



HAL
open science

Évaluation pratique de l'erreur par pas dans les méthodes de Runge-Kutta

Bruno Paccard

► **To cite this version:**

Bruno Paccard. Évaluation pratique de l'erreur par pas dans les méthodes de Runge-Kutta. Modélisation et simulation. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1964. Français. NNT: . tel-00278861

HAL Id: tel-00278861

<https://theses.hal.science/tel-00278861>

Submitted on 14 May 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

T H E S E

présentée à la

F A C U L T E D E S S C I E N C E S
D E L ' U N I V E R S I T E D E G R E N O B L E

pour obtenir

LE TITRE DE DOCTEUR DE SPECIALITE

Mathématiques Appliquées

par

Bruno P A C C A R D

Licencié ès sciences

EVALUATION PRATIQUE DE L'ERREUR PAR PAS

DANS LES METHODES DE

RUNGE - KUTTA

Thèse soutenue le

devant la commission d'examen :

Président : Monsieur KUNTZMANN

Examineurs : Monsieur GASTINEL
 Monsieur LAURENT

FACULTE DES SCIENCES

LISTE DES PROFESSEURS

DOYENS HONORAIRES

M. FORTRAT P.

M. MORET L.

DOYEN

M. WEIL L.

PROFESSEURS TITULAIRES

MM. NEEL L.	MAGNETISME ET PHYSIQUE DU SOLIDE
DORIER A.	ZOOLOGIE
HEILMANN R.	CHIMIE ORGANIQUE
KRAVTCHEKOV J.	MECANIQUE RATIONNELLE
CHABAUTY C.	CALCUL DIFFERENTIEL ET INTEGRAL
PARDE M.	POTAMOLOGIE
BENOIT J.	RADIOELECTRICITE
CHENE M.	CHIMIE PAPETIERE
BESSON J.	ELECTROCHIMIE
WEIL L.	THERMODYNAMIQUE
FELICI N.	ELECTROSTATIQUE
KUNTZMANN J.	MATHEMATIQUES APPLIQUEES
BARBIER R.	GEOLOGIE APPLIQUEE
SANTON L.	MECANIQUE DES FLUIDES
OZENDA P.	BOTANIQUE
FALLOT M.	PHYSIQUE INDUSTRIELLE
GALVANI O.	MATHEMATIQUES
MOUSSA A.	CHIMIE NUCLEAIRE
TRAYNARD P.	CHIMIE
SOUTIF M.	PHYSIQUE
CRAYA A.	HYDRODYNAMIQUE
REULOS R.	THEORIE DES CHAMPS
AYANT Y.	PHYSIQUE APPROFONDIE
GALISSOT F.	MATHEMATIQUES APPLIQUEES
Melle LUTZ E.	MATHEMATIQUES
MM. BLAMBERT M.	MATHEMATIQUES
BOUCHEZ R.	PHYSIQUE NUCLEAIRE
ILLIBOUTRY L.	GEOPHYSIQUE
MICHEL R.	GEOLOGIE ET MINERALOGIE
BONNIER E.	ELECTROCHIMIE
DESSAUX	PHYSIQUE ANIMALE
PILLET E.	ELECTROCHIMIE
DEBELMAS J.	GEOLOGIE
GERBER R.	MATHEMATIQUES
PAUTHENET R.	ELECTROTECHNIQUE
VAUQUOIS B.	MATHEMATIQUES APPLIQUEES
SILBER R.	MECANIQUE DES FLUIDES
MOUSSIEGT J.	ELECTRONIQUE
BARBIER J.C.	PHYSIQUE
KPSZUL J.L.	MATHEMATIQUES
BUYLE-BODIN M.	ELECTRONIQUE

PROFESSEURS SANS CHAIRE

M.	LACASE A.	THERMODYNAMIQUE
Mme	KOFLER L.	BOTANIQUE
MM.	DREYFUS B.	THERMODYNAMIQUE
	VAILLANT F.	ZOOLOGIE ET HYDROBIOLOGIE
	GIRAUD P.	GEOLOGIE
	GIDON P.	GEOLOGIE ET MINERALOGIE
	ARNAUD P.	CHIMIE
	PERRET R.	SERVOMECHANISMES
Mme	LUMER L.	MATHEMATIQUES
Mme	BARBIER M.J.	ELECTROCHIMIE
Mme	SOUTIF J.	PHYSIQUE
MM.	BRISSONNEAU P.	PHYSIQUE
	COHEN J.	ELECTROCHIMIE
	DEPASSEL R.	MECANIQUE
	GASTINEL N.	MATHEMATIQUES APPLIQUEES

PROFESSEURS ASSOCIES

MM.	LUMER G.	MATHEMATIQUES
	HIGUCHI	BIOSYNTHESE DE LA CELLULOSE
	WAGNER	BOTANIQUE

MAITRES DE CONFERENCES

MM.	ROBERT A.	CHIMIE PAPETIERE
	ANGLES D'AURIAC	MECANIQUE DES FLUIDES
	BIAREZ J.P.	MECANIQUE PHYSIQUE
	COUMES A.	ELECTRONIQUE
	DODU J.	MECANIQUE DES FLUIDES
	DUCROS PL	MINERALOGIE ET CRISTALLOGRAPHIE
	CLENAT P.	CHIMIE
	HACQUES G.	CALCUL NUMERIQUE
	LANCIA R.	PHYSIQUE AUTOMATIQUE
	PEBAY-PEROULA	PHYSIQUE
	KAHANE	PHYSIQUE GENERALE
	DOLIQUE	ELECTRONIQUE
Mme	KAHANE J.	PHYSIQUE
MM.	DEGRANGE C.	ZOOLOGIE
	GAGNAIRE D.	CHIMIE PAPETIERE
	RASSAT A.	CHIMIE SYSTEMATIQUE
	KLEIN J.	MATHEMATIQUES
	POULOUJADOFF M.	ELECTROTECHNIQUE
	DEPOMMIER P.	PHYSIQUE NUCLEAIRE
	DEPORTES C.	CHIMIE
	BARRA J.	MATHEMATIQUES APPLIQUEES
Mme	BOUCHE L.	MATHEMATIQUES
MM.	PERRIAUX J.	GEOLOGIE
	SARROT-REYNAULD	GEOLOGIE
	CAUQUIS G.	CHIMIE GENERALE
	LABRE A.	BOTANIQUE
	BONNET G.	PHYSIQUE GENERALE
	BARNOUD F.	BIOSYNTHESE DE LA CELLULOSE
Mme	BONNIER M.J.	CHIMIE
	CAUBET	MATHEMATIQUES APPLIQUEES
	BERTRANDIAS	MATHEMATIQUES APPLIQUEES

MAITRES DE CONFERENCES ASSOCIES

MM.	ISHIKAWA Y.	MAGNETISME
	QUATTROPANI	THERMODYNAMIQUE

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance

A Monsieur le Professeur KUNTZMANN,
Directeur de l'Institut de Mathématiques Appliquées de GRENOBLE, sous la direction duquel ce travail a été effectué, par ses conseils judicieux et son aide bienveillante.

A Monsieur le Professeur GASTINEL, et

A Monsieur LAURENT, Maître de conférences,
qui ont bien voulu faire parti du jury.

Je remercie également les membres du Laboratoire de Calcul de Grenoble dont l'aide précieuse m'a permis de mener à bien cette étude.

SOMMAIRE

Introduction	<u>pages</u>
CH.1 : Evaluation de l'erreur par pas dans la résolution appro- chée des problèmes différentiels $x'=X(x,t), x(o)=x_o$ par les méthodes du type :	
A) RK1.	17
B) RK2.	18
C) RK3.	25
D) RK4.	37
CH.2 : Evaluation de l'erreur par pas dans la résolution appro- chée des problèmes différentiels $x'=X(x,t), x(o)=x_o$ par les méthodes du type :	
A) RKD2 (3)	58
B) RKD2 (4). ou RKDP Zurmühl (2,3,4)	61
C) RKD3 (5)	66
CH.3 : Evaluation de l'erreur par pas dans la résolution appro- chée des problèmes différentiels de forme particulière $x''=X(x,t), x(o)=x_o, x'(o)=x'_o$ par les méthodes du type :	
A) RKS2 Nyström (3,3). A(bis) RKS2 Classique (3,4).....	70 - 77
B) RKS3 Classique (4,4).	80
C) RKS4 (4,5).....	90
D) RKD2 (4,5).....	98
CH.4 : Evaluation de l'erreur par pas dans la résolution appro- chée des problèmes différentiels $x''=X(x,x',t), x(o)=x_o,$ $x'(o)=x'_o$ par les méthodes du type :	
A) RK2.	105
B) RK3.	111
C) RK4	117
CONCLUSION	119
BIBLIOGRAPHIE	123

INTRODUCTION

Les méthodes de Runge-Kutta sont basées sur le développement en série de Taylor, d'une part de la solution exacte d'un système différentiel, d'autre part de sa solution approchée.

Nous écrivons cette solution pour le système d'équations différentielles sous forme résolue équilibrée

$$x^{(P)} = X(x, x', \dots, x^{(P-1)}) \quad (1)$$

de conditions initiales $t_0, x_0, \dots, x_0^{(P-1)}$.

Les formules de Runge-Kutta de rang q , fournissent des valeurs approchées $x_i^{(P-K)}$ relatives à l'abscisse t_i . On passe des valeurs d'indice i aux valeurs d'indice $i + 1$ par l'algorithme :

$$x_{i0}^{(P-K)} = x_i^{(P-K)} \quad t_{i0} = t_i$$

$$t_{i\alpha} = t_i + h \theta_\alpha \quad (\theta_0 = 0, \theta_q = 1)$$

$$X_{i\beta} = X(x_{i\beta}, \dots, x_{i\beta}^{(P-1)}).$$

$$x_{i\alpha}^{(P-K)} = x_i^{(P-K)} + \frac{h}{1!} \theta_\alpha X_{i1}^{(P-K+1)} + \dots + \frac{h^{K-1}}{(K-1)!} \theta_\alpha^{K-1} X_{i1}^{(P-1)} + \dots$$

$$\dots + \frac{h^K}{K!} \sum_{\beta=0}^{\alpha-1} K_{\alpha\beta} X_{i\beta}$$

$$x_{i+1}^{(P-K)} = x_{iq}^{(P-K)} \quad t_{i+1} = t_{iq}$$

Pour $K = 1$, les coefficients $K_{\alpha\beta}$ sont désignés par $A_{\alpha\beta}$
 $K = 2$ par $B_{\alpha\beta} \dots$

Suivant une méthode classique, pour obtenir les conditions que doivent vérifier les coefficients $\theta_\alpha, \dots, K_{\alpha\beta} \dots$ il nous faut :

- 1) Evaluer les dérivées successives de x .
- 2) Développer suivant les puissances croissantes de h la solution approchée.
- 3) Identifier ce dernier développement avec le développement en série de Taylor.

Nous rappelons simplement ici l'évaluation des dérivées successives

$$\begin{aligned}x^{(P+1)} &= C_1 \\x^{(P+2)} &= C_2 + J_1 C_1 \\x^{(P+3)} &= C_3 + 3 K_1 C_1 + J_2 C_1 + J_1 C_2 + J_1^2 C_1 \\x^{(P+4)} &= \dots\end{aligned}$$

où les lettres ou groupements de lettres tels $C_3, J_1 C_1$ représentent des termes assez complexes : groupements de dérivées partielles de $X(x, \dots, x^{(P-1)}) = x^{(P)}$.

Nous donnons les deux développements pour différents cas dans les tableaux suivants, résultats dont on trouvera la démonstration aux références [2], [4], [6].

Tableau I

Développement pour l'équation (1) p quelconque, jusqu'aux termes en h^{K+4} inclus.

Tableau II

Développement jusqu'à l'ordre en h^{K+6} inclus pour le système de forme particulière :

$$x'' = X(x, t), \quad x(0) = x_0, \quad x'(0) = x'_0.$$

Tableau I

	Taylor	Runge-kutta
$\frac{h^{k+1}}{k!} C_1$	$\frac{1}{k+1}$	$\sum_{\alpha} K_{q\alpha} \theta_{\alpha}$
$\frac{h^{k+2}}{k!} C_2$	$\frac{1}{(k+1)(k+2)}$	$1/2 \sum_{\alpha} K_{q\alpha} \theta_{\alpha}^2$
$J_1 C_1$	$\frac{1}{(k+1)(k+2)}$	$\sum_{\alpha, \beta} K_{q\alpha} A_{\alpha\beta} \theta_{\beta}$
$\frac{h^{k+3}}{k!} C_3$	$\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}$	$1/6 \sum_{\alpha} K_{q\alpha} \theta_{\alpha}^3$
$J_2 C_1$	$\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}$	$1/2 \sum_{\alpha, \beta} K_{q\alpha} B_{\alpha\beta} \theta_{\beta}$
$K_1 C_1$	$\frac{3}{(k+1)(k+2)(k+3)}$	$\sum_{\alpha, \beta} K_{q\alpha} A_{\alpha\beta} \theta_{\alpha} \theta_{\beta}$
$J_2^2 C_1$	$\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}$	$\sum_{\alpha, \beta, \gamma} K_{q\alpha} A_{\alpha\beta} A_{\beta\gamma} \theta_{\gamma}$
$J_1 C_2$	$\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}$	$1/2 \sum_{\alpha, \beta} K_{q\alpha} A_{\alpha\beta} \theta_{\beta}^2$
$\frac{h^{k+4}}{k!} C_4$	$\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}$	$1/24 \sum_{\alpha} K_{q\alpha} \theta_{\alpha}^4$
$J_3 C_1$	$\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}$	$1/6 \sum_{\alpha, \beta} K_{q\alpha} C_{\alpha\beta} \theta_{\beta}$
$K_2 C_1$	$\frac{4}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}$	$3/2 \sum_{\alpha, \beta} K_{q\alpha} B_{\alpha\beta} \theta_{\alpha} \theta_{\beta}$
$L_3 C_1$	$\frac{6}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}$	$1/2 \sum_{\alpha, \beta} K_{q\alpha} A_{\alpha\beta} \theta_{\alpha}^2 \theta_{\beta}$
R	$\frac{3}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}$	$1/2 \sum_{\alpha} K_{q\alpha} \left(\sum_{\beta} A_{\alpha\beta} \theta_{\beta} \right)^2$
$J_2 C_2$	$\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}$	$1/4 \sum_{\alpha, \beta} K_{q\alpha} B_{\alpha\beta} \theta_{\beta}^2$
$J_2 J_1 C_1$	$\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}$	$1/2 \sum_{\alpha, \beta, \gamma} K_{q\alpha} B_{\alpha\beta} A_{\beta\gamma} \theta_{\gamma}$
$J_1 J_2 C_1$	$\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}$	$1/2 \sum_{\alpha, \beta, \gamma} A_{\alpha\beta} B_{\beta\gamma} \theta_{\gamma}$
$K_3 C_2$	$\frac{4}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}$	$1/2 \sum_{\alpha, \beta} K_{q\alpha} A_{\alpha\beta} \theta_{\alpha} \theta_{\beta}^2$
$K_2 J_3 C_1$	$\frac{4}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}$	$\sum_{\alpha, \beta, \gamma} K_{q\alpha} A_{\alpha\beta} A_{\beta\gamma} \theta_{\alpha} \theta_{\gamma}$
$J_1 K_2 C_1$	$\frac{3}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}$	$\sum_{\alpha, \beta, \gamma} K_{q\alpha} A_{\alpha\beta} A_{\beta\gamma} \theta_{\alpha} \theta_{\gamma}$

	Taylor	Runge-Kutta
$\frac{h^{k+4}}{k!} J_1 C_3$	$\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}$	$\frac{1}{6} \sum_{\alpha, \beta} K_{q\alpha} A_{\alpha\beta} \theta_{\beta}^3$
$J_1^3 C_1$	$\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}$	$\sum_{\alpha, \beta, \delta, \epsilon} K_{q\alpha} A_{\alpha\beta} A_{\beta\delta} A_{\delta\epsilon} \theta_{\epsilon}$
$J_1^2 C_2$	$\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}$	$\frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta, \delta} K_{q\alpha} A_{\alpha\beta} A_{\beta\delta} \theta_{\delta}^2$

Tableau II

	Taylor	Runge-Kutta
$\frac{h^{k+2}}{k!} C_1$	$\frac{1}{k+1}$	$\sum_{\alpha} K_{q\alpha} \theta_{\alpha}$
$\frac{h^{k+2}}{k!} C_2$	$\frac{1}{(k+1)(k+2)}$	$\frac{1}{2} \sum_{\alpha} K_{q\alpha} \theta_{\alpha}^2$
$\frac{h^{k+3}}{k!} C_3$	$\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}$	$\frac{1}{6} \sum_{\alpha} K_{q\alpha} \theta_{\alpha}^3$
$J_2 C_1$	$\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}$	$\frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} K_{q\alpha} B_{\alpha\beta} \theta_{\beta}$
$\frac{h^{k+4}}{k!} C_4$	$\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}$	$\frac{1}{24} \sum_{\alpha} K_{q\alpha} \theta_{\alpha}^4$
$K_2 C_1$	$\frac{4}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}$	$\frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} K_{q\alpha} B_{\alpha\beta} \theta_{\alpha} \theta_{\beta}$
$J_2 C_2$	$\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}$	$\frac{1}{4} \sum_{\alpha, \beta} K_{q\alpha} B_{\alpha\beta} \theta_{\beta}^2$

Tableau III

	Taylor	Runge-Kutta avec $\sum K_{q\beta} = \theta_{\alpha}^k, \sum K'_{q\beta} = K'_{\alpha}$
$\frac{h^{k+1}}{k!} C_1$	$\frac{1}{k+1}$	$\sum K'_{q\alpha} \theta_{\alpha} + \frac{1}{k+1} K'_{\alpha}$
$\frac{h^{k+2}}{k!} C_2$	$\frac{1}{(k+1)(k+2)}$	$\frac{1}{2} \sum K_{q\alpha} \theta_{\alpha}^2 + \frac{1}{k+1} \sum K'_{q\alpha} \theta_{\alpha}$
$J_1 C_1$	$\frac{1}{(k+1)(k+2)}$	$\sum K_{q\alpha} R_{q\beta} \theta_{\beta} + \frac{1}{2} \sum K_{q\alpha} R'_{\alpha} + \frac{1}{k+1} \sum K'_{q\alpha} \theta_{\alpha}$
$\frac{h^{k+3}}{k!} C_3$	$\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}$	$\frac{1}{6} \sum K_{q\alpha} \theta_{\alpha}^3 + \frac{1}{2(k+1)} \sum K'_{q\alpha} \theta_{\alpha}^2$
$J_2 C_1$	$\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}$	$\frac{1}{2} \sum K_{q\alpha} B_{q\beta} \theta_{\beta} + \frac{1}{6} \sum K_{q\alpha} B'_{\alpha} + \frac{1}{k+1} \sum K'_{q\alpha} R_{q\beta} \theta_{\beta} + \frac{1}{2(k+1)} \sum K'_{q\alpha} R'_{\alpha}$
$K_1 C_1$	$\frac{3}{(k+1)(k+2)(k+3)}$	$\sum K_{q\alpha} R_{q\beta} \theta_{\beta} + \frac{1}{2} \sum K_{q\alpha} R'_{\alpha} \theta_{\alpha} + \frac{1}{k+1} \sum K'_{q\alpha} \theta_{\alpha}^2 + \frac{1}{k+1} \sum K'_{q\alpha} R_{q\beta} \theta_{\beta} + \frac{1}{2(k+1)} \sum K'_{q\alpha} R'_{\alpha}$
$J_1^2 C_1$	$\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}$	$\frac{1}{2} \sum K_{q\alpha} R'_{q\beta} \theta_{\beta} + \sum K_{q\alpha} R_{q\beta} R_{q\gamma} \theta_{\gamma} + \frac{1}{2} \sum K_{q\alpha} R_{q\beta} R'_{\alpha} + \frac{1}{k+1} \sum K'_{q\alpha} R_{q\beta} \theta_{\beta} + \frac{1}{2(k+1)} \sum K'_{q\alpha} R'_{\alpha}$
$J_1 C_2$	$\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}$	$\frac{1}{2} \sum K_{q\alpha} R'_{q\beta} \theta_{\beta} + \frac{1}{2} \sum K_{q\alpha} R_{q\beta} \theta_{\beta}^2 + \frac{1}{2(k+1)} \sum K'_{q\alpha} \theta_{\alpha}^2$
$\frac{h^{k+4}}{k!} C_4$	$\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}$	$\frac{1}{24} \sum K_{q\alpha} \theta_{\alpha}^4 + \frac{1}{6(k+1)} \sum K'_{q\alpha} \theta_{\alpha}^3$
$J_3 C_1$	$\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}$	$\frac{1}{6} \sum K_{q\alpha} C_{q\beta} \theta_{\beta} + \frac{1}{24} \sum K_{q\alpha} C'_{\alpha} + \frac{1}{2(k+1)} \sum K'_{q\alpha} B_{q\beta} \theta_{\beta} + \frac{1}{6(k+1)} \sum K'_{q\alpha} B'_{\alpha}$
$K_2 C_1$	$\frac{4}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}$	$\frac{1}{2} \sum K_{q\alpha} B_{q\beta} \theta_{\beta} + \frac{1}{6} \sum K_{q\alpha} B'_{\alpha} \theta_{\alpha} + \frac{1}{2(k+1)} \sum K'_{q\alpha} B_{q\beta} \theta_{\beta} + \frac{1}{6(k+1)} \sum K'_{q\alpha} B'_{\alpha}$
$L_1 C_1$	$\frac{6}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}$	$\frac{1}{k+1} \sum K'_{q\alpha} R_{q\beta} \theta_{\beta} + \frac{1}{2(k+1)} \sum K'_{q\alpha} R'_{\alpha} \theta_{\alpha}$
		$\frac{1}{2} \sum K_{q\alpha} R_{q\beta} \theta_{\alpha}^2 \theta_{\beta} + \frac{1}{24} \sum K_{q\alpha} R'_{\alpha} \theta_{\alpha}^2 + \frac{1}{2(k+1)} \sum K'_{q\alpha} \theta_{\alpha}^3 + \frac{1}{k+1} \sum K'_{q\alpha} R_{q\beta} \theta_{\beta} \theta_{\alpha}$
		$+ \frac{1}{2(k+1)} \sum K'_{q\alpha} R'_{\alpha} \theta_{\alpha}$

Tableau IV

- 8 ter -

	Taylor	Runge-Kutta avec $\sum K_{\alpha,\beta} = \theta_{\alpha}^k$ $\sum K'_{\alpha,\beta} = K'_{\alpha}$
$\frac{h^{k+1}}{k!} C_1$	$\frac{1}{(k+1)}$	$\sum K_{q\alpha} \theta_{\alpha} + \frac{1}{k+1} K'_q$
$\frac{h^{k+2}}{k!} C_2$	$\frac{1}{(k+1)(k+2)}$	$1/2 \sum K_{q\alpha} \theta_{\alpha}^2 + \frac{1}{k+1} \sum K'_{q\alpha} \theta_{\alpha}$
$\frac{h^{k+3}}{k!} C_3$ $J_2 C_1$	$\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}$ $\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}$	$\frac{1}{2(k+1)} \sum K'_{q\alpha} \theta_{\alpha}^2 + 1/6 \sum K_{q\alpha} \theta_{\alpha}^3$ $\frac{1}{2(k+1)} \sum K'_{q\alpha} \Pi'_{\alpha} + \frac{1}{k+1} \sum K'_{q\alpha} \Pi_{\alpha\beta} \theta_{\beta}$ $+ 1/6 \sum K_{q\alpha} B'_{\alpha} + 1/2 \sum K_{q\alpha} B_{\alpha\beta} \theta_{\beta}$
$\frac{h^{k+4}}{k!} C_4$ $K_2 C_1$ $J_2 C_2$	$\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}$ $\frac{4}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}$ $\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}$	$\frac{1}{6(k+1)} \sum K'_{q\alpha} \theta_{\alpha}^3 + 1/24 \sum K_{q\alpha} \theta_{\alpha}^4$ $\frac{1}{6(k+1)} \sum K'_{q\alpha} B'_{\alpha} + 1/6 \sum K_{q\alpha} B'_{\alpha} \theta_{\alpha}$ $+ 1/2 \sum K_{q\alpha} B_{\alpha\beta} \theta_{\alpha} \theta_{\beta}$ $+ \frac{1}{2(k+1)} \sum K'_{q\alpha} B_{\alpha\beta} \theta_{\beta} + \frac{1}{2(k+1)} \sum K'_{q\alpha} \Pi'_{\alpha} \theta_{\alpha}$ $+ \frac{1}{k+1} \sum K'_{q\alpha} \Pi_{\alpha\beta} \theta_{\alpha} \theta_{\beta}$ $1/4 \sum K_{q\alpha} B_{\alpha\beta} \theta_{\beta}^2 + 1/6 \sum K_{q\alpha} B'_{\alpha\beta} \theta_{\beta}$ $+ \frac{1}{2(k+1)} \sum K'_{q\alpha} \Pi'_{\alpha\beta} \theta_{\beta} + \frac{1}{2(k+1)} \sum K'_{q\alpha} \Pi_{\alpha\beta} \theta_{\beta}^2$

Runge-Kutta avec $\sum K_{\alpha\beta} = \theta_\alpha^k$, $\sum K'_{\alpha\beta} = K'_\alpha$

Taylor

$\frac{h^{k+4}}{k!} R$	$\frac{3}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}$	$\frac{1}{4} \sum K_{\alpha\beta} R'_{\alpha\beta} \theta_\beta + \frac{1}{8} \sum K_{\alpha\beta} R''_{\alpha\beta} \theta_\beta^2 + \frac{1}{2} \sum K_{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} R_{\beta\gamma} \theta_\gamma + \frac{1}{k+1} \sum K'_{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} \theta_\beta + \frac{1}{2(k+1)} \sum K'_{\alpha\beta} R'_{\alpha\beta} \theta_\beta^2$
$J_2^2 C_2$	$\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}$	$\frac{1}{6} \sum K_{\alpha\beta} B'_{\alpha\beta} \theta_\beta + \frac{1}{4} \sum K_{\alpha\beta} B_{\alpha\beta} \theta_\beta^2 + \frac{1}{2(k+1)} \sum K'_{\alpha\beta} R'_{\alpha\beta} \theta_\beta + \frac{1}{2(k+1)} \sum K'_{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} \theta_\beta^2$
$J_2^2 C_1$	$\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}$	$\frac{1}{6} \sum K_{\alpha\beta} B'_{\alpha\beta} \theta_\beta + \frac{1}{2} \sum K_{\alpha\beta} B_{\alpha\beta} R_{\beta\gamma} \theta_\gamma + \frac{1}{4} \sum K_{\alpha\beta} B_{\alpha\beta} R'_{\beta\gamma} + \frac{1}{2(k+1)} \sum K'_{\alpha\beta} R'_{\alpha\beta} \theta_\beta + \frac{1}{2(k+1)} \sum K'_{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} R'_{\beta\gamma}$
$K_1^2 C_2$	$\frac{\Delta}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}$	$\frac{1}{2} \sum K_{\alpha\beta} R'_{\alpha\beta} \theta_\beta + \sum K_{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} \theta_\alpha \theta_\beta^2 + \frac{1}{2(k+1)} \sum K'_{\alpha\beta} \theta_\alpha^3 + \frac{1}{2(k+1)} \sum K'_{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} \theta_\beta + \frac{1}{2(k+1)} \sum K'_{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} \theta_\beta^2$
$K_3^2 J_3 C_1$	$\frac{\Delta}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}$	$\frac{1}{2} \sum K_{\alpha\beta} R'_{\alpha\beta} \theta_\alpha \theta_\beta + \sum K_{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} R_{\beta\gamma} \theta_\gamma + \frac{1}{2} \sum K_{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} R'_{\beta\gamma} \theta_\gamma + \frac{1}{2(k+1)} \sum K'_{\alpha\beta} R'_{\alpha\beta} \theta_\beta + \frac{1}{2(k+1)} \sum K'_{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} R_{\beta\gamma} \theta_\gamma + \frac{1}{2(k+1)} \sum K'_{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} R'_{\beta\gamma}$
$J_1 C_3$	$\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}$	$\frac{1}{6} \sum K_{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} \theta_\beta^3 + \frac{1}{4} \sum K_{\alpha\beta} R'_{\alpha\beta} \theta_\beta^2 + \frac{1}{6(k+1)} \sum K'_{\alpha\beta} \theta_\alpha^3$
$J_2^2 C_2$	$\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}$	$\frac{1}{2} \sum K_{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} B_{\beta\gamma} \theta_\gamma + \frac{1}{6} \sum K_{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} B'_{\beta\gamma} + \frac{1}{2} \sum K_{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} R_{\beta\gamma} \theta_\gamma + \frac{1}{2} \sum K_{\alpha\beta} R'_{\alpha\beta} R_{\beta\gamma} \theta_\gamma + \frac{1}{4} \sum K_{\alpha\beta} R'_{\alpha\beta} R'_{\beta\gamma} + \frac{1}{2(k+1)} \sum K'_{\alpha\beta} B_{\alpha\beta} \theta_\beta + \frac{1}{6(k+1)} \sum K'_{\alpha\beta} B'_{\alpha\beta}$
$J_2^2 K_1 C_1$	$\frac{3}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}$	$\sum K_{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} R_{\beta\gamma} \theta_\gamma + \frac{1}{2} \sum K_{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} R'_{\beta\gamma} \theta_\gamma + \frac{1}{2} \sum K_{\alpha\beta} R'_{\alpha\beta} R_{\beta\gamma} \theta_\gamma + \frac{1}{2} \sum K_{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} R_{\beta\gamma} \theta_\beta + \frac{1}{2} \sum K_{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} \theta_\alpha \theta_\beta + \frac{1}{2(k+1)} \sum K'_{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} \theta_\beta + \frac{1}{2(k+1)} \sum K'_{\alpha\beta} R'_{\alpha\beta} R_{\beta\gamma} \theta_\gamma$
$J_2^2 C_1$	$\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}$	$\sum K_{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} R_{\beta\gamma} \theta_\gamma + \frac{1}{2} \sum K_{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} R_{\beta\gamma} R'_{\beta\gamma} + \frac{1}{2} \sum K_{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} R_{\beta\gamma} \theta_\beta + \frac{1}{2} \sum K_{\alpha\beta} R'_{\alpha\beta} R_{\beta\gamma} \theta_\beta + \frac{1}{2} \sum K_{\alpha\beta} R'_{\alpha\beta} R_{\beta\gamma} \theta_\gamma + \frac{1}{k+1} \sum K'_{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} \theta_\beta + \frac{1}{2(k+1)} \sum K'_{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} R_{\beta\gamma} \theta_\beta + \frac{1}{2(k+1)} \sum K'_{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} R_{\beta\gamma} \theta_\gamma$
$J_2^2 C_2$	$\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}$	$\frac{1}{2} \sum K_{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} R_{\beta\gamma} \theta_\gamma^2 + \frac{1}{2} \sum K_{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} R'_{\beta\gamma} \theta_\gamma + \frac{1}{k+1} \sum K'_{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} \theta_\beta + \frac{1}{2(k+1)} \sum K'_{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} R_{\beta\gamma} \theta_\beta + \frac{1}{2(k+1)} \sum K'_{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} R_{\beta\gamma} \theta_\gamma + \frac{1}{2(k+1)} \sum K'_{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} \theta_\beta^2 + \frac{1}{4} \sum K'_{\alpha\beta} R'_{\alpha\beta} \theta_\beta + \frac{1}{2(k+1)} \sum K'_{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} \theta_\beta^2$

Tableau III

Développement pour le système (1) correspondant à des formules d'intégration approchée plus générales du type :

$$x_{i\alpha}^{(p-k)} = x_i^{(p-k)} + \frac{h}{1!} \theta_{\alpha} x_i^{(p-k+1)} + \dots + \frac{h^k}{k!} \sum K_{\alpha\beta} x_{i\beta} + \dots + \frac{h^{k+1}}{(k+1)!} \sum K'_{\alpha\beta} DX_{i\beta}$$

D $X_{i\beta}$ représentant la dérivée d'ordre $p + 1$ de x .

Tableau IV

Développement jusqu'à l'ordre h^{k+4} inclus pour le système de forme particulière $x'' = X(x, t)$ correspondant aux formules d'intégration du tableau III.

Erreur par pas. Evaluation théorique. Evaluation pratique.

Soit $x_i^{(p-k)}(t)$ la solution du système différentiel passant par le point $t_i, x_i, \dots, x_i^{(p-1)}$.

Si le pas suivant était effectué sans erreur, on déterminerait $x_i^{(p-k)}(t_{i+1})$. En fait on commet :

- Une erreur de méthode due à l'emploi d'une méthode d'intégration approchée.
- Une erreur d'arrondi (ou de chute) due aux portes de chiffres dans diverses opérations arithmétiques, erreur de calcul négligeable devant l'erreur de méthode dans les limites où nous nous cantonnerons.

