



**HAL**  
open science

# Application de la programmation dynamique à des problèmes de croissance optimale

Maurice Netter

► **To cite this version:**

Maurice Netter. Application de la programmation dynamique à des problèmes de croissance optimale. Modélisation et simulation. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1965. Français. NNT: . tel-00279841

**HAL Id: tel-00279841**

**<https://theses.hal.science/tel-00279841>**

Submitted on 15 May 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre :

T H E S E

présentée à

LA FACULTE DES SCIENCES DE L'UNIVERSITE DE

GRENOBLE

pour obtenir

LE TITRE DE DOCTEUR DE TROISIEME CYCLE

"Mathématiques Appliquées"

-----

par

Maurice NETTER

-----

"APPLICATION DE LA PROGRAMMATION DYNAMIQUE

A DES PROBLEMES DE CROISSANCE OPTIMALE"

Thèse soutenue le 23 juin 1965

devant la Commission d'Examen :

MM. KUNTZMANN

Président

BARRA

GASTINEL

} Examineurs



N° d'ordre :

T H E S E

présentée à

LA FACULTE DES SCIENCES DE L'UNIVERSITE DE

GRENOBLE

pour obtenir

LE TITRE DE DOCTEUR DE TROISIEME CYCLE

"Mathématiques Appliquées"

-----

par

Maurice NETTER

-----

"APPLICATION DE LA PROGRAMMATION DYNAMIQUE

A DES PROBLEMES DE CROISSANCE OPTIMALE"

Thèse soutenue le 23 juin 1965

devant la Commission d'Examen :

MM. KUNTZMANN

Président

BARRA

GASTINEL

} Examineurs



## LISTE DES PROFESSEURS

-oOo-

DOYENS HONORAIRES

Monsieur FORTRAT P.  
Monsieur MORET L.

DOYEN

Monsieur WEIL Louis

PROFESSEURS TITULAIRES

MM. NEEL L.	Magnétisme et Physique du Solide
HEILMANN R.	Chimie Organique
KRAVTCHENKO J.	Mécanique Rationnelle
CHABAUTY	Calcul Différentiel et intégral
PARDE	Potamologie
BENOIT	Radioélectricité
CHENE	Chimie Papetière
BESSON	Electrochimie
WEIL	Thermodynamique
FELICI	Electrostatique
KUNTZMANN	Mathématiques Appliquées
BARBIER R.	Géologie Appliquée
SANTON	Mécanique des Fluides
OZENDA	Botanique
FALLOT	Physique Industrielle
GALVANI	Mathématiques
MOUSSA	Chimie Nucléaire
TRAYNARD	Chimie
SOUTIF	Physique
CRAYA	Hydrodynamique
REULOS	Théorie des Champs
AYANT	Physique Approfondie
GALLISSOT	Mathématiques Appliquées
Melle LUTZ	Mathématiques
MM. BLAMBERT	Mathématiques
BOUCHEZ	Physique Nucléaire
LLIBOUTRY	Géophysique
MICHEL	Géologie et Minéralogie
BONNIER	Electrochimie
DESSAUX	Physiologie Animale
PILLET	Electrotechnique
DEBELMAS	Géologie
GERBER	Mathématiques
PAUTHENET	Electrotechnique
VAUQUOIS	Mathématiques Appliquées
BUYLE-BODIN	Electronique

KOSZUL	Mathématiques
SILBER	Mécanique des Fluides
DREYFUS	Thermodynamique
VAILLANT	Zoologie
MOUSSIEGT	Electronique
BARBIER J.C.	Physique
KLEIN	Mathématiques
ARNAUD	Chimie
SENGEL	Zoologie
BARJON	Physique Nucléaire
BARNOUD	Bio-Synthèse de la Cellulose

#### PROFESSEURS SANS CHAIRE

Mme KOFLER	Botanique
MM. GIRAUD	Géologie
GIDON	Géologie et Minéralogie
PERRET	Servomécanismes
Mme BARBIER	Electrochimie
Mme SOUTIF	Physique
MM. COHEN	Electrotechnique
BRISSONNEAU	Physique
DEPASSEL	Mécanique
GASTINEL	Mathématiques Appliquées
LACAZE	Thermodynamique
GLENAT	Chimie
DUCROS	Minéralogie et Cristallographie
ANGLES D'AURIAC	Mécanique des Fluides
DEGRANGE	Zoologie
BARRA	Mathématiques Appliquées
COUMES	Electronique
GAGNAIRE	Chimie Papetière
PERRIAUX	Géologie
RASSAT	Chimie Systématique
ROBERT	Chimie Papetière
PEBAY-PEROULA	Physique

#### PROFESSEURS ASSOCIES

MM. WAGNER	Botanique
NAPP-ZINN	Botanique

#### MAITRES DE CONFERENCES

MM. BIAREZ	Mécanique Physique
DODU	Mécanique des Fluides
HACQUES	Calcul Numérique

	LANCIA	Physique Automatique
Mme	KAHANE	Physique
MM.	POLOUJADOFF	Electrotechnique
	DEPOMMIER	Physique Nucléaire
	DEPORTES	Chimie
Mme	BOUCHE	Mathématiques
MM.	DOLIQUE	Electronique
	SARROT-REYNAULD	Géologie
	CAUQUIS	Chimie Générale
	BONNET	Physique Expérimentale
Mme	BONNIER	Chimie
MM.	KAHANE	Physique Générale
	COLOBERT	Physiologie Animale
	PAYAN	Mathématiques
	BRIERE	Physique Expérimentale
	VALENTIN	Physique Générale
	LAJZEROWICZ	Physique Générale
	DESRE	Métallurgie
	BONNETAIN	Chimie Minérale

MAITRE DE CONFERENCE ASSOCIE

RADELLI	Géologie
---------	----------





Je tiens à exprimer ma profonde gratitude :  
à Monsieur le Professeur KUNTZMANN, directeur de l'Institut de  
Mathématiques Appliquées de l'Université de Grenoble,  
qui a bien voulu me faire l'honneur de présider le  
jury ;

à Monsieur le Professeur BARRA, qui m'a communiqué l'idée de ba-  
se et a dirigé l'élaboration de ce travail, tout en  
m'aidant par ses nombreuses critiques et suggestions,  
ce dont je lui suis particulièrement reconnaissant.

à Monsieur le Professeur GASTINEL, qui a bien voulu faire par-  
tie du jury de ma thèse.

Je remercie également Mesdemoiselles  
TOURNOUD et MEUNIER, ainsi que Monsieur MOUNET pour le soin ap-  
porté à la présentation de cette thèse.



## I N T R O D U C T I O N

1.) Dans cette thèse, nous étudions certains modèles mathématiques de croissance économique optimale, en vue d'établir des algorithmes de calcul.

Nous sommes partis de deux modèles :

- celui de Arrow [1] qui se propose de déterminer la croissance optimale d'une très grande firme ou d'un monopole : par hypothèse la demande et les coûts sont stationnaires et connus et la revente du matériel est impossible.

- celui de Karlin, Beckmann et Arrow [2], qui permet de déterminer la croissance d'une entreprise fabriquant un produit ne pouvant pas être stocké, connaissant à l'avance l'évolution de la demande, les coûts étant fixes et la revente du matériel impossible.

Malgré les profondes analogies que présentent l'origine, la formulation mathématique et la solution de ces deux problèmes, les méthodes théoriques employées par ces auteurs pour établir les algorithmes n'ont rien en commun ; bien que très ingénieuses, ces méthodes ne sont guère généralisables. C'est pourquoi nous avons tenté d'élaborer des méthodes et un modèle plus généraux.

2.) A partir de la synthèse des considérations économiques de [1] et [2] (Cf § 1.1.), nous élaborons dans le chapitre I le formalisme de ce modèle plus général. Il s'agit de maximiser sous certaines contraintes une fonctionnelle d'un certain type définie par une intégrale. Ce problème fondamental se subdivise en deux versions,

selon la possibilité ou l'impossibilité de discontinuités dans la croissance de l'équipement considéré.

A. Lorsque la fonction inconnue  $K$  (niveau d'équipement) est assujettie à être continue, la fonctionnelle à maximiser est de la forme :

$$\int_0^T \left[ f(t, K(t)) + c(t) K'(t) \right] dt$$

les contraintes sont :

$$\begin{cases} K(0) = k_0 & (\text{éventuellement, } K(T) = k_T) \\ 0 \leq K'(t) + \delta K(t) \leq M & (\text{lorsque } K \text{ est dérivable au point } t). \end{cases}$$

( $f$ ,  $c$ ,  $k_0$ ,  $k_T$ , sont des données).

B. Lorsque la fonction inconnue  $K$  peut présenter des sauts, la fonctionnelle à maximiser est de la forme :

$$\int_0^T g(t, K(t)) dt + c(T)K(T)$$

les contraintes sont :

$$\begin{cases} K(0) = k_0 \\ K(t-0) = K(t) \leq K(t+0) \\ 0 \leq K'(t) + \delta K(t) & (\text{lorsque } K \text{ est dérivable au point } t). \end{cases}$$

Nous démontrons (§ 1.3.) que la solution d'un problème de type B peut se déduire par passage à la limite des solutions d'une suite de problèmes de type A.

3.) Ce problème ne peut être résolu par les méthodes ha

bituelles du calcul des variations, car elles supposent des conditions de régularité que ne remplissent pas souvent les fonctions d'origine économique : la fonction inconnue  $K$  peut être discontinue, les fonctions définissant la fonctionnelle ne sont pas nécessairement différentiables en tout point ; de plus, les contraintes ne sont pas d'un type classique en calcul des variations.

Ce modèle se rattache à la programmation dynamique déterministe (les données étant supposées certaines) de type continu (car la croissance de l'entreprise est définie par une fonction définie sur un intervalle  $[0, T]$ ). Il est courant de classer les méthodes de programmation dynamique en deux catégories :

. D'une part, celles qui sont basées sur la condition de Bellman (Cf [8]), d'après laquelle tout sous-programme d'un programme optimal est optimal (dans un certain sens, qui dépend du problème considéré) ; ces méthodes s'appliquent surtout aux modèles discrets.

. D'autre part, celles qui consistent à résoudre un système différentiel exprimant la condition de Pontryagin (Cf [3]) ; ces méthodes sont plus appropriées aux modèles continus.

4.) Dans le problème de Arrow, la fonctionnelle à maximiser est de la forme :

$$\int_0^{+\infty} P(K(t)) e^{-\alpha t} dt$$

La démonstration de Arrow repose sur une adaptation de la condition de Bellman qui utilise les particularités de cette fonctionnelle. Dans ce chapitre II, nous approfondissons ce problème dans les perspectives définies par le modèle élaboré au chapitre I : refonte de la démonstration de Arrow (relative à la version B, seule étudiée dans [1]), extension de cette démonstration à la version A, étude du nombre des optimales et de certains points laissés dans l'ombre

dans [1], établissement d'algorithmes simplifiés, déduction des résultats relatifs à la version B à partir des résultats relatifs à la version A, interprétation économique des résultats obtenus.

5.) Dans le chapitre III, nous étudions comment on peut appliquer la condition de Pontryagin aux problèmes de type A lorsque  $f$  et  $c$  sont continûment différentiables : on obtient un système différentiel que l'on peut qualifier de "dégénéré" (car il est de la forme  $(K', \psi') = \varphi(K, \psi)$ , où  $\varphi$  est une fonction multivoque). On ne peut pas utiliser les méthodes classiques pour résoudre ce système, car non seulement  $\varphi$  est éventuellement multivoque, mais elle n'est pas différentiable partout où elle est définie univoquement. Nous ne résolvons donc pas ce système dans le cas général, nous contentant de remarquer que les solutions sont formées de 3 types d'arcs (§ 3.1.). Nous relierons la condition de Pontryagin à la notion de profit marginal.

Nous résolvons le système dans le cas du problème de Arrow: la démonstration obtenue est plus rapide que celle de Arrow, mais moins générale.

6.) En introduisant un multiplicateur de Lagrange, nous obtenons dans le cas où  $f(t, k)$  est concave en  $k$  un système analogue à celui de Pontryagin (Cf § 3.3.). Cela permet d'étudier des cas où  $f(t, k)$  est concave en  $k$ , mais non continûment différentiable (comme le problème de Karlin-Beckmann), alors que le théorème de Pontryagin ne s'applique pas. Cela permet de conclure que lorsque  $f(t, k)$  est concave en  $k$  et continûment différentiable, la condition de Pontryagin est non seulement nécessaire, mais aussi suffisante (§ 3.4.).

Dans le chapitre IV, nous utilisons la méthode du multiplicateur de Lagrange, en nous inspirant de [4], pour résoudre le problème de Karlin-Beckmann : nous retrouvons ainsi l'algorithme de

[2], relatif au cas où l'équipement final n'est pas fixé. Puis nous généralisons ces résultats au problème de type A, dans le cas où  $f(t,k)$  est concave en  $k$ .

7.) Les algorithmes proposés ont été testés (à l'exception de celui de Arrow, version A) sur l'ordinateur 7044 du laboratoire de calcul de l'Université de Grenoble (Cf [5] et [9] ), dans le cadre d'un contrat de la D G R S. T. A titre d'exemple, nous détaillons dans le chapitre V les programmes en ALGOL et les résultats numériques relatifs au problème de Arrow; la lecture de ce chapitre peut se faire sans connaître préalablement le contenu des chapitres précédents.





CHAPITRE I

-----

LE MODELE GENERAL

-----

### 1.1.- ORIGINE ECONOMIQUE DU PROBLEME.

1.1.1.- Considérons une firme ou une administration possédant à la date  $t$  un équipement de valeur  $K(t)$ . Etant donnée la signification concrète de cette fonction, nous admettrons qu'elle est bornée, de variation bornée et continue à gauche.

Plaçons-nous dans l'intervalle de temps  $[0, T]$  ( $T$  pouvant être infini).

Supposons que le "bénéfice brut instantané" (prix de vente total des marchandises vendues, moins le prix de revient total des marchandises produites) soit une fonction  $\pi$  du temps  $t$  et de  $K(t)$ . Ce bénéfice brut est donc prévu de façon certaine et continue: la demande et les coûts sont donc censés être connus à l'avance avec certitude. Nous ferons sur  $\pi$  les hypothèses suivantes, en vue d'assurer l'intégralité de  $\pi(t, K(t))$  :

- . l'ensemble des points de discontinuité de  $\pi$  est au plus dénombrable.
- . Pour tout  $l$  positif, il existe une fonction  $\bar{\pi}_l(t)$  intégrable sur  $[0, T]$  telle que :
 
$$\forall t \in [0, T] \quad 0 \leq k \leq 1 \implies \bar{\pi}_l(t) \geq |\pi(t, k)|$$

Cet équipement s'use : supposons qu'il se déprécie à un taux constant  $\delta$  ; autrement dit, la dépréciation entre les dates  $t_0$  et  $t_1$  ( $t_0 < t_1$ ) d'un équipement de valeur  $k$  à la date  $t_0$  (somme qu'il faut consacrer durant cette période au renouvellement pour maintenir le matériel au même potentiel de production) est :

$$k (1 - e^{-\delta(t_1 - t_0)})$$

Soit  $J(t)$  l'investissement total entre les dates 0 et  $t$  :  $J(t)$  est la somme de l'investissement net (somme consacrée à l'achat de matériel nouveau) et de la dépréciation durant l'intervalle  $[0, t]$ :

$$J(t) = K(t) - K(0) + \int_0^t \delta K(u) \, du$$

Choisissons un taux d'actualisation  $\alpha$ , égal, par exemple, au taux d'escompte. Le profit net, actualisé relativement à la date 0, que rapporte durant cet intervalle le programme d'investissement défini par la fonction  $J$  est :

$$V = \int_0^T \pi(t, K(t)) e^{-\alpha t} \, dt - \int_0^T e^{-\alpha t} \, dJ(t)$$

(Ces deux intégrales existent, par suite des hypothèses faites ci-dessus sur  $K$  et  $\pi$ ).

On peut exprimer le profit net durant  $[0, T]$  en fonction de  $K$  seulement,  $K$  étant continue à gauche :

$$\begin{aligned} \int_0^T e^{-\alpha t} \, dJ(t) &= \int_0^T \delta K(t) e^{-\alpha t} \, dt + \left[ e^{-\alpha t} (K(t) - K(0)) \right]_{t=0}^{t=T+C} \\ &+ \int_0^T \alpha e^{-\alpha t} (K(t) - K(0)) \, dt \end{aligned}$$

si on suppose que  $K(T+0) = K(T)$ .

(Cette intégration par parties est licite par suite de la continuité à gauche de  $K$ ).

$$\text{Posons : } P(t, k) = \pi(t, k) - (\alpha + \delta)k$$

La fonction  $P(t, k)$  peut s'interpréter comme étant le profit instantané net (compte tenu de l'actualisation et de la dépré-

ciation) que rapporte à la date  $t$  en équipement de valeur  $k$ .

Il résulte de ce qui précède que :

$$\begin{aligned} V &= \int_0^T P(t, K(t)) e^{-\alpha t} dt + e^{-\alpha T} K(T) + K(0) \\ &= W(K) + K(0) \end{aligned}$$

Dans la suite, nous supposerons que la valeur initiale de l'équipement est donnée ( $K(0) = k_0$ ) et, éventuellement, sa valeur finale ( $K(T) = k_T$ ).

Nous admettrons, pour ne pas rendre le problème trop complexe, que l'on ne peut pas revendre le matériel. C'est là une hypothèse extrême, car il est possible, en général, de le revendre à perte ; cependant, elle est adaptée au cas d'un monopole (pas d'acheteurs concurrents) ou d'une branche d'industrie en économie fermée. Cela implique que  $J$  est croissante au sens large ; ( $J$  peut être croissante, sans l'être strictement : si on n'achète rien et si on ne remplace pas ce qui est hors d'usage durant  $[t_1, t_2]$ ,  $J$  est constante dans cet intervalle).

Nous ferons deux sortes de suppositions sur les possibilités d'investir :

#### A. Le rythme d'investissement est majoré.

Cette condition est convenable, dans le cas d'un monopole ou d'une économie fermée, dans une période où il n'y a pas d'innovations techniques importantes : alors, le taux d'investissement est borné par le potentiel de production des industries fabriquant l'équipement considéré. Pour simplifier, on supposera ce

potentiel (exprimé en unité monétaire) constant. Autrement dit :

$$\forall t \quad \forall \Delta t > 0 \quad \frac{J(t + \Delta t) - J(t)}{\Delta t} \leq M$$

Cela implique que  $J$  (donc  $K$ ) est absolument continue, puisque :

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sup \left\{ J(t + \Delta t) - J(t) \mid t \in [0, T] \right\} = 0$$

$$(\text{En effet, } 0 \leq \sup \left\{ J(t + \Delta t) - J(t) \mid t \in [0, T] \right\} \leq M \Delta t).$$

Par suite,  $K$  et  $J$  sont presque partout dérivables, et :

$$\int_0^T e^{-\alpha t} dJ(t) = \int_0^T e^{-\alpha t} [K'(t) + \delta K(t)] dt$$

$$\text{donc : } W(K) = \int_0^T \left[ \pi(t, K(t)) - K'(t) - \delta K(t) \right] e^{-\alpha t} dt$$

D'autre part, lorsque  $K$  est dérivable au point  $t$  :

$$0 \leq K'(t) + \delta K(t) \leq M$$

B. Le rythme d'investissement n'est pas majoré : alors,  $J$  et donc  $K$  peuvent avoir des sauts positifs.

Nous nous proposons, bien entendu, de maximiser  $W(K)$  sous les contraintes ci-dessus.

1.1.2. - Un cas "stationnaire" : le problème de Arrow.

Arrow étudie dans [1] un cas particulier du problème énoncé ci-dessus.

Il suppose que le "bénéfice brut instantané",  $\pi$ , est indépendant du temps ; cela signifie concrètement que la demande et le bénéfice brut par unité de marchandise produite sont constants durant la période considérée. De plus, le taux d'actualisation  $\alpha$  est choisi constant. Pour ces raisons, nous qualifierons ce problème de "stationnaire".

On se place dans l'intervalle de temps  $[0, +\infty]$ . Par suite de ce qui précède :

$$W(K) = \int_0^{+\infty} P(K(t)) e^{-\alpha t} dt + e^{-\infty} K(\infty)$$

Comme  $K$  est borné :

$$W(K) = \int_0^{+\infty} P(K(t)) e^{-\alpha t} dt$$

Nous étudierons le problème de Arrow au chapitre 2.

### 1.1.3. - Autre cas particulier : le problème de Karlin, Beckmann et

Arrow.

Arrow, Beckmann et Karlin étudient dans [2] un problème particulièrement intéressant, entrant dans le formalisme ci-dessus.

Désignons par  $r(t)$  la demande à la date  $t$ , exprimée en unité monétaire, le prix du produit étant supposé constant.

### 1.2.1. - "Programmes" admissibles.

Soient  $T$  un nombre réel donné, positif ou infini positif, et  $M$  un réel positif donné. Appelons  $\mathcal{K}_M^p(k_0)$  l'ensemble des applications positives ou nulles  $K$  de  $[0, T]$  dans  $\mathbb{R}$  telles que :

A 1 :  $K(0) = k_0$

A 2 :  $K$  est continue

A 3 :  $K$  est continument dérivable par morceaux ; autrement dit, l'ensemble des points de non-dérivabilité de  $K'$  est fini et de plus,  $K$  a une dérivée à droite et à gauche en tout point.

A 4 :  $\delta$  étant un nombre réel positif ou nul donné, si  $K$  est dérivable au point  $t \in ]0, T[$ , on a :

$0 \leq K'(t) + \delta K(t) \leq M$  ; sinon, les dérivées à droite et à gauche satisfont cette même contrainte.

On appellera programme admissible pour une valeur donnée de  $M$  tout élément de  $\mathcal{K}_M^p(k_0)$ .

Remarque 1 : On ajoutera souvent, si  $T < +\infty$ , une contrainte A 6 de la forme :  $K(T) = k_T$

Remarque 2 : A 4 peut se mettre sous forme intégrale : voir § 1.4.4.

Remarque 3 : On vérifie immédiatement que tout programme admissible est borné, de variation bornée.

### 1.2.2. - Critère économique :

Soient :

H une application de  $[0, T] \times \mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , dont l'ensemble des points de discontinuité est au plus dénombrable, et telle (si  $T = +\infty$ ) que pour tout  $l$  positif, il existe une fonction numérique  $\bar{H}_l$  définie sur  $[0, T]$ ,



Supposons que le potentiel de production exprimé en unité monétaire soit égal à  $cK(t)$ , c'est à dire proportionnel à la valeur de l'équipement ; de plus, le produit n'est pas stockable. A la date  $t$ , la firme a donc intérêt à avoir la production instantanée:

$$\inf \left\{ r(t), cK(t) \right\}$$

Par conséquent, si  $\beta$  est le bénéfice brut par unité de marchandise vendue :

$$\pi(t, k) = \beta \inf \left\{ r(t), ck \right\}$$

On démontre au § 1.4. que l'on peut se ramener au cas où  $\delta=0$ .

$$V(J) = \int_0^T \beta \inf \left\{ r(t), cK(t) \right\} e^{-\alpha t} dt - \int_0^T e^{-\alpha t} d(K(t) - k_0)$$

Lorsque le taux d'investissement est majoré :

$$W(K) = \int_0^T \left[ \beta \inf \left\{ r(t), cK(t) \right\} - K'(t) \right] e^{-\alpha t} dt$$

## 1.2. - FORMULATION MATHÉMATIQUE ( CAS OU LE RYTHME D'INVESTISSEMENT EST MAJORE ).

Dans ce paragraphe et le suivant, nous formulons mathématiquement le problème dont l'origine économique est indiquée au § 1.1., en ajoutant quelques conditions nécessaires pour le résoudre.

intégrable, ayant la propriété suivante :

$$\forall t \in [0, T] \quad 0 \leq k \leq 1 \implies |H(t, k)| < \bar{H}_1(t)$$

C une application dérivable, négative ou nulle, croissante, et (si  $T = +\infty$ ) intégrable de  $[0, T]$  dans  $\mathbb{R}$ .

Soit  $W$  l'application de  $\mathcal{K}_M^c(k_0)$  dans  $\mathbb{R}$  ainsi définie:

$$W(K) = \int_0^T \left[ H(t, K(t)) + c(t) \left[ K'(t) + \delta K(t) \right] \right] dt$$

Remarque :  $W(K)$  existe. En effet, l'ensemble des points de discontinuité de :

$$H(t, K(t)) + c(t) \left[ K'(t) + \delta K(t) \right]$$

est au plus dénombrable (contraintes A2, A3, hypothèses sur H et C) ; cette fonction est donc mesurable. Comme de plus sa valeur absolue est uniformément majorée par :

$$\bar{H}_1(t) - c(t) M$$

qui est intégrable, elle est intégrable (1 est un majorant de  $K(t)$  dans  $[0, T]$ ).

### 1.2.3. - Problème.

On se propose de déterminer, s'ils existent, les programmes admissibles  $\tilde{K}$  tels que :

$$\underline{W(\tilde{K})} = \sup \left\{ \underline{W(K)} \mid K \in \mathcal{K}_M^c(k_0) \right\}$$

Même définition si l'état final  $K(T)$  est fixé.

On appellera "optimales de  $\mathcal{H}_M(k_0)$ " de telles fonctions.

#### 1.2.4. - Exemples :

Montrons que le problème économique exposé au § 1.1. correspond bien à la formulation mathématique ci-dessus. Posons :

$$\begin{cases} H(t, k) = \pi(t, k) e^{-\alpha t} \\ c(t) = -e^{-\alpha t} \end{cases}$$

On vérifie qu'avec cette convention, les expressions de  $W(K)$ , dans le cas A ( $M < +\infty$ ) sont identiques et que les contraintes exprimées au § 1.2. sont un peu plus strictes que celles du § 1.1.

Dans le problème de Arrow :

$$\begin{cases} H(t, k) = P(k) e^{-\alpha t} \\ c(t) = 0 \end{cases}$$

Dans le problème de Karlin :

$$\begin{cases} H(t, k) = \beta \inf \{ r(t), cK(t) \} e^{-\alpha t} \\ c(t) = -e^{-\alpha t} \end{cases} \quad \delta=0$$

#### 1.2.5. - Relation avec le problème de Pontryagin :

Si  $H, \frac{\partial H}{\partial t}, \frac{\partial H}{\partial K}$ , sont définies et continues sur  $[0, T] \times \mathbb{R}$ ,

$c'$  définie et continue sur  $[0, T]$ , ce problème est un cas particulier de celui de Pontryagin. Une version de celui-ci peut en effet s'énoncer ainsi ((f [3])) : maximiser l'intégrale

$$\int_0^T f(t, x(t), u(t)) dt$$

sous les contraintes :

$$\left\{ \begin{array}{l} x(0) = x_0 \\ x'(t) = g(t, x(t), u(t)) \\ u \text{ continue par morceaux} \\ u(t) \in U \quad (U \text{ étant un sous-ensemble de } \mathbb{R}) \end{array} \right.$$

( On suppose que  $f, g, \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial t}, \frac{\partial g}{\partial x}$ , sont définies et continues sur  $[0, T] \times \mathbb{R} \times \bar{U}$  . )

Ici :  $f$  est "linéaire" par rapport à  $u$   
 $g$  est linéaire en  $x$ , et  $u$ , et indépendante de  $t$   
 $V$  est un intervalle fermé de  $\mathbb{R}$

Nous verrons que l'on peut lever certaines conditions de continue différentiabilité en employant d'une manière particulière la méthode des multiplicateurs de Lagrange.

### 1.3. - FORMULATION MATHÉMATIQUE (CAS OU LE RYTHME D'INVESTISSEMENT N'EST PAS MAJORE).

#### 1.3.1. "Programmes" admissibles.

Soit  $T$  un nombre réel donné positif, ou infini-positif.

Appelons  $\mathcal{H}_\infty(k_0)$  l'ensemble des applications  $K$  bornées, positives ou nulles de  $[0, T]$  dans  $\mathbb{R}$  satisfaisant les contraintes

B1 et B3 (par définition identiques à A1 et A3), et les contraintes:

B2 : Les discontinuités de K sont en nombre fini et de première espèce ; de plus, K est continue à gauche, et :

$$\forall t \in [0, t[ \quad K(t) \leq K(t + 0)$$

B4 :  $\delta$  étant un nombre réel positif ou nul donné, si K est dérivable au point

$$t \in ]0, T[ \quad \text{alors :}$$

$$0 \leq K'(t) + \delta K(t)$$

B5 :  $K'(t) + \delta K(t)$  est uniformément borné sur l'ensemble des points de dérivabilité de K.

On appellera "programme admissible" tout élément de  $\mathcal{H}_\infty(k_0)$

Remarque 1 : on ajoutera souvent, si  $T < +\infty$ , une contrainte B6 de la forme :  $K(T) = k_T$

Remarque 2 : B4 peut se mettre sous forme intégrale : voir § 1.4.4.

1.3.2. Approximation des programmes de  $\mathcal{H}_\infty(k_0)$  par des programmes de  $\mathcal{H}_M(k_0)$  ( $M < +\infty$ ).

Les méthodes de Pontryagin et des multiplicateurs de Lagrange étant inapplicables au cas où  $M = +\infty$ , nous aurons besoin dans la suite d'approximer tout élément K de  $\mathcal{H}_\infty(k_0)$  par un programme  $K_M$  de  $\mathcal{H}_M(k_0)$  ( $M < +\infty$ ).

Pour cela, remarquons que si  $\bar{K}$  est une fonction numérique absolument continue définie sur  $[0, T]$  on a :

$$\bar{K}'(t) + \delta \bar{K}(t) \leq M \iff [M - \bar{K}'(t) - \delta \bar{K}(t)] e^{\delta t} = \frac{d}{dt} \left( \left[ \frac{M}{\delta} - \bar{K}(t) \right] e^{\delta t} \right) \geq 0$$

(si  $\delta > 0$ )

Cela signifie que  $\left[ \frac{M}{\delta} - \bar{K}(t) \right] e^{\delta t}$  (ou, si  $\delta = 0$ ,  $Mt - \bar{K}(t)$ ) est une fonction croissante de  $t$ .

C'est pourquoi nous choisirons  $K_M$  de façon que  $\left[ \frac{M}{\delta} - K_M(t) \right] e^{\delta t}$  soit la "plus petite" fonction croissante de  $t$  supérieure ou égale à  $\left[ \frac{M}{\delta} - K(t) \right] e^{\delta t}$  (ou si  $\delta = 0$ , de façon que  $Mt - K_M(t)$  soit la "plus petite" fonction croissante supérieure ou égale à  $Mt - K(t)$ ):

$$\left. \begin{array}{l} \text{si } \delta > 0 : \left[ \frac{M}{\delta} - K_M(t) \right] e^{\delta t} = \sup \left\{ \left[ \frac{M}{\delta} - K(u) \right] e^{\delta u} \mid 0 \leq u \leq t \right\} \\ \text{si } \delta = 0 : Mt - K_M(t) = \sup \left\{ Mt - K(u) \mid 0 \leq u \leq t \right\} \end{array} \right\}$$

Lemme d'approximation 1

Pour tout programme  $K$  de  $\mathcal{H}_\infty(k_0)$  :

(a) Il existe un nombre  $N$  tel que :

$$\underline{n > N \implies K_n \in \mathcal{H}_n(k_0)}$$

(b) La suite  $(K_n)$  ( $n$  entier positif) converge ponctuellement vers  $K$ .

Démonstration : soit  $K$  un programme donné de  $\mathcal{H}_\infty(k_0)$ . Posons :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{si } \delta > 0 \\ \text{si } \delta = 0 \end{array} \right. \quad L_n(t) = \left[ \frac{n}{\delta} - K(t) \right] e^{\delta t}$$

$$L_n(t) = nt - K(t)$$

$$L_n^*(t) = \sup \left\{ L_n(u) \mid 0 \leq u \leq t \right\}$$

On vérifie immédiatement que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{si } \delta > 0 \\ \text{si } \delta = 0 \end{array} \right. \quad K_n(t) = \frac{n}{\delta} - e^{-\delta t} L_n^*(t)$$

$$K_n(t) = nt - L_n^*(t)$$

Les sauts de  $K$  étant positifs, ceux de  $L_n$  sont négatifs; par suite,  $L_n^*$ , donc  $K_n$  est continue.

a) Le graphe de  $K_n$  est formé alternativement d'arcs où  $L_n(t) = L_n^*(t)$  (c'est à dire  $K_n(t) = K(t)$ ), et d'arcs où  $L_n(t) < L_n^*(t)$  (donc où  $K_n(t) < K(t)$ ). Pour prouver la première partie du lemme, il suffit de montrer qu'il existe un nombre  $N$ , tel que pour  $n > N$ , l'ensemble  $\mathcal{A}$  de ces arcs soit fini. En effet, les restrictions de programme dont ces arcs sont les graphes satisfont A2, A3, A4. Si ces arcs sont en nombre fini,  $K_n$  satisfait A2, A3, A4, donc  $K_n \in \mathcal{H}_n(k_0)$  puisque  $K_n(0) = k_0$ .

Choisissons comme nombre  $N$  un majorant de  $K'(t) + \delta K(t)$  sur l'ensemble des points de dérivabilité de  $K$  :  $N$  existe, par suite de B5. Si  $n > N$  et si  $K$  est dérivable au point  $t$  :

$$L_n'(t) > 0$$

$L_n$  est donc strictement croissante sur tout intervalle de dérivabilité de  $K$ . D'autre part,  $L_n$  ne peut être discontinue qu'aux points où  $K$  l'est ; alors :

$$K(t) < K(t+0) \quad \text{donc} \quad L_n(t+0) < L_n(t)$$

Comme  $K$  a au plus un nombre fini de discontinuités, il en est de même de  $L_n$ .

Ainsi donc, si  $n > N$ ,  $L_n$  est continue par morceaux et strictement croissante dans tout intervalle de continuité : par suite,  $\mathcal{J}$  est fini, et a) démontré.

b) Montrons que la suite  $(K_n)$  ( $n$  entier positif) converge ponctuellement vers  $K$ , et plus précisément que :

$$\forall t \quad \exists \nu \quad n > \nu \implies K_n(t) = K(t)$$

soit une valeur  $n$  donnée de  $M$ , posons :

$$t_0^* = \sup \left\{ u \mid 0 \leq u \leq t ; K_n(u) = K(u) \right\} \quad (1)$$

( $t_0^*$  existe, puisque  $K_n(0) = K(0) = k_0$ )

Supposons d'abord que  $\delta > 0$

1er cas :  $t_0^* = t$  :  $K_n(t) = K(t)$  et  $K_{n_1}(t) = K(t)$  pour tout  $n_1 > n$ .

En effet,  $K_n(t_0^*) = K(t_0^*)$  puisque  $K_n$  est continue :  
le sup de l'expression (1) est un max. D'autre part :

$$K_n(t) = K(t) \implies L_n(t) = L_n^*(t) \implies \forall \tau \leq t \quad L_n(\tau) \leq L_n(t)$$

$$\implies \forall \tau \leq t \quad L_{n_1}(\tau) = L_n(\tau) + \frac{n_1 - n}{\delta} e^{\delta \tau} \leq L_n(t) + \frac{n_1 - n}{\delta} e^{\delta t} = L_{n_1}(t)$$

$$\implies L_{n_1}(t) = L_{n_1}^*(t) \implies K_{n_1}(t) = K(t)$$

On peut donc choisir  $\nu$  égal à  $n$ .



2ème cas :  $t_0^* < t$  : alors K est discontinue en  $K_0$

I)- si K est continue dans  $]t_0^*, t[$ ,  $L_n$  est strictement croissante dans  $]t_0^*, t[$  pour tout  $n > N$  (voir a)) ; il en résulte que :

$$\begin{aligned} K_n(t) = K(t) &\Leftrightarrow L_n(t) = L_n^*(t) \Leftrightarrow L_n(t) \geq L_n(t_0^*) \\ &\Leftrightarrow \left[ \frac{n}{\delta} - K(t) \right] e^{\delta t} \geq \left[ \frac{n}{\delta} - K(t_0^*) \right] e^{\delta t_0^*} \\ &\Leftrightarrow n \geq \frac{\delta}{e^{\delta t_0^*} - e^{\delta t}} \left( K(t) e^{\delta t} - K(t_0^*) e^{\delta t_0^*} \right) \end{aligned}$$

On peut choisir ici  $\nu$  supérieur à ce dernier nombre.

II) - Si K est discontinue aux points  $t_1^*, t_2^*, \dots, t_{m-\epsilon}^*$  dans  $]t_0^*, t^*[$

On démontre de la même manière qu'il suffit de choisir

$$\nu \geq \delta \max_i \frac{K(t) e^{\delta t} - K(t_i^*) e^{\delta t_i^*}}{e^{\delta t_i^*} - e^{\delta t}}$$

La démonstration, lorsque  $\delta = 0$ , se déduit de celle relative au cas où  $\delta > 0$  en remplaçant  $L_n(t)$  par  $nt - K(t)$ .

### 1.3.3. - Critère économique.

Soient 2 fonctions H et C, possédant les mêmes propriétés qu'au § 1.2.2.

Procédons comme au § 1.1.1.; posons :

$$W(K) = \int_0^T H(t, K(t)) dt + \int_0^T c(t) d(K(t) - k_0) + \int_0^T \delta c(t) K(t) dt + c(0)k_0$$

En intégrant par parties, comme au paragraphe 1.1.1., on obtient :

$$W(K) = \int_0^T \left[ H(t, K(t)) + [\delta c(t) - c'(t)] K(t) \right] dt + c(T) K(T)$$

Lemme d'approximation 2

Etant donné un programme donné de  $\mathcal{H}_\infty(k_0)$ ,  
soit  $(K_n)$  la suite d'approximation cor-  
respondante : alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} W(K_n) = W(K)$$

c'est à dire :

$$W(K) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \left( H(t, K_n(t)) + c(t) [K_n'(t) + \delta K_n(t)] \right) dt$$

Démonstration : H ayant un ensemble de points de discontinuité au plus dénombrable,  $K_n$  convergeant partout sur  $[0, T]$  vers K :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( H(t, K_n(t)) + [\delta c(t) - c'(t)] K_n(t) \right) = H(t, K(t)) + [\delta c(t) - c'(t)] K(t)$$

sauf sur un sous-ensemble au plus dénombrable (donc de mesure nulle) de  $[0, T]$ .

D'autre part, si l est un majorant de K :

$$\forall_n \left| H(t, K_n(t)) + [\delta c(t) - c'(t)] K(t) \right| \leq \left| \bar{H}_1(t) \right| + \left| [\delta c(t) - c'(t)] K(t) \right|$$

cette dernière fonction étant intégrable.

Le théorème de Lebesgues est donc applicable (si une suite de fonctions  $f_n$  intégrables converge presque partout

vers une fonction  $f$ , et est uniformément majorée par une fonction  $\bar{f}$  intégrable, alors  $f$  est intégrable et  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n = \int f$ .

Par suite :

$$\begin{aligned} & \int_0^T \left( H(t, K(t)) + [\delta c(t) - c'(t)] K(t) \right) dt \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \left[ H(t, K_n(t)) + [\delta c(t) - c'(t)] K_n(t) \right] dt \end{aligned}$$

Mais de plus :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c(T) K_n(T) = c(T) K(T)$$

Il en résulte que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} W(K_n) = W(K)$$

#### 1.3.4.- Problème ; optimales.

On se propose de déterminer, s'ils existent, les programmes  $\tilde{K}$  de  $\mathcal{H}_\infty(k_0)$  tels que :

$$\underline{W(\tilde{K}) = \sup \left\{ W(K) \mid K \in \mathcal{H}_\infty(k_0) \right\}}$$

ou bien tels que :

$$\underline{W(\tilde{K}) = \sup \left\{ W(K) \mid K \in \mathcal{H}_\infty(k_0) ; K(T) = k_T \right\}}$$

On appelle "optimales de  $\mathcal{H}_M(k_0)$ " de telles fonctions.

Proposition : Si  $\mathcal{H}_n(k_0)$  a une optimale unique  $\tilde{K}_n$  pour tout n et si la suite  $(\tilde{K}_n)$ , (n entier positif) converge ponctuellement vers un programme  $\tilde{K}$  de  $\mathcal{H}_\infty(k_0)$ , alors  $\tilde{K}$  est l'unique optimale de  $\mathcal{H}_\infty(k_0)$ .

En effet, soient  $K$  un programme de  $\mathcal{H}_\infty(k_0)$  différent de  $\tilde{K}$ , et  $(K_n)$  la suite d'approximation associée. Il existe un entier  $\nu$  tel que :

$$n > \nu \implies K_n \neq \tilde{K}_n$$

(sinon, on aurait  $\tilde{K} = K$ ). Soit  $N$  un nombre supérieur à  $\nu$  et tel que (cf lemme d'approximation 1) :

$$n > N \implies K_n \in \mathcal{H}_n(k_0) \quad \text{et (si } K(T) \text{ est fixé égal à } k_T) K_n(T) = k_T$$

Comme  $\tilde{K}_n$  est l'unique optimale de  $\mathcal{H}_n(k_0)$  :

$$\forall n > N \quad W(K_n) < W(\tilde{K}_n)$$

$$\text{Comme } \lim_{n \rightarrow \infty} W(K_n) = W(K) \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} W(\tilde{K}_n) = W(\tilde{K}),$$

(même démonstration que le lemme d'approximation 2) :

$$W(K) < W(\tilde{K})$$

La proposition est ainsi démontrée.

#### 1.4. - REDUCTION DU PROBLEME AU CAS OU $\delta = 0$ .

Nous allons montrer que l'on peut se ramener, lorsque  $\delta \neq 0$  au cas où  $\delta = 0$  : nous pourrons ainsi nous contenter de faire certaines démonstrations seulement dans le cas où la dépréciation  $\delta$  est nulle.

##### 1.4.1.- Changements préliminaires de paramètre d'évolution et de variable d'état.

Nous voulons nous ramener au cas où  $\delta = 0$ , c'est à dire au cas où la contrainte A4 (ou B4) s'énonce ainsi :

$$0 \leq y'(s) \leq M \quad (\text{ou } 0 \leq y'(s))$$

Pour cela, remarquons qu'en tout point  $t$  de dérivabilité de  $K$  :

$$K'(t) + \delta K(t) = \frac{d}{dt} \left( K(t) \times e^{\delta t} \right) \times e^{-\delta t}$$

Choisissons une nouvelle variable d'état  $y$  et un nouveau paramètre d'évolution  $s$  tels que :

$$\begin{cases} y(s) = \frac{1}{l} K(t) e^{\delta t} & (l \text{ étant un nombre réel non nul}). \\ \frac{dt}{ds} = l e^{-\delta t} \end{cases}$$

Ainsi :

$$K'(t) + \delta K(t) = \frac{d}{dt} \left( l y(s) \right) \times \frac{1}{l} \frac{dt}{ds} = y'(s).$$

On en déduit le changement de variable et de fonction ainsi défini :

$$(\mathcal{C}) \begin{cases} s & = e^{\delta t} - 1 \\ y(s) & = \delta(1+s) K\left(\frac{1}{\delta} \text{Log}(1+s)\right) \end{cases} \iff \begin{cases} t & = \frac{1}{\delta} \log(1+s) \\ K(t) & = \frac{y(s)}{\delta(1+s)} \end{cases}$$

$$\text{Posons : } \begin{cases} s = e^{\delta T} \\ y_0 = \delta k_0 \end{cases}$$

#### 1.4.2.- Réduction dans le cas général.

a) Examinons comment  $(\mathcal{C})$  "transforme" les contraintes et le critère économique. Pour que  $K$  soit dérivable au point  $t$ , il faut et il suffit que  $y$  soit dérivable au point  $s$  ; la contrainte A4 équivaut donc à :

$$\text{A'4 : si } y \text{ est dérivable au point } s, \text{ alors :} \\ 0 \leq y'(s) \leq M$$

B4 équivaut à :

$$\text{B'4 : si } y \text{ est dérivable au point } s, \text{ alors :} \\ 0 \leq y'(s)$$

B5 équivaut à :

$$\text{B'5 : } y'(s) \text{ est uniformément borné sur l'ensemble des} \\ \text{points de dérivabilité de } y.$$

A1 et B1 équivalent à :

$$\text{A'1} \iff \text{B'1 : } y(0) = y_0$$

Enfin  $K$  est uniformément bornée si et seulement si  $\frac{y(s)}{1+s}$  est uniformément borné sur  $[0, S]$ .

Soit  $\mathcal{Y}_M(y_0)$  (ou  $\mathcal{Y}_m(y_0)$ ) l'ensemble des applications  $y$

de  $[0, S]$  dans  $\mathbb{R}$ , non négatives, telles que  $\frac{y(s)}{1+s}$  est uniformément borné sur  $[0, S]$ , satisfaisant aux contraintes A'1, A2, A3, et A'4 (ou B'1, B2, B3, B'4 et B'5).

