



HAL
open science

Etude de l'utilisation des formules d'Obrechhoff pour la résolution numérique des problèmes différentiels avec conditions initiales

Jérôme Kaan

► **To cite this version:**

Jérôme Kaan. Etude de l'utilisation des formules d'Obrechhoff pour la résolution numérique des problèmes différentiels avec conditions initiales. Modélisation et simulation. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1965. Français. NNT : . tel-00279773

HAL Id: tel-00279773

<https://theses.hal.science/tel-00279773>

Submitted on 15 May 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

n° d'ordre :

T H E S E

présentée à

LA FACULTE DES SCIENCES DE L'UNIVERSITE DE
GRENOBLE

pour obtenir

LE TITRE DE DOCTEUR DE TROISIEME CYCLE
"Mathématiques Appliquées"

par

Jérôme KAAAN

Licencié ès Sciences

ETUDE DE L'UTILISATION DES FORMULES D'OBRECHKOFF
POUR LA RESOLUTION NUMERIQUE DES PROBLEMES DIFFERENTIELS
AVEC CONDITIONS INITIALES

Thèse soutenue le 20-11-65

devant la Commission d'Examen :

Mr. KUNTZMANN	}	Président
MM. GASTINEL		Examineurs
LAURENT		

n° d'ordre :

T H E S E

présentée à

LA FACULTE DES SCIENCES DE L'UNIVERSITE DE
GRENOBLE

pour obtenir

LE TITRE DE DOCTEUR DE TROISIEME CYCLE

"Mathématiques Appliquées"

par

Jérôme KAAAN

Licencié ès Sciences

ETUDE DE L'UTILISATION DES FORMULES D'OBRECHKOFF
POUR LA RESOLUTION NUMERIQUE DES PROBLEMES DIFFERENTIELS
AVEC CONDITIONS INITIALES

Thèse soutenue le 20-11-65

devant la Commission d'Examen :

Mr. KUNTZMANN

Président

MM. GASTINEL
LAURENT

}

Examineurs

Je tiens à exprimer mes sentiments de reconnaissance

- à Monsieur le professeur KUNTZMANN, Directeur de l'Institut de Mathématiques Appliquées de Grenoble dont l'aide bienveillante m'a dirigé tout au long de mon travail,

- à Monsieur le professeur GASTINEL, dont les conseils m'ont grandement facilité la tâche.,

- à l'ensemble des collaborateurs de l'Institut de Mathématiques Appliquées de Grenoble, sans l'aide directe ou indirecte desquels ce travail aurait été impossible,

- à Monsieur LAURENT, Maître de Conférences, qui a bien voulu faire partie du jury chargé d'examiner cette thèse,

- à Mademoiselle TOURNOUD qui a pris en charge la réalisation matérielle de cette Thèse.

TABLE DES MATIERES

<u>Chapitre I</u>	: Formules utilisée - Principes de leur mise en oeuvre.....	p. 1
<u>Chapitre II</u>	: Etude des différentes mises en oeuvre d'ordre 2 et 3.....	p. 12
<u>Chapitre III</u>	: Critères de choix pour les méthodes - Récapitulation pour les ordres 2 et 3...	p. 35
<u>Chapitre IV</u>	: Méthodes d'ordre 4.....	p. 48
<u>Chapitre V</u>	: Comparaison à d'autres méthodes.....	p. 56
	Essais numériques.....	p. 59

CHAPITRE I

FORMULES UTILISEES - PRINCIPES DE LEUR MISE EN OEUVRE

Nous utiliserons deux types de formules d'interpolation :
 Les premières que nous nommerons $G_{p,q}$ sont des formules d'Obrechhoff
 (ou de Hermite à deux points) elles s'écrivent :

$$x(t_1) = \sum_{r=0}^p \frac{p^r}{C_{p+q}^r} \frac{h^r}{r!} x^{(r)}(t_0) - \sum_{r=1}^q (-1)^r \frac{C_1^r}{C_{p+q}^r} \frac{h^r}{r!} x^{(r)}(t_1) \\
 + \frac{(-1)^{p+q}}{(p+q)!} \int_{t_0}^{t_1} x^{(p+q+1)}(t) (t-t_0)^q (t-t_1)^p dt$$

Les secondes (Ceschino [2,3]), que nous nommerons $H_{p,q}$ s'écrivent :

$$x(t_1) = x(t_0) + \sum_{r=1}^q \frac{h^r}{r!} x^{(r)}(t_0) + \sum_{r=p-q+1}^p \frac{h^r}{r!} \left[e_r x^{(r)}(t_0) + h_r x^{(r)}(t_1) \right]$$

$$+ R_{p+q}$$

$$\text{avec } R_{p+q} = O(h^{p+q+1})$$

Les premières peuvent être obtenues, soit par identification à la série de Taylor, soit par intégration par parties $k+m$ fois de

$$\int_{t_0}^{t_1} f'(t) \overline{k+m!} dx \quad (\text{Collatz [4]})$$

Les secondes peuvent être par identification à la série

de Taylor : on obtient comme valeurs des coefficients e et f :

$$f_{p-q+r} = (-1)^{r+1} \frac{C_{p-q+r-1}^{p-1} C_{2q-r}^1}{C_{p+q}^1}$$

$$e_{p-q+r} = 1 - \frac{Q_r f_{p-q+1}}{r-1!} - \frac{Q_r f_{p-q+2}}{r-2! Q_2} - \dots - \frac{Q_r f_{p-q+r}}{Q_r}$$

avec $Q_s = (p-q+2) \dots (p-q+s)$ et $Q_1 = 1$.

On peut se rendre compte que pour $q = 0$ les formules H_{p0} et H_{q0} sont les mêmes et se réduisent à la série de Taylor.

D'autre part, pour $p = q$ les formules G_{pp} et H_{pp} sont les mêmes, elles s'écrivent

$$x(t_1) = x(t_0) + \sum_{i=1}^P h^i (a_i x^{(i)}(t_0) + b_i x^{(i)}(t_1))$$

nous appellerons ces dernières formules F_p .

Reste des formules G_{pq} .

Nous avons une expression exacte du reste dont il est facile d'extraire le premier terme du développement. On a en effet

$$R_{p,q} = \frac{(-1)^{p+q}}{p+q!} \int_{t_0}^{t_1} x^{(p+q+1)}(t) (t-t_0)^q (t-t_1)^p dt$$

Le terme principal, de ce reste sera

$$\frac{(-1)^{p+q}}{p+q!} \int_{t_0}^{t_1} x^{(p+q+1)}(t_0) (t-t_0)^q (t-t_1)^p dt$$

obtenu en prenant le 1er terme du développement de $x^{P+q+1}(t)$ du tour de t_0 .

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} (t-t_0)^q (t-t_1)^P dt &= \frac{-P}{q+1} \int_{t_0}^{t_1} (t-t_0)^{q+1} (t-t_1)^{P-1} dt \\ &= \dots = \frac{(-1)^P P!}{(q+1) \dots (q+P)} \int_{t_0}^{t_1} (t-t_0)^{P+q} dt \\ &= \frac{P!}{(q+1) \dots (p+q+1)} k^{P+q+1} \end{aligned}$$

D'où le 1er terme de l'erreur :

$$\frac{(-1)^{q+1}}{p+q!} \frac{p! q!}{p+q+1!} k^{P+q+1} x^{(p+q+1)}(t_1).$$

	q					
		1	2	3		
P						
1		$+ \frac{h^3}{12} x_i^{(3)}$				
2		$+ \frac{h^4}{72} x_i^{(4)}$	$- \frac{h^5}{720} x_i^{(5)}$			
3		$+ \frac{h^5}{480} x_i^{(5)}$	$- \frac{h^6}{7200} x_i^{(6)}$	$+ \frac{h^7}{100800} x_i^{(7)}$		

Premier terme d'erreur des formules G_{pq}
 Les méthodes G_{pp} sont équivalentes aux méthodes F_p .
 (diagonale principale)

Reste des formules H_{p,q}

Nous ne donnerons pas de formules générales, mais nous obtiendrons les valeurs du 1er terme de l'erreur par identification à la série des Taylor pour les différentes formules prises séparément.

a) formule H_{3,2}

$$x_1 = x_0 + h x'_0 + \frac{h^2}{20} [7 x''_0 + 3x''_1] + \frac{h^3}{60} [3x'''_0 - 2x'''_1] .$$

L'erreur est en h^6 : calculons le terme en h^6 au développement de Taylor autour de t_0 de cette expression :

$$\begin{aligned} \text{ce sera } & \frac{h^2}{20} \cdot \frac{3h^4}{24} x_0^{VI} - \frac{h^3}{60} \cdot \frac{2h^3}{6} x_0^{VI} (t_0) \\ & = h^6 x_0^{VI} \left[\frac{1}{160} - \frac{1}{180} \right] = \frac{h^6 x_0^{VI}}{1440} \end{aligned}$$

$$\text{L'erreur sera } h^6 x_0^{VI} \left[\frac{1}{1440} - \frac{1}{720} \right] = -\frac{h^6 x_0^{VI}}{1440}$$

b) formule H_{2,1} : $x_1 = x_0 + hx'_0 + \frac{h^2}{6} [2 x''_0 + x''_1]$

Le terme en h^4 du développement de Taylor de cette expression est $\frac{h^4}{12} x_0^{IV}$

et l'erreur commise est $\left(\frac{h^4}{12} - \frac{h^5}{29} \right) x_0^{IV} = \frac{h^4}{24} x_0^{IV}$.

c) formule H_{3,1} : $x_1 = x_0 + h x'_0 + \frac{h^2}{2} x''_0 + \frac{h^3}{24} [3x'''_0 + x'''_1] .$

Le terme d'ordre 5 du développement de Taylor de cette expression est $\frac{h^5}{48} x_0^V$.

D'où le 1er terme de l'erreur : $(\frac{h^5}{48} - \frac{h^5}{120}) x_0^V = \frac{h^5}{80} x_0^V$

Tableau 1 :

Erreurs dues à l'interpolation
dans les formules H_{pq}

Les valeurs utilisées des dérivées aux points x_i et x_{i+1} sont supposées exactes.

L'erreur est égale et de signe opposé au reste.

q	1	2
p		
2	$+ \frac{1}{24} h^4 x_i^{IV}$	
3	$+ \frac{h^5}{80} x_i^{(5)}$	$- \frac{h^6 x_j^{VI}}{1440}$

Mise en oeuvre de ces formules dans la résolution numérique des équations différentielles.

Nous utiliserons constamment le lemme suivant dû à Beck [1].

"Etant donné l'équation différentielle $x' = X(x,t)$, on

en déduit la fonction $Xv(x,t)$ telle que $x^{(v)} = X(x,t)$; si $\tilde{x}(t)$ est une approximation à l'ordre n de la solution $x(t)$ telle que $x(t_0) = x_0$, alors $Xv(\tilde{x}(t),t)$ est une approximation au même ordre n de $x^{(v)}(t)$."

Par conséquent, si l'on dispose d'une approximation de x_0 exacte jusqu'à l'ordre r au moins et une approximation de x_1 exacte jusqu'à l'ordre $r-1$ au moins, une formule G_{pq} ou H_{pq} avec $p+q = r$ donnera une approximation x_1 d'ordre r au moins. En effet, on modifie une formule dont l'erreur est en h^{r+1} par l'erreur commise sur des termes du type $\alpha_i k^i x_0^{(i)}$ ($i=0$ à p) qui est d'ordre minimum $r+1$, ou du type $\beta_i h^i x_1^{(i)}$ (où i va de 1 à q si c'est une formule G_{pq} et va de $p-q+1$ à p si c'est une formule H_{pq}) qui est d'ordre minimum $r+1$.

Si bien qu'à partir des résultats obtenus pour x_1 par une formule $G_{p,q}$ ou $H_{p,q}$ si on applique une formule $G_{p',q'}$ ou $H_{p',q'}$ avec $p'+q' = p+q+1$, on obtiendra une approximation de x_1 exacte jusqu'en h^{p+q+1} .

Type de mise en oeuvre.

Nous appellerons ainsi une certaine suite de formules G_{pq} telles qu'à une formule en p,q succède une formule en p',q' avec $p'+q'=p+q+1$. L'ordre d'un type de mise en oeuvre sera celui de la dernière formule, la première formule sera explicite: ce sera un développement de Taylor d'ordre p identique à G_{p0} ou H_{p0} .

La liste des types de mise en oeuvre peut être formée

de manière récurrente en considérant pour chaque ordre n toutes les formules G_{pq} et H_{pq} telles que $p+q=n$ (Si $p = q$ on prend F_p) que l'on fait précéder de tous ces types de mises en oeuvre de l'ordre précédent :

ordre 2 : G_{10} , F_1
 G_{20}

ordre 3 : G_{10} , F_1 , G_{21}
 G_{20} , G_{21}
 G_{10} , F_1 , H_{21}
 G_{20} , H_{21}
 G_{30}

ordre 4 : Les formules finales possibles sont F_2 , $H_{3,1}$, $G_{3,1}$ et $G_{4,0}$ ce qui donne :

G_{10}	F_1	G_{21}	F_2
G_{10}	F_1	H_{21}	F_2
	G_{20}	G_{21}	F_2
	G_{20}	H_{21}	F_2
		G_{30}	F_2

G_{10}	F_1	G_{21}	H_{31}
G_{10}	F_1	H_{21}	H_{31}
	G_{20}	G_{21}	H_{31}
	H_{20}	H_{21}	H_{31}
		G_{30}	H_{31}

$$\begin{array}{cccc} G_{10} & F_1 & G_{21} & G_{31} \\ G_{10} & F_1 & H_{21} & G_{31} \\ & G_{20} & G_{21} & G_{31} \\ & G_{20} & H_{21} & G_{31} \\ & & G_{30} & G_{31} \\ & & & G_{40} \end{array}$$

Soit 16 types de mise en oeuvres.

Mises en oeuvre effectives. (équation $x' = f(x,t)$)

Pour chaque type de mise en oeuvre, on aura plusieurs mises en oeuvre effectives différentes, en effet, lorsque dans une formule G_{pq} ou H_{pq} on calcule un terme tel que $\alpha_r h^r x_i^{(r)}$ ou $\beta_r h^r x_{i+1}^{(r)}$, si on remplace $x_{i+1}^{(r)}$ par une approximation d'ordre supérieur ou égal à $p+q-r$ (erreur en $h^{p+q-r+1}$) on modifie éventuellement le terme principal de l'erreur mais on n'en change pas l'ordre infinitésimal.

D'après le lemme de Beck, de telles approximations de $x_i^{(r)}$ et $x_{i+1}^{(r)}$ sont obtenues par l'utilisation de $f_r(\tilde{x}_i, t_i)$ ou $f(\tilde{x}_{i+1}, t_i+h)$ \tilde{x}_i et \tilde{x}_{i+1} désignent des approximations de x_i et de x_{i+1} d'ordre $p+q-r$ au moins. Ceci permet :

- 1) de ne pas recalculer pour chaque formule utilisée toutes les dérivées qui y interviennent au point t_{i+1} .

- 2) d'utiliser au pas suivant la meilleure approximation des dérivées déjà calculées au pas précédent.

On voit qu'ainsi on dispose pour chaque ordre infinitésimal d'erreur d'un grand nombre de mises en oeuvre effectives : à chaque type de mise en oeuvre correspondent de nombreuses mises en oeuvre possibles : montrons-le sur un type particulier, par exemple G_{10} , F_2 , H_{21} , c'est-à-dire

$$x_{i+1,a} = x_i + h x_i'$$

$$x_{i+1,b} = x_i + \frac{h}{2} x_i' + \frac{h}{2} x_{i+1}'$$

$$x_{i+1} = x_i + h x_i' + \frac{h^2}{3} x_i'' + \frac{h^2}{6} x_{i+1}''$$

Le reste sur $x_{i+1,a}$ est en h^2 donc on peut utiliser une approximation de x_i' en h donc prendre soit $f(x_{i,a}, t_i)$ soit $f'(x_{i,b}, t_i)$ soit $f'(x_i, t_i)$.

Le reste sur la 2ème formule doit être en h^3 donc on peut utiliser une approximation de x_i' exacte jusqu'en h^2 soit $f(x_{i,a}, t_i)$ soit $f(x_{i,b}, t_i)$ soit $f(x_i, t_i)$.

Le reste sur la troisième formule est h^4 dont on doit utiliser pour x_i' une approximation d'ordre 2 au moins, c'est-à-dire ou bien $f(x_{i,b}, t_i)$ ou bien $f(x_i, t_i)$.

On doit utiliser pour x_{i+1}'' une approximation d'ordre 1 c'est-à-dire ou bien $f_{(2)}(x_{i+1,a}, t_{i+h})$ ou bien $f_2(x_{i+1,b}, t_{i+h})$.

Ces différentes substitutions sont indépendantes les unes des autres d'où le nombre de mises en oeuvres effectives de ce type :

$$3 \times 3 \times 2 \times 3 \times 2 = 108$$

Nous utiliserons les notations suivantes pour désigner les différentes substitutions possibles.

S'il y a trois calculs intermédiaires ($x_{i+1,a}$; $x_{i+1,b}$; $x_{i+1,c}$; x_{i+1} étant la valeur conservée).

$$x_{i+1,\alpha}^{(v)} = f_v(x_{i+1,a}, t_i+h) \quad \text{ou} \quad f_v(x_{i+1,b}, t_i+h)$$

$$x_{i+1,\beta}^{(v)} = f_v(x_{i+1,b}, t_i+h) \quad \text{ou} \quad f_v(x_{i+1,c}, t_i+h)$$

$$x_{i+1,\gamma}^{(v)} = f_v(x_{i+1,c}, t_i+h) \quad \text{ou} \quad f_v(x_{i+1}, t_i+h)$$

$x_{i,a}^{(v)}$: approximation de $x_i^{(v)}$ d'ordre supérieur ou égal à celui de la 1ère approximation de x_i soit $f_v(x_{i,a}, t_i)$, $f_v(x_{i,b}, t_i)$, $f_v(x_{i,c}, t_i)$ ou $f_v(x_i, t_i)$

$$x_{i,c'}^{(v)} = f_v(x_{i,b}, t_i) \quad f_v(x_{i,c}, t_i) \quad \text{ou} \quad f_v(x_i, t_i)$$

$$x_{i,c'}^{(v)} = f_v(x_{i,c}, t_i) \quad \text{ou} \quad f_v(x_i, t_i)$$

S'il n'y a que deux calculs intermédiaires $x_{i+1,a}$ et

$x_{i+1,b}$

$$x_{i+1,\alpha}^{(v)} \text{ désigne } f_v(x_{i+1,a}, t_i+h) \quad \text{ou} \quad f_v(x_{i+1,b}, t_i+h)$$

$$x_{i+1,\beta}^{(v)} \text{ désigne } f_v(x_{i+1,b}, t_i+h) \quad \text{ou} \quad f_v(x_{i+1}, t_i+h)$$

$$x_{i,a'}^{(v)} \text{ désigne } f_v(x_{i,a}, t_i) \quad \text{ou} \quad f_v(x_{i,b}, t_i)$$

$x_{i,b}^{(v)}$ désigne $f_v(x_{i,b}, t_i)$ ou $f_v(x_i, t_i)$

Enfin, s'il n'y en a qu'un

$x_{i+1,a}^{(v)}$ désigne $f_v(x_{i+1,a}, t_{i+1})$ ou $f_v(x_{i+1}, t_{i+h})$

$x_{i,a}$ désigne $f_v(x_{i,a}, t_i)$ ou $f_v(x_i, t_i)$

Nous avons adopté des désignations différentes pour x_i et x_{i+1} car à un stade de calcul on ne dispose que des approximations déjà faites sur x_{i+1} , alors qu'on possède toutes ces approximations de x_i .

CHAPITRE II

ETUDE DES DIFFERENTES MISES EN OEUVRE D'ORDRE 2 ET 3

I - Etude de l'erreur.