Nous déterminons en réalité $x_{i+1}^{(p-k)}$ et nous désignons par erreur sur un pas l'écart entre le premier pas de la solution approchée et la solution exacte à l'abscisse t_{i+1} :

$$E = x_{i+1}^{(p-k)} - x_i^{(p-k)}(t_{i+1})$$

$E =$ valeur approchée - valeur exacte

Les méthodes de Runge-Kutta étant basées sur le développement en série de Taylor des fonctions, les formules d'intégration approchée sont d'ordre n . Si leurs coefficients assurent une exacte représentation de cette fonction jusqu'au terme de la série de Taylor en h^n . La partie principale de l'erreur par pas est alors d'ordre $n+1$. Nous pouvons ainsi comparer diverses formules quant à leur précision théorique.

Bien des procédés ont été imaginés permettant l'évaluation pratique de l'erreur de méthode par pas. Nous pouvons nous proposer d'utiliser deux méthodes donnant des approximations d'ordre différent, respectant la séparation des pas et ayant de ce fait des horneres en commun. L'écart des deux approximations donnera la partie principale de l'erreur sur la formule d'ordre le moins élevé.

A propos du problème différentiel

$x' = X(x, t)$ de condition initiale $x(0)=x_0$, il nous est impossible de rechercher une formule d'ordre supérieur \bar{x}_1 (en utilisant la valeur de X calculée au début du pas suivant) pour les méthodes RK2, RK3, RK4 excepté RK1, et par là de donner une évaluation pratique de l'erreur sur le pas h . Nous le rappelons brièvement

A) Formule de rang 1 d'ordre 1 : méthode d'Euler

$$x_1 = x_0 = x_0 + h X_{00}$$

x_1 représente une formule sur le pas h , de coefficients $A_{10} = \theta_1 = 1$ et d'écriture matricielle 1

Recherchons une formule d'ordre supérieur

$$\bar{x}_1 = x_0 + h [A_{20} X_{00} + A_{21} X_{01}]$$

Conformément au tableau général I les coefficients A_{2j} doivent satisfaire à la première condition

$$A_{20} + A_{21} = 1$$

puis pour assurer un jeu de formule d'ordre 1 pour x_1 et d'ordre 2 pour \bar{x}_1 à la condition

$$A_{21} \theta_1 = \frac{1}{2}$$

Soit $A_{20} = A_{21} = \frac{1}{2}$ et par suite l'évaluation de l'erreur sur le pas h

$$E = \frac{h}{2} [X_{00} - X_{01}]$$

B) Formule de rang 2, d'ordre 2 : RK2 .

$$x_{01} = x_0 + h A_{10} X_{00}$$

$$x_1 = x_{02} = x_0 + h [A_{20} X_{00} + A_{21} X_{01}]$$

x_1 représente une formule sur le pas h , de coefficients A_{ij} ,

$\theta_1, \theta_2 = 1$ et d'écriture matricielle

A_{10}	
A_{20}	A_{21}

Recherchons une formule d'ordre supérieur

$$\overline{x}_1 = x_0 + h [A_{30} X_{00} + A_{31} X_{01} + A_{32} X_{02}]$$

conformément au tableau général I, les coefficients A_{ij} doivent satisfaire aux premières conditions

$$A_{10} = \theta_1$$

$$A_{20} + A_{21} = \theta_2 = 1$$

$$A_{30} + A_{31} + A_{32} = 1$$

puis pour assurer un jeu de formule d'ordre 2 pour x_1 et d'ordre 3 pour \overline{x}_1 aux conditions

$$\begin{array}{l|l} A_{21} \theta_1 = \frac{1}{2} & h^2 \\ A_{31} \theta_1 + A_{32} = \frac{1}{2} & h^2 \\ A_{31} \theta_1^2 + A_{32} = \frac{1}{3} & h^3 \\ A_{32} A_{21} \theta_1 = \frac{1}{6} & h^3 \end{array}$$

Ces 4 équations sont incompatibles, quel que soit $\theta_1 \neq 0$ d'où l'impossibilité d'évaluer l'erreur sur le pas h des formules RK2.

C) Nous démontrerions de la même manière l'impossibilité d'évaluer l'erreur sur le pas h des formules RK3 et RK4.

D) A propos de ce même problème différentiel Geschino [3] montre que l'erreur sur le pas h peut-être évaluée dans les méthodes particulières du type Runge-Kutta, rang 3, ordre 2. (On fait donc 1 horner de plus par pas).

$x_1 = x_{03}$ représente une formule sur le pas h , de coefficients A_{ij} , $\theta_1, \theta_2, \theta_3 = 1$ et d'écriture matricielle

A_{10}		
A_{20}	A_{21}	
A_{30}	A_{31}	A_{32}

Recherchons une formule d'ordre supérieur

$$\overline{x_1} = x_0 + h [A_{40} X_{00} + A_{41} X_{01} + A_{42} X_{02} + A_{43} X_{03}]$$

conformément au tableau général I, les coefficients A_{ij} doivent satisfaire aux premières conditions

$$A_{10} = \theta_1$$

$$A_{20} + A_{21} = \theta_2$$

$$A_{30} + A_{31} + A_{32} = \theta_3 = 1$$

$$A_{40} + A_{41} + A_{42} + A_{43} = 1$$

puis pour assurer l'exactitude du développement de x_1 et $\overline{x_1}$ jusqu'au terme en h^2 et h^4 aux conditions

$$\begin{aligned}
 A_{31} \theta_1 + A_{32} \theta_2 &= 1/2 & h^2 \\
 A_{41} \theta_1 + A_{42} \theta_2 + A_{43} &= 1/2 & h^2 \\
 A_{41} \theta_1^2 + A_{42} \theta_2^2 + A_{43} &= 1/3 & h^3 \\
 A_{43} [A_{31} \theta_1 + A_{32} \theta_2] + A_{42} A_{21} \theta_1 &= 1/6 & h^3 \\
 A_{41} \theta_1^3 + A_{42} \theta_2^3 + A_{43} &= 1/4 & h^4 \\
 A_{43} [A_{31} \theta_1 + A_{32} \theta_2] + A_{42} A_{21} \theta_1 \theta_2 &= 1/8 & h^4 \\
 A_{43} [A_{31} \theta_1^2 + A_{32} \theta_2^2] + A_{42} A_{21} \theta_1^2 &= 1/12 & h^4 \\
 A_{43} A_{32} A_{21} \theta_1 &= 1/24 & h^4
 \end{aligned}$$

Ces conditions imposent $\theta_2 = 1/2$.

Voici deux jeux de formules proposés par Ceschino

1/4			
0	1/2		
1	-2	2	
1/6	0	4/6	1/6

les deux premiers termes de l'erreur sur le pas h ont pour évaluation théorique

$$-\frac{h^3}{12} \left[\frac{C^2}{4} + J_1 C_1 \right] + \frac{h^4}{12} \left[\frac{C_3}{162} + \frac{J_1^2 C_1}{2} - J_1 C_2 \right]$$

et pour évaluation pratique

$$E = x_1 - \overline{x_1} = \frac{h}{6} [5 X_{00} - 12 X_{01} + 8 X_{02} - X_{03}]$$

1/3			
1/8	3/8		
1/2	-3/2	2	
1/6	0	4/6	1/6

les deux premiers termes de l'erreur sur le pas h ont pour évaluation théorique

$$-\frac{h^3}{12} [J_1 C_1] + \frac{h^4}{12} \left[\frac{C_3}{9} + \frac{J_1^2 C_1}{2} \right]$$

et pour évaluation pratique

$$E = x_1 - \bar{x}_1 = \frac{h}{6} [2 x_{00} - 9 x_{01} + 8 x_{02} - x_{03}]$$

De telles formules peuvent sembler désavantageuses par rapport aux formules RK3. Cependant nous noterons que (on ne peut les comparer directement puisque l'ordre est différent) :

- Les coefficients de la partie principale de l'évaluation théorique de l'erreur (terme en h^3) sont inférieurs à ceux des formules RK2

Euler Cauchy : $\frac{h^3}{6} \left[-J_1 C_1 + \frac{C_2}{2} \right]$

tangente améliorée $\frac{h^3}{6} \left[-J_1 C_1 - \frac{C_2}{4} \right]$

Heun : $\frac{h^3}{6} [-J_1 C_1]$

- L'évaluation pratique de l'erreur sur le pas h est donnée avec une bonne précision [3].

CHAPITRE I

--:-

EVALUATION DE L'ERREUR PAR PAS DANS LA
RESOLUTION APPROCHÉE DES PROBLÈMES DIFFÉRENTIELS

$$x' = X(x,t) \quad x(0) = x_0$$

Nous nous proposons de rechercher des évaluations pratiques de l'erreur sur le pas $K = ah$ en considérant plusieurs pas successifs

2 pour les méthodes RK1, RK2, RK3

3 pour les méthodes RK4

avec les valeurs approchées

$$x_{01}$$

$$x_{02}$$

$$x_{03} = x_1$$

$$x_{04} = x_{11}$$

$$x_{05} = x_{12}$$

$$x_{06} = x_{13} = x_2$$

dans le cas des méthodes RK3. x_{11} , x_{12} , x_{13} peuvent être calculés à partir de x_0 par des formules du type Runge-Kutta dont les coefficients seront faciles à déterminer.

x_2 représentera une formule sur le pas $K = 2h$, de coefficients A_{ij} , θ_1 , θ_2 , $\theta_3 = \frac{1}{2}$, $\theta_4 = \theta_1 + \frac{1}{2}$, $\theta_5 = \theta_2 + \frac{1}{2}$, $\theta_6 = 1$ et d'écriture matricielle

A ₁₀						
A ₂₀	A ₂₁					
A ₃₀	A ₃₁	A ₃₂				
A ₄₀	A ₄₁	A ₄₂	A ₄₃			
A ₅₀	A ₅₁	A ₅₂	A ₅₃	A ₅₄		
A ₆₀	A ₆₁	A ₆₂	A ₆₃	A ₆₄	A ₆₅	

avec

$$\begin{array}{lll}
 A_{30} = A_{40} = A_{50} = A_{60} & A_{10} = A_{43} & A_{21} = A_{54} \\
 A_{31} = A_{41} = A_{51} = A_{61} & A_{20} = A_{53} & A_{31} = A_{64} \\
 A_{32} = A_{42} = A_{52} = A_{62} & A_{30} = A_{63} & A_{32} = A_{65}
 \end{array}$$

Nous recherchons une formule d'ordre supérieur

$$\bar{x}_2 = x_0 + K \sum_{\alpha=0}^6 A_{7\alpha} X_{0\alpha}$$

$E = x_2 - \bar{x}_2$ donnera une évaluation pratique de la partie principale de l'erreur. Nous traiterons par les diverses méthodes proposées dans les pages suivantes les équations

$$\begin{array}{lll}
 N=1 & x' = t^2 - x & x(0)=1 \quad x = -e^{-t} + t^2 - 2t + 2 \\
 N=2 & x' = x - 1.5e^{-0.5t} & x(0)=1 \quad x = e^{-0.5t} \\
 N=3 & x' = -2tx^2 & x(0)=1 \quad x = 1/(1+t^2) \\
 N=4 & x' = -tx & x(0)=1 \quad x = e^{-t^2/2} \\
 N=5 & x' = -x & x(0)=1 \quad x = e^{-t}
 \end{array}$$

Pour estimer la qualité de l'approximation de l'erreur, nous déterminerons sur 20 pas successifs $K=2h$ le coefficient (exprimé en %)

$$ETA = \frac{\sum |\text{erreur réelle} - \text{erreur calculée}|}{\sum |\text{erreur réelle}|}$$

en prenant comme valeur initiale de la fonction au début de chaque pas la valeur exacte de la fonction (de manière à bien évaluer une erreur par pas).

La détermination de ETA sur chaque pas reste très proche du ETA déterminé sur 20 pas successifs si l'erreur par pas reste elle-même du même ordre de grandeur. Au cours de ce travail, nous prendrons toujours la précaution de le vérifier.

A) Méthode de rang 1, d'ordre 1 : RK1

$$x_1 = x_{01} = x_0 + h X_{00}$$

x_1 représente une formule sur le pas h , de coefficients $A_{10} = \theta_1 = 1$ et d'écriture matricielle

$$\boxed{1}$$

$$x_2 = x_{02} = x_1 + h X_{01} = x_0 + h [X_{00} + X_{01}]$$

x_2 représente une formule sur le pas $K = 2h$, de coefficients $A_{ij}, \theta_1 = 1/2, \theta_2 = 1$ et d'écriture matricielle

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1/2 & \\ \hline 1/2 & 1/2 \\ \hline \end{array}$$

Recherchons une formule d'ordre supérieur

$$x_2 = x_0 + K \sum_{\alpha=0}^2 A_{3\alpha} X_{0\alpha}$$

Conformément au tableau général I, les coefficients $A_{3\alpha}$ doivent satisfaire à la première condition

$$\sum_{\alpha=0}^2 A_{3\alpha} = 1$$

puis pour assurer l'exactitude du développement de x_2 jusqu'au terme en K^2 à la condition

$$\frac{1}{2} = \frac{A_{31}}{2} + A_{32}$$

Prenant arbitrairement $A_{30} = A_{32} = 0$, $A_{31} = 1$ nous obtenons l'évaluation pratique de l'erreur sur le pas $K = 2h$

$$E = \frac{K}{2} [x_{00} - x_{01}]$$

Nous noterons l'identité de l'évaluation pratique de l'erreur sur le pas $K = 2h$ et sur le pas h trouvée précédemment

B) Méthode de rang 2, d'ordre 2 : RK2.

$x_1 = x_{02}$ représente une formule sur le pas h , d'ordre 2, de coefficients A_{ij} , θ_1 , $\theta_2 = 1$ et d'écriture matricielle

θ_1	
$1 - \frac{1}{2\theta}$	$\frac{1}{2\theta}$

$x_2 = x_{12} = x_{04}$ représente une formule sur le pas $K = 2h$, de coefficients A_{ij} , θ_1 , $\theta_2 = 1/2$, $\theta_3 = \theta_1 + 1/2$, $\theta_4 = 1$ et d'écriture matricielle

θ_1			
$\frac{1}{2} - \frac{1}{8\theta_1}$	$\frac{1}{8\theta_1}$		
$\frac{1}{2} - \frac{1}{8}\theta_1$	$\frac{1}{8\theta_1}$	θ_1	
$\frac{1}{2} - \frac{1}{8}\theta_1$	$\frac{1}{8\theta_1}$	$\frac{1}{2} - \frac{1}{8\theta_1}$	$\frac{1}{8\theta_1}$

Recherchons une formule d'ordre supérieur

$$\overline{x_2} = x_0 + K \sum_{\alpha=0}^4 A_{5\alpha} X_{0\alpha}$$

Conformément au tableau général I, les coefficients $A_{5\alpha}$ doivent satisfaire à la première condition

$$\sum_{\alpha=0}^4 A_{5\alpha} = 1$$

puis pour assurer l'exactitude du développement de x_2 jusqu'au terme en K^3 , aux conditions

$$\frac{1}{2} = \sum_{\alpha} A_{5\alpha} \theta_{\alpha} K^2$$

$$\frac{1}{3} = \sum_{\alpha} A_{5\alpha} \theta_{\alpha}^2 K^3$$

$$\frac{1}{6} = \sum_{\alpha, \beta} A_{5\alpha} A_{\alpha\beta} \theta_{\beta} K^3$$

Posant

$$S_{i,v} = \sum_{j=0}^{i-1} A_{ij} \theta_j^v \quad (i \geq 1, v \geq 0) \quad \text{nous obtenons}$$

$$S_{0,v} = 0 \quad (v \geq 0)$$

$$S_{2,1} = 1/8$$

$$S_{3,1} = 1/8 + \theta_1/2$$

$$S_{4,1} = 1/2$$

Le système précédent de 3 équations à 4 inconnues s'écrit :

$$\frac{1}{2} = A_{51} \theta_1 + \frac{A_{52}}{2} + A_{53} \left(\theta_1 + \frac{1}{2} \right) + A_{54}$$

$$\frac{1}{3} = A_{51} \theta_1^2 + \frac{A_{52}}{4} + A_{53} \left(\theta_1 + \frac{1}{2} \right)^2 + A_{54}$$

$$\frac{1}{6} = \frac{A_{52}}{8} + A_{53} \left(\frac{1}{8} + \frac{\theta_1}{2} \right) + \frac{A_{54}}{2}$$

Prenant A_{54} arbitraire, la résolution de ce système donne :

$$A_{53} = \frac{1}{2\theta_1} \left[\frac{1}{6} - A_{54} \right]$$

$$A_{52} = 1 - 2 A_{54} - \frac{1}{2\theta_1} \left[\frac{1}{6} - A_{54} \right]$$

$$A_{51} = - A_{53}$$

$$A_{50} = 1 - \sum_{\alpha=1}^4 A_{5\alpha} = A_{54} + \frac{1}{2\theta_1} \left[\frac{1}{6} - A_{54} \right]$$

et par suite une évaluation pratique de l'erreur sur le pas $K = 2 h$

$$E = x_2 - \bar{x}_2 = K \sum_{\alpha=0}^4 x_{0\alpha} q_{\alpha}$$

avec

$$q_0 = \frac{1}{2} - A_{54} - \frac{1}{2\theta_1} \left(\frac{5}{12} - A_{54} \right)$$

$$q_1 = \frac{1}{2\theta_1} \left(\frac{5}{12} - A_{54} \right)$$

$$q_2 = 2 A_{54} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2\theta_1} \left(\frac{1}{12} + A_{54} \right)$$

$$q_3 = \frac{1}{2\theta_1} \left(\frac{1}{12} + A_{54} \right)$$

$$q_4 = - A_{54}$$

Choix de A_{54}

Quel que soit θ_1 , on peut annuler q_1 ou q_3 .

Pour $q_1 = 0$, A_{54} a pour valeur $5/12$. Dans ce cas les évaluations pratiques de l'erreur sur le pas $K = 2 h$ s'écrivent pour les trois valeurs de θ_1 envisagées

$$\theta_1 = 1/2 \quad \text{Euler Cauchy} \quad E_1 = \frac{K}{12} [x_{00} - 8x_{02} + 12x_{03} - 5x_{04}]$$

$$\theta_1 = 1/4 \quad \text{tangente Améliorée} \quad E_2 = \frac{K}{12} [x_{00} - 2x_{02} + 6x_{03} - 5x_{04}]$$

$$\theta_1 = 1/3 \quad \text{Heun} \quad E_3 = \frac{K}{12} [x_{00} - 5x_{02} + 9x_{03} - 5x_{04}]$$

Nous retrouverons des formules déjà données en [4].

Annuler q_1 est arbitraire. Aussi cherchons à minimiser la somme S des carrés des q_α . Nous obtenons

$$x = A_{54} = \frac{3 + 1/3\theta_1^2 - 5/4\theta_1}{2[6 - 3/\theta_1 + 1/\theta_1^2]}$$

θ_1	1/2	1/3	1/4
$x=A_{54}$	11/48	16/3	1/6

et par suite les évaluations pratiques de l'erreur sur le pas $K=2h$

$$E1A = \frac{K}{48} [4 X_{00} + 9 X_{01} - 17 X_{02} + 15 X_{03} - 11 X_{04}]$$

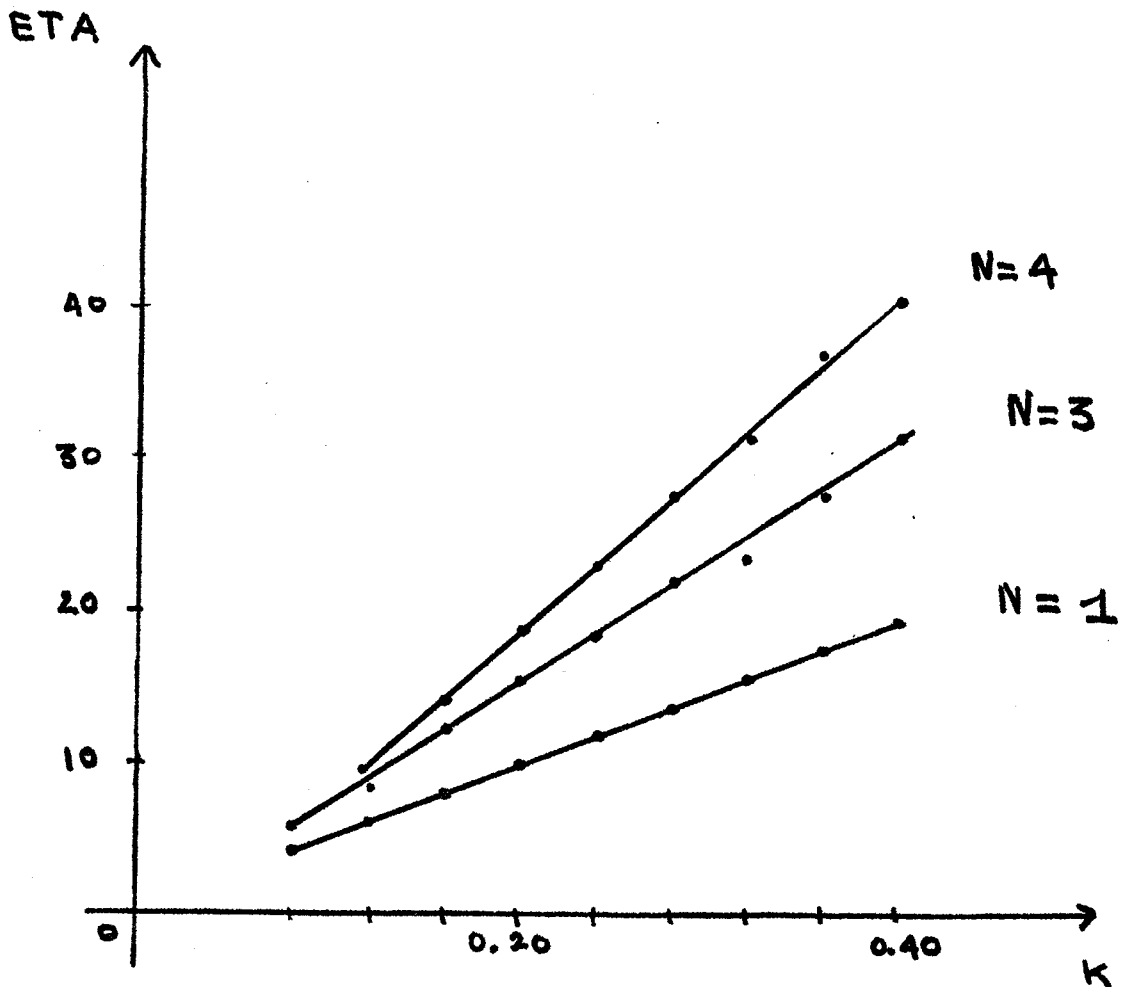
$$E2A = \frac{K}{12} [-2 X_{00} + 6 X_{01} - 8 X_{02} + 6 X_{03} - 2 X_{04}]$$

$$E3A = \frac{K}{96} [-3 X_{00} + 33 X_{01} - 51 X_{02} + 39 X_{03} - 18 X_{04}]$$

Pour différentes valeurs du pas $K = 2h$ et sur les exemples cités précédemment, nous estimons la qualité des évaluations pratiques en déterminant ETA, travail résumé dans le tableau suivant :

EI	N=1	N=2	N=3	N=4	N=5	E2	N=1	N=2	N=3	N=4	N=5	E3	N=1	N=2	N=3	N=4	N=5
K=0.04	2.5	2.9	11.2	9.8	0.8		3.4	3.8	9.2	4.3	0.8		2.9	3.2	13.5	5.3	0.8
0.08	4.7	4.6	13.7	10.8	1.8		5.6	4.7	15.6	11.6	1.1		5.1	4.8	17.5	14.8	1.0
0.12	6.8	7.2	18.4	14.3	1.6		7.7	6.9	21.0	16.5	1.6		7.2	7.0	22.5	17.5	1.6
0.16	8.9	9.5	23.2	18.7	2.1		9.8	9.0	27.3	21.0	2.1		9.3	9.3	29.1	21.9	2.1
0.20	11.1	11.8	30.4	23.7	2.7		11.9	11.2	34.3	26.4	2.7		11.4	11.5	34.6	27.3	2.7
0.24	13.2	14.0	37.0	29.3	3.2		14.3	13.3	38.1	31.9	3.2		13.6	13.7	42.5	33.6	3.2
0.28	15.4	16.2	42.9	35.0	3.8		16.2	15.4	47.2	38.6	3.8		15.8	15.9	49.8	39.4	3.9
0.32	17.6	18.4	47.5	40.7	4.5		18.4	17.5	55.8	43.5	4.5		18.0	18.0	58.0	46.3	4.5
0.36	19.9	20.6	50.7	46.9	5.1		20.6	19.6	63.0	51.7	5.1		20.2	20.2	67.0	53.0	5.1
0.40	22.1	22.7	52.1	53.6	5.8		22.9	21.6	70.9	57.3	5.8		22.5	22.3	77.0	61.0	5.8
E1A	E2A																
K=0.04	2.2	2.5	5.3	3.8	1.9		2.1	3.6	2.2	0.9	2.3		2.2	2.8	2.7	1.0	2.1
0.08	4.2	4.2	9.0	6.3	3.4		4.0	4.1	5.8	3.0	4.1		4.1	4.1	6.8	4.5	3.9
0.12	6.3	6.3	12.9	11.2	5.1		6.1	6.0	9.0	8.3	6.3		6.2	6.1	10.0	10.1	5.9
0.16	8.4	8.3	16.9	16.5	6.9		8.2	7.9	12.2	14.0	8.5		8.3	8.0	13.1	15.9	7.9
0.20	10.5	10.3	21.4	21.5	8.7		10.2	9.8	15.4	18.7	10.7		10.4	10.0	16.3	21.0	10.0
0.24	12.6	12.3	25.6	26.5	10.6		12.4	11.8	18.2	23.0	13.1		12.5	11.9	19.4	25.8	12.2
0.28	14.8	14.3	29.5	31.6	12.6		14.5	13.6	22.0	27.6	15.5		14.7	13.8	22.5	30.5	14.5
0.32	17.0	16.2	33.2	36.8	14.6		16.7	15.5	23.3	31.8	17.9		16.9	15.7	25.9	35.4	16.8
0.36	19.2	18.2	36.5	42.3	16.6		18.9	17.4	27.3	37.0	20.5		19.1	17.6	29.4	40.3	19.2
0.40	21.5	20.1	39.6	47.8	18.8		21.1	19.2	31.7	40.5	23.1		21.3	19.5	32.8	45.9	21.6
E1A	E3A																

RK2 E2A



les graphiques $N=2$, $N=5$ sont pratiquement confondus avec $N=1$.

N=1

K=0.20

- 23 -

T	ER	EI	EIA	ER	E2	E2A	ER	E3	E3A
	6	6	6	6	6	6	6	6	6
	IO	IO	IO	IO	IO	IO	IO	IO	IO
0.2	658	749	731	182	223	200	341	399	377
0.4	712	804	789	235	278	259	394	453	435
0.6	755	849	837	279	323	307	438	498	484
0.8	791	885	875	315	360	347	474	535	523
1.0	820	915	907	344	390	379	503	565	555
2.0	904	1001	998	428	476	472	586	651	647
3.0	935	1033	1031	458	507	506	617	682	681
4.0	946	1004	1044	470	519	518	628	694	693

N=2

K=0.20

T	ER	EI	EIA	ER	E2	E2A	ER	E3	E3A
	6	6	6	7	7	7	7	7	7
	IO	IO	IO	IO	IO	IO	IO	IO	IO
0.2	-147	-123	-132	-533	-473	-480	-848	-750	-763
0.4	-133	-118	-120	-482	-428	-435	-767	-679	-691
0.6	-121	-106	-108	-436	-388	-397	-694	-614	-625
0.8	-109	-96	-98	-395	-351	-356	-628	-556	-566
1.0	-99	-87	-89	-357	-317	-322	-568	-503	-512
2.0	-60	-53	-54	-217	-192	-195	-345	-305	-310
3.0	-36	-32	-33	-131	-117	-118	-209	-185	-188
4.0	-22	-20	-20	-80	-71	-72	-127	-112	-114

ER = erreur réelle

E1, E2, E3, E1A, E2A, E3A = erreur calculée par les formules d'évaluation pratique.

Nous admettrons que le dénominateur de ETA est en K^3 (la partie principale de l'erreur est en K^3) et que son numérateur est en K^4 . ETA semblerait être proportionnel au pas K. L'étude de ETA (K) nous le confirme.

C) Méthode de rang 3, d'ordre 3 : RK3.

$x_1 = x_{03}$ représente une formule sur le pas h de coefficients A_{ij} , $\theta_1, \theta_2, \theta_3 = 1$ et d'écriture matricielle :

A_{10}		
A_{20}	A_{21}	
A_{30}	A_{31}	A_{32}

Conformément au tableau général I, l'exactitude du développement de x_1 jusqu'au terme en h^3 exige les conditions

$$\frac{1}{2} = A_{31} \theta_1 + A_{32} \theta_2 \quad h^2$$

$$\frac{1}{3} = A_{31} \theta_1^2 + A_{32} \theta_2^2 \quad h^3$$

$$\frac{1}{6} = A_{32} A_{21} \theta_1 \quad h^3$$

complétées par les conditions

$$A_{30} + A_{31} + A_{32} = 1$$

$$A_{20} + A_{21} = \theta_2$$

$$A_{10} = \theta_1$$

Donnons nous θ_1, θ_2 . Les deux premières conditions déterminent A_{31}, A_{32} la troisième détermine A_{21} . Les trois dernières déterminent A_{30}, A_{20}, A_{10} .

$$A_{32} = \frac{\theta_1/2 - 1/3}{\theta_2(\theta_1 - \theta_2)} \quad A_{31} = \frac{\theta_2/2 - 1/3}{\theta_1(\theta_2 - \theta_1)} \quad A_{21} = \frac{\theta_2(\theta_1 - \theta_2)}{\theta_1(3\theta_1 - 2)}$$

$x_2 = x_{06}$ représente une formule sur le pas $K = 2h$, de coefficients

A_{ij} , $\theta_1, \theta_2, \theta_3 = 1/2, \theta_4 = \theta_1 + 1/2, \theta_5 = \theta_2 + 1/2, \theta_6 = 1$ et d'écriture matricielle.

