Application des fractions continues à la programmation de quelques fonctions remarquables

Guy Levy-Soussan

N° d'ordre

T H E S E

présentée à la Faculté des Sciences
de l'Université de Grenoble

pour obtenir

le titre de Docteur de Spécialité
"Mathématiques Appliquées"

par

GUY L E V Y - S O U S S A N

Ingénieur I.C.M.B.
Ingénieur I.M.A.G.

-:-

TITRE :

"APPLICATION DES FRACTIONS CONTINUES A LA PROGRAMMATION
DE QUELQUES FONCTIONS REMARQUABLES"

Thèse soutenue le 23 Juin 1962 devant la Commission d'Examen

MM. KUNTZMANN J., Président
HACQUES G.)
GASTINEL N.) Examinateurs

N° d'ordre

T H E S E

présentée à la Faculté des Sciences
de l'Université de Grenoble

pour obtenir

le titre de Docteur de Spécialité
"Mathématiques Appliquées"

par

GUY L E V Y - S O U S S A N
Ingénieur I.C.M.B.
Ingénieur I.M.A.G.

-:-

TITRE :

"APPLICATION DES FRACTIONS CONTINUES A LA PROGRAMMATION
DE QUELQUES FONCTIONS REMARQUABLES"

Thèse soutenue le 23 Juin 1962 devant la Commission d'Examen :

MM. KUNTZMANN J., Président
HACQUES G.)
GASTINEL N.) Examinateurs

FACULTE DES SCIENCES DE L'UNIVERSITE DE GRENOBLE

Doyens honoraires :

M. FORTRAT P.
M. MORET L., Membre de l'Institut

Doyen :

M. WEIL L.

Professeurs :

MM. NEEL L. , Membre de l'Institut - Physique expérimentale
MOREL L. - Géologie et minéralogie
WOLFERS F. - Physique
DORIER A. - Zoologie
HEILMANN R. - Chimie organique
KRAVTCHENKO J. - Mécanique rationnelle
PARDE M. - Potamologie
BENOIT J. - Radioélectricité
CHENE M. - Chimie papetière
NOBECOURT P. - Micrographie papetière
BESSON J. - Chimie
WEIL L. - Thermodynamique
FELICI N. - Electrostatique
KUNTZMANN J. - Mathématiques appliquées
BARBIER R. - Géologie appliquée
SANTON L. - Mécanique des fluides
CHABAUTY C. - Calcul différentiel et intégral
OZENDA P. - Botanique
FALLOT M. - Physique industrielle
GOLVANI O. - Mathématiques
MOUSSA A. - Chimie nucléaire et radioactivité
TRAYNARD P. - Chimie générale
CRAYA A. - Hydrodynamique
SOUTIF M. - Physique générale
REEB G. - Statistiques mathématiques
REULOS R. - Théorie des champs
AYANT Y. - Physique approfondie
GALLISSOT F. - Mathématiques pures
Mlle LUTZ E. - Mathématiques générales
MM. BLAMBERT M. - Mathématiques
BOUCHEZ R. - Physique nucléaire
LLIBOUTRY L. - Géophysique
MICHEL R. - Géologie et minéralogie
BONNIER E. - Electrochimie

Professeurs sans chaire :

MM. SILBER R. - Mécanique des fluides
DESSAUX G. - Physiologie animale
MOUSSIEGT J. - Electronique
PILLET E. - Electrotechnique
BARBIER J.C. - Physique
BUYLE-BODIN M. - Electronique
PAUTHENET R. - Electrotechnique
Mme KOFLER L. - Botanique

Maîtres de Conférences :

MM. VAILLANT F. - Zoologie et hydrobiologie
DREYFUS B. - Thermodynamique
Mlle NAIM L. - Mathématiques
MM. PERRET R. - Servomécanisme
ARNAUD P. - Chimie
Mme BARBIER M.J. - Electrochimie
MM. BRISSONNEAU P. - Physique
COHEN J. - Physique
DEBELMAS J. - Géologie et minéralogie
Mme SOUTIF J. - Physique
MM. VAUQUOIS B. - Mathématiques appliquées
DEPASSEL R. - Mécanique des fluides
GERBER R. - Mathématiques
ROBERT A. - Chimie papetière
ANGLES d'AURIAC - Mécanique des fluides
BIAREZ - Mécanique physique
COUMES A. - Electronique
DODU J. - Mécanique des fluides
DUCROS P. - Minéralogie et cristallographie
GIDON P. - Géologie et minéralogie
GLENAT R. - Chimie
HACQUES G. - Calcul numérique
LANCIA R. - Physique automatique
PEBAY-PEROULA - Physique
GASTINEL - Chargé d'enseignement - Mathématiques appliquées
LACAZE A. - Chargé d'enseignement - Thermodynamique.

= =
=

Monsieur le Professeur KUNTZMANN, Directeur du Laboratoire de Calcul de la Faculté des Sciences de Grenoble, a bien voulu diriger mes recherches sur un sujet qu'il m'a lui-même indiqué.

Je voudrais lui exprimer ici ma gratitude pour les conseils qu'il m'a donnés au cours de cette année, pour tout le temps qu'il a consacré à mon étude et pour m'avoir donné le goût du calcul et le souci de son efficacité.

Je le prie de recevoir mes remerciements respectueux.

Je remercie tout le personnel du Laboratoire de Calcul et en particulier Madame Laissus à qui je dois la bonne présentation de cette thèse.

Je remercie Monsieur HACQUES et Monsieur GASTINEL, maîtres de conférences, d'avoir bien voulu faire partie du jury.

APPLICATION DES FRACTIONS CONTINUES A LA PROGRAMMATION DE QUELQUES FONCTIONS REMARQUABLES

-:-:-:-

CHAPITRE I

INTRODUCTION

1. - GENERALITES, PLAN. -

Un problème important en Mathématiques Appliquées est celui de l'approximation des fonctions transcendantes : on veut avoir pour une certaine valeur de la variable, une valeur approchée de la fonction, et cela en utilisant le moins d'opérations pour une précision donnée. Pour résoudre ce problème, actuellement, on utilise le plus souvent des développements en série, des développements asymptotiques, ou bien des approximations par une famille de fonctions (e^x, Bessel, Tchebycheff,....).

Cette méthode est satisfaisante pour quelques fonctions et dans des domaines restreints. Pour des domaines plus étendus, il faut calculer un nombre assez grand de termes de développements et utiliser des coefficients plus élaborés. D'où des calculs de plus en plus lourds et laborieux dont le résultat n'est pas toujours à la mesure de l'effort. En fait, tous ces procédés n'utilisent que l'algorithme de la multiplication. On peut espérer trouver une autre voie en utilisant un algorithme très ancien, dont l'importance théorique en Mathématiques pures est grande, mais très peu utilisé en Mathématiques appliquées : c'est l'Algorithme des "Fractions continues". Les fractions continues utilisent la division. Elles se prêtent très bien au calcul numérique, automatique ou manuel : on obtient un schéma identique à celui de Hörner pour le calcul d'un polynôme, en remplaçant "division" par "multiplication".

L'idée générale de notre étude est la suivante : pour certaines fonctions - en tout cas pour toutes celles que nous avons considérées - le développement en série et le développement en fraction continue se complètent bien et ont chacun leur domaine pour le calcul effectif : près de l'origine, on utilisera les séries, et pour les plus grandes valeurs, les fractions continues.

Nous sommes partis du développement en fractions continues de l'exponentielle intégrale. Nous avons étudié expérimentalement la rapidité de convergence pour différentes valeurs de x : 0,1 ; 0,5 ; 1 ; 2 ; 8 ; et 10, en nous appuyant sur les Travaux Théoriques de T.J. STIELTJES [56] . Nous avons comparé nos résultats (nombre d'opérations, nombre de chiffres exacts) avec ceux obtenus par les séries.

Nous avons ensuite étudié la fraction continue générale qui développe la fonction Gamma incomplète dont $E_i(-x)$ n'est qu'un cas particulier.

La convergence est théoriquement démontrée par H.S. WALL [59 , page 355 formule 92.5] et par T.J. STIELTJES [56] . Nous avons traité le cas général, à un facteur près, en étudiant la fonction $E_a(x)$; nous avons étudié un cas particulier important : la fonction erreur $\Phi(x)$, en comparant le nombre de chiffres obtenus par le développement en série et par les fractions continues, compte-tenu du nombre de termes utilisés.

Nous avons ensuite généralisé à l'axe imaginaire ces différents développements et avons étudié les cas particuliers : $C_i(x)$ et $S_i(x)$ donnés par la partie réelle et la partie imaginaire de la fraction continue complexe ; C(x) et S(x), intégrales de Fresnel, parties réelle et imaginaire d'une autre fraction continue, les deux fractions continues étant des cas particuliers de la fraction continue plus générale donnant $\Gamma(1-a, ix)$. Nous avons comparé avec les séries pour trouver dans quelles zones les différents développements en fraction continue sont intéressants.

Nous avons calculé toutes les fractions continues par la méthode de contraction (réduites paires et impaires) et en "remontant". On peut faire les calculs en "descendant" comme pour une série : le coût en opérations Mult.Div est alors important, mais pour calculer un terme supplémentaire, on ne doit pas recalculer tous les précédents. Lorsque l'on connait le nombre de termes à utiliser, la méthode en remontant est plus avantageuse. Sur les différentes méthodes de calcul des fractions continues, on peut consulter TEICHROEW [57] .

2. - DEFINITIONS, NOTATIONS. -

Soit une fonction f(x) de la variable, on appellera "développement en fraction continue de f(x)" l'expression :

$$f(x) = F(x) \equiv b_o + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{b_3 \cdots + \cfrac{a_n}{b_n + \cfrac{a_{n+1}}{\ddots}}}}}$$

où les a_i et les b_i sont des fonctions de la variable x réelle ou complexe.

La fraction continue est "limitée" si un a_j est identiquement nul, quel que soit x.

La fraction continue est illimitée dans le cas contraire. On notera la fraction continue illimitée d'une façon plus commode par :

$$F(x) \equiv b_o + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \dots\dots\dots + \frac{a_n|}{|b_n} + \dots\dots \qquad (1)$$

et la fraction continue limitée par :

$$F(x) \equiv b_o + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \dots\dots\dots + \frac{a_{p-1}|}{|b_{p-1}} + \frac{a_p|}{|b_p}$$

Réduite d'ordre n : C'est la fraction continue limitée, obtenue en négligeant les termes suivant~~s~~ $\frac{a_n}{|b_n}$. On note cette réduite par $F_n(x)$.

3. - APPROXIMATION D'UNE FONCTION PAR SON DEVELOPPEMENT EN FRACTION CONTINUE. -

A partir du développement en fraction continue de la fonction f(x), développement démontré d'une façon formelle par l'analyse au moyen de relations de récurrence, de la théorie des moments, etc...., on cherche la rapidité de la convergence de la fraction continue, c'est-à-dire le nombre de chiffres significatifs obtenus en fonction du rang de la réduite.

On a : $f(x) = F(x)$.

L'erreur sera

$$f(x) - F_n(x) = \varepsilon_n(x) \quad \text{pour la } n^{\text{ème}} \text{ réduite}$$

ou

$$\begin{cases} f(x) - P_n(x) = \varepsilon_{P_n}(x) \\ f(x) - I_n(x) = \varepsilon_{I_n}(x) \end{cases}$$

4. - DEVELOPPEMENT EN FRACTION CONTINUE D'UNE FONCTION REPONDANT A UNE RELATION DE RECURRENCE LINEAIRE. -

Soit une fonction $A_n(x)$ et la relation de récurrence :

$$A_{n-1}(x) = b_{n-1}\, A_n(x) + a_n\, A_{n+1}(x)$$

où les a_i et b_i sont fonctions de leur indice.

On peut l'écrire (pourvu que $A_n(x) \neq 0$) :

$$\frac{A_{n-1}(x)}{A_n(x)} = b_{n-1} + \frac{a_n}{\frac{A_n(x)}{A_{n+1}(x)}}$$

ou

$$\frac{A_{n-1}(x)}{A_n(x)} = b_{n-1} + \frac{a_n |}{| b_n} + \frac{a_{n+1} |}{| b_{n+1}} + \cdots\cdots\cdots + \frac{a_{n+p} \quad |}{| \frac{A_{n+p}(x)}{A_{n+p+1}(x)}}$$

On considère alors la fraction continue infinie

$$b_{n-1} + \frac{a_n |}{| b_n} + \frac{a_{n+1} |}{| b_{n+1}} + \cdots\cdots\cdots\cdots$$

comme développement de $\dfrac{A_{n-1}(x)}{A_n(x)}$. Ce développement en fraction continue peut converger ou non selon le comportement de $\dfrac{A_{n+p}(x)}{A_{n+p+1}(x)}$

On peut améliorer la convergence de la fraction continue en prenant pour la $n^{\text{ème}}$ réduite :

$$b_{n-1} + \frac{a_n |}{| b_n} + \frac{a_{n+1} |}{| b_{n+1}} + \cdots\cdots\cdots\cdots + \frac{a_{n+p} |}{| b}$$

où b est la limite de $\dfrac{A_{n+p}(x)}{A_{n+p+1}(x)}$ lorsque $p \to \infty$ ou une valeur voisine.

Nous ne ferons pas usage de cet artifice. La théorie et la pratique de cette méthode se trouvent exposées par P. WYNN [62] .

CHAPITRE II

DEVELOPPEMENT EN FRACTION CONTINUE DE L'EXPONENTIELLE INTEGRALE $E_i(-x)$

Soit la fonction Exponentielle Intégrale définie par :

$$-E_i(-x) = \int_x^{\infty} e^{-t}\, t^{-1}\, dt$$

On peut en trouver un développement en fraction continue, et cela de plusieurs façons :

5. - DEVELOPPEMENT A PARTIR DE LA FONCTION HYPERGEOMETRIQUE CONFLUENTE.

On a la relation : $-E_i(-x) = e^{-x}\ \Psi(1,1\,;x)$
où $\Psi(1,1,x)$ est la fonction hypergéométrique confluente de deuxième espèce, c'est-à-dire :

$$\Psi(a,c,x) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} e^{-xt}\, t^{a-1}(1+t)^{c-a-1}\, dt$$

avec $R(a) > 0$ et $R(x) > 0$

5.1. - Ecriture de la fraction continue :

La fonction $\Psi(a,c,x)$ admet plusieurs relations de récurrence (sur a, c ou sur les deux à la fois) et notamment :

$$(c-a-1)\ \Psi(a,c-1,x) - (c-1+x)\,\Psi(a,c,x) + x\,\Psi(a,\ c+1,\ x) = 0$$

qui permet de développer :

$$\frac{\Psi(a,\ c+1,\ x)}{\Psi(a,\ c,\ x)} = \frac{c-1+x}{x} - \frac{\frac{c-1-a}{x}\Big|}{\Big|\frac{c-2+x}{x}} - \frac{\frac{c-2-a}{x}\Big|}{\Big|\frac{c-3+x}{x}} + \cdots\cdots$$

en fraction continue.

En faisant a = 1 et c = 1 dans cette relation, il vient :

$$\frac{\psi(1,2,x)}{\psi(1,1,x)} = 1 + \frac{\frac{1}{x}\big|}{\big|\frac{x-1}{x}} + \frac{\frac{2}{x}\big|}{\big|\frac{x-2}{x}} + \frac{\frac{3}{x}\big|}{\big|\frac{x-3}{x}} + \cdots\cdots$$

En inversant et en tenant compte de $\psi(1,2,x) = \frac{1}{x}$, on obtient :

$$\psi(1,1,x) = \frac{\frac{1}{x}\big|}{\big|\,1} + \frac{\frac{1}{x}\big|}{\big|\frac{x-1}{x}} + \frac{\frac{2}{x}\big|}{\big|\frac{x-2}{x}} + \cdots\cdots + \frac{\frac{p}{x}\big|}{\big|\frac{x-p}{x}} + \cdots\cdot$$

qui peut s'écrire :

$$\psi(1,1,x) = \frac{1\,|}{x} + \frac{x\,|}{|\,x-1} + \frac{2x\,|}{|\,x-2} + \frac{3x\,|}{|\,x-3} + \cdots\cdots + \frac{px\,|}{|\,x-p} + \cdots\cdot$$

D'où pour $-E_i(-x)$:

$$-E_i(-x) = e^{-x}\left[\frac{1\,|}{x} + \frac{x\,|}{|\,x-1} + \frac{2x\,|}{|\,x-2} + \cdots\cdots + \frac{px\,|}{|\,x-p} + \cdots\cdots\right]$$

5.2. Comparaison avec le développement en série asymptotique :

L'intégrale $\int_0^\infty \frac{e^{-u}}{x+u}\,du$ admet comme développement asymptotique :

$$S(x) = \frac{0!}{x} - \frac{1!}{x^2} + \frac{2!}{x^3} - \frac{3!}{x^4} + \cdots\cdots \quad (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}$$

Si on calcule les réduites de la fraction continue précédente, on obtient successivement pour les 3 premières réduites :

$$\frac{1}{x}\ ; \qquad \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\ ; \quad \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} \quad ;$$

Le numérateur A_{n+1} et le dénominateur B_{n+1} de la $(n+1)^{\text{ème}}$ réduite sont donnés par :

$$\begin{cases} A_{n+1} = (x-n)\ A_n + nx\ A_{n-1} \\ B_{n+1} = (x-n)\ B_n + nx\ B_{n-1} \end{cases}$$

Pour qu'il y ait identification jusqu'à la $(n+1)^{\text{ème}}$ réduite, il faut que $B_{n+1} = x^{n+1}$ et que A_{n+1} soit un polynôme de degré n en x avec, comme coefficients, les factorielles successives :

$$A_{n+1} \equiv x^n - x^{n-1} + 2!\, x^{n-2} \;\ldots\ldots\ldots\; (-1)^i\, i!\, x^{n-i} + \ldots (-1)^n\, n!$$

c'est-à-dire : $A_{n+1} = xA_n + (-1)^n\, n!$

Si on suppose A_n et B_n de la forme voulue jusqu'à l'ordre n, en les portant dans la relation de récurrence, on obtient pour A_{n+1} et B_{n+1} :

$$A_{n+1} = (x-n)\, A_n + n\left[A_n + (-1)^n\, (n-1)!\right] = x\, A_n + (-1)^n\, n!$$

$$B_{n+1} = (x-n)\, x^n + n\, x \,.\, x^{n-1} = x^{n+1}$$

On peut donc identifier aussi loin que l'on veut cette fraction continue et le développement asymptotique.

