



HAL
open science

Couplage des mésons lourds au pion sur réseau

Gregorio Herdoiza

► **To cite this version:**

Gregorio Herdoiza. Couplage des mésons lourds au pion sur réseau. Physique mathématique [math-ph]. Université Paris Sud - Paris XI, 2004. Français. NNT: . tel-00280003

HAL Id: tel-00280003

<https://theses.hal.science/tel-00280003>

Submitted on 16 May 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ PARIS XI ORSAY

Thèse présentée
pour obtenir le grade de

DOCTEUR EN SCIENCES DE
L'UNIVERSITÉ PARIS XI ORSAY

par

GREGORIO HERDOIZA

SPECIALITÉ: PHYSIQUE THÉORIQUE

COUPLAGE DES MÉSONS LOURDS AU PION SUR RÉSEAU

Soutenue le 13 Avril 2004 devant la commission d'examen composée de:

Jean-Pierre LEROY	Directeur de thèse
Vittorio LUBICZ	
Luis OLIVER	Président du jury
Claude ROIESNEL	Rapporteur
Patrick ROUDEAU	Rapporteur

Remerciements

Je veux d'abord mentionner la chance et le plaisir que j'ai eus à travailler avec Asmaa Abada, Damir Bećirević, Philippe Boucaud, Jean-Pierre Leroy, Alain Le Yaouanc, Jacques Micheli, Olivier Pène et Josée Rodríguez-Quintero. La qualité des échanges scientifiques et humains que j'ai pu partager au sein du groupe sont devenus pour moi une sorte de référence de l'image que je me fais de la recherche.

Je remercie Dominique Schiff pour son accueil au sein du Laboratoire de Physique Théorique. J'ai aussi une grande gratitude envers l'ensemble du personnel administratif du labo pour son aide dans une quantité innombrable de situations quelquefois délicates. Je veux aussi remercier Pierre Binétruy et Yves Charon pour leur soutien dans le cadre de l'École Doctorale.

Je souhaite remercier Vittorio Lubicz, Luis Oliver, Claude Roiesnel et Patrick Roudeau pour avoir eu la gentillesse de faire partie du jury et pour l'ensemble des commentaires qu'ils ont pu me signaler à propos de ce manuscrit. Un grand merci à Jean-Pierre pour sa lecture extrêmement détaillée de ce texte et, plus généralement, pour sa totale disponibilité devant toute difficulté à surmonter. Je veux aussi remercier Chris Allton et Simon Hands.

Mon séjour au LPT a été extrêmement plaisant aussi grâce à Benoît Blossier, Olivier Deloubrière, Feliciano de Soto, Marco Maceda, Bruno Marcos, Guillaume Michel, Hervé Moutarde, Michele Pepe, Julien Serreau, Dolores Sousa, Sofiane Tafat et (bien sûr) Nicolás Wschebor. Je rajoute à cette liste d'amis tous ceux qui ont accompagné et enrichi mon séjour en France pendant ces dernières années.

Je ne peux manquer de remercier ma famille qui malgré sa perpétuelle migration n'a jamais perdu l'habitude du dialogue quotidien. Je pense en particulier à la présence et à la compagnie de Jacobo chaque fois qu'un moment doit devenir important.

Sommaire

Introduction	1
I Simuler la QCD sur un réseau	5
1 La QCD discrétisée	13
1.1 La discrétisation de l'espace-temps	13
1.2 La discrétisation des champs	14
1.3 L'invariance de jauge	15
1.4 La formulation «naïve» de la QCD sur réseau	18
1.4.1 L'action de jauge	18
1.4.2 La fixation de jauge	21
1.4.3 L'action fermionique	22
2 Les fermions de Wilson	27
2.1 Les symétries de l'action fermionique de Wilson	29
2.2 Autres propriétés des fermions de Wilson	30
3 L'étude de la QCD par des outils de physique statistique	33
3.1 L'intégrale de chemin fermionique et l'approximation «quenched»	34
3.2 L'intégrale de chemin sur les champs de jauge	37
3.3 Les simulations numériques par la méthode de Monte Carlo	37
4 Le calcul des éléments de matrices hadroniques	41
4.1 Les champs interpolants	41
4.2 Les éléments de matrices hadroniques	42
4.2.1 Les corrélateurs à deux points	42
4.2.2 Les corrélateurs à trois points	49
4.3 L'estimation des erreurs statistiques	52

