



HAL
open science

Utilisation de quelques types de normes de vecteurs dans des méthodes itératives de résolution de systèmes linéaires

Gérard Schauer

► **To cite this version:**

Gérard Schauer. Utilisation de quelques types de normes de vecteurs dans des méthodes itératives de résolution de systèmes linéaires. Modélisation et simulation. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1962. Français. NNT: . tel-00278548

HAL Id: tel-00278548

<https://theses.hal.science/tel-00278548>

Submitted on 13 May 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre

T. H. E. S. E.

présentée à la Faculté des Sciences
de l'Université de Grenoble

pour obtenir

le titre de Docteur de Troisième Cycle

"MATHEMATIQUES APPLIQUEES"

par

Gérard SCHAUER

"UTILISATION DE QUELQUES TYPES DE NORMES DE VECTEURS

DANS DES METHODES ITERATIVES DE RESOLUTION DE

SYSTEMES LINEAIRES"

Thèse soutenue le 29 Septembre 1962 devant la Commission d'Examen

MM. KUNTZMANN, Président

GASTINEL
VAUQUOIS } Examineurs

N° d'ordre

T. H. E. S. E.

présentée à la Faculté des Sciences

de l'Université de Grenoble

pour obtenir

le titre de Docteur de Troisième Cycle

"MATHEMATIQUES APPLIQUEES"

par

Gérard SCHAUER

"UTILISATION DE QUELQUES TYPES DE NORMES DE VECTEURS

DANS DES METHODES ITERATIVES DE RESOLUTION DE

SYSTEMES LINEAIRES"

Thèse soutenue le 29 Septembre 1962 devant la Commission d'Examen

MM. KUNTZMANN, Président

GASTINEL
VAUQUOIS } Examineurs

FACULTE DES SCIENCES DE L'UNIVERSITE DE GRENOBLE

Doyens honoraires :

M. PORTRAT P.
M. MORET L., Membre de l'Institut

Doyen :

M. WEIL L.

Professeurs :

MM. NEEL L., Membre de l'Institut - Physique expérimentale
MOREL L. - Géologie et minéralogie
WOLFERS F. - Physique
DORIER A. - Zoologie
HEILMANN R. - Chimie organique
KRAVTCHENKO J. - Mécanique rationnelle
PARDE M. - Potamologie
BENOIT J. - Radioélectricité
CHENE M. - Chimie papetière
NOBECOURT P. - Micrographie papetière
BESSON J. - Chimie
WEIL L. - Thermodynamique
FELICI N. - Electrostatique
KUNTZMANN J. - Mathématiques appliquées
BARBIER R. - Géologie appliquée
SANTON L. - Mécanique des fluides
CHABAUTY C. - Calcul différentiel et intégral
OZENDA P. - Botanique
FALLOT M. - Physique industrielle
GOLVANI O. - Mathématiques
MOUSSA A. - Chimie nucléaire et radioactivité
TRAYNARD P. - Chimie générale
CRAYA A. - Hydrodynamique
SOUTIF M. - Physique générale
REEB G. - Statistiques mathématiques
REULOS R. - Théorie des champs
AYANT Y. - Physique approfondie
GALLISSOT F. - Mathématiques pures
Mlle UTZ E. - Mathématiques générales
MM. BLAMBERT M. - Mathématiques
BOUCHEZ R. - Physique nucléaire
LLIBOUTRY L. - Géophysique
MICHEL R. - Géologie et minéralogie
BONNIER E. - Electrochimie

Professeurs sans chaire :

- MM. SILBER R. - Mécanique des fluides
- DESSAUX G. - Physiologie animale
- MOUSSIEGT J. - Electronique
- PILLET E. - Electrotechnique
- BARBIER J.C. - Physique
- BUYLE-BODIN M. - Electronique
- PAUTHENET R. - Electrotechnique
- Mme KOFLER L. - Botanique

Maîtres de Conférences :

- MM. VAILLANT F. - Zoologie et hydrobiologie
- DREYFUS B. - Thermodynamique
- Mlle NAIM L. - Mathématiques
- MM. PERRET R. - Servomécanisme
- ARNAUD P. - Chimie
- Mme BARBIER M.J. - Electrochimie
- MM. BRISSONNEAU P. - Physique
- COHEN J. - Physique
- DEBELMAS J. - Géologie et minéralogie
- Mme SOUTIF J. - Physique
- MM. VAUQUOIS B. - Mathématiques appliquées
- DEPASSEL R. - Mécanique des fluides
- GERBER R. - Mathématiques
- ROBERT A. - Chimie papetière
- ANGLES d'AURIAC - Mécanique des fluides
- BIAREZ - Mécanique physique
- COUMES A. - Electronique
- DODU J. - Mécanique des fluides
- DUCROS P. - Minéralogie et cristallographie
- GIDON P. - Géologie et minéralogie
- GLENAT R. - Chimie
- HACQUES G. - Calcul numérique
- LANCIA R. - Physique automatique
- PEBAY-PEROULA - Physique
- GASTINEL - Chargé d'enseignement - Mathématiques appliquées
- LACAZE A. - Chargé d'enseignement - Thermodynamique.

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance :

à Monsieur KUNTZMANN, Directeur du Laboratoire de Calcul de l' Université de Grenoble, qui a bien voulu me faire l'honneur de présider le jury,

à Monsieur GASTINEL, maître de conférences, qui a dirigé ce travail, m'a toujours encouragé, et n'a ménagé ni sa peine, ni ses conseils, pour me permettre de le mener à bien, ce dont je le remercie tout particulièrement,

à Monsieur VAUQUOIS, maître de conférences, qui a accepté de faire partie du jury.

Je remercie également Mme LAISSUS à qui je dois la bonne présentation de ce travail, ainsi que Melle FIOG qui m'a facilité les essais réalisés sur ordinateur I.B.M. 7090.

C H A P I T R E I

GENERALITES SUR LES NORMES DE VECTEURS ET DE MATRICES

CONDITIONNEMENT D'UN SYSTEME LINEAIRE - DECOMPOSITION

D'UNE NORME - APPLICATION AUX PROCEDES ITERATIFS

-:-:-:-

A - DEFINITION [1]

Soit un espace vectoriel E . On appelle norme sur cet espace une application qui, à $x \in E$, fait correspondre $N(x) \in \mathbb{R}_+$ telle que :

- 1) $N(x) = 0$ est équivalent à $x = 0$
- 2) $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$
- 3) $N(x+y) \leq N(x) + N(y)$ x et y quelconques $\in E$

Soit $N(x)$ une norme sur E . Et soit $T(x)$ une application linéaire de E dans lui-même.

A $x \in E$ faisons correspondre $M(x) = N(T(x))$. C'est une application de E dans \mathbb{R}_+ .

Proposition I : Pour que $M(x)$ soit une norme sur E , il faut et il suffit que $T(x)$ ne soit pas singulière.

Proposition II: Pour que la norme $M(x)$ soit équivalente à $N(x)$, il faut et il suffit que $T(x)$ soit continue dans E (complet).

Proposition III. Si $T(x)$ est une application linéaire, continue et biunivoque d'un espace vectoriel normé et complet E sur lui-même et $N_1(x)$ et $N_2(x)$ deux normes équivalentes sur E , il existe deux constantes a et b telles que quelque soit $x \in E$. [1], [2], [3].

$$a N_1(x) \leq N_2(T(x)) \leq b N_1(x)$$

B - NORMES DE HOLDER. [1]

Soit un vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ et $\{x_i\}_{i=1,2,\dots,n}$ les composantes de x .

$$\text{Soit } \varphi_r(x) = \left(\sum_{i=1}^{i=n} |x_i|^r \right)^{1/r}$$

$\varphi_r(x)$ est la norme de Holder pour r .

Parmi ces normes, trois sont souvent utilisées en analyse numérique ; ce sont les normes correspondant aux valeurs de $r = 1, 2, \infty$.

$$1^\circ \varphi_1(x) = \sum_{i=1}^{i=n} |x_i|$$

$$2^\circ \varphi_2(x) = \left(\sum_{i=1}^{i=n} |x_i|^2 \right)^{1/2}$$

c'est la norme "Euclidienne"

$$\varphi_2(x) = \|x\| = \sqrt{x^T \cdot x}$$

$$3^\circ \varphi_\infty(x) = \text{Max } |x_i|$$

Pour ces normes, il est intéressant de connaître les nombres a et b tels que :

$$a \varphi_i(x) \leq \varphi_j(x) \leq b \varphi_i(x)$$

$$1^\circ \varphi_2(x) \leq \varphi_1(x) \leq \sqrt{n} \varphi_2(x) \quad ; \quad \varphi_\infty(x) \leq \varphi_1(x) \leq n \varphi_\infty(x)$$

$$2^\circ \frac{1}{\sqrt{n}} \varphi_1(x) \leq \varphi_2(x) \leq \varphi_1(x) \quad ; \quad \varphi_\infty(x) \leq \varphi_2(x) \leq \sqrt{n} \varphi_\infty(x)$$

$$3^\circ \frac{1}{n} \varphi_1(x) \leq \varphi_\infty(x) \leq \varphi_1(x) \quad ; \quad \frac{1}{\sqrt{n}} \varphi_2(x) \leq \varphi_\infty(x) \leq \varphi_2(x)$$

C - NORMES DE MATRICES. [1]

1°) DEFINITION

Soit \mathcal{M}_n l'espace vectoriel à n^2 dimensions des matrices carrées sur \mathbb{R} (ou \mathbb{C}).

On appelle norme sur \mathcal{M}_n une application $N(A)$ de \mathcal{M}_n dans \mathbb{R}_+ telle que :

$$1^\circ \quad N(A) = 0 \iff A = 0$$

$$2^\circ \quad N(\lambda A) = |\lambda| N(A) \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$3^\circ \quad N(A+B) \leq N(A) + N(B) \quad A \& B \in \mathcal{M}_n$$

$N(A)$ sera dite Norme multiplicative, d'après Ostrowski [7] si, aux trois conditions précédentes, s'ajoute la suivante :

$$4^\circ \quad N(A \cdot B) \leq N(A) \cdot N(B)$$

Théorème I : Toute norme multiplicative est une norme générale dans \mathcal{M}_n . [8]

Théorème II: Toutes les normes sur \mathcal{M}_n sont équivalentes. C'est-à-dire, qu'étant données deux normes $N_1(A)$ et $N_2(A)$, il existe deux constantes a et b telles que :

$$a N_1(A) \leq N_2(A) \leq b N_1(A)$$

Théorème III : Pour toute norme multiplicative $N(A)$ sur \mathcal{M}_n , on a $N(A) \geq \lambda_A$, si λ_A désigne la valeur propre de A de plus grande valeur absolue.

2°) EXEMPLES. [1]

a) Soient deux normes de vecteurs $\varphi_i(x)$ et $\varphi_j(x)$ sur \mathbb{R}^n , $x \in \mathbb{R}^n$, et soit A une matrice $\in \mathcal{M}_n$.

$$\text{Soit } S_{i,j}(A) = \max_{x \neq 0} \left(\frac{\varphi_i(Ax)}{\varphi_j(x)} \right)$$

Théorème IV : $S_{i,j}(A)$ est une norme de matrice sur M_n . De plus, si $i=j$, c'est une norme multiplicative.

En effet,

$$S_{i,j}(A) = 0 \Rightarrow \varphi_i(Ax) = 0 \Rightarrow A = 0 \quad \text{puisque}$$

x est quelconque

$$S_{i,j}(\lambda A) = \max_{x \neq 0} \left(\frac{\varphi_i(\lambda Ax)}{\varphi_j(x)} \right) \quad \text{or } \varphi_i(\lambda Ax) = |\lambda| \varphi_i(Ax)$$

$$S_{i,j}(\lambda A) = |\lambda| \max_{x \neq 0} \left(\frac{\varphi_i(Ax)}{\varphi_j(x)} \right) = |\lambda| S_{i,j}(A)$$

Enfin $\varphi_i((A+B)x) \leq \varphi_i(Ax) + \varphi_i(Bx)$ d'où

$$S_{i,j}(A+B) = \max_{x \neq 0} \left(\frac{\varphi_i((A+B)x)}{\varphi_j(x)} \right) \leq \max_{x \neq 0} \left(\frac{\varphi_i(Ax)}{\varphi_j(x)} \right) + \max_{x \neq 0} \left(\frac{\varphi_i(Bx)}{\varphi_j(x)} \right)$$

d'où :

$$S_{i,j}(A+B) \leq S_{i,j}(A) + S_{i,j}(B)$$

Donc $S_{i,j}(A) = \max_{x \neq 0} \left(\frac{\varphi_i(Ax)}{\varphi_j(x)} \right)$ est bien une norme.

Si $i = j$, on peut écrire :

$$\frac{\varphi_i(A.B.x)}{\varphi_i(x)} = \frac{\varphi_i(A.B.x)}{\varphi_i(Bx)} \cdot \frac{\varphi_i(Bx)}{\varphi_i(x)}$$

$$\max_{x \neq 0} \left(\frac{\varphi_i(A.B.x)}{\varphi_i(x)} \right) \leq \max_{x \neq 0} \left(\frac{\varphi_i(A.B.x)}{\varphi_i(Bx)} \right) \cdot \max_{x \neq 0} \left(\frac{\varphi_i(Bx)}{\varphi_i(x)} \right)$$

Soit $S_{i,i}(A.B) \leq S_{i,i}(A) \cdot S_{i,i}(B)$

Donc $S_{i,i}(A)$ est une norme multiplicative.

b) On peut étendre les normes de Holder aux normes de matrices.
On obtient ainsi, correspondant à φ_1 , φ_2 et φ_∞ ,
si $A = (a_{ij})$ matrice d'ordre n .

$$N_1 = \sum_{i,j} |a_{i,j}| \quad ; \quad N_2 = \sum_{i,j} |a_{i,j}|^2 \quad ; \quad N_\infty = \max_{i,j} |a_{i,j}|$$

D - CONDITIONNEMENT D'UN SYSTEME LINEAIRE

1°) NOTION DE CONDITIONNEMENT

Considérons les deux systèmes de trois équations à trois inconnues suivants :

$$\text{I} \quad \begin{cases} 2x + 3y - z = 5 & x = 1 \\ 2x + 3y - 0,999\ 99\ z = 5,000\ 03 & \text{solution} : \quad y = 2 \\ 2,000\ 03\ x + 3y - z = 5,000\ 03 & z = 3 \end{cases}$$

$$\text{II} \quad \begin{cases} 2x + 3y - z = 5 & x = 4 \\ 2x + 3,000\ 01\ y - z = 5,000\ 03 & \text{solution} : \quad y = 3 \\ 2,000\ 01\ x + 3y - z = 5,000\ 04 & z = 12 \end{cases}$$

En posant $\varepsilon_{ij} = A_i X_j - b_i$ où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $i, j=1$ ou 2 suivant le système et la solution considérés, nous avons :

$$\varepsilon_{12} = \begin{pmatrix} 0 \\ -0,000\ 09 \\ -0,000\ 09 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \varepsilon_{21} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,000\ 01 \\ 0,000\ 03 \end{pmatrix}$$

On appelle ε_{ij} vecteur résiduel, et l'on dit que de tels systèmes sont "mal conditionnés". En effet, deux vecteurs, bien qu'assez "éloignés", peuvent être considérés comme des solutions des deux systèmes parce que les éléments des vecteurs résiduels sont très faibles et peuvent être considérés comme identiques à zéro par un calculateur électronique. On voit ainsi qu'une méthode itérative peut aussi bien converger vers l'une des deux solutions quel que soit le système considéré.

Différentes définitions du conditionnement d'un système linéaire ont été données par Turing [9], Lonseth [10], Todd [11], Von Neumann et Goldstine [12]. Nous utiliserons dans tout ce qui va suivre la définition donnée par Gastinel [13].

2°) DEFINITION GENERALE

Soit E un espace vectoriel topologique, normé et complet. Soient $N_1(x)$ et $N_2(x)$ deux normes équivalentes sur E . Soit T une application de E dans lui-même, satisfaisant en un point x_0 à la propriété suivante :

(P) : Il existe un voisinage V_0 de x_0 , tel que, pour tout $x \in V_0$, on peut trouver deux nombres positifs P_1 et P_2 tels que :

$$P_1 \leq \frac{N_1(T(x) - T(x_0))}{N_2(x - x_0)} \leq P_2$$

Définition : On appelle conditionnement général d'une équation $T(x) = T(x_0)$, T étant une application de E dans lui-même satisfaisant à la propriété P, pour x_0 et relativement aux normes $N_1(x)$ et $N_2(x)$, le rapport

$$\frac{P_1}{P_2}$$

Si T est une application linéaire et non singulière, la propriété (P) est toujours satisfaite, et les nombres P_1 et P_2 ne dépendent pas de x_0 , d'après la proposition III exposée au paragraphe A.

Soit $\gamma_{i,j}(A)$ le conditionnement d'une matrice A non singulière relativement aux normes $\varphi_i(x)$ et $\varphi_j(x)$. Et soit x_0 la solution exacte du système $Ax = b$.

$$\text{Si } P_1 \leq \frac{\varphi_i(A(x) - A(x_0))}{\varphi_j(x - x_0)} \leq P_2$$

nous aurons :

$$\gamma_{i,j}(A) = \frac{P_1}{P_2}$$

$$P_2 = \text{Max} \left(\frac{\varphi_i(A(x-x_0))}{\varphi_j(x-x_0)} \right) = S_{i,j}(A), \text{ et } S_{i,j}(A) \text{ est une norme de matrice.}$$

Soit

$$y = A(x-x_0), \quad \frac{1}{P_1} = \text{Max} \left(\frac{\varphi_j(x-x_0)}{\varphi_i(A(x-x_0))} \right) \\ = \text{Max} \left(\frac{\varphi_j(A^{-1}y)}{\varphi_i(y)} \right) = S_{ji}(A^{-1})$$

$$\text{d'où } \boxed{\gamma_{ij}(A) = \frac{1}{S_{ij}(A) \cdot S_{ji}(A^{-1})}}$$

Nous avons vu que, si $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_\infty(x)$ sont les normes de Holder, nous avons les inégalités :

$$(1) \quad \frac{1}{\sqrt{n}} \varphi_1(x) \leq \varphi_2(x) \leq \varphi_1(x) \text{ et } \varphi_2(x) \leq \varphi_1(x) \leq \sqrt{n} \varphi_2(x) \quad (2)$$

De (1), nous pouvons écrire :

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\varphi_1(Ax)}{\varphi_2(x)} \leq \frac{\varphi_2(Ax)}{\varphi_2(x)} \leq \frac{\varphi_1(Ax)}{\varphi_2(x)}$$

$$\text{Soit : } \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{s_{21}(A^{-1})} < \frac{1}{s_{22}(A^{-1})} \leq s_{22}(A) \leq s_{12}(A)$$

d'où :

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{s_{21}(A^{-1}) \cdot s_{12}(A)} \leq \frac{1}{s_{22}(A^{-1}) \cdot s_{22}(A)}$$

Soit :

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \gamma_{12}(A) \leq \gamma_{22}(A)$$

De même de (2), nous avons :

$$\frac{\varphi_2(Ax)}{\varphi_2(x)} \leq \frac{\varphi_1(Ax)}{\varphi_2(x)} \leq \sqrt{n} \frac{\varphi_2(Ax)}{\varphi_2(x)}$$

Soit :

$$\frac{1}{s_{22}(A^{-1})} < \frac{1}{s_{21}(A^{-1})} \leq s_{12}(A) \leq \sqrt{n} s_{22}(A)$$

Soit :

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{s_{22}(A^{-1}) s_{22}(A)} \leq \frac{1}{s_{21}(A^{-1}) \cdot s_{12}(A)}$$

$$\text{ou } \frac{1}{\sqrt{n}} \gamma_{22}(A) \leq \gamma_{12}(A)$$

d'où :

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \gamma_{22}(A) \leq \gamma_{12}(A) \leq \sqrt{n} \gamma_{22}(A) \quad (3)$$

De même, des inégalités (4) et (5) ci-dessous :

$$(4) \quad \varphi_{\infty}(x) \leq \varphi_2(x) \leq \sqrt{n} \varphi_{\infty}(x) \quad \frac{1}{\sqrt{n}} \varphi_2(x) \leq \varphi_{\infty}(x) \leq \varphi_2(x)$$

nous obtenons l'inégalité (6) relative au conditionnement d'une matrice A donnée par rapport aux normes $\varphi_{\infty}(x)$ et $\varphi_2(x)$.

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \gamma_{22}(A) \leq \gamma_{\infty 2}(A) \leq \sqrt{n} \gamma_{22}(A) \quad (6)$$

Mais, comme nous le verrons plus loin, il ne faut surtout pas conclure de la similitude des inégalités (3) et (6) que les conditionnements d'une matrice A donnée, relatifs aux normes $\varphi_1(x)$ et $\varphi_2(x)$ et aux normes $\Phi_1(x)$ et $\Phi_2(x)$ soient les mêmes. Ils varient entre les mêmes limites, mais pas obligatoirement de la même manière.

3°) INTERPRETATION GEOMETRIQUE

Dans ce qui suit nous étudierons le rapport $\frac{\Phi_1(Ax)}{\Phi_2(x)}$

$\Phi_1(Ax)$ étant une norme de vecteur sur R^n et $\Phi_2(x)$ la norme euclidienne.

Toutes les normes de vecteurs étant équivalentes, il existe deux nombres a et b tels que :

$$a \leq \frac{\Phi_1(Ax)}{\Phi_2(x)} \leq b$$

Si donc $\Phi_2(A)$ est le conditionnement de la matrice A relatif aux normes $\Phi_1(x)$ et $\Phi_2(x)$, nous avons :

$$\Phi_2(A) = \frac{a}{b}$$

Soit B_i le lieu des points x tels que $\Phi_1(Ax) \leq 1$; soit π_i la frontière de B_i . π_i est le lieu des points x tels que $\Phi_1(Ax) = 1$.

Pour étudier le rapport $\frac{a}{b}$, déplaçons le point x sur π_i . Nous aurons ainsi :

$$a = \min \frac{1}{\|x\|} = \frac{1}{D_M}$$

D_M est la distance maximum d'un point de π_i à l'origine,

$$\text{et } b = \text{Max} \frac{1}{\|x\|} = \frac{1}{d_m}$$

d_m est la distance minimum d'un point de π_i à l'origine.