Nous calculerons le terme principal de l'erreur en fonction des dérivées de la fonction X et nous l'exprimerons en fonction des opérateurs différentiels

$$C_1, C_2, \dots, J_1, K_1, \dots, J_2, K_2 \dots \text{ etc.}$$

Pour leur définition voir Ceschino-Kuntzmann [7]. Laurent [8] a démontré que les opérateurs simples ou composés en fonction desquels on exprime les dérivées au moyen d'une combinaison linéaire, sont linéairement indépendantes, par conséquent ces opérateurs forment une base de l'espace vectoriel qu'ils engendrent et la somme des valeurs absolues des coefficients des combinaisons linéaires est une norme de l'erreur que nous appellerons S. Nous appellerons p le nombre de Horners par pas.

Liste des méthode d'ordre 2 et calcul de S.

a) G_{20} (Série de Taylor) $x_{i+1} = x_i + h x'_i + \frac{h^2}{2} x''_i$

Le reste est $\frac{h^3}{6} x'''_i = \frac{h^3}{6} [K_1 X + J_1 2X]$

$$S = \frac{2}{6} = 0,333.$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \underline{G_{10}, F_1} : \quad x_{i+1, a} &= x_i + h x'_{i, a} \\ x_{i+1} &= x_i + \frac{h}{2} x'_{i, a} + \frac{h}{2} x'_{i+1, a} \end{aligned}$$

On obtient 4 méthodes dont nous allons étudier le reste et calculer la norme d'erreur S.

$$\begin{aligned} 1^\circ) \quad & \left\{ \begin{array}{l} x_{i+1, a} = x_i + h x'_i \\ x_{i+1} = x_i + \frac{h}{2} x'_i + \frac{h}{2} x'_{i+1, a} \end{array} \right. \\ \text{reste sur } x_{i+1, a} &= \frac{h^2}{2} x''_i \\ \text{reste sur } x_{i+1} &= \frac{h^3}{4} \frac{\partial X}{\partial x} x''_i - \frac{h^3}{12} x'''_i \\ &= \frac{h^3}{12} [3J_1^2 X - \kappa_1 X - J_1^3 X] = \frac{h^3}{12} [2J_1^2 X - \kappa_1 X] \\ \text{d'où } S &= \frac{1}{4} = 0,25 . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2^\circ) \quad & \left\{ \begin{array}{l} x_{i+1, a} = x_i + h x'_i \\ x_{i+1} = x_i + \frac{h}{2} x'_{i, a} + \frac{h}{2} x'_{i+1, a} \end{array} \right. \\ \text{Le reste sur } x_{i+1} &\text{ est } \frac{h^3}{4} \frac{\partial X}{\partial x} x''_i + \frac{h^3}{4} \frac{\partial X}{\partial x} x''_{i-1} - \frac{h^3}{12} x'''_i \\ \text{en prenant les mêmes valeurs pour } &\frac{\partial X}{\partial x} x''_i \text{ et } \frac{\partial X}{\partial x} x''_{i-1} \\ \text{on obtient } &\frac{h^3}{12} [6 J_1^3 X - \kappa_1 X - J_1^3 X] = [5 J_1^3 X - \kappa_1 X] \frac{h^3}{12} \\ S &= 0,5 . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3^\circ) \quad & \left\{ \begin{array}{l} x_{i+1, a} = x_i + h x'_{i, a} \\ x_{i+1} = x_i + \frac{h}{2} x'_i + \frac{h}{2} x'_{i+1, a} \end{array} \right. \\ \text{même chose que } 1^\circ) : S &= 0,25 . \end{aligned}$$

$$4^{\circ}) \quad x_{i+1,a} = x_i + h x'_{i,a}$$

$$x_{i+1} = x_i + \frac{h}{2} x'_{i,a} + \frac{h}{2} x'_{i+1,a}$$

même chose que 2°) : $S = 0,5$.

Liste des mises en oeuvres d'ordre 3.

Nous avons quatre types de mise en oeuvre (en dehors de la série de Taylor).

G₁₀, F₁, G₂₁ :

$$x_{i+1,a} = x_i + h x'_{i,a}$$

$$x_{i+1,b} = x_i + \frac{h}{2} x'_{i,a} + \frac{h}{2} x'_{i+1,a}$$

$$x_{i+1} = x_i + \frac{2h}{3} x'_{i,b} + \frac{h}{3} x'_{i+1,b} + \frac{h^2}{6} x''_{i,a}$$

ce qui donne $3 \times 3 \times 2 \times 3 = 54$ possibilités.

G₂₀, G₂₁ :

$$x_{i+1,a} = x_i + h x'_{i,a} + \frac{h^2}{2} x''_{i,a}$$

$$x_{i+1} = x_i + 2\frac{h}{3} x'_{i,a} + \frac{h}{3} x'_{i+1,a} + \frac{h^2}{6} x''_{i,a}$$

on trouve $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ possibilités.

G₁₀, F₁, H₂₁ :

$$x_{i+1,a} = x_i + h x'_{i,a}$$

$$x_{i+1,b} = x_i + \frac{h}{2} x'_{i,a} + \frac{h}{2} x'_{i+1,a}$$

$$x_{i+1} = x_i + h x'_{i,b} + \frac{h^2}{3} x''_{i,a} + \frac{h^2}{6} x''_{i+1,a}$$

on a vu qu'on obtient 108 possibilités

$$\begin{aligned} \underline{G_{20}, H_{21}} \quad : \quad x_{i+1,a} &= x_i + h x'_{i,a} + \frac{h}{2} x''_{i,a} \\ x_{i+1,b} &= x_i + h x'_{i,a} + \frac{h^2}{3} x''_{i,a} + \frac{h^2}{6} x''_{i+1,a} \end{aligned}$$

on trouve $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ possibilités.

Nous avons numéroté ces méthodes de manière lexicographique de a à gl.

Type G_{10}, F_1, G_{21} (Méthodes a à bb)

On groupe les méthodes par 6, selon les calculs de $x_{i+1,a}$ et $x_{i+1,b}$ on obtient 9 groupes :

$$\begin{aligned} \text{I} \quad & \begin{cases} x_{i+1,a} = x_i + h x'_i \\ x_{i+1,b} = x_i + \frac{h}{2} x'_i + \frac{h}{2} x'_{i+1,a} \end{cases} & \text{a à f} \\ \\ \text{II} \quad & \begin{cases} x_{i+1,a} = x_i + h x'_i \\ x_{i+1,b} = x_i + \frac{h}{2} x'_{i,b} + \frac{h}{2} x'_{i+1,a} \end{cases} & \text{g à l} \\ \\ \text{III} \quad & \begin{cases} x_{i+1,a} = x_i + h x'_i \\ x_{i+1,b} = x_i + \frac{h}{2} x'_{i,a} + \frac{h}{2} x'_{i+1,a} \end{cases} & \text{m à r} \\ \\ \text{IV} \quad & \begin{cases} x_{i+1,a} = x_i + h x'_{i,b} \\ x_{i+1,b} = x_i + \frac{h}{2} x'_i + \frac{h}{2} x'_{i+1,a} \end{cases} & \text{s à x} \\ \\ \text{V} \quad & \begin{cases} x_{i+1,a} = x_i + h x'_{i,b} \\ x_{i+1,b} = x_i + \frac{h}{2} x'_{i,b} + \frac{h}{2} x'_{i+1,a} \end{cases} & \text{y à ad} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{VI} \quad \left\{ \begin{array}{l} x_{i+1,a} = x_i + h x'_{i,b} \\ x_{i+1,b} = x_i + \frac{h}{2} x'_{i,a} + \frac{h}{2} x'_{i+1,a} \end{array} \right. \quad \text{ae à aj} \\
 \\
 \text{VII} \quad \left\{ \begin{array}{l} x_{i+1,a} = x_i + h x'_{i,a} \\ x_{i+1,b} = x_i + \frac{h}{2} x'_i + \frac{h}{2} x'_{i+1,a} \end{array} \right. \quad \text{ak à ap} \\
 \\
 \text{VIII} \quad \left\{ \begin{array}{l} x_{i+1,a} = x_i + h x'_{i,a} \\ x_{i+1,b} = x_i + \frac{h}{2} x'_{i,b} + \frac{h}{2} x'_{i+1,a} \end{array} \right. \quad \text{aq à av} \\
 \\
 \text{IX} \quad \left\{ \begin{array}{l} x_{i+1,a} = x_i + h x'_{i,a} \\ x_{i+1,b} = x_i + \frac{h}{2} x'_{i,a} + \frac{h}{2} x'_{i+1,a} \end{array} \right. \quad \text{aw à bb}
 \end{array}$$

à l'intérieur de chaque groupe les méthodes sont rangées de la façon suivante (elles diffèrent par le calcul x_{i+1}).

$$\begin{array}{l}
 1^\circ) \quad x_{i+1} = x_i + \frac{2h}{3} x'_i + \frac{h}{3} x'_{i+1,b} + \frac{h^2}{6} x''_i \\
 2^\circ) \quad x_{i+1} = x_i + \frac{2h}{3} x'_i + \frac{h}{3} x'_{i+1,b} + \frac{h^2}{6} x''_{i,b} \\
 3^\circ) \quad x_{i+1} = x_i + \frac{2h}{3} x'_i + \frac{h}{3} x'_{i+1,b} + \frac{h^2}{6} x''_{i,a} \\
 4^\circ) \quad x_{i+1} = x_i + \frac{2h}{3} x'_{i,b} + \frac{h}{3} x'_{i+1,b} + \frac{h^2}{6} x''_i \\
 5^\circ) \quad x_{i+1} = x_i + \frac{2h}{3} x'_{i,b} + \frac{h}{3} x'_{i+1,b} + \frac{h^2}{6} x''_{i,b} \\
 6^\circ) \quad x_{i+1} = x_i + \frac{2h}{3} x'_{i,b} + \frac{h}{3} x'_{i+1,b} + \frac{h^2}{6} x''_{i,a}
 \end{array}$$

Les méthodes des groupes I et II auront les mêmes restes puisqu'elles ne diffèrent que par le 2e calcul où $x_i^!$ est remplacé par $x_{i,b}^!$. Les méthodes du groupe III introduisent un terme supplémentaire d'erreur.

Les méthodes des groupes IV, V, VI auront les mêmes restes que respectivement celles des groupes I, II, III ainsi que celles des groupes VII, VIII et IX.

Les valeurs possibles du reste et de S sont donc celles des méthodes a, b, c, d, e, f, m, n, o, q, r.

$$\begin{aligned}
 \text{a) reste sur } x_{i+1,a} &= \frac{h^2}{2} x_i'' \\
 \text{" " } x_{i+1,b} &= \frac{h^3}{4} \frac{\partial X}{\partial x} x_i'' - \frac{h^3}{12} x_i''' \\
 \text{" " } x_{i+1} &= \frac{h^4}{12} \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)^2 x_i'' - \frac{h^4}{36} \frac{\partial X}{\partial x} x_i''' - \frac{h^4}{72} x_i^{IV} \\
 &= \frac{h^4}{72} \left[6 J_1^3 X - 2 J_1^3 X - 2 J_1 K_1 X - L_1 X - 3 K_1 J_1 X - J_1 K_1 X - J_1^3 X \right] \\
 &= \frac{h^4}{72} \left[3 J_1^3 X - 3 J_1 K_1 X - L_1 X - 3 K_1 J_1 X \right] \\
 S &= \frac{10}{72} = 0,139
 \end{aligned}$$

b) idem

$$\begin{aligned}
 \text{c) reste sur } x_{i+1,a} &= \frac{h^2}{2} x_i'' \\
 \text{" " } x_{i+1,b} &= \frac{h^3}{4} \frac{\partial X}{\partial x} x_i'' - \frac{h^3}{12} x_i''' \\
 \text{" " } x_{i+1} &= \frac{h^4}{12} \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)^2 x_i'' - \frac{h^4}{36} \frac{\partial X}{\partial x} x_i''' + \frac{h^4}{12} \frac{\partial X}{\partial x} x_i'' - \frac{h^4}{72} x_i^{IV} \\
 &= \frac{h^4}{72} \left[6 J_1^3 X - 2 J_1^3 X - 2 J_1 K_1 X + 6 J_1^3 X + 6 K_1 J_1 X - L_1 X - 3 K_1 J_1 X - J_1 K_1 X - J_1^3 X \right]
 \end{aligned}$$

$$= \frac{h^4}{72} [11J_1^3 X - 7J_1 K_1 X - L_1 X - 3K_1 J_1 X]$$

$$s = \frac{22}{72} = 0,31$$

e) idem

$$\begin{aligned} \text{f) reste sur } x_{i+1} &= \frac{h^4}{4} \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)^2 x'' - \frac{h^4}{12} \frac{\partial X}{\partial x} x''' + \frac{h^4}{12} \frac{\partial x''}{\partial x} x_i'' - \frac{h^4}{72} x_i^{IV} \\ &= \frac{h^4}{72} [18J_1^3 X - 6J_1^3 X - 6J_1 K_1 X + 6J_1^3 X + 6K_1 J_1 X - L_1 X - 3K_1 J_1 X \\ &\quad - J_1 K_1 X - J_1^3 X] \end{aligned}$$

$$= \frac{h^4}{72} [17J_1^3 X - 7J_1 K_1 X + 3K_1 J_1 X - L_1 X]$$

$$s = \frac{28}{72} = 0,389$$

$$\text{reste sur } x_{i+1,a} = \frac{h^2}{2} x_i''$$

$$\text{m) reste sur } x_{i+1,b} = \frac{h^3}{2} \frac{\partial X}{\partial x} x_i'' - \frac{h^3}{12} x_i'''$$

$$\text{reste sur } x_{i+1} = \frac{h^4}{6} \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)^2 x'' - \frac{h^4}{36} \frac{\partial X}{\partial x} x''' - \frac{h^4}{72} x_i^{IV}$$

$$= \frac{h^4}{72} [12J_1^3 X - 2J_1^3 X - 2J_1 K_1 X - L_1 X - 3K_1 J_1 X - J_1 K_1 X - J_1^3 X]$$

$$= \frac{h^4}{72} [9J_1^3 X - 3J_1 K_1 X - L_1 X - 3K_1 J_1 X]$$

$$s = \frac{16}{72} = 0,22$$

n) idem

$$\begin{aligned} \text{o) reste sur } x_{i+1} &= \frac{h^4}{6} \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)^2 x_i'' - \frac{h^4}{36} \frac{\partial X}{\partial x} x_i''' + \frac{h^4}{12} \frac{\partial x''}{\partial x} x_i'' - \frac{h^4}{72} x_i^{IV} \\ &= \frac{h^4}{72} [12J_1^3 X - 2J_1^3 X - 2J_1 K_1 X + 6J_1^3 X + 6K_1 J_1 X \\ &\quad - L_1 X - 3K_1 J_1 X - J_1 K_1 X - J_1^3 X] \end{aligned}$$

$$= \frac{h^4}{72} \left[15J_1^3 X + 3K_1 J_1 X + 3J_1 K_1 X - L_1 X \right]$$

$$s = \frac{22}{72} \sim 0,306$$

$$\begin{aligned} \text{p) reste sur } x_{i+1} &= \frac{h^4}{2} \left(\frac{\partial X}{\partial x} \right)^2 x'' - \frac{h^4}{12} \frac{\partial X}{\partial x} x''' - \frac{h^4}{72} x_i^{IV} \\ &= \frac{h^4}{72} \left[36J_1^3 X - 6J_1^3 X - 6J_1 K_1 X - L_1 X - 3K_1 J_1 X - J_1 K_1 X - J_1^3 X \right] \\ &= \frac{h^4}{72} \left[29J_1^3 X - 7J_1 K_1 X - 3K_1 J_1 X - L_1 X \right] \end{aligned}$$

$$s = \frac{40}{72} = 0,556$$

q) idem

$$\begin{aligned} \text{r) reste sur } x_{i+1} &= \frac{h^4}{2} \left(\frac{\partial X}{\partial x} \right)^2 x'' - \frac{h^4}{12} \frac{\partial X}{\partial x} x''' - \frac{h^4}{72} x_i^{IV} + \frac{h^4}{12} \frac{\partial x''}{\partial x} x'' \\ &= \frac{h^4}{72} \left[36J_1^3 X - 6J_1^3 X - 6J_1 K_1 X - L_1 X - 3K_1 J_1 X - J_1 K_1 X - J_1^3 X \right. \\ &\quad \left. + 6J_1^3 X + 6K_1 J_1 X \right] \\ &= \frac{h^4}{72} \left[35J_1^3 X - 7J_1 K_1 X + 3K_1 J_1 X - L_1 X \right] \end{aligned}$$

$$s = \frac{46}{72} = 0,639$$

Type G₂₀, G₂₁

Donnons explicitement les 16 méthodes :

$$\begin{array}{l} \text{bc} \\ \text{bd} \end{array} \left| \begin{array}{l} x_{i+1,a} = x_i + h x_i' + \frac{h^2}{2} x_i'' \\ x_{i+1} = x_i + \frac{2h}{3} x_i' + \frac{h}{3} x_{i+1,a}' + \frac{h^2}{6} x_i'' \\ x_{i+1,a} = x_i + h x_i' + \frac{h^2}{2} x_i'' \\ x_{i+1} = x_i + \frac{2h}{3} x_i' + \frac{h}{3} x_{i+1,a}' + \frac{h^2}{6} x_{i,a}'' \end{array} \right.$$

be	$x_{i+1,a} = x_i + h x_i' + \frac{h^2}{2} x_i''$
	$x_{i+1} = x_i + \frac{2h}{3} x_{i,a}' + \frac{h}{3} x_{i+1,a}' + \frac{h^2}{6} x_i''$
bf	$x_{i+1,a} = x_i + h x_i' + \frac{h^2}{2} x_i''$
	$x_{i+1} = x_i + \frac{2h}{3} x_{i,a}' + \frac{h}{3} x_{i+1,a}' + \frac{h^2}{6} x_{i,a}''$
bg	$x_{i+1,a} = x_i + h x_i' + \frac{h^2}{2} x_{i,a}''$
	$x_{i+1} = x_i + \frac{2h}{3} x_i' + \frac{h}{6} x_{i+1,a}' + \frac{h^2}{6} x_i''$
bh	$x_{i+1,a} = x_i + h x_i' + \frac{h^2}{2} x_{i,a}''$
	$x_{i+1} = x_i + \frac{2h}{3} x_i' + \frac{h}{3} x_{i+1,a}' + \frac{h^2}{6} x_{i,a}''$
bi	$x_{i+1,a} = x_i + h x_i' + \frac{h^2}{2} x_{i,a}''$
	$x_{i+1} = x_i + \frac{2h}{3} x_{i,a}' + \frac{h}{3} x_{i+1,a}' + \frac{h^2}{6} x_i''$
bj	$x_{i+1,a} = x_i + h x_i' + \frac{h^2}{2} x_{i,a}''$
	$x_{i+1} = x_i + \frac{2h}{3} x_{i,a}' + \frac{h}{3} x_{i+1,a}' + \frac{h^2}{6} x_{i,a}''$
bk	$x_{i+1,a} = x_i + h x_{i,a}' + \frac{h^2}{2} x_i''$
	$x_{i+1} = x_i + \frac{2h}{3} x_i' + \frac{h}{3} x_{i+1,a}' + \frac{h^2}{6} x_i''$
bl	$x_{i+1,a} = x_i + h x_{i,a}' + \frac{h^2}{2} x_i''$
	$x_{i+1} = x_i + \frac{2h}{3} x_i' + \frac{h}{3} x_{i+1,a}' + \frac{h^2}{6} x_{i,a}''$
bm	$x_{i+1,a} = x_i + h x_{i,a}' + \frac{h^2}{2} x_i''$
	$x_{i+1} = x_i + \frac{2h}{3} x_{i,a}' + \frac{h}{3} x_{i+1,a}' + \frac{h^2}{6} x_i''$

$$\begin{array}{l|l} \text{bn} & x_{i+1,a} = x_i + h x'_{i,a} + \frac{h^2}{2} x''_i \\ & x_{i+1} = x_i + \frac{2h}{3} x'_{i,a} + \frac{h}{3} x'_{i+1,a} + \frac{h^2}{6} x''_{i,a} \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} \text{b0} & x_{i+1,a} = x_i + h x'_{i,a} + \frac{h^2}{2} x''_{i,a} \\ & x_{i+1} = x_i + \frac{2h}{3} x'_i + \frac{h}{3} x'_{i+1,a} + \frac{h^2}{6} x''_i \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} \text{bp} & x_{i+1,a} = x_i + h x'_{i,a} + \frac{h^2}{2} x''_{i,a} \\ & x_{i+1} = x_i + \frac{2h}{3} x'_i + \frac{h}{3} x'_{i+1,a} + \frac{h^2}{6} x''_{i,a} \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} \text{bq} & x_{i+1,a} = x_i + h x'_{i,a} + \frac{h^2}{2} x''_{i,a} \\ & x_{i+1} = x_i + \frac{2h}{3} x'_{i,a} + \frac{h}{3} x'_{i+1,a} + \frac{h^2}{6} x''_i \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} \text{br} & x_{i+1,a} = x_i + h x'_{i,a} + \frac{h^2}{2} x''_{i,a} \\ & x_{i+1} = x_i + \frac{2h}{3} x'_{i,a} + \frac{h}{3} x'_{i+1,a} + \frac{h^2}{6} x''_{i,a} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{bc) reste sur } x_{i+1,a} &= \frac{h^3}{6} x'''_i \\ \text{" " } x_{i+1} &= \frac{h^4}{18} \frac{\partial X}{\partial x} x'''_i - \frac{h^4}{72} x^{IV}_i \\ &= \frac{h^4}{72} [4J_1^3 X + 4J_1 K_1 X - L_1 X - 3K_1 J_1 X - J_1 K_1 X - J_1^3 X] \\ &= \frac{h^4}{72} [3J_1^3 X + 3J_1 K_1 X - L_1 X - 3K_1 J_1 X] \end{aligned}$$

$$S = \frac{10}{72} = 0,139$$

bd) idem

$$\begin{aligned} \text{be) reste sur } x_{i+1,a} &= \frac{h^3}{6} x'''_i \\ \text{reste sur } x_{i+1} &= \frac{h^4}{6} \frac{\partial X}{\partial x} x'''_i - \frac{h^4}{72} x^{IV}_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{h^4}{72} \left[12J_1^3 X + 12J_1 K_1 X - L_1 X - 3K_1 J_1 X - J_1 K_1 X - J_1^3 X \right] \\
 &= \frac{h^4}{72} \left[11J_1^3 X + 11J_1 K_1 X - L_1 X - 3K_1 J_1 X \right] \\
 &S = \frac{26}{72} = 0,36
 \end{aligned}$$

Les valeurs du terme principal de l'erreur obtenues en bc et be sont les seules qu'on puisse obtenir (le remplacement de $x_i^!$ par $x_{i,a}^!$ ou de x_i'' par $x_{i,a}''$ dans le calcul de $x_{i+1,a}$ n'influence pas l'erreur).