Si  $K$  et  $y$  sont deux fonctions numériques définies respectivement sur  $[0, T]$  et  $[0, S]$ , liées par le système de relations ( $\mathcal{C}$ ):

$$K \in \mathcal{K}_M(k_0) \iff y \in \mathcal{Y}_M(y_0) \quad ; \quad K \in \mathcal{K}_\infty(k_0) \iff y \in \mathcal{Y}_\infty(y_0)$$

b) Dans tous les cas :

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(K) &= \int_0^T \left[ H(t, K(t)) + \left[ \delta c(t) - c'(t) \right] x K(t) \right] dt + c(T) K(T) \\ &= \int_0^S \left[ H\left(\frac{1}{\delta} x \text{Log}(1+s), \frac{y(s)}{\delta x (1+s)}\right) + \left[ \delta x c\left(\frac{1}{\delta} \text{Log}(1+s)\right) - c'\left(\frac{1}{\delta} \text{Log}(1+s)\right) \right] \frac{y(s)}{\delta x (1+s)} \right] \frac{ds}{\delta x (1+s)} \\ &\quad + c\left(\frac{1}{\delta} \text{Log}(1+S)\right) x \frac{y(S)}{\delta (1+S)} \end{aligned}$$

$$\text{Posons : } \begin{cases} G(s, y) = \frac{H\left(\frac{1}{\delta} x \text{Log}(1+s), \frac{y}{\delta x (1+s)}\right)}{\delta x (1+s)} \\ D(s) = \frac{c\left(\frac{1}{\delta} x \text{Log}(1+s)\right)}{\delta x (1+s)} \implies D'(s) = \frac{c'\left(\frac{1}{\delta} \text{Log}(1+s)\right) - c\left(\frac{1}{\delta} \text{Log}(1+s)\right)}{\delta^2 x (1+s)^2} \end{cases}$$

Donc :

$$\mathcal{W}(K) = \int_0^S \left[ G(s, y(s)) - D'(s)y(s) \right] ds + D(S) x y(S)$$

Cette dernière expression peut s'obtenir en annulant  $\delta$  dans l'expression générale de  $\mathcal{W}(K)$ .

Remarquons que si  $K(T)$  (donc  $y(S)$ ) est fixé, la maximisation de  $W(K)$  équivaut à celle de :

$$\int_0^S [G(s, y(s)) - B'(s)y(s)] ds = \int_0^S G^*(s, y(s)) ds$$

#### 1.4.3.- Conclusion : 4 formes réduites.

On peut donc ramener, dans tous les cas le problème à l'une des 4 formes réduites suivantes :

Problème de type(I): Maximisation de  $\int_0^S [G(s, y(s)) + D(s)y'(s)] ds$

(M fini, K(T) non fixé)

Sous les contraintes A'1, A2, A3 et A'4

Problème de type(II): Maximisation de  $\int_0^S G(s, y(s)) ds$

(M fini, K(T) fixé)

Sous les contraintes A'1, A2, A3, A'4 et  $y(S) = y_S$

Problème de type(III): Maximisation de  $\int_0^S G(s, y(s)) ds + D \times y(S)$   
(ou  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^S [G(s, y_n(s)) + D(s)y'_n(s)] ds$ )

(M infini, K(T) non fixé)

Sous les contraintes B'1, B2, B3, B'4, B'5 et  $\frac{y(s)}{1+s}$  uniformément borné.

Problème de type (IV): Maximisation de  $\int_0^S G(s, y(s)) ds$  (M infini, K(T) fixé)  
(ou  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^S G(s, y_n(s)) ds$ )

sous les contraintes B'1, B2, B3, B'4, B'5,  $\frac{y(s)}{1+s}$  uniformément borné,  $y(S) = y_S$

(M infini, K(T) fixé).



1.4.4.- Application : forme intégrale des contraintes A4 et B4.

---

Nous avons vu ci-dessus que la contrainte :  
 $K'(t) + \delta K(t) \geq 0$

équivalent, si K et y sont liés par le système de relations (C)  
 (ou si  $\delta = 0$  ,  $K = y$  et  $s = t$ ) à :

$$y'(s) \geq 0$$

y étant assujettie à être dérivable par morceaux et telle que :

$$\forall s \in [0, \bar{s}] \quad y(s-0) \leq y(s) \leq y(s+0)$$

Cette contrainte équivaut encore à ce que y soit croissante, ou encore à :

$$B''4 : \begin{cases} \forall t_0 \in ]0, T[ & \forall t \in [0, t_0] & K(t) \leq K(t_0) e^{-\delta(t-t_0)} \\ \forall t_0 \in [0, T[ & \forall t \in [t_0, T] & K(t) \geq K(t_0) e^{-\delta(t-t_0)} \end{cases}$$

On peut démontrer de manière analogue que la contrainte A4 équivaut à :

$$A''4 : \begin{cases} \forall t_0 \in ]0, T[ & \forall t \in [0, t_0] & \frac{M}{\delta} + \left[ K(t_0) - \frac{M}{\delta} \right] e^{-\delta(t-t_0)} \leq K(t) \leq K(t_0) e^{-\delta(t-t_0)} \\ \forall t_0 \in [0, T[ & \forall t \in [t_0, T] & K(t_0) e^{-\delta(t-t_0)} \leq K(t) \leq \frac{M}{\delta} + \dots \\ & & \dots + \left[ K(t_0) - \frac{M}{\delta} \right] e^{-\delta(t-t_0)} \end{cases}$$

CHAPITRE II

-----



## LE PROBLEME DE ARROW : UN CAS STATIONNAIRE

### 2.1. - INTRODUCTION.

Dans ce chapitre, nous établissons des algorithmes permettant de résoudre le problème de Arrow sous certaines hypothèses. Rappelons que dans ce problème (cf § 1.1.2.), la fonctionnelle à maximiser est :

$$W(K) = \int_0^{+\infty} P(K(t)) e^{-\alpha t} dt$$

sous les contraintes A1, A2, A3 et A4 (ou B1, B2, B3, B4 et B5) (cf § 1.2.1. et 1.3.1.).

#### 2.1.1.- Hypothèses sur la fonction P.

H1 : P est strictement monotone par morceaux ; autrement dit, il existe des nombres  $q_0, q_1, \dots, q_n$  tels que :

$$\begin{cases} 0 = q_0 < q_1 < \dots < q_n \\ P \text{ est monotone dans } [q_i, q_{i+1}[ \end{cases} \quad (i = 0, 1 \dots n-1)$$

H2 : P décroît dans  $[q_n, +\infty[$

H3 : si  $P(q_i)$  et  $P(q_j)$  sont des maxima locaux de P, alors  $P(q_i) \neq P(q_j)$

Remarquons que ces hypothèses sont un cas particulier des hypothèses des § 1.2.2. et 1.3.3. .

Ces hypothèses sont raisonnables du point de vue économique. Dans beaucoup de situations, on peut supposer que P est concave ; mais lorsque le processus de production est particulièrement complexe, P présente plusieurs maxima locaux correspondant chacun à un optimum de dimension relativement à un certain aspect de l'activité de la firme.

Par exemple, d'après Arrow, ([1], p 3), dans le cas d'un monopole,  $P$  a souvent deux maxima locaux : "un [maximum local] dont la cause est l'inélasticité de la demande, à un niveau de production et de capital trop bas pour qu'il y ait des économies importantes dues à l'échelle de production ; un second, plus grand, à un niveau où ces économies deviennent suffisantes pour compenser le prix, plus bas, établi en fonction de la demande".

Notons enfin que les hypothèses faites sur  $P$  n'excluent pas des discontinuités (correspondant par exemple à des innovations techniques provoquant de brusques gains de productivité).

L'hypothèse H3 sert seulement à ne pas compliquer inutilement les démonstrations.

Notation : les hypothèses ci-dessus impliquent que :

$$\forall k_1 \geq 0 \quad P^*(k_1) = \max \left\{ P(k) \mid k \geq k_1 \right\}$$

est atteint effectivement :

- soit en un point unique (c'est toujours le cas si  $P(k_1) < P^*(k_1)$  ; alors, soit  $m(k_1)$  ce point.
- soit en  $k_1$  et éventuellement en un autre point (unique) si  $P(k_1) = P^*(k_1)$  ; en ce cas, soit  $m(k_1)$  cet autre point.

### 2.1.2.- Contenu du chapitre.

Dans le paragraphe 2.2., nous étudierons quelques cas particuliers simples. Au § 2.3., se trouvent des lemmes, dûs à Arrow, qui constituent une adaptation particulière à ce problème du "principe" de Bellman (optimalité des restrictions à des intervalles de programmes optimaux) et des corollaires de ce principe.

Nous ne mettons pas le problème sous forme réduite (cf § 1.4.) car ces lemmes ne seraient plus applicables.

On démontre dans le paragraphe suivant des propriétés nécessaires des optimales de  $\mathcal{K}_\infty(k_0)$ , que l'on utilise au § 2.5., pour "construire" celles-ci. On a modifié le contenu et l'ordre des propositions préliminaires de Arrow, donc l'articulation de la démonstration, pour raccourcir celle-ci. De plus, on a élaboré un nouvel algorithme, plus simple que celui de Arrow, et on a étudié l'unicité des solutions (ce qui est absent dans l'article initial).

Au paragraphe 2.6., on démontre l'algorithme qu'Arrow se borne à énoncer pour le cas où  $\delta > 0$ ,  $M$  est fini, et  $k_0 \leq M/\delta$ . En outre, on propose un algorithme plus simple, relatif au même cas, et un autre valable lorsque  $k_0 > M/\delta$ .

Enfin, au paragraphe 2.7., nous retrouvons les résultats obtenus pour les optimales de  $\mathcal{K}_\infty(k_0)$  à partir de ceux relatifs à  $\mathcal{K}_M(k_0)$  en employant le procédé d'approximation défini au § 2.3. (lemmes 1 et 2, proposition).

2.2. - QUELQUES CAS PARTICULIERS SIMPLES.

2.2.1. - Optimales de  $\mathcal{H}_\infty(k_0)$  lorsque  $\delta = 0$ .

Ici, les fonctions  $K$  appartenant à  $\mathcal{H}_\infty(k_0)$  sont astreintes à être croissantes. Deux cas peuvent se présenter :

A - Si le maximum de  $P$  sur  $[k_0, +\infty[$  est atteint en un point unique  $\bar{k}$ , l'optimale  $\tilde{K}$  est :

$$\tilde{K}(0) = k_0 \quad ; \quad \tilde{K}(t) = \bar{k} \quad \forall t > 0$$

B - Si le maximum de  $P$  sur  $[k_0, +\infty[$  est atteint en  $k_0$  et en  $\bar{k} > k_0$ , la fonction  $\tilde{K}$  est optimale si et seulement si :

$$\exists \tau > 0 \quad \begin{cases} \forall t \in [0, \tau] & \tilde{K}(t) = k_0 \\ \forall t \geq \tau & \tilde{K}(t) = \bar{k} \end{cases}$$

Toute éventualité autre que A et B est à exclure, car elle contredirait l'hypothèse H3.

2.2.2.- Optimales de  $\mathcal{H}_\infty(k_0)$  lorsque  $P$  a un maximum local unique.

Soit  $\mathcal{H}_\infty^*(k_0)$  l'ensemble des fonctions numériques  $K(t)$  définies pour  $t \geq 0$ , telles que  $K(0) = k_0$  et que :

$$\forall t > 0 \quad K(t) \geq k_0 e^{-\delta t}$$

Supposons que  $P$  ait un maximum local unique dans  $]0, +\infty[$  au point  $\bar{k}$ . Soit  $\bar{K}$  l'application de  $]0, +\infty[$  dans  $\mathbb{R}$  telle que :

$$\bar{K}(0) = k_0 \quad ; \quad \forall t > 0 \quad \bar{K}(t) = m(k_0 e^{-\delta t})$$

$\bar{K}$  est évidemment l'optimale de  $\mathcal{H}_\infty^*(k_0)$ . Par suite de H1 et H2 :

$$\begin{cases} \text{si } k_0 e^{-\delta t} \geq \bar{k} & \bar{K}(t) = k_0 e^{-\delta t} \\ \text{si } k_0 e^{-\delta t} \leq \bar{k} & \bar{K}(t) = \bar{k} \end{cases}$$

Donc :

$$\begin{cases} \text{si } k_0 < \bar{k} & \bar{K}(t) = \bar{k} & \forall t > 0 \\ \text{si } k_0 = \bar{k} & \bar{K}(t) = k_0 = \bar{k} & \forall t \geq 0 \\ \text{si } k_0 > \bar{k} & \begin{cases} \bar{K}(t) = k_0 e^{-\delta t} & \forall t \in \left[0, \frac{1}{\delta} \text{Log}(k_0 / \bar{k})\right] \\ \bar{K}(t) = \bar{k} & \forall t \in \left[\frac{1}{\delta} \text{Log}(k_0 / \bar{k}), +\infty\right] \end{cases} \end{cases}$$

Or  $\bar{K}$  satisfait, dans tous les cas, les contraintes B1, B2, B3, B4 et B5 ; donc  $\bar{K} \in \mathcal{H}_\infty(k_0)$ . Comme  $\mathcal{H}_\infty(k_0) \subset \mathcal{H}_\infty^*(k_0)$ ,  $\bar{K}$  est l'optimale (unique) de  $\mathcal{H}_\infty(k_0)$ .

2.2.3.- Optimales de  $\mathcal{H}_M(k_0)$  lorsque P a un maximum local unique.

Supposons d'abord que  $\delta \neq 0$ .

Soit  $\mathcal{H}_M^*(k_0)$  l'ensemble des applications K de  $[0, +\infty[$  dans  $\mathbb{R}$  telles que :

$$\forall t > 0 \quad k_0 e^{-\delta t} \leq K(t) \leq \frac{M}{\delta} + (k_0 - M/\delta) e^{-\delta t}$$

Soit  $\bar{K}$  l'application de  $[0, +\infty[$  dans  $\mathbb{R}$  telle que :

$$\bar{K}(0) = k_0 \quad ; \quad \forall t > 0 \quad P(\bar{K}(t)) = \sup \left\{ P(k) \mid k_0 e^{-\delta t} \leq k \leq \frac{M}{\delta} + (k_0 - \frac{M}{\delta}) e^{-\delta t} \right\}$$

$\bar{K}$  est évidemment l'optimale de  $\mathcal{H}_M^*(k_0)$ . Par suite de H1 et H2 :

$$\begin{cases} \text{si } \bar{k} \geq \frac{M}{\delta} + (k_0 - M/\delta) e^{-\delta t} & \bar{K}(t) = \frac{M}{\delta} + (k_0 - M/\delta) e^{-\delta t} \\ \text{si } k_0 e^{-\delta t} \leq \bar{k} \leq (k_0 - M/\delta) e^{-\delta t} + \frac{M}{\delta} & \bar{K}(t) = \bar{k} \end{cases}$$



Par conséquent :

si $k_0 > \bar{k}$	$\left\{ \begin{array}{l} \bar{K}(t) = k_0 e^{-\delta t} \\ \bar{K}(t) = \bar{k} \end{array} \right.$	$\forall t \in \left[ 0, \frac{1}{\delta} \text{Log}(k_0 / \bar{k}) \right]$ $\forall t \in \left[ 0, \frac{1}{\delta} \text{Log}(k_0 / \bar{k}), +\infty \right[$
si $k_0 = \bar{k}$	$\bar{K}(t) = \bar{k} = k_0$	$\forall t \in [0, +\infty [$
si $k_0 < \bar{k} < \frac{M}{\delta}$	$\left\{ \begin{array}{l} \bar{K}(t) = \frac{M}{\delta} + \left[ k_0 - \frac{M}{\delta} \right] e^{-\delta t} \\ \bar{K}(t) = \bar{k} \end{array} \right.$	$\forall t \in \left[ 0, \frac{1}{\delta} \text{Log} \left( \frac{k_0 - M/\delta}{\bar{k} - M/\delta} \right) \right]$ $\forall t \in \left[ \frac{1}{\delta} \text{Log} \frac{k_0 - M/\delta}{\bar{k} - M/\delta}, +\infty \right[$
si $k_0 < \frac{M}{\delta} < \bar{k}$	$\bar{K}(t) = \frac{M}{\delta} + \left[ k_0 - \frac{M}{\delta} \right] e^{-\delta t}$	$\forall t \in [0, +\infty [$
si $k_0 = \frac{M}{\delta} \leq \bar{k}$	$\bar{K}(t) = k_0$	$\forall t \in [0, +\infty [$

On voit aisément que dans tous les cas,  $\bar{k} \in \mathcal{H}_M(k_0)$ .

Comme  $\mathcal{H}_M(k_0) \subset \mathcal{H}_M^*(k_0)$ ,  $\bar{k}$  est l'optimale de  $\mathcal{H}_M(k_0)$ .

Dans le cas où  $\delta = 0$ , en raisonnant de manière analogue, on trouve que :

si $k_0 \geq \bar{k}$	$\bar{K}(t) = k_0$	$\forall t \in [0, +\infty [$
si $k_0 < \bar{k}$	$\left\{ \begin{array}{l} \bar{K}(t) = k_0 + Mt \\ \bar{K}(t) = \bar{k} \end{array} \right.$	$\forall t \in \left[ 0, \frac{\bar{k} - k_0}{M} \right]$ $\forall t \in \left[ \frac{\bar{k} - k_0}{M}, +\infty \right[$

#### 2.2.4. Aperçus sur le cas général.

Dans les 3 cas étudiés ci-dessus, il existe un nombre  $\tau$

tel que :

- dans  $[0, \tau]$  ,  $I(t)$  est égal à  $M$  ou  $0$  ; autrement dit, on investit au maximum ou pas du tout dans cet intervalle.
- dans  $[\tau, +\infty]$  ,  $K$  est constante : une fois atteint un niveau optimal, "on y reste " indéfiniment.

Essayons de comprendre pourquoi, de façon intuitive. Considérons le problème consistant à maximiser  $W(K)$  sous la seule contrainte  $K(0) = k_0$ . Définissons  $\bar{k}$  par :  $\bar{k} = m(k_0)$ .

L'optimale  $\bar{K}$  de ce problème est :  $\bar{K}(t) = \bar{k} \quad \forall t > 0$

Si  $\bar{k} = k_0$ , ou si  $\bar{k} \geq k_0$  et  $M$  est infini,  $\bar{k} \in \mathcal{H}(k_0)$  ; autrement dit,  $\bar{K}$  est l'optimale (unique) du problème de Arrow.

Dans les autres cas,  $\bar{k} \notin \mathcal{H}_M(k_0)$ . Il est naturel de penser, dans ces conditions, que la politique optimale consiste à atteindre le niveau d'équipement  $\bar{k}$  "le plus tôt possible" (étant données les contraintes), puis d'y rester.

En fait, dans le cas général, on a souvent intérêt à atteindre un niveau d'équipement  $k^*$  tel que  $P(k^*) < P(\bar{k})$ , mais plus vite accessible que  $\bar{k}$  ( $k_0 < k^* < \bar{k}$  ou  $k_0 > k^* > \bar{k}$ ) : cela, à cause de la prise en considération de l'escompte, de taux  $\alpha$ .

C'est ce que nous démontrons plus loin. Le calcul de l'optimale  $\check{K}$  se réduit ainsi à la détermination du niveau à atteindre finalement.

### 2.3. - SOUS-PROGRAMMES DE PROGRAMMES OPTIMAUX.

Dans ce paragraphe, on établit des conditions d'optima-

lité valables que  $M$  soit fini ou non. On peut considérer ces conditions comme des adaptations à ce problème du "principe" de Bellman, utilisant les propriétés particulières de la fonction exponentielle ; en effet, les lemmes 1 et 2 ci-dessous établissent que la restriction d'une optimale à un intervalle est, dans un certain sens, optimale. Les lemmes 3 et 4 sont des corollaires de ces deux premiers lemmes. Nous déduirons de ces conditions toute la suite du chapitre.

Notations :

1/ Fixons la valeur de  $M$  pour toute la suite de ce § 2.3. (éventuellement  $M = +\infty$ ), et soit  $\mathcal{H}(k_0)$  l'ensemble des programmes admissibles correspondants.

2/ Nous appellerons  $\mathcal{H}^\tau(k_0)$  l'ensemble des applications de  $[0, \tau]$  dans  $\mathbb{R}_+$  satisfaisant les contraintes A1, A2, A3 et A4 (ou B1, B2, B3, B4 et B5 si  $M$  est infini).

$$\begin{aligned} W(K) &= \int_0^\tau e^{-\alpha t} P(K(t)) dt + \int_\tau^{+\infty} P(K(t)) e^{-\alpha t} dt \\ &= \int_0^\tau P(K(t)) e^{-\alpha t} dt + e^{-\alpha \tau} \int_0^{+\infty} P(K(t+\tau)) e^{-\alpha t} dt \end{aligned}$$

$\tilde{K}$  est une optimale de  $\mathcal{H}(k_0)$  si et seulement si :

$$W(\tilde{K}) = \sup \left\{ \int_0^\tau P(K(t)) e^{-\alpha t} dt + e^{-\alpha \tau} W(\bar{K}) \mid K \in \mathcal{H}(k_0); \forall t \geq 0 \bar{K}(t) = \dots K(t+\tau) \right\}$$

Une application  $K$  de  $\mathbb{R}_+$  dans  $\mathbb{R}_+$  appartient à  $\mathcal{H}(k_0)$  si et seulement si :

- la restriction  $K_1$  de  $K$  à  $[0, \tau]$  appartient à  $\mathcal{H}^\tau(k_0)$

- la fonction  $\bar{K}$  définie sur  $[0, +\infty[$  de la manière suivante :

$$\bar{K}(t) = K(t + \tau)$$

appartient à  $\mathcal{H}(K(\tau))$ .

Par conséquent :

$$W(\tilde{K}) = \sup \left\{ \int_0^\tau P(K_1(t)) e^{-\alpha t} dt + e^{-\alpha \tau} W(\bar{K}) \mid K_1 \in \mathcal{H}^\tau(k_0) ; \right. \\ \left. K_1(\tau) = \tilde{K}(\tau) ; \bar{K} \in \mathcal{H}(\tilde{K}(\tau)) \right\}$$

Les contraintes sur  $K_1$  et  $K_2$  étant indépendantes :

$$(1) \quad \forall \tau \geq 0 \quad W(\tilde{K}) = \sup \left\{ \int_0^\tau P(K_1(t)) e^{-\alpha t} dt \mid K_1 \in \mathcal{H}^\tau(k_0) ; K_1(\tau) = \tilde{K}(\tau) \right\} \\ + e^{-\alpha \tau} \sup \left\{ W(K) \mid \bar{K} \in \mathcal{H}(\tilde{K}(\tau)) \right\}$$

Cette relation implique les propositions suivantes :

Lemme 1 : si  $\tilde{K}$  est une optimale de  $\mathcal{H}^\tau(k_0)$  alors, pour tout  $\tau > 0$ , la fonction  $K^*$  définie par :

$$\forall t \geq 0 \quad K^*(t) = \tilde{K}(t + \tau)$$

est une optimale de  $\mathcal{H}(\tilde{K}(\tau))$ .

Lemme 2 : si  $\tilde{K}$  est une optimale de  $\mathcal{H}^\tau(k_0)$  alors ;

$$\forall \tau \geq 0 \quad \int_0^\tau P(\tilde{K}(t)) e^{-\alpha t} dt = \sup \left\{ \int_0^\tau P(K(t)) e^{-\alpha t} dt \mid K(\tau) = \tilde{K}(\tau) ; \right. \\ \left. K \in \mathcal{H}^\tau(k_0) \right\}$$

Lemme 3 : Si  $\tilde{K}$  est une optimale de  $\mathcal{H}^\tau(k_0)$  et  $\bar{K}$  une optimale de  $\mathcal{H}(\tilde{K}(\tau))$ , alors l'application  $K^*$  ainsi définie :

$$\forall t \in [0, \tau] \quad K^*(t) = \tilde{K}(t) \quad \forall t \in [\tau, +\infty[ \quad K^*(t) = \bar{K}(t - \tau)$$

est une optimale de  $\mathcal{H}(k_0)$ .

Lemme 4: si  $\tilde{K}$  est une optimale de  $\mathcal{H}(k_0)$  et s'il existe  $\tau_1 \geq 0$  et  $\tau_2 > \tau_1$  tels que  $\tilde{K}(\tau_1) = \tilde{K}(\tau_2)$ , alors la fonction  $K^*$  ainsi définie :

$$\begin{aligned} \forall t \in [0, \tau_1] \quad K^*(t) &= \tilde{K}(t) \\ \forall t > \tau_1 \quad K^*(t) &= \tilde{K}(t - j \lceil \tau_2 - \tau_1 \rceil) \text{ (où } j \text{ est la partie} \\ &\text{entière de } \frac{t - \tau_1}{\tau_2 - \tau_1} \text{)} \\ &\text{est une optimale de } \mathcal{H}(k_0). \end{aligned}$$

On voit immédiatement que les lemmes 1, 2 et 3 se déduisent directement de la relation  $(1)$ . Démontrons le lemme 4.

Définissons par récurrence une suite de fonction  $(K_n^*)$  de la manière suivante :

$$(2) \quad \begin{cases} K_0^* = \tilde{K} \\ K_{n+1}^*(t) = K_n^*(t) & \text{si } 0 \leq t \leq \tau_1 + n \lceil \tau_2 - \tau_1 \rceil \\ K_{n+1}^*(t) = K_n^*(t - \lceil \tau_2 - \tau_1 \rceil) & \text{si } t \geq \tau_1 + n \lceil \tau_2 - \tau_1 \rceil \end{cases}$$

Cette suite converge ponctuellement vers la fonction  $K^*$  (définie par l'énoncé du lemme 4) ; de plus :

$$\forall m \text{ entier} \quad m \leq n \implies \tilde{K}(\tau_1) = K_n^*(\tau_1 + m \lceil \tau_2 - \tau_1 \rceil)$$

Démontrons par récurrence que  $K_n^*$  est une optimale de  $\mathcal{H}(k_0)$ . Pour cela, montrons que :

$$\forall n \quad W(K_{n+1}^*) = W(K_n^*)$$

Posons :

$$\bar{K}(t) = K_n^*(t + \tau_1 + n(\tau_2 - \tau_1))$$

Si  $K_n^*$  est optimale, en vertu du lemme 1 ci-dessus,  $\bar{K}$  est une optimale de :

$$\mathcal{H}(K_n^*(\tau_1 + n[\tau_2 - \tau_1])) = \mathcal{H}(K^*(\tau_1))$$

Il résulte de (2) que :

$$\begin{cases} K_{n+1}^*(t) = K_n^*(t) & \forall t \in [0, \tau_1 + n(\tau_2 - \tau_1)] \\ K_{n+1}^*(t) = \bar{K}(t - \tau_1 - n[\tau_2 - \tau_1]) & \forall t \geq \tau_1 + n[\tau_2 - \tau_1] \end{cases}$$

Par suite de lemme 3 ci-dessus,  $K_{n+1}^*$  est une optimale de  $\mathcal{H}(k_0)$ . Donc, comme

$$W(K_0^*) = W(\check{K}) :$$

$$\forall n \quad W(K_n^*) = W(\check{K})$$

Comme  $K$ ,  $K^*$  et  $K_n^*$  sont uniformément bornées, il en est de même de  $|P(K^*(t))|$  et  $|P(K_n^*(t))|$  pour tout  $n$  ; comme la suite  $(K_n^*)$  converge vers  $K^*$ , il résulte du théorème de Lebesgues (cf § 1. 3.3.) que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} W(K_n^*) = W(K^*)$$

Par suite,  $W(K^*) = W(\check{K})$ , et  $K^*$  est une optimale de  $\mathcal{H}(k_0)$ .

## 2.4.- PROPRIETES DES OPTIMALES DE $\mathcal{H}_\infty(k_0)$ (CAS OU $\delta \neq 0$ ).

### 2.4.1.- Paliers.

Proposition

Si  $\tilde{K}$  est une optimale de  $\mathcal{H}_\infty^p(k_0)$  telle que dans un intervalle  $[\tau_1, \tau_2]$ :

$$\underline{\tilde{K}(t) = k^*}$$

alors :

$$\underline{k^* = m(k^*)}$$

et P a un maximum local au point  $k^*$ .

Soit  $K^*$  le programme ainsi défini :

$$\forall t \in [0, \tau_1] \quad K^*(t) = \tilde{K}(t) \quad \forall t > \tau_1 \quad K^*(t) = k^*.$$

D'après le lemme 4,  $K^*$  est une optimale de  $\mathcal{H}_\infty(k_0)$ . Soit  $\bar{K}$  le programme ainsi défini :

$$\forall t \in [0, \tau_1] \quad \bar{K}(t) = K^*(t) \quad ; \quad \forall t > \tau_1 \quad \bar{K}(t) = m(k^*)$$

$$\text{Comme : } \forall t \quad P(\bar{K}(t)) \geq P(K^*(t))$$

$$\text{on a } W(\bar{K}) - W(K^*) \geq 0$$

Mais puisque  $K^*$  est une optimale de  $\mathcal{H}_\infty^p(k_0)$ , et puisque  $\bar{K} \in \mathcal{H}_\infty^p(k_0)$  :

$$W(\bar{K}) - W(K^*) \leq 0$$

$$\text{donc } 0 = W(\bar{K}) - W(K^*) = \left[ P(m(k^*)) - P(k^*) \right] \int_{\tau}^{+\infty} e^{-\alpha t} dt$$

$$\text{Par suite : } P(k^*) = P(m(k^*)).$$

Dans ces conditions, P étant monotone par morceaux et n'ayant pas de paliers :

- ou bien P a un maximum local au point  $k^*$
- ou bien il existe un nombre  $q < k^*$  tel que P est décroissante dans  $]q, k^*]$ .

Démontrons par l'absurde que cette dernière éventualité est incompatible avec les hypothèses faites sur  $\tilde{K}$  et  $K^*$ . Posons :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \hat{K}(t) = K^*(t) & \forall t \in [0, \tau_1] \\ \hat{K}(t) = k^* e^{-\delta(t-\tau_1)} & \forall t \in \left[ \tau_1, \tau_1 + \frac{1}{\delta} \text{Log} \frac{k^*}{q} \right] \\ \hat{K}(t) = q & \forall t \in \left[ \tau_1 + \frac{1}{\delta} \text{Log} \frac{k^*}{q}, +\infty \right] \end{array} \right.$$

$\hat{K}$  a les propriétés suivantes :

$$\hat{K} \in \mathcal{H}_\infty(k_0) \quad ; \quad \forall t > \tau_1 \quad \hat{K}(t) < K^*(t)$$

Donc :

$$\begin{aligned} W(K^*) - W(\hat{K}) &= \int_{\tau_1}^{\tau_1 + \frac{1}{\delta} \text{Log} \frac{k^*}{q}} e^{-at} \left[ P(k^*) - P(k^* e^{-\delta[t-\tau_1]}) \right] dt \\ &+ \int_{\tau_1 + \frac{1}{\delta} \text{Log} \frac{k^*}{q}}^{+\infty} e^{-at} \left[ P(k^*) - P(q) \right] dt < 0 \end{aligned}$$

Cela impliquerait que  $K^*$  ne serait pas optimale : c'est incompatible avec ce qu'on a démontré plus haut.

$P$  a donc un maximum local en  $k^*$ .

#### 2.4.2. - Dérivée.

Proposition | Si  $\tilde{K}$  est optimale et continue au point  $\tau$ , alors la dérivée à droite de  $\tilde{K}$  au point  $\tau$  est égale à 0 ou  $-\delta \tilde{K}(\tau)$ .

Soit  $\tilde{K}$  une optimale de  $\mathcal{H}_\infty(k_0)$ , continue dans un intervalle  $[\tau, \tau + \varepsilon[$ . Il y a 3 éventualités possibles :

Eventualité E 1 :  $P$  est strictement croissante dans un intervalle  $]\tilde{K}(\tau) - \eta, \tilde{K}(\tau) + \eta[$ .



Soit  $t_0$  un nombre tel que :

$$\begin{cases} \tau < t_0 < \tau + \varepsilon \\ \tilde{K}(t_0) , \tilde{K}(t_0)e^{-\delta(\tau-t_0)} \in ]\tilde{K}(\tau) - \eta , \tilde{K}(\tau) + \eta[ \end{cases}$$

On peut toujours déterminer un tel nombre, puisque  $\tilde{K}$  est continue en  $\tau$ . Posons :

$$\bar{K}(t) = \tilde{K}(t_0)e^{-\delta(t-t_0)}.$$

Soit  $\mathcal{L}$  l'ensemble des fonctions  $K$  appartenant à  $\mathcal{U}_\infty(k_0)$  telles que  $K(\tau) = \tilde{K}(\tau)$  et  $K(t_0) = \tilde{K}(t_0)$ .

D'après la contrainte B'4 (expression intégrale de la contrainte B4 : Cf § 1.4.3.) :

$$\forall K \in \mathcal{L} \quad \forall t \in ]\tau, t_0] \quad \bar{K}(t) \geq K(t).$$

Par suite, si  $K$  appartient à  $\mathcal{L}$ , et si :

$$\exists t \in ]\tau, t_0] \quad K(t) \neq \bar{K}(t)$$

alors :

$$\int_{\tau}^{t_0} P(K(t))e^{-\alpha t} dt < \int_{\tau}^{t_0} P(\bar{K}(t))e^{-\alpha t} dt$$

Par suite de la croissance stricte de  $P$  dans  $]\tilde{K}(\tau) - \eta , \tilde{K}(\tau) + \eta[$ , il ne pourrait y avoir égalité entre ces deux intégrales que si  $K(t)$  était égal à  $\bar{K}(t)$  presque partout ; cela est impossible, car  $K(t) - \bar{K}(t)$  étant continue à gauche et continue par morceaux, si

$$K(t) - \bar{K}(t) = 0$$

presque partout sur  $]\tau, t_0]$ , alors

$$\forall t \in ]\tau, t_0] \quad K(t) - \bar{K}(t) = 0$$

Donc :

$$\int_{\tau}^{t_0} P(K(t))e^{-\alpha t} dt < \int_{\tau}^{t_0} P(\bar{K}(t))e^{-\alpha t} dt$$

Il résulte des lemmes 1 et 2 (§ 2.3.) et de l'optimalité de  $\tilde{K}$  que :

$$\forall t \in ]\tau, t_0] \quad \tilde{K}(t) = \bar{K}(t) = \tilde{K}(t_0) e^{-\delta(t-t_0)}$$

Par suite, la dérivée à droite de  $\tilde{K}$  au point  $\tau$  est :

$$-\delta \tilde{K}(\tau)$$

Eventualité E 2 : P est strictement décroissante dans un intervalle

$$\underline{] \tilde{K}(\tau) - \eta, \tilde{K}(\tau) + \eta [}$$

La démonstration est semblable à celle, ci-dessus, relative à l'éventualité E 1. On choisit un point  $t_0$  tel que :

$$\begin{cases} \tau < t_0 < \tau + \varepsilon \\ \tilde{K}(t_0), \quad \tilde{K}(t_0)e^{-\delta(\tau-t_0)} \quad \varepsilon ] \tilde{K}(\tau) - \eta, \tilde{K}(\tau) + \eta [ \end{cases}$$

Soit  $\bar{K}$  la fonction ainsi définie :

$$\begin{cases} \bar{K}(t_0) = \tilde{K}(t_0) \\ \bar{K}(t) = \tilde{K}(t) e^{-\delta(t-\tau)} \quad \forall t \in [\tau, t_0[ \end{cases}$$

On démontre que :

$$\int_{\tau}^{t_0} P(\bar{K}(t)) e^{-\alpha t} dt > \int_{\tau}^{t_0} P(K(t)) e^{-\alpha t} dt$$

pour toute fonction  $K$  de  $\mathcal{C}_\infty(k_0)$  telle que  $K(\tau) = \tilde{K}(\tau)$  et  $K(t_0) = \tilde{K}(t_0)$ .

On en déduit que :

$$\forall t \in [\tau, t_0[ \quad \tilde{K}(t) = \bar{K}(t)$$

Donc, la dérivée à droite de  $K$  au point  $\tau$  est :

$$-\delta \tilde{K}(\tau)$$

Eventualité E 3 : P a un extremum local au point  $\tilde{K}(\tau)$ .

Deux cas peuvent alors se présenter :

- ou bien  $\tilde{K}$  est constante dans un intervalle  $[\tau, \tau + \theta[$  ( $\theta > 0$ ) : dans ce cas, la dérivée à droite de  $\tilde{K}$  au point  $\tau$  est nulle.
- ou bien  $\tilde{K}$  n'est pas constante dans l'intervalle  $[\tau, \tau + \theta[$ , quel que soit  $\theta > 0$  : alors, par suite des contraintes B2 et B3, il existe un nombre  $\theta_1$ , positif, tel que  $K$  est strictement monotone, continue et dérivable dans  $[\tau, \tau + \theta_1[$ . Si  $t$  appartient à  $[\tau, \tau + \theta_1[$ , on se trouve au point  $t$  dans l'éventualité E 1, ou l'éventualité E 2 ci-dessus (selon que  $K$  est décroissante ou croissante dans  $[\tau, \tau + \theta_1[$ ):

$$\forall t \in ]\tau, \tau + \theta_1[ \quad \tilde{K}'(t) + \delta \tilde{K}(t) = 0$$

Autrement dit :

$$\exists k \geq 0 \quad \forall t \in ]\tau, \tau + \theta_1[ \quad \tilde{K}(t) = k e^{-\delta(t-\tau)}$$

Comme  $\tilde{K}$  est continue au point  $\tau$  :

$$k = \tilde{K}(\tau)$$

et :

$$\forall t \in ]\tau, \tau + \theta_1[ \quad \tilde{K}(t) = \tilde{K}(\tau) e^{-\delta(t-\tau)}$$

Par suite, la dérivée à droite de  $\tilde{K}$  au point  $\tau$  est égale à  $-\delta \tilde{K}(\tau)$ .

La proposition est ainsi démontrée dans tous les cas.

#### 2.4.3.- Discontinuités au point 0.

Proposition | Si  $\tilde{K}$  est une optimale de  $\mathcal{H}_\infty(k_0)$  discontinue à l'origine, alors :

$$\forall t > 0 \quad \tilde{K}(t) = m(k_0) > k_0$$

Soit  $\tilde{K}$  une optimale donnée de  $\mathcal{J}_\infty(k_0)$ .

(a) Tout d'abord, construisons une optimale  $K^*$  telle que :

$$K^*(t) \geq k_0$$

Si  $\tilde{K}(t) \geq k_0$  pour tout  $t$ , alors posons  $K^* = \tilde{K}$ .

Sinon, soit :

$$\tau = \inf \left\{ t \mid \tilde{K}(t) < k_0 \right\}$$

Remarquons que  $\tau > 0$  puisque  $\tilde{K}(0+) > k_0$ . Montrons que :

$$\tilde{K}(\tau) = \tilde{K}(0) = k_0$$

Comme  $\tilde{K}$  est continue à gauche, et comme  $\tilde{K}(t) \geq k_0$  pour tout  $t$  appartenant à  $[0, \tau[$ ,  $\tilde{K}(\tau) \geq k_0$ . La définition de  $\tau$  implique que :

$$\tilde{K}(\tau+) \leq k_0, \text{ et par suite :}$$

$$\tilde{K}(\tau+) \leq \tilde{K}(\tau)$$

Mais d'après la contrainte B 2 :

$$\tilde{K}(\tau+) \geq \tilde{K}(\tau)$$

Donc :  $\tilde{K}(\tau+) = \tilde{K}(\tau)$

et :  $\tilde{K}(\tau) = k_0$

Posons donc, lorsque  $K(t)$  est inférieur à  $k_0$  pour certaines valeurs de  $t$  :

$$K^*(t) = \tilde{K}(t - j\tau) \quad (j \text{ étant la partie entière de } \frac{t}{\tau})$$

Il résulte du lemme 4 que  $K^*$  est optimale, et de la définition de  $\tau$  que  $K^*(t) \geq k_0$  pour tout  $t$ .

(b) Posons :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall t > 0 \quad \bar{K}(t) = m(k_0) \\ \bar{K}(0) = k_0 \end{array} \right.$$

Comme  $K^*(0+0) = \tilde{K}(0+0) > k_0$ , si  $K^* \neq \bar{K}$ , alors

$$e^{-\alpha t} P(K^*(t)) < e^{-\alpha t} P(\bar{K}(t))$$

sur un ensemble de mesure non nulle, donc

$$W(K^*) < W(\bar{K})$$

$K^*$  étant optimale, et  $\bar{K}$  étant un programme admissible :

$$K^* = \bar{K}$$

La proposition est donc démontrée.

#### 2.4.4.- Continuité au point 0.

Proposition | Si  $\tilde{K}$  est une optimale de  $\mathcal{K}_\infty(k_0)$  continue à l'origine, alors  $\tilde{K}$  est continue en tout point.

Démontrons cette proposition par l'absurde.

Soit  $\tilde{K}$  une optimale de  $\mathcal{K}_\infty(k_0)$ , non continue dans  $[0, +\infty[$ , mais continue au point 0. Soit  $t_0$  son point de discontinuité le plus à gauche :  $t_0$  est défini, puisque l'ensemble des points de discontinuité est fini (contrainte B2), et  $t_0$  est positif. Appellons  $K^*$  le programme ainsi défini :

$$\forall t \geq 0 \quad K^*(t) = \tilde{K}(t_0 + t)$$

D'après le lemme 1,  $K^*$  est une optimale de  $\mathcal{P}_\infty(\tilde{K}(t_0))$  ;  
 en vertu de ce qu'on a démontré au § 2.4.3. :

$$\forall t > 0 \quad K^*(t) = m(\tilde{K}(t_0)) = \tilde{K}(t_0 + t).$$

Il résulte de la définition de  $t_0$  que  $\tilde{K}$  est continue dans  $[0, t_0[$  :  $\tilde{K}$  a donc au plus un point de discontinuité, qui est  $t_0$ .  
 Par suite de la proposition 2.4.2., la dérivée à droite de  $\tilde{K}$  dans  $[0, t_0[$  est égale à 0 ou à  $-\delta \tilde{K}(t)$ , donc est négative ou nulle ;  
 comme  $\tilde{K}$  est dérivable par morceaux,  $\tilde{K}'$  a la même propriété, sauf en un ensemble fini de points. Comme de plus  $\tilde{K}$  est continue dans  $[0, t_0[$ ,  $\tilde{K}$  est décroissante (au sens large) dans  $[0, t_0[$ .

Il existe donc un nombre  $t_2$  tel que :

$$\begin{cases} 0 \leq t_2 \leq t_0 \\ \tilde{K}(t_0) \leq \tilde{K}(t_2) \leq k^* \end{cases}$$

Soit  $K$  la fonction ainsi définie :

$$\begin{cases} K(t) = \tilde{K}(t) & \forall t \in [0, t_2] \\ K(t) = k^* & \forall t \in ]t_2, +\infty[ \end{cases}$$

Il résulte de ce qui précède que (puisque  $\tilde{K}(t_2) = K(t_2) < k^* = K(t)$  pour  $t > t_2$ ) :

$$\begin{cases} K(t) > \tilde{K}(t) & \forall t \in ]t_2, t_0] \\ K(t) = \tilde{K}(t) & \forall t \in [t_2, t_0] \end{cases}$$

Ainsi, si  $t_0$  existait,  $W(K)$  serait strictement supérieur

à  $W(\bar{K})$  : cela est impossible car  $\bar{K}$  est optimale. Donc  $\tilde{K}$  est continue.

2.5. - DETERMINATION DES OPTIMALES DE  $\mathcal{H}_\infty(k_0)$ .

Nous allons d'abord déterminer la "structure" générale des optimales, à l'aide des propriétés énoncées au § 2.4., puis nous indiquerons la signification économique de cette "structure". Nous en déduirons un algorithme "simplifié", permettant de calculer les optimales pour un équipement initial  $k_0$  donné, puis l'algorithme proposé par Arrow dans [1], qui sert à déterminer les optimales quel que soit l'équipement initial. Enfin, nous établirons selon les cas le nombre des optimales, et en indiquerons l'interprétation économique.

Nous nous bornerons au cas où  $\delta \neq 0$  (le cas contraire est étudié au § 2.2.1.).

2.5.1.- "Structure" générale des optimales.

Théorème 1	<p>Il existe une optimale <math>\tilde{K}</math> de <math>\mathcal{H}_\infty(k_0)</math> définie par :</p> $\forall t > 0 \quad \tilde{K}(t) = \max \left\{ \bar{k}, k_0 e^{-\delta t} \right\}$ <p>où <math>\bar{k}</math> est tel que <math>P(\bar{k})</math> est un maximum local de <math>P</math> et un maximum global de <math>P</math> dans <math>[\bar{k}, +\infty[</math>.</p>
------------	---

D'après les propositions 2.4.3. et 2.4.4., si  $\tilde{K}$  est optimale:

ou bien  $\tilde{K}(t) = m(k_0) \quad \forall t > 0$

. ou bien  $\tilde{K}$  est continue.

Dans ce 2ème cas, par suite de la proposition 2.4.2.

. ou bien  $K'(0+0) = 0$  ; alors, le programme  $K(t) = k_0$  est optimal,  $k_0$  correspond à un maximum local de P (proposition 2.4.1).