5	Renormalisation et amélioration	53
5.1	La limite du continu	54
5.2	L'amélioration de l'action	56
5.3	L'amélioration et la renormalisation des opérateurs	59
5.4	Les identités de Ward	62
	Appendice	67
II	Les théories effectives des mésons lourds-légers	71
1	La théorie effective des quarks lourds	75
1.1	Construction du Lagrangien	75
1.2	Spectroscopie des hadrons lourds	79
1.3	Comment relier la HQET à la QCD	83
2	Comment combiner symétrie des quarks lourds et symétrie chirale	91
2.1	La symétrie chirale	91
2.2	Le lagrangien chiral des mésons lourds-légers	94
2.2.1	L'ordre dominant du lagrangien effectif	94
2.2.2	Les premières corrections	96
2.3	La constante de couplage \hat{g}	97
III	La phénoménologie des saveurs lourdes et le rôle des réseaux	101
1	Le mélange des saveurs	103
1.1	La matrice CKM	103
1.2	Déterminations des éléments de la matrice CKM	111
1.2.1	Déterminations de $ V_{ud} $ et $ V_{us} $: le secteur léger	112
1.2.2	Mesure de $ V_{cs} $ au moyen des résultats des réseaux	119
1.2.3	Les déterminations de $ V_{cb} $	120
2	La détermination de V_{ub}	129
2.1	La dépendance en q^2 du facteur de forme $f_{B\pi}^+(q^2)$	130
2.2	Les lois d'échelle	132
2.3	Modélisation de $\hat{g}_{B\pi}(q^2)$	133
2.4	La mesure expérimentale de $g_{*D\pi}$ par CLEO	135

2.5	Les règles de somme de la QCD	138
2.6	Quelques mots sur la fonction d'onde du pion sur le cône de lumière . . .	140
2.7	Retour sur $f_{B\pi}^+(q^2)$: résultats	144

IV La physique des mésons lourds-légers sur réseau 151

1	Présentation du problème	153
1.1	Les quarks lourds sur réseau	155
1.2	Combiner QCD et limite statique de la HQET	161
1.2.1	La limite statique	161
1.2.2	L'action de Eichten-Hill	162
1.2.3	Le problème du signal	164
1.2.4	L'étalement de la source de couleur	168
1.2.5	L'introduction d'une fonction d'onde	172
1.2.6	La modification de l'action de Eichten-Hill	174
1.2.7	Le cas de f_{B_s}	177
1.3	Rôle du couplage \hat{g} dans les effets chiraux	184
1.3.1	Les effets chiraux et le «quenching»	184
1.3.2	Le couplage \hat{g} et les logs-chiraux	188
1.3.3	Les mesures de f_{B_q}	191
1.4	Les moyens de calcul de la QCD sur réseau	197
2	La constante de couplage \hat{g} sur réseau	201
2.1	Principe du calcul	201
2.2	Première détermination du couplage $g_{B^*D\pi}$ sur réseau	205
2.2.1	Introduction	207
2.2.2	Lattice parametrization and results of the analysis of the two-point functions	209
2.2.3	Computation of the three-point functions: Basics and Results . . .	210
2.2.4	Chiral extrapolations and the heavy quark interpolation	218
2.2.5	Results at $\beta = 6.0$	222
2.2.6	Physical results and discussion of errors	223
2.3	Détermination des couplages \hat{g}_∞ et $g_{B^*B\pi}$ sur réseau	233
2.3.1	Introduction	235
2.3.2	Extracting \hat{g}_∞	237
2.3.3	Strategy for the calculation of \hat{g}_∞ on the lattice	238

