



HAL
open science

Optimisation et auto-optimisation des systèmes de commande à données échantillonnées, en présence de saturations

Pierre L. Thellier

► **To cite this version:**

Pierre L. Thellier. Optimisation et auto-optimisation des systèmes de commande à données échantillonnées, en présence de saturations. Modélisation et simulation. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1962. tel-00277990

HAL Id: tel-00277990

<https://theses.hal.science/tel-00277990>

Submitted on 7 May 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

D'ORDRE :

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

POUR OBTENIR

LE DIPLÔME DE DOCTORAT D'ÉTAT

PAR

Pierre-L. THELLIER

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
INGÉNIEUR DU GÉNIE MARITIME DE PREMIÈRE CLASSE
MASTER OF SCIENCE

1^{re} THÈSE. — Optimisation et auto-optimisation des systèmes de commande à données échantillonnées, en présence de saturations.

2^e THÈSE. — Calculateurs arithmétiques en temps réel.

Soutenues le 196 devant le Jury

MM. FALLOT, *Président.*
KUNTZMANN }
PERRET } *Examineurs.*
PELEGRIN }

PARIS
IMPRIMERIE NATIONALE

1962

N° D'ORDRE :

THÈSES

PRÉSENTÉES

**A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE GRENOBLE**

POUR OBTENIR

LE DIPLÔME DE DOCTORAT D'ÉTAT

PAR

Pierre-L. THELLIER

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
INGÉNIEUR DU GÉNIE MARITIME DE PREMIÈRE CLASSE
MASTER OF SCIENCE

1^{re} THÈSE. — Optimisation et auto-optimisation des systèmes de commande à données échantillonnées, en présence de saturations.

2^e THÈSE. — Calculateurs arithmétiques en temps réel.

Soutenues le 196 devant le Jury

MM. FALLOT, *Président.*
KUNTZMANN
PERRET } *Examineurs.*
PELEGRIN }

**PARIS
IMPRIMERIE NATIONALE**

1962

Cette thèse a été éditée par le *Mémorial de l'Artillerie française* dans son 3^e fascicule de 1961. Les présents tirés à part ont conservé la pagination du dit fascicule.

OPTIMISATION ET AUTO-OPTIMISATION DES SYSTÈMES DE COMMANDE À DONNÉES ÉCHANTILLONNÉES, EN PRÉSENCE DE SATURATIONS

PAR

M. P.-L. THELLIER,

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
INGÉNIEUR DU GÉNIE MARITIME DE 1^{re} CLASSE
MASTER OF SCIENCE

Résumé. — *Dans cette étude, nous développerons une méthode de synthèse de compensateur arithmétique destiné à compenser un asservissement comportant un élément saturant.*

En limitant la valeur efficace du signal saturant, nous pourrons remplacer le système non linéaire par un équivalent linéaire.

Les résultats obtenus sont ensuite appliqués à un problème pratique. Les performances obtenues sont comparées à celles d'un correcteur analogique, travaillant dans les mêmes circonstances d'optimisation.

Enfin, nous procédons à l'étude d'un système auto-optimisé, c'est-à-dire qui s'adapte aux conditions extérieures variables pour se trouver dans des circonstances de travail optimales.

Les résultats expérimentaux obtenus y sont présentés.

INTRODUCTION

1950, Norbert WIENER, le père de la cybernétique, publie son livre (30) sur la théorie de l'optimisation.

Cinq années de guerre viennent à peine de s'achever, cinq années de calamités qui viennent de donner à la science, un essor prodigieux. La théorie des asservissements, essence même du développement de la poursuite automatique radar, des pilotes automatiques d'avions, d'un rêve encore assez vague à l'époque, les fusées téléguidées, passe du balbutiement expérimental au stade de science.

Quelques grands noms se dessinent : BODE, NYQUIST, SHANNON, EVANS, NICHOLS, WIENER, LEE.

L'ouvrage de WIENER, comme il le dit dans sa préface, est la publication au grand jour des travaux secrets qu'il a effectués pour le compte du Comité de Recherche pour la Défense nationale. En fait, c'est plus qu'un ouvrage scientifique, c'est le manifeste d'une conception nouvelle de la connaissance des phénomènes.

Jusqu'à cette époque, l'analyse et la synthèse des asservissements se faisaient en mettant à leur entrée, soit une sinusoïde (analyse fréquentielle), soit un échelon de position, vitesse ou accélération (analyse temporelle), c'est-à-dire que le signal d'entrée était assimilé à une sinusoïde ou à un polynôme. Quant à la question du bruit entachant le signal, on l'évudait en supposant l'existence d'une certaine indétermination.

L'idée de décrire un signal et un bruit par leurs propriétés statistiques en amplitude et en fréquence, est peut-être née de l'étude de la poursuite automatique radar (je dis peut-être, car l'idée était en l'air à l'époque et elle a pu aussi bien venir de l'étude de problèmes de communications). En effet, dans ce cas, le radar essaye de rester pointé sur but en utilisant comme information, l'écart angulaire axe-radar-but. Le mouvement du but est indéterminé car il traduit la liberté du pilote; cependant, cette liberté n'est pas totale, car l'avion ne peut évoluer que par échelons d'accélération d'amplitude et de fréquence limitées. Ce mouvement appartient donc à une certaine classe de fonctions aléatoires. D'autre part, ce signal est entaché d'un bruit, bruit thermodynamique, des tubes du récepteur radar, bruit de scintillation d'écho, bruit éventuel de scanning. Ce bruit s'étale sur une certaine bande de fréquence et comme il est aléatoire, il est nécessaire de le décrire par sa probabilité d'amplitude et de fréquence.

Ainsi naissait la conception qu'un asservissement puisse travailler dans des conditions imprévisibles.

L'optimisation est une méthode qui permet d'obtenir mathématiquement la formule littérale du filtre ou du correcteur optimum d'une boucle d'asservissement, quand on prend pour critère la minimisation de la valeur efficace de la différence entre la sortie du système et la sortie désirée.

Cette méthode, très séduisante pour l'esprit est un *compromis* qui permet de traiter par les mathématiques, les asservissements et filtres conçus sous l'angle statistique. En effet, WIENER est obligé d'introduire la notion de stationnarité et d'ergodicité des signaux aléatoires mis en jeu. Cette faiblesse devait donner lieu, quelques dix ans plus tard, à un essai, à un rattrapage qui a nom l'auto-optimisation; nous y reviendrons plus tard.

Certains auteurs ont écrit : « L'intérêt pratique direct des méthodes d'optimisation est à notre avis très faible ». Beaucoup d'ingénieurs pensent comme eux. Ceci n'est pas étonnant. En effet, la détermination des caractères statistiques des signaux d'entrée, l'analyse des spectres de bruit, l'exécution des calculs d'optimisation nécessitent un laboratoire de calcul très développé. Ceci est souvent un obstacle. Depuis deux ans (27), nous avons appliqué cette méthode au guidage des engins et avant nous, BURT (3), STEWART (24), LEFEVRE (15) l'ont utilisée et elle nous a conduit à des résultats expérimentaux en parfait accord avec la théorie.

Nous adresserons, cependant, deux reproches à cette théorie :

Primo. — Elle ne tient pas compte de l'aspect physique du système, en ce qu'elle fait apparaître en certains points des signaux de valeur efficace infinie. NEWTON (18) a remédié à cette lacune en introduisant des contraintes, permettant de tenir compte des saturations.

Secundo. — Elle ne permet pas de traiter le cas des signaux aléatoires non stationnaires. L'auto-optimisation est un remède qui ne peut être considéré que comme un premier pas vers la théorie des systèmes non linéaires à entrées non stationnaires. L'intérêt des systèmes auto-optimisés est grand; c'est celui des systèmes qui s'adaptent de façon optimale à des conditions extérieures variables.

Vers la même époque, SHANNON (20) publiait son fameux théorème : « Un signal n'ayant aucune composante de fréquence supérieure à fc , peut être complètement caractérisé par des prélèvements de fréquence supérieure ou égale à $2fc$ ». Ce théorème, bien des gens le connaissent, quelques-uns l'ont compris, peu ont le courage de l'appliquer. A lui seul, il représente la victoire de l'échantillonné sur le continu, du calculateur arithmétique sur l'analogique. En effet, alors qu'un calculateur analogique doit disposer du signal d'entrée de façon continue, le calculateur arithmétique ne nécessite que des prélèvements périodiques. Le temps de calcul étant, en général, faible comparé à la période d'échantillonnage, le calculateur peut faire autre chose entre temps. Cette autre chose peut être, soit des calculs d'auto-optimisation, impensables en analogique, soit le contrôle de plusieurs systèmes identiques ou différents. Par malheur, beaucoup d'esprits ignorants utilisent le calculateur arithmétique en ligne comme un calculateur analogique imparfait. Ce qui a pour effet de le rendre cher et de porter le discrédit sur une technique que nous considérons comme révolutionnaire.

Le théorème de SHANNON, c'est aussi la naissance d'une science nouvelle : l'étude des systèmes à données échantillonnées. Deux écoles, l'une à l'Université de Columbia avec RAGAZZINI, l'autre à l'Université de Berkeley avec JURY ont lutté de vitesse pour mettre au point une théorie mathématique permettant l'analyse et la synthèse des systèmes à données échantillonnées. Leur travail était facilité par le fait que beaucoup de théories du domaine continu sont transposables dans le domaine échantillonné. Malgré tout, on reste étonné par le travail accompli dans ce domaine, qui s'est concrétisé par la sortie, à quelques mois d'intervalle, de deux livres (11-21) vers la fin 1958. Ces livres, pour complets qu'ils soient, ne traitent pas, ou d'une façon sommaire, l'analyse statistique et l'optimisation des systèmes échantillonnés. Il y a deux ans, rien ou presque n'existait dans ce domaine. Il fallut inventer. Depuis lors, un grand nom s'est révélé : celui de CHANG (4-5) de l'Université de Columbia. Souvent ses idées m'ont été d'un grand secours; souvent, aussi j'ai lu avec dépit dans ses articles une idée que je m'apprêtais à publier.

Le travail qui suit est le résultat partiel de deux années de recherches mathématiques et d'expériences. Nous abordons successivement le problème de l'optimisation d'une boucle d'asservissement, à l'aide d'un correcteur arithmétique linéaire dans le cas où l'entrée est un phénomène aléatoire stationnaire ergodique, entaché d'un bruit, puis celui de l'auto-optimisation dans le cas où la limite de saturation varie au cours du temps ainsi que le niveau bruit.

Tant sur le plan expérimental que mathématique, nous n'avons pas épuisé le sujet. Mais nous tenons à prévenir les chercheurs futurs : seule la possibilité que nous avons d'utiliser le Laboratoire de calcul de l'Armée, qui dispose d'une 650 IBM et le Laboratoire de calcul analogique de la Marine à Ruelle, nous a permis de venir à bout des calculs d'optimisation.

EXPLICATION DES NOTATIONS

Les lettres minuscules représentent en général des fonctions du temps :

$r(t)$: signal fonction du temps;

$r^*(t)$: signal échantillonné;

$\overline{r^m(t)}$: valeur moyenne de $r^m(t) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{2T_0} \int_{-T_0}^{+T_0} r^m(t) dt$;

$\varphi_{rr}(\tau)$: fonction d'autocorrélation du signal

$$r(t) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{2T_0} \int_{-T_0}^{+T_0} r(t) \cdot r(t + \tau) dt$$

Les lettres majuscules représentent en général des transformées de Laplace

$R(s)$: $L[r(t)] =$ transformée de Laplace de $r(t)$; la transformée inverse se note $r(t) = L^{-1}[R(s)]$;

$R^*(z)$: transformée en Z de $r(t)$ ou de $R(s)$; se note $Z[R(s)]$;

$R^*(z, m)$: transformée en Z modifiée de $r(t)$ ou de $R(s)$; se note $Zm[R(s)]$;

$\Phi_{rr}(s)$: spectre de densité de puissance de $r(t)$; c'est aussi la transformée de Laplace bilatérale de $\varphi_{rr}(\tau)$;

$\Phi_{rr}^*(z)$: spectre de densité de puissance de $r^*(t)$; c'est aussi la transformée en Z bilatérale de $\varphi_{rr}(\tau)$.

$z = e^{sT}$;

T : période d'échantillonnage;

$P_r(x)$: densité de probabilité. $P_r(x) dx$ représente la probabilité de trouver le signal $r(t)$ dans l'intervalle $(x, x + dx)$;

$\oint G^*(z) dz$: intégrale de contour le long du cercle unité centré à l'origine dans le plan Z .

CHAPITRE PREMIER

RAPPEL SUR LES COMPENSATEURS ARITHMÉTIQUES ET LES SYSTÈMES À DONNÉES ÉCHANTILLONNÉES

§ 1.0. Introduction

Il y a dix ans environ, la théorie des systèmes échantillonnés se séparait de celle des systèmes continus. Depuis lors, de nombreux articles ont été écrits sur le sujet, trois livres ont été publiés aux États-Unis (11-21-28), un en Russie et un timide essai en France (8). De ce fait, en dehors de quelques définitions destinées à rafraîchir la mémoire du lecteur, nous passerons très rapidement sur les transformations en Z et Z modifiée, que nous considérons comme classiques. Par contre, en raison de la divergence de point de vue existant entre les quelques auteurs qui se sont intéressés à l'analyse statistique des systèmes échantillonnés, nous nous attarderons plus longuement sur les notions de fonction d'autocorrélation et de densité spectrale.

§ 1.1. Définition d'un système à données échantillonnées

Un système à données échantillonnées, encore appelé à information discrète, est celui qui reçoit des signaux à intervalles de temps constants et rien entre les intervalles. Les systèmes à information discrète, pratiquement inconnus il y a dix ans, ont vu leur domaine scientifique et leur domaine technique s'étendre de façon étonnante en raison de la diffusion des calculateurs arithmétiques en ligne ⁽¹⁾.

L'échantillonnage d'une information apparaît soit par nécessité physique (signal de sortie d'un radar de veille : la période d'échantillonnage est égale au temps mis par l'antenne pour faire un tour), soit parce que l'échantillonnage est rendu désirable par l'utilisation d'un calculateur arithmétique (un calculateur à haute fréquence d'échantillonnage peut contrôler plusieurs asservissements).

⁽¹⁾ Une calculatrice arithmétique en ligne, encore appelée au temps réel, est une calculatrice qui reçoit, traite et émet des informations relatives à des événements en cours pour lesquels la variable temps ne peut-être modifiée soit par une dilatation, soit par une translation.

§ 1.2. Quelques rappels sur la transformation en Z et la transformation en Z modifiée

1.21. TRANSFORMÉE EN Z. — Soit $r(t)$ une fonction continue du temps définie pour $t > 0$ et ayant une transformée de Laplace $R(s)$. La fonction $r^*(t)$ échantillonnée est formée d'impulsions de largeur faible « h » et de hauteur $r(nT)$. On remplace ces impulsions par des impulsions de Dirac de largeur infiniment petite, de hauteur infinie et d'aire $r(nT)$. Le gain « h » est reporté sur l'élément analogique suivant.

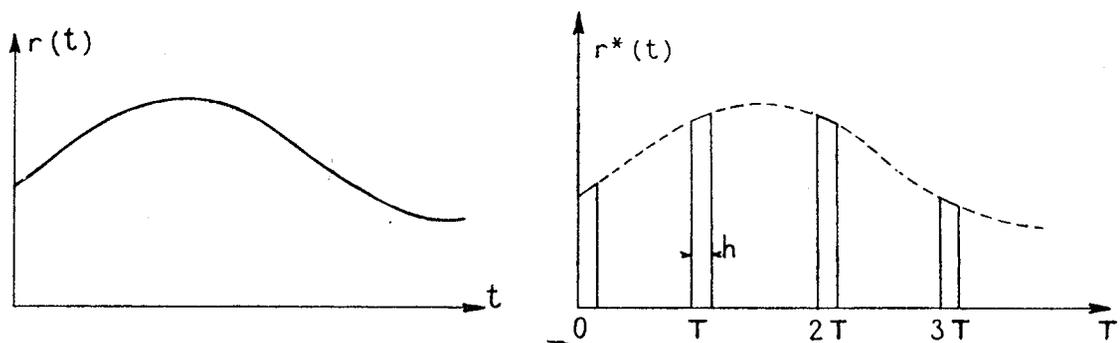


Fig. 1.1. — Fonction continue du temps $r(t)$ et fonction échantillonnée $r^*(t)$

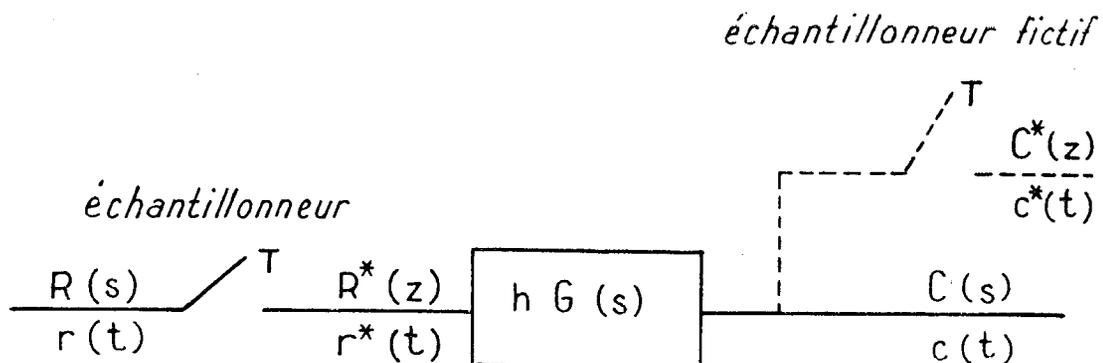


Fig. 1.2

La transformée en Z n'est rien d'autre qu'une transformée de Laplace, d'une fonction du temps, échantillonnée, dans laquelle $z = e^{sT}$. On démontre que $L[r^*(t)]$ est une fraction rationnelle de e^{sT} , si $R(s)$ est une fraction rationnelle de s .

Nous pouvons écrire :

$$r^*(t) = r(0) \delta(t) + r(T) \delta(t - T) + \dots + r(nT) \delta(t - nT) + \dots$$

n entier positif.

$\delta(t)$ impulsion de Dirac.

La transformée de Laplace de $r^*(t)$ s'écrit :

$$L[r^*(t)] = \sum_{n=0}^{+\infty} r(nT) e^{-snT}.$$

Posons : $z = e^{sT}$.

$$L[r^*(t)] = \sum_{n=0}^{+\infty} r(nT) z^{-n} = R^*(z)$$

$R^*(z)$ est appelée transformée en Z de $r(t)$ ou de $R(s)$.
Nous rappelons les égalités :

$$R^*(z) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} R(s + jn\omega_r) \quad \omega_r = 2\pi / T, \quad n \text{ entier.}$$

$$C^*(z) = R^*(z) \cdot G^*(z).$$

On trouvera dans les références (11-21-28) des tables de transformées en Z directes et inverses.

1.22. TRANSFORMÉE EN Z MODIFIÉE. — La sortie $c(t)$ de l'élément $G(s)$ excité par les impulsions $r^*(t)$ est continue. Malheureusement, la transformée $C^*(z)$ donne les valeurs de la fonction aux instants d'échantillonnage seulement. Quant à $C(s)$, transformée de Laplace de $c(t)$, elle est quasiment inutilisable car c'est une fonction rationnelle de s et e^{sT} .

Une des grandes idées du Professeur JURY fut d'introduire un retard fictif et variable ΔT . En faisant varier Δ ($0 < \Delta < 1$), on décrit l'intervalle compris entre nT et $(n+1)T$. En faisant varier n , on décrit toute la fonction

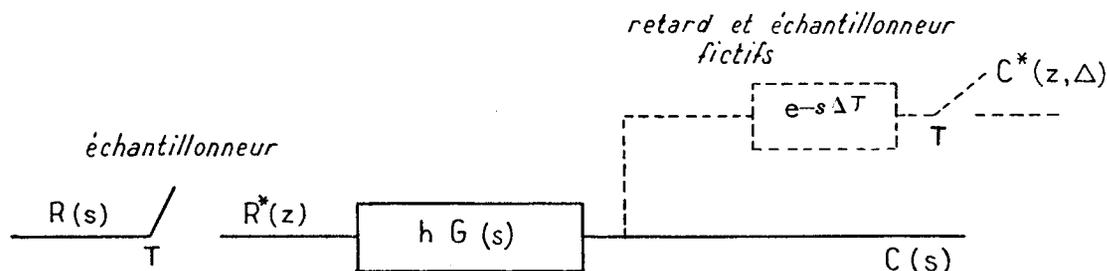


Fig. 1.3

Dans ces conditions :

$$C^*(z, \Delta) = \sum_{n=0}^{+\infty} c(nT - \Delta T) z^{-n} = z^{-1} \sum_{n=0}^{+\infty} c(nT + mT) z^{-n}$$

en posant :

$$m = 1 - \Delta, \quad 0 \leq m \leq 1, \quad t = (n + m - 1) T.$$

On trouvera dans la référence (11) des tables de transformées en (z, m) directes et inverses.

Nous rappelons les égalités :

$$C^*(z, m) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C(s + jn\omega_r) e^{-(s + jn\omega_r)(1-m)T}$$

$$C^*(z, m) = R^*(z) \cdot G^*(z, m).$$

On remarquera que $C^*(z, m)$ et $C(s)$ sont deux expressions de la transformée de Laplace d'une même fonction continue de temps.

$C^*(z, m)$ est donc soumis aux mêmes règles que $C(s)$.

1.23. COMPENSATEUR ARITHMÉTIQUE LINÉAIRE. — Le compensateur arithmétique n'est qu'un cas particulier des systèmes échantillonnés. Nous en donnerons la définition suivante :

Un compensateur arithmétique linéaire est un système qui délivre en sortie un signal constant pendant le temps $nT \leq t < (n + 1) T$.

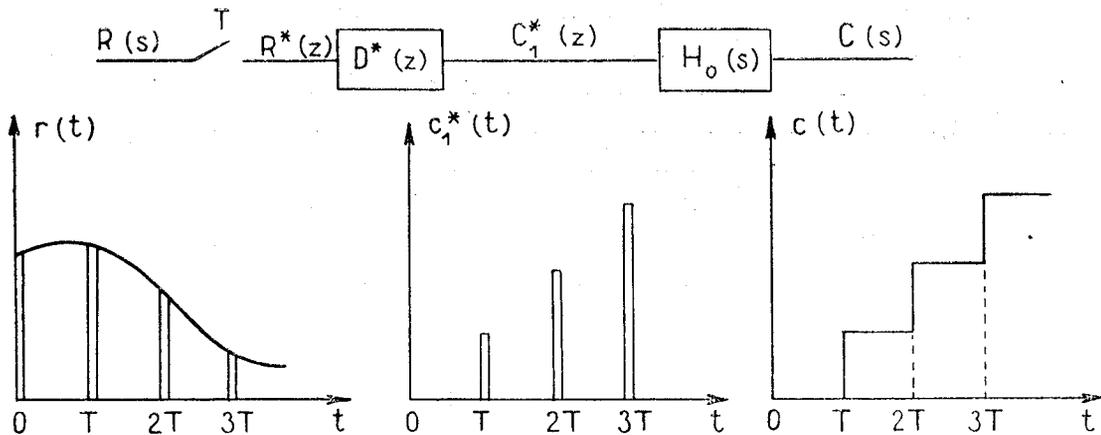


Fig. 1.4. — Évolution et transformation du signal $r(t)$ à travers un compensateur arithmétique

Ce signal de sortie entre nT et $(n + 1) T$, à un retard constant près correspondant au temps de calcul, est une fonction linéaire du signal de sortie aux instants $(n - 1) T \dots (n - p) T$ et du signal d'entrée aux instants $nT \dots (n - m) T$, p et m entiers tels que $p \geq m$.

On représente symboliquement un tel système par le schéma de la figure 1.4.

$$D^*(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_m z^{-m}}{1 + b_1 z^{-1} + \dots + b_p z^{-p}} e^{-\delta s T}$$

$e^{-\delta s T}$ retard relatif au temps de calcul.

$H_0(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s}$: circuit bloqueur d'ordre zéro qui maintient la sortie constante entre nT et $(n + 1)T$.

Cette représentation est évidente si l'on considère que l'opérateur $z^{-1} = e^{-sT}$ représente un retard d'une période et que :

$$C^*(z) = R^*(z) \cdot D^*(z).$$

§ 1.3. Fonction d'autocorrélation et densité spectrale des signaux échantillonnés

Nous supposons acquise la notion de fonction d'autocorrélation et de densité spectrale pour les signaux continus.

Nous supposons aussi que tout signal continu appartient à un ensemble de fonctions aléatoires stationnaires et ergodiques, c'est-à-dire que les fonctions de distribution de probabilité sont indépendantes de l'origine du temps et que les moyennes temporelles prises sur une fonction sont égales aux moyennes prises sur l'ensemble des fonctions.

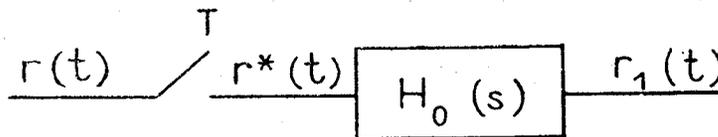


Fig. 1.5

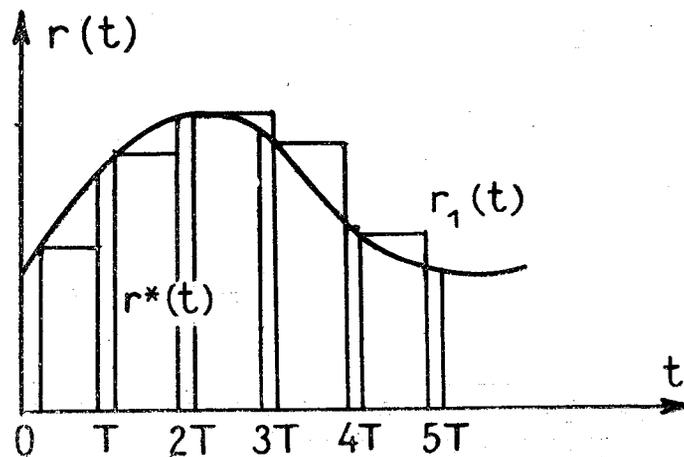


Fig. 1.6. — Représentation des divers signaux de la fig. 1.5

Soit donc $r(t)$ un signal aléatoire stationnaire ergodique, défini par ses fonctions de densité de probabilité :

- $r^*(t)$: le signal échantillonné;
- $H_0(s)$: un circuit bloqueur d'ordre zéro;
- $r_1(t)$: la fonction en marche d'escalier, sortie de $H_0(s)$ [voir fig. 1.5-6];
- $P_r(x) \cdot dx$: probabilité de trouver $r(t)$ dans l'intervalle $x - x + dx$.

Aux instants $t = nT$, n entier, nous avons :

$$P_{r^*}(x) = P_r(x).$$

Mais aux instants tels que :

$$nT + h < t < (n+1)T$$

h : largeur des impulsions.

La fonction de densité de probabilité de :

$$r^*(t)$$

se réduit à la fonction de Dirac :

$$\delta(x).$$

De ce fait, la fonction $r^*(t)$ n'a pas le caractère de stationnarité de $r(t)$ car ses fonctions de probabilité dépendent de l'origine du temps.

Cependant, si nous considérons la séquence $r_s(nT)$, nous retombons sur un phénomène aléatoire stationnaire pour lequel :

$$Pr_{s(nT)}(x) = P_{r(nT)}(x) = P_{r(t)}(x).$$

Montrons que les valeurs moyennes des puissances de $r(t)$, $r_s(nT)$ et $r_1(t)$ sont égales :

$$\overline{r^m(t)} = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{2T_0} \int_{-\infty}^{+\infty} r^m(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x^m P_r(x) dx$$

$$\overline{r_s^m(t)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{+N} r_s^m(nT) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^m P_r(x) dx = \overline{r^m(t)}$$

$$\overline{r_1^m(t)} = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{2T_0} \int_{-T_0}^{+T_0} r_1^m(t) dt = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{+N} r^m(nT) = \overline{r^m(t)}.$$

On n'oubliera pas que $\overline{r^{*m}(t)}$ n'en diffère que par un facteur constant dépendant de la largeur des impulsions (12).

Résultat très important que nous utiliserons par la suite l'échantillonnage et le passage à travers un circuit bloqueur d'un signal aléatoire stationnaire, ergodique ne change pas sa valeur efficace.

En gardant à l'esprit les précautions à prendre en raison du caractère non stationnaire de $r^*(t)$, on introduit la notion de fonction d'autocorrélation de signal échantillonné comme une moyenne dans le temps.

$$\varphi_{r^*r^*}(\tau) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{2T_0} \int_{-T_0}^{+T_0} r^*(t) r^*(t+\tau) dt.$$

En utilisant la formule suivante (21, p. 253) :

$$\varphi_{rr}(\tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{+N} r(nT) r(nT + \tau).$$

On démontre que :

$$\varphi_{r^* r^*}(\tau) = \frac{1}{T} \varphi_{rr}^*(\tau) = \frac{1}{T} \sum_{K=-\infty}^{+\infty} \varphi_{rr}(KT) \delta(t - KT).$$

La notion de spectre de puissance ou de densité spectrale s'introduit de la même manière que dans le domaine continu, mais cette fois-ci la transformée de Laplace bilatérale devient la transformée en Z bilatérale (appendice I).

$$\Phi_{rr}^*(z) = \frac{1}{T} \sum_{K=-\infty}^{+\infty} \varphi_{rr}(KT) z^{-K}.$$

La transformée en Z n'étant qu'un cas particulier de la transformée de Laplace, les formules relatives aux densités spectrales dans le domaine continu sont applicables à celles de signaux échantillonnés.

Par conséquent, la fonction d'autocorrélation ou la densité spectrale du signal de sortie du correcteur signal en marche d'escalier, s'obtiennent aisément à partir de celle du signal échantillonné.

§ 1.4. Conclusion

Afin de ne pas transformer cet ouvrage en un travail de compilation, nous avons été obligés de donner un résumé très succinct. Les transformées en Z et Z modifiée sont devenues classiques. Leurs définitions ne sont pas sujettes à contestation. Il n'en est pas de même des définitions des fonctions d'autocorrélation et des densités spectrales qui peuvent différer d'un facteur T ou T². Nous avons donc précisé les définitions et nous renvoyons le lecteur aux références suivantes (11-21-28) pour plus d'informations.

CHAPITRE II

CHOIX DE LA PÉRIODE DE PRÉLÈVEMENT
 FILTRAGE AVANT ÉCHANTILLONNAGE
 D'UN SIGNAL ENTACHÉ DE BRUIT

§ 2.1. Choix de la période de prélèvement

Le choix de la période de prélèvement du signal d'entrée dans un calculateur arithmétique est un choix fondamental.

En effet, si la période T est prise trop grande, il y aura perte d'une partie des informations portée par le signal d'entrée. Si la période est trop petite, il y aura encombrement inutile des mémoires, augmentation du temps de calcul sans accroissement bénéfique des performances du système; sur le plan mathématique ou physique, ce gaspillage d'information peut apparaître comme secondaire, il ne l'est pas sur le plan économique; en effet, si l'on veut qu'un calculateur arithmétique en ligne, dont le prix minimum est aux environs de 1 million de NF, puisse entrer en compétition avec un calculateur analogique sur le plan économique, il faut que ses possibilités soient utilisées au maximum.

La détermination de T , qui nécessite la connaissance du spectre du signal d'entrée, se fait à l'aide du théorème de Shannon (20) qui s'énonce ainsi :

« Un signal n'ayant aucune composante de fréquence supérieure à ω_c peut être complètement caractérisé par des prélèvements de période inférieure ou égale à $\frac{\pi}{\omega_c}$ (ω_c en rad/sec.).

On en déduit immédiatement qu'il est possible *théoriquement* de reconstituer un signal de largeur de bande ω_c à partir du signal échantillonné si la fréquence de prélèvement est supérieure à $\frac{\omega_c}{\pi}$.

Tous ces résultats sont illustrés par la fig. 2.1. En effet, on démontre (1.1, p. 635) que l'échantillonnage engendre des hautes fréquences symétriques du spectre du signal continu par rapport aux droites :

$$\omega = (2k + 1) \frac{\omega_r}{2} \quad (k \text{ entier positif négatif ou nul});$$

$$\omega_r = \frac{2\pi}{T}.$$

Nous voyons donc que si :

$$\frac{\omega_r}{2} > \omega_c$$

il n'y a pas déformation du spectre dans l'intervalle $\left[-\frac{\omega_r}{2}, \frac{\omega_r}{2}\right]$ et l'on peut espérer à l'aide d'un filtre idéal à déphasage nul et à spectre rectangulaire, dit filtre cardinal, reconstituer le signal d'origine.

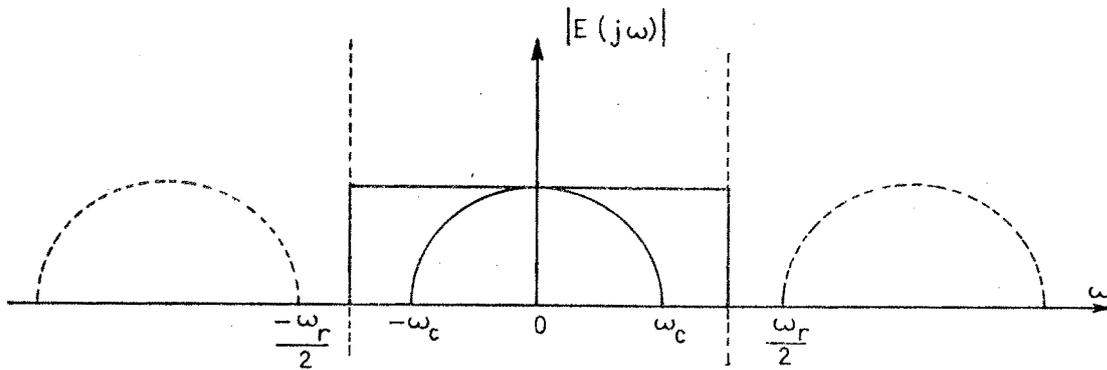


Fig. 2.1. — Spectre d'un signal échantillonné

§ 2.2. Filtrage avant échantillonnage d'un signal entaché de bruit

Supposons maintenant que la période d'échantillonnage T ait été déterminée et que le signal d'entrée soit entaché d'un bruit.

Le signal d'entrée $s(t)$ est un phénomène aléatoire stationnaire ergodique de densité spectrale $\Phi_{ss}(s)$ de fréquence de coupure ω_c .

Le bruit $n(t)$ est un phénomène de même nature que le signal. Nous le supposons blanc sur un grand intervalle fréquentiel; en d'autres termes, sa densité spectrale est :

$$\Phi_{nn}(s) = k^2 \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - s^2}$$

ω_0 mal connu, mais très grand devant $\omega_r = \frac{2\pi}{T}$.

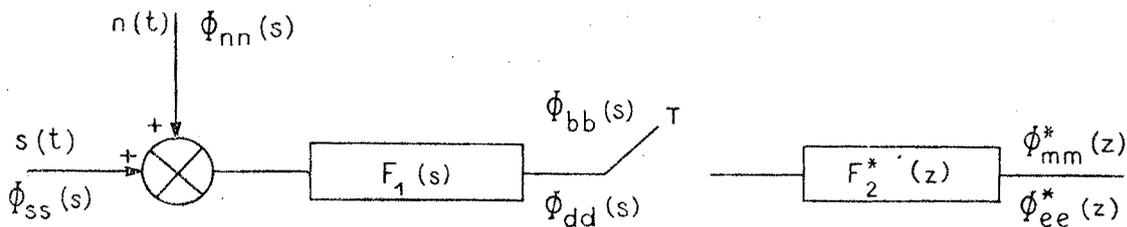


Fig. 2.2. — Signal entaché d'un bruit

Nous allons montrer :

a. Que l'échantillonnage sans filtrage d'un signal entaché d'un bruit peut avoir des conséquences catastrophiques entraînant la disparition totale du signal dans le bruit;

b. Qu'en disposant un filtre analogique simple $F_1(s)$, on peut éviter cet inconvénient;

c. Qu'un filtre arithmétique simple $F_2^*(z)$ permet, avec une bonne approximation, d'éliminer les déformations du spectre du signal causées par $F_1(s)$.

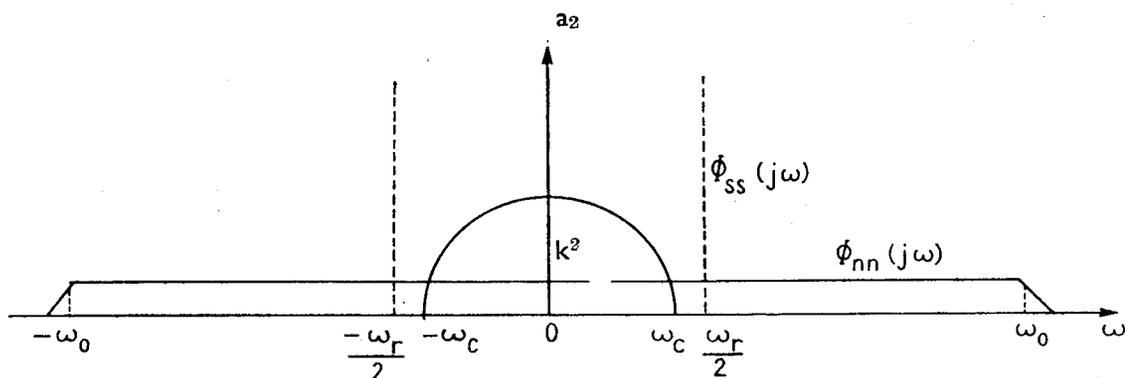


Fig. 2.3. — Densités spectrales du signal et du bruit

2.21. ÉCHANTILLONNAGE SANS FILTRAGE D'UN SIGNAL ENTACHÉ D'UN BRUIT. — Nous allons montrer que pour peu que ω_0 , fréquence de coupure du bruit, soit grande devant ω_r , le signal après échantillonnage est noyé dans le bruit et devient indiscernable.

2.211. *Densité spectrale de $s(t)$* . — Nous pouvons écrire la densité spectrale de $s(t)$ sous la forme :

$$\Phi_{ss}(s) = F(s) + F(-s)$$

$F(s)$ partie de $\Phi_{ss}(s)$ ayant tous ses pôles dans la partie gauche du plan des s .

La densité spectrale du signal échantillonné s'écrit :

$$\begin{aligned} \Phi_{ss}^*(s) &= \frac{1}{T} \left[\frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F(s + jk\omega_r) + \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F(-s + jk\omega_r) \right] \\ &= \frac{1}{T^2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Phi_{ss}(s + jk\omega_r). \end{aligned}$$

Nous voyons qu'à un facteur T^2 près le spectre du signal échantillonné est formé du spectre du signal continu et de tous les symétriques par rapport

aux droites $\omega = (2k + 1) \frac{\omega_r}{2}$. Comme la période de prélèvement a été choisie telle de $\frac{\omega_r}{2} > \omega_c$ il n'y aura pas de déformation de la densité spectrale entre $-\omega_c$ et ω_c .

2.212. *Densité spectrale de n(t)*. — Le calcul du spectre du bruit échantillonné donne (21, p. 262) :

$$\Phi_{nn}^*(z) = \frac{\omega_0}{2T} k^2 \frac{1 - e^{-2T\omega_0}}{(1 - e^{-T\omega_0} z^{-1})(1 - e^{-T\omega_0} z)}$$

pour $s = j\omega$ c'est-à-dire $z = e^{j\omega T}$

$$\Phi_{nn}^*(e^{j\omega T}) = \frac{\omega_0 k^2}{2T} \frac{\text{sh } \omega_0 T}{\text{ch } \omega_0 T - \cos \omega T}$$

Nous pouvons établir le bilan de cette opération en comparant, avant et après échantillonnage, le rapport signal sur bruit à basse fréquence.

Nous avons :

— avant échantillonnage :

$$p_1 = \frac{\Phi_{ss}(0)}{\Phi_{nn}(0)} = \frac{a^2}{k^2};$$

— après échantillonnage :

$$p_2 = \frac{\Phi_{ss}^*(1)}{\Phi_{nn}^*(1)} = \frac{\frac{a^2}{T^2}}{\frac{\omega_0 k^2}{2T} \coth \frac{\omega_0 T}{2}} = \frac{a^2 \text{th } \frac{\omega_0 T}{2}}{k^2 \frac{\omega_0 T}{2}}$$

Nous avons supposé que le rapport $\frac{\omega_0}{\omega_r} = \frac{\omega_0 T}{2\pi}$ était grand. Dans ces conditions,

$$\text{th } \frac{\omega_0 T}{2} \sim 1 \quad \text{et} \quad p_2 \sim \frac{p_1}{\frac{\omega_0 T}{2}}$$

Le signal est entièrement noyé dans le bruit. Ceci, parce que l'échantillonnage ramène à basse fréquence, du fait du repliement du spectre, les hautes fréquences du bruit.

2.22. FILTRAGE AVANT ÉCHANTILLONNAGE. — Le but du filtre $F_1(s)$ est d'éviter l'augmentation du niveau de la densité spectrale du bruit à basse fréquence sans déformer le signal $s(t)$ de façon irrémédiable. En outre, il doit être de réalisation simple, pour ne pas compliquer outre mesure la partie de réalisation analogique.

