où les } b_{0a} \text{ sont héritées.}$$

Les valeurs v_{0a} héritées devront être compatibles avec le système d'équations :

$$(17.3) \quad C_a^\alpha \bar{v}_a = 0 \quad a = 1, 2, \dots, B, \quad \alpha = 1, 2, \dots, P,$$

où C_a^α est une matrice de « connexion de maille » arbitraire du réseau. On définira, comme au paragraphe 9, une matrice de continuité par dualisme et l'on en tirera des conclusions analogues ; le théorème donné dans ce paragraphe sera également transposé dualistiquement ici.

18. — DÉTERMINATION DE LA MATRICE DE CONNEXION

Pour former un repère de paires de nœuds il suffit de réaliser un arbre. Les figures (18.1), (18.2) et (18.3) montrent, sur un exemple, comment on peut réaliser de tels repères. L'un (18.2) possède une origine commune (potentiel zéro), l'autre (18.3) n'a pas une origine commune pour les paires de nœuds.

Pour obtenir la matrice de connexion on peut soit considérer les courants entrant et sortant dans chacun des nœuds autre que le nœud origine [figure (18.2)], ou encore, on peut obtenir cette matrice en examinant les égalités que l'on peut écrire entre les d.d.p. de branche et celles des paires de nœuds. La première méthode est seulement valable dans le cas où l'arbre a un nœud origine.

Première méthode [repère figure (18.2)].

On écrira :

$$(18.1) \quad \begin{aligned} \bar{i}^a - \bar{i}^b - \bar{i}^e - \bar{i}^f &= 0 && \text{(nœud 1),} \\ -\bar{i}^a + \bar{i}^c + \bar{i}^h &= 0 && \text{(nœud 2),} \\ \bar{i}^b - \bar{i}^c + \bar{i}^d &= 0 && \text{(nœud 3),} \\ \bar{i}^f - \bar{i}^g - \bar{i}^h &= 0 && \text{(nœud 4),} \end{aligned}$$

soit :

$$(18.2) \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{i}^a \\ \bar{i}^b \\ \bar{i}^c \\ \bar{i}^d \\ \bar{i}^e \\ \bar{i}^f \\ \bar{i}^g \\ \bar{i}^h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ou, en écriture abrégée :

$$(18.3) \quad [\mathcal{O}]' \bar{i} = 0.$$

Fig. 18.1

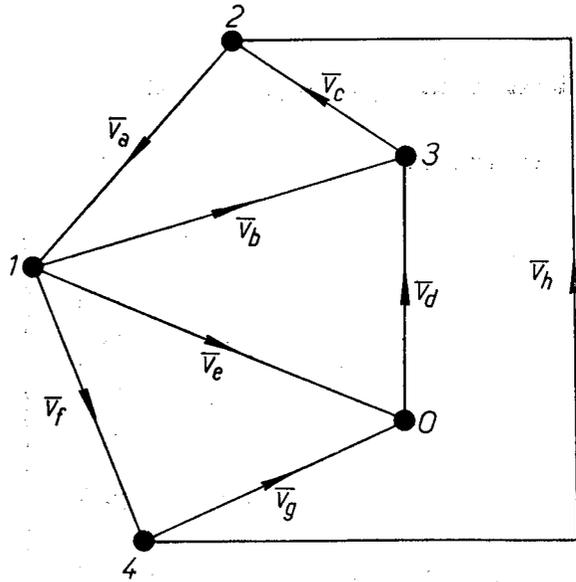


Fig. 18.2

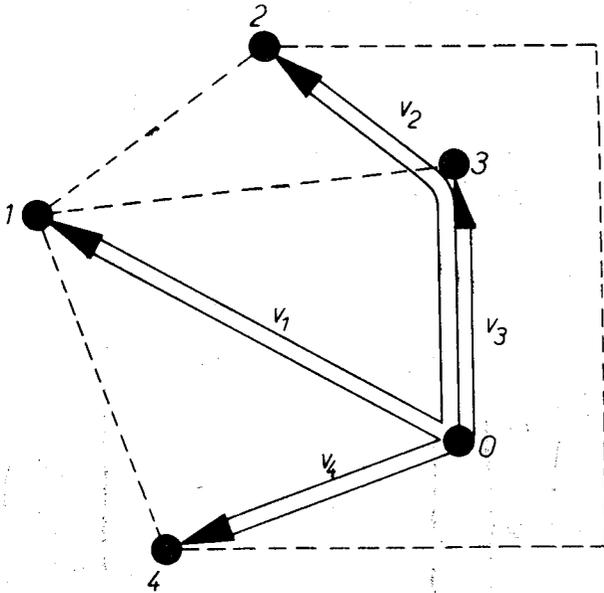
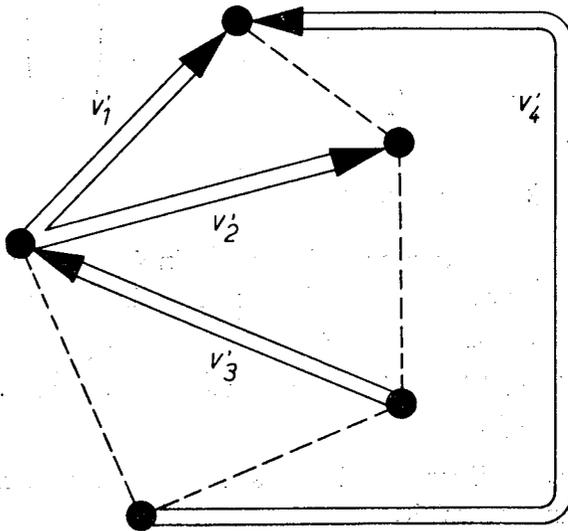


Fig. 18.3



Deuxième méthode [repère *figure* (18.2)].

On écrira :

$$\begin{array}{l}
 \bar{v}_a = v_1 - v_2 \\
 \bar{v}_b = -v_1 + v_3 \\
 \bar{v}_c = v_2 - v_3 \\
 (18.4) \quad \bar{v}_d = v_3 \\
 (18.5) \quad \bar{v}_e = -v_1 \\
 \bar{v}_f = -v_1 + v_4 \\
 \bar{v}_g = -v_4 \\
 \bar{v}_h = v_2 - v_4
 \end{array}
 \quad \text{soit} \quad
 \left\{ \begin{array}{c} \bar{v}_a \\ \bar{v}_b \\ \bar{v}_c \\ \bar{v}_d \\ \bar{v}_e \\ \bar{v}_f \\ \bar{v}_g \\ \bar{v}_h \end{array} \right\} =
 \begin{bmatrix}
 1 & -1 & 0 & 0 \\
 -1 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 1 & -1 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 \\
 -1 & 0 & 0 & 0 \\
 -1 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & -1 \\
 0 & 1 & 0 & -1
 \end{bmatrix}
 \left\{ \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \right\}$$

ou, en écriture abrégée :

$$(18.6) \quad \{ \bar{v} \} = [O] \{ v \}.$$

Deuxième méthode [repère *figure* (18.3)].

$$\begin{array}{l}
 \bar{v}_a = -v'_1 \\
 \bar{v}_b = v'_2 \\
 \bar{v}_c = v'^1 - v'^2 \\
 (18.7) \quad \bar{v}_d = v'^2 + v'^3 \\
 (18.8) \quad \bar{v}_e = -v'_3 \\
 \bar{v}_f = v'_1 - v'_4 \\
 \bar{v}_g = -v'_1 - v'_3 + v'_4 \\
 \bar{v}_h = v'_4
 \end{array}
 \quad \text{soit} \quad
 \left\{ \begin{array}{c} \bar{v}_a \\ \bar{v}_b \\ \bar{v}_c \\ \bar{v}_d \\ \bar{v}_e \\ \bar{v}_f \\ \bar{v}_g \\ \bar{v}_h \end{array} \right\} =
 \begin{bmatrix}
 -1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 \\
 1 & -1 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & -1 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & -1 \\
 -1 & 0 & -1 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 1
 \end{bmatrix}
 \left\{ \begin{array}{c} v'_1 \\ v'_2 \\ v'_3 \\ v'_4 \end{array} \right\}.$$

PREMIÈRE REMARQUE IMPORTANTE.

Dans les cas pratiques qui intéressent l'ingénieur, les courants injectés dans le réseau ne sont pas donnés forcément dans les paires de nœuds choisies.

Entre les $P = N - S$ courants injectés et les P courants j^α dans les paires de nœuds choisies, existe une transformation non singulière qui permet de connaître les courants j^α .

La *figure* (18.4) nous en donne un exemple. Montrons comment obtenir les courants cherchés.

Écrivons P équations parmi les $P + 1$ équations de nœuds :

	$a = j^1 + j^2 + j^3$	$j^1 = a + b + c - d,$
(18.9)	$b + c = -j^3$	$j^2 = d,$
(18.10)	$d - e = -j^1 + j^4$	$j^3 = -b - c,$
	$d = j^2$	$j^4 = a + b + c - e,$
	$a + c = j^5$	$j^5 = a + c.$

On en tire facilement :

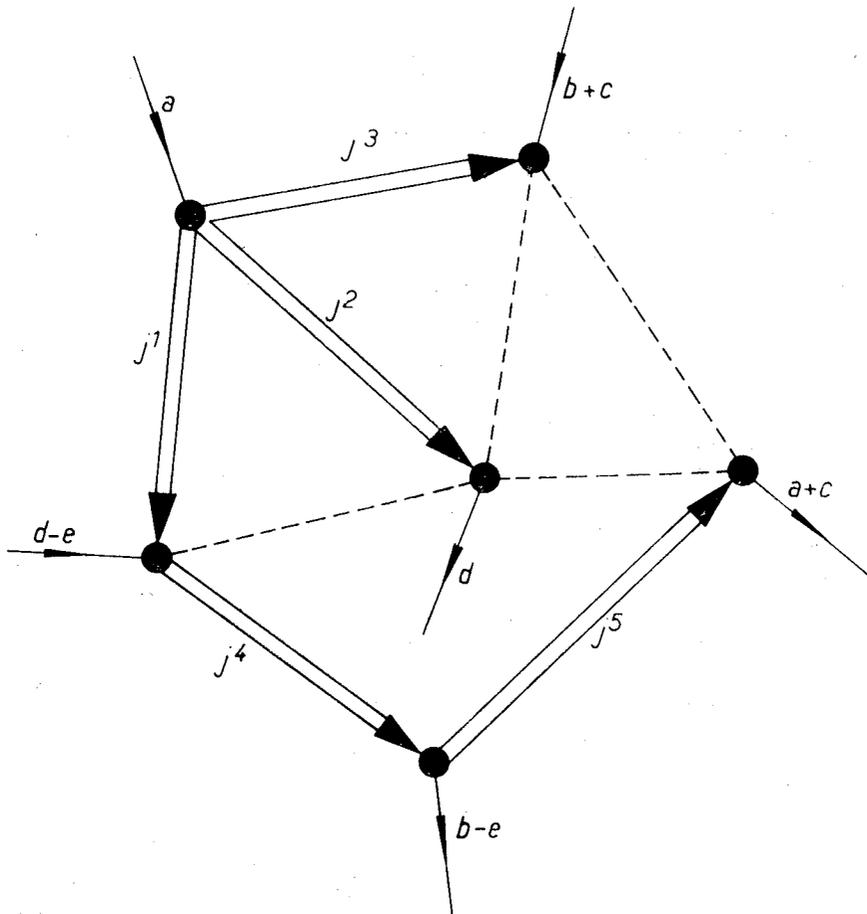


Fig. 18.4

DEUXIÈME REMARQUE IMPORTANTE.

On ne peut pas déterminer les B intensités de branche \bar{j}^a (courants injectés dans les branches) ; il est impossible de les donner d'une manière unique, mais ceci ne présente aucune importance puisqu'ils vérifient de toute façon, dans n'importe quel repère de paires de nœuds, les relations :

$$(18.11) \quad j^\alpha = \mathcal{D}_a^\alpha \bar{j}^a \quad \begin{array}{l} a = 1, 2, \dots, B, \\ \alpha = 1, 2, \dots, P. \end{array}$$

19. — PROCESSUS DE RÉOLUTION

— Établir la matrice de connexion :

$$(19.1) \quad \mathcal{O}_a^\alpha \quad [\mathcal{O}].$$

— Établir la matrice admittance de branche :

$$(19.2) \quad \bar{Y}^{ab} \quad \boxed{\bar{Y}}.$$

— Établir la matrice des intensités de départ de branche :

$$(19.3) \quad \bar{J}_0^\alpha \quad \{ \bar{J}_0 \}.$$

— Calculer les matrices du repère de paires de nœuds :

$$(19.4) \quad J_0^\alpha = \mathcal{O}_a^\alpha \bar{J}_0^\alpha \quad \{ J_0 \} = [\mathcal{O}]' \{ \bar{J}_0 \};$$

$$(19.5) \quad Y^{\alpha\beta} = \mathcal{O}_a^\alpha \mathcal{O}_b^\beta \bar{Y}^{ab} \quad \boxed{Y} = [\mathcal{O}]' \boxed{\bar{Y}} [\mathcal{O}].$$

— Inverser la matrice admittance :

$$(19.6) \quad (Y^{-1})_{\alpha\gamma} Y^{\gamma\beta} = \delta_\alpha^\beta \quad \boxed{Y}^{-1} \boxed{Y} = \boxed{1}.$$

— Calculer les d.d.p. entre paires de nœuds :

$$(19.7) \quad V_\alpha = (Y^{-1})_{\alpha\beta} (J^\beta - J_0^\beta) \quad \{ V \} = \boxed{Y}^{-1} (\{ J \} - \{ J_0 \}).$$

Les courants injectés sont donnés, en général, dans les nœuds; une transformation non singulière donnera les courants J^α dans le repère de nœuds choisi.

— Calculer les d.d.p. de branche :

$$(19.8) \quad \bar{V}_a = \mathcal{O}_a^\alpha V_\alpha \quad \{ \bar{V} \} = [\mathcal{O}] \{ V \}.$$

— Vérifier les valeurs initiales héritées :

$$(19.9) \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \bar{V}_a = \bar{v}_{0a} \quad \text{dans les branches où existent des capacités ;}$$

$$(19.10) \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\bar{V}_a}{p} = 0 \quad \text{dans les branches où existent des inductances.}$$

20. — RÉDUCTION PAR LES SOUS-MATRICES

On peut opérer comme nous l'avons fait au paragraphe 12 :

$$(20.1) \quad J^\alpha - J_0^\alpha = Y^{\alpha\beta} V_\beta + Y^{\alpha\delta} V_\delta \quad \{ J_1 \{ - \} J_{01} \} = \boxed{Y_1} \{ V_1 \} + [Y_2] \{ V_2 \};$$

$$(20.2) \quad J^\gamma - J_0^\gamma = Y^{\gamma\beta} V_\beta + Y^{\gamma\delta} V_\delta \quad \{ J_2 \{ - \} J_{02} \} = [Y_3] \{ V_1 \} + \boxed{Y_4} \{ V_2 \}$$

$$\alpha, \beta = 1, 2, \dots, p, \quad \gamma, \delta = p + 1, p + 2, \dots, P.$$

Sortons V_δ de (20.2) :

$$(20.3) \quad V_\delta = - \left(Y^{\gamma\delta} \right)_{\delta\gamma}^{-1} Y^{\gamma\beta} V_\beta + \left(Y^{\gamma\delta} \right)_{\delta\gamma}^{-1} (J^\gamma - J_0^\gamma);$$

$$(20.4) \quad \{ V_2 \} = - \boxed{Y_4}^{-1} [Y_3] \{ V_1 \} + \boxed{Y_4}^{-1} (\{ J_2 \} - \{ J_{02} \}),$$

et portons ce résultat dans (20.1) :

$$(20.5) \quad J^\alpha - J_0^\alpha = Y^{\alpha\beta} V_\beta - Y^{\alpha\delta} \left(Y^{\gamma\delta} \right)_{\delta\gamma}^{-1} Y^{\gamma\beta} V_\beta + Y^{\alpha\delta} \left(Y^{\gamma\delta} \right)_{\delta\gamma}^{-1} (J^\gamma - J_0^\gamma)$$

$$= [Y^{\alpha\beta} - Y^{\alpha\delta} \left(Y^{\gamma\delta} \right)_{\delta\gamma}^{-1} Y^{\gamma\beta}] V_\beta + Y^{\alpha\delta} \left(Y^{\gamma\delta} \right)_{\delta\gamma}^{-1} (J^\gamma - J_0^\gamma)$$

$$\alpha, \beta = 1, 2, \dots, p, \quad \gamma, \delta = p + 1, p + 2, \dots, P;$$

$$(20.6) \quad \{ J_1 \} - \{ J_{01} \} = \boxed{Y_1} \{ V_1 \} - [Y_2] \boxed{Y_4}^{-1} [Y_3] \{ V_1 \} + [Y_2] \boxed{Y_4}^{-1} (\{ J_2 \} - \{ J_{02} \})$$

$$= \left(\boxed{Y_1} - [Y_2] \boxed{Y_4}^{-1} [Y_3] \right) \{ V_1 \} + [Y_2] \boxed{Y_4}^{-1} (\{ J_2 \} - \{ J_{02} \}).$$

Posons :

$$(20.7) \quad Y^{*\alpha\beta} = Y^{\alpha\beta} - Y^{\alpha\delta} \left(Y^{\gamma\delta} \right)_{\delta\gamma}^{-1} Y^{\gamma\beta} \quad \boxed{Y^*} = \boxed{Y_1} - [Y_2] \boxed{Y_4}^{-1} [Y_3]$$

$$(20.8) \quad \alpha, \beta = 1, 2, \dots, p, \quad \gamma, \delta = p + 1, p + 2, \dots, P.$$

Il vient, finalement, pour les p variables V_α :

$$(20.9) \quad J^\alpha - J_0^\alpha = Y^{*\alpha\beta} V_\beta + Y^{\alpha\delta} \left(Y^{\gamma\delta} \right)_{\delta\gamma}^{-1} [J^\gamma - J_0^\gamma];$$

$$(20.10) \quad \{ J_1 \} - \{ J_{01} \} = \boxed{Y^*} \{ V_1 \} + [Y_2] \boxed{Y_4}^{-1} (\{ J_2 \} - \{ J_{02} \}),$$

soit :

$$(20.11) \quad V_\beta = (Y^{*\alpha\beta})_{\beta\alpha} [J^\alpha - J'_0] - (Y^{*\alpha\beta})_{\beta\alpha} Y^{\alpha\delta} (Y^{\gamma\delta})_{\delta\gamma} [J'_* - J'_0];$$

$$(20.12) \quad \{V_1\} = \boxed{Y^*}^{-1} (\{J_1\} - \{J_{01}\}) - \boxed{Y^*}^{-1} [Y_2] \boxed{Y_4}^{-1} (\{J_2\} - \{J_{02}\}).$$

On se reportera aux conclusions du paragraphe 12.

21. — EXEMPLES

PREMIER EXEMPLE.

Soit le réseau représenté sur la *figure* (21.1) ou (21.2).

On rencontre dans ce réseau :

- une source de courant : j ;
- deux d.d.p. initiales : v_0 et v'_0 ;
- une percussion initiale : b_0 .

Le caractère topologique de ce réseau est :

$$S = 1, \quad B = 4, \quad N = 3, \quad P = 2, \quad M = 2.$$

Suivons, pas à pas, le processus indiqué au paragraphe 19.

Choisissons le repère arbitraire indiqué sur la *figure* (21.4) pour les paires de nœuds et les sens, également arbitraires, pour les d.d.p. de branche [*figure* (21.3)].

