



HAL
open science

Inversion numérique de la transformation de Laplace-Carson

Jean-Baptiste Nugeyre

► **To cite this version:**

Jean-Baptiste Nugeyre. Inversion numérique de la transformation de Laplace-Carson. Modélisation et simulation. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1960. Français. NNT : . tel-00277748

HAL Id: tel-00277748

<https://theses.hal.science/tel-00277748>

Submitted on 7 May 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE
présentée à la Faculté des Sciences
de l'Université de

GRENOBLE

en vue de l'obtention du titre de Docteur de Spécialité

Mathématiques Appliquées
par

Jean-Baptiste NUGEYRE
Licencié ès Sciences

INVERSION NUMERIQUE DE LA TRANSFORMATION
DE LAPLACE - CARSON

Thèse soutenue le 13 juin 1960

devant la commission

MR. C. CHABAUTY Président
J. KUNTZMANN
M. BLAMBERT

En présentant ce travail, je tiens à témoigner ma très profonde gratitude à Monsieur le Professeur J. KUNTZMANN auprès de qui j'ai trouvé les conseils et les indications qui m'ont permis de le mener à bien.

Je remercie aussi très vivement Messieurs les Professeurs C. CHABAUTY et E. BLAMBERT qui ont bien voulu me faire l'honneur d'être président et membre du jury.

Enfin j'assure de toute ma reconnaissance Monsieur N. GASTINEL ainsi que tous ceux qui, sous la direction de Monsieur le Professeur J. KUNTZMANN, forment l'équipe du Laboratoire de Calcul de l'Université de GRENOBLE, et à l'aide desquels j'ai souvent eu recours.

INTRODUCTION

Ayant défini la transformation de Laplace- Carson par

$$F(p) = p \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$$

on connaît la formule de transformation inverse dite de Mellin-Fourier

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{F(p)}{p} e^{pt} dp$$

Un autre procédé d'inversion est dû à D.V. Widder (1)

Si on désigne par $F_1(p)$ la transformée de Laplace $F_1(p) = \frac{1}{p} F(p)$, on a

$$f(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\left(\frac{k}{t}\right)^{k+1}}{k!} (-1)^k F_1^{(k)}\left(\frac{k}{t}\right) \right\}$$

avec $F_1^{(k)}(x) = \frac{d^k}{dx^k} F_1(x)$.

Mais il existe d'autres procédés permettant d'obtenir les valeurs de $f(t)$ à partir des valeurs prises par $F(p)$ sur l'axe réel.

Pour cela; par un changement de variable convenable ~~xxx~~ $t = \varphi(\tau)$ on ramène l'intervalle de variation $[0, \infty)$ de t à un intervalle de variation fini de la nouvelle variable τ , intervalle dans lequel on développe $f(\tau) = f(t)$ en une série de fonctions orthogonales. Les coefficients de cette série peuvent être obtenus par une combinaison linéaires de valeurs ~~de~~ prises par $F(p)$ en des points équidistants situés sur l'axe réel. Du point de vue numérique on obtient alors des expressions approchées de $f(t)$ sous la forme

$$f_n(t) = \sum_{p=0}^n \lambda_{p,n}(t) F[a + n\sigma] \quad \sigma: \text{paramètre fixe.}$$

L'utilisation de telles formules est rendue délicate par la grande amplitude des variations des coefficients $\lambda_{p,n}(t)$ amplitude qui va croissant, très rapidement, avec l'ordre n de la méthode.

De telles méthodes sont dites de Tricomi- Picone (2). Pour la méthode décrite par A. Papoulis (3) nous proposons la variante (4) qui consiste à obtenir une expression de la forme

$$f_n(t) = \sum_{p=0}^n a_{p,n} F\left(\frac{b_{p,n}}{t}\right)$$

(1) Cf Bibliographie No - 20 -

(2) ——— No - 11 - 12 -

(3) ——— No - 14 - 15 -

(4) ——— No - 19 -

Dans un premier stade les coefficients a_{pn} et b_{pn} sont obtenus à partir de la formule analytique précédente.

Dans une deuxième variante, nous nous occupons plus spécialement des fonctions telles que

$$f(t) = \int_0^{\infty} g(u) \sin ut \, du$$

où $g(u)$ est non nulle seulement sur un intervalle ~~fixe~~ fini $(0, R)$. On montre alors que sous certaines conditions

$$E_n(f(t)) = \int_0^R g(u) E_n(\sin ut) \, du$$

avec $E_n(f(t)) = f(t) - f_n(t)$

Le choix des a_{pn} et ~~aux~~ b_{pn} est alors fait de manière à minimiser l'erreur dans la représentation du sinus à partir de sa transformée de Laplace-Carson. L'emploi de ces coefficients conduit alors à des résultats satisfaisant dans la représentation des fonctions de la classe considérée.

Nous avons fait diverses expériences de calcul avec chacune de ces méthodes.

CHAPITRE I METHODE ANALYTIQUE PERMETTANT DE DETERMINER LA FONCTION
OBJET A PARTIR D'UNE SUITE INFINIE DE VALEURS DE LA
FONCTION IMAGE

I/Généralités nous partons de la transformation de Carson-Laplace définie par:

$$F(p) = p \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt. \quad (1)$$

et nous allons développer une méthode qui nous permettra de déterminer $f(t)$ à partir de valeurs prises par $F(p)$ sur l'axe réel

Théorème de Lerch généralisé Soit p_0 un point de l'axe réel situé dans la région de convergence de:

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$$

Soit $\{\lambda_n\}$ une suite croissante de nombres réels positifs telle que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n}$ soit divergente; si l'on suppose $f(t)$ continue presque partout entre 0 et ∞ et si

$$\int_0^{\infty} e^{-p_0 t} f(t) dt = 0 \quad (2)$$

$$\forall n \quad \int_0^{\infty} e^{-(p_0 + \lambda_n)t} f(t) dt = 0 \quad (3)$$

alors $f(t)$ est nulle en tous ses points de continuité c'est-à-dire presque partout

$$\text{Soit } \beta(t) = \int_t^{\infty} e^{-p_0 u} f(u) du$$

En raison de (2) on a: $\beta(0) = 0$. $d\beta(t) = -e^{-p_0 t} f(t) dt$

On peut alors écrire (3) sous la forme

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda_n t} d\beta(t) = 0 \quad (4)$$

et puisque $\beta(0) = 0$, l'intégration par ~~part~~ parties donne:

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda_n t} \beta(t) dt = 0 \quad \forall n \geq 1 \quad (5)$$

DE même (2) conduit à $\int_0^{\infty} \beta(t) dt = 0$ (6)

$\beta(t)$ étant une fonction continue sur $[0, \infty]$ un théorème établi par Müntz nous permet d'affirmer que, quel que soit $\varepsilon > 0$ on peut trouver un polynôme de Dirichlet

$$P(t) = a_0 + a_1 e^{-\lambda_1 t} + \dots + a_n e^{-\lambda_n t}$$

tel que $|\beta(t) - P(t)| \leq \varepsilon, \forall t \in [0, \infty)$ ceci pourvu que $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\lambda_n}$ diverge

(5) et (6) nous donnent quels que soient les coefficients a_i

$$\int_0^{\infty} \beta(t) P(t) dt = 0$$

d'où l'on tire

$$\int_0^{\infty} |\beta(t)|^2 dt = \int_0^{\infty} |\beta(t)| [\beta(t) - P(t)] dt$$

$$\Rightarrow \int_0^{\infty} |\beta(t)|^2 dt \leq \varepsilon \int_0^{\infty} |\beta(t)| dt$$

Puisque ε est arbitraire on en déduit que $\beta(t)$ est identiquement nulle entre 0 et l'infini. Et en revenant à la définition de $\beta(t)$, nous déduisons que $f(t)$ est nulle en tous les points où elle est continue.

On déduit du théorème ci-dessus que si

$$F(p) = p \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt ; \quad G(p) = p \int_0^{\infty} e^{-pt} g(t) dt$$

coïncident en une infinité de points réels $p_0, p_0 + \lambda_1, \dots, p_0 + \lambda_n$

avec $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\lambda_n}$ divergente:

alors, $f(t) - g(t)$ est nulle presque partout et $F(p) = G(p)$

Ce sera en particulier le cas si $F(p)$ et $G(p)$ coïncident en une infinité de points en progression arithmétique en raison de la divergence de la série harmonique.

La connaissance des valeurs prises par $F(p)$ en une suite de points remplissant la condition de répartition indiquée suffit à déterminer entièrement $F(p)$, et par suite à déterminer presque partout la fonction objet correspondante.

On est ainsi amené à chercher s'il existe une méthode analytique permettant de déterminer la fonction objet à partir des valeurs prises par la fonction image en une suite infinie de points de l'axe réel

Si nous choisissons comme norme dans les espaces fonctionnels image et objet celle de la convergence uniforme

$$\|f\| = \sup_{t \in A} |f(t)|$$

des contre-exemples simples montrent que la transformation de Carson-Laplace inverse n'est pas une application continue du premier dans le second.

Considérons les fonctions $\sin ut$ et $\sin(u + \varepsilon)t$. Leurs transformées

de Carson-Laplace sont: $\frac{2pu}{p^2 + u^2}$ et $\frac{2p(u + \varepsilon)}{p^2 + (u + \varepsilon)^2}$

Ces deux transformées peuvent être rendues aussi voisines l'une de l'autre qu'on le veut en choisissant ε suffisamment petit.

Mais, quel que soit ε : $\sup_{t \in [0, \infty)} |\sin ut - \sin(u + \varepsilon)t| = 2$

Dans ce cas particulier les deux fonctions ne s'éloignent l'une de l'autre que pour les grandes valeurs de t , et lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$.

$$\sup_{t \in [0, \mathbb{R}]} |\sin ut - \sin(u + \varepsilon)t| \rightarrow 0$$

Considérons à présent $F_a(p) = e^{-p} \operatorname{th} \frac{1}{2}pa$

La transformée inverse de $F_a(p)$ est la fonction

$$\begin{aligned} f_a(t) &= 0 & \text{si } t < 1 \\ f_a(t) &= \operatorname{signe} \left\{ \sin \frac{\pi}{a} (t-1) \right\} & \text{pour } t > 1 \end{aligned}$$

On voit que $\sup_{p \in [0, \infty)} |F(p)| \leq \sup_{p \in [0, \infty)} |e^{-p} \cdot \frac{1}{2}pa|$

Or le maximum de $e^{-p} \cdot \frac{1}{2}pa$ est atteint pour $\frac{a}{2} [e^{-p} - p^2 e^{-p}] = 0 \Rightarrow p = 1$

D'où: $\sup_{p \in [0, \infty)} |F(p)| \leq \frac{a}{2e}$

ON peut rendre cette borne inférieure à tout $\varepsilon > 0$ arbitraire et pourtant $|f(t)| = 1$ presque partout pour $t \geq 1$

Ceci nous montre que deux fonctions images infiniment voisines sur tout le demi-axe réel positif peuvent correspondre à deux fonctions au objet différant presque partout, sur un intervalle à distance finie, d'une quantité finie.

Ces exemples nous laissent prévoir que les méthodes d'approximation numérique se heurteront à des difficultés que nous essaierons de lever partiellement.

II Exposé de la méthode de Papoulis. Introduisons les variables φ et θ définies par:

$$e^{-\sigma t} = \varphi = \cos \theta \quad (1)$$

où t est un nombre et σ un paramètre réel.

Nous allons supposer 1°/ que $f(0) = 0$, ceci en diminuant, si besoin est, d'une constante la valeur de $F(p)$. Cette restriction ne diminue pas la généralité de la méthode. Pour déterminer la constante à retrancher de $F(p)$ on pourra utiliser le théorème suivant lequel

$$\lim_{|p| \rightarrow \infty} F(p) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t) \quad (\text{dans le cas où cette dernière limite existe})$$

2°/ que l'abscisse de convergence de

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt \text{ est négative ou nulle}$$

Considérons $f(t) = f^{\circ}(\sigma, \varphi) = f^*(\sigma, \theta)$

$$f^{\circ}(\sigma, \varphi) = f\left(-\frac{1}{\sigma} \text{Log } \varphi\right) ; f^*(\sigma, \theta) = f\left(-\frac{1}{\sigma} \text{Log } \cos \theta\right)$$

$f^*(\sigma, \theta)$ est une fonction de θ définie pour $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ et nulle pour

$\theta = 0$. Moyennant certaines conditions qui seront précisées par la suite nous pourrons la développer en série de sinus impairs.

$$f^*(\sigma, \theta) = \frac{4}{\pi} \left[\alpha_0 \sin \theta + \alpha_1 \sin 3\theta + \dots + \alpha_n \sin (2n+1)\theta + \dots \right]$$

les coefficients $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$, étant donnés par

$$\alpha_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f^*(\sigma, \theta) \sin (2n+1)\theta d\theta.$$

ce qui peut s'écrire encore

$$\alpha_n = \int_0^1 f^{\circ}(\sigma, \varphi) \frac{\sin (2n+1)\theta}{\sin \theta} d\varphi$$

Dans cette formule la fonction $\frac{\sin (2n+1)\theta}{\sin \theta}$ considérée comme fonction de $\varphi = \cos \theta$ est un polynôme.

$$\frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin\theta} = \sum_{q=0}^n (-1)^q \binom{2(n-q)}{2n+1} \varphi^{2(n-q)} (1-\varphi^2)^q \quad (2)$$

Ce polynôme est pair: c'est le polynôme $S_{2n}(\varphi)$; $S_n(\varphi)$ désignant le polynôme de Tchebycheff de seconde espèce de degré n .

Désignons par a_{np} le coefficient du terme de degré $2p$ dans le polynôme de degré $2n$; on a: $a_{np} = (-1)^{n+p} 4^p \binom{n-p}{n+p}$ (3)

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \int_0^1 f^\circ(\sigma, \varphi) \left\{ \sum_{p=0}^n a_{np} \varphi^{2p} \right\} d\varphi \\ &= \sum_{p=0}^n a_{np} \int_0^1 f^\circ(\sigma, \varphi) \varphi^{2p} d\varphi = \sum_{p=0}^n a_{np} \cdot \sigma \int_0^\infty e^{-\sigma(2p+1)t} f(t) dt \\ \alpha_n &= \sum_{p=0}^n a_{np} \frac{F[(2p+1)\sigma]}{2p+1} \quad (4) \end{aligned}$$

On obtient finalement:

$$f(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sin(2n+1)\theta \sum_{p=0}^n a_{np} \frac{F[(2p+1)\sigma]}{2p+1} \right\} \quad (5)$$

On voit que les coefficients α_n existent dès que $F((2p+1)\sigma)$ est lui-même défini pour tout entier p positif ou nul.

Considérons la série

$$\frac{4}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} \alpha_p \sin[(2p+1)\theta] = \mathcal{J}(f^*)$$

a/ Si $f^*(\sigma, \theta)$ est à va de carré sommable sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ alors la série $\mathcal{J}(f^*)$ converge en moyenne vers f^* c'est-à-dire

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f^* - A_n]^2 d\theta = 0 ; \text{ avec } A_n = \frac{4}{\pi} \sum_{p=0}^n \alpha_p \sin(2p+1)\theta$$

En revenant à la variable t

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \left\{ f(t) - \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^n \alpha_m \sin[(2m+1) \operatorname{Arccos} e^{-\sigma t}] \right\}^2 \frac{dt}{\sqrt{e^{2\sigma t} - 1}} = 0$$

b/ Si $f^*(\sigma, \theta)$ est à variation bornée sur un intervalle $]a, b[\subset [0, \frac{\pi}{2}]$
 $\mathcal{F}(f^*)$ converge ordinairement vers $\frac{1}{2} [f^*(\sigma, \theta+0) + f^*(\sigma, \theta-0)]$ en tout
 point de $]a, b[$

c/ Enfin si $f^*(\sigma, \theta)$ est continue et à variation bornée sur $]a, b[$, $\mathcal{F}(f^*)$
 converge uniformément vers f^* sur tout intervalle fermé $[a+\varepsilon, b-\delta]$

Ainsi si $f^*(\sigma, \theta)$ est continue et à variation bornée sur $[0, b[$ avec
 $f^*(\sigma, 0) = 0$, $\mathcal{F}(f^*)$ converge uniformément vers f^* sur tout intervalle $[0, b-\varepsilon]$

Donc si $f(t)$ est continue pour $t \in [0, \infty)$ et à variation bornée sur ~~un~~
 tout intervalle borné, alors les sommes partielles

$$\frac{4}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} \alpha_p \sin [(2p+1) \text{Arc } \cos \omega e^{-\sigma t}]$$

convergent uniformément vers $f(t)$ pour tout $t \in [0, \infty)$ ($f(0) = 0$).

Remarque I Examinons le cas où $F(p) = \text{Cte}$. Pour simplifier, soit
 $F(p) = 1$. Si on suppose $f(t)$ continue sur $[0, \infty)$ on a alors $f(t) = 1$
 pour $t > 0$; $f^*(\sigma, \theta) = 1$ pour $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$

Les coefficients de la série de sinus impairs associée à $f^*(\sigma, \theta)$
 sont alors de la forme $\frac{4}{\pi} \left(\frac{1}{2n+1} \right)$. On peut obtenir les α_n par appli-
 cation de la formule (5). On en déduit alors

$$\sum_{p=0}^{\infty} \alpha_{2p+1} \times \frac{1}{2p+1} = \frac{1}{2n+1}$$

Remarque II Par suite du phénomène de Gibbs on ne peut espérer ob-
 tenir par la formule (5) la valeur exacte à l'origine de la fonction
 $f(t)$ si $f(t)$ ne tend pas vers 0 avec t . C'est pour cette raison que
 l'on emploiera le procédé décrit au début de ce paragraphe

Remarque III Nous avons supposé jusqu'à présent que l'abscisse de
 convergence de $\int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$ était négative ou nulle. Soit main-
 tenant $\sigma_c > 0$ cette abscisse de convergence.

Les coefficients sont définis à partir des valeurs de $p \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$
 aux points $p = \sigma, 3\sigma, \dots, (2n+1)\sigma$. Or si $\sigma_c > \sigma$ $\int_0^{\infty} e^{-\sigma t} f(t) dt$ n'a pas de ~~sens~~
 sens comme intégrale; toutefois $F(\sigma)$ peut être définie par prolonge-
 ment analytique.

Le fait que $\sigma_c > 0$ entraîne que pour tout $s \in [0, \sigma_c[$ on a $f(t) \cdot e^{-st}$

non bornée quand t tend vers ∞ ; $f(t)$ n'est donc pas bornée quand t tend vers ∞ , c'est-à-dire $f^*(\sigma, \theta)$ est à variation non bornée dans l'intervalle $[\frac{\pi}{2} - \varepsilon, \frac{\pi}{2}]$

Toutefois, $f^*(\sigma, \theta)$ peut être continue et à variation bornée sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2} - \varepsilon]$. La série $\mathcal{P}(f^*)$ convergera sur cet intervalle, mais cette convergence sera certainement très lente.

CHAPITRE II. ASPECT NUMERIQUE DE LA METHODE
DE PAPOULLIS

I. Exposé. Supposons les coefficients α_n calculés par la formule (4)
Dans une évaluation numérique on calculera la somme finie:

$$S_m(\sigma, \theta) = \sum_{k=0}^m \left\{ \sum_{p=0}^k b_{kp} \frac{4}{\pi} F[(2p+1)\sigma] \right\} \sin(2k+1)\theta \quad (1)$$

où $b_{kp} = \frac{1}{2^{p+1}} a_{kp}$ α_k

$S_m(\sigma, \theta)$ que nous noterons par la suite $f_m^*(\sigma, \theta)$ peut s'exprimer en fonction de m et de $f^*(\sigma, \theta)$

$$f_m^*(\sigma, \theta) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^m \sin(2n+1)\theta \int_0^{\pi/2} f^*(\sigma, \varphi) \sin(2n+1)\varphi d\varphi$$

$$f_m^*(\sigma, \theta) = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} f^*(\sigma, \varphi) \left[\sum_{n=0}^m \sin(2n+1)\varphi \cdot \sin(2n+1)\theta \right] d\varphi$$

En prolongeant $f^*(\sigma, \theta)$ à l'intervalle $[-\pi, +\pi]$ par

$$f^*(\sigma, \theta) = -f^*(\sigma, -\theta) \text{ et } f^*(\sigma, \theta) = f^*(\sigma, \pi - \theta)$$

on est conduit à $f_m^*(\sigma, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f^*(\sigma, \varphi) \frac{\sin \frac{4m+3}{2}(\theta - \varphi)}{\sin \frac{\theta - \varphi}{2}} d\varphi \quad (2)$

$f_m^*(\sigma, \theta)$ est la moyenne pondérée de $f^*(\sigma, \varphi)$ sur l'intervalle $[-\pi, +\pi]$

relativement au poids: $\frac{\sin \frac{4m+3}{2}(\theta - \varphi)}{\sin \frac{\theta - \varphi}{2}}$

II. Etude de l'erreur de calcul. L'erreur sur le résultat peut être décomposée en deux parties

a/ Une erreur de méthode provenant du fait que l'on arrête le développement en série à un ordre fini. C'est la différence entre

$f^*(\sigma, \theta)$ et le second membre de (2).

b/ Une erreur de calcul due aux erreurs d'arrondi ou aux incertitudes d'ordre physique sur les $F[(2n+1)\sigma]$ qui entraînent des erreurs sur les coefficients α_p du développement en série de $f(t)$. Nous étudierons d'abord la seconde cause d'erreurs.

Nous avons $\int_n^*(\sigma, \theta)$ donné par (1). On peut encore écrire:

$$\int_n^*(\sigma, \theta) = \frac{4}{\pi} \sum_{p=0}^n F[(2p+1)\sigma] \left\{ \sum_{k=p}^n b_{kp} \sin(2k+1)\theta \right\}$$

et en désignant par $\lambda_p^{(n)}(\theta)$ la quantité

$$\lambda_p^{(n)}(\theta) = \sum_{k=p}^n b_{kp} \sin(2k+1)\theta = \frac{2^{2p}}{2^{p+1}} \sum_{k=p}^n (-1)^{k+p} C_{k+p}^{k-p} \sin(2k+1)\theta \quad (3)$$

on aboutit à
$$\int_n^*(\sigma, \theta) = \frac{4}{\pi} \sum_{p=0}^n \lambda_p^{(n)}(\theta) F[(2p+1)\sigma] \quad (4)$$

Nous donnons ci-après un tableau à double entrée des coefficients b_{kp} (avec leurs signes) pour des valeurs de k et de p variant de 0 à 15. Ces nombres sont donnés avec la partie entière et 9 décimales exactes; l'erreur sur la dernière décimale est toujours positive et inférieure à 1.

Les coefficients $\lambda_p^{(n)}(\theta)$ varient énormément avec θ . En outre, θ étant fixé, les $\lambda_p^{(n)}(\theta)$ sont très dispersés. En portant $F(p) \equiv 1$ dans (4) ce qui entraîne $\int_n^*(\sigma, \theta) \rightarrow 1$ quand n tend vers l'infini on voit que la somme de ces coefficients reste bornée et tend vers $\frac{\pi}{4}$ quand $n \rightarrow \infty$. On aura, dans les calculs, à faire des sommes alternées de nombres dont certains de très grande valeur absolue et ceci pour obtenir des résultats dont l'ordre de grandeur sera faible devant celui du plus grand des termes de la somme.

Nous rencontrerons donc dans la pratique les difficultés suivantes

Si les $F[(2p+1)\sigma]$ sont des données expérimentales, leur précision relative devra être considérable si l'on veut obtenir une précision relative acceptable pour les résultats; on est alors limité par la précision des appareils de mesure.

Dans le cas même où l'on connaîtrait les $F[(2p+1)\sigma]$ avec toute la précision souhaitable (cas de l'inversion de fonctions abstraites) le "mauvais conditionnement" du vecteur-ligne des coefficients obligera à calculer certains termes avec une beaucoup plus grande précision relative que d'autres; on est alors limité par le nombre de positions décimales des machines ou par le temps.

En outre la dispersion des coefficients augmente avec l'ordre de la méthode et l'on peut dire que, d'une certaine manière, erreur de calcul et erreur de méthode varient en sens inverse.