Grâce à la possibilité de contraction de la fon fraction continue (fractions continues admettant les réduites paires ou impaires), il est intéressant de les utiliser pour calculer la fonction.

5. - DEVELOPPEMENT EN FRACTIONS CONTINUES DE LAGUERRE.-

L'intégrale $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{e^{-u}}{x+u}\, du$ peut se développer en fraction continue.

LAGUERRE a montré, en effet, que la fraction continue :

$$F(x) = \frac{1|}{x} + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|x} + \frac{2|}{|1} + \frac{2|}{|x} + \frac{3|}{|1} + \frac{3|}{|x} + \ldots\ldots \frac{p|}{|1} + \frac{p|}{|x} + \ldots$$

convergeait vers cette intégrale.

T.J. STIELTJES a démontré cette convergence pour des cas plus généraux et pour les valeurs complexes de x [56]

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-u}}{x-u}\, du = \int_x^{\infty} \frac{e^{-t}\, e^{x}}{t}\, dt = e^{x} \left[-E_i(-x) \right]$$

D'où le second développement en fraction continue de $E_i(-x)$:

$$-E_i(-x) = e^{-x} \left[\frac{1|}{x} + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|x} + \frac{2|}{|1} + \frac{2|}{|x} + \frac{3|}{|1} + \dots + \frac{p|}{|1} + \frac{p|}{|x} \dots \right]$$

Cette fraction continue de LAGUERRE est différente de celle obtenue par le développement de $e\ \psi(1,1,x)$ et on ne peut les réduire l'une à l'autre.

Si on appelle $P_n(x)$ la $n^{\text{ème}}$ réduite paire de la fraction continue de LAGUERRE et $I_n(x)$ sa $n^{\text{ème}}$ réduite impaire, on a les relations suivantes démontrées par T.J. STIELTJES [56, page 120] entre $P_n(x)$, $I_n(x)$, le développement asymptotique et la fonction

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-u}}{x+u}\, du$$

$$P_n(x) > \frac{1}{x} - \frac{1!}{x^2} + \frac{2!}{x^3} \dots\dots\dots - \frac{(2n-1)!}{x^{2n}}$$

$$I_n(x) < \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} \dots\dots\dots + \frac{(2n)!}{x^{2n+1}}$$

$$P_n(x) < \int_0^{\infty} \frac{e^{-u}\, du}{x+u} < I_n(x)$$

Les réduites paires de la fraction continue obtenue par récurrence et les réduites paires de la fraction continue de LAGUERRE sont toujours inférieures à la fonction. Les réduites impaires des deux fractions continues lui sont toujours supérieures. On a toujours les inégalités suivantes :

$$\boxed{P'_n(x) < P_n(x) < \int_0^{\infty} \frac{e^{-u}\,du}{x+u} < I_n(x) < I'_n(x)}$$

où $P'_n(x)$ et $I'_n(x)$ sont respectivement les réduites paires et impaires de la 1ère fraction continue.

On a identiquement pour le développement asymptotique :

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2!}{x^3} \cdots\cdots\cdots - \frac{(2n-1)!}{x^{2n}} < P_n(x) < \int_0^{\infty} \frac{e^{-u}\,du}{x+u}$$

$$< I_n(x) < \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \cdots\cdots\cdots + \frac{(2n)!}{x^{2n+1}}$$

Pour calculer $-E_i(-x)$, on a donc toujours intérêt à choisir le développement en fraction continue de LAGUERRE qui borne la fonction de plus près.

7. - CALCUL DE $-E_i(-x)$. -

On utilisera la fraction continue de LAGUERRE en écrivant les fractions continues $P_n(x)$ et $I_n(x)$ admettant ses réduites respectivement paires et impaires.

On a montré qu'en posant :

$$F(x) = \frac{1|}{x} + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|x} + \frac{2|}{|1} + \frac{2|}{|x} + \frac{3|}{|1} + \cdots\cdots + \frac{p|}{|1} + \frac{p|}{|x} \cdots\cdots$$

on avait :

$$-E_i(-x) = e^{-x}\,F(x)$$

D'où

$$-E_i(-x) > e^{-x}\,P_n(x)$$

et

$$-E_i(-x) < e^{-x}\,I_n(x)$$

avec

$$P_n(x) = \frac{1|}{x+1} - \frac{1|}{|x+3} - \frac{4|}{|x+5} \cdots\cdots\cdots - \frac{(n-1)^2|}{|x+2n-1}$$

et

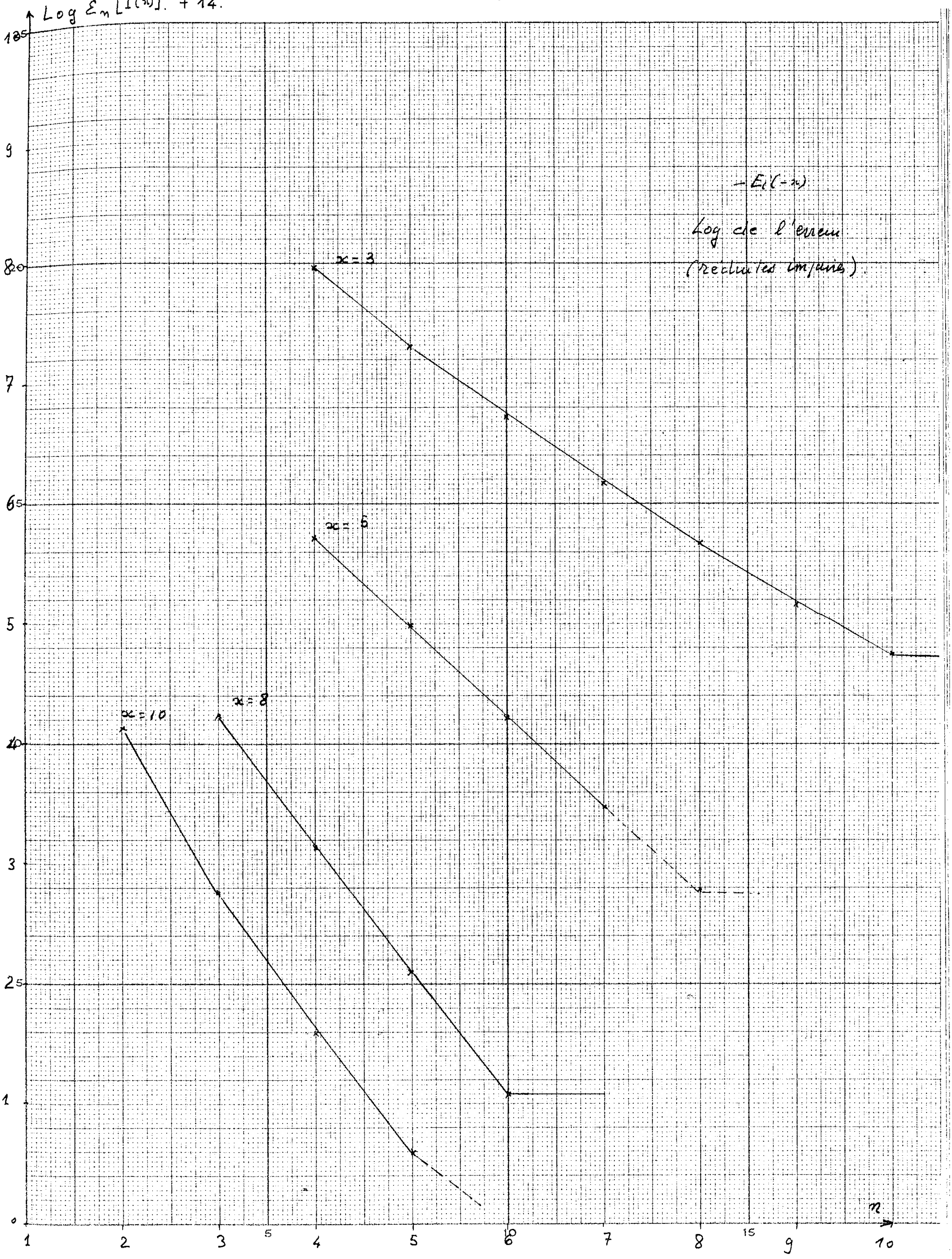
$$I_n(x) = \frac{1}{x}\left[1 - \frac{1|}{|x+2} - \frac{1.2|}{|x+4} - \frac{2.3|}{|x+6} - \cdots\cdots\cdots \frac{(n-1)n|}{|x+2n}\right]$$

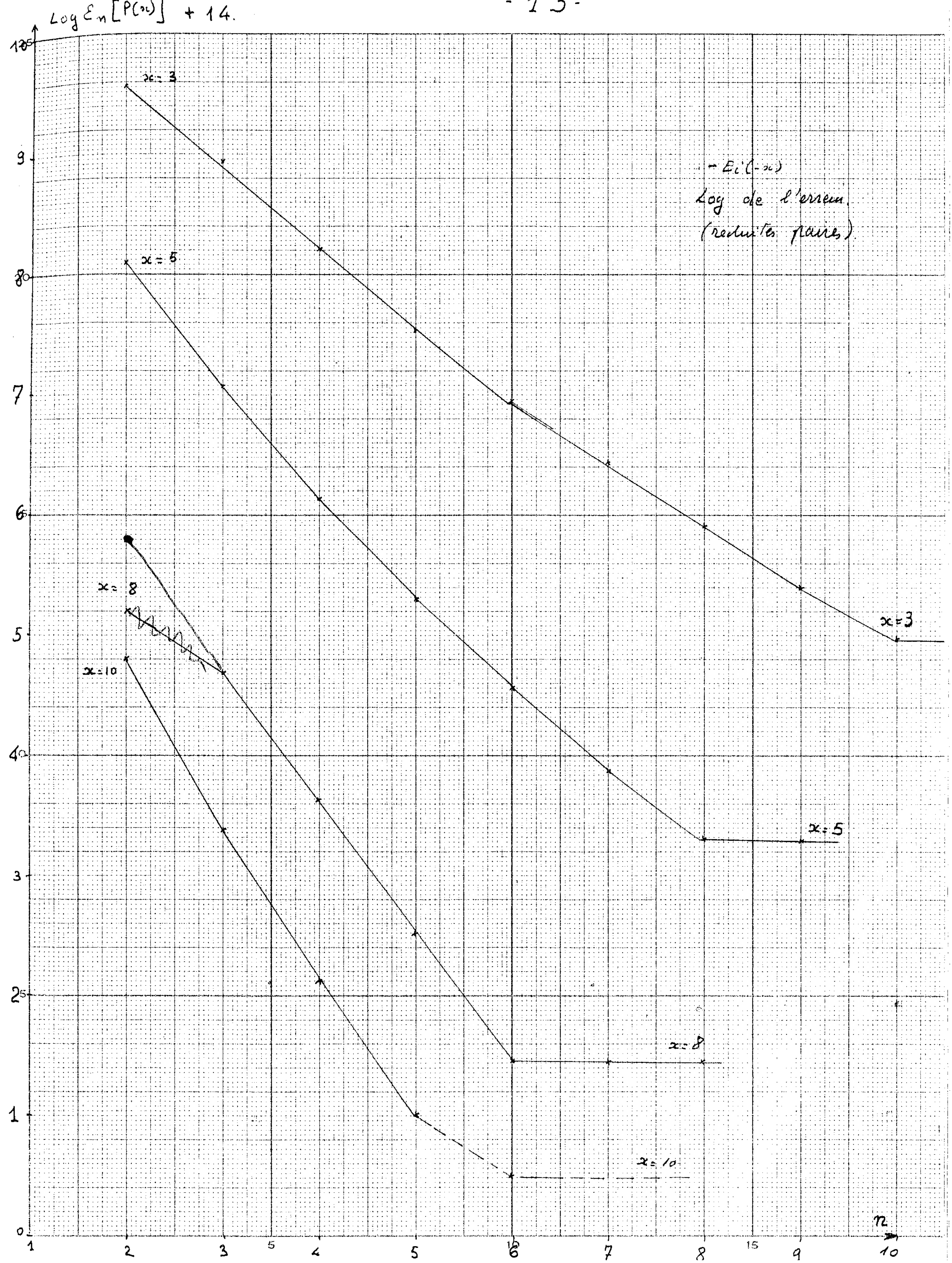
<u>Rapidité de la convergence :</u>

Les deux fractions continues $I(x)$ et $P(x)$ convergent donc vers $e^x\left(-E_i(-x)\right)$; l'une par valeurs supérieures $\left(I(x)\right)$, l'autre par valeurs inférieures. La convergence est d'autant plus rapide que x est grand, car le comportement de ces fractions continues est analogue à celui du développement asymptotique tout en donnant une erreur moindre.

L'erreur fournie sur $-E_i(-x)$ sera d'autant plus faible quand x croit, qu'elle est multipliée par e^{-x}.

Les courbes suivantes donnant le Log_e de l'erreur en fonction de l'ordre de la réduite pour $I_n(x)$ et $P_n(x)$ montrent la rapidité de la convergence.


Log $\mathcal{E}_n[I(x)]$. + 14.
$-E_i(-x)$
Log de l'erreur
(réduites impaires).
x = 3
x = 6
x = 8
x = 10
n
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10


Log $\mathcal{E}_n[P(x)]$ + 14.
x = 3
x = 5
x = 8
x = 10
→ Ei(-x)
Log de l'erreur
(reduites paires)
x = 3
x = 5
x = 8
x = 10
n
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

8. - RESULTATS NUMERIQUES. -

Les calculs ont été effectués sur une machine GAMMA tambour, en point décimal flottant, en simple précision. On obtient 9 chiffres significatifs.

Ces résultats ont été comparés aux données de la Table N.B.S. (1940), volumes 1 et 2, donnant 9 chiffres significatifs exacts pour $-E_i(-x)$ entre $x = 0{,}001$ et $x = 10$.