A_{10}						
A_{20}	A_{21}					
A_{30}	A_{31}	A_{32}				
A_{30}	A_{31}	A_{32}	A_{10}			
A_{30}	A_{31}	A_{32}	A_{20}	A_{21}		
A_{30}	A_{31}	A_{32}	A_{30}	A_{31}	A_{32}	

Conformément au tableau général I, l'exactitude du développement de $x_2 = x_{06}$ jusqu'au terme en K^3 exige les conditions

$$\frac{1}{8} = A_{31} \theta_1 + A_{32} \theta_2$$

$$\frac{1}{24} = A_{31} \theta_1^2 + A_{32} \theta_2^2$$

$$\frac{1}{48} = A_{32} A_{21} \theta_1$$

complétées par les conditions

$$A_{30} + A_{31} + A_{32} = 1/2$$

$$A_{20} + A_{21} = \theta_2$$

$$A_{10} = \theta_1$$

Recherchons une formule d'ordre supérieur

$$\overline{x_2} = x_0 + K \sum_{\alpha=0}^6 A_{7\alpha} X_{0\alpha}$$

conformément au tableau général I les coefficients $A_{7\alpha}$ doivent satisfaire à la première condition

$$\sum_{\alpha=0}^6 A_{7\alpha} = 1$$

puis pour assurer l'exactitude du développement de x_2 jusqu'au terme en K^4 à un système de 7 équations à 6 inconnues

Posant

$$S_{i,v} = \sum_{j=0}^{i-1} A_{ij} \theta_j^v \quad (i \geq 1, v \geq 0)$$

$$S_{0,v} = 0 \quad (v \geq 0)$$

$$\sigma_i = \sum_{K,j} A_{iK} A_{Kj} \theta_j = \sum_K A_{iK} S_{K,1}$$

Nous obtenons

$$\begin{aligned} s_{21} &= A_{21} \theta_1 & s_{22} &= A_{21} \theta_1^2 \\ s_{31} &= 1/8 & s_{32} &= 1/24 \\ s_{41} &= 1/8 + \theta_1/2 & s_{42} &= 1/24 + \theta_1/4 \\ s_{51} &= 1/8 + \theta_2/2 + s_{21} & s_{52} &= 1/24 + \theta_2/4 + s_{22} + s_{21} \\ s_{61} &= 1/2 & s_{62} &= 1/3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_3 &= 1/48 = s_{32}/2 \\ \sigma_4 &= 1/48 + \theta_1/8 = s_{42}/2 \\ \sigma_5 &= 1/48 + \sigma_2/8 + s_{21}/2 = s_{52}/2 - s_{22}/2 \\ \sigma_6 &= 1/6 = s_{62}/3 \end{aligned}$$

Le système précédent de 7 équations à 6 inconnues s'écrit :

$$\begin{aligned} (1) \quad \frac{1}{2} &= A_{71} \theta_1 + A_{72} \theta_2 + \frac{A_{73}}{2} + A_{74} \left(\theta_1 + \frac{1}{2}\right) + A_{75} \left(\theta_2 + \frac{1}{2}\right) + A_{76} \\ (2) \quad \frac{1}{3} &= A_{71} \theta_1^2 + A_{72} \theta_2^2 + \frac{A_{73}}{4} + A_{74} \left(\theta_1 + \frac{1}{2}\right)^2 + A_{75} \left(\theta_2 + \frac{1}{2}\right)^2 + A_{76} \\ (3) \quad \frac{1}{4} &= A_{71} \theta_1^3 + A_{72} \theta_2^3 + \frac{A_{73}}{8} + A_{74} \left(\theta_1 + \frac{1}{2}\right)^3 + A_{75} \left(\theta_2 + \frac{1}{2}\right)^3 + A_{76} \\ (4) \quad \frac{1}{6} &= A_{72} s_{21} + \frac{A_{73}}{8} + A_{74} s_{41} + A_{75} s_{51} + \frac{A_{76}}{2} \\ (5) \quad \frac{1}{8} &= A_{72} s_{21} \theta_2 + \frac{A_{73}}{16} + A_{74} s_{41} \left(\theta_1 + \frac{1}{2}\right) + A_{75} s_{51} \left(\theta_2 + \frac{1}{2}\right) + \frac{A_{76}}{2} \\ (6) \quad \frac{1}{24} &= \frac{A_{73}}{48} + \frac{A_{74}}{2} s_{42} + \frac{A_{75}}{2} (s_{52} - s_{22}) + \frac{A_{76}}{6} \\ (7) \quad \frac{1}{12} &= A_{72} s_{22} + \frac{A_{73}}{24} + A_{74} s_{42} + A_{75} s_{52} + \frac{A_{76}}{3} \end{aligned}$$

De (6) et (7) résulte $[A_{72} + A_{75}]s_{22} = 0$

mais $s_{22} = A_{21} \theta_1^2 \neq 0$ puisque $A_{32} A_{21} \theta_1 = 1/48$ par suite

$$A_{72} + A_{75} = 0$$

Tenant compte de (8)

de (2) et (4) résulte $(A_{71} + A_{74}) \theta_1^2 = 0$

$$\theta_1 \neq 0, \text{ soit } A_{71} + A_{74} = 0$$

de (5) et (6) résulte $A_{74} = A_{72} \frac{\theta_2 (3\theta_2 - 1)}{\theta_1 (3\theta_1 - 1)}$

et par suite, le système de 7 équations à 6 inconnues se réduit en un système de 3 équations à 3 inconnues

$$1/2 = A_{72} \frac{(\theta_2 - \theta_1)}{2\theta_1(3\theta_1 - 1)} [3(\theta_2 + \theta_1)] + \frac{A_{73}}{2} + A_{76}$$

$$1/3 = A_{72} \frac{(\theta_2 - \theta_1)}{4\theta_1(3\theta_1 - 1)} [12\theta_1 \theta_2 + 3(\theta_1 + \theta_2) - 1] + \frac{A_{73}}{4} + A_{76}$$

$$1/4 = A_{72} \frac{(\theta_2 - \theta_1)}{8\theta_1(3\theta_1 - 1)} [30\theta_2 \theta_1 + 3(\theta_1 + \theta_2) - 1] + \frac{A_{73}}{8} + A_{76}$$

quels que soient θ_1, θ_2 arbitraires. La résolution du système im-

pose $A_{72} = 0 = A_{71} = A_{74} = A_{75}$

$$A_{73} = 2/3$$

$$A_{76} = 1/6$$

$$A_{70} = 1 - \sum_{\alpha=1}^6 A_{7\alpha} = 1/6$$

$$x_2 = x_0 + \frac{K}{6} [X_{00} + 4X_{03} + X_{06}]$$

Nous retrouvons appliquée sur le pas $K = 2h$ la formule de Simpson $x_{i+1} = x_{i-1} + \frac{h}{3} [X_{i+1} + 4X_i + X_{i-1}]$

Nous envisageons l'évaluation pratique de l'erreur

$$E = x_2 - \bar{x}_2 \text{ des méthodes :}$$

I - RK3 classique

II - RK3 Nyström

III - RK3 optimale

Le premier terme de l'erreur sur le pas $K = 2 h$ ayant pour évaluation théorique

$$\frac{K^4}{8} \left[(C_3 \left(-\frac{1}{24} - \frac{\theta_1 \theta_2}{3} + \frac{\theta_1 + \theta_2}{9} \right) + J_1 C_2 \left(-\frac{1}{24} + \frac{\theta_1}{6} \right) + K_1 C_1 \left(-\frac{1}{8} + \frac{\theta_2}{3} \right) - J^2 C_1 \left(\frac{1}{24} \right) \right]$$

I RK3 classique

x_2 représente une formule d'ordre 3 sur le pas $K = 2 h$, de coefficients A_{ij} , $\theta_1 = \frac{1}{4}$, $\theta_2 = \theta_3 = \frac{1}{2}$, $\theta_4 = \frac{3}{4}$, $\theta_5 = \theta_6 = 1$ et d'écriture matricielle :

1/4						
-1/2	1					
1/2	1/3	1/12				
1/12	1/3	1/12	1/4			
1/12	1/3	1/12	-1/2	1		
1/12	1/3	1/12	1/12	1/3	1/12	

Le premier terme de l'erreur sur le pas $K = 2 h$ a pour évaluation théorique

$$\frac{K^4}{8} \left[K_1 C_1 \frac{1}{24} - J^2 C_2 \frac{1}{24} \right]$$

et pour évaluation pratique

$$\frac{K}{12} \left[-X_{00} + 4 X_{01} + X_{02} - 7 X_{03} + 4 X_{04} + X_{05} - 2 X_{06} \right]$$

II RK3 Nyström

x_2 représente une formule d'ordre 3 sur le pas $K = 2h$, de coefficients A_{ij} , $\theta_1 = \theta_2 = 1/3$, $\theta_3 = 1/2$, $\theta_4 = \theta_5 = 5/6$, $\theta_6 = 1$ et d'écriture matricielle :

1/3						
0	1/3					
2/16	3/16	3/16				
2/16	3/16	3/16	1/3			
2/16	3/16	3/16	0	1/3		
2/16	3/16	3/16	2/16	3/16	3/16	

Le premier de l'erreur sur le pas $K = 2h$ a pour évaluation théorique :

$$\frac{K^4}{8} \left[-c_3 \frac{1}{216} + J_1 c_2 \frac{1}{72} - J_1^2 c_2 \frac{1}{24} \right]$$

et pour évaluation pratique

$$\frac{K}{48} \left[-2x_{00} + 9x_{01} + 9x_{02} - 26x_{03} + 9x_{04} + 9x_{05} - 8x_{06} \right]$$

III RK3 optimale

x_2 représente une formule d'ordre 3 sur le pas $K = 2h$ de coefficients A_{ij} , $\theta_1 = 1/4$, $\theta_2 = 3/8$, $\theta_3 = 1/2$, $\theta_4 = 3/4$, $\theta_5 = 7/8$, $\theta_6 = 1$ et d'écriture matricielle :

1/4						
0	3/8					
2/18	3/18	4/18				
2/18	3/18	4/18	1/4			
2/18	3/18	4/18	0	3/8		
2/18	3/18	4/18	2/18	3/18	4/18	

Le premier terme de l'erreur sur le pas $K = 2h$ a pour évaluation théorique :

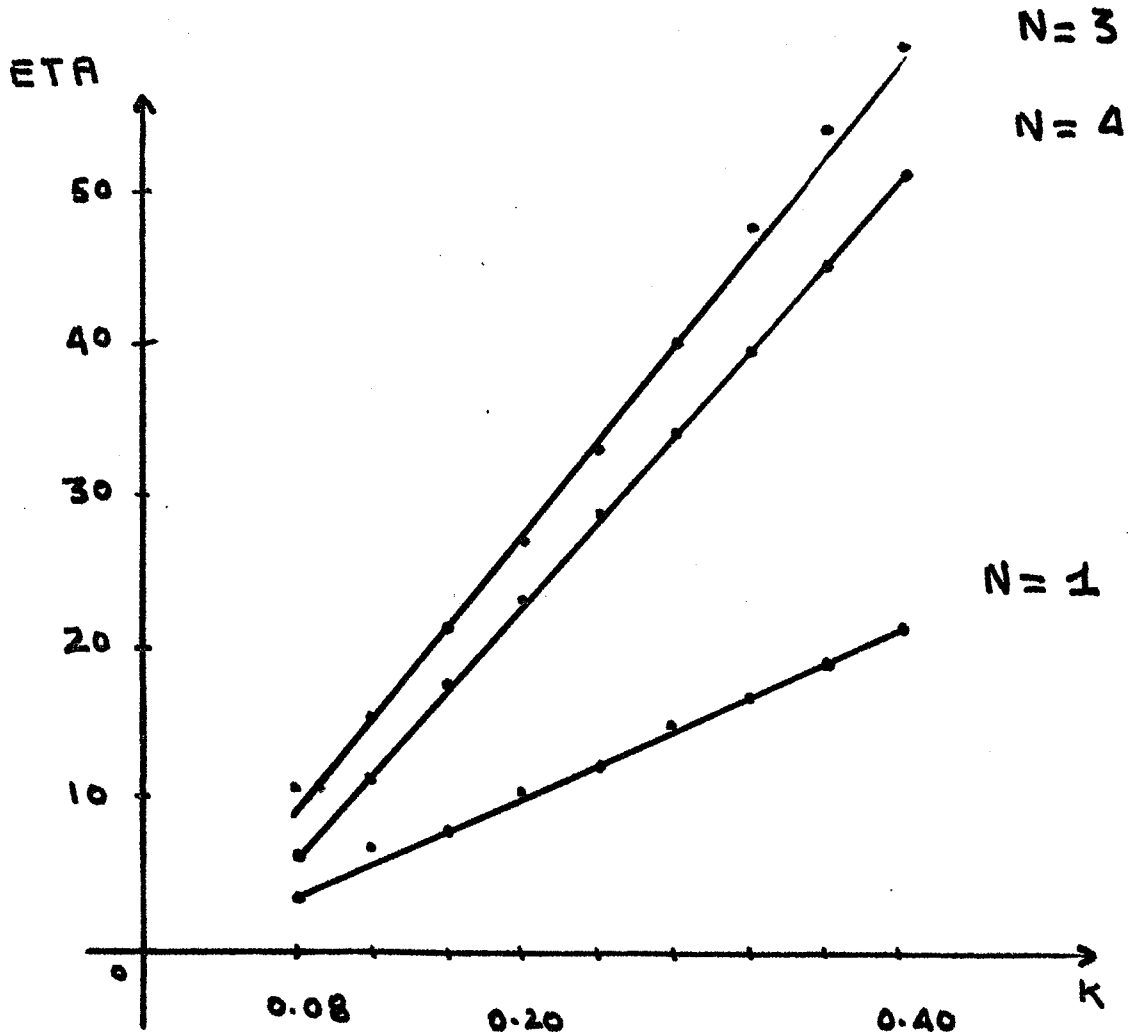
$$\frac{K^4}{8} \left[-c_3 \frac{1}{288} - J_1^2 c_2 \frac{1}{24} \right]$$

et pour évaluation pratique :

$$\frac{K}{18} \left[- X_{00} + 3 X_{01} + 4 X_{02} - 10 X_{03} + 3 X_{04} + 4 X_{05} - 3 X_{06} \right]$$

K	RK3 CLASSIQUE					RK3 NYSTROM					RK3 OPTIMALE				
	N=1	N=2	N=3	N=4	N=5	N=1	N=2	N=3	N=4	N=5	N=1	N=2	N=3	N=4	N=5
0.04	48.5	89.4	16.3	86.7	58.6	26.5	85.2	30.3	85.7	58.8	47.6	90.0	65.0	120.	58.4
0.08	3.3	21.4	10.8	6.9	3.9	3.4	13.2	14.8	8.5	4.2	3.4	19.2	19.8	16.1	3.9
0.12	6.9	9.1	15.9	11.0	4.8	6.7	7.5	20.4	11.8	4.8	6.9	8.4	26.6	14.4	4.9
0.16	8.1	8.3	21.4	17.5	7.4	8.2	8.3	27.2	18.6	7.4	8.1	8.4	34.6	21.3	7.4
0.20	10.5	10.5	27.4	23.2	9.3	10.5	10.1	35.0	24.8	9.3	10.5	10.2	43.7	28.1	9.3
0.24	12.8	12.1	33.3	28.7	11.4	12.7	12.0	42.7	30.6	11.6	12.8	12.0	51.6	34.7	11.4
0.28	14.9	13.9	40.3	34.2	13.5	14.8	13.8	52.3	36.7	13.5	14.9	13.9	62.8	41.2	13.5
0.32	16.9	15.8	47.7	39.6	15.7	16.9	15.7	59.8	42.7	15.6	16.9	15.8	71.6	48.1	15.7
0.36	19.2	17.7	55.3	45.3	17.9	19.2	17.6	64.9	49.4	17.9	19.2	17.6	80.8	54.7	17.9
0.40	21.4	19.5	63.3	52.4	20.2	21.4	19.4	74.5	55.9	20.2	21.4	19.5	91.2	63.3	20.2

-32 bis-
RK3 CLASSIQUE



les graphiques $N=2$, $N=5$ sont pratiquement confondus avec $N=1$.

N=I

K=0.20

T	RK3 CLASSIQUE		RK3 NYSTROM		RK3 OPTIMALE	
	ER	EC	ER	EC	ER	EC
	7 10	7 10	7 10	7 10	7 10	7 10
0.2	- 85	- 94	-138	-153	- 85	- 94
0.4	-100	-109	-151	-167	-100	-109
0.6	-109	-121	-162	-179	-109	-121
0.8	-118	-131	-171	-189	-118	-131
1.0	-126	-139	-179	-197	-126	-139
2.0	-147	-162	-200	-220	-147	-162
3.0	-154	-170	-207	-229	-154	-170
4.0	-159	-173	-221	-232	-159	-174

N=2

K=0.20

T	RK3 CLASSIQUE		RK3 NYSTROM		RK3 OPTIMALE	
	ER	RC	ER	RC	ER	EC
	8 10	8 10	8 10	8 10	8 10	8 10
0.2	-214	-191	-336	-302	-227	-203
0.4	-191	-173	-302	-273	-203	-184
0.6	-175	-157	-276	-247	-186	-166
0.8	-159	-142	-249	-224	-168	-151
1.0	-142	-129	-224	-202	-151	-136
2.0	- 87	- 78	-137	-123	- 92	- 83
3.0	- 52	- 47	- 83	- 74	- 56	- 50
4.0	- 32	- 29	- 50	- 45	- 34	- 30

ER = erreur réelle

EC = erreur calculée.

Nous admettrons que le dénominateur de ETA est en K^4 (la partie principale de l'erreur est en K^4) et que son numérateur est en K^5 .

ETA semblerait être proportionnel au pas K. L'étude de ETA (K) nous le confirme.

Pour $K = 0.04$ les résultats (donnés ici à titre indicatif) n'ont aucun sens. Pour de très faibles valeurs du pas la solution approchée X se confond avec la solution exacte XR. La détermination de $ER = X - XR < 10^{-8}$ devient difficile sinon impossible sur les calculatrices existantes (IBM 7090, 7044) puisque la précision des opérations est de l'ordre de 8 à 9 chiffres significatifs. Aussi prendrons nous dans les méthodes suivantes un pas de départ d'autant plus grand que l'ordre de la méthode est plus élevé.

Nous insistons sur le fait que pour les très faibles valeurs du pas ETA serait alors très faible (et la détermination de l'erreur très bonne) s'il n'y avait pas l'erreur d'arrondi.

Comme nous l'avons déjà constaté pour les méthodes RK2, l'évaluation pratique de l'erreur de méthode sur les exemples $N=3$ et $N=4$ est difficile : cela tient à la forme de leur solution, fonction décroissante possédant un point d'inflexion

$$\text{pour } N=3, t_I = \sqrt{3}/3 = 0.58$$

$$N=4, t_I = 1$$

Nous constaterons dans les tableaux suivants, les très médiocres déterminations de EC autour de ces points.

N=3

- 35 -

K=0.20

RK3 CLASSIQUE			RK3 NYSTROM		RK3 OPTIMALE	
T	ER ₈ 10	EC ₈ 10	ER ₈ 10	EC ₈ 10	ER ₈ 10	EC ₈ 10
0.2	6179	7223	- 1741	-1130	416	1140
0.4	4078	5640	- 427	501	1468	2638
0.6	1217	1759	- 415	- 218	1015	1476
0.8	- 782	-1086	- 1310	-1740	- 340	- 559
1.0	-1508	-2032	- 1805	-2395	-1187	-1634
2.0	- 369	- 435	- 464	- 547	- 411	- 483
3.0	- 57	- 64	- 75	- 84	- 68	- 76
4.0	- 12	- 13	- 16	- 17	- 15	- 16

N=4

K=0.20

T	ER ₈ 10	EC ₈ 10	ER ₈ 10	EC ₈ 10	ER ₈ 10	EC ₈ 10
0.2	832	861	- 265	- 250	13	31
0.4	809	881	- 209	- 172	77	125
0.6	720	882	- 148	- 95	155	224
0.8	536	642	- 136	- 83	184	261
1.0	239	319	- 221	- 189	111	174
2.0	-1557	-1900	- 1422	- 1738	-1214	-1485
3.0	- 812	-1088	- 761	- 1019	- 722	- 967
4.0	- 88	- 130	- 84	- 124	- 82	- 121

N=3

K=0.40

T	RK3 CLASSIQUE		RK3 NYSTROM		RK3 OPTIMALE	
	ER	EC	ER	EC	ER	EC
	7 10	7 10	7 10	7 10	7 10	7 10
0.4	7817	12818	-1324	1501	1803	5283
0.8	440	1066	-1147	-1442	658	1214
1.2	-2252	- 3790	-2667	-4414	-1890	-3216
1.6	-1516	- 2337	-1781	-2725	-1476	-2266
2.0	- 728	- 1039	- 879	-1253	- 761	-1082
4.0	- 23	- 27	- 30	- 36	- 27	- 32

N=4

K=0.40

T	RK3 CLASSIQUE		RK3 NYSTROM		RK3 OPTIMALE	
	ER	EC	ER	EC	ER	EC
	7 10	7 10	7 10	7 10	7 10	7 10
0.4	1328	1500	- 357	- 278	86	189
0.8	1061	1422	- 180	- 4	310	553
1.2	139	349	- 451	- 401	71	239
1.6	-1218	-1538	-1286	- 1652	- 809	-1016
2.0	-2234	-3194	-2059	- 2956	-1697	-2433
4.0	- 170	- 374	- 162	- 357	- 158	- 346

D) Méthode rang 4, d'ordre 4 : RK4.

$x_1 = x_{04}$ représente une formule sur le pas h , de coefficients $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4 = 1, A_{ij}$ et d'écriture matricielle

A_{10}			
A_{20}	A_{21}		
A_{30}	A_{31}	A_{32}	
A_{40}	A_{41}	A_{42}	A_{43}

Conformément au tableau général I, l'exactitude du développement de x_1 jusqu'au terme en h^4 exige les conditions I

$$(I) \quad \begin{vmatrix} \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 \\ \theta_1^2 & \theta_2^2 & \theta_3^2 \\ \theta_1^3 & \theta_2^3 & \theta_3^3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} A_{41} \\ A_{42} \\ A_{43} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/2 \\ 1/3 \\ 1/4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \theta_2 & \theta_1 & \theta_1 \\ \theta_2^2 & \theta_1^2 & \theta_1^2 \\ \theta_3 & \theta_2 & \theta_3 \theta_1 & \theta_2 \theta_1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} A_{43} & A_{32} \\ A_{43} & A_{31} \\ A_{42} & A_{21} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/6 \\ 1/12 \\ 1/8 \end{vmatrix}$$

$$A_{43} A_{32} A_{21} \theta_1 = 1/24$$

équations complétées par les conditions

$$A_{10} = \theta_1$$

$$A_{20} + A_{21} = \theta_2$$

$$A_{30} + A_{31} + A_{32} = \theta_3$$

$$A_{40} + A_{41} + A_{42} + A_{43} = 1$$

Les trois premières équations déterminent $A_{40}, A_{41}, A_{42}, A_{43}$ coefficients de quadrature approchée aux abscisses $0, \theta_1, \theta_2, \theta_3$.

Les trois suivantes déterminent A_{32}, A_{31}, A_{21} .

La dernière donne une condition de possibilité entre $\theta_1, \theta_2, \theta_3$. Un calcul laborieux mais peu difficile montre que cette condition est $\theta_3 = 1$.

La recherche d'une formule d'ordre supérieur exigera la résolution d'un système de 15 équations. Nous sommes amenés en conséquence pour obtenir un nombre d'inconnues satisfaisant, de prendre un pas $K = 3h$.

$x_1 = x_{0,4}, x_2 = x_{1,4} = x_{0,8}$ seront pris comme valeurs initiales de deux nouveaux pas h .

$x_3 = x_{2,4} = x_{0,12}$ représente une formule sur le pas $K = 3h$ de coefficients A_{ij}

$$\begin{array}{lll} \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 = \theta_4 = 1/3 \\ \theta_5 = \theta_1 + 1/3 & \theta_6 = \theta_2 + 1/3 & \theta_7 = \theta_8 = 2/3 \\ \theta_9 = \theta_1 + 2/3 & \theta_{10} = \theta_2 + 2/3 & \theta_{11} = \theta_{12} = 1 \end{array}$$

et d'écriture matricielle

A_{10}																			
A_{20}	A_{21}																		
A_{30}	A_{31}	A_{32}																	
A_{40}	A_{41}	A_{42}	A_{43}																
"	"	"	"	A_{10}															
"	"	"	"	A_{20}	A_{21}														
"	"	"	"	A_{30}	A_{31}	A_{32}													
"	"	"	"	A_{40}	A_{41}	A_{42}	A_{43}												
"	"	"	"	"	"	"	"	A_{10}											
"	"	"	"	"	"	"	"	"	A_{20}	A_{21}									
"	"	"	"	"	"	"	"	"	A_{30}	A_{31}	A_{32}								
A_{40}	A_{41}	A_{42}	A_{43}	A_{40}	A_{41}	A_{42}	A_{43}	A_{40}	A_{41}	A_{42}	A_{43}								

Conformément au tableau général I, l'exactitude du développement de x_3 jusqu'au terme en K^4 exige les conditions II

$$\begin{array}{l}
 \text{II} \\
 \left\| \begin{array}{ccc} \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 \\ \theta_1^2 & \theta_2^2 & \theta_3^2 \\ \theta_1^3 & \theta_2^3 & \theta_3^3 \end{array} \right\| x \left\| \begin{array}{c} A_{41} \\ A_{42} \\ A_{43} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} 1/18 \\ 1/81 \\ 1/324 \end{array} \right\| \\
 \\
 \left\| \begin{array}{ccc} \theta_2 & \theta_1 & \theta_1 \\ \theta_2^2 & \theta_1^2 & \theta_1^2 \\ \theta_3 & \theta_2 & \theta_3 \theta_1 \theta_2 \theta_1 \end{array} \right\| x \left\| \begin{array}{cc} A_{43} & A_{32} \\ A_{43} & A_{31} \\ A_{42} & A_{21} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} 1/(6 \times 27) \\ 1/(12 \times 81) \\ 1/(8 \times 81) \end{array} \right\|
 \end{array}$$

$$A_{43} A_{32} A_{21} \theta_1 = 1/(24 \times 81)$$

équations complétées par les conditions

$$A_{10} = \theta_1$$

$$A_{20} + A_{21} = \theta_2$$

$$A_{30} + A_{31} + A_{32} = \theta_3 = 1/3$$

$$A_{40} + A_{41} + A_{42} + A_{43} = 1/3$$

Cherchons une formule d'ordre supérieur

$$\overline{x}_3 = x_0 + K \sum_{\alpha=0}^{12} A_{q\alpha} x_{0\alpha} \quad \text{avec } q = 13$$

conformément au tableau I, l'exactitude du développement de \overline{x}_3 jusqu'au terme en K^5 exige la résolution d'un système de 15 équations à 12 inconnues

$$\text{Posons } S_{i,v} = \sum_{j=0}^{i-1} A_{ij} \theta^v_j \quad (v \geq 0, i \geq 1)$$

$$S_{0,v} = 0 \quad (v \geq 0)$$

$$\sigma_i = \sum_{K=0}^{i-1} A_{iK} S_{K1}$$

De longs calculs, fastidieux mais peu difficiles, nous permettent d'exprimer le système de 15 équations à 12 inconnues en fonction de $\theta_1, \theta_2, \theta_3, s_{21}, s_{22}, s_{31}, s_{32}, s_{33}$, et σ_3 nous obtenons

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \frac{1}{2} &= A_{q12} + A_{q11} \left(\theta_3 + \frac{2}{3}\right) + A_{q10} \left(\theta_2 + \frac{2}{3}\right) + A_{q9} \left(\theta_1 + \frac{2}{3}\right) + A_{q8} \left(\frac{2}{3}\right) \\
 &\quad + A_{q7} \left(\theta_3 + \frac{1}{3}\right) + A_{q6} \left(\theta_2 + \frac{1}{3}\right) + A_{q5} \left(\theta_1 + \frac{1}{3}\right) + A_{q4} \left(\frac{1}{3}\right) \\
 &\quad + A_{q3} (\theta_3) + A_{q2} (\theta_2) + A_{q1} (\theta_1) \\
 (2) \quad \frac{1}{3} &= A_{q12} + A_{q11} \left(\theta_3 + \frac{2}{3}\right)^2 + A_{q10} \left(\theta_2 + \frac{2}{3}\right)^2 + A_{q9} \left(\theta_1 + \frac{2}{3}\right)^2 + A_{q8} \left(\frac{2}{3}\right)^2 \\
 &\quad + A_{q7} \left(\theta_3 + \frac{1}{3}\right)^2 + A_{q6} \left(\theta_2 + \frac{1}{3}\right)^2 + A_{q5} \left(\theta_1 + \frac{1}{3}\right)^2 + A_{q4} \left(\frac{1}{3}\right)^2 \\
 &\quad + A_{q3} (\theta_3)^2 + A_{q2} (\theta_2)^2 + A_{q1} (\theta_1)^2 \\
 (3) \quad \frac{1}{4} &= A_{q12} + A_{q11} \left(\theta_3 + \frac{2}{3}\right)^3 + A_{q10} \left(\theta_2 + \frac{2}{3}\right)^3 + A_{q9} \left(\theta_1 + \frac{2}{3}\right)^3 + A_{q8} \left(\frac{2}{3}\right)^3 \\
 &\quad + A_{q7} \left(\theta_3 + \frac{1}{3}\right)^3 + A_{q6} \left(\theta_2 + \frac{1}{3}\right)^3 + A_{q5} \left(\theta_1 + \frac{1}{3}\right)^3 + A_{q4} \left(\frac{1}{3}\right)^3 \\
 &\quad + A_{q3} (\theta_3)^3 + A_{q2} (\theta_2)^3 + A_{q1} (\theta_1)^3 \\
 (4) \quad \frac{1}{5} &= A_{q12} + A_{q11} \left(\theta_3 + \frac{2}{3}\right)^4 + A_{q10} \left(\theta_2 + \frac{2}{3}\right)^4 + A_{q9} \left(\theta_1 + \frac{2}{3}\right)^4 + A_{q8} \left(\frac{2}{3}\right)^4 \\
 &\quad + A_{q7} \left(\theta_3 + \frac{1}{3}\right)^4 + A_{q6} \left(\theta_2 + \frac{1}{3}\right)^4 + A_{q5} \left(\theta_1 + \frac{1}{3}\right)^4 + A_{q4} \left(\frac{1}{3}\right)^4 \\
 &\quad + A_{q3} (\theta_3)^4 + A_{q2} (\theta_2)^4 + A_{q1} (\theta_1)^4 \\
 (5) \quad \frac{1}{6} &= A_{q12} \left(\frac{1}{2}\right) + A_{q11} \left(\frac{2}{9} + \frac{2\theta_3}{3} + s_{31}\right) + A_{q10} \left(\frac{2}{9} + \frac{2\theta_2}{3} + s_{21}\right) \\
 &\quad + A_{q9} \left(\frac{2}{9} + \frac{2\theta_1}{3}\right) + A_{q8} \left(\frac{2}{9}\right) \\
 &\quad + A_{q7} \left(\frac{1}{18} + \frac{\theta_3}{3} + s_{31}\right) + A_{q6} \left(\frac{1}{18} + \frac{\theta_2}{3} + s_{21}\right) \\
 &\quad + A_{q5} \left(\frac{1}{18} + \frac{\theta_1}{3}\right) + A_{q4} \left(\frac{1}{18}\right) \\
 &\quad + A_{q3} (s_{31}) + A_{q2} (s_{21})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (6) \quad \frac{1}{8} &= A_{q12} \left(\frac{1}{2}\right) + A_{q11} \left(\frac{2}{9} + \frac{2\theta_3}{3} + s_{31}\right) \left(\theta_3 + \frac{2}{3}\right) + A_{q10} \left(\frac{2}{9} + \frac{2\theta_2}{3} + s_{21}\right) \left(\theta_2 + \frac{2}{3}\right) \\
 &+ A_{q9} \left(\frac{2}{9} + \frac{2\theta_1}{3}\right) \left(\theta_1 + \frac{2}{3}\right) + A_{q8} \left(\frac{2}{9}\right) \left(\frac{2}{3}\right) \\
 &+ A_{q7} \left(\frac{1}{18} + \frac{\theta_3}{3} + s_{31}\right) \left(\theta_3 + \frac{1}{3}\right) + A_{q6} \left(\frac{1}{18} + \frac{\theta_2}{3} + s_{21}\right) \left(\theta_2 + \frac{1}{3}\right) \\
 &+ A_{q5} \left(\frac{1}{18} + \frac{\theta_1}{3}\right) \left(\theta_1 + \frac{1}{3}\right) + A_{q4} \left(\frac{1}{18}\right) \left(\frac{1}{3}\right) \\
 &+ A_{q3} (s_{31}) \theta_3 + A_{q2} (s_{21}) \theta_2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (7) \quad \frac{1}{24} &= A_{q12} \left(\frac{1}{6}\right) + A_{q11} \left(\frac{4}{81} + \frac{2}{9} \theta_3 + \frac{2}{3} s_{31} + \sigma_3\right) + A_{q10} \left(\frac{4}{81} + \frac{2}{9} \theta_2 + \frac{2}{3} s_{21}\right) \\
 &+ A_{q9} \left(\frac{4}{81} + \frac{2}{9} \theta_1\right) + A_{q8} \left(\frac{4}{81}\right) \\
 &+ A_{q7} \left(\frac{1}{162} + \frac{1}{18} \theta_3 + \frac{1}{3} s_{31} + \sigma_3\right) + A_{q6} \left(\frac{1}{162} + \frac{1}{18} \theta_2 + \frac{1}{3} s_{21}\right) \\
 &+ A_{q5} \left(\frac{1}{162} + \frac{1}{18} \theta_1\right) + A_{q4} \left(\frac{1}{162}\right) \\
 &+ A_{q3} (\sigma_3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (8) \quad \frac{1}{12} &= A_{q12} \left(\frac{1}{3}\right) + A_{q11} \left(\frac{8}{81} + \frac{4}{9} \theta_3 + \frac{4}{3} s_{31} + s_{32}\right) + A_{q10} \left(\frac{8}{81} + \frac{4\theta_2}{9} + \frac{4}{3} s_{21} + s_{22}\right) \\
 &+ A_{q9} \left(\frac{8}{81} + \frac{4}{9} \theta_1\right) + A_{q8} \left(\frac{8}{81}\right) \\
 &+ A_{q7} \left(\frac{1}{81} + \frac{1}{9} \theta_3 + \frac{2}{3} s_{31} + s_{32}\right) + A_{q6} \left(\frac{1}{81} + \frac{1}{9} \theta_2 + \frac{2}{3} s_{21} + s_{22}\right) \\
 &+ A_{q5} \left(\frac{1}{81} + \frac{1}{9} \theta_1\right) + A_{q4} \left(\frac{1}{81}\right) \\
 &+ A_{q3} (s_{32}) + A_{q2} (s_{22})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (9) \quad \frac{1}{10} &= A_{q12} \left(\frac{1}{2}\right) + A_{q11} \left(\frac{2}{9} + \frac{2}{3} \theta_3 + s_{31}\right) \left(\theta_3 + \frac{2}{3}\right)^2 + A_{q10} \left(\frac{2}{9} + \frac{2}{3} \theta_2 + s_{21}\right) \left(\theta_2 + \frac{2}{3}\right)^2 \\
 &+ A_{q9} \left(\frac{2}{9} + \frac{2}{3} \theta_1\right) \left(\theta_1 + \frac{2}{3}\right)^2 + A_{q8} \left(\frac{2}{9}\right) \left(\frac{2}{3}\right)^2 \\
 &+ A_{q7} \left(\frac{1}{18} + \frac{1}{3} \theta_3 + s_{31}\right) \left(\theta_3 + \frac{1}{3}\right)^2 + A_{q6} \left(\frac{1}{18} + \frac{1}{3} \theta_2 + s_{21}\right) \left(\theta_2 + \frac{1}{3}\right)^2 \\
 &+ A_{q5} \left(\frac{1}{18} + \frac{1}{3} \theta_1\right) \left(\theta_1 + \frac{1}{3}\right)^2 + A_{q4} \left(\frac{1}{18}\right) \left(\frac{1}{3}\right)^2 \\
 &+ A_{q3} (s_{31}) \theta_3^2 + A_{q2} (s_{21}) \theta_2^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (10) \quad \frac{1}{15} = & A_{q12} \left(\frac{1}{3}\right) + A_{q11} \left(\frac{8}{81} + \frac{4}{9} \theta_3 + \frac{4}{3} s_{31} + s_{32}\right) (\theta_3 + \frac{2}{3}) + A_{q10} \left(\frac{8}{81} + \frac{4}{9} \theta_2 + \frac{4}{3} s_{21} + s_{22}\right) (\theta_2 + \frac{2}{3}) \\
 & + A_{q9} \left(\frac{8}{81} + \frac{4}{9} \theta_1\right) (\theta_1 + \frac{2}{3}) + A_{q8} \left(\frac{8}{81}\right) \frac{2}{3} \\
 & + A_{q7} \left(\frac{1}{81} + \frac{\theta_3}{9} + \frac{2}{3} s_{31} + s_{32}\right) (\theta_3 + \frac{1}{3}) + A_{q6} \left(\frac{1}{81} + \frac{\theta_2}{9} + \frac{2}{3} s_{21} + s_{22}\right) (\theta_2 + \frac{1}{3}) \\
 & + A_{q5} \left(\frac{1}{81} + \frac{\theta_1}{9}\right) (\theta_1 + \frac{1}{3}) + A_{q4} \left(\frac{1}{81}\right) \frac{1}{3} \\
 & + A_{q3} (s_{32}) \theta_3 + A_{q2} (s_{22}) \theta_2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (11) \quad \frac{7}{120} = & A_{q12} \left(\frac{7}{24}\right) \\
 & + A_{q11} \left(\frac{14}{3 \times 81} + \frac{28}{81} \theta_3 + \frac{2}{9} \theta_3^2 + \frac{10}{9} s_{31} + \frac{2}{3} s_{32} + \frac{2}{3} s_{31} \theta_3 + \frac{4}{3} \sigma_3 + \sigma_3 \theta_2 + \sigma_3 \theta_3\right) \\
 & + A_{q10} \left(\frac{14}{3 \times 81} + \frac{28}{81} \theta_2 + \frac{2}{9} \theta_2^2 + \frac{10}{9} s_{21} + \frac{2}{3} s_{22} + \frac{2}{3} s_{21} \theta_2\right) \\
 & + A_{q9} \left(\frac{14}{3 \times 81} + \frac{28}{81} \theta_1 + \frac{2}{9} \theta_1^2\right) \\
 & + A_{q8} \left(\frac{14}{3 \times 81}\right) \\
 & + A_{q7} \left(\frac{7}{24 \times 81} + \frac{7}{2 \times 81} \theta_3 + \frac{1}{18} \theta_3^2 + \frac{5}{18} s_{31} + \frac{1}{3} s_{32} + \frac{1}{3} s_{31} \theta_3 + \frac{2}{3} \sigma_3 + \sigma_3 \theta_2 + \sigma_3 \theta_3\right) \\
 & + A_{q6} \left(\frac{7}{24 \times 81} + \frac{7}{2 \times 81} \theta_2 + \frac{1}{18} \theta_2^2 + \frac{5}{18} s_{21} + \frac{1}{3} s_{22} + \frac{1}{3} s_{21} \theta_2\right) \\
 & + A_{q5} \left(\frac{7}{24 \times 81} + \frac{7}{2 \times 81} \theta_1 + \frac{1}{18} \theta_1^2\right) \\
 & + A_{q4} \left(\frac{7}{24 \times 81}\right) \\
 & + A_{q3} (\sigma_3 \theta_2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (12) \quad \frac{1}{20} = & A_{q12} \left(\frac{1}{4}\right) + A_{q11} \left(\frac{4}{81} + \frac{8}{27} \theta_3 + s_{33} + 2s_{32} + \frac{4}{3} s_{31}\right) + A_{q10} \left(\frac{4}{81} + \frac{8}{27} \theta_2 + s_{23} + 2s_{22} + \frac{4}{3} s_{21}\right) \\
 & + A_{q9} \left(\frac{4}{81} + \frac{8}{27} \theta_1\right) + A_{q8} \left(\frac{4}{81}\right) \\
 & + A_{q7} \left(\frac{1}{4 \times 81} + \frac{\theta_3}{27} + s_{33} + s_{32} + \frac{1}{3} s_{31}\right) + A_{q6} \left(\frac{1}{4 \times 81} + \frac{\theta_2}{27} + s_{23} + s_{22} + \frac{1}{3} s_{21}\right) \\
 & + A_{q5} \left(\frac{1}{4 \times 81} + \frac{\theta_1}{27}\right) + A_{q4} \left(\frac{1}{4 \times 81}\right) \\
 & + A_{q3} (s_{33}) + A_{q2} (s_{23})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (13) \quad \frac{1}{120} &= A_{q12} \left(\frac{1}{24} \right) + A_{q11} \left(\frac{2}{3 \times 81} + \frac{4}{81} \theta_3 + \frac{2}{9} s_{31} + \frac{2}{3} \sigma_3 \right) + A_{q10} \left(\frac{2}{3 \times 81} + \frac{4}{81} \theta_2 + \frac{2}{9} s_{21} \right) \\
 &+ A_{q9} \left(\frac{2}{3 \times 81} + \frac{4}{81} \theta_1 \right) + A_{q8} \left(\frac{2}{3 \times 81} \right) \\
 &+ A_{q7} \left(\frac{1}{24 \times 81} + \frac{\theta_3}{2 \times 81} + \frac{1}{18} s_{31} + \frac{1}{3} \sigma_3 \right) + A_{q6} \left(\frac{1}{24 \times 81} + \frac{\theta_2}{2 \times 81} + \frac{1}{18} s_{21} \right) \\
 &+ A_{q5} \left(\frac{1}{24 \times 81} + \frac{\theta_1}{2 \times 81} \right) + A_{q4} \left(\frac{1}{24 \times 81} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (14) \quad \frac{2}{120} &= A_{q12} \left(\frac{1}{12} \right) + A_{q11} \left(\frac{4}{3 \times 81} + \frac{8}{81} \theta_3 + \frac{4}{9} s_{31} + \frac{4}{3} \sigma_3 + \sigma_3 \theta_1 \right) + A_{q10} \left(\frac{4}{3 \times 81} + \frac{8}{81} \theta_2 + \frac{4}{9} s_{21} \right) \\
 &+ A_{q9} \left(\frac{4}{3 \times 81} + \frac{8}{81} \theta_1 \right) + A_{q8} \left(\frac{4}{3 \times 81} \right) \\
 &+ A_{q7} \left(\frac{1}{12 \times 81} + \frac{\theta_3}{81} + \frac{1}{9} s_{31} + \frac{2}{3} \sigma_3 + \sigma_3 \theta_1 \right) + A_{q6} \left(\frac{1}{12 \times 81} + \frac{\theta_2}{81} + \frac{1}{9} s_{21} \right) \\
 &+ A_{q5} \left(\frac{1}{12 \times 81} + \frac{\theta_1}{81} \right) + A_{q4} \left(\frac{1}{12 \times 81} \right) \\
 &+ A_{q3} (\sigma_3) \theta_1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (15) \quad \frac{1}{20} &= A_{q12} \left(\frac{1}{2} \right)^2 + A_{q11} \left(\frac{2}{9} + \frac{2\theta_3}{3} + s_{31} \right)^2 + A_{q10} \left(\frac{2}{9} + \frac{2}{3} \theta_2 + s_{21} \right)^2 \\
 &+ A_{q9} \left(\frac{2}{9} + \frac{2\theta_1}{3} \right)^2 + A_{q8} \left(\frac{2}{9} \right)^2 \\
 &+ A_{q7} \left(\frac{1}{18} + \frac{\theta_3}{3} + s_{31} \right)^2 + A_{q6} \left(\frac{1}{18} + \frac{\theta_2}{3} + s_{21} \right)^2 \\
 &+ A_{q5} \left(\frac{1}{18} + \frac{\theta_1}{3} \right)^2 + A_{q4} \left(\frac{1}{18} \right)^2 \\
 &+ A_{q3} (s_{31})^2 + A_{q2} (s_{21})^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Posons } A_{q11} + A_{q7} + A_{q3} &= P \\ A_{q10} + A_{q6} + A_{q2} &= Q \\ A_{q9} + A_{q5} + A_{q1} &= R \end{aligned}$$