A la suite du tableau des coefficients b_{kp} nous donnons pour certaines valeurs de n un tableau des quantités $\lambda_p^{(n)}(\frac{\pi}{2})$ quantités qui donnent une idée de la dispersion des coefficients

Nous ferons toutefois remarquer que c'est pour $\theta = \frac{\pi}{2}$ que, quel que soit l'ordre de la méthode les coefficients sont le plus dispersés.

brp

<i>h p</i>	0	1	2
0	I		
1	-I	1.3333333333	
2	I	-4	3.2
3	-I	8	-16
4	I	-13.3333333333	48
5	-I	20	-112
6	I	-28	224
7	-I	37.3333333333	-403.2
8	I	-48	672
9	-I	60	-1056
10	I	-73.3333333333	1584
11	-I	88	-2288
12	I	-104	3203.2
13	-I	121.3333333333	-4568
14	I	-140	5824
15	-I	160	-7616

<i>h p</i>	3	4	5
3	9.I42857I428		
4	- 64	28.4444444444	
5	256	- 256	93.0909090909
6	- 768	I280	- I024
7	I920	- 4693.3333333333	6I44
8	- 4224	I4080	- 26624
9	8448	- 36608	93I84
10	- I5689.I42857I428	854I8.6666666666	- 279552
11	27456	- I83040	745472
12	- 45760	366080	- I8I0432
13	732I6	- 69I484.4444444444	4073472
14	- II3I52	I244672	- 8599552
15	I69728	- 2I49888	I7I99I04

<i>h p</i>	6	7	8
6	3I5.0769230769		
7	- 4096	I092.2666666666	
8	28672	- I6384	3855.0588235294
9	- I43360	I3I072	- 65536
10	573440	- 74274I.3333333333	589824
11	- I949696	3342336	- 3735552
12	5849088	- I2700876.8	I8677760
13	- I5876096	42336256	- 78446592
14	39690240	- I27008768	287637504
15	- 926I0560	349274II2	- 945094656

brp

k_p / P	9	10	11
9	13797.0526315789		
10	-262144	49932.1904761904	
11	2621440	-1048576	182361.0434782608
12	-18350080	11534336	-4194304
13	100925440	-88429909.3333333333	50331648
14	-464257024	530579456	-419430400
15	1857028096	-2652897280	2726297600

k_p / P	12	13	14
12	671088.64		
13	-16777216	2485513.4814814814	
14	218103808	-67108864	9256395.0344827586
15	-1962934272	939524096	-268435456

k_p / P	15
15	34636833.0322580645

$$\lambda_p^{(n)}\left(\frac{n}{3}\right)$$

n	3	5	7	10
0	4	6	8	11
1	-13.333	-46.667	-112	-293.333
2	19.200	179.200	806.400	4118.400
3	-9.143	-329.143	-3017.143	-31378.286
4		284.444	6257.778	142364.444
5		-93.091	-7261.091	-406621.091
6			4411.077	749883.077
7			-1092.267	-891289.600
8				659215.059
9				-275941.053
10				49932.190

Ces difficultés sont la traduction numérique d'un des caractères de la transformation de Laplace signalé précédemment: à deux transformées voisines sur $[0, \infty)$ au sens de la topologie de la convergence uniforme ne correspondent pas nécessairement deux ~~fonx~~ fonctions objet voisines dans la même topologie. On peut s'attendre à ce que les procédés numériques d'inversion soient très sensibles aux fluctuations des données.

On peut cependant imaginer une variante dans laquelle il sera possible de minimiser les erreurs de calcul provenant des coefficients employés. En effet, l'erreur de calcul comme les coefficients λ varie avec θ . Elle sera, pour une méthode donnée, d'autant plus faible que la quantité $\sum_{p=0}^n [\lambda_p^{(n)}(\theta)]^2$ sera elle-même plus petite (coefficients moins dispersés).

Or on constate que cette fonction possède n minima très nettement marqués pour $0 < \theta < \pi/2$. Nous donnons ci-après un tableau où sont indiquées les valeurs de θ correspondant aux maxima et minima de

$\sum \lambda^2$ la valeur de ces extrema et des coefficients $\lambda_p^{(n)}(\theta)$ correspondants,

ceci pour $n = 7$

L'existence de ces minima provient de ce que, dans chaque $\lambda_p^{(n)}(\theta)$, n étant fixé, le coefficient du terme en $\sin(2n + 1)\theta$ est le coefficient prédominant; on peut donc prévoir que les minima auront lieu pour des valeurs de θ voisines des zéros de $\sin(2n + 1)\theta$.

Nous donnons, pour $n = 10$ les abscisses de certains de ces minima avec en regard les zéros correspondants de $\sin 21\theta$.

(en grades)	Abscisses des minima	Zéros de $\sin 21\theta$
	56.591	57.143
	66.150	66.667
	75.764	76.190
	85.432	85.714
	95.139	95.238

Nous indiquons, sur un tableau ci-après, les abscisses en radians des extrema de $\sum_{p=0}^n [\lambda_p^{(n)}(\theta)]^2$ pour $n = 7$, avec en regard les abscisses des zéros et des extrema de $\sin 15\theta$.

On constate en outre, dès que $n > 3$, la présence d'un maximum des minima situé vers le milieu de l'intervalle. On peut expliquer ce phénomène par l'influence des termes en $\sin(2n - 1)\theta$ qui deviennent prédominants au voisinage des zéros de $\sin(2n + 1)\theta$. Or ces termes sont grands pour les zéros voisins du centre de $[0, \frac{\pi}{2}]$ (ce qui contribue à la fois à déplacer l'abscisse du minimum et à augmenter la valeur de celui-ci), plus petits sur les bords de cet intervalle.

Repartition et valeurs des extrema de $\sum_{p=0}^7 (\lambda_p^{(7)}(\theta))^2 = \Lambda_7$

θ_0	θ	Λ_7
0,104 719 8	0,102 788	58 163 162
0,209 439 5	0,205 126 5	39 068
0,314 159 3	0,308 586	60 980 505
0,418 879 0	0,410 708	161 787
0,523 598 8	0,515 048	66 883 279
0,628 318 5	0,617 248 5	372 974
0,733 038 3	0,722 649 5	76 255 810
0,837 758 0	0,825 327 5	628 586
0,942 477 8	0,931 869	89 103 132
1,047 197 6	1,035 526	1755 968
1,151 917 3	1,143 065	104 003 166
1,256 637 1	1,248 180 5	520 642
1,361 356 8	1,356 260	116 974 463
1,466 076 6	1,462 966 5	82 920
1,570 796 33	1,570 796 33	122 299 908

Dans la colonne de gauche sont indiquées les valeurs de θ correspondant aux extrema et aux zéros de $\sin 15 \theta$

Valeurs des coefficients correspondant aux extrema de A_7

0,102 788 -0,501 284 375 21,239 653 2 -257,124 985 1 358,735 51 -3 655,296 01 5229,678 59 -3787,830 93 1 091,808 15	0,410 708 -0,154 973 868 5,336 387 67 -48,902 646 7 172,219 847 -226,686 384 -13,153 655 0 245,590 765 -133,539 069	0,722 649 5 0,562 367 285 -25,344 436 4 317,717 888 -1687,794 38 4426,669 35 -6007,939 80 4055,924 07 -1079,031 43
0,205 126 5 0,071 483 755 -2,464 005 07 22,747 315 7 -81,447 094 0 111,128 202 0,998 753 -120,724 272 70,615 076 4	0,515 048 -0,532 091 794 23,122 617 9 -284,220 745 1507,844 39 -4021,803 64 5629,155 19 -3936,057 50 1083,294 51	0,825 327 5 -0,439 535 465 15,016 498 3 -130,563 896 409,148 547 -425,787 390 -119,485 390 455,345 274 -202,483 926
0,308 586 0,511 562 691 -21,837 869 6 265,597 849 -1405,523 71 3772,758 59 -5363,141 71 3840,867 74 -1088,452 08	0,617 248 5 0,267 356 128 -9,184 469 30 82,808 346 0 -281,210 352 342,614 220 51,500 630 0 -366,499 686 180,539 047	0,931 869 -0,600 336 192 29,253 829 5 -379,278 764 1990,092 96 -4980,497 72 6445,258 54 -4181,883 50 1078,466 10

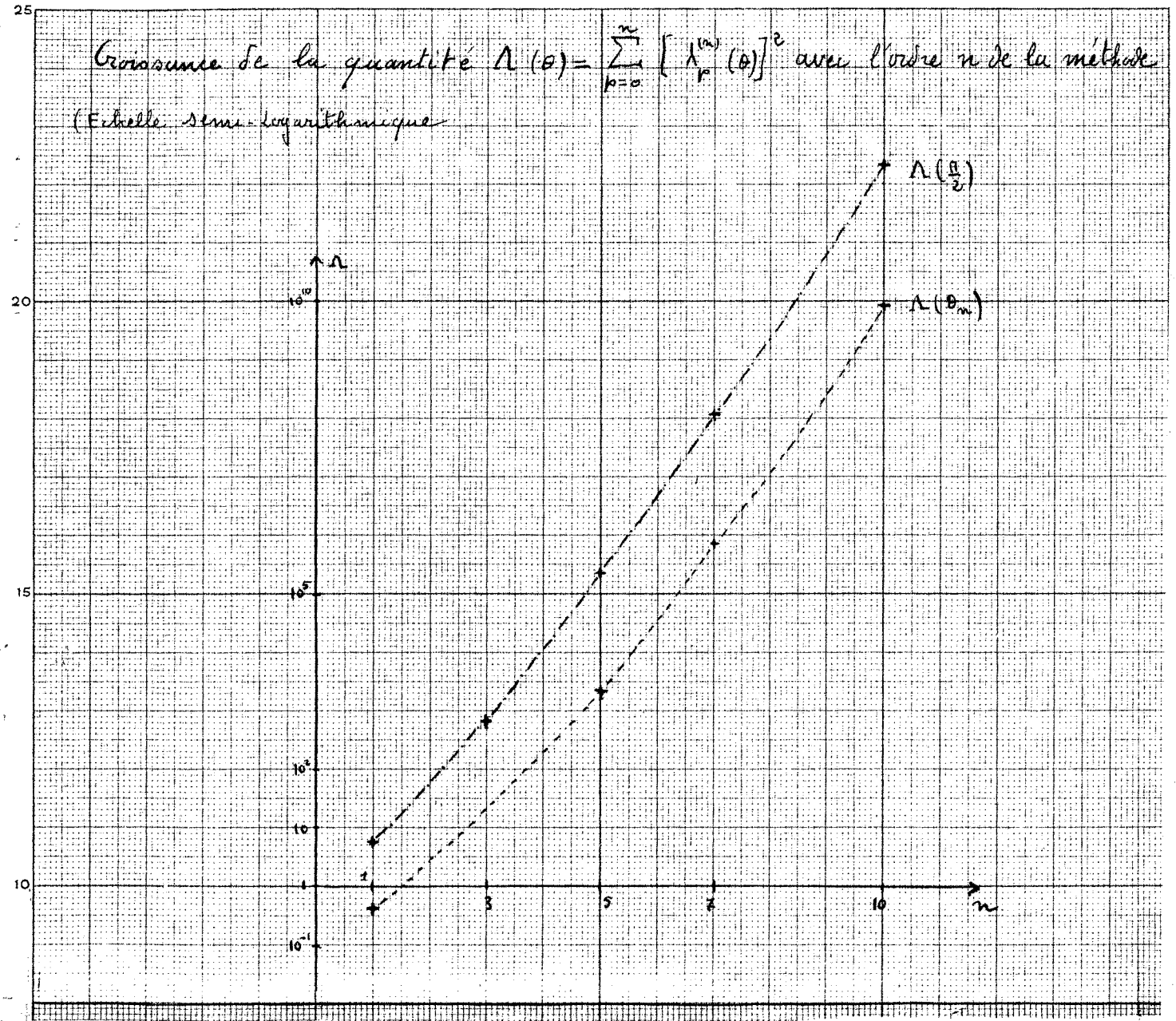
Valeurs des coefficients correspondant aux extrema de A_7

(Suite)

<p>1,035 526</p> <p>0,743 165 204</p> <p>-25,007 437 0</p> <p>196,984 954</p> <p>-500,457 146</p> <p>420,804 270</p> <p>185,015 290</p> <p>-467,524 486</p> <p>190,251 320</p>	<p>1,356 260</p> <p>-0,673 806 750</p> <p>78,863 717 0</p> <p>-706,006 449</p> <p>2838,742 70</p> <p>-6072,576 52</p> <p>7153,115 96</p> <p>-4379,725 91</p> <p>1089,076 10</p>
<p>1,143 065</p> <p>0,640 807 061</p> <p>-38,043 621 9</p> <p>512,824 830</p> <p>-2419,584 20</p> <p>5588,577 24</p> <p>-6857,269 16</p> <p>4296,262 60</p> <p>-1082,651 52</p>	<p>1,462 966 5</p> <p>4,590 608 01</p> <p>-28,529 921 7</p> <p>102,419 576</p> <p>-178,522 499</p> <p>108,565 993</p> <p>79,345 679 0</p> <p>-138,015 946</p> <p>50,936 934 0</p>
<p>1,248 180 5</p> <p>-1,420 413 51</p> <p>44,962 425 2</p> <p>-219,756 978</p> <p>440,696 553</p> <p>-303,175 094</p> <p>-184,420 615</p> <p>362,065 702</p> <p>-138,181 037</p>	<p>1,570 796 33</p> <p>8,0</p> <p>-112,0</p> <p>806,4</p> <p>-3017,142 85</p> <p>6257,777 77</p> <p>-7261,090 909</p> <p>4411,076 92</p> <p>-1092,266 666</p>

~~Valeurs des~~

Graphique de la quantité $\Lambda(\theta) = \sum_{p=0}^n [\Lambda_p^{(n)}(\theta)]^2$ avec l'ordre n de la méthode
(Echelle semi-logarithmique)



La quantité Λ a été calculée pour deux valeurs de θ , l'une $\theta = \pi/2$ correspondant au maximum absolu de Λ , l'autre θ_n correspondant au maximum des minima relatifs de Λ .

n	θ_n	$\Lambda(\theta_n)$	$\Lambda(\pi/2)$
1	0,9365	$4,1885 \cdot 10^{-1}$	5,7778
3			$6,4601 \cdot 10^2$
5	1,1275	$2,0824 \cdot 10^3$	$2,3222 \cdot 10^5$
7	1,0355	$7,5597 \cdot 10^5$	$1,2230 \cdot 10^8$
10	1,0381	$8,2597 \cdot 10^9$	$2,0565 \cdot 10^{12}$

Revenons à la formule (4) que nous écrirons en faisant apparaître la variable t :

$$f_n(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{p=0}^n F[(2p+1)\sigma] \lambda_p^{(n)}(\text{Arc cos } e^{-\sigma t}) \quad (5)$$

Dans cette formule σ est un paramètre supposé fixe. Nous venons d'étudier certaines difficultés de la méthode d'inversion ainsi représentée. Un de ses avantages est que, si la fonction $F(z)$ est donnée à partir de résultats expérimentaux ou, plus généralement, si l'on n'en connaît qu'une répartition discrète de valeurs, il suffira d'utiliser $(n+1)$ de ces valeurs correspondant à des valeurs réelles équidistantes de z . Mais il faut alors pour chaque valeur de t calculer les coefficients

$\lambda_p^{(n)}(t)$; ce calcul est lourd si on veut le conduire avec les précautions requises par la précision exigée sur le résultat.

III. Variante proposée. Nous ~~proposons~~ proposons une variante dans laquelle la part de l'erreur de calcul sera moindre que dans la méthode qui vient d'être décrite.

Pour cela on considère $\theta = \text{Arc cos } e^{-\sigma t}$ comme une quantité fixe et on fait varier σ . Nous écrirons alors:

$$f_n(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{p=0}^n F[(2p+1)\left(-\frac{1}{t} \text{Log cos } \theta_0\right)] \lambda_p^{(n)}(\theta_0) \quad (6)$$

θ_0 ayant été choisi de façon à minimiser $\sum_{p=0}^n [\lambda_p^{(n)}(\theta)]^2$

On emploie les coefficients λ dans les conditions qui minimisent l'erreur de calcul. En outre ces coefficients sont calculés une fois pour toutes. On peut donc les avoir avec toute la précision désirable. Par contre si l'on ne connaît $F(z)$ qu'en un nombre fini de points, l'avantage disparaît en partie car il devient nécessaire de faire des interpolations qui entraînent des calculs supplémentaires et de nouvelles causes d'erreurs.

IV. Justification théorique de la variante et erreur de méthode

Pour justifier l'idée qui a conduit à l'emploi de cette variante, en dehors des considérations numériques, on peut faire remarquer que, en

désignant par $f_{\theta_0, n}^*(t)$ la fonction définie par (6) et par $f_{\sigma, n}^*(t)$ celle définie par (5), ces deux fonctions coïncident pour $t = -\frac{1}{\sigma} \text{Log cos } \theta_0$. (7)

Autrement dit $f_{\theta_0, n}^*(t)$ prend au point t_0 la valeur qu'y prendrait l'approximation $f_{\sigma, n}^*(t)$ pour la valeur $\sigma = -\frac{1}{t_0} \text{Log cos } \theta_0$. (8) du paramètre.

Mais il est plus intéressant de chercher à déterminer la nature de l'approximation de $f(t)$ (si approximation il y a) que réalise $\int_{\theta_0, n}^*$ (t)

Nous savons que:

$$\int_n^* (\sigma, \theta) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f^*(\sigma, \varphi) \frac{\sin(2n + \frac{3}{2})(\theta - \varphi)}{2 \sin \frac{1}{2}(\theta - \varphi)} d\varphi$$

$\int^*(\sigma, \theta)$ a, par rapport à la variable θ , les symétries des sinus impairs.

Son développement ne comporte donc pas de termes en $\sin(2n\theta)$ et $\cos(2n\theta)$

$$\text{D'où: } \int_{-\pi}^{+\pi} f^*(\sigma, \varphi) \sin 2n\theta \sin 2n\varphi d\varphi = 0$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f^*(\sigma, \varphi) \cos 2n\theta \cos 2n\varphi d\varphi = 0$$

On peut donc écrire:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f^*(\sigma, \varphi) \left\{ \frac{\sin(2n + \frac{3}{2})(\theta - \varphi)}{2 \sin \frac{1}{2}(\theta - \varphi)} + \frac{1}{2} \left[\sin(2n+2)\theta \sin(2n+2)\varphi + \cos(2n+2)\theta \cos(2n+2)\varphi \right] \right\} d\varphi =$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f^*(\sigma, \varphi) \left\{ \frac{\sin(2n+2)(\theta - \varphi) \cos \frac{\theta - \varphi}{2}}{2 \sin \frac{\theta - \varphi}{2}} - \frac{1}{2} \cos(2n+2)(\theta - \varphi) + \frac{1}{2} \cos(2n+2)(\theta - \varphi) \right\} d\varphi = \\ & = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f^*(\sigma, \varphi) \frac{\sin(2n+2)(\theta - \varphi)}{2 \operatorname{tg} \frac{\theta - \varphi}{2}} d\varphi \end{aligned}$$

que l'on peut encore écrire, en raison de la périodicité:

$$\int_n^* (\sigma, \theta) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^*(\sigma, \theta + \varphi) \frac{\sin(2n+2)\varphi}{2 \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}} d\varphi \quad (9)$$

$$\text{Or: } \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\sin n\varphi}{2 \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}} d\varphi = 1$$

$$\text{En effet: } \frac{\sin n\varphi}{2 \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}} = \frac{1}{2} (1 - \cos n\varphi) + \sum_{k=1}^n \cos k\varphi$$

$$\text{Et } \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin n\varphi}{2 \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}} d\varphi = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d\varphi}{2} = 1$$

Nous pourrions donc écrire: $\int_n^* (\sigma, \theta) - \int_{\sigma, \theta}^* =$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-n}^n f^*(\sigma, \theta + \varphi) \frac{\sin(2n+2)\varphi}{2 \operatorname{tg} \varphi/2} d\varphi - \frac{1}{\pi} \int_{-n}^n f^*(\sigma, \theta) \frac{\sin(2n+2)\varphi}{2 \operatorname{tg} \varphi/2} d\varphi$$

c'est-à-dire: $\int_n^* (\sigma, \theta) - \int_{\sigma, \theta}^* = \frac{1}{\pi} \int_{-n}^n [f^*(\sigma, \theta + \varphi) - f^*(\sigma, \theta)] \frac{\sin(2n+2)\varphi}{2 \operatorname{tg} \varphi/2} d\varphi$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-n}^0 [f^*(\sigma, \theta + \varphi) - f^*(\sigma, \theta)] \frac{\sin(2n+2)\varphi}{2 \operatorname{tg} \varphi/2} d\varphi + \frac{1}{\pi} \int_0^n [f^*(\sigma, \theta + \varphi) - f^*(\sigma, \theta)] \frac{\sin(2n+2)\varphi}{2 \operatorname{tg} \varphi/2} d\varphi$$

En faisant dans la première intégrale le changement de variable $\varphi = -u$, on arrivera à:

$$\int_n^* (\sigma, \theta) - \int_{\sigma, \theta}^* = \frac{1}{\pi} \int_0^n \frac{f^*(\sigma, \theta + \varphi) - 2 f^*(\sigma, \theta) + f^*(\sigma, \theta - \varphi)}{2 \operatorname{tg} \varphi/2} \sin(2n+2)\varphi d\varphi \quad (10)$$

Dans cette formule σ et θ sont deux paramètres reliés par (7). On peut alors écrire:

$$\int_{\theta, n}^* (t) - f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^n \frac{\Phi_{\theta}(t, \varphi)}{2 \operatorname{tg} \varphi/2} \sin(2n+2)\varphi d\varphi \quad (11)$$

$$\Phi_{\theta}(t, \varphi) = f\left(t \frac{\operatorname{Log} \cos(\theta + \varphi)}{\operatorname{Log} \cos \theta}\right) - 2 f(t) + f\left(t \frac{\operatorname{Log} \cos(\theta - \varphi)}{\operatorname{Log} \cos \theta}\right) \quad (12)$$

On peut énoncer le théorème:

Si $\int_0^n \frac{|\Phi_{\theta}(t, \varphi)|}{2 \operatorname{tg} \varphi/2} d\varphi$ existe, alors $\left| \int_{\theta, n}^* (t) - f(t) \right|$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

On voit en effet que $\int_{\theta, n}^* (t) - f(t)$ est égal au demi-coefficient de $\sin(2n+2)\varphi$ dans le développement en série de Fourier de la fonction

absolument intégrable $\frac{\Phi_{\theta}(t, \varphi)}{2 \operatorname{tg} \varphi/2}$

Donc $\left| \int_{\theta, n}^* (t) - f(t) \right| \rightarrow 0$ Quand $n \rightarrow \infty$

(N-B. Nous rappelons que dans l'expression de $\Phi_{\theta}(t, \varphi)$, la fonction

$f\left(t \frac{\operatorname{Log} \cos(\theta + \varphi)}{\operatorname{Log} \cos \theta}\right)$ a les symétries de $\sin(\theta + \varphi)$. θ est fixé)

La fonction $\frac{\operatorname{Log} \cos(\theta + \varphi)}{\operatorname{Log} \cos \theta}$ est égale à 1 lorsque $\varphi = 0$.

En outre: $\forall \theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $\left(\frac{\operatorname{Log} \cos(\theta + \varphi)}{\operatorname{Log} \cos \theta} \right)'_{\varphi=0} = - \frac{\operatorname{tg} \theta}{\operatorname{Log} \cos \theta}$

$$\left(\frac{\text{Log } \cos(\theta + \varphi)}{\text{Log } \cos \theta} \right)''_{\varphi=0} = - \frac{1 + \text{tg}^2 \theta}{\text{Log } \cos \theta}$$

Considérons des fonctions: a/ continues par morceaux avec

$f(t) = \frac{1}{2} [f(t+) + f(t-)]$ et telles que en dehors des points de discontinuité $|f(t+h) - f(t)| \leq C \cdot h^\alpha$; $\alpha > 0$

Alors $f\left(t \frac{\text{Log } \cos(\theta + \varphi)}{\text{Log } \cos \theta}\right) = \int \left[t \left(1 - \varphi \frac{\text{tg } \theta}{\text{Log } \cos \theta} - \frac{\varphi^2}{2} \frac{1 + \text{tg}^2 \theta}{\text{Log } \cos \theta} + \varepsilon(\varphi) \cdot \varphi^2 \right) \right]$

$$\left| f\left(t \frac{\text{Log } \cos(\theta + \varphi)}{\text{Log } \cos \theta}\right) - f(t) \right| \leq C \times t^\alpha \varphi^\alpha \left(\frac{\text{tg } \theta}{\text{Log } \cos \theta} \right)^\alpha$$

$$\leq C'(t, \theta) \cdot \varphi^\alpha$$

$$\Rightarrow \Phi_\theta(t, \varphi) \leq C(t, \theta) \cdot \varphi^\alpha$$

b/ et telles qu'il existe un polynôme $P_n(t)$

avec $P_n(t) \geq |f(t)|$ pour tout $t \geq 0$. Dans ces conditions, les fonctions $f(t)$ sont intégrables sur tout intervalle $[0, R]$ et les intégrales

$$\int_\varepsilon^{\frac{\pi}{2} - \theta - \delta} \frac{f\left(t \frac{\text{Log } \cos(\theta + \varphi)}{\text{Log } \cos \theta}\right)}{2 \text{tg } \varphi_{1/2}} d\varphi ; \int_{\frac{\pi}{2} - \theta + \delta}^{\pi} \frac{f\left(t \frac{\text{Log } \cos(\theta + \varphi)}{\text{Log } \cos \theta}\right)}{2 \text{tg } \varphi_{1/2}} d\varphi$$

existent. D'autre part quand $\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2} - \theta$ $\left| f\left(t \frac{\text{Log } \cos(\theta + \varphi)}{\text{Log } \cos \theta}\right) \right|$ est

majorée par $P_n\left(t \frac{\text{Log } \cos(\theta + \varphi)}{\text{Log } \cos \theta}\right)$. Or $\int_{\frac{\pi}{2} - \varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} (\text{Log } \cos \theta)^n d\theta$ existe

car le changement de variable $e^{-t} = \cos \theta$ conduit à $\int_A^\infty \frac{t^n}{\sqrt{e^{2t} - 1}} dt$

qui existe car $\frac{t^n}{\sqrt{e^{2t} - 1}}$ est équivalent à $e^{-t} \cdot t^n$ quand n tend vers l'infini.