Nous avons donc choisi, *a priori*, une simple constante de temps :

$$F_1(s) = \frac{\omega_1}{\omega_1 + s}$$

Si nous supposons, ce qui est légitime, que $\omega_0 \gg \omega_1$ nous avons pour expression de la densité spectrale du bruit en sortie de $F_1(s)$:

$$\Phi_{bb}(s) = \Phi_{nn}(s) \cdot F_1(s) \cdot F_1(-s) \approx k^2 \frac{\omega_1^2}{\omega_1^2 - s^2}$$

après échantillonnage :

$$\Phi_{bb}^*(e^{j\omega T}) = \frac{\omega_1 k^2}{2T} \frac{sh \omega_1 T}{ch \omega_1 T - \cos \omega T}$$

T étant donné, nous allons choisir ω_1 de telle sorte que le niveau de $T^2 \Phi_{bb}^*(z)$ à fréquence nulle diffère de très peu de celui de $\Phi_{nn}(s)$.

$$m = \frac{T^2 \Phi_{bb}^*(1)}{\Phi_{nn}(0)} = \frac{\frac{\omega_1 T}{2}}{th \frac{\omega_1 T}{2}}$$

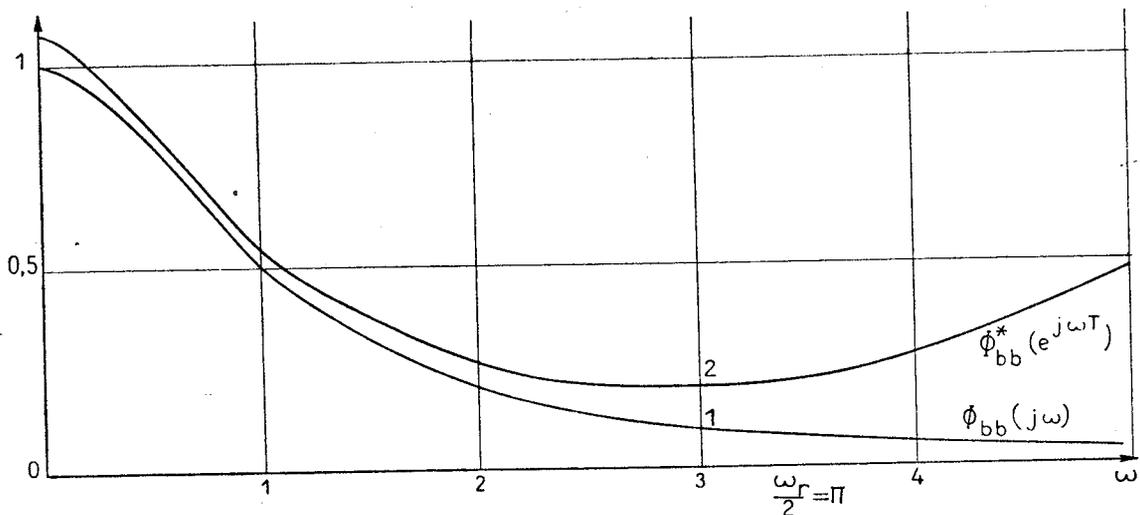


Fig. 2.4

Représentation de $\Phi_{bb}(j\omega) = \frac{\omega_1^2}{\omega_1^2 + \omega^2}$ et $\Phi_{bb}^*(e^{j\omega T}) = \frac{\omega_1}{2T} \frac{sh \omega_1 T}{ch \omega_1 T - \cos \omega T}$ pour $\omega_1 = 1, T = 1$.

Le développement en série au voisinage de l'origine de $th \frac{\omega_1 T}{2}$ nous permet d'écrire :

$$m \approx 1 + \frac{(\omega_1 T)^2}{12} - \frac{(\omega_1 T)^4}{720}$$

Nous adopterons pour la valeur de ω_1 , $\omega_1 T = 1$ ce qui entraîne une augmentation de 8 % seulement du niveau du bruit à fréquence nulle (voir fig. 2.4).

Voyons comment l'introduction de ce filtre affecte le signal $s(t)$. Soit $\Phi_{dd}(s)$, la densité spectrale du signal à la sortie de $F_1(s)$.

$$\Phi_{dd}(s) = \Phi_{ss}(s) \cdot F_1(s) \cdot F_1(-s).$$

Après échantillonnage :

$$\Phi_{dd}^*(z) = \frac{1}{T} Z [\Phi_{ss}(s) \cdot F_1(s) \cdot F_1(-s)].$$

Cette expression est peu commode à manipuler, nous allons la modifier pour la suite de nos calculs.

Soient $\varphi_{ss}(\tau)$ la fonction d'autocorrélation de $s(t)$ et $f_1(t)$ la réponse impulsionnelle de $F_1(s)$.

Définissons une fonction $\psi(t)$ pour tout t , telle que :

$$\psi(t) = L^{-1} [F_1(s) \cdot F_1(-s)] = \frac{\omega_1}{2} e^{-\omega_1|t|}.$$

Nous pouvons écrire :

$$\varphi_{dd}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{ss}(\tau_1) \psi(\tau - \tau_1) d\tau_1$$

$$\varphi_{dd}(nT) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{ss}(\tau_1) \psi(nT - \tau_1) d\tau_1$$

La période T a été choisie de telle sorte que $\frac{\omega_r}{2} > \omega_c$ de ce fait, d'après le théorème de Shannon, nous pouvons remplacer $\varphi_{ss}(\tau_1)$ par son expression séquentielle aux instants kT .

Pour $\omega = \pi\omega_1$, $F_1(j\omega) \times F(-j\omega)$ à une valeur égale au dixième de sa valeur à fréquence nulle. Nous pouvons donc considérer cette valeur comme une fréquence de coupure satisfaisante et remplacer $\psi(t)$ par son expression séquentielle aux instants kT .

Nous pouvons donc écrire avec une approximation de l'ordre du dixième :

$$\varphi_{dd}(nT) = T \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \varphi_{ss}(kT) \psi(nT - kT).$$

Soit en passant dans le domaine Z :

$$\Phi_{dd}^*(z) = T \Phi_{ss}^*(z) \cdot Z [F_1(s) \cdot F_1(-s)]$$

ou encore :

$$\Phi_{dd}^*(z) = \Phi_{ss}^*(z) \times \frac{\omega_1 T}{2} \frac{1 - e^{-2T\omega_1}}{(1 - e^{-T\omega_1} z^{-1})(1 - e^{-T\omega_1} z)}$$

2.23. FILTRAGE APRÈS ÉCHANTILLONNAGE OU ANTIFILTRE. — $F_1(s)$ introduit un déphasage et une atténuation qui peuvent être indésirables dans certaines circonstances. On peut se poser la question suivante : est-il possible à l'aide d'un filtre arithmétique $F_2^*(z)$ de retrouver avec une bonne approximation une densité spectrale du signal utile égale à celle que l'on aurait obtenue en échantillonnant directement $s(t)$, sans toutefois augmenter le niveau du bruit. Nous répondons oui à cette question et ce filtre $F_2^*(z)$ nous l'avons appelé antifiltre, car il détruit les effets de $F_1(s)$ sur $s(t)$.

Il suffit en effet de prendre pour $F_2^*(z)$:

$$F_2^*(z) = \frac{1 - e^{-T\omega_1} z^{-1}}{\sqrt{\frac{\omega_1 T}{2} (1 - e^{-2T\omega_1})}}$$

La densité spectrale du bruit devient :

$$\Phi_{mm}^*(z) = \Phi_{bb}^*(z) \times F_2^*(z) \cdot F_2^*(z^{-1})$$

$$\Phi_{mm}^*(z) = \frac{k^2}{T^2}$$

et celle du signal :

$$\Phi_{ee}^*(z) = \Phi_{ss}^*(z).$$

Ce filtrage a eu pour but de :

- a. Transformer le bruit initial $\Phi_{nn}(s)$ en un bruit que RAGAZZINI appelle pseudo blanc, car sa densité spectrale dans le domaine Z a un niveau constant;
- b. Retrouver la densité spectrale du signal initial échantillonné;
- c. Conserver le rapport signal sur bruit à basse fréquence; nous avons en effet :

$$m = \frac{\Phi_{ee}^*(1)}{\Phi_{mm}^*(1)} = \frac{\Phi_{ss}^*(1)}{\Phi_{mm}^*(1)} = \frac{\frac{\alpha^2}{T^2}}{\frac{k^2}{T^2}} = p_1.$$

§ 2.3. Simplification pour les calculs futurs

Nous venons de voir dans l'étude précédente que dans le cas où le signal est entaché d'un bruit blanc, dans une grande gamme de fréquence, il est nécessaire d'effectuer un filtrage en analogique et un filtrage après échantillonnage, si l'on veut conserver dans le domaine Z la même configuration des densités spectrales que dans le domaine s . Introduire ces deux filtres $F_1(s)$ et $F_2^*(z)$ dans les calculs d'optimisation peut compliquer inutilement les calculs. Nous allons montrer comment, sans nuire à la généralité, on peut ne pas en tenir compte.

Soit en effet un signal $s(t)$ entaché d'un bruit blanc $n(t)$ et dont les spectres sont représentés sur la figure 2.5.

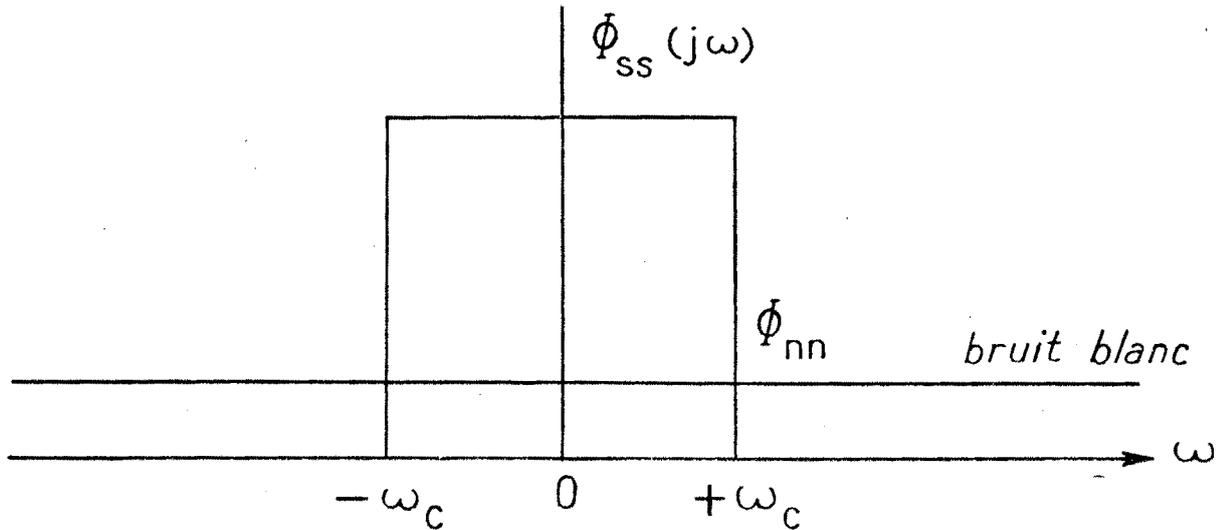


Fig. 2.5. — Densités spectrales du signal et du bruit à l'entrée

En sortie de $F_2^*(z)$, nous avons la configuration représentée par la fig. 2.6 :

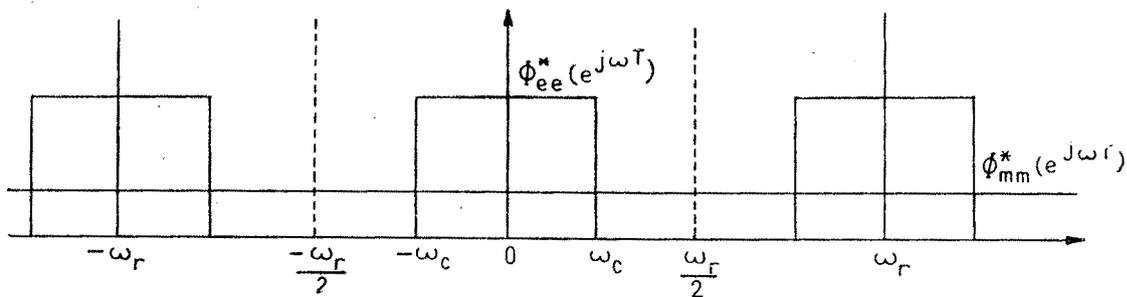


Fig. 2.6. — Densité spectrale du signal et du bruit en sortie de $F_2^*(z)$

Nous pouvons obtenir le même résultat en supposant :

- Que le signal et le bruit sont directement échantillonnés;
- Que le signal a pour densité spectrale $\Phi_{ss}(s)$;
- Que le bruit a une densité spectrale, constante entre $-\frac{\omega_r}{2}$ et $+\frac{\omega_r}{2}$ de valeur k^2 , et nulle ailleurs.

En effet, l'échantillonnage ne déformera pas le spectre de signal $s(t)$ et d'autre part, le bruit après échantillonnage deviendra, du fait des symétries par rapport aux axes $(2k+1)\frac{\omega_r}{2}$ un bruit pseudo blanc d'expression :

$$\Phi_{nn}^*(z) = \frac{k^2}{T^2}$$

Ceci, nous pouvons le prouver d'une manière plus rigoureuse :
 Considérons à cet effet une densité spectrale définie de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \Phi(s) &= k^2 && \text{pour} && -\frac{\omega_r}{2} \leq \omega \leq \frac{\omega_r}{2} \\ \Phi(s) &= 0 && \text{ailleurs.} \end{aligned}$$

La fonction d'autocorrélation correspondante a pour expression :

$$\varphi(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(j\omega) e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\omega_r}{2}}^{+\frac{\omega_r}{2}} k^2 e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{k^2}{\pi\tau} \sin \tau \frac{\omega_r}{2}.$$

La densité spectrale échantillonnée a pour expression :

$$\Phi^*(z) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi(nT) z^{-n}$$

or :

$$\varphi(nT) = 0 \quad \text{pour } n \neq 0$$

$$\varphi(0) = \frac{k^2}{T}.$$

Ce qui nous donne effectivement :

$$\Phi^*(z) = \frac{k^2}{T^2}.$$

§ 2.4. Conclusion

Au début de ce chapitre, nous avons insisté sur l'importance du choix de la période de prélèvement. Trop souvent, dans l'ignorance de la théorie des asservissements échantillonnés, les utilisateurs de calculateurs arithmétiques en temps réel prélèvent leurs informations et réalisent les fonctions de transfert avec la fréquence la plus élevée possible, afin, disent-ils, de se rapprocher le plus possible du domaine analogique.

Non seulement, cette solution est chère, mais elle risque de jeter un discrédit sur un outil puissant, commode et souple : le calculateur arithmétique en ligne.

Nous avons, ensuite, montré que, dans le cas où le signal d'entrée est entaché d'un bruit étalé en fréquence, il était indispensable de disposer un filtre analogique avant échantillonnage. Les effets de ce dernier sur le signal d'entrée peuvent être éliminés par un filtre digital.

Enfin, nous avons conçu un schéma mathématique simple donnant une représentation fidèle des spectres du signal et du bruit, sans avoir à tenir compte des filtres analogique et digital dans les futurs calculs d'optimisation.

CHAPITRE III

OPTIMISATION D'UNE BOUCLE D'ASSERVISSEMENT EN PRÉSENCE DE SATURATION

§ 3.0. Introduction

En face d'un problème de compensation d'asservissement, le premier travail de l'Ingénieur est de transposer sur une feuille de papier les caractéristiques mathématiques, souvent simplifiées, de chacun des éléments physiques.

Généralement, il obtiendra un ensemble d'éléments linéaires et non linéaires. Nous supposons que, dans le cas présent, la seule non-linéarité est une saturation.

Nous pouvons, d'ores et déjà, séparer deux catégories de signaux d'entrée, auxquelles correspondent *grosso modo* deux méthodes de synthèses de correcteur.

Primo. — Un signal d'entrée déterminé à chaque instant, qui se représente en fonction du temps sans ambiguïté.

Bien souvent, il est décomposable en échelons de position, vitesse, accélération, etc... et les réponses du système à ces signaux simples servent de critère de synthèse. Dans ce cas, la synthèse fait appel aux méthodes du diagramme de BODE (29), du lieu de NYQUIST (8), du lieu d'EVANS (29), etc.

Un caractère commun à ces nombreuses méthodes : elles ne mènent pas directement à l'élaboration d'un correcteur. Il faut procéder par itération. Si le système comporte des éléments saturants, on pourra soit essayer de limiter le signal saturant, de telle sorte que, pour le maximum de l'entrée, il ne dépasse jamais la limite de saturation, soit faire travailler le système en état constant de saturation; nous aurons alors un correcteur dit « tout ou rien » (29).

Par malheur, ce dernier procédé de synthèse fait appel à la méthode du plan de phase (3-13), qui se transforme rapidement en hyperespace de phase, dès que le degré du système dépasse deux. Nous citons pour mémoire la commande des moteurs couples (3-13).

Secundo. — Un signal d'entrée aléatoire entaché d'un bruit aléatoire. On désire, dans ce cas, trouver un correcteur séparant, suivant un certain critère, le message du bruit, tout en réalisant certaines opérations, telles

que dérivation, intégration, prédiction. La méthode de WIENER (30) conduit, sans aléa, en minimisant la valeur efficace de l'erreur entre la sortie du système et la sortie désirée à la formule du correcteur optimum. Nous devons à NEWTON (18) d'avoir étendu cette méthode à un asservissement comportant une saturation. Son raisonnement fut le suivant : si nous pouvons limiter la valeur efficace du signal saturant, de telle sorte que la probabilité de saturation soit maintenue à un taux faible, il nous sera possible de remplacer le système non linéaire par son équivalent linéaire.

Cette méthode nous ayant donné, dans son application, des résultats remarquables, nous nous sommes demandé s'il serait possible de l'appliquer aux correcteurs arithmétiques. Bien sûr, nous avons la possibilité, en prenant un calculateur à faible période d'échantillonnage, d'approximer la fonction de transfert analogique : solution onéreuse. Nous avons donc essayé une synthèse directe dans le domaine Z qui nous a conduit au développement suivant.

§ 3.1. Définition de la saturation

La saturation est une des non linéarités le plus fréquemment rencontrées. Dans notre exposé, nous entendrons saturation au sens large du mot et nous en donnerons la définition suivante :

Pour un signal d'entrée compris en module entre 0 et σ_{sl} le signal de sortie de l'élément saturant lui est proportionnel. Quand le signal d'entrée croît et devient en module supérieur à σ_{sl} , le signal de sortie tend très rapidement vers une limite fixe L. Nous voyons que l'arbitraire de notre définition réside dans la différence $L - \sigma_{sl}$. Nous la supposons petite par rapport à σ_{sl} .

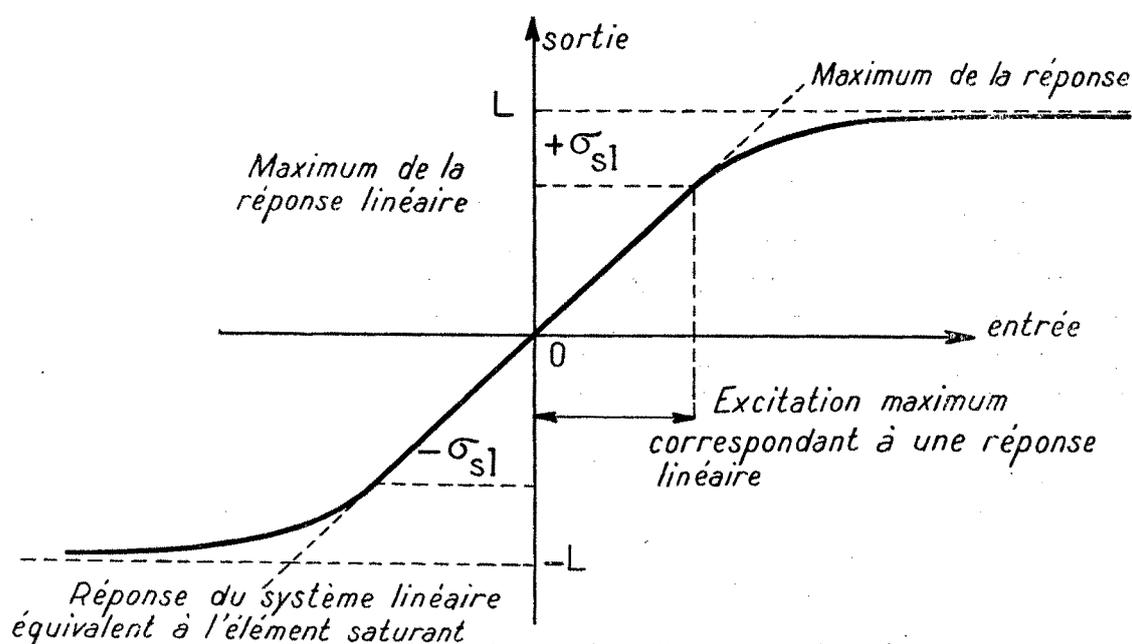


Fig. 3.1. — Courbe de réponse d'un élément saturant

Cette définition s'applique à deux phénomènes totalement différents :

- la saturation d'un élément, comme par exemple le flux d'induit d'un moteur électrique en fonction de l'intensité (fig. 3.1);
- la limitation volontaire d'un signal; par exemple, dans un engin téléguidé autopropulsé, on limite l'accélération transversale, afin de limiter le facteur de charge de l'ensemble. Quel que soit l'ordre, l'accélération transversale ne dépassera pas une certaine valeur. On peut assimiler ceci à une saturation en accélération (fig. 3.2).

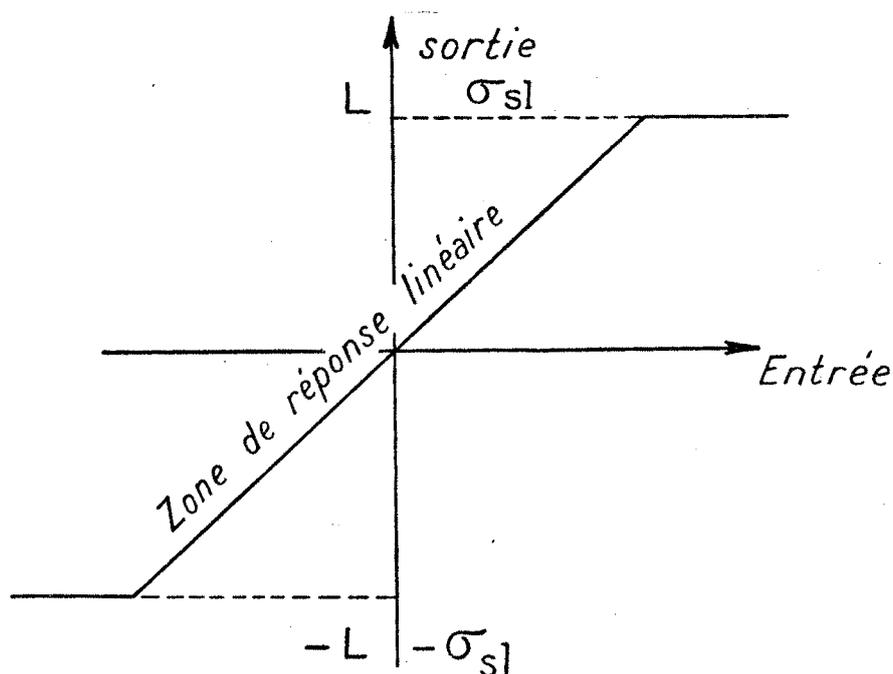


Fig. 3.2. — Courbe de réponse d'un limiteur

§ 3.2. Philosophie et définition du problème

Pour résoudre un problème d'asservissement comportant des saturations, on peut s'engager dans deux voies différentes :

- ou bien essayer de résoudre le problème à l'aide des méthodes de résolution des équations différentielles non linéaires. Cette méthode peut donner de bons résultats dans le cas de systèmes simples et surtout quand on désire faire travailler l'élément saturant au maximum de ses possibilités;

- ou bien faire la synthèse d'un correcteur linéaire qui maintiendra le signal d'entrée de l'élément saturant dans des limites telles, que la saturation ne sera presque jamais atteinte. Ce cas est parfois désirable; par exemple, dans le vol d'un missile, il est peu souhaitable que l'engin vole continuellement au maximum de ses possibilités d'évolution, car il perdra une grande partie de son énergie en traînée. Dans ces conditions, nous pouvons remplacer l'élément saturant par son approximation linéaire et le problème se traite sur le plan linéaire. C'est dans cet esprit que nous aborderons notre problème.

§ 3.3. Définition mathématique du problème

3.31. DONNÉES.

a. Le signal d'entrée entaché de bruit non corrélé au signal et le signal de sortie désiré déduit du signal d'entrée par une transformation linéaire, fonctions aléatoires du temps, stationnaires, ergodiques à distribution d'amplitude gaussienne, décrits par leur fonction d'autocorrélation. Le caractère d'amplitude à distribution gaussienne est peu restrictif car c'est le cas de nombreux signaux. En outre, on démontre que la somme d'un nombre infini de signaux aléatoires à distributions quelconques est un signal à distribution gaussienne.

b. Les éléments fixes, comprenant l'élément saturant. Dans l'hypothèse faite, ces éléments fixes sont décrits par leur fonction de transfert, transformée de Laplace de l'approximation linéaire.

Déterminer un compensateur arithmétique tel que :

a. La valeur efficace de l'erreur entre la sortie du système et la sortie désirée soit minimum;

b. Le signal d'entrée de l'élément saturant, appelé encore signal saturant ait sa valeur efficace maintenue au-dessous d'une certaine valeur, de telle sorte que la probabilité de saturation demeure faible.

La figure 3.3. illustre le problème.

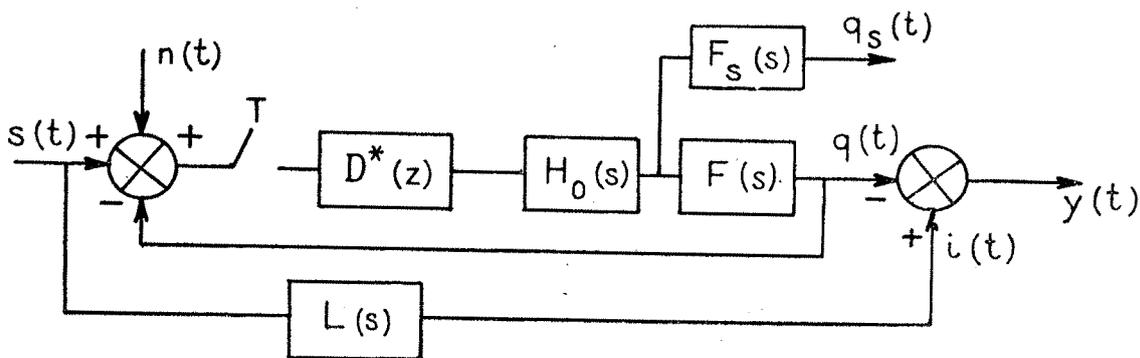


Fig. 3.3. — Schéma illustrant le problème

- | | | |
|----------|---|---|
| $s(t)$ | : signal d'entrée | } signal et bruit ne sont pas corrélés. |
| $n(t)$ | : bruit | |
| T | : période d'échantillonnage du compensateur. | |
| $D^*(z)$ | : fonction de transfert du compensateur. | |
| $H_0(s)$ | : $= \frac{1 - e^{-Ts}}{s}$ circuit bloqueur d'ordre zéro. | |
| $F(s)$ | : fonction de transfert des éléments fixes linéaires. | |
| $F_s(s)$ | : fonction de transfert entre la sortie du calculateur et le signal saturant. | |
| $G(s)$ | : $H_0 F(s)$, | |
| $G_s(s)$ | : $H_0(s) \cdot F_s(s)$. | |

- $L(s)$: fonction de transfert reliant la sortie désirée $i(t)$ à l'entrée $s(t)$.
 $i(t)$: Sortie désirée du système.
 $q(t)$: sortie du système.
 $q_s(t)$: signal saturant.
 $y(t)$: différence entre la sortie désirée $i(t)$ et la sortie réelle $q(t)$.

Nota. — $F(s)$ et $F_s(s)$ ont tous leurs pôles et zéros dans la partie gauche du plan des « s ».

La probabilité de saturation étant maintenue à un taux faible, le système se comportera presque tout le temps comme un système linéaire. Nous pouvons donc remplacer le schéma de l'asservissement par le schéma série équivalent déduit de la théorie des systèmes linéaires échantillonnés :

$$\frac{Q^*(z, m)}{S^*(z)} = \frac{D^*(z) G^*(z, m)}{1 + D^*(z) \cdot G^*(z)}$$

Nous voyons dans ces conditions que le schéma série suivant (fig. 3.4) est équivalent au système initial :

$$D_s^*(z) = \frac{D^*(z)}{1 + D^*(z) \cdot G^*(z)}$$

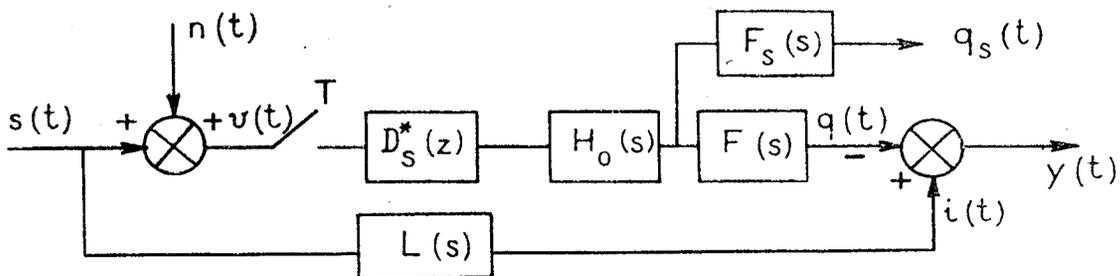


Fig. 3.4. — Schéma série équivalent

Une fois $D_s^*(z)$ connu on a aisément $D^*(z)$.

Arrivés à ce point, nous devons faire une hypothèse, d'ailleurs peu restrictive.

Hypothèse. — La période d'échantillonnage a été choisie de telle sorte que $\frac{\pi}{T}$ soit toujours supérieur à la fréquence de coupure des spectres de $s(t)$ et $n(t)$. Nous avons vu au chapitre II, comment à l'aide d'un filtre et d'un antifiltre, on pouvait se ramener à ces conditions.

§ 3.4. Relation entre la valeur efficace et la probabilité de saturation d'un signal

La description d'un élément saturant a été illustrée par les figures 3.1 et 3.2. Nous avons supposé que nous pouvions agir sur la probabilité de saturation en limitant la valeur efficace du signal saturant. Voyons la question de plus près.

3.41. Montrons qu'un signal aléatoire stationnaire ergodique à distribution d'amplitude gaussienne, conserve ses propriétés de distribution d'amplitude gaussienne, en traversant un compensateur arithmétique linéaire.

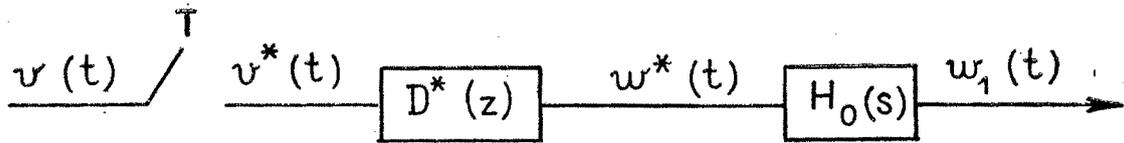


Fig. 3.5. — Transformation d'un signal $v(t)$ dans un compensateur arithmétique

Nous avons montré antérieurement que la séquence $v(nT)$ possède les mêmes propriétés statistiques que $v(t)$.

Nous pouvons écrire :

$$V^*(z) = v_0 + v(T)z^{-1} + v(2T)z^{-2} + \dots + v(nT)z^{-n} + \dots$$

$$D^*(z) = d_0 + d(T)z^{-1} + d(2T)z^{-2} + \dots + d(nT)z^{-n} + \dots$$

Le théorème de la convolution réelle appliqué aux systèmes échantillonnés donne :

$$w(nT) = \sum_{p=0}^n v(pT) \cdot d(n-p)T.$$

Les $d(nT)$ étant des constantes, nous voyons que la séquence $w(nT)$ a les mêmes propriétés statistiques que $v(nT)$ et par conséquent que $v(t)$. Il est de même de $w_1(t)$, signal de sortie du circuit bloqueur.

Par conséquent, le signal saturant, à la sortie du compensateur arithmétique, est un signal aléatoire à distribution d'amplitude gaussienne.

3.42. RELATION ENTRE LA PROBABILITÉ DE SATURATION ET LA VALEUR EFFICACE. — Soit $r(t)$ le signal d'entrée d'un élément saturant de distribution d'amplitude gaussienne.

$$P_r(x) = \frac{e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$

$$\sigma^2 : \text{variance de } x = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\bar{x})^2 P_r(x) dx.$$

La variance se relie directement à la valeur efficace et à la valeur moyenne :

$$\sigma^2 = \overline{(x-\bar{x})^2} = \overline{x^2} - (\bar{x})^2.$$

Nous supposons pour ce qui suit que la valeur moyenne du signal est nulle :

$$\bar{x} = 0$$

et par conséquent

$$\sigma = \sqrt{\overline{x^2}}.$$

Revenons aux figures 3.1 et 3.2. La probabilité de trouver le signal saturant en dehors de la zone linéaire limitée à $\pm \sigma_{sl}$ est :

$$P_s = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{\sigma_{sl}}{\sigma}}^{\frac{\sigma_{sl}}{\sigma}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} d\frac{x}{\sigma}.$$

P_s est par définition la probabilité de saturation de l'élément saturant.

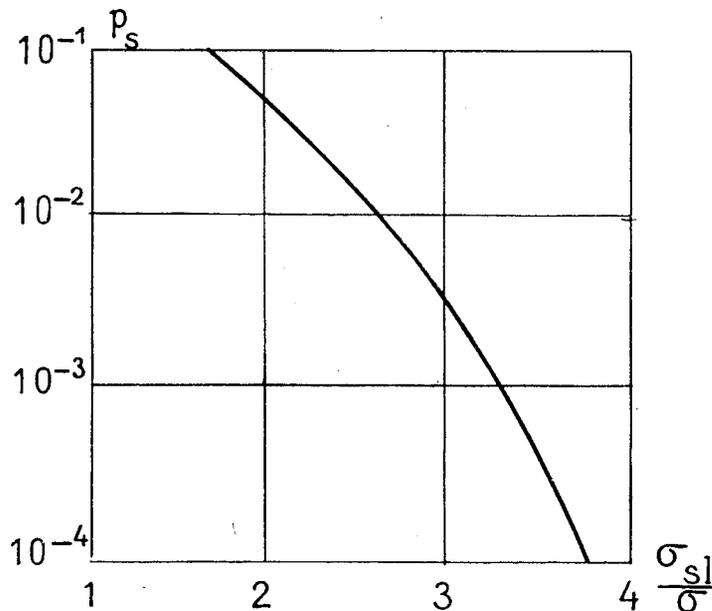


Fig. 3.6. — Probabilité de saturation de l'élément saturant en fonction du rapport de la largeur de la zone de fonctionnement linéaire σ_{sl} à la valeur efficace du signal saturant σ

L'expérience nous a montré que dans le cas où $\sigma_{sl} = 2\sigma$ $P_s = 5\%$, l'effet des saturations est tellement faible qu'il est indécélable. C'est donc la probabilité de saturation que nous adopterons dans la suite.

§ 3.5. Solution mathématique du problème

Nous avons donné antérieurement (26) une solution de ce problème dans le domaine temporel ce qui nous avait obligé à chercher une extension de la solution de l'équation de WIENER-HOPF dans le domaine Z. Depuis lors, nous avons trouvé une nouvelle solution à ce problème, directement dans le domaine Z, plus courte, plus élégante, que nous présentons ici.

Le problème consiste à minimiser la valeur efficace de l'erreur $\sqrt{\overline{y^2(t)}}$ en astreignant la valeur efficace du signal saturant à demeurer inférieure à une certaine valeur : $\overline{q_s^2(t)} \leq \sigma^2$.

Pour résoudre ce problème, nous emploierons simultanément le calcul des variations et un multiplicateur de LAGRANGE en introduisant la fonction :

$$F = \overline{y^2(t)} + \rho \overline{q_s^2(t)}.$$

Calculons en premier lieu la valeur efficace de l'erreur.

Le bruit et le signal étant supposés non corrélés, nous pouvons décomposer cette valeur efficace en deux parties l'une due au bruit, l'autre au signal.

La part due au bruit s'évalue aisément :

$$\overline{y_n^2(t)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{nn}^*(e^{Ts}) D_s^*(e^{Ts}) G(s) \cdot D_s^*(e^{-Ts}) G(-s) \cdot d\omega.$$

La formule de SKLANSKY (23) permet de passer directement dans le domaine Z.

$$\overline{y_n^2(t)} = \frac{1}{2\pi j} \oint \Phi_{nn}^*(z) D_s^*(z) D_s^*(z^{-1}) Z[G(s) \cdot G(-s)] \frac{dz}{z}.$$

La partie relative au signal est d'une approche plus délicate.

Pour la calculer, nous utiliserons la formule suivant (29, p. 441) :

$$\Phi_{rr}(s) = \lim_{N \uparrow \infty} \frac{1}{(2N+1)T} \cdot R_N(s) \cdot R_N(-s).$$

$R_N(s)$ étant la transformée de Laplace de $r_N(t)$, définie de la façon suivante :

$$\begin{aligned} r_N(t) &= r(t) && \text{pour} && -NT \leq t \leq NT \\ r_N(t) &= 0 && \text{pour} && t < -NT \quad t > NT. \end{aligned}$$

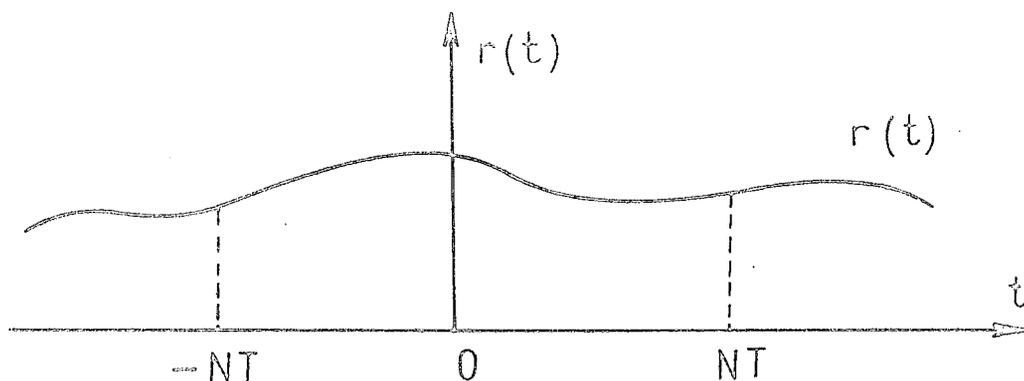


Fig. 3.7. — Illustration de $r(t)$ et $r_N(t)$

Nous désignerons cette opération par l'opérateur E.

$$\Phi_{rr}(s) = E[R(s) \cdot R(-s)].$$

Si nous désignons maintenant par $y_s(t)$ la part de l'erreur due au signal, nous avons :

$$\begin{aligned} Y_s(s) &= S(s) \cdot L(s) - S^*(e^{Ts}) \cdot D_s^*(e^{Ts}) G(s). \\ Y_s(s) \cdot Y_s(-s) &= S(s) \cdot S(-s) \cdot L(s) \cdot L(-s) - S(s) \cdot S^*(e^{-Ts}) : \\ &\quad L(s) \cdot D_s^*(e^{-Ts}) G(-s) \\ &\quad - S(-s) \cdot S^*(e^{Ts}) L(-s) \cdot D_s^*(e^{Ts}) \cdot G(s) \\ &\quad + S^*(e^{Ts}) S^*(e^{-Ts}) D_s^*(e^{Ts}) D_s^*(e^{-Ts}) G(s) \cdot G(-s). \end{aligned}$$

Appliquons l'opérateur E :

$$\begin{aligned} E[Y_s(s) Y_s(-s)] &= \Phi_{ss}(s) \cdot L(s) L(-s) - \Phi_{ss^*}(s) L(s) \cdot D_s^*(e^{-Ts}) G(-s) \\ &- \Phi_{ss^*}(s) \cdot L(-s) \cdot D_s^*(e^{Ts}) \cdot G(s) + \Phi_{ss}^*(e^{Ts}) D_s^*(e^{Ts}) D_s^*(e^{-Ts}) G(s) G(-s). \end{aligned}$$

Écrivons maintenant que $\overline{y_s^2(t)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} E[Y_s(s) Y_s(-s)] d\omega$ et transformons cette expression par la formule de SKLANSKY (23) :

$$\begin{aligned} \overline{y_s^2(t)} &= \frac{1}{2\pi j} \oint \left\{ Z[\Phi_{ss}(s) L(s) L(-s)] - D_s^*(z^{-1}) Z[\Phi_{ss^*}(s) L(s) G(-s)] \right. \\ &- D_s^*(z) Z[\Phi_{ss^*}(s) L(-s) G(s)] + \Phi_{ss}^*(z) D_s^*(z) D_s^*(z^{-1}) Z[G(s) G(-s)] \left. \right\} \frac{dz}{z}. \end{aligned}$$

Un calcul analogue permet d'écrire l'expression de $\overline{q_s^2(t)}$:

$$\overline{q_s^2(t)} = \frac{1}{2\pi j} \oint [\Phi_{ss}^*(z) + \Phi_{nn}^*(z)] D_s^*(z) D_s^*(z^{-1}) Z[G_s(s) G_s(-s)] \frac{dz}{z}.$$

Le but du calcul est de chercher le correcteur $D_{sm}^*(z)$ qui rend minimale la fonction F.

Nous poserons :

$$D_s^*(z) = D_{sm}^*(z) + \mu d(z).$$

$D_{sm}^*(z)$: expression du correcteur $D_m^*(z)$ qui rend minimale la fonction F.

$d(z)$: fonction de z appartenant au même ensemble que $D_s^*(z)$.

μ : paramètre réel.

Si l'on explicite F en fonction de $D_{sm}^*(z)$ et de $d(z)$ nous obtenons une forme quadratique :

$$F[D_{sm}^*(z) + \mu d(z)] = F_1[D_{sm}^*(z)] + F_2[d(z)] + F_3[D_{sm}^*(z), d(z)].$$

Les expressions F_1 et F_2 représentent des intégrales de densités spectrales; elles sont donc essentiellement positives.