. ou bien  $\tilde{K}'(0+0) = -\delta k_0$ .

Dans cette dernière éventualité :

. ou bien  $\tilde{K}'(t) = -\delta \tilde{K}(t)$  quel que soit  $t$  ; autrement dit,  
 $\tilde{K}(t) = k_0 e^{-\delta t}$

. ou bien  $\exists \tau > 0$   $\left\{ \begin{array}{l} \tilde{K}'(t) = -\delta \tilde{K}(t) \quad \text{pour } t \in [0, \tau[ \\ \tilde{K}'(\tau + 0) = 0 \end{array} \right.$

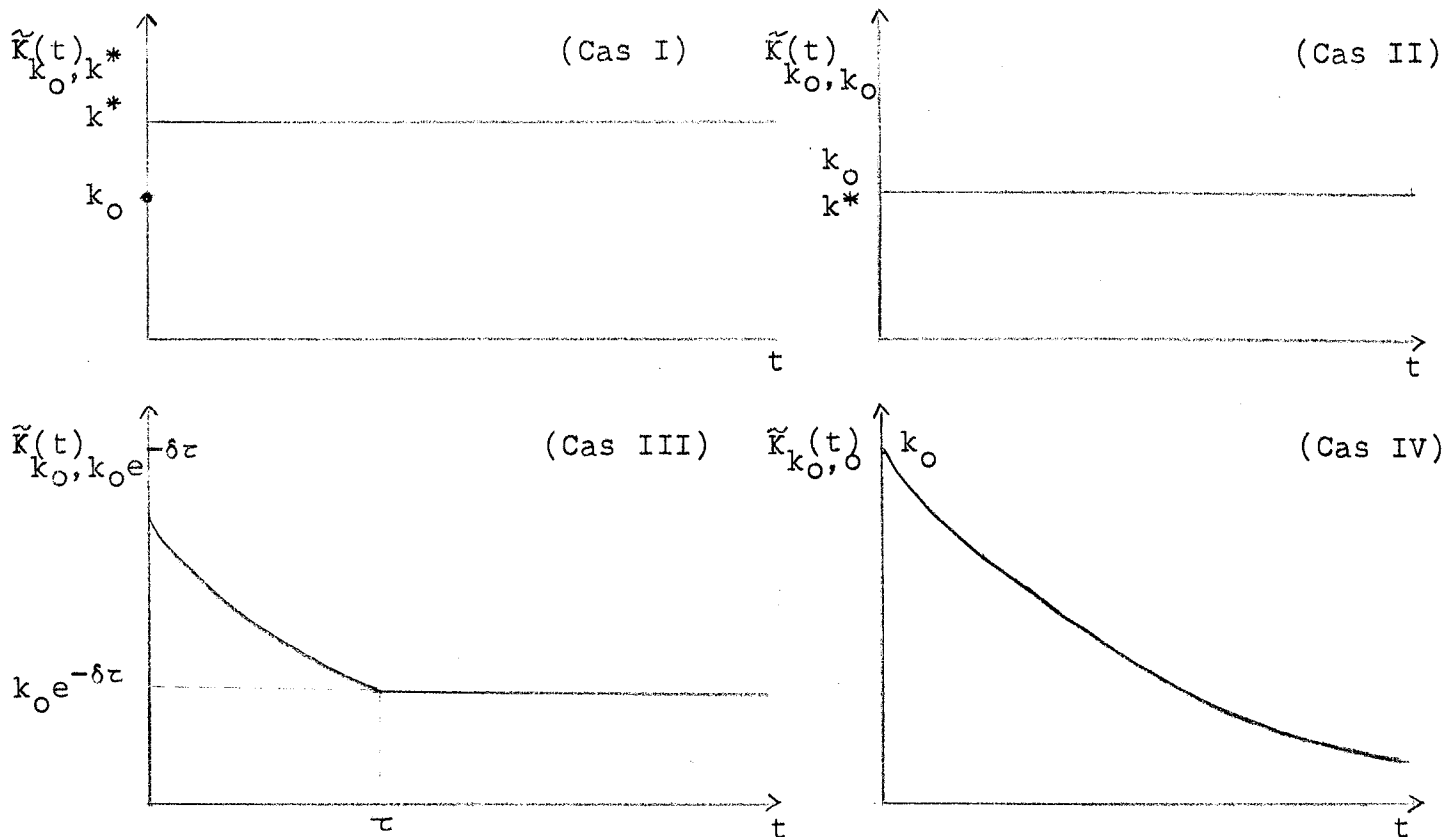
Cela signifie que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall t \in [0, \tau] \quad \tilde{K}(t) = k_0 e^{-\delta t} \\ \forall t \in [\tau, +\infty[ \quad \tilde{K}(t) = k_0 e^{-\delta \tau} \end{array} \right.$$

$$\text{Posons : } \left\{ \begin{array}{l} \tilde{K}_{k_0, k}(0) = k_0 \\ \tilde{K}_{k_0, k}(t) = \max \left\{ k_0 e^{-\delta t}, k \right\} \quad \text{pour } t > 0 \end{array} \right.$$

Dans tous les cas, il existe au moins une optimale de  $\mathcal{K}_\infty(k_0)$  de la "forme"  $\tilde{K}_{k_0, k}$  :





Interprétation économique :

Le théorème I ci-dessus signifie qu'il existe au moins un niveau d'équipement optimal  $\bar{k}$  lorsque les conditions économiques (demandes, coûts, taux d'actualisation) sont stationnaires. Le programme d'investissements qui consiste à atteindre ce niveau le plus vite possible, compte tenu des contraintes, puis à y rester, est optimal :

- si  $\bar{k} > k_0$  (cas I) , on fait à la date 0 la totalité de l'investissement d'expansion nécessaire pour atteindre le niveau  $\bar{k}$  à partir du niveau  $k_0$ .
- si  $\bar{k} < k_0$  (cas III et IV), on s'abstient de tout investissement, qu'il soit d'expansion ou de renouvellement : en ne remplaçant pas le matériel hors d'usage, on atteint ainsi peu à peu le niveau d'équipement  $\bar{k}$ .

. lorsque le niveau optimal  $\bar{k}$  est atteint, on y reste, en se bornant à l'investissement de renouvellement nécessaire.

2.5.2.- Algorithme simplifié.

Cet algorithme permet de déterminer une ou des optimales de  $\mathcal{W}_\infty(k_0)$ , mais pas nécessairement toutes celles-ci (cf § 2.4.4.). Il se déduit directement du théorème ci-dessus.

<u>Algorithme</u>	1ère phase	<u>Détermination de <math>k_0^*</math> tel que <math>P(k_0^*) = \max \{P(k) \mid k \geq k_0\}</math></u>
	2ème phase	<u>Calcul des nombres <math>k_1^*, k_2^*, \dots, k_{i^*}^*</math> tels que: <math>P(k_i^*)</math> est un maximum local de <math>P^i</math></u> <u><math>P(k_i^*) = \max \{P_i(k) \mid k \geq k_{i-1}^*\}</math></u>
	3ème phase	<u>Calcul de <math>W(\tilde{k}_{k_0, k_i^*})</math> pour <math>i = 0 \dots i^*</math></u>
	4ème phase	<u>Détermination des <math>k_i^*</math> qui maximisent <math>W(\tilde{k}_{k_0, k_i^*})</math> pour <math>i = 0, \dots, i^*</math>.</u>

Le calcul de  $W(\tilde{k}_{k_0, k_i^*})$  se fait ainsi :

$$\forall i=1, \dots, i^* \quad W(\tilde{k}_{k_0, k_i^*}) = \int_0^{\frac{1}{\delta} \text{Log}(k_0/k_i^*)} e^{-\alpha t} P(k_0 e^{-\delta t}) dt + \frac{P(k_i^*)}{\alpha} \left(\frac{k_i^*}{k_0}\right)^{\alpha/\delta}$$

ou, en posant  $x = k_0 e^{-\delta t}$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall i=1, \dots, i^* \quad W(\tilde{k}_{k_0, k_i^*}) = \frac{1}{k_0^{\alpha/\delta}} \left[ \frac{1}{\delta} \int_{k_i^*}^{k_0} P(x) x^{\frac{\alpha}{\delta} - 1} dx + \frac{k_i^{\alpha/\delta}}{\alpha} P(k_i^*) \right] \\ W(\tilde{k}_{k_0, k_0}) = P(k_0^*)/\alpha \end{array} \right.$$

Pour plus de détails, on pourra se reporter à [5].

### 2.5.3.- Algorithme de Arrow.

Cet algorithme permet de calculer une ou des optimales de  $\mathcal{H}_\alpha(k_0)$  quel que soit  $k_0$ .

Soient  $k_0^*, k_1^*, \dots, k_{i^*}^*$  les valeurs de  $k$ , classées par ordre croissant, telles que :

$$\begin{cases} P(k_i^*) = \max \{ P(k) \mid k \geq k_i^* \} & \forall i \in \{0, 1, \dots, i^*\} \\ P(k_i^*) \text{ est un maximum local de } P. \end{cases}$$

Par suite de H1 (§ 2.1.), l'ensemble de ces nombres est fini ; d'après la proposition du § 2.3.1., tout palier d'une optimale a l'une de ces valeurs.

Soient  $\bar{k}_0, \bar{k}_1, \dots, \bar{k}_{i^*}$  ( $i \leq i^*$ ) les nombres appartenant à  $\{k_0^*, k_1^*, \dots, k_{i^*}^*\}$ , tels que :

$$W(\tilde{k}_{\bar{k}_i, \bar{k}_i}) \geq W(\tilde{k}_{\bar{k}_i, k_j^*}) \quad \forall j \in \{0, 1, \dots, i^*\}$$

Il résulte du lemme 2 du § 2.3. que tout palier d'une optimale a l'une de ces valeurs. L'ensemble  $\{\bar{k}_0, \dots, \bar{k}_{i^*}\}$  est donc l'ensemble des valeurs des paliers des optimales de  $\mathcal{H}_\alpha(k_0)$ .

Posons :

$$V_i(k) = W(\tilde{k}_{k, \bar{k}_{i-1}}) - W(\tilde{k}_{k, \bar{k}_i})$$

$V_i$  est continue ; par suite des définitions de  $\bar{k}_i$  et  $\bar{k}_{i-1}$  :

$$V_i(\bar{k}_{i-1}) \geq 0 \qquad V_i(\bar{k}_i) \leq 0$$

Par suite, l'équation :

$$V_i(k) = 0 \qquad (i \in \{1, \dots, \bar{I}\})$$

a au moins une racine,  $\tilde{k}_i$ , dans  $[\bar{k}_{i-1}, \bar{k}_i]$ . Posons de plus :

$$\tilde{k}_0 = 0 \qquad \tilde{k}_{i+1} = +\infty$$

Proposition | Si  $\tilde{k}_{i-1} \leq k_0 \leq \tilde{k}_i$  ou  $k_0 = \tilde{k}_{i-1}$  avec  $i=1$ , alors  $\tilde{K}_{k_0, \bar{k}_{i-1}}$  est une optimale de  $\mathcal{H}_\infty(k_0)$ .  
 | Si  $k_0 = \tilde{k}_i$ , alors  $\tilde{K}_{k_0, -\bar{k}_i}$  et  $\tilde{K}_{k_0, \bar{k}_{i-1}}$  sont des optimales de  $\mathcal{H}_\infty(k_0)$ .

En effet, il résulte des définitions des nombres  $k_i^*$  et  $\bar{k}_i$  que :

a/ si  $k_0 \leq \bar{k}_0$ ,  $\tilde{K}_{k_0, \bar{k}_0}$  est optimale.

b/ si  $k_0 \geq \bar{k}_{\bar{I}}$ ,  $\tilde{K}_{k_0, \bar{k}_{\bar{I}}}$  est optimale.

c/ si  $\bar{k}_{i-1} \leq k_0 \leq \bar{k}_i$ , alors  $\tilde{K}_{k_0, \bar{k}_{i-1}}$  ou  $\tilde{K}_{k_0, \bar{k}_i}$  sont optimales.

c.1/ si  $\bar{k}_{i-1} \leq k_0 \leq \tilde{k}_i$ , alors  $\tilde{K}_{k_0, \bar{k}_{i-1}}$  est optimale.

En effet, sinon,  $\tilde{K}_{k_0, \bar{k}_i}$  serait optimale ; comme  $\tilde{K}_{\tilde{k}_i, \bar{k}_{i-1}}$

est, par suite de la définition de  $\tilde{k}_i$ , une optimale de  $\mathcal{H}_\infty(\tilde{k}_i)$ , l'application  $K^*$  telle que :

$$\begin{cases} k^*(t) = \tilde{k}_{\tilde{k}_i, \bar{k}_{i-1}}(t) = \tilde{k}_i e^{-\delta t} & \forall t \in \left[0, \frac{1}{\delta} \text{Log} \left(\frac{\tilde{k}_i}{k_0}\right)\right] \\ k^*(t) = \bar{k}_i & \forall t \geq \frac{1}{\delta} \text{Log} \left(\frac{\tilde{k}_i}{k_0}\right) \end{cases}$$

serait (en vertu du lemme 3) une optimale de  $\mathcal{H}_\infty(\tilde{k}_i)$ . Cela est faux, car, par suite des définitions de  $\bar{k}_{i-1}$  et  $\bar{k}_i$  :

$$\forall t \in \left[0, \frac{1}{\delta} \text{Log} \left(\frac{\tilde{k}_i}{k_0}\right)\right] \quad P(k^*(t)) \leq P(\bar{k}_i)$$

Donc  $\tilde{k}_{k_0, \bar{k}_i}$  n'est pas optimale, et  $\tilde{k}_{k_0, \bar{k}_{i-1}}$  l'est .

c.2/ Si  $\tilde{k}_i < k_0 \leq \bar{k}_i$  , alors  $\tilde{k}_{k_0, \bar{k}_i}$  est optimale.

En effet, sinon,  $\tilde{k}_{k_0, \bar{k}_{i-1}}$  serait optimale ; cela impliquerait que l'application  $K^*$  , telle que :

$$\begin{cases} k^*(t) = k_0 e^{-\delta t} & \forall t \in \left[0, \frac{1}{\delta} \text{Log} \left(k_0 / \tilde{k}_i\right)\right] \\ k^*(t) = \bar{k}_i & \forall t \in \left[\frac{1}{\delta} \text{Log} \left(k_0 / \tilde{k}_i\right), +\infty\right[ \end{cases}$$

serait optimale, ce qui serait incompatible avec la définition de  $\bar{k}_i$ .

c.3/ Si  $k_0 = \tilde{k}_i$  (  $i \neq 0$  et  $i \neq \bar{I} + 1$  ),  $\tilde{k}_{k_0, \bar{k}_i}$  et  $\tilde{k}_{k_0, \bar{k}_{i-1}}$  sont toutes deux optimales, par suite de la définition de  $\tilde{k}_i$ .

Algorithme. | 1ère phase Calculer  $k_0^*, k_1^*, \dots, k_{i^*}^*$ , tels que :

$$\begin{cases} P(k_i^*) = \max \left\{ P(k) \mid k \geq k_{i-1}^* \right\} \\ P(k_i^*) = \text{maximum local de } P \\ k_0^* > k_1^* > \dots > k_{i^*}^* \end{cases}$$

2ème phase Calculer  $\bar{k}_0, \bar{k}_1, \dots, \bar{k}_I$  tels que :

$$\bar{k}_0 = k^*$$

$$\forall i > 0 \quad \bar{k}_i = \inf \left\{ k_j^* \mid k_j^* \geq \bar{k}_{i-1} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} & W(\tilde{k}_{k_j^*, k_j^*}) \geq W(\tilde{k}_{k_j^*, \bar{k}_{i-1}}) \end{aligned} \right\}$$

$$= \inf \left\{ k_j^* \mid k_j^* \geq \bar{k}_{i-1} \right\}$$

$$\left. \frac{\alpha}{\delta} \int_{\bar{k}_{i-1}}^{k_j^*} P(x) x^{\frac{\alpha}{\delta}-1} dx + \bar{k}_{i-1}^{\alpha/\delta} P(\bar{k}_{i-1}) - k_j^{*\alpha/\delta} P(k_j^*) \leq 0 \right\}$$

3ème phase Déterminer les nombres  $\tilde{k}_i$  tels que :

$$W(\tilde{k}_{\tilde{k}_i, \bar{k}_{i-1}}) - W(\tilde{k}_{\tilde{k}_i, \bar{k}_i}) = 0$$

$$i \in \{ 1, \dots, I \}$$

$$\text{ou } \frac{\alpha}{\delta} \int_{\bar{k}_{i-1}}^{\tilde{k}_i} P(x) x^{\frac{\alpha}{\delta}-1} dx + (\bar{k}_{i-1})^{\alpha/\delta} P(\bar{k}_{i-1}) - \tilde{k}_i^{\alpha/\delta} P(\tilde{k}_i) = 0$$

$$\tilde{k}_0 = 0 \quad \tilde{k}_{I+1} = +\infty$$

2.5.4.- Nombre des optimales de  $\mathcal{H}_\infty(k_0)$ .

Théorème II

A. Si  $\tilde{k}_{i-1} < k_0 < k_i$  et  $\tilde{k}_{i-1} < \bar{k}_{i-1}$  (ou si  $k_0 < \tilde{k}_i$  avec  $i = 1$ ), alors  $\tilde{k}_{k_0, \bar{k}_{i-1}}$  est l'unique optimale de  $\mathcal{H}_\infty(k_0)$

B. Si  $k_0 = \tilde{k}_i \neq \bar{k}_i$  et  $i > 0$ , alors  $\tilde{K}_{k_0, \bar{k}_{i-1}}$  et  $\tilde{K}_{k_0, \bar{k}_i}$  sont les seules optimales de  $\mathcal{H}_\infty(k_0)$ .

C. Si  $\tilde{k}_{i-1} = \bar{k}_{i-1} \leq k_0 < \tilde{k}_i$  ( $i > 1$ ), alors l'ensemble des optimales de  $\mathcal{H}_\infty(k_0)$  a la puissance du continu ; si  $\tilde{k}_{i-2} < \bar{k}_{i-2}$  ou  $i = 1$ , toutes ces optimales sont soit  $\tilde{K}_{k_0, \bar{k}_{i-1}}$ , soit de la forme ( $\tau$  étant un nombre réel positif ou nul quelconque) :

$$\left. \begin{array}{l} \tilde{K}(t) = k_0 e^{-\delta t} \\ \tilde{K}(t) = \bar{k}_{i-1} \\ \tilde{K}(t) = \bar{k}_{i-1} e^{-\delta \left[ t - \tau - \frac{1}{\delta} \text{Log}(k_0 / \bar{k}_{i-1}) \right]} \\ \tilde{K}(t) = \bar{k}_{i-2} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \forall t \in \left[ 0, \frac{1}{\delta} \text{Log}(k_0 / \bar{k}_{i-1}) \right] \\ \forall t \in \left[ \frac{1}{\delta} \text{Log}(k_0 / \bar{k}_{i-1}), \tau + \frac{1}{\delta} \text{Log}(k_0 / \bar{k}_{i-1}) \right] \\ \forall t \in \left[ \tau + \frac{1}{\delta} \text{Log}(k_0 / \bar{k}_{i-1}), \tau + \frac{1}{\delta} \text{Log}(k_0 / \bar{k}_{i-2}) \right] \\ \forall t \in \left[ \tau + \frac{1}{\delta} \text{Log}(k_0 / \bar{k}_{i-2}), +\infty \right] \end{array}$$

Soit  $\tilde{K}$  une optimale de  $\mathcal{H}_\infty(k_0)$  ; si  $\tilde{K}(t) \in [\tilde{k}_{i-1}, \tilde{k}_i]$ , et si  $\tilde{K}'(t)$  est défini et nul, alors  $\tilde{K}(t) = \bar{k}_{i-1}$ . En effet, il résulte de la proposition 2.4.2. que si  $\tilde{K}'(t) = 0$ ,  $\tilde{K}'$  est nul dans un voisinage de  $t$ , donc  $\tilde{K}$  est constante dans un voisinage de  $t$  ; cela implique, d'après les lemmes 4 et 1 que  $\tilde{K}(t), \tilde{K}'(t)$  doit être une optimale de  $\mathcal{H}_\infty(\tilde{K}(t))$  ; or, les définitions de  $\bar{k}_{i-1}, \tilde{k}_{i-1}$  et  $\tilde{k}_i$  impliquent que  $\bar{k}_{i-1}$  est le seul nombre  $k$  de  $[\tilde{k}_{i-1}, \tilde{k}_i]$  tel que  $\tilde{K}_{k,k}$  soit une optimale de  $\mathcal{H}_\infty(k)$

A :  $\tilde{k}_{i-1} < k_0 < \tilde{k}_i$  et  $\tilde{k}_{i-1} < \bar{k}_{i-1}$ .

A1 :  $k_0 \geq \bar{k}_{i-1}$

Si  $\tilde{K}$  n'était pas continue dans  $[0, +\infty[$ , d'après la proposition 2.4.3.,  $\tilde{K}$  serait égale à une constante dans  $]0, +\infty[$ ; étant donnée la définition des nombres  $\bar{k}_j$ , cette constante ne pourrait être que  $\bar{k}_i$ . Mais il résulte de la proposition 2.5.3. que, comme  $k_0 < \tilde{k}_i$ ,  $\tilde{K}_{k_0, \bar{k}_i}$  n'est pas optimale. Donc  $\tilde{K}$  est continue dans le cas A.1.

Par conséquent,  $\tilde{K}'$  est définie dans un intervalle  $[0, \tau[$ ; d'après la proposition 2.4.2.,  $\tilde{K}' = 0$  ou  $\tilde{K}' = \delta \tilde{K}$ ; en vertu de ce qu'on démontre au début de ce paragraphe,  $\tilde{K}' \neq 0$  si  $\tilde{K} \in ]\tilde{k}_{i-1}, \tilde{k}_i]$  et  $\tilde{K} \neq \bar{k}_{i-1}$ ; donc  $\tilde{K}'(t) = -\delta \tilde{K}(t)$  tant que  $\tilde{K}(t) > \bar{k}_{i-1}$ , et

$$\forall t \in \left[ 0, \frac{1}{\delta} \text{Log} \frac{k_0}{\bar{k}_{i-1}} \right] \tilde{K}(t) = k_0 e^{-\delta t}$$

D'après la définition de  $\bar{k}_{i-1}$ , puisque  $\tilde{k}_{i-1} < \bar{k}_{i-1}$ , la seule optimale de  $\mathcal{H}_\infty(\bar{k}_{i-1})$  est  $\tilde{K}_{\bar{k}_{i-1}, \bar{k}_{i-1}}$ ; par suite (lemme 1), la seule optimale de  $\mathcal{H}_\infty(k_0)$  est  $\tilde{K}_{k_0, \bar{k}_{i-1}}$

A.2. :  $\tilde{k}_{i-1} < k_0 < \bar{k}_{i-1}$ .

Si  $\tilde{K}(0+) > \tilde{K}(0)$ , étant données la définition de  $\bar{q}_{i-1}$  et la proposition 2.4.3. :

$$\forall t > 0 \quad \tilde{K}(t) = \bar{k}_{i-1}$$

D'autre part,  $\tilde{K}$  ne peut être continue; en effet, si elle l'était :

$$\forall t \in \left[ 0, \frac{1}{\delta} \text{Log} \frac{k_0}{\bar{k}_{i-2}} \right] \tilde{K}(t) = k_0 e^{-\delta t}$$

et selon le lemme 3,  $\tilde{K}_{k_0, \bar{k}_{i-2}}$  serait une optimale de  $\mathcal{H}_\infty(k_0)$ ; or, on a démontré au § 2.4.3. que c'était impossible si  $\tilde{k}_{i-1} < k_0 < \bar{k}_{i-1}$ .

En conclusion, dans le cas A, la seule optimale de  $\mathcal{H}_\infty(k_0)$  est  $\tilde{K}_{k_0, \bar{k}_{i-1}}$



$$B : \underline{k_0 = \tilde{q}_i} \quad (i \geq 1)$$

Dans ce cas, la seule optimale de  $\mathcal{K}_\alpha(k_0)$  discontinue en 0 est  $\tilde{K}_{k_0, \bar{k}_i}$  (proposition 2.4.3. , et définition de  $\bar{k}_i$ ). Pour toute autre optimale, la démonstration relative au cas A.1. est valable. D'où la partie B du théorème

$$C : \underline{\tilde{k}_{i-1} = \bar{k}_{i-1} \leq k_0 < \tilde{k}_i} \quad (i > 1)$$

$$C.1. : \underline{k_0 = \tilde{k}_{i-1} = \bar{k}_{i-1}}$$

Etant donnée la définition de  $\tilde{k}_{i-1}$  :

$$W(\tilde{K}_{\bar{k}_{i-1}, \bar{k}_{i-1}}) = W(\tilde{K}_{\bar{k}_{i-1}, \bar{k}_{i-2}}) = \frac{P(\bar{k}_{i-1})}{\alpha}$$

Soit  $K_\tau$  l'application de  $[0, +\infty[$  dans  $[0, +\infty[$  ainsi définie :

$$\begin{cases} K_\tau(t) = \bar{k}_{i-1} & \forall t \in [0, \tau] \\ K_\tau(t) = \bar{k}_{i-1} e^{-\delta[t-\tau]} & \forall t \in \left[ \tau, \tau + \frac{1}{\delta} \text{Log} \frac{\bar{k}_{i-1}}{\bar{k}_{i-2}} \right] \\ K_\tau(t) = \bar{k}_{i-2} & \forall t \geq \tau + \frac{1}{\delta} \text{Log} \frac{\bar{k}_{i-1}}{\bar{k}_{i-2}} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} W(K_\tau) &= \int_0^\tau e^{-\alpha t} P(\bar{k}_{i-1}) dt + e^{-\alpha \tau} W(\tilde{K}_{\bar{k}_{i-1}, \bar{k}_{i-2}}) \\ &= \frac{P(\bar{k}_{i-1})}{\alpha} [1 - e^{-\alpha \tau}] + \frac{e^{-\alpha \tau}}{\alpha} P(\bar{k}_{i-1}) = \frac{1}{\alpha} P(\bar{k}_{i-1}) \end{aligned}$$

Donc, quel que soit  $\tau > 0$ ,  $K_\tau$  est optimale.

Par un raisonnement semblable à celui que nous avons fait au § A.1., on peut démontrer que si  $\tilde{k}_{i-2} < \bar{k}_{i-2}$ , il n'y a pas d'autres optimales de  $\mathcal{H}_\infty(k_0)$  que  $K_\tau$  ( $0 \leq \tau < +\infty$ ) et  $\tilde{K}_{\bar{k}_{i-1}, \bar{k}_{i-1}}$ . Si  $\tilde{k}_{i-2} = \bar{k}_{i-2}$ , on introduit des fonctions  $K_{\tau_1, \tau_2}$  formées de paliers de valeurs  $\bar{k}_{i-1}, \bar{k}_{i-2}$  et éventuellement  $\bar{k}_{i-3}$ , séparés par des arcs où  $K'_{\tau_1, \tau_2}(t) = -\delta K_{\tau_1, \tau_2}(t)$  etc...

$$C.2. \quad \underline{\tilde{k}_{i-1} = \bar{k}_{i-1} < k_0 < \tilde{k}_i.}$$

Comme  $\tilde{k}_{i-1} < k_0 < \tilde{k}_i$ ,  $\tilde{K}_{k_0, \bar{k}_{i-1}}$  est une optimale (proposition 2.4.3.). Il résulte du lemme 3 que si  $K^*$  est une optimale de  $\mathcal{H}_\infty(\bar{k}_{i-1})$  et si :

$$\begin{cases} \forall t \in [0, \frac{1}{\delta} \text{Log}(k_0/\bar{k}_{i-1})] & K(t) = \tilde{K}_{k_0, \bar{k}_{i-1}}(t) = k_0 e^{-\delta t} \\ \forall t \in [\frac{1}{\delta} \text{Log}(k_0/\bar{k}_{i-1}), +\infty[ & K(t) = K^*(t - \frac{1}{\delta} \text{Log}(k_0/\bar{k}_{i-1})) \end{cases}$$

alors,  $K$  est une optimale de  $\mathcal{H}_\infty(k_0)$ .

Réciproquement, si  $K$  est une optimale de  $\mathcal{H}_\infty(k_0)$  :

I.  $K'(0+0) = -\delta k_0$   $K(t) \in ]\bar{k}_{i-1}, k_0[ \implies K'(t) = -\delta K(t)$   
 (définitions de  $\bar{k}_{i-1}, \bar{k}_i$ , propositions 2.4.1., 2.4.2., et 2.4.3.).

II. si  $K^*(t) = K(t + \frac{1}{\delta} \text{Log}(k_0/\bar{k}_{i-1}))$  dans  $[0, +\infty[$ , alors  $K^*$  est une optimale de  $\mathcal{H}_\infty(k_0)$  (lemme 1).

On en déduit immédiatement la "structure" de l'ensemble des optimales de  $\mathcal{H}_\infty(k_0)$  de celle de  $\mathcal{H}_\infty(\bar{k}_{i-1})$  (cas C.1.).

Interprétation économique.

1) Le théorème II signifie que "presque toujours" le niveau d'équipement optimal correspondant à un niveau initial  $k_0$  donné est unique.

Lorsque le niveau optimal n'est pas le même pour tout niveau initial, il existe des niveaux initiaux, en nombre fini, pour lesquels il y a deux niveaux optimaux (et ces deux-ci seulement, sauf dans des "cas exceptionnels"), l'un supérieur et l'autre inférieur au niveau initial considéré.

Il y a des cas (qu'on ne rencontre "presque jamais") où il existe plusieurs niveaux optimaux inférieurs au niveau initial: alors, un programme est optimal s'il consiste à atteindre le plus grand de ces niveaux optimaux en s'abstenant de tout investissement et ensuite :

- . soit à continuer à ne pas investir du tout, jusqu'à ce qu'un autre niveau optimal soit atteint.

- . soit à rester à ce niveau optimal durant un temps quelconque, puis atteindre le niveau optimal immédiatement inférieur en n'investissant pas.

- . soit à rester indéfiniment au même niveau.

Une fois atteint un niveau optimal  $\bar{k}$ , le même choix se présente à nouveau s'il existe des niveaux optimaux inférieurs ; sinon, le programme optimal consiste à rester indéfiniment au même niveau.

Les cas ci-dessus qu'on ne rencontre "presque jamais" ont cependant un intérêt pratique : en effet, si on se trouve

"presque" dans un de ces cas, le théorème II permet de déterminer les programmes "presque optimaux" (c'est-à-dire tels que  $W(k) \simeq W(\tilde{k})$ ). De tels programmes peuvent être préférables dans la pratique au programme optimal, si on tient compte d'éléments négligés (il y en a nécessairement) dans la formulation mathématique du problème concret.

2) Le niveau  $\bar{k}$  du "palier optimal" est ainsi une fonction en escalier croissante (éventuellement multivoque dans certains intervalles) du niveau d'équipement initial  $k_0$ . Il en résulte qu'une firme (ou un monopole en économie fermée qui prend le profit actualisé comme critère de décision d'investissement) a des "possibilités de développement" dépendant du niveau initial ; celles-ci sont d'autant plus grandes que ce niveau d'équipement est plus grand.

Il est possible que ce modèle donnerait des indications intéressantes pour déterminer dans quelle mesure une firme (ou une branche d'industrie) peut atteindre un certain niveau ou rattraper telle autre firme (ou la même branche d'industrie de tel autre pays).

## 2.6.- PROGRAMMES OPTIMAUX DE $\mathcal{H}_M(k_0)$ .

Les démonstrations et algorithmes de ce paragraphe sont analogues à ceux relatifs à  $\mathcal{H}_\infty(k_0)$ . C'est pourquoi nous serons plus concis.

### 2.6.1.- Propriétés générales des programmes optimaux.

Proposition 2.6.1.1. | Quand  $\tilde{k}$  est une optimale de  $\mathcal{H}_M(k_0)$  telle que dans un intervalle  $[\tau_1, \tau_2]$   $\tilde{k}(t) = \bar{k}$  :

- si  $\delta > 0$ , alors  $\bar{k} < M/\delta$ , et P a un maximum local au point  $\bar{k}$ .
- si  $\delta = 0$ , et si  $\bar{k} > k_0$ , alors P a un maximum local au point  $\bar{k}$  ; si  $\delta = 0$  et  $\bar{k} = k_0$ , il existe un nombre positif  $\varepsilon$  tel que P est décroissante dans  $[k_0, k_0 + \varepsilon]$ .

En effet, on déduit aisément des lemmes 4. et 1. que la politique  $\bar{k}$  telle que :

$$\forall t \geq 0 \quad \bar{K}(t) = \bar{k}$$

doit être une optimale de  $\mathcal{H}_M(k^*)$  ; cela implique visiblement que si  $\delta > 0$  ou  $\bar{k} > k_0$ , P a un maximum local au point  $\bar{k}$  et que si  $\bar{k} = k_0$ , P est décroissante dans une intervalle  $[k_0, k_0 + \varepsilon]$  ( $\varepsilon > 0$ ) (démonstrations analogues à celles du § 2.4.1.).

D'autre part, il résulte de la constance de  $\tilde{K}$  dans l'intervalle considéré que  $\tilde{K}'$  y est nulle, donc que (contrainte A4 dans le cas où  $\delta > 0$ ) :

$$\tilde{K}'(t) = 0 \leq M - \delta \tilde{K}(t) = M - \delta \bar{k} \implies \bar{k} \leq M/\delta$$

Proposition 2.6.2.1. | Si  $\tilde{K}$  est une optimale de  $\mathcal{H}_M(k_0)$  alors la dérivée à droite de  $\tilde{K}$  en tout point  $\tau$  est égale à  $-\delta \tilde{K}(\tau)$ ,  $M - \delta \tilde{K}(\tau)$  ou 0 (c'est-à-dire, lorsque  $\delta = 0$  : M ou 0).

En effet, comme au § 2.4.2. on peut se trouver, si  $\delta > 0$ , devant l'une des 3 éventualités suivantes :

Éventualité E1 : P est strictement croissante dans un voisinage  $]\tilde{K}(\tau) - \eta, \tilde{K}(\tau) + \eta[$  de  $\tilde{K}(\tau)$ .

Soit  $t_0$  un nombre supérieur à  $\tau$ . Posons :

$$\begin{cases} K_{\tau}(t) = \frac{M}{\delta} + \left[ \tilde{K}(\tau) - \frac{M}{\delta} \right] e^{-\delta(t-\tau)} \\ K_0(t) = \tilde{K}(t_0) \times e^{-\delta(t-t_0)} \end{cases}$$

On peut toujours choisir  $t_0$  de façon que  $\tilde{K}(t_0)$ ,  $K_0(\tau)$  et  $K_{\tau}(t_0)$  appartiennent à l'intervalle  $\left] \tilde{K}(\tau) - \eta, \tilde{K}(\tau) + \eta \right[$ .

D'après la contrainte A'4 (cf § 1.4.3.), expression intégrale de la contrainte A4 :

$$K_0(\tau) - K_{\tau}(\tau) \geq 0 \quad \text{et} \quad K_0(t_0) - K_{\tau}(t_0) \leq 0.$$

Donc  $K_0$  et  $K_{\tau}$  étant continues :

$$\exists t^* \in [\tau, t_0] \quad K_0(t^*) = K_{\tau}(t^*)$$

Soit  $K^*$  l'application de  $[\tau, t_0]$  dans  $[0, +\infty[$  ainsi définie :

$$\begin{cases} \forall t \in [\tau, t^*] & K^*(t) = K_{\tau}(t) \\ \forall t \in [t^*, t_0] & K^*(t) = K_0(t) \end{cases}$$

Si  $K$  est un programme de  $\mathcal{H}_M(k_0)$ , tel que  $K(\tau) = \tilde{K}(\tau)$  et  $K(t_0) = \tilde{K}(t_0)$ , alors, d'après A4 (cf § 1.4.3.) :

$$\forall t \in [\tau, t_0] \quad K(t) \leq K_{\tau}(t) \quad \text{et} \quad K(t) \leq K_0(t)$$

Par suite :

$$\forall t \in [\tau, t_0] \quad K(t) \leq K^*(t) \quad \text{et} \quad P(K(t)) \leq P(K^*(t))$$

Par le même raisonnement qu'au § 2.4.2. (éventualité E1), on en déduit que :

$$\forall t \in [t^*, t_0] \quad \tilde{K}(t) = K^*(t)$$

La dérivée à droite de  $\tilde{K}$  au point  $\tau$  est donc  $M - \delta \tilde{K}(\tau)$  ou  $-\delta \tilde{K}(\tau)$  (si  $t^* = \tau$ ).

Eventualité E2 : P est strictement décroissante dans un intervalle  
 $]\tilde{K}(\tau) - \eta, \tilde{K}(\tau) + \eta[$ .

On démontre de manière analogue, en intervertissant dans la démonstration relative à l'éventualité E1 les rôles respectifs de  $\tau$  et  $t$ , que la dérivée à droite de  $\tilde{K}$  au point  $\tau$  est  $-\delta \tilde{K}(\tau)$  ou  $M - \delta \tilde{K}(\tau)$ .

Eventualité E3 : P a un extremum local au point  $\tilde{K}(\tau)$ .

On démontre d'une manière semblable au raisonnement de 2.4.2. E3 que la dérivée à droite de  $\tilde{K}$  au point  $\tau$  est 0,  $-\delta \tilde{K}(\tau)$  ou  $M - \delta \tilde{K}(\tau)$ .

Lorsque  $\delta = 0$ , on démontre de façon semblable que la dérivée à droite de  $\tilde{K}$  au point  $\tau$  ne peut prendre que les valeurs 0 ou  $M$ . Dans l'éventualité E1, on introduit les fonctions :

$$\begin{cases} K_\tau(t) = \tilde{K}(\tau) + M(t - \tau) \\ K_0(t) = \tilde{K}(t_0) \end{cases}$$

et la démonstration se continue d'une manière analogue à celle relative au cas où  $\delta > 0$ .

2.6.2.- Programmes optimaux de  $\mathcal{J}_M(k_0)$ , lorsque  $k_0 \leq M/\delta$ .

Théorème III | Si  $\delta = 0$ , il existe une optimale de  $\mathcal{H}_M(k_0)$ , de l'un des types suivants :

I) <u><math>\forall t \geq 0</math></u>	<u><math>\tilde{K}(t) = k_0 = \bar{k}</math></u>
II) <u><math>\exists t^* &gt; 0</math></u>	<u><math>\tilde{K}(t) = k_0 + Mt</math></u>
$\left\{ \begin{array}{l} \forall t \in [0, t^*] \\ \forall t \in [t^*, +\infty[ \end{array} \right.$	<u><math>\tilde{K}(t) = k_0 + Mt^* = \bar{k}</math></u>

où  $\bar{k}$  est tel que (P a un maximum local en  $\bar{k}$ )  
 $(P(\bar{k}) = \sup \{ P(k) \mid k_0 \leq k \leq \bar{k} \})$

La proposition 2.6.1.2. implique que  $K'(0+0)$  est égale à 0 ou M.

. si  $\tilde{K}'(0+0) = 0$ , il résulte du lemme 4 (§ 2.3.) que le programme  $\tilde{K}$  égal à  $k_0$  quel que soit  $t$  est optimal.

. si  $\tilde{K}'(0+0) = M$ , il existe un point  $t > 0$  tel que  $\tilde{K}'(t+0) \neq M$ .

En effet, le programme :

$$K(t) = k_0 + Mt$$

n'est pas optimal, car le programme  $\bar{K}$  ainsi défini ( $\bar{k}$  étant le point pour lequel P atteint son maximum absolu sur  $[0, +\infty[$ ) :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \bar{K}(t) = k_0 + Mt & \forall t \in \left[ 0, \frac{\bar{k}-k_0}{M} \right] \\ \bar{K}(t) = \bar{k} & \forall t \in \left[ \frac{\bar{k}-k_0}{M}, +\infty \right[ \end{array} \right.$$

est tel que  $\left\{ \begin{array}{l} \forall t \in \left[ 0, \frac{\bar{k}-k_0}{M} \right] \\ \forall t \in \left[ \frac{\bar{k}-k_0}{M}, +\infty \right[ \end{array} \right. \quad K(t) = \bar{K}(t)$

$\left\{ \begin{array}{l} \forall t \in \left[ \frac{\bar{k}-k_0}{M}, +\infty \right[ \\ \text{Soit } t^* = \inf \left\{ t \mid \tilde{K}'(t+0) \neq M \right\} \end{array} \right. \quad K(t) < \bar{K}(t)$

Soit  $t^* = \inf \left\{ t \mid \tilde{K}'(t+0) \neq M \right\}$ .

Il résulte de la proposition 2.6.1.2. que  $\tilde{K}'(t^*+0) = 0$ . Par suite des lemmes 3 et 4 (§ 2.3.), le programme :



$$\begin{cases} K(t) = Mt & \forall t \in [0, t^*] \\ K(t) = Mt^* & \forall t \in [t^*, +\infty[ \end{cases}$$

est optimal.

Théorème IV | Si  $\delta > 0$ , et si  $k_0 \leq M/\delta$ , il existe une optimale de  $\mathcal{K}_M(k_0)$  de l'un des types suivants :

- |      |  |  |
|------|--|--|
| I)   | <u><math>\forall t \geq 0</math></u>   | <u><math>\tilde{K}(t) = k_0 = \bar{k}</math></u>   |
| II)  | <u><math>\forall t \geq 0</math></u>   | <u><math>\tilde{K}(t) = M/\delta + [k_0 - \frac{M}{\delta}] e^{-\delta t} &lt; \bar{k} = M/\delta</math></u>   |
| III) | <u><math>\exists t^* \geq 0</math></u> | <u><math>\begin{cases} \forall t \in [0, t^*] &amp; \tilde{K}(t) = \frac{M}{\delta} + [k_0 - \frac{M}{\delta}] e^{-\delta t} \\ \forall t \geq t^* &amp; \tilde{K}(t) = \frac{M}{\delta} + [k_0 - \frac{M}{\delta}] e^{-\delta t^*} = \bar{k} \end{cases}</math></u> |
| IV)  | <u><math>\forall t \geq 0</math></u>   | <u><math>\tilde{K}(t) = k_0 e^{-\delta t} &gt; \bar{k} = 0</math></u>  |
| V)   | <u><math>\exists t^* &gt; 0</math></u> | <u><math>\begin{cases} \forall t \in [0, t^*] &amp; \tilde{K}(t) = k_0 e^{-\delta t} \\ \forall t \geq t^* &amp; \tilde{K}(t) = k_0 e^{-\delta t^*} = \bar{k} \end{cases}</math></u>   |

où  $\bar{k}$  est tel que P a un maximum local en  $\bar{k}$  et que

$$\underline{P(\bar{k}) = \sup \left\{ P(k) \mid k \text{ compris entre } k_0 \text{ et } \bar{k} \right\}}$$

La proposition 2.6.2.2. implique que  $\tilde{K}'(0+0)$  est égale à 0,  $M - \delta k_0$ , ou  $-\delta k_0$ .

A - Si  $\tilde{K}'(0+0) = 0$ , il résulte du lemme 4 du § 2.3. que la politique  $\tilde{K}$  égale à  $k_0$  quel que soit t est optimale (type I)

B - Si  $\tilde{K}'(0+0) = M - \delta k_0$  :

B1 : ou bien  $\tilde{K}'(t) = M - \delta \tilde{K}(t) \quad \forall t > 0$  (type II)

B2 : ou bien  $\tilde{K}'(t) = M - \delta \tilde{K}(t) \quad \forall t \in [0, t^*]; \tilde{K}'(t^*+0) = 0$  (type III)

Dans ce cas,  $K'$  est nulle dans un intervalle  $]t^*, t^* + \varepsilon[$ , et le programme  $K^*$

tel que :  $\forall t \in [0, t^*] \quad K^*(t) = \tilde{K}(t) ; \forall t > t^* \quad K^*(t) = \tilde{K}(t^*)$   
est optimal.

$$B3 : \text{ ou bien } \begin{cases} \forall t \in [0, t^*] & K'(t) = M - \delta \tilde{K}(t) \\ & \tilde{K}'(t^* + 0) = -\delta \tilde{K}(t^*) \end{cases}$$

Montrons que ce cas est incompatible avec l'hypothèse  $k_0 \leq M/\delta$ .

On démontre aisément, en s'inspirant de la démonstration de la proposition 2.3.2., que si un tel nombre  $t^*$  existait,  $P$  serait croissante, dans un intervalle  $]\tilde{K}(t^*) - \gamma, \tilde{K}(t^*)]$ . D'autre part,  $\tilde{K}$  serait croissante dans un intervalle  $]t^* - \varepsilon, t^*]$ , et décroissante dans un intervalle  $[t^*, t^* + \varepsilon[$ . Soit  $\theta_0$  un nombre tel que :

$$0 < t^* - \theta_0 < \varepsilon \quad \text{et} \quad \tilde{K}(t^*) > \tilde{K}(\theta_0) > \tilde{K}(t^*) - \gamma$$

Si le cas B3 était possible, il existerait un nombre  $\theta_1$  tel que :

$$\theta_1 > t^* \quad \tilde{K}(\theta_1) = \tilde{K}(\theta_0)$$

On démontre aisément que  $\theta_1 - t^* < \varepsilon$ .