Les tableaux suivants montrent la rapidité de la convergence en fonction de x et la variation de l'erreur en fonction du nombre de réduites:

Ordre des réduites	$I_n\left[-E_i(-x)\right]$	$P_n\left[-E_i(-x)\right]$	$\lvert\varepsilon(I_n)\rvert$	$\lvert\varepsilon(P_n)\rvert$
		$x = 0,1$	$-E_i(-x) = 1,822\ 923\ 96$	
2	3,435 918 22	0,704 864 52	1,612 994 26	1,118 059 44
15	1,877 921 2[illegible]	1,784 339 58	0,054 998 24	0,038 584 38
200	1,822 924 18	1,822 923 82	$22 \cdot 10^{-8}$	$14 \cdot 10^{-8}$
		$x = 0,5$	$-E_i(-x) = 5,597\ 735\ 95 \cdot 10^{-1}$	
2	0,622 923 383	0,499 495 841	$6,314\ 978\ 8 \cdot 10^{-2}$	$6,027\ 775\ 4 \cdot 10^{-2}$
10	0,560 386 409	0,559 164 315	$6,128\ 14 \cdot 10^{-4}$	$6,092\ 80 \cdot 10^{-4}$
18	0,559 804 600	0,559 742 667	$3,100\ 5 \cdot 10^{-5}$	$3,092\ 8 \cdot 10^{-5}$
		$x = 1$	$-E_i(-x) = 2,193\ 839\ 34 \cdot 10^{-1}$	
10	$2,193\ 955\ 32 \cdot 10^{-1}$	$2,193\ 704\ 79 \cdot 10^{-1}$	$1,159\ 8 \cdot 10^{-5}$	$1,345\ 5 \cdot 10^{-5}$
15	$2,193\ 846\ 80 \cdot 10^{-1}$	$2,193\ 830\ 90 \cdot 10^{-1}$	$7,46 \cdot 10^{-7}$	$8,44 \cdot 10^{-7}$
20	$2,193\ 840\ 07 \cdot 10^{-1}$	$2,193\ 838\ 52 \cdot 10^{-1}$	$7,3 \cdot 10^{-8}$	$8,2 \cdot 10^{-8}$
		$x = 2$	$-E_i(-x) = 4,890\ 051\ 07 \cdot 10^{-2}$	
2	$4,921\ 283\ 03 \cdot 10^{-2}$	$4,833\ 402\ 99 \cdot 10^{-2}$	$3,123\ 196 \cdot 10^{-4}$	$5,664\ 808 \cdot 10^{-4}$
10	$4,890\ 055\ 29 \cdot 10^{-2}$	$4,890\ 045\ 30 \cdot 10^{-2}$	$4,22 \cdot 10^{-8}$	$5,77 \cdot 10^{-8}$
15	$4,890\ 051\ 17 \cdot 10^{-2}$	$4,890\ 050\ 96 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^{-9}$	$1,1 \cdot 10^{-9}$

$x = 3$ $\qquad -E_i(-x) = 1{,}304\ 838\ 11 \cdot 10^{-2}$

n	$-\overline{E_{i_n}}(-x) \cdot 10^{-2}$	$-\underline{E_{i_n}}(-x) \cdot 10^{-2}$	$\left(\overline{E_i} - E_i\right) \cdot 10^{-7}$	$\left(E_i - \underline{E_i}\right) \cdot 10^{-7}$
3		1,303 947 03 $\times 10^{-2}$		88,108
4	1,304 926 70 $\times 10^{-2}$	4 671 31	8,859	16,680
5	858 78	4 801 20	2,067	3,691
6	843 51	28 85	540	926
7	839 66	35 54	155	257
8	8 58	37 34	47	77
9	8 26	37 86	15	25
10	8 17	38 02	6	9
11	3	08	2	3
12	2	09	1	2
13	2	10	1	1
14	2	10	1	1

$x = 5$ $\qquad -E_i(-x) = 1{,}148\ 295\ 59 \cdot 10^{-3}$

n	$-\overline{E_{i_n}}(-x) \cdot 10^{-3}$	$-\underline{E_{i_n}}(-x) \cdot 10^{-3}$	$\overline{E_i} - E_i \cdot 10^{-7}$	$E_i - \underline{E_i} \cdot 10^{-7}$
2		1,146 884 59		14,110 0
3		8 170 34 $\times 10^{-3}$		1,252 5
4	1,148 301 83 $\times 10^{-3}$	8 280 68	0,062 4	149 1
5	296 57	93 40	9 8	21 9
6	5 76	95 21	1 7	3 8
7	5 62	51	3	8
8	5 59	57	0	2
9	5 59	58	0	1

$x = 8 \qquad -E_i(-x) = 3{,}766\ 562\ 28 \cdot 10^{-5}$

n	$-\overline{E_i}_n(-x) \cdot 10^{-5}$	$-\underline{E_i}_n(-x) \cdot 10^{-5}$	$\overline{E_i} - E_i \cdot 10^{-10}$	$E_i - \underline{E_i} \cdot 10^{-9}$
2		3,765 396 85		1,654 3
3	3,766 579 44	6 502 85	1,716	594 3
4	63 67	58 01	139	42 7
5	62 41	61 90	1	3 2
6	29	62 25	1	3
7	9	8		0

$x = 10 \qquad -E_i(-x) = 4{,}156\ 968\ 93 \cdot 10^{-6}$

n	$-\overline{E_i}_n(-x) \cdot 10^{-6}$	$-\underline{E_i}_n(-x) \cdot 10^{-6}$	$\overline{E_i} - E_i \cdot 10^{-10}$	$E_i - \underline{E_i} \cdot 10^{-10}$
2	4,157 102 03	4,156 331 58	1,331 0	6,373 5
3	6 975 01	944 66	60 7	242 7
4	69 33	967 57	4 0	13 6
5	68 97	8 83	4	1 0
6	7	8 90	4	3
7	2	0	-1	3
8	2		-1	

Ces tableaux montrent la convergence des deux fractions continues : $I_n(x)$ et $P_n(x)$. Cette convergence, très lente pour $x = 0{,}1$, s'améliore rapidement et, à partir de $x = 1$, on obtient avec $n = 20$, une erreur de $7{,}3.10^{-8}$ (pour $-\overline{E_i}(-x)$) et $8{,}2.10^{-8}$ (pour $-\overline{E_i}(-x)$) . Pour $x=5$ la capacité de la machine est déjà dépassée avec $n = 8$: on a 9 chiffres significatifs exacts pour par $I_n(x)$ et 8 par $P_n(x)$.

De plus, si on compare $\varepsilon_n[I(x)]$ et $\varepsilon_n[P(x)]$, on a les relations suivantes :

a) pour $x < 0{,}5$

$$\varepsilon_n[I(x)] > \varepsilon_n[P(x)]$$

$$\varepsilon_{n+1}[I(x)] < \varepsilon_n[P(x)]$$

b) pour $0{,}5 < x < 1$

$$\varepsilon_n[I(x)] \approx \varepsilon_n[P(x)]$$

c) pour $x \geqslant 1$

$$\varepsilon_n[I(x)] < \varepsilon_n[P(x)]$$

$$\varepsilon_n[I(x)] > \varepsilon_{n+1}[P(x)]$$

9. - STABILITE DU DEVELOPPEMENT EN FRACTION CONTINUE. -

Les résultats numériques montrent que l'erreur est toujours décroissante avec n croissant, et cela quelque soit x. On pourrait croire que pour n très grand, les fractions continues $I_n(x)$ et $P_n(x)$ se comportent comme le développement en série asymptotique ; c'est-à-dire que l'erreur se mette à croître à partir d'une certaine valeur de n.

Il n'en est rien et c'est là une profonde différence entre les deux moyens de calcul. Expérimentalement, on peut prouver ce fait :

nous avons pris $x = 10$ pour lequel les fractions continues convergent très rapidement.
La valeur 0,415 696 890 est atteinte pour $n = 6$ avec la fraction continue $P_n(x)$. [La vraie valeur est 0,415 696 893] .
On a imprimé les dénominateurs partiels $G_i(x)$ en prenant $n = 50$ et en prenant $n = 59$.

1) pour $n = 50$ ou $n = 59$, on obtient pour la fonction, la même valeur que pour $n = 6$.

2) à partir de $G_{29}(x)$, on déroule la même séquence de calcul pour $n = 50$ ou $n = 59$. On a, en effet :

$$\left[G_{29}(x)\right]_{50} \equiv \left[G_{29}(x)\right]_{59}$$

et ainsi de suite pour tous les $G_k(x)$ $k < 29$

3) pour $29 < k < 49$, $\left[G_k\right]_{50} > \left[G_k\right]_{59}$, la différence entre $\left[G_k\right]_{50}$ et $\left[G_k\right]_{59}$ ~~décroît~~ diminue lorsque k décroît .

x = 10

k	$\left[G_k(x)\right]_{59}$	n	$-E_i(-x)$
58	98,511 811 1		
57	90,019 183 2		
56	86,162 981 0		
55	83,892 115 4		
54	82,241 072 0		
53	80,844 316 9		
52	79,552 998 4		
51	78,304 815 0		
50	77,073 483 1		
49	75,847 911 1		
48	74,623 421 9		
47	73,398 034 0		
46	72,170 890 0		
45	70,941 595 9		
44	69,709 945 8		
43	68,475 807 9		
42	67,239 077 3		
41	65,999 657 0		
40	64,757 449 8		
39	63,512 354 9		
38	62,264 266 2		
37	61,013 071 1		
36	59,758 650 0		
35	58,500 875 7		
34	57,239 612 1		
33	55,974 713 9		
32	54,706 025 3		
31	53,433 379 3		
30	52,156 595 9		
29	50,875 481 5		
28	49,589 826 5		
27	48,299 404 2		
26	47,003 968 2		
25	45,703 250 4		
24	44,396 957 7		
23	43,084 769 2		
22	41,766 331 9		
21	40,441 256 2		
20	39,109 110 5		
19	37,769 414 3		
18	36,421 630 3		
17	35,065 154 8		
16	33,699 305 1		
15	32,323 304 5		
14	30,936 263 6		
13	29,537 155 5		
12	28,124 784 5		
11	26,697 744 9		
10	25,254 365 3		
9	23,792 633 8		
8	22,310 091 9		
7	20,803 684 6		
6	19,269 537 4		
5	17,702 615 5		
4	16,[illegible]96 178 8		
3	14,440 861 1		
2	12,723 008 3		
1	10,921 402 3	59	0,415 696 890 4

x = 10

k	$\left[G_k(x)\right]_{50}$	n	$-\underline{E_i}(-x)$
49	84,972 477 1		
48	77,885 338 0		
47	74,637 794 1		
46	72,649 751 7		
45	71,126 539 3		
44	69,780 905 5		
43	68,502 780 1		
42	67,249 220 3		
41	66,003 427 7		
40	64,758 834 8		
39	63,512 857 3		
38	62,264 446 0		
37	61,013 134 5		
36	59,758 672 1		
35	58,500 883 2		
34	57,239 614 6		
33	55,974 714 7		
32	54,706 025 6		
31	53,433 379 4		
30	52,156 596 0		
29	50,875 481 5		
28	49,589 826 5		
27	48,299 404 2		
26	47,003 968 2		
25	45,703 250 4		
24	44,396 957 7		
23	43,084 769 2		
22	41,766 331 9		
21	40,441 256 2		
20	39,109 110 5		
19	37,769 414 3		
18	36,421 630 3		
17	35,065 154 8		
16	33,699 305 1		
15	32,323 304 5		
14	30,936 263 6		
13	29,537 155 5		
12	28,124 784 5		
11	26,697 744 9		
10	25,254 365 3		
9	23,792 633 8		
8	22,310 091 9		
7	20,803 684 6		
6	19,269 537 4		
5	17,702 615 5		
4	16,096 178 8		
3	14,440 861 1		
2	12,723 008 3		
1	10,921 402 3	50	0,415 696 890 4

Ainsi lorsque n croît, les différents G_k se "raffinent" et leur "raffinage" n'est limité que par la capacité de la machine.

Une autre expérience montre un fait identique : pour une valeur x = 0,1 avec n = 200 et 201, on a calculé $-E_i(-x)$ grâce à $I_n(x)$. L'erreur pour n = 200 ou 201 est la même : 22.10^{-8}. A partir de $\left[D_{15}(x)\right]_{\begin{cases}200\\201\end{cases}}$ on a l'égalité et la même fin de séquence,

c'est-à-dire que pour n = 185 environ, on a atteint l'erreur minimum que peut donner la capacité de la machine.

10. - COMPARAISON AVEC LES SERIES. -

Autour de l'origine, $-E_i(-x)$ est donné par la série :

$$S_n(x) = -\gamma - \mathrm{Log}_e(x) + \frac{x}{1!\;1} - \frac{x^2}{2!\;2} + \frac{x^3}{3!\;3} - \frac{x^4}{4!\;4} + \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ (-1)^{n-1}\ \frac{x^n}{n!\;n}$$

avec γ = 0,577 215 665 (constante d'Euler).

Pour les plus grandes valeurs de x, la série asymptotique de $-E_i(-x)$ donne, comme nous l'avons vu, une moins bonne approximation que la fraction continue.

Nous allons comparer la série $S_n(x)$ et la fraction continue au point de vue nombre d'opérations et nombre de chiffres exacts fournis.

10.1. - Nombre respectif d'opérations.

Nous ne tenons compte que du nombre de Mult. Div.

- la série sera calculée :

$$\frac{x^{n-1}}{(n-1)\,!} \Longrightarrow \text{en mémoire}$$

$$\frac{x^{n-1}}{(n-1)\,!} \cdot x \cdot \frac{1}{n} = \frac{x^n}{n!} \quad \Rightarrow \text{ en mémoire}$$

$$\frac{x^n}{n\,!} \cdot \frac{1}{n} = \frac{x^n}{n!\,n} \quad \text{à ajouter au terme précédent}$$

Chaque terme que l'on ajoute coûte 3 Mult. Div. de plus.

$n = 1$ aucune Mult.Div 1 $\text{Log}_e\ x$

$n = 2$ $\left(\frac{x^2}{2}\right)$ 2 Mult.Div de plus; au total : 2 Mult.Div

$n = 3$ 3 Mult.Div " ; " : 5 "

$n = n$ 3 Mult.Div " ; " : 3n-4 Mult.Div

Pour n termes, la série coûte 3n-4 Mult.Div et $\text{Log}_e\ x$.

- la fraction continue $I_n(x)$:

$(n+1)\,n = n(n-1) + 2n$

Chaque n coûte $\frac{(n-1)\ n\,|}{|\ x + 2n}$: 2 Mult.Div de plus

$n = 1$ 3 Mult.Div et e^x

$n = 2$ 4 Mult.Div au total et e^x

$n = 3$ 5 " " " "

Pour n termes, la fraction continue $I_n(x)$ coûte

2n-1 Mult.Div et e^x

- la fraction continue $P_n(x)$:

chaque n coûte $\frac{(n-1)^2|}{|x+2n-1}$: 2 Mult.Div de plus

$n = 1$	1 Mult.Div	et	e^x
$n = 2$	2 "	"	"
$n = 3$	4 "	"	"

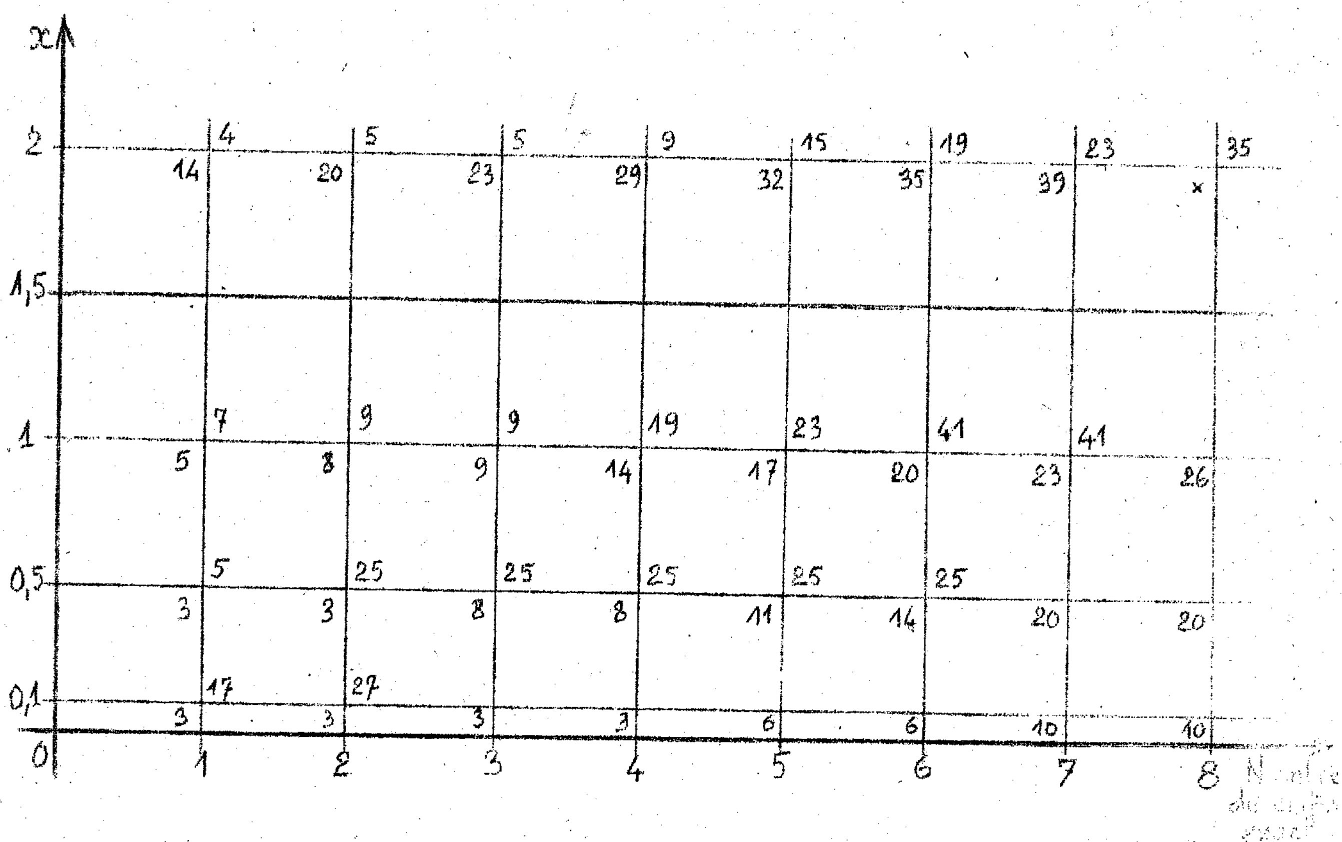
Pour n termes, la fraction continue $P_n(x)$ coûte

<u>2n-2</u> Mult.Div et e^x

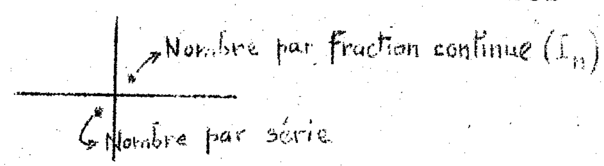
La fraction $P_n(x)$ est la plus économique en Mult.Div. Pour un terme n, on gagne sur la série <u>n-2</u> Mult.Div et 1 Mult.Div sur $I_n(x)$.

<u>10.2. - Zones minimales.</u>

On va rechercher les "zones minimales", c'est-à-dire les zones où un des deux procédés donne un nombre d'opérations moindre que l'autre en fonction du nombre de chiffres exacts.