La condition nécessaire et suffisante pour que F soit minimum quel que soit μ est donc que le terme F_3 soit nul. Ce qui s'exprime par :

$$\begin{aligned} &\oint \Phi_{nn}^*(z) Z[G(s) G(-s)] \cdot [d(z) D_{sm}^*(z^{-1}) + d(z^{-1}) \cdot D_{sm}^*(z)] \frac{dz}{z} \\ &\quad + \oint_{ss}^*(z) [d(z) D_{sm}^*(z^{-1}) + d(z^{-1}) D_{sm}^*(z)] Z[G(s) \cdot G(-s)] \\ &\quad - d(z^{-1}) Z[\Phi_{ss^*}(s) L(s) G(-s)] - d(z) Z[\Phi_{ss^*}(s) L(-s) G(s)] \left. \right\} \frac{dz}{z} \\ &+ \rho \oint \Phi_{vv}^*(z) [d(z) D_{sm}^*(z^{-1}) + d(z^{-1}) D_{sm}^*(z)] Z[G_s(s) G_s(-s)] \frac{dz}{z} - = 0. \end{aligned}$$

Posons :

$$\Delta^*(z) = \Phi_{\nu\nu}^*(z) \cdot Z [G(s) \cdot G(-s) + \rho G_s(s) \cdot G_s(-s)].$$

$\Delta^{*+}(z)$ = partie de $\Delta(z)$ ayant tous ses pôles et zéros à l'intérieur du cercle unité et telle que

$$\Delta^{*-}(z) = \frac{\Delta^*(z)}{\Delta^{*+}(z)}.$$

Notre équation prend alors l'aspect suivant :

$$\oint d(z^{-1}) \Delta^{*-}(z) \left[D_{sm}^*(z) \Delta^{*+}(z) - \frac{Z [\Phi_{ss}^*(s) L(s) G(-s)]}{\Delta^{*-}(z)} \right] \frac{dz}{z} \\ + \oint d(z) \Delta^{*+}(z) \left[D_{sm}^*(z^{-1}) \Delta^{*-}(z) - \frac{Z [\Phi_{ss}^*(s) L(-s) G(s)]}{\Delta^{*+}(z)} \right] \frac{dz}{z} = 0.$$

Dans la transformation effectuée à l'aide de la formule de SKLANSKY (23) on transforme l'axe imaginaire du plan s en le cercle unité du plan z , mais il n'est nullement défini, si l'on doit dans l'intégrale de contour prendre les pôles à l'extérieur ou à l'intérieur du cercle unité. Nous pouvons donc considérer que dans l'expression ci-dessus, la première intégrale concerne les pôles à l'intérieur du cercle unité et l'autre des pôles à l'extérieur. Comme on passe de l'une à l'autre par une inversion de centre 0, il suffit d'annuler la première intégrale pour que l'équation soit vérifiée, soit :

$$\oint d(z^{-1}) \Delta^{*-}(z) \left[D_{sm}^*(z) \Delta^{*+}(z) - \frac{Z [\Phi_{ss}^*(s) L(s) G(-s)]}{\Delta^{*-}(z)} \right] \frac{dz}{z} = 0.$$

Posons :

$$\Gamma^*(z) = Z [\Phi_{ss}^*(s) L(s) G(-s)]$$

Nous décomposerons l'expression $\frac{\Gamma^*(z)}{z \Delta^{*-}(z)}$ de la façon suivante :

$\left[\frac{\Gamma^*(z)}{z \Delta^{*-}(z)} \right]_-$ = partie de la décomposition de la fraction rationnelle $\frac{\Gamma^*(z)}{z \Delta^{*-}(z)}$ en éléments simples qui comprend le polynôme et les pôles à l'extérieur du cercle unité ;

$\left[\frac{\Gamma^*(z)}{z \Delta^{*-}(z)} \right]_+$ = partie comprenant tous les pôles à l'intérieur du cercle unité.

L'intégrale $\oint d(z^{-1}) \Delta^{*-}(z) \left[\frac{\Gamma^*(z)}{z \Delta^{*-}(z)} \right]_- dz$ est nulle car elle a tous ses pôles à l'extérieur du cercle unité.

Il reste donc à annuler :

$$\oint d(z^{-1}) \Delta^{*-}(z) \left[\frac{D_{sm}^*(z) \cdot \Delta^{*+}(z)}{z} - \frac{\Gamma^*(z)}{z \Delta^{*-}(z)} \right]_+ dz.$$

Cette expression s'annule en prenant :

$$D_{sm}^*(z) = \frac{z \left[\frac{\Gamma^*(z)}{z \Delta^{*-}(z)} \right]_+}{\Delta^{*+}(z)}$$

$$\begin{cases} \Gamma^*(z) = Z [\Phi_{ss}^*(s) L(s) G(-s)] \\ \Delta^*(z) = \Phi_{\nu\nu}^*(z) Z [G(s) G(-s) + \rho G_s(s) \cdot G_s(-s)]. \end{cases}$$

Ce qui donne la solution de notre problème.

3.51. EXPRESSION DE $\Phi_{ss^*}(s)$ en fonction de $\Phi_{ss}(s)$. — Pour trouver cette expression revenons à la fonction d'autocorrélation :

$$\begin{aligned} \Phi_{ss^*}(\tau) &= \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{2T_0} \int_{-T_0}^{+T_0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(kT) \delta(t - kT) \times s(t + \tau) dt \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{(2N+1)T} \sum_{n=-N}^{+N} s(nT) \cdot s(nT + \tau). \end{aligned}$$

Ce qui représente par définition :

$$\Phi_{ss^*}(\tau) = \frac{1}{T} \Phi_{ss}(\tau)$$

d'où :

$$\| \Phi_{ss^*}(s) = \frac{1}{T} \Phi_{ss}(s). \|$$

3.52. CALCUL SIMPLIFIÉ DE LA VALEUR EFFICACE DE L'ERREUR ET DU SIGNAL SATURANT. — Les signaux $q(t)$ et $q_s(t)$, aléatoires, sont stationnaires du fait de la présence du circuit bloqueur $H_0(s)$ (cf. chapitre 1, § 1.3.).

Le signal $i(t)$ est aussi stationnaire puisqu'il résulte du passage de $s(t)$ à travers un élément linéaire $L(s)$. Il n'en serait pas de même, si l'on avait placé un échantillonneur avant $L(s)$.

Le signal $y(t)$ différence entre deux signaux aléatoires stationnaires est donc aussi stationnaire.

Supposons que nous échantillonnions ces signaux avec la période T . Leurs valeurs efficaces sont égales à celles des séquences respectives. De ce fait, nous pouvons remplacer la fig. 3.4. par la suivante qui lui est équivalente :

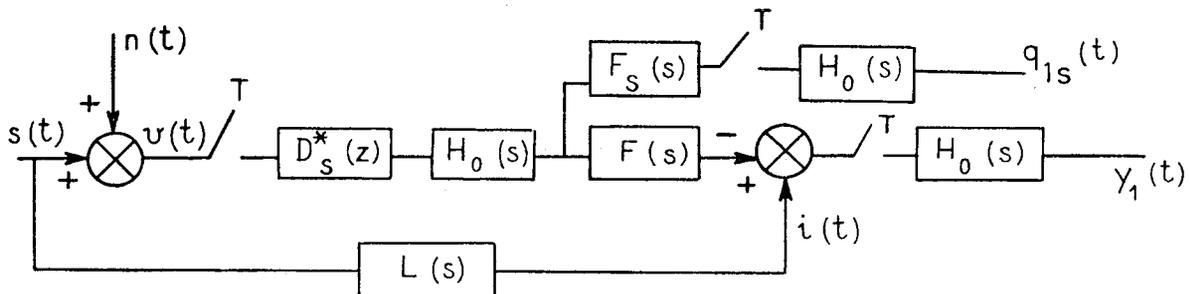


Fig. 3.8. — Schéma équivalent de la fig. 3.4

Nous avons donc :

$$\| \overline{q_s^2(t)} = \overline{q_{1s}^2(t)} = \frac{T}{2\pi j} \oint \dot{v}_v(z) D_{sm}^*(z) D_{sm}^*(z^{-1}) G_*(z) G_s^*(z^{-1}) \frac{dz}{z} \|$$

La simplification est notoire dans les cas de $\overline{y^2(t)}$ si l'on suppose, ce que nous ferons, que $L(s) = 1$; dans ce cas :

$$\left\| \begin{aligned} \overline{y^2(t)} = \overline{y_1^2(t)} &= \frac{T}{2\pi j} \oint \Phi_{nn}^*(z) D_{sm}^*(z) D_{sm}^*(z^{-1}) G^*(z) G^*(z^{-1}) \frac{dz}{z} \\ &+ \frac{T}{2\pi j} \oint \Phi_{ss}^*(z) [1 - D_{sm}^*(z) G^*(z)] [1 - D_{sm}^*(z^{-1}) G^*(z^{-1})] \frac{dz}{z}. \end{aligned} \right.$$

Remarque. — Cette simplification peut être utilisée une fois $D_s^*(z)$ élaboré, mais nous n'aurions pas le droit de l'utiliser dans le calcul de $D_s^*(z)$ car elle pourrait, dans certaines conditions, conduire à un correcteur donnant un $\overline{y_1^2(t)}$ fini, aux instants d'échantillonnage mais un $\overline{y^2(t)}$ infini ou du moins différent. C'est le phénomène des oscillations cachées (III, p. 91) mis en évidence par JURY et que nous avons rencontré quelquefois.

§ 3.6. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons passé en revue les différentes positions que l'on pouvait adopter en face d'un problème de compensation d'asservissement comportant des saturations. Nous avons adopté l'une d'entre elles : optimisation du système au sens de WIENER, tout en maintenant la probabilité de saturation au-dessous d'un certain niveau. Il ne faut pas se leurrer sur l'universalité de cette méthode; dans certaines circonstances, une autre peut être meilleure. En tout cas, celle-ci a l'avantage de conduire à une solution mathématique simple.

Les difficultés d'ordre théorique ont pu être vaincues grâce à la transformée en Z . Malgré cela, il ne faut pas se cacher les difficultés qui demeurent : l'évaluation des densités spectrales dans le domaine Z peut présenter de sérieuses difficultés de calcul; de même la décomposition des expressions en parties ayant pôles et zéros à l'intérieur et l'extérieur du cercle unité. A une époque où le calculateur arithmétique devient de plus en plus répandu dans le domaine de la recherche scientifique, ces difficultés ne peuvent être considérés comme rédhibitoires.

CHAPITRE IV

APPLICATION DE LA THÉORIE DU CHAPITRE III RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX

§ 4.0. Introduction

Le chapitre III pourrait être le point final de cet ouvrage; mathématiquement, il n'y a plus grand chose à ajouter. S'il en était ainsi, il irait sans doute grossir la pile des rapports d'études théoriques jamais lus.

Le noyau de cette théorie nous l'avons façonné il y a deux ans et demi environ. Quand nous affirmions à cette époque : « Nous pensons pouvoir obtenir de cette boucle d'asservissement, les mêmes performances que celles obtenues avec un calculateur analogique, en utilisant un calculateur arithmétique prélevant des informations toutes les 0,2 sec peut-être les 0,4 ou 0,6 sec », nos interlocuteurs hochaient la tête d'une drôle de manière essayant de concevoir la chose et émettaient invariablement la même réponse : « Mais que va faire le système entre-temps ». Comme pour leur expliquer qu'entre-temps, il ne se passerait rien, il fallait se mouvoir dans un domaine qui leur était peu familier, ils nous abandonnaient à notre crayon et notre bloc de papier.

Bien sûr, il y avait bien les expériences faites sur le simulateur analogique, comme expliqué appendice III, mais le caractère analogique de l'installation semblait démentir nos affirmations.

Enfin, le jour vint où nous pûmes disposer d'un calculateur arithmétique en ligne, celui pour lequel toute la théorie avait été faite. Ce jour que nous attendions avec un peu d'appréhension malgré tout, révéla qu'effectivement un correcteur arithmétique pouvait avoir des performances aussi bonnes que le correcteur analogique optimum. C'est la raison pour laquelle au lieu de réduire les chapitres IV et V à deux exemples du chapitre III, nous leur avons donné une telle importance. S'ils ne forment pas le noyau spirituel de cette thèse, ils en sont la partie convaincante, celle qui prouve non seulement, que la théorie de l'optimisation est applicable, mais aussi qu'un calculateur arithmétique est autre chose qu'un mauvais calculateur analogique.

Le système étudié dans ce chapitre est celui d'une commande en accélération, le correcteur étant alimenté par l'erreur entre le signal d'entrée et celui de sortie. Cette configuration sert souvent d'exemple type dans les problèmes d'optimisation non linéaire dont l'étude, faite dans le plan des phases, conduit

à des correcteurs non linéaires du type tout ou rien. Loin de critiquer cette méthode qui nous a conduit à des solutions excellentes de part la rapidité du temps de recalage, nous nous étonnons de voir certains auteurs, comparer l'optimisation linéaire à l'optimisation non linéaire et affirmer que la seconde est supérieure à la première, car utilisant le maximum des possibilités du système. Le seul point commun entre ces deux systèmes est le mot optimisation et il est fortuit.

Au cours de ce chapitre, nous examinerons les raisons qui nous ont guidés dans le choix de la période d'échantillonnage, le choix du filtre et de l'anti-filtre. Nous passerons ensuite au développement des calculs et nous nous arrêterons là où dans l'impossibilité de pousser plus loin la résolution des équations, nous avons dû confier la suite à M. Paul LEFÈVRE, qui a mis au point un programme de calcul d'optimisation dans le domaine Z et sans l'aide duquel nous n'aurions jamais pu venir au bout du problème et surtout en avoir une vue panoramique.

Enfin, nous comparerons les performances du système arithmétique à celles de l'analogique travaillant dans les mêmes conditions et nous en tirerons des conclusions fort intéressantes.

§ 4.1. Données du problème

Les problèmes tels qu'ils se posent dans l'industrie, sont souvent très vagues et c'est une véritable devinette que de les faire entrer dans le cadre étroit des études théoriques.

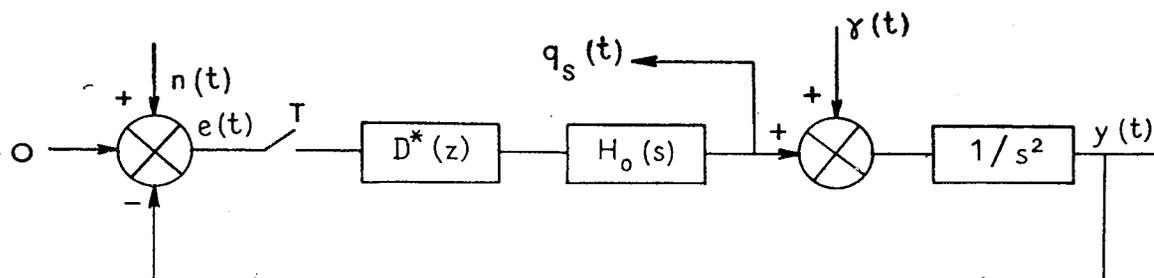


Fig. 4.1. — Schéma de boucle d'asservissement

Celui-ci se posait à peu près de la manière suivante : soit une boucle d'asservissement définie par le schéma de la fig. 4.1. Les deux seuls signaux accessibles sont l'erreur $e(t)$ et la sortie du correcteur $q_s(t)$. L'erreur est entachée d'un bruit $n(t)$ aléatoire, non stationnaire et le système subit des perturbations $\gamma(t)$ ayant une composante continue et dont la partie aléatoire est formée de changements brusques limités en amplitude et en fréquence.

Il s'agit de trouver un correcteur arithmétique linéaire maintenant l'erreur $y(t)$ inférieure à une certaine limite et la sortie du correcteur $q_s(t)$, elle aussi inférieure à une certaine limite variable dans le temps.

§ 4.2. Détermination des données

Fort heureusement, le problème n'était pas nouveau pour nous car avant l'étude d'un correcteur arithmétique, nous avons déjà eu à faire la synthèse et la réalisation d'un calculateur analogique répondant aux mêmes données.

En raison du caractère aléatoire du bruit et de la perturbation, la théorie de l'optimisation semble tentante, mais pour cela il faut nous débarrasser d'un certain nombre de données.

Nous décidons d'éliminer la composante continue de l'erreur $y(t)$ due à la composante continue de $\gamma(t)$, en introduisant un terme intégral dans le correcteur; cela à l'inconvénient d'introduire une stabilité bi-conditionnelle du système comme le montre le lieu des racines de la fig. 4.7.

Mais, nous sommes sûrs de la stabilité de notre gain et nous nous en tenons à cette solution. En outre, l'existence d'une composante continue de $\gamma(t)$ compensée par un signal de signe contraire en sortie du correcteur revient à diminuer d'autant la limite de saturation de $q_s(t)$.

Ensuite, nous éliminons le manque de stationnarité du bruit $n(t)$ en prenant le niveau maximum de son spectre, pensant déjà à une possibilité d'auto-optimisation pour le futur. Quant à la limitation de $q_s(t)$, nous la fixons à un niveau moyen, quitte à remédier à cette carence par le même remède (voir chapitre V).

Une simple transformation du schéma de la fig. 4.1. nous donne la fig. 4.2. et le problème se pose alors de la façon suivante :

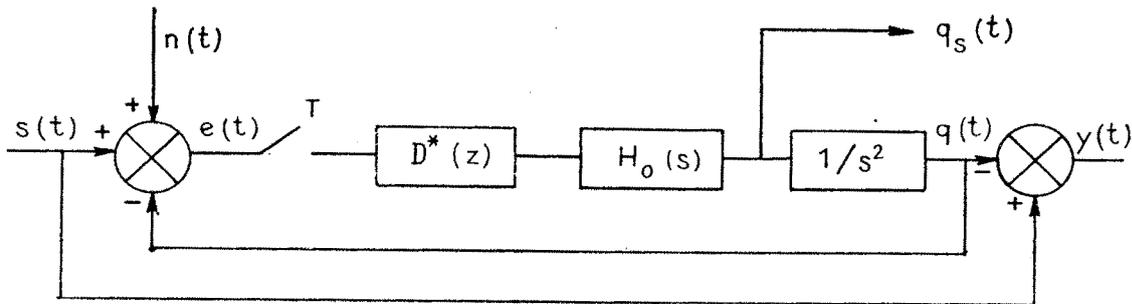


Fig. 4.2. — Schéma transformé

Étant donné un signal aléatoire stationnaire $s(t)$ entaché d'un bruit stationnaire $n(t)$, trouver un correcteur tel que la valeur efficace de l'erreur $y(t)$ soit minimum tout en maintenant la valeur efficace du signal $q_s(t)$ inférieure à un niveau fixe σ .

On pourrait poser le problème d'une manière différente en essayant de minimiser la valeur efficace de $q_s(t)$ tout en maintenant la valeur efficace de l'erreur $y(t)$ inférieure à la moitié de sa limite maximum. On est sûr dans ces conditions que l'on sera toujours en dessous de σ pour la valeur efficace de $q_s(t)$, si le problème est possible. Cela éliminerait donc le problème de la variation de σ avec le temps. Cette solution présente un inconvénient majeur : la réponse du système aux perturbations $\gamma(t)$ est moins bonne que dans la

première solution, comme on peut le voir sur les courbes de réponse transitoire à un échelon de $\gamma(t)$. Fig. 4.15.

Voyons maintenant le choix des spectres d'entrée.

4.21. DÉTERMINATION DU SPECTRE DU BRUIT $n(t)$. — La détermination du spectre de bruit d'après le signal d'erreur $e(t)$, qui est rappelons-le le seul accessible avec celui de $q_s(t)$ semble être une gageure, car le signal $e(t)$ dépend de la forme du correcteur.

Une étude rapide du système permet de penser que le maximum de la bande passante du système se situera aux environs de 3 rad/sec. Nous avons alors tenu le raisonnement suivant : le signal d'entrée est un signal à faible fréquence de coupure; d'autre part, la composante du bruit qui se trouve dans la bande passante du système sera annulée par le retour de la sortie. Donc, en supposant que le bruit soit blanc sur une grande bande de fréquence, comme permettait de le penser l'examen d'un grand nombre d'enregistrements, l'élimination des basses fréquences permettra, après analyse du reste du signal de déterminer le niveau du bruit, indépendant de la forme du correcteur. Nous avons donc passé le signal d'erreur $e(t)$ dans un filtre coupe bande de la forme :

$$H(s) = \frac{100s}{(s+4)(s+100)}$$

et nous en avons fait l'analyse harmonique d'après le procédé indiqué en appendice IV. L'analyse portant sur un enregistrement suffisamment court pour pouvoir supposer le bruit stationnaire.

Nous avons trouvé que le bruit était pratiquement blanc entre 4 rad/sec et 100 rad/sec et avons prolongé le spectre jusqu'à la fréquence nulle. Cette extrapolation s'est révélée exacte par la suite.

Puisque le système dans lequel entre le bruit est un système passe bas de fréquence de coupure aux environs du demi-cycle, nous pouvons supposer que le bruit est blanc plutôt que de le limiter à 100 rad/sec. Nous avons donc décidé d'adopter :

$$\| \Phi_{nn} = k^2.$$

4.22. DÉTERMINATION DU SPECTRE DU SIGNAL $s(t)$. — Comme nous l'avons vu plus haut, les seuls renseignements dont nous disposons sur $\gamma(t)$, c'est qu'il est formé d'une composante continue aux alentours de 20 sec^{-2} et d'une composante aléatoire variant par échelon d'amplitude maximum 20 sec^{-2} et de durée moyenne τ assez mal définie mais grande, de l'ordre de 40 sec environ.

Comme nous l'avons dit, il sera tenu compte de la composante continue de $\gamma(t)$ en imposant au correcteur d'avoir un terme intégral.

Quant à la partie aléatoire, il est devenu classique et commode de supposer que la répartition des échelons de valeur efficace 10 sec^{-2} se fait selon une distribution de Poisson, soit :

$$\Phi_{\gamma\gamma}(s) = \frac{2\beta\gamma^2}{\xi^2 - s^2} \quad \gamma = 10 \text{ sec}^{-2}$$

$$\beta = \frac{2}{\tau} = 0,05 \text{ sec}^{-1}$$

Le travail de Lefèvre nous a montré que dès que τ est supérieur à 10 sec l'influence de la variation β est quasi nulle. Nous avons donc adopté pour β^2 , la valeur zéro tout en conservant à β , au numérateur, sa valeur 0,05 sec⁻¹.

Soit :

$$\Phi_{\gamma\gamma}(s) = -\frac{4\gamma^2}{\tau s^2} = -\frac{a^2}{s^2} \quad a^2 = 9 \text{ sec}^{-5}.$$

Cette expression a l'avantage de faire apparaître un pôle au point $z = 1$ dans l'expression du compensateur, pôle qui en est très voisin dans le cas où β est faible.

Le signal $s(t)$ n'étant rien d'autre que l'intégrale double de $\gamma(t)$ nous avons :

$$\| \Phi_{ss}(s) = -\frac{a^2}{s^6} \quad a^2 = 9 \text{ sec}^{-5}.$$

§ 4.3. Choix de la période d'échantillonnage

Tout au long de cette étude, le choix de la période d'échantillonnage fut une de nos préoccupations majeures. Nous avons longuement insisté dans le chapitre II sur l'incidence de ce choix sur la rentabilité d'un calculateur arithmétique en ligne comparée à celle d'un calculateur analogique, ce en dehors des considérations de souplesse qu'offre la solution arithmétique. Nous n'y reviendrons pas.

Notre raisonnement fut le suivant : considérons le problème donné au paragraphe 4.1-4.2. résolu à l'aide d'un correcteur analogique; cette solution est exposée en détail dans l'appendice V. D'après le théorème de Shannon, si nous échantillons le signal d'erreur $e(t)$ avec une fréquence double de la fréquence de coupure, nous pouvons extraire du signal échantillonné la même somme d'informations que du signal continu. Par malheur, $e(t)$ a un spectre qui s'étend jusqu'à l'infini et par suite ne présente pas de fréquence de coupure; en fait, la partie du spectre s'étendant à l'infini est due au bruit $n(t)$ et ne nous intéresse guère; la partie de $e(t)$ due au signal, et qui contient les informations utiles est $y(t)$. C'est la forme de son spectre qui doit dicter le choix de notre période. Nous voyons sur la fig. A 5.3, appendice V, qu'en prenant une période d'échantillonnage de $T = 0,4$ sec, nous admettons pour fréquence de coupure $\omega = 8$ rad/sec ce qui correspond à une atténuation de $\frac{1}{20}$ par rapport à l'amplitude du signal à fréquence nulle. Nous pouvons donc approcher les résultats obtenus dans le domaine analogique avec une précision de $\frac{1}{20}$ au mieux.

Nous avons ensuite supposé que puisque on pouvait extraire la même somme d'informations de $e(t)$, il devait être possible de trouver un compensateur $D^*(z)$ remplaçant $D(s)$ et donnant les mêmes performances. Cette hypothèse hardie nous permettait de sortir du cercle vicieux, car la forme du signal $e(t)$ dépend essentiellement du correcteur utilisé. Nous n'avons pu la vérifier que plus tard; elle s'est révélée exacte au-delà même de nos espérances.

§ 4.4. Filtre et antifiltre

Naturellement, il n'était pas question d'échantillonner le signal $e(t)$ dont le spectre s'étend jusqu'à l'infini, sans le filtrer préalablement.

L'application des résultats du chapitre II nous a donné les expressions du filtre et de l'antifiltre :

$$\left\| \begin{aligned} F_1(s) &= \frac{2,5}{s+2,5} \\ F_2^*(z) &= 1,52(1-0,368z^{-1}). \end{aligned} \right.$$

Les calculs faits dans le chapitre II ont montré que $F_2^*(z)$ avait pour but de réduire les déformations apportées par $F_1(s)$ à la partie du spectre d'erreur due au signal. Malheureusement le concept spectre n'introduit pas la phase du signal et l'on peut se poser la question suivante : $F_2^*(z)$ restaure-t-il effectivement le signal utile en amplitude (cela nous savons que oui) et en phase?

Soit donc $e_s(t)$ la partie de l'erreur $e(t)$ due au signal. La sortie de $F_1(s)$ s'écrit :

$$e_{1s}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e_s(t-\tau) f(\tau) d\tau.$$

La période d'échantillonnage T a été choisie de telle sorte que $e_s(t)$ soit décrit avec une très bonne approximation par des prélèvements faits à la période T . De ce fait, nous pouvons écrire l'expression du signal échantillonné $e_{1s}^*(t)$ de la façon suivante :

$$e_{1s}(nT) = \int_{-\infty}^{+\infty} e_s(nT-\tau) f(\tau) d\tau = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e_s(nT-kT) \int_{(k-\frac{1}{2})T}^{(k+\frac{1}{2})T} f(\tau) d\tau.$$

Dans chaque intervalle $(k-\frac{1}{2})T$, $(k+\frac{1}{2})T$, $e_s(\tau)$ a été remplacé par sa valeur pour $\tau = kT$. Ce processus a l'avantage d'éliminer le retard d'une demi-période que l'on introduit quand on remplace $e_s(\tau)$ par $e_s(kT)$ dans l'intervalle kT , $(k+1)T$.

L'expression temporelle de $f(\tau)$ est :

$$f(\tau) = \omega_0 e^{-\omega_0 \tau}$$

ce qui donne pour $e_{1s}(nT)$

$$e_{1s}(nT) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e_s(nT-kT) \cdot e^{-\omega_0 kT} 2sh \frac{\omega_0 T}{2},$$

Ce qui nous donne d'après le théorème de la convolution dans le domaine Z :

$$E_{1s}^*(z) = E_s^*(z) \cdot F_1^*(z) \times \frac{2sh \frac{\omega_0 T}{2}}{\omega_0}$$

ou encore :

$$E_{1s}^*(z) = E_s^*(z) \cdot \frac{2sh \frac{\omega_0 T}{2}}{1 - z^{-1} e^{-\omega_0 T}}.$$

Nous voyons sur cette formule que l'effet néfaste de $F_1(s)$ peut être compensé *entièrement* aussi bien en phase qu'en amplitude par $F_2^*(z)$.

§ 4.5. Calculs d'optimisation

Les calculs d'optimisation tels qu'ils sont définis dans le chapitre III ont pour éléments :

Bruit $n(t)$. — Le bruit sera supposé blanc dans l'intervalle $-\frac{\pi}{T} \leq \omega \leq \frac{\pi}{T}$ de niveau k^2 et nul ailleurs; k^2 pourra avoir les valeurs 7, 14, 21 sec/rad.

Signal $s(t)$. — Le signal est défini par sa densité spectrale :

$$\Phi_{ss}(s) = -\frac{a^2}{s^6} \quad a^2 = 9 \text{ sec}^{-5};$$

$$F(s) = \frac{1}{s^2};$$

$$F_s(s) = 1;$$

La probabilité de saturation est limitée à 5 %.

La limite de saturation pourra varier entre 30 et 140 sec⁻².

La période d'échantillonnage T est d'abord choisie égale à 0,4 sec. Si les résultats trouvés sont comparables à ceux du domaine analogique, on essayera 0,6 et 1 sec.

Nous pousserons les calculs aussi loin que nous le pourrons et nous nous arrêterons là où nous avons dû confier la résolution de certaines équations au Laboratoire de Calcul de l'Armée.

Notre premier soin sera de calculer les expressions.

$$\Gamma^*(z) \quad \text{et} \quad \Delta^*(z).$$

4.51. CALCUL DE $\Gamma^*(z)$.

$$\Gamma^*(z) = Z[\Phi_{ss}^*(s) \cdot G(-s)]$$

$$\Phi_{ss}^*(s) = \frac{1}{T} \Phi_{ss}(s) = -\frac{1}{T} \cdot \frac{a^2}{s^6};$$

$$G(-s) = \frac{e^{Ts} - 1}{s^3};$$

$$\Gamma^*(z) = \frac{a^2}{T} (1-z) Z\left[\frac{1}{s^9}\right].$$

La transformée en Z de $\frac{1}{s^9}$ est donnée par les tables de l'appendice II

$$\Gamma^*(z) = -\frac{T^7}{8!} a^2 \frac{[1 + z^{-7} + 247(z^{-1} + z^{-6}) + 4\,293(z^{-2} + z^{-5}) + 15\,619(z^{-3} + z^{-4})]}{(1 - z^{-1})^8},$$

4.52. CALCUL DE $\Delta^*(z)$.

$$\Delta^*(z) = \Phi_{\nu\nu}^*(z) Z [G(s) \cdot G(-s) + \rho \cdot G_s(s) \cdot G_s(-s)]$$

$$\Phi_{\nu\nu}^*(z) = \frac{1}{T} Z \left[-\frac{a^2}{s^6} + \Phi_{nn}(s) \right]$$

$$\Phi_{\nu\nu}^*(z) = \frac{1}{T} \left[-a^2 \frac{T^5}{5!} z^{-1} \frac{[(1 + z^{-4}) + 26(z^{-1} + z^{-3}) + 66z^{-2}]}{(1 - z^{-1})^6} + \frac{k^2}{T} \right]$$

$$\begin{aligned} Z [G(s) \cdot G(-s) + \rho G_s(s) G_s(-s)] &= z (1 - z^{-1})^2 Z \left[\frac{1}{s^6} + \rho \frac{1}{s^2} \right] \\ &= \frac{\left[\frac{T^5}{5!} + \rho T \right] [1 + z^{-4}] + \left[26 \frac{T^5}{5!} - 4\rho T \right] [z^{-1} + z^{-3}] + \left[66 \frac{T^5}{5!} + 6\rho T \right] z^{-2}}{(1 - z^{-1})^4} \end{aligned}$$

Ce qui détermine $\Delta^*(z)$.

4.53. CALCUL DE $D^*_{sm}(z)$. — Pour la suite des calculs, nous poserons :

$$\begin{aligned} A(z) &= \frac{T^2 (z-1)^6}{k^2} \Phi_{\nu\nu}^*(z) \\ &= (1 + z^6) - (6 + \lambda)(z + z^5) + (15 - 26\lambda)(z^2 + z^4) - (20 + 66\lambda)z^3 \end{aligned}$$

avec

$$\lambda = \frac{a^2 T^7}{5! k^2}$$

$$B(z) = (1 + z^4) + \left[\frac{26 \frac{T^5}{5!} - 4\rho T}{\frac{T^5}{5!} + \rho T} \right] [z + z^3] + \left[\frac{66 \frac{T^5}{5!} + 6\rho T}{\frac{T^5}{5!} + \rho T} \right] z^2$$

$$C(z) = (1 + z^7) + 247(z + z^6) + 4\,293(z^2 + z^5) + 15\,619(z^3 + z^4).$$

Ce qui nous permet d'écrire :

$$\Gamma^*(z) = -\frac{a^2 T^7 z \cdot C(z)}{8! (z-1)^8}$$

$$\Delta^*(z) = \frac{A(z) \cdot B(z)}{T (z-1)^{10}} \left[\frac{T^5}{5!} + \rho T \right] \frac{k^2}{T}.$$

Le calcul de $D_{sm}^*(z)$ implique la recherche de

$$\frac{\Gamma^*(z)}{z \Delta^{*-}(z)} = - \frac{a^2 T^8 \sqrt{T} C(z)}{8! k^2 \left[\frac{T^5}{5!} + \rho T \right] A^-(z) \cdot B^-(z) (z-1)^3}$$

la décomposition de cette fraction rationnelle en éléments simples fournit :

$$\left[\frac{\Gamma^*(z)}{z \Delta^{*-}(z)} \right]_+$$

les pôles à conserver sont ceux situés sur ou à l'intérieur du cercle unité, c'est-à-dire dans le cas présent $z = 1$; en effet, les racines de $A^-(z)$ et $B^-(z)$ se trouvent, par définition à l'extérieur du cercle unité

$$\left[\frac{\Gamma^*(z)}{z \Delta^{*-}(z)} \right]_+ = - \frac{a^2 T^8 \sqrt{T}}{8! k^2 \left[\frac{T^5}{5!} + \rho T \right]} \frac{m_2 z^2 + m_1 z + m_0}{(z-1)^3}.$$

Ce qui nous conduit à l'expression de $D_{sm}^*(z)$

$$\left\| D_{sm}^*(z) = - \frac{a^2 T^9}{8! k^2 \left[\frac{T^5}{5!} + \rho T \right]} \frac{z(z-1)^2 (m_2 z^2 + m_1 z + m_0)}{A^+(z) B^+(z)} \right\|.$$

L'expression du correcteur de la boucle en découle :

$$D^*(z) = \frac{D_s^*(z)}{1 - \frac{T^2}{2} \frac{(z+1)}{(z-1)^2} D_s^*(z)}$$

$$D^*(z) = - \frac{\frac{2\mu}{T^2} z (m_2 z^2 + m_1 z + m_0) (z-1)^2}{A^+(z) B^+(z) + \mu z (z+1) (m_2 z^2 + m_1 z + m_0)}$$

avec

$$\mu = \frac{a^2 T^{11}}{2 \cdot 8! k^2 \left[\frac{T^5}{5!} + \rho T \right]}.$$

Dans le cas analogique, on démontre d'une manière relativement aisée que le dénominateur de $D(s)$ contient s^3 en facteur. Après simplification avec un s^2 au numérateur, il subsiste s . Ceci est relativement prévisible et correspond à l'annulation de la composante continue de la perturbation en dérivée seconde que nous avons fait apparaître de façon déviée en faisant tendre β vers zéro au dénominateur de l'expression de la densité spectrale du signal (§ 4.22).

Nous avons donc pensé que dans le domaine z on devrait voir apparaître $(z-1)^3$ au dénominateur. Nous avons pu vérifier de manière littérale la divisibilité par $(z-1)$. Nous ne reproduirons pas les calculs ici, ils sont sans intérêt et très longs. Nous n'avons pas eu le courage de vérifier la divisibilité par

$(z - 1)^3$ car le volume des calculs était démesuré devant l'intérêt de la chose, mais nous avons pu le constater sur les calculs faits à la 650 IBM et poussés jusqu'à la huitième décimale.

De ce fait, la nouvelle expression du correcteur est la suivante :

$$D^*(z) = g \cdot \frac{z(z^2 - \alpha_1 z + \alpha_2)}{(z-1)(z^2 - \beta_1 z + \beta_2)}.$$

4.54. CALCUL DE LA VALEUR EFFICACE DU SIGNAL SATURANT. — Mettant à profit la remarque faite au chapitre III, § 3.52, nous pouvons écrire :

$$\overline{q_s^2(t)} = \frac{T}{2\pi j} \oint \Phi_{\nu\nu}^*(z) D_{sm}^*(z) \cdot D_{sm}^*(z^{-1}) \frac{dz}{z}.$$

Nous poserons par la suite :

$$\left. \begin{aligned} A^+(z) &= z^3 - \frac{a_2}{a_3} z^2 + \frac{a_1}{a_3} z - \frac{1}{a_3} \\ A^-(z) &= z_3 - a_1 z^2 + a_2 z - a_3 \end{aligned} \right\} A(z) = A^+(z) \cdot A^-(z)$$

$$\left. \begin{aligned} B^+(z) &= z^2 - \frac{b_1}{b_2} z + \frac{1}{b_2} \\ B^-(z) &= z^2 - b_1 z + b_2 \end{aligned} \right\} B(z) = B^+(z) \cdot B^-(z).$$

Notons que nous avons :

$$A^+(z^{-1}) = -\frac{A^-(z)}{a_3 z^3} \quad A^-(z^{-1}) = -\frac{a_3 A^+(z)}{z^3}$$

$$B^+(z^{-1}) = \frac{B^-(z)}{b_2 z^2} \quad B^-(z^{-1}) = \frac{b_2 B^+(z)}{z^2}.$$

L'expression de $\overline{q_s^2(t)}$ devient alors

$$\overline{q_s^2(t)} = -\frac{4\mu^2 a_3 b_2 k^2}{T^5 2\pi j} \oint \frac{(m_0 + m_1 z + m_2 z^2)(m_0 z^2 + m_1 z + m_2)}{B(z)(z-1)^2} dz.$$

Nous décomposerons l'intégrand en deux parties : une ayant $z = 1$ comme pôle double, une autre ayant pour pôles les zéros de $B(z)$.

Du fait que le changement de z en $\frac{1}{z}$ ne change pas l'intégrand, il n'y a pas de termes en $\frac{1}{z-1}$ dans la décomposition de ce dernier en éléments simples et le coefficient du terme en $\frac{1}{(z-1)^2}$ s'obtient aisément; c'est :

$$\frac{(m_0 + m_1 + m_2)^2}{B(1)}.$$

L'examen de la formule donnant $\left. \frac{\Gamma^*(z)}{z \Delta^{*-}(z)} \right]_+$ montre que :

$$(m_0 + m_1 + m_2) = \frac{C(1)}{A^-(1) B^-(1)}$$

$$(m_0 + m_1 + m_2)^2 = \frac{C^2(1)}{a_3 b_2 B(1) A(1)}.$$

Calculons ces diverses valeurs :

$$\left\{ \begin{array}{l} A(1) = -\frac{a^2 T^6}{k^2} \\ B(1) = \frac{T^5}{5! + \rho T} \\ C(1) = 8! \end{array} \right.$$

En définitive, la première intégrale, composante de $\overline{q_s^2(t)}$ s'écrit :

$$I_1 = \frac{T}{2\pi j} \oint a^2 \frac{dz}{(z-1)^2} = \frac{1}{2\pi j} \oint a^2 \frac{Tz}{(z-1)^2} \frac{dz}{z}.$$

Cette intégrale n'a pas de sens, mais en utilisant la formule de SKLANSKY (23), nous pouvons nous ramener au cas déjà examiné dans le domaine analogique traité Appendice V. Ceci nous conduit à écrire :

$$I_1 = \gamma^2 \quad (\gamma = 10 \text{ sec}^{-2}).$$

La seconde intégrale de contour I_2 dont les pôles sont les zéros de $B(z) = 0$ ne présente aucune difficulté d'intégration et son expression est obtenue à l'aide du théorème de Cauchy. Nous ne reproduirons ici ni les calculs conduisant à son expression, ni son expression elle-même, car ils sont tous deux démesurément longs et sortant de l'intérêt de cet exposé.

$$\overline{q_s^2(t)} = I_1 + I_2.$$

Ici se place une remarque très importante qui va différencier l'arithmétique de l'analogique.

Dans le cas où le correcteur est analogique, on montre (voir appendice V) que dans l'optimisation de WIENER, c'est-à-dire sans contrainte ($\rho = 0$), la valeur efficace du signal saturant est infinie. Cela se traduit mathématiquement par l'apparition de quatre pôles supplémentaires à l'origine dans l'intégrand de :

$$\overline{q_s^2(t)}.$$

Dans le cas où le correcteur est arithmétique, ce phénomène n'a pas lieu. En effet pour $\rho = 0$, $B(1) = 5!$ et l'on ne voit pas apparaître de pôles supplémentaires au point $z = 1$ transformé du point $s = 0$. De ce fait, l'intégrale donnant $\overline{q_s^2(t)}$ reste finie.

Il est assez aisé de donner une explication physique à ce phénomène :

Dans le domaine analogique, la contrainte imposée à $q_s(t)$ se traduit par l'existence dans $D(s)$ d'un dénominateur de degré supérieur d'une unité à celui du numérateur; le bruit blanc qui est injecté à l'entrée de $D(s)$ en ressort avec un filtrage de ses hautes fréquences. Ce filtrage devient de plus en plus faible quand on relâche la contrainte et quand $\rho = 0$ toutes les fréquences du bruit blanc passent, ce qui explique que la valeur efficace du signal de sortie de $D(s)$ soit infinie.

Dans le cas du correcteur arithmétique, on peut noter que le numérateur et dénominateur sont de même degré. Le filtrage du bruit blanc est effectué partie par $D^*(z)$, partie par le circuit bloqueur et même quand la contrainte devient nulle le filtrage du circuit bloqueur demeure, ce qui explique que la valeur efficace du signal $q_s(t)$ ne puisse jamais devenir infinie. Nous avons tracé fig. 4.3 les caractéristiques filtrantes du circuit bloqueur $H_0(s)$.

Du fait que la valeur efficace $\overline{q_s^2(t)}$ tende vers une valeur asymptotique quand $\rho \rightarrow 0$, nous en tirerons plus tard des conclusions intéressantes.

