



HAL
open science

Étude d'un problème posé par les chaînes de fabrication

Paul Quilichini

► **To cite this version:**

Paul Quilichini. Étude d'un problème posé par les chaînes de fabrication. Modélisation et simulation. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1961. Français. NNT: . tel-00277852

HAL Id: tel-00277852

<https://theses.hal.science/tel-00277852>

Submitted on 7 May 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d' ordre :

T H E S E

présentée à la Faculté des Sciences
de l'Université de Grenoble

pour obtenir

le titre de Docteur de Spécialité

"Mathématiques appliquées"

par

Paul QUILICHINI

Licencié ès-sciences

ETUDE D'UN PROBLEME

POSE PAR LES CHAINES DE FABRICATION

-:-:-

Thèse soutenue le 28 janvier 1961 devant la Commission d'examen :

MM. KUNTZMANN
REEB
VAUQUOIS

REMERCIEMENTS

Ma gratitude va d'abord à Messieurs KUNTZMANN et REEB qui m'ont guidé et encouragé tout au long de cette étude et lors de la rédaction.

Je remercie également Monsieur VAVOIS qui a bien voulu accepter de faire partie du jury.

Je remercie l'équipe du laboratoire de Calcul qui a facilité mon travail.

ETUDE D'UN PROBLEME
POSE PAR LES CHAINES DE FABRICATION

INTRODUCTION

Une chaîne de fabrication, comportant m machines, doit fabriquer un lot de n pièces. La fabrication s'effectue dans les conditions suivantes : l'ordre des machines dans la chaîne est fixé et est le même pour toutes les pièces, l'ordre des pièces n'étant pas imposé et pouvant être différent suivant les machines ; une machine ne peut usiner qu'une pièce à la fois et une pièce ne peut être usinée que par une machine à la fois. Connaissant les temps d'usinage de chaque pièce sur chaque machine, on désire trouver une manière de faire passer les pièces dans la chaîne, qui rende minimum le temps total de fabrication du lot de pièces.

Ce problème se pose souvent dans l'industrie sous des formes plus ou moins différentes. Une méthode de résolution consisterait évidemment à calculer le temps total de fabrication correspondant à chaque manière possible de fabriquer le lot de pièces. Mais cette méthode conduit pour des valeurs courantes du nombre de pièces, à un temps de calcul hors de proportion avec le but pratique que l'on se propose. En effet, en ne considérant que les manières pour lesquelles l'ordre des pièces est le même sur toutes les machines de la chaîne, le nombre de temps de fabrication est, pour un lot de n pièces, égal à $n!$. Pour $n = 20$, par exemple, ce nombre est de l'ordre de $2,4 \times 10^{18}$. En admettant qu'on puisse effectuer le calcul d'un temps de fabrication en un millionième de seconde, la méthode nécessiterait environ 750 siècles de travail ininterrompu. On est donc en présence d'une difficulté analogue à celle qui a conduit à l'élaboration de la théorie des programmes linéaires et on désirerait trouver une méthode qui conduise au minimum du temps de fabrication, grâce à un temps de calcul relativement court.

Une solution de ce problème a été donnée, dans le cas où la chaîne de fabrication ne comporte que deux machines et dans des cas particuliers pour plus de deux machines. Cette solution a été obtenue par S.M. Johnson, [1], à partir d'une formule explicite, donnant le temps total de fabrication en fonction des temps partiels d'usinages des pièces. L'exposé de cette solution fera l'objet du premier chapitre. Une autre manière d'obtenir cette solution a été donnée par R Bellman [2] et [3]. La généralisation de la formule citée ci-dessus, au cas de plus de deux machines sera faite dans le deuxième chapitre. Dans ce chapitre, nous examinerons les raisons pour lesquelles la solution du problème à deux machines ne peut s'étendre complètement au cas de plus de deux machines et nous exposerons les solutions obtenues dans des cas particuliers. Enfin, dans le troisième, nous étudierons la résolution du problème par une méthode de Monte-Carlo, sur un cas particulier.

Les n^{os} entre crochets renvoient à la bibliographie, page 2.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] S.M. Johnson
Optimal two-and three-stage production schedule
with setup times included.

The Rand Corporation - P - 402 - 1953.

- [2] R. Bellman
The mathematical aspect of Scheduling theory.

Journal of the Society for Industrial and
Applied Mathematics
4 (1956), PP 168 - 205.

- [3] R. Bellman, C. Gross.

Some Combinatorial Problems arising in the
theory of multistage Processes.

Journal of the Society for Industrial and
Applied Mathematics.

CHAPITRE 1

PROBLEME A DEUX MACHINES

1-1-

L'objet de ce chapitre est l'étude de la minimisation du temps total de fabrication d'un lot donné de pièces dans le cas où la chaîne de fabrication ne comporte que deux machines.

Dans ce paragraphe, nous allons établir le résultat suivant:

Lemme 1-1-

Pour obtenir le minimum du temps total de fabrication, il suffit de considérer le cas où les pièces défilent dans le même ordre sur les 2 machines.

Démonstration .

Nous supposons que le lot de pièces à fabriquer comporte n pièces que nous numérotions de 1 à n .

a/. Toute manière de faire passer les pièces dans la chaîne, pour laquelle deux pièces i et j n'ont pas le même ordre sur les 2 machines peut se mettre sous la forme suivante :

On fait passer successivement :

sur la 1ère machine		sur la 2ème machine
une séquence quelconque I_1		une séquence quelconque I_2
la pièce i_1		la pièce j_2
une séquence quelconque J_1		une séquence quelconque J_2
la pièce j_1		la pièce i_2
une séquence K_1		une séquence K_2

Il est évident que la transposition des pièces i et j sur la 2ème machine n'entraîne aucune modification du temps de fabrication de la séquence I_2 sur la 2ème machine. Cette transposition n'entraîne aucune modification sur la 1ère machine.

Supposons que la manière de faire passer les pièces sur les 2 machines vérifie la propriété suivante :

(1) (Toute pièce passant après la pièce j sur la 1ère machine) passe après la pièce i sur la 2ème machine.

Dans ce cas, toutes les pièces de la séquence (J_2, i) seront déjà sorties de la 1ère machine lorsque la pièce j entre dans la 2ème machine. Donc elles passeront sur la 2ème machine dès que la pièce précédente sera sortie et il n'y aura aucun temps mort sur la 2ème machine entre la sortie de la pièce j et celle de la pièce i . Il est alors évident que la transposition des 2 pièces i et j n'augmentera pas le temps de fabrication de la séquence (j, J_2, i) et par suite la fabrication de la séquence K_2 ne sera pas retardée.

Nous venons donc de montrer que, pour une manière de faire passer les pièces vérifiant la condition (1), la transposition des pièces i et j sur la 2^è machine n'augmente pas le temps total de fabrication.

b/ - Considérons alors une manière quelconque de faire passer les pièces et numérotions les pièces dans l'ordre où elles défilent sur la 1^{ère} machine (de 1 à n). On peut ramener l'ordre des pièces sur la 2^è machine à l'ordre sur la 1^{ère}, sans augmenter le temps total de fabrication, en procédant de la manière suivante :

1^{ère} étape :

On transpose les pièces i et n , si c'est nécessaire, sur la 2^è machine. Cette opération est réalisée pour $1 \leq i \leq n-1$.

La condition (1) est bien vérifiée puisque n'y a aucune pièce passant après n sur la 1^{ère} machine.

On a alors placé la pièce n après toutes les autres sur la 2^è machine, sans augmenter le temps total de fabrication.

2^è étape :

On transpose les pièces i et $n-1$, si c'est nécessaire, sur la 2^è machine, pour $1 \leq i \leq n-2$.

La condition (1) est vérifiée puisque la seule pièce passant après $n-1$ sur la 1^{ère} machine est la pièce n , qui se trouve aussi après i ($1 \leq i \leq n-2$) sur la 2^è machine, après la 1^{ère} étape.

On a alors placé la pièce $(n-1)$ après les pièces k ($k \leq n-1$) et avant la pièce n , sur la 2^è machine, sans augmenter le temps total de fabrication.

k ^è étape -

On transpose les pièces i et $(n-k+1)$, si c'est nécessaire sur la 2^è machine, pour $1 \leq i \leq n-k$.

La condition (1) est vérifiée puisque, au cours des $(k-1)$ premières étapes, les pièces passant après la pièce $(n-k+1)$ sur la 1^{ère} machine ont été placées après la pièce i sur la 2^è machine.

$$(1 \leq i \leq n-k).$$

Après les k premières étapes, on a donc placé les pièces: $(n-k+1)$, $(n-k+2)$, ..., $n-2$, $n-1$, n . dans cet ordre et après toutes les autres pièces sur la 2^è machine, sans augmenter le temps total de fabrication.

On procède de même jusqu'à ce que toutes les pièces soient sur la 2^è machine dans le même ordre que sur la 1^{ère}.

Nous venons donc de montrer que l'on peut passer d'une manière d'usiner les pièces dans laquelle les pièces ne défilent pas dans le même ordre sur les 2 machines, à une manière dans laquelle l'ordre est le même sur les 2 machines, sans augmenter le temps total de fabrication.

Nous en déduisons donc le lemme.

1-2 Calcul du temps total de fabrication

En vertu du lemme 1, nous ne ferons le calcul que dans le cas où les pièces défilent dans le même ordre sur les 2 machines.

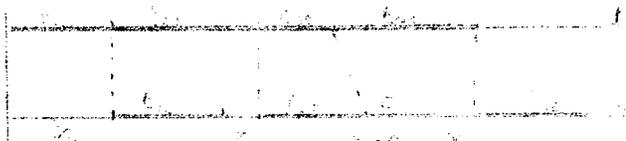
Numérotons les pièces de 1 à n. Soient (t_{i1}, t_{i2}) les temps d'usinage de la i^{e} pièce respectivement sur la 1^{ère} et sur la 2^e machine. Le calcul sera fait pour la séquence de pièces $[1, 2, \dots, n]$, mais est valable pour toute séquence $[\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n)]$, où σ est une permutation de l'ensemble $[1, 2, \dots, n]$.

Désignons par

x_i = le temps mort existant sur la 2^e machine entre la sortie de la $(i-1)^{\text{e}}$ pièce et l'entrée de la i^{e} .

Posons :

$$X_p = \sum_{i=1}^p x_i$$



$$x_1 = t_{11}$$

$$x_2 = t_{11} + t_{21} - t_{12} - x_1$$

ou $x_2 = 0$ si la quantité précédente est négative

c-à-d, $x_2 = \max [t_{11} + t_{21} - t_{12} - x_1, 0]$

D'où $X_2 = x_1 + x_2 = \max [t_{11} + t_{21} - t_{12}, t_{11}]$

De même :

$$x_3 = \max \left[\sum_{i=1}^3 t_{i1} - \sum_{i=1}^2 t_{i2} - \sum_{i=1}^2 x_i, 0 \right]$$

et $X_3 = \sum_{i=1}^3 x_i = \max \left[\sum_{i=1}^3 t_{i1} - \sum_{i=1}^2 t_{i2}, \sum_{i=1}^2 t_{i1} - \sum_{i=1}^1 t_{i2}, t_{11} \right]$

Si nous posons $Y_p = \sum_{i=1}^p t_{i1} - \sum_{i=1}^{p-1} t_{i2}$, $1 \leq p \leq n$, ($Y_1 = t_{11}$),

Nous voyons que :

$$X_n = \sum_{i=1}^n x_i = \max_{1 \leq p \leq n} Y_p$$

X_n est le temps mort total existant sur la 2^e machine pendant la fabrication du lot de n pièces. Il est évident que le temps total de fabrication est :

$$T = X_n + \sum_{i=1}^n t_{i2}$$

Pour une permutation σ des pièces, le temps mort sur la 2^e machine, correspondant à la séquence : $S = [\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n)]$, sera/

$$X_n(S) = \max_{1 \leq p \leq n} Y_p(S)$$

avec :

$$Y_p(S) = \sum_{i=1}^p t_{\sigma(i),1} - \sum_{i=1}^{p-1} t_{\sigma(i),2}$$

et le temps total de fabrication :

$$T(S) = X_n(S) + \sum_{i=1}^n t_{\sigma(i),2} = X_n(S) + \sum_{i=1}^n t_{i2}$$

La quantité $\sum_{i=1}^n t_{i2}$ ne dépendant pas de la séquence S, la seule quantité à minimiser est donc $X_n(S)$.

Ce résultat est dû à S.M. Johnson, [1], ainsi que le résultat du paragraphe précédent.

Exemple de calcul :

Lot de 4 pièces dont les temps d'usinage sont :

$$t_{11} = 3 ; t_{21} = 4 ; t_{31} = 2 ; t_{41} = 4$$

$$t_{12} = 2 ; t_{22} = 3 ; t_{32} = 2 ; t_{42} = 2$$



l'unité étant par exemple l'heure

Calculons la quantité Y_p , pour la séquence = (1,2,3,4)^p.