Soit  $K^*$  le programme ainsi défini :

$$\begin{aligned} \forall t \in [0, \theta_0] & \quad K^*(t) = \tilde{K}(t) \\ \forall t > \theta_0 & \quad K^*(t) = \tilde{K}(t - j \lfloor \theta_1 - \theta_0 \rfloor) \quad (j \text{ étant la partie} \\ & \quad \text{entière de } \frac{t - \theta_0}{\theta_1 - \theta_0}) \end{aligned}$$

Il résulterait du lemme 4 que  $K^*$  serait optimale. Soit  $\bar{K}$  le programme ainsi défini :

$$\begin{cases} \forall t \in [0, t^*] & \bar{K}(t) = K^*(t) \\ \forall t \in [t^*, +\infty[ & \bar{K}(t) = K^*(t^*) = \tilde{K}(t^*) \end{cases}$$

Si  $t \geq t^*$ ,  $\bar{K}(t)$  et  $K^*(t)$  appartiendraient à  $] \tilde{K}(t^*) - \eta, \tilde{K}(t^*) ]$  ; de plus,  $\bar{K}(t) > K^*(t)$  presque partout sur  $[t^*, +\infty[$  ; comme  $\bar{K}(t) = K^*(t)$  dans  $[0, t^*]$ ,  $W(\bar{K}) > W(K^*)$ , ce qui contredit l'optimalité de  $K^*$ , donc de  $\tilde{K}$ .

Par suite, l'éventualité B3 est impossible.

C. Si  $\tilde{K}'(0+0) = -\delta k_0$ , on a l'une des éventualités C1 ou C2 :

$$C1 : \tilde{K}'(t) = -\delta \tilde{K}(t) \quad \forall t \geq 0 \quad (\text{type IV})$$

$$C2 : \begin{cases} \tilde{K}'(t) = -\delta \tilde{K}(t) & \forall t \in [0, t^* [ \\ \tilde{K}'(t) = 0 & \forall t \in [t^*, +\infty [ \end{cases}$$

Ce cas est analogue au cas B2.

$$C3 : \text{Si } \begin{cases} K'(t) = -\delta K(t) & \forall t \in [0, t^* [ \\ K'(t^*+0) = M - \delta K(t^*) \end{cases}$$

$K$  ne peut être optimale : la démonstration en est analogue à celle du cas B3.

### 2.6.3. Algorithmes (cas où $k_0 \leq M/\delta$ )

#### 2.6.3.1. Algorithme simplifié.

Soit  $K_{k_0, k}^*$  l'application de  $[0, +\infty[$  dans  $[0, +\infty[$  ainsi définie ( $k_0 \leq M/\delta$ ) :

$$- \text{ si } \delta = 0 \quad K_{k_0, k}^*(t) = \min \left\{ k_0 + Mt, k \right\}$$

$$- \text{ si } \delta > 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{si } k_0 < k \quad K_{k_0, k}^*(t) = \min \left\{ \frac{M}{\delta} + \left[ k_0 - \frac{M}{\delta} \right] e^{-\delta t}, k \right\} \\ \text{si } k_0 = k \quad K_{k_0, k}^*(t) = k_0 \\ \text{si } k_0 > k \quad K_{k_0, k}^*(t) = \max \left\{ k_0 e^{-\delta t}, k \right\} \end{array} \right.$$

On vérifie aisément que toutes les optimales indiquées dans le théorème ci-dessus sont de la forme  $K_{k_0, \bar{k}}^*$ . L'algorithme ci-dessus permet de calculer  $\bar{k}$  pour une valeur fixée de  $k_0$ ; son principe est analogue à celui du § 4.6.

Nous utiliserons le fait suivant, aisément démontrable : si  $P(k_1)$  et  $P(k_2)$  sont des maxima locaux de  $P$ , pour que  $W(k_1^*, k_2^*) > W(k_1^*, k_1^*)$ , il faut que  $P(k_2) > P(k_1)$ .

Algorithme (cas où  $\delta > 0$ )

A. Détermination des nombres  $k_0^*, k_1^*, \dots, k_m^*$  tels que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{k_0^* = k_0} \\ \underline{k_i^* = \inf \left\{ k \mid k_{i-1}^* < k \leq \frac{M}{\delta}; P(k) > P(k_{i-1}^*) \right\}} ; \\ \underline{P(k) \text{ max local de } P} \end{array} \right.$$

$\forall i \in \{1, \dots, m\}$

B. Détermination des nombres  $k_{m+1}^* \dots k_n^*$  tels que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{k_{n+1}^* = \sup \left\{ k \mid k > k_m^* \geq 0; P(k) > P(k_m^*); P(k) \text{ max local de } P \right\}} \\ \underline{k_i^* = \sup \left\{ k \mid k_{i-1}^* > k \geq 0; P(k) > P(k_{i-1}^*); P(k) \text{ max local de } P \right\}} \end{array} \right.$$

$\forall i \in \{m+1, \dots, n\}$

$$\left. \begin{array}{l}
 \text{C. Déterminer } \tilde{k}_\varepsilon \left\{ k_0^*, k_1^*, \dots, k_m^*, \dots, k_n^* \right\} \text{ tels que :} \\
 \underline{W(k_0^*, \tilde{k})} = \max_i \underline{W(k_0^*, k_i^*)}
 \end{array} \right\}$$

Dans le cas où  $\delta = 0$ , on fait dans l'algorithme ci-dessus  $m = n$  (donc la partie B est supprimée).

Notons d'autre part que :

$$\begin{aligned}
 \bullet \text{ si } \delta > 0 \text{ et } k_1 \leq k_2 < \frac{M}{\delta} : \quad W(k_{k_1}^*, k_{k_2}^*) = & \left[ \frac{M}{\delta} - k_1 \right]^{-\alpha/\delta} \left[ \frac{1}{\delta} \int_{k_1}^{k_2} \left( \frac{M}{\delta} - y \right)^{\frac{\alpha}{\delta} - 1} P(y) dy \right. \\
 & \left. + \left[ \frac{M}{\delta} - k_2 \right]^{\alpha/\delta} \frac{P(k_2)}{\alpha} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bullet \text{ si } \delta > 0 \text{ et } k_2 \leq k_1 < \frac{M}{\delta} : \quad W(k_{k_1}^*, k_{k_2}^*) = & k_1^{-\alpha/\delta} \left[ \frac{1}{\delta} \int_{k_1}^{k_2} y^{\frac{\alpha}{\delta} - 1} P(y) dy \right. \\
 & \left. + k_2^{\alpha/\delta} \frac{P(k_2)}{\alpha} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bullet \text{ si } \delta = 0 \text{ et } k_2 \geq k_1 : \quad W(k_{k_1}^*, k_{k_2}^*) = & \int_{k_1}^{k_2} \frac{e^{\alpha k_1/M}}{M} e^{-\alpha y/M} P(y) dy \\
 & + \frac{P(k_2)}{\alpha} e^{-\frac{\alpha}{M}(k_2 - k_1)}
 \end{aligned}$$

$$\bullet \text{ si } k_1 = k_2 : \quad W(k_{k_1}^*, k_{k_2}^*) = \frac{P(k_2)}{\alpha}$$

### 2.6.3.2. Algorithme de Arrow.

Cet algorithme, analogue à celui du § 2.4.3. permet

de calculer une ou des optimales de  $J_M^0(k_0)$  quel que soit  $k_0$ .

Algorithme. A. Déterminer les nombres  $k_0^*, k_1^*, \dots, k_i^*$ , tels que  $P(k_i^*)$ .

soit un maximum local de P et que :

$$\underline{0 \leq k_0^* < \dots < k_i^* \leq M/\delta}$$

B. Déterminer les nombres  $\bar{k}_0, \bar{k}_1, \dots, \bar{k}_i$  tels que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{W(k_0^*, \bar{k}_0) = \max \left\{ \frac{W(k_0^*, k_j^*)}{k_0^*, k_j^*} \mid 0 \leq j < i^* ; P(k_j^*) \geq P(k_0^*) \right\}} \\ \underline{\bar{k}_i = \inf \left\{ k_j^* \mid k_j^* > \bar{k}_{i-1} ; \frac{W(k_0^*, k_j^*)}{k_j^*, k_j^*} = \max_{k_l^* > \bar{k}_{i-1}} \frac{W(k_0^*, k_l^*)}{k_j^*, k_l^*} \right\}} \\ \underline{i \in \{ 0, 1, \dots, \bar{i} \}} \end{array} \right.$$

C. Déterminer les nombres  $\tilde{k}_0, \tilde{k}_1, \dots, \tilde{k}_{i+1}$  tels que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\frac{W(k_0^*, \tilde{k}_i)}{\tilde{k}_i, \tilde{k}_{i-1}} = \frac{W(k_0^*, \tilde{k}_i)}{\tilde{k}_i, \tilde{k}_i} \quad \forall i \in \{ 1, \dots, \bar{i} \}} \\ \underline{\tilde{k}_0 = 0 \quad \tilde{k}_{i+1} = +\infty} \end{array} \right.$$

Proposition Si  $\tilde{k}_{i-1} \leq k_0 \leq \tilde{k}_i$ , alors  $K_{k_0, \bar{k}_{i-1}}^*$  est optimale.

Si  $\left\{ \begin{array}{l} \underline{\tilde{k}_i = k_0} \\ \underline{i \neq 0} \end{array} \right.$ , alors  $K_{k_0, \bar{k}_{i-1}}^*$  et  $K_{k_0, \bar{k}_i}^*$  sont optimales.

Les démonstrations de cette proposition et de cet algo-

rithmes sont semblables à celles du § 2.4.3.

En ce qui concerne le nombre des optimales de  $\mathcal{B}_M(k_0)$ , on peut obtenir des propositions et démonstrations analogues à celles du § 2.4.4. Indiquons que si  $\tilde{k}_{i-1} < k_0 < \tilde{k}_i$  et  $\tilde{k}_{i-1} < \bar{k}_{i-1}$ ,  $K_{k_0, \bar{k}_{i-1}}^*$  est l'unique optimale de  $\mathcal{B}_M(k_0)$ ; si  $k_0 = \tilde{k}_i \neq \bar{k}_i$  et  $\tilde{k}_i \neq \bar{k}_{i-1}$ ,  $K_{k_0, \bar{k}_i}^*$  et  $K_{k_0, \bar{k}_{i-1}}^*$  sont les seules optimales de  $\mathcal{B}_M(k_0)$ ; dans les autres cas, l'ensemble des optimales de  $\mathcal{B}_M(k_0)$  a la puissance de continu.

2.6.4. Optimales de  $\mathcal{B}_M(k_0)$  pour  $k_0 > M/\delta$ .

Proposition 2.6.4.1. Si  $k_0 > M/\delta$  et si  $\tilde{K}$  est optimale de  $\mathcal{B}_M(k_0)$  :

- ou bien  $\forall t \quad \tilde{K}(t) > \frac{M}{\delta}$  ; dans ce cas,

$\tilde{K}'(t) = -\delta\tilde{K}(t)$  ou  $\tilde{K}'(t) = M - \delta\tilde{K}(t)$ , en tout point  $t$  où  $\tilde{K}$  est dérivable ; de plus,

$$\underline{\exists \tau \quad \forall t > \tau \quad \tilde{K}'(t) = M - \delta\tilde{K}(t)} \quad (\text{cas I})$$

- ou bien :

$$\underline{\exists \tau > 0 \left\{ \begin{array}{l} \forall t \in [0, \tau] \quad \tilde{K}'(t) = -\delta\tilde{K}(t) \text{ ou } M - \delta\tilde{K}(t) \text{ (lorsque } \tilde{K} \text{ est dérivable en } t) \\ \tilde{K}(t) = \frac{M}{\delta} \\ \forall t \in [\tau, +\infty] \quad \tilde{K}(t) = K_{M/\delta}(t - \tau) \text{ (où } K_{M/\delta} \text{ désigne une optimale de } \mathcal{B}_M(M/\delta)) \end{array} \right.}$$

(cas II)

En effet, d'après la proposition 2.6.1.2.,  $\tilde{K}'(t)$  ne peut

prendre que les valeurs  $-\delta\tilde{K}(t)$ ,  $M-\delta\tilde{K}(t)$  ou 0 ; mais si  $\tilde{K}'(t) = 0$ ,  $\tilde{K}'$  est nécessairement nulle dans un intervalle, donc  $\tilde{K}$  est constante dans un intervalle ; il résulte de la proposition 2.6.1.1. que  $\tilde{K}(t)$  est alors  $\leq \frac{M}{\delta}$ .

S'il existe un nombre  $\tau$  tel que :

$$\tilde{K}(\tau) > \frac{M}{\delta} \text{ et } \forall t > \tau \quad \tilde{K}'(t) = M - \delta\tilde{K}(t)$$

on est alors dans le cas I

$$(\tilde{K}(t) = \frac{M}{\delta} + \left[ \tilde{K}(\tau) - \frac{M}{\delta} \right] e^{-\delta(t-\tau)} \text{ pour } t > \tau), \text{ et pour } t < \tau.$$

$\tilde{K}$  est décroissante, puisque  $\tilde{K}'$  est presque partout définie égale, soit à  $-\delta\tilde{K}$  soit à  $M - \delta\tilde{K} < 0$ ).

Sinon, on démontre aisément que :

$$\exists \tau \quad \tilde{K}(\tau) = \frac{M}{\delta}$$

Le lemme 1 implique que si  $\bar{K}(t) = \tilde{K}(\tau + t)$  ( $t \geq 0$ ) alors  $\bar{K}$  est une optimale de  $\mathcal{H}_{M/\delta}$ .

Proposition 2.6.4.2. Lorsque  $\tilde{K}(t) > M/\delta$  :

- si  $\tilde{K}'(t-0) = M - \delta\tilde{K}(t)$  et  $\tilde{K}'(t+0) = -\delta\tilde{K}(t)$   
alors P croît dans un voisinage de  $\tilde{K}(t)$ ,  
ou  $P(\tilde{K}(t))$  est un extremum de P
- si  $\tilde{K}'(t-0) = -\delta\tilde{K}(t)$  et  $\tilde{K}'(t+0) = M - \delta\tilde{K}(t)$   
alors P décroît dans un voisinage de  $\tilde{K}(t)$ ,  
ou  $P(\tilde{K}(t))$  est un extremum de P.

Cette proposition se déduit immédiatement de la démonstration de la proposition 2.6.4.2.

Algorithme.

L'algorithme que l'on propose ici permet de calculer une



approximation de l'optimale de  $\mathcal{H}_M(k_0)$  lorsque  $k_0 > M/\delta$ , par discrétion. Supposons P définie point par point : soient  $K_0, K_1, \dots, K_j, \dots$  diverses valeurs de K classées par ordre croissant, et  $P_0, P_1, \dots, P_j, \dots$  les valeurs correspondantes de P :

$$P(K_j) = P_j$$

Supposons que

$$K_{j_i} \leq \frac{M}{\delta} < K_{j_{i+1}} \quad \text{et} \quad K_{j_0} \simeq k_0$$

L'optimale  $\tilde{K}_j$  de  $\mathcal{H}_M(K_j)$  ( $j \geq j_i$ ) étant connue, il résulte du lemme 1 et de la proposition 2.6.4.1. que l'optimale  $\tilde{K}_{j+1}$  de  $\mathcal{H}_M(K_{j+1})$  ne peut être que l'une des deux fonctions  $K_{j+1}^0$  et  $K_{j+1}^1$  ainsi définies :

$$\begin{cases} \forall t \in \left[0, \frac{1}{\delta} \text{Log}(K_{j+1}/K_j)\right] & K_{j+1}^0(t) = K_{j+1} e^{-\delta t} \\ \forall t \geq \frac{1}{\delta} \text{Log}(K_{j+1}/K_j) & K_{j+1}^0(t) = \tilde{K}_j \left(t - \frac{1}{\delta} \text{Log}(K_{j+1}/K_j)\right) \end{cases}$$

$$\text{si } \begin{cases} j > j_i & \left\{ \begin{array}{l} \forall t \in \left[0, \frac{1}{\delta} \text{Log}\left(\frac{[K_{j+1} - M/\delta]}{[K_j - M/\delta]}\right)\right] \\ \forall t \geq \frac{1}{\delta} \text{Log}\left(\frac{[K_{j+1} - M/\delta]}{[K_j - M/\delta]}\right) \\ \forall t > 0 \end{array} \right. \end{cases} \begin{cases} K_{j+1}^1(t) = \frac{M}{\delta} + \left[K_{j+1} - \frac{M}{\delta}\right] e^{-\delta t} \\ K_{j+1}^1(t) = \tilde{K}_j \left(t - \frac{1}{\delta} \text{Log}\frac{K_{j+1} - M/\delta}{K_j - M/\delta}\right) \\ K_{j+1}^1(t) = \frac{M}{\delta} + \left[K_{j_{i+1}} - \frac{M}{\delta}\right] e^{-\delta t} \end{cases}$$

Si  $\tilde{K}'_j(0+0) = -\delta K_j$  et si  $P_{j-1} > P_j > P_{j+1}$  alors  $\tilde{K}_{j+1} = K_{j+1}^0$

Si  $\tilde{K}'_j(0+0) = M - \delta K_j$  et si  $P_{j-1} < P_j < P_{j+1}$  alors  $\tilde{K}_{j+1} = K_{j+1}^1$

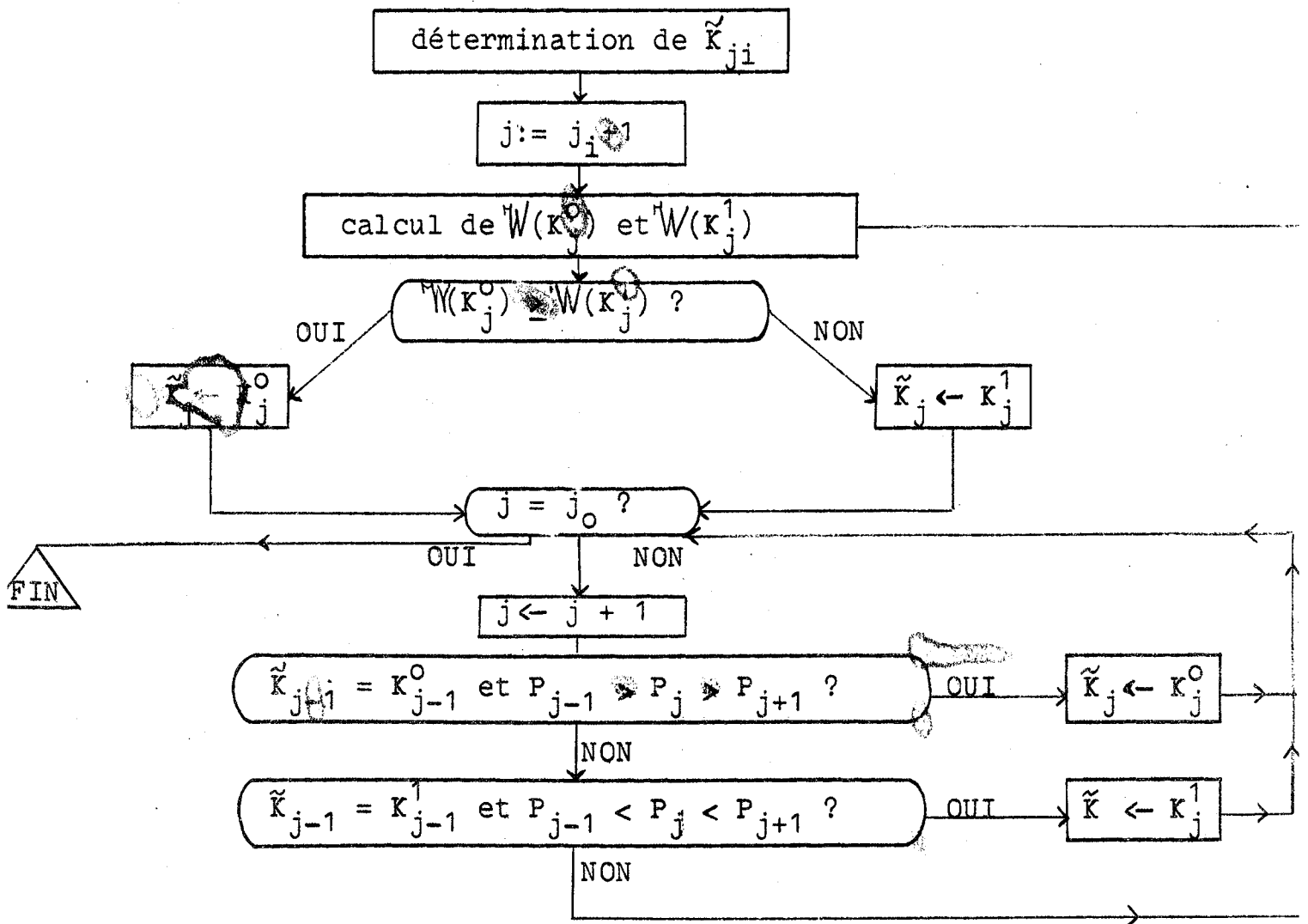
Si on ne se trouve dans aucun de ces 2 cas, il faut calculer laquelle de ces 2 politiques est la meilleure ; on a :

$$\begin{cases} W(K_{j+1}^0) = \left(\frac{1}{K_{j+1}}\right)^{\alpha/\delta} \left[ \frac{1}{\delta} \int_{K_j}^{K_{j+1}} x^{\frac{\alpha}{\delta}-1} P(x) dx + K_j^{\alpha/\delta} x W(\tilde{K}_j) \right] \\ W(K_{j+1}^1) = \left(\frac{1}{K_{j+1}-M/\delta}\right)^{\alpha/\delta} \left[ \frac{1}{\delta} \int_{K_j}^{K_{j+1}} (x-M/\delta)^{\frac{\alpha}{\delta}-1} P(x) dx + \left(K_j - \frac{M}{\delta}\right)^{\alpha/\delta} x W(K_j) \right] \end{cases}$$

(si  $j > j_i$ )

$$W(K_{j_i+1}^1) = \left(\frac{1}{K_{j_i+1}-M/\delta}\right)^{\alpha/\delta} \int_{M/\delta}^{K_{j_i+1}} (x-M/\delta)^{\frac{\alpha}{\delta}-1} \frac{P(x)}{\delta} dx$$

On en déduit un algorithme dont l'organigramme simplifié est le suivant :



Remarque : Il serait possible d'approximer  $\tilde{K}$ , non par discrétion, mais au moyen d'un calculateur analogique.

2.7. RELATIONS ENTRE LES OPTIMALES DE  $\mathcal{H}_M(k_0)$  ET LES OPTIMALES  
DE  $\mathcal{H}_\infty(k_0)$ .

On peut démontrer tous les résultats relatifs à  $\mathcal{H}_\infty(k_0)$  (§ 2.4. et 2.5.) à partir de ceux relatifs à  $\mathcal{H}_M(k_0)$  (où  $k_0 < M/\delta$ ). Pour cela, il suffit d'utiliser les lemmes et proposition d'approximation (§ 1.3.). Dans les cas où il n'y a qu'une seule optimale de  $\mathcal{H}_M(k_0)$ , c'est immédiat (proposition 1.3.4.).

Lorsqu'il n'y a pas unicité de l'optimale, on peut déduire les optimales de  $\mathcal{H}_\infty(k_0)$  de celles de  $\mathcal{H}_M(k_0)$  en utilisant la condition d'optimalité suivante : pour que la fonction  $\bar{K}$ , appartenant à  $\mathcal{H}_\infty(k_0)$  soit une optimale de cet ensemble, il faut et il suffit que :

$$\forall K \in \mathcal{H}_\infty(k_0) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad W(K) - W(\bar{K}) < \varepsilon$$

Soient  $(K_n)$  et  $(\bar{K}_n)$  les suites d'approximation (cf § 1.3.2.) respectives de  $K$  et  $\bar{K}$ . La condition ci-dessus équivaut à :

$$\forall K \in \mathcal{H}_\infty(k_0) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \quad n > N_\varepsilon \implies W(K_n) - W(\bar{K}_n) < \varepsilon$$

Redémontrons, à titre d'exemple, le théorème I (§ 2.5.1.) à partir du théorème III (§ 2.6.2.).

Posons :

$$\begin{aligned} \text{si } \delta > 0 \text{ et } t > 0 & \quad \bar{K}^k(t) = \max \{k, k_0 e^{-\delta t}\} \\ \text{si } \delta = 0 \text{ et } t > 0 & \quad \bar{K}^k(t) = \max \{k, k_0\} \\ \text{si } t = 0 & \quad \bar{K}^k(t) = k_0 \end{aligned}$$

Soit  $\bar{k}_n^k$  la suite de fonctions correspondant à  $\bar{k}$ , conformément au lemme 1.3.2. Soient  $q_0, q_1, \dots, q_m$  les valeurs de  $k$  pour lesquelles  $P$  a un maximum local et telles que :

$$P(q) = \sup \left\{ P(k) \mid k \text{ compris entre } k_0 \text{ et } q \right\}$$

Soit  $J$  le sous-ensemble de  $\{0, 1, \dots, m\}$  défini par :

$$j \in J \iff W(\bar{k}^{q_j}) = \max_i W(\bar{k}^{q_i})$$

Il s'agit de démontrer que  $\bar{k}^{q_j}$  est optimale de  $\mathcal{H}_\infty(k_0)$  pour tout  $j \in J$ .

Par suite de la définition de  $\{q_0, q_1, \dots, q_m\}$  :

$$\forall i \in \{0, 1, \dots, m\} \quad W(\bar{k}_n^{q_i}) \leq W(\bar{k}^{q_i})$$

Donc :

$$\forall j \in J \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall i \in \{0, 1, \dots, m\} \quad W(\bar{k}^{q_j}) \geq W(\bar{k}_n^{q_i})$$

Posons :

$$\eta = \inf \left\{ W(\bar{k}^{q_j}) - W(\bar{k}^{q_i}) \mid j \in J ; i \in \{0, 1, \dots, m\}; W(\bar{k}^{q_j}) \neq W(\bar{k}^{q_i}) \right\}$$

Comme :

$$\forall i \quad \lim_{n \rightarrow \infty} W(\bar{k}_n^{q_i}) = W(\bar{k}^{q_i})$$

si  $0 < \varepsilon < \eta$  :

$$\exists N_\varepsilon \quad \forall j \in J \quad n > N_\varepsilon \implies W(\bar{k}^{q_j}) - W(\bar{k}_n^{q_j}) < \varepsilon$$

Donc :

$$\forall n > N_\varepsilon \quad \sup \left\{ \left| W(\bar{k}^{q_j}) - W(\bar{k}_n^{q_l}) \right| \mid j \in J ; l \in J \right\} < \varepsilon \quad (2)$$

Or, d'après les théorèmes 2.6.2., l'une au moins des optimales de  $\mathcal{H}_n(k_0)$  est de la forme  $\bar{k}^{q_j}$ . Si  $n > N_\varepsilon$ , alors  $j \in J$  puisque :

$$\forall j \in J \quad \forall i \in \{0, 1, \dots, m\} - J \quad W(\bar{k}_n^{q_j}) \geq W(\bar{k}^{q_j}) - \eta \geq W(\bar{k}_n^{q_i})$$

Par suite de (2), si  $w_n$  est le maximum de  $W$  sur  $\mathcal{B}_n(k_0)$  :

$$\forall n > N_\varepsilon \quad \forall j \in J \quad w_n - W(\bar{k}_n^{qj}) < \varepsilon$$

Par conséquent,  $\bar{k}^{qj}$  pour  $j \in J$ , satisfait la condition (1) ; donc  $\bar{k}^{qj}$  est optimale, et le théorème I est redémontré.

On pourrait, d'une manière analogue, redémontrer l'algorithme de Arrow relatif à  $\mathcal{B}_\infty(k_0)$ , et les résultats concernant le nombre des optimales de  $\mathcal{B}_\infty(k_0)$ .

CHAPITRE III

-----



METHODES DE PONTRYAGIN ET DU MULTIPLICATEUR DE LAGRANGE.

3.1.- METHODE DE PONTRYAGIN.

3.1.1.- La condition de Pontryagin.

Le théorème de Pontryagin énonce une condition nécessaire d'optimalité, valable pour certains problèmes de programmation dynamique continue (Cf § 1.2.5.). Afin de pouvoir appliquer ce théorème, nous supposerons que :

$$\left\{ \begin{array}{l} M \text{ est fini} \\ H, \frac{\partial H}{\partial t}, \frac{\partial H}{\partial k} \text{ sont définies et continues sur } [0, T] \times \mathbb{R}_+ \\ c' \text{ est continue sur } [0, T]. \end{array} \right.$$

Nous nous contenterons ici d'étudier comment la méthode de Pontryagin s'applique à notre problème, sans énoncer de théorème général (si on s'y intéresse, on peut se reporter à [3], théorèmes 4, 5, 6 et 7).

Proposition 1 | Si  $\tilde{K}$  est une optimale de  $\mathcal{B}_M(k_0)$ , alors il existe une fonction numérique dérivable  $\tilde{\psi}$  définie sur  $[0, T]$ , telle que :

$$(SP) \left\{ \begin{array}{l} \tilde{\psi}'(t) - \delta \tilde{\psi}(t) = - \frac{\partial H}{\partial k}(t, \tilde{K}(t)) \quad \tilde{\psi}(t) + c(t) > 0 \implies \tilde{K}'(t) + \delta \tilde{K}(t) = M \\ \tilde{\psi}(T) = 0 \quad \tilde{\psi}(t) + c(t) < 0 \implies \tilde{K}'(t) + \delta \tilde{K}(t) = 0 \end{array} \right.$$



Remarque 1 : si  $T = +\infty$ , la condition  $\tilde{\varphi}(T) = 0$  est remplacée (Cf [3], p 189) par :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \tilde{\varphi}(t) = 0$$

Remarque 2 : si on se fixe  $\tilde{K}(T)$ , la condition  $\tilde{\varphi}(T) = 0$  disparaît.

3.1.2.- "Structure" des optimales.

Posons  $\tilde{\Psi}(t) = \tilde{\varphi}(t)e^{\delta t}$ . Le système (SP) devient :

$$\begin{cases} \tilde{\varphi}'(t) = -\frac{\partial H}{\partial k}(t, \tilde{K}(t))e^{-\delta t} & \tilde{\varphi}(t) + c(t)e^{\delta t} < 0 \implies \tilde{I}(t) = 0 \\ \tilde{\varphi}(T) = 0 & \tilde{\varphi}(t) + c(t)e^{\delta t} > 0 \implies \tilde{I}(t) = M \end{cases}$$

( $\tilde{I}(t)$  désigne par définition  $\tilde{K}'(t) + \delta\tilde{K}(t)$ ), lorsque  $\tilde{K}$  est dérivable au point  $t$ ).

Par suite :

$$\tilde{\varphi}(t) = \int_t^T \frac{\partial H}{\partial k}(u, \tilde{K}(u)) e^{-\delta u} du$$

Il en résulte la proposition :

Proposition 2 | Si  $\tilde{K}$  est une optimale de  $\mathcal{J}_M^{\delta}(k_0)$ , alors la fonction  $\tilde{\varphi}$  définie par :

$$\tilde{\varphi}(t) = \int_t^T \frac{\partial H}{\partial k}(u, \tilde{K}(u)) e^{-\delta u} du$$

est telle que :

$$\begin{cases} \tilde{\varphi}(t) + c(t)e^{-\delta t} > 0 \implies \tilde{K}'(t) + \delta\tilde{K}(t) = M \\ \tilde{\varphi}(t) + c(t)e^{-\delta t} < 0 \implies \tilde{K}'(t) + \delta\tilde{K}(t) = 0 \end{cases}$$

On peut déduire aisément de ces deux propositions le corollaire :

Corollaire | Le graphe de toute optimale  $\tilde{K}$  de  $\mathcal{J}_M(k_0)$ , (que  $K(T)$  soit ou non fixé) est réunion d'arcs de trois types :

<u>arcs où</u>	<u><math>\tilde{K}'(t) + \delta\tilde{K}(t) = M</math></u>
<u>arcs où</u>	<u><math>\tilde{K}'(t) + \delta\tilde{K}(t) = 0</math></u>
<u>arcs où</u>	<u><math>-\frac{\partial H}{\partial k}(t, \tilde{K}(t)) + c'(t) - \delta c(t) = 0</math></u>

En effet, si

$$\forall t \in [t_0, t_1] \quad \tilde{I}(t) \neq 0 \quad \text{et} \quad \tilde{I}(t) \neq M$$

alors :

$$\forall t \in [t_0, t_1] \quad \tilde{\varphi}(t)e^{-\delta t} + c(t)e^{-\delta t} = \tilde{\varphi}(t) + c(t)e^{-\delta t} = 0$$

donc :

$$\forall t \in [t_0, t_1] \quad \frac{d}{dt} (\tilde{\varphi}(t) + c(t)e^{-\delta t}) = -\frac{\partial H}{\partial k}(t, \tilde{K}(t))e^{-\delta t} + [c'(t) - \delta c(t)]e^{-\delta t} = 0$$

Remarque : "en général", dans les cas usuels, l'équation :

$$-\frac{\partial H}{\partial k}(t, k) + c'(t) - \delta c(t) = 0$$

définit un nombre fini de courbes dans  $[0, T] \times \mathbb{R}_+$ , dont la réunion est donc de mesure nulle dans le plan. Il en résulte que ces courbes jouent a priori un rôle privilégié dans la résolution effective du problème. Nous verrons en particulier que dans le cas stationnaire (problème de Arrow) et le problème de Karlin-Beckmann, tout point de commutation (point d'intersection de deux arcs d'extrémale de types différents) appartient à certains arcs de ces courbes.

3.1.3.- Interprétation économique.

Posons :

$$w(t, k) = \sup \left\{ \int_t^T [H(u, K(u)) + c(u)I(u)] du \mid K(t) = k ; K \in \mathcal{K}_M(k_0) ; \right. \\ \left. \forall u \quad I(u) = K'(u) + \delta K(u) \right\}$$

Lemme : Si  $\tilde{K}$  est une optimale de  $\mathcal{K}_M(k_0)$  et si  $w$  est deux fois continûment différentiable au point  $(t, \tilde{K}(t))$ , alors :

$$\underline{\tilde{\psi}(t) = \frac{\partial}{\partial k} w(t, \tilde{K}(t))}$$

La démonstration ci-dessous est analogue à celle [3] (p70) relative aux problèmes de minimisation de la durée d'un processus, et à celle de [4] (p 48).

Soit  $\tilde{K}$  une optimale, et posons :

$$\tilde{I} = \tilde{K}' + \delta \tilde{K} .$$

Pour tout  $t > 0$  :

$$w(0, k_0) = \int_0^t [H(u, \tilde{K}(u)) + c(u)I(u)] du + w(t, \tilde{K}(t))$$

Par suite, si on dérive par rapport à  $t$  les 2 nombres de cette égalité :

$$0 = H(t, \tilde{K}(t)) + c(t)\tilde{I}(t) + \frac{d}{dt} w(t, \tilde{K}(t))$$

$$0 = H(t, \tilde{K}(t)) + c(t)\tilde{I}(t) + \frac{\partial}{\partial t} w(t, \tilde{K}(t))$$

$$(1) \quad + \frac{\partial}{\partial k} w(t, \tilde{K}(t)) [\tilde{I}(t) - \delta \tilde{K}(t)]$$

Soit  $K(u)$  une fonction ainsi définie :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall u \in ]t, t+dt[ \\ \forall u \in ]t, t+dt, T[ \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} K(t) = \tilde{K}(t) \\ I(u) = K'(u) + \delta K(u) = i \epsilon [0, M] \\ K(u) \text{ est tel que :} \\ \int_{t+dt}^T [H(u, K(u)) + c(u)I(u)] du = w(t+dt, \tilde{K}(t) + dk) \end{array} \right.$$

$$(dk = [i - \delta K(t)] dt) ; \text{ ainsi } K(t+dt) = \tilde{K}(t) + dk$$

Par suite de la définition de w :

$$0 \geq -w(t, \tilde{K}(t)) + \int_t^{t+dt} [H(u, K(u)) + i c(u)] du + w(t+dt, \tilde{K}(t) + dk)$$

Comme cette relation est valable pour tout  $dt > 0$  et w est deux fois continûment différentiable, en faisant tendre dt vers 0 on obtient :

$$(2) \quad 0 \geq \frac{\partial w}{\partial t} (t, \tilde{K}(t)) + \frac{\partial w}{\partial k} (t, \tilde{K}(t)) [i - \delta \tilde{K}(t)] + H(t, \tilde{K}(t)) + ic(t)$$

(1) et (2) impliquent que :

$$(3) \quad \sup \left\{ \frac{\partial w}{\partial t} (t, \tilde{K}(t)) + \frac{\partial w}{\partial k} (t, \tilde{K}(t)) [i - \delta \tilde{K}(t)] + H(t, \tilde{K}(t)) + ic(t) \mid i \in [0, M] \right\}$$

est atteint pour  $i = \tilde{I}(t)$ .

On peut en déduire que :

$$\sup \left\{ \frac{\partial w}{\partial t} (t, k) + \frac{\partial w}{\partial k} (t, k) [\tilde{I}(t) - \delta k] + H(t, k) + \tilde{I}(t)c(t) \mid k > 0 \right\}$$

est atteint pour  $k = \tilde{K}(t)$  ; par suite, comme w est deux fois continûment différentiable :

$$\frac{\partial^2}{\partial k \partial t} w(t, \tilde{K}(t)) + \frac{\partial^2}{\partial k^2} w(t, \tilde{K}(t)) [\tilde{I}(t) - \delta \tilde{K}(t)] - \delta \frac{\partial}{\partial k} w(t, \tilde{K}(t)) + \frac{\partial}{\partial k} H(t, \tilde{K}(t)) = 0$$

Autrement dit :

$$(4) \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial k} w(t, \tilde{K}(t)) \right) - \delta \frac{\partial}{\partial k} w(t, \tilde{K}(t)) + \frac{\partial}{\partial k} H(t, \tilde{K}(t)) = 0$$

Si on remplace dans (4) et (3)  $\frac{\partial}{\partial k} w(t, \tilde{K}(t))$  par  $\tilde{\psi}(t)$  et si on remarque que :

$$\frac{\partial}{\partial k} w(T, \tilde{K}(T)) = 0 \quad (\text{si } \frac{\partial}{\partial k} w(T, \tilde{K}(T)) \text{ est défini})$$

on obtient le système (S.P), qui définit  $\tilde{\psi}(t)$  de manière unique. Le lemme est ainsi démontré.

Remarque : on obtient la même propriété dans le cas où  $\tilde{K}(T)$  est fixé, à la condition de poser :

$$w(t, k) = \sup \left\{ \int_t^T [H(u, K(u)) + c(u)I(u)] du \mid K(t) = k ; K(T) = k_T ; K \in \mathcal{K}_M(k_0) ; I(u) = \delta'(u) + \delta K(u) \right\}$$

Signification économique de la fonction  $\tilde{\psi}$ .

Le lemme ci-dessus signifie que "en général"  $\tilde{\psi}(t)$  est le profit (entre les dates t et T) actualisé marginal (relativement à la valeur de l'équipement) à l'optimum.

Or  $-c(t)$  représente le nombre d'unités monétaires à la date t que l'on considère comme équivalent à une unité monétaire à la date 0 ; appelons  $-c(t)$  "coefficient d'actualisation à la date t". La condition de Pontryagin exprime donc que :

. si la différence entre ce profit marginal et ce coefficient d'actualisation est positive à la date  $t$ , il faut investir au maximum à cette date.

. si cette différence est négative, il ne faut pas investir du tout à la date considérée.

. si cette différence est nulle, il y a indétermination : cela traduit une "compensation" entre le profit futur que rapporte un "petit" investissement et la dépense immédiate qu'il provoque, compte tenu de l'actualisation (décroissance de la valeur attribuée à la monnaie avec le temps).

### 3.2.- APPLICATION AU CAS STATIONNAIRE. (PROBLEME DE ARROW).

Pour appliquer la méthode de Pontryagin au problème de Arrow, il faut supposer que  $P$  est continûment différentiable. Nous allons retrouver ainsi les résultats du § 2.6. sous cette hypothèse.

Par suite de la proposition 2 (§ 3.1.2.), si  $\tilde{K}$  est optimale, la fonction  $\tilde{\varphi}$  définie par :

$$\tilde{\varphi}(t) = \int_t^{+\infty} P'(\tilde{K}(u)) e^{-(\alpha+\delta)u} du$$

est telle que :

$$(SA) \begin{cases} \tilde{\varphi}(t) > 0 \implies \tilde{I}(t) = \tilde{K}'(t) + \delta\tilde{K}(t) = M \\ \tilde{\varphi}(t) < 0 \implies \tilde{I}(t) = \tilde{K}'(t) + \delta\tilde{K}(t) = 0 \end{cases}$$

Remarquons que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{\delta t} \int_t^{+\infty} P'(\tilde{K}(u)) e^{-(\alpha+\delta)u} du = 0$  (en

effet,  $K$  est majoré et minoré, et  $P'$  est continue).

Remarquons que si  $\check{\varphi}(t)$  est nul dans un intervalle  $[t_0, t_1]$ ,  $\check{\varphi}'(t)$  y est nulle aussi, ainsi que  $P'(\check{K}(t))$ ; par suite :

$$\forall t \in [t_0, t_1] \quad \check{K}(t) = k^*$$

$k^*$  étant tel que  $P'(k^*) = 0$ . Il est aisé de démontrer en faisant subir à  $\check{K}$  une petite "variation" (Cf § 2.4.1.), que si  $P$  avait un minimum local ou un point d'inflexion en  $k^*$ ,  $\check{K}$  ne serait pas optimale :  $P$  a nécessairement un maximum local au point  $k^*$ . Notons que cela implique, lorsque  $\delta > 0$ , que  $k^* \leq M/\delta$ .

### 3.2.1.- Cas où $\delta = 0$ .

(a) Soient  $k^*$  un point supérieur à  $k_0$ , auquel  $P$  a un maximum local,  $\bar{K}$  et  $\bar{\varphi}$  les fonctions ainsi définies :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \forall t \in \left[ 0, \frac{k^* - k_0}{M} \right] & \bar{K}(t) = k_0 + Mt \quad \bar{\varphi}(t) = \int_t^{\frac{k^* - k_0}{M}} P'(k_0 + Mu) e^{-(\alpha + \delta)u} du \\ \forall t > \frac{k^* - k_0}{M} & \bar{K}(t) = k^* \quad \bar{\varphi}(t) = 0 \end{array} \right.$$

Pour que  $\bar{K}$  satisfasse (SA), il faut et il suffit que :

$$\forall t \in \left[ 0, \frac{k^* - k_0}{M} \right] \quad \bar{\varphi}(t) \geq 0$$

Faisons le changement de variable

$$x = k_0 + Mu$$

dans l'intégrale définissant  $\bar{\varphi}$  :

$$\bar{\varphi}(t) = \int_{k_0 + Mt}^{k^*} P'(x) e^{-\frac{\alpha}{M}(x - k_0)} \frac{dx}{M}$$

Soient  $k_1^*$ ,  $k_2^*$ , ...,  $k_n^*$  les points compris entre  $k_0$  et  $k^*$  auxquels  $P$  a un maximum local. Les minima locaux de  $\varphi$  sont atteints aux points  $t$  tels que

$$\exists i \quad k_0 + Mt = k_i^*$$

et éventuellement au point  $0 = k_0^*$ . Donc, pour que  $\bar{\varphi}(t) \geq 0$ , il faut et il suffit que :

$$\int_{k_i^*}^{k^*} P'(x) e^{-\frac{\alpha}{M}(x-k_0)} dx \geq 0 \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n)$$

c'est à dire :

$$\int_{k_0}^{k^*} P'(x) e^{-\alpha(x-k_0)/M} dx \geq \int_{k_0}^{k_i^*} P'(x) e^{-\alpha(x-k_0)/M} dx$$

$$i = 0, 1, \dots, n$$

En intégrant par parties, on montre que cette condition équivaut (Cf § 2.6.3.1.) à :

$$W(k_0^*, k^*) \geq W(k_0^*, k_i^*) \quad i = 1, 2, \dots, n$$

- (b) Cherchons s'il existe des optimales comportant plus d'un palier. Soit  $\tilde{K}$  une optimale telle que (s'il y en a une) :

$$\begin{cases} \forall t \in [t_0 - \varepsilon, t_0] & \tilde{K}(t) = \bar{k}_0 \\ \forall t \in [t_0, t_0 + \frac{1}{M}(k_1^* - k_0^*)] & \tilde{K}(t) = \bar{k}_0 + M(t - t_0) \\ \forall t \in [t_1, t_1 + \varepsilon] & \tilde{K}(t) = \bar{k}_1 \end{cases}$$

Si  $\tilde{K}$  existe, alors, la fonction  $\tilde{\varphi}$  associée par (SA) est telle que

$$\begin{cases} \tilde{\varphi}(t_0) = \tilde{\varphi}(t_0 + \frac{\bar{k}_1 - \bar{k}_0}{M}) = 0 \\ \forall t \in [t_0, t_0 + M(\bar{k}_1 - \bar{k}_0)] & \tilde{\varphi}(t) < 0 \end{cases}$$



Par un calcul analogue à celui ci-dessus, on montre aisément que cela équivaut à :

$$W(K_{\bar{k}_0}^*, \bar{k}_1) = W(K_{\bar{k}_0}^*, \bar{k}_0)$$

Soit  $\bar{t}_0 = \inf \left\{ t \mid \tilde{K}(t) = \bar{k}_0 \right\}$ . Il résulte de la condition ci-dessus que la fonction  $\bar{K}$  définie par :

$$\begin{cases} \forall t \in [0, \bar{t}_0] & \bar{K}(t) = \tilde{K}(t) \\ \forall t > \bar{t}_0 & \bar{K}(t) = \bar{k}_0 \end{cases}$$

et les fonctions  $K_\tau$  ( $\tau$  étant supérieur ou égal à  $\bar{t}_0$ ) définies par :

$$\begin{cases} \forall t \in [0, \bar{t}_0] & K_\tau(t) = \tilde{K}(t) \\ \forall t \in [\bar{t}_0, \tau] & K_\tau(t) = \bar{k}_0 \\ \forall t \in \left[ \tau, \tau + \frac{\bar{k}_1 - \bar{k}_0}{M} \right] & K_\tau(t) = \bar{k}_0 + M(t - \tau) \\ \forall t > \tau + \frac{\bar{k}_1 - \bar{k}_0}{M} & K_\tau(t) = \bar{k}_1 \end{cases}$$

sont optimales.

