HAL
open science

Modélisation et simulation paramétrable d'objets déformables.Application aux traitements des cancers pulmonaires.

Vincent Baudet

▶ To cite this version:

Vincent Baudet. Modélisation et simulation paramétrable d'objets déformables.Application aux traitements des cancers pulmonaires.. Modélisation et simulation. Université Claude Bernard - Lyon I, 2006. Français. NNT : . tel-00279986

HAL Id: tel-00279986

https://theses.hal.science/tel-00279986v1

Submitted on 15 May 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre 108-2006 Année 2006

THESE

présentée devant

L'UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD - LYON 1

pour l'obtention

du DIPLOME DE DOCTORAT

(arrêté du 25 avril 2002)

spécialité : INFORMATIQUE

présentée et soutenue publiquement le 30 juin 2006

par

M. Vincent BAUDET

TITRE :

Modélisation et simulation paramétrable d'objets déformables. Application aux traitements des cancers pulmonaires.

Directeur de thèse :
Behzad SHARIAT

Membres du JURY : Mme. Dominique FAUDOT,
M. Christian CARRIE (membre invité),
M. Christophe CHAILLOU (rapporteur),
M. Fabrice JAILLET (co-directeur),
M. Yohan PAYAN (rapporteur),
M. Emmanuel PROMAYON (membre invité),
M. Behzad SHARIAT (co-directeur).

UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD LYON I

Président de l'Université	M. le Professeur L. COLLET
Vice-Président du Conseil Scientifique	M. le Professeur J.F. MORNEX
Vice-Président d'Administration	M. le Professeur R. GARRONE
Vice-Président du Conseil des Études et de la Vie Universitaire	M. le Professeur G. ANNAT
Secrétaire Général	M. J.P. BONHOTAL

SECTEUR SANTÉ

Composantes :

UFR de Médecine Lyon R.T.H. Laënnec	Directeur : M. le Professeur D. VITAL-DURAND
UFR de Médecine Lyon Grange-Blanche	Directeur : M. le Professeur X. MARTIN
UFR de Médecine Lyon-Nord	Directeur : M. le Professeur F. MAUGUIERE
UFR de Médecine Lyon-Sud	Directeur : M. le Professeur F.N. GILLY
UFR d'Odonthologie	Directeur : M. le Professeur O. ROBIN
Institut des Sciences Pharmaceutiques et Biologiques	Directeur : M. le Professeur F. LOCHER
Institut Technique de Réadaptation	Directeur : M. le Professeur L. COLLET
Département de Formation et Centre de Recherche en Biologie Humaine	Directeur : M. le Professeur P. FARGE

SECTEUR SCIENCES

Composantes :

UFR de Physique	Directeur : M. le Professeur A. HOAREAU
UFR de Biologie	Directeur : M. le Professeur H. PINON
UFR de Mécanique	Directeur : M. le Professeur H. BEN HADID
UFR de Génie Électrique et des Procédés	Directeur : M. le Professeur A. BRIGUET
UFR Sciences de la Terre	Directeur : M. le Professeur P. HANTZPERGUE
UFR de Mathématiques	Directeur : M. le Professeur M. CHAMARIE
UFR d'Informatique	Directeur : M. le Professeur M. EGEA
UFR de Chimie-Biochimie	Directeur : M. le Professeur J.P. SCHARFF
UFR STAPS	Directeur : M. le Professeur R. MASSARELLI
Observatoire de LYON	Directeur : M. le Professeur R. BACON
Institut des Sciences et des Techniques de l'Ingénieur de Lyon	Directeur : M. le Professeur J. LIETO
IUT A	Directeur : M. le Professeur M.C. COULET
IUT B	Directeur : M. le Professeur R. LAMARTINE
Institut de Science Financière et d'Assurances	Directeur : M. le Professeur J.C. AUGROS

Remerciements

Mes remerciements, vont d'abord au monde médical pour lequel j'ai une grande admiration.

Merci à la Ligue contre le Cancer qui a financé ma thèse pendant 3 ans. J'étais fier et intimidé à la fois par ce financement, tant la Ligue représente une association pour laquelle on a envis de s'investir et pour laquelle il est nécessaire d'avoir des résultats, et tant l'aide à l'amélioration de la médecine est une mission immense et attendue pour la Ligue. Je n'ai peut-être pas été au bout de ce que j'éspérait, j'éspère cepandant avoir contribué à éclairer les voies à emprunter pour la simulation pour la radiothérapie. Ce financement a été trouvé grâce au docteur Carrie, du Centre anticancéreux Léon Bérard (CLB) avec qui le contact a été tout de suite amical et éclairé et que je tiens aussi à remercier pour son accueil, sa curiosité et pour son suivi. Il a toujours permis un dialogue avec son équipe et toujours fait en sorte que tout le monde se comprenne. Je remercie aussi l'équipe médicale du CLB (Chantale, Claude, Myriame, Sébastien) que je suis souvent aller voir pour comprendre leur métier et la position du problème. Je remercie aussi le docteur Bayle de l'EFR du CHU Louis Pradel qui a permis de comprendre ce qu'était un poumon et qui m'a, soit dit en passant, montré le désagrément d'une mesure de compliance. Merci au docteur Quesnel de l'INRETS pour son aide à la compréhension de l'anatomie et de la biomécanique.

Merci aux jurys de ma thèse qui ont permi de m'ouvrir les yeux sur mon travail tant il est nécessaire d'avoir un regard critique extérieur. Merci à Dominique Faudot d'avoir présidé mon jury de thèse, à Yohan Payan, Emmanuel Promayon et Christophe Chaillou d'avoir été mes rapporteurs, à Christian Carrie d'avoir été membre du jury et enfin à mes deux chefs indiens Behzad Shariat et Fabrice Jaillet d'avoir pu supporter mon manque de confiance en moi pendant ces années d'encadrement de thèses. J'espère pouvoir tous les retrouver pour partager leur expértise et continuer ce travail où il y a tant à faire.

Je tiens aussi à souligner le plaisir que j'ai eu de travailler avec Behzad et Fabrice qui ont un humanisme immense et beaucoup d'humour permettant de rendre l'atmosphère toujours légère même dans les coups de bourre. Ils ont d'autres part toujours poussé à la prise de responsabilité n'hésitant pas à déléguer ce qui est je pense le meilleur moyen d'apprendre. Merci à Michaël pour ses conseils avisés quand je me heurtais à l'utilisation du Lagrangien.

Merci à Morade de m'avoir en parti initier aux systèmes de particules, à Pierre-Frédéric, Aurélien, Gabriel, Rodolphe, Denis, Elodie, Brett et Camel d'avoir entretenu le moral par le sport (un esprit sain dans un corps sain)... je regrette de ne pas les avoir eu sous la main au moment de la rédaction et en ce moment... Merci à Ying pour ses cours, à Amal pour ses discussions, à Daniele et Christian. Merci à Florence et Anne-Laure pour leur relecture critique.

Merci à mes parents et grands-parents pour leurs enseignements, et pour m'avoir toujours soutenu dans mes projets. Merci à Yu Jin de m'avoir attendu même si la fin était difficile.

Enfin je veux dédier ce mémoire à ma nièce qui est née quand j'ai commencé ma thèse et à mon fils qui est né en même temps que ce manuscrit : à Charlotte et Lei Ou.

Table des matières

Introduction **1**

1. Origines du besoin de simulation pour le traitement du cancer. **9**
1.1. Contexte (X-thérapie) 10
1.1.1. Évolution de la radiothérapie vers la radiothérapie de conformation et la modulation d'intensité 10
1.1.2. Problématiques liées à ces thérapies 13
1.2. Simulation du mouvement pulmonaire 18
1.2.1. Étude du système respiratoire 18
1.2.2. État de l'art des modèles liés à la respiration 28
1.3. Bilan des modèles de la respiration et des objectifs généraux 38

2. Choix d'un modèle de simulation physique. **41**
2.1. Reconstruction 3D 41
2.1.1. Modèles géométriques « continus » 42
2.1.2. Maillages discrets 45
2.1.2.1. Influence du maillage sur les modèles mécaniques discrets 46
2.1.2.2. Raffinement et multirésolution 50
2.1.3. Bilan des modèles géométriques 52
2.2. Mécanique des objets déformables 53
2.2.1. Caractéristiques des matériaux et lois de comportements 56
2.2.1.1. Caractéristiques des matériaux élastiques homogènes isotropes 56
2.2.1.2. Loi des matériaux élastiques : loi de Hooke 60
2.2.2. Méthodes de résolution : continu *versus* simplifié. 62
2.2.2.1. Méthode de résolution par éléments finis (MEF) 62
2.2.2.2. Modèles discrets 64
2.3. Bilan : choix des systèmes masses-ressorts 66

3. Paramétrage des systèmes masses-ressorts **69**
3.1. Approche de Allen Van Gelder 69
3.1.1. Définition 69
3.1.2. Vérification numérique. 70
3.1.2.1. Expériences de l'hexagone. 71
3.1.2.2. Expériences du triangle. 74
3.1.2.3. Expériences de traction. 75
3.1.3. Exploration théorique de l'origine de l'erreur de VG. 77

3.2. Introduction des paramètres rhéologiques en 2D. 82
3.2.1. Paramétrage des ressorts diagonaux avec le cisaillement. 83
3.2.2. Étirement avec cisaillement imposé. 85
3.2.3. Introduction des contraintes de Lagrange pour imposer ν quelconque. 87
3.2.4. Passage d'un élément à une composition de $n \times m$ éléments. . . . 91
3.2.5. Répartition des masses dans un élément. 95
3.2.6. Détermination des limites du modèle 2D. 96
3.3. Incorporation des paramètres rhéologiques pour les éléments 3D. 111
3.3.1. Inexistence de solution générale portée par les ressorts seuls. . . 113
3.3.2. Cisaillement porté par les diagonales du parallélépipède. 117
3.3.3. Expression de l'étirement et de la compressibilité. 118
3.3.4. Détermination des limites du modèle 3D. 120
3.4. Conclusion 130

4. Mise en œuvre et applications. 135
4.1. Mise en œuvre 135
4.1.1. Définition de la géométrie des éléments du modèle 135
4.1.2. Application des contraintes 136
4.1.3. Résolution dynamique 137
4.1.3.1. Lois de viscosité 138
4.1.3.2. Lois temporelles 140
4.1.3.3. Schéma d'intégration retenu pour la simulation. 145
4.1.3.4. Implantation. 146
4.2. Application 148
4.2.1. Les Projets OPTIM / RESPI2000 149
4.2.2. Proposition 149
4.2.2.1. Données géométriques 150
4.2.2.2. Liens des données biomécaniques aux paramètres du modèle 152
4.2.2.3. Bilan : Plan de notre proposition de simulation 153
4.2.3. Validation 155
4.2.4. Gonflement de poumon 155
4.3. Conclusion 158

Conclusions et perspectives 159

Bibliographie 163

A. Rappels fondamentaux de mécanique 181
A.1. Forces 181
A.2. Lois élémentaires 181
A.3. Énergie potentielles 182

B. Détails des calculs **183**
B.1. Démonstration détaillée de l'erreur du modèle de Van Gelder 183
B.2. Recherche de K_2, K_1 et des forces correctrices de Lagrange pour le cas 2D. 185

C. Liste des publications **191**
C.1. Revue internationale 191
C.2. Conférences internationales 191
C.3. Conférences nationales 191

Table des figures

0.1. Exemples d'applications de la simulation numérique 2
0.2. 4 exemples d'imagerie médicale 4
0.3. Dispositifs de traitements par rayons légers ou ions 5

1.1. Cœur de l'accélérateur de la radiothérapie (d'après le Stanford Linear Accelerator Center) 11
1.2. Réglage des lames de conformations pour le traitement d'une prostate (http ://www.prostate-research.org.uk) 12
1.3. Exemple de plan de traitement pour un cancer du cerveau (d'après http ://www.spectral.com) 14
1.4. Dispositif d'imagerie portale monté sur l'appareil de radiothérapie pour l'aide au positionnement du patient 15
1.5. Définition des marges de sécurité préconisées pour la RTC selon l'ICRU 62 16
1.6. Système ABC employé au CLB 17
1.7. Anatomie de la cage thoracique [91] : vue interne en coupe de la cage thoracique au niveau du cœur 19
1.8. Anatomie des poumons [91] 19
1.9. Structures entourant l'extérieur des poumons 21
1.10. Définition des volumes respiratoires d'après [152] 23
1.11. Dispositif de mesure de la pression transpulmonaire 24
1.12. Courbe Pression - Volume caractérisant la compliance du poumon . . . 24
1.13. Courbe de pression/volume statique du système respiratoire [3] 25
1.14. Résumé de la description anatomique et des liens entre les éléments de l'environnement du poumon 27
1.15. Modèle respiratoire basé sur les NURBS [162] 28
1.16. Modèle de Fung [77] d'alvéoles cubiques, soumises à des déformations de direction principale x, y, z 30
1.17. Modèle mécanique des parois alvéolaires 31
1.18. Comparaison de deux modèles de diaphragme [143] d'après [152] 33
1.19. IRM des poumons d'un même patient à 3 états volumiques différents (http ://everest.radiology.uiowa.edu/nlm/volcon/volctrl.html) 34
1.20. Modèle de Kaye *et al.* [109] 35
1.21. Modèle hybride de poumons respirant d'Amrani *et al.* [5] 36
1.22. Modèle d'animation du thorax respirant de Zordan *et al.* [204] 37

2.1. Triangulation Voronoï *versus* Delaunay 45
2.2. Mailles structurées quelle topologie choisir ? 46

2.3. Influence de la géométrie sur le comportement mécanique heuristique . . 47
2.4. Positions d'équilibre suivant le type de maille élémentaire 47
2.5. Exemples de géométries permettant de contrôler le comportement anisotropique ou isotropique de l'objet simulé 48
2.6. La géométrie donne la forme de la propagation de l'onde et le nombre d'itérations nécessaires à sa transmission 49
2.7. Exemples de modèles de raffinement de maillage 50
2.8. Exemples de modèles multirésolution 51
2.9. Déplacements de points voisins dans un milieu continu soumis à une déformation entre les instants 0 et t 54
2.10. Relations entre les différentes quantités des modèles de la MMC 54
2.11. Courbe contrainte / déformation schématisant les différentes phases d'un matériau 55
2.12. Test de traction/compression 57
2.13. Test de cisaillement 59
2.14. Test de compression 59
2.15. Forces élastiques 60

3.1. Raideurs dépendantes des triangles connexes dans le modèle de VG . . . 69
3.2. Expérience d'un hexagone maillé et uniformément gonflé. 70
3.3. Expérience d'une membrane triangulaire étirée. 71
3.4. Expérience d'une barre triangulée selon le modèle de Van Gelder, et étirée. 71
3.5. Expériences de vérification du modèle de VG avec un hexagone gonflé uniformément 72
3.6. Expériences de gonflement d'un hexagone avec un logiciel d'élément finis pour $\nu = 0.3$: l'hexagone se déforme bien de manière uniforme. 73
3.7. Expérience de compression de triangles avec $\nu = 0,5$ et un déplacement imposé à 10% pour un modèle de VG et un modèle éléments finis. . . . 74
3.8. Expérience de compression de triangles de Van Gelder 75
3.9. Algorithme d'indentation (*i.e.* étirement) d'une barre 76
3.10. Mesures du module de Young pour des tests de traction sur une barre obtenue avec le modèle de VG. 77
3.11. Mesures du coefficient de Poisson pour des tests de traction sur une barre obtenue avec le modèle de VG. 78
3.12. Test d'étirement sur une barre maillée avec des éléments triangulaires de VG. 79
3.13. Définition d'un élément rectangulaire 2D de dimensions $l_0 \times h_0$ et de raideurs K_1, K_2 et K_3. 83
3.14. Expérience de cisaillement 83
3.15. Description du potentiel correcteur. 87
3.16. Contrainte sur l'angle de la diagonale à la base de l'élément en fonction du coefficient de Poisson imposé 88
3.17. Définition de la force de réaction 90
3.18. Le cisaillement est conservé avec notre force correctrice de Lagrange. . . 90
3.19. Interface entre éléments dans une composition d'éléments. 91

3.20. Tests sur une barre de n éléments. 92
3.21. Passage à un maillage $n \times m$ éléments : les ressorts sont dédoublés à la jointure des éléments. 95
3.22. Mesures d'erreur sur le module de Young 2D d'un carré. 98
3.23. Mesures d'erreur sur le coefficient de Poisson d'un carré. 99
3.24. Mesures d'erreur sur le coefficient de Poisson d'un carré (détails). 100
3.25. Erreur mesurée dans un carré sur le coefficient de cisaillement en fonction de l'angle de cisaillement imposé et du coefficient de Poisson. 101
3.26. Description des expériences de cisaillement simulées 102
3.27. Recherche de référence élément fini pour comparaison de l'expérience de cisaillement avec notre modèle 103
3.28. Cisaillement d'une composition d'éléments 2D. 104
3.29. Principe de la flexion. 105
3.30. Comparaison d'une flexion obtenue à l'aide de Code Aster avec les résultats de notre modèle 106
3.31. Test de déformation d'un objet quelconque. 107
3.32. Superposition des résultats d'un test de contrainte sur un objet quelconque (1/2). 109
3.33. Superposition des résultats d'un test de contrainte sur un objet quelconque (2/2). 110
3.34. 6 cisaillements possibles en 3D. 112
3.35. Quelles raideurs pour la 3D et pour un comportement homogène isotrope ? *(M0)* seulement sur les arêtes ? *(M1)* sur les les arêtes et diagonales des faces ? *(M2)* sur les arêtes et diagonales du volumes ? ou bien *(M3)* sur tous les liens symétriques possibles ? 113
3.36. Cisaillement dans le cube 114
3.37. Déformations du cube lors de l'expérience pour la mesure du coefficient de compressibilité K 115
3.38. Déformation du cube lors de l'expérience de traction 116
3.39. Correction du cisaillement. 117
3.40. Étirement d'une barre suivant l'axe x_0 118
3.41. L'expérience de mesure du coefficient de compressibilité fait intervenir toutes les rigidités de l'élément 119
3.42. Erreur mesurée dans un cube sur le module de Young en fonction de la déformation imposée et du coefficient de Poisson. 121
3.43. Erreur mesurée dans un cube sur le coefficient de Poisson en fonction de la déformation imposée et du coefficient de Poisson. 122
3.44. Erreur mesurée dans un cube sur le coefficient de cisaillement en fonction de la déformation imposée et du coefficient de Poisson. 123
3.45. Superposition des résultats de cisaillement d'une poutre composée de plusieurs éléments sur les résultats obtenus avec Code Aster. 124
3.46. Carte des erreurs des déplacements en cisaillement pour une même expérience effectuée avec 3 résolutions de maillages différents 125
3.47. Résultats de l'expérience de flexion en 3D 127
3.48. Carte d'erreur de l'expérience de flexion en 3D 128

3.49. Superposition d'un résultat obtenu avec notre modèle et d'un résultat obtenu avec Code Aster dans les conditions de petites déformations : notre modèle est plus proche de la solution. 129
3.50. Erreur mesurée dans un cube sur le coefficient de compressibilité en fonction de la diminution ou de l'augmentation du volume. 130
3.51. Cartographie des erreurs sur l'expérience du L pour différentes résolutions 131
3.52. Résultats de déformation du L en 3D 133
3.53. Résultats de déformation du L en 3D (suite) 134

4.1. Contrainte de glissement sur une surface. 136
4.2. Force de viscosité 138
4.3. Trois modèles de rhéologie d'analyse de la viscosité 139
4.4. Deux méthodes d'intégration classiques 141
4.5. Phénomène de résonance sur le pont de Tacoma (États Unis) qui entraîna sa destruction en 1940. 144
4.6. 3 régimes possibles quant au changement de position suivant l'amortissement exercé 145
4.7. Description objet du modèle élément 2D 147
4.8. Coupe scanner d'un patient 150
4.9. Reconstruction 3D d'un poumon à partir d'une extraction de données de coupes scanners 151
4.10. Résumé de la méthode que nous proposons 154
4.11. Vue du plan médiastinal du poumon et des lieux d'applications des contraintes. 156
4.12. Simulation de Poumon se gonflant 157

Liste des tableaux

1.1. Pressions caractéristiques du système respiratoire 25
1.2. Analyse du système respiratoire par Promayon *et al.* [152] 35

2.1. Exemples de valeurs du module de Young (d'après wikipédia) 58

3.1. Comparaison entre les résultats théoriques, les mesures effectuées via l'expérience et les valeurs théoriques 82
3.2. Forces appliquées sur le L suivant la résolution du maillage 108
3.3. Mesure des erreurs en déplacement par rapport au résultat obtenu avec Code Aster 111

Introduction

Contexte général

Enjeux des études des déformations

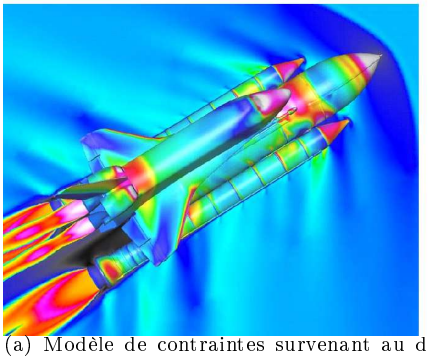
« *Rien ne se perd, rien ne se crée, tout se transforme.* » C'est en ces termes que Lavoisier a formulé le principe fondamental de la conservation de la matière. Cette assertion s'applique aussi bien à ce qu'avait trouvé Huygens un siècle plus tôt sur la conservation de l'énergie mécanique, qu'au principe de conservation de la charge électrique qui a été exprimé un siècle plus tard par Maxwell ou qu'au principe de conservation de l'énergie (premier principe de la thermodynamique) exprimé par Helmoltz (« la chaleur est une forme d'énergie mécanique microscopique. Tout travail effectué par un système (une machine) s'accompagne d'une diminution équivalente de son énergie interne et vice-versa. » [169]).

La déformation des objets, tout comme la dissipation de la chaleur, est justement une des manifestations de la transformation de l'énergie amenée par l'application d'une force sur un objet. Or les déformations peuvent induire des modifications de structures et donc des résistances des matériaux.

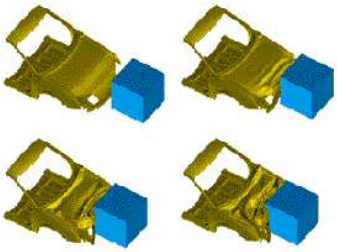
Ainsi la *rhéologie*, ou l'étude des matériaux solides ou liquides, et de leurs caractéristiques, a pris son importance pour toutes les constructions humaines pour apporter une sécurité plus grande, une économie en matériaux, la recherche d'alliages plus légers tout en étant aussi résistant que les matériaux originels ...

Ces études sont utilisées dans l'aéronautique (fig. 0.1(a)) où les engins à structures légères sont soumis à des changements de températures et de pressions considérables ou dans le cas de la construction automobile (fig. 0.1(b)) pour la recherche d'architecture supportant des chocs pour sécuriser au maximum l'habitacle. De la même façon, de nos jours, les architectes, grâce à ces nouvelles ingénieries, peuvent se permettre de concevoir des constructions non réalisables au siècle précédent. Ces méthodes sont aussi utilisées couplées à la mécanique des fluides pour prévoir le temps dans le cas de la météorologie (fig. 0.1(c)) ou pour prévoir l'érosion des sols ou le déplacement des plaques tectoniques [29] dans le cas de la géologie (fig. 0.1(d)).

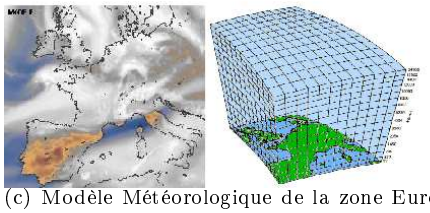
Les mécaniciens et les mathématiciens ont ainsi développé des méthodes permettant de prévoir les déformations (ou déplacements) dues aux contraintes exercées sur un système fermé. Ces méthodes s'expriment avec une complexité calculatoire qui a longtemps été un obstacle à l'utilisation systématique de simulation numérique de ces modèles. Ceci n'est plus vrai maintenant, et au contraire, leur utilisation est devenue quasiment systématique comme en témoignent des articles de revues scientifiques [2] : « la simulation numérique, dont la montée en puissance est allée de paire avec celle des ordinateurs, est aujourd'hui un outil indispensable de la recherche. »



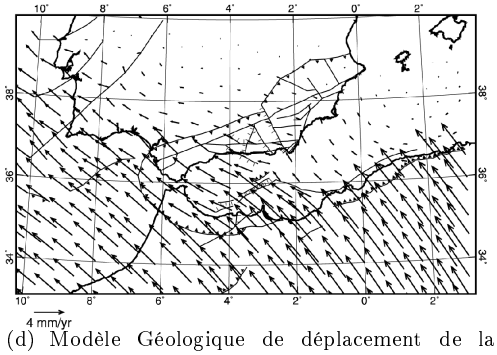
(a) Modèle de contraintes survenant au décollage de la navette spatiale (d'après NASA)



(b) Modèle de crash-test de voiture (d'après http ://www.hexa.ru)



(c) Modèle Météorologique de la zone Europe (d'après Météo-France)



(d) Modèle Géologique de déplacement de la plaque Afrique vers la plaque Eurasie (d'après [134])

FIG. 0.1.: Exemples d'applications de la simulation numérique

Application au monde du vivant : la biomécanique

On peut dire, même, que la simulation numérique est devenue incontournable et touche à toutes les disciplines. Helmoltz pensait, dans la croisée de ses compétences (physicien, mathématicien et physiologiste), que « si l'Univers est composé uniquement de particules sur lesquelles agissent des forces centrales mutuelles, alors l'énergie mécanique, telle que définie par Lagrange à la fin du XVIIIème siècle doit être conservée » et avait ainsi l'audace de croire que les mêmes principes fondamentaux de la physique s'appliquaient à tout l'Univers et en particulier aux êtres vivants.

En effet, aujourd'hui, *la biomécanique*, ou la rhéologie des tissus du vivant entre autre, est une science en pleine expansion. Les mesures de résistance des tissus vivants sont de plus en plus exploitées pour paramétrer les modèles numériques d'organes ou de corps humains pour l'amélioration de l'ergonomie des automobiles pour la prévention des accidents [180], ou pour apporter un meilleur réalisme aux simulateurs chirurgicaux [38]. Avec l'avènement des systèmes haptiques et de la microchirurgie, la biomécanique s'est vite faite ressentir comme une nécessité : il ne suffit pas de « faire comme » ou d'animer il faut aussi prévoir avec une marge d'erreur connue.

L'avancée de la biomécanique est rendue possible grâce aux progrès de l'imagerie médicale [18] qui permet de personnaliser les modèles numériques en dévoilant la géométrie des organes des patients. Cette combinaison de l'imagerie et de la biomécanique est certainement une source de progrès pour la médecine.

Combinaison avec l'imagerie médicale

Depuis la découverte des rayons X par Rœntgen en 1895 (fig. 0.2(a)), l'imagerie médicale a fait des progrès considérables. L'utilisation des rayons X dans les scanners permet d'obtenir des images 3D de bonne résolution grâce, par exemple, au CT scan (fig. 0.2(c)). L'Imagerie par Résonance Magnétique (fig. 0.2(b)) permet à l'aide de champs magnétiques puissants d'obtenir des images de bonnes résolutions des structures à forte concentration d'hydrogène (*a fortiori* d'eau). Et maintenant, la Tomographie à Émission de Positon (fig. 0.2(d)) permet de mettre en évidence le fonctionnement métabolique des tissus.

Ainsi, l'idée d'une médecine moins invasive, grâce aux imageries complémentaires et aux simulations numériques personnalisées par patient, semble être à portée de main. C'est tout le fondement des nouvelles recherches effectuées en biomécanique et en simulation pour la médecine.

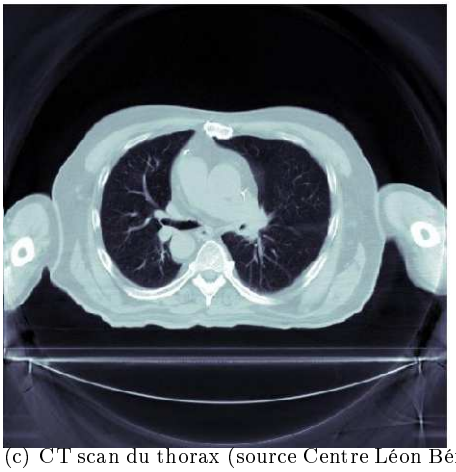
Les nouvelles technologies viennent ainsi en aide pour les diagnostics, pour la formation des chirurgiens et pour l'aide au contrôle des traitements.

La microchirugie, consistant à n'ouvrir que le strict nécessaire, s'effectue déjà à l'aide de l'imagerie pour les maladies du cœur par exemple. Aidés d'imageries telles que celles issues de la coronographie, les chirurgiens arrivent ainsi par voie artérielle à amener leurs outils dans des veines malades afin de les soigner directement. Le traitement combiné à l'imagerie devient ainsi plus efficace.

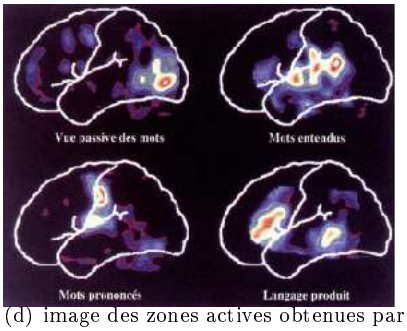
Fort de ces expériences, le corps médical souhaite utiliser ces avancées pour le traitement du cancer.

(a) Couverture de Nature avec l'image de Rœntgen en 1895

(b) image obtenue par IRM



(c) CT scan du thorax (source Centre Léon Bérard)



(d) image des zones actives obtenues par TEP

FIG. 0.2.: 4 exemples d'imagerie médicale

(a) Dispositif pour la radiothérapie

(b) Dispositif pour l'hadronthérapie (GSI, Allemagne)

FIG. 0.3.: Dispositifs de traitements par rayons légers ou ions

Prévoir pour mieux cibler, spécificité de la lutte contre le cancer

Dans le cas des traitements des cancers par rayons ionisants [8, 101], tels que la radiothérapie (qui utilise des rayons X de forte intensité fig. 0.3(a)) ou l'hadronthérapie (qui utilise des ions Carbone fig. 0.3(b)) le traitement est fait à « l'aveugle ». En effet, d'une part la technologie radioactive utilisée empêche à l'heure actuelle d'utiliser un autre appareil d'imagerie pendant le traitement, et, d'autre part, les rayons qui traversent le corps sont faiblement déviés de leur trajectoire rectiligne. Cela justifie la nécessité de bien prévoir les incidences des rayons pour bien cibler la zone tumorale du patient.

Il faut non seulement bien cibler la zone tumorale sans léser les tissus sains environnant, mais aussi prendre en compte le fait que les tissus n'ont pas tous la même sensibilité au rayonnement. Dans le cas de la radiothérapie, cela est crucial car le rayon irradie tout au long de son trajet. Il ne faut donc pas irradier avec une intensité suivant un seul angle, mais irradier suivant plusieurs angles afin de sommer les dépôts sur la tumeur, et de provoquer de moindres maux sur les trajectoires différentes.

D'autre part, dans le cas de tumeurs situées dans le cerveau ou dans des membres dont les mouvements sont contrôlables par contention, l'imagerie médicale est suffisante, pour prévoir comment attaquer la tumeur. Cela n'est plus vrai pour les organes du tronc. Les mouvement respiratoires ou digestifs étant importants, ils provoquent des déplacements et des déformations des organes mous s'y trouvant et donc *a fortiori* des tumeurs y étant localisées. On mesure par exemple plus de 2 centimètres de

déplacement pour des tumeurs situées au niveau du diaphragme [163].

Ici, en complément à l'imagerie médicale, apparait un besoin de modélisation et de simulation numérique.

Les traitements actuels prennent en compte les mouvements tumoraux avec des modèles statistiques préconisant des marges devant être prises pour cibler correctement les tumeurs. Ces marges sont actuellement dessinées sur chacunes des coupes scanners des zones du traitement ce qui est très coûteux en temps. Des travaux ont exploré l'aide au traçage de celles-ci, notamment [202]. Mais les marges préconisées restent toujours très grandes pour des tumeurs subissant de grands mouvements.

L'apport des simulations numériques serait, ici, de donner une prédiction des mouvements des tumeurs, pendant le traitement, et donc de permettre de réduire les marges. En allant un peu plus loin, l'idée serait de pouvoir adapter les marges pendant le traitement suivant certains paramètres dynamiques du patient : respiration, battements du cœur, ...Il faudrait alors des modèles de simulations numériques rapides.

C'est dans cette problématique, qu'au LIRIS, notre groupe de travail s'intéresse à la simulation des objets déformables pour le monde médical. On peut citer parmi les travaux antérieurs ceux de Fabrice Jaillet [102], Serge Pontier [149] et de Morade Amrani [5] qui se sont intéressés à des systèmes discrets plutôt issus de l'animation tels que les surfaces implicites ou les systèmes de particules. Les travaux actuels de Pierre-Frédéric Villard [181] s'intéressent plus aux modèles des milieux continus alors que les miens essayent de faire un lien entre le discret et le continu. Ces deux derniers travaux sont complémentaires puisque les travaux abordés par Pierre-Frédéric recherchent à exploiter la rigueur et la précision de la mécanique des milieux continus sans prendre en compte le temps calculatoire, alors que ma recherche tente d'apporter plus de rigueur dans des modèles rapides issus de l'informatique graphique.

Contribution

C'est donc à la croisée de ces disciplines que s'inscrit cette thèse, avec un plus grand penchant pour l'informatique graphique. Le travail qui a été abordé concerne la simulation à l'aide de système masses-ressorts d'objets mous (comme le poumon) soumis à des pressions extérieures permettant de gonfler/modifier son volume.

Ce modèle issu de l'animation et donc plutôt d'une recherche de temps plus interactifs que ceux des simulations par éléments finis, ne bénéficie pourtant pas d'une précision reconnue et n'est pas directement paramétrable avec des caractéristiques des milieux continus.

Nous avons donc souhaité apporter ou du moins mesurer la précision dans un tel modèle en permettant un paramétrage rhéologique, ou biomécanique du système masses-ressorts. Nous avons obtenu un modèle physique paramétrable directement avec les données physiologiques médicales et mécaniques.

Pour expliquer notre contribution, nous organisons ce document comme lors de la construction d'un modèle. Nous nous intéressons dans une première partie à notre problématique où l'on introduit les données du problème. Nous pourrons alors réaliser un état de l'art sur les difficultés imposées. Il s'agira de voir comment reconstruire

la géométrie à partir des images scanners et donc quels sont les choix de maillages possibles. Nous expliquerons ensuite les lois de la mécanique des milieux continus et mettrons en évidence les caractéristiques des matériaux afin de mieux comprendre ce que c'est et comment cela doit se refléter dans un modèle informatique. L'état de l'art des modèles de simulation des objets déformables y sera aussi présenté et permettra de mettre en évidence un article [88] qui doit être l'un des premiers de la communauté informatique à avoir posé la question du paramétrage des systèmes discrets. Ces revues de l'existant nous permettront de conclure sur le choix que nous avons effectué. Dans une troisième partie, nous étudions en particulier le modèle proposé dans [88] et montrons pourquoi ce modèle n'est pas suffisant. Nous nous intéressons alors à proposer une solution du paramétrage des systèmes masses-ressorts dans notre optique de simulation biomécanique de poumon respirant. Ceci nous permettra d'aborder la quatrième partie où nous expérimenterons cette approche afin d'en voir les limites et de savoir comment intégrer cette contribution dans les modèles médicaux. Enfin, nous pourrons aborder les contributions et les résultats auxquels nous avons abouti afin de proposer les perspectives qui s'imposent.

1. Origines du besoin de simulation pour le traitement du cancer.

Le cancer est une maladie qui cause énormément de décès à travers le monde. D'après l'OMS[1] [129] : « Plus de 11 millions de personnes sont atteintes d'un cancer tous les ans. Il est estimé qu'il y aura 16 millions de nouveaux cas chaque année d'ici 2020. Le cancer est la cause de 7 millions de morts chaque année soit de 12,5% des causes de décès dans le monde. » Si on s'intéresse plus particulièrement au cancer du poumon, en se référant à *la ligue nationale contre le cancer* [114] et l'organisme mondial regroupant tous les organismes agissant contre le cancer du poumon, le *GLCC*[2] [51], on se rend compte de l'ampleur des dégâts qu'il cause[3]. En France, on dénombre 25 000 nouveaux cas de cancer pulmonaire chaque année.

Actuellement la *radiothérapie* est l'une des principales modalités de traitement du cancer en général, avec la chirurgie et la chimiothérapie, auxquelles elle est de plus en plus souvent associée. Sur les 250 000 nouveaux cas de cancer (y compris pulmonaire) par an en France, environ les deux tiers subiront une radiothérapie. Ces traitements ionisants (par photons X, protons ou ions carbones), nécessitent de prévoir avec précision la position des tumeurs, et dans le cas de tumeurs pulmonaires qui se déplacent du fait de la respiration, les *oncologues*[4] ont encore plus besoin de prévoir les mouvements subis par les tumeurs, afin de mieux les cibler.

Ainsi, la problématique de ce travail de thèse s'inscrit dans la recherche d'outils d'aide au traitement du cancer du poumon, par radiothérapie conformationnelle ou hadronthérapie.

Nous présentons donc dans une première partie les améliorations dont a besoin ce traitement dans le cadre des cancers du poumon. Nous nous intéresserons ensuite dans une deuxième partie à l'anatomie et à la mécanique du poumon afin de comprendre comment une tumeur peut se mouvoir dans les poumons. Dans cette partie, nous ferons aussi un bref état de l'art des modèles du poumon existants. Enfin, nous poserons clairement les besoins pour la simulation du comportement des poumons.

[1] Organisation Mondiale de la Santé

[2] Global Lung Cancer Coalition

[3] [51] : « Les cancers du poumons sont les cancers les plus délétaires du monde. Toutes les 30 secondes, quelqu'un quelque-part dans le monde meurt d'un cancer du poumon. 40% des fumeurs ayant commencé à fumer dans leur adolescence et qui continuent à fumer n'atteindra jamais l'âge des 60 ans. Seulement 1 personne sur 10 atteinte du cancer du poumon survit 5 ans après son diagnostic. »

[4] médecins spécialistes des cancers dont les radiothérapeutes

1.1. Contexte (X-thérapie)

Afin de mieux comprendre les difficultés liées à ces traitements, nous présentons le principe général des techniques ionisantes employées que sont la *radiothérapie* et *l'hadronthérapie* (fig. 0.3), puis nous présentons les difficultés actuelles de ces traitements afin de mieux situer la recherche effectuée ici.

Cette étude s'est faite avec les médecins radiothérapeutes Christian Carrie, Sébastien Clippe, et la radio-physicienne Chantal Ginestet du centre anticancéreux Léon Bérard (CLB) de Lyon, le pneumologue Jean-Yves Bayle du laboratoire d'Exploration Fonctionnelle Respiratoire (EFR) de l'hôpital Louis Pradel de Lyon, et de l'anatomiste Thierry Quesnel qui sont parmi les principaux partenaires des projets effectués au LIRIS sur le thème cancer.

1.1.1. Évolution de la radiothérapie vers la radiothérapie de conformation et la modulation d'intensité

Les techniques ionisantes comme la radiothérapie qui émet des photons de haute énergie (rayon X, gamma, ...) pour avoir des effets biologiques sur les cellules cancéreuses, a permis de grandes avancées dans le traitement du cancer [93].

Ces techniques agissent en modifiant l'ADN[5] des cellules sans les tuer directement, les cellules mourant ultérieurement lorsqu'elles ont besoin de recourir à leur ADN altéré si elles n'ont pas pu le réparer correctement. L'altération de l'ADN se produit aussi bien sur les cellules saines que sur les cellules cancéreuses, à la différence que les cellules cancéreuses y sont plus sensibles du fait de leur activité métabolique accrue. Ainsi, par application répétée et par débit de dose faible des photons de haute énergie, il est possible de faire apparaître un effet différentiel important entre les cellules cancéreuses et les cellules saines en faveur de ces dernières. De ce fait, de grands volumes infiltrés de cellules cancéreuses à l'échelle microscopique, inaccessibles aux techniques ablatives (ultrasons de puissance et ondes hyperfréquence) peuvent être traités.

Dès ses origines, vers 1895, la radiothérapie progresse en affinant la définition du volume cible et en mettant en œuvre les techniques propres à épargner le plus possible les tissus sains.

Ainsi, afin de planifier le traitement, les techniques classiques de la radiothérapie utilisent l'imagerie médicale et les données de l'examen clinique que le radiothérapeute exploite et transpose dans un référentiel standardisé de l'espace anatomique du patient. Pour cela, il utilise un simulateur de traitement définissant globalement les volumes à irradier dont il fournit des images radiologiques en 2 dimensions pour chaque incidence de faisceau choisie pour irradier le volume cible. Cette technique, qui nécessite des marges de sécurité assez importantes est peu exacte pour des volumes complexes mais reste adaptée à des traitements à faibles doses où les volumes à irradier ont une définition standardisée.

En revanche, pour traiter exclusivement une tumeur dans un organe par radiothé-

[5] Molécule d'Acide Désoxyribonucléique qui contient le code génétique d'une cellule de l'organisme

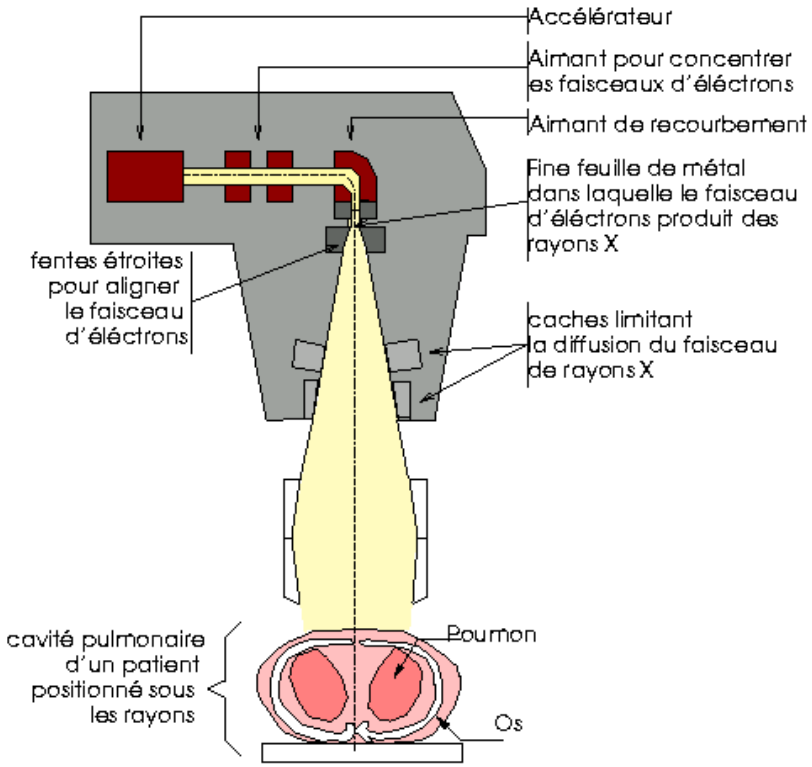


FIG. 1.1.: Cœur de l'accélérateur de la radiothérapie (d'après le Stanford Linear Accelerator Center)

rapie ou chimio-radiothérapie[6], il faut une plus grande précision dans la définition du volume cible car de grandes marges de sécurité impliquent l'irradiation de grands volumes de tissus sains et donc une restriction de la dose qui limite les capacités curatrices du traitement.

Aussi, la *radiothérapie de conformation tridimensionnelle* (RTC) est née grâce à l'évolution de l'imagerie numérique avec les scanner X et l'IRM (fig. 0.2), permettant l'acquisition et, par l'intermédiaire d'algorithmes de segmentation, l'extraction du volume anatomique à traiter en position de traitement[7]. Ainsi, à partir de la reconstitution virtuelle du patient, un logiciel de calcul dosimétrique prévisionnel tridimensionnel permet : *(i)* la définition d'un volume cible prévisionnel exact propre à chaque cas, *(ii)* l'optimisation de la balistique, *(iii)* l'accroissement de la dose sans augmenter les complications.

[6]thérapie associant un traitement par chimothérapie et par radiothérapie
[7]le patient est allongé sur une table de traitement et positionné sous le rayon de traitement.

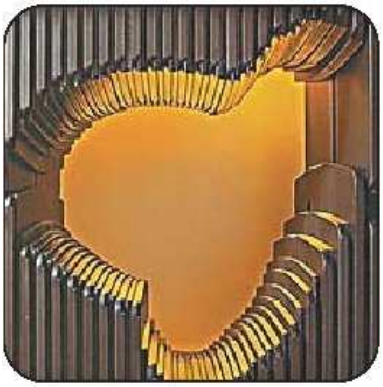


FIG. 1.2.: Réglage des lames de conformations pour le traitement d'une prostate (http ://www.prostate-research.org.uk)

La RTC nécessite des accélérateurs linéaires produisant des rayons X de haute énergie (fig. 1.1), équipés *(i)* d'un collimateur multilame placé entre le patient et la source du faisceau et permettant de donner la forme de la zone à traiter au faisceau par son obstruction avec des lames de plomb ou de tungstène (fig. 1.2), et *(ii)* d'un système d'imagerie en temps réel à haute définition. D'autre part, afin de produire différents angles de visée, les accélérateurs peuvent tourner autour de la table du patient.

Dans sa forme la plus sophistiquée, appelée *radiothérapie à modulation d'intensité*, la dose délivrée en tout point de chaque faisceau peut être modulée permettant ainsi de générer ainsi des formes des volumes irradiés très complexes. Dans ce cas, les dépôts de dose optimale sont effectués par la mise en œuvre de nombreux faisceaux de forme et d'incidences différentes et d'intensité adaptée en leurs différents points. Cela demande la maîtrise de beaucoup de paramètres par faisceau et donc le besoin en système de planification du traitement.

Avec les avancées et la maîtrise de la physique des particules, une nouvelle voie de traitement est apparue, l'*hadronthérapie*. Cette technique n'utilise pas le lancer de photon de haute énergie. Elle inclut actuellement la protonthérapie, la neutronthérapie et la thérapie par ions légers et est beaucoup plus précise que les techniques utilisant des rayons conventionnels. Elle est indiquée seule ou en complément des photons pour le contrôle loco-régional des tumeurs non opérables et radio-résistantes, lorsqu'elle offre un gain thérapeutique significatif par rapport à la radiothérapie conventionnelle.

Pour des raisons biologiques, balistiques et de contrôle, les radiobiologistes considèrent que les ions carbones sont parmi les ions légers utilisables, les mieux adaptés pour traiter les tumeurs cancéreuses radio-résistantes.

Actuellement une quinzaine de centres de protonthérapie existent dans le monde, et parmi eux, seulement trois centres d'hadronthérapie. On pourra bientôt rajouter le nouveau centre d'hadronthérapie par ions carbone développé dans la région Rhône-

Alpes par le projet ETOILE[8] [101].

1.1.2. Problématiques liées à ces thérapies

Des points importants restent à résoudre aussi bien en hadronthérapie qu'en radiothérapie.

On distingue deux grands types de traitement : *(i)* le traitement par « tracking » qui consiste à suivre la tumeur en mouvement tout en irradiant, *(ii)* le traitement par « gating » qui consiste à irradier quand la tumeur est dans les marges de sécurité de la forme du faisceau prédéfini. La difficulté du gating est que le faisceau nécessitant une montée en charge longue, le rayon est sans arrêt actif et il faut donc des systèmes de collimateurs performant. Pour le tracking, cela nécessite l'assurance que le volume cible soit toujours dans les marges de sécurité.

Pour réaliser ces deux types de traitement, on a besoin d'une modélisation géométrique 3D des zones anatomiques du patient présentes dans le volume ionisé. Ces modèles sont construits à partir des données issues de la segmentation des images obtenues par scanner ou IRM. Il faut alors réaliser le plan de traitement épargnant le plus possible les tissus sains. Mais ceci est difficile car *(i)* chaque organe (tissu) a une tolérance différente aux doses, *(ii)* suivant la fonction ou la position de l'organe à traiter, la zone à traiter peut se mouvoir ou se déformer, *(iii)* or, certaines activités organiques (mouvements ou déformations) sont vitales et ne peuvent être bloquées (la respiration par exemple). Ainsi, il est possible que la cible à traiter se meuve dans le volume de traitement et qu'un tissu à tolérance différente aux rayons se trouve dans le volume de traitement. Il est donc primordial de prendre en compte les mouvements possibles pour le plan de traitement.

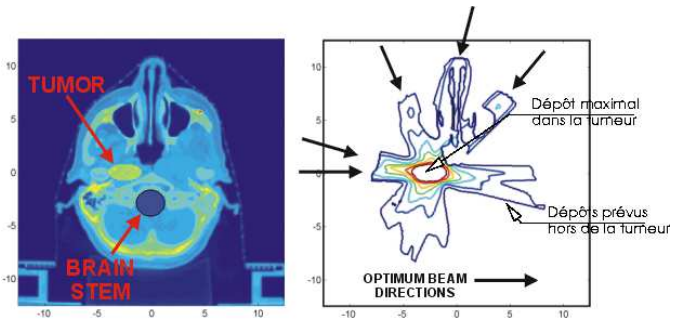
Il faut ensuite pouvoir positionner le patient sur la table de traitement suivant le planning. Les séances pouvant s'étaler sur plusieurs semaines, il faut pouvoir assurer le bon repositionnement du patient et la contention de sa position dans le repère de traitement, pendant et en début de chaque séance.

Ainsi, les deux difficultés majeures sont de repositionner le patient dans le repère du traitement et de pouvoir bien définir les marges, surtout dans le cas où les tumeurs se meuvent sous l'effet de déformations d'organes.

Difficulté de repositionnement et d'acquisition de la forme des organes

La première étape du traitement est l'acquisition des données afin d'extraire les contours des tissus et de définir le plan de traitement tel que la dose soit définie maximale sur la tumeur et minimale sur les zones à risques à l'aide d'une dosimétrie ou d'un calcul de dépôt de dose simulé (fig. 1.3). Une difficulté majeure a été pendant longtemps la lenteur de l'acquisition des images par les scanners. En effet, pour obtenir un poumon entier, il fallait plus de 5 minutes, et le patient respirant, il pouvait se produire des artefacts, amenant des imprécisions majeures sur la forme des organes.

[8] Espace de Traitement Oncologique par Ions Légers dans le cadre Européen



À gauche : contourage de la tumeur et des zones à éviter
À droite : dosimétrie avec forte dose en rouge et faible en bleu.

Les rayons sont organisés tels que la dose soit maximale dans la tumeur par définition de différents angles d'incidence du rayon.

FIG. 1.3.: Exemple de plan de traitement pour un cancer du cerveau (d'après http ://www.spectral.com)

Par exemple, il était possible de trouver le dôme du diaphragme, qui est l'un des muscles principaux de la respiration, sur plusieurs coupes scanners différentes. Cela n'est plus le cas grâce à l'amélioration des technologies et à l'utilisation d'appareils de rétention de la respiration tels que les systèmes ABC[9] présentés dans la suite.

La seconde étape, de repositionnement, consiste à utiliser les repères anatomiques externes du patient afin de bien le positionner sur la table de traitement, sous le faisceau. Au CLB[10], des moules de contentions sont systématiquement formés pour chaque patient afin de reproduire la même position externe que lors de l'acquisition des images servant au plan de traitement.

Ce type de repositionnement n'est cependant pas suffisant, et en plus, il faut faire appel à des repérages internes (anatomiques ou radio-opaques) visibles par l'intermédiaire d'imagerie adaptée au plan de traitement. Cela devient compliqué dans le cadre des organes mous du tronc tels que le poumon, l'estomac ou situés dans la zone pelvienne tels que le rectum ou la prostate, qui ont tendance à avoir des mouvements non prédictibles.

Dans le cas de la RTC, les radiothérapeutes peuvent s'aider des images *portales* qui sont directement obtenues à l'aide de l'accélérateur en laissant passer une faible dose de rayons X en début de traitement ou pendant le traitement pour vérifier la position du patient (fig. 1.4). Ces images donnent une projection dans le plan de traitement du point de vue de la source des rayons mais avec de faibles contrastes ne permettant pas une bonne segmentation. Une solution est de simuler de telles images à partir des images scanners, suivant les incidences du faisceau prédéfinies lors du plan de traitement, ainsi appelées DRR[11], pour les comparer aux véritables images portales

[9] Active Breathing Control
[10] Centre Léon Bérard
[11] Digital Reconstructed Radiograph

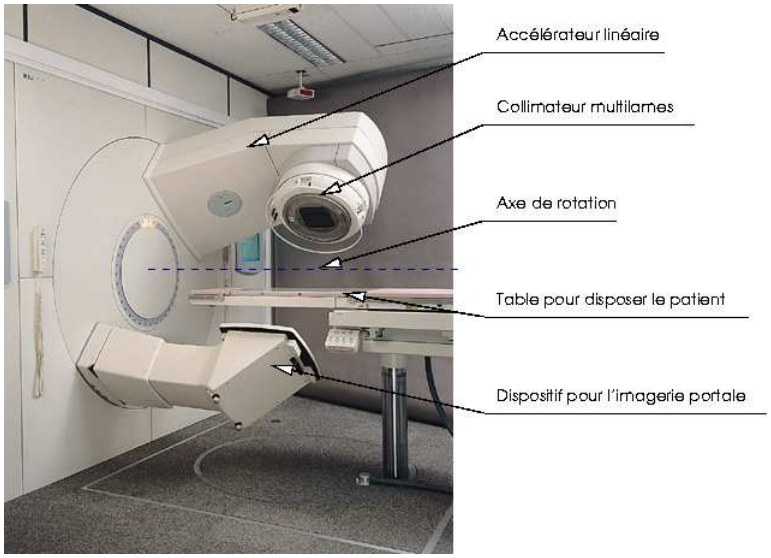


FIG. 1.4.: Dispositif d'imagerie portale monté sur l'appareil de radiothérapie pour l'aide au positionnement du patient

pendant le traitement. Ainsi, au CLB il a été proposé de s'aider de ces images en comparant directement les intensités des images obtenues en début de séances aux intensités de référence du positionnement pour le plan de traitement [160].

Pour être complet, nous devons aussi présenter des nouvelles techniques telles que le Cone Beam [4] qui permet d'obtenir un scanner d'une zone du corps très rapidement uniquement en faisant tourner un faisceau de rayon X autour de la zone à traiter. Ce dispositif est montable dans un plan orthogonal au dispositif de traitement. Cela permet de meilleures vérifications pour les zones qui se meuvent peu. Mais cette imagerie ne peut pas être employée pendant que le faisceau de traitement est enclenché puisqu'il faut une rotation autour du patient. Notons que le CLB a la possibilité d'utiliser les DRR et sera bientôt équipé d'un cone beam.

Aussi, si pour l'aide au positionnement du patient, la radiothérapie a fait d'énormes progrès ces 10 dernières années, la définition des marges ainsi que de la zone à irradier pour les organes se mouvant n'en restent pas moins problématique, surtout pendant le traitement.

Difficultés liées aux déplacements de la tumeur

Actuellement, pour un traitement donné, les médecins définissent les différentes marges de sécurités en suivant les prescriptions faites par l'ICRU[12], dans son rapport 62. Ces marges permettent de garantir la position de la cible et la diffusion des

[12]International Commision on Radiation Units and Measurements, *http ://www.icru.org*

rayons de telle façon que les tissus sains environnants soient le moins touché. Il s'agit de (fig. 1.5) :

- *Gross Tumour Volume (GTV)* : délimitant le volume des tumeurs macroscopiques sur les images scanners ou IRM.
- *Clinical Target Volume (CTV)* : délimitant le volume infra-clinique de la zone tumorale.
- *Planning Treatment Volume (PTV)* : délimitant le volume cible prévisionnel en prenant en compte les difficultés de repositionnement du patient, les mouvements des organes internes du patient ainsi que les erreurs inhérentes au dispositif de traitement.

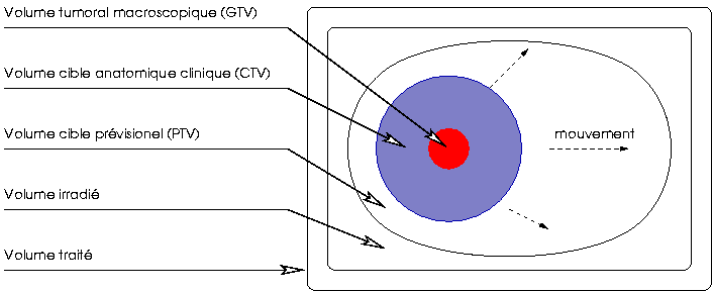


FIG. 1.5.: Définition des marges de sécurité préconisées pour la RTC selon l'ICRU 62

Les radiothérapeutes cherchent à avoir une excellente homogénéité à l'intérieur du PTV et à faire en sorte que l'isodose de référence qui représente 95% de la dose à l'isocentre se conforme à la forme du PTV tout en s'assurant que les organes à risque ne reçoivent pas plus que leurs tolérances respectives. Ces tolérances représentent la dose limite créant 5% des séquelles au bout de 5 ans. Des outils avancés tels que les histogrammes dose-volume basés sur l'imagerie X ou IRM permettent d'apprécier les différentes distributions de dose et ainsi, d'irradier un volume épousant le plus possible la forme de la tumeur.

Cependant, comme déjà mentionné, et comme il est indiqué dans beaucoup d'articles ayant trait à la radiothérapie, ces marges sont grandes pour les tumeurs situées dans les organes en mouvement [112, 163]. Langen *et al.* [112] comptent notamment des déplacements de l'ordre 5 à 10 centimètres sur les organes situés en-dessous du diaphragme tels que le foie ou l'estomac. Aussi, l'enjeu majeur est de trouver les indices permettant de localiser la tumeur et de contrôler ses mouvements afin de faire un traitement plus optimal avec des marges réduites.

Plusieurs études ont été effectuées sur le blocage des tumeurs pulmonaires [11, 94, 158, 163], disposées à proximité du diaphragme et donc qui se déplacent avec une amplitude de plus de 2 cm pour une respiration normale. Le mouvement respiratoire que nous présentons dans la suite, majoritairement dû au diaphragme, est en effet le mouvement provoquant le plus de déplacement. Rajoutons à cela que les tumeurs pulmonaires subissent aussi, dans une moindre mesure, les mouvements dus aux battements du cœur.

Des études réalisées par Stevens *et al.* [165] sur 22 patients ont montré qu'il n'était pas possible de faire une classification des mouvements suivant la taille ou la localisation. Ils préconisent alors de bien faire l'étude des mouvements tumoraux par patient et d'orienter les faisceaux suivant l'axe du plus grand déplacement.

L'imagerie seule n'est pas suffisante pour prévoir les déplacements des tumeurs pulmonaires. Des dispositifs complémentaires à l'imagerie ont donc été élaborés.

Des systèmes tentent de réduire le mouvement thoracique en appliquant une plaque contre l'abdomen empêchant de grands mouvements du diaphragme et obligeant le patient à respirer avec les autres muscles thoraciques. Cette méthode n'a pas montré une très grande efficacité et se révèle contraignante pour le patient, c'est pour cela qu'elle n'est pas employée au CLB.

Des tentatives de recherche de la reproductibilité des positions de la tumeur suivant le volume pulmonaire du patient ont été explorées avec le système ABC développé par Wong [190] en 1999. L'ABC (fig. 1.6) est un appareil permettant de mesurer le débit d'air que le patient respire grâce à un spiromètre. De plus, il a la fonctionnalité d'aider le patient à se maintenir en apnée à un volume respiratoire décidé avec le pneumologue, à l'aide d'un système de clapet permettant de bloquer le passage de l'air.

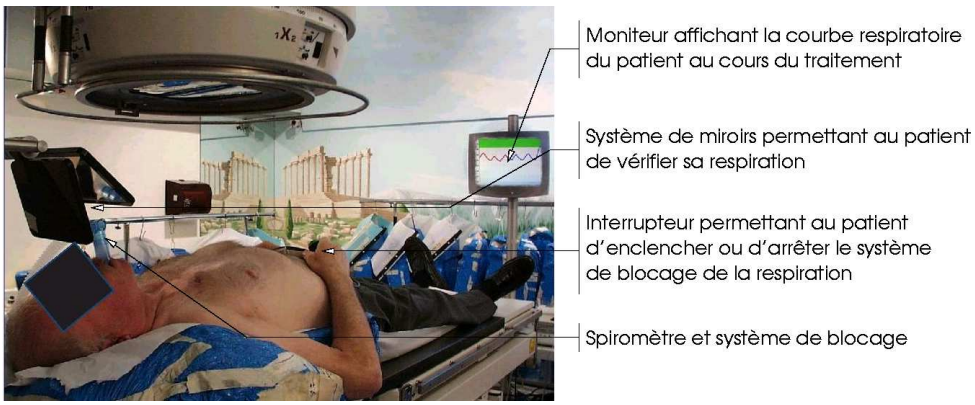


FIG. 1.6.: Système ABC employé au CLB

D'autres méthodes prenant en compte deux images externes d'angles de vue différents avec ou sans marqueurs ont été développées afin d'obtenir le cycle respiratoire du patient [73, 90]. Ces techniques sont moins contraignantes que l'ABC pour le patient, mais, elles nécessitent des systèmes de caméras qui doivent supporter la proximité des milieux radioactifs.

Les techniques actuelles sont toujours en phase d'étude mais il semble bien que la courbe respiratoire par patient soit un moyen de contrôle de la reproductibilité de la localisation de la tumeur [46]. Cela est d'une grande utilité si le patient peut maintenir sa respiration, cela est plus difficile s'il n'en a pas la capacité. L'utilisation de telles techniques peut ainsi s'inscrire dans un traitement de « gating » où le patient a besoin d'apprendre à gérer sa respiration, afin de se maintenir au volume respiratoire optimal pour le traitement. Une étude des résultats obtenus avec cette contention devrait

permettre de trouver les nouvelles caractéristiques pour une simulation mécanique des déplacements des tumeurs, permettant ainsi d'en faire bénéficier les patients atteints de pathologies entraînant un difficile contrôle de la respiration.

Ainsi, la seule alternative semble bien être l'utilisation des méthodes de contrôle de la respiration avec l'imagerie pour simuler les déplacements se produisant au cours du traitement.

À l'heure actuelle, il est difficile d'effectuer la balistique en limitant au maximum les doses perçues dans les tissus sains. Il est donc nécessaire de proposer une simulation qui permettrait soit d'entraîner les soignants pour qu'ils prédisent les conséquences de la balistique qu'ils ont prescrite soit de prédire les meilleurs instants pouvant être traités.

1.2. Simulation du mouvement pulmonaire

La simulation des déplacements de la tumeur pulmonaire doit forcément prendre en compte l'objet anatomique dans lequel cette tumeur se trouve, ainsi que les contraintes que subit cet objet, à savoir le mécanisme du système respiratoire. Dans cette section nous décrivons succintement l'anatomie du poumon et de son environnement proche le contraignant, *i.e.* des organes de la cage thoracique. Nous nous référons pour cela à des ouvrages anatomiques et de pneumologie [23, 34, 91, 197]. Nous présentons alors les caractéristiques de ce système complexe et mettons en évidence l'importance d'un paramètre, la *compliance*, pour la description de l'élasticité pulmonaire. Ensuite, dans un état de l'art des modèles de systèmes respiratoire, nous montrons la pertinence de notre recherche d'un modèle volumique du poumon.

1.2.1. Étude du système respiratoire

La respiration est un mécanisme complexe mettant en jeu les structures de la cage thoracique (fig. 1.7) qui sont toutes en interaction.

On peut découper, en ce qui nous concerne, les structures en trois parties : *(i)* les poumons, *(ii)* ce qui est entre les poumons, *i.e.* le médiastin, *(iii)* ce qui est en contact externe avec les poumons, comme les muscles et les côtes.

Nous présentons ainsi ces trois structures, puis nous montrons comment caractériser ces structures en interaction avec des caractéristiques mécaniques.

Les poumons

Les poumons (fig. 1.8) sont deux organes spongieux situés dans la cage thoracique et séparés par un espace médian, le médiastin. Chaque poumon peut être considéré comme étant un demi-cône. On peut donc décrire pour chacun une face externe, convexe, une face interne ou médiastinale, plane, une base et un sommet. Les bords se distinguent en antérieur (mince), postérieur (épais) et inférieur. Leurs faces inférieures s'appuient sur le diaphragme (fig. 1.9(b)), leurs faces externes s'appuient sur le plan costal et intercostal, leurs faces internes sur le médiastin, et, leurs sommets (apex) débordent

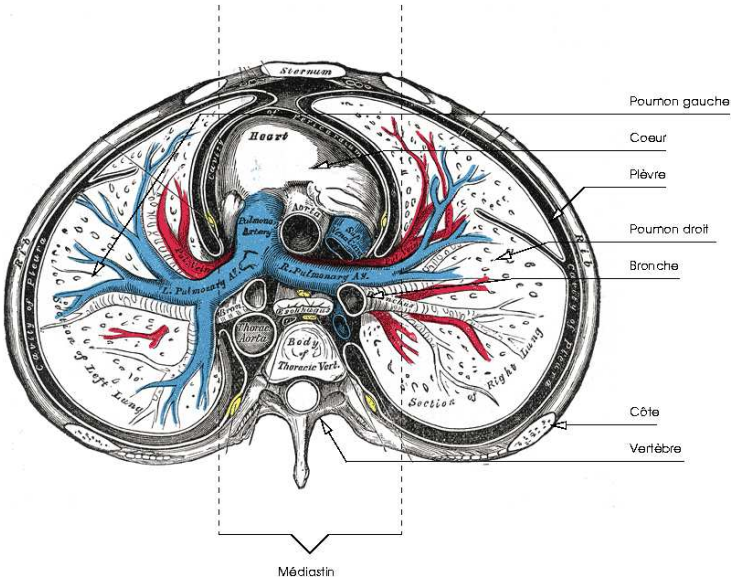
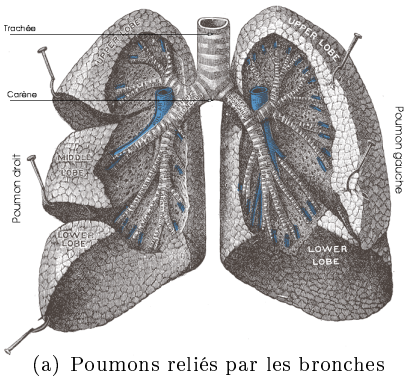
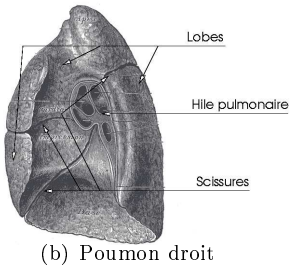


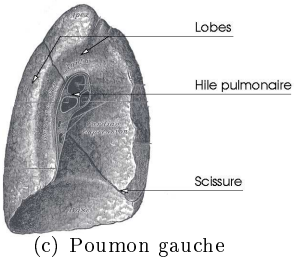
FIG. 1.7.: Anatomie de la cage thoracique [91] : vue interne en coupe de la cage thoracique au niveau du cœur



(a) Poumons reliés par les bronches



(b) Poumon droit



(c) Poumon gauche

FIG. 1.8.: Anatomie des poumons [91]

en haut, entre les premières côtes. La face médiastinale (fig. 1.8(c) et 1.8(b)) présente le hile pulmonaire, composé d'avant en arrière par l'artère pulmonaire, les deux veines pulmonaires et la bronche.