Nous pouvons écrire :

$$(21.1) \quad \begin{aligned} \bar{v}_a &= v_1 \\ \bar{v}_b &= v_1 + v_2 \\ (21.2) \quad \bar{v}_c &= v_2 \\ \bar{v}_d &= v_2 \end{aligned} \quad \text{soit} \quad \begin{pmatrix} \bar{v}_a \\ \bar{v}_b \\ \bar{v}_c \\ \bar{v}_d \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

ou, en écriture abrégée :

$$(21.3) \quad \{\bar{v}\} = [\mathcal{O}] \{v\}.$$

Écrivons la matrice admittance de branche :

$$(21.4) \quad \boxed{\bar{Y}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{Lp} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Cp & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C'p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{g} \end{bmatrix}.$$

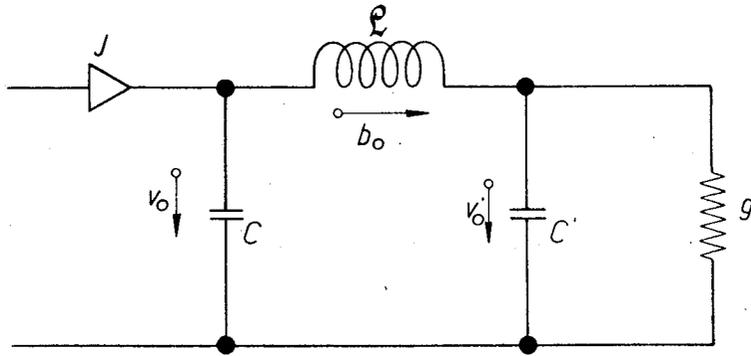


Fig. 21.1

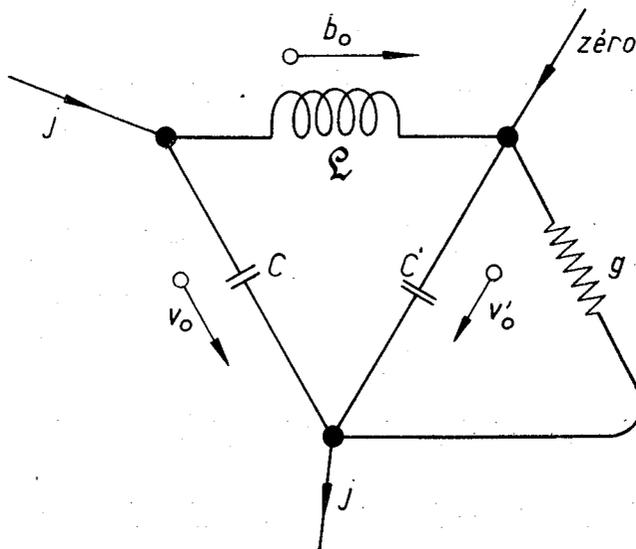


Fig. 21.2

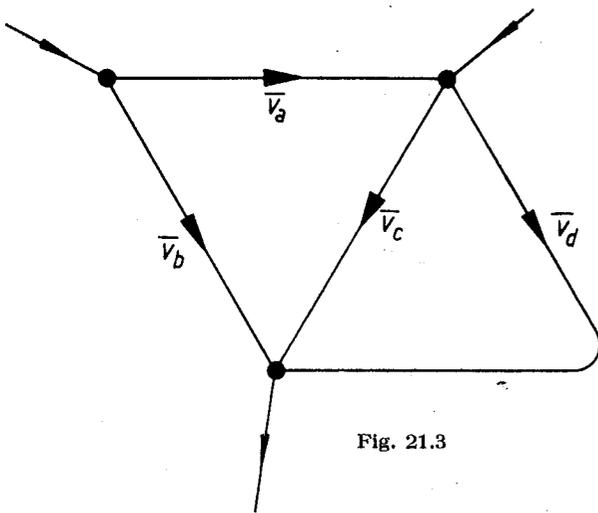


Fig. 21.3

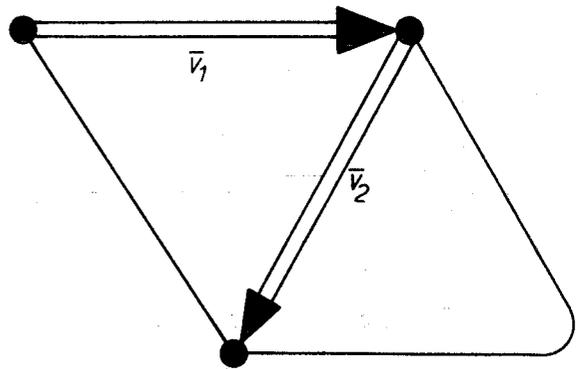


Fig. 21.4

Puis la matrice colonne des intensités de départ :

$$(21.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{J}_0^a \\ \bar{J}_0^b \\ \bar{J}_0^c \\ \bar{J}_0^d \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cccc} \frac{1}{\mathcal{L}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} b_0 \\ + \\ + \\ + \end{array} \right\} - \left[\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Cp & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C'p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} + \\ v_0 \\ v'_0 \\ + \end{array} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \frac{b_0}{\mathcal{L}} \\ -Cpv_0 \\ -C'pv'_0 \\ 0 \end{array} \right\},$$

d'où la matrice colonne des intensités de départ de paires de nœuds :

$$(21.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} J_0^1 \\ J_0^2 \end{array} \right\} = [\mathcal{O}]' \left\{ \begin{array}{l} \bar{J}_0^a \\ \bar{J}_0^b \\ \bar{J}_0^c \\ \bar{J}_0^d \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{b_0}{\mathcal{L}} - Cpv_0 \\ -(Cv_0 + C'v'_0)p \end{array} \right\}.$$

Déterminons les courants injectés dans les paires de nœuds choisies ; on a :

$$(21.7) \quad j = j^1, \quad 0 = -j^1 + j^2 \quad \text{soit} \quad j^1 = j, \quad j^2 = j.$$

(21.8)

Les matrices $\{J\} = \{J_0\}$ et \boxed{Y} sont donc :

$$(21.9) \quad \left\{ \begin{array}{l} J^1 \\ J^2 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} J_0^1 \\ J_0^2 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} J - \frac{b_0}{\mathcal{L}} + Cpv_0 \\ J + Cpv_0 + C'pv'_0 \end{array} \right\};$$

$$(21.10) \quad \boxed{Y} = [\mathcal{O}]' \boxed{\bar{Y}} [\mathcal{O}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\mathcal{L}p} + Cp & Cp \\ Cp & (C + C')p + g \end{bmatrix}.$$

Le calcul de l'inverse de \boxed{Y} donne :

$$(21.11) \quad \boxed{Y}^{-1} = \frac{1}{CC'p^2 + Cpg + \frac{C+C'}{\mathcal{L}} + \frac{g}{\mathcal{L}p}} \begin{bmatrix} (C + C')p + g & -Cp \\ -Cp & \frac{1}{\mathcal{L}p} + Cp \end{bmatrix}.$$

Nous obtenons donc les d.d.p. entre paires de nœuds :

$$(21.12) \quad \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \boxed{Y}^{-1} \begin{pmatrix} J - \frac{b_0}{\mathcal{L}} + Cpv_0 \\ J + Cpv_0 + C'pv'_0 \end{pmatrix},$$

soit :

$$(21.13) \quad V_1 = \frac{(C'p + g)pJ - \left(\frac{C+C'}{\mathcal{L}}p + \frac{g}{\mathcal{L}}\right)pb_0 + (CC'p + Cg)p^2v_0 - CC'p^3v'_0}{CC'p^3 + Cgp^2 + \frac{C+C'}{\mathcal{L}}p + \frac{g}{\mathcal{L}}};$$

$$(21.14) \quad V_2 = \frac{\frac{1}{\mathcal{L}}J + \frac{C}{\mathcal{L}}p^2b_0 + \frac{C}{\mathcal{L}}pv_0 + \left(CC'p^2 + \frac{C'}{\mathcal{L}}\right)pv'_0}{CC'p^3 + Cgp^2 + \frac{C+C'}{\mathcal{L}}p + \frac{g}{\mathcal{L}}}.$$

Il vient, finalement :

$$(21.15) \quad \begin{aligned} \bar{V}_a = V_1, \quad \bar{V}_c = \bar{V}_d = V_2 \quad \text{donnés ci-dessus;} \\ \bar{V}_b = V_1 + V_2 \\ = \frac{\left(C'p^2 + gp + \frac{1}{\mathcal{L}}\right)J - \left(\frac{C'}{\mathcal{L}}p^2 + \frac{g}{\mathcal{L}}p\right)b_0 + \left(CC'p^3 + Cgp^2 + \frac{C}{\mathcal{L}}p\right)v_0 + \frac{C'}{\mathcal{L}}pv'_0}{CC'p^3 + Cgp^2 + \frac{C+C'}{\mathcal{L}}p + \frac{g}{\mathcal{L}}}. \end{aligned}$$

Vérification des valeurs initiales héritées :

$$(21.16) \quad \begin{aligned} \bar{v}_{0a} &= \lim_{p \rightarrow \infty} \bar{V}_a = v_0 - v'_0, \\ \bar{v}_{0b} &= \lim_{p \rightarrow \infty} \bar{V}_b = v_0, \\ \bar{v}_{0c} &= \lim_{p \rightarrow \infty} \bar{V}_c = v'_0, \\ \bar{v}_{0d} &= \lim_{p \rightarrow \infty} \bar{V}_d = v'_0, \\ \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\bar{V}_r}{p} &= 0 \quad r = a, b, c, d. \end{aligned}$$

DEUXIÈME EXEMPLE.

Reprenons l'exemple électronique de la *figure* (13.4). Cette fois nous décomposons le réseau en paires de nœuds [*figures* (21.5) et (21.6)].

En plaçant entre ρ et A un nœud supplémentaire le caractère topologique du réseau devient :

$$(21.17) \quad S = 1, \quad B = 6, \quad N = 4, \quad P = 3, \quad M = 3.$$

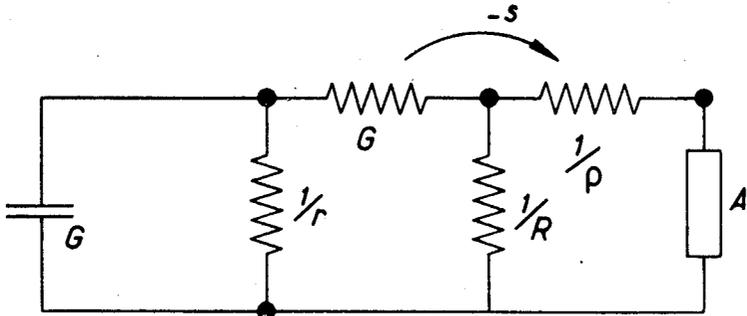


Fig. 21.5

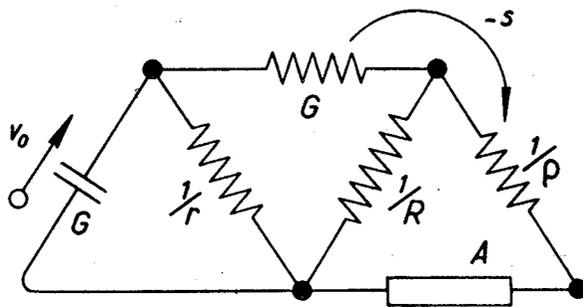


Fig. 21.6

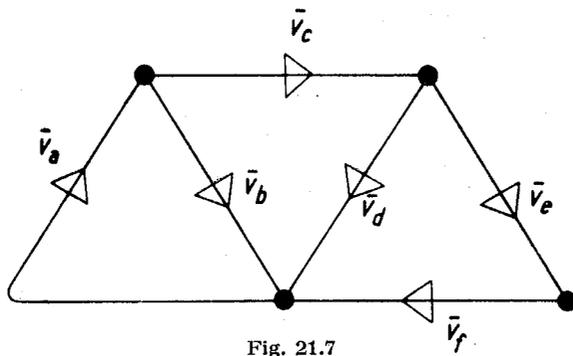


Fig. 21.7

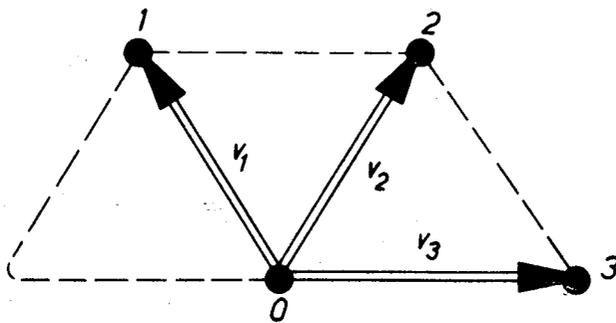


Fig. 21.8

Avant de faire le calcul de ce réseau nous rappellerons que la matrice impédance du tube électronique assimilé à une triode théorique sans capacités parasites est :

$$(21.18) \quad \begin{bmatrix} F & 0 \\ \mu F & \rho \end{bmatrix}.$$

La matrice admittance du même tube est :

$$(21.19) \quad \begin{bmatrix} G & 0 \\ -s & \frac{1}{\rho} \end{bmatrix},$$

où $G = \frac{1}{F}$ est la conductance auxiliaire introduite dans le réseau pour son dessin (1). On prendra $G = 0$. D'autre part, $s = \frac{\mu}{\rho}$ est la transconductance du tube.

Choisissons le repère arbitraire indiqué sur la *figure* (21.8) et les sens, également arbitraires, pour les d.d.p. de branche [*figure* (21.7)].

Nous pouvons écrire :

Matrice de connexion.

$$\begin{aligned} \bar{v}_a &= v_1 & (21.20) \\ \bar{v}_b &= -v_1 & (21.21) \\ \bar{v}_c &= -v_1 + v_2 & (21.22) \\ \bar{v}_d &= -v_2 \\ \bar{v}_e &= -v_2 + v_3 \\ \bar{v}_f &= -v_3 \end{aligned} \quad \text{soit} \quad \begin{pmatrix} \bar{v}_a \\ \bar{v}_b \\ \bar{v}_c \\ \bar{v}_d \\ \bar{v}_e \\ \bar{v}_f \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

ou, en écriture abrégée :

$$\bar{v} = [\mathcal{O}] v.$$

Matrice admittance de branche.

$$(21.23) \quad \boxed{\bar{Y}} = \begin{bmatrix} Cp & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -s & 0 & \frac{1}{\rho} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad G = 0$$

(1) On utilise la méthode présentée par J. THOUZERY dans son article : *Les réseaux amplificateurs étudiés par la méthode tensorielle*, Rad. Techn. Digest, vol. VI, n° 6 et vol. VII, n° 1, 1952.

Matrice des intensités de branche.

(Aucune source de courant, une seule intensité de départ.)

$$(21.24) \quad \begin{pmatrix} \bar{J}^a - \bar{J}_0^a \\ \bar{J}^b - \bar{J}_0^b \\ \bar{J}^c - \bar{J}_0^c \\ \bar{J}^d - \bar{J}_0^d \\ \bar{J}^e - \bar{J}_0^e \\ \bar{J}^f - \bar{J}_0^f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Cpv_0 \\ 0 \\ Q \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Matrice des intensités de paire de nœuds.

$$(21.25) \quad \begin{pmatrix} J^1 - J_0^1 \\ J^2 - J_0^2 \\ J^3 - J_0^3 \end{pmatrix} = [\mathcal{O}]' \begin{pmatrix} Cpv_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Cpv_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Matrice admittance de paire de nœuds.

$$(21.26) \quad \boxed{\mathbf{Y}} = [\mathcal{O}]' \boxed{\bar{\mathbf{Y}}} [\mathcal{O}] = \begin{bmatrix} Cp + \frac{1}{r} & 0 & 0 \\ -s & s + \frac{1}{R} + \frac{1}{\rho} & -\frac{1}{\rho} \\ s & -s - \frac{1}{\rho} & \frac{1}{\rho} + A \end{bmatrix}$$

Inversion.

$$(21.27) \quad \boxed{\mathbf{Y}}^{-1} = \frac{1}{\left(Cp + \frac{1}{r}\right) \left[A \left(s + \frac{1}{R} + \frac{1}{\rho} \right) + \frac{1}{\rho R} \right]} \times \begin{bmatrix} A \left(s + \frac{1}{R} + \frac{1}{\rho} \right) + \frac{1}{\rho R} & 0 & 0 \\ As & \left(Cp + \frac{1}{r} \right) \left(\frac{1}{\rho} + A \right) & \frac{1}{\rho} \left(Cp + \frac{1}{r} \right) \\ -\frac{s}{R} & \left(Cp + \frac{1}{r} \right) \left(s + \frac{1}{\rho} \right) & \left(Cp + \frac{1}{r} \right) \left(s + \frac{1}{R} + \frac{1}{\rho} \right) \end{bmatrix}$$

Différences de potentiel entre paires de nœuds.

$$(21.28) \quad \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} = \boxed{\mathbf{Y}}^{-1} \begin{pmatrix} Cpv_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ce qui donne :

$$(21.29) \quad \begin{aligned} V_1 &= \frac{Cp}{Cp + \frac{1}{r}} v_0, \\ V_2 &= \frac{AsCp}{\left(Cp + \frac{1}{r}\right) \left[A \left(s + \frac{1}{R} + \frac{1}{\rho} \right) + \frac{1}{\rho R} \right]} v_0, \\ V_3 &= \frac{-sCp}{\left(Cp + \frac{1}{r}\right) \left[A \left(s + \frac{1}{R} + \frac{1}{\rho} \right) + \frac{1}{\rho R} \right]} v_0. \end{aligned}$$

Différences de potentiel de branche.

On a déjà :

$$(21.30) \quad \bar{V}_a = V_1, \quad \bar{V}_b = -V_1, \quad \bar{V}_d = -V_2, \quad \bar{V}_f = -V_3;$$

il vient :

$$(21.31) \quad \bar{V}_c = -V_1 + V_2 = \frac{-\left[A \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{\rho} \right) + \frac{1}{R\rho} \right] Cp}{\left(Cp + \frac{1}{r}\right) \left[A \left(s + \frac{1}{R} + \frac{1}{\rho} \right) + \frac{1}{\rho R} \right]} v_0;$$

$$(21.32) \quad \bar{V}_e = -V_2 + V_3 = \frac{-\left(\frac{1}{R} + A \right) sCp}{\left(Cp + \frac{1}{r}\right) \left[A \left(s + \frac{1}{R} + \frac{1}{\rho} \right) + \frac{1}{\rho R} \right]} v_0.$$

Vérifions les valeurs initiales :

$$(21.33) \quad \begin{aligned} \bar{v}_{0a} &= \lim_{p \rightarrow \infty} \bar{V}_a = v_0, & \bar{v}_{0b} &= \lim_{p \rightarrow \infty} \bar{V}_b = -v_0, \\ \bar{v}_{0c} &= \lim_{p \rightarrow \infty} \bar{V}_c = \frac{-\left[A \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{\rho} \right) + \frac{1}{R\rho} \right]}{A \left(s + \frac{1}{R} + \frac{1}{\rho} \right) + \frac{1}{R\rho}} v_0, \\ \bar{v}_{0d} &= \lim_{p \rightarrow \infty} \bar{V}_d = \frac{-As}{A \left(s + \frac{1}{R} + \frac{1}{\rho} \right) + \frac{1}{R\rho}} v_0, \\ \bar{v}_{0e} &= \lim_{p \rightarrow \infty} \bar{V}_e = \frac{-\left(\frac{1}{R} + A \right) s}{A \left(s + \frac{1}{R} + \frac{1}{\rho} \right) + \frac{1}{R\rho}} v_0, \\ \bar{v}_{0f} &= \lim_{p \rightarrow \infty} \bar{V}_f = \frac{\frac{s}{R}}{A \left(s + \frac{1}{R} + \frac{1}{\rho} \right) + \frac{1}{R\rho}} v_0, \\ \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\bar{V}_r}{p} &= 0 \quad r = a, b, \dots, f. \end{aligned}$$

CHAPITRE IV

REPÈRES COMPLETS

22. — ÉQUATIONS DANS UN REPÈRE COMPLET CONSTRUIT SUR LES MAILLES

Considérons un réseau électrique de caractère topologique S, B, N, P, M , constitué de « branches à impédance » où sont placées des sources de tension et de courant [la figure (22.1) montre une branche de ce réseau]. Choisissons sur ce réseau un sens pour chacun des b courants de branche $\bar{i}^a \quad a = 1, 2, \dots, B$, et pour chacune des B sources de courant $\bar{j}^a \quad a = 1, 2, \dots, B$, les \bar{j}^a étant prises dans le même sens que les \bar{i}^a .