En particulier, si  $\bar{k}_0$  est le "premier palier" de  $\tilde{K}$  (c'est à dire si :

$$\forall t \in ]0, \bar{t}_0[ \quad \tilde{K}'(t) = M)$$

alors  $\bar{K} = K_{\bar{k}_0}^*, \bar{k}_0$ .

Par conséquent, il existe toujours une optimale du type  $K_{\bar{k}_0}^*, \bar{k}$  : on retrouve ainsi le théorème III (§ 2.6.2.). De plus, si  $K_{\bar{k}_0}^*, \bar{k}_0$ ,  $K_{\bar{k}_0}^*, \bar{k}_1$ , ...,  $K_{\bar{k}_0}^*, \bar{k}_n$  sont optimales, tout programme  $K^*$  dont tout palier est à l'un des niveaux  $\bar{k}_0, \bar{k}_1, \dots, \bar{k}_n$ , et tel que :

$$K^*(t) = \bar{k}_i \implies K^{*'}(t) = M$$

est optimal. On est donc conduit au même algorithme qu'au § 2.6.3.

3.2.2.- "Structure" des optimales (cas où  $\delta > 0$ ).

Montrons que si  $\tilde{K}$  est une optimale telle que :

$$\exists t_0 \quad \tilde{I}(t_0) = M \quad \text{et} \quad \tilde{K}(t) \leq M/\delta$$

alors :

$$\forall t > t_0 \quad \tilde{I}(t) \neq 0$$

En effet, s'il existait  $t_1 > t_0$  tel que  $\tilde{I}(t_1) = 0$ , il existerait  $t_2$  et  $t_3$  tels que :

$$\tilde{K}(t_2) = \tilde{K}(t_3) \quad \tilde{I}(t_2) = M \quad \tilde{I}(t_3) = 0$$

donc tels que :

$$\tilde{\varphi}(t_2) > 0 \quad \text{et} \quad \tilde{\varphi}(t_3) < 0$$

D'après le lemme 4 (§ 2.3.), il existe un programme  $K^*$  optimal tel que :

$$\begin{cases} \forall t \in [0, t_3] & K^*(t) = \tilde{K}(t) \\ K^{*'}(t_3+0) = M - \delta K^*(t_3) \end{cases}$$

Mais la fonction  $\varphi^*$  associée à  $K^*$  est telle que

$\varphi^*(t_3) = \tilde{\varphi}(t_3)$  : en effet, il y a nécessairement un point  $\theta$  entre  $t_2$  et  $t_3$  où  $\tilde{I}$  (donc  $I^*$ ) change de valeur, donc :

$$\exists \theta \in ]t_2, t_3[ \quad \varphi^*(\theta) = \tilde{\varphi}(\theta) = 0$$

et par suite :

$$\begin{aligned} \varphi^*(t_3) &= \varphi^*(\theta) - \int_{\theta}^{t_3} P'(K^*(u)) e^{-(\alpha+\delta)u} du \\ &= \tilde{\varphi}(\theta) - \int_{\theta}^{t_3} P'(\tilde{K}(u)) e^{-(\alpha+\delta)u} du = \tilde{\varphi}(t_3) \end{aligned}$$

Mais  $\varphi^*(t_3) = \tilde{\varphi}(t_3) < 0$  ce qui contredit la relation :

$$K^*(t_3+0) = M$$

donc l'optimalité de  $K^*$  et  $\tilde{K}$ .

On peut démontrer de même que :

$$\exists t_0 \quad \tilde{I}(t_0) = 0 \text{ et } \tilde{K}(t_0) < M/\delta \implies \forall t > t_0 \quad I(t) \neq M$$

Il en résulte que le graphe de toute optimale  $\tilde{K}$  est formée :

- soit d'arcs où  $\tilde{I}(t)=0$  et d'arcs où  $\tilde{K}(t)$  a une valeur constante pour laquelle  $P$  a un maximum local.
- soit d'arcs où  $\tilde{I}(t)=M$  et d'arcs où  $\tilde{K}(t)$  a une valeur constante pour laquelle  $P$  a un maximum local.

### 3.2.3.- Optimales, lorsque $\delta > 0$ .

(a) Remarquons tout d'abord que si  $P$  a un maximum local unique au point  $k^*$ ,  $P'(k^*)$  est nul, et  $P'(k)$  est positif ou négatif selon que  $k$  est inférieur ou supérieur à  $k^*$ . Il en résulte que  $K_{k_0, k^*}^*$  est la seule fonction satisfaisant (SA), donc l'unique optimale du problème.

Dans le cas général, si  $P$  a un maximum local au point  $k^* < k_0$ , pour que  $K_{k_0, k^*}^*$  satisfasse (SA), il faut et il suffit que :

$$\forall t \in \left[ 0, \frac{1}{\delta} \text{Log} \frac{k_0}{k^*} \right] \quad \varphi(t) = \int_t^{\frac{1}{\delta} \text{Log}(k_0/k^*)} P'(k_0 e^{-\delta u}) e^{-(\alpha+\delta)u} du \leq 0$$

Procédons de la même manière qu'au § 3.2.1.. Faisons,

dans l'intégrale définissant  $\varphi$ , le changement de variable :

$$x = k_0 e^{-\delta u}$$

on obtient :

$$\varphi(t) = \frac{1}{k_0^{1+\alpha/\delta}} \int_{k^*}^{k_0 e^{-\delta t}} P'(x) x^{\alpha/\delta} dx \leq 0$$

Soient  $k_1^*$ ,  $k_2^*$ , ...,  $k_n^*$  les points compris entre  $k_0$  et  $k^*$  pour lesquels  $P$  a un maximum local. Les maxima locaux de  $\varphi$  sont atteints au point  $t$  tels que :

$$\exists i \quad k_0 e^{-\delta t} = k_i^*$$

et éventuellement au point  $0 = k_0^*$ . Donc, pour que  $\varphi(t) \leq 0$ , il faut et il suffit que :

$$\int_{k^*}^{k_i^*} P'(x) x^{\alpha/\delta} dx \leq 0 \quad i = 0, 1, \dots, n$$

Ou encore :

$$\varphi(0) \leq \int_{k_i^*}^{k_0} P'(x) x^{\alpha/\delta} dx \quad i = 0, 1, \dots, n$$

En intégrant par parties, on montre que cette condition équivaut à :

$$W(k_{k_0}^*, k^*) \geq W(k_{k_0}^*, k_i^*) \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$$

De même, si  $P$  a un maximum local au point  $k^* > k_0$  et si  $k_1^*$ ,  $k_2^*$ , ...,  $k_m^*$  sont des points compris entre  $k_0$  et  $k^*$  pour lesquels  $P$  a un maximum local, on peut démontrer de la même manière que  $k_{k_0}^*, k^*$  satisfait (SA) si et seulement si :

$$W(k_{k_0}^*, k^*) = W(k_{k_0}^*, k_i^*) \quad i = 1, 2, \dots, m$$

(b) Cherchons s'il existe des optimales comportant plus d'un palier. Nous avons démontré au § 3.2.2. que de tels programmes  $\tilde{K}$  sont de deux types : ou bien  $\tilde{K}'(t) + \delta \tilde{K}(t)$  est nul dans tout intervalle où  $\tilde{K}'(t) \neq 0$ , ou bien  $\tilde{K}'(t) + \delta \tilde{K}(t)$  y est égal à M. Considérons tout d'abord le premier type d'optimales.

Supposons qu'il existe une optimale  $\tilde{K}$  telle que :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \forall t \in [t_0 - \varepsilon, t_0] & \tilde{K}(t) = \bar{k}_0 \\ \forall t \in \left[ t_0, t_0 + \frac{1}{\delta} \text{Log} \frac{k_0^*}{k_1^*} \right] & \tilde{K}(t) = k_0^* e^{-\delta(t-t_0)} \\ \forall t \in [t_1, t_1 + \varepsilon] & \tilde{K}(t) = \bar{k}_1 \end{array} \right.$$

Par un calcul analogue à celui du § 3.2.1. (b), on montre aisément que cela implique que :

$$W(k_{\bar{k}_0}^*, \bar{k}_0) = W(k_{\bar{k}_0}^*, \bar{k}_1)$$

Soit :

$$t_0 = \inf \left\{ t \mid \tilde{K}(t) = \bar{k}_0 \right\}$$

Il résulte de ce qui précède que la fonction  $\bar{K}$  définie par :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \forall t \in [0, \bar{t}_0] & \bar{K}(t) = \tilde{K}(t) \\ \forall t > 0 & \bar{K}(t) = \bar{k}_0 \end{array} \right.$$

et les fonctions  $\bar{K}_\tau$  ( $\tau$  étant supérieur ou égal à  $\bar{t}_0$ ) définies par :

$$\begin{array}{ll}
 \forall t \in [0, t_0] & \bar{k}_\tau(t) = \tilde{K}(t) \\
 \forall t \in [t_0, \tau] & \bar{k}_\tau(t) = \bar{k}_0 \\
 \forall t \in \left[ \tau, \tau + \frac{1}{\delta} \operatorname{Log} \frac{\bar{k}_0}{\bar{k}_1} \right] & \bar{k}_\tau(t) = \bar{k}_0 e^{-\delta(t-\tau)} \\
 \forall t > \tau + \frac{1}{\delta} \operatorname{Log}(\bar{k}_0/\bar{k}_1) & \bar{k}_\tau(t) = \bar{k}_1
 \end{array}$$

sont optimales.

On obtient un résultat analogue si  $\bar{k}_0 < \bar{k}_1$ .

On en déduit, de la même manière qu'au § 3.2.1., qu'il existe toujours une optimale du type  $K_{k_0}^*, \bar{k}$  : on retrouve ainsi le théorème IV (§ 2.6.2.) et les algorithmes correspondants (§2.6.3.)

Remarque : dans le cas où  $\delta > 0$ , on n'a pas résolu le système exprimant la condition de Pontryagin, mais on s'est contenté de rechercher les programmes satisfaisant simultanément ce système et les lemmes du § 2.3. . La méthode de Pontryagin permet, dans la résolution du problème de Arrow, de passer directement de ces lemmes à la construction des optimales, en sautant les démonstrations des propositions intermédiaires.

### 3.3.- METHODE DU MULTIPLICATEUR DE LAGRANGE.

La manière dont nous introduisons ici un multiplicateur de Lagrange diffère du procédé classique en calcul des variations. Cela permet d'énoncer une condition d'optimalité qui n'exige pas la différentiabilité de la fonction H.

3.3.1.- Lemme.

Soient : X un ensemble d'applications presque partout dérivables de  $[0, T]$  dans  $\mathbb{R}$ ;

U un ensemble de fonctions numériques mesurables définies sur  $[0, T]$  ;  $f(t, x, u,)$  une fonction numérique définie sur  $[0, T] \times \mathbb{R}^2$ , telle que  $f(t, x(t), u(t))$  est intégrable sur  $[0, T]$  pour tout  $x \in X$  et tout  $u \in U$ .

Posons, pour tout  $x \in X$  et tout  $u \in U$  :

$$J(x, u) = \int_0^T f(t, x(t), u(t)) dt$$

On se propose de déterminer, si elles existent, les fonctions  $\tilde{x}$  et  $\tilde{u}$ , appartenant respectivement à X et U, telles que :

$$J(\tilde{x}, \tilde{u}) = \max \left\{ J(x, u) \mid x \in X ; u \in U ; u(t) (=) x'(t) + \delta x(t) \right\}$$

(le symbole (=) signifiant "égal presque partout sur  $[0, T]$  à").

Etant donnée une application  $\psi$  de  $[0, T]$  dans  $\mathbb{R}$ , posons :

$$L(x, u, \psi) = J(x, u) + \int_0^T \psi(t) [u(t) - x'(t) - \delta x(t)] dt$$

Soient  $x_\psi$  et  $u_\psi$  si elles existent, des fonctions appartenant respectivement à X et U et telles que :

$$L(x_\psi, u_\psi, \psi) = \max \left\{ L(x, u, \psi) \mid x \in X ; u \in U \right\}$$

Lemme | S'il existe une application  $\tilde{\psi}$  de  $[0, T]$  dans  $\mathbb{R}$ , intégrable, telle que :

$$\underline{u_{\tilde{\psi}}(t) (=) x'_{\tilde{\psi}}(t) + \delta x_{\tilde{\psi}}(t)}$$

alors :

$$\underline{J(\tilde{x}, \tilde{u}) = \max \left\{ J(x, u) \mid x \in X ; u \in U ; u(t) (=) x'(t) + \delta x(t) \right\}}$$

si et seulement si :

$$\underline{L(\tilde{x}, \tilde{u}, \tilde{\psi}) = \max \left\{ L(x, u, \psi) \mid x \in X ; u \in U \right\}}$$

Remarquons en effet que :

$$u(t) (=) x'(t) + \delta x(t) \implies J(x, u) = L(x, u, \psi)$$

Supposons que  $x_{\tilde{\psi}}$  et  $u_{\tilde{\psi}}$  soient tels que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall x \in X \quad \forall u \in U \quad L(x, u, \tilde{\psi}) \leq L(x_{\tilde{\psi}}, u_{\tilde{\psi}}, \tilde{\psi}) \\ u_{\tilde{\psi}}(t) (=) x'(t) + \delta x(t) \end{array} \right.$$

On en déduit que :

$$\forall x \in X \quad \forall u \in U \quad u(t) (=) x'(t) + \delta x(t) \implies J(x, u) \leq J(x_{\tilde{\psi}}, u_{\tilde{\psi}})$$

Réciproquement, si  $\tilde{x}$  et  $\tilde{u}$  sont deux fonctions appartenant respectivement à  $X$  et  $U$ , telles que :

$$\begin{aligned} J(x, u) &= \max \left\{ J(x, u) \mid x \in X ; u \in U ; u(t) (=) x'(t) + \delta x(t) \right\} \\ &= J(x_{\tilde{\psi}}, u_{\tilde{\psi}}) \end{aligned}$$

alors :

$$L(\tilde{x}, \tilde{u}, \tilde{\psi}) = L(x_{\tilde{\psi}}, u_{\tilde{\psi}}, \tilde{\psi}) = \max \left\{ L(x, u, \tilde{\psi}) \mid x \in X ; u \in U \right\}$$

### 3.3.2.- Application au cas où $H(t, k)$ est concave par rapport à $k$ .

Dans le problème que nous étudions ici,  $X$  est l'ensem-



ble des applications de  $[0, T]$  dans  $\mathbb{R}$  satisfaisant les contraintes A1, A2, A3 (et éventuellement A6) ; U est l'ensemble des applications de  $[0, T]$  dans  $[0, M]$ .

$$\begin{aligned} L(K, I, \psi) &= \int_0^T [H(t, K(t)) + c(t)I(t)] dt + \int_0^T \psi(t) [I(t) - K'(t) - \delta K(t)] dt \\ &= \int_0^T [H(t, K(t)) - \delta \psi(t)K(t)] dt + \int_0^T [\psi(t) + c(t)] I(t) dt \\ &\quad - \int_0^T \psi(t)K'(t) dt \end{aligned}$$

Supposons  $\psi$  dérivable et posons :

$$L_1(t, k, \psi) = H(t, k) + k [-\delta \psi(t) + \psi'(t)]$$

Il en résulte que :

$$L(K, I, \psi) = \int_0^T L_1(t, K(t), \psi) dt - \psi(T)K(T) + \psi(0)k_0 + \int_0^T [\psi(t) + c(t)] I(t) dt$$

Pour que :

$$L(\bar{K}, \bar{I}, \psi) = \max \left\{ L(K, I, \psi) \mid K \in X ; I \in U \right\}$$

il faut et il suffit que les conditions (1), (2), et (3) ci-dessous soient satisfaites.

$$(1) \int_0^T L_1(t, \bar{K}(t), \psi) dt = \max \left\{ \int_0^T L_1(t, K(t), \psi) dt \mid K \in X \right\}$$

Lorsque  $H(t, k)$  est concave en  $k$ , il en est de même pour  $L_1(t, k, \psi)$ . Supposons qu'il existe une fonction  $\bar{K} \in X$  telle que :

$$\forall t \geq 0 \quad L_1(t, \bar{K}(t), \psi) = \max \left\{ L_1(t, k, \psi) \mid k \geq 0 \right\}$$

c'est-à-dire telle que :

$$(1') \quad \forall t \quad - \frac{\partial H}{\partial k}(t, \bar{k}(t)+0) \geq -\delta \psi(t) + \psi'(t) \geq - \frac{\partial H}{\partial k}(t, \bar{k}(t) - 0)$$

Alors  $\tilde{K}$  satisfait (1).

$$(2) \quad \begin{cases} \psi(t) + c(t) < 0 \implies \bar{K}'(t) + \delta \bar{K}(t) = \bar{I}(t) = 0 \\ \psi(t) + c(t) > 0 \implies \bar{K}'(t) + \delta \bar{K}(t) = \bar{I}(t) = M \end{cases}$$

(3) si  $K(T)$  n'est pas fixé, alors  $\psi(T) = 0$ .

Soit (SL) le système des relations (1'), (2) et (3).  
Il résulte du lemme qui précède les deux propositions suivantes :

Proposition 1 | Si (SL) admet une solution  $(\bar{K}, \bar{\psi})$  telle que  $\bar{K} \in X$  et  $\bar{K}(T) = k_T$ , alors le programme  $K$  est une optimale de  $\mathcal{B}_M(k_0)$  sous la condition  $K(T) = k_T$  si et seulement si  $(K, \bar{\psi})$  est solution de (SL). (C'est le cas, en particulier de  $\bar{K}$ ).

Proposition 2 | Si (SL) admet une solution  $(\bar{K}, \bar{\psi})$  telle que  $\bar{K} \in X$ , alors le programme  $K$  est une optimale de  $\mathcal{B}_M(k_0)$  si et seulement si  $(K, \bar{\psi})$  est solution de (SL). (C'est en particulier le cas de  $\bar{K}$ ).

Remarque 1 : Lorsque  $H$  est concave en  $k$  et lorsque  $\frac{\partial H}{\partial k}(t, k)$  est définie et continue, la condition (1') équivaut à :

$$(\forall t) - \frac{\partial H}{\partial k}(t, K^*(t)) = -\delta \psi(t) + \psi'(t)$$

Le système (SL) est alors identique au système de Pontryagin (SP). Lorsque de plus  $\frac{\partial H}{\partial t}(t, k)$  est définie et continue, si  $\tilde{K}$  est une optimale de  $\mathcal{B}_M(k_0)$ , il existe une fonction  $\tilde{\psi}$  telle que  $(\tilde{K}, \tilde{\psi})$  soit la solution de (SP) ; d'après la proposition 2

de ce paragraphe, il en résulte que le programme  $\bar{K}$  est optimal si et seulement si  $(\bar{K}, \bar{\psi})$  est solution de (SP).

Par conséquent, lorsque H est concave en k et continûment différentiable, la condition de Pontryagin est une condition nécessaire et suffisante d'optimalité. Il en est de même si on se fixe  $K(T)$ .

Remarque 2 : L'ensemble des optimales, lorsque H est concave en k, est convexe. En effet, si  $(\tilde{K}_1, \bar{\psi})$  et  $(\tilde{K}_2, \bar{\psi})$  sont solutions de (SL), alors pour tout a compris entre 0 et 1 :

$$(a \tilde{K}_1 + (1-a) \tilde{K}_2, \bar{\psi})$$

est solution de (SL) ; d'autre par, si  $\tilde{K}_1 \in X$  et si  $\tilde{K}_2 \in X$  alors :

$$\forall a \in [0, 1] \quad a \tilde{K}_1 + (1-a) \tilde{K}_2 \in X$$

#### 3.4. CONCLUSION : COMPARAISON DES DEUX METHODES.

(a) Comparaison "logique" : la condition de Pontryagin est une condition nécessaire d'optimalité ; l'existence de la fonction-multiplicateur de Lagrange implique la validité d'une condition nécessaire et suffisante d'optimalité.

(b) Cette deuxième condition est valable dans des cas où celle de Pontryagin ne l'est pas (H concave en k, mais non continûment différentiable ; exemple : problème de Karlin-Beckmann Cf chapitre suivant).

(c) Réciproquement, la méthode de Pontryagin peut être valable sans que celle du multiplicateur de Lagrange ne le soit.

C'est le cas, par exemple, du problème de Arrow, lorsqu'il y a plusieurs paliers optimaux, que  $\delta > 0$  et que P est dérivable. En effet, lorsque  $k_0 = \tilde{k}_i$  ( $i > 0$ ) (Cf § 2.6.3.2.), il y a au moins 2 optimales  $\tilde{K}_1$  et  $\tilde{K}_2$  telles que :

$$\begin{cases} \tilde{K}'_1 (0+0) = M - \delta k_0 \\ \tilde{K}'_2 (0+0) = - \delta k_0 \end{cases}$$

Si une fonction  $\tilde{\psi}$  (au sens de la méthode du multiplicateur de Lagrange) existait, l'optimalité de  $\tilde{K}_1$  impliquerait l'existence d'un nombre positif  $\varepsilon_1$  tel que :

$$\forall t \in ] 0, \varepsilon_1 [ \quad \tilde{\psi}(t) \geq 0$$

L'optimalité de  $\tilde{K}_2$  impliquerait l'existence d'un nombre positif  $\varepsilon_2$  tel que :

$$\forall t \in ] 0, \varepsilon_2 [ \quad \tilde{\psi}(t) \leq 0$$

Il en résulterait que :

$$0 < t < \min \{ \varepsilon_1, \varepsilon_2 \} \implies \tilde{\psi}(t) = \tilde{\psi}'(t) = P'(\tilde{K}_1(t)) = P'(\tilde{K}_2(t)) = 0$$

Cela est impossible, car ni  $\tilde{K}_1$  ni  $\tilde{K}_2$  ne sont constantes dans  $] 0, \min \{ \varepsilon_1, \varepsilon_2 \} [$ . Par suite la méthode du multiplicateur de Lagrange n'est pas applicable dans ce cas.

(d) Lorsque les 2 méthodes sont valables, les deux fonctions  $\psi$  correspondantes coïncident, et on obtient une condition nécessaire et suffisante d'optimalité (Cf § 3.3.2., remarque 1).



CHAPITRE IV

---



LE PROBLEME DE KARLIN - BECKMANN

4.1.- INTRODUCTION

4.1.1.- Grâce à un choix convenable d'unités, le problème de Karlin peut s'énoncer ainsi : déterminer la ou les fonctions numériques  $\tilde{K}$ , si elles existent, qui maximisent la fonctionnelle :

$$\int_0^T \left[ \frac{1}{\gamma} \inf \{ K(t), r(t) \} - K'(t) \right] e^{-\alpha t} dt$$

sous les contraintes A1, A2, A3, A4 et éventuellement A6 (Cf §1.2.) (avec  $\delta=0$ ).  $r$  est une fonction donnée,  $\alpha$  et  $\gamma$  sont des nombres donnés positifs; ( $\alpha$  peut éventuellement être nul).

L'algorithme que nous proposons ci-dessous est très proche de celui de Arrow, Beckmann et Karlin (Cf [2]) (lorsque  $K(T)$  n'est pas fixé, seul cas qu'étudient ces auteurs). Mais la démonstration en est différente : ils se ramènent à un problème de jeu, dont les espaces de stratégie sont de dimension infinie. Nous appliquons la méthode du multiplicateur de Lagrange (Cf § 3.3.), grâce à quoi nous nous ramenons à la résolution d'une sorte de système différentiel.

Nous résolvons ce "système différentiel" dans les paragraphes 4.2. et 4.3., en nous inspirant de la résolution, donnée dans [4], d'un problème analogue.

Enfin, nous généralisons les résultats obtenus, en



résolvant un problème dont celui de Karlin - Beckmann et celui de Barra-Brodeau [4] sont des cas particuliers (§ 4.4.) ; cela permet, du point de vue économique, de tenir compte de l'influence du niveau d'équipement sur la demande et de prendre un taux d'actualisation variable.

#### 4.1.2.- Hypothèses sur $r$ .

Afin de résoudre effectivement ce "système différentiel" nous ferons sur la fonction  $r$  les hypothèses suivantes :

$h_1$  :  $r$  est continue

$h_2$  :  $r$  est dérivable par morceaux

$h_3$  : en tout point  $t$  où  $r$  est dérivable :

$$r'(t) < M \quad (\text{rappelons que } K'(t) \text{ est assujetti à être inférieur ou égal à } M).$$

$h_4$  :  $r$  est monotone par morceaux.

Ces hypothèses ne jouent pas des rôles identiques.  $h_1$  peut être affaiblie, mais au prix de complications superflues dans la démonstration.  $h_4$  sert à assurer que le programme optimal  $\tilde{K}$  peut être déterminé au bout d'un nombre fini d'itérations.

Si l'hypothèse  $h_3$  n'est pas satisfaite, la structure des optimales change. Nous ne connaissons pas de résolution analytique dans ce cas ; mais on peut approximer l'optimale par discrétisation (Cf [4], [6], [7]) ou à l'aide d'un calculateur analogique (Cf [8]).

4.2.- INTERVALLES DE COMMUTATION

Remarquons que la fonction :

$$k \rightarrow \frac{1}{\gamma} \inf \left\{ k, r(t) \right\} e^{-\alpha t}$$

est concave, quel que soit t. La méthode du multiplicateur de Lagrange (Cf § 3.3.2.) est donc applicable à ce problème. Le système correspondant s'écrit, en posant w(t,k) égal à 1 ou 0 selon que  $k \leq r(t)$  ou  $k > r(t)$  :

$$(SK) \begin{cases} \tilde{K}(t) \neq r(t) \implies \tilde{\psi}'(t) = -w(t, \tilde{K}(t)) e^{-\alpha t} \times \frac{1}{\gamma} & \tilde{\psi}(t) > e^{-\alpha t} \implies \tilde{K}'(t) = M \\ \tilde{K}(t) = r(t) \implies 0 \leq \tilde{\psi}'(t) \leq -e^{-\alpha t} \times \frac{1}{\gamma} & \tilde{\psi}(t) < e^{-\alpha t} \implies \tilde{K}'(t) = 0 \end{cases}$$

4.2.1.- Commutations.

Toute solution  $(\bar{K}, \bar{\psi})$  de (SK) est telle que le graphe de  $\bar{K}$  est formé :

- . d'arcs où  $\bar{K}'(t) = 0$  (alors,  $\bar{\psi}(t) < e^{-\alpha t}$ ) (type I)
- . d'arcs où  $\bar{K}(t) = r(t)$  (alors,  $\bar{\psi}(t) = e^{-\alpha t}$  (type II) si cet arc ne se réduit pas à un point unique).
- . d'arcs où  $\bar{K}'(t) = M$  (alors,  $\bar{\psi}(t) > e^{-\alpha t}$ ) (type III)

Remarquons que la donnée des "points de commutation" (c'est-à-dire des valeurs de t où on change de type d'arc, et les valeurs de K(t) correspondantes) et de l'état final suffisent à déterminer toute solution de (SK) telle que  $K(0) = k_0$ . Etudions tous les cas possibles de commutation.

Supposons que  $(t_1, k_1)$  soit un point de commutation :

alors,  $\psi(t_1) = e^{-\alpha t_1}$ . Les cas suivants peuvent se présenter :

a)  $k_1 > r(t_1)$  :  $\frac{d}{dt} (e^{-\alpha t} - \psi(t)) = -\alpha e^{-\alpha t} < 0$

Comme  $r'(t) < M$  :

$$\begin{cases} \bar{K}'(t_1-0) = 0 \\ \forall t \in [t_1, T] \end{cases} \quad \bar{K}(t) = k_1 + M(t-t_1) \quad \bar{\psi}(t) = e^{-\alpha t_1} > e^{-\alpha t}$$

b)  $k_1 < r(t_1)$  :  $\frac{d}{dt_1} (e^{-\alpha t_1} - \psi(t_1)) = (\frac{1}{\gamma} - \alpha) e^{-\alpha t_1}$

b1)  $\alpha \gamma > 1$  comme  $\frac{d}{dt} (e^{-\alpha t_1} - \psi(t_1)) < 0$

$$\begin{cases} \forall t \in [0, t_1] & \bar{K}(t) = k_0 = k_1 \quad \bar{\psi}(t) = e^{-\alpha t_1} + \int_t^{t_1} \frac{1}{\gamma} e^{-\alpha s} w(s, k_0) ds \\ \forall t \in [t_1, T] & \bar{K}(t) = k_0 + M(t-t_1) \quad \bar{\psi}(t) = e^{-\alpha t_1} - \int_{t_1}^t \frac{1}{\gamma} w(s, k_0 + M(s-t_1)) e^{-\alpha s} ds \end{cases}$$

b2)  $\alpha \gamma = 1$  : l'arc débutant peut être du type (I) ou du type (III).

b3)  $\alpha \gamma < 1$  :  $\frac{d}{dt_1} (e^{-\alpha t_1} - \psi(t_1)) > 0$

comme  $r'(t) < M$

$$\begin{cases} \forall t \in [0, t_1] & \bar{K}(t) = k_0 + Mt \quad \bar{\psi}(t) = e^{-\alpha t_1} - \int_t^{t_1} \frac{1}{\gamma} e^{-\alpha s} ds \\ \bar{K}'(t_1+0) = 0 \end{cases}$$

c)  $k_1 = r(t_1)$  et r strictement décroissante à droite de  $t_1$  :  
même conclusions qu'en a).

d)  $k_1 = r(t_1)$  et r croissante à droite de  $t_1$

d<sub>1</sub>)  $\alpha \gamma > 1$  : même conclusion qu'en b<sub>1</sub>).

d<sub>2</sub>)  $\alpha \gamma \leq 1$  : il y a ambiguïté entre des différents types de commutation.

Il résulte de cette discussion que :

- si  $\alpha \gamma > 1$ , les solutions  $(\bar{K}, \bar{\psi})$  de (S) sont telles que :

$$\exists t_1 \in [0, T] \begin{cases} \bar{K}(t) = k_0 & \forall t \in [0, t_1] \\ \bar{K}(t) = k_0 + M(t - t_0) & \forall t \in [t_1, T] \end{cases}$$

- si  $\alpha \gamma < 1$ , les solutions  $(\bar{K}, \bar{\psi})$  de (S) sont telles que le graphe de  $\bar{K}$  est formé d'une alternance d'arcs de type (I) et (II), précédée ou non, suivie ou non d'un arc de type (III).

Dans le sous-paragraphe suivant, nous allons étudier à quelles conditions  $\bar{K}$  peut comporter, lorsque  $\alpha \gamma \leq 1$ , un arc de type (I).

#### 4.2.2.- La fonction F.

Pour qu'il existe une solution  $(\bar{K}, \bar{\psi})$  de (S) telle que :

$$\begin{cases} \forall t \in [t_1, t_2] & \bar{K}(t) = k & (t_1 > 0) \\ \bar{K}(t_1 - 0) \neq 0 \end{cases}$$

il faut que (si r n'a pas de paliers) :

$$\begin{cases} \bar{\psi}(t_1) = e^{-\alpha t_1} \\ \bar{\psi}(t) - e^{-\alpha t} = e^{-\alpha t_1} - \int_{t_1}^T \frac{1}{\gamma} w(s, k) e^{-\alpha s} ds + \int_t^T \frac{1}{\gamma} w(s, k) e^{-\alpha s} ds - e^{-\alpha t} \\ \leq 0 & \forall t \in [t_1, t_2] \end{cases}$$

Posons :

$$F(t,k) = e^{-\alpha t} \frac{1}{\gamma} \int_t^T w(s,k) e^{-\alpha s} ds$$

La condition précédente peut s'écrire :

$$F(t_1, k) = \min \left\{ F(t, k) \mid t \in [t_1, t_2] \right\} \quad (1)$$

On est ainsi amené à étudier les variations de F dans le domaine  $D \subset [0, T] \times [k_0, k_0 + MT]$  défini par :

$$\left\{ \begin{array}{l} (t, k) \in D \iff k_0 \leq k \leq k_0 + Mt \quad (\text{si } K(T) \text{ n'est pas fixé}) \\ \text{ou } (t, k) \in D \iff \max\{k_0, k_T + M(t-T)\} \leq k \leq \min\{k_T, k_0 + Mt\} \end{array} \right.$$

(si  $K(T)$  est assujéti à être égal à  $k_T$ ).

(la définition de D se justifie par la condition A'4 du § 1.4.3.).

$$\frac{\partial}{\partial t} F(t, k) = \left[ -\alpha + \frac{1}{\gamma} w(t, k) \right] e^{-\alpha t}$$

$$k > r(t) \implies \frac{\partial F}{\partial t} (t, k) = -\alpha e^{-\alpha t} < 0$$

$$k \leq r(t) \implies \frac{\partial F}{\partial t} (t, k) = \left( -\alpha + \frac{1}{\gamma} \right) e^{-\alpha t}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{.si } \alpha\gamma = 1 \quad \frac{\partial F}{\partial t} (t, k) = 0 \\ \text{.si } \alpha\gamma < 1 \quad \frac{\partial F}{\partial t} (t, k) > 0 \end{array} \right.$$

Lorsque  $\alpha\gamma = 1$ , la condition (1) ne peut être satisfaite que si  $\forall t \in [t_1, t_2] \quad r(t) \geq k$

Dans la suite de ce sous-paragraphe, on se place dans le cas où  $\alpha \neq 1$ .

Soit  $\bar{r}$  la fonction ainsi définie :

$$a - \text{ lorsque } K(T) \text{ n'est pas fixé : } \left\{ \begin{array}{l} r(t) \leq k_0 \implies \bar{r}(t) = k_0 \\ \bar{r}(t) = \max\left\{k_0, \min\left\{r(t), k_0 + Mt\right\}\right\} \\ \left. \begin{array}{l} k_0 \leq r(t) \leq k_0 + Mt \implies \bar{r}(t) = r(t) \\ r(t) > k_0 + Mt \implies \bar{r}(t) = k_0 + Mt \end{array} \right\} \end{array} \right.$$

b - lorsque  $K(T)$  est assujettie à être égal à  $k_T$  :

$$\bar{r}(t) = \max\left\{\max\left\{k_0, k_T + M(t-T)\right\}, \min\left\{r(t), \min\left\{k_T, k_0 + Mt\right\}\right\}\right\}, \text{ c'est-à-dire :}$$

$$\begin{aligned} \cdot r(t) \leq \max\left\{k_0, k_T + M(t-T)\right\} &\implies \bar{r}(t) = \max\left\{k_0, k_T + M(t-T)\right\} \\ \cdot \max\left\{k_0, k_T + M(t-T)\right\} \leq r(t) \leq \min\left\{k_T, k_0 + Mt\right\} &\implies \bar{r}(t) = r(t) \\ \cdot r(t) \geq \min\left\{k_T, k_0 + Mt\right\} &\implies \bar{r}(t) = \min\left\{k_T, k_0 + Mt\right\} \end{aligned}$$

Il résulte de tout ce qui précède dans ce sous-paragraphe que si :

$$F(t, k) = \min \left\{ F(s, k) \mid (s, k) \in D \right\} \text{ et } t \neq T$$

alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{r}(t) = k \\ \bar{r} \text{ est croissante à droite de } t \text{ (autrement dit : il existe un nombre positif } \varepsilon \text{ tel que } \bar{r} \text{ est croissante au sens large dans } [t, t+\varepsilon] \text{)}. \end{array} \right.$$

Définition | Appelons intervalle de commutation tout sous-intervalle

$] a, b [$  de  $[0, T]$  tel que :

1)  $\forall t \in ] a, b [ \quad F(t, \bar{r}(t)) = \inf \{ F(s, \bar{r}(t)) \mid (s, \bar{r}(t)) \in D \}$

2)  $a = 0$  ou

$\forall \epsilon > 0 \quad \exists t_\epsilon \in ] a - \epsilon, a [ \quad F(t, \bar{r}(t)) > \inf \{ F(s, \bar{r}(t)) \mid (s, \bar{r}(t)) \in D \}$

3)  $b = T$  ou

$\forall \epsilon > 0 \quad \exists t_\epsilon \in ] b, b + \epsilon [ \quad F(t, \bar{r}(t)) > \inf \{ F(s, \bar{r}(t)) \mid (s, \bar{r}(t)) \in D \}$

Remarquons que deux intervalles de commutation sont identiques ou disjoints.

Proposition | Soient  $] a_1, b_1 [$  et  $] a_2, b_2 [$  deux intervalles de commutation tels que  $b_1 < a_2$  et qu'il n'existe aucun intervalle de commutation inclus dans  $] b_1, a_2 [$ .

(a)  $\forall t_1 \in ] a_1, b_1 [ \quad \forall t_2 \in ] a_2, b_2 [ \quad \bar{r}(t_1) \leq \bar{r}(t_2)$

(b)  $\bar{r}(b_1) = \bar{r}(a_2)$

(c)  $\left\{ \begin{array}{l} \text{si } \text{mes} \{ \bar{r}^{-1}(\bar{r}(b_1)) \cap ] b_1, a_2 [ \} = 0 \text{ alors } F(b_1, \bar{r}(b_1)) = F(a_2, \bar{r}(a_2)) \\ \text{si } \text{mes} \{ \bar{r}^{-1}(\bar{r}(b_1)) \cap ] b_1, a_2 [ \} > 0 \text{ alors } F(b_1, \bar{r}(b_1)) < F(a_2, \bar{r}(a_2)) \end{array} \right.$

(mes désigne ici la mesure de Lebesgues, et  $\bar{r}^{-1}(k)$  l'ensemble des nombres  $t$  tels que  $\bar{r}(t) = k$ ).

Soient  $[A_1, B_1]$  et  $[A_2, B_2]$  deux intervalles de  $[0, T]$  où  $\bar{r}$  est strictement croissante, tels que  $A_2 > B_1$  et

$$\exists t_1 \in [A_1, B_1] \quad \exists t_2 \in [A_2, B_2] \quad \bar{r}(t_1) = \bar{r}(t_2)$$

Soient  $t_1^*(k)$ ,  $t_2^*(k)$  et  $G(k)$  les fonctions numériques définies sur  $r([A_1, B_1]) \cap r([A_2, B_2])$  de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{r}(t_1^*(k)) = k \quad t_1^*(k) \in [A_1, B_1] \\ \bar{r}(t_2^*(k)) = k \quad t_2^*(k) \in [A_2, B_2] \\ G(k) = F(t_1^*(k), k) - F(t_2^*(k), k) = \int_{t_1^*(k)}^{t_2^*(k)} \left[ \alpha - \frac{1}{\gamma} w(t, k) \right] e^{-\alpha t} dt \end{array} \right.$$

$G$  est strictement décroissante. En effet, si  $k_1 < k_2$  :

$$G(k_1) = \int_{t_1^*(k_1)}^{t_1^*(k_2)} \left[ -\alpha + \frac{1}{\gamma} w(t, k_1) \right] e^{-\alpha t} dt + \int_{t_1^*(k_2)}^{t_2^*(k_1)} \left[ -\alpha + \frac{1}{\gamma} w(t, k_1) \right] e^{-\alpha t} dt$$

Le premier terme du 2ème membre de cette égalité étant négatif, et  $w(t, k)$  étant décroissante par rapport à  $k$  :

$$G(k_1) < \int_{t_1^*(k_2)}^{t_2^*(k_1)} \left[ -\alpha + \frac{1}{\gamma} w(t, k_2) \right] e^{-\alpha t} dt$$

Comme  $w(t, k_2) \leq 0$  pour  $t_1^*(k_1) \leq t \leq t_2^*(k_2)$ ,

$$G(k_1) < \int_{t_1^*(k_2)}^{t_2^*(k_2)} \left[ -\alpha + \frac{1}{\gamma} w(t, k_2) \right] e^{-\alpha t} dt = G(k_2)$$



si  $]a_1, b_1[$  et  $]a_2, b_2[$  sont deux intervalles de commutation inclus respectivement dans  $[A_1, B_1]$  et  $[A_2, B_2]$  :

$$\begin{cases} \forall t \in ]a_1, b_1[ & G(\bar{r}(t)) \leq 0 \\ \forall t \in ]a_2, b_2[ & G(\bar{r}(t)) \geq 0 \end{cases}$$

Comme  $G$  est strictement croissante :

$$\forall t_1 \in ]a_1, b_1[ \quad \forall t_2 \in ]a_2, b_2[ \quad G(\bar{r}(t_1)) < G(\bar{r}(t_2))$$

De plus, comme il n'existe aucun intervalle de commutation entre  $b_1$  et  $a_2$  :

$$\bar{r}(b_1) = \bar{r}(a_2)$$

D'autre part,  $w(t, k)$  est continue à gauche par rapport à  $k$  ; on en déduit aisément que  $G(k)$  est continue à gauche, et par suite :

$$G(\bar{r}(b_1)) \leq 0$$

$G$  est continue à droite ou non, selon que

mes  $\left\{ \bar{r}^{-1}(\bar{r}(b_1)) \cap [t_1^*(k), t_2^*(k)] \right\}$  est nulle ou positive. Il en résulte la partie (c) de la proposition.

#### 4.3.- DETERMINATION DES POLITIQUES OPTIMALES.

4.3.1.- Une solution remarquable du système (SK) (Cas où  $\alpha\gamma < 1$ ).

Soient  $]a_1, b_1[, \dots, ]a_p, b_p[$  les intervalles de commutation. Soit  $K^*$  le programme ainsi défini :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \forall t \in [0, a_1] & K^*(t) = \bar{r}(a_1) = k_0 \\ \forall t \in [a_i, b_i] & K^*(t) = \bar{r}(t) & (i = 1, 2, \dots, p) \\ \forall t \in [b_i, a_{i+1}] & K^*(t) = \bar{r}(a_{i+1}) & (i = 0, 1, \dots, p-1) \\ \forall t \in [b_p, T] & K^*(t) = \bar{r}(b_p) \end{array} \right.$$

Montrons qu'il existe une fonction  $\psi^*$  telle que  $(K^*, \psi^*)$  soit solution du système (SK) (voir § 3.2.2.).