On est dans les conditions indiquées assurées de l'existence de

$$\int_\varepsilon^\pi \frac{|\Phi_\theta(t, \varphi)|}{2 \text{tg } \varphi_{1/2}} d\varphi$$

Pour que $\int_0^\pi \frac{|\Phi_\theta(t, \varphi)|}{2 \log \varphi/2} d\varphi$ existe, il suffira que $\Phi_\theta(t, \varphi) = O(\varphi^\alpha)$ $\alpha > 0$

ce qui est le cas dans les conditions indiquées.

Il peut être intéressant de savoir quelles sont les fonctions $u_{\theta, p}(t)$ dont la somme donne $\int_{\theta, n}^*(t)$

On a:

$$u_p(\theta, \varphi) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^*(\sigma, \varphi) \{ \sin(2p+1)\theta \sin(2p+1)\varphi + \cos(2p+1)\theta \cos(2p+1)\varphi \} d\varphi$$

$$u_p(\theta, \varphi) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^*(\sigma, \varphi) \cos(2p+1)(\theta - \varphi) d\varphi$$

Dans cette formule σ et θ sont des paramètres liés par (7); on pourra donc opérer comme précédemment; on obtiendra:

$$u_{\theta, p}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^*\left(t \frac{\log \cos(\theta + \varphi)}{\log \cos \theta}\right) \cos(2p+1)\varphi d\varphi \quad (13)$$

En tenant compte du fait que $f^*(\sigma, \varphi)$ a les symétries des sinus impairs on aura aussi

$$u_p(\theta, \varphi) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^*(\sigma, \varphi) \sin(2p+1)\theta \cdot \sin(2p+1)\varphi d\varphi$$

En fixant θ

$$u_{\theta, p}(t) = \frac{1}{\pi} \sin(2p+1)\theta \int_{-\pi}^{\pi} f\left(t \frac{\log \cos \varphi}{\log \cos \theta}\right) \sin(2p+1)\varphi d\varphi$$

$$u_{\theta, p}(t) = \frac{1}{\pi} b_{\theta, p}(t) \sin(2p+1)\theta \quad (14)$$

Où $b_{\theta, p}(t)$ est le coefficient de $\sin(2p+1)\varphi$ dans le développement en série de Fourier de la fonction de φ $f\left(t \frac{\log \cos \varphi}{\log \cos \theta}\right)$

Rapidité de convergence Supposons une fonction $f(t)$ telle que pour

$\theta \neq 0; \theta \neq \frac{\pi}{2}$ $\int_0^n \frac{|\Phi_\theta(t, \varphi)|}{2 \operatorname{tg} \varphi/2} d\varphi$ existe. On suppose en outre f continue avec $f(0) = 0$; f bornée, deux fois dérivable et à dérivées continues bornées. Nous savons que

$$\int_{\theta, n}^* (t) - f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^n \frac{\Phi_\theta(t, \varphi)}{2 \operatorname{tg} \varphi/2} \sin(2n+2)\varphi d\varphi$$

Développons $f\left(t \frac{\operatorname{Log} \cos(\theta+\varphi)}{\operatorname{Log} \cos \theta}\right)$ en série de Taylor au voisinage

de $\varphi = 0$.

$$f\left(t \frac{\operatorname{Log} \cos(\theta+\varphi)}{\operatorname{Log} \cos \theta}\right) = f(t) - f'(t) \frac{t \operatorname{tg} \theta}{\operatorname{Log} \cos \theta} \varphi + \left[f''(t) \frac{t^2 \operatorname{tg}^2 \theta}{(\operatorname{Log} \cos \theta)^2} - f'(t) \frac{t}{\cos^2 \theta \operatorname{Log} \cos \theta} \right] \frac{\varphi^2}{2} + \varepsilon(\varphi) \varphi^2$$

$$\text{D'où } \Phi_\theta(t, \varphi) = \left[f''(t) \frac{t^2 \operatorname{tg}^2 \theta}{(\operatorname{Log} \cos \theta)^2} - f'(t) \frac{t}{\cos^2 \theta \operatorname{Log} \cos \theta} \right] \varphi^2 + \varepsilon(\varphi) \varphi^2$$

$$\text{Donc } \frac{\Phi_\theta(t, \varphi)}{2 \operatorname{tg} \varphi/2} \rightarrow 0 \text{ quand } \varphi \rightarrow 0$$

$$\text{et } \frac{\Phi_\theta(t, \varphi)}{\varphi \cdot 2 \operatorname{tg} \varphi/2} \rightarrow f''(t) \frac{t^2 \operatorname{tg}^2 \theta}{(\operatorname{Log} \cos \theta)^2} - f'(t) \frac{t}{\cos^2 \theta \operatorname{Log} \cos \theta}$$

Le fait que $f'(t)$ et $f''(t)$ existent pour tout t et que $f(t)$, $f'(t)$, $f''(t)$ soient bornées permet d'affirmer la convergence de la méthode pour

tout $\theta \in]0, \pi/2 [$

Cette convergence a lieu, nous l'avons vu, dans des conditions plus générales mais nous nous restreignons à ce cas particulier.

A/ Si $f(t)$ est à variation bornée sur $[0, \infty)$ alors $f\left(t \frac{\operatorname{Log} \cos(\theta+\varphi)}{\operatorname{Log} \cos \theta}\right)$ est aussi à variation bornée sur un intervalle fini quelconque

Donc $\frac{\Phi_\theta(t, \varphi)}{2 \operatorname{tg} \varphi/2}$ est elle-même à variation bornée (La dérivée de cette

quantité est bornée continue au voisinage de 0. Le graphe de la fonction est donc rectifiable dans un voisinage de 0. Sur (ε, η) elle est à varia-

tion bornée comme produit d'une fonction à variation bornée $\Phi_\theta(t, \varphi)$ par une fonction à v.b. $\left. \frac{1}{2} \cot \operatorname{tg} \varphi/2 \right]$

Dans ces conditions $\frac{\Phi_{\theta}(t, \varphi)}{2t \operatorname{tg} \varphi/2} = g_1(\varphi) - g_2(\varphi)$ où $g_1(\varphi)$ et $g_2(\varphi)$

sont respectivement les variations positives et négatives de la fonction $\frac{\Phi_{\theta}(t, \varphi)}{2t \operatorname{tg} \varphi/2}$ et une application du second théorème de la

moyenne nous conduit à

$$\left| \int_{\theta, n}^* (t) - f(t) \right| \leq \frac{g_1(n) + g_2(n)}{n(2n+2)} = \frac{V}{2n(n+1)}$$

V étant la variation totale de $\frac{\Phi_{\theta}(t, \varphi)}{2t \operatorname{tg} \varphi/2}$ sur $[0, n]$

D'ailleurs si $f(t)$ est à variation bornée sur $[0, \infty)$ alors $f(t)$ tend vers une limite finie quand $t \rightarrow \infty$

Donc $f\left(t \frac{\operatorname{Log} \cos(\theta + \varphi)}{\operatorname{Log} \cos \theta}\right)$ est continue en $\varphi = \frac{\pi}{2} - \theta$ (cf. N.E. p.18)

mais non nécessairement absolument continue. Il en sera de même de

$\frac{\Phi_{\theta}(t, \varphi)}{2t \operatorname{tg} \varphi/2}$ et par suite nous aurons bien

$$\left| \int_{\theta, n}^* (t) - f(t) \right| = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

B/La dérivée de $\frac{\Phi_{\theta}(t, \varphi)}{2t \operatorname{tg} \varphi/2}$ n'est en général dans les conditions indi-

quées ni continue ni même bornée aux points $\varphi = \frac{\pi}{2} - \theta$; $\varphi = \frac{\pi}{2} + \theta$

$$\frac{d}{d\varphi} \left[f\left(t \frac{\operatorname{Log} \cos(\theta + \varphi)}{\operatorname{Log} \cos \theta}\right) \right] = f'\left(t \frac{\operatorname{Log} \cos(\theta + \varphi)}{\operatorname{Log} \cos \theta}\right) \left(-\frac{t \operatorname{tg}(\theta + \varphi)}{\operatorname{Log} \cos \theta}\right)$$

Posons $\operatorname{Log} \cos(\theta + \varphi) = -u$ $\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2} - \theta \Rightarrow u \rightarrow \infty$

$$f'\left(t \frac{\operatorname{Log} \cos(\theta + \varphi)}{\operatorname{Log} \cos \theta}\right) \left(-\frac{t \operatorname{tg}(\theta + \varphi)}{\operatorname{Log} \cos \theta}\right) = -\frac{t}{\operatorname{Log} \cos \theta} f'\left(\frac{-ut}{\operatorname{Log} \cos \theta}\right) \sqrt{e^{2u} - 1}$$

Si $f'\left(\frac{-ut}{\operatorname{Log} \cos \theta}\right) \sqrt{e^{2u} - 1} \rightarrow 0$ quand $u \rightarrow \infty$

Alors, par suite des symétries $\frac{d}{d\varphi} \left[f\left(t \frac{\operatorname{Log} \cos(\theta + \varphi)}{\operatorname{Log} \cos \theta}\right) \right]$ existe

et est continue pour $\varphi = \frac{\pi}{2} - \theta$

La fonction de $\varphi: \frac{\Phi_\theta(t, \varphi)}{2 \operatorname{tg} \varphi/2}$ est alors continue et à dérivée première continue (mais non nécessairement absolument continue) quel que soit θ .
Donc, toujours dans les mêmes conditions, avec en outre

$$\lim_{u \rightarrow \infty} f'(-ut/\operatorname{Log} \cos \theta) e^u = 0$$

$$\text{on a } \left| f_{\theta, n}^*(t) - f(t) \right| = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

La condition ci-dessus peut évidemment n'être vérifiée que pour certaines valeurs de la variable t et du paramètre θ .

C/Considérons à présent le cas des fonctions à variation non bornée sur $[0, \infty)$ mais toujours deux fois dérivables, bornées et à dérivées continues bornées. DE telles fonctions sont alors à v.b. sur tout intervalle fini. Alors la fonction

$$f\left(\frac{t \operatorname{Log} \cos(\theta + \varphi)}{\operatorname{Log} \cos \theta}\right) \text{ n'est pas à v.b. au voisinage de } \varphi = \frac{\pi}{2} - \theta$$

On pourra seulement affirmer dans ce ~~cas~~ cas que $\left| f_{\theta, n}^*(t) - f(t) \right| \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$

Influence de t et de θ Nous examinerons à partir des expériences de ~~calcul~~ calcul l'influence du choix du paramètre θ et des valeurs de la variable t .

On peut toutefois remarquer que dans le cas général de la classe de fonctions définie p. 19 DE (fonctions satisfaisant à la condition de Lipschitz d'indice α) nous avons

$$\lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{\Phi_\theta(t, \varphi)}{2 \operatorname{tg} \varphi/2} \leq C t^\alpha \varphi^{\alpha-1} \left(\frac{-\operatorname{tg} \theta}{\operatorname{Log} \cos \theta} \right)^\alpha$$

On voit que l'on a intérêt à minimiser le coefficient de $\varphi^{\alpha-1}$ c'est à dire a) utiliser des valeurs de la variable voisines de 0 : on peut en effet s'attendre à ce que la convergence soit de moins en moins bonne quand t augmente.

b) utiliser des valeurs du paramètre telles que $-\operatorname{tg} \theta / \operatorname{Log} \cos \theta$ soit minimum ce qui a lieu pour $\operatorname{Log} \cos \theta + \sin^2 \theta = 0$

ou en posant $\cos \theta = e^{-u}$; $e^{-2u} = 1-u$

$$\theta \approx 1,103175 \text{ radians} = 63^\circ 12' 26''$$

CHAPITRE III. ESSAI D'UNE GENERALISATION DE LA METHODE

A COEFFICIENTS FIXES

Nous nous sommes servis dans les calculs précédents de la formule

$$f_n(t) = \frac{4}{n} \sum_{p=0}^n \lambda_p^{(n)}(\theta_0) F \left[(2p+1) \frac{|\text{Log } \cos \theta_0|}{t} \right] \quad (1)$$

θ_0 ayant été choisi comme il a été indiqué plusieurs fois ci-dessus.

Une autre méthode⁽¹⁾ consiste en l'utilisation de la formule

$$f_n(t) = \Phi(s_0) \sum_{p=0}^n \lambda_p^{(n)}(s_0) F \left[(2p+1) \frac{|\text{Log } s_0|}{t} \right] \quad (2)$$

où les $\lambda_p^{(n)}$ se calculent à partir des coefficients d'une famille de polynômes orthogonaux sur $[0, 1]$ relativement à la fonction poids $\Phi(s)$. s_0 a été choisi là aussi de façon à minimiser

$$\Lambda_n(s) = \sum_{p=0}^n (\Phi(s))^2 \left[\lambda_p^{(n)}(s) \right]^2$$

L'analogie entre les méthodes est évidente; nous allons essayer de généraliser

$$\mathcal{C} [f(t)] = F(p) = p \int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt$$

Nous désignerons par T_n une transformation fonctionnelle donnée par:

Soit: $T_n [\mathcal{C}(f(t))] = T_n (F(p)) = \sum_{k=0}^n a_k^{(n)} F(b_k^{(n)} \sigma(t)) \quad (3)$

Désignons par $A_n[f(t)]$ le résultat de la composition de T_n et de \mathcal{C}

$$f_n(t) = A_n [f(t)] = T_n [\mathcal{C}(f(t))]$$

a/ La transformation A_n est linéaire

$$A_n \left[\sum_{i=0}^q \alpha_i f_i(t) \right] = \sum_{i=0}^q \alpha_i A_n [f_i(t)] \quad (4)$$

$$F_i(p) = p \int_0^\infty e^{-pt} f_i(t) dt = \mathcal{C}(f_i(t))$$

1. Cf. Bibliographie [19]

La linéarité de la transformation de Carson-Laplace nous donne:

$$\mathcal{L} \left[\sum_{i=0}^q \alpha_i f_i(t) \right] = \sum_{i=0}^q \alpha_i F_i(p)$$

$$\begin{aligned} A_n \left(\sum_{i=0}^q \alpha_i f_i(t) \right) &= T_n \left[\mathcal{L} \left(\sum_{i=0}^q \alpha_i f_i(t) \right) \right] = T_n \left[\sum_{i=0}^q \alpha_i F_i(p) \right] \\ &= \sum_{k=0}^n a_k^{(n)} \left[\sum_{i=0}^q \alpha_i F_i \left(b_k^{(n)} \sigma(t) \right) \right] = \sum_{i=0}^q \alpha_i \left\{ \sum_{k=0}^n a_k^{(n)} F_i \left(b_k^{(n)} \sigma(t) \right) \right\} \\ &= \sum_{i=0}^q \alpha_i A_n \left[f_i(t) \right]. \end{aligned}$$

Donc si $A_n f_i(t)$ est telle que pour $t \in [a, b]$

$$|f_i(t) - A_n(f_i(t))| \leq \varepsilon_i \quad ; \text{ alors pour } t \in [a, b]$$

$$\left| \sum_{i=0}^q \alpha_i f_i(t) - A_n \left(\sum_{i=0}^q \alpha_i f_i(t) \right) \right| \leq \sum_{i=0}^q |\alpha_i| \varepsilon_i.$$

b/ Nous allons d'autre part imposer à la fonction $\sigma(t)$ d'être telle que $A_n[f(ut)]$ dépende ~~uniquement~~ uniquement de la valeur du produit ut

$$F(p) = \mathcal{L}(f(t))$$

$$p \int_0^{\infty} e^{-pt} f(ut) dt = \mathcal{L}(f(ut))$$

$$p \int_0^{\infty} e^{-pt} f(ut) dt = \frac{p}{u} \int_0^{\infty} e^{-\frac{p}{u} v} f(v) dv = F\left(\frac{p}{u}\right)$$

$$A_n[f(ut)] = f_n(ut) = \sum_{k=0}^n a_k^{(n)} F\left(\frac{b_k^{(n)}}{u} \sigma(t)\right)$$

$f_n(ut)$ dépend en général des deux variables u et t ; $f_n(u, t)$ dépendra uniquement du produit ut si, et seulement si $f_n(au, t) = f_n(u, at)$ c'est-à-dire, si, et seulement si

$$\frac{\sigma(at)}{au} = \frac{\sigma(at)}{u} \quad \text{ce qui entraîne} \quad \sigma(t) = \frac{A}{t}. \quad \text{On prendra pour simplifier}$$

$A = 1$. La formule (3) s'écrira alors:

$$\boxed{T_n(F(p)) = \sum_{k=0}^n a_k^{(n)} F\left(\frac{b_k^{(n)}}{t}\right)} \quad (5)$$

Le fait que $\alpha A_n(f(ut))$ dépende uniquement du produit ut permettra de connaître facilement l'erreur réalisée dans l'approximation de $f(ut)$ à partir de celle réalisée dans l'approximation de $f(t)$.

Ainsi, si $|f(t) - f_n(t)| \leq \varepsilon$ pour $t \in [a, b]$

$$|f(ut) - f_n(ut)| \leq \varepsilon \text{ pour } t \in \left[\frac{a}{u}, \frac{b}{u} \right]$$

D'autre part si $b_k^{(n)} > 0$ et si $\lim_{p \rightarrow \infty} F(p)$; $\lim_{p \rightarrow 0} F(p)$ existent on a alors

$$\lim_{t \rightarrow 0} f_n(t) = \sum_k a_k^{(n)} \left(\lim_{p \rightarrow \infty} F(p) \right)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f_n(t) = \sum_k a_k^{(n)} \left(\lim_{p \rightarrow 0} F(p) \right)$$

Or si $\lim_{t \rightarrow 0} f(t)$ existe, $\lim_{p \rightarrow \infty} F(p)$ existe et l'on a:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} F(p) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t)$$

$$\text{D'où: } \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \rightarrow \infty}} f_n(t) = \sum_k a_k^{(n)} \left[\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \rightarrow \infty}} f(t) \right] \quad (6)$$

Une différence importante subsiste entre la formule (5) et les formules (1) et (2). En effet, ces deux formules font intervenir dans le calcul de $f_n(t)$ une suite de points équidistants de l'axe réel. Ces points ne sont plus maintenant supposés équidistants. La méthode employée est alors fondée sur la généralisation du théorème de Lerch (cf. chap. I)

Evaluation de l'erreur De (4) nous tirons:

$$A_n \left[\sum_{k=0}^p \alpha_k \sin kt \right] = \sum_{k=0}^p \alpha_k \left\{ A_n (\sin kt) \right\} \quad (7)$$

Ce résultat peut être généralisé de la manière suivante: supposons $g(u)$ bornée, continue par morceaux et absolument intégrable sur $[0, \infty]$

avec $\int_0^\infty |g(u)| du = M$. Soit $f(t) = \int_0^\infty g(u) \sin ut du$

$f(t)$ est alors bornée et uniformément continue sur $[0, \infty]$ et $f(0) = 0$

En effet: $|f(t)| \leq \int_0^\infty |g(u)| du \Rightarrow |f(t)| \leq M$

D'autre part: $f(t_0) - f(t_1) = \int_0^\infty g(u) (\sin ut_0 - \sin ut_1) du$

$$\Rightarrow |f(t_0) - f(t_1)| \leq \int_0^\infty |g(u)| |\sin ut_0 - \sin ut_1| du$$

Le second membre peut encore s'écrire:

$$\int_0^A |g(u)| |\sin ut_0 - \sin ut_1| du + \int_A^\infty |g(u)| |\sin ut_0 - \sin ut_1| du$$

$\int_0^\infty |g(u)| du$ existe; donc il existe un nombre $A(\frac{\epsilon}{2})$ tel que

$$\int_A^\infty |g(u)| du \leq \frac{\epsilon}{2} \quad . \text{ Alors si } |t_0 - t_1| \leq \frac{\epsilon}{2} \times \frac{1}{M_1 A(\frac{\epsilon}{2})}$$

$$|\sin ut_0 - \sin ut_1| \leq |ut_0 - ut_1| \leq \frac{\epsilon}{2 M_1} \Rightarrow \int_0^\infty |g(u)| |\sin ut_0 - \sin ut_1| du \leq \frac{\epsilon}{2}$$

Donc: $|t_0 - t_1| \leq \frac{\epsilon}{2} \frac{1}{M_1 A(\frac{\epsilon}{2})} \Rightarrow |f(t_0) - f(t_1)| \leq \epsilon$

N.B: ($M_1 = \text{Max}_{u \in (0, \infty)} |g(u)|$).

D'où la continuité uniforme.

Soit $\mathcal{L}(f(t)) = p \int_0^\infty e^{-pt} \left[\int_0^\infty g(u) \sin ut du \right] dt$.

Considérons l'intégrale double

$$\iint_D e^{-pt} g(u) \sin ut du dt \quad (8)$$

où D est le domaine formé par le premier quadrant. On a:

$$|e^{-pt} g(u) \sin ut| \leq |e^{-pt}| |g(u)|$$

et $\int_0^A \left[\int_0^B |e^{-pt}| |g(u)| du \right] dt = \iint_{D_{AB}} |e^{-pt}| |g(u)| du dt$. D'où:

$$\iint_{D_{AB}} |e^{-pt}| |g(u)| du dt = \int_0^A |e^{-pt}| dt \cdot \int_0^B |g(u)| du.$$

~~Rien~~

Lorsque A et B tendent vers l'infini d'une manière quelconque, indépendamment l'un de l'autre, l'intégrale du second membre tend vers la quantité finie $\frac{M}{p}$ ceci pourvu que $p \neq 0$ (p positif)

Pour $p > 0$ l'intégrale (8) est donc (absolument) convergente. D'après le théorème de Fubini, on peut la calculer par superposition de deux intégrales simples et il est permis de permuter les deux intégrations simples.

Les deux notations:

$$\int_0^{\infty} \left\{ e^{-pt} \int_0^{\infty} g(u) \sin ut \, du \right\} dt \quad ; \quad \int_0^{\infty} \left\{ g(u) \int_0^{\infty} e^{-pt} \sin ut \, dt \right\} du$$

ont un sens. En effet $f(t) = \int_0^{\infty} g(u) \sin ut \, du$ est une fonction uniformément continue sur $[-\infty, +\infty]$ et bornée: donc $\int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$ existe pour $p > 0$.
D'autre part $\int_0^{\infty} e^{-pt} \sin ut \, dt = \frac{u}{p^2 + u^2}$; $\left| \frac{u}{p^2 + u^2} \right| < \frac{1}{p}$

$\int_0^{\infty} g(u) \int_0^{\infty} e^{-pt} \sin ut \, dt \, du$ existe donc pourvu que $p > 0$.