La boule B_i est un corps symétrique ayant pour centre d'axe de symétrie l'origine. Les boules B_i que nous allons étudier par la suite sont ^{le plus souvent} des polyèdres convexes, c'est-à-dire que la frontière π_i de B_i est constituée par des faces planes qui appartiennent aux plans ayant des équations telles que la condition :

$$\Phi_i(Ax) = 1 \quad \text{soit satisfaite.}$$

Ainsi, si $\Phi_i(x) = \varphi_1(x)$ norme de Holder, l'équation d'un plan P sera :

$$\sum_{i=1}^{i=n} \varepsilon_i \left| \sum_{k=1}^{k=n} a_{ik} \cdot x_k \right| = 1 \quad \varepsilon_i = \pm 1$$

Et si $\Phi_i(x) = \varphi_2(x)$, l'équation générale d'un tel plan sera

$$\left| \sum_{k=1}^{k=n} a_{ik} x_k \right| = 1$$

E - APPLICATION A CERTAINS PROCÉDES ITERATIFS POUR LA RESOLUTION DES SYSTEMES LINEAIRES. [4]

Soit un système linéaire $Ax = y$ de n équations à n inconnues. A : matrice non singulière, x et y appartiennent à R^n . Nous appellerons ω le vecteur solution de ce système.

Chaque équation du système définit un hyper-plan (ou plan). Le point ω est le point commun aux n hyper-plans définis par le système.

Soit x_0 un vecteur de R^n .

$r(x_0) = Ax_0 - y$ est dit "vecteur résidu" en x_0 .

$r(x_0) = 0$ si, et seulement si, $x_0 = \omega$.

Si $x_0 \neq \omega$, et si φ_2 est la norme euclidienne sur R^n , nous nous proposerons d'obtenir un vecteur x_1 tel que

$$\varphi_2(r(x_1)) \leq \varphi_2(r(x_0))$$

On dit que le vecteur x_1 est plus près de la solution ω que x_0 au sens de cette norme.

Pour définir ω nous disposerons des n plans :

$$f_1(x) \equiv A_1 x - y_1 = 0$$

$$f_2(x) \equiv A_2 x - y_2 = 0$$

.....

$$f_i(x) \equiv A_i x - y_i = 0$$

.....

$$f_n(x) \equiv A_n x - y_n = 0$$

Mais on peut obtenir d'autres plans en remplaçant une des équations ci-dessus par une combinaison linéaire de celles-ci. Si z est un vecteur colonne quelconque, $z \in \mathbb{R}^n$

$$z^T (Ax - y) = 0 \quad \text{est l'équation d'un plan passant par } \omega.$$

La norme euclidienne $\|x\|$ est la seule à posséder cette propriété qu'il est immédiat de trouver dans un plan arbitraire passant par ω un point x_1 plus rapproché, au sens de cette norme, de ω . Ce point est la projection orthogonale de x_0 sur ce plan.

Il serait intéressant de pouvoir définir une norme qui ne serait pas la norme euclidienne et qui aurait la propriété de nous permettre d'obtenir un point x_1 plus proche, dans le sens de cette norme, de ω que x_0 , mais aussi que x_1 , projection orthogonale de x_0 sur le plan ... [5]

Mais, en attendant de pouvoir définir une telle norme, soit x_1 la projection orthogonale de x_0 sur le plan :

$$z^T \cdot (Ax - y) = 0$$

Ce plan est perpendiculaire au vecteur $A^T \cdot z$, donc x_1 doit être tel qu'il existe un scalaire λ tel que :

$$x_1 = x_0 + \lambda \cdot A^T \cdot z$$

mais, comme x_1 est dans le plan, nous avons :

$$z^T \cdot (A x_1 - y) = 0$$

$$\text{soit } z^T \cdot (A \cdot x_0 + \lambda \cdot A \cdot A^T \cdot z - y) = 0$$

$$\text{d'où } \lambda = - \frac{z^T \cdot (A \cdot x_0 - y)}{z^T \cdot A \cdot A^T \cdot z}$$

$$\text{ou } \lambda = - \frac{z^T \cdot r(x_0)}{\|A^T \cdot z\|^2}$$

par suite

$$x_1 = x_0 - \frac{z^T \cdot r(x_0)}{\|A^T \cdot z\|^2} \cdot A^T \cdot z \quad (1)$$

F - DECOMPOSITION D'UNE NORME. [4]

Définition : Nous dirons qu'une norme φ a été décomposée si l'on a pu trouver une application z faisant correspondre à $x \in \mathbb{R}^n \longrightarrow z(x) \in \mathbb{R}^n$, telle que l'on ait, quel que soit x :

$$\varphi(x) = z^T(x) \cdot x$$

De plus, la décomposition est dite "bornée" si $\|z(x)\| \leq K$, $K > 0$ pour tout x .

Exemples de décompositions de normes pour les normes de Holder.

$$1^\circ) \varphi_1(x) = \sum_{i=1}^{i=n} |x_i|$$

$$= z^T(x) \cdot x$$

avec

$$z(x) = \begin{pmatrix} \text{sign}(\{1\}) \\ \text{sign}(\{2\}) \\ \vdots \\ \text{sign}(\{n\}) \end{pmatrix}$$

où la fonction $\text{sign}(\{i\})$ est définie par :

$$\text{sign}(\{i\}) = +1 \quad \text{si } \{i\} \geq 0$$

$$\text{sign}(\{i\}) = -1 \quad \text{si } \{i\} < 0$$

$$2^\circ) \varphi_\infty(x) = \text{Max}_{i=1,2,\dots,n} |\{i\}| = z^T(x) \cdot x$$

avec

$$z(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \text{sign}(\{i\}) \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad |\{i\}| = \text{Max}_{j=1,\dots,n} |\{j\}|$$

$$3^\circ) \varphi_2(x) = \|x\|$$

$$= \frac{x^T \cdot x}{\|x\|} = z^T(x) \cdot x$$

$$\text{avec } z(x) = \frac{x}{\|x\|}$$

4°) Pour les normes de Holder

$$\varphi_1(x) = \left(\sum_{i=1}^{i=n} |\{i\}|^r \right)^{1/r} \quad r \geq 1$$

on peut écrire $\varphi_r(x) = z^T(x) \cdot x$

avec

$$z(x) = \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^n \left| \left\{ \begin{matrix} r \\ i \end{matrix} \right\} \right|^r \right)^{\frac{1}{r}}} \begin{cases} \text{sign} \left(\left\{ \begin{matrix} r \\ 1 \end{matrix} \right\} \right) \cdot \left| \left\{ \begin{matrix} r \\ 1 \end{matrix} \right\} \right|^{r-1} \\ \text{sign} \left(\left\{ \begin{matrix} r \\ 2 \end{matrix} \right\} \right) \cdot \left| \left\{ \begin{matrix} r \\ 2 \end{matrix} \right\} \right|^{r-1} \\ \dots \\ \text{sign} \left(\left\{ \begin{matrix} r \\ n \end{matrix} \right\} \right) \cdot \left| \left\{ \begin{matrix} r \\ n \end{matrix} \right\} \right|^{r-1} \end{cases}$$

Plus généralement, on sait [6] que si B est une matrice symétrique définie positive, $\sqrt{x^T B x} = \varphi(x)$ est une norme. En remarquant que $x^T \cdot B \cdot x = (Bx)^T \cdot x$, on voit que :

$$\varphi(x) = z^T(x) \cdot x \quad \text{avec} \quad z(x) = \frac{B x}{\sqrt{x^T B x}}$$

G - PROCÉDE ITERATIF ASSOCIE A UNE DECOMPOSITION D'UNE NORME

1°) Soit $\varphi(x)$ une norme sur R^n , et une application z de R^n dans lui-même, telle que :

$$\varphi(x) = z^T(x) \cdot x$$

Nous avons un procédé qui permet de faire correspondre à x_0 un plan passant par (0) : celui qui correspond à la valeur $z(r(x_0))$ de z.

D'après (1) nous aurons :

$$(2) \quad x_1 = x_0 - \frac{\varphi(r(x_0))}{\|A^T \cdot z(r(x_0))\|^2} \cdot A^T \cdot z(r(x_0))$$

2°) Convergence du procédé [4]

Soit (3)
$$x_n = x_{n-1} - \frac{\varphi(r(x_{n-1}))}{\|A^T \cdot z(r(x_{n-1}))\|^2} \cdot A^T \cdot z(r(x_{n-1}))$$

ou
$$x_n = x_{n-1} - \varphi(A(x_{n-1} - \omega)) \cdot \frac{V(x_{n-1})}{\|V(x_{n-1})\|^2}$$

en posant
$$V(x_{n-1}) = A^T \cdot z(r(x_{n-1}))$$

A cause de l'orthogonalité, nous pouvons écrire :

(4)
$$\begin{aligned} \|\omega - x_n\|^2 &= \|\omega - x_{n-1}\|^2 - \|x_n - x_{n-1}\|^2 \\ &= \|\omega - x_{n-1}\|^2 \cdot [1 - L(x_{n-1})] \end{aligned}$$

en posant

$$L(x_{n-1}) = \frac{\varphi^2(A(x_{n-1} - \omega))}{\|x_{n-1} - \omega\|^2} \cdot \frac{1}{\|V(x_{n-1})\|^2}$$

Si $m_a = \min \frac{\varphi(A(x_{n-1} - \omega))}{\|x_{n-1} - \omega\|}$ on a $L(x_{n-1}) \geq \frac{m_a^2}{\|V(x_{n-1})\|^2}$

D'autre part :

$$\|V(x_{n-1})\|^2 = \|A^T z(r(x_{n-1}))\|^2 \leq N^2(A^T) \cdot \|z(r(x_{n-1}))\|^2 \leq N^2(A) \cdot K^2$$

$$N^2(A) = \sum_{ij} a_{ij}^2 \quad \text{et, en supposant } \|z(x)\| \leq K$$

Or, les normes de matrices sur R^n étant équivalentes,

si $M_A = \max \frac{\varphi(Ax)}{\|x\|}$ il existe une constante R telle que

$$N(A) \leq R \cdot M_A$$

d'où

$$\|V(x_{n-1})\|^2 \leq K^2 \cdot R^2 \cdot M_A^2 = k^2 \cdot M_A^2$$

soit

$$L(x_{n-1}) \geq \frac{1}{k^2} \cdot \left(\frac{m_A}{M_A}\right)^2$$

où $m_A \leq \frac{\varphi(Ax)}{\|x\|} \leq M_A$ et si γ est le conditionnement de A relatif aux normes $\varphi(x)$ et $\|x\|$

nous avons

$$L(x_{n-1}) \geq \frac{1}{k^2} \cdot \gamma^2$$

de (4) nous pouvons écrire :

$$\|\omega - x_n\| \leq \|\omega - x_{n-1}\| \cdot \sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{k^2}}$$

$$\text{soit } \|\omega - x_n\| \leq \|\omega - x_0\| \cdot \left(\sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{k^2}}\right)^n$$

Tout procédé itératif associé à une décomposition d'une norme sur R^n , avec $\|z(x)\|$ borné sera convergent.

H - CONCLUSION

Nous nous proposons dans ce qui suit de définir de nouvelles normes de vecteurs, d'étudier le conditionnement d'une matrice relatif à ces normes et à la norme euclidienne, et d'essayer sur machine les procédés itératifs obtenus lorsqu'une amélioration de conditionnement a été obtenue.

C H A P I T R E II

N O R M E S D E V E C T E U R S

A - N O R M E C O M P O S E E D ' U N E S P A C E V E C T O R I E L

I - D E F I N I T I O N

Soit E un espace vectoriel, soit $X \in E$ et soient n normes $\varphi_i(X)$ de vecteurs sur E . Soit, de plus $\Phi(u)$ une norme de vecteur sur R_+^n .

$$u = \begin{pmatrix} \varphi_1(X) \\ \varphi_2(X) \\ \vdots \\ \varphi_n(X) \end{pmatrix} \quad u \in R_+^n$$

Posons $N(X) = \Phi(u) = \Phi(\varphi_1(X), \varphi_2(X), \dots, \varphi_n(X))$
L'application qui fait correspondre à
 $X \in E \rightarrow N(X) \in R_+$ est-elle une norme ?

$$1^\circ) N(X) = 0 \iff \Phi(u) = 0 \iff u = 0 \iff \varphi_1(X) = 0 \iff X=0$$

$$\begin{aligned} 2^\circ) N(\lambda X) &= \Phi(\varphi_1(\lambda X), \varphi_2(\lambda X), \dots, \varphi_n(\lambda X)) \\ &= \Phi(|\lambda| \cdot \varphi_1(X), |\lambda| \cdot \varphi_2(X), \dots, |\lambda| \cdot \varphi_n(X)) \\ &= \Phi(|\lambda|, u) = |\lambda| \cdot \Phi(u) \\ &= |\lambda| N(X) \end{aligned}$$

3°) Soient deux vecteurs X et Y appartenant à E.

$$\varphi_i(X+Y) \leq \varphi_i(X) + \varphi_i(Y)$$

$$N(X+Y) = \Phi(\varphi_1(X+Y), \varphi_2(X+Y), \dots, \varphi_n(X+Y))$$

Si $\Phi(u)$ est une fonction monotone, non décroissante, des composantes du vecteur u, nous pouvons écrire :

$$\text{si } V = \begin{pmatrix} \varphi_1(Y) \\ \varphi_2(Y) \\ \vdots \\ \varphi_n(Y) \end{pmatrix} \quad \text{et si } W = \begin{pmatrix} \varphi_1(X+Y) \\ \varphi_2(X+Y) \\ \vdots \\ \varphi_n(X+Y) \end{pmatrix} \quad \Phi(W) \leq \Phi(u+V)$$

$$N(X+Y) = \Phi(W) \leq \Phi(u+V) \leq \Phi(u) + \Phi(V) = N(X) + N(Y)$$

$$N(X+Y) \leq N(X) + N(Y)$$

Théorème II : Soit E un espace vectoriel $\varphi_i(X_i)$, ($i=1, \dots, n$) n normes de vecteurs sur E,

$u \in R_+^n$ un vecteur ayant pour composantes les

$\varphi_i(X_i) \in R_+$. L'application N(X) qui fait correspondre à $X \in E$ $N(X) = \Phi(u) \in R$,

($\Phi(u)$ étant une norme de vecteur sur R_+^n , et une

fonction monotone non décroissante des composantes du vecteur u) est une norme sur E.

II - EXEMPLES

I° Norme sur R^n , somme de normes sur R^n .

1°) Définition

$$\text{Soit } \Phi(X) = \sum_{i=1}^p \alpha_i \varphi_i(X)$$

$\alpha_i \in R_+$ coefficient quelconque

$\Phi(X)$ est une norme sur R^n si $X \in R^n$ et si les $\varphi_i(X)$ sont des normes sur R^n ($i=1, \dots, p$)

Si $u = \Phi(X)$ et $u_i = \varphi_i(X)$, nous avons

$$u = \sum_{i=1}^p \alpha_i u_i \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial u_i} > 0$$

2°) Décomposition

Soit $z_i(X)$ un vecteur de R^n qui nous permet de décomposer la norme $\varphi_i(X)$

$$\varphi_i(X) = z_i^T(X) \cdot X$$

Construisons $z(X) = \sum_{i=1}^p \alpha_i z_i(X)$, c'est un

vecteur de R^n .

$$z^T(X) \cdot X = \sum_{i=1}^p \alpha_i z_i^T(X) \cdot X$$

$$= \sum_{i=1}^p \alpha_i \varphi_i(X) = \Phi(X)$$

$z(X)$ ainsi défini nous permet donc de décomposer

$\Phi(X)$. De plus, si $\|z_i(X)\|$ est borné, nous aurons

$$\|z_i(X)\| \leq k_i \quad \text{d'où} \quad \|z(X)\| = \left\| \sum_{i=1}^n z_i(X) \right\| \leq \sum_{i=1}^n \|z_i(X)\|$$

$$\text{d'où} \quad \|z(X)\| \leq \sum_{i=1}^n k_i \leq K$$

$\|z(X)\|$ est aussi borné.

3°) Normes particulières

$$1- \Phi_1(X) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(X) \quad \text{avec} \quad \varphi_i(X) = \varphi_1(X)$$

quel que soit i .

$\varphi_1(X)$ norme de Holder

$$\Phi_1(X) = \varphi_1(X)$$

$$2- \Phi_2(X) = \varphi_2(X)$$

$$3- \Phi_n(X) = \varphi_n(X)$$

Nous voyons qu'en choisissant tous les φ_i égaux, nous multiplions la norme de Holder correspondant par une constante.

4°) Conditionnement

Pour simplifier les calculs, nous allons étudier le conditionnement ^{relatif à la matrice-unité} dans le cas particulier d'une norme sur \mathbb{R}^2 très simple.

$$\text{Soit} \quad \Phi(X) = \varphi_1(X) + \varphi_2(X)$$

En effet, étudions la boule B_1 , lieu des X tels que $\Phi(X) \leq 1$

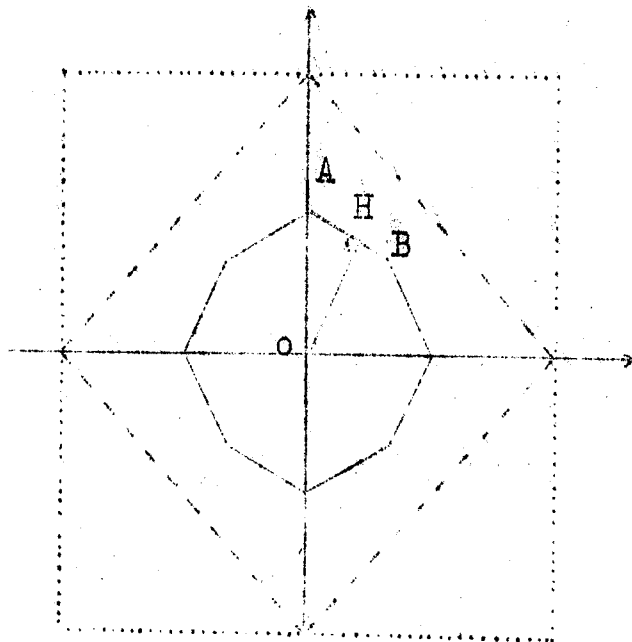


Figure 1

En pointillé (voir figure 1), nous avons le lieu des points tels que $\text{Max} (|x_1|, |x_2|) = 1$

En tirets, nous avons le lieu des points tels que $|x_1| + |x_2| = 1$, et en traits pleins, celui des points tels que :

$$|x_1| + |x_2| + \text{Max} (|x_1|, |x_2|) = 1$$

Nous voyons que nous obtenons un octogone irrégulier dont les sommets les plus éloignés de l'origine sont ceux tels que A qui sont placés sur les axes, et les moins éloignés, ceux tels que B, qui correspondent au cas où $|x_1| = |x_2|$

$$OA = \frac{1}{2} \quad \text{si} \quad x_1 = 0 \quad x_2 = \frac{1}{2}$$

$$OB = \frac{\sqrt{2}}{3} \quad \text{si} \quad x_1 = x_2 = \frac{1}{3}$$

Nous voyons que, par rapport aux normes $\varphi_1(X)$ et $\varphi_2(X)$ le conditionnement est déjà légèrement amélioré.

Or nous pourrions le rendre encore meilleur en éloignant de l'origine les sommets tels que B, de façon à ce que $OA = OB$. Pour cela, nous allons modifier un peu la norme $\varphi(X)$.

Soit $\Phi(X) = \alpha_1 \varphi_1(X) + \alpha_2 \varphi_2(X)$ C'est encore une norme.

$$\alpha_1 \text{ et } \alpha_2 \in \mathbb{R}_+$$

$$\text{Nous allons avoir : } OA = \frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2} \quad \text{et} \quad OB = \frac{\sqrt{2}}{2\alpha_1 + \alpha_2}$$

$$\text{Soit, en posant } OA = OB, \quad 2\alpha_1 + \alpha_2 = \sqrt{2} (\alpha_1 + \alpha_2)$$

D'où, en choisissant $\alpha_1 = 1$ et $\alpha_2 = 2$, nous aurons

$$\frac{OH}{OA} = \cos \frac{\pi}{8} > \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Nous voyons donc que dans ce cas très particulier la norme

$$\Phi(X) = \varphi_1(X) + \sqrt{2} \varphi_2(X) \text{ aura un conditionnement}$$

légèrement amélioré puisque, nous l'avons vu, celui-ci est égal au rapport de la plus petite distance d'un point de la surface de B_1 à l'origine et de la plus grande distance.

Voyons ce qui se passe dans \mathbb{R}^3 . La figure 2 ne représente qu'un huitième du lieu des points tels que $\Phi(X) \leq 1$. En effet, la figure étant symétrique par rapport à l'origine, il nous suffit de l'étudier pour $x_1 \geq 0$.

En posant $x_1 = 0$, nous retrouvons le problème précédent et si nous choisissons $\Phi(X) = \varphi_1(X) + \sqrt{2} \varphi_2(X)$, nous savons que les points A et B sont équidistants de l'origine et tels que

$$OA = OB = \frac{1}{1 + \sqrt{2}}$$

Le sommet C est équidistant des plans de coordonnées, c'est-à-dire que nous avons $x_1 = x_2 = x_3 = x$, soit

$$\Phi(X) = 3x + \sqrt{2} \cdot x$$

$$\text{soit } x(3 + \sqrt{2}) = 1 \quad \text{d'où} \quad x = \frac{1}{3 + \sqrt{2}} \quad \text{et} \quad OC = \frac{\sqrt{3}}{3 + \sqrt{2}}$$

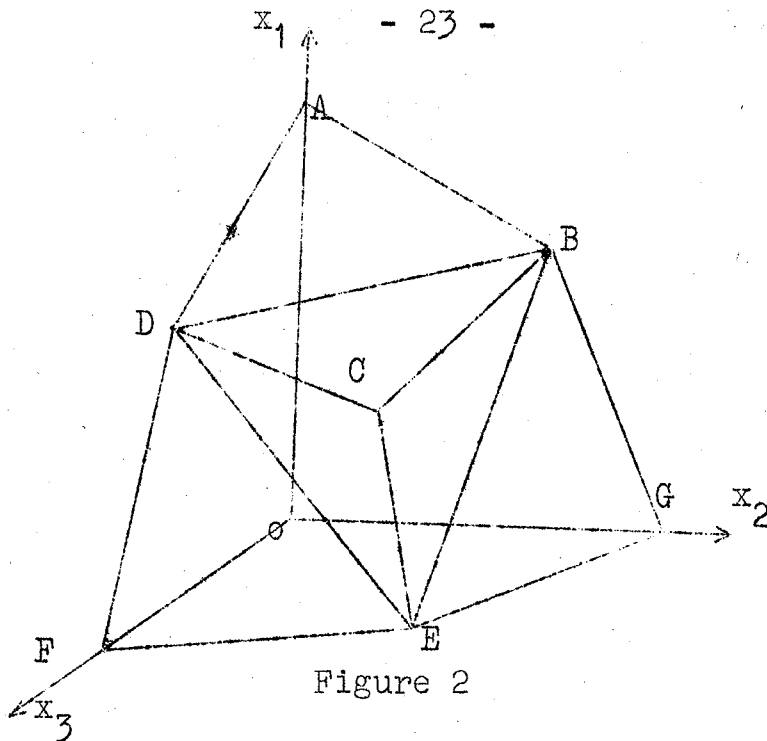


Figure 2

Nous voyons que les sommets tels que C sont plus proches de l'origine que les sommets A ou B. Il n'est pas possible de pouvoir trouver deux valeurs pour α_1 et α_2 telles que les sommets A, B et C soient équidistants de l'origine. Aussi, est-ce la norme $\Phi(X) = \varphi_1(X) + \sqrt{2} \cdot \varphi_\infty(X)$ que nous allons étudier, dans l'espace R^n .