2.3.4	Conditions and results of the simulation	240
2.3.5	Smearing, Fattening and Systematic uncertainties	245
2.3.6	Heavy mass interpolation to the b -quark	253
2.3.7	Summary and conclusions	253
2.4	Bilan des pr´edictions th´eoriques	261
2.4.1	D´eterminations de \hat{g} par les r`egles de somme de QCD	262
2.4.2	D´eterminations de \hat{g} par les mod`eles de quarks	263
2.4.3	D´eterminations de \hat{g} sur r´eseau	263
2.4.4	Panorama des mesures de \hat{g}	266
Conclusion		271
R´ef´erences		281

Introduction

La description des interactions entre particules élémentaires à travers le Modèle Standard (MS) est une démonstration particulièrement étonnante de comment une théorie des champs construite sur des principes de symétrie peut arriver à reproduire un nombre prodigieux de phénomènes physiques. On sait cependant que le Modèle Standard doit n'être qu'une théorie effective, limitée à basse énergie d'une théorie plus complète qui inclut non seulement les interactions électro-faibles et fortes (déjà présentes dans le MS), mais aussi les effets de la gravitation aux échelles quantiques. Par ailleurs, il est depuis longtemps établi que des phénomènes comme l'asymétrie matière/anti-matière dans l'Univers ne peuvent pas être compris sur la seule base du MS. Ainsi une des priorités des mesures expérimentales actuelles est d'arriver à mettre en évidence des phénomènes qui ne correspondent pas aux prédictions du MS. Jusqu'à maintenant cette recherche d'effets de nouvelle physique n'a pas encore fourni d'évidences de déviations par rapport aux résultats de la théorie dans les domaines d'énergie accessibles aux expériences. On s'attend donc à ce que les effets «non-standards» apparaissent comme des petites corrections par rapport au MS. Pour les mettre en évidence il est donc nécessaire d'avoir une connaissance très détaillée de tous les paramètres de la théorie.

Dans le cadre du MS, la chromodynamique quantique (QCD) est la théorie qui décrit l'interaction forte par l'échange de charges de couleur entre des champs de quarks et de gluons. La différence essentielle entre la QCD et l'électrodynamique quantique (QED) est que, dans le cas de la QCD, les médiateurs de l'interaction, *i.e.* les gluons, peuvent aussi interagir entre eux. Ainsi, bien que du point de vue de sa structure, la QCD ait une formulation simple en terme de la symétrie de jauge du groupe non-abélien $SU(3)$ du point de vue de la phénoménologie et des calculs, il faut par contre faire face à une complexité extraordinaire. Les développements perturbatifs qui ont par exemple permis de construire et de valider l'électrodynamique quantique ne sont valables, dans le cas de la QCD, que pour des énergies bien plus grandes que l'échelle hadronique Λ_{QCD} . En effet, la constante de couplage de l'interaction forte (*i.e.* le paramètre du développement perturbatif) dépend

de l'échelle d'énergie et devient $\mathcal{O}(1)$ pour les énergies faibles, proches de Λ_{QCD} , ce qui correspond, dans l'espace de configuration aux grandes distances. Ce comportement entraîne le confinement, en vertu duquel ni les quarks ni les gluons ne peuvent être observés à l'état libre. Les états physiques observables sont les hadrons, composés de quarks liés par l'interaction forte. Le mécanisme du confinement est une des propriétés non-perturbatives que la QCD doit pouvoir expliquer.

Pour caractériser les hadrons à partir des champs élémentaires de quarks et de gluons il faut donc passer par d'autres moyens que ceux de la théorie de perturbation. Une façon de faire ces calculs consiste à formuler la QCD dans un espace discret de volume fini (*i.e.* un réseau). On peut alors effectuer les calculs numériquement en incluant toutes les propriétés de la théorie, puis reprendre la limite du continu pour retrouver le monde physique. Les études de la QCD sur réseau ont permis de comprendre le mécanisme du confinement et de reproduire le spectre hadronique fourni par les expériences. Ceci constitue une vérification du fait que la QCD est bien notre meilleur moyen de décrire l'interaction forte.