Ces deux notations représentent deux modes de calcul de (8). On a donc

pour $p > 0$:
$$\int_0^{\infty} \left\{ e^{-pt} \int_0^{\infty} g(u) \sin ut \, du \right\} dt = \int_0^{\infty} \left\{ g(u) \int_0^{\infty} e^{-pt} \sin ut \, dt \right\} du$$

D'où:
$$\int_0^{\infty} g(u) \mathcal{L}(\sin ut) \, du = \mathcal{L}(f(t))$$

et enfin:
$$\boxed{A_n(f(t)) = \int_0^{\infty} g(u) \cdot A_n(\sin ut) \, du.} \quad (9)$$

On démontre également que si $\sum_n |\alpha_n|$ existe

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin nt \right] dt = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \int_0^{\infty} e^{-pt} \sin nt \, dt. \quad (10)$$

Considérons
$$F_p(t, q) = e^{-pt} \sum_{n \leq q} \alpha_n \sin nt$$

a/ on voit facilement que:

$$\sum_{n=1}^q \alpha_n \int_0^{\infty} e^{-pt} \sin nt \, dt = \int_0^{\infty} e^{-pt} \sum_{n=1}^q \alpha_n \sin nt \, dt \quad (11)$$

b/ si $q \rightarrow \infty$ $F_p(t, q)$ converge uniformément vers $F_p(t, \infty) = e^{-pt} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin nt$.
puisque $\sum |\alpha_n|$ est convergente.

c/ enfin quel que soit q , $\int_0^{\infty} F_p(t, q) \, dt$ converge uniformément en $+\infty$
car $|F_p(t, q)| \leq e^{-pt} \sum_{n=1}^q |\alpha_n|$

Donc:
$$\lim_{q \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} F_p(t, q) \, dt = \int_0^{\infty} F_p(t, \infty) \, dt. \quad \text{c'est-à-dire:}$$

~~xxxxxx~~
$$\lim_{q \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} e^{-pt} \sum_{n \leq q} \alpha_n \sin nt \, dt = \int_0^{\infty} e^{-pt} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin nt \, dt.$$

A partir de là (11) entraîne le résultat annoncé en (10), résultat qui

reste encore vrai si: $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \sin \beta_n t$.

Pourvu que $\sum_n |\alpha_n|$ ~~si~~ soit convergente, on peut écrire pour $p > 0$

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(f(t)) &= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \mathcal{C}(\sin \beta_n t) \\ A_n(f(t)) &= \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_p A_n(\sin \beta_p t) \end{aligned} \quad (12)$$

En désignant par $E_n f(t)$ la quantité $f(t) - f_n(t)$, on aura:

$$E_n \left[\int_0^{\infty} g(u) \sin ut \, du \right] = \int_0^{\infty} g(u) E_n(\sin ut) \, du \quad (13)$$

$$E_n \left[\sum_{p=1}^{\infty} \alpha_p \sin \beta_p t \right] = \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_p E_n(\sin \beta_p t) \quad (14)$$

Ceci pourvu que $\sum_p |\alpha_p|$ et $\int_0^{\infty} |g(u)| \, du$ existent.

CHAPITRE IV ETUDE EXPERIMENTALE DE LA METHODE DE PAPOULIS

A// Nous avons d'abord expérimenté la méthode de Papoulis en calculant l'inverse de $1/p+1$ c'est à dire $1 - e^{-t}$.
L'intérêt de ce calcul est de mettre en évidence l'importance du choix du paramètre qui fixe dans cette méthode l'équidistance des points utilisés de $F(p) = 1/p+1$

Le changement de variable $e^{-\sigma t} = \cos \theta$ transforme la fonction $1 - e^{-t}$ en la fonction $1 - (\cos \theta)^{1/\sigma}$ dans l'intervalle $[0, \pi/2]$ fonction que l'on prolonge en dehors de cet intervalle par imparité et symétrie par rapport à $\frac{\pi}{2}$, puis périodicité $T = 2\pi$

Cette fonction ainsi prolongée présente ou non en $\theta = \frac{\pi}{2}$ une discontinuité de la dérivée première $f'(\theta) = \frac{1}{\sigma} \sin \theta (\cos \theta)^{1/\sigma - 1}$

Si $\frac{1}{\sigma} < 1$ $f'(\theta) \rightarrow \infty$ quand $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$ \Rightarrow discontinuité de 2^{ème} espèce

Si $\frac{1}{\sigma} = 1$ $f'(\theta) \rightarrow 1$ quand $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$ \Rightarrow discontinuité de 1^{ère} espèce

Si $\frac{1}{\sigma} > 1$ $f'(\theta) \rightarrow 0$ quand $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$ \Rightarrow continuité

Dans le premier cas les coefficients de la série de Fourier liée à $f(\theta)$ sont $O(n^{-1})$

Dans le second cas les coefficients sont $O(n^{-2})$

Dans le troisième cas $O(n^{-2})$

Enfin pour $\sigma = \frac{1}{2}$ $f(\theta) = 1 - \cos^2 \theta$ pour $\theta > 0$

$f(\theta) = -1 + \cos^2 \theta$ pour $\theta < 0$

Les coefficients sont alors $O(n^{-3})$; mais au-delà, pour des valeurs du paramètre inférieures à $\frac{1}{2}$, la discontinuité de la dérivée seconde en $\theta = 0$ ne permet pas d'améliorer la convergence.

Nous avons fait les calculs pour

$N = 10$; $\sigma = 0.05$; 0.5; 1; 2; 3;

$N = 7$; $\sigma = 0.5$

Pour t variant de 0 à 3 avec un pas $h = 0.05$ nous avons calculé la valeur moyenne de la valeur absolue de l'erreur

N = 10	$0 < t \leq 1$	$1 < t \leq 2$	$2 < t \leq 3$
$\sigma = 0.05$	0.003 45	0.001 90	0.001 80
$\sigma = 0.5$	0.000 22	0.000 25	0.000 25
$\sigma = 1$	0.001 45	0.003 07	0.008 03
$\sigma = 2$	0.006 81	0.022 98	0.087 78
$\sigma = 3$	0.017 5	0.085 5	

N = 7	$0 < t \leq 1$	$1 < t \leq 2$	$2 < t \leq 3$
$\sigma = 0.5$	0.000 81	0.000 25	0.000 17

On voit que la méthode d'ordre 10 ne donne pas de résultats sensiblement meilleurs que la méthode d'ordre 7 ceci pour la même valeur du paramètre $\sigma = 0.5$; dans le cas $N = 7$ l'erreur de méthode est prépondérante; dans le cas $N = 10$, c'est l'erreur de calcul qui l'emporte.

Erreur de calcul Pour $N = 10$; $\sigma = 0.5$ nous avons porté sur un graphique les valeurs de l'erreur pour t variant de 0 à 3 avec un pas $h = 0.0125$. Ce graphique montre nettement la prépondérance de l'erreur de calcul. Il permet, quoiqu'assez imparfaitement, de faire apparaître la diminution de cette erreur de calcul au voisinage de certaines valeurs de t , valeurs qui correspondent à des minima de la somme des carrés des coefficients $\sum_p \lambda_p^{(10)}(\theta)$ (cf. CH. II)

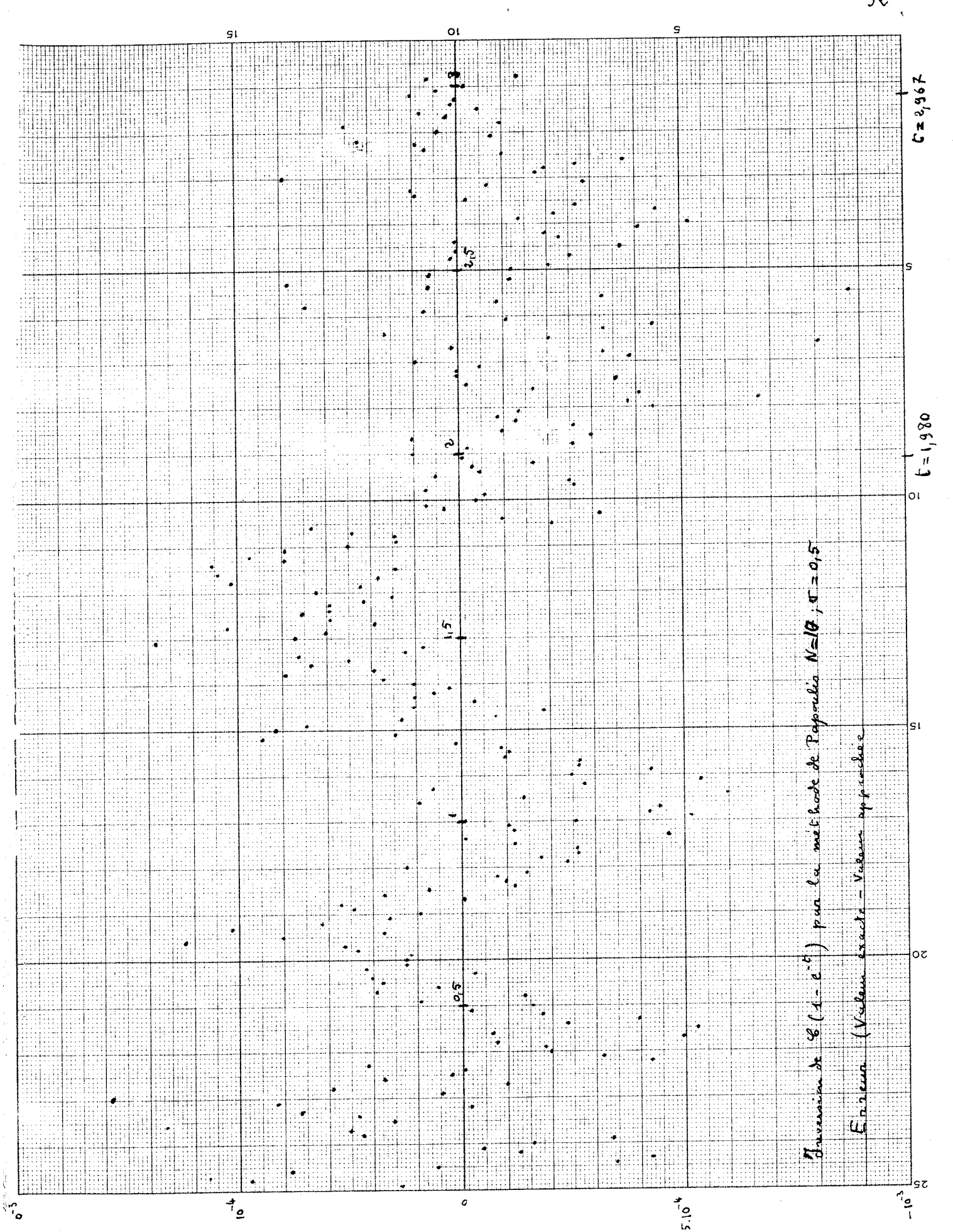
On a deux minima correspondant à $\theta = 75.764$ grade

$$\theta = 85.432 \text{ grade}$$

Ici $e^{-\frac{1}{2}t} = \cos \theta$ D'où $t = -2 \log \cos \theta$ $t = 1.980$; $t = 2.967$

Au voisinage de ces deux valeurs de t on constate que les erreurs sont d'amplitude moyenne nettement plus faible que dans le reste du graphique.

Pour les valeurs de t correspondant aux premiers minima de $\sum_p \left[\lambda_p^{(10)}(\theta) \right]^2$ rien de vraiment net n'apparaît car la variation de θ est alors trop rapide et l'effet de l'amélioration est étouffé par l'acuité des minima



Inversion de $S(1 - e^{-t})$ par la méthode de Papoulis $N=10, \sigma=0,5$

Erreur (Valeur exacte - Valeur approchée)

$E = 2,967$

$E = 1,980$

15

10

5

25

20

15

10

5

4

0

0.5

0.5

1.5

2

2.5

3

3.5

4

4.5

5

5.5

6

6.5

7

7.5

8

8.5

9

9.5

10

10

10

10

10

10

10

10

10

10

10

10

10

10

10

10

10

10

10

10

10

10

10

10

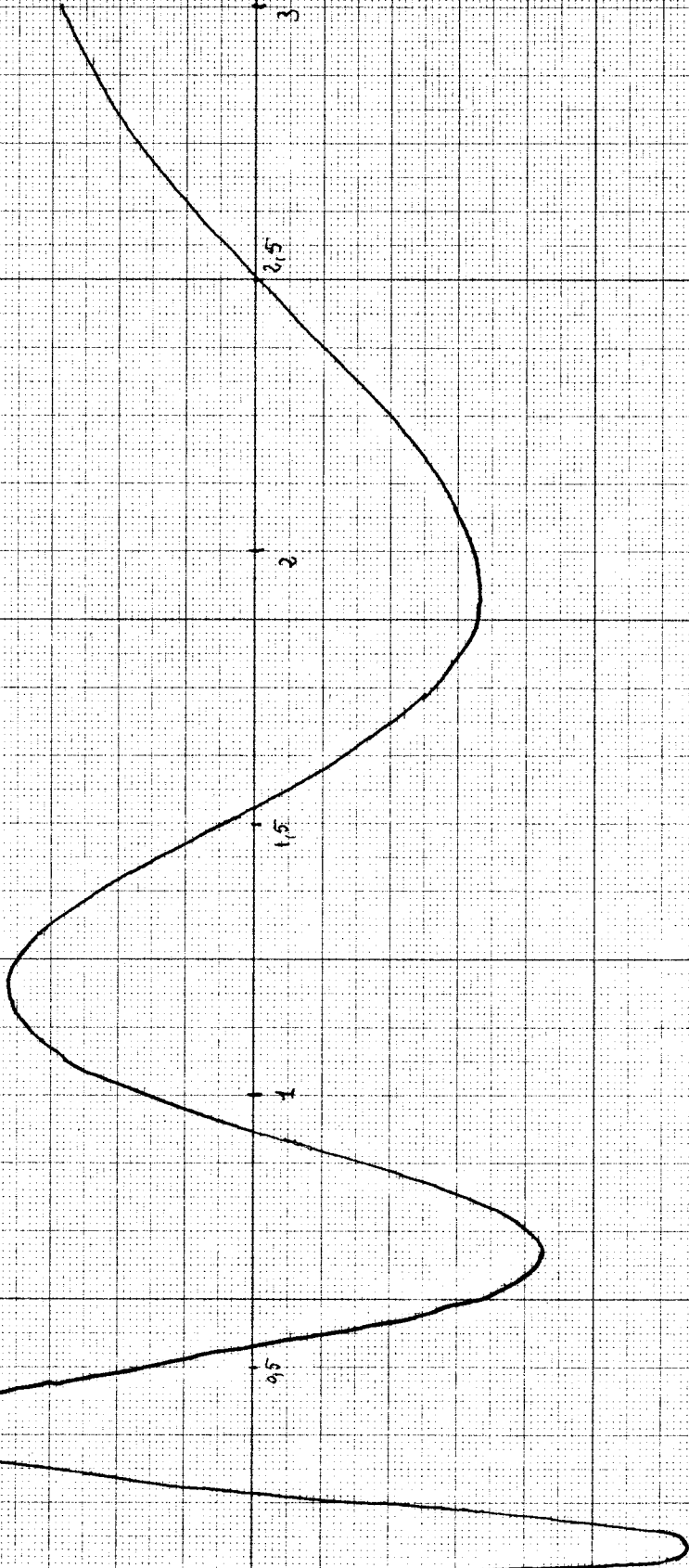
10

10

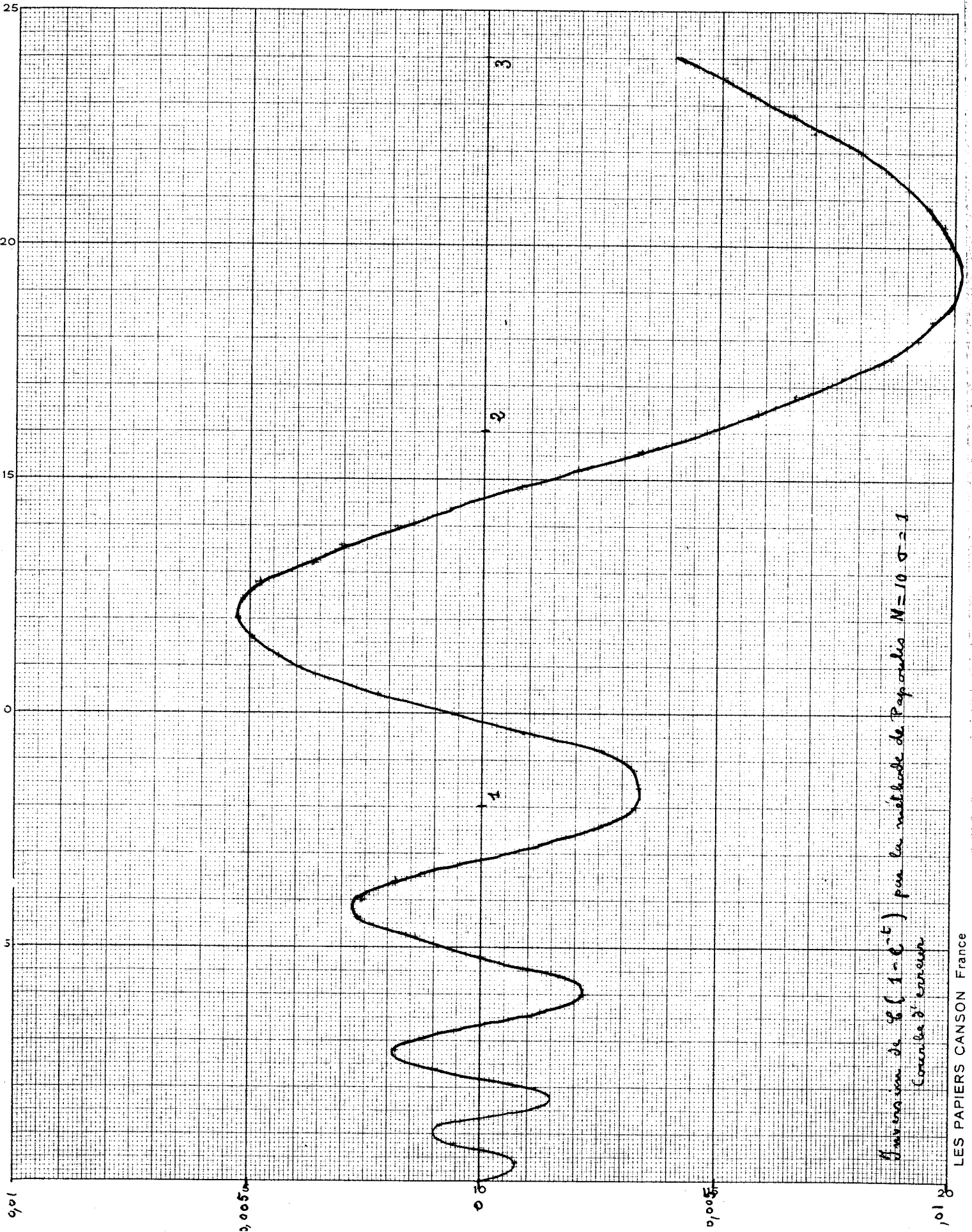
10

10

10



Inversion de $\mathcal{L}(1 - e^{-t})$ par la méthode de Papoulis $N=7, \sigma=0,5$
 Courbe d'erreur (Valeur ex - Volkmann)



Amplification de $\beta(1 - \epsilon^2)$ pour la méthode de Papoulis $M = 10$ $\sigma = 1$
 Courbes d'essai

B // Nous avons ensuite expérimenté la méthode de Papoulis en calculant l'inverse de $p/(p^2 + 1)$ c'est à dire $\sin t$
 Nous avons essayé différentes valeurs du paramètre avec $N = 10$
 Nous donnons les graphiques correspondant à

$$= 0.05; 0.1; 0.5; 1;$$

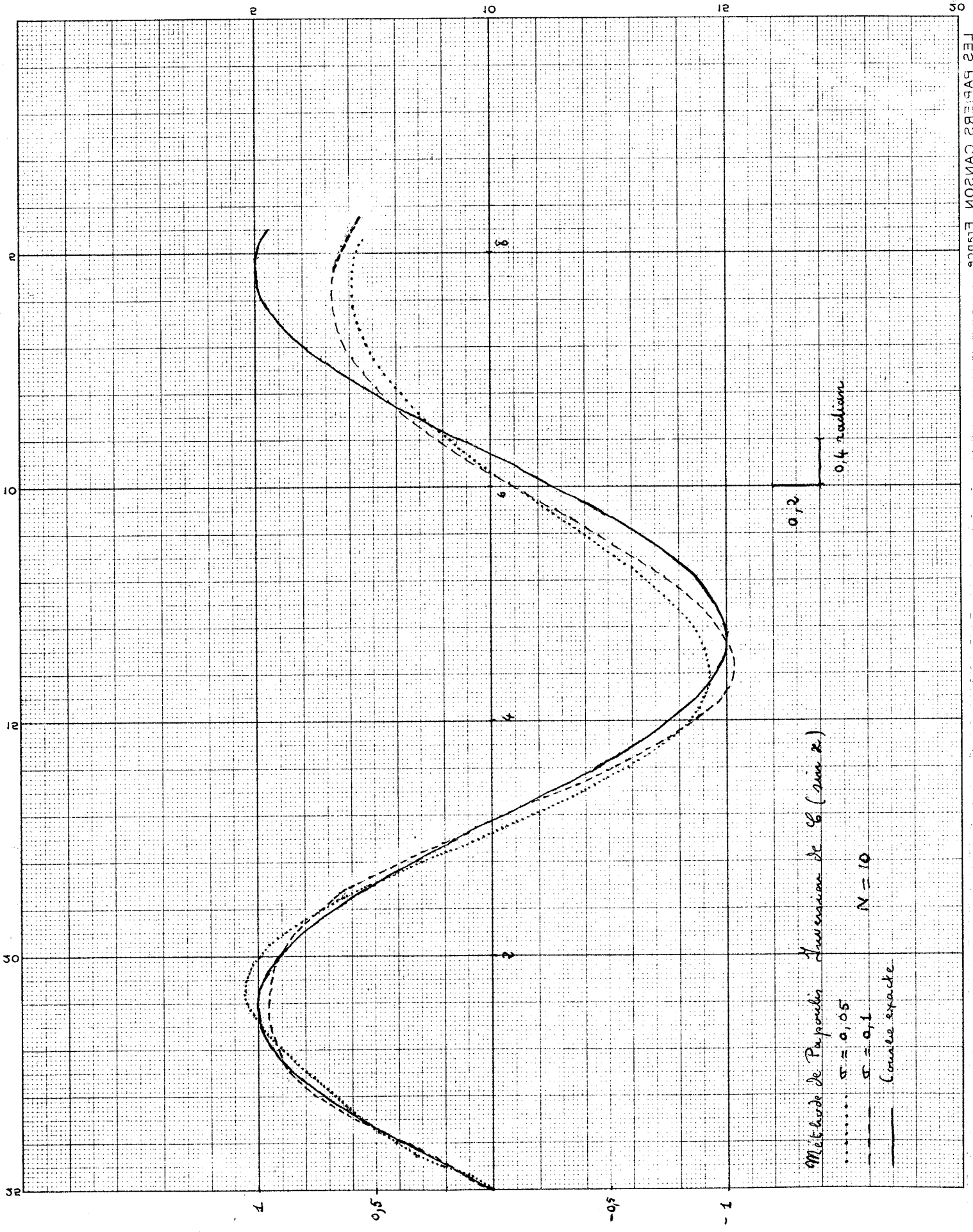
En outre nous avons étudié dans ce cas la convergence de la méthode en procédant de deux manières différentes

- a) en faisant varier N et en gardant constant le produit $N\sigma$ c'est à dire en utilisant des valeurs de $F(p)$ correspondant à des valeurs de p équidistantes mais toujours réparties dans le même intervalle
 b) en faisant varier N et en gardant constant le paramètre σ . Lorsque l'on passe de N à $N + 1$ on utilise des valeurs de $F(p)$ correspondant à des abscisses fixes mais en leur ajoutant chaque fois une abscisse supplémentaire vers la droite.

Dans les deux cas nous avons calculé la valeur moyenne de la valeur absolue de l'erreur en 20 abscisses équidistantes réparties entre 0 et 6 radian. Nous donnons également cette même quantité pour t compris entre 0 et 3 rad et entre 3 et 6 rad (moyenne sur 10 abscisses)

N	Valeur moyenne de la valeur absolue de l'erreur		
	$0 < t \leq 3$	$3 < t \leq 6$	$0 < t \leq 6$
$N\sigma = 1.$			
4	0.139 77	0.276 32	0.208 04
5	0.144 66	0.294 67	0.219 67
6	0.070 29	0.172 75	0.121 52
7	0.116 15	0.243 40	0.179 78
8	0.033 97	0.129 47	0.081 72
9	0.102 94	0.197 76	0.150 35
10	0.03394	0.099 37	0.066 65
11	0.083 57	0.133 58	0.108 57
12	0.057 20	0.092 47	0.074 84
13	0.069 29	0.155 58	0.112 43
$\sigma = 0,1$			
N	$0 < t \leq 3$	$3 < t \leq 6$	$0 < t \leq 6$
4	0.124 88	0.315 05	0.219 96
5	0.188 79	0.531 34	0.260 07
6	0.118 30	0.223 93	0.171 12
7	0.079 56	0.183 07	0.131 31
8	0.111 69	0.233 79	0.172 74
9	0.076 47	0.142 75	0.109 61
10	0.033 94	0.099 37	0.066 65
11	0.072 01	0.124 59	0.098 30
12	0.071 17	0.107 92	0.089 55
13	0.078 77	0.168 54	0.123 65

Pour $N = 14$, dans les deux cas les résultats de viennent incohérents.