Comparant (13) et (14), (7) et (8), (2) et (5) nous obtenons

$$\begin{aligned} P \sigma_3 \theta_1 &= 0 \\ P(S_{32} - 2 \sigma_3) + Q (S_{22}) &= 0 \\ P(S_{31} - \frac{\theta_1^2}{2}) + Q (S_{21} - \frac{\theta_2^2}{2}) + R (-\frac{\theta_1^2}{2}) &= 0 \end{aligned}$$

soit $P = Q = R = 0$

puisque $\sigma_3 = A_{32} A_{21} \theta_1 = 1/(24 \times 81) \neq 0$

$$S_{22} = A_{21} \theta_1^2 \neq 0$$

$$A_{q1} = -A_{q5} - A_{q9}$$

$$A_{q2} = -A_{q6} - A_{q10}$$

$$A_{q3} = -A_{q7} - A_{q11}$$

de l'équation (1) tirons A_{q12}

$$A_{q12} = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} (A_{q11} + A_{q10} + A_{q9} + A_{q8}) - \frac{1}{3} (A_{q7} + A_{q6} + A_{q5} + A_{q4})$$

Portons $A_{q1}, A_{q2}, A_{q3}, A_{q12}$ dans les équations précédentes. Nous n'obtenons plus qu'un système de 11 équations à 8 inconnues

Comparant alors (3), (6) et (8), (12) et (13) nous obtenons en posant :

$$2 A_{q11} + A_{q7} = X$$

$$2 A_{q10} + A_{q6} = Y$$

$$2 A_{q9} + A_{q5} = Z$$

$$X (S_{31} - \frac{\theta_3^2}{2}) + Y (S_{21} - \frac{\theta_2^2}{2}) + Z (-\frac{\theta_1^2}{2}) = 0$$

$$X (S_{32} - 2 \sigma_3) + Y (S_{22}) = 0$$

Ce système de 2 équations à 3 inconnues possède une solution autre que la solution banale $X = Y = Z = 0$ puisque de rang 2. (Le rang est défini par l'ordre r d'un déterminant non nul d'ordre le plus élevé que l'on peut extraire de la matrice :

$$D = S_{22} \theta_1^2 / 2 = A_{21} \theta_1^4 / 2 \neq 0$$

Tenant alors compte de l'exactitude du développement de x_3 jusqu'au terme en K^4 (conditions II) nous obtenons

$$\frac{X}{A_{43}} = \frac{Y}{A_{42}} = \frac{Z}{A_{41}} = \lambda \text{ inconnue arbitraire}$$

Le système se réduit aux équations suivantes

$$(2) (5) \quad \frac{3}{2} = - 2(A_{q11} + A_{q10} + A_{q9}) + 2(A_{q8} + A_{q4}) + \lambda (1/3 - 2A_{40})$$

$$(3)(6)(7)(8) \quad \frac{27}{4} = - (6+18 \theta_3) A_{q11} - (6+18 \theta_2) A_{q10} - (6+18 \theta_1) A_{q9} \\ + 10 A_{q8} + 8 A_{q4} + \lambda (11/6 - 8 A_{40})$$

$$i = (4) (9) (10) (11) (12) (13) (14) (15)$$

$$\frac{243}{10} = - (14+72 \theta_3) A_{q11} - (14+72 \theta_2) A_{q10} - (14+72 \theta_1) A_{q9} \\ + 38 A_{q8} + 26 A_{q4} + \lambda (7-26 A_{40}) - 243 P_i$$

avec :

$$P_4 = A_{q11} \frac{4}{9} \theta_3^2 + A_{q10} \frac{4}{9} \theta_2^2 + A_{q9} \frac{4}{9} \theta_1^2$$

$$P_9 = A_{q11} (\frac{10}{27} \theta_3^2 + \frac{4}{27} S_{31}) + A_{q10} (\frac{10}{27} \theta_2^2 + \frac{4}{27} S_{21}) + A_{q9} \frac{10}{27} \theta_1^2$$

$$P_{10} = A_{q11} (\frac{2}{9} \theta_3^2 + \frac{4}{9} S_{31}) + A_{q10} (\frac{2}{9} \theta_2^2 + \frac{4}{9} S_{21}) + A_{q9} \frac{2}{9} \theta_1^2$$

$$P_{11} = A_{q11} \left(\frac{8}{63} \theta^2_3 + \frac{40}{63} s_{31} \right) + A_{q10} \left(\frac{8}{63} \theta^2_2 + \frac{40}{63} s_{21} \right) + A_{q9} \frac{8}{63} \theta^2_1$$

$$P_{12} = P_{13}$$

$$= P_{14} = A_{q11} \frac{8}{9} s_{31} + A_{q10} \frac{8}{9} s_{21}$$

$$P_{15} = A_{q11} \left(\frac{8}{27} \theta^2_3 + \frac{8}{27} s_{31} \right) + A_{q10} \left(\frac{8}{27} \theta^2_2 + \frac{8}{27} s_{21} \right) + A_{q9} \frac{8}{27} \theta^2_1$$

comparant les P_i nous obtenons

$$(16) \quad A_{q11} (2s_{31} - \theta^2_3) + A_{q10} (2s_{21} - \theta^2_2) + A_{q9} (-\theta^2_1) = 0$$

Par suite, le système initial se réduit après quelques transformations au système (A) de 4 équations à 6 inconnues

$$A \begin{vmatrix} -2 & -2 & -2 & 2 & 2 & 1/3 - 2A_{40} \\ -18\theta_3 & -18\theta_2 & -18\theta_1 & 4 & 2 & 5/6 - 2A_{40} \\ -216s_{31} & -216s_{21} & 0 & 8 & 4 & 4/3 - 4A_{40} \\ 2s_{31} - \theta^2_3 & 2s_{21} - \theta^2_2 & -\theta^2_1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} A_{q11} \\ A_{q10} \\ A_{q9} \\ A_{q8} \\ A_{q4} \\ \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3/2 \\ 9/4 \\ 24/5 \\ 0 \end{vmatrix}$$

La solution générale d'un tel système est obtenu en ajoutant à la solution générale du système homogène associé une solution particulière (du système complet).

Recherche d'une solution particulière

Des conditions II (exactitude du développement de x_3 jusqu'au terme en k^4) nous obtenons

$$A_{43} s_{31} + A_{42} s_{21} = 1/162$$

$$A_{43} \theta^2_3 + A_{42} \theta^2_2 + A_{41} \theta^2_1 = 1/81$$

et par suite

$$(17) \quad A_{43} (2 s_{31} - \theta_3^2) + A_{42} (2 s_{21} - \theta_2^2) + A_{41} (-\theta_1^2) = 0$$

comparant (16) et (17), nous recherchons une solution particulière

$$A_{q11} = m A_{43}$$

$$A_{q10} = m A_{42}$$

$$A_{q9} = m A_{41}$$

(A) a pour solution

$$A_{q8} = m A_{40} - \frac{m}{3} + \frac{3}{5}$$

$$A_{q4} = -\frac{54}{60} A_{40} + \frac{m}{3} + \frac{18}{60}$$

$$\lambda = 2m - 9/10$$

Pour θ_1, θ_2 arbitraire le système initial a pour solution particulière

$$A_{q12} = 1/10 - m/9$$

$$A_{q11} = m A_{43}$$

$$A_{q10} = m A_{42}$$

$$A_{q9} = m A_{41}$$

$$A_{q8} = m A_{40} - m/3 + 3/5$$

$$A_{q7} = -9 A_{43}/10$$

$$A_{q6} = -9 A_{42}/10$$

$$A_{q5} = -9 A_{41}/10$$

$$A_{q4} = -9 A_{40}/10 + m/3 + 3/10$$

$$A_{q3} = A_{43} (9/10 - m)$$

$$A_{q2} = A_{42} (9/10 - m)$$

$$A_{q1} = A_{41} (9/10 - m)$$

$$A_{q0} = 1 - \sum_{\alpha=1}^{12} A_{q\alpha} = A_{40} (9/10 - m) + m/9$$

Nous pouvons alors proposer une première formule d'évaluation pratique de l'erreur sur le pas $K = 3$ h quels que soient θ_1, θ_2 arbitraires

$$E = x_3 - \overline{x_3} = K \sum_{\alpha=0}^{12} P_{\alpha} X_{\alpha}$$

avec

$$\begin{aligned} P_0 &= A_{40} (1/10 + m) - m/9 \\ P_1 &= A_{41} (1/10 + m) \\ P_2 &= A_{42} (1/10 + m) \\ P_3 &= A_{43} (1/10 + m) \\ P_4 &= 19 A_{40}/10 - m/3 - 3/10 \\ P_5 &= 19 A_{41}/10 \\ P_6 &= 19 A_{42}/10 \\ P_7 &= 19 A_{43}/10 \\ P_8 &= A_{40} (1-m) + m/3 - 3/5 \\ P_9 &= A_{41} (1 - m) \\ P_{10} &= A_{42} (1 - m) \\ P_{11} &= A_{43} (1 - m) \\ P_{12} &= m/9 - 1/10 \end{aligned}$$

Choix de m

Nous proposons d'annuler λ et par suite $m = 9/20$. Avec cette valeur la formule de l'évaluation pratique de l'erreur devient symétrique et s'exprime sous une forme plus condensée quelle que soit la méthode RK4 employée

$$E_x = - \frac{K}{20} (X_{00} + 9 X_{04} + 9 X_{08} + X_{12}) + \frac{11x_3 + 27x_2 - 27x_1 - 11x_0}{60}$$

Nous retrouverons la formule déjà donné en [4]. Nous pouvons aussi minimiser la somme S des carrés des p_α

$$\text{Soit } m = \frac{9}{20} \left[1 + \frac{10 A_{40}/81}{\sum_{\alpha=0}^3 A_{4\alpha}^2 - 4 A_{40}/9 - 10/81} \right]$$

valeur très voisine de 9/20. Il ne faut donc nous attendre à aucune amélioration de l'évaluation pratique de l'erreur.

Nous envisageons l'évaluation pratique de l'erreur sur le pas $K = 3 h$ des méthodes RK4 classique et RK4 optimale.

RK4 Classique

$x_1 = x_{04}$ représente une formule sur le pas h de coefficient $\theta_1 = \theta_2 = 1/2, \theta_3 = \theta_4 = 1, A_{ij}$ et d'écriture matricielle

1/2			
0	1/2		
0	0	1	
1/6	1/3	1/3	1/6

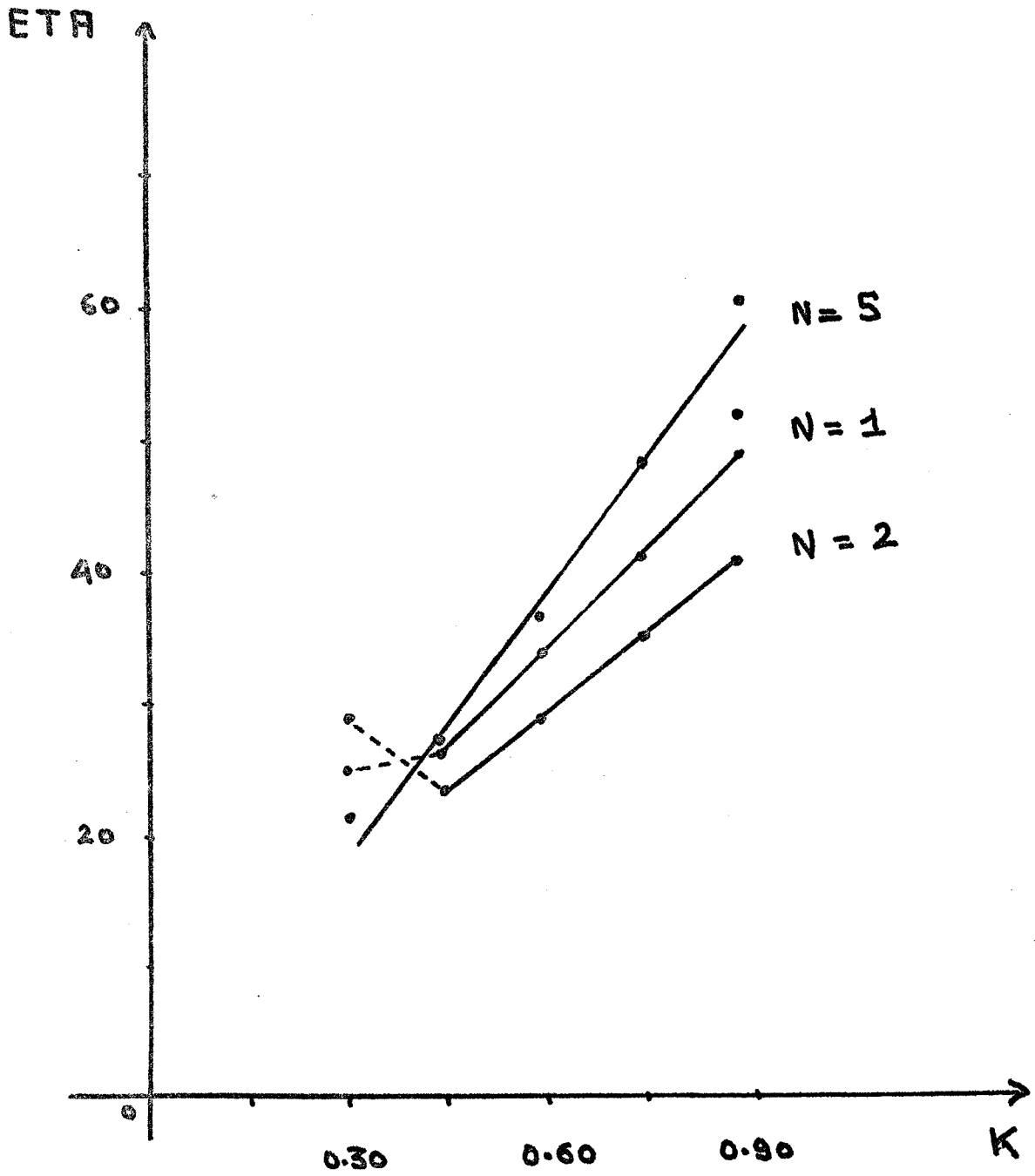
RK4 optimale

$x_1 = x_{04}$ représente une formule sur le pas h de coefficient $\theta_1 = 2/5, \theta_2 = 3/5, \theta_3 = \theta_4 = 1, A_{ij}$ et d'écriture matricielle

2/5			
-3/20	3/4		
19/44	-15/44	40/44	
55/360	125/360	125/360	55/360

RK4 CLASSIQUE

$m = 9/20$



RK4 Classique

$m = 9/20$

ETA	N=1	2	3	4	5
K=3h = 0.30	24.7	29.0	45.7	41.6	21.1
0.45	26.0	23.3	102	67.3	26.6
0.60	33.5	28.5	162.	96.2	36.5
0.75	40.8	34.7	230.	128.6	47.9
0.90	52.0	40.6	291.	165.	60.5

$m = 9/20 (1 + \alpha)$

ETA	N=1	2	3	4	5
K=3h = 0.30	24.3	29.2	46.5	41.7	22.1
0.45	25.6	23.4	103.7	67.6	27.2
0.60	33.3	28.4	155.2	96.5	37.2
0.75	40.7	34.6	208.	129.2	48.8
0.90	51.9	40.4	239.4	166.6	61.7

RK4 Optimale

$$m = 9/20$$

ETA	N=1	2	3	4	5
K=3h = 0.30	26.5	34.5	39.7	42	21.9
0.45	29.7	23.8	91.9	67.4	26.7
0.60	32.5	28.7	138.9	98.2	36.5
0.75	40.4	34.7	185.	140.	47.9
0.90	51.8	40.6	220.	161.	60.5

Nous admettrons que le dénominateur de ETA est en K^5 , son numérateur en K^6 . ETA semblerait être proportionnel au pas K. L'étude de ETA (K) nous le confirme pour $0.45 < k < 0.75$

L'évaluation pratique de l'erreur sur les exemples 3 et 4 est toujours difficile : nous constaterons les très médiocres déterminations de EC et leurs ordres de grandeurs différents. Les graphiques N=3, N=4 n'ont aucun sens dans de telles conditions.

Il nous est difficile de comparer les évaluations pratiques de l'erreur des méthodes RK4 avec les méthodes RK3 et RK2 puisque sur des pas différents.

RK4 Classique

K=0.60

T	N = 1		N = 2	
	ER ₁₀ ⁷	EC ₁₀ ⁷	ER ₁₀ ⁸	EC ₁₀ ⁸
0.6	114	150	- 342	- 243
1.2	137	182	- 251	- 182
1.8	150	199	- 186	- 134
2.4	157	209	- 139	- 98
3.0	160	215	- 102	- 73
3.6	164	217	- 76	- 54
4.2	165	219	- 56	- 40
4.8	163	218	- 42	- 30
5.4	160	217	- 31	- 22

T	N = 3		N = 4	
	ER ₁₀ ⁸	EC ₁₀ ⁸	ER ₁₀ ⁹	EC ₁₀ ⁹
0.6	-1577	-6460	- 149	- 536
1.2	1852	3646	2664	2462
1.8	849	1464	1632	2340
2.4	226	366	27193	48535
3.0	64	96	20701	45666
3.6	20	29	2103	7179
4.2	7	10	321	1371
4.8	3	4	31	168
5.4	1	2	2	14

Recherche de la solution générale

Pour θ_1, θ_2 arbitraires la solution générale du système homogène associé est très difficilement calculable. Aussi rechercherons nous la solution générale du système homogène dans le cas de la méthode RK4 classique.

Le problème du nombre de solutions indépendantes consiste seulement à trouver le rang du système homogène (B).

$$(B) \begin{vmatrix} -2 & -2 & -2 & 2 & 2 & 2/9 \\ -6 & -3 & -3 & 4 & 2 & 13/18 \\ -12 & -6 & 0 & 8 & 4 & 10/9 \\ 0 & 1/36 & -1/36 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} A_{q11} \\ A_{q10} \\ A_{q9} \\ A_{q8} \\ A_{q4} \\ \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Le déterminant obtenu en utilisant les 4 premières colonnes étant non nul, le rang est d'ordre 4. Nous prendrons $A_{q4} = A, \lambda$ comme inconnues arbitraires. (B) a pour solution

$$A_{q11} = -A + 7\lambda/36$$

$$A_{q10} = \lambda/18$$

$$A_{q9} = \lambda/18$$

$$A_{q8} = -2A + 7\lambda/36$$

Le système homogène a pour solution générale

$$A_{q12} = A - 2\lambda/9$$

$$A_{q11} = -A + 7\lambda/36$$

$$A_{q10} = \lambda/18$$

$$A_{q9} = \lambda/18$$

$$A_{q8} = -2A + 7\lambda/36$$

$$A_{q7} = 2A - \lambda/3$$

$$A_{q6} = 0$$

$$A_{q5} = 0$$

$$A_{q4} = A$$

$$A_{q3} = -A + 5 \lambda / 36$$

$$A_{q2} = - \lambda / 18$$

$$A_{q1} = - \lambda / 18$$

Soit l'évaluation pratique de l'erreur sur le pas $K = 3h$.

$$E = x_3 - \overline{x}_3 = K \sum_{\alpha=0}^{12} P_{\alpha} X_{0 \alpha}$$

\overline{x}_3 = solution particulière + solution générale avec

$$P_{12} = 5 m/9 - A - 3/10$$

$$P_{11} = - 4m/9 + A + 83/360$$

$$P_{10} = - 2m/9 + 29/180$$

$$P_9 = - 2m/9 + 29/180$$

$$P_8 = - m/9 + 2A - 133/360$$

$$P_7 = 2m/3 - 2A - 35/180$$

$$P_6 = 19/90$$

$$P_5 = 19/90$$

$$P_4 = -m/3 - A - 35/180$$

$$P_3 = - 2m/9 + A + 47/360$$

$$P_2 = 2m/9 - 7/180$$

$$P_1 = 2m/9 - 7/180$$

$$P_0 = -m/9 + 11/360$$

Choix de A et m

Nous proposons

- de minimiser la somme S des carrés des P_α . S est une forme quadratique qui atteint son minimum pour

$$\frac{dS}{dA} = \frac{dS}{dm} = 0$$

Soient $m = 67/180$, $A = 1/30$ et E1 la formule correspondante

- de prendre $m = 9/20$, $A = 1/40$ valeurs assez proches des précédentes mais donnant une formule symétrique. Soit E2 la formule correspondante

$$E1 = \frac{K}{9 \times 360} \sum_{\alpha=0}^{12} P_\alpha X_{\alpha\alpha} \quad E2 = \frac{K}{360} \sum_{\alpha=0}^{12} P_\alpha X_{\alpha\alpha}$$

$$\begin{aligned} P_0 &= -35 \\ P_1 &= 142 \\ P_2 &= 142 \\ P_3 &= 263 \\ P_4 &= -1140 \\ P_5 &= 684 \\ P_6 &= 684 \\ P_7 &= -42 \\ P_8 &= -1115 \\ P_9 &= 254 \\ P_{10} &= 254 \\ P_{11} &= 319 \\ P_{12} &= -410 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_0 &= -7 \\ P_1 &= 22 \\ P_2 &= 22 \\ P_3 &= 20 \\ P_4 &= -133 \\ P_5 &= 76 \\ P_6 &= 76 \\ P_7 &= 20 \\ P_8 &= -133 \\ P_9 &= 22 \\ P_{10} &= 22 \\ P_{11} &= 20 \\ P_{12} &= -27 \end{aligned}$$

RK4 Classique

E2

ETA	N=1	2	3	4	5
K=3h = 0.30	28.9	31.5	36.5	42.3	28.
0.45	17.5	24.5	79.	66.5	31.7
0.60	28.5	29.5	114.9	95.	43.5
0.75	35.5	35.9	152.	126.	57.4
0.90	50.	41.8	163	161	72.8

E1

ETA	N=1	2	3	4	5
K=3h = 0.30	28.9	32.2	49.4	42.4	30.6
0.45	17.3	26.2	79.1	66.5	35.3
0.60	28.3	31.6	117.	95.	48.6
0.75	35.2	38.3	186.	126.	64.5
0.90	49.8	44.5	320.	160.	82.2

CHAPITRE II

...

Nous nous proposons dans ce chapitre de rechercher une évaluation de l'erreur par pas dans l'intégration approchée des problèmes différentiels

$$x' = X(x,t) , \quad x(0) = x_0$$

auxquels, on applique :

- le procédé de dérivation préalable.
- le procédé de Runge Kutta double.

I.- Procédé de dérivation préalable. [6]

Par ce procédé, on aboutit à l'intégration approchée de systèmes différentiels du second ordre dont le second membre ne contient pas la dérivée première et par conséquent du type envisagé dans le chapitre III. x' étant une fonction de x et t ($x' = X(x,t)$) sera ainsi évalué à la fin du pas. Les conditions relatives à x' ne sont plus à satisfaire. Cela permet de reporter tous les efforts sur les conditions relatives à x .

L'algorithme relatif à la formule de rang q s'écrit

$$x_{0\alpha} = x_0 + h \theta_\alpha x'_0 + \frac{h^2}{2} \sum_{\beta=0}^{\alpha-1} B_{\alpha\beta} D X_{0\beta}$$

$$x_1 = x_{0q}$$

On vérifie sans difficulté, comme nous l'avons montré pour les méthodes RK2, RK3 et RK4, qu'il est impossible de trouver une formule d'ordre supérieur \bar{x}_1 (en utilisant la valeur de X calculée au début du pas suivant) pour les méthodes :

- RKDP 2,3,4 Zurmühl
- RKDP 3,4,5 Laurent et Bard
- RKDP 4,5,6 Laurent et Albrecht

et par là de donner une évaluation pratique de l'erreur sur le pas h pour ces méthodes.

Il ne nous est plus permis, comme dans le chapitre I de rechercher pour x_2 une formule d'ordre supérieur $\overline{X_2}$ et par là de donner une évaluation pratique de l'erreur sur le pas $K = 2 h$, puisque x' est obtenu à la fin du pas par $x' = X(x, t)$.

On tourne la difficulté en remarquant que le procédé de dérivation préalable appliqué à des équations du premier ordre n'est qu'un aspect particulier du procédé de Runge Kutta "double", double parce que combinant des expressions X_{α} du second membre et DX_{α} de la dérivée de ce second membre.

II. - Procédé de Runge Kutta double [6]

L'algorithme relatif à la formule de rang q s'écrit :

$$x_{\alpha} = x_0 + h \sum_{\beta=0}^{\alpha-1} A_{\alpha\beta} X_{0\beta} + \frac{h^2}{2} \sum_{\beta=0}^{\alpha-1} A'_{\alpha\beta} D X_{0\beta}$$

$$x_{\alpha q} = x_1$$

L'identification avec la série de Taylor aboutit à un certain nombre de conditions sur les $A_{\alpha\beta}$, $A'_{\alpha\beta}$, θ_{α} . Si l'on décide de choisir à priori $A_{\alpha\beta} = 0$, si $\beta \neq 0$; $A_{\alpha 0} = \theta_{\alpha}$. On obtient l'algorithme général du procédé de dérivation préalable.