Nous avons :

$$Y_1 = t_{11} = 3 ; Y_2 = t_{11} + t_{21} - t_{12} = 3 + 4 - 2 = 5$$

$$Y_3 = t_{11} + t_{21} + t_{31} - t_{12} - t_{22} = 3 + 4 + 2 - 2 - 3 = 4$$

$$Y_4 = t_{11} + t_{21} + t_{31} + t_{41} - t_{12} - t_{32} = 3 + 4 + 2 + 4 - 2 - 2 = 9$$

$$D'où X_4 = \max_{1 \leq p \leq 4} Y_p = \max [3, 5, 4, 6] = 6$$

$$et T = X_4 + \sum_{i=1}^4 t_{i2} = 15$$

Le temps total de fabrication peut aussi se mettre sous la forme suivante :

$$T(S) = X_n(S) + \sum_{i=1}^n t_{i2} = \max_{1 \leq p \leq n} \left[\sum_{i=1}^p t_{\sigma(i),1} + \sum_{i=p}^n t_{\sigma(i),2} \right]$$

1 - 3 - Solution de Johnson S.M.

1-3-1- Relation de Johnson -

Considérons les 2 séquences de pièces :

$$S = [1, 2, \dots, k-1, k, k+1, k+2, \dots, n]$$

$$et S' = [1, 2, \dots, k-1, k+1, k, k+2, \dots, n]$$

S' étant obtenu à partir de S en transposant 2 pièces consécutives k et k+1.

Nous avons :

$$X_n(S) = \max_{1 \leq p \leq n} Y_p(S) \quad \text{et} \quad X_n(S') = \max_{1 \leq p \leq n} Y_p(S'),$$

$$Y_p(S) = Y_p(S') \quad \text{pour} \quad p \neq k \quad \text{et} \quad p \neq k+1,$$

$$Y_k(S') = \sum_{i=1}^{k-1} t_{i1} + t_{k+1,1} - \sum_{i=1}^{k-1} t_{i2}$$

$$Y_{k+1}(S') = \sum_{i=1}^{k+1} t_{i1} - \sum_{i=1}^{k-1} t_{i2} - t_{k+1,2}$$

$$Y_k(S) = \sum_{i=1}^k t_{i1} - \sum_{i=1}^{k-1} t_{i2} \quad ; \quad Y_{k+1}(S) = \sum_{i=1}^{k+1} t_{i1} - \sum_{i=1}^k t_{i2}$$

Par suite nous aurons :

$$\begin{aligned} X_n(S) &\leq X_n(S') \\ \text{si} \quad \max [Y_k(S), Y_{k+1}(S)] &\leq \max [Y_k(S'), Y_{k+1}(S')] \end{aligned} \quad (a)$$

$$\text{et} \quad X_n(S) = X_n(S')$$

$$\text{si} \quad \max [Y_k(S), Y_{k+1}(S)] = \max [Y_k(S'), Y_{k+1}(S')] \quad (a')$$

Remarque :

Inversement l'inégalité $X_n(S) < X_n(S')$ entraîne l'inégalité (a), mais l'égalité $X_n(S) = X_n(S')$ ne permet pas de conclure.

En soustrayant la quantité $\sum_{i=1}^{k+1} t_{i1} - \sum_{i=1}^{k-1} t_{i2}$ aux 2 membres de l'inégalité

(a), [resp. de l'égalité (a')] , nous obtenons la condition :

$$\begin{aligned} \max [-t_{k+1,1}, -t_{k2}] &\leq \max [-t_{k1}, -t_{k+1,2}] \\ [\text{resp.} \quad k \max (-t_{k+1,1}, -t_{k2}) &= \max (-t_{k1}, -t_{k+1,2})] \end{aligned}$$

En multipliant par -1 et en changeant le sens de l'inégalité, nous obtenons

$$\min [t_{k1}, t_{k+1,2}] < \min [t_{k2}, t_{k+1,1}]$$

De même l'égalité (a') donne : $\min [t_{k1}, t_{k+1,2}] = \min [t_{k2}, t_{k+1,1}]$
 Cette démonstration ne dépendant pas du numérotage des pièces, nous avons donc obtenu le résultat suivant :

Lemme 1-2-

Si dans une séquence $S = [\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n)]$, où σ est une permutation de l'ensemble $[1, 2, \dots, n]$, on transpose

2 pièces consécutives $\sigma(k)$ et $\sigma(k+1)$ telles que :

$$1- \min [t_{\sigma(k),1}, t_{\sigma(k+1),2}] < \min [t_{\sigma(k),2}, t_{\sigma(k+1),1}], (1)$$

le temps total de fabrication ne peut pas diminuer.

$$2- \min [t_{\sigma(k),1}, t_{\sigma(k+1),2}] = \min [t_{\sigma(k),2}, t_{\sigma(k+1),1}], (1')$$

le temps total de fabrication reste inchangé.

Ce résultat est dû à S.M. Johnson - Nous allons maintenant étudier les relations (1) et (1'). Cette étude sera faite d'une manière différente de celle de Johnson.

1.3.2 - Etude de la Relation de Johnson

A - Représentation graphique :

Nous noterons :

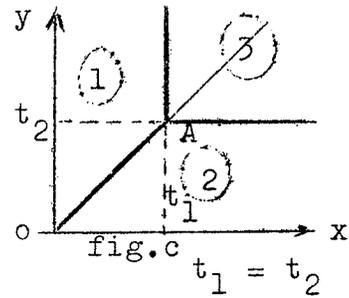
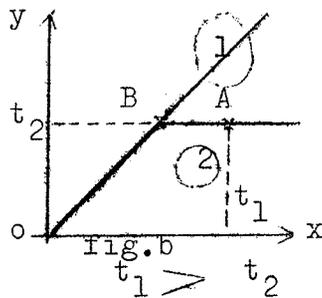
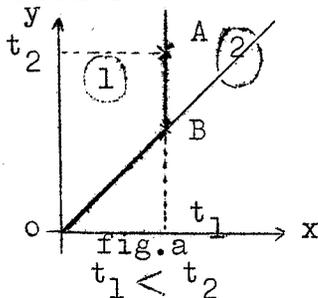
$$i \sim j \text{ pour } \min [t_{i1}, t_{j2}] = \min [t_{i2}, t_{j1}]$$

$$i < j \text{ pour } \min [t_{i1}, t_{j2}] < \min [t_{i2}, t_{j1}]$$

$$i \leq j \text{ pour } \min [t_{i1}, t_{j2}] \leq \min [t_{i2}, t_{j1}]$$

Représentons chaque pièce par un point du plan xOy, en portant en abscisse son temps d'usinage sur la 1ère machine en ordonnée " " " " " 2è "

Pour un point donné A(t₁, t₂), essayons de localiser les points M tels que M < A, M ~ A ou M > A - Nous obtenons les résultats suivants



- Région ① = M < A pour M ∈ ①
- Région ② = A < M pour M ∈ ②
- Région ③ = M ~ A pour M ∈ ③

Sur la figure a, la région ③ est constituée par (le segment de) de diagonale OB (et la demi-droite) issue de B et (passant par A) (le segment de diagonale OB) (et la demi-droite) issue de B et pas- (sant par A et paralèle à OX

sur la figure c, la région est constituée par (le segment de diagonale A (et le quart de plan...) ($x \geq t_1$ et $y \geq t_2$)

On peut donc interpréter la relation de Johnson de la manière suivante :

a/- Pour tout point M situé au-dessus de la diagonale et tout " M' " " dessous " " " , on a : $M < M'$

b/- Quels que soient les points M(x,y) et M'(x',y') situés au-dessus de la diagonale, la relation $M < M'$ est équivalente à $x < x'$

la relation $M \sim M'$ est

équivalente à $x = x'$

c/- situés au-dessous de la diagonale, la relation $M < M'$ est équivalente à $y > y'$

la relation $M \sim M'$ est

équivalente à $y = y'$

c/- Quels que soient les points M et M' de la diagonale $M \sim M'$

Pour tout point M (x,x) de la diagonale et tout point M' (x',y') tel que $x' \geq x$ et $y' \geq x$, on a $M \sim M'$

B - Etude générale :

Désignons par H le quart de plan ($x \geq 0, y \geq 0$) Δ la diagonale de H

a/- Etudions la relation dans la région $P = H - \Delta$ - Dans p, d'après l'interprétation graphique de la relation , nous voyons que cette relation se traduit de la manière suivante :

Soient A_1 l'ensemble des points M(x,y) de P tels que $x > y$ " " " " " " " " $x < y$

Pour 2 points M(x,y) et M'(x',y') de P tels que :

- 1- $M \in A_1$ et $M' \in A_2$, la relation $M \sim M'$ est équivalente à la relation "M et M' sont sur une même parallèle à Ox " (a_1)
- 2- $M \in A_2$ et $M' \in A_2$, la relation $M \sim M'$ est équivalente à la relation "M et M' sont sur une même parallèle à Oy " (a_2)
- 3- $M \in A_1$ et $M' \in A_2$, la relation $M \sim M'$ n'est pas vraie.

La relation a_1 est évidemment une relation d'équivalence sur A_1 " " " " " " " " A_2

Les ensembles A_1 et A_2 sont disjoints. Par suite, comme $M \sim M'$ n'est pas vraie si $M \in A_1$ et $M' \in A_2$, la relation est une relation d'équivalence sur P

b/- Etudions maintenant la relation \leq dans la région $P = H - \Delta$. Dans P, cette relation est - définie sur P - transitive :

On vérifie facilement, d'après la représentation graphique, que quels soient les points A et B tels que $A \leq B$, l'ensemble des points

M tels que $B \prec M$ est contenu dans l'ensemble des points M' tels que $A \prec M'$. On en déduit donc la transitivité. (Cette propriété est d'ailleurs vraie dans H tout entier).

- réflexive

On a évidemment pour tout point M , $M \prec M$.
D'autre part, la relation $(M \prec M' \text{ et } M' \prec M)$ est équivalente à $(M \sim M')$ et est une relation d'équivalence sur P .

c/- Sur H , la relation garde sa propriété de transitivité. Par contre, la relation n'est plus une relation d'équivalence ; plus précisément, cette relation n'est pas transitive sur H . En effet d'après la représentation graphique, on voit que pour tout point M de la diagonale, il existe au moins 2 points A et B tels que $A \prec M$ et $M \prec B$, sans que $A \prec B$

Lemme 1-3-

Lorsqu'il n'existe aucune pièce i telle que $t_{i1} = t_{i2}$,
a/ la relation

$$\min(t_{i1}, t_{j2}) = \min(t_{j1}, t_{i2})$$

est une relation d'équivalence sur l'ensemble des pièces.

b/ la relation

$$\min(t_{i1}, t_{j2}) \leq \min(t_{j1}, t_{i2})$$

est une relation transitive et réflexive sur l'ensemble des pièces

1-3-3- Rappels de Résultats sur les Permutations

Soit E_n l'ensemble des n premiers entiers naturels $[1, 2, \dots, n]$ ordonné par l'ordre naturel.

σ_n l'ensemble des permutations de E_n .

Une transposition est une permutation qui laisse invariants $(n-2)$ éléments de E_n et échange les deux autres.

On sait que toute permutation est un produit de transpositions

Pour une permutation σ de σ_n , adoptons sur $\sigma(E_n)$ l'ordre tel que $\sigma(i) < \sigma(j)$ si $i < j$.

Donc $\sigma(E_n)$, comme ensemble ordonné est différent de E_n - A chaque permutation correspond un seul ordre possible sur E_n et inversement.

Nous dirons alors que 2 éléments a et b de E_n sont consécutifs pour une permutation σ s'ils sont consécutifs pour l'ordre de $\sigma(E_n)$, c-à-d s'il existe $i \in E_n$ tel que $a = \sigma(i)$ et $b = \sigma(i+1)$.

Nous avons alors le résultat suivant :

Pour toute permutation $\sigma \in \sigma_n$, on peut passer de E_n à $\sigma(E_n)$ par un produit de transpositions telles que chacune d'elles n'affecte que 2 éléments:

- 1- consécutifs pour la permutation produit des transpositions déjà effectuées.
- 2- non ordonnés pour l'ordre de $\sigma(E_n)$.

Démonstration:

1- Cette proposition est vraie pour $n=3$. Supposons la vraie

pour n et démontrons la pour $n+1$. Soit E' le sous ensemble de $E_{n+1} = [2, 3, \dots, n+1]$ à n éléments. Pour une permutation $\sigma \in S_{n+1}$ nous pouvons ordonner E' suivant l'ordre de $\sigma(E_{n+1})$ par un produit de transpositions vérifiant 1. Ceci étant fait, nous pouvons mettre l'élément 1 de E_{n+1} à sa place pour l'ordre de $\sigma(E_{n+1})$ par un produit de transpositions vérifiant la proposition 1. Cette proposition est donc vraie pour $n+1$, si elle est vraie pour n .