On quadrille le plan ; à chaque noeud du réseau, on porte le nombre de Mult.Div nécessaire pour avoir "ce" nombre de chiffres exacts pour "cette" valeur de x ;



Si on partage le plan par une droite $x = 1,5$, on aura deux zones :

$0 \leq x < 1,5$: zone minimale de la série

$1,5 < x < \infty$: zone minimale de la fraction continue

CHAPITRE III

DEVELOPPEMENT EN FRACTION CONTINUE DE LA FONCTION GAMMA INCOMPLETE : $\Gamma(1-a,x)$

11. - CAS GENERAL. -

Soit la fonction $\Gamma(1-a, x)$ définie par

$$\Gamma(1-a, x) = \int_x^{\infty} e^{-t}\, t^{-a}\, dt$$

On peut la développer en fraction continue. On obtient :

$$\Gamma(1-a, x) = e^{-x}\, x^{-a} \left[\frac{1|}{|1} + \frac{a|}{|x} + \frac{1|}{|1} + \frac{a+1|}{|x} + \frac{2|}{|1} + \frac{a+2|}{|x} + \cdots \right.$$

Le développement en fraction continue converge pour $a > 0$ et réel (WALL [59] page 355). Les réduites impaires donnent des valeurs supérieures à la fonction et les réduites paires des valeurs inférieures (T.J. STIELTJES [56]).

11.1. - Etude de la fraction continue F(x,a).

On pose :

$$F(x,a) = \frac{1|}{|1} + \frac{a|}{|x} + \frac{1|}{|1} + \frac{a+1|}{|x} + \frac{2|}{|1} + \frac{a+2|}{|x} + \cdots\cdots$$

La fraction continue ayant comme réduites les réduites impaires de F(x,a) **sera** :

$$I(x,a) = 1 - \frac{a|}{|x+a+1} - \frac{1(a+1)|}{|x+a+3} - \frac{2(a+2)|}{|x+a+5} - \cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots - \frac{(n-1)\ (a+n-1)|}{|x+a+2n-1} - \cdots\cdots$$

et la fraction continue ayant comme réduites successives les réduites paires de F(x, a) sera :

$$P(x,a) = \frac{x}{x+a} \Big| - \frac{a}{|x+a+2} \Big| - \frac{2(a+1)}{|x+a+4} \Big| \cdots\cdots - \frac{n(a+n-1)}{|x+a+2n} \Big| - \cdots$$

La fraction continue limitée $I_n(x,a)$ donne toujours des limites supérieures de la fonction, et la fraction continue limitée $P_n(x\ a)$ des limites inférieures.

Le calcul se fait en utilisant effectivement l'algorithme de la division et non en calculant littéralement le quotient de polynôme auquel conduisent les réduites.

11.2.- Inégalités. On peut comparer F(a,x) au développement asymptotique

$$S(a,x) = 1 - \frac{a}{x} + \frac{a+1}{x^2} - \frac{a(a+1)(a+2)}{x^3} \cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots (-1)^{n+1} \frac{a.(a+1)\ldots(a+n)}{x^{n+1}} \cdots\cdots\cdots$$

et on aura :

$$P_n(x,a) > 1 - \frac{a}{x} + \frac{a+1}{x^2} - \frac{a(a+1)(a+2)}{x^3} \cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots - \frac{a(a+1)\ldots(a+2n-1)}{x^{2n}} = S_{2n}(a,x)$$

$$I_n(x,a) < 1 - \frac{a}{x} + \frac{a+1}{x^2} \cdots\cdots\cdots + \frac{a(a+1)\ldots(a+2n)}{x^{2n+1}}$$

$$= S_{2n+1}(a,x)$$

D'où les inégalités suivantes :

$$\boxed{S_{2n}(a,x) < P_n(x,a) < e^x\, x^a\, \Gamma(1-a,x) < I_n(x,a) < S_{2n+1}(a,x)}$$

12. - CAS PARTICULIERS : $E_a(x)$ et $\Phi(x)$. -

On peut ainsi grâce à ce développement calculer les fonctions suivantes qui sont des cas particuliers de $\Gamma(1-a,x)$:

a = 1 $\qquad -E_i(-x) = \int_x^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt = \Gamma(0,x)$

a = $\frac{1}{2}$ $\qquad$ fonctions erreur : $\Phi(x)$

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x} e^{-t^2} dt$$

$$\Phi(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{2}, x^2\right)$$

d'où :
$$\begin{cases} \mathrm{Erf}\,(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \Phi(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}, x^2\right) \\ \mathrm{Erf}\,c\,(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} (1 - \Phi(x)) = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}, x^2\right) \end{cases}$$

a = a $\qquad$ La fonction $E_a(x)$ définie par

$$E_a(x) = \int_1^{\infty} e^{-xu} u^{-a} du$$

$$\Gamma(1-a, x) = x^{1-a} E_a(x)$$

ou $\quad E_a(x) = x^{a-1} \Gamma(1-a, x)$

c'est-à-dire au facteur x^{a-1} près le cas général.

13. - CALCUL DE LA FONCTION $E_a(x)$. -

Comme nous l'avons vu :

$$E_a(x) = \int_1^{\infty} e^{-xu}\, u^{-a}\, du = x^{a-1} \int_x^{\infty} e^{-t}\, t^n\, dt$$

$$\frac{P_n(x,a)}{e^n \cdot x} < E_a(x) < \frac{I_n(x,a)}{e^x \cdot x} \qquad \boxed{E_a(x) \sim e^{-x}\, x\, F(x,a)}$$

Nous avons comparé nos calculs à la table donnée par le N.B.S. (A.M.S. 37) (Tables of functions and of zeros of functions; 1954). $E_a(x)$ y est tabulée pour a = 1 à 20 avec [illegible] pour x 0,01 (0,01) 2 et 2 (0,1) 10.

Nous avons calculé les fonctions suivantes :

$$E_2(x) \quad ; \quad E_5(x) \quad ; \quad E_{10}(x) \quad ; \quad E_{20}(x)$$

pour les valeurs : x=0,1 ; x = 0,3 ; x = 0,5 ; x = 1

x = 1,5 ; x = 2 ; x = 5 ; x = 8 ; x = 10

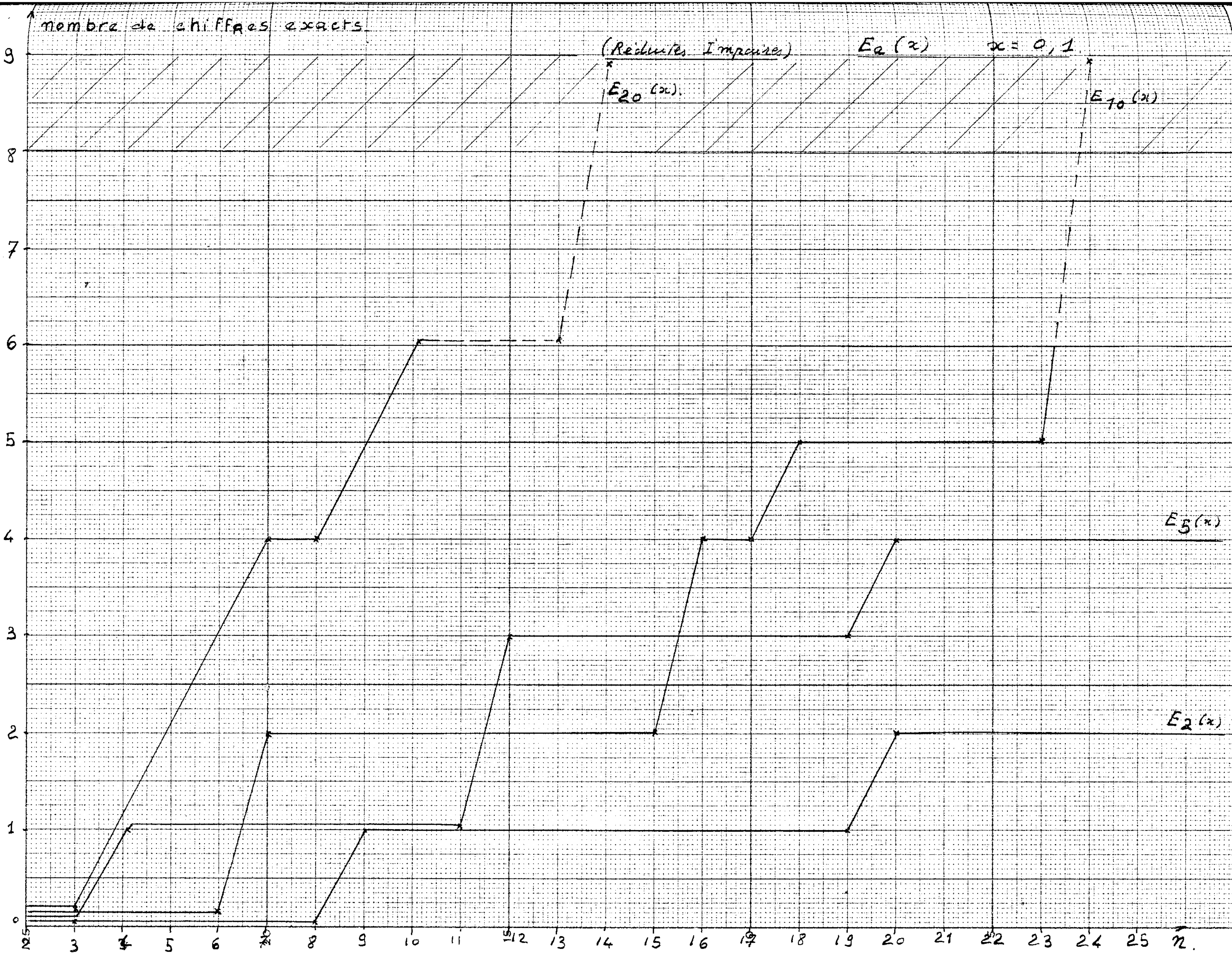
et cela au moyen de $I_n(x,a)$ et de $P_n(x,a)$

Comme pour la fonction $-E_i(-x)$ -qui est $E_1(x)$- le développement en fraction continue utilisé converge vers la valeur de la fonction, régulièrement par valeurs supérieures $[I_n(x,a)]$ et par valeurs inférieures $[P_n(x,a)]$. Ce développement ne diverge pas à partir d'une certaine valeur de n comme le développement en série asymptotique.

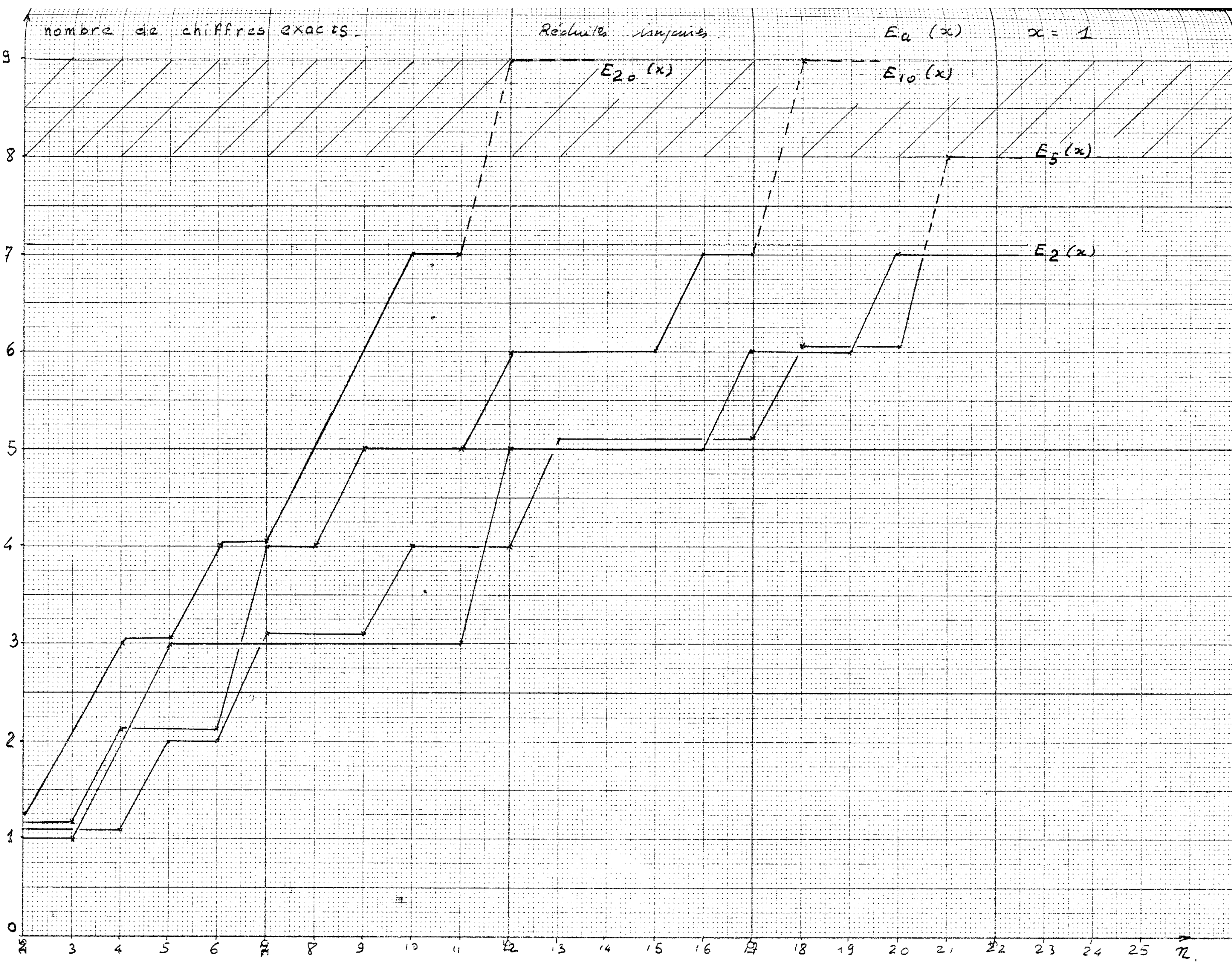
La convergence est lente pour les faibles valeurs de x et elle est très rapide pour les valeurs de $x > 1$. Il est à remarquer que, pour les faibles valeurs de x, la fraction continue converge d'autant plus vite que a est grand, mais que pour les valeurs de x plus grandes, la convergence est à peu près indépendante de a.

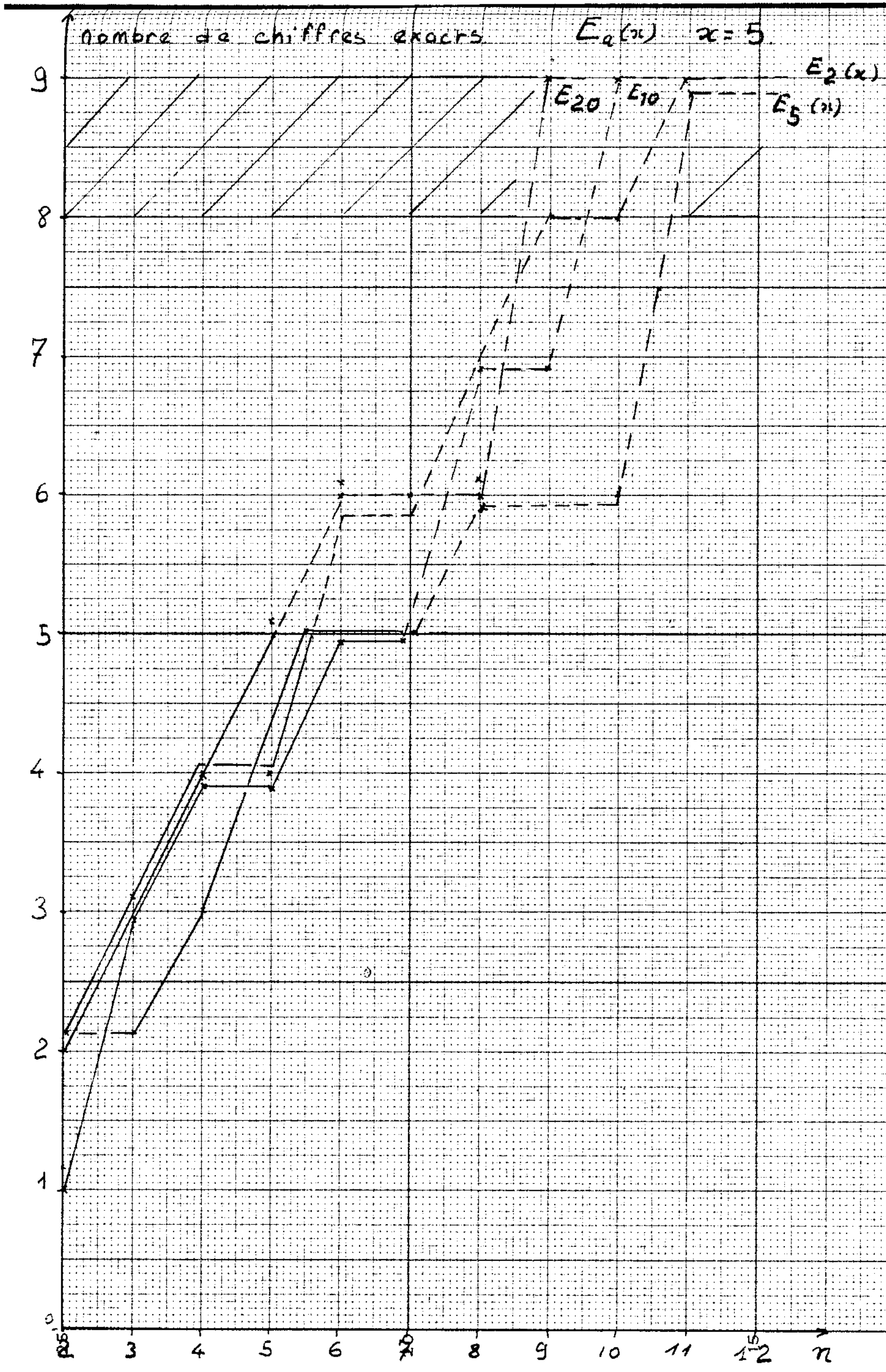
Au contraire les faibles ordres de a paraissent converger plus rapidement que les ordres supérieurs. Par exemple , pour avoir 8 chiffres significatifs pour x = 10, il faut n=6 pour a=2 et a=5, alors qu'il faut n=7 pour a=10 et a=20.