L'étude du Modèle Standard fait appel à des outils théoriques permettant de tirer profit des simplifications qu'introduisent les symétries ou la hiérarchie des masses des particules. C'est par exemple le cas des hamiltoniens effectifs des interactions faibles ou des théories effectives dans les limites des petites ou des grandes masses de quarks (par rapport à Λ_{QCD}) où les symétries chirales et des quarks lourds, respectivement, sont manifestes. D'autres méthodes de calcul reposent sur des considérations phénoménologiques, des principes de dualité ou d'autres types d'approximations et peuvent dans certains cas servir de guide pour avancer en vue d'une détermination difficilement abordable par d'autres moyens.

La détermination précise des paramètres du MS dépend donc en grande partie de l'exactitude des prédictions provenant des outils théoriques impliqués dans les calculs et il est nécessaire de privilégier et d'améliorer les résultats des méthodes qui reposent sur les seuls principes premiers de la théorie à tester.

L'étude du mécanisme de mélange des saveurs de quarks et de la brisure de la symétrie CP à travers la détermination des paramètres fondamentaux que sont les éléments de la matrice de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa (CKM) est un des meilleurs moyens pour effectuer des mesures fines de la validité du MS et un des domaines prometteurs pour isoler des effets de nouvelle physique. Parmi ces paramètres, la détermination de ceux qui font intervenir à la fois une saveur lourde (*i.e.* les quarks t , b ou d) et une légère (*i.e.* les quarks u ou d) présente encore de grandes incertitudes: elles sont en général supérieures à 5% et atteignent 15–20% dans les cas des éléments V_{cb} ou V_{ts} de la matrice CKM. Or le secteur des saveurs lourdes joue un rôle crucial dans l'étude de cette matrice. En particulier, les propriétés des mésons lourds-légers B et D interviennent dans la mesure directe de δ (parmi

les $3 \times 3 = 9$) éléments de la matrice. C'est la raison pour laquelle la physique de ces mésons est actuellement un des principaux centres d'intérêt de la physique des particules théorique et expérimentale.

L'unitarité de la matrice CKM, permet de réduire le nombre de paramètres indépendants de 9 à 4 et on peut alors reparamétriser la matrice pour tenir compte plus directement des contraintes phénoménologiques. L'élément V_{cb} est alors particulièrement important puisqu'il fait intervenir à lui seul les quatre nouveaux paramètres. La détermination de V_{cb} passant par l'étude des désintégrations lourde à l'éger du méson B , il est nécessaire de comprendre comment ces deux secteurs se connectent. Pour cela, le couplage \hat{g} des mésons lourds au pion va jouer un rôle particulièrement important, autant du côté théorique que phénoménologique. En effet, \hat{g} est la constante de couplage de la théorie effective combinant les symétries chirales et des quarks lourds et il intervient dans un grand nombre de quantités phénoménologiques, comme par exemple le facteur de forme de la désintégration $B \rightarrow \pi \ell \nu_\ell$ qui constitue une des voies privilégiées pour extraire V_{cb} . Le couplage \hat{g} doit donc être déterminé pour pouvoir être utilisé dans le cadre de cette théorie et fournir ainsi des prédictions sur la physique des mésons B et D . D'autre part, des effets chiraux dépendant des boucles de pions font aussi intervenir ce couplage. Ces effets sont d'une importance majeure dans la validation des prédictions des quantités physiques issues des calculs de QCD sur réseau. Toutes ces raisons ont suscité le besoin d'obtenir une détermination fiable et précise du couplage \hat{g} . Ce couplage étant une quantité non-perturbative, il devient donc une cible naturelle des calculs sur réseau.