Les méthodes se répartissent donc de la manière suivante

$$S = 0,139 \left\{ \begin{array}{l} bc \\ bd \\ bg \\ bh \\ bk \\ bl \\ bO \\ bp \end{array} \right. \qquad S = 0,36 \left\{ \begin{array}{l} be \\ bf \\ bi \\ bj \\ bm \\ bn \\ bq \\ br \end{array} \right.$$

Type G_{10} , F_1 , H_{21} (méthodes bs à fv)

On groupe encore les méthodes par groupe de 6 ; les méthodes d'un même groupe utilisent les mêmes substitutions pour $x_i^!$ dans le calcul de x_{i+1} on obtient ainsi 18 groupes.

$$\begin{array}{l}
 \cdot T \left\{ \begin{array}{l} x_{i+1,a} = x_i + h x_i^! \\ x_{i+1,b} = x_i + \frac{h}{2} x_i^! + \frac{h}{2} x_{i+1,a}^! \\ x_{i+1} = x_i + h x_i^! + \dots \end{array} \right. \qquad \text{(de bs à bx)}
 \end{array}$$

II	$x_{i+1,a} = x_i + h x_i'$ $x_{i+1,b} = x_i + \frac{h}{2} x_i' + \frac{h}{2} x_{i+1,a}'$ $x_{i+1} = x_i + h x_{i,b}' + \dots$	(de by à cd)
III	$x_{i+1,a} = x_i + h x_i'$ $x_{i+1,b} = x_i + \frac{h}{2} x_{i,b}' + \frac{h}{2} x_{i+1,a}'$ $x_{i+1} = x_i + h x_i' + \dots$	(de ce à cj)
IV	$x_{i+1,a} = x_i + h x_i'$ $x_{i+1,b} = x_i + \frac{h}{2} x_{i,b}' + \frac{h}{2} x_{i+1,a}'$ $x_{i+1} = x_i + h x_{i,b}' + \dots$	(de ck à cp)
V	$x_{i+1,a} = x_i + h x_i'$ $x_{i+1,b} = x_i + \frac{h}{2} x_{i,a}' + \frac{h}{2} x_{i+1,a}'$ $x_{i+1} = x_i + h x_i' + \dots$	(de cq à cv)
VI	$x_{i+1,a} = x_i + h x_i'$ $x_{i+1,b} = x_i + \frac{h}{2} x_{i,a}' + \frac{h}{2} x_{i+1,a}'$ $x_{i+1} = x_i + h x_{i,b}' + \dots$	(de cw à db)
VII	$x_{i+1,a} = x_i + h x_{i,b}'$ $x_{i+1,b} = x_i + \frac{h}{2} x_i' + \frac{h}{2} x_{i+1,a}'$ $x_{i+1} = x_i + h x_i' + \dots$	(de dc à dh)

VIII	$x_{i+1,a} = x_i + h x'_{i,b}$ $x_{i+1,b} = x_i + \frac{h}{2} x'_{i,b} + \frac{h}{2} x'_{i+1,a}$ $x_{i+1} = x_i + h x'_{i,b} + \dots$	(de di à dn)
IX	$x_{i+1,a} = x_i + h x'_{i,b}$ $x_{i+1,b} = x_i + \frac{h}{2} x'_{i,b} + \frac{h}{2} x'_{i+1,a}$ $x_{i+1} = x_i + h x'_i + \dots$	(de d0 à d1)
X	$x_{i+1,a} = x_i + h x'_{i,b}$ $x_{i+1,b} = x_i + \frac{h}{2} x'_{i,b} + \frac{h}{2} x'_{i+1,a}$ $x_{i+1} = x_i + h x'_{i,b} + \dots$	(de du à dz)
XI	$x_{i+1,a} = x_i + h x'_{i,b}$ $x_{i+1,b} = x_i + \frac{h}{2} x'_{i,a} + \frac{h}{2} x'_{i+1,a}$ $x_{i+1} = x_i + h x'_i + \dots$	(de ea à ef)
XII	$x_{i+1,a} = x_i + h x'_{i,b}$ $x_{i+1,b} = x_i + \frac{h}{2} x'_{i,a} + \frac{h}{2} x'_{i+1,a}$ $x_{i+1} = x_i + h x'_{i,b} + \dots$	(de eg à el)
XIII	$x_{i+1,a} = x_i + h x'_{i,a}$ $x_{i+1,b} = x_i + \frac{h}{2} x'_i + \frac{h}{2} x'_{i+1,a}$ $x_{i+1} = x_i + h x'_i + \dots$	(de em à er)

XIV	$x_{i+1,a} = x_i + h x'_{i,a}$ $x_{i+1,b} = x_i + \frac{h}{2} x'_{i,b} + \frac{h}{2} x'_{i+1,a}$ $x_{i+1} = x_i + h x'_{i,b} + \dots$	(de es à ex)
XV	$x_{i+1,a} = x_i + h x'_{i,a}$ $x_{i+1,b} = x_i + \frac{h}{2} x'_{i,b} + \frac{h}{2} x'_{i+1,a}$ $x_{i+1} = x_i + h x'_i + \dots$	(de ey à fd)
XVI	$x_{i+1,a} = x_i + h x'_{i,a}$ $x_{i+1,b} = x_i + \frac{h}{2} x'_{i,b} + \frac{h}{2} x'_{i+1,a}$ $x_{i+1} = x_i + h x'_{i,b} + \dots$	(de fd à fj)
XVII	$x_{i+1,a} = x_i + h x'_{i,a}$ $x_{i+1,b} = x_i + \frac{h}{2} x'_{i,a} + \frac{h}{2} x'_{i+1,a}$ $x_{i+1} = x_i + h x'_i + \dots$	(de fk à fp)
XVIII	$x_{i+1,a} = x_i + h x'_{i,a}$ $x_{i+1,b} = x_i + \frac{h}{2} x'_{i,a} + \frac{h}{2} x'_{i+1,a}$ $x_{i+1} = x_i + h x'_{i,b} + \dots$	(de fq à fv)

A l'intérieur de chaque groupe les méthodes sont classées de la manière suivante :

$$1^{\circ}) \quad x_{i+1} = \dots + \frac{h^2}{3} x''_i + \frac{h^2}{6} x''_{i+1,b}$$

$$2^\circ) x_{i+1} = \dots + \frac{h^2}{3} x_i'' + \frac{h^2}{6} x_{i+1,a}''$$

$$3^\circ) x_{i+1} = \dots + \frac{h^2}{3} x_{i,b}'' + \frac{h^2}{6} x_{i+1,b}''$$

$$4^\circ) x_{i+1} = \dots + \frac{h^2}{3} x_{i,b}'' + \frac{h^2}{6} x_{i+1,a}''$$

$$5^\circ) x_{i+1} = \dots + \frac{h^2}{3} x_{i,a}'' + \frac{h^2}{6} x_{i+1,b}''$$

$$6^\circ) x_{i+1} = \dots + \frac{h^2}{3} x_{i,a}'' + \frac{h^2}{6} x_{i+1,a}''$$

On peut voir facilement que les groupes

I III V VII IX XI XIII XV XVII

ont les mêmes restes (pour des formules homologues).

Il en est de même des groupes

II IV VII X XIV XVI

et des groupes

VI XII et XVIII .

Nous ne calculerons donc les restes que pour les méthodes bs, bt, bu, bv, bw, bx ; by, bz, ca, cb, cc, cd ; cw, cx, cy, cz, da, db.

$$\text{bs) reste sur } x_{i+1,a} = \frac{h^2}{2} x_i''$$

$$\text{reste sur } x_{i+1,b} = \frac{h^3}{4} \frac{\partial X}{\partial x} x_i'' - \frac{h^3}{12} x_i'''$$

$$\text{reste sur } x_{i+1} = \frac{h^4}{24} x_i^{IV}$$

$$= \frac{h^4}{24} [L_1 X + 3K_1 J_1 X + J_1 K_1 X + J_1^3 X]$$

$$s = \frac{6}{24} = 0,25.$$

$$\begin{aligned}
 \text{bt) reste sur } x_{i+1} &= \frac{h^4}{12} \frac{\partial x''}{\partial x} x'' - \frac{h^4}{24} x_i^{IV} \\
 &= \frac{h^4}{24} \left[2J_1^3 X + 2K_1 J_1 X - L_1 X - 3K_1 J_1 X - J_1 K_1 X - J_1^3 X \right] \\
 &= \frac{h^4}{24} \left[J_1^3 X - K_1 J_1 X - L_1 X - J_1 K_1 X \right] \\
 s &= \frac{1}{6} = 0,167.
 \end{aligned}$$

bu) même chose que bs

bv) même chose que bt

$$\begin{aligned}
 \text{bw) reste sur } x_{i+1} &= \frac{h^4}{6} \frac{\partial x''}{\partial x} x_i'' - \frac{h^4}{24} x_i^{IV} \\
 &= \frac{h^4}{24} \left[4J_1^3 X + 4K_1 J_1 X - L_1 X - 3K_1 J_1 X - J_1 K_1 X - J_1^3 X \right] \\
 &= \frac{h^4}{24} \left[3J_1^3 X + K_1 J_1 X - L_1 X - J_1 K_1 X \right] \\
 s &= \frac{1}{4} = 0,25.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{bx) reste sur } x_{i+1} &= \frac{h^4}{4} \frac{\partial x''}{\partial x} x_i'' - \frac{h^4}{24} x_i^{IV} \\
 &= \frac{h^4}{24} \left[6J_1^3 X + 6K_1 J_1 X - L_1 X - 3K_1 J_1 X - J_1 K_1 X - J_1^3 X \right] \\
 &= \frac{h^4}{24} \left[5J_1^3 X + 3K_1 J_1 X - L_1 X - J_1 K_1 X \right] \\
 s &= \frac{10}{24} = 0,417.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{by) reste sur } x_{i+1,a} &= \frac{h^2}{2} x_i'' \\
 \text{reste sur } x_{i+1,b} &= \frac{h^3}{4} \frac{\partial x}{\partial x} x_i'' - \frac{h^3}{12} x_i''' \\
 \text{reste sur } x_{i+1} &= \frac{h^4}{4} \left(\frac{\partial x}{\partial x} \right)^2 x_i'' - \frac{h^4}{12} \frac{\partial x}{\partial x} x_i''' - \frac{h^4}{24} x_i^{IV} \\
 &= \frac{h^4}{24} \left[6J_1^3 X - 2J_1^3 X - 2J_1 K_1 X - L_1 X - 3K_1 J_1 X - J_1 K_1 X - J_1^3 X \right]
 \end{aligned}$$

$$= \frac{h^4}{24} [3J_1^3 X - 3J_1 K_1 X - 3K_1 J_1 X - L_1 X]$$

$$s = \frac{10}{24} = 0,417.$$

$$\text{bz) reste sur } x_{i+1} = \frac{h^4}{4} \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)^2 x_i'' - \frac{h^4}{12} \frac{\partial X}{\partial x} x_i''' + \frac{h^4}{12} \frac{\partial x''}{\partial x} x_i'' - \frac{h^4}{24} x_i^{IV}$$

$$= \frac{h^4}{24} [6J_1^3 X - 2J_1 K_1 X - 2J_1^3 X + 2J_1^3 X + 2K_1 J_1 X - L_1 X - 3K_1 J_1 X - J_1 K_1 X - J_1^3 X]$$

$$= \frac{h^4}{24} [5J_1^3 X - 3J_1 K_1 X - K_1 J_1 X - L_1 X]$$

$$s = \frac{10}{24} = 0,42.$$

ca) même chose que by

cb) même chose que bz

$$\text{cc) reste sur } x_{i+1} = \frac{h^4}{4} \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)^2 x_i'' - \frac{h^4}{12} \frac{\partial X}{\partial x} x_i''' + \frac{h^4}{6} \frac{\partial x''}{\partial x} x_i'' - \frac{h^4}{24} x_i^{IV}$$

$$= \frac{h^4}{24} [6J_1^3 X - 2J_1^3 X - 2J_1 K_1 X + 4J_1^3 X + 4K_1 J_1 X - L_1 X - 3K_1 J_1 X - J_1 K_1 X - J_1^3 X]$$

$$= \frac{h^4}{24} [7J_1^3 X - 3J_1 K_1 X + K_1 J_1 X - L_1 X]$$

$$s = \frac{12}{24} = 0,5.$$

$$\text{cd) reste sur } x_{i+1} = \frac{h^4}{4} \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)^2 x_i'' - \frac{h^4}{12} \frac{\partial X}{\partial x} x_i''' + \frac{h^4}{4} \frac{\partial x''}{\partial x} x_i'' - \frac{h^4}{24} x_i^{IV}$$

$$= \frac{h^4}{24} [6J_1^3 X - 2J_1^3 X - 2J_1 K_1 X + 6J_1^3 X + 6K_1 J_1 X - L_1 X - 3K_1 J_1 X - J_1 K_1 X - J_1^3 X]$$

$$= \frac{h^4}{24} [9J_1^3 X - 3J_1 K_1 X + 3K_1 J_1 X - L_1 X]$$

$$s = \frac{16}{24} = 0,667.$$

$$\text{cw) reste sur } x_{i+1,a} = \frac{h^2}{2} x_i''$$

$$\text{reste sur } x_{i+1,b} = \frac{h^3}{2} \frac{\partial X}{\partial x} x_i'' - \frac{h^3}{12} x_i'''$$

$$\begin{aligned} \text{reste sur } x_{i+1} &= \frac{h^4}{2} \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)^2 x_i'' - \frac{h^4}{12} \frac{\partial X}{\partial x} x_i''' - \frac{h^4}{24} x_i^{IV} \\ &= \frac{h^4}{24} \left[12J_1^3 X - 2J_1^3 X - 2J_1 K_1 X - L_1 X - 3K_1 J_1 X - J_1 K_1 X - J_1^3 X \right] \\ &= \frac{h^4}{24} \left[9J_1^3 X - 3J_1 K_1 X - 3K_1 J_1 X - L_1 X \right] \end{aligned}$$

$$s = \frac{16}{24} = 0,667.$$

$$\begin{aligned} \text{cx) reste sur } x_{i+1} &= \frac{h^4}{2} \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)^2 x_i'' - \frac{h^4}{12} \frac{\partial X}{\partial x} x_i''' + \frac{h^4}{12} \frac{\partial x''}{\partial x} x_i'' - \frac{h^4}{24} x_i^{IV} \\ &= \frac{h^4}{24} \left[12J_1^3 X - 2J_1^3 X - 2J_1 K_1 X + 2J_1^3 X + 2K_1 J_1 X - L_1 X - 3K_1 J_1 X - J_1 K_1 X - J_1^3 X \right] \\ &= \frac{h^4}{24} \left[11J_1^3 X - 3J_1 K_1 X - K_1 J_1 X - L_1 X \right] \end{aligned}$$

$$s = \frac{16}{24} = 0,667.$$

cy) même chose que cw

cz) même chose que cx

$$\begin{aligned} \text{da) reste sur } x_{i+1} &= \frac{h^4}{2} \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)^2 x_i'' - \frac{h^4}{12} \frac{\partial X}{\partial x} x_i''' + \frac{h^4}{6} \frac{\partial x''}{\partial x} x_i'' - \frac{h^4}{24} x_i^{IV} \\ &= \frac{h^4}{24} \left[12J_1^3 X - 2J_1^3 X - 2J_1 K_1 X + 4J_1^3 X + 4K_1 J_1 X - L_1 X - 3K_1 J_1 X - J_1 K_1 X - J_1^3 X \right] \\ &= \frac{h^4}{24} \left[13J_1^3 X - 3J_1 K_1 X + K_1 J_1 X - L_1 X \right] \end{aligned}$$

$$s = \frac{18}{24} = 0,75$$

$$\begin{aligned} \text{db) reste sur } x_{i+1} &= \frac{h^4}{2} \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)^2 x_i'' - \frac{h^4}{12} \frac{\partial X}{\partial x} x_i''' + \frac{h^4}{4} \frac{\partial x''}{\partial x} x_i'' - \frac{h^4}{24} x_i^{IV} \\ &= \frac{h^4}{24} \left[12J_1^3 X - 2J_1^3 X - 2J_1 K_1 X + 6J_1^3 X + 6K_1 J_1 X - L_1 X - 3K_1 J_1 X - J_1 K_1 X - J_1^3 X \right] \\ &= \frac{h^4}{24} \left[15J_1^3 X - 3J_1 K_1 X + 3K_1 J_1 X - L_1 X \right] \end{aligned}$$