Soit  $\bar{w}$  l'application de  $[0, T] \times \mathbb{R}_+ \times [0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$  ainsi définie :

$$\bar{w}(t, k, d) = 1 \left\{ \begin{array}{l} \text{si } k < r(t) \\ \text{ou } k = r(t) \text{ et } \text{mes}\{r^{-1}(k) \cap [t, T]\} \leq d \times \text{mes}\{r^{-1}(k)\} \end{array} \right.$$

$$\bar{w}(t, k, d) = 0 \left\{ \begin{array}{l} \text{si } k > r(t) \\ \text{ou } k = r(t) \text{ et } \text{mes}\{r^{-1}(k) \cap [t, T]\} \leq d \times \text{mes}\{r^{-1}(k)\} \end{array} \right.$$

$$\text{Posons : } \bar{F}(t, k, d) = e^{-\alpha t} - \int_t^T \frac{1}{\gamma} \bar{w}(s, k, d) e^{-\alpha s} ds$$

Remarquons que  $\bar{F}$  est continue par rapport à  $d$  et que :

$$\bar{w}(t, k, d) \leq w(t, k) \quad \text{donc} \quad \bar{F}(t, k, d) \geq F(t, k)$$

Par suite de la proposition 3.3. :

$$F(b_i, \bar{r}(b_i)) = \bar{F}(b_i, \bar{r}(b_i), 1) \leq F(a_{i+1}, \bar{r}(a_{i+1}))$$

D'autre part :

$$\bar{F}(b_i, \bar{r}(b_i), 0) = \lim_{\substack{k > \bar{r}(b_i) \\ k \rightarrow \bar{r}(b_i)}} F(b_i, k)$$

Or,  $\bar{r}$  est strictement croissante à droite de  $a_i$  (sinon  $a_i$  ne pourrait être la borne inférieure d'un intervalle de commutation). Par suite de la définition de  $b_i$  et de la proposition 3.3, si  $\varepsilon$  est un nombre positif "assez petit" :

$$\forall t \in ]a_{i+1}, a_{i+1} + \varepsilon [ \quad F(b_i, \bar{r}(t)) \geq F(t, \bar{r}(t))$$

Comme  $r$  est continue, et comme il existe un nombre positif  $\eta$  tel que  $F$  est continue dans  $[0, T] \times ]\bar{r}(a_{i+1}), \bar{r}(a_{i+1}) + \eta]$  (il suffit de choisir  $\eta$  tel qu'il n'y ait aucun "palier" de  $r$  pour lequel  $\bar{r}(a_{i+1}) < r(t) \leq \bar{r}(a_{i+1}) + \eta$ ) :

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{t \rightarrow a_{i+1} \\ t > a_{i+1}}} F(b_i, \bar{r}(t)) = \bar{F}(b_i, \bar{r}(a_{i+1}), 0) &\geq \lim_{\substack{t \rightarrow a_{i+1} \\ t > a_{i+1}}} F(t, \bar{r}(t)) \\ &= F(a_{i+1}, \bar{r}(a_{i+1})) \end{aligned}$$

Puisque  $F$  est continue par rapport à  $d$ , et :

$$\begin{cases} \bar{F}(b_i, \bar{r}(a_{i+1}), 1) \leq F(a_{i+1}, \bar{r}(a_{i+1})) \\ \bar{F}(b_i, \bar{r}(a_{i+1}), 0) \geq F(a_{i+1}, \bar{r}(a_{i+1})) \end{cases}$$

il existe un nombre  $d_i^*$ , compris entre 0 et 1, tel que :

$$F(b_i, \bar{r}(a_{i+1}), d_i^*) = F(a_{i+1}, \bar{r}(a_{i+1}))$$

Soit donc  $\psi^*$  la fonction ainsi définie :

$$\left. \begin{array}{ll} \forall t \in [0, a_1] & \psi^*(t) = e^{-\alpha a_1} - \frac{1}{\gamma} \int_t^{a_1} w(s, \bar{r}(a_1)) e^{-\alpha s} ds \\ \forall t \in [a_i, b_i] & \psi^*(t) = e^{-\alpha t} \\ \forall t \in [b_i, a_{i+1}] & \psi^*(t) = e^{-\alpha b_i} + \frac{1}{\gamma} \int_{b_i}^t \bar{w}(s, \bar{r}(b_i), d_i^*) e^{-\alpha s} ds \\ \forall t \in [b_p, T] & \psi^*(t) = e^{-\alpha b_p} + \frac{1}{\gamma} \int_{b_p}^t w(s, \bar{r}(b_p)) e^{-\alpha s} ds \end{array} \right\}$$

On vérifie immédiatement :

- . que  $(K^*, \psi^*)$  est solution de (SK)
- . que  $K^*$  est l'unique programme  $K$  telle que  $(K, \psi^*)$  soit solution de (SK).

#### 4.3.2.- Optimale(s), lorsque $K(T)$ est fixé.

si  $\alpha\gamma > 1$ , il résulte du paragraphe 3.3.1. que l'optimale  $\tilde{K}$  du problème est :

$$\tilde{K}(t) = \inf \left\{ k_0, k_T + M(t-T) \right.$$

avec 
$$\tilde{\psi}(t) = e^{-\alpha(T + \frac{k_0 - k_T}{M})} + \int_{T + \frac{k_0 - k_T}{M}}^t \frac{1}{\gamma} w(s, \tilde{K}(s)) e^{-\alpha s} ds$$

Comme  $\tilde{K}$  est la seule fonction  $K$  telle que  $(K, \tilde{\psi})$  soit solution de (SK)  $\tilde{K}$  est l'unique optimale du problème.

. si  $\alpha\gamma < 1$ , rappelons que le domaine D est défini par :

$$(t, k) \in D \iff \max \left\{ k_0, k_T + M(t-T) \right\} \leq K(t) \leq \min \left\{ k_T, k_0 + Mt \right\}$$

donc :  $(T, k) \in D \iff k = k_T$

Par suite,  $(K^*, \psi^*)$  (Cf § 3.4.1.) est solution de (SK) sous les conditions  $K(0) = k_0$  et  $K(T) = k_T$

$$\tilde{K} = K^*$$

est l'unique optimale du problème.

. si  $\alpha\gamma = 1$ ,  $(\tilde{K}, \tilde{\psi})$  (définie plus haut, pour le cas  $\alpha\gamma > 1$ ) est aussi une solution de (SK); mais  $\tilde{K}$  n'est pas nécessairement l'unique fonction K telle que  $(K, \tilde{\psi})$  soit solution de (SK); pour que des fonctions différentes de  $\tilde{K}$  existent, il faut et il suffit qu'il existe deux points  $\tilde{t}_1$  et  $\tilde{t}_2$  tels que :

$$\begin{cases} \bar{r}(\tilde{t}_1) = k_0 & r(\tilde{t}_2) = k_T + M(\tilde{t}_2 - T) \\ \tilde{t}_1 \leq T + \frac{k_0 - k_T}{M} \leq \tilde{t}_2 \\ \forall t \in [\tilde{t}_1, \tilde{t}_2] & r(t) > k_0 \end{cases}$$

Alors, pour que la politique K soit optimale, il faut et il suffit que :

$$\begin{cases} \forall t \in [0, \tilde{t}_1] \cup [\tilde{t}_2, T] & K(t) = \tilde{K}(t) \\ \forall t \in [\tilde{t}_1, \tilde{t}_2] & \tilde{K}(t) \leq K(t) \leq r(t) \quad 0 \leq K'(t) \leq M \end{cases}$$

(en effet,  $(K, \tilde{\psi})$  est alors solution de (SK), puisque  $\tilde{\psi}(t) = e^{-\alpha t}$   $\forall t \in [\tilde{t}_1, \tilde{t}_2]$ ).

Remarque : retrouvons cela directement : pour montrer que K est optimale, il suffit de montrer que :

$$\int_{\tilde{t}_1}^{\tilde{t}_2} \left[ \inf \left\{ \tilde{K}(t), r(t) \right\} - \frac{1}{\alpha} \tilde{K}'(t) \right] e^{-\alpha t} dt = \int_{\tilde{t}_1}^{\tilde{t}_2} \left[ \inf \left\{ K(t), r(t) \right\} - \frac{1}{\alpha} K'(t) \right] e^{-\alpha t} dt$$

par intégration par parties, on trouve aisément que ces deux intégrales sont égales à :

$$-\frac{1}{\alpha} \left[ r(\tilde{t}_2) e^{-\alpha \tilde{t}_2} - k_0 e^{-\alpha \tilde{t}_1} \right]$$

Il en résulte le théorème suivant :

Théorème 1 : (a) Il existe une politique  $\tilde{K}$  optimale, lorsque  $K(T)$  est assujéti à être égal à  $k_T$ , possédant les propriétés suivantes :

- . si  $F(s, \tilde{K}(t))$  atteint son minimum en  $s$  sur l'intervalle  $[t, k_T + M(t-T)]$ , au point  $s=t$ , alors  $\tilde{K}'(t+0) = \bar{r}'(t+0)$
- . sinon  $\tilde{K}'(t+0) = 0$ .

(b) Si  $\alpha \gamma \neq 1$ ,  $\tilde{K}$  est l'unique optimale. Si  $\alpha \gamma = 1$ , une politique  $K$  est optimale si, et seulement si :

$$\forall t \in [0, T] \begin{cases} 0 \leq K'(t) \leq M \\ \tilde{K}(t) \leq K(t) \leq \bar{r}(t) \end{cases}$$

#### 4.3.3.- Optimale, lorsque $K(T)$ n'est pas fixé.

. si  $\alpha \gamma \geq 1$ , il résulte du § 3.3.1. que l'unique solution  $(\tilde{K}, \tilde{\psi})$  de (SK) telle que  $\tilde{K}(0) = k_0$  et  $\tilde{\psi}(T) = 0$  est :

$$\begin{cases} \tilde{K}(t) = k_0 & \forall t \in [0, T] \\ \tilde{\psi}(t) = \int_t^T \frac{1}{\gamma} w(s, k_0) e^{-\alpha s} ds \end{cases}$$

Cette solution est unique car  $\tilde{\psi}(t) < e^{-\alpha t}$  dans  $[0, T]$ , donc  $(K, \tilde{\psi})$  ne peut être solution de (SK) que si  $K'(t) = 0$  dans  $[0, T]$ .

. si  $\alpha \gamma < 1$ , deux cas peuvent se présenter :

$$(I) \quad \forall t \in [0, T] \quad F(t, k_0) \geq 0$$

Dans ce cas, l'optimale est la même que lorsque  $\alpha \gamma \geq 1$ , pour les mêmes raisons.

$$(II) \quad \exists t_0 \in [0, T] \quad F(t_0, k_0) < 0$$

Appelons E l'ensemble des nombres k tels que mes  $\left\{ K^{*-1}(k) \right\} = 0$ .

Montrons que la fonction  $g(k) = F(K^{*-1}(k), k)$  est strictement croissante sur E.

Si  $k_1$  et  $k_2$  sont 2 valeurs de k, atteintes par  $K^*(t)$  en deux points  $t_1$  et  $t_2$  (respectivement) appartenant à un même intervalle de commutation:

$$\begin{aligned} k_1 < k_2 \implies g(k_1) = F(t_1, k_1) &= \int_{t_1}^T \left[ \alpha - \frac{1}{\gamma} w(s, k_1) \right] e^{-\alpha s} ds + e^{-\alpha T} \\ &< \int_{t_2}^T \left[ \alpha - \frac{1}{\gamma} w(s, k_1) \right] e^{-\alpha s} ds + e^{-\alpha T} \\ &\leq \int_{t_2}^T \left[ \alpha - \frac{1}{\gamma} w(s, k_2) \right] e^{-\alpha s} ds + e^{-\alpha T} \\ &= F(t_2, k_2) = g(k_2) \end{aligned}$$

On en déduit aisément, compte tenu de la partie (c) de la proposition 3.3., que g est strictement croissante sur E.

D'autre part,  $g(K^*(T)) = e^{-\alpha t^*} > 0$  ( $t^*$  étant défini par:  
 $t^* = \inf \left\{ t \mid K^*(t) = K^*(T) \right\}$ )

Il en résulte qu'il existe un nombre  $\bar{k}$  égal à :

$$\inf \left\{ k \mid \exists t \in [0, T] \quad K^*(t) = k ; F(t, k) \geq 0 \right\}$$

Posons :

$$\tilde{t} = \inf \left\{ K^{*-1}(\bar{k}) \right\}$$

Or :  $\bar{F}(\tilde{t}, \tilde{k}, 1) = F(\tilde{t}, \tilde{k}) \geq 0$

On démontre aisément que :

$$F(\tilde{t}, \tilde{k}, 0) = \lim_{\substack{t \rightarrow \tilde{t} \\ t < \tilde{t}}} F(t, K^*(t)) \leq 0$$

$F(t, k, d)$  étant continue par rapport à  $d$  :

$$\exists \tilde{d} \in [0, 1] \quad F(\tilde{t}, \tilde{k}, \tilde{d}) = 0$$

Soient  $\tilde{K}$  et  $\tilde{\psi}$  les fonctions ainsi définies :

$$\begin{cases} 0 \leq t \leq \tilde{t} & \implies & \tilde{K}(t) = K^*(t) & \tilde{\psi}(t) = \psi^*(t) \\ \tilde{t} \leq t \leq T & \implies & \tilde{K}(t) = \bar{k} & \tilde{\psi}(t) = \int_t^T \frac{1}{\delta} w(s, \tilde{k}, \tilde{d}) e^{-\alpha s} ds \end{cases}$$

On vérifie aisément que  $(\tilde{K}, \tilde{\psi})$  est solution de (SK) sous les conditions  $\tilde{K}(0) = k_0$ ,  $\tilde{\psi}(T) = 0$ . De plus,  $\tilde{K}$  est l'unique fonction  $K$  appartenant à  $\mathcal{H}_M(k_0)$  telle que  $(K, \tilde{\psi})$  soit solution de (SK) : c'est donc l'unique optimale du problème.

Théorème 2 : Lorsque  $K(T)$  n'est pas fixé, il existe une optimale  $\tilde{K}$  unique. Elle est telle que, pour tout point  $t$  de  $[0, T]$ :

(a) si  $F(t, \tilde{K}(t)) \geq 0$  alors :  $\tilde{K}'(t+0) = 0$

(b) si  $F(t, \tilde{K}(t)) < 0$  alors :

. si  $F(t, \tilde{K}(t)) = \max \left\{ F(s, \tilde{K}(\theta)) \mid \theta \leq s \leq T; \theta = t \right\}$

alors  $\tilde{K}'(t+0)$  est égal à  $r'(t+0)$  ou à  $M$  selon que  $\tilde{K}(t)$  est égal ou inférieur à  $r(t)$

. sinon,  $\tilde{K}'(t+0) = 0$ .



#### 4.4.- GENERALISATION.

##### 4.4.1.- Introduction.

Dans ce paragraphe, nous étendons les résultats obtenus pour le problème de Karlin-Beckmann à la maximisation de

$$\int_0^T [H(t, K(t)) + c(t) K'(t)] dt$$

lorsque, pour tout  $t$ ,  $H(t, k)$  est concave en  $k$ , sous les contraintes et hypothèses indiquées aux § 1.2.1. et 1.2.2. (avec  $\delta=0$ ). Nous avons démontré que lorsque  $\delta > 0$ , dans le problème défini au § 1.2., on peut se ramener au cas où  $\delta=0$  (Cf § 1.4.) ; la concavité de  $H$  en  $k$  est inchangée dans cette transformation du problème.

##### Exemple économique :

Dans le problème économique à l'origine du problème (mathématique) de Karlin-Beckmann, supposons que :

- (a) la demande dépende du temps et du niveau d'équipement : soit  $r(t, k)$  la demande à la date  $t$ , lorsque la valeur de l'équipement est  $k$ . Supposons  $r(t, k)$  concave en  $k$  pour tout  $t$ . (En général,  $r(t, k)$  est aussi croissante par rapport à  $k$ , et pour tout  $t$ , tend vers une limite finie lorsque  $k$  tend vers l'infini. En effet, un équipement plus puissant permet d'abaisser le prix du produit et d'en améliorer la qualité; d'autre part, il y a à tout moment un niveau de production qui saturerait le marché).
- (b) le taux d'actualisation soit variable avec le temps ; soit  $\alpha(t)$  le taux d'actualisation à la date  $t$ . Supposons que  $\alpha$  soit dérivable et que la fonction :

$$t \rightarrow e^{-\alpha(t)t}$$

soit décroissante.

Le profit entre les dates 0 et T est alors :

$$\int_0^T \left[ \frac{1}{\delta} \inf \{ K(t), r(t, K(t)) \} - K'(t) \right] e^{-\alpha(t)t} dt$$

Ce problème est donc un cas particulier du problème étudié dans ce paragraphe, où :

$$\begin{cases} H(t, k) = \frac{1}{\delta} \inf \{ k, r(t, k) \} e^{-\alpha(t)t} \\ c(t) = - e^{-\alpha(t)t} \end{cases}$$

#### 4.4.2.- Hypothèses sur les données.

Afin de résoudre effectivement le problème nous allons supposer que pour tout  $t \in [0, T]$ , il existe un nombre  $\rho(t)$  unique tel que  $(t, \rho(t))$  appartienne à D (pour la définition de D, voir § 4.2.2.) et que si  $(t, k) \in D$ , alors :

$$k < \rho(t) \implies c'(t) - \frac{\partial}{\partial k} H(t, k+0) \leq 0$$

$$k > \rho(t) \implies c'(t) - \frac{\partial}{\partial k} H(t, k-0) \geq 0$$

Supposons en outre que  $\rho$  satisfait les hypothèses  $h_1$ ,  $h_2$ ,  $h_4$  (Cf § 4.1.2.), et :

$h'3$  : si  $(t, \rho(t))$  est un point intérieur à D et si  $\rho$  est dérivable au point  $t$ , alors :

$$\rho'(t) < M$$

Remarque: si on applique la définition de  $\rho$  au problème de Karlin-

Beckmann :

- lorsque  $\alpha \gamma < 1$   $\rho(t) = \bar{r}(t)$
- lorsque  $\alpha \gamma > 1$  et  $K(T)$  non fixé :  $\rho(t) = k_0$
- lorsque  $\alpha \gamma > 1$  et  $K(T)$  est assujetti à être égal à  $k_T$  :  
 $\rho(t) = \sup \left\{ k_0, k_T + M(T-t) \right\}$
- lorsque  $\alpha \gamma = 1$   $\rho$  n'est pas toujours définie, car la condition d'unicité indiquée au début de ce paragraphe n'est pas toujours remplie.

#### 4.4.3.- Points de commutation.

Il résulte du § 3.3. qu'il existe une fonction  $\tilde{\psi}$  telle que pour toute optimale  $\tilde{K}$ ,  $(\tilde{K}, \tilde{\psi})$  est solution de (S.L). Il en résulte que le graphe de toute optimale  $\tilde{K}$  est formée :

- d'arcs où  $\tilde{K}'(t) = 0$  (alors,  $\tilde{\psi}(t) + c(t) \leq 0$ ) (type I)
- d'arcs où  $\tilde{K}'(t) = \rho(t)$  (alors,  $\tilde{\psi}(t) + c(t) = 0$ ) (type II)
- d'arcs où  $\tilde{K}'(t) = M$  (alors,  $\tilde{\psi}(t) + c(t) \geq 0$ ) (type III)

Si  $\tilde{K}$  "commute" au point  $(t_1, k_1)$  (c'est-à-dire si  $\tilde{K}(t_1) = k_1$  et s'il y a changement de type d'arc à ce point), alors

$$\tilde{\psi}(t_1) + c(t_1) = 0$$

Supposons que  $\tilde{\psi}(t_1) + c(t_1) = 0$ . 3 cas peuvent se présenter :

(a) si  $k_1 > \rho(t_1)$  ou bien si  $k_1 = \rho(t_1)$  et  $\rho$  strictement décroissante dans un intervalle  $]t_1, t_1 + \epsilon[$ , alors :

$$\tilde{\psi}'(t_1) + c'(t_1) \geq c'(t_1) - \frac{\partial}{\partial k} H(t_1, k_1 - 0) \geq 0$$

Par suite :

$$\forall t \in [t, T] \quad \tilde{\psi}(t) + c(t) \geq 0 \quad \tilde{K}(t) = \tilde{K}(t_1) + M(t-t_1)$$

(b) si  $k_1 < \rho(t_1)$  alors :

$$\tilde{\psi}'(t_1) + c'(t_1) \leq c'(t_1) - \frac{\partial}{\partial k} H(t_1, k_1 + 0) \leq 0$$

$$\text{donc } \tilde{K}'(t_1+0) = 0$$

(c) si  $k_1 = \rho(t_1)$  et si  $\rho$  est croissante à droite de  $t_1$ , il y a ambiguïté quant à la valeur de  $\tilde{K}'(t_1+0)$ .

#### 4.4.4.- Intervalles de commutation.

Posons :

$$F(t, k) = -c(t) - \int_t^T \frac{\partial}{\partial k} H(s, k-0) ds$$

On montre, comme au § 4.2.2., que si  $\tilde{K}(t)$  est égal à  $k$  dans  $[t_1, t_2]$ , alors :

$$F(t_1, k) = \min \left\{ F(t, k) \mid t \in [t_1, t_2] \right\}$$

Définissons un intervalle de commutation de la même manière qu'au §4.2.2., en remplaçant toutefois  $\bar{r}$  par  $\rho$ . On a la proposition suivante :

Proposition | Soient  $]a_1, b_1[$  et  $]a_2, b_2[$  deux intervalles de  
commutation tels que  $b_1 < a_2$ , et qu'il n'existe aucun  
intervalle de commutation inclus dans  $]b_1, a_2[$ .

(a)  $\forall t_1 \in ]a_1, b_1[$   $\forall t_2 \in ]a_2, b_2[$   $\rho(t_1) \leq \rho(t_2)$

(b)  $\rho(b_1) = \rho(a_2)$

(c) si  $\frac{\partial}{\partial k} H(t, \rho(b_1))$  est presque partout définie sur  $[b_1, a_2]$ , alors :

$$\begin{aligned} & F(b_1, \rho(b_1)) = F(a_2, \rho(a_2)) \\ \text{sinon : } & \underline{F(b_1, \rho(b_1)) < F(a_2, \rho(a_2))} \end{aligned}$$

Pour démontrer cette proposition, on introduit deux intervalles  $[A_1, B_1]$  et  $[A_2, B_2]$  et deux fonctions  $t_1^*(k)$  et  $t_2^*(k)$  de la même manière qu'au § 4.2.2. (en remplaçant  $\bar{r}$  par  $\rho$ ). Soit  $G$  la fonction ainsi définie :

$$G(k) = F(t_1^*(k), k) - F(t_2^*(k), k) = \int_{t_1^*(k)}^{t_2^*(k)} \left[ c'(t) - \frac{\partial}{\partial k} H(s, k-0) \right] ds$$

On montre, par le même raisonnement qu'au § 4.2.2., que  $G$  est strictement croissante ; on en déduit les parties (a) et (b) de la proposition ci-dessus.

D'autre part,  $t_1^*$  et  $t_2^*$  sont continues ; de plus,  $\frac{\partial H}{\partial k}(s, k-0)$  est continue à gauche par rapport à  $k$ , puisque  $H$  est concave en  $k$ . Par suite,  $G$  est continue à gauche : donc  $G(\rho(b_1)) \leq 0$ .  $G$  est continue à droite si et seulement si  $\frac{\partial}{\partial k} H(t, k-0)$  est presque partout continue par rapport à  $k$  dans  $[t_1^*(k), t_2^*(k)]$ , c'est-à-dire si et seulement si  $H$  est presque partout dérivable par rapport à  $k$  dans cet intervalle. On en déduit la partie (c) de la proposition ci-dessus.

4.4.5. - Soit  $K^*$  le programme défini de la même manière qu'au paragraphe 4.3.1. (en remplaçant toutefois  $\bar{r}$  par  $\rho$ ). Montrons qu'il existe une fonction  $\psi^*$  telle que :

$$(S) \begin{cases} -\frac{\partial H}{\partial k}(t, K^*(t)+0) \geq \psi^*(t) \geq -\frac{\partial H}{\partial k}(t, K^*(t)-0) \\ \psi^*(t)+c(t) < 0 \implies K^*(t) = 0 \quad \psi^*(t)+c(t) > 0 \implies K^*(t) = M \end{cases}$$

(c'est-à-dire telle que  $(K^*, \psi^*)$  soit solution de (S.L) à l'exception des conditions aux limites).

soit  $\Delta(k)$  l'ensemble des nombres  $t$  tels que  $(t, k)$  appartienne à  $D$ , et que  $H$  ne soit pas dérivable par rapport à  $k$  au point  $(t, k)$ . Soit  $\sigma(t, k, d)$  la fonction ainsi définie :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma(t, k, d) = 1 \\ \sigma(t, k, d) = 0 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \text{si } \frac{\partial}{\partial k} H(t, k) \text{ est définie} \\ \text{ou si } \text{mes} \left\{ \Delta(k) \cap [t, T] \right\} \leq d \text{ mes} \left\{ \Delta(k) \right\} \\ \text{dans les autres cas.} \end{array} \right.$$

Posons :

$$\bar{F}(t, k, d) = -c(t) - \int_t^T \left[ \sigma(s, k, d) \frac{\partial}{\partial k} H(s, k-0) + [1 - \sigma(s, k, d)] \frac{\partial}{\partial k} H(s, k+0) \right] ds$$

On démontre de la même manière qu'au § 4.3.1. que si  $]a_i, b_i[$  et  $]a_{i+1}, b_{i+1}[$  sont deux intervalles de commutation consécutifs, il existe un nombre  $d_i^*$  compris entre 0 et 1 tel que :

$$\bar{F}(b_i, \rho(a_{i+1}), d_i^*) = F(a_{i+1}, \rho(a_{i+1}))$$

Soit donc  $\psi^*$  la fonction ainsi définie :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall t \in [0, a_1] \quad \psi^*(t) = -c(a_1) + \int_t^{a_1} \frac{\partial}{\partial k} H(s, \rho(a_1)-0) ds \\ \forall t \in [a_i, b_i] \quad \psi^*(t) = -c(t) \\ \forall t \in [b_i, a_{i+1}] \quad \psi^*(t) = F(a_{i+1}, \rho(a_{i+1})) - \bar{F}(t, \rho(a_{i+1}), d_i^*) \\ \forall t \in [b_p, T] \quad \psi^*(t) = -c(b_p) - \int_{b_p}^t \frac{\partial}{\partial k} H(s, \rho(b_p)-0) ds \end{array} \right.$$

On vérifie immédiatement que  $(K^*, \psi^*)$  est solution de (SL), et que  $K^*$  est l'unique fonction  $K$  telle que  $(K, \psi^*)$  soit solution de (SL).

4.4.6.- Détermination de l'optimale.

Comme au § 4.3.2., (cas où  $\alpha \chi < 1$ ), si  $K(T)$  est fixé, l'optimale  $\tilde{K}$  est unique et identique à  $K^*$ .

Théorème 1 | Lorsque  $K(T)$  est assujetti à être égal à  $k_T$  l'optimale  $\tilde{K}$  est unique ; elle est telle que pour tout point  $\underline{t}$  :

- si  $F(s, \tilde{K}(t))$  atteint son minimum en  $s$  sur l'intervalle  $[t, k_T + M(t-T)]$  au point  $s = t$   
alors :  $\tilde{K}'(t+0) = \rho'(t+0)$
- sinon,  $\tilde{K}'(t+0) = 0$

Lorsque  $K(T)$  n'est pas fixé, deux cas peuvent se présenter, de même qu'au § 4.3.3. :

$$\cdot \min \left\{ F(t, k_0) \mid 0 \leq t \leq T \right\} \geq 0$$

alors :  $\forall t \in [0, T] \quad \hat{K}(t) = k_0$

$$\cdot \min \left\{ F(t, k_0) \mid 0 \leq t \leq T \right\} < 0$$

On démontre de la même manière qu'au § 4.3.3. qu'il existe alors un nombre  $\tilde{t}$  unique tel que :

$$\begin{cases} t < \tilde{t} \implies F(t, K^*(t)) < 0 \\ t \geq \tilde{t} \implies F(t, K^*(t)) \geq 0 \end{cases}$$

On en déduit de la même façon que :

$$\begin{aligned} 0 \leq t \leq \tilde{t} &\implies \tilde{K}(t) = K^*(t) \\ \tilde{t} \leq t \leq T &\implies \tilde{K}(t) = K^*(\tilde{t}) \end{aligned}$$

Dans ces deux cas,  $\tilde{K}$  est unique.

Théorème 2

Lorsque  $K(T)$  n'est pas fixé, il existe une optimale  $\tilde{K}$  unique ; elle est telle que, pour tout point  $t \in [0, T]$  :

(a) si  $F(t, \tilde{K}(t)) \geq 0$  , alors  $\tilde{K}'(t+0) = 0$

(b) si  $F(t, \tilde{K}(t)) < 0$  , alors :

. si  $F(t, \tilde{K}(t)) = \max \{ F(s, \tilde{K}(s)) \mid \theta \leq s \leq T; t = \theta \}$   
alors  $\tilde{K}'(t+0) = \rho(t+0)$

. sinon ,  $\tilde{K}'(t+0) = 0$





CHAPITRE V

---



RESOLUTION NUMERIQUE DU

PROBLEME DE ARROW

-----

I. GENERALITES

I.1. Rappel du problème et de sa solution théorique

Le problème de Arrow consiste à maximiser la fonctionnelle :

$$W(K) = \int_0^{+\infty} P(K(t)) e^{-\alpha t} dt$$

sous les contraintes :

$$\left\{ \begin{array}{l} K(0) = k_0 \quad (1) \\ K'(t) + \delta K(t) \geq 0 \quad (2) \\ \text{et éventuellement : } K'(t) + \delta K(t) \leq M \quad (3) \end{array} \right.$$

et sous les hypothèses :

$$\left\{ \begin{array}{l} P \text{ monotone par morceaux} \quad (H1) \\ \text{il existe } k \text{ tel que } P \text{ décroît dans } [k, +\infty[ \quad (H2) \\ \text{si } P(k_i) \text{ et } P(k_j) \text{ sont deux maxima locaux de } P, \quad / \\ \text{alors} \quad (H3) \\ P(k_i) \neq P(k_j) \end{array} \right.$$

Dans la suite, on appellera respectivement  $\mathcal{K}_\infty(k_0)$  et  $\mathcal{K}_M(k_0)$  l'ensemble des fonctions numériques définies sur  $[0, +\infty[$  satisfaisant les contraintes (1), (2), et (3), et les contraintes (1) et (2).

Sous la contrainte :

$$0 \leq K' + \delta K \leq +\infty$$

il existe toujours une optimale  $\tilde{K}$ , ayant un palier  $\bar{k}$ , éventuellement rejeté à l'infini, et de l'une des 4 formes suivantes :

si  $\bar{k} > k_0$  :  $\tilde{K}(0) = k_0$  ;  $\forall t > 0 \quad \tilde{K}(t) = \bar{k}$

si  $\bar{k} = k_0$  :  $\forall t \in [0, +\infty[ \quad \tilde{K}(t) = k_0$

si  $0 < \bar{k} < k_0$  :  $\tilde{K}(t) = k_0 e^{-\delta(t-t_0)} \quad \forall t \in [0, \frac{1}{\delta} \log(k_0/\bar{k})]$   
 $\tilde{K}(t) = \bar{k} \quad \forall t \in [\frac{1}{\delta} \log(k_0/\bar{k}), +\infty[$

si  $\bar{k} = 0$  :  $\tilde{K}(t) = k_0 e^{-\delta(t-t_0)} \quad \forall t \in [0, +\infty[$

"Soit  $\tilde{K}$  l'optimale ainsi définie"

Sous la contrainte :

$$0 \leq K'(t) + \delta K(t) \leq M \quad (M < +\infty)$$

et lorsque :

$$k_0 \leq M / \delta$$

il existe toujours une optimale  $\tilde{K}$ , ayant un palier unique  $\bar{k}$ , éventuellement rejeté à l'infini et de l'une des 5 formes suivantes :

si  $\bar{k} = M/\delta$  :  $\tilde{K}(t) = \frac{M}{\delta} + [k_0 - M/\delta] e^{-\delta t} \quad \forall t \in [0, +\infty[$

si  $k_0 < \bar{k} < \frac{M}{\delta}$  :  $\tilde{K}(t) = \frac{M}{\delta} + [k_0 - M/\delta] e^{-\delta t} \quad \forall t \in [0, \frac{1}{\delta} \log \frac{k_0 - M/\delta}{\bar{k} - M/\delta}]$   
 $\tilde{K}(t) = \bar{k} \quad \forall t \in [\frac{1}{\delta} \log \frac{k_0 - M/\delta}{\bar{k} - M/\delta}, +\infty[$

si  $\bar{k} = k_0$  :  $\tilde{K}(t) = k_0 \quad \forall t \in [0, +\infty[$

si  $0 < \bar{k} < k_0$  :  $\begin{cases} \tilde{K}(t) = k_0 e^{-\delta t} & \forall t \in [0, \frac{1}{\delta} \log \frac{\bar{k}}{k_0}] \\ \tilde{K}(t) = \bar{k} & \forall t \in [\frac{1}{\delta} \log \frac{\bar{k}}{k_0}, +\infty[ \end{cases}$

si  $\bar{k} = 0$  :  $\tilde{K}(t) = k_0 e^{-\delta t} \quad \forall t \in [0, +\infty[$

Soit  $K^*_{k_0, \bar{k}}$  l'optimale ainsi définie

Sous la contrainte :

$$0 \leq K'(t) + \delta K(t) \leq M \quad (M < +\infty)$$

et lorsque  $k_0 > \frac{M}{\delta}$ , toute optimale  $K$  possède la propriété suivante :

il existe un nombre  $t^* > 0$  tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall t \in [0, t^*] \quad \tilde{K}'(t) \text{ existe} \Rightarrow \tilde{K}'(t) = \delta K_0(t) \text{ ou} \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad K'(t) = M - \delta K(t) \\ \text{si } \bar{K}(t) = \tilde{K}(t^* + t) \text{ alors } \bar{K} \text{ est une optimale de } \mathcal{K}_M(M/\delta) \end{array} \right.$$

### I.2. Données et résultats numériques

Nous supposons que la fonction  $P$  est définie par ses valeurs :

$$P_0, P_1, \dots, P_j, \dots, P_{JMAX}$$

pour les valeurs :

$$K_0, K_1, \dots, K_j, \dots, K_{JMAX}$$

de la variable  $K$  ; on indice celles-ci de façon que :

$$K_0 < K_1 < \dots < K_j < \dots < K_{JMAX}$$

Conformément à l'hypothèse H2, nous supposons que  $P$  est décroissante dans l'intervalle  $[K_{JMAX}, +\infty[$ . D'autre part, l'hypothèse H3 se traduit par l'hypothèse numérique HN suivante :

Hypothèse HN : si  $J_1$  et  $J_2$  sont deux valeurs différentes de l'indice  $J$  telles que :

$$\begin{array}{ll} \text{a : } J_1 = 0 & \text{ou} \quad P_{J_1} \geq P_{J_2} \\ \text{b : } J_2 = 0 & \text{ou} \quad P_{J_2} \geq P_{J_2-1} \\ \text{c : } J_1 = JMAX & \text{ou} \quad P_{J_1} \geq P_{J_1+1} \\ \text{d : } J_2 = JMAX & \text{ou} \quad P_{J_2} \geq P_{J_2+1} \end{array}$$

alors :

$$P_{J_1} \neq P_{J_2}$$

Un programme optimal sera défini, lorsque M est infini ou  $k_0 \leq M/\delta$   
par :

- l'état initial  $k_0$
- l'état "final", c'est-à-dire la valeur du palier

Lorsque M est fini, et  $k_0 > M/\delta$ , le programme optimal sera défini par l'état initial  $k_0$ , l'état "final" et les dates auxquelles seront atteintes les états  $K_J$  tels que  $k_0 \geq K_J \geq M/\delta$ .

$$I.3. \text{ Approximation de } \int_{K_{J1}}^{K_{J2}} \frac{P(y)}{\delta} |y - M/\delta|^{\frac{\alpha}{\delta} - 1} dy$$


---

Nous aurons à calculer un certain nombre d'intégrales de ce type, où  $\frac{M}{\delta}$  n'appartient pas à  $]K_{J1}, K_{J2}[$ ; c'est pourquoi, nous ferons une procédure spéciale à cet effet.

Pour cela, nous supposerons que P est linéaire par morceaux et continue, l'ensemble des "points de raccord" étant :

$$\left\{ (K_J, P_J) \mid J = 0, 1, \dots, JMAX \right\}$$

Autrement dit, si y est compris entre  $K_J$  et  $K_{J+1}$ , alors, quel que soit J, nous approximations P(y) par :

$$P^*(y) = \frac{P_{J+1} - P_J}{K_{J+1} - K_J} y + \frac{P_J K_{J+1} - P_{J+1} K_J}{K_{J+1} - K_J}$$

Posons :

$$\left\{ \begin{array}{l} A = \frac{P_{J+1} - P_J}{\alpha + \delta} \\ B = \frac{P_J K_{J+1} - P_{J+1} K_J}{\alpha} \end{array} \right.$$

Par un calcul rapide, on voit que :

. Si  $M/\delta > \max \{K_J, K_{J+1}\}$ , alors :

$$\int_{K_J}^{K_{J+1}} \frac{1}{\delta} P^*(y) \left(\frac{M}{\delta} - y\right)^{\frac{\alpha}{\delta} - 1} dy = \frac{1}{K_J - K_{J+1}} \left[ A \left(y + \frac{M}{\alpha}\right) + B \left(\frac{M}{\delta} - y\right)^{\frac{\alpha}{\delta}} \right]_{y=K_J}^{y=K_{J+1}}$$

. Si  $M/\delta < \max \{K_J, K_{J+1}\}$ , alors :

$$\int_{K_J}^{K_{J+1}} \frac{1}{\delta} P^*(y) \left(\frac{M}{\delta} - y\right)^{\frac{\alpha}{\delta} - 1} dy = \frac{1}{K_{J+1} - K_J} \left[ A \left(y + \frac{M}{\alpha}\right) + B \left(\frac{M}{\delta} - y\right)^{\frac{\alpha}{\delta}} \right]_{y=K_J}^{y=K_{J+1}}$$

#### 1.4. Procédures en algol correspondantes

reel procedure E (X,Y) ;

reel X,Y ;

si X = 0 alors E := 0.0 sinon E := ABS (X) ↑ Y ;

reel procedure W (ALPHA, DELTA, M, H, L, Q, R, E) ;

reel ALPHA, DELTA, M, H, L, Q, R ; reel procedure E ;

début reel A, B ; A := (R - Q) / (ALPHA + DELTA) ; B := (QxL - RxH) / ALPHA ;

W := (E(M/DELTA - L, ALPHA/DELTA) x (AxL + AxM / ALPHA + B)

- E(M/DELTA - H, ALPHA/DELTA) x (AxH + AxM / ALPHA + B)) / (H - L)

x (si H ≤ M / DELTA alors 1 sinon -1)

fin ;

L'intégrale cherchée se calcule ainsi, en supposant  $J_2 > J_1$  :

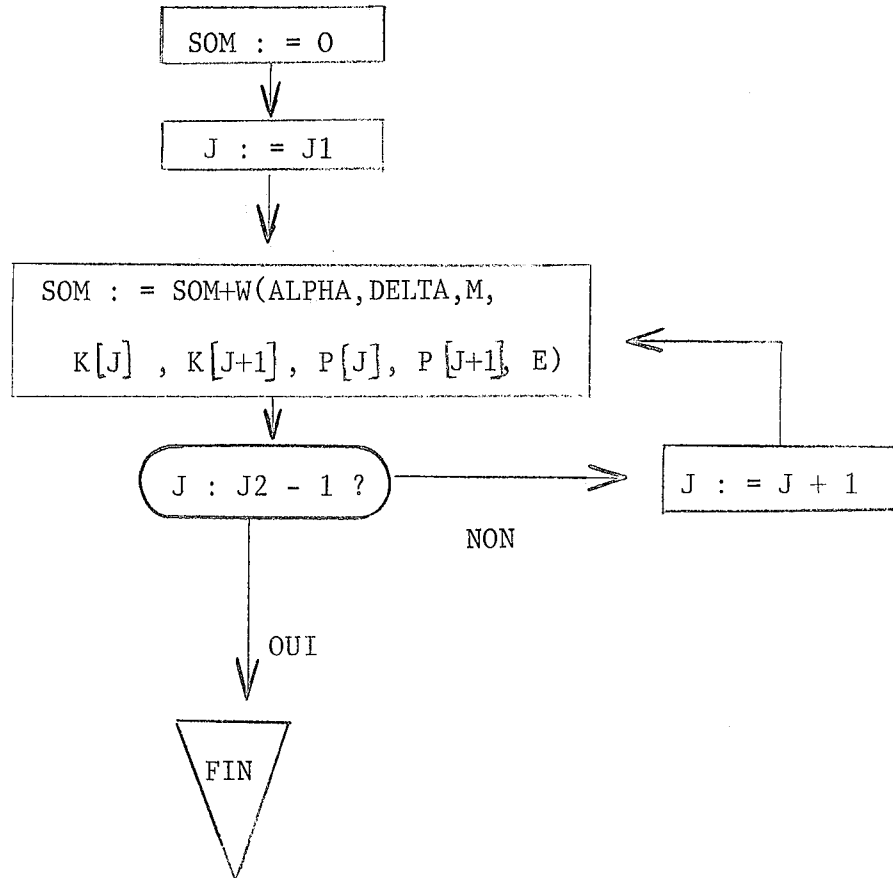
SOM := 0 ; pour J := J1 pas 1 jusqu a J2-1 faire

SOM := SOM + W (ALPHA, DELTA, M, K [J], K [J+1], P [J], P [J+1], E) ;



Remarque :

Dans les programmes relatifs à  $\mathcal{H}_\infty(k_0)$ , on définit  $W$  sans tenir compte de  $M$  ; son expression se déduit alors de celle-ci-dessus en annulant  $M$ . Cela peut paraître a priori paradoxal ; en réalité dans le cas de  $\mathcal{H}_\infty(k_0)$ , on n'a besoin de calculer l'intégrale dans le cas considéré que lorsque la valeur du palier optimal est inférieur à l'état initial : autrement dit cela n'aurait aucun sens de faire tendre  $M$  (c'est-à-dire, la borne supérieure<sup>de</sup>  $K' + \delta K$ ) vers l'infini dans l'intégrale considérée (cf § 11 forme des optimales de  $\mathcal{H}_\infty(k_0)$ ).



I.5. Majoration de l'erreur sur le calcul de cette intégrale.

a. Dans cet alinéa, nous ne faisons aucune hypothèse de dérivabilité sur P. Soit  $\mu$  un majorant de la valeur absolue de l'erreur commise en approximant P (y) par P\* (y) :

$$\mu \geq \sup_y |P(y) - P^*(y)|$$

Appelons S\* le résultat du calcul effectué selon la procédure ci-dessus.

$$|S^* - S| = \left| \int_{K_0}^{K_1} \frac{P^*(y) - P(y)}{\delta} \left| \frac{M}{\delta} - y \right|^{\frac{\alpha}{\delta} - 1} dy \right|$$

Comme  $\frac{M}{\delta}$  n'appartient pas à  $]K_0, K_1[$  :

$$|S^* - S| \leq \int_{K_0}^{K_1} \frac{\mu}{\delta} \left| \frac{M}{\delta} - y \right|^{\frac{\alpha}{\delta} - 1} dy = \frac{\mu}{\alpha} \left| \left| K_0 - \frac{M}{\delta} \right|^{\frac{\alpha}{\delta}} - \left| K_1 - \frac{M}{\delta} \right|^{\frac{\alpha}{\delta}} \right|$$

b. Supposons maintenant que P'' existe dans  $[K_0, K_1]$ , y soit continue et majorée par M<sub>2</sub>. D'après la théorie de l'interpolation linéaire, quel que soit y compris entre K<sub>J</sub> et K<sub>J+1</sub>, il existe un nombre y\* de ce même intervalle, tel que :

$$P(y) - P^*(y) = \frac{1}{2} (y - K_J) (y - K_{J+1}) P''(y^*)$$

Par conséquent :

$$|P(y) - P^*(y)| \leq \frac{(K_{J+1} - K_J)^2}{8} M_2 \quad \forall y \in [K_J, K_{J+1}]$$

Si on suppose que le pas  $K_{J+1} - K_J$  est constant et égal à h :

$$|S^* - S| \leq \frac{M_2}{8\alpha} h^2 \left| \left| K_0 - \frac{M}{\delta} \right|^{\frac{\alpha}{\delta}} - \left| K_1 - \frac{M}{\delta} \right|^{\frac{\alpha}{\delta}} \right|$$

I.6. Exemples numériques

P (K)	M	$\alpha$	$\delta$	K0	K1	S	$\bar{S}$	h	incertitude théorique	erreur réelle
20-K	10	0,5	0,5	0	0	300,000 00	299,999 87	0,1	0	-0,000 13
K -1	10	5	10	2	5	0,466 666 67	0,466 666 62	0,075	0	-0,000 000 05
K	0	3	1,5	1	2	1,555 555 6	1,555 555 5	0,1	0	-0,000 000 1
(K-1) <sup>2</sup>	10	10	10	2	5	2,100 000 0	2,100 499 9	0,1	0,000 75	0,000 50
(K-1) <sup>3</sup>	10	10	10	2	5	6,375 000 0	6,378 749 7	0,1	0,009	0,003 75
(K-1) <sup>-1,7</sup>	10	27	10	2	5	0,300 000 00	0,300 286 99	0,1	0,000 72	0,000 3
(1+K <sup>2</sup> ) <sup>-1</sup>	1	0,25	0,25	0	1	3,141 592 6	3,141 176 6	0,05	0,000 625	-0,000 416
sin(5K)+2- - K/10	0	2	1	0	10	64,726	64,766	0,1	1,5	0,04

Remarque : les erreurs des 3 premiers exemples sont dues uniquement aux erreurs d'arrondi.

I.7. Remarque

Dans la suite, on emploiera souvent dans la même formule des symboles appartenant au langage algol et des symboles n'y appartenant pas : sans cela, les notations auraient été trop lourdes pour être claires.

II. PROGRAMME ARSIMI (ARrow SImplifié, M Infini)

II.1. Rappel de l'algorithme.