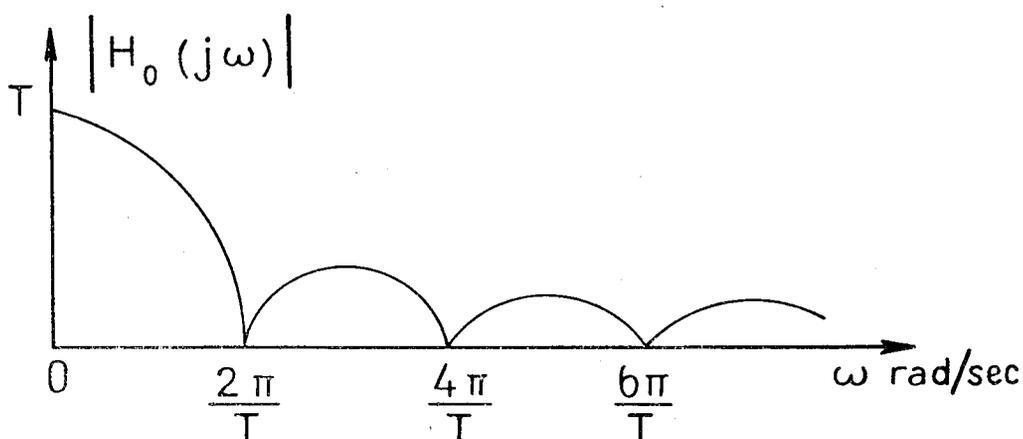


Fig. 4.3. — Spectre d'amplitude d'un circuit bloqueur d'ordre zéro

4.55. CALCUL DE LA VALEUR EFFICACE DE L'ERREUR $y(t)$. — La valeur efficace de l'erreur peut se décomposer en deux parties une due au bruit $\overline{y_n^2(t)}$, l'autre au signal $\overline{y_s^2(t)}$:

$$\overline{y_n^2(t)} = \frac{T}{2\pi j} \oint \Phi_{nn}^*(z) \cdot D_s^*(z) \cdot G^*(z) \cdot D_s^*(z^{-1}) \cdot G^*(z^{-1}) \frac{dz}{z}$$

$$\Phi_{nn}^*(z) = \frac{k^2}{T^2}$$

$$D_s^*(z) G^*(z) = - \frac{\mu z (z+1) (m_2 z^2 + m_1 z + m_0)}{A^+(z) \cdot B^+(z)}$$

$$\overline{y_n^2(t)} = - \frac{\mu^2 k^2 a_3 b_2}{T} \frac{1}{2\pi j} \oint \frac{z (z+1)^2 (m_0 + m_1 z + m_2 z^2) (m_0 z^2 + m_1 z + m_2)}{A(z) \cdot B(z)} dz$$

Calculons maintenant la valeur efficace due au signal :

$$\overline{y_s^2(t)} = \frac{T}{2\pi j} \oint \Phi_{ss}^*(z) [1 - D_s^*(z) G^*(z)] [1 - D_s^*(z^{-1}) G^*(z^{-1})] \frac{dz}{z}.$$

Or, nous avons :

$$1 - D_s^*(z) G^*(z) = \frac{D_s^*(z)}{D^*(z)} = \frac{(z-1)^3 (z^2 - \beta_1 z + \beta_2)}{A^+(z) \cdot B^+(z)}.$$

Ce qui donne pour l'expression de $y_s^2(t)$:

$$\overline{y_s^2(t)} = -\frac{a^2 T^5}{5!} a_3 b_2 \frac{1}{2\pi j} \oint \frac{[1 + z^4 + 26(z + z^3) + 66z^2] [z^2 - \beta_1 z + \beta_2] [1 - \beta_1 z + \beta_2 z^2] dz}{A(z) \cdot B(z)}.$$

La valeur efficace de l'erreur est alors :

$$\overline{y^2(t)} = \overline{y_n^2(t)} + \overline{y_s^2(t)}.$$

L'évaluation des deux intégrales se faisant sans difficulté à l'aide du théorème de CAUCHY.

4.56. EXÉCUTION DES CALCULS NUMÉRIQUES. — Si nous comparons dès maintenant les calculs du paragraphe 4.5 à ceux de l'appendice V, nous voyons la disproportion qui existe entre les calculs d'optimisation dans le domaine Z et le domaine s. Arrivé à ce point, nous avons pensé que la poursuite des calculs en particulier, des diverses intégrales de contour, était sinon impossible, du moins inutilement compliquée pour le but recherché. Nous avons donc remplacé les expressions littérales par leurs valeurs numériques et confié le travail de résolution au Laboratoire de Calcul de l'Armée qui dispose d'une calculatrice 650 IBM. Malgré la collaboration étroite de M. P. LEFÈVRE, l'obtention des résultats a demandé six mois. C'est une partie d'entre eux que nous présentons ci-dessous.

§ 4.6. Présentation des résultats

4.61. COURBES DE PERFORMANCES. — On désigne par courbes de performances, la représentation graphique de la valeur efficace de l'erreur $y(t)$ en fonction de la valeur efficace du signal saturant $q_s(t)$, pour une valeur fixe du niveau de bruit k^2 .

Les fig. 4.4, 4.5, 4.6 représentent de telles courbes pour diverses valeurs du niveau de bruit k^2 et de la période d'échantillonnage T. Le cas T = 0 représente évidemment le cas analogique.

L'observation de ces courbes nous permet de tirer les conclusions suivantes :

1. La courbe T = 0 est asymptote à une certaine valeur efficace de l'erreur $y(t)$ qui correspond à l'optimisation de WIENER.

2. Les courbes de performance des systèmes échantillonnés sont toutes situées au dessus de celle du système analogique. Elles donnent pour une valeur donnée de σ_q , une valeur efficace de l'erreur, d'autant plus grande que la période d'échantillonnage est plus grande.

3. Comme nous l'avons vu antérieurement par le calcul, les courbes de performances des systèmes échantillonnés présentent un point d'arrêt pour une valeur de σ_q , d'autant plus élevée que la période T est plus faible. Ce fait est important, car il doit entrer en ligne de compte dans le choix de la période d'échantillonnage. En effet, on doit choisir une période d'échantillonnage telle que le point d'arrêt de la courbe de performance ait une abscisse σ_q , au moins égale à la moitié de la limite imposée à $q_s(t)$. Nous constatons, par exemple, que dans notre cas où la limite supérieure de $q_s(t)$ est 140 sec^{-2} seule la période $T = 0,4 \text{ sec}$ peut convenir.

4. Au prix d'un sacrifice de 10/100 des performances de notre boucle, ce qui entre dans les marges de réalisation d'un système physique, il nous est possible de prélever nos informations toutes les 0,4 sec; nous avons assez insisté, au cours du chapitre II, sur le gain étonnant de cette réalisation pour ne pas y revenir.

5. Dans le cas où le signal saturant comporte une composante continue γ_0 introduite pour neutraliser la composante continue de la perturbation $\gamma(t)$ (fig. 4.1), il suffit de retrancher de la limite de $q_s(t)$ cette valeur γ_0 pour se retrouver dans les conditions du problème du chapitre III. Par exemple, si la limite de $q_s(t)$ est fixée à 100 sec^{-2} que γ_0 soit égale à 20 sec^{-2} , on adoptera pour valeur efficace du signal saturant :

$$\frac{100 - 20}{2} = 40 \text{ sec}^{-2}$$

en admettant un taux de saturation de 5 % ce qui donne dans le cas où $k^2 = 14 \text{ sec/rad}$ et $T = 0,4 \text{ sec}$. $\sigma_y = 7,1$, ce qui signifie que l'erreur sera inférieure à 14,2, 95 % du temps.

4.62. FONCTION DE TRANSFERT TOTALE ET LIEU DES RACINES ($T = 0,4$). — Nous désignerons par $T^*(z)$ la fonction de transfert totale reliant la sortie $Q^*(z)$ à l'entrée $S^*(z)$. Nous avons d'après les calculs antérieurs :

$$T^*(z) = D_s^*(z) G^*(z) = g \frac{T^2 z (z+1) (z^2 - \alpha_1 z + \alpha_2)}{2A^+(z) \cdot B^+(z)}$$

Les zéros de $T^*(z)$ sont les mêmes que ceux de $D^*(z)$ et nous étudierons leurs variations dans le paragraphe suivant.

Les pôles de $T^*(z)$ sont les racines de $A^+(z) \cdot B^+(z) = 0$. Ils sont donnés par les tableaux 4.1, 2. On peut noter le résultat déjà rencontré en analogique (appendice V) et que l'on peut aisément vérifier sur les expressions littérales de $A(z)$ et $B(z)$.

Les racines de $A^+(z)$ sont uniquement fonctions du rapport $\frac{a^2}{k^2}$ soit dans le cas présent, comme a^2 est fixe, de k^2 .

Les racines de $B^+(z)$ sont uniquement fonctions du paramètre de Lagrange ρ .

TABLEAU 4.1
VALEURS DES RACINES DE $A^+(z)$ EN FONCTION DE k^2

$$A^+(z) = (z - x_1)(z - x_2 - jy_2)(z - x_2 + jy_2)$$

k^2	x_1	x_2	y_2
7	0,6589	0,7594	0,2869
14	0,6896	0,7878	0,2627
21	0,7066	0,8028	0,2490

TABLEAU 4.2
VALEURS DES RACINES DE $B^*(z)$
EN FONCTION DU PARAMÈTRE DE LAGRANGE

$$B^+(z) = (z - x_3 - jy_3)(z - x_3 + jy_3)$$

ρ	$3 \cdot 10^{-4}$	10^{-3}	$3 \cdot 10^{-3}$	10^{-2}	0,1	0,3	1
x_3	-0,1432	-0,0366	0,0953	0,2550	0,5312	0,6340	0,7242
y_3	0,1204	0,2442	0,3095	0,3363	0,2958	0,2565	0,2112

La fig. 4.7 représente le lieu des racines de l'équation caractéristique du système dans le cas où $k^2 = 14$ sec/rad, $g = 2$. Il a la caractéristique d'avoir une stabilité biconditionnelle, autrement dit le système peut se déstabiliser soit par augmentation de gain, ce qui est le cas le plus fréquent, soit par diminution; c'est le résultat de l'introduction d'un troisième pôle au point $z = 1$, nécessaire pour éliminer la composante continue de la perturbation $\gamma(t)$.

4.63. COEFFICIENTS DU CORRECTEUR $D^*(z)$. — Le correcteur optimum a pour expression :

$$D^*(z) = g \frac{z(z^2 - \alpha_1 z + \alpha_2)}{(z-1)(z^2 - \beta_1 z + \beta_2)}$$

Nous avons trouvé commode pour l'étude de l'auto-optimisation de tracer les variations de ces coefficients en fonction du gain g . Les variations de α_1 , α_2 , β_1 , β_2 sont figurées, fig. 4.8, 9, 10, 11, pour diverses valeurs du niveau de bruit k^2 .

La fig. 4.12 qui représente la variation de la valeur efficace du signal saturant $q_s(t)$ en fonction du gain g pour diverses valeurs de k^2 montre que si les limites de $q_s(t)$ sont 30 sec^{-2} et 140 sec^{-2} , le gain « g » reste compris entre 1 et $7,5 \text{ sec}^{-2}$. Ceci permet de déterminer la partie utile des courbes.

La fig. 4.13 représente un jeu de courbes reliant le gain g du compensateur $D^*(z)$ au paramètre de Lagrange ρ .

Donc, en conclusion, si nous nous donnons un niveau de bruit k^2 et une limite du signal saturant $q_s(t)$, soit σ_{sl} :

- les courbes des fig. 4.4, 5, 6 donnent la valeur efficace de l'erreur $y(t)$;
- les courbes de la fig. 4.12, le gain g du correcteur $D^*(z)$;
- les courbes des fig. 4.8, 9, 10, 11, les valeurs des coefficients $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ de $D^*(z)$;
- les courbes de la fig. 4.13, la valeur du paramètre de Lagrange ce qui détermine entièrement les pôles et zéros de la fonction de transfert totale $T^*(z)$.

Le problème est de ce fait entièrement résolu.

4.64. RÉSULTATS THÉORIQUES ET RÉSULTATS DE SIMULATION. — En dehors des courbes de performances, le programme de résolution du problème d'optimisation fournit aussi les courbes de réponse transitoire. Les fig. 4.14, 15 donnent les réponses transitoires à un échelon de position et de dérivée seconde pour deux valeurs du gain dans le cas où $k^2 = 14 \text{ sec/rad}$. On notera le grand dépassement des réponses à un échelon de position, tribut que l'on doit payer pour avoir la sensibilité minimale du système au bruit et une bonne réponse à un échelon de dérivée seconde.

Ce genre de système n'est pas conçu pour avoir une bonne réponse à un échelon de position et il serait malséant de l'utiliser dans des circonstances où un recalage est nécessaire. Dans de telles conditions, il est préférable d'avoir deux correcteurs : un pour le recalage à temps de réponse minimum du type tout ou rien (8.29) et celui de notre étude en régime permanent. Le passage de l'un à l'autre ne présente aucune difficulté.

Nous avons tenu à vérifier l'exactitude de notre théorie et de nos calculs et surtout voir si les hypothèses faites qui nous permettaient d'aborder le problème mathématiquement n'étaient pas trop en contradiction avec la théorie. Pour ce faire, nous avons monté la simulation représentée, fig. 4.20, dans laquelle le calculateur était un véritable calculateur arithmétique en ligne, la partie analogique était réalisée avec des amplificateurs à courant continu de la S.E.A. du type 3 ATC 3 et le bruit fourni par un générateur de bruit Elgenco modèle 401, ou par une bande magnétique tournant indéfiniment sur elle-même.

La fig. 4.16 est l'enregistrement de la réponse à un échelon de position et un échelon de dérivée seconde.

La fig. 4.17 représente l'erreur $y(t)$ du système quand on met à l'entrée un bruit de 14 sec/rad et des échelons de $\pm 10 \text{ sec}^{-2}$ avec le correcteur correspondant et un gain de 4.

On notera la coïncidence presque parfaite des résultats théoriques et de l'expérience.

Les fig. 4.18 et 4.19 montrent ce qui se passe quand on ne met ni filtre avant échantillonnage, ni antifiltre, ou bien un filtrage trop faible. L'erreur atteint des valeurs énormes.

§ 4.7. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons montré comment aborder et résoudre par la théorie de l'optimisation, modifiée et appliquée aux systèmes échantillonnés, un problème industriel. Les calculs qui mènent à la solution sont pénibles et leur exécution coûte certainement très cher. Certains objecteront que seuls certains organismes disposant d'un laboratoire de calculs et de spécialistes peuvent se permettre le luxe de pareilles solutions. Nous en sommes entièrement convaincus, mais nous pensons, en premier lieu, qu'il est nécessaire que nous multiplions les spécialistes dans ce domaine et que se créent des laboratoires de calculs auxquels les industries pourront confier leurs problèmes, car entre la solution optimale et la solution classique dans laquelle le correcteur est une simple avance de phase, il existe 50 % de différence entre les performances et certainement plus quant à la bonne utilisation du calculateur. En outre, nous défions quiconque de trouver la solution optimale à tâtons.

NOTA. — Dans ce chapitre et le suivant, l'unité de position n'est en aucun endroit spécifiée. Nous n'avons pas pensé qu'il était nécessaire de le faire, car elle peut être quelconque.

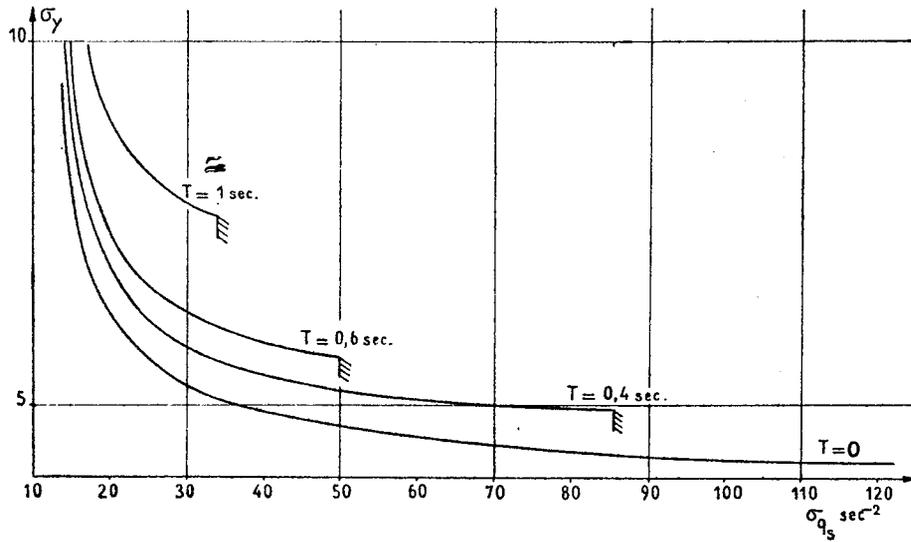


Fig. 4.4. — Courbes de performances relatives à $k^2 = 7 \text{ sec/rad}$

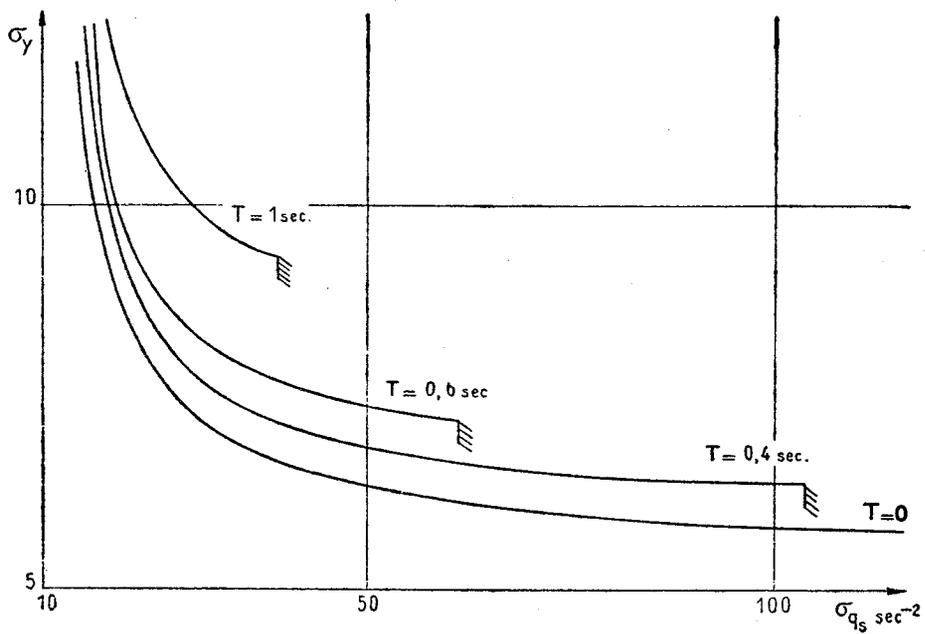


Fig. 4.5. — Courbes de performances relatives à $k^2 = 14 \text{ sec/rad}$

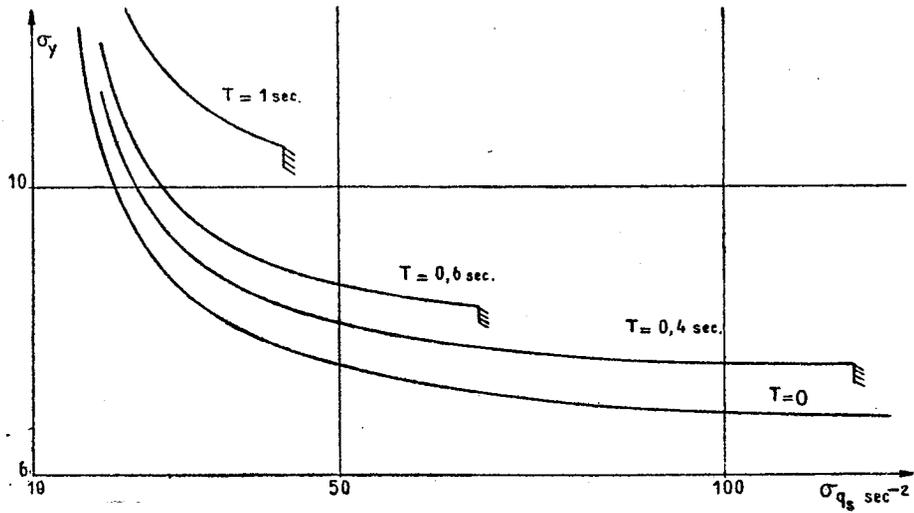


Fig. 4.6. — Courbes de performances relatives à $k^2 = 21 \text{ sec/rad}$

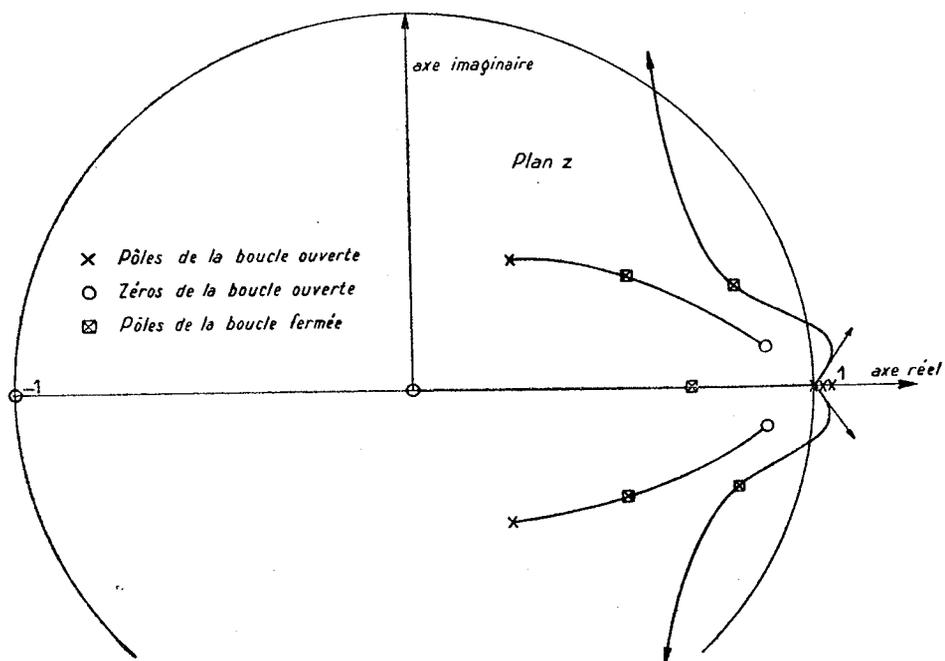


Fig. 4.7. — Lieu des racines dans le cas où $g = 2$, $k^2 = 14 \text{ sec/rad}$

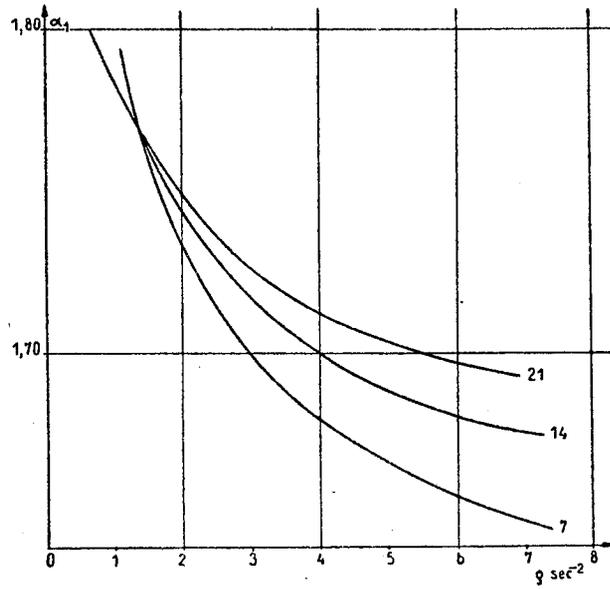


Fig. 4.8. — Variations du coefficient α_1 en fonction du gain g pour trois valeurs du bruit k^2 : 7, 14, 21 sec/rad

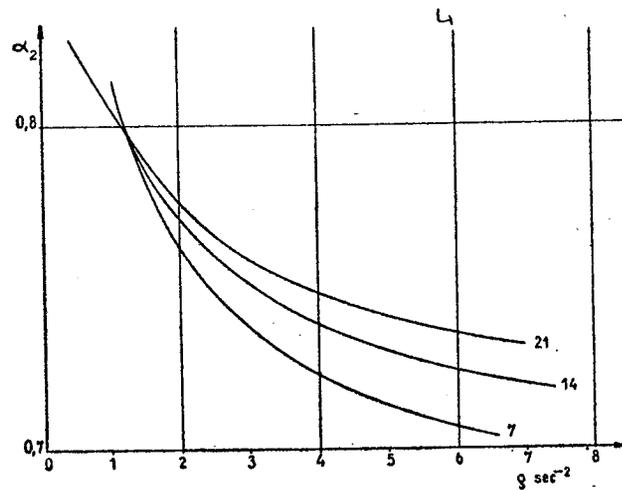


Fig. 4.9. — Variations du coefficient α_2 en fonction du gain g pour trois valeurs du bruit k^2 : 7, 14, 21 sec/rad

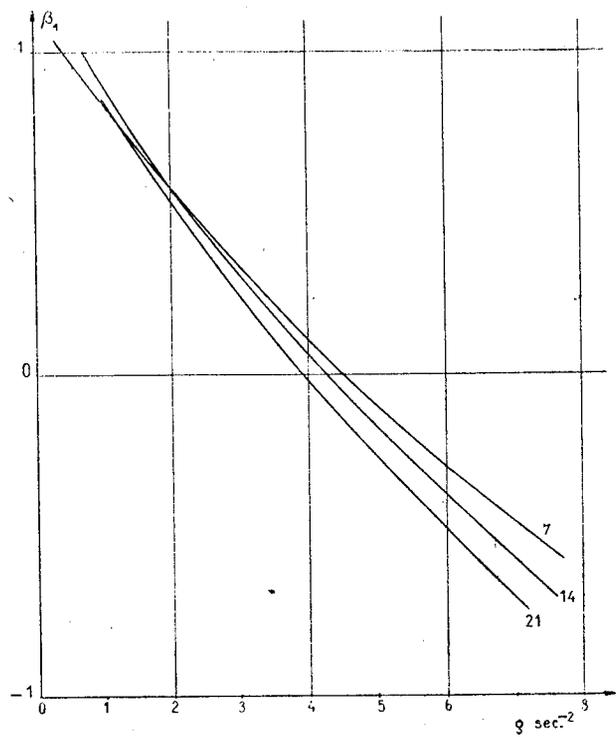


Fig. 4.10. — Variations du coefficient β_1 en fonction du gain g pour trois valeurs du bruit k^2 : 7, 14, 21 sec/rad

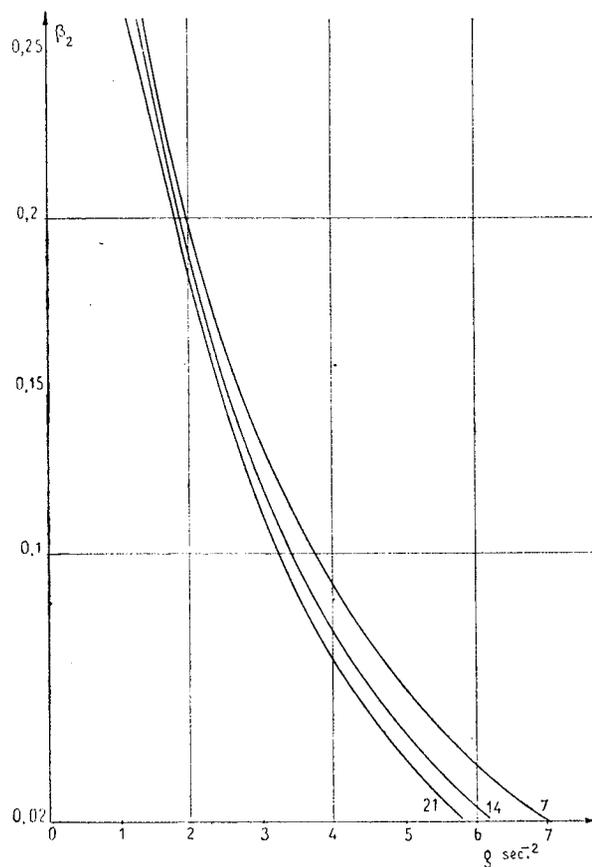


Fig. 4.11. — Variations du coefficient β_2 en fonction du gain g pour trois valeurs du bruit k^2 : 7, 14, 21 sec/rad

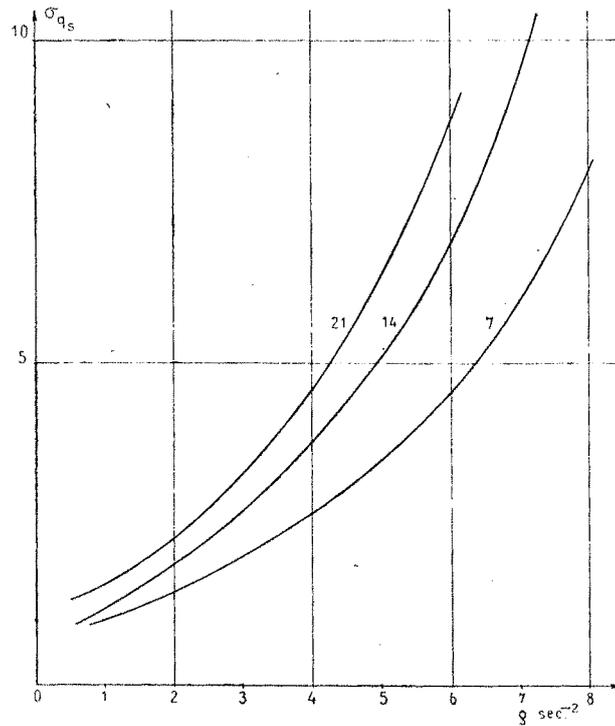


Fig. 4.12. — Variation de la valeur efficace du signal saturant $q_s(t)$ en fonction du gain g pour trois valeurs du bruit k^2 : 7, 14, 21 sec/rad

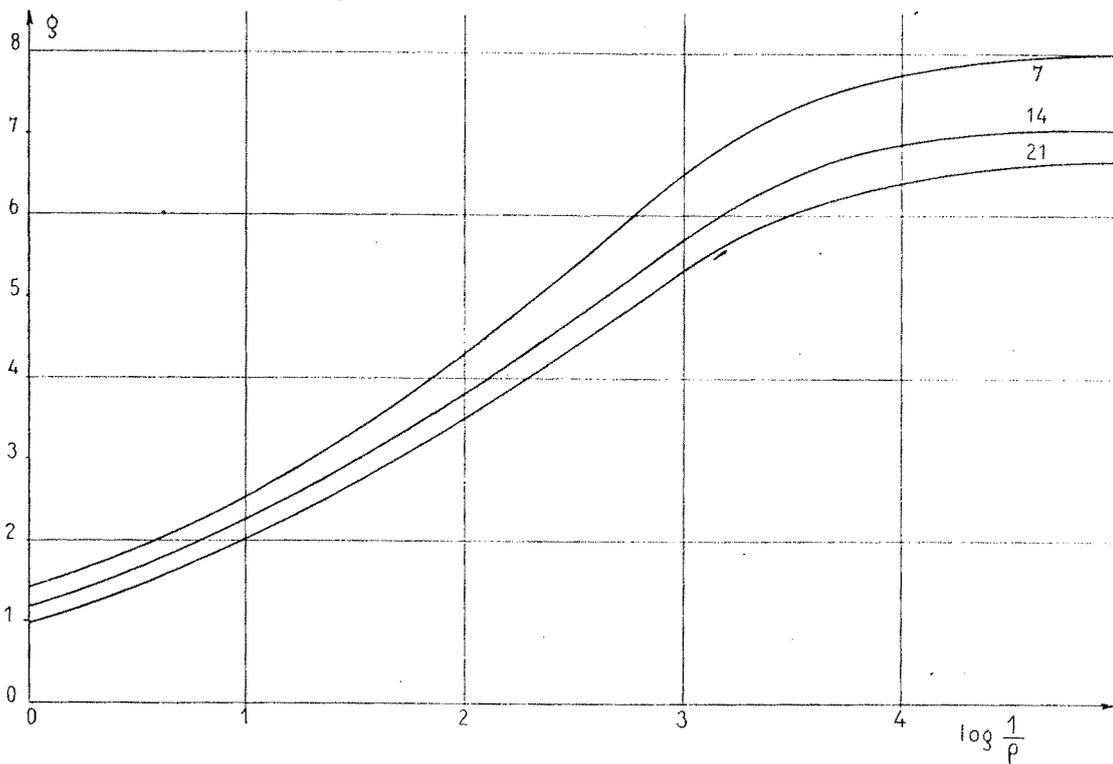


Fig. 4.13. — Variation du gain g en fonction du paramètre de Lagrange ρ pour trois valeurs de k^2 : 7, 14, 21 sec/rad

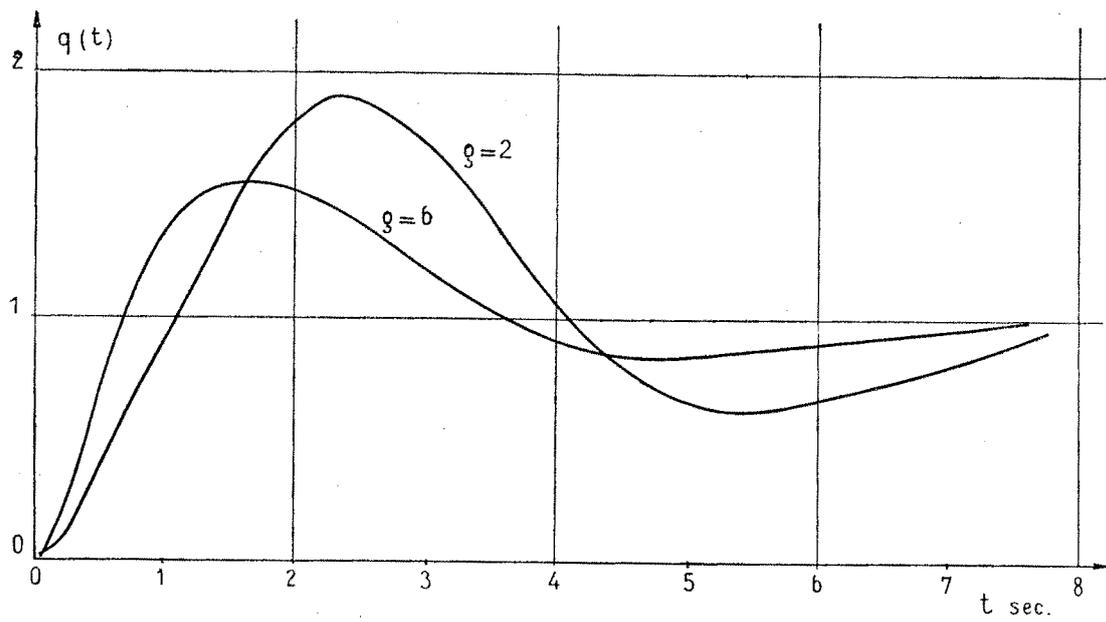


Fig. 4.14. — Réponse transitoire à un échelon unité de position $s(t)$ dans le cas où $k^2 = 14$ sec/rad

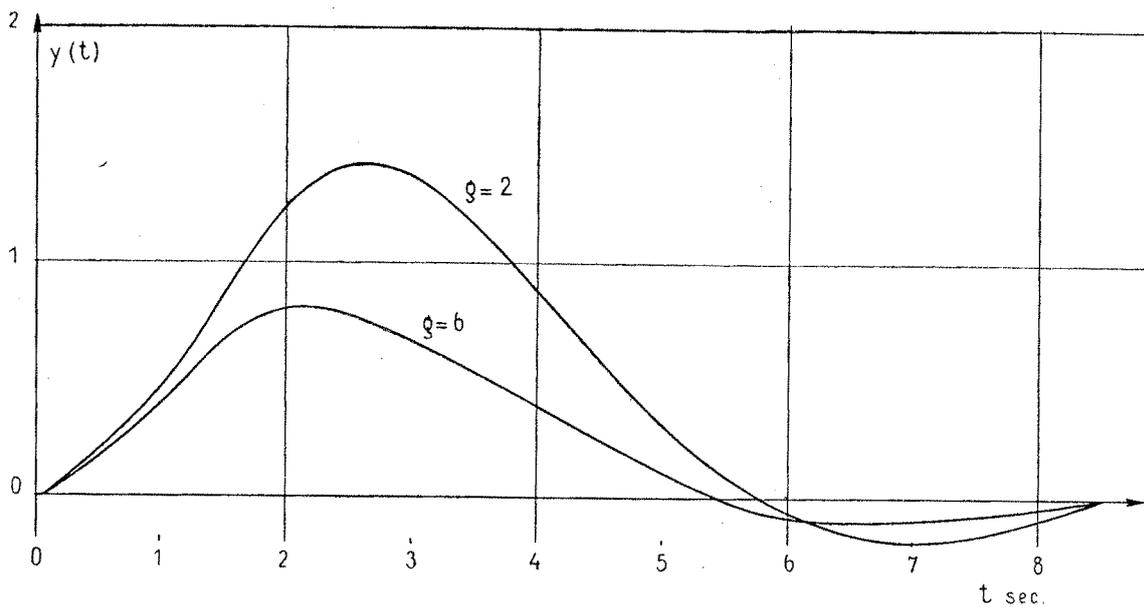
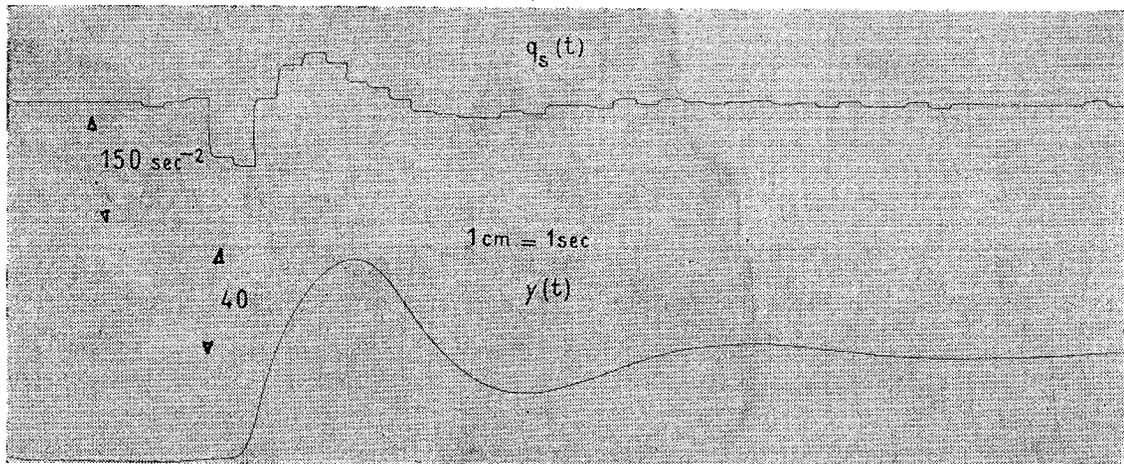
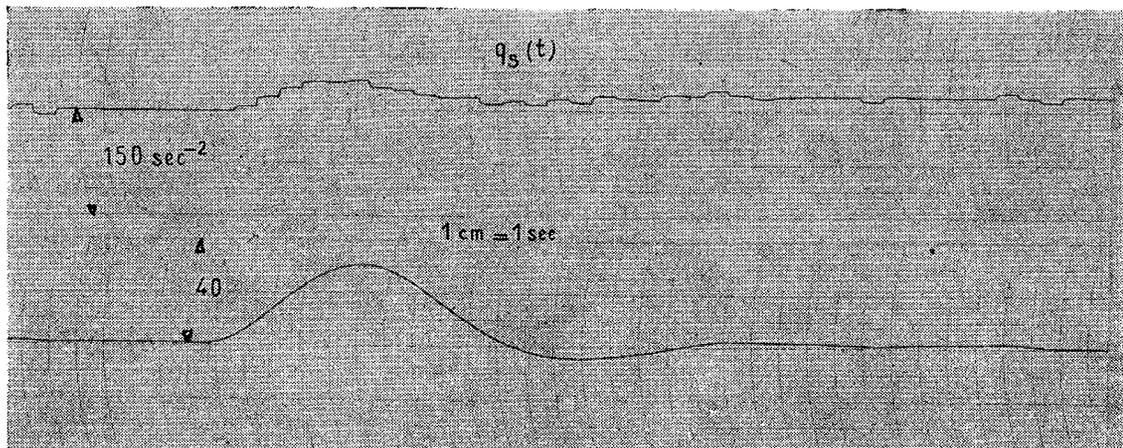


Fig. 4.15. — Réponse transitoire à un échelon unité de dérivée seconde $\gamma(t)$ dans le cas où $k^2 = 14$ sec/rad