$$s = \frac{22}{24} \approx 0,92$$

Type G₂₀, H₂₁

Ecrivons les 16 formules du groupe

fw	$x_{i+1,a} = x_i + h x_i' + \frac{h^2}{2} x_i''$ $x_{i+1} = x_i + h x_i' + \frac{h^2}{3} x_i'' + \frac{h^2}{6} x_{i+1,a}''$
fx	$x_{i+1,a} = x_i + h x_i' + \frac{h^2}{2} x_i''$ $x_{i+1} = x_i + h x_i' + \frac{h^2}{3} x_{i,a}'' + \frac{h^2}{6} x_{i+1,a}''$
fy	$x_{i+1,a} = x_i + h x_i' + \frac{h^2}{2} x_i''$ $x_{i+1} = x_i + h x_{i,a}' + \frac{h^2}{3} x_i'' + \frac{h^2}{6} x_{i+1,a}''$
fz	$x_{i+1,a} = x_i + h x_i' + \frac{h^2}{2} x_i''$ $x_{i+1} = x_i + h x_{i,a}' + \frac{h^2}{3} x_{i,a}'' + \frac{h^2}{6} x_{i+1,a}''$
ga	$x_{i+1,a} = x_i + h x_i' + \frac{h^2}{2} x_{i,a}''$ $x_{i+1} = x_i + h x_i' + \frac{h^2}{3} x_i'' + \frac{h^2}{6} x_{i+1,a}''$
gb	$x_{i+1,a} = x_i + h x_i' + \frac{h^2}{2} x_{i,a}''$ $x_{i+1} = x_i + h x_i' + \frac{h^2}{3} x_{i,a}'' + \frac{h^2}{6} x_{i+1,a}''$
gc	$x_{i+1,a} = x_i + h x_i' + \frac{h^2}{2} x_{i,a}''$ $x_{i+1} = x_i + h x_{i,a}' + \frac{h^2}{3} x_i'' + \frac{h^2}{6} x_{i+1,a}''$
gd	$x_{i+1,a} = x_i + h x_i' + \frac{h^2}{2} x_{i,a}''$ $x_{i+1} = x_i + h x_{i,a}' + \frac{h^2}{3} x_{i,a}'' + \frac{h^2}{6} x_{i+1,a}''$

ge	$x_{i+1,a} = x_i + h x'_{i,a} + \frac{h^2}{2} x''_i$ $x_{i+1} = x_i + h x'_i + \frac{h^2}{3} x''_i + \frac{h^2}{6} x''_{i+1,a}$
gf	$x_{i+1,a} = x_i + h x'_{i,a} + \frac{h^2}{2} x''_i$ $x_{i+1} = x_i + h x'_i + \frac{h^2}{3} x''_{i,a} + \frac{h^2}{6} x''_{i+1,a}$
gg	$x_{i+1,a} = x_i + h x'_{i,a} + \frac{h^2}{2} x''_i$ $x_{i+1} = x_i + h x'_i + \frac{h^2}{3} x''_i + \frac{h^2}{6} x''_{i+1,a}$
gh	$x_{i+1,a} = x_i + h x'_{i,a} + \frac{h^2}{2} x''_i$ $x_{i+1} = x_i + h x'_i + \frac{h^2}{3} x''_{i,a} + \frac{h^2}{6} x''_{i+1,a}$
gi	$x_{i+1,a} = x_i + h x'_{i,a} + \frac{h^2}{2} x''_{i,a}$ $x_{i+1} = x_i + h x'_i + \frac{h^2}{3} x''_i + \frac{h^2}{6} x''_{i+1,a}$
gj	$x_{i+1,a} = x_i + h x'_{i,a} + \frac{h^2}{2} x''_{i,a}$ $x_{i+1} = x_i + h x'_i + \frac{h^2}{3} x''_{i,a} + \frac{h^2}{6} x''_{i+1,a}$
gk	$x_{i+1,a} = x_i + h x'_{i,a} + \frac{h^2}{2} x''_{i,a}$ $x_{i+1} = x_i + h x'_i + \frac{h^2}{3} x''_i + \frac{h^2}{6} x''_{i+1,a}$
gl	$x_{i+1,a} = x_i + h x'_{i,a} + \frac{h^2}{2} x''_{i,a}$ $x_{i+1} = x_i + h x'_i + \frac{h^2}{3} x''_{i,a} + \frac{h^2}{6} x''_{i+1,a}$

Il y aura deux valeurs possibles pour le terme principal de l'erreur, selon qu'on utilise x'_i ou $x'_{i,a}$ dans le calcul

de x_{i+1}

1er cas (méthode fu) :

$$\text{reste sur } x_{i+1,a} = \frac{h^3}{6} x_i'''$$

$$\text{reste sur } x_{i+1} = \frac{h^4}{24} x_i^{IV} = \frac{h^4}{24} [L_1 X + 3K_1 J_1 X + J_1 K_1 X + L_1 X]$$

$$s = \frac{6}{24} = 0,25.$$

2ème cas (méthode fy) :

$$\text{reste sur } x_{i+1} = \frac{h^4}{6} \frac{\partial X}{\partial x} x_i''' - \frac{h^4}{24} x_i^{IV}$$

$$= \frac{h^4}{24} [4J_1^3 X + 4J_1 K_1 X - L_1 X - 3K_1 J_1 X - J_1 K_1 X - J_1^3 X]$$

$$= \frac{h^4}{24} [3J_1^3 X + 3J_1 K_1 X - L_1 X - 3K_1 J_1 X]$$

$$s = \frac{10}{24} = 0,42.$$

Les méthodes se répartissent de la manière suivante :

$$s=0,24 \left\{ \begin{array}{l} fw \\ fx \\ ga \\ gb \\ ge \\ gf \\ gi \\ gj \end{array} \right. \qquad s=0,42 \left\{ \begin{array}{l} fy \\ fz \\ gc \\ gd \\ gj \\ gh \\ gk \\ gl \end{array} \right.$$

II - Stabilité des différentes méthodes.

Considérons l'équation $x' = \alpha x$ où α est une constante

négative, appliquons-lui une des formules, par exemple H_{21} en supposant qu'on dispose d'approximations \tilde{x}_i , $x_{i,b}$ et $x_{i,a}$ de x_i et de l'approximation $x_{i+1,a}$ de x_{i+1} .

On obtient

$$\tilde{x}_{i+1} = \tilde{x}_{i+1} + h \alpha x_{i,b} + \frac{h^2}{3} \alpha^2 x_{i,a} + \frac{h^2}{6} \alpha^2 x_{i+1,a} .$$

ϵ_i désignant l'erreur sur \tilde{x}_i , $\epsilon_{i,b}$ l'erreur sur $x_{i,b}$, $\epsilon_{i,a}$ l'erreur sur $x_{i,a}$, $\epsilon_{i+1,a}$ l'erreur sur $x_{i+1,a}$ et ϵ_{i+1} l'erreur sur \tilde{x}_{i+1} , on peut écrire l'équation sur l'erreur

$$\epsilon_{i+1} = \epsilon_i + h \alpha \epsilon_{i,b} + \frac{h^2}{3} \alpha^2 \epsilon_{i,a} + \frac{h^2}{6} \alpha^2 \epsilon_{i+1,a}$$

L'erreur ϵ_{i+1} est combinaison linéaire des erreurs sur $\epsilon_{i,a}$, $\epsilon_{i,b}$ et $\epsilon_{i+1,a}$. Dans le cas de la première formule d'une mise en oeuvre qui est explicite on obtient $\epsilon_{i+1,a}$ comme combinaison linéaire de $\epsilon_{i,a}$, $\epsilon_{i,b}$ et ϵ_i . Si bien qu'on obtient une récurrence linéaire d'erreur portant sur une colonne de deux, trois ou quatre éléments selon qu'on a un, deux ou trois calculs intermédiaires. Il est clair que h et α sont élevés à la même puissance, on pose donc $h\alpha = q$ et la matrice de la récurrence sera une matrice de polynômes en q .

La condition de stabilité pour la méthode numérique sera que les valeurs propres de cette matrice soient plus petite que 1 en module; c'est une condition sur q . On pourrait l'obtenir en écrivant les conditions de Hurwitz après avoir fait une transformation homographique transformant le demi-plan des parties réelles négatives en cercle trigonométrique.

Les calculs étant extrêmement pénibles, nous avons simplement calculé les valeurs propres les matrices pour diverses valeurs de q .

Il est clair que pour $q=0$, il y a une valeur propre égale à 1 les autres étant nulles.

Nous avons donc pris $q=-0,1, -0,2\dots$ jusqu'à ce qu'une des racines ait un module égal à 1.

Les résultats seront donnés dans les tableaux récapitulatifs du chapitre suivant.

CHAPITRE III

CRITERES DE CHOIX POUR LES METHODES
RECAPITULATION POUR LES ORDRES 2 ET 3.

Nous disposons de quatre critères pour comparer entre elles les différentes méthodes :

- leur ordre infinitésimal d'erreur (n)
- leur nombre de Horner (p)
- la norme de leur erreur (S)
- leur rayon de stabilité (R).

Nous en déduisons deux autres qui nous permettront de comparer des méthodes de même ordre : le coefficient d'efficacité réduit $S' = p^n S$ et le rayon de stabilité réduit $R' = \frac{R}{p}$.

Coefficient d'efficacité réduit :

Etant données deux méthodes de même ordre n, de nombre de Horner p et p' et de norme d'erreur S et S', si en les utilisant on veut aller de x_0 à x_0+a , le travail nécessaire (et les pas sont différents : h et h') sera respectivement $p \frac{a}{h}$ et $p' \frac{a}{h'}$, si on veut que cette quantité de travail soit la même K, on obtient $\frac{p a}{h} = \frac{p' a}{h'} = K$ d'où $h = \frac{p a}{K}$ et $h' = \frac{p' a}{K}$ et l'erreur

$$\frac{S p^n a^n}{K^n} \quad \text{et} \quad \frac{S' p'^n a^n}{K^n}$$

c'est-à-dire proportionnelle à $S p^n$:

Rayon de stabilité réduit.

Ce sera $R' = \frac{R}{P}$: il permettra de déterminer entre plusieurs méthodes laquelle permet d'intégrer la même équation sur une plus grande étendue à travail égal et en respectant la condition de stabilité, ou, ce qui revient à même, laquelle permet à travail égal et sur la même distance, d'intégrer une équation $y' = a y$ où a à la plus grande valeur absolue.

Nous donnons ci-dessous un classement des méthodes d'ordre 2 puis 3 selon le nombre S' croissant. Nous mettons en regard de chaque méthode son type, son nombre de Horner, la norme de l'erreur S , le rayon R et le rayon réduit de stabilité R' .

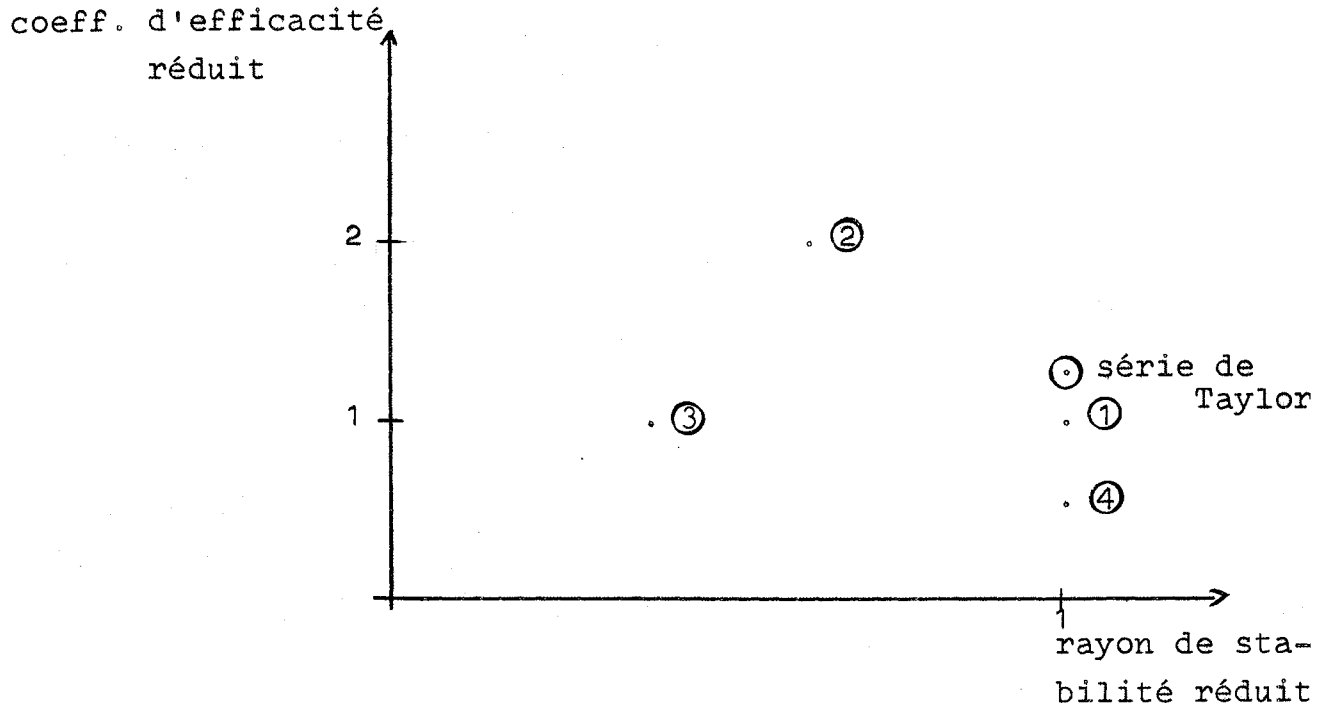
Classement selon le critère d'efficacité réduit les diverses méthodes d'ordre 2.

La signification des n° est précisée page (13).

S'	n° de la méthode	P	S	R	R'
0,5	4	1	0,5	1	1
1	1	2	0,25	2	1
"	3	"	"	0,6	0,3
2	2	2	0,5	1	0,5

La série de Taylor donne :

$$S' = 1,33 \quad p = 2 \quad S = 0,333 \quad R = 2 \quad R' = 1$$



Classement par S' croissant des mises en oeuvres
des formules d'Obrechhoff d'ordre 3.

S'	n° de la méthode	Type de mise en oeuvre	P	S	R	R'
1,92	gb	G_{20}, H_{21}	2	0,24	1,9	0,95
2,89	bm	G_{20}, G_{21}	2	0,36	1,3	0,65
"	br	"	"	"	1,9	0,95
3,36	gl	G_{20}, H_{21}	2	0,42	1,9	0,95
3,75	bc	G_{20}, G_{21}	3	0,139	2,5	0,83
"	bh	"	"	"	1,3	0,43
"	bk	"	"	"	0,7	0,267

S'	n° de la méthode	Type de mise en oeuvre	P	S	R	R'
"	bp	"	"	"	1,1	0,367
6,48	fw	G ₂₀ , H ₂₁	3	0,24	1,9	0,63
"	fx	"	"	"	1,9	0,63
"	ga	"	"	"	1,9	0,63
"	gj	"	"	"	1,4	0,467
6,75	bu	G ₁₀ , F ₁ , H ₂₁	3	0,25	1,6	0,53
"	cs	"	"	"	1,2	0,4
"	eO	"	"	"	1,2	0,4
"	fm	"	"	"	0,9	0,3
8,37	ab	G ₁₀ , F ₁ , G ₂₁	3	0,31	1,6	0,53
"	ac	"	"	"	1,9	0,63
"	at	"	"	"	0,9	0,3
"	au	"	"	"	1,2	0,4
8,9	a	G ₁₀ , F ₁ , G ₂₁	4	0,139	2,5	0,625
"	b	"	"	"	1,7	0,425
"	g	"	"	"	1,2	0,3
"	h	"	"	"	1,0	0,25
"	s	"	"	"	1,2	0,3
"	t	"	"	"	1,3	0,325
"	y	"	"	"	1,9	0,475
"	z	"	"	"	1,9	0,475
"	ak	"	"	"	1,1	0,275
"	al	"	"	"	1,7	0,425
"	aq	"	"	"	1,1	0,275
"	ar	"	"	"	1,0	0,25
"	bd	G ₂₀ , G ₂₁	4	0,139	1,3	0,325
"	bg	"	"	"	1,3	0,325

S'	n° de la méthode	Type de mise en oeuvre	P	S	R	R'
"	bl	"	"	"	0,7	0,175
"	bo	"	"	"	1,9	0,475
9,72	be	G ₂₀ , G ₂₁	3	0,36	1,8	0,6
"	bj	"	"	"	0,9	0,3
"	bn	"	"	"	1,1	0,367
"	bq	"	"	"	1,8	0,6
10,50	ad	G ₁₀ , F ₁ , G ₂₁	3	0,389	1,6	0,53
"	av	"	"	"	0,8	0,267
10,69	bt	G ₂₀ , F ₁ , H ₂₁	4	0,167	1,9	0,475
"	bv	"	"	"	1,4	0,35
10,69	cr	G ₁₀ , F ₁ , H ₂₁	4	0,167	2,5	0,625
"	ct	"	"	"	1,6	0,4
"	en	"	"	"	1,1	0,275
"	ep	"	"	"	1,3	0,325
"	fl	"	"	"	1,1	0,275
"	fn	"	"	"	1,3	0,325
11,26	bx	G ₁₀ , F ₁ , H ₂₁	3	0,417	1,8	0,6
"	cv	"	"	"	1,8	0,6
"	er	"	"	"	0,8	0,267
"	fp	"	"	"	0,8	0,267
"	dw	"	"	"	1,9	0,63
"	fg	"	"	"	0,8	0,267
"	gd	"	"	"	0,9	0,3
"	gg	"	"	"	1,8	0,6
"	gh	"	"	"	1,9	0,63
"	gk	"	"	"	1,1	0,367
14,08	c	G ₁₀ , F ₁ , G ₂₁	4	0,22	1,8	0,45

S'	n° de la méthode	Type de mise en oeuvre	P	S	R	R'
"	i	"	"	"	1,2	0,3
"	m	"	"	"	2,2	0,55
"	n	"	"	"	1,5	0,375
"	u	"	"	"	1,2	0,3
"	aa	"	"	"	1,9	0,475
"	ae	"	"	"	0,9	0,225
"	af	"	"	"	0,9	0,225
14,08	am	G ₁₀ , F ₁ , G ₂₁	4	0,22	0,9	0,225
"	as	"	"	"	1,1	0,275
"	aw	"	"	"	0,9	0,225
"	ax	"	"	"	0,9	0,225
15,01	az	"	3	0,566	0,9	0,3
"	ba	"	"	"	0,9	0,3
"	ah	"	"	"	0,9	0,3
"	ai	"	"	"	0,9	0,3
15,36	ge	G ₂₀ , H ₂₁	4	0,24	1,9	0,475
"	gf	"	"	"	0,8	0,2
"	gi	"	"	"	1,9	0,475
16	bs	G ₁₀ , F ₁ , H ₂₁	4	0,25	2,5	0,625
"	bw	"	"	"	1,8	0,45
"	cg	"	"	"	1,2	0,3
"	cq	"	"	"	1,5	0,375
"	cu	"	"	"	2,2	0,55
"	de	"	"	"	1,9	0,475
"	dq	"	"	"	1,9	0,475
"	ec	"	"	"	0,9	0,225
"	em	"	"	"	0,9	0,225

S'	n° de la méthode	Type de mise en oeuvre	P	S	R	R'
"	eq	"	"	"	0,7	0,175
"	fa	"	"	"	1,0	0,25
"	fk	"	"	"	0,9	0,225
"	fO	"	"	"	0,8	0,2
17,25	aj	G ₁₀ , F ₁ , G ₂₁	3	0,639	0,9	0,3
"	bb	"	"	"	0,9	0,3
18	dz	G ₁₀ , F ₁ , H ₂₁	3	0,667	1,3	0,43
"	ei	"	"	"	0,9	0,3
"	fj	"	"	"	0,8	0,267
"	fs	"	"	"	0,9	0,3
19,58	O	G ₁₀ , F ₁ , G ₂₁	4	0,306	1,8	0,45
"	ag	"	"	"	0,9	0,225
"	ay	"	"	"	0,8	0,2
19,84	d	G ₁₀ , F ₁ , G ₂₁	4	0,31	1,8	0,45
"	e	"	"	"	2,5	0,625
"	j	"	"	"	1,2	0,3
"	k	"	"	"	1,9	0,475
"	v	"	"	"	0,9	0,225
"	w	"	"	"	0,9	0,225
"	an	"	"	"	0,9	0,225
"	aO	"	"	"	0,9	0,225
20,87	cf	"	5	0,167	1,9	0,38
"	ch	"	"	"	1,0	0,2
"	dd	"	"	"	1,2	0,24
"	df	"	"	"	1,5	0,3
"	dp	"	"	"	1,9	0,38
"	dr	"	"	"	1,9	0,38