Appliquons la loi d'Ohm; on écrira :

$$(22.1) \quad \bar{v}_a + \bar{e}_a = \bar{r}_{ab} \frac{d}{dt}(\bar{i}^b + \bar{j}^b) + R_{ab}(\bar{i}^b + \bar{j}^b) + \bar{S}_{ab} \int (\bar{i}^b + \bar{j}^b) dt$$

$$a, b = 1, 2, \dots, B.$$

En plus des entités définies dans les chapitres précédents, nous utiliserons la notion « d'itinéraire entre deux nœuds ». Un tel itinéraire sera, purement et simplement, un chemin unique entre deux nœuds. Lorsque nous choisirons par la suite une paire de nœuds nous lui associerons un itinéraire arbitraire où, par hypothèse, passera un courant j^λ tel que :

$$(22.1 \text{ bis}) \quad \bar{j}^a = {}_2C_\lambda^a j^\lambda \quad a = 1, 2, \dots, B, \quad \lambda = 1, 2, \dots, P,$$

où ${}_2C_\lambda^a$ représente (1) le nombre de fois où l'itinéraire relatif à la paire de nœuds λ passe dans la branche a .

Entre les courants de branche $\bar{i}^a + \bar{j}^a$, les courants i^α d'un repère de mailles choisi et $B - M = P$ courants j^λ choisis selon des itinéraires arbitraires dans un sous-repère de paires de nœuds, on peut écrire :

$$(22.2) \quad \bar{i}^a + \bar{j}^a = {}_1C_\alpha^a i^\alpha + {}_2C_\lambda^a j^\lambda$$

$$a = 1, 2, \dots, B,$$

$$\alpha = 1, 2, \dots, M,$$

$$\lambda = M + 1, M + 2, \dots, M + P,$$

(1) La nécessité de mettre un indice 2, en bas et à gauche de C_λ^a , sera justifiée quelques lignes plus bas.

où les ${}_1C_\alpha^a$ et ${}_2C_\lambda^a$ sont les éléments respectifs de deux sous-matrices rectangles (1) de la matrice :

$$C_\alpha^a \quad a = 1, 2, \dots, B, \quad \alpha = 1, 2, \dots, M + P = B,$$

matrice qui traduit les relations linéaires entre les courants $\bar{i}^a + \bar{j}^a$, d'une part, et, d'autre part, i^α et j^λ . Ce nouveau repère sera appelé « repère complet construit sur les mailles ».

Utilisons le vecteur généralisé :

$$(22.3) \quad \begin{aligned} \bar{i}^\beta &= i^\beta & \beta &= 1, 2, \dots, M, \\ \bar{i}^\mu &= i^\mu & \mu &= M + 1, M + 2, \dots, M + P, \end{aligned}$$

et écrivons (22.1) comme suit :

$$(22.4) \quad \bar{i}^a + \bar{j}^a = C_\alpha^a \bar{i}^\alpha \quad a, \alpha = 1, 2, \dots, B.$$

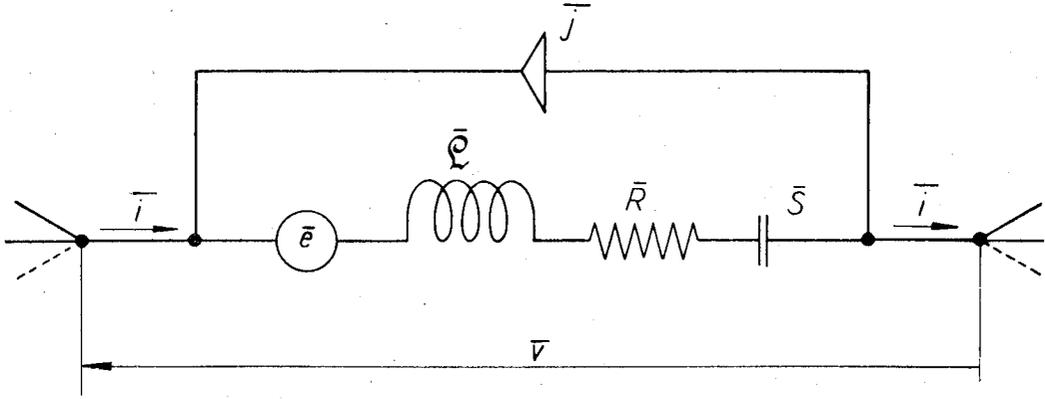


Fig. 22.1

Portons (22.4) dans (22.1), il vient :

$$(22.5) \quad \bar{v}_a + \bar{e}_a = C_\beta^a \left(\bar{L}_{ab} \frac{d\bar{i}^\beta}{dt} + \bar{R}_{ab} \bar{i}^\beta + \bar{S}_{ab} \int \bar{i}^\beta dt \right) \quad a, b, \beta = 1, 2, \dots, B.$$

Effectuons la multiplication contractée de (22.5) par C_α^a ; on a :

$$(22.6) \quad C_\alpha^a \bar{v}_a + C_\alpha^a \bar{e}_a = C_\alpha^a C_\beta^a \left(\bar{L}_{ab} \frac{d\bar{i}^\beta}{dt} + \bar{R}_{ab} \bar{i}^\beta + \bar{S}_{ab} \int \bar{i}^\beta dt \right) \\ a, b, \alpha, \beta = 1, 2, \dots, M + P;$$

soit encore :

$$(22.7) \quad C_\alpha^a \bar{v}_a + C_\alpha^a \bar{e}_a = L_{\alpha\beta} \frac{d\bar{i}^\beta}{dt} + R_{\alpha\beta} \bar{i}^\beta + S_{\alpha\beta} \int \bar{i}^\beta dt \quad a, b, \alpha, \beta = 1, 2, \dots, M + P,$$

où les $L_{\alpha\beta}$, $R_{\alpha\beta}$, $S_{\alpha\beta}$ sont donnés par :

$$(22.8) \quad L_{\alpha\beta} = C_\alpha^a C_\beta^b L_{ab}, \quad R_{\alpha\beta} = C_\alpha^a C_\beta^b R_{ab}, \quad S_{\alpha\beta} = C_\alpha^a C_\beta^b S_{ab}.$$

(1) Le C_α^a des paragraphes 3, 4 et 5 s'écrira donc ici ${}_1C_\alpha^a$.

Mais, en utilisant les sous-matrices de \mathcal{C}_a^a :

$$(22.9) \quad \begin{aligned} {}_1\mathcal{C}_a^a \bar{v}_a + {}_1\mathcal{C}_a^a \bar{e}_a &= \mathcal{L}_{\alpha\beta} \frac{di^\beta}{dt} + R_{\alpha\beta} i^\beta + S_{\alpha\beta} \int i^\beta dt \\ &+ \mathcal{L}_{\alpha\mu} \frac{dj^\mu}{dt} + R_{\alpha\mu} j^\mu + S_{\alpha\mu} \int j^\mu dt; \end{aligned}$$

$$(22.10) \quad \begin{aligned} {}_2\mathcal{C}_\lambda^a \bar{v}_a + {}_2\mathcal{C}_\lambda^a \bar{e}_a &= \mathcal{L}_{\lambda\beta} \frac{di^\beta}{dt} + R_{\lambda\beta} i^\beta + S_{\lambda\beta} \int i^\beta dt \\ &+ \mathcal{L}_{\lambda\mu} \frac{dj^\mu}{dt} + R_{\lambda\mu} j^\mu + S_{\lambda\mu} \int j^\mu dt \end{aligned}$$

$$a = 1, 2, \dots, B, \quad \alpha, \beta = 1, 2, \dots, M, \quad \lambda, \mu = M + 1, M + 2, \dots, M + P.$$

Par ailleurs, d'après (4.5) :

$$(22.11) \quad \begin{aligned} {}_1\mathcal{C}_a^a \bar{v}_a &= 0 & a = 1, 2, \dots, B, \\ & & \alpha = 1, 2, \dots, M, \end{aligned}$$

et finalement les équations qui régissent le réseau, en se rapportant à un repère complet, sont :

$$(22.12) \quad e_\alpha = \mathcal{L}_{\alpha\beta} \frac{di^\beta}{dt} + R_{\alpha\beta} i^\beta + S_{\alpha\beta} \int i^\beta dt + \mathcal{L}_{\alpha\mu} \frac{dj^\mu}{dt} + R_{\alpha\mu} j^\mu + S_{\alpha\mu} \int j^\mu dt;$$

$$(22.13) \quad v_\lambda + e_\lambda = \mathcal{L}_{\lambda\beta} \frac{di^\beta}{dt} + R_{\lambda\beta} i^\beta + S_{\lambda\beta} \int i^\beta dt + \mathcal{L}_{\lambda\mu} \frac{dj^\mu}{dt} + R_{\lambda\mu} j^\mu + S_{\lambda\mu} \int j^\mu dt$$

$$\alpha, \beta = 1, 2, \dots, M, \quad \lambda, \mu = M + 1, M + 2, \dots, M + P.$$

Passons aux expressions opérationnelles avec des notations déjà employées :

$$(22.14) \quad E_\alpha = Z_{\alpha\beta} I^\beta + Z_{\alpha\mu} J^\mu + S_{\alpha\beta} q_0^\beta - \mathcal{L}_{\alpha\beta} p i_0^\beta + S_{\alpha\mu} r_0^\mu - \mathcal{L}_{\alpha\mu} p j_0^\mu;$$

$$(22.15) \quad V_\lambda + E_\lambda = Z_{\lambda\beta} I^\beta + Z_{\lambda\mu} J^\mu + S_{\lambda\beta} q_0^\beta - \mathcal{L}_{\lambda\beta} p i_0^\beta + S_{\lambda\mu} r_0^\mu - \mathcal{L}_{\lambda\mu} p j_0^\mu$$

$$\alpha, \beta = 1, 2, \dots, M, \quad \lambda, \mu = M + 1, M + 2, \dots, M + P,$$

où les éléments :

$$Z_{\alpha\beta}, Z_{\alpha\mu}, Z_{\lambda\beta}, Z_{\lambda\mu} \quad \alpha, \beta = 1, 2, \dots, M, \quad \lambda, \mu = M + 1, M + 2, \dots, M + P$$

forment les quatre sous-matrices de la matrice impédance du repère complet construit sur les mailles et dont les éléments sont $Z_{\alpha\beta}$ $\alpha, \beta = 1, 2, \dots, M + P$. Nous avons posé :

$$(22.16) \quad j_0^\mu = j^\mu(+0), \quad r_0^\mu = r^\mu(t) - \int_0^t j^\mu dt \quad \mu = M + 1, M + 2, \dots, M + P.$$

Nous appellerons :

$$(22.18) \quad E_{0\alpha} = S_{\alpha\beta} q_0^2 - L_{\alpha\beta}^2 p i_0^2 + S_{\alpha\mu} r_0^2 - L_{\alpha\mu}^2 p j_0^2,$$

« f.e.m. de départ de la maille α »;

$$(22.19) \quad E_{0\lambda} = S_{\lambda\beta} q_0^2 - L_{\lambda\beta}^2 p i_0^2 + S_{\lambda\mu} r_0^2 - L_{\lambda\mu}^2 p j_0^2,$$

« f.e.m. de départ de la paire de nœuds λ ».

Les quantités i_0 et q_0 sont données dans les branches et les quantités j_0 et r_0 sont données dans les branches ou dans le sous-repère de paires de nœuds choisi; on en tiendra compte plus loin.

Finalement, on obtient :

$$(22.20) \quad E_\alpha - E_{0\alpha} = Z_{\alpha\beta} I^\beta + Z_{\alpha\mu} J^\mu;$$

$$(22.21) \quad V_\lambda + E_\lambda - E_{0\lambda} = Z_{\lambda\beta} I^\beta + Z_{\lambda\mu} J^\mu$$

$$\alpha, \beta = 1, 2, \dots, M, \quad \lambda, \mu = M + 1, M + 2, \dots, M + P.$$

En prenant, pour les différences de potentiel et les forces électromotrices des vecteurs généralisés :

$$(22.22) \quad \begin{aligned} \overset{\circ}{E} - \overset{\circ}{E}_{0\alpha} &= E_\alpha - E_{0\alpha} & \alpha &= 1, 2, \dots, M, \\ &= V_\alpha + E_\alpha - E_{0\alpha} & \alpha &= M + 1, M + 2, \dots, M + P, \end{aligned}$$

les équations (22.20) et (22.21) s'écriront :

$$(22.23) \quad \overset{\circ}{E}_\alpha - \overset{\circ}{E}_{0\alpha} = Z_{\alpha\beta} \overset{\circ}{I}^\beta \quad \alpha, \beta = 1, 2, \dots, M + P.$$

23. — PRÉSENCE DE TENSEURS DANS LES REPÈRES COMPLETS

Nous énoncerons plusieurs théorèmes :

THÉORÈME VII.

Les produits contractés :

$$(23.1) \quad \overset{\circ}{E}_\alpha \overset{\circ}{I}^\alpha, \quad \overset{\circ}{E}_{0\alpha} \overset{\circ}{I}^\alpha, \quad (\overset{\circ}{E}_\alpha - \overset{\circ}{E}_{0\alpha}) \overset{\circ}{I}^\alpha \quad \alpha = 1, 2, \dots, M + P$$

sont des invariants lorsqu'on passe d'un repère complet à un autre.

Démonstration.

Montrons que :

$$(23.2) \quad \overset{\circ}{E}_\alpha \overset{\circ}{I}^\alpha = \overset{\circ}{E}'_\eta \overset{\circ}{I}'^\eta \quad \alpha, \eta = 1, 2, \dots, M + P,$$

lorsqu'on passe d'un repère complet à un autre. Les deux autres invariances se démontreront de la même manière.

Si l'on passe d'un repère à un autre au moyen de la matrice non singulière C_α^z , on écrira :

$$(23.3) \quad \overset{\circ}{E}_\alpha \overset{\circ}{I}^\alpha = \overset{\circ}{E}_\alpha C_\alpha^z \overset{\circ}{I}^\eta = C_\alpha^z \overset{\circ}{E}_\alpha \overset{\circ}{I}^\eta = \overset{\circ}{E}'_\eta \overset{\circ}{I}'^\eta \quad \alpha, \eta = 1, 2, \dots, M + P,$$

ce qui montre l'invariance.

Conséquence.

Il existe une forme bilinéaire invariante dans les repères complets; en effet, dans deux repères, on pourra écrire :

$$(23.4) \quad \overset{\circ}{E}_\alpha - \overset{\circ}{E}_{0\alpha} = Z_{\alpha\beta} \overset{\circ}{I}^\beta, \quad \overset{\circ}{E}'_\eta - \overset{\circ}{E}'_{0\eta} = Z'_{\eta\nu} \overset{\circ}{I}'^\nu \quad \alpha, \beta, \eta, \nu = 1, 2, \dots, M + P.$$

Donc, d'après le théorème VII :

$$(23.5) \quad M = Z_{\alpha\beta} \overset{\circ}{I}^\alpha \overset{\circ}{I}^\beta = Z'_{\eta\nu} \overset{\circ}{I}'^\eta \overset{\circ}{I}'^\nu \quad \alpha, \beta, \eta, \nu = 1, 2, \dots, M + P;$$

M sera « l'invariant opérationnel fondamental » du réseau dans les repères complets construit sur les mailles.

THÉORÈME VIII.

On a :

$$(23.6) \quad \det Z_{\alpha\beta} = (\det C_\alpha^z)^2 \cdot \det Z'_{\eta\nu};$$

on peut le voir immédiatement en écrivant :

$$(23.7) \quad Z_{\alpha\beta} = C_\alpha^z C_\beta^z Z'_{\eta\nu} \quad \alpha, \beta, \eta, \nu = 1, 2, \dots, M + P.$$

On constate donc la présence, dans les repères complets, des êtres mathématiques suivants :

— tenseur une fois covariant :

$$(23.10) \quad \overset{\circ}{E}_\alpha = C_\alpha^z \overset{\circ}{E}'_\eta, \quad \overset{\circ}{E}_{0\alpha} = C_\alpha^z \overset{\circ}{E}'_{0\eta}, \quad \overset{\circ}{E}_\alpha - \overset{\circ}{E}_{0\alpha} = C_\alpha^z (\overset{\circ}{E}'_\eta - \overset{\circ}{E}'_{0\eta})$$

$$(23.11) \quad \alpha, \eta = 1, 2, \dots, M + P;$$

$$(23.12)$$

— tenseur une fois contravariant :

$$(23.13) \quad \overset{\circ}{I}^\alpha = C_\alpha^z \overset{\circ}{I}'^\eta \quad \alpha, \eta = 1, 2, \dots, M + P;$$

— tenseur deux fois covariant :

$$(23.14) \quad Z_{\alpha\beta} = C_\alpha^z C_\beta^z Z'_{\eta\nu} \quad \alpha, \beta, \eta, \nu = 1, 2, \dots, M + P;$$

— formule invariante :

$$(23.15) \quad \overset{\circ}{E}_\alpha - \overset{\circ}{E}_{0\alpha} = Z_{\alpha\beta} \overset{\circ}{I}^\beta, \quad \overset{\circ}{E}'_\eta - \overset{\circ}{E}'_{0\eta} = Z'_{\eta\nu} \overset{\circ}{I}'^\nu \quad \alpha, \beta, \eta, \nu = 1, 2, \dots, M + P;$$

— invariants :

$$(23.16) \quad \overset{\circ}{E}_\alpha \overset{\circ}{I}^\alpha = \overset{\circ}{E}'_\eta \overset{\circ}{I}'^\eta, \quad \overset{\circ}{E}_{0\alpha} \overset{\circ}{I}^\alpha = \overset{\circ}{E}'_{0\eta} \overset{\circ}{I}'^\eta, \quad (\overset{\circ}{E}_\alpha - \overset{\circ}{E}_{0\alpha}) \overset{\circ}{I}^\alpha = (E'_\eta - E'_{0\eta}) \overset{\circ}{I}'^\eta$$

(23.17)

$$(23.18) \quad \alpha, \beta, \eta, \nu = 1, 2, \dots, M + P;$$

— invariant opérationnel fondamental :

$$(23.19) \quad M = Z_{\alpha\beta} \overset{\circ}{I}^\alpha \overset{\circ}{I}^\beta = Z'_{\eta\nu} \overset{\circ}{I}'^\eta \overset{\circ}{I}'^\nu \quad \alpha, \beta, \eta, \nu = 1, 2, \dots, M + P;$$

— pseudo-scalaire de poids 2 :

$$(23.20) \quad \det Z_{\alpha\beta} = (\det C_\alpha^i)^2 \det Z'_{\eta\nu}.$$

24. — CONSIDÉRATIONS ÉNERGÉTIQUES

THÉORÈME IX.

Si l'on admet que l'énergie fournie au réseau a pour valeur :

$$(24.1) \quad w = e_\alpha i^\alpha + (v_\lambda + e_\lambda) j^\lambda \quad \begin{array}{l} \alpha = 1, 2, \dots, M, \\ \lambda = M + 1, M + 2, \dots, M + P, \end{array}$$

on a :

$$(24.2) \quad M' = E_\alpha I^\alpha + (V_\lambda + E_\lambda) J^\lambda.$$

On développera la démonstration comme au paragraphe 7.

En prenant des vecteurs généralisés tels que $\overset{\circ}{E}_\alpha, \overset{\circ}{E}_{0\alpha}, \overset{\circ}{I}^\alpha$, on retrouvera l'invariant opérationnel fondamental.