L'ensemble des conditions sur les $A_{\alpha\beta}$, $A'_{\alpha\beta}$, θ_{α} se simplifie et on aboutit à des conditions sur les $A'_{\alpha\beta}$, θ_{α} identiques à celles sur les $B_{\alpha\beta}$, θ_{α} du procédé de dérivation préalable.

Ce choix particulier des $A_{\alpha\beta}$ ne restreint pas la généralité des formules de Runge Kutta double puisque Bard [1] a montré qu'elles ne se réduisaient pratiquement qu'aux formules à dérivation préalable (on se limite aux formules utilisant à ordre égal un nombre de h orners inférieur ou égal à celui des méthodes de dérivation préalable

A) Formule de rang 2, d'ordre 3 : RKD2 (3)

Conformément au tableau général III, les coefficients A_{ij} , A'_{ij} , θ_1 doivent satisfaire aux premières conditions

$$\begin{aligned} A_{10} &= \theta_1 & A'_{10} &= A'_1 \\ A_{20} + A_{21} &= 1 & A'_{20} + A'_{21} &= A'_2 \end{aligned}$$

puis pour assurer l'exactitude du développement de $x_1 = x_{02}$ jusqu'au terme en h^3 aux conditions

$$\begin{aligned} A_{21} \theta_1 + \frac{1}{2} A'_2 &= 1/2 & h^2 \\ \frac{1}{2} A_{21} \theta_1^2 + \frac{1}{2} A'_{21} \theta_1 &= 1/6 & h^3 \\ \frac{1}{2} A_{21} A'_1 + \frac{1}{2} A'_{21} \theta_1 &= 1/6 & h^3 \end{aligned}$$

nous allons montrer qu'il existe une formule d'ordre 3 coûtant seulement deux horners par pas.

Parmi les coefficients, $A_{10} = \theta_1 \neq 0$, on utilise donc X_{00} on ne peut utiliser qu'une autre des quantités

$$D X_{00}, X_{01}, D X_{01}$$

Ce ne peut être $D X_{00}$, sinon nous obtenons la formule de rang 1

$$x_1 = x_0 + h X_{00} + \frac{h^2}{2} D X_{00}$$

ni X_{01} sinon nous obtenons une formule de Runge Kutta ; c'est donc $D X_{01}$; d'où :

$$A_{21} = 0, A'_2 = 1, \theta_1 = 1/3$$

$x_1 = x_{02}$ représente sur le pas h une formule d'ordre 3, de coefficients $\theta_1 = 1/3$, $\theta_2 = 1$, A_{ij} , A'_{ij} et d'écriture matricielle

[1], [4] :

1/3	A
1	0

0	A'
0	1

Nous ne pouvons rechercher une formule d'ordre supérieur pour x_1 puisque conformément au tableau général III, l'exactitude du développement de \bar{x}_1 jusqu'au terme en h^4 exige la résolution d'un système de 7 équations à 3 inconnues si l'on décide d'économiser les horners X_{01} et $D X_{02}$ ou à 5 inconnues dans le cas contraire.

Prenons x_1 comme valeur initiale d'un nouveau pas $x_2 = x_{04}$ s'explique à partir des x_0 .

x_2 représente une formule sur le pas $K = 2h$, d'ordre 3, de coefficients A_{ij} , A'_{ij} , $\theta_1 = 1/6$, $\theta_2 = 1/2$, $\theta_3 = 4/6$, $\theta_4 = 1$ et d'écriture matricielle

1/6				A
1/2	0			
1/2	0	1/6		
1/2	0	1/2	0	

0				A'
0	1/4			
0	1/4	0		
0	1/4	0	1/4	

Recherchons une formule d'ordre supérieur

$$\bar{x}_2 = x_0 + K \sum_{\alpha=0}^4 A_{5\alpha} X_{0\alpha} + \frac{K^2}{2} \sum_{\alpha=0}^4 A'_{5\alpha} DX_{0\alpha}$$

Conformément au tableau général III les coefficients $A_{5\alpha}$ et $A'_{5\alpha}$ doivent satisfaire aux conditions

$$\sum_{\alpha=0}^4 A_{5\alpha} = 1 \quad , \quad \sum_{\alpha=0}^4 A'_{5\alpha} = A'_5$$

puis pour assurer l'exactitude du développement de \bar{x}_2 jusqu'au terme en K^4 , économisant le calcul des Horners $X_{01}, X_{03}, D X_{00}, D X_{02}$ et $D X_{04}$, aux conditions :

$$\frac{A_{52}}{2} + A_{54} + \frac{1}{2} A'_{51} = \frac{1}{2} \quad k^2$$

$$\frac{A_{52}}{4} + A_{54} + \frac{A'_{51}}{6} + A'_{53} \frac{4}{6} = \frac{1}{3} \quad k^3$$

$$\frac{1}{6} \left(\frac{A_{52}}{8} + A_{54} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{A'_{51}}{36} + \frac{16}{36} A'_{53} \right) = \frac{1}{24} \quad k^4$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{A_{52}}{8} + A_{54} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{A'_{51}}{36} + \frac{16}{36} A'_{53} \right) + \frac{5}{48} A'_{53} = \frac{3}{24} \quad k^4$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{A_{52}}{24} + \frac{5}{24} A_{54} \right) + \frac{5}{48} A'_{53} = \frac{1}{24} \quad k^4$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{A_{52}}{24} + \frac{A_{54}}{3} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{A'_{51}}{36} + \frac{16}{36} A'_{53} \right) = \frac{1}{24} \quad k^4$$

Ce système se simplifie et se réduit à

$$1/2 = 1/2 A'_{51} + A_{52}/2$$

$$1/3 = A_{52}/4 + A'_{53}/2$$

$$1/24 = A_{52}/48 + 5 A'_{53}/48$$

$$0 = A'_{51} + A'_{53}$$

Les coefficients $A_{5\alpha}$ et $A'_{5\alpha}$ ont pour solution

$$A_{54} = 0$$

$$A'_{54} = 0$$

$$A_{53} = 0$$

$$A'_{53} = 2/9$$

$$A_{52} = 8/9$$

$$A'_{52} = 0$$

$$A_{51} = 0$$

$$A'_{51} = -2/9$$

$$A_{50} = 1/9$$

$$A'_{50} = 1/9$$

Nous n'avons pu imposer $A'_{50} = 0$.

Néanmoins l'erreur sur le pas $K = 2h$ a pour évaluation pratique

$$E_x = \frac{K}{18} [7 X_{00} - 7 X_{02}] + \frac{K^2}{36} [-4 D X_{00} + 17 D X_{01} + D X_{03}]$$

et exige le calcul de deux horner $D X_{00}$.

B) Formule de rang 2, d'ordre 4 : RKD2 (4)

Conformément au tableau général III, les coefficients A_{ij} , A'_{ij} , θ_1 doivent satisfaire aux premières conditions

$$\begin{aligned} A_{10} &= \theta_1 & A'_{10} &= A'_1 \\ A_{20} + A_{21} &= 1 & A'_{20} + A'_{21} &= A'_2 \end{aligned}$$

puis pour assurer l'exactitude du développement de $x_1 = x_{02}$ jusqu'au terme en h^4 aux conditions

$$\begin{aligned} A_{21} \theta_1 + 1/2 A'_2 &= 1/2 & h^2 \\ 1/2 A_{21} \theta_1^2 + 1/2 A'_{21} \theta_1 &= 1/6 & h^3 \\ 1/2 A_{21} A'_1 + 1/2 A'_{21} \theta_1 &= 1/6 & h^3 \\ 1/6 A_{21} \theta_1^3 + 1/4 A'_{21} \theta_1^2 &= 1/24 & h^4 \\ 1/2 A_{21} A'_1 \theta_1 + 1/2 A'_{21} \theta_1^2 + 1/4 A'_{21} A'_1 &= 3/24 & h^4 \\ 1/4 A'_{21} A'_1 &= 1/24 & h^4 \\ 1/4 A'_{21} \theta_1^2 &= 1/24 & h^4 \end{aligned}$$

Une telle formule pour être compétitive doit coûter seulement 3 horner.

Pour gagner 1 horner, il faut A_{21} ou $A'_{21} = 0$. Cette dernière condition est impossible à réaliser, par contre l'autre conduit à la formule de dérivation préalable RKDP 2,3,4 Zurmühl.

x_1 représente une formule sur le pas h , d'ordre 4 de coefficients A_{ij} , A'_{ij} , $\theta_1 = 1/2$, $\theta_2 = 1$ et d'écriture matricielle

1/2	A
1	0

1/4	A'
1/3	2/3

Nous ne pouvons rechercher une formule d'ordre supérieur pour x_1 , puisque conformément au tableau général III, l'exactitude du développement de x_1 jusqu'au terme en h^5 exige la résolution d'un système de 16 équations à 4 inconnues (on économise le horner x_{01}).

Prenons x_1 comme valeur initiale d'un nouveau pas h . $x_2 = x_{04}$ s'explique à partir de x_0 x_2 représente une formule sur le pas $K = 2h$ d'ordre 4, de coefficients A_{ij} , A'_{ij} , $\theta_1 = 1/4$, $\theta_2 = 1/2$, $\theta_3 = 3/4$, $\theta_4 = 1$ et d'écriture matricielle

1/4			
1/2	0		
1/2	0	1/4	
1/2	0	1/2	0

1/16			
1/12	2/12		
1/12	2/12	1/16	
1/12	2/12	1/12	2/12

Recherchons une formule d'ordre supérieur

$$x_2 = x_0 + K \sum_{\alpha=0}^4 A_{5\alpha} X_{0\alpha} + \frac{K^2}{2} \sum_{\alpha=0}^4 A'_{5\alpha} D X_{0\alpha}$$

conformément au tableau général III, les coefficients $A_{5\alpha}$ et $A'_{5\alpha}$ doivent satisfaire aux conditions

$$\sum_{\alpha=0}^4 A_{5\alpha} = 1 \quad \sum_{\alpha=0}^4 A'_{5\alpha} = A'_5$$

puis pour assurer l'exactitude du développement de $\overline{x_2}$ jusqu'au terme en K^5 , compte tenu de l'exactitude des développements approchés de $x_{0\alpha}$ jusqu'au terme en K^2

$$(2 \sum_{\beta=0}^{\alpha-1} A_{\alpha\beta} \theta_\beta + A'_\alpha = \theta_\alpha^2, \quad 1 \leq \alpha \leq 4),$$

aux conditions :

$$\begin{aligned}
 K^2 & \quad \frac{A_{51}}{4} + \frac{A_{52}}{2} + A_{53} \frac{3}{4} + A_{54} + \frac{1}{2} A'_{51} & = \frac{1}{2} \\
 K^3 & \quad \frac{1}{2} \left(\frac{A_{51}}{16} + \frac{A_{52}}{4} + A_{53} \frac{9}{16} + A_{54} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{A'_{51}}{4} + \frac{A'_{52}}{2} + A'_{53} \frac{3}{4} + A'_{54} \right) & = \frac{1}{6} \\
 K^4 & \quad \frac{1}{6} \left(\frac{A_{51}}{64} + \frac{A_{52}}{8} + A_{53} \frac{27}{64} + A_{54} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{A'_{51}}{16} + \frac{A'_{52}}{4} + A'_{53} \frac{9}{16} + A'_{54} \right) & = \frac{1}{24} \\
 K^4 & \quad \frac{1}{6} \left(\frac{A_{52}}{8} + A_{53} \frac{13}{32} + A_{54} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{A'_{51}}{16} + \frac{A'_{52}}{4} + A'_{53} \frac{9}{16} + A'_{54} \right) & = \frac{1}{24} \\
 K^5 & \quad \frac{1}{24} \left(\frac{A_{51}}{256} + \frac{A_{52}}{16} + A_{53} \frac{81}{256} + A_{54} \right) + \frac{1}{12} \left(\frac{A'_{51}}{64} + \frac{A'_{52}}{8} + A'_{53} \frac{27}{64} + A'_{54} \right) & = \frac{1}{120} \\
 K^5 & \quad \frac{1}{6} \left(\frac{A_{52}}{16} + A_{53} \frac{78}{256} + A_{54} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{A'_{51}}{64} + \frac{A'_{52}}{6} + A'_{53} \frac{107}{192} + A'_{54} \frac{4}{3} \right) & = \frac{4}{120} \\
 K^5 & \quad \frac{1}{24} \left(\frac{A_{52}}{16} + A_{53} \frac{9}{32} + A_{54} \right) + \frac{1}{12} \left(\frac{A'_{51}}{64} + \frac{A'_{52}}{8} + A'_{53} \frac{27}{64} + A'_{54} \right) & = \frac{1}{120} \\
 K^5 & \quad \frac{1}{24} \left(\frac{A_{52}}{16} + A_{53} \frac{5}{32} + A_{54} \right) + \frac{1}{12} \left(\frac{A'_{52}}{8} + A'_{53} \frac{13}{32} + A'_{54} \right) & = \frac{1}{120}
 \end{aligned}$$

Economisant les horners X_{01} et X_{03} , ces conditions se simplifient et s'écrivent :

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \frac{1}{2} & = \frac{A_{52}}{2} + A_{54} + \frac{1}{2} A'_{51} \\
 (2) \quad \frac{1}{3} & = \frac{A_{52}}{4} + A_{54} + \frac{A'_{52}}{2} + \frac{A'_{53}}{2} + A'_{54} \\
 (3) \quad \frac{1}{4} & = \frac{A_{52}}{8} + A_{54} + \frac{3}{2} \left(\frac{A'_{52}}{4} + \frac{A'_{53}}{2} + A'_{54} \right) \\
 (4) \quad \frac{1}{5} & = \frac{A_{52}}{16} + A_{54} + 2 \left(\frac{A'_{54}}{8} + A'_{53} \frac{13}{32} + A'_{54} \right) \\
 (5) \quad 0 & = A'_{51} + A'_{53}
 \end{aligned}$$

Des équations (2) (3) et (4) nous pouvons extraire un déterminant d'ordre 3 non nul. Le rang est d'ordre 3.

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{16} & \frac{1}{4} & \frac{13}{16} \end{vmatrix} \neq 0$$

Nous prendrons A_{54} et A'_{54} comme inconnues arbitraires. Le système a pour solution :

$$A_{50} = -6/90 + 3 A + 12 B$$

$$A_{51} = A_{53} = 0$$

$$A_{52} = 96/90 - 4 A - 12 B$$

$$A_{54} = A$$

$$A'_{50} = - 2/90 + 3B + 2/3 A$$

$$A'_{52} = - 4/90 + 4/3 A + 8 B$$

$$A'_{53} = 16/90 - 4/3A - 4 B = - A'_{51}$$

$$A'_{54} = B$$

L'erreur sur le pas $K = 2 h$ a pour évaluation pratique

$$E = K \sum_{\alpha=0}^4 X_{0\alpha} P_{\alpha} + \frac{K^2}{2} \sum_{\alpha=0}^4 D X_{0\alpha} q_{\alpha}$$

avec

$$P_0 = 51/90 - 3 A - 12 B$$

$$P_1 = P_3 = 0$$

$$P_2 = - 51/90 + 4 A + 12B$$

$$P_4 = - A$$

$$q_0 = 19/180 - 3B - \frac{2}{3} A$$

$$q_1 = 62/180 - 4B - \frac{4}{3} A$$

$$q_2 = 23/180 - 8B - \frac{4}{3} A$$

$$q_3 = -2/180 + 4B + \frac{4}{3} A$$

$$q_4 = - B$$

Choix de A et B

Cherchons à minimiser la somme S des carrés des p_α et q_α .

S est une forme quadratique qui atteint son minimum pour

$$\frac{ds}{dA} = \frac{ds}{dB} = 0$$

$$\frac{ds}{dA} = 572 A + 1932 B - 2528/30 = 0$$

$$\frac{ds}{dB} = 2364 B + 644 A - 2945/30 = 0$$

$$A \neq 5/60$$

$$B \neq 1/60$$

Soient :

$$p_0 = 7/60$$

$$q_0 = 0$$

$$p_2 = -2/60$$

$$q_1 = 10/60$$

$$p_4 = -5/60$$

$$q_2 = -7/60$$

$$q_3 = 10/60$$

$$q_4 = -1/60$$

et E1 l'évaluation pratique

$$E1 = \frac{K}{60} [7 X_{00} - 2 X_{02} - 5 X_{04}] + \frac{K^2}{120} [10 DX_{01} - 7DX_{02} + 10DX_{03} - DX_{04}]$$

D'autres formules d'évaluation pratique de l'erreur peuvent être proposées. En particulier, nous pouvons arbitrairement annuler A'_{52} .

Par suite $A = 1/30 - 6B$. Minimisant la somme des carrés des p_α et

q_α nous obtenons $B = -1/30$ et l'évaluation pratique de l'erreur

$$E2 = \frac{K}{30} [8 X_{00} - X_{02} - 7 X_{04}] + \frac{K^2}{120} [3D X_{00} + 10 DX_{01} + 5 DX_{02} + 10DX_{03} + 2DX_{04}]$$

Les exemples traités nous montreront que E1 donne de meilleurs résultats que E2.

C) Formule de rang 3, d'ordre 5 : RKD3 (5)

Les formules d'ordre 5 coutant 4 horners par pas se réduisent aux seules formules de dérivation préalable RKDP 3,4,5 Laurent et Bard [1], [4], [6]

Le tableau général III se limitant à l'ordre K+4, il ne nous est plus possible de rechercher des évaluations pratiques de l'erreur de méthode par pas.

Nous traiterons par les diverses méthodes proposées les équations :

$$\begin{array}{l} N=1 \quad x' = t^2 - x, \quad x(0) = 1, \quad x = -e^{-t} + t^2 - 2t + 2 \\ N=2 \quad x' = x - 1.5 e^{-0.5t}, \quad x(0) = 1, \quad x = e^{-0.5t} \\ N=3 \quad x' = -2t x^2, \quad x(0) = 1, \quad x = 1/(1+t^2) \\ N=4 \quad x' = -t x, \quad x(0) = 1, \quad x = e^{-t^2/2} \\ N=5 \quad x' = -x, \quad x(0) = 1, \quad x = e^{-t} \end{array}$$

Les tableaux suivants donnent ETA, coefficient estimant la qualité de l'approximation, sur les équations citées précédemment et pour différentes valeurs du pas $K = 2h$ dans les mêmes conditions que celles du chapitre I. (Cependant les ETA ont été calculés sur 10 pas successifs).

Pour les mêmes raisons que celles du chapitre I, le coefficient ETA pour les méthodes RKD2 (3) et RKD2 (4) semble être proportionnel au pas. Pour $N=1$, $N=2$ et $N=5$ les graphiques ETA (K) le confirment dans une large mesure.

Comme nous avons déjà pu le constater au chapitre I et pour les mêmes raisons, les exemples $N=3$ et $N=4$ sont difficiles.

RKD2 (3)

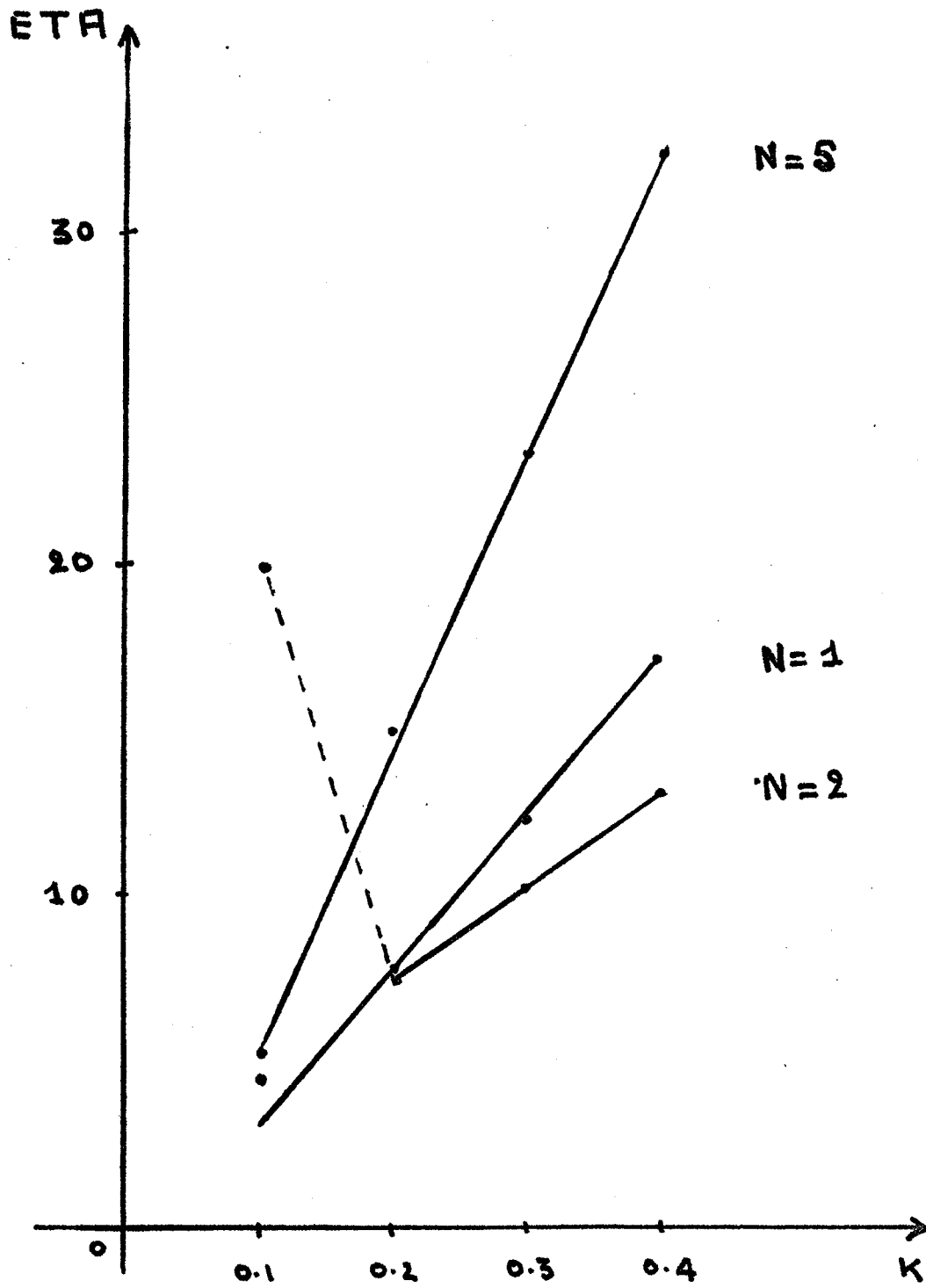
ETA	N=1	2	3	4	5
K=2h = 0.1	4.6	20.5	17.7	8.	5.2
0.2	7.8	7.5	36.8	23.4	15.1
0.3	12.4	10.2	62.8	40.5	23.5
0.4	17.4	13.4	85.5	53.1	32.5

RKD2 (4)

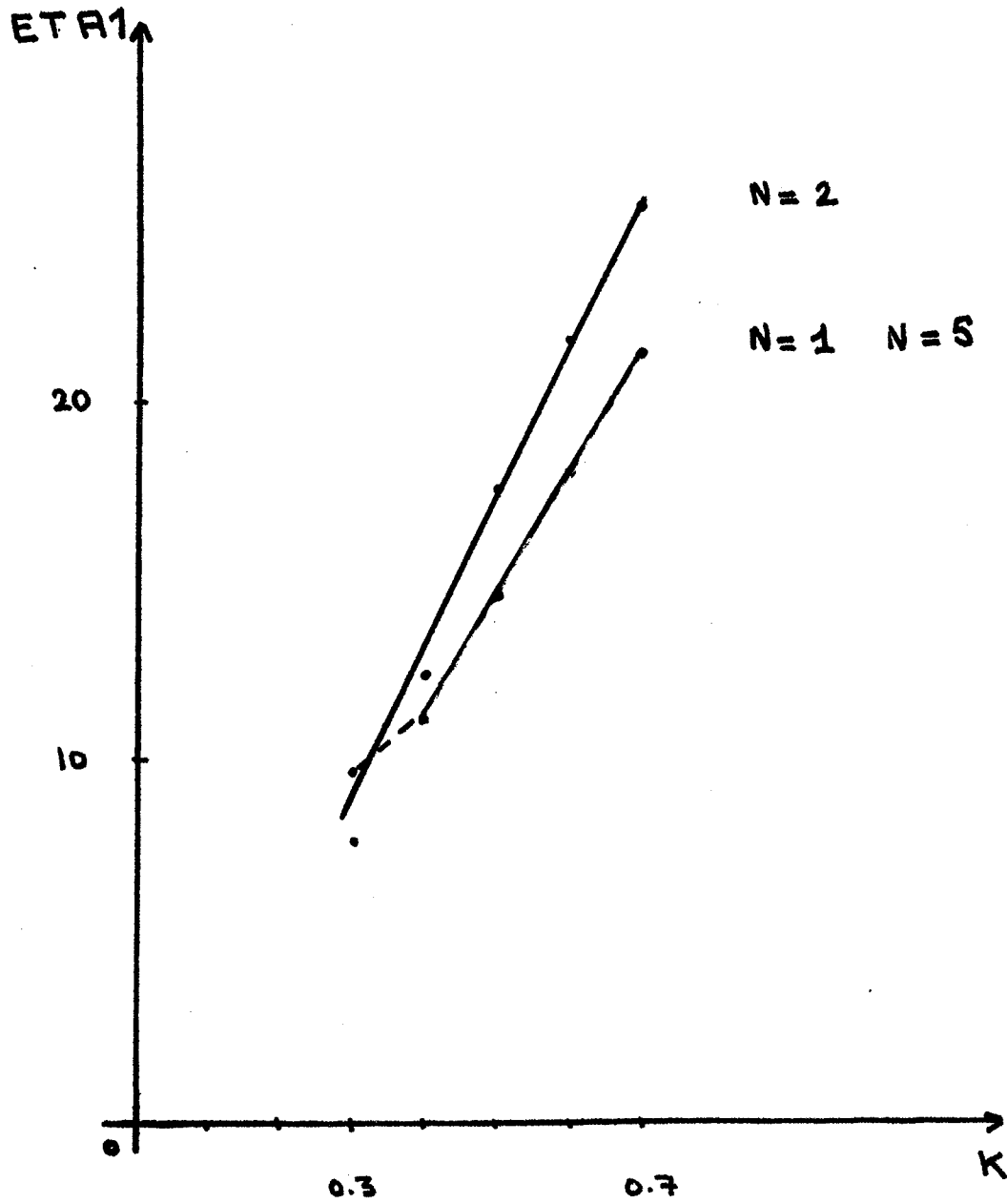
ETA1	N=1	2	3	4	5
K=2h = 0.3	9.7	7.9	76.1	33.9	9.2
0.4	11.2	12.5	80.7	47.5	11.3
0.5	14.7	17.7	48.6	59.7	14.2
0.6	18.1	21.8	37.7	69.5	17.4
0.7	21.4	25.6	122.	92.7	20.8

ETA2	N=1	2	3	4	5
K=2h = 0.3	17.2	9.	27.6	27.	17.6
0.4	22.8	16.9	34.5	49.3	22.8
0.5	29.4	22.9	56.4	67.8	29.1
0.6	36.8	27.6	87.4	82.6	36.1
0.7	44.	31.6	144.	115.	43.5

RKD2(3)



RKD2(4)



RKD2 (3)

$K=2h = 0.20$

N=1			N=2	
T	ER ₇ 10	EC ₇ 10	ER ₈ 10	EC ₈ 10
0.2	- 32	- 30	-162	-149
0.4	- 45	- 46	-144	-135
0.6	- 56	- 58	-133	-122
0.8	- 65	- 69	-120	-110
1.0	- 73	- 77	-107	-100
2.0	- 94	-101	- 66	- 60
3.0	-101	-110	- 39	- 37
4.0	-106	-113	- 24	- 22

RKD2 (4)

$K=2h = 0.40$

N=1			N=2	
T	ER ₈ 10	EC ₈ 10	ER ₉ 10	EC ₉ 10
0.4	-422	-518	596	495
0.8	-284	-347	477	408
1.2	-189	-233	417	330
1.6	-130	-156	332	272
2.0	- 86	-104	268	223
2.4	- 57	- 70	220	182
2.8	- 42	- 47	175	150
3.2	- 18	- 30	151	122

CHAPITRE III

Evaluation de l'erreur par pas dans la résolution approchée des problèmes différentiels de forme particulière [6]

$$x'' = X(x,t) , x(0) = x_0 , x'(0) = x'_0$$

Nous nous proposons dans ce chapitre de rechercher des évaluations pratiques de l'erreur pour le cas spécial des équations ou système d'équations différentielles dont le second membre ne contient pas la dérivée première.

Les méthodes de Runge-Kutta permettent de calculer des valeurs approchées des fonctions et de leurs dérivées x_i, x'_i , relatives à l'abscisse t_i .

On passe des valeurs d'indice i aux valeurs d'indice $i + 1$ par l'algorithme

$$x_{i0} = x_i$$

$$x'_{i0} = x'_i$$

$$x_{i\alpha} = x_{i0} + h \theta_\alpha x'_{i0} + \frac{h^2}{2} \sum_{\beta=0}^{\alpha-1} B_{\alpha\beta} X_{i\beta}$$

$$x_{iq} = x_{i+1}$$

$$x'_{i+1} = x'_{i0} + h \sum_{\beta=0}^{q-1} A_{q\beta} X_{i\beta}$$

En l'absence de dérivée première dans le second membre du système, il est inutile de calculer les dérivées premières à l'intérieur du pas. On les calculera uniquement aux points d'abscisse $\dots t_i, t_{i+1}, \dots$

Les coefficients θ_α , $B_{\alpha\beta}$, $A_{q\beta}$ sont choisis de façon à faire coïncider les développements de Taylor de la solution exacte et du premier pas de la solution approchée (Tableau II).

Nous traiterons pas les diverses méthodes proposées dans les pages suivantes, les équations :

$$\begin{aligned} N = 1 & \quad x'' = x \quad , \quad x(0) = x'(0) = 1 \quad , \quad x = e^t \\ N = 2 & \quad x'' = -x \quad , \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1, \quad x = \sin t \\ N = 3 & \quad x'' = (1+t^2) x, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0, \quad x = e^{\frac{t^2}{2}} \end{aligned}$$

Pour estimer la qualité de l'approximation de l'erreur, nous déterminerons sur 10 pas successifs le coefficient ETA en prenant comme valeurs initiales de la fonction et de sa dérivée au début de chaque pas K, leur valeur exacte (de manière à bien évaluer une erreur par pas).

A) Méthode de rang 2, d'ordre (3,3) : RKS2 Nyström (3,3)

1) Evaluation pratique de l'erreur sur le pas K = h

$x_1 = x_{02}$, x'_1 représentent une formule sur le pas h, de coefficients A_{2j} , B_{ij} , θ_1 , $\theta_2 = 1$ et d'écriture matricielle

	A
A_{20}	A_{21}

B_{10}	B
B_{20}	B_{21}

Conformément au Tableau Général II les coefficients doivent satisfaire aux conditions

$$\begin{aligned} B_{10} &= \theta_1^2 \\ B_{20} + B_{21} &= 1 \\ A_{20} + A_{21} &= 1 \end{aligned}$$

puis pour assurer l'exactitude du développement de x_1 , x'_1 jusqu'au terme en h^3 aux conditions

$$\frac{1}{2} = A_{21} \theta_1 \quad h^2$$

$$\frac{1}{3} = A_{21} \theta_1^2 \quad h^3$$

$$\frac{1}{3} = B_{21} \theta_1 \quad h^3$$

ces conditions conduisent à l'écriture matricielle citée par Nyström

	A		B
1/4	3/4	4/9	1/2
		1/2	1/2

Recherchons des formules d'ordre supérieur

$$\bar{x}_1 = x_0 + h x'_0 + \frac{h^2}{2} [B_{30} X_{00} + B_{31} X_{01} + B_{32} X_{02}]$$

$$\bar{x}'_1 = x'_0 + h [A_{30} X_{00} + A_{31} X_{01} + A_{32} X_{02}]$$

Conformément au tableau général II, les coefficients $A_{3\alpha}$ et $B_{3\alpha}$ doivent satisfaire aux conditions

$$A_{30} + A_{31} + A_{32} = 1 \quad B_{30} + B_{31} + B_{32} = 1$$

puis pour assurer l'exactitude du développement de \bar{x}_1 , \bar{x}'_1 jusqu'au terme en h^4 aux conditions

I	$\frac{1}{2} = A_{31} \theta_1 + A_{32} \theta_2 \quad h^2$
	$\frac{1}{3} = A_{31} \theta_1^2 + A_{32} \theta_2^2 \quad h^3$
	$\frac{1}{4} = A_{31} \theta_1^3 + A_{32} \theta_2^3 \quad h^4$
	$\frac{1}{12} = A_{32} B_{21} \theta_1 \quad h^4$
II	$\frac{1}{3} = B_{31} \theta_1 + B_{32} \theta_2 \quad h^3$
	$\frac{1}{6} = B_{31} \theta_1^2 + B_{32} \theta_2^2 \quad h^4$

quels que soient θ_1, θ_2 le premier système est incompatible : d'où l'impossibilité d'évaluer l'erreur sur le pas h pour x' .