Cet algorithme permet de déterminer par leur palier les optimales de  $\mathcal{A}_\infty(k_0)$ , pour une valeur fixée de  $K_0$ . Sa structure est la suivante :

A. Détermination de  $k^*_0$  tel que :

$$P(k^*_0) = \max \{ P(k) \mid k > K_0 \}$$

B. Détermination des  $k^*_1, k^*_2, \dots, k^*_{i^*}$  tels que :

$$\begin{cases} k^*_i \leq K_0 \\ P(k^*_i) \text{ est un maximum local de } P \\ P(k^*_i) = \max \{ P(k) \mid k \geq k^*_i \} \end{cases}$$

C. Calcul de  $\mathcal{W}(\tilde{K}_{K_0, k^*_i})$  pour  $i = 0, 1, \dots, i^*$

D. Détermination de :

$$\mathcal{W}(\tilde{K}) = \max \left\{ \mathcal{W}(\tilde{K}_{K_0, k^*_i}) \mid i = 0, 1, \dots, i^* \right\}$$

Détermination des nombres  $i_{op}(L)$  tels que :

$$\left| \mathcal{W}(K) - \mathcal{W}(\tilde{K}_{K_0, k^*_{i_{op}(L)}}) \right| < \epsilon$$

II.2. Lecture des données

Le programme est conçu pour résoudre  $N$  problèmes à la suite.

Les valeurs numériques des valeurs :

$$K [J] \text{ et } P [J] \quad (J = 0, 1, \dots, JMAX)$$

sont lues sur les cartes de données, ou calculées par procédure. Pour cela, on introduit 2 variables indicées LK et LP :

- si  $LK [NP] = 0$  , dans le problème n° NP,  $K [J]$  est lue sur la carte donnée
- sinon,  $K [J]$  est calculée grâce à la procédure KF (NP,J). Le procédé de lecture de  $P [J]$  est analogue.

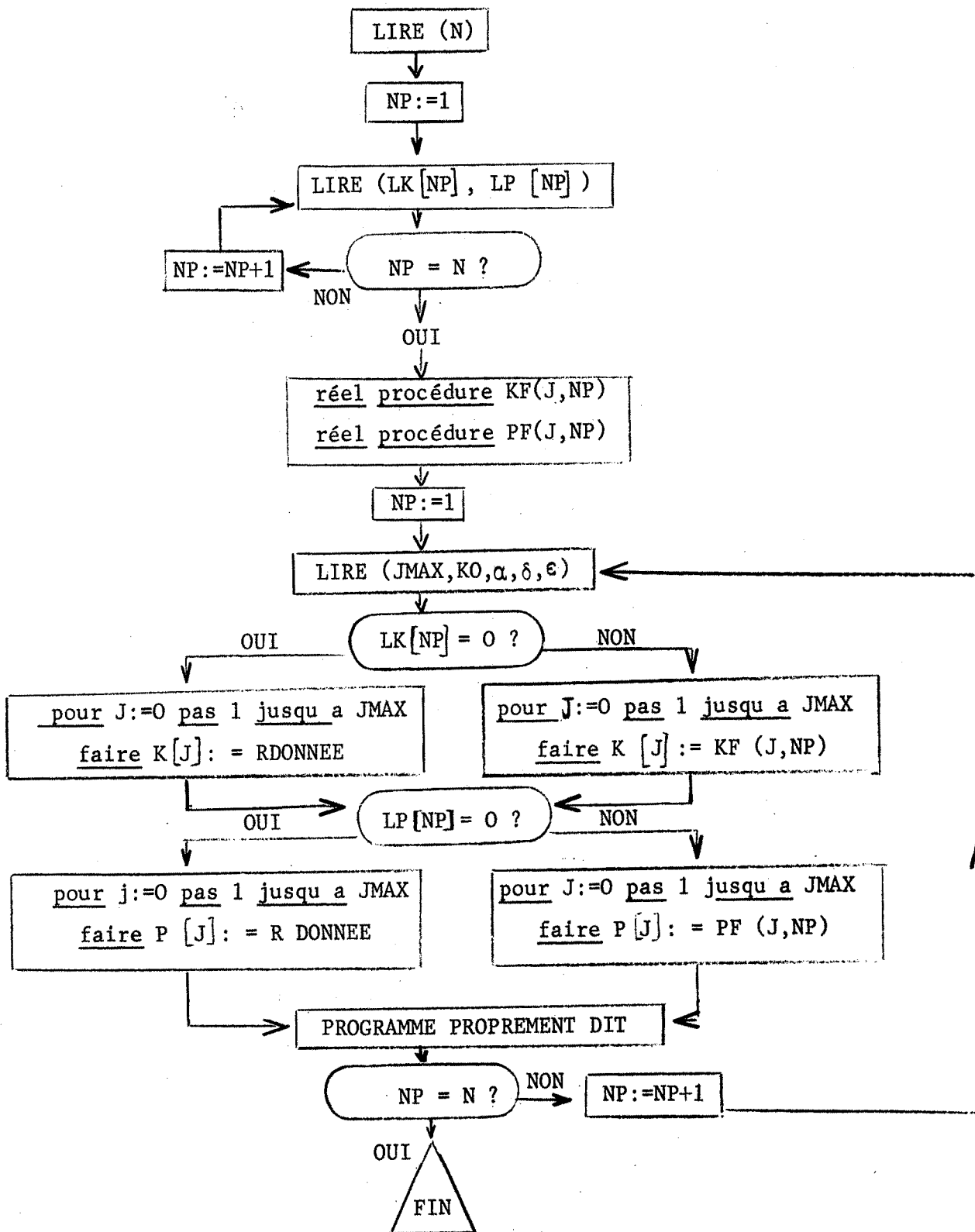
Pour chaque problème, outre les valeurs de  $K [J]$  et  $P [J]$ , les données sont :

JMAX            nombre moins 1 de points qui définissent la  
fonction P

KO              Valeur initiale de  $\hat{K}$

ALPHA, DELTA

EPS            Valeur numérique de  $\epsilon$  (voir ci - dessus § 2.1.D)



Organigramme des ordres de lecture

Partie du programme ARSIMI relative aux ordres de lecture

début

commentaire problème de Arrow, pour KO donné et M infini ;

entier NP, N ; LIRE (N) ;

début tableau LK, LP [1:N] ;

pour NP:=1 pas 1 jusqu a N faire LIRE (LK[NP],LP[NP]) ;

réel procédure KF (J,NP) ; entier J, NP ;

.....

réel procédure PF (J,NP) ; entier J, NP ;

.....

NP : = 1 ;

PROGR : début entier J, JMAX, JO, I, IMAX ;

réel KO, ALPHA, DELTA, WOP, EPS, PSTAR ;

LIRE (JMAX, KO, ALPHA, DELTA, EPS) ;

début entier tableau JSTAR [0 : JMAX] ;

tableau K, P [0 : JMAX] ;

pour J:=0 pas 1 jusqu JMAX faire

si LK[NP] = 0 alors K [J] : = RDONNEE sinon K[J] : = KF (J,NP) ;

pour J:= 0 pas 1 jusqu a JMAX faire

si LP[NP]= 0 alors P [J] : = RDONNEE sinon P [J] : = PF (J,NP) ;

.....

PROGRAMME PROPREMENT DIT

.....

si NP < N alors début NP : = NP + 1 ; SAUTPAGE ; aller a PROGR fin

fin fin fin fin fin ;

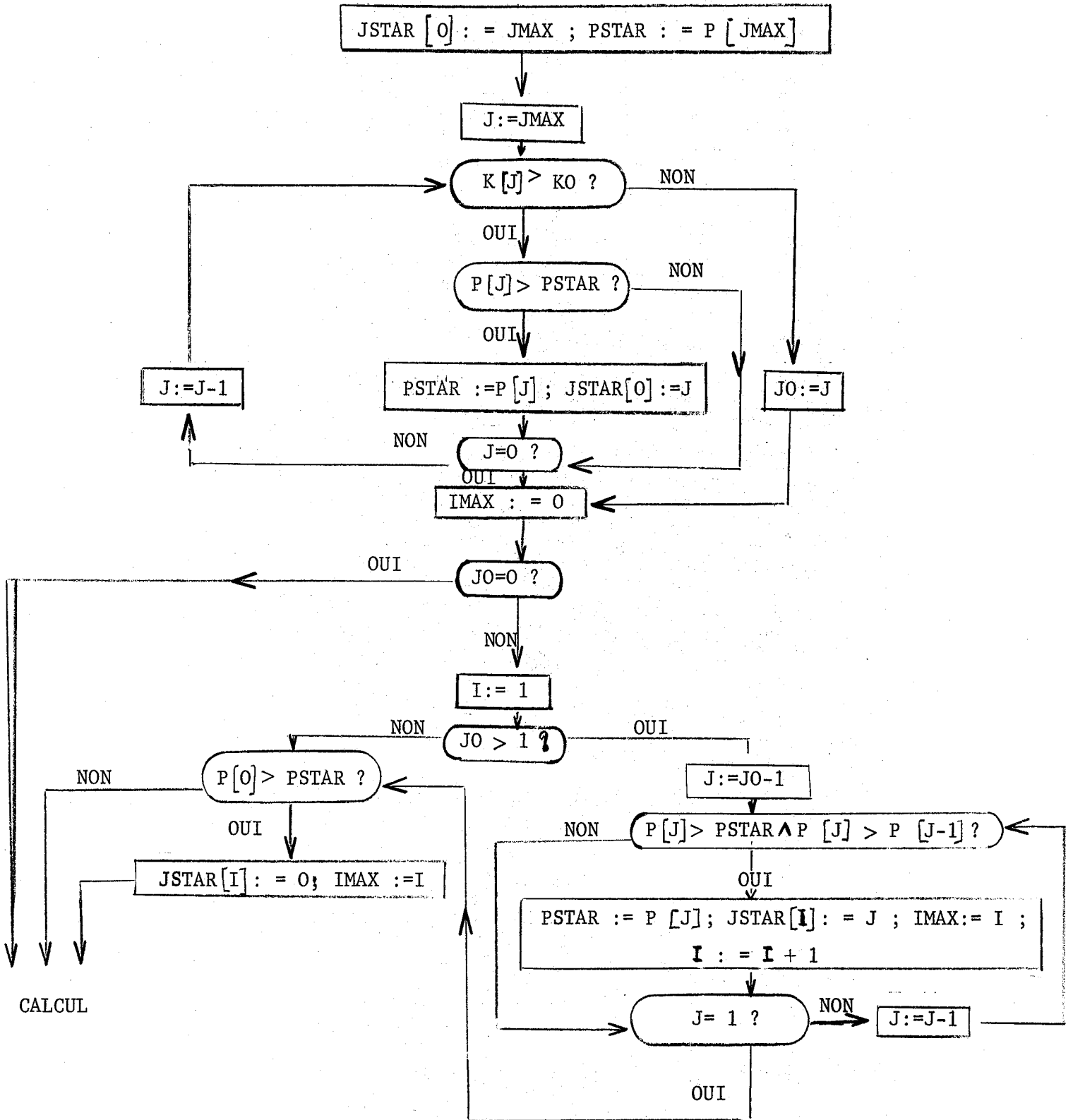
II. 3 Calcul des nombres  $k_i^*$

La détermination des nombres  $k_i^*$  se fait par l'intermédiaire de la variable indicée JSTAR à un indice  $I \in \{0,1,\dots, ISTAR\}$  :  $k_i^* \approx K[JSTAR[I]]$

JO étant tel que :  $K [JO] \approx KO$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} JSTAR[0] \text{ est tel que : } P[JSTAR [0]] = \sup_{J \geq JO} P [J] \\ JSTAR [I] = \sup \left\{ J \mid 0 \leq J < JSTAR [I-1] ; P [J] > P [JSTAR [I-1]] ; \right. \\ \left. J = 0 \text{ ou } P [J-1] < P [J] \right\} \end{array} \right.$$





JSTAR [0] := JMAX ; PSTAR := P [JMAX];  
pour J := JMAX pas - 1 jusqua 0 faire  
si K [J] > KO alors début si P [J] > PSTAR alors  
début PSTAR := P [J] ; JSTAR [0] := J fin  
fin  
sinon début JO := J ; aller a SUITE fin ;  
SUITE : IMAX = 0 ;  
si JO = 0 alors aller a CALCUL ;  
I := 1 ; si JO > 1 alors pour J := JO - 1 pas -1 jusqua 1  
faire si P [J] > PSTAR et P [J] > P [J - 1] alors  
début PSTAR := P [J] ; JSTAR [I] := J ; IMAX := I ; I := I+1 fin ;  
si P [0] > PSTAR alors début JSTAR [I] := 0 ; IMAX := I fin ;

#### II.4 Calcul des nombres $W(\tilde{K}_{KO, k^*_i})$ et de $\tilde{K}$ .

La détermination des nombres  $W(\tilde{K}_{KO, k^*_i})$  se fait par l'intermédiaire de la variable WSTAR à un indice  $i \in \{0, 1, \dots, ISTAR\}$  :

$W(\tilde{K}_{KO, k^*_i}) \simeq WSTAR [I]$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} WSTAR [0] = \frac{1}{\alpha} P [JSTAR [0]] \\ WSTAR [I] = \frac{1}{K [JO]^{\alpha/\delta}} \left( \sum_{J=JSTAR [I]}^{JO-1} W(\alpha, \delta, 0, K [J], K [J+1], P [J], P [J+1]) \right) \\ \quad + \frac{1}{\alpha} P [JSTAR [I]] \times K [JSTAR [I]]^{\alpha/\delta} \end{array} \right.$$

$W(\tilde{K})$  est approximée par la variable WOP ainsi définie :

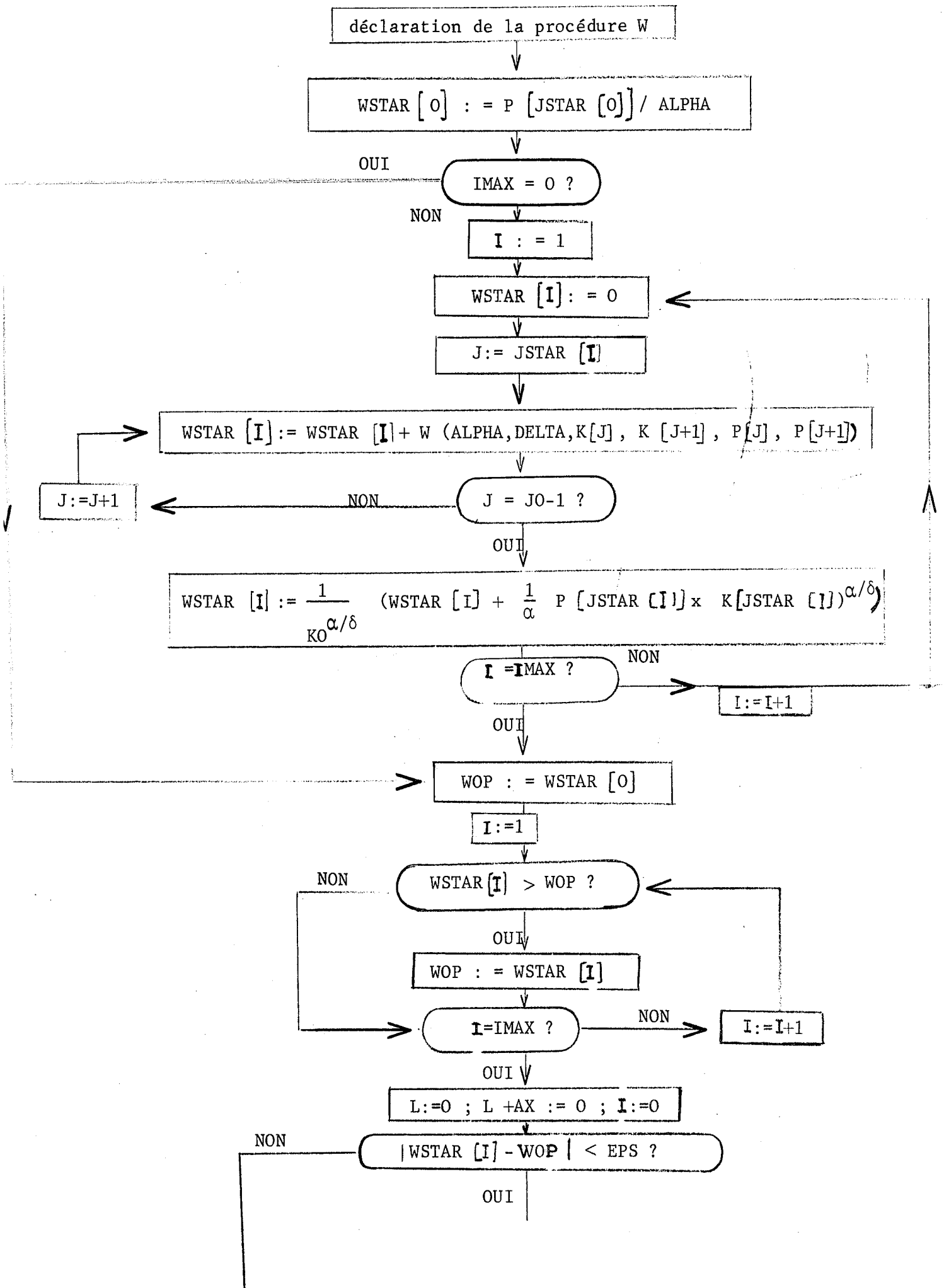
$$WOP = \sup \left\{ WSTAR [I] \mid I \in \{0, 1, \dots, IMAX\} \right\}$$

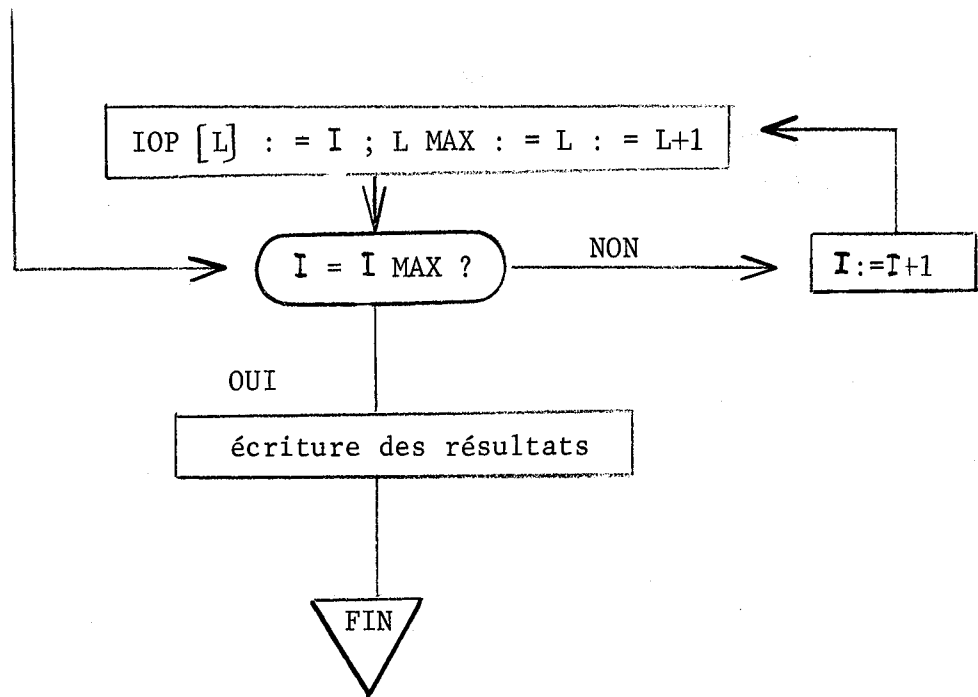
Les paliers de valeur  $k^*_i$  tels que :

$$\left| W(\tilde{K}_{KO, k^*_i}) - WOP \right| < EPS$$

sont déterminés grâce à la variable indicée IOP à un indice  $L \in \{0, 1, \dots, LMAX\}$  :

$$\forall L \in \{0, \dots, LMAX\} \quad \left| WSTAR [IOP [L]] - WOP \right| < EPS$$





CALCUL : début tableau WSTAR [0 : IMAX] ;  
entier tableau IOP [0 : IMAX] ; entier L, L MAX ;  
réel procédure W (ALPHA, DELTA, L, M, Q, R) ;  
réel ALPHA, DELTA, L, M, Q, R ;  
début réel A, B ; A := (R-Q) / ALPHA+DELTA ;  
B := ((QxM) - (RxL)) / ALPHA ;  
W := ((M  $\uparrow$  (ALPHA/DELTA) x (AxM+B) - (L  $\uparrow$  (ALPHA/DELTA) x (AxL+B)) / (M-L))  
fin W ;  
WSTAR [0] := P [JSTAR [0]] / ALPHA ;  
si IMAX = 0 alors aller a OPTI ;  
pour **I** := 1 pas 1 jusqu a IMAX faire  
début WSTAR [**I**] := 0 ; pour J:=JSTAR [**I**] pas 1 jusqu a JO - 1  
faire WSTAR [**I**] := WSTAR [**I**] + W (ALPHA, DELTA, K [**J**], K [**J+1**], P [**J**], P [**J+1**])  
WSTAR [**I**] := (WSTAR [**I**] + P [JSTAR [**I**]] x K [JSTAR [**I**]]  $\uparrow$  (ALPHA/DELTA)  
/ALPHA) / K [JO]  $\uparrow$  (ALPHA/DELTA)  
fin ;  
OPTI : WOP := WSTAR [0] ; pour **I** := 1 pas 1 jusqu a IMAX faire  
si WSTAR [**I**] > WOP alors WOP := WSTAR [**I**] ;  
L := 0 ; L MAX := 0 ; pour **I** := 0 pas 1 jusqu a IMAX faire  
si ABS (WSTAR [**I**] - WOP) < EPS alors  
début IOP [**L**] := **I** ; LMAX := L ; L := L+1 fin ;

## II. 5. Exemples numériques

Exemple 1 : P est un polynôme du 1er degré dans [1, 6]

$$\forall K \in [1,6] \quad P(K) = 70 - 10 K$$

$$\alpha = 1 \quad \delta = 1 \quad KO = 6 \quad JMAX = 5 \text{ (pas 1)}$$

P a un maximum unique au point  $K = 1$  :  $P(1) = 60$

Valeurs théoriques		Valeurs calculées	
$k^*_i$	$W(K_{KO}, k^*_i)$	$K [JSTAR [I]]$	$WSTAR [I]$
6	1	6	1
1	39, 166 66	1	39, 166 66

Les valeurs théoriques et les résultats du calcul sont identiques, car P est un polynôme du premier degré, et le nombre de points caractéristiques est trop petit pour que les erreurs d'arrondi soient notables.

Exemple 2 : P est "linéaire" par morceaux

$$\alpha = 1, 5 \quad \delta = 0, 5 \quad KO = 19 \quad JMAX = 24$$

Le graphe de P est tracé sur le schéma ci-contre

Valeurs théoriques		Valeurs calculées	
$k^*_i$	$W(K_{KO}, k^*_i)$	$K [JSTAR [I]]$	$WSTAR [I]$
24	39, 933 333	24	39, 933 3
8	22, 505 9	8	22, 504 7
0	20, 616 7	0	20, 616 9

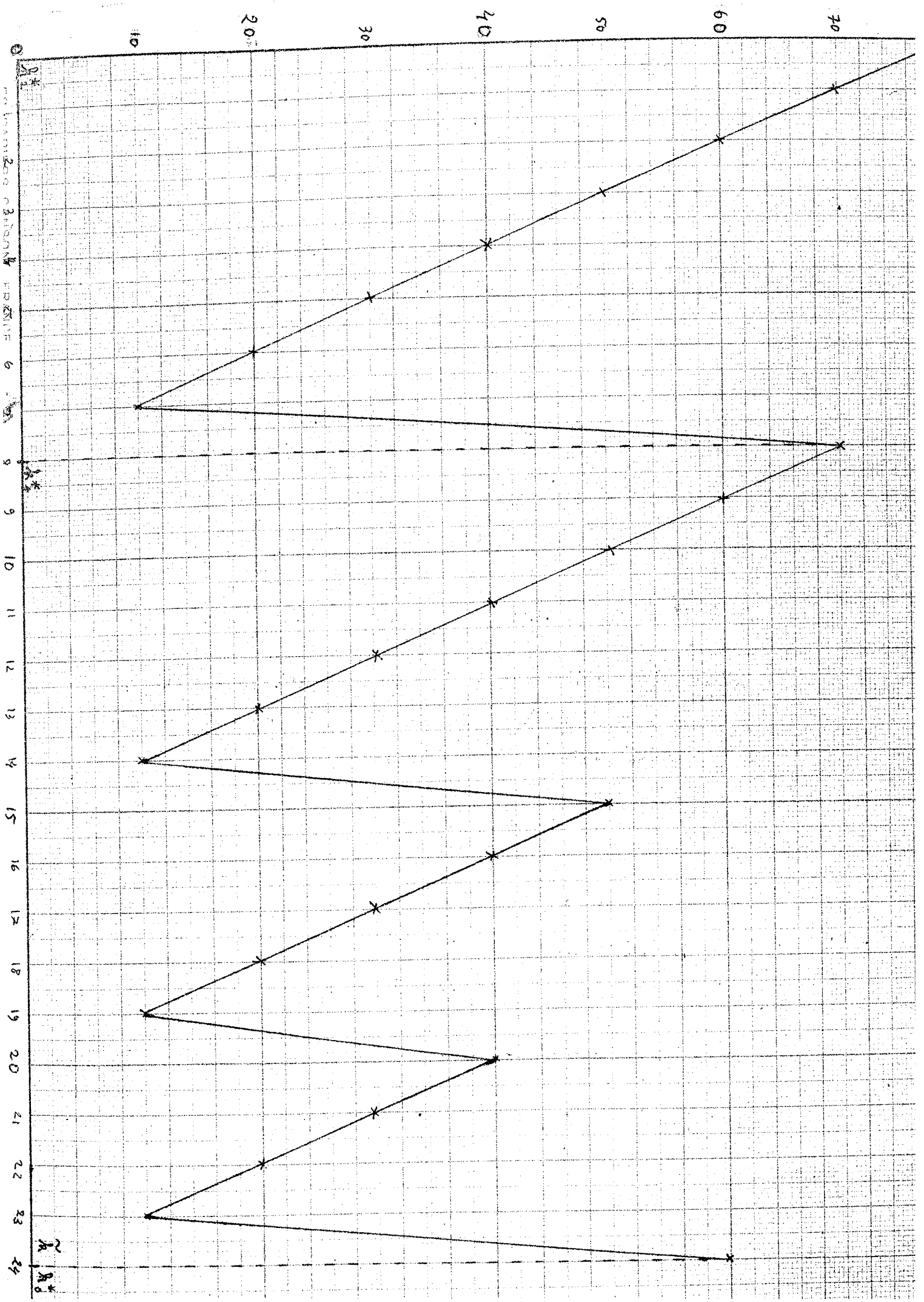
Exemple 3 :  $P(K) = \sin(10K) + 2 - K/10$

$\alpha = 2$        $\delta = 1$        $KO = 5$        $JMAX = 60$  (pas : 0, 1)

et  $JMAX = 300$  (pas : 0, 02)

Calcul à la main		pas : 0, 1		pas : 0, 02	
$k^*_i$	$W(K_{KO}, k^*_i)$	$K [JSTAR [I]]$	$WSTAR [I]$	$K [JSTAR [I]]$	$WSTAR [I]$
5,182 57	1,240 67	5,2	1, 233	5,18	1,240 67
4,554 25	1,165 55			4,56	1,164 95
3,925 94	1,081 60	3,9	1, 072	3,92	1,081 11
3,297 63	1,007 24	3,3	1, 009	3,30	1,007 24
2,669 32	0,943 46	2,7	0, 938	2,66	0,942 90
2,041 01	0,891 25	2	0, 886	2,04	0,891 32
1,412 70	0,851 62	1,4	0, 853	1,42	0,851 58
0,784 39	0,825 54	0,8	0, 827	0,78	0,825 60
0,156 08	0,814 02			0,16	0,814 09

Remarquons qu'avec le pas 0, 1, le programme a "oublié" de déceler les nombres  $k^*_2$  et  $k^*_9$ .







Exemple 4

$$P(K) = \sin(IOK) \times e^{-K} + 1$$

Calcul à la main		pas : 0, 1		pas : 0, 02	
$K^*_i$	$W(K_{KO}, k^*_i)$	$K[JSTAR[I]]$	$WSTAR[I]$	$K[JSTAR[I]]$	$WSTAR[I]$
5, 174	1,005 657	5,2	1,005 44	5,18	1,005 624
4, 545	1,009 519	4,5	1,008 51	4,54	1,009 506
3, 917	1,015 465	3,9	1,015 24	3,92	1,015 459
3, 288	1,024 435	3,3	1,024 29	3,28	1,024 341
2, 660	1,037 169	2,7	1,034 37	2,66	1,037 169
2, 032	1,053 393	2,0	1,050 57	2,04	1,053 226
1, 403	1,069 473	1,4	1,069 42	1,40	1,069 424
0, 775	1,072 753	0,8	1,070 78	0,78	1,072 680
0, 145	1,028 547	0,1	1,025 60	0,14	1,028 481

$\alpha = \delta = 1$

$KO = 5$

$$\left\{ \begin{array}{l} JMAX = 100 \quad (\text{pas} : 0,1) \\ JMAX = 300 \quad (\text{pas} : 0,02) \end{array} \right.$$

III. PROGRAMME ARMI (ARrow, M Infini).

III.1. Rappel de l'algorithme :

Cet algorithme permet de déterminer par leur palier, les optimales de  $\mathcal{K}_\infty(k_0)$ , quelle que soit la valeur de  $k_0 \geq 0$ . Sa structure est la suivante :

A. Détermination des nombres  $k^*_0, k^*_1, \dots, k^*_{i^*}$  tels que :

$$k^*_0 = \sup \{k \mid P(k) \text{ maximum local de } P ; P(k) = \sup_{q \geq k} P(q)\}$$

$$k^*_i = \sup \{k \mid P(k) \text{ maximum local de } P ; P(k) > P(k^*_{i-1})\} \quad \forall i \in \{1, \dots, i^*\}$$

B. Détermination des nombres  $\bar{k}_0, \bar{k}_1, \dots, \bar{k}_{\bar{i}}$  tels que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{k}_0 = k^*_{i^*} \\ \bar{k}_i = \inf \{k^*_j \mid k^*_j \geq \bar{k}_{i-1} ; \frac{\alpha}{\delta} \int_{\bar{k}_{i-1}}^{k^*_j} P(x) x^{\frac{\alpha}{\delta} - 1} dx + \bar{k}_{i-1}^{\alpha/\delta} P(\bar{k}_{i-1}) - k^*_j^{\alpha/\delta} P(k^*_j) \leq 0 \} \end{array} \right. \quad \forall i \in \{1, \dots, \bar{i}\}$$

C. Détermination des nombres  $\tilde{k}_0, \tilde{k}_1, \dots, \tilde{k}_{\tilde{i}}$  tels que :

$$\frac{\alpha}{\delta} \int_{\tilde{k}_{i-1}}^{\tilde{k}_i} P(x) x^{\frac{\alpha}{\delta} - 1} dx + (\tilde{k}_{i-1})^{\alpha/\delta} P(\tilde{k}_{i-1}) - (\tilde{k}_i)^{\alpha/\delta} P(\tilde{k}_i) = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, \tilde{i}\}$$

Si  $\tilde{k}_i \leq \tilde{k}_0 \leq \tilde{k}_{i+1}$ , alors  $\tilde{K}(t) = \max \{k_0 e^{-\delta t}, \tilde{k}_i\}$  est une optimale

de  $\mathcal{K}_\infty(k_0)$

3.2. Formules numériques

A. On détermine les nombres  $k^*_i$  grâce à la variable indiquée JSTAR

à un indice **I** :

$I \in \{0, 1, \dots, \text{I STAR}\}$  ( $k^*_i \simeq K[\text{JSTAR}[I]]$ ) ainsi définie :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{JSTAR}[0] = \sup \{J \mid J = 0 \text{ ou } P[J-1] < P[J]\} \\ \text{JSTAR}[I] = \sup \{J \mid 0 \leq J \leq \text{JSTAR}[I-1] ; P[J] > P[\text{JSTAR}[I-1]] ; \\ J = 0 \text{ ou } P[J-1] < P[J] \quad \forall i \in \{1, \dots, \text{I STAR}\} \} \end{array} \right.$$

B. On calcule les nombres  $\bar{k}_i$  au moyen de la variable indicée JBAR à un indice  $I \in \{0, 1, \dots, \text{IBAR}\}$  ( $\bar{k}_i \simeq K[\text{JBAR}[I]]$ ) :

$$\text{JBAR}[0] = \text{JSTAR}[\text{ISTAR}]$$

$$\text{JBAR}[I] = \inf \left\{ \text{JSTAR}[L] \mid \text{JSTAR}[L] > \text{JBAR}[I-1] \right\},$$

$$\alpha \sum_{J=\text{JBAR}[I-1]}^{\text{JSTAR}[L]-1} W(\alpha, \delta, 0, K_J, K_{J+1}, P_J, P_{J+1})^{+P} \text{JBAR}[I-J]^{xK} \text{JBAR}[I-1]^{\frac{\alpha}{\delta}} - P[\text{JSTAR}[L]] \times K[\text{JSTAR}[L]]^{\alpha/\delta} \leq 0 \}$$

(afin de ne pas trop compliquer la formule ci-dessus, on s'est permis quelques abus de notations évidents, mais qui ne créent aucune ambiguïté).

C. On définit les nombres  $\check{k}_i$  grâce à la variable indicée JTIL à un indice  $i \in \{0, 1, \dots, \text{IBAR}\}$  :

$$\text{JTIL}[0] = 0$$

$$\text{JTIL}[I] = \inf \left\{ J \mid J \geq \text{JBAR}[I-1] ; \alpha \sum_{J=\text{JBAR}[I-1]}^{\text{JTIL}[I]-1} W(\alpha, \delta, K_{J-1}, K_J, P_{J-1}, P_J) \right.$$

$$\left. - P_J \times K_J^{\alpha/\delta} + P_{\text{JBAR}[I-1]} \times K_{\text{JBAR}[I-1]}^{\alpha/\delta} \leq 0 \right\}$$

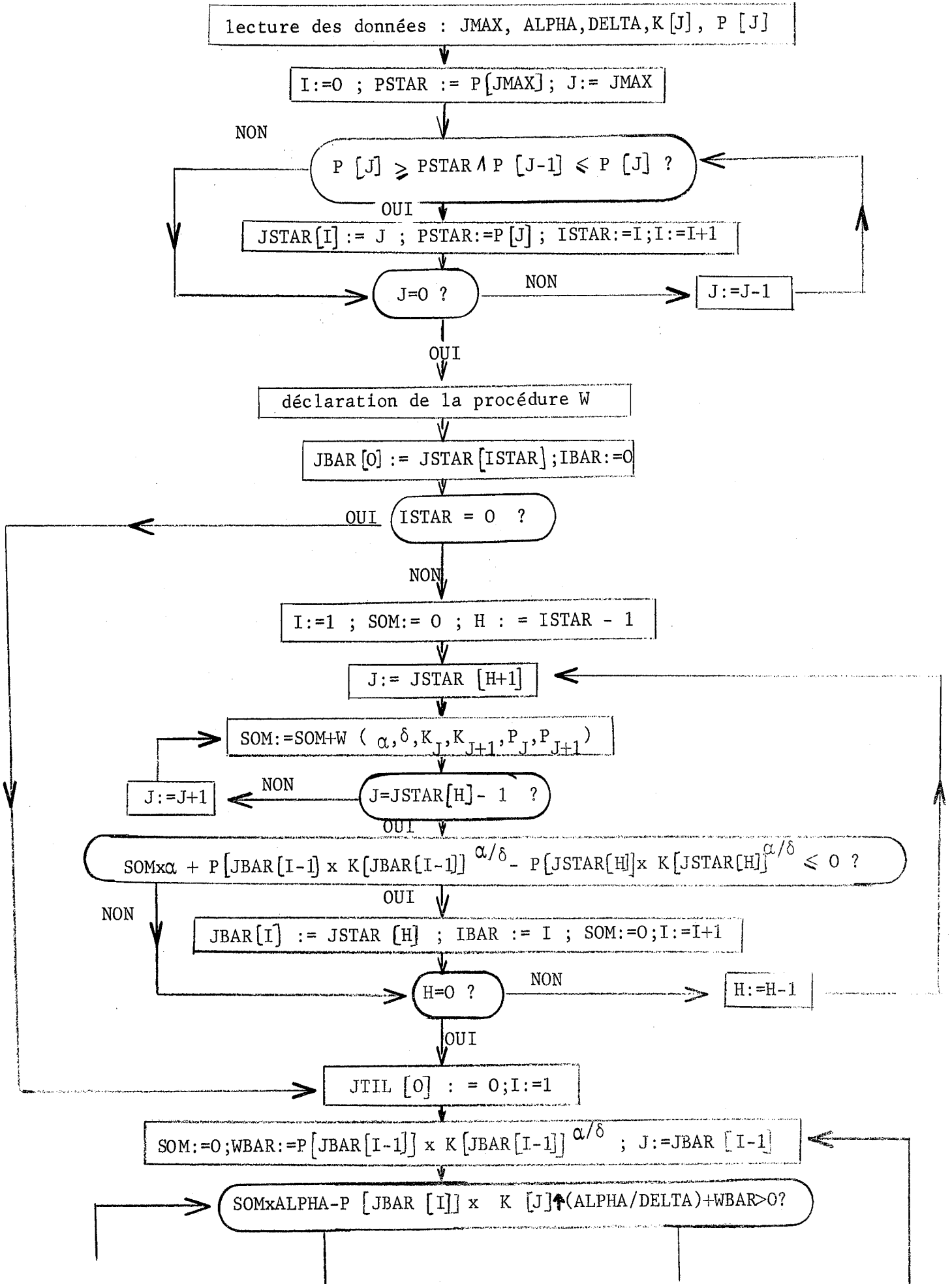
$$(i \in \{1, 2, \dots, \text{IBAR}\})$$

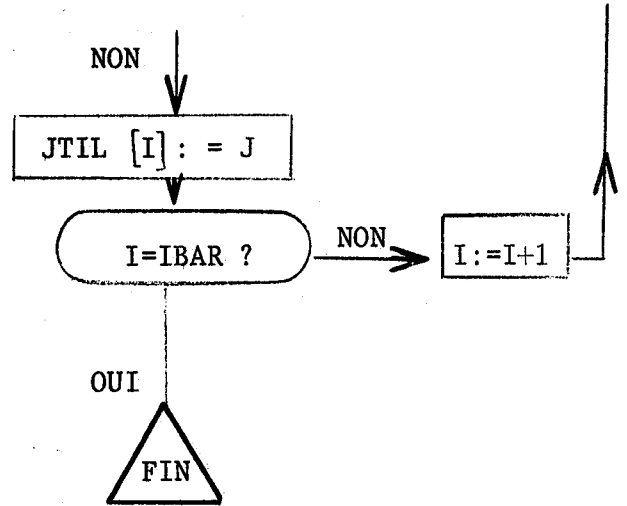
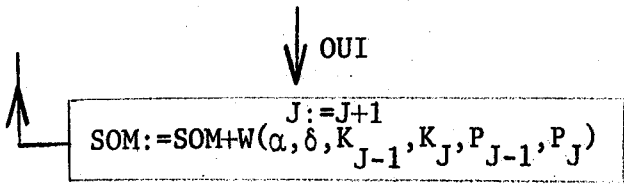
Ainsi,  $K[\text{JTIL}[I]] \simeq \check{k}_I$  ou plus exactement :

$$\text{JTIL}[I] = \inf \left\{ J \mid K[J] \geq \check{k}_I \right\}$$

### III.3. Organigramme

La lecture des données se fait de la même manière que pour ARSIMI (cf § 2.2)





Remarque :

La lecture des données est très semblable à celle du programme ARSIMI.

III.4. Programme Algol.

début

-----  
ORDRES DE LECTURE  
-----

I:=0 ; PSTAR := P [ JMAX ] ;  
pour J:=JMAX pas -1 jusqu 0 faire  
si P [J]  $\geq$  PSTAR  $\wedge$  P [J-1]  $\leq$  P [ 0 ] alors  
début JSTAR [I] := J ; PSTAR := P [J] ; ISTAR := I ; I:=I+1 fin ;

-----  
DECLARATION DE LA PROCEDURE W  
-----

JBAR [ 0 ] := JSTAR [ ISTAR ] ; IBAR := 0 ;  
si ISTAR = 0 alors aller a TILDA ;  
I:= 1 ; SOM:= 0 ;  
pour H:= ISTAR-1 pas -1 jusqu a 0 faire  
début pour J:=JSTAR [H+1] pas 1 jusqu a JSTAR [H] -1 faire  
SOM:=SOM+W (ALPHA, DELTA, K [J], K [J+1], P [J], P [J+1]) ;  
si SOM $\times$ ALPHA+P [JBAR [I-1]]  $\times$  K [JBAR [I-1]] $\uparrow$ (ALPHA/DELTA)  
-P [JSTAR [H]]  $\times$  K [JSTAR [H]] $\uparrow$ (ALPHA/DELTA)  $\leq$  0  
alors début JBAR [I] := JSTAR [H] ; IBAR:= I ; SOM:= 0 ; I:=I+1 fin  
fin ;

TILDA : Début entier tableau JTIL [0:IBAR] ;  
réel WBAR ; JTIL [0] := 0 ;  
pour I:=1 pas 1 jusqu a IBAR faire  
début E2: SOM:=0 ; WBAR:=P [JBAR [I-1]]  $\times$  K [JBAR [I-1]] $\uparrow$ (ALPHA/DELTA) ;  
J:= JBAR [I-1] ;  
E1: si SOM  $\times$  ALPHA - P [JBAR [I]]  $\times$  K [J]  $\uparrow$ (ALPHA/DELTA)+WBAR > 0  
alors début J := J+1 ;  
SOM := SOM + W (ALPHA, DELTA, K [J-1], K [J], P [J-1], P [J]) ;  
aller a E1  
fin  
sinon JTIL [I] := J  
fin ;

-----  
ORDRES D'ECRITURE  
-----

### III.5 Exemples numériques.

Exemple 1 : P est un polynôme du 1er degré dans [1,6]

$$K \in [1,6] \quad P(K) = 70 - 10 K$$

$$\alpha = 1 \quad \delta = 1 \quad JMAX = 5 \quad (\text{pas } 1)$$

Cet exemple est identique à l'exemple 1 du § II.5 : P a un maximum unique au point  $K = 1$ . Donc :

$$ISTAR = IBAR = 0$$

$$K [JSTAR [0]] = K [JBAR [0]] = 1$$

$$K [JTIL [0]] = K [0] = 1$$

Les valeurs calculées grâce à ARMI sont identiques aux valeurs théoriques ci-dessus.

Exemple 2 : P est "linéaire" par morceaux.

$$\alpha = 1,5 \quad \delta = 0,5 \quad JMAX = 24$$

Le graphe de P se déduit de celui de la fonction considérée à l'exemple 2 du § 2.5 par une translation de - 1 de l'axe des K.

Pour vérifier les valeurs calculées à l'aide de ARMI, on a procédé de la manière suivante :

a) Pour chaque valeur de JTIL [I], on a vérifié au moyen du programme ARSIMI (défini au § II) que :

- à la valeur initiale  $K [JTIL [I]]$  correspond le palier optimal (aux erreurs dues à l'approximation de P près)  $K [JBAR [I]]$ .

- à la valeur initiale  $K [JTIL [I] - 1]$  (si  $I > 0$ ) correspond le palier optimal (aux erreurs dues à l'approximation de P près)  $K [JBAR [I-1]]$ .

Cette partie de la vérification correspond à la colonne "confirmation par ARSIMI ?" du tableau ci-dessous.

b) On a résolu l'équation du § III.1.6 par bisection, en ayant au préalable calculé analytiquement l'intégrale qui s'y trouve. Dans le tableau ci-dessous, nous désignons les racines trouvées ainsi par "valeurs analytiques".

c) On a vérifié qu'à la valeur initiale  $K [JMAX] = 25$  correspond le palier optimal (aux erreurs dues à l'approximation de P près)  $K [JBAR [IBAR]] = 25$



$\bar{k}_I = K[\text{JBAR}[I]]$	$\tilde{k}_I$ (valeurs analytiques)	$K[\text{JTIL}[I]]$ (valeurs calculées par ARMI)	Confiramation par ARSIMI ?
1	0	1	OUI
9	2, 6	3	OUI
25	12, 1	13	OUI

Exemple 3 :  $P(K) = \sin(10K) + 2 - K/10$

$\alpha = 2$        $\delta = 1$        $J_{\text{MAX}} = 60$       (pas 0,1)  
 $J_{\text{MAX}} = 300$       (pas 0,02)

Valeurs analytiques		pas : 0, 1		pas : 0, 02		Confirmation par ARSIMI ?
$\bar{k}_I$	$\tilde{k}_I$	$K[\text{JBAR}[I]]$	$K[\text{JTIL}[I]]$	$K[\text{JBAR}[I]]$	$K[\text{JTIL}[I]]$	
0, 156	0		0	0, 16	0	OUI
0, 784	0, 235	0, 8		0, 78	0, 24	OUI
1, 413	0, 908	1, 4	0, 9	1, 42	0, 92	OUI
2, 041	1, 563	2, 0	1, 7	2, 04	1, 58	OUI
2, 670	2, 211	2, 7	2, 2	2, 66	2, 22	OUI
3, 300	2, 856	3, 3	2, 8	3, 30	2, 86	OUI
3, 926	3, 499	3, 9	3, 6	3, 92	3, 52	OUI
4, 554	4, 141		4, 2	4, 56	4, 16	OUI
5, 183	4, 782	5, 2		5, 18	4, 78	OUI
5, 811	5, 422	5, 8	5, 5	5, 82	5, 44	OUI

On a suivi, pour procéder aux vérifications, la même méthode que pour l'exemple précédent.