25. — AUTRE EXPRESSION MATHÉMATIQUE DE L'INVARIANT FONDAMENTAL

Reprenons l'invariant :

$$(25.1) \quad M' = E_\alpha I^\alpha + (V_\lambda + E_\lambda) J^\lambda \quad \begin{array}{l} \alpha = 1, 2, \dots, M, \\ \lambda = M + 1, M + 2, \dots, M + P, \end{array}$$

et choisissons des grandeurs auxiliaires telles que I_0^α et J_0^λ définies par les équations :

$$(25.2) \quad Z_{\alpha\beta} I_0^\alpha + Z_{\alpha\mu} J_0^\mu = S_{\alpha\beta} q_0^\alpha - \epsilon_{\alpha\beta}^i p i_0^i + S_{\alpha\mu} r_0^\alpha - \epsilon_{\alpha\mu}^j p j_0^j;$$

$$(25.3) \quad Z_{\lambda\beta} I_0^\beta + Z_{\lambda\mu} J_0^\mu = S_{\lambda\beta} q_0^\beta - \epsilon_{\lambda\beta}^i p i_0^i + S_{\lambda\mu} r_0^\mu - \epsilon_{\lambda\mu}^j p j_0^j$$

$$\alpha, \beta = 1, 2, \dots, M, \quad \lambda, \mu = M + 1, M + 2, \dots, M + P.$$

Portons (25.2) et (25.3) dans (22.14) et (22.15); il vient :

$$(25.4) \quad E_\alpha = Z_{\alpha\beta} (I^\beta + I_0^\beta) + Z_{\alpha\mu} (J^\mu + J_0^\mu);$$

$$(25.5) \quad V_\lambda + E_\lambda = Z_{\lambda\beta} (I^\beta + I_0^\beta) + Z_{\lambda\mu} (J^\mu + J_0^\mu)$$

$$\alpha, \beta = 1, 2, \dots, M, \quad \lambda, \mu = M + 1, M + 2, \dots, M + P.$$

Enfin, si l'on porte (25.4) et (25.5) dans (25.1), et si l'on prend les vecteurs généralisés déjà employés, il vient :

$$(25.6) \quad M' = Z_{\alpha\beta} \overset{\circ}{I}^\alpha (\overset{\circ}{I}^\beta + \overset{\circ}{I}_0^\beta) \quad \alpha, \beta = 1, 2, \dots, M + P.$$

Posons, comme au paragraphe 8 :

$$(25.7) \quad \overset{\circ}{I}^\alpha = \overset{\circ}{I}^\alpha + \overset{\circ}{I}_0^\alpha \quad \alpha = 1, 2, \dots, M + P.$$

On obtient, tous calculs faits :

$$(25.8) \quad M' = Z_{\alpha\beta} (\overset{\circ}{I}^\alpha \overset{\circ}{I}^\beta - \overset{\circ}{I}_0^\alpha \overset{\circ}{I}_0^\beta) \quad \alpha, \beta = 1, 2, \dots, M + P.$$

26. — OBTENTION D'UN REPÈRE COMPLET CONSTRUIT SUR LES MAILLES

Pour obtenir un repère complet on opère ainsi :

1^o choisir un arbre avec lequel on construira un repère de mailles;

2^o avec cet arbre ou avec un autre arbre on définira un repère de paires de nœuds fixant les itinéraires choisis.

La *figure* (26.2) donne un exemple de repère complet dont la matrice de connexion est établie en (26.5) ci-après.

Le groupe de transformation linéaire des courants généralisés I^α $\alpha = 1, 2, \dots, M + P$ n'est pas quelconque; la matrice de transformation, en plus de la structure sur les nombres réels, doit être telle que la forme bilinéaire de l'espace des mailles séparé soit invariante :

$$(26.1) \quad M_1 = Z_{\alpha\beta} I^\alpha I^\beta \quad \alpha, \beta = 1, 2, \dots, M.$$

En effet, entre chaque paire de nœuds on peut choisir un itinéraire quelconque, indépendant du repère de mailles.

Cherchons le groupe linéaire qui laisse invariantes les formes (23.5) et (26.1). Utilisons par commodité les sous-matrices et imposons-nous que dans la matrice impédance

$Z_{\alpha\beta}$ $\alpha, \beta = 1, 2, \dots, M + P$, les éléments de la sous-matrice $Z_{\alpha\beta}$ $\alpha, \beta = 1, 2, \dots, M$ soient indépendants des trois autres sous-matrices lors d'un changement de repère :

$$(26.2) \quad \begin{bmatrix} A' & C' \\ B' & D' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1 & Z_2 \\ Z_3 & Z_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \quad \text{où la matrice } A' \text{ est la transposée de } A$$

$$= \begin{bmatrix} A'Z_1 A + A'Z_2 C + C'Z_3 A + C'Z_4 C & A'Z_1 B + A'Z_2 D + C'Z_3 B + C'Z_4 D \\ B'Z_1 A + B'Z_2 C + D'Z_3 A + D'Z_4 C & B'Z_1 B + B'Z_2 D + D'Z_3 B + D'Z_4 D \end{bmatrix}.$$

Il est évident que la condition nécessaire et suffisante est :

$$(26.3) \quad [C] = [0].$$

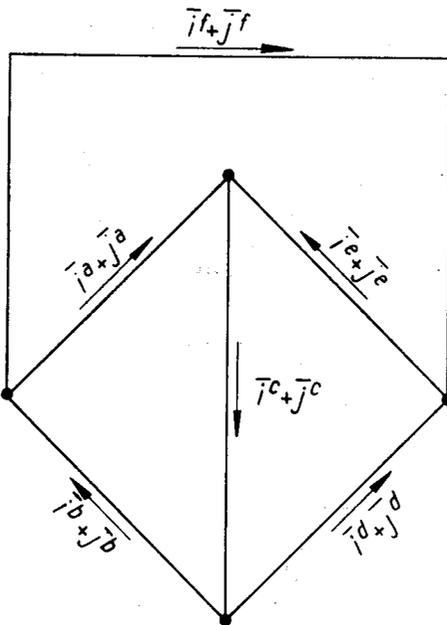


Fig. 26.1

Ainsi, toutes les matrices de transformation auront la forme :

$$(26.4) \quad \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix}.$$

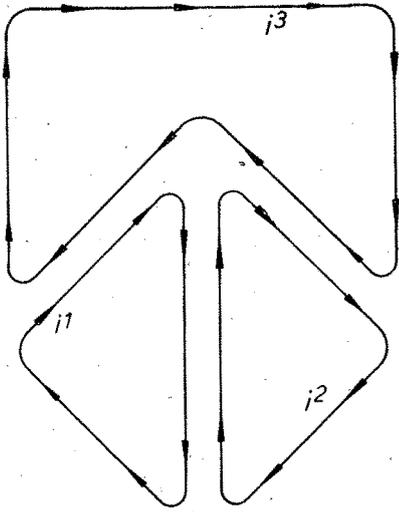
L'interprétation géométrique est la suivante : l'espace image complet est donc la somme de l'espace image des mailles et de l'espace image des paires de nœuds.

Ces matrices forment un groupe, les sous-matrices A et D étant supposées non singulières.

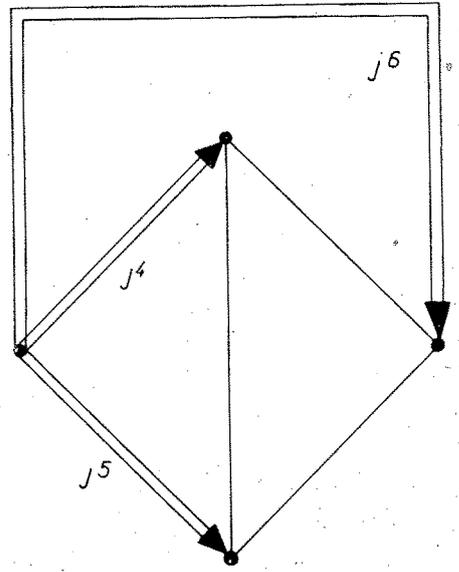
Nous donnons ci-après deux exemples de matrices appartenant à un tel groupe :

PREMIER EXEMPLE.

Soit le réseau de la *figure* (26.1) dont le caractère topologique est 1, 6, 4, 3, 3. Sur ce réseau nous construirons deux repères, l'un défini par la *figure* (26.2), l'autre par la *figure* (26.3).



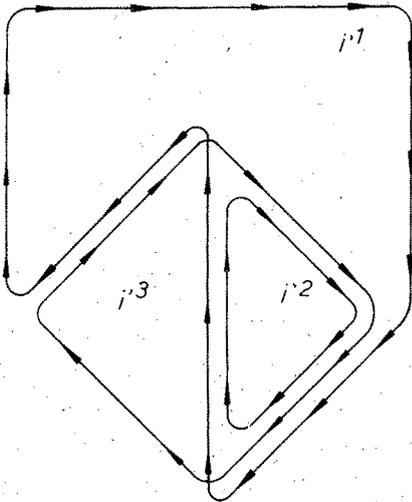
(a)



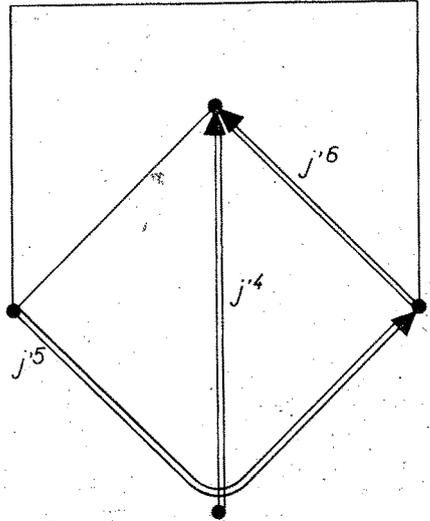
(b)

Repère R

Fig. 26.2



(a)



(b)

Repère R'

Fig. 26.3

Entre le repère de branche de la *figure* (26.1) et le repère **R**, nous pouvons écrire :

$$(26.5) \quad \begin{aligned} \bar{i}^a + \bar{j}^a &= i^1 - i^3 + j^4, \\ \bar{i}^b + \bar{j}^b &= i^1 - j^5, \\ \bar{i}^c + \bar{j}^c &= i^1 - i^2, \\ \bar{i}^d + \bar{j}^d &= -i^2, \\ \bar{i}^e + \bar{j}^e &= -i^2 + i^3, \\ \bar{i}^f + \bar{j}^f &= i^3 + j^6, \end{aligned}$$

soit :

$$(26.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{i}^a + \bar{j}^a \\ \bar{i}^b + \bar{j}^b \\ \bar{i}^c + \bar{j}^c \\ \bar{i}^d + \bar{j}^d \\ \bar{i}^e + \bar{j}^e \\ \bar{i}^f + \bar{j}^f \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} i^1 \\ i^2 \\ i^3 \\ j^4 \\ j^5 \\ j^6 \end{array} \right\}$$

ou, en écriture abrégée :

$$(26.6 \text{ bis}) \quad \{\bar{i}\} = \boxed{C} \{i\}.$$

Entre le repère de branche et le repère **R'** on aura :

$$(26.7) \quad \begin{aligned} \bar{i}^a + \bar{j}^a &= -i'^1 + i'^3, \\ \bar{i}^b + \bar{j}^b &= i'^3 - j'^5, \\ \bar{i}^c + \bar{j}^c &= -i'^1 - i'^2 - j'^4, \\ \bar{i}^d + \bar{j}^d &= -i'^1 - i'^2 - i'^3 + j'^5, \\ \bar{i}^e + \bar{j}^e &= -i'^2 - i'^3 + j'^6, \\ \bar{i}^f + \bar{j}^f &= i'^1; \end{aligned}$$

$$(26.8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{i}^a + \bar{j}^a \\ \bar{i}^b + \bar{j}^b \\ \bar{i}^c + \bar{j}^c \\ \bar{i}^d + \bar{j}^d \\ \bar{i}^e + \bar{j}^e \\ \bar{i}^f + \bar{j}^f \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cccccc} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} i'^1 \\ i'^2 \\ i'^3 \\ j'^4 \\ j'^5 \\ j'^6 \end{array} \right\}$$

ou, en écriture abrégée :

$$(26.9) \quad \{\bar{i}\} = \boxed{C'} \{i'\}.$$

En considérant (26.6) et (26.9) on écrira :

$$(26.10) \quad \{ \bar{i} \} = [c'] \{ i' \} = [c] \{ i \},$$

soit :

$$(26.11) \quad \begin{aligned} \{ i \} &= [c]^{-1} [c'] \{ i' \} \\ &= [C] \{ i' \}. \end{aligned}$$

Le calcul de la matrice inverse donne :

$$(26.12) \quad [c]^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

et :

$$(26.13) \quad [C] = [c]^{-1} [c'] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

On retrouve la structure particulière (1) donnée par (26.4). De même :

$$(26.14) \quad [C]^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(1) Le C employé pour la matrice (26.13) n'a rien à voir avec celui employé comme symbole de sous-matrice dans (26.2) et (26.3).

DEUXIÈME EXEMPLE.

Soit le réseau de la *figure* (26.4) dont le caractère topologique est 1, 5, 4, 3, 2.

On a, en se rapportant au repère **R** [*figure* (26.5)] :

$$(26.15) \quad \begin{aligned} \bar{i}^a + \bar{j}^a &= i^1 + i^2 + j^3, \\ \bar{i}^b + \bar{j}^b &= i^1 + i^2, \\ \bar{i}^c + \bar{j}^c &= 2i^1 + j^4, \\ \bar{i}^d + \bar{j}^d &= -i^1 + i^2 - j^5, \\ \bar{i}^e + \bar{j}^e &= -i^1 + i^2; \end{aligned}$$

$$(26.16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{i}^a + \bar{j}^a \\ \bar{i}^b + \bar{j}^b \\ \bar{i}^c + \bar{j}^c \\ \bar{i}^d + \bar{j}^d \\ \bar{i}^e + \bar{j}^e \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} i^1 \\ i^2 \\ j^3 \\ j^4 \\ j^5 \end{array} \right\}$$

soit, en écriture abrégée :

$$(26.17) \quad \{\bar{i}\} = \boxed{C} \{i\}.$$

On a, en se rapportant au repère **R'** [*figure* (26.6)] :

$$(26.18) \quad \begin{aligned} \bar{i}^a + \bar{j}^a &= i'^1 - i'^2, \\ \bar{i}^b + \bar{j}^b &= i'^1 + i'^2 - j'^3 - j'^4, \\ \bar{i}^c + \bar{j}^c &= i'^1, \\ \bar{i}^d + \bar{j}^d &= i'^2 - j'^4, \\ \bar{i}^e + \bar{j}^e &= i'^2 - j'^4 + j'^5; \end{aligned}$$

$$(26.18 \text{ bis}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{i}^a + \bar{j}^a \\ \bar{i}^b + \bar{j}^b \\ \bar{i}^c + \bar{j}^c \\ \bar{i}^d + \bar{j}^d \\ \bar{i}^e + \bar{j}^e \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} i'^1 \\ i'^2 \\ j'^3 \\ j'^4 \\ j'^5 \end{array} \right\}$$

ou, en écriture abrégée :

$$(26.19) \quad \{\bar{i}\} = \boxed{C'} \{i'\}.$$

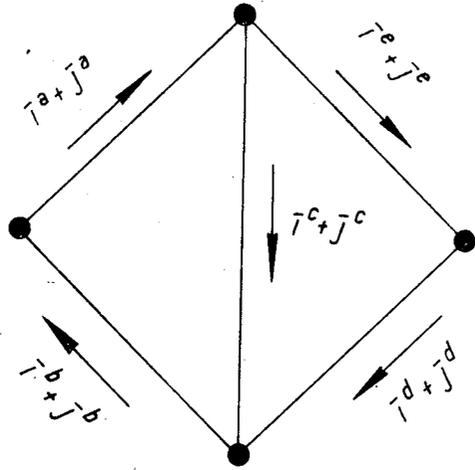
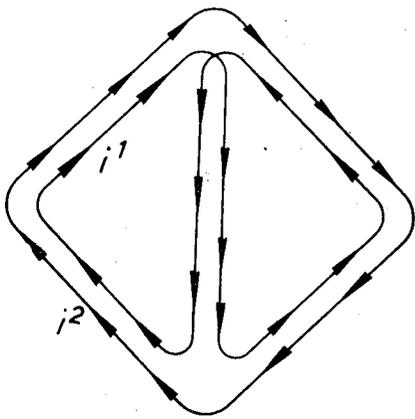
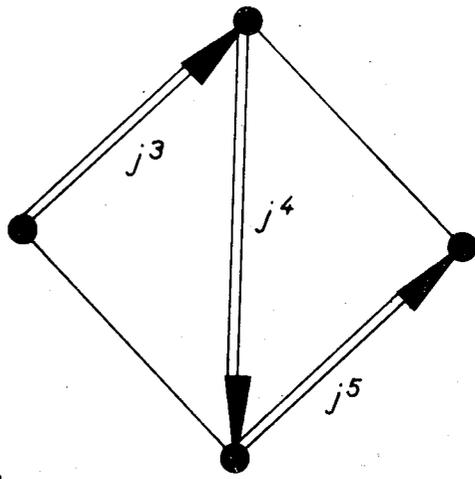


Fig. 26.4



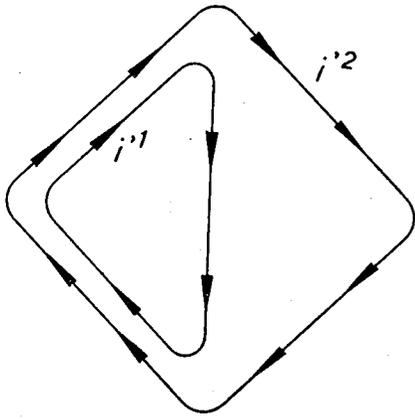
(a)



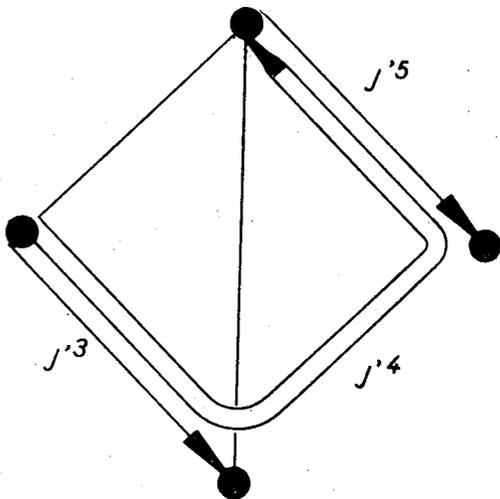
(b)

Repère R

Fig. 26.5



(c)



(d)

Repère R'

Fig. 26.6

On écrira :

$$(26.20) \quad \{ \bar{i} \} = \boxed{c'} \{ i' \} = \boxed{c} \{ i \},$$

soit :

$$(26.21) \quad \{ i \} = \boxed{c}^{-1} \boxed{c'} \{ i' \} \\ = \boxed{C} \{ i' \}.$$

Le calcul de la matrice inverse donne :

$$(26.22) \quad \boxed{c}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$(26.23) \quad \boxed{C} = \boxed{c}^{-1} \boxed{c'} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

de même :

$$(26.24) \quad \boxed{C}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

27. — MISE EN PLACE DES VALEURS INITIALES

Nous aurons à distinguer les i_0 et q_0 des j_0 et r_0 . Les premières sont introduites dans les branches par un état physique précédant l'état considéré; par contre, les j_0 et r_0 ne dépendent que de la forme des courants injectés j^λ .

