



HAL
open science

Formes arborescentes des fonctions booléennes : applications aux circuits à cryotrons

Jean-Pierre Lamoitier

► **To cite this version:**

Jean-Pierre Lamoitier. Formes arborescentes des fonctions booléennes: applications aux circuits à cryotrons. Modélisation et simulation. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1963. Français. NNT : . tel-00278538

HAL Id: tel-00278538

<https://theses.hal.science/tel-00278538>

Submitted on 13 May 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre :

THÈSE

présentée à

LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

pour obtenir

LE TITRE DE DOCTEUR DE TROISIÈME CYCLE

Mathématiques Appliquées

par

Jean-Pierre LAMOITIER

Ingénieur Arts et Métiers

Licencié ès Sciences

FORMES ARBORESCENTES DES FONCTIONS BOOLEENNES APPLICATIONS AUX CIRCUITS A CRYOTRONS

Thèse soutenue le 28 Juin 1963 devant la Commission d'examen:

Monsieur J. KUNTZMANN, Président

Messieurs B. VAUQUOIS, Examineurs

R. PERRET

FACULTE DES SCIENCES DE L'UNIVERSITE
DE GRENOBLE

DOYENS HONORAIRES M. FORTRAT P.
M. MORET L. Membre de l'Institut

DOYEN / M. WEIL L.

PROFESSEURS : MM.	WOLFERS F.	PHYSIQUE
	NEEL L.	PHYSIQUE EXPERIMENTALE Membre de l'Institut
	DORIER A.	ZOOLOGIE
	HEILMANN R.	CHIMIE ORGANIQUE
	KRAVTCHENKO J.	MECANIQUE RATIONNELLE
	CHABAUTY C.	CALCUL DIFFERENTIEL ET INTEGRAL
	PARDE M.	POTAMOLOGIE
	BENOIT J.	RADIOELECTRICITE
	CHENE M.	CHIMIE PAPETIERE
	BESSON J.	ELECTROCHIMIE
	WEIL L.	THERMODYNAMIQUE
	FELICI N.	ELECTROSTATIQUE
	KUNTZMANN J.	MATHEMATIQUES APPLIQUEES
	BARBIER R.	GEOLOGIE APPLIQUEE
	SANTON L.	MECANIQUE DES FLUIDES
	OZENDA P.	BOTANIQUE
	FALLOT M.	PHYSIQUE INDUSTRIELLE
	MOUSSA A.	CHIMIE NUCLEAIRE
	TRAYNARD P.	CHIMIE
	SOUTIF M.	PHYSIQUE
	CRAYA A.	HYDRODYNAMIQUE
	REEB G.	MATHEMATIQUES M.P.C.
	BLAMBERT M.	MATHEMATIQUES
	BONNIER E.	ELECTROCHIMIE
	DESSAUX G.	PHYSIOLOGIE ANIMALE
	PILLET E.	ELECTROTECHNIQUE
	DEBELMAS J.	GEOLOGIE
	PEAUD-LE-NOEL	BIOSYNTHESE DE LA CELLULOSE
	GALVANI O.	MATHEMATIQUES
	REULOS R.	THEORIE DES CHAMPS
	AYANT	PHYSIQUE APPROFONDIE
	GALLISSOT F.	MATHEMATIQUES APPLIQUEES
Mlle	LUTZ E.	MATHEMATIQUES
	BOUCHEZ R.	PHYSIQUE NUCLEAIRE
	LLIBOUTRY L.	GEOPHYSIQUE
	MICHEL R.	GEOLOGIE ET MINERALOGIE
	GERBER R.	MATHEMATIQUES
	PAUTHENET R.	ELECTRONIQUE

PROFESSEURS SANS CHAIRE :

MM.	SILBER R.	MECANIQUE DES FLUIDES
	MOUSSIEGT J.	ELECTRONIQUE
	BARBIER J.C.	PHYSIQUE
	BUYLE-BODIN	ELECTRONIQUE
Mme	KOFLER	BOTANIQUE
	DREYFUS	THERMODYNAMIQUE
	VAILLANT	ZOOLOGIE ET HYDROBIOLOGIE
	GIRAUD P.	GEOLOGIE
	SAVELLI M.	PHYSIQUE GENERALE

PROFESSEURS ASSOCIES :

MM. REIZNICK
LUMER

PHYSIOLOGIE VEGETALE
MATHEMATIQUES

MAITRES DE CONFERENCES :

Mme LUMER L.
PERRET R.
ARNAUD P.
Mme BERBIER M.J.
BRISSONNEAU
COHEN J.
Mme SOUTIF J.
DEPASSEL R.
ROBERT
ANGLES D'AURIAC
BIAREZ J.
COUMES A.
DODU J.
DUCROS P.
GIDON P.
GLENAT R.
HACQUES G.
LANCIA R.
PEBAY-PEROUA J.
GASTINEL N.
LACAZE A.
GAGNAIRE D.
DEGRANGE D.
KLEIN J.
Mme KAHANE J.
RASSAT
DEPORTES C.
DEPOMMIER P.
POLOUJADOFF M.
BARRA J.
Mme BOUCHE L.
PERRIAUX J.
SARROT-REYNAUD
CAUQUIS G.
LABRE A.
BETHOUX P.
BONNET G.

MATHEMATIQUES
SERVOMECHANISMES
CHIMIE
ELECTROCHIMIE
PHYSIQUE
ELECTROTECHNIQUE
PHYSIQUE
MECANIQUE
CHIMIE PAPETIERE
MECANIQUE DES FLUIDES
MECANIQUE PHYSIQUE
ELECTRONIQUE
MECANIQUE DES FLUIDES
MINERALOGIE ET CRISTALLOGRAPHIE
GEOLOGIE ET MINERALOGIE
CHIMIE
CALCUL NUMERIQUE
PHYSIQUE AUTOMATIQUE
PHYSIQUE
MATHEMATIQUES APPLIQUEES
THERMODYNAMIQUE
CHIMIE PAPETIERE
ZOOLOGIE
MATHEMATIQUES
PHYSIQUE
CHIMIE SYSTEMATIQUE
CHIMIE
PHYSIQUE NUCLEAIRE
ELECTROTECHNIQUE
MATHEMATIQUES APPLIQUEES
MATHEMATIQUES
GEOLOGIE
GEOLOGIE
CHIMIE GENERALE
BOTANIQUE
MATHEMATIQUES APPLIQUEES
PHYSIQUE GENERALE

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance
à Monsieur le Professeur KUNTZMANN, Directeur du
Service de Mathématiques Appliquées de l'Uni-
versité de Grenoble,

pour la façon dont il m'a guidé tout au long de
cette étude, pour le temps qu'il m'a consacré et
les judicieux conseils qu'il m'a donnés,

à Monsieur le Professeur VAUQUOIS

à Monsieur PERRET, Maître de Conférences

qui ont bien voulu faire partie du jury.

Je tiens à exprimer mes vifs remerciements au
personnel du Laboratoire de Calcul, et notamment
à Messieurs AUROUX et BEVIER qui se sont occupés
de la programmation de deux problèmes booléens,
et à l'équipe de Logique Appliquée qui a facilité
mon travail.

I N T R O D U C T I O N

Le développement croissant des techniques digitales dans le domaine des machines à calculer et plus généralement dans le domaine de l'automatisme donne un intérêt à l'étude des fonctions booléennes et au traitement en machines de problèmes booléens .

Les machines à calculer actuelles sont assez mal adaptées à ce genre de problèmes , mais on peut penser que l'adaption se fera assez vite.

Nous présentons ici une méthode de représentation des fonctions booléennes permettant un traitement assez commode en machines . La forme minimale d'une fonction ne présente pas le caractère d'unicité ; la forme arborescente irréductible est unique bien que beaucoup moins lourde que la forme canonique .

Nous proposons ensuite quelques méthodes d'analyse de réseaux très généraux . La recherche des chemins permet en particulier le problème de chercher les transmittances d'un réseau de contacts .

Enfin nous étudions sommairement la technologie des cryotrons et proposons une méthode de synthèse automatique des circuits à cryotrons . Cette méthode consiste à déterminer la matrice des noeuds du réseau et à diminuer l'ordre de la matrice , c'est-à-dire le nombre de cryotrons nécessaires . On peut envisager d'autres minimisations.

FORME LEXICOGRAPHIQUE ET FORME ARBORESCENTE D'UNE FONCTION BOOLEENNE

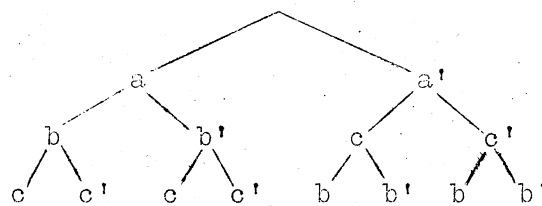
1 DEFINITION DES FORMES ARBORESCENTES ET LEXICOGRAPHIQUES :

a) Ordre arborescent : Soient n variables booléennes, nous écrivons chacun des 2^n monomes canoniques, en donnant aux variables un ordre satisfaisant aux conditions suivantes :

- tous les monomes ont la même première lettre accentuée ou non (l'accent signifie que la variable est complémentée).
- tous les monomes ayant en commun les mêmes p premières lettres, compte tenu de l'accentuation, ont en commun une même $p + 1^{\text{ème}}$ lettre, mais celle-ci peut être accentuée ou non.

Un tel ordre sera dit Ordre Arborescent.

Exemple :
ab'c'
ab'c
abc'
abc
a'c'b'
a'c'b
a'cb'
a'cb



Nous constatons que les conditions énoncées imposent un ordre se représentant aisément à l'aide d'un arbre, d'où le nom d'ordre arborescent.

b) Monome arborescent : C'est un monome formé des h premières lettres de l'un des monomes précédents.

Exemple : avec l'ordre arborescent précédent,
 ab'c, ab, a'c' sont des monomes arborescents
 c, b'c', a'b ne sont pas des monomes arborescents.

- c) Forme arborescente : c'est une somme de monomes arborescents.
- d) Forme lexicographique : c'est une forme arborescente particulière pour laquelle l'ordre des lettres est indépendant de l'accentuation.

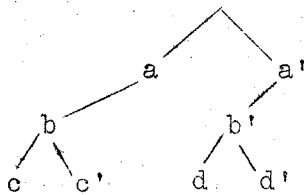
Exemple : ordre lexicographique a b c d
 a, ab, a'b'cd sont des monomes lexicographiques.
 bca'd n'est pas un monome lexicographique.

Nous développerons ici la théorie des formes arborescentes qui sont plus générales.

2 FORME ARBORESCENTE D'UNE FONCTION :

Toute fonction booléenne peut s'écrire sous forme arborescente. Partant d'une forme polynomiale quelconque, il suffit d'écrire les monomes selon l'ordre arborescent et de les développer si cela devient nécessaire.

Exemple : ac s'écrira abc + abc'
 ad s'écrira ab'd + abcd + abc'd



3 FORME ARBORESCENTE IRREDUCTIBLE :

Soient deux monomes arborescents m_1 et m_2 . Ils sont dans l'une des trois situations suivantes : $m_1 m_2 = 0$

$$m_1 \leq m_2$$

$$m_1 > m_2$$

Soit une forme arborescente $f = \sum_i m_i$; si deux monomes m_i et m_j sont tels que :

- $m_i \ll m_j$ nous pouvons supprimer m_i sans changer f .
- $\left. \begin{array}{l} m_i = md \\ m_j = md' \end{array} \right\}$ compte tenu de l'ordre, m étant un monome arborescent, nous pouvons remplacer $m_i + m_j$ par m , sans changer f .

Ces deux procédés de simplification ne peuvent pas être utilisés indéfiniment ; il existe donc une forme irréductible.

Par définition une forme arborescente est irréductible quand on ne peut plus lui appliquer aucune des deux règles de simplification.

Exemple : $f = abc'd + abc' + a'cb' + a'cb$ s'écrit sous forme arborescente irréductible $f = abc' + a'c$

THEOREME : Un ordre arborescent étant donné, toute fonction booléenne a une forme arborescente irréductible unique.

Nous ferons une démonstration par récurrence sur le nombre des variables.

Pour une variable, la forme arborescente irréductible est unique. (C'est a ou a' ou 0 ou 1).

Montrons que l'unicité pour p variables entraîne l'unicité pour $p + 1$ variables ; a étant la première lettre de l'ordre arborescent, la fonction f de $p + 1$ variables peut se décomposer en deux fonctions :

$$f = af_1 + a'f_2$$

f_1 et f_2 étant des fonctions écrites sous forme arborescente irréductible de p variables donc uniques (les ordres relatifs à f_1 et f_2 sont généralement différents). Donc f se présente bien de façon unique.

4 PROPRIETES DES FORMES ARBORESCENTES IRREDUCTIBLES :

- a) Une forme arborescente irréductible est une somme de monomes disjoints :

Si elle contenait deux monomes m_1 et m_2 non disjoints (c'est-à-dire dont le produit est $\neq 0$) ces monomes seraient tels que :

$m_1 = m_2$ puisque la forme est arborescente
ou $m_1 \ll m_2$
ou $m_1 > m_2$ et dans ce cas la forme ne serait pas irréductible.

- b) La somme de deux formes arborescentes irréductibles ou non, relatives à un même ordre arborescent est une forme arborescente relative au même ordre.

Cette propriété est évidente et ne nécessite aucune démonstration.

- c) Le produit de deux formes arborescentes irréductibles relatives à un même ordre arborescent est une forme arborescente irréductible relative au même ordre.

Soient deux monomes m_1 de la forme f_1 et m_2 de la forme f_2

deux cas sont à considérer :

1° cas : $m_1 m_2 = 0$

2° cas : $m_1 m_2 \neq 0$ mais alors nous avons $m_1 \ll m_2$ ou $m_1 > m_2$ et alors le monome produit est égal à l'un de ces deux monomes donc est arborescent.

Montrons par l'absurde que le produit est irréductible. Supposons que les monomes m_1 et n_1 de f_1 et les monomes m_2 et n_2 de f_2 donnent des produits $m_1 m_2$ et $n_1 n_2$ réductibles.

$m_1 m_2 \ll n_1 n_2$ impossible puisque m_1 et n_1 non comparables et disjoints entraînent $m_1 p$ et $n_1 q$ non comparables (sauf cas de nullité).

$m_1 m_2 = mu$ et $n_1 n_2 = mu'$, m étant un monome et u une lettre.

Nous avons alors $m_1 = mu$ ou $m_2 = mu$ et $n_1 = mu'$ ou $n_2 = mu'$.

Le cas $m_1 = mu$ et $n_1 = mu'$ est impossible puisque f_1 est irréductible.

Le cas $m_1 = mu$ et $n_2 = mu'$ est encore impossible car il nécessite en outre $m_2 \gg m$, et alors f_2 n'est plus irréductible.

d) Inégalités pour les formes arborescentes irréductibles : nous pouvons énoncer le théorème suivant :

THEOREME : Soient f et g deux formes arborescentes irréductibles relatives au même ordre arborescent et a la première lettre de l'ordre.