2- Si après un certain nombre / de transpositions vérifiant les propositions 1 et 2, nous aboutissons à une permutation telle que quel soit i , $1 \leq i \leq n-1$, $\pi(i)$ et $\pi(i+1)$ sont ordonnés pour l'ordre de $\sigma(E_n)$, par suite de la propriété de transitivité de cet ordre, l'ordre π de $\sigma(E_n)$ est le même que celui de $\sigma(E_n)$ et nous avons $\pi = \sigma$.
Il est aisé de généraliser ce résultat de la manière suivante :

Lemme 1-4

Soit N l'ensemble des n premiers entiers naturels : $N = [1, 2, \dots, n]$, ordonné par l'ordre naturel.

Pour une permutation $\sigma \in S_n$, adoptons sur $\sigma(N)$ l'ordre tel que $\sigma(i) < \sigma(j)$ si $i < j$.

Soit R une relation binaire sur N , telle que :
 a- R soit transitive
 b- la relation $\} R(x, y) \text{ et } (y, x) \{$ soit une relation d'équivalence E sur N .

Alors :

1- Il existe au moins une permutation σ telle que l'on ait :
 $R[\sigma(i), \sigma(i+1)]$ pour $1 \leq i \leq n-1$

2- Il existe une suite de transpositions $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_p$, telle que

a- si $\pi = \tau_p \circ \tau_{p-1} \circ \dots \circ \tau_1$, on ait $R[\pi(i), \pi(i+1)]$ pour $1 \leq i \leq n-1$

b- si $\pi_i = \tau_{i-1} \circ \tau_{i-2} \circ \dots \circ \tau_1$ et si a_i et b_i sont les éléments affectés par τ_i , alors :

α- il existe $k \in N$ tel que $a_i = \pi_i(k)$ et $b_i = \pi_i(k+1)$

β- on a $R(b_i, a_i)$, sans avoir $R(a_i, b_i)$.

Démonstration :

- La première partie du lemme se déduit des deux faits suivants :
- à toute permutation de N correspond un seul ordre sur N et inversement.
 - si une relation R sur un ensemble A vérifie les propriétés énoncées dans le lemme, la relation déduite de R , sur l'ensemble quotient A/E est une relation d'ordre.

La deuxième partie se déduit des résultats établis avant le lemme dans ce paragraphe.

1-3-4- Interprétation des Résultats précédents pour un ensemble fini de pièces

A/- Cas où il n'existe aucune pièce i telle que $t_{i1} = t_{i2}$.

La relation

est alors une relation d'équivalence sur l'ensemble des pièces. Elle nous permet de partager l'ensemble des pièces en plusieurs groupes. La relation \prec nous permet d'ordonner ces groupes. Nous obtenons finalement sur l'ensemble des pièces un ou plusieurs ordres possibles tels que chaque couple de pièces consécutives vérifie soit \sim soit \prec

B/- Cas, où il existe une seule pièce i telle que $t_{i1} = t_{i2}$. Les n pièces

différentes de i sont alors partagées en 3 groupes :

- a-le groupe des pièces k, telles que $k < i$
- b-le " " " $k' > i$
- c-le " " " $k > i$

Chaque groupe est ordonné comme dans le cas précédent. L'ordre des groupes est : groupe a, groupe b, groupe c.

La pièce i peut être placée n'importe où entre le groupe a et le groupe c. Nous obtenons ainsi sur l'ensemble des pièces un ou plusieurs ordres possibles tels que chaque couple de pièces consécutives vérifie soit \sim , soit \prec .

Remarquons que si l'on décide de placer la pièce i entre les groupes a et b, cela revient à traiter cette pièce comme si $t_{i1} < t_{i2}$, et chaque couple de pièces consécutives vérifie toujours soit \sim soit \prec . Par cette convention, nous remplaçons la relation \sim par la relation E telle que :

α - sur $H-\Delta$, E soit la relation \sim

β - un point de Δ soit traité comme un point situé au-dessus de Δ . Soit R la relation déduite de α par cette convention. On vérifie facilement que E et R ont les mêmes propriétés sur H que \sim et \prec sur $H-\Delta$

1-3-5- Théorème 1-

Il existe au moins un ordre optimum des pièces donné par la règle suivante:

- a/- Si deux pièces i et j sont telles que $t_{i1} \neq t_{i2}$ et $t_{j1} \neq t_{j2}$, la pièce i précède la pièce j si :

$$\min [t_{i1}, t_{j2}] < \min [t_{i2}, t_{j1}]$$
- l'ordre des pièces est différent si

$$\min [t_{i1}, t_{j2}] = \min [t_{i2}, t_{j1}]$$
- b/- Toute pièce i, telle que $t_{i1} = t_{i2} = a$, est traitée comme si $t_{i1} = a$ et $t_{i2} = a + \epsilon$, $\epsilon > 0$ assez petit.

Démonstration :

La règle du théorème nous donne sur l'ensemble des pièces les relations E et R du paragraphe précédent.

Considérons une séquence de pièces donnant le minimum du temps total de fabrication. (Une telle séquence existe puisque l'ensemble des séquences est fini). Si, dans cette séquence, l'ordre des pièces n'est pas un de ceux qui sont fournis par les relations E ou R, d'après les lemmes 2, 3 et 4 on peut passer de cette séquence à une séquence vérifiant les relations E et R sans augmenter le temps total de fabrication. D'où le théorème..

1-4- Règle pratique de construction d'une séquence optimum

De l'interprétation graphique de la règle de Johnson, on déduit facilement la règle suivante :

Pour obtenir un ordre optimum des pièces, il suffit de :

a/- partager le lot de pièces en 2 groupes :

1- le groupe des pièces telles que $t_{i1} \leq t_{i2}$

2- le groupe des pièces telles que $t_{i1} > t_{i2}$

b/- ordonner les pièces :

- du premier groupe suivant les t_{i1} croissants

- du deuxième groupe suivant les t_{i2} décroissants

c/- placer le 1er groupe avant le 2è.

Exemples

1/- Lot de 5 pièces dont les temps d'usinage sont :

$t_{11}=3$; $t_{21}=4$; $t_{31}=3$; $t_{41}=1$; $t_{51}=2$

$t_{12}=2$; $t_{22}=1$; $t_{32}=5$; $t_{42}=6$; $t_{52}=4$

1er groupe $t_{i1} \leq t_{i2}$, $i = 3,4,5$

2è groupe $t_{i1} > t_{i2}$, $i = 1,2$

Ordre des pièces : 1er groupe : 4,5,3

2è groupe : 1,2

séquence donnant le minimum du temps total de fabrication :

$S = (4,5,3,1,2)$

temps mort total sur la 2è machine = 1

temps total de fabrication = 19

Le maximum du temps total de fabrication est = 25.

2/- Lot de 6 pièces dont les temps d'usinage sont :

$t_{11}=6$; $t_{21}=1$; $t_{31}=6$; $t_{41}=5$; $t_{51}=3$; $t_{61}=4$

$t_{12}=7$; $t_{22}=5$; $t_{32}=1$; $t_{42}=4$; $t_{52}=3$; $t_{62}=2$

1er groupe $t_{i1} \leq t_{i2}$, $i = 1,2,5$

2è groupe $t_{i1} > t_{i2}$, $i = 3,4,6$

Ordre des pièces : 1er groupe : 2,5,1

2è groupe : 4,6,3

une séquence donnant le minimum du temps total de fabrication est donc :

$S = (2,5,1,4,6,3)$.

le temps^o total de fabrication correspondant est : 26.

La pièce numérotée 5 ayant ses temps d'usinage égaux sur les 2 machines, les séquences suivantes nous donneront aussi le minimum du temps total de fabrication :

$S_1 = (2,1,5,4,6,3)$

$S_2 = (2,1,4,5,6,3)$

Le maximum du temps total de fabrication est : 36.

CHAPITRE 11

PROBLEME A m MACHINES

1- Calcul du temps total de fabrication

Comme nous l'avons indiqué, nous ne ferons le calcul que dans le cas où les pièces défilent dans le même ordre sur toutes les machines. Ce calcul est la généralisation du calcul fait par S.M. Johnson [2], pour le problème à 3 machines.

Supposons les pièces numérotées de 1 à n et les machines de 1 à m. Les temps partiels d'usinage sont donnés par une matrice à n lignes et m colonnes

$$T = (t_{ij}) \quad 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq j \leq m$$

Nous ferons le calcul pour la séquence de pièces : $[1, 2, \dots, n]$

Notations :

x_{ij} = temps mort existant sur j^è machine entre la sortie de la (i-1)^è pièce et l'entrée de la i^è.

$X_{pq} = \sum_{i=1}^p x_{iq}$ = temps mort sur q^è machine pendant la fabrication des p premières pièces
le temps mort total existant sur la j^è machine pendant la fabrication des n pièces est donc X_{nj} .

$$Y_{pq} = \sum_{i=1}^p t_{iq} - \sum_{i=1}^{p-1} t_{i,q+1} \quad Y_{1q} = t_{1q}$$

Le calcul du temps mort sur la $l^{\text{è}}$ machine se fait comme dans le cas des 2 machines isolées ; ($l-1$) et l , en prenant pour temps d'usinage partiels sur la ($l-1$)^è machine les quantités :

$t_{i,l-1} + x_{i,l-1}$ = temps effectif d'usinage sur la ($l-1$)^è machine + temps d'attente avant l'entrée dans cette machine

Le temps mort existant sur la $l^{\text{è}}$ machine pendant la fabrication des k premières pièces est alors, par application des résultats du premier chapitre :

$$X_{kl} = \max_{1 \leq p \leq k} \left[\sum_{i=1}^p (t_{i,l-1} + x_{i,l-1}) - \sum_{i=1}^p t_{il} \right]$$

Nous voyons donc apparaître les quantités

$$Y_{p,l-1} = \sum_{i=1}^p t_{i,l-1} - \sum_{i=1}^{p-1} t_{i,l}$$

quantités analogues à celles utilisées dans le calcul du temps mort pour 2 machines isolées. Mais des quantités nouvelles apparaissent, qui sont des sommes partielles de temps mort sur la ($l-1$)^è machines. La formule précédente peut s'écrire :

$$X_{kl} = \max_{1 \leq p \leq k} \left[Y_{p,l-1} + X_{p,l-1} \right] \quad (1).$$

Nous désirons calculer le temps mort total sur la m^è machine pendant la fabrication des n pièces. Il nous suffit pour cela de faire k=n et j=m dans la formule (1). Nous obtenons :

$$X_{n,m} = \max_{1 \leq p \leq m} [Y_{p,m-1} + X_{p,m-1}] \quad (2)$$

En utilisant la formule (1), pour l'évaluation des $X_{p,m-1}$, la formule (2) donne :

$$X_{p,m} = \max_{1 \leq q \leq n} [Y_{p,m-1} + \max_{1 \leq q \leq p} (Y_{q,m-2} + X_{q,m-2})]$$

$$\text{ou } X_{n,m} = \max_{1 \leq q \leq p \leq n} [Y_{p,m-1} + Y_{q,m-2} + X_{q,m-2}] \quad (3)$$

En remplaçant de la même manière $X_{q,m-2}$ dans (3) par utilisation de (1), nous obtenons finalement, $X_{q,m-2}$ en remarquant que $X_{p1} = 0$ (il n'y a pas de temps mort sur la l^ère machine) :

$$X_{n,m} = \max \left[\sum_{j=1}^{m-1} Y_{p_j, j} \right] \quad (4)$$

le maximum étant pris sur toutes les sommes telles que :

$$1 \leq p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_{j-1} \leq p_j \leq \dots \leq p_{m-1} \leq n$$

Le temps total de fabrication des n pièces est alors :

$$T = X_{nm} + \sum_{i=1}^n t_{im} \quad (5)$$

Pour une séquence $S = [\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n)]$, où σ est une permutation de l'ensemble des n pièces, le temps mort total sur la dernière machine existant pendant la fabrication de cette séquence est de même :

$$X_{n,m}(S) = \max \left[\sum_{j=1}^{m-1} Y_{p_j, j}(S) \right] \text{ avec } 1 \leq p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_{m-1} \leq n \quad (6)$$

où l'on a posé

$$Y_{p_q}(S) = \sum_{i=1}^p t_{\sigma(i), q} - \sum_{i=1}^{p-1} t_{\sigma(i), q+1}, \quad Y_{\sigma(1)q}(S) = t_{\sigma(1)q}$$

De même, le temps total de fabrication est :

$$T(S) = X_{nm}(S) + \sum_{i=1}^n t_{im} \quad (7)$$

Nous voyons que, comme pour le problème à 2 machines, la quantité à minimiser est $X_{nm}(S)$.