On déterminera d'abord les courants $\bar{i}_0^a + \bar{j}_0^a$ et les charges $\bar{q}_0^a + r_0^a$ dans les branches où existent des inductances pour les courants et des capacités pour les charges. On calculera ensuite les f.e.m. de départ de branche :

$$(27.1) \quad E_{0a} = \bar{S}_{ab}(\bar{q}_0^b + r_0^b) - \bar{L}_{ab} p (\bar{i}_0^b + j_0^b) \quad a, b = 1, 2, \dots, B.$$

De là on déterminera les f.e.m. de départ du réseau complet :

$$(27.2) \quad E_{0\alpha} = C_\alpha^a \bar{E}_{0a} \quad \begin{array}{l} a = 1, 2, \dots, B, \\ \alpha = 1, 2, \dots, M + P = B, \end{array}$$

ou, en développant :

$$(27.3) \quad E_{0\alpha} = S_{\alpha\beta} q_0^\beta - L_{\alpha\beta} p i_0^\beta + S_{\alpha\mu} r_0^\mu - L_{\alpha\mu} p j_0^\mu;$$

$$(27.4) \quad E_{0\lambda} = S_{\lambda\beta} q_0^\beta - L_{\lambda\beta} p i_0^\beta + S_{\lambda\mu} r_0^\mu - L_{\lambda\mu} p j_0^\mu \\ \alpha, \beta = 1, 2, \dots, M, \quad \lambda, \mu = M + 1, M + 2, \dots, M + P.$$

Pratiquement, les courants injectés sont donnés en chacun des nœuds; il en résulte que les valeurs initiales j_0 et r_0 sont imposées dans les P paires de nœuds. On calculera donc les j_0 et r_0 de branche en partant des courants donnés au moyen du réseau considéré avec des f.e.m. nulles, et ceci dans le repère de paire de nœuds correspondant; toutefois, d'un point de vue théorique, certains courants injectés peuvent déterminer des différences de potentiel percussionnelles dans certaines branches.

28. — DÉTERMINATION DE LA MATRICE DE CONNEXION

On établit les relations qui existent entre les courants $\bar{i}^a + \bar{j}^a$ et ceux qui sont choisis dans le repère complet. On procède ainsi :

- 1° choisir un repère de M mailles linéairement indépendantes;
- 2° choisir un repère de P paires de nœuds linéairement indépendantes;
- 3° prendre un itinéraire arbitraire pour chaque paire de nœuds.

On notera que, dans un repère complet, l'itinéraire des courants entre paire de nœuds intervient dans la mise en équations alors que ce n'est pas le cas pour les repères de paires de nœuds.

29. — PROCESSUS DE RÉOLUTION

— Établir la matrice de connexion :

$$(29.1) \quad C_\alpha^a \quad \boxed{C}.$$

— Établir la matrice impédance de branche :

$$(29.2) \quad \bar{Z}_{ab} \quad \boxed{\bar{Z}}.$$

- (29.3) — Se donner ou déterminer les \bar{i}_0^a , \bar{q}_0^a et \bar{j}_0^a , \bar{r}_0^a dans les branches.
 — Établir la matrice des f.e.m. de départ de branche :

$$(29.4) \quad \bar{E}_{0a} \quad \bar{E}_0 \{.$$

- Établir la matrice des f.e.m. totales de branche :

$$(29.5) \quad \bar{E}_a - \bar{E}_{0a} \quad \bar{E} \{ - \bar{E}_0 \}.$$

- Calculer les matrices du repère complet :

$$(29.6) \quad \bar{E}_\alpha - \bar{E}_{0\alpha} = \mathcal{C}_\alpha^a (\bar{E}_a - \bar{E}_{0a}) \quad \bar{E} \{ - \bar{E}_0 \} = [\mathcal{C}] \{ \bar{E}_a \{ - \bar{E}_{0a} \} \};$$

$$(29.7) \quad Z_{\alpha\beta} = \mathcal{C}_\alpha^a \mathcal{C}_\beta^b \bar{Z}_{\alpha\beta} \quad \boxed{Z} = \boxed{C}' \boxed{\bar{Z}} \boxed{C}.$$

- Décomposer $Z_{\alpha\beta}$ en sous-matrices :

$$(29.8) \quad Z_{\alpha\beta}, Z_{\alpha\mu}, Z_{\lambda\beta}, Z_{\lambda\mu} \quad \alpha, \beta = 1, 2, \dots, M, \quad \boxed{Z_1}, \boxed{Z_2}, \boxed{Z_3}, \boxed{Z_4}.$$

$$\lambda, \mu = M + 1, M + 2, \dots, M + P,$$

- Écrire et résoudre les équations des sous-matrices :

$$(29.9) \quad E_\alpha - E_{0\alpha} = Z_{\alpha\beta} I^\beta + Z_{\alpha\mu} J^\mu \quad \{ E_1 - E_{01} \} = \boxed{Z_1} \{ I \} + \boxed{Z_2} \{ J \};$$

$$(29.10) \quad V_\lambda + E_\lambda - E_{0\lambda} = Z_{\alpha\beta} I^\beta + Z_{\lambda\mu} J^\mu \quad \{ V + E_2 - E_{02} \} = \boxed{Z_3} \{ I \} + \boxed{Z_4} \{ J \}$$

$$\alpha, \beta = 1, 2, \dots, M,$$

$$\lambda, \mu = M + 1, M + 2, \dots, M + P.$$

- Calculer les courants I^α de maille :

$$(29.11) \quad \{ I \} = \boxed{Z_1}^{-1} \{ E_1 - E_{01} \} - \boxed{Z}^{-1} \boxed{Z_2} \{ J \}.$$

- Calculer les d.d.p. V_λ entre paires de nœuds :

$$(29.12) \quad \{ V \} = \boxed{Z_3} \{ I \} + \boxed{Z_4}^{-1} \{ J \} - \{ E_2 - E_{02} \}.$$

- Calculer les courants de branche $\bar{I}^a + \bar{J}^a$ en utilisant la matrice de connexion \mathcal{C}_a^a , les courants I^α calculés et les courants J^λ :

$$(29.13) \quad \bar{I}^a + \bar{J}^a = {}_1\mathcal{C}_a^a I^\alpha + {}_2\mathcal{C}_a^\lambda J^\lambda \quad \{ \bar{I} + \bar{J} \} = [{}_1\mathcal{C}] \{ I \} + [{}_2\mathcal{C}] \{ J \}.$$

- Calculer les d.d.p. \bar{V}_a de branche :

$$(29.14) \quad \bar{V}_a = {}_2\mathcal{C}_a^\lambda V_\lambda \quad \{ \bar{V} \} = [{}_2\mathcal{C}'] \{ V \}.$$

Il est souvent plus commode de calculer les d.d.p. \bar{V}_a à partir des courants de branche. En effet :

$$(29.15) \quad \bar{V}_a = \bar{Z}_{ab} (\bar{I}^b + \bar{J}^b) - \bar{E}_a - \bar{E}_{0a} \quad \{ \bar{V} \} = \boxed{\bar{Z}} \{ \bar{I} + \bar{J} \} - \{ \bar{E} - \bar{E}_0 \}.$$

— Vérifier les valeurs initiales.

30. — EXEMPLE

Considérons le réseau symétrique de la *figure* (30.1) où l'on rencontre, à la fois, une source de tension e et une source de courant j . Nous supposons qu'au temps $t = 0$, e et j ont été appliquées et qu'on avait :

- un courant i_0 dans l'inductance L ;
- un courant i'_0 dans l'inductance L' , et
- une charge q_0 aux bornes de la capacité $C = \frac{1}{S}$.

Le caractère topologique du réseau est 1, 4, 3, 2, 2. Choisissons le repère complet indiqué sur la *figure* (30.3) et suivons le processus de résolution donné au paragraphe 29.

Matrice de connexion.

$$(30.1) \quad \begin{aligned} i^a + j^a &= i^1 + j^3, \\ i^b + j^b &= i^2, \\ i^c + j^c &= i^1 + i^2 - j^4, \\ i^d + j^d &= i^1; \end{aligned}$$

$$(30.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} i^a + j^a \\ i^b + j^b \\ i^c + j^c \\ i^d + j^d \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} i^1 \\ i^2 \\ j^3 \\ j^4 \end{array} \right\}$$

ou, en écriture abrégée :

$$(30.3) \quad \{ \bar{i} + \bar{j} \} = \boxed{C} \{ \bar{i} \}.$$

Par ailleurs, on obtient facilement :

$$(30.3 \text{ bis}) \quad j^3 = j, \quad j^4 = 0.$$

Matrice impédance de branche [figure (30.2)].

$$(30.4) \quad \boxed{\bar{Z}} = \begin{bmatrix} r + Lp & 0 & \mathfrak{N}p & 0 \\ 0 & R' + \frac{S}{p} & 0 & 0 \\ \mathfrak{N}p & 0 & r' + L'p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R \end{bmatrix}$$

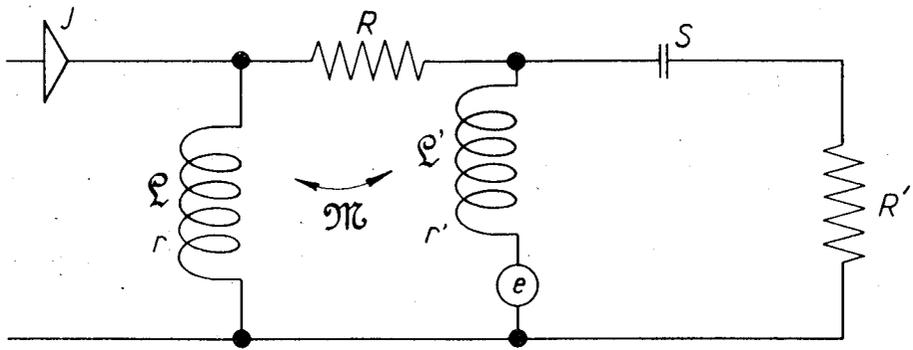


Fig. 30.1

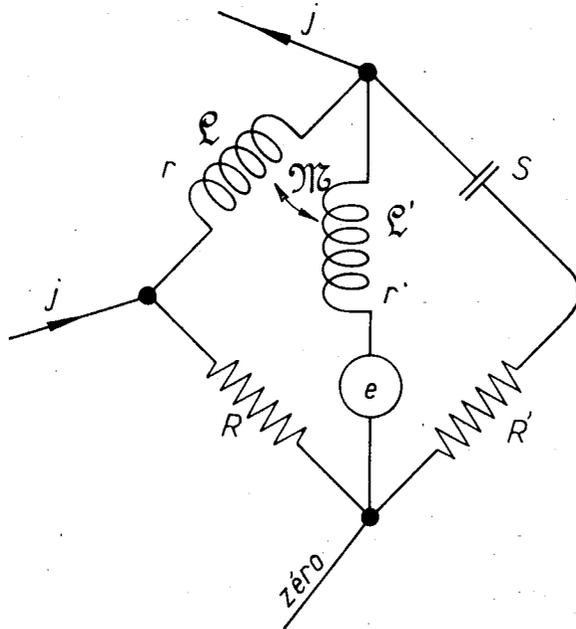


Fig. 30.2

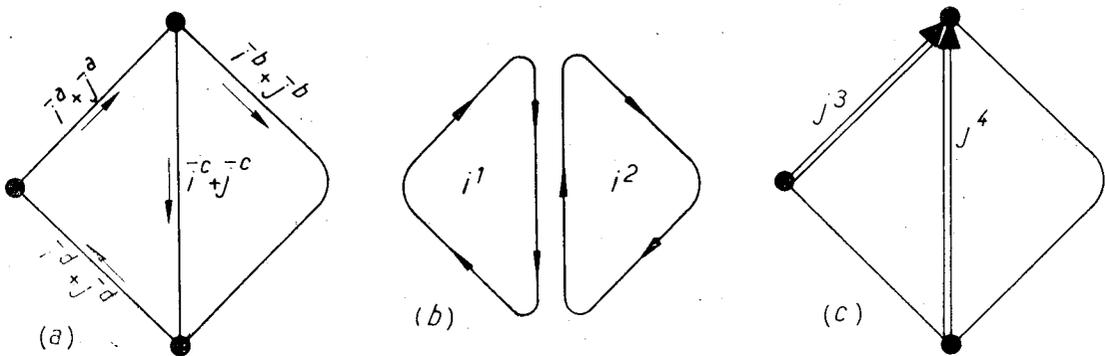


Fig. 30.3

Valeurs initiales.

On a :

$$(30.5) \quad \bar{i}_0^a = i_0, \quad i_0^c = i'_0;$$

$$(30.6)$$

$$(30.7) \quad q_0^b = q_0;$$

les quantités \bar{j}_0^a et \bar{j}_0^b sont nulles car au temps $t = (+0)$ la totalité du courant j passe dans les branches d et b où l'on ne rencontre pas d'inductance. D'autre part, r_0^b sera nul, par hypothèse.

Matrice des f.e.m. de départ de branche.

On a :

$$(30.8) \quad \begin{pmatrix} E_{0a} \\ E_{0b} \\ E_{0c} \\ E_{0d} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} + \\ q_0 \\ + \\ + \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} \mathcal{L} p & 0 & \mathcal{M} p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathcal{M} p & 0 & \mathcal{L}' p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} i_0 \\ + \\ i'_0 \\ + \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\mathcal{L} p i_0 - \mathcal{M} p i'_0 \\ S q_0 \\ -\mathcal{M} p i_0 + \mathcal{L}' p i'_0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Matrice des f.e.m. totales de branche.

$$(30.9) \quad \begin{pmatrix} E_a - E_{0a} \\ E_b - E_{0b} \\ E_c - E_{0c} \\ E_d - E_{0d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{L} p i_0 + \mathcal{M} p i'_0 \\ S q_0 \\ E + \mathcal{M} p i_0 + \mathcal{L}' p i'_0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Matrices du repère complet.

$$(30.10) \quad \begin{pmatrix} E_1 - E_{01} \\ E_2 - E_{02} \\ V_3 + E_3 - E_{03} \\ V_4 + E_4 - E_{04} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ V_3 \\ V_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathcal{L} p i_0 + \mathcal{M} p i'_0 \\ S q_0 \\ E + \mathcal{M} p i_0 + \mathcal{L}' p i'_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} E + (\mathcal{L} + \mathcal{M}) p i_0 + (\mathcal{L}' + \mathcal{M}) p i'_0 \\ -E + S q_0 - \mathcal{M} p i_0 - \mathcal{L}' p i'_0 \\ \mathcal{L} p i_0 + \mathcal{M} p i'_0 \\ -E - \mathcal{M} p i_0 - \mathcal{L}' p i'_0 \end{pmatrix};$$

$$(30.11) \quad \boxed{Z} = \boxed{c}' \boxed{\bar{Z}} \boxed{c}$$

$$= \begin{bmatrix} (\mathcal{L} + \mathcal{L}' + 2\mathcal{M})p + R + r + r' & -(\mathcal{L}' + \mathcal{M})p - r' & (\mathcal{L} + \mathcal{M})p + r & -(\mathcal{L}' + \mathcal{M})p - r' \\ -(\mathcal{L}' + \mathcal{M})p - r' & \mathcal{L}'p + R' + r' + \frac{S}{p} & -\mathcal{M}p & \mathcal{L}'p + r' \\ (\mathcal{L} + \mathcal{M})p + r & -\mathcal{M}p & \mathcal{L}p + r & -\mathcal{M}p \\ -(\mathcal{L}' + \mathcal{M})p - r' & \mathcal{L}'p + r' & -\mathcal{M}p & \mathcal{L}'p + r' \end{bmatrix}$$

Décomposition en sous-matrices.

$$(30.12) \quad \boxed{Z_1} = \begin{bmatrix} (\mathcal{L} + \mathcal{L}' + 2\mathcal{M})p + R + r + r' & -(\mathcal{L}' + \mathcal{M})p - r' \\ -(\mathcal{L}' + \mathcal{M})p - r' & \mathcal{L}'p + R' + r' + \frac{S}{p} \end{bmatrix},$$

$$(30.13) \quad \boxed{Z_2} = \begin{bmatrix} (\mathcal{L} + \mathcal{M})p + r & -(\mathcal{L}' + \mathcal{M})p - r' \\ -\mathcal{M}p & \mathcal{L}'p + r' \end{bmatrix};$$

$$(30.14) \quad \boxed{Z_3} = \begin{bmatrix} (\mathcal{L} + \mathcal{M})p + r & -\mathcal{M}p \\ -(\mathcal{L}' + \mathcal{M})p - r' & \mathcal{L}'p + r' \end{bmatrix}, \quad \boxed{Z_4} = \begin{bmatrix} \mathcal{L}p + r & -\mathcal{M}p \\ -\mathcal{M}p & \mathcal{L}'p + r' \end{bmatrix}.$$

Inverser la matrice $\boxed{Z_1}$.

$$(30.16) \quad \boxed{Z_1}^{-1} = \frac{1}{|\boxed{Z_1}|} \begin{bmatrix} \mathcal{L}'p + R' + r' + \frac{S}{p} & (\mathcal{L}' + \mathcal{M})p + r' \\ (\mathcal{L}' + \mathcal{M})p + r' & (\mathcal{L} + \mathcal{L}' + 2\mathcal{M})p + R + r + r' \end{bmatrix},$$

où :

$$(30.17) \quad |\boxed{Z_1}| = (\mathcal{L}\mathcal{L}' - \mathcal{M}^2)p^2 + (R'\mathcal{L} + R'\mathcal{L}' + 2R'\mathcal{M} + R\mathcal{L}' + r'\mathcal{L} + r\mathcal{L}')p + (R+r)(R'+r') + R'r' + (\mathcal{L} + \mathcal{L}' + 2\mathcal{M})S + (R+r+r')\frac{S}{p}.$$

Calcul des courants I^1 et I^2 .

$$(30.18) \quad \begin{Bmatrix} I^1 \\ I^2 \end{Bmatrix} = \boxed{Z_1}^{-1} \begin{Bmatrix} E + (\mathcal{L} + \mathcal{M})pi_0 + (\mathcal{L}' + \mathcal{M})pi'_0 \\ -E + Sq_0 - \mathcal{M}pi_0 - \mathcal{L}'pi'_0 \end{Bmatrix} - \boxed{Z_1}^{-1} \boxed{Z_2} \begin{Bmatrix} J \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Pour distinguer les effets de E, J, i_0, i'_0, q_0 , nous développerons les formules dans un certain ordre :

$$(30.19) \quad I^1 = \frac{1}{|\boxed{Z}|} \left[\left(-\mathcal{M}p + R' + \frac{S}{p} \right) E + [(\mathcal{L}\mathcal{L}' - \mathcal{M}^2)p^2 + (R'\mathcal{L} + r'\mathcal{L} + R'\mathcal{M})p + (\mathcal{L} + \mathcal{M})S] i_0 + [(R'\mathcal{L}' + R'\mathcal{M} + r'\mathcal{M})p + (\mathcal{L}' + \mathcal{M})S] i'_0 + [(\mathcal{L}' + \mathcal{M})p + r'] Sq_0 - \left[(\mathcal{L}\mathcal{L}' - \mathcal{M}^2)p^2 + (r\mathcal{L}' + R'\mathcal{L} + R'\mathcal{M} + r'\mathcal{L})p + R'r + rr' + (\mathcal{L} + \mathcal{M})S + \frac{Sr}{p} \right] J \right];$$

$$\begin{aligned}
 (30.20) \quad I^2 = \frac{1}{|Z|} & \left[-[(\mathcal{L} + \mathcal{M})p + R + r] E \right. \\
 & + [(\mathcal{L}'\mathcal{L}' - \mathcal{M}^2)p^2 + (r'\mathcal{L}' - R\mathcal{M} - r\mathcal{M})p] i_0 \\
 & - [(\mathcal{L}'\mathcal{L}' - \mathcal{M}^2)p^2 + (r'\mathcal{L}' + R\mathcal{L}' - r'\mathcal{M})p] i'_0 \\
 & + [(\mathcal{L}' + \mathcal{L}' + 2\mathcal{M})p + R + r + r'] Sq_0 \\
 & \left. - [(\mathcal{L}'\mathcal{L}' - \mathcal{M}^2)p^2 + (r'\mathcal{L}' + r'\mathcal{L}' - R\mathcal{M})p + rr'] J \right].
 \end{aligned}$$

Courants de branche.

$$\begin{aligned}
 (30.21) \quad \bar{I}^a + \bar{J}^a = I^1 + J^3 = I^1 + J \\
 = \frac{1}{|Z|} & \left[\left(-\mathcal{M}p + R' + \frac{S}{p} \right) E \right. \\
 & + [(\mathcal{L}'\mathcal{L}' - \mathcal{M}^2)p^2 + (R'\mathcal{L}' + r'\mathcal{L}' + R'\mathcal{M})p + (\mathcal{L}' + \mathcal{M})S] i_0 \\
 & + [(R'\mathcal{L}' + R'\mathcal{M} + r'\mathcal{M})p + (\mathcal{L}' + \mathcal{M})S] i'_0 \\
 & + [(\mathcal{L}' + \mathcal{M})p + r'] Sq_0 \\
 & \left. + \left[(R\mathcal{L}' + R'\mathcal{L}' + R'\mathcal{M})p + RR' + Rr' + R'r' \right. \right. \\
 & \left. \left. + (\mathcal{L}' + \mathcal{M})S + (R + r')\frac{S}{p} \right] J \right];
 \end{aligned}$$

$$(30.22) \quad \bar{I}^b + \bar{J}^b = I^2 \quad [\text{donné par (30.20)}];$$

$$\begin{aligned}
 (30.23) \quad \bar{I}^c + \bar{J}^c = I^1 - I^2 - J^4 = I^1 - I^2 \\
 = \frac{1}{|Z|} & \left[\left(\mathcal{L}'p + R + R' + r + \frac{S}{p} \right) E \right. \\
 & + [(R'\mathcal{L}' + (R + R' + r)\mathcal{M})p + (\mathcal{L}' + \mathcal{M})S] i_0 \\
 & + [(\mathcal{L}'\mathcal{L}' - \mathcal{M}^2)p^2 + (r'\mathcal{L}' + R\mathcal{L}' + R'\mathcal{L}' + R'\mathcal{M})p + (\mathcal{L}' + \mathcal{M})S] i'_0 \\
 & - [(\mathcal{L}' + \mathcal{M})p + R + r] Sq_0 \\
 & \left. - \left[(R'\mathcal{L}' + R\mathcal{M} + R'\mathcal{M})p + R'r + (\mathcal{L}' + \mathcal{M})S + \frac{Sr}{p} \right] J \right];
 \end{aligned}$$

$$(30.24) \quad \bar{I}^d + \bar{J}^d = I^1 \quad [\text{donné par (30.19)}].$$

Valeurs initiales des courants de branche.