Si $f \leq g$ et $f = af_1 + a'f_2$ $g = ag_1 + a'g_2$
alors nous avons les inégalités suivantes

$$f_1 \leq g_1 \quad \text{et} \quad f_2 \leq g_2$$

démonstration : multiplions les deux membres de l'inégalité

$f \leq g$ par a , il vient $af_1 = af \leq ag = ag_1$ et pour $a = 1$ $f_1 \leq g_1$
même calcul pour f_2 et g_2 .

5 COMPLEMENT D'UNE FONCTION ECRITE SOUS FORME ARBORESCENTE :

Soient $f = m_i$ une forme arborescente. Voici un procédé systématique et simple permettant d'obtenir la fonction complément f' sous forme arborescente irréductible.

Nous considérons successivement chacun des monomes m_i de f ; si m_i contient p lettres, nous formerons les monomes $m_{i0}, m_{i1}, \dots, m_{i,p-1}$, obtenus en supprimant dans m_i 0, 1, 2, ..., $p-1$ lettres à partir de la fin, et en complétant la dernière lettre. Les monomes $m_{i,k}$ qui sont disjoints avec f ont pour somme f' .

Exemple : $f = ab'cd + ab'c' + a'cd + a'cd'$

$$\begin{array}{cccc} ab'cd' & ab'c' & a'cd' & a'cd \\ \hline ab'c' & ab & a'c' & a'c' \\ \hline ab & a' & a & a \\ \hline a' & & & \end{array}$$

$$f' = ab + ab'cd' + a'c'$$

Remarques : 1°) f' est obtenue sous forme irréductible.

2°) Si f est une forme arborescente irréductible de n variables, les monomes ayant effectivement n lettres donnent automatiquement par complémentation de la dernière variable des monomes de f' .

Démonstration : Nous ferons une démonstration par récurrence sur le nombre de variables,

pour une variable : $f = 0$ par convention $f' = 1$
 $f = 1$ " " " $f' = 0$
 $f = u$ le procédé donne bien $f' = u'$
 $f = u'$ " " " $f' = u$

Montrons que si la méthode est bonne pour les fonctions de p variables, elle l'est alors pour les fonctions de $p + 1$ variables.

Soit g une fonction de $p + 1$ variables ; trois cas sont à considérer :

1°) $g = af$

2°) $g = a'f$

3°) $g = af + a'h$

f et h étant des fonctions de p variables au plus.

1° cas : le procédé donne $g' = af' + a'$

2° cas : " " " $g' = a'f' + a$

3° cas : " " " $g' = af' + a'h'$

ceci démontre l'exactitude de la méthode.

6 FORME ARBORESCENTE IRREDUCTIBLE D'UNE FONCTION INCOMPLETE :

Dans la pratique se pose souvent le problème suivant :

Réaliser une fonction f telle que $f = 1$ dans certaines conditions
 $f = 0$ dans d'autres conditions
 $f =$ quelconques dans les autres cas

(ou, en langage mathématique, réaliser une fonction f telle que

$F \leq f \leq G$) et de coût minimum.

THEOREME : Parmi toutes les fonctions f comprises entre deux fonctions F et G , pour un ordre arborescent donné, il existe une fonction et une seule qui ait une forme irréductible minimale, c'est-à-dire ayant un nombre de monomes minimum et dans chaque monome un nombre de lettres minimum.

Cette fonction s'obtient à l'aide de l'algorithme simple suivant : nous partons de la fonction $f_0 = F + \phi.F'G$, (ϕ représentant la valeur indéterminée de la variable). Soient deux monomes de f_0 ne différant que par l'accentuation de la dernière lettre :

1° cas : md et md' , m étant un monome arborescent.

Nous les remplaçons par m .

2° cas : md et $\phi md'$ Nous les remplaçons par m .

3° cas : ϕmd et $\phi md'$ " " " " ϕm .

Si après avoir opéré de la sorte jusqu'à ce que ce ne soit plus possible, il reste des monomes ayant pour coefficient ϕ , nous les supprimons.

Exemple : $F = abcd + ab'dc$ $G = abc + ab'd + abc'd' + a'c'b'$
 $f_0 = abcd + \phi abcd' + ab'dc + \phi ab'dc' + \phi abc'd' + \phi a'c'b'$
 $= abc + ab'd + \phi abc'd' + \phi a'c'b' = abc + ab'd.$

Démonstration : Nous ferons une démonstration par récurrence sur le nombre des variables.

a) Nous vérifions que le théorème est vrai pour les fonctions de

une variable : $0 \leq f \leq x$ $f = 0$

$x \leq f \leq 1$ $f = 1$

$0 \leq f \leq 1$ $f = 0$

b) Montrons que si le théorème est vrai pour les fonctions de p

variables, il l'est alors pour les fonctions de $p + 1$ variables. Soit à réaliser la fonction f de $p + 1$ variables, comprise entre les fonctions F et G .

L'ordre arborescent étant imposé, a étant la première lettre de l'ordre, nous avons les inégalités suivantes :

$$F = aF_1 + a'F_2 \quad G = aG_1 + a'G_2 \quad F_1 \leq G_1 \quad F_2 \leq G_2$$

la condition $F \leq f \leq G$ entraîne en vertu de ce qui précède (paragraphe 4 d) :

$$f = af_1 + a'f_2 \quad F_1 \leq f_1 \leq G_1 \\ F_2 \leq f_2 \leq G_2$$

Si le procédé précédent ne donnait pas f sous forme arborescente irréductible minimale du point de vue nombre de monomes et nombre de lettres, l'une des fonctions f_1 ou f_2 au moins ne serait pas minimale, ce qui est contraire à l'hypothèse de la récurrence. Le théorème est donc démontré.

A. R.

7 RECHERCHE DE L'ORDRE ARBORESCENT LE MEILLEUR :

Il est difficile de trouver, pour une fonction donnée, l'ordre permettant d'obtenir la forme arborescente ou la forme lexicographique utilisant le moins de lettres.

En particulier, changer les 2 premières lettres de l'ordre ou les 2 dernières modifient le nombre de lettres nécessaires.

L'ordre inverse donne généralement un nombre de lettres également différent.

Cependant nous pouvons énoncer un théorème simple permettant de faciliter la recherche de l'ordre optimum.

THEOREME : Si une forme arborescente irréductible relative à un ordre arborescent O est telle que :

- a) tous les monomes ont au moins p lettres

b) les k premières de l'ordre sont les mêmes dans les différentes branches à une permutation près alors tout ordre O' ne différant du précédent que par l'ordre des h premières lettres avec $h = \text{minimum}(k, p - 1)$, aura pour forme arborescente irréductible représentant la même fonction, une forme utilisant le même nombre de lettres et se déduisant de la précédente uniquement par la modification de l'ordre des h premières lettres des monomes.

Exemple: Considérons la forme arborescente irréductible suivante :

$$f = ab' cdef + ab'c'd'e + acdbe'g$$

Les monomes ont au moins 5 lettres. Les 4 premières lettres sont les mêmes à une permutation près. Donc si on modifie l'ordre des 4 premières lettres on n'altère pas le coût en lettres de la forme arborescente irréductible.

Démonstration : Soit un monome arborescent de la première forme, il s'écrit :

$$m = a_1 a_2 \dots a_h m_1, \quad m_1 \text{ étant un monome d'au moins une lettre.}$$

Soit $(i_1 i_2 \dots i_h)$ une permutation des indices $1, 2, \dots, h$. Le monome m écrit sous la forme suivante est bien arborescent relativement au nouvel ordre :

$$m = a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_h} m_1$$

La forme obtenue est donc arborescente.

Il reste à montrer qu'elle est irréductible. Soit un autre monome de la seconde forme, il s'écrit :

$$n = a_{j_1} a_{j_2} \dots a_{j_h} n_1$$

avec

$$a_{j_1} = a_{i_1} \quad \text{ou} \quad a'_{i_1}$$

Il ne peut pas y avoir de réduction possible entre m et n ,
car cela entraînerait :

$$\begin{aligned} \text{soit} \quad & m \leq n \\ \text{soit} \quad & m = ux \quad \text{et} \quad n = ux', \quad u \text{ étant un monome.} \end{aligned}$$

et alors la première forme ne serait pas irréductible.

Ce théorème est surtout intéressant dans le cas particulier des formes lexicographiques, il s'énonce alors sous la forme suivante qui est beaucoup plus simple :

Corollaire : Pour une forme lexicographique dont les monomes ont tous au moins p lettres, si on modifie l'ordre des $p - 1$ premières lettres de l'ordre, la forme lexicographique irréductible relative à ce nouvel ordre se déduit de la précédente par la même modification de l'ordre des $p - 1$ premières lettres de chacun des monomes de la forme initiale. Les 2 formes utilisent donc le même nombre de lettres.

Ce corollaire résulte du théorème précédent comme cas particulier.

THEOREME : Si une fonction booléenne est telle que ses composants premiers ont tous soit la lettre a soit la lettre a' , alors pour chercher l'ordre arborescent le meilleur il suffit de chercher parmi les ordres dont la première variable est a .

Exemple : $f = abcd + ab'c'd + a'bc'd + a'b'cd' + a'b'c'd'e$

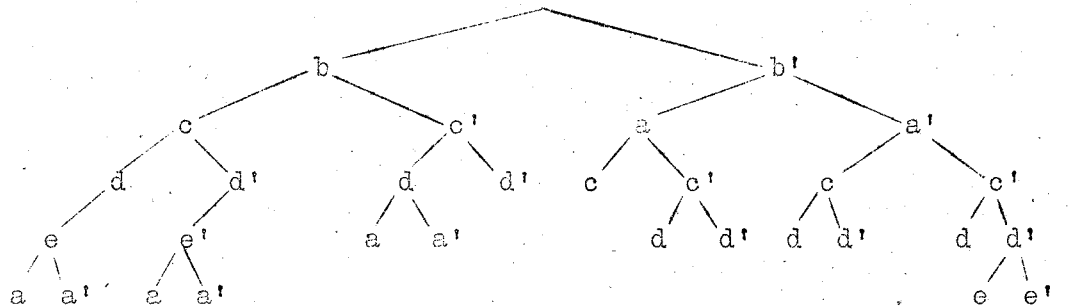
Par rapport à l'ordre 0 de la Fig.1. La fonction s'écrit :

$$f = bcde'a + bcdea + bc'da' + b'ac'd + b'a'cd' + b'a'c'd'e$$

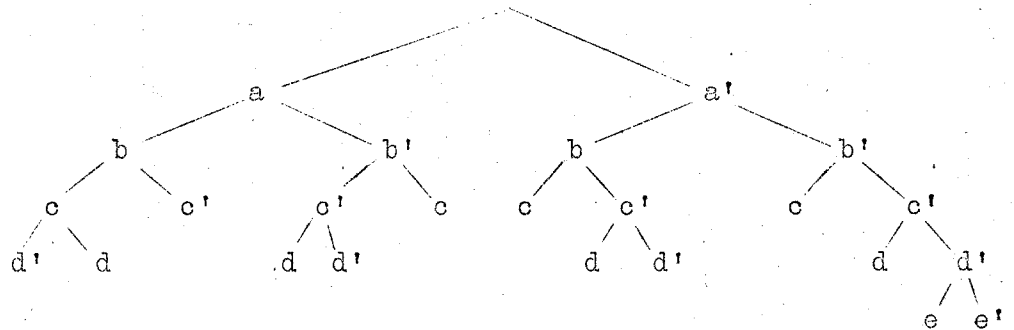
Par rapport à l'ordre 0 déduit du précédent par passage de la variable a en tête de l'ordre, la fonction s'écrit :

$$f = abcd + ab'c'd + a'bc'd + a'b'cd' + a'b'c'd'e$$

FIG. 1
Ordre 0



Ordre 0'



Démonstration : Montrons que à tout ordre 0 ne commençant pas par la lettre a, on peut faire correspondre un ordre 0' commençant par la lettre a et qui n'utilise pas plus de monomes et pas plus de lettres que l'ordre initial.

Tous les monomes permettant d'écrire f ont tous soit la lettre a, soit la lettre a' ; considérons l'ordre 0' déduit de l'ordre 0 par le simple fait que la variable a est passée en tête de l'ordre. Tous les monomes qui s'écrivaient $m_1 a m_2$, m_1 et m_2 étant des monomes, s'écrivent maintenant $a m_1 m_2$. Nous n'ajoutons ainsi aucun monome, nous n'ajoutons aucune lettre aux monomes précédents. Donc la nouvelle forme obtenue ne peut pas être plus "couteuse" que la précédente. Par contre il est même possible que de nouvelles simplifications apparaissent ainsi que le montre l'exemple ci-dessus. La démonstration est donc achevée.

8 GAIN PAR RAPPORT A LA FORME CANONIQUE

Nous avons étudié en "Machine" les 402 types de fonctions booléennes de 4 variables. Le nombre de lettres nécessaires à la représentation de ces fonctions était de :

- 12876 dans le cas où les fonctions étaient représentées par leur forme canonique,
- 9806 dans le cas où on choisissait la forme lexicographique avec l'ordre le plus défavorable pour chaque fonction.
- 6508 dans le cas où on choisissait l'ordre le mieux adapté pour chaque fonction.

Les proportions ne varient pratiquement pas si on pondère le nombre de lettres nécessaires pour chaque fonction d'un coefficient proportionnel à la fréquence relative de cette fonction.

Le gain de lettres est donc de 23 % à 49 %.

Le gain de monomes n'a pas été calculé, mais il n'est pas négligeable, bien que moins important.

Dans la pratique, il est assez facile de trouver l'ordre le plus économique pour chaque fonction, bien qu'il n'y ait pas de règle précise à ce sujet.

CHEMINS DANS UN RESEAU D'ETOILES PARTIELLEMENT ORIENTEES

1 RAPPEL :

Nous nous occuperons ici de réseaux d'étoiles, c'est-à-dire de réseaux très généraux. (Ref. 1).

Une extrémité orientée vers l'étoile a pour coefficient 0
c'est une entrée

Une extrémité " " un noeud a pour coefficient 1
c'est une sortie

Une extrémité indifférente a pour coefficient ϕ

La donnée d'une extrémité comporte le coefficient et la lettre représentant le "nom" de l'extrémité.

Nous supposerons que toutes les extrémités des réseaux ont des noms distincts. Comme il y a dualité entre les étoiles et les noeuds, nous ne chercherons ici que les chemins allant d'un noeud à un autre noeud et les chemins allant d'un noeud à une étoile.