Le temps total de fabrication peut se mettre sous la forme :

$$T(S) = \max_{(p_1, p_2, \dots, p_{m-1})} \left[\sum_{i=1}^{p_1} t_{\sigma(i), 1} + \sum_{i=p_1}^{p_2} t_{\sigma(i), 2} + \dots + \sum_{i=p_{m-2}}^{p_{m-1}} t_{\sigma(i), m-1} + \sum_{i=p_{m-1}}^n t_{\sigma(i), m} \right]$$

avec $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_{m-2} \leq p_{m-1} \leq n$.

INSTITUT POLYTECHNIQUE
LABORATOIRE DE RECHERCHES
42, Avenue G. Clémenceau
Tél. : 44.84.80

2 - Problème à 3 machines.

2-1- Lemme 2-1

Pour obtenir le minimum du temps total de fabrication, il suffit de considérer le cas où les pièces défilent dans le même ordre sur les 3 machines.

Démonstration :

En effet, il est toujours possible, sans augmenter le temps total de fabrication, de prendre sur la 3^e machine le même ordre que sur la 2^e. La démonstration de ce fait est la même que celle du lemme 1.1

D'autre part, la durée du processus consistant à faire les pièces est la même que celle du processus consistant à défaire les pièces. Ce dernier processus revient à inverser l'ordre des pièces et celui des machines. On en déduit donc que l'on peut prendre le même ordre des pièces sur la 1^{ère} et sur la 2^e machine. D'où le lemme.

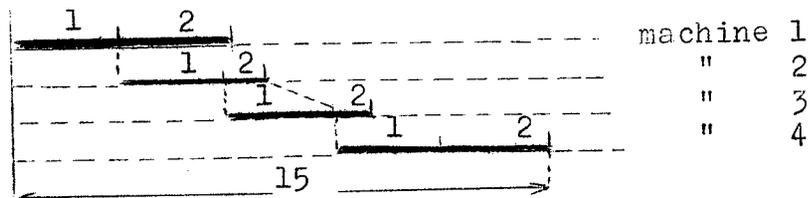
Remarque :

Cette démonstration ne peut pas s'appliquer au cas de plus de 3 machines et le lemme n'est pas valable pour plus de 3 machines. Considérons en effet l'exemple suivant :

$$C = \begin{pmatrix} 3, 3, 3, 3 \\ 3, 1, 1, 3 \end{pmatrix}$$

où le nombre de pièces est 2 et le nombre de machines 4.

- Prenons le même ordre des pièces sur les 4 machines. Pour l'ordre (1,2) des pièces, nous avons le graphique suivant :

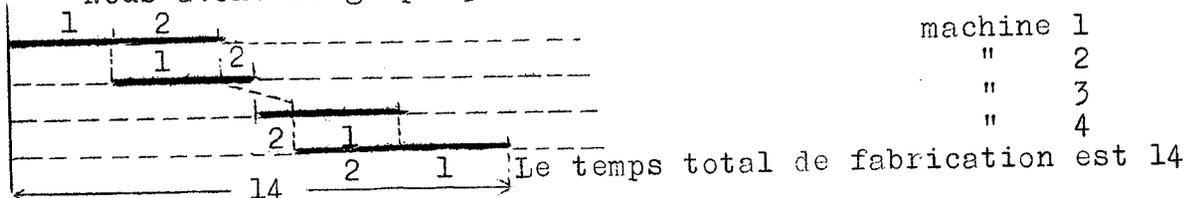


Temps total de fabrication = 15

Pour l'ordre (2,1), on vérifie de même que le temps total de fabrication est 15.

- Prenons maintenant des ordres différents sur les machines, par exemple l'ordre (1,2) sur les 1^{ère} et 2^e machines et l'ordre (2,1) sur les 3^e et 4^e machines

Nous avons le graphique :



Le temps total de fabrication est 14

Ceci nous montre bien que le lemme n'est pas valable pour plus de 3 machines. (Cependant dans le cas de 4 machines, la démonstration du lemme 5 nous indique que pour obtenir le minimum, il suffit de prendre seulement 2 ordres : un pour les machines 1 et 2, un autre pour les machines 3 et 4).

2-2- Etude de la minimisation du temps mort

Le temps mort

total sur la 3^e machine est :

$$X_{n3}(S) = \max_{1 \leq p \leq q \leq n} [Y_{p1}(S) + Y_{q2}(S)]$$

pour la séquence $S = [1, 2, \dots, n]$

Considérons la séquence S' obtenue à partir de S en transposant les pièces k et $k+1$. Nous avons :

$$Y_{p1}(S') = Y_{p1}(S) \quad \text{pour } p \neq k \text{ et } p \neq k+1$$

$$Y_{q2}(S') = Y_{q2}(S) \quad \text{pour } q \neq k \text{ et } q \neq k+1$$

Si nous comparons les quantités $X_{n3}(S)$ et $X_{n3}(S')$, nous aurons à comparer les quantités :

$$f(S) = \max \left[Y_{p1}(S) + Y_{k2}(S), 1 \leq p < k; Y_{p1}(S) + Y_{k+1,2}(S), 1 \leq p < k; \right. \\ \left. Y_{k1}(S) + Y_{q2}(S), k+1 < q \leq n; Y_{k+1,1}(S) + Y_{q2}(S), k+1 < q \leq n; \right. \\ \left. Y_{k1}(S) + Y_{k2}(S); Y_{k1}(S) + Y_{k+1,2}(S); Y_{k+1,1}(S) + Y_{k+1,2}(S) \right]$$

$$\text{et} \\ f(S') = \max \left[Y_{p1}(S') + Y_{k2}(S'), 1 \leq p < k; Y_{p1}(S') + Y_{k+1,2}(S'), 1 \leq p < k; \right. \\ \left. Y_{k1}(S') + Y_{q2}(S'), k+1 < q \leq n; Y_{k+1,1}(S') + Y_{q2}(S'), k+1 < q \leq n; \right. \\ \left. Y_{k1}(S') + Y_{k2}(S'); Y_{k1}(S') + Y_{k+1,2}(S'); Y_{k+1,1}(S') + Y_{k+1,2}(S') \right]$$

Nous voyons que, contrairement au cas de 2 machines, ces quantités ne dépendent pas seulement de $Y_{k,1}$, $Y_{k,2}$, $Y_{k+1,1}$, $Y_{k+1,2}$, mais aussi des Y_{p1} et Y_{q2} pour p et $q \neq k$ et $k+1$.

Les quantités $f(S)$ et $f(S')$ dépendent de toute la séquence S et non plus seulement des 2 pièces transposées. Nous ne pouvons donc obtenir, dans le cas général, de solution analogue à celle du problème à 2 machines.

Exemple : considérons les 3 pièces dont les temps de fabrication sur les 3 machines sont :

pièce 1 (5, 9, 4)

pièce 2 (7, 1, 6)

pièce 3 (2, 8, 3).

La séquence des pièces $S = [1, 2, 3]$ donne un temps mort total sur le troisième machine égal :

$$X_{33}(S) = 14$$

La séquence $S' = [2, 1, 3]$ obtenue à partir de S par transposition des pièces 1 et 2, donne :

$$X_{33}(S') = 19$$

La séquence $S_1 = [3, 1, 2]$ donne :

$$X_{33}(S_1) = 16$$

La séquence $S'_1 = [3, 2, 1]$, obtenue à partir de S_1 , par transposition des mêmes pièces 1 et 2, donne :

$$X_{33}(S'_1) = 14$$

Dans les séquences S et S_1 les pièces 1 et 2 sont dans le même ordre. Les séquences S' et S'_1 se déduisent respectivement de S et S_1 par la même transposition de 2 pièces consécutives. Dans un cas, nous avons : $X_{33}(S) < X_{33}(S')$, tandis que dans l'autre, nous avons :

$$X_{33}(S_1) > X_{33}(S'_1).$$

Si, dans le cas général, il n'existe pas de solution analogue à celle du problème à 2 machines, on peut cependant résoudre par cette méthode deux cas particuliers que nous allons examiner maintenant.

2-3 Solution dans un cas particulier.

Supposons que l'on ait :

$$\text{soit } \min_i (t_{i1}) \geq \max_i (t_{i2})$$

$$\text{soit } \min_i (t_{i3}) \geq \max_i (t_{i2})$$

La première inégalité entraîne, pour toute séquence $S = [\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n)]$,

$$t_{\sigma(i),1} - t_{\sigma(i-1),2} \geq 0 \quad \text{pour } 2 \leq i \leq n$$

et par suite :

$$Y_{11}(S) \leq Y_{21}(S) \leq \dots \leq Y_{p-1,1}(S) \leq Y_{p1}(S) \leq \dots \leq Y_{n1}(S)$$

Ce qui nous permet d'écrire :

$$\max_{1 \leq p < q} [Y_{p1}(S) + Y_{q2}(S)] = Y_{q1}(S) + Y_{q2}(S), \quad 1 \leq q \leq n$$

De même, la 2^e inégalité entraîne, pour toute séquence $S = [\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n)]$

$$t_{\sigma(i),2} - t_{\sigma(i-1),3} \leq 0 \quad \text{pour } 2 \leq i \leq n$$

et par suite :

$$Y_{12}(S) \geq Y_{22}(S) \geq \dots \geq Y_{p-1,2}(S) \geq Y_{p2}(S) \geq \dots \geq Y_{n2}(S)$$

$$\text{d'où } \max_{p < q \leq n} [Y_{p1}(S) + Y_{q2}(S)] = Y_{p1}(S) + Y_{p2}(S), \quad 1 \leq p \leq n$$

Dans les deux cas nous aurons donc :

$$X_{n3}(S) = \max_{1 \leq p \leq n} [Y_{p1}(S) + Y_{p2}(S)]$$

$$\text{Si nous posons : } d_{\sigma(i),1} = t_{\sigma(i),1} + t_{\sigma(i),2}$$

$$d_{\sigma(i),2} = t_{\sigma(i),2} + t_{\sigma(i),3}$$

Nous avons :

$$Y_{p1}(S) + Y_{p2}(S) = \sum_{i=1}^p d_{\sigma(i),1} - \sum_{i=1}^{p-1} d_{\sigma(i),2}$$

$$\text{et : } X_{n3}(S) = \max_{1 \leq p \leq n} [Z_p(S)]$$

$$\text{avec } Z_p(S) = \sum_{i=1}^p d_{\sigma(i),1} - \sum_{i=1}^{p-1} d_{\sigma(i),2}$$

Nous sommes donc ramenés au cas de deux machines pour lesquelles les temps partiels d'usinage sont les d_{ij} .

Nous avons donc le théorème suivant :

Théorème 2-1

$$\text{Si l'on a soit } \min_i (t_{i1}) \geq \max_i (t_{i2})$$

$$\text{soit } \min_i (t_{i3}) \geq \max_i (t_{i2})$$

l'ordre optimum des pièces est donné par la règle du théorème 1, appliquée à la chaîne fictive à deux machines pour lesquelles les temps d'usinage de la i è pièce sont :

$$d_{i1} = t_{i1} + t_{i2} \quad d_{i2} = t_{i2} + t_{i3}$$

Ces résultats ont été obtenus par S.M. Johnson.

2-4 - Deuxième cas particulier

Appliquons la règle de Johnson aux deux couples de machines (1,2) et (2,3). Dans le cas général, cette règle nous donne 2 ordres différents pour les pièces. Nous supposons, dans ce paragraphe, que ces 2 ordres sont identiques. Cette hypothèse est équivalente à l'hypothèse suivante :

Quel que soit le couple de pièces (i,j), dont les temps de fabrication sont : (t_{i1}, t_{i2}, t_{i3}) et (t_{j1}, t_{j2}, t_{j3}) , on ne peut avoir que l'un des deux groupes d'inégalités :

$$\text{a/- } \min(t_{i1}, t_{j2}) \leq \min(t_{i2}, t_{j1})$$

$$\min(t_{i2}, t_{j3}) \leq \min(t_{i3}, t_{j2})$$

$$\min(t_{i1}, t_{j3}) \leq \min(t_{i3}, t_{j1})$$

$$\text{b/- } \min(t_{i2}, t_{j1}) \leq \min(t_{i1}, t_{j2})$$

$$\min(t_{i3}, t_{j2}) \leq \min(t_{i2}, t_{j3})$$

$$\min(t_{i3}, t_{j1}) \leq \min(t_{i1}, t_{j3})$$

Nous allons montrer que dans ce cas, l'ordre des pièces ainsi obtenu est optimum pour l'ensemble des 3 machines.