S'	n° de la méthode	Type de mise en oeuvre	P	S	R	R'
"	eb	"	"	"	0,9	0,18
"	ed	"	"	"	0,9	0,18
20,87	ez	G ₁₀ ' F ₁ ' H ₂₁	5	0,167	1,1	0,22
"	fb	"	"	"	1,0	0,2
23,04	bf	G ₂₀ ' G ₂₁	4	0,36	2,5	0,625
"	bi	"	"	"	0,9	0,225
23,84	el	G ₁₀ ' F ₁ ' H ₂₁	3	0,92	0,9	0,225
"	fv	G ₁₀ ' F ₁ ' G ₂₁	"	"	0,9	0,225
24,9	f	G ₁₀ ' F ₁ ' G ₂₁	4	0,389	1,6	0,4
"	l	"	"	"	1,6	0,4
"	x	"	"	"	0,9	0,225
"	ap	"	"	"	0,8	0,2
26,88	du	G ₁₀ ' F ₁ ' H ₂₁	4	0,417	1,1	0,275
"	dv	"	"	"	1,1	0,275
"	dx	"	"	"	1,6	0,4
"	fe	"	"	"	0,8	0,2
"	ff	"	"	"	0,8	0,2
"	fh	"	"	"	0,8	0,2
"	cj	"	"	"	1,8	0,45
"	dh	"	"	"	1,2	0,3
"	dt	"	"	"	1,5	0,375
"	ef	"	"	"	0,9	0,225
"	fd	"	"	"	0,8	0,2
"	ca	"	"	"	1,9	0,475
"	cm	"	"	"	1,9	0,475
"	dk	"	"	"	0,9	0,225
"	eu	"	"	"	0,9	0,225

S'	n° de la méthode	Type de mise en oeuvre	P	S	R	R'
26,88	fy	G ₂₀ , H ₂₁	4	0,417	1,9	0,475
"	fz	"	"	"	1,2	0,3
31,25	ce	G ₁₀ , F ₁ , H ₂₁	5	0,25	1,9	0,38
"	ci	"	"	"	1,6	0,32
"	dc	"	"	"	1,6	0,34
"	dg	"	"	"	1,2	0,24
"	dO	"	"	"	1,9	0,38
"	ds	"	"	"	1,3	0,26
"	ea	"	"	"	0,9	0,18
"	ee	"	"	"	0,9	0,18
"	ey	"	"	"	0,9	0,18
"	fc	"	"	"	0,7	0,14
32	dy	G ₁₀ , F ₁ , H ₂₁	4	0,5	1,4	0,35
"	fi	"	"	"	0,7	0,175
35,58	p	G ₁₀ , F ₁ , G ₂₁	4	0,556	1,1	0,275
"	q	"	"	"	1,4	0,35
40,9	r	G ₁₀ , F ₁ , G ₂₁	4	0,639	1,1	0,275
42,7	eg	G ₁₀ , F ₁ , H ₂₁	4	0,667	0,9	0,225
"	eh	"	"	"	0,9	0,225
"	ej	"	"	"	"	"
"	fq	"	"	"	"	"
"	fr	"	"	"	"	"
"	ft	"	"	"	1,0	0,25
"	cd	G ₁₀ , F ₁ , H ₂₁	4	"	1,3	0,325
"	cp	"	"	"	1,2	0,3
"	cy	"	"	"	0,9	0,225

S'	n° de la méthode	Type de mise en oeuvre	P	S	R	R'
42,7	dn	G ₁₀ , F ₁ , H ₂₁	4	0,667	0,8	0,2
"	ex	"	"	"	0,6	0,15
48	ek	G ₁₀ , F ₁ , H ₂₁	4	0,75	0,9	0,225
"	fu	"	"	"	0,9	0,225
52,5	by	G ₁₀ , F ₁ , H ₂₁	5	0,417	1,2	0,24
"	bz	"	"	"	1,5	0,3
"	cb	"	"	"	2,8	0,56
"	ck	"	"	"	1,6	0,32
"	cl	"	"	"	1,7	0,34
"	cn	"	"	"	2,0	0,4
"	di	"	"	"	0,7	0,14
"	dj	"	"	"	0,8	0,16
"	dl	"	"	"	0,9	0,18
"	es	"	"	"	0,8	0,16
"	et	"	"	"	0,8	0,16
"	ev	"	"	"	0,9	0,18
58,88	db	G ₁₀ , F ₁ , H ₂₁	4	0,92	1,5	0,425
65,56	cc	"	5	0,5	1,3	0,26
"	c0	"	"	"	1,4	0,28
"	dm	"	"	"	0,8	0,16
"	ew	"	"	0,667	1,0	0,2
83,87	cw	"	"	"	1,0	0,2
"	cx	"	"	"	1,0	0,2
"	cz	"	"	"	1,2	0,24
93,75	da	"	"	0,75	1,0	0,2

Nous avons construit un tableau avec en abscisse le rayon de stabilité réduit et en ordonnées le coefficient d'efficacité réduit.

Le nuage de point est allongé et de pente négative : il n'y a donc pas incompatibilité entre les deux qualités . (Une bonne méthode a un petit coefficient d'efficacité réduit et un grand rayon de stabilité réduit). Quatre méthodes se détachent très nettement : ce sont gb, br, gl et bc.

Il est à noter que les meilleures méthodes (ces quatre ainsi que celles qui les "suivent" sont des méthodes qui ne partent pas de trop bas, c'est-à-dire dont la première formule a un reste en h^3 .

115
coefficient
d'efficacité
réduit

↑
co
ex
10

↑
co
ex

P. 47

dm ew cc go

db

50
di ol adl
ex
by
byk ol
en
ob

ob
fu

ex
dny ft
sp red

ex
ft
ft
ft
ft

ip
ig

fi
ca
ex
ey
dy ds
si
oc
do

↑
A

ft
ex
ex
ex

du
du
du
du

du
du
du
du

ex
ex
ex
ex

96

98
regime des statistiques
réduit

5

10

15

20

IMMERMANN CANSON FRANCE

CHAPITRE IV

METHODES D'ORDRE 4.

Nous ne considérerons que les types de mise en oeuvre G_{20} , H_{21} , F_2 et G_{20} , G_{21} , F_2 ; en effet, les types de mise en oeuvre démarrant avec G_{10} sont tous coûteux et d'autre part, toutes les autres méthodes utilisent une dérivée troisième ce qui implique qu'elle exige au minimum trois Horner par pas dont un d'une dérivée troisième.

I - Type de mise en oeuvre G_{20} , H_{21} , F_2 .

$$x_{i+1,a} = x_i + h x'_{i,a} + \frac{h^2}{2} x''_{i,a}$$

$$x_{i+1,b} = x_i + h x'_{i,a} + \frac{h^2}{3} x''_{i,a} + \frac{h^2}{6} x''_{i+1,a}$$

$$x_{i+1} = x_i + \frac{h}{2} x'_{i+1} + \frac{h}{2} x'_{i+1,b} + \frac{h^2}{12} x''_{i,a} - \frac{h^2}{12} x''_{i+1,a}$$

On trouve $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 2 \times 3 \times 2 = 972$ possibilités.

Mais si l'on s'intéresse au premier terme de l'erreur

- Les substitutions faites pour x'_i et x''_i dans le calcul de $x_{i+1,a}$ ne modifient pas le 1er terme d'erreur.

* - Les substitutions faites sur $x''_{i,a}$ dans le calcul de $x_{i+1,b}$ ne modifient pas le 1er terme d'erreur.

- On obtient le même premier terme d'erreur sur $x_{i+1,b}$ en substituant à $x_{i,a}^!$, $x_i^!$ ou $x_{i,b}^!$.

- On obtient le même premier terme d'erreur sur x_{i+1} en substituant à $x_{i,a}^!$, $x_{i,b}^!$ ou $x_i^!$.

On trouve donc :

- . deux possibilités sur $x_{i,a}^!$, dans le calcul de $x_{i+1,b}^!$
- . deux possibilités sur $x_{i,b}^!$, dans le calcul de x_{i+1}
- . deux possibilités sur $x_{i,a}^!$, dans le calcul de x_{i+1}
- . deux possibilités sur $x_{i+1,a}^!$ dans le calcul de x_{i+1} .

Soit en tout 16 possibilités ; nous en donnons la liste à la page suivante avec l'expression des restes, nous donnons à côté la valeur du coefficient d'efficacité S correspondant.

G₁₀, H₂₁, F₁

calcul de x _{i+1,b}	calcul de x _{i+1}					
x _{i,a'}	x _{i,b'}	x _{i,a''}	x _{i+1,c}			
1°)	a	b	a	a	$h^5 \left[\frac{1}{6} \left(\frac{\partial X}{\partial x} \right)^2 x''' - \frac{1}{24} \frac{\partial X}{\partial x} x^{IV} + \frac{1}{720} x^V \right]$	S=0,438
2°)	a	b	a	b	$h^5 \left[\frac{1}{6} \left(\frac{\partial X}{\partial x} \right)^2 x''' - \frac{1}{24} \frac{\partial X}{\partial x} x^{IV} + \frac{1}{72} \frac{\partial x''}{\partial x} x''' + \frac{1}{720} x^V \right]$	S=0,5
3°)	a	b	b	a	$h^5 \left[\frac{1}{6} \left(\frac{\partial X}{\partial x} \right)^2 x''' - \frac{1}{24} \frac{\partial X}{\partial x} x^{IV} - \frac{1}{72} \frac{\partial x''}{\partial x} x''' + \frac{1}{720} x^V \right]$	S=0,416
4°)	a	b	b	b	$h^5 \left[\frac{1}{6} \left(\frac{\partial X}{\partial x} \right)^2 x''' - \frac{1}{24} \frac{\partial X}{\partial x} x^{IV} + \frac{1}{720} x^V \right]$	S=0,438
5°)	a	-	a	a	$h^5 \left[\frac{1}{12} \left(\frac{\partial X}{\partial x} \right)^2 x''' - \frac{1}{48} \frac{\partial X}{\partial x} x^{IV} + \frac{1}{720} x^V \right]$	S=0,23
6°)	a	-	a	b	$h^5 \left[\frac{1}{12} \left(\frac{\partial X}{\partial x} \right)^2 x''' - \frac{1}{48} \frac{\partial X}{\partial x} x^{IV} + \frac{1}{72} \frac{\partial x''}{\partial x} x''' + \frac{1}{720} x^V \right]$	S=0,28
7°)	a	-	b	a	$h^5 \left[\frac{1}{12} \left(\frac{\partial X}{\partial x} \right)^2 x''' - \frac{1}{48} \frac{\partial X}{\partial x} x^{IV} - \frac{1}{72} \frac{\partial x''}{\partial x} x''' + \frac{1}{720} x^V \right]$	S=0,20
8°)	a	-	b	b	$h^5 \left[\frac{1}{12} \left(\frac{\partial X}{\partial x} \right)^2 x''' - \frac{1}{48} \frac{\partial X}{\partial x} x^{IV} + \frac{1}{720} x^V \right]$	S=0,23
9°)	b	b	a	a	$h^5 \left[\frac{x^V}{720} - \frac{1}{24} \frac{\partial X}{\partial x} x^{IV} \right]$	S=0,267
10°)	b	b	a	b	$h^5 \left[\frac{x^V}{720} + \frac{1}{72} \frac{\partial x''}{\partial x} x''' - \frac{1}{24} \frac{\partial X}{\partial x} x^{IV} \right]$	S=0,267
11°)	b	b	b	a	$h^5 \left[\frac{x^V}{720} - \frac{1}{72} \frac{\partial x''}{\partial x} x''' - \frac{1}{24} \frac{\partial X}{\partial x} x^{IV} \right]$	S=0,3
12°)	b	b	b	b	$h^5 \left[\frac{x^V}{720} - \frac{1}{24} \frac{\partial X}{\partial x} x^{IV} \right]$	S=0,267
13°)	b	-	a	a	$h^5 \left[\frac{x^V}{720} - \frac{1}{48} \frac{\partial X}{\partial x} x^{IV} \right]$	S=0,142
14°)	b	-	a	b	$h^5 \left[\frac{x^V}{720} - \frac{1}{48} \frac{\partial X}{\partial x} x^{IV} + \frac{1}{72} \frac{\partial x''}{\partial x} x''' \right]$	S=0,142
15°)	b	-	b	a	$h^5 \left[\frac{x^V}{720} - \frac{1}{48} \frac{\partial X}{\partial x} x^{IV} - \frac{1}{72} \frac{\partial x''}{\partial x} x''' \right]$	S=0,175
16°)	b	-	b	b	$h^5 \left[\frac{x^V}{720} - \frac{1}{48} \frac{\partial X}{\partial x} x^{IV} \right]$	S=0,142

Il est clair qu'en dehors des dérivées écrites dans les colonnes de gauche, il faut obligatoirement calculer $x''_{i+1,a}$. Si bien qu'on ne trouvera de méthodes utilisant 3 Horner que dans celles des lignes 1°), 5°), 9°), 10°), 11°), 12°), 13°).

D'autre part, on trouvera une méthode à 2 Horner dans la ligne 9°).

Les méthodes de la ligne 13 sont celles qui ont le plus petit coefficient d'efficacité, celles qui ne demandent que 3 Horner s'écrivent :

$$\begin{aligned}x_{i+1,a} &= x_i + h x'_{i,b} + \frac{h^2}{2} x''_{i,a} \\x_{i+1,b} &= x_i + h x'_{i,b} + \frac{h^2}{3} x''_{i,a} + \frac{h^2}{6} x''_{i+1,a} \\x_{i+1} &= x_i + \frac{h}{2} x'_i + \frac{h}{2} x'_{i+1,b} + \frac{h^2}{12} x''_{i,a} - \frac{h^2}{12} x''_{i+1,a}\end{aligned}$$

Il y a donc quatre possibilités et on trouve

$$S' = 11,4 .$$

La méthode à 2 Horner est

$$\begin{aligned}x_{i+1,a} &= x_i + h x'_{i,b} + \frac{h^2}{2} x''_{i,a} \\x_{i+1,b} &= x_i + h x'_{i,b} + \frac{h^2}{3} x''_{i,a} + \frac{h^2}{6} x''_{i+1,a} \\x_{i+1} &= x_i + \frac{h}{2} x'_{i,b} + \frac{h}{2} x'_{i+1,b} + \frac{h^2}{12} x''_{i,a} - \frac{h^2}{12} x''_{i+1,a}\end{aligned}$$

on trouve $S' = 4,3$.

Type de mise en oeuvre G_{20}, G_{21}, F_2 :

Il s'écrit

$$x_{i+1,a} = x_i + h x'_{i,a'} + \frac{h^2}{2} x''_{i,a'}$$

$$x_{i+1,b} = x_i + \frac{2h}{3} x'_{i,a'} + \frac{h}{3} x'_{i+1,a} + \frac{h^2}{6} x''_{i,a'}$$

$$x_{i+1} = x_i + \frac{h}{2} x'_{i,b'} + \frac{h}{2} x'_{i+1,b} + \frac{h^2}{12} x''_{i,a'} - \frac{h^2}{12} x''_{i+1,\alpha}$$

On a $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 2 \times 3 \times 2 = 972$

possibilités, mais ici encore, on peut voir que les seuls choix qui modifient le terme principal du reste sont

- le choix de $x'_{i,a'}$ dans le calcul de $x_{i+1,b}$
- le choix de $x'_{i,b'}$ dans le calcul de x_{i+1}
- le choix de $x''_{i,a'}$ " " " "
- le choix de $x''_{i+1,\alpha}$ " " " "

Ce qui donne le tableau :

G₁₀, G₂₁, F₁

calcul de	calcul de					
$x_{i+1,b}$	x_{i+1}					
$x_{i,a}^I$	$x_{i,b}^I$	$x_{i,a}^{II}$	$x_{i+1,\alpha}^{II}$			
1°)	a	b	a	a	$h^5 \left[\frac{1}{6} \left(\frac{\partial X}{\partial x} \right)^2 x''' - \frac{1}{72} \frac{\partial X}{\partial x} x^{IV} + \frac{1}{720} x^V \right]$	S=0,383
2°)	a	b	a	b	$h^5 \left[\frac{1}{6} \left(\frac{\partial X}{\partial x} \right)^2 x''' - \frac{1}{72} \frac{\partial X}{\partial x} x^{IV} + \frac{1}{72} \frac{\partial x''}{\partial x} + \frac{1}{720} x^V \right]$	S=0,439
3°)	a	b	b	a	$h^5 \left[\frac{1}{6} \left(\frac{\partial X}{\partial x} \right)^2 x''' - \frac{1}{72} \frac{\partial X}{\partial x} x^{IV} - \frac{1}{72} \frac{\partial x''}{\partial x} x''' + \frac{1}{720} x^V \right]$	S=0,361
4°)	a	b	b	b	$h^5 \left[\frac{1}{6} \left(\frac{\partial X}{\partial x} \right)^2 x''' - \frac{1}{72} \frac{\partial X}{\partial x} x^{IV} + \frac{1}{720} x^V \right]$	S=0,383
5°)	a	-	a	a	$h^5 \left[\frac{1}{12} \left(\frac{\partial X}{\partial x} \right)^2 x''' - \frac{1}{144} \frac{\partial X}{\partial x} x^{IV} + \frac{1}{720} x^V \right]$	S=0,202
6°)	a	-	a	b	$h^5 \left[\frac{1}{12} \left(\frac{\partial X}{\partial x} \right)^2 x''' - \frac{1}{144} \frac{\partial X}{\partial x} x^{IV} + \frac{1}{72} \frac{\partial x''}{\partial x} x''' + \frac{1}{720} x^V \right]$	S=0,258
7°)	a	-	b	a	$h^5 \left[\frac{1}{12} \left(\frac{\partial X}{\partial x} \right)^2 x''' - \frac{1}{144} \frac{\partial X}{\partial x} x^{IV} - \frac{1}{72} \frac{\partial x''}{\partial x} x''' + \frac{1}{720} x^V \right]$	S=0,18
8°)	a	-	b	b	$h^5 \left[\frac{1}{12} \left(\frac{\partial X}{\partial x} \right)^2 x''' - \frac{1}{144} \frac{\partial X}{\partial x} x^{IV} + \frac{1}{720} x^V \right]$	S=0,202
9°)	b	b	a	a	$h^5 \left[\frac{1}{18} \left(\frac{\partial X}{\partial x} \right)^2 x''' - \frac{1}{72} \frac{\partial X}{\partial x} x^{IV} + \frac{1}{720} x^V \right]$	S=0,16
10°)	b	b	a	b	$h^5 \left[\frac{1}{18} \left(\frac{\partial X}{\partial x} \right)^2 x''' - \frac{1}{72} \frac{\partial X}{\partial x} x^{IV} + \frac{1}{72} \frac{\partial x''}{\partial x} x''' + \frac{1}{720} x^V \right]$	S=0,217
11°)	b	b	b	a	$h^5 \left[\frac{1}{18} \frac{\partial X}{\partial x} x''' - \frac{1}{72} \frac{\partial X}{\partial x} x^{IV} - \frac{1}{72} \frac{\partial x''}{\partial x} x''' + \frac{1}{720} x^V \right]$	S=0,139
12°)	b	b	b	b	$h^5 \left[\frac{1}{18} \left(\frac{\partial X}{\partial x} \right)^2 x''' - \frac{1}{72} \frac{\partial X}{\partial x} x^{IV} + \frac{1}{720} x^V \right]$	S=0,16
13°)	b	-	a	a	$h^5 \left[\frac{1}{36} \left(\frac{\partial X}{\partial x} \right)^2 x''' - \frac{1}{144} \frac{\partial X}{\partial x} x^{IV} + \frac{1}{720} x^V \right]$	S=0,0917
14°)	b	-	a	b	$h^5 \left[\frac{1}{36} \left(\frac{\partial X}{\partial x} \right)^2 x''' - \frac{1}{144} \frac{\partial X}{\partial x} x^{IV} + \frac{1}{72} \frac{\partial x''}{\partial x} x''' + \frac{1}{720} x^V \right]$	S=0,147
15°)	b	-	b	a	$h^5 \left[\frac{1}{36} \left(\frac{\partial X}{\partial x} \right)^2 x''' - \frac{1}{144} \frac{\partial X}{\partial x} x^{IV} - \frac{1}{72} \frac{\partial x''}{\partial x} x''' + \frac{1}{720} x^V \right]$	S=0,0694
16°)	b	-	b	b	$h^5 \left[\frac{1}{36} \left(\frac{\partial X}{\partial x} \right)^2 x''' - \frac{1}{144} \frac{\partial X}{\partial x} x^{IV} + \frac{1}{720} x^V \right]$	S=0,0917

On voit d'après la formation de ce type de mise en oeuvre que quoi qu'il arrive, il faut calculer $x_{i+1,a}^!$ et $x_{i+1,b}^!$. Si bien que les seules lignes qui donnent des possibilités de méthodes à 3 Horner sont les lignes 1°), 4°), 9°), 12°).