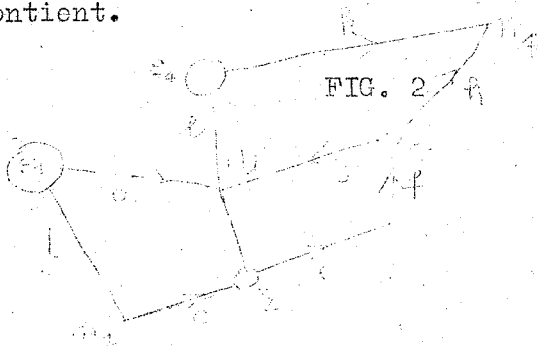
2 DEFINITION D'UN CHEMIN :

- a) Deux extrémités d'étoiles sont n-connexes si elles ont un noeud commun et aucune étoile en commun.
- b) Deux extrémités sont e-connexes si elles appartiennent à la même étoile et n'ont pas de noeud commun.
- c) Deux extrémités sont connexes si elles sont n-connexes ou e-connexes.
- d) Un CHEMIN allant d'un noeud n_0 à un noeud n_j ou à une étoile e_j est une suite de n extrémités x_1, x_2, \dots, x_n satisfaisant aux conditions suivantes :
 - 1°) x_1 est relié au noeud n_0
 - 2°) x_{2p+1} n'est pas une sortie

- 3°) x_{2p+2} n'est pas une entrée
- 4°) x_{2p} et x_{2p+1} sont n-connexes
- 5°) x_{2p+1} et x_{2p+2} sont e-connexes
- 6°) la dernière extrémité x_n est reliée au noeud n_j ou à l'étoile e_j

- e) un chemin est simple par rapport aux extrémités si toutes les extrémités qu'il contient sont distinctes.
- f) un chemin est simple par rapport aux noeuds (ou par rapport aux étoiles) si tous les noeuds (ou étoiles) traversés sont distincts sauf dans le cas d'un chemin allant d'un noeud à un autre noeud et dans lequel le premier noeud est le même que le dernier ; dans ce cas on dit que le chemin est fermé.
- g) un chemin est simple s'il est simple par rapport aux extrémités noeuds et étoiles.
- h) la longueur d'un chemin est le nombre d'extrémités qu'il contient.

Exemple :



- (p,b) (1,a) (o,d) (1,e) est un chemin simple.
- (p,b) (1,a) (o,d) (1,e) (o,f) (1,g) est un chemin simple par rapport aux extrémités et aux étoiles
- (od) (1e) (of) (1g) est un chemin simple fermé.

Remarque :

La condition "simple par rapport aux étoiles" disparaît quand on s'intéresse aux réseaux de branches.

3 RECHERCHE DES CHEMINS PAR LA METHODE DU DICTIONNAIRE :

Rangeons les étoiles selon un certain ordre que nous nommerons ordre alphabétique étoiles, les noeuds selon un ordre alphabétique noeuds et les extrémités selon un ordre alphabétique extrémités.

Nous ferons deux listes. La première liste comportera tous les noeuds en respectant leur ordre et indiquera pour chaque noeud les extrémités qui quittent ce noeud et les étoiles qui sont atteintes. Dans le cas où plusieurs extrémités partent du même noeud, nous tiendrons compte de l'ordre des extrémités. La seconde liste sera la liste duale : elle indique pour chaque étoile, les extrémités qui partent de cette étoile et les noeuds d'arrivée.

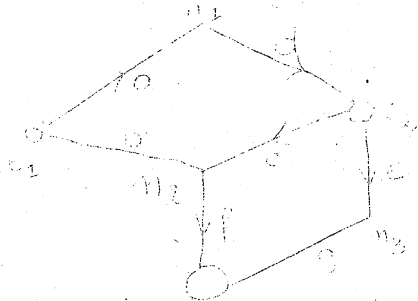
Partant de la première liste nous considérerons successivement tous les noeuds en respectant leur ordre. Soit le noeud n_p , nous choisirons la première extrémité qui quitte ce noeud, elle arrive en une étoile e_h . Nous choisirons l'extrémité qui quitte cette étoile et atteint un autre noeud. etc. A chaque étape nous supprimons l'extrémité utilisée, voire le noeud, voire l'étoile selon le degré de simplicité cherché.

Quand il n'y a plus moyen de continuer, nous cherchons alors à remplacer la dernière extrémité trouvée par une autre et reprenons la même méthode ; si ce n'est toujours pas possible, nous supprimons encore une extrémité, etc. Enfin nous passons au noeud suivant.

Remarque : Dans la pratique, nous ne nous occuperons que des chemins simples et des chemins simples par rapport aux extrémités.

Exemple : Cherchons les chemins simples du réseau suivant :

FIG. 3



	n_1		e_1		a
noeuds	n_2	étoiles	e_2	extrémités	b
	n_3		e_3		c
					d
					e
					f
					g

1ère liste :

$n_1 \rightarrow d \rightarrow e_2$
 $n_2 \rightarrow b \rightarrow e_1$
 $\quad \quad \quad f \rightarrow e_3$
 $n_3 \quad g \quad e_3$

2ème liste :

$e_1 \rightarrow a \rightarrow n_1$
 $\quad \quad \quad b \rightarrow n_2$
 $e_2 \rightarrow c \rightarrow n_2$
 $\quad \quad \quad e \rightarrow n_3$
 $e_3 \rightarrow g \rightarrow n_3$

Chemins partant de n_1 :

d
d c
d c b
d c b a on ne peut plus continuer
car on revient en d
d c f
d c f g
d e
d e g

Chemins partant de n_2 :

b
b a
b a d
b a d c on ne peut plus continuer
car badcb donc badcf n'est
pas simple
b a d e
b a d e g

Chemins partant de n_3 :

g

4 RECHERCHE DES CHEMINS PAR LA METHODE DES DETERMINANTS :

Les déterminants booléens ont déjà été étudiés et leur application aux réseaux de contacts a déjà été envisagée (Réf. 3). Nous pouvons généraliser cette méthode et l'appliquer à la recherche des chemins dans les réseaux d'étoiles.

Rappels : Les éléments a_{ij} de la matrice des noeuds, pour $i \neq j$, représente la somme des monomes de deux lettres correspondant aux chemins de longueur 2 reliant le noeud n_i au noeud n_j . Les éléments diagonaux de cette matrice sont nuls.

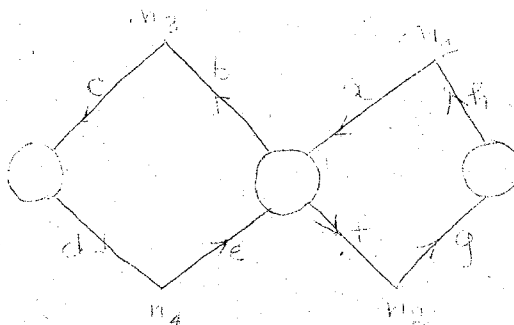
Notation : En toute rigueur il y a lieu de distinguer le chemin et le monome (suite des lettres représentant les extrémités du chemin) représentant le chemin. Afin de faciliter la rédaction, nous appellerons chemin la suite de lettres qui le représente.

THEOREME : Le mineur D_{ji} du déterminant de la matrice $(N + I)$ est égal à la somme des chemins allant du noeud n_i au noeud n_j .

Exemple : Soit le réseau suivant (FIG. 4). Sa matrice des noeuds est :

$$(N + I) = \begin{vmatrix} 1 & af & ab & 0 \\ gh & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & cd \\ 0 & ef & eb & 1 \end{vmatrix} \quad D_{32} = gh.ab = ghab$$

FIG. 4



Démonstration : Nous vérifions que la propriété est vraie pour les matrices des noeuds d'ordre 3. Nous ferons donc un raisonnement par récurrence sur l'ordre de la matrice.

Montrons que si le théorème est vrai pour les matrices d'ordre $n = p$, il est alors vrai pour les matrices d'ordre $n = p + 1$. Développons le mineur D_{ji} de la matrice $(N + I)$ d'ordre $p + 1$ selon la ligne i :

$$D_{ji} = \sum_h a_{ih} D_{ji,ih}$$

Soit $(N' + I)$ la matrice déduite de $(N + I)$ par suppression de la ligne i et de la colonne i , cette matrice est d'ordre p , et ses éléments diagonaux sont tous égaux à 1. Elle satisfait donc à l'hypothèse de la récurrence et $D_{ji,ih}$ est le mineur de $(N' + I)$ relatif à la ligne j et la colonne h . Donc $D_{ji,ih}$ est la somme des chemins allant du noeud n_h au noeud n_j sans passer par le noeud n_i puisqu'il n'existe pas dans N' et D_{ji} est bien égal à la somme des chemins allant de n_i à n_j . Le théorème est ainsi démontré.

THEOREME : La somme des chemins fermés et produits de chemins fermés disjoints d'un réseau est donné par les termes du déterminant de la matrice $(N + I) - 1$. Rappelons que deux chemins sont disjoints s'ils n'ont aucune extrémité en commun.

Exemple : reprenons le réseau de la FIG. 4. Nous avons bien :

$$\det (N + I) - 1 = afgh + afghebcd + ebcd + abghefcd$$

Démonstration : Nous ferons encore une démonstration par récurrence sur l'ordre n de la matrice.

Pour $n = 2$

$$\begin{vmatrix} 1 & a_{12} \\ a_{21} & 1 \end{vmatrix} = 1 + a_{12} a_{21}$$

Le théorème étant vrai pour $n = 2$, montrons que s'il est vrai pour $n = p$, il est alors vrai pour $n = p + 1$. Développons par rapport à la première ligne le déterminant de la matrice $(N + I)$ d'ordre $p + 1$.

$$\det (N + I) = a_{11} D_{11} + a_{1j} D_{1j}$$

Or en vertu du théorème précédent, D_{1j} représente la somme des chemins allant de n_j à n_1 . Donc $a_{1j} D_{1j}$ est un chemin fermé passant par le noeud n_1 .

D_{11} est le déterminant de la matrice déduite de $(N + I)$ par suppression de la première ligne et de la première colonne, donc en vertu de l'hypothèse de la récurrence, D_{11} est égal à la somme des chemins fermés et produits fermés disjoints ne passant pas par le noeud n_1 . Nous constatons que nous avons seulement des chemins fermés ou des produits de chemins fermés disjoints et que aucun chemin n'est utilisé 2 fois. La démonstration est donc achevée.

Remarque : Il existe une méthode assez commode pour le calcul à la main, qui permet de n'obtenir que les chemins fermés et d'éliminer les produits de chemins fermés. Pour cela nous développons le déterminant de façon assez particulière : prenons un élément a_{1h} avec $h \neq 1$ de la première ligne. Nous supprimons la colonne h et la première ligne ; puis nous choisissons un élément a_{hk} avec $k \neq 1$, supprimons la ligne h et la colonne k puis choisissons un élément a_{kl} satisfaisant aux mêmes conditions, etc. Finalement nous devons prendre l'élément de la première colonne et de la ligne non encore utilisée. Ainsi nous avons obtenu un

chemin fermé simple par rapport aux extrémités de longueur $2n$ et passant par tous les noeuds.

Nous pouvons obtenir les chemins fermés de longueur inférieure en prenant au départ des éléments diagonaux et en supprimant les lignes et colonnes correspondantes.

Exemple :

1	ab	0	0					
0	1	cd	0		a_{12}	a_{23}	a_{34}	a_{41}
0	eb	1	ef					
gh	0	0	1		ab	cd	ef	gh

Nous obtenons ab cd ef gh.

Remarque 2 : Il existe une autre méthode d'un maniement plus facile. Elle consiste à chercher tous les chemins puis à éliminer les chemins qui ne sont pas simples. Elle s'applique aux chemins fermés ou non.

Cette méthode consiste à éliminer par simplification les monomes qui sont multiples d'autres monomes déjà obtenus en utilisant la même règle qu'en Algèbre de Boole.

Exemple : $ab + abcd = ab$

5 METHODE MATRICIELLE :

Plusieurs auteurs, et notamment Hohn (Réf. 2-3) ont signalé les propriétés des puissances successives de la matrice $(N + I)$ à propos des réseaux de contacts. Nous proposons ici une méthode différente mais un peu plus puissante et qui s'applique également aux réseaux d'étoiles.

Définition : Nous désignerons par N_{2p} la matrice dont les éléments satisfont aux 2 conditions suivantes :

- les éléments diagonaux sont nuls
- les éléments non diagonaux a_{ij} sont égaux à la somme des monomes correspondant aux chemins simples par rapport aux extrémités de longueur $2p$ allant du noeud

i au noeud j.

Nous désignerons par B_{2p} la matrice dont les éléments non diagonaux sont nuls et dont les éléments diagonaux b_{ii} sont égaux à la somme des monomes fermés correspondant aux chemins fermés de longueur $2p$ allant du noeud i au noeud j.

Remarque : Du point de vue pratique, B_{2p} pourrait être représentée par un vecteur.

Recherche des chemins simples, calcul de N_{2p} : étant données les hypothèses de définition des réseaux d'étoiles, nous savons déjà que $N_2 = N$ et que $B_2 = 0$

THEOREME : Nous avons la relation suivante :

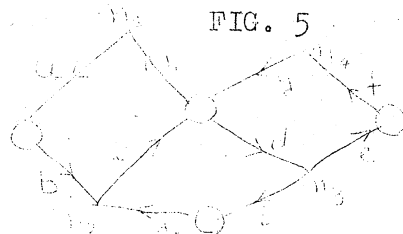
$$B_{2(p+1)} + N_{2(p+1)} = N_{2p} \cdot N \circ N \cdot N_{2p}$$

Rappel : pour 2 matrices à éléments Booléens A et B avec $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$, l'opération \circ fait correspondre une matrice C définie par $C = A \cdot B$ avec $c_{ij} = a_{ij} \cdot b_{ij}$

Cette définition est valable pour des matrices plus générales.

Exemple : Le réseau de la Fig. 5 a pour matrice des noeuds :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & ab & 0 & 0 \\ ch & 0 & cd & 0 \\ 0 & ij & 0 & ef \\ gh & 0 & gd & 0 \end{pmatrix}$$



Calculons les matrices N_4 et $N_4 \cdot N$ et $N \cdot N_4$:

abch	0	abcd	0	= N_4
0	chab + cdij	0	cdef	
ijch + efgh	0	ijcd + efgd	0	
0	ghab + gdi j	0	gdef	

0	0	0	abcdef	= $N \cdot N_4$
cdijch + cdefgh	0	chabcd	0	
0	efghab + efgdij	0	ijcdef	
gdijch + gdefgh	0	ghabcd	0	

0	abcdij	0	abcdef	= $N_4 \cdot N$
cdefgh	0	cdefgd	0	
0	ijchab + efghab	0	0	
ghabch + gdijch	0	ghabcd + gdijcd	0	

0	0	0	abcdef	= N_6
cdefgh	0	0	0	
0	efghab	0	0	
gdijch	0	ghabcd	0	

Démonstration : Posons $P = N_{2p} N$ et $Q = N N_{2p}$.

Soient n_{ij} les éléments de N .