La boule telle que $\Phi(X) \leq 1$ est un polyèdre convexe, symétrique par rapport à l'origine et tel que ses sommets les plus éloignés de l'origine seront tels que $OA = \frac{1}{1 + \sqrt{2}}$

En effet, si $x_i = 0$ pour $i = 1, 2, \dots, j-1, j+1, \dots, n$

$$\Phi(X) = |x_j| + \sqrt{2} |x_j| = 1 \quad \text{d'où} \quad |x_j| = \frac{1}{1 + \sqrt{2}}$$

Les sommets les plus proches seront ceux tels que C dans le cas où $x_i = x$ quel que soit $i = 1, \dots, n$

d'où

$$\Phi(X) = n \cdot |x| + \sqrt{2} \cdot |x| = 1 \quad \text{d'où} \quad |x| = \frac{1}{n + \sqrt{2}}$$

$$\text{soit } OC = \frac{\sqrt{n}}{n + \sqrt{2}}$$

Nous voyons que lorsque n croît, OC décroît, c'est-à-dire que le point C se rapproche de plus en plus de l'hyperplan (BDE dans R^3). Lorsque n tend vers l'infini, OC tend vers $1/\sqrt{n}$ et deviendrait le point de la surface de la boule le plus proche de l'origine, c'est-à-dire que le conditionnement sera toujours supérieur à

$$\frac{OC}{OA} = \frac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n}}$$

d'où une amélioration certaine.

Nous avons ainsi défini une norme de vecteur sur R^n telle que le conditionnement de la matrice unité relatif à cette norme et à la norme euclidienne est meilleur que celui relatif aux normes de Holder dont nous nous servons pour la construire. Bien entendu, nous avons étudié ce conditionnement pour la matrice unité et il est possible que la transformée

par une matrice A de la boule $B_{\mathbb{P}}$ que nous venons d'étudier soit telle que l'amélioration du conditionnement soit moins bonne ou supérieure.

5°) Essais

Nous avons effectué deux sortes d'essais, les premiers avec la matrice du potentiel qui est une matrice creuse, les seconds avec une matrice pleine, dont les éléments sont quelconques. Tous les essais ont été faits avec des matrices d'ordre 25. Le vecteur solution a été arbitrairement choisi et il est tel que $x_i = i$. Le vecteur second membre a été calculé à partir de la matrice du premier membre et du vecteur-solution, puis, connaissant ainsi le vecteur-second membre nous avons appliqué la méthode itérative pour retrouver le vecteur-solution.

Tous les essais ont été faits sur ordinateur I.B.M. 7090 en langage FORTRAN.

Ayant construit la norme $\Phi(X)$ à partir des deux normes de Holder $\varphi_1(x)$ et $\varphi_\infty(x)$, nous avons comparé la méthode itérative relative à $\Phi(x)$ et celles relatives aux deux normes de Holder.

Bien entendu, pour tous nos essais, nous avons choisi la même précision* de calcul pour pouvoir les comparer, et nous sommes partis du même vecteur initial X_0 ; ce vecteur a été choisi tel que tous ses éléments sont égaux à 1.

Nous avons vu au chapitre précédent que nous avons la formule récurrente suivante ;

$$X_{n+1} = X_n - \frac{\varphi(r(X_n))}{\|A^T \cdot z(r(X_n))\|^2} \cdot A^T \cdot z(r(X_n))$$

a) Matrice du potentiel (voir page suivante)

α : avec la norme $\varphi_1(X)$ de Holder, nous avons obtenu le vecteur-solution en 338 itérations

$$\varphi_1(X) = \sum_{i=1}^{i=n} |x_i| \quad \text{où les } x_i \text{ sont les éléments de } X.$$

β : avec la norme $\varphi_\infty(X)$ de Holder, nous avons obtenu le vecteur solution en 3 300 itérations.

Nous nous sommes étonnés de la grande différence entre les deux méthodes puisque les conditionnements pour la matrice-unité sont les mêmes et égaux à $\frac{1}{\sqrt{n}}$, mais il faut noter qu'à chaque itération dans ce cas particulier, il n'y a que 5 éléments du vecteur qui sont modifiés.

* Note : La précision a été telle que le vecteur-solution soit obtenu à 10% près.

Matrice du "potentiel"

$$A = \begin{bmatrix} B & I & 0 & 0 & 0 \\ I & B & I & 0 & 0 \\ 0 & I & B & I & 0 \\ 0 & 0 & I & B & I \\ 0 & 0 & 0 & I & B \end{bmatrix}$$

$$\text{avec } B = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

et où I est la matrice-unité.

En effet :

$$\varphi_{\text{co}}(X) = \text{Max}_i |x_i| \quad \text{où les } x_i \text{ sont les éléments de } X$$

$$\varphi_{\text{co}}(X) = z^T(X) \cdot X$$

où

$$z(X) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \text{sign}(x_j) \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{si } |x_j| = \text{Max}_i |x_i|$$

$$\text{et } \text{sign}(x_j) = \begin{cases} +1 & \text{si } x_j \geq 0 \\ -1 & \text{si } x_j < 0 \end{cases}$$

d'où $A^T z(r(X_n)) = \varepsilon$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -4 \leftarrow j^e \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

A = matrice du potentiel

$$\varepsilon = +1 \quad \text{si } x_j \geq 0$$

$$\varepsilon = -1 \quad \text{si } x_j < 0$$

Nous aurons donc :

$$\text{si } X_n = \begin{pmatrix} x_{n,1} \\ x_{n,2} \\ \vdots \\ x_{n,i} \\ \vdots \\ x_{n,n} \end{pmatrix}$$

$$x_{n+1,k} = x_{n,k} \quad \text{pour } k \neq j-5, j-1, j, j+1, j+5$$

$$x_{n+1,j} = x_{n,j} + 4 \cdot \frac{\varepsilon \cdot \varphi(r(X_n))}{\|A^T \cdot z(r(X_n))\|^2}$$

$$x_{n+1,\ell} = x_{n,\ell} - \frac{\varepsilon \cdot \varphi(r(X_n))}{\|A^T \cdot z(r(X_n))\|^2} \quad \text{pour } \ell = j-5, j-1, j+1, j+5$$

Ceci dans le cas général, car lorsque $j=1$, il n'y a que 3 éléments de X_n qui sont modifiés et il y en a 4 si $j=6$ par exemple.

λ : avec la norme $\Phi(X) = \varphi_1(X) + \sqrt{2} \cdot \varphi_2(X)$ où

$\varphi_1(X)$ et $\varphi_2(X)$ sont les deux normes précédentes, nous avons obtenu le vecteur-solution en 327 itérations, c'est-à-dire qu'il y a une légère amélioration de 3,3 % par rapport aux résultats obtenus avec la norme $\varphi_1(X)$.

b) Matrice pleine (voir page suivante)

α : pour la norme $\varphi_1(X)$, nous avons obtenu
558 itérations

β : pour la norme $\varphi_{10}(X)$, nous avons obtenu
1 136 itérations

γ : pour la norme :

$$\bar{\Phi}(X) = \varphi_1(X) + \sqrt{2} \varphi_{10}(X) : 340 \text{ itérations}$$

Nous voyons que dans le cas de cette matrice pleine, l'amélioration est plus sensible que pour la matrice creuse ; en effet, l'amélioration est ici de 39%.

Matrice pleine d'ordre 25

1	24	-3	1	-25	4,4	-20	21	-12	1	-6	-25	-23	18	-1	-3	-2	1	-1	7	-7	7	-7	0
-10	6	-15	4	-1	-20	-10	-2	-10	25	18	22	-3	-10	-5	-25	-23	-24	-17	1	1	1	1	1
-1,1	-1,1	-1,1	-1,2	-2,2	18	18	-22	-1	-14	4	1	2	-1	1	1	1	1	1	24	25	3	17	-3
24	25	3	17	3	-4	-25	-24	-25	-16	1,2	1,1	1,1	1,1	-23	5	-21	9	-1	25	10	-9	1	3
10	-11	-12	1	1	-1,3	1,3	1,3	-4,5	-1,1	-1	0	1	1	-2	-3	-1	1	0	0	0	0	0	0
23	23	19	-16	3	-3	-25	-25	1	-15	-16	-16	-1	8	13	0	-8	-2	-14	2	1	-5	-8	7
0	0	0	0	0	-3	1	-1	-3	1	-15	25	22	1	3	-2	-24	-1	2	25	1	2	3	1
0	7	0	1	12	8	-6	1	1	-2	-5	-1	-2	-1	1	0	-1	3	-1	-6	1	1	-1	-1
-1	22	-17	21	-3	-1	2	-2	-2	-22	0	0	0	0	0	-9	-2	-11	-1	0	1	7	0	0
-1	18	-11	-7	-1	7	-25	23	3	10	-19	25	-2	5	-25	20	21	24	0	-24	2,2	-2,2	-2,2	-1
0	0	0	0	0	-1	-7	-1	1	-1	-15	4	1	-10	-1	-24	21	0	3	20	-20	-2	-19	22
1	1	-1	-1	-1	-3	6	17	-1	-5	-1	4	2	-3	19	1	-23	2	-1	2	15	24	5	0
0	12	-12	-12	12	18	24	1	5	-25	1	-1	-1	1	0	1	1	-2	-1	1	-1	-14	1	1
1	1	1	1	-1	2	20	-22	-1	-5	-5	-25	25	-23	-1	-1	-5	-4	-20	0	11	-2,2	-1,4	1,1
1	3	-4	1	-25	7	-23	25	1	25	-1	-1	-1	-19	2	4,2	1,2	-1,2	1,2	-1,2	21	25	23	-24
-1	-24	16	-1	10	-6	1	1	1	-1	24	1	-1	1	-1	-17	23	-3	-4	-24	-10	13	7	24
0	-2	-9	-1	-9	0	0	0	0	0	-1	2	-5	3	10	25	22	-5	7	5	-1	2	2	-1
16	21	-1	3	25	-15	-17	-1	25	21	-1,1	-2,2	-1,1	-1,4	2	-18	-5	5	-20	-5	1	2	-8	-25
-24	-21	-22	-10	-5	1	-1	1	-1	-1,1	15	22	1	-17	-23	5	-21	5	-3	23	1,2	-1,2	1,1	1,1
22	19	7	-10	7	5	-1	-9	-2	7	2	20	-22	-1	-5	14	20	25	0	21	10	-19	-1	
4	20	2	-6	4	11	-2	1	-1	-1	-6	-1	-2	-1	-25	-2	-6	3	6	5	13	19	-24	
11	14	-2	-18	-2	-19	18	23	-6	-2	5	-11	0	-10	-5	1	-1	1	1	1	7	-5	4	
12	-25	-24	-1	-25	20	5	1	-17	5	14,7	1,2	-1,2	1,1	-7	0	25	20	-1	-1	-1	6	1	
1,1	-1,1	-24	11	-2	0	0	7	0	0	0	0	0	0	-1	-8	-22	-5	-1	11	-24	25	-1	
-7	-1	-1	2	-10	-1	-11	1	-1	-2	1	2	-3	4	-5	-1	-10	-4	2	21	1,2	-1,2	1,1	-1

II° NORME DU MAXIMUM SUR R^n

1°) Soient l normes $\varphi_i(X)$ de vecteurs sur R^n , et un vecteur $X \in R^n$.

L'application $\Phi(X) = \text{Max}_{i=1, \dots, l} (\varphi_i(X))$

est une norme sur R^n .

2°) Décomposition

Soit $z_i(X)$ un vecteur qui nous permet de décomposer la norme $\varphi_i(X)$

$$\varphi_i(X) = z_i^T(X) \cdot X \quad i=1, \dots, l$$

Supposons par exemple que $\text{Max}_{i=1, \dots, l} (\varphi_i(X)) = \varphi_k(X)$

Nous aurons

$$\Phi(X) = \varphi_k(X) = z_k^T(X) \cdot X = z^T(X) \cdot X$$

$z_k(X)$ est un vecteur qui nous permet de décomposer la norme $\Phi(X)$. A chaque norme $\varphi_i(X)$ correspond un vecteur qui permet de la décomposer et le vecteur de décomposition de $\Phi(X)$ sera celui qui correspond à la norme qui a la plus grande valeur.

Il est bien évident que si $\|z_i(X)\| \leq k_i$ pour tout i , $\|z(X)\|$ sera bornée et ainsi nous avons une méthode itérative relative à cette norme qui sera toujours convergente.

3°) Conditionnement

α) Etude générale

Comme précédemment, nous allons étudier géométriquement le conditionnement d'une matrice relatif à cette norme du maximum et à la norme euclidienne.

Soit B_i le lieu géométrique des points tels que $\varphi_i(X) \leq 1$.
Pour chaque norme sur \mathbb{R}^n , nous aurons une boule B_i , et si nous avons choisi sur \mathbb{R}^n , ℓ normes différentes, nous obtiendrons ℓ boules qui vont se couper.

Soit B le lieu des points tel que $\Phi(X) = \text{Max}_{i=1, \dots, \ell} (\varphi_i(X)) \leq 1$
 B sera l'intersection des B_i . [14]

En effet, supposons que X soit tel que $\varphi_i(X) \leq 1$ quel que soit i . $X \in B_i$ quel que soit i , et X appartient à l'intersection des B_i .

$X \in \bigcap_{i=1}^{\ell} B_i$ d'autre part si $\varphi_i(X) \leq 1$ pour tout i .

$\text{Max}_{i=1, \dots, \ell} (\varphi_i(X)) \leq 1$ donc $X \in B$ puisque $\Phi(X) \leq 1$

Réciproquement si $X \in B$ tel que $\Phi(X) \leq 1$

Supposons que $\text{Max} (\varphi_i(X)) = \varphi_j(X)$ $\varphi_j(X) \leq 1$

Or $\varphi_j(X)$ est la norme qui a la plus grande valeur, par conséquent :

$$\varphi_j(X) \geq \varphi_i(X) \quad i=1, \dots, j-1, j+1, \dots, \ell$$

et $X \in B_i \quad i=1, \dots, \ell$ donc $X \in \bigcap_{i=1}^{\ell} B_i$

donc, nous voyons que $B = \bigcap_{i=1}^{\ell} B_i$

β) Etude dans le cas de deux normes particulières.

Soient les normes de Holder sur \mathbb{R}^3

$$\varphi_1(X) = \sum_{i=1}^3 |x_i|$$

$$\text{et } \varphi_\infty(X) = \text{Max}_{i=1, 2, 3} |x_i|$$

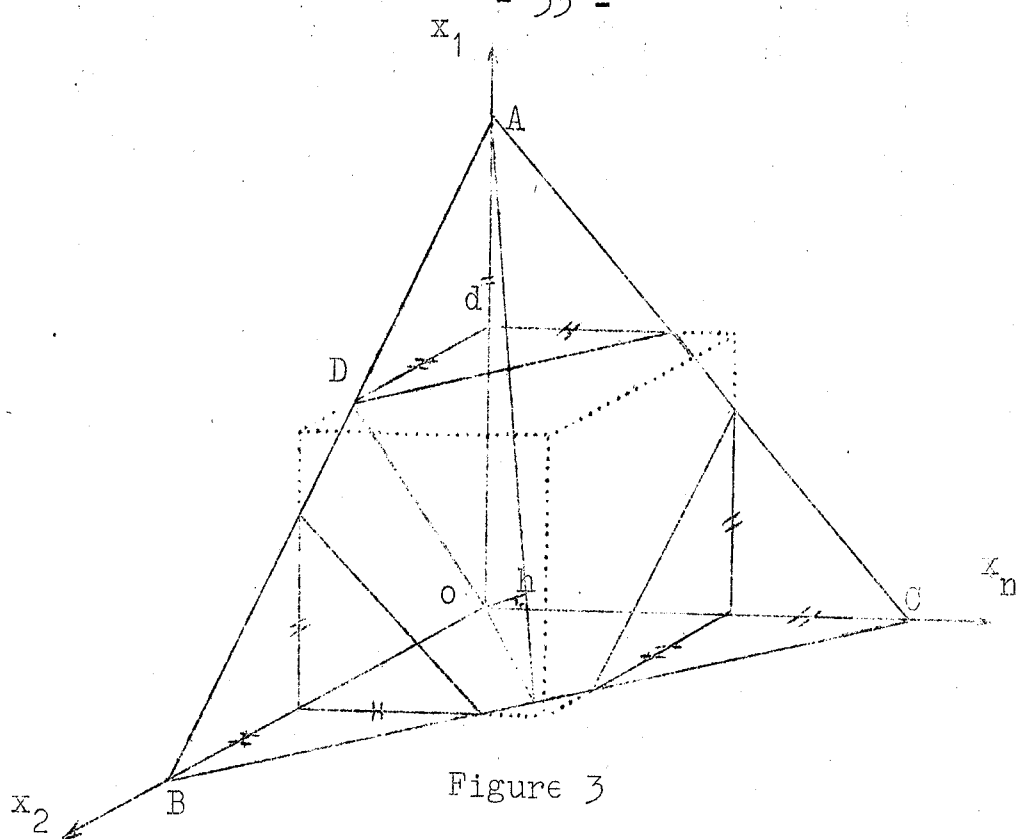


Figure 3

Considérons les boules B_{∞} telle que $\varphi_{\infty}(X) \leq 1$ et B_1 telle que $\frac{1}{k} \cdot \varphi_1(X) \leq 1$ - $k \geq 1$

Nous voyons que B_{∞} est un cube dont le centre est l'origine et que B_1 est un icosaèdre.

La figure 3 ne représente qu'un huitième des deux boules correspondant au cas où les composantes de X sont toutes positives. Nous étudierons le conditionnement sur cette figure puisque tous les polyèdres sont symétriques par rapport à l'origine.

Si $k = 1$, l'icosaèdre est tout entier contenu dans le cube et il n'a en commun avec celui-ci que ses sommets, par contre dès que k est supérieur à 1, les deux boules B_{∞} et B_1 se coupent et leur intersection sera la boule B, lieu des points tels que

$$\text{Max} \left(\frac{1}{k} \varphi_1(X), \varphi_{\infty}(X) \right) \leq 1$$

Nous allons choisir k de façon à ce que le conditionnement soit le meilleur possible.

Toutes les faces du cube sont à la distance 1 du centre 0 ; nous pouvons choisir k de façon à ce que celles de l'icosaèdre soient, elles aussi, à la distance 1 de l'origine.

Dans le cas particulier de la figure à 3 dimensions, nous aurons si $k = \sqrt{3}$

$$OA = \sqrt{3} \quad Od = 1 \quad dD = dA = \sqrt{3} - 1 \quad OD = \sqrt{1 + (\sqrt{3}-1)^2}$$

$$OH = 1$$

Tous les sommets du polyèdre intersection des deux autres, sont tous tels que le sommet D est à la même distance de l'origine. Toutes les faces de ce polyèdre sont équidistantes de l'origine $Od = OH = 1$

Dans ce cas particulier le rapport $\frac{Od}{OD} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\sqrt{3}-1)^2}}$

$$\approx 0,807$$

Nous voyons donc que nous avons obtenu une très nette amélioration du conditionnement puisque celui relatif aux normes $\varphi_1(x)$ et $\varphi_\infty(x)$ est le même et égal à $\frac{1}{\sqrt{3}}$ soit 0,578.

De même pour l'ordre n, en choisissant $k = \sqrt{n}$, le lieu B des points tels que

$$\Phi(x) = \text{Max} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \varphi_1(x), \varphi_\infty(x) \right) \leq 1$$

sera l'intersection des lieux des points tels que =

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \varphi_1(x) \leq 1 \quad \text{et} \quad \varphi_\infty(x) \leq 1 \quad \text{et B sera un polyèdre}$$

convexe, symétrique par rapport à l'origine, ayant tous ses sommets dans les plans définis par deux axes de coordonnées, et dont toutes les faces se trouvent à la distance 1 de l'origine.

Le sommet D étant dans un plan défini par deux axes de coordonnées, choisissons deux de ces axes ; soient x_i et x_{i+1} .

Nous avons :

$$x_1 = x_2 = \dots = x_{i-1} = x_{i+2} = \dots = x_{n-1} = x_n = 0$$

$$\text{D'autre part } x_{i+1} = 1$$

et

$$\sum_{j=1}^{j=n} |x_j| = \sqrt{n} \quad \text{d'où} \quad x_{1j} = \sqrt{n} - 1$$

$$\text{soit } OD = \left(\sum_{i=1}^{i=n} x_i^2 \right)^{1/2} = \sqrt{1 + (\sqrt{n} - 1)^2}$$

$Od = 1$ Le rapport de la plus petite distance de la surface du polyèdre B à la plus grande distance du centre, sera donc :

$$\frac{Od}{OD} = \frac{1}{\sqrt{n - 2\sqrt{n} + 2}} > \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Nous pouvons remarquer que l'amélioration du conditionnement diminue lorsque n augmente, et alors qu'elle était très nette pour $n = 3$ (0,807 au lieu de 0,578), elle l'est beaucoup moins pour $n = 100$ où $\frac{Od}{OD} = 0,111$ au lieu de 0,100 pour les normes $\varphi_1(X)$ et $\varphi_\infty(X)$.