Leur hauteur est d'environ 20 centimètres chacun et leur diamètre transversal d'environ 10 centimètres dans le plan de la huitième vertèbre dorsale. Leur masse respective est d'environ 650 grammes pour le poumon droit contre 600 grammes pour le poumon gauche qui est plus petit pour laisser la place au coeur. Ils se gonflent et se dégonflent environ 15 fois par minute avec une moyenne de volume échangé de 500 ml, représentant ainsi 10 800 litres d'air ventilé par jour, 5 700 litres de sang, transférant ainsi 600 litres d'oxygène et 460 litres de dioxyde de carbone. Le volume du poumon peut au maximum être muliplié par deux ce qui revient à une deformation de racine cubique de 2 soit 25% d'augmentation dans les 3 directions du poumon en estimation grossière.

Les poumons sont divisés en lobes par de profondes incisions, appelées scissures, au fond desquelles s'insinue une peau qui l'enferme, la plèvre viscérale. Il y a deux scissures dans le poumon droit : l'oblique et l'horizontale. On distingue donc à ce poumon les lobes supérieur, moyen et inférieur. Le poumon gauche ne présente qu'une scissure, dite interlobaire.

Les lobes sont reliées entre eux par l'intermédiaire des bronches qui pénètrent dans la masse pulmonaire et s'y divisent en diminuant leur diamètre pour former les alvéoles[13] qui sont de minuscules petits sacs[14]. Le tout est relié par des fibres d'élastine donnant l'élasticité du tissu.

Autour des poumons, se trouvent les *plèvres*. Les plèvres (fig. 1.7) sont des membranes destinées à faciliter le glissement des poumons sur les parois thoraciques. Il existe une plèvre pour chaque poumon. Les deux plèvres sont indépendantes l'une de l'autre. Les plèvres sont constituées de deux feuillets se continuant l'un dans l'autre au niveau du hile, en se pliant. Ils sont séparés l'un de l'autre par un liquide lubrificateur.

Ainsi, ce sont ces plèvres qui vont être l'interface majeure entre le poumon et son environnement. Elles exercent une pression négative sur le poumon afin de le maintenir tel que les voies aériennes ne soient ni collapsées ni obstruées.

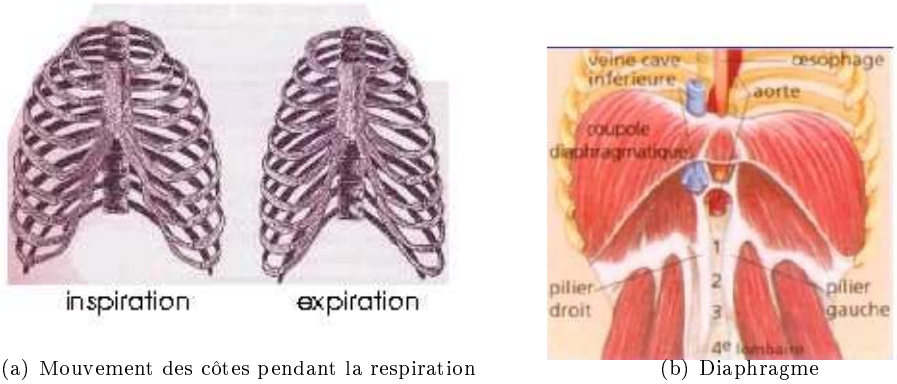
Le médiastin : trachée, cœur, ...

Le médiastin (fig. 1.7) contient le cœur et les veines et artères s'y raccordant, l'œsophage, ainsi que la trachée. La trachée (fig. 1.8(a)) est rattachée au fond de la bouche au larynx et se sépare au niveau de la carène en deux bronches primaires entrant chacune dans un poumon. Elle est constituée de fibres musculaires et de pièces de cartilage qui lui procurent une certaine rigidité. Du fait des faibles déplacements qu'elle peut avoir, la carène de la trachée[15] est prise comme repère anatomique pour le positionnement du patient sous les faisceaux de la RTC.

Derrière la trachée, l'œsophage n'a pas vraiment d'influence sur les poumons.

Dans la partie inférieure du médiastin, sur le diaphragme, repose le cœur auquel les poumons sont rattachés par l'intérmédiaire de deux artères chacun et de réseaux

[13] On estime environ à 300 millions le nombre d'alvéoles par personne.
[14] Leur diamètre varie entre 75 et 360 μm
[15] là où il y a bifurcation des bronches primaires



(a) Mouvement des côtes pendant la respiration (b) Diaphragme

FIG. 1.9.: Structures entourant l'extérieur des poumons

de veines. Le cœur se trouve dans la cavité du poumon gauche, et ses 60 battements par minute vont influencer le poumon en provoquant de petites déformations. Seppenwoolde *et al.* [163] ont pu extraire par analyse de Fourier les déplacements des tumeurs dans le poumon causés par les battements du coeur et ont mesuré des déformations de 4 à 5 mm dues à ces derniers.

Les os et les muscles

Autour des poumons et du médiastin se trouve la cage thoracique constituée d'un ensemble d'os articulés et de muscles contrôlant leur position et le volume que renferme la cage thoracique.

Parmi ces os se trouvent les vertèbres dorsales, les paires de côtes et le sternum. Chaque côte est reliée à une vertèbre par l'intermédiaire d'une articulation permettant une rotation (fig. 1.9(a)). Les dix premières paires sont rattachées au sternum par l'intermédiaire de cartilages élastiques autour du sternum. Ainsi, ces côtes contraintes deux fois donnent le mouvement général d'ouverture ou fermeture de la cage thoracique en faisant monter ou descendre le sternum.

Entre les côtes se trouvent les muscles intercostaux permettant justement d'élever les côtes pour augmenter le volume de la cage thoracique. De même, les muscles scalènes qui sont tendus entre les vertèbres et les premières côtes permettent de soulever les côtes.

En bas de la cage thoracique, en forme de parapluie, se trouve le diaphragme (fig. 1.9(b)). C'est un muscle plat, fin et musculotendineux constitué de deux coupoles. Ce muscle se contracte en repoussant les viscères vers le bas de l'abdomen en augmentant le diamètre vertical du thorax.

À ces muscles se rajoutent des muscles intervenants en inspiration forcée : le sterno-cléïdo-mastoïdien (du cou), et les grands et petits pectoraux.

Caractéristiques mécaniques

Le mouvement respiratoire a pour but de permettre les échanges gazeux (apport d'oxygène et évacuation du dioxyde de carbone). Il est généré par l'action des muscles costaux et des muscles du diaphragme qui en se contractant ou se décontractant entraînent la plèvre et génèrent ainsi une pression ou dépression sur les parois pulmonaires, provoquant le gonflement/dégonflement des poumons.

L'inspiration est le mouvement qui augmente le volume pulmonaire provoqué en majeure partie par la contraction du diaphragme et aussi par la levée des côtes grâce aux muscles intercostaux. L'inspiration est donc un mouvement actif. L'expiration, au contraire est plus un mouvement qui se fait, en général, naturellement pour revenir à la position de repos, par décontraction des muscles. L'expiration met donc en jeu l'élasticité de la cage thoracique (poumon et muscles).

D'une personne à l'autre et suivant la pathologie, l'âge, ou la morphologie de la personne, la respiration n'est pas effectuée de la même façon. Certaines personnes respirent plus en s'aidant de leur diaphragme, alors que d'autres vont plus utiliser leurs muscles intercostaux. Cela entraîne des déformations différentes du poumon : une utilisation du diaphragme va amener des déformations accrues dans la direction cranio-codale[16] alors que l'utilisation des côtes permet une déformation dans le plan sagittal[17].

D'autre part, la posture entraîne des comportements différents. Chez un sujet debout, les muscles respiratoires relaxés, l'abdomen se comporte comme un récipient dont une paroi serait extensible, la pression dans la partie supérieure étant négative. En position couchée, le diaphragme n'a aucune activité dans la phase d'expiration grâce à la compensation abdominale due à la gravité.

Nous voyons ainsi que, outre les échanges de volumes, les manifestations physiques de la respiration sont aussi l'application des forces musculaires ou, autrement dit, les changements de pression. C'est ainsi que l'Exploration Fonctionnelle Respiratoire (*EFR*) essaye de caractériser les déformations des structures dans la cage thoracique à partir des volumes et des pressions que l'on peut y mesurer.

Afin d'extraire des caractéristiques d'élasticité du système respiratoire, l'EFR assimile ainsi le système respiratoire à un modèle de soufflet relié à l'extérieur par un tube de résistance non nulle au flux. L'équation régissant le mouvement du système peut alors s'écrire (éq. 1.1) comme une relation entre *(i)* la pression P générant le flux de gaz, *(ii)* le volume V du soufflet, *(iii)* la compliance C qui représente l'élasticité du système, *(iv)* la résistance R au flux et *(v)* l'inertie relative I à l'accélération de la pression :

$$P = \frac{1}{C}V + R\frac{dV}{dt} + I\frac{d^2V}{dt^2} \tag{1.1}$$

Dans cette équation, les pneumologues peuvent connaître aisément le volume, et plus difficilement la pression. Les mesures corrélées des pressions et volumes permettent de

[16] direction de l'axe tête-pieds
[17] direction de l'axe dos-face

trouver les trois caractéristiques (compliance, résistance et inertie). Les pneumologues définissent ainsi des caractéristiques mécaniques liées aux volumes et aux pressions.

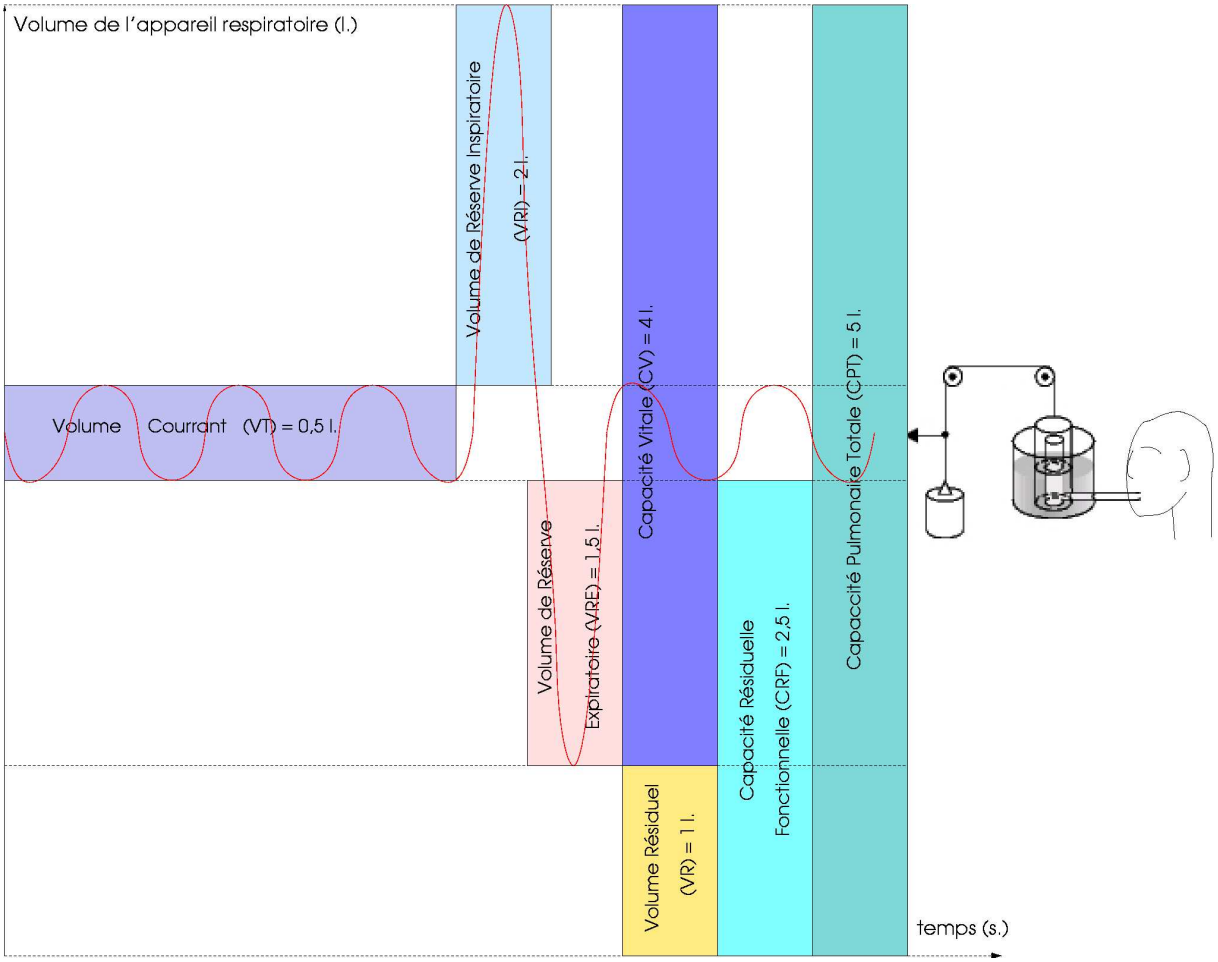
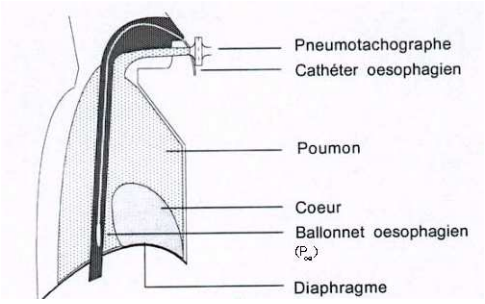


FIG. 1.10.: Définition des volumes respiratoires d'après [152]

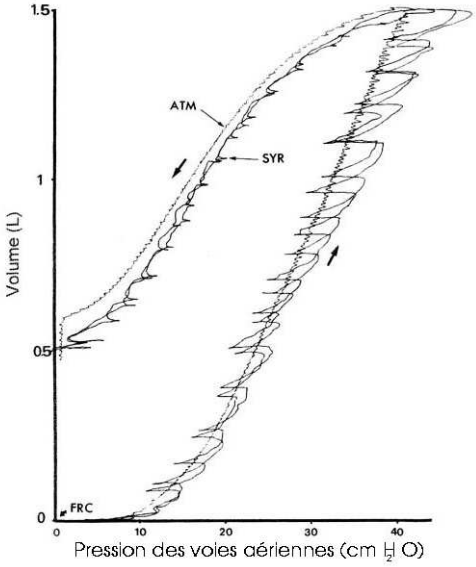
Ils définissent alors les différents volumes (fig. 1.10) caractéristiques en soumettant le patient à des examens de respiration avec un spiromètre. Le patient doit respirer normalement plusieurs fois afin de déterminer son volume courant qui est échangé au cours de sa respiration au repos. On lui demande ensuite de pratiquer une inspiration forcée qui permet de déterminer son volume de réserve inspiratoire. Enfin, il lui est demandé de forcer son expiration à l'aide de son diaphragme pour estimer son volume de réserve expiratoire. Le volume résiduel correspond à un volume estimé suivant la taille, le sexe et l'âge du patient ; il correspond à un peu plus du volume qui reste normalement au repos dans les voies aériennes (poumons et trachée) à pression

atmosphérique.



Afin de mesurer la pression pleurale P_{pl}, un capteur de pression est introduit dans l'œsophage à l'aide d'un cathéter œsophagien qui se place juste en dessus du diaphragme. Ce capteur consiste en un ballonnet qui est gonflé jusqu'à ce qu'il ressente la résistance de la paroi œsophagienne qui est elle même en contact avec la plèvre.

FIG. 1.11.: Dispositif de mesure de la pression transpulmonaire



À partir des mesures de pression et de volume, il est possible de tracer la courbe pression-volume. Les unités sont le litre pour le volume et le cmH_2O pour la pression (1013 cmH_2O correspondant à 1 atmosphère, soit 101 300 Pa). Les mesures effectuées sont en quasi-statique où il est demandé au patient de respirer par paliers. Ceci met en évidence une loi presque linéaire de compliance en inspiration et en expiration.

FIG. 1.12.: Courbe Pression - Volume caractérisant la compliance du poumon

Les pressions (tab. 1.1) sont plus difficiles à mesurer, surtout pour la pression exercée au niveau de la plèvre. Un examen consistant à poser un capteur de pression dans l'œsophage, juste au-dessus du diaphragme, par voie nasale afin de ne pas obstruer la bouche, peut être pratiqué pour mesurer la pression dans la paroi de l'œsophage P_{oe} (fig. 1.11). Cette pression correspond à la pression transpulmonaire. Des tests respiratoires associant les mesures de pression et de volume, en ajoutant un spiromètre

au niveau de la bouche, permettent alors de tracer une courbe pression-volume mettant en évidence la caractéristique de compliance [131, 71, 96]. Cette étude permet de montrer les propriétés mécaniques des poumons. Elle est souvent effectuée en quasi-statique pour éliminer les effets dynamiques de la respiration tels qu'ils sont exprimés dans l'équation simplificatrice (éq. 1.1). Cela demande de faire de petites étapes de respiration (fig. 1.12) et d'attendre quelques secondes avant de prendre la mesure de pression afin que l'effet de l'accélération s'estompe.

Entité	Description
P_B	Pression barométrique qui règne en surface du corps et dans les voies aériennes,
P_{oe}	Pression de la paroi de œsophage,
P_{pl}	Pression pleurale régnant en surface de la plèvre,
P_{alv}	Pression alvéolaire qui règne sur les parois alvéolaires,
P_g	Pression gastrique régnant dans l'estomac qui est juste en dessous du diaphragme,
$P_{ts} = P_{alv} - P_{pl}$	Pression transpulmonaire exercée sur les parois des poumons,
$P_{th} = P_{pl} - P_B$	Pression transthoracique exercée sur la paroi thoracique,
$P_{di} = P_g - P_{pl}$	Pression transdiaphragmatique exercée en surface du diaphragme.
Relations à l'équilibre	
$P_{pl} = P_{oe}$ $P_{alv} = P_B$ $P_{ts} = P_B - P_{oe}$ représente la pression de rétraction élastique du poumon	
P_{th} représente la pression de rétraction élastique de la cage thoracique.	

TAB. 1.1.: Pressions caractéristiques du système respiratoire

Les courbes mettant en relation ces pressions et le volume respiré permettent de mettre en évidence un certain nombre de propriétés.

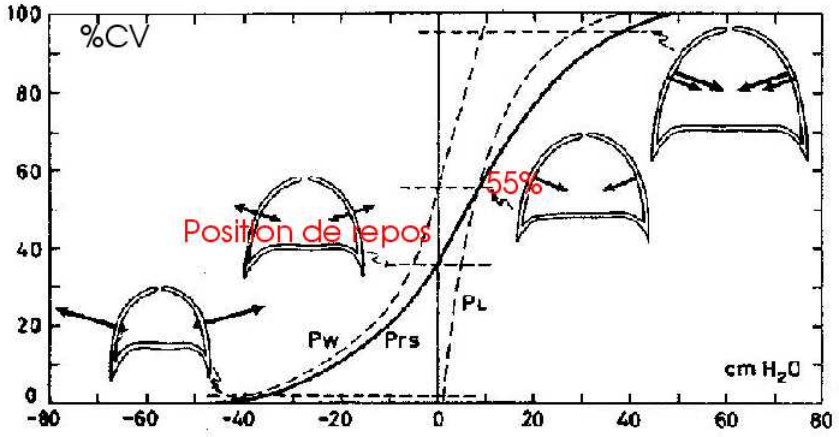


FIG. 1.13.: Courbe de pression/volume statique du système respiratoire [3]

En premier lieu, le volume de repos du poumon[18] est de 35% de la capacité vitale (fig. 1.13), c'est-à-dire un peu moins du volume résiduel. Ceci se vérifie puisque, si on ouvre l'espace pleural sur l'air extérieur, les poumons se collapsent complètement, montrant, d'une part, que leur position de repos n'est pas la position naturelle dans la cage thoracique, et d'autre part, qu'ils sont dotés d'une forte élasticité. Le volume de repos de la cage thoracique (quand la pression transthoracique est nulle) est de 55% de la capacité vitale.

On remarque, d'autre part [71, 96, 131], que la forme de cette caractéristique est celle d'un *hystérésis* (fig. 1.12), c'est-à-dire que le système ne suit pas le même trajet à l'aller (quand les forces sont appliquées, *i.e.* en inspiration) et au retour (en relaxation, *i.e.* expiration). Cela montre que l'historique de la respiration est important. On note cependant que le point d'arrivée de la courbe n'est pas le point de départ, ce qui signifie que l'énergie dissipée lors d'une inspiration n'est pas recouverte en expiration, et donc, que le poumon est un corps élastique imparfait [142] qui dissipe son énergie. Pour obtenir le même point d'arrivée et de départ sur l'hystérésis, Bachofen *et al.* ont montré qu'il faut de faibles variations de pression [9].

Deux modèles ont été proposés pour tenter d'expliquer cette perte d'énergie, l'un visco-élastique engendré avec des systèmes de ressorts et un frottement fluide, l'autre proto-élastique avec des systèmes de ressorts et des frottements à secs. Le plus utilisé est le viscoélastique car 65 à 75% du comportement pulmonaire peut être comparé à ce phénomène [62].

Les études anatomiques de Smaldone *et al.* [164] ont pu mettre en relation cet effet hystérésis avec le nombre d'alvéoles ouvertes. Ainsi, certaines alvéoles pliées s'ouvrent d'un coup après un certain seuil de remplissage des autres alvéoles déjà ouvertes. Dans la phase initiale de l'inspiration, jusqu'à environ 50% du volume courant, le poumon a une augmentation linéaire de son volume. Au-delà des 50%, la courbe s'infléchit légèrement marquant le début de l'ouverture des alvéoles jusqu'à présent repliées. La courbe prend alors une forme exponentielle.

Cette propriété d'ouverture soudaine de certaines alvéoles est à mettre en relation avec la résistance des voies aériennes qui pourrait s'expliquer par le produit surfactant des alvéoles. Celui-ci permet les échanges gazeux en réduisant la tension de surface[19] des alvéoles prévenant ainsi de leur fermeture.

Quoi qu'il en soit, la courbe pression-volume en statique permet de mesurer la caractéristique de la compliance linéaire du modèle simplifié du poumon (éq. 1.1), puisque cette équation en statique devient :

$$\Delta P = \frac{\Delta V}{C} \tag{1.2}$$

d'où la définition de la compliance statique, mettant en relation la pression sur la paroi du soufflet assimilable à la pression transpulmonaire P_{oe}, et le volume dans le soufflet, assimilable au volume échangé (mesuré par spirométrie).

[18] quand la pression transpulmonaire est nulle

[19] mesure qui détermine la force nécessaire pour traverser ou casser une surface interfaçant 2 milieux, ici il s'agit des forces induites par les molécules du surfactant entre elles, en surface de ce liquide.

D'après Harris [96], il n'y aurait rien d'autre à trouver dans la courbe de compliance. Le poumon tire ses propriétés élastiques des fibres de collagène et d'élastine, il perd de l'énergie par sa tension de surface dans les alvéoles et par l'ouverture ou la fermeture de certaines d'entre elles.

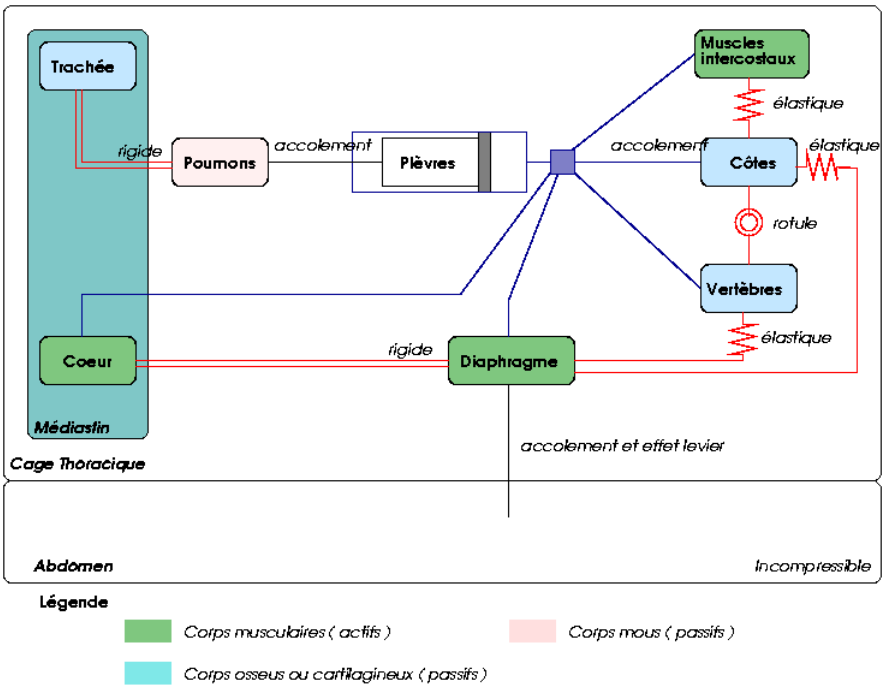


FIG. 1.14.: Résumé de la description anatomique et des liens entre les éléments de l'environnement du poumon

Nous pouvons ainsi résumer les caractéristiques et liaisons entre les différents éléments anatomiques dans la figure 1.14. Dans ce schéma nous avons spécifié les structures actives (les muscles) et les structures qui donnent la forme des cavités pleurales (les os et les trachées). Nous distinguons d'autre part les rigidités des différentes structures, montrant que le poumon est une structure molle élastique. De plus, comme la plèvre est dans le cas normal accolée au poumon, elle peut être assimilée à la paroi pulmonaire qui va glisser le long de la paroi thoracique et dont l'élasticité est caractérisée avec la mesure de compliance.

Connaissant désormais la structure de notre modèle, recherchons maintenant comment modéliser cette mécanique complexe.

1.2.2. État de l'art des modèles liés à la respiration

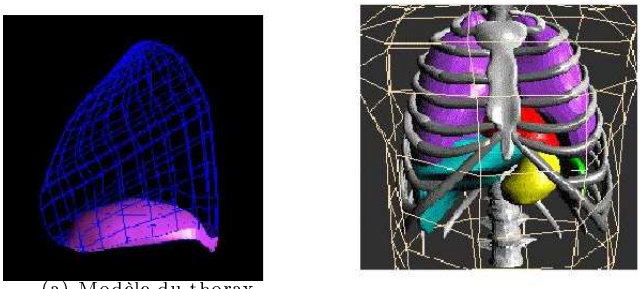
Dans notre objectif de suivi des tumeurs pulmonaires, on se rend compte de toutes les difficultés liées au système complexe qu'est le système respiratoire. Les tumeurs seules ne permettent pas de rendre compte de leur mouvement, il semble à première vue qu'une simulation dynamique mettant en évidence les interactions des poumons avec leur environnement puisse être utile.

Cependant, la lecture des articles en rapport avec cette modélisation dynamique que nous recherchons, nous amène à distinguer trois types de modèle respiratoire dans les travaux déjà effectués : *(i)* les approches totalement géométriques qui se basent uniquement sur l'imagerie, *(ii)* les modèles biomécaniques qui se fondent sur des considérations mécaniques et des mesures sur le patient, et *(iii)* les modèles discrets issus des modèles biomécaniques.

Nous présentons ainsi ces trois types de modèle.

Modèles géométriques

Le premier type de modèle consiste à la visualisation 3D et 4D (3D + temps) par reconstruction, à partir des images scanner segmentées, et animation par simple transformation géométrique.



(a) Modèle du thorax (b) Modèle du tronc

FIG. 1.15.: Modèle respiratoire basé sur les NURBS [162]

Ainsi, dans le but d'apporter une meilleure compréhension des imageries SPECT[20] du cœur qui se déplace sous l'influence du diaphragme, Ségar *et al.* [162] proposent un modèle de la respiration basé sur des NURBS[21] (fig. 1.15) pour un fantôme de tronc plus réaliste que les fantômes géométriques. Les points de la surface des organes sont extraits de la segmentation des coupes du Visible Human Project [196]. Le modèle peut modifier la géométrie des structures anatomiques pour simuler des variations anatomiques ou des mouvements du patient, par simple changement de position des

[20] Single Photon Emission Computed Tomography : imagerie obtenue par injection d'un produit radioactif se fixant dans les zones actives en émettant un photon visible par l'imagerie X.

[21] une « Non Uniform Rational B Spline » est un type de surface utilisé en CAO

points de contrôle du modèle géométrique. Ainsi, la simulation de la respiration consiste à translater les points de contrôle du diaphragme vers le haut, à translater le modèle du coeur en conséquence, à faire tourner les points de contrôle des côtes modélisées par des splines autour de l'axe de rotation de chacune de leurs articulations ; les points des splines étant eux mêmes les points de contrôle des poumons.

Ces modèles sont certes intéressants pour une compréhension globale du système, mais ils ne sont pas liés à la mécanique.

Notons que l'étude que nous menons se fait en parallèle d'une autre étude basée essentiellement sur l'imagerie. L'idée proposée par Boldea *et al.* [33] est en effet d'utiliser l'analyse d'image pour prévoir les déplacements induits par la respiration. Leur méthode utilise trois acquisitions scanner : une bloquée à 30% du volume respiratoire, une autre un peu en dessous et une autre en dessus de ce même volume. De ces trois acquisitions, ils calculent les champs de déformations permettant d'indiquer le déplacement de chaque voxel[22] d'un état respiratoire à un autre. Ensuite, l'idée est de faire une interpolation linéaire de ces déplacements pour obtenir les états intermédiaires.

Leur premier résultat semble converger. Cependant, cela nécessite beaucoup d'acquisition, et d'autre part, cela ne permet pas de s'adapter à la respiration du patient, puisque le cycle est supposé régulier, or il apparaît que le système respiratoire voit son comportement fortement influencé par l'historique de la respiration.

Modèles biomécaniques

Aussi, les simulateurs chirurgicaux emploient plus souvent les modèles biomécaniques et physiologiques qui permettent en plus de prendre en compte des mesures effectuées sur le patient. Ces modèles cherchent non seulement le réalisme visuel et un temps de calcul rapide, mais également le réalisme physique du comportement.

Les modèles complexes de l'élasticité dans le poumon ont vu leur apparition dans les années 1970.

Vawter *et al.* [179] proposent de s'intéresser au comportement élastique du poumon en ne tenant pas compte de la tension de surface. Du fait de l'effet hystérésis du poumon, ils supposent que celui-ci a deux caractéristiques contrainte-déformation, l'une en inspiration et l'autre en expiration, indépendantes l'une de l'autre. Leur modèle d'éléments finis reprend le modèle de Fung [77] où les alvéoles sont toutes cubiques, de même dimension, et se comportent comme des membranes (fig. 1.16). Ils définissent alors leur fonction d'énergie de pseudo-contrainte (éq. 1.3) par plan (i, j), i et j étant deux des trois directions de l'espace euclidien :

$$\begin{cases} M_0 W^{(i,j)} = \frac{C'}{2} exp\left(a_1 E_i^2 + a_2 E_j^2 + 2a_3 E_i E_j\right) \\ E_i = \frac{\lambda_i^2 - 1}{2} \end{cases} \tag{1.3}$$

Ils mettent ainsi en relation la masse M_0 du tissu de la paroi alvéolaire, la pseudo-énergie de contrainte par unité de masse $W^{(i,j)}$ pour une membrane du plan (i, j), une constante C' caractérisant le matériau, la contrainte de Green E_i pour une direction i,

[22] un voxel est un volume, qui représente un élément de l'image scanner avec son intensité, et son volume.

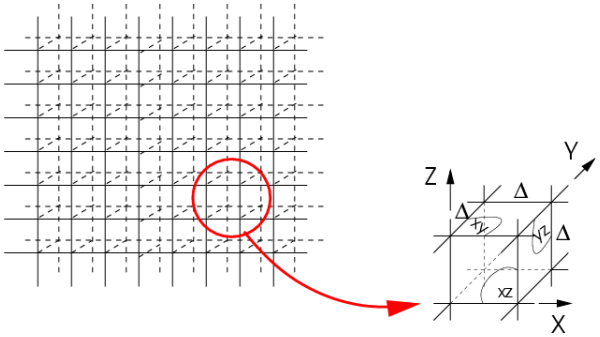


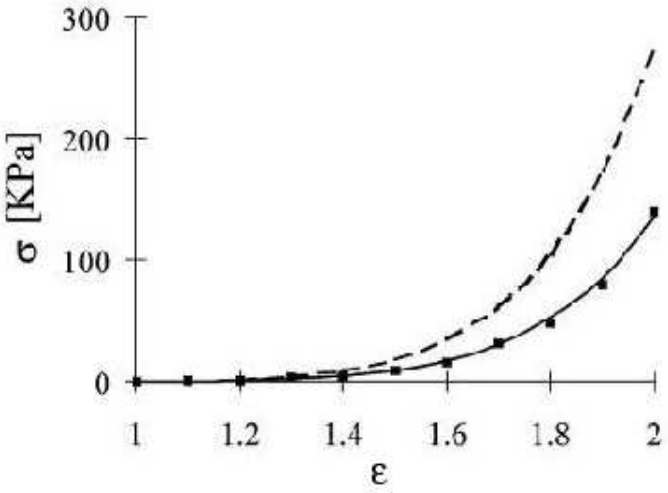
FIG. 1.16.: Modèle de Fung [77] d'alvéoles cubiques, soumises à des déformations de direction principale x, y, z

des constantes a_k pour $k \in \{1, 2, 3\}$ du matériau entre les alvéoles qui contrôlent l'anisotropie, et le ratio d'étirement λ_i subi suivant la direction i. Ils confrontent leur modèle élastique à des mesures de tests de traction effectués uniaxialement et biaxialement sur un tissu pulmonaire auquel ils ont supprimé les effets du surfactant des alvéoles. Leur résultat montre que leur modèle permet d'obtenir la même allure de courbe de contrainte-déformation obtenue expérimentalement pour des poumons sains. Ils supposent alors qu'en ajoutant les effets du surfactant et de l'environnement du poumon, ils pourraient avoir une bonne description du comportement pulmonaire.

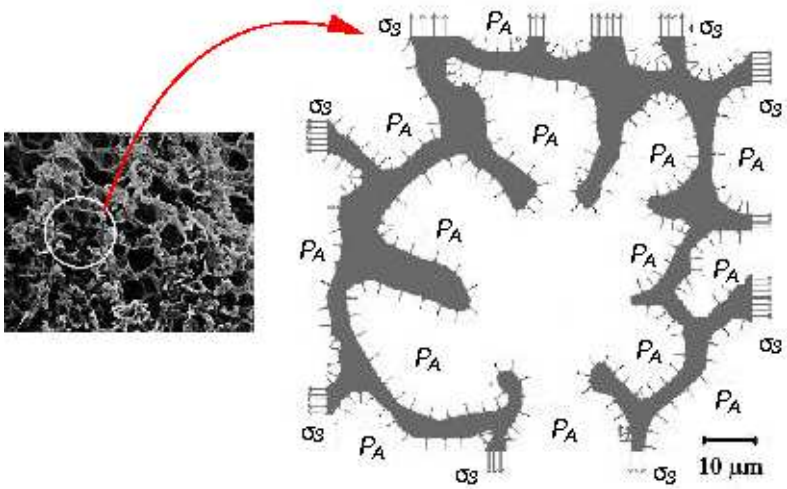
Ce modèle bien que correct, est assez complexe car il met en œuvre 4 constantes difficiles à trouver autrement que par test biaxial qui ne peut se faire qu'en prélevant le tissu. D'autre part, ces 4 paramètres n'ont pas d'interprétation mécanique claire en rapport avec les paramètres mécaniques connus (module de Young, coefficient de Poisson,... présentés dans le chapitre suivant p. 53).

À la même époque, Mead *et al.* [122] avaient tenté de modéliser le poumon comme un réseau de ressorts, mais ils s'étaient heurtés à la difficulté de la formulation mathématique d'une équation constitutive d'un tel réseau. Peu après, Wilson [186] a écrit une relation linéaire pour ce modèle, mais valide seulement en 2 dimensions pour de petites déformations. Il rajoute, avec Lambert [111], une extension où le poumon est représenté comme un ensemble de membranes élastiques linéaires orientées aléatoirement. Leur modèle ne rendait pas compte correctement des caractéristiques mécaniques qui variaient suivant le point d'équilibre imposé. Frankus et Lee [74] ont proposé un modèle éléments finis semblable mais avec des formes imposées de dodecaèdres. Contrairement aux autres modèles, celui de Fung [77] se base sur des lois statistiques du comportement général des alvéoles.

Si ces modèles se sont améliorés en utilisant diverses formes géométriques (octaèdres tronqués, combinaisons de cônes, ...) pour décrire la structure volumique des régions alvéolaires, ils sont restés à une description de la mécanique macroscopique du poumon, sans être destinés à évaluer la distribution des déplacements dans les parois alvéolaires. Plus récemment, Gefen *et al.* [87] ont proposé un modèle répondant à



(a) Courbes contrainte/déformation d'un poumon d'homme sain et d'homme emphisémateux (en pointillés) d'après [167]



(b) Modèle de Gefen *et al.* [87]

FIG. 1.17.: Modèle mécanique des parois alvéolaires

cette question pour des poumons sains et des poumons emphysémateux (comportant de grands trous d'airs anormaux), remplis d'une solution saline qui donne un comportement proche des conditions normales, mais éliminant les effets de surface de tension. La géométrie de leur modèle (fig. 1.17(b)) provient d'une acquisition par microscopie à balayage électronique d'une coupe dans un poumon de souris maintenue dans l'état respiratoire. Leur paroi alvéolaire est supposée suivre une loi élastique non-linéaire (fig. 1.17(a)), en se référant aux tests de traction sur des poumons de personnes saines et emphysémateuses effectués par Sughihara *et al.* [167]. Pour simplifier les résultats obtenus par Sughihara, ils supposent que le poumon a un comportement linéaire par morceau.

Pour les alvéoles des cas emphysémateux, Gefen *et al.* diminuent le coefficient de rigidité suivant les observations effectuées dans la littérature. Ils utilisent un logiciel libre de solveur par éléments finis pour leur simulation. Pour simplifier leur calcul, ils se placent en 2D avec un maillage de 513 quadrilatères dans la paroi des alvéoles choisies. Ils appliquent une contrainte de pression qui augmente de façon progressive afin d'obtenir une simulation de la répartition des déplacements dans les parois alvéolaires.

Ce modèle peut nous permettre de comprendre à l'échelle microscopique ce qui se passe dans les alvéoles, mais les images scanners ne permettent pas, à l'heure actuelle, d'obtenir la précision du microscope électronique, et il est clair que l'on n'aura pas de modèle aussi précis que le niveau alvéolaire pour un patient.

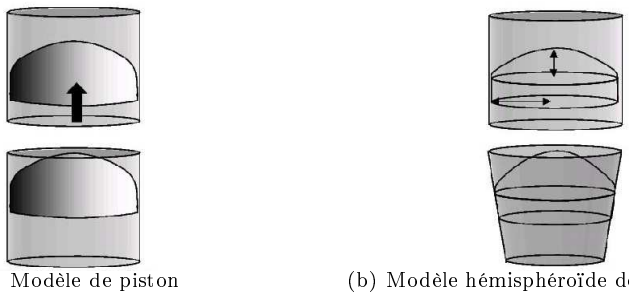
Notons que les modèles macroscopiques de poumons ont encore d'autres utilisations. Grimal [92] s'intéresse à modéliser la propagation des ondes longitudinales dans un poumon afin de déterminer les lésions induites par un impact sur la cage thoracique ou bien qui surviennent lors d'un impact de balle sur un gilet pare-balles. Parmi ses objectifs, il cherche à montrer la fiabilité d'un modèle homogène suivant la loi d'Hooke pour simuler le comportement d'un poumon. Considérant l'impact et la propagation de l'onde mécanique comme un instant très court, il suppose que le volume des alvéoles ne change pas et modélise ainsi son poumon par juxtaposition de cellules de volume constant et assimile ainsi le poumon comme une chaîne 1D de masses-ressorts biphasiques : un ressort pour les parois alvéolaires, un autre pour l'air dans les alvéoles. Le modèle est fortement influencé en fréquence par la dimension des alvéoles. Il arrive à retrouver la vitesse de propagation dans le poumon de 40 m.s^{-1} et à mesurer les erreurs avec les modèles homogènes.

D'autres modèles tels que celui de Zhuang *et al.* [201] se sont intéressés à l'influence de la courbure des bronches sur les dépôts de particules dans le poumon. Dans le même ordre d'idée et toujours avec des méthodes d'éléments finis, Tawhai [170] propose un modèle de conduction de la chaleur et des échanges gazeux dans le poumon. Elle construit un modèle géométrique fractal de bronche mathématique proche de la réalité. Pour la conduction de chaleur et de l'eau, son modèle produit des résultats proches de la réalité pour une respiration normale.

Tous ces modèles ont un intérêt pour la compréhension microscopique du poumon et permettent d'expliquer la caractéristique importante d'élasticité du poumon qui sera nécessaire pour l'abord des déplacements internes, mais ils nécessitent de toute façon une compréhension macroscopique de l'ensemble du système respiratoire.

Concernant la cage thoracique et les modèles de muscles du diaphragme, plusieurs

études ont souligné l'importance du diaphragme sur la déformation pulmonaire. On peut, entre autres, citer les travaux de Mead *et al.* [121]. Petroll *et al.* [143] comparent deux modèles simplifiés de diaphragme à des données réelles obtenues par fluoroscopie à rayons X[23] (fig. 1.18). Le but de ces études est d'obtenir la forme du diaphragme à tout moment du cycle respiratoire en n'utilisant que des données externes. Dans le premier modèle (fig. 1.18(a)), le diaphragme est traité comme un piston, tandis que le deuxième modèle considère un changement de configuration de la cage thoracique et de la forme du diaphragme. Notons que ce dernier modèle est plus précis en donnant 11% d'erreurs par rapport aux données réelles, contre 30% d'erreurs pour le premier modèle. Le changement de volume du diaphragme est donc un phénomène à prendre en compte. Précisons que les pneumologues peuvent étudier la course diaphragmatique en utilisant une radiographie de la zone du diaphragme.



(a) Modèle de piston (b) Modèle hémisphéroïde déformable

FIG. 1.18.: Comparaison de deux modèles de diaphragme [143] d'après [152]

D'autres modèles [184, 151] prennent en compte l'hypothèse de l'abdomen quasi-incompressible pendant une respiration quasi-statique afin de donner des relations entre le changement volumique pulmonaire, le déplacement du diaphragme et celui des côtes. Dans le premier article notamment, les auteurs mettent en évidence l'importance de la résistance de la cage thoracique sur la chute de la pression pleurale sur la surface costale des poumons. Ils proposent un modèle à deux chambres, l'une ouverte élastique représentant la cage thoracique, l'autre fermée incompressible, l'abdomen, qui est reliée à la première par une paroi commune élastique représentant le diaphragme.

Outre ces modèles, les informations sur les déplacements sont maintenant visibles en temps réel grâce à l'imagerie appliquée en dynamique. Les anatomistes et physiologistes pensent que, dans le poumon, en général on peut supposer que le hile[24] est fixe, car les structures reliant les entrées du poumon sont assez rigides (bronches et grosses artères). Ainsi, l'imagerie avec la contention pulmonaire (fig. 1.19) montre clairement que la trachée ainsi que la carène, et l'angle entre les deux bronches primaires bouge très

[23] technique d'imagerie consistant à faire inhaler au patient un produit radio-sensible pouvant être mis en évidence par imagerie par rayons X

[24] les orifices du poumon sur la face médiastinale par lesquels la bronche primaire entre, ainsi que les artères et veines

peu, laissant présager que l'hypothèse d'immobilité du hile pulmonaire peut être juste dans un premier temps. Les mouvements sont plus grands vers le diaphragme et au niveau des côtes, dans le dos on peut supposer que, en position couché, il se produit des glissements. Enfin, l'apex des poumons peut être considéré comme subissant de faibles déformations. Bien sûr, ceci devient totalement faux dans le cas de pathologies où le poumon a subi des complications (œdèmes pulmonaires, emphysèmes, ou ablations de lobes pulmonaires ...).

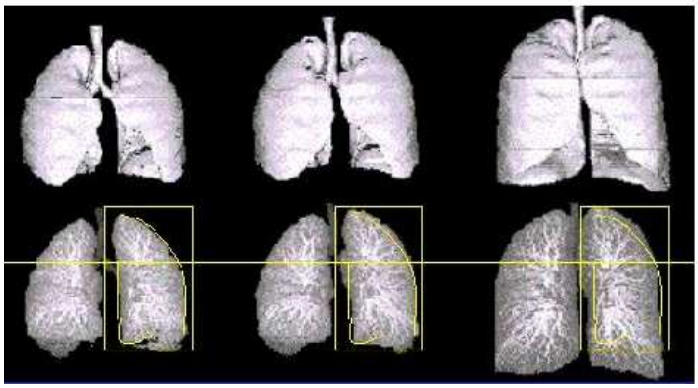


FIG. 1.19.: IRM des poumons d'un même patient à 3 états volumiques différents (http ://everest.radiology.uiowa.edu/nlm/volcon/volctrl.html)

Modèles discrets du système respiratoire

Le modèle de Kaye *et al.* [108, 67, 107] se base sur le modèle physiologique de Primiano [151] pour un modèle de poumons respirant dans le cas normal et traumatique tels que les pneumothorax[25]. La figure 1.20 reprise du modèle de Primiano, résume leur modèle mécanique sous-jacent. Ainsi, le modèle se découpe en 3 parties : *(i)* les corps mobiles (diaphragme, poumons, cage thoracique, jonction ...), *(ii)* les éléments de mécanique passifs qui sont des forces qui vont apparaître suivant les changements de volume, *(iii)* les éléments de mécanique actifs qui vont résulter des efforts musculaires moteurs de la respiration. Les équations régissant le modèle physiologique consistent à maintenir les équilibres du système entre ces 3 parties [109] et permettent ainsi d'appliquer des contraintes en surface des poumons. Ils ont ainsi un modèle géométrique de poumon auquel ils appliquent, en surface, les contraintes dues aux structures environnantes. Les auteurs avaient dans un premier temps exploré la possibilité d'un modèle éléments finis 2D [67], où le poumon est maillé d'éléments triangulaires. Cependant, comme ils l'expliquent [108], ce modèle continu avait une complexité calculatoire énorme nécessitant un temps de calcul qui allait à l'encontre de leur recherche de temps

[25] trou dans la paroi thoracique

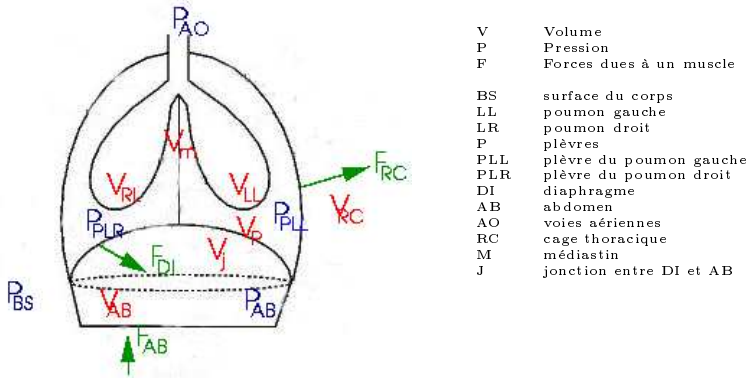


FIG. 1.20.: Modèle de Kaye *et al.* [109]

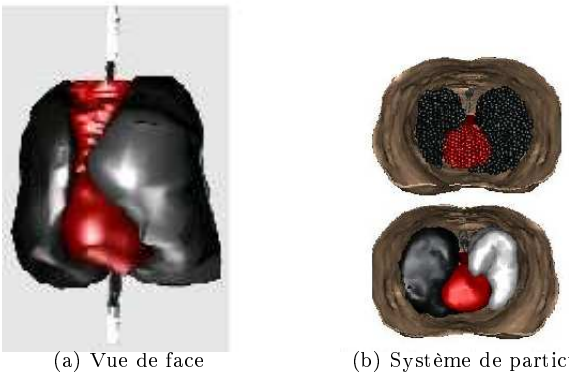
Elément	*Caractère*	*Déformation*	*Données*
Cage thoracique	Eléments rigides articulés	Rotation, déformation des articulations (cartilages)	ΔVolume , position extérieure
Diaphragme	Elément musculaire	Contraction/relaxation position de repos	Force du muscle f(pression transdiaphragmatique)
Abdomen	Passif (pour débuter), ou paroi musculaire	Incompressible	Position des parois
Poumons	Fortement élastiques	Occupent tout le volume déterminé par la cage thoracique	Δ Volume Δ Pression

TAB. 1.2.: Analyse du système respiratoire par Promayon *et al.* [152]

interactif pour un outil pédagogique. Ils simplifient encore leur modèle pour gagner de la rapidité en prenant l'hypothèse de Rodarte [157] qui suggère que le poumon se comporte comme un milieu élastique isotrope si on néglige les effets dus à la gravité. Ainsi, pour le poumon, ils adoptent un modèle de type système masses-ressorts amortis, que nous présentons dans le chapitre suivant, pour la rapidité et pour sa capacité à prendre en compte l'élasticité dans les poumons, mais ils effectuent un paramétrage empirique de leur modèle.

Ils obtiennent des comportements en surface semblables à ceux souhaités avec un bon contrôle des variables physiologiques de l'environnement du poumon. Cependant, ne cherchant à avoir qu'un aspect visuel qui suive les paramètres externes du poumon, ils n'ont pas affiné le paramétrage du poumon lui-même, ne permettant pas d'affirmer que le comportement interne soit bien cohérent avec l'élasticité pulmonaire. D'autre part, leur modèle de respiration ne prend pas encore en compte une géométrie réelle de diaphragme.

En même temps que ces auteurs, Promayon *et al.* [153, 152] utilisent aussi les modèles physiologiques pour simuler les mouvements respiratoires. De la même façon, leur étude les conduit à avoir différentes zones comme repris dans le tableau 1.2. Ils s'intéressent



(a) Vue de face (b) Système de particules

FIG. 1.21.: Modèle hybride de poumons respirant d'Amrani *et al.* [5]

notamment à simuler le comportement du diaphragme et, pour cela, se basent sur l'hypothèse d'incompressibilité de l'abdomen pendant la respiration. Ils obtiennent un système à conservation de forme contraint incompressible.

Cependant, comme pour Kaye *et al.* , ce modèle n'a pas de paramétrage des raideurs de son abdomen facilement reliables aux paramètres biomécaniques du tissu simulé, et reste donc difficile à lier aux données physiologiques.

Une autre approche, développée au LIRIS par Amrani *et al.* [5, 6] dans une étude sur l'apport des modèles déformables à base de particules pour la radiothérapie, a été de considérer les organes du thorax comme différents modèles en interaction. Son approche hybride consiste à modéliser (fig. 1.21) la cage thoracique comme une surface rigide avec laquelle le poumon sera en contact et sur laquelle il va glisser, et les poumons et le cœur comme des sacs de billes gonflables. Ces sacs de billes sont des systèmes de particules reliées entre elles pour chaque sac par des forces d'interactions[26]. De plus, chaque sac interagit avec les autres en intégrant collisions et contacts. Le gonflement ou dégonflement des poumons comme du cœur consiste à changer le rayon des particules. Ce modèle a montré des déformations avec une allure réaliste mais, de la même façon que les autres modèles, il n'est pas aisément reliable à la physiologie, et de plus il ne prend pas en compte l'action du diaphragme dans sa partie inférieure ni les possibles rotations des côtes.

Plus récemment, Zordan *et al.* [204] se sont intéressés à modéliser la respiration par l'action des muscles intercostaux et du diaphragme sur la cage thoracique, telle qu'elle est décrite par les modèles physiologiques, pour l'animation de personnages réalistes. De la même façon que Promayon *et al.* puis qu'Amrani *et al.* , l'approche est une interaction hybride entre des modèles rigides pour les os et des modèles déformables pour les muscles. Les auteurs choisissent en effet un système de ressorts parallèles liés à des éléments rigides pour simuler les muscles intercostaux liés aux côtes, aux

[26] ici dérivée du potentiel de Lennard-Jones présenté dans le chapitre suivant

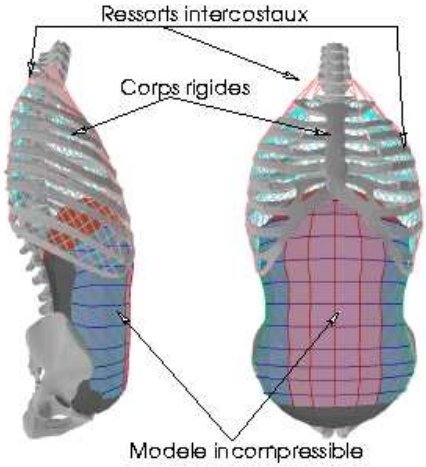


FIG. 1.22.: Modèle d'animation du thorax respirant de Zordan *et al.* [204]

vertèbres et au sternum, et un modèle incompressible de masses-ressorts pour simuler l'abdomen (fig. 1.22) . Leur modèle de muscles est basé sur les références de Chen et Zeltzer [45] et de Zajac [198] qui ont pour origine le modèle de Hill [86] suggérant que la force viscoélastique dans une fibre musculaire est proportionnelle à la vitesse. Le mouvement respiratoire est alors simulé en activant les muscles intercostaux par modifications des distances de repos. La trace des déplacements des points en surface générée par leur animation est utilisée comme trace des points de contrôle pour animer des NURBS définissant la surface de leur personnage. Ce travail a l'intérêt de montrer une autre utilisation des modèles biomécaniques, mais encore plus dans ce cas que pour les autres modèles, le modèle ne recherche pas un paramétrage relié directement à la physiologie. Notamment, les ressorts des muscles sont, comme pour les autres, trouvés par expérimentation.

Les modèles cités précédemment sont des modèles physiques basés sur la théorie physiologique et sur des modèles géométriques extraits de l'acquisition scanner ou autres. Ces modèles ont tous un problème lié à leur résolution. En effet, le réalisme est meilleur pour une fine résolution de maillage, or une résolution fine entraîne un accroissement du temps de calcul non négligeable. En se basant sur cette constatation, Santhanam *et al.* [159] proposent une méthode pour la déformation de la surface du poumon basée sur un modèle polygonal de haute résolution. Les auteurs utilisent le modèle physique de Hauth *et al.* [97] qui est une simplification des modèles des milieux continus en paramètrant leur modèle par un module de cisaillement. La méthode a l'avantage de pouvoir être directement reliée aux mesures mécaniques, puisque le modèle simplifié est une réécriture des équations de la mécanique des milieux continus. Cependant ce modèle ne s'intéresse qu'à la surface.

1.3. Bilan des modèles de la respiration et des objectifs généraux

Dans ce chapitre, nous avons présenté ce qu'étaient les traitements par techniques ionisantes du cancer et quels étaient leurs principaux problèmes. Nous avons ainsi constaté que ces traitements nécessitent une grande rigueur et une grande précision pour irradier spécifiquement les tumeurs et épargner le plus possible les tissus sains à chaque séance.

Cette rigueur passe avant tout par une bonne préparation du traitement, c'est-à-dire par l'élaboration de la planification définissant différents angles de visée et les marges de sécurité prenant en compte la prédiction du dépôt de dose dans le volume traité, et aussi par un bon repositionnement du patient dans les mêmes repères que le plan de traitement à chaque séance.

Nous avons pu observer que les difficultés du repositionnement du patient ont en partie été résolues avec les avancées technologiques et méthodologiques, notamment utilisant la simulation des images portales (DRR).

En revanche, nous avons mis en évidence que la planification prend en compte les mouvements des tumeurs de manière encore trop grossière pour assurer une bonne précision lors d'un traitement du déplacrement des tumeurs. Nous avons présenté, entre autres, le système ABC qui permet une contention de la respiration (qui est la principale origine des grands déplacements dans le tronc) quand cela est possible. Ainsi, il est apparu la nécessité d'un modèle de simulation des déplacements des tumeurs sous l'effet de la respiration, pour les patients ne pouvant pas bénéficier d'une contention, et pour la prédiction des meilleurs volumes respiratoires à irradier.

Nous avons de plus constaté que les tumeurs bougent de manière non prédictible dans le poumon suivant leur position et leur attache aux différentes structures anatomiques. C'est pour cela qu'il nous a semblé important de simuler le système respiratoire dans sa globalité.

Nous nous sommes ainsi intéressés aux poumons, au médiastin et aux muscles de la respiration. Nous avons pu constater que le poumon est un organe élastique qui subit des déformations supérieures à 25% dans le cas de respiration forcée. Nous avons montré que les médecins utilisent des modèles biomécaniques basés sur la mesure de la pression et du volume respiratoire pour caractériser le système respiratoire.

Le paramètre caractéristique qui est ressorti de cette étude biomécanique est le paramètre de compliance statique qui comme son nom l'indique permet de mettre en évidence la statique du système respiratoire.

Ainsi, le besoin qui est apparu est celui d'un modèle volumique de poumon avec les organes voisins permettant une simulation précise des déplacements à l'intérieur des poumons (pour la tumeur) avec un temps de simulation rapide et une prise en compte des caractéristiques telles que la compliance, le volume et la pression. Le poumon modélisé prendra en compte le glissement le long de la paroi interne du thorax et le long du diaphragme ainsi qu'une rigidité au niveau des bronches primaires.

Nous sommes alors intéressés aux modèles spécifiques du système respiratoire, et avons mis en exergue trois types de modèles.

Les modèles géométriques permettent de fournir une visualisation des phénomènes et par interpolation entre deux états connus du système respiratoire, ou qui peuvent, par transformation géométrique de l'image, permettre de simuler les déformations des différentes structures anatomiques. Cependant, aucun lien n'est fait avec les caractéristiques mécaniques et aucune explication biomécanique n'a été faite pour ces premiers modèles.

Le deuxième type de modèle correspond aux modèles biomécaniques continus qui ont été développés dans beaucoup d'applications pour essayer d'expliquer, par exemple, les déformations des alvéoles, ou pour expliquer les dépôts de particules. Ces modèles, qui tentent de décrire le comportement microscopique du poumon, ont peu abouti pour le suivi des mouvements internes.

Enfin, le troisième type de modèle comprend, entre autres, les modèles discrets basés sur des masses-ressorts, qui essaient à partir des modèles biomécaniques de relier la géométrie des poumons à des phénomènes mécaniques en lien avec les structures externes voisines. Ces modèles n'ont encore jamais été employés pour décrire l'intérieur des poumons.

Ces 3 types de modèles sont des modèles génériques, or, pour le traitement, il est nécessaire d'avoir des modèles adaptés au patient. Ce souhait d'un modèle personnalisé amène forcément des traitements supplémentaires, consommateurs en temps. Nous souhaitons obtenir un modèle rapide et garantissant une précision des mouvements des tumeurs en fonction de la respiration du patient. Cela signifie que nous devons pouvoir indiquer quels sont les champs de déformations dans le volume pulmonaire en fonction de la respiration et des données physiologiques du patient traité.

La géométrie est obtenue de la segmentation faite sur les coupes scanners, il reste ainsi à intégrer les paramètres physiologiques.

Pour avoir des données plus physiques et plus contrôlables au niveau mathématique, nous devons ainsi nous pencher un peu plus sur le lien de la géométrie à l'application des lois mécaniques et, plus particulièrement, des lois de la mécanique des milieux continus dans une étude des modèles de simulation des objets déformables existants.

2. Choix d'un modèle de simulation physique.

Précédemment, nous avons mis en évidence trois types de modèle pour les poumons. Le modèle de Ségar *et al.* [162] était un modèle purement géométrique, alors que le modèle de Gefen *et al.* [87] mettait en œuvre des techniques issues directement de la mécanique des milieux continus, et que les modèles de Kaye *et al.* [107], Promayon *et al.* [153] et de Zordan *et al.* [204] mettaient en place des modèles mécaniques avec des méthodes heuristiques de résolution.

Nous avions conclu que ces modèles ne convenaient pas parce que : *(i)* ils ne permettent pas d'avoir une représentation volumique du poumon, mais simplement surfacique, voire microscopique, *(ii)* pour les modèles surfaciques, ils ne permettent pas un paramétrage directement lié aux données physiologiques, *(iii)* ils ne sont pas personnalisables à chaque patient.

Nous pouvons personnaliser la géométrie du poumon, puisque nous l'obtenons à l'aide d'une segmentation des images scanners. Cela apporte des informations sur le volume et la surface du poumon, ainsi que sur les premières générations de bronches. Les médecins contourent les zones d'intérêt autour des tumeurs à l'intérieur du volume pulmonaire. Il nous faut ainsi choisir la représentation géométrique la mieux adaptée à nos besoins (précision, rapidité, ...) pour le suivi des déformations dans le volume. Nous savons l'importance de l'intégration de la loi de compliance qui caractérise le rapport pression-volume du poumon. Nous devons intégrer les lois mécaniques ou physiologiques dans un modèle volumique de poumon qui devra fournir la possibilité d'interagir avec d'autres modèles.

L'objectif de ce chapitre est donc de justifier notre choix de modèle pour la simulation des déformations internes du poumon.

Nous commençons par une étude des modèles géométriques adaptés à notre besoin de modèle volumique déformable. Ensuite, nous décrivons les caractéristiques des lois de la mécanique des milieux continus que nous relions aux paramètres physiologiques pulmonaires, ainsi que les méthodes de résolution des équations mécaniques existantes, à savoir les méthodes par éléments finis (*MEF*) et les méthodes discrètes. Finalement, nous justifions notre choix du système masses-ressorts (*MR*) en discutant de l'intégration des paramètres dans ce modèle.

2.1. Reconstruction 3D

Les modèles géométriques sont obtenus à partir des données réelles acquises sous forme de points échantillonnés en surface ou en volume de l'objet à modéliser. Il s'agit

ensuite de mailler, c'est-à-dire de lier les points entre eux afin d'avoir une représentation topologique de l'objet. Ce maillage peut se faire soit avec les seules informations à disposition en reliant directement les points entre eux par l'intermédiaire d'éléments de maillages simples tels que des triangles, quadrilatères, tétraèdres ou autres ; ou soit de façon plus fine en cherchant des fonctions polynomiales approximant le mieux possible la forme géométrique en surface ou en volume de l'objet.

La première solution n'est rien d'autre qu'une interpolation linéaire des secondes qui permettent de rééchantillonner et donc de raffiner cette représentation, mais elle est aussi la base de leur représentation.

Dans notre recherche de modèle géométrique le mieux adapté pour une description mécanique de l'évolution interne du poumon lors de la respiration, nous souhaitons en plus de la surface, conserver l'information volumique. Il nous faut donc avoir une représentation structurelle qui puisse être facilement reliée aux lois mécaniques de comportement de l'objet permettant de contrôler précisément le mouvement des points acquis.

Ainsi, dans un premier temps nous présentons des modèles décrivant de façon continue des volumes dans l'espace que nous nommons par raccourci de « continus ». Ensuite, nous étudions les maillages et les difficultés liées à leur utilisation pour la simulation des mouvements.

2.1.1. Modèles géométriques « continus »

Parmi les modèles géométriques « continus », nous distinguons deux classes de modèles : les modèles **explicites** et les modèles **implicites**.

Les modèles **explicites** ont surtout été utilisés pour décrire les surfaces des objets et ont joué un rôle prépondérant dans le domaine de la CFAO[1] grâce à leur capacité de description de courbes et de surfaces lisses variées, et leurs applications rapides sur des machines outils. Des points de contrôle sont en général utilisés pour définir leur forme globale en les reliant aux tangentes des courbes. Parmi ces modèles, nous pouvons citer les courbes de Bézier [40], ainsi que les courbes dérivant des splines telles que les B-splines [14], les NURBS[2] [147] et les D-NURBS[3] [156, 200]. Les courbes de Bézier, excepté à un degré élevé ($d = n + 1$, avec d le degré et n le nombre de nœuds) ont le désavantage majeur d'être difficiles à paramétrer pour passer précisément par des points donnés, alors que les splines ont montré leur possibilité d'interpolation de points et sont plus maniables. Les représentations D-NURBS ont, d'autre part, permis de définir des animations de surfaces physiquement réalistes à l'aide d'une formulation lagrangienne. De la même façon, les splines ont été utilisées en reliant leur description à l'énergie de déformation d'un objet continu pour simuler la déformation de fils chirugicaux [113].

Les modèles explicites peuvent donc être intéressants pour une représentation lisse des objets, mais ne permettent pas de décrire les objets de façon volumique, comme nous le souhaitons.

[1] Conception et Fabrication Assistée par Ordinateur
[2] Non Uniform Rational B-Spline
[3] Dynamic NURBS

Cependant, nous pouvons noter que les modèles explicites ont été une bonne inspiration pour la définition de modèles de déformation des géométries « continues » [13, 161, 55, 56]. En effet, l'idée intuitive de déformer l'espace dans lequel le modèle géométrique évolue avec le même principe de points de contrôle a été repris *(i)* tout d'abord par Barr *et al.* [13] qui proposent ainsi des déformations telles que des torsions et des pliages, *(ii)* ce qui a été poursuivi par Sederberg et Parry [161] avec les déformations de formes libres, appelées *FFD*[4], permettant de nouvelles déformations d'un objet enfermé dans un bloc parallélépipédique, et *(iii)* encore amélioré par Coquillart *et al.* [55] pour des objets contrôlés par une forme quelconque avec les modèles *EFFD*[5]. Mais, le lien avec les lois mécaniques n'est pas effectué.

Les modèles **implicites** semblent mieux définir les représentations volumiques. Ils emploient, en effet, une fonction F de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ associant une valeur scalaire à tout point $M(x, y, z)$ de l'espace. Si $F(M) = 0$ le point est sur la surface, sinon, il est soit à l'intérieur soit à l'extérieur de la surface, suivant le signe de $F(M)$. Cette modalité permet, par combinaison de primitives implicites, d'obtenir des objets assez complexes. La formulation implicite a donné lieu au développement de plusieurs modèles géométriques que l'on désigne sous le nom de modèles de surfaces implicites [32].

De manière générale, leur animation peut s'effectuer assez simplement par modification du potentiel et les interactions peuvent se faire par résolution par satisfaction de contraintes [85]. Mais leur lien à la mécanique ainsi que l'intégration de paramètres mécanique reste difficile.

Plus spécifiquement, les superquadriques [12] sont des surfaces implicites définies par un faible nombre de paramètres et sont une alternative aux modèles paramétriques pour la description d'objets tels que les superparaboloïdes, les superhyperboloïdes, superellipsoïdes, ...Elles bénéficient de tous les avantages des modèles paramétriques, notamment pour l'affichage et l'usinage ainsi que pour l'aide à la classification des formes [48]. Elles peuvent être déformables avec l'ajout d'une composante de déformation, dans les modèles de Terzopoulos et Metaxas [171], étendus par Neveu *et al.* [135]. Elles ont été utilisées pour étudier les mouvements d'un ventricule avec les modèles de déformations globales (torsion, pliage, ...) [140, 141] et FFD [10]. Elles ont été utilisées pour approximer des données 2D ou 3D [53] en utilisant des hyperquadriques qui sont une généralisation des superquadriques introduites par Hanson [95]. Pourtant, elles ne permettent pas de représenter de manière continue un objet volumique complexe et les déformations n'ont toujours pas de lien avec les lois mécaniques. Elles ont prouvé leur efficacité pour la segmentation, mais elles restent empiriques quant à leur mise en œuvre.

Par contre, avec les *blobs*[6] de Blinn [31], dont on retrouve des similitudes avec les modèles de *metaballs* et de *soft object* [137, 194], est apparu la possibilité de construire des surfaces lisses complexes. Ces modèles ont pour principe de générer un potentiel autour d'un point identique au champ d'un électron, suivant sa distance au noyau. La fusion des potentiels consistant à sommer en chaque point de l'espace les potentiels générés par chaque *blob*, permet d'obtenir des objets plus complexes. La surface à

[4] Free Form Deformation
[5] Extended Free Form Deformation
[6] BLinn OBject

modéliser est alors représentée par l'ensemble des points dont le potentiel est égal à une valeur prédéfinie, dite d'iso-potentielle. La surface obtenue possède des propriétés de continuité permettant de modéliser toute sorte d'objet lisse.