Supposons que nous ayons les inégalités a/ pour le couple de pièces (k,k+1). Considérons alors les 2 séquences :

$$S = [1, 2, \dots, k, k+1, \dots, n]$$

$$S' = [1, 2, \dots, k+1, k, \dots, n]$$

et comparons les temps morts sur la 3^è machine = $X_{n3}^{(S)}$ et $X_{n3}^{(S')}$
 Nous avons vu que cela revenait à comparer les quantités $f(S)$ et $f(S')$ données au paragraphe (2,2). D'après l'hypothèse que nous avons faite et les résultats obtenus au chapitre 1, nous pouvons écrire.

$$\left. \begin{aligned} Y_{p1}(S) + Y_{k2}(S) &\leq Y_{p1}(S') + Y_{k2}(S') \\ Y_{p1}(S) + Y_{k+1,2}(S) &\leq Y_{p1}(S') + Y_{k+1,2}(S') \\ Y_{k1}(S) + Y_{q2}(S) &\leq Y_{k1}(S') + Y_{q2}(S') \\ Y_{k+1,1}(S) + Y_{q2}(S) &\leq Y_{k+1,1}(S') + Y_{q2}(S') \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{pour } 1 \leq p < k \\ \\ \text{pour } k+1 < q \leq n \end{array}$$

puisque $Y_{p1}(S) = Y_{p1}(S')$ pour $p \neq k$ et $k+1$
 $Y_{q2}(S) = Y_{q2}(S')$ pour $q \neq k$ et $k+1$

Il nous reste donc à comparer les quantités :

$$g(S) = \max \left[Y_{k1}(S) + Y_{k2}(S); Y_{k1}(S) + Y_{k+1,2}(S); Y_{k+1,1}(S) + Y_{k+1,2}(S) \right]$$

et

$$g(S') = \max \left[Y_{k1}(S') + Y_{k2}(S'); Y_{k1}(S') + Y_{k+1,2}(S'); Y_{k+1,1}(S') + Y_{k+1,2}(S') \right]$$

Pour cela, retranchons à $g(S)$ et $g(S')$ la quantité :

$$A = \sum_{i=1}^{k+1} t_{i1} - \sum_{i=1}^{k-1} t_{i2} + \sum_{i=1}^{k+1} t_{i2} - \sum_{i=1}^{k-1} t_{i3}$$

nous obtenons :

$$g(S) - A = \max \left[-(t_{k+1,1} + t_{k+1,2}); -(t_{k+1,1} + t_{k3}); -(t_{k2} + t_{k3}) \right]$$

$$g(S') - A = \max \left[-(t_{k1} + t_{k2}); -(t_{k1} + t_{k+1,3}); -(t_{k+1,2} + t_{k+1,3}) \right]$$

Posons $h(S) = A - g(S)$ et $h(S') = A - g(S')$

nous avons :

$$h(S) = \min \left[t_{k+1,1} + t_{k+1,2}; t_{k+1,1} + t_{k3}; t_{k2} + t_{k3} \right]$$

$$h(S') = \min \left[t_{k1} + t_{k2}; t_{k1} + t_{k+1,3}; t_{k+1,2} + t_{k+1,3} \right]$$

Il est évident que l'inégalité $h(S') \leq h(S)$ est équivalente à l'inégalité :

$$g(S) \leq g(S').$$

Nous allons maintenant montrer que l'hypothèse que nous avons faite, à savoir que :

$$\min [t_{k1}, t_{k+1,2}] \leq \min [t_{k2}, t_{k+1,1}]$$

$$\text{et } \min [t_{k2}, t_{k+1,3}] \leq \min [t_{k3}, t_{k+1,2}]$$

entraîne l'inégalité $h(S') \leq h(S)$, sauf dans un cas particulier. Les 2 inégalités entraînent évidemment que :

$$\min [t_{k1+t_{k2}}; t_{k1+t_{k+1,3}}; t_{k+1,2+t_{k2}}; t_{k+1,2+t_{k+1,3}}] \leq$$

1er cas : $\leq \min [t_{k2+t_{k3}}; t_{k2+t_{k+1,2}}; t_{k+1,1+t_{k3}}; t_{k+1,1+t_{k+1,2}}]$

$$[t_{k1+t_{k2}}; t_{k1+t_{k+1,3}}; t_{k+1,2+t_{k2}}; t_{k+1,2+t_{k+1,3}}]$$

ne soit pas le terme $t_{k2+t_{k+1,2}}$

ce minimum est alors égal à $h(S')$ et nous avons :

$$h(S') \leq \min [t_{k2+t_{k3}}; t_{k2+t_{k+1,2}}; t_{k+1,1+t_{k3}}; t_{k+1,1+t_{k+1,2}}] \leq h(S)$$

ce que nous voulions démontrer.

2è cas Dans l'autre cas possible, nous avons alors :

$$t_{k+1,2+t_{k2}} \leq t_{k1+t_{k2}}, \text{ et } t_{k+1,2+t_{k2}} \leq t_{k+1,2+t_{k+1,3}}$$

D'où :

$t_{k+1,2} \leq t_{k1}$, ce qui entraîne, d'après les hypothèses :

$$\begin{cases} t_{k+1,2} \leq t_{k2} \\ t_{k+1,2} \leq t_{k+1,1} \end{cases}$$

et

$t_{k2} \leq t_{k+1,3}$, ce qui entraîne :

$$\begin{cases} t_{k2} \leq t_{k3} \\ t_{k2} \leq t_{k+1,2} \end{cases}$$

INSTITUT IMAG
 Informatique, Mathématiques Appliquées de Grenoble
 CNRS - INPG - USMG
 MÉDIATHÈQUE
 B.P. 68
 38402 ST-MARTIN-D'HÈRES CEDEX
 FRANCE
 Tél. (76) 51.46.36

Nous avons donc : $t_{k2} = t_{k+1,2}$

et les hypothèses sont dans ce cas :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min [t_{k1}, t_{k+1,2}] = t_{k+1,2} = \min [t_{k2}, t_{k+1,1}] = t_{k2} \\ \min [t_{k2}, t_{k+1,3}] = t_{k2} = \min [t_{k3}, t_{k+1,2}] = t_{k+1,2} \end{array} \right.$$

Nous en déduisons que :

$$h(S') = \min [t_{k1+t_{k2}}, t_{k+1,2+t_{k+1,3}}] = \min [t_{k1}, t_{k+1,3}] + t_{k2}$$

$$h(S) = \min [t_{k+1,1+t_{k+1,2}}, t_{k2+t_{k3}}] = \min [t_{k3}, t_{k+1,1}] + t_{k2}$$

Nous voyons que $h(S') \leq h(S)$, si les pièces k et $k+1$ vérifient la relation de Johnson pour les machines 1 et 3, c'est-à-dire si :

$$\min [t_{k1}, t_{k+1,3}] \leq \min [t_{k+1,1}, t_{k3}]$$

D'autre part, dans le 1er cas, on vérifie facilement que les inégalités :

$$\text{Min } [t_{k1}, t_{k+1,2}] \leq \text{min } [t_{k+1,1}, t_{k2}]$$

$$\text{Min } [t_{k2}, t_{k+1,3}] \leq \text{min } [t_{k+1,2}, t_{k3}]$$

entraînant l'inégalité :

$$\text{min } [t_{k1}, t_{k+1,3}] \leq \text{min } [t_{k+1,1}, t_{k3}]$$

Nous avons donc le résultat suivant :

Lemme 2-2

Si, dans une séquence quelconque des pièces :

$$S = [\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(k), \sigma(k+1), \dots, \sigma(n)]$$

où σ est une permutation

des n pièces, deux pièces consécutives, $\sigma(k)$ et $\sigma(k+1)$, vérifient les inégalités :

$$\text{min } [t_{k1}, t_{k+1,2}] \leq \text{min } [t_{k+1,1}, t_{k2}]$$

$$\text{min } [t_{k2}, t_{k+1,3}] \leq \text{min } [t_{k+1,2}, t_{k3}]$$

$$\text{min } [t_{k1}, t_{k+1,3}] \leq \text{min } [t_{k+1,1}, t_{k3}]$$

alors le temps total de fabrication ne diminue pas lorsque l'on transpose ces deux pièces.

A partir de ce résultat et par une démonstration analogue à celle qui a été faite au chapitre 1 pour deux machines, on obtient le théorème suivant.

Théorème 2-2

Si l'application de la règle de Johnson aux trois couples de machines : (1,2), (2,3) et (1,3) donne un même ordre pour les pièces, cet ordre est optimum pour l'ensemble des 3 machines.

3- Problème à m machines :

3-1- Premier cas particulier

Nous ne considérons que le cas où les pièces défilent dans le même ordre sur toutes les machines.

a- Supposons que :

$$\text{min}_i (t_{ij}) \geq \text{max}_i (t_{i,j+1}) \text{ pour } 1 \leq j \leq m-2$$

Dans ce cas, quelle que soit la séquence de pièce

$$S = [\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n)]$$

nous avons

$$t_{\sigma(i),j} - t_{\sigma(i-1),j+1} \geq 0 \text{ pour } 1 \leq j \leq m-2$$

Ces inégalités entraînant alors :

$$Y_{1j}(S) \leq Y_{2j}(S) \leq \dots \leq Y_{p-1,j} \leq Y_{p-1,j}(S) \leq \dots \leq Y_{nj}(S)$$

pour $1 \leq j \leq m-2$

ce qui entraîne :

$$\max_{1 \leq p_1 \leq \dots \leq p_{m-1}} \left[\sum_{j=1}^{m-1} Y_{p_j, j}(S) \right] = \sum_{j=1}^{m-1} Y_{p_{m-1}, j}(S) \text{ pour } 1 \leq p_{m-1} \leq n$$

b- Supposons que : $\min_i (t_{i, j+1}) \geq \max_i (t_{i, j})$ pour $2 \leq j \leq m-1$

Dans ce cas, quelle soit la séquence $S = [\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n)]$ nous avons :

$$t_{\sigma(i), j} - t_{\sigma(i-1), j+1} \leq 0 \quad \text{pour } 2 \leq j \leq m-1$$

Ces inégalités entraînent alors :

$$Y_{1j}(S) \geq Y_{2j}(S) \geq \dots \geq Y_{p-1,j}(S) \geq Y_{pj}(S) \geq \dots \geq Y_{nj}(S)$$

pour $2 \leq j \leq m-1$

ce qui entraîne :

$$\max_{p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_{m-1} \leq n} \left[\sum_{j=1}^{m-1} Y_{p_j, j}(S) \right] = \sum_{j=1}^{m-1} Y_{p_1, j}(S), \quad 1 \leq p_1 \leq n$$

c- Supposons maintenant qu'il existe une machine k telle que :

$$\left(\min_i (t_{ij}) \geq \max_i (t_{ij+1}) \right) \quad \text{pour } 1 \leq j \leq k-1$$

$$\left(\text{et } \min_i (t_{i, j+1}) \geq \max_i (t_{ij}) \right) \quad \text{pour } k+1 \leq j \leq m-1$$

nous avons alors, quelle que soit la séquence de pièce

$$S = [\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n)]$$

$$t_{\sigma(i), j} - t_{\sigma(i), j+1} \geq 0 \quad \text{pour } 1 \leq j \leq k-1$$

$$t_{\sigma(i), j} - t_{\sigma(i-1), j+1} \leq 0 \quad \text{pour } k+1 \leq j \leq m-1$$

Ces inégalités entraînent :

$$Y_{1j}(S) \leq Y_{2j}(S) \leq \dots \leq Y_{p-1,j}(S) \leq Y_{pj}(S) \leq \dots \leq Y_{nj}(S), \text{ pour } 1 \leq j \leq k-1$$

et

$$Y_{1j}(S) \geq Y_{2j}(S) \geq \dots \geq Y_{p-1,j}(S) \geq Y_{pj}(S) \geq \dots \geq Y_{nj}(S), \text{ pour } k+1 \leq j \leq m-1$$

ce qui entraîne :

$$\text{Max}_{1 \leq p_1 \leq \dots \leq p_k \leq \dots \leq p_{m-1} \leq n} \left[\sum_{j=1}^{m-1} Y_{p_j, j}(S) \right] = \sum_{j=1}^{m-1} Y_{p_k, j}(S) \text{ pour } 1 \leq p_k \leq n$$

Dans les 3 cas, le temps mort total sur la dernière machine peut s'écrire :

$$X_{nm}(S) = \max_{1 \leq p \leq n} \left[\sum_{j=1}^{m-1} Y_{p, j}(S) \right]$$

Or, nous avons :

$$\sum_{j=1}^{m-1} Y_{pj}(s) = \sum_{j=1}^{m-1} \left[\sum_{i=1}^p t_{\sigma(i)j} - \sum_{i=1}^{p-1} t_{\sigma(i),j+1} \right]$$

$$= \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{m-1} t_{\sigma(i)j} - \sum_{i=1}^{p-1} \sum_{j=2}^m t_{\sigma(i)j}$$

Posons :

$$d_{i1} = \sum_{j=1}^{m-1} t_{ij} \quad \text{et} \quad d_{i2} = \sum_{j=2}^m t_{ij}$$

nous pouvons alors écrire :

$$\sum_{j=1}^{m-1} Y_{pj}(s) = \sum_{i=1}^p d_{\sigma(i),1} - \sum_{j=1}^{p-1} d_{\sigma(i),2}$$

et :

$$X_{nm}(s) = \max_{1 \leq p \leq n} \left[Z_p(s) \right]$$

avec $Z_p(s) = \sum_{i=1}^p d_{\sigma(i),1} - \sum_{i=1}^{p-1} d_{\sigma(i),2}$

Nous sommes donc ramenés au cas de deux machines pour lesquelles les temps partiels d'usinages sont les d_{ij} .

