



Comparaison des erreurs par pas dans différentes méthodes de résolution d'équations différentielles avec conditions initiales

Etienne Kerekes

► To cite this version:

Etienne Kerekes. Comparaison des erreurs par pas dans différentes méthodes de résolution d'équations différentielles avec conditions initiales. Modélisation et simulation. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1964. Français. NNT: . tel-00278855

HAL Id: tel-00278855

<https://theses.hal.science/tel-00278855>

Submitted on 14 May 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre :

T H E S E

présentée à la Faculté des Sciences de

l'Université de GRENOBLE

pour obtenir

le titre de Docteur de Spécialité

"Mathématiques Appliquées"

par

Etienne KEREKES

Licencié ès-Sciences

COMPARAISON DES ERREURS PAR PAS DANS DIFFÉRENTES MÉTHODES DE RÉSOLUTION
D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES AVEC CONDITIONS INITIALES

= = =

Thèse soutenue le 26 juin 64 devant la Commission d'Examen

MM. KUNTZMANN
HACQUES
CASTINEL

N° d'ordre :

T H E S E

présentée à la Faculté des Sciences de
l'Université de GRENOBLE

pour obtenir

le titre de Docteur de Spécialité
"Mathématiques Appliquées"

par

Etienne KEREKES
Licencié ès-Sciences

COMPARAISON DES ERREURS PAR PAS DANS DIFFÉRENTES METHODES DE RESOLUTION
D'EQUATIONS DIFFERENTIELLES AVEC CONDITIONS INITIALES

= = =

Thèse soutenue le 26 juin 64

devant la Commission d'Examen :

MM. KUNTZMANN
HACQUES
GASTINEL

LISTE DES PROFESSEURS

DOYENS HONORAIRES M. FORTRAT P.
M. MORET L., Membre de l'Institut

DOYEN M. WEIL L.

PROFESSEURS :	MM. WOLFERS F.	PHYSIQUE
	NEEL L.	PHYSIQUE EXPERIMENTALE, Membre de l'Institut
	DORIER A.	ZOOLOGIE
	HEILMANN R.	CHIMIE ORGANIQUE
	KRAVTCHENKO J.	MECANIQUE RATIONNELLE
	CHABAUTY C.	CALCUL DIFFERENTIEL ET INTEGRAL
	PARDE M.	POTAMOLOGIE
	BENOIT J.	RADIOELECTRICITE
	CHENE M.	CHIMIE PAPETIERE
	BESSON J.	ELECTROCHIMIE
	WEIL L.	THERMODYNAMIQUE
	FELICI N.	ELECTROSTATIQUE
	KUNTZMANN J.	MATHEMATIQUES APPLIQUEES
	BARBIER R.	GEOLOGIE APPLIQUEE
	SANTON L.	MECANIQUE DES FLUIDES
	OZENDA P.	BOTANIQUE
	FALLOT M.	PHYSIQUE INDUSTRIELLE
	MOUSSA A.	CHIMIE NUCLEAIRE
	TRAYNARD P.	CHIMIE
	SOUTIF M.	PHYSIQUE
	CRAYA A.	HYDRODYNAMIQUE
	REEB G.	MATHEMATIQUES M.P.C.
	BLAMBERT M.	MATHEMATIQUES
	BONNIER E.	ELECTROCHIMIE
	DESSAUX G.	PHYSIOLOGIE ANIMALE
	PILLET E.	ELECTROTECHNIQUE
	DEBELMAS J.	GEOLOGIE
	VAUQUOIS B.	MATHEMATIQUES APPLIQUEES
	GALVANI O.	MATHEMATIQUES
	REULOS R.	THEORIE DES CHAMPS
	AYANT	PHYSIQUE APPROFONDIE
	GALLISSOT F.	MATHEMATIQUES
Melle	LUTZ E.	MATHEMATIQUES
	BOUCHEZ R.	PHYSIQUE NUCLEAIRE
	LLIBOUTRY L.	GEOPHYSIQUE
	MICHEL R.	GEOLOGIE ET MINERALOGIE
	GERBER R.	MATHEMATIQUES
	PAUTHENET R.	ELECTROTECHNIQUE
	SILBER	MECANIQUE DES FLUIDES
	MOUSSIEGT	ELECTRONIQUE
	BARBIER J.C.	PHYSIQUE
	KOSZUL	MATHEMATIQUES

PROFESSEURS SANS CHAIRE

Mme KOFLER	BOTANIQUE
DREYFUS	THERMODYNAMIQUE
VAILLANT	ZOOLOGIE ET HYDROBIOLOGIE
GIRAUD P.	GEOLOGIE
SAVELLI M.	PHYSIQUE GENERALE
Mme LUMER L.	MATHEMATIQUES
PERRET R.	SERVOMECHANISMES
ARNAUD P.	CHIMIE
Mme BARBIER M.J.	ELECTROCHIMIE
BRISSENEAU	PHYSIQUE
COHEN J.	ELECTROTECHNIQUE
Mme SOUTIF J.	PHYSIQUE
DEPASSEL R.	MECANIQUE
GIDON P.	GEOLOGIE ET MINERALOGIE

PROFESSEURS ASSOCIES

MM. REIZNICK	PHYSIOLOGIE VEGETALE
LUMER	MATHEMATIQUES

MAITRES DE CONFERENCES

ROBERT	CHIMIE PAPETIERE
ANGLES D'AURIAC	MECANIQUE DES FLUIDES
BIAREZ J.	MECANIQUE PHYSIQUE
COUMES A.	ELECTRONIQUE
DODU J.	MECANIQUE DES FLUIDES
DUCROS P.	MINERALOGIE ET CRISTALLOGRAPHIE
GLENAT R.	CHIMIE
HACQUES G.	CALCUL NUMERIQUE
LANCIA R.	PHYSIQUE AUTOMATIQUE
PEBAY-PEROULA J.	PHYSIQUE
GASTINEL N.	MATHEMATIQUES APPLIQUEES
LACAZE A.	THERMODYNAMIQUE
GAGNAIRE D.	CHIMIE PAPETIERE
DEGRANGE D.	ZOOLOGIE
KLEIN J.	MATHEMATIQUES
Mme KAHANE J.	PHYSIQUE
RASSAT	CHIMIE SYSTEMATIQUE
DEPORTES C.	CHIMIE
DEPOMMIER P.	PHYSIQUE NUCLEAIRE
POLOUJADOFF M.	ELECTROTECHNIQUE
BARRA J.	MATHEMATIQUES APPLIQUEES
Mme BOUCHE L.	MATHEMATIQUES
PERRIAUX J.	GEOLOGIE
SARROT-REYNAUD	GEOLOGIE
CAUQUIS G.	CHIMIE GENERALE
LABBE A.	BOTANIQUE
BETHOUX P.	MATHEMATIQUES APPLIQUEES
BONNET G.	PHYSIQUE GENERALE

B I B L I O G R A P H I E

- Albrecht - Beiträge zum Runge-Kutta-Verfahren. ZAMM 35 (1955)
- Bard, Caschino, Kuntzmann, Laurent - Formules de base de la méthode de Runge-Kutta Chiffres 4 (1961)
- Bieberbach - On the remainder of the Runge-Kutta formula in the theory of ordinary differential equations. ZAMP 2 (1951)
- Call, Reeves - Error estimations in Runge-Kutta procedures - Com.A.C.M. 1 (1958)
- Carr - Errors bounds for the Runge-Kutta single-step integration process - Journal A.C.M. 5 (1938)
- Ceschino - Critère d'utilisation du procédé de Runge-Kutta - CRAS 246 (1958)
- Ceschino - Une méthode de mise en oeuvre des formules d'Obrechhoff - Chiffres 2 (1961)
- Ceschino - Evaluation de l'erreur par pas dans les problèmes différentiels - Chiffres 5 (1962)
- Fehlberg - Eine Methode zur Fehlerverkleinerung beim Runge-Kutta Verfahren - ZAMM 40 (1960)
- Frey - One improvement of the Runge-Kutta-Nyström method - Period Polytech. Electr. Eng. Hongr. 2 (1958)
- Heun - Neue Methode zur approximativen Integration der Differentialgleichungen einer Variablen - Z. Math. 45 (1900)
- Kuntzmann - Remarques sur la méthode de Runge-Kutta - CRAS 242 (1956)
- Kuntzmann - Deux formules optimales du type Runge-Kutta - Chiffres 2 (1959)
- Kuntzmann - Evaluation de l'erreur sur un pas dans les méthodes à pas séparés - Chiffres 2 (1959)
- Kuntzmann - Problèmes différentiels de conditions initiales - Dunod (1962)
- Morai - Evaluation de l'erreur sur un pas dans la méthode de Runge-Kutta - CRAS 243 (1956)
- Obrechhoff - Neue Quadraturformeln - Abh. preuss. Akad Wiss. Math. 4 (1940)
- Runge - Veber die Numerische Auflösung von Differentialgleichungen - Math. Annalen 46 (1895)
- Siret - Principe des méthodes de Runge-Kutta à pas liés - Thèse (Grenoble, 1962).

AVANT - PROPOS

Je tiens à exprimer ici ma profonde gratitude à Monsieur le Professeur KUNTZMANN, Directeur du Laboratoire de Mathématiques Appliquées de l'Université de GRENOBLE pour la bienveillance, l'aide et les conseils qu'il m'a toujours accordés.

Ce travail a pu être achevé grâce à la compréhension de la Direction des Etudes et Recherches de l'Electricité de France et de ses responsables, en particulier du Service des Etudes de Réseaux et de Calcul Automatique et de son Chef.

Je remercie également Messieurs CASTINEL et HACQUES d'avoir bien voulu faire partie du Jury qui examinera ces pages.

I N T R O D U C T I O N

L'objet de l'étude qui suit est de classer par ordre d'efficacité les différentes méthodes de résolution des systèmes d'équations différentielles avec conditions initiales.

Nous supposerons que les systèmes sont sous la forme canonique et de plus, pour la commodité de l'exposition et de l'écriture, nous ne considérerons qu'une équation

$$y' = Y(y, t)$$

$$y_0 = y(a) \quad t \in (a, b)$$

Il y a trois grandes catégories de méthodes :

à pas séparés	(du type RUNGE-KUTTA)
à pas liés	(du type ADAMS)
de dérivation	(du type TAYLOR)

Elles peuvent admettre des variantes ou se combiner.

Elles peuvent, de plus, être implicites ou explicites.

Cette étude, qui n'a pas la prétention d'être exhaustive, exhibera les formules des écarts après un pas de calcul.

Pour une méthode d'ordre n , l'écart sera

$$R = h^{n+1} \sum_i \alpha_i D_i.$$

Les D_i étant les différents termes qui composent la dérivée d'ordre $n+1$ de y .

Plus les α_i seront petits, plus l'écart sera faible. Il semble donc naturel de considérer la somme

$$S = \sum_i |\alpha_i| \quad \text{comme critère d'efficacité.}$$

Nous mesurerons le coût des méthodes de la manière suivante :

L'unité de travail sera le Hörner, calcul d'une valeur de fonction ($Y, Y', y'' \dots$).

Pour résoudre un problème, nous avons le droit d'utiliser N Hörners (c'est-à-dire, grosso modo, un temps T de machine). Cette contrainte nous impose la valeur du pas. S'il faut calculer p Hörners pas pas, celui-ci sera

$$h = \frac{(b-a)p}{N}.$$

Pour un ordre donné n , nous ne comparerons pas les méthodes à pas égal, mais à coût égal. Nous utiliserons le critère d'efficacité réduit

$$S' = p^{n+1} \sum_i |\alpha_i|$$

Nous rangerons les méthodes d'après leur ordre et ne les étudierons que jusqu'à l'ordre 4 inclus, l'étude des méthodes du type RUNGE-KUTTA de rang supérieur à 4 étant rapidement inextricable et de peu d'utilité pratique.

Les méthodes dites "suroptimales", c'est-à-dire d'ordre supérieur à celui que l'on prévoyait seront classées avec les méthodes d'ordre n .

Nous nous référerons, de manière constante et implicite, à l'ouvrage de Messieurs CESCHINO et KUNTZMANN : " Problèmes différentiels de conditions initiales."

METHODES D'ORDRE 1

Les méthodes d'EULER, TAYLOR et ADAMS sont identiques :

$$y_{i+1} = y_i + hY_i$$

La formule la plus générale à pas liés s'écrit

$$y_{i+1} = y_{i-p} + h A Y_{i-q}$$

Pour qu'elle soit du premier ordre, il faut que $A = p + 1$

$$\text{Le reste est alors } R = \frac{(p+1)(p-1-2q)}{2} h^2 y_i''$$

Nous retrouverons la méthode de NYSTROM qui est d'ordre 2, si $p - 1 = 2q$. Elle est faiblement stable.

$$\text{Il est évident dans les autres cas que } |R| > \frac{h^2}{2} y_i''$$

Il n'y a donc aucun intérêt à utiliser de telles formules.

Nous résumons nos conclusions en disant que pour la méthode d'EULER, le coefficient d'efficacité est 1/2.

METHODES D'ORDRE 2

Méthodes à pas séparés explicites.

Les méthodes du type RUNGE-KUTTA se présentent sous la forme :

$$\begin{cases} y_{i,1} = y_i + h \theta Y_i \\ y_{i+1} = y_i + h \left[\left(1 - \frac{1}{2\theta}\right) Y_i + \frac{1}{2\theta} Y_{i,1} \right] \end{cases}$$

$$\text{d'où } y_{i+1} = y_i + h Y_i + \frac{h^2}{2} y_i'' + \frac{h^3 \theta}{4} \left(Y_i^2 \frac{\delta^2 Y}{\delta y^2} + Y_i \frac{\delta^2 Y}{\delta y \delta t} + \frac{\delta^2 Y}{\delta t^2} \right) + O(h^4)$$

$$\text{Nous en déduisons l'écart } R = \frac{h^3}{3!} \left[\left(\frac{3\theta}{2} - 1 \right) C_2 - J_1 C_1 \right]$$

La méthode de HEUN ($\theta = \frac{2}{3}$) est optimale; elle est d'ailleurs d'ordre 3 pour les quadratures, puisqu'alors $J_1 = 0$.

Méthode de dérivation

$$\text{C'est la formule de TAYLOR : } y_{i+1} = y_i + h Y_i + \frac{h^2}{2} y_i''$$

Nous pouvons la considérer comme une méthode de RUNGE-KUTTA avec $\theta = 0$.

$$\text{Le reste est } R = \frac{h^3}{6} y_i^{(3)} \text{ et le coefficient d'efficacité } S = \frac{4}{3}$$

Méthodes à pas liés explicites

Considérons les formules du type :

$$y_{i+1} = y_{i-p} + h(A Y_{i-\alpha} + B Y_{i-\beta})$$

$$\text{L'écart est } R = \left[p^3 - 3(\alpha^2 A + \beta^2 B) + 1 \right] \frac{h^3 y_i^{(3)}}{3!}$$

$$\begin{cases} A = \frac{B}{\beta - \alpha} (1+p) - \frac{p^2 - 1}{2(\beta - \alpha)} \\ B = -\frac{\alpha}{\beta - \alpha} (1+p) + \frac{p^2 - 1}{2(\beta - \alpha)} \end{cases}$$

Pour $p = 0$: $R = [6\alpha\beta + 3(\alpha + \beta) + 2] \frac{h^3}{12} y_i^{(3)}$

Nous voyons que la formule d'ADAMS

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} (3y_i - y_{i-1})$$

est la plus avantageuse : $S' = \frac{5}{6}$

Pour $p = 1$ $R = (6\alpha\beta + 2) \frac{h^3}{3!} y_i^{(3)}$

La formule de NYSTROM est la plus avantageuse, mais elle est instable :

$$y_{i+1} = y_{i-1} + 2h y_i$$

$$R = \frac{h^3}{3} y_i^{(3)} \quad S' = \frac{2}{3}$$

Il n'y a aucun intérêt à utiliser d'autre formule que la formule classique d'ADAMS, fortement stable.