Le principe de génération de potentiels à partir d'un point, et de fusion de potentiels ont été des éléments moteurs pour l'apparition de la notion de squelette sous-jacent à la construction de surface implicite. Un élément squelettique est ainsi une primitive géométrique (point, segment, polygone, polyèdre, ...) pour laquelle la distance à un point est définie et à laquelle on associe une fonction de potentiel. Ainsi, un ensemble d'éléments squelettiques forme un squelette d'une surface résultant de la fusion des potentiels de ses éléments.

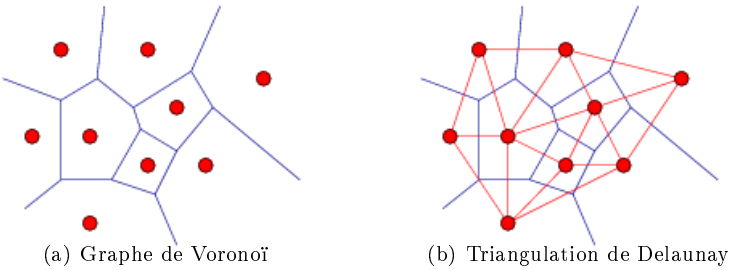
Le choix et la position des différents éléments squelettiques permettent d'obtenir la surface désirée. C'est dans cette optique que les *blobtrees* [192], une extension de la structure CSG, ont été définis. Il s'agit dans ce modèle de remplacer les primitives classiquement utilisées dans les CSG par des éléments squelettiques. L'utilisation de différents opérateurs (union, intersection, différence), ainsi que des opérateurs de déformation, leur permet de produire assez simplement des objets complexes. La notion de squelette a également permis le développement de différentes méthodes pour la reconstruction d'objets à partir d'un nuage de points. Muraki [132] propose ainsi une méthode de reconstruction automatique à l'aide de *blobs*, qui sera améliorée dans [30]. Ferley *et al.* [72] décrivent l'objet par un mélange de surfaces implicites dont les squelettes sont des courbes B-splines obtenues par lissage du diagramme de Voronoï du nuage de points. Pontier *et al.* [150] proposent eux, dans le cas de nuage de points organisés en sections parallèles, de reconstruire leur squelette 3D qui générera la surface finale en mettant en correspondance chacun des squelettes 2D de chacune des sections.

Pour obtenir les déformations de surfaces implicites à squelette, il suffit de déplacer le squelette ou des éléments squelettiques [195]. L'organisation du squelette de façon hiérarchique, comme dans un *blobtree*, simplifie l'animation des objets articulés enrobés d'une peau, comme les doigts d'une main, mais des mélanges indésirables peuvent survenir quelquefois, notamment lorsque deux éléments squelettiques se rapprochent trop l'un de l'autre. Pour éviter ce genre de problèmes, Wyvill [193] propose d'utiliser un graphe où les nœuds sont des éléments squelettiques. Il y a mélange des potentiels de deux éléments squelettiques si et seulement si une arête les relie. Desbrun [69] utilise un graphe mis à jour dynamiquement pour permettre la prise en compte de certains changements de topologie.

Là encore, la mécanique n'est pas intégrée.

Notons des évolutions intéressantes des surfaces implicites en surfaces implicites variationnelles [177, 176] qui permettent de contraindre la surface de manière précise en combinant des fonctions d'interpolations aux potentiels des surfaces implicites. Cette méthode a notamment été exploitée par Crespin et Peri pour la reconstruction de surfaces de poumons lisses à partir d'IRM segmentés [60].

De manière générale, les modèles géométriques continus se sont surtout intéressés à reproduire le comportement en surface des objets, mais ils ne garantissent pas le comportement à l'intérieur de l'objet, à moins de trouver des fonctions d'interpolations permettant de s'assurer du déplacement correct des points intérieurs. Pour cela, le passage au discret est nécessaire.



(a) Graphe de Voronoï (b) Triangulation de Delaunay

FIG. 2.1.: Triangulation Voronoï *versus* Delaunay

2.1.2. Maillages discrets

Nous pouvons représenter les modèles « continus » par échantillonnage des fonctions représentant l'objet ou par l'utilisation de squelettes ou de polygones de contrôle. Dans notre cas, nous avons déjà à notre disposition les données discrétisées sous forme de voxels obtenus à partir des scanners. Le lien entre la mécanique et les modèles géométrique semble passer par le contrôle du maillage. En effet, pour pouvoir affirmer que notre modèle est correct, nous devons pouvoir reproduire des expériences montrant comment les points d'un maillage se déforment sur notre modèle.

Les maillages simples sont définis par une liste de points et de liens de voisinage entre ces points afin de décrire une topologie 1D (un segment reliant deux points voisins proches), 2D (un polygone reliant des voisins d'un même plan), ou 3D (un polyèdre reliant des voisins non coplanaires).

Le choix du schéma géométrique reliant les points entre eux n'est pas anodin [50, 99, 117]. C'est en effet ce schéma qui, dans les modèles, va diriger la propagation des déformations et ainsi définir la géométrie de la propagation des ondes mécaniques dans l'objet. Sa régularité et sa résolution ne seront pas non plus anodines puisque les dimensions des arêtes vont définir la précision de la propagation.

La façon dont sont reliés les points dépend de leur régularité spatiale, du comportement souhaité, ou de leur densité. On distingue ainsi deux types de maillage : les maillages de points structurés et les maillages de points non structurés [24].

Dans le cas particulier où les points ne sont pas organisés, la méthode de Delaunay permet de construire des maillages réguliers. Cette méthode relie les points entre eux par un pavage triangulaire tel que dans un cercle circonscrit il n'y ait que les trois sommets du triangle. La triangulation de Delaunay est le dual du diagrame de Voronoï (fig. 2.1), qui est le graphe obtenu en dessinant les médiatrices de tous les segments possibles séparant le plan en régions les plus proches d'un point. Cette triangulation dispose de diverses propriétés : (i) *la propriété du cercle circonscrit vide* interdisant la présence de point dans le cercle circonscrit de chaque triangle de Delaunay, (ii) *la propriété des angles min et max* contraignant les angles des triangles entre une valeur minimale et maximale, (iii) *la propriété de donner un maillage de triangles d'angle minimum.* La triangulation a l'avantage d'être facilement extensible à la 3D puisque pour générer une grille de Delaunay 3D, il suffit de prendre les sphères circonscrites

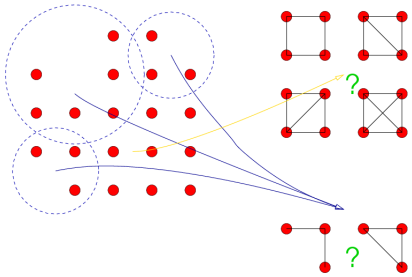


FIG. 2.2.: Mailles structurées quelle topologie choisir ?

aux tétraèdres.

Dans le cas où les points sont organisés, il suffit de suivre les lignes d'intérêt ou les axes principaux, mais il est toujours possible de rajouter d'autres liens. Par exemple, dans une organisation mettant en évidence des motifs rectangulaires (fig. 2.2), on pourrait très bien choisir de mailler seulement avec cette forme géométrique de base, plutôt que de subdiviser en triangles. Aussi, pourquoi serait-il mieux d'utiliser tel ou tel pavage ? Le débat reste ouvert aussi bien en modélisation discrète que pour les éléments finis. En effet, pour ces derniers, les études sur le choix entre les tétraèdres et les octaèdres pour la convergence des problèmes continus [22] suggèrent que les quadrilatères sont meilleurs en 2D, et les hexaèdres en 3D, mais cela reste sujet à controverse et dépend fortement de la loi d'élasticité choisie (*stress/strain*).

Toute la difficulté lors de la construction du maillage consiste ainsi à savoir comment relier les points entre eux, et à choisir la meilleure géométrie qui permettra une bonne convergence des résultats.

Nous présentons d'abord les difficultés induites par la géométrie, puis nous étudions les remèdes qui permettent d'obtenir une géométrie homogène.

2.1.2.1. Influence du maillage sur les modèles mécaniques discrets

Pour se convaincre de l'importance du maillage pour le comportement des modèles discrets, une expérience très simple peut être effectuée. La figure 2.3 présente quatre barres bloquées en une extrémité et soumises à leur propre poids. Le modèle empirique utilisé est un système masses-ressorts de raideurs identiques, le plus naïf possible, et les masses sont toutes identiques en chacun des nœuds. Les seules différences sont les schémas de maillage. Ainsi, on devrait s'attendre à avoir le même comportement. Après simulation, et attente de l'état d'équilibre, nous constatons qu'il n'en est rien, même pour le schéma ne comportant qu'une seule diagonale. En effet, le maillage va donner un degré de rigidité supplémentaire dans le modèle, empêchant ainsi les points reliant une diagonale de s'éloigner trop l'un de l'autre.

Cette expérience nous montre, dans le cas d'un modèle discret, la robustesse des triangles dans les modèles où les forces se propagent sur les liens, par rapport à un maillage quadrilatéral simple (ce qui n'est plus forcément vrai en continu). En effet, la maille de schéma rectangulaire s'affaisse totalement alors que les schémas avec des

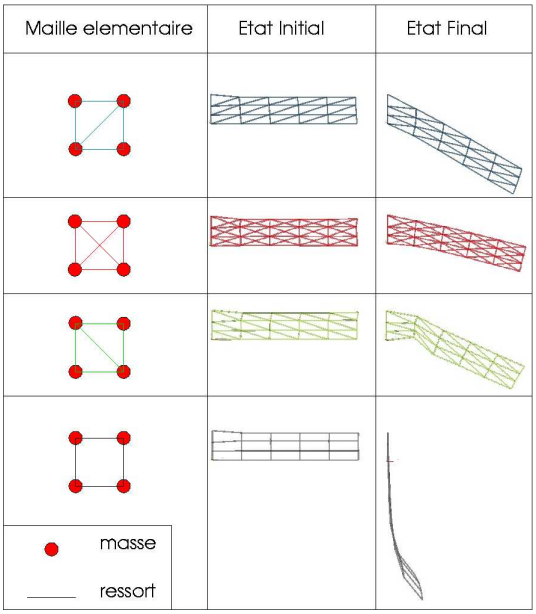
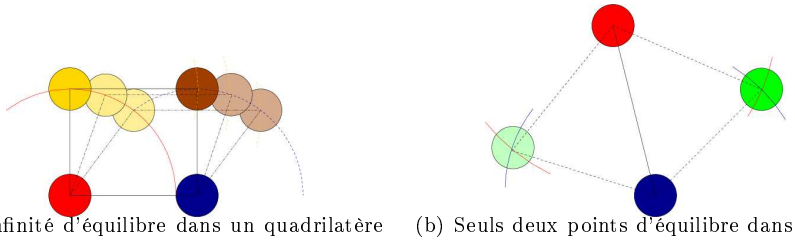


FIG. 2.3.: Influence de la géométrie sur le comportement mécanique heuristique

diagonales arrivent à conserver leur forme. Cela peut s'expliquer de manière géométrique (fig. 2.4). En effet, l'état d'équilibre dans un système masses-ressorts simple est



(a) Infinité d'équilibre dans un quadrilatère simple

(b) Seuls deux points d'équilibre dans un triangle

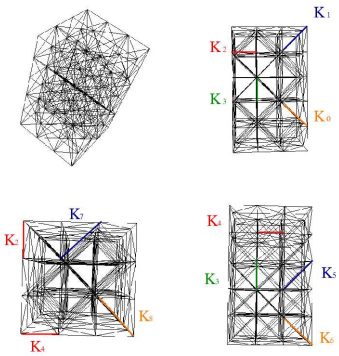
FIG. 2.4.: Positions d'équilibre suivant le type de maille élémentaire

atteint lorsque les longueurs des ressorts sont toutes revenues aux longueurs de repos initiales. Dans le cas des mailles triangulaires (fig. 2.4(b)), nous pouvons montrer par construction géométrique qu'il n'existe que deux possibilités. Ainsi, le triangle, en plus de la conservation de longueur permet une conservation naturelle des angles, en valeur absolue, et semble donner plus de robustesse aux maillages de cette nature.

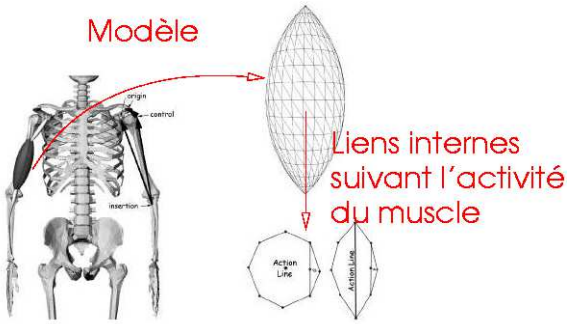
De façon analogue, on peut prouver que, pour un maillage quadrilatéral (fig. 2.4(a)), il existe une infinité d'états d'équilibre. Cela s'étend intuitivement en 3D, à l'hexaèdre et au tétraèdre.

Une réponse à ce phénomène peut consister à ajouter des ressorts d'angles tels que décrits dans [106, 36] ou encore prendre un maillage symétrique. Cette solution ne semble pas être une réponse satisfaisante car elle est coûteuse en contraintes supplémentaires dans les modèles discrets, et ces ressorts rajoutent une difficulté supplémentaire dans la caractérisation mécanique du matériau de l'élément de maillage.

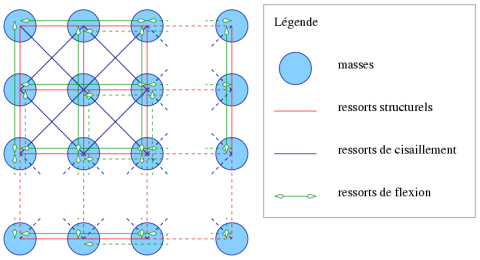
Un autre problème induit par la géométrie est le phénomène de comportement non identique dans toutes les directions, ou autrement dit d'anisotropie. Ainsi, Bourgui-



(a) Modèle de contrôle d'anisotropie de Bourguignon *et al.* [36]



(b) Modèle de muscle de Nedel *et al.* [133]



(c) Modèle de tissus de Provot [155]

FIG. 2.5.: Exemples de géométries permettant de contrôler le comportement anisotropique ou isotropique de l'objet simulé

gnon *et al.* [36] mettent en évidence que le maillage est facteur d'anisotropie dans un système masses-ressorts et se proposent de le contrôler en imposant un maillage directionnel (fig. 2.5(a)). De la même façon, Nedel *et al.* [133] imposent que leurs mailles soient dans la direction des fibres musculaires du biceps du bras qu'ils souhaitent simuler (fig. 2.5(b)). Dans le cadre de la simulation de textiles, Louchet *et al.* [116, 155] organisent leur modèle en quadrilatères avec des ressorts diagonaux afin de contrôler le cisaillement, et des ressorts entre les mailles afin de contrôler la flexion (fig. 2.5(c)).

Ce phénomène d'anisotropie peut s'expliquer de manière intuitive. En effet, la simulation des modèles heuristiques mécaniques se faisant suivant un parcours de graphe,

cela peut être assimilé à la propagation d'une onde, qui est la propagation de la perturbation dans le maillage. Cette propagation va être forcément influencée par la géométrie

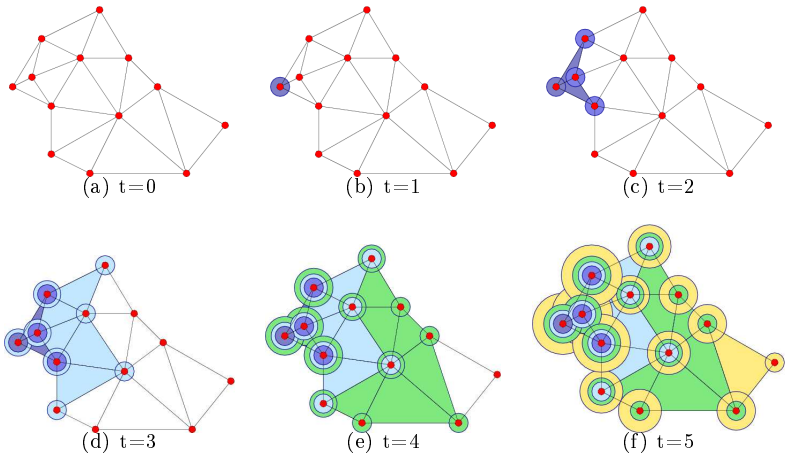


FIG. 2.6.: La géométrie donne la forme de la propagation de l'onde et le nombre d'itérations nécessaires à sa transmission

du maillage comme nous le montrons dans (fig. 2.6). La perturbation d'un point du maillage va se propager de proche en proche comme une onde, en activant les mailles connexes les unes après les autres. On peut dire que l'onde s'est propagée quand elle a atteint la distance maximum dans le graphe. Ainsi, le maillage influence non seulement la géométrie de cette propagation mais aussi le temps que met l'onde pour se propager dans l'objet simulé.

Par exemple, dans les méthodes de simulation mécanique par éléments finis, le critère de Courant-Friederich-Lewy donne (éq. 2.1), en fonction de la plus petite longueur du maillage l_{min} et de la plus grande vitesse de propagation dans le matériau v_{max}, la limite théorique de la valeur du pas de temps d'intégration Δt_c d'une telle simulation pour garantir la stabilité du système [64, 130] :

$$\Delta t_c \leq \frac{l_{min}}{v_{max}} \tag{2.1}$$

De la même façon, comme l'indique Meseure [125], en s'inspirant de la propagation des ondes, si on augmente le nombre d'éléments discrétisés, on accroît l'instabilité numérique due aux intégrations, et on doit en conséquence diminuer le pas de temps.

Nous pouvons ajouter que le maillage sur la frontière des objets, et qui influence le comportement, va jouer sur la complexité des détections de collisions, ainsi que sur l'apparition des autocollisions comme l'indiquent Teschner *et al.* [174]. Ainsi, plus la géométrie a une structure complexe, plus la détection des collisions sera longue.

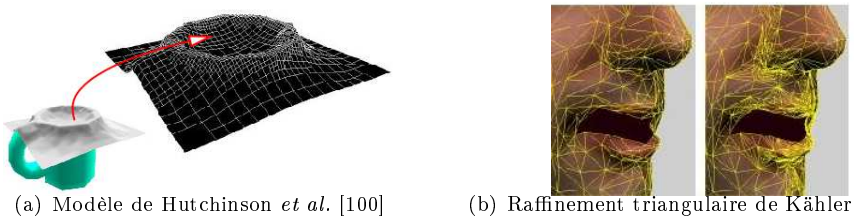
L'influence de la géométrie sur le comportement mécanique est aussi flagrante dans les modèles pour la chirurgie ou la fracture, où le maillage est facteur de définition des

lignes de coupe du tissu ainsi que l'explique clairement Paloc dans sa thèse [139], ou dans les modèles de collision qui vont déformer localement les objets. Une solution à ces problèmes est ainsi la recherche d'une homogénéité dans le maillage déformé, soit par réarrangement, soit par multirésolution.

2.1.2.2. Raffinement et multirésolution

En simulation chirurgicale, l'utilisation des algorithmes de raffinement des mailles [139] et de multirésolution [65, 82] est nécessaire pour atteindre un temps de calcul rapide avec une certaine précision.

Le raffinement consiste à remailler les zones d'intérêt de telle façon que les déformations ou les coupures s'y réalisant, puissent s'effectuer avec une bonne précision.



(a) Modèle de Hutchinson *et al.* [100] (b) Raffinement triangulaire de Kähler *et al.* [110]

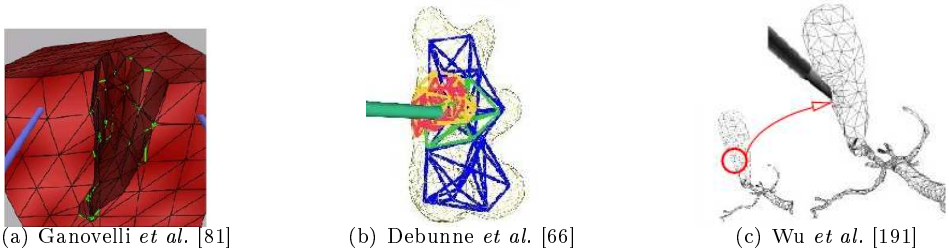
FIG. 2.7.: Exemples de modèles de raffinement de maillage

Ainsi, afin de pallier les problèmes dus à une géométrie trop grossière, Hutchinson *et al.* [100] proposent, dans leur simulation de drap par système masses-ressorts, le premier modèle d'adaptation du maillage qui consiste à raffiner le maillage au niveau des changements de courbures (fig. 2.7(a)). Cette technique leur permet de converger vers l'état d'équilibre de façon plus rapide qu'en se limitant à un maillage fixe qui nécessiterait une résolution importante pour un comportement identique. De la même façon, Kähler *et al.* [110] ont proposé un modèle de raffinement d'un maillage triangulaire en subdivisant de nouveau les triangles subissant les plus grandes déformations. Cette méthode a été utilisée pour le rendu de l'animation d'un modèle physique du visage (fig. 2.7(b)).

Ces deux modèles donnent un aperçu des méthodes existantes pour remailler la géométrie dans le cas surfacique. Dans le cas des modèles volumiques, nous pouvons citer de nombreux travaux faisant appel à des modèles multirésolution pour répondre aux problèmes induits par la discrétisation géométrique de l'objet.

Il est beaucoup plus aisé de rajouter des points que d'en supprimer. L'opération inverse au raffinement peut se faire par l'intermédiaire des ondelettes qui va consister à utiliser une fonction implicite et, par analyse fréquentielle, à obtenir des niveaux d'échantillonnage différents. C'est sur ce constat-ci que les méthodes de multirésolution se sont développées. Celles-ci consistent en l'emploi de plusieurs maillages superposés qui peuvent être activés ou non suivant si, localement, le changement de résolution est

nécessaire. On peut retrouver un état de l'art sur la multirésolution dans un article de Garland [82].



(a) Ganovelli *et al.* [81] (b) Debunne *et al.* [66] (c) Wu *et al.* [191]

FIG. 2.8.: Exemples de modèles multirésolution

Ganovelli *et al.* [80, 79, 81] utilisent un modèle basé sur la multirésolution enregistré dans un graphe acyclique (DAG) pour raffiner un maillage masses-ressorts le long de la ligne de coupe (fig. 2.8(a)). De la même façon, Debunne *et al.* [65] combinent un modèle mécanique avec une représentation en *octree*, le rendant ainsi adaptatif en temps et en espace. Ces mêmes auteurs développent un peu plus tard [66] un modèle hiérarchique tétraédrique adaptatif non structuré, toujours permettant de passer d'une représentation grossière à une représentation plus fine. Ce modèle de multirésolution volumique est repris par Capell *et al.* [41] avec une représentation hiérarchique de leur maillage fondée sur une subdivision volumique. Des schémas adaptatifs ont aussi été proposés pour obtenir des maillages progressifs avec une méthode par éléments finis non linéaire (fig. 2.8(c)) [191].

Les approches adaptatives proposées en 3D sont majoritairement basées sur une multirésolution construite *a priori*. Dans ce cas, cela pose un certain nombre de problèmes notamment au niveau de la flexibilité, puisque le nombre de maillages enregistrés implique une complexité mémoire à ne pas négliger, et le raffinement est fait *a priori* ce qui signifie qu'il n'est efficace que pour des déformations prévues. On pourrait avoir l'idée d'introduire ou d'enlever un raffinement local de manière interactive ou à la volée.

En approfondissant encore notre étude des difficultés qu'entraînent le maillage, on se rend compte que la résolution est un facteur important pour la précision. Ainsi, dans le cas de simulation de coupe par scalpel, que ce soit avec une technique de suppression des mailles sur le passage du scalpel comme dans le simulateur de chirurgie du foie de Picinbono, Delingette *et al.* [68, 145], ou bien avec une technique de duplication des points du maillage situés sur le chemin du scalpel comme utilisé par Basdogan *et al.* [16, 15] ou Boux de Casson *et al.* [43], il est nécessaire d'avoir une bonne résolution. D'autres solutions subdivisent les éléments des mailles amenés à se découper suivant la direction du scalpel [27]. Cette technique, qui consistait à découper de façon progressive, a été améliorée par la suite [28] car elle générait beaucoup trop de raffinement.

Ainsi, les solutions pour conserver une bonne précision des déformations ont été

la réadaptation des maillages basée sur des maillages de bonne résolution ou bien l'utilisation de méthodes de raffinement adapté.

2.1.3. Bilan des modèles géométriques

Dans cette section, nous avons cherché un modèle géométrique qui permette de représenter un volume 3D dont on connaît une segmentation des données à partir d'images scanner, et qui puisse être relié à des lois de la mécanique pour simuler les déplacements internes.

Nous avons d'abord cherché si les modèles géométriques continus simples pouvaient permettre de répondre à nos prérogatives de précision et de simulation basée sur la mécanique. Les modèles géométriques continus, de manière générale, sont intéressants pour obtenir un rendu réaliste en donnant une visualisation naturelle de la surface des objets ou d'un champ de vecteurs. Leur animation s'effectue soit par le changement de potentiels ou par le déplacement de leurs éléments structurels (points de contrôle ou squelette). Le lien aux lois mécaniques a été tenté pour les splines avec des approches lagrangiennes ou par satisfaction de contraintes (type volume constant). Ces modèles ont surtout été employés dans l'animation des surface et n'ont pas cherché à être précis dans le cas des volumes. Ainsi, nous avons conclu que leur représentation et l'apport de la mécanique passe forcément par une étude plus élémentaire avec une géométrie discrète.

Nous avons alors présenté les modèles géométriques discrets. Ceux-ci consistent à simplifier la géométrie de l'objet en le maillant à l'aide de formes géométriques élémentaires, et à les animer en y appliquant des lois mécaniques qui régissent le déplacement des nœuds de chacun des mailles (ou éléments). Nous avons montré que les modèles géométriques discrets nécessitent un choix pertinent de maillage car ce dernier influe sur le comportement mécanique, notamment au niveau de l'anisotropie, de la propagation des déformations, et des autocollisions. D'autre part, ces modèles nécessitent l'adaptation de leur maillage dans le cas de grandes déformations, ce qui est le cas dans notre étude où les poumons peuvent se déformer à plus de 25%.

Nous pouvons ajouter que le choix du maillage de manière générale (construction ou raffinement) nécessite aussi une réflexion importante pour prendre en compte des facteurs de qualité, et permettre une erreur numérique minimale dans les simulations mécaniques. Ces critères sont souvent géométriques [75]. Par exemple, il peut s'agir de contraindre le rapport entre le diamètre de l'élément (diamètre de la sphère circonscrite de l'élément) et le diamètre de la sphère inscrite dans l'élément à être le plus petit possible. D'autres critères de qualité pour les éléments finis s'intéressent aussi à la direction des mailles pour l'anisotropie et aux angles entre éléments [117], mais ce ne sont pas les seuls.

On pourrait ainsi s'orienter vers une reconstruction à partir de modèles génériques telle que proposée par Couteau et Payan [59], continuée par Luboz *et al.* [117] qui tente de construire un modèle de fémur d'un patient en éléments finis à partir d'un fémur générique et des données IRM du patient en tenant compte des critères de qualité. Ou encore, les études de Thomson et Toga sur la recherche de pathologies du cerveau par comparaison de certaines caractéristiques répertoriées dans un atlas [175].

Cependant, comme nous cherchons, dans un premier temps, à obtenir un modèle mécanique rapide et de précision, nous conservons pour l'instant les données brutes issues de la segmentation (voxels), quitte à utiliser ensuite un *marching tetrahedron* ou un *marching cube* [42, 115, 37] pour obtenir un volume et une surface plus lisse.

Ainsi, dans la suite, nous nous intéressons à la recherche d'un modèle de simulation mécanique de précision pour contrôler les maillages avec les lois mécaniques et les caractéristiques physiologiques du patient.

2.2. Mécanique des objets déformables

Dans le chapitre précédent, nous avons conclu que nous devions utiliser un modèle contrôlable directement par les paramètres mécaniques et dans la section précédente nous avons montré que le choix du modèle géométrique influe grandement sur la mécanique. Nous présentons ici quelques concepts mécaniques nécessaires à notre recherche de modèle de poumon. Nous rappelons en annexe (p. 181) les notions de mécanique discrète, sur lesquelles cette section se base en partie.

L'introduction du livre de Zinkiewicz [203], sur la méthode des éléments finis, présente clairement le lien entre la géométrie et la mécanique : « Les structures conventionnelles auxquelles l'ingénieur a affaire peuvent se présenter comme un assemblage d'éléments structuraux reliés les uns aux autres en un nombre fini de points nodaux. Si l'on connaît les relations efforts/déformations pour chacun des éléments, il est possible en utilisant diverses techniques bien connues en analyse des structures, d'en déduire les propriétés de la structure assemblée et d'en étudier le comportement. »

Dans un milieu continu élastique, le nombre véritable de points d'interconnexion est infini, et là réside la plus grande difficulté pour la résolution numérique. Le concept d'éléments finis, tel qu'il fut introduit par Turner *et al.* [178], tente de surpasser cette difficulté en supposant le milieu continu divisé en éléments reliés uniquement en un nombre fini de points nodaux, où sont supposées appliquées des forces fictives représentant la distribution des contraintes qui s'exercent effectivement aux frontières de l'élément ; ce qui ramène à un calcul de structure susceptible d'un traitement numérique.

Cela est justifié car *(i)* si à l'échelle moléculaire, la matière est discontinue, à notre échelle macroscopique, elle se présente comme un milieu continu entraînant ainsi, à cette échelle, la variation continue les propriétés physiques d'un point à un autre, *(ii)* d'autre part, même si la matière est physiquement ou chimiquement discontinue, à considérer un volume dont chacune des dimensions est grande par rapport aux dimensions des constituants élémentaires, il devient raisonnable de penser que ce volume puisse être modélisé comme un volume continu.

Ainsi, la mécanique des corps déformables [166] est basée sur le fait qu'un solide n'est jamais totalement rigide. Soumis à des forces, il se déforme, et ses déformations s'accompagnent de réactions du solide s'opposant aux forces agissantes. Les mécaniciens utilisent ainsi les théories de la mécanique des milieux continus (*MMC*) [78, 47, 52, 166, 84] pour modéliser le comportement des corps réels en considérant un volume suffisamment grand de matière.

Mathématiquement, cela se traduit en définissant à tout instant t, et en chaque point P_i de l'espace Ω, des champs de grandeurs physiques locales dérivables, relatives à ce milieu matériel. Ces champs sont des champs **scalaires** (masses volumiques, températures, ...), **vectoriels** (vitesse, accélérations, ...), ou bien, **tensoriels**[7] (tenseurs des déformations, tenseurs des contraintes, ...).

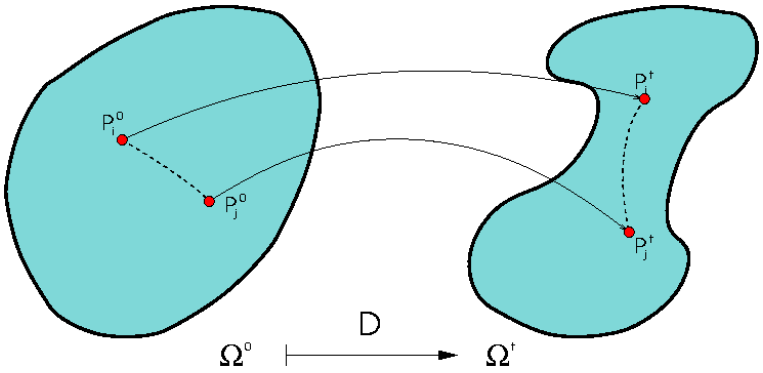


FIG. 2.9.: Déplacements de points voisins dans un milieu continu soumis à une déformation entre les instants 0 et t

Ainsi, un modèle de la MMC va décrire comment un point P_i s'est déplacé entre les instants 0 et t et comment son voisin P_j a évolué par rapport à lui sous l'influence des contraintes qui lui sont appliquées (fig. 2.9).

Ce modèle nécessite la connaissance des caractéristiques du matériau, de la géométrie de l'objet ainsi que des *charges* (ou conditions limites) exercées sur l'objet. La MMC décrit le lien (fig. 2.10) entre les forces (contraintes) et les déplacements en prenant en compte les caractéristiques du matériau et sa géométrie. Pour cela, elle se base sur 3 tenseurs : *(i)* des déplacements, *(ii)* des contraintes[8] (informant des forces internes rapportées à la surface de chaque élément), et *(iii)* des déformations[9] (informant des taux de déformations des dimensions de chaque élément).

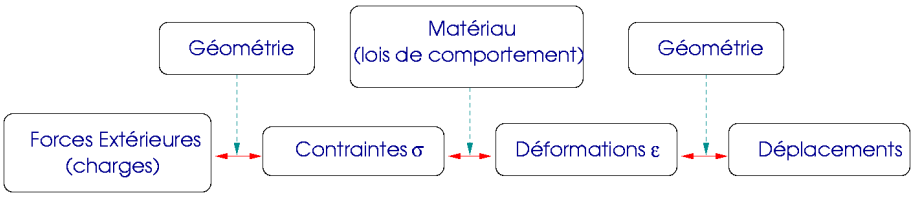


FIG. 2.10.: Relations entre les différentes quantités des modèles de la MMC

[7] Les tenseurs sont des objets mathématiques matriciels sur lesquels sont définis des opérations mathématiques propres au domaine de la physique. Une description exhaustive de ces algèbres est détaillée dans [83].
[8] en anglais *stress*
[9] en anglais *strain*

La théorie va ainsi tenter de relier les forces aux contraintes par la définition de la géométrie, les contraintes aux déplacements suivant le comportement du matériau et ses caractéristiques de déformation, d'élasticité, ...

La mise en relation des contraintes et des déformations met en évidence les lois de comportement du matériau. Ces comportements vont en se graduant suivant l'ampleur du chargement effectué. Cela va de *(i) la déformation élastique* (rapport linéaire entre la déformation et la contrainte avec retour à l'état initial lorsque la solicitation cesse), *(ii)* à *une déformation élasto-plastique* (le solide ne reprend pas tout à fait sa forme initiale après arrêt de la solicitation tout en continuant de suivre une loi de proportionalité), *(iii)* à *une déformation plastique* (la déformation persiste en partie lorsque la contrainte cesse, la courbe contrainte-déformation s'aplatit) *(iv)* à *la rupture* (la déformation est trop importante et provoque une destructuration du matériau), comme nous le montrons figure 2.11.

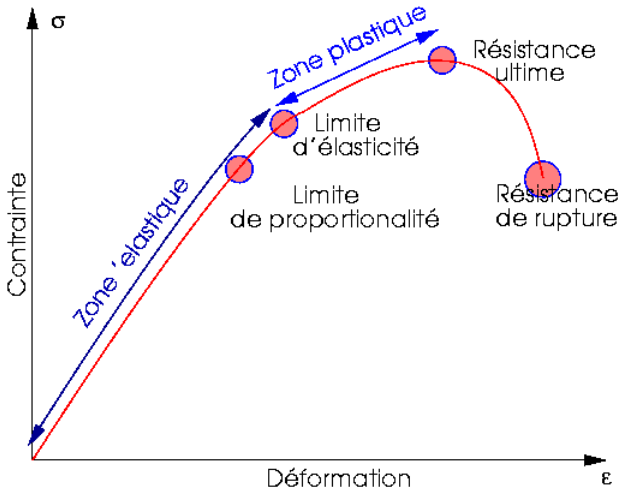


FIG. 2.11.: Courbe contrainte / déformation schématisant les différentes phases d'un matériau

Nous présentons ainsi, tout d'abord, les lois de comportements mettant en évidence un certain nombre de caractéristiques rhéologiques, et comment nous les mesurons. Ensuite, nous étudions les modèles de résolution mécanique qui ont été développés, toujours dans le but de trouver celui permettant de décrire un poumon élastique homogène isotrope paramétrable directement par les données physiologiques.

Les modèles présentés ici ne prennent pas en compte l'influence de la température, ni de l'anisotropie et bien d'autres phénomènes tels que nous pouvons les voir mentionnés dans [52, 84], ou bien dans les ouvrages académiques [166, 47, 54].

2.2.1. Caractéristiques des matériaux et lois de comportements

La rhéologie est une partie de la mécanique qui étudie la plasticité, l'élasticité, la viscosité et la fluidité caractéristiques des corps déformables. Elle permet de définir un certain nombre de constantes décrivant le comportement des matériaux. Ces constantes lient ainsi dans des lois de comportements, les déformations affligées aux contraintes obtenues et vice-versa. Par exemple, comme nous l'avons montré au chapitre précédent (fig. 1.17(a), p. 31) sur un poumon d'homme sain et d'homme emphysémateux, il est possible de caractériser les contraintes entrainées par les déformations infligées.

L'intérêt d'une telle modélisation des lois de comportements est la recherche d'un modèle générique permettant de simuler tout type de matériau par simple modification des caractéristiques.

Ces caractéristiques peuvent être extraites des paramètres résultants d'expériences consistant à déformer un élément de matériau et à en mesurer des invariants rhéologiques. Parmi les expériences de déformations peuvent être distinguées : *(i) l'allongement et la compression* résultant de forces de traction ou de compression, *(ii) la flexion* provenant d'un couple fléchissant, *(iii) le glissement* émanant d'un couple de cisaillement, *(iv) la compressibilité* définie par l'application d'une pression uniforme en surface, *(v) la torsion* consistant en l'application de deux moments opposés.

À ces déformations peuvent être associés, dans la limite des comportement simples et facilement reproductibles, des coefficients caractérisant les propriétés mécaniques du solide et reliant les déformations aux forces agissantes.

Dans le cas des matériaux élastiques homogènes isotropes, deux caractéristiques seulement permettent de définir le comportement : le *coefficient de Poisson* et le *module de Young*[10]. Ces paramètres sont définis dans un domaine de faibles déformations et sont indépendants de la dimension de l'objet choisi. Ainsi, un élément de l'objet, quelque soit sa géométrie et sa dimension, aura toujours les mêmes caractéristiques que l'objet lui-même.

Outre le module de Young ou le coefficient de Poisson, d'autres associations de paramètres peuvent définir ces matériaux. On pourra ainsi associer le module de Young et le *coefficient de cisaillement* ou bien le module de Young et le *coefficient de compressibilité* afin de décrire des matériaux élastiques isotropes.

Nous laissons de côté pour le moment la flexion et la torsion qui seront utiles pour de grandes déformations, et nous nous restreignons pour l'instant aux petites déformations. Nous recensons, dans la partie suivante, les différents paramètres permettant de caractériser les lois de comportements.

2.2.1.1. Caractéristiques des matériaux élastiques homogènes isotropes

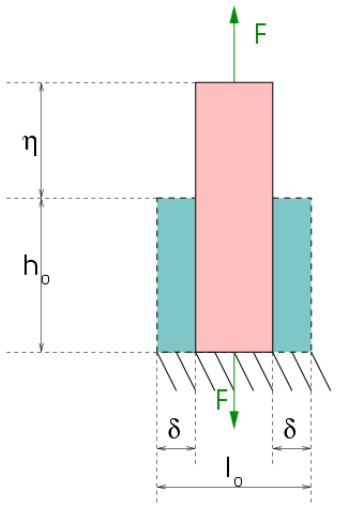
Nous nous plaçons ici dans une coupe d'une barre cylindrique de dimensions $l_0 \times h_0$, étirée de η suivant la hauteur avec l_0 le diamètre du cylindre, et h_0 la hauteur du cylindre. Ce qui induit une force $\overrightarrow{F}$ orthogonale à la surface $S_0 = \Pi l_0^2/4$, et une contraction latérale de -2δ (fig. 2.12).

[10] qui peuvent être aussi exprimés par les deux *coefficients de Lamé*.

On peut alors définir la contrainte σ et la déformation ϵ par :

$$\begin{cases} \sigma & = & \frac{F}{S_0} \\ \epsilon & = & \frac{\eta}{h_0} \end{cases} \tag{2.2}$$

Module de Young E



Une barre cylindrique de hauteur h_0 et de diamètre l_0 (surface de la base S_0) à la base fixée dans son plan est étirée de η, ce qui engendre une contrainte F en surface qui s'oppose à l'étirement et une déformation δ orthogonale à l'étirement.

FIG. 2.12.: Test de traction/compression

Le module de Young (E) définit l'élasticité de l'objet. C'est le rapport entre la contrainte σ et la déformation ϵ dans le cas d'un étirement ou d'une compression (fig. 2.12) :

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon} = \frac{F}{S} \times \frac{h_0}{\eta} \tag{2.3}$$

Dans le cas de matériaux élastiques homogènes isotropes, le module de Young est constant dans sa phase élastique (fig. 2.11). Pour les poumons, comme nous l'avons montré au chapitre précédent, ce coefficient peut s'approximer comme étant constant par morceau. Pour donner une idée de ces grandeurs, nous avons illustré quelques modules de Young dans la table 2.1.

Coefficient de Poisson ν

Le coefficient de Poisson (ν) représente le taux de déformation tangent à l'élongation ou la compression. On le mesure comme pour le module de Young, par des tests de tractions pour de faibles déformations (fig. 2.12). Ce coefficient représente ainsi le

Catégories	Matériaux	Module de Young en MPa
Métaux		
	Aluminium	69 000
	Cuivre	124 000
	Fer	196 000
Verres, céramiques		
	Béton	27 000
	Diamant	1 000 000
Bois		
	Chêne	12 000
	Bambou	20 000
Polymères Fibres		
	Caoutchouc	700 à 4 000
	Nylon	2 000 à 4 000
	Fibre de carbone	190 000
Biomatériaux		
	Poumon	$0{,}39 \times 10^{-3}$
	Collagène	6
	Cartilage	24
	Vertèbre lombaire	160
	Vertèbre cervicale	230
	Cheveux	10 000
	Fémur	17 200
	Humérus	17 200
	Tibia	18 100
	Radius	18 200
	Soie d'araignée	60 000

TAB. 2.1.: Exemples de valeurs du module de Young (d'après wikipédia)

rapport entre la déformation orthogonale à l'élongation (2δ) et la déformation due à l'élongation :

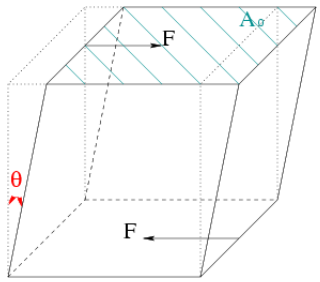
$$\nu = -\frac{2\delta}{l_0} \times \frac{h_0}{\eta} \tag{2.4}$$

Ce coefficient, sans unité, est généralement une valeur constante comprise entre -1 et 1. Si ν est positif, le matériau s'amincit suivant le plan orthogonal à l'étirement, ou lors d'une compression il s'épaissit suivant ce même plan. Ainsi, les métaux ont une valeur comprise autour de $0,69$. Au contraire, s'il est négatif, le matériau a tendance à s'élargir lorsqu'il est étiré. Cela se constate dans des matériaux composites ou dans l'origami[11]. Enfin, si $\nu = 0,5$, cela signifie qu'il y a conservation du volume. La plupart des organes et des matériaux mous organiques composés majoritairement d'eau sont souvent considérés comme incompressibles. C'est pour cela que leur ν est proche de cette valeur, compris entre $0,2$ et $0,5$. On notera la valeur donnée par Owen [138] pour

[11] art du pliage

les poumons qu'il situe autour de $0,3$ et que nous retiendrons pour nos simulations.

Coefficient de cisaillement G



L'élément est soumis à deux forces surfaciques F appliquées chacune sur deux faces opposées et dans deux sens opposés, engendrant ainsi une déviation d'angle θ.

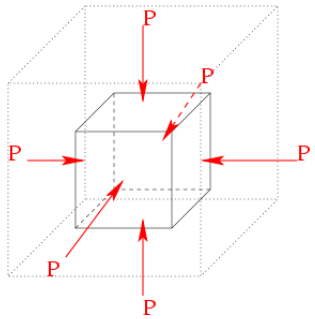
FIG. 2.13.: Test de cisaillement

Sous l'effet d'une contrainte, il est possible que le matériau réagisse en se déformant dans le plan orthogonal à cette contrainte, il s'agit alors d'un *cisaillement*. Sa caractéristique se mesure sur un élément cubique (fig. 2.13). On sélectionne tout d'abord deux plans opposés. Ensuite, on applique une force tangentielle dans un plan, tandis que, dans l'autre, on applique une force de même direction (donc tangentielle aussi) mais de sens opposée.

Cette mesure s'effectue alors en reliant la contrainte de cission τ (rapport entre la force F appliquée en surface et la surface A_0 du plan) et la déformation de l'angle θ :

$$\tau = G\gamma \text{ avec } \begin{cases} \tau & = & F/A_0 \\ \gamma & = & \tan\theta \end{cases} \tag{2.5}$$

Coefficient de compressibilité isostatique K



Un élément est soumis à une pression P uniformément répartie en sa surface, engendrant ainsi sa compression.

FIG. 2.14.: Test de compression

Une compression isostatique est l'application d'une pression isotrope (fig. 2.14). Le coefficient de compressibilité relie la variation de volume relative ΔV à la variation de pression, ΔP :

$$\Delta P = -K \frac{\Delta V}{V_0} \tag{2.6}$$

Liens entre ces coefficients

Dans le cas de matériaux élastiques homogènes isotropes, ces coefficients sont dépendants les uns des autres et finalement seulement 3 d'entre eux seraient suffisants pour caractériser le matériau [52]. Les relations suivantes apparaissent alors :

$$E = \frac{9KG}{G+3K} = 3K\left(1-2\nu\right) = 2G\left(1+\nu\right) \tag{2.7}$$

2.2.1.2. Loi des matériaux élastiques : loi de Hooke

Connaissant ces caractéristiques, nous pouvons désormais décrire la loi de comportement d'un matériau élastique, appelée loi de *Hooke*.

Une approximation linéaire bien connue de ce modèle élastique est le modèle du ressort de Hooke et de la force élastique engendrée par une déformation de ce ressort. Soient deux points P_1 et P_2 reliés par une relation élastique du type masses-ressorts.

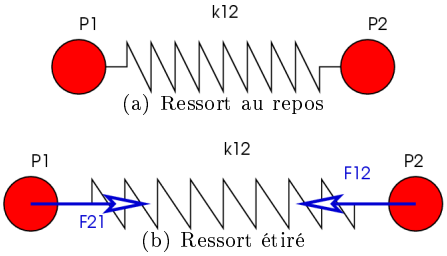


FIG. 2.15.: Forces élastiques

Il existe alors une constante de raideur k_{12}, caractérisant l'élasticité du ressort, c'est-à-dire le fait que les deux masses aient tendance à se repositionner à leur distance de repos l_{12}^0. Cela se traduit par une force due à l'écartement de ces deux masses (fig. 2.15) :

$$\overrightarrow{F}_{ressort(1,2)} = k_{12}\left(\|P_2 - P_1\| - l_{12}^0\right)\frac{\overrightarrow{P_1P_2}}{\|\overrightarrow{P_1P_2}\|} \tag{2.8}$$

La première approximation est ainsi de considérer que le matériau est homogènement élastique dans toutes les directions de l'espace. Ainsi, en supposant qu'il y ait des ressorts entre toutes les directions de l'espace, on peut écrire le système de manière matricielle mettant en relation le vecteur force $[F]$ d'un élément de l'espace avec le

vecteur déplacements des nœuds de ce même élément $[U]$ et la matrice de raideurs $[K]$:

$$[F] = [K]\,[U] \tag{2.9}$$

La matrice $[K]$ contient les matrices 3×3 de raideurs, $k_{i,j}$, qui existent entre les nœuds i et j pour chacune des directions x, y et z de l'espace. Les vecteurs $[F]$ et $[U]$ contiennent 3×3 valeurs correspondant aux forces et déplacements d'une direction relativement à une autre (x avec x, x avec y, x avec z, y avec x, ...). Dans le cas d'un matériau isotrope, les directions x avec y et y avec x sont équivalentes, ce qui ne laisse plus que 6 valeurs dans les vecteurs. Ainsi, la matrice de rigidité $[K]$ doit être une matrice de $6 \times 6 = 36$ paramètres, contenant les relations linéaires de chacun des ressorts dans chacune des directions.

En résumé, dans le cas d'un matériau isotrope, en considérant toutes les symétries possibles, il est possible de déduire de ces 36 paramètres, 2 coefficients indépendants, λ et μ (dits de Lamé). En passant des déplacements aux déformations, on obtient ainsi des relations 2.9 et 2.2 (p. 57) la relation entre les contraintes et déformations :

$$[\sigma] = \lambda trace\,([\epsilon])\,I + 2\mu\,[\epsilon] \tag{2.10}$$

La matrice de rigidité qui reflète la loi de comportement et fait passer des déformations aux contraintes est du type :

$$[D] = \begin{bmatrix} \lambda+2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda+2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda+2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \tag{2.11}$$

et il s'ensuit,

$$[\sigma] = [D]\,[\epsilon] \tag{2.12}$$

En écriture matricielle, les déformations $[\epsilon]\,(X)$ et les contraintes $[\sigma]$ s'écrivent alors sous la forme de vecteurs : $[\epsilon]\,(X) = \begin{pmatrix} \epsilon_x & \epsilon_y & \epsilon_z & \gamma_{xy} & \gamma_{yz} & \gamma_{xz} \end{pmatrix}^t$, avec ϵ_i, la compression/élongation suivant l'axe i et γ_{ij}, le cisaillement angulaire entre les axes i et j, pour l'élément X.

On peut alors lier les coefficients de Lamé au module de Young et au coefficient de Poisson :

$$\begin{cases} \mu & = & \frac{E}{2(1+\nu)} \\ \lambda & = & \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \end{cases} \tag{2.13}$$

Par conséquent, deux cheminements de résolution sont possibles : calculer des forces à partir des déplacements, ou calculer des déplacements à partir des forces. L'inversion des matrices que ces calculs engendrent est en général réalisée par approximation grâce à la méthode par éléments finis ou bien grâce à des méthodes heuristiques consistant à propager les contraintes de proche en proche. D'autres méthodes simplifient le problème en considérant que l'objet peut se résumer à son maillage seul, c'est-à-dire aux nœuds et aux liens entre ces nœuds, et que c'est sur ces entités que les forces vont s'exercer.

2.2.2. Méthodes de résolution : continu *versus* simplifié.

Les modèles de simulation des déformations basés sur la mécanique se répartissent suivant deux approches : une approche tentant de reprendre fidèlement la théorie de la MMC, et implantant les méthodes de résolution par éléments finis (*MEF*), et des méthodes tentant d'accélérer le temps de calcul en simplifiant au maximum le modèle MMC et en se ramenant à la mécanique classique du point.

Terzopoulos *et al.* [172] sont certainement les pionniers de l'introduction des lois physiques dans les modèles d'animation. Ils ont ainsi simulé des matériaux déformables en incluant les effets de l'élasticité, la viscoélasticité, la plasticité et la fracture. Même s'ils mentionnaient que la FFD (cf. p. 43) ou la MEF pouvaient indifféremment être utilisées, il semble qu'ils aient préféré les FFD.

Plus tard, Gourret *et al.* [89] préconisent les MEF pour simuler une main humaine manipulant une balle avec des lois linéaires élastiques. Depuis, la MEF est beaucoup utilisée pour simuler les objets volumiques déformables.

Nous allons désormais étudier les avantages et inconvénients de chacun des deux modèles de résolution MEF et modèles discrets.

2.2.2.1. Méthode de résolution par éléments finis (MEF)

Le temps et l'espace mémoire nécessaire dûs à la représentation matricielle des MEF est un problème majeur. On peut alors s'appuyer sur des approximations linéaires qui procurent des hypothèses intéressantes sur les déformations qui peuvent ainsi être décomposées en somme de déformations indépendantes qui se produisent dans les trois directions de l'espace. D'autre part, tout déplacement produit une déformation proportionnelle. Cela permet alors une simplification des calculs par décomposition linéaire.

Cotin *et al.* [57] stockent ainsi, pour chaque déplacement d'un point dans toutes les directions séparément, quelle va être la déformation de tout l'objet. Ils filtrent les informations en éliminant les déplacements trop petits afin d'économiser de la mémoire. Ils obtiennent ainsi pour leur modèle de foie composé de 940 nœuds, une réduction de l'occupation mémoire de 60%, mais aucune indication sur l'erreur du modèle n'a été indiquée.

Bro-Nielsen [136] et Cotin [58] ont chacun réussi à simuler des maillages de l'ordre de 250 nœuds avec une résolution dynamique de 1500 éléments pour une résolution quasi-statique qui consiste à rechercher les états d'équilibre entre chaque pas de temps. Les temps de pré-calculs et la place mémoire utilisée sont encore très importants mais ces méthodes ont permis de réaliser des animations temps réel.

En plus d'être basées sur l'élasticité linéaire, ces méthodes sont en quasi-statique, ce qui ne permet pas d'avoir de précision en dynamique. De plus, elles restent imprécises pour les grands déplacements et ne sont pas facilement adaptables pour des changements de topologie ou dans le cas de l'application de nouvelles contraintes.

Une autre optimisation des MEF a été de considérer seulement les éléments frontières de l'objet, c'est la méthode des *Boundary Element Model* (BEM) [103]. Cette méthode se base sur l'équation de Navier obtenue en intégrant l'équation de conservation

de l'énergie en combinaison avec les équations constitutives des matériaux continus, isotropes, élastiques et linéaires. La frontière du système est découpée en éléments disjoints à l'intérieur desquels le champ de déplacements est interpolé linéairement en fonction des déplacements des nœuds. C'est une MEF améliorée qui n'a pas de contrainte externe appliquée ailleurs qu'en surface de l'objet.

Cette méthode est mathématiquement complexe mais reste employable en temps réel car le nombre d'équations est réduit aux équations en surface et qu'un ensemble de pré-calculs peut être envisagé pour être combinés en temps réel ensuite.

Cependant, il n'est a priori pas possible de l'adapter pour des comportements non linéaires. Enfin les BEM ne sont pas adaptés pour le changement de topologie du fait qu'elles ne décrivent pas l'intérieur du modèle.

Un autre modèle, basé sur les MEF explicites avec des éléments tétraédriques linéaires, a été proposé sous le nom de *Masses Tenseurs* par Delingette *et al.* [68]. L'idée consiste à extraire pour chaque calcul en chaque point les termes utilisés plusieurs fois permettant ainsi d'éviter de recalculer ces mêmes termes.

À partir de la discrétisation du champ des déplacements sur un élément, on peut exprimer l'énergie de déformation de l'élément en fonction des déplacements de ses sommets, puis dériver cette expression pour obtenir la force élastique exercée sur chacun des sommets. En élasticité linéaire, cette force s'exprime en fonction de la contribution du nœud dans tous les tétraèdres adjacents définissant ainsi des tenseurs d'élasticité ne dépendant que de la géométrie du maillage au repos et des propriétés mécaniques. Ensuite la force est réintroduite dans une équation dynamique locale pour calculer le champ des déplacements à l'instant suivant, l'algorithme étant répété de façon itérative.

Comme toutes les opérations sont locales, il est possible d'y effectuer des changements de topologie. L'optimisation des calculs peut être effectuée quels que soient les tenseurs utilisés et il est ainsi possible d'utiliser des masses-tenseurs linéaires comme non linéaires.

Ainsi, Picinbono *et al.* [146] étendent les masses-tenseurs au modèle d'élasticité de St Venant-Kirchhoff qui intègre la non-linéarité géométrique mais conserve la linéarité mécanique. Ce modèle a conduit à un temps de calcul 5 fois supérieur à celui de l'algorithme des masses-tenseurs linéaires mais il est resté suffisamment rapide pour autoriser des simulations temps réel sur des objets relativement complexes.

Ce modèle reste proche des modèles masses-ressorts excepté qu'il se base sur une représentation continue de la matière et qui n'est pas dépendante de la géométrie.

Un point négatif sur ce modèle peut se trouver en grande déformation, car la plupart des coefficients sont précalculés pour des petites déformations, obligeant dans le cas de grandes déformations à les recalculer avec leur assemblage difficile.

Ainsi, si le temps de calcul a tendance à s'améliorer et si leur formulation est propre, cette représentation a le désavantage majeur d'être lourde en précalculs, elle doit aussi être réinitialisée à chaque changement de topologie ou dès qu'un nouveau contact s'effectue. Or pour le poumon, les contacts sont nombreux, et on peut être vite amené à se placer en grandes déformations avec des changements de topologie.

2.2.2.2. Modèles discrets

En parallèle et très proche des BEM, dans le sens où l'objet est partiellement maillé à l'intérieur, Mendosa *et al.* [124] utilisent les *Long Element Model* (LEM). Ce modèle consiste à considérer l'objet comme un ensemble de colonnes suivant le principe de Pascal et la conservation du volume. Il a l'avantage de prendre en compte des grandeurs telles que la pression, la densité de matière ainsi que le volume. Aucun précalcul n'est nécessaire. Mais la difficulté est que ce modèle reste empirique quant à l'intégration des paramètres mécaniques [76]. C'est justement le principal problème des modèles discrets.

Un modèle simplifié consiste, en effet, à prendre une représentation géométrique et à y intégrer des comportements mécaniques. Comme nous l'avons vu dans la partie géométrique, le problème est que cette représentation géométrique va régir en partie le comportement mécanique. De plus, les modèles ne sont pas aisément reliables directement à la MMC, bien qu'ils s'en inspirent. De ce fait, leur paramétrage s'effectue jusqu'alors de manière empirique.

Dans la partie géométrique, nous avons présenté les modèles géométriques sans décrire ceux intégrants directement les lois mécaniques. Parmi les modèles discrets, nous pouvons ainsi présenter les systèmes de particules et les modèles de masses-ressorts.

Systèmes de particules

Les modèles à base de particules sont une représentation se fondant sur des notions de physique. Au début, ces systèmes ont surtout été utilisés pour les simulations visuelles de phénomènes d'explosions ou de feux d'artifices ou pour les modélisations d'objets à frontières non définies (nuages, brume, gaz ...).

Les particules sont des masses ponctuelles générant un champ de potentiel qui agit sur leur voisines. Ainsi chaque particule génère des forces et subit, du monde extérieur, des forces de ses voisines. Ces forces d'interaction peuvent maintenir la cohésion de l'objet, suivant la nature de l'objet à modéliser. Elles ont un caractère attractif si les particules sont éloignées et répulsif si elles sont trop proches.

Des forces issues de la cristallographie ont été appliquées à un système de particules [168]. Ces forces dérivent d'un potentiel. Bien que conservatives, elles peuvent néanmoins engendrer des oscillations dans le système. Pour remédier à ce problème, des forces de frottement, ou d'autres types, ont été appliquées. Les modèles engendrés sont assez fidèles aux comportements physiques. Mais la complexité est élevée ($O(n^2)$ avec n le nombre de particules). Afin de pallier le problème de calcul et de diminuer le nombre de particules en interaction, une représentation multicouche a été proposée [105, 102].

Le système de particules a l'avantage d'être fondé sur les lois de la dynamique. De ce fait, la facilité d'interaction des particules entre elles et avec l'extérieur du système est indéniable. Mais le lien avec les paramètres de la MMC reste là encore très empirique.

Systèmes masses-ressorts

Les systèmes masses-ressorts sont souvent utilisés en animation pour leur simplicité d'implantation et leur mise en œuvre rapide. Dans un récent article, Meier *et al.* [123] établissent que les systèmes masses-ressorts, avec les BEM sont les modèles les mieux adaptés pour les simulateurs chirurgicaux car ils permettent un comportement réaliste tout en apportant des simulations rapides.

On les retrouve notamment dans l'animation de surfaces déformables telles que les textiles [118, 119, 155], dans la simulation d'animaux longiformes [128], ou d'objets volumiques organiques mous tels que les muscles des bras, du visage ou encore l'abdomen [133, 7, 44, 154, 126].

Notons que leur formulation la plus simple est la formulation linéaire dérivée de la loi de Hooke. Ainsi le ressort est caractérisé en linéaire par sa raideur K.

Boux de Casson dans [63] a introduit une raideur non linéaire pour simuler des grandes déformations pour la chirurgie du foie.

Toute la difficulté de ces systèmes est en effet de bien agencer les systèmes de masses et de ressorts pour obtenir la géométrie de l'objet (maillage), et de bien définir les raideurs pour simuler le comportement souhaité.

Des matériaux hétérogènes peuvent être modélisés comme dans la proposition de Terzopoulos et Waters [173] sur un modèle d'animation réaliste de visage à l'aide d'un modèle hétérogène, multicouches de ressorts amortis. Dans les simulateurs chirurgicaux, les changements de topologie dus à la coupe et donc l'adaptation du maillage et des raideurs et la répartition des masses du système en temps réel [139]. Le contrôle du volume dans le cas des organes a amené plusieurs recherches telles que la proposition de Promayon [152] ou une proposition basée sur les contraintes lagrangiennes de Platt et Barr [148]. Thalmann et Nedel propose un modèle de muscle basé sur une surface masses-ressorts orientés suivant les fibres musculaires et introduisent des ressorts d'angles pour conserver une courbure en surface [133]. Ce modèle est utilisé dans un système multicouche (os, muscle, graisse) [7]. Les problèmes d'hyperélasticité ou d'autocollision dans le cas des textiles ont eu des solutions élégantes [155].

Tous ces systèmes restent cependant difficilement contrôlables et entièrement liés au maillage, et de ce fait, certains auteurs [35, 88] pensent même qu'ils ne peuvent pas correctement simuler les objets organiques. Ces mêmes auteurs proposent pourtant des solutions. Bourguignon introduit de l'anistropie [35] en donnant les mêmes raideurs pour les ressorts d'une même direction caractéristique, comme on l'a vu précédemment. Il utilise deux types de ressorts : des ressorts linéaires tels que décrit par Witkin [187], et des ressorts d'angles pour contrôler le cisaillement.

Pour ce qui est du paramétrage, des algorithmes génétiques ou de recuit simulé se basant sur les solutions d'essais mécaniques permettent d'obtenir les raideurs individuelles du maillage [70, 116]. De la même façon, Bianchi recherche la topologie et les paramètres d'un système masses-ressorts en se référant à des comportements connus en éléments finis [25, 26]. L'idée de ces modèles est de se placer dans un maillage à topologie donnée, et d'initialiser les raideurs de façon arbitraire. Ensuite, pour trouver les bonnes raideurs, le processus consiste à effectuer des expériences de référence dont on connaît les solutions par l'intermédiaire d'une simulation par éléments finis, par

exemple comme le font Bianchi *et al.* ou Deussen *et al.* . Une fonction de coût reflétant une mesure d'erreur par rapport aux références permet alors de savoir si le système est bien paramétré pour l'ensemble des expériences. Ainsi, le calcul du coût est effectué, en modifiant de façon aléatoire les ressorts qui amènent une erreur coûteuse, jusqu'à ce que l'erreur soit dans une tolérance définie.

Suivant le nombre de ressorts et le nombre d'expériences de références, ce processus peut être coûteux, et il semble plus naturel de faire une étude théorique pour obtenir les paramètres directement.

Cependant, on peut supposer que si l'on arrive à déterminer les paramètres pour un maillage donné, ceux-ci restent corrects même lorsque l'on déforme légèrement ce maillage (pour l'adapter au patient par exemple et obtenir des modèles génériques).

Allen Van Gelder [88] doit être le premier à poser clairement la question du paramétrage des raideurs avec les paramètres mécaniques et à donner des pistes évoluées sur le rapprochement mécanique des milieux continu/modèles masses-ressorts. Il démontre qu'il n'est en général pas possible de simuler un objet élastique quelconque avec les systèmes masses-ressorts. Cependant, il trouve, dans le cas de petites déformations, une formulation reliant les raideurs aux paramètres rhéologiques. Son modèle incorpore un coefficient de Poisson ν et un module de Young « 2D » E_2. Il a bien réussi à obtenir une animation qui semble cohérente sous certaines restrictions.

Son modèle a été repris dans divers simulateurs chirurgicaux [139, 144], dans l'animation de peau d'animaux [185]. Dans [39], le modèle est utilisé et amène à la conclusion que la recherche de paramètrage des systèmes masses-ressorts par les paramètres biomécaniques (*i.e.* rhéologique) est une voie qu'il faut explorer. Cette voie est d'ailleurs suivie par Maciel [120] qui reprend l'idée mais avec des ressorts paramétrés différemment, et qui souhaite comparer les ressorts 3D de Van Gelder dans un système moléculaire de Jansson [104].

2.3. Bilan : choix des systèmes masses-ressorts

Dans le premier chapitre, nous avons montré la nécessité d'un modèle volumique de simulation des déformations dans le poumon directement reliable aux caractéristiques géométriques et physiologiques des patients. C'est pour cela que, dans ce chapitre, nous avons cherché un modèle d'objet déformable pouvant répondre à ces prérogatives. Pour cela, nous avons d'abord exploré les représentations géométriques existantes et leur rapport avec les lois de la mécanique. Dans cette étude, nous avons mis en évidence que, pour contrôler mécaniquement la géométrie d'un volume, il était nécessaire de choisir un maillage approprié pour imposer ou non une isotropie et prendre en compte les grandes déformations.

Nous nous sommes alors intéressés aux objets déformables et à leur caractérisation rhéologique. Du côté théorique, la MMC apporte beaucoup d'outils, une formalisation précise des problèmes de déformation et permet le calcul précis des déplacements dans un matériau continu. Pour ce qui est des caractéristiques des matériaux, nous avons mis en évidence le module de Young, le coefficient de Poisson, ainsi que les coefficients de cisaillement et de compressibilité, qui peuvent se mesurer à l'aide de 3 types

d'expériences. Nous avons pu constater que, pour des matériaux élastiques linéaires, ces coefficients sont tous liés. Dans une première approximation, les modèles de poumons peuvent ainsi s'inspirer de l'application directe des lois de la mécanique, avec pour paramètre, la compliance. Nous avons montré que la formulation par éléments finis des lois de comportement de tels matériaux prend directement en compte ces caractéristiques, mais nous avons constaté que les modèles discrets pouvaient être une alternative.

Nous avons ainsi étudié, plus en détail, les différents modèles de simulation de comportement des objets déformables afin de déterminer ce qui semblait le plus judicieux pour nous. Parmi ces modèles, nous avons exploré les modèles directement issus de la MMC avec résolution par éléments finis. Ces méthodes, bien que directement en rapport avec la MMC et pouvant prendre en compte directement les caractéristiques des matériaux, nécessitent une conception de calcul matriciel lourde à mettre en place. Elles ont besoin d'une place mémoire importante, ainsi que de la définition *a priori* des contraintes en quasi-statique, ce qui rend difficile l'introduction de nouvelles contraintes pendant la résolution (*i.e.* interaction avec un outil, contact, découpes, résection, ...). Elles nécessitent la connaissance *a priori* des déformations auxquelles le modèle aura à faire face pour employer le bon modèle de calcul (petites ou grandes déformations) qui n'est utilisable que pour un domaine donné. Nous avons pu constater le nombre important de recherches effectuées actuellement dans ce domaine pour l'accélération des calculs et l'apport des grands déplacements dans un but de simuler des découpes et des déformations volumiques dans des simulateurs chirurgicaux.

Nous avons aussi exploré les modèles discrets tels que les systèmes masses-ressorts. Nous avons pu noter leur aspect intuitif. Leur implantation aisée consiste à appliquer une loi mécanique simple sur un maillage donné. Ceci nous permet de visualiser simplement les volumes. Nous avons aussi pu mettre en lumière que ces modèles pouvaient décrire des objets volumiques complexes et qu'il existe des méthodes relativement simples de paramétrage.