On fait :

$$(30.25) \quad \bar{i}_0^r + \bar{j}_0^r = \lim_{p \rightarrow \infty} (\bar{I}^r + \bar{J}^r) \quad r = a, b, c, d;$$

il vient :

$$(30.26) \quad \bar{i}_0^a + \bar{j}_0^a = i_0;$$

$$(30.27) \quad \bar{i}_0^b + \bar{j}_0^b = i_0 - i'_0 - j_0 \quad \text{où} \quad j_0 \triangleq \lim_{p \rightarrow \infty} J;$$

$$(30.28) \quad \bar{i}_0^c + \bar{j}_0^c = i'_0;$$

$$(30.29) \quad \bar{i}_0^d + \bar{j}_0^d = i_0 - j_0;$$

on a, dans toutes les branches :

$$(30.30) \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\bar{I}^a + \bar{J}^a}{p} = 0.$$

Différences de potentiel de branche.

$$(30.31) \quad \begin{aligned} \bar{V}_a &= (r + \ell^2 p)(\bar{I}^a + \bar{J}^a) + \mathfrak{M} p(\bar{I}^c + \bar{J}^c) - \ell^2 p i_0 - \mathfrak{M} p i'_0 \\ &= \frac{1}{|Z|} \left[\left[(R' \ell^2 + R \mathfrak{M} + R' \mathfrak{M}) p + R' r + \ell^2 S + \mathfrak{M} S + \frac{S r}{p} \right] E \right. \\ &\quad - \left[(R + R')(\ell^2 \ell'^2 - \mathfrak{M}^2) p^2 + ((\ell^2 \ell'^2 - \mathfrak{M}^2) S + (R R' + R r' + R' r') \ell^2 - r R' \mathfrak{M}) p \right. \\ &\quad \left. + (R + r') \ell^2 - r \mathfrak{M} \right] S \left. \right] i_0 \\ &\quad + \left[R' (\ell^2 \ell'^2 - \mathfrak{M}^2) p^2 + (r R' \ell'^2 - (R R' + R r' + R' r') \mathfrak{M} + (\ell^2 \ell'^2 - \mathfrak{M}^2) S) p \right. \\ &\quad \left. + (r \ell'^2 - (R + r') \mathfrak{M}) S \right] i'_0 \\ &\quad + [(\ell^2 \ell'^2 - \mathfrak{M}^2) p^2 + (r \ell'^2 + r' \ell^2 - R \mathfrak{M}) p + r r'] S q_0 \\ &\quad + \left[(R + R')(\ell^2 \ell'^2 - \mathfrak{M}^2) p^2 + (r R \ell'^2 + r R' \ell'^2 + R R' \ell^2 + R r' \ell^2 + R' r' \ell^2 \right. \\ &\quad \left. + (\ell^2 \ell'^2 - \mathfrak{M}^2) S) p + r(R R' + R r' + R' r' + \ell'^2 S) + (r' + R) \ell^2 S \right. \\ &\quad \left. + r(R + r') \frac{S}{p} \right] J \left. \right]; \end{aligned}$$

$$(30.32) \quad \begin{aligned} \bar{V}_b &= \left(R' + \frac{S}{p} \right) (\bar{I}^b + \bar{J}^b) - S q_0 \\ &= \frac{1}{|Z|} \left[- \left[R' (\ell^2 + \mathfrak{M}) p + R R' + r R' + (\ell^2 + \mathfrak{M}) S + \frac{(R + r) S}{p} \right] E \right. \\ &\quad + \left[R' (\ell^2 \ell'^2 - \mathfrak{M}^2) p^2 + (R' (r' \ell^2 - R \mathfrak{M} - r \mathfrak{M}) + (\ell^2 \ell'^2 - \mathfrak{M}^2) S) p \right. \\ &\quad \left. + (r' \ell^2 - R \mathfrak{M} - r \mathfrak{M}) S \right] i_0 \\ &\quad - \left[R' (\ell^2 \ell'^2 - \mathfrak{M}^2) p^2 + (R' (r \ell'^2 + R \ell'^2 - r' \mathfrak{M}) + (\ell^2 \ell'^2 - \mathfrak{M}^2) S) p \right. \\ &\quad \left. + (r \ell'^2 + R \ell'^2 - r' \mathfrak{M}) S \right] i'_0 \\ &\quad - [(\ell^2 \ell'^2 - \mathfrak{M}^2) p^2 + (R \ell'^2 + r' \ell^2 + r \ell'^2) p + (R + r) r'] S q_0 \\ &\quad - \left[R' (\ell^2 \ell'^2 - \mathfrak{M}^2) p^2 + (R' (r \ell'^2 + r' \ell^2 - R \mathfrak{M}) + (\ell^2 \ell'^2 - \mathfrak{M}^2) S) p \right. \\ &\quad \left. + R' r r' + (r \ell'^2 + r' \ell^2 - R \mathfrak{M}) S + \frac{r r'}{p} S \right] J \left. \right]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (30.33) \quad \bar{V}_c &= Mp(\bar{I}^a + \bar{J}^a) + (r' + \mathcal{L}'p)(\bar{I}^c + J^c) - E - \mathcal{M}pi_0 - \mathcal{L}'pi'_0 \\
 &= \frac{1}{|Z|} \left[- \left[R'(\mathcal{L} + \mathcal{M})p + RR' + rR' + (\mathcal{L} + \mathcal{M})S + \frac{(R+r)S}{p} \right] E \right. \\
 &\quad + \left[R'(\mathcal{L}\mathcal{L}' - \mathcal{M}^2)p^2 + (R'(r'\mathcal{L}' - R\mathcal{M} - r\mathcal{M}) + (\mathcal{L}\mathcal{L}' - \mathcal{M}^2)S)p \right. \\
 &\quad \left. + (r'\mathcal{L}' - R\mathcal{M} - r\mathcal{M})S \right] i_0 \\
 &\quad - \left[R'(\mathcal{L}\mathcal{L}' - \mathcal{M}^2)p^2 + (R'(r\mathcal{L}' + R\mathcal{L}' - r'\mathcal{M}) + (\mathcal{L}\mathcal{L}' - \mathcal{M}^2)S)p \right. \\
 &\quad \left. + (r\mathcal{L}' + R\mathcal{L}' - r'\mathcal{M})S \right] i'_0 \\
 &\quad - [(\mathcal{L}\mathcal{L}' - \mathcal{M}^2)p^2 + (R\mathcal{L}' + r'\mathcal{L}' + r\mathcal{L}')p + (R+r)r'] Sq_0 \\
 &\quad - \left[R'(\mathcal{L}\mathcal{L}' - \mathcal{M}^2)p^2 + (R'(r\mathcal{L}' + r'\mathcal{L}' - R\mathcal{M}) + (\mathcal{L}\mathcal{L}' - \mathcal{M}^2)S)p \right. \\
 &\quad \left. + R'rr' + (r\mathcal{L}' + r'\mathcal{L}' - R\mathcal{M})S + \frac{rr'}{p}S \right] J \Big];
 \end{aligned}$$

on vérifie bien que :

$$(30.33 \text{ bis}) \quad \bar{V}_b = \bar{V}_c$$

et :

$$(30.34) \quad \bar{V}_d = R(\bar{I}^d + \bar{J}^d) \quad \text{où} \quad \bar{I}^d + \bar{J}^d \quad \text{est donné par (30.24) et (30.19);}$$

on vérifie aussi que :

$$\bar{V}_d = -\bar{V}_a - \bar{V}_c.$$

Valeurs initiales des d.d.p. de branche.

$$(30.35) \quad \bar{v}_{0r} = \lim_{p \rightarrow \infty} \bar{V}_r \quad r = a, b, c, d;$$

$$(30.36) \quad \bar{v}_{0a} = -(R + R')i_0 + R'i'_0 + Sq_0 + (R + R')j_0;$$

$$(30.37) \quad \bar{v}_{0b} = \bar{v}_{0c} = R'i_0 - R'i'_0 - Sq_0 - R'j_0;$$

$$(30.38) \quad \bar{v}_{0d} = Ri_0 - Rj_0.$$

31. — ÉQUATIONS DANS UN REPÈRE COMPLET CONSTRUIT SUR LES PAIRES DE NŒUDS

Nous reprendrons, point à point, les considérations des paragraphes 22 et la suite, transposées dualistiquement. Les branches considérées électriquement seront des « branches à admittance » où seront placées des forces électromotrices [*figure* (31.1)].

Écrivons les équations de branche en partant de la loi d'Ohm duale :

$$\begin{aligned}
 (31.1) \quad \bar{i}^a + \bar{j}^a &= \bar{C}^{ab} \frac{d}{dt} (\bar{v}_b + \bar{e}_b) + \bar{G}^{ab} (\bar{v}_b + \bar{e}_b) + \bar{\Gamma}^{ab} \int (\bar{v}_b + \bar{e}_b) dt \\
 &\quad a, b = 1, 2, \dots, B.
 \end{aligned}$$

Entre les d.d.p. $\bar{v}_b + \bar{e}_b$, les d.d.p. entre les paires de nœuds choisies v_α $\alpha = 1, 2, \dots, P$ et les f.e.m. e_λ $\lambda = P + 1, P + 2, \dots, P + M$ dans les mailles choisies arbitrairement également, on peut écrire :

$$(31.2) \quad \bar{v}_a + \bar{e}_a = {}_1\mathcal{O}_a^\alpha v_\alpha + {}_2\mathcal{O}_a^\lambda e_\lambda \quad \alpha = 1, 2, \dots, P,$$

$$\lambda = P + 1, P + 2, \dots, P + M,$$

où les ${}_1\mathcal{O}_a^\alpha$ et ${}_2\mathcal{O}_a^\lambda$ sont les éléments respectifs de deux sous-matrices de la matrice carrée :

$$\mathcal{O}_a^\alpha \quad a = 1, 2, \dots, B, \quad \alpha = 1, 2, \dots, M + P = B,$$

qui traduit les relations linéaires entre les d.d.p. $\bar{v}_a + \bar{e}_a$, d'une part, et v_α, e_λ , d'autre part.

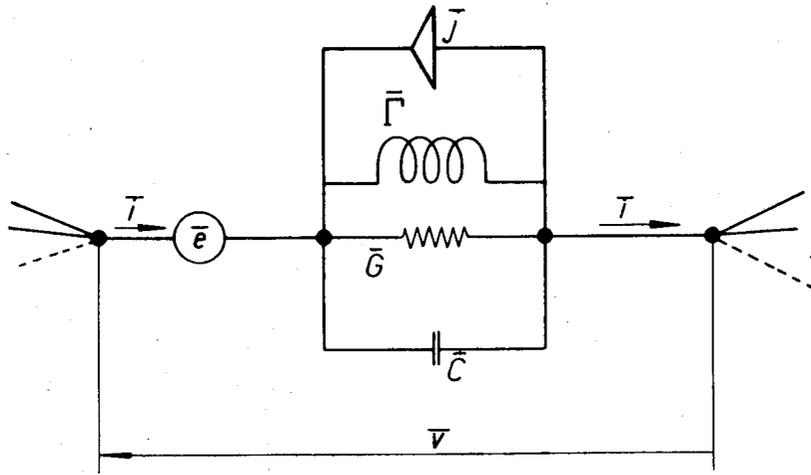


Fig. 31.1

En reprenant exactement la méthode utilisée au paragraphe 22, transposée dualistiquement, nous obtiendrons un repère, dit « repère complet construit sur les paires de nœuds », où les équations du réseau sont :

$$(31.3) \quad j^\alpha = C^{\alpha\beta} \frac{dv_\beta}{dt} + G^{\alpha\beta} v_\beta + \Gamma^{\alpha\beta} \int v_\beta dt + C^{\alpha\mu} \frac{de_\mu}{dt} + G^{\alpha\mu} e_\mu + \Gamma^{\alpha\mu} \int e_\mu dt;$$

$$(31.4) \quad i^\lambda + j^\lambda = C^{\lambda\beta} \frac{dv_\beta}{dt} + G^{\lambda\beta} v_\beta + \Gamma^{\lambda\beta} \int v_\beta dt + C^{\lambda\mu} \frac{de_\mu}{dt} + G^{\lambda\mu} e_\mu + \Gamma^{\lambda\mu} \int e_\mu dt$$

$$\alpha, \beta = 1, 2, \dots, P, \quad \lambda, \mu = P + 1, P + 2, \dots, P + M.$$

Et, en passant aux expressions opérationnelles :

$$(31.5) \quad J^\alpha = Y^{\alpha\beta} V_\beta + Y^{\alpha\mu} E_\mu + \Gamma^{\alpha\beta} b_{0\beta} - C^{\alpha\beta} p v_{0\beta} + \Gamma^{\alpha\mu} c_{0\mu} - C^{\alpha\mu} p e_{0\mu};$$

$$(31.6) \quad I^\lambda + J^\lambda = Y^{\lambda\beta} V_\beta + Y^{\lambda\mu} E_\mu + \Gamma^{\lambda\beta} b_{0\beta} - C^{\lambda\beta} p v_{0\beta} + \Gamma^{\lambda\mu} c_{0\mu} - C^{\lambda\mu} p e_{0\mu}$$

$$\alpha, \beta = 1, 2, \dots, P, \quad \lambda, \mu = P + 1, P + 2, \dots, P + M,$$

où les éléments :

$$Y^{\alpha\beta}, Y^{\alpha\mu}, Y^{\lambda\beta}, Y^{\lambda\mu} \quad \alpha, \beta = 1, 2, \dots, P, \quad \lambda, \mu = P + 1, P + 2, \dots, P + M$$

forment les quatre sous-matrices de la matrice admittance du repère construit sur les d.d.p. entre paires de nœuds et dont les éléments sont $Y^{\alpha\beta} \quad \alpha, \beta = 1, 2, \dots, P + M$. Nous avons posé :

$$(31.7) \quad e_{0\mu} = e_{\mu}(+0), \quad c_{0\mu} = c_{\mu}(t) - \int_0^t e(t) dt \quad \mu = P + 1, P + 2, \dots, P + M.$$

Nous appellerons :

$$(31.9) \quad J_0^{\alpha} = \Gamma^{\alpha\beta} b_{0\beta} - C^{\alpha\beta} p v_{0\beta} + \Gamma^{\alpha\mu} c_{0\mu} - C^{\alpha\mu} p e_{0\mu},$$

« intensité de départ de la paire de nœuds α » ;

$$(31.10) \quad J_0^{\lambda} = \Gamma^{\lambda\beta} b_{0\beta} - C^{\lambda\beta} p v_{0\beta} + \Gamma^{\lambda\mu} c_{0\mu} - C^{\lambda\mu} p e_{0\mu},$$

« intensité de départ de la maille λ ».

Les quantités b_0 , v_0 , c_0 et e_0 sont, en général, données dans les branches.

On obtient, finalement :

$$(31.11) \quad J^{\alpha} - J_0^{\alpha} = Y^{\alpha\beta} V_{\beta} + Y^{\alpha\mu} E_{\mu} \quad \alpha, \beta = 1, 2, \dots, P,$$

$$(31.12) \quad I^{\lambda} + J^{\lambda} - J_0^{\lambda} = Y^{\lambda\beta} V_{\beta} + Y^{\lambda\mu} E_{\mu} \quad \lambda, \mu = P + 1, P + 2, \dots, P + M,$$

et, avec des vecteurs généralisés :

$$(31.13) \quad \overset{\circ}{J}^{\alpha} - \overset{\circ}{J}_0^{\alpha} = Y^{\alpha\beta} \overset{\circ}{V}_{\beta} \quad \alpha, \beta = 1, 2, \dots, P + M.$$

Présence de tenseurs.

Nous énoncerons les théorèmes duals des théorèmes VII, VIII et IX.

THÉORÈME X.

Les produits contractés :

$$(31.14) \quad \overset{\circ}{J}^{\alpha} \overset{\circ}{V}_{\alpha}, \quad \overset{\circ}{J}_0^{\alpha} \overset{\circ}{V}_{\alpha}, \quad (\overset{\circ}{J}^{\alpha} - \overset{\circ}{J}_0^{\alpha}) \overset{\circ}{V}_{\alpha} \quad \alpha = 1, 2, \dots, P + M,$$

sont des invariants lorsqu'on passe d'un repère complet à un autre.

Conséquence.

Il existe une forme bilinéaire invariante dans les repères complets :

$$(31.15) \quad N = Y^{\alpha\beta} \overset{\circ}{V}_{\alpha} \overset{\circ}{V}_{\beta} = Y^{\prime\eta\nu} \overset{\circ}{V}'_{\eta} \overset{\circ}{V}'_{\nu} \quad \alpha, \beta, \eta, \nu = 1, 2, \dots, P + M.$$

THÉORÈME XI.