Les courbes suivantes donnent le nombre de chiffres significatifs obtenus par $I_n(x,a)$ en fonction de n. La partie hachurée entre 8 et 9 chiffres indique que les calculs ont été conduits en P.D.F. en simple précision, avec 9 chiffres. La droite parallèle à l'axe des n, pour n=5, 6 ou 7 donne la précision de la table utilisée pour cette valeur de **x**. A partir de cette droite, les courbes sont tracées en pointillé ; les courbes sont tracées sans tenir compte de l'arrondi.

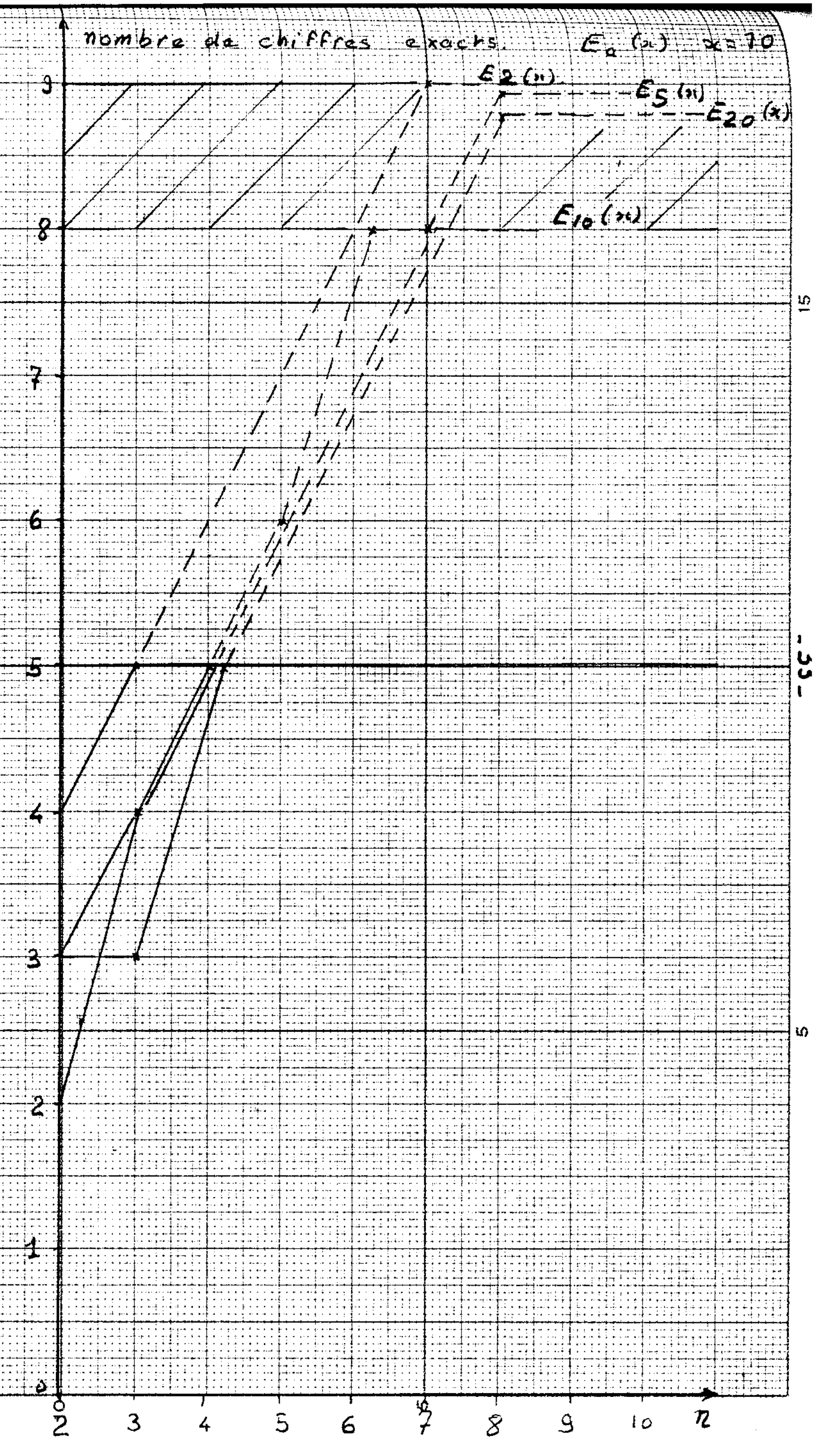


nombre de chiffres exacts
(Réduites Impaires)
$E_a(x)$
$x = 0,1$
$E_{20}(x)$
$E_{10}(x)$
$E_5(x)$
$E_2(x)$
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 n.


nombre de chiffres exacts
Réduites impaires
$E_a(x)$
$x = 1$
$E_{20}(x)$
$E_{10}(x)$
$E_5(x)$
$E_2(x)$
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25
n



nombre de chiffres exacts
$E_a(x)$ $x = 5$
$E_2(x)$
E_{20}
E_{10}
$E_5(x)$
n



nombre de chiffres exacts
$E_a(x)$ $x = 10$
$E_2(x)$
$E_5(x)$
$E_{20}(x)$
$E_{10}(x)$
n

Pour $x \leqslant 1$, le développement en fraction continue converge trop lentement pour être utilisable, sauf pour $a > 10$.

Pour $x > 1$, et plus précisément à partir de $x = 1,5$, on obtient la même précision que la table citée (6 chiffres) pour $n \leqslant 13$ et cela même pour E_2. Pour $x = 2$, il suffit de $n \leqslant 11$ pour avoir 6 chiffres exacts (la table n'en donne que 5).

Pour $x \geqslant 5$ avec $n \leqslant 11$, on obtient 9 chiffres pour tous les $E_a(x)$; La table ne donne que 5 chiffres.

Pour les valeurs de x telles que $0,1 < x \leqslant 1$, on a intérêt à choisir le développement en série ... autour de l'origine.

Pour x tel que $1 < x < 5$, selon l'ordre "a", on peut choisir le développement en série ou le développement en fraction continue.

Pour $x \geqslant 5$, le développement en fraction continue est nettement plus intéressant que le développement en série de Taylor.

De toutes façons, quelque soit x, la fraction continue est toujours plus intéressante que le développement asymptotique :

- elle est plus près de la fonction par valeurs supérieures et inférieures,
- elle ne diverge pas à partir d'un certain n,

Pour comparer l'erreur absolue de l'erreur donnée par $I_n(x,a)$ et par $P_n(x,a)$, on peut dire que :

pour les "grandes valeurs de x" : $\varepsilon_n \left[I(x,a)\right] < \varepsilon_n \left[P(x,a)\right]$

avec cependant $\varepsilon_n \left[I(x,a)\right] > \varepsilon_{n+1} \left[P(x,a)\right]$

pour les "plus faibles valeurs de x" :

$$\varepsilon_n \left[P(x,a)\right] < \varepsilon_n \left[I(x,a)\right]$$

avec $$\varepsilon_n \left[P(x,a)\right] > \varepsilon_{n+1} \left[I(x,a)\right]$$

La valeur de x à partir de laquelle les inégalités s'inversent est fonction de l'ordre "a". On a :

$$\varepsilon_n \left[I(a,a) \right] = \varepsilon_n \left[P(a,a) \right]$$

14. - CALCUL DE LA FONCTION $\Phi(x)$. -

14.1. - Développement en fraction continue.

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} \, dt$$

$$\Phi(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{2}, x^2\right) \sim 1 - \frac{e^{-x} x^{-a}}{\sqrt{\pi}} F(x^2,a)$$

On peut calculer $\Phi(x)$ au moyen de $P_n(x^2,a)$ et $I_n(x^2,a)$.
Les inégalités sont inversées :

$$1 - \frac{e^{-x} x^{-a}}{\sqrt{\pi}} I_n(x^2,a) < \Phi(x) < 1 - \frac{e^{-x} x^{-a}}{\sqrt{\pi}} P_n(x^2,a)$$

On doit calculer les fractions continues I_n et P_n avec x^2 au lieu de x. Donc, la convergence sera encore plus faible pour les valeurs de $x < 1$, mais la rapidité de convergence sera augmentée pour les valeurs de $x > 1$.

Comme $a = \frac{1}{2}$, pour les valeurs de $x > \frac{1}{2}$, $I_n(x^2,a)$ donnera une plus faible erreur que $P_n(x^2,a)$.

Nous avons calculé la fonction $\Phi(x)$ pour
$x = 0,5$; $x = 0,8$; $x = 1$; $x = 1,5$; $x = 2$

14.2. - Résultats numériques.

Le tableau suivant donne les valeurs obtenues pour les premières réduites de $I_n(x^2, a)$.

n	x = 0,5 $\Phi(x)$=0,520 499 8	x = 0,8 $\Phi(x)$=0,742 100 96	x = 1 $\Phi(x)$=0,842 700 79	x = 1,5 $\Phi(x)$=0,466 105 15	x = 2 $\Phi(x)$=0,995 322 27
2	0,446 692 45	0,732 726 92	0,840 343 28	0,966 037 56	0,995 320 69
3	0,478 665 44	0,738 221 01	1 912 38	091 76	2 08
4	0,494 909 18	0,740 307 76	2 399 07	101 93	24
5	0,504 016 04	0,741 205 94	573 86	4 26	6
6	0,509 471 34	0,741 627 74	643 45	4 88	7
7	0,512 900 81	0,741 839 17	673 39	5 06	
8	0,515 138 24	0,741 950 71	687 09	12	
9	0,516 641 88	0,742 012 04	693 67	14	
10	0,517 677 31	046 94	696 97	15	
11	0,518 405 09	067 40	698 69		
12	0,518 925 68	079 69	699 60		
13	0,519 303 77	087 25	700 11		
14	0,519 582 06	091 98	39		
15	0,519 789 35	095 00	55		
16	0,519 945 39	196 95	65		
17	0,520 064 00	098 23	71		
18	0,520 154 94	099 09	74		
19	0,520 225 21	099 66	76		
20	0,520 279 92	100 05	77		
21	0,520 322 80	32	78		
22	0,520 356 62	51	79		
23	0,520 383 44	64			

14.3. - Comparaison avec la série.

Au voisinage de l'origine, la fonction $\Phi(x)$ peut se développer selon la série :

$$S_n(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left[x - \frac{x^3}{1!\,3} + \frac{x^5}{2!\,5} - \frac{x^7}{3!\,7} \; \ldots\ldots\ldots \; (-1)^n \; \frac{x^{2n+1}}{n!\,(2n+1)} \right]$$

On a calculé $S_n(x)$ pour $x = 0,5$; $x = 0,8$; $x = 1$; $x = 1,5$; $x = 2$ et $x = 10$.

Pour $x = 2$, on ne peut avoir, en calculant en P.D.F. avec 9 chiffres, mieux que 7 chiffres exacts. Pour $x = 10$, on n'obtient aucun chiffre exact.

Chaque terme supplémentaire coûte par la série : 4 Mult.Div de plus.

$n = 1$	1 Mult.Div
$n = 2$	3 " "
$n = 3$	6 " "
pour n termes :	$4n - 6$ Mult.Div

Par la fraction continue, il faut :

$$\begin{cases} 2n-1 \text{ Mult.Div par } I_n(x) \\ 2n-2 \text{ " " par } P_n(x) \end{cases}$$

Donc, à n égal, il est plus intéressant d'employer les fractions continues.

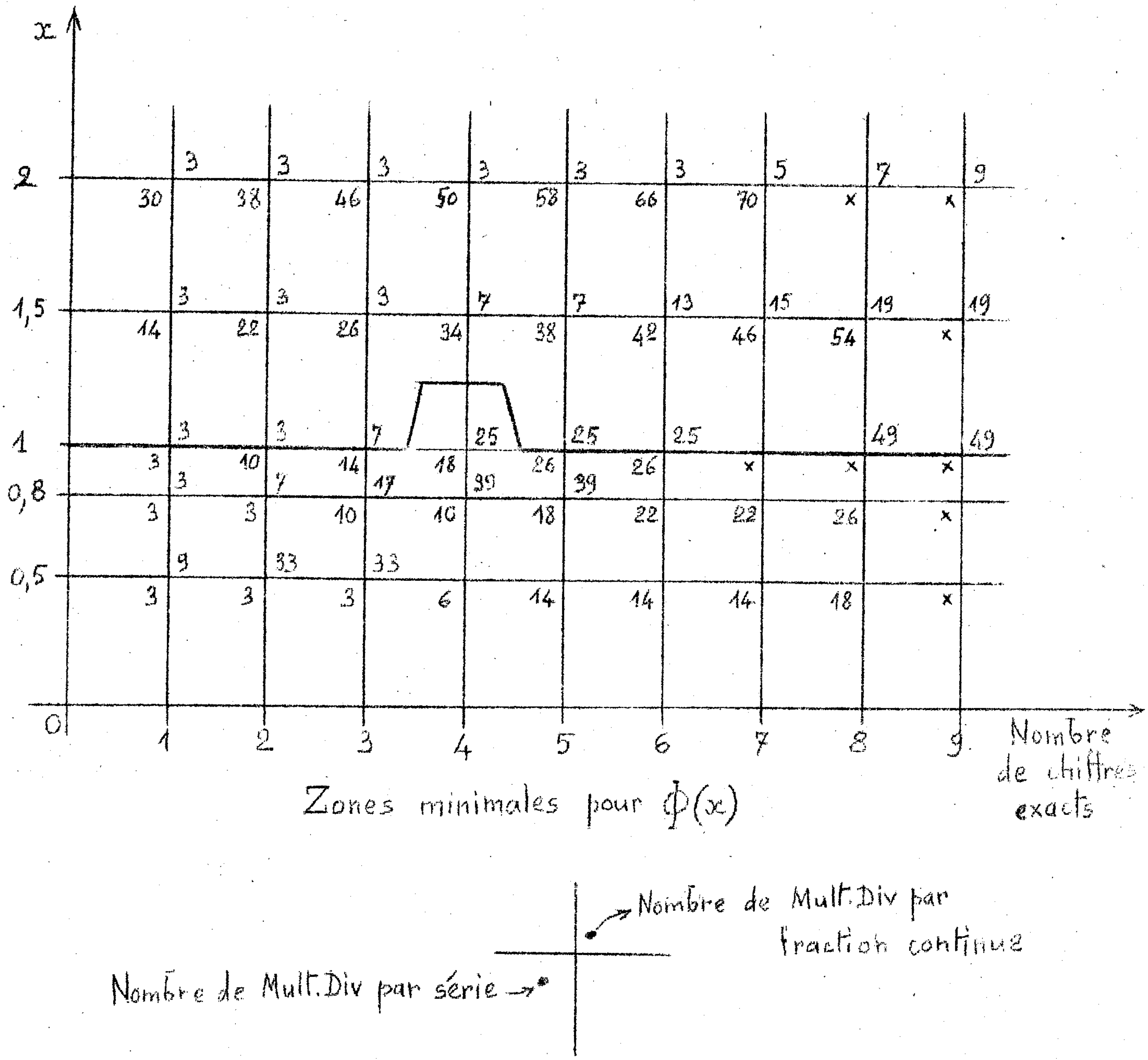
Pour $x = 1,5$, avec $n = 10$ on obtient 9 chiffres exacts par $I_n(x)$

avec $n = 15$ on obtient 8 chiffres exacts par la série.

A partir de $x > 1$, il est plus intéressant d'employer les fractions continues (et $I_n(x)$ de préférence, qui donne une erreur moindre que $P_n(x)$.).

On va rechercher les zones minimales pour $\Phi(x)$ calculé par la série et par la fraction continue :

on quadrille le plan en portant à chaque noeud le nombre de Mult.Div nécessaire par chaque procédé de calcul.



C H A P I T R E IV

GENERALISATION SUR L'AXE COMPLEXE

DU DEVELOPPEMENT DE $\Gamma(1-a,x)$ EN FRACTION CONTINUE

15. - CAS GENRAL. -

15.1. - Ecriture de la fraction continue.