Notons que :

a) avec le pas 0, 1, la machine n'a pas décelé les valeurs 0, 2 et 4, 6 pour  $\bar{k}_I$  ; notons qu'ARSIMI (cf § II.5, ex 3) avait "oublié" les mêmes valeurs de  $k^*_I$ .

b) avec le pas 0, 1  $K[\text{JTIL } [I]] < \tilde{k}_I$  pour 3 valeurs de I ; avec le pas 0, 02,  $K[\text{JTIL } [I]] < \tilde{k}_I$  pour 1 seule valeur de I ;

Exemple 4 :  $P(K) = \sin(10K) \times e^{-K} + 1$ .

Valeurs théoriques		pas : 0, 1		pas : 0, 02		Confirmation par ARSIMI ?
$\bar{k}_I$	$\tilde{k}_I$	$\bar{k}_I$	$\tilde{k}_I$			
0, 147	0	0, 1	0	0, 14	0	OUI
0, 775	0, 409	0, 8	0, 4	0, 78	0, 42	OUI

#### IV. PROGRAMME ARSIMF (ARrow SIMplifié, M Fini)

##### IV.1 Rappel de l'algorithme

Cet algorithme permet de déterminer les optimales de  $\mathcal{K}_M(k_0)$ , pour une valeur fixée de  $k_0$  et de M. Posons :

$$k_i = \min \{ M/\delta, k_0 \}$$

Le calcul se fait en une ou 2 phases, selon que  $k_0 \leq M/\delta$  ou non :

##### I. Détermination des optimales de $\mathcal{K}_M(k_i)$

A. Déterminer les nombres  $k^*_0, k^*_1, \dots, k^*_m$  tels que :

$$\left[ \begin{array}{l} k^*_0 = k_0 \\ k^*_i = \inf \left\{ k \mid k^*_{i-1} < k \leq M/\delta ; P(k) > P(k^*_{i-1}) \right\} ; \\ P(k) \text{ maximum local de } P \end{array} \right. \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

B. Détermination des nombres  $k_{m+1}^*$ ,  $k_{m+2}^*$ , ...,  $k_n^*$  tels que :

$$\left\{ \begin{array}{l} k_{m+1}^* = \sup \{ k \mid k_0 > k \geq 0 ; P(k) > P(k_0) ; P(k) \text{ maximum local de } P \} \\ k_i^* = \sup \{ k \mid k_{i-1}^* > k \geq 0 ; P(k) > P(k_{i-1}^*) ; P(k) \text{ maximum local de } P \} \end{array} \right.$$

(i = m+2, m+3, ..., n)

C. Déterminer les nombres  $\tilde{k} \in \{k_0^*, k_1^*, \dots, k_n^*\}$  tels que :

$$W(k_0^*, \tilde{k}) = \max_i W(k_0^*, k_i^*)$$

Si  $k_0 \leq M/\delta$ , le calcul s'arrête là. Sinon, on passe à la phase (II)

II. Détermination des optimales de  $\mathcal{K}_M(k_0)$ , par discrétisation et récurrence.

IV .2. Détermination des nombres  $k_i^*$  (i = 1, ..., m, ..., n)

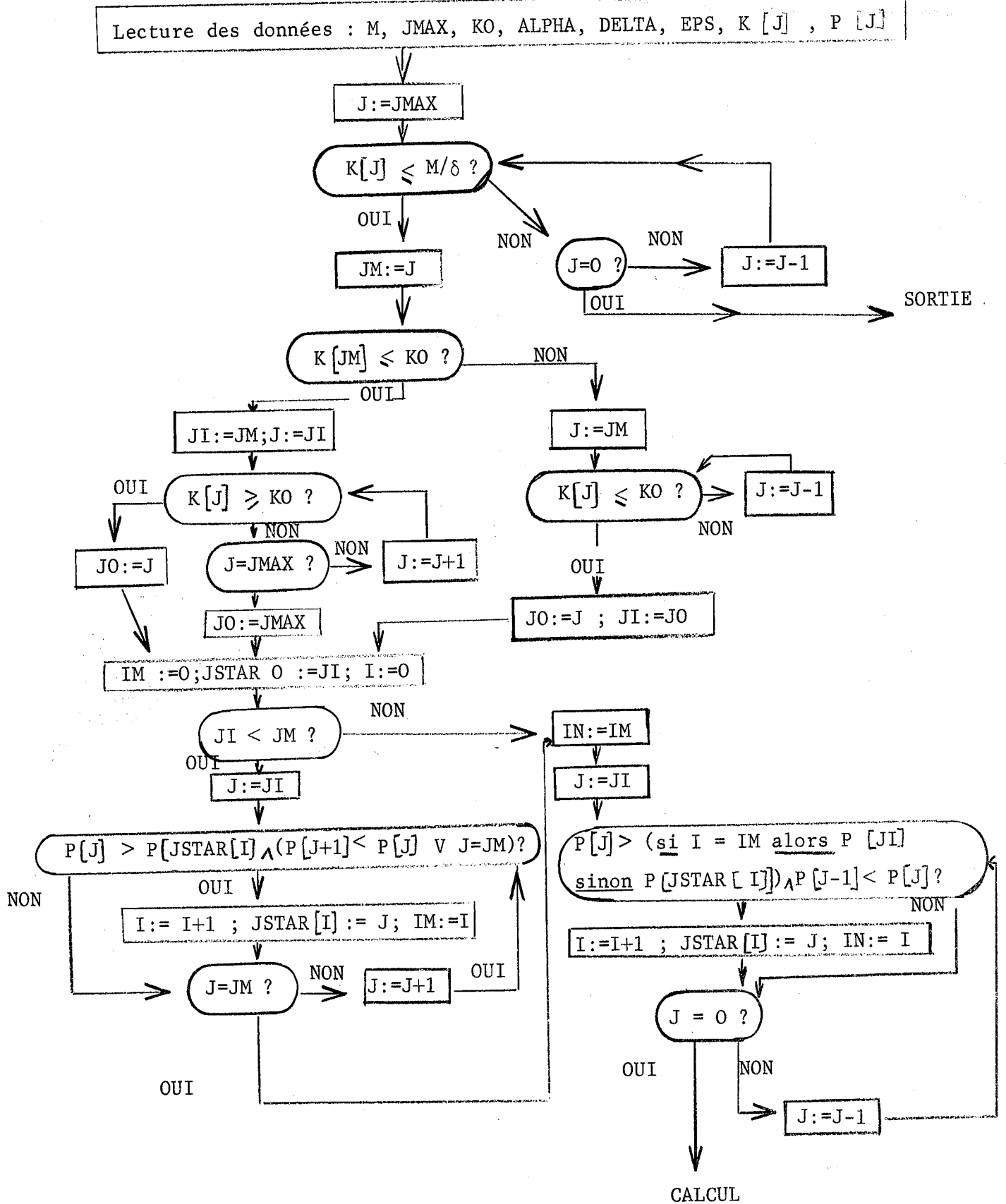
Remarquons tout d'abord que la lecture des données se fait de la même manière que pour ARSIMI. Approximons  $k_0$  par  $K$  [JO]

$M/\delta$  par  $K$  [JM]

$k_i$  par  $K$  [JI]

On détermine les nombres  $k_i^*$  grâce à la variable indicée JSTAR à un indice I (I = 0, 1, ..., ISTAR) ( $k_i^* \approx K$  [JSTAR [I]]), ainsi définie :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{JSTAR [0]} = \text{JI} \\ \text{JSTAR [I]} = \inf \left\{ J \mid \text{JSTAR [I-1]} < J \leq \text{JM} ; P[J] > P[J-1] ; J = \text{JM} \right. \\ \qquad \qquad \qquad \left. \text{ou } P[J-1] < P[J] \right\} \quad (I = 0, 1, \dots, \text{IM}) \\ \text{JSTAR [IM+1]} = \sup \left\{ J \mid \text{JI} > J \geq 0 ; P[J] > P[\text{JI}] ; J = 0 \right. \\ \qquad \qquad \qquad \left. \text{ou } P[J-1] < P[J] \right\} \\ \text{JSTAR [I]} = \sup \left\{ J \mid \text{JSTAR [I-1]} > J \geq 0 ; P[J] > P[\text{JSTAR [I-1]}] ; \right. \\ \qquad \qquad \qquad \left. P[J-1] < P[J] \text{ ou } J = 0 \right\} \quad (I = \text{IM} + 2, \dots, \text{IN}) \end{array} \right.$$

Organigramme de la détermination des nombres  $k_i^*$

La partie correspondante du programme algol est la suivante :

Début entier J, JMAX, JO, JI, JM, I, IM, IN ;  
réel M, ALPHA, DELTA, KO, EPS, WOP, PSTAR ;

-----  
 ORDRES DE LECTURE  
 -----

pour J:=JMAX pas -1 jusqu a 0 faire  
     si K [J]  $\leq$  M/DELTA alors  
         début JM:=J ; aller a SUITE fin ;  
aller a SORTIE ;  
 SUITE : si K [JM]  $\leq$  KO alors  
début JI := JM ; pour J:=JI pas 1 jusqu a JMAX faire  
si K [J]  $\geq$  KO alors début JO:=J ; aller a STAR fin ;  
 JO:=JMAX

fin

sinon début pour J:=JM pas -1 jusqu a 0 faire  
     si K [J]  $\leq$  KO alors  
         début JO:=J ; JI:=JO ; aller a STAR fin ;  
     aller a SORTIE  
fin ;

STAR : IM := 0 ; JSTAR[0] := JI ; I := 0 ;

si JI < JM alors pour J:=JI pas 1 jusqu a JM faire  
     si P [J] > P [ JSTAR [ I ] ]  $\wedge$  ( P [ J+1 ] < P [ J ]  $\vee$  J=JM ) alors  
         début I:=I+1 ; JSTAR[I] := J ; IM:=I fin ;

IN:=IM ;

pour J:=JI pas -1 jusqu a 0 faire  
     si P [J] > ( si I=IM alors P [JI] sinon P [ JSTAR [ I ] ] )  $\wedge$  P [J-1] < P [J]  
     alors début I:=I+1 ; JSTAR[I] := J ; IN := I  
     fin ;

### IV.3. Détermination des "paliers" optimaux.

Le calcul des nombres  $W(k^*_{k_0}, k^*_i)$  se fait grâce à la variable indicée

WSTAR à un indice I (I=0,1,...,IN) ainsi définie :

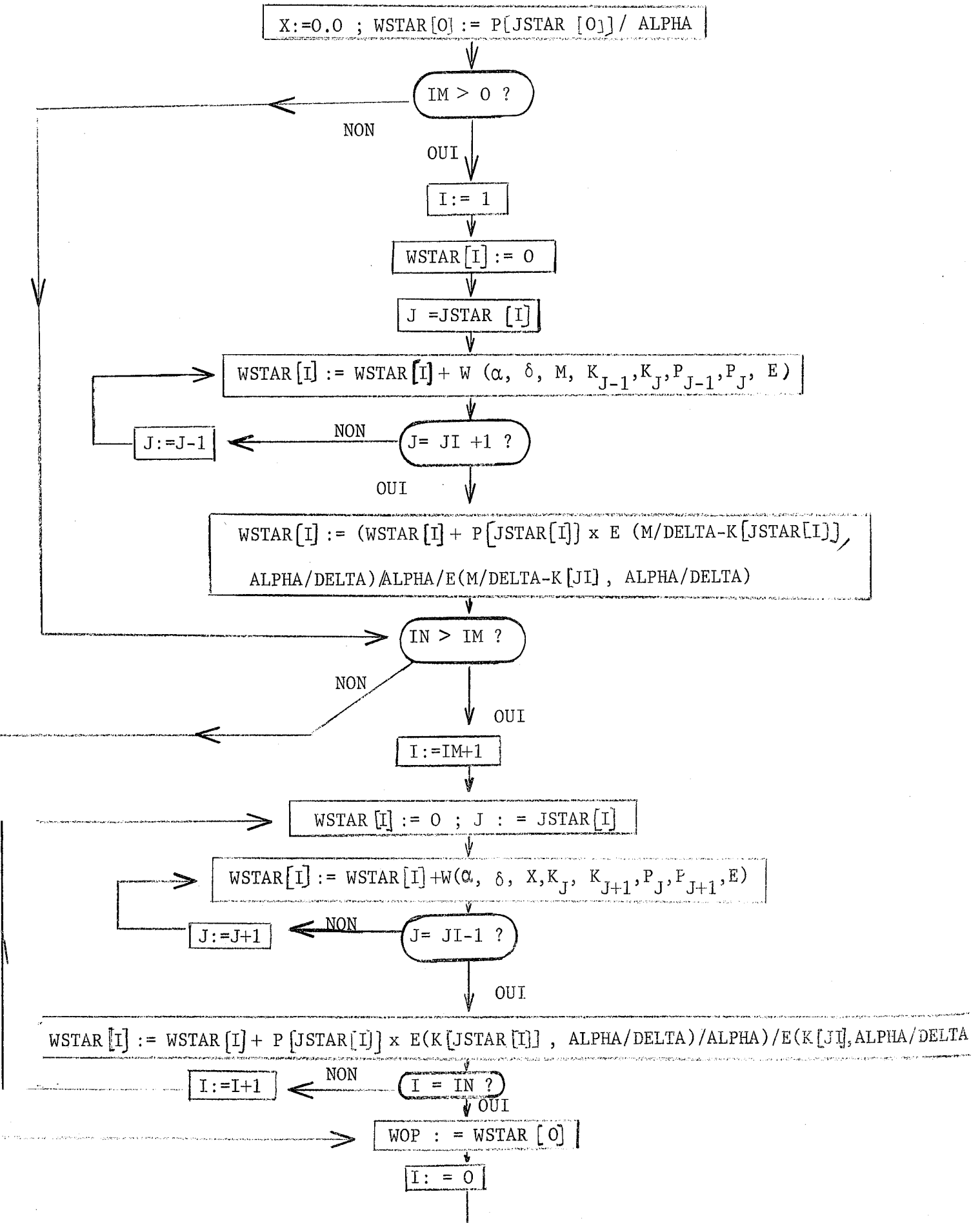
$$\begin{aligned}
 & \text{I=1,2,...,IM} \left\{ \begin{aligned}
 & \text{WSTAR [0]} = \frac{1}{\alpha} P [\text{JSTAR [0]}] \\
 & \text{WSTAR [I]} = E (M/\delta - K [\text{JI}], -\alpha/\delta) \left( - \sum_{\text{J=JI+1}}^{\text{JSTAR [I]}} W(\alpha, \delta, M, K_J, K_{J-1}, P_J, P_{J-1}, E) \right) \\
 & \quad + \frac{1}{\alpha} E \left( \frac{M}{\delta} - K [\text{JSTAR [I]}], \alpha/\delta \right) \times P [\text{JSTAR [I]}]
 \end{aligned} \right. \\
 & \text{I=IM+1,...,IN} \left\{ \begin{aligned}
 & \text{WSTAR [I]} = E (K [\text{JI}], -\alpha/\delta) \times \left( \sum_{\text{J=JSTAR [I]}}^{\text{JI} - 1} W(\alpha, \delta, 0, K_J, K_{J+1}, P_J, P_{J+1}, E) \right) \\
 & \quad + \frac{1}{\alpha} E (K [\text{JSTAR [I]}], \alpha/\delta)
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

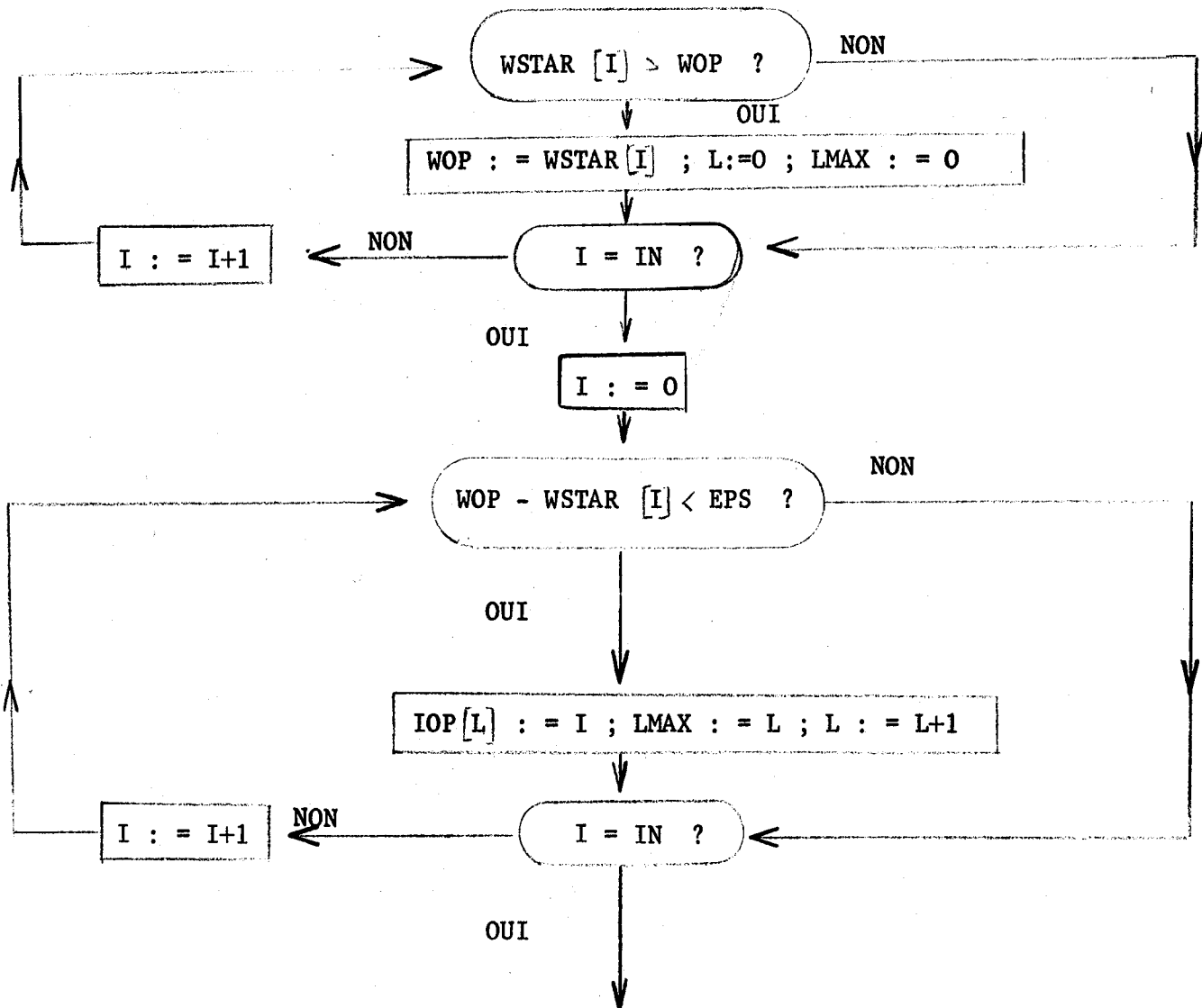
On détermine les optimales grâce à la variable WOP :

$$\text{WOP} = \sup \left\{ \text{WSTAR [I]} / \text{I} \in \{0, 1, \dots, \text{IN}\} \right\}$$

et la variable indicée IOP à un indice L (L=0,1, ..., LMAX) telle que

$$\left| \text{WSTAR [IOP [L]]} - \text{WOP} \right| < \text{EPS}$$







La partie correspondante du programme Algol est la suivante :

CALCUL : début tableau WSTAR [0:IN] , T[JI:JO], WTEST [ 0 : 1, JI : JO],  
 INV[JI : JO] ;  
entier tableau IOP [0:IN] ;  
entier L, LMAX, V ;  
réel X, WTIL ;

---

DECLARATIONS DES PROCEDURES E ET W

---

X:= 0.0 ; WSTAR [0]:= P[JSTAR [0]] / ALPHA ;  
si IM > 0 alors pour I:= 1 pas 1 jusqu a IM faire  
début WSTAR [I] := 0 ;  
pour J:=JSTAR[I] pas -1 jusqu a JI + 1 faire  
 WSTAR [I] := WSTAR [I] + W (ALPHA, DELTA, M,  
 K [J-1], K [J] , P [J-1], P [J], E) ;  
 WSTAR [I] := (WSTAR [I] + E (M/DELTA - K [JSTAR [I]] ,  
 ALPHA/DELTA) x P [JSTAR [I]] / ALPHA) /  
 E (M/DELTA - K [JI] , ALPHA/DELTA)  
fin ;  
si IN > IM alors pour I:= IM+1 pas 1 jusqu a IN faire  
début WSTAR [I] := 0 ;  
pour J:=JSTAR [I] pas 1 jusqu a JI-1 faire  
 WSTAR [I] := WSTAR [I] + W (ALPHA, DELTA, X, K [J] ,  
 K [J+1], P [J+1], E ) ;  
 WSTAR [I] := (WSTAR [I] + P [JSTAR [I]] x  
 E (K [JSTAR [I]] , ALPHA/DELTA) / ALPHA) /  
 E (K [JI] , ALPHA/DELTA)  
fin ;  
 WOP := WSTAR [0] ;  
pour I:=0 pas 1 jusqu a IN faire  
si WSTAR [I] > WOP alors WOP := WSTAR [I] ;  
 L:= 0 ; LMAX := 0 ;  
pour I:= 0 pas 1 jusqu a IN faire  
si WOP - WSTAR [I] < EPS alors  
début IOP [L] := I ; LMAX:= L ; L:= L+1 fin ;

#### 4.4. Optimales de $\mathfrak{H}_M(k_0)$ (lorsque $k_0 \geq M/\delta$ )

Lorsque  $k_0 \geq M/\delta$ , on détermine une approximation  $K^*$  de l'optimale de  $\mathfrak{H}_M(k_0)$  par les nombres  $T_J$  tels que :

$$K^*(T_J) = K_J \quad (JM \leq J \leq J_0)$$

Ces nombres suffisent à déterminer  $K^*$ , car, à cet endroit du calcul, on a déjà déterminé une approximation  $K^*_{JI}$  de l'optimale de  $\mathfrak{H}_M(k_i)$  :

$$\forall t > T_{JI} \quad K^*(t) = K^*_{JI}(t - T_{JI})$$

Connaissant une approximation optimale de  $\mathfrak{H}_M(K[J])$ , on en déduit une approximation  $K^*_{JI+1}$  de l'optimale de  $\mathfrak{H}_M(K[J+1])$ , puis de  $\mathfrak{H}_M(K[J+2])$ , etc ....., puis de  $\mathfrak{H}_M(K[J_0])$ . Pour cela, on introduit les variables suivantes :

INV [J] : valeur numérique de  $K^*(t) + \delta \dot{K}(t)$  pour  $K[J] \leq K^*(t) < K[J+1]$  :  
 INV [J] est égal à 0 ou M.

V : indice égal à 0 ou 1

WTEST[V,J] : valeur numérique de  ${}^V W(K^V_J)$  ;  $K^V_J$  désigne ici la fonction ainsi définie :

$$K^V_J(0) = K[J]$$

$$K[J-1] \leq K^V_J(t) \leq K[J] \Rightarrow \frac{d}{dt} K^V_J(t) + \delta K^V_J(t) = V \times M$$

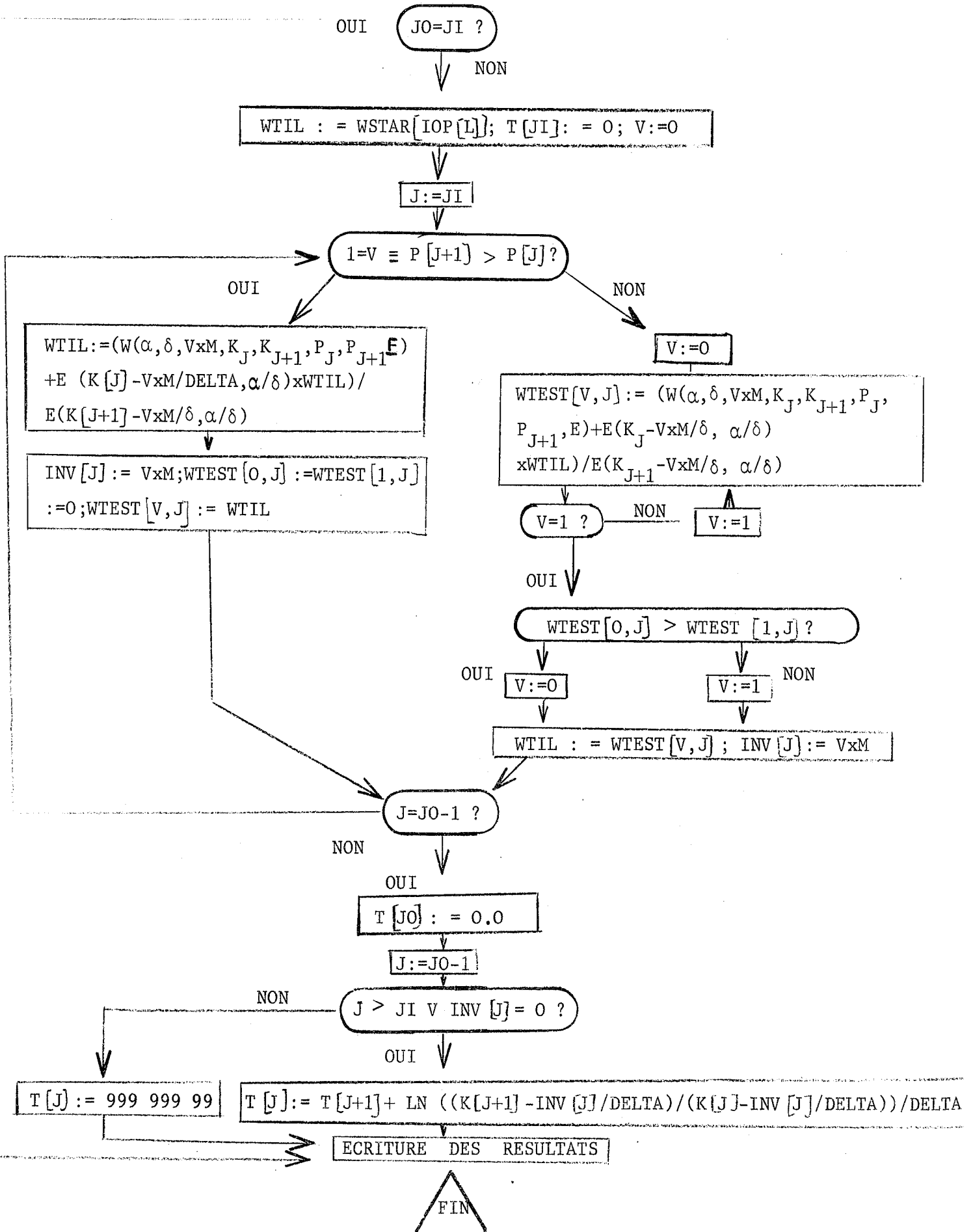
$$K^V_J(t) \leq K[J-1] \Rightarrow K^V_J(t) = K^*_{J-1}(t + \frac{1}{\delta} \log(\frac{K[J] - V \times M / \delta}{K[J+1] - V \times M / \delta}))$$

( $K^*_{J^0}$ , approximation de l'optimale de  $\mathfrak{H}_M(K[J])$ , est identique à  $K^0_J$  ou  $K^1_J$  selon que  ${}^0 W(K^0_J) \approx$  WTEST [0,J] est supérieur ou inférieur à  ${}^1 W(K^1_J) \approx$  WTEST [1,J])

WTIL : maximum, à chaque itération, de WTEST [0,J] et WTEST [1,J]

#### Remarque :

Lorsqu'on sait à priori que WTEST [V,J] < WTEST [1-V,J] (cf thèse, §2.6.4.2. et organigramme ci-dessous), on ne calcule pas WTEST [V,J], mais on lui affecte par convention la valeur 0.



```

si JO = JI alors aller a ECRITURE ;
WTIL := WSTAR [IOP [0]]; T [JI] := 0 ; V := 0 ;
pour J := JI pas 1 jusqu a JO - 1 faire
début si V=1  $\equiv$  P[J+1] > P[J] alors
    début WTIL := (W(ALPHA, DELTA, VxM, K [J], K [J+1], P [J], P [J+1], E) +
        E(K [J] - VxM/DELTA, ALPHA/DELTA)xWTIL) /
        E(K [J+1] - VxM/DELTA, ALPHA/DELTA) ;
    INV [J] := VxM ; WTEST [0, J] := WTEST [1, J] := 0 ;
    WTEST [V, J] := WTIL
    fin
    sinon début pour V := 0, 1 faire
        WTEST [V, J] := (W(ALPHA, DELTA, VxM, K [J], K [J+1],
            P [J], P [J+1], E) + E (K [J] - VxM/DELTA, ALPHA/DELTA)
            xWTIL) / E(K [J+1] - VxM/DELTA, ALPHA/DELTA) ;
        V := (si WTEST [0, J] > WTEST [1, J] alors 0 sinon 1) ;
        WTIL := WTEST [V, J] ; INV [J] := V x M
    fin
    fin ;
T [JO] := 0.0 ;
pour J := JO - 1 pas - 1 jusqu a JI faire
    si J > JI  $\vee$  INV [J] = 0 alors
    T [J] := T [J+1] + LN ((K [J+1] - INV [J] / DELTA) / (K [J] - INV [J] / DELTA)) / DELTA
    sinon T [J] := 999 999 99 ;

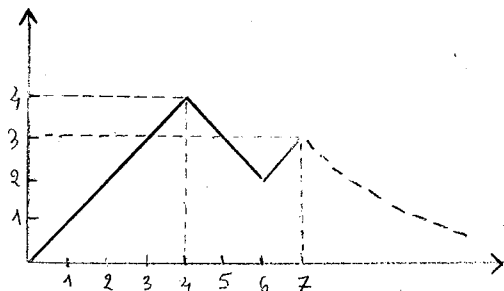
```

ECRITURE :

## 4.5 Exemples numériques

Exemple 1 : P est "linéaire" par morceaux ;  $K_0 < M/\delta$

$$\left\{ \begin{array}{lll} 1 \leq K \leq 4 & : & P(K) = K \quad \alpha = 2 \quad \delta = 1 \quad M = 5 \\ 4 \leq K \leq 6 & : & P(K) = -K + 8 \\ 6 \leq K \leq 7 & : & P(K) = K - 4 \end{array} \right.$$



P a un seul maximum local dans  $[0, M/\delta]$ , pour  $K = 4$ . On en déduit les valeurs théoriques :

$$k^*_0 = 1 ; k^*_1 = 4 ; IM = IN = 1.$$

Valeurs théoriques		Valeurs calculées par ARSIMF	
$k^*_i$	$W(K^*_{k^*_0}, k^*_i)$	K [JSTAR [I]]	WSTAR [I]
1	0, 5	1, 000 000 0	0, 500 000 00
4	1, 1562 5	4, 000 000 00	1, 156 250 00

P est "linéaire" par morceaux ;  $K_0 > M/\delta$

Dans cet exemple,  $K_0 = 7$ , et toutes les autres données sont identiques à celles de l'exemple ci-dessus. Ici,  $k_i = 5$ . On a obtenu les 2 tableaux de résultats ci-dessous :

Valeurs théoriques		Valeurs calculées par ARSIMF	
$k^*_i$	$W(K^*_{k^*_0}, k^*_i)$	K [JSTAR [I]]	WSTAR [I]
5	1, 5	5, 000 000 0	1, 500 000 0
4	1, 906 666 67	4, 000 000 0	1, 906 666 7

K [J]	T [J]	INV [J]		WTEST [0, J]		WTEST [1, J]	
		théorique	calculé	théorique	calculé	théorique	calculé
7	0						
6	0,15415068	0	0	1,58503400	1,5850340	1,3842592	1,3842592
5	0,33647224	0	0	1,7037037	1,7037037	0	0

Exemple 2 : P est un polynôme du 2ème degré dans [0, 10]

$$P(K) = - \left(\frac{K}{5} - 1\right)^2 + 1 = - 0,04 K^2 + 0,4 K$$

$$\alpha = 2 \quad \delta = 1 \quad M = 5 \quad \text{pas} : 0,05$$

P a un maximum local unique dans  $[0, M/\delta] = [0, 5]$ , au point  $K = 5$

$k_0 = 3$  On a obtenu le tableau de résultats suivants :

Valeurs théoriques		Valeurs calculées par ARSIMF	
$k^*_i$	$W(K^*_k, k^*_i)$	K[JSTAR [I]]	WSTAR [I]
3	0,42	3	0,4200 ...
5	0,46	5	0,4592 ...

$k_0 = 7$  Le palier optimal est encore  $k^* = 5$  ; P étant décroissante dans  $[5, 7]$ ,

$$\tilde{K}'(t) + \delta \tilde{K}(t) = 0 \quad \tilde{K}(t) > 5.$$

K [J]	T [J]	INV [J]		WTEST [0, J]		WTEST [1, J]	
		théorique	calculé	théorique	calculé	théorique	calculé
7	0,0						
6,5	0,074108	0	0	0,485424	0,485442	0	0
6	0,154151	0	0	0,493141	0,493136	0	0
5,5	0,241162	0	0	0,497656	0,497616	0	0
5	0,336472	0	0	0,499614	0,499592	0	0

$$k_0 = 10$$

(on a fait ici  $M = 100$ , les autres données étant inchangées si bien que  $k_0 < M/\delta$ )

Valeurs théoriques		Valeurs calculées par ARSIMF	
$k_i^*$	${}^aW(K_{k_0}^*, k_i^*)$	K [JSTAR [I]]	WSTAR [I]
10	0	10	0
5	0, 354 2	5	0, 353 5

Exemple 3 :  $P(k) = 1 + 0,1 \times [(0,4 \times k - 10) \times \sin(0,4 \times k)]$

$$\alpha = \delta = 1$$

$$k_0 = 45 ; M = 100$$

On a obtenu les résultats suivants :

Valeurs théoriques		Valeurs calculées par ARSIMF	
$k_i^*$	${}^aW(K_{k_0}^*, k_i^*)$	K [JSTAR [I]]	WSTAR [I]
45	0, 399 210 31	45	0, 399 210 31
50	0, 184 297 57	50	0, 184 298 28
35, 906	0, 129 494 5	36	0, 129 476 33
11, 329	0, 111 283 42	11, 5	0, 111 258 60

On remarquera, ce qui est normal, que l'erreur sur  ${}^aW(K_{k_0}^*, k_i^*)$  croît avec  $|k_0 - k_i^*|$ .

$$k_0 = 9, 4 ; M = 100$$

Valeurs théoriques		Valeurs calculées par ARSIMF	
$k^*_i$	$W(k^*_0, k^*_i)$	K [JSTAR [I]]	WSTAR [I]
9, 4	0, 136 176	9	0, 128 321
11, 329	0, 153 667	11, 5	0, 153 439
50	0, 151 072	50	0, 150 989

$$k_0 = 20 ; M = 10$$

Dans ce cas,  $k^*_0 = 10$ , car

$$P(k^*_0) = \max \{ P(k) \mid k \leq k^*_0 \}$$

On a obtenu les résultats ci-dessous, qu'on ne peut comparer à une solution théorique, puisqu'on n'en connaît pas.

K [J]	T [J]	INV [J]	WTEST [0,J]	WTEST [1,J]
20	0			
19,5	0,025 317 813	0	0,132 476 51	0,131 108 46
19	0,051 293 294	0	0,133 844 57	0,132 281 03
18,5	0,077 961 543	0	0,135 329 92	0,133 569 32
18	0,105 360 52	0	0,136 914 47	0
17,5	0,133 531 40	0	0,138 573 06	0
17	0,162 518 93	0	0,140 274 18	0
16,5	0,192 371 89	0	0,141 981 09	0
16	0,223 143 55	0	0,143 653 30	0
15,5	0,254 892 25	0	0,145 248 53	0
15	0,287 682 07	0	0,146 724 91	0
14,5	0,321 583 61	0	0,148 043 51	0
14	0,356 674 94	0	0,149 171 04	0
13,5	0,393 042 57	0	0,150 082 71	0
13	0,430 782 90	0	0,150 764 97	0
12,5	0,470 003 60	0	0,151 218 38	0
12	0,510 825 60	0	0,151 460 08	0,151 195 62
11,5	0,798 507 67	10	0,151 191 82	0,151 526 19
11	1,203 972 8	10	0	0,151 124 95
10,5	1,897 120 0	10	0	0,149 950 17
10	$+\infty$	10	0,145 530 61	0,147 979 78



Il résulte du tableau ci-dessus que l'approximation  $K^*$  de l'optimale du problème est ainsi définie :

$$\begin{cases} \forall t \in [0, 0, 510\ 825\ 6] & K^*(t) = 20 e^{-t} \\ \forall t \in [0, 510\ 825\ 6, +\infty[ & K^*(t) = 10 + 2 e^{0,510\ 825\ 6 - t} \end{cases}$$

On remarquera que  $P$  n'a un extremum dans  $[10, 20]$  qu'aux points (approximativement) 11, 5 et 18, 5 ; il est donc normal que pour  $k$  "immédiatement supérieur" à 11, 5 et à 18, 5, ARSIMF calcule à la fois  $WTEST [0, J]$  et  $WTEST [1, J]$

Exemple 4 :  $P(k) = 1 + \left(\frac{k}{5} - 1\right) \times \sin(10k - 50)$

$$\alpha = 2 \quad \delta = 1 \quad M = 5$$

Cet exemple est analogue au précédent ; mais on a choisi un pas plus grand comparativement aux oscillations de  $P$ .

$$k_0 = 3$$

Valeurs théoriques		Valeurs calculées par ARSIMF	
$k_i^*$	$W(K_{k_0}^*, k_i^*)$	$K [JSTAR [I]]$	$WSTAR [I]$
3	0, 675 697	2, 9	0, 675 697
2, 953	0, 704 218	3	0, 682 266
2, 325	0, 666 323	2, 3	0, 658 861
1, 698	0, 611 040	1, 7	0, 605 741
1, 070	0, 554 87	1, 1	0, 543 500
0, 442	0, 514 354	0, 4	0, 501 299

$$k_0 = 7$$

$$k_i = \min \{ 7, 5 \} = 5$$

Valeurs théoriques		Valeurs calculées par ARSIMF	
$k_i^*$	$W (K_{k_0, k_i}^*)$	K [JSTAR [I]]	WSTAR [I]
5	0, 5	4, 9	0, 508 41
4, 797	0, 516 14	4, 8	0, 517 99
4, 202	0, 556 54	4, 2	0, 558 68
3, 579	0, 573 10	3, 6	0, 574 39
2, 953	0, 571 64	3	0, 566 52
2, 326	0, 558 00	2, 3	0, 558 13
1, 698	0, 538 10	1, 7	0, 539 52
1, 070	0, 517 88	1, 1	0, 517 71
0, 442	0, 503 29	0, 4	0, 502 94

On obtient d'autre part les résultats suivants :

K [J]	T [J]	INV [J]	WTEST (0,J)	WTEST [1, J]
7	0			
6, 9	0, 051 293	5	0, 547 7	0, 550 9
6, 8	0, 065 892	0	0, 545 0	0, 537 6
6, 7	0, 080 707	0	0, 548 9	0, 531 9
6, 6	0, 095 745	0	0, 554 8	0
6, 5	0, 111 012	0	0, 559 7	0, 555 5
6, 4	0, 180 005	5	0, 553 1	0, 559 7
6, 3	0, 254 113	5	0, 545 4	0, 551 1
6, 2	0, 270 114	0	0, 544 7	0, 538 0
6, 1	0, 286 374	0	0, 545 3	0, 527 9
6	0, 302 904	0	0, 549 6	0
5, 9	0, 319 711	0	0, 554 1	0, 543 8
5, 8	0, 437 494	5	0, 555 9	0, 556 2
5, 7	0, 571 015	5	0, 554 0	0, 555 9
5, 6	0, 588 725	0	0, 553 7	0, 544 6
5, 5	0, 606 743	0	0, 555 1	0, 530 7
5, 4	0, 625 092	0	0, 558 3	0
5, 3	0, 643 784	0	0, 561 9	0
5, 2	0, 662 833	0	0, 564 8	0
5, 1	0, 682 251	0	0, 567 0	0, 527 7
5	0, 702 053	0	0, 569 0	0, 505 6
4, 9	0, 722 253	0	0, 571 6	0

## B I B L I O G R A P H I E

-----

- [ 1 ] Arrow, Karlin and Scarf. Studies in applied probability and management science (chapitre 1). Stanford Univ. Press, 1962.
- [ 2 ] Arrow, Karlin and Scarf. Studies in the mathematical theory of inventory and production (chapitre 7). Stanford Univ. Press, 1958.
- [ 3 ] Pontryagin, Boltyanskii, Gamkrelidze et Mishckenko. The mathematical theory of optimal processes (chapitres 1 et 2). John Wiley and Sons, 1962.
- [ 4 ] Barra et Brodeau. Programmation dynamique déterministe (chapitre 2). Service de math. appl. de la Faculté des Sciences de Grenoble, 1964.
- [ 5 ] Netter. Résolution numérique du problème de Arrow. Rapport D.G.R.S.T., 1965.
- [ 6 ] Barra, Benzaken et Brodeau. Problèmes numériques en programmation dynamique déterministe. Communication au Symposium International de Programmation mathématique. (Londres, Juillet 1964).
- [ 7 ] Durand et Bricout. Programmation dynamique déterministe de type discret d'un problème d'investissement. Projet de fin d'études d'élève-ingénieur. Grenoble : 1964.

- [ 8 ] Bellmann et Dreyfus. La programmation dynamique et ses applications. Dunod. 1965 (traduction d'un ouvrage paru en américain en 1957 ).
- [ 9 ] Netter. Résolution numérique du problème de Karlin-Beckmann généralisé. Rapport D.G.R.S.T., 1965.
- [10] Stoleru. An optimal policy for economic growth. In Econometrica. vol. 33, n° 2, Avril 1965, p. 321-347.
- [11] Analac. Etude de l'optimisation d'un processus. Juin 1964.

# TABLE DES MATIERES

--=--=--

## INTRODUCTION

CHAPITRE I	: Le modèle général	I.1.
§ 1.1.	: Origine économique du problème	I.2.
§ 1.2.	: Formulation mathématique (cas où le rythme d'investissement est majoré).	I.7.
§ 1.3.	: Formulation mathématique (cas où le rythme d'investissement n'est pas majoré).	I.11.
§ 1.4.	: Réduction du problème au cas où $\delta = 0$	I.20.
CHAPITRE II	: Le problème de Arrow	
§ 2.1.	: Introduction	II.1.
§ 2.2.	: Etude de quelques cas simples	II.4.
§ 2.3.	: Lemmes	II.7.
§ 2.4.	: Propriétés des optimales de $\mathcal{H}_\infty(k_0)$	II.11.
§ 2.5.	: Détermination des optimales de $\mathcal{H}_\infty(k_0)$	II.20.
§ 2.6.	: Détermination des optimales de $\mathcal{H}_M(k_0)$	II.33.
§ 2.7.	: Relation entre les optimales de $\mathcal{H}_\infty(k_0)$ et celles de $\mathcal{H}_M(k_0)$	II.48.
CHAPITRE III	: Les méthodes de Pontryagin et du multiplicateur de Lagrange	
§ 3.1.	: La méthode de Pontryagin	III.1.
§ 3.2.	: Application au problème de Arrow	III.7.

§ 3.3.	: La méthode du multiplicateur de Lagrange	III.15.
§ 3.4.	: Conclusion : comparaison des 2 méthodes	III.20.
CHAPITRE IV : Le problème de Karlin-Beckmann		
§ 4.1.	: Introduction	IV.1.
§ 4.2.	: Intervalles de commutation	IV.3.
§ 4.3.	: Détermination des optimales	IV.10.
§ 4.4.	: Généralisation	IV.18.
CHAPITRE V : Résolution numérique du problème de Arrow		
§ I .	: Généralités	1.
§ II.	: Programme ARSIMI	10.
§ III.	: Programme ARMI	22.
§ IV.	: Programme ARSIMF	29.

## BIBLIOGRAPHIE

Vu,

Grenoble, le

Le Président de la Thèse.

Vu,

Grenoble, le

Le Doyen de la Faculté des Sciences

Vu et permis d'imprimer,

Le Recteur de l'Académie de GRENOBLE