On a :

$$(31.16) \quad \det Y^{\alpha\beta} = (\det D_{\gamma}^{\alpha})^2 \cdot \det Y'^{\eta\nu}.$$

On constate donc la présence, dans ces repères complets, des êtres mathématiques suivants :

— tenseur une fois contravariant :

$$(31.18) \quad \overset{\circ}{J}^{\alpha} = D_{\gamma}^{\alpha} \overset{\circ}{J}'^{\eta}, \quad \overset{\circ}{J}_0^{\alpha} = D_{\gamma}^{\alpha} \overset{\circ}{J}'_0{}^{\eta}, \quad (\overset{\circ}{J}^{\alpha} - \overset{\circ}{J}_0^{\alpha}) = D_{\gamma}^{\alpha} (\overset{\circ}{J}'^{\eta} - \overset{\circ}{J}'_0{}^{\eta})$$

$$\alpha, \eta = 1, 2, \dots, P + M;$$

— tenseur une fois covariant :

$$(31.19) \quad \overset{\circ}{V}_{\alpha} = D_{\alpha}^{\gamma} \overset{\circ}{V}'_{\eta} \quad \alpha, \eta = 1, 2, \dots, P + M;$$

— tenseur une fois contravariant :

$$(31.20) \quad Y^{\alpha\beta} = D_{\gamma}^{\alpha} D_{\delta}^{\beta} Y'^{\eta\nu} \quad \alpha, \beta, \eta, \nu = 1, 2, \dots, P + M;$$

— formule invariante :

$$(31.21) \quad \overset{\circ}{J}^{\alpha} - \overset{\circ}{J}_0^{\alpha} = Y^{\alpha\beta} \overset{\circ}{V}_{\beta}, \quad \overset{\circ}{J}'^{\eta} - \overset{\circ}{J}'_0{}^{\eta} = Y'^{\eta\nu} V'_{\nu} \quad \alpha, \beta, \eta, \nu = 1, 2, \dots, P + M;$$

$$(31.22)$$

— invariants :

$$(31.23) \quad \overset{\circ}{J}^{\alpha} \overset{\circ}{V}_{\alpha} = \overset{\circ}{J}'^{\eta} \overset{\circ}{V}'_{\eta}, \quad \overset{\circ}{J}_0^{\alpha} \overset{\circ}{V}_{\alpha} = \overset{\circ}{J}'_0{}^{\eta} \overset{\circ}{V}'_{\eta}, \quad (\overset{\circ}{J}^{\alpha} - \overset{\circ}{J}_0^{\alpha}) \overset{\circ}{V}_{\alpha} = (\overset{\circ}{J}'^{\eta} - \overset{\circ}{J}'_0{}^{\eta}) \overset{\circ}{V}'_{\eta}$$

$$(31.24)$$

$$(31.25) \quad \alpha, \eta = 1, 2, \dots, P + M;$$

— invariant opérationnel fondamental :

$$(31.26) \quad N = Y^{\alpha\beta} \overset{\circ}{V}_{\alpha} \overset{\circ}{V}_{\beta} = Y'^{\eta\nu} \overset{\circ}{V}'_{\eta} \overset{\circ}{V}'_{\nu} \quad \alpha, \beta, \eta, \nu = 1, 2, \dots, P + M;$$

— pseudo-scalaire de poids 2 :

$$(31.27) \quad \det Y^{\alpha\beta} = (\det D_{\gamma}^{\alpha})^2 \cdot \det Y'^{\eta\nu} \quad \alpha, \beta, \eta, \nu = 1, 2, \dots, P + M.$$

Considérations énergétiques.

THÉORÈME XII.

Ce sera le théorème dual du théorème IX :

$$(31.28) \quad w = j^{\alpha} v_{\alpha} + (i^{\lambda} + j^{\lambda}) v_{\lambda} \quad \alpha, \lambda = 1, 2, \dots, P + M;$$

on en tire :

$$(31.29) \quad N' = J^{\alpha} V_{\alpha} + (I^{\lambda} + J^{\lambda}) V_{\lambda} \quad \alpha, \lambda = 1, 2, \dots, P + M.$$

Autre expression mathématique de l'invariant fondamental.

La transposition des calculs faits au paragraphe 25 nous donnera :

$$(31.30) \quad N' = Y^{\alpha\beta} (\check{V}_{\alpha} \check{V}_{\beta} - \check{V}_{0\alpha} \check{V}_{0\beta}) \quad \alpha, \beta = 1, 2, \dots, P + M.$$

On démontrera, comme au paragraphe 26, que les matrices dont les éléments sont D_{λ}^{α} $\alpha, \lambda = 1, 2, \dots, P + M$, forment un groupe de transformation qui constitue le dual de celui que nous avons considéré au paragraphe 26.

Mise en place des valeurs initiales.

On déterminera les b_0, v_0, c_0 et e_0 dans les branches où existent des capacités et des inductances. On calculera les intensités de départ de branche :

$$(31.31) \quad \bar{J}_0^a = \bar{\Gamma}^{ab} (\bar{b}_{0b} + \bar{c}_{0b}) - \bar{C}^{ab} p (\bar{v}_{0b} + \bar{e}_{0b}) \quad a, b = 1, 2, \dots, B$$

et, de là, les intensités de départ dans le repère complet construit sur les p.d.n. :

$$(31.32) \quad J_0^a = D_a^{\alpha} \bar{J}_0^a \quad a = 1, 2, \dots, B, \quad \alpha = 1, 2, \dots, P + M.$$

32. — PROCESSUS DE RÉOLUTION

— Établir la matrice de connexion :

$$(32.1) \quad \mathcal{O}_a^{\alpha} \quad \boxed{\mathcal{O}}.$$

— Établir la matrice admittance de branche :

$$(32.2) \quad \bar{Y}^{ab} \quad \boxed{\bar{Y}}.$$

(32.3) — Se donner ou déterminer les $\bar{v}_{0a}, \bar{b}_{0a}, \bar{e}_{0a}$ et \bar{c}_{0a} dans les branches.

— Établir la matrice des intensités de départ de branche :

$$(32.4) \quad \bar{J}_0^a \quad \{ \bar{J}_0 \}.$$

— Établir la matrice des intensités totales de branche :

$$(32.5) \quad \bar{J}^a - \bar{J}_0^a \quad \{ \bar{J} \} - \{ \bar{J}_0 \}.$$

— Calculer les matrices du repère complet :

$$(32.6) \quad J^{\alpha} - J_0^{\alpha} = \mathcal{O}_a^{\alpha} (\bar{J}^a - \bar{J}_0^a) \quad \{ J \} - \{ J_0 \} = \boxed{\mathcal{O}} (\{ \bar{J} \} - \{ \bar{J}_0 \});$$

$$(32.7) \quad Y^{\alpha\beta} = \mathcal{O}_a^{\alpha} \mathcal{O}_b^{\beta} \bar{Y}^{ab} \quad \boxed{Y} = \boxed{\mathcal{O}}' \boxed{\bar{Y}} \boxed{\mathcal{O}}.$$

— Décomposer $Y^{\alpha\beta}$ en sous-matrices :

$$(32.8) \quad Y^{\alpha\beta}, Y^{\alpha\mu}, Y^{\lambda\beta}, Y^{\lambda\mu} \quad \boxed{Y_1}, [Y_2], [Y_3], \boxed{Y_4}$$

$$\alpha, \beta = 1, 2, \dots, P, \quad \lambda, \mu = P + 1, P + 2, \dots, P + M.$$

— Écrire et résoudre les équations des sous-matrices :

$$(32.9) \quad J^\alpha - J_0^\alpha = Y^{\alpha\beta} V_\beta + Y^{\alpha\mu} E_\mu \quad \{J_1\} - \{J_{01}\} = \boxed{Y_1} \{V\} + [Y_2] \{E\};$$

$$(32.10) \quad I^\lambda + J^\lambda - J_0^\lambda = Y^{\lambda\beta} V_\beta + Y^{\lambda\mu} E_\mu \quad \{I + J_2 - J_{02}\} = [Y_3] \{V\} + \boxed{Y_4} \{E\}.$$

— Calculer les d.d.p. V_β entre paires de nœuds :

$$(32.11) \quad \{V\} = \boxed{Y_1}^{-1} \{J_1 - J_{01}\} - \boxed{Y_1}^{-1} [Y_2] \{E\}.$$

— Calculer les courants I^λ dans les mailles :

$$(32.12) \quad \{I\} = [Y_3] \{V\} + \boxed{Y_4} \{E\} - \{J_2 - J_{02}\}.$$

— Calculer les d.d.p. $\bar{V}_\alpha + \bar{E}_\alpha$ en utilisant la matrice de connexion \mathcal{O}_α^a , les d.d.p. V_α $\alpha = 1, 2, \dots, P$ et les f.e.m. E_λ $\lambda = P + 1, P + 2, \dots, P + M$ étant connues :

$$(32.13) \quad \bar{V}_\alpha + \bar{E}_\alpha = {}_1\mathcal{O}_\alpha^a \bar{V}_\alpha + {}_2\mathcal{O}_\alpha^\lambda \bar{E}_\lambda \quad \{\bar{V} + \bar{E}\} = [{}_1\mathcal{O}] \{V\} + [{}_2\mathcal{O}] \{E\}.$$

— Calculer les courants \bar{I}^a de branche :

$$(32.14) \quad \bar{I}^a = {}_2\mathcal{O}_\lambda^a \bar{I}^\lambda \quad \{\bar{I}\} = [{}_2\mathcal{O}] \{I\}.$$

Il est souvent plus commode de calculer les courants \bar{I}^a à partir des d.d.p. de branche. En effet :

$$(32.15) \quad \bar{I}^a = \bar{Y}^{ab} (\bar{V}_b + \bar{E}_b) - \bar{J}^a - \bar{J}_0^a \quad \{\bar{I}\} = \boxed{\bar{Y}} (\{\bar{V}\} + \{\bar{E}\}) - \{\bar{J}\} - \{\bar{J}_0\}.$$

— Vérifier les valeurs initiales.

33. — TABLEAUX DES CORRESPONDANCES DUALISTIQUES

Les correspondances sont :

1° dans le repère de branche :

$$(33.1) \quad \begin{aligned} \bar{i}^a &\leftrightarrow \bar{v}_a, & \bar{j}^a &\leftrightarrow \bar{e}_a, & \bar{v}_a &\leftrightarrow \bar{i}^a, & \bar{e}_a &\leftrightarrow \bar{j}^a, & \bar{q}^a &\leftrightarrow \bar{b}_a, & \bar{r}^a &\leftrightarrow \bar{c}_a, \\ \bar{k}^{ab} &\leftrightarrow \bar{C}^{ab}, & \bar{R}^{ab} &\leftrightarrow \bar{G}^{ab}, & \bar{S}^{ab} &\leftrightarrow \bar{\Gamma}^{ab}, & \bar{Z}^{ab} &\leftrightarrow \bar{Y}^{ab}; \end{aligned}$$

2° dans les deux classes de repères complets :

$$\begin{aligned}
 (33.2) \quad & i^\alpha \leftrightarrow v_\alpha, \quad j^\lambda \leftrightarrow e_\lambda, \quad v_\lambda \leftrightarrow i^\lambda, \quad e_\alpha \leftrightarrow j^\alpha, \quad q^\alpha \leftrightarrow b_\alpha, \quad r^\lambda \leftrightarrow c_\lambda, \\
 & L_{\alpha\beta}^{\rho} \leftrightarrow C^{\alpha\beta}, \quad L_{\alpha\lambda}^{\rho} \leftrightarrow C^{\alpha\lambda}, \quad L_{\lambda\beta}^{\rho} \leftrightarrow C^{\lambda\beta}, \quad L_{\lambda\mu}^{\rho} \leftrightarrow C^{\lambda\mu}, \\
 & R_{\alpha\beta} \leftrightarrow G^{\alpha\beta}, \quad R_{\alpha\lambda} \leftrightarrow G^{\alpha\lambda}, \quad R_{\lambda\beta} \leftrightarrow G^{\lambda\beta}, \quad R_{\lambda\mu} \leftrightarrow G^{\lambda\mu}, \\
 & S_{\alpha\beta} \leftrightarrow \Gamma^{\alpha\beta}, \quad S_{\alpha\lambda} \leftrightarrow \Gamma^{\alpha\lambda}, \quad S_{\lambda\beta} \leftrightarrow \Gamma^{\lambda\beta}, \quad S_{\lambda\mu} \leftrightarrow \Gamma^{\lambda\mu}, \\
 & Z_{\alpha\beta} \leftrightarrow Y^{\alpha\beta}, \quad Z_{\alpha\lambda} \leftrightarrow Y^{\alpha\lambda}, \quad Z_{\lambda\beta} \leftrightarrow Y^{\lambda\beta}, \quad Z_{\lambda\mu} \leftrightarrow Y^{\lambda\mu}, \\
 & \mathcal{C}_a^a \leftrightarrow \mathcal{D}_a^a, \quad {}_1\mathcal{C}_a^a \leftrightarrow {}_1\mathcal{D}_a^a, \quad {}_2\mathcal{C}_a^a \leftrightarrow {}_2\mathcal{D}_a^a.
 \end{aligned}$$

Les repères de mailles et les repères de p.d.n. sont des repères « incomplets » où les j^λ et r^λ sont tous nuls pour les premiers, où les e_λ et c_λ sont tous nuls pour les seconds. Ils ne constituent donc qu'un cas particulier des repères complets.

ANNEXE I

ÉTUDE D'UN RÉSEAU EN PRENANT COMME VARIABLES LES QUANTITÉS D'ÉLECTRICITÉ

En prenant des quantités d'électricité \bar{q}_a dans les branches, au lieu des courants \bar{i}_a , les équations (5.1) s'écriront :

$$(A.1) \quad \bar{v}_a + \bar{e}_a = \bar{L}_{ab} \frac{d^2 \bar{q}^a}{dt^2} + \bar{R}_{ab} \frac{d\bar{q}^a}{dt} + \bar{S}_{ab} \bar{q}^a \quad a, b = 1, 2, \dots, B,$$

d'où :

$$(A.2) \quad \begin{aligned} \bar{V}_a + \bar{E}_a &= \bar{L}_{ab} p^2 \bar{Q}^b + \bar{R}_{ab} p \bar{Q}^b + \bar{S}_{ab} \bar{Q}^b - \bar{L}_{ab} p^2 \bar{q}_0^b - \bar{L}_{ab} p \bar{i}_0^b - \bar{R}_{ab} p \bar{q}_0^b \\ &= p \bar{Z}_{ab} \bar{Q}^b - \bar{L}_{ab} p^2 \bar{q}_0^b - \bar{R}_{ab} p \bar{q}_0^b - \bar{L}_{ab} p \bar{i}_0^b, \end{aligned}$$

où \bar{Z}_{ab} est (5.11).

Posons, cette fois, pour f.e.m. de départ :

$$(A.3) \quad \bar{E}_{0a} = -(\bar{L}_{ab} p + \bar{R}_{ab}) p \bar{q}_0^b - \bar{L}_{ab} p \bar{i}_0^b \quad a, b = 1, 2, \dots, B;$$

il vient :

$$(A.4) \quad \bar{V}_a + \bar{E}_a - \bar{E}_{0a} = \bar{Z}_{ab} p \bar{Q}^b \quad a, b = 1, 2, \dots, B.$$

Passons dans un repère de mailles, comme nous l'avons fait au paragraphe 5 ; on a :

$$(A.5) \quad E_\alpha - E_{0\alpha} = Z_{\alpha\beta} p Q^\beta \quad \alpha, \beta = 1, 2, \dots, M;$$

il vient, finalement :

$$(A.6) \quad Q^\alpha = \frac{1}{p} (Z^{-1})^{\alpha\beta} (E_\alpha - E_{0\alpha}),$$

où :

$$(A.7) \quad (Z^{-1})^{\alpha\gamma} Z_{\gamma\beta} = \delta_\beta^\alpha \quad \alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \dots, M,$$

et de là :

$$(A.8) \quad Q^a = \mathcal{C}_a^\alpha Q^\alpha \quad \begin{array}{l} \alpha = 1, 2, \dots, M, \\ a = 1, 2, \dots, B. \end{array}$$

Les valeurs initiales « héritées » seront données dans les branches contenant des inductances ou des résistances pour les q_0 et des inductances seulement pour les i_0 .

Comme on le voit, la détermination des fonctions $\bar{q}^a(t)$ exige la connaissance de valeurs initiales différentes de celles qu'exigeaient la détermination des fonctions $\bar{i}^a(t)$.

Il est toutefois inutile de refaire les calculs pour obtenir les \bar{Q}^a si l'on connaît les \bar{I}^a ; en effet :

$$\bar{Q}^a = \frac{\bar{I}^a}{p} + \bar{q}_0^a \quad a = 1, 2, \dots, B;$$

il faut donc connaître les \bar{q}_0^a dans toutes les branches du réseau.

On tirera des conclusions semblables dans les repères de paires de nœuds et les repères complets.

ANNEXE II

Nous donnons en rappel deux théorèmes dont l'emploi est fort utile dans la mise en équations et la résolution des réseaux. Le premier de ces théorèmes est démontré dans tous les ouvrages de calcul opérationnel et nous passerons sous silence sa démonstration; par contre, le second n'est valable que pour certaines fonctions et nous le démontrerons.

THÉORÈME.

Si :

$$(B.1) \quad g(p) = \mathbf{L} h(t),$$

alors :

$$(B.2) \quad \lim_{|p| \rightarrow \infty} g(p) = \lim_{t \rightarrow 0} h(t).$$

THÉORÈME.

Si :

$$(B.3) \quad g(p) = \frac{N(p)}{D(p)},$$

où $N(p)$ et $D(p)$ sont des polynômes en p avec D de degré supérieur ou égal à N , et si $D(p)$ a toutes ses racines à partie réelle non nulle et négative, alors :

$$(B.4) \quad \lim_{|p| \rightarrow 0} g(p) = \lim_{t \rightarrow \infty} h(t).$$

Démonstration.

$\frac{N(p)}{D(p)}$ peut toujours se mettre sous la forme d'une somme de fractions rationnelles simples de la forme $\frac{1}{(p + \alpha)^n}$; or, on a :

$$(B.5) \quad \frac{1}{(p + \alpha)^n} = \mathbf{L} \frac{1}{\alpha^n (n-1)!} \int_0^{\alpha t} e^{-u} u^{n-1} du.$$

Il vient, si $Re \alpha > 0$:

$$(B.6) \quad \lim_{|p| \rightarrow 0} \frac{1}{(p + \alpha)^n} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha^n (n-1)!} \int_0^{\alpha t} e^{-u} u^{n-1} du = \frac{1}{\alpha^n}.$$

La propriété étant vérifiée pour toutes les parties est vérifiée pour la somme.

EXEMPLE.

Si :

$$(B.7) \quad \mathbf{L} h(t) = \frac{5p^2 + 3p - 4}{(p^2 + 3p + 5)(p + 7)^3},$$

alors :

$$(B.8) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \lim_{|p| \rightarrow 0} \frac{5p^2 + 3p - 4}{(p^2 + 3p + 5)(p + 7)^3} = -\frac{4}{1715}.$$

ANNEXE III

REMARQUE AU SUJET DE L'INVARIANT OPÉRATIONNEL FONDAMENTAL

En utilisant la formule de composition de Borel nous écrivons :

$$(C.1) \quad E_{\alpha} I^{\alpha} = p \mathbf{L} \int_0^t e_{\alpha}(\tau) \cdot i^{\alpha}(t - \tau) d\tau = p \mathbf{L}(e_{\alpha} * i^{\alpha}) \quad \alpha = 1, 2, \dots, M,$$

ce qui montre l'invariance du produit de composition dans un repère de mailles.

Plus généralement encore, si τ_1 et τ_2 sont deux valeurs distinctes de t , alors :

$$(C.2) \quad e_{\alpha}(t - \tau_1) \cdot i^{\alpha}(t - \tau_2) \quad \text{et} \quad e_{\alpha}(t - \tau_1) * i^{\alpha}(t - \tau_2) \quad \alpha = 1, 2, \dots, M$$

sont des invariants.

REMARQUE AU SUJET DE LA FORME BILINÉAIRE $Z_{\alpha\beta} I^{\alpha} I^{\beta}$

Il semblerait, *a priori*, que cette forme est une forme quadratique; il n'en est rien, elle est bilinéaire. En effet :

1° $Z_{\alpha\beta}$ n'est pas forcément symétrique;

2° si I^{α} correspond à un état du réseau et I^{β} à un autre état, alors :

$$(C.4) \quad Z_{\alpha\beta} I^{\alpha} I^{\beta} \quad \text{est un invariant} \quad \alpha, \beta = 1, 2, \dots, M.$$

On pourrait peut-être appeler $Z_{\alpha\beta} I^{\alpha} I^{\beta}$ forme quadratique non symétrique.