Nous avons donc le théorème suivant :

Théorème 2-3

Si l'on peut partager l'ensemble des machines en deux groupes tels que :

le 1er groupe soit l'ensemble des k premières machines, tout couple de machines consécutives de ce groupe vérifiant l'inégalité

$$\min_i (t_{ij}) \geq \max_i (t_{i,j+1})$$

et le 2^e groupe soit l'ensemble des (n-k) dernières machines tout couple de machines consécutives de ce groupe vérifiant l'inégalité :

$$\max_i (t_{i,j}) \leq \min_i (t_{i,j+1}) ,$$

alors l'ordre optimum des pièces est donné par la règle du théorème 1 appliquée à la chaîne fictive de deux machines pour lesquelles les temps d'usinage de la i^e pièce sont :

$$d_{i1} = \sum_{j=1}^{m-1} t_{ij} \quad , \quad d_{i2} = \sum_{j=2}^{m-1} d_{ij}$$

pour $1 \leq i \leq n$

3-2- Deuxième cas particulier -

Dans ce paragraphe, nous examinerons le cas où la règle de Johnson donne le même ordre des

pièces sur tous les couples de machines. Pour cela, nous commencerons par démontrer le lemme suivant :

Lemme 2-3

Etant données 2 séquences de nombres : (t_{1j}) et (t_{2j}) avec $1 \leq j \leq m$, les inégalités :

$$\min(t_{1j}, t_{2k}) \leq \min(t_{1k}, t_{2j})$$

pour $1 \leq j < k \leq m$

entraînent l'inégalité.

$$\min_{0 \leq p \leq m-1} \left[\sum_{j \leq p} t_{1j} + \sum_{j > p} t_{2, j+1} \right] \leq \min_{0 \leq p \leq m-1} \left[\sum_{j \leq p} t_{2j} + \sum_{j > p} t_{1, j+1} \right]$$

Démonstration

Ce lemme est évident pour $m = 2$, la conclusion se réduisant alors à l'hypothèse, c'est-à-dire :

$$\min(t_{11}, t_{22}) \leq \min(t_{12}, t_{21}).$$

Supposons alors que le lemme soit vrai pour 2 séquences de n nombres avec $n < m$, et démontrons qu'il est vrai pour $n = m$

Les $m-1$ inégalités :

$$\min [t_{1j}, t_{2, j+1}] \leq \min [t_{1, j+1}, t_{2, j}]$$

pour $1 \leq j \leq m-1$, nous permettent d'écrire l'inégalité :

$$\min_{(x_j)} \left[\sum_{j=1}^{m-1} (x_j t_{1j} + \bar{x}_j t_{2, j+1}) \right] \leq \min_{(y_j)} \left[\sum_{j=1}^{m-1} (y_j t_{1, j+1} + \bar{y}_j t_{2j}) \right]$$

les variables (x_j) et (y_j) étant des variables booléennes, \bar{x} désignant la négation de x .

Si l'on a :

$$\min_{(x_j)} \left[\sum_{j=1}^{m-1} (x_j t_{1j} + \bar{x}_j t_{2, j+1}) \right] = \min_{0 \leq p \leq m-1} \left[\sum_{j \leq p} t_{1j} + \sum_{j > p} t_{2, j+1} \right]$$

le lemme est démontré.

Sinon, soit (x^0_j) les valeurs des variables (x_j) qui rendent minimum la somme =

$$\sum_{j=1}^{m-1} (x^0_j t_{1j} + \bar{x}^0_j t_{2, j+1})$$

Pour cet ensemble de valeurs (x^0_j) , il existe au moins un indice k tel que : $x^0_k = 0$ et $x^0_{k+1} = 1$

Ce qui entraîne : $t_{1k} \geq t_{2, k+1}$; $t_{1, k+1} \leq t_{2, k+2}$

Ces inégalités, jointes aux hypothèses, à savoir :

$$\min [t_{1k}, t_{2, k+1}] \leq \min [t_{1, k+1}, t_{2k}]$$

$$\min [t_{1, k+1}, t_{2, k+2}] \leq \min [t_{1, k+2}, t_{2, k+1}]$$

entraînent : $t_{1, k+1} = t_{2, k+1}$

Par suite, la quantité : $\min_{0 \leq p \leq m-1} \left[\sum_{j \leq p} t_{1j} + \sum_{j > p} t_{2,j+1} \right]$

peut s'écrire, en posant :

$$t'_{1j} = t_{1j}, t'_{2j} = t_{2j} \quad \text{pour } 1 \leq j \leq k$$

$$t'_{1j} = t_{1,j+1}, t'_{2j} = t_{2,j+1} \quad \text{pour } k+1 \leq j \leq m-1$$

$$\min_{0 \leq p \leq m-2} \left[\sum_{j \leq p} t'_{1j} + \sum_{j > p} t'_{2,j+1} \right] + t_{1,k+1}$$

de même nous avons :

$$\min_{0 \leq p \leq m-1} \left[\sum_{j \leq p} t_{2j} + \sum_{j > p} t_{1,j+1} \right] = \min_{0 \leq p \leq m-2} \left[\sum_{j \leq p} t'_{2j} + \sum_{j > p} t'_{1,j+1} \right] + t_{1,k+1}$$

et les 2 nouvelles séquences (t'_{1j}) et (t'_{2j}) de $m-1$ nombres vérifient les hypothèses du lemme.

Si le lemme est vrai pour 2 séquences de m nombres, avec $n < m$, il est donc vrai pour $n = m$

Le lemme est donc démontré.

Lemme 2-4

Si dans une séquence quelconque des pièces :

$$\sigma = [\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(k), \sigma(k+1), \dots, \sigma(n)]$$

où σ est une

permutation des n pièces, deux pièces consécutives $\sigma(k)$ et $\sigma(k+1)$ vérifient les inégalités :

$$\min [t_{\sigma(k),p} ; t_{\sigma(k+1),q}] \leq \min [t_{\sigma(k),q} ; t_{\sigma(k+1),p}]$$

pour $1 \leq p \leq q \leq m$,

alors le temps total de fabrication ne diminue pas lorsqu'on transpose ces deux pièces dans la séquence σ .

Démonstration

Le lemme a été démontré pour $m=2$ au chapitre 1.

Nous allons le démontrer par récurrence. Nous le supposons donc vrai pour p machines, avec $p < m$, et nous démontrerons qu'il est alors vrai pour m machines.

Rappelons d'abord l'expression du temps mort total sur la dernière machine pour une séquence σ des pièces.

$$X_{nm}(\sigma) = \max_{(pj)} \left[\sum_{j=1}^{m-1} Y_{pj,j}(\sigma) \right]; \quad 1 \leq p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq n$$

$$\text{avec : } Y_{p,j}(\sigma) = \sum_{i=1}^p t_{\sigma(i),j} - \sum_{i=1}^{p-1} t_{\sigma(i),j+1}$$

La démonstration du lemme ne dépendant pas du numérotage des pièces, nous ferons cette démonstration pour la séquence :

$$S = [1, 2, \dots, k, k+1, \dots, n]$$

Nous supposons donc que les pièces k et k+1 vérifient les inégalités :

$$\min [t_{kp}, t_{k+1,q}] \leq \min [t_{k,q}; t_{k+1,p}]$$

pour $1 \leq p \leq q \leq m$

Si nous désignons par S' la séquence $[1, 2, \dots, k+1, k, \dots, n]$ nous aurons à comparer $X_{nm}(S)$ et $X_{nm}(S')$

Nous avons :

$$Y_{p,j}(S) = Y_{pj}(S') \quad \text{pour } p \neq k \text{ et } p \neq k+1 \text{ et pour tout } j.$$

$$Y_{kj}(S') = \sum_{i=1}^{k-1} t_{ij} + t_{k+1,j} - \sum_{i=1}^{k-1} t_{i,j+1}$$

$$Y_{k+1,j}(S') = \sum_{i=1}^{k+1} t_{i,j} - \sum_{i=1}^{k-1} t_{i,j+1} - t_{k+1,j+1}$$

Par suite, si nous comparons $X_{nm}(S)$ et $X_{nm}(S')$, nous n'aurons à comparer que les quantités :

$$f(\sigma) = \max_{\alpha, \beta, \gamma} \left[\sum_{j=1}^{\alpha} Y_{pj,j}(\sigma) + \sum_{j=\alpha+1}^{\beta} Y_{kj}(\sigma) + \sum_{j=\beta+1}^{\gamma} Y_{k+1,j}(\sigma) + \sum_{j=\gamma+1}^{m-1} Y_{pj,j}(\sigma) \right]$$

avec $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_{\alpha} \leq p_{\alpha+1} \leq \dots \leq n$.

pour $\sigma = S$ et $\sigma = S'$

Si nous supposons le lemme vrai pour un nombre de machines inférieur à m, il nous restera à comparer les quantités.

$$g(\sigma) = \max_{0 \leq \beta \leq m-1} \left[\sum_{j \leq \beta} Y_{kj}(\sigma) + \sum_j Y_{k+1,j}(\sigma) \right]$$

pour $\sigma = S$ et $\sigma = S'$

$$\text{Posons } A = \sum_{j=1}^{m-1} \left[\sum_{i=1}^{k+1} t_{ij} - \sum_{i=1}^{k-1} t_{i,j+1} \right]$$

Nous avons alors :

$$g(S) - A = \max_{0 \leq \beta \leq m-1} \left[- \sum_{j \leq \beta} t_{k+1,j} - \sum_{j > \beta} t_{k,j+1} \right]$$

$$g(S') - A = \max_{0 \leq \beta \leq m-1} \left[- \sum_{j \leq \beta} t_{kj} - \sum_{j > \beta} t_{k+1,j+1} \right]$$

Si nous posons $h(\sigma) = A - g(\sigma)$, nous avons :

$$h(S) = \min_{0 \leq \beta \leq m-1} \left[\sum_{j \leq \beta} t_{k+1,j} + \sum_{j > \beta} t_{k,j+1} \right]$$

$$h(S') = \min_{0 \leq \beta \leq m-1} \left[\sum_{j \leq \beta} t_{kj} + \sum_{j > \beta} t_{k+1,j+1} \right]$$

Les deux séquences de nombres $(t_{k,j})$ et $(t_{k+1,j})$ vérifient les conditions du lemme précédent. Ce lemme nous donne donc :

$$\text{D'où } X_{nm}(S) \leq X_{nm}(S')$$

Donc, si le lemme est vrai pour un nombre de machines inférieur à m , il est vrai pour m machines. Etant vrai pour $m=2$, le lemme est donc démontré.

Ce lemme nous donne alors, par une démonstration analogue à celle qui a été faite pour le théorème 1, le théorème suivant :

Théorème 2-4

Si la règle du théorème 1, appliquée à tous les couples de machines (k, ℓ) , avec $k < \ell$ donne le même ordre pour les pièces, cet ordre est optimum pour l'ensemble des m machines.

CHAPITRE 111

POSSIBILITE D'UNE METHODE DE MONTE-CARLO

3-1- Généralités

Une méthode de Monte-Carlo pour l'évaluation d'un nombre dont on possède une définition mathématique, est une méthode statistique obtenue en rattachant ce nombre à un schéma stochastique réalisable, de telle sorte que, d'un nombre suffisamment grand de réalisation de ce processus, on puisse déduire une estimation statistique du nombre en question. Dans le problème qui nous occupe, nous considérons une fonction d'une permutation σ de n objets, le temps total de fabrication des n pièces $T(\sigma)$; nous désirons évaluer le minimum de $T(\sigma)$. Le processus le plus simple pour cette estimation est le suivant

On affecte à chaque permutation σ la même probabilité $(1/n!)$ On prélève par tirage au sort 2 permutations σ_1 et σ_2 . On ne garde que la permutation σ_1 telle que :

$$T(\sigma_1) = \min [T(\sigma_0), T(\sigma_1)]$$

On prélève ensuite une deuxième permutation σ_2 et on ne garde que σ_2 telle que :

$$T(\sigma_2) = \min [T(\sigma_1), T(\sigma_2)]$$

et ainsi de suite.

Mais il nous faut voir d'abord si une telle méthode permet une bonne estimation, et, dans ce cas, quelle est le nombre minimum de réalisations de ce processus nécessaire pour obtenir une valeur de $T(\sigma)$ approchant le minimum dans des limites imposées. Pour cela, il nous faut obtenir la fonction de répartition de $T(\sigma)$, c'est-à-dire, la fonction $f(x)$ telle que :

$$f(x) = \text{Prob}[T(\sigma) \leq x]$$

Malheureusement, dans le cas général, il est quasi-impossible d'obtenir cette fonction. Aussi nous bornerons-nous à l'étude de $f(x)$ dans un cas particulier.