Le système (II) conduit à

$$B_{32} = - 2/12$$

$$B_{31} = 9/12$$

$$B_{30} = 5/12$$

et à l'évaluation pratique de l'erreur sur le pas h pour x

$$E = x_1 - \bar{x}_1 = \frac{h^2}{24} [X_{00} - 3 X_{01} + 2 X_{02}]$$

2) Evaluation pratique de l'erreur sur le pas $K = 2 h$

Prenant $x_1 = x_{02}, x'_1$ comme valeurs initiales d'un nouveau pas h

$$x_2 = x_{12} = x_{04} = x_1 + h x'_1 + \frac{h^2}{2} [B_{20} X_{02} + B_{21} X_{03}]$$

$$x'_2 = x'_{12} = x'_{04} = x'_1 + h [A_{20} X_{02} + A_{21} X_{03}]$$

s'explicitent à partir de x_0 et x'_0 .

x_2 et x'_2 représentent sur le pas $K = 2 h$, une formule de coefficients $A'_{4j}, B'_{ij}, \theta_1, \theta_2 = 1/2, \theta_3 = \theta_1 + 1/2, \theta_4 = 1$

et d'écriture matricielle

A'

$\frac{A_{20}}{2}$	$\frac{A_{21}}{2}$	$\frac{A_{20}}{2}$	$\frac{A_{21}}{2}$

B'

$\frac{B_{10}}{4}$			
$\frac{B_{20}}{4}$	$\frac{B_{21}}{4}$		
$\frac{B_{20} + A_{20} \theta_1}{4}$	$\frac{B_{21} + A_{21} \theta_1}{4}$	$\frac{B_{10}}{4}$	
$\frac{B_{20} + A_{20} \theta_2}{4}$	$\frac{B_{21} + A_{21} \theta_2}{4}$	$\frac{B_{20}}{4}$	$\frac{B_{21}}{4}$

où les A_{2j}, B_{10}, B_{2j} ont les valeurs prises sur le pas h .

Formule RKS4 Nyström (3,3)

x_2 et x'_2 représentent une formule sur le pas $K = 2 h$ d'ordre 3, de coefficients A_{4j} , B_{ij} , $\theta_1 = 1/3$, $\theta_2 = 1/2$, $\theta_3 = \theta_1 + 1/2$, $\theta_4 = 1$ et d'écriture matricielle

A'

1/8	3/8	1/8	3/8

B'

1/9			
1/8	1/8		
5/24	9/24	1/9	
1/4	1/2	1/8	1/8

Recherchons pour x_2 et x'_2 des formules d'ordre supérieur

$$\overline{x}_2 = x_0 + K x'_0 + \frac{K^2}{2!} \sum_{\alpha=0}^4 B_{5\alpha} X_{0\alpha}$$

$$\overline{x}'_2 = x'_0 + K \sum_{\alpha=0}^4 A_{5\alpha} X_{0\alpha}$$

Conformément au tableau général II, les coefficients $B_{5\alpha}$ et $A_{5\alpha}$ doivent satisfaire aux conditions

$$\sum_{\alpha=0}^4 B_{5\alpha} = 1 \qquad \sum_{\alpha=0}^4 A_{5\alpha} = 1$$

puis pour assurer l'exactitude du développement

- de \overline{x}'_2 jusqu'au terme en K^4 à un système de 4 équations à 4 inconnues

- de \overline{x}_2 jusqu'au terme en K^4 ou K^5 à un système de 2 ou 4 équations à 4 inconnues

Posant $s_{i,v} = \sum_{j=0}^{i-1} B'_{ij} \theta^v_j \quad (i \geq 1, v \geq 0)$

$s_{0,v} = 0 \quad (v \geq 0)$

nous évaluons :

$s_{21} = 1/24$

$s_{31} = 13/72$

$s_{41} = 1/3$

les coefficients $A_{5\alpha}$ et $B_{5\alpha}$ satisfont aux systèmes

$$\begin{vmatrix} 1/3 & 1/2 & 5/6 & 1 \\ (1/3)^2 & (1/2)^2 & (5/6)^2 & 1 \\ (1/3)^2 & (1/2)^3 & (5/6)^3 & 1 \\ 0 & 1/24 & 13/72 & 1/3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} A_{51} \\ A_{52} \\ A_{53} \\ A_{54} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/2 \\ 1/3 \\ 1/4 \\ 1/12 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} B_{51} \\ B_{52} \\ B_{53} \\ B_{54} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/3 \\ 1/6 \\ 1/10 \\ 1/30 \end{vmatrix}$$

et ont pour solution

$A_{54} = 1/6$	$B_{54} = 2/15$
$A_{53} = 0$	$B_{53} = -3/15$
$A_{52} = 4/6$	$B_{52} = 9/15$
$A_{51} = 0$	$B_{51} = 3/15$
$A_{50} = 1/6$	$B_{50} = 4/15$

Nous retrouverons pour x'_2 , appliquée sur le pas $K = 2h$ la formule de Simpson

$$x_{i+1} = x_{i-1} + \frac{h}{3} (x_{i+1} + 4x_i + x_{i-1})$$

Le premier terme de l'erreur recherché pour x'_2 sur le pas $K = 2h$ a pour évaluation théorique

$$\frac{K^4}{192} \left[-C_3 \frac{1}{9} - J_2 C_1 \right]$$

et pour évaluation pratique

$$E_{x'} = x'_2 - \overline{x'_2} = \frac{K}{24} [-x_{00} + 9x_{01} - 13x_{02} + 9x_{03} - 4x_{04}]$$

Les deux premiers termes de l'erreur recherchés pour x_2 sur le pas $K = 2 h$ ont pour évaluation théorique

$$\frac{K^4}{576} [c_2] + \frac{K^5}{360} [c_3 \frac{1}{36} - J_2 c_1]$$

et pour évaluation pratique

$$E_x = x_2 - \overline{x_2} = \frac{K}{240} [-2x_{00} + 36x_{01} - 57x_{02} + 39x_{03} - 16x_{04}]$$

RKS2 NYSTROM (3,3)

K	N = 1		N = 2		N = 3	
	ETA _x	ETA _{x'}	ETA _x	ETA _{x'}	ETA _x	ETA _{x'}
0.1	8.81	6.31	5.3	2.0	6.0	1.5
0.2	0.78	0.61	2.3	5.6	2.4	4.3
0.3	0.68	1.20	4.2	7.6	6.0	6.0
0.4	1.12	1.51	7.3	7.4	12.2	7.6
0.5	1.88	1.71	11.8	11.8	22.3	8.9
0.6	2.98	1.83	15.3	15.2	39.1	10.1

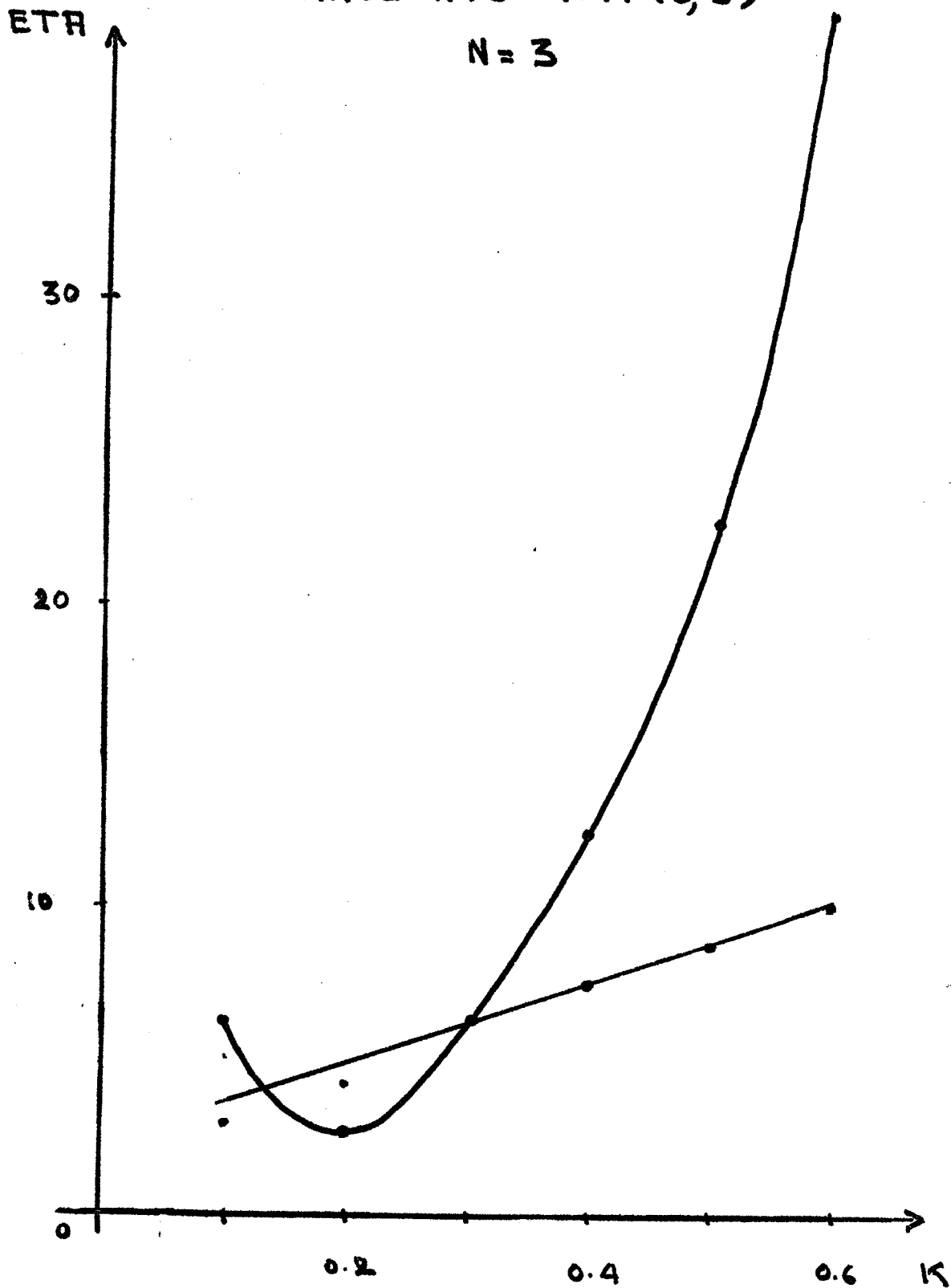
ETA_{x'} apparait proportionnel au pas, son dénominateur est en K^4 , son numérateur en K^5 (la partie principale de l'erreur sur x'_2 et $\overline{x'_2}$ est en K^4 et K^5).

ETA_x apparait proportionnel au carré du pas, son dénominateur est en K^4 , son numérateur en K^6 (la partie principale de l'erreur sur x_2 et $\overline{x_2}$ est en K^4 et K^6).

- 75 bis -

RKS2 NYSTRÖM (3,3)

N = 3



Excepté pour $N = 3$ les graphiques ETA (K) semblent mal le confirmer.

RKS2 NYSTROM (3,3)

$N=1$

$K=0.20$

T	E_x		$E_{x'}$	
	ER ₉ 10	EC ₉ 10	ER ₉ 10	EC ₉ 10
$N=1$				
0.2	2302	2319	-2682	-2665
0.4	1885	1899	-2198	-2183
0.6	1542	1555	-1796	-1786
0.8	1270	1273	-1479	-1463
1.0	1028	1042	-1120	-1198
1.2	846	853	- 987	- 981
1.4	693	698	- 808	- 803
1.6	568	572	- 663	- 657
1.8	462	468	- 538	- 539
2.0	380	383	- 441	- 440
$N=2$				
0.2	- 443	- 441	-8270	-8287
0.4	119	131	-8024	-7956
0.6	671	698	-7458	-7309
0.8	1200	1237	-6564	-6370
1.0	1684	1727	-5461	-5177
1.2	2101	2147	-4105	-3777
1.4	2436	2483	-2593	-2227
1.6	2645	2719	- 983	- 588
1.8	2794	2847	674	1074
2.0	2809	2861	2310	2693

A bis) Méthode de rang 2, d'ordre (3,4) : RKS2 classique (3,4)

Puisque x'_1 peut-être calculé après $X_{02} = X_{10}$, nous pouvons utiliser X_{10} dans l'expression de x'_1

$x_1 = x_{02}$, x'_1 représentent une formule sur le pas h , de coefficients A_{3j} , B_{ij} , θ_1 , $\theta_2 = 1$ et d'écriture matricielle

A				B
A_{30}	A_{31}	A_{32}	B_{10}	B_{21}
			B_{20}	

Conformément au tableau général II, les coefficients doivent satisfaire aux conditions

$$B_{10} = \theta_1^2$$

$$B_{20} + B_{21} = 1$$

$$A_{30} + A_{31} + A_{32} = 1$$

puis pour assurer l'exactitude du développement de x'_1 et x_1 jusqu'au terme en h^3 et h^4 aux conditions

$\frac{1}{2}$	$= A_{31} \theta_1 + A_{32} \theta_2$	h^2
$\frac{1}{3}$	$= A_{31} \theta_1^2 + A_{32} \theta_2^2$	h^3
$\frac{1}{3}$	$= B_{21} \theta_1$	h^3
$\frac{1}{6}$	$= B_{21} \theta_1^2$	

Ces conditions conduisent à l'écriture matricielle

A				B
$1/6$	$4/6$	$1/6$	$1/4$	$2/3$
			$1/3$	

Nous noterons l'analogie de cette formule avec la formule RKS3 classique (4,4).

Il ne nous est plus possible de rechercher

- l'erreur sur x' , puisque nous utilisons dans l'expression de x' le horner relatif au début du pas suivant.

- une formule d'ordre supérieur \bar{x}_1 et par là l'erreur sur x_1 . (4 équations à 2 inconnues).

Prenant $x'_1, x_1 = x_{02}$ comme valeurs initiales d'un nouveau pas $h, x_2 = x_{04}, x'_2$ s'explicitent à partir de x_0 et x'_0 . $x'_2, x_2 = x_{04}$ représentent une formule sur le pas $K = 2h$, d'ordre (3,4), de coefficients $A_{ij}, B_{ij}, \theta_1 = 1/4, \theta_2 = 1/2, \theta_3 = 3/4, \theta_4 = 1$ et d'écriture matricielle

					A'	<table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="padding: 5px;">1/16</td><td style="border: none;"></td><td style="border: none;"></td><td style="border: none;"></td><td style="border: none;"></td></tr> <tr><td style="padding: 5px;">1/12</td><td style="padding: 5px;">2/12</td><td style="border: none;"></td><td style="border: none;"></td><td style="border: none;"></td></tr> <tr><td style="padding: 5px;">3/24</td><td style="padding: 5px;">8/24</td><td style="padding: 5px;">5/48</td><td style="border: none;"></td><td style="border: none;"></td></tr> <tr><td style="padding: 5px;">2/12</td><td style="padding: 5px;">6/12</td><td style="padding: 5px;">2/12</td><td style="padding: 5px;">2/12</td><td style="border: none;"></td></tr> </table>	1/16					1/12	2/12				3/24	8/24	5/48			2/12	6/12	2/12	2/12		B'
1/16																											
1/12	2/12																										
3/24	8/24	5/48																									
2/12	6/12	2/12	2/12																								
1/12	4/12	2/12	4/12	1/12																							

Recherchons une formule d'ordre supérieur

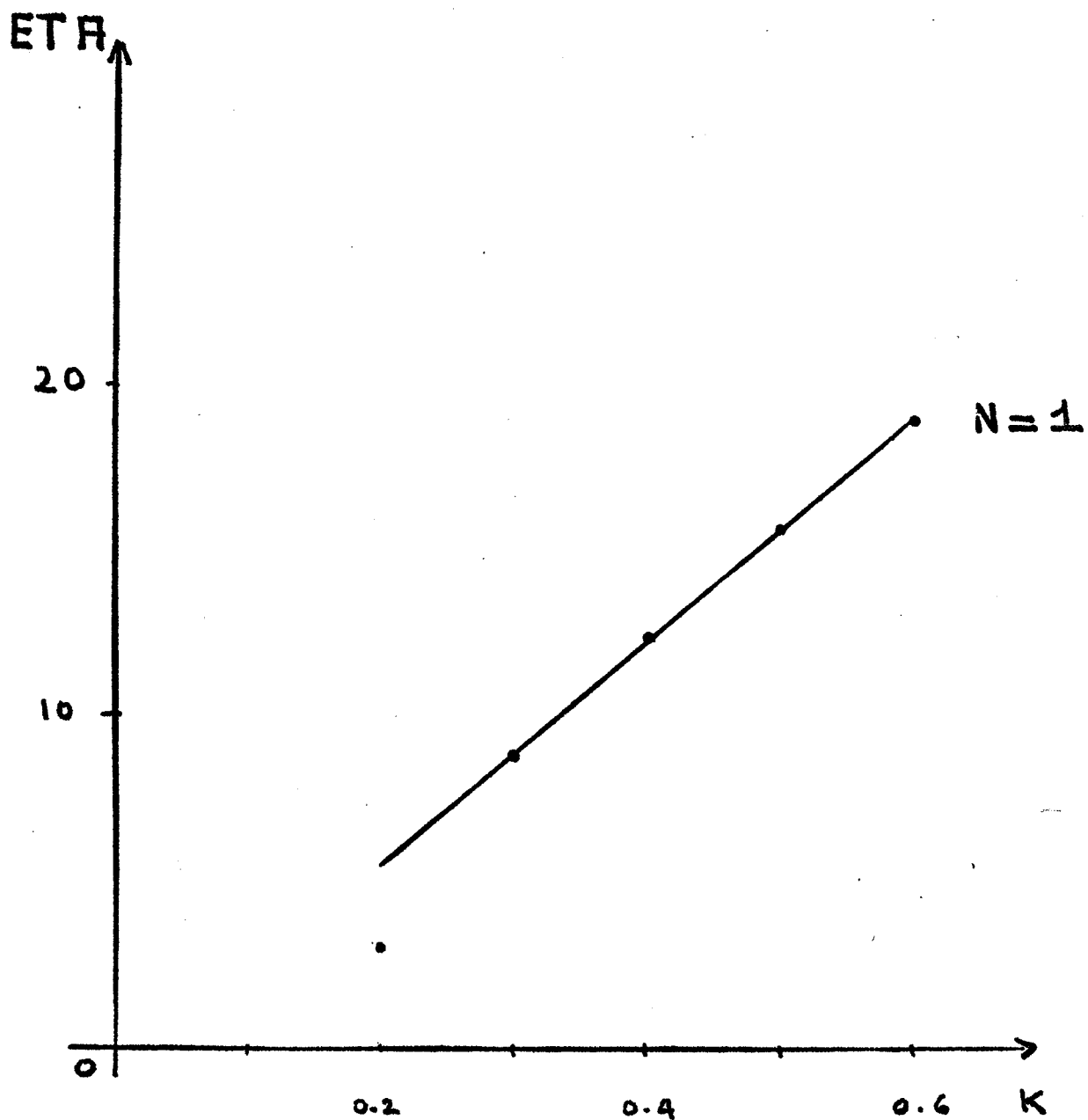
$$\bar{x}_2 = x_0 + K x'_0 + \frac{K^2}{2} \sum_{\alpha=0}^4 B_{5\alpha} x_{0\alpha}$$

Conformément au tableau général II, les coefficients $B_{5\alpha}$ doivent satisfaire à la condition

$$\sum_{\alpha=0}^4 B_{5\alpha} = 1$$

puis pour assurer l'exactitude du développement de \bar{x}_2 jusqu'au terme en K^5 aux conditions

RKS2(3,4)



$$\frac{1}{3} = \frac{B_{51}}{4} + \frac{B_{52}}{2} + \frac{3}{4} B_{53} + B_{54}$$

$$\frac{1}{6} = \frac{B_{51}}{16} + \frac{B_{52}}{4} + \frac{9}{16} B_{53} + B_{54}$$

$$\frac{1}{10} = \frac{B_{51}}{64} + \frac{B_{52}}{8} + \frac{27}{64} B_{53} + B_{54}$$

$$\frac{1}{30} = \frac{B_{52}}{24} + B_{53} \frac{13}{32} + \frac{B_{54}}{3}$$

Les coefficients $B_{5\alpha}$ ont pour solution

$$B_{54} = 8/90$$

$$B_{53} = -16/90$$

$$B_{52} = 60/90$$

$$B_{51} = 16/90$$

$$B_{50} = 22/90$$

et conduisent à l'évaluation pratique de l'erreur sur le pas $K = 2h$

$$E_x = \frac{K^2}{180} [-7X_{00} + 29 X_{01} - 45 X_{02} + 31 X_{03} - 8 X_{04}]$$

RKS2 (3,4)

ETA	N=1	N=2
K=2H= 0.2	3.0	9.2
0.3	8.8	10.2
0.4	12.4	9.8
0.5	15.7	15.1
0.6	18.9	18.8

ETA_x semblerait être proportionnel au pas. Son dénominateur est en k^5 , son numérateur en k^6 (la partie principale de l'erreur sur x_2 et x_2 est en h^5 et k^6). Mais seul pour $N = 1$, le graphique $ETA(K)$ le confirme.

B) Méthode de rang 3, d'ordre (4,4) : $\left\{ \begin{array}{l} \text{RKS3 classique (4,4)} \\ \text{RKS3 Optimale (4,4)}. \end{array} \right.$

$x_1 = x_{03}$, x'_1 représentent une formule sur le pas h , de coefficients A_{3j} , B_{ij} , θ_1 , θ_2 , $\theta_3 = 1$ et d'écriture matricielle

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline A_{30} & A_{31} & A_{32} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline B_{10} & & \\ \hline B_{20} & B_{21} & \\ \hline B_{30} & B_{31} & B_{32} \\ \hline \end{array}$$

Conformément au Tableau général II, les coefficients doivent satisfaire aux conditions

$$\begin{aligned} B_{10} &= \theta_1^2 \\ B_{20} + B_{21} &= \theta_2^2 \\ B_{30} + B_{31} + B_{32} &= 1 \\ A_{30} + A_{31} + A_{32} &= 1 \end{aligned}$$

puis pour assurer l'exactitude du développement de x'_1 , x_1 jusqu'au terme en h^4 aux conditions :

$$\left\{ \begin{array}{l} B_{31} \theta_1 + B_{32} \theta_2 = 1/3 \quad h^3 \\ B_{31} \theta_1^2 + B_{32} \theta_2^2 = 1/6 \quad h^4 \\ A_{31} \theta_1 + A_{32} \theta_2 = 1/2 \quad h^2 \\ A_{31} \theta_1^2 + A_{32} \theta_2 = 1/3 \quad h^3 \\ A_{31} \theta_1^3 + A_{32} \theta_2^3 = 1/4 \quad h^4 \\ A_{32} B_{21} \theta_1 = 1/12 \quad h^4 \end{array} \right.$$

Ces conditions conduisent aux formules effectives RKS3 classique (4,4) et RKS3 optimale (4,4).

I) Formule RKS3 classique (4,4)

$x_1 = x_{03}$, x'_1 représentent une formule sur le pas h , d'ordre 4 de coefficients A_{3j} , B_{ij} , $\theta_1 = 1/2$, $\theta_2 = \theta_3 = 1$ et d'écriture matricielle

A		
1/6	4/6	1/6

B		
1/4		
0	1	
1/3	2/3	0

Dans l'impossibilité de rechercher des formules d'ordre supérieur \bar{x}_1 et \bar{x}'_1 , et par là de donner des évaluations pratiques de l'erreur sur le pas h , nous prenons $x_1 = x_{03}$, x'_1 comme valeurs initiales d'un nouveau pas h .

$x_2 = x_{06}$, x'_2 s'explicitent à partir de x_0 et x'_0
 x_2 et x'_2 représentent une formule sur le pas $K = 2h$, d'ordre 4, de coefficients A_{6j} , B_{ij} , $\theta_1 = 1/4$, $\theta_2 = \theta_3 = 1/2$, $\theta_4 = 3/4$, $\theta_5 = \theta_6 = 1$ et d'écriture matricielle

A'					
1/12	4/12	1/12	1/12	4/12	1/12

B'					
1/16					
0	1/4				
1/12	2/12	0			
3/24	8/24	1/24	1/16		
2/12	6/12	1/12	0	1/4	
2/12	6/12	1/12	1/12	2/12	0

Recherchons des formules d'ordre supérieur

$$\bar{x}'_2 = x'_0 + K \sum_{\alpha=0}^6 A_{7\alpha} X_{0\alpha}$$

$$\bar{x}_2 = x_0 + K x'_0 + \frac{K^2}{2} \sum_{\alpha=0}^6 B_{7\alpha} X_{0\alpha}$$

Conformément au tableau général II, les coefficients $A_{7\alpha}$ et $B_{7\alpha}$ doivent satisfaire aux conditions

$$\sum_{\alpha=0}^6 A_{7\alpha} = 1 \qquad \sum_{\alpha=0}^6 B_{7\alpha} = 1$$

puis pour assurer l'exactitude du développement

- de \overline{x}_2 jusqu'au terme en k^5 à un système de 7 équations à 6 inconnues

- de x_2 jusqu'au terme en k^5 ou k^6 à un système de 4 ou 7 équations à 6 inconnues

$$\text{Posant } S_{i,v} = \sum_{j=0}^{i-1} B'_{ij} \theta_j^v \quad (i \geq 1, v \geq 0)$$

$$S_{0,v} = 0 \quad (v \geq 0)$$

nous évaluons quels que soient θ_1, θ_2

$$S_{2,1} = B'_{21} \theta_1 = \frac{B_{21}}{4} \theta_1$$

$$S_{3,1} = 1/24$$

$$S_{4,1} = 1/24 + \theta_1/4 + S_{1,0}/2$$

$$S_{5,1} = 1/24 + \theta_2/4 + S_{2,0}/2 + S_{2,1}$$

$$S_{6,1} = 1/3$$

$$S_{2,2} = B'_{21} \theta_1^2 = \frac{B_{21}}{4} \theta_1^2$$

$$S_{3,2} = 1/96$$

$$S_{4,2} = 1/96 + \theta_1/12 + S_{1,0}/4$$

$$S_{5,2} = 1/96 + \theta_2/12 + S_{2,0}/4 + S_{2,1} + S_{2,2}$$

$$S_{6,2} = 1/6$$

Les coefficients $A_{7\alpha}$ et $B_{7\alpha}$ satisfont alors au système

$$\begin{array}{cccccc}
 1/4 & 1/2 & 1/2 & 3/4 & 1 & 1 \\
 (1/4)^2 & (1/2)^2 & (1/2)^2 & (3/4)^2 & 1 & 1 \\
 (1/4)^3 & (1/2)^3 & (1/2)^3 & (3/4)^3 & 1 & 1 \\
 (1/4)^4 & (1/2)^4 & (1/2)^4 & (3/4)^4 & 1 & 1 \\
 0 & 1/16 & 1/24 & 13/96 & 17/48 & 1/3 \\
 0 & 1/32 & 1/48 & 13/128 & 17/48 & 1/3 \\
 0 & 1/64 & 1/96 & 3/64 & 37/192 & 1/6
 \end{array}
 \times
 \begin{array}{cc}
 A_{71} & B_{71} \\
 A_{72} & B_{72} \\
 A_{73} & B_{73} \\
 A_{74} & B_{74} \\
 A_{75} & B_{75} \\
 A_{76} & B_{76}
 \end{array}
 =
 \begin{array}{cc}
 1/2 & 1/3 \\
 1/3 & 1/6 \\
 1/4 & 1/10 \\
 1/5 & 1/15 \\
 1/12 & 1/30 \\
 1/15 & 1/45 \\
 1/30 & 1/90
 \end{array}$$

Le premier système est incompatible (le déterminant d'ordre 7 obtenu en prenant comme septième vecteur colonne, la colonne du second membre, étant non nul, les 7 vecteurs lignes sont linéairement indépendants) d'où l'impossibilité d'évaluer l'erreur sur le pas $K = 2h$ pour x' .

Le deuxième système l'est aussi pour les mêmes raisons mais la résolution des 6 premières équations donne :

$$\begin{aligned}
 B_{76} &= 4/90 \\
 B_{75} &= -4/90 \\
 B_{74} &= 16/90 \\
 B_{73} &= -8/90 \\
 B_{72} &= 20/90 \\
 B_{71} &= 48/90 \\
 B_{70} &= 14/90
 \end{aligned}$$

\bar{x}_2 représente avec les valeurs des B_{7i} ainsi déterminées une formule d'ordre supérieur en K^5 . La partie principale de l'erreur sur \bar{x}_2 à pour évaluation théorique $\frac{K^6}{5760} [-J_2 C_2]$. Par suite le premier terme de l'erreur sur le pas $K = 2h$ a pour évaluation théorique

$$\frac{K^5}{5760} \left[-\frac{C_3}{2} - 3 J_2 C_1 \right]$$

et pour évaluation pratique

$$E1 = x_2 - \bar{x}_2 = \frac{k^2}{360} [2 X_{00} - 6 X_{01} - 25 X_{02} + 31 X_{03} - 2X_{04} + 8X_{05} - 8X_{06}]$$

L'exactitude du développement de \bar{x}_2 jusqu'au terme en k^5 exige la résolution d'un système de 4 équations à 6 inconnues.

Le problème du nombre de solutions indépendantes consiste seulement à trouver le rang du système :

$$\begin{pmatrix} 1/4 & 1/2 & 1/2 & 3/4 & 1 & 1 \\ 1/16 & 1/4 & 1/4 & 9/16 & 1 & 1 \\ 1/64 & 1/8 & 1/8 & 27/64 & 1 & 1 \\ 0 & 1/16 & 1/24 & 13/96 & 17/48 & 1/3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} B_{71} \\ B_{72} \\ B_{73} \\ B_{74} \\ B_{75} \\ B_{76} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/6 \\ 1/10 \\ 1/30 \end{pmatrix}$$

Le déterminant d'ordre 4 obtenu par les 4 premiers vecteurs colonne étant non nul, nous prendrons B_{75} et B_{76} comme inconnues arbitraires.

Le système a pour solution

$$B_{71} = 24/45 - 4A - 4B$$

$$B_{72} = 8/45 - 3A - 2B$$

$$B_{73} = -2/45 + 9A + 8B$$

$$B_{74} = 8/45 - 4A - 4B$$

$$B_{75} = A$$

$$B_{76} = B$$

\bar{x}_2 représente avec les valeurs des B_{7i} ainsi déterminées une formule d'ordre supérieur en k^5 dont la partie principale de l'erreur a pour évaluation théorique

$$\frac{k^6}{5760} [C_4 + 2 k_2 C_1]$$

Par suite le premier terme de l'erreur sur le pas $K = 2$ h pour x_2 a pour évaluation théorique

$$\frac{K^5}{5760} \left[-\frac{C_3}{2} - 3 J_2 C_1 \right]$$

et pour évaluation pratique $E = x_2 - \bar{x}_2 = \frac{K^2}{2} \sum_{\alpha=0}^6 q_{\alpha} X_{0\alpha}$

avec :

$$q_0 = 1/90 - A - B$$

$$q_1 = -3/90 + 4A + 4B$$

$$q_2 = \frac{-17}{180} + 3A + 2B$$

$$q_3 = \frac{23}{180} - 9A - 8B$$

$$q_4 = -1/90 + 4A + 4B$$

$$q_5 = -A$$

$$q_6 = -B$$

Choix de A et B

Nous minimisons la somme S des carrés des q_{α} .
S est une forme quadratique qui atteint son minimum pour :

$$\frac{dS}{dA} = \frac{dS}{dB} = 0$$

Soient :

$$A = 3/90, \quad B = -2/90$$

et E2 la formule d'évaluation correspondante

$$E2 = \frac{K^2}{360} [2 X_{01} - 7 X_{02} + X_{03} + 6 X_{04} - 6 X_{05} + 4 X_{06}]$$

D'autres formules peuvent être proposées. En particulier, nous pouvons arbitrairement annuler B_{54} . Par suite, $A = 2/45 - B$. Minimisant la somme des carrés des q_{α} nous obtenons $B = 8/90$ et

$$E3 = \frac{K^2}{360} [-6X_{00} + 26 X_{01} - 9 X_{02} - 33 X_{03} + 30 X_{04} + 8 X_{05} - 8 X_{06}]$$

Des trois formules proposées E3 semble donner de meilleurs résultats. La comparaison de l'évaluation théorique de l'erreur sur \bar{x}_2 ne nous apporte aucun renseignement supplémentaire.