ANNEXE IV

EMPLOI DE FAUX TENSEURS

Partons de (5.10) et choisissons deux repères de mailles distincts de telle sorte que nous puissions écrire :

$$(D.1) \quad \bar{I}^a = \mathcal{C}_\alpha^a I^\alpha \quad \text{et} \quad \mathcal{C}'_\alpha{}^a V_a = 0 \quad \begin{array}{l} a = 1, 2, \dots, B, \\ \alpha = 1, 2, \dots, M. \end{array}$$

Portons (D.1) dans (5.10); il vient :

$$(D.2) \quad \bar{V}_a + \bar{E}_a - \bar{E}_{0a} = \bar{Z}_{ab} \mathcal{C}_\beta^b I^\beta \quad \begin{array}{l} a, b = 1, 2, \dots, B, \\ \beta = 1, 2, \dots, M, \end{array}$$

et réalisons une connexion distincte au moyen de (D.2); on a :

$$(D.3) \quad \mathcal{C}'_\alpha{}^a (\bar{E}_a - \bar{E}_{0a}) = \bar{Z}_{ab} \mathcal{C}'_\alpha{}^a \mathcal{C}_\beta^b I^\beta \quad \begin{array}{l} a, b = 1, 2, \dots, B, \\ \alpha, \beta = 1, 2, \dots, M. \end{array}$$

Posons :

$$(D.4) \quad E'_\alpha - E'_{0\alpha} = \mathcal{C}'_\alpha{}^a (\bar{E}_a - \bar{E}_{0a}) \quad \begin{array}{l} a = 1, 2, \dots, B, \\ \alpha = 1, 2, \dots, M; \end{array}$$

il vient :

$$(D.5) \quad E'_\alpha - E'_{0\alpha} = \bar{Z}_{\alpha\beta} \mathcal{C}'_\alpha{}^a \mathcal{C}_\beta^b I^\beta \quad \begin{array}{l} a, b = 1, 2, \dots, B, \\ \alpha, \beta = 1, 2, \dots, M. \end{array}$$

L'être mathématique :

$$(D.6) \quad Z'_{\alpha\beta} = \bar{Z}_{ab} \mathcal{C}'_\alpha{}^a \mathcal{C}_\beta^b,$$

qui est « à cheval » sur deux repères d'un même espace, n'est pas un tenseur; nous l'appelons « faux tenseur ». De même, le produit contracté $E'_\alpha I^\alpha$ n'est pas un invariant. Toutefois, la matrice impédance du faux tenseur peut être utilisée pour résoudre le système d'équations.

BIBLIOGRAPHIE

A

- A1 ARSOVE M. G. — *The Algebraic Theory of Linear Transmission Networks*. J. Franklin Inst., Apr.-May 1953.

B

- B1 BAYARD M. — *Théorie des Réseaux de Kirchhoff*. Éditions Revue d'Optique, Paris, 1954.
- B2 BAYARD M. — *Synthèse des réseaux passifs à un nombre quelconque de paires de bornes connaissant leurs matrices impédances et admittance*. Bulletin S.F.E., sér. VI, t. IX, sept. 1949.
- B3 BEWLEY L. Y. — *Tensor Algebra in Transformer Circuits*. Electr. Eng., 1936, p.1214.
- B4 BOYAJIAN A. — *The tensor a new engineering tool*. Electr. Eng., 1936, p. 856.
- B5 BOGATYREV O. M. — *Méthode élémentaire de calcul des circuits électriques linéaires* (en russe). Electrichestvo, S.S.S.R., avr. 1953.

C

- C1 CAUER W. — *Untersuchungen über ein Problem, das drei positive definite quadratische Formen mit Streckenkomplexen in Beziehung setzt*. Mathematische Annalen, 105 Bond, 1931.
- C2 COBURN N. — *A new approach of Kron's Work*. J. Math. and Phys., 17.112, 1938.
- C3 CONCORDIA C. — *Relations among Transformations used in Electrical Engineering Problems*. Gen. Electr. Review, July 1938.

D

- D1 DACOS F. — *Électricité Théorique*. Dunod, 1946.
- D2 DAHL. — *Electric Circuits*. Mac Graw Hill, 1928.
- D3 DENIS-PAPIN M. et KAUFMANN A. — *Cours de Calcul Opérationnel*, 1950; *Cours de Calcul Matriciel Appliqué*, 1951; *Cours de Calcul Tensoriel Appliqué*, 1953 (Albin Michel, édit.).

E

- E1 EPSTEIN D. W. — *Tensor Analysis and its applications to equivalent circuits*. R.C.A. Review, Oct. 1938.

F

- F1 FOSTER R. M. — *Geometrical Circuits of Electrical Networks*. A.I.E.E., 1932, p. 309.

G

- G1 GIBBS W. J. — *Limitations of Lagrangian Methods in Electrical Machines Theory*. BEAMA Journal, Nov. 1950.
- G2 GUERTLER R. — *An Introduction to the Matrix Method of Solving Electrical Networks Problems*. Jour. Inst. of Eng., Australia, March 1950.
- G3 GUILLEMIN E. A. — *Communications Networks*. Wiley, 1935.
- G4 GUILLEMIN E. A. — *The Mathematics of Circuits Analysis*. Wiley, 1949.

H

- H1 HARMEGNIES R. — *Sur une relation de réciprocité entre deux réseaux de Kirchoff*. Annales des Téléc., déc. 1936, p. 1122.
- H2 HASSLER WHITNEY. — *Non separable and Planar Graphs*. Trans. of Math. Soc., 1932, p. 339.
- H3 HELMHOLTZ. — *Ueber die Dauer und den Verlauf der durch Stromesschwankungen inducirten electrischen Ströme*. Ann. den Phys. und Chem., Band LXXXIV, 1851.
- H4 HOWITT N. — *Equivalent Electrical Networks*. P.I.R.E., June 1932.

I

- I1 INGRAHM W. H. and GRAMLET C. M. — *On the foundations of Electrical Networks Theory*. Jour. Math. and Phys., Feb. 1944, p. 1936.
- I2 INGRAHM W. H. — *Kirchoff constraints and Sagittal Graphs*. Philo. Mag., Aug. 1938, ser. 7.

K

- K1 KELLER E. G. — *Mathematics of Modern Engineering*. Vol. II, Wiley, N. Y., 1942.
- K2 KRON G. — *Tensor Analysis of Networks*. Chapman and Hall, 1939.
- K3 KRON G. — *A Short Course in Tensor Analysis for Electrical Engineers*. Chapman and Hall, 1942.
- K4 KRON G. — *Analyse Tensorielle appliquée à l'Art de l'Ingénieur*. Bull. Inst. Montefiore, sept. 1936.
- K5 KRON G. — *Non Riemannian Dynamics of Rotating Electrical Machinery*. Jour. of Math. and Phys., May 1934.
- K6 KRON G. — *The Application of Tensors to the Analysis of Rotating Electrical Machinery*. Gen. Electr. Rev., Apr.-Dec. 1935, Feb.-June 1936, Feb.-Apr.-June-Aug.-Oct.-Dec. 1937, Mar.-May-Oct. 1938.
- K7 KRON G. — *Equivalent Circuits of the Capacitor Motor*. Gen. Electr. Rev., Sept. 1941.
- K8 KRON G. — *Equivalent Circuits of the Salient Pole Synchronous Machine*. Gen. Electr. Rev., Dec. 1941.
- K9 KRON G. — *Equivalent Circuits for the Hunting of Electrical Machinery*. A.I.E.E. Trans., May 1942.
- K10 KRON G., CONCORDIA C. and CRARY S. B. — *The Doubly Fed Machine*. A.I.E.E. Trans., May 1942.
- K11 KRON G. and CONCORDIA C. — *Damping and Synchronizing Torques of Power Selsyns*. Suppl. Electr. Eng., June 1945.
- K12 KRON G. — *Equivalent Circuits of the Primitive Rotating Machine*. Gen. Electr. Rev., March 1946.

- K13 KRON G. — *Equivalent Circuits of the Primitive Rotating Machine with asymmetrical Stator and Rotor*. A.I.E.E. Proc., vol. 66, 1947.
- K14 KRON G. — *Equivalent Circuits of the Primitive Rotating Machine*. Electr. Eng., Apr. 1947.
- K15 KRON G. — *Steady-State Equivalent Circuits of Synchronous and Induction Machines*. A.I.E.E. Proc., 1948.
- K16 KRON G. — *Tensorial Analysis and Equivalent Circuit of a Variable-Ratio-Frequency changer*. A.I.E.E. Proc., 1947, vol. 66.
- K17 KRON G. — *Equivalent Circuits for oscillating Systems and the Riemann-Christoffel Curvature Tensor*. A.I.E.E. Trans., Jan. 1943.
- K18 KRON G., BODINE R. B. and CONCORDIA C. — *Self-Excited oscillations of Capacitor, compensated Long-Distance Transmission Systems*. A.I.E.E. Trans., Jan. 1943.
- K19 KRON G. — *Steady-State and Hunting Equivalent Circuits of Long-Distance Transmission Systems*. Gen. Electr. Rev., June 1943.
- K20 KRON G. — *Equivalent Circuits of the Elastic Field*. Jour. of Appl. Mec., Sept. 1944.
- K21 KRON G., WHINNERY J.R. and RIDGWAY W. — *Networks Analyzer Studies of Electromagnetic Cavity Resonators*. P.I.R.E., June 1944.
- K22 KRON G. — *Equivalent Circuits of the Elastic Field*. Jour. of Appl. Mec., Sept. 1944.
- K23 KRON G. — *Tensorial Analysis and Equivalent Circuits of Elastic Structures*. Jour. of Franklin Inst., Dec. 1944.
- K24 KRON G. and CARTER G. K. — *Network Analyzer Solution of the Equivalent Circuits for Elastic Structures*. Jour. of Franklin Inst., Dec. 1944.
- K25 KRON G. — *Equivalent Circuits for the Numerical Solution of the Critical Speed of Flexible Shafts*. Jour. of Appl. Mec., June 1946.
- K26 KRON G. — *Tensorial Analysis of Control Systems*. Jour. of Appl. Mec., June 1948.
- K27 KRON G. — *Equivalent Circuits of Compressible and Incompressible Fluid Flow Fields*. Jour. of Aero Sc., April 1948.
- K28 KRON G. and CARTER G. K. — *Numerical and Networks-Analyzer Test of an Equivalent Circuit for Compressible Fluid Flow*. Jour. of Aero. Sc., April 1945.
- K29 KRON G. — *Quasi-holonomic Dynamical Circuits*. Physics, April 1936.
- K30 KRON G. — *Invariant Form of the Maxwell-Lorentz Equations for Accelerated Systems*. Jour. of Appl. Phys., 1938.
- K31 KRON G. — *Equivalent Circuits to represent the Electromagnetic Field Equations*. The Physical Review, Aug. 1943.
- K32 KRON G. — *Equivalent Circuit of the Field Equations of Maxwell*. P.I.R.E., May 1944.
- K33 KRON G. — *Electric Circuit Model of the Schrödinger Equation*. The Phys. Review, Jan. 1945.
- K34 KRON G. and CARTER G. K. — *A.C. Network Analyser Study of the Schrödinger Equation*. The Physical Review, Jan. 1945.
- K35 KRON G. — *Electric Circuit Models for the Vibration Spectrum of Polyatomic Molecules*. Jour. of Chem. Phys., Jan. 1946.
- K36 KRON G. — *Network Analyzer Tests of Equivalent Circuits of Vibrating Polyatomic Molecules*. Jour. of Chem. Phys., Jan. 1946.
- K37 KRON G. — *Numerical Solution of Ordinary and Partial Differential Equations by Means of Equivalent Circuits*. Jour. of Appl. Phys., March 1945.
- K38 KRON G. — *Electric Circuit Models of Partial Differential Equations*. Electr. Eng., July 1948.

- K40 KRON G. — *Equivalent Circuits*, Wiley 1951.
- K41 KIRCHHOFF G. — *Über die Auflösung der Gleichungen, auf welche man bei der Untersuchung der linearen Vertheilung galvanischer Ströme geführt wird*. Ann. der Phys. und Chem., Band LXXII, 1847.
- K42 KIRCHHOFF G. — *Ueber den Durchgang eines elektrischen Stromes durch eine Ebene, insbesondere durch eine kreisförmige*. Ann. der Phys. und Chem., Band LXIV, 1845.
- K43 KÖNIG D. — *Theorie der Endlichen und unendlichen Graphen*. Chelsea Publishers, 1950.
- K44 KAUFMANN A. — (Voir M. DENIS-PAPIN et A. KAUFMANN.)
- K45 KAUFMANN A. — *Les Applications de la méthode tensorielle aux circuits électroniques*. Radio Techn. Dig., n° 2, vol. VI, 1952.
- K46 KU Y. H. — *Resume of Maxwell's and Kirchoff's rules of Network Analysis*. J. Franklin Inst., March 1952.

L

- L1 LE CORBEILLER P. — *Matrix Analysis of Electrical Networks*. Harvard Univ. Press., Wiley, 1950.
- L2 LE PAGE W. R. and SEELY S. — *Network Analysis*. Mc Graw Hill, 1952.
- L3 LEFSCHETZ S. — *Introduction to Topology*. Princetown Univ. Press, 1949.

M

- M1 MAXWELL J. C. — *A Treatise on Electricity and Magnetism*. Oxford, ed. 3, 1892.
- M2 MAXWELL J. C. — *Électricité et Magnétisme*. Gauthier-Villars (éd. française), 1885.
- M3 MALLET E. — *Vectors for Electrical Engineers*. Chapman and Hall, 1933.
- M4 MEERSCHE (Van der). — *Sur un théorème en électricité déduit du théorème de réciprocité de Maxwell généralisé*. R.G.E., p. 259.
- M5 MEERSCHE (Van der). — *Notes on the Applications of Tensors to the Analysis of Networks with radio tubes*. Thèse Université de Gand.
- M6 MAC CONNELL A. J. — *Applications of the Absolute Differential Calculus*. Blackie and Son, 1936.

N

- N1 NASSE M. G. — *L'espace vectoriel, domaine de représentation de l'électrotechnique*. Bull. S.F.E., sept. 1949.

P

- P1 PENG-TUNG SAH A. — *Applications of Space Vectors to the Solution of three Phases Networks*. Tsing Huah, Univ. Report, July 1931 (Chine).
- P2 PENG-TUNG SAH A. — *Complex Vectors in three Phases Circuits*. Elec. Eng., Dec. 1936.
- P3 PIPES L. A. — *The Solution of A.C. Circuits Problems*. Jour. Appl. Math., Sept. 1941.
- P4 PIPES L. A. — *Transformation Theory of General Static Polyphase Networks*. Tr. A.I.E.E., 1940.
- P5 PIPES L. A. — *Linear Transformations in three Phases Circuits*. Tr. A.I.E.E., 1941.
- P6 PRUDHON M. et PRACHE P. M. — *Compléments à la Théorie des Réseaux*. Ann. des Téléc., t. III, p. 24, 1948.

- P7 PARTON J. E. — *Network Analysis by repeated Voltage Superposition*. Electr. Eng., Dec. 1952.
- P8 PERCIVAL W. S. — *The Solution of Passive Electrical Networks by means of Mathematical Trees*. Proc. I.E.E., part III, May 1953.
- P9 PLANCK M. — *Électromagnétisme*. Alcan, édit., 1939.

Q

- Q1 QUADE W. — *Klassifikation der Schwingungsvorgänge in Gekoppelten Stromkreissen*.

R

- R1 REED M. B. — *Matrix, Tensors and Dyadics for Studing Electrical Networks*. Jour. of Appl. Phys., Nov. 1941.
- R2 RYDER F. L. — *Network Analysis by the least power theorems*. J. Franklin Inst., July 1952.

S

- S1 SEIFER-THRELFALL. — *Lehrbuch der Topologie*. Teubner, Berlin.
- S2 SOPER P. F. — *Numerical Solution of Networks by Matrices*. BEAMA Jour., March 1949.
- S3 STIGANT S. A. — *A.C. Circuits Symetrical Components, Determinants, Tensors and Matrices*. Electrician, p. 119, 1937.
- S4 STARR. — *Theory of Primary Networks*. Tr. A.I.E.E., p. 939, 1933.
- S5 SYNGE J. L. — *The Fundamental Theory of Electrical Networks*. Quarterly of Appl. Math., July 1951.
- S6 STORCH L. — *Note on a Network Theorem*. Wireless Eng., April 1953.
- S7 SYNGE J. L. — *The Fundamental Theorem of Electrical Networks*. Quart. Appl. Math., July 1951.

T

- T1 TOURNIER M. et CECCALDI. — *L'application du calcul tensoriel à l'étude des réseaux électriques et à l'électronique*. R.G.E., déc. 1942 et oct. 1943.
- T2 THOUZERY J. — *Les réseaux amplificateurs étudiés par la méthode tensorielle*. Rad. Techn. Dig., vol. VI et VII, 1952.
- T3 TASNY-TSCHIASSNY L. — *Initial Conditions in Transient Analysis*. Wireless Eng., Feb. 1953.
- T4 TELEGEN B. D. H. — *A General Network Theorem with Applications*. Philips Res. Rep., Aug. 1952.
- T5 TUERO M. — *Nouvelle méthode d'analyse transitoire dans les réseaux électriques (en tchèque)*. Slabopr. Obz. Ceskobl.

V

- V1 VEBLEN O. — *Analysis Situs*. Amer. Math. Soc., 1931.
- V2 VOWELLS R. E. — *Transformation Matrices in Electrical Engineering*. Jour. Inst. of Eng., Australia, June 1944.

W

- W1 WIENER N. — *Notes on the Kron Theory of Tensor in Electrical Machinery*. S. Electr. Eng., nos 3 et 4, 1939.
- W2 WIKSTROM. — *The Application of Tensor Analysis to Electrical Calculations*. Jour. of Amer. Soc. of Navals Eng., Aug. 1938.
- W3 WIGAN E. R. — *Network Theorem*. Wireless Eng., Dec. 1949.

Z

- Z1 ZADEH L. A. — *Some Applications of Matrix and Tensor Methods in the Analysis of Variable Systems*. Matrix-Tensor Quarterly, Dec. 1951.
-



IMPRIMERIE

DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté

ANALOGIES DANS LES SYSTÈMES LINÉAIRES

Vu :

Grenoble, le 13 janvier 1954

Le Président de la Thèse,

NÉEL.

Vu :

Grenoble, le 13 janvier 1954

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

MORET.

Vu et permis d'imprimer :

Grenoble, le 14 janvier 1954

Le Recteur de l'Académie de Grenoble,

PARISELLE.

FACULTÉ DES SCIENCES

Nom du candidat : KAUFMANN.

Prénoms : Arnold.

Date de la soutenance : 18 janvier 1954.

Numéro d'ordre : 46.

KAUFMANN (Arnold). —
Mise en équations et résolution
des réseaux électriques en régime
transitoire par la méthode tenso-
rielle. — *Paris*, Imprimerie du
Ministère de l'Air, 1955. In-8°,
104 p., 45 fig.

(Doct. Univ. Grenoble, 1954. N° 46)

KAUFMANN (Arnold). —
Mise en équations et résolution
des réseaux électriques en régime
transitoire par la méthode tenso-
rielle. — *Paris*, Imprimerie du
Ministère de l'Air, 1955. In-8°,
104 p., 45 fig.

(Doct. Univ. Grenoble, 1954. N° 46)

KAUFMANN (Arnold). —
Mise en équations et résolution
des réseaux électriques en régime
transitoire par la méthode tenso-
rielle. — *Paris*, Imprimerie du
Ministère de l'Air, 1955. In-8°,
104 p., 45 fig.

(Doct. Univ. Grenoble, 1954. N° 46)

KAUFMANN (Arnold). —
Mise en équations et résolution
des réseaux électriques en régime
transitoire par la méthode tenso-
rielle. — *Paris*, Imprimerie du
Ministère de l'Air, 1955. In-8°,
104 p., 45 fig.

(Doct. Univ. Grenoble, 1954. N° 46)