Il est à remarquer que nous avons fait les calculs dans le cas très particulier de la matrice-unité, aussi le conditionnement d'une matrice quelconque relatif à la norme du maximum et à la norme euclidienne peut-il ne pas être meilleur que celui relatif à d'autres normes ; nous verrons plus loin un exemple pratique d'un cas où l'on obtient le même nombre d'itérations lors de la résolution d'un système linéaire.

Pratiquement, le procédé itératif associé à la norme du maximum consiste, à chaque itération, à faire un choix entre les procédés relatifs aux normes $\varphi_1(X)$ et $\varphi_\infty(X)$. A chaque itération, on choisit la méthode qui nous rapprochera le plus de la solution. Si l'on ignore a priori quel est le conditionnement, pour une matrice donnée de l'une des deux normes, qui est le meilleur, on choisira la meilleure des deux méthodes.

*) Choix des normes $\varphi_i(X)$.

Nous voyons que la norme du maximum nous permet d'améliorer d'une manière générale le conditionnement d'une matrice, par rapport à celui relatif aux normes $\varphi_i(X)$ à partir desquelles nous définissons la norme du maximum.

Dans le cas particulier que nous avons étudié, le conditionnement des deux normes $\varphi_1(X)$ et $\varphi_\infty(X)$ était le même (pour la matrice-unité) et celui de la norme du maximum était meilleur que celui des normes $\varphi_1(X)$ et $\varphi_\infty(X)$; mais cette amélioration n'est pas obligatoire pour toutes les normes. En effet, choisissons deux normes $\varphi(X)$ et $\varphi'(X)$ telles que les lieux B et B' des points tels que respectivement

$\varphi(AX) \leq 1$ et $\varphi'(AX) \leq 1$ soient tels que les représente la figure I. Nous voyons que dans ce cas, le conditionnement de la même matrice relative à la norme du maximum sera nettement

supérieur à celui relatif à la norme $\varphi(X)$ et à celui relatif à la norme $\varphi'(X)$.

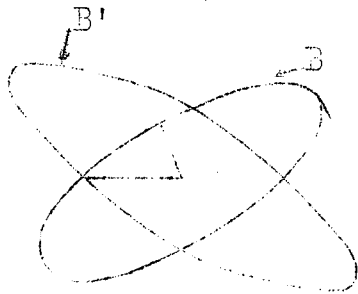


Figure I

Mais il est très difficile d'avoir une idée du conditionnement d'une matrice relative à une norme et pour qu'il y ait une amélioration certaine du conditionnement, il vaut mieux que les conditionnements relatifs aux normes $\varphi_i(X)$ ne soient pas très différents.

En effet, supposons que l'une des boules B (figure II) telle que

$\varphi(AX) \leq 1$ soit "assez proche" d'une hypersphère, son conditionnement sera très bon; supposons celui de $\varphi'(X)$ tel que la plus courte distance de la limite de B' à l'origine soit très inférieure à celle de B, nous voyons

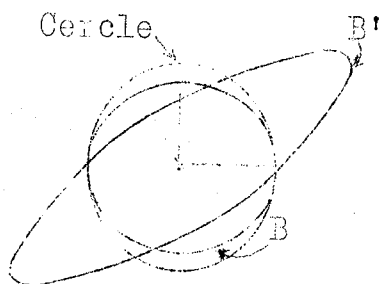


Figure II

que le conditionnement relatif à la norme du maximum ne sera pas aussi bon que celui relatif à $\varphi(X)$. En effet, la norme

du maximum permet, en choisissant des normes quelconques, d'améliorer certainement le conditionnement le moins bon, mais pas obligatoirement tous les conditionnements relatifs à toutes les normes choisies. Aussi, a-t-on intérêt à choisir des normes telles que les conditionnements relatifs à ces normes pour une matrice donnée, ne soient pas trop éloignés.

4°) Essais

Comme précédemment, nous avons effectué deux séries d'essais, les premiers sur la matrice du potentiel, et les seconds sur la matrice pleine que nous avons déjà utilisée.

α : Matrice du potentiel

Pour $\varphi_1(X) = \sum_{i=1}^{i=n} |x_i|$ nous avons eu 338 itérations

Pour $\varphi_{\alpha}(X) = \max_{i=1, \dots, n} |x_i|$ nous avons eu 3300 itérations

-voir essais précédents-

Pour $\Phi(X) = \max \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \varphi_1(X), \varphi_{\alpha}(X) \right)$

nous avons obtenu encore : 338 itérations

En effet, lors du choix entre les normes $\frac{1}{\sqrt{n}} \varphi_1(X)$ et $\varphi_{\alpha}(X)$, c'est toujours la norme $\frac{1}{\sqrt{n}} \varphi_1(X)$ qui est la plus grande.

Dans ce cas particulier $\frac{1}{\sqrt{n}} \varphi_1(X) > \varphi_{\alpha}(X)$ pour tous les X sur lesquels nous avons itéré. C'est pourquoi nous avons obtenu exactement le même résultat que pour la norme $\varphi_1(X)$.

β : Matrice pleine

Pour $\varphi_1(X)$ nous avons obtenu 558 itérations

Pour $\varphi_\infty(X)$ nous avons obtenu 1136 "

Pour $\Phi(X) = \text{Max} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \varphi_1(X), \varphi_\infty(X) \right)$, nous avons
obtenu 397 itérations

Ici, l'amélioration est seulement de 29% , alors que pour les essais précédents, nous avons obtenu 340 itérations au lieu de 397. Mais, bien entendu, il n'est pas impossible que pour une autre matrice, nous obtenions de meilleurs résultats. En effet, en changeant quelques éléments de la matrice pleine, utilisée pour le précédent essai, nous avons obtenu les résultats suivants :

$\varphi_1(X)$	175 itérations	
$\varphi_\infty(X)$	521	"
$\Phi(X)$	117	" , soit ici

une amélioration de 34%.

Remarque . Nous avons noté que lors de tous les essais que nous avons faits, le nombre d'itérations nécessaire pour obtenir le vecteur-solution (à précision égale) était toujours plus grand pour la norme $\varphi_\infty(X)$ que $\varphi_1(X)$, ce qui reviendrait à constater que le conditionnement d'une matrice relatif à la norme $\varphi_1(X)$ serait meilleur que celui relatif à la norme $\varphi_\infty(X)$. Or le conditionnement de la matrice unité est théoriquement le même pour les deux normes et égal à $1/\sqrt{n}$. D'autre par, étudions le système :

$I \cdot X = b$ où I est la matrice-unité d'ordre n et utilisons les deux méthodes itératives en partant d'un même vecteur initial X_0 :

nous obtiendrons $X_n = b$, X_n étant le $n^{\text{ème}}$ vecteur itéré quel que soit le vecteur X_0 d'où nous sommes partis avec la norme $\varphi_2(X)$. Alors que le nombre d'itérations nécessaires avec la norme $\varphi_1(X)$ dépendra du vecteur initial X_0 et pourra être inférieur ou supérieur à n .

B - NORMES SUR UN ESPACE E, PRODUIT DIRECT DE PLUSIEURS SOUS-ESPACES.

I. - DEFINITION

Soient n espaces ε_i et un espace vectoriel E , produit direct des sous-espaces ε_i

$$E = \varepsilon_1 * \varepsilon_2 * \dots * \varepsilon_i * \dots * \varepsilon_n$$

Soient, d'autre part, n normes de vecteurs $\varphi_i(X_i)$, $i=1,2,\dots,n$

$\varphi_i(X_i)$ est une norme de vecteur quelconque sur l'espace ε_i , $X_i \in \varepsilon_i$. De plus, donnons-nous une norme de vecteur $\Phi(U)$ sur R^n , $U \in R^n$

Soit $X \in E$ et $X = \begin{array}{|l} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ X_n \end{array}$ où $X_i \in \varepsilon_i$ $i=1,2,\dots,n$

$\varphi_i(X_i) \in R$, soit $U = \begin{array}{|l} \varphi_1(X_1) \\ \varphi_2(X_2) \\ \vdots \\ \varphi_n(X_n) \end{array}$ $U \in R^n$

$$\Phi(U) = \Phi(\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2), \dots, \varphi_n(x_n))$$

Soit $N(X) = \Phi(U)$ $N(X)$ est-elle une norme sur E ?

$$1^\circ) N(X) = 0 \iff \Phi(U) = 0 \iff U = 0 \iff \varphi_i(x_i) = 0 \quad \forall i$$

$$\text{soit } x_i = 0 \iff X = 0$$

$$\begin{aligned}
2^\circ) N(\lambda X) &= \Phi(\varphi_1(\lambda x_1), \varphi_2(\lambda x_2), \dots, \varphi_n(\lambda x_n)) \\
&= \Phi(|\lambda| \varphi_1(x_1), |\lambda| \varphi_2(x_2), \dots, |\lambda| \varphi_n(x_n)) \\
&= \Phi(|\lambda| \cdot U) = |\lambda| \cdot \Phi(U) \\
&= |\lambda| \cdot N(X)
\end{aligned}$$

X et Y

3°) Soient deux vecteurs appartenant à E

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}$$

X_i et $Y_i \in \varepsilon_i$

$i=1,2,\dots,n$. Soit, de plus:

$$v = \begin{pmatrix} \varphi_1(Y_1) \\ \varphi_2(Y_2) \\ \vdots \\ \varphi_n(Y_n) \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{1} \quad N(X+Y) = \Phi\left(\varphi_1(X_1+Y_1), \varphi_2(X_2+Y_2), \dots, \varphi_n(X_n+Y_n)\right)$$

$$\varphi_i(X_i+Y_i) \leq \varphi_i(X_i) + \varphi_i(Y_i)$$

et, si $\Phi(U)$ est une fonction monotone non décroissante des composantes du vecteur U , nous pouvons écrire dans R_+^n (R_+^n partie de R^n des vecteurs à composantes ≥ 0) :

$$\Phi\left(\varphi_1(X_1+Y_1), \varphi_2(X_2+Y_2), \dots, \varphi_n(X_n+Y_n)\right)$$

$$\leq \Phi\left(\varphi_1(X_1) + \varphi_1(Y_1), \dots, \varphi_n(X_n) + \varphi_n(Y_n)\right)$$

Soit

$$\textcircled{1'} \quad N(X+Y) \leq \Phi(U+V) \leq \Phi(U) + \Phi(V)$$

$$N(X+Y) \leq N(X) + N(Y)$$

Théorème II: Soit E le produit direct d'espaces vectoriels complets $\varepsilon_i \quad i=1,2,\dots,n$, $\varphi_i(X_i)$ une norme quelconque de vecteur sur ε_i . $\Phi(U)$ une norme sur R^n , telle que $\Phi(\varphi_1(X_1), \dots, \varphi_n(X_n))$ soit une fonction non-décroissante monotone des $\varphi_i(X_i)$ sur R_+^n . L'application faisant correspondre à $X \in E \rightarrow N(X) \in R_+$ est une norme de vecteur sur E avec $N(X) = \Phi(U)$.

II - EXEMPLES

Nous allons maintenant donner quelques exemples de normes appartenant à la famille ci-dessus.

a) Norme combinaison linéaire de normes sur des sous-espaces

1°) Définition

Soit $R^n = R^{n_1} * R^{n_2} * \dots * R^{n_l}$ $\sum_{i=1}^l n_i = n$

Soit $\varphi_i(X_i)$ une norme quelconque sur R^{n_i} avec $X_i \in R^{n_i}$

soit, de plus $\Phi(U)$ une norme de vecteur sur R^n

$$\Phi(U) = \sum_{i=1}^l \alpha_i \cdot \varphi_i(X_i)$$

où $U = \begin{pmatrix} \alpha_1 \varphi_1(X_1) \\ \alpha_2 \varphi_2(X_2) \\ \dots \\ \alpha_n \varphi_n(X_n) \end{pmatrix}$ en posant $\varphi_i(X_i) = U_i$

$$\Phi(U) = \sum_{i=1}^l \alpha_i \cdot U_i$$

Les $\alpha_i \in R_+$ permettent de pondérer les normes des sous-espaces. Nous avons bien :

$$\frac{\partial \Phi(U)}{\partial U_i} = \alpha_i \geq 0 \quad \text{pour } i=1,2,\dots,l$$

Si $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$ $N(X) = \bigoplus (U)$ est une norme sur R^n

2°) Décomposition de $N(X)$

Soit $z_i(X_i)$ un vecteur décomposition de la norme $\phi_i(X_i)$ tel que

$\phi_i(X_i) = z_i^T(X_i) \cdot X_i$ quel que soit X_i

Construisons :

$z^T(X) = [(\alpha_1 z_1^T(X_1)), (\alpha_2 z_2^T(X_2)), \dots, (\alpha_p z_p^T(X_p))]$

$z^T(X) \cdot X = \alpha_1 z_1^T(X_1) \cdot X_1 + \alpha_2 z_2^T(X_2) \cdot X_2 + \dots$

$\dots + \alpha_p z_p^T(X_p) \cdot X_p$

$= \sum_{i=1}^{i=p} \alpha_i \phi_i(X_i) = N(X)$

Le vecteur $z(X)$ tel que nous l'avons défini ci-dessus nous permet donc de décomposer la norme $N(X)$ de R^n .

Supposons $\|z_i(X_i)\| \leq k_i$ pour tout i , c'est-à-dire que $\|z_i(X_i)\|$ est borné. Nous aurons :

$\|z(X)\|^2 = \sum_{i=1}^{i=p} \alpha_i^2 \|z_i(X_i)\|^2 \leq \sum_{i=1}^{i=p} \alpha_i^2 k_i^2 = K^2$

d'où $\|z(X)\| \leq K$

Nous voyons donc que $\|z(X)\|$ est borné et nous pourrons donc définir un procédé itératif à partir des normes $\varphi_i(X_i)$ qui, comme nous l'avons vu au chapitre précédent, sera convergent.

3°) Parmi ces normes, nous pouvons en définir trois particulières.

$$\alpha) \quad \Phi_1(X) = \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i \varphi_1(X_i) \quad \text{où } \varphi_1(X_i) \text{ est la norme de Holder}$$

$$\varphi_1(X_i) = \sum_{j=1}^{j=n_i} |x_{ij}| \quad \text{si } \{x_{ij}\} \text{ sont les composantes}$$

du vecteur $X_i \in \mathbb{R}^{n_i}$

Remarque : $\Phi_1(X) = \varphi_1(X)$ si $\alpha_i = 1 \quad i=1, \dots, \ell$

$$\beta) \quad \Phi_2(X) = \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i \varphi_2(X_i) \quad \text{où } \varphi_2(X_i) \text{ est la norme euclidienne}$$

$$\varphi_2(X_i) = \|X_i\|$$

$$\Phi_2(X) \geq \varphi_2(X) \quad \text{si } \alpha_i = 1 \text{ quel que soit } i.$$

$$\gamma) \quad \Phi_{\infty}(X) = \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i \varphi_{\infty}(X_i) \quad \text{où } \varphi_{\infty}(X_i) \text{ est la norme de Holder}$$

$$\varphi_{\infty}(X_i) = \max_{j=1, \dots, n_i} |x_{ij}|$$

avec $X_i \in \mathbb{R}^{n_i}$

Remarque : $\Phi_{\infty}(X) \geq \varphi_{\infty}(X)$ si $\alpha_i = 1$ quel que soit i .

De plus si $n_i = 1$ quel que soit i , $X \in \mathbb{R}^{\ell}$,

$$\text{nous avons : } \Phi_{\infty}(X) = \varphi_1(X)$$

4°) Etude du conditionnement d'une matrice relatif à la norme $\Phi(X)$ et à la norme euclidienne.

$$\Phi(X) = \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i \varphi_i(X_i) \quad \text{où } \varphi_i(X_i) \text{ est une norme de Holder quelconque.}$$

Toutes les normes de vecteurs étant équivalentes, il existe deux nombres a et b tels que :

$$a \varphi_{\infty}(X) \leq \Phi(X) \leq b \varphi_{\infty}(X)$$

$$\text{Soit } M = \max_{i=1, \dots, \ell} \alpha_i \quad \text{et} \quad m = \min_{i=1, \dots, \ell} \alpha_i$$

Supposons que $\varphi_{\infty}(X) = \varphi_{\infty}(X_k)$ $X \in R^n$ $X_k \in R^{n_k}$

$$n = \sum_{i=1}^{\ell} n_i$$

$$\Phi_{\infty}(X) \geq \alpha_k \varphi_{\infty}(X_k) \geq m \varphi_{\infty}(X)$$

$$\text{Or } \Phi(X) \geq \Phi_{\infty}(X) \quad \text{d'où } \Phi(X) \geq m \varphi_{\infty}(X) \quad (1)$$

$$\text{De même } \sum \alpha_i \varphi_i(X_i) \leq \sum \alpha_i \varphi_1(X_i) \leq M \sum \varphi_1(X_i)$$

$$\text{soit } \Phi(X) \leq M \varphi_1(X) \quad (2)$$

Des inégalités (1) et (2), nous pouvons déduire les suivantes :

$$\frac{m}{n} \varphi_1(X) \leq \Phi(X) \leq M \varphi_1(X) \quad (3)$$

$$\frac{m}{\sqrt{n}} \varphi_2(X) \leq \Phi(X) \leq \sqrt{n} M \varphi_2(X) \quad (4)$$

$$m \varphi_{\infty}(X) \leq \Phi(X) \leq n M \varphi_{\infty}(X) \quad (5)$$

L'inégalité (3) nous permet d'écrire :

$$\frac{1}{n} \cdot m \frac{\varphi_1(Ax)}{\varphi_2(x)} \leq \frac{\Phi(Ax)}{\varphi_2(x)} \leq M \frac{\varphi_1(Ax)}{\varphi_2(x)}$$

soit

$$\frac{1}{n} \cdot m \frac{1}{s_{21}(A^{-1})} \leq \frac{1}{s_{2\Phi}(A^{-1})} \leq s_{\Phi 2}(A) \leq M s_{12}(A)$$

d'où

$$\frac{1}{n} \cdot \frac{m}{M} \cdot \frac{1}{s_{21}(A^{-1}) \cdot s_{12}(A)} \leq \frac{1}{s_{2\Phi}(A^{-1}) \cdot s_{\Phi 2}(A)}$$

soit $\frac{1}{n} \cdot \frac{m}{M} \cdot \gamma_{12}(A) \leq \gamma_{\Phi 2}(A)$

où $\gamma_{ij}(A)$ est le conditionnement de la matrice A relatif aux normes $\varphi_i(x)$ et $\varphi_j(x)$.

De même de (3), nous avons :

$$\frac{1}{M} \Phi(x) \leq \varphi_1(x) \leq \frac{n}{m} \Phi(x), \text{ et nous arrivons en}$$

faisant le même calcul à :

$$\gamma_{\Phi 2}(A) \leq n \frac{M}{m} \gamma_{12}(A)$$

d'où la double inégalité :

$$\frac{1}{n} \cdot \frac{m}{M} \gamma_{12}(A) \leq \gamma_{\Phi 2}(A) \leq n \frac{M}{m} \gamma_{12}(A)$$

De (4) et (5), nous obtenons de même :

$$\frac{1}{n} \cdot \frac{m}{M} \gamma_{22}(A) \leq \gamma_{\Phi 2}(A) \leq n \frac{M}{m} \gamma_{22}(A)$$

et $\frac{1}{n} \cdot \frac{m}{M} \gamma_{\infty 2}(A) \leq \gamma_{\Phi 2}(A) \leq n \frac{M}{m} \gamma_{\infty 2}(A)$

En choisissant tous les α_i égaux à 1, nous avons $m = M$, c'est-à-dire que nous resserons un peu les bornes, mais, en fait, ces inégalités ne nous permettent pas d'avoir une idée exacte du conditionnement d'une matrice quelconque relatif à la norme $\bar{\Phi}(X)$ et à la norme euclidienne.

Toutefois, il n'est pas impossible que, pour une matrice donnée, en choisissant les $\varphi_i(X_i)$ et les α_i en fonction des propriétés de cette matrice, l'on arrive à construire une norme telle que le conditionnement de cette matrice relatif à cette norme et à la norme euclidienne soit meilleur.

b) Norme maximum de normes sur des sous-espaces

1°) Définition

Soit $R^n = R^{n_1} * R^{n_2} * \dots * R^{n_\ell}$ $\sum_{i=1}^{\ell} n_i = n$

Soit $\varphi_i(X_i)$ une norme quelconque sur R^{n_i} avec $X_i \in R^{n_i}$

Soit $\bar{\Phi}(U) = \text{Max}_{i=1, \dots, \ell} \varphi_i(X_i)$ $\bar{\Phi}(U)$ est une norme sur R^ℓ

Posons :

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad u_i = \varphi_i(X_i) \quad \bar{\Phi}(U) = \text{Max}_{i=1, \dots, \ell} u_i$$

$$u_i \in R_+$$

Il est évident que si u_i croît (ou décroît), $\Phi(U)$ croît (ou décroît), ou reste constant. $\Phi(U)$ est bien une fonction monotone non décroissante.

Donc $\Phi(X) = \Phi(U)$ est une norme sur \mathbb{R}^n si

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \quad X \in \mathbb{R}^n$$

2°) Décomposition de $\Phi(X)$

Soit $z_i(X_i)$ un vecteur décomposition de la norme $\Phi_i(X_i)$ tel que :

$$\Phi_i(X_i) = z_i^T(X_i) \cdot X_i$$

Si $\text{Max}_{i=1, \dots, k} \Phi_i(X_i) = \Phi_k(X_k) = z_k^T(X_k) \cdot X_k$, construisons

le vecteur $z^T(X) = (\underline{0}_1, \underline{0}_2, \dots, \underline{0}_{k-1}, z_k^T(X_k), \underline{0}_{k+1}, \dots, \dots, \underline{0}_{n-1}, \underline{0}_n)$

les $\underline{0}_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ $i=1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots, n$

$$z^T(X) \cdot X = z_k^T(X_k) \cdot X_k = \Phi(X)$$

Le vecteur $z(X)$ tel que nous l'avons défini ci-dessus nous permet donc de décomposer la norme $\Phi(X) = \max_i \varphi_i(X_i)$

Si $\|z_k(X)\| \leq k \Rightarrow \|z(X)\| \leq k$ $\|z(X)\|$ est donc borné.