METHODES A PAS SEPARES IMPLICITES

Nous considérons d'abord la formule des trapèzes

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} (y_i + y_{i+1})$$

dont le reste est $R = \frac{h^3}{12} (C_2 + J_1 C_1)$

Le coefficient d'efficacité $S = \frac{1}{6}$.

Le coefficient d'efficacité réduit S' dépendra du nombre d'itérations qu'il faudra effectuer. La méthode a peu d'intérêt, en dehors de son utilisation pour les systèmes linéaires.

Considérons maintenant la formule de RUNGE-KUTTA-GAUSS :

$$\begin{cases} y_{i,0} = y_i + \frac{h}{2} y_{i,0} \\ y_{i+1} = y_i + h y_{i,0} \end{cases}$$

dont le reste est $R = \frac{h^3}{24} [C_2 - 2J_1 C_1]$ et le coefficient d'efficacité $S = \frac{1}{8}$. Elle est sujette aux mêmes objections que la formule des trapèzes.

MISE EN ŒUVRE DE LA METHODE DES TRAPEZES :

$$y_{i+1}^{(1)} = y_i + h Y_i$$

$$Y_{i+1}^{(1)} = Y_i + h y_i'' + O(h^2)$$

$$y_{i+1}^{(2)} = y_i + \frac{h}{2} (Y_i + Y_{i+1}^{(1)})$$

$$Y_{i+1}^{(2)} = Y_i + h y_i'' + \frac{h^2}{2} y_i''' + O(h^4)$$

$$y_{i+1}^{(3)} = y_i + \frac{h}{2} (Y_i + Y_{i+1}^{(2)})$$

$$y_{i+1} = y_i + h Y_i + \frac{h^2}{2} y_i'' + \frac{h^3}{4} y_i''' + O(h^4)$$

$$\text{L'écart est donc } \frac{h^3}{12} y_i''' .$$

Il est alors inutile de faire d'autres itérations.

Il a fallu calculer 3 Hörners : Y_i , $Y_{i+1}^{(1)}$, $Y_{i+1}^{(2)}$

$$\text{d'où } S' = \frac{1}{6} (3)^2 = \frac{3}{2}$$

On peut aussi économiser un Hörner en ne recalculant pas Y_{i+1} pour le pas suivant. Dans ce cas :

$$S' = \frac{1}{6} (2)^2 = \frac{2}{3}$$

MISE EN ŒUVRE DE LA METHODE DE RUNGE - KUTTA - GAUSS :

$$y_{i,o}^{(1)} = y_i + \frac{h}{2} Y_i$$

$$Y_{i,o}^{(1)} = Y_i + \frac{h}{2} y_i'' + O(h^2)$$

$$y_{i,o}^{(2)} = y_i + \frac{h}{2} Y_{i,o}^{(1)}$$

$$Y_{i,o}^{(2)} = Y_i + \frac{h}{2} y_i'' + \frac{h^2}{8} y_i''' + \frac{h^2}{8} J_1 C_1$$

$$y_{i+1} = y_i + h Y_{i,o}^{(2)}$$

$$y_{i+1} = y_i + h Y_i + \frac{h^2}{2} y_i'' + \frac{h^3}{8} (y_i''' + J_1 C_1)$$

$$\text{L'écart est donc } \frac{h^3}{24} (C_2 - J_1 C_1)$$

Il a fallu calculer 3 Hörners : Y_i , $Y_{i,o}^{(1)}$, $Y_{i,o}^{(2)}$

$$\text{d'où } S' = \frac{1}{8} (3)^2 = \frac{9}{8}$$

FORMULES D'OBRECHKOFF :

$$p + q = 2$$

G_{20} et H_{20} se ramènent à la formule de TAYLOR

G_{11} (ou H_{11}) est la formule des Trapèzes.

VALEURS DE S'

FORMULES DE RUNGE KUTTA EXPLICITES

Taylor	Tangente améliorée	Heun	Euler-Cauchy
$\theta = 0$ $S' = \frac{4}{3}$	$\theta = \frac{1}{2}$ $S' = \frac{5}{6}$	$\theta = \frac{2}{3}$ $S' = \frac{2}{3}$	$\theta = 1$ $S' = 1$

FORMULES IMPLICITES

Trapèzes 3 Hörners	Trapèzes 2 Hörners	Runge - Kutta Gauss
$S' = \frac{3}{2}$	$S' = \frac{2}{3}$	$S' = \frac{9}{8}$

FORMULES A PAS LIES

Adams	Nyström
$S' = \frac{5}{6}$	$S' = \frac{2}{3}$

METHODES D'ORDRE 3

Comme pour les méthodes d'ordre 2, nous considérerons les méthodes de Runge Kutta, la méthode de dérivation et les méthodes à pas liés. Mais en plus, d'autres méthodes, combinaisons des précédentes verront le jour :

Méthode de Runge Kutta à pas liés,
Utilisation de dérivées
Méthode de Frey

Méthodes de Runge Kutta

Ce sont des méthodes à 3 hornerers par pas, à 2 paramètres et ayant un reste du 4e ordre

$$\begin{cases} y_{i,1} = y_i + h A_{10} y_i \\ y_{i,2} = y_i + h [A_{20} y_i + A_{21} y_{i,1}] \\ y_{i+1} = y_i + h [A_{30} y_i + A_{31} y_{i,1} + A_{32} y_{i,2}] \end{cases}$$

$$t_{i,1} = t_i + h \theta_1 \quad t_{i,2} = t_i + h \theta_2$$

Le reste est :

$$h^4 \left[C_3 \left(-\frac{1}{24} - \frac{\theta_1 \theta_2}{12} + \frac{\theta_1 + \theta_2}{18} \right) + J_1 C_2 \left(\frac{\theta_1}{12} - \frac{1}{24} \right) + K_1 C_1 \left(\frac{\theta_2}{6} - \frac{1}{8} \right) - \frac{1}{24} J_1^2 C_1 \right]$$

Nous pouvons l'optimiser, au sens indiqué précédemment, et nous trouvons

$$\theta_1 = \frac{1}{2} \quad \theta_2 = \frac{3}{4} .$$

.../...

La matrice triangulaire des coefficients se présente sous la forme

$\frac{1}{2}$		
0	$\frac{3}{4}$	
$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{3}{9}$

Le reste est alors $-\frac{h^4}{24} \left(\frac{C_3}{12} + J_1^2 C_1 \right)$ $S' = \frac{39}{32}$

La méthode classique a lieu pour $\theta_1 = \frac{1}{2}$, $\theta_2 = 1$

Le reste est $\frac{h^4}{24} (K_1 - J_1^2) C_1$ $S' = \frac{9}{4}$

Pour la méthode de Nyström, $\theta_1 = \theta_2 = \frac{2}{3}$

Le reste est $-\frac{h^4}{24} \left[\frac{C_3}{9} - \frac{J_1 C_2}{3} + \frac{K_1 C_1}{3} + J_1^2 C_1 \right]$ $S' = 2$

On peut écrire une variante de la méthode de Nyström

avec $\theta_1 = \frac{1}{3}$, $\theta_2 = \frac{2}{3}$

Le reste est $-\frac{h^4}{24} \left[\frac{C_3}{9} + \frac{J_1 C_2}{3} + \frac{K_1 C_1}{3} + J_1^2 C_1 \right]$ $S' = 2$

Nyström

$\frac{2}{3}$		
0	$\frac{2}{3}$	
$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$

Variante de Nyström

$\frac{1}{3}$		
0	$\frac{2}{3}$	
$\frac{1}{4}$	0	$\frac{3}{4}$

Le tableau de la variante est plus simple et les temps de calcul peuvent être légèrement réduits.

.../...

Formules de Runge Kutta implicites du 3e ordre.

Considérons, d'abord, les formules simplement implicites.

$$\begin{cases} y_{i,1} = y_i + h(A_{10} Y_i + A_{11} Y_{i,1}) \\ y_{i+1} = y_i + h(A_{20} Y_i + A_{21} Y_{i,1} + A_{22} Y_{i+1}) \end{cases}$$

En cherchant à atteindre, pour y_{i+1} , l'ordre 3, nous obtenons :

$$\begin{aligned} A_{11} &= \frac{\theta_1}{2} & A_{21} &= \frac{1}{6\theta_1(1-\theta_1)} \\ A_{22} &= \frac{2-3\theta_1}{6(1-\theta_1)} \end{aligned}$$

Nous avons calculé la partie principale du reste et trouvé

$$R = \frac{h^4}{72} \left[(1-2\theta_1)C_3 + 3(1-2\theta_1)K_1C_1 + \frac{12\theta_1^2 - 9\theta_1 + 1}{1-\theta_1} J_1^2 C_1 + \frac{3\theta_1^2 - 3\theta + 1}{1-\theta_1} J_1 C_2 \right]$$

Le calcul d'optimisation nous donne $\theta_1 = \frac{1}{2}$. D'où le reste

$$R = \frac{h^4}{72} \left[\frac{1}{2} J_1 C_2 - J_1^2 C_1 \right] \text{ et les formules :}$$

$$\begin{cases} y_{i,1} = y_i + \frac{h}{4} (Y_i + Y_{i,1}) \\ y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6} (Y_i + 4Y_{i,1} + Y_{i+1}) \end{cases}$$

$y_{i,1}$ est obtenu à partir de la formule des trapèzes.

Cette formule peut présenter un intérêt pour les quadratures car $J_1 \equiv 0$ et le reste est d'ordre 5.

Formules de Radau

Ce sont des formules semi-fermées de la forme :

$$\begin{cases} y_{i,1} = y_i + h(A_{10} Y_i + A_{11} Y_{i,1}) \\ y_{i+1} = y_i + h(A_{20} Y_i + A_{21} Y_{i,1}) \end{cases}$$

L'exactitude de y_{i+1} au 3e ordre entraîne l'existence de 3 relations entre les 3 paramètres A_{11}, A_{21}, θ_1 .

$$A_{11} = \frac{1}{3} \quad A_{21} = \frac{3}{4} \quad \theta_1 = \frac{2}{3}$$

La partie principale du reste est :

$$R = -\frac{h^4}{216} \left[C_3 + 3 K_1 C_1 - 3 J_1^2 C_1 - 3 J_1 C_2 \right]$$

Cette formule de Radau est un cas particulier de la formule de R.K. simplement implicite.

Elle serait donc moins précise (au sens de la minimisation de la somme des modules des coefficients) que la formule optimale ($\theta = \frac{1}{2}$). Mais, l'inconvénient des formules implicites est qu'il faut faire des itérations, d'autant plus nombreuses que la valeur initiale est plus éloignée de la solution.

Or, pour la formule de RK simplement implicite, il y a deux séries d'itération :

$$\begin{cases} 1) \text{ Calculer } y_{i,1} \\ 2) \text{ Calculer } y_{i+1}. \end{cases}$$

Tandis que pour la formule de Radau, une seule série d'itérations suffit:

Calculer $y_{i,1}$.

.../...

Nous pouvons donc nous attendre à ce que, assez souvent, le nombre de Hörners, soit moindre pour la formule de Radau, et cet avantage compense l'inconvénient d'une précision "moindre".

Utilisation possible des formules implicites.

Nous allons montrer que la formule de Radau permet de n'utiliser que 3 Hörners par pas et qu'elle est réductible à une méthode explicite RK 3.

Soit en effet $y_{i,1}^{(1)} = y_i + \frac{2h}{3} Y_i$ une valeur de départ assez voisine de $y_{i,1}$ (l'écart est du 2ème ordre).

$$y_{i,1}^{(1)} = y_i + \frac{2h}{3} y_i'' + O(h^2)$$

$$y_{i,1}^{(2)} = y_i + \frac{h}{3} (Y_i + y_{i,1}^{(1)}) = y_i + \frac{2h}{3} Y_i + \frac{2h^2}{9} y_i'' + O(h^3)$$

$$y_{i,1}^{(2)} = y_i + \frac{2h}{3} y_i'' + \frac{2h^2}{9} y_i''' + O(h^3)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{4} (Y_i + 3 y_{i,1}^{(2)}) = y_i + h Y_i + \frac{h^2}{2} y_i'' + \frac{h^3}{6} y_i''' + O(h^4)$$

Puis y_{i+1} sera calculé ;

En définitive, nous avons dépensé 3 Hörners :

$$y_{i,1}^{(1)}, y_{i,1}^{(2)}, y_{i+1}$$

Les formules peuvent s'écrire

$$\begin{cases} y_{i,1}^{(1)} = y_i + \frac{2h}{3} Y_i \\ y_{i,1}^{(2)} = y_i + \frac{h}{3} (Y_i + y_{i,1}^{(1)}) \\ y_{i+1} = y_i + \frac{h}{4} (Y_i + 3 y_{i,1}^{(2)}) \end{cases}$$

... / ...

Il est à noter que ces formules définissent une "approximation de la méthode de Radau puisque nous n'avons fait qu'une seule itération.

Un calcul fastidieux que nous ne reproduirons pas montre que le reste est

$$-\frac{h^4}{216} (C_3 + 3 K_1 C_1 - 3 J_1 C_2 + 9 J_1^2 C_1) , \quad S' = 2.$$

Le reste est donc le même que pour la méthode de Runge-Kutta-Nyström.

Si nous consentons à dépenser un Hörner supplémentaire, nous obtiendrons le reste prévu théoriquement. En effet :

$$y_{i,1}^{(3)} = y_i + \frac{h}{3} (Y_i + Y_{i,1}^{(2)}) = y_i + \frac{2h}{3} Y_i + \frac{2h^2}{9} y_i'' + \frac{2h^3}{27} y_i''' + O(h^4)$$

$$Y_{i,1}^{(3)} = Y_i + \frac{2h}{3} y_i'' + \frac{2h^2}{9} y_i''' + \frac{4h^3}{81} \left[C_3 + \frac{3}{2} J_1 (C_2 + J_1 C_1) + 3 K_1 C_1 \right]$$

$$y_{i+1} = y_i + h Y_i + \frac{h^2}{2} y_i'' + \frac{h^3}{6} y_i''' + \frac{h^4}{27} \left[C_3 + \frac{3}{2} J_1 (C_2 + J_1 C_1) + 3 K_1 C_1 \right]$$

$$\text{Le reste est } -\frac{h^4}{216} \left[C_3 + 3 K_1 C_1 - 3 J_1 (C_2 + J_1 C_1) \right] ; \quad S' = \frac{80}{27} - \left(\frac{4}{3} \right)^{\frac{10}{21}}$$

Nous n'avons donc pas avantage à faire une itération supplémentaire.