Les lignes 9°) et 12°) donnent le reste ayant le plus petit coefficient d'efficacité

$$x_{i+1,a} = x_i + h x_{i,a}^! + \frac{h^2}{2} x_{i,a}^{''}$$

$$x_{i+1,b} = x_i + \frac{2h}{3} x_{i,b}^! + \frac{h}{3} x_{i+1,a}^! + \frac{h^2}{6} x_{i,a}^{''}$$

$$x_{i+1} = x_i + \frac{h}{2} x_{i,b}^! + \frac{h}{2} x_{i+1,b}^! + \frac{h^2}{12} x_{i,a}^{''} - \frac{h^2}{12} x_{i+1,a}^{''}$$

La ligne 12°) est la même à ceci près qu'on prend $x_{i,b}^{''}$ et $x_{i+1,b}^{''}$.

Ces deux méthodes donnent $S' = 12,96$.

CHAPITRE V

COMPARAISON A D'AUTRES METHODES.

Ordre 2.

La méthode n° 2 est la méthode d'Euler Cauchy. La méthode optimale n'utilisant qu'un Horner donne un meilleur coefficient d'efficacité réduit (0,5) que les méthodes de la tangente améliorée (0,83), de Heun (0,667) et d'Euler Cauchy. Elle a également un meilleur coefficient d'efficacité réduit que les méthodes à pas liés : Adams (0,85) et Nyström (0,667).

Ordre 3.

La meilleure méthode d'ordre 3 quant au coefficient d'efficacité réduit est la méthode gb qui s'écrit

$$\begin{aligned}x_{i+1,a} &= x_i + h x'_i + \frac{h^2}{2} x''_{i,a} \\x_{i+1} &= x_i + h x'_i + \frac{h^2}{3} x''_{i,a} + \frac{h^2}{6} x''_{i+1,a}\end{aligned}$$

Son coefficient d'efficacité vaut 1,9 ; de nombreuses méthodes d'ordre 3 ont un coefficient d'efficacité meilleur :

- une méthode de Runge Kutta d'ordre 3 avec $\theta_1 = 1/2$
 $\theta_2 = 3/4$: $S' = 1,22$.

- une méthode de Runge Kutta implicite

- deux méthodes de Runge Kutta à pas liés d'écriture générale

$$y_{i,1} = Q_{10} y_i + Q_{11} y_{i-1} + h A_{10} y_i'$$

$$y_{i+1} = Q_{20} y_i + Q_{21} y_{i-1} + h (A_{20} y_i' + A_{21} y_{i,1}')$$

$$\text{on a } t_{i,1} = t_i + \theta h$$

$$\text{pour } \theta = \frac{2}{3} \quad S' = 1,7$$

$$\text{pour } \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad S' = 1,5$$

- une méthode de Runge Kutta utilisant la dérivée au cours du pas

$$y_{i,1} = y_i + \frac{h}{3} Y_i'$$

$$y_{i+1} = y_i + h y_i' + \frac{h^2}{2} y_{i,1}''$$

$$\theta = \frac{1}{3} \quad S' = 1,101$$

- une méthode à pas liés utilisant la dérivée seconde

$$y_{i+1} = \frac{1}{2} [y_{i-1} + y_{i-2}] + \frac{h}{6} [4y_i' + 11 y_{i-1}']$$

$$13/12 h^2 y_i''$$

$$S' = 0,33.$$

- la méthode de Frey

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{4} Y_i' \left[1 - h Y_i' \left(1 + \frac{h}{6} Y_i' \right) \right] + \frac{h}{4} Y_{i,1}' \left[3h Y_i' \left(1 - \frac{h}{6} Y_i' \right) \right]$$

$$Y' = \frac{Y}{y} \quad S' = 0,5$$

* Cette formule n'est rentable que pour une équation : pour un système $\frac{\partial Y}{\partial y}$ est une matrice

Ordre 4.

La méthode optimale à 2 Horner donne $S' = 4,3$.

C'est le même coefficient d'efficacité réduit que pour la méthode de Simpson qui est la meilleure de celles étudiées par Kérékes .

Les autres méthodes donnent un coefficient d'efficacité réduit au moins égal à 11,4 , c'est-à-dire assez peu intéressant puisque de nombreuses méthodes d'ordre 4 ont un meilleur coefficient.

Il semble donc que pour les ordres pairs, la méthode $H_{p0}, H_{p1} \dots H_{pp}$ utilisant p Horner soit toujours très intéressante alors que les autres méthodes sont d'un intérêt moyen (ou très mauvais) ; pour les ordres impairs, l'intérêt des méthodes d'Obrechhoff semble également être moyen.

L'intérêt de ces méthodes est évidemment diminué par le fait qu'elles exigent le calcul des dérivées d'ordre supérieur, c'est par l'examen des cas particuliers qu'on pourra voir si le calcul des dérivées $\frac{d^n x}{dt^n}$ ($n > 1$) à partir de la fonction $X(x,t)$ n'est pas trop coûteux.

ESSAIS NUMERIQUES

Ordre 3.

Nous avons choisi six méthodes que nous avons appliquées à 5 équations.

Les six méthodes sont AC, BC, EG, FA, FW, GB et elles ont pour coefficient d'efficacité réduit respectivement 8,37 , 3,75 , 42,7 , 16 , 6,48 , 1,92 .

Les équations utilisées étaient

$$\begin{aligned}x' &= -t x \quad (x_0=1) \quad \text{de solution} \quad x = e^{-\frac{t^2}{2}} \\x' &= -2t x^2 \quad (x_0=1) \quad " \quad " \quad x = \frac{1}{1+t^2} \\x' &= x - 1,5 e^{-0,5t} \quad (x_0=1) \quad \text{de solution} \quad x = e^{-t/2} \\x' &= -x \quad (x_0=1) \quad \text{de solution} \quad x = e^{-t} \\x' &= x \quad (x_0=1) \quad \text{de solution} \quad x = e^t\end{aligned}$$

Nous avons tracé des courbes d'erreur par pas réduites (multipliées par p^3 p étant le nombre de Horner par pas).

Dans tous les cas on obtient les meilleurs résultats pour la méthode GB et les plus mauvais pour la méthode EG.

En général, les meilleures méthodes après EG sont BC et FW (sauf dans l'équation $x' = x - 1,5 e^{-0,5t}$ où la méthode

FA donne de meilleurs résultats que la méthode BC).

Il est à remarquer que pour toutes les équations la méthode FA pour laquelle $S' = 16$ donne de meilleurs résultats que la méthode AC pour laquelle $S' = 8,37$.

La méthode AC s'écrit

$$x_{i+1,a} = x_i + h x'_{i,b}$$

$$x_{i+1,b} = x_i + \frac{h}{2} x'_{i,b} + \frac{h}{2} x'_{i+1,a}$$

$$x_{i+1} = x_i + \frac{2h}{3} x'_{i,b} + \frac{h}{3} x'_{i+1,b} + \frac{h^2}{6} x''_{i,b}$$

Le reste sur $x_{i+1,a}$ a pour 1er terme $\frac{h^2}{2} x''_i$

Le reste sur $x_{i+1,b}$ a pour 1er terme $\frac{h^3}{4} \frac{\partial X}{\partial x} x''_i - \frac{h^3}{12} x'''_i$

Le reste sur x_{i+1} a pour 1er terme $\frac{h^4}{4} \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)^2 x''_i - \frac{h^4}{12} \frac{\partial X}{\partial x} x'''_i - \frac{h^4}{72} x^{IV}_i$

Pour l'équation $x' = x$ ce premier terme vaut

$$h^4 e^x \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{12} - \frac{1}{72} \right] = \frac{11}{72} h^4 e^x$$

Pour l'équation $x' = -x$ il vaut

$$h^4 e^{-x} \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{12} - \frac{1}{72} \right] = \frac{11}{72} h^4 e^{-x}$$

La méthode FA s'écrit

$$x_{i+1,a} = x_i + h x'_{i,a}$$

$$x_{i+1,b} = x_i + \frac{h}{2} x'_{i,b} + \frac{h}{2} x'_{i+1,a}$$

$$x_{i+1} = x_i + h x'_i + \frac{h^2}{3} x''_{i,b} + \frac{h^2}{6} x''_{i+1,b}$$

On voit que dans le reste sur x_{i+1} , les restes antérieurs n'interviennent qu'aux ordres supérieurs. D'où le reste

$$\frac{h^4}{24} x_i^{IV}$$

qui vaut pour $x' = x$ $\frac{h^4}{24} e^x$

pour $x' = -x$ $\frac{h^4}{24} e^{-x}$

Après réduction (AC demande 3 Horner et FA en demande 4), l'erreur réduite est proportionnelle à 4,1 pour AC et 2,67 pour FA.

On pourrait expliquer de même l'anomalie pour les autres équations.

Ordre 4.

Nous avons essayé la méthode optimale du type G_{20} , H_{21} , F_2 à 2 Horner :

$$x_{i+1,a} = x_i + h x'_{i,b} + \frac{h^2}{2} x''_{i,a}$$

$$x_{i+1,b} = x_i + h x'_{i,b} + \frac{h^2}{3} x''_{i,a} + \frac{h^2}{6} x''_{i+1,a}$$

$$x_{i+1} = x_i + \frac{h}{2} x'_{i,b} + \frac{h}{2} x'_{i+1,b} + \frac{h^2}{12} x''_{i,a} - \frac{h^2}{12} x''_{i+1,a}$$

Nous l'avons appelée méthode THFO, pour elle S' vaut 4,3.

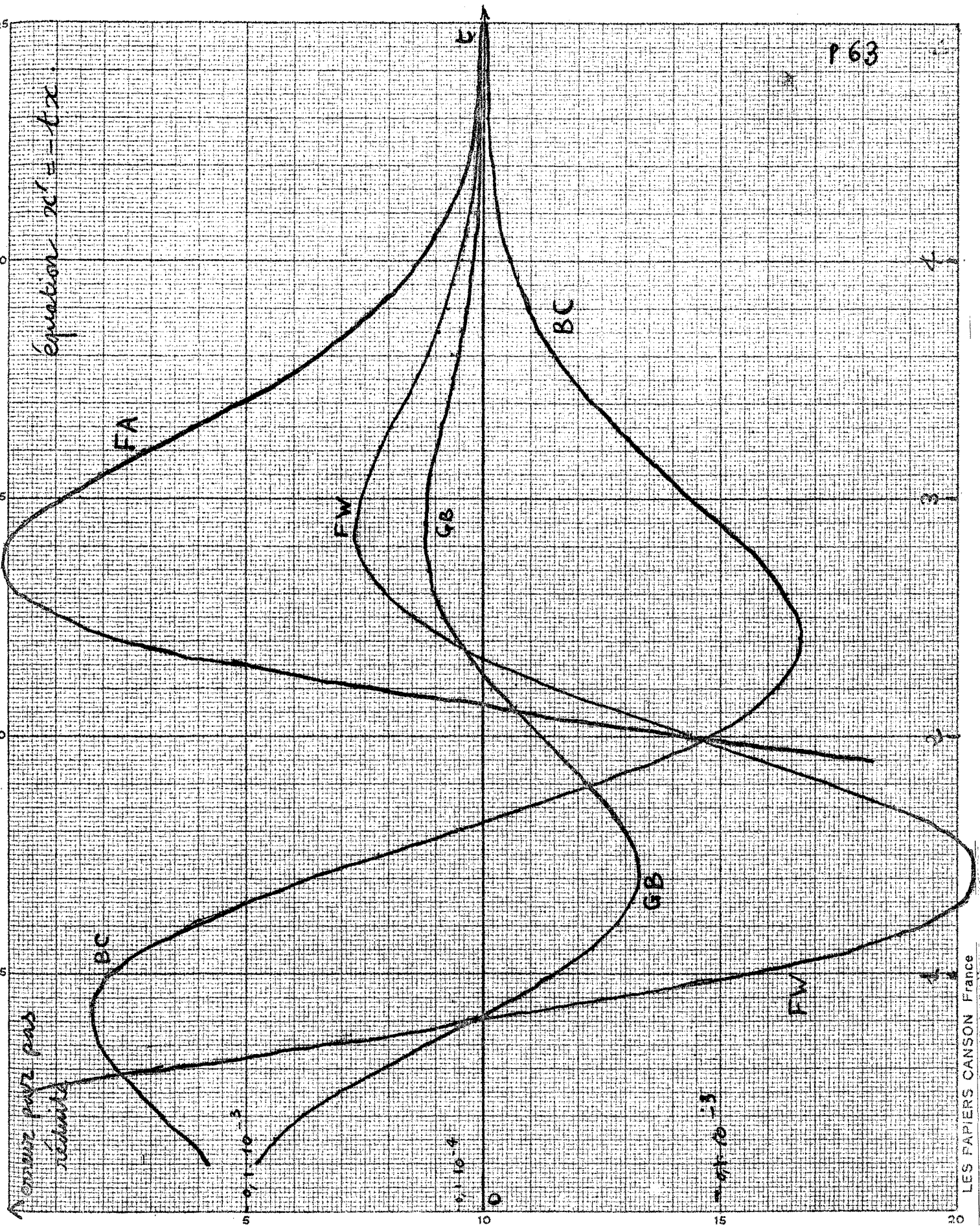
Nous l'avons comparée avec une méthode du type G_{20} , G_{21}^* , F_2 à 3 Horner :

$$\begin{aligned}x_{i+1,a} &= x_i + h x'_{i,b} + \frac{h^2}{2} x''_{i,a} \\x_{i+1,b} &= x_i + \frac{2h}{3} x'_{i,b} + \frac{h}{3} x'_{i+1,a} + \frac{h^2}{6} x''_{i,a} \\x_{i+1} &= x_i + \frac{h}{2} x'_{i,b} + \frac{h}{2} x'_{i,b} + \frac{h^2}{12} x''_{i,a} - \frac{h^2}{12} x''_{i+1,a}\end{aligned}$$

nous l'avons appelée méthode TGFO, pour elle S' vaut 13.

Les courbes donnant l'erreur par pas réduite pour les mêmes équations que plus haut confirment encore le classement de ces deux méthodes.