II. - Formule RKS3 optimale (4,4)

$x_1 = x_{03}$, x'_1 représentent une formule sur le pas h , d'ordre 4, de coefficients A_{3j} , B_{ij} , $\theta_1 = 1/4$, $\theta_2 = 4/5$, $\theta_3 = 1$ et d'écriture matricielle

A	B												
<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">1/24</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">16/33</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">125/264</td> </tr> </table>	1/24	16/33	125/264	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">1/16</td> <td colspan="2"></td> </tr> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">-8/125</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">88/125</td> <td></td> </tr> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">1/12</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">8/11</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">25/132</td> </tr> </table>	1/16			-8/125	88/125		1/12	8/11	25/132
1/24	16/33	125/264											
1/16													
-8/125	88/125												
1/12	8/11	25/132											

Dans l'impossibilité de rechercher une formule d'ordre supérieur pour x'_1 et x_1 (système de 7 et 4 équations à 3 inconnues) nous prenons $x_1 = x_{03}$, x'_1 comme valeurs initiales d'un nouveau pas h $x_{06} = x_2$ et x'_2 s'explicitent à partir de x_0 et x'_0 .

x_2 et x'_2 représentent une formule sur le pas $k = 2h$, d'ordre 4, de coefficients A_{6j} , B_{ij} , $\theta_1 = 1/8$, $\theta_2 = 2/5$, $\theta_3 = 1/2$, $\theta_4 = \theta_1 + 1/2$, $\theta_5 = \theta_2 + 1/2$, $\theta_6 = 1$ et d'écriture matricielle

	B'																																				
<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">1/64</td> <td colspan="5"></td> </tr> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">-2/125</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">22/125</td> <td colspan="4"></td> </tr> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">11/528</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">96/528</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">25/528</td> <td colspan="3"></td> </tr> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">55/2112</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">512/2112</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">225/2112</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">1/64</td> <td colspan="2"></td> </tr> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">99/2640</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">992/2640</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">625/2640</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">-2/125</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">22/125</td> <td></td> </tr> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">22/528</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">224/528</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">150/528</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">11/528</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">96/528</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">25/528</td> </tr> </table>	1/64						-2/125	22/125					11/528	96/528	25/528				55/2112	512/2112	225/2112	1/64			99/2640	992/2640	625/2640	-2/125	22/125		22/528	224/528	150/528	11/528	96/528	25/528	
1/64																																					
-2/125	22/125																																				
11/528	96/528	25/528																																			
55/2112	512/2112	225/2112	1/64																																		
99/2640	992/2640	625/2640	-2/125	22/125																																	
22/528	224/528	150/528	11/528	96/528	25/528																																
A'																																					
<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">1/48</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">8/33</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">125/528</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">1/48</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">8/33</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">125/528</td> </tr> </table>	1/48	8/33	125/528	1/48	8/33	125/528																															
1/48	8/33	125/528	1/48	8/33	125/528																																

Recherchons les formule d'ordre supérieur

$$\overline{x'_2} = x'_0 + K \sum_{\alpha=0}^6 A_{7\alpha} X_{0\alpha}$$

$$\overline{x_2} = x_0 + K x'_0 + \frac{K^2}{2} \sum_{\alpha=0}^6 B_{7\alpha} X_{0\alpha}$$

Conformément au tableau général II, les coefficients $A_{7\alpha}$ et $B_{7\alpha}$ doivent satisfaire aux conditions

$$\sum_{\alpha=0}^6 A_{7\alpha} = 1 = \sum_{\alpha=0}^6 B_{7\alpha}$$

puis pour assurer l'exactitude du développement

- de $\overline{x'_2}$ jusqu'au terme en K^5 à un système de 7 équations à 6 inconnues.
- de $\overline{x_2}$ jusqu'au terme en K^5 à un système de 4 équations à 6 inconnues.

Le premier système est incompatible d'où l'impossibilité d'évaluer l'erreur sur le pas $K = 2 h$ pour x' .

Le deuxième système conduit en prenant arbitrairement $B_{74} = 0$, $B_{76} = B$ (choix qui a donné les meilleurs résultats pour RKS3 classique (4,4)) et en minimisant la somme des carrés des q_α , à l'évaluation pratique de l'erreur sur le pas $K = 2 H$.

$$E4 = \frac{K^2}{6336} \left[-33 X_{00} + 64 X_{01} + 145 X_{02} - 583 X_{03} + 576 X_{04} - 345 X_{05} + 176 X_{06} \right]$$

Le premier terme de l'évaluation théorique se réduisant à $\frac{K^5}{11520} [-C_3]$, minimisation de l'évaluation théorique de l'erreur par pas de la méthode RKS3 classique. Nous devons donc nous attendre à une mauvaise évaluation pratique de l'erreur par pas par la formule E4.

RKS3 Classique (4,4)

ETA 1	N = 1	N = 2
K= 2H = 0.2	10.2	5.0
0.3	11.6	10.2
0.4	15.4	12.0
0.5	19.7	20.0

ETA 2	N = 1	N = 2
K= 2H = 0.2	3.2	8.6
0.3	3.8	5.4
0.4	4.2	4.8
0.5	4.3	7.0
0.6	4.8	9.4

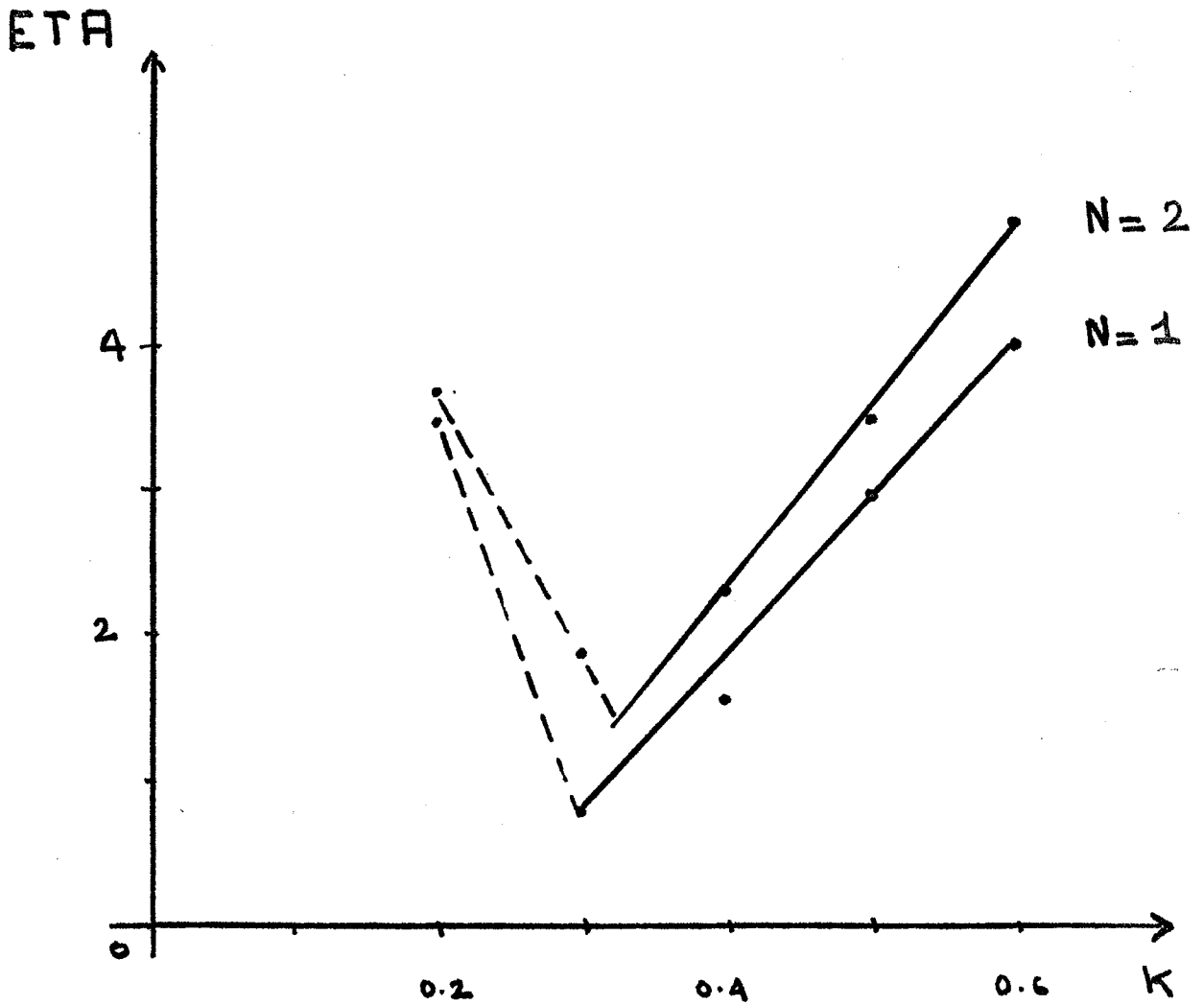
ETA 3	N = 1	N = 2	N = 3
K= 2H = 0.2	3.5	3.7	11.4
0.3	0.8	1.9	5.7
0.4	1.6	2.3	6.1
0.5	3.0	3.5	20.1
0.6	4.0	4.9	33.0

RKS3 Optimale (4,4)

ETA 4	N = 2
K=2H= 0.2	117
0.3	140
0.4	136
0.5	137
0.6	135

RKS3 CLASSIQUE (4,4)

E3



RKS3 CLASSIQUE (4,4)

K = 0.40 E1

T	N = 2		N = 1	
	ER ₈ 10	EC ₈ 10	ER ₇ 10	EC ₇ 10
0.4	-519	-530	- 61	- 61
0.8	-457	-466	- 91	- 89
1.2	-320	-328	- 135	- 132
1.6	-136	-138	- 201	- 198
2.0	72	73	- 301	- 295
2.4	267	273	- 448	- 440
2.8	419	429	- 665	- 656
3.2	506	518	- 997	- 979
3.6	512	526	-1483	-1460
4.0	439	450	-2208	-2178

Nous constaterons la proportionnalité de ETA au pas K pour les valeurs de $K > 0.3$ (erreur d'arrondi négligeable) : le dénominateur de ETA est en K^5 , son numérateur en K^6 (la partie principale de l'erreur sur x_2 et \bar{x}_2 est en K^5 et K^6).

C) Méthode de rang 4, d'ordre (4,5) : RKS4 (4,5)

$x_1 = x_{04}$, x'_1 représentent une formule sur le pas h , de coefficients A_{4j} , B_{ij} , θ_1 , θ_2 , θ_3 , $\theta_4 = 1$ et d'écriture matricielle

A_{40}	A_{41}	A_{42}	A_{43}
----------	----------	----------	----------

B_{10}			
B_{20}	B_{21}		
B_{30}	B_{31}	B_{32}	
B_{40}	B_{41}	B_{42}	B_{43}

Conformément au Tableau général II, les coefficients doivent satisfaire aux conditions

$$\begin{aligned}
 B_{10} &= \theta_1^2 \\
 B_{20} + B_{21} &= \theta_2^2 \\
 B_{30} + B_{31} + B_{32} &= \theta_3^2 \\
 B_{40} + B_{41} + B_{42} + B_{43} &= 1 \\
 A_{40} + A_{41} + A_{42} + A_{43} &= 1
 \end{aligned}$$

puis pour assurer l'exactitude du développement de x'_1 jusqu'au terme en h^4 , de x_1 jusqu'au terme en h^5 aux conditions

$$\begin{aligned}
 A_{41} \theta_1 + A_{42} \theta_2 + A_{43} \theta_3 &= 1/2 & h^2 \\
 A_{41} \theta_1^2 + A_{42} \theta_2^2 + A_{43} \theta_3^2 &= 1/3 & h^3 \\
 A_{41} \theta_1^3 + A_{42} \theta_2^3 + A_{43} \theta_3^3 &= 1/4 & h^4 \\
 A_{43} [B_{32} \theta_2 + B_{31} \theta_1] + A_{42} B_{21} \theta_1 &= 1/12 & h^4 \\
 B_{41} \theta_1 + B_{42} \theta_2 + B_{43} \theta_3 &= 1/3 & h^2 \\
 B_{41} \theta_1^2 + B_{42} \theta_2^2 + B_{43} \theta_3^2 &= 1/6 & h^3 \\
 B_{41} \theta_1^3 + B_{42} \theta_2^3 + B_{43} \theta_3^3 &= 1/10 & h^4 \\
 B_{43} [B_{32} \theta_2 + B_{31} \theta_1] + B_{42} B_{21} \theta_1 &= 1/30 & h^4
 \end{aligned}$$

Dans l'impossibilité de rechercher une formule d'ordre supérieur pour x'_1 et x_1 (système de 7 équations à 4 inconnues), nous prenons $x_1 = x_{04}$, x'_1 comme valeurs initiales d'un nouveau pas h .

$$x_2 = x_{08}, x'_2 \text{ s'explicitent à partir de } x_0, x'_0$$

x'_2 et x_2 représentent une formule sur le pas $K = 2h$, d'ordre (4,5), de coefficients A'_{8j} , B'_{ij} , $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4 = 1/2, \theta_5 = \theta_1 + 1/2, \theta_6 = \theta_2 + 1/2, \theta_7 = \theta_3 + 1/2, \theta_8 = 1$ et d'écriture matricielle

$\frac{B_{10}}{4}$								
$\frac{B_{20}}{4}$	$\frac{B_{21}}{4}$							
$\frac{B_{30}}{4}$	$\frac{B_{31}}{4}$	$\frac{B_{32}}{4}$						
$\frac{B_{40}}{4}$	$\frac{B_{41}}{4}$	$\frac{B_{42}}{4}$	$\frac{B_{43}}{4}$					
$\frac{B_{40}}{4} + A_{40}\theta_1$	$\frac{B_{41}}{4} + A_{41}\theta_1$	$\frac{B_{42}}{4} + A_{42}\theta_1$	$\frac{B_{43}}{4} + A_{43}\theta_1$	$\frac{B_{10}}{4}$				
$\frac{B_{40}}{4} + A_{40}\theta_2$	$\frac{B_{41}}{4} + A_{41}\theta_2$	$\frac{B_{42}}{4} + A_{42}\theta_2$	$\frac{B_{43}}{4} + A_{43}\theta_2$	$\frac{B_{20}}{4}$	$\frac{B_{21}}{4}$			
$\frac{B_{40}}{4} + A_{40}\theta_3$	$\frac{B_{41}}{4} + A_{41}\theta_3$	$\frac{B_{42}}{4} + A_{42}\theta_3$	$\frac{B_{43}}{4} + A_{43}\theta_3$	$\frac{B_{30}}{4}$	$\frac{B_{31}}{4}$	$\frac{B_{32}}{4}$		
$\frac{B_{40}}{4} + A_{40}\theta_4$	$\frac{B_{41}}{4} + A_{41}\theta_4$	$\frac{B_{42}}{4} + A_{42}\theta_4$	$\frac{B_{43}}{4} + A_{43}\theta_4$	$\frac{B_{40}}{4}$	$\frac{B_{41}}{4}$	$\frac{B_{42}}{4}$	$\frac{B_{43}}{4}$	
$\frac{A_{40}}{2}$	$\frac{A_{41}}{2}$	$\frac{A_{42}}{2}$	$\frac{A_{43}}{2}$	$\frac{A_{40}}{2}$	$\frac{A_{41}}{2}$	$\frac{A_{42}}{2}$	$\frac{A_{43}}{2}$	

ou les A_{4j} , B_{ij} ont les valeurs prises sur le pas h .

Recherchons des formules d'ordre supérieur

$$\overline{x'}_2 = x'_0 + K \sum_{\alpha=0}^9 A_{9\alpha} X_{0\alpha}$$

$$\overline{x}_2 = x_0 + K x'_0 + \frac{K^2}{2} \sum_{\alpha=0}^9 B_{9\alpha} X_{0\alpha}$$

Conformément au tableau général II, les coefficients $A_{9\alpha}$ et $B_{9\alpha}$ doivent satisfaire aux conditions

$$\sum_{\alpha=0}^8 A_{9\alpha} = 1 \quad \sum_{\alpha=0}^8 B_{9\alpha} = 1$$

puis pour assurer l'exactitude du développement

de $\overline{x'}_2$ jusqu'au terme en K^5 à un système de 7 équations à 8 inconnues

de \overline{x}_2 jusqu'au terme en K^6 à un système de 7 équations à 8 inconnues

Posant
$$S_{i,v} = \sum_{j=0}^{i-1} B'_{ij} \theta_j^v \quad (i \geq 1, v \geq 0)$$

$$S_{0,v} = 0 \quad (v \geq 0)$$

nous évaluons quels que soient $\theta_1, \theta_2, \theta_3$

$$S_{2,1} = B'_{21} \theta_1 = \frac{B_{21}}{4} \theta_1$$

$$S_{3,1} = B'_{31} \theta_1 + B'_{32} \theta_2 = \frac{B_{31}}{4} \theta_1 + \frac{B_{32}}{4} \theta_2$$

$$S_{4,1} = 1/24$$

$$S_{5,1} = 1/24 + \theta_1/4 + S_{1,0}/2$$

$$S_{6,1} = 1/24 + \theta_2/4 + S_{2,0}/2 + S_{2,1}$$

$$S_{7,1} = 1/24 + \theta_3/4 + S_{3,0}/2 + S_{3,1}$$

$$S_{8,1} = 1/3$$

$$\begin{aligned}
 s_{2,2} &= B'_{21} \theta_1^2 = \frac{B_{21}}{4} \theta_1^2 \\
 s_{3,2} &= B'_{31} \theta_1^2 = B'_{32} \theta_2^2 = \frac{B_{31}}{4} \theta_1^2 + \frac{B_{32}}{4} \theta_2^2 \\
 s_{4,2} &= 1/96 \\
 s_{5,2} &= 1/96 + \theta_1/12 + s_{1,0}/4 \\
 s_{6,2} &= 1/96 + \theta_2/12 + s_{2,0}/4 + s_{2,1} + s_{2,2} \\
 s_{7,2} &= 1/96 + \theta_3/12 + s_{3,0}/4 + s_{3,1} + s_{3,2} \\
 s_{8,2} &= 1/6
 \end{aligned}$$

La résolution des deux systèmes devenant très rapidement inextricable pour $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ arbitraires, imposons nous sur le pas h

$$\theta_1 = 1/4, \theta_2 = 1/2, \theta_3 = 1.$$

x'_1 et x_1 représentent sur le pas h, une formule d'ordre (4,5) de coefficients $A_{4j}, B_{ij}, \theta_1 = 1/4, \theta_2 = 1/2, \theta_3 = \theta_4 = 1$ et d'écriture matricielle

1/6	0	2/3	1/6
-----	---	-----	-----

1/16			
1/20	4/20		
2/5	0	3/5	
1/5	16/45	2/5	2/45

x'_2 et x_2 représentent sur le pas $K = 2h$, une formule d'ordre (4,5) de coefficients $A'_{8j}, B'_{ij}, \theta_1 = 1/8, \theta_2 = 1/4, \theta_3 = \theta_4 = 1/2, \theta_5 = \theta_1 + 1/2, \theta_6 = \theta_2 + 1/2, \theta_7 + \theta_8 = 1$ et d'écriture matricielle

1/64									
1/80	4/80								
2/20	0	3/20							
9/180	16/180	18/180	2/180						
51/720	64/720	132/720	23/720	1/64					
66/720	64/720	192/720	38/720	1/80	4/80				
96/720	64/720	312/720	68/720	2/20	0	3/20			
96/720	64/720	312/720	68/720	9/180	16/180	18/180	2/180		
1/12	0	4/12	1/12	1/12	0	4/12	1/12		

Les coefficients $A_{9\alpha}$ et $B_{9\alpha}$ satisfont au système

$$\begin{vmatrix} 1/4 & 1/2 & 1 & 1 & 5/4 & 3/2 & 2 & 2 \\ 1/16 & 1/4 & 1 & 1 & 25/16 & 9/4 & 4 & 4 \\ 1/64 & 1/8 & 1 & 1 & 125/64 & 27/8 & 8 & 8 \\ 1/256 & 1/16 & 1 & 1 & 625/256 & 81/16 & 16 & 16 \\ 0 & 1/40 & 3/20 & 1/6 & 31/96 & 17/30 & 79/60 & 4/3 \\ 0 & 1/80 & 3/20 & 1/6 & 155/384 & 17/20 & 79/30 & 8/3 \\ 0 & 1/160 & 3/40 & 1/12 & 19/96 & 69/160 & 31/24 & 4/3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} A_{91} \\ A_{92} \\ A_{93} \\ A_{94} \\ A_{95} \\ A_{96} \\ A_{97} \\ A_{98} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B_{91} \\ B_{92} \\ B_{93} \\ B_{94} \\ B_{95} \\ B_{96} \\ B_{97} \\ B_{98} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 4/3 \\ 2 \\ 16/5 \\ 1/3 \\ 8/15 \\ 4/15 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 4/5 \\ 16/15 \\ 2/15 \\ 8/45 \\ 4/45 \end{vmatrix}$$

et ont pour solution

$$A_{90} = -16/900 + 148 C/300$$

$$B_{90} = 688/9000 + 148 C/300$$

$$A_{91} = 320/900 + -640 C/300$$

$$B_{91} = 2560/9000 - 640 C/300$$

$$A_{92} = -40/900 + 880 C/300$$

$$B_{92} = 2080/9000 + 880 C/300$$

$$A_{93} = -60/900 + 320 C/300$$

$$B_{93} = 120/9000 + 320 C/300$$

$$\begin{array}{ll}
 A_{94} = 400/900 - 1480 C/300 & B_{94} = 2120/9000 - 1480C/300 \\
 A_{95} = -64/900 + 1152 C/300 & B_{95} = 512/9000 + 1152C/300 \\
 A_{96} = 280/900 - 400 C/300 & B_{96} = 800/9000 - 400C/300 \\
 A_{97} = 80/900 - 280 C/300 & B_{97} = 120/9000 - 280C/300 \\
 A_{98} = & C & B_{98} = & C
 \end{array}$$

par suite les évaluations pratiques de l'erreur sur le pas $K = 2$ h

$$E_x = x_2 - \overline{x_2} = \frac{K^2}{2} \sum_{\alpha=0}^8 P_\alpha X_{0\alpha} \quad E_{x'} = x'_2 - \overline{x'_2} = K \sum_{\alpha=0}^8 q_\alpha X_{0\alpha}$$

avec :

$$\begin{array}{ll}
 P_0 = 512/9000 - 148 C/300 & q_0 = 91/900 - 148 C/300 \\
 P_1 = -1760/9000 + 640 C/300 & q_1 = -320/900 + 640 C/300 \\
 P_2 = 1820/9000 - 880 C/300 & q_2 = 340/900 - 880 C/300 \\
 P_3 = 730/9000 - 320 C/300 & q_3 = 135/900 - 320 C/300 \\
 P_4 = -1670/9000 + 1480 C/300 & q_4 = -325/900 + 1480 C/300 \\
 P_5 = 288/9000 - 1152 C/300 & q_5 = 64/900 - 1152 C/300 \\
 P_6 = 100/9000 + 400 C/300 & q_6 = 20/900 + 400 C/300 \\
 P_7 = -20/9000 + 280 C/300 & q_7 = -5/900 + 280 C/300 \\
 P_8 = & - C & q_8 = & - C
 \end{array}$$

Choix de C

La minimisation de la somme des carrés des P_α et q_α impose $C \neq 0$. De nombreux essais sur machine, nous ont confirmé que le choix de $C = 0$ donnait les meilleurs résultats.

ETA	N = 1		N = 2	
	ETA _x	ETA _{x'}	ETA _x	ETA _{x'}
0.6	21.2	12.3	32.1	20.0
0.7	47.7	4.6	36.2	19.7
0.8	29.6	2.9	41.9	19.5
0.9	60.2	0.9	37.9	25.8
1.0	93.4	2.9	38.9	28.4

ETA_x et ETA_{x'} apparaissent proportionnels au pas : la partie principale de l'erreur sur $\overline{x'_2}$, $\overline{x'_2}$, $\overline{x_2}$ et $\overline{x_2}$ est en k^5, k^6, k^6 et k^7 .

Les graphiques ETA (K) ne le confirment pas : en raison de l'ordre élevé de la méthode RKS4 (4,5), l'influence de l'erreur d'arrondi se fait sentir jusqu'au pas $K = 2 h = 0.8$.

Aussi pour des méthodes d'ordre encore plus élevé, la recherche d'évaluation pratique de l'erreur par pas devient illusoire. Cependant la programmation en double précision permettra d'aborder lorsqu'elle sera au point, la recherche d'évaluation pratique de l'erreur par pas pour des méthodes d'ordre élevé.

RKS4 (4,5)

E_x			$E_{x'}$	
T	ER_8	EC_8	ER_8	EC_8
	10	10	10	10
N = 1				
0.6	6	9	- 28	- 25
1.2	6	17	- 54	- 47
1.8	18	31	- 89	- 84
2.4	36	56	- 155	- 156
3.0	48	102	- 310	- 283
3.6	143	186	- 525	- 517
4.2	381	341	- 858	- 939
4.8	763	619	-1431	-1719
5.4	1335	1134	-2861	-3115
6.0	2670	2058	-4959	-5677
T	ER_9	EC_9	ER_9	EC_9
	10	10	10	10
N = 2				
0.6	37	1	179	181
1.2	- 30	- 59	164	115
1.8	- 89	- 99	52	101
2.4	-112	-104	- 74	-100
3.0	- 86	- 73	-141	-172
3.6	- 45	- 16	-171	-188
4.2	- 7	46	-130	-137
4.8	82	92	- 46	- 38
5.4	112	106	52	77
6.0	123	83	134	159

D) Formule de Runge Kutta, de rang 2, d'ordre (4,5) : RKD2 (4,5)

Au chapitre II, nous avons défini les méthodes de Runge-Kutta double.

Explicitons l'algorithme dans le cas d'une méthode de rang q, pour les problèmes différentiels de forme particulière.

$$x'' = X(x, t), \quad x(0) = x_0, \quad x'(0) = x'_0$$

soit : $x''' = DX = Y(x, x', t) = X'_x \cdot x' + X'_t$

On passe des valeurs d'indice i aux valeurs d'indice i + 1 par l'algorithme

$$t_i = t_{i0}, \quad x'_i = x'_{i0}, \quad x_i = x_{i0}$$

$$t_{i\alpha} = t_i + h \theta_\alpha$$

$$x'_{i\alpha} = x'_{i0} + h \sum_{\beta=0}^{\alpha-1} A_{\alpha\beta} x_{i\beta} + \frac{h^2}{2!} \sum_{\beta=0}^{\alpha-1} A'_{\alpha\beta} DX_{i\beta}$$

$$x_{i\alpha} = x_{i0} + h \theta_\alpha x'_{i0} + \frac{h^2}{2!} \sum_{\beta=0}^{\alpha-1} B_{\alpha\beta} x_{i\beta} + \frac{h^3}{3!} \sum_{\beta=0}^{\alpha-1} B'_{\alpha\beta} DX_{i\beta}$$

$$t_{i+1} = t_{iq}$$

$$x'_{i+1} = x'_{iq} \quad X_{i\beta} = X(x_{i\beta}, t_{i\beta})$$

$$x_{i+1} = x_{iq} \quad DX_{i\beta} + X_{i\beta} = Y(x_{i\beta}, x'_{i\beta}, t_{i\beta}).$$

$x'_1 = x'_{02}, x_1 = x_{02}$ représentent sur le pas h, une formule de rang 2, de coefficients $\theta_0 = 0, \theta_1, \theta_2 = 1$ $A_{ij}, A'_{ij}, B_{ij}, B'_{ij}$ et

d'écriture matricielle

A_{10}	A
A_{20}	A_{21}

A'_{10}	A'
A'_{20}	A'_{21}

B_{10}	B
B_{20}	B_{21}

B'_{10}	B'
B'_{20}	B'_{21}

Conformément au tableau général 4, les coefficients A_{ij} , B_{ij} , A'_{ij} , B'_{ij} doivent satisfaire aux conditions

$$K_{10} = \theta_1^K \quad K'_{10} = K'_1$$

$$K_{21} + K_{20} = 1 \quad K'_{21} + K'_{20} = K'_2$$

puis pour assurer l'exactitude du développement de x'_1 et x_1 jusqu'au terme en h^4 et h^5 aux conditions (I)

$$B_{21} \theta_1^2 / 2 + B'_{21} \theta_1 / 3 = 1/12$$

$$B_{21} \theta_1^3 / 6 + B'_{21} \theta_1^2 / 6 = 1/60$$

$$B_{21} B'_{10} / 6 + B'_{21} A'_{10} / 6 = 1/60$$

$$B_{21} \theta_1 + B'_2 / 3 = 1/3$$

$$A_{21} \theta_1^2 / 2 + A'_{21} \theta_1 / 2 = 1/6$$

$$A_{21} \theta_1^3 / 6 + A'_{21} \theta_1^2 / 4 = 1/24$$

$$A_{21} B'_{10} / 6 + A'_{21} A'_{10} / 4 = 1/24$$

$$A_{21} \theta_1 + A'_2 / 2 = 1/2$$

avec $\theta_1 = 1/2$ [6] nous obtenons le jeu de coefficients suivant :

1/2	A
1	0

1/4	A'
1/3	2/3

1/4	B
3/5	2/5

1/8	B'
1/5	1/5

et nous recherchons pour cette formule des évaluations pratiques de l'erreur sur le pas h pour x_1 et x'_1

Recherchons les formules d'ordre supérieur

$$\bar{x}'_1 = x'_0 + h \sum_{\alpha=0}^2 A_{3\alpha} X_{0\alpha} + \frac{h^2}{2!} \sum_{\alpha=0}^2 A'_{3\alpha} D X_{0\alpha}$$

$$\bar{x}_1 = x_0 + h x'_0 + \frac{h^2}{2!} \sum_{\alpha=0}^2 B_{3\alpha} X_{0\alpha} + \frac{h^3}{3!} \sum_{\alpha=0}^2 B'_{3\alpha} DX_{0\alpha}$$

Conformément au tableau général 4, les coefficients $B_{3\alpha}$, $B'_{3\alpha}$, $A_{3\alpha}$, $A'_{3\alpha}$ doivent satisfaire aux conditions

$$\sum_{\alpha=0}^2 K_{3\alpha} = 1 \quad \sum_{\alpha=0}^2 K'_{3\alpha} = K'_3$$

puis pour assurer l'exactitude du développement de \bar{x}'_1 et x_1 jusqu'aux termes en h^5 et h^6 aux conditions (compte tenu des conditions (I) et $\theta_1 = 1/2$) :

$$\begin{aligned} A'_{3/2} + A_{31}/2 + A_{32} &= 1/2 & h^2 \\ A_{31}/4 + A_{32} + A'_{31}/2 + A'_{32} + 1/3 & & h^3 \\ (A_{31}/8 + A_{32})/6 + (A'_{31}/4 + A'_{32})/4 &= 1/24 & h^4 \\ (A_{31}/16 + A_{32})/24 + (A'_{31}/8 + A'_{32})/12 &= 1/120 & h^5 \\ 5 A_{32}/120 + A'_{32}/12 &= 1/120 & h^5 \\ B'_{3/3} + B_{31}/2 + B_{32} &= 1/3 & h^3 \\ (B_{31}/4 + B_{32})/2 + (B'_{31}/2 + B'_{32})/3 &= 1/12 & h^4 \\ (B_{31}/8 + B_{32})/6 + (B'_{31}/4 + B'_{32})/6 &= 1/60 & h^5 \\ (B_{31}/16 + B_{32})/24 + (B'_{31}/8 + B'_{32})/18 &= 1/360 & h^6 \\ 5 B_{32}/120 + B'_{32}/18 &= 1/360 & \end{aligned}$$

Nous obtenons le jeu des coefficients suivant :

$$\begin{array}{llll} A_{32} = 5/15 & A'_{32} = - 1/15 & B_{32} = 2/15 & B'_{32} = - 1/20 \\ A_{31} = 8/15 & A'_{31} = - 2/15 & B_{31} = 8/15 & B'_{31} = - 4/20 \\ A_{30} = 2/15 & A'_{30} = 0 & B_{30} = 5/15 & B'_{30} = 1/20 \end{array}$$

et les évaluations pratiques de l'erreur sur le pas h

$$E_{x'} = \frac{h}{15} [13 X_{00} - 8 X_{01} - 5 X_{02}] + \frac{h^2}{30} [5 DX_{00} + 12 DX_{01} + DX_{02}]$$
$$E_x = \frac{h^2}{15} [2 X_{00} - X_{01} - X_{02}] + \frac{h^3}{120} [3 DX_{00} + 8 DX_{01} + DX_{02}]$$

Comme nous le constatons l'évaluation pratique de l'erreur par pas est très bonne

- d'une part parce que c'est une évaluation sur le pas h
- d'autre part parce que méthode relative à des problèmes différentiels de formes particulières. Cependant la méthode étant d'ordre élevé l'erreur de calcul est sensible jusqu'au pas $K=h=0.2$

N = 1			N = 2	
H	ETA _X	ETA _{X'}	ETA _X	ETA _{X'}
0.10	92.7	9.5	111	23.4
0.12	87.9	4.1	143	7.1
0.14	56.3	2.1	308	2.7
0.16	61.9	1.5	190	2.2
0.18	23.1	0.5	55.3	1.2
0.20	19.6	0.6	25.6	0.9
0.22	9.3	0.4	7.8	0.4
0.24	6.2	0.2	8.2	0.5
0.26	0.8	0.3	4.3	0.4
0.28	2.3	0.2	1.7	0.3
0.30	2.6	0.1	1.6	0.3
0.40	0.6	0.3	0.6	0.4

RKD2 (4,5)

N=2

H=0.3

E_x		$E_{x'}$		
T	ER ₉ 10	EC ₉ 10	ER ₇ 10	EC ₇ 10
0.3	41	46	10	10
0.6	335	343	69	70
0.9	596	609	122	123
1.2	827	821	164	155
1.5	946	960	192	192
1.8	1006	1013	202	203
2.1	976	976	194	195
2.4	842	851	169	170
2.7	652	650	129	129
3.0	397	391	77	77

N=1

H=0.3

T	ER ₈ 10	EC ₈ 10	ER ₇ 10	EC ₇ 10
0.3	- 107	- 106	- 213	- 213
0.6	- 145	- 143	- 288	- 287
0.9	- 197	- 193	- 389	- 387
1.2	- 262	- 260	- 524	- 523
1.5	- 358	- 351	- 708	- 706
1.8	- 483	- 474	- 955	- 953
2.1	- 656	- 640	-1290	-1286
2.4	- 882	- 864	-1740	-1736
2.7	-1168	-1166	-2350	-2344
3.0	-1621	-1574	-3173	-3163

Evaluation de l'erreur par pas dans la résolution approchée des problèmes différentiels [4]

$$x'' = X(x, x', t), \quad x(0) = x_0, \quad x'(0) = x'_0$$

Méthode de rang 1, d'ordre (1,2) : RK1

$$x'_1 = x'_{01} = x'_0 + h X_{00}$$

$$x_1 = x_{01} = x_0 + h x'_0 + \frac{h^2}{2} X_{00}$$

x'_1, x_1 représentent sur le pas h une formule d'ordre (1,2) et d'écriture matricielle

$$\boxed{1}$$

$$\boxed{1}$$

Recherchons une formule d'ordre supérieur

$$\bar{x}_1 = x_0 + h x'_0 + \frac{h^2}{2} [B_{20} X_{00} + B_{21} X_{01}]$$

Conformément au tableau général I, les coefficients $B_{2\alpha}$ doivent satisfaire à la condition

$$B_{20} + B_{21} = 1$$

puis pour assurer l'exactitude du développement de \bar{x}_1 jusqu'au terme en h^3 à la condition

$$\frac{1}{3} = B_{21} \theta_1$$

Soit $B_{21} = 1/3$ $B_{20} = 2/3$ et par suite l'évaluation pratique de l'erreur sur le pas h

$$E_x = \frac{h^2}{6} [X_{00} - X_{01}]$$

Nous rappelons que $E_{x'} = \frac{h}{2} [X_{00} - X_{01}]$

A) Méthode de rang 2, d'ordre (2,3) : RK2

x'_1 et x_1 représentent sur le pas h une formule d'ordre (2,3) de coefficients, $\theta_1, \theta_2 = 1, A_{ij}, B_{ij}$ et d'écriture matricielle

θ_1	A
$1 - \frac{1}{2\theta_1}$	$\frac{1}{2\theta_1}$

θ_1^2	B
$1 - \frac{1}{3\theta_1}$	$\frac{1}{3\theta_1}$

Recherchons une formule d'ordre supérieur

$$\bar{x}_1 = x_0 + h x'_0 + \frac{h^2}{2} [B_{30} X_{00} + B_{31} X_{01} + B_{32} X_{02}]$$

Conformément au tableau général I, les coefficients $B_{3\alpha}$ doivent satisfaire à la condition

$$\sum_{\alpha=0}^2 B_{3\alpha} = 1$$

puis pour assurer l'exactitude du développement de \bar{x}_1 jusqu'au terme en h^4 aux conditions

$$\frac{1}{3} = B_{31} \theta_1 + B_{32} \theta_2 \quad h^3$$

$$\frac{1}{6} = B_{31} \theta_1^2 + B_{32} \theta_2^2 \quad h^4$$

$$\frac{1}{12} = B_{32} A_{21} \theta_1 \quad h^4$$

quel que soit θ_1 ces trois équations sont incompatibles d'où l'impossibilité d'évaluer l'erreur sur le pas h .