Mise en oeuvre de la méthode simplement implicite :

$$y_{i,1}^{(1)} = y_i + \frac{h}{2} Y_i$$

$$Y_{i,1}^{(1)} = Y_i + \frac{h}{2} y_i'' + \frac{h^2}{8} C_2 + O(h^3)$$

$$y_{i,1}^{(2)} = y_i + \frac{h}{4} (Y_i + Y_{i,1}^{(1)}) = y_i + \frac{h}{2} Y_i + \frac{h^2}{8} y_i'' + \frac{h^3}{32} C_2 + O(h^4)$$

$$Y_{i,1}^{(2)} = Y_i + \frac{h}{2} y_i'' + \frac{h^2}{8} y_i''' + \frac{h^3}{48} (C_3 + \frac{3}{2} J_1 C_2 + 3 K_1 C_1) + O(h^4)$$

$$y_{i+1}^{(1)} = y_i + h Y_{i,1}^{(2)} = y_i + \dots + \frac{h^3}{8} y_i''' + \frac{h^4}{48} (C_3 + \frac{3}{2} J_1 C_2 + 3 K_1 C_1) + O(h^5)$$

$$Y_{i+1}^{(1)} = Y_i + \dots + \frac{h^3}{8} y_i''' + O(h^4)$$

$$y_{i+1}^{(2)} = y_i + \frac{h}{6} (Y_i + 4 Y_{i,1}^{(2)} + Y_{i+1}^{(1)}) = y_i + \dots + \frac{h^3}{6} y_i''' + \frac{h^4}{24} O(h^4)$$

$$Y_{i+1}^{(2)} = Y_i + h y_i'' + \frac{h^2}{2} y_i''' + \frac{h^3}{6} y_i^{(4)} + O(h^4)$$

$$y_{i+1}^{(3)} = y_i + \frac{h}{6} (Y_i + 4 Y_{i,1}^{(2)} + Y_{i+1}^{(2)}) \quad \text{d'où}$$

$$y_{i+1}^{(3)} = y_i + h Y_i + \frac{h^2}{2} y_i'' + \frac{h^3}{6} y_i''' + \frac{h^4}{24} \left[C_3 + 3 K_1 C_1 + \frac{7}{6} J_1 C_2 + \frac{2}{3} J_1^2 C_1 \right]$$

L'écart est donc $\frac{h^4}{144} J_1 (C_2 - 2 J_1 C_1) ; S' = \frac{1}{48} (5^3) = \frac{125}{48}$

En définitive, sauf pour le cas des systèmes linéaires et des quadratures, les méthodes implicites ne sont pas intéressantes.

Formules à pas liés usuelles.

Nous examinerons les formules du type

$$y_{n+1} = y_{n-p} + h (A Y_n + B Y_{n-1} + C Y_{n-2})$$

Dire que y_{n+1} est exact à l'ordre 3 revient à écrire un système linéaire

$$\begin{cases} A + B + C = 1 + p \\ 2B + 4C = p^2 - 1 \\ 3B + 12C = p^3 + 1 \end{cases}$$

d'où nous tirons

$$A = \frac{-2 p^3 + 9 p^2 - 11}{17} ; B = \frac{-p^3 + 3p^2 - 4}{3} ; C = \frac{2 p^3 - 3p^2 + 5}{12}$$

$$R = \frac{h^4}{24} y_i^{(4)} (p^4 - 4 p^3 + 4 p^2 - 9)$$

Nous retrouvons les formules usuelles.

$$\text{Adams : } \begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{12} (23 Y_n - 16 Y_{n-1} + 5 Y_{n-2}) \\ R = \frac{3}{8} h^4 y_i^{(4)} \end{cases}$$

Nystrom :

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_{n-1} + \frac{h}{3} (7 Y_n - 2 Y_{n-1} + Y_{n-2}) \\ R = \frac{1}{3} h^4 y_i^{(4)} \end{cases}$$

La formule obtenue pour $p = 3$ est suroptimale, son reste étant du 5e ordre

$$y_{n+1} = y_{n-3} + \frac{4h}{3} (2 Y_n - Y_{n-1} + 2 Y_{n-2})$$

Formules à pas liés implicites.

Nous examinerons, comme pour les formules explicites, les formules du type :

$$y_{n+1} = y_{n-p} + h(A Y_{n+1} + B Y_n + C Y_{n-1})$$

Pour rendre y_{n+1} à l'ordre 3, nous écrirons le système :

$$\left\{ \begin{array}{l} A + B + C = p + 1 \\ 2(A - C) = 1 - p^2 \\ 3(A + C) = 1 + p^3 \end{array} \right\} \quad \text{d'où nous tirons}$$

$$A = \frac{2p^3 - 3p^2 + 5}{12} ; \quad B = \frac{-4p^3 + 12p + 8}{12} ; \quad C = \frac{2p^3 + 3p^2 - 1}{12}$$

$$\text{L'écart sur } y_{n+1} \text{ est } (p^2 - 1)^2 \frac{h^4}{24} y_n^{(4)}$$

Nous retrouvons les formules usuelles.

$$\text{Adams-Moulton} \quad \begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{12} (5 Y_{n+1} + 8 Y_n - Y_{n-1}) \\ R = \frac{h^4}{24} y_n^{(4)} \end{cases}$$

$$\text{Simpson} \quad \begin{cases} y_{n+1} = y_{n-1} + \frac{h}{3} (Y_{n+1} + 4 Y_n + Y_{n-1}) \\ R = \frac{h^5}{90} y_n^{(5)} \end{cases}$$

cette dernière formule est suroptimale.

.../...

Méthodes de RK utilisant la dérivée au début du pas.

Ce sont des méthodes qui procèdent à la fois de la formule de Taylor et de la méthode de Runge Kutta. Nous calculons par une formule de Taylor d'ordre 2 la solution en un point d'abscisse $t_i + \theta h$.

$$\begin{cases} y_{i,1} = y_i + h\theta Y_i + \frac{h^2 \theta^2}{2} y_i'' \\ y_{i+1} = y_i + h(A_{20} Y_i + A_{21} Y_{i,1}) + A' h^2 y_i'' \end{cases}$$

$y_{i,1}$ est exact à l'ordre 2, nous voulons que y_{i+1} le soit à l'ordre 3, c'est-à-dire qu'il ait un développement en série de Taylor autour de t_i exact à l'ordre 3. Ceci nous amène à résoudre le système

$$\begin{cases} A_{21} \theta + A' &= \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} A_{21} \theta^2 &= \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} A_{21} \theta^2 &= \frac{1}{6} \end{cases} \quad \text{d'où la formule :}$$

$$y_{i+1} = y_i + h Y_i + \frac{h}{3\theta^2} (Y_{i,1} - Y_i) + \frac{h^2}{2} \left(1 - \frac{2}{3\theta}\right) y_i''$$

Le reste se présente sous la forme :

$$R = \frac{h^4}{4!} \left[\left(\frac{4\theta}{3} - 1\right) (C_3 + 3 K_1 C_1) - J_1 (J_1 C_1 + C_2) \right]$$

Il est clair que la méthode est optimale pour $\theta = \frac{3}{4}$ ce qui nous conduit aux formules :

$$\begin{cases} y_{i,1} = y_i + \frac{3h}{4} Y_i + \frac{9h^2}{32} y_i'' \\ y_{i+1} = y_i + \frac{h}{27} (11 Y_i + 16 Y_{i,1}) + \frac{h^2}{18} y_i'' \end{cases}$$

$$R = \frac{h^4}{4!} (J_1^2 C_1 + J_1 C_2) = - \frac{h^4}{4!} (Y_1' y''')_{t=t_i}$$

Cette méthode est d'efficacité comparable à la méthode de Nystrom.

Dans le cas particulier d'une quadrature, $Y'_Y = 0$ et le reste est d'ordre 5. Cette remarque reste valable pour tous les cas où le reste est proportionnel à J_1 .

Nous pouvons encore examiner la formule de Duffing : qui se présente lorsque $\theta = 1$.

$$\begin{cases} y_{i,1} = y_i + h Y_i + \frac{h^2}{2} y''_i \\ y_{i+1} = y_i + \frac{h}{3} (2 Y_i + Y_{i,1}) + \frac{h^2}{6} y''_i \\ R = \frac{h^4}{4!} \left[\frac{C_3}{3} + K_1 C_1 - J_1 (J_1 C_1 + C_2) \right] \end{cases}$$

Nous pouvons la considérer comme une formule de prédiction-correction. En effet, la formule $y_{i+1} = y_i + \frac{h}{3} (2 Y_i + Y_{i,1}) + \frac{h^2}{6} y''_i$ définit une méthode implicite d'ordre 3 qu'il faut traiter par itération. La méthode de Duffing consiste donc à ne faire qu'une itération.

Formule de R.K. utilisant la dérivée au cours du pas.

Au lieu de ne prendre la dérivée qu'au début du pas nous pouvons aussi l'utiliser au point intermédiaire $y_{i,1}$.

Nous écrirons donc les formules :

$$y_{i,1} = y_i + h A_{10} Y_i + \frac{h^2}{2} A'_{10} D Y_i$$

$$y_{i+1} = y_i + h(A_{20} Y_i + A_{21} Y_{i,1}) + \frac{h^2}{2} (A'_{20} D Y_i + A'_{21} D Y_{i,1}).$$

.../...

En exprimant que y_{i+1} est exact à l'ordre 3, et que $y_{i,1}$ l'est au moins à l'ordre 1, nous sommes amenés à résoudre le système :

$$A_{10} = \theta \quad \left\{ \begin{array}{l} A_{20} + A_{21} = 1 \\ A_{21}\theta + \frac{1}{2}(A'_{21} + A'_{20}) = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}A_{21}\theta^2 + \frac{1}{2}A'_{21}\theta = \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2}A_{21}A'_{10} + \frac{1}{2}A'_{21}\theta = \frac{1}{6} \end{array} \right.$$

ce qui nous donne les tableaux des coefficients :

$$A \quad \begin{array}{|c|c|} \hline \theta & \\ \hline 1 - A_{21} & A_{21} \\ \hline \end{array} \quad A' \quad \begin{array}{|c|c|} \hline \theta^2 & \\ \hline 1 - \frac{1}{3\theta} - A_{21}\theta & \frac{1}{3\theta} - A_{21}\theta \\ \hline \end{array}$$

et le reste est de la forme :

$$\frac{h^4}{24} \left\{ \left[(2\theta - 1) - 2A_{21}\theta^3 \right] (C_3 + 3K_1C_1) + \left[(2\theta - 1) - 6A_{21}\theta^3 \right] J_1 (J_1C_1 + C_3) \right\}$$

Si nous consentons à dépenser 4 Hörners, nous pouvons annuler cette partie principale du reste et nous aurions une méthode d'ordre 4. Il est donc absurde d'utiliser 4 Hörners pour n'avoir qu'une méthode d'ordre 3.

Si nous voulons seulement dépenser 3 Hörners, nous annulons une des colonnes du tableau.

1er cas : $A'_{21} = 0$.

Nous sommes ramenés à la formule utilisant la dérivée au début du pas.

2e cas : $A_{21} = 0$

Nous avons les tableaux :

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \theta & \\ \hline 1 & 0 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \theta^2 & \\ \hline 1 - \frac{1}{3\theta} & \frac{1}{3\theta} \\ \hline \end{array}$$

$$R = (2\theta - 1) \frac{h^4}{24} y_i^{(4)}$$

Pour cette même dépense de 3 Hörners, nous pouvons annuler la partie principale du reste et écrire une méthode d'ordre 4, avec $\theta = \frac{1}{2}$.

Remarquons que si $A_{21} = 0$, la valeur de A'_{10} est indéterminée, nous posons pour gagner 1 Hörner $A'_{10} = 0$, $\theta = \frac{1}{3}$ et nous obtenons les formules

$$\begin{cases} y_{i,1} = y_i + \frac{h}{3} Y_4' \\ y_{i+1} = y_i + h Y_1' + \frac{h^2}{2} D Y_{i,1} \end{cases}$$

$$R = - \frac{h^4}{72} [C_3 + 5 K_1 C_1 + 3 J_1^2 C_1 + J_1 C_2] \\ S' = \frac{10}{9}$$

Méthodes à pas liés utilisant des dérivées.

De même que le principe de Runge Kutta a été combiné au principe des méthodes à pas liés, de même nous pouvons imaginer une combinaison de la formule de Taylor et des méthodes à pas liés.

Soit donc une formule du type :

$$y_{i+1} = y_{i-p} + h(A Y_i + B Y_{i-1}) + a h^2 y_i''$$

En écrivant que y_{i+1} est identique à son développement en série de Taylor à l'ordre le plus élevé possible, nous obtenons un système linéaire donnant la valeur des coefficients :

$$\begin{cases} A + B - p_2 = 1 \\ a - B + \frac{p_2}{2} = \frac{1}{2} \\ \frac{B}{2} - \frac{p_3}{6} = \frac{1}{6} \end{cases}$$

$$A = \frac{-p^3 + 3p + 2}{3} ; \quad B = \frac{p^3 + 1}{3} ; \quad a = \frac{2p^3 - 3p^2 + 5}{6}$$

.../...

La partie principale du reste est :

$$R = \frac{h^4 y_i^{(4)}}{72} (3 p^4 + 4 p^3 - 7)$$

La formule ayant le plus petit reste sera la "formule d'Adams-Taylor" $p = 0$.

$$\left\{ \begin{array}{l} y_{i+1} = y_i + \frac{h}{3} (2 y_i + y_{i-1}) + \frac{5 h^2}{6} y_i'' \\ R = - \frac{7}{72} h^4 y_i^{(4)} \end{array} \right.$$

La "formule de Nyström-Taylor" ne lui cède guère en précision :

$$\left\{ \begin{array}{l} y_{i+1} = y_{i-1} + \frac{2h}{3} (2 y_i + y_{i-1}) + \frac{2 h^2}{3} y_i'' \\ R = - \frac{8}{72} h^4 y_i^{(4)} \end{array} \right. \quad \text{faiblement stable}$$

Nous pouvons utiliser aussi la formule obtenue pour $p = 2$.

$$\left\{ \begin{array}{l} y_{i+1} = y_{i-2} + 3h y_{i-1} + \frac{3 h^2}{2} y_i'' \\ R = \frac{9}{72} h^4 y_i^{(4)} \end{array} \right. \quad \text{faiblement stable}$$

Elle semble de programmation et de calcul un peu plus simples que les précédentes, au prix d'une précision légèrement inférieure.

Les deux formules précédentes ($p = 1$, $p = 2$) peuvent suggérer une amélioration.

soit $y_{i+1}^{(1)}$, $y_{i+1}^{(2)}$ les deux valeurs obtenues à partir de ces formules et soit y_{i+1} la valeur cherchée, à l'ordre 5 près :

$$\frac{1}{2} (y_{i+1}^{(1)} + y_{i+1}^{(2)}) - y_{i+1} \sim \frac{h^4}{144} y_i^{(4)}$$

Cette nouvelle méthode sera "six fois plus précise" que la formule de Taylor et nous verrons qu'elle est aussi précise que la formule R K3 optimale. à pas égal.

.../...

Le gros avantage qu'elle possédera par rapport à cette dernière, c'est qu'elle n'utilise que 2 Hörners par pas. Cette formule peut d'ailleurs s'écrire :

$$y_{i+1} = \frac{1}{2} (y_{i-1} + y_{i-2}) + \frac{h}{6} (4 y_i + 11 y_{i-1}) + \frac{13}{12} h^2 y''_i \quad \beta$$

C'est une formule fortement stable, avantage incontestable alors que les formules dont nous sommes partis, ne le sont que faiblement.