A. Réponse à un échelon de position 40, dans le cas où $g = 4$, $k^2 = 14 \text{ sec/rad}$



B. Réponse à un échelon de dérivée seconde de 20 sec^{-2} dans le cas où $g = 4$, $k^2 = 14 \text{ sec/rad}$

Fig. 4.16. — Réponse à un échelon de position et de dérivée seconde

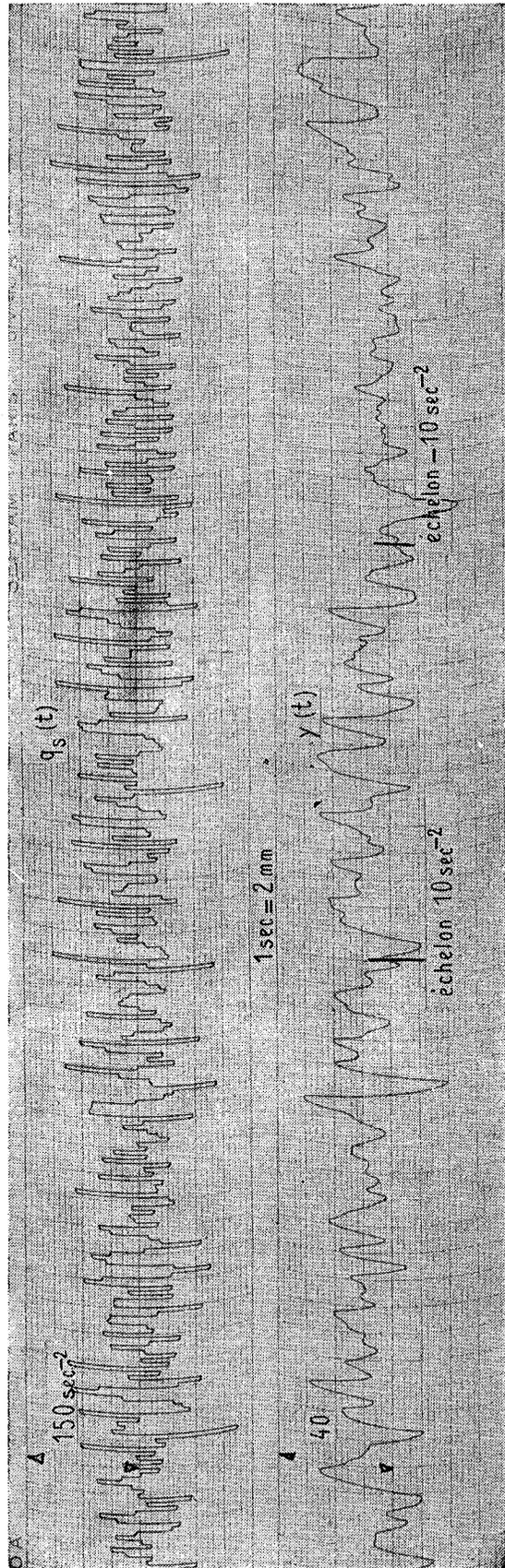


Fig. 4.17. — Réponse du système à un bruit de 14 sec/rad et des échelons de dérivée seconde de $\pm 10 \text{ sec}^{-2}$ dans le cas où $g = 4$, $k^2 = 14 \text{ sec/rad}$

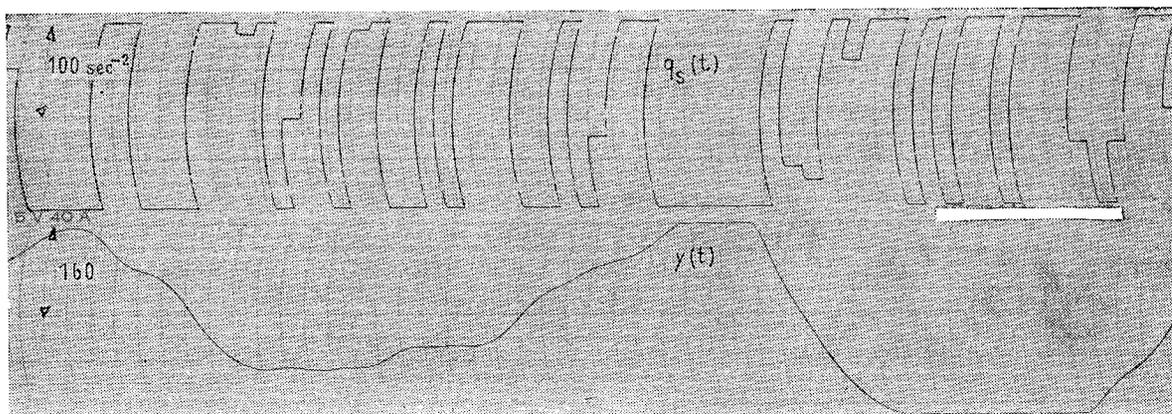


Fig. 4.18. — Pas de filtrage avant échantillonnage. $k^2 = 14 \text{ sec/rad}$, $g = 4$

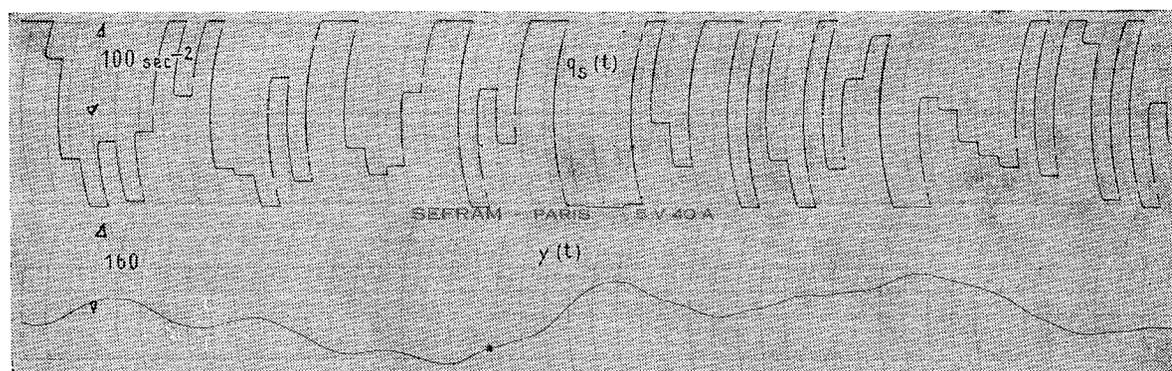


Fig. 4.19. — Filtre $\frac{1}{1+0,01s}$ avant échantillonnage. $k^2 = 14 \text{ sec/rad}$, $g = 4$

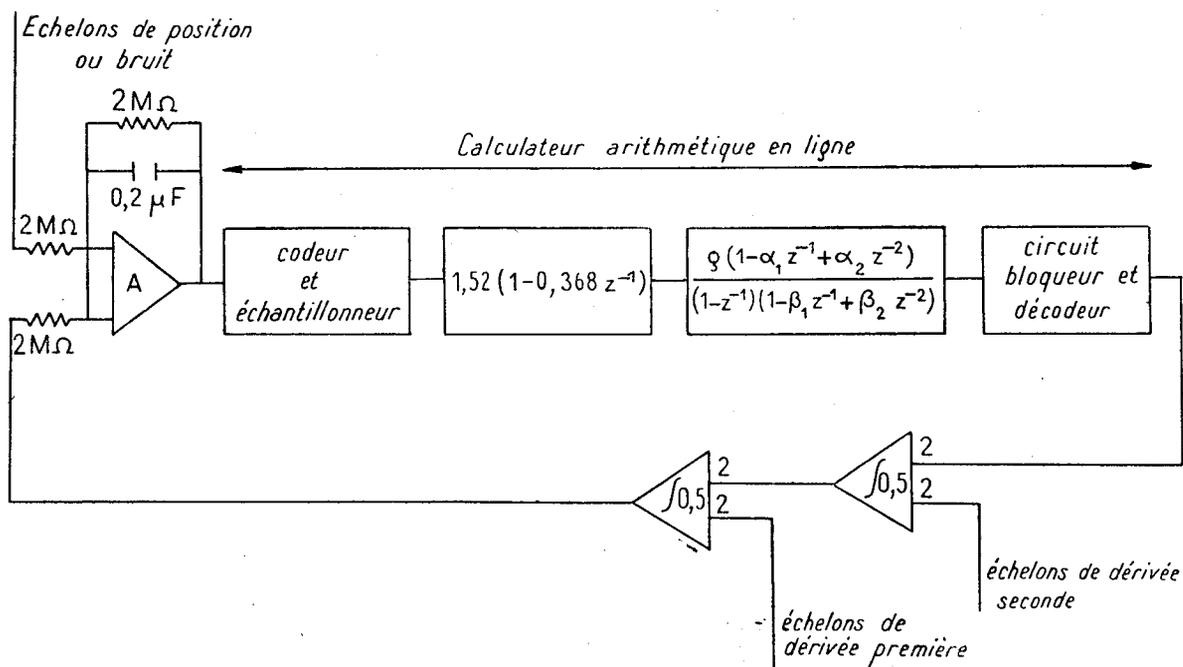


Fig. 4.20. — Montage simulé du problème

CHAPITRE V

AUTO-OPTIMISATION D'UNE BOUCLE D'ASSERVISSEMENT
DANS LE CAS D'ENTRÉES NON STATIONNAIRES
ET DE LIMITES DE SATURATIONS VARIABLES

§ 5.0. Introduction

Que l'on ait assisté ou que l'on ait lu le compte-rendu du Congrès de l'I.F.A.C. (International Federation for Automatic Control) en juin 1960 à Moscou, que l'on soit un fidèle lecteur des revues de l'I.R.E. (Institute of Radio Engineers) ou de l'A.I.E.E. (American Institute of Electrical Engineers), une impression générale se dégage : la mode est aux systèmes adaptatifs. Les noms sont très divers; on rencontre : adaptatifs, auto-adaptatifs, auto-optimisants et beaucoup d'autres. Lors de notre passage au W.A.D.C. (Wright Air Development Center) Dayton, Ohio, où s'était tenu, en janvier 1959, un congrès sur les systèmes adaptatifs, nous avons eu l'impression, d'après les rapporteurs, que l'attribution de noms et de définitions avait été le souci primordial de cette session. Nous n'entrerons pas dans le sein de ces querelles byzantines qui n'en continuent pas moins, mais nous retirerons de tout cela, l'impression générale suivante : le concept d'asservissement linéaire est dépassé; on exige des systèmes des performances de plus en plus sévères et en particulier, on leur demande de s'adapter aux variations des conditions extérieures. Des performances moyennes axées sur des données moyennes ne sont plus acceptables. Un bon exemple est celui des pilotes automatiques : au début, le pilote automatique travaillait en vol dans des conditions peu différentes de celles du sol, en raison de la faible gamme de vitesses et d'altitudes de l'avion; l'apparition d'avions supersoniques, pouvant voler à 300 m/sec près du sol et à 600 m/sec à 20 000 mètres, compliqua le problème; il devint complètement insoluble par les méthodes habituelles dans le cas du vol d'une fusée qui passe en quelques secondes de 0 à 20 000 mètres et dont la fonction de transfert doit avoir des caractéristiques à peu près constantes au cours du vol.

Il n'est pas dans notre intention au cours de ce chapitre de passer en revue les différents modes de systèmes adaptatifs. Certains l'ont déjà fait (1), il y a deux ans; malheureusement, deux ans c'est déjà vieux dans ce domaine.

Dans le cours de notre « Introduction » au début de cet ouvrage, nous avons suggéré qu'il pouvait exister autre chose quand nous avons dit que la théorie de WIENER était *un compromis* qui permettait de donner une solution mathéma-

tique simple au problème de l'étude statistique des asservissements. En effet, l'hypothèse de stationnarité et d'ergodicité concernant la distribution statistique des entrées est en pratique rarement satisfaite.

Un cas rencontré fréquemment est celui dans lequel la déformation des spectres se fait de façon continue par la multiplication par un facteur fonction du temps.

Dans le cas où la variation de ce facteur est suffisamment lente comparée à la réponse du système, on peut considérer que les phénomènes sont stationnaires dans un intervalle T_1 et faire évoluer les coefficients du correcteur de la boucle, par bonds, afin d'essayer de conserver les performances optimales du système.

La modification des coefficients du système peut se faire de deux manières :

1° Mesurer les caractéristiques des entrées dans l'intervalle T_1 et modifier les coefficients du correcteur en conséquence. C'est une correction en boucle ouverte illustrée par la fig. 5.1, et le système est dit adaptatif.

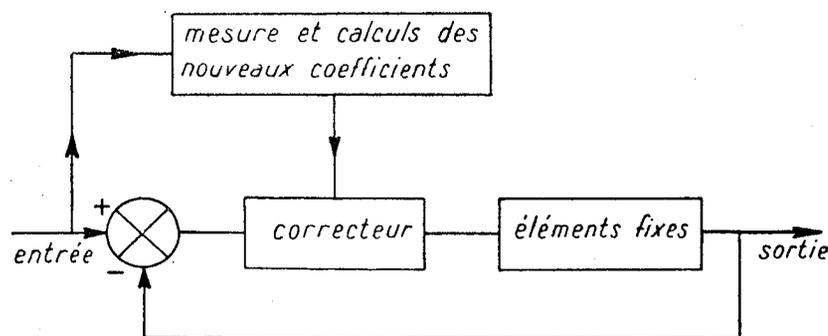


Fig. 5.1. — Système adaptatif

2° Mesurer un ou plusieurs paramètres, caractérisant les performances du système et modifier en conséquence les coefficients du correcteur. Nous avons alors un système fonctionnant en boucle fermée, illustré par la fig. 5.2 et appelé auto-optimisant, ou auto-adaptatif selon que la boucle principale a été optimisée ou pas.

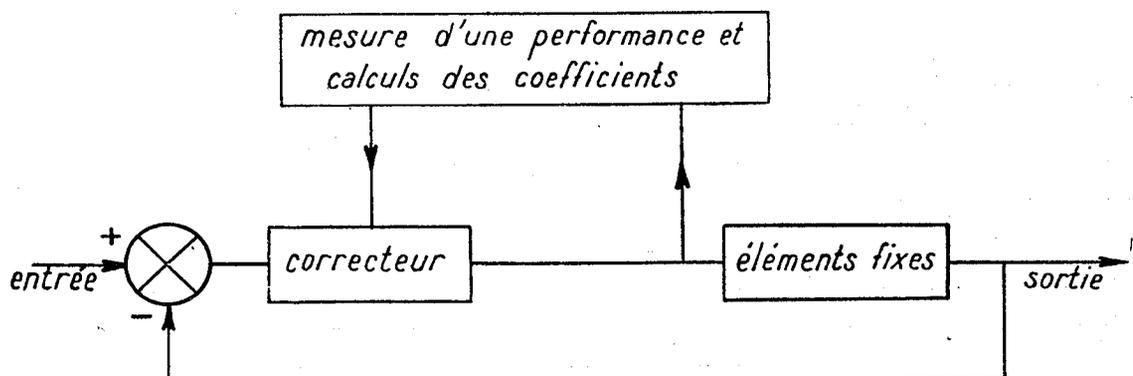


Fig. 5.2. — Système auto-optimisant ou auto-adaptatif

Nous pensons que la première réalisation d'un système auto-optimisant fut faite par l'Anglais A. P. ROBERTS (22) d'après une idée de E. G. C. BURT (3). L'idée de base est la suivante : dans une boucle d'asservissement optimisée, le signal d'erreur entrant dans le correcteur a un spectre blanc. On analyse l'erreur à haute et basse fréquence et l'on compare les niveaux. S'il existe une différence, c'est que les entrées ont changé et cette différence est utilisée pour modifier les coefficients du correcteur, afin de ramener le système dans les conditions optimales de fonctionnement.

Nous avons deux reproches à faire à cette étude.

Primo. — Il n'est fait aucune étude théorique de la stabilité de la boucle d'auto-optimisation.

Secundo. — Il n'est pas possible de l'appliquer de façon très simple à un système ayant des contraintes.

De son côté, S. S. L. CHANG (6) a fait une très intéressante analyse de l'optimisation de la boucle d'auto-adaptation. Nous y avons puisé des idées, mais le caractère trop restrictif (un seul paramètre ajustable) ne nous a pas permis de l'appliquer à notre problème.

De tous les travaux faits jusqu'à ce jour sur les systèmes auto-adaptatifs ou optimisants, il est difficile d'extraire une théorie générale. Chaque cas est un cas d'espèce. Le nôtre n'a pas échappé à cette règle, mais nous pensons que son exposé apportera quelques éléments nouveaux à cette branche naissante des asservissements.

§ 5.1. Aspect philosophique de l'auto-optimisation

Nous ne serons pas les premiers à remarquer que le concept de l'auto-optimisation est né de l'observation des être vivants et qu'un des caractères marquants qui différencie le monde animé de l'inanimé est sa possibilité d'évolution et d'adaptation à des conditions extérieures changeantes; mais nous pensons que cette observation doit être poussée plus loin.

Les possibilités d'un être vivant peuvent être caractérisées par un certain nombre de performances qu'il cherche soit à maintenir à un extrême, soit à une valeur moyenne quelles que soient les variations de conditions extérieures ou intérieures. Cette adaptation sera possible si les variations externes ou internes sont suffisamment lentes comparées aux moyens de détection et d'adaptation de l'être vivant. Prenons un exemple : le lièvre des neiges change de couleur avec les saisons. En hiver, il est blanc, et fauve en été; la performance optimale du lièvre des neiges est d'être camouflé le mieux possible pour échapper à ses ennemis avec le minimum de déplacement ou de vigilance. Ce changement de pelage doit se faire avec une légère anticipation sur la venue de la saison pour tenir compte du fait que l'opération n'est pas instantanée. Le processus de ces transformations et leur déclenchement est certainement devenu instinctif et héréditaire, mais supposons qu'il soit conscient. Un lièvre myope aura de fortes chances de ne pas découvrir les signes précurseurs du changement de saison et ne déclenchera l'opération mue qu'aux premières neiges de l'hiver ou aux premiers chauds soleils de l'été et ce sera trop tard. D'autre part

si l'on transporte par avion un lièvre, même doté de sens aigus, des neiges des Alpes au désert du Sahara, il aura peut-être le temps de détecter le changement de climat, mais la transformation ne sera pas assez rapide. Un changement rapide pourrait d'ailleurs modifier le métabolisme de l'animal entraînant un affaiblissement qui le rendrait très vulnérable. Enfin, imaginons un lièvre chez lequel le vieillissement entraîne un ralentissement dans la mue. Si ses sens gardent la même acuité, il lui faudra détecter de plus en plus tôt, le changement des saisons pour conserver les mêmes performances optimales, jusqu'au jour où il y aura une détérioration telle de ce système de défense que le lièvre périra sous les serres d'un aigle.

Nous venons de décrire ici la philosophie imagée d'un système adaptatif illustré fig. 5.3.

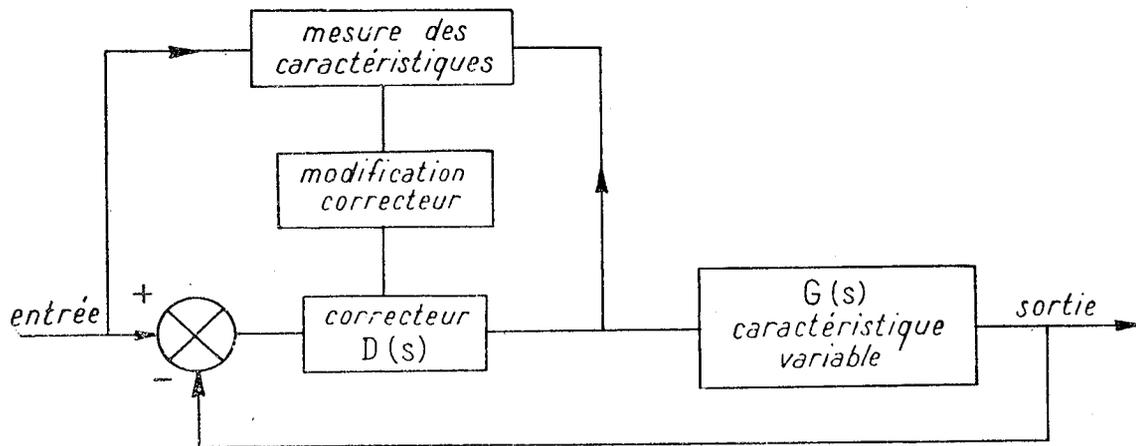


Fig. 5.3. — Système adaptatif et auto-adaptatif

Une boucle d'asservissement comprend un correcteur $D(s)$ et une fonction de transfert $G(s)$. Cette boucle a été calculée pour avoir des caractéristiques optimales dans certaines circonstances. Au cours du temps, les caractéristiques de l'entrée évoluent ainsi que la fonction $G(s)$. Les boucles d'adaptation et d'auto-adaptation ont pour but de modifier $D(s)$ de manière à conserver optimales les performances du système en utilisant pour information l'entrée et une ou des performances de la boucle.

Pour détecter les variations de l'entrée ou des performances, il faudra les observer pendant un temps suffisamment long pour détecter un changement et cependant pas trop long, car autrement il sera trop tard pour utiliser cette information utilement. En outre, la modification du correcteur devra se faire en prévoyant l'état futur du système. La modification du correcteur $D(s)$ doit être assez lente, donc aussi la modification des données extérieures et intérieures, pour qu'elle n'entraîne pas de perturbation notable dans la boucle principale. Enfin, la variation de $G(s)$ doit être limitée si l'on désire conserver à la boucle des performances constantes.

Nous voyons donc à la lumière de ces considérations qu'il nous faut :

a. Établir avec précision le domaine de variation des éléments susceptibles de changer et les tolérances permises sur les performances du système;

b. S'assurer que la variation des éléments « entrée » et « caractéristiques $G(s)$ » est suffisamment lente pour que la modification du correcteur $D(s)$, en supposant immédiate la détection des variations et l'adaptation de $D(s)$ au nouvel état, n'entraîne pas une perturbation dans la boucle principale, supérieure à la tolérance admise sur les performances;

c. Déterminer un intervalle de mesure des éléments variables qui soit ni trop court, pour que l'imprécision sur la connaissance de ces derniers soit faible, ni trop long pour que le principe de l'adaptation ne perde pas de son intérêt;

d. Étudier la stabilité de la boucle d'adaptation.

Nous allons appliquer les considérations générales développées ci-dessus au problème traité dans le chapitre IV.

§. 5.2. Étude mathématique de l'auto-optimisation

5.21. DOMAINE DE VARIATION. — L'optimisation de la boucle examinée dans le chapitre IV a été faite en supposant que la limitation en dérivée seconde $q_s(t)$ était fixe et que les signaux d'entrée appartenaient respectivement à un groupe de signaux aléatoires stationnaires ergodiques, et que ces signaux sont présents depuis $t = -\infty$ et existeront jusqu'à $t = +\infty$.

Examinons ce qui de tout cela subsiste et quelles sont les détériorations des hypothèses.

Les signaux d'entrée ne sont pas présents de $t = -\infty$ à $t = +\infty$, mais introduits à l'instant $t = 0$ et la réponse de la boucle n'est intéressante qu'entre $t = 0$ et $t = 40$ sec. Cela a relativement peu d'importance car le transitoire du système à l'établissement d'un bruit blanc est quasi nul, quand au signal il exprime qu'une fois au cours des 40 sec, un échelon de dérivée seconde peut se produire; il ne pose donc aucun problème.

Le signal caractérisé par $\Phi_{ss}(s)$ conserve ses propriétés de stationnarité et d'ergodicité.

Le bruit $n(t)$ n'est pas stationnaire; son niveau varie au cours du temps. Si l'on considère un intervalle faible, on peut admettre qu'il est stationnaire, que son spectre est blanc de niveau $\Phi_{nn} = k^2$. Le coefficient k peut varier au maximum de façon linéaire entre :

$$2 \sqrt{\frac{\text{sec}}{\text{rad}}} \quad \text{et} \quad 5 \sqrt{\frac{\text{sec}}{\text{rad}}}$$

entre l'instant $t = 0$ et $t = 40$ sec.

La limite de saturation σ_{sl} de $q_s(t)$ varie linéairement au maximum entre 140 sec^{-2} : et 30 sec^{-2} quand t passe de 0 à 40 sec. On connaît sa valeur à chaque instant sans retard.

Nous voyons que deux éléments sont variables; l'un relatif à l'entrée : le bruit; l'autre relatif au système : la limite de saturation de $q_s(t)$. Ces deux éléments sont indépendants dans leurs variations qui sont comprises entre les extrêmes définis ci-dessus et zéro.

Nous avons trouvé commode de représenter le domaine de variation de l'optimisation dans le plan des courbes de performance. Il est limité par les deux courbes de performances correspondant à un niveau de bruit de $k^2 = 4$ sec/rad et 25 sec/rad et les deux verticales $\sigma_{qs} = 15$ et 70 sec⁻² cela quand on admet une probabilité de saturation de 5 %.

La courbe AC représente l'évolution du système dans les conditions les plus dures, puisque le bruit augmente de 4 à 25 sec/rad alors que la limite de saturation s'écroule de 140 à 30 sec⁻². Les autres évolutions du système pour des variations moins rapides décrivent d'autres courbes, aisées à imaginer, toutes situées à l'intérieur de ce domaine.

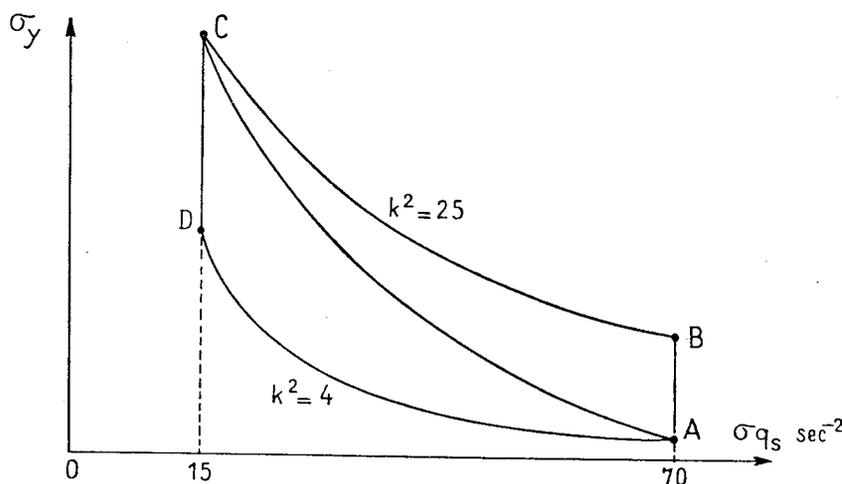


Fig. 5.4. — Domaine de variation de l'optimisation

Pour une valeur déterminée de k^2 et σ_{sl} , c'est-à-dire un point dans le domaine, le correcteur optimum a pour expression :

$$D^*(z) = g \frac{z(z^2 - \alpha_1 z + \alpha_2)}{(z-1)(z^2 - \beta_1 z + \beta_2)}$$

Quand on décrit le domaine, les coefficients α_1 , α_2 , β_1 , β_2 vont respectivement décrire des surfaces. Le choix des variables indépendantes est primordial, car il conditionne une solution simple ou complexe du problème d'auto-optimisation.

Un problème d'optimisation est entièrement déterminé par la connaissance des deux spectres d'entrée et la limite de saturation. On constate dans le cas analogique (appendice V), comme dans le cas digital (chapitre IV) quoique ce soit un peu plus caché, que les coefficients du correcteur optimal dépendent du rapport $c = \sqrt[3]{\frac{a}{k}}$ et du paramètre de Lagrange ρ . Comme « a » est fixe, les deux variables indépendantes sont k et ρ .

Nous avons pensé qu'il serait plus intéressant d'adopter k et g comme variables indépendantes, ce qui nous a donné :

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha_1(k, g) & \beta_1 &= \beta_1(k, g) \\ \alpha_2 &= \alpha_2(k, g) & \beta_2 &= \beta_2(k, g). \end{aligned}$$

Sur les fig. 4.8, 9, 10, 11 nous avons tracé les variations des coefficients en fonction de g pour trois valeurs de k . Une chose frappe : c'est la faible influence de la variation de k sur ces coefficients; ceci est dû à deux choses : premièrement, la limitation imposée par le domaine de variation de l'optimisation; deuxièmement, le choix de la variable indépendante g .

Une question alors se pose : cette influence, même faible de k a-t-elle une importance fondamentale sur les performances du système? Ici tout naturellement, doit prendre place une étude que beaucoup d'auteurs ont négligée et dont l'idée revient à M. P. LEFÈVRE : « La sensibilité de l'optimisation », c'est-à-dire l'étude de la détérioration des performances du système quand on fait varier un ou plusieurs coefficients autour de la position optimale. Des résultats partiels dans le domaine analogique ont montré que des variations du gain de 20 % autour de la position optimale n'entraînaient pas un accroissement sensible de la valeur efficace de l'erreur. Expérimentalement, nous avons constaté la même chose; nous avons constaté aussi que l'on pouvait négliger l'influence de k sur les coefficients à condition de conserver la valeur de certains groupements; en particulier, les valeurs $1 - \alpha_1 + \alpha_2$, $1 - \beta_1 + \beta_2$, sont très importantes, car elles déterminent le pas d'intégration de la réponse du correcteur $D^*(z)$ à un échelon de position en régime permanent ($z \rightarrow 1$) soit :

$$\frac{g(1 - \alpha_1 + \alpha_2)}{1 - \beta_1 + \beta_2} \text{ sec}^{-2}$$

par période T.

Nous avons donc été conduits dans un but de simplification à supposer que les coefficients α_1 , α_2 , β_1 , β_2 sont fonction uniquement de g . Nous avons adopté ceux correspondant à un k^2 moyen soit 14 sec/rad. Si dans le cas analogique, il est concevable d'utiliser les formules exactes, liant les coefficients au gain g , cela ne l'est pas dans le domaine arithmétique en raison de la complexité des expressions. Nous avons assimilé les courbes des α et β à des hyperboles et obtenu une très bonne représentation en prenant :

$$\left| \begin{array}{ll} \alpha_1 = \frac{2,525g + 0,454}{1,525g + 0,111} & \alpha_2 = \frac{1,065g + 0,280}{1,525g + 0,069} \\ \beta_1 = \frac{-0,300g + 1,232}{0,072g + 1} & \beta_2 = \frac{-0,074g + 0,580}{0,670g + 1} \end{array} \right.$$

5.22. INFLUENCE DE LA VARIATION DES ÉLÉMENTS SUR LES PERFORMANCES DU SYSTÈME. — Cette étude préliminaire est d'une importance capitale, car elle permet de dire si oui ou non l'auto-optimisation est possible.

Il s'agit, en fait, de savoir si dans le cas où la bande passante de la boucle d'adaptation est infinie, c'est-à-dire que le correcteur $D(s)$ est à chaque instant le correcteur optimal (cas le plus favorable), la variation des coefficients du correcteur n'entraîne pas des perturbations dans les performances du système détruisant le bénéfice que l'on peut espérer de l'auto-optimisation.

Nous avons borné notre étude à une simple vérification expérimentale, rapide mais qui nous a permis de conclure que l'auto-optimisation était possible. Notre but était de décrire la courbe AC de la fig. 5.4 sans avoir à procéder à l'analyse de l'entrée ou des performances du système.

Nous avons donc entre $t = 0$ et 40 sec fait varié :

— le gain « g » du correcteur linéairement entre 7,5 et 1, limites supérieures et inférieures correspondant approximativement aux points A et C. Le calcul des coefficients α et β se faisait à la fréquence de prélèvement des informations entrant dans $D^*(z)$. Il est en effet aisé de concevoir qu'une fréquence supérieure n'entraînerait aucune amélioration.

— le bruit $n(t)$ linéairement entre $k = 2 \sqrt{\frac{\text{sec}}{\text{rad}}}$ et 5.

Nous avons comparé la courbe obtenue aux courbes de la fig. 5.14 qui représentent la réponse du système en régime permanent pour deux valeurs fixes du gain ($g = 1, 3$ et 4) et deux valeurs correspondantes du bruit ($k^2 = 25 \text{ sec/rad}$ et 14 sec/rad) et n'avons pu déceler de différence notable.

Cette vérification est évidemment grossière; elle ne méritait pas qu'on lui consacre plus de temps, mais elle devait être faite.

5.23. ÉTUDE DE LA STABILITÉ DE LA BOUCLE D'ADAPTATION. — Nous ferons l'étude de cette boucle en supposant déterminé l'intervalle T_1 au cours duquel on mesure l'évolution des caractéristiques des éléments variables. Nous verrons plus tard comment nous l'avons choisi.

Comme nous l'avons expliqué antérieurement, seules sont accessibles à l'analyse l'entrée $e(t)$ et la sortie $q_s(t)$ du correcteur $D^*(z)$. De ce fait, l'adaptation était impossible et il fallait faire de l'auto-adaptation ou plus exactement de l'auto-optimisation en mesurant les performances du système au niveau de l'erreur $e(t)$ ou de la dérivée seconde $q_s(t)$. En effet, puisque nous avons réussi à ramener le problème à une étude à un paramètre, le gain g , la mesure d'une performance est suffisante. Nous imposant une limite sur la valeur efficace du signal saturant, la mesure de $q_s(t)$ nous a paru naturelle.

Nous avons donc conçu la boucle d'auto-optimisation de la manière suivante :

— calcul de la valeur efficace du signal saturant $q_s(t)$ que nous appellerons $\sigma^*(t)$;

— comparaison de cette valeur efficace à la valeur efficace imposée $\sigma_e^*(t)$ qui est égale à la moitié de la limite de saturation quand on ne veut pas dépasser une probabilité de saturation de 5 %;

— élaboration à partir de ce terme erreur $\sigma_e^*(t) - \sigma^*(t)$ du gain $g^*(t)$ après passage à travers un correcteur arithmétique $H^*(z_1)$;

— calcul à partir de $g^*(t)$ des coefficients $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$.

Les signaux $\sigma^*(t)$, $\sigma_e^*(t)$, $g^*(t)$ sont échantillonnés avec la période T_1 et nous poserons $z_1 = e^{sT_1}$.

La transformée dans le domaine Z_1 de $g^*(t)$ se notera $G^*(z_1)$. Nous avons pensé que toute confusion avec la fonction $G^*(z)$ du chapitre III était impossible puisque cette dernière n'intervient pas dans les calculs de ce chapitre.

5.2.3.1. Détermination de la valeur efficace $\sigma^*(t)$. — Pour des raisons de commodité, l'intervalle de temps T_1 a été choisi multiple de $T = 0,4$ seconde : $T_1 = NT$.

Nous allons définir une valeur efficace instantanée de la manière suivante :
 A chaque instant t de l'intervalle 0-40 secondes, considérons les paramètres du système, figés à la valeur qu'ils ont à cet instant et calculons la valeur efficace du signal $q_s(t)$ par la formule :

$$\sigma_{q_s} = \frac{1}{2T_0} \int_{-\infty}^{+\infty} q_s^2(t) dt.$$

Nous définissons ainsi une fonction du temps que nous appelons $\sigma(t)$, valeur efficace instantanée.

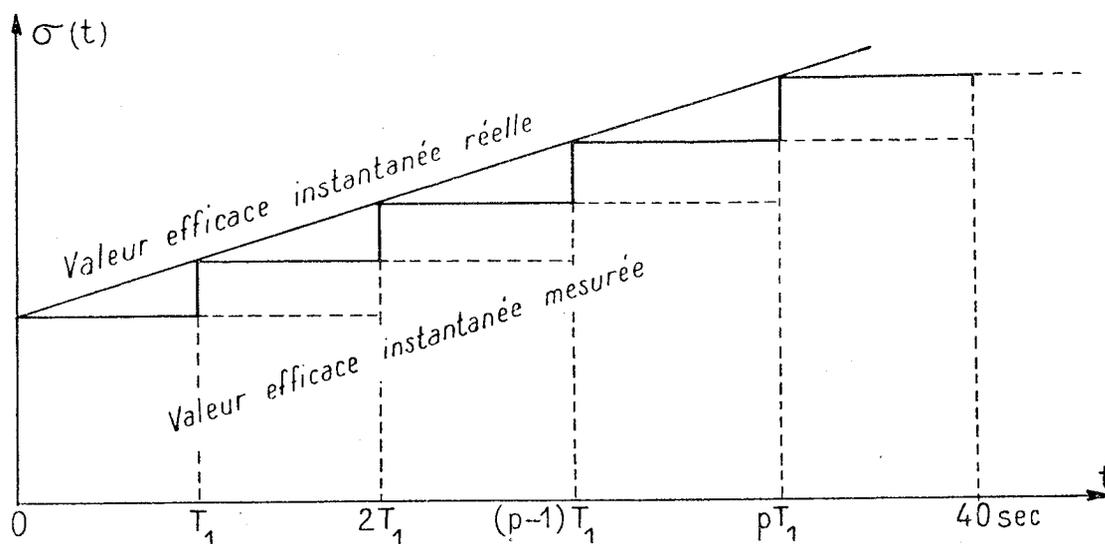


Fig. 5.5. — Valeur efficace instantanée réelle et mesurée

L'intervalle T_1 a été choisi de telle manière que l'on ait avec une bonne approximation, la valeur efficace de $q_s(t)$ quand, les paramètres étant figés, on remplace σ_{q_s} par :

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N q_s^2(n) T.$$

L'évolution des paramètres du système (bruit, limite de saturation) est supposée assez lente pour que l'on puisse admettre une variation par palier de $\sigma(t)$ dans les intervalles $p T_1$ et de ce fait une mesure de valeur efficace faite dans $(p - 1) T_1$, $p T_1$ donne à l'instant $p T_1$ une bonne approximation de la valeur efficace à l'instant $(p - 1) T_1$. Donc la mesure de la valeur efficace donne cette dernière avec un retard de une période T_1 dont il faudra tenir compte dans les calculs futurs.

5.2.3.2. *Calcul de $H^*(z_1)$.* — Le calcul de $H^*(z_1)$ représente une des grosses difficultés de l'auto-optimisation. Cela a souvent été fait à tâtons. Nous présentons ici une méthode qui, si elle n'est pas entièrement rigoureuse, a au moins le mérite d'être simple et de donner des résultats, en gros confirmés par l'expérience.

La valeur efficace $\sigma(p T_1)$ mesurée dans l'intervalle $p T_1, (p + 1) T_1$ et utilisée à l'instant $(p + 1) T_1$ est fonction de :

$$\begin{aligned} &g(0) T_1, g(T_1) \dots g(p T_1) \\ &\sigma_e(0) T_1, \sigma_e(T_1) \dots \sigma_e(p T_1). \end{aligned}$$

Pour faciliter les écritures, nous poserons :

$$A(p T_1) = A^p.$$

Nous pouvons donc écrire :

$$\sigma^p = \sigma^p(g^j, \sigma_e^j) \quad j = 0, \dots, p.$$

Le but de l'auto-optimisation, dans ce cas particulier est de maintenir la performance du système aussi près que possible de la performance désirée, c'est-à-dire $\sigma(p T_1) = \sigma_e(p T_1)$. La minimisation de la valeur efficace de l'erreur $y(t)$ est automatiquement assurée, du fait de la forme du correcteur, si cette performance est satisfaite.

Il existe d'autre part un ensemble de valeurs du gain g désigné par $g_\alpha^0 \dots g_\alpha^p$ tel que

$$\sigma^p(g_\alpha^j, \sigma_e^j) = \sigma_e^p \quad j = 0, \dots, p.$$

Ce à condition que σ_e^p soit une valeur acceptable, c'est-à-dire supérieure à l'asymptote verticale de la courbe de performances.

Si nous supposons que le gain est toujours à peu près bien ajusté, nous pouvons développer $\sigma(p T_1)$ en série de Taylor et nous limiter au premier terme.

$$\sigma^p(g^j, \sigma_e^j) = \sigma^p(g_\alpha^j, \sigma_e^j) + \sum_{j=0}^p \left[\frac{\partial \sigma^p}{\partial g_\alpha^j} \right] (g^j - g_\alpha^j).$$

L'intervalle T_1 est supposé suffisamment grand pour que σ^p soit fonction de g^p seulement. Nous poserons :

$$C^p = \frac{\partial \sigma^p}{\partial g_\alpha^p}.$$

Nous montrerons ultérieurement qu'il est possible d'adopter pour C^p une valeur moyenne C . Notre équation devient donc :

$$\sigma(p T_1) = \sigma_e(p T_1) + C [g(p T_1) - g_\alpha(p T_1)].$$

La transformée dans le domaine z_1 de cette équation donne :

$$\Sigma_e^*(z_1) - \Sigma^*(z_1) = C [G_\alpha^*(z_1) - G^*(z_1)].$$

Écrivons d'un autre côté que le gain g est élaboré à partir de la différence $\sigma_e(pT_1) - \sigma(p-1)T_1$ après passage à travers la transmittance $H^*(z_1)$.

$$G^*(z_1) = H^*(z_1) [\Sigma_e^*(z_1) - z_1^{-1} \Sigma^*(z_1)].$$

La boucle d'auto-optimisation est donc caractérisée par les deux équations :

$$\begin{cases} \Sigma_e^*(z_1) - \Sigma^*(z_1) = C [G_\alpha^*(z_1) - G^*(z_1)] \\ G^*(z_1) = H^*(z_1) [\Sigma_e^*(z_1) - z_1^{-1} \Sigma^*(z_1)]. \end{cases}$$

Ce qui se traduit par le schéma fonctionnel ci-dessous :

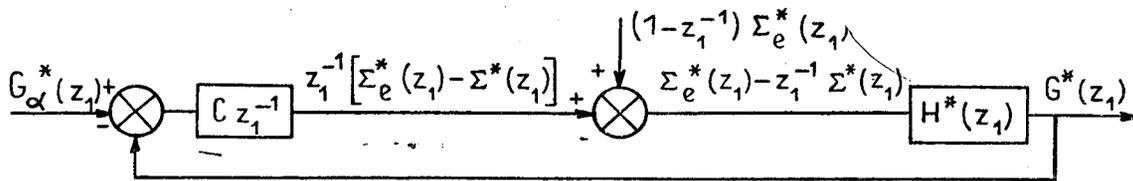


Fig. 5.6. — Schéma fonctionnel de la boucle d'auto-optimisation

Nous avons une boucle d'asservissement entre le gain idéal $G_\alpha^*(z_1)$ et le gain réel $G^*(z_1)$; la dérivée de la valeur efficace imposée $(1 - z_1^{-1}) \Sigma_e^*(z_1)$ s'introduit comme une perturbation.

Dans un but de simplification, nous avons décidé d'adopter pour $H^*(z_1)$ le correcteur le plus simple donnant une erreur nulle quand on met un échelon de vitesse à l'entrée, ce qui correspond probablement aux variations de $G^*(z_1)$ qu'il faut retoucher ensuite les coefficients.