Face à la complexité des FEM, les masses-ressorts ont ainsi semblé être le meilleur choix pour obtenir des simulations rapides et paramétrables directement avec les caractéristiques de la rhéologie grâce à un modèle tel que proposé par Van Gelder [88].

Notre choix fait, nous devons maintenant garantir la précision en vérifiant dans quel domaine de déformations le paramétrage reste précis. C'est ce que nous explorons dans la suite.

3. Paramétrage des systèmes masses-ressorts

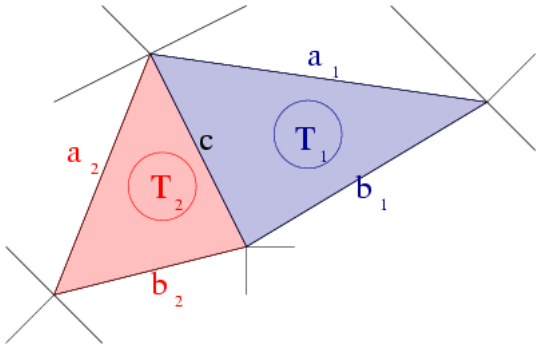
Nous proposons, dans ce chapitre, d'introduire un paramétrage des systèmes masses-ressorts pour y incorporer les caractéristiques en concordance avec la rhéologie.

Parmi les solutions présentées dans l'état de l'art, le modèle de Allen Van Gelder [88] est celui qui ferait le mieux lien entre les modèles continus et les modèles discrets, en 2D. Nous étudions dans un premier temps ce modèle et montrons que cette approche n'est malheureusement pas toujours juste. Nous définissons, par conséquent, un nouveau modèle 2D basé sur des éléments masses-ressorts rectangulaires. Nous l'étendons ensuite au cas 3D.

3.1. Approche de Allen Van Gelder

3.1.1. Définition

Allen Van Gelder (VG) propose, dans le cas de petites déformations, une formulation reliant les raideurs des ressorts d'un maillage triangulaire aux paramètres rhéologiques [88].



Allen Van Gelder met en relation la raideur des côtés d'un maillage triangulaire d'épaisseur z_0 négligeable relativement à l'aire des triangles connexes et aux dimensions des autres côtés. Ainsi, la raideur du côté de longueur c est dépendante des aires des triangles T_1 et T_2 qui lui sont connexes.

FIG. 3.1.: Raideurs dépendantes des triangles connexes dans le modèle de VG

Il se base sur un maillage constitué de membranes triangulaires d'épaisseur z_0 connue, et en s'inspirant des lois de la mécanique des milieux continus pour un matériau de Hooke, il arrive à caractériser la raideur de chacun des ressorts en fonction de leur longueur, des aires des triangles qui lui sont connexes et des longueurs des autres

côtés de ces triangles. De plus, il incorpore le coefficient de Poisson ν et le module de Young surfacique, E_2 (en Pa.m), définit comme étant :

$$E_2 = E\, z_0 \tag{3.1}$$

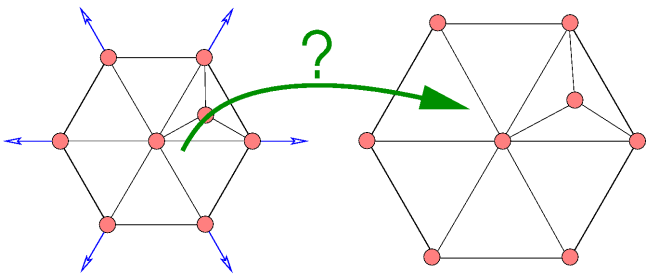
avec E (en Pa.), le module de Young et z_0 (en m.), l'épaisseur de l'élément considéré. Ainsi, pour un ressort défini suivant une longueur de repos c connexe à n triangles T_i d'autres côtés a_i et b_i (fig. 3.1), sa raideur k_c est donnée par :

$$k_c = \sum_{i=1}^{n} \frac{E_2}{1+\nu} \frac{Aire\,(T_i)}{c^2} + \frac{E_2 \nu}{1-\nu^2} \frac{a_i^2 + b_i^2 - c^2}{8 Aire\,(T_i)} \tag{3.2}$$

Cette approche a permis à VG d'obtenir une animation de peau se déformant de manière réaliste et qui suit les mouvements de l'animal. Cependant, il n'utilise son modèle que pour un coefficient de Poisson nul, et nous allons démontrer numériquement et théoriquement que ce modèle ne permet pas d'obtenir des animations en cohérence avec les coefficients de Poisson et le module de Young définis.

3.1.2. Vérification numérique.

Pour réaliser nos vérifications, nous avons reproduit les expériences présentées dans son article.

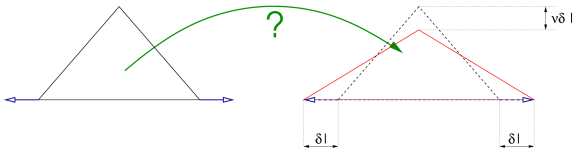


Un hexagone est triangulé de manière non homogène. On applique une pression uniforme sur la surface. L'expérience doit montrer une déformation uniforme quelque soient ν et E_2.

FIG. 3.2.: Expérience d'un hexagone maillé et uniformément gonflé.

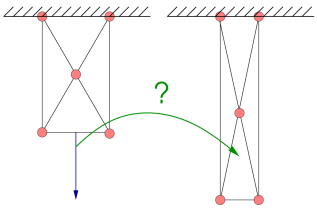
Ainsi, VG propose d'appliquer une pression uniforme sur un hexagone triangulé de manière non uniforme (fig. 3.2). Le but de l'expérience est de montrer qu'il est capable de simuler les déformations d'un modèle multi-résolution. Nous proposons ainsi, comme première vérification, de refaire cette expérience en appliquant les pressions dynamiquement sous forme de forces allant du centre vers l'extérieur.

Un second test peut se déduire directement du mode de construction de son modèle. En effet, il se réfère à une autre expérience issue de la théorie des membranes qui consiste à appliquer sur un côté d'un triangle deux forces opposées (fig. 3.3), provoquant un déplacement de δl de chaque sommet. D'après la théorie des membranes, le point libre du triangle devrait se déplacer de $\nu \delta l$, avec ν, le coefficient de Poisson et l représentant la longueur du côté allongé.



D'après la MMC, une membrane triangulaire isocèle, compressée symétriquement suivant sa base de $-2\delta l$, se déforme de $\nu\delta l$ suivant sa hauteur.

FIG. 3.3.: Expérience d'une membrane triangulaire étirée.



Une barre triangulée est étirée. Elle devrait se comporter en accord avec les définitions du module de Young et du coefficient de Poisson.

FIG. 3.4.: Expérience d'une barre triangulée selon le modèle de Van Gelder, et étirée.

Ainsi, nous avons effectué ces deux expériences en quasi-statique avec les paramètres de son modèle pour différentes valeurs de ν et de E_2. Nous avons d'autre part, appliqué des tests de traction et de cisaillement sur une barre maillée avec des triangles de son modèle (fig. 3.4).

Tous nos tests ont été effectués avec des simulations en quasi-statique, en appliquant les contraintes et en laissant le processus dynamique agir jusqu'à un nouvel état d'équilibre déterminé comme étant le moment où l'énergie cinétique totale du système est proche de 0. Pour notre simulation, nous avons choisi une méthode d'intégration explicite de Velocity Verlet que nous détaillons dans le chapitre suivant (p. **??**), avec une force de viscosité que nous imposons pour être toujours en régime critique afin d'éviter toute oscillation comme nous l'expliquons au chapitre suivant (p. **??**).

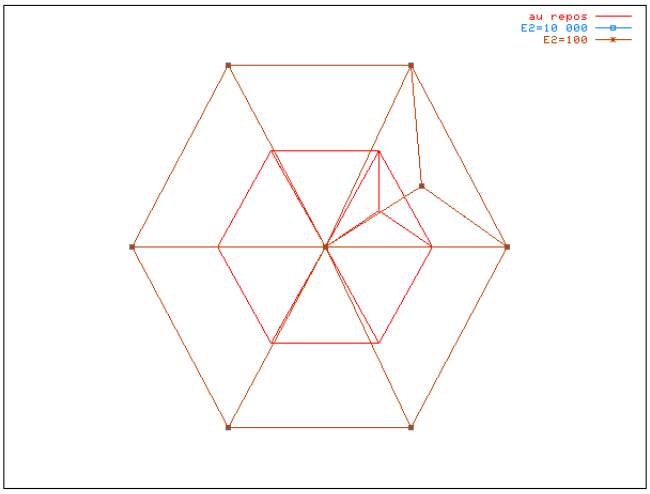
Afin de vérifier si le comportement était cohérent avec la théorie, nous avons simulé les mêmes expériences à l'aide d'un logiciel libre de simulation de la mécanique des milieux continus par méthode des éléments finis, développé par EDF, appelé Code Aster [1].

Nous présentons, dans la suite, les résultats de ces expériences et des comparaisons avec la théorie.

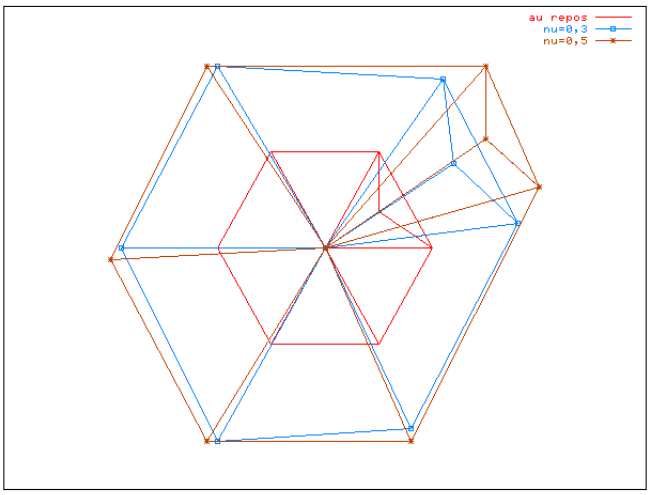
3.1.2.1. Expériences de l'hexagone.

Cette expérience (fig. 3.2) a surtout été un indicateur qualitatif du système de Van Gelder. Ainsi, nous représentons la géométrie de l'état d'équilibre obtenu pour une pression appliquée en surface de l'hexagone et pour différents paramètres (E_2 et ν) de VG imposés.

Nous avons d'abord effectué les tests pour $\nu = 0$ comme VG l'avait expérimenté. Nous avons fait varier les modules de Young surfaciques entre $1Pa.m$ et $10GPa.m$



(a) Pour $\nu = 0$ et différents E_2 : un gonflement quasi-homogène



(b) Pour E_2 fixé et différents ν : gonflements non homogènes.

FIG. 3.5.: Expériences de vérification du modèle de VG avec un hexagone gonflé uniformément

(pour le poumon, ce dernier est autour de 300 Pa soit pour une épaisseur de 1cm de poumon, cela est de l'ordre de 3Pa.m, cf. Table 2.1, p. 58), et avons appliqué des pressions uniformes en surface. La valeur des pressions appliquées variait suivant le module de Young surfacique pour rester dans le même ordre de déformation. Les résultats obtenus sont conformes à ceux obtenus par l'auteur (fig. 3.5(a)) : quelque

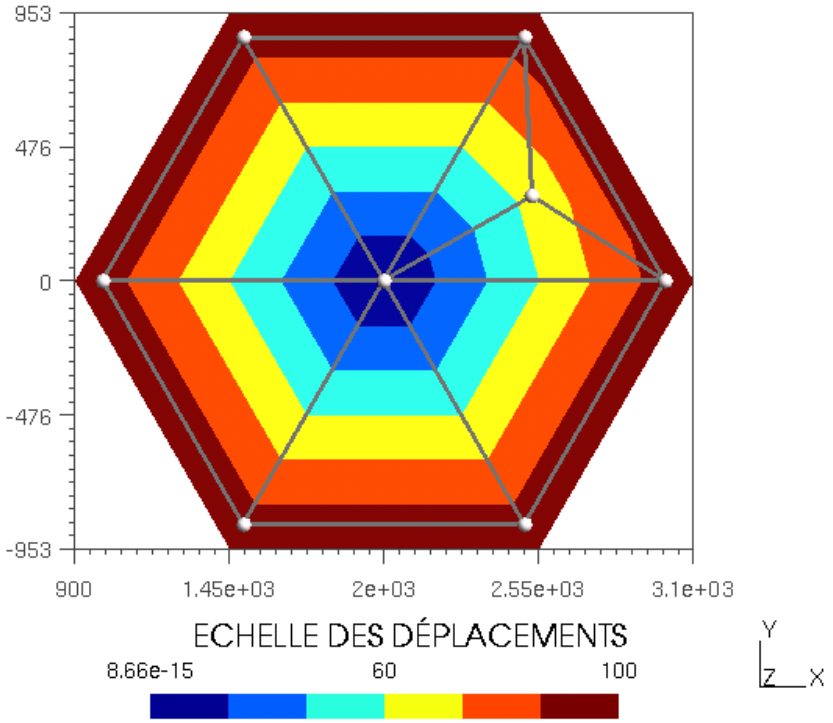


FIG. 3.6.: Expériences de gonflement d'un hexagone avec un logiciel d'élément finis pour $\nu = 0.3$: l'hexagone se déforme bien de manière uniforme.

soit le module de Young surfacique imposé, le comportement est bien celui attendu, et l'hexagone se gonfle de manière quasiment homogène.

Nous avons ensuite effectué une deuxième expérience consistant, pour un même module de Young, à gonfler l'hexagone avec la même pression mais en imposant des coefficients de Poisson différents. Nous observons que le modèle ne suit pas le gonflement homogène qu'il devrait avoir, quelque soit le coefficient de Poisson imposé (fig. 3.5(b)).

Alors que nous obtenions des gonflements qui préservaient la géométrie originelle pour $\nu = 0$, nous observons, au contraire, que le coefficient de Poisson influe sur la résistance à la déformation et amène à un comportement non homogène. Or, selon la mécanique, l'hexagone devrait se gonfler de manière homogène quelque soit le coefficient de Poisson imposé, comme nous l'avons vérifié dans des expériences similaires avec le Code Aster, pour des éléments membranes triangulaires exposés aux mêmes contraintes (fig. 3.6).

3.1.2.2. Expériences du triangle.

Cette deuxième expérience a aussi été un indicateur qualitatif. Nous avons effectué la même expérience de compression d'une membrane en forme de triangle isocèle de base 2mm et de hauteur 1mm pour différentes valeurs de ν. La compression était de 10% de la base du triangle isocèle. Tel que décrit fig. 3.3 (p. 71), pour différentes valeurs de ν les résultats des expériences devraient être différents.

Dans la figure 3.7, nous avons simulé la compression pour un modèle d'élasticité linéaire caractérisé par un coefficient de Poisson imposé à $\nu = 0,5$ et par un module de Young 2D imposé à $E = 1000$ Pa.m. Nous avons effectué une simulation à l'aide du Code Aster (en bandes de couleurs, sur la figure) et une avec le modèle d'élasticité de VG (en points et arêtes) et avons superposé les triangles déformés obtenus. Alors que la simulation du Code Aster donne bien la déformation attendue (le sommet libre doit se déplacer de 5% suivant la hauteur), la simulation obtenue avec le modèle de VG montre une déformation inexacte (de 9% suivant la hauteur).

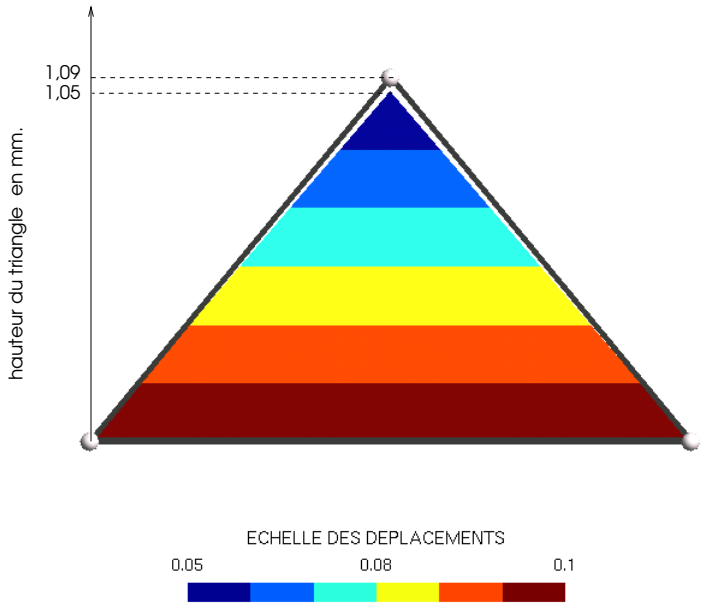


FIG. 3.7.: Expérience de compression de triangles avec $\nu = 0,5$ et un déplacement imposé à 10% pour un modèle de VG et un modèle éléments finis.

Dans la figure 3.8, nous avons superposé les formes de membranes triangulaires compressées de la même façon avec une élasticité définie par VG, mais paramétrées avec différents ν. Les points sont exagérément grossis afin de distinguer les superpositions. Les déformations obtenues ont toujours été les mêmes quelque soit ν.

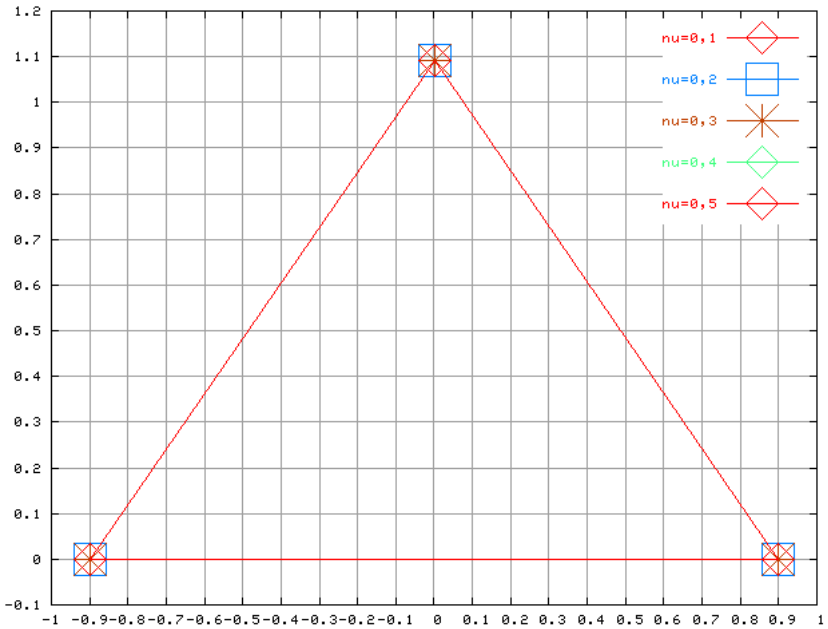


FIG. 3.8.: Résultats superposés des expérience de compression des triangles de Van Gelder paramétrés avec différentes valeurs de ν : quelque soit la valeur de ν les triangles réagissent de la même façon à la compression imposée.

Nous avons donc souhaité vérifier avec des expériences plus approfondies, si le modèle de VG ne permettrait pas de prendre en compte un coefficient de Poisson non nul.

3.1.2.3. Expériences de traction.

Cette expérience rhéologique de traction s'effectue sur une barre rectangulaire et en accord avec le modèle de VG défini par une géométrie triangulaire. Nous avons choisi une triangulation symétrique pour être sûr du comportement homogène. La barre est ainsi maillée avec 4 triangles de VG se rejoignant au centre de la barre (fig. 3.4, p. 71). Chaque triangle a un côté correspondant à un des côtés de la barre, les deux autres arêtes correspondent aux demi-diagonales de la barre. Nous paramétrons ainsi la hauteur et la largeur de la barre, ainsi que le coefficient de Poisson et le module de Young surfacique. Nous fixons deux côtés parallèles du rectangle en imposant que les sommets ne peuvent se déplacer que dans le plan de fixation.

Pour chaque combinaison de paramètres, et donc pour chaque type de matériaux obtenu pour les différentes caractéristiques, nous effectuons alors des tests de tractions/compressions. Ceux-ci s'effectuent par pas quasi-statiques, où l'on impose un déplacement d'une base par rapport à l'autre suivant la largeur, et où l'on attend la stabilité du système en laissant se déformer les bases dans les plans ainsi fixés, avant

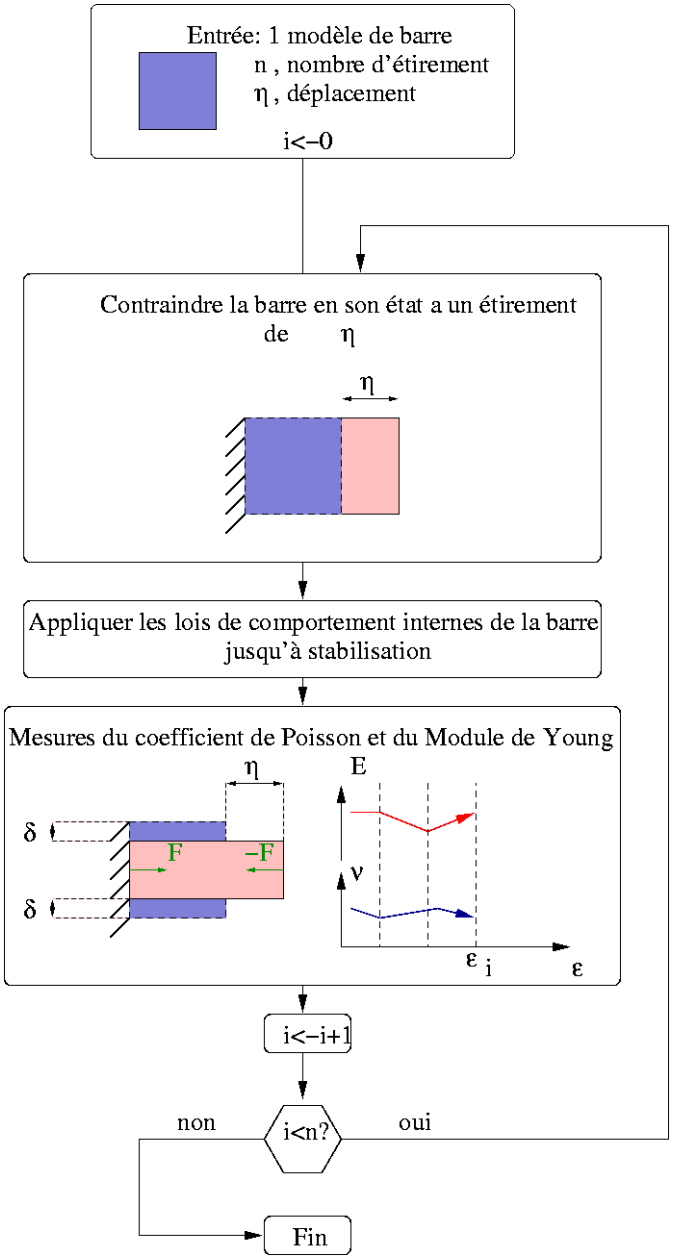


FIG. 3.9.: Algorithme d'indentation (*i.e.* étirement) d'une barre

de recommencer à allonger ou à compresser la barre.

À chaque itération, quand le système est stable, nous mesurons le module de Young

et le coefficient de Poisson sur le modèle comme dans les expériences de rhéologie que nous avons définies dans le paragraphe précédent, puis nous continuons à allonger. Cet algorithme est illustré dans la figure 3.9.

Nous présentons dans la suite des résultats des mesures des expériences d'étirement (tab. 3.1, p. 82 et fig. 3.10 et 3.11) effectuées sur le modèle de Van Gelder paramétré pour des E_2 et ν différents. Nous remarquons que le module de Young mesuré, E_2, est fortement erroné par rapport à la valeur du module de Young imposé, E_{VG}. Ainsi, pour $E_{VG} = 100MPa.m$, E_2 mesuré dévie de 25% pour $\nu = 0$. Nous observons, d'autre part, que le module de Young et le coefficient de Poisson imposés dans le modèle de VG sont fortement liés, ce qui n'est en théorie pas le cas.

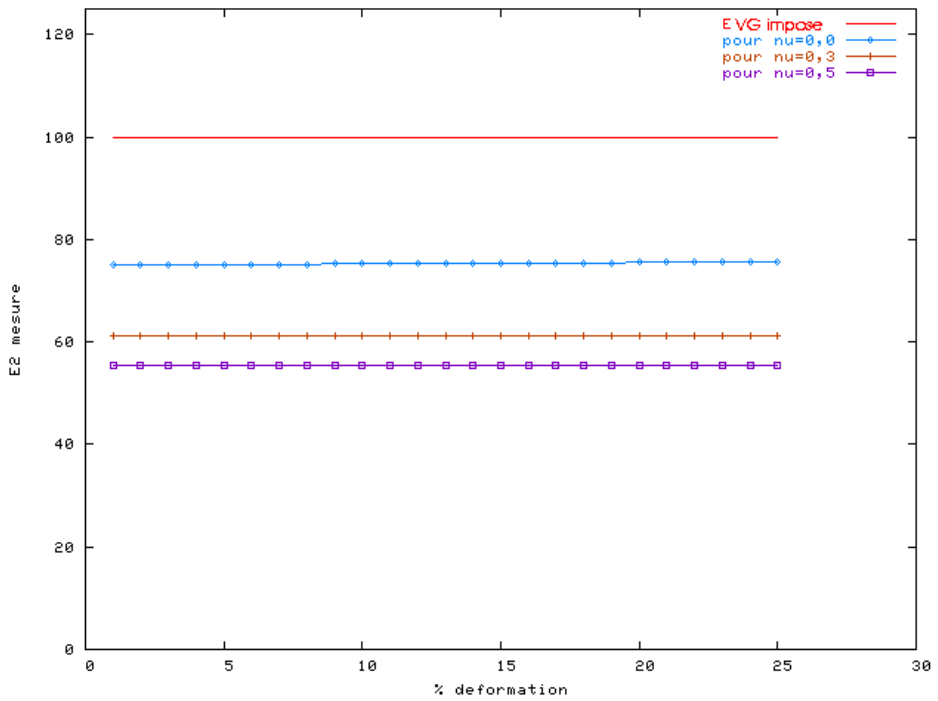


FIG. 3.10.: Mesures du module de Young E_2 pour différentes valeurs de ν_{VG} imposées, et pour $E_{VG} = 100MPa.m$ imposé. On observe une erreur du module de Young effectif par rapport à celui imposé ainsi qu'une dépendance à ν_{VG}.

3.1.3. Exploration théorique de l'origine de l'erreur de VG.

La non conformité des résultats de ces expériences avec la théorie nous a amené à effectuer une étude théorique afin d'expliquer l'origine du problème.

Pour cette étude, nous nous sommes basés sur les formulations de Lagrange. Le

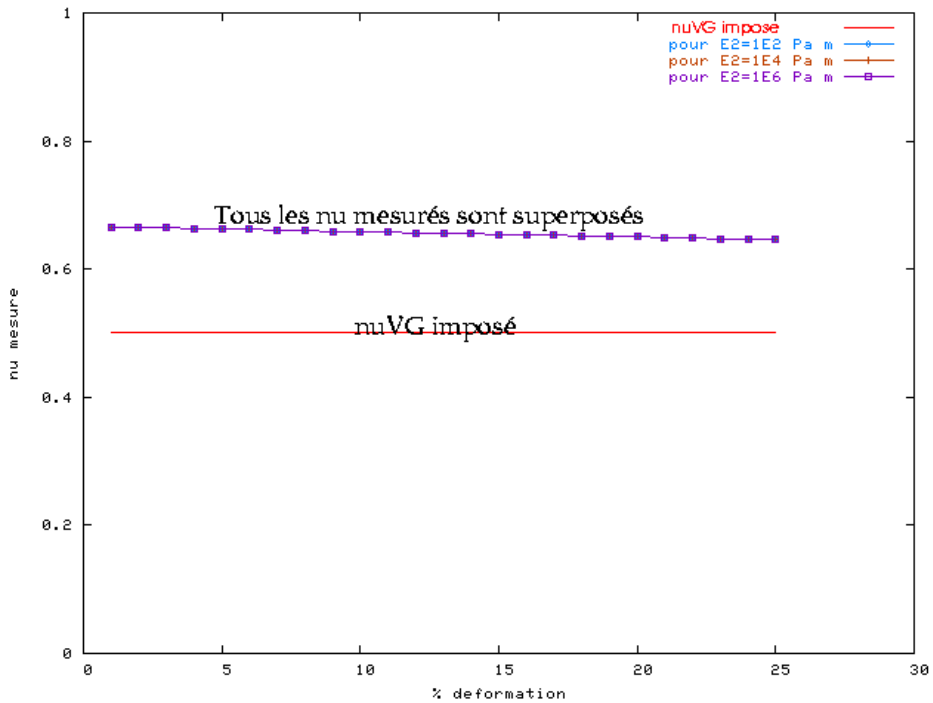


FIG. 3.11.: Mesures du coefficient de Poisson ν, pour différentes valeurs de E_{VG} imposées, et pour un ν_{VG} imposé. On observe une erreur du coefficient de Poisson effectif par rapport à celui imposé. Notamment pour une même valeur de ν_{VG}, l'erreur sur ν est la même quelque soit E_{VG} imposé.

modèle de Lagrange se définit à partir de considérations énergétiques. Cela consiste à trouver tous les déplacements compatibles avec la conservation de l'énergie. Il s'agit d'une minimisation de la variation de l'énergie d'un système suivant le principe de moindre action.

Pour cela, on suppose que les n variables e_i définissant ces déplacements sont indépendantes l'une de l'autre, et que les forces engendrées sont toutes dérivables d'un potentiel.

Le lagrangien d'un système s'écrit alors comme la somme des énergies cinétiques auxquelles on retire les énergies potentielles imposées :

$$L = E_c - E_p \tag{3.3}$$

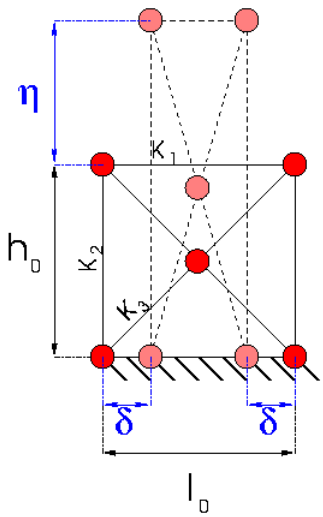
Les déformations suivant les n dimensions e_i solutions sont alors définies en résolvant le système composé des n équations :

$$\frac{\partial L}{\partial e_i} = 0 \tag{3.4}$$

Dans la suite, les expériences pour lesquelles nous souhaitons trouver les déformations compatibles avec la conservation de l'énergie s'effectuent en statique, avec le maintien du système dans son état de déformation à l'équilibre ; ainsi, les vitesses n'interviennent pas. Par conséquent, le lagrangien que nous utilisons ici ne dépend que des énergies potentielles (cf. annexe A, p.182 pour la définition des énergies potentielles).

La vérification du modèle consiste alors à se placer dans un rectangle triangulé avec le modèle de VG de module de Young et coefficient de Poisson respectivement imposés à E_{VG} et ν_{VG}, et à appliquer une force F suivant la hauteur de la barre de telle façon que celle-ci s'allonge. La méthode de Lagrange nous permettant de trouver les déplacements et contraintes engendrés, nous pourrons alors mesurer le module de Young et le coefficient de Poisson suivant les déformations mesurées et suivant les définitions vues dans le chapitre précédent. Le résultat doit montrer, comme les expériences l'attestent, que le module de Young et le coefficient de Poisson de VG sont différents des valeurs théoriques.

Détermination de l'erreur du modèle de VG.



La barre de dimensions originelles $l_0 \times h_0$ et de raideurs K_1 sur ses 2 bases, K_2 sur ses 2 hauteurs et K_3 sur ses 4 demi-diagonales, est étirée avec une force $\overrightarrow{F}$ maintenue suivant la hauteur h_0. Cela engendre, à l'équilibre, un étirement de η suivant la hauteur, et une compression de 2δ suivant la base.

FIG. 3.12.: Test d'étirement sur une barre maillée avec des éléments triangulaires de VG.

Soit un rectangle de dimension initiales $l_0 \times h_0$ triangulé en 4 triangles symétriques reliés au centre du rectangle. Après application d'une force F suivant la hauteur sur l'une des bases (fig. 3.12), la barre a été étirée suivant sa hauteur de η, et s'est rétrécie de 2δ suivant sa base. Nous souhaitons vérifier que cette barre suive bien la loi de Hooke, c'est-à-dire que le coefficient de Poisson et le module de Young soient définis

comme dans les éq. 2.3 et 2.4. Nous devons ainsi déterminer δ et η pour une force F imposée suivant la hauteur.

Par symétrie, nous distinguons ainsi 3 types de ressorts : *(i)* de K_1 suivant l_0, *(ii)* K_2 suivant h_0, et *(iii)* K_3 suivant la demi-diagonale du rectangle.

Les raideurs sont définies en fonction des aires des 4 triangles qui sont identiques :

$$A = \frac{l_0 h_0}{4}$$

Elles sont aussi définies d'après la définition de VG (éq. 3.2, p. 70) suivant les côtés des triangles qui sont fonctions de l_0, h_0 et de la demi-diagonale $d_0 = \sqrt{l_0^2 + h_0^2}/2$. Ainsi, en développant la définition de VG (éq. 3.2) pour chacune des raideurs, on obtient :

$$\begin{aligned}
K_1 &= \frac{E_{VG}\left(h_0 - \nu_{VG} l_0^2\right)}{4\left(1-\nu_{VG}^2\right) l_0 h_0} \\
K_2 &= \frac{E_{VG}\left(l_0 - \nu_{VG} h_0^2\right)}{4\left(1-\nu_{VG}^2\right) l_0 h_0} \\
K_3 &= \frac{E_{VG}\nu_{VG}\left(l_0^2 + h_0^2\right)}{2 l_0 h_0 \left(1-\nu_{VG}^2\right)} + \frac{2 E_{VG} l_0 h_0}{\left(1+\nu_{VG}\right)\left(l_0^2 + h_0^2\right)}
\end{aligned}$$

Les élongations ou compressions pour tous les ressorts d'une raideur donnée sont identiques par symétrie de la construction. Ainsi, les 2 ressorts de raideur K_1 sont compressés de -2δ, engendrant chacun l'énergie potentielle (cf. annexe A p. 181) :

$$V_{K_1} = \frac{1}{2} K_1 \left(-2\delta\right)^2 = 2 K_1 \delta^2$$

Les 2 ressorts de raideur K_2 sont étirés de η, générant chacun l'énergie potentielle :

$$V_{K_2} = \frac{1}{2} K_2 \eta^2$$

Les 4 ressorts de raideurs K_3 sont déformés, pour η et δ petits, de Δd :

$$\begin{aligned}
\Delta d &= \frac{1}{2}\left(\sqrt{\left(l_0 - 2\delta\right)^2 + \left(h_0 + \eta\right)^2} - \sqrt{l_0^2 + h_0^2}\right) \\
&= \frac{h_0 \eta - 2 l_0 \delta}{2\sqrt{l_0^2 + h_0^2}} + O\left(\eta^2, \delta^2\right)
\end{aligned}$$

Ces 4 ressorts engendrent ainsi, chacun l'énergie potentielle :

$$V_{K_3} = \frac{1}{2} K_3 \Delta d^2 = \frac{1}{2} K_3 \frac{\left(h_0 \eta - 2 l_0 \delta\right)^2}{l_0^2 + h_0^2}$$

Enfin, la force d'étirement dérive du potentiel :

$$V_F = -F\eta$$

Des équations précédentes, on en déduit le lagrangien en statique, qui porte sur les deux variables indépendantes η et δ :

$$L = -V_F - 2V_{K_1} - 2V_{K_2} - 4V_{K_3}$$

En cherchant les valeurs de η et de δ qui minimisent la variation des énergies telles qu'exprimées par le lagrangien, nous trouvons deux équations solvables avec une seule solution :

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \eta} &= 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \delta} &= 0 \end{aligned}$$

Les détails des calculs de cette démonstration peuvent être consultés dans l'annexe B.1, p. 183.

Valeur de l'erreur.

Nous simplifions la démonstration en nous plaçant dans le cas où $l_0 = h_0 = 1$. Nous appliquons alors la définition du module de Young et du coefficient de Poisson et trouvons le rapport entre le module de Young imposé par VG (E_{VG}) et la définition du module de Young (théorique), et de même pour le coefficient de Poisson :

$$\begin{cases} E_{\text{théorique}} = \frac{\frac{F}{l_0}}{\frac{\eta}{h_0}} = \frac{1}{2}\frac{E_{VG}(\nu_{VG}-3)}{\nu_{VG}^2-\nu_{VG}-2} \\ \nu_{\text{théorique}} = \frac{\frac{2\delta}{l_0}}{\frac{\eta}{h_0}} = \frac{1}{2-\nu_{VG}} \end{cases} \tag{3.5}$$

Nous démontrons, ainsi, que le module de Young et le coefficient de Poisson imposés par VG dans le cas particulier ne définissent, en général, pas le module de Young ni le coefficient de Poisson mesurés. Nous remarquons, d'autre part, que pour $\nu = 0$, l'erreur sur E est de l'ordre de 25%. En comparant au mesures effectuées sur une telle barre, nous validons ces constatations (tab. 3.1).

Conclusion.

Nous avons démontré que le modèle de VG, contrairement à ce qui a été affirmé dans la littérature n'est pas correct. Il ne permet de contrôler ni le module de Young, ni le coefficient de Poisson. Dans la section suivante, nous développerons donc une nouvelle démarche visant introduire ces coefficients dans un maillage discret, en commençant par le problème en 2D, puis dans le cas 3D.

Valeurs du Coefficient de Poisson ν (sans unité)			Valeurs du Module de Young E_2 $(Pa.m)$		
ν_{VG} imposé	$\nu_{\text{mesuré}}$ mesuré par l'expérience	$\nu_{\text{théorique}}$ calculé	E_{VG} imposé	$E_{\text{mesuré}}$ mesuré par l'expérience	$E_{\text{théorique}}$ calculé
0,25	0,57	0,57	0	0	0
			1	0,63	0,63
			100	62,86	62,86
			1000	628,57	628,57
0,5	0,66	0,66	0	0	0
			1	0,56	0,56
			100	55,56	55,56
			1000	555,56	555,56

TAB. 3.1.: Comparaison entre les résultats théoriques, les mesures effectuées via l'expérience et les valeurs théoriques

3.2. Introduction des paramètres rhéologiques en 2D.

En s'inspirant de la méthode utilisée pour mettre en évidence les problèmes du modèle de VG, nous proposons une approche d'intégration des paramètres rhéologiques dans notre système masses-ressorts. Une barre maillée avec notre modèle et paramétrée avec le module de Young et le coefficient de Poisson subissant les expériences type de la rhéologie devra se comporter comme la théorie le définit. Nous devons ainsi obtenir un modèle mettant en évidence le module de Young, le coefficient de Poisson, le cisaillement et coefficient de compressibilité.

Nous construisons l'élément rectangulaire (fig. 3.13) de dimensions $l_0 \times h_0$, avec l_0 sa longueur horizontale, et h_0 sa longueur verticale (ou hauteur). Cet élément a en chaque sommet une masse que nous définirons plus tard, et un ressort en chaque arête ainsi que sur ses deux diagonales. Ainsi, cet élément est constitué de *(i)* deux ressorts de raideurs K_1 suivant sa longueur, *(ii)* deux ressorts de raideurs K_2 suivant sa hauteur, et *(iii)* de deux ressorts de raideurs K_3 suivant ses diagonales.

Nous devons trouver les raideurs K_1, K_2 et K_3 paramétrées par le module de Young 2D E_2 et le coefficient de Poisson ν.

Ces raideurs doivent être telles qu'elles permettent de réaliser des expériences de traction ou compression sur l'élément. Elles doivent permettre, d'autre part, de prendre en compte le cisaillement qui est définissable en 2D.

L'ordre dans lequel nous allons définir ces raideurs n'est pas anodin. En effet, si pour l'expérience de l'étirement, toutes les raideurs de la barre interviennent, pour l'expérience du cisaillement, en revanche, nous pouvons démontrer que ce sont principalement les raideurs des diagonales qui interviennent.

Nous devons donc commencer la définition du paramétrage du modèle par les diagonales avec l'introduction du cisaillement, puis continuer avec l'introduction de l'ex-

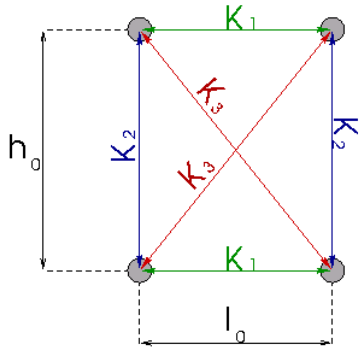
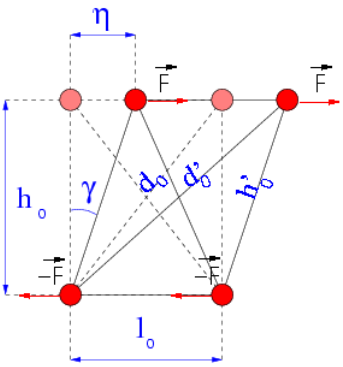


FIG. 3.13.: Définition d'un élément rectangulaire 2D de dimensions $l_0 \times h_0$ et de raideurs K_1, K_2 et K_3.

périence d'étirement et de compression, pour obtenir les raideurs des côtés de la barre.

3.2.1. Paramétrage des ressorts diagonaux avec le cisaillement.



Un élément de dimensions $l_0 \times h_0$ a deux côtés parallèles sur lesquels on applique des forces $\vec{F}$ opposées entraînant son affaissement avec un déplacement de η d'un côté par rapport à l'autre et une rotation d'angle γ de la hauteur. Pour $\eta \to 0$, on peut estimer que la hauteur déformée $h'_0 \sim h_0$, et la diagonale $d'_0 \sim d_0 \pm \frac{\eta l_0}{\sqrt{h_0^2+l_0^2}}$

FIG. 3.14.: Expérience de cisaillement

Le cisaillement comme nous l'avons défini dans l'éq. 2.5 garde sa signification en 2D, et le rapport entre le cisaillement 2D (G_2) et le cisaillement 3D (G) est le même que celui entre le module de Young 2D (E_2) et le module de Young 3D (E), en faisant intervenir la troisième dimension z_0 :

$$z_0\, G \quad = \quad \frac{z_0\, E}{2\,(1+\nu)} \quad = \quad \frac{E_2}{2\,(1+\nu)} \quad = \quad G_2$$

Le cisaillement 2D peut être mis en évidence comme en 3D, par une expérience ap-

pliquant en deux points diagonalement opposés deux forces de sens opposé de même intensité et de même direction, parallèle à l'un des côtés adjacents au point. Ceci engendre la déformation illustrée figure 3.14 où un angle γ apparaît suite à un déplacement η.

Pour une petite déformation (quand $\eta \to 0$), les côtés conservent leur longueur comme l'atteste l'expression de leur développement limité d'ordre 2 :

$$h_0' = \sqrt{h_0^2 + \eta^2} \quad \sim \quad h_0 + O\left(\eta^2\right)$$

Ainsi, pour un petit déplacement, les diagonales sont les seules qui résistent à la déformation : l'une des diagonales se comprime alors que l'autre s'étire.

La mesure du cisaillement G_2 se fait alors par :

$$G_2 \quad = \quad \frac{\tau}{\gamma}$$

où *(i)* τ est la contrainte de cisaillement qui peut être assimilée en 2D à F/l_0 si on tire suivant l_0 (respectivement F/h_0 pour h_0), et *(ii)* γ est l'angle de la déviation due au déplacement engendré par la contrainte, qui peut être assimilé à sa tangente $\gamma \sim \eta/h_0$ si on tire suivant l_0 (respectivement η/l_0 pour h_0). On peut alors exprimer G_2 autrement :

$$G_2 \; = \; \frac{F\, h_0}{l_0\, \eta} \tag{3.6}$$

Comme nous venons de le décrire, l'expérience de cisaillement semble permettre de définir les ressorts diagonaux de notre modèle. Nous recherchons, ainsi, les valeurs de K_3 pour que notre modèle suive bien la définition du cisaillement pour de petits déplacements.

Le lagrangien du cisaillement est ainsi principalement dépendant des énergies potentielles des deux ressorts des diagonales ainsi que de l'énergie potentielle amenant la déformation par la force F.

Les déformations des ressorts diagonaux, l'un en étirement, l'autre en compression, s'expriment par :

$$\begin{aligned}
\delta_d &= d_0' - d_0 \\
&= \sqrt{(l_0 \pm \eta)^2 + h_0^2} - \sqrt{l_0^2 + h_0^2} \\
&\sim \frac{\pm \eta l_0}{\sqrt{l_0^2 + h_0^2}} + O\left(\eta^2\right)
\end{aligned}$$

Le lagrangien exprimant cette expérience est alors :

$$L \quad = \quad F\eta - K_3 \frac{\eta^2 l_0^2}{l_0^2 + h_0^2}$$

La minimisation de l'énergie s'effectue pour :

$$\frac{\partial L}{\partial \eta} \quad = \quad F - K_3 \frac{2\eta l_0^2}{l_0^2 + h_0^2}$$

d'où :

$$\eta = \frac{F\left(l_0^2+h_0^2\right)}{2l_0^2K_3}$$

Par définition du cisaillement (éq. 3.6) et lien avec les autres paramètres rhéologiques dans le cas de matériau linéaire élastique, homogène isotrope (éq. 2.7), on trouve K_3 :

$$K_3 = \frac{E_2\left(l_0^2+h_0^2\right)}{4l_0h_0\left(1+\nu\right)} \tag{3.7}$$

Cette définition introduit bien le cisaillement dans les diagonales. On remarque, en effet, que dans un carré ($l_0 = h_0$) K_3 est totalement assimilée au cisaillement G_2. D'autre part cette rigidité reste symétrique, donc valide pour des expériences de cisaillement dans les autres directions.

Nous devons donc maintenant introduire le comportement de l'expérience d'étirement dans les ressorts latéraux, avec la prise en compte du cisaillement imposé sur les ressorts des diagonales.

3.2.2. Étirement avec cisaillement imposé.

Notre problème d'étirement se réduit à trouver K_2 et K_1, connaissant K_3 (éq. 3.7).

Comme dans l'expérience précédente (fig. 3.12), nous appliquons une force F, d'étirement suivant la hauteur. Par symétrie de la barre, les diagonales se déforment identiquement en conservant le centre de la barre comme point de concours.

Ainsi, pour de petites déformations de la hauteur étirée de η et la largeur comprimée de 2δ, la diagonale se déforme de δ_d :

$$\delta_d = \sqrt{\left(h_0+\eta\right)^2+\left(l_0-2\delta\right)^2}-\sqrt{l_0^2+h_0^2} \sim \frac{h_0\eta-2\delta l_0}{\sqrt{l_0^2+h_0^2}}+O\left(\eta^2,\delta^2\right)$$

Nous retrouvons quasiment les mêmes potentiels du système barre que dans la section précédente (p. 79) provenant :

– des deux ressorts suivant la largeur, chacun de potentiel :

$$V_{K_1} = \frac{1}{2}K_1\left(2\delta\right)^2$$

– des deux ressorts suivant la hauteur, chacun de potentiel :

$$V_{K_2} = \frac{1}{2}K_2\eta^2$$

– des deux ressorts K_3 prédéfinis suivant les diagonales, chacun de potentiel :

$$\begin{aligned} V_{K_3} &= \frac{1}{2}K_3\delta_d^2 \\ &= \frac{1}{2}\frac{E_2\left(l_0^2+h_0^2\right)}{4l_0h_0\left(1+\nu\right)}\delta_d^2 \end{aligned}$$

– de la force appliquée pour maintenir la barre en étirement :

$$V_F = -F\,\eta$$

Le lagrangien en statique du système s'écrit alors :

$$L = -V_F - 2V_{K_1} - 2V_{K_2} - 2V_{K_3}$$

Ainsi, d'après la définition lagrangienne, nous devons trouver les déplacements qui permettent d'obtenir des déformations avec le moins de perte d'énergie, ce qui se traduit par trouver η et δ tels que :

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \eta} &= 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \delta} &= 0 \end{aligned}$$

Les solutions du système sont :

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{1}{2}\,\frac{(4\,K_1\,h_0 + 4\,K_1\,h_0\nu + E_2 l_0)\,F\,l_0}{4\,K_2\,l_0 K_1\,h_0\nu + 4\,K_2\,l_0 K_1\,h_0 + E_2 {h_0}^2 K_1 + K_2\,{l_0}^2 E_2} \\ \delta &= \frac{1}{4}\,\frac{E_2 h_0 F\,l_0}{4\,K_2\,l_0 K_1\,h_0\nu + 4\,K_2\,l_0 K_1\,h_0 + E_2 {h_0}^2 K_1 + K_2\,{l_0}^2 E_2} \end{aligned}$$

Enfin, en appliquant les définitions du module de Young et du coefficient de Poisson (éq. 2.3 et 2.4) sur notre système, nous obtenons :

$$\begin{aligned} E_2 &= \frac{F/l_0}{\eta/h_0} = 2\,\frac{h_0\left(4\,K_2\,l_0 K_1\,h_0\nu + 4\,K_2\,l_0 K_1\,h_0 + E_2 {h_0}^2 K_1 + K_2\,{l_0}^2 E_2\right)}{{l_0}^2(4\,K_1\,h_0 + 4\,K_1\,h_0\nu + E_2 l_0)} \\ \nu &= \frac{2\,\delta/l_0}{\eta/h_0} = \frac{E_2 {h_0}^2}{l_0(4\,K_1\,h_0 + 4\,K_1\,h_0\nu + E_2 l_0)} \end{aligned}$$

Nous constatons que E_2 et ν sont bien indépendants de la force d'étirement appliquée et des déformations encourues et qu'ils dépendent des raideurs de la barre. À supposer que l'on soit dans un matériau homogène isotrope, cela signifie que si l'on tire dans l'autre sens, E_2 et ν sont inchangés. Nous pouvons effectuer le même raisonnement avec l'expérience effectuée à 90° sur le même élément.

Ainsi, nous obtenons deux relations pour E_2 et deux relations sur ν. De ces quatre équations, nous recherchons à déterminer les deux raideurs afin d'imposer un E_2 et un ν. Ce système d'équations n'a pas de solution générale, nous cherchons deux contraintes complémentaires pour résoudre le système.

Ainsi, en résolvant ces équations, pour E_2 et ν imposés suivant la direction h_0, on trouve :

$$\begin{aligned} K_1 &= \frac{E_2\left(h_0^2 - l_0^2\nu\right)}{4 l_0 h_0 \nu\,(1+\nu)} \\ K_2 &= \frac{E_2\left(l_0^2\,(3\nu+2) - h_0^2\right)}{4 l_0 h_0 (1+\nu)} \end{aligned}$$

Ces raideurs ne sont pas convenables car nous souhaitons le même comportement pour le test d'étirement suivant l_0, qui doit amener la symétrie des expressions, soit $K_1(l_0, h_0) = K_2(h_0, l_0)$ et $K_2(l_0, h_0) = K_1(h_0, l_0)$, nous amenant aux équations suivantes :

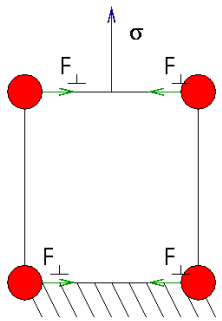
$$\begin{aligned} 3\nu^2 l_0^2 + 2l_0^2\nu - l_0^2 &= 0 \\ 3\nu^2 h_0^2 + 2h_0^2\nu - h_0^2 &= 0 \end{aligned}$$

Ceci permet de trouver une solution, mais uniquement pour $\nu = 1/3$. Or, nous souhaitons utiliser notre modèle en n'étant pas contraint sur ν, nous recherchons donc une nouvelle solution dans laquelle le système ne sera plus surcontraint. Pour cela, il faudra un degré de liberté supplémentaire qui va apparaître avec l'introduction d'un multiplicateur de Lagrange.

3.2.3. Introduction des contraintes de Lagrange pour imposer ν quelconque.

Nous avons épuisé les possibilités de contraindre le système par les seuls ressorts, nous rajoutons donc un potentiel qui agira pour corriger l'erreur pour un ν imposé, et qui permettra d'obtenir un degré de liberté supplémentaire sur le système en réaction à la force imposée, mais qui n'influencera pas sur le cisaillement.

On garde ainsi la raideur des diagonales de cisaillement que nous imposons de nouveau dans le calcul du lagrangien. On cherche encore des raideurs K_1 et K_2 symétriques. Mais, cette fois, on suppose que le système génère un nouveau potentiel du fait des contraintes qu'il subit sur chacune de ses arêtes.



La barre soumise à une contrainte d'élongation $\sigma = F/h_0$ va voir ses raideurs aller à l'encontre de l'étirement ainsi qu'un potentiel correcteur interne qui aidera à la bonne définition de ν. Celui-ci agira en générant en chacun des sommets de l'élément une force orthogonale $F_\perp$ à la contrainte.

FIG. 3.15.: Description du potentiel correcteur.

Ce nouveau potentiel produit une force $F_{\perp i}$ (avec $i \in \{l_0, h_0\}$) qui traduit la correction du ressort orthogonal au sens de la déformation imposée suivant la direction i, afin d'imposer ν. Cette force orthogonale doit donc dépendre de la contrainte appliquée. Afin d'obtenir une correction symétrique, nous l'appliquons en chacun des points de l'élément (fig. 3.15). Par conséquent, il doit y avoir 4 potentiels correcteurs générés sur chacun des 4 sommets.

Le lagrangien décrivant le système devient ainsi, dans le cas d'une contrainte F_{h_0} suivant la hauteur h_0 :

$$L = F_{h_0}\,\eta - 4\,F_{\perp h_0}\,(2\,\delta) - 4\,K_1\,\delta^2 - K_2\,\eta^2 - K_3\left(\frac{h_0\,\eta - 2\,l_0\,\delta}{\sqrt{h_0^2 + l_0^2}}\right)^2$$

En suivant le même cheminement que dans les sections précédentes, on trouve η puis δ, puis en imposant la définition du module de Young et du coefficient de Poisson, nous obtenons K_1 et K_2, mais en fonction de ce nouveau potentiel. En imposant la symétrie de K_1 avec K_2, nous contraignons la force de potentiel et nous trouvons K_1, K_2, et $F_{\perp h_0}$. En effectuant l'expérience suivant l_0, on retrouverait les mêmes valeurs des raideurs et une force correctrice de la même forme. On peut retrouver en annexe B.2 (p. 185) la feuille détaillant les calculs. Ainsi les solutions sont :

$$K_1 = \frac{E_2\left(h_0^2\,(3\,\nu + 2) - l_0^2\right)}{4\,l_0\,h_0\,(1+\nu)} \tag{3.8}$$

$$K_2 = \frac{E_2\left(l_0^2\,(3\,\nu + 2) - h_0^2\right)}{4\,l_0\,h_0\,(1+\nu)} \tag{3.9}$$

$$F_{\perp h_0} = \frac{h_0 F_{h_0}\,(1 - 3\,\nu)}{8\,l_0} \tag{3.10}$$

$$F_{\perp l_0} = \frac{l_0 F_{l_0}\,(1 - 3\,\nu)}{8\,h_0} \tag{3.11}$$

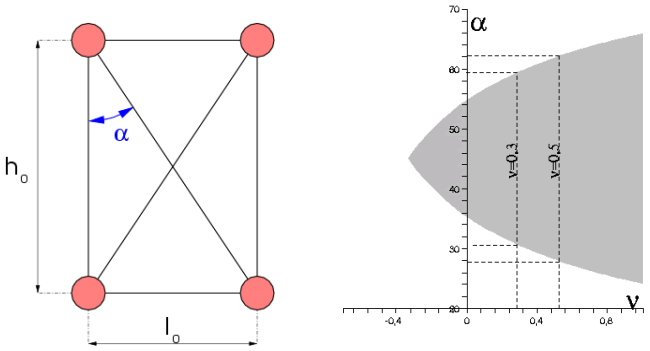


FIG. 3.16.: Contrainte sur l'angle de la diagonale à la base de l'élément en fonction du coefficient de Poisson imposé : les angles à la diagonales du domaine de validité sont représentés grisés.

Ces solutions ne dépendent maintenant que du maillage initial (l_0 et h_0) et des valeurs de E_2 et de ν. Notons, cependant, qu'elles sont cohérentes avec la théorie sur

un domaine limité. En effet, les raideurs ne peuvent pas avoir de valeurs négatives sinon les forces qu'elles engendreraient à la réaction d'un allongement iraient dans le sens de cet allongement et donc entraîneraient un allongement perpétuel de la barre sans jamais trouver d'équilibre.

Dans notre cas, où $\nu \in [0,3; 0,5]$, les contraintes sont réduites car K_3 et $1+\nu$, qui donne le signe du dénominateur de K_1 et K_2, sont toujours positifs. Ainsi, cela revient à résoudre, « les numérateurs de K_1 et de K_2 sont positifs », sachant que l_0, h_0, E_2 et ν sont positifs, soient 2 inéquations :

$$\begin{aligned} h_0^2\,(3\,\nu+2) - l_0^2 &> 0 \\ l_0^2\,(3\,\nu+2) - h_0^2 &> 0 \end{aligned}$$

En introduisant α, l'angle entre la diagonale de l'élément et la hauteur (fig. 3.16), cette équation se réduit à :

$$\arctan\left(\sqrt{3\,\nu+2}\right) \quad > \quad \alpha \quad > \quad \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3\,\nu+2}}\right)$$

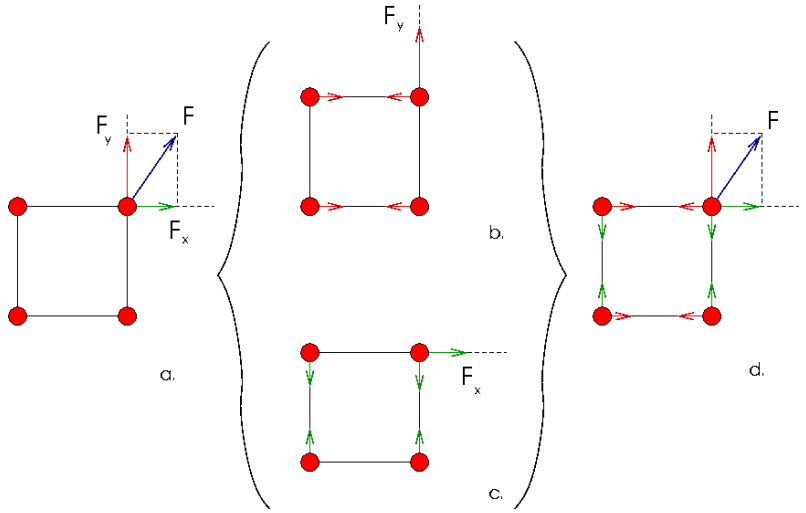
Ainsi, pour une simulation d'un élément de coefficient de Poisson $\nu = 0,3$ tel que pour le poumon, l'élément devra avoir un angle entre la hauteur et sa diagonale compris entre 30° et 60° (fig. 3.16). Ainsi, nous devrons savoir comment construire le maillage de l'objet avec cette contrainte, sachant que celle-ci ne s'applique qu'à la construction d'une brique élémentaire de l'objet et non pendant la déformation. À titre d'exemple, si le maillage suit les données médicales données en voxels, l'angle α vaut 45°.

Nous remarquons, d'autre part, que le comportement de l'élément est intimement lié à la force externe qui lui est appliquée. La force $F_{\perp h_0}$ est symétrisable en $F_{\perp l_0}$ en inversant l_0 et h_0. En petits déplacements, cette force ne va pas à l'encontre du cisaillement.

En revanche, comment répartir ces forces supplémentaires quand la barre n'est pas déformée suivant un axe de symétrie ? La réponse vient de l'hypothèse de comportement linéaire élastique, qui permet de sommer les déformations et contraintes des deux directions principales indépendamment. Ainsi l'idée (fig. 3.17) est de décomposer la force appliquée suivant les deux axes principaux de l'élément rectangulaire et d'appliquer indépendamment ces forces. La somme des réactions des deux composantes est la réaction à la force appliquée. Ainsi, pour chaque sommet d'un élément, on connaît les forces externes qui s'y appliquent, et c'est en fonction de ces forces externes que la réponse va se faire.

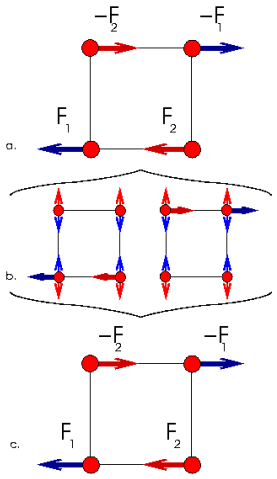
Nous vérifions que cela fonctionne très bien pour un étirement. Un étirement de force F correspond, en effet, à l'application en chaque point d'une force F suivant l'axe de l'étirement, et de l'intérieur vers l'extérieur. Les forces de réaction étant les mêmes en chaque point, celles-ci engendrent quatre fois les mêmes forces de réaction en accord avec la définition du lagrangien.

Nous pouvons cependant nous demander si cela ne peut pas avoir d'influence sur le cisaillement, qui peut en effet s'effectuer par l'application de deux forces linéiques sur les points de deux bases opposées. En fait, cela revient à appliquer la même force à deux points d'une même base. Comme l'une est une force de l'intérieur vers l'extérieur, il y



(a.) La force extérieure F appliquée en un point est projetée suivant les deux côtés adjacents à ce point en F_x et F_y.
(b. et c.) Chacune des projections est traitée comme une force extérieure et amène à une force correctrice de l'étirement suivant F_x et F_y.
(d.) La réaction à la force F est alors la somme des réactions à $F_x/4$ et $F_y/4$.

FIG. 3.17.: Définition de la force de réaction



(a.) Le cisaillement s'effectue avec 2 forces $\overrightarrow{F_1} = \overrightarrow{F_2}$ définies identiquement sur deux points d'une même base et deux forces $-\overrightarrow{F_1} = -\overrightarrow{F_2}$ sur les deux points de l'autre base.
(b.) En chaque base, on a ainsi une force d'étirement et une force de compression, générant chacune une force de réaction qui s'annulent mutuellement.
(c.) Finalement, la définition du cisaillement par les diagonales est ainsi conservée.

FIG. 3.18.: Le cisaillement est conservé avec notre force correctrice de Lagrange.

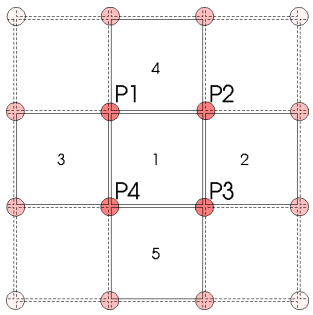
a correction de cet étirement, mais en même temps l'autre est une force de l'extérieur vers l'intérieur, donc une force de compression, il y a donc correction de cette force qui annule la précédente correction. Finalement, le cisaillement (fig. 3.18), défini par les diagonales, reste inchangé.

Nous pouvons, d'autre part, caractériser l'état d'équilibre d'un élément comme étant le fait que toutes les forces se compensent dans cet élément. Cela signifie que les forces internes dues aux ressorts, les forces correctrices et les forces externes s'annulent en chaque point. Nous remarquons ainsi que, lors d'un étirement, l'équilibre est atteint lorsque les forces appliquées sur le côté opposé à l'étirement sont opposées à la force engendrant cet étirement.

Nous venons ainsi de définir le comportement général d'un élément rectangulaire 2D, nous pouvons nous intéresser à la combinaison de ces éléments et à la répartition des masses.

3.2.4. Passage d'un élément à une composition de $n \times m$ éléments.

L'intérêt de l'étude sur un élément est de stabiliser le comportement de cet élément et d'en déterminer ses limites. Le passage à une géométrie plus complexe se fait en assemblant les éléments et en appliquant sur leur composition les lois ainsi définies. La composition va alors consister à sommer les actions de chacun des éléments.



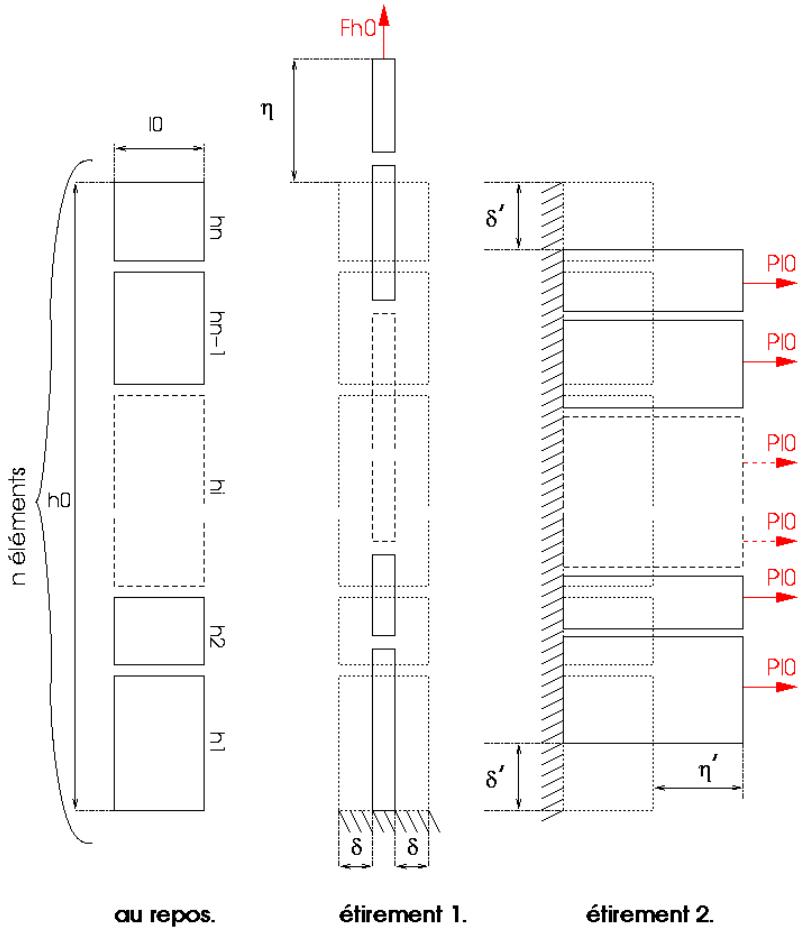
La composition des éléments consiste à accoler les éléments les uns aux autres en dédoublant le ressort au lieu de leur rencontre.
Ainsi l'élément 1 a en commun les points P2 et P3 avec l'élément 2, et le ressort entre P2 et P3 est dédoublé.

FIG. 3.19.: Interface entre éléments dans une composition d'éléments.

Ainsi, on assemble deux éléments qui ont deux points en commun, ainsi que le ressort qui relie ces deux points (fig. 3.19). Par conséquent, le ressort, interface de ces deux éléments agissant indépendamment dans chaque élément, aura deux fois la même action. Ceci se retrouve dans la loi de composition des ressorts en parallèle, qui se comportent comme un ressort ayant pour raideur la somme des raideurs des ressorts en parallèle.

Du point de vue énergétique, les déplacements de chaque élément suivent le principe de moindre action et de conservation de l'énergie. L'énergie totale de l'objet modélisé est la somme des énergies de chacun des éléments. Ainsi, la résolution du système lagrangien décrivant le comportement de l'objet résulte de la superposition des systèmes lagrangiens de chacun des éléments. Il faut rajouter que les forces extérieures

appliquées à un élément proviennent *(i)* des forces internes des éléments qui lui sont connexes, *(ii)* ou des forces externes au système qui lui sont directement appliquées.