Méthode de FREY d'ordre 3

Nous considérerons les formules du type :

$$\begin{cases} y_{i,1} = y_i + h \theta y'_i \\ y_{i+1} = y_i + h y'_i + h A_{21} (y_{i,1} - y_i) + \frac{h^2}{2} A'_{21} y'_{Y,\varphi} (y_{i,1} - y_i) + \frac{h^3}{6} A''_{21} y''_{Y,\varphi} (y_{i,1} - y_i) \\ y'_{Y,\varphi} = y'_Y (y_i + \varphi h y'_i, t_i + \varphi h) \end{cases}$$

Comme d'habitude, nous écrirons que y_{i+1} est exact à l'ordre le plus élevé possible (l'ordre 3) :

Nous obtenons : $\theta = \frac{2}{3}$, $A_{21} = \frac{3}{4}$, $A'_{21} = \frac{1}{2}$, A''_{21} et φ restent arbitraires. Le reste se présente sous la forme :

$$R = \frac{h^4}{24} y^{(4)}_i \left[-\frac{C_3}{9} + (4\varphi - 3) K_1 C_1 + \frac{J_1 C_2}{3} + \left(\frac{8}{3} A''_{21} - 1\right) J_1^2 C_1 \right]$$

La méthode est rendue optimale si nous en annulons certains coefficients :

$$\varphi = \frac{3}{4} \quad A''_{21} = \frac{3}{8}$$

$$\begin{cases} y_{i,1} = y_i + \frac{2h}{3} y'_i \\ y_{i+1} = y_i + \frac{h}{4} (y_i + 3 y_{i,1}) + \frac{h^2}{4} y'_Y (y_{i,1} - y_i) + \frac{h^3}{24} y''_{Y,\varphi} (y_{i,1} - y_i) \\ R = \frac{h^4 y^{(4)}_i}{216} (3 J_1 C_2 - C_3) \end{cases}$$

il est plus judicieux de réécrire la formule sous la forme :

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{4} Y_i \left[1 - h Y' \left(1 + \frac{h}{6} Y' \right) \right] + \frac{h}{4} Y_{i,1} \left[3 + h Y' \left(1 - \frac{h}{6} Y' \right) \right].$$

Pour une dépense de 3 Hörners, semble très "efficace" puisque la somme des modules des coefficients est $\frac{1}{54}$ (Pour RK optimal : $\frac{13}{288}$).

Remarque : Pour les quadratures $Y'_Y \equiv 0$, nous voyons que la formule de HEUN (2 Hörners) est suroptimale car elle donne l'ordre 3.

Méthodes de Runge Kutta à pas liés d'ordre 3

Il s'agit de combiner le principe de RK avec le principe des méthodes à pas liés, c'est-à-dire qu'il faut utiliser les informations antérieures.

Soit ℓ le nombre de valeurs de y_{i-p} utilisées et

soit r le nombre de valeurs de Y calculées au cours du pas (s mesure la dépense en Hörners).

Si $s = 3$, nous obtenons la méthode ordinaire de RK.

Si $s = 1$, nous obtenons les méthodes à pas liés. Il reste donc à étudier le cas $s = 2$ qui fournit deux possibilités :

$$\begin{array}{lll} s = 2 & \ell = 0 & r = 1 \\ s = 2 & \ell = 1 & r = 0 \end{array}$$

Etude du 1er Cas

Méthode RKL (1 + 2, 0)

$$\begin{cases} y_{i,1} = y_i + h(A_{10} Y_i + A_{11} Y_{i-1}) \\ y_{i+1} = y_i + h(A_{20} Y_i + A_{21} Y_{i-1} + A_{22} Y_{i,1}) \end{cases}$$

$$t_{i,1} = t_i + \theta h \quad Y_{i,1} = Y(y_{i,1}, t_i + \theta h).$$

.../...

Nous exprimons que $y_{i,1}$ est exact à l'ordre 2, et que y_{i+1} est exact à l'ordre 3, ce que nous amène à résoudre le système d'équations

$$\begin{cases} A_{10} + A_{11} = \theta \\ -A_{11} = \frac{\theta^2}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} A_{20} + A_{21} + A_{22} = 1 \\ \theta A_{22} - A_{21} = \frac{1}{2} \\ \frac{\theta^2}{2} A_{22} + \frac{A_{21}}{2} = \frac{1}{6} \end{cases}$$

Nous obtenons le tableau des A

$\frac{\theta(\theta + 2)}{2}$	$-\frac{\theta^2}{2}$	
$\frac{9\theta - 5}{6\theta}$	$\frac{2 - 3\theta}{6(1 + \theta)}$	$\frac{5}{6\theta(1 + \theta)}$

Cherchons maintenant à exprimer l'erreur sur y_{i+1} :

$$y_{i,1} = y_i + h\theta Y_i + \frac{h^2\theta^2}{2} y_i'' - \frac{h^3\theta^2}{4} y_i^{(3)} \text{ ou encore}$$

$$y_{i,1} = y_i + h\theta Y_i + \frac{h^2\theta^2}{2} y_i'' + \frac{h^3\theta^3}{6} y_i^{(3)} - \frac{h^3}{12} y_i^{(3)} (3 + 2\theta)\theta^2$$

$$\text{Posons } \epsilon = \frac{3 + 2\theta}{2\theta} \cdot \frac{(h\theta)^3}{6} \cdot y_i^{(3)}$$

$y_{i,1} = \alpha + \epsilon$, α étant un développement valable à l'ordre 3.

Calculons $Y_{i,1} = Y(\alpha + \epsilon, t_i + \theta h)$

$$Y_{i,1} = Y_i + h\theta y_i'' + \frac{h^2\theta^2}{2} y_i^{(3)} + \frac{h^3\theta^3}{6} y_i^{(4)} - \frac{h^3\theta^3}{6} \cdot \epsilon y_i^{(3)} \frac{\partial Y}{\partial y}.$$

.../...

y_{i+1} est exact à l'ordre 3. Son terme du 4^e ordre est

$$\frac{h^4}{6} \left[(A_{22} \theta^3 - A_{21}) y_1^{(4)} - A_{22} \theta^3 \frac{(3+2\theta)}{2\theta} y_1^{(3)} \frac{\partial y}{\partial y} \right]$$

Le reste sera donc :

$$R = \frac{h^4}{72} \left[(7 - 10 \theta) y_1^{(4)} + 5 \theta (3 + 2\theta) y_1^{(3)} \frac{\partial y}{\partial y} \right] \quad \text{ou encore}$$

$$R = \frac{h^4}{72} \left[(7 - 10 \theta) (C_3 + 3 K_1 C_1) + (10 \theta^2 + 5\theta + 7) J_1 (C_2 + J_1 C_1) \right]$$

Nous voyons aisément que la méthode est optimale pour $\theta = \frac{7}{10}$:

A

0,945	- 0,245	
0,309	- 0,009	0,700

$$R = \frac{77}{360} h^4 J_1 (C_2 + J_1 C_1) \quad S' = 2^3 \frac{77}{180} = \frac{154}{45}$$

Etude du 2^e Cas - Méthode RKL (0 + 2,1)

$$y_{i,1} = Q_{10} y_i + Q_{11} y_{i-1} + h A_{10} Y_i$$

$$y_{i+1} = Q_{20} y_i + Q_{21} y_{i-1} + h (A_{20} Y_i + A_{21} Y_{i,1})$$

$$t_{i,1} = t_i + \theta h \quad Y_{i,1} = Y(y_{i,1}, t_{i,1})$$

$y_{i,1}$ est exact à l'ordre 2, y_{i+1} à l'ordre 3

Nous résolvons donc le système :

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_{10} + Q_{11} = 1 \\ - Q_{11} + A_{10} = \theta \\ \frac{1}{2} Q_{11} = \frac{\theta^2}{2} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} Q_{20} + Q_{21} = 1 \\ A_{20} + A_{21} - Q_{21} = 1 \\ \frac{1}{2} Q_{21} + A_{21} \theta = \frac{1}{2} \\ - \frac{1}{6} Q_{21} + \frac{1}{2} A_{21} \theta^2 = \frac{1}{6} \end{array} \right.$$

Nous obtenons le tableau suivant :

$1 - \theta^2$	θ^2	$\theta(1 + \theta)$	
$\frac{4}{3\theta + 2}$	$\frac{3\theta - 2}{3\theta + 2}$	$\frac{2(3\theta^2 - 1)}{\theta(3\theta + 2)}$	$\frac{2}{\theta(3\theta + 2)}$

Il sera malaisé d'exprimer l'erreur sur un pas, comme d'ailleurs toutes les fois que $\ell \neq 0$.

Nous ne pouvons supposer en effet, que y_{i-1} et y_i sont exacts (sauf, toutefois, au démarrage du calcul) et dans le calcul de l'erreur sur y_{i+1} , nous sommes obligés de tenir compte de l'erreur sur y_i .

Supposons donc que y_{i-1} est une valeur exacte, y_i^* y_{i+1}^* sont les valeurs de y en t_i et t_{i+1} , obtenues par un développement en série de Taylor, exact à l'ordre 4 au moins (leurs points représentatifs sont donc situés sur la courbe intégrale passant par le point représentatif de y_{i-1}).

y_i est la valeur obtenue par l'algorithme, $\tilde{y}_{i+1}$ est situé sur la courbe intégrale passant par y_i et y_{i+1} la valeur de y en t_{i+1} obtenue par l'algorithme.

.../...

Il s'agit donc de calculer $y_{i+1} - \tilde{y}_{i+1}$ en fonction de $C_3, K_1, C_1 \dots$ en t_{i-1} et de $y_i - y_i^*$.

$$\text{Posons } y_i - y_i^* = \frac{h^4}{24} \epsilon_i$$

$$\epsilon_i = \alpha_i C_3 + 3 \beta_i K_1 C_1 + \gamma_i J_1 C_2 + \delta_i J_1^2 C_1$$

$$y_{i,1} = Q_{10} (y_{i-1} + h y'_{i-1} + \frac{h^2}{2} y''_{i-1} + \frac{h^3}{6} y^{(3)}_{i-1}) + Q_{11} y_{i-1}$$

$$+ h A_{10} (y_{i-1} + h y''_{i-1} + \frac{h^2}{2} y^{(3)}_{i-1})$$

$$y_{i,1} = y_{i-1} + (1 + \theta)h y'_{i-1} + (1 + \theta)^2 \frac{h^2}{2} y''_{i-1} + \frac{2\theta^2 + 3\theta + 1}{6} h^3 y^{(3)}_{i-1}$$

$$y_{i,1} = y_{i-1} (1 + \theta) h y''_{i-1} + (1 + \theta)^2 \frac{h^2}{2} y^{(3)}_{i-1} + (1 + \theta)^3 \frac{h^3}{6} y^{(4)}_{i-1} - \theta^2 (1 + \theta)$$

$$\frac{h^3}{6} y^{(3)}_{i-1} \frac{\partial Y}{\partial y}$$

$$y_{i+1} = y_{i-1} + 2h y'_{i-1} + 2h^2 y''_{i-1} + \frac{4h^3}{3} y^{(3)}_{i-1} + \frac{h^4}{24} y^{(4)}_{i-1} [Q_{20} + 4A_{20} + 4(1 + \theta)^3 A_{21}]$$

$$- \frac{h^4}{24} 4A_{21} \theta^2 (\theta + 1) y^{(3)}_{i-1} \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{h^4}{24} Q_{20} \epsilon_i$$

$$y_{i+1} - \tilde{y}_{i+1} = (y_{i+1} - y_{i+1}^*) + (y_{i+1}^* - \tilde{y}_{i+1}) = \frac{h^4}{24} \epsilon_{i+1}$$

$$\text{Or, } y_{i+1}^* - \tilde{y}_{i+1} = y_i^* - y_i + O(h^5)$$

Nous exprimons alors la valeur de ϵ_{i+1}

$$\epsilon_{i+1} = \frac{8\theta^2 - 4}{3\theta + 2} y^{(4)}_{i-1} + \epsilon_i \frac{2 - 3\theta}{3\theta + 2} - \frac{8\theta(\theta + 1)}{3\theta + 2} y^{(3)}_{i-1} \frac{\partial Y}{\partial y}$$

$\alpha_{i+1} = \frac{2 - 3\theta}{2 + 3\theta} \alpha_i + \frac{8\theta^2 - 4}{2 + 3\theta}$	$\beta_{i+1} = \frac{2 - 3\theta}{2 + 3\theta} \beta_i + \frac{8\theta^2 - 4}{2 + 3\theta}$
$\gamma_{i+1} = \frac{2 - 3\theta}{2 + 3\theta} \gamma_i - \frac{4(1 + 2\theta)}{2 + 3\theta}$	$\delta_{i+1} = \frac{2 - 3\theta}{2 + 3\theta} \delta_i - \frac{4(1 + 2\theta)}{2 + 3\theta}$

Nous voyons apparaître un 1er cas particulier important : $\theta = \frac{2}{3}$
 l'erreur sur un pas n'est pas affectée par l'erreur antérieure

$$R = -\frac{h^4}{216} \left[C_3 + 3 K_1 C_1 + 21 J_1 (C_2 + J_1 C_1) \right] ;$$

$$S' = \frac{23}{108} \cdot 2^3 = \frac{46}{27}$$

2^e cas particulier :

Nous pouvons écrire $\alpha_{i+1} - \alpha = k (\alpha_i - \alpha)$

$$k = \frac{2-3\theta}{2+3\theta} ; \alpha = 2\theta^2 - 1 \quad \alpha = 0 \text{ si } \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\alpha_{i+1} \sim -0,03 \alpha_i \quad \gamma_{i+1} \sim -0,03 \gamma_i - 2,34$$

$$\beta_{i+1} \sim -0,03 \beta_i \quad \delta_{i+1} \sim -0,03 \delta_i - 2,34$$

L'erreur sur un pas dépend faiblement de l'erreur antérieure.

Formules d'Obrechhoff d'ordre 3

La formule G₃₀ se ramène à la formule de Taylor.

La formule G₂₁ se ramène à la formule de Duffing.

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{3} (2 y_i + y_{i+1}) + \frac{h^2}{6} y_i''$$

Elle est, en effet, approchée par l'algorithme :

$$\begin{cases} y_{i,1} = y_i + h y_i' + \frac{h^2}{2} y_i'' \\ y_{i+1} = y_i + \frac{h}{3} (2 y_i + y_{i,1}) + \frac{h^2}{6} y_i'' \end{cases}$$

Formule H₂₁

$$y_{i+1} = y_i + h y_i' + \frac{h^2}{6} (2 y_i'' + y_{i+1}'')$$

Elle se met en oeuvre de la manière suivante

$$\begin{cases} y_{i,1} = y_i + h Y_i + \frac{h^2}{2} y_i'' \\ y_{i+1} = y_i + h Y_i + \frac{h^2}{6} (2 y_i'' + y_{i,1}'') \end{cases}$$

La fonction y'' étant connue explicitement, $y_{i,1}''$ est exact au même ordre que $y_{i,1}$. On obtient aisément l'erreur sur un pas :

$$R = -\frac{h^4}{24} y_i^{(4)} \quad S' = \frac{27}{4}$$

Mais nous pouvons l'utiliser avec 2 Hörners : Y_i , $y_{i,1}''$ et nous prenons pour y_i'' la valeur $y_{i-1,1}''$: $S' = 2$

.../...