Prenons $x_1 = x_{02}, x'_1 = x'_{02}$ comme valeurs initiales d'un nouveau pas h .

$x_2 = x_{04}, x'_2 = x'_{04}$ s'explicitent à partir de x_0, x'_0

x'_2 et x_2 représentent sur le pas $K = 2h$, une formule d'ordre (2,3), de coefficients A'_{ij} , B'_{ij} , θ_1 , $\theta_2 = 1/2$, $\theta_3 = \theta_1 + 1/2$, $\theta_4 = 1$ et d'écriture matricielle

A'			
θ_1			
$\frac{1}{2} - \frac{1}{8\theta_1}$	$\frac{1}{8\theta_1}$		
$\frac{1}{2} - \frac{1}{8\theta_1}$	$\frac{1}{8\theta_1}$	θ_1	
$\frac{1}{2} - \frac{1}{8\theta_1}$	$\frac{1}{8\theta_1}$	$\frac{1}{2} - \frac{1}{8\theta_1}$	$\frac{1}{8\theta_1}$

B'			
θ_1^2			
$\frac{1}{4} - \frac{1}{24\theta_1}$	$\frac{1}{24\theta_1}$		
$\theta_1 - \frac{1}{24\theta_1}$	$\frac{1}{24\theta_1} + \frac{1}{4}$	θ_1^2	
$\frac{3}{4} - \frac{1}{6\theta_1}$	$\frac{1}{6\theta_1}$	$\frac{1}{4} - \frac{1}{24\theta_1}$	$\frac{1}{24\theta_1}$

Recherchons une formule d'ordre supérieur

$$\bar{x}_2 = x_0 + K x'_0 + \frac{K^2}{2} \sum_{\alpha=0}^4 B_{5\alpha} X_{0\alpha}$$

Conformément au tableau général I, les coefficients $B_{5\alpha}$ doivent satisfaire à la première condition

$$\sum_{\alpha=0}^4 B_{5\alpha} = 1$$

puis pour assurer l'exactitude du développement de \bar{x}_2 jusqu'au terme en K^4 aux conditions

$$\frac{1}{3} = \sum_{\alpha} B_{5\alpha} \theta_{\alpha} \quad K^3$$

$$\frac{1}{6} = \sum_{\alpha} B_{5\alpha} \theta_{\alpha}^2 \quad K^4$$

$$\frac{1}{12} = \sum_{\alpha, \beta} B_{5\alpha} A_{\alpha\beta} \theta_{\beta} \quad K^4$$

utilisant les résultats du chapitre I (B), les coefficients $B_{5\alpha}$ satisfont au système

$$\frac{1}{3} = B_{51} \theta_1 + \frac{B_{52}}{2} + B_{53} \left(\theta_1 + \frac{1}{2} \right) + B_{54}$$

$$\frac{1}{6} = B_{51} \theta_1^2 + \frac{B_{52}}{4} + B_{53} \left(\theta_1 + \frac{1}{2} \right)^2 + B_{54}$$

$$\frac{1}{12} = \frac{B_{52}}{8} + B_{53} \left(\frac{1}{8} + \frac{\theta_1}{2} \right) + \frac{B_{54}}{2}$$

Prenant B_{54} arbitraire, la résolution de ce système impose

$$B_{53} = - \frac{1}{2\theta_1} B_{54}$$

$$B_{52} = \frac{2}{3} - 2 B_{54} + \frac{1}{2\theta_1} B_{54}$$

$$B_{51} = \frac{1}{2\theta_1} B_{54}$$

$$B_{50} = \frac{1}{3} + B_{54} - \frac{1}{2\theta_1} B_{54}$$

et par suite une évaluation pratique de l'erreur sur le pas $K = 2 h$

$$E = x_2 - \bar{x}_2 = \frac{K^2}{2} \sum_{\alpha=0}^4 q_{\alpha} X_{\alpha}$$

avec :

$$q_0 = \frac{5}{12} - B_{54} - \frac{1}{2\theta_1} \left(\frac{1}{3} - B_{54} \right)$$

$$q_1 = \frac{1}{2\theta_1} \left(\frac{1}{3} - B_{54} \right)$$

$$q_2 = 2 B_{54} - \frac{5}{12} - \frac{1}{2\theta_1} \left(\frac{1}{12} + B_{54} \right)$$

$$q_4 = - B_{54}$$

Choix de B_{54}

Quel que soit θ_1 nous pouvons annuler q_1 ou q_3

Pour $q_1 = 0$, B_{54} prend la valeur $\frac{4}{12}$. Dans ce cas les évaluations pratiques de l'erreur sur le pas $K = 2h$ s'écrivent suivant diverses valeurs de θ_1

$$\theta_1 = 1/2 \text{ Euler Cauchy } E_1 = \frac{K^2}{24} [X_{00} - 2 X_{02} + 5 X_{03} - 4 X_{04}]$$

$$\theta_1 = 1/4 \text{ Tangente Amelioree } E_2 = \frac{K^2}{24} [X_{00} - 7 X_{02} + 10 X_{03} - 4 X_{04}]$$

$$\theta_1 = 1/3 \text{ Heun } E_3 = \frac{K^2}{48} [2 X_{00} - 9 X_{02} + 15 X_{03} - 8 X_{04}]$$

Annuler q_1 est arbitraire. Aussi cherchons à minimiser la somme S des carrés des q_α . Nous obtenons

$$x = B_{54} = \frac{5/2 + 1/4\theta_1^2 - 1/\theta_1}{2 [6 - 3/\theta_1 + 1/\theta_1^2]}$$

θ_1	1/2	1/4	1/3
$x = B_{54}$	3/16	1/8	7/48

et par suite les évaluations pratiques de l'erreur sur le pas $K=2h$

$$E1A = \frac{K^2}{96} [4 X_{00} + 7 X_{01} - 15 X_{02} + 13 X_{03} - 9 X_{04}]$$

$$E2A = \frac{K^2}{48} [-3 X_{00} + 10 X_{01} - 14 X_{02} + 10 X_{03} - 3 X_{04}]$$

$$E3A = \frac{K^2}{192} [-X_{00} + 27 X_{01} - 45 X_{02} + 33 X_{03} - 14 X_{04}]$$

Le premier terme de l'erreur ayant pour évaluation théorique

$$\frac{h^4}{24} [C_2 (-1 + 2\theta_1) - J_1 C_1]$$

Les évaluations pratiques de l'erreur sur le pas $K = 2h$ pour x' ont été données au chapitre I (B).

Nous constaterons la proportionnalité au pas $K = 2h$ de ETA_x et $ETA_{x'}$. Pour $N = 1$ le graphique $ETA(K)$ le confirme. Sur $N=2$, la propriété est bien moins nette.

Nous traiterons par ces méthodes et celles proposées dans les pages suivantes les équations

$$\begin{array}{ll}
 N = 1 & x'' = - (1.5 x' + 0.5 x), \quad x(0) = 1 \quad x = e^{-t} \\
 & \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad x'(0) = -1 \\
 N = 2 & x'' = 2 (x' - x), \quad x(0) = x'(0) = 1, \quad x = e^t \cos t
 \end{array}$$

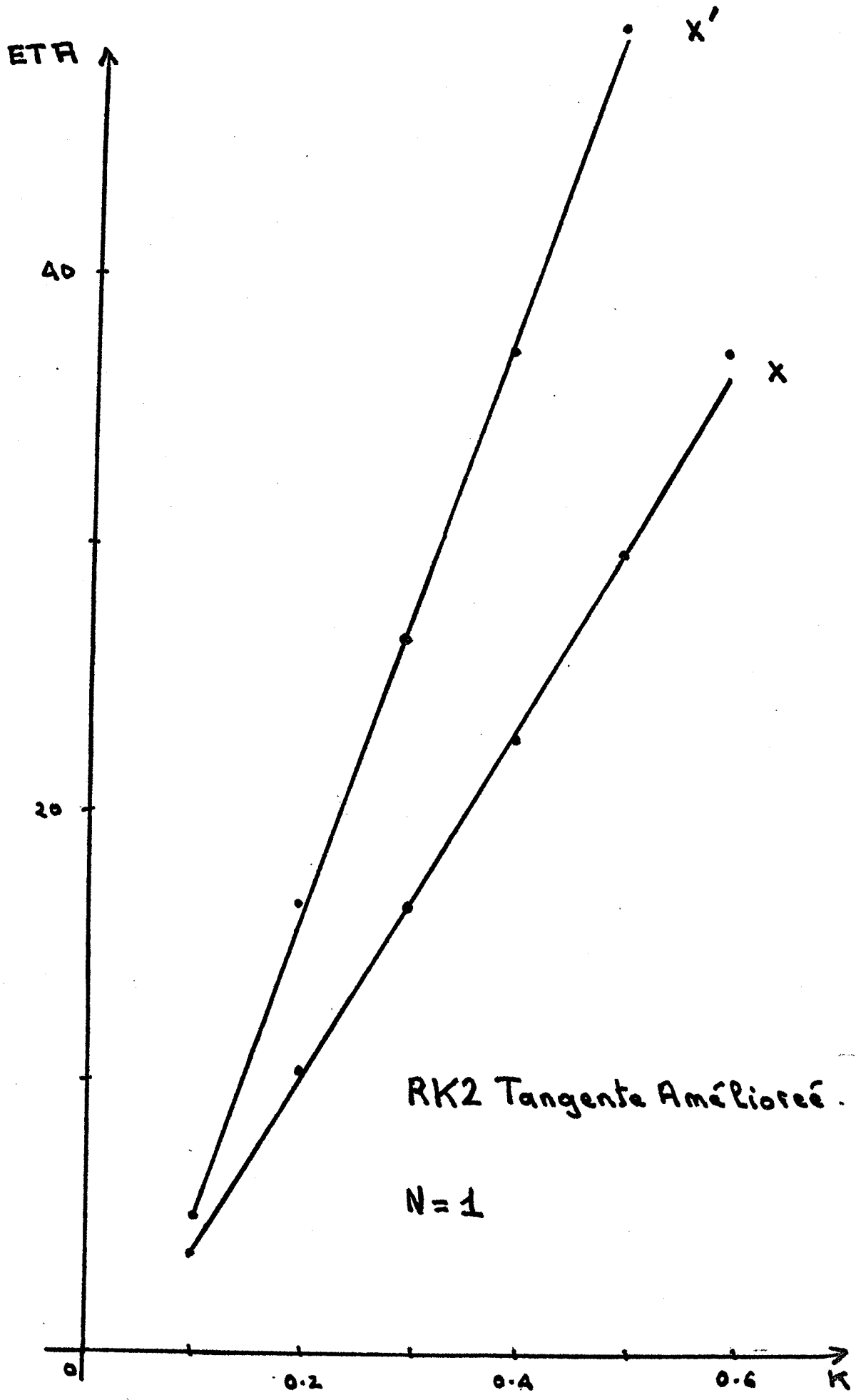
Pour estimer la qualité de l'approximation de l'erreur, nous déterminerons sur 20 pas successifs le coefficient ETA en prenant comme valeur initiale de la fonction et de sa dérivée au début de chaque pas K , leur valeur exacte, de façon à bien évaluer une erreur par pas.

RK2 Tangente Améliorée

K	N = 1		N = 2	
	ETA_X	$ETA_{X'}$	ETA_X	$ETA_{X'}$
0.1	3.5	4.9	7.3	9.4
0.2	10.4	16.6	12.1	17.3
0.3	16.4	26.3	19.8	24.2
0.4	22.7	37.0	24.7	31.3
0.5	29.5	49.0	27.8	35.5
0.6	36.9	61.9	42.1	45.9

RK2 Heun

K	N = 1		N = 2	
	ETA_X	$ETA_{X'}$	ETA_X	$ETA_{X'}$
0.1	3.2	7.6	7.2	9.5
0.2	9.6	15.9	11.2	16.7
0.3	15.1	25.3	19.2	24.3
0.4	21.0	35.6	23.4	30.7
0.5	27.3	47.	25.5	33.6
0.6	34.2	59.6	40.2	45.7



B) Méthode de rang 3, d'ordre (3,3) : RK3

Conformément au tableau général I, l'exactitude du développement de $x_1 = x_{03}$ jusqu'au terme en h^3 exige la condition

$$1/3 = B_{31} \theta_1 + B_{32} \theta_2$$

complétée par les condition

$$B_{10} = \theta_1^2$$

$$B_{20} + B_{21} = \theta_2^2$$

$$B_{30} + B_{31} + B_{32} = \theta_3^2 = 1$$

On peut imposer des conditions supplémentaires en faisant disparaître certains termes d'erreur

La disparition du terme en $J_2 C_1$ dans x'_1 donne

$$1/24 - A_{32} B_{21} \theta_1/2 = 0$$

$$\text{d'où } B_{21} = A_{21}/2 \quad \text{condition (A)}$$

Une autre relation va être trouvée en étudiant l'évaluation théorique de l'erreur sur le pas h pour x_1 :

$$\frac{h^4}{2} \left\{ C_2 \left[-\frac{1}{12} + \frac{1}{2} \alpha B_{3\alpha} \theta_\alpha^2 + J_1 C_1 - \frac{1}{12} + B_{32} A_{21} \theta_1 \right] \right\}$$

cette erreur comprend deux termes. Nous savons qu'il est impossible de les faire disparaître à la fois. Un calcul sans difficulté prouve que pour minimiser la somme de leurs valeurs absolues il faut annuler le second. Cela conduit à :

$$B_{32} = \frac{2 - 3\theta_1}{12\theta_2(\theta_2 - \theta_1)} \quad \text{condition (B)}$$

I) RK3 Classique

x'_1 et x_1 représentent sur le pas h une formule d'ordre (3,3) de coefficients A_{ij} , B_{ij} , $\theta_1 = 1/2$, $\theta_2 = \theta_3 = 1$ et d'écriture matricielle

1/2		
-1	2	
1/6	2/3	1/6

1/4		
0	1	
5/9	2/9	2/9

la condition (A) vérifiée. Nous nommerons cette formule RK3 classique I

1/2		
-1	2	
1/6	2/3	1/6

1/4		
0	1	
5/12	6/12	1/12

Les conditions (A) et (B) sont vérifiées. Nous nommerons cette formule RK3 classique II.

Recherchons une formule d'ordre supérieur

$$\bar{x}_1 = x_0 + h x'_0 + \frac{h^2}{2} \sum_{\alpha=0}^3 B_{4\alpha} X_{0\alpha}$$

Conformément au tableau général I, les coefficients $B_{4\alpha}$ doivent satisfaire à la condition

$$\sum_{\alpha=0}^3 B_{4\alpha} = 1$$

pui pour assurer l'exactitude du développement de \bar{x}_1 jusqu'au terme en h^4 aux conditions

$$\frac{1}{3} = B_{41} \theta_1 + B_{42} \theta_2 + B_{43} \quad h^3$$

$$\frac{1}{6} = B_{41} \theta_1^2 + B_{42} \theta_2^2 + B_{43} \quad h^4$$

$$\frac{1}{12} = B_{42} A_{21} \theta_1 + B_{43} [A_{32} \theta_2 + A_{31} \theta_1] \quad h^4$$

Ces conditions conduisent aux évaluations pratiques de l'erreur sur le pas h $E = x_1 - \bar{x}_1$.

$$E \text{ RK3 Classique I} = \frac{h^2}{36} \left[4 X_{00} - 8 X_{01} + X_{02} + 3 X_{03} \right]$$

$$E \text{ RK3 Classique II} = \frac{h^2}{24} \left[X_{00} - 2 X_{01} - X_{02} + 2 X_{03} \right]$$

II RK3 Nyström

x'_1 et x_1 représentent sur le pas h une formule d'ordre (3,3), de coefficients A_{ij}, B_{ij} , $\theta_1 = \theta_2 = 2/3$, $\theta_3 = 1$ et d'écriture matricielle

2/3		
0	2/3	
1/4	3/8	3/8

4/9		
4/9	0	
1/2	1/4	1/4

les conditions (A) et (B) sont non vérifiées. Nous nommerons cette formule RK3 Nyström I

2/3		
0	2/3	
1/4	3/8	3/8

4/9		
1/9	1/3	
1/2	5/16	3/16

Les conditions (A) et (B) sont vérifiées. Nous nommerons cette formule RK3 Nyström II.

De la même manière que précédemment nous déterminons les évaluations pratiques de l'erreur sur le pas h :

$$ERK3 \text{ Nyström I} = \frac{h^2}{48} \left[2 X_{00} - 3 X_{01} - 3 X_{02} + 4 X_{03} \right]$$

$$ERK3 \text{ Nyström II} = \frac{h^2}{96} \left[4 X_{00} - 3 X_{01} - 9 X_{02} + 8 X_{04} \right]$$

III) RK3 Optimale

x'_1 et x_1 représentent sur le pas h une formule d'ordre (3,3) de coefficients A_{ij} , B_{ij} , $\theta_1 = 1/2$, $\theta_2 = 3/4$, $\theta_3 = 1$ et d'écriture matricielle

1/2		
0	3/4	
2/9	3/9	4/9

1/4		
3/16	6/16	
4/9	3/9	2/9

les conditions (A) et (B) sont vérifiées

$$\text{ERK3 Optimale} = \frac{h^2}{36} \left[X_{00} - 4 X_{02} + 3 X_{03} \right]$$

Evaluation théorique de l'erreur sur le pas h pour x_1

$$\frac{h^4}{2} \left\{ C_2 \left[-\frac{1}{12} + \frac{1}{2} \alpha B_{3\alpha} \theta_\alpha^2 \right] + J_1 C_1 \left[-\frac{1}{12} + B_{32} A_{21} \theta_1 \right] \right\}$$

	C_2	$J_1 C_1$
Classique I	1/36	5/72
Classique II	1/96	0
Nyström I	1/72	1/72
Nyström II	1/72	0
Optimale	1/96	0

Nous rappelons que nous avons trouvé sur le pas $K = 2 h$ les évaluations pratiques de l'erreur pour x'_1 (Chapitre I (C)).

RK3 Classique I (3,3)

H	N = 1		N = 2	
	ETA_X	$ETA_{X'}^*$	ETA_X	$ETA_{X'}^*$
0.05	3.	8.	3.1	14.3
0.10	5.4	21.8	6.7	28.6
0.15	7.7	35.7	11.2	38.5
0.20	10.2	50.6	16.0	47.7
0.30	15.1	88.9	31.0	61.4
0.40	19.8	141.3	26.0	72.6

RK3 Nyström I (3,3)

H	N = 1		N = 2	
	ETA_X	$ETA_{X'}^*$	ETA_X	$ETA_{X'}^*$
0.05	24.4	5.8	14.1	9.5
0.10	26.4	16.8	23.4	20.7
0.15	38.3	26.8	35.4	28.0
0.20	48.5	37.8	98.7	35.4
0.30	66.0	64.1	76.7	46.2
0.40	80.9	97.5	38.1	58.0

* Nous rappelons que l'erreur sur x' ne peut être calculée que sur le pas $K = 2h$

Les résultats obtenus par les méthodes RK3 classique II (3,3) et RK3 optimale (3,3) sont très médiocres : cela tient au fait que les évaluations théoriques de l'erreur se réduisent au seul terme $C_2/96$ et qu'elles sont très faibles (minimisation de l'erreur)

N=1

H=0.1

T	E_x		$E_{x'}$	
	ER_8	EC_8	ER_8	EC_8
	10	10	10	10
0.2	944	896	1600	1950
0.4	773	734	1309	1596
0.6	632	601	1072	1307
0.8	518	492	878	1070
1.0	425	403	719	876
1.2	348	330	589	717
1.4	284	270	482	587
1.6	233	221	394	481
1.8	191	181	323	394
2.0	156	148	265	322

N=2

H=0.1

T	E_x		$E_{x'}$	
	ER_7	EC_7	ER_6	EC_6
	10	10	10	10
0.2	-263	-280	86	61
0.4	-349	-371	121	86
0.6	-442	-472	161	115
0.8	-538	-577	205	147
1.0	-628	-676	250	180
1.2	-702	-758	293	212
1.4	-742	-806	329	239
1.6	-731	-780	351	255
1.8	-643	-711	348	255
2.0	-448	-511	310	231

C. Méthode de rang 4, d'ordre (4,4) : RK4.

Conformément au tableau général I, l'exactitude du développement de $x_1 = x_{04}$ jusqu'au terme en h^4 (impossibilité d'obtenir $x^{(p-k)}$ à l'ordre h^{k+3}) exige les conditions

$$\frac{1}{3} = B_{41} \theta_1 + B_{42} \theta_2 + B_{43} \theta_3$$

$$\frac{1}{6} = B_{41} \theta_1^2 + B_{42} \theta_2^2 + B_{43} \theta_3^2$$

$$\frac{1}{12} = B_{42} A_{21} \theta_1 + B_{43} [A_{32} \theta_2 + A_{31} \theta_1]$$

conditions complétées par

$$B_{10} = \theta_1^2$$

$$B_{21} + B_{20} = \theta_2^2$$

$$B_{32} + B_{31} + B_{30} = \theta_3^2 = 1$$

$$B_{43} + B_{42} + B_{40} = \theta_4^2 = 1$$

méthodes effectives [4]

1/2			
0	1/2		
0	0	1	
1/6	1/3	1/3	1/6

1/4			
1/4	0		
0	0	1	
1/3	1/3	1/3	0

Nous nommerons cette formule RK4 classique Zurmühl

1/2			
0	1/2		
0	0	1	
1/6	1/3	1/3	1/6

1/4			
1/20	1/5		
2/5	1/5	2/5	
1/3	1/3	1/3	0

Nous nommerons cette formule RK4 classique variante I.

La recherche de formules d'ordre supérieur \bar{x}_i ($1 \leq i \leq 3$) exige la résolution de systèmes de 8 équations à 4, 8 ou 12 inconnues (exactitude du développement de \bar{x}_i jusqu'au terme d'ordre h^5). L'incompatibilité de ces trois systèmes (calcul long fastidieux mais peu difficile) ne nous permet pas de trouver des évaluations pratiques de l'erreur de méthode sur les pas $K = h$, $K = 2h$ et $K = 3h$, pour les méthodes envisagées.

CONCLUSION

Sur les exemples traités les formules d'évaluation pratique de l'erreur par pas proposées pour les diverses méthodes à pas séparés envisagées dans ce travail, donnent d'assez bons résultats (pour des pas d'autant plus grands que l'ordre de la méthode est plus élevé afin d'obtenir des erreurs de calcul ou d'arrondi négligeables dans la détermination de ETA, coefficient estimant la qualité de l'approximation. Comme nous l'avons déjà cité au chapitre I, l'erreur d'arrondi se fait principalement sentir dans la détermination de ER = valeur approchée - valeur exacte et par suite les médiocres résultats obtenus pour ETA ne veulent pas obligatoirement dire mauvaise détermination de EC. Dans un très proche avenir la programmation systématique en double précision devrait le confirmer.

avec

Nous n'avons pu trouver que pour de très rares méthodes des évaluations pratiques de l'erreur sur le pas h (insuffisance du nombre des informations disponibles). Les évaluations pratiques de l'erreur sur le pas $K = 2h, 3h$ proposées pour diverses méthodes ne manquent cependant pas d'intérêt. Dans plusieurs méthodes la recherche d'une formule d'ordre supérieur en K^4 nous a conduit à la formule à pas liés de Simpson appliquée sur le pas $K = 2h$. Rien d'étonnant ... les méthodes d'intégration approchée des équations différentielles se divisent en deux grandes classes :

- les méthodes à pas séparés du type R.K
- les méthodes à pas liés du type A dans leur principe ne s'excluant pas mutuellement.

D'où l'étude du principe des Méthodes de Runge Kutta à pas liés d'expression

$$x_{i\alpha}^{(p-K)} = \sum_{n=0}^{n=1} Q_{\alpha n}^{(p-K)} x_{i-n}^{(p-K)} + \frac{h^K}{K!} \sum_{\beta=0}^{\alpha-1} K_{\alpha\beta} x_{i\beta}$$

généralisation de l'algorithme de Runge Kutta appliqué aux systèmes canoniques par l'introduction de la récurrence linéaire

$$\sum_{m=0}^{m=1} Q_{\alpha m}^{(p-K)} x_{i-m}^{(p-K)}$$

étude que l'on trouvera aux références [4] , [7]

Les méthodes suivantes du type Adams implicite ne sont qu'un cas particulier de certaines méthodes envisagées précédemment

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + \frac{h}{2} (X_i + X_{i+1}) & h^2 \\ x_{i+1} &= x_{i-1} + \frac{h}{3} (X_{i+1} + 4 X_i + X_{i-1}) & h^4 \\ x_{i+1} &= x_{i-2} + \frac{3h}{8} (X_{i+1} + 3 X_i + 3 X_{i-1} + X_{i-2}) & h^4 \\ x_{i+1} &= x_{i-3} + \frac{4h}{90} (7X_{i+1} + 32X_i + 12X_{i-1} + 32X_{i-2} + 7X_{i-3}) & h^5 \\ x_{i+1} &= x_{i-4} + \frac{5h}{288} (19X_{i+1} + 75X_i + 50X_{i-1} + 50X_{i-2} + 75X_{i-3} + 19X_{i-4}) & h^6 \end{aligned}$$

On vérifiera sans difficulté le tableau suivant donnant pour les méthodes RK des formules analogues aux formules des méthodes RK à pas liés

K	ordre	RK2
2h	K^4	$x_2 = x_0 + \frac{K}{6} [X_{00} + 4 X_{02} + X_{04}]$
3h	K^4	$x_3 = x_0 + \frac{K}{8} [X_{00} + 3 X_{02} + 3 X_{04} + X_{06}]$
4h	K^5	$x_4 = x_0 + \frac{K}{90} [7X_{00} + 32 X_{02} + 12 X_{04} + 32 X_{06} + 7 X_{08}]$

K	ordre	RK3
2h	K^4	$x_2 = x_0 + \frac{K}{6} [X_{00} + 4 X_{03} + X_{06}]$
3h	K^4	$x_3 = x_0 + \frac{K}{8} [X_{00} + 3X_{03} + 3 X_{06} + X_{09}]$
4h	K^5	$x_4 = x_0 + \frac{K}{90} [7X_{00} + 32 X_{03} + 12X_{06} + 32X_{09} + 7X_{12}]$

K	ordre	RK4
4h	K^5	$x_4 = x_0 + \frac{K}{90} [7X_{00} + 32 X_{04} + 12 X_{08} + 32 X_{12} + 7 X_{16}]$

et par suite des évaluations pratiques de l'erreur sur le pas $K = nh$

$$K = 2h \quad \text{RK2 Heun} \quad E = \frac{K}{24} [-X_{00} + 9 X_{01} - 13 X_{02} + 9X_{03} - 4 X_{04}]$$

$$K = 4h \quad \text{RK4 Classique} \quad E = \frac{K}{360} \sum_{\alpha=0}^{16} P_{\alpha} X_{0\alpha}$$

avec $P_0 = -13$

$$P_1 = P_2 = P_5 = P_6 = P_9 = P_{10} = P_{13} = P_{14} = 30$$

$$P_3 = P_7 = P_{11} = P_{15} = 15$$

$$P_4 = P_{12} = -113 \quad P_8 = -33 \quad P_{16} = -28$$

RK2 Heun

ETA	N=1	N=2	N=3	N=4	N=5
K=2H=0.04	2.1	2.8	2.2	0.9	2.3
0.08	4.0	4.1	6.2	3.7	4.1
0.12	6.1	6.0	9.5	9.6	6.3
0.16	8.2	7.9	12.7	15.5	8.5
0.20	10.3	9.8	15.7	20.6	10.7
0.24	12.4	11.7	19.3	25.2	13.1
0.28	14.6	13.6	21.3	30.1	15.5
0.32	16.8	15.5	25.2	34.6	17.9
0.36	19.0	17.4	29.4	39.6	20.5
0.40	21.2	19.2	33.5	45.5	23.1

Les résultats obtenus sont très voisins de ceux du chapitre I (B)

RK4 Classique

ETA	N=1	N=2	N=3	N=4	N=5
K=4H=0.4	46.2	38.9	187	59.2	34.5
0.8	28.5	37.1	420	143	54.9

les exemples (3) et (4) sont toujours très difficiles

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. BARD (°) Essai de généralisation de formule du type de R.K faisant intervenir la dérivée suivante - Thèse Grenoble 61
- [2] A. BARD, F. CESCHINO
J KUNTZMANN et P.J.LAURENT Formules de base de la méthode de Runge Kutta - Chiffres (4) 1961
- [3] F. CESCHINO Evaluation de l'erreur par pas dans les problèmes différentiels Chiffres (5) 1962
- [4] F. CESCHINO, J KUNTZMANN^(°) Problèmes différentiels de conditions initiales Dunod 1963
- [5] J. KUNTZMANN Evaluation de l'erreur sur un pas dans les méthodes à pas séparés - Chiffres (2) 1959
- [6] P.J. LAURENT (°) Méthode du type de Runge - Kutta pour des systèmes différentiels de formes particulières. Thèse Grenoble 1960
- [7] Y. SIRET (°) Principe des méthodes de Runge - Kutta à pas liés - Thèse Grenoble 1962

(°) Les références (1) (4) (6) et (7) contiennent une bibliographie précise sur les méthodes RK.

Vu,

Grenoble, le

Le Président de la Thèse.

Vu,

Grenoble, le

Le Doyen de la Faculté des Sciences

Vu et permis d'imprimer,

Le Recteur de l'Académie de GRENOBLE