3°) Normes particulières

De même que précédemment, en choisissant les $\varphi_i(X_i)$ parmi les normes de Holder, nous pouvons définir trois normes particulières.

$$\alpha) \quad \Phi_1(X) = \max_{i=1, \dots, l} \varphi_1(X_i) \quad \text{où} \quad \varphi_1(X_i) = \sum_{j=1}^{n_i} |x_{ij}| \quad \text{si} \quad X_i = \begin{pmatrix} x_{i1} \\ x_{i2} \\ \vdots \\ x_{in_i} \end{pmatrix}$$

$$\Phi_1(X) \leq \varphi_1(X)$$

$$\beta) \quad \Phi_2(X) = \max_{i=1, \dots, l} \varphi_2(X_i) \quad \text{où} \quad \varphi_2(X_i) \text{ est la norme euclidienne}$$

$$\Phi_2(X) \leq \varphi_2(X)$$

$$\gamma) \quad \Phi_\infty(X) = \max_{i=1, \dots, l} \varphi_\infty(X_i) \quad \text{où} \quad \varphi_\infty(X_i) = \max_{j=1, \dots, n_i} |x_{ij}|$$

$$\Phi_\infty(X) = \varphi_\infty(X)$$

4°) Conditionnement

Si $\Phi(X) = \max_{i=1, \dots, l} \varphi_i(X_i)$ où $\varphi_i(X_i)$ sont des normes

quelconques de Holder, nous obtenons les inégalités suivantes :

$$\varphi_{\infty}(x) \leq \Phi(x) \leq n \cdot \varphi_{\infty}(x)$$

$$\frac{1}{n} \varphi_1(x) \leq \Phi(x) \leq \varphi_1(x)$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \varphi_2(x) \leq \Phi(x) \leq \sqrt{n} \cdot \varphi_2(x)$$

Nous voyons ainsi que ces inégalités sont "plus larges" que celles obtenues à partir des normes de Holder elles-mêmes, et, d'une manière générale, le domaine de variation du conditionnement $\gamma_{\Phi_2}(A)$ sera lui-même assez large. Mais nous aurons au chapitre III une utilisation pratique de cette norme.

C - PROBLEME DE LA MEILLEURE NORME

Nous venons de voir que le principal problème relatif à l'étude des méthodes itératives de résolution des systèmes linéaires n'était pas de fabriquer des normes (il semble que l'on puisse en fabriquer très facilement), mais était d'étudier le conditionnement d'une matrice A donnée, relatif à une norme quelconque et à la norme euclidienne.

Nous avons vu au chapitre I que la vitesse de convergence dépendait directement de ce conditionnement, et était d'autant plus rapide que celui-ci était proche de 1.

Nous avons jusqu'ici fabriqué des normes, et partant de ces normes, nous avons essayé d'améliorer le conditionnement. Mais, pour chaque matrice non singulière, il existe une norme $\varphi(x)$ telle que le conditionnement soit égal à 1.

En effet, étudions le rapport $\frac{\varphi(AX)}{\|x\|}$

Si $\varphi(x) = \|A^{-1}x\|$, il est bien évident que $\frac{\varphi(AX)}{\|x\|} = 1$,

mais A^{-1} n'est pas connu. Néanmoins, on peut essayer d'approcher le plus possible une telle norme.

Soit A une matrice non singulière et symétrique. $A = A^T$
 α_i ses valeurs propres et u_i ses vecteurs propres.

$$A \cdot u_i = \alpha_i \cdot u_i \quad A^{-1} \cdot u_i = \frac{1}{\alpha_i} \cdot u_i$$

$$U_i^T (A^{-1})^T = U_i^T \cdot A^{-1} = \frac{1}{\alpha_i} \cdot U_i^T$$

Les n vecteurs propres de A forment une base de \mathbb{R}^n .
Soient x_i les composantes d'un vecteur $X \in \mathbb{R}^n$ sur cette base.

$$X = \sum_{i=1}^{i=n} x_i \cdot u_i$$

$$\|A^{-1} \cdot X\| = X^T \cdot (A^{-1})^T \cdot A^{-1} \cdot X$$

$$= X^T \cdot (A^{-1})^2 \cdot X$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{i=n} x_i \cdot U_i^T \right) \cdot (A^{-1})^2 \cdot X$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{i=n} x_i \cdot \frac{1}{\alpha_i^2} \cdot U_i^T \right) \cdot X$$

$$= z^T(X) \cdot X$$

en posant $z(X) = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{x_i}{\alpha_i^2} \cdot U_i$

où x_i sont les
composantes de X dans
la base formée par les
 u_i et α_i sont les
valeurs propres de la
matrice A.

Nous voyons que la norme idéale peut être calculée en fonction de la matrice A . Bien entendu, les valeurs propres et les vecteurs propres de A ne sont pas connus, mais, en connaissant au moins les directions des vecteurs propres, nous pourrions essayer de nous en rapprocher le plus possible, et ainsi, arriver à définir une norme de vecteur telle que son conditionnement soit le plus près possible de 1. D'autre part, l'expression ci-dessus nous montre l'intérêt qu'il y a à faire intervenir le plus possible dans la définition de la norme, les valeurs caractéristiques d'une matrice ; c'est sans doute ainsi que l'on arrivera à définir des normes telles que le conditionnement de la matrice à partir de laquelle cette norme aura été définie, soit le meilleur possible. C'est le but de la surdécomposition que nous allons définir au chapitre suivant.

C H A P I T R E I I I

SURDECOMPOSITION D E N O R M E S G E N E R A L E S

I. - INTRODUCTION

Nous avons vu, à la fin du chapitre précédent, que, dans la recherche d'une norme à laquelle nous voulons associer un procédé itératif de résolution d'un système linéaire, nous avons tout intérêt à ce que la matrice du 1er membre de ce système intervienne dans la fabrication de cette norme. L'inverse de cette matrice (ou une matrice s'en approchant) étant, en général, inconnu, difficile et coûteux à calculer, il n'est pas possible de fabriquer facilement une telle norme. Nous allons exposer ici un procédé de GASTINEL [15] qui est une généralisation des méthodes relatives à la décomposition simple des normes que nous avons exposée au chapitre I. Comme nous le verrons, ce procédé de surdécomposition de normes permet de faire intervenir plus facilement les propriétés de la matrice du système.

Soit x un vecteur de R^n

$$x = \begin{pmatrix} \}1 \\ \}2 \\ \vdots \\ \}n \end{pmatrix} \quad \}i \in R$$

A tout vecteur x faisons correspondre une matrice H_x de type (n,q) avec q fixe et tel que $1 \leq q \leq n$.

Considérons la variété linéaire $V(H_x)$, lieu des $y \in R^n$ tels que

$$y = x + H_x \cdot \wedge \quad \wedge \in R^q \text{ pour } x \text{ fixé}$$

Soit, de plus, un système linéaire

$$Ax = b \quad (1)$$

A : matrice carrée d'ordre n, $b \in \mathbb{R}^n$. On suppose que A est non singulière et que le système (1) admet une solution et une seule quel que soit b. Soit $\Omega \in \mathbb{R}^n$ cette solution.

Nous pouvons écrire $A(x - \Omega) = 0 \in \mathbb{R}^n$, et, puisque H_x est du type (n,q), nous avons :

$$H_x^T A (x - \Omega) = 0 \in \mathbb{R}^q \quad (2) \text{ et cela quelle que soit } H_x.$$

Soit l'ensemble des x tels

$$(A^T H_x)^T x - H_x^T b = 0 \in \mathbb{R}^q.$$

C'est une variété linéaire $W_{(H_x^T A)}$, lieu des points x. Ce lieu passe par Ω .

Etudions l'intersection de $W_{(H_x^T A)}$ et de $V_{(A^T H_x)}$.

Pour qu'un point x' appartienne à celle-ci, il faut et il suffit qu'il existe un Δ tel que :

$$x' = x + A^T H_x \Delta \in \mathbb{R}^n$$

$$H_x^T A (x + A^T H_x \Delta) - H_x^T b = 0 \in \mathbb{R}^q$$

soit, en posant $\beta = H_x^T (b - Ax) \in \mathbb{R}^q$

$$H_x^T A A^T H_x \Delta = \beta \in \mathbb{R}^q \quad (3)$$

Le système (3) est un système linéaire de q équations à q inconnues.

Définition : A étant une matrice donnée, nous dirons que l'application faisant correspondre à $x \rightarrow H_x$ est régulière par rapport à A si la matrice de type (q,q) : $H_x^T A A^T H_x$ est non singulière pour tout x.

Dans le cas où H_x est régulière par rapport à A, on voit que le système (3) admet une seule solution :

$$\begin{aligned} \Lambda &= (H_x^T A A^T H_x)^{-1} \cdot \beta \\ &= (H_x^T A A^T H_x)^{-1} \cdot H_x^T (b - Ax) \\ &= (H_x^T A A^T H_x)^{-1} \cdot H_x^T A (\Omega - x) \end{aligned} \quad (3')$$

Donc W $(H_x^T A)$ et V $(A^T H_x)$ ont un seul point commun :

$$\begin{aligned} x' &= x + A^T H_x (H_x^T A A^T H_x)^{-1} H_x^T A (\Omega - x) \\ &= x + A^T H_x \Lambda \end{aligned}$$

Remarque : De (3) nous pouvons écrire :

$$H_x^T A A^T H_x \Lambda = H_x^T A (\Omega - x)$$

$$\text{ou } H_x^T A (\Omega - x - A^T H_x \Lambda) = 0 \in R^q$$

$$\text{Donc } H_x^T A (\Omega - x') = 0 \in R^q \quad \text{or } \Lambda \in R^q$$

$$\text{d'où } \Lambda^T H_x^T A (\Omega - x') = 0 \text{ scalaire}$$

$$\text{Soit } (A^T H_x \Lambda)^T \cdot (\Omega - x') = 0 \text{ scalaire}$$

$$\text{Or } x' = x + A^T H_x \Lambda$$

$$\text{soit } x - x' = -A^T H_x \Lambda$$

$$\text{d'où } (x - x')^T (\Omega - x') = 0 \text{ scalaire}$$

Les deux vecteurs $(x-x')$ et $(\Omega-x')$ sont ~~donc~~ orthogonaux et nous pouvons écrire :

$$\|\Omega - x'\|^2 + \|x - x'\|^2 = \|\Omega - x\|^2 \quad \text{où } \|y\| \text{ est la norme euclidienne}$$

$$\|\Omega - x'\|^2 = \|\Omega - x\|^2 - \|x - x'\|^2$$

En posant $L_1 = \frac{\|x - x'\|^2}{\|\Omega - x\|^2} \quad 0 \leq L_1 \leq 1$

nous avons :

$$\|\Omega - x'\|^2 = \|\Omega - x\|^2 [1 - L_1] \quad (4)$$

$$\|x - x'\|^2 = A^T H_X^T A A^T H_X \wedge$$

d'où $L_1 = \frac{\wedge^T H_X^T A A^T H_X \wedge}{\|\Omega - x\|^2}$, soit d'après l'expression

de \wedge : $L_1 = \frac{(\Omega - x)^T A^T H_X (H_X^T A A^T H_X)^{-1} H_X^T A A^T H_X \wedge}{\|\Omega - x\|^2}$

et $L_1 = \frac{(\Omega - x)^T A^T H_X (H_X^T A A^T H_X)^{-1} H_X^T A (\Omega - x)}{\|\Omega - x\|^2} \quad (5)$

II. - DECOMPOSITION D'ORDRE DONNE q , D'UNE NORME GENERALE $\varphi(x)$ SUR R^n
ET PAR RAPPORT A UNE MATRICE A DONNEE D'ORDRE n .

1°) PROBLEME

Soit q un nombre ($1 \leq q \leq n$) et A donnés, ainsi qu'une norme générale $\varphi(x)$ de vecteurs sur R^n .

Existe-t-il une application K faisant correspondre à $x \longrightarrow K_x$? K_x appartenant à l'ensemble des matrices du type (n, q) et telle que pour tout $x \in R^n$, on ait :

$$\varphi^2(x) = x^T K_x (K_x^T A A^T K_x)^{-1} K_x^T x \cdot \text{Trace} (K_x^T A A^T K_x)$$

2°) DEFINITION

Si K_x existe, nous dirons que la norme $\varphi(x)$ a été surdécomposée pour l'ordre q et par rapport à la matrice A . Si les éléments de K_x sont bornés, on dit que cette surdécomposition est bornée.

3°) ETUDE

Pour $q = 1$, K_x est un vecteur. $K_x^T A A^T K_x$ est un scalaire, donc identique à sa trace. D'où :

$$(K_x^T A A^T K_x)^{-1} \cdot x \cdot \text{Trace} (K_x^T A A^T K_x) = x$$

soit $x^T K_x K_x^T x = \varphi^2(x)$

où $K_x^T x = \varphi(x)$

C'est le problème de la décomposition simple que nous avons exposé au chapitre I.

On peut donc dire que la décomposition simple est un cas particulier de la surdécomposition d'ordre 1, et relative à n'importe quelle matrice.

Théorème : Soit $q, 1 \leq q \leq n$; A : une matrice d'ordre n non singulière, φ une norme de vecteurs sur R^n , donnés. Il existe une infinité de surdécompositions de φ par rapport à A . On peut choisir K_x de sorte que:

1° ses q colonnes soient de directions conjuguées par rapport à la forme $x^T A A^T x$

2° ses éléments soient bornés.

Soient $E_i (i=1, \dots, q)$, q vecteurs de R^n , formant un système de vecteurs conjugués par rapport à $x^T A A^T x$, c'est-à-dire que :

$$E_i^T A A^T E_j = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, \dots, q)$$

Les E_i peuvent dépendre de x . On peut donc supposer que K_x est de la forme :

$$K_x = (\alpha_1 E_1, \alpha_2 E_2, \dots, \alpha_q E_q)$$

ou

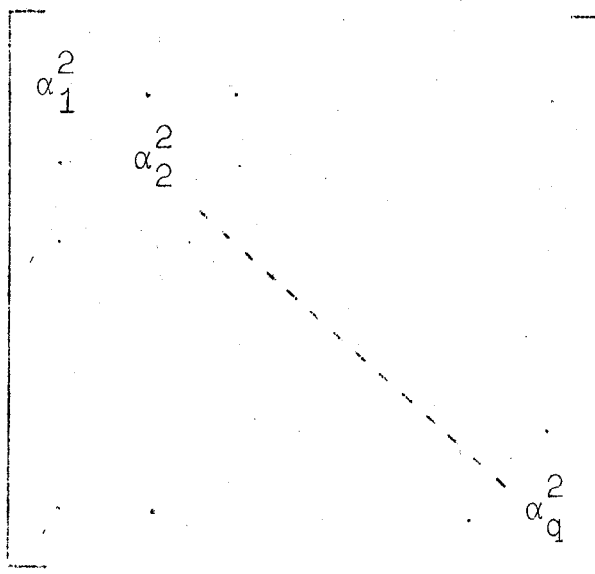
$$A A^T K_x = (\alpha_1 A A^T E_1, \alpha_2 A A^T E_2, \dots, \alpha_q A A^T E_q)$$

et, puisque :

$$K_x^T = \begin{bmatrix} \alpha_1 E_1^T \\ \alpha_2 E_2^T \\ \dots \\ \alpha_q E_q^T \end{bmatrix}$$

on aura :

$$K_X^T A A^T K_X =$$



$K_X^T A A^T K_X$ = matrice carrée d'ordre q , non singulière, si, et seulement si, tous les $\alpha_i \neq 0$, quel que soit i .

Posons $x^T E_i = \left. \vphantom{x^T E_i} \right\} i$

nous aurons $x^T K_X = (\alpha_1 \left. \vphantom{\alpha_1} \right\} 1, \alpha_2 \left. \vphantom{\alpha_2} \right\} 2, \dots, \alpha_q \left. \vphantom{\alpha_q} \right\} q)$

d'où $x^T K_X (K_X^T A A^T K_X)^{-1} K_X^T x$. Trace $(K_X^T A A^T K_X)$

$$= \left(\sum_{i=1}^{i=q} \left. \vphantom{\sum_{i=1}^{i=q}} \right\} 2 \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{i=q} \alpha_i^2 \right)$$

Supposons que l'on ait constamment :

$$\left(\sum_{i=1}^{i=q} \left. \vphantom{\sum_{i=1}^{i=q}} \right\} 2 \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{i=q} \alpha_i^2 \right) = \varphi^2(x)$$

nous avons :

$$\sum_{i=1}^{i=q} \alpha_i^2 = \frac{\varphi^2(x)}{\sum_{i=1}^{i=q} \left. \vphantom{\sum_{i=1}^{i=q}} \right\} 2} = \psi(x)$$

Si nous changeons x en λx , et si les E_i ne dépendent de x qu'en direction, nous voyons que les ζ_i se changent en $\lambda \zeta_i$, et par conséquent :

$$\frac{\varphi^2(\lambda x)}{\sum_{i=1}^q (\lambda \zeta_i)^2} = \frac{\varphi^2(x)}{\sum_{i=1}^q \zeta_i^2} = \psi(\lambda x) = \psi(x)$$

Le rapport $\psi(x)$ prend donc toutes ses valeurs si x est astreint à se déplacer sur la surface de la boule $\varphi^2(x) = 1$; on voit donc que les $x^T E_i = \zeta_i$ ($i=1,2,\dots,q$) sont tels que $\sum_{i=1}^q \zeta_i^2$ soit borné inférieurement, donc les α_i^2 sont bornés supérieurement, donc les éléments de K_x le sont aussi.

Nous voyons donc qu'il existe des surdécompositions bornées de normes, et nous pourrions encore en trouver d'autres.

III.- PROCÉDES ITERATIFS ATTACHÉS A UNE SURDECOMPOSITION DE NORME

Soit un système linéaire d'ordre n , et soit une norme de vecteur $\varphi(x)$. Si nous nous donnons un nombre q ($1 \leq q \leq n$), il existe une matrice K_x telle que pour tout vecteur $x \in R^n$:

$$\varphi^2(x) = x^T K_x (K_x^T \cdot A \cdot A^T \cdot K_x)^{-1} K_x^T x \cdot \text{Trace} (K_x^T \cdot A \cdot A^T \cdot K_x)$$

Soit x un vecteur de R^n . Nous définissons

$$r(x) = A(\Omega - x) \quad \text{où } \Omega \text{ est la solution du système (1)}$$

A $r(x)$ faisons correspondre $K_{r(x)}$ et nous pourrions écrire d'après (3') :

$$\begin{aligned} \Lambda &= (K_{r(x)}^T \cdot A \cdot A^T \cdot K_{r(x)})^{-1} \cdot K_{r(x)}^T \cdot A (\Omega - x) \\ &= (K_{r(x)}^T \cdot A \cdot A^T \cdot K_{r(x)})^{-1} \cdot K_{r(x)}^T \cdot r(x) \end{aligned}$$

or $x' = x + A^T \cdot K_{r(x)} \cdot \Delta$

d'où $x' = x + A^T K_{r(x)} \left(K_{r(x)}^T \cdot A \cdot A^T \cdot K_{r(x)} \right)^{-1} K_{r(x)}^T ; r(x)$

Partant d'un vecteur initial x_0 , nous obtiendrons un vecteur x_1 par la formule suivante :

$$x_{n+1} = x_n + A^T K_{r(x_n)} \left(K_{r(x_n)}^T \cdot A \cdot A^T \cdot K_{r(x_n)} \right)^{-1} K_{r(x_n)}^T \cdot r(x_n)$$

IV. - CONVERGENCE DE PROCÉDES ITERATIFS ATTACHES A UNE SURDECOMPOSITION

Théorème : Tout procédé itératif, associé à une surdécomposition $x \mapsto K_x$, bornée d'une norme φ , d'ordre q , par rapport à A ; pour résoudre le système $Ax - b = 0$ (A non singulière) est toujours convergent ; sa convergence est directement attachée au conditionnement généralisé de A et de la norme euclidienne sur R^n .

D'après la formule (4) du parag. I, nous avons vu que l'on peut obtenir un vecteur x' plus voisin en norme euclidienne de la solution Ω que x .