En vertu de la définition du produit matriciel, nous avons les relations suivantes :

$$p_{ij} = (n_{ih_1} \quad n_{h_1 h_2} \quad \dots \quad n_{h_{p-1} h_p}) \quad n_{h_p j}$$

$$\text{avec : } \begin{aligned} h_k &= i \\ h_k &= h_{k'} & 1 \\ h_p &= j \end{aligned}$$

$$q_{ij} = n_{ih_1} (n_{h_1 h_2} \quad n_{h_2 h_3} \quad \dots \quad n_{h_p j})$$

$$\text{avec : } \begin{aligned} h_k &= j \\ h_k &= h_{k'} & 2 \\ h_1 &= i \end{aligned}$$

Les conditions 1 ou 2 ne sont pas suffisantes pour que le chemin correspondant soit simple par rapport aux extrémités. Mais en réunissant 1 et 2, nous obtenons les conditions 3 et nous allons montrer qu'elles sont suffisantes.

$$\begin{aligned} h_k &= i \\ h_k &= j & 3 \\ h_k &= h_{k'} \end{aligned}$$

Si les conditions 3 n'étaient pas suffisantes, il pourrait y avoir un chemin non simple, c'est-à-dire utilisant au moins 2 fois une même extrémité. D'après les conditions 1, la lettre utilisée 2 fois devrait se trouver une fois et une seule dans la grande parenthèse de p_{ij} et une fois dans $a_{h_p j}$. D'après les conditions 2, la lettre utilisée 2 fois devrait se trouver

une fois et une seule dans la grande parenthèse de a_{ij} et une fois dans n_{ih_1} . Par conséquent le monome $a_{ih_1} a_{h_1 h_2} \dots a_{h_{p-1} h_p}$

La démonstration est donc achevée.

Remarque : Il n'est pas nécessaire de calculer les éléments diagonaux de $N_{2p} N_{2p}$ car ils sont égaux aux éléments diagonaux de $N_{2p} N$, les conditions 3 étant automatiquement satisfaites pour les éléments diagonaux.

6 CAS DE SIMPLIFICATION :

Dans de nombreux cas les méthodes générales se simplifient. Nous allons rapidement passer en revue les principaux cas de simplification.

a) Le réseau est non orienté : c'est-à-dire que toutes les extrémités sont indifférentes. Tout chemin qui conduit de n_i à n_j , conduit de n_j à n_i à condition d'utiliser les extrémités dans l'ordre inverse.

Il n'y a donc pas lieu d'étudier tous les cas possibles. La matrice des noeuds du réseau est symétrique. En particulier la méthode matricielle se simplifie, la formule du paragraphe précédent devient :

$$B_{2(p+1)} + N_{2(p+1)} = (N_{2p} \cdot N) (N_{2p} \cdot N)^T$$

(A^T est la transposée de A).

b) Le réseau est un réseau de branches : c'est-à-dire que les étoiles utilisées ont seulement deux extrémités. Comme nous l'avons déjà remarqué, la condition de simplicité par rapport aux étoiles se confond avec la condition de simplicité par rapport aux extrémités.

La méthode du dictionnaire se simplifie : il suffit de faire une seule liste comportant pour chaque noeud la liste des "paires d'extrémités" partant de ce noeud et les noeuds d'arrivée.

- c) Le réseau est un réseau de contacts : ce cas particulier est tellement important que nous l'étudierons dans le paragraphe suivant.

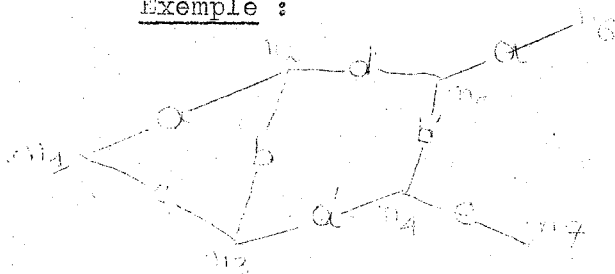
7 RECHERCHE DES TRANSMITTANCES DANS UN RESEAU DE CONTACTS :

Donnons d'abord quelques définitions particulières à ces réseaux.

Définition : Le degré d'un chemin est le nombre de variables booléennes qui apparaissent à la fois sous forme normale et sous forme complément dans l'expression du chemin.

Dans la pratique on ne s'intéresse guère qu'aux chemins de degré 0 et sauf précision, il s'agira toujours des chemins de degré 0.

Exemple :



a d b'	degré 0
a b a' e	degré 1
a b a' b' a	" 2

La transmittance entre deux noeuds n_i et n_j d'un réseau de contacts est la fonction booléenne égale à la somme des monômes booléens obtenus en remplaçant dans la somme des chemins allant de n_i à n_j les noms des extrémités par les noms des contacts. On dit parfois aussi fonction de commutation.

Exemple : Dans le réseau précédent la transmittance entre n_1
et n_5 et

$$F_{15} = ad + c a' b'$$

Pour rechercher les transmittances, il suffit de connaître les chemins de degré 0.

Remarque : Quand on ne s'intéresse qu'aux transmittances, il faut pouvoir avoir tous les chemins partant d'un noeud et arrivant à un noeud bien défini. La méthode du dictionnaire semble alors moins commode que celle des déterminants ou encore que la méthode matricielle.

Enfin dans ce cas il y a une variante de la méthode exposée qui consiste à calculer les puissances successives de la matrice $(N + I)$.

Pour la seule recherche des transmittances on peut donner aux extrémités des noms qui seront le nom des variables booléennes des contacts et il n'est pas nécessaire que toutes les extrémités aient des noms différents puisque nous avons la relation $a.a' = 0$.

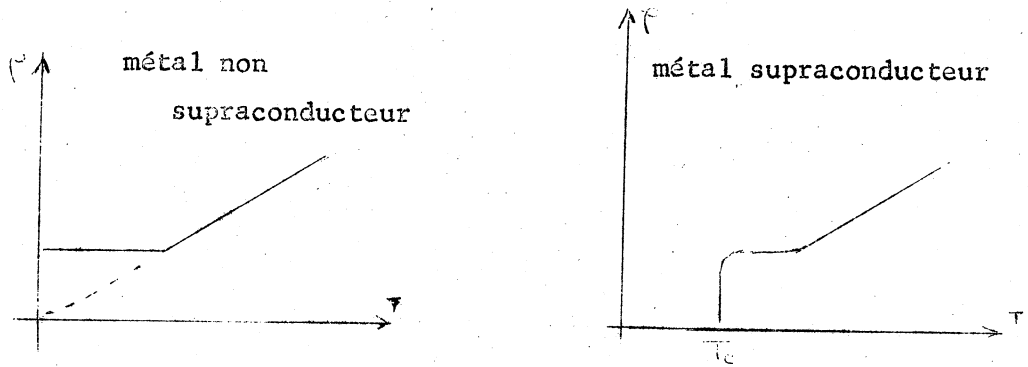
CHAPITRE III

RESEAU DE CRYOTRONS

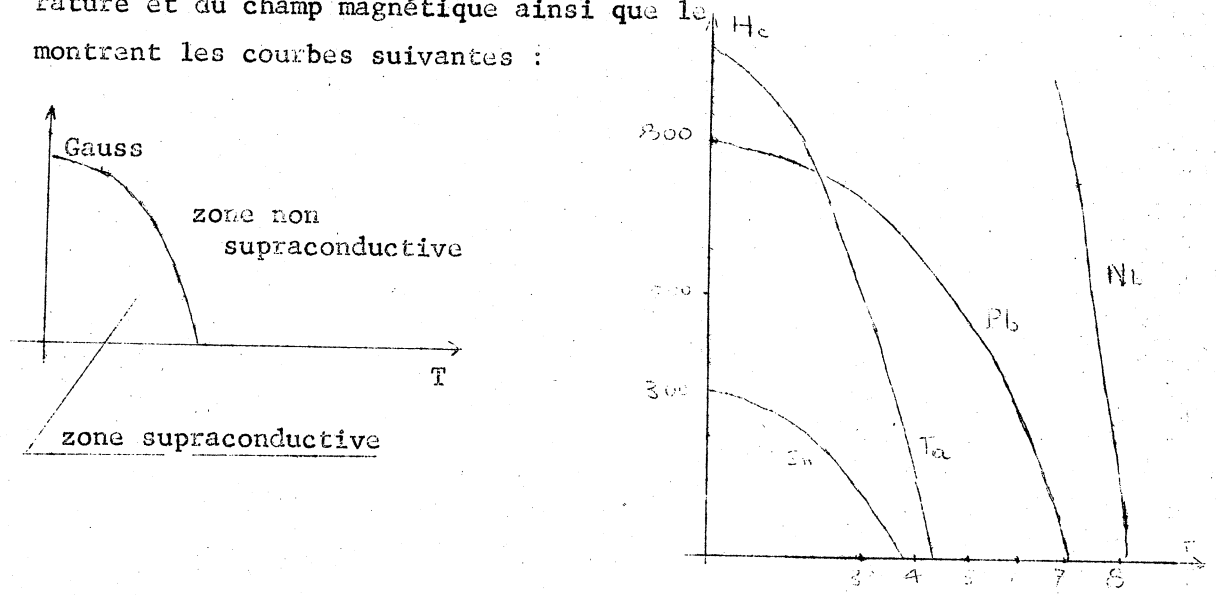
La technologie de circuits intégrés à cryotrons est très particulière. Nous allons étudier rapidement les contraintes qu'elle impose au logicien. Dans le chapitre suivant nous proposerons une méthode de synthèse de tels circuits .

I - PRINCIPE PHYSIQUE DU CRYOTRON -

Certains métaux deviennent supraconducteurs aux très basses températures . Ils se distinguent des autres métaux par des courbes de résistivité différentes



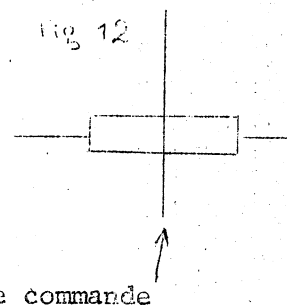
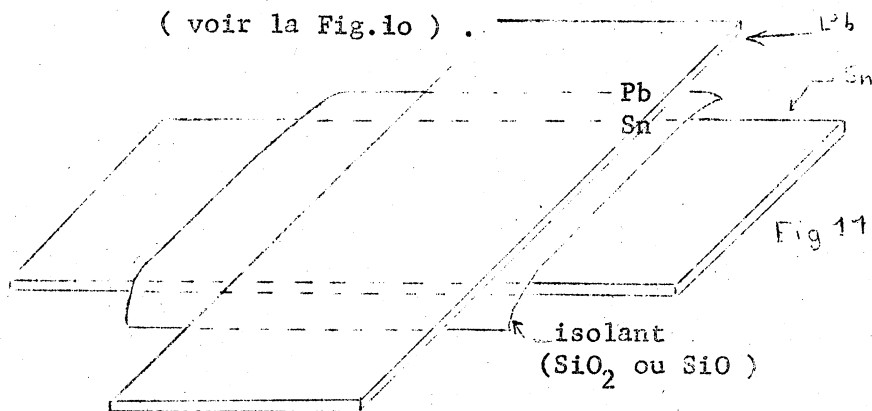
Mais cette supraconductibilité peut disparaître si on applique un champ magnétique convenable . La zone de supraconductibilité dépend de la température et du champ magnétique ainsi que les montrent les courbes suivantes :



Le champ magnétique peut être produit soit par un courant extérieur, c'est-à-dire parcourant un autre conducteur, soit par un courant parcourant le conducteur observé ; dans ce cas, le courant critique est le courant qui rend le conducteur résistant en donnant dans le conducteur un champ magnétique juste suffisant pour cela.

Soient deux conducteurs d'épaisseur très faible (quelques microns) se trouvant dans deux plans parallèles très voisins, mais sans qu'il y ait contact. Ils sont séparés par une mince couche d'isolant (Fig 11). Le premier conducteur est par exemple en plomb et le second en étain. Supposons que la température soit constante et fixée aux environs de 3°K; si le courant qui parcourt le conducteur en plomb est convenable, il provoquera dans le conducteur en étain un champ magnétique suffisant pour rendre ce dernier localement résistant.

Par contre le phénomène n'est pas possible en sens inverse car la zone de supraconductivité du plomb est beaucoup plus grande que celle de l'étain (voir la Fig. 10).



Le conducteur en plomb sera appelé " fil de commande ". Il représente une variable booléenne dont les valeurs sont 0 ou 1 : 0 quand il est parcouru par un courant et 1 quand aucun courant ne le parcourt. Par convention, nous représenterons l'ensemble des deux conducteurs par le schéma simplifié de la figure 12.

Nous pouvons donc considérer qu'un cryotron est un contact dont l'excitation est le fil de commande.

Enfin remarquons qu'il y a lieu d'éviter au maximum les dégagements de chaleur notamment par effet Joule car l'hélium liquide est mauvais conducteur de la chaleur à 3°K. Quand il se produit un dégagement de chaleur par effet Joule ou à cause de $1/2 L I^2$ lors de la coupure ou à l'établissement d'un courant, ce dégagement est concentré au cryotron qui devient

résistant. Nous reviendrons à ce problème à propos de la minimisation .

2 - REALISATION TECHNOLOGIQUE -

Les conducteurs seront réalisés par dépôt sous vide : le matériau à déposer est en fusion au dessus d'une plaque de verre partiellement protégée par un cache .

Cette technique permet d'obtenir des conducteurs d'épaisseur suffisamment petite et surtout suffisamment proche l'un de l'autre pour qu'un courant éventuel parcourant le fil de commande ait une influence suffisante sur le conducteur en étain lors d'un croisement (bon couplage magnétique)

Il y a lieu de fabriquer au préalable tous les caches nécessaires à la réalisation du schéma , ce qui n'est pas très commode ; les caches sont faits dans une plaque de métal très mince dans laquelle on trace des fentes . Les caches sont donc très fragiles et on est conduit à fabriquer un nombre de caches supérieur au nombre de caches théorique à cause des contraintes qu'imposent leur fabrication .

Par contre , lorsque les caches sont faits , il est assez facile de réaliser de nombreuses plaques contenant chacune un très grand nombre de cryotrons .

Enfin remarquons que le nombre de dépôts possibles sur une même plaque est certainement limité .

3 - PASSAGE DU RESEAU DE CRYOTRONS AU RESEAU DE CONTACTS -

D'après ce qui précède nous pouvons faire le schéma théorique suivant :

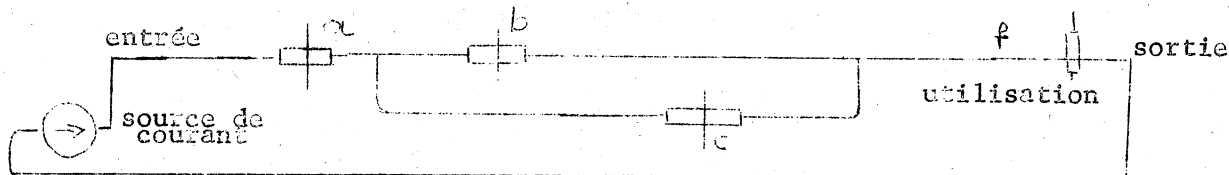


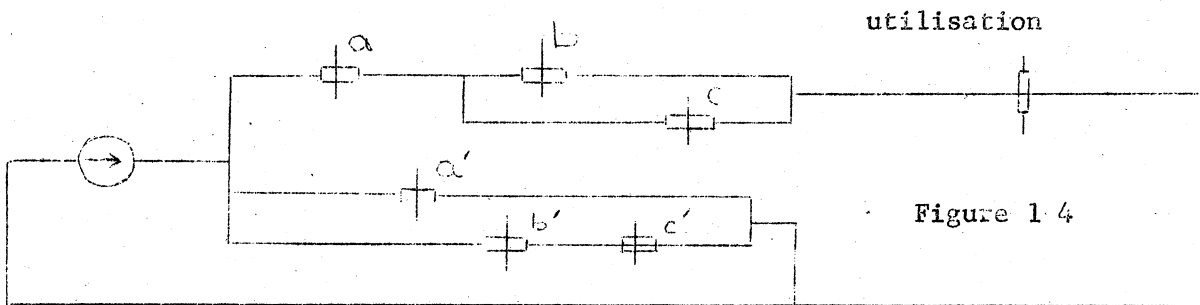
Figure 13

Prenons la convention suivante : la variable d'un conducteur de commande est égale à 1 si aucun courant ne parcourt le fil de commande et égale à 0 si ce dernier est parcouru par un courant qui rend l'étain résistant . La fonction ainsi réalisée pourrait être :

$$f = a (b + c)$$

sous réserve que le schéma soit correct du point de vue technologique .