La suite de cette présentation aura comme fil conducteur l'étude du couplage \hat{g} en détaillant le contexte physique dans lequel il s'inscrit, son rôle dans la phénoménologie et les méthodes impliquées dans sa détermination. La première partie de cet exposé s'intéresse à la méthode de calcul de la QCD sur réseau. Je présenterai d'abord la façon de mettre en œuvre la théorie (et en particulier ses symétries) dans un espace discret pour pouvoir ensuite montrer comment on extrait les informations physiques recherchées. La deuxième partie est une introduction aux théories effectives exploitant les symétries des quarks lourds et chirales. Ceci me permettra de montrer dans la troisième partie comment tous ces outils théoriques permettent d'étudier la phénoménologie des saveurs de quarks. La dernière partie rassemble une bonne partie des informations des parties précédentes pour montrer comment la QCD sur réseau peut profiter des théories effectives pour étudier la physique des mésons B et D . Je présenterai alors une application de cette méthode de calcul à la détermination du couplage \hat{g} .

Première partie

Simuler la QCD sur un réseau

La formulation de la QCD sur réseau

La QCD sur réseau est une méthode de calcul non-perturbatif qui reprend les propriétés de la QCD habituelle et en donne une formulation valable sur un réseau de maille a et volume V finis où il est possible de mener jusqu'au bout les calculs pour finalement revenir aux limites du continu, $a \rightarrow 0$, et thermodynamique, $V \rightarrow \infty$, avec des prédictions sur des quantités dépendant de l'interaction forte.

Je vais commencer par donner un aperçu général de ce parcours entre le monde physique et celui du réseau, pour détailler par la suite les particularités de chacune des étapes.

Le point de départ est la QCD du continu et le but est d'extraire les informations qui ne sont pas à la portée de la théorie des perturbations: les effets de longue distance lorsque le couplage fort devient grand. L'idée de Wilson [1] a été de considérer une version discrétisée du lagrangien de la QCD sur un réseau qui préserverait le plus grand nombre possible de symétries du continu. Il ne s'agit donc pas de conserver les symétries dans les conditions du réseau (à maille finie a), mais plutôt de retrouver toutes les propriétés de la QCD lorsqu'on reprend la limite du continu.

Il semblerait *a priori* que le fait de travailler dans un espace discret soit un pur artifice de calcul. Cependant, pour pouvoir faire les déterminations des grandeurs physiques dans le cadre d'une théorie quantique des champs, il est nécessaire d'introduire une régularisation pour éliminer les divergences ultraviolettes (UV). L'utilisation d'un cutoff permet de contrôler les effets des impulsions plus grandes que ce cutoff. De ce point de vue, la QCD sur réseau est une des régularisations possibles de la QCD (parmi toutes les autres). La maille inverse, a^{-1} , correspond au cutoff UV de cette régularisation: ce n'est donc pas un paramètre supplémentaire de la théorie. Paradoxalement, l'approche du réseau est aussi un exemple de la nécessité d'une renormalisation même lorsque la théorie n'a pas d'infinis: quand on travaille à maille finie, aucun infini n'apparaît et cependant une renormalisation est toujours nécessaire pour obtenir les résultats physiques. La théorie du réseau est renormalisable parce qu'elle préserve la symétrie de jauge. La renormalisation peut être vue comme la procédure permettant d'éliminer les paramètres non physiques utilisés dans ce

schéma particulier de régularisation de la théorie.

Pour formuler le lagrangien de la QCD sur un réseau, il faut être particulièrement attentif à préserver l'invariance de jauge. Sans la symétrie de jauge $SU(3)$, à maille finie, il faudrait faire face à une augmentation du nombre de paramètres (par exemple, il faudrait plusieurs constantes de couplage pour les interactions entre gluons). De plus, l'absence de symétrie augmente le nombre d'opérateurs à considérer. Conserver les symétries permet non seulement de rester le plus près possible de la théorie du continu mais aussi de simplifier considérablement les calculs. Les symétries discrètes C , P et T sont au même titre que l'invariance de jauge correctement préservées sur le réseau. Ces dernières années des progrès théoriques importants ont permis de trouver une formulation des fermions respectant la symétrie chirale à maille finie. La symétrie d'espace-temps ne peut clairement pas être respectée dans un espace discretisé: on utilise en contrepartie la symétrie hypercubique tout en retrouvant la symétrie de Lorentz à la limite du continu. Mise à part cette symétrie, toutes les symétries internes de la théorie peuvent être à présent implémentées sur le réseau. C'est ainsi que la théorie de jauge sur réseau peut reproduire la QCD sans faire recours à de nouveaux paramètres. Les seuls paramètres sont les masses des quarks et la constante de couplage $\alpha_s = g_s^2/4\pi$. Au niveau des principes, aucune approximation supplémentaire n'est introduite en formulant la QCD dans un espace discretisé. Nous allons voir cependant qu'en pratique des limitations (purements techniques et pouvant être systématiquement réduites) doivent être affrontées.