Le schéma série équivalent de la boucle d'auto-adaptation est figuré ci-dessous :

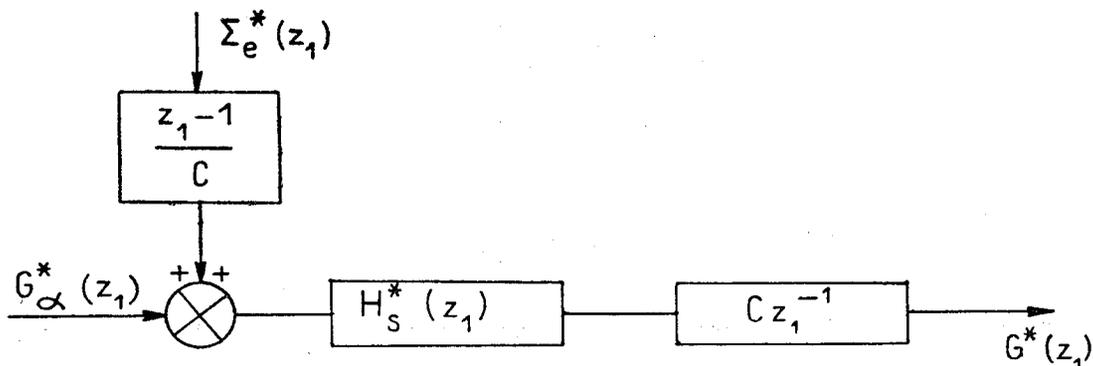


Fig. 5.7. — Schéma série équivalent de la fig. 5.6.

Entre $H_s^*(z_1)$ et $H^*(z_1)$ nous avons la relation :

$$H^*(z_1) = \frac{H_s^*(z_1)}{1 - C z_1^{-1} H_s^*(z_1)}.$$

Posons $H_s^*(z_1) = d_0 + d_1 z_1^{-1}$. Nous déterminerons d_0 et d_1 en écrivant que nous avons une erreur nulle pour un échelon de vitesse, c'est-à-dire :

$$G_\alpha^*(z_1) = \frac{T z_1}{(z_1 - 1)^2}$$

$$E^*(z_1) = G_\alpha^*(z_1) [1 - H_s^*(z_1) C z_1^{-1}].$$

Nous devons avoir :

$$\lim_{z_1 \longrightarrow 1} \frac{z_1 - 1}{z_1} E^*(z_1) \longrightarrow 0$$

$$\frac{z_1 - 1}{z_1} E^*(z_1) = \frac{T z_1}{(z_1 - 1)^2} \frac{z_1 - 1}{z_1} [1 - H_s^*(z_1) C z_1^{-1}].$$

Il faut que :

$$1 - H_s^*(z_1) C z_1^{-1} = (1 - z_1^{-1})^2$$

soit :

$$d_0 = \frac{2}{C} \quad d_1 = -\frac{1}{C}.$$

Ce qui nous donne en définitive pour $H^*(z_1)$.

$$H^*(z_1) = \frac{2 z_1 (z_1 - 0,5)}{C (z_1 - 1)^2}$$

Nous avons figuré ci-dessous la réponse à un échelon de position et de vitesse. Nous constatons que la réaction du système est un peu trop vive et nous serons certainement amenés à réduire le dépassement de la réponse à l'échelon de position.

Revenons maintenant à la détermination de la constante C . Nous avons vu que :

$$C p = \frac{\partial \sigma^p}{\partial g^p}$$

cela représente la dérivée partielle de la valeur efficace instantanée à l'instant pT_1 par rapport au gain g . Cette dérivée est prise le long de la transformée de la courbe AC de la fig. 5.4 dans le plan (σ_q, g) . Cette valeur varie au cours

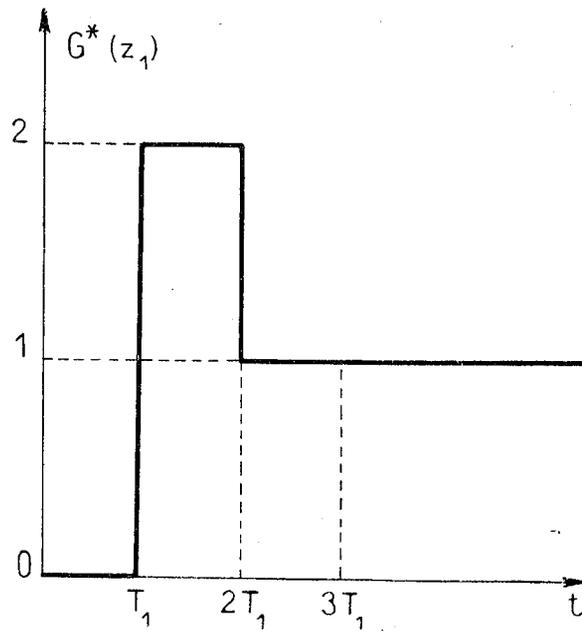


Fig. 5.8. — Réponse à un échelon de position unité

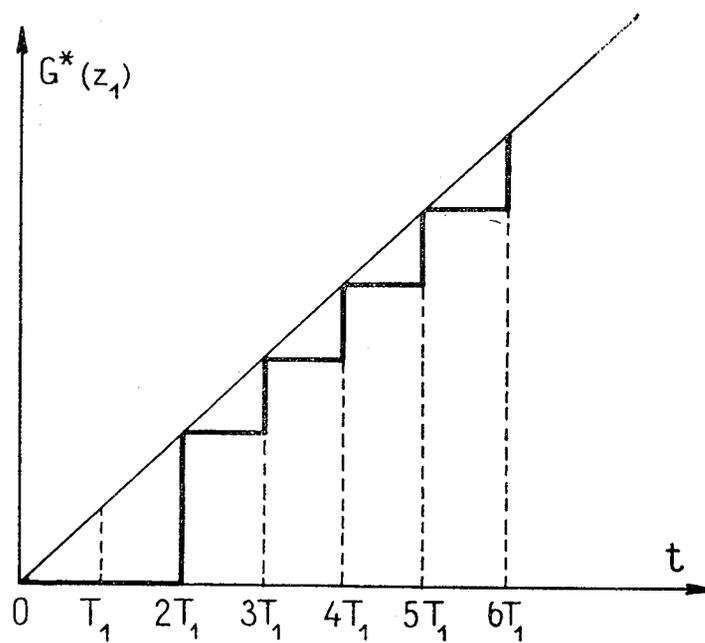


Fig. 5.9. — Réponse à un échelon de vitesse unité

du temps, mais nous avons décidé d'adopter une valeur moyenne correspondant au point

$$g = 4 \quad \sigma_{q_s} = 37.$$

Nous avons obtenu $C \approx 8$.

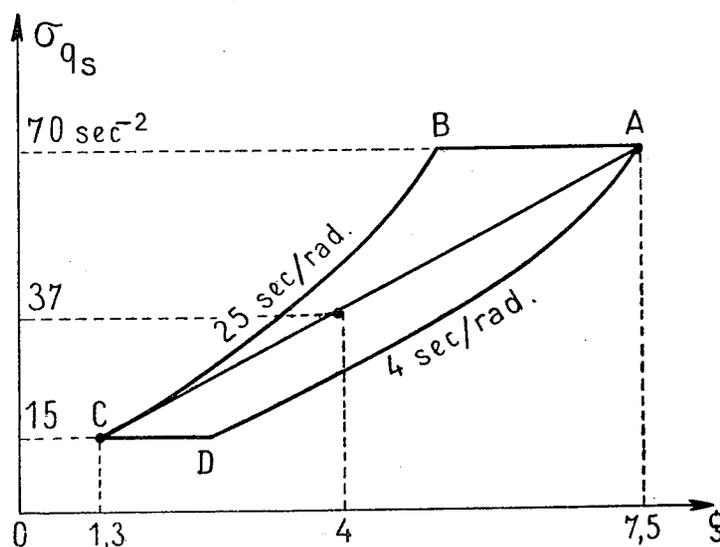


Fig. 5.10. — Domaine de variation de l'optimisation dans le plan (σ_{q_s}, g)

La valeur de ce coefficient C n'est pas primordiale car comme on le voit sur la fig. 5.11 qui représente le lieu des racines de la boucle d'auto-optimisation, la stabilité n'est guère compromise par les variations de C .

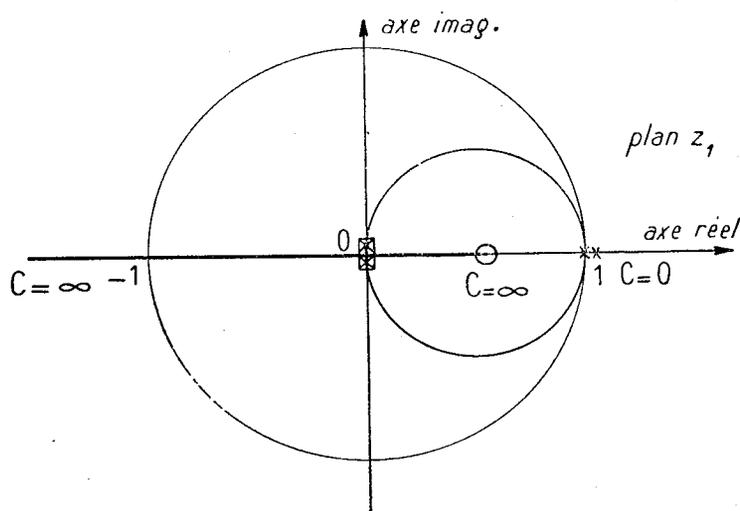


Fig. 5.11. — Lieu des racines de la boucle d'auto-optimisation

5.2.3.3. *Détermination de la longueur de l'intervalle T_1 .* — Le choix de T_1 est délicat aussi. Si T_1 est pris trop court la détermination de la valeur efficace de $q_s(t)$ se fait avec une grande imprécision; cela se traduit par l'introduction

d'une perturbation au niveau de $\Sigma_e^*(z_1)$ qui peut entraîner des variations aléatoires indésirables sur $G^*(z_1)$. Si T_1 est pris trop grand, la détermination de $\sigma(p T_1)$ est correcte mais des changements de gain n'étant pas assez fréquents ils se font par variations brusques entraînant des perturbations dans la boucle principale, supérieures aux tolérances sur les performances.

Des mesures faites sur des enregistrements nous ont donné une idée de la valeur efficace de l'erreur commise sur la mesure de $\sigma(p T_1)$. Nous avons commencé par prendre $N = 10$, c'est-à-dire que la valeur quadratique moyenne mesurée est :

$$\sigma_m^2(p T_1) = \frac{\sum_{i=1}^{10} q^2(p N + i) T}{10}.$$

Le carré de la valeur efficace de l'erreur commise sur la mesure de σ est :

$$\lambda^2 = \frac{\sum_{j=0}^R \frac{|\sigma - \sigma_{mj}|^2}{R}}{R} \longrightarrow \infty$$

l'indice j se rapportant aux différentes mesures faites

$$\frac{\lambda^2}{\sigma^2} = 2 \left[1 - \frac{E(\sigma_{mj})}{\sigma} \right]$$

$$E = \frac{1}{R} \sum_{j=0}^R \sigma_{mj}$$

$$R \longrightarrow \infty$$

Des mesures portant sur $R = 10$ nous ont donné :

$$\frac{\lambda}{\sigma} \neq 10 \%$$

Il nous était difficile de dire si la précision était suffisante. Toutefois, nous avons pensé qu'un intervalle plus grand serait peut-être souhaitable en raison du temps de réponse du système à un échelon d'accélération. Il faut, en effet, environ 7 sec pour que la transitoire se calme. Nous avons donc inclus dans le montage expérimental la possibilité d'étudier $N = 16$ et 20.

§ 5.3. Résultats expérimentaux

Le schéma de l'expérience est représenté par la fig. 5.12.

Nous allons rappeler les limites de variation des divers éléments :

- bruit : k^2 varie entre 4 sec/rad et 25 sec/rad;
- limite de saturation entre 30 sec⁻² et 140 sec⁻²;
- gain g : entre 1 et 7,5.

Les éléments expérimentaux sont les suivants :

Bruit. — Le bruit $n(t)$ est fourni par un générateur de bruit Elgenco modèle 401 qui donne un bruit blanc gaussien entre 0 et 40 Hz. Il entre soit sur un potentiomètre, ce qui permet de le faire varier manuellement, soit sur un programme de variation interne au calculateur arithmétique qui en fait varier le niveau par palier comme figuré fig. 5.13.

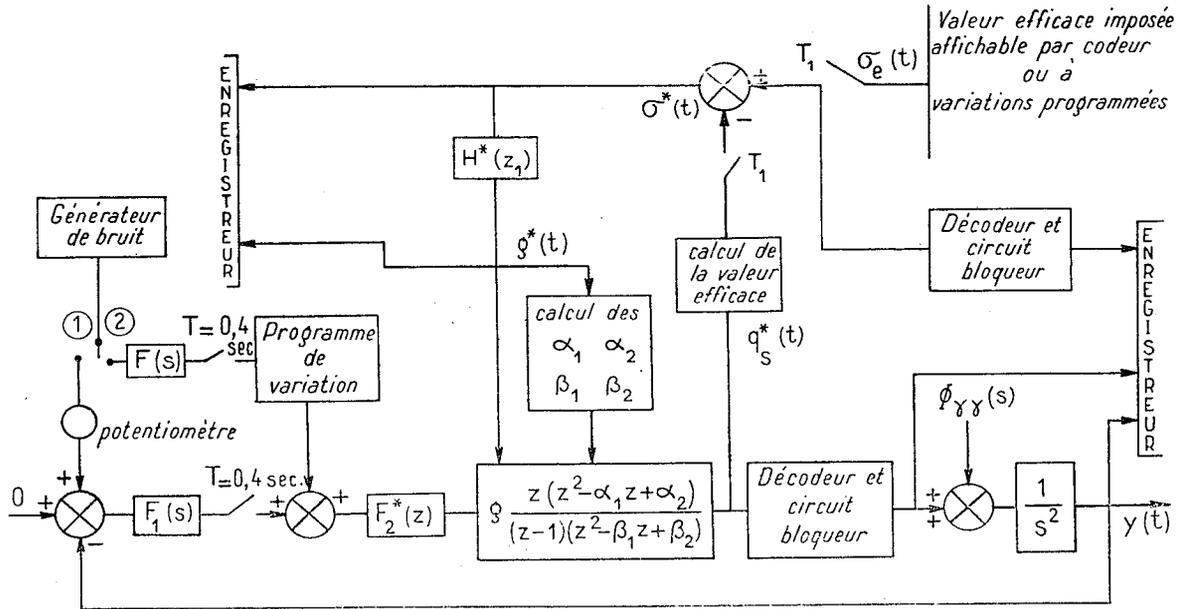


Fig. 5.12. — Schéma de l'expérience d'auto-optimisation

Valeur efficace imposée $\sigma_e(t)$. — On peut, soit l'afficher manuellement à une valeur fixe par codeur externe, soit la faire varier selon un programme identique à celui du bruit mais en opposition de phase. C'est-à-dire que lorsque $\sigma_e = 15 \text{ sec}^{-2}$. $\Phi_{nn} = 25 \text{ sec/rad}$.

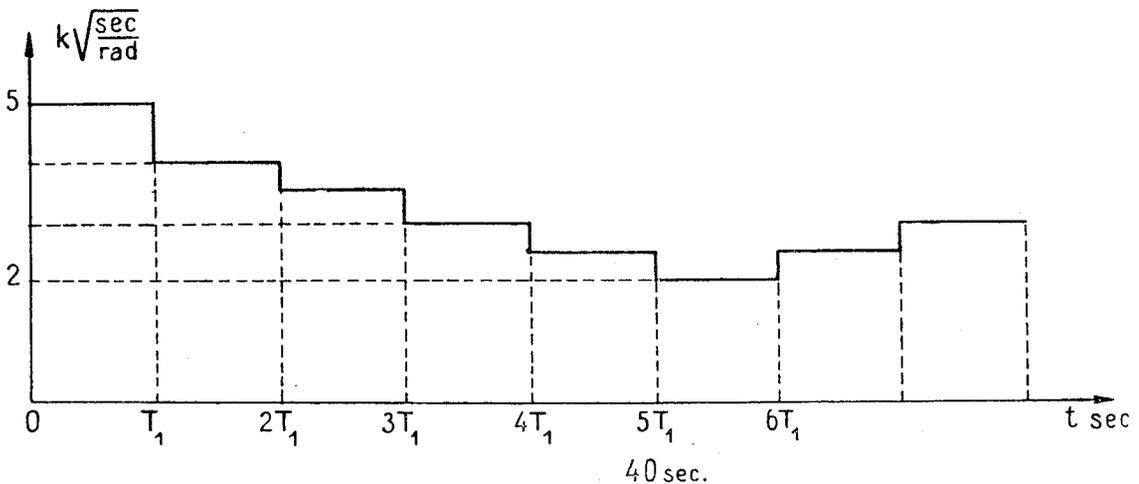


Fig. 5.13. — Programme de variation du bruit dans le cas où $T_1 = 8 \text{ sec}$

— $H^*(z_1) = 1 \frac{z_1(z_1-d)}{(z_1-1)^2}$ dans lequel on peut afficher différentes valeurs de l et d .

— $N = \frac{T_1}{T}$ peut avoir les valeurs 10, 16, 20.

Le gain g a été limité inférieurement à 1,3 et supérieurement à 7.

Une série de tests décrits ci-dessous nous ont amenés à sélectionner comme valeurs optimales :

$$\left. \begin{array}{l} l = 0,07 \\ d = 0,5 \end{array} \right\} H^*(z_1) = \frac{0,07 z_1 (z_1 - 0,5)}{(z - 1)^2}$$

$$N = 16 \quad T_1 = 6,4 \text{ sec.}$$

5.31. DESCRIPTION DES TESTS.

5.3.1.2. *Contrôle de stabilité* (fig. 5.15). — On affiche une valeur fixe pour la valeur efficace imposée $\sigma_e = 40 \text{ sec}^{-2}$ et on met un bruit de niveau constant $k^2 = 9 \text{ sec/rad}$. Le gain doit se stabiliser à une valeur constante bien déterminée. La théorie donne $g = 5$. Sur la fig. 5.15 après le transitoire du début, la stabilisation se fait entre 5 et 6.

5.3.1.2. *Réponse à un échelon de bruit* (fig. 5.16). — La valeur efficace imposée ayant conservé sa valeur antérieure, on fait passer brusquement le bruit de 0 à 9 sec/rad et l'on observe la réponse transitoire du gain $g(t)$.

La stabilisation doit se faire aux environs de 5. Quant au transitoire, il renseigne sur la valeur des hypothèses faites dans le paragraphe 5.232.

Nous avons reproduit sur la fig. 5.16, la réponse transitoire calculée de la boucle d'auto-optimisation théorique à un échelon de gain de 5 ce qui est équivalent à un échelon de bruit. Nous avons trouvé :

$$G^*(z) = 2,8 z^{-1} + 5,45 z^{-2} + 7,85 z^{-3} + 7,5 z^{-4} + 6,5 z^{-5} + 5,4 z^{-6} \\ + 4,4 z^{-7} + 3,8 z^{-8} + \dots$$

Nous avons été étonnés par la coïncidence des deux courbes.

5.3.1.3. *Réponse à un bruit variable* (fig. 5.17). — La valeur efficace imposée étant fixe $\sigma_e = 40 \text{ sec}^{-2}$, on fait varier le niveau de bruit manuellement à l'aide du potentiomètre de façon aussi linéaire que possible. Dans la première moitié de l'enregistrement de la fig. 5.16, le bruit passe de 4 à 25 sec/rad en 53 sec et dans la seconde moitié 25 sec/rad à 0 en 40 sec. On doit observer une décroissance, puis une croissance régulière du gain $g(t)$. La valeur efficace de $q_s(t)$ doit se maintenir aux environs de 40 sec^{-2} , sauf quand on est limité par l'écrêtage supérieur du gain à 7 auquel cas, elle décroît. Les fluctuations de $y(t)$, puisqu'il est difficile de parler de valeur efficace, doivent être comparables à celles que l'on obtient quand on fige le gain du système à diverses valeurs. Cette évaluation est évidemment très subjective.

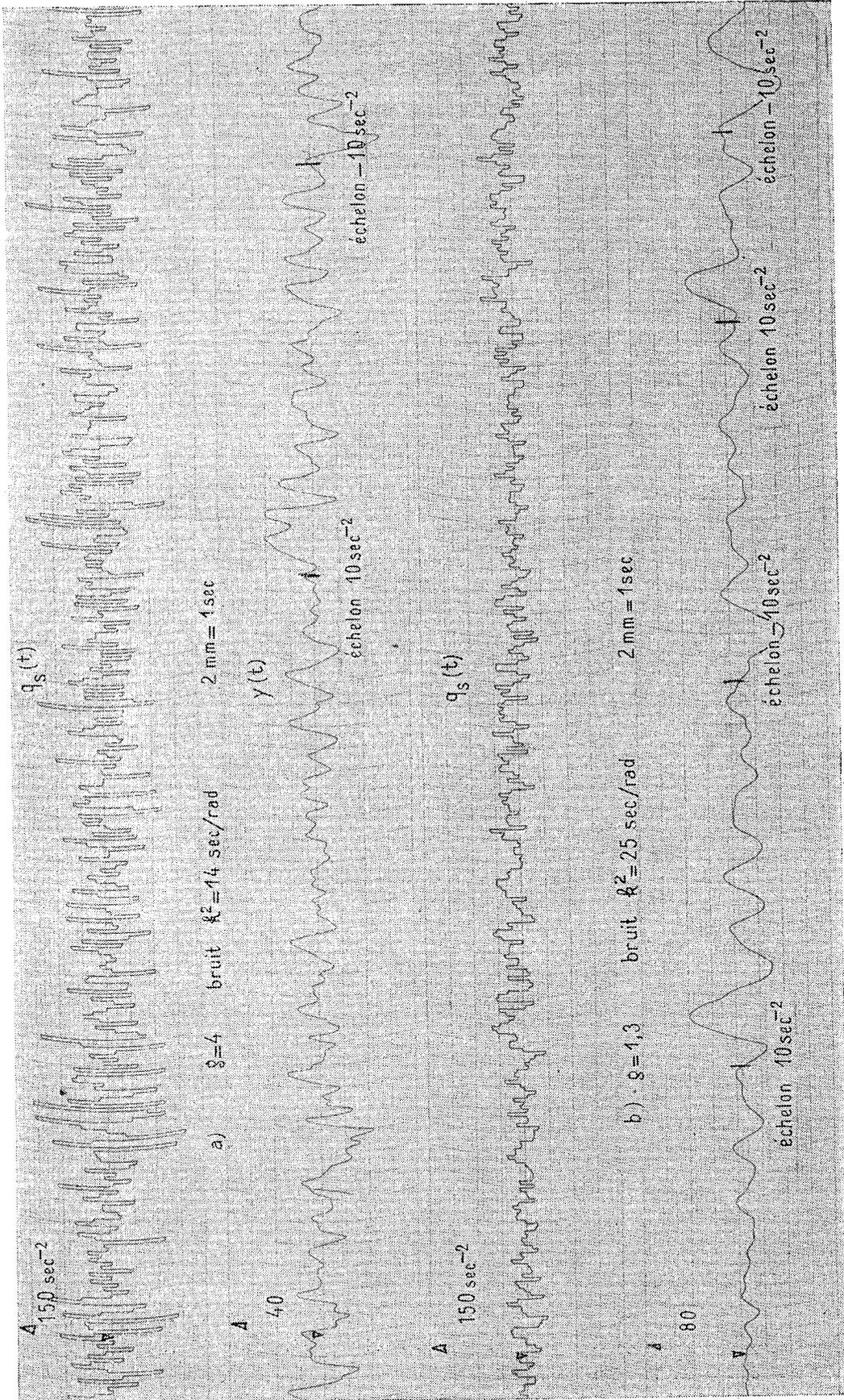


Fig 5.14. — Réponses du système à un bruit blanc et des échelons de dérivée seconde de $\pm 10 \text{ sec}^{-2}$ pour deux valeurs du gain et du niveau de bruit :

- a. $g = 4$ $k^2 = 14 \text{ sec/rad}$;
- b. $g = 1,3$ $k^2 = 25 \text{ sec/rad}$.

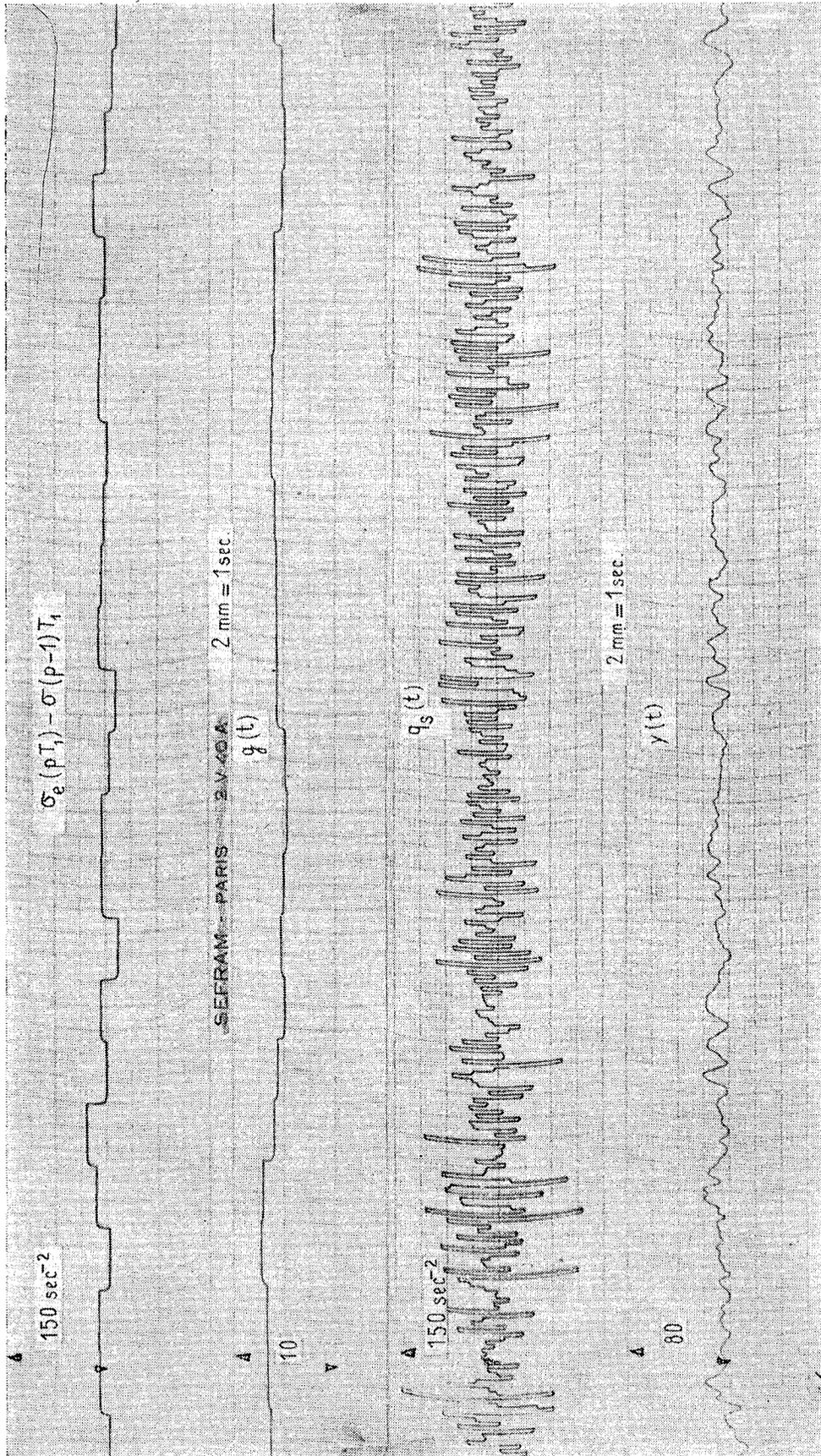


Fig. 5.15. — Contrôle de stabilité $\sigma_e = 40 \text{ sec}^{-2}$, $k^2 = 9 \text{ sec/rad}$

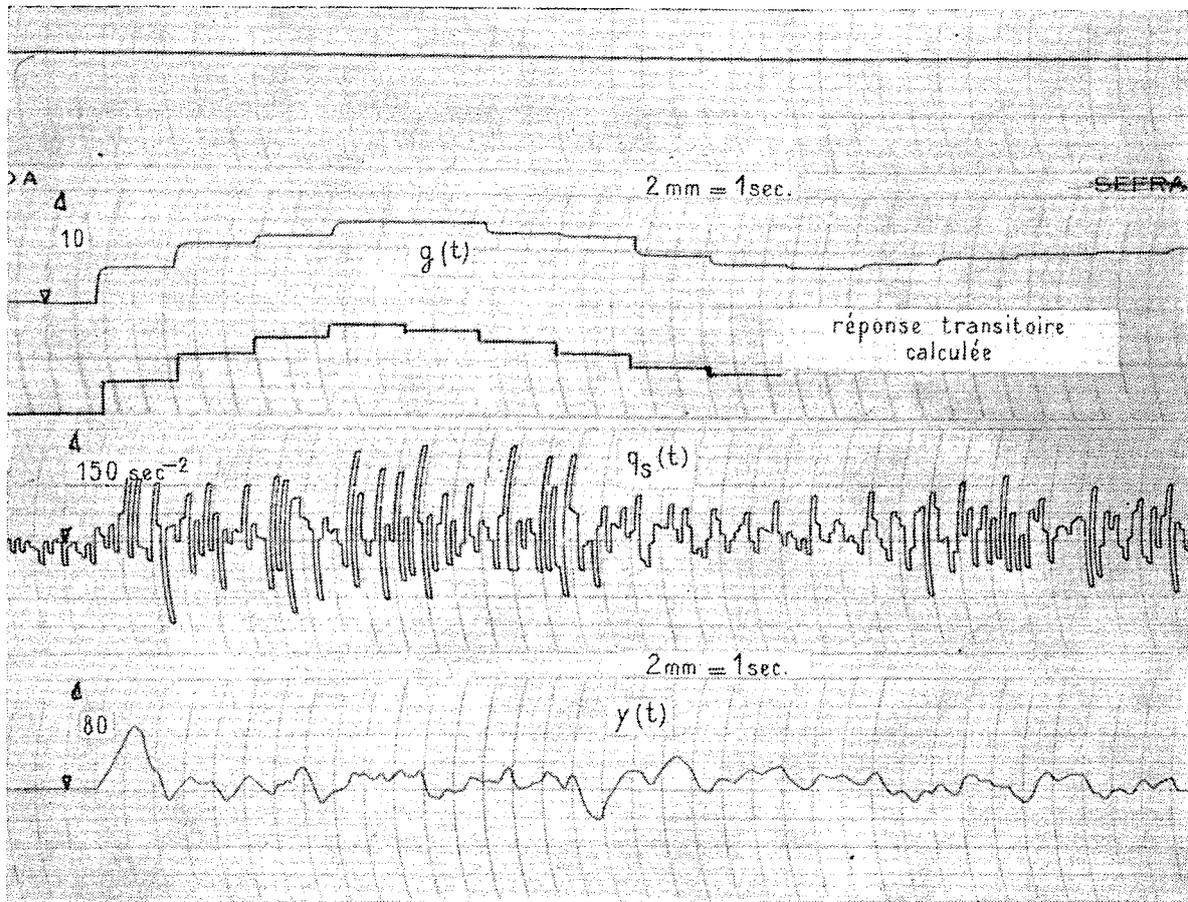


Fig. 5.16. — Réponses à un échelon de bruit $\sigma_e = 40 \text{ sec}^{-2}$
 k^2 varie brusquement de 0 à 9 sec/rad

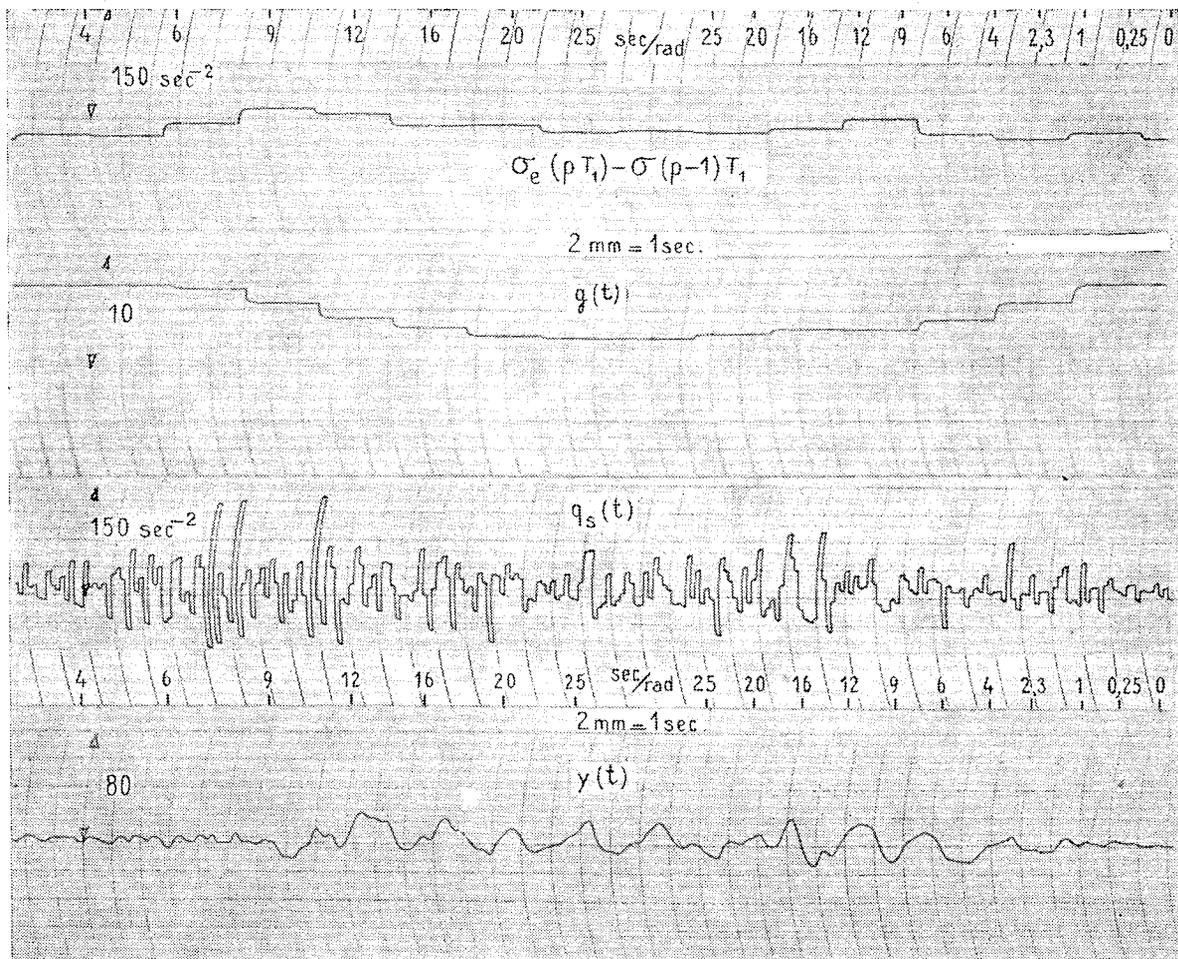


Fig. 5.17. — Réponses du système à un bruit variable; $\sigma_s = 40 \text{ sec}^{-2}$

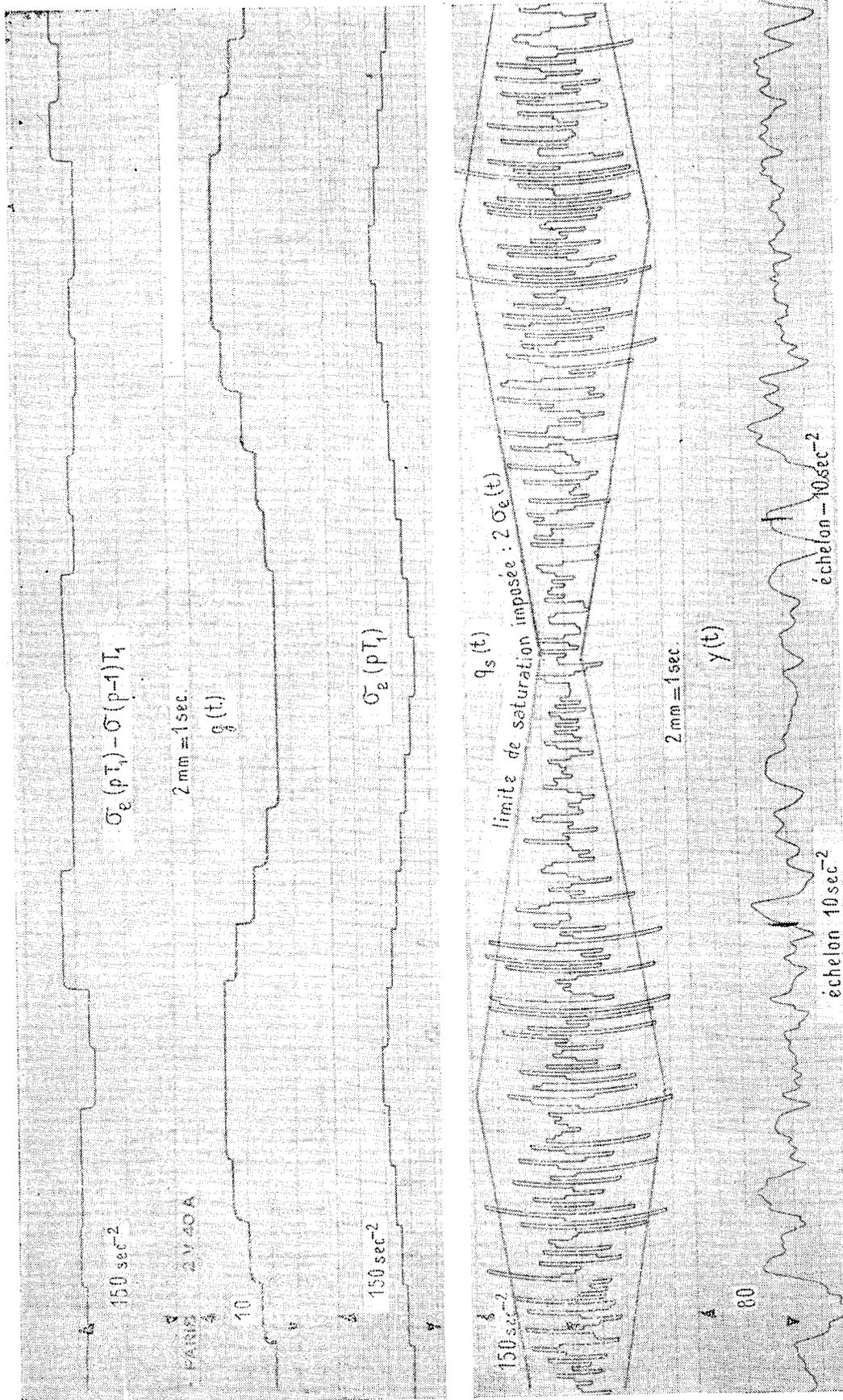


Fig. 5.18. — Essais complets d'auto optimisation

5.3.1.4. *Essais complets d'auto-optimisation* (fig. 5.18). — Dans cette phase finale, le programme complet de variation du bruit et de la valeur efficace est mis en route; on met les échelons de $\pm 10 \text{ sec}^{-2}$ au moins, une fois toutes les 40 sec.

L'enregistrement de la fig. 5.18 est le fragment d'un essai d'endurance qui dura trente-cinq minutes, au cours duquel on a révélé aucune anomalie.

On notera la variation régulière du gain $g(t)$ qui suit assez fidèlement la variation programmée de la valeur efficace imposée

Nous avons tracé sur l'enregistrement du signal saturant $q_s(t)$ la courbe de limite de saturation qui est obtenue en prenant $2 \sigma_e(t)$; le signal $q_s(t)$ doit se trouver 95 % du temps à l'intérieur.

Le signal $y(t)$ ne présente pas de perturbations anormales si on le compare aux courbes de la fig. 5.14.

§ 5.4. Conclusion

La conclusion de cette étude est positive : nous avons réussi à faire de l'auto-optimisation dans des conditions excessivement dures, en raison de la variation très rapide du niveau du spectre de bruit et de la limite de saturation. Le but recherché, maintenir la valeur efficace instantanée du signal saturant égale à une certaine fonction du temps imposée, tout en gardant minimale la valeur efficace de l'erreur, a été atteint. Malgré cela, nous ne pousserons pas un cri de victoire car nous avons eu l'impression de nous déplacer aux limites de l'impossible. Dans les mois qui suivront, nous avons l'intention de perfectionner les performances de la boucle d'auto-optimisation en prélevant la valeur efficace imposée avec une fréquence supérieure à celle du calcul de la valeur efficace du signal saturant. Nous aurons ainsi une variation moins heurtée du gain. Cela nous permettra de faire face à des variations encore plus rapides des éléments externes et internes. Mais nous sentons que nous sommes près du fond, et ce fond, c'est celui d'une impasse. Comme nous l'avons dit dans notre introduction, l'auto-optimisation est un rattrapage qui nous a permis de reculer le moment où il faudra se jeter dans la théorie des systèmes non linéaires. C'est là, nous le croyons, la voie de demain pour les théoriciens des systèmes asservis.

CONCLUSION

Quelles impressions générales à dégager en fin de cette étude?

En premier lieu, garder à l'esprit que le choix de la période d'échantillonnage est essentiel. Prendre une période trop faible, c'est condamner le calculateur arithmétique en temps réel au profit du calculateur analogique; prendre une période trop grande, c'est détériorer les performances escomptables du système.

Le bruit qui entache toujours plus ou moins le signal d'entrée d'un système, ne doit pas être négligé et une étude de son spectre n'est pas du temps perdu. L'usage d'un filtre et d'un anti-filtre permettra de se débarrasser en quasi-totalité de ses effets fâcheux.

L'étude de l'optimisation des systèmes échantillonnés ne s'est pas faite sans soulever quelques points épineux, tels que la non-stationnarité des signaux échantillonnés, qui n'existent pas dans le domaine S. Nous sommes malgré cela arrivés à une formule simple donnant le correcteur optimum.

L'application de cette théorie aux problèmes pratiques fera hésiter certains, surtout si on compare le volume des calculs dans le domaine Z à ceux dans le domaine S. Cette difficulté n'existe plus; une programmation complète de l'optimisation dans le domaine Z sur 650 IBM a été mise au point. Elle permet d'obtenir aisément les coefficients du correcteur optimum, les courbes de performances, les réponses transitoires. La recherche scientifique poussée, et la théorie de l'optimisation appartient à ce domaine, ne peut plus survivre sans l'aide de calculatrices numériques.