Ici $f = 1$ quand un chemin allant de l'entrée vers la sortie est supraconducteur. Mais lorsque $f = 0$, les chemins allant de l'entrée vers la sortie ne sont plus supraconducteurs. Il faut cependant que la source de courant puisse débiter le même courant sans dégagement de chaleur. Nous sommes alors dans l'obligation de faire un circuit plus compliqué et qui comportera au moins un chemin supraconducteur lorsque $f=0$. Nous aurons donc le schéma suivant :



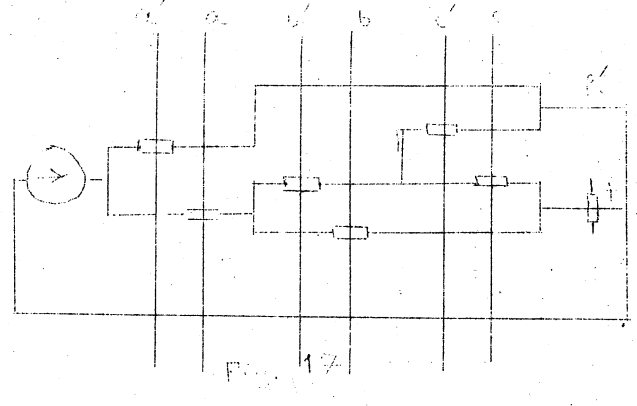
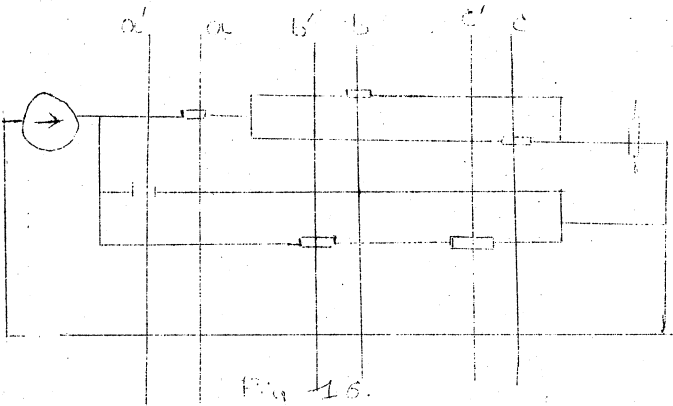
Il y a lieu d'éviter le croisement de fils de commande pour la raison technologique suivante : s'ils se croisaient, il faudrait éviter le risque de " couplage magnétique " et par conséquent prévoir une épaisseur d'isolant supérieure donc une augmentation probable du nombre de caches et une complication dans la réalisation du dépôt sous vide. Du point de vue logique, le gain possible de cryotrons serait annulé par l'augmentation d'encombrement résultant de ces croisements, ainsi que le montre la figure 15.



Figure 1 5

Nous remarquons que nous avons besoin à la fois d'une variable et de son complément (puisque nous faisons f et f'). Comme les variables seront utilisées pour la synthèse de plusieurs fonctions, il sera commode d'utiliser des conducteurs de commande parallèles et d'adopter pour les variables un ordre identique pour toutes les fonc-

tions d'une même plaque . Nous aurons alors le schéma suivant :



Ces deux derniers schémas sont valables du point de vue physique , technologique et logique . Cependant nous constatons que le schéma 17 est moins encombrant que le 16. Sur cet exemple , nous constatons que cela est dû au fait que tous les cryotrons ont été utilisées par paire , l'une représentant la variable et l'autre son complément . Par conséquent nous pouvons considérer que les réseaux de cryotrons sont des réseaux de contacts particuliers en ce sens que tout ce qui était possible avec des contacts ne l'est pas avec des cryotrons . Nous allons donc faire la liste des contraintes supplémentaires .

IV - LISTE DES CONTRAINTES -

Nous pouvons considérer que tout réseau de contact satisfaisant aux 5. conditions suivantes correspond à un réseau de cryotrons correct :

- a) Les réseaux ont une entrée et plusieurs sorties .
- b) Les transmittances F_i entre l'entrée et les sorties sont disjointes , c'est-à-dire que $F_i F_j = 0$. Ceci est dû au fait que qu'il est très difficile de " diviser " un courant dans un milieu supraconducteur .
- c) La somme des transmittances entre l'entrée et les sorties est égale à 1 . En effet il doit y avoir au moins un chemin supraconducteur afin que le courant puisse circuler sans effet Joule .
- d) Il est souhaitable qu'il n'y ait pas de boucles suscep-

tibles de devenir supraconductrices , c'est-à-dire que toutes les transmittances doivent être des fonctions disjointes .

e) Il ne doit pas y avoir de chemins passant par deux contacts représentant la même variable . Cette dernière condition est due au fait que nous désirons que les fils de commande restent parallèles .

V - PROBLEME DE MINIMISATION -

D'une manière générale , le problème de " minimisation " de circuit est :

- de diminuer le plus possible le prix de revient du circuit
- de diminuer le coût d'exploitation du circuit par exemple en augmentant la vitesse de fonctionnement .

Ces deux aspects sont souvent contradictoires . La minimisation du prix de revient consistait surtout avec une technologie nonintégrée -relais , transistors , diodes - à minimiser le nombre d'éléments technologiques, c'est-à-dire les relais , transistors , diodes ,etc...

Avec une technologie intégrée type cryotrons , le problème est différent . En effet la méthode de dépôt sous vide permet de réaliser en une seule fois un grand nombre de cryotrons sur une même plaque . Le coût d'une plaque avec les dépôts est très faible devant le prix des caches nécessaires à sa fabrication . Le problème se pose donc de la façon suivante : réaliser des circuits ayant le moins d'encombrement possible de façon à diminuer le nombre de plaques à relier ensemble (les soudures supraconductrices sont difficiles à réaliser) nécessitant le moins de caches possible et enfin ayant le moins de self possible , la chaleur dégagée à l'établissement ou à la coupure d'un courant étant concentrée au cryotron devenu résistant , il faut un " temps de récupération " pour que la température redevienne "normale" . On peut donc penser que la self risque de limiter la fréquence de fonctionnement . Ceci est difficile à préciser de façon définitive car nous manquons actuellement d'expérience . Nous proposons une méthode de synthèse qui tend à minimiser le nombre de cryotrons .

C H A P I T R E IV

D E T E R M I N A N T S A R B O R E S C E N T S

1 DEFINITION :

Un déterminant à éléments booléens est arborescent s'il satisfait aux propriétés suivantes :

- a) Les éléments diagonaux sont égaux à 1 .
- b) Le déterminant est symétrique.
- c) Les éléments n'ont qu'une seule lettre accentuée ou non, ou ils sont égaux à 0.
- d) Dans la partie située au dessus de la diagonale principale, chaque ligne comporte au plus deux éléments non nuls a_{ij} et a_{ih} et, s'il y a effectivement deux éléments non nuls, l'un est le complément de l'autre.

Exemple 1 :

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a' & & & \\ a & 1 & b & b' & & \\ a' & b & 1 & c & & c' \\ & b' & c & 1 & d & \\ & & & d & 1 & f' \\ & & & & f' & 1 \end{pmatrix}$$

Exemple 2 :

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a' & & & \\ a & 1 & & b & b' & \\ a' & & 1 & b' & b & \\ & b & b' & 1 & & c \\ & b' & b & & 1 & d' \\ & & & c & d' & 1 \end{pmatrix}$$

Nous nous occuperons essentiellement du calcul des mineurs des déterminants arborescents.

2 PROPRIETE DES DETERMINANTS BOOLEENS DONT LES ELEMENTS DIAGONAUX SONT DES " 1 " :

Rappelons d'abord la définition d'un cycle :

Dans un déterminant, un cycle est un produits d'éléments a_{hk} du déterminant tel que :

a) il y a au moins deux éléments (sinon on ne peut pas parler de produit).

b) en modifiant, s'il y a lieu, l'ordre des éléments du produit (le produit est commutatif), on a une suite de couples d'indices tel que le 2° indice du p° couple soit égal au 1° indice du p + 1 ème couple, et tel que le 1° indice du 1° couple soit égal au 2° indice du dernier couple.

Exemple : $a_{12} a_{26} a_{61}$ est un cycle

$a_{13} a_{37} a_{72}$ n'est pas un cycle

Nous pouvons maintenant énoncer le Lemme suivant :

Lemme 1 : Dans un déterminant à éléments booléens dont les éléments diagonaux sont égaux à 1 , on peut trouver la valeur d'un mineur D_{ij} en prenant tous les chemins sans cycle allant de j à i .

Exemple : Considérons le mineur D_{45} de l'exemple 1 du paragraphe précédent:

$$\begin{bmatrix} 1 & a & a' & & & \\ a & 1 & b & b' & & \\ a' & b & 1 & c & c' & \\ & & & d & f' & \\ & & & & 1 & \end{bmatrix}$$

Les termes "ad" et " a'd " sont multiples du terme " d " obtenu à partir des quatre " 1 " de la diagonale principale.

Démonstration : Soit un terme multiple d'un cycle, on peut l'écrire comme suit :

$$(a_{h_0, h_1} a_{h_1, h_2} \dots a_{h_p, h_0}) a_{nm} a_{m, k} a_{k, l}$$

Considérons le monôme obtenu en prenant :

a) les éléments $a_{n,m}$ $a_{m,k}$ $a_{k,l}$

b) les éléments de la diagonale principale situés sur les lignes

$$h_0, h_1, \dots, h_p$$

Nous prenons ainsi, comme précédemment, un élément et un seul dans chaque ligne et dans chaque colonne. Ce monôme est donc un terme du mineur considéré, or la valeur de ce terme est :

$$a_{n,m} a_{m,k} a_{k,l}$$

Le terme multiple du cycle est donc contenu dans ce terme et la démonstration est achevée.

Remarque : Tout mineur relatif à un élément de la diagonale principale est égal à 1.

3 PROPRIETES ELEMENTAIRES DES DETERMINANTS ARBORESCENTS :

Dans ce paragraphe nous allons énoncer quelques propriétés élémentaires qui serviront plus loin à établir des propriétés intéressantes.

Lemme 2 : Tout mineur D_{ij} d'un déterminant arborescent avec i et $j \neq 1$ est égal au mineur déduit de D par suppression des lignes et colonnes d'indice inférieur au sens strict à Minimum de i et de j .

Exemple: Dans le calcul du mineur D_{45} de l'exemple précédent, si on supprime les lignes et colonnes d'indice 1, 2 et 3, on obtient

$$\begin{vmatrix} d & f' \\ & 1 \end{vmatrix} = d$$

Démonstration : Vérifions que le lemme est vrai pour les déterminants arborescents d'ordre 3 :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & a & a' \\ a & 1 & b \\ a' & b & 1 \end{vmatrix} \quad D_{32} = \begin{vmatrix} 1 & a' \\ a & b \end{vmatrix} = D_{23} \quad \text{puisque le déterminant est symétrique.}$$

La propriété sera vérifiée à fortiori pour les déterminants arborescents d'ordre 3 contenant des zéros.

Nous ferons une démonstration par récurrence sur l'ordre n des

déterminants arborescents. Supposons que le lemme soit vrai pour les déterminants d'ordre $n = p$ et montrons qu'il est alors vrai pour les déterminants d'ordre $n = p + 1$.

Développons le mineur D_{ij} du déterminant arborescent D d'ordre $p + 1$ selon la première ligne, il vient :

$$D_{ij} = D_{i1;j1} + aD_{i1;jh} + a'D_{i1;jk}$$

(nous supposons que $a_{1h} = a$ et $a_{1k} = a'$)

Mais puisque les seuls éléments non nuls de la première colonne sont

$$a_{11} = 1 \quad a_{h1} = a \quad a_{k1} = a'$$

il résulte que les termes non nuls de $aD_{i1;jh}$ et de $a'D_{i1;jk}$ sont respectivement multiples des cycles

$$a_{1h} a_{h;1} \quad \text{et} \quad a_{1;k} a_{k;i}$$

donc inutiles en vertu du lemme 1.

On peut recommencer le même calcul sur le déterminant D' déduit de D par suppression de la première ligne et de la première colonne et la démonstration est achevée.

Lemme 3 : Dans le calcul d'un mineur D_{ij} par rapport à un élément situé en dessous de la diagonale principale, on peut supprimer les éléments du déterminant initial situés à la fois en dessous de la diagonale principale et dans les colonnes d'indice inférieur (au sens strict) à Maximum de i et de j .

Exemple : Considérons le déterminant arborescent suivant :

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a' & & & \\ a & 1 & & b & b' & \\ a' & & 1 & b' & b & \\ & b & b' & 1 & & c \\ & b' & b & & 1 & d' \\ & & & c & d' & 1 \end{pmatrix}$$

Dans le calcul de D_{51} on peut supprimer les éléments entourés d'un cercle sur le déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} a & a' & & & & \\ 1 & & b & b' & & \\ & 1 & b' & b & & \\ (b) & (b') & 1 & & c & \\ & & (c) & d' & & 1 \end{vmatrix}$$

Démonstration : En vertu du lemme 2, nous pouvons supposer qu'il s'agit de calculer un mineur relatif à un élément a_{i1} de la première colonne. Nous ferons encore un raisonnement par récurrence.