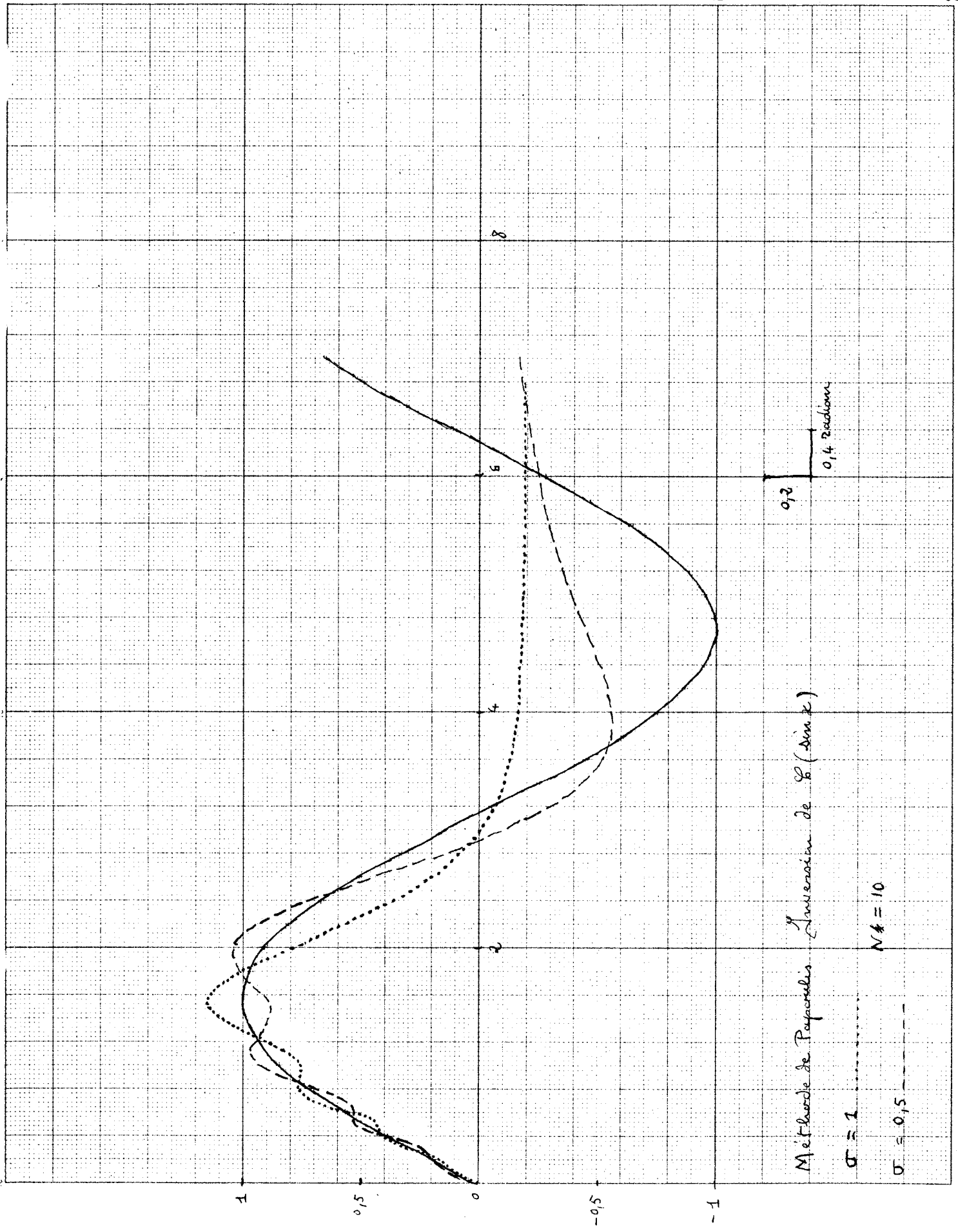
Méthode de Papoules Jussension de 6 (voir R.)

..... $\sigma = 0,05$

----- $\sigma = 0,1$

————— course exacte

$N = 10$



Méthode de Papoulis. Inversion de $G(\sin t)$

Valeur moyenne de la valeur absolue de l'erreur

--- $t \in [0, 3]$
- - - $t \in [3, 6]$

$N\sigma = 1$

$\sigma = 0,1$

0,3

0,2

0,1

0

N

20

8

9

10

11

12

13

15

15

10

5

N

10

6

7

8

9

10

11

12

13

18

20

C // Enfin nous avons calculé la fonction objet correspondant à

$$F(p) = \frac{1}{2} p \operatorname{Log} \left(1 + \frac{4\pi^2}{p^2} \right) \text{ c'est à dire } f(t) = \frac{1 - \cos 2\pi t}{t} . \text{ Nous}$$

avons essayé pour $N = 10$ différentes valeurs du paramètre σ

Nous avons fait varier t de 0 à 2 avec un pas $h = 0.05$ et nous avons calculé entre 0 et 1 et entre 1 et 2 la valeur moyenne de la valeur absolue de l'erreur ce qui a donné :

$N = 10$

		$0 < t \leq 1$	$1 < t \leq 2$
$\sigma = 0.1$		0.307 60	0.469 84
$\sigma = 0.35$		0.094 11	0.260 25
$\sigma = 0.45$		0.093 73	0.226 35
$\sigma = 0.533 \ 333 \ 333$		0.044 09	0.215 24
$\sigma = 1$		0.092 56	0.306 43

$N = 7$

$\sigma = 0.76$	0.157 80	0.410 17
-----------------	----------	----------

La courbe représentative de la fonction $F(p) = \frac{1}{2} p \operatorname{Log} \left(1 + \frac{4\pi^2}{p^2} \right)$

a été tracée: la fonction passe par un maximum pour p voisin de π

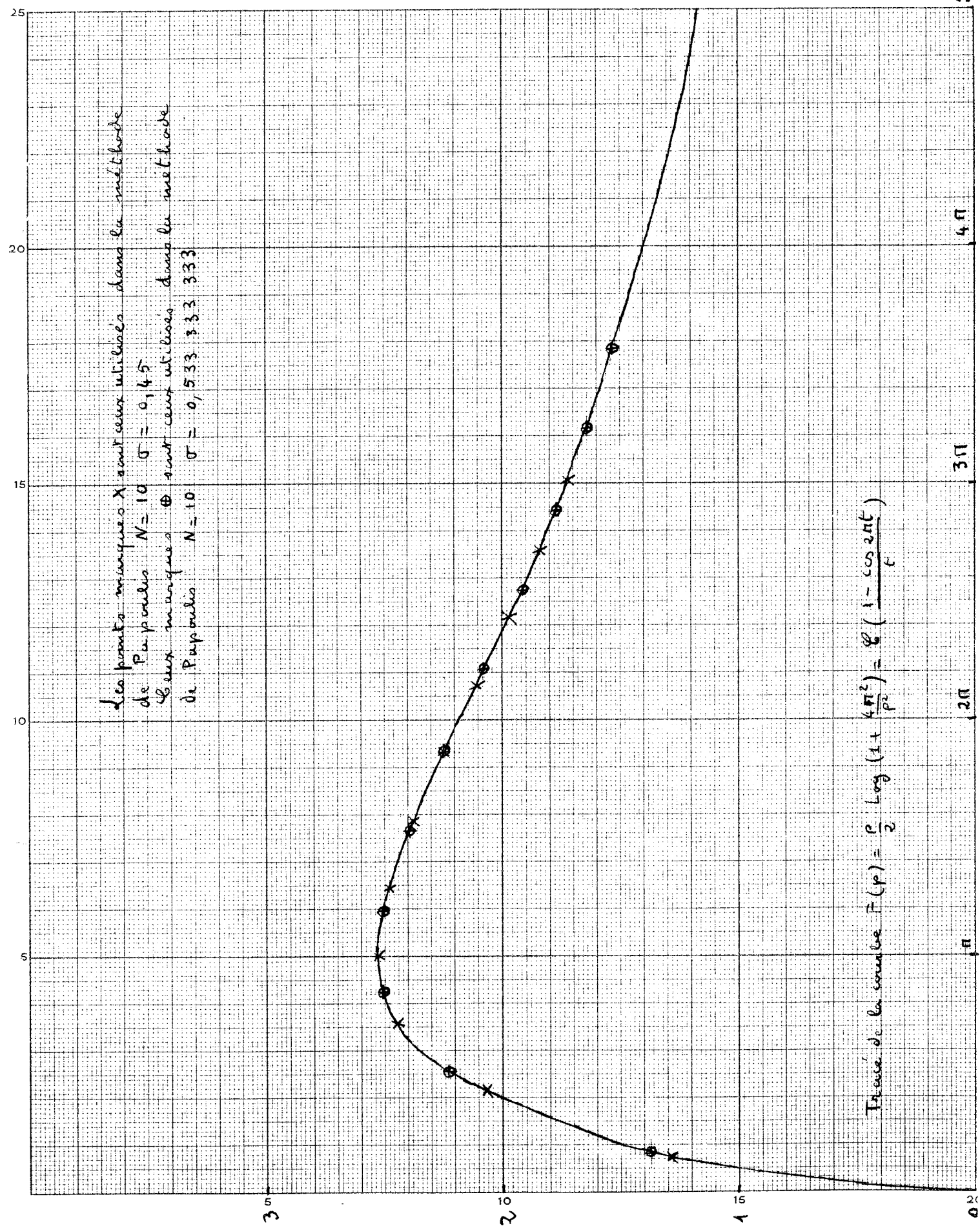
$$\text{En effet } \frac{d}{dp} \left(\frac{1}{2} p \operatorname{Log} \left(1 + \frac{4\pi^2}{p^2} \right) \right) = \frac{1}{2} \operatorname{Log} \left(1 + \frac{4\pi^2}{p^2} \right) - \frac{4\pi^2}{p^2 + 4\pi^2}$$

$$\text{Pour } p = \pi \quad \frac{d}{dp} (F(p)) = \frac{1}{2} \operatorname{Log} 5 - \frac{4}{5} = 0,004 72$$

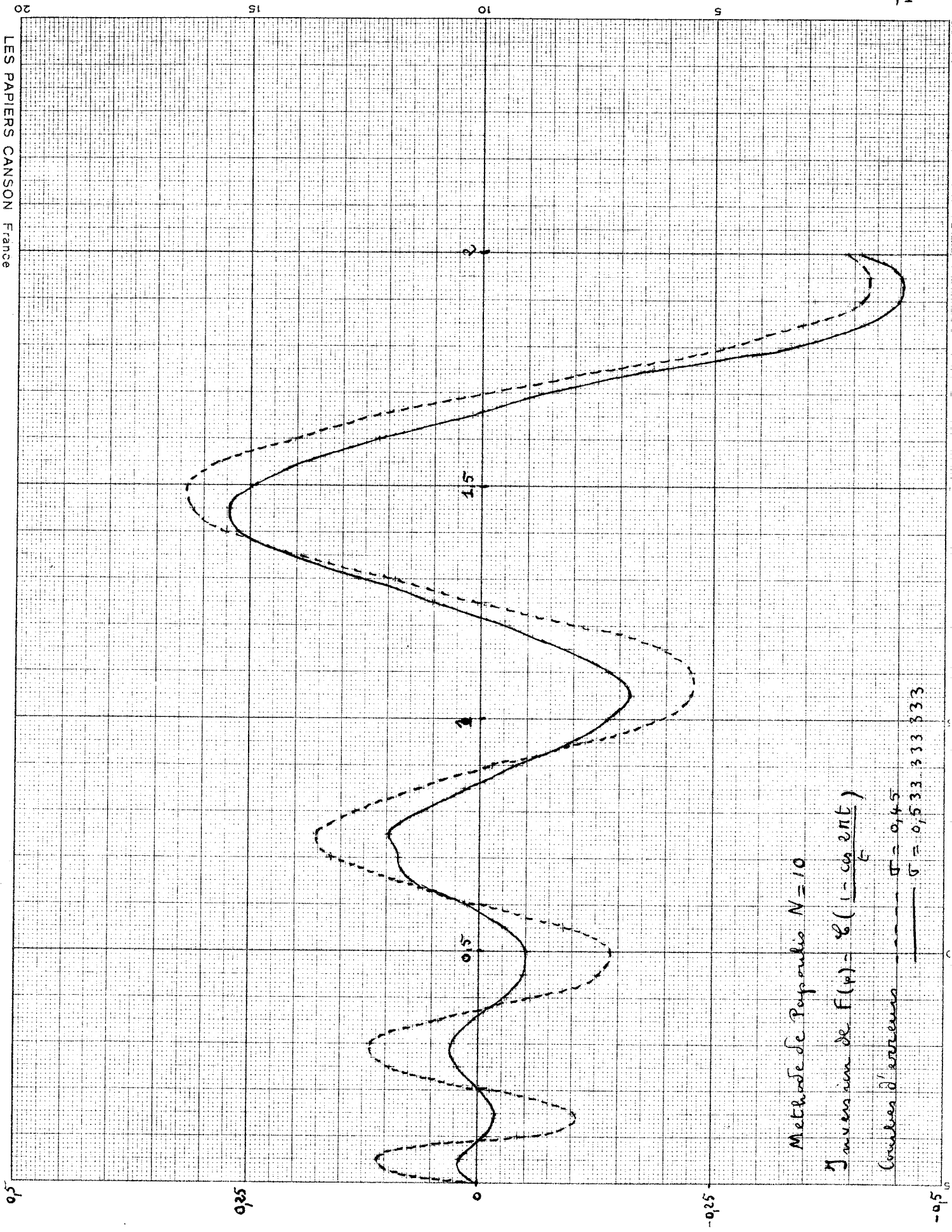
Nous avons indiqué sur cette courbe les points utilisés pour les valeurs 0.533 333 333 et 0.45 du paramètre ($N = 10$)

Pour $N = 7$ nous avons choisi une valeur du paramètre σ telle que les points utilisés soient situés dans le même intervalle que ceux ayant conduit au ~~même~~ meilleur résultat dans le cas $N = 10$

Les points marqués X sont ceux utilisés dans la méthode
 de Papoulis $N=10$ $\sigma = 0,45$
 Les points marqués \oplus sont ceux utilisés dans la méthode
 de Papoulis $N=10$ $\sigma = 0,533$ 3 3 3 3 3 3



Trace de la courbe $F(\varphi) = \frac{\rho}{2} \text{Log} \left(1 + \frac{4\rho^2}{\rho^2} \right) = 8 \left(1 - \frac{\cos 2\pi t}{c} \right)$



Méthode de Popoviciu $N=10$

$$\text{Inversion de } F(x) = \mathcal{L}\left(\frac{1 - \cos 2\pi t}{t}\right)$$

Ordres d'erreurs

----- $\sigma = 0,45$

_____ $\sigma = 0,5333333333$

50

0,75

-0,25

-0,5

20

15

10

5

5

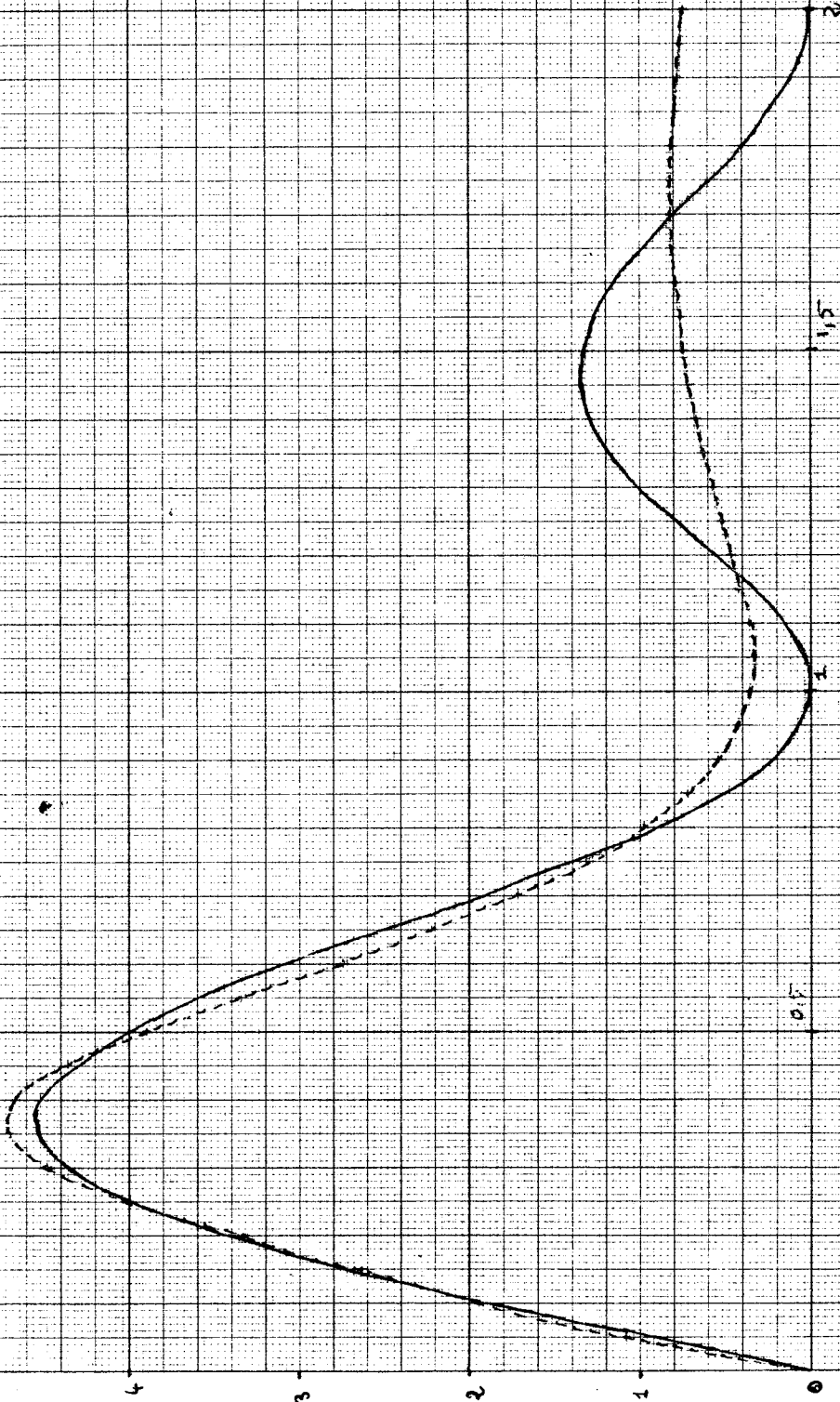
4

3

2

1

0



Méthode de Runge-Kutta

Intégration de $y' = (1 - \cos 2x) - F(x)$

Courbe exacte

Courbe approchée $N=7, T=0,76$

0.5

1.5

2

1

2

10

2

50

CHAPITRE V ETUDE EXPERIMENTALE DES VARIANTES PROPOSEES

I Nous étudions d'abord les résultats donnés par la variante proposée au chapitre II p. 16

A // Pour $N = 7$ et $\theta = 65.924$ grade = 1.035532 rad nous avons calculé la fonction objet correspondant à $F(p) = 1/(p+1)$ c'est à dire $f(t) = 1 - e^{-t}$

Nous remarquons sur la courbe d'erreur correspondant aux petites valeurs de t que l'erreur est grande au voisinage de 0 et diminue par la suite: ce phénomène peut être expliqué de la manière suivante Nous avons vu au chapitre II p. 23 que la rapidité de la convergence pour une valeur donnée de t et une fonction f à variation bornée deux fois dérivable et à dérivées continues bornées, toutes ces propriétés étant vérifiées sur $[0, \infty)$, dépendait de l'existence d'une

limite nulle à la quantité $f'(-ut / \text{Log } \cos \theta) e^u$ lorsque $u \rightarrow \infty$

$$\text{Or ici } \int' \left(\frac{-ut}{\text{Log } \cos \theta} \right) = e^{ut / \text{Log } \cos \theta}$$

$$e^{ut / \text{Log } \cos \theta} \cdot e^u = e^{u \left(1 + \frac{t}{\text{Log } \cos \theta} \right)}$$

La limite sera 0 si $1 + \frac{t}{\text{Log } \cos \theta} < 0$ $\text{Log } \cos \theta + t > 0$
 $t > 0,67321$

Le maximum (en valeur absolue) de l'erreur est bien situé entre 0 et cette valeur de t .

Les coefficients qui ont servi dans le calcul sont ceux de la famille 0 p. 67

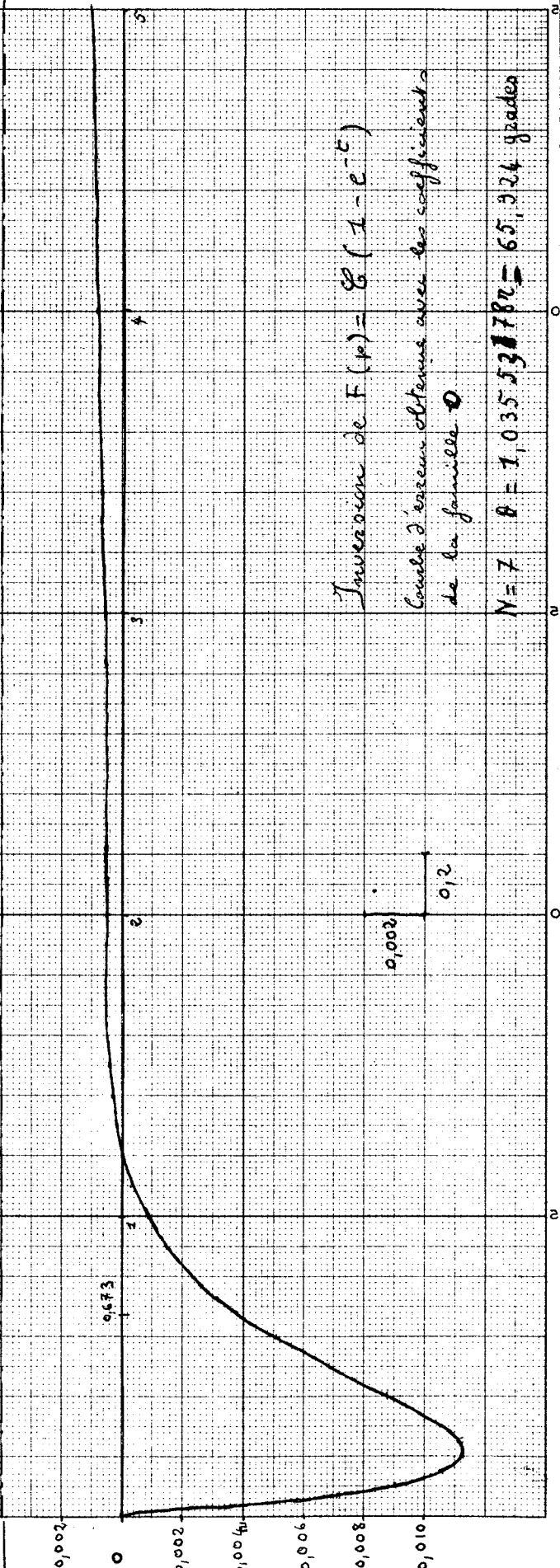
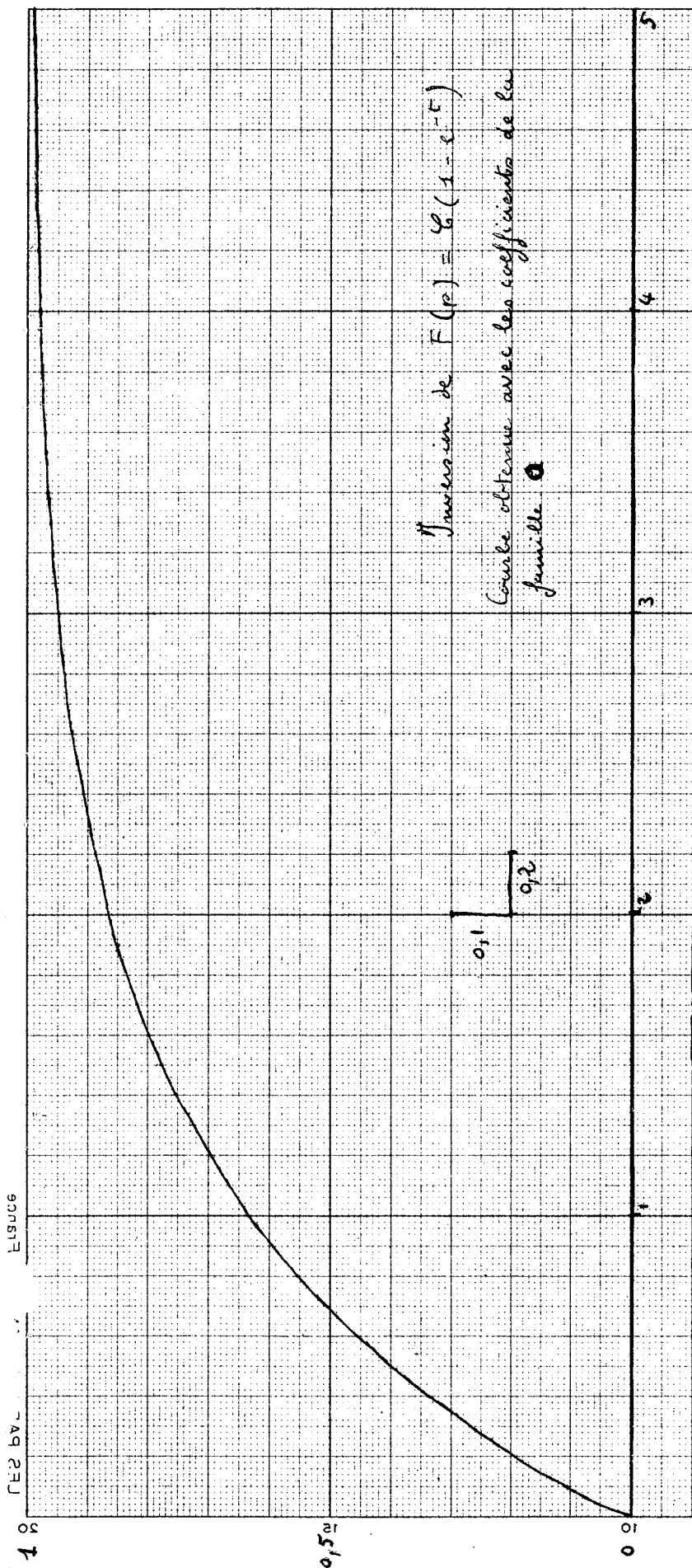
$$a_i \text{ et } b_i \text{ sont tels que } \int_{n, \theta} (t) = \sum_{i=0}^n a_i F\left(\frac{b_i}{t}\right)$$