Une fois formulée, la théorie de jauge sur réseau peut être traitée numériquement sur un ordinateur. Ceci est rendu possible par le fait que, sur un réseau de volume fini, il n'y a qu'un nombre fini de variables (ce qui n'est pas le cas du continu). Cependant, même dans ces conditions, le nombre de variables est beaucoup trop grand pour qu'on puisse effectuer les calculs autrement que par des moyens numériques. Non seulement le nombre de sites du réseau est élevé mais il faut pouvoir y introduire toute la dépendance matricielle (en spin et en couleur) des champs de quarks et de gluons. En théorie des champs, l'obtention des quantités physiques passe par le calcul d'une intégrale de chemin sur les champs ce qui, numériquement, suppose un nombre très élevé d'opérations matricielles. D'autre part, le secteur des quarks nécessite le calcul d'un déterminant fermionique par saveur de quark. Ce déterminant est un objet hautement non local qui doit être recalculé après chaque variation des champs de jauge. Cette opération constitue la partie la plus coûteuse en termes de puissance de calcul numérique et justifie l'utilisation de l'approximation «quenched» (ou de valence): le déterminant n'est pas calculé et est supposé constant. Physiquement parlant, ceci revient à éliminer les effets des boucles de quarks de la mer (les quarks de valence conservent cependant toutes leurs propriétés). Ainsi, il s'avère que les simulations de la

QCD doivent faire appel à des machines qui sont à l'avant garde des outils informatiques du calcul massivement parallèle. Malgré l'utilisation de ces outils, les conditions et les contraintes qu'il reste à respecter sont encore importantes.

Une condition nécessaire pour rendre possibles les simulations est de passer du formalisme de la théorie des champs à celui de la physique statistique. Pour cela, la première étape est d'effectuer une rotation de Wick pour effectuer le passage de l'espace min-kowskien vers l'eulidien. On peut alors réinterpréter la théorie des champs de l'eulidien comme un système de mécanique statistique classique et profiter des avantages bien connus de ces systèmes: les outils de calcul des fonctions de corrélation *via* des lois de probabilité. Par la rotation de Wick, l'exponentielle de l'action de jauge de la QCD devient une loi de probabilité de Boltzmann. L'intégrale de chemin sur les champs de gluons est alors transformée en une somme sur l'ensemble des variables composant les champs de jauge (*i.e.* les configurations générées suivant la loi de probabilité de Boltzmann). La production d'une nouvelle configuration fait intervenir un nombre colossal de variables et doit être effectuée numériquement par la méthode de Monte Carlo. Une fois produite, la configuration des champs de jauge devient le support d'où on extrait les quantités physiques: les observables sont obtenues après avoir moyenné sur l'ensemble des N_{conf} configurations générées. Les erreurs statistiques suivent le théorème de la limite centrale et décroissent comme $1/\sqrt{N_{\text{conf}}}$. Les incertitudes statistiques sont généralement bien maîtrisées dans les études numériques actuelles; les incertitudes dominantes sont plutôt de type systématique («quenching», effets de maille finie, volume fini, ...).

Présentons maintenant quelques unes des contraintes à considérer dans les simulations.