Comparaison des méthodes d'ordre 3

Les restes, d'ordre 4, de toutes ces méthodes se présentent sous la forme :

$$\frac{h^4}{24} (\alpha C_3 + 3 \beta K_1 C_1 + \gamma J_1 C_2 + \delta J_1^2 C_1)$$

Nous ne possédons évidemment aucun renseignement sur les valeurs numériques de $C_3, K_1 C_1 \dots$ et il n'est pas question d'en rechercher sous peine d'avoir un nombre impressionnant de Hörners à calculer. Pour un problème donné, nous pouvons donner un critère permettant de comparer deux méthodes entre elles :

$$\text{Posons } S = (|\alpha| + |3 \beta| + |\gamma| + |\delta|) \frac{1}{24}$$

Nous dirons que la méthode M_1 est plus précise que la méthode M_2 si $S_1 < S_2$, pour un même nombre de Hörners. Cependant si $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{\delta_1}{\delta_2}$, les méthodes M_1 et M_2 seront directement comparables. Par exemple, nous pouvons affirmer, sans restriction, que la méthode de Nyström est plus précise que la méthode d'Adams.

D'après le critère que nous avons choisi, il semble que la formule de Frey et la méthode utilisant la dérivée au cours du pas (2 Hörners) soient excellentes ; de plus, ces méthodes ne posent pas de problème de démarrage.

Viennent ensuite les méthodes à pas liés usuelles, ce qui est bien connu. Un 3ème groupe est composé de RK optimal et de RKL (0 + 2, 1), les formules d'Obrechhoff). Et enfin, la méthode RK classique (cependant d'une grande simplicité d'emploi).

Les méthodes combinant l'utilisation de dérivées et de valeurs antérieures semblent à rejeter, sauf la formule mixte qui est excellente.

VALEURS DE S' (Ordre 3)Formules de Runge Kutta explicites

Taylor	Classique	Optimale	Nyström
$(0, 0),$ $s' = \frac{27}{4}$	$(\frac{1}{2}, 1)$ $s' = \frac{9}{4}$	$(\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ $s' = \frac{39}{32}$	$(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ $s' = 2$

Formules de Runge Kutta explicites

Simplement implicite		Radau	
4 Hörners	5 Hörners	3 Hörners	4 Hörners
$\theta = \frac{1}{2}$ $s' = \frac{4}{3}$	$\theta = \frac{1}{2}$ $s' = \frac{125}{48}$	$\theta = \frac{1}{3}$ $s' = 2$	$\theta = \frac{1}{3}$ $s' = \frac{80}{27}$

Formules à pas liés

Adams	Nyström	Adams-Moulton
$s' = \frac{9}{4}$	$s' = 2$	$s' = 2$

Formules de dérivation

Au début du pas		Au cours du pas
Optimale	Duffing	Optimale
$s' = \frac{9}{4}$	$s' = \frac{15}{4}$	$s' = \frac{10}{9}$

Formules de Runge Kutta à pas liés

RKL (1+2,0)	RKL (0 + 2,1)	
$\theta = \frac{7}{10}$	$\theta = \frac{2}{3}$	$\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$
$s' = \frac{154}{45}$	$s' = \frac{46}{27}$	$s' = \frac{14}{9}$

Formules à pas liés et dérivation

Adams-Taylor $p = 0$	Nyström-Taylor $p = 1$	$p = 2$	Formule mixte
$s' = \frac{14}{3}$	$s' = \frac{16}{3}$	$s' = 6$	$s' = \frac{1}{3}$

Formules diverses

Obrechhoff H_{21}	Frey
$s' = 2$	$s' = \frac{1}{2}$ ✕

Comme précédemment, nous exposerons les 3 méthodes fondamentales : Formule de Taylor, Méthodes de Runge Kutta puis méthodes à pas liés.

Puis nous combinerons ces principes pour obtenir :

les méthodes de R.K. à pas liés,
l'utilisation de dérivées dans les méthodes à pas liés, et dans les méthodes de R.K.
et enfin, une méthode de Runge Kutta à pas liés, utilisant des dérivées.

Méthodes de Runge Kutta

Ce sont des méthodes à 4 Hörners par pas, à 2 paramètres effectifs et ayant un reste du 5e ordre.

$$\begin{cases} y_{i,1} = y_i + h A_{10} Y_i \\ y_{i,2} = y_i + h [A_{20} Y_i + A_{21} Y_{i,1}] \\ y_{i,3} = y_i + h [A_{30} Y_i + A_{31} Y_{i,1} + A_{32} Y_{i,2}] \\ y_{i+1} = y_i + h [A_{40} Y_i + A_{41} Y_{i,1} + A_{42} Y_{i,2} + A_{43} Y_{i,3}] \end{cases}$$

$$t_{i,1} = t_i + \theta_1 h$$

$$t_{i,2} = t_i + \theta_2 h$$

En exprimant que y_{i+1} est exact à l'ordre 4, nous obtenons un système qui est dégénéré si $\theta_1 = \theta_2$. Il est nécessaire que le 3e paramètre θ_3 soit égal à 1.

Exprimons le reste :

$$h^5 \left\{ \frac{1}{1440} [10 \cdot \theta_1 \theta_2 - 5(\theta_1 + \theta_2) + 3] (C_4 - 4 J_1 C_3) + \frac{1}{240} (3 - 5 \theta_2) (L_1 C_1 - 2 J_1 K_1 C_1) \right. \\ \left. + \frac{1}{240} (2 - 5 \theta_1) (K_1 C_2 - J_1^2 C_2) + \alpha R + \frac{1}{120} (K_1 J_1 C_1 - J_1^3 C_1) \right\}$$

.../...

En cherchant à optimiser, nous trouvons $\theta_1 = \frac{2}{5}$, $\theta_2 = \frac{3}{5}$.

Le reste est alors :

$$h^5 \left[\frac{(C_4 - 4 J_1 C_3)}{3600} + \frac{67}{13 \cdot 200} R + \frac{1}{120} (K_1 J_1 C_1 - J_1^3 C_1) \right]$$

Pour la méthode de Runge Kutta classique ($\theta_1 = \theta_2 = \frac{1}{2}$)

$$h^5 \left[\frac{C_4 - 4 J_1 C_3}{2880} + \frac{R}{160} + \frac{1}{480} (L_1 C_1 - 2 J_1 K_1 C_1 - K_1 C_2 + J_1^2 C_2) \right. \\ \left. + \frac{1}{120} (K_1 J_1 C_1 - J_1^3 C_1) \right]$$

Examinons encore, la formule de Boulton :

$$\theta_1 = \frac{1}{3} , \quad \theta_2 = \frac{2}{3} .$$

Le reste en est :

$$h^5 \left[\frac{C_4 - 4 J_1 C_3}{6480} - \frac{7}{180} R + \frac{1}{720} (K_1 C_2 - J_1^2 C_2 - L_1 C_1 + 2 J_1 K_1 C_1) \right. \\ \left. + \frac{1}{120} (K_1 J_1 C_1 - J_1^3 C_1) \right] .$$

Comme pour les méthodes d'ordre 3, nous appellerons coefficient d'efficacité la somme des modules des coefficients des différents termes de la dérivée d'ordre 5.

A la fin de ce chapitre, nous classerons les méthodes en utilisant ce coefficient d'efficacité.

.../...

Méthodes de Runge Kutta, de type implicite, du 4e ordre.

Nous considérons d'abord les formules simplement implicites :

$$\begin{cases} y_{i,1} = y_i + h(A_{10} Y_i + A_{11} Y_{i,1}) \\ y_{i,2} = y_i + h(A_{20} Y_i + A_{21} Y_{i,1} + A_{22} Y_{i,2}) \\ y_{i+1} = y_i + h(A_{30} Y_i + A_{31} Y_{i,1} + A_{32} Y_{i,2} + A_{33} Y_{i+1}) \end{cases}$$

Nous nous bornerons à prendre un exemple assez simple :

$$\theta_1 = \frac{1}{3} \quad \theta_2 = \frac{2}{3}.$$

$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$		
$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{12}$	
$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Nous avons calculé la partie principale de l'écart :

$$\frac{h^5}{51840} \left[8 C_4 + 48 L_1 C_1 + 24 R + 312 K_1 C_2 + 12 K_1 J_1 C_1 - 2 J_1 C_3 + 99 J_1^2 C_2 - 141 J_1 K_1 C_1 \right] + \frac{173}{311040} J_1^3 C_1.$$

Le coefficient d'efficacité est excellent ; il est de l'ordre de 0,0125. Si nous ne calculions que 3 Hörners, la méthode serait très compétitive. Malheureusement, elle nécessite le calcul de 6, voire 9, Hörners, ce qui la rend inintéressante.

Alors nous considérons maintenant la formule de Runge Kutta-Gauss totalement implicite, d'ordre 4

$$\begin{cases} y_{i,0} = y_i + h(A_{00} Y_{i,0} + A_{01} Y_{i,1}) \\ y_{i,1} = y_i + h(A_{10} Y_{i,0} + A_{11} Y_{i,1}) \\ y_{i+1} = y_i + h(A_{20} Y_{i,0} + A_{21} Y_{i,1}) \end{cases}$$

.../...

En écrivant que y_{i+1} est exact à l'ordre 4, nous obtenons

$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4} + \frac{\delta}{2}$
$\frac{1}{4} - \frac{\delta}{2}$	$\frac{1}{4}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$$\theta_0 + \theta_1 = 1$$

$$\theta_0 \theta_1 = \frac{1}{6}$$

$$\theta_0 - \theta_1 = \delta$$

Le calcul de l'écart est plus long que pour la méthode de Runge Kutta ordinaire puisqu'il n'y a plus, comme dans cette dernière, la limitation $\beta < \alpha$ pour les coefficients $A_{\alpha\beta}$.

Nous avons trouvé l'écart :

$$\frac{h^5}{4320} \left[-C_4 - 6 L_1 C_1 + 222 R + 6 K_1 C_2 + 168 K_1 J_1 C_1 + 12 J_1 K_1 C_1 \right. \\ \left. + 4 J_1 C_3 - 6 J_1^2 C_2 + (9 - 30 \sqrt{3}) J_1^3 C_1 \right]$$

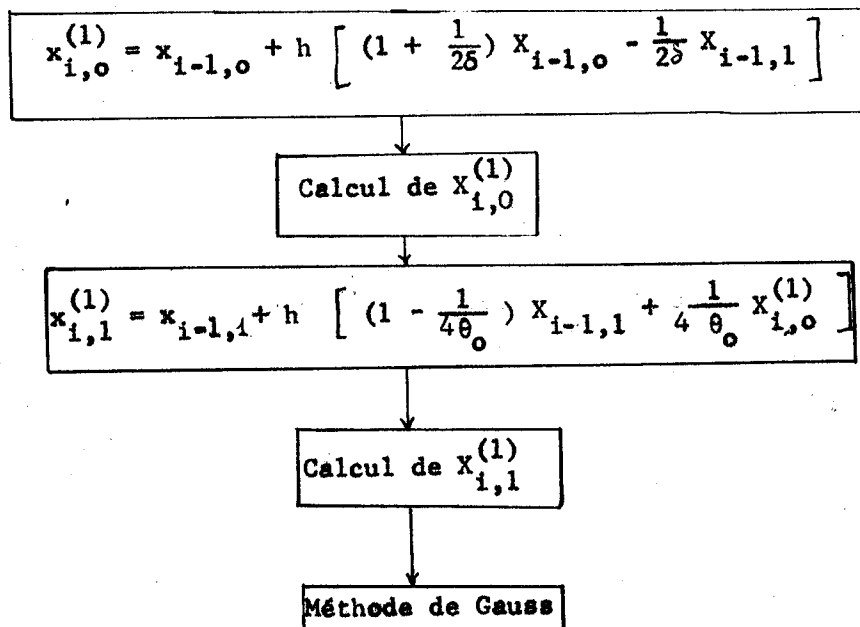
Nous trouvons pour le coefficient d'efficacité la valeur 0,108.

La méthode simplement implicite n'est pas d'une utilisation rentable, car, si même une seule itération suffit pour chacune des valeurs de y calculées, il y a eu une dépense de 6 Hörners. Par contre, nous voyons que la formule de Gauss peut être utilisée avec seulement 4 Hörners, mais son important coefficient d'efficacité la rend peu intéressante dans le cas général.

Prenons pour $y_{1,0}^{(1)}$ et $y_{1,1}^{(1)}$ des valeurs exactes au 2e ordre en utilisant des valeurs calculées au cours du pas précédent.

.../...

Voici l'organigramme de la méthode :



Formules à pas liés explicites.

Nous examinerons les formules du type

$$y_{n+1} = y_{n-p} + h(A Y_n + B Y_{n-1} + C Y_{n-2} + D Y_{n-3})$$

y_{n+1} doit être exact à l'ordre 4 ce qui nous amène à écrire un système linéaire

$$\begin{cases} A + B + C + D = p+1 \\ 2B + 4C + 6D = p^2 - 1 \\ 3B + 12C + 27D = p^3 + 1 \\ 4B + 32C + 108D = p^4 - 1 \end{cases} \quad \text{d'où nous tirons}$$

$$A = \frac{-p^4 + 8p^3 - 22p^2 + 24p + 55}{24}$$

$$B = \frac{3p^4 - 20p^3 + 36p^2 - 59}{24}$$

$$C = \frac{-3p^4 + 16p^3 - 18p^2 + 37}{24}$$

$$D = \frac{p^4 - 4p^3 + 4p^2 - 9}{24}$$

.../...

L'écart avec la solution exacte est R

$$R = \frac{h^5 y_n^{(5)}}{120} \left[p^5 - \frac{15}{2} p^4 + \frac{55}{3} p^3 - 15 p^2 + \frac{251}{6} \right]$$

Nous retrouvons les formules usuelles.

Adams
$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24} (55 Y_n - 59 Y_{n-1} + 37 Y_{n-2} - 9 Y_{n-3}) \\ R = h^5 y_n^{(5)} \frac{251}{720} \end{cases}$$

Nyström
$$\begin{cases} y_{n+1} = y_{n-1} + \frac{h}{24} (64 Y_n - 40 Y_{n-1} + 32 Y_{n-2} - 8 Y_{n-3}) \\ R = \frac{232}{720} h^5 y_n^{(5)} \end{cases} \quad \text{formule faiblement stable}$$

La formule pour p = 3 est optimale :

$$y_{n+1} = y_{n-3} + \frac{h}{3} (8 Y_n - 4 Y_{n-1} + 8 Y_{n-2})$$

$$R = \frac{224}{720} h^5 y_n^{(5)} \quad \text{formule faiblement stable}$$

Formules à pas liés implicites du 4e ordre.

Nous examinerons les formules de la forme

$$y_{n+1} = y_{n-p} + h(A Y_{n+1} + B Y_n + C Y_{n-1} + D Y_{n-2})$$

y_{n+1} devant être exact à l'ordre 4, nous en déduisons le système

$$\begin{cases} A + B + C + D = p + 1 \\ -2A + 2C + 4D = p^2 - 1 \\ -3A + 3C + 12D = p^3 + 1 \\ -4A + 4C - 32D = p^4 - 1 \end{cases}$$

d'où nous tirons

.../...

$$A = \frac{-p^4 + 4p^3 - 4p^2 + 9}{24}$$

$$B = \frac{3p^4 - 8p^3 - 6p^2 + 24p + 19}{24}$$

$$C = \frac{-3p^4 + 4p^3 + 12p^2 - 5}{24}$$

$$D = \frac{(p^2 - 1)^2}{24}$$

$$R = \frac{h^5 y_n^{(5)}}{120} \left[-p^5 + \frac{5p^4}{2} + \frac{5p^3}{3} - 5p^2 + \frac{19}{6} \right]$$

Nous retrouvons les formules usuelles :

$$\text{Adams Moulton} \begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24} (9 y_{n+1}' + 19 y_n' - 5 y_{n-1}' + y_{n-2}') \\ R = \frac{19}{720} h^5 y_n^{(5)} \end{cases}$$

$$\text{Milne-Simpson} \begin{cases} y_{n+1} = y_{n-1} + \frac{h}{3} (y_{n+1}' + 4 y_n' + y_{n-1}') \\ R = \frac{8}{720} h^5 y_n^{(5)} \end{cases}$$

Cette dernière est la formule optimale, elle est particulièrement intéressante, car elle condense l'information antérieure à utiliser et ses coefficients sont particulièrement simples.