Une barre constituée de n éléments (repos), tous paramétrés avec le même module de Young et coefficient de Poisson est étirée dans le sens de sa hauteur (étirement 1), puis dans le sens orthogonal (étirement 2). Les tests de traction doivent montrer que le module de Young et le coefficient de Poisson sont conservés.

FIG. 3.20.: Tests sur une barre de n éléments.

Ainsi, dans le cas d'une barre de dimensions $l_0 \times h_0$, constituée d'un assemblage de n éléments e_i de mêmes paramètres (fig. 3.20) et de dimensions $l_0 \times h_i$ (avec $\sum_{i=1}^{n} h_i = h_0$), à laquelle on applique les tests de traction, nous devons démontrer que la définition du module de Young et du coefficient de Poisson sont conservés.

Plaçons-nous dans le cas de l'étirement suivant le sens d'empilement des éléments

(étirement 1, fig. 3.20). On a appliqué une force F_{h_0} à une extrémité de la barre alors que l'autre extrémité était contrainte à rester dans un plan. À l'équilibre du système, tous les éléments sont à leur équilibre, et les forces dans chaque élément sont nulles. Or, par construction de nos éléments, lors d'un étirement, la force appliquée en une extrémité est compensée à son autre extrémité par une force qui lui est égale en norme et direction, mais opposée en sens. De ce fait, le premier élément de la barre qui subit cette force applique sur l'élément qui lui est connexe une force opposée à l'étirement. Or, pour atteindre l'équilibre, cela signifie que sur sa face commune avec le premier élément, le second élément subit une force qui compense cette force contraire à l'étirement. Cette force est donc aussi une force d'étirement. De ce fait, en propageant le raisonnement, de proche en proche, on prouve ainsi, que tous les éléments subissent un étirement de force appliquée F_{h_0}.

Or, chaque élément est en équilibre pour un étirement du à une contrainte identique $P_{h_0} = F_{h_0}/l_0$ (*i.e.* de force identique F_{h_0}), et comme chaque élément a le même module de Young et le même coefficient de Poisson, la déformation η_i et $2\delta_i$ induite par cette force en un élément i de hauteur h_i et de longueur l_0 est conduite par :

$$\begin{aligned} E &= \frac{F_{h_0}/l_0}{\eta_i/h_i} \\ \nu &= \frac{2\,\delta_i/l_0}{\eta_i/h_i} \end{aligned}$$

Soit,

$$\eta_i = \frac{h_i\,F_{h_0}}{E\,l_0}$$

et :

$$\delta_i = \nu\,l_0\,\tfrac{\eta_i}{2h_i} = \tfrac{\nu\,F_{h_0}}{2\,E}$$

On note, ainsi, que δ_i est indépendant de l'élément. Or, si on considère l'assemblage d'éléments comme un seul élément de hauteur h_0 et de longueur l_0, le comportement devrait amener à la définition du module de Young et du coefficient de Poisson en fonction des déformations η :

$$\eta = \textstyle\sum_{i=1}^{n}\eta_i = \tfrac{F_{h_0}}{E\,l_0}\textstyle\sum_{i=1}^{n}h_i = \tfrac{F_{h_0}\,h_0}{E\,l_0}$$

et de δ :

$$\delta = \delta_i = \tfrac{\nu\,F_{h_0}}{2\,E}$$

En appliquant la définition du module de Young et du coefficient de Poisson sur l'assemblage, on trouve :

$$\tfrac{F_{h_0}/l_0}{\eta/h_0} = \tfrac{F_{h_0}/l_0}{F_{h_0}/(E\,l_0)} = E$$

et de même pour ν :

$$\tfrac{2\,\delta/l_0}{\eta/h_0} = \tfrac{2\,\nu\,F_{h_0}/(2\,E)}{F_{h_0}\,h_0/(E\,l_0)} = \nu$$

Nous prouvons ainsi la conservation de ces deux paramètres dans un tel assemblage pour l'étirement dans le sens de l'entassement. Nous devons maintenant montrer la conservation dans l'étirement orthogonal.

De la même façon, nous appliquons un étirement avec une « pression linéique » P_{l_0}, c'est à dire l'application d'une force par élément i de :

$$F_{l_0,i} = h_i P_{l_0}$$

Ainsi chaque élément est en équilibre tout en ayant subi des déformations η'_i et δ'_i définies comme précédemment, mais en permuttant l et h, ainsi que F_{h_0} et $F_{l_0,i}$:

$$\begin{array}{rclcl} \eta'_i & = & \frac{l_0 F_{l_0,i}}{E h_i} & = & \frac{l_0 P_{l_0}}{E} \\ \delta'_i & = & \frac{\nu h_i \eta_i}{2 l_0} & = & \frac{\nu h_i P_{l_0}}{2 E} \end{array}$$

On note ainsi que η'_i est constante, ce qui est cohérent avec ce qui devrait se passer pour l'étirement de la barre équivalente, étirement sous l'effet de la même pression. En effet, pour une traction engendrant une déformation $\eta' = \eta'_i$ et une déformation $\delta' = \sum_{i=1}^{n} \delta'_i = \nu h_0 P_{l_0} / (2E)$, l'application de la définition du module de Young amène à :

$$\frac{P_{l_0}}{\eta'/l_0} = \frac{P_{l_0}}{l_0 P_{l_0}/(l_0 E)} = E$$

la définition du coefficient de Poisson amenant à :

$$\frac{2\delta'/h_0}{\eta'/l_0} = \nu$$

Pour le cisaillement, nous montrons de manière analogue que ce dernier est conservé dans les deux sens.

Ainsi, nous prouvons que dans les deux sens d'étirement et de cisaillement, le matériau ainsi composé se comporte correctement, en conservant ses caractéristiques rhéologiques.

Nous pouvons prouver de la même façon en assemblant m bandes de $n \times 1$ éléments, que dans une barre constituée de $n \times m$ éléments (fig. 3.21), le comportement est défini par le dédoublement des ressorts à la frontière de deux éléments, et par la définition dans chaque élément des forces par contraintes de Lagrange sur chaque élément.

En résumé, nous avons, en 2D, un objet qui est bien représenté par un assemblage d'éléments rectangulaires, caractérisés par les longueurs des mailles élémentaires, le module de Young et le coefficient de Poisson. Dans chaque élément, il y a une réaction aux forces externes s'appliquant à lui par décomposition. Un élément est ainsi composé de quatre masses, et de six ressorts. Une force interne dans un élément, devient une force externe dans un élément voisin. L'algorithme va ainsi consister à propager les réactions des forces de contraintes dans le système :

Pour tout les éléments e_i de l'objet Faire
1- Calculer les forces internes dues à des déformations / contraintes externes
2- Propager les contraintes calculées à tous les éléments voisins, comme force externe appliquée
3- Fin Pour

Nous devons encore définir comment répartir les masses.

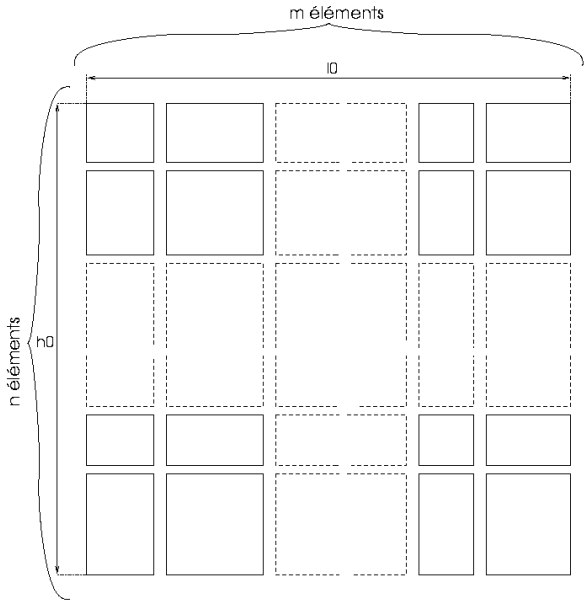


FIG. 3.21.: Passage à un maillage $n \times m$ éléments : les ressorts sont dédoublés à la jointure des éléments.

3.2.5. Répartition des masses dans un élément.

La masse de l'ensemble des éléments va permettre de définir l'inertie de l'objet modélisé ainsi que sa densité volumique. La répartition doit donc se faire en fonction du centre d'inertie G_I et de la matrice d'inertie I de l'objet réel, ainsi que de sa densité volumique ρ en chacun des points p.

Pour un objet réel, les propriétés sont données par les équations suivantes, avec M la masse totale de l'objet, ρ sa densité volumique en un point p, dv un élément de volume en ce point, et dm un élément de masse en la position $p(x, y, z)$ dans l'objet de volume total V :

$$G_I = \frac{1}{M} \int\int\int_V p\rho dv$$

$$I = \begin{pmatrix} \int\int\int_V \left(y^2+z^2\right) dm & -\int\int\int_V xydm & -\int\int\int_V xzdm \\ -\int\int\int_V xydm & \int\int\int_V \left(x^2+z^2\right) dm & -\int\int\int_V yzdm \\ -\int\int\int_V xzdm & -\int\int\int_V yzdm & \int\int\int_V \left(x^2+y^2\right) dm \end{pmatrix}$$

Si l'on modélise par approche discrète, seuls les n nœuds p_i du modèle, de masses respectives m_i et de coordonnées respectives (x_i, y_i, z_i), sont alors pris en compte et

les équations précédentes deviennent alors :

$$G_I = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i p_i$$

$$I = \begin{pmatrix} \sum_i \left(y_i^2 + z_i^2\right) m_i & -\sum_i x_i y i m_i & -\sum_i x_i z_i m_i \\ -\sum_i x_i y_i m_i & \sum_i \left(x_i^2 + z_i^2\right) m_i & -\sum_i y_i z_i m_i \\ -\sum_i x_i z_i m_i & -\sum_i y_i z_i m_i & \sum_i \left(x_i^2 + y_i^2\right) m_i \end{pmatrix}$$

Si l'on connaît les valeurs pour l'objet réel, il suffit alors d'identifier les deux systèmes d'équations. Ceci produit alors un système de 9 équations (identification des éléments dans la matrice symétrique I et coordonnées de G_I), mais pour un nombre d'inconnues (masses m_i et positions des nœuds p_i) beaucoup plus élevé. En pratique, la position des nœuds est donnée par la reconstruction géométrique, il ne reste donc plus qu'à calculer les masses en chacun des nœuds.

Dans notre cas d'éléments rectangulaires, nous devons répartir la masse totale sur chacun des éléments. Cela doit se faire en prenant en compte le volume de chaque élément pour préserver la densité volumique de l'objet modélisé. Ainsi la masse en un point du maillage sera dépendante de la masse de tous les éléments dont fait partie ce point.

Ainsi, en 2D, pour un point p_i appartenant à n éléments e_j, d'aire chacun A_{e_j}, modélisant un objet de masse surfacique ρ, la masse m_i en ce point est donnée par la relation :

$$m_i = \sum_{j=0}^{n} \rho\, A_{e_j}/4$$

3.2.6. Détermination des limites du modèle 2D.

Nous venons de construire un modèle théorique 2D satisfaisant, pour de petits déplacements, la conservation du module de Young, du coefficient de Poisson et du cisaillement. La construction de notre modèle s'est effectuée sur les définitions des paramètres rhéologiques.

Nous ne sommes plus dans le cas d'une géométrie triangulaire comme pour le modèle de VG, aussi, nous ne faisons pas forcément les mêmes tests que ceux (spécifiques aux triangles) effectués sur son modèle, excepté pour la mesure de l'erreur sur le module de Young et le coefficient de Poisson.

La détermination des limites de notre modèle en 2D dépend de plusieurs paramètres, dont le module de Young, le coefficient de Poisson et les dimensions des mailles. Nous ne remaillons pas notre modèle au cours des tests car nous restons dans une hypothèse de linéarité du comportement. Comme ceci, nous déterminons les limites de confiance du modèle en petits et grands déplacements.

Ainsi, nous nous basons sur l'algorithme de mesure du module de Young et du coefficient de Poisson par tests d'étirement que nous avons déjà présenté (fig. 3.9, p.

76). Ce test nous permet de connaître à partir de quelle déformation notre modèle ne permet plus de suivre ces deux caractéristiques. Pour compléter nos expériences, nous effectuons ce test pour un carré, et une géométrie non carrée afin de déterminer comment évolue l'erreur. D'autre part, nous testons notre modèle dans le cas d'une composition d'éléments pour valider qu'il reste stable.

La même méthode est appliquée pour la loi du cisaillement que notre modèle doit suivre, et qui n'était pas suivie par VG. Nous proposons, ainsi, de vérifier que l'erreur reste contrôlable sur une composition d'éléments. Pour cela, nous nous basons sur les résultats obtenus lors d'une expérience de cisaillement sur une composition d'éléments dont on a calculé les déplacements à l'aide d'une résolution par méthode des éléments finis effectuée avec le Code Aster.

Ensuite, nous nous intéressons à vérifier que les masses sont bien réparties et que le modèle permet d'approcher de grandes déformations (au sens des rotations) dans un test de flexion.

Enfin, nous étudions si le comportement reste cohérent pour une forme un peu plus quelconque, en comparant un test de contrainte sur un assemblage non symétrique d'éléments.

Limites en traction.

Nous nous sommes limités à des étirement inférieurs à 20% pour un module de Young E_2 imposé à 100Pa.m et 1000 Pa.m, et pour des valeurs du coefficient de Poisson imposées entre 0,1 et 0,5. Nous avons effectué ce test sur un carré, puis sur plusieurs rectangles de dimensions imposées par les limites d'angle entre la diagonale et la hauteur pour obtenir les raideurs positives (fig. 3.16, p.88).

Ce test nous enseigne ainsi que le module de Young (fig. 3.22) et le coefficient de Poisson (fig. 3.23 et 3.24) de notre modèle ont tendance à dériver avec les déformations appliquées. Ainsi, dans la figure 3.22, le module de Young est erroné de plus de 5% pour des déformations supérieures à 11%. Nous remarquons, de plus, que cette erreur augmente inversement avec le coefficient de Poisson imposé : pour une déformation de 10%, l'erreur sur le module de Young est de $3,5\%$ pour $\nu = 0,3$, de $3,1\%$ pour $\nu = 0,4$, et de $2,8\%$ pour $\nu = 0,5$. Pour le coefficient de Poisson, l'erreur ne dépasse pas les 5% pour $\nu \in [0,3; 0,5]$ et pour une déformation inférieure à 20% (fig. 3.24). D'autre part, si nous répétons ces expériences avec des modules de Young différents, nous retrouvons exactement les mêmes courbes.

Nous notons d'autre part qu'un changement de l'allure de l'erreur sur ν s'effectue pour $\nu = 0,3$. En effet, pour $\nu < 0,3$ les erreurs sont positives laissant apparaître une sur-estimation des forces correctrices pour ces coefficients de Poisson, alors qu'ensuite elles sont négatives montrant ainsi une sous-estimation. Nous expliquons ce phénomène par le fait que pour $\nu = 0,3$, il n'y a pas besoin de force correctrice de Lagrange puisque nous nous trouvons dans le seul cas théorique de modèle qui puisse garantir naturellement la caractéristique du module de Young et du coefficient de Poisson (démonstration p. 85-87).

Si on réitère ces expériences pour des éléments rectangulaires, nous constatons que l'erreur augmente avec l'angle à la diagonale pour le module de Young. En d'autres

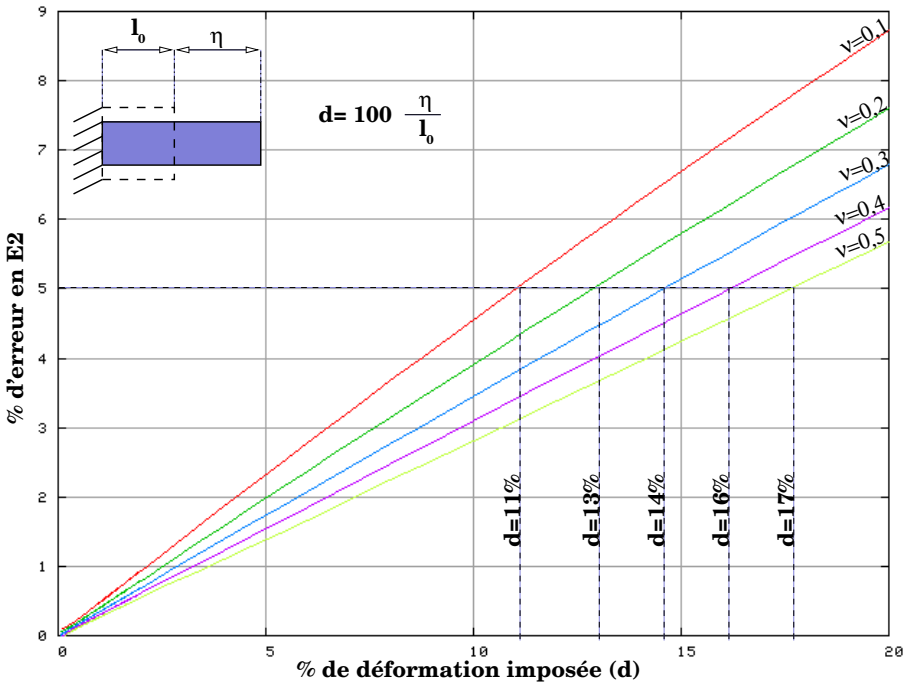


FIG. 3.22.: Mesures d'erreur sur le module de Young 2D d'un carré (les courbes sont identiques quelle que soit la valeur de E_2 imposée) : l'erreur est plus forte avec la déformation imposée et augmente de manière inversement proportionnelle avec le coefficient de Poisson imposé.

termes, si on fait l'expérience de traction suivant le plus petit côté d'un rectangle, dans les limites d'angle entre la diagonale et la hauteur pour les raideurs positives, nous constatons que l'erreur est très petite. En revanche, en reprenant le test de traction avec le côté le plus grand, l'erreur est plus grande. Cependant, nous trouvons des erreurs inférieures à 5% pour $\nu \in [0,3; 0,5]$ et pour une déformation inférieure à 10% pour le pire des cas. Il en va de même pour le coefficient de Poisson pour lequel l'erreur est inférieure à 5% pour les mêmes conditions et dans le pire des cas.

Ainsi, si l'on souhaite effectuer des déformations supérieures à 10%, le choix d'un maillage carré est préconisé.

Enfin, si nous effectuons les tests de traction sur une barre quelconque maillée avec un seul type d'élément, nous obtenons la même erreur que celle de l'élément seul, ce qui permet de valider le bon comportement d'une composition d'éléments et la conservation des caractéristiques rhéologiques (module de Young et coefficient de Poisson) pour des éléments carrés.

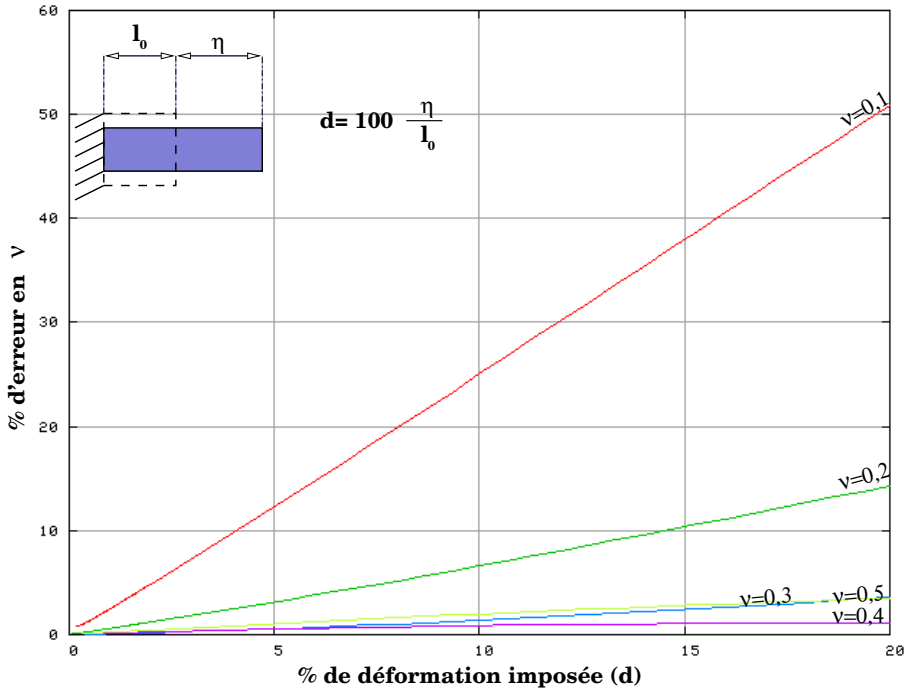


FIG. 3.23.: Mesures d'erreur en valeur absolue sur le coefficient de Poisson d'un carré (les courbes restent identiques quelles que soient la valeur de E_2 imposée) : l'erreur est plus forte avec la déformation imposée. Elle tend vers 0 pour de petites déformations, mais elle fluctue avec le coefficient de Poisson imposé, en décroissant avant que ν n'atteigne une valeur comprise entre 0,3 et 0,4, et en croissant après cette valeur.

Limites en cisaillement.

En remplaçant l'expérience de traction par l'expérience de cisaillement consistant à faire glisser un côté par rapport à son parallèle, nous utilisons le même algorithme afin de mesurer les erreurs en cisaillement.

Nous remarquons que l'erreur de G_2 n'est pas dépendante de E_2 mais qu'elle augmente (fig. 3.25) avec ν imposé. De plus, l'erreur sur le cisaillement reste inférieure à 5% pour un angle de cisaillement inférieur à 9°, dans le cas le pire (pour $\nu = 0,5$) pour le carré.

Si on réitère ces expériences sur des éléments rectangulaires, nous observons que l'erreur sur le cisaillement augmente avec l'angle à la diagonale. Ainsi, l'erreur reste inférieure à 5% pour un cisaillement d'angle inférieur à 8° et pour un élément rectangulaire d'angle à la diagonale de 60°, et, si on retourne l'élément dans l'expérience, pour l'effectuer sur un élément rectangulaire d'angle à la diagonale de 30°, on obtient

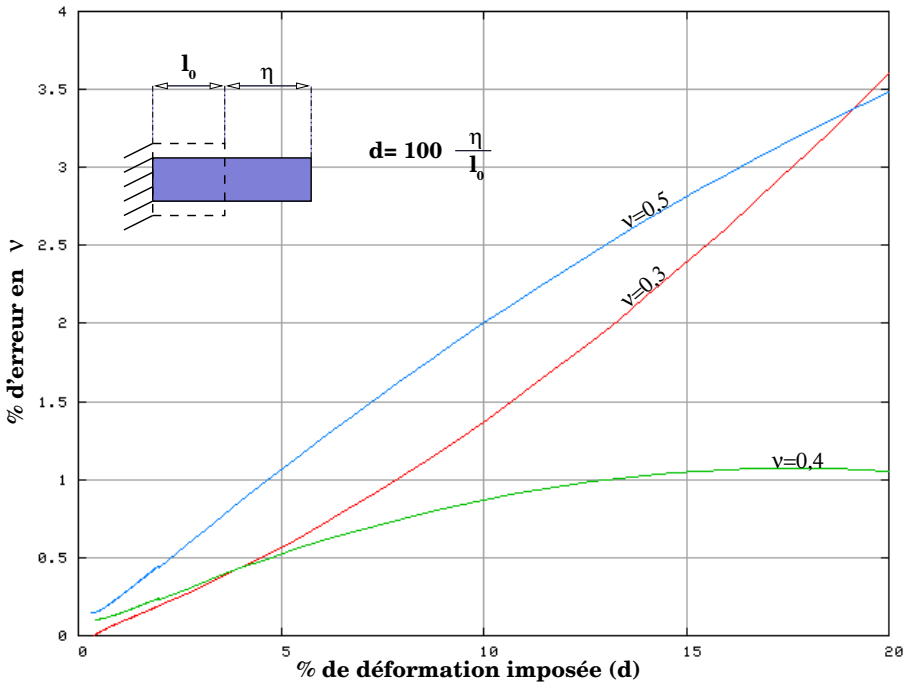


FIG. 3.24.: Mesures d'erreur sur le coefficient de Poisson d'un carré : détail pour ν autour de 0,3 , 0,4.

seulement une erreur de $0,1\%$ pour un angle de cisaillement de 8°.

Enfin, pour tester le bon comportement du cisaillement sur une composition d'éléments, cela ne peut pas se faire de la même manière que pour un seul élément (la mesure de l'angle de cisaillement ne peut s'effectuer sur plusieurs éléments). De ce fait, nous avons effectué des tests de cisaillement avec notre modèle et les avons comparé avec les résultats obtenus à l'aide du solver par éléments finis Code Aster.

Nous avons effectué ces expériences sur une barre (fig. 3.26) de 100×300mm dont on a fixé le côté supérieur dans son plan (en lui laissant ainsi la seule possibilité de se déplacer suivant x) et dont on a totalement bloqué le côté inférieur. Nous avons ensuite caractérisé ce matériau avec le module de Young valant 1000Pa.m et un coefficient de Poisson de 0,3. Nous avons ensuite appliqué une force de cisaillement de 2000N sur le côté supérieur.

Comme la résolution par éléments finis est meilleure pour un nombre important d'éléments (fig. 3.27), nous avons d'abord cherché la résolution du maillage donnant le meilleur résultat afin de la prendre comme référence pour la comparer aux résultats obtenus avec notre modèle. Dans la figure 3.27, nous représentons le maillage d'origine ainsi que le résultat des déformations obtenues avec le Code Aster. Plus la résolution

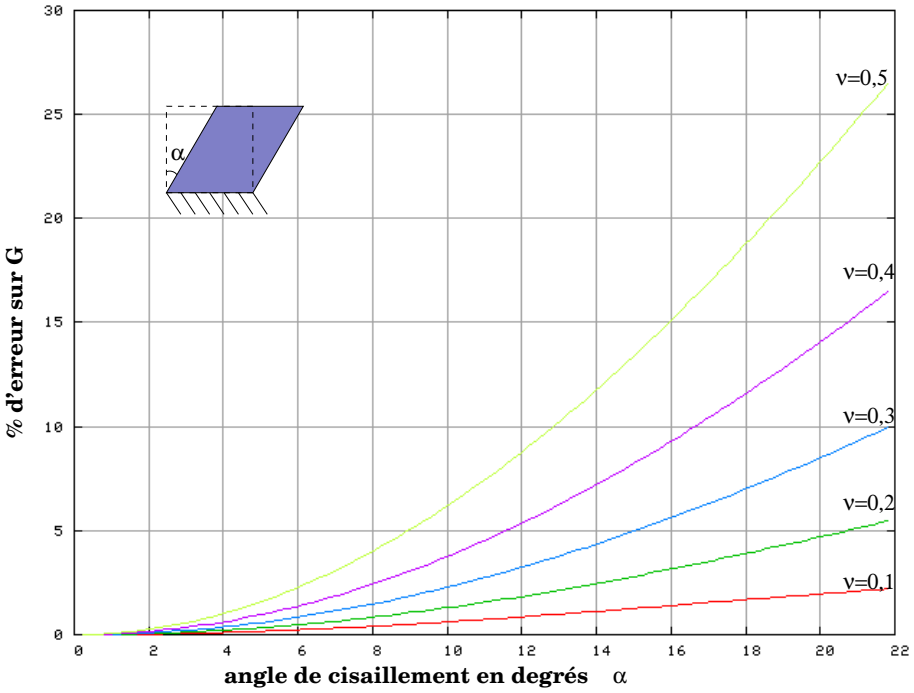


FIG. 3.25.: Erreur mesurée dans un carré sur le coefficient de cisaillement en fonction de l'angle de cisaillement imposé et du coefficient de Poisson : l'erreur sur le cisaillement est plus forte avec la déformation imposée. Elle augmente, de plus, avec le coefficient de Poisson imposé.

est fine, plus le résultat est précis.

Après avoir effectué les mêmes expériences avec notre modèle, nous avons superposé les résultats issus de nos simulations au résultat référence issu de Code Aster (fig. 3.28). On observe que plus le maillage est fin, plus l'erreur augmente dans cette expérience. Ceci s'explique par le fait que les éléments d'une faible résolution subissent de plus grandes déformations que les éléments d'une résolution plus élevée. Or, comme nous l'avons montré, les déformations simulées sont précises pour des élongations inférieures à 10% et des cisaillements d'angle inférieur à 9°, ce qui n'est pas le cas pour certains éléments qui font dévier la courbure de la poutre cisaillée. C'est pour cela que dans la figure 3.27, nous observons qu'il y a moins d'erreur vers les contraintes de points fixes et plus d'erreur là où il y a des grandes déformations.

Cependant, cela ne veut pas dire que notre modèle est mauvais, mais qu'une difficulté supplémentaire de choisir la résolution la plus adaptée aux déformations pour simuler le comportement devra être pris en compte.

En revanche, dans le cas de petites déformations, nous obtenons le même ordre

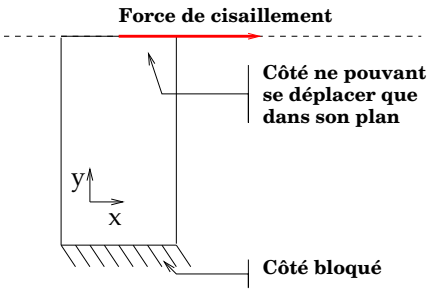
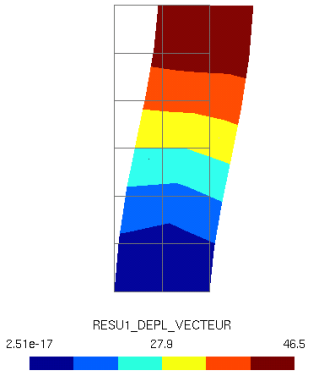


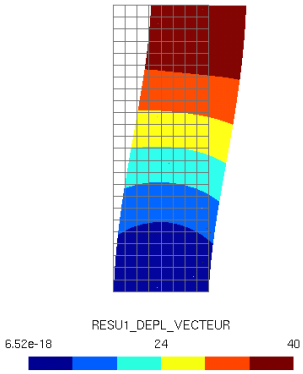
FIG. 3.26.: Description des expériences de cisaillement simulées : nous avons bloqué complètement un côté et avons bloqué dans son plan son parallèle pour des raisons de visualisation, mais, par réaction du côté bloqué, l'expérience est équivalente à l'expérience classique de cisaillement où l'on applique 2 forces opposées.

d'erreur que pour les éléments finis : plus le maillage est fin meilleure est la solution.

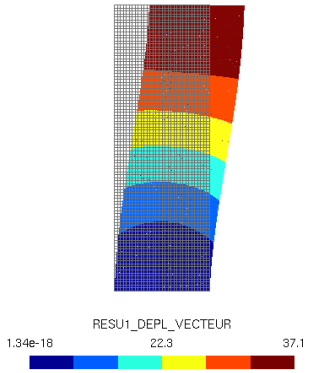
Ceci nous permet de valider le bon comportement d'une composition d'éléments dans le cas de phénomène de cisaillement.



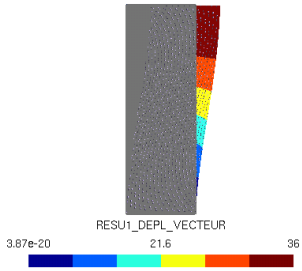
(a) Simulation pour un maillage 2×6 : le déplacement maximal obtenu est de 46,5mm



(b) Simulation pour un maillage 32×96 : le déplacement maximal obtenu est de 37,1mm



(c) Simulation pour un maillage 32×96 : le déplacement maximal obtenu est de 37,1mm

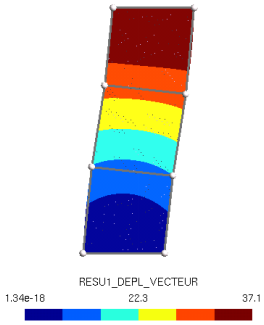


(d) Simulation pour un maillage 200×600 : le déplacement maximal obtenu est de 36,2mm

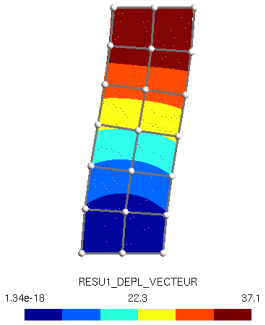
FIG. 3.27.: Recherche de référence élément fini pour comparaison de l'expérience de cisaillement avec notre modèle

Limites en flexion.

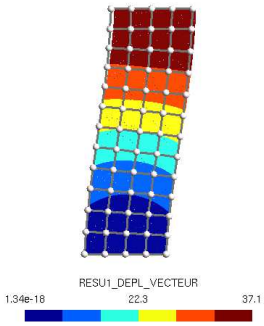
Le test de flexion d'une poutre est préconisé pour valider les modèles mécaniques. Il permet notamment de valider la bonne répartition des masses et peut aussi montrer le bon comportement en grandes déformations au sens des éléments finis (à cause des rotations).



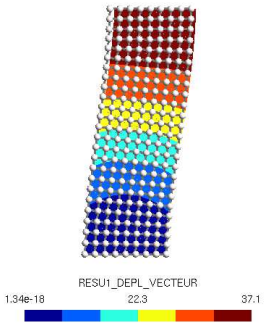
(a) Simulation avec une composition de 1×3 éléments.



(b) Simulation avec une composition de 2×6 éléments.



(c) Simulation avec une composition de 4×12 éléments.



(d) Simulation avec une composition de 1×3 éléments.

FIG. 3.28.: Superposition des résultats de l'expérience de cisaillement obtenus (i) avec le Code Aster en dégradé de couleurs, avec (ii) ceux obtenus avec notre modèle. Plus le modèle est fin plus on se rend compte de la propagation des erreurs dues déformations trop grande par rapport au cadre théorique de notre modèle (développement limité d'ordre 2 pour des déplacements proches de 0).

Ce test consiste à définir une poutre de dimensions $L \times H \times T$ et de masse M que l'on encastre à une extrémité, et à observer ses déformations sous l'action de son propre poids. À l'équilibre, la poutre montre un fléchissement, dont la flèche de l'axe médian peut être calculée en s'aidant du moment d'inertie.

La théorie des poutres nous montre en effet, que de par les moments fléchissants

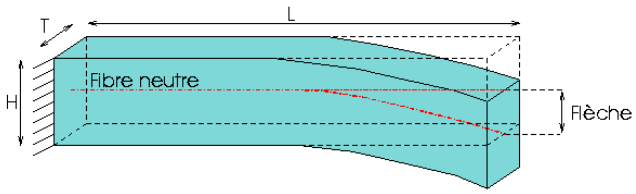


FIG. 3.29.: L'expérience de flexion consiste à laisser se déformer une poutre encastrée, sous son propre poids. On peut alors exprimer la déviation de la fibre neutre suivant la position dans la poutre.

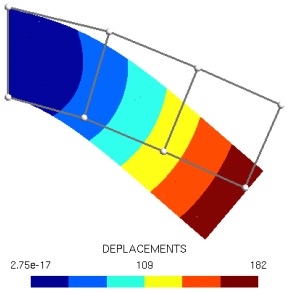
s'exerçant sous l'effet de son poids, la poutre va avoir tendance à se déformer : la partie supérieure va s'allonger alors que la partie inférieure va avoir tendance à se compresser. Au centre, une ligne va avoir sa longueur inchangée : il s'agit de la « fibre neutre ».

La flèche (la déviation de cette fibre neutre) est donnée, dans le cas où le coefficient de Poisson est nul, par l'équation :

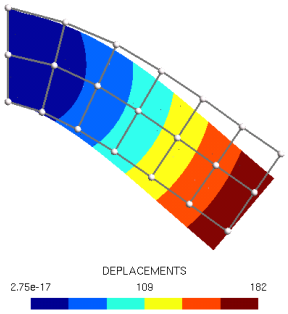
$$y(x) = \frac{\rho g}{24EI}\left(6L^2x^2 - 4Lx^3 + x^4\right) \tag{3.12}$$

avec le moment d'inertie de la barre rectangulaire $I = TH^3/12$, la densité linéique $\rho = M/L$, et le module de Young, $E = E_2/T$, soit,

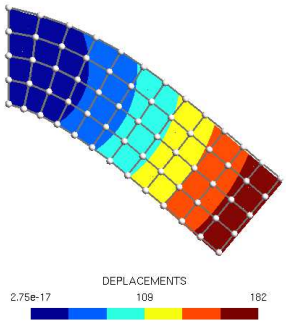
$$y(x) = \frac{Mg}{2E_2LH^3}\left(6L^2x^2 - 4Lx^3 + x^4\right) \tag{3.13}$$



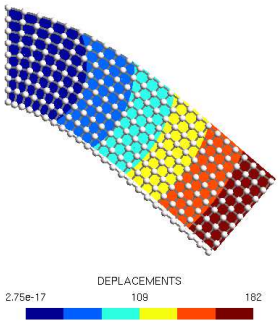
(a) Résultat pour une subdivision de 3×1



(b) Résultat pour une subdivision de 6×2



(c) Résultat pour une subdivision de 12×4



(d) Résultat pour une subdivision de 24×8

FIG. 3.30.: La poutre colorée est le résultat obtenu avec Code Aster. On a représenté notre résultat avec un maillage rectangulaire. Nous notons que pour un maillage grossier, comme les masses sont réparties sur les sommets des éléments, et comme certains sommets sont fixés, une partie des masses n'intervient pas, ce qui induit un résultat éloigné. En revanche, plus on raffine, plus l'erreur est petite, jusqu'à ce que l'on ait atteint la limite des déformations simulables avec précision pour un élément.

Nous devons ainsi obtenir la même flèche quelque soit le maillage, pour une barre de dimension, de module de Young et de masse linéique donnés. En 2D, Code Aster, même s'il produit des résultats dépendants de l'échantillonnage, vérifie cependant la forme de cette équation. Nous devons ainsi comparer les résultats obtenus à l'aide de notre modèle avec les résultats obtenus par Code Aster.

Nous montrons, dans la figure 3.30, les résultats obtenus pour une poutre de dimensions 300×100mm, de module de Young 1000Pa.mm, de coefficient de Poisson 0,3 et

de masse totale de 0,5kg. Notre vérification consiste ainsi à faire les expériences avec notre modèle pour différentes subdivisions et à comparer nos résultats avec un résultat de référence obtenu à l'aide du Code Aster pour un maillage très fin.

Comme dans Code Aster, nous notons que notre modèle se comporte différemment si on le modélise avec une plus grande finesse (fig. 3.30), et qu'il est d'autant plus juste.

Par contre, nous observons bien qu'un échantillonnage de points sur la fibre neutre suit bien une courbe quadratique de la forme de l'éq. 3.13. Nous discuterons de façon plus détaillée pour le cas 3D de l'interprétation à donner à ces résultats.

Test sur une composition d'éléments quelconques.

Le dernier test que nous avons effectué avait pour but de montrer que le modèle se comporte bien, même pour une géométrie non symétrique. Pour cela, nous avons choisi d'effectuer un test montrant une forme non symétrique contrainte sur une direction.

Nous avons décidé d'un objet en forme de « L » retourné, contraint à sa base à une encastration, et contraint sur l'un de ses côtés à subir une force suivant la direction x (fig. 3.31).

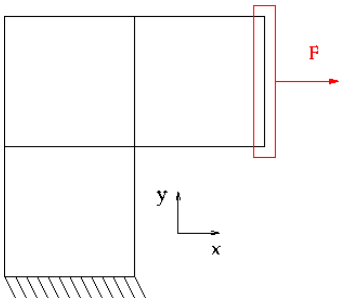
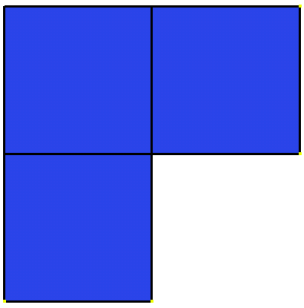
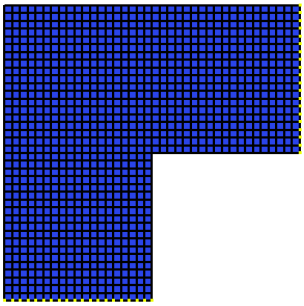


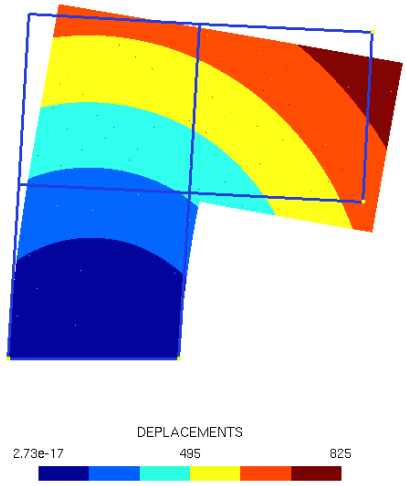
FIG. 3.31.: Un objet quelconque contraint en encastration et subissant une force suivant x.

Notre « L » se répartit sur un carré de 4000×4000 mm qui peut être décomposé en 3 carrés principaux de 2000×2000 mm chacun. Chaque carré élémentaire est lui-même décomposable en autres sous-maillages. Nous avons fait des tests pour un module de Young 2D de 1000Pa.m et un coefficient de Poisson de 0,3.

Les forces que nous avons appliquées aux points de la face contrainte avaient une intensité dépendante de la résolution du maillage pour obtenir des déformations du même ordre. Dans le tableau 3.2, nous avons recensé 2 exemples de forces appliquées suivant la résolution du maillage.

Résolution et	**Représentation**	**Forces appliquées par point**
1×1		1 500 N
		sur 2 points
...	...	...
19×19		150 N
		sur 20 points

Tab. 3.2.: Forces appliquées sur le L suivant la résolution du maillage



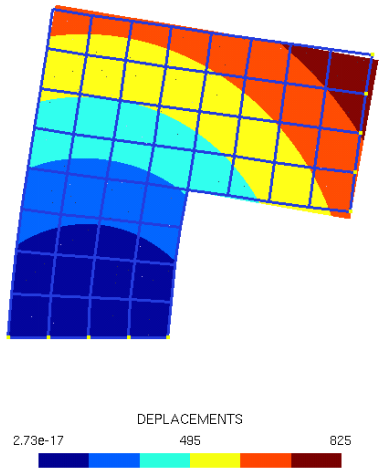
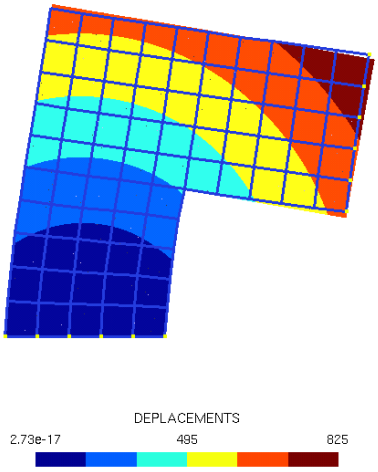


FIG. 3.32.: Superposition du résultat obtenu avec Code Aster pour un maillage fin (en couleur) sur les résultats obtenus avec notre modèle (arêtes) pour les résolutions 1×1 et 4×4



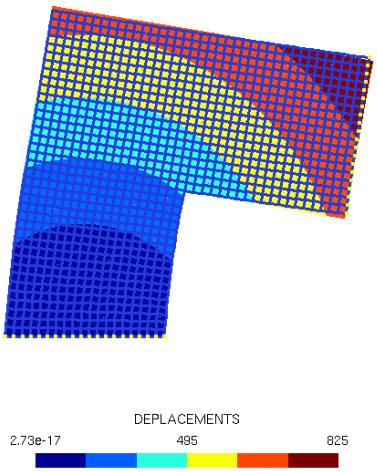


FIG. 3.33.: Superposition du résultat obtenu avec Code Aster pour un maillage fin (en couleur) sur les résultats obtenus avec notre modèle (arêtes) pour les résolutions 5×5 et 19×19.

Pour ce qui est de l'application de la contrainte d'encastration, cela a consisté à imposer les points fixes de la base, et à y appliquer les forces de réaction annulant les forces internes (nous détaillons cela dans le chapitre suivant).

Nous avons effectué ce test avec Code Aster pour des éléments plans équivalents, de 0,008m d'épaisseur, soit de module de Young de 1000Pa.m/0,008m=125000Pa et de même coefficient de Poisson, subissant exactement les mêmes forces que dans notre modèle. Nous représentons dans les illustrations suivantes (fig. 3.32 et 3.33) la superposition des résultats obtenus avec le Code Aster en couleur et le résultat obtenu avec notre modèle pour différentes résolutions.

Pour chaque expérience, nous avons mesuré les erreurs moyennes et écarts types entre les déplacements obtenus avec notre modèle et les résultats de Code Aster. Ces mesures, en milimètres, sont répertoriées dans le tableau 3.3.

Résolution	**Moyenne des erreurs en déplacement (mm)**	**Écart Type des erreurs en déplacement (mm)**
1×1	236,63	62,47
2×2	83,78	14,08
3×3	47,54	6,35
4×4	29,17	3,52
5×5	23,57	2,39
9×9	17,41	1,04
19×19	14,36	0,39

TAB. 3.3.: Mesure des erreurs en déplacement par rapport au résultat obtenu avec Code Aster

Nous constatons que plus nous augmentons la résolution, plus les résultats se rapprochent de notre référence. Cela nous permet de conclure, encore une fois, que notre modèle permet une bonne approximation des éléments finis pour une géométrie élémentaire carré et pour un maillage de bonne résolution.

3.3. Incorporation des paramètres rhéologiques pour les éléments 3D.

En 3D, nous souhaitons prendre en compte, en plus des comportements de l'étirement (caractérisé par le module de Young et le coefficient de Poisson) et du cisaillement (caractérisé par le coefficient de cisaillement), la compressibilité (caractérisée par le coefficient de compressibilité). L'intégration des comportements précédemment décrits en 2D ne se fait pas de manière automatique car il faut rajouter une autre dimension d'étirement et de cisaillement. Ainsi, il n'y a plus seulement 2 expériences de cisaillement à intégrer, mais désormais six cisaillements différents (fig. 3.34) sont envisageables (3 plans de 2 directions principales chacun). On a cependant toujours les mêmes considérations : quelqu'il soit, en petites déformations, le cisaillement entraîne principalement

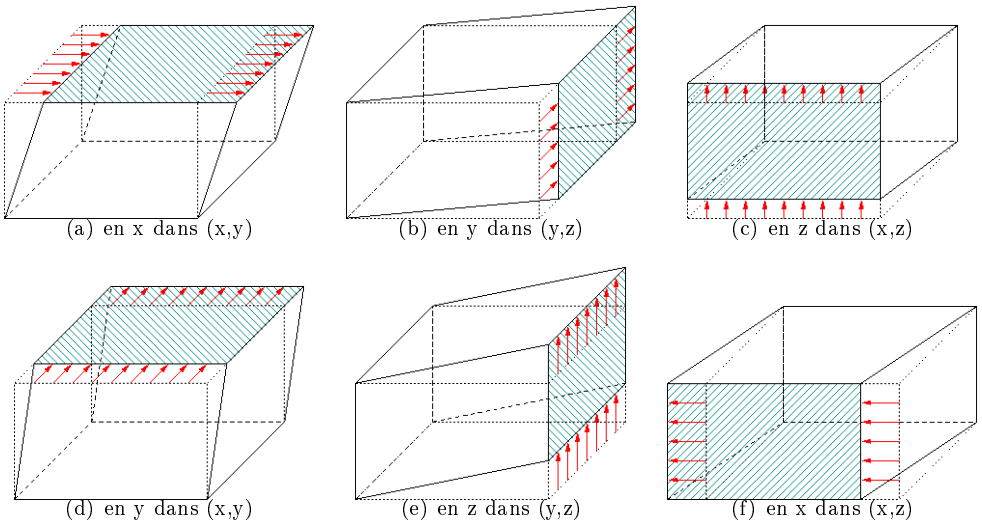


FIG. 3.34.: 6 cisaillements possibles en 3D.

la déformation des diagonales internes du volume ainsi que des diagonales des 2 faces orthogonales au plan déplacé et ayant un de ces vecteurs directeur, de même direction que celui du déplacement.

Le choix du maillage de l'élément est aussi cause de discussion. Dans notre choix de maillage, nous avions considéré que la stabilité d'un maillage dont les forces se répartissaient sur ses arêtes était meilleure pour un maillage constitué de triangles. D'autre part, pour un comportement homogène isotrope, il est nécessaire d'avoir une symétrie dans le maillage. Nous ne remettons pas en doute ces hypothèses, mais après l'étude en 2D, nous nous demandons si les raideurs vont être suffisantes pour caractériser correctement le comportement rhéologique, et si nous n'aurons pas besoin d'utiliser d'autres contraintes telles que des multiplicateurs de Lagrange. Nous avons en effet fait appel, en 2D, à des forces supplémentaires non produites directement par le maillage. De ce fait, peut-être n'est-il plus totalement utile d'avoir autant de liens que de diagonales.

Faut-il conserver les ressorts des diagonales 2D sur les faces ? Les diagonales du parallélépipède sont-elles suffisantes pour répondre aux définitions de toutes les constantes (cisaillement, coefficient de compressibilité, module de Young et coefficient de Poisson) ? Bref, comment attribuer les raideurs les plus pertinentes (fig. 3.35) pour notre modèle mécanique et quels multiplicateurs de Lagrange sont nécessaires ?

La solution nécessite certainement un recours à des contraintes de Lagrange, aussi la solution la meilleure est certainement un compromis entre le choix d'un maillage stable (*M3*) et un maillage réduit (*M0*), c'est-à-dire la solution qui consiste à prendre des ressorts sur les arêtes des faces, ainsi que les ressorts des diagonales de l'intérieur du cube (*M2*). En effet, cette solution a l'avantage de garder une stabilité dans le maillage en générant des triangles tout en allégeant le nombre de ressorts par la suppression de

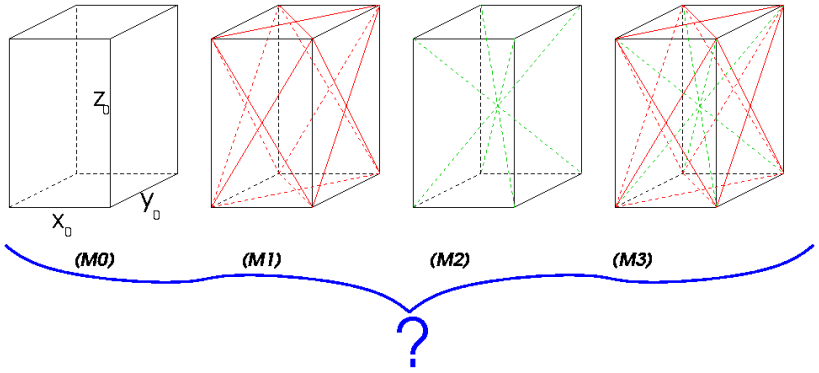


FIG. 3.35.: Quelles raideurs pour la 3D et pour un comportement homogène isotrope ? *(M0)* seulement sur les arêtes ? *(M1)* sur les les arêtes et diagonales des faces ? *(M2)* sur les arêtes et diagonales du volumes ? ou bien *(M3)* sur tous les liens symétriques possibles ?

ceux sur les diagonales des faces.

Pour justifier ce choix d'élément, nous devons démontrer d'abord qu'il n'y a pas de solution générale portée par les ressorts seuls et que les ressorts portés par les diagonales des faces ne sont pas forcément nécessaires. Une fois cette démonstration faite, nous devons imposer le cisaillement. Pour cela, nous introduisons ce phénomène sur les diagonales internes et proposer une solution avec contrainte de Lagrange. Nous devons enfin construire notre modèle en nous plaçant dans une barre de dimensions $x_0 \times y_0 \times z_0$ et en intégrant le comportement de l'étirement.

Nous utilisons la notation suivante dans la suite :

K_i	les raideurs des arêtes de l'élément suivant leur direction $i \in \{x, y, z\}$,
$K_{i\,j}$	les raideurs des diagonales des faces du plan $(i, j) \in \{x, y, z\}^2$, avec $i \neq j$.
K_d	les raideurs des diagonales internes du cube.

3.3.1. Inexistence de solution générale portée par les ressorts seuls.

Pour cette démonstration, plaçons-nous dans un élément cubique unité ($x_0 = y_0 = z_0 = 1$) et complètement maillé (modèle *(M3)*) auquel nous appliquons de petites déformations. Les diagonales des faces ont alors comme longueur $d_{face} = \sqrt{2}$, et celles du cube $d_{cube} = \sqrt{3}$. Les raideurs des côtés sont identiques ($K_x = K_y = K_z$), et il en est de même pour les raideurs des diagonales des faces ($K_{xy} = K_{xz} = K_{yz}$), que nous notons K_{xx}.

Par symétrie dans le cube, les 6 cisaillements sont tous équivalents et on peut résumer en une seule équation le fait que le cube suive les lois du cisaillement. Un cisaillement dû à un glissement de η amène à la déformation des 4 diagonales du cube ainsi que des

4 diagonales des 2 faces latérales se déformant (fig. 3.36). Ces déformations obtenues par développement limité en petits déplacements sont de $\Delta_{d_{cube}}$ et $\Delta_{d_{face}}$:

$$\begin{cases} \Delta_{d_{cube}} & = & \sqrt{(1+\eta)^2+2}-\sqrt{3} & \sim & \frac{\sqrt{3}}{3}\eta+O\left(\eta^2\right) \\ \Delta_{d_{face}} & = & \sqrt{(1+\eta)^2+1}-\sqrt{2} & \sim & \frac{\sqrt{2}}{2}\eta+O\left(\eta^2\right) \end{cases}$$

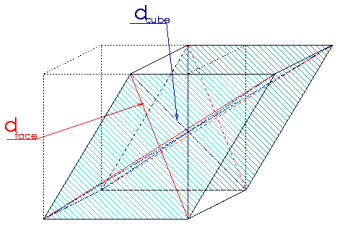


FIG. 3.36.: Le cisaillement dans le cube a pour conséquence la déformation des diagonales d_{face} des 2 faces qui subissent un cisaillement 2D et des diagonales d_{cube} internes au cube

Comme en 2D, le cisaillement 3D ne met en jeu que les diagonales ; cela nous permet de négliger un certain nombre de petites déformations (des arêtes et des diagonales des 4 autres faces non cisaillées), puisque justement nous nous sommes placés en petites déformations. Le lagrangien en statique associé au cisaillement se calcule alors de la façon suivante :

$$L = F_{cis}\eta - \frac{4K_d}{2}\frac{\eta^2}{3} - \frac{4K_{xx}}{2}\frac{\eta^2}{2}$$

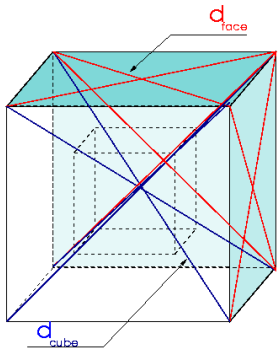
Après résolution et application de la définition du cisaillement, on trouve l'équation en K_{xx} et K_d :

$$\frac{4K_d+6K_{xx}}{3} = \frac{E}{2\left(1+\nu\right)} \tag{3.14}$$

Afin d'introduire la caractéristique de compressibilité, nous appliquons une pression uniforme sur le cube, qui engendre une déformation de chaque côté uniforme de 2η laissant sa forme cubique à l'objet. Cette déformation engendre aussi (fig. 3.37) la déformation de toutes les diagonales, les diagonales des faces ayant toutes les mêmes déformations :

$$\begin{cases} \Delta_{d_{cube}} & = & \sqrt{3\left(1+2\eta\right)^2}-\sqrt{3} & \sim & 2\sqrt{3}\eta+O\left(\eta^2\right) \\ \Delta_{d_{face}} & = & \sqrt{2\left(1+2\eta\right)^2}-\sqrt{2} & \sim & 2\sqrt{2}\eta+O\left(\eta^2\right) \end{cases}$$

Les pressions s'appliquant en chacune des 6 faces sont toutes égales et impliquent



L'application d'une pression uniforme sur le cube (en pointillé) engendre une déformation uniforme du cube dans laquelle les diagonales d_{face} des faces se déforment identiquement. Il en va de même des diagonales internes au cube d_{cube} et de chacune des arêtes.

FIG. 3.37.: Déformations du cube lors de l'expérience pour la mesure du coefficient de compressibilité K

ainsi la même force surfacique F_{face}. On peut alors écrire le lagrangien :

$$L = 6F_{face}\eta - \frac{12K_x}{2}(2\eta)^2 - \frac{12K_{xx}}{2}8\eta^2 - \frac{4K_d}{2}12\eta^2$$

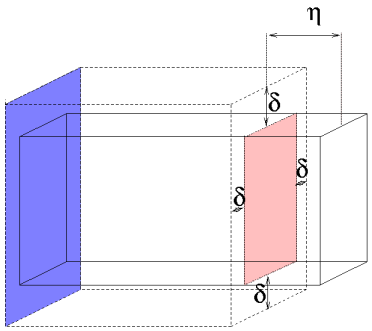
Après résolution et application de la définition du coefficient de compressibilité K (éq. 2.6 et 2.7, p. 60-60), on remplace η dans l'équation de compressibilité :

$$\begin{aligned} K &= -\frac{\Delta P}{\Delta V/V_0} \\ &= \frac{F_{face}/(1+2\eta)^2}{\left((1+2\eta)^3-1\right)/1} \sim \frac{F_{face}}{6\eta} + O\left(\eta^2\right) \\ &= \frac{E}{3(1-2\nu)} \end{aligned}$$

Soit,

$$\frac{4K_x + 8K_{xx} + 4K_d}{3} = \frac{E}{3(1-2\nu)} \tag{3.15}$$

Il nous reste désormais à intégrer la loi de comportement en étirement pour valider le module de Young et le coefficient de Poisson. Dans le cas d'un étirement de η, les autres directions se compressent de la même valeur 2δ par symétrie (fig. 3.40). Ainsi, deux faces se compriment en gardant leur forme carrée, alors que les 4 faces parallèles à l'allongement sont étirées. On note $face_1$ les 4 faces étirées et $face_2$ les 2 faces



Le cube étiré de η se déforme de façon homogène en compressant les côtés orthogonaux à l'étirement de 2δ.

FIG. 3.38.: Déformation du cube lors de l'expérience de traction

comprimées. Les diagonales se déforment ainsi :

$$\begin{cases} \Delta_{d_{cube}} & = & \sqrt{(1+\eta)^2 + 2(1-2\delta)^2} - \sqrt{3} & \sim & \frac{\sqrt{3}}{3}\eta - \frac{4\sqrt{3}}{3}\delta + O\left(\eta^2, \delta^2\right) \\ \Delta_{d_{face_1}} & = & \sqrt{(1+\eta)^2 + (1-2\delta)^2} - \sqrt{2} & \sim & \frac{\sqrt{2}}{2}\eta - \sqrt{2}\delta + O\left(\eta^2, \delta^2\right) \\ \Delta_{d_{face_2}} & = & \sqrt{2(1-2\delta)^2} - \sqrt{2} & \sim & -2\sqrt{2}\delta + O\left(\delta^2\right) \end{cases}$$

On peut alors exprimer le lagrangien associé à l'expérience de traction :

$$L = F\eta - 2K_x\eta^2 - 16K_x\delta^2 - 16K_{xx}\delta^2 - 4K_{xx}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\eta - \sqrt{2}\delta\right)^2 - 2K_d\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\eta - \frac{4\sqrt{3}}{3}\delta\right)^2$$

Après résolution, la définition du module de Young et du coefficient de Poisson mène aux équations :

$$\begin{cases} E & = & \frac{12K_dK_{xx}+24K_{xx}^2+24K_x^2+60K_xK_{xx}+24K_xK_d}{6K_x+9K_{xx}+4K_d} \\ \nu & = & \frac{2K_d+3K_{xx}}{6K_x+9K_{xx}+4K_d} \end{cases} \tag{3.16}$$

Les équations (éq. 3.14, 3.15 et 3.16) obtenues sur les raideurs d'un système masses-ressortsà partir des définitions des caractéristiques des matériaux homogènes élastiques ont une solution si et seulement si $\nu = 0,25$ avec K_{xx} quelconque, $K_d = 0,3.E + 1,5.K_{xx}\ N.m^{-1}$ et $K_x = 0,25.E - 0,5.K_{xx}\ N.m^{-1}$. Ces solutions sont trop restrictives, d'autres solutions doivent être explorées et les multiplicateurs de Lagrange sont sans doute une réponse à notre problème.

Ces solutions mettent cependant en évidence le fait que les ressorts des faces peuvent ne pas intervenir pour définir le comportement (puisque on a une solution pour $K_{xx} = 0$). Par conséquent, dans la suite nous cherchons des solutions pour des mailles du type (*M2*).

3.3.2. Cisaillement porté par les diagonales du parallélépipède.

L'étude du cisaillement porté par les seules diagonales internes d'un parallélépipède quelconque amène à une difficulté. En effet, en résolvant de la même manière que précédemment en 2D, et en faisant en sorte que le cisaillement soit bien défini, on trouve une solution non symétrique de K_d pour un cisaillement dans le plan (x, y) :

$$K_d = \frac{Ez_0\left(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2\right)}{8\left(1+\nu\right)x_0 y_0}$$

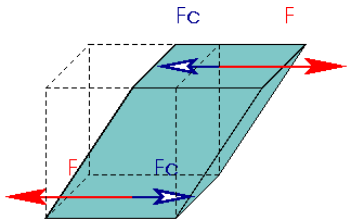
Si on réitérait cette expérience avec les 5 autres cisaillements possibles, on trouverait d'autres valeurs de K_d, par permutation des variables x_0, y_0 et z_0. Ainsi, une seule raideur K_d semble être insuffisante pour simuler tous les cisaillement, car elle orienterait le comportement en faveur d'un type de cisaillement et ne permettrait pas d'obtenir le bon comportement pour les autres cisaillement. On pourrait accepter de modifier K_d suivant une détection du cisaillement pendant la simulation, mais cela ne nous convient pas car cela rajouterait des tests sur les diagonales du parallélépipède qui complexifierait les calculs. De ce fait, excepté pour un cube, cette raideur ne peut pas convenir pour notre modèle.

Nous devons trouver un comportement symétrique, c'est-à-dire : quelque soit $(i, j) \in \{x, y, z\}^2$ et $i \neq j$, donnant la direction du cisaillement dans le plan (i, j), la raideur doit être la même.

La solution adoptée est de prendre comme raideur la moyenne des raideurs optimales :

$$K_d = \frac{E\left(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2\right)^2}{24x_0y_0z_0\left(1+\nu\right)} \tag{3.17}$$

Cette solution n'est cependant pas satisfaisante pour tous les cisaillements, et on peut donner une ébauche de solution alternative qu'il faudrait développer dans le futur.En effet, on pourrait essayer de corriger le comportement des cisaillements avec une contrainte de Lagrange dans les cas non cubiques. Cela pourrait se faire par la



Le cisaillement dû à la force F devrait être corrigé par une force correctrice F_c aidant ou allant contre les forces générées par la déformation des diagonales.

FIG. 3.39.: Correction du cisaillement.

génération d'une force $F_{cis_{(i,j)}}$ tangentielle au cisaillement sur les faces coplanaires au plan (i, j) et aidant ou contrant la force induite par la déformation des diagonales. Cette force serait donc portée (fig. 3.39) par la direction du cisaillement η dans le sens du déplacement d'un plan par rapport à l'autre et serait portée par les 8 points de l'élément.

3.3.3. Expression de l'étirement et de la compressibilité.

Étirement

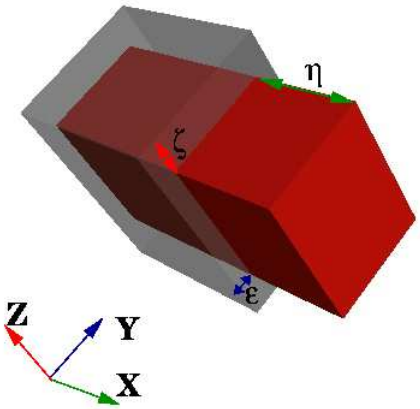


FIG. 3.40.: Étirement d'une barre (grise à l'état initial) suivant l'axe x_0 : cela entraîne la compression dans les 2 sens orthogonaux (état final en rouge).

Soit l'étirement suivant l'axe x_0 (fig. 3.40) de η provoqué par une contrainte $\sigma_x = F_x/(y_0 z_0)$ suivant ce même axe. Les côtés orthogonaux à l'étirement doivent alors s'amincir de 2ϵ suivant y_0 et de 2ζ suivant z_0. Cela entraîne la déformation des diagonales du parallélépipède de :

$$\begin{aligned}\delta_d &= \sqrt{(x_0+\eta)^2+(y_0-2\epsilon)^2+(z_0-2\zeta)}-\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}\\ &\sim \frac{\eta x_0-2\epsilon y_0-2\zeta z_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}}+O\left(\eta^2,\epsilon^2,\zeta^2\right)\end{aligned}$$

On associe aux forces provoquées par la déformation des ressorts K_x, K_y, K_z et K_d(avec K_d imposée par éq. 3.17), et à la force provoquant la déformation F_x, 2 multiplicateurs de Lagrange venant en aide pour assurer la définition des coefficients de Poisson sur les axes orthogonaux, de force F_{x_y} agissant suivant y_0 et F_{x_z} suivant z_0. Ces forces sont générées par un potentiel correcteur venant des 8 points du parallélépipède. Le lagrangien associé à cette expérience s'écrit alors :

$$L = F_x\eta - 8\,F_{x_y}\,(2\,\epsilon) - 8F_{x_z}\,(2\,\zeta) - \frac{4}{2}K_x\eta^2 - \frac{4}{2}K_y\,(2\epsilon)^2 - \frac{4}{2}K_z\,(2\zeta)^2 - \frac{4}{2}K_d\delta_d^2$$

En résolvant suivant η, ϵ et ζ, nous pouvons écrire 3 équations (une venant de la définition du module de Young et deux de celles du coefficient de Poisson). En réitérant

la définition de ces équations pour l'étirement suivant y_0 de force F_y et de forces correctrices F_{y_x} suivant x_0 et F_{y_z} suivant z_0, ainsi que pour l'étirement suivant z_0 de force F_z et de forces correctrices F_{z_x} suivant x_0 et F_{z_y} suivant y_0, on obtient finalement 9 équations à 9 inconnues (K_x, K_y, K_z, F_{x_y}, F_{x_z}, F_{y_x}, F_{y_z}, F_{z_x}, F_{z_y}), les forces F_i et la raideur K_d étant imposées. La résolution du système nous donne sous forme généralisée avec $(i,j,k) \in \{x,y,z\}^3$ avec $i \neq j$, $i \neq k$ et $j \neq k$:

$$K_i = \frac{E\left(6j_0^2k_0^2\left(1+\nu\right)+\left(\nu\left(j_0^2+k_0^2\right)-i_0^2\right)\left(x_0^2+y_0^2+z_0^2\right)\right)}{24x_0y_0z_0\left(1+\nu\right)} \tag{3.18}$$

$$F_{i_j} = -\frac{\left(\left(x_0^2+y_0^2+z_0^2\right)\left(\nu\left(k_0^2+i_0^2\right)-i_0^2\right)+6\,i_0^2\,k_0^2\,\nu\right)F_i}{48i_0j_0k_0^2} \tag{3.19}$$

Comme en 2D, notre modèle est contraint sur les angles entre les diagonales des faces qui n'ont pas de ressorts et les côtés. La démonstration quant à la détermination des dimensions de l'élément pour que les raideurs soient positives est assez complexe, mais nous pouvons garantir que, dans les mêmes limites qu'en 2D, l'élément a des raideurs positives. D'autre part, nous pouvons, de la même façon que nous l'avons fait en 2D, montrer que les potentiels correcteurs ne parasitent pas le phénomène du cisaillement (cf. annexe **??** p.**??**), et de la même façon, les correcteurs du cisaillement sont bien indépendants des correcteurs de l'étirement. Ces potentiels sont, de plus, décomposables suivant les axes principaux de l'élément, et ainsi, l'application de ces potentiels à une force quelconque se fait similairement qu'au même phénomène en 2D.