Si dans la fraction continue précédemment étudiée, on change x en ix, on obtient la fraction continue :

$$F_a(ix) = \frac{1|}{1} + \frac{a|}{|ix} + \frac{1|}{|1} + \frac{a+1|}{|ix} + \frac{2|}{|1} + \frac{a+2|}{|ix} + \cdots\cdots$$

Les fractions continues ayant pour réduites les réduites de $F_a(ix)$ respectivement paires et impaires, seront alors :

$$P(ix, a) = \frac{ix|}{ix+a} - \frac{a|}{|ix+a+2} - \frac{(a+1)\ 2|}{|ix+a+2} - \cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots - \frac{(n-1)(a+n-2)|}{|ix+a+2(n-1)}$$

$$I_n(ix,a) \quad 1 - \frac{a|}{|ix+a+1} - \frac{1(a+1)|}{|ix+a+3} - \frac{2(a+2)|}{|ix+a+5} \cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots - \frac{(n-1)(a+n-1)|}{|ix+a+2n-1}$$

D'où le développement en fraction continue de $\Gamma(1-a,ix)$:

$$\Gamma(1-a\ ,ix) = e^{-ix}\ (ix)^{-a}\ F_a(ix)$$

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x$$

$$(ix)^{-a} = \frac{1}{x^a} \left(\cos \frac{\pi}{2a} - i \sin \frac{\pi}{2a}\right)$$

Soit en posant

$$\begin{cases} A\left[F_a(ix)\right] = \text{partie Réelle}\left[F_a(ix)\right] \\ B\left[F_a(ix)\right] = \text{partie Imaginaire}\left[F_a(ix)\right] \end{cases}$$

$$\mathcal{R}\left[\Gamma(1-a,\ ix)\right] = \frac{1}{x^a}\left[A\left[F_a(ix)\right] \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2a} + x\right) + B\left[F_a(ix)\right] \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{2a}\right)\right]$$

$$\text{Imag}\left[\Gamma(1-a,ix)\right] = \frac{1}{x^a}\left[B\left[F_a(ix)\right] \cos\left(x + \frac{\pi}{2a}\right) - A\left[F_a(ix)\right] \sin\left(x + \frac{\pi}{2a}\right)\right]$$

On a pour $\mathcal{R}\left[\Gamma(1-a,ix)\right]$ et $\text{Imag}\left[\Gamma(1-a,ix)\right]$ les mêmes expressions en prenant $I_n(a,ix)$ ou $P_n(a,ix)$ avec leurs parties réelles et imaginaires.

Les cas particuliers importants de $\Gamma(1-a,ix)$ sont :

$a = 0$ qui donne $C_i(x)$ et $S_i(x)$

$a = \frac{1}{2}$ qui donne $C(x)$ et $S(x)$

Avant de traiter ces cas, nous allons voir les programmes donnant les parties réelles et imaginaires de $I_n(a,ix)$ et de $P_n(a,ix)$.

15.2. - Programmes.

Calcul des réduites impaires : $I_n(a,ix)$

$$I_n(a,ix) = 1 - \frac{a\ |}{|\ ix + a + 1} - \dots\dots\dots\dots - \frac{(n-1)(a+n-1)\ |}{|\ ix+a+2n-1}$$

On pose $\begin{cases} D_k = G_k + i\,H_k \\ K_k = L_k + i\,M_k \end{cases}$

avec $D_k = ix + a + 2k - 1 - K_k$

$$\text{d'où :} \begin{cases} G_k = a + 2k - 1 - L_k \\ H_k = x - M_k \end{cases}$$

et $K_k = \dfrac{k\,(a+k)}{G_{k+1} + i\,H_{k+1}}$

$$\text{d'où :} \begin{cases} L_k = \dfrac{k\,(a+k)}{G_{k+1}^2 + H_{k+1}^2} \cdot G_{k+1} \\[2em] M_k = - \dfrac{k(\,a+k)}{G_{k+1}^2 + H_{k+1}^2} \cdot H_{k+1} \end{cases}$$

avec $D_n = ix + a + 2n - 1 \rightarrow \begin{cases} G_n = a + 2n - 1 \\ H_n = x \end{cases}$

$$K_{n-1} = \frac{(n-1)\,(a+n-1)}{G_n + i\,H_n} \rightarrow \begin{cases} L_{n-1} = \dfrac{G_n}{G_n^2 + H_n^2}\,(n-1)\,(a+n-1) \\[1em] M_{n-1} = - \dfrac{H_n}{G_n^2 + H_n^2}\,(n-1)\,(a+n-1) \end{cases}$$

$k = n-1,\ n-2,\ \dots\dots\dots\dots,\ 1$

$$I_n(a,\ ix) = 1 - \frac{a}{D_1} \longrightarrow \begin{cases} A_n(I) = 1 - \dfrac{a\ G_1}{G_1^2 + H_1^2} \\[2ex] B_n(I) = \dfrac{aH_1}{G_1^2 + H_1^2} \end{cases}$$

<u>Calcul des réduites paires $P_n(a,ix)$</u>

$$P_n(a,ix) = \frac{ix}{ix+a}\Big| - \frac{a}{|\,ix+a+2}\Big| - \frac{(a+1)\ 2}{|\,ix+a+4}\Big| \ \dots\dots\dots\dots - \frac{(n-1)(a+n-2)}{|\,ix+a+2(n-1)}\Big|$$

On pose : $Q_k = U_k + i\ V_k$

$R_k = X_k + i\ Y_k$

avec $Q_k = ix + a + 2(k-1) - R_k$

$$\text{d'où :} \begin{cases} U_k = a + 2(k-1) - X_k \\[1ex] V_k = x - Y_k \end{cases}$$

et $R_k = \dfrac{k(a+k-1)}{U_{k+1} + i\ V_{k+1}}$

$$\text{d'où :} \begin{cases} X_k = \dfrac{k(a+k-1)}{U_{k+1}^2 + V_{k+1}^2}\ U_{k+1} \\[2ex] Y_k = -\dfrac{k(a+k-1)}{U_{k+1}^2 + V_{k+1}^2}\ V_{k+1} \end{cases}$$

Pour débuter :

$$Q_n = ix + a + 2(n-1) \longrightarrow \begin{cases} U_n = a + 2(n-1) \\ V_n = x \end{cases}$$

$$R_{n-1} = \frac{(n-1)(a+n-2)}{U_n + iV_n} \longrightarrow \begin{cases} X_{n-1} = \dfrac{(n-1)(a+n-2)}{U_n^2 + V_n^2} \cdot U_n \\ Y_{n-1} = - \dfrac{(n-1)(a+n-2)}{U_n^2 + V_n^2} \cdot V_n \end{cases}$$

$k = n-1,\ n-2, \ldots\ldots\ldots,\ 1$

$$P_n(a,ix) = \frac{ix}{Q_1} \longrightarrow \begin{cases} A_n(P) = \dfrac{x\ V_1}{U_1^2 + V_1^2} \\ B_n(P) = \dfrac{x\ U_1}{U_1^2 + V_1^2} \end{cases}$$

16. - CALCUL DE $C_i(x)$ et $S_i(x)$. -

On définit le cosinus intégral et le sinus intégral par les formules :

$$C_i(x) = \int_{\infty}^{x} \frac{\cos t}{t}\, dt$$

$$S_i(x) = \int_{0}^{x} \frac{\sin t}{t}\, dt$$

Pour le sinus intégral, on définit également $\mathcal{S}_i(x) = \displaystyle\int_{\infty}^{x} \frac{\sin t}{t}\, dt$

et on a : $\mathcal{S}_i(x) = + S_i(x) - \dfrac{\pi}{2}$

En fonction de $\Gamma(1-a,\ ix)$ on a :

$$C_i(x) + i\,\mathcal{S}_i(x) = - \Gamma(0,\ ix)$$

16.1. - Formules.

D'où

$$\begin{cases} C_i(x) = \dfrac{\sin x}{x} A_n(F) - \dfrac{\cos x}{x} B_n(F) \\[2ex] S_i(x) = \dfrac{\pi}{2} - \left(\dfrac{\cos x}{x} A_n(F) + \dfrac{\sin x}{x} B_n(F) \right) \end{cases}$$

$C_i(x)$ et $S_i(x)$ ont été calculés au moyen de $I_n(a, ix)$ et de $\bar{P}_n(a,ix)$ en se référant à la table N.B.S., AMS 32 (1954) "Table of Sine and Cosine Integrals for Arguments from 10 to 100". En effet, les auteurs de cette table ont utilisé, pour $x > 30$, les développements asymptotiques de $C_i(x)$ et $S_i(x)$:

$$S_i(x) = \frac{\pi}{2} - M(x) \cos x - N(x) \sin x$$

$$C_i(x) = M(x) \sin x - N(x) \cos x$$

avec $$M(x) = \frac{1}{x} - \frac{2!}{x^3} + \frac{4!}{x^5} - \frac{6!}{x^7} + \ldots\ldots\ldots$$

$$N(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{3!}{x^4} + \frac{5!}{x^6} - \frac{7!}{x^8} + \ldots\ldots\ldots$$

Pour $x < 30$, ce développement asymptotique n'est pas suffisant pour la précision. Pour $x = 30$, il faut 15 termes pour obtenir les 13 décimales voulues ; 5 termes sont suffisants pour $x = 100$.

16.2. - Résultats numériques.

Nous avons calculé $C_i(x)$ et $S_i(x)$ par $P_n(ix)$ et $I_n(ix)$ pour les valeurs de x :

$x = 10$; $x = 20$; $x = 30$; $x = 40$; $x = 50$;
$x = 80$; $x = 100$,

et pour $x = 97{,}399\,634\,5$
$x = 97{,}399\,634\,6$ qui donne une racine de $C_i(x)$

Les tableaux suivants consignent les résultats.

$C_i(x)$ par I_n	$C_i(x)$ par P_n	$\lvert\varepsilon(I_n)\rvert$	$\lvert\varepsilon(P_n)\rvert$	n	$S_i(x)$ par I_n	$S_i(x)$ par P_n	$\lvert\varepsilon(I_n)\rvert$	$\lvert\varepsilon(P_n)\rvert$
x = 10 $C_i(10) = -0,045\ 456\ 433\ 0$					x = 10 $S_i(10) = 1,658\ 347\ 59$			
-0,045 460 609 4	-0,045 473 192 1	$4,176\ 4.10^{-6}$	$16,759\ 1.10^{-6}$	2	1,658 354 11	1,658 322 65	$6,52.10^{-6}$	$24,94.10^{-6}$
-0,045 456 717 7	-0,045 454 567 9	$2,847\ .10^{-7}$	$18,651\ .10^{-7}$	3	1,658 347 08	1,658 347 62	$5,1\ .10^{-7}$	$3\ .10^{-8}$
-0,045 456 372 8	-0,045 456 502 3	$6,02\ .10^{-8}$	$6,93\ .10^{-8}$	4	1,658 347 58	1,658 347 75	$1\ .10^{-8}$	$1,6\ .10^{-7}$
-0,045 456 432 6	-0,045 456 449 7	$4\ .10^{-10}$	$1,67\ .10^{-8}$	5	1,658 347 60	1,658 347 58	$1\ .10^{-8}$	$1\ .10^{-8}$
-0,045 456 434 1	-0,045 456 431 3	$1,1\ .10^{-9}$	$1,7\ .10^{-9}$	6	1,658 347 59	1,658 347 59	$0\ .10^{-8}$	$0\ .10^{-8}$
-0,045 456 432 8	-0,045 456 433 0	$2\ .10^{-10}$	$0\ .10^{-10}$	7	id.	id.	id.	id.
-0,045 456 432 7	-0,045 456 433 4	$3\ .10^{-10}$	$4\ .10^{-10}$	8	id.	id.	id.	id.
id.	id.	id.	id.	9	id.	id.	id.	id.
x = 20 $C_i(20) = 0,044\ 419\ 820\ 8$					x = 20 $S_i(20) = 1,548\ 241\ 70$			
0,044 419 978 4	0,044 419 248 1	$1,576\ .10^{-7}$	$5,727\ .10^{-7}$	2	1,548 241 76	1,548 242 7	$6\ .10^{-8}$	$1\ .10^{-6}$
0,044 419 816 9	0,044 198 202	$3,9\ .10^{-9}$	$6\ .10^{-10}$	3	1,548 241 71	1,548 241 69	$1\ .10^{-8}$	$1\ .10^{-8}$
0,044 419 821 1	0,044 198 214	$3\ .10^{-10}$	$6\ .10^{-10}$	4	1,548 241 71	1,548 241 71	$1\ .10^{-8}$	$1\ .10^{-8}$
0,044 419 821 1	0,044 198 208	$3\ .10^{-10}$	$0\ .10^{-10}$	5	id.	id.	id.	id.
x = 30 $C_i(30) = -0,033\ 032\ 417\ 3$					x = 30 $S_i(30) = 1,566\ 756\ 54$			
-0,033 032 423 9	-0,033 032 264 7	$6,6\ .10^{-9}$	$152,6\ .10^{-9}$	2	1,566 756 53	1,566 756 51	$1\ .10^{-8}$	$3\ .10^{-8}$
-0,033 032 417 3	-0,033 032 418 3	$0\ .10^{-10}$	$1\ .10^{-9}$	3	1,566 756 55	1,566 756 55	$1\ .10^{-8}$	$1\ .10^{-8}$
-0,033 032 417 2	-0,033 032 417 1	$1\ .10^{-10}$	$1\ .10^{-10}$	4	1,566 756 55	1,566 756 55	$1\ .10^{-8}$	$1\ .10^{-8}$

$C_i(x)$ par I_n	$C_i(x)$ par P_n	$\lvert\varepsilon(I_n)\rvert$	$\lvert\varepsilon(P_n)\rvert$	n	$S_i(x)$ par I_n	$S_i(x)$ par P_n	$\lvert\varepsilon(I_n)\rvert$	$\lvert\varepsilon(P_n)\rvert$
x = 40	$C_i(40)$ = 0,019 020 007 9				x = 40	$S_i(40)$ = 1,586 985 12		
0,019 020 007 0	0,019 019 972 7	$9 .10^{-10}$	$352 .10^{-10}$	2	1,586 985 12	1,586 985 10	0.10^{-8}	2.10^{-8}
0,019 020 007 8	0,019 020 008 0	$1 .10^{-10}$	$1 .10^{-10}$	3	1,586 985 12	1,586 985 12	0.10^{-8}	0.10^{-8}
0,019 020 007 8	0,019 020 007 7	$1 .10^{-10}$	$2 .10^{-10}$	4	id.	id.	id.	id.
0,019 020 007 8	0,019 020 007 8	$1 .10^{-10}$	$1 .10^{-10}$	5	id.	id.	id.	id.
id.	id.	id.	id.	6	id.	id.	id.	id.
x = 50	$C_i(50)$ = -0,005 628 386 3				x = 50	$S_i(50)$ = 1,551 617 07		
-0,005 628 385 62	-0,005 628 379 92	$6,8.10^{-10}$	$63,8.10^{-10}$	2	1,551 617 08	1,551 617 09	1.10^{-8}	2.10^{-8}
-0,005 628 386 25	-0,005 628 386 27	$5 .10^{-11}$	$3 .10^{-11}$	3	1,551 617 08	1,551 617 08	1.10^{-8}	1.10^{-8}
-0,005 628 386 25	-0,005 628 386 23	$5 .10^{-11}$	$7 .10^{-11}$	4	id.	id.	id.	id.
x = 80	$C_i(80)$ = -0,012 402 501 2				x = 80	$S_i(80)$ = 1,572 330 88		
-0,012 402 501 2	-0,012 402 499 9	$0 .10^{-10}$	$13 .10^{-10}$	2	1,572 330 89	1,572 330 88	1.10^{-8}	0.10^{-8}
-0,012 402 501 2	-0,012 402 501 1	$0 .10^{-10}$	$1 .10^{-10}$	3	1,572 330 89	1,572 330 89	1.10^{-8}	1.10^{-8}
x = 100	$C_i(100)$= -0,005 148 825 1				x = 100	$S_i(100)$= 1,562 225 47		
-0,005 148 825 06	-0,005 148 824 86	$0 .10^{-10}$	$2,4.10^{-10}$	2	1,562 225 48	1,562 225 48	1.10^{-8}	1.10^{-8}
-0,005 148 825 07	-0,005 148 825 11	$0 .10^{-10}$	$0 .10^{-10}$	3	1,562 225 48	1,562 225 47	1.10^{-8}	0.10^{-8}
id.	id.	id.	id.	4	id.	id.	id.	id.

Pour $x = 97{,}399\ 634\ \underline{\underline{5}}$, on obtient comme valeurs de $C_i(x)$:

avec	$n = 2$:	$5{,}52\ 10^{-10}$	$5{,}11\ 10^{-10}$
	$n = 3$:	$5{,}66\ 10^{-10}$	$5{,}68\ 10^{-10}$

A partir de $n = 3$, la valeur ne se modifie plus.

$x = 97{,}399\ 634\ \underline{\underline{6}}$, on obtient pour $C_i(x)$

avec	$n = 2$	$-4{,}75\ 10^{-10}$	$-5{,}16\ 10^{-10}$
	$n = 3$	$-4{,}61\ 10^{-10}$	$-4{,}59\ 10^{-10}$
	$n = 4$	$-4{,}62\ 10^{-10}$	$-4{,}59\ 10^{-10}$

à partir de $n = 4$, il n'y a plus de modifications pour $C_i(x)$.