L'élément a_{h2} avec $h \geq 2$ doit être utilisé avec un élément de la 2ème ligne qui ne peut être que a_{2h} donc a_{h2} est inutile puisqu'il donne des termes multiples du cycle $a_{2h} a_{h2}$. Par conséquent les éléments situés dans la deuxième colonne et au dessous de la diagonale principale sont inutiles.

$$h \rightarrow \begin{vmatrix} & \downarrow^p & & \downarrow^{p+1} & & & \\ & a & a' & & & & \\ a & 1 & b & b' & & & \\ a' & (b) & 1 & c & & c & \\ & (b') & c & 1 & d & d' & \\ \hline & & & d & 1 & f & \\ & & c' & d' & f & 1 & \end{vmatrix}$$

Supposons que les éléments situés au dessous de la diagonale principale des colonnes d'indice inférieur ou égal à p avec $p \leq i$ sont inutiles; soit un élément $a_{h,p+1}$, il doit être utilisé avec un élément $a_{p+1;k}$ de la $p+1$ ème ligne. Or les éléments de la $p+1$ ème ligne situés au dessous de la diagonale principale ont été supprimés puisqu'ils sont inutiles; donc le seul élément de la $p+1$ ème ligne susceptible d'être utilisé avec $a_{h,p+1}$ est donc $a_{p+1;h}$ nous avons encore un cycle et en vertu du lemme 1 l'élément $a_{h;p+1}$ est inutile, ce qui achève la démonstration.

4 PROPRIETE FONDAMENTALE DES DETERMINANTS ARBORESCENTS :

Nous allons d'abord démontrer un lemme avant d'énoncer un théorème important pour l'application aux réseaux.

Lemme 4 : Tout mineur d'un déterminant arborescent représente une fonction booléenne sous forme disjointe à condition d'éliminer avant le développement les éléments inutiles définis dans les lemmes 2 et 3.

Exemple : Le déterminant de l'exemple 1 du premier paragraphe, relatif à la 6ème ligne et 1° colonne s'écrit :

$$\begin{vmatrix} a & a' & & & & \\ 1 & b & b' & & & \\ b & 1 & c & & & c' \\ b' & c & 1 & d & & \\ & & d & 1 & f' & \end{vmatrix}$$

Supprimons les éléments inutiles. Il vient alors :

$$\begin{vmatrix} a & a' & & & & \\ 1 & b & b' & & & \\ & 1 & c & & & c' \\ & & 1 & d & & \\ & & & 1 & f' & \end{vmatrix}$$

$$D = ab(c' + cdf') + ab'df' + a'(c' + cdf')$$

Démonstration : Nous ferons une démonstration par récurrence sur

l'ordre du déterminant. Nous vérifions que le lemme est vrai pour l'ordre $n = 2$:

$$\begin{vmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{vmatrix}$$

Montrons que si le lemme est vrai pour $n = p$, il est alors vrai pour $n = p + 1$.

Remarquons d'abord que en vertu du lemme 2, on peut supposer que l'on calcule un mineur relatif à un élément de la première colonne.

Développons le mineur $D_{h;1}$ selon la première ligne. Le "1" de la première colonne est supprimé et il vient :

$$D_{h;1} = aA + a'B,$$

A et B étant les mineurs d'ordre $p - 1$. A et B sont des mineurs du déterminant D' déduit de D par suppression de la première ligne et première colonne, donc en vertu de l'hypothèse de la récurrence les fonctions représentées par A et B sont sous forme disjointe et le lemme est démontré.

Théorème : Si on développe un mineur d'un déterminant arborescent, en éliminant les éléments inutiles et en respectant l'ordre des lignes, on obtient une forme arborescente disjointe.

Exemple : Développons le mineur $D_{4;1}$ du déterminant suivant :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & a & a' \\ a & 1 & b & b' \\ a' & b & 1 & c \\ & b' & c & 1 \end{vmatrix}, \quad D_{4;1} = \begin{vmatrix} a & a' \\ 1 & b & b' \\ b & 1 & c \end{vmatrix} = ab' + abc + a'c$$

Démonstration : En vertu du lemme précédent, nous aurons bien une fonction sous forme disjointe. Il reste donc à montrer que cette forme est arborescente; pour cela nous ferons encore un raisonnement par récurrence : nous avons constaté que pour l'ordre 2, la forme était arborescente, montrons que si elle l'est pour l'ordre p , elle l'est alors pour l'ordre $p + 1$: en vertu du lemme 2, nous nous ramenons au calcul d'un mineur relatif à la première colonne d'un déterminant d'ordre $p + 1$. Il vient :

$$D_{i;1} = a A + a' B,$$

A et B étant des mineurs du déterminant D d'ordre p qui est aussi arborescent. Le théorème est donc démontré.

CHAPITRE V

MATRICES ARBORESCENTES

1 DEFINITION :

Nous appellerons " Matrice arborescente ", toute matrice à éléments booléens satisfaisant aux conditions suivantes :

- a) Les éléments diagonaux sont nuls
- b) La matrice est symétrique
- c) Pour $i \neq j$, il existe sur chaque ligne au plus deux éléments a_{ij} et a_{ih} ($i \neq h$) non nuls et l'un est le complément de l'autre
- d) Les éléments de la matrice n'ont qu'une seule lettre.

2 MATRICES EQUIVALENTES :

Soit une matrice M . Nous pouvons lui appliquer la transformation suivante : nous échangeons les lignes L_i et L_j et les colonnes C_i et C_j ; nous obtenons ainsi une matrice M_1 .

Définition ; deux matrices M et M_1 sont équivalentes si on peut passer de l'une à l'autre en lui appliquant un nombre fini de fois la transformation ci-dessus.

Nous vérifions aisément que les axiomes de la relation d'équivalences sont satisfaits :

$$\begin{aligned} M &\sim M \\ M_1 \sim M_2 &\Rightarrow M_2 \sim M_1 \\ \left. \begin{array}{l} M_1 \sim M_2 \\ M_2 \sim M_3 \end{array} \right\} &\Rightarrow M_1 \sim M_3 \end{aligned}$$

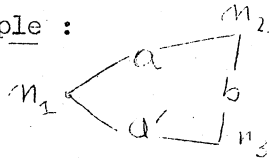
Nous ne nous occuperons dans ce chapitre que des matrices arborescentes; nous verrons lors de l'application aux réseaux la signification concrète de "Matrices Equivalentes".

Nous ne nous occuperons dans ce chapitre que des matrices arborescentes; nous verrons plus loin, lors de l'application aux réseaux, la signification concrète de "matrices équivalentes".

3 PROPRIETE FONDAMENTALE DES MATRICES ARBORESCENTES :

Théorème : Toute matrice arborescente peut être considérée comme la matrice des noeuds d'un réseau de contacts dont la transmittance entre tout couple de points est fournie par le mineur sous forme de monômes disjoints (c'est à dire que les chemins joignant ces deux points correspondent à des monômes booléens deux à deux disjoints).

Exemple :



$$\begin{vmatrix} 0 & a & a' \\ a & 0 & b \\ a' & b & 0 \end{vmatrix}$$

Démonstration : La matrice arborescente M est bien une matrice satisfaisant aux conditions nécessaires pour être la matrice des noeuds d'un réseau de contacts, puisque ses éléments diagonaux sont nuls, qu'elle est symétrique et que ses éléments sont booléens.

La transmittance F_{ij} entre les noeuds n_i et n_j s'obtient en calculant le mineur D_{ji} de la matrice $M + I$ auquel on supprime les termes multiples d'un cycle qui ne correspondent pas à un chemin simple. Donc en vertu du théorème concernant les déterminants arborescents et leurs mineurs, la transmittance est bien réalisée comme somme de monômes disjoints.

4 SYNTHESE DE LA MATRICE ARBORESCENTE D'UNE FONCTION :

Soit une fonction écrite sous forme arborescente irréductible. Soit a la première lettre de l'ordre arborescent. Nous pouvons écrire:

$$F = a f_1 + a' f_2 \quad , \quad f_1 \quad \text{et} \quad f_2 \quad \text{étant des formes arborescentes.}$$

Nous écrirons donc F sous la forme suivante :

$$\begin{vmatrix} 0 & a & a' & & \\ a & 0 & & f_{11} & \\ a' & & 0 & f_{12} & \\ & & & 0 & f_{21} \\ & & & & 0 & f_{22} \end{vmatrix}$$

La matrice ainsi obtenue a un mineur relatif à la première colonne et dernière ligne qui est égal à F .

Poursuivons la décomposition jusqu'à ce que nous ayons une matrice dont tous les éléments ne comportent au plus qu'une seule lettre. Supposons que :

$$\begin{aligned} f_1 &= b f_{11} + b' f_{12} \\ f_2 &= c f_{21} + c' f_{22} \end{aligned}$$

La matrice précédente devient :

$$\begin{vmatrix} 0 & a & a' & & & & & & & & \\ a & 0 & & b & b' & & & & & & \\ a' & & 0 & & & c & c' & & & & \\ & b & & 0 & & & & & & & f_{11} \\ & b' & & & 0 & & & & & & f_{12} \\ & & c & & & 0 & & & & & f_{21} \\ & & c' & & & & 0 & & & & f_{22} \\ & & & f_{11} & f_{12} & f_{21} & f_{22} & 0 & & & \end{vmatrix}$$

Les seuls éléments susceptibles de contenir plus d'une lettre en cours de développement sont ceux de la dernière colonne.

Montrons comment on poursuit la décomposition. Supposons que la Matrice intermédiaire M_p d'ordre p . M_p contient trois types de lignes :

- a) lignes dont les éléments de la dernière colonne sont nuls.
- b) lignes dont les éléments de la dernière colonne n'ont qu'une seule lettre.
- c) lignes dont les éléments de la dernière colonne ont plusieurs lettres.

Nous opérerons successivement sur chacune des lettres du type c) les lignes de ce type qui attendent leur tour étant traitées comme des lignes du type b).

Nous ajoutons deux lignes et deux colonnes à la matrice M_p .

Les lignes du type a) restent inchangées.

Les éléments de la dernière colonne des lignes du type b) passent de la position $a_{j;p}$ à la position $a_{j;p+2}$.

Soit $a_{i;p}$ l'élément de la dernière colonne de la ligne du type c) à décomposer, cet élément s'écrit en respectant l'ordre arborescent :

$$a_{i;p} = x u + x' v, \quad x \text{ étant une variable booléenne et } u \text{ et } v \text{ des fonctions.}$$

En position $a_{i;p}$ nous plaçons x

" $a_{i;p+1}$ " x'
 " $a_{p;p+2}$ " u
 " $a_{p+1;p+2}$ v

Enfin nous complétons la diagonale principale par des zéros et complétons la nouvelle matrice par symétrie.

Exemple : $f = a b c + a b' d' + a' b$

$$\begin{pmatrix} 0 & a & a' & & & \\ a & 0 & & b'd' + bc & & \\ a' & & 0 & b & & \\ & b'd'+bc & b & 0 & & \\ & & & & & \\ 0 & a & a' & & & \\ a & 0 & & b & b' & \\ a' & & 0 & & & b \\ & b & & 0 & & c \\ & b' & & & 0 & d \\ & & b & c & d & 0 \end{pmatrix}$$

Cette décomposition ne présente un intérêt que si la fonction initiale n'est pas perturbée, c'est ce que précise le théorème suivant :

Théorème : Soit une matrice arborescente d'ordre n obtenue à partir de la fonction F écrite sous forme arborescente (irréductible de préférence); Alors le mineur $D_{n;1} (M + I)$ est égal à F et est arborescent disjoint si on respecte l'ordre des lignes.

Démonstration : Nous ferons une démonstration par récurrence sur l'ordre n de la matrice. Le théorème est vrai pour $n = 2$:

$$M + I = \begin{vmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{vmatrix} \quad D_{2;1} = a \quad - 45 -$$

Montrons que si la propriété est vraie pour $n = p$, elle est alors vraie pour $n = p + 1$. Soit D' le déterminant de la matrice $(M_p + I)$, qui a donné par décomposition la matrice $(M_{p+1} + I)$. Nous avons par exemple la décomposition suivante :

$$D' = \begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} \quad D = \begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

Soient b_{ij} les éléments de D' et a_{ij} les éléments de D . Décomposons le calcul du mineur relatif à la première colonne et dernière ligne de D selon la dernière colonne :

$$D_{p+1;1} = \sum_{i=1}^{p-1} a_{i;p+1} D_{p+1,i;1,p+1} +$$

$$a_{p;p+1} a_{j;p} D_{p+1,j;1,p} + \circ$$

b_{jp}

car les éléments $a_{i;p+1}$ donnent avec $a_{j;p}$ des termes multiples d'un cycle

$$= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{p-1} b_{i;p} D'_{p,i;1,p} + b_{jp} D'_{p,j;1,p} \\ = D'_{p;1}$$

La démonstration est ainsi achevée.

Nombre Maximum de colonnes :

Le traitement en machine à calculer de telles matrices pose des problèmes d'encombrement de mémoires. Il est possible de calculer à partir d'une forme arborescente irréductible l'ordre de la matrice avant de calculer cette dernière.

Partant de l'arbre représentant l'ordre arborescent, nous écrivons les monômes en partant du monôme le plus à gauche pour aller vers celui le plus à droite. Soient m_i les monômes écrits selon cet ordre. Soit l_i le nombre de lettres du monôme m_i et soit n_i^{i+1} le nombre de lettres que m_i et m_{i+1} ont en commun, compte tenu de l'accentuation. Alors le nombre de colonnes C de la matrice arborescente M est donné par :

$$C = 1 + l_1 + \sum_{i=1}^{n-1} (l_{i+1} - n_i^{i+1} - 1) \quad \text{n étant le nombre de monomes}$$

Exemple : $F = abc + ab'd + abc'd + a'c'bd + a'e$

écrivons les monômes en respectant l'ordre de l'arbre :

$$F = abc + abc'd + ab'd + a'e + a'c'bd$$

Nous obtenons alors :

$$C = (1 + 3) + (2-1) + (2-1) + (2-1) + (3-1) = 9$$

Démonstration : Nous ferons une démonstration par récurrence sur le nombre de monômes de la fonction. La formule est vraie pour les fonctions s'exprimant sous forme de un monôme arborescent puisqu'elle devient :

$$C = 1 + l_1$$

Montrons que si elle est vraie pour les formes arborescentes de p monômes, elle est alors vraie pour les fonctions de $p + 1$ monômes. La fonction F de $p + 1$ monômes s'écrit :

$$F = \sum_{i=1}^p m_i + m_{p+1}$$

La fonction f définie par $f = \sum_{i=1}^p m_i$ nécessite en vertu de l'hypothèse de la récurrence un nombre de colonnes donné par

$$C_f = 1 + l_1 + \sum_{i=1}^p (l_{i+1} - n_i^{i+1} - 1)$$

Pour passer de f à F , il suffit de construire le monôme m_{p+1} qui a peut-être des lettres en commun avec d'autres monômes, compte tenu de l'accentuation; dans ce cas c'est avec m_p que m_{p+1} a le plus de lettres en commun compte tenu de l'accentuation. Par conséquent à partir des lettres utilisées pour m_p il faudra

$l_{p+1} - n_p^{p+1}$ lettres supplémentaires

Mais la dernière lettre de m_{p+1} figure dans la colonne "sortie" de la matrice c'est à dire la dernière colonne. Il faudra donc ajouter

$$l_{p+1} - n_p^{p+1} - 1 \text{ colonnes}$$

ce qui achève la démonstration.