Nous remarquerons que les méthodes implicites ^{ont} pour $p \leq 3$ un écart plus faible que les méthodes explicites. Ceci peut donc expliquer leur utilité.

Nous utiliserons une formule de prédiction explicite et une formule de correction implicite. Nous les prendrons du même ordre :

$$\left\{ \begin{array}{l} y_{n+1}^* = y_{n-p} + h(A y_n' + B y_{n-1}' + C y_{n-2}' + D y_{n-3}') \\ \text{calcul de } y_{n+1}^* \\ y_{n+1} = y_{n-q} + h(A' y_{n+1}^{*'} + B' y_n' + C' y_{n-1}' + D' y_{n-2}') \end{array} \right.$$

L'écart sur y_{n+1}^* et donc sur y_{n+1} est du 5e ordre. Il n'influera donc pas sur l'écart sur y_{n+1} .

Optimiser la méthode consiste à bien choisir q ; ici $q = 1$.

Cependant, il a fallu calculer 2 Hörners par pas. Pour tabuler une fonction sur un intervalle donné, avec un nombre de Hörners donné, il faut donc doubler le pas pour la méthode de prédiction correction, et le coefficient d'efficacité est alors multiplié par 16 ($=2^4$). La méthode de Milne est compétitive par rapport à la méthode de Nyström, mais la méthode d'Adams Moulton ne l'est plus par rapport à celle d'Adams. Faisons une dernière remarque : soient R_A , R_N , R_M les écarts pour les formules d'Adams, Nyström, Adams-Moulton :

$$R_A + R_M - R_N = O(h^6)$$

d'où la possibilité d'avoir une méthode d'ordre 5, en combinant ces 3 méthodes.

Méthodes de RK utilisant la dérivée au début du pas

Ce sont des méthodes qui procèdent à la fois du principe de RK et des méthodes de dérivation.

Nous pouvons utiliser une seule dérivée y''
ou deux dérivées y'' , y''' .

ou encore y'' , C_2 , J_1 , C_1

Ce dernier cas est à rejeter, car il nécessite l'utilisation de 5 Hörners.

1er cas. Utilisation de la dérivée seconde

$$y_{1,1} = y_1 + h \theta_1 y'_1 + \frac{h^2 \theta_1^2}{2} y''_1 \quad (A'_1 = \frac{\theta_1^2}{2})$$

$$y_{1,2} = y_1 + h(A_{20} y'_1 + A_{21} y'_{1,1}) + h^2 A'_2 y''_1$$

$$y_{i+1} = y_1 + h(A_{30} y'_1 + A_{31} y'_{1,1} + A_{32} y'_{1,2}) + h^2 A'_3 y''_1$$

$$t_{1,1} = t_1 + h \theta_1 \quad t_{1,2} = t_1 + h \theta_2$$

En exprimant que y_{i+1} est exact à l'ordre 4, nous sommes conduits à résoudre un système de 7 équations.

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{32} \theta_2 + A_{31} \theta_1 + A'_3 = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} (A_{32} \theta_2^2 + A_{31} \theta_1^2) = \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} (A_{32} \theta_2^3 + A_{31} \theta_1^3) = \frac{1}{24} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} A_{32} A_{21} \theta_1 + A_{32} A'_2 + A_{31} A'_1 = \frac{1}{6} \\ A_{32} A_{21} \theta_1 \theta_2 + A_{32} A'_2 \theta_2 + A_{31} A'_1 \theta_1 = \frac{1}{8} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{32} A_{21} A'_1 = \frac{1}{24} \\ A_{32} A_{21} \frac{\theta_1^2}{2} = \frac{1}{24} \end{array} \right.$$

$A_{21} = \frac{\theta_2^2 (\theta_2 - \theta_1)}{\theta_1^2 (3 - 4 \theta_1)}$	
$A_{31} = \frac{4 \theta_2 - 3}{12 \theta_1^2 (\theta_2 - \theta_1)}$	$A_{32} = \frac{3 - 4 \theta_1}{12 \theta_2^2 (\theta_2 - \theta_1)}$
$A'_2 = \frac{[(5 - 4 \theta_1) \theta_1 - 2 \theta_2] \theta_2^2}{2 \theta_1 (3 - 4 \theta_1)}$	$A'_3 = \frac{6 \theta_1 \theta_2 - 4(\theta_1 + \theta_2) + 3}{12 \theta_1 \theta_2}$

L'écart avec la solution exacte est, au 6e ordre près :

$$\frac{h^5}{1440} \left\{ \left[-20 \theta_1 \theta_2 + 15 (\theta_1 + \theta_2) - 12 \right] (C_4 + 6 L_1 C_1) + 12 (5 \theta_2 - 4) (K_1 C_2 + K_1 J_1 C_1) \right. \\ \left. + 12 (5 \theta_1 - 3) J_1 K_1 C_1 + 8 J_1 C_3 - 12 (J_1^3 C_1 + J_1^2 C_2) + \alpha R \right\}$$

La méthode est optimisée si $\theta_1 = \frac{3}{5}$, $\theta_2 = \frac{4}{5}$.

L'écart devient alors :

$$\frac{h^5}{7200} \left[-3(C_4 + 6 L_1 C_1) + 40 J_1 C_3 - 60 (J_1^3 C_1 + J_1^2 C_2) + \frac{11}{9} R \right]$$

Le coefficient d'efficacité est $S = 0,025$; cette méthode est d'efficacité comparable à la méthode de Runge Kutta Optimale.

2ème cas : Utilisation de la dérivée seconde et de la dérivée troisième.

$$\begin{cases} y_{i,1} = y_1 + h \theta y_1' + \frac{h^2 \theta^2}{2} y_1'' + \frac{h^3 \theta^3}{6} y_1''' \\ y_{i+1} = y_1 + h (A_{20} y_1' + A_{21} y_{i,1}') + h^2 A_2' y_1'' + h^2 A_2'' y_1''' \end{cases}$$

En agissant comme pour le cas précédent, nous obtenons

$A_{20} = 1 - \frac{1}{4\theta^3}$	$A_{21} = \frac{1}{4\theta^3}$
$A_2' = \frac{1}{2} - \frac{1}{4\theta^2}$	$A_2'' = \frac{1}{6} - \frac{1}{8\theta}$

L'écart avec la solution exacte est, au 6e ordre près :

$$\frac{h^5}{480} \left\{ (5 \theta_1 - 4) (C_4 + 6 L_1 C_1 + 3 R + 4 K_1 C_2 + 4 K_1 J_1 C_1 - 4(3 J_1 K_1 C_1 + J_1 C_3 + J_1^2 C_2 + J_1^3 C_1)) \right\}.$$

La méthode est optimisée si $\theta_1 = \frac{4}{5}$.

Le coefficient d'efficacité est $S = 0,05$.

Cette méthode est moins bonne que la précédente. Nous voyons ainsi apparaître une efficacité décroissante en passant des méthodes pures de R.K. à la formule de Taylor ($S = 0,2$).

Formule de R.K. utilisant la dérivée au cours du pas.

Au cours de l'étude des méthodes d'ordre 3, nous avons vu :

$$\begin{cases} y_{i,1} = y_i + h A_{10} Y_i + \frac{h^2}{2} A'_{10} D Y_i \\ y_{i+1} = y_i + h (A_{20} Y_i + A_{21} Y_{i,1}) + \frac{h^2}{2} (A'_{20} D Y_i + A'_{21} D Y_{i,1}) \end{cases}$$

Si $\theta = \frac{1}{2}$, $A_{21} = 0$, nous avons une méthode d'ordre 4, avec une dépense de 3 Hörners.

La méthode s'écrit

$$\begin{cases} y_{i,1} = y_i + \frac{h}{2} Y_i + \frac{h^2}{8} y_i'' \\ y_{i+1} = y_i + h Y_i + \frac{h^2}{6} (y_i'' + 2 D Y_{i,1}) \end{cases}$$

L'écart de la solution approchée avec la valeur exacte est :

$$\frac{h^5 y_i^{(5)}}{120} - \frac{\theta^2}{36} h^5 \left[C_4 + 6 L_1 C_1 + 3 R + 3 K_1 (C_2 + J_1 C_1) + J_1 (C_3 + 3 K_1 C_1) \right]$$

Dans ce cas, le coefficient réduit d'efficacité devient

$$S' = 4,9 \quad (3 \text{ Hörners})$$

La méthode semble plus précise que les méthodes du type Runge Kutta pur, mais un peu moins que les méthodes pures à pas liés (Adams, Nystrom), à pas égal.

Considérons maintenant le système de la forme

$$\begin{cases} y_{i,1} = y_i + h A_{10} Y_i + \frac{h^2}{2} A'_{10} D Y_i \\ y_{i,2} = y_i + h (A_{20} Y_i + A_{21} Y_{i,1}) + \frac{h^2}{2} (A'_{20} D Y_i + A'_{21} D Y_{i,1}) \\ y_{i+1} = y_i + h (A_{30} Y_i + A_{31} Y_{i,1} + A_{32} Y_{i,2}) + \frac{h^2}{2} (A'_{30} D Y_i + A'_{31} D Y_{i,1} + A'_{32} D Y_{i,2}) \end{cases}$$

$$Y_{i,1} = Y(t_1 + \theta_1 h, y_{i,1}) \quad Y_{i,2} = Y(t_1 + \theta_1 h, y_{i,2})$$

A priori, cette méthode exige une dépense de 6 Hörners. Mais nous verrons qu'il est possible de ne dépenser que 3 Hörners et d'ailleurs, d'une seule façon.

En exprimant que y_{i+1} est exact à l'ordre 4, que $y_{i,1}$ et $y_{i,2}$ le sont, au moins à l'ordre 1, nous écrirons un système de 10 relations pour les 14 inconnues A_{ij} , θ_α . Nous n'écrirons ce système que dans les cas à 3 Hörners; il n'y a que 4 possibilités.

- 1) Utilisation de Y_1 , $D Y_{i,1}$, $D Y_{i,2}$
- 2) " " Y_1 , $Y_{i,2}$, $D Y_{i,1}$
- 3) " " Y_1 , $Y_{i,1}$, $D Y_{i,2}$
- 4) " " Y_1 , $Y_{i,1}$, $Y_{i,1}$ (R.K. 3)

Seul le 1er cas fournit une solution

$$A_{21} = A_{31} = A_{32} = 0$$

$$A'_{10} = A'_{20} = A'_{30} = 0$$

$$A_{10} = \theta_1 \quad A_{20} = \theta_2$$

$$A_{30} = 1$$

$$A'_{31} = \frac{1 - 2\theta_2}{6\theta_1(\theta_1 - \theta_2)}$$

$$A'_{32} = \frac{2\theta_1 - 1}{6\theta_2(\theta_1 - \theta_2)}$$

$$A'_{21} = \frac{1}{6 A'_{32}}$$

θ_1 et θ_2 sont liés par une relation: $6\theta_1\theta_2 - 2(\theta_1 + \theta_2) + 1 = 0$

L'écart de la solution approchée et de la valeur exacte est, au 6e ordre près

.../...

$$h^5 \left[\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{216} - \frac{1}{270} \right) (C_4 + 9 K_1 J_1 C_1 + J_1 C_3) + \left(\frac{\theta_2}{24} - \frac{1}{40} \right) (R + J_1 K_1 C_1) + \right. \\ \left. + \left(\frac{\theta_1}{24} - \frac{1}{120} \right) (J_1^3 C_1 + J_1^2 C_2) + \left(\frac{\theta_1}{18} + \frac{\theta_2}{72} - \frac{7}{360} \right) K_1 C_2 + \left(\frac{\theta_1}{72} + \frac{\theta_2}{72} - \frac{13}{360} \right) L_1 C_1 \right]$$

Pour optimiser cette méthode, nous annulerons le coefficient de C_4 et nous trouvons

$$\theta_1 = \frac{4 - \sqrt{6}}{10} \quad \theta_2 = \frac{4 + \sqrt{6}}{10}$$

L'écart est de la forme $\lambda h^5 [K_1 C_2 - R + J_1 (J_1 C_2 + J_1^2 C_1 - K_1 C_1)] + \mu h^5 L_1 C_1$

$$\lambda = \frac{\sqrt{6} - 2}{240} \quad \mu = -\frac{10 + \sqrt{6}}{240}$$

Le coefficient d'efficacité est 0,06.

Mais comme la dépense n'est que de 3 Hörners, le coefficient réduit est

$$S' = 5$$

La méthode est très compétitive, mais légèrement moins que la précédente et sa mise en oeuvre est plus lourde :

$$\begin{cases} y_{i,1} = y_i + h \theta_1 Y_1 \\ y_{i,2} = y_i + h \theta_2 Y_1 + \frac{9 + \sqrt{6}}{50} h^2 D Y_{i,1} \\ y_{i+1} = y_i + h Y_1 + \frac{h^2}{36} [(9 + \sqrt{6}) D Y_{i,1} + (9 - \sqrt{6}) D Y_{i,2}] \end{cases}$$

Méthodes à pas liés utilisant des dérivées.

Considérons d'abord des formules du type

$$y_{i+1} = y_{i-p} + h(A Y_1 + B Y_{i-1} + C Y_{i-2}) + a h^2 y_i''$$

.../...

En écrivant que y_{i+1} est identique à son développement de Taylor à l'ordre le plus élevé possible, nous obtenons un système, dont la résolution donne

$$\begin{aligned} A &= & B &= \frac{-3p^4 + 8p^3 + 11}{12} \\ C &= \frac{3p^4 - 4p^3 - 7}{48} & a &= \end{aligned}$$

L'écart avec la vraie valeur est

$$\frac{h^5 y_1^{(5)}}{1440} (-12p^5 + 45p^4 - 40p^3 - 97)$$

La formule la moins mauvaise semble être, pour $p = 2$

$$y_{i+1} = y_{i-2} + \frac{h}{16} (9y_i + 36y_{i-1} + 3y_{i-2}) + \frac{9h^2}{8} y_1''$$

l'écart en est $-\frac{9}{160} h^5 y_1^{(5)}$.

Son coefficient réduit d'efficacité est $S' = 21,6$. L'écart, à pas éga est inférieur à celui de la méthode d'Adams ou à celui de la méthode de Nystrom, m il faut calculer un Hörner de plus.

Considérons maintenant des formules du type

$$y_{i+1} = y_{i-p} + h(A y_i + B y_{i-1}) + a h^2 y_1'' + b h^3 y_1'''.$$

La résolution d'un système linéaire, exprimant que y_{i+1} est exact à l'ordre le plus élevé possible nous donne :

$$\begin{aligned} A &= \frac{-p^4 + 4p + 5}{4} & B &= \frac{p^4 - 1}{4} \\ a &= \frac{(p^2 - 1)^2}{4} & b &= \frac{-3p^4 + 4p^3 + 7}{24} \end{aligned}$$

L'écart avec la valeur exacte est $\frac{h^5 y_1^{(5)}}{480} [-4p^5 + 5p^4 - 9]$.