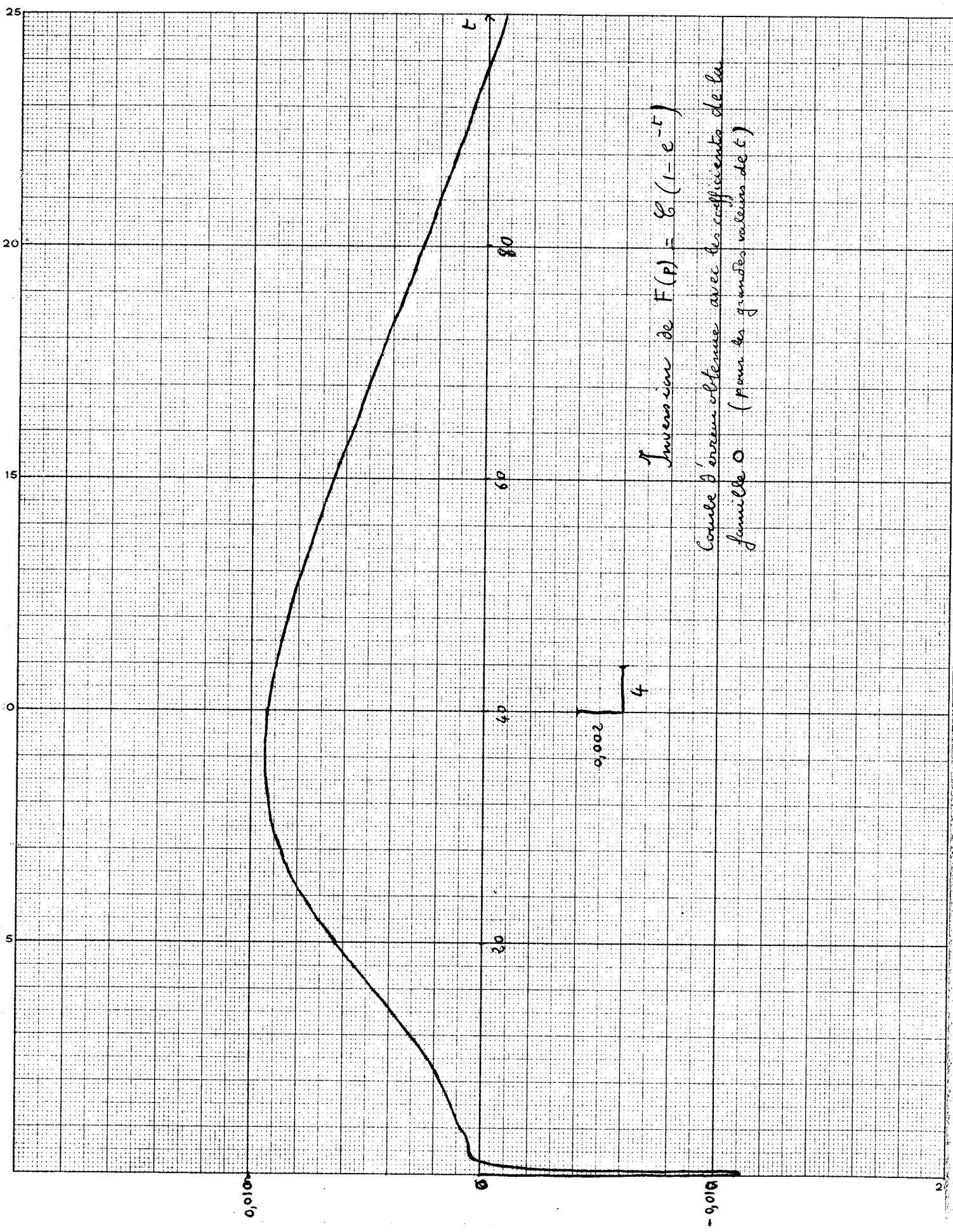
$$b_i = (2i+1) / |\text{Log } \cos \theta|$$

$$a_i = \frac{4}{\pi} \lambda_i^{(n)}(\theta)$$

$$\text{Ici } n = 7$$

1 0 0,5 1





Inversion de $F(p) = 6(1 - e^{-t})$

Courbe d'erreurs obtenue avec les coefficients de la famille 0 (pour les grandes valeurs de t)

B // Nous avons ensuite expérimenté la même variante en calculant les fonctions objet correspondant à $F(p) = p/(p^2+1)$ et à $F(p) = p^2/(p^2 + 1)$ c'est à dire $f(t) = \sin t$ et $f(t) = \cos t$

Les calculs ont été faits pour $N = 5$ pour les 5 valeurs de correspondant aux minima de $\sum_{p=0}^5 [\lambda_p^{(5)}(\theta)]^2$ et pour $N = 10$ pour 5 valeurs de correspondant aux 5 derniers minima de $\sum_{p=0}^{10} [\lambda_p^{(10)}(\theta)]^2$

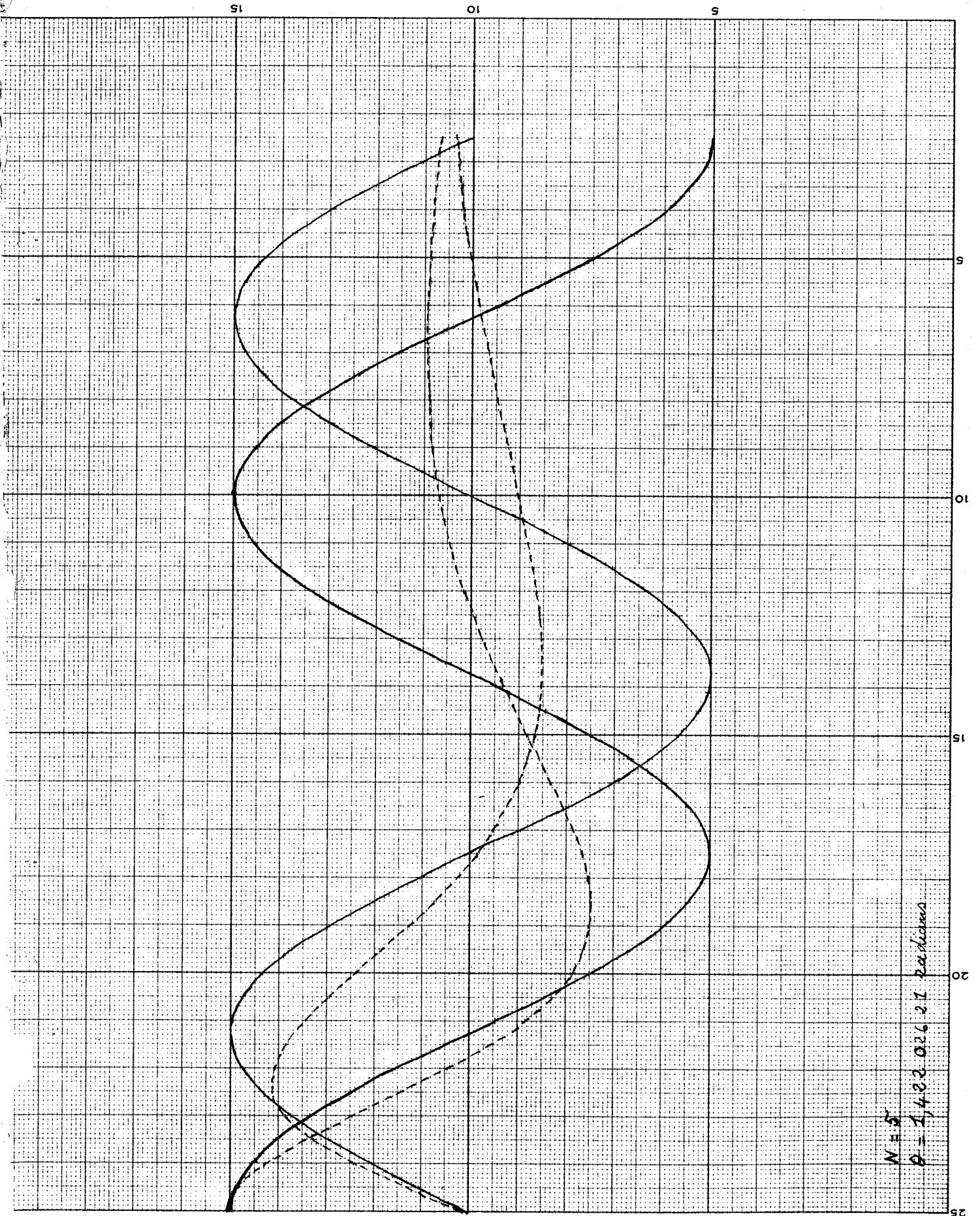
Les fonctions $\sin t$ et $\cos t$ ne sont pas à variation bornée sur $[0, \infty)$ mais elles sont deux fois dérivables à dérivées continues bornées. De plus $f'(t)$ et $f''(t)$ sont du même ordre de grandeur et cet ordre de grandeur reste constant entre 0 et ∞ . Ces fonctions sont donc telles que l'on ait intérêt, pour améliorer la convergence, à minimiser

le coefficient de $f''(t) \cdot t^2$ dans l'expression de $\lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{\Phi_{\theta}(t, \varphi)}{\varphi \cdot 2t\varphi^{1/2}}$ (cf. p 21)

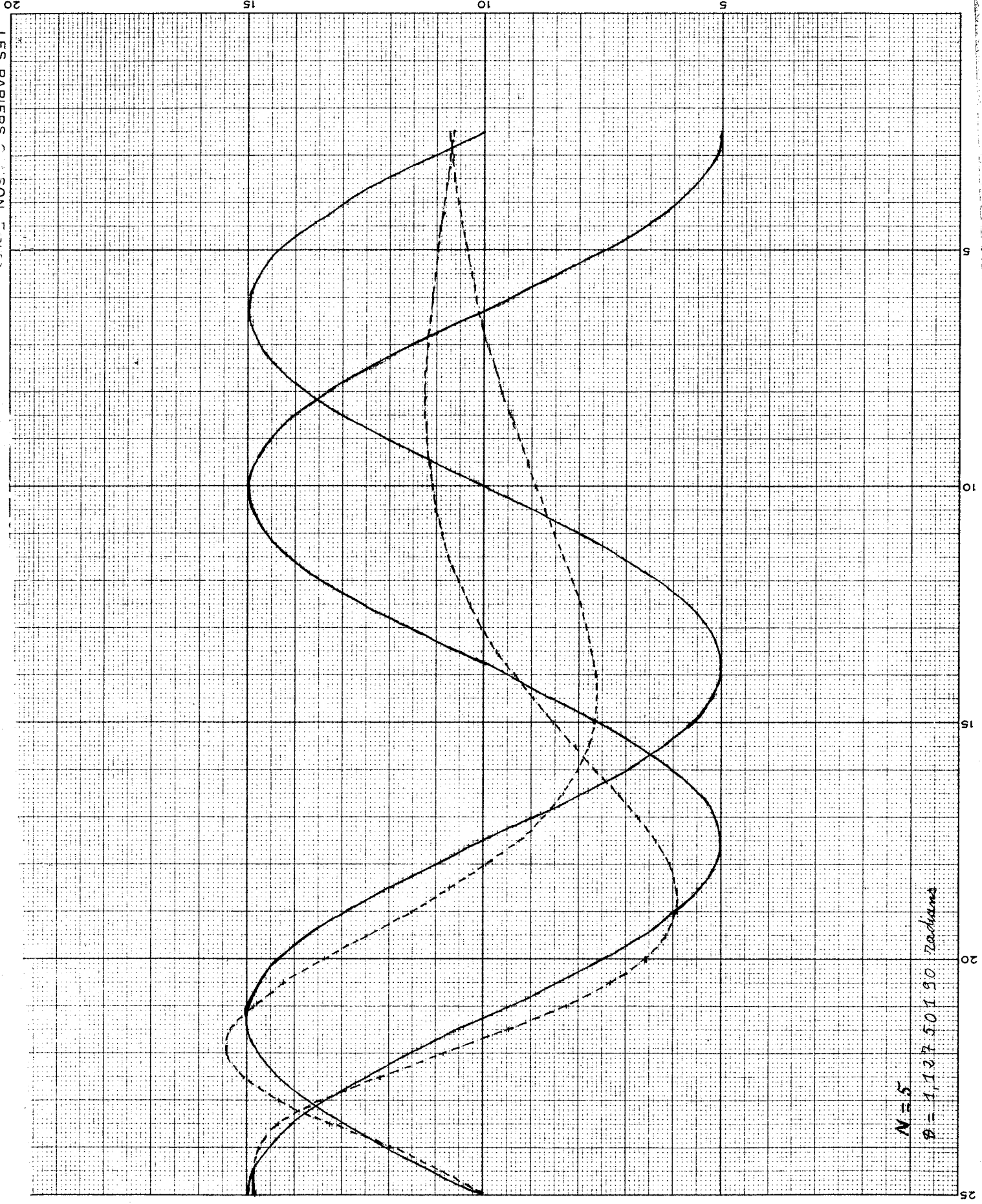
L'approximation sera d'autant \times meilleure que θ sera plus voisin de la valeur annulant $\log \cos \theta + \sin^2 \theta$, soit $\theta = 1.103 175$ rad

C'est ce qui se produit pour les expériences qui ont été faites Nous donnons dans chaque cas la valeur du paramètre θ utilisée ainsi que celles des coefficients $\lambda_p^{(n)}$ correspondants.

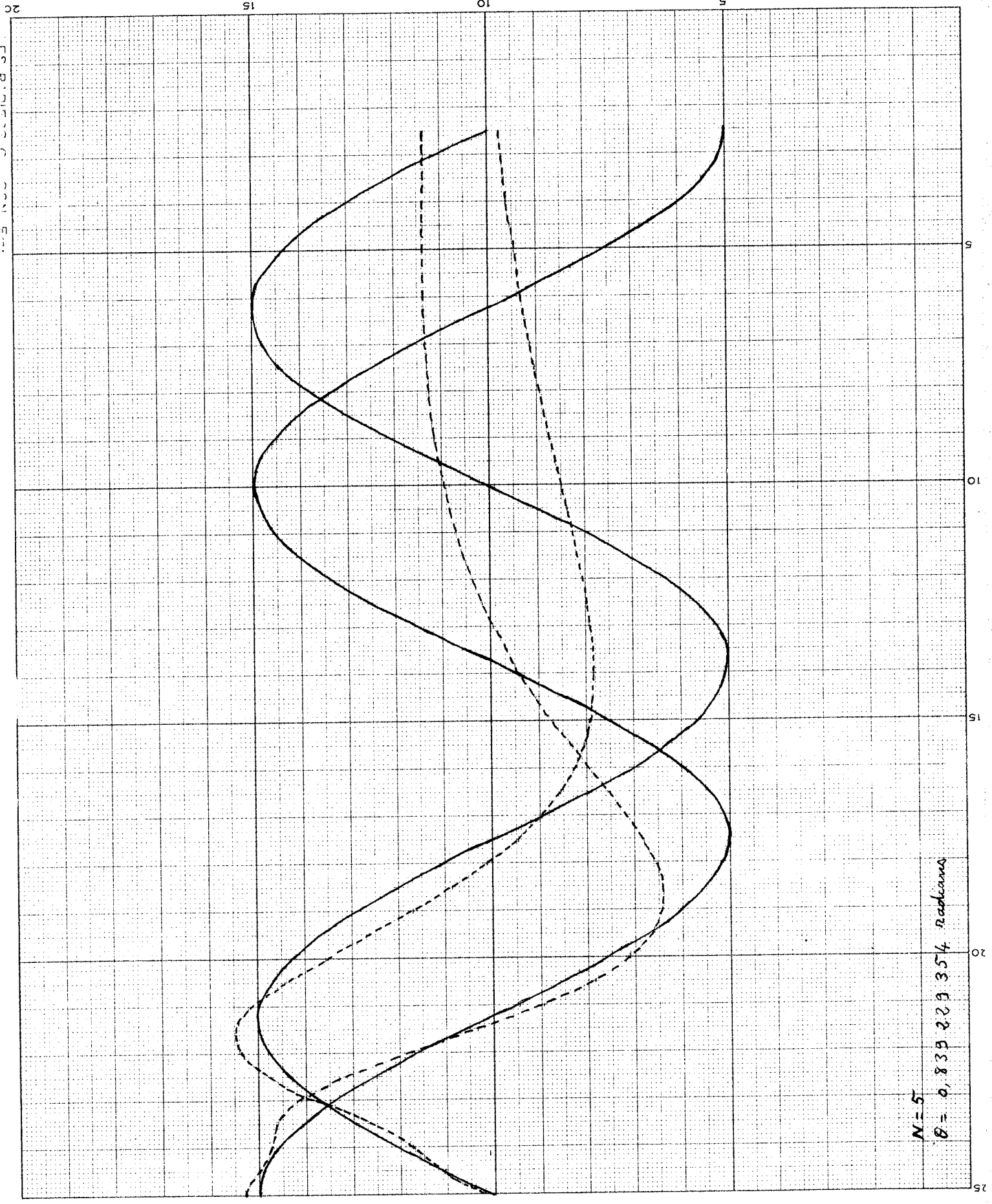
θ degrees	17,664	35,432	53,427	71,479	90,529
θ radians	0,277 465 463	0,556 564 555	0,839 229 354	1,127 501 90	1,422 026 21
$\log \cos \theta$	-0,038 997 848	-0,163 607 789	-0,403 412 494	-0,846 490 009	-1,909 044 472
$\Sigma \lambda_i^2$	2,052 8 $\cdot 10^2$	8,752 5 $\cdot 10^2$	1,886 8 $\cdot 10^3$	2,082 4 $\cdot 10^3$	4,579 0 $\cdot 10^2$
λ_0	0,097 159 864	-0,226 924 656	0,450 556 758	-0,957 387 090	3,296 052 39
λ_1	-1,714 980 71	3,988 919 28	-7,813 897 90	15,639 764 9	-9,937 711 00
λ_2	7,064 607 80	-15,870 623 1	27,906 954 0	-31,393 711 7	14,114 862 0
λ_3	-7,052 465 10	13,910 631 6	-15,590 751 9	9,710 231 40	-2,523 384 80
λ_4	-5,787 234 20	13,830 232 0	-21,999 629 6	22,943 759 3	-10,264 368 5
λ_5	8,317 973 87	-14,920 692 9	17,878 517 0	-15,184 761 8	6,109 348 45