Les tableaux donnant la valeur de n nécessaire pour obtenir $C_i(I_n)$; $C_i(P_n)$; $S_i(I_n)$ et $S_i(P_n)$ montrent la convergence du développement en fraction continue de $C_i(x)$ et de $S_i(x)$. On obtient une moins bonne précision pour $C_i(x)$ car on doit faire la différence de deux membres petits, alors que pour $S_i(x)$ on les ajoute.

Si on compare ces résultats à ceux de la table citée, on voit que pour tout l'intervalle de la table, c'est-à-dire $10 \leq x \leq 100$, avec le développement en fraction continue il suffit de prendre :

$$\begin{cases} \text{au maximum} \quad n = 10 \quad (I_n \text{ ou } P_n) \\ \text{au minimum} \quad n = 3 \quad (I_n \text{ ou } P_n) \end{cases}$$

Il y a une différence entre ce développement en fraction continue (c'est-à-dire pour une valeur complexe) et les précédents : en effet pour $I_n(ix)$ et $P_n(ix)$ on n'obtient pas de bornes supérieures et inférieures de la fonction : $I_n(ix)$ et $P_n(ix)$ oscillent autour de la valeur de la fonction ; ce sont des oscillations dont l'amplitude décroît rapidement. Mais, à part quelques rares exceptions $I_n(ix)$ et $P_n(ix)$ sont toujours de part et d'autre de la fonction.

16.3. - Comparaison avec les séries.

$C_i(x)$ et $S_i(x)$ se développent au voisinage de l'origine par les séries :

$$S_i(x) = \frac{x}{1!\ 1} - \frac{x^3}{3!\ 3} + \frac{x^5}{5!\ 5} + \ldots\ldots.$$

$$C_i(x) = \gamma + \mathrm{Log}_e(x) - \frac{x^2}{2!\ 2} + \frac{x^4}{4!\ 4} \quad \ldots\ldots. \qquad (\gamma = \text{constante d'Euler})$$

Nous avons comparé le développement de $S_i(x)$ aux fractions continues pour les valeurs :

$x = 2$; $x = 3,142$; $x = 8$; $x = 10$; $x = 20$

Le nombre d'opérations Mult.Div pour n termes par la série est $3n-2$ pour avoir $S_i(x)$: $6n-4$ pour $S_i(x)$ et $C_i(x)$.

Pour les fractions continues, chaque terme coûte 6 Mult.Div; d'où au total : $6n+3$ Mult.Div pour avoir A_n et B_n,

c'est-à-dire $6n+7$ pour avoir $S_i(x)$ et $C_i(x)$ plus le calcul de sinx et cos x.

A partir de $n \geq 4$, il est plus intéressant d'utiliser $I_n(x)$ ou $P_n(x)$ si on veut à la fois $S_i(x)$ et $C_i(x)$, lorsque le nombre de chiffres exacts donnés est le même.

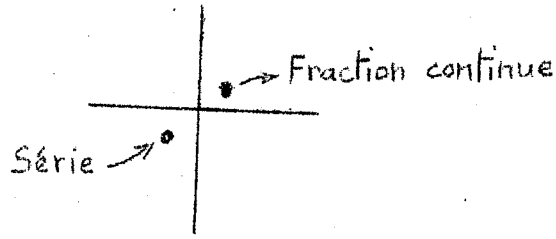
Pour $x \leq 3,142$, le développement en série est plus intéressant que les fractions continues.

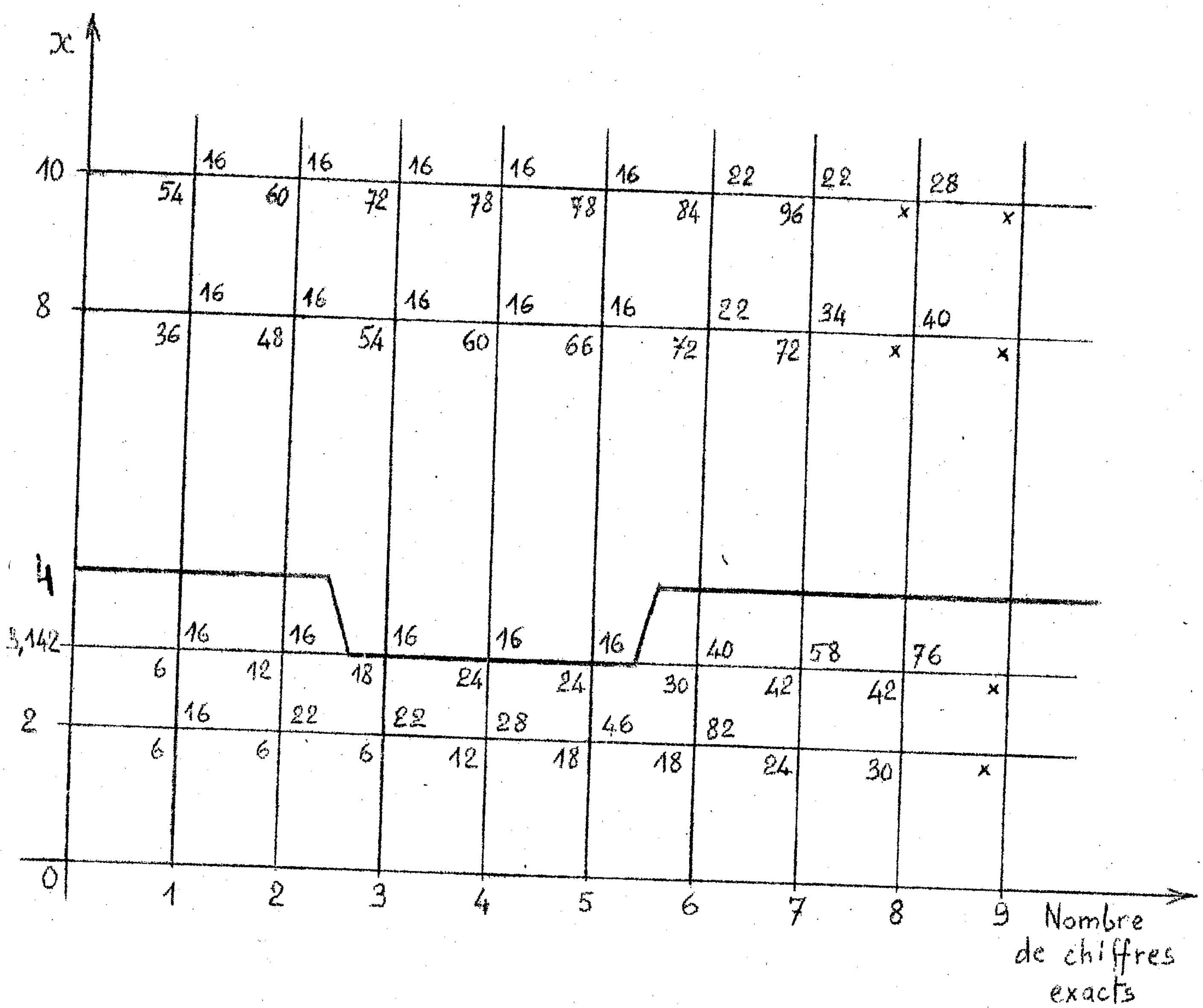
Pour $x = 10$, on obtient au maximum 7 chiffres par la série avec 17 termes,

et avec $x = 20$, 2 chiffres avec 24 termes

alors que par les fractions, il suffit de $n = 4$ pour avoir 8 chiffres à $x = 10$.

On va quadriller le plan pour obtenir les zones minimales : à chaque noeud on porte le nombre d'opérations nécessaires pour obtenir $S_i(x)$ et $C_i(x)$ par la série ou par les fractions continues.





Zones minimales pour Si(x) et Ci(x)

17. - CALCUL DES INTEGRALES DE FRESNEL. -

17.1. Définitions.

On définit les intégrales de Fresnel par :

$$\begin{cases} C(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_0^x \dfrac{\cos t}{\sqrt{t}}\, dt \\[2em] S(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_0^x \dfrac{\sin t}{\sqrt{t}}\, dt \end{cases}$$

On emploie également les notations :

$$\begin{cases} S_o(x) = \displaystyle\int_0^x \sin \dfrac{\pi}{2}\, t^2\, dt \\[1em] C_o(x) = \displaystyle\int_0^x \cos \dfrac{\pi}{2}\, t^2\, dt \end{cases}$$

On peut passer d'une notation à l'autre par :

$$S_o(x) = S\left(\frac{\pi}{2}\, x^2\right) \quad \text{ou} \quad S(x) = S_o\left(\sqrt{\frac{2\,x}{\pi}}\right)$$

$$C_o(x) = C\left(\frac{\pi}{2}\, x^2\right) \quad \text{ou} \quad C(x) = C_o\left(\sqrt{\frac{2x}{\pi}}\right)$$

Les intégrales de Fresnel sont reliées aux fonctions de Bessel $J_{-1/2}$ et $J_{1/2}$:

$$\begin{cases} S_o(x) = \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_0^x J_{1/2}(t)\, dt \\[2em] C_o(x) = \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_0^x J_{-1/2}(t)\, dt \end{cases}$$

17.2. Développement en fraction continue des intégrales de Fresnel.

En partant de la relation

$$\gamma\,(\nu, ix) = (ix)^{\nu}\,\left(\frac{2\pi}{x}\right)^{1/2}\left[C(x) - i\,S(x)\right]$$

où $\gamma(\nu, ix) = \Gamma(\nu) - \Gamma(\nu, ix)$

on obtient pour $S(x)$ et $C(x)$ un développement en fraction continue. Il se déduit de celui de $\Gamma(1-a,\ ix)$ avec $a = +\frac{1}{2}$.

On obtient :

$$\left\{\begin{aligned} C(x) &= \frac{1}{2} + \frac{\sin x}{\sqrt{2\pi x}}\cdot A_n\left[F_{1/2}(ix)\right] - \frac{\cos x}{\sqrt{2\pi x}}\,B_n\left[F_{1/2}(ix)\right] \\ S(x) &= \frac{1}{2} - \frac{\sin x}{\sqrt{2\pi x}}\,B_n\left[F_{1/2}(ix)\right] - \frac{\cos x}{\sqrt{2\pi x}}\,A_n\left[F_{1/2}(ix)\right] \end{aligned}\right.$$

17.3. - Résultats numériques.

Nous avons calculé les valeurs de $C(x)$ et $S(x)$ au moyen des développements en fraction continue $P_n(\frac{1}{2}, ix)$ et $I_n(\frac{1}{2}, ix)$, pour les valeurs de x :

$x = 5$; $x = 10$; $x = 20$; $x = 30$

$x = 50$; $x = 80$; $x = 100$

Nous avons comparé les résultats et la méthode de calcul, avec la table de A. VAN WIJNGAARDEN and W.L. SCHEEN [76].

Les auteurs calculent $C_o(x)$ et $S_o(x)$ pour $0{,}01 \leq x \leq 20$ en donnant 5 décimales. Leur méthode est celle-ci :

$0 < x \leq 2,5$	$C_o(x)$ et $S_o(x)$ sont calculés au moyen du développement en série de Taylor autour de l'origine.
$2,5 \leq x \leq 12$	$C_o(x)$ et $S_o(x)$ sont calculés grâce au développement asymptotique (avec des coefficients modifiés)
$0 < x < 12$	sous tabulation en intégrant $\cos \frac{\pi}{2} t^2$ et $\sin \frac{\pi}{2} t^2$ (avec 5 décimales)
$12 < x < 20$	calcul au moyen du développement asymptotique et vérification par duplication totale du calcul

Or, lorsque l'on calcule $C_o(x)$ pour $x = 12$, on calcule $C(72.\pi)$

$C_o(x)$ pour $x = 20$, " " $C(200\pi)$

$C_o(x)$ pour $x = 2,5$ " " $C(3,125.\pi)$

Nous verrons que $C(x)$ et $S(x)$ convergent très vite : aussi vite que $C_i(x)$ et $S_i(x)$ et, comme à des valeurs de x pour $C_o(x)$ correspondent des valeurs $\frac{\pi}{2} x^2$ pour $C(x)$, la convergence sera encore plus rapide pour $x > 1$.

C(x) par I_n	C(x) par P_n	n	S(x) par I_n	S(x) par P_n
$x = 5$	$C(5)$ ou $C_o\left(\sqrt{\frac{10}{\pi}}\right)$		$x = 5$	$S(5)$ ou $S_o\left(\sqrt{\frac{10}{\pi}}\right)$
0,328 384 453 1	0,328 058 92	2	0,465 976 154	0,465 717 130
0,328 451 822	0,328 849 70	3	0,465 929 747	0,465 953 274
0,328 458 876	0,328 454 680	4	0,465 940 248	0,465 946 722
0,328 457 051	0,328 455 405	5	0,465 941 946	0,465 941 291
0,328 456 551	0,328 456 583	6	0,465 941 648	0,465 941 183
0,328 456 576	0,328 456 706	7	0,465 941 496	0,465 941 451
0,328 456 618	0,328 456 651	8	0,465 941 483	0,465 941 513
0,328 456 629	0,328 456 626	9	0,465 941 492	0,465 941 507
28	25	10	97	499
27	26	11	98	97
26	27	12	97	97
26	26	13	97	97
$x = 10$	$C(10)$ ou $C_o\left(\sqrt{\frac{20}{\pi}}\right)$		$x = 10$	$S(10)$ ou $S_o\left(\sqrt{\frac{20}{\pi}}\right)$
0,436 961 651	0,436 958 349	2	0,608 438 627	0,608 422 128
3 897	627 443	3	6 037	36 493
3 976	63 906	4	6 261	312
53	48	5	61	254
id.	54	6	58	259
id.	53	7	59	259
$x = 20$	$C(20)$ ou $C_o\left(\sqrt{\frac{40}{\pi}}\right)$		$x = 20$	$S(20)$ ou $S_o\left(\sqrt{\frac{40}{\pi}}\right)$
0,580 389 059	0,580 388 503	2	0,461 645 816	0,461 646 407
8 970	974	3	780	5 766
8 972	2	4	id.	80
$x = 30$	$C(30)$ ou $C_o\left(\sqrt{\frac{60}{\pi}}\right)$		$x = 30$	$S(30)$ ou $S_o\left(\sqrt{\frac{60}{\pi}}\right)$
0,427 908 088	0,427 908 220	2	0,489 968 620	0,489 968 605
91	091	3	30	30
$x = 50$	$C(50)$ ou $C_o\left(\sqrt{\frac{100}{\pi}}\right)$		$x = 50$	$S(50)$ ou $S_o\left(\sqrt{\frac{100}{\pi}}\right)$
0,484 657 899	0,484 657 904	2	0,445 721 706	0,445 721 719
8	898	3	7	07
$x = 80$	$C(80)$ ou $C_o\left(\sqrt{\frac{160}{\pi}}\right)$		$x = 80$	$S(80)$ ou $S_o\left(\sqrt{\frac{160}{\pi}}\right)$
0,455 705 425	0,455 705 427	2	0,505 199 940	0,505 199 940
	5	3		
$x = 100$	$C(100)$ ou $C_o\left(\sqrt{\frac{200}{\pi}}\right)$		$x = 100$	$S(100)$ ou $S_o\left(\sqrt{\frac{200}{\pi}}\right)$
0,479 628 505	0,479 628 505	2	0,465 702 00	0,465 702 00

17.4. - Comparaison avec les séries.

En posant $R(x) = 1 - \dfrac{1.3}{(2x)^2} + \dfrac{1.3.5.7}{(2x)^4} \ldots\ldots\ldots$

$$T(x) = \frac{1}{2x} - \frac{1.3.5}{(2x)^3} + \ldots\ldots$$

les développements asymptotiques de C(x) et S(x) s'écrivent :

$$\left\{ \begin{aligned} C(x) &= \frac{1}{2} + \frac{\sin x}{\sqrt{2\pi x}} R(x) - \frac{\cos x}{\sqrt{2\pi x}} T(x) \\ S(x) &= \frac{1}{2} - \frac{\cos x}{\sqrt{2\pi x}} R(x) - \frac{\sin x}{\sqrt{2\pi x}} T(x) \end{aligned} \right.$$

Le développement asymptotique donne des résultats moins intéressants que la fraction continue : dans la zone où on l'emploie elle doit lui être préférée.