5 REDUCTION DES MATRICES ARBORESCENTES :

La méthode du paragraphe précédent permet d'obtenir une matrice arborescente dont le mineur relatif à la première ligne et dernière colonne est égal à une fonction donnée. Mais l'ordre de la matrice ainsi obtenue est assez élevée; nous proposons une méthode qui permet à partir de la matrice précédente d'obtenir une autre matrice arborescente d'ordre moins élevé et dont le mineur "homologue" est égal à la même fonction.

M étant la matrice de départ, nous désignerons par M° la matrice déduite de M par suppression des éléments situés en dessous de la diagonale principale; M° est donc triangulaire supérieure.

Règle de réduction : Si deux lignes L_i et L_j de la matrice M° sont identiques ou si $a_{ij} = 1$, alors nous réduisons la matrice M° de la façon suivante : supposons $i < j$,

a) $C_i + C_j \quad C_j$

b) L_i et C_i sont supprimées.

La matrice M_1° ainsi obtenue redonne par complémentation une matrice M_1 arborescente.

Exemple 1 : Examinons le premier cas de réduction sur la matrice suivante :

Développons par rapport à la ligne j :

$$D = D_{ij;ij} + cD_{ij;jh} + c'D_{ij;jk}$$

En vertu du lemme 3 tous les éléments de $(M + I)$ situés en dessous de la diagonale principale peuvent être remplacés par 0.

$$\text{avec } cD_{ij;jh} = c \quad s \quad a_{si} \quad D_{sij;ijk}$$

$$c'D_{ij;jk} = c' \quad s \quad a_{si} \quad D_{sij;ijk}$$

Après réduction, le déterminant se présente sous la forme suivante :

$$\begin{array}{cccccc} & & i & & j & & h & & k \\ & & | & & | & & | & & | \\ & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\ & & 0 & & a_{sj} + a_{si} & & 0 & & 0 \\ i - & & 1 & 0 & 0 & & 0 & & 0 \\ & & | & & | & & | & & | \\ j - & & 0 & & 1 & & c & & c' \\ & & | & & | & & | & & | \\ & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\ & & & & & & & & 1 \end{array}$$

Développons selon la ligne i en 2 étapes : d'abord sans tenir compte des éléments a_{si} puis en en tenant compte, il vient :

$$\begin{aligned} D &= D_{ij;ij} + s \quad a_{si} \quad D_{is;ij} \\ &= D_{ij;ij} + s \quad a_{si} \quad (cD_{sij;jh} + c'D_{sij;jk}) \end{aligned}$$

Nous obtenons le même résultat ; la règle de réduction est donc justifiée dans le premier cas de réduction.

2^e cas : Le mineur s'écrit avant réduction :

M_1 est arborescente et d'ordre $p - 1$. Nous faisons sur M les réductions correspondant aux réductions possibles sur M_1 . La matrice ainsi obtenue est bien unique à une équivalence près. Par ailleurs les lignes 1, 2 et 3 sont différentes des autres, les seules réductions possibles sont par conséquent les suivantes : lignes 2 et 3 identiques

un élément $a_{ij} = 1$ pour $i = 3$ (ou plusieurs)

dans ces cas l'ordre dans lequel on effectue ces réductions n'intervient pas. La matrice irréductible est donc unique à une équivalence près.

7 MATRICE ARBORESCENTE COMPLEMENT :

À partir de la matrice arborescente d'ordre n M , nous définissons une matrice arborescente M' qui sera déduite de M par les opérations suivantes :

a) Nous considérerons successivement toutes les lignes L_i de M

b) Si L_i comporte deux éléments situés au dessus de la diagonale principale différent de 0 et que $a_{ii} = 0$ alors nous passons à la ligne suivante

c) Si L_i comporte deux éléments au dessus de la diagonale principale et que $a_{ii} = \emptyset$, alors nous remplaçons cet élément par 0.

d) Si L_i ne comporte qu'un seul élément situé au dessus de la diagonale principale qui soit $= \emptyset$, alors nous distinguons les deux cas suivants :

cet élément est a_{in} alors nous le remplaçons par a'_{in}

cet élément est a_{ik} avec $i < k < n$, alors nous remplaçons

a_{in} qui était nul par a'_{ik}

A et B étant des mineurs relatifs à un élément de la dernière ligne de la matrice déduite de $(M + I)$ par suppression de la première ligne et de la première colonne. Les mineurs correspondant à $(M' + I)$ auront donc pour valeur en vertu de l'hypothèse de la récurrence respectivement A' et B' . Donc quand nous développerons le mineur D^0 homologue de D , nous obtiendrons par développement relatif à la première ligne :

$$D^0 = aA' + a'B'$$

Nous constatons ainsi que d D et D^0 sont complémentaires et le théorème est démontré dans le cas où il n'y a pas d'éléments relatifs $a_{1n} \neq 0$. Dans le cas où $a \neq 0$; nous avons :

$$D = a_{1n} + a'_{1n} A$$

$$D^0 = 0 + a'_{1n} A'$$

Si M' n'était pas irréductible, alors deux lignes L_i et L_j seraient identiques et alors par complémentation de M' on aurait une matrice M ayant 2 lignes identiques, ce qui est impossible.

La démonstration est ainsi achevée.

Corollaire : Parmi toutes les matrices arborescentes irréductibles réalisant une fonction f , à celle qui est d'ordre minimum (il n'y a pas unicité), correspond la matrice arborescente irréductible réalisant f' avec l'ordre minimum et cet ordre est le même que pour f .

La démonstration de ce corollaire est immédiate :

Puisque le passage de la matrice M à la matrice M' ne modifie pas l'ordre, les ordres des matrices M et M' sont les mêmes quel que soit l'ordre arborescent de départ choisi.

Il reste à montrer qu'il n'y a pas de matrice arborescente M'_1 d'ordre inférieur à la matrice M' correspondant à celle d'ordre minimum de F . Si il existait une telle matrice M'_1 , par complémentation on aurait une matrice M réalisant f et d'ordre inférieur à l'ordre minimum, ce qui est absurde.

Ceci achève la démonstration.

Conséquence : Pour réaliser une fonction f , nous pouvons écrire à la fois f et f' et, si nous trouvons que l'écriture de f' est plus commode ou plus courte, nous aurons intérêt à chercher la matrice arborescente irréductible de f' , puis à écrire la matrice de f par complémentation.

9 MATRICE ARBORESCENTE RELATIVE A UNE FONCTION ET A SON COMPLEMENT :

Dans de nombreuses applications des fonctions booléennes, il est très intéressant de pouvoir faire la synthèse simultanée d'une fonction et de son complément. Nous proposons une méthode qui permet d'obtenir la matrice des noeuds d'un réseau dont la transmittance entre l'entrée et la 1^o sortie est f et dont la transmittance entre l'entrée et la 2^o sortie est f' .

Règle : Soit à réaliser une fonction f et la fonction complément f' . Soit M la matrice arborescente irréductible réalisant f . Soit C la dernière colonne de la matrice complément M' déduite de M .

Soit M'' la matrice déduite de M et C par les opérations suivantes : partant de M' , on lui ajoute en dernière position la colonne C , et en dernière position, on ajoute la ligne C .

Nous avons les relations suivantes :

$$\begin{array}{ll} D_{n-1;1} & (M'' + I) = f \\ D_{n-1,j} & (M'' + I) = g \end{array} \quad \begin{array}{ll} D_{n;j} & (M'' + I) = f' \\ D_{n,j} & (M'' + I) = g' \end{array}$$

Exemple :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & a & a' & & \\ a & 0 & b & b' & \\ a' & b & 0 & c & \\ & b' & c & 0 & \end{pmatrix} \quad M' = \begin{pmatrix} 0 & a & a' & & \\ a & 0 & b & & \\ a' & b & 0 & c' & \\ & & & c' & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & a & a' & & \\ a & 0 & b & b' & \\ a' & b & 0 & c & c' \\ & b' & c & 0 & \\ & & c' & & 0 \end{pmatrix}$$

Démonstration : Nous ferons une démonstration par récurrence sur l'ordre de la matrice M. La propriété se vérifie pour les matrices d'ordre 2 :

$$M = \begin{vmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{vmatrix} \quad M' = \begin{vmatrix} 0 & a' \\ a' & 0 \end{vmatrix} \quad M'' = \begin{vmatrix} 0 & a & a' \\ a & 0 & 0 \\ a' & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Montrons que si la propriété est vraie pour les matrices arborescentes d'ordre $n = p$, elle est alors vraie pour les matrices d'ordre $n = p + 1$.

Remarquons d'abord que M'' est arborescente (irréductible si M est irréductible). En vertu du lemme 2 on peut se ramener du calcul de $D_{n-1;j}$ et de $D_{n;j}$ au calcul de $D_{n-1;1}$ et de $D_{n;1}$.

Développons le mineur $D_{n;1}$ de la matrice d'ordre $p + 2$ obtenue à partir d'une matrice arborescente d'ordre $p + 1$ par la règle précédente, par rapport à la première ligne. Il vient :

$$D_{p+2;1} = a A + b B$$

A et B étant des mineurs relatifs à la dernière ligne de la matrice déduite de M'' par suppression de la première ligne et de

la première colonne. Il est inutile de poursuivre le raisonnement car il est identique aux précédents et la démonstration est achevée.

10 INDICATIONS SUR LA RECHERCHE DE LA MATRICE ARBORESCENTE IRREDUCTIBLE D'ORDRE MINIMAL :

La recherche de la matrice d'ordre minimal n'est pas commode et nous n'avons aucun algorithme à proposer à ce sujet. Cependant nous pouvons faire la remarque suivante:

Remarque : Si une fonction f s'écrit $f = a g$, a étant une variable booléenne et g une fonction booléenne, alors le meilleur ordre, c'est à dire celui qui donne une matrice arborescente d'ordre minimum n'est pas unique, en particulier les ordres qui commencent par a et ceux qui commencent par g donnent les ordres les meilleurs.

Supposons que nous ayons trouvé le ou les ordres les meilleurs pour la fonction g , il n'y a pas pour f d'ordre meilleur que ceux obtenus à partir des ordres relatifs à g en plaçant a en tête ou en queue, ainsi que le montrent les deux matrices suivantes :

0	a	matrice de g	matrice de g	0	a
a	0				

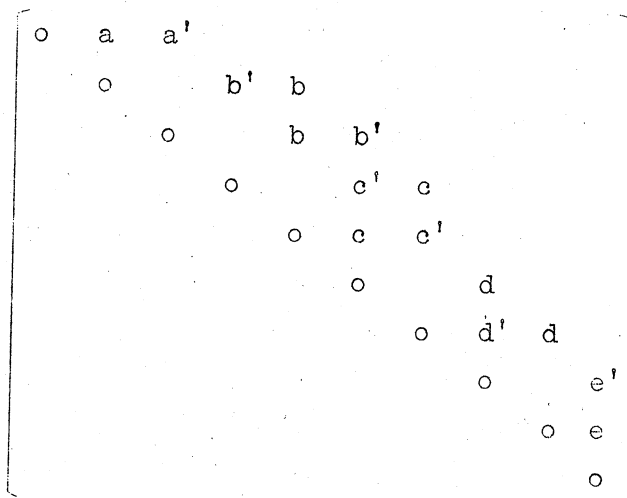
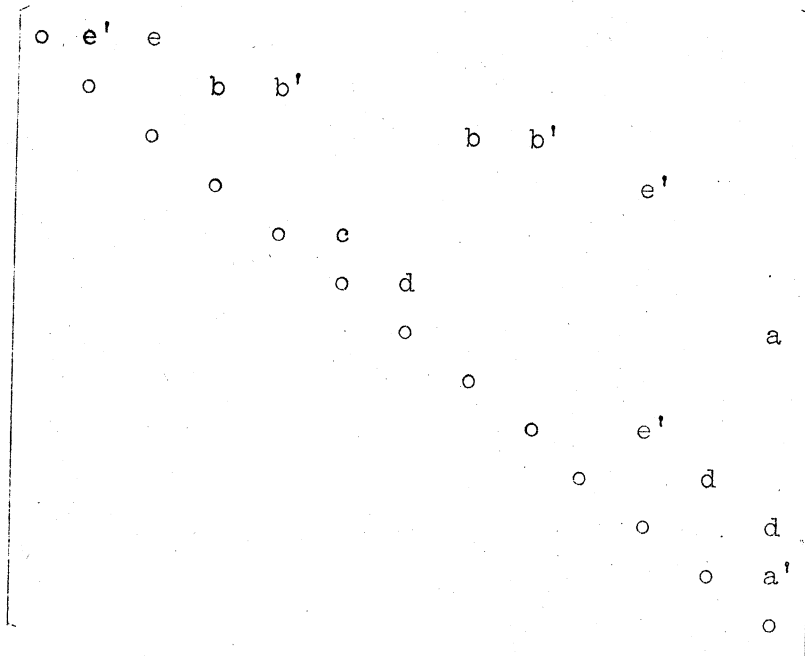
Par ailleurs, l'ordre le meilleur pour l'écriture de la fonction sous forme arborescente n'est pas forcément le meilleur pour l'écriture de la matrice arborescente. Il suffit de regarder l'exemple suivant :

$$f = e b c d + e b' e' d + e b' c d a' + e' b c' d + e' b' c d a$$

5 monomes et 22 lettres.

$$f = a b c d e + a b c' d e' + a b' c d e' + a b' c' d e + e' b c d e + a' b c' d e' + a' b' d e$$

7 monomes et 34 lettres.



11 MATRICE ARBORESCENTE D'UNE FONCTION INCOMPLETE :

Soit à chercher la matrice arborescente d'ordre le moins élevé possible de la fonction f satisfaisant aux conditions :

$$F : f \leq G$$

Rappelons que parmi toutes les fonctions satisfaisant à la double inégalité, il existe une fonction unique f_m , correspondant à un ordre arborescent donné, qui ait une forme arborescente minimale, c'est à dire ayant le moins de monômes et le moins de lettres.

Cependant cette fonction f_m ne donne pas forcément la matrice d'ordre minimal ainsi que nous pourrons le constater plus loin.

Nous proposons une méthode permettant de diminuer l'ordre de la matrice. Nous partons de la fonction

$$f^c = f_m + \emptyset f'_m G$$

Les coefficients \emptyset de certains monômes seront affectés à la dernière lettre de ces monômes et nous ferons la décomposition comme précédemment. Les \emptyset iront donc en dernière colonne.

Puis nous ferons d'abord les réductions dans les deux cas suivants :

- lignes identiques
- éléments a_{ij} égal à 1

Pour ces réductions nous considérerons évidemment que $\emptyset x$ est une lettre différente de x .

Puis, s'il reste des éléments de la dernière colonne ayant pour coefficient \emptyset nous ferons les réductions suivantes :

si " faire $\emptyset = 1$ ne donne aucune réduction "

alors faire $\emptyset = 0$ et réduire.

si " faire $\emptyset = 1$ donne une réduction avec apparition d'un "1" "

alors faire $\emptyset = 0$ et réduire

si " faire $\emptyset = 1$ donne une réduction sans apparition d'un "1" "

alors en toute rigueur il faut faire des essais.

$$\begin{pmatrix}
 0 & a & a' & & & & & & \\
 & 0 & & b' & b & & & & \\
 & & 0 & b & & & & & \\
 & & & 0 & c & c' & & & \\
 & & & & 0 & & d' & & \\
 & & & & & 0 & d & & \\
 & & & & & & & 0 & \\
 & & & & & & & & 0
 \end{pmatrix}$$

Nous obtenons une matrice d'ordre 7 alors que f_m donne une matrice d'ordre 8 .