Compressibilité

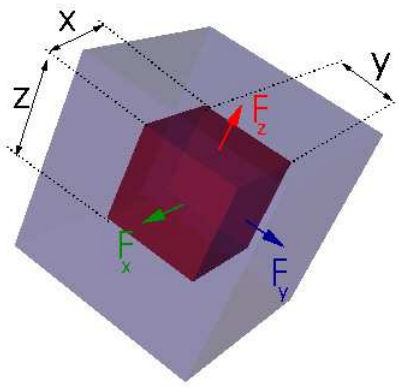


FIG. 3.41.: L'expérience de mesure du coefficient de compressibilité fait intervenir toutes les rigidités de l'élément

Nous validons que notre modèle suit bien le module de compressibilité. Pour cela, nous appliquons une pression uniforme P à la surface de notre objet (fig. 3.41). Cette pression engendre, pour chaque paire de faces parallèles, une force proportionnelle à cette pression. Ainsi, la force suivant la direction $k \in \{x, y, z\}$ et donc orthogonale au plan $(i, j) \in \{x, y, z\}^2$ avec $i \neq j$, $j \neq k$ et $i \neq k$:

$$F_k = P\,i\,j$$

Ces forces engendrent des déformations symétriques de $2\,\eta$ suivant x, $2\,\epsilon$ suivant y et de $2\,\zeta$ suivant z, et ainsi de δ suivant les diagonales. De ce fait, on a, en chaque point de l'élément, une correction due à chacun des étirement qui intervient en plus de l'action des ressorts. En conséquence le lagrangien exprimant cette expérience s'écrit :

$$\begin{aligned} L = \; & 2\eta P\,y\,z + 2\epsilon P\,x\,z + 2\zeta P\,x\,y \\ & -8\left(2\,\eta\,\left(F_{y_x} + F_{z_x}\right) + 2\,\epsilon\,\left(F_{x_y} + F_{z_y}\right) + 2\,\zeta\,\left(F_{x_z} + F_{y_z}\right)\right) \\ & -4K_x\,(2\eta)^2/2 - 4K_y\,(2\epsilon)^2/2 - 4K_z\,(2\zeta)^2/2 - 4K_d\delta^2/2 \end{aligned}$$

Après résolution, nous obtenons η, ϵ et ζ qui minimisent l'énergie. Nous pouvons désormais appliquer la définition du module de compressibilité (éq. 2.6 p. 60). Ce module K, comme nous l'avons défini, permet d'introduire une équation sur la compression :

$$\begin{aligned} \Delta P &= K\frac{\Delta V}{V_0} \\ \Delta P &= P_1 - P_0 \\ \Delta V &= V_1 - V_0 \end{aligned}$$

Avec $V_0 = x_0 y_0 z_0$ et $V_1 = (x_0 + 2\eta)\,(y_0 + 2\epsilon)\,(z_0 + 2\zeta)$.

En remplaçant dans :

$$K = -\frac{\Delta P V_0}{\Delta V}$$

Et en se plaçant pour $\Delta P \to 0$, on retrouve la définition de K :

$$K = \frac{E}{3\,(1 - 2\nu)}$$

Nous prouvons ainsi que notre modèle permet aussi la conservation du coefficient de compressibilité.

3.3.4. Détermination des limites du modèle 3D.

L'extension à $n \times m \times o$ éléments est similaire à la 2D. La détermination des limites de notre modèle en 3D, se fait similairement à la détermination en 2D, de manière expérimentale, excepté que nous devons multiplier par deux les tests à cause d'une dimension supplémentaire. Nous effectuons ces test pour un cube, et une géométrie non cubique afin de déterminer comment évolue l'erreur.

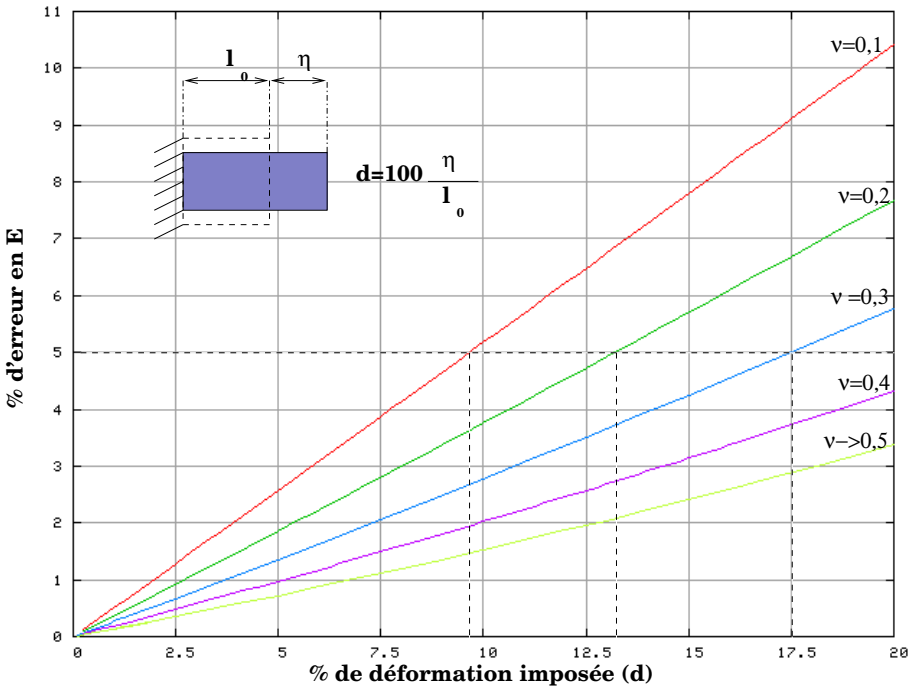


FIG. 3.42.: Erreur mesurée dans un cube sur le module de Young en fonction de la déformation imposée et du coefficient de Poisson. L'erreur est plus forte avec la déformation imposée. Elle augmente aussi de manière inversement proportionnelle avec le coefficient de Poisson imposé. Les courbes sont les mêmes quel que soit E imposé.

Limites en traction.

Nous nous sommes limités à des étirements <20% pour un module de Young E compris entre 100Pa et 100kPa, et des valeurs du coefficient de Poisson imposées entre 0,1 et tendant vers 0,5. Nous avons effectué ce test sur un cube puis sur plusieurs parallélépipèdes, tout en restant dans des dimensions permettant d'obtenir des raideurs positives.

Comme en 2D, nous avons constaté que le module de Young n'a aucune influence sur l'erreur commise sur celui-ci ni sur le coefficient de Poisson. Mais, en revanche suivant le coefficient de Poisson, l'erreur est plus ou moins marquée pour ces deux coefficients (fig. 3.42 et 3.43).

Comme en 2D, les courbes d'erreurs obtenues grâce à ces tests nous permettent de mettre en évidence les tendances des erreurs suivant le module de Young et le coefficient de Poisson imposés pour différentes déformations. Nous notons ainsi que le module de Young (fig. 3.42) et le coefficient de Poisson (fig. 3.43) de notre modèle ont tendance

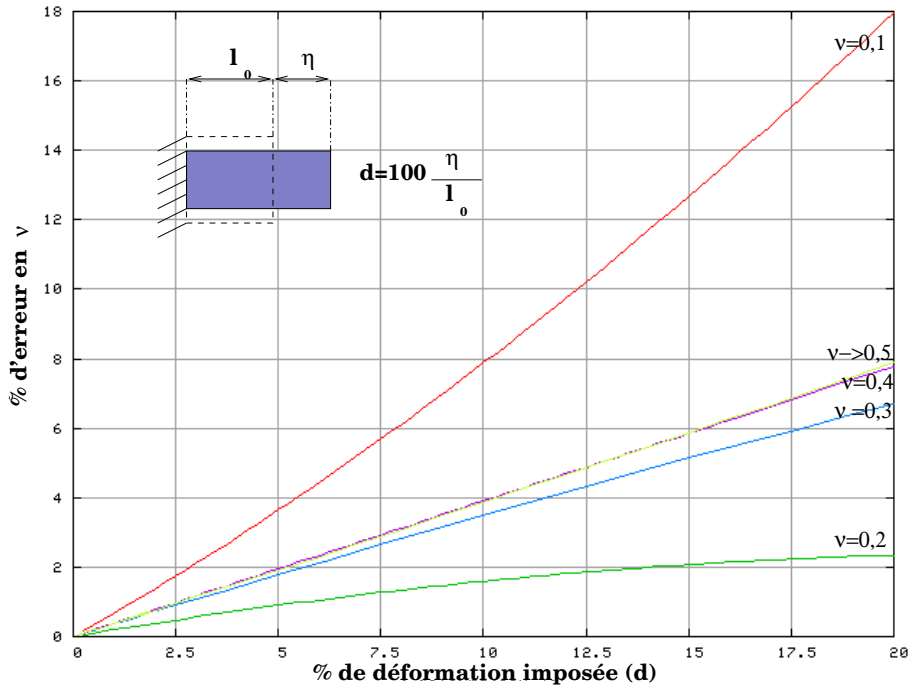


FIG. 3.43.: Erreur mesurée dans un cube sur le coefficient de Poisson en fonction de la déformation imposée et du coefficient de Poisson. L'erreur sur le coefficient de Poisson est plus forte avec la déformation imposée. Elle fluctue avec le coefficient de Poisson imposé. Les courbes sont les mêmes quel que soit E imposé.

à dériver avec les déformations appliquées. Ainsi, le module de Young est erroné de plus de 5% pour des déformations supérieures à 16%. Nous remarquons, de plus, que cette erreur augmente inversement avec le coefficient de Poisson imposé : pour une déformation de 10%, l'erreur sur le module de Young est de $2,75\%$ pour $\nu = 0,3$, de 2% pour $\nu = 0,4$, et de $1,75\%$ pour $\nu \to 0,5$.

Pour le coefficient de Poisson, l'erreur dépasse les 5% pour une déformation supérieure à 12%, et pour $\nu \in [0,3; 0,5[$. D'autre part, si nous répétons ces expériences avec des modules de Young différents, nous retrouvons exactement les mêmes courbes.

Si on réitère ces expériences pour des éléments parallélépipédiques, nous constatons que l'erreur augmente avec l'angle à la diagonale pour le module de Young. En d'autres termes, si on fait l'expérience de traction suivant le plus petit côté d'un rectangle, dans les limites d'angle entre la diagonale et la hauteur pour obtenir des raideurs positives, nous constatons que l'erreur est très petite, en revanche, en reprenant le test de traction avec le côté le plus grand, l'erreur est plus grande. Nous trouvons,

cependant, des erreurs inférieures à 5% pour $\nu \in [0,3; 0,5]$ et pour une déformation inférieure à 10% pour le pire des cas. Il en va de même pour le coefficient de Poisson pour lequel l'erreur est inférieure à 5% pour les mêmes conditions et dans le pire des cas.

Enfin, si nous effectuons les tests de traction sur une barre quelconque maillée avec un assemblage d'un seul type d'élément, nous obtenons la même erreur que celle de l'élément seul. Ceci montre que l'assemblage n'a pas d'influence en étirement.

Ainsi, si l'on souhaite effectuer des déformations supérieures à 10%, le choix d'un maillage cubique est préconisé pour être sûr de conserver les caractéristiques rhéologiques.

Limites en cisaillement.

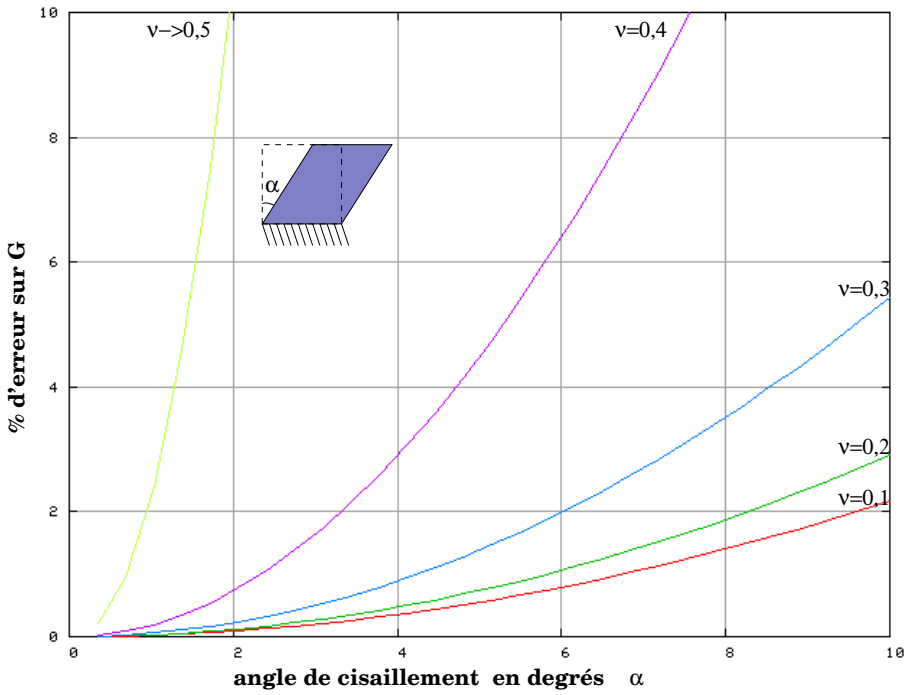
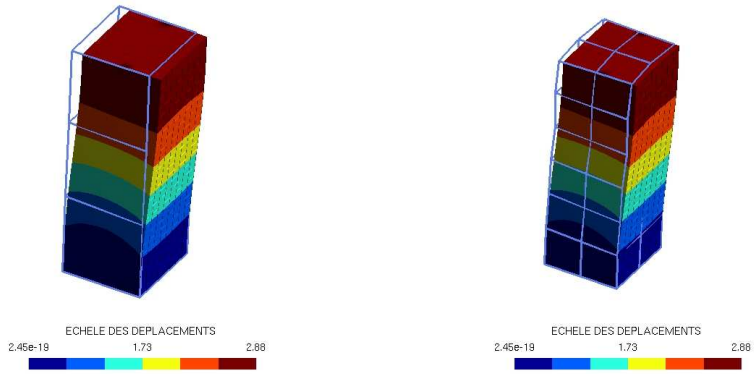


FIG. 3.44.: Erreur mesurée dans un cube sur le coefficient de cisaillement en fonction de la déformation imposée et du coefficient de Poisson. L'erreur sur le cisaillement est plus forte avec la déformation imposée. Elle augmente, de plus, avec le coefficient de Poisson imposé.

Comme en 2D, nous remarquons que l'erreur mesurée sur le coefficient de cisaillement G n'est pas dépendante de E mais qu'elle augmente (fig. 3.44) avec ν imposé. Par



(a) Superposition pour une résolution de $1 \times 1 \times 3$ éléments : M=45%, ET=0,25mm

(b) Superposition pour une résolution de $2 \times 2 \times 6$ éléments : M=13%, ET=0,04mm

(c) Superposition pour une résolution de $4 \times 4 \times 12$ éléments : M=6%, ET=0,01mm

(d) Superposition pour une résolution de $8 \times 8 \times 24$ éléments : M=3%, ET=0,001mm

FIG. 3.45.: Superposition des résultats de cisaillement d'une poutre composées de plusieurs éléments sur les résultats obtenus avec Code Aster (ici $E = 1000\,Pa$ et $\nu = 0,3$). Pour chaque expérience, on a indiqué l'erreur moyenne (M) de déplacement des points en mm par rapport au Code Aster, ainsi que l'écart type (ET) des erreurs. Plus la résolution est fine, moins il y a d'erreur.

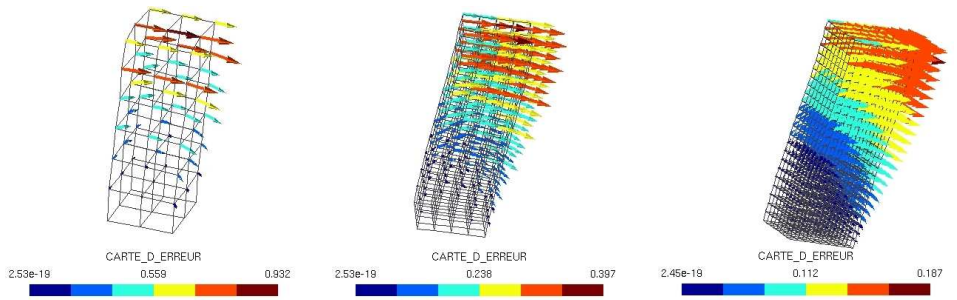
contre, elle reste inférieure à 5% pour un angle de cisaillement inférieur à 10°, dans le cas d'un cube et pour $\nu < 0,3$ (ce qui nous intéresse puisque le poumon a un coefficient de Poisson proche de 0,3).

Nous notons, de plus, que comme pour le cas de la traction, les éléments contrôlent moins leur cisaillement quand leur forme s'éloigne de la géométrie cubique. En effet, nous n'avons pas encore mis en œuvre la correction lagrangienne pour obtenir une

bonne correction du cisaillement dans le cas d'une géométrie moins idéale et la moyenne des raideurs optimales pour conserver les cisaillement n'est cohérente que quand on prend des éléments proche du cube. Il serait intéressant de réaliser une étude plus exhaustive sur des éléments non cubiques.

Pour la validation du bon comportement avec une combinaison d'éléments, nous avons effectué des tests en cisaillement pour des combinaisons d'éléments cubiques et, comme en 2D, nous avons comparé les résultats obtenus avec notre modèle aux résultats obtenus avec la simulation effectuée à l'aide de Code Aster. Notre référence était une barre de $100 \times 100 \times 300mm$ subdivisées en $8 \times 8 \times 24$ éléments. Nous montrons, figure 3.45, les superpositions des résultats obtenus avec notre modèle pour différentes résolutions sur le résultat référence. Notre maillage est symbolisé en cubes (sans les diagonales, pour des raisons de clarté), alors que le résultats de Code Aster est en dégradé de couleurs.

Pour donner un ordre d'idée, nous avons mesuré la moyenne des erreurs des déplacements des points en mm entre le résultat que nous obtenons avec Code Aster et le nôtre (fig. 3.45). Nous rendons compte dans la figure 3.46 de la propagation des erreurs suivant la résolution du maillage et la position des nœuds par rapport aux contraintes.



(a) pour $2 \times 2 \times 6$, $Max = 33\%$, $Min = 0\,mm$ (b) pour $4 \times 4 \times 12$, $Max = 14\%$, $Min = 0\,mm$ (c) pour $8 \times 8 \times 24$, $Max = 6\%$, $Min = 0\,mm$

FIG. 3.46.: Carte des erreurs des déplacements en cisaillement pour une même expérience effectuée avec 3 résolutions de maillages différents : en chaque nœud du maillage sont représentées des flèches indiquant suivant leur longueur et leur couleur l'erreur de déplacement commises. On s'aperçoit que plus le maillage est fin moins il y a d'erreur.

L'erreur diminue quand la résolution augmente, ce qui valide le bon comportement de notre modèle pour cette expérience.

Ainsi, comme pour la traction, nous pouvons conclure que notre modèle permet une meilleure conservation des caractéristiques de cisaillement pour une géométrique cubique et pour des cisaillements $< 10^{\circ}$.

Limites en flexion.

Comme en 2D, l'expérience consiste à montrer la bonne répartition des masses. Nous montrons nos résultats sur une poutre de $400 \times 100 \times 100mm$ de module de Young de 1000Pa, de coefficient de Poisson de 0,3 et de masse volumique $0{,}0125kg.m^3$.

Nous représentons la superposition des résultats obtenus avec notre modèle sur ceux obtenus avec Code Aster, toujours avec la même symbolique.

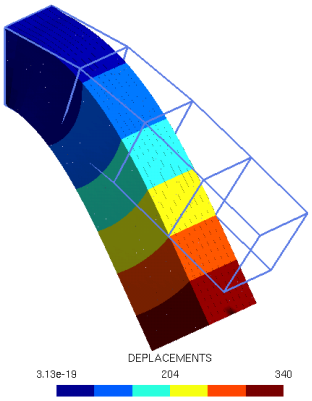
Notre modèle permet d'obtenir des résultats proches de ceux obtenus avec le Code Aster pour une résolution fine (fig. 3.47 et 3.48). En effet, le modèle fournit un résultat proche de celui des éléments finis. Par exemple, la barre de $4\times4\times16$ permet une bonne approximation des déformations car ses éléments n'ont encore chacun subit que des petites déformations. Cependant, nous notons une limite en grands déplacements lors de la simulation de la flexion de la poutre composée de $8\times8\times32$ éléments, sans doute à cause de la petite taille de chacun des éléments. On se rend compte que les éléments situés près de la contrainte de fixité (en haut à gauche) subissent un écrasement et sortent des limites d'acceptabilité de notre modèle qui reste cependant assez stable.

En effet, bien que nous ayons développé notre modèle théorique pour de petites déformations (développement limités en 0), celui-ci permet de simuler des grandes déformations au sens des rotations, ce qui n'est pas le cas dans le Code Aster où il est nécessaire de passer dans un modèle de grande déformations type Simo-Miehe. Si nous effectuons la même expérience avec Code Aster en petites déformations et, si nous superposons notre maillage le plus proche du bon résultat, nous constatons que le Code Aster en petite déformation est plus éloigné de la solution exacte que notre modèle en petites déformations (fig. 3.49), et présente même une modification exagérée de son volume.

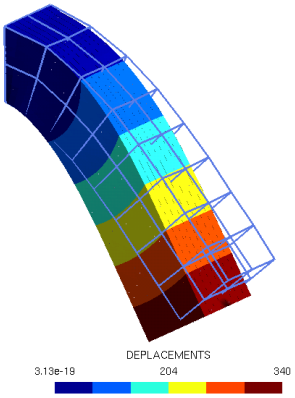
Ainsi, on peut conclure que pour une résolution de maillage assez fine, la répartition des masses est correcte. Cependant, elle est sans doute plus problématique dans le cas où l'on utilise très peu de points pour discrétiser le modèle, comme c'est le cas pour la résolution $1 \times 1 \times 4$. Nous vérifions, par contre, que les résultats sont cohérents avec la théorie des poutres, ce qui permet d'en déduire que ce problème n'est pas induit par le type de forces mis en jeu, puisque nous observons une flèche qui suit une courbe de degré 4 (cf. annexe **??**), comme la théorie le prédit. La définition de cette finesse est du même ordre que le Code Aster puisque si on compare les résultats obtenus avec le Code Aster pour différentes résolutions, on obtient un faible taux d'erreur. À ceci prêt, que dans le Code Aster, l'influence de la répartition des masses est moindre, puisqu'elle se répartit sur le volume de chaque élément, alors que dans le cas du discret, elle se fait sur les sommets. Dans l'expérience décrite ici, cela signifie que 20% de la masse est fixée et n'intervient pas dans la simulation dans le modèle discret $1 \times 1 \times 4$, limitant d'autant le fléchissement. Dans le cas d'une discrétisation plus fine, cela ne représente plus que 3%.

Limites en compressibilité.

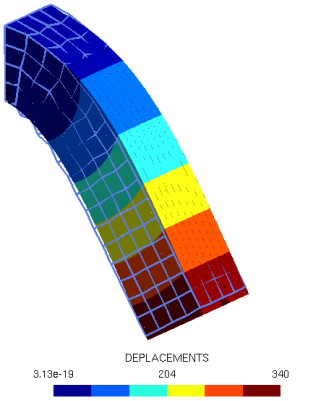
Nous avons effectué le test de compressibilité tel que précédemment décrit, en gonflant puis dégonflant un cube de façon progressive pour vérifier la conservation de la ca-



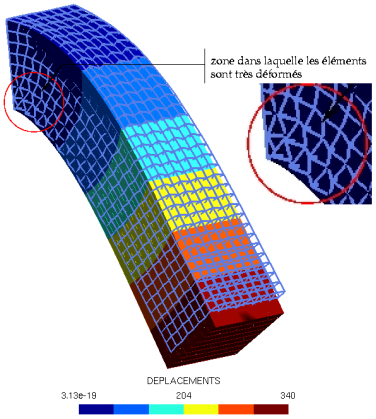
(a) Flexion pour une résolution de $1 \times 1 \times 4$: M=64,53mm, ET=11,32mm



(b) Flexion pour une résolution de $2 \times 2 \times 8$: M=28,31mm, ET=2,23mm



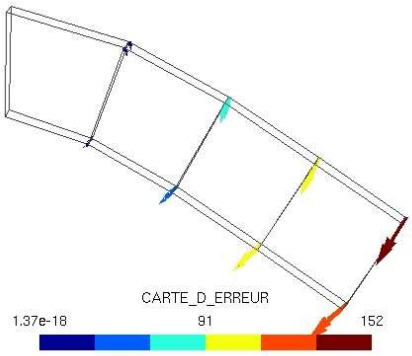
(c) Flexion pour une résolution de $4 \times 4 \times 16$: M=2,72mm, ET=0,11mm



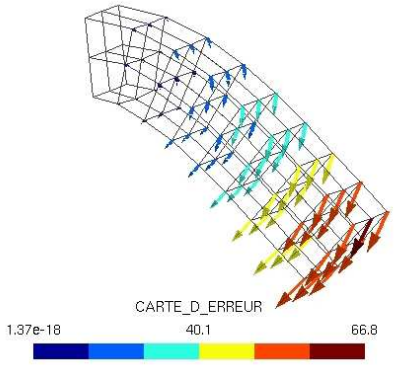
(d) Flexion pour une résolution de $8 \times 8 \times 32$: M=12,16mm, ET=0,12mm

FIG. 3.47.: Résultats de l'expérience de flexion en 3D : notre modèle reste bon tant que les déformations ne sont pas trop grandes, et dans ce cas, plus le maillage est fin, meilleurs sont les résultats comme en attestent l'évolution des moyennes des erreurs en déplacement sur chacun des points (M) en mm, ainsi que leur écart type (ET). Dans le cas du maillage fin, on remarque de grandes déformations pour les éléments les plus proches de la contraintes d'encastration, ce qui provoque un écrasement sur le haut de la barre.

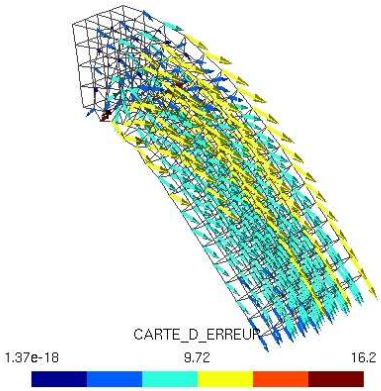
ractéristique de compressibilité. Nous avons imposé les valeur de $E \in [0,1kPa; 100kPa]$ et les valeurs de $\nu \in [0,1; 0,5[$. Nous avons reporté les erreurs mesurées lors de ces expériences dans le graphe de la figure 3.50. Nous constatons que l'erreur sur K est indépendante de E et de ν dans un cube. Cette erreur est inférieur à 5% pour une dé-



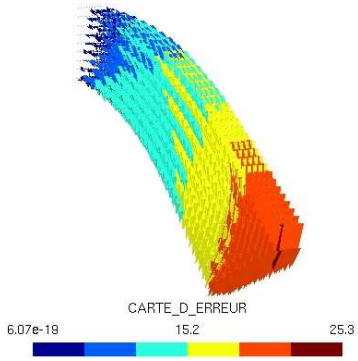
(a) Flexion pour une résolution de $1 \times 1 \times 4$: MIN=0%, MAX=45%



(b) Flexion pour une résolution de $2 \times 2 \times 8$: MIN=0%, MAX=20%



(c) Flexion pour une résolution de $4 \times 4 \times 16$: MIN=0%, MAX=5%



(d) Flexion pour une résolution de $8 \times 8 \times 32$: MIN=0%, MAX=8%

FIG. 3.48.: Carte d'erreur des expériences de flexion en 3D : notre modèle reste bon tant que les déformations ne sont pas trop grandes au niveau de chaque élément en cisaillement et en étirement. Ainsi l'erreur a tendance à augmenter de nouveau quand il y a des cisaillements énormes au niveau des contraintes.

formation en volume de 15% en compression et de 15% en gonflement. La composition conserve cette erreur.

Tests sur une composition d'éléments quelconque.

Nous avons adapté les expériences 2D sur un élément quelconque en 3D, et nos résultats sont identiquement représentés. Nos expériences ont été effectuées sur un objet en forme de « L » compris dans un cube de $4000 \times 4000 \times 4000$mm, caractérisé

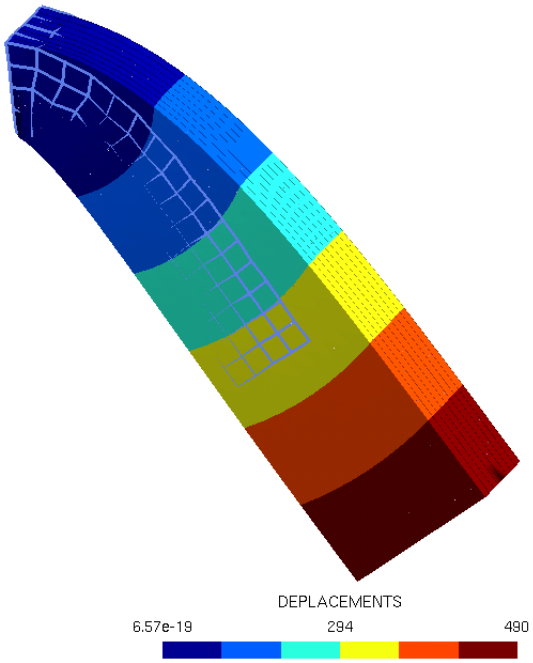


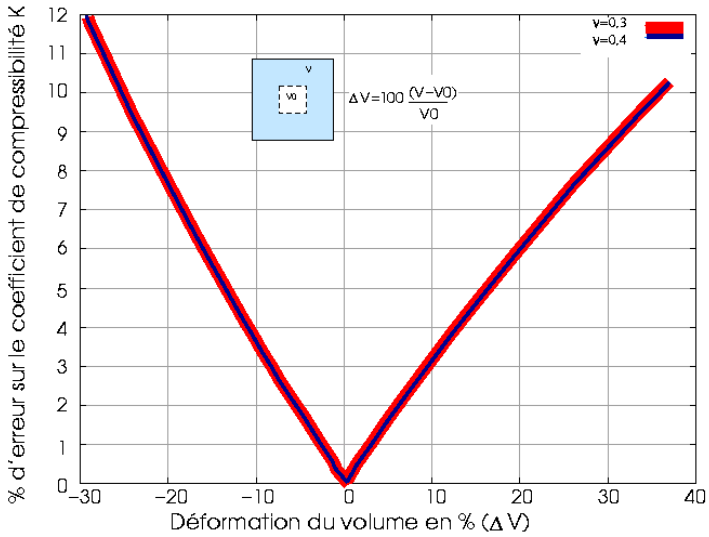
FIG. 3.49.: Superposition d'un résultat obtenu avec notre modèle et d'un résultat obtenu avec Code Aster dans les conditions de petites déformations : notre modèle bien que développé pour de petites déformations permet de simuler des grandes déformations au sens des rotations, alors que dans Code Aster il est nécessaire de se placer en grande déformation ce qui signifie une connaissance a priori du cadre du modèle.

par un module de Young de 1000Pa, un coefficient de Poisson de 0,3 et une force appliquée de 3.10^8N.

Nous avons effectué ces tests sur une résolution de $i \times i \times i$ cubes pour $i \in \{2, 4, 8, 16\}$. La référence était la simulation par méthode de résolution par éléments finis pour la résolution $16 \times 16 \times 16$.

Afin d'avoir une idée visuelle des erreurs se produisant, nous montrons différents points de vue (fig. 3.52 et 3.53) et une carte des erreurs obtenues (fig. 3.51).

Nous remarquons, comme en 2D, que notre modèle a moins d'erreur pour une résolution fine. La moyenne des erreurs de déplacement en prenant les résultats de Code Aster comme référence, est de l'ordre de 26 mm avec un écart type de 0,6 mm pour la résolution la plus fine (fig. 3.53), ce qui, rapporté aux dimensions de l'objet (4000 mm, donc de 0,65%) est un bon résultat, alors qu'elle est de l'ordre de 279,8 mm (soit



L'erreur sur le coefficient de compressibilité est indépendante de ν et de E.

FIG. 3.50.: Erreur mesurée dans un cube sur le coefficient de compressibilité en fonction de la diminution ou de l'augmentation du volume.

7%) avec un écart type de 37,8 mm pour la résolution la plus grossière (fig. 3.52).

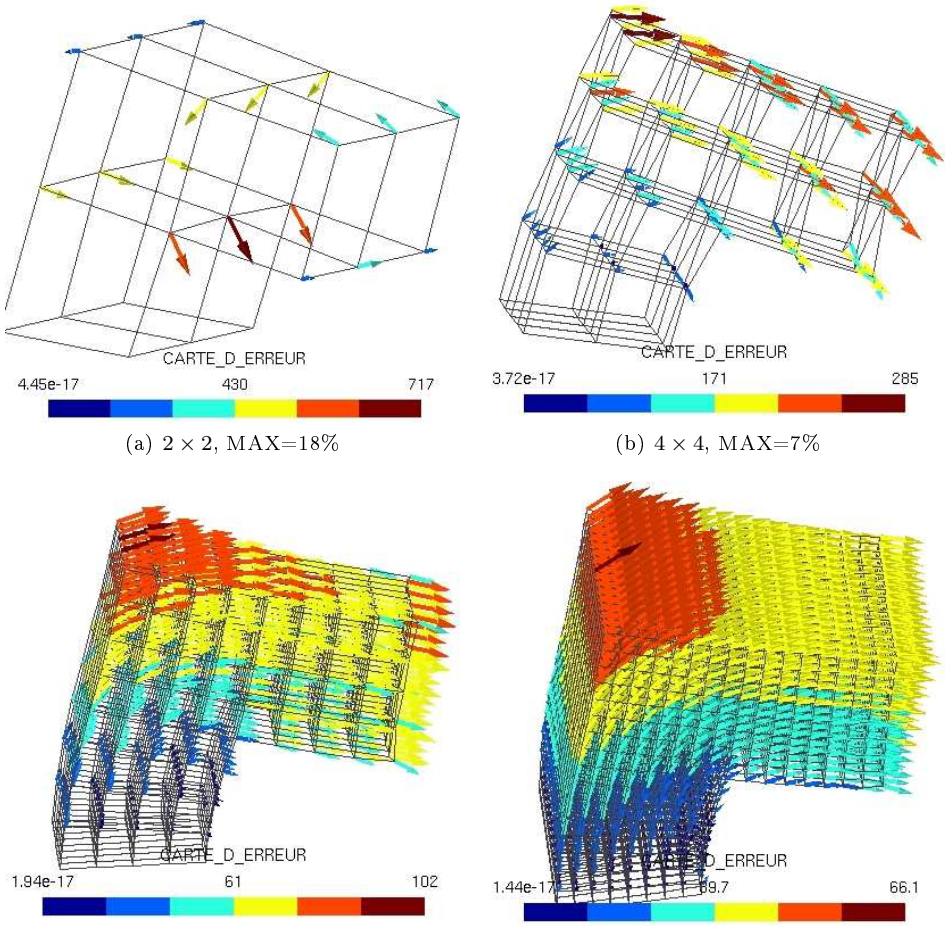
Nous pouvons ainsi supposer que notre modèle reste précis pour de moyennes déformations pour un élément quelconque.

3.4. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons, dans un premier temps, étudié le modèle de Allen Van Gelder qui était présenté dans la littérature comme un modèle prenant en compte les caractéristiques de la rhéologie. Notre objectif était de déterminer la précision de ce modèle. Nous avons mis en évidence que ce modèle ne permettait pas de prendre en compte les paramètres rhéologiques et nous avons ainsi choisi de chercher une alternative.

Nous avons développé notre solution à l'aide de la théorie lagrangienne. De cette manière, nous avons proposé un modèle paramétrable avec les caractéristiques mécaniques. Nous avons montré en 2D qu'il n'existait pas de solution générale portée par les seuls ressorts dans un maillage régulier, et qu'il était ainsi nécessaire de faire appel aux contraintes de Lagrange pour pouvoir imposer la conservation de la caractéristique du cisaillement en plus du module de Young et du coefficient de Poisson.

Nous avons ensuite exploré les limites du modèle et conclu que ce modèle était utilisable avec une précision connue à 5% pour un maillage carré de bonne résolution et pour des déformations par éléments ne dépassant pas les 10%.



(a) 2×2, MAX=18%

(b) 4×4, MAX=7%

(c) 8×8, MAX=2%

(d) 16×16, MAX=1,6%

FIG. 3.51.: Cartographie des erreurs sur l'expérience du L pour différentes résolutions : plus la résolution est fine, moins l'erreur est grande.

Nous avons étendu notre construction en 3D avec, en plus, la caractéristique de compressibilité. Nous avons montré qu'il était possible d'obtenir un modèle de précision pour des déformations inférieures à 15% avec une précision connue à 5% pour un maillage cubique.

De plus, nous avons montré, en 2D comme en 3D, le besoin d'une finesse suffisante pour obtenir une bonne répartition des masses. Nous avons expliqué ce phénomène par le fait que nous répartissions les masses sur les sommets des éléments de manière définitive, sans prendre en compte le changement de volume au cours des déforma-

tions. Nous pensons qu'une solution pourrait être un calcul du poids en fonction de la répartition du volume dans les éléments, en chaque sommet, et au cours du temps de la simulation. Nous avons, de plus, montré en même temps que notre modèle reste robuste à des grandes déformations du style rotation.

Les poumons nécessitent, certes, un modèle de grande déformation (plus de 25%) et nous n'en sommes pas à ce stade pour le moment, mais cela pourra se faire en perspectives en recalculant les raideurs suivant les déformations en effectuant les développement limités permettant leur calcul en d'autres limites que 0. On pourra s'inspirer pour cela des travaux de Picinbono *et al.* [146] qui intègre le tenseur de grande déformation de Piola Kirchoff.

Nous devons encore montrer comment implanter ce modèle et le confronter à notre application.

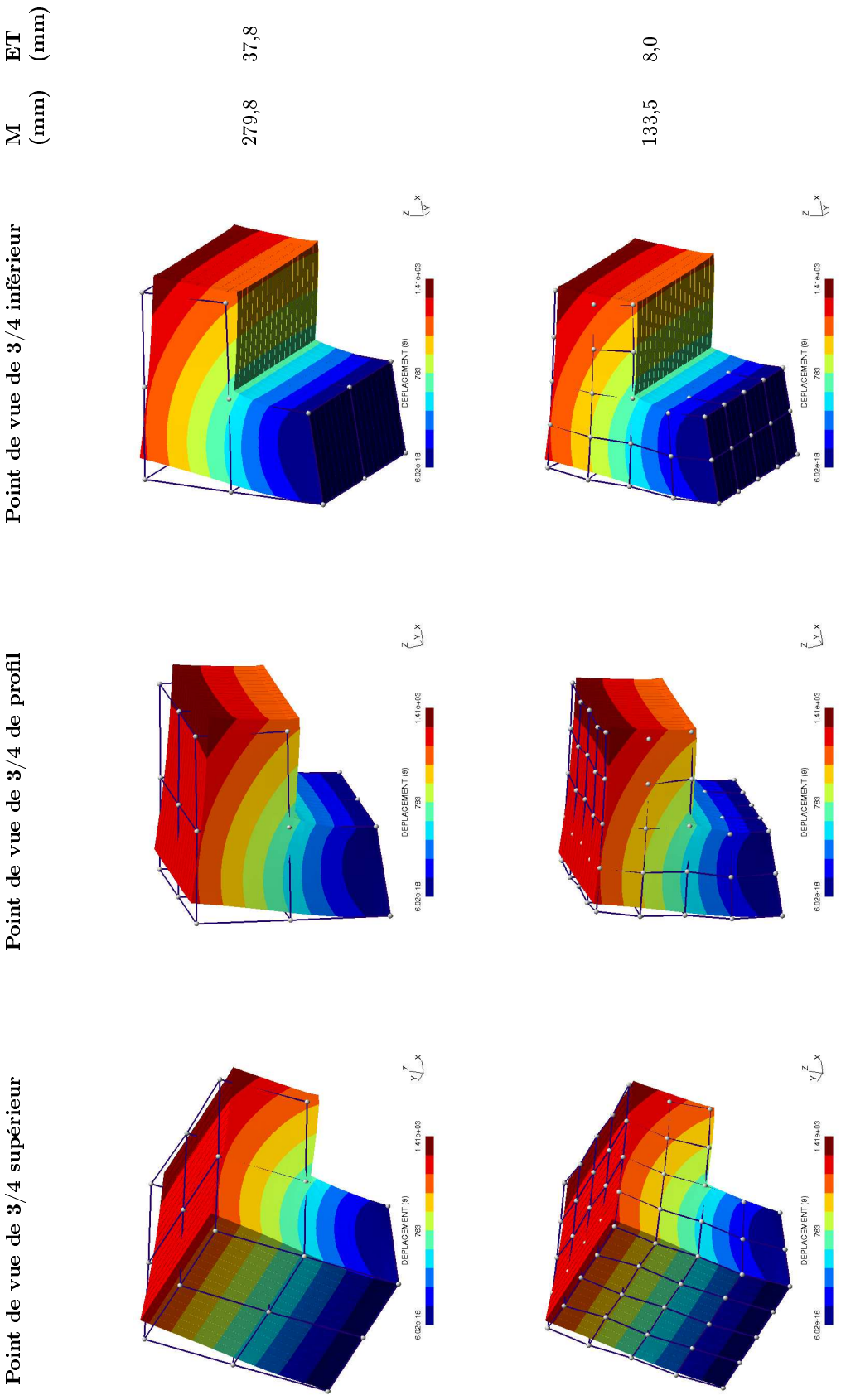


FIG. 3.52.: Résultats des déformations du L en 3D pour différentes résolutions (×2 et ×4). On montre la moyenne (M) et l'écart type (ET) des erreurs en déplacements par rapport aux déplacements obtenus avec la référence Code Aster (×16).

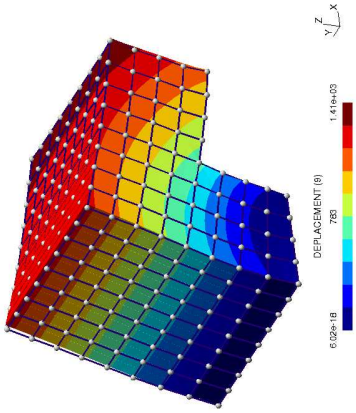
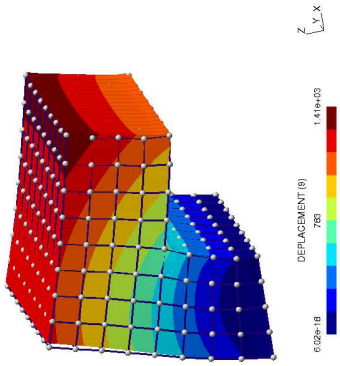
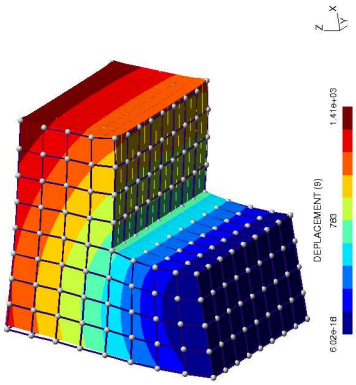
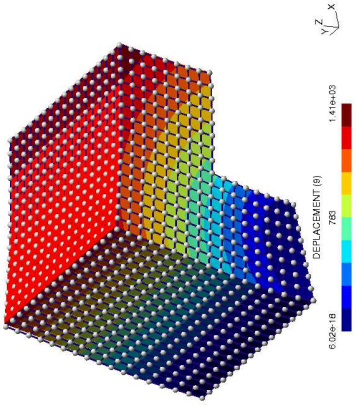
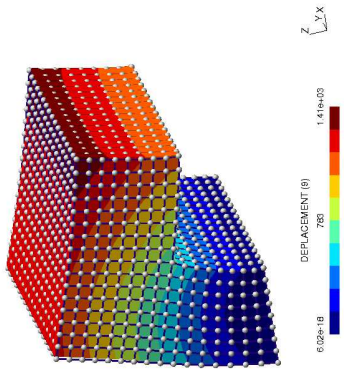
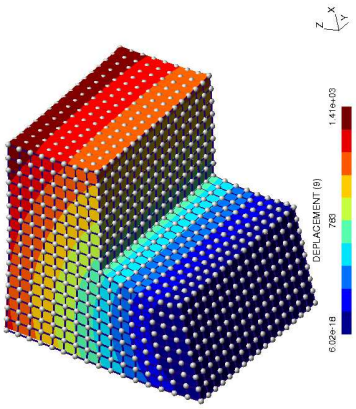
Point de vue de 3/4 supérieur	Point de vue de 3/4 de profil	Point de vue de 3/4 inférieur	M (mm)	ET (mm)
			49,9	1,1
			26,6	0,6

FIG. 3.53.: Résultats des déformations du L en 3D pour différentes résolutions (×8 et ×16). On montre la moyenne (M) et l'écart type (ET) des erreurs en déplacement par rapport aux déplacements obtenus avec la référence Code Aster (×16).

4. Mise en œuvre et applications.

Nous avons défini la théorie pour obtenir un modèle paramétrable avec les caractéristiques rhéologiques et nous avons exploré ses limites en statique. Notre but est maintenant d'obtenir un modèle dynamique d'estimation des déformations intérieures d'un modèle volumique se gonflant et subissant des contraintes extérieures telles que le glissement, le blocage ...

Nous présentons ici comment nous implantons notre modèle en insistant sur ce que la dynamique amène comme nouvelles considérations et sur le schéma d'intégration dynamique que nous utilisons. Enfin, nous détaillons l'application de notre modèle dans un contexte médical concret.

4.1. Mise en œuvre

La mise en œuvre du modèle consiste à définir la géométrie de l'objet à modéliser comme un assemblage d'éléments cubiques, dans les limites de définition de notre modèle (les raideurs doivent être positives), puis à appliquer des contraintes de forces, de déplacements ou de blocage sur chacun de ces éléments. Une fois les contraintes définies, il faut ensuite résoudre, soit de façon statique en cherchant la position d'équilibre, soit de façon dynamique en cherchant le chemin parcouru au cours du temps suivant l'évolution des contraintes.

Nous avons cherché, en statique, comment intégrer les paramètres rhéologiques, mais, notre objectif étant une simulation dynamique, nous n'avons pas cherché à développer un modèle de résolution qui soit uniquement statique. De ce fait, nous nous sommes tout de suite penché sur la dynamique.

Cependant, le passage en dynamique amène à prendre en considération des phénomènes qui ne s'expriment pas en statique, comme la viscosité et l'amortissement. Ces phénomènes sont importants à prendre en considération, car ils influent sur les déformations au cours du temps.

Nous présentons, ainsi, comment nous définissons la géométrie de chacun des éléments à partir d'un ensemble de points structurés donnés (ce qui est l'hypothèse de nos données). Nous donnons ensuite la définition des contraintes et ce que cela implique au niveau simulation. Enfin, nous montrons les résolutions possibles en dynamique avec les nouvelles contraintes liées à la viscosité.

4.1.1. Définition de la géométrie des éléments du modèle

Notre modèle doit être constitué d'éléments à raideurs positives. Comme nous l'avons montré au chapitre précédent, cela signifie que chaque élément doit être le plus proche

d'une géométrie cubique. Dès lors, la question qui se pose est de savoir s'il est toujours possible d'avoir un maillage constitué de tels éléments.

Notre modèle repose sur des données voxelisées issues de l'imagerie scanner. Ces voxels sont en général des parallélépipèdes qu'il suffit de subdivisé pour obtenir un maillage cubique. Nous sommes conscient qu'une telle subdivision engendrera une multiplication du nombre de données et par conséquent du nombre de traitement associés. Il faudra ainsi prévoir, plus tard, soit l'accélération des calculs par une considération multi-échelle ou une simplification du maillage pour ne conserver de la précision qu'aux endroits pertinents. La deuxième solution nécessitera l'étude d'éléments de géométries différentes (pyramides, tétraèdres,...).

Ensuite, on peut rajouter une surface par lissage effectué, en général par une méthode du type *marching tetrahedron* ou *marching cube*. Il faudra alors définir les raideurs des arêtes des triangles. Mais dans cette thèse, pour première approximation, nous avons considéré ces raideurs comme étant nulle, la mécanique étant portée par les éléments cubiques.

4.1.2. Application des contraintes

Une fois la géométrie définie, nous devons définir les contraintes.

Nous avons défini deux types de contraintes : *(i)* les contraintes de points fixes, *(ii)* les contraintes de forces. Il est important de bien prendre en compte ces contraintes car elles vont définir les forces externes qui s'appliquent au système. Il est à noter, de plus, que par construction de notre modèle, les forces de corrections nécessitent la définition des contraintes externes.

Contraintes de points fixes et de déplacements

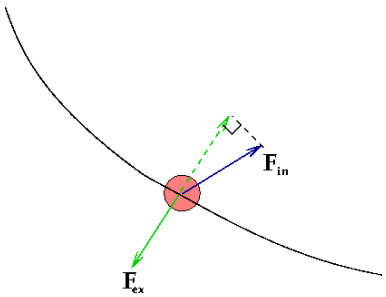


FIG. 4.1.: Contrainte de glissement d'une masse sur une surface : la masse subissant les forces internes et externes du systèmes $\overrightarrow{F_{in}}$ est collée à la surface, ce qui se traduit par l'annulation de la composante normale de l'ensemble des forces par application d'une force externe $\overrightarrow{F_{ex}}$. On obtient ainsi la contrainte de glissement.

Ces contraintes permettent de fixer certains degré de liberté tout en assurant le

principe d'action/réaction qui est important pour notre considération énergétique et l'application des forces correctrices lagrangiennes que nous avons définies dans le chapitre précédent.

Ainsi, fixer le degré de liberté suivant la direction ($\overrightarrow{u}$) sur un nœud i, cela consiste à appliquer une force externe supplémentaire suivant cette direction ($\overrightarrow{F_{ex_i}}$), telle que la projection du bilan des forces ($\overrightarrow{F_{tot_i}}$) en ce nœud suivant cette même direction soit exactement à son opposé :

$$\overrightarrow{F_{ex_i}} \cdot \overrightarrow{u} = -\overrightarrow{F_{tot_i}} \cdot \overrightarrow{u} \tag{4.1}$$

Par conséquent, en déplaçant des nœuds à une position donnée, et en fixant tous les dégrés de libertés, nous pouvons contraindre notre objet à une déformation locale.

In extenso, en modifiant le degré de liberté fixé suivant la position dans l'espace, nous pouvons réussir à fixer les points sur une surface (fig. 4.1) quelconque et obtenir de cette façon, des contraintes de glissements.

Contraintes de forces externes

Les contraintes de forces sont plus simples à définir. Il s'agit d'appliquer une force extérieure connue en un lieu donné du maillage. Il peut aussi s'agir de l'application d'un champ de forces sur la totalité des points ou un ensemble de points. C'est ainsi que, pour simuler le problème de la poutre encastrée, nous avons appliqué un phénomène de points fixes sur une face et une contrainte de champ de force de pesanteur en chaque élément.

Une autre contrainte particulière a été définie pour les objets gonflables. Cette contrainte consiste à savoir comment appliquer une pression ou dépression sur l'objet. Elle se déduit directement de la définition de la pression P en fonction de la force F appliquée en une surface d'aire S :

$$P = F/S$$

Dans le cas de gonflements, cela consiste à appliquer un changement de pression en surface de l'objet et, donc, il est nécessaire de connaître les éléments surfaciques de l'objet et les faces externes de chacun de ses éléments. Ces faces externes sont les éléments surfaciques (par exemple, dans un élément cubique, il s'agit de d'une face d'un cube) n'appartenant qu'à un seul élément composant l'objet (*i.e.* qui n'est pas collé à une autre maille). L'application consiste, ensuite, à partir de la surface initiale et du vecteur normal initial, en chaque surface, à appliquer les forces d'intensité PS en chacun des points de la surface concernée.

4.1.3. Résolution dynamique

En dynamique, nous devons considérer les phénomènes de viscosité qui s'opposent à la vitesse. Ceux-ci imposent des forces supplémentaires dans les équations fondamentales de la dynamique. Nous devons ensuite intégrer l'équation fondamentale de la dynamique (*cf.* annexe p.181). Nous présentons, ainsi, le phénomène de viscosité en insistant sur les modèles développés pour simuler ce phénomène dans les tissus vivants,

puis nous présentons les modèles d'intégration que nous avons implantés en discutant de leur stabilité et de la définition du pas de temps.

4.1.3.1. Lois de viscosité

La viscosité est un phénomène qui s'oppose à la vitesse d'un déplacement. De ce fait, elle influence le parcours au cours du temps de chaque élément. Cela ne signifie pas que la viscosité modifie forcément le point d'équilibre. Au contraire, si on effectue une expérience d'application de contraintes, où l'on néglige les frottements (par exemple avec des vitesses faibles), et qu'on attend l'équilibre, en dynamique on devrait retrouver le même point d'équilibre qu'en statique. Cependant, nous pouvons trouver plusieurs dynamiques, en ce sens que le chemin permettant d'aller d'un point d'équilibre à un autre n'est pas le même suivant le facteur de viscosité. D'autre part, dans un système résolu pas de temps après pas de temps, les erreurs s'accumulent, et la position théorique n'est pas atteinte.

Ainsi, les principales caractéristiques des matériaux sont mesurées pour des expériences statiques, où les déformations sont toujours effectuées avec de faibles accélérations. Nous observons ces conditions dans les principales mesures rhéologiques (présentées dans le chapitre 2), mais aussi dans les mesures physiologiques comme la compliance (introduite dans le chapitre 1). La mesure de viscosité, au contraire, se calcule dans le temps. Par exemple, cela va consister à mesurer l'affaissement d'un cube de matière sous son propre poids en fonction du temps, ou bien à mesurer le temps de réaction sous l'application de stimuli sinusoïdaux.

Nous définissons, ainsi, le modèle mécanique de viscosité avant de présenter les modèles viscoélastiques les plus proches des tissus vivants. Nous saurons alors comment intégrer la viscosité dans notre modèle.

Définition de la viscosité

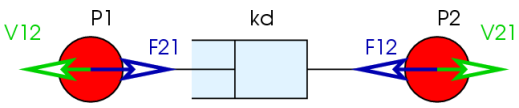


FIG. 4.2.: La viscosité est représentée comme une force d'amortissement dans un piston du fait des propriétés de l'huile dans laquelle elle baigne.

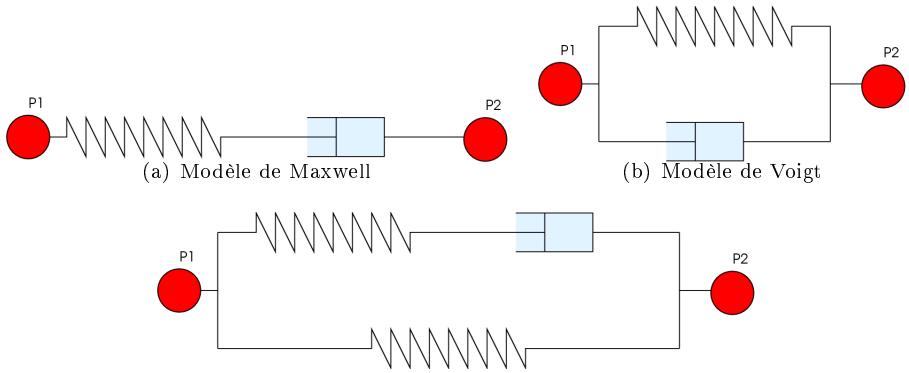
Le phénomène de viscosité peut être représenté comme l'amortissement des mouvements d'un piston baignant dans de l'huile, dû aux propriétés lubrificatrices de cette huile. La viscosité se caractérise par un coefficient de viscosité (*damping*) k_d. La force de viscosité F_{d_1} s'appliquant sur une masse P_1 reliée à une masse P_2 de vitesses respectives $\overrightarrow{V_2}$ et $\overrightarrow{V_1}$ portées par un piston visqueux de coefficient de viscosité k_d et de direction portée par le vecteur $\overrightarrow{P_2P_1}$ normalisé ($\overrightarrow{N_{12}}$), est définie telle que (fig. 4.2) :

$$\overrightarrow{F_{d_1}} = -k_d \left(\left(\overrightarrow{V_1} - \overrightarrow{V_2} \right) . \overrightarrow{N_{12}} \right) \overrightarrow{N_{12}} \tag{4.2}$$

Modèles viscoélastiques

Ainsi, si les matériaux purement élastiques montrent une loi linéaire simple entre la déformation et la contrainte (loi constitutive du matériau), les propriétés viscoélastiques donnent un comportement qui est totalement dépendant du temps, résultant en trois phénomènes de *(i)* fluage, *(ii)* relaxation et *(iii)* hystérésis.

Le fluage est l'augmentation de la déformation dans le temps pour une contrainte constante. La relaxation de contrainte est une diminution de la contrainte dans le temps, nécessaire pour maintenir une déformation constante. L'hystérésis apparaît après un test d'étirement et la relâche de ce test, provoquant ainsi un chemin de fluage et un chemin de relaxation qui ne sont pas forcément identiques.



(a) Modèle de Maxwell (b) Modèle de Voigt

(c) Modèle de Kelvin Voigt

FIG. 4.3.: Trois modèles de rhéologie d'analyse de la viscosité

Plusieurs modèles rhéologiques ont été utilisés pour décrire le comportement des tissus vivants. Parmi ces modèles, des objets mécaniques discrets ont été employés tels que les ressorts et les modèles de viscosité qui s'opposent à la vitesse.

On distingue trois types de modèles conventionnels mettant en place des comportements viscoélastiques (fig. 4.3).

Le modèle de Maxwell (fig. 4.3(a)) se caractérise par la mise en évidence de la caractéristique de relaxation, puisque le ressort hookéen va s'étendre jusqu'à un certain point avant d'entraîner le piston qui lui est relié et qui s'oppose à la vitesse de la contrainte de déformation imposée. Il est plus utilisé pour les modèles de fluides visqueux puisque sa déformation est pratiquement illimitée.

Sa mise en équation consiste à se placer au niveau des déformations du ressort γ_r, de raideur k et du piston γ_p, de viscosité k_d , la déformation du système étant $\gamma = \gamma_r + \gamma_p$. Les forces (*i.e.* les contraintes) appliquées au niveau du piston et du ressort sont égales et valent F. Ainsi, on peut trouver deux relations reliant la force aux déformations d'après les équations 4.2 et 2.8 ($k_{12} = k$) :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \gamma_r & = & \frac{F}{k} \\ \dot{\gamma_p} & = & \frac{F}{k_d} \end{array} \right. \tag{4.3}$$

Soit en passant aux vitesses des déformations, ceci donne l'équation différentielle rapportée à ce système :

$$\frac{1}{k}\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{F}{k_d} = \dot{\gamma} \tag{4.4}$$

Ainsi, si on applique une déformation jusqu'à un certain point, puis que l'on maintient cette déformation, il s'ensuit que la contrainte va évoluer avec le temps :

$$\frac{1}{k}\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{F}{k_d} = 0 \leftrightarrow F = F_0 e^{-\frac{k}{k_d}t} \tag{4.5}$$

où, $\frac{k_d}{k}$ est le *temps de relaxation*, caractéristique du modèle de Maxwell.

Le modèle de Voigt (fig. 4.3(b)) se caractérise par la mise en évidence du phénomène de fluage, puisqu'il faut augmenter la contrainte avec le temps afin d'obtenir une déformation constante. La mise en équation se fait sur la force totale qui s'applique au ressort F_r en parallèle de la force qui s'applique au piston F_p, ces deux forces étant reliées à la même déformation γ.

$$\begin{cases} F_r &= k\gamma \\ F_p &= k_d\dot{\gamma} \end{cases} \tag{4.6}$$

Ainsi, la contrainte est définie par :

$$F = k\gamma + k_d\dot{\gamma} \tag{4.7}$$

Ce qui fait que pour une contrainte maintenue constante F_0, l'évolution de la déformation évolue suivant :

$$\gamma = \frac{F_0}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{k_d}t}\right) \tag{4.8}$$

où $\frac{k_d}{k}$ est le *temps de retard*.

Ces modèles peuvent être assemblés en d'autres modèles tels que le modèle de Kelvin Voigt (fig. 4.3(c)) et de Birgham,... Cependant, dans notre cas de modèle de tissus plutôt solides, nous avons choisi d'implanter le modèle de Voigt.

Une fois que l'on a ces modèles, tout le problème reste la simulation, ou comment calculer l'évolution d'un système dans le temps.

4.1.3.2. Lois temporelles

Pour interagir à tout moment sur le système, il faut intégrer le temps et ainsi s'intéresser à la dynamique. On cherche ainsi à résoudre l'équation fondamentale de la dynamique qui est une équation différentielle du second ordre reliant les déplacements U à leurs vitesses $\dot{U}$ et leurs accélérations $\ddot{U}$:

$$M\ddot{U} + C\dot{U} + KU = F \tag{4.9}$$

où M est liée à la masse, C à l'amortissement ou la viscosité, K à la rigidité, et F à l'ensemble des forces externes appliquées à l'objet.

Si on se replace au niveau de la position d'un point P, on peut relier sa position en un instant $t+h$ à sa position à un instant 0 après déplacement de $U(t+h)$:

$$P(t+h) = P(0) + U(t+h) \tag{4.10}$$

De cette façon, on peut exprimer la vitesse d'un point :

$$\dot{P}(P,t) = \frac{P(t+h) - P(t)}{h} = \frac{U(t+h) - U(t)}{h} = \dot{U}(P,t) \tag{4.11}$$

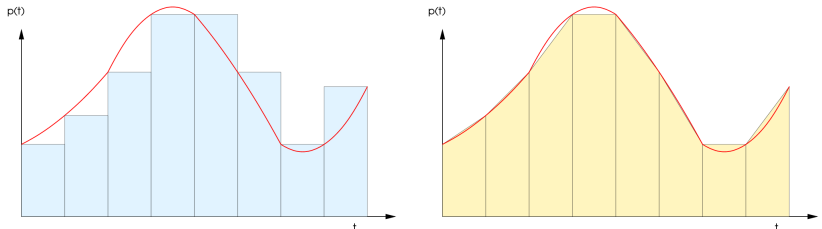
Ainsi, résoudre l'équation 4.9 revient à résoudre le problème à chaque pas de temps, en partant d'un instant initial où les dérivées premières et secondes sont supposées connues : ce sont les conditions initiales. Cela s'exprime par l'application de :

$$P(t+h) = P(t) + \int_t^{t+h} \dot{P}(P,t) \tag{4.12}$$

Il existe beaucoup de schémas d'intégrations [188, 189], tous sont approximatifs, car on ne sait pas calculer l'intégrale de cette formulation dans le cas général. Cependant, on peut distinguer deux grandes classes de méthodes :

- Les méthodes *explicites*, utilisent les dérivées premières et secondes déduites de l'état courant pour calculer la valeur suivante du champ connu. La stabilité de ces intégrations demande un pas de temps petit. Ce sont des méthodes dites locales car elles prennent en compte le lieu de l'intégration. Exemple : Schéma d'Euler (la vitesse ne varie pas au cours d'un pas de temps), méthode de Stöermer-Verlet/leapfrog, ...
- Les méthodes *implicites* utilisent les dérivées premières et secondes en fin de pas de temps pour calculer la valeur suivante. La stabilité est meilleure, mais la résolution de chaque pas de temps exige, en général, un calcul itératif et nécessite des paramètres algorithmiques et le choix des critères d'arrêt. D'autre part, elles nécessitent une dérivée des contraintes par rapport au temps pas toujours évidente à avoir. Ce sont des méthodes globales car elles prennent en compte le système entier. Exemple : Méthode d'Euler implicite, Rosenbrock...

Nous présentons les principales méthodes qui ont souvent été utilisées en animation.



(a) Méthode d'Euler explicite (b) Méthode de Newton Cotes explicite

FIG. 4.4.: Deux méthodes d'intégration classiques

Méthode d'Euler explicite

La méthode d'Euler est la plus simple et la plus employée. Elle consiste à déduire l'accélération en t, à partir des forces d'après la loi fondamentale de la dynamique (éq. 4.9). Elle déduit ensuite, par approximation linéaire, la vitesse au pas $t+h$ en fonction de cette accélération et de la vitesse à l'instant t. Enfin, elle conclut sur l'approximation de la nouvelle position en fonction de la vitesse et de la position au pas t.

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dot{P}(t+h) & = & \ddot{P}(t)\,h+\dot{P}(t) \\ P(t+h) & = & \dot{P}(t)\,h+P(t) \end{array}\right. \quad avec\ \ddot{P}(t)=\frac{F(t)}{M} \tag{4.13}$$

Cette méthode est exacte quand la force $F(t)$ est constante sur $[t, t+h]$.

Méthode de Newton-Cotes explicite

La méthode de Newton-Cotes est une méthode un peu plus évoluée. Elle consiste à approximer la vitesse dirigeant le déplacement du point, par l'intermédiaire du moyennage des vitesses de l'instant t et $t+h$.

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dot{P}(t+h) & = & \dot{P}(t)+\frac{F(t)}{M}h \\ P(t+h) & = & P(t)+\left(\dot{P}(t)+\dot{P}(t+h)\right)\frac{h}{2} \end{array}\right. \tag{4.14}$$

Méthode de Runge-Kutta explicite

Euler et Newton-Cotes, ne sont rien d'autre que des réécritures des développements de Taylor à l'ordre 1 et 2. Pour obtenir plus de finesse dans l'intégration, on peut réaliser des développements d'ordre supérieur :

$$y(t_0+h)=y(t_0)+\sum_{i=1}^{n}\frac{y^{(i)}(t_0)}{i!}(t_0-h)^i+O(h^n) \tag{4.15}$$

Cependant, pour réaliser des intégrations d'ordre supérieur à l'aide de l'équation de Taylor, il faut des informations supplémentaires au-delà de la vitesse et de l'accélération, dont nous ne disposons pas. La méthode de Runge-Kutta propose d'approximer ces informations manquantes en se plaçant à des pas intermédiaires entre t et $t+h$.

Ainsi, pour la résolution d'un problème du type :

$$\dot{P}=f(P,t)\ \ avec\ P_0=P(t_0) \tag{4.16}$$

les méthodes de Runge-Kutta d'ordre n sont définies par :

$$P(t_0+h)=P(t0)+h\left(\textstyle\sum_{i=1}^{n}b_ik_i\right)\ \ avec,$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} k_1 & = & f(P_0,t_0) \\ k_2 & = & f(P_0+ha_{2,1}k_1,t_0+c_2h) \\ k_3 & = & f(P_0+h(a_{3,1}k_1+a_{3,2}k_2),t_0+c_3h) \\ \ldots & & \\ k_n & = & f(P_0+h(a_{n,1}k_1+\ldots+a_{n,n-1}k_{n-1}),t_0+c_nh) \end{array}\right. \tag{4.17}$$

Avec $a_{i,j}$, c_i, b_i définis tels que l'expression $P(t_0+h) = P_0 + \ldots$ coïncide avec le développement de Taylor d'ordre n. Ces schémas sont explicites et de précision d'ordre n en temps.

À noter, de plus, que pour un ordre, il n'existe pas d'unique solution car les m coefficients sont inférieurs au nombre d'équations pouvant être écrites sur ces coefficients, nécessitant ainsi d'imposer certaines de ces constantes.