Pourquoi tellement insister sur cette théorie.

Parce que son application nous a montré qu'au prix d'une détérioration des performances de 10 %, on pouvait prélever les informations avec une fréquence excessivement faible et ça c'est une grande victoire sur l'analogique.

L'auto-optimisation, branche nouvelle des asservissements, ne fait que confirmer cette victoire. Les résultats étonnants que nous avons obtenus grâce à un certain nombre de manipulations non linéaires sur les données, demanderaient des montages d'une complexité effroyable et peu sûrs avec des éléments analogiques.

L'auto-optimisation, théorie neuve est une théorie condamnée. Demain, elle ne sera plus qu'un paragraphe de la théorie des systèmes non linéaires. Ce sera la liaison, la transition entre le linéaire et le non linéaire. Mais l'aube de demain ne pointerait pas avant dix ans. En attendant il faut vivre.

Ruelle, avril 1961.

APPENDICE I

TRANSFORMATION EN Z BILATÉRALE

Soit une fonction $f(t)$ définie pour tout t et ayant une transformée de Laplace $F(s)$.

$$F(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-st} dt$$

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_{-\infty}^0 f(t) e^{-st} dt + \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt \\ &= \int_0^{+\infty} f(-t) e^{+st} dt + \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt. \end{aligned}$$

Posons :

$$G_1(s) = \int_0^{+\infty} f(-t) e^{+st} dt = \int_0^{+\infty} f(-t) e^{-(s)t} dt$$

$$G_2(s) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt$$

$$F(s) = G_1(-s) + G_2(s).$$

$G_1(-s)$ et $G_2(s)$ s'obtiennent à partir de $F(s)$ en décomposant cette dernière en éléments ayant leurs pôles dans la partie droite et dans la partie gauche du plan s .

Par définition, la transformée en Z bilatérale est :

$$F^*(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(kT) z^{-k}$$

$$F^*(z) = \sum_{k=-\infty}^0 f(kT) z^{-k} + \sum_{k=0}^{+\infty} f(kT) z^{-k} - f(0).$$

Or nous avons :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} f(kT) z^{-k} = Z [G_2(s)] = G_2^*(z).$$

Mais d'autre part :

$$\sum_{k=-\infty}^0 f(kT) z^{-k} = \sum_{n=0}^{+\infty} f(-nT) z^n.$$

Soit :

$$G_1^*(z) = Z [G_1(s)].$$

Nous en déduisons :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f(-nT) z^n = G_1^*(z^{-1}).$$

D'où l'expression de la transformée en Z bilatérale de $F(s)$:

$$F^*(z) = G_1^*(z^{-1}) + G_2^*(z) - f(0)$$

$f(0)$ s'obtient aisément en prenant :

$$f(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s. G_2(s).$$

APPENDICE II

FORMULE GÉNÉRALE PERMETTANT D'OBTENIR
LA TRANSFORMÉE EN Z DE

$$\frac{1}{(s+a)^n}.$$

Comme nous avons pu le constater dans le chapitre IV, la théorie de l'optimisation des systèmes échantillonnés conduit à calculer des transformées en Z de transformées de Laplace ayant au dénominateur des pôles multiples d'ordre très élevés. La décomposition de la transformée de Laplace, en éléments simples, ramène le problème à la recherche de transformées en Z, d'expressions de la forme :

$$\frac{1}{(s+a)^n}.$$

La formule générale donnée dans les ouvrages :

$$Z \left[\frac{1}{(s+a)^n} \right] = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \frac{\partial^{n-1}}{\partial a^{n-1}} \left[\frac{z}{z - e^{-aT}} \right].$$

devient rapidement inexploitable dès que $n > 3$. Nous avons donc cherché une formule de récurrence.

Nous avons calculé les quatre premières formules et leur inspection nous a permis de supposer que l'expression générale était :

$$Z \left[\frac{1}{(s+a)^n} \right] = \frac{T^{n-1}}{(n-1)!} u \frac{[1 + u^{n-2} + a_1^n (u + u^{n-3}) + \dots + a_k^n (u^k + u^{n-2-k})]}{(1-u)^n}.$$

Dans laquelle :

$$u = e^{-aT} z^{-1}.$$

a_k^n coefficient numérique dont l'indice supérieur est relatif à la transformée d'ordre n et l'indice inférieur à son rang dans le numérateur.

Pour obtenir la transformée en Z de $\frac{1}{(s+a)^{n+1}}$ nous avons écrit :

$$Z \left[\frac{1}{(s+a)^{n+1}} \right] = -\frac{1}{n} \frac{\partial}{\partial a} Z \left[\frac{1}{(s+a)^n} \right]$$

$$\frac{\partial u}{\partial a} = -T z^{-1} e^{-aT} = -Tu$$

d'où :

$$Z \left[\frac{1}{(s+a)^{n+1}} \right] = \frac{T^n}{n!} u \frac{\partial}{\partial u} \left[\frac{u + u^{n-1} + a_1^n (u^2 + u^{n-2}) + \dots + a_k^n (u^{k-1} + u^{n-1-k})}{(1-u)^n} \right].$$

La dérivation du crochet, l'arrangement des termes et l'identification nous permet d'écrire la formule générale et les formules de récurrence donnant les coefficients a_k^n .

$$Z \left[\frac{1}{(s+a)^n} \right] = \frac{T^{n-1}}{(n-1)!} u \left[\frac{1 + u^{n-2} + a_1^n (u + u^{n-3}) + \dots + a_k^n (u^k + u^{n-2-k})}{(1-u)^n} \right]$$

$$u = e^{-aT} z^{-1}$$

$$a_1^n = 2 a_1^{n-1} + n - 2$$

$$a_2^n = 3 a_2^{n-1} + (n - 3) a_1^{n-1}$$

.....

$$a_p^n = (p + 1) a_p^{n-1} + (n - p - 1) a_{p-1}^{n-1}$$

Ces formules de calcul pas à pas des coefficients peuvent se fondre en une relation unique obtenue après de longs calculs que nous ne reproduisons pas ici :

$$a_p^n = C_n^0 (p + 1)^{n-1} - C_n^1 p^{n-1} + \dots + (-1)^q C_n^q (p - q + 1)^{n-1} + \dots + (-1)^p C_n^p$$

On obtient la transformée en Z de $\frac{1}{s^n}$ en faisant tendre a vers 0 .

Nous donnerons ci-dessous le tableau des transformées jusqu'à $n = 9$.

$G(s)$	$G^*(z)$
$\frac{1}{s+a}$	$\frac{1}{1-u}$
$\frac{1}{(s+a)^2}$	$\frac{Tu}{(1-u)^2}$
$\frac{1}{(s+a)^3}$	$\frac{T^2 u (1+u)}{2 (1-u)^3}$
$\frac{1}{(s+a)^4}$	$\frac{T^3 u (1+u^2+4u)}{6 (1-u)^4}$
$\frac{1}{(s+a)^5}$	$\frac{T^4}{4!} u \left[\frac{1+u^3+11(u+u^2)}{(1-u)^5} \right]$
$\frac{1}{(s+a)^6}$	$\frac{T^5}{5!} u \left[\frac{1+u^4+26(u+u^3)+66u^2}{(1-u)^6} \right]$
$\frac{1}{(s+a)^7}$	$\frac{T^6}{6!} u \left[\frac{1+u^5+57(u+u^4)+302(u^2+u^3)}{(1-u)^7} \right]$
$\frac{1}{(s+a)^8}$	$\frac{T^7}{7!} u \left[\frac{1+u^6+120(u+u^5)+1191(u^2+u^4)+2416u^3}{(1-u)^8} \right]$
$\frac{1}{(s+a)^9}$	$\frac{T^8}{8!} u \left[\frac{1+u^7+247(u+u^6)+4293(u^2+u^5)+15619(u^3+u^4)}{(1-u)^9} \right]$

APPENDICE III

SIMULATION SUR MACHINE ANALOGIQUE
D'UNE BOUCLE D'ASSERVISSEMENT
COMPORTANT UN COMPENSATEUR ARITHMÉTIQUE§ A. 3.0. **Introduction**

Le premier travail de l'ingénieur, qui désire faire l'étude mathématique d'une boucle d'asservissement, qu'il aura à réaliser par la suite, est de dresser un schéma fonctionnel aussi réaliste que possible des divers constituants du système. Il doit y faire figurer toutes les fonctions de transfert et les non-linéarités.

Ce schéma est généralement inexploitable mathématiquement, en raison de sa complexité. Il doit donc éliminer le secondaire au profit de l'essentiel afin que le nouveau système soit d'un abord plus aisé. Une fois la solution théorique obtenue, l'ingénieur doit réintégrer dans la boucle ce qu'il avait laissé de côté, essayer d'en compenser les effets et voir dans quelle mesure il y a détérioration des propriétés antérieurement calculées.

Il est parfois aisé de tenir compte, sur le papier de l'effet de fonctions de transfert, ayant leurs pôles éloignés de l'origine, ou bien de certaines non-linéarités. Nous pensons, en particulier, à l'usage que l'on peut faire du lieu d'Évans ou du plan des phases. Mais il n'en est pas toujours ainsi et de ce fait, l'ingénieur peut désirer, avant construction, réaliser une simulation de son système, surtout si la construction de ce dernier, engage de fortes sommes d'argent ou entraîne la destruction d'un élément de la boucle en cas de fonctionnement intempestif.

La simulation analogique, vieille de plusieurs décades, est devenue classique et tout laboratoire de recherche, digne de ce nom, possède une installation de ce genre. Nous n'insisterons pas.

La simulation d'une boucle comprenant des éléments analogiques et arithmétiques ne présente pas non plus de difficultés, quand on dispose d'un calculateur arithmétique en ligne; malheureusement, cet objet est des plus rarissime, en raison de son prix prohibitif. Nous avons dû nous en passer pendant longtemps et nous contenter du matériel analogique mis à notre disposition.

§ A.3.1. Réalisation d'un correcteur arithmétique à l'aide d'éléments analogiques

Si nous revenons à la définition du correcteur arithmétique linéaire donnée dans le chapitre I, nous voyons que les éléments de base sont l'addition-l'amplification et le retard d'une période e^{-Ts} . Les deux premiers sont aisément réalisables; la difficulté réside dans le troisième.

Aucune des méthodes trouvées dans la littérature permettant de travailler en temps réel, ne nous sembla satisfaisante en raison de la faiblesse des retards réalisés. Nous avons donc opté pour une solution en temps fictif.

Cette solution nous fut communiquée par l'ingénieur en chef du Génie maritime BOUCHER. Elle n'est donc pas originale, mais nous avons cru bon de l'exposer, car elle nous a permis de dégrossir les problèmes et de préciser le choix de la période optimum.

Les éléments de base pour cette réalisation sont des amplificateurs à courant continu à très grand gain du type 3ALD2 de la S.E.A. et une horloge battant la seconde que l'on peut aussi réaliser avec des amplificateurs montés en intégrateurs et des relais.

La boucle d'asservissement comprend une partie digitale, qui se réalise avec des retards (z^{-1}) et des additions et une partie analogique qui se réalise avec des intégrateurs et des additions. C'est ce qui est illustré sur le fig. A.3.1.

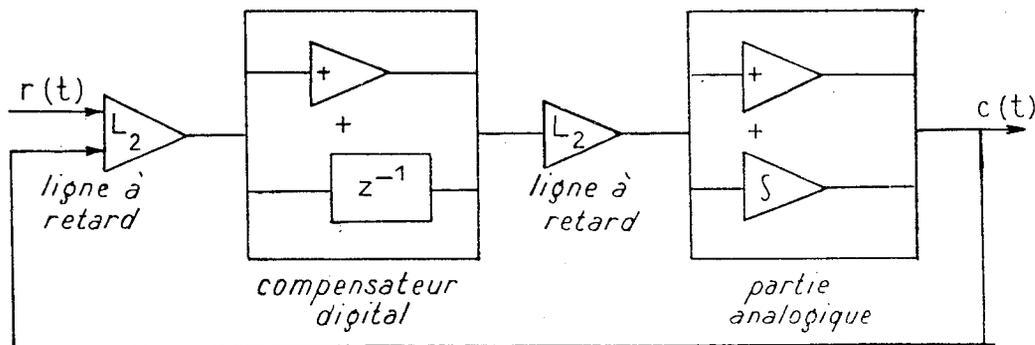
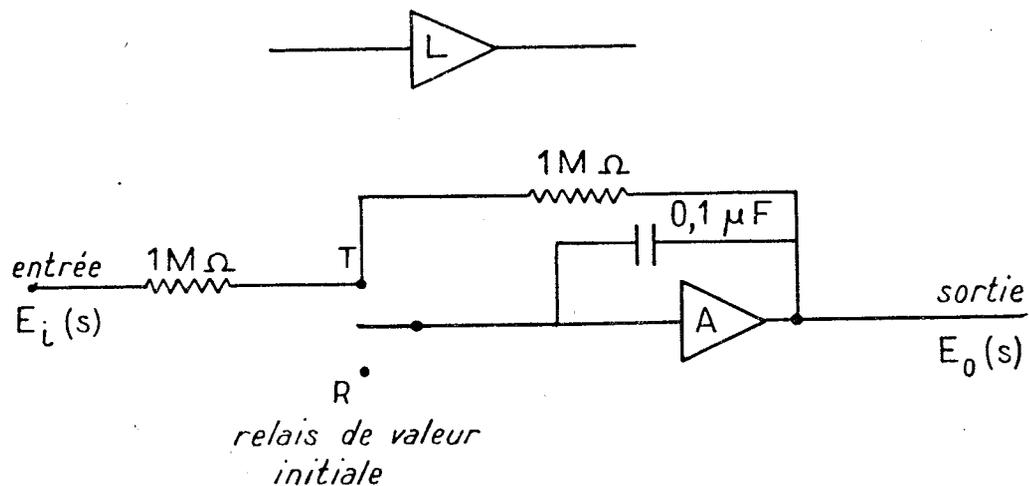


Fig. A3.1. — Boucle d'asservissement en symboles élémentaires

A.3.1.1. ÉLÉMENTS DE BASE DE LA SIMULATION. — Voici comment sont montés les éléments de base; nous en verrons l'usage plus loin.

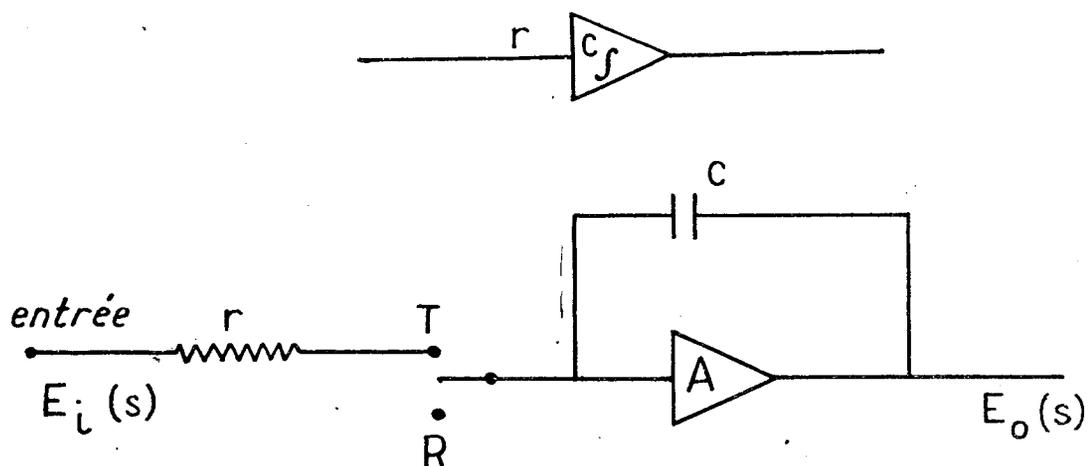
Ligne à retard.



Quand le relais est en T, nous avons : $\frac{E_o}{E_i} = \frac{1}{1+0,1s}$.

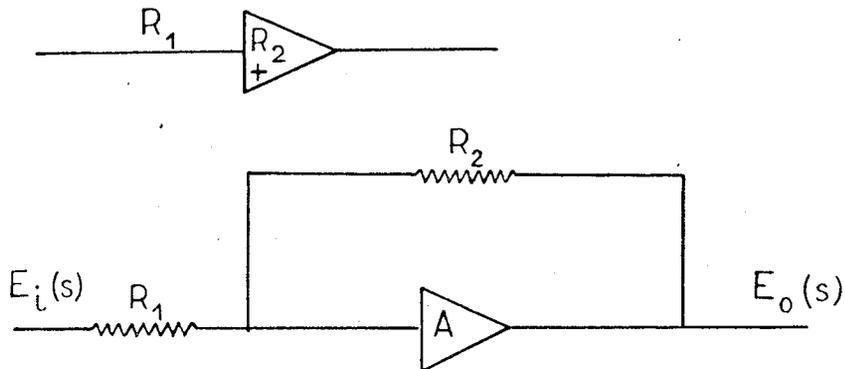
Quand le relais est en R, e_o garde la valeur qu'il avait quand le relais a basculé.

Intégrateur.



Quand le relais est en T, nous avons : $\frac{E_o}{E_i} = \frac{1}{rcs}$.

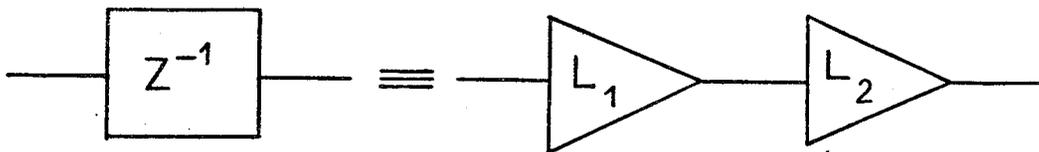
Quand le relais est en R, e_o garde sa valeur antérieure.

Additionneur.

Monté de manière classique. $\frac{E_o}{E_i} = \frac{R_2}{R_1}$.

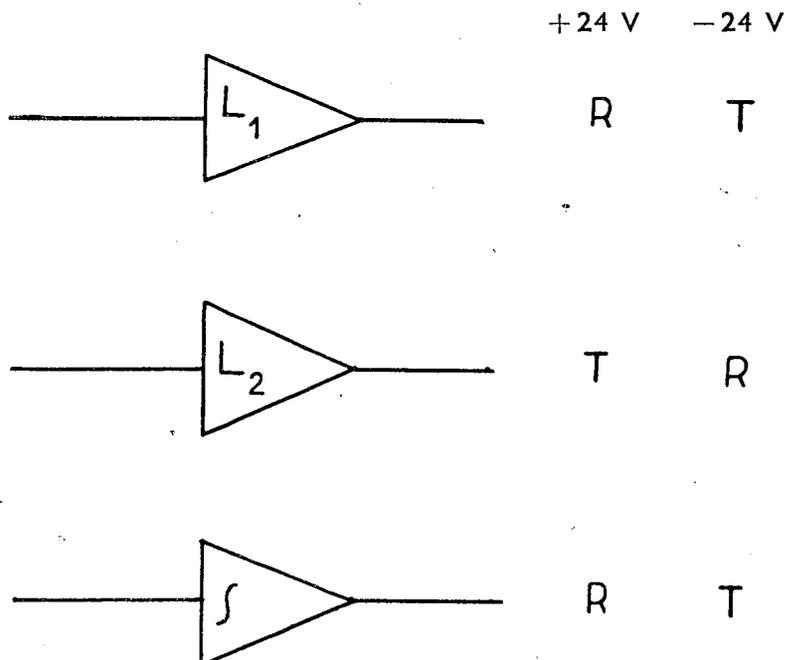
Retard.

Un retard est réalisé à l'aide de deux lignes à retard en série, mais dont les relais sont montés en opposition.



Horloge. — L'horloge, battant la seconde, donne alternativement plus ou moins 24 v commandant le relais de valeur initiale des amplificateurs. Il est difficile de choisir un battement inférieur à la demi-seconde pour des raisons de précision.

Position à donner aux palettes des relais.



Expliquons le fonctionnement du montage de la figure A.3.1.

A.3.1.2. ÉCHANTILLONNAGE DU SIGNAL D'ENTRÉE. — Soit $r(t)$ un signal d'entrée de variations suffisamment lentes pour que la constante de temps de 1/10 sec ne le détériore pas.

Notons en passant que l'on peut prendre cette constante de temps aussi faible qu'on le désire; cela n'impose donc aucune restriction sur la fréquence de coupure de $r(t)$.

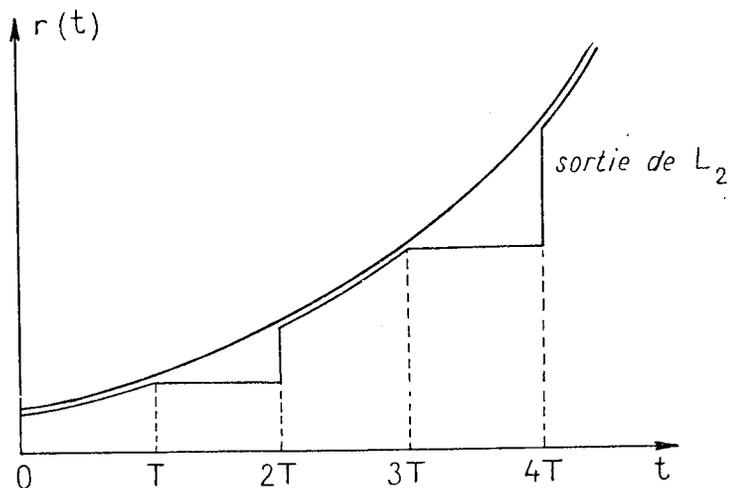


Fig. A3.2. — Signal $r(t)$ et sortie de L_2 alimentée par $r(t)$

Voyons comment se fait l'échantillonnage du signal :

0 — T la sortie de L_2 suit $r(t)$ et garde la valeur $r(T)$ au moment du basculement du relais.

T — 2T L_2 conserve sa valeur $r(T)$.

2T — 3T L_2 suit $r(t)$ et garde la valeur $r(3T)$.

Nous voyons donc que nous avons un échantillonnage du signal toutes les périodes impaires.

La sortie de L_2 , indiquée sur la fig. A.3.2. n'est utilisable que pendant les intervalles $(2k-1)T, 2kT$, c'est-à-dire quand L_2 est bloqué. Ce sont effectivement les intervalles pendant lesquels les intégrateurs et les lignes L_1 travaillent.

A.3.1.3. RETARD Z^{-1} .

T — 2T sortie bloquée de L_2 dans L_1 qui prend la valeur $r(T)$.

2T — 3T L_1 bloquée sur la valeur $r(T)$ et débite dans la deuxième ligne à retard L_2 du retard Z^{-1} qui prend la valeur $r(T)$.

3T — 4T L_2 est bloquée et le retard Z^{-1} sort la valeur constante $r(T)$.

Ce processus a donc pour effet de ressortir à l'instant 3T la valeur du signal $r(t)$ à l'instant T.

A.3.1.4. INTÉGRATEUR ANALOGIQUE. — Du fait du fonctionnement de L_2 , on est obligé de bloquer la partie analogique pendant les intervalles $2kT - (2k+1)T$ afin qu'elle ne reçoive que des paliers.

Nous avons donc tous les éléments pour monter la simulation.

A.3.1.5. RÉFLEXIONS SUR LA SIMULATION.

Premièrement. — La partie analogique fonctionne un temps sur deux; sa sortie n'est donc significative que dans les intervalles $(2k-1)T$, $2kT$

Dans le cas où la période d'échantillonnage réelle est différente de la période T de l'horloge, il faut remplacer le temps t de la réponse impulsive $g(t)$ du système analogique par le temps dilaté $\frac{t}{m}$ ou s par ms dans $G(s)$, m étant le rapport du temps T de battement de l'horloge (pris ici égal à 1 sec) à la période d'échantillonnage du système réel.

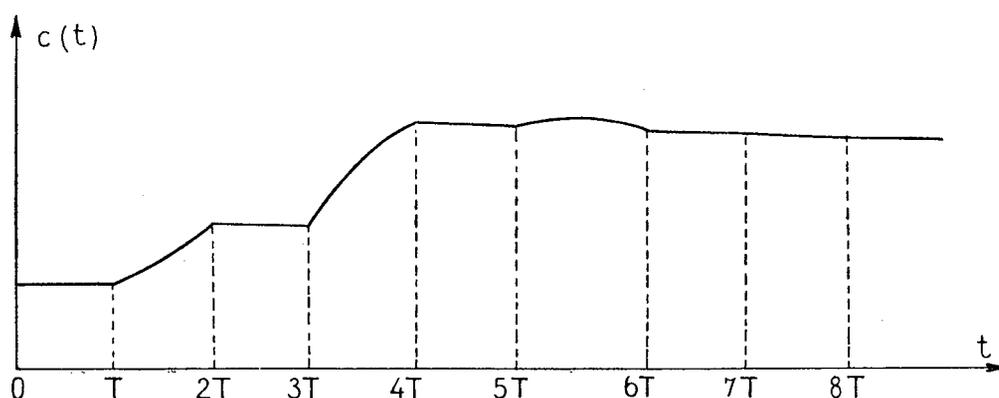


Fig. A3.3. — Sortie de la partie analogique

Deuxièmement. — La partie digitale délivre des signaux qui sont utilisés une fois sur deux par la partie analogique; effectivement, elle fonctionne une fois sur deux. Comme nous l'avons vu ci-dessus la valeur $r(T)$ qui entre dans le retard R à l'instant T en ressort au temps $3T$, mais l'intervalle $2T-3T$ n'a pas de valeur quant à la simulation.

La fonction de transfert de la partie digitale, soit la transformée en Z est indépendante de l'échelle des temps.

Ici, il y a lieu de faire attention à une subtilité : la ligne à retard L_2 délivre aux instants $T, 3T, \dots, (2k+1)T$ le signal $r(T), r(3T), \dots, r(2k+1)T$. Or, normalement il devrait sortir $r(T), r(2T), r(3T), \dots$. Ceci est strictement impossible sauf dans les deux cas suivants :

1 — $r(t)$ est un signal obtenu après passage d'un échelon de position à travers un système analogique commandé de la même manière que le système analogique de la boucle.

2 — $r(t)$ est un signal aléatoire stationnaire ergodique, dont le spectre a été obtenu en passant un bruit blanc à travers un système analogique commandé de la même manière que le système analogique de la boucle.

Ceci exclut par exemple, l'utilisation de signaux réels enregistrés sur bandes magnétiques.

Il y a lieu de faire subir à $r(t)$ le changement d'échelle de temps s'il y a lieu.

Nous illustrons cette théorie en représentant fig. A.3.5. la simulation de la boucle de la fig. A.3.4.

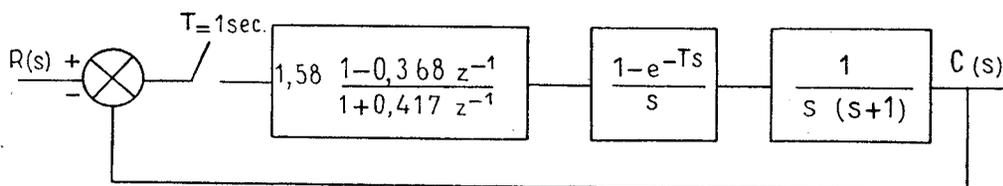


Fig. A3.4. — Schéma de la boucle à simuler

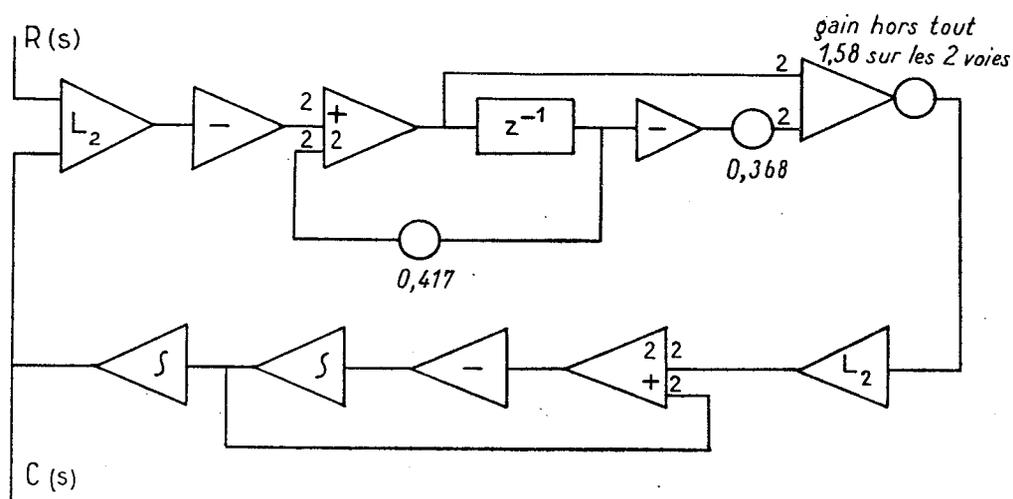


Fig. A3.5. — Simulation digitale

Remarquons qu'il est inutile de réaliser le circuit bloqueur :

$$\frac{1 - e^{-Ts}}{s}$$

puisque la simulation du correcteur arithmétique délivre des paliers.

Remarque. — Dans le cas où l'on peut passer de l'entrée de la partie analogique à la sortie, sans passer à travers un intégrateur, comme c'est le cas dans la réalisation de :

$$G(s) = \frac{s+a}{s+b} \quad (\text{fig. A 3.6}).$$

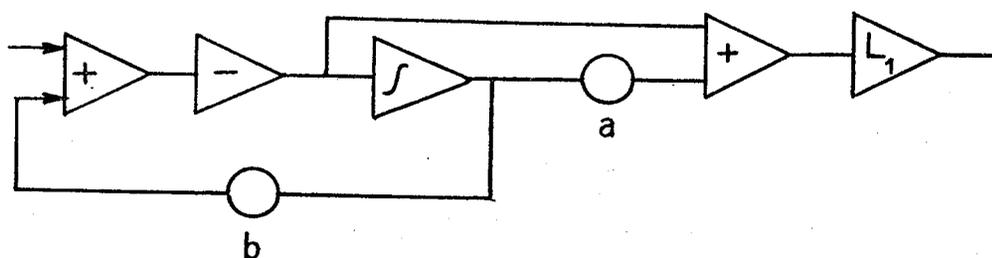


Fig. A3.6. — Simulation de $G(s) = \frac{s+a}{s+b}$.

Il y a lieu de disposer en sortie de la partie analogique une ligne à retard L_1 , ce, afin que le transitoire de la ligne à retard L_2 qui reçoit $r(t)$ dans les intervalles $2kT$ ($2k + 1$) T , ne revienne pas perturber l'entrée après avoir traversé les parties digitales et analogiques.

Cette situation est excessivement rare, puisque dans la majorité des cas $G(s)$ a un pôle à l'origine.

§ A.3.2. Conclusion

La méthode que nous venons de présenter n'est pas une vue de l'esprit; nous l'avons expérimentée et malgré sa lourdeur et quelques réglages délicats nous lui sommes gré de nous avoir permis au cours de deux années qui viennent de s'écouler, de mettre au point des correcteurs qui ont donné les performances attendues quand nous les avons essayés sur calculatrice arithmétique en ligne.

Malgré tout, nous pensons qu'il y a là un sujet de recherche intéressant : comment retarder un signal analogique d'un temps fixe de l'ordre de la seconde.

Des expériences ont été faites en utilisant un enregistreur magnétique à deux têtes de lecture, séparées par une distance d ; si v est la vitesse de déroulement, le retard est $\frac{d}{v}$. Ce procédé est onéreux et lourd.

Des essais, tout récents, que j'ai eu l'occasion de voir en février 1960 au Stanford Research Institute et au Laboratoire d'Asservissement de l'Université de Berkeley s'orientaient vers les propriétés d'hystérésis des tores magnétiques bobinés et semblaient donner de bons résultats.

APPENDICE IV

DÉTERMINATION DE LA DENSITÉ SPECTRALE D'UN BRUIT
ENREGISTRÉE SUR BANDE MAGNÉTIQUE

§ A.4.1. Préambule

Nous exposons ici une méthode simple d'analyse fréquentielle d'un bruit aléatoire stationnaire ergodique, au moyen d'un filtre à bande passante étroite. On trouvera successivement le principe de la méthode utilisée, puis une analyse détaillée du filtre et ses possibilités d'emploi et enfin les résultats que l'on peut en attendre.

Cette méthode est celle que nous avons utilisée dans notre étude, indépendamment de dépouillements effectués à la 650 I.B.M. pour la recherche de fonctions d'autocorrélation. Ces derniers plus précis, mais plus lourds et plus longs, nous ont donné des résultats comparables à 10 % près.

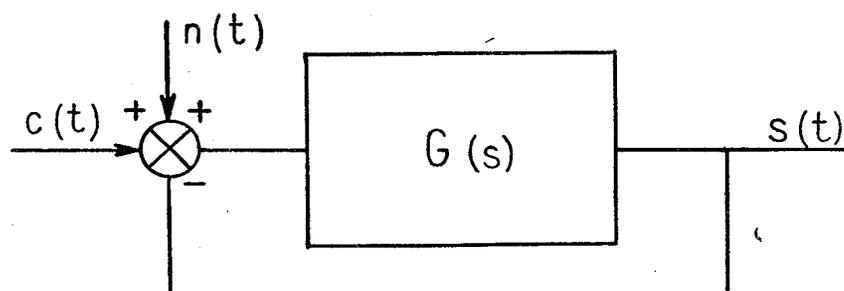


Fig. A.4.1. — Schéma général d'un asservissement

Dans la plupart des systèmes asservis, aux différents niveaux, apparaissent des bruits. Ces bruits peuvent provenir du système lui-même (bruit de fond d'un amplificateur, par exemple), mais souvent c'est l'entrée elle-même qui est entachée d'un bruit $n(t)$. Ces bruits affectent considérablement les performances des systèmes, généralement en obligeant le constructeur à une réduction de bande passante, donc de temps de réponse.

Les méthodes d'optimisation de Wiener, permettent de déterminer la fonction de transfert optimum du système, lorsque ces bruits sont statisti-

quement connus, par leur densité spectrale, ou ce qui revient au même par leur fonction d'autocorrélation.

On conçoit donc tout l'intérêt d'une analyse fréquentielle des bruits, généralement supposés blancs, par manque d'information. Nous présentons ici une méthode d'analyse fine qui a été pleinement satisfaisante pour les cas précis qui nous occupaient. Elle nécessite l'enregistrement magnétique des bruits à étudier, ce qui ne pose aucun problème.

Avant d'aller plus loin, nous formulons deux hypothèses et nous posons nos définitions :

— le bruit $n(t)$ est supposé *stationnaire ergodique*.

Nous poserons : $\Phi_{nn}(j\omega)$: densité spectrale de puissance du bruit $n(t)$:

$$\Phi_{nn}(j\omega) = \lim_{T \uparrow \infty} \frac{|a_T(j\omega)|^2}{2T}$$

avec :

$$a_T(j\omega) = \int_{-T}^T n(t) e^{-j\omega t} dt.$$

La formule de Parseval donne alors la relation fondamentale :

$$\lim_{T \uparrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T n^2(t) dt = \sigma^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{nn}(j\omega) d\omega$$

liant la valeur efficace σ à la densité spectrale du bruit $\Phi_{nn}(j\omega)$.

§ A.4.2. Principe de la méthode

On considère un filtre passe-bande parfait, c'est-à-dire, tel que :

$$H(j\omega) = 0 \quad \omega < \omega_1 \text{ et } \omega > \omega_2$$

et

$$H(j\omega) = 1 \quad \omega_1 < \omega < \omega_2.$$

On peut supposer si ω_1 et ω_2 sont voisins, que $\Phi_{nn}(j\omega)$ est constant dans l'intervalle $\omega_1 \omega_2$ et égal à k^2 ; on aura donc à la sortie de ce filtre :

$$\sigma^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{nn}(j\omega) H(j\omega) H(-j\omega) d\omega = \frac{k^2 (\omega_2 - \omega_1)}{2\pi}$$

donc :

$$k^2 = \frac{2\pi \sigma^2}{\omega_2 - \omega_1}.$$

Lorsque

$$\omega_2 \mapsto \omega_1, \quad k^2 \mapsto \Phi_{nn}(j\omega_1).$$

On dispose donc d'une méthode théorique pour déterminer, point par point, le spectre de puissance d'un bruit.

Le propos de cet article est de présenter un filtre passe-bande qui remplace, le mieux possible, le filtre parfait ci-dessus et permet une exploration d'un spectre dans une gamme de fréquences comprise entre 1 rad/s et 100 rad/s.

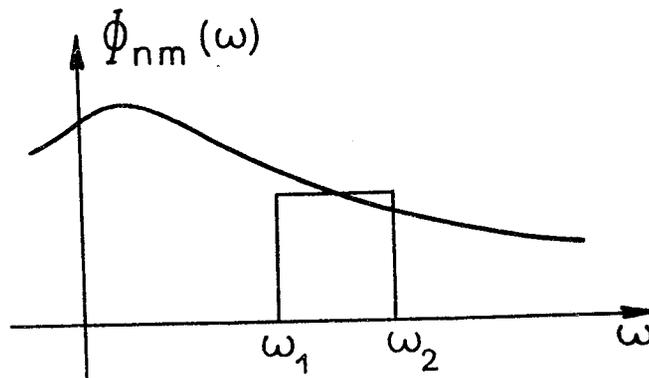


Fig. A.4.2. — Densité spectrale et filtre à bande étroite

Ce filtre est défini par sa fonction de transfert :

$$F(s) = \frac{\frac{s}{\omega_0}}{\left(1 + \frac{s}{\omega_0}\right)^3}$$

§ A.4.3. Caractéristiques du filtre

Le diagramme de Bode est représenté figure. A.4.3.

L'abscisse du maximum de $F(j\omega)$ est $0,7 \omega_0$.

On constate que la largeur de bande du filtre, correspondant à une atténuation de 6 db par rapport à la fréquence $0,7 \omega_0$ est :

$$1,8 \omega_0 - 0,25 \omega_0 = 1,55 \omega_0.$$

La largeur de bande est proportionnelle à ω_0 . Pour des ω_0 importants, l'hypothèse, consistant à admettre que le bruit est blanc sur toute la bande passante, devient assez douteuse, mais dans le cas qui nous intéressait, nous désirions connaître la forme du spectre du bruit dans une bande proche de l'origine (0-20 rad/sec) là où il est étroitement lié au spectre du signal. L'ex-

ploration a été poussée jusqu'à 100 rad/sec sans révéler d'anomalies. C'est donc surtout pour les faibles valeurs de ω que l'analyse doit être fine, et en ce sens le filtre est convenable.

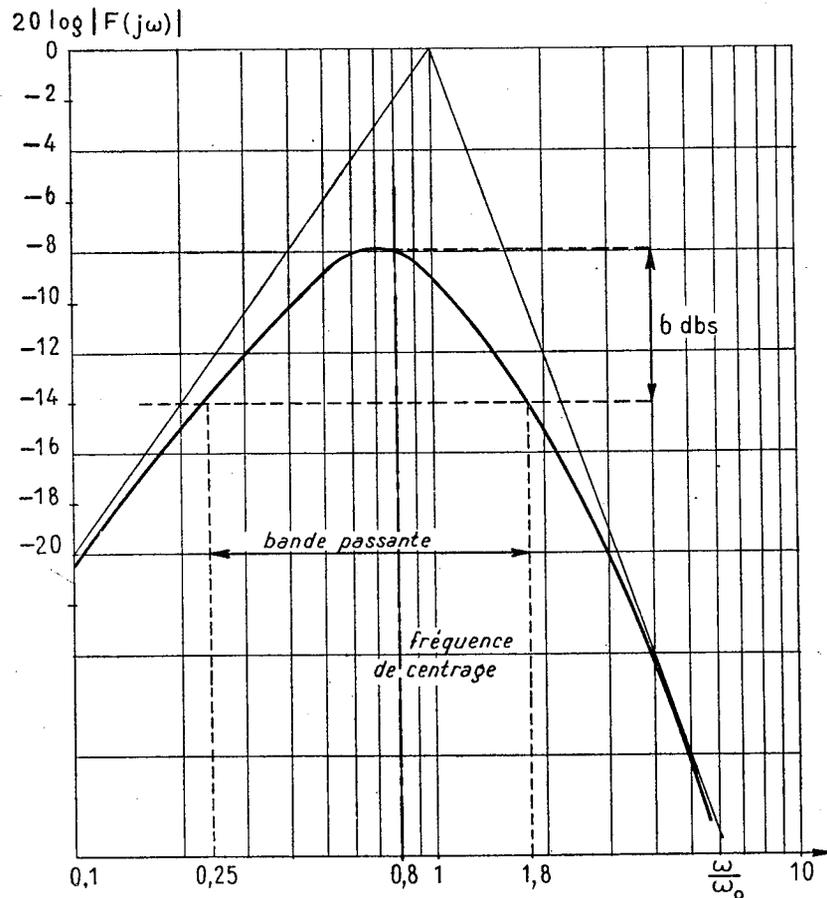


Fig. A.4.3. — Diagramme de Bode et bande passante à 6 db

§ A.4.4. Utilisation du filtre

Pour l'application de la relation :

$$\sigma^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{nn}(j\omega) [F(j\omega) \cdot F(-j\omega)] d\omega$$

on supposera le bruit blanc sur toute l'étendue des fréquences.

$$\Phi_{nn}(j\omega) = k^2$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} k^2 [F(j\omega) \cdot F(-j\omega)] d\omega$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} k^2 |F(s)|^2 ds.$$

Cette intégrale se calcule aisément par la méthode des résidus.
On détermine le résidu de :

$$|F(s)|^2 \text{ au pôle } -\omega_0$$

en effectuant un développement de :

$$|F(s)|^2 = \frac{-\frac{s^2}{\omega_0^2}}{\left[1 + \frac{s}{\omega_0}\right]^3 \left[1 - \frac{s}{\omega_0}\right]^3}$$

autour de $s = -\omega_0$.