Il est intéressant de comparer la fraction continue et le développement en série au voisinage de l'origine : par le quadrillage du plan et la recherche des zones minimales, on obtient une limite respective des deux méthodes, compte-tenu de la valeur de x et du nombre de chiffres exacts que l'on veut :

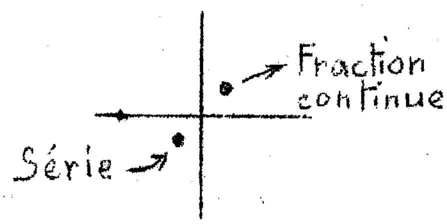
Pour C(x) et S(x), les séries s'écrivent :

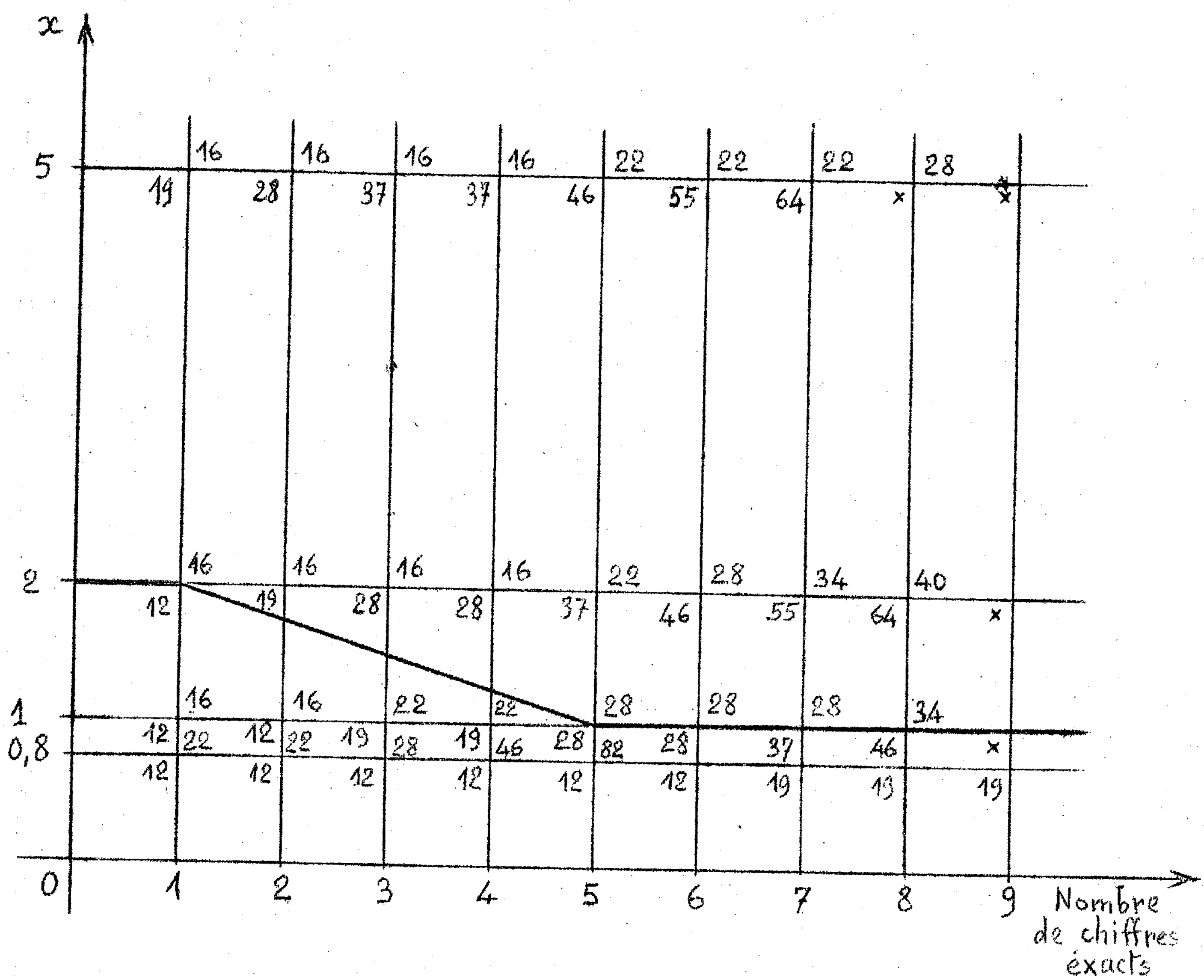
$$\left\{ \begin{aligned} C(x) &= \sqrt{\frac{2x}{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(4k+1).(2k)!} \\ S(x) &= \sqrt{\frac{2x}{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(4k+3).(2k+1)!} \end{aligned} \right.$$

Lorsque l'on calcule à la fois C(x) et S(x) il faut pour chaque terme de plus : 9 Mult.Div. Au total pour le $n^{ème}$ terme il faut $\underline{9n-5}$ Mult. Div

Par les fractions continues, chaque terme coûte 6 Mult.Div, d'où au total, pour avoir C(x) et S(x))à la fois : 6n+7 Mult.Div

D'où les zones minimales pour C(x) et S(x)





Zones minimales pour C(x) et S(x)

BIBLIOGRAPHIE

-:-:-

Dans le livre de H.S. WALL [59] , on trouvera une bibliographie très complète sur les fractions continues jusqu'à 1948. Nous donnons ici les articles ou livres antérieurs à 1948 n'y figurant pas.

Pour les ouvrages postérieurs à 1948, nous ne donnons que ceux intéressant notre sujet.

-:-:-

AROIAN L.A.

[1] "Continued Fractions for the Incomplete Beta Function" Annales Math. Stat. V.12, 1941, p.218-33

BARAKAT R.

[2] "Evaluation of the Incomplete Gamma Function of Imaginary Argument by Chebyshev Polynomials" Mathematics of Computation 1961. V.15, N° 73, P. 76-11

BATEMAN H. ERDELYI A.

[3] "Higher Transcendental Functions", tomes 1-2-3 Mac Graw Hill Book Company, Inc, 1955

BAUER F.L.

[4] "The Quotient-Difference and Epsilon Algorithms" The University of Wisconsin Press, 430 Sterling Court, Madison 6, Wisconsin, 1959

BAUER F.L.

[5] "The G. Algorithm" Math. Inst. T.H. MUNCHEN, 5 Mars 1958

BEAM A.

[6] "Complex Exponential Integral" Comm. A.C.M.,3,July 1960 ; 406 (programme en Algol de $W(z,k) = z^k e^z \int_z^\infty e^{-t} t^{-k} dt$ à partir d'un développement en fraction continue trouvé dans H.S. WALL, ch. 18).

BOERS M.A.

[7] "Computation of Fresnel Integrals"
Mathematics of Computation, 1960, vol.14, N° 72, p.380

BURGESS J.

[8] "On the definite integral $\frac{1}{\pi}\int_0^t e^{-t^2}\,dt$ with extended tables of values"
Roy. Soc. of Edim. Trans. V.39, part II, 1898, p.257-321

CARLSON, GOLDSTEIN

[9] "Maximal Rationnal Approximation of functions"
U.S. Atomic Energy Commission; LOS ALAMOS 1955

CAUCHY A.L.

[10] "Calcul des indices des fonctions"
Journal de l'Ecole Polytechnique, Paris, vol.15 (1837) p.176-229

DAWSON, DAVID F.

[11] "Concerning convergence of continued fractions"
Proc. Amer. Math. Soc. 11 (1960) p.640-47

DURAND E.

[12] "Solutions numériques des équations algébriques"
Masson, 1960, Vol. 1, p. 20-30 ; 77 ; 91

FLOYD R.W.

[13] "Rational Interpolation by continued Fractions"
Comm. A.C.M. sept 1960; p. 508, N° 18

FRAME J.S.

[14] "The solution of equation by continued fractions"
The American Mathematical Monthly, vol. 60, p.293-305, 1953

FRANK E.

[15] "Continued Fractions"
A technical report prepared under the Sponsorship of the office of Naval Research, U.S. Navy
Numerical Analysis Research, University of California
LOS ANGELES 24, 1957

FRANK E.

[16] " A new class of continued fractions expansions for the ratios of Hypergeometric functions"
Trans. Amer. Math. Soc., Vol.81 (1956) p.453-476

FRANK E.

[17] "The location of zeros of Polynomials with complex coefficients"
Bul. Amer. Math. Soc., vol.52 (1946) p.890-98

FRANK E.

[18] "Orthogonality properties of C.-fractions"
Bull. Amer. Math. Soc. Vol.55, 1949, p. 384-90

FRANK E.

[19] "A new class of Continued Fractions expansions for the Ratios of Heine functions"
Trans. Amer. Math. Soc, part I, vol.88, p.288-300, 1958
part II, vol.95, p.17-26, 1960
part III, vol.96, p.312-321, 1960

HARDY G.H.

[20] "Divergent series"
Oxford, 1956

HELLER R. (Jr)

[21] "Some convergence theorems for Continued Fractions"
Dissert. Abstr. U.S.A. 19, N° 9, 2353, Res. Thèse, 1959
ou Proc. AMer. Math. Soc. 11 (1960), p.805-811

HILDEBRANT F.B.

[22] "Introduction to Numerical Analysis"
Mac Graw Hill Book Company, inc. 1956, p.395-412

HUMBERT G.

[23] "Sur la méthode d'approximation d'Hermitte" (1)
"Sur les fractions continues ordinaires et les formes quadratiques binaires indéfinies" (2)

"Remarques sur certaines suites d'approximation" (3)
Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, Paris
7ème série, tome 2ème, 1916
(1) p. 79-103 ; (2) p.104-154 ; (3) p.155-167

JAGER H.

[24] "A note on the Kontinued Fractions of Gauss"
Nederl.Akad.Netensch.Proc.Ser.A.63
Indag. Math. 22, p.181-186, 1960

KARST E.

[25] "On approximating Transcendental Numbers by continued Fractions"
Comm. A.C.M. April 1961, p.171

KHOWANSKI A.N.

[26] "Applications of Continued fractions and tneir generation to problems of approximation analysis"
Moskow 1956
(Bibliography on Soviet Computer litterature collected on Trip to Soviet Union, August-September 1958, J.W. CARR III).

KOGBETLIANTZ E.G.

[27] "Computation of e^N for $-\infty < N < +\infty$ using an Electronic Digital Computer"
I.B.M. Journal Research and Devel. Vol. 1 N° 2, april 1957

KOGBETLIANTZ E.G.

[28] "Computation of Arc sin N for $0 < N < 1$ using an Electronic Computer"
I.B.M. Journal Research and Devel., vol. 2, N° 3, July 1958

KOGBETLIANTZ E.G.

[29] "Generation of elementary functions"
édité par A. RALSTON et H.S. NILF dans "Mathematical methods for digital computers"
John Wiley and Sons, inc, 1960

KOGBETLIANTZ E.G.

[30] "Computation of Sin N, cos N and $\sqrt[m]{N}$, using an electronic computer"
I.B.M. Journal Research and Devel., vol 3, N° 2, april 1959

KOGBETLIANTZ E.G.

[31] "Conférences à la compagnie I.B.M. France"
polycopié I.B.M. France, septembre 1956

KOGBETLIANTZ E.G.

[32] "Computation of Arctan N for $-\infty < N < +\infty$ using an Electronic Computer"
I.B.M. Journal Research and Devel., vol 2, N° 1 jan. 1958

KOPAL ZDENEK

[33] "Operational Methods in numerical Analysis based on Rational Approximations"
édité par Langer R.E. dans "ON Numerical Approximation"
The University of Wisconsin Press, 1959

KUIPERS L., MEULENBELD B.

[34] "On a certain classification of the convergents of a continued fraction"
Niew. Arch. Wiskunde (3), 1 (199-211) 1953

KUNTZMANN J.

[35] "Méthodes numériques ; Interpolation ; Dérivées"
Dunod, Paris, 1958, p.238-242

LANGER R.E.

[36] "On numerical Approximation proceeding of a symposium conducted by the Mathematics Research center, United States Army, at the University of Wisconsin, Madison"
The University of Wisconsin Press, 430 Sterling Court, Madison 6, Wisconsin, 1959

MAC LACHLAN N.W.

[37] "Theory and application of Mathieu Functions"
The Clarendon Press, Oxford, 1947, p.28-34 et 107

MACOM N.

[38] "On the computations of exponential and hyperbolic Functions using continued fractions"
J. of Assoc. for Computing Machinery, vol. 2, oct. 1955, N° 4, p. 262

MACOM N., BASKERVILL M.

[39] "On the generation of errors in the Digital Evaluation of continued Fractions"
A.C.M. N° 3, 1956

MAEHLY H.J.

[40] "Methods for fitting Approximations, part I, telescoping procedures for continued fractions"
Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1960

MAEHLY H.J.

[41] "Rational Approximations for transcendental functions"
dans "Information Processing" I.F. p.57,
U.N.E.S.C.O. Paris, 1959

MAEHLY H.J.

[42] "First Interim progress report on rational Approximation"
Princeton University, Technical Report, june 1958

MILNE W.E.

[43] "Numerical calculus"
Princeton University Press, 1949
John Wiley à New York, 1953
p.229-240

MUIR T.

[44] "New general Formulae for the transformation of infinite series into continued fractions"
P. Soc. Edim., Trans. V.27, 1872-76, p.467

MULLER J.H.

[45] "On the Application of continued Fractions to the Evaluations of certain integrals with specific reference to the incomplete Beta function"
Biometrika, N° 22-21, 1920

MURLAN S. CORRINGTON

[46] "Application of the Complex Exponential integral"
Mathematics of Computation, 1961, vol.15, N° 73, p.1-6

OPPENHEIM A.

[47] "A note on continued fractions "
Canad. J. MATH 12, p. 303-308, 1960

PERLIN I.E., GARRETT J.R.

[48] "High Precision calculation of Arc sin x, Arc cos x, and Arc tan x"
Math. Comput. 14, N° 71, p.270-4, 1960

PERRON O.

[49] "Die Lehre von den Kettenbrüchen"
Teubner Stuttgart vol. 1, 1954
vol. 2, 1957

RALSTON A. et WILF H.S.

[50] "Mathematical methods for digital Computers"
John Wiley and Sons. 1960

RICHARDS Paul

[51] "Manual of Mathematical Physics"
Pergamon press, London, New-York, Paris, 1959
p.351-2

SHANKS D.

[52] "An analogy between transients and Mathematical sequences and some nonlinear sequences to sequences Transforms suggested by it"
Naval Ordnance Laboratory Memorendum 9994,
White OAK 1949

SHANKS D.

[53] "Nonlinear transformations of divergent and slowly convergent sequences"
J. Math. Phys. Vol.34, p. 1-42 , 1955

SHENTON L.R.

[54] "The continued fraction for F(a,1,c;t)"
Math. Gaz. 38-39-40, 1954

SPIELBERG KURT

[55] "Polynomial and Continued Fractions. Approximations for Logarithmic functions"
Mathematics of Computation, april 1962, vol.16, n° 78
p.205-217

STIELTJES T.J.

[56] "Recherches sur les fractions continues"
Mémoire présenté par divers savants à l'Académie des Sciences, tome 32, 2ème série, N° 2, p.1-197
Imprimerie Nationale, Paris , 1902

TEICHROEW D.

[57] "Use of continued Fractions in high speed computing"
Math. Tables Aids. Computation, Vol 6, 1952, p.127-133

VERNOTTE P.

[58] "Nouvelles recherches sur la sommation pratique des séries divergentes. Aperçus théoriques nouveaux."
Publications scientifiques du Ministère de l'Air, Paris, N° 238, 1950 , p. 87-94, 139-142 ; 253

WALL H.S.

[59] "Continued Fractions"
Van Nostrand, N.Y., 1948

WATSON G.N.

[60] "A treatise on the theory of Bessel functions"
Cambridge University Press, 2ème édition, 1958
p. 153, parag. 5-6

WATSON G.N.

[61] " A theorem on continued Fractions"
Proc. Edimburgh Math. Soc. 11, p.167-174, 1958-59

WYNN P.

[62] "Converging factors for continued fractions"
Part I and II,
Numerische Mathematik, 1 band 5, 1959
part I, p. 272-307, part II : p. 308-320

WYNN P.

[63] "The Rational approximation of functions which are formally defined by a power series expansion"
Mathematics of Computation, vol. 14, N° 70, p.147, april 1960

WYNN P.

[64] "On the propagation of Error in certain non-linear Algorithms"
Numerische Mathematik, 1, 142, 1959

WYNN P.

[65] "On a Procrustean Technique for the numerical Transformation of slowly convergent sequences and series"
Proc. Cambridge, Mhil. Soc., vol.52, part 4, p.663-671
1956

WYNN P.

[66] "The Epsilon Algorithm and Operational formulae of Numerical Analysis"
Math. of Computation, vol. XV, No 74, p.151, 1961

WYNN P.

[67] "On repeated Application of the ε-Algorithm"
Chiffres, 4ème année, N° 1, 1961

WYNN P.

[68] "A comparison between the numerical performance of the Euler transformation and the Epsilon algorithm"
Chiffres, 4ème année, N° 1, 1961

WYNN P.

[69] "On a device for computing the ε_m (S_m) Transformation"
M.T.A.C. vol. 10, p.91-96, 1956

T A B L E S

ACADEMIE NAUK C.C.C.P.

[70] "Table d'intégrales de Fresnel" (en russe)
Moskow, 1953

FLUGGE

[71] "4 places tables of transcendental functions"
Pergamon Press, L.td, London, 1954

JAHNKE-EMDE-LØSCH

[72] "Tâbles of higher functions"
6ème édition, 1960, B.G. Teubner, Verlagsgesellschaft, Stuttgart

N.B.S.

[73] "Tables of sine, cosine and exponential integral"
New York, 1940, tome 1, C. 5
tome 2, MT 6

N.B.S. AMS 32

[74] "Table of sine and cosine integrals for arguments from 10 to 100"
1954

N.B.S. AMS 37

[75] "Tables of functions and of zeros of functions"
1954

VAN WIJNGAARDEN A. et SCHEEN (W.L.)

[76] "Table of Resnel integrals"
(Report R 49 of the computation department of the Mathematical centre at Amsterdam)
Kon.Ned.Ak.Wet.Afd.Nat.(eerste sectie) DI XIX,N 4
p.1-26, 1949
N.V Noord, Hollandsche Ultegevers Maatschappij,
Amsterdam

-:-:-:-

T A B L E   DES   M A T I E R E S

-:-:-

-:-:-:-