Ainsi, on peut voir un schéma de Runge-Kutta d'ordre 2 équivalent à la méthode d'Euler :

$$\begin{cases} k_1 &= f(P_0, t_0) \\ k_2 &= f(P_0 + hk_1, t_0 + h) \end{cases} \qquad (4.18)$$

$$P(t_0+h) = P_0 + \tfrac{h}{2}(k_1 + k_2)$$

Le schéma le plus employé en animation est en général le modèle de Runge-Kutta d'ordre 4 :

$$\begin{cases} k_1 &= f(P_0, t_0) \\ k_2 &= f\left(P_0 + \frac{h}{2}k_1, t_0 + \frac{h}{2}\right) \\ k_3 &= f\left(P_0 + \frac{h}{2}k_2, t_0 + \frac{h}{2}\right) \\ k_4 &= f(P_0 + hk_3, t_0 + h) \end{cases} \qquad (4.19)$$

$$P(t_0+h) = P_0 + \tfrac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Méthode d'Euler Implicite

La méthode d'Euler implicite consiste à chercher de manière implicite la position au temps $t+h$. Pour cela, elle consiste à réexprimer l'approximation de la dérivée à l'instant $t+h$:

$$\frac{P(t+h) - P(t)}{h} \sim \dot{P}(t+h) = f(t+h, P(t+h)) \qquad (4.20)$$

permettant d'en déduire la formule d'intégration d'Euler implicite :

$$P(t+h) = P(t) + hf(t+h, P(t+h)) \qquad (4.21)$$

En notant $v(t)$ la vitesse à l'instant du point de position $x(t)$, la résolution consiste alors à considérer les deux équations de la dynamique suivantes :

$$\begin{cases} (v(t))' = M^{-1}F(t, x(t), v(t)) \\ (x(t))' = v(t) \end{cases} \qquad (4.22)$$

On considére la notation suivante :

$$\begin{cases} \Delta v = v(t+h) - v(t) \\ \Delta x = x(t+h) - x(t) \end{cases} \qquad (4.23)$$

En appliquant le schéma d'Euler implicite (éq. 4.21) à (éq. 4.22), on obtient :

$$\begin{cases} \Delta v = hM^{-1}F(x(t) + \Delta x, v(t) + \Delta v) \\ \Delta x = h(v(t) + \Delta v) \end{cases} \qquad (4.24)$$

Soit, en utilisant les séries de Taylor appliquées à F pour l'approximation du premier degré,

$$F\left(x\left(t\right)+\Delta x, v\left(t\right)+\Delta v\right)=F\left(t\right)+\frac{\partial F}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial F}{\partial v}\Delta v \tag{4.25}$$

Ce qui ramène finalement [199] au système à résoudre :

$$\left\{\begin{array}{l}\left(M-h\frac{\partial f}{\partial v}-h^2\frac{\partial f}{\partial x}\right)\Delta v=h\left(f\left(t\right)+h\frac{\partial f}{\partial x}v\left(t\right)\right)\\ v\left(t+h\right)=v\left(t\right)+\Delta v\\ x\left(t+h\right)=x\left(t\right)+hv\left(t+h\right)\end{array}\right. \tag{4.26}$$

Erreur et stabilité

Les méthodes d'intégration implicites sont en général plus stables que les méthodes explicites mais elles nécessitent un plus grand nombre de calculs.

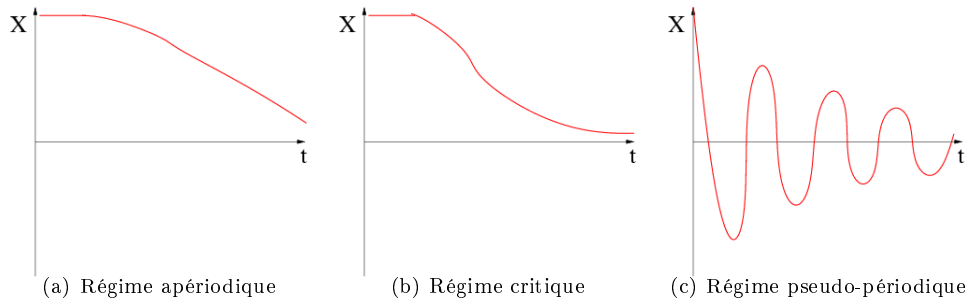
Dans les méthodes d'intégration explicites, le pas de temps est déterminant (plus le pas de temps est petit, plus l'erreur commise est petite). D'après le théorème de Shannon, pour éviter toute divergence d'un système, il faut au moins échantillonner le pas de temps à deux fois la fréquence la plus haute du système.

Quoiqu'il en soit, l'erreur commise est difficile à évaluer au cours d'une simulation. C'est pour cela que Joukhadar propose dans sa thèse [106] de calculer l'état énergétique des objets et d'utiliser cette grandeur pour faire varier le pas de temps. Comme cette hypothèse n'est bonne que dans le cas de systèmes clos non dissipatifs, il considère qu'un bon critère consiste à faire en sorte que le pas de temps n'implique pas une plus grande variation de l'énergie mécanique qu'un certain seuil. Si le seuil est franchi, le pas de temps est divisé par deux, sinon, il est multiplié par deux.

FIG. 4.5.: Phénomène de résonance sur le pont de Tacoma (États Unis) qui entraîna sa destruction en 1940 (d'après http ://www.ac-nice.fr/physique/Oscillateur/pont.html)

Cependant, le pas de temps ne peut pas être modifié de façon aléatoire, notamment dans les systèmes oscillants tels que les systèmes masses-ressorts où des phénomènes de résonance sont à craindre (fig. 4.5). Là encore, la physique, avec l'étude des phénomènes vibratoires, nous donne des clefs pour ne pas déstabiliser le système.

En effet, dans le cas d'oscillateurs amortis, chaque ressort-amortisseur (de raideur k et de viscosité k_d) est assimilable à un système du second ordre de pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ pouvant exprimer trois types de comportements dans le temps suivant le coefficient d'amortissement k_d et un coefficient qui lui est associé $\tau = \frac{2m}{k_d}$. En étudiant la fonction $\Delta = 1/\tau^2 - \omega_0^2$, le système pourra être en régime apériodique si $\Delta > 0$ (fig. 4.6(a)), critique si $\Delta = 0$ (fig. 4.6(b)), ou pseudo-périodique oscillant autour d'une position d'équilibre si $\Delta < 0$ (fig. 4.6(c)) avec une pseudo-période de $T = \frac{2\Pi}{\sqrt{\omega_0^2 - 1/\tau^2}}$.



(a) Régime apériodique (b) Régime critique (c) Régime pseudo-périodique

FIG. 4.6.: 3 régimes possibles quant au changement de position suivant l'amortissement exercé

Parmi les trois solutions pour arriver à l'équilibre, la plus lente est certainement le régime apériodique. Dans le cas du régime pseudo-périodique, nous notons en tout cas que le pas de temps d'intégration doit permettre de discrétiser suffisamment la pseudo-sinusoïde, donc être plus petit que T. D'autre part, comme l'intégration du mouvement se fait à partir de la vitesse par l'intermédiaire du calcul de l'accélération et des forces, le système s'auto-alimente jusqu'à ce que toutes les forces s'équilibrent. Ainsi, il s'agit d'un régime forcé où l'entrée constante au départ va se transformer en entrée oscillante suivant la vitesse que prend le système. Il ne faut donc pas que le pas de temps augmente trop la vitesse ou l'amène à une oscillation en résonance.

Comme chaque masse est stimulée par toutes ses voisines qui lui sont liées, la difficulté augmente d'autant.

4.1.3.3. Schéma d'intégration retenu pour la simulation.

Pour des raisons de rapidité et de stabilité, nous avons retenu le schéma explicite d'intégration du Velocity Verlet, moins stable que les schémas implicites, mais parmi les modèles les plus stables dans les schémas explicites [199].

Ce schéma consiste à faire une approximation d'ordre deux de la position au pas $t+h$ suivant la vitesse et l'accélération au pas t, puis de caluler la vitesse au pas $t+h/2$ par approximation linéaire. Ensuite la préparation du pas suivant, consiste à calculer la vitesse au pas $t+h$ en fonction de la vitesse à $t+h/2$ et de l'accélération à $t+h$ *i.e.* le bilan des forces.

$$\begin{cases} P(t+h) & = & P(t)\,\dot{P}(t)\,h + \ddot{P}(t)\,h^2/2 \\ \dot{P}(t+h/2) & = & \dot{P}(t)\,h + \ddot{P}(t)\,h/2 \\ \ddot{P}(t+h) & = & 1/M\,F(t+h) \\ \dot{P}(t+h) & = & \dot{P}(t+h/2) + \ddot{P}(t+h)\,h/2 \end{cases} \quad avec\ \ddot{P}(t) = \frac{F(t)}{M} \tag{4.27}$$

Nous avons effectué les expériences avec ce schéma en appliquant un coefficient de viscosité qui permet de se placer en régime critique afin d'éviter les oscillations du système.

Pour ce qui est du pas de temps, nous avons, par expérience, trouvé que s'il était supérieur à 2% de la pseudo-période sans la viscosité, en régime pseudo-périodique, le système arrivait à un état de résonance, et était fortement instable. En revanche, s'il se trouve à cette valeur, le système peut évoluer normalement.

4.1.3.4. Implantation.

Nous savons, maintenant, comment simuler et avec quelle structure de données puisque nous nécessitons un bilan des forces en chaque nœud du maillage de l'objet. Désormais, nous pouvons décrire les objets nécessaires pour simuler le comportement d'un objet avec notre modèle 2D, l'implantation 3D se déduisant de celle-ci (fig. 4.7).

Comme décrit dans le chapitre précédent, nous pouvons décomposer ainsi notre modèle en tableau de points et en tableau d'éléments, un élément étant relié à 4 points distincts (8 en 3D). Chaque point doit informer de sa position, vitesse, accélération, masse, force qui s'y applique ainsi que de la liste des éléments auxquels il appartient.

L'élément est paramétré par un module de Young E, un coefficient de Poisson ν, une hauteur initiale h_0, et une largeur initiale l_0 (on rajoute l'épaisseur initiale en 3D). De ces 4 paramètres, il est possible d'en déduire 4 autres : la longueur initiale des deux diagonales d_0, et les trois raideurs des ressorts K_1 de longueur de repos l_0, K_2 de longueur de repos h_0, et K_3 de longueur de repos d_0 (K_1, K_2, K_3 et K_D en 3D). La formule des raideurs est donnée dans les équations 3.8 et 3.9. Nous rajoutons, d'autre part, un paramètre de viscosité du milieu pour la dynamique.

Comme nous l'avons déjà fait remarquer (fig. 3.16, p. 88), ces raideurs doivent être positives, et si elles ne le sont pas, l'élément doit être décomposé en sous-éléments.

Enfin, l'élément informe dans un tableau des forces externes qu'il subit en chaque point et qui permettront de calculer les forces correctrices.

Cependant, comme l'évolution de chaque élément s'effectue par le principe itératif d'intégration du Velocity Verlet, nous devons pouvoir mettre à jour ce récapitulatif des forces externes s'exerçant dans l'élément entre chaque itération. Nous devons donc recueillir les forces externes pour l'état de l'intégration et les forces externes en cours de calcul pour l'intégration suivante.

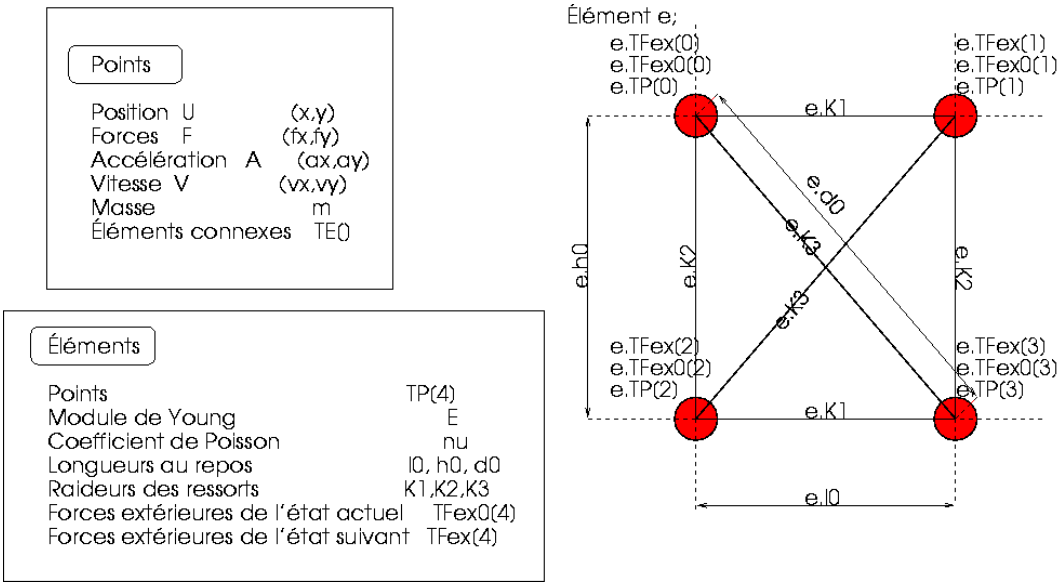


FIG. 4.7.: Description objet du modèle élément 2D : un élément est composé de points massiques qui contiennent les informations sur leur position, vitesse, accélération et les éléments auxquels ils appartiennent ; les éléments informent sur les dimensions au repos, les caractéristiques mécaniques, les points massiques dont ils sont composés ainsi que les forces externes à l'élément appliqués en chaque point.

Ainsi, pour chaque point de l'élément, on effectue un bilan des forces dans lequel on calcule les forces internes et les forces externes à chaque élément du système. Les forces internes sont dues aux ressorts et forces correctrices de Lagrange. Les forces externes proviennent en partie des forces internes de l'élément voisin et pour autre partie des contraintes appliquées au système. Ainsi, nous rajoutons les forces dues aux contraintes, qui sont *(i)* dans le cas de contraintes de forces, les forces externes exercées, et *(ii)* dans le cas des contraintes de déplacements ou de points fixes, les forces de réaction, c'est-à-dire les forces qui sont opposées aux forces exercées par le système en ces points.

Une fois que le bilan des forces est effectué, on se ramène en chaque point à l'équation fondamentale de la dynamique (éq. 4.9, p.140). Et ainsi, en chaque point décrivant l'objet, par intégration successive de l'accélération puis de la vitesse, on obtient l'évolution du système et donc *a fortiori* les déplacements pour chaque élément du volume.

Maintenant que nous savons comment mettre en œuvre notre modèle, nous revenons à notre application.

4.2. Application

Depuis plusieurs années, le LIRIS effectue des coopérations avec des centres hospitaliers et d'autres laboratoires spécialisés dans l'imagerie médicale et la modélisation pour le médical.

Dans le cadre du projet ADEMO [17, 19], effectué entre les laboratoires ERIC de Lyon 2, LIGIM[1] de Lyon 1 et TIMC de Grenoble, il avait été proposé d'aider au repositionnement du patient, pour les cancers de la prostate, à l'aide de données partielles issues de l'échographie. La prostate, en effet, bouge sous l'effet du gonflement du rectum et du remplissage de la vessie. Elle peut se déformer (les glandes séminales pouvant bouger de façon différente que la prostate elle-même). Nous avions donc proposé une méthode de mise à jour d'un modèle connu à l'aide de données moins précises. Le modèle provenait des données de l'imagerie scanner, alors que les données de mise à jour étaient issues des nuages de points obtenus de l'analyse, moins précise, d'un examen échographique. Le but était de montrer qu'il était possible de mettre à jour les modèles servant au plan de traitement avant chaque début de séance [20].

Les projets européens BIOMED2 (INFOCUS et ARROW) rassemblaient aussi le LIGIM, avec comme partenaires des centres hospitaliers britanniques et allemands, pour essayer de prendre en considération des organes en mouvement, à l'aide de modèles à base de surfaces implicites et de particules. Ces projets ont permis de développer des modèles hybrides pour simuler les déformations pour des organes tels que les poumons et la prostate. Cependant, aucune mesure d'erreur n'avait été effectuée sur ces modèles.

C'est enfin avec le projet ETOILE et le projet MARC (devenu OPTIM et RESPI2000) mettant en relation les physiciens de Lyon 1, les centres anticancéreux du centre Léon Bérard et du CHU de Lyon Sud, que le LIRIS s'est intéressé à introduire une mesure réaliste de ses modèles et à s'orienter vers des méthodes à éléments finis et des méthodes discrètes de précision. En effet, dans le cadre de la radiothérapie et de l'hadronthérapie, les médecins sont demandeurs, dans ces projets, d'outils leur permettant de garantir la localisation de l'irradiation, ainsi que d'effectuer des mesures de risques.

Des études effectuées au LIRIS, par Muller puis Amrani, ont tenté d'introduire un paramétrage permettant un contrôle rhéologique des systèmes de particules. Mais les résultats ont montré une grande complexité pour l'adaptation de ces modèles. C'est ainsi que deux nouveaux modèles ont été explorés, dont le modèle proposé dans cette thèse. Dans nos modèles, nous avons souhaité intégrer les paramètres physiologiques et nous avons ainsi obtenu un prototype permettant de simuler, avec une erreur connue, la respiration au niveau du poumon, que l'on peut assimiler au gonflement d'un objet 3D fermé.

Nous présentons, ainsi, dans une première partie, le projet avec les données fournies, puis nous expliquons notre proposition. Enfin nous montrons un résultat préliminaire.

[1] Le LIGIM et ERIC étaient deux unités d'accueil, faisant maintenant partie du LIRIS.

4.2.1. Les Projets OPTIM / RESPI2000

Au CLB, deux projets d'étude pour une meilleure prise en compte des mouvements respiratoires dans la RTC, approuvés par le CCPPRB[2], sont en place depuis 5 ans avec l'utilisation de l'ABC (cf. p. 17). Le projet *OPTIM* a pour but de faire bénéficier les patients d'une radiothérapie conformationnelle à visée curative en travaillant sur deux paramètres : *(i)* l'immobilisation de la tumeur pendant une phase du cycle respiratoire prédéterminée (inspiration bloquée), et *(ii)* l'irradiation à pleine dose. Le projet *RESPI2000* a pour objectif d'optimiser et de personnaliser l'irradiation conformationnelle de patients pour lesquels la radiothérapie avec respiration autonome et la chirurgie sont contre-indiqués. Cette seconde étude consiste à bloquer le patient en inspiration à 75% de sa capacité vitale pendant quelques secondes, afin de toucher le moins possible de tissu sain, grâce à l'extension de ce dernier, et à l'irradier pendant ce temps.

Dans le premier projet, trois acquisitions scanners 3D sont systématiquement effectuées sur le même patient, pour trois volumes respiratoires bloqués distincts. L'un de ces blocages se situe autour des 30% de la capacité vitale, ce qui correspond à l'état d'équilibre entre l'effort exercé par la cage thoracique sur le poumon et l'élasticité propre du poumon. D'autre part, une mesure de compliance est effectuée dans cette première étude.

L'idée de cette étude est d'utiliser ces 3 acquisitions pour pouvoir proposer un modèle de simulation des déplacements et des déformations tumorales en fonction du volume respiratoire du patient, au cours du temps. Cette première étude pourrait permettre la génération de modèles de simulation pour tous les patients et en faire ainsi bénéficier les patients de la seconde étude.

Ma thèse s'est inscrite dès le départ en relation avec ces deux projets, et dans l'optique d'explorer la possibilité de définir un simulateur permettant de prévoir les déplacements pulmonaires, sur les bases de l'hypothèse de reproductibilité de la géométrie du poumon suivant l'état volumique respiratoire.

4.2.2. Proposition

Nous avons vu, dans le premier chapitre, qu'à l'échelle du poumon des modèles ont été réalisés pour comprendre l'élasticité du poumon, les mouvements internes ou le flux de l'air dans les bronches, tandis que d'autres modèles ont pour objectif une vision globale du système respiratoire. Ces modèles ne permettaient pas d'avoir une considération des mouvements internes lors des déformations dues à la respiration. Au chapitre 3, nous avons donc développé un modèle discret permettant de mesurer les déformations internes en utilisant les modèles biomécaniques.

La méthode de simulation que nous proposons [21] reprend en partie le modèle de Kaye, mais avec une considération plus active des poumons. Celui-ci devient moteur dans le modèle et va se gonfler suivant la respiration du patient, par pas quasi-statiques (dans le sens où les déformations se font de telle sorte que les états intermédiaires soient des états d'équilibre) pour éviter les effets dynamiques de la respiration.

[2]Comité Consultatif de Protection des Personnes dans la Recherche Biomédicale

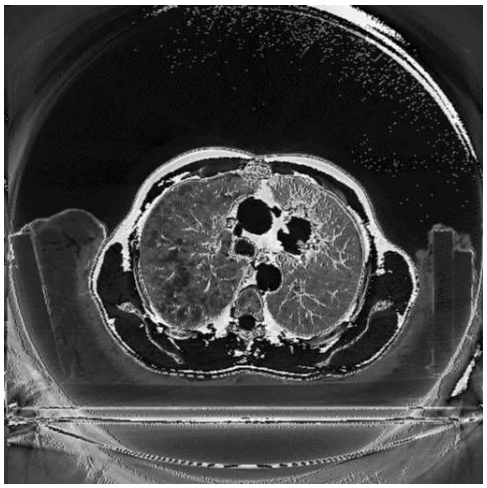
Nos hypothèses, quant aux contraintes mécaniques, consistent à imposer une contrainte de point fixe au niveau du hile ainsi qu'une contrainte de glissement pour la partie médiastinale et thoracique.

Notre simulation se base sur la respiration du patient et les données issues des explorations fonctionnelles respiratoires de la compliance quasi-statique.

Nous présentons ici comment obtenir la géométrie des organes, et les verrous scientifiques dans ce domaine. Nous présentons ensuite comment relier les paramètres rhéologiques aux paramètres physiologiques fournis. Enfin nous présentons le cheminement que nous souhaitons développer.

4.2.2.1. Données géométriques

La géométrie est obtenue de la segmentation des données scanners[3] du thorax. Les acquisitions scanners permettent d'obtenir des coupes parallèles du thorax du patient. Dans le projet OPTIM, ces acquisitions permettent de donner l'état des poumons



Coupe scanner au niveau du bas des omoplates et du haut du cœur d'un thorax de patient en contention dans une coque de mousse thermoformée. Cette coupe permet de montrer la géométrie des poumons.

FIG. 4.8.: Coupe scanner d'un patient

entiers (avec très peu d'artefacts) pour un volume donné. Les données qui nous sont fournies contiennent 512×512 pixels par coupe de dimension $0,9 \times 0,9mm$. Les coupes ont une épaisseur de $5mm$, avec en général une soixantaine de coupes.

L'extraction du modèle géométrique par simple segmentation des données n'est pas évidente à réaliser. Au CLB, une première étude avait été faite par Vongphouthone [183] qui se basait sur les travaux de Hoffman et Reinhardt [98] pour une segmentation par seuillage du poumon, puis qui, par érosion et dilatation, fermait les trous qui pouvaient se créer lors de la segmentation. Cependant des difficultés surviennent pour séparer les deux poumons et parfois des artefacts amènent d'autres morceaux d'organes

[3] Le format des scanners est en DICOM (Digital Imaging and COmmunication in Medicine)

dans la géométrie du poumon, ce qui requiert une correction manuelle. Nous avons, d'autre part, continué cette étude avec le travail de Gaillard et Michoud [127], qui nous permet d'extraire, en plus des poumons, l'enveloppe du cœur qui est un obstacle constamment en contact avec les poumons (fig. 4.9).

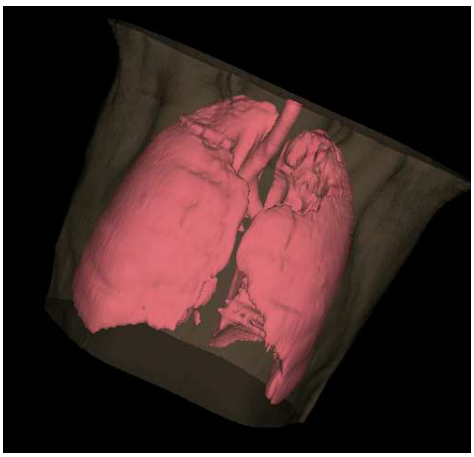


FIG. 4.9.: À partir des coupes scanners, nous extrayons un modèle géométrique de poumons.

Pour décrire les poumons d'un volume de 5l avec un tel scanner, nous pouvons obtenir plus de 1 million de parallélépipèdes de $0,9 \times 0,9 \times 5mm$.

Or, notre modèle nécessite plutôt une géométrie cubique, ce qui ramène à plus de 5 millions d'éléments soit un nombre considérable en occupation mémoire (rien que pour les poumons) si on veut rester à la même précision géométrique que les scanners.

Notre objectif étant l'obtention d'un modèle mécanique réaliste, nous ne nous sommes pas vraiment intéressé à ce problème géométrique en projetant que l'utilisation de modèles de multirésolution pourra en perspective permettre de s'affranchir de tant de données. Aussi, nous avons pris la résolution de réduire la quantité de données en augmentant la taille des briques élémentaires par 16 suivant les plans de coupe, permettant de diviser ainsi par 256 le nombre d'éléments, soit à se ramener à un problème sur 20 000 éléments (10 000 par poumon).

Notre maillage se base sur le maillage utilisé par le logiciel libre de résolution par éléments finis Code Aster, nous permettant ainsi de tester et de comparer les résultats. Il s'agit du format *msh* qui consiste à indiquer *(i)* la liste des nœuds (ou points) dont est constitué l'objet avec dans l'ordre : un identifiant et la liste des coordonnées (x,y,z), *(ii)* l'énumération des éléments en indiquant leur identifiant, la liste des nœuds dont ils sont constitués et le groupe auquel ils appartiennent. C'est ce groupe qui nous permet, lors du chargement du maillage dans notre application, de savoir quel type de contrainte ou d'action l'élément devra éventuellement subir.

Pour l'application des contraintes de points fixes et la définition des zones de glis-

sement, nous avons ainsi développé une application simple permettant de définir les zones du maillage devant subir les différentes contraintes, coupe par coupe.

Maintenant que nous savons comment définir la géométrie et les lieux de contraintes, nous expliquons comment définir la loi de comportement du poumon.

4.2.2.2. Liens des données biomécaniques aux paramètres du modèle

Comme nous l'avons en partie expliqué dans le premier chapitre, les tissus vivants sont composés en part importante d'élastine et de collagène. Dans le corps humain, l'élastine est dominant dans les ligaments, on le retrouve aussi dans les veines, l'aorte, les artères, la peau et les poumons. Cette élastine présente une propriété élastique pure bien que l'on puisse distinguer la faible présence d'hystérésis dans les courbes contraintes/déformations. Le collagène est plus un tissu connectif qui est présent dans les éléments structurels des organes humains. On le retrouve acteur pour la majorité du comportement des tendons. Il existe aussi dans les os, les cartilages et la peau.

Le module de Young du collagène est 1000 fois plus grand que celui de l'élastine, rendant donc les structures le contenant d'autant plus rigides que celles constituées en majorité d'élastine.

Pour de petites déformations, les tissus humains sont souvent approximés comme des tissus viscoélastiques [49]. Ils expriment un comportement élastique et visqueux à la fois quand ils sont déformés, même s'ils ont des propriétés mécaniques bien plus compliquées encore, telles que l'élasticité non-linéaire, l'anisotropie, la plasticité, la compressibilité ou l'inhomogénéité suivant leur structure.

La biomécanique permet de trouver des caractéristiques de modèles simplifiés des matériaux biologiques, comme le module de Young et le coefficient de Poisson. Cela se fait par l'intermédiaire de mesures effectuées par tests (étirement, indentation,...) sur des animaux ou cadavres [61], bien que cela pose des problèmes du point de vue éthique et du point de vue de la fiabilité de ces mesures car les tissus morts perdent de leur propriétés élastiques.

Pour le poumon, la littérature semble s'accorder sur le coefficient de Poisson se situant entre 0,3 [92] et 0,4 [87]. Le module de Young se situe autour de 0,39kPa [87] pour l'état de repos du poumon.

Notons, cependant, que la mesure effectuée sur des tissus morts ne reflète quasiment jamais les propriétés du tissu vivant, rendant ces mesures très difficiles à réaliser. Aussi, en collaboration avec le pneumologue Jean-Yves Bayle, nous avons proposé de réintroduire la mesure de compliance (cf. chapitre 1, p. 22-26), qui selon lui, est le meilleur indicateur sur l'élasticité d'un poumon.

On observe, en effet, que la compliance C (éq. 1.2, p. 26) s'apparente à la caractéristique de compressibilité (éq. 2.6, p. 60), et plus particulièrement à son inverse qui est le coefficient de dilatation isothermique :

$$C = \frac{V_0}{K} \tag{4.28}$$

En rapprochant les équations (4.28) et (2.7, p. 60), et en faisant l'hypothèse simplificatrice que le poumon est un milieu élastique homogène isotrope, nous pouvons arriver

à estimer la compliance à partir du module de Young et du coefficient de Poisson et *vice versa* :

$$C = 3\frac{V_0\,(1-2\nu)}{E} \tag{4.29}$$

Une évaluation numérique rapide, en prenant $V_0 = 2,75l$ (moitié de la capacité totale des deux poumons), $E = 0,39 \times 10^3 Pa.$ (d'après la littérature) et $\nu = 0,3$, on obtient une compliance pour les deux poumons de $5 \times 10^{-3} l.Pa^{-1}$, soit, de $2,5 l.kPa^{-1}$ pour un poumon, ce qui correspond à la littérature. Ainsi, compliance, module de Young et coefficient de Poisson sont mis en relation, et il suffit d'en connaître 2 pour en déduire le troisième, dans le cas linéaire.

Nous pouvons ainsi approximer des caractéristiques élastiques grâce aux données physiologiques de compliance. Cette mesure est quasiment constante pour de faibles amplitudes respiratoires, en quasi-statique, et permet, d'autre part, de déduire les changements de pression transpulmonaire du volume respiré. Or, justement, nous connaissons en permanence les changements de volume respiratoire du patient par l'intermédiaire de l'ABC.

Sachant récupérer la géométrie, définir les contraintes et obtenir les caractéristiques biomécaniques des modèles, nous pouvons désormais élaborer comment nous pensons mettre en place notre simulation dans le cas de la respiration.

4.2.2.3. Bilan : Plan de notre proposition de simulation

La figure 4.10 résume le protocole que nous souhaitons mettre en place.

Dans le cadre du projet RESPI2000, les données scanner ségmentées permettront d'obtenir la géométrie du poumon. Ainsi, on pourra appliquer aux endroits nécessaires les différentes contraintes mécaniques (point fixe aux hiles, glissement au niveau des côtes, ...). Une fois ces études préliminaires effectuées, nous proposons de construire le modèle mécanique avec les paramètres de compliance pour un coefficient de Poisson imposé autour de 0,3.

Le point de départ du modèle devrait être pris lorsque les contraintes entre les actions des muscles de la cage thoracique et les actions de l'élasticité interne du poumon s'annulent, car à ce moment là la pression transpulmonaire est nulle et nous sommes au 0 de la courbe pression-volume (fig. 1.12, p. 24). Cela correspond à l'acquisition scanner du protocole RESPI2000, pour un volume bloqué à 30% de la capacité vitale.

À partir de là et d'un enregistrement de courbe respiratoire d'un patient, il devrait être possible de simuler les déplacements pouvant survenir, en suivant la respiration pendant le traitement. Cela se ferait en augmentant le volume des poumons par application de pression calculée à partir des variations de volume mesurées et de la compliance. Ainsi le poumon évoluera suivant les contraintes appliquées (glissement dans la cage thoracique, fixation au niveau des hiles et de l'apex). Bien entendu, il faudra aussi ajouter l'apport d'information externe tels que la position de certaines côtes pouvant donner la forme de la cage thoracique au court du traitement.

Ensuite, cela pourrait permettre au médecin de détecter les meilleurs états de blocage pour le traitement, ou bien ,si le blocage n'est pas possible, à quel moment de la respiration l'envoi de la dose est le plus profitable.

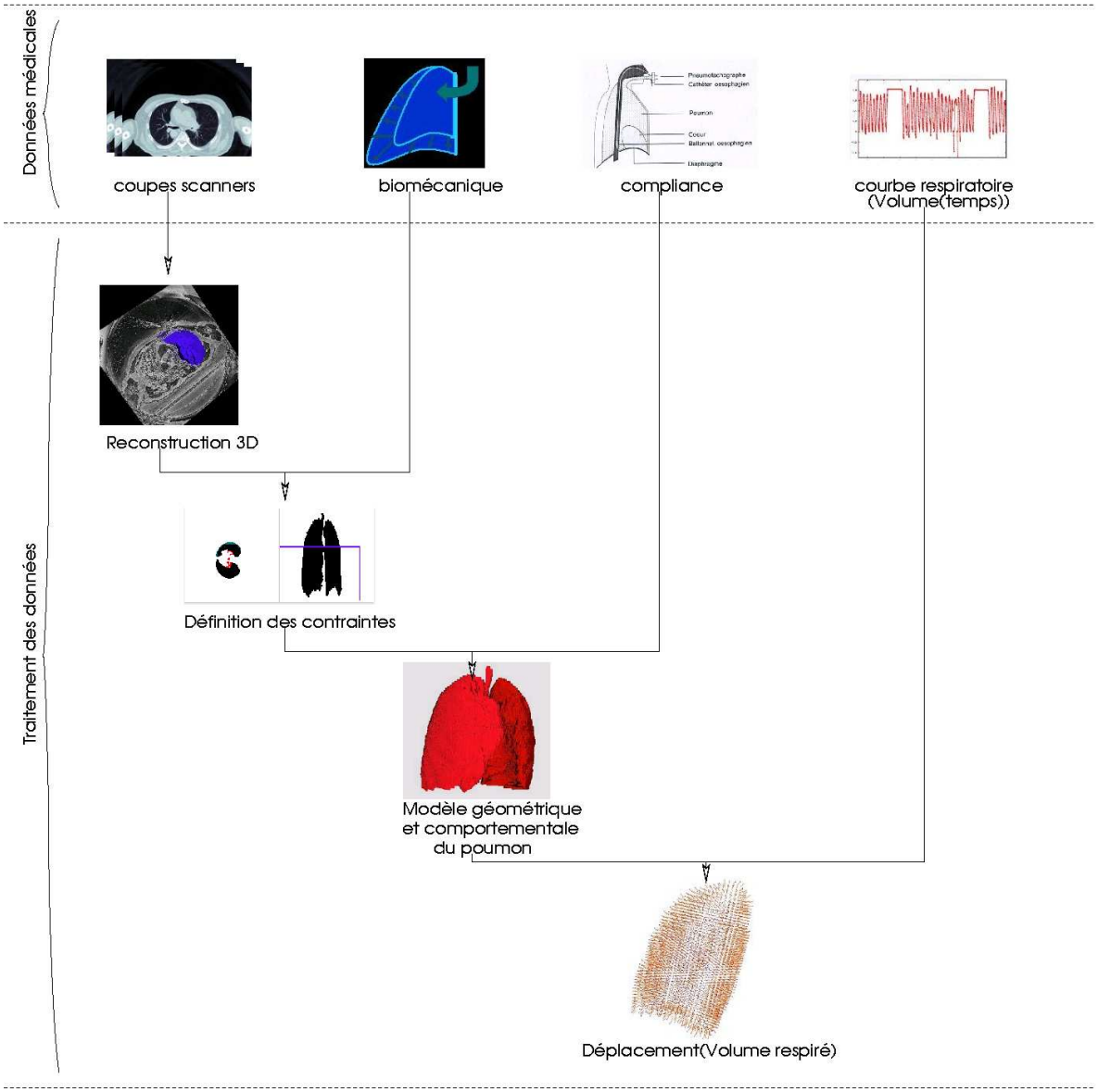


FIG. 4.10.: Résumé de la méthode que nous proposons : des données scanners nous pouvons extraire la géométrie des structures à traiter. Nous pouvons alors définir les lieux de contraintes de ces structures et appliquer des propriétés mécaniques aux différents éléments de la géométrie. Enfin la courbe de respiration permettra de conduire la simulation.

Nous discutons dans la section suivante d'une méthode de validation de notre modèle qui permettrait de démontrer sa validité ainsi qu'un premier résultat sur les poumons.

4.2.3. Validation

Nous avons déjà réfléchi à une méthode de validation de notre modèle. Celle-ci se base sur les données fournies dans le cadre des protocoles RESPI2000 et OPTIM. En effet, nous pouvons comparer des états géométriques réels, issus de l'acquisition scanner pour des volumes connus, à des simulations d'obtention de ces volumes.

L'idée consiste *(i)* à initialiser la géométrie de notre modèle à l'instant respiratoire, de volume V_0, correspondant à l'équilibre transpulmonaire ($\Delta P = 0$), *(ii)* à choisir une autre géométrie connue à un volume respiratoire V_i, *(iii)* à calculer la différence de volume $\Delta V = V_0 - V_i$ entre ces deux états, *(iv)* par application directe de la loi de compliance (éq. 1.2, p. 26), on devrait être capable de déduire de ΔP, la pression transpulmonaire que l'on doit appliquer dans notre modèle pour obtenir la simulation de l'état à V_i.

Ainsi une première mesure d'erreur sur le modèle pourra être la mesure du volume du résultat de la simulation et la comparaison avec le volume sensé être simulé.

Une autre mesure viendra de la recherche des transformations rigides permettant de passer d'un repère de poumon à un autre. L'idée est de recaler dans le même repère la géométrie obtenue par simulation et la géométrie réelle sensée être simulée. Cela se fait en calculant la translation qui permet d'amener le centre de gravité du poumon simulé en superposition avec le centre de gravité du poumon réel. Ensuite, il s'agit de trouver les rotations amenant les axes médians des deux poumons à se confondre. Translation et rotation permettront ainsi d'obtenir une seconde indication d'erreur.

Pour l'instant le modèle ne permet pas de prendre en compte l'environnement, puisqu'il considère des contraintes fixes (fixité au niveau du hile et glissement partout ailleurs), il faudra ajouter l'information sur les côtes pour avoir un suivi des changements géométriques de la cage thoracique.

Enfin, après avoir positionné notre modèle dans les mêmes référentiels que les images scanners, on pourra obtenir une simulation d'image scanner de notre résultat avec la méthode proposée par Villard *et al.* [182]. Puis par opérations logiques entre le scanner réel et le scanner simulé, il devra être possible de déterminer les zones d'erreurs.

Avant de pouvoir utiliser ce modèle de validation, on devra pouvoir intégrer les effets de l'"environnement du poumon (côtes, cœur, ...). Nous montrons cependant un résultat de gonflement de poumon en prémice.

4.2.4. Gonflement de poumon

Le développement de notre modèle et son étude ont permis de définir ses limites actuelles. Ainsi, nous pouvons simuler des déformations telles que le cisaillement, le gonflement, ou l'étirement, avec précision pour de petites déformations par éléments. Nous devons encore intégrer les grandes déformations, et il sera nécessaire d'intégrer l'environement du poumon pour obtenir les résultats cohérents avec la réalité. D'autre

part, il faudra contrôler que les éléments soient toujours dans leur limite de déformation pertinente.

Aussi, la prochaine étape pour valider sera certainement la comparaison d'un gonflement de poumon effectué avec notre modèle avec le même gonflement simulé en éléments finis.

Voici un exemple pris avec un maillage voxelique d'un poumon droit dans lequel nous avons appliqué plusieurs contraintes (fig. 4.11). Une première contrainte a consisté à fixer les points à l'apex (en haut) du poumon, pour simuler la limite supérieure de la cage thoracique. Nous avons aussi fixé les voxels du hile (entrées de la bronche primaire et des artères dans le poumon) et avons bloqué dans le plan du médiastin les points qui sont en son contact pour simuler les glissements possibles s'y produisant.

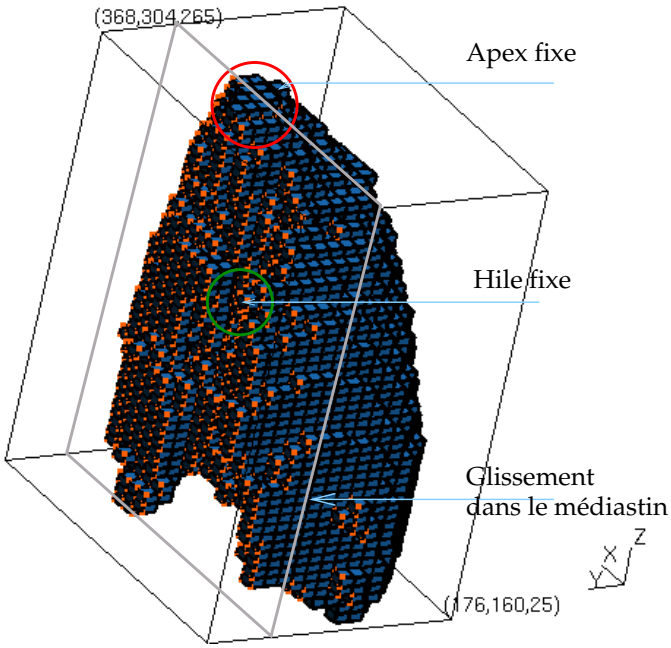
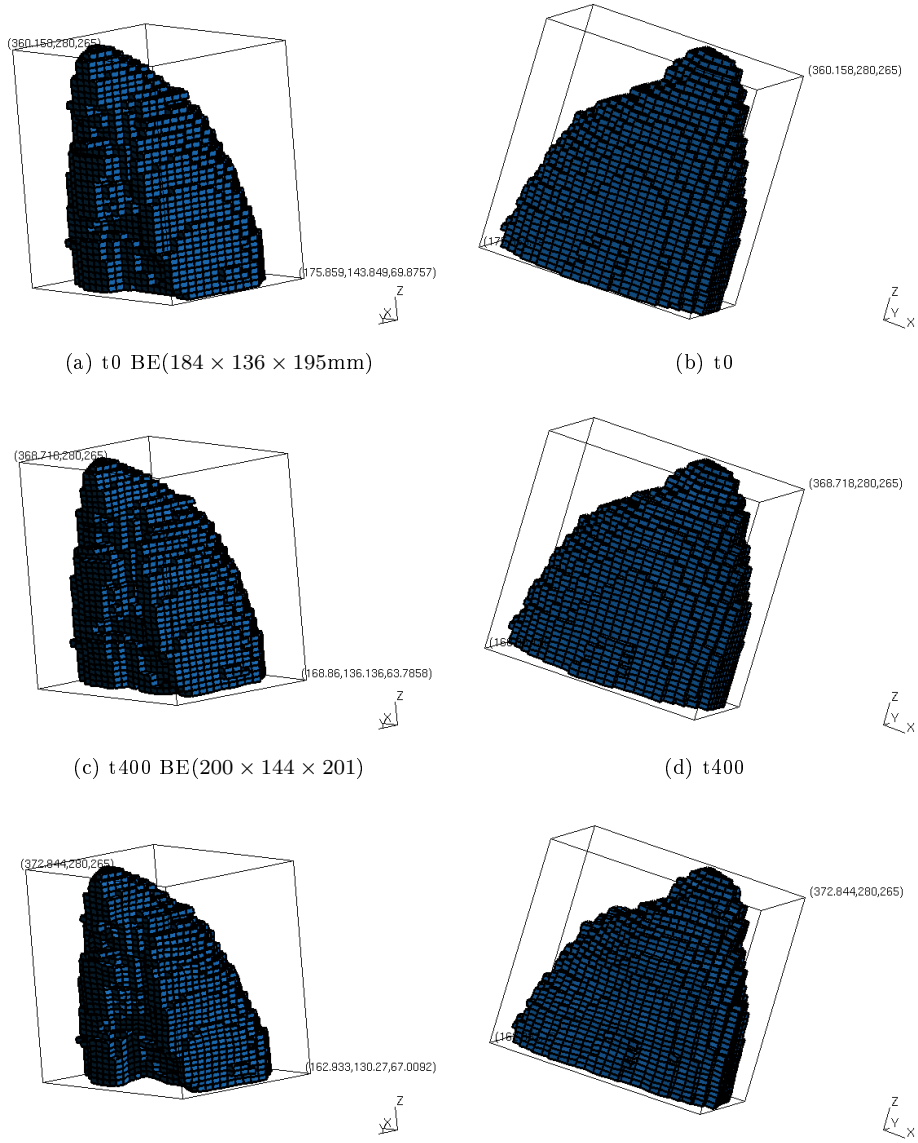


FIG. 4.11.: Vue du plan médiastinal du poumon et des lieux d'applications des contraintes.

Dans les figures 4.12, nous montrons les déformations obtenues au cours de la simulation quasi-statique, pendant laquelle on applique une pression uniforme en surface du poumon.

Point de vue du médiastin **Point de vue des côtes**



(a) t0 BE($184 \times 136 \times 195$mm) (b) t0

(c) t400 BE($200 \times 144 \times 201$) (d) t400

(e) t800 BE($210 \times 150 \times 196$) (f) t800

FIG. 4.12.: Simulation de Poumon se gonflant. BE($x \times y \times y \times z$) représente les dimensions des boîtes englobantes.

Nous montrons une simulation de gonflement d'un poumon. Comme nous n'avons pas bloqué au niveau des côtes, le poumon simulé a tendance à gonfler sur la plus grande surface libre qui est justement au niveau des côtes (fig. 4.12(c) à 4.12(f)).

4.3. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons introduit comment nous mettons en œuvre notre modèle, notamment, comment nous l'implantons informatiquement, et comment nous gérons les contraintes de points fixes ou de déplacements suivant des surfaces données. Nous avons montré les difficultés de la dynamique, avec les phénomènes de viscosités dans les tissus vivants et avons indiqué que nous prenions pour l'instant une viscosité permettant un régime proche du régime critique pour éviter les oscillations. De plus, nous avons choisi un modèle d'intégration explicite permettant une bonne stabilité, et avons, par nos expériences, pu vérifier que le pas de temps d'intégration devait être inférieur à une valeur dépendante de la période propre du système.

Après développement de notre mise en œuvre nous avons détaillé les protocoles médicaux dans lequel notre application doit pouvoir s'intégrer. Nous avons montré la difficulté d'obtenir des données suffisamment propres (modèles sans trous, bien définis, maillé avec des éléments le plus proche d'un cube) pour pouvoir être exploitées avec notre modèle. Nous avons observé le lien entre la compliance et le module de compressibilité des objets linéaires élastiques. Nous avons, aussi, détaillé l'intégration de la simulation des déplacements dans le poumon dans les protocoles, ainsi que les liens entre les données médicales et les prétraitements nécessaires à la simulation.

Enfin, nous avons expérimenté une simulation sur un modèle complexe. Ceci a permis de mettre en lumière un comportement cohérent et les difficultés qu'il reste à prendre en compte, notamment dans le choix d'expériences simples permettant de valider la precision de ce modèle pour le poumon. Pour cela nous pourrons nous fier aux enregistrements du protocole OPTIM en partant de l'état du poumon à 30% de sa capacité vitale et en essayant de simuler les déformations obtenues pour les 2 autres volumes. Cela nécessitera, avant tout, le développement de l'environnement, sous forme de contraintes de points ne pouvant se déplacer que sur des surfaces implicites (par exemple, pour les points du maillage du poumon qui sont en contact avec les côtes, le diaphragme ou le cœur).

Rajoutons qu'il sera possible en perspective de comparer le test de gonflement sur un poumon élément finis avec le même test avec notre modèle.

Conclusions et perspectives

Dans cette thèse, nous nous sommes intéressés à rechercher un modèle de simulation des déformations des poumons induits par la respiration, pour améliorer la qualité du traitement des cancers par rayons ionisants.

Dans le premier chapitre, nous avons alors montré que la recherche de simulation pour l'aide au traitement ionisant des tumeurs nécessite un modèle volumique de précision, et plus particulièrement dans le cas des cancers pulmonaires où les tumeurs ont une grande mobilité. L'étude des difficultés liées au traitement a conduit les thérapeutes à employer des solutions, telles que les systèmes de contention pour tenter de réduire les déplacements. Cependant, ces techniques de contention ont des limites, surtout quand le patient ne peut pas y avoir accès (par exemple pour cause de respiration réduite). Nous avons ainsi mis en évidence la nécessité de proposer des techniques de prévision des déplacements des organes concernés.

Le choix que nous avons fait avec les médecins a été la recherche d'un modèle de simulation des déplacements des tumeurs dans le poumon au cours de la respiration.

Pour ce faire, nous nous sommes alors intéressés plus en détails aux organes de la respiration. Nous avons ainsi étudié un modèle biomécanique, décrivant l'appareil respiratoire, ainsi que ses paramètres caractéristiques, à savoir la pression, le volume et la compliance. Dans l'état de l'art, nous avons plus particulièrement cherché les modèles de déformation des poumons, et avons pu distinguer trois catégories d'approches basées sur : des modèles géométriques, des modèles biomécaniques continus et des modèles discrets. La première catégorie de modèle permet une bonne visualisation des mouvements et, associée à l'analyse d'image, donne la possibilité de connaître les déformations à des instants respiratoires connus. Elle s'appuie sur un recalage d'images obtenues au cours d'un cycle respiratoire, et les états intermédiaires sont obtenus par interpolation. Cependant, la non reproductibilité du cycle respiratoire fait que les résultats obtenus ne sont pas entièrement fiable. La seconde catégorie recherche un modèle directement issu de la mécanique des milieux continus et essaie d'y intégrer les caractéristiques physiologiques. Cette modélisation a été utilisée pour simuler des comportements microscopiques tels que les déformations dans les alvéoles. Par contre, sa résolution nécessite un temps de calcul considérable. La troisième catégorie a surtout été utilisée pour sa rapidité et sa facilité de mise en place, pour montrer les déformations en surface du poumon, mais n'a pas intégré explicitement les caractéristiques physiologiques.

Ainsi, nous avons conclu que la modélisation à mettre en place doit être volumique, rapide, précise, avec une possibilité de gérer les interactions et une prise en compte explicite des paramètres physiologiques.

Dans le deuxième chapitre, nous avons ainsi cherché, plus en détails, comment construire notre modèle. À cette occasion, nous avons brièvement étudié, dans un état

de l'art, la géométrie et la reconstruction, ainsi que les différents types de maillages et les problèmes liés. Nous avons présenté les solutions de multirésolution ou d'adaptation présentes dans la littérature. Notre choix s'est fait sur un maillage volumique soit tétraédrique soit héxaédrique. Ensuite, nous avons détaillé la théorie de la mécanique des milieux continus, les caractéristiques rhéologiques permettant de décrire les matériaux, et l'impact de ces paramètres sur les lois de comportement d'objets linéairement élastiques homogènes et isotropes. Nous avons alors étudié les modèles de simulation paramétrables. Dans cet état de l'art sont aparus deux choix possibles : les systèmes masses-ressorts et des modèles continus. L'étude de ces deux possbilités nous a amené à la conclusion que, bien que les modèles continus sont précis et prennent directement en compte les paramètres rhéologiques *a fortiori* les paramètres physiologiques et biomécaniques, les masses-ressorts permettent des calculs plus rapides et une prise en compte plus facile des conditions limites lors de l'interaction de plusieurs objets déformables.

D'après l'état de l'art, l'approche de Van Gelder [88], permettait l'intégration directe des paramètres et des caractéristiques de la mécanique pour une simulation rapide et réaliste. Dans un premier temps, nous avons tout naturellement choisi cette approche.

Dans le chapitre 3, nous avons fait une étude approfondie de ce modèle. Malheureusement, bien que très largement cité dans la littérature, ce modèle s'est avéré erroné et ne permettait pas de conserver avec précision les paramètres rhéologiques. Nous avons donc cherché une autre solution en nous appuyant sur une étude lagrangienne en petits déplacements. Nous avons, ainsi pu démontrer qu'il n'y avait pas de solution générale portée par les systèmes masses-ressorts seuls, et qu'il était nécessaire, pour conserver cisaillement, module de Young et coefficient de Poisson, d'appliquer des forces de correction. Nous avons ensuite déterminé les limites en précision de nos modèles, en 2D comme en 3D. Nous avons ensuite, utilisé notre modèle pour simuler des petites déformations. Nous avons constaté une conservation des caractéristiques des milieux élastiques linéaires homogènes isotropes dont la marge d'erreur est inférieure à 5% pour des petites déformations (moins de 20%).

Notre principale contribution a été, ainsi, de paramétrer un système masses-ressorts par le module de Young, le coefficient de Poisson avec la conservation de ces caractéristiques, et des caractéristiques de cisaillement et de compressibilité.

Dans le chapitre 4, nous avons étudié la dynamique de notre modèle pour mettre en évidence les phénomènes de viscosité s'exprimant en dynamique et pour choisir un modèle biomécanique de viscosité. Nous avons aussi défini les réactions du modèle aux applications avec des contraintes de points fixes et de déplacements.

Nous avons aussi employé notre modèle dans la simulation du mouvement pulmonaire. À cette occasion, nous avons présenté les projets OPTIM et RESPI2000 dans lesquels nos travaux se situent. Nous avons montré comment utiliser les données médicales à notre disposition pour construire un modèle de poumon paramétré. Pour approximer les paramètres d'élasticité, nous avons établi un lien entre le paramètre de compliance et les paramètres rhéologiques intégrés dans notre modèle. L'utilisation de celui-ci pour simuler la respiration d'un poumon, en l'état actuel, est envisageable, pour une respiration spontannée si on ajoute l'environnement. Nous savons comment relier la compliance au coefficient de compressibilité avec des hypothèses de linéarité,

et nous avons mis en évidence la mécanique du poumon dans une étude préliminaire.

Perspectives

Nous savons comment obtenir la géométrie des structures anatomiques du patient par l'imagerie. Nous nous sommes intéressés au développement de simulation quasi-statique qui aparaissait comme le seul moyen d'obtenir la reproductibilité de la courbe de compliance. Le traitement s'effectue, d'ailleurs quand cela est possible sur cette hypothèse de reproductibilité, ainsi que dans l'hypothèse de reproductibilité du volume en statique. Cependant cette hypothèse n'est pas toujours valable.

Nous cherchons donc un modèle dynamique. La dynamique, ou la recherche des déplacements internes par pas de respiration, est propre à chaque patient, c'est pour cela que nous nous sommes intéressés à des modèles biomécaniques, personalisables.

Nous avons choisi comme état initiale, l'état à l'équilibre mécanique qui se situe à 30% de la capacité vitale. La géométrie de l'état initial est ainsi donnée par les scanners acquis à ce volume. Comme indiqué dans le chapitre 4, nous proposons alors de simuler les autres états, en augmentant les pressions suivant le volume souhaité.

Rajoutons que la compliance des poumons change au cours de la respiration, dans le cas d'une mesure dynamique, et que nous avons développé un modèle qui conserve les caractéristiques pour la statique. Une solution simple consisterait à modifier au cours de la simulation ce paramètre suivant des palliers prédéfinis.

De plus, nous aurons à rajouter les contraintes de glissement et de frottement visqueux entre organes pour le contact avec les organes influançant la dynamique du poumon (côtes, cœur, diaphragme, ...). Les phénomènes de glissement de la plèvre le long de la cavité thoracique devraient être envisagés par l'adaptation des modèles de cage thoracique et de diaphragme tels que décrits par Promayon [152] et Zordan [204]. Ces phénomènes de glissement ne devrait pas être trop complexe à implanter.

Cela met en jeu la simulation des déplacements du diaphragme, de la cage thoracique et l'élasticité des poumons. C'est ce qu'a commencé d'étudier en continu, Anne-Laure Didier qui est actuellement en première année de thèse dans notre groupe de travail, au LIRIS.

Ainsi, l'utilisation d'un tel modèle pour la radiothérapie conformationnelle consistera à simuler les déformations dans le poumon suivant le volume respiratoire, les informations issues des acquisitions externes, et suivant différents scénari de respiration du patient, et à indexer ces différentes possibilités. Cela permettra d'appliquer un « *treatment planning 4D* » pour observer les meilleurs instants respiratoires suivant l'historique respiratoire.

Ainsi, la validation de nos modèles devrait pouvoir se faire par comparaison des simulations des déplacements obtenus suivant le volume d'air imposé par rapport aux scanners de 3 états volumiques pris par patient. Cela consistera à simuler à partir de l'état le plus proche de l'état d'équilibre transpulmonaire les deux autres états en appliquant la pression correspondante à la différence de volume à atteindre d'après la loi de compliance. Ensuite, après recalage rigide du résultat de l'état réel, on devrait pouvoir effectuer une différence voxelique qui permettra de mesurer l'erreur de la

simulation.

Comme nous souhaitions avoir une information sur les déformations internes du poumon, il nous a semblé important de conserver tous les voxels. Cela amène à un volume énorme d'information avec, dans notre cas un accroissement lié au fait que le modèle est plus précis pour une géométrie cubique.

Plusieurs études sont alors à envisager.

La première provient de l'observation que le poumon subit des grandes déformations, et que le nombre de voxels de deux acquisitions scanners, de même résolution, décrivant le même poumon, pour deux instants volumiques différents, peut subir une forte variation. Aussi l'idée serait de remailler le modèle au cours de la simulation.

Dans le même ordre d'idée, une grande augmentation du volume ou les grandes déformations de quelques éléments peut amener à des artefacts importants. De ce fait, il semble important de pouvoir caractériser les grands déplacements dans notre modèle et d'obtenir une multirésolution, localement, suivant les éléments les plus déformés. Cet ajout nécessitera une étude approfondie sur le pas de temps nécessaire à la simulation, sur la dynamique interne, ainsi que sur l'extension de notre modèle à une géométrie non parallélélipipédique.

Il serait, donc nécessaire d'étendre ce modèle en d'autres géométries (tétraédrique par exemple). Cela pourrait s'effectuer à la manière des FFD, en utilisant notre modèle comme cube de contrôle de l'objet et en décrivant l'objet par interpolation linéaire des points des parallélépipèdes le composant. De ce fait, par linéarité, la dynamique de l'élément parallélépipédique serait la dynamique de l'élément qu'il décrit.

Nous devrons encore faire une étude pour intégrer les grandes déformations en s'inspirant de l'étude de Picinbono par exemple qui introduit de l'élasticité non linéaire, avec une contrainte d'incompressibilité.

Nous pouvons encore rajouter que notre simulation reste encore lente et qu'une étude de parallélisation serait nécessaire avec l'application d'un modèle d'intégration implicite permettant des grands pas de temps, du type Euler implicite.

Enfin, notons que nous souhaitons étendre l'utilisation de notre modèle dans d'autres applications, telles que dans le projet de simulateur d'accouchement. Dans ce projet, il serait nécessaire de reproduire de manière réaliste le comportement des organes humains lors de l'accouchement (ventre de la mère, fœtus), ainsi que les contacts produits avec l'utilisation d'éventuels outils utilisés lors de l'accouchement (forceps, ventouses). Notre modèle pourrait, par l'intégration des paramètres rhéologiques des différentes structures en interaction être utilisé pour simuler les déformations encourues lors de l'accouchement.