.../..

Il présente un minimum pour $p = 1$

$$y_{i+1} = y_{i-1} + 2h Y_i + \frac{h^3}{3} y_i'''$$

$$R = - \frac{h^5 y_i^{(5)}}{60}.$$

C'est, en fait, une méthode à 2 Hörners, elle est nettement meilleure que la précédente, Malheureusement, elle est faiblement stable.

Son coefficient d'efficacité réduit est $S' = 6,4$.

Méthodes de Runge Kutta à pas liés d'ordre 4.

Une méthode de R.K. à pas liés dépend de 3 indices :

ℓ : nombre de y antérieurs utilisés

r : nombre de Y antérieurs utilisés

s : nombre de Hörners $s = 2, 3$.

L'ordre de la méthode est, en général $r + s + \ell$.

Pour les méthodes d'ordre 4, il y a donc 5 possibilités. Lorsque $\ell = 0$, il est assez facile d'établir l'expression de l'écart; si $\ell \neq 0$, l'écart en un point dépend des écarts antérieurs.

Lorsque $s = 2$, la valeur $y_{1,1}$ intermédiaire est d'ordre 3, y_{i+1} étant d'ordre 4 ; il est facile alors de trouver les coefficients sans passer par l'intermédiaire d'un tableau.

Méthode RKL (2 + 2, 0)

$$y_{1,1} = y_1 + h(A_{30} Y_1 + A_{31} Y_{1-1} + A_{32} Y_{1-2})$$

$$y_{i+1} = y_1 + h(A_{40} Y_1 + A_{41} Y_{1-1} + A_{42} Y_{1-2} + A_{43} Y_{1,1})$$

Cas particulier : Si $\theta = 1$, nous obtenons une méthode de prédiction-
.../...
correction combinant les formules d'Adams et d'Adams-Moulton du 4^e ordre.

En écrivant que $y_{i,1}$ est exact à l'ordre 3, y_{i+1} à l'ordre 4 :

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{40} + A_{41} + A_{42} + A_{43} = 1 \\ -A_{41} - 2A_{42} + \theta A_{43} = \frac{1}{2} \\ \frac{A_{41}}{2} + 2A_{42} + \frac{\theta^2}{2} A_{43} = \frac{1}{6} \\ -\frac{A_{41}}{6} - \frac{8A_{42}}{6} + \frac{\theta^3}{6} A_{43} = \frac{1}{24} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} A_{30} + A_{31} + A_{32} = \theta \\ -A_{31} - 2A_{32} = \frac{\theta^2}{2} \\ \frac{A_{31}}{2} + 2A_{32} = \frac{\theta^3}{6} \end{array} \right.$$

Tableau des A

$\frac{\theta(2\theta^2 + 9\theta + 12)}{12}$	$-\frac{\theta^2(\theta + 3)}{3}$	$\frac{\theta^2(2\theta + 3)}{12}$	
$\frac{46\theta - 27}{24\theta}$	$\frac{11 - 16\theta}{12(\theta + 1)}$	$\frac{10\theta - 7}{24(\theta + 2)}$	$\frac{9}{4\theta(\theta+1)(\theta+2)}$

$$y_{i,1} = y_i + h\theta y_i' + \dots + \frac{h^4 \theta^4}{24} y_i^{(4)} - \frac{h^4}{24} \theta^2 (\theta + 2)^2 y_i^{(4)}$$

$$y_{i,1} = Y_i + h\theta y_i'' + \dots + \frac{h^4 \theta^4}{24} y_i^{(5)} - \frac{h^4}{24} \theta^2 (\theta + 2)^2 y_i^{(4)} \frac{\partial Y}{\partial y}$$

L'écart de y_{i+1} avec la solution exacte (au moins à l'ordre 5) est

$$\frac{h^5}{120} y_i^{(5)} \left[5A_{41} + 80A_{42} + 5\theta^4 A_{43} - 1 \right] - \frac{h^5}{24} \theta^2 (\theta + 2)^2 A_{43} y_i^{(4)} \frac{\partial Y}{\partial y}$$

ou encore :

$$\frac{h^5}{1440} \left[(135\theta - 97)(C_4 + 3R + 4K_1 C_2 + 4K_1 J_1 C_1 + 6L_1 C_1) - \frac{232\theta + 97}{\theta + 1} (J_1 C_3 + 3J_1 K_1 C_1 + J_1^3 C_1 + J_1^2 C_2) \right]$$

Un calcul fastidieux montre que l'optimisation est atteinte pour $\theta = \frac{97}{135} = 0,7185 \dots$ Le coefficient d'efficacité est alors 0,64. Mais le coefficient réduit d'efficacité est 40,2 car il y a eu une dépense de 2 Hörners seulement.

Méthode RKL (1 + 3, 0)

Comme pour la méthode précédente et comme pour les méthodes pures de RK, l'écart en t_{i+1} ne dépendra pas des écarts aux points antérieurs. Il sera possible d'utiliser le tableau général, pour calculer les coefficients et pour exprimer l'écart

$$\begin{cases} y_{i,1} = y_i + h (A_{20} Y_i + A_{21} Y_{i-1}) \\ y_{i,2} = y_i + h (A_{30} Y_i + A_{31} Y_{i-1} + A_{32} Y_{i,1}) \\ y_{i+1} = y_i + h (A_{40} Y_i + A_{41} Y_{i-1} + A_{42} Y_{i,1} + A_{43} Y_{i,2}) \end{cases}$$

$$t_{i,1} = t_i + \theta_2 h$$

$$t_{i,2} = t_i + \theta_3 h$$

$$\begin{cases} -A_{41} + A_{42} \theta_2 + A_{43} \theta_3 = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} A_{41} + \frac{1}{2} A_{42} \theta_2^2 + \frac{1}{2} A_{43} \theta_3^2 = \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} A_{41} + \frac{1}{6} A_{42} \theta_2^3 + \frac{1}{6} A_{43} \theta_3^3 = \frac{1}{24} \end{cases} \quad A_{40} + A_{41} + A_{42} + A_{43} = 1$$

$$\begin{cases} A_{43} (A_{32} \theta_2 - A_{31}) - A_{42} A_{21} = \frac{1}{6} \\ A_{43} \theta_3 (A_{32} \theta_2 - A_{31}) - A_{42} A_{21} \theta_2 = \frac{3}{24} \\ A_{43} (\frac{1}{2} A_{32} \theta_2^2 - \frac{1}{2} A_{31}) + \frac{1}{2} A_{42} A_{21} = \frac{1}{24} \\ -A_{43} A_{32} A_{21} = \frac{1}{24} \end{cases} \quad \begin{cases} A_{30} + A_{31} + A_{32} = \theta_3 \\ A_{20} + A_{21} = \theta_2 \end{cases}$$

Ces relations sont compatibles si $\theta_3 = 1$, ce qui va de soi puisque nous avons à faire avec une méthode de RK ordinaire où nous aurions posé $\theta_1 = -1$.

.../...

Exprimons l'écart :

$$\frac{h^5}{1440} \left[(8 - 15 \theta_2) C_4 + (60 \theta_2 - 32) J_1 C_3 + (30 \theta_2 - 18)(2 J_1 K_1 C_1 - L_1 C_1') \right. \\ \left. - (42 J_1^2 C_2 + 12 J_1^3 C_1 + 18 K_1 C_2 - 12 K_1 J_1 C_1') + \alpha R \right]$$

La formule est optimisée pour $\theta_2 = \frac{3}{5}$.

Puisque 3 Hörners ont seulement été dépensés, le coefficient réduit d'efficacité est $S' = 5,4$.

Méthode RKL (1 + 2, 1).

$$\begin{cases} y_{i,1} = Q_{20} y_i + Q_{21} y_{i-1} + h(A_{20} y_i + A_{21} y_{i-1}) \\ y_{i+1} = Q_{30} y_i + Q_{31} y_{i-1} + h(A_{30} y_i + A_{31} y_{i-1} + A_{32} y_{i,2}) \end{cases}$$

$$t_{i,1} = t_i + \theta h.$$

$y_{i,1}$ est exact à l'ordre 3, y_{i+1} est exact à l'ordre 4 :

$$\begin{cases} Q_{20} + Q_{21} = 1 \\ -Q_{21} + A_{20} + A_{21} = \theta \\ Q_{21} - 2A_{21} = \theta^2 \\ -Q_{21} + 3A_{21} = \theta^3 \end{cases} \quad \begin{cases} Q_{30} + Q_{31} = 1 \\ -Q_{31} + A_{30} + A_{31} + A_{32} = 1 \\ Q_{31} - 2A_{31} + 2A_{32} \theta = 1 \\ -Q_{31} + 3A_{31} + 3A_{32} \theta^2 = 1 \\ Q_{31} - 4A_{31} + 4A_{32} \theta^3 = 1 \end{cases}$$

Q

$1 - \theta^2 (3 + 2 \theta)$	$\theta^2 (3 + 2 \theta)$
$+ \frac{8 (1 - \theta)}{1 + 2 \theta}$	$\frac{10 \theta - 7}{1 + 2 \theta}$

A

$\theta(1 + \theta)^2$	$\theta^2(1 + \theta)$	
$\frac{8\theta^2 - 2\theta - 2}{\theta(1 + 2\theta)}$	$\frac{4\theta^2 - 2}{(1+\theta)(1 + 2\theta)}$	$\frac{2}{\theta(1 + \theta)(1 + 2\theta)}$

Dans le calcul de l'écart sur y_{i+1} nous tiendrons compte de l'écart sur y_i .

y_{i-1} est la valeur exacte, y_i^* , y_{i+1}^* les valeurs de y en t_i et t_{i+1} obtenues par un développement en série de Taylor exact à l'ordre 5 en t_{i-1} .

y_i , la valeur obtenue par l'algorithme, $\tilde{y}_{i+1}$ est situé sur la courbe intégrale passant par y_i et y_{i+1} est la valeur obtenue par l'algorithme.

Il s'agira donc de calculer $y_{i+1} - \tilde{y}_{i+1}$ en fonction des valeurs de C_4 , J_1 , C_3 ... prises en t_{i-1} et de $y_i - y_i^*$.

Nous poserons $y_i - y_i^* = \frac{h^5}{120} \epsilon_i$.

$$y_{i,1} = Q_{20} (y_{i-1} + h y'_{i-1} + \frac{h^2}{2} y''_{i-1} + \frac{h^3}{6} y'''_{i-1} + \frac{h^4}{24} y^{(4)}_{i-1}) + Q_{21} y_{i-1} \\ + h A_{20} (y_{i-1} + h y''_{i-1} + \frac{h^2}{2} y'''_{i-1} + \frac{h^3}{6} y^{(4)}_{i-1}) + h A_{21} y_{i-1}$$

$$y_{i,1} = y_{i-1} + (1 + \theta)h y'_{i-1} + (1 + \theta)^2 \frac{h^2}{2} y''_{i-1} + (1 + \theta)^3 \frac{h^3}{6} y'''_{i-1} + (1 + \theta)^4 \frac{h^4}{24} y^{(4)}_{i-1} \\ - \frac{h^4}{24} \theta^2 (1 + \theta)^2 y^{(4)}_{i-1}$$

$$y_{i,1} = y_{i-1} + (1 + \theta)h y''_{i-1} + \dots + (1 + \theta)^4 \frac{h^4}{24} y^{(5)}_{i-1} - \frac{h^4}{24} \theta^2 (1 + \theta)^2 y^{(4)}_{i-1} \frac{\partial y}{\partial y}$$

$$y_{i+1} = y_{i-1} + \dots + \frac{h^5}{120} y^{(5)}_{i-1} \left[Q_{30} + 5 A_{30} + 5(1 + \theta)^4 A_{32} \right] + \frac{h^5}{120} Q_{30} \epsilon_i \\ - \frac{h^5}{24} \theta^2 (\theta + 1)^2 A_{32} y^{(4)}_{i-1} \frac{\partial y}{\partial y}$$

..../...

$$y_{i+1}^* = y_{i-1} + 2 h y_{i-1}' + \dots + \frac{32 h^5}{120} y_{i-1}^{(5)}$$

$$\tilde{y}_{i+1} - y_{i+1}^* = y_i - y_i^* + O(h^6) = \frac{h^5}{120} \epsilon_i + O(h^6)$$

$$y_{i+1} - \tilde{y}_{i+1} = (y_{i+1} - y_{i+1}^*) + (y_{i+1}^* - \tilde{y}_{i+1}) =$$

$$= \frac{h^5}{120} y_{i-1}^{(5)} \left[Q_{30} + 5 A_{30} + 5 A_{32} (1 + \theta)^4 - 32 \right] - \frac{h^5}{120} Q_{31} \epsilon_i$$

$$- \frac{h^5}{24} \theta^2 (1 + \theta)^2 A_{32} y_{i-1}^{(4)} \frac{\partial y}{\partial y}$$

$$\epsilon_i = \lambda_i^{(1)} C_4 + \lambda_i^{(2)} R + \lambda_i^{(3)} K_1 C_2 + \lambda_i^{(4)} K_1 J_1 C_1 + \lambda_i^{(5)} L_1 C_1$$

$$+ \mu_i^{(1)} J_1 C_3 + \mu_i^{(2)} J_1 K_1 C_1 + \mu_i^{(3)} J_1^3 C_1 + \mu_i^{(4)} J_1^2 C_2$$

Nous trouvons :

$$\left\{ \begin{aligned} \lambda_{i+1}^{(j)} &= \frac{7 - 10 \theta}{1 + 2 \theta} \lambda_i^{(j)} + \frac{10 \theta^3 + 64 \theta^2 - 32 \theta - 14}{(1 + \theta)(1 + 2 \theta)} \\ \mu_{i+1}^{(j)} &= \frac{7 - 10 \theta}{1 + 2 \theta} \mu_i^{(j)} + \frac{44 \theta^2 - 42 \theta - 14}{(1 + \theta)(1 + 2 \theta)} \end{aligned} \right.$$

Cas particulier : $\theta = 0,7$

L'écart ϵ_{i+1} ne dépend plus de l'écart ϵ_i .

$$\lambda_{i+1} = -0,39$$

$$\mu_{i+1} = -5,10$$

Le coefficient d'efficacité est

$$\frac{1}{120} (18 \times 0,39 + 6 \times 5,10) = 0,312$$

.../...

Deux Hörners ont été utilisés seulement.

Il s'ensuit que le coefficient réduit est $S' = 5$.