Si à $r(x) = A (\Omega - x)$, nous faisons correspondre K_r , matrice du type (n,q) , nous aurons d'après (5) :

$$L_1 = \frac{r(x)^T K_r \left(K_r^T \cdot A \cdot A^T \cdot K_r \right)^{-1} K_r \cdot r(x)}{\|\Omega - x\|^2}$$

Soit si $\varphi^2(r(x)) = r(x)^T K_r \left(K_r^T \cdot A \cdot A^T \cdot K_r \right)^{-1} K_r \cdot r(x) ; \text{Tr}(K_r^T A A^T K_r)$

$$L_1 = \frac{\varphi^2(r(x))}{\|\Omega - x\|^2} \cdot \frac{1}{\text{Trace}(K_r^T A \cdot A^T \cdot K_r)}$$

Mais

$$\text{Trace } (K_r^T A \cdot A^T \cdot K_r) = N^2 (K_r^T A) \leq q \cdot n \cdot n^2 \cdot b^2(A) \cdot b^2(K_r)$$

si $b(A) = \text{Max}_{i,j} |a_{ij}|$ (c'est une norme de la matrice A)

$$\text{donc } L_1 \geq \frac{\varphi^2(r(x))}{\|\Omega - x\|^2} \cdot \frac{1}{n^3 \cdot q \cdot b^2(A) \cdot b^2(K_r)}$$

et si $b^2(K_r) \leq M^2$ pour tout x puisque K_r est borné :

$$L_1 \geq \frac{\varphi^2(r(x))}{\|\Omega - x\|^2} \cdot \frac{1}{n^3 \cdot q \cdot M^2} \cdot \frac{1}{b^2(A)}$$

Or, on sait, (chapitre I) que si $S_{2\varphi}(A)$ désigne la norme de matrice

$$S_{2\varphi}(A) = \text{Max} \frac{\|Ax\|}{\varphi(x)}$$

$$\frac{\varphi(Ay)}{\|y\|} \geq \frac{1}{S_{2\varphi}(A^{-1})} \quad \text{donc}$$

$$L_1 \geq \frac{1}{n^3 \cdot q \cdot M^2} \cdot \frac{1}{S_{2\varphi}^2(A^{-1}) \cdot b^2(A)}$$

Soit $\frac{1}{N_1(A) \cdot N_2(A^{-1})} = \gamma_A$ un conditionnement de A pour

les normes $S_{2\varphi}$ et b, donc :

$$L_1 \geq \frac{1}{n^3 \cdot q \cdot M^2} \cdot \gamma_A^2$$

Nous pouvons donc écrire d'après (4) :

$$\|\Omega - x'\|^2 \leq \|\Omega - x\|^2 \cdot \left(1 - \frac{\gamma_A^2}{n^3 \cdot q \cdot M^2}\right)$$

- 64 -

Soit $K = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ K_i \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ et $x = \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_i \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}$ où $X_i \in \mathbb{R}^n$ $x^T K = X_i^T \cdot K_i$

d'où $A^T K = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ K_i \\ \vdots \\ B_i K_i \\ \vdots \\ K_i \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ sauf pour $i = 1$ ou $i = n$

Nous avons donc :

$$K^T A A^T K = 2K_i^T K_i + K_i^T B_i^2 K_i \quad \text{pour } i = 2, \dots, n-1$$

$$K^T A A^T K = K_j^T K_j + K_j^T B_j^2 K_j \quad \text{pour } j = 1, n$$

Étant donné, il nous suffit de déterminer pour x connu, i et K_i tels que :

$$\varphi^2(x) = X_i^T K_i (2K_i^T K_i + K_i^T B_i^2 K_i)^{-1} K_i^T X_i \cdot \text{Trace}(K^T A A^T K)$$

Supposons que K_i soit inversible, nous aurons :

$$(1) \quad \varphi^2(x) = X_i^T (2I + B_i^2)^{-1} X_i \cdot \text{Trace } K_i^T (2I + B_i^2) K_i \quad \text{si} \\ i=2, \dots, n-1$$

$$(1') \quad \varphi^2(x) = X_j^T (I + B_j^2)^{-1} X_j \cdot \text{Trace } K_j^T (I + B_j^2) K_j \quad \text{si } j=1, n$$

Supposons, de plus, que K_i soit diagonale. $K_i = \lambda_i I \quad \lambda_i \neq 0$

(1) peut s'écrire :

$$\varphi^2(x) = \lambda_i^2 \cdot X_i^T (2I + B_i^2)^{-1} X_i \cdot N^2(2I + B_i^2)$$

$$\text{où } N^2(A) = \sum_{i,j} a_{ij}^2 = \text{norme euclidienne de } A.$$

d'où la détermination des λ_i :

$$\lambda_i = \pm \frac{\varphi(x)}{N^2(2I + B_i^2)} \cdot \frac{1}{\left(X_i^T (2I + B_i^2)^{-1} X_i \right)^{1/2}} \quad (2)$$

pour $i=2, \dots, n-1$

$$\lambda_j = \pm \frac{\varphi(x)}{N(I + B_j^2)} \cdot \frac{1}{\left(X_j^T (I + B_j^2)^{-1} X_j \right)^{1/2}} \quad (2')$$

pour $j = 1, n$

Le problème de la détermination de K revient donc à choisir l'indice i convenablement.

Nous avons vu au chapitre II, § B (b) que, si nous avons n normes φ_i sur R^n et un vecteur $x \in R^{n^2}$ tel que :

$$x = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \quad \text{avec } X_i \in \mathbb{R}^n \quad \text{la norme } \varphi(x) \text{ telle que}$$

$$\varphi(x) = \max_i \varphi_i(X_i) \quad \text{est une norme de vecteur sur } \mathbb{R}^{n^2}$$

Nous pouvons donc choisir i tel que :

$$\varphi_i(X_i) = \max_j \varphi_j(X_j)$$

Pour simplifier les calculs au maximum, nous pouvons choisir :

$$\lambda_i = \frac{1}{N(2I + B_i^2)} \quad \text{ce qui détermine les normes } \varphi_i \text{ de } \mathbb{R}^n$$

$$\varphi_i(X_i) = (X_i^T (2I + B_i^2)^{-1} X_i)^{1/2} \quad \text{si } i = 2, \dots, n-1$$

$$\varphi_j(X_j) = (X_j^T (I + B_j^2)^{-1} X_j)^{1/2} \quad \text{si } j = 1, n$$

Nous remarquerons sur cet exemple que les éléments de K sont bornés en module quel que soit x et que les éléments de la matrice A apparaissent dans la matrice $(2I + B_i^2)$ d'ordre n dont l'inverse, dans certains cas particuliers, peut être assez facilement calculé.

En effet, dans le cas particulier de la matrice du potentiel, par exemple, nous avons :

$$x_{n+1} = x_n - A^T \cdot K_r \cdot K_{r,i}^{-1} (2I + B^2)^{-1} K_{r,i}^{-1} \cdot K_r^T \cdot r(x_n)$$

Soit $I_i =$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ I \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

la matrice du type (n^2, n) telle que, divisée en sous-espaces, ceux-ci étant numérotés de 1 à n, le $i^{\text{ème}}$ espace soit le seul dont la décomposition soit non nulle et égal à la matrice-unité d'ordre n sur ce sous-espace.

Nous voyons que $K_r \cdot K_{r,i}^{-1} = I_i$

d'où

$$x_{n+1} = x_n - A^T \cdot I_i (2I + B^2)^{-1} I_i^T \cdot r(x_n) \quad \text{pour } i=2, \dots, n-1$$

et

$$x_{n+1} = x_n - A^T \cdot I_j (I+B^2)^{-1} I_j^T \cdot r(x_n) \quad \text{pour } j=1, n$$

Nous voyons que si :

$$X_m = \begin{bmatrix} X_{1,m} \\ X_{2,m} \\ \vdots \\ \vdots \\ X_{m,m} \end{bmatrix}$$

est la décomposition de x_m sur le produit direct $R^n * R^n * \dots * R^n$, $X_{i,m} \in R^n$

seules les composantes $X_{i-1,m}$, $X_{i,m}$, et $X_{i+1,m}$ seront modifiées. En effet :

$$X_{k,m+1} = X_{k,m} \quad k=1,2,\dots,i-2, i+2, \dots,n$$

$$X_{i-1,m+1} = X_{i-1,m} + V_i$$

$$X_{i,m+1} = X_{i,m} + B V_i$$

$$X_{i+1,m+1} = X_{i+1,m} + V_i$$

En posant $V = I_i (2I + B^2)^{-1} I_i^T \cdot r(x_m) =$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ V_i \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$V \in \mathbb{R}^{n^2}$ et

$V_i \in \mathbb{R}^n$

$$V_i = (2I + B^2)^{-1} I_i^T \cdot r(x_m) \quad \text{si } i = 2, \dots, n-1$$

$$V_i = (I + B^2)^{-1} I_i^T \cdot r(x_m) \quad \text{si } i = 1, n$$

V. - ESSAIS

Nous avons essayé cette méthode sur l'ordinateur I.B.M. 7090 suivant le même schéma que pour les essais précédents c'est-à-dire que nous avons choisi $n = 5$, soit $A =$ matrice du potentiel d'ordre $n^2 = 25$. Le vecteur solution étant arbitrairement choisi, et tel que $x_i = i$ si x_i sont ses éléments.

Nous avons commencé par inverser les matrices $(2I + B^2)$ et $(I + B^2)$ suivant la méthode exposée au chapitre suivant, puis, partant toujours du même vecteur initial X_0 tel que toutes ses composantes soient égales à 1, et demandant la même précision de calcul qu'aux essais précédents, nous avons obtenu le vecteur solution au bout de 125 itérations. Nous rappelons qu'à nos précédents essais, nous avons obtenu pour résoudre le même problème 338 itérations avec la méthode relative à la norme

$$\varphi_1(x) = \sum_{i=1}^{i=n} |x_i|^2$$

soit une amélioration de 63 % par rapport à cette méthode, et qu'avec la norme

$$\Phi(x) = \varphi_1(x) + \sqrt{2} \varphi_{\infty}(x).$$

qui, jusqu'alors, nous avait donné les meilleurs résultats, il nous avait fallu 327 itérations.

Nous avons donc ici une preuve pratique de l'intérêt qu'il y a à faire intervenir le plus possible les éléments caractéristiques d'un système dans toute méthode itérative destinée à le résoudre.

C H A P I T R E IV

METHODE POUR INVERSER LES MATRICES TRIDIAGONALES

SIMPLES

--:--

I. - INTRODUCTION

Comme nous venons de le voir, la connaissance de l'inverse d'une matrice est souvent nécessaire, soit pour résoudre directement un système, connaître son conditionnement normalisé [18], fabriquer une norme à laquelle correspondra une méthode itérative qui permettra d'améliorer une solution approchée, etc.... Nous étant intéressés à la matrice du potentiel, nous avons essayé de l'étudier, car sa structure simple de matrice tridiagonale par bloc nous a semblé intéressante. Mais c'est surtout l'étude des matrices tridiagonales simples qui nous a donné les résultats les plus intéressants.

Nous nous proposons donc d'étudier les matrices $A = (a_{ij})$ tridiagonales simples, telles que A :

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & 1 & 0 & \dots\dots\dots & 0 \\ 1 & a_2 & 1 & & 0 \\ 0 & 1 & a_3 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & & 0 & 1 & a_{n-1} \\ 0 & \dots\dots\dots & 0 & 1 & a_n \end{bmatrix}$$

A est une matrice carrée d'ordre n, non singulière, symétrique. Tous les termes des diagonales qui sont de part et d'autre de la diagonale principale sont identiques ; nous les prenons égaux à 1.

$$a_{ii} = a_i \quad a_{i,i+1} = 1 \quad a_{ij} = a_{ji} = 0 \quad \text{pour } j \geq i+2$$

II. - DECOMPOSITION DE LA MATRICE A. [16]

On sait que toute matrice symétrique peut être décomposée par la méthode de Cholesky. En effet, il existe une matrice triangulaire inférieure telle que

$$A = R \cdot R^T$$

Soit r_{ij} le terme général de la matrice R ; nous avons les formules :

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{k=i} r_{ik} \cdot r_{kj}^T = \sum_{k=1}^{k=i} r_{ik} \cdot r_{jk} \quad \text{où } i \leq j$$

Soit

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{k=i} r_{ik} \cdot r_{jk} \quad \text{pour } i \leq j$$

Nous pourrions donc calculer les r_{ij} par les formules suivantes :

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} r_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{k=i-1} r_{ik}^2} \\ r_{ji} = \frac{1}{r_{ii}} \left[a_{ij} - \sum_{k=1}^{k=i-1} r_{ik} \cdot r_{jk} \right] \end{array} \right. \quad \text{pour } i < j$$

Nous aurons donc au départ $r_{11} = \sqrt{a_{11}}$

En tenant compte de la structure tridiagonale de la matrice B, ces formules deviennent :

$$(2) \quad \begin{cases} r_{ii} = \sqrt{a_i - r_{i,i-1}^2} & \text{avec } r_{11} = \sqrt{a_1} \\ r_{i+1,i} = \frac{1}{r_{ii}} \\ r_{j,i} = 0 & \text{pour } j \geq i+2 \end{cases}$$

En effet :

$$r_{11} = \sqrt{a_1}$$

$$r_{21} = \frac{1}{\sqrt{a_1}} \quad r_{22} = \sqrt{a_2 - \frac{1}{a_1}}$$

$$r_{31} = \frac{1}{\sqrt{a_1}} (a_{13}) = 0 \quad \text{puisque } a_{13} = 0$$

$$r_{32} = \frac{1}{r_{22}} \quad r_{33} = \sqrt{a_3 - \frac{1}{r_{22}^2}}$$

$$r_{41} = \frac{1}{r_{11}} (a_{14}) = 0 \quad \text{puisque } a_{14} = 0$$

$$r_{42} = \frac{1}{r_{22}} (a_{24} - r_{21} \cdot r_{41}) = 0 \quad \text{puisque } a_{24} = 0$$

$$\text{et } a_{41} = 0 \\ r_{41} = 0$$

Supposons que tous les $r_{i,j}$ tels que $i \geq j+2$ soient nuls jusqu'à $i = \ell$ et $j = k$

$r_{\ell,k} = 0$ si $\ell - k > 2$ le terme suivant qui sera calculé, sera donc $r_{\ell,k+1}$

$$r_{\ell,k+1} = \frac{1}{r_{k+1,k+1}} \left(a_{k+1,\ell} - (r_{k+1,1} \cdot r_{\ell,1} + r_{k+1,2} \cdot r_{\ell,2} + \dots + r_{k+1,k} \cdot r_{\ell,k}) \right)$$

Or $a_{k+1,\ell} = 0$ puisque $\ell - (k+1) > 1$ et par hypothèse tous les $r_{i,j}$ sont nuls si $i \leq \ell$ et $j \leq k$, donc nous aurons :

$$r_{\ell,k+1} = 0$$

Si $\ell - k = 2$, nous aurons $r_{\ell,k+1} = r_{\ell,\ell-1}$ qui sera non nul et $r_{\ell,\ell}$ terme suivant calculé, sera non nul aussi.

Supposons donc que nous ayons calculé tous les termes de la matrice R jusqu'à $r_{\ell,\ell}$, le terme que nous allons calculer sera donc $r_{\ell+1,1}$

$$r_{\ell+1,1} = \frac{1}{r_{11}} (a_{1,\ell+1}) \quad \text{Or } a_{1,\ell+1} = 0 \text{ donc}$$

$$r_{\ell+1,1} = 0$$

Ainsi, nous vérifions par récurrence que la matrice R sera triangulaire inférieure et bidiagonale [17].

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ r_{21} & r_{22} & & & & \\ 0 & r_{32} & r_{33} & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & r_{n-1,n-2} & r_{n-1,n-1} & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & r_{n,n-1} & r_{n,n} \end{bmatrix}$$

Partant des formules (2), nous pouvons donc calculer les termes de la matrice R.

$$r_{11} = \sqrt{a_{11}}$$

$$r_{21} = \frac{1}{\sqrt{a_1}} \quad r_{22} = \sqrt{a_2 - \frac{1}{a_1}} = \sqrt{\frac{a_1 a_2 - 1}{a_1}}$$

$$r_{32} = \sqrt{\frac{a_1}{a_1 a_2 - 1}} \quad r_{33} = \sqrt{a_3 - \frac{a_1}{a_1 a_2 - 1}} = \sqrt{\frac{a_1 a_2 a_3 - a_3 - a_1}{a_1 a_2 - 1}}$$

Posons $N_1 = 1$ $N_2 = a_1$. Nous aurons :

$$r_{11} = \sqrt{N_2} \quad \text{soit} \quad r_{11} = \sqrt{\frac{N_2}{N_1}}$$

$$r_{21} = \sqrt{\frac{N_1}{N_2}} \quad r_{22} = \sqrt{a_2 - \frac{N_1}{N_2}} = \sqrt{\frac{a_2 N_2 - N_1}{N_2}}$$

En posant $N_3 = a_2 N_2 - N_1$ nous aurons $r_{22} = \sqrt{\frac{N_3}{N_2}}$

$$r_{32} = \sqrt{\frac{N_2}{N_3}} \quad r_{33} = \sqrt{a_3 - \frac{N_2}{N_3}} = \sqrt{\frac{a_3 N_3 - N_2}{N_3}}$$

Soit, en posant $N_4 = a_3 N_3 - N_2$ $r_{33} = \sqrt{\frac{N_4}{N_3}}$

D'une manière générale, posons :

$$N_{i+1} = a_i N_i - N_{i-1} \quad \text{avec} \quad N_1 = 1 \quad N_2 = a_1$$

Nous aurons :

$$r_{i,i-1} = \sqrt{\frac{N_{i-1}}{N_i}} \quad \text{et} \quad r_{ii} = \sqrt{a_i - r_{i,i-1}^2} = \sqrt{a_i - \frac{N_{i-1}}{N_i}}$$

$$= \sqrt{\frac{a_i N_i - N_{i-1}}{N_i}} = \sqrt{\frac{N_{i+1}}{N_i}}$$

Supposons que nous ayons calculé $r_{k,k} = \sqrt{\frac{N_{k+1}}{N_k}}$

Nous aurons :

$$r_{k+1,k} = \sqrt{\frac{N_k}{N_{k+1}}} \quad \text{et} \quad r_{k+1,k+1} = \sqrt{a_{k+1} - \frac{N_k}{N_{k+1}}}$$

soit

$$r_{k+1,k+1} = \sqrt{\frac{a_{k+1} N_{k+1} - N_k}{N_{k+1}}} = \sqrt{\frac{N_{k+2}}{N_{k+1}}}$$

Ainsi, nous voyons que, partant de l'algorithme suivant :

$$N_{i+1} = a_i N_i - N_{i-1} \quad \text{avec} \quad N_1 = 1 \quad \text{et} \quad N_2 = a_1$$

et suivant les formules :

$$r_{i,i-1} = \sqrt{\frac{N_{i-1}}{N_i}} \quad \text{et} \quad r_{ii} = \sqrt{\frac{N_{i+1}}{N_i}}$$

(3)

nous pouvons facilement calculer tous les termes de la matrice R.

III. - INVERSION DE LA MATRICE A.

a) INVERSION DE LA MATRICE R.

Nous avons vu que la matrice A est égale au produit de la matrice R par sa transposée R^T

$$A = R \cdot R^T$$

donc
$$A^{-1} = (R^{-1})^T \cdot R^{-1}$$

Soit $R^{-1} = (\rho_{ij})$ ρ_{ij} = terme général de la matrice R^{-1} inverse de R.

R étant une matrice triangulaire inférieure, R^{-1} sera aussi une matrice triangulaire inférieure.

Nous aurons donc les formules suivantes :

$$\rho_{i,i} = \frac{1}{r_{i,i}} = r_{i+1,i}$$

$$\rho_{i,j} = 0 \quad \text{si } j > i$$

$$\rho_{i,j} = \frac{r_{11} \cdot r_{22} \cdot \dots \cdot r_{j-1,j-1} \cdot r_{j+1,j} \cdot r_{j+2,j+1} \cdot \dots \cdot r_{i,i-1} \cdot r_{i+1,i+1} \cdot \dots \cdot r_{n,n}}{r_{11} \cdot r_{22} \cdot \dots \cdot r_{n-1,n-1} \cdot r_{n,n}} \quad \text{si } j < i$$

ou, en posant :
$$\prod_{k=1}^{k=n} r_{kk} = r_{11} \cdot r_{22} \cdot \dots \cdot r_{nn}$$

$$\rho_{i,j} = \frac{\prod_{k=1}^{k=j-1} r_{kk}}{\prod_{k=1}^{k=j-1} r_{kk}} \cdot \frac{\prod_{k=j+1}^{k=i} r_{k,k-1}}{\prod_{k=j}^{k=i} r_{kk}} \cdot \frac{\prod_{k=i+1}^{k=n} r_{k,k-1}}{\prod_{k=i+1}^{k=n} r_{kk}} \quad \text{si } j < i$$

Soit

$$\rho_{i,j} = \frac{\prod_{k=j+1}^{k=i-1} r_{k,k-1}}{\prod_{k=j}^{k=i} r_{k,k}}$$

Or, nous avons vu que nous avons :

$$r_{i,i-1} = \sqrt{\frac{N_{i-1}}{N_i}} \quad \text{et} \quad r_{i,i} = \sqrt{\frac{N_{i+1}}{N_i}}$$

d'où

$$\begin{aligned} \prod_{k=j+1}^{k=i} r_{k,k-1} &= \sqrt{\frac{N_j}{N_{j+1}}} \cdot \sqrt{\frac{N_{j+1}}{N_{j+2}}} \cdot \dots \cdot \sqrt{\frac{N_{i-2}}{N_{i-1}}} \cdot \sqrt{\frac{N_{i-1}}{N_i}} \\ &= \sqrt{\frac{N_j}{N_i}} \end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned} \prod_{k=j}^{k=i} r_{k,k} &= \sqrt{\frac{N_{j+1}}{N_j}} \cdot \sqrt{\frac{N_{j+2}}{N_{j+1}}} \cdot \dots \cdot \sqrt{\frac{N_i}{N_{i-1}}} \cdot \sqrt{\frac{N_{i+1}}{N_i}} \\ &= \sqrt{\frac{N_{i+1}}{N_j}} \end{aligned}$$

d'où

$$\rho_{i,j} = \sqrt{\frac{N_j}{N_i}} \cdot \sqrt{\frac{N_j}{N_{i+1}}} = \frac{N_j}{\sqrt{N_i \cdot N_{i+1}}} \quad \text{si } j < i$$

D'autre part :

$$\rho_{i,i} = r_{i+1,i} = \sqrt{\frac{N_i}{N_{i+1}}} = \frac{N_i}{\sqrt{N_i \cdot N_{i+1}}}$$

d'où les formules qui nous permettent de calculer les $\rho_{i,j}$

$$(3') \left\{ \begin{array}{ll} \rho_{i,j} = \frac{N_j}{\sqrt{N_i \cdot N_{i+1}}} & \text{si } i \geq j \\ \rho_{i,j} = 0 & \text{si } i < j \end{array} \right.$$

b) INVERSION DE LA MATRICE A .

Nous avons $A^{-1} = (R^{-1})^T \cdot R^{-1}$

Soit $\alpha_{i,j}$ le terme général de la matrice A^{-1}

$$A^{-1} = (\alpha_{i,j})$$

$$\alpha_{i,j} = \sum_{k=1}^{k=n} \rho_{i,k}^T \cdot \rho_{k,j} \quad \text{or} \quad \rho_{i,k}^T = \rho_{ki}$$

et $\rho_{ki} = 0$ si $k < j$

d'où $\alpha_{i,j} = \sum_{k=j}^{k=n} \rho_{ki} \cdot \rho_{kj}$ pour $j \geq i$

et $\alpha_{i,j} = \alpha_{j,i}$ car A étant une matrice symétrique, A^{-1} l'est aussi.

En utilisant les formules (3'), nous avons :

$$\alpha_{i,j} = \sum_{k=j}^{k=n} \frac{N_i}{\sqrt{N_k \cdot N_{k+1}}} \cdot \frac{N_j}{\sqrt{N_k \cdot N_{k+1}}} \quad \text{pour } j \geq i$$

soit

$$\alpha_{i,j} = \alpha_{j,i} = N_i \cdot N_j \cdot \left(\sum_{k=j}^{k=n} \frac{1}{N_k \cdot N_{k+1}} \right) \quad \text{avec } j \geq i \quad (4)$$

Nous voyons ainsi que, partant de l'algorithme qui nous permet de calculer les n+1 premiers nombres N_i

$$N_{i+1} = a_i N_i - N_{i-1} \quad \text{avec } N_1 = 1 \quad \text{et} \quad N_2 = a_1,$$

nous obtenons directement les termes de l'inverse de la matrice A. Mais, du point de vue calcul numérique, la formule (4) semble peu utilisable. En effet, elle comporte pour j petit un assez grand nombre de divisions, et le calcul fait en utilisant un calculateur électronique, peut ne pas nous donner la valeur exacte des $\alpha_{i,j}$, surtout pour des matrices d'ordre un peu grand.