Bibliographie

[1] « *Code aster* ». http ://www.code-aster.org. 71

[2] « La simulation numérique ». *la Recherche*, 380, November 2004. 1

[3] E. Agostini and R.E. Hyatt. « *Handbook of physiology* », Chapitre Static behavior of the respiratory system, pages 113–130. American Physiological Society, 1986. vii, 25

[4] A. Amer, J. Sykes and C. Moore. « Imaging Panel Skew Correction and Autofocusing in Radiotherapy Cone Beam Imaging ». In *8th International Conference on Information Visualisation (IV04)*, pages 92–97, 2004. 15

[5] M. Amrani. « *Modelisation et simulation des objets déformables* ». PhD thesis, Université Claude Bernard Lyon 1, 2002. vii, 6, 36

[6] M. Amrani, F. Jaillet and B. Shariat. « Simulation of Deformable Organs With a Hybrid Approach ». *Revue internationnale de CFAO et d'infographie*, pages 213–242, September 2001. 36

[7] A. Aubel and D. Thalmann. « Realistic Deformation of Human Body Shapes ». In *Proceedings Computer Animation and Simulation '00*, pages 125–135, 2000. citeseer.ist.psu.edu/aubel00realistic.html. 65

[8] A. Aurengo, T. Petitclerc and F. Grémy. « *Biophysique* », Chapitre 27 : Radiothérapie et Curiethérapie, pages 466–475. collection PCEM. Medecine science Flammarion, 1997. 5

[9] H. Bachofen and J. Hilderbrandt. « Area Analysis of Pressure-volume hysteresis in mammalian lung ». *J. Appl. Physiol.*, 30 :493–497, 1971. 26

[10] E. Bardinet, L.D. Cohen and N. Ayache. « Superquadrics and free-form deformations : a global model to fit and track 3D medical data ». In Nicholas Ayache, editor, *Computer Vision, Virtual Reality and Robotics in Medicine*. Springer-Verlag, 1995. http ://citeseer.ist.psu.edu/66063.html. 43

[11] E.A. Barnes, B.R. Murray, D.M. Robinson, L.J. Underwood, J. Hanson and W.H. Roa. « Dosimetric evaluation of lung tumor immobilization using breath hold at deep inspiration ». *Int. J. Radiation Oncology Biol. Phys.*, 50(4) :1091–1098, 2001. 16

[12] A.H. Barr. « Superquadrics and Angle-Preserving Transformations ». *IEEE Computer Graphics and Applications*, 1(1) :11–23, January 1981. 43

[13] A.H. Barr. « Global and local deformations of solid primitives ». *Proceedings of SIGGRAPH'84, Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series*, 18(3) :21–30, July 1984. 43

[14] R.H. Bartels, J.C. Beatty and B.A. Barsky. *An Introduction to Splines for Use in Computer Graphics and Geometric Modelling.* Morgan Kaufman, 1987. aussi publié en France dans B-Spline, Mathématique et CAO, volume 6 et Béta-Spline, Mathématique et CAO, volume 7, Hermès(1988) traduits par Pierre Bézier. 42

[15] C. Basdogan, S. De, J. Kim, M. Muniyandi, H. Kim and M.A. Srinivasan. « Haptics in minimally invasive surgical simulation and training ». *IEEE Computer Graphics and Applications (special issue on Haptic Rendering Beyond Visual Computer)*, 24(2) :56–64, 2004. http ://network.ku.edu.tr/ cbasdogan/publications02.html. 51

[16] C. Basdogan, C. Hao Ho and M.A. Srinivasan. « Simulation of Tissue Cutting and Bleeding for Laparoscopic Surgery Using Auxiliary Surfaces ». *Proceedings of the Medicine Meets Virtual Reality(MMVR'7) Conference*, pages 38–44, January 1999. http ://network.ku.edu.tr/ cbasdogan/publications02.html. 51

[17] V. Baudet, F. Jaillet and B. Shariat. « ADEMO rapport année 2 : sous-partie thématique I.2 ». Technical Report, Commission Régionale, January 2002. 148

[18] V. Baudet, F. Jaillet and B. Shariat. « L'imagerie médicale ou comment observer le vivant par transparence ». Poster dans 7ème e2phi, September 2002. 3

[19] V. Baudet, F. Jaillet and B. Shariat. « ADEMO rapport final : sous-partie thématique I.2 ». Technical Report, Commission Régionale, January 2003. 148

[20] V. Baudet, F. Jaillet and B. Shariat. « Fitting a 3D particle system to a non-dense dataset in medical application ». *Journal for geometry and graphics*, 7(1) :65–73, 2003. 148

[21] V. Baudet, P.F. Villard, M. Beuve, F. Jaillet and B. Shariat. « Towards accurate tumours tracking in lungs ». In IEEE, editor, *2003 IEEE Conference on Information Visualization*, pages 338–343, London, UK, July 2003. 149

[22] S.E. Benzley, E. Perry, K. Merkley, B. Clark and G. Sjaardama. « A comparison of all hexagonal and all tetrahedral finite element meshes for elastic and elasto-platic analysis ». *Proceedings, 4th International Meshing Roundtable*, pages 179–191, 1995. 46

[23] R.A. Bergman, A.K. Afifi, J.J. Jew and P.C. Reimann. « Atlas of Human Anatomy in Cross Section ». The Virtual Hospital (university of Iowa), http ://www.vh.org/adult/provider/anatomy/HumanAnatomy/, July 2004. (first published in 1995). 18

[24] M. Bern and P. Plassmann. « *Handbook of Computational Geometry* », Chapitre Chapter 6 : Mesh Generation. Elsevier Science, 1999. http ://www2.parc.com/csl/members/bern/vita.html. 45

[25] G. Bianchi, B. Solenthaler, G. Székely and M. Harders. « Mesh Topology for Mass-Spring Models ». In Springer-Verlag, editor, *MICCAI 2003*, pages 50–58, Berlin, 2003. 65

[26] G. Bianchi, B. Solenthaler, G. Székely and M. Harders. « Simultaneous Topology and Stiffness Identification for Mass-Spring Models Based on FEM Reference Deformations ». In Springer-Verlag, editor, *MICCAI 2004*, pages 293–301, Berlin, 2004. 65

[27] D. Bielser, V.A. Maiwald and M.H. Gross. « Interactive Cuts Through 3-Dimensional Soft Tissue ». *Proceedings of Eurographics'99*, 18(3) :31–38, 1999. http ://graphics.ethz.ch/main.php ?Menu=5&Submenu=1. 51

[28] D. Bielser, P., M. Teschner and M.H. Gross. « A State Machine for Real-Time Cutting of Tetrahedral Meshes ». *Journal of Graphical Models, Elsevier*, 66(6) :398–417, November 2004. 51

[29] P. Bird and Y.Y. Kagan. « Plate-Tectonic Analysis of Shallow Seismic : Apparent Boundary Width, Beta, Corner Magnitude, Coupled Lithosphere Thickness, and Coupling in Seven Tectonic Settings ». *Bulletin of the Seismological Society of America*, 94(6) :2380–2399, December 2004. http ://element.ess.ucla.edu. 1

[30] E. Bittar, N. Tsingos and M.P. Gascuel. « Automatic Reconstruction of Unstructured 3D Data : Combining Meial Axis and Implicit Surfaces ». *Computer Graphics Forum*, 14(3) :457–468, 1995. 44

[31] J.F. Blinn. « A Generalization of Algebraic Surface Drawing ». *ACM Transactions on Graphics*, 1(3) :235–256, July 1982. 43

[32] J. Bloomenthal, C. Bajaj, J. Blinn, M-P Cani-Gascuel, A. Rockwood, B. Wyvill and G. Wyvill. *Introduction to Implicit Surfaces*. Morgan Kaufmann Publishers, Inc., 1997. 43

[33] V. Boldea. « *Intégration de la respiration en radiothérapie : apport du recalage déformable d'images.* ». PhD thesis, Université Lumière Lyon2, 2006. 29

[34] A. Bouchet and J. Cuilleret. *Anatomie - topographique, descriptive et fonctionnelle - le thorax - première et deuxième partie*. simep éditions, 1974. 18

[35] D. Bourguignon. « *Interactive Animation and Modeling by Drawing - Pedagogical Applications in Medicine* ». PhD thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble, 2003. 65

[36] D. Bourguignon and M.P. Cani. « Controlling Anisotropy in Mass-Spring Systems ». *Proceedings of Computer Animation and Simulation'00*, pages 113–123, 2000. 48

[37] P. Bourke. « Polygonising a Scalar Field Using Tetrahedrons ». *http ://astronomy.swin.edu.au/ pbourke/modelling/polytetra/*, June 1997. 53

[38] M. Bro-Nielsen and S. Cotin. « Real-Time Volumetric Deformable Models for Surgery Simulation Using Finite Elements and Condensation ». In *Proceedings of Eurographics*, volume 15(3), pages 57–66, 1997. 3

[39] C. Bruyns and M. Ottensmeyer. « Measurements of soft-tissue mechanical properties to support development of a physically based virtual anima model ». In *MICCAI 2002*, pages 282–289, 2002. 66

[40] P. Bézier. *Courbes et surfaces*, volume 4. Mathématique et CAO, hermès, 2ème édition edition, 1987. 42

[41] S. Capell, S. Green, B. Curless, T. Duchamp and Z. Popovic. « A Multi-resolution Framework for Dynamic Deformations ». *ACM Siggraph on Computer Animation*, pages 41–48, July 2002. 51

[42] B. Piquet Carneiro, C.T. Silva and A.E. Kaufmann. « Tetra-Cubes : An algorithm to generate 3D isosurfaces based upon tetrahedra ». *Proceedings of SIBGRAPHI'96*, 1996. http ://mirror.impa.br/sibgraphi96. 53

[43] F. Boux De Casson and C. Laugier. « Simulating 2D Tearing Phenomena for Interactive Medical Surgery Simulators ». *Proceeding of Computer Animation*, pages 9–14, 2000. 51

[44] J.E. Chadwick, D.R. Haumann and R.E. Parent. « Layered construction for deformation animated characters ». *Computer Graphics Siggraph'89*, 23(3) :243,252, 1989. 65

[45] D.T. Chen and D. Zeltzer. « Pump it up : Computer animation of a biomechanically based model of muscle using the finite element method ». *Proceedings of SIGGRAPH 92*, pages 89–98, 1992. 37

[46] P.C.M. Cheung, K.E. Sixel, R. Tirona and Y.C. Ung. « Reproductibility of Lung Tumor Position and Reduction of Lung Mass within the Planning Target Volume Using Active Breathing Control (ABC) ». *Int. J. Radiation Oncology Biol. Phys.*, 57(5) :1437–1442, 2003. 17

[47] L. Chevalier. *Mécanique des systèmes et des milieux déformables.* ellipse, 1996. 53, 55

[48] L. Chevalier, F. Jaillet and A. Baskurt. « Segmentation and Superquadric Modelling of Object 3D ». *Proceedings of WSCG03*, 11(1), February 2003. http ://bat710.univ-lyon1.fr/~fjaillet/PAPERS/WSCG03.pdf. 43

[49] K.S. Choi, H. Sun and P.A. Heng. « An efficient and scalable deformable model for virtual reality-based medical applications ». *Artificial intelligence in medicine*, 32 :51–69, 2004. 152

[50] T.J. Choi. « Generating Optimal Computational Grids : Overview and Review ». In *Computational Geometry*, November 1997. http ://www.me.cmu.edu/faculty1/shimada/cg97/taek/. 45

[51] Global Lung Cancer Coalition. http ://www.lungcancercoalition.org. 9

[52] G. Coffignal. « *Mécanique non-linéaire et éléments finis* ». ENSAM Paris, LMSP, ENSAM, 151 Bd. de l'Hôpital, 75013 Paris FRANCE, October 2001. 53, 55, 60

[53] I. Cohen and L. Cohen. « A hybrid hyperquadric model for 2-D and 3-D data fitting ». *Proceedings of the 12th IEEE International Conference on Pattern Recognition (ICPR'94)*, pages 403–405, 1994. http ://www.ceremade.dauphine.fr/ cohen/mypapers/IsaacRR-2188.ps.gz. 43

[54] J. Coirier. *Aide mémoire Mécanique des milieux continus.* Dunod, 2001. 55

[55] S. Coquillart. « Extended Free Form Deformation : A sculpturing tool for 3D geometric modeling ». *Proceeding of Siggraph'90*, 22(2) :187–196, August 1990. 43

[56] S. Coquillart and P. Jancène. « Animated free-form deformation : An interactive animation technique ». *SIGGRAPH'91 Proceedings*, 24(4) :23–26, July 1991. 43

[57] S. Cotin, H. Delingette and N. Ayache. « Real Time Volumetric Models for Surgery Simulation ». *Proceedings of the Visualization in Biomedical Computing (VBC 4), Lecture Notes in Computer Science*, 1131 :535–540, 1996. 62

[58] S. Cotin, H. Delingette and N. Ayache. « Efficient linear elastic models of soft tissues for real-time surgery simulation ». *Proceedings of the Medecine Meets Virtual Reality (MMVR 7)*, 62 :100–101, 1999. 62

[59] B. Couteau, Y. Payan and S. Lavallée. « The mesh-maching algorithm : an automatic 3D mesh generator for finite elementstructures ». *Journal of Biomechanics*, 33(8) :1005–1009, August 2000. 52

[60] B. Crespin and D. Peri. « Reconstruction of Variational Implicit Surfaces from Parallel Contours for Medical Imaging ». *VMV (Vision Modeling and Visualization)*, pages 175–182, 2003. 44

[61] S.E. Dahms, H.J. Piechota, R. Dahiya, T.F. Lue and E.A. Tanagho. « Composition and biomechanical properties of the bladder acelullar matrix graft : comparative analysis in rat, pig and human ». *British Journal of Urology*, 82 :411–419, 1998. 152

[62] E. D'Angelo, E. Calderini, G. Torri, F.M. Robatto, D. Bono and J. Milic-Emili. « Respiratory mechanics in anesthetiated paralysed human : effects of flow, volume and time ». *J. Appl. Physiol.*, 67 :2556–2564, 1989. 26

[63] F. Boux de Casson. « *Simulation dynamique de corps biologiques et changements de topologie interactifs* ». PhD thesis, Université de Savoie, 2000. 65

[64] G. Debunne. « *Animation multirésolution d'objets déformables en temps réel, Application à la simulation chirurgicale* ». PhD thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble, 2000. 49

[65] G. Debunne and M.P. Cani. « Animation multirésolution intéractive d'objets déformables ». *Eurographics Workshop on Computer Animation and Simulation'99*, pages 133–144, September 1999. 50, 51

[66] G. Debunne, M. Desbrun, M.P. Cani and A.H. Barr. « Dynamic Real-Time Deformations using Space and Time Adaptive Sampling ». In *Computer Graphics Proceedings*, Annual Conference Series. ACM Press / ACM SIGGRAPH'01, August 2001. http ://www-imagis.imag.fr/Publications/2001/DDCB01. 51

[67] D. DeCarlo, J. Kaye, D. Metaxas, J.R. Clarke, B. Webber and N. Badler. « Integrating anatomy and physiology for behavior modeling ». *Medecine meets Virtual Reality III : Interactive Technology and the New Paradigm for Healthcare*, pages 81–87, 1995. R.M. Satava, K. Morgan, H.B. Sieburg, et al eds., Amsterdam : IOS Press. 34

[68] H. Delingette, S. Cotin and N. Ayache. « A Hybrid Realistic Model Allowing Real-Time Cutting Deformations and Force Feedback for Surgery Training and Simulation ». *Computer Animation'99*, pages 70–81, 1999. 51, 63

[69] M. Desbrun and M.P. Gascuel. « Animating soft subsances with implicit surfaces ». *Proceedings of SIGGRAPH'95, Computer Graphics*, 29 :287–290, 1995. 44

[70] O. Deussen, L. Kobbelt and P. Tucke. « Using simulated annealing to obtain good nodal approximations of deformable objects ». In Springer-Verlag, editor, *Proceedings of the Sixth Eurographics Workshop on Animation and Simulation*, pages 30–43, Berlin, 1995. 65

[71] J.D. Escolar and A. Escolar. « Review - Lung hysteresis : a morphological view ». *Histology and Histopathology (Cellular and Molecular Biology)*, 19 :159–166, 2004. http ://www.hh.um.es. 25, 26

[72] E. Ferley, M.P. Cani-Gascuel and D. Attali. « Skeletal Reconstruction of Branching Shapes ». *Computer Graphics Forum*, 16(5) :283–293, 1997. 44

[73] G. Ferrigno and al.. « Three-dimensional optical analysis of chest wall motion ». *J. Appl. Physiol.*, 77(3) :1224–1231, 1994. 17

[74] A. Frankus and G.C. Lee. « A theory for distorsion studies of Lung Parenchyma based on Alveolar Membrane Properties ». *Journal of Biomechanics*, 7 :10–107, 1974. 30

[75] P.J. Frey and P.L. George. *Maillages (applications aux éléments finis)*. Hermes, 1999. 52

[76] A. Frisoni, L.F. Borelli, C. Stati, M. Bellini, C. Bianchi, E. Ruffaldi, G. Di Pietro and M. Bergamasco. « Simulation of real-time deformable soft tissues for computer assisted surgery ». *The international Journal of Medical Robotics and Computer Assisted Surgery*, 1(1) :107–113, 2004. http ://pecro.sssup.it/ antony/papers/international%20JMR2003.pdf. 64

[77] Y.C. Fung. « Stress, Deformation and Atelectasis of the Lung ». *Circulation research*, 37 :481–498, 1975. vii, 29, 30

[78] Y.C. Fung. *Selected works on biomechanics and aeroelasticity*. Singapore ; River Edge (N.J.) : World Scientific, 1997. 53

[79] F. Ganovelli, P. Cigogni, C. Montani and R. Scopigno. « A Multiresolution Model for Soft Objects supporting interactive cuts and laceration ». *Eurographics 2000*, 19(3) :271–282, 2000. 51

[80] F. Ganovelli, P. Cigogni and R. Scopigno. « Introducing Multiresolution Representation in Deformable Object Modeling ». *Proceedings of Spring Conference on Computer Graphics*, pages 149–158, 1999. 51

[81] F. Ganovelli and C. O'Sullivan. « Animating Cuts with on-the fly re-meshing ». *Short Presentations in Eurographics 2001*, pages 243–247, 2001. 51

[82] M. Garland. « Multiresolution Modeling : Survey and Future Opportunities ». *Eurographics'99*, pages 111–131, 1999. 50, 51

[83] J. Garrigues. *Eléments d'algèbre et d'analyse tensorielle à l'usage des mécaniciens*. http ://esm2.imt-mrs.fr/gar/mmc.html, September 2001. 54

[84] J. Garrigues. *Mécanique des milieux continus.* http ://esm2.imt-mrs.fr/gar/mmc.html, March 2002. 53, 55

[85] M.P. Gascuel. « An Implicit Formulation for Precise Contact Modeling between Flexible Solids ». *Computer Graphics Proceedings*, 1993. 43

[86] H. Gasser and H. Hill. « The dynamics of muscular contraction ». *Royal Society of London Proceedings*, 96 :393–437, 1924. 37

[87] A. Gefen, D. Elad and R.J. Shiner. « Analysis of stress distribution in the alveolar septa of normal and simulated emphysematic lung ». *J. of Biomechanics*, 32, April 1999. 30, 31, 41, 152

[88] A. Van Gelder. « Approximate simulation of elastic membranes by triangulated spring meshes ». *Journal of Graphics Tools*, 3(2) :21–42, 1998. 7, 65, 66, 67, 69, 160

[89] J.P. Gourret, N. Thalmann and D. Thalmann. « Simulation of object and human skin deformation in grasping task ». *Proceedings of SIGGRAPH'89*, 23(3) :21–30, July 1989. 62

[90] O. Govokhina, E. Desserée and J.M. Moreau. « Video tracking of breathing movements ». In *Surgetica*, pages 193–200, 2005. 17

[91] H. Gray and W.H. Lewis. *Anatomy of the Human Body.* Philadelphia Lee and Febiger, 1918. vii, 18, 19

[92] Q. Grimal. « *Etude dans le domaine temporel de la propagation d'ondes élastiques en milieux stratifiés : Modélisation de la réponse du thorax à un impact* ». PhD thesis, Université Paris XII, Val de Marne, 2003. 32, 152

[93] J.P. Gérard, M. Bolla, J. Balosso, J. Rémilleux, P. Pommier, P. Vuillez and al.. « Thérapie du cancer par agents physiques ». la lettre de l'ARTEB (Agence Rhône-Alpes pour le Développement des Technologies Médicales et des Biotechnologies), July 2002. Hors Série. 10

[94] J. Hanley, M.M. Debois, D. Mah, G.S. Mageras, A. Raben, K. Rosenzweig, B. Mychalczak, L.H. Schwartz, P.J. Gloeggler, W. Lutz, C.C. Ling, S.A. Leibel, Z. Fuks and G.J. Kutcher. « Deep inspiration breath-hold technique for lung tumors : the potential value of target immobilization and reduced lung density in dose escalation ». *Int. J. Radiation Oncology Biol. Phys.*, 45(3) :603–611, 1999. 16

[95] A.J. Hanson. « Hyperquadrics : Smoothly Deformable Shapes with Convex Polyhedral Bounds ». *journal of Computer Vision Graphics and Image Processing*, 44(2) :191–210, November 1988. 43

[96] R. Scott Harris, Bigatello, Hess, Pierson, Campbell and Macintyre. « Pressure-Volume Curves of the Respiratory System ». *Respiratory Care*, 50(1) :78–98, January 2005. 25, 26, 27

[97] M. Hauth, J. Gross, W. Strabber and G.F. Buess. « Soft-tissue simulation based on measured data ». *Proceedings of Medical Image Computing and Computer Aided Intervention '03*, pages 262–270, 2003. http ://www.gris.uni-tuebingen.de/publics/staff/Michael_Hauth.html. 37

[98] A. Hoffman and M. Reinhardt. « Automatic lung segmentation for accurate quantification of volumetric x-ray ct images ». *IEEE transactions on medical images*, 20(6) :490–498, 2001. 150

[99] M. Hokr and J. Mariska. « Influence of mesh geometry to numerical diffusion in upwind scheme for porous media solute transport ». *Proceedings of ALGORITMY*, pages 123–131, 2005. 45

[100] D. Hutchinson, M. Pretson and T. Hewitt. « Adaptative Refinement for Mass-Spring Simulation ». *Proceedings of Seventh Eurographics Workshop on Animation and Simulation*, pages 31–45, September 1996. 50

[101] J. Remillieux J. Rochat. *Projet ETOILE (Espace de Traitement Oncologique par Ions Légers dans le cadre Européen.* February 2002. http ://etoile.univ-lyon1.fr. 5, 13

[102] F. Jaillet. « *Contribution à la reconstruction et à l'animation d'objets déformables définis à partir de données structurées* ». PhD thesis, Université Claude Bernard Lyon 1, 1999. 6, 64

[103] D.L. James and D.K. Pai. « ARTDEFO : Accurate Real Time Deformable Objects ». *Proceedings of ACM SIGGRAPH 99 Computer Graphics*, pages 65–72, 1999. 62

[104] J. Jansson and J.S.M. Vergeest. « A discrete mechanics model for deformable bodies ». *Computer Aided Design*, 2002. 66

[105] S. Jimenez. « *Modélisation et simulation physique d'objets volumiques déformables complexes* ». PhD thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble, 1993. 64

[106] A. Joukhadar. « *Dynamic simulation and robotics application* ». PhD thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble, 1997. 48, 144

[107] J. Kaye, Jr. F.P. Primiano and D. Metaxas. « Anatomical and Physiological Simulation for Respiratory Mechanics ». *J Img Guid Surg*, 1(3) :164–171, 1995. 34, 41

[108] J. Kaye, D. Metaxas, J.R. Clarke and B. Webber. « Lung Modeling : Integrating Anatomy and Physiology ». *Anatomy and Physiology. Proc. of the First International Conference on Medical Robotics and Computer–Assisted Surgery (MRCAS-94)*, 1994. 34

[109] J. Kaye, D. Metaxas and Jr. F.P. Primiano. « Modeling Cardiopulmonary Interactions in Trauma ». *the Proc. of IMAGE 96*, June 1996. http ://www.cis.upenn.edu/ traumaid/pub.html. vii, 34, 35

[110] K. Kähler, J. Haber and H.P. Seidel. « Dynamic Refinment of Deformable Triangle Meshes for Rendering ». *Proceedings Computer Graphics International (CGI'2001)*, pages 285–290, 2001. 50

[111] R.K. Lambert and T.A. Wilson. « A model for the elastic properties of the lung and their effect on expiratory flow ». *Journal of Applied Physiology*, 34 :34–48, 1973. 30

[112] K.M. Langen and D.T.L. Jones. « Organ motion and its management ». *Int. J. Radiation Oncology Biol. Phys.*, 50(1) :265–278, 2001. 16

[113] J. Lenoir, P. Meseure, L. Grisoni and C. Chaillou. « Surgical Thread Simulation ». In *ESAIM PROCEEDINGS*, volume 12, pages 102–107, November 2002. 42

[114] La ligue contre le cancer. http ://www.ligue-cancer.net. 9

[115] W.E. Lorensen and H.E. Cline. « Marching Cubes : A Hight Resolution 3D Surface Reconstruction Algorithm ». *Computer Graphics (Proceedings of SIGGRAPH'87)*, 21(4) :163–169, 1987. 53

[116] J. Louchet, X. Provot and D. Crochemore. « Evolutionary identification of cloth animation models ». In Springer-Verlag, editor, *Proceedings of the Sixth Eurographics Workshop on Animation and Simulation*, pages 44–54, Berlin, 1995. 48, 65

[117] V. Luboz. « Algorithme de mise en correspondance : application au maillage 3D automatique de structures osseuses ». Master's thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble, Université Joseph Fourier, 2000. 45, 52

[118] A. Luciani, S. Jimenez, J. L. Florens, C. Cadoz and O. Raoult. « Computational physics : A modeler-simulator for animated physical objects ». In *Proceedings of Eurographics 91*, pages 425–436, Amsterdam, 1991. Eurographics. 65

[119] O. Etzmub M. Keckeisen and M. Hauth. « Physical Models and Numerical Solvers for Cloth Animations ». In *Simulation of Clothes for Real-time Applications*, volume Tutorial 1, pages 17–34. INRIA and the Eurographics Association, 2004. 65

[120] A. Maciel, R. Boulic and D. Thalmann. « Deformable Tissue Parameterized by Properties of Real Biological Tissue ». In *IS4TH 2003*, pages 74–87, 2003. http ://citeseer.nj.nec.com/574309.html. 66

[121] J. Mead and S. H. Loring. « Analysis of volume displacement and length changes of the diaphragm during breathing ». *Journal Appl. Physiol. : Respirat. Environ. Exercise Physiol.*, 53(3) :750–755, 1982. 33

[122] J. Mead, T. Takishima and D. Leith. « Stress distribustion in Lungs : A Model of Pulmonary Elasticity ». *Journal of Applied Physiology*, 28 :596–608, 1970. 30

[123] U. Meier, O. López, C. Monserrat, M.C. Juan and M. Alca niz. « Real-time deformable models for surgery simulation : a survey ». *Computer Methods and Programs in Biomedicine*, 77(3) :183–197, 2005. 64

[124] C. Mendoza, C. Laugier and F. Boux de Casson. « Towards a Realistic Medical Simumlator using Virtual Environments and Haptic Interaction ». *Proceedings of the International Symposium in Research Robotics*, Invited paper, 2001. 64

[125] P. Meseure. « *Modélisation de corps déformables pour la simulation d'actes chirurgicaux* ». PhD thesis, Université des Sciences et Technologies de Lille, 1997. 49

[126] P. Meseure and C. Chaillou. « Deformable Body simulation with Adaptative Subdivision and Cuttings ». In *5th Int. Conf. in Central Europe on Comp. Graphics and Visualization WSCG'97*, pages 361–370, 1997. 65

[127] B. Michoud and D. Gaillard. « Segmentation du cœur et des bronches à partir de coupes scanners ». Master's thesis, UFR d'informatique, université Claude Bernard Lyon1, 2004. 151

[128] G.S.P. Miller. « The motion dynamics of snakes and worms ». *Proceedings of Computer Graphics Siggraph'88*, 22(4) :168,178, 1988. 65

[129] Organisation mondiale de la santé. http ://www.who.int/cancer/en/. 9

[130] A. Mor. « *Progressive Cutting with Minimal New Element Creation of Soft Tissue Models for Interactive Surgical Simulation* ». PhD thesis, Robotics Institute, Carnegie Mellon University, 2001. 49

[131] M.L. Moy and S.H. Loring. « Compliance ». *Seminar in respiratory and critical care medecine*, 19(4) :349–359, 1998. 25, 26

[132] S. Muraki. « Volumetric shape description of range data using "Blobby Model" ». *Computer Graphics*, 25(4) :227–235, 1991. 44

[133] L. Porcher Nedel and D. Thalmann. « Real-time muscles deformations using mass-spring systems ». *Proceedings of Computer Graphics International*, pages 156–165, 1998. 48, 65

[134] A.M. Negredo, P. Bird, C. Sanz de Galdeano and E. Buforn. « Neotectonic modeling of the Ibero-Maghrebian region ». *Journal of Geophysical Research*, 107(B11) :ETG 10 1 – ETG 10 15, 2002. http ://element.ess.ucla.edu. 2

[135] M. Neveu, D. Faudot and B. Derdouri. « Superquadriques-B-déformables pour la reconstruction 3D ». *Techniques et Sciences Informatiques*, 14(10) :1291–1314, October 1995. 43

[136] M. Bro Nielsen. « Finite Element Modelling in Surgical Simulation ». *Proceedings of the IEEE*, 86(3) :490–503, 1998. 62

[137] H. Nishimura, M. Kawai, T. Kawata, I. Shirakawa and K. Omura. « Object modelling by distribution function and a method of image generation ». *The transaction of the institute of Electronic and Communication Engineers of Japan*, J-68D(4) :718–725, 1985. en japonais traduit en anglais par Takao Fujuwara, Advanced studies in computer aided art and design, polytectnic, UK, 1989. 43

[138] M.R. Owen and M.A. Lewis. « The Mechanics of Lung Tissue under High-Frequency Ventilation ». *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 61(5) :1731–1761, 2001. Poisson coefficient. 58

[139] C. Paloc. « *Adaptative Deformable Model (allowing Topological Modifications) for Surgical Simulation* ». PhD thesis, University of London, 2003. 50, 65, 66

[140] J. Park, D. Metaxas and A. Young. « Deformable models with parameter functions : application to heart-wall modeling ». *Proceedings of IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition CVPR*, pages 437–442, June 1994. 43

[141] J. Park, D. Metaxas, A.A. Young and L. Axel. « Deformable Models with Parameter Functions for Cardiac Motion Analysis from Tagged MRI Data ». *IEEE Transations on Medical Imagigng*, 15(3) :278–289, June 1996. ftp ://ftp.cis.upenn.edu/pub/jinah/paper-tmi96.ps.Z. 43

[142] R. Pellegrino, P.J. Sterk, J.K. Sont and V. Brusasco. « Assessing the effect of deep inhalation on airway calibre : a novel approach to lung function in bronchial asthma and COPD ». *Eur. Resp. J.*, 12 :1219–1127, 1998. 26

[143] W.M. Petroll, H. Knight and D.F. Rochester. « A model approach to assess diaphragmatic volume displacement ». *J. Appl. Physiol.*, 69(6) :2175–2182, 1990. vii, 33

[144] G. Picinbono. « *Modèles géométriques et physiques pour la simulation d'interventions chirurgicales* ». PhD thesis, université de Nice Sophia-Antipolis, February 2001. http ://www.inria.fr/rrrt/tu-0669.html. 66

[145] G. Picinbono, H. Delingette and N. Ayache. « Improving Realism of a Surgery Simulator : Linear Anisotropic Elasticity, Complex Interactions and Force Extrapolations ». *Rapport Technique de l'INRIA*, 2000. ftp ://ftp.inria.fr/INRIA/publications/dienst/RR-4018.pdf. 51

[146] G. Picinbono, H. Delingette and N. Ayache. « Non-linear anisotropic elasticity for real-time surgery simulation ». *Graphical Models*, 65(5) :305–321, 2003. 63, 132

[147] L. Piegl and W. Tiller. *The NURBS book*. Springer, 1995. 42

[148] J.C. Platt and A.H. Barr. « Constraint methods for flexible models ». *Computer Graphics*, 22(4) :279–288, 1988. 65

[149] S. Pontier. « *Reconstruction d'objets déformables à l'aide de fonctions implicites* ». PhD thesis, Université Claude Bernard Lyon 1, April 2000. 6

[150] S. Pontier, B. Shariat and D. Vandorpe. « Implicit Surface Reconstruction from 2D CT Scan Sections ». *Proceedings of the Computer Graphics International 1998, IEEE Press*, pages 583–586, June 1998. 44

[151] E. P. Primiano. « Theoretical analysis of chest wall mechanics ». *J. of Biomechanics*, 15(12) :919–931, 1982. 33, 34

[152] E. Promayon. « *Modélisation et simulation de la respiration* ». PhD thesis, Université Joseph Fourier, Grenoble, 1997. vii, xi, 23, 33, 35, 65, 161

[153] E. Promayon, P. Baconnier and C. Puech. « Physically-based deformations constrained in displacements and volume ». *In Computer Graphic Forum*, 15(3) :155–164, August 1996. Eurographics'96. 35, 41

[154] E. Promayon, P. Baconnier and C. Puech. « Physically-based model for simulating the human trunk respiration movements. ». In *CVRMed*, pages 379–388, 1997. 65

[155] X. Provot. « Deformation constraints in a mass-spring model to describe rigid cloth behavior ». In *Proceedings of Graphics Interface 95*, pages 147–154, Toronto, 1995. Canadian Human-Computer Communications Society. 48, 65

[156] H. Qin and D. Terzopoulos. « D-NURBS : A Physics-Based Geometric Design Framework ». *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 2(1) :85–96, March 1996. http ://www.cs.sunysb.edu/q̃in/research/publication.html. 42

[157] J.R. Rodarte. « Lung and chest wall mechanics ». *Heart-Lung Interaction in Health and Disease*, 42 :221–242, 1989. series Lung Biology in Health and Disease. 35

[158] K.E. Rosenzweig, J. Anley, D. Mah, G. Mageras, M. Hunt, S. Toner, C. Burman, C.C. Ling, B. Mychalczak, Z. Fuks and S.A. Leibel. « The deep inspiration breath-hold technique in the treatment of inoperable non-small-cell lung cancer ». *Int. J. Radiation Oncology Biol. Phys.*, 48(1) :81–87, 2000. 16

[159] A.P. Santhanam, C.M. Fidopiastis, F.G. Hamza-Lup, J.P. Rolland and C. Imielinska. « Physically-based Deformation of High-Resolution 3D Lung Models for Augmented Reality based Medical Visualization ». *AMI ARCS 04 Proceeding*, pages 21–31, 2004. 37

[160] D. Sarrut, S. Clippe, C. Malet, S. Miguet, C. Ginestet and C. Carrie. « Patient Setup Error Measurement Using 3D Intensity-Based Image Registration Techniques ». *Int. J. Radiation Oncology Biol. Phys.*, 56(1) :259–265, 2003. 15

[161] T.W. Sederberg and S.R. Parry. « Free-Form Deformation of Solid Geometric Models ». *Computer Graphics*, 20(4) :151–160, 1986. 43

[162] W.P. Segar, D.S. Lalush and B.M.W. Tsui. « Modeling respiratory mechanics in the MCAT and Spline-Based MCAT Phantoms ». *IEEE Transactions on Nuclear Science*, 48 :89–97, 2001. vii, 28, 41

[163] Y. Seppenwoolde and al.. « Precise and real-time measurement of 3D tumor motion in lung due to breathing and heartbeat, measured during radiotherapy ». *Int. J. Oncology Biol. Phys.*, 53(4) :822–834, 2002. 5, 16, 21

[164] G.C. Smaldone, W. Mitzner and H. Itoh. « Role of alveolar recuitement in lung inflation : influence on pressure-volume hysteresis ». *J. Appl. Physiol : Respirat. Environ. Exercise Physiol.*, 55 :1321–1322, 1983. 26

[165] G.W. Stevens, R.F. Munden, K.M. Forster, J.F. Kelly, L. Zhongxing, G. Starkschall, S. Tusker and R. Komaki. « Respiratory-driven lung tumor motion is independent of tumor size, tumor location, and pulmonary function ». *Int. J. Radiation Oncology Biol. Phys.*, 51(1) :62–68, 2001. 17

[166] H. Stöcker, F. Jundt and G. Guillaume. *Toute la physique*. Dunod, 1999. 53, 55

[167] T. Sugihara, C. J. Martin and J. Hiderbrandt. « Length-tension properties of alveolar wall in man ». *Journal of Applied Physiology*, 30 :875–878, 1971. 31, 32

[168] R. Szelisky and D. Tonnesen. « Surface Modeling with Oriented Particles ». In *Computer Graphics (SIGGRAPH'92)*, volume 26, pages 185–194, 1992. 64

[169] D. Sénéchal. Histoire des Sciences, Notes de cours (PHQ-399). Université de Sherbrooke, December 2001. 1

[170] M. H. Tawhai. « *Gas mixing : an anatomically based mathematical of the human lungs with variable flow distribution* ». PhD thesis, University of Auckland, 2001. 32

[171] D Terzopoulos and D. Metaxas. « Dynamic 3D models with local and global deformations : deformables superquadrics ». *IEEE Transactions on PAMI*, 13(7) :703–714, July 1991. 43

[172] D. Terzopoulos, J. Platt, A. Barr and K. Fleischer. « Elastically Deformable Models ». *Proceedings of Computer Graphics Siggraph'87*, 21(4) :205–214, 1987. 62

[173] D. Terzopoulos and K. Waters. « Physically-Based Facial Modelling, Analysis, and Animation ». *The Journal of Visualization and Computer Animation*, 1 :73–80, 1990. 65

[174] M. Teschner, S. Kimmerle, B. Heidelberger, G. Zachmann, L. Raghupathi, A. Fuhrmann, M.P. Cani, N. Magnenat-Thalmann, W. Strasser and P. Volino. « Collision Detections for Deformable Objects ». *State of the Art Report in Eurographics'04*, pages 119–139, 2004. 49

[175] P.M. Thomson and A.W. Toga. « Detection, visualization and animation of abnormal anatomic structure with a deformable probabilistic brain atlas based on random vector field transformations ». *Medical Image Analysis*, 1(4) :271–294, 1996. 52

[176] G. Turk, H. Quyng Dinh, J. O'Brien and G. Yngve. « Implicit Surfaces that Interpolate ». *Shape Modelling International*, pages 62–71, May 2001. 44

[177] G. Turk and J. O'Brien. « Shape Transformation Using Variational Implicit Functions ». *SIGGRAPH 99*, 33 :335–342, August 1999. 44

[178] M.J. Turner, R.W. Clough, H.Y.C. Martin and L.J. Topp. « Stiffness and deflection analysis of complex structures ». *J. Aero. Sci.*, 23 :805–823, 1956. 53

[179] D.L. Vawter, Y.C. Fung and J.B. West. « Constitutive Equation of Lung Tissue Elasticity ». *Journal of Biomechanical Engenineering*, 101 :38–45, February 1979. 29

[180] J.P. Verriest. La biomécanique éxpérimentale au service des usagers. In *les fiches de l'INRETS*, volume 16. INRETS, 2003. 3

[181] P.F. Villard, M. Beuve, V. Baudet, F. Jaillet and B. Shariat. « Lung Mesh Generation to Simulate Breathing Motion with a Finite Element Method ». In IEEE, editor, *2004 IEEE Conference on Information Visualization*, London, UK, July 2004. 6

[182] P.F. Villard, M. Beuve and B. Shariat. « An Approach to Convert 4D Geometry into a 4D CT Scan. ». In UNION Agency ed. Plzen (Czech Re-

PUBLIC), editor, *WSCG (Winter School of Computer Graphics)*, pages 163–170, 2006. ISBN 80-86943-05. 155

[183] S. VONGPHOUTHONE. « Estimation du volume des poumons ». Master's thesis, UFR d'informatique, université Claude Bernard Lyon1, 2003. 150

[184] M.E. WARD, J. W. WARD and P. T. MACKLEM. « Analysis of human chest wall motion using a two-compartment rib cage model ». *J. Appl. Physiol.*, 72(4) :1338–1347, 1992. 33

[185] J. WILHELMS and A. Van GELDER. « Anatomically Based Modelling ». In *Computer Graphics (SIGGRAPH'97 Proceedings)*, pages 173–180, 1997. 66

[186] T.A. WILSON. « A continuum analysis of a two-dimensional mechanical model of the lung parenchyma ». *Journal of Applied Physiology*, 33 :472–478, 1972. 30

[187] A. WITKIN. « Particle systems dynamics ». In *Proceedings of ACM SIGGRAPH'99 : Course Notes 36 - Physically Based Modeling*, New York, 1999. ACM Press. 65

[188] A. WITKIN and D. BARAFF. « Physically Based Modeling : Principles and Practice Differential Equation ». In *Proceedings of ACM SIGGRAPH'97 : Course Notes B2 - Physically Based Modeling*, 1997. 141

[189] A. WITKIN, D. BARAFF and M. KASS. « Physically Based Modeling ». In *Proceedings of ACM SIGGRAPH'99*, New York, 1999. ACM Press. 141

[190] J.W. WONG and AL.. « The use of active breathing control (ABC) to reduce margin for breathing motion ». *Int. J. Radiation Oncology Biol. Phys.*, 44(4) :911–919, 1999. 17

[191] X. WU, M.S. DOWNES, T. GOKTEKIN and F. TENDICK. « Adaptive Nonlinear Finite Elements for Deformable Body Simulation Using Dynamic Progressive Meshes ». *Eurographics 2001*, 20(3) :349–358, 2001. 51

[192] B. WYVILL, E. GALIN and A. GUY. « Extending the CSG Tree. Warping, Blending and Boolean Operations in an Implicit Surface Modeling System ». *Computer Graphics Forum*, 1999. 44

[193] B. WYVILL and G. WYVILL. « Field functions for implicit surfaces ». *New Trends in Computer Graphics Proceedings (Proceedings of CG International'88)*, 1988. 44

[194] G. WYVILL, C. MCPHEETERS and B. WYVILL. « Data structure for soft objects ». *The Visual Computer*, 1986. 43

[195] G. WYVILL, G. Mc PHEETERS and B. WYVILL. « Animating soft objects ». *The Visual Computer*, 1986. 44

[196] K.H. YANG and K.H. WANG. « Finite Element Modeling of the Human Thorax ». *The Second Visible Human Project Conference*, 1998. 28

[197] J.C. YERNNAULT. « Physiologie respiratoire ». *Pneumologie*, A-70(6-000) :14, 1999. 18

[198] F. ZAJAC. « Muscle and tendon : Properties, models, scaling, and application to biomechanics and motor control ». *CRC Critical reviews in biomedical engineering*, 17 :359–411, 1989. 37

[199] F. Zara. « *Algorithmes parallèles de simulation physique pour la synthèse d'images : application à l'animation de textiles* ». PhD thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble, December 2003. 144, 145

[200] M. Zhang and H. Qin. « Hierarchical D-NURBS Surfaces and Their Physics-based Sculpting ». *Proceedings of International Conference on Shape Modelling and Applications (SMI 2001)*, May 2001. http ://www.cs.sunysb.edu/q̃in/research/publication.html. 42

[201] Z. Zhuang, C. Kleinstreuer and C.S. Kim. « Effects of curved inlet tubes on air flow and particle deposition in bifurcating lungs models ». *Journal of Biomechanics*, 34 :659–669, 2001. 32

[202] E. Zindy, C. Moore, D. Burton and M. Lalor. « Morphological Definition of Anatomic Shapes using Minimal Datasets ». *IEEE IV*, pages 366–370, 2000. 6

[203] O.C. Zinkiewicz. *La méthode des éléments finis.* ediscience, 1973. 53

[204] V.B. Zordan, B. Celly, B. Chiu and P.C. DiLorenzo. « Breathe Easy : Model and control of simulated respiratory for animation ». *Eurographics/ACM Siggraph Symposium on Computer Animation*, pages 29–37, 2004. vii, 36, 37, 41, 161

Annexes

A. Rappels fondamentaux de mécanique

Nous présentons les notations utilisées. Le modéle géométrique discret consiste à avoir un ensemble de points reliés entre eux. Mécaniquement, chaque point va être caractérisé par différentes valeurs physiques que sont :

- sa masse (M) ;
- sa position (P) ;
- son vecteur déplacement $\overrightarrow{U}$;
- son vecteur vitesse $\overrightarrow{V} = \frac{\partial \overrightarrow{U}}{\partial t}$;
- son vecteur accélération $\overrightarrow{\Gamma} = \frac{\partial \overrightarrow{V}}{\partial t}$;
- les forces extérieurs qui s'appliquent sur lui $\overrightarrow{F_{ex_i}}$;
- son énergie potentielle $E_p = -\int_P^{P+dP} \sum_i F_{ex_i} dP$;
- son énergie cinétique $E_c = \frac{1}{2} M V^2$;
- son énergie mécanique totale $E_m = E_c + E_p$.

Ainsi, modéliser un objet en discret consiste à savoir *(i)* comment relier physiquement les points entre eux de façon à ce que le comportement du matériau soit bien suivi, *(ii)* comment lui appliquer les forces externes.

A.1. Forces

Sous l'action de *contraintes* (forces externes ou action propres au matériau), un corps rigide réagi en se déformant grâce aux forces internes reliant ses points. On peut définir la position initiale de chaque point à l'intérieur de ce corps par son vecteur position P_0. Lorsque le corps est déformé, chacun de ses points se retrouve à une position différente P. Le déplacement correspondant est alors le vecteur amenant une particule de son état au repos à son nouvel état : $\overrightarrow{U}(P) = P - P_0 = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}$

A.2. Lois élémentaires

Première loi de Newton (loi d'inertie) Dans certains référentiels, appelés référentiels Galiléens, si la somme des forces extérieures appliquées à un solide est nulle alors le centre d'inertie de ce solide est soit au repos, soit en mouvement rectiligne

uniforme, et réciproquement. $\sum \overrightarrow{F_{ex}} = 0 \leftrightarrow \overrightarrow{V_G}$ reste constant en direction, sens et norme

Deuxième loi de Newton (loi fondamentale de la dynamique) Dans un référentiel Galiléen, la somme des forces extérieures appliquées à un solide est égale au produit de la masse M du solide par l'accélération de son centre d'inertie :

$$M.\overrightarrow{\Gamma} = \sum_{i=0}^{n} \overrightarrow{F_{i\to j}} \tag{A.1}$$

Troisième loi de Newton (loi d'interaction) Les forces sont réciproques :

$$\overrightarrow{F_{j\to i}} = -\overrightarrow{F_{i\to j}} \tag{A.2}$$

Conservation de l'énergie dans un système clos Dans un système fermé, tout mouvement ou application de forces se fait avec conservation de l'énergie :

$$\frac{\partial E_m}{\partial t} = 0 \tag{A.3}$$

Principe des travaux virtuels (de D'Alambert) La variation de l'énergie potentielle de F_i appliquée en P_i, par rapport au temps est appelée le travail de cette force. Dans un système en équilibre, la variation de l'énergie cinétique est nulle. Dans ce cas le théorème des travaux virtuels s'applique. La somme algébrique des travaux virtuels des forces extérieures W_{ext} et des travaux virtuels W_{int} est nulle :

$$W_{int} + W_{ext} = 0 \tag{A.4}$$

A.3. Énergie potentielles

On dit qu'un champ de forces f dérive d'un potentiel s'il existe une fonction U telle qu'en chaque point $f = -gradU$. La fonction U est appelée potentiel ou énergie potentielle du point dans le champ.

Ainsi, une force engendrée par un ressort de raideur k_c déformé de δ dérive d'une énergie potentielle définie par :

$$E_p = \frac{1}{2} k_c \delta^2 \tag{A.5}$$

L'énergie potentielle d'une force de potentiel f imposée qui engendre un déplacement de η dérive d'une énergie potentielle :

$$E_p = -f\eta \tag{A.6}$$

B. Détails des calculs

B.1. Démonstration détaillée de l'erreur du modèle de Van Gelder

Nous nous plaçons dans un rectangle de dimensions $l_0 \times h_0$ triangulé de manière symétrique étiré avec la force F de η suivant sa hauteur, ce qui engendre une déformation de 2δ suivant les directions orthogonales. Avant étirement, l'aire des triangles est la même et vaut :

$$A = 1/4\, l_0 h_0$$

La demi-diagonale du rectangle se trouve directement par Pythagore :

$$d_0 = 1/2 \sqrt{{l_0}^2 + {h_0}^2}$$

D'après la définition des raideurs donnée par Allen Van Gelder (éq. 3.2 p. 70), on trouve que les 2 ressorts suivant le côté de dimension h_0 ont une raideur K_2 qui est dépendante des dimensions d'un seul triangle :

$$K_2 = 1/4 \frac{\left({h_0}^2 \nu - {l_0}^2\right) E}{\left(-1 + \nu^2\right) l_0 h_0}$$

De la même façon pour les 2 ressorts de raideur K_1 portés par le côté de dimension l_0 :

$$K_1 = 1/4 \frac{h_0 E}{l_0 \left(1 + \nu\right)} + 1/2 \frac{E\nu \left(-1/2\, {l_0}^2 + 1/2\, {h_0}^2\right)}{\left(1 - \nu^2\right) l_0 h_0}$$

En revanche, les raideurs des ressorts portés par les demi-diagonales sont dépendantes de deux triangles connexes :

$$K_3 = 2 \frac{E l_0 h_0}{\left(1 + \nu\right)\left({l_0}^2 + {h_0}^2\right)} + 1/2 \frac{E\nu \left({l_0}^2 + {h_0}^2\right)}{\left(1 - \nu^2\right) l_0 h_0}$$

Les énergies potentielles associées à ces raideurs sont alors VK_i pour chaque raideur K_i déformée de dl_i, avec $i \in \{1, 2, 3\}$:

$$VK_i = 1/2 K_i\, dl_i^2$$

Soit, pour les raideurs K_1, compressée de 2δ, et K_2, étirée de η :

$$\begin{aligned} VK_2 &= 1/8\,\frac{\left({h_0}^2\nu - {l_0}^2\right)E\eta^2}{\left(-1+\nu^2\right)l_0h_0} \\ VK_1 &= 2\left(1/4\,\frac{Eh_0}{l_0\left(1+\nu\right)} + 1/2\,\frac{E\nu\,\left(-1/2\,{l_0}^2 + 1/2\,{h_0}^2\right)}{\left(1-\nu^2\right)l_0h_0}\right)\delta^2 \end{aligned}$$

Le potentiel associé à la diagonale est dépendant des déformations (Δd) de cette diagonale :

$$\Delta d = 1/2\,\sqrt{{l_0}^2 - 4\,l_0\delta + 4\,\delta^2 + {h_0}^2 + 2\,h_0\eta + \eta^2} - 1/2\,\sqrt{{l_0}^2 + {h_0}^2}$$

Le potentiel associé à la diagonale est alors, en se plaçant pour de petits déplacements η et δ, par développement limité d'ordre 2, en ces 2 déplacements :

$$VK_3 = -1/16\,\frac{\left({h_0}^2\eta^2 - 4\,l_0h_0\delta\,\eta + 4\,{l_0}^2\delta^2\right)\left(-2\,{l_0}^2{h_0}^2\nu + {l_0}^4\nu + {h_0}^4\nu + 4\,{l_0}^2{h_0}^2\right)E}{h_0l_0\left(-1+\nu^2\right)\left({l_0}^2 + {h_0}^2\right)^2} + O\left(\eta^2, \delta^2\right)$$

Le Lagrangien associé à l'expérience de traction peut se déduire ainsi, pour de petits déplacements, et étant donné que l'on a 2 actions des raideurs K_1, 2 des raideurs K_2 et 4 des ressorts de raideurs K_3 :

$$\begin{aligned} L &= F\eta - 2VK_1 - 2VK_2 - 4VK_3 \\ &= F\eta - 4\left(1/4\,\frac{Eh_0}{l_0\left(1+\nu\right)} + 1/2\,\frac{E\nu\,\left(-1/2\,{l_0}^2 + 1/2\,{h_0}^2\right)}{\left(1-\nu^2\right)l_0h_0}\right)\delta^2 - 1/4\,\frac{\left({h_0}^2\nu - {l_0}^2\right)E\eta^2}{\left(-1+\nu^2\right)l_0h_0} \\ &\quad +1/4\,\frac{\left({h_0}^2\eta^2 - 4\,l_0h_0\delta\,\eta + 4\,{l_0}^2\delta^2\right)\left(-2\,{l_0}^2{h_0}^2\nu + {l_0}^4\nu + {h_0}^4\nu + 4\,{l_0}^2{h_0}^2\right)E}{h_0l_0\left(-1+\nu^2\right)\left({l_0}^2 + {h_0}^2\right)^2} \end{aligned}$$

En appliquant la définition Lagrangienne des déplacements minimisant l'énergie, on doit résoudre :

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \eta} &= 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \delta} &= 0 \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \eta} &= F + 1/2\,\frac{\left(-{h_0}^2\nu + {l_0}^2\right)E\eta}{\left(-1+\nu^2\right)l_0h_0} \\ &\quad +1/4\,\frac{\left(2\,{h_0}^2\eta - 4\,l_0h_0\delta\right)\left(-2\,{l_0}^2{h_0}^2\nu + {l_0}^4\nu + {h_0}^4\nu + 4\,{l_0}^2{h_0}^2\right)E}{h_0l_0\left(-1+\nu^2\right)\left({l_0}^2 + {h_0}^2\right)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \delta} &= -8\left(1/4\,\frac{Eh_0}{l_0\,(1+\nu)}+1/2\,\frac{E\nu\,\left(-1/2\,{l_0}^2+1/2\,{h_0}^2\right)}{(1-\nu^2)\,l_0h_0}\right)\delta \\ &\quad +1/4\,\frac{\left(-4\,l_0h_0\eta+8\,{l_0}^2\delta\right)\left(-2\,{l_0}^2{h_0}^2\nu+{l_0}^4\nu+{h_0}^4\nu+4\,{l_0}^2{h_0}^2\right)E}{h_0l_0\,(-1+\nu^2)\left({l_0}^2+{h_0}^2\right)^2}\end{aligned}$$

On trouve alors les déformations dues à la force d'élongation :

$$\begin{aligned}\eta &= -2\,\frac{Fh_0\left(4\,{l_0}^4\nu^2-{l_0}^4\nu-2\,{l_0}^2{h_0}^2\nu-{h_0}^4\nu-5\,{l_0}^4-2\,{l_0}^2{h_0}^2-{h_0}^4\right)}{El_0\left({l_0}^4\nu-6\,{l_0}^2{h_0}^2\nu+{h_0}^4\nu+5\,{l_0}^4+2\,{l_0}^2{h_0}^2+5\,{h_0}^4\right)} \\ \delta &= \frac{(1+\nu)\,F\left(-2\,{l_0}^2{h_0}^2\nu+{l_0}^4\nu+{h_0}^4\nu+4\,{l_0}^2{h_0}^2\right)}{\left({l_0}^4\nu-6\,{l_0}^2{h_0}^2\nu+{h_0}^4\nu+5\,{l_0}^4+2\,{l_0}^2{h_0}^2+5\,{h_0}^4\right)E}\end{aligned}$$

Ainsi, en appliquant la définition du module de Young, on trouve que, pour ce modèle, le module de Young vaut :

$$\begin{aligned}E_{mes} &= \frac{F/l_0}{\eta/h_0} \\ &= -1/2\,\frac{\left({l_0}^4\nu-6\,{l_0}^2{h_0}^2\nu+{h_0}^4\nu+5\,{l_0}^4+2\,{l_0}^2{h_0}^2+5\,{h_0}^4\right)E}{4\,{l_0}^4\nu^2-{l_0}^4\nu-2\,{l_0}^2{h_0}^2\nu-{h_0}^4\nu-5\,{l_0}^4-2\,{l_0}^2{h_0}^2-{h_0}^4}\end{aligned}$$

De la même façon, en mesurant le coefficient de Poisson :

$$\begin{aligned}\nu_{mes} &= \frac{2\delta/l_0}{\eta/h_0} \\ &= -\frac{-2\,{l_0}^2{h_0}^2\nu+{l_0}^4\nu+{h_0}^4\nu+4\,{l_0}^2{h_0}^2}{4\,{l_0}^4\nu-5\,{l_0}^4-2\,{l_0}^2{h_0}^2-{h_0}^4}\end{aligned}$$

Soit, dans un carré de dimension 1×1, on obtient :

$$\begin{aligned}E_{mes} &= 1/2\,\frac{E\,(\nu-3)}{\nu^2-\nu-2} \\ \nu_{mes} &= \frac{1}{(2-\nu)}\end{aligned}$$

Ainsi, le module de Young E imposé et le coefficient de Poisson ν imposé dans le modèle de Van Gelder ne sont pas identifiables aux module de Young et coefficient de Poisson de la rhéologie.

B.2. Recherche de K_2, K_1 et des forces correctrices de Lagrange pour le cas 2D.

```
> restart;
```

Démonstration qu'il n'y a pas de solutions directement portée par les raideurs pour imposer les caractéristiques module de Young, coefficient de Poisson et Cisaillement.

1- Recherche des caractéristiques en étirement

Calcul des déformations des diagonales en étirement

```
> dd:=mtaylor(sqrt((l-2*delta)^2+(h+eta)^2)-sqrt(l^2+h^2),eta=0,delta=0,2);
```

$$dd := -2\,\frac{l\delta}{\sqrt{l^2+h^2}} + \frac{h\eta}{\sqrt{l^2+h^2}}$$

Expression des énergies potentielles des ressorts

```
> vk1:=K1/2*(2*delta)^2;
```

$$vk1 := 2\,K1\,\delta^2$$

```
> vk2:=K2/2*eta^2;
```

$$vk2 := 1/2\,K2\,\eta^2$$

```
> vk3:=K3/2*dd^2;
```

$$vk3 := 1/2\,K3\,\left(-2\,\frac{l\delta}{\sqrt{l^2+h^2}} + \frac{h\eta}{\sqrt{l^2+h^2}}\right)^2$$

Lagrangien d'un étirement :

```
> L:=F*eta-2*vk1-2*vk2-2*vk3;
```

$$L := F\eta - 4\,K1\,\delta^2 - K2\,\eta^2 - K3\,\left(-2\,\frac{l\delta}{\sqrt{l^2+h^2}} + \frac{h\eta}{\sqrt{l^2+h^2}}\right)^2$$

Recherche des déplacements eta et delta minimisant le changement d'énergie :

```
> assign(solve(diff(L,eta)=0,diff(L,delta)=0,eta,delta));
> eta;
```

$$1/2\,\frac{\left(K1\,l^2+K1\,h^2+K3\,l^2\right)F}{l^2\,K2\,K1+l^2\,K2\,K3+K2\,K1\,h^2+K3\,h^2\,K1}$$

```
> delta;
```

$$1/4\,\frac{K3\,hFl}{l^2\,K2\,K1+l^2\,K2\,K3+K2\,K1\,h^2+K3\,h^2\,K1}$$

Expression du module de Young et du coefficient de Poisson dans le sens de l'étirement imposé pour le Lagrangien

```
> E1:=F*h/(eta*l);
```

$$E1 := 2\,\frac{h\left(l^2\,K2\,K1+l^2\,K2\,K3+K2\,K1\,h^2+K3\,h^2\,K1\right)}{\left(K1\,l^2+K1\,h^2+K3\,l^2\right)\quad l}$$

```
> nu1:=(2*delta*h/(l*eta));
```

$$nu1 := \frac{K3\,h^2}{K1\,l^2+K1\,h^2+K3\,l^2}$$

Écriture directe par symétrie du module de Young et coefficient de Poisson mesuré pour l'étirement symétrique

```
> E2:=eval(E1,l=h,h=l,K1=K2,K2=K1);
```

$$E2 := 2\,\frac{l\left(l^2\,K2\,K1+l^2\,K2\,K3+K2\,K1\,h^2+K3\,h^2\,K1\right)}{\left(l^2\,K2+K2\,h^2+K3\,h^2\right)\quad h}$$

```
> nu2:=eval(nu1,l=h,h=l,K1=K2,K2=K1);
```

$$nu2 := \frac{K3\,l^2}{l^2\,K2+K2\,h^2+K3\,h^2}$$

Résolution pour obtenir un comportement homogène isotrope (E1=E2 et nu1=nu2)

```
> solve(E1=E2,nu1=nu2,nu1=nu,E1=E,K1,K2,K3);
```

$$\left\{K1 = 1/2\,\frac{E\left(-h^2+\nu\,l^2\right)}{hl(-1+\nu^2)}, K2 = -1/2\,\frac{E\left(l^2-\nu\,h^2\right)}{hl(-1+\nu^2)}, K3 = -1/2\,\frac{E\nu\left(l^2+h^2\right)}{hl(-1+\nu^2)}\right\}$$

2- Vérification que la raideur trouvée en diagonale est bien la même qui permettrait de caractériser le cisaillement.

```
> restart;
```

Déformation des diagonales en cisaillement

```
> dd:=mtaylor(sqrt((l+eta)^2+h^2)-sqrt(l^2+h^2),eta=0,2);
```

$$dd := \frac{l\eta}{\sqrt{l^2+h^2}}$$

Expression des énergies potentielles de cisaillement

```
> VK3:=K3*dd^2/2;
```

$$VK3 := 1/2\,\frac{K3\,l^2\eta^2}{l^2+h^2}$$

```
> VF:=-F*eta;
```

$$VF := -F\eta$$

Lagrangien associé au cisaillement (en petits déplacements)

```
> L:=-VF-2*VK3;
```

$$L := F\eta - \frac{K3\,l^2\eta^2}{l^2+h^2}$$

Recherche des déplacements engendrant le moins de fluctuation énergétique

```
> assign(solve(diff(L,eta)=0,eta));
> eta;
```

$$1/2\,\frac{F\left(l^2+h^2\right)}{K3\,l^2}$$

Expression de la contrainte ayant amené au cisaillement

```
> tau:=F/l;
```

$$\tau := \frac{F}{l}$$

Expression de l'angle induit par le cisaillement

```
> gamma2:=eta/h;
```

$$gamma2 := 1/2\,\frac{F\left(l^2+h^2\right)}{K3\,l^2h}$$

Expression de la caractéristique de cisaillement et résolution pour obtenir la raideur imposant le cisaillement

```
> tau/gamma2;
```

$$2\,\frac{lK3\,h}{l^2+h^2}$$

```
> G:=E/(2*(1+nu));
```

$$G := \frac{E}{2+2\,\nu}$$

```
> assign(solve(G=tau/gamma2,K3));
> K3;
```

$$1/4\,\frac{E\left(l^2+h^2\right)}{(1+\nu)lh}$$

La raideur trouvée n'est pas celle trouvée en élongation, est-ce que cela a de l'influence sur les deux autres raideurs (même démonstration qu'en étirement mais en imposant K3)

```
> #K1?K2?
> unassign('eta');
> VK1:=K1*(2*delta)^2/2;
```

$$VK1 := 2\,K1\,\delta^2$$

```
> VK2:=K2*eta^2/2;
```

$$VK2 := 1/2\,K2\,\eta^2$$

```
> dd:=mtaylor(sqrt((l-2*delta)^2+(h+eta)^2)-sqrt(l^2+h^2),eta=0,delta=0,2);
```

$$dd := \frac{h\eta}{\sqrt{l^2+h^2}} - 2\,\frac{l\delta}{\sqrt{l^2+h^2}}$$

```
> VK3:=K3*dd^2/2;
```

$$VK3 := 1/8\,E\left(l^2+h^2\right)\left(\frac{h\eta}{\sqrt{l^2+h^2}} - 2\,\frac{l\delta}{\sqrt{l^2+h^2}}\right)^2 (1+\nu)^{-1}\,l^{-1}h^{-1}$$

```
> VF:=-F*eta;
```

$$VF := -F\eta$$

```
> L:=-VF-2*VK1-2*VK2-2*VK3;
```

$$L := F\eta - 4\,K1\,\delta^2 - K2\,\eta^2 - 1/4\,E\left(l^2+h^2\right)\left(\frac{h\eta}{\sqrt{l^2+h^2}} - 2\,\frac{l\delta}{\sqrt{l^2+h^2}}\right)^2 (1+\nu)^{-1}\,l^{-1}h^{-1}$$

```
> assign(solve(diff(L,eta)=0,diff(L,delta)=0,eta,delta));
> eta1=eta;
```

$$eta1 = 1/2\,\frac{(4\,K1\,h+4\,K1\,h\nu+El)Fl}{4\,K2\,lK1\,h\nu+4\,K2\,lK1\,h+Eh^2K1+K2\,l^2E}$$

```
> delta1=delta;
```

$$delta1 = 1/4\,\frac{EhFl}{4\,K2\,lK1\,h\nu+4\,K2\,lK1\,h+Eh^2K1+K2\,l^2E}$$

```
> F*h/(l*eta);
```

$$2\,\frac{h\left(4\,K2\,lK1\,h\nu+4\,K2\,lK1\,h+Eh^2K1+K2\,l^2E\right)}{l^2(4\,K1\,h+4\,K1\,h\nu+El)}$$

```
> 2*delta*h/(l*eta);
```

$$\frac{Eh^2}{l(4\,K1\,h+4\,K1\,h\nu+El)}$$

```
> solve(F*h/(l*eta)=E,nu=2*delta*h/(l*eta),K1,K2);
```

$$\left\{K2 = 1/4\,\frac{E\left(3\,\nu\,l^2-h^2+2\,l^2\right)}{lh(1+\nu)}, K1 = -1/4\,\frac{E\left(\nu\,l^2-h^2\right)}{\nu\,lh(1+\nu)}\right\}$$

On trouve une solution non symétrique, on doit trouver des raideurs suivant les côtés symétrique pour obtenir le même comportement dans 2 étirements orthogonaux :

```
> solve(E=F*h/(l*eta),E=F*l/(h*eval(eta,K1=K2,K2=K1,l=h,h=l)),nu=2*delta*h/(l*eta
```

$$\left\{\nu = 1/3, K1 = -3/16\,\frac{E\left(l^2-3\,h^2\right)}{lh}, K2 = 3/16\,\frac{E\left(-h^2+3\,l^2\right)}{lh}\right\}$$

On a une solution pour nu=1/3, or on aurait aimé avoir une solution pour nu quelconque.

C'est ce que nous cherchons dans la suite en introduisant un multiplicateur de Lagrange :

Recherche des raideurs avec apport de forces de corrections

```
> #Multiplicateurs de lagrange
> unassign('eta','delta','VK1','VK2','L','VK3','G','tau','gamma2');
> K3;
```

$$1/4\,\frac{E\left(l^2+h^2\right)}{lh(1+\nu)}$$

```
> dd:=mtaylor(sqrt((l-2*delta)^2+(h+eta)^2)-sqrt(l^2+h^2),eta=0,delta=0,2);
```

$$dd := \frac{h\eta}{\sqrt{l^2+h^2}} - 2\,\frac{l\delta}{\sqrt{l^2+h^2}}$$

```
> VK1:=1/2*K1*(2*delta)^2;
```

$$VK1 := 2\,K1\,\delta^2$$

```
> VK2:=1/2*K2*eta^2;
```

$$VK2 := 1/2\,K2\,\eta^2$$

```
> VK3:=1/2*K3*dd^2;
```

$$VK3 := 1/8\,E\left(l^2+h^2\right)\left(\frac{h\eta}{\sqrt{l^2+h^2}} - 2\,\frac{l\delta}{\sqrt{l^2+h^2}}\right)^2 l^{-1}h^{-1}\left(1+\nu\right)^{-1}$$

```
> VF:=-F*eta;
```

$$VF := -F\eta$$

Introduction d'une force correctrice :

```
> Vm:=Fm*2*delta;
```

$$Vm := 2\,Fm\,\delta$$

```
> L:=-VF-4*Vm-2*VK1-2*VK2-2*VK3;
```

$$L := F\eta - 8\,Fm\,\delta - 4\,K1\,\delta^2 - K2\,\eta^2 - 1/4\,E\left(l^2+h^2\right)\left(\frac{h\eta}{\sqrt{l^2+h^2}} - 2\,\frac{l\delta}{\sqrt{l^2+h^2}}\right)^2 l^{-1}h^{-1}\left(1+\nu\right)^{-1}$$

```
> assign(solve(diff(L,eta)=0,diff(L,delta)=0,eta,delta));
> eta;
```

$$1/2\,\frac{l(4\,K1\,hF\nu - 4\,EFm\,h + 4\,K1\,hF + ElF)}{4\,K2\,lK1\,h\nu + 4\,K2\,lK1\,h + Eh^2K1 + K2\,l^2E}$$

```
> delta;
```

$$1/4\,\frac{h(-16\,K2\,lFm - 16\,K2\,l\nu\,Fm - 4\,EFm\,h + ElF)}{4\,K2\,lK1\,h\nu + 4\,K2\,lK1\,h + Eh^2K1 + K2\,l^2E}$$

Résolution pour l'étirement dans un sens et dans le sens orthogonal (avec une force correctrice par sens (Fm et Fm2))

```
> E1:=F*h/(l*eta);
```

$$E1 := 2\,\frac{Fh\left(4\,K2\,lK1\,h\nu + 4\,K2\,lK1\,h + Eh^2K1 + K2\,l^2E\right)}{l^2(4\,K1\,hF\nu - 4\,EFm\,h + 4\,K1\,hF + ElF)}$$

```
> nu1:=(2*delta*h/(l*eta));
```

$$nu1 := \frac{h^2(-16\,K2\,lFm-16\,K2\,l\nu\,Fm-4\,EFm\,h+ElF)}{l^2(4\,K1\,hF\nu-4\,EFm\,h+4\,K1\,hF+ElF)}$$

```
> E2:=eval(E1,h=l,l=h,K1=K2,K2=K1,Fm=Fm2,F=F2);
```

$$E2 := 2\,\frac{F2\,l\left(4\,K2\,lK1\,h\nu+4\,K2\,lK1\,h+Eh^2\,K1+K2\,l^2\,E\right)}{h^2(4\,K2\,lF2\,\nu-4\,EFm2\,l+4\,K2\,lF2+EhF2)}$$

```
> nu2:=eval(nu1,h=l,l=h,K1=K2,K2=K1,Fm=Fm2,F=F2);
```

$$nu2 := \frac{l^2(-16\,K1\,hFm2-16\,K1\,h\nu\,Fm2-4\,EFm2\,l+EhF2)}{h^2(4\,K2\,lF2\,\nu-4\,EFm2\,l+4\,K2\,lF2+EhF2)}$$

Résolution

```
> assign(solve(E1=E2,nu1=nu2,E1=E,nu1=nu,K1,K2,Fm,Fm2));
> K1;
```

$$-1/4\,\frac{E\left(l^2-3\,\nu\,h^2-2\,h^2\right)}{lh(1+\nu)}$$

```
> K2;
```

$$1/4\,\frac{E\left(3\,l^2\nu-h^2+2\,l^2\right)}{lh(1+\nu)}$$

```
> K3;
```

$$1/4\,\frac{E\left(l^2+h^2\right)}{lh(1+\nu)}$$

```
> Fm;
```

$$-1/8\,\frac{(3\,\nu-1)hF}{l}$$

```
> Fm2;
```

$$-1/8\,\frac{(3\,\nu-1)F2\,l}{h}$$

On obtient bien des solutions symétriques !

C. Liste des publications

C.1. Revue internationale

[1] V. Baudet, F. Jaillet et B. Shariat, Fitting a 3D particle system to a non-dense dataset in medical application. Journal for geometry and graphics, vol. 7 , n. 1, p. 65-73, 2003.

C.2. Conférences internationales

[2] V. Baudet, F. Jaillet et B. Shariat,Fitting a 3D particle system to a non-dense dataset in medical application. 10th Conference in Geometry and Graphics, Proceedings vol. 1 pp. 258-262, Kiew Ukraine, july 2001.

[3] V. Baudet, F. Jaillet, B. Shariat, P.F. Villard, M. Beuve et al. Approach to simulate tumour displacements in lungs with mass spring system. Poster in 9th HCPBM Workshop, Octobre 2003.

[4] V. Baudet, P.F. Villard, M. Beuve, F. Jaillet et B. Shariat, Towards accurate tumours tracking in lungs. 2003 IEEE Conference on Information and Visualization, pp. 338-343, London, UK, july 2003.

[5] P. F. Villard, M. Beuve, V. Baudet, F. Jaillet et B. Shariat, Lung mesh generation to simulate breathing motion with finite element method. 2004 IEEE Conference on Information Visualisation, London, UK, july 2004.

[6] P. F. Villard, M. Beuve, B. Shariat, V. Baudet et F. Jaillet, Simulation of Lung Tumour Behaviour with Finite Element Influence of Bio-Mechanical Parameters. 2005 IEEE Conference on Information Visualisation, Greenwish, UK, july 2005.

[7] P. F. Villard, M. Beuve, B. Shariat, V. Baudet et F. Jaillet, Resolution of non-linear problems in realistic lung-inflating-simulation with Finite Element Method. Poster in 10th HCPBM Workshop, june 2005.

C.3. Conférences nationales

[8] V. Baudet F. Jaillet et B.Shariat, L'imagerie médicale ou comment observer le vivant par transparence. 7ème e2phi, Lyon septembre 2002.

[9] P. F. Villard et V. Baudet, Modélisation comportementale du poumon pour l'amélioration des traitements oncologiques. Journée recherche et des jeunes chercheurs en Imagerie Médicale. Nantes 2003, pp. 338-343.

Résumé

Les traitements curatifs des cancers par irradiation avec des rayons ionisants tels que la radiothérapie conformationnelle et l'hadronthérapie sont plannifiés avec des marges d'erreur qui prennent en compte, entre autres, les statistiques de mouvements des tumeurs.

En partenariat avec le Centre anticancéreux Léon Bérard de Lyon et dans le projet ETOILE, nous proposons de rechercher des modèles de simulations des objets déformables qui prendraient en considération, en plus de la géométrie issue directement de l'imagerie médicale, les paramètres physiologiques mesurés sur les patients afin de pouvoir garantir de meilleures marges d'erreur, dans le cas des tumeurs pulmonaires.

Dans cette thèse, nous avons choisi de modéliser les poumons avec des systèmes masses-ressorts qui sont généralement utilisés dans le monde de l'animation pour le réalisme et la rapidité. Pour rendre le système précis et directement paramétré par les données mécaniques du patient, nous nous sommes inspirés des travaux de Van Gelder qui introduit un contrôle par les caractéristiques rhéologiques d'un matériaux « 2D »linéaire élastique homogène isotrope. Cependant, après vérification et étude théorique de ce modèle, il est apparut que celui-ci bien que donnant des animations réalistes était erroné. Nous avons donc entrepris une étude lagrangienne qui nous a permis de rendre ce modèle 2D rectangulaire, puis 3D à base de brique élémentaire cubique, paramétrable. Nous avons d'autre part déterminer la robustesse de notre système à l'aide de tests d'étirement, gonflement, fléchissement et cisaillement et par comparaison à des tests effectués sur des modèles éléments finis.

Cette thèse explique ainsi comment ce modèle paramétrable a été obtenu, et comment il pourra être relié avec les données physiologiques et dans quelle précision.

Mots clés : Objets déformables, système masses-ressorts, module de Young, coefficient de Poisson, lagrangien, radiothérapie, poumon, cancer.

Abstract

Ionising treatment against cancers such as conformal radiotherapy and hadrontherapy are planified with error margins that take into account statistics of tumour motions, for instance.

With the Centre against cancers Léon Bérard de Lyon partnership and within the ETOILE project, we are looking for reducing these margins by searching deformable models that would simulate displacements occuring in lungs during a treatment. It must be personalized with the geometry obtained from CT scans of the patient and also it must be parameterized with physiological measures of the patient.

In this Ph. D. thesis, we decided to use a mass-spring system to model lungs because of its fast and physically realist deformations obtained in animation. As a starting point, we chose the model proposed by Van Gelder in order to parameterize a mass-spring system with rheological characteristics of an homogeneous, linear elastic isotrop material in 2D. However, we tested this model and prouved it was false. Hence we did a lagrangian study in order to obtain a parametric model with rectangular in 2D (cubic in 3D) elements. We also determinated the robustness by testing with stretching, inflating, shearing and bending experiments and also by comparing results with other finite element method.

Thus, in this Ph.D. thesis, we eplain how to obtain this parametric model, and how it will be linked to physiological data and in which accuracy.

Keywords : Deformable models, mass-spring system, Young Modulus, Poisson coefficient, lagrangian, radiotherapy, lung, cancer.