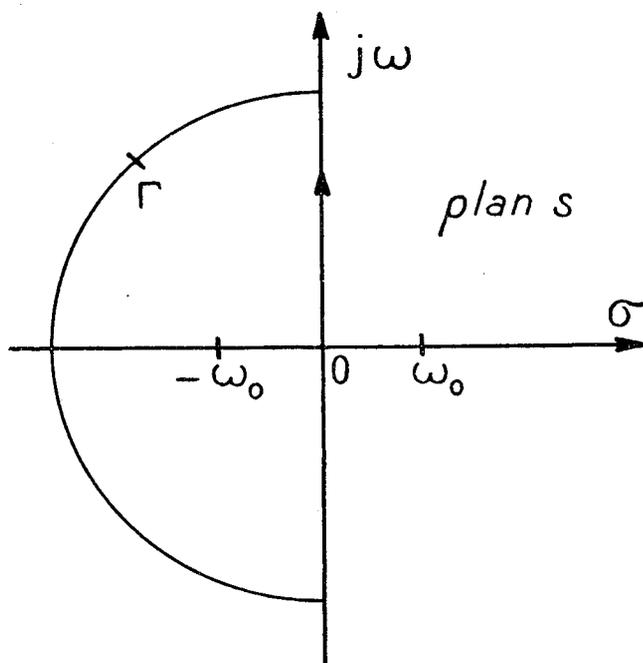


Fig. A.4.4. — Contour Γ d'intégration dans le plan s

Pour cela, on pose :

$$\frac{s}{\omega_0} + 1 = t$$

$$|F(t)|^2 = \frac{(t-1)^2}{8t^3} \left(1 - \frac{t}{2}\right)^{-3} = \frac{(t-1)^2}{8t^3} \left(1 + \frac{3t}{2} + \frac{3 \times 4}{2} \frac{t^2}{4} + \dots\right).$$

Le résidu cherché est le coefficient du terme en $\frac{1}{t}$ soit $\frac{1}{16}$, d'où :

$$\sigma^2 = \frac{k^2 \omega_0}{16}.$$

De la détermination de la valeur quadratique moyenne de la sortie du filtre réglé à un ω_0 donné, on déduit donc une valeur approximative de la densité spectrale du bruit dans la bande :

$$[0,25 \omega_0 \quad 1,8 \omega_0] \text{ rd/s.}$$

et on écrira :

$$k^2 = \frac{16\sigma^2}{\omega_0} \approx \Phi_{nn}(0,8 \omega_0)$$

On a, en effet, constaté expérimentalement que $0,8 \omega_0$ était la fréquence de centrage donnant les meilleurs résultats.

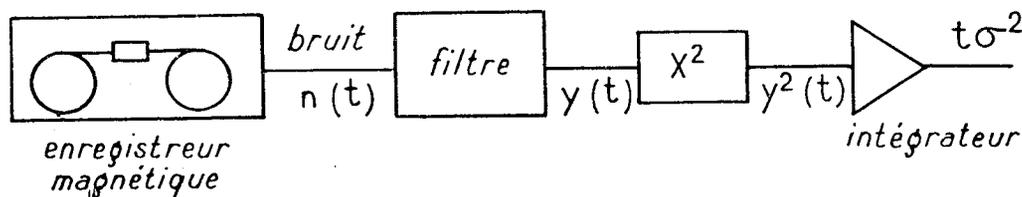


Fig. A.4.5. — Schéma de montage d'analyse du bruit

§ A.4.5. Réalisation du filtre

Ce filtre se réalise facilement sur un simulateur analogique. Il nécessite dix amplificateurs à courant continu et un multiplieur.

Soient N et Y les transformées de Laplace respectives de $n(t)$ et de $y(t)$ [sortie du filtre].

$$\frac{Y}{N} = \frac{\frac{\omega_0^2}{s^2}}{1 + \frac{3\omega_0}{s} + \frac{3\omega_0^2}{s^2} + \frac{\omega_0^3}{s^3}}$$

en posant :

$$Y = Y_1 \frac{\omega_0^2}{s^2}$$

il vient :

$$Y_1 = N - \frac{3\omega_0}{s} Y_1 - \frac{3\omega_0^2}{s^2} Y_1 - \frac{\omega_0^3}{s^3} Y_1.$$

Ces deux dernières équations expliquent les schémas donnés figure A.4.6. (On a indiqué, à titre d'exemple, les réalisations possibles pour $10 \text{ rad/sec} < \omega_0 < 100 \text{ rad/sec}$ schéma 1, et $\omega_0 = 1$ ou 2 rad/sec schéma 2).

§ A.4.6. Mise en œuvre

La bande magnétique sur laquelle le bruit est enregistré est fermée sur elle-même de façon à constituer une boucle que l'on pourra faire passer sous la tête de lecture autant de fois que nécessaire. Ceci afin d'éviter que des questions de longueur de bande disponible n'empêchent de moyenner $y^2(t)$ pendant un temps assez long.

Le bruit restitué par l'amplificateur de sortie est envoyé sur le filtre.

La durée d'intégration de $y^2(t)$ doit être telle que l'on obtienne une tension :

$$\int_0^t y^2(t) dt$$

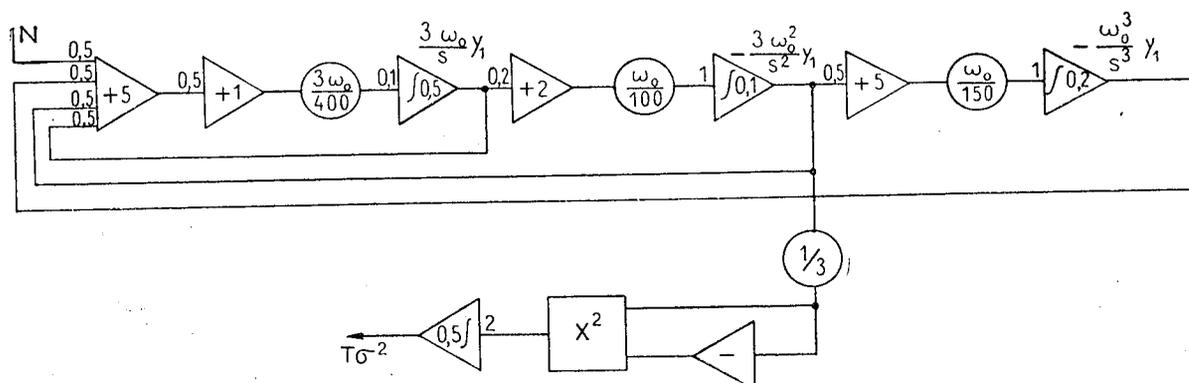
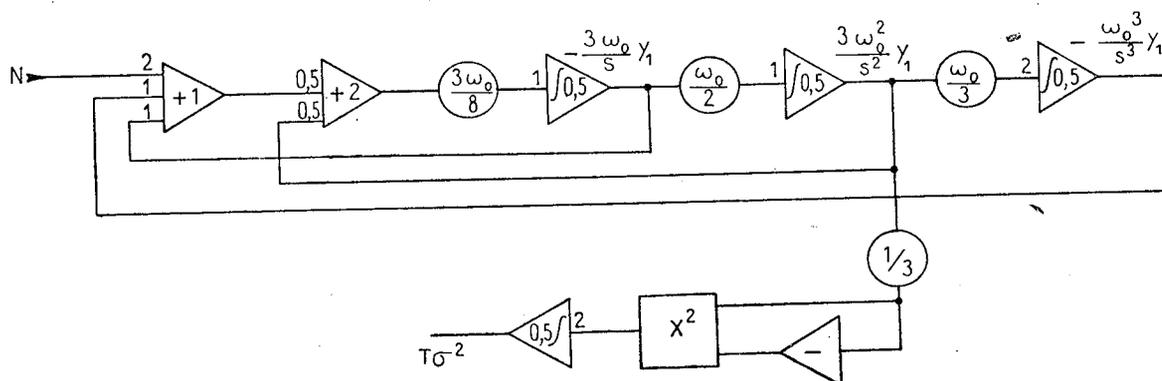
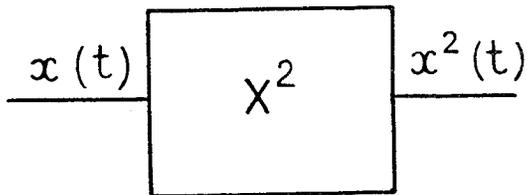
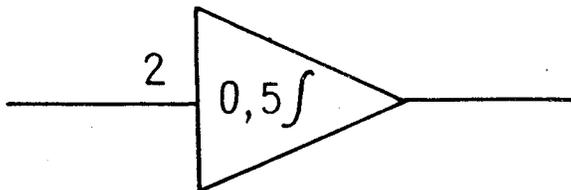
Schéma 1 : $10 \text{ rad/sec} < \omega_0 < 100 \text{ rad/sec}$ Schéma 2 : $1 < \omega_0 < 2 \text{ rad/sec}$ 

Fig. A.4.6. — Simulation du filtre

EXPLICATION DU SYMBOLISME DE LA FIG. A.4.6



Multiplieur effectuant le carré d'une fonction $x(t)$.

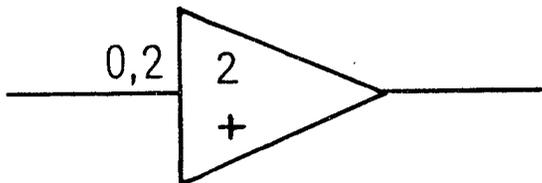


Amplificateur à courant continu monté en intégrateur.

Impédance d'entrée : $2M\Omega$.

Impédance de réaction : $0,5\mu F$.

Fonction de transfert : $\frac{1}{s}$.

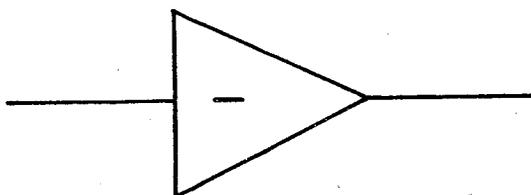


Amplificateur à courant continu monté en additionneur.

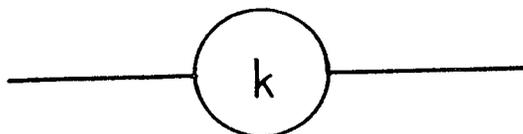
Impédance d'entrée : $0,2M\Omega$.

Impédance de réaction : $2M\Omega$.

Fonction de transfert : 10.



Amplificateur à courant continu monté en simple inverseur.



Potentiomètre entraînant une atténuation de k .

suffisante. L'observation directe de la sortie de l'intégrateur à l'oscilloscope permet de voir si la pente de :

$$\int_0^t y^2(t)$$

est régulière et constante. Elle doit être constante en moyenne si le bruit est stationnaire.

La durée d'intégration est liée à la régularité de cette pente, donc de la fréquence. Pour les très basses fréquences, les variations de pentes sont particulièrement sensibles, et il faut intégrer, pendant des temps suffisamment longs, pour obtenir une moyenne correcte. Nous recommandons 400 sec pour les fréquences de l'ordre du radian et 100 sec pour les fréquences de quelques dizaines de radians.

Le bon comportement du filtre dépend de la façon dont sont réalisés les divers gains : $3\omega_0$, ω_0 et $\frac{\omega_0}{3}$. Pour les grandes valeurs de ω_0 il est nécessaire d'introduire des amplificateurs supplémentaires (voir schéma 1 de la figure A.4.6), les gains réalisables avec les amplificateurs utiles n'étant pas suffisants. Il faut, en particulier, que la tension à l'entrée du multiplieur soit suffisante pour qu'à la sortie, le bruit de fond du multiplieur soit négligeable devant la tension représentant :

$$y^2(t).$$

Le filtre peut être testé simplement pour chaque valeur de ω_0 par sa réponse à un échelon de a volts.

$$R(s) = \frac{a}{s} \times F(s)$$

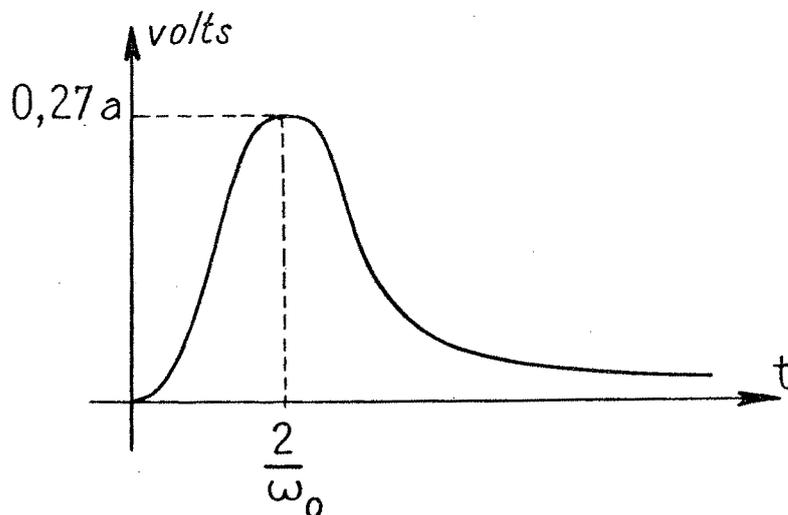


Fig. A.4.7. — Réponse à un échelon de position du filtre $F(s)$

$R(s)$ transformée de Laplace de la réponse $r(t)$ à un échelon de a volts.

$$R(s) = \frac{a\omega_0^2}{(\omega_0 + s)^3}$$

$$r(t) = \frac{a\omega_0^2}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{e^{st}}{(\omega_0 + s)^3} ds$$

$$r(t) = \frac{a\omega_0^2}{2} t^2 e^{-\omega_0 t}$$

$$\frac{dr(t)}{dt} = a\omega_0^2 t e^{-\omega_0 t} \left(1 - t \frac{\omega_0}{2}\right)$$

nul pour $t = 0$

$t = \frac{2}{\omega_0}$

$t = \infty$.

L'allure de la réponse est indiquée fig. A.4.7.

§ A.4.7. Essais et conclusions

Le filtre décrit ci-dessus, a été essayé avec le générateur de bruit Elgenco Md 401 qui délivre un bruit blanc de densité spectrale

$$\Phi_{nn}(\omega) \approx 1 \text{ volt}^2 / \text{rd/s.}$$

entre 0 et 240 rad/sec.

a. Dans une première expérience, on a injecté directement le bruit blanc à l'entrée du filtre. Les résultats suivants ont été obtenus :

ω_0	1	2	10	20	40	60	80	100
$\Phi_{nn}(0,8\omega_0) \text{ volt}^2 / \text{rd/s.} \dots$	0,9	1,10	1,05	1,15	1,20	1,15	1,09	1,06

et l'on retrouve bien le bruit blanc initial.

b. Il est évidemment beaucoup plus probant de reconstituer un spectre connu, mais non blanc.

Une seconde expérience a donc été réalisée dans laquelle le bruit blanc issu du générateur ELGENCO est préalablement passé à travers un filtre simple de fonction de transfert.

$$H(s) = \frac{20}{20 + s}$$

qui donne en sortie un bruit de spectre :

$$\Phi_{nn}(\omega) = \frac{400}{400 + \omega^2}.$$

Ce bruit est ensuite analysé par le filtre. Sur la figure A.4.8. on peut voir la position des points expérimentaux par rapport au spectre théorique. L'approximation consistant à négliger l'énergie apportée par les fréquences extérieures à la bande du filtre, est valable à moins de 8 % près.

D'autres expériences portant sur des bruits radar enregistrés sur enregistreur magnétique Tolana, ont donné de bons résultats.

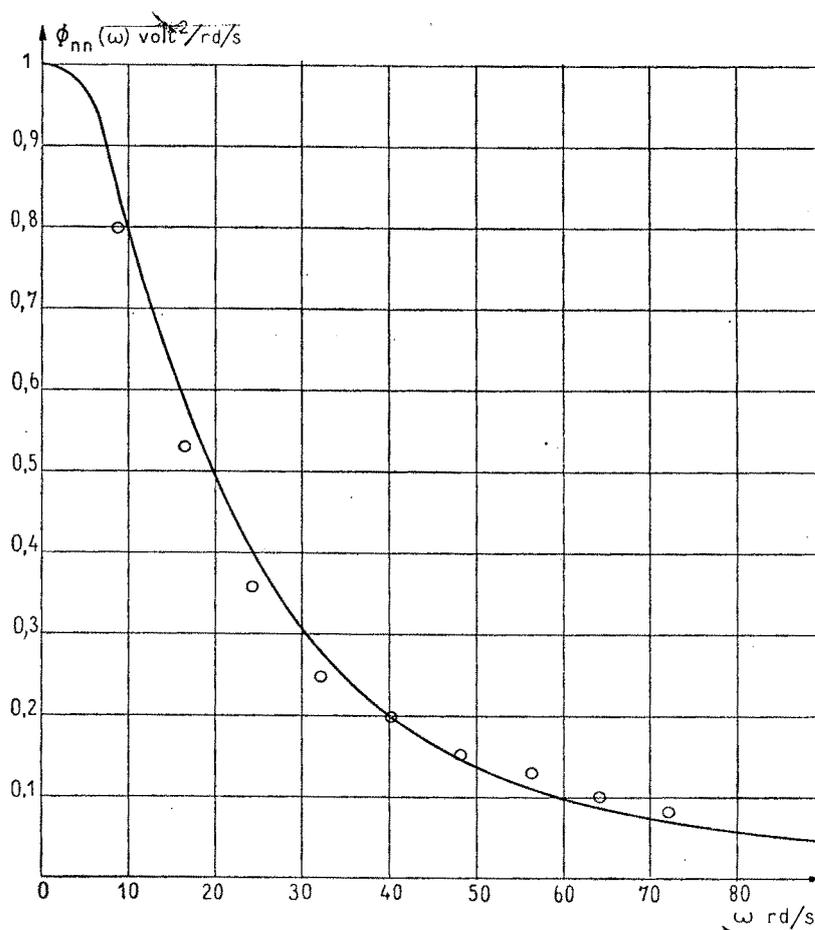


Fig. A.4.8. — Position des points expérimentaux \circ par rapport à la densité spectrale théorique

$$\Phi_{nn}(\omega) = \frac{400}{400 + \omega^2}.$$

Une possibilité intéressante consiste à lire la bande magnétique à une vitesse V^1 supérieure à la vitesse d'enregistrement V . Dans ces conditions, on analyse la fréquence :

$$\omega_1 = \omega_0 \times \frac{V}{V^1}$$

ω_0 fréquence réellement enregistrée, qui peut théoriquement être abaissée autant qu'on le veut.

En conclusion, ce filtre permet d'effectuer l'analyse spectrale d'un bruit avec une précision bien suffisante pour les applications courantes. Il évite de passer par l'intermédiaire de la fonction d'autocorrélation, que l'on pourrait déterminer, en faisant défiler la bande devant deux têtes de lecture séparées par une distance variable et en moyennant le produit des sorties :

$$\varphi_{nn}(\tau) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T n(t) n(t + \tau) dt.$$

Ce procédé est beaucoup plus compliqué et exige un dispositif particulier de lecture pour l'enregistreur magnétique.

APPENDICE V

OPTIMISATION D'UNE BOUCLE D'ASSERVISSEMENT
EN PRÉSENCE DE SATURATION À L'AIDE D'UN CORRECTEUR
ANALOGIQUE

§ A.5.0. Introduction

La théorie de l'optimisation d'une boucle d'asservissement en présence de saturation à l'aide d'un correcteur analogique a été développée par NEWTON (17-18). Nous n'y reviendrons pas. Mais nous avons cru bon de développer ici en appendice, les calculs et d'exposer les résultats obtenus quand on l'applique à la synthèse d'une boucle de caractéristiques identiques à celles de l'exemple traitée dans le chapitre IV, ce afin de pouvoir comparer les performances obtenues dans les deux cas.

§ A.5.1. Calculs d'optimisation

Les données du problème sont les mêmes que celles du chapitre IV. La seule différence réside dans le fait que le compensateur est analogique et non arithmétique.

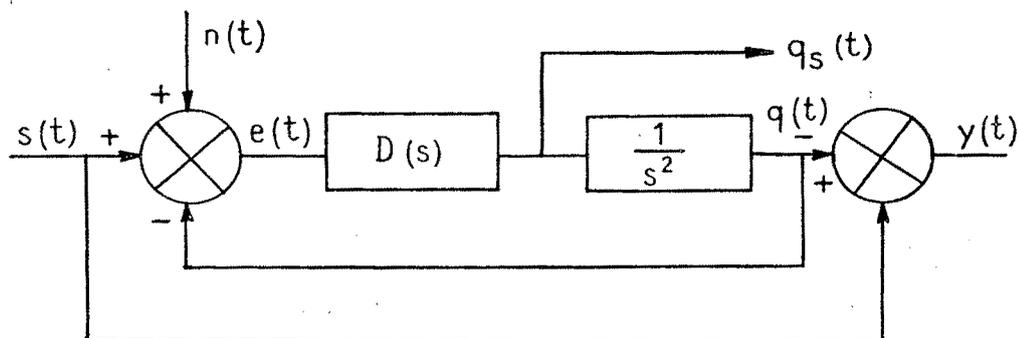


Fig. A.5.1. — Schéma de la boucle à optimiser

Rappelons l'énoncé du problème : on désire minimiser la valeur efficace de l'erreur $y(t)$ entre la sortie du système et son entrée tout en maintenant la valeur efficace du signal $q_s(t)$ inférieure à une certaine valeur. Les entrées sont décrites par leurs densités spectrales :

$$\Phi_{nn}(s) = k^2$$

$$\Phi_{ss}(s) = -\frac{a^2}{s^6}.$$

Les notations employées sont les mêmes que celles de NEWTON (17).

La boucle est remplacée par le schéma série équivalent dans lequel nous avons :

$$D_s(s) = \frac{D(s)}{1 + \frac{D(s)}{s^2}}$$

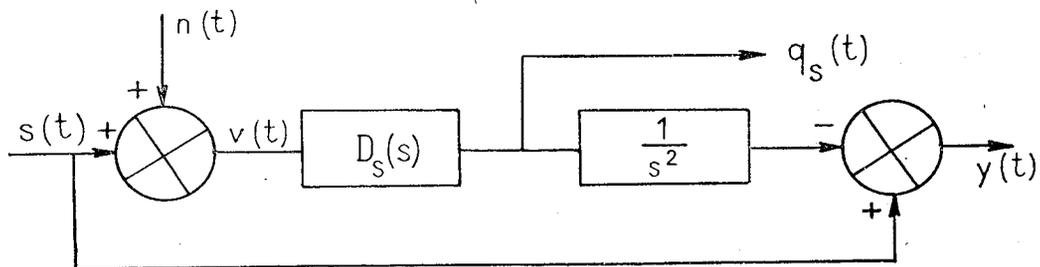


Fig. A.5.2. — Schéma série équivalent

$$D_{sm}(s) = \frac{\Gamma(s)}{\Delta^+(s)} \left[\frac{\Gamma(s)}{\Delta^-(s)} \right]^{-1}$$

$$\left[\begin{array}{l} \Gamma(s) = -\frac{a^2}{s^8} \\ \Delta(s) = \left[\frac{1}{s^4} + \rho \right] \left[-\frac{a^2}{s^6} + k^2 \right] = \frac{k^2 \rho}{s^{10}} \left(s^4 + \frac{1}{\rho} \right) \left(s^6 - \frac{a^2}{k^2} \right). \end{array} \right.$$

$$r = \rho^{-\frac{1}{4}} \quad c = \sqrt[3]{\frac{a}{k}}$$

La décomposition de $\Delta(s)$ en partie ayant ses pôles et zéros dans la partie droite et partie gauche du plan s est immédiate.

$$\left[\begin{array}{l} \Delta^+(s) = \frac{k}{r^2} \frac{(s+c)(s^2+cs+c^2)(s^2+r\sqrt{2} \cdot s+r^2)}{s^5} \\ \Delta^-(s) = \frac{k}{r^2} \frac{(s-c)(s^2-cs+c^2)(s^2-r\sqrt{2} \cdot s+r^2)}{s^5} \end{array} \right.$$

$$\frac{\Gamma(s)}{\Delta^-(s)} = -\frac{a^2 r^2}{k s^3 (s^2 - r\sqrt{2} s + r^2) (s-c) (s^2 - cs + c^2)}$$

Il faut décomposer cette fraction rationnelle en éléments simples et conserver seulement les pôles situés à l'origine :

$$\left. \frac{\Gamma(s)}{\Delta^-(s)} \right]_+ = \frac{a}{\omega_0^2} \frac{(s^2 + \sqrt{2} \cdot \omega_0 s + \omega_0^2)}{s^3}.$$

Nous obtenons en définitive :

$$\left[\begin{array}{l} D_{sm}(s) = \frac{c(\sqrt{2} \cdot r + c)^2 (s^2 + \sqrt{2} \cdot \omega_0 s + \omega_0^2) \cdot s^2}{(s+c)(s^2 + cs + c^2)(s^2 + r\sqrt{2} \cdot s + r^2)} \\ D(s) = \frac{c(\sqrt{2} \cdot r + c)^2 (s^2 + \sqrt{2} \cdot \omega_0 s + \omega_0^2)}{s(s^2 + \sqrt{2} \cdot \omega_1 s + \omega_1^2)} \end{array} \right.$$

avec :

$$\omega_0 = \frac{rc}{r\sqrt{2} + c} \quad \omega_1 = \sqrt{2} \cdot c + r.$$

Pour compléter ce calcul, il nous faut maintenant écrire l'expression de la valeur efficace du signal saturant :

$$\overline{q_s^2(t)} = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} [\Phi_{ss}(s) + \Phi_{nn}(s)] D_{sm}(s) \cdot D_{sm}(-s) ds$$

$$\overline{q_s^2(t)} = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} \frac{-c^2 k^2 (\sqrt{2}r + c)^4 (s^4 + \omega^4)}{s^2 (s^4 + r^4)} ds.$$

Nous pouvons décomposer cette intégrale en deux, en décomposant l'intégrand en éléments simples, la variable considérée étant s^2 .

La première intégrale est :

$$I_1 = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} -\frac{a^2}{s^2} ds.$$

Cette intégrale est infinie, mais il est possible de contourner cet inconvénient. En effet, dans le chapitre IV, nous avons adopté comme densité spectrale du mouvement d'entrée :

$$\Phi_{ss}(s) = \frac{2\beta\gamma^2}{s^4(\beta^2 - s^2)}$$

dans lequel γ représente la valeur efficace de la dérivée seconde dont la distribution dans le temps est une distribution de Poisson et β la fréquence des changements. Après avoir posé $\beta = \frac{2}{\tau}$ nous avons supposé que β était faible et que nous pouvions le négliger devant s . Puis, nous avons posé $a^2 = \frac{4\gamma^2}{\tau}$; ce qui nous a donné $\Phi_{ss}(s) = -\frac{a^2}{s^6}$; mais nous voyons que si $\beta \rightarrow 0$, il en est de même de a . Donc en réalité, l'intégrale doit être remplacée par :

$$I_1 = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} \frac{2\beta\gamma^2}{(\beta^2 - s^2)} ds = \gamma^2.$$

Le calcul de la seconde intégrale ne présente aucune difficulté. L'intégrale tendant vers zéro le long du demi-cercle de centre O et de rayon infini, il suffit de remplacer le chemin d'intégration par un contour fermé formé de l'axe imaginaire et du demi-cercle de centre O et de rayon infini, situé dans le demi-plan gauche et appliquer le théorème de Cauchy.

Nous obtenons :

$$\left\| \overline{q_s^2(t)} = \gamma^2 + \frac{c^2 k^2 (\sqrt{2} \cdot r + c)^4 - a^2}{2r\sqrt{2}} \right.$$

Cette expression mérite la peine d'être regardée de plus près :

a. Quand $r \rightarrow \infty$ la valeur efficace du signal saturant tend vers l'infini. Nous sommes dans le cas de la théorie de Wiener et c'est la raison pour laquelle NEWTON a élaboré sa théorie permettant de limiter le signal saturant.

b. Quand $r \rightarrow 0$, un calcul simple donne :

$$\overline{q_s^2(t)} = \gamma^2 + 2 \frac{a^2}{c}$$

$$\overline{q_s^2(t)} = \gamma^2 \left(1 + \frac{8}{r \cdot c} \right).$$

Ceci montre un résultat très intéressant : la valeur efficace du signal saturant ne peut en aucun cas être inférieure à la valeur efficace de la dérivée seconde du signal d'entrée; elle lui est égale si $r \rightarrow \infty$ c'est-à-dire si le signal d'entrée se réduit à un échelon d'accélération.

En d'autres termes, si on est obligé, pour une raison quelconque, d'abaisser la limite de saturation en dessous de la valeur asymptotique trouvée ci-dessus, le système devient instable.

§ A.5.2. Calcul de quelques spectres

Pour la détermination de la période d'échantillonnage dans le chapitre IV, nous avons besoin de connaître l'allure du spectre de l'erreur $e(t)$ à l'entrée du correcteur.

A.5.2.1. SPECTRE DE L'ERREUR $y(t)$. — Si nous désignons par $T(s)$ la fonction de transfert totale de la boucle fermée, nous avons pour expression de la densité spectrale de l'erreur $y(t)$:

$$\Phi_{yy}(s) = \Phi_{ss}(s) [1 - T(s)] [1 - T(s)] + \Phi_{nn}(s) \cdot T(s) \cdot T(-s)$$

soit :

$$\left\| \Phi_{yy}(s) = a^2 \cdot \frac{\left[1 + \left(1 + \frac{\sqrt{2} \cdot r}{c} \right)^4 \right] s^4 + r^4 + (r + \sqrt{2} \cdot c)^4}{(s^4 + r^4)(c^6 - s^6)} \right.$$

A.5.2.2. SPECTRE DE L'ERREUR $e(t)$.

$$\Phi_{ee}(s) = [\Phi_{ss}(s) + \Phi_{nn}(s)] [1 - T(s)] [1 - T(-s)]$$

$$\left\| \Phi_{ee}(s) = k^2 \frac{(s^4 + \omega_i^4)}{(s^4 + r^4)} \right.$$

Sur les figures A.5.3.4. nous avons tracé les densités spectrales de divers signaux dans le cas où :

$$\gamma = 10 \text{ sec.}^{-2} \quad \tau = 40 \text{ sec.} \quad k^2 = 9 \text{ sec/rad}$$

$$\sqrt{q_s^2(t)} = 50 \text{ sec.}^{-2}$$

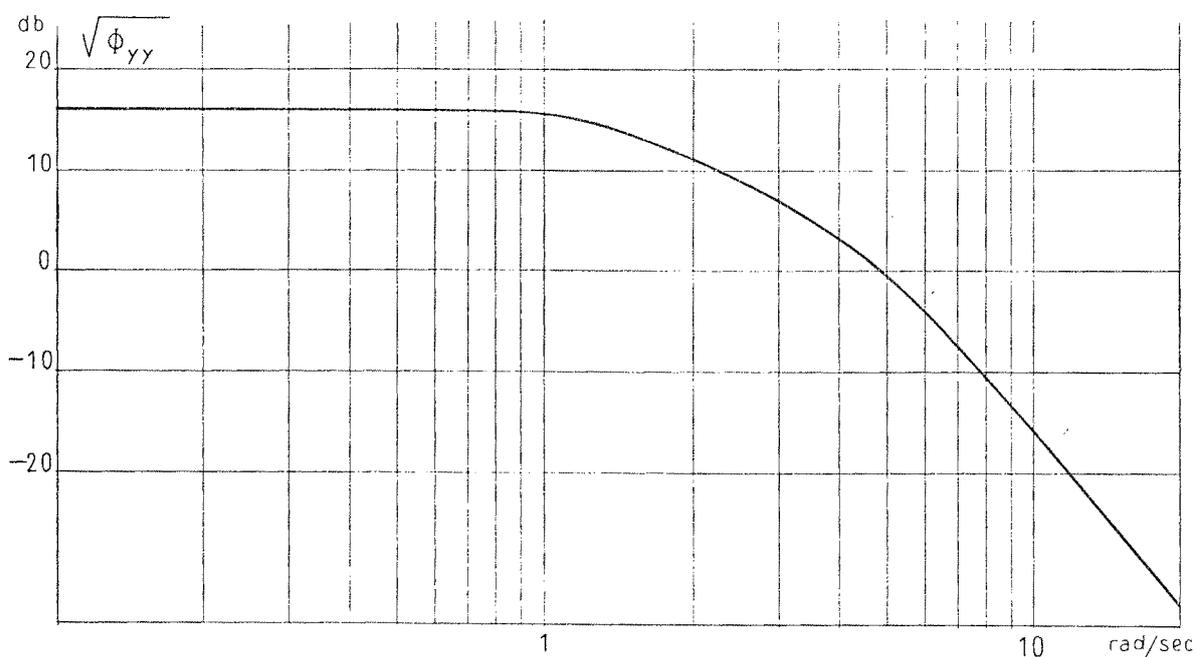


Fig. A.5.3. — Spectres de l'erreur due au bruit $\Phi_{e_n e_n}$ et de l'erreur due au signal $\Phi_{e_s e_s}$ à l'entrée du correcteur

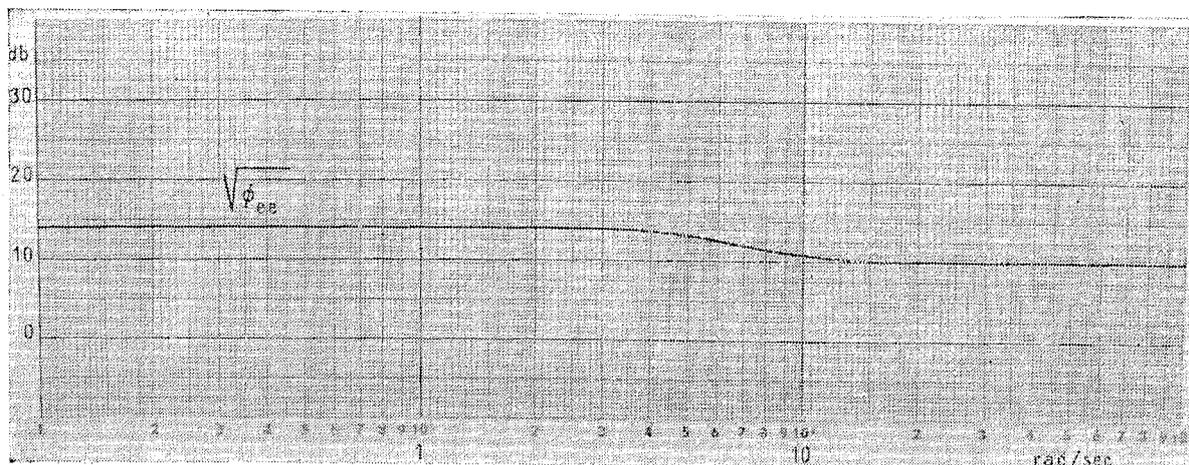


Fig. A.5.4. — Spectre de l'erreur Φ_{ee} à l'entrée du correcteur

CONCLUSION

Devant cette étude rapide, mais complète de l'optimisation d'une boucle d'asservissement en présence de saturation à l'aide d'un correcteur analogique, nous sommes étonnés de la facilité avec laquelle la théorie nous conduit à la solution mathématique du problème, aux formules littérales du correcteur. Bien sûr, il est parfois nécessaire de modifier légèrement les formules obtenues, car le système ne travaille pas toujours exactement dans les conditions définies initialement. Par exemple, un recalage initial peut faire désirer une meilleure réponse à un échelon de position que celle que le système brut donne, mais ceci est peu de chose et une saine connaissance du problème permet d'en venir à bout.

Cette facilité d'atteinte de la solution qui ne se compare nullement au caractère parfois décourageant des calculs dans le domaine Z , explique sans doute en partie la raison pour laquelle le problème de l'optimisation dans le domaine Z est longtemps resté dans l'ombre et pourquoi certains ont préféré, au prix d'une augmentation notable de la fréquence d'échantillonnage, traduire directement les fonctions analogiques sur un calculateur arithmétique.

BIBLIOGRAPHIE

- (1) ASELTINE J. A., MANCINI A. R. and SARTURE C. — « A Survey of Adaptive Control Systems », I.R.E. Trans. on Automatic Control P.G.A.C. 6, p. 102-108, décembre 1958.
- (2) BELLMAN R. and KALABA R. — « Dynamic Programming and Adaptive Processes : Mathematical Foundation », I.R.E. Trans. on Automatic Control, vol. AC 5, january 1960.
- (3) BURT E. G. C. — « Theoretical Principles of Guided Missiles Systems », *Journal of the Aeraunautical Society*, vol. 63, august 1959.
- (4) CHANG (S. S. L.). — « Statistical Design Theory for Strictly Digital Sampled-Data Systems », A.I.E.E. Transactions, vol. 76, 1957, p. 702-709.
- (5) CHANG (S. S. L.). — « Statistical Theory for Digital Controlled Continuous Systems », A.I.E.E. Transactions, vol. 77, part. II, 1958.
- (6) CHANG (S. S. L.). — « Optimisation of the Adaptive Fonction by Z transform Method », *A.I.E.E. Paper*, n° C.P. 59-12-96.
- (7) FRANKLIN G. F. — « Linear Filtering of Sampled Data », I.R.E. Convention Record, part. 4 (1955), p. 119-128.
- (8) GILLE J. C., PELEGRIN M., DECAULNE P. — « Méthodes modernes d'étude des systèmes asservis », Dunod, Paris, 1960.
- (9) JURY E. I. — « Why Sample Data? », *Instrumentation, Systems, Automatic Control, Journal*, june 1960.
- (10) JURY E. I. — « Status of Sampled, Data Systems », *Communications and Electronics, A.I.E.E.*, january 1960.
- (11) JURY E. I. — « Sampled Data Control Systems », John Wiley and Sons Inc., publishers New York, 1958.
- (12) JOHNSON G. W. — « Statistical Analysis of Sampled Data Systems », I.R.E. Wescon Convention Record (1957), part. 4, p. 187-195.
- (13) KALMAN R. E. — « Design of Self Optimizing Control System », A.S.M.E. Trans., vol. 80, p. 468-478, february 1958.
- (14) LANNING J. H. and BATTIN R. H. — « Random processes in automatic control », Mc Graw Hill Book Company Inc., N. Y.
- (15) LEFÈVRE P. — « Performances optimales du guidage par alignement en présence de bruit », *Mémorial de l'Artillerie Française*, tome 34, 3^e fascicule, 1960.
- (16) MORI M. — « Statistical treatment of sampled data control systems for actual random inputs », A.S.M.E. Trans., vol. 80, p. 444-456, february 1958.
- (17) NEWTON G. C., GOULD L. A., KAISER J. F. — « Analytical design of Linear Feedback controls », John Wiley and Sons Inc., N. Y., 1957.
- (18) NEWTON G. C. Jr. — « Compensation of Feedback Control Systems Subject to Saturation », *Journal of Franklin Inst.*, 1952, p. 281, 296, 391, 413.
- (19) NISHIMURA T. and JURY E. I. — « Contribution to statistical designing of Sampled Data Control Systems », University of California, Electronics research lab., Berkeley. Report, séries 60, Issue n° 210, august 5, 1958.

- (20) OLIVER B. M., PIERCE J. R. and SHANNON C. E. — « The Philosophy of Pulse code Modulation », Proc. I.R.E., vol. 36, n° 11, p. 1324-1331, november 1948.
- (21) RAGAZZINI J. R. and FRANKLIN G. F. — « Sampled Data Control Systems », Mc Graw Hill Book Company Inc., 1958.
- (22) ROBERTS A. P. — « Self Optimizing Control Systems for a certain class of Randomly varying inputs », Transactions of the Society of Instrument Technology, september 1959, London.
- (23) SKLANSKY J. — « On closed form expression for mean squares in discrete continuous systems », I.R.E., Transactions on Automatic Control P.G.A.C. 4, march 1958, p. 21.
- (24) STEWART E. C. — « Application of Statistical Theory to Beam Rider Guidance in the Presence of noise », II Modified Wiener Filter theory, N.A.C.A., Tech. note 4278, june 1958.
- (25) STROMER P. R. — « Adaptive or self Optimizing control systems; a bibliography », I.R.E., Transactions on Automatic Control, vol. AC 4, p. 65-68, may 1959.
- (26) THELLIER P. L. — « Compensation d'un asservissement sujet à saturation à l'aide d'un compensateur arithmétique », *Annales des Télécommunications*, juillet et août 1960.
- (27) THELLIER P. L. — « Calculateur analogique pour guidage de l'engin Masurca », Fonderie de Ruelle, Section Engins spéciaux, 1959. Publication Marine.
- (28) TOU J. T. — « Digital and Sampled Data Control Systems », Mc Graw Hill Book Company Inc., 1959.
- (29) TRUXAL J. G. — « Automatic feedback control system synthesis », Mc Graw Hill Book Company Inc.
- (30) WIENER P. — « The extrapolation, interpolation and smoothing of stationnary time series », John Wiley and Sons, N. Y., 1950.

TABLE DES MATIÈRES

	Pages.
<i>Introduction</i>	631
<i>Explication des notations</i>	634
CHAPITRE PREMIER — Rappel sur les compensateurs arithmétiques et les systèmes à données échantillonnées.....	635
CHAPITRE II. — Choix de la période de prélèvement. Filtrage avant échantillonnage d'un signal entaché de bruit.....	642
CHAPITRE III. — Optimisation d'une boucle d'asservissement en présence de saturation.....	651
CHAPITRE IV. — Application de la théorie du chapitre III. Résultats expérimentaux...	663
CHAPITRE V. — Auto-optimisation d'une boucle d'asservissement dans le cas d'entrées non stationnaires et de limites de saturations variables.....	689
<i>Conclusion</i>	712
APPENDICE I. — Transformée en Z bilatérale.....	713
APPENDICE II. — Formule générale permettant d'obtenir la transformée en Z de $\frac{1}{(s+a)^n}$	715
APPENDICE III. — Simulation sur machine analogique d'une boucle d'asservissement comportant un compensateur arithmétique.....	718
APPENDICE IV. — Détermination de la densité spectrale d'un bruit enregistré sur bande magnétique.....	726
APPENDICE V. — Optimisation d'une boucle d'asservissement en présence de saturation à l'aide d'un correcteur analogique.....	738
<i>Bibliographie</i>	744