La méthode RKL (1 + 2,1) peut être considérée comme rentable. Autre Cas particulier : $\theta = 0,713 \dots$

$$\theta \text{ est racine de } 10 \theta^3 + 64 \theta^2 - 32 \theta - 14 = 0$$

$$\lambda_{i+1} = -0,054 \lambda_i$$

$$\mu_{i+1} = -0,054 \mu_i - 5,19.$$

Formules d'Obrechhoff d'ordre 4

Les formules G_{40} , H_{40} se réduisent évidemment à la formule de Taylor.

$$\text{Formule } \underline{G_{31}} \quad y_{i+1} = y_i + \frac{h}{4} (3y_i + y_{i+1}) + \frac{h^2}{4} y_i'' + \frac{h^3}{24} y_i'''$$

L'algorithme d'utilisation se réduit à une méthode utilisant les dérivées 2ème et 3ème au début du pas, avec $\theta = 1$.

$$\begin{cases} y_{i,1} = y_i + h y_i' + \frac{h^2}{2} y_i'' + \frac{h^3}{6} y_i''' \\ y_{i+1} = y_i + \frac{h}{4} (3y_i + y_{i,1}) + \frac{h^2}{4} y_i'' + \frac{h^3}{24} y_i''' \end{cases}$$

$$\text{Formule } \underline{F_2} \quad y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} (y_i + y_{i+1}) + \frac{h^2}{12} (y_i'' - y_{i+1}'')$$

Cette formule est approchée par l'algorithme suivant :

$$\begin{cases} y_{i,1} = y_i + h y_i' + \frac{h^2}{2} y_i'' \\ y_{i,2} = y_i + \frac{h}{2} (y_i + y_{i,1}) + \frac{h^2}{12} (y_i'' - y_{i,1}'') \\ y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} (y_i + y_{i,2}) + \frac{h^2}{12} (y_i'' - y_{i,2}'') \end{cases}$$

$y_{i,1} \cdot y''_{i,1}$ sont aussi exacts au 2ème ordre. D'où :

$$y_{i,2} = y_i + \dots + \frac{h^3}{6} y_i^{(3)} + \frac{h^4}{24} [C_3 + 3K_1 C_1 - J_1 (C_2 + J_1 C_1)]$$

$$Y_{i,2} = Y_i + \dots + \frac{h^3}{6} y_i^{(4)} + \frac{h^4}{24} y_i^{(5)} + \frac{h^4}{24} [9R - 2J_1^2 (C_2 + J_1 C_1)]$$

$$y_{i+1} = y_i + \dots + \frac{h^4}{24} y_i^{(4)} + \frac{h^5}{120} y_i^{(5)} + \text{Reste}$$

$$\begin{aligned} \text{L'écart est : } & \left\{ \frac{1}{720} [C_4 + 6 L_1 C_1 + 4 K_1 (C_2 + J_1 C_1) + J_1 (C_3 + 3K_1 C_1)] \right. \\ & \left. - \frac{132}{720} R + \frac{31}{720} J_1^2 (C_2 + J_1 C_1) \right\} h^5 \end{aligned}$$

Le coefficient d'efficacité $S = \frac{213}{720}$ est mauvais et la méthode ne présente pas grand intérêt.

Formule H₃₁ $y_{i+1} = y_i + hY_i + \frac{h^2}{2} y''_i + \frac{h^3}{24} (3y_i^{(3)} + y_{i+1}^{(3)})$

Elle est approchée par l'algorithme suivant :

$$\begin{cases} y_{i,1} = y_i + hY_i + \frac{h^2}{2} y''_i + \frac{h^3}{6} y'''_i \\ y_{i+1} = y_i + hY_i + \frac{h^2}{2} y''_i + \frac{h^3}{24} (3y_i^{(3)} + y_{i,1}^{(3)}) \end{cases}$$

$y_{i,1}^{(3)}$ est exact à l'ordre 3, puisque donné de façon explicite :

$$\text{L'écart est } R = \frac{h}{80} y_i^{(5)} \quad S = 0,3$$

Nous pouvons n'utiliser que 3 Hörners : y'''_{i+1} étant remplacé par $y_{i,1}^{(3)}$. Alors $S' = 24,3$.

Nous voyons, qu'en général, les formules du type d'Obrechhoff ne ne sont pas très rentables.

VALEURS DE S' (Ordre 4)

Formules de Runge Kutta explicites

Taylor	Classique	Optimale	Boulton
$(0, 0)$	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	$(\frac{2}{5}, \frac{3}{5})$	$(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$
$S' = 51$	$S' = 8,7$	$S' = 5,9$	$S' = 16$

FORMULES A PAS LIES

Adams	Nyström	Moulton	Simpson
$S' = 8,4$	$S' = 7,7$	$S' = 10$	$S' = 4,3$

Formules utilisant des dérivées

Dérivée 2 ^e , au début du pas	Dérivées 2 ^e et 3 ^e	Au cours du pas	Au cours du pas, 2 pts intermédiaires
optimale $S' = 6,4$	optimale $S' = 12,8$	3 Hörners $S' = 4,9$	$S' = 5,9$

Formules de Runge Kutta à pas liés

RKL (2+2, 0) optimale	RKL (1+3, 0)	RKL (1+2, 1)
$S' = 10,2$	$S' = 5,4$	$S' = 5$

Exemples numériques sur quelques méthodes d'ordre 3.

1) Méthode d'Adams-Taylor (p.19)

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{3} (2 Y_i + Y_{i-1}) + \frac{5h^2}{6} y_i''$$

2) Méthode mixte (p.19)

$$y_{i+1} = \frac{1}{2} (y_{i-1} + y_{i-2}) + \frac{h}{6} (4 Y_i + 11 Y_{i-1}) + \frac{13}{12} h^2 y_i''$$

3) Méthode de Frey optimale (p.20)

4) Méthode utilisant la dérivée au cours du pas.

$$\begin{cases} y_{i,1} = y_i + \frac{h}{3} Y_i \\ y_{i+1} = y_i + h Y_i + \frac{h^2}{2} y_{i,1}'' \end{cases}$$

Pour les méthodes (1) et (2) : 2 hörners donc pas = 0,066...)

Pour les méthodes (3) et (4) : 3 hörners donc pas = 0,1)

$$\text{Equation } \begin{cases} y' = y - 1,5 \exp(-0,5 t) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

t	Valeur exacte	Ecart x 10 ⁸			
		(1)	(2)	(3)	(4)
0					
0,2	0,90483743	25	0	202	162
0,4	0,81873079	68	0	428	343
0,6	0,74081826	115	0	687	551
0,8	0,67032009	170	0	990	794
1	0,60653071	235	1	1345	1079
2	0,36787952	805	8	4475	3589
3	0,22313026	2296	33		
4	0,13523538	6306	96		
5	0,08208510	17186	270		

$$\text{Equation } \begin{cases} y' = -ty \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

t	Valeur exacte	Ecart x 10 ⁸			
		(1)	(2)	(3)	(4)
0					
0,2	0,98019868	117	- 53	2	148
0,4	0,92311637	2458	- 119	22	2373
0,6	0,83527026	3105	- 181	85	2728
0,8	0,72614911	2948	- 215	217	2671
1	0,60653076	2122	- 210	429	2058
2	0,13533539	- 1642	47	1785	478
3	0,01110902	115	6		
4	0,00033546	117	- 6		
5	0,00000373	7	0		

$$\text{Equation } \begin{cases} y' = -2ty^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

t	Valeur exacte	Ecart x 10 ⁸			
		(1)	(2)	(3)	(4)
0					
0,2	0,96153848	7685	- 865	- 102	9420
0,4	0,86206900	9253	- 2525	92	9845
0,6	0,73529416	2569	- 1151	748	4900
0,8	0,60975616	- 3130	- 488	1351	1413
1	0,5	- 5019	- 79	1655	563
2	0,2	- 795	23	990	1754
3	0,1	72	6		
4	0,05882356	101	- 4		
5	0,03846157	67	- 1		

$$\text{Equation } \begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

t	Valeur exacte	Ecart x 10 ⁸			
		(1)	(2)	(3)	(4)
0					
0,2	1,22140272	437	- 6	328	941
0,4	1,49182463	1325	- 10	802	2303
0,6	1,82211865	2580	- 23	1467	4215
0,8	2,22554067	4328	- 39	2388	6864
1	2,71828142	6721	- 62	3648	10479
2	7,38905299	37712	- 441	19800	56940
3	20,08551836	154924	- 2384		
4	54,59807158	563527	- 9822		
5	148,41280365	1912308	- 42343		

Exemples numériques sur quelques méthodes d'ordre 4.

Nous nous intéresserons surtout aux méthodes de Runge-Kutta utilisant la dérivée suivante, ou à pas liés.

1) Méthode RKL (2 + 2, 0) optimale $\theta = 0,71851852$

1,16754493	- 0,63991842	0,19089200	
0,35094501	- 0,02406609	0,00283832	0,67028276

2) Méthode RKL (2 + 2, 0) $\theta = 1$

Elle se ramène à une formule implicite à pas liés mise en oeuvre par une méthode de prédiction - correction.

1,91666...	- 1,333...	0,4166...	
0,79166...	- 0,20833...	0,04166...	0,375...

3) Méthode RKL (1 + 2, 1)

Nous avons pris $\theta = 0,7$; l'écart en un point ne dépend pas des écarts antérieurs

Q

- 1,156	2,156
1	0

A

2,023	0,833	
0,30952378	- 0,00980393	0,70028013

4) Méthode RKL (1 + 3, 0) Optimale $\theta = 0,6$

Equation $\left\{ \begin{array}{l} \frac{dy}{dt} = y - 1,5 \exp (- 0,5 t) \\ y (0) = 1 \end{array} \right.$

t	Valeur exacte	Ecart s x 10 ⁸				
		(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
0						
0,3	0,86070798	1	1	13	93	6
0,6	0,74081823	6	6	30	240	13
0,9	0,63762817	13	14	54	425	24
1,2	0,54881166	22	22	85	660	39
1,5	0,47236659	33	34	123	967	58
1,8	0,40657970	46	47	173	1368	82
2,1	0,34993779	65	67	242	1902	114
3	0,22313030	173	177	623	4857	292
4,5	0,10539925	795	815	2833	22016	1328

$$\text{Equation } \begin{cases} \frac{dy}{dt} = y - 1,5 \exp(-0,5 t) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

t	Valeur exacte	Ecart s x 10 ⁸				
		(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
0						
0,3	0,86070798	2	+ 3	3	- 1	5
0,6	0,74081823	4	8	9	- 2	11
0,9	0,63762817	8	16	17	- 1	20
1,2	0,54881166	13	26	27	- 1	34
1,5	0,47236659	20	40	41	- 2	53
1,8	0,40656970	27	56	57	- 2	74
2,1	0,34993779	37	78	79	- 3	103
3	0,22313020	96	199	202	- 5	266
4,5	0,10539925	437	904	919	- 23	1205

Equation $\begin{cases} y' = -ty \\ y(0) = 1 \end{cases}$

$$\ln y = -\frac{t^2}{2}$$

↓

t	Valeur exacte	Ecart x 10 ⁸				
		(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
0						
0,3	0,95599750	- 6	- 1	9	33	3
0,6	0,83527023	- 19	2	15	164	8
0,9	0,66697685	- 15	36	21	276	21
1,2	0,48675230	+ 14	66	33	268	39
1,5	0,32465252	53	103	47	121	53
1,8	0,19789874	76	113	52	- 89	53
2,1	0,11025056	72	91	45	- 266	53
3	0,01110901	- 7	- 13	- 1	- 260	- 5
4,5	0,00004006	- 3	- 3	- 2	- 9	- 2

$$\text{Equation } \begin{cases} y' = -ty \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

t	Valeur exacte	Ecart s x 10 ⁸				
		(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
0						
0,3	0,99599750	- 2	3	11	4	3
0,6	0,83527023	- 12	5	29	12	- 1
0,9	0,66697684	- 18	7	43	31	2
1,2	0,48675230	- 14	9	39	55	16
1,5	0,32465253	- 3	9	22	67	32
1,8	0,19789876	4	6	1	50	39
2,1	0,11025058	3	2	- 15	11	25
3	0,01110900	- 14	- 5	- 13	- 67	- 3
4,5	0,00004006	- 2	0	0	- 5	- 1

$$\text{Equation } \begin{cases} y' = -2ty^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

t	Valeur exacte	Ecart x 10 ⁸				
		(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
0						
0,3	0,91743120	- 155	47	- 74	368	37
0,6	0,73529415	29	401	12	876	181
0,9	0,55248621	273	497	135	526	198
1,2	0,40983609	247	344	128	40	133
1,5	0,30769233	150	192	83	- 218	74
1,8	0,23584908	80	100	49	- 297	40
2,1	0,18484291	42	52	29	- 291	22
3	0,1	6	7	10	- 175	6
4,5	0,04705884	1	2	5	- 64	3

$$\text{Equation } \begin{cases} y' = -2ty^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

t	Valeur exacte	Ecart x 10 ⁸				
		(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
0						
0,3	0,91743120	- 129	5	250	14	- 67
0,6	0,73529413	- 126	19	282	203	27
0,9	0,55248620	- 29	16	117	243	117
1,2	0,40983609	- 2	10	42	140	101
1,5	0,30769234	- 5	7	24	53	62
1,8	0,23584909	- 8	5	19	11	35
2,1	0,18484291	- 9	3	16	- 7	19
3	0,1	- 7	1	7	- 10	3
4,5	0,04705884	0	3	4	- 3	3

$$\text{Equation } \begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

t	Valeur exacte	Ecart x 10 ⁸				
		(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
0						
0,3	1,34985879	13	7	1	34	21
0,6	1,82211877	34	20	4	93	49
0,9	2,45960301	65	42	9	188	95
1,2	3,32011667	107	66	9	337	167
1,5	4,48168850	167	89	0	566	262
1,8	6,04964644	263	131	- 6	917	423
2,1	8,16616809	393	190	- 12	1419	643
3	20,08552957	1288	620	- 95	5030	2218
4,5	90,01707745	8222	3529	- 1335	32520	14115

$$\text{Equation } \begin{cases} y' = -y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

t	Valeur exacte	Ecart x 10 ⁸				
		(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
0						0
0,3	0,74081823	- 9	- 11	4	- 145	- 2
0,6	0,54881166	- 15	- 17	11	- 424	- 3
0,9	0,40656968	- 18	- 21	11	- 493	- 3
1,2	0,30119424	- 18	- 20	12	- 497	- 2
1,5	0,22313018	- 18	- 20	10	- 466	- 1
1,8	0,16529891	- 16	- 18	9	- 417	0
2,1	0,12245645	- 13	- 15	8	- 363	- 1
3	0,04978709	- 7	- 8	6	- 213	0
4,5	0,01110901	- 1	- 1	3	- 72	0

$$\text{Equation } \begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

t	Valeur exacte	Ecart x 10 ⁸				
		(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
0	1,3					
0,3	1,34985879	21	21	11	493	21
0,6	1,82211874	64	67	59	1551	50
0,9	2,45960298	140	146	128	3284	101
1,2	3,32011667	250	271	236	6035	176
1,5	4,48168862	423	465	394	10306	280
1,8	6,04964679	709	762	645	16827	446
2,1	8,16616857	1097	1180	1001	26231	655
3	20,08552718	3409	3671	3075	94510	2194
4,5	90,01701260	17739	19837	15736	640107	13638

$$\text{Equation } \begin{cases} y' = -y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

t	Valeur exacte	Ecart x 10 ⁸				
		(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
0						
0,3	0,74081823	- 4	1	5	- 17	- 3
0,6	0,54881164	- 6	3	7	- 26	- 5
0,9	0,40656967	- 6	3	8	- 29	- 4
1,2	0,30119424	- 5	5	10	- 27	- 3
1,5	0,22313019	- 4	5	10	- 26	- 2
1,8	0,16529892	- 3	5	9	- 23	0
2,1	0,12245645	- 3	4	7	- 20	- 1
3	0,04978708	- 2	2	4	- 12	0
4,5	0,01110900	0	1	1	- 4	0

VU

Grenoble, le

Le Président de la thèse

VU

Grenoble, le

Le Doyen de la Faculté des Sciences

VU, et permis d'imprimer,

Le Recteur de l'Académie de Grenoble