Equation $x' = -tx$



Avec une puzé pas réduite

10^{-3}

10^{-4}

10^{-5}

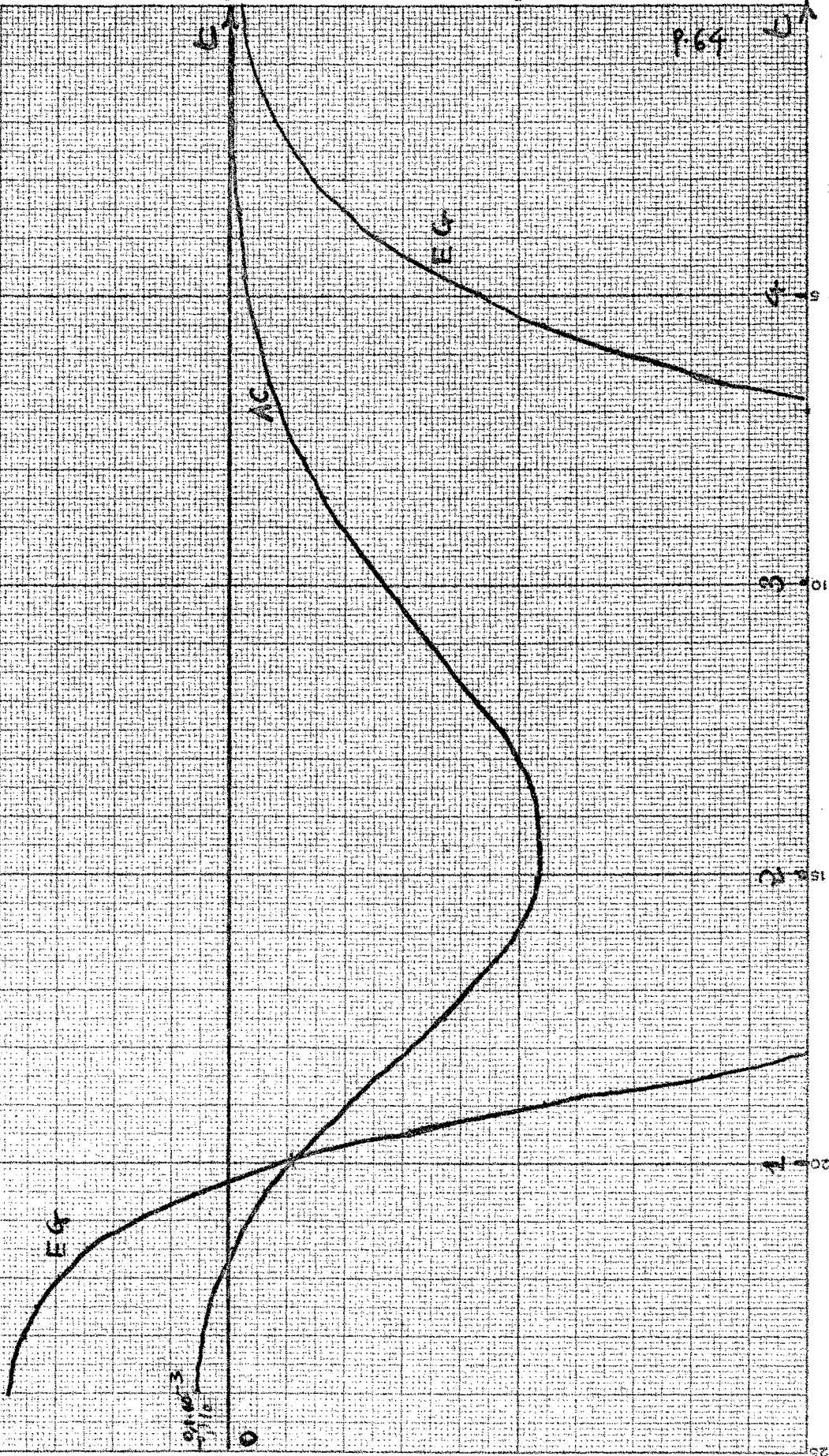
n'erreurs par pas réduite

Equation $x' = -tx$

$-0.1 \cdot 10^{-3}$

$-0.1 \cdot 10^{-3}$
 $-0.1 \cdot 10^{-3}$

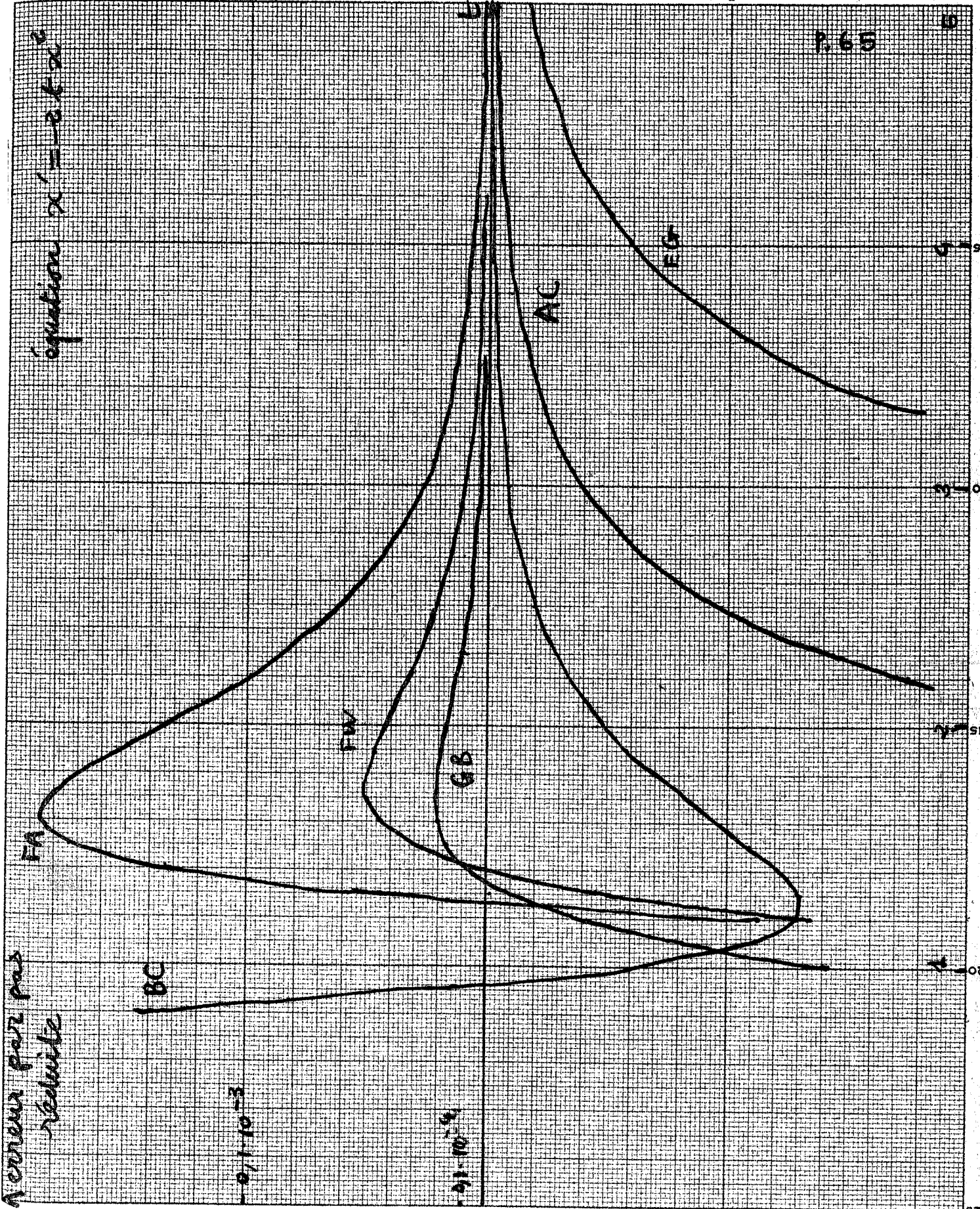
0



P.64

U

U



Axe des ordonnées réduite

équation $x' = -20t + t^2$

07/10-53

07/10-54

592

BC

FA

FB

GC

AC

EG

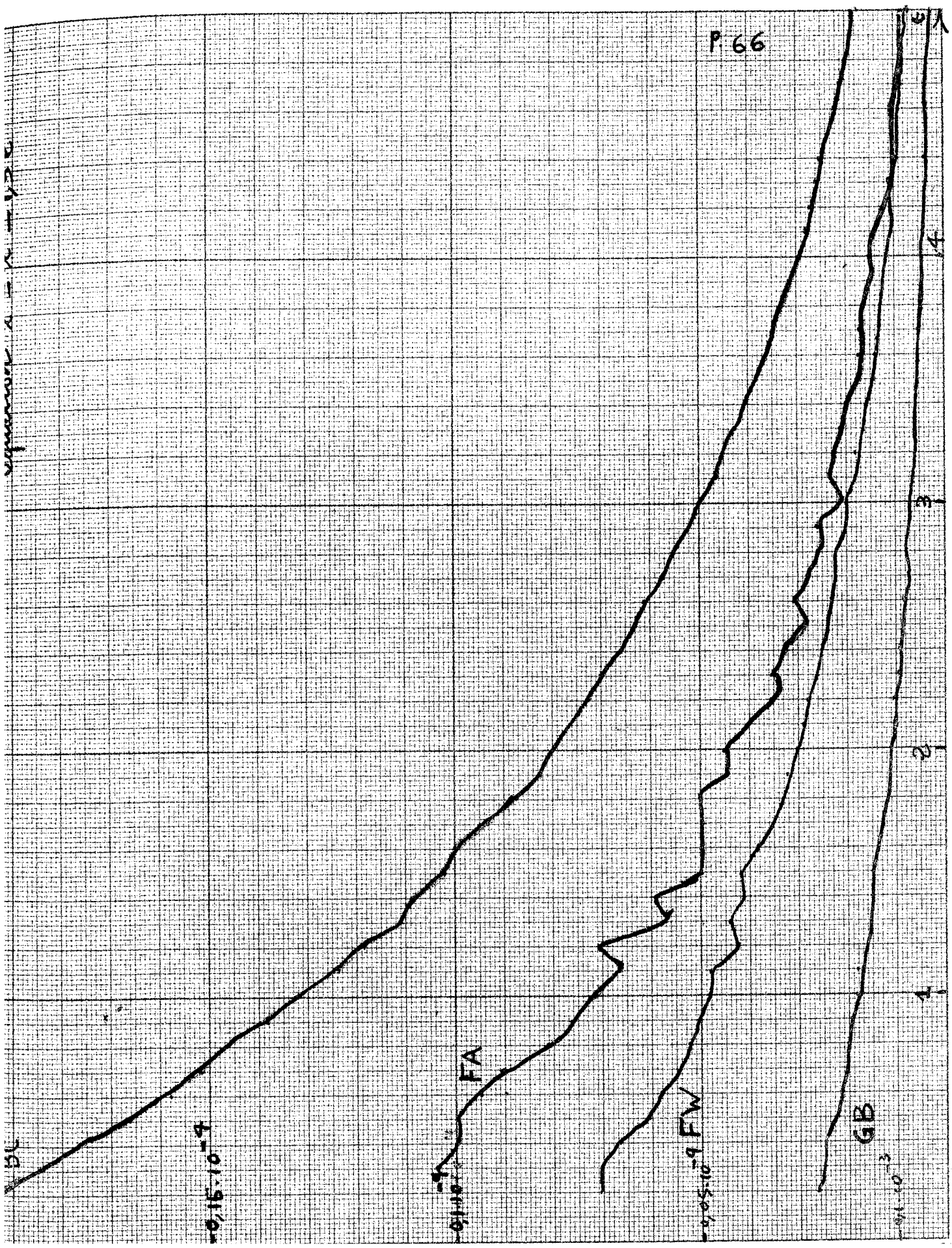
10

15

20

25

30



Elevation

P. 66

0,15-10-9

0,15-10-9

0,05-10-9

0,10-10-3

FA

FW

GB

3

2

1

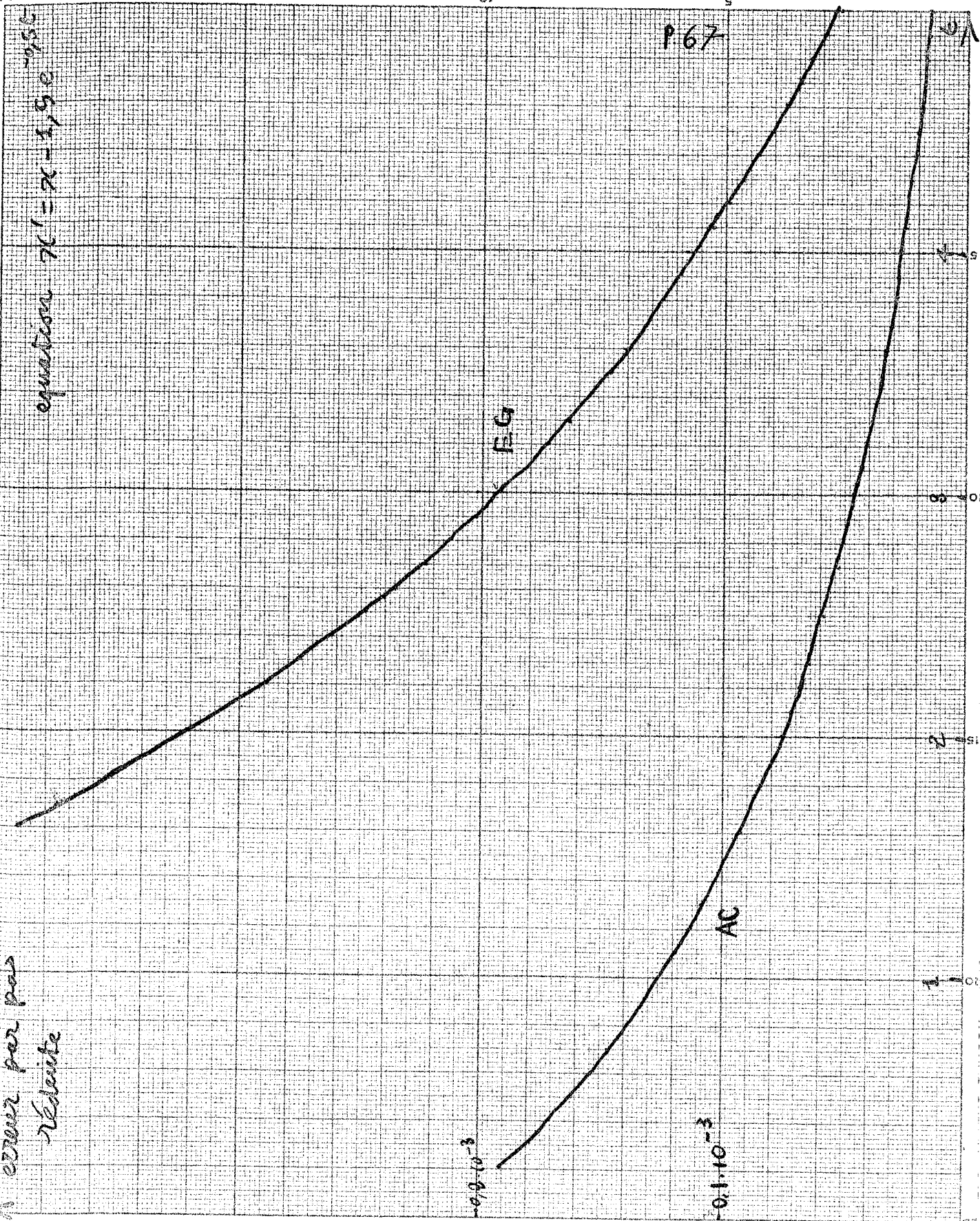
4

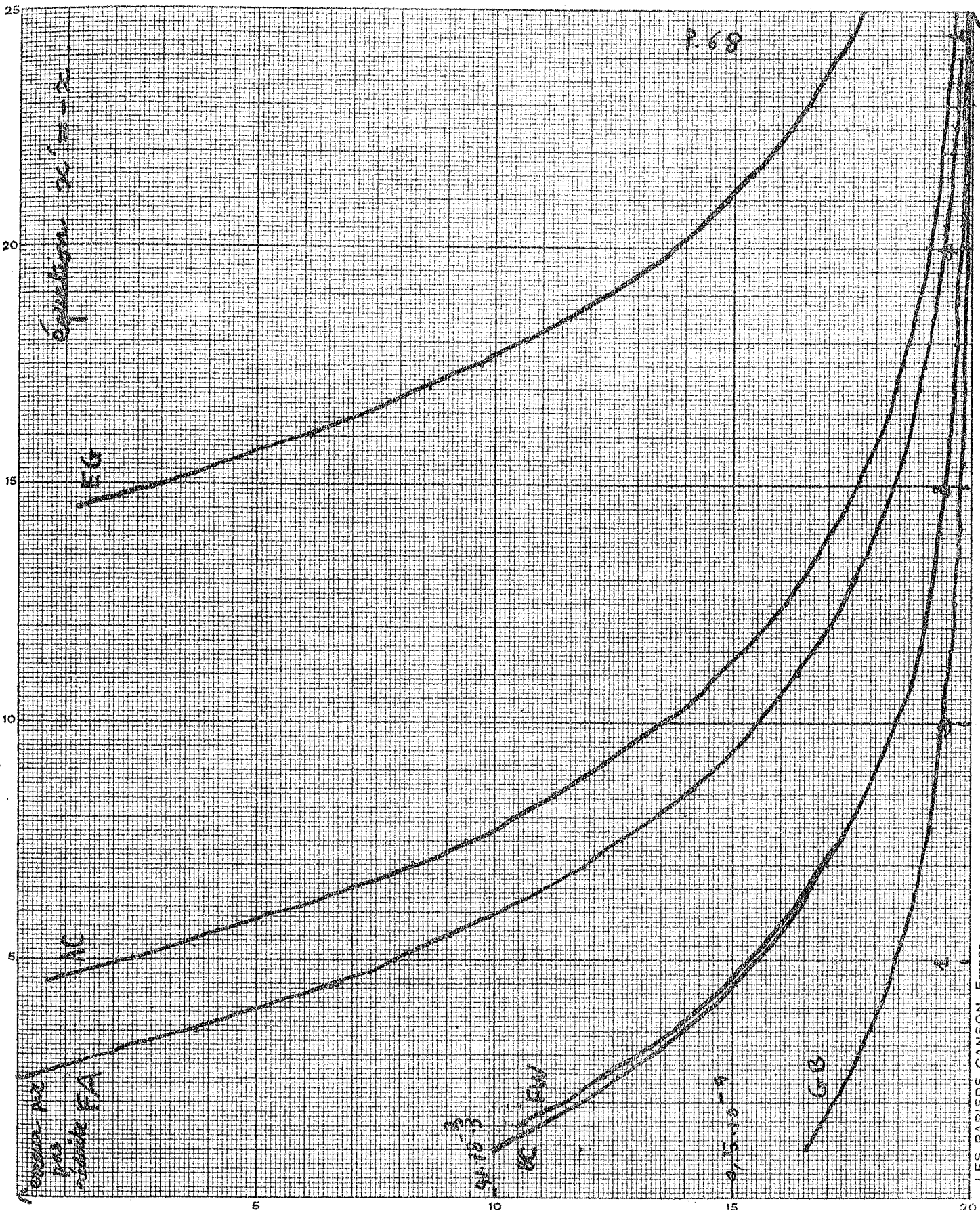
5

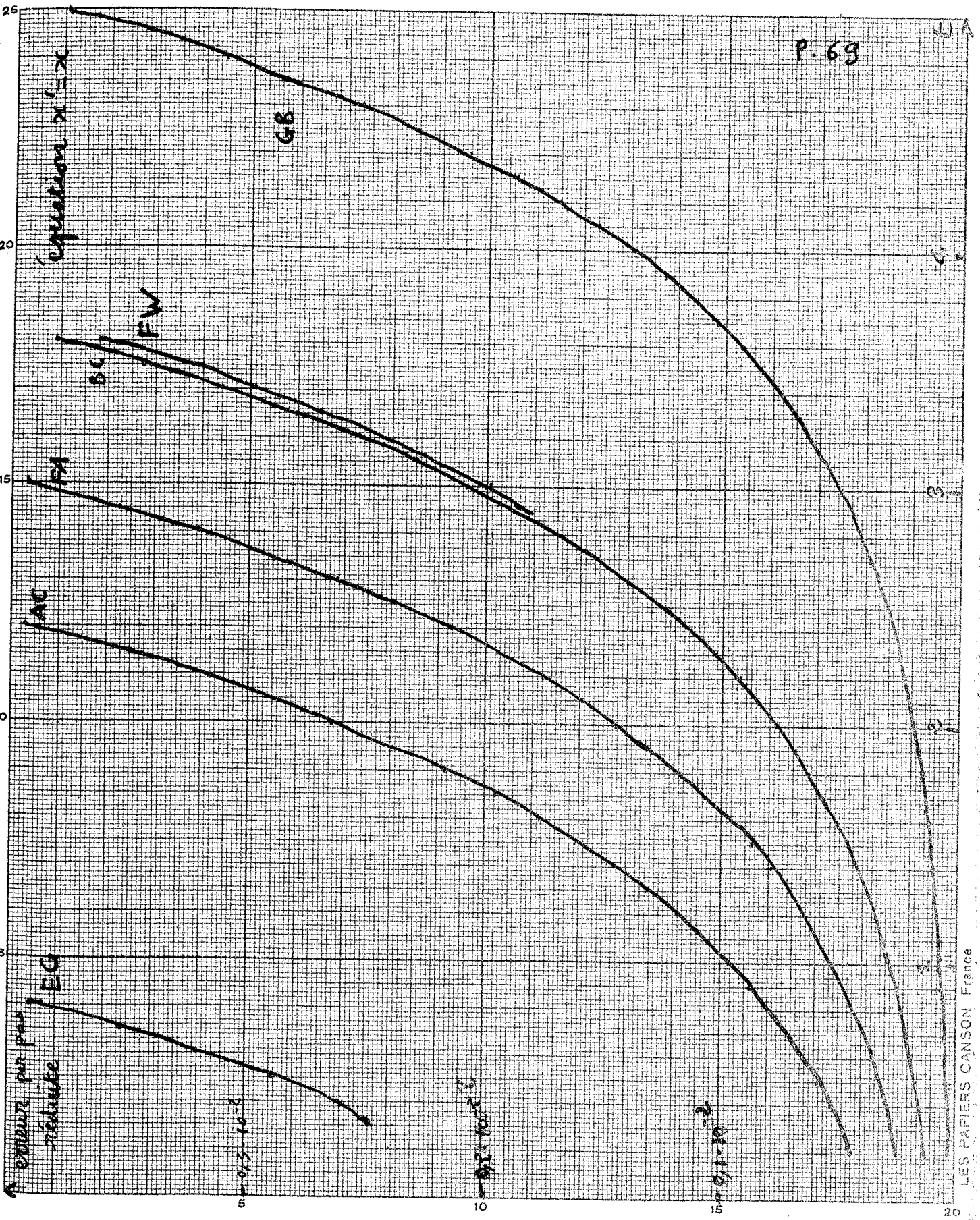
LES BABIES CANYON Franca

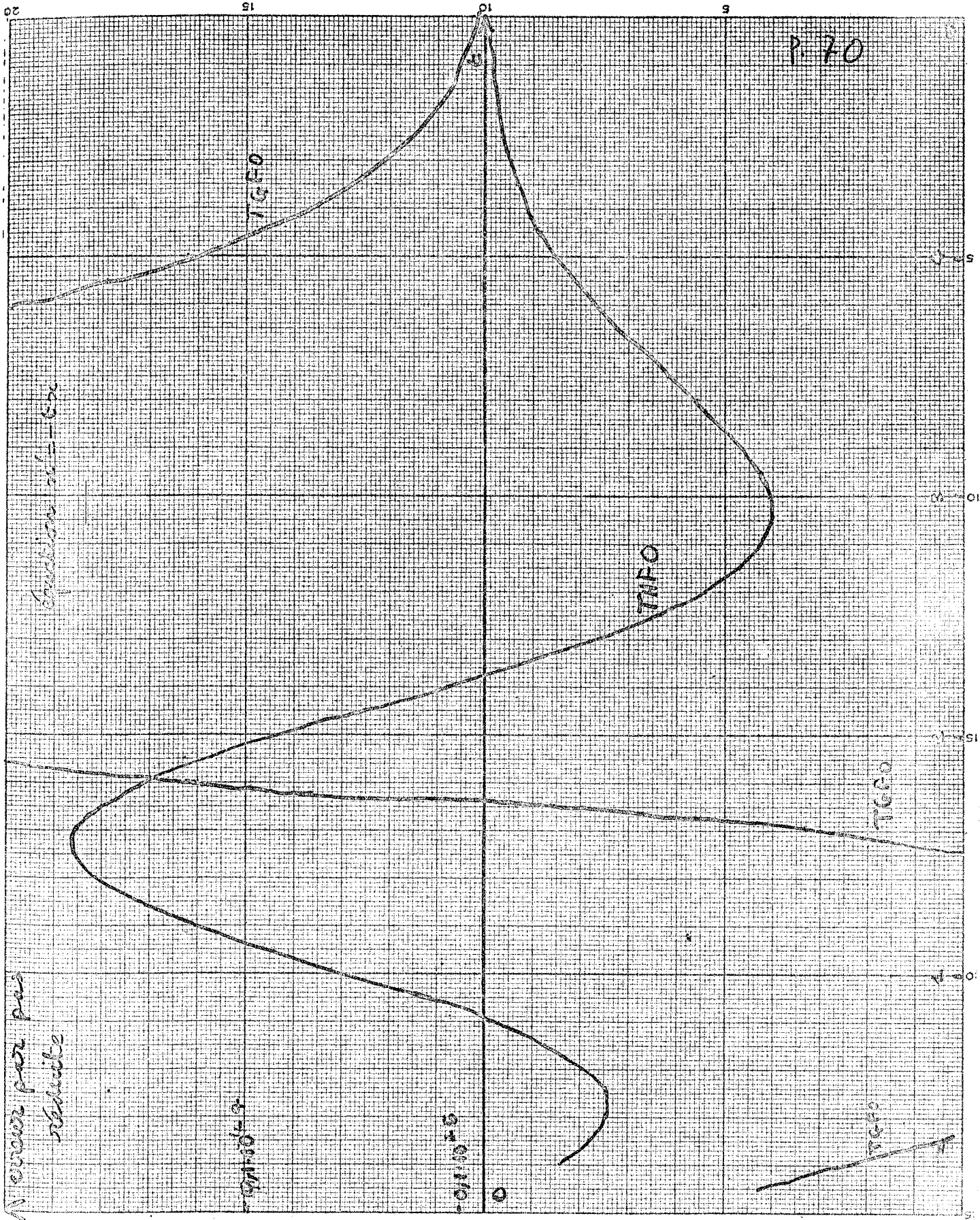
A error per pas
réduite

equation $76' = x - 1,9e^{-0,5x}$









P. 70

N cresce per peso residuo

TIGFO

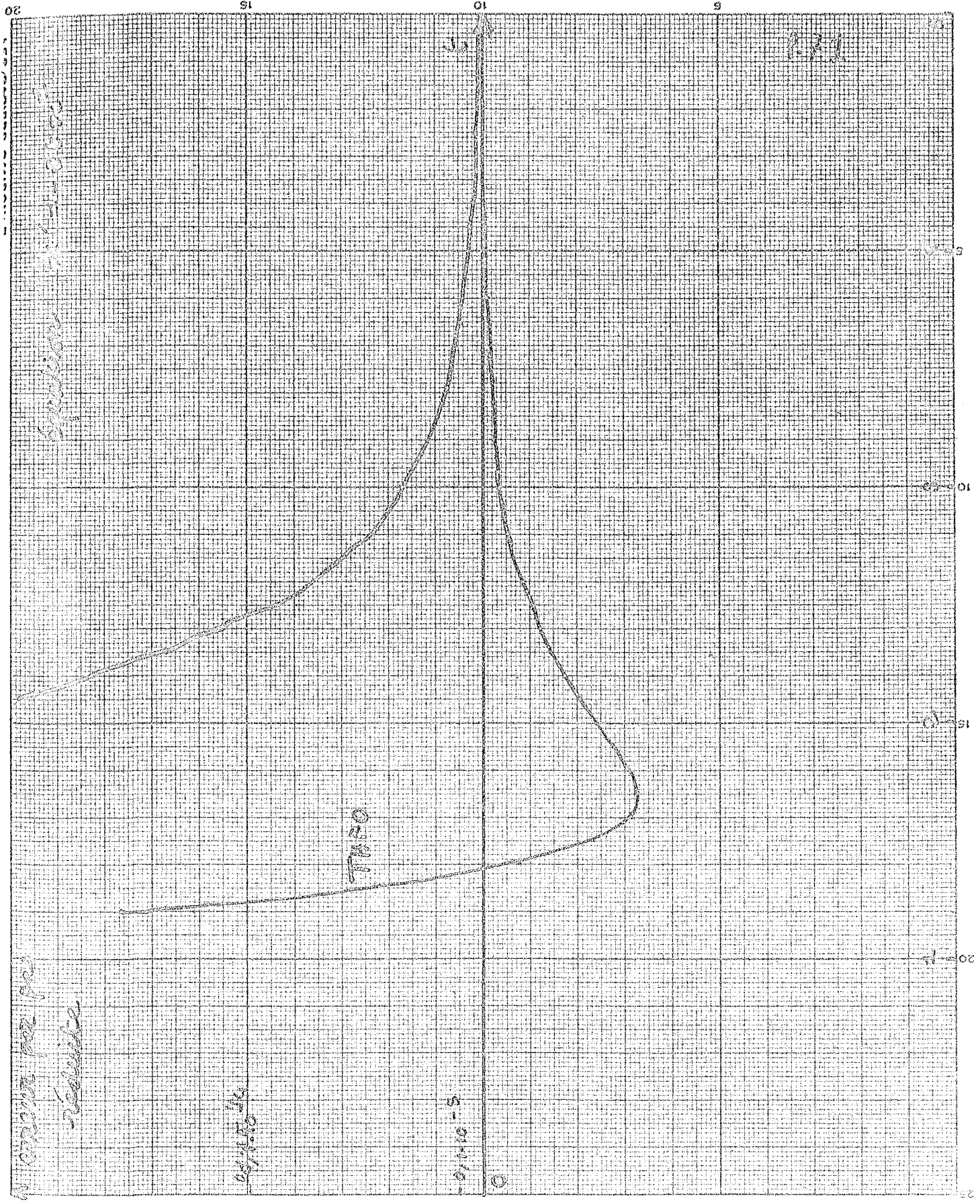
0

TIPO

TIGFO

TIGFO

TIGFO



TRAO

TRAO

0.0002 per 100
Rechnung

0.0002
0.0002 - 5

0.0002

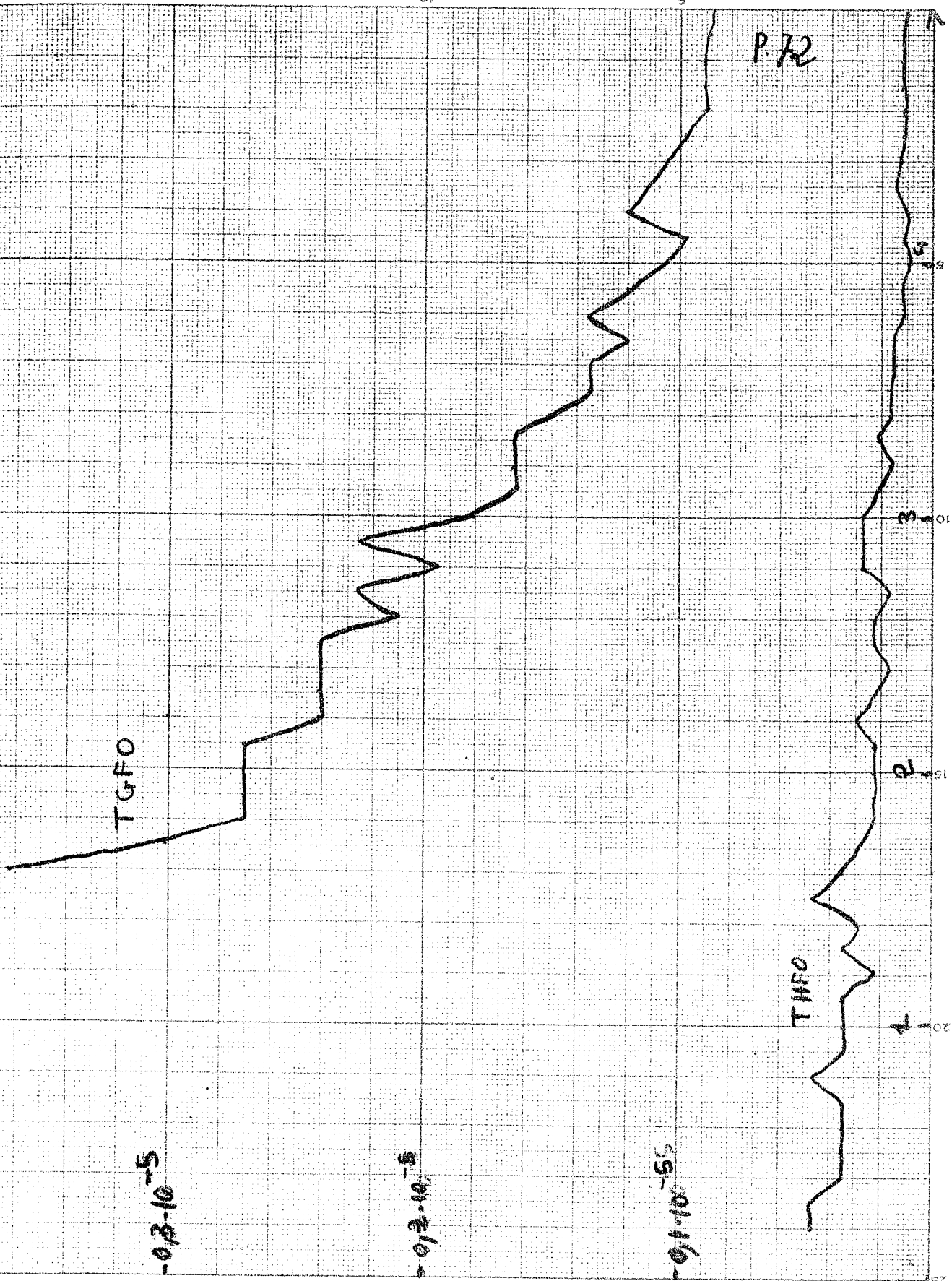
l'erreur par pas
réduite

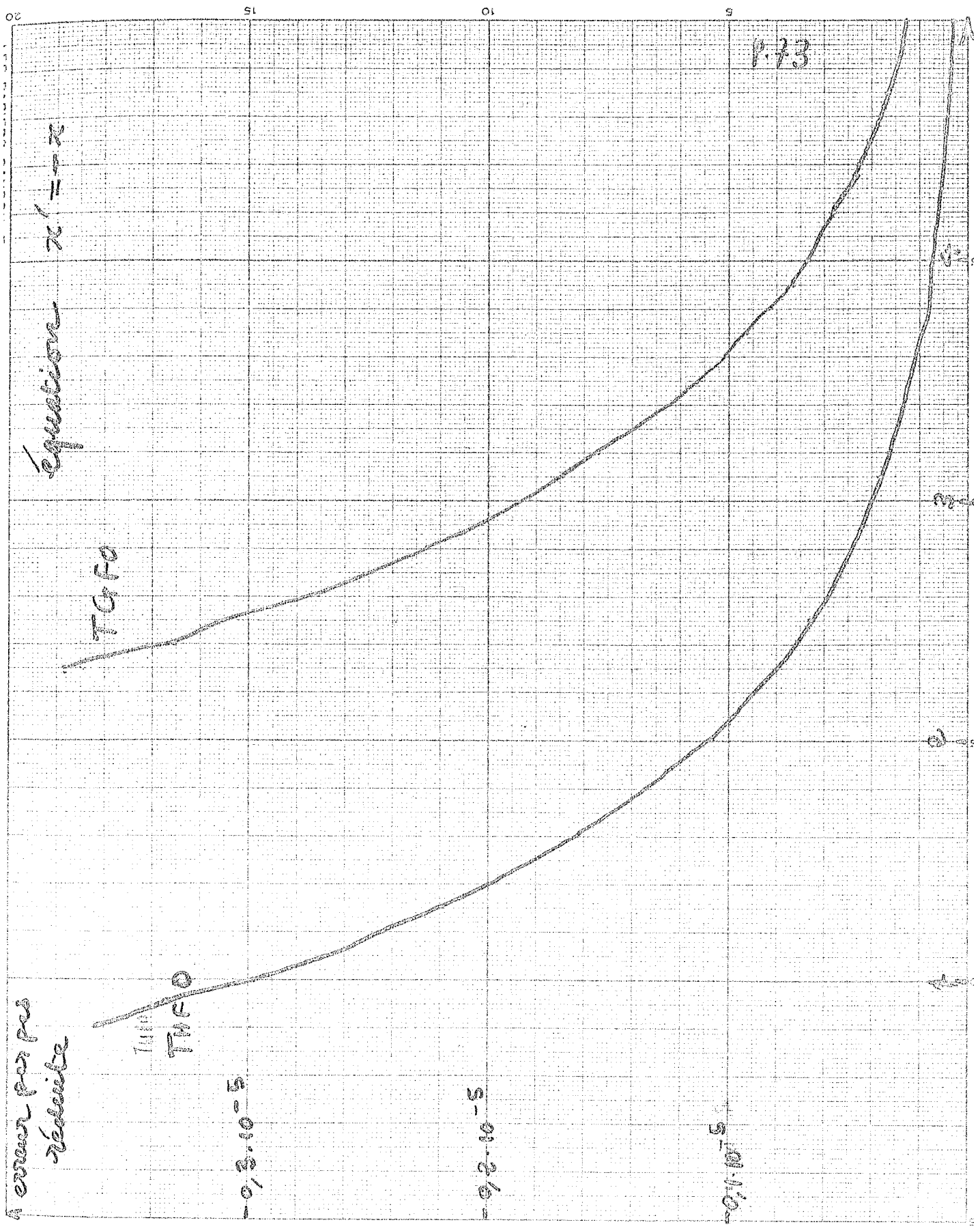
$-0,3 \cdot 10^{-5}$

$-0,2 \cdot 10^{-5}$

$-0,1 \cdot 10^{-5}$

équation $x' = x - 1,5 e^{-0,15x}$





mesure pour $\mu =$
réduite

équation $x^2 = x$

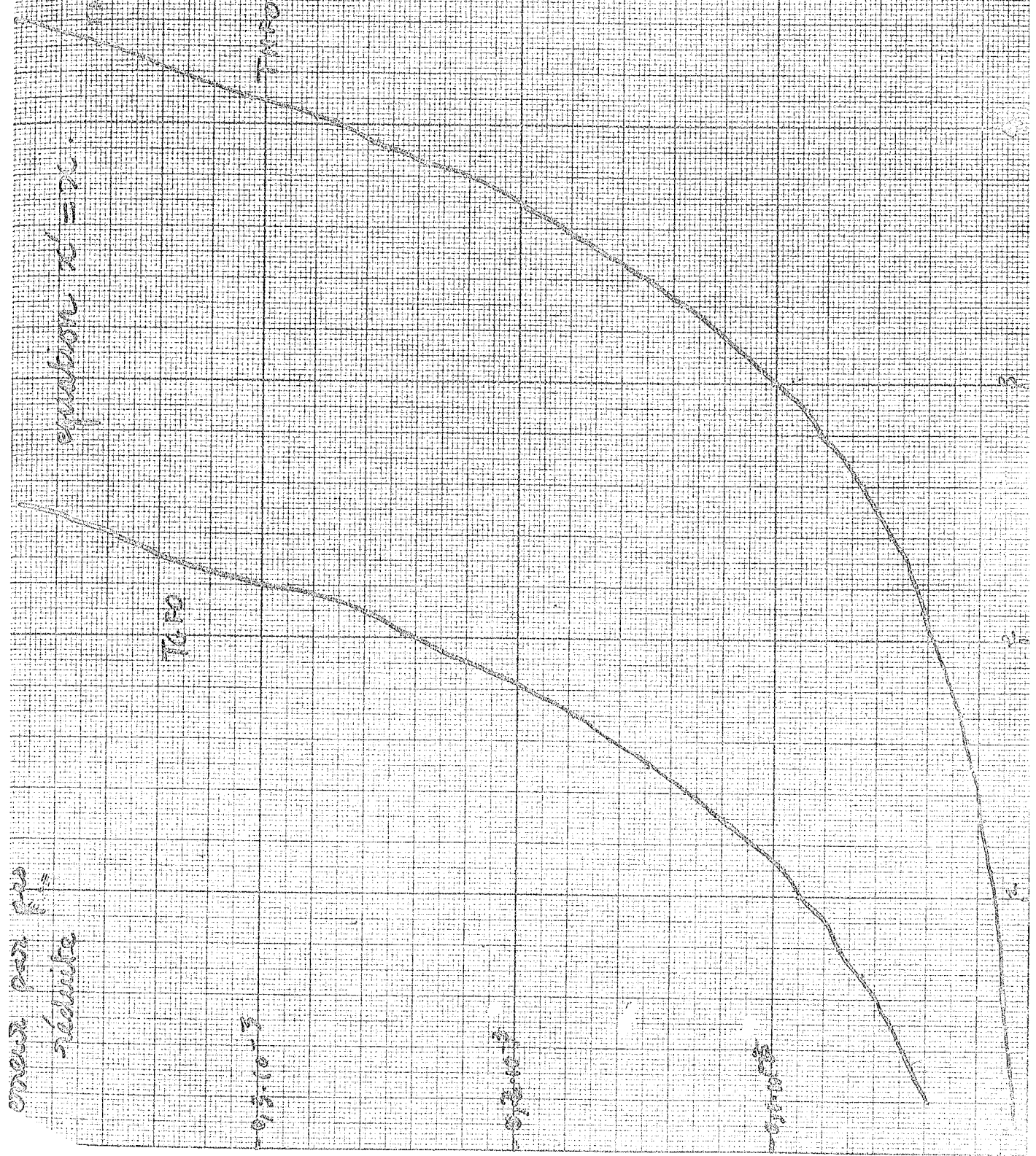
7000

0.5-10-5

0.2-10-5

0.1-10-5

1-100



ESSAIS NUMERIQUES DE STABILITE.

Nous avons essayé de faire apparaître l'instabilité des méthodes pour un pas suffisamment grand.

Il est apparu plusieurs difficultés :

Si nous prenons l'équation $x' = k x (k < 0)$ et que nous utilisons une méthode ayant un grand rayon de stabilité, il faut prendre un pas trop grand et l'erreur de discrétisation masque le phénomène de propagation.