Une étude des termes $\alpha_{i,j}$ nous a permis de constater qu'ils étaient fonction des a_i , et que l'on pouvait écrire :

$$\alpha_{i,j} = \frac{N_i}{N_{n+1}} \left(P(a_k) \right)_{k=j+1, j+2, \dots, n}$$

où $P(a_k)$ est une expression fonction des a_k avec k variant de $j+1$ à n .

En effet, pour une matrice A d'ordre 6 par exemple, nous avons obtenu :

$$\alpha_{11} = \frac{N_1}{N_7} (a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 - a_2 a_3 a_4 - a_2 a_3 a_6 - a_2 a_5 a_6 - a_4 a_5 a_6 + a_2 + a_4 + a_6)$$

$$\alpha_{12} = \frac{N_1}{N_7} (a_3 a_4 a_5 a_6 - a_3 a_4 - a_3 a_6 - a_5 a_6 + 1)$$

$$\alpha_{13} = \frac{N_1}{N_7} (a_4 a_5 a_6 - a_4 - a_6)$$

$$\alpha_{14} = \frac{N_1}{N_7} (a_5 a_6 - 1) ; \quad \alpha_{15} = \frac{N_1}{N_7} a_6 ; \quad \alpha_{16} = \frac{N_1}{N_7}$$

$$\alpha_{22} = \frac{N_2}{N_7} (a_3 a_4 a_5 a_6 - a_3 a_4 - a_3 a_6 - a_5 a_6 + 1)$$

$$\alpha_{23} = \frac{N_2}{N_7} (a_4 a_5 a_6 - a_4 - a_6)$$

$$\alpha_{24} = \frac{N_2}{N_7} (a_5 a_6 - 1) ; \quad \alpha_{25} = \frac{N_2}{N_7} a_6 ; \quad \alpha_{26} = \frac{N_2}{N_7}$$

$$\alpha_{33} = \frac{N_3}{N_7} (a_4 a_5 a_6 - a_4 - a_6)$$

$$\alpha_{34} = \frac{N_3}{N_7} (a_5 a_6 - 1) ; \quad \alpha_{35} = \frac{N_3}{N_7} a_6 ; \quad \alpha_{36} = \frac{N_3}{N_7}$$

$$\alpha_{44} = \frac{N_4}{N_7} (a_5 a_6 - 1) \quad ; \quad \alpha_{45} = \frac{N_4}{N_7} a_6 \quad ; \quad \alpha_{46} = \frac{N_4}{N_7}$$

$$\alpha_{55} = \frac{N_5}{N_7} a_6 \quad ; \quad \alpha_{56} = \frac{N_5}{N_7}$$

$$\alpha_{66} = \frac{N_6}{N_7}$$

Posons : $P_n = 1$

$$P_{n-1} = a_n$$

$$P_{n-2} = a_{n-1} a_n - 1 = a_{n-1} P_{n-1} - P_n$$

$$P_{n-3} = a_{n-2} a_{n-1} a_n - a_{n-2} - a_n = a_{n-2} P_{n-2} - P_n$$

Nous voyons que nous pouvons déduire les P_i par la formule récurrente suivante :

$$(5) \quad \begin{cases} P_{i-1} = a_i P_i - P_{i+1} & \text{avec } 2 \leq i \leq n-1 \quad \text{et} \\ P_n = 1 & P_{n-1} = a_n \end{cases}$$

Dans ce cas, nous pouvons écrire pour l'exemple précédent d'une matrice d'ordre 6 :

$$\alpha_{66} = \frac{N_6}{N_7} P_6$$

$$\alpha_{56} = \frac{N_5}{N_7} P_6$$

$$\alpha_{46} = \frac{N_4}{N_7} P_6$$

$$\alpha_{55} = \frac{N_5}{N_7} P_5$$

$$\alpha_{45} = \frac{N_4}{N_7} P_5$$

$$\alpha_{44} = \frac{N_4}{N_7} P_4$$

Ainsi, nous voyons que nous aurons la formule suivante pour calculer les $\alpha_{i,j}$:

$$\alpha_{i,j} = \alpha_{j,i} = \frac{N_i}{N_{n+1}} P_j \quad (6)$$

où les $P_j = \left(P(a_k) \right)_{k=j+1, \dots, n}$ les P_j se calculant par la formule (5)

En effet, supposons que nous ayons calculé $\alpha_{i,j}$ pour $1 \leq i \leq n$ et $k \leq j \leq n-1$, nous aurons :

$$\alpha_{i,j} = N_i N_j \left(\sum_{k=j}^{k=n} \frac{1}{N_k \cdot N_{k+1}} \right) = \frac{N_i}{N_{n+1}} P_j \quad \text{d'après (4) et (6).}$$

Calculant les termes $\alpha_{i,j}$ en faisant décroître les indices, nous avons déjà calculé $\alpha_{i,j+1}$:

$$\alpha_{i,j+1} = N_i \cdot N_{j+1} \left(\sum_{k=j+1}^{k=n} \frac{1}{N_k \cdot N_{k+1}} \right) = \frac{N_i}{N_{n+1}} P_{j+1}$$

Des expressions de $\alpha_{i,j}$ et $\alpha_{i,j+1}$, nous pouvons déduire :

$$\sum_{k=j+1}^{k=n} \frac{1}{N_k \cdot N_{k+1}} = \frac{P_{j+1}}{N_{n+1} \cdot N_{j+1}}$$

$$\sum_{k=j}^{k=n} \frac{1}{N_k \cdot N_{k+1}} = \frac{P_j}{N_{n+1} \cdot N_j}$$

$$= \frac{1}{N_j \cdot N_{j+1}} + \sum_{k=j+1}^{k=n} \frac{1}{N_k \cdot N_{k+1}}$$

$$= \frac{1}{N_j \cdot N_{j+1}} + \frac{P_{j+1}}{N_{n+1} \cdot N_{j+1}}$$

$$\text{Soit } \frac{P_j}{N_{n+1} \cdot N_j} = \frac{1}{N_j \cdot N_{j+1}} + \frac{P_{j+1}}{N_{n+1} \cdot N_{j+1}}$$

$$\begin{aligned} \frac{P_{j+1}}{N_{j+1}} &= \frac{P_j}{N_j} - \frac{N_{n+1}}{N_j \cdot N_{j+1}} \\ &= \frac{N_{j+1} P_j - N_{n+1}}{N_j \cdot N_{j+1}} \end{aligned}$$

$$\text{Soit } P_{j+1} = \frac{N_{j+1} P_j - N_{n+1}}{N_j} \quad (7)$$

Le terme suivant que nous voulons calculer sera $\alpha_{i,j-1}$:

$$\begin{aligned} \alpha_{i,j-1} &= N_i \cdot N_{j-1} \left(\sum_{k=j-1}^{k=n} \frac{1}{N_k \cdot N_{k+1}} \right) \\ &= N_i \cdot N_{j-1} \left(\frac{1}{N_{j-1} \cdot N_j} + \sum_{k=j}^{k=n} \frac{1}{N_k \cdot N_{k+1}} \right) \\ &= N_i \cdot N_{j-1} \left(\frac{1}{N_{j-1} \cdot N_j} + \frac{P_j}{N_{n+1} \cdot N_j} \right) \\ &= \frac{N_i}{N_{n+1}} \left(\frac{N_{n+1}}{N_j} + \frac{N_{j-1} \cdot P_j}{N_j} \right) \end{aligned}$$

Or $N_{j-1} = a_j N_j - N_{j+1}$ d'après (3)

$$\begin{aligned} \text{Donc } \frac{N_{j-1}}{N_j} P_j &= \frac{a_j N_j - N_{j+1}}{N_j} P_j \\ &= a_j P_j - \frac{N_{j+1}}{N_j} P_j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d'où } \alpha_{i,j-1} &= \frac{N_i}{N_{n+1}} \left(\frac{N_{n+1}}{N_j} + a_j P_j - \frac{N_{j+1}}{N_j} P_j \right) \\ &= \frac{N_i}{N_{n+1}} \left(a_j P_j - \frac{N_{j+1} P_j - N_{n+1}}{N_j} \right) \end{aligned}$$

soit, d'après (7)

$$\begin{aligned} &= \frac{N_i}{N_{n+1}} \left(a_j P_j - P_{j+1} \right) \\ &= \frac{N_i}{N_{n+1}} \cdot P_{j-1} \end{aligned}$$

c) RESUME

Si A est une matrice tridiagonale dont les termes des diagonales de part et d'autre de la diagonale principale sont identiques à 1, elle peut être facilement inversée en utilisant les algorithmes suivants :

$$N_{i+1} = a_i N_i - N_{i-1} \quad \text{avec} \quad N_1 = 1 \quad \text{et} \quad N_2 = a_1$$

$$P_{i-1} = a_i P_i - P_{i+1} \quad \text{avec} \quad P_n = 1 \quad \text{et} \quad P_{n-1} = a_n$$

Si α_{ij} est le terme général de A^{-1} , nous aurons :

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ji} = \frac{N_i P_j}{N_{n+1}}$$

n étant l'ordre de la matrice A que l'on veut inverser.

IV. - CAS COMPLEXE

Dans le cas où les α_j sont des nombres complexes, les algorithmes qui nous permettent de calculer les N_j et les P_j sont encore valables, mais pour pouvoir calculer sur machine les termes de l'inverse, il nous faudra les décomposer en deux algorithmes différents.

$$\text{Soit } a_j = b_j + i c_j \quad \text{où } i^2 = -1$$

$$\begin{aligned} N_1 = 1 \quad N_2 = a_2 = b_2 + i c_2 \quad N_{j+1} &= a_j N_j - N_{j-1} \\ &= (b_j + i c_j) N_j - N_{j-1} \end{aligned}$$

$$\text{Posons } N_j = N_{r_j} + i N_{c_j}$$

$$N_{r_j} = \text{partie réelle de } N_j \quad \text{et} \quad N_{c_j} = \text{partie imaginaire de } N_j$$

$$\begin{aligned} N_{j+1} &= a_j N_j - N_{j-1} \\ &= (b_j + i c_j)(N_{r_j} + i N_{c_j}) - (N_{r_{j-1}} + i N_{c_{j-1}}) \\ &= (b_j N_{r_j} - c_j N_{c_j} - N_{r_{j-1}}) + i (b_j N_{c_j} + c_j N_{r_j} - N_{c_{j-1}}) \\ &= N_{r_{j+1}} + i N_{c_{j+1}} \end{aligned}$$

d'où

$$(8) \left\{ \begin{aligned} N_{r_{j+1}} &= b_j N_{r_j} - c_j N_{c_j} - N_{r_{j-1}} \\ N_{c_{j+1}} &= b_j N_{c_j} + c_j N_{r_j} - N_{c_{j-1}} \end{aligned} \right.$$

avec $N_{r_1} = 1 \quad N_{r_2} = b_1 \quad N_{c_1} = 0 \quad N_{c_2} = c_1$

De même, nous avons :

$$P_{j-1} = a_j P_j - P_{j+1} \quad P_n = 1 \quad P_{n-1} = a_n$$

En posant $P_j = P_{rj} + i P_{cj}$, nous avons :

$$\begin{aligned} P_{j-1} &= (b_j + i c_j)(P_{rj} + i P_{cj}) - (P_{rj+1} + i P_{cj+1}) \\ &= (b_j P_{rj} - c_j P_{cj} - P_{rj+1}) + i (b_j P_{cj} + c_j P_{rj} - P_{cj+1}) \\ &= P_{rj-1} + i P_{cj-1} \end{aligned}$$

d'où :

$$(9) \begin{cases} P_{r,j-1} = b_j P_{rj} - c_j P_{cj} - P_{r,j+1} \\ P_{c,j-1} = b_j P_{cj} + c_j P_{rj} - P_{c,j+1} \end{cases}$$

avec $P_{rn} = 1 \quad P_{r,n-1} = b_n \quad P_{cn} = 0 \quad P_{c,n-1} = c_n$

d'où

$$\begin{aligned} \alpha_{k\ell} &= \frac{N_k P_\ell}{N_{n+1}} \\ &= \frac{(N_{rk} P_{r\ell} - N_{ck} P_{c\ell}) + i(N_{rk} P_{c\ell} + N_{ck} P_{r\ell})}{N_{r,n+1} + i N_{c,n+1}} \\ &= \beta_{k\ell} + i \chi_{k\ell} \end{aligned}$$

$$\beta_{k\ell} = \frac{1}{N_{r,n+1}^2 + N_{c,n+1}^2} \left[N_{r,n+1} (N_{rk} P_{r\ell} - N_{ck} P_{c\ell}) + N_{c,n+1} (N_{rk} P_{c\ell} + N_{ck} P_{r\ell}) \right]$$

$$\gamma_{k\ell} = \frac{1}{N_{r,n+1}^2 + N_{c,n+1}^2} \left[N_{r,n+1} (N_{rk} P_{c\ell} + N_{ck} P_{r\ell}) - N_{c,n+1} (N_{rk} P_{r\ell} - N_{ck} P_{c\ell}) \right]$$

V. - CAS PARTICULIERS

1°) CAS où $a_i = a_{n+1-i}$

En effet, supposons que nous ayons une matrice tridiagonale telle que les termes de la diagonale principale soient symétriques par rapport au centre de la matrice.

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & a_2 & 1 & & & & \\ 0 & 1 & a_3 & & & & \\ \vdots & & & \ddots & & & \\ \vdots & & & & a_3 & 1 & 0 \\ \vdots & & & & 1 & a_2 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & a_1 \end{bmatrix}$$

Nous avons $a_1 = a_n$ $a_2 = a_{n-1}$ et ainsi $a_i = a_{n+1-i}$

Nous pouvons, bien entendu, calculer les termes α_{ij} en utilisant les formules (3), (5) et (6), mais celles-ci se simplifient par la double symétrie de la matrice A.

$$\text{En effet, nous avons : } P_{j-1} = a_j P_j - P_{j+1}$$

$$\text{avec } P_n = 1 \text{ et } P_{n-1} = a_n$$

$$\text{d'où } P_n = N_1 \quad P_{n-1} = a_n = a_1 = N_2$$

$$\text{d'où } P_{n-2} = a_{n-1} P_{n-1} - P_n$$

$$= a_2 N_2 - N_1$$

$$= N_3$$

et ainsi, si $P_k = N_{n+1-k}$ et $P_{k+1} = N_{n-k}$, nous avons

$$P_{k-1} = a_k P_k - P_{k+1}$$

$$= a_{n+1-k} N_{n+1-k} - N_{n-k}$$

$$= N_{n+2-k} = N_{(n+1)-(k-1)}$$

Donc, dans ce cas particulier, nous pouvons calculer directement la matrice inverse A^{-1} par les formules suivantes :

$$N_{i+1} = a_i N_i - N_{i-1} \quad \text{avec } N_1 = 1 \quad N_2 = a_1$$

$$\alpha_{i,j} = \alpha_{j,i} = \frac{N_i \cdot N_{n+1-j}}{N_{n+1}}$$

2°) CAS OU TOUS LES α_i SONT ÉGAUX

Dans le cas des sous-matrices de la matrice du potentiel par exemple, nous avons tous les termes a_i qui sont égaux à -4 . Il est bien évident que le signe négatif ne change rien aux formules, il suffit pour qu'elles restent exactes de multiplier tous les termes de la matrice par -1 ; dans ce cas, seuls les termes $r_{i+1,i}$ de la matrice R changeront de signe. Nous aurons :

$$r_{i+1,i} = - \frac{N_i}{N_{i+1}}$$

Mais toutes les autres formules restent exactes et l'on obtient le même inverse (au signe des termes près, bien entendu).

a) PROPRIETES DES NOMBRES N_i

Nous avons déjà vu que dans le cas où $a_i = a_{n+1-i}$ nous aurions de même $N_i = P_{n+1-i}$, et que nous avons ainsi :

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ji} = \frac{N_i N_{n+1-j}}{N_{n+1}}$$

avec $N_{i+1} = N_2 N_i - N_{i-1}$ puisque $a_i = a_1 = N_2 \quad \forall i$

α) Première propriété

$$N_{i+k} = N_k N_{i+1} - N_{k-1} N_i$$

En effet :

$$N_{i+2} = N_2 N_{i+1} - N_1 N_i$$

$$N_3 = N_2 \cdot N_2 - N_1 N_1 = N_2^2 - N_1^2$$

$$N_4 = N_2 N_3 - N_1 N_2$$

$$N_5 = N_2 N_4 - N_1 N_3$$

$$= N_2 (N_2 N_3 - N_1 N_2) - N_1 N_3$$

$$= N_2^2 N_3 - N_1 N_2^2 - N_1 N_3$$

$$= N_3 (N_2^2 - N_1) - N_1 N_2^2 = N_3^2 - N_2^2$$

$$N_6 = N_2 N_5 - N_1 N_4$$

$$= N_2 (N_2 N_4 - N_1 N_3) - N_1 N_4$$

$$= N_4 (N_2^2 - N_1) - N_1 N_3 N_2$$

$$= N_4 N_3 - N_3 N_2$$

Supposons que $N_{i+k} = N_k \cdot N_{i+1} - N_{k-1} \cdot N_i$ pour tout $i+k$

$$N_{i+k+1} = N_2 N_{i+k} - N_1 N_{i+k-1} \quad \text{d'après (3)}$$

$$= N_2 (N_k N_{i+1} - N_{k-1} N_i) - N_1 N_{i+k-1}$$

$$= N_2 (N_k N_{i+1} - N_{k-1} N_i) - N_1 (N_{k-1} N_{i+1} - N_{k-2} N_i)$$

$$= N_{i+1} (N_2 N_k - N_1 N_{k-1}) - N_i (N_2 N_{k-1} - N_1 N_{k-2})$$

$$= N_{i+1} N_{k+1} - N_i N_k$$

d'où $N_{i+k+1} = N_{k+1} N_{i+1} - N_k N_i$ quels que soient i et k .

β) Deuxième propriété

$$N_{k+1} \cdot N_{k-1} = N_k^2 - 1$$

En effet :

$$N_3 = N_2^2 - N_1^2 = N_2^2 - 1$$

$$N_1 N_3 = N_2^2 - 1$$

$$\begin{aligned} N_2 N_4 &= N_2 (N_2 N_3 - N_1 N_2) \\ &= N_2^2 N_3 - N_1 N_2^2 \\ &= N_3 (N_3 + N_1) - N_1 N_2^2 \\ &= N_3^2 + N_3 N_1 - N_1 N_2^2 \\ &= N_3^2 + N_2^2 - 1 - N_2^2 \\ &= N_3^2 - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_3 N_5 &= N_3 (N_2 N_4 - N_1 N_3) \\ &= N_2 N_3 N_4 - N_1 N_3^2 \\ &= N_4 (N_4 + N_1 N_2) - N_1 N_3^2 \\ &= N_4^2 + N_1 N_2 N_4 - N_1 N_3^2 \\ &= N_4^2 + N_1 (N_2 N_4 - N_3^2) \\ &= N_4^2 + N_3^2 - 1 - N_3^2 \\ &= N_4^2 - 1 \end{aligned}$$

Supposons que $N_{k+1} \cdot N_{k-1} = N_k^2 - 1$

$$\begin{aligned} N_k \cdot N_{k+2} &= N_k (N_2 N_{k+1} - N_1 N_k) \\ &= N_2 N_k N_{k+1} - N_1 N_k^2 \\ &= N_{k+1} (N_{k+1} + N_1 N_{k-1}) - N_1 N_k^2 \\ &= N_{k+1}^2 + N_1 N_{k+1} N_{k-1} - N_1 N_k^2 \\ &= N_{k+1}^2 + N_1 (N_k^2 - 1) - N_1 N_k^2 \\ &= N_{k+1}^2 - 1 \end{aligned}$$

Donc $N_{k+1} N_{k-1} = N_k^2 - 1$ quel que soit k .