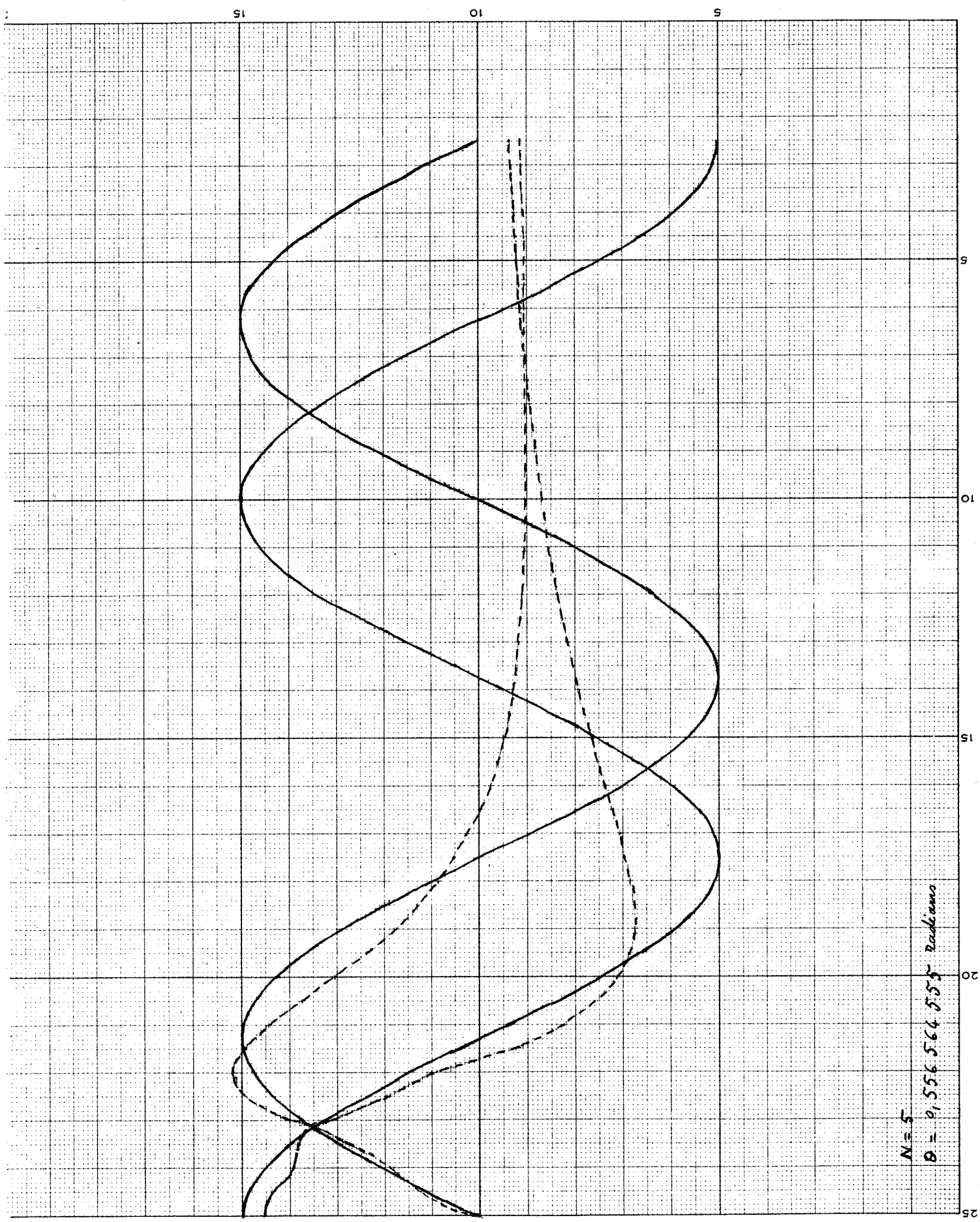
$N = 5$
 $\theta = 1,432,026,21$ radian



N = 5
 P = 1, 1, 3, 7, 5, 0, 1, 9, 0
 Zacharias

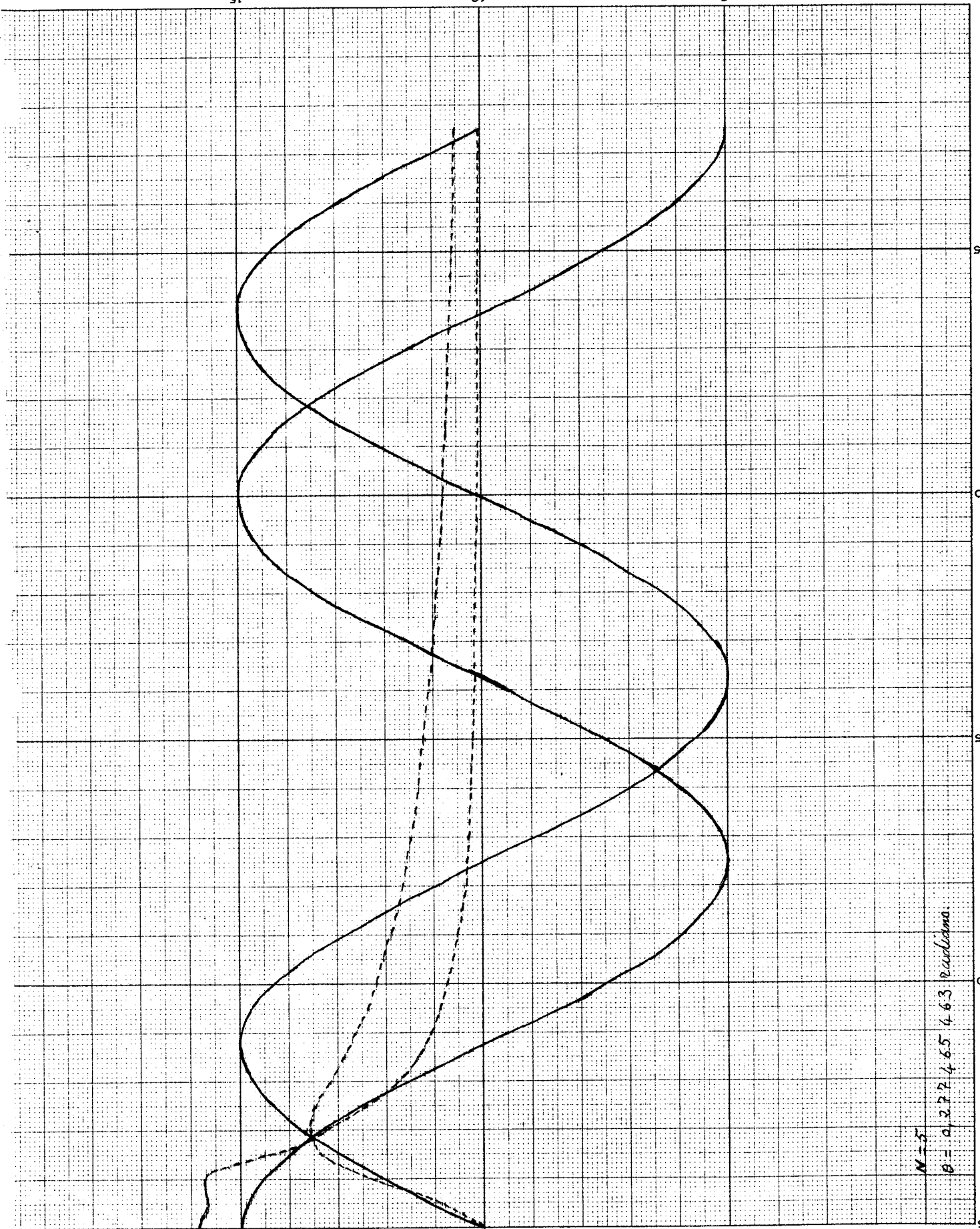


$N = 5$
 $\theta = 0, 839 209 354$ radians



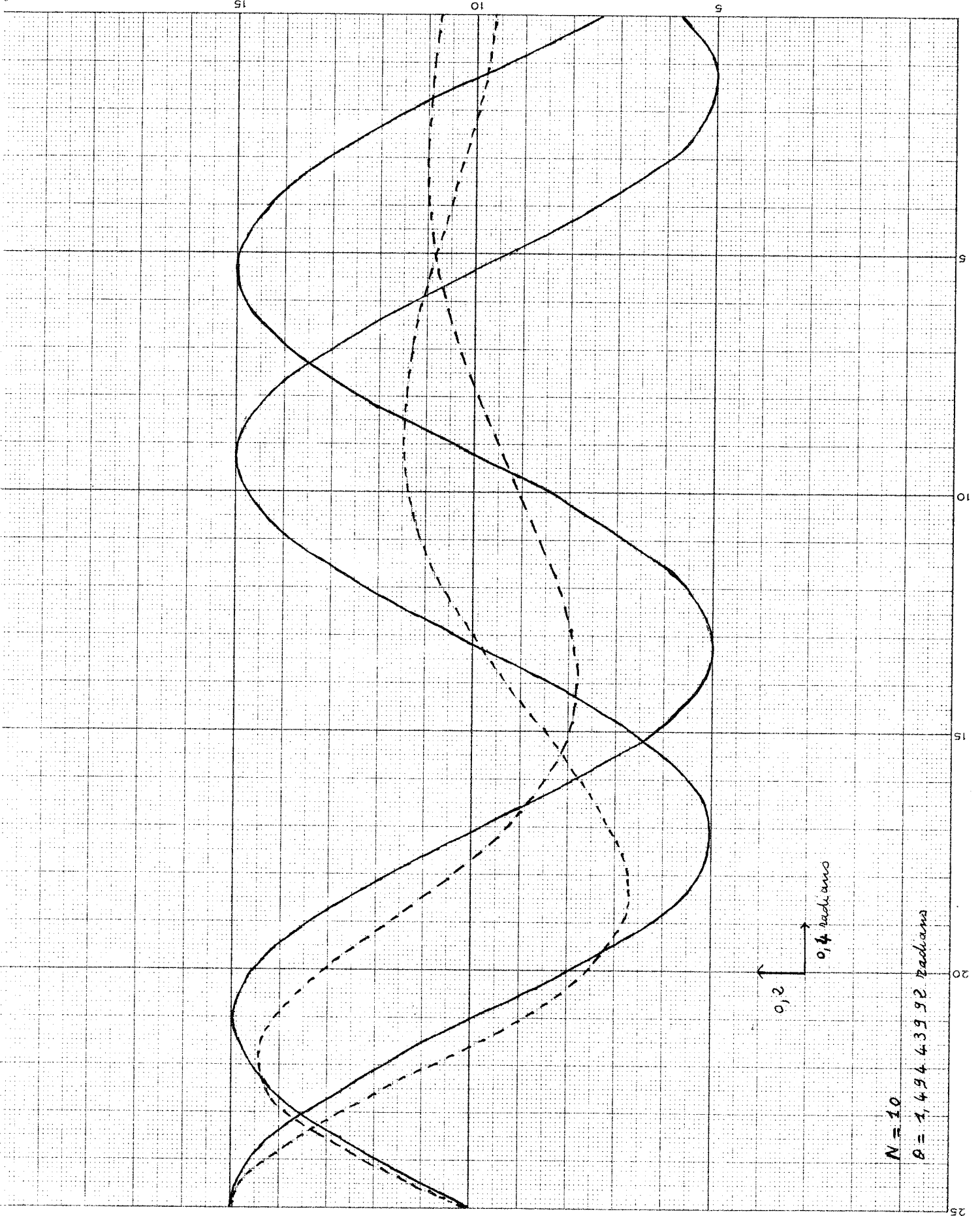
$N = 5$
 $\theta = 0, 556564553$ radiano

15 10 5



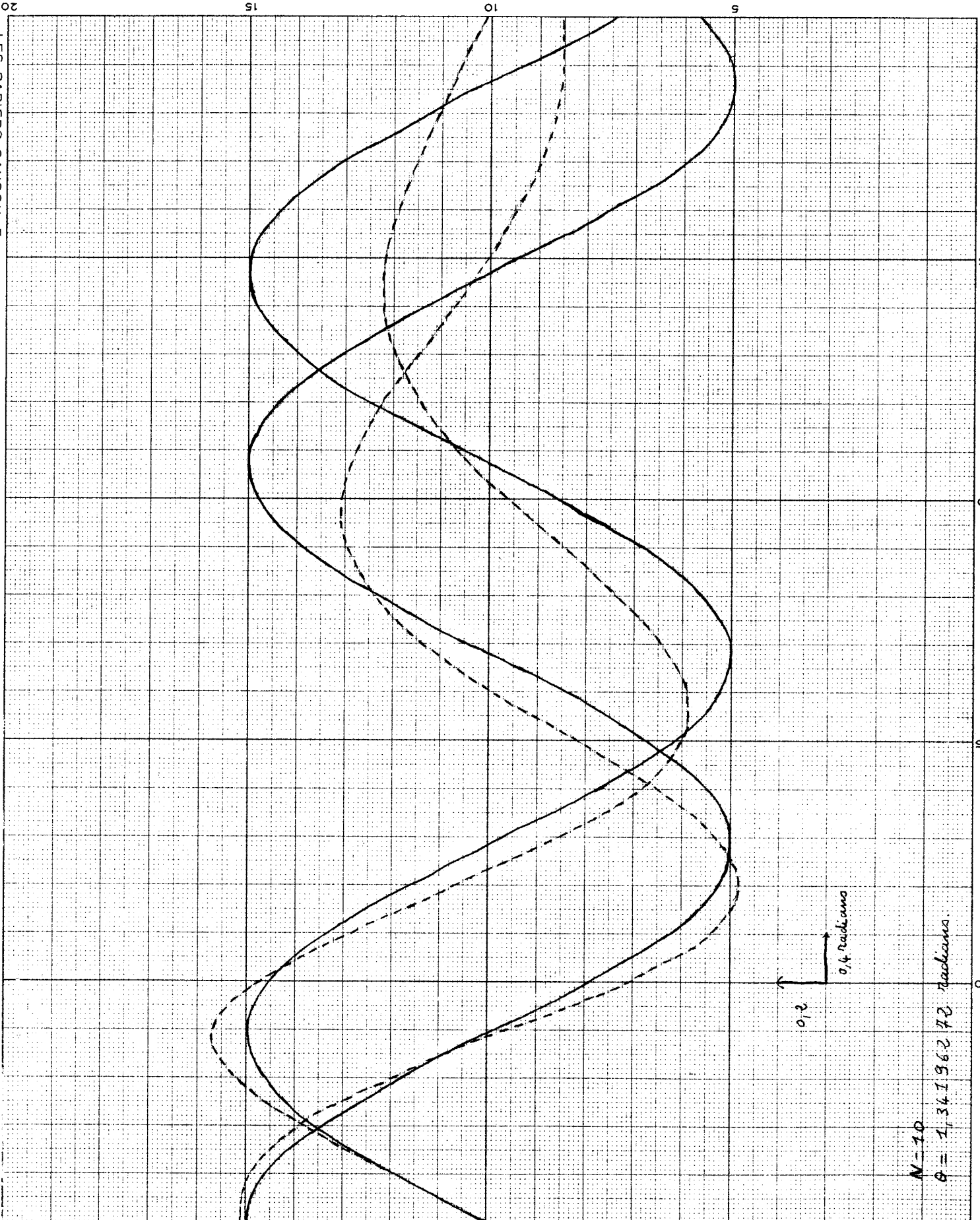
$N=5$
 $\theta = 0, 2.2, 4.6, 6.3, 8.6$ radians.

θ radians	56,591 0,888 929 349	66,150 1,039 081 77	75,764 1,190 098 13	85,432 1,341 962 72	95,139 1,494 439 92
$\log \cos \theta$	-0,461 648 808	-0,679 220 741	-0,990 021 306	-1,483 502 89	-2,573 315 22
$\sum \lambda_i^2$	7,575 6.10 ⁹	8,2597.10 ⁹	6,8369.10 ⁹	3,4902.10 ⁹	4,6637.10 ⁸
λ_0	0,515 254 634	-9,752 899 379	1,166 854 48	-2 090 929 73	6,515 675 11
λ_1	-35,681 777 9	51,817 082 2	-79,028 264 8	133,164 439	-83,979 517 0
λ_2	682,048 453	-955,523 740	1 326,108 47	-1441,281 14	673,120 096
λ_3	-5 516,644 81	7 216,341 12	-8 458,577 80	7 482,587 18	-3 076,959 90
λ_4	22 086,860 3	-26 375,000 7	27 233,851 1	-21 404,634 8	8 213,797 60
λ_5	-45 456,800 2	49 674,474 6	-46 508,105 0	33 706,865 5	-12 350,327 4
λ_6	41 818,109 0	-41 220,234 0	34 654,117 0	-23 033,620 8	8 010,095 90
λ_7	4 747,731 00	-8 561,948 00	10 899,949 0	-9 280,553 60	3 716,323 80
λ_8	-43 977,599 0	45 417,080 0	-40 799,793 1	28 653,241 3	-10 391,386 4
λ_9	34 691,742 3	-33 714,328 1	28 732,423 9	-19 455,692 8	6 915,487 54
λ_{10}	-9 039,517 44	8 468,878 39	-7 001,339 55	4 642,808 69	-1 631,904 57

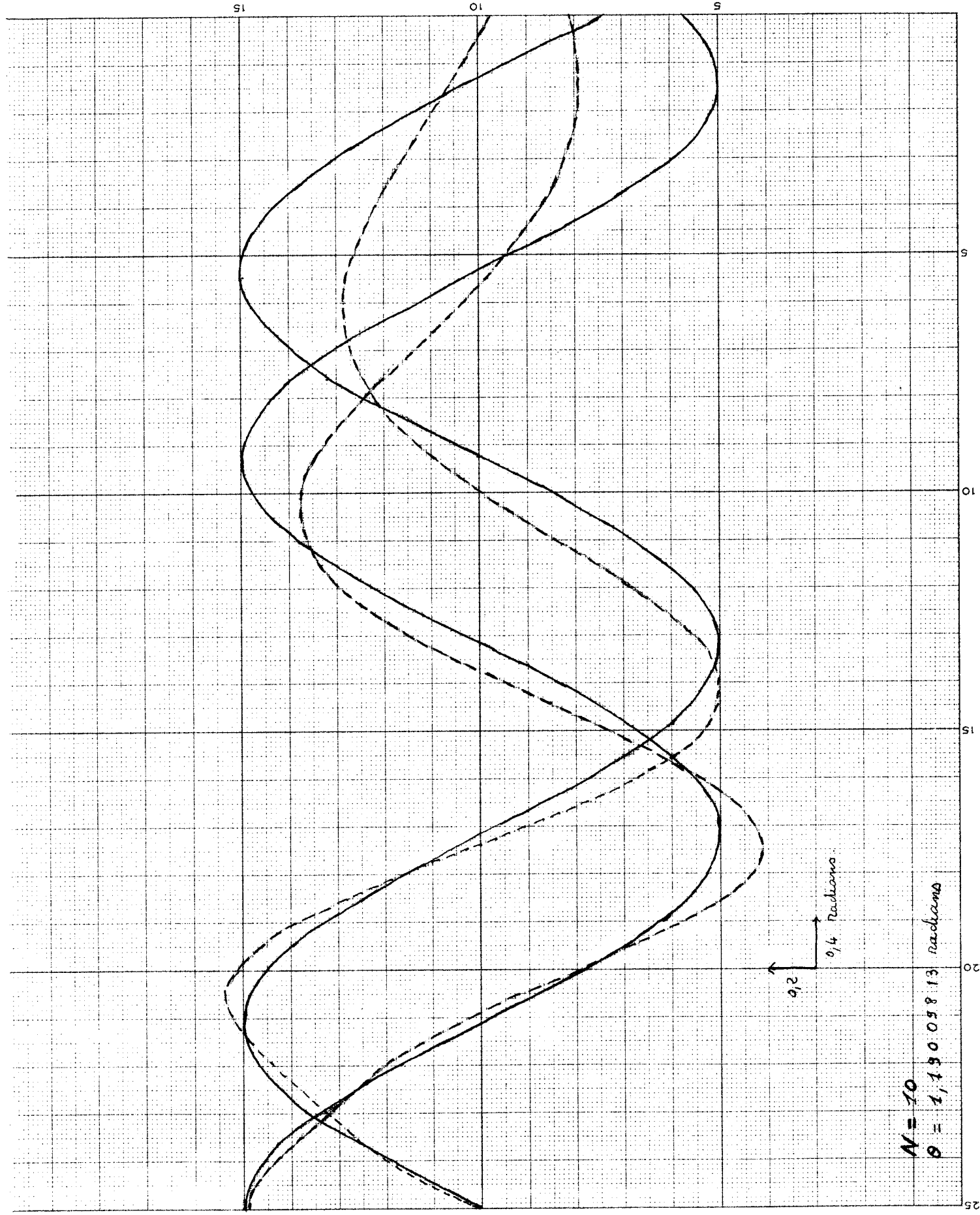


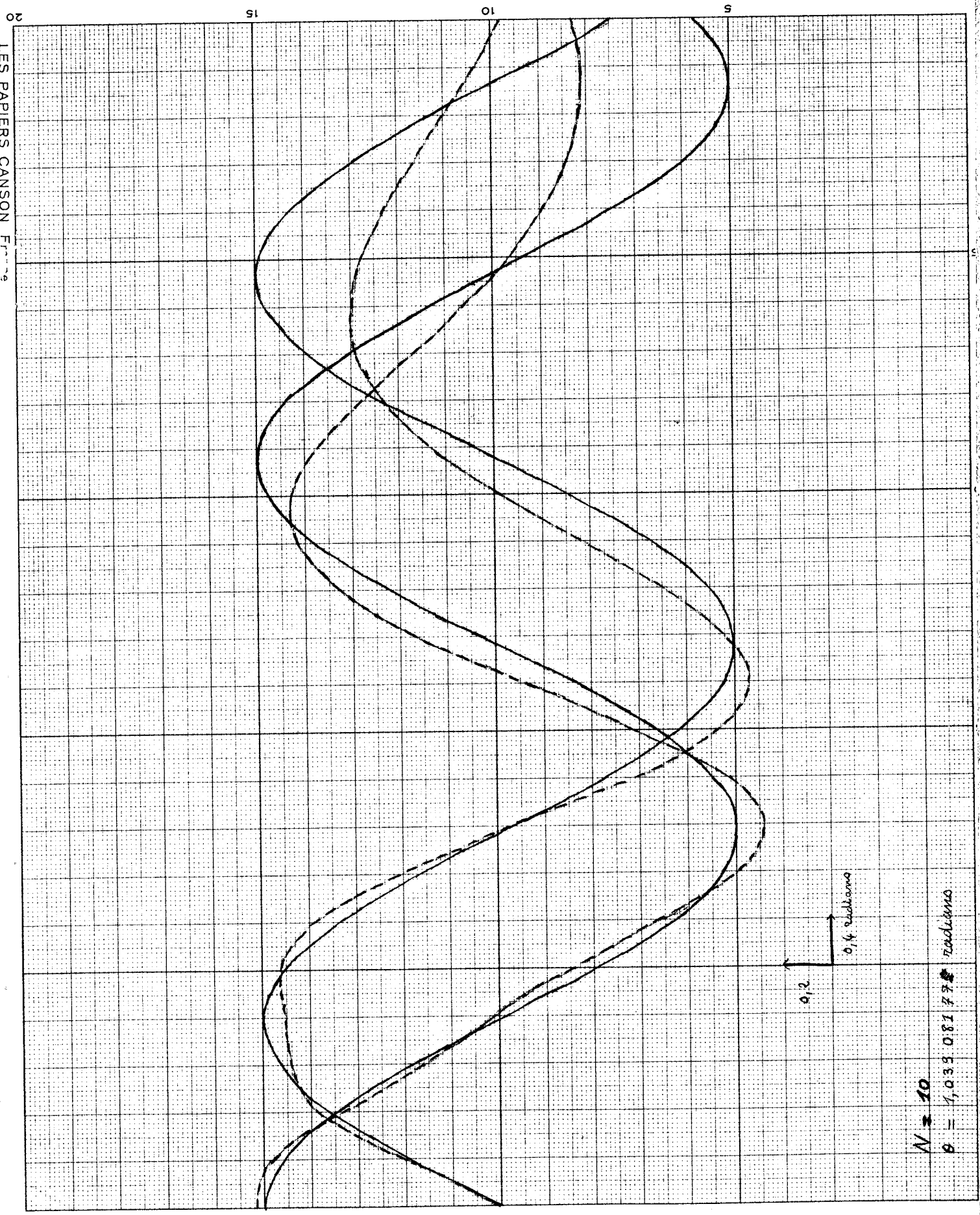
0,2
0,4 radians

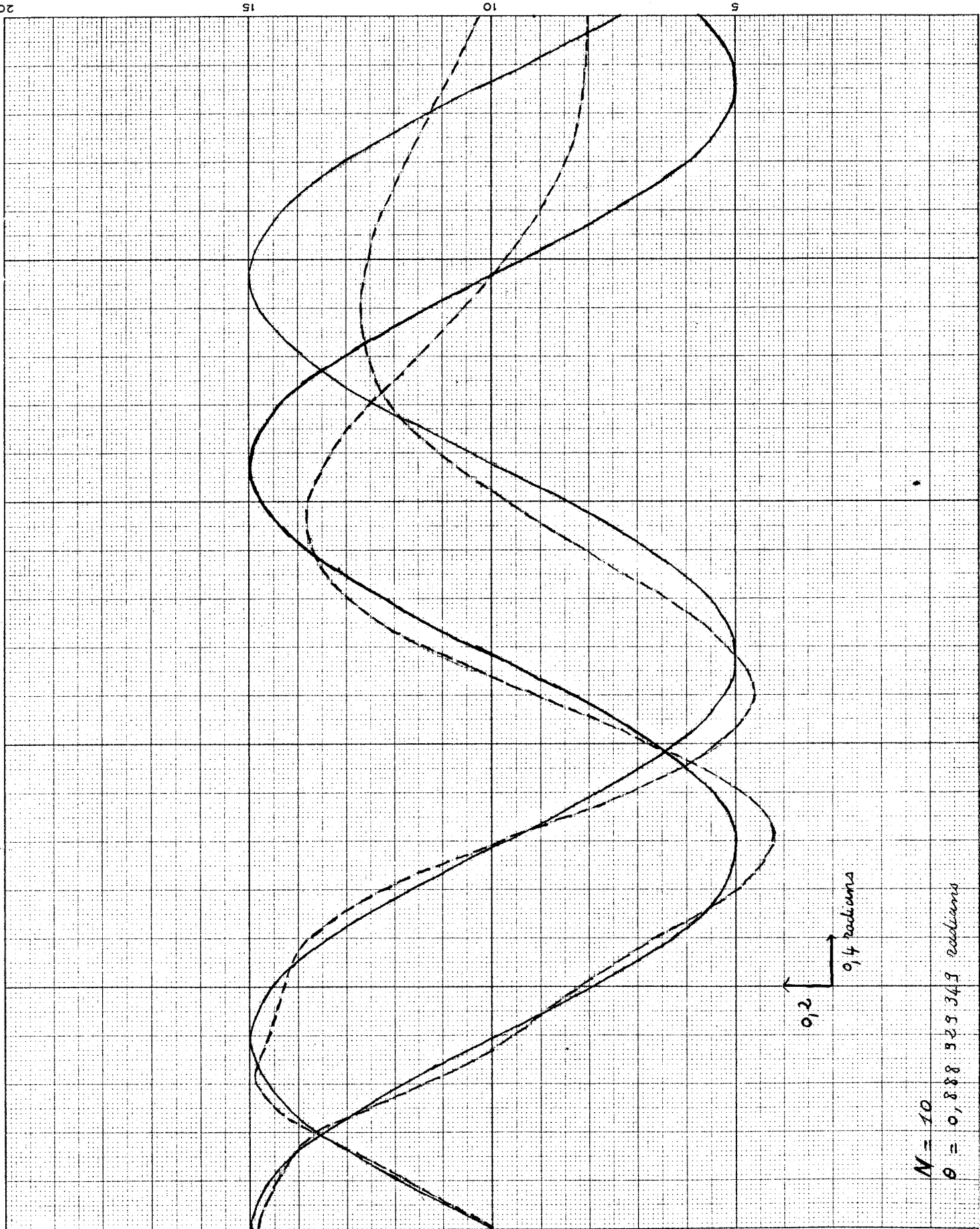
$N = 10$
 $P = 1,49443992 \text{ radians}$



$N=10$
 $\theta = 1,34196272$ radians







$N = 10$

$\theta = 0,888\ 925\ 349$ radians

0.2
 0.4 radians

C// La fonction $f(t) = (1 - \cos 2\pi t) / t$ est telle que

$$f(t) = \int_0^{\infty} g(u) \sin ut \, du \quad \text{avec } g(u) = \begin{cases} 1 & \text{pour } u \in [0, 2\pi] \\ 0 & \text{pour } u > 2\pi \end{cases}$$

En appliquant les résultats du chapitre III et en utilisant les mêmes notations nous avons

$$E_n \left[\frac{1 - \cos 2\pi t}{t} \right] = \int_0^{2\pi} E_n (\sin ut) \, du$$

L'erreur sur la représentation de $f(t)$ dépend donc d'une manière simple de l'erreur sur la représentation de $\sin t$. On peut voir que si

$$|E_n (\sin t)| \leq \varepsilon \text{ pour } t \in (0, A), \quad \left| \int_0^{2\pi} E_n (\sin ut) \, du \right| \leq 2\pi \varepsilon \text{ pour } t \in \left[0, \frac{A}{2\pi}\right]$$

La meilleure représentation de $f(t)$, du moins pour les valeurs de t voisines de l'origine sera donc celle utilisant les valeurs du paramètre conduisant à la meilleure représentation de $\sin t$ sur un intervalle fini $(0, A)$ ce qui justifie le choix que l'on a fait pour l'expérience ;

pour $N = 7$ nous avons choisi $\theta = 1,035532$ rad

abscisse de minimum de $\sum_{p=0}^7 [\lambda_p^{(7)}(\theta)]^2$ la plus voisine de $\theta = 1,103175$

(les coefficients a_1, b_1 sont ceux de la famille 0 p. 61)

= Pour $t = 0,5$ une évaluation de l'erreur a été faite par la formule

$$E_n (f(t)) = \int_0^{2\pi} g(u) E_n (\sin ut) \, du$$

$$\text{Ici } E_n [f(0,5)] = \int_0^{2\pi} E_n (\sin 0,5u) \, du = 2 \int_0^{\pi} E_n (\sin v) \, dv$$

Nous avons calculé cette intégrale par la méthode des trapèzes

$$\begin{aligned} 2 \int_0^{\pi} E_n (\sin u) \, du &= \frac{2\pi}{30} \left[\sum_{k=1}^{29} E_n \left(\sin \frac{k\pi}{30} \right) + \frac{1}{2} E_n (\sin \pi) \right] \\ &= \frac{2\pi}{30} \times 0,4998 = 0,1047 \end{aligned}$$

L'erreur expérimentale est 0,1044

Voir courbes p.61 sq

II Jusqu'à présent les coefficients $a_k^{(n)}$ et $b_k^{(n)}$ tels que

$$f_{n,0}(t) = \sum_{k=0}^n a_k^{(n)} F\left(\frac{b_k^{(n)}}{t}\right)$$

nous ont été donnés par des procédés analytiques. On peut chercher si partant de ces coefficients, il ne serait pas possible de diminuer l'erreur en les modifiant de manière à atteindre un minimum de

$$\int_0^{A'} [E_n(\sin ut)]^2 dt \quad \text{. Pour cela on minimise } \int_0^A [E_n(\sin t)]^2 dt$$

donc $\int_0^{A/u} [E_n(\sin ut)]^2 dt$.