3-2- Cas étudié.

3-2-1- Nous ferons cette étude pour le problème à 2 machines dans le cas suivant :

les pièces sont au nombre de $2n$ et forment 2 groupes, les temps partiels d'usinage étant :

$$\left. \begin{array}{l} t_{i1} = a, \quad t_{i2} = b \quad \text{pour } 1 \leq i \leq n \\ t_{i1} = b, \quad t_{i2} = a \quad \text{pour } n+1 \leq i \leq 2n \end{array} \right\} 1$$

Nous supposons $a > b$

3-2-2- Simplifications faites :

a - Nous avons vu que le temps mort sur la deuxième machine était :

$$X_{2n}(S) = \max_{1 \leq p \leq 2n} Y_p(S)$$

avec

$$Y_p(S) = \sum_{i=1}^p t_{\sigma(i),1} - \sum_{i=1}^{p-1} t_{\sigma(i),2}$$

et $S = [\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n)]$

Si nous retranchons un même nombre k à tous les t_{ij} , nous voyons que $Y_p(S)$ est diminué de k , quels que soient p et S ; il en est donc de même pour $X_{2n}(S)$. Par suite nous ne changeons pas le problème.

Si nous multiplions par un même nombre $\lambda > 0$, $Y_p(S)$ est multiplié par λ , quels que soient p et S ; il en est de même de $X_{2n}(S)$. L'ordre des $X_{2n}(S)$, lorsque S varie, ne change pas. Nous ne changeons donc pas le problème.

Par suite nous pouvons remplacer les temps d'usinage donnés par (1), par :

$$\left. \begin{aligned} t_{i1} = 1 \quad t_{i2} = 0 & \quad \text{pour } 1 \leq i \leq n \\ t_{i1} = 0 \quad t_{i2} = 1 & \quad \text{pour } n+1 \leq i \leq 2n \end{aligned} \right\} (2)$$

puisque nous pouvons passer de (1) à (2) en retranchant b à tous les t_{ij} , en les multipliant ensuite par $\frac{1}{a-b} > 0$

Une permutation σ donnant le minimum de X_{2n} avec les t_{ij} donnés par (2), donnera aussi le minimum de X_{2n} avec les t_{ij} donnés par (1)

Nous poursuivrons donc l'étude avec les t_{ij} donnés par les formules (2).

b - Supposons que pour une séquence quelconque S des pièces, nous ayons :

$$X_{2n}(S) = Y_{p_0}(S) = \sum_{i=1}^{p_0} t_{\sigma(i),1} - \sum_{i=1}^{p_0-1} t_{\sigma(i),2}$$

alors nous avons :

soit $t_{\sigma(p_0),1} = 1$, et $t_{\sigma(p_0),2} = 0$, ce qui entraîne

$$Y_{p_0}(S) = \sum_{i=1}^{p_0} [t_{\sigma(i),1} - t_{\sigma(i),2}]$$

et $\sum_{i=1}^p [t_{\sigma(i),1} - t_{\sigma(i),2}] \leq Y_{p_0}(S) = X_{2n}(S)$, pour $p \neq p_0$

soit $t_{\sigma(p_0),1} = 0$ et $t_{\sigma(p_0),2} = 1$, mais alors, il existe $p_1 \neq p_0$

$$\text{tel que } Y_{p_1}(S) = Y_{p_0}(S)$$

$$\text{et } t_{\sigma(p_1),1} = 1, \quad t_{\sigma(p_1),2} = 0$$

Par suite, nous pouvons écrire $X_{2n}(S) = \max_{1 \leq p \leq 2n} Y'_p(S)$,
 en posant :

$$Y'_p(S) = \sum_{i=1}^p [t_{\sigma(i),1} - t_{\sigma(i),2}]$$

3-2-3- Permutations et arrangements des pièces

Puisque les pièces d'une même sorte sont identiques, si sur une permutation donnée S , quelconque, nous effectuons une permutation τ telle que la pièce i et la pièce $\tau(i)$ soient de la même sorte, quel que soit i , nous obtenons une séquence S' telle que $T(S) = T(S')$. Nous définissons ainsi une relation d'équivalence sur l'ensemble des séquences de pièces. Les classes d'équivalences contiennent le même nombre de séquences, soit $(n!)^2$ et leur nombre est

$$\frac{2^n n!}{n! n!} = C_{2n}^n$$

Nous appellerons arrangement des pièces une telle classe d'équivalence.

Dans le cas étudié, le temps total de fabrication n'est en fait fonction que de l'arrangement des pièces.

3-3- Méthode de tirage au sort d'un Arrangement des p-pièces

3-3-1- Méthode et Représentation Graphique :

D'après ce que nous venons de voir si nous affectons à chaque séquence de pièces la même probabilité, chaque arrangement aura la même probabilité $1/C_{2n}^n$.

Nous désirons une méthode permettant de tirer au sort un arrangement, tous les arrangements ayant la même probabilité d'être obtenus. Pour cela, nous pouvons procéder de la manière suivante

$t_{i1} = 1$ et $t_{i2} = 0$ par une boule blanche.

et chaque pièce telle que :

$t_{i1} = 0$ et $t_{i2} = 1$ par une boule noire.

Nous plaçons ces $2n$ boules dans une urne. Nous tirons successivement les $2n$ boules, sans remettre dans l'urne une boule tirée. Nous obtenons ainsi, à chaque tirage des $2n$ boules, un arrangement des pièces. Il est facile de vérifier que chaque arrangement a la même probabilité d'être obtenu.

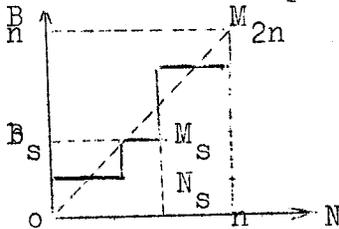
Effectuons le tirage au sort d'un arrangement. Affectons au tirage de la i^e boule ($1 \leq i \leq 2n$) les 2 variables aléatoires :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_i \text{ telle que } (x_i = 1 \text{ si la } i^e \text{ boule est blanche} \\ \phantom{x_i \text{ telle que }} x_i = 0 \text{ dans l'autre cas} \\ y_i \text{ telle que } (y_i = 1 \text{ si la } i^e \text{ boule est noire} \\ \phantom{y_i \text{ telle que }} y_i = 0 \text{ dans l'autre cas.} \end{array} \right.$$

Posons $B_p = \sum_{i=1}^p x_i$ et $N_p = \sum_{i=1}^p y_i$

B_p et N_p sont les nombres de boules blanches et noires, respectivement tirées au cours des p premiers tirages de boules.

Représentons graphiquement ce procédé. Soient ONB deux axes rectangulaires, M_p le point de coordonnées (N_p, B_p) sur ces axes. Au cours des $2n$ tirages de boules, le point M suit un chemin allant de 0 au point $M_{2n}(n, n)$



Ces chemins sont des lignes brisées partant de 0 et aboutissant à M_{2n} et formées de points intermédiaires $M_i(N_i, B_i)$ tels que l'on ait :

$$\begin{cases} \text{soit } N_{i+1} = N_i + 1 \\ \text{soit } N_{i+1} = N_i \\ \text{soit } B_{i+1} = B_i \\ \text{soit } B_{i+1} = B_i + 1 \end{cases}$$

Par la suite nous désignerons par chemin allant d'un point $A_1(N_1, B_1)$ à un point $A_2(N_2, B_2)$, avec $N_2 \geq N_1$ et $B_2 \geq B_1$, toutes les lignes brisées définies ci-dessus et allant de A_1 à A_2 .

Chaque arrangement des p pièces est représenté par un et un seul chemin allant de 0 à M_{2n} .

3-3-2- Représentation Graphique des $Y'_p(A)$

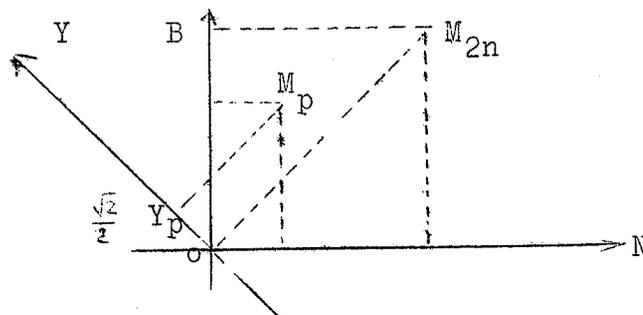
Soit l'arrangement obtenu par tirage au sort. Le temps mort total sur la 2^e machine correspondant à A, est :

$$X_{2n}(A) = \max_{1 \leq p \leq 2n} [B_p - N_p]$$

Il est évident en effet que :

$$Y'_p(A) = B_p - N_p$$

On peut représenter graphiquement les quantités $Y'_p(A)$ à un coefficient près ($\sqrt{2}/2$), par la projection du vecteur \vec{OM}_p sur un axe OY directement perpendiculaire à la diagonale \vec{OM}_{2n}



3-3-3- Interprétation graphique de $a_n^k = \text{Prob} [X_{2n}(\alpha) \leq k]$

Si nous avons :

$$X_{2n}(\alpha) = k$$

d'après ce qui précède, nous voyons que le point M_p , en suivant le chemin correspondant à α , a atteint au moins une fois la k^e parallèle à la diagonale OM_{2n} , parallèle située au-dessus de OM_{2n} , et sans dépasser cette parallèle

Par suite la quantité :

$$a_n^k = \text{Prob} [X_{2n}(\alpha) \leq k]$$

peut s'interpréter comme la proportion de chemins allant de 0 à $M_{2n}(n,n)$ et qui ne franchissent pas la k^e parallèle à OM_{2n} , située au-dessus de OM_{2n} . Nous désignerons par A_n^k le nombre de ces chemins. Nous avons évidemment :

$$a_n^k = \frac{A_n^k}{C_{2n}^n}$$

3-4- Evaluation de a_n^k

3-4-1- Relation de Recurrence sur A_n^k

Nous désignerons le nombre de chemins partant de 0, ne franchissant pas la k^e parallèle supérieure à la diagonale, et aboutissant au point de coordonnées (p,q) par

$$B_{p,q}^k \left[\text{si } p=q, \quad B_{p,q}^k = A_p^k \right]$$

soient	O'	le point de coordonnées	$(-1,0)$
	A		$(n,n+1)$
	B	_____	$(n-1,n+1)$
	C	_____	$(0,k+1)$
	D	_____	$(n-k-1,n)$
	C'	_____	$(-1,k)$
	D'	_____	$(n-k,n+1)$
	I	_____	$(-1,+1)$

La droite CD est $(k+1)^e$ parallèle supérieure à la diagonale. Cette droite passe par les pts C' et D'.

Nous voulons évaluer le nombre de chemins partant de 0, aboutissant en $M_{2n}(n,n)$ et ne franchissant pas CD. Nous voyons sur la figure que ce nombre est égal, en supposant $k > 1$,

- au nombre de chemins, partant de O', aboutissant en A et ne franchissant pas la droite C'D',
diminué

- du nombre de chemins partant de I, aboutissant en M_{2n} et ne franchissant pas C'D.

- du nombre de chemins partant de 0, aboutissant en B et ne franchissant pas CD'.

- du nombre de chemins partant de I, aboutissant en B et ne franchissant pas C'D'.