Nous avons essayé de faire croître k (en valeur absolue), mais alors nous obtenons des fonctions solution dont la décroissance est très rapide et qui est souvent plus petite que l'erreur de discrétisation.

Il s'en suit donc que l'instabilité des méthodes ayant un grand rayon de stabilité n'apparaît que dans les cas où celles-ci sont peut intéressantes en raison de leur erreur de discrétisation.

Nous avons pu faire apparaître nettement l'instabilité avec la méthode BL dont le rayon de stabilité est 0,7 : nous avons pris l'équation $y' = -4 y$ et le pas $h=0,2$ on obtient :

t	erreur réelle
0,2	1,4 . 10^{-2}
1,0	-2,0 . 10^{-2}
2,0	3,96 . 10^{-2}
3,0	-7,5 . 10^{-2}
4,0	14 . 10^{-2}
5,0	-27 . 10^{-2}

B I B L I O G R A P H I E

- [1] BECK . Zwei Anwendungen der Obrechoffschen Formeln.
Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik.
Tome 30 (1950) p. 84-93.
- [2] CESCHINO . L'intégration approchée des équations différentielles.
Comptes rendus de l'Académie des Sciences
Tome 243 (1956) p. 1478-79.
- [3] CESCHINO . Une méthode de mise en oeuvre des formules d'Obrechoff pour l'intégration des équations différentielles.
Chiffres tome 2 (1961) p. 101-106.
- [4] COLLATZ . Numerische Behandlung von differential Gleichungen.
Berlin Springer Verlag 1956.
- [5] HERMITE . Oeuvres tome III (1912) p. 438 .
- [6] KEREKES . Comparaison des erreurs par pas dans différentes méthodes de résolution numérique d'équations différentielles avec conditions initiales.
Thèse 3ème cycle Université de Grenoble 1964.

- [7] CESCHINO-KUNTZMANN . Problèmes différentiels de conditions initiales. Paris Dunod 1963.
- [8] LAURENT . Méthodes du type de Runge-Kutta pour des systèmes différentiels de forme particulière.
Thèse 3ème cycle. Grenoble 1961.
- [9] OBRECHKOFF . Neue Quadraturformeln
Abhandlungen der Preussische Akademie für
Wissenschaften und Mathematische Wissenschaften
Kl 4 (1940) p. 1-20.