Ainsi si l'on considère une fonction $f(t) = \int_0^\infty g(u) \sin ut \, du$ avec

$g(u) = 0$ pour $u \geq B$ on tend à améliorer la représentation de $f(t)$ au moins entre $t = 0$ et $t = A/B$, la représentation donnée par cette méthode en dehors de cet intervalle pouvant être plus mauvaise que celle donnée par la méthode analytique.

En effet, l'inégalité de Schwarz nous donne

$$\left| \int_0^{A/B} g(u) E_n(\sin ut) \, du \right| \leq \left\{ \int_0^{A/B} g^2(u) \, du \right\}^{1/2} \cdot \left\{ \int_0^{A/B} (E_n(\sin ut))^2 \, du \right\}^{1/2}$$

Pour arriver à ce résultat nous avons cherché à diminuer, par une méthode de modelage des coefficients, la quantité:

$$Q = \sum_{p=1}^{30} \left[\int_z \left(\sin \frac{p\pi}{15} \right) - \sin \frac{p\pi}{15} \right]^2$$

Les résultats obtenus sont donnés par les tableaux et courbes des pages suivantes

Pour la famille de coefficients 0 (méthode analytique) nous avons $Q = 1.0201$; pour la famille de coefficients I (après modelage) nous avons obtenu $Q = 0.6350$

Comme le laisse prévoir la courbe d'erreur, Q est certainement encore très loin de son minimum. La convergence d'une telle méthode est lente par suite du grand nombre de coefficients à faire varier et du fait que les b_k n'interviennent pas linéairement.

Les coefficients ainsi trouvés ont été utilisés dans l'inversion

$$\text{de } \mathcal{C}\left(\frac{1 - \cos 2\pi t}{t}\right)$$

On obtient une meilleure représentation de $f(t)$ entre 0.5 et 1 moins bonne entre 0 et 0.5 : ceci provient du fait que la représentation de $\sin t$ obtenue après modification des coefficients si elle est améliorée sur l'ensemble de l'intervalle $[0, \pi]$ est cependant moins bonne sur l'intervalle partiel $[0, \pi]$ que celle donnée par la méthode analytique.

Amélioration de la représentation de sin x sur
l'intervalle (0, 2π)

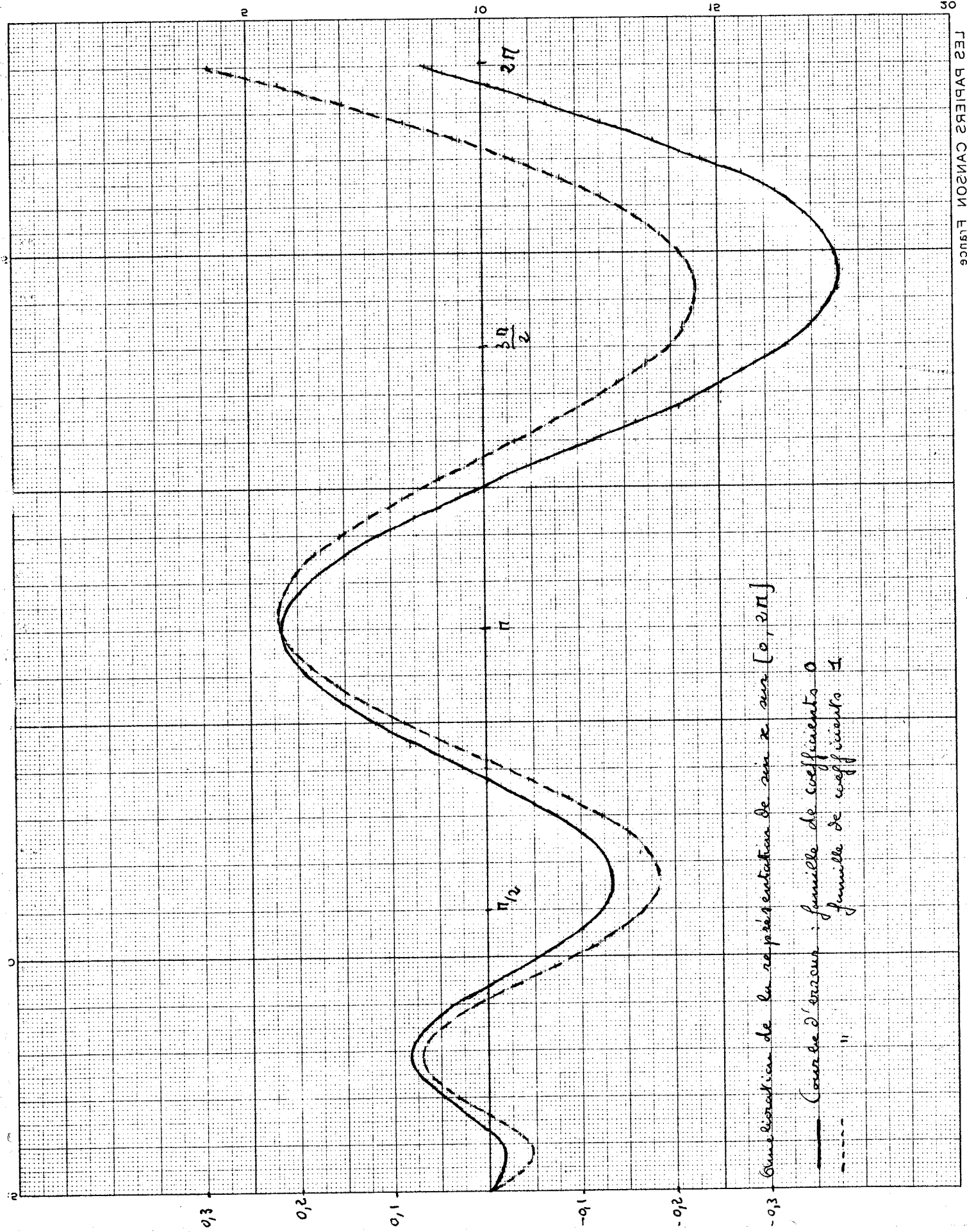
n	Coefficients initiaux 0		Coefficients améliorés 1	
	a	b	a	b
0	.946311630	.673210027	.80589	.54728
1	- 31.8445407	2.01963008	- 31.947342	2.02244
2	250.859080	3.36605014	250.858752	3.3644
3	- 637.443470	4.71247019	- 637.44353	4.7148
4	536.360230	6.05889024	536.360174	6.056647
5	234.844208	7.40531030	234.843946	7.402479
6	- 594.807631	8.75173035	- 594.840039	8.7522679
7	242.117044	10.0981504	241.829976	10.094628

	e	e ₀	e ₁	e	e ₀	e ₁	e	e ₀	e ₁	
	6	-0.0132	-0.0338	126	-0.0398	-0.0860	246	-0.1633	-0.0718	
	12	-0.0155	-0.0470	132	-0.0009	-0.0443	252	-0.2088	-0.1088	
	18	-0.0027	-0.0337	138	0.0398	0.0000	258	-0.2508	-0.1425	
	24	0.0214	-0.0029	144	0.0802	0.0446	264	-0.2885	-0.1716	
	30	0.0484	0.0314	150	0.1180	0.0874	270	-0.3202	-0.1954	
	36	0.0700	0.0578	156	0.1514	0.1263	276	-0.3459	-0.2129	
	42	0.0802	0.0693	162	0.1790	0.1599	282	-0.3644	-0.2235	
	48	0.0766	0.0641	168	0.1995	0.1868	288	-0.3756	-0.2268	
	54	0.0598	0.0435	174	0.2120	0.2061	294	-0.3787	-0.2223	
	60	0.0324	0.0110	180	0.2160	0.2173	300	-0.3739	-0.2099	
	66	-0.0017	-0.0286	186	0.2115	0.2202	306	-0.3610	-0.1895	
	72	-0.0381	-0.0705	192	0.1984	0.2148	312	-0.3401	-0.1613	
	78	-0.0727	-0.1101	198	0.1773	0.2016	318	-0.3114	-0.1255	
	84	-0.1018	-0.1435	204	0.1488	0.1813	324	-0.2754	-0.0825	
	90	-0.1227	-0.1678	210	0.1140	0.1547	330	-0.2325	-0.0328	
	96	-0.1336	-0.1812	216	0.0738	0.1229	336	-0.1834	0.0229	
	102	-0.1337	-0.1829	222	0.0295	0.0870	342	-0.1288	0.0840	
	108	-0.1232	-0.1731	228	-0.0177	0.0483	348	-0.0636	0.1496	
	114	-0.1030	-0.1525	234	-0.0665	0.0081	354	-0.0065	0.2187	
	120	-0.0746	-0.1229	240	-0.1154	-0.0323	360	0.0594	0.2905	

Les coefficients initiaux sont ceux auxquels conduit la variante que nous proposons dans le Ch.II

$$\begin{cases} N = 7 \\ e = 65,924 \text{ grade} = 1,035 \text{ 532 RADIAN} \end{cases}$$

e a été choisi au voisinage d'un des minima de $\sum_{p=0}^7 [\lambda_p^{(n)}(\theta)]^2$



Coefficients de la famille 2

N = 7

	α	β
0	0.029 116 607 0	0.785 398 163
1	-1.809 782 15	2.356 194 49
2	71.803 551 0	3.926 990 82
3	-1 262.779 82	5.497 787 14
4	9 223.973 60	7.068 583 47
5	-26 703.664 4	8.639 379 79
6	32 456.935 6	10.210 176 1
7	-13 898.467 4	11.780 972 4

Nous avons
$$A_n(\sin t) = \sum_{i=0}^n \alpha_i \frac{\frac{\beta_i}{t}}{\frac{\beta_i^2}{t^2} + 1} = \sum_{i=0}^n \alpha_i \frac{\beta_i t}{\beta_i^2 + t^2}$$

$$E_n(\sin t) = \sin t - A_n(\sin t)$$

Une autre manière d'améliorer la représentation de $\sin t$ serait donc de choisir les coefficients α_i et β_i de manière à réaliser une interpolation de $\sin t$ par une famille de fractions π rationnelles. On a le choix au départ des coefficients et des points d'interpolation

Nous avons choisi $\beta_i = (2i + 1)^{\pi/4}$ $i = 0, 1, \dots, 7$

Les points t_k d'interpolation utilisés ont été $t_k = k \pi/4$

$$k = 1, 2, 3, \dots, 8$$

Ce qui nous a conduit à la famille de coefficients donnée dans le tableau ci-dessus.

La matrice d'interpolation était mal conditionnée. Cependant les résultats obtenus ont permis d'obtenir une représentation satisfaisante de $\sin t$. Nous donnons un tableau de l'écart maximum obtenu tous les 20° de 0° à 360° (l'erreur a été calculée de degré en degré

nous appelons écart la val. abs. de l'erreur)

de 0° à 20°	0.001 798	DE 180° à 200°	0.000 138
20° à 40°	0.001 776	200° à 220°	093
40° à 60°	0.000 695	220° à 240°	290
60° à 80°	708	240° à 260°	295
80° à 100°	278	260° à 280°	282
100° à 120°	181	280° à 300°	273
120° à 140°	128	300° à 320°	289
140° à 160°	200	320° à 340°	229
160° à 180°	0.000 198	340° à 360°	0.000 236

Nous avons utilisé ces coefficients pour l'inversion de $\mathcal{L}\left(\frac{1-\cos 2\pi t}{t}\right)$

Nous donnons ci-après la moyenne de l'écart calculée tous les dix pas ($h = 0.02$)

t compris entre 0 et 0.2	Ecart moyen = 0.011 65
0.2 0.4	0.002 45
0.4 0.6	0.000 83
0.6 0.8	0.000 51
0.8 1	0.000 31

t compris entre 0 et 1 Ecart moyen = 0.003 15

Au delà de $t = 1$ l'erreur augmente très rapidement et les résultats deviennent incohérents.

Onpe ut expliquer de la manière suivante la décroissance de l'erreur entre 0 et 1

$$\text{En effet } \int_n(t) - f(t) = \int_0^{2\pi} E_n(\sin ut) du = \frac{1}{t} \int_0^{2\pi t} E_n(\sin v) dv$$

Si $E_n(\sin v)$ est une fonction alternée suffisamment régulière

~~est maximale~~ ce qui est le cas si $A_n(\sin v)$ a été obtenu par interpolation, on a

$$\left| \int_0^{2\pi t} E_n(\sin v) dv \right| \leq M$$

avec M indépendant de t pourvu que $2\pi t$ soit inférieur à la limite supérieure de l'intervalle d'interpolation.

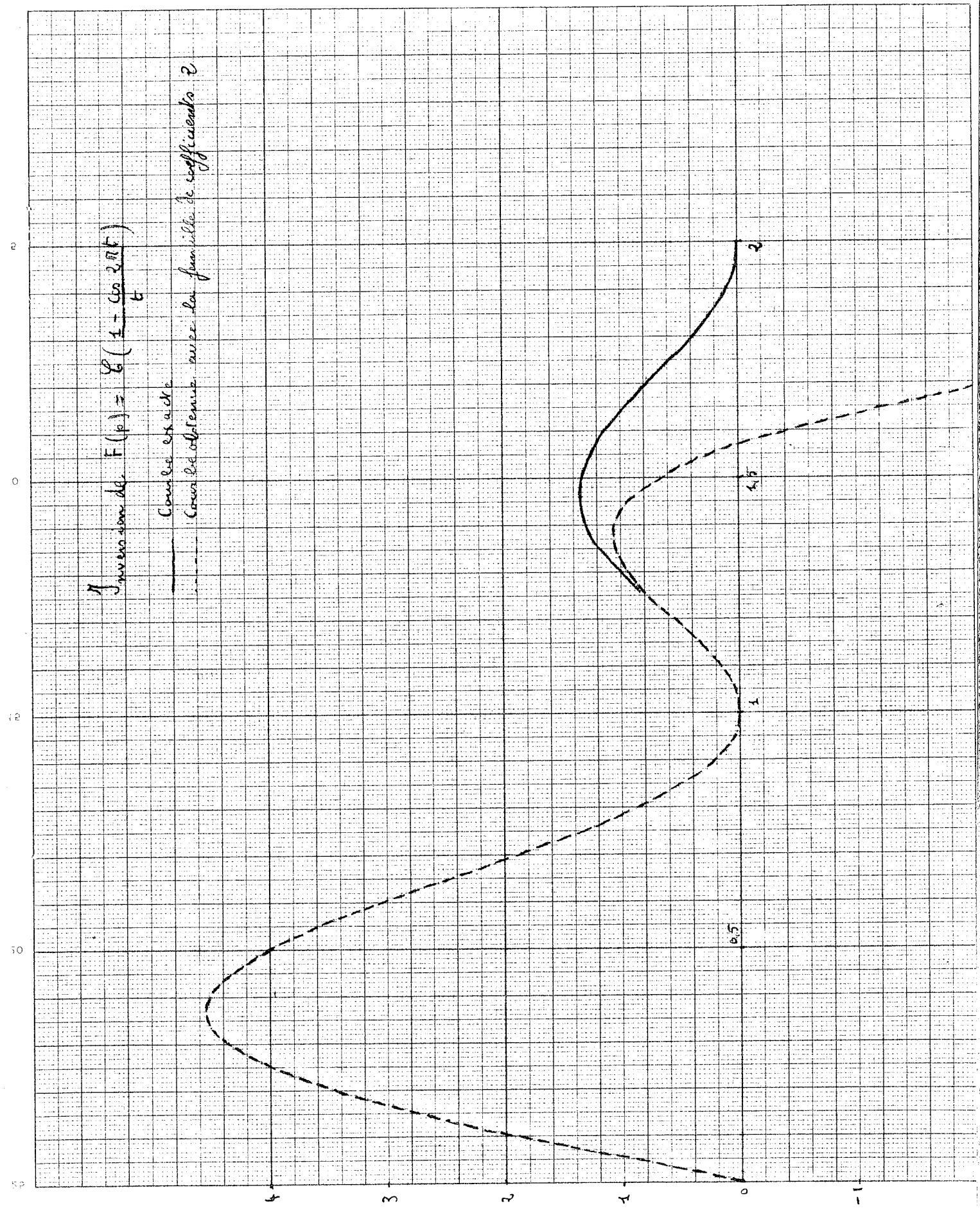
M étant alors nettement inférieur à $\left\{ \begin{array}{l} 2\pi t \\ \max_{v \in [0, 2\pi t]} |E_n(\sin v)| \end{array} \right\}$

$$\text{On a alors } \left| \int_n(t) - f(t) \right| \leq \frac{M}{t}$$

Inversion de $F(p) = \frac{8(1 - \cos 2\pi F)}{F}$

----- Courbe exacte

----- Courbe obtenue avec la famille de coefficients 2



Transformation de Laplace

- 1- ~~Detsch G.~~ Handbuch der Laplace Transformation 1950. Birkhauser Verlag
Basel und Stuttgart.
- 2- Mikusinski J. Operational Calculus Pergamon Press 195 Londres
- 3- Parodi M. Introduction à l'analyse symbolique Gauthier Villars Paris 195
- 4- D. V. Widder The Laplace Transform 1946 Princeton University Press
Princeton New-Jersey

Intégrale de Fourier

- 5- Titchmarsh Introduction to the theory of Fourier integrals.
Clarendon Press Oxford Second Edition 1948

Séries de Fourier

- 6- Zygmund Trigonometrical séries 1935
Monografie Matematyczne Varsovie
-
- 7- ~~Lerch~~ Sur un point de la théorie des fonctions génératrices d'Abel
Acta Mathematica Vol. 27 pp 339-351 (1903)
- 8- ~~Müntz~~ Ueber den Approximationssatz von Weierstrass Mathematische
Abhandlungen Schwarzes Festschrift Berlin pp 303-312 (1914)
- 9- Shoat J. Laguerre Polynomials and the Laplace Transform. Duke. Math. Vol.
6 pp 615-626 (1940)
- 10- ~~Schwartz L.~~ Etude des sommes d'exponentielles réelles
Actualités Scientifiques et Industrielles Paris (1943)
-

- 1- Picone M. Mem. Acc. Ital. Tome 6 p 643 (1935)
- 12- Tricomi F. Rend. Acc. dei. Lincei (1935) pp 232 et 420
- 13- Salzer H. E Orthogonal Polynomials arising in the numerical evaluation of inverse Laplace Transforms.
Math. Tables Aids Comput. 9 pp 164-177 (1955)
- 14- Papoulis A. Network response in terms of behavior at imaginary frequencies.
Proc. of the symposium of Modern Network Synthesis New York (1955)
pp 403-424 Polytechnic Institute of Brooklyn N.Y.
- 15- Papoulis A. A new method of inversion of the Laplace transform
Quarterly of Applied Math. 14 pp 405-414 (1956)
- 16- Cambi E. Inverse Laplace transforms expressed as Neumann Series
J. Math. Phys. 35 p 114-122 (1956)
- 17- Kogbetliantz Inversion de la transformée de Laplace
Conférence faite à la société I.B.M. (1956)
- 18- Salzer H. E. Tables for the numerical calculation of inverse Laplace transforms
J. Math. Phys. 37 pp 89-109
- 19- Feix M. Sajaloli C. Kuntzmann J.

Une variante de la méthode de Tricomi Picone pour l'inversion de la transformation de Carson
Chiffres I pp 63 à 74 (1958)

- 20- Widder D.V. The inversion of the Laplace
Integral and the related moment problem
Trans. of the Amer. Math. Soc. 36 pp 107-200 (1934)
- 21- Widder D.V. An application of Laguerre Polynomials Duke Mathematical Journal
I pp 126-136 (1935)
- 22- Rooney P.G. An inversion and representation theory for the Laplace integral of
abstractly valued functions
Canad. J. Math. 6 (190-209) (1954)
- 23- Pinkham R.S. An inversion of the Laplace and Stieltjes transforms utilizing
difference operators
Trans. Amer. Math. Soc. 83 pp 11-18 (1956)
- 24- Gaffey W.R. A real Inversion formula for a class of bilateral Laplace transforms
Pacific. J. Math. 7 pp 879-883 (1957)
- 25- Butzer P.L. Sur la meilleure approximation d'une fonction définie par sa trans-
formée de Laplace
CRAS 246 pp 687 à 689 (1958)

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION	a
CHAPITRE I. METHODE ANALYTIQUE PERMETTANT DE DETER- MINER LA FONCTION OBJET A PARTIR D'UNE SUITE INFINIE DE VALEURS DE LA FONCTION IMAGE	I
CHAPITRE II. ASPECT NUMERIQUE DE LA METHODE DE PAPOULIS.....	8
=VARIANTE PROPOSEE.....	16
CHAPITRE III. ESSAI D'UNE GENERALISATION DE LA METHODE A COEFFICIENTS FIXES.....	24
CHAPITRE IV. ETUDE EXPERIMENTALE DE LA METHODE DE PAPOULIS.....	30
CHAPITRE V. ETUDE EXPERIMENTALE DES VARIANTES PROPOSEES.....	43
BIBLIOGRAPHIE SOMMAIRE	69

Vu
Grenoble, le
Le Président du jury

Vu
Grenoble, le
Le Doyen de la Faculté des Sciences

Vu et permis d'imprimer
Grenoble, le
Le Recteur de l'Académie de Grenoble