Interprétons maintenant ces quantités :
 Dans des axes d'origine O' et parallèles aux axes ONB, le point A a pour coordonnées (n+1, n+1) la droite C'D' est la k^e parallèle supérieure à la diagonale O'A. D'où le nombre de chemins partant de O', aboutissant en A et ne franchissant pas C'D' est A_{n+1}^k

Dans des axes d'origine I et parallèles à (ONB), le point M_{2n} a pour coordonnées : (n+1, n-1). la droite C'D est la (k-1)^e parallèle supérieure à la diagonale de ces axes. Donc le nombre de chemins partant de I, aboutissant à M_{2n} et ne franchissant pas C'D est $B_{n+1, n-1}^{k-1}$

On montrerait de même que le nombre de chemins partant de O, aboutissant en B et ne franchissant pas CD', est $B_{n-1, n+1}^{k+1}$

-le nombre de chemins partant de I, aboutissant en B et ne franchissant pas C'D' est A_n^{k-1}
 On a donc la relation :

$$A_n^{k+1} = A_{n+1}^k - B_{n+1, n-1}^{k-1} - B_{n-1, n+1}^{k+1} - A_n^{k-1} \quad (3)$$

Il est d'autre part facile de voir que :

$$\begin{cases} A_n^1 = A_{n+1}^0, \\ A_n^k = C_{2n}^n \quad \text{si } k \geq n \end{cases}$$

On peut de la même manière, établir les relations suivantes, (voir figures page 35).

$$B_{n+1, n-1}^k = B_{n+1, n}^k - A_n^k \quad (4)$$

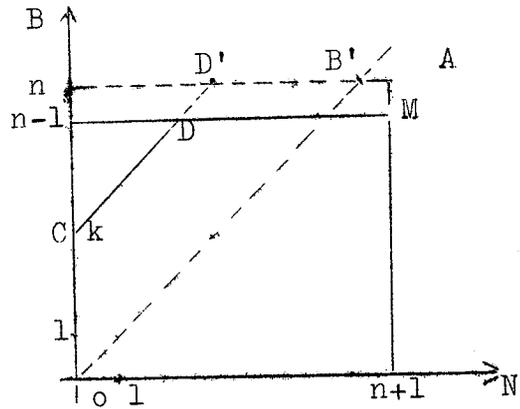
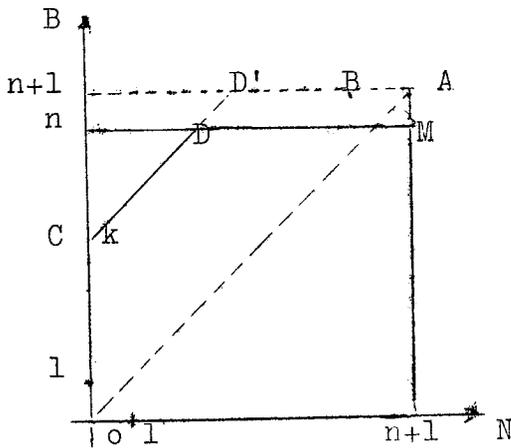
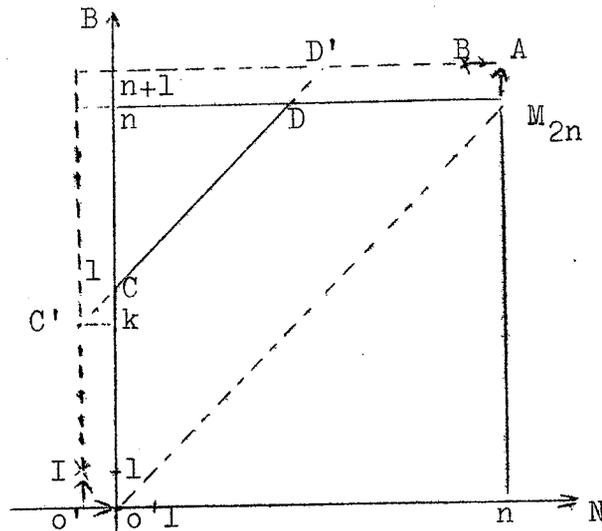
$$B_{n+1, n}^k = A_{n+1}^k - B_{n, n+1}^k, \quad B_{n+1, n}^0 = A_{n+1}^0 \quad (5)$$

$$\begin{aligned} B_{n-1, n+1}^k &= B_{n, n+1}^{k-1} - A_n^{k-2}, & B_{n-1, n+1}^0 &= A_n^{0-1} \\ & & B_{n-1, n+1}^1 &= A_n^0 \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} B_{n, n+1}^k &= A_{n+1}^{k-1} - B_{n+1, n}^{k-2}, & B_{n, n+1}^0 &= A_n^0 \\ & & B_{n, n+1}^1 &= A_{n+1}^0 \end{aligned} \quad (7)$$

A partir des relations (7) et (5), on obtient la relation :

$$(8) \quad B_{n, n+1}^k - B_{n, n+1}^{k-2} = A_{n+1}^{k-1} - A_{n+1}^{k-2}; \quad B_{n, n+1}^1 = A_{n+1}^0, \quad B_{n, n+1}^0 = A_n^0$$



$B_{n+1,n}^k$ = nombre de chemins partant de 0, ne franchissant pas CD et aboutissant à M.

$B_{n+1,n-1}^k$ = nombre de chemins partant de 0, ne franchissant pas CD et aboutissant à M.

A_{n+1}^k = nombre de chemins partant de 0, ne franchissant pas CD' et aboutissant à A (n+1, n+1).

$B_{n+1,n}^k$ = nombre de chemins partant de 0, ne franchissant pas CD' et aboutissant à A

$B_{n,n+1}^k$ = nombre de chemins partant de 0, ne franchissant pas CD' et aboutissant à B(n-1, n+1)

A_n^k = nombre de chemins partant de 0, ne franchissant pas CD' et aboutissant à B

$$A_{n+1}^k = B_{n+1,n}^k + B_{n,n+1}^k$$

$$B_{n+1,n}^k = A_n^k + B_{n+1,n-1}^k$$

La relation (4) nous permet d'écrire :

$$B_{n+1,n-1}^k - B_{n+1,n-1}^{k-2} = B_{n+1,n}^k - B_{n+1,n}^{k-2} - (A_n^k - A_n^{k-2}) \quad (9)$$

Les relations (9) et (5) nous donnent alors :

$$B_{n+1,n-1}^k - B_{n+1,n-1}^{k-2} = A_{n+1}^k - (B_{n,n+1}^k + B_{n+1,n}^{k-2}) - (A_n^k - A_n^{k-2}) \quad (10)$$

La relation (7) transforme (10) en :

$$B_{n+1,n-1}^k - B_{n+1,n-1}^{k-2} = A_{n+1}^k - A_{n+1}^{k-1} - (A_n^k - A_n^{k-2}) \quad (11)$$

pour $k = 1$ et $k = 0$, la relation (11) s'écrit :

$$\begin{aligned} B_{n+1,n-1}^1 &= A_{n+1}^1 - A_{n+1}^0 - A_n^1 \\ B_{n+1,n-1}^0 &= A_{n+1}^0 - A_n^0 \end{aligned}$$

Les relations (3) et (6) nous permettent d'écrire :

$$A_n^{k+1} = A_{n+1}^k - B_{n+1,n-1}^{k-1} - B_{n,n+1}^k \quad (12)$$

La relation (12) nous donne alors :

$$(13) \quad A_n^{k+1} - A_n^{k-1} = A_{n+1}^k - A_{n+1}^{k-2} - (B_{n+1,n-1}^{k-1} - B_{n+1,n-1}^{k-3}) - (B_{n,n+1}^k - B_{n,n+1}^{k-2})$$

Finalement, les relations (13), (8) et (11), nous permettent d'écrire :

$$(14) \quad \begin{cases} A_n^{k+1} - 2A_n^{k-1} + A_n^{k-3} = A_{n+1}^k - 2A_{n+1}^{k-1} + A_{n+1}^{k-2} \\ A_n^2 - A_n^1 = A_{n+1}^1 - 2A_{n+1}^0 \\ A_n^1 = A_{n+1}^0 \end{cases}$$

3-4-2- Résolution de la Relation (14)

- On a évidemment $A_n^n = C_{2n}^n$

D'autre part on voit facilement que $A_n^{n-1} = C_{2n}^{n-1} = C_{2n}^n - C_{2n}^0$

On peut assez facilement calculer A_n^{n-2} et A_n^{n-3} , les valeurs obtenues nous suggèrent de prendre pour A_n^k la valeur :

$$A_n^k = C_{2n}^n - C_{2n}^{n-k-1}$$

Un simple calcul montre que cette valeur A_n^k vérifie bien les formules (14).

Nous pouvons donc énoncer le résultat suivant :

Lemme 3-1

Dans le cas étudié, le temps mort $X_{2n}(\alpha)$ existant sur la 2^e machine est tel que :

$$\text{et Prob} \left[X_{2n}(\alpha) \leq k \right] = 1 - \frac{C_{2n}^{n-k-1}}{C_{2n}^n} \quad (0 \leq X_{2n}(\alpha) \leq n \quad n-k-1)$$

3-5- Etude de l'Evaluation du Minimum

3-5-1- Posons : $b_k = \text{Prob} \left[X_{2n}(\alpha_1) \geq k \right] = \frac{C_{2n}^{n-k}}{C_{2n}^n}$

Si nous tirons au sort un arrangement α_1 , nous aurons :

$$\text{Prob} \left[X_{2n}(\alpha_1) < k \right] = 1 - b_k$$

Si par un deuxième tirage au sort, indépendant du premier, nous obtenons un arrangement α_2 , nous aurons :

$$\text{Prob} \left[X_{2n}(\alpha_1) \geq k \text{ et } X_{2n}(\alpha_2) \geq k \right] = b_k^2 \text{ Prob} \left[X_{2n}(\alpha_1) \geq k \right] \times \text{Prob} \left[X_{2n}(\alpha_2) \geq k \right]$$

Comme les deux évènements $(X_{2n}(\alpha_1) \geq k \text{ et } X_{2n}(\alpha_2) \geq k)$

$$\text{et } (X_{2n}(\alpha_1) < k \text{ et } X_{2n}(\alpha_2) < k)$$

s'excluent

mutuellement, nous aurons :

$$\text{Prob} \left[X_{2n}(\alpha_1) < k \text{ ou } X_{2n}(\alpha_2) < k \right] = \text{Prob} \left[\min \left[X_{2n}(\alpha_1), X_{2n}(\alpha_2) \right] < k \right] = 1 - b_k^2$$

De même, si nous effectuons p tirages au sort indépendants et obtenons les arrangements $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$, (arrangements qui ne sont pas forcément tous distincts), nous aurons :

$$\text{Prob} \left[X_{2n}(\alpha_i) \geq k, \text{ pour } 1 \leq i \leq p \right] = b_k^p$$

et

$$\text{Prob} \left[\min_{1 \leq i \leq p} \left(X_{2n}(\alpha_i) \right) < k \right] = 1 - b_k^p$$

Nous avons donc le résultat suivant :

Lemme 3-2

Soient $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq p}$, p arrangements des pièces obtenus par p tirages au sort indépendants. La probabilité pour que le minimum du temps total de fabrication sur cet échantillon soit inférieur à n+k est :

$$\pi_k = \text{Prob} \left[\min_{1 \leq i \leq p} (T(\alpha_i)) < n+k \right] = 1 - \left[\frac{C_{2n}^{n-k}}{C_{2n}^n} \right]^p$$

3-5-2

Théorème 3-1

La probabilité pour que le minimum du temps total de fabrication, sur un échantillon de p arrangements de pièces, soit égal au minimum réel, est supérieure à $1 - \epsilon$ si l'on a

$$p \geq kn \quad \text{avec} \quad \log \frac{1}{\epsilon} \leq k \leq \frac{\log \frac{1}{\epsilon}}{\log 2}$$

Démonstration

Le minimum du temps total de fabrication est n. soient (α_i) les p arrangements de l'échantillon. L'égalité

$$\min_{1 \leq i \leq p} [T(\alpha_i)] = n$$

est équivalente à :

$$\min_{1 \leq i \leq p} [T(\alpha_i)] < n+1$$

D'où d'après le lemme 3-2 :

$$\text{Prob} \left[\min_{1 \leq i \leq p} \{T(\alpha_i)\} = n \right] = \pi_1 = 1 - \left[\frac{\binom{2n-1}{n}}{\binom{2n}{n}} \right]^p = 1 - \left(\frac{n}{n+1} \right)^p$$

Nous voulons que $\pi_1 > 1 - \xi$, c'est-à-dire :

$$\left(\frac{n}{n+1} \right)^p < \xi$$

Nous pouvons donc prendre $p \geq kn$ où l'on a :

$$k = \frac{\log \frac{1}{\xi}}{n \log \left(1 + \frac{1}{n} \right)}$$

$$k \text{ sera donc tel que } \log \frac{1}{\xi} \leq k \leq \frac{\log \frac{1}{\xi}}{\log 2}$$

Pour $\xi = 0,01$, nous avons $4,6 < k < 6,6$

CONCLUSION

Nous avons exposé deux aspects du problème : l'essai de généralisation d'une solution obtenue dans des cas particuliers et la résolution du problème par une méthode de Monte-Carlo. Le premier aspect a révélé des difficultés pratiquement insurmontables. Par contre, l'étude faite sur un cas particulier montre qu'une méthode de Monte-Carlo peut donner de bons résultats pour la résolution de ce problème. Une étude plus approfondie serait cependant nécessaire.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION	-----	Page	1
BIBLIOGRAPHIE	-----		2
CHAPITRE 1	Problème à 2 machines -----		3
	1 -----		3
	2 Calcul du temps total de fabrication ---		5
	3 Solution de Johnson -----		6
	4 Règle pratique de construction d'une séquence optimum -----		13
CHAPITRE 2	Problème à m machines -----		14
	1 Calcul du temps total de fabrication ---		14
	2 Problème à 3 machines -----		16
	3 Problème à m machines -----		22
CHAPITRE 3	Possibilité d'une méthode de Monte-Carlo		29
	1 Généralités -----		29
	2 Cas étudié -----		29
	3 Méthode de tirage au sort d'un arrange- ment des pièces -----		31
	4 Evaluation de a_n^k -----		33
	5 Etude de l'évaluation du minimum -----		37
CONCLUSION	-----		38