§) Troisième propriété

$$N_j \sum_{k=j}^{k=\ell} \frac{1}{N_k \cdot N_{k+1}} = \frac{N_{\ell+1-j}}{N_{j+\ell+1}}$$

Soit S_k la somme des k premiers termes.

$$\begin{aligned} \text{Nous aurons : } S_2 &= \frac{N_j}{N_j N_{j+1}} + \frac{N_j}{N_{j+1} N_{j+2}} \\ &= \frac{N_j}{N_{j+1}} \left(\frac{1}{N_j} + \frac{1}{N_{j+2}} \right) \\ &= \frac{1}{N_{j+1} N_{j+2}} (N_{j+2} + N_j) \\ &= \frac{N_2 N_{j+1}}{N_{j+1} N_{j+2}} \\ &= \frac{N_2}{N_{j+2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_3 &= S_2 + \frac{N_j}{N_{j+2} N_{j+3}} \\
 &= \frac{1}{N_{j+2}} \left(N_2 + \frac{N_j}{N_{j+3}} \right) \\
 &= \frac{1}{N_{j+2} N_{j+3}} (N_2 N_{j+3} + N_j) \\
 &= \frac{1}{N_{j+2} N_{j+3}} (N_2^2 N_{j+2} - N_2 N_1 N_{j+1} + N_j) \\
 &= \frac{1}{N_{j+2} N_{j+3}} (N_2^2 N_{j+2} - N_{j+2}) \\
 &= \frac{1}{N_{j+3}} (N_2^2 - 1) = \frac{N_3}{N_{j+3}}
 \end{aligned}$$

Supposons que $S_k = \frac{N_k}{N_{j+k}}$, nous aurons :

$$\begin{aligned}
 S_{k+1} &= S_k + \frac{N_j}{N_{j+k} \cdot N_{j+k+1}} \\
 &= \frac{1}{N_{j+k}} \left(N_k + \frac{N_j}{N_{j+k+1}} \right) \\
 &= \frac{1}{N_{j+k} \cdot N_{j+k+1}} (N_k \cdot N_{j+k+1} + N_j)
 \end{aligned}$$

d'après la deuxième propriété :

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{N_{j+k} \cdot N_{j+k+1}} \left(N_k (N_{k+1} \cdot N_{j+1} - N_k N_j) + N_j \right) \\
 &= \frac{1}{N_{j+k} N_{j+k+1}} (N_k \cdot N_{k+1} \cdot N_{j+1} - N_k^2 N_j + N_j) \\
 &= \frac{1}{N_{j+k} N_{j+k+1}} \left(N_k \cdot N_{k+1} \cdot N_{j+1} - N_j (N_k^2 - 1) \right)
 \end{aligned}$$

d'après la 3ème propriété :

$$\begin{aligned}
 S_{k+1} &= \frac{1}{N_{j+k} \cdot N_{j+k+1}} \left(N_k N_{k+1} N_{j+1} - N_j N_{k+1} N_{k-1} \right) \\
 &= \frac{N_{k+1}}{N_{j+k} \cdot N_{j+k+1}} \left(N_k N_{j+1} - N_{k-1} N_j \right)
 \end{aligned}$$

d'après la 2ème propriété :

$$= \frac{N_{k+1}}{N_{j+k+1}}$$

Nous pouvons donc en conclure que la somme des $\ell-j+1$ termes S_m

$$\begin{aligned}
 S_m &= \frac{N_m}{N_{j+m}} \\
 &= \frac{N_{\ell-j+1}}{N_{\ell+1}}
 \end{aligned}$$

Et ainsi nous retrouvons la formule qui nous permet de calculer les $\alpha_{i,j}$:

$$\begin{aligned}
 \alpha_{ij} &= N_i N_j \left(\sum_{k=j}^{k=n} \frac{1}{N_k N_{k+1}} \right) \\
 &= N_i \cdot S_m \quad \text{avec } m = n - j + 1 \\
 &= \frac{N_i N_{n+1-j}}{N_{n+1}}
 \end{aligned}$$

b) CALCUL DIRECT DES N_i EN FONCTION DE i

$$N_1 = 1$$

$$N_2 = a$$

a = terme de la diagonale principale

$$N_3 = N_2^2 - 1$$

$a_i = a$ quel que soit i

$$N_4 = N_2^3 - 2N_2$$

$$N_5 = N_2^4 - 3N_2^2 + 1$$

$$N_6 = N_2^5 - 4N_2^3 + 3N_2$$

$$N_7 = N_2^6 - 5N_2^4 + 6N_2^2 - 1$$

$$N_8 = N_2^7 - 6N_2^5 + 10N_2^3 - 4N_2$$

~~Nous pourrions~~ nous pourrions donc écrire :

$$N_i = N_2^{i-1} - (i-2)N_2^{i-3} + \frac{(i-4)(i-3)}{2!} N_2^{i-5} - \frac{(i-6)(i-5)(i-4)}{3!} N_2^{i-7} +$$

.....

Soit donc :

$$N_i = N_2^{i-1} - (i-2)N_2^{i-3} + \frac{(i-3)!}{2!(i-5)!} N_2^{i-5} - \frac{(i-4)!}{3!(i-7)!} N_2^{i-7} + \dots$$

$$\dots + (-1)^{\frac{k-1}{2}} \frac{\left(\frac{2i-k-1}{2}\right)!}{\left(\frac{k-1}{2}\right)! (i-k)!} N_2^{i-k} + \dots$$

avec $k = 1, 3, 5, \dots, i$ si i est impair

ou $k = 1, 3, 5, \dots, i-1$ si i est pair

En supposant la formule vraie jusqu'à $i=j-1$, nous aurons :

$$N_{j-2} = N_2^{j-3} - (j-4)N_2^{j-5} + \frac{(j-6)(j-5)}{2!} N_2^{j-7} + \dots$$

$$\dots + (-1)^{\frac{k-3}{2}} \frac{\binom{2j-k-3}{2}!}{\left(\frac{k-3}{2}\right)! (j-k)!} N_2^{j-k} + \dots$$

$\left(\frac{k-3}{2}\right)^e$ terme de la somme

$$N_{j-1} = N_2^{j-2} - (j-3)N_2^{j-4} + \frac{(j-5)(j-4)}{2!} N_2^{j-6} - \frac{(j-5)!}{3!(j-8)!} N_2^{j-8} + \dots$$

$$\dots + (-1)^{\frac{k-1}{2}} \frac{\binom{2j-k-3}{2}!}{\left(\frac{k-1}{2}\right)! (j-k-1)!} N_2^{j-k-1} + \dots$$

$\left(\frac{k-1}{2}\right)^e$ terme de la somme

$$N_j = N_2 N_{j-1} - N_{j-2}$$

$$= N_2^{j-1} - (j-3)N_2^{j-3} + \frac{(j-5)(j-4)}{2!} N_2^{j-5} - \frac{(j-5)!}{3!(j-8)!} N_2^{j-7} + \dots$$

$$\dots + (-1)^{\frac{k-1}{2}} \frac{\binom{2j-k-3}{2}!}{\left(\frac{k-1}{2}\right)! (j-k-1)!} N_2^{j-k} + \dots$$

$$- N_2^{j-3} + (j-4)N_2^{j-5} - \frac{(j-6)(j-5)}{2!} N_2^{j-7} + \dots$$

$$\dots + (-1)^{\frac{k-3}{2}} \frac{\binom{2j-k-3}{2}!}{\left(\frac{k-3}{2}\right)! (j-k)!} N_2^{j-k} + \dots$$

$$(j-3)N_2^{j-3} + N_2^{j-3} = (j-2) N_2^{j-3}$$

$$\begin{aligned} \frac{(j-5)(j-4)}{2!} N_2^{j-5} + (j-4)N_2^{j-5} &= (j-4) \left(\frac{j-5}{2!} + 1 \right) N_2^{j-5} \\ &= \frac{(j-4)(j-3)}{2!} N_2^{j-5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{(j-5)!}{3!(j-8)!} N_2^{j-7} + \frac{(j-6)(j-5)}{2!} N_2^{j-7} &= \left(\frac{(j-5)(j-6)(j-7)}{3!} + \frac{(j-6)(j-5)}{2!} \right) N_2^{j-7} \\ &= (j-5)(j-6) \left(\frac{j-7}{3!} + \frac{1}{2!} \right) N_2^{j-7} \\ &= (j-5)(j-6) \frac{j-4}{3!} N_2^{j-7} \\ &= \frac{(j-4)!}{3!(j-7)!} N_2^{j-7} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\left(\frac{2j-k-3}{2}\right)!}{\left(\frac{k-1}{2}\right)!(j-k-1)!} N_2^{j-k} + \frac{\left(\frac{2j-k-3}{2}\right)!}{\left(\frac{k-3}{2}\right)!(j-k)!} N_2^{j-k} \\ &= \frac{\left(\frac{2j-k-3}{2}\right)!}{\left(\frac{k-3}{2}\right)!(j-k-1)!} \left(\frac{1}{\frac{k-1}{2}} + \frac{1}{j-k} \right) N_2^{j-k} \\ &= \frac{\left(\frac{2j-k-3}{2}\right)!}{\left(\frac{k-3}{2}\right)!(j-k-1)!} \left(\frac{2(j-k) + k - 1}{(k-1)(j-k)} \right) N_2^{j-k} \\ &= \frac{\left(\frac{2j-k-3}{2}\right)!}{\left(\frac{k-1}{2}\right)!(j-k)!} \left(\frac{2j - k - 1}{2} \right) N_2^{j-k} \\ &= \frac{\left(\frac{2j-k-1}{2}\right)!}{\left(\frac{k-1}{2}\right)!(j-k)!} N_2^{j-k} \end{aligned}$$

D'où nous avons N_j et nous vérifions par récurrence que la formule est vraie.

$$N_j = N_2^{j-1} - (j-2)N_2^{j-3} + \frac{(j-3)!}{2!(j-5)!} N_2^{j-5} - \frac{(j-4)!}{3!(j-7)!} N_2^{j-7} + \dots$$

$$+ \dots + (-1)^{\frac{k-1}{2}} \frac{(\frac{2j-k-1}{2})!}{(\frac{k-1}{2})!(j-k)!} N_2^{j-k} + \dots$$

avec $k \leq i$ et k toujours impair

Nous pouvons écrire en posant $\alpha = j-k$ et $\beta = \frac{j-\alpha-1}{2}$

$$N_j = N_2^{j-1} - (j-2)N_2^{j-3} + \frac{(j-3)!}{2!(j-5)!} N_2^{j-5} + \dots$$

$$\dots + (-1)^\beta \frac{(\alpha+\beta)!}{\alpha! \beta!} N_2^\alpha + \dots$$

VI. - EXEMPLE

Dans le chapitre précédent, nous avons traité un exemple sur la surdécomposition, exemple dans lequel il nous fallait inverser les matrices :

$$\left[2I + B^2 \right] \quad \text{et} \quad \left[I + B^2 \right]$$

où I est la matrice unité et B une matrice tridiagonale.

$$B = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 4 & -1 & & \\ 0 & -1 & 4 & & \\ \vdots & & & & \\ \vdots & & & & \\ \vdots & & & & \\ \vdots & & & & \\ \vdots & & & & \\ \vdots & & & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

B^2 est une matrice pentadiagonale et $(2I + B^2)$ et $(I + B^2)$ sont donc aussi des matrices pentadiagonales, mais nous pouvons les décomposer facilement en un produit de deux matrices tridiagonales.

$$\text{En effet } (2I + B^2) = (B + i\sqrt{2} I)(B - i\sqrt{2} I)$$

$$\text{et } (I + B^2) = (B + i I)(B - i I) \quad \text{où } i^2 = -1$$

Or une matrice du type $(B + i\alpha I)$ où $\alpha \in \mathbb{R}$ est bien une matrice tridiagonale ; nous pouvons donc l'inverser.

Dans notre exemple, B est d'ordre 5 c'est-à-dire que :

$$(B + i I) = \begin{bmatrix} 4+i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4+i & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4+i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4+i & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 4+i \end{bmatrix}$$

Nous voyons que tous les a_i sont égaux à $4 \pm i$ pour $(B \pm i I)$ et $4 \pm i\sqrt{2}$ pour $(B \pm i 2 I)$; par conséquent, nous aurons :

$$N_i = P_{n+1-i}$$

$$\text{et } \alpha_{k\ell} = \frac{N_k N_{n+1-\ell}}{N_{n+1}}$$

En posant :

$$N_j = N_{rj} + i N_{cj}$$

$$N_{r,j+1} = 4N_{rj} - N_{cj} - N_{r,j-1}$$

$$N_{c,j+1} = 4N_{cj} + N_{rj} - N_{c,j-1} \quad \text{pour inverser } (B + i I)$$

$$\text{avec } N_{r1} = 1 \quad N_{r2} = 4 \quad N_{c1} = 0 \quad N_{c2} = 1$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} N_{r,j+1} = 4 N_{rj} - \sqrt{2} N_{cj} - N_{r,j-1} \\ N_{c,j+1} = 4 N_{cj} + \sqrt{2} N_{cj} - N_{c,j-1} \end{array} \right. \quad \text{pour inverser } (B + i \sqrt{2} I)$$

avec $N_{r1} = 1$ $N_{r2} = 4$ $N_{c1} = 0$ $N_{c2} = \sqrt{2}$

$$\left\{ \begin{array}{l} N'_{r,j+1} = 4 N'_{rj} + N'_{cj} - N'_{r,j-1} \\ N'_{c,j+1} = 4 N'_{cj} - N'_{rj} - N'_{c,j-1} \end{array} \right. \quad \text{pour inverser } (B - i I)$$

avec $N'_{r1} = 1$ $N'_{r2} = 4$ $N'_{c1} = 0$ $N'_{c2} = -1$

$$N'_{r1} = N_{r1} \quad N'_{r2} = N_{r2} \quad \text{et} \quad N'_{c2} = -N_{c2}$$

d'où

$$N'_{r3} = N_{r3} \quad \text{et} \quad N'_{c3} = -N_{c3}$$

Si $N'_{rj} = N_{rj}$ et $N'_{cj} = -N_{cj}$ nous aurons :

$$N'_{r,j+1} = 4 N_{rj} - N_{cj} - N_{r,j-1} = N_{r,j+1}$$

$$\text{et } N'_{c,j+1} = -4 N_{cj} - N_{rj} + N_{c,j-1} = -N_{c,j+1}$$

De même pour inverser $(B - i \sqrt{2} I)$ nous aurons une suite de nombres $N_j^* = N'_j$, c'est-à-dire que si :

$$N_j = N_{rj} + i N_{cj}$$

$$N_j^* = N_{rj} - i N_{cj}$$

Soit $\alpha_{k\ell}$ le terme général de $(B + i \alpha I)$. Posons :

$$\begin{aligned} \alpha'_{k\ell} &= N_k \cdot N_{n+1-\ell} \\ &= N_{n+1} \cdot \alpha_{k\ell} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (B^2 + \alpha^2 I)^{-1} &= (B + i \alpha I)^{-1} \cdot (B - i \alpha I)^{-1} \\ &= \frac{1}{N_{n+1}} \cdot (E + i F) \cdot \frac{1}{N_{n+1}^*} (E - i F) \\ &= \frac{1}{N_{r,n+1}^2 + N_{c,n+1}^2} (E^2 + F^2) \end{aligned}$$

E et F matrices à termes réels

e_{kj} terme général de E

f_{kj} terme général de F

Soit $(e_{kj} + i f_{kj})$ le terme général de $(E + i F)$

$$\begin{aligned} e_{kj} + i f_{kj} &= \alpha'_{kj} \\ &= N_k \cdot N_{n+1-j} \\ &= N_k \cdot N_\ell \quad \text{en posant } \ell = n+1-j \\ &= (N_{rk} + i N_{ck})(N_{r\ell} + i N_{c\ell}) \end{aligned}$$

d'où

$$e_{kj} = N_{rk} \cdot N_{r\ell} - N_{ck} \cdot N_{c\ell}$$

$$f_{kj} = N_{rk} N_{c\ell} + N_{ck} N_{r\ell}$$

Nous obtenons ainsi les termes des matrices E et F et après les avoir élevées au carré, nous obtenons le terme général de la matrice inverse de $(B^2 + \alpha^2 I)$.

VII. - RESULTATS NUMERIQUES

C'est par cette méthode que nous avons inversé les matrices $(B^2 + I)$ et $(B^2 + 2I)$ lors de l'essai sur la surdécomposition des normes de vecteurs.

1°) INVERSION DE $(B^2 + I)$

$$\begin{array}{cccccc}
 N_{r1} = 1 & N_{r2} = 4 & N_{r3} = 14 & N_{r4} = 44 & N_{r5} = 117 & N_{r6} = 208 \\
 N_{c1} = 0 & N_{c2} = 1 & N_{c3} = 8 & N_{c4} = 45 & N_{c5} = 216 & N_{c6} = 936
 \end{array}$$

d'où

$$N_{r,n+1}^2 + N_{c,n+1}^2 = N_{r,6}^2 + N_{c,6}^2 = 919\ 360$$

$$\text{et } (B^2 + I)^{-1} = \frac{1}{919\ 360} \begin{bmatrix} 64\ 584 & 31\ 824 & 11\ 440 & 3\ 536 & & 936 \\ 31\ 824 & 76\ 024 & 35\ 360 & 12\ 376 & & 3\ 536 \\ 11\ 440 & 35\ 360 & 76\ 960 & 35\ 360 & 11\ 440 & \\ 3\ 536 & 12\ 376 & 35\ 360 & 76\ 024 & 31\ 824 & \\ 936 & 3\ 536 & 11\ 440 & 31\ 824 & 64\ 584 & \end{bmatrix}$$

2°) INVERSION DE $(B^2 + 2I)$

$$\begin{array}{cccccc}
 N_{r1} = 1 & N_{r2} = 4 & N_{r3} = 13 & N_{r4} = 32 & N_{r5} = 27 & N_{r6} = -324 \\
 N_{c1} = 0 & N_{c2} = \frac{2}{\sqrt{2}} & N_{c3} = \frac{16}{\sqrt{2}} & N_{c4} = \frac{88}{\sqrt{2}} & N_{c5} = \frac{400}{\sqrt{2}} & N_{c6} = \frac{1566}{\sqrt{2}}
 \end{array}$$

d'où $N_{r6}^2 + N_{c6}^2 = 1\ 331\ 154$

et $(B^2+2I)^{-1} =$

$$\frac{1}{1 \ 331 \ 154}$$

85 941	39 312	12 771	3 456	783
39 312	98 712	42 768	13 554	3 456
12 771	42 768	99 495	42 768	12 771
3 456	13 554	42 768	98 712	39 312
783	3 456	12 771	39 312	85 941

B I B L I O G R A P H I E

-:-:-

- 1 - Noël GASTINEL : Thèse présentée à la Faculté des Sciences de Grenoble, chap. II
- 2 - N. BOURBAKI : Topologie générale, chap IX, parag. 3
- 3 - N. BOURBAKI : Espaces vectoriels Topologiques, chap. I
parag. 3
- 4 - N. GASTINEL : { Thèse présentée à la Faculté des Sciences de
Grenoble, chap. VII, parag. 1 à 4
- 5 - " : { chap. VII, parag. 9
- 6 - R. BELLMAN : Matrix analysis, Mc Graw Hill, N.Y. (1960)
chap. III
- 7 - A.M. OSTROWSKI : Uber Normen von Matrizen, Math. Zeitsch.,
Bd. 695, p. 2 (1955)
- 8 - T.E. EASTERFIELD : Matrix norms and vector measures, Duke Math.
J. Vol? 24, p.663-671 (1955)
- 9 - A.M. TURING : Rounding-off errors matrix processes,
Quart. J. Mech. Appl. Math. I
(1948), p. 287-308
- 10 - A.T. LONSETH : The propagation of error in linear problems,
Trans. Amer. Math. Soc., 62, p.193-212
- 111 - J. TODD : The condition of finite segments of the
Hilbert Matrix, N.B.S. Appl.Math.
Series, 62, 39, p. 112 (1954)
- 12 - J. VON NEUMANN, H.GOLDSTONE : Numerical inverting of matrices
of high order, Bull.Amer.Soc. Vol.53,
N° 11, p.1021-1099 (1947)
- 13 - N. GASTINEL : Thèse présentée à la Faculté des Sciences de
Grenoble, chap. III et IV

- 14 - N. BOURBAKI : Espaces vectoriels topologiques, chap. II, proposition 3, Remarque 2, livre V, p.94-95
- 15 - N. GASTINEL : Surdécomposition de normes générales et procédés itératifs (à paraître)
- 16 - BANACHIEWICZ : Méthode de résolution numérique des équations linéaires du calcul des déterminants et les inverses, et de résolution des formes quadratiques, Bul.Intern.Acad.Polonaise Série A, Sc.Math. p.393
- 17 - V.N. FADDEEVA (В.М.ФАДДЕВА) Вычислительные методы линейной алгебры
Traduit par Curtis D. Benster sous le titre : "Computational methods of linear Algebra", Dover Publications, N.Y.(1959) p.252
- 18 - N. GASTINEL : Thèse présentée à la Faculté des Sciences de Grenoble, chap. IV
- 19 - A.S. HOUSEHOLDER et F.L. BAUER : On certain iterative methods for solving linear systems, Numerische Math. 2, p. 55-59 (1960)
- 20 - N. GASTINEL : Procédé itératif pour la résolution numérique d'un système d'équations linéaires, C.R. 246ⁿ 2571-2574, (MR 20:232) (1958)
- 21 - A.S. HOUSEHOLDER : The approximate solution of matrix problems, J. Ass.Com. Mach. 5, 205-243 (1958)
- 22A - FORSYTHE G.E. : Solving linear algebraic equations can be interesting, Bull. of the Amer.Math. Soc. 59, 299-329 (1953)
- 23 - F. MARWY : A graph theoretic approach to matrix inversion by partitioning, Numerische Mathematik 4, 128-135 (1962)

- 24 - SWIFT G. : A comment on matrix inversion by partition,
Siam Review 2, 132-133 (1962)
- 25 - F.L. BAUER and A.B. HOUSEHOLDER : Some inequalities involving
the endidean condition of a matrix
Num. Math. 2, 308-311 (1960)
- 26 - F.L. BAUER and E.T. EIKE : Norms and exclusion theorems,
Num. Math. 2, (1960)
- 27 - G.E. FORSYTHE and W.R. WASOW ; Finite difference methods for
partial differential equations,
solving elliptic difference equations
Sec. 21-2, p.208-213

T A B L E D E S M A T I E R E S

Chapitre I - Généralités sur les normes de vecteurs et de matrices -

A Définition.....P	1
B Normes de Holder.....	2
C Normes de matrices.....	3
D Conditionnement d'un système linéaire.....	5
E Application à certains procédés itératifs.....	10
F Décomposition d'une norme.....	12
G Procédé itératif associé à la décomposition d'une norme.....	14

Chapitre II - Normes de Vecteurs -

A Norme composée d'un espace vectoriel.....	17
B I - Définition.....	17
II - Exemples.....	19
- Norme sur R^n , somme de normes sur R^n	19
- Norme du maximum sur R^n	31
B Normes sur un espace E, produit direct de plusieurs sous espaces.....	39
I - Définition.....	39
II - Exemples.....	42
- Norme combinaison linéaire le norme sur des sous-espaces.....	42
- Norme maximum de normes sur des sous-espaces.....	47
C Problème de la meilleure norme.....	50

Chapitre III - Surdécomposition de normes générales -

II - Introduction.....P	53
III- Décomposition d'ordre donné q , d'une norme générale sur R^n et par rapport à une matrice A donnée d'ordre n	57
III- Procédés itératifs attachés à une surdécomposition de norme.....	60
IV - Convergence de procédés itératifs attachés à une surdécomposition.....	61
V -- Exemple de surdécomposition.....	63
VI - Essais.....	69

Chapitre IV - Méthode pour inverser les matrices tridiagonales simples -

I - Introduction.....	71
II - Décomposition de la matrice A	72
III- Inversion de la matrice A	77
IV - Cas complexe.....	85
V - Cas particuliers.....	87
VI - Exemple.....	98
VII- Résultats numériques.....	102

Bibliographie.....	104
--------------------	-----

VU,

Grenoble, le

Le Président de la Thèse

VU,

Grenoble, le

Le Doyen de la Faculté des Sciences

VU et permis d'imprimer,

Le Recteur de l'Académie de Grenoble