12 MATRICE DE PLUSIEURS FONCTIONS DEUX A DEUX DISJOINTES :

Nous pouvons construire la matrice des noeuds d'un réseau de contacts réalisant la synthèse de plusieurs fonctions deux à deux disjointes en utilisant les matrices arborescentes.

Nous utiliserons autant de colonnes " sorties qu'il y a de fonctions et il n'y aura pas d'extrémités (contacts) reliant directement les noeuds sorties du réseau correspondant.

Soit par exemple 3 fonctions deux à deux disjointes f, g et h .

"a" étant la première lettre de l'ordre nous aurons :

$$f = a f_1 + a' f_2$$

$$g = a g_1 + a' g_2$$

$$h = a h_1 + a' h_2$$

d'ou la première décomposition :

$$\begin{pmatrix}
 0 & a & a' & & & & & & \\
 & 0 & & f_1 & g_1 & h_1 & & & \\
 & & 0 & f_2 & g_2 & h_2 & & & \\
 & & & 0 & 0 & 0 & & & \\
 & & & & 0 & 0 & & & \\
 & & & & & 0 & & & \\
 & & & & & & 0 & & \\
 & & & & & & & 0 & \\
 & & & & & & & & 0
 \end{pmatrix}$$

Exemple : $f = abd' + ab'cd' + a'bcd'$
 $g = ab'c'de + a'bc'de + a'b'de$

sachant que la matrice M^0 précédente était telle que :

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} \downarrow \\ \downarrow \end{array} \begin{array}{c} D_{n-2;1}^0 = f \\ D_{n-1;1}^0 = g \end{array} \\
 \begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc|ccc}
 a_{11} & & & & & \\
 & \ddots & & & & \\
 & & a_{n-1,n-1} & & & \\
 \hline
 & & & 1 & & \\
 & & & x & 1 & 0 \\
 & & & 0 & 0 & 1
 \end{array} \right] \leftarrow D \\
 \rightleftharpoons D^0 \\
 \begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc|ccc}
 a_{11} & & & & & \\
 & \ddots & & & & \\
 & & a_{n-1,n-1} & & & \\
 \hline
 & & & 1 & & \\
 & & & 0 & 1 & 0 \\
 & & & 0 & 0 & 1
 \end{array} \right]
 \end{array}
 \end{array}$$

D^0 étant le déterminant de $(M^0 + I)$

Pour le calcul de $D_{n;1}$ nous pouvons supprimer les éléments situés au dessous de la diagonale principale de D et alors nous devons pour chaque terme utiliser l'élément $a_{n-1;n-1}$ et nous retrouvons le résultat précédent.

Pour le calcul de $D_{n-1;1}$ nous trouvons en utilisant l'élément $a_{n;n}$ f , mais nous ne savons pas si l'utilisation des autres éléments de la dernière colonne ne vont pas perturber f .

Remarquons alors que :

$$g \leq f'$$

et par conséquent la dernière colonne de g est inférieure ou égale à celle que nous aurions si nous avions f' . Donc en vertu du résultat du paragraphe 10, nous avons bien

$$D_{n-1;1} = f$$

et la méthode est ainsi justifiée.

13 ESSAIS EN MACHINE :

Nous avons établi sur grosse machine un programme permettant de chercher la matrice arborescente irréductible d'une fonction donnée en s'imposant un ordre de départ lexicographique quelconque.

Nous n'avons pas encore pu traiter de nombreux exemples et exploiter au maximum le programme. Cependant il semble que la règle de réduction que nous avons proposé donne des résultats très satisfaisants.

A titre d'exemple, nous avons traité en machine la fonction suivante :

$$f = c + abc'g$$

que nous avons mis sous la forme suivante:

$$f = c + ca' + gab + cd'fb$$

l'ordre lexicographique de réduction étant : a,b,c,d,e,f,g

Nous avons obtenu la forme lexicographique irréductible puis les deux matrices de la page suivante. Le résultat montre que la matrice finale n'est pas d'un ordre trop élevé même si l'ordre lexicographique de départ n'est pas bien choisi. Notons que l'ordre le meilleur (ici c,a,b,g) donne une matrice d'ordre 5 .

LA MATRICE PEUT ETRE ETUDIEE ET REPRESENTEE

0 A A*

0 B B*

0

B B*

0 C*

C

0

C

0 D D*

0 E E*

0

E E*

0 F F*

0 F F*

0

G

0

G

0

G

0

G

MATRICE BOOLEENE APRES REDUCTION

0 A A*

0 F F*

0 B B*

0 F F*

0 C* C

0

G

0 G

0

G

0 C

0

G

0

0

G

0

C

0 C

0

APPLICATIONS DES MATRICES ARBORESCENTES .

I - INTERPRETATION DE MATRICES EQUIVALENTES -

Soit un réseau R ayant pour matrice des noeuds $M = (a_{ij})$

Soit le réseau R° déduit de R par changement de numération des noeuds n_i et n_j : n_i est désigné maintenant par n_j

n_j est désigné par n_i

Sa matrice M° est telle que :

$$a^\circ_{hk} = a_{hk} \quad \text{pour } h \text{ et } k \neq i \text{ et } j .$$

$$\left[\begin{array}{l} a^\circ_{ih} = a_{jh} \\ a^\circ_{jh} = a_{ih} \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} a^\circ_{ki} = a_{kj} \\ a^\circ_{kj} = a_{ki} \end{array} \right.$$

Donc M° se déduit de M par la transformation définie au chapitre V .

Les réseaux R et R° sont physiquement identiques bien que leurs matrices M et M° soient différentes .

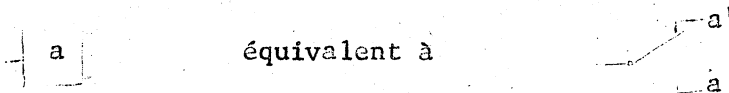
Une matrice M étant arborescente , une matrice M° équivalente à M ne l'est pas forcément .

2 - SYNTHESE D'UN RESEAU DE CRYOTRONS -

La contrainte e) du chapitre 3 montre qu'on ne peut pas utiliser n'importe quelle matrice arborescente , mais que si on part d'une forme lexicographique , alors on est certain que la matrice obtenue constitue bien la matrice des noeuds d'un réseau de cryotrons satisfaisant à toutes les conditions que nous nous sommes imposées au chapitre 3 .

A partir de la matrice des noeuds , le dessin du réseau de cryotrons se fait aisément surtout si on utilise la notation de SUSSENGUTH (Réf. 4) . Sa notation consiste à représenter par un carré un ensemble de deux cryotrons correspondant à un " contact

inverseur " ainsi que le montre le schéma suivant .



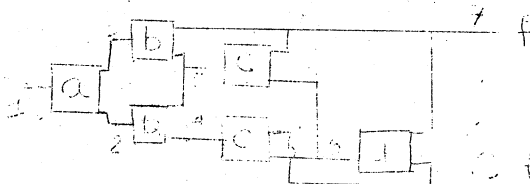
A titre d'exemple , traitons complètement le problème suivant :
construire le réseau réalisant la synthèse de la fonction f donnée par

$$f = a c d' + a'b c d' + a'b'$$

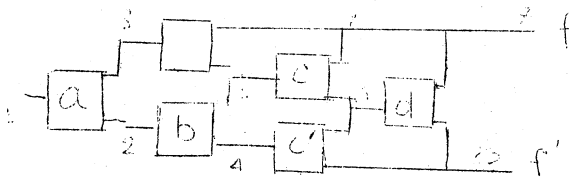
Choisissons l'ordre avb' c d . Nous obtenons facilement la matrice des noeuds suivante :

0	a	a'					
a	0		b	b'			
a'		0	b		b'		
	b		0		c		c'
	b'	b		0	c		c'
			c	c	0	d'	d
			b'		c'	d'	0
				c'		d	0

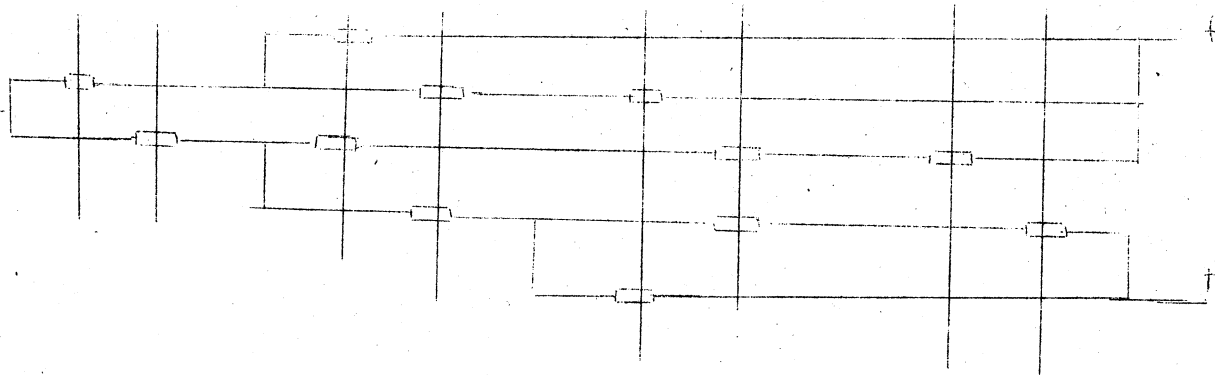
D'où le réseau théorique suivant :



Nous pouvons aussi le représenter par :



Et enfin le schéma définitif à cryotrons :



3 - APPLICATIONS POSSIBLE A UNE TECHNOLOGIE CONTACT-DIODE PARFAITE -

En vertu des lemmes concernant les mineurs des déterminants arborescents , si on calcule un mineur relatif à la première colonne et à la dernière ligne, les éléments situés en dessous de la diagonale principale du déterminant initial sont inutiles . Ceci signifie que les branches d'un réseau dont la matrice des noeuds est arborescente ne peuvent être parcourues entre l'entrée et la ou les sorties que dans un seul sens .

Si nous disposions d'une technologie dont l'élément de base serait constitué par un ensemble contact-diode parfaite , l'utilisation des matrices arborescentes permettrait de faire la synthèse des fonctions avec une telle technologie .

C O N C L U S I O N

Il reste , en vue de l'automatisation complète de la fabrication des circuits à cryotrons deux grands problèmes :

a - celui de la diminution des croisements des fils
inutiles

b - celui d'une théorie permettant le dessin automatique des caches .

B I B L I O G R A P H I E

De nombreux documents concernant les fonctions booléennes et leurs applications ont paru . Mais les publications vraiment intéressantes sont peu nombreuses , surtout en ce qui concerne le sujet que nous avons traité . Nous proposons donc les références suivantes :

- 1 - Cours de Monsieur KUNTZMANN (non encore publié)
- 2 - HOHN et SCHISSLER : " Boolean Matrices and the Design of Combinational Relay Switching Circuits "
B . S . T . J . Vol. 34 N° 1 PP 177 - 202 Janv. 1955
- 3 - YOELI : " The Théory of Switching Nets "
Special. suppl. to IRE TRANSACTIONS ON ELECTRONIC COMPUTERS - Vol. C T 6 PP 152 - 157 Mars 1959
- 4 - SUSSENGUTH : " An Algorithm for Automatic Design of Logical Cryogenic Circuits "
IRE TRANSACTIONS ON ELECTRONIC COMPUTERS PP 623-630
Dec. 1961
- 5 - GALLET et GAYET : " Supraconductivité et Cryoélectricité "
Documentation intérieure de la Compagnie des Machines BULL
- 6 - BREMER : " Superconductive Devices "
Mac Graw Hill Book Compagny 1962 .

T A B L E S D E S M A T I E R E S

I n t r o d u c t i o n	page 1
Chapitre 1 : Forme arborescente et lexicographique d'une fonction booléenne	page 2
Chapitre 2 : Chemins dans un réseau d'étoiles partiellement orienté	page 14
Chapitre 3 : Réseaux de cryotrons	page 28
Chapitre 4 : Déterminants arborescents	page 34
Chapitre 5 : Matrices arborescentes	page 41
Chapitre 6 : Applications des matrices arborescentes et conclusion	page 65
B i b l i o g r a p h i e	page 68

E R R A T A

- PAGE 9 8ème ligne à partir de la fin : "les deux dernières modifie"
- PAGE 18 7ème ligne " $\neq j$ représentent la somme".....
THEOREME : Le mineur D_{ji} du déterminant de la matrice $(N + I)$ est égal à la somme des chemins allant du noeud n_i au noeud n_j .
Si on adopte la simplification $a + ax = a$ (comme en algèbre de Boole) on n'obtient alors que des chemins simples.
- PAGE 20) Remplacer les 2 dernières lignes de la page 20 et les 2
PAGE 21) premières lignes de la page 21 par :
2 cas sont alors possibles :
a) Nous pouvons continuer de la sorte jusqu'à ce qu'il ne reste plus qu'une ligne et la 1ère colonne. Nous prendrons alors l'élément relatif à cette ligne et à la 1ère colonne et nous obtenons un chemin fermé de longueur $2n$.
b) Nous ne pouvons pas continuer de la sorte jusqu'à la fin car nous serions obligés de prendre prématurément l'élément de la 1ère colonne et de la ligne à utiliser s'il est $\neq 0$ ou sinon de modifier le choix des éléments précédents. Nous obtenons ainsi des chemins fermés de longueur inférieure à $2n$.
- PAGE 22 5ème ligne : du noeud i au noeud i
- PAGE 24 signe \neq
- PAGE 27 supprimer les 3 dernières lignes à partir de "contacts".
- PAGE 42 supprimer les 3 premières lignes.

PAGE 44 avant dernière ligne :

démonstration : nous décomposerons la matrice en 2 temps et ferons une démonstration par récurrence sur l'ordre n de la matrice. Le théorème est vrai pour $n = 2$.

PAGE 47 4ème ligne à partir de la fin :

La matrice M_1^0 ainsi obtenue redonne en complétant (par symétrie) en dessous de la diagonale une matrice M_1 arborescente.

PAGE 50 On peut faire une meilleure démonstration du théorème :

a) Si L_i et L_j sont identiques ou si $a_{ij} = 1$, faire une réduction sur 2 lignes L_i et L_j n'altère pas la possibilité de réduction sur (L_i, L_j) ou sur a_{ij} .

b) Si L_i, L_j, L_k sont identiques, l'ordre des réductions possibles n'intervient pas,

donc les réductions sont indépendantes et par conséquent l'ordre des réductions est sans importance et on arrive bien à une matrice irréductible unique.

PAGE 57 5ème ligne de la remarque :

"ceux qui finissent par a donnent les ordres les meilleurs".