Nous avons déjà évoqué les difficultés que suppose le calcul du déterminant fermionique. La puissance de calcul numérique nécessaire pour les simulations «unquenched» n'est disponible que depuis quelques années. Avec l'arrivée de machines de plus en plus puissantes, les calculs de la QCD complète (*i.e.* «unquenched») vont progressivement devenir une pratique habituelle. Une autre étape coûteuse en moyens de calcul est l'inversion de l'opérateur de Dirac afin d'obtenir les propagateurs des quarks. Cette inversion est d'autant plus difficile à effectuer que la masse du quark considérée est faible et en pratique il n'est pas facile d'aller à des masses de quarks beaucoup plus faibles que celle du quark étrange.

Les objets physiques que l'on cherche à étudier (par exemple les hadrons, mais les applications possibles sont bien plus vastes) doivent pouvoir, d'une part, entrer et se déplacer à l'intérieur du volume du réseau et, d'autre part, être plus grands que la granularité du réseau. En d'autres termes, il faut que les cutoffs ultraviolet, *i.e.* la maille inverse \bar{a}^{-1} , et infrarouge, *i.e.* l'inverse L^{-1} d'un côté du réseau de volume $V = \frac{4}{3}L^3$ permettent d'inclure

les échelles physiques pertinentes: les masses des quarks, leurs impulsions et l'échelle typique de la QCD, Λ_{QCD} . Il faut donc, en principe, considérer toute la hiérarchie des masses des quarks, de quelques MeV pour les quarks u et d à ~ 4.5 GeV pour le quark b . Le quark top a une durée de vie beaucoup trop courte par rapport aux temps caractéristiques de l'hadronisation et n'est donc pas pris en compte. L'échelle du confinement Λ_{QCD} n'a pas une valeur parfaitement définie, elle est comprise entre $\Lambda_{\overline{MS}} \sim 250$ MeV et la masse du méson $m_\rho = 770$ MeV. Ces contraintes se traduisent par la nécessité d'utiliser dans les simulations des mailles a suffisamment faibles pour discerner les longueurs d'onde de Compton des quarks lourds Q ($Q = b, c$) et des côtés L suffisamment grands pour inclure les longueurs d'onde des quarks légers q ($q = u, d, s$):

$$L^{-1} \ll m_q \ll \Lambda_{QCD} \ll m_Q \ll a^{-1}. \quad (\text{I.0.1})$$

Il est utile de remarquer que les quarks étrange et charmé ont des masses qui ne sont pas très éloignées de Λ_{QCD} ($m_s \sim 80\text{--}170$ MeV et $m_c \sim 1.2$ GeV). Les qualificatifs respectifs de «léger» et de «lourd» peuvent donc dans ces cas poser des problèmes. Comme on le verra par la suite, les écarts entre les masses de quarks et l'échelle Λ_{QCD} rendent manifestes de nouvelles symétries (la symétrie chirale et la symétrie des quarks lourds). Le fait de revenir à des échelles proches de Λ_{QCD} peut induire des effets importants de rupture de ces symétries.

Les réseaux actuels peuvent traiter directement la physique des quarks s et c . Les contraintes qui viennent d'être évoquées empêchent de faire des simulations en incluant directement les quarks légers (le u et le d) et les quarks lourds (le b). Rappelons cependant qu'il n'existe aucune limitation de principe à leur étude. Les contraintes s'appliquent essentiellement à l'efficacité des machines et des algorithmes dont on dispose. La façon la plus naturelle de traiter les limites des masses légères et lourdes est de faire appel aux symétries évoquées précédemment. Les symétries chirales et des quarks lourds (avec les théories effectives qui leur sont associées) sont non seulement un guide pour atteindre les masses physiques à partir des données des réseaux, mais peuvent aussi être testées (et leurs paramètres déterminés) à partir des simulations. Nous allons voir par la suite que cette interaction entre la QCD sur réseau et les théories effectives permet d'obtenir un grand nombre d'informations importantes à notre connaissance des paramètres fondamentaux du Modèle Standard.

Une fois qu'on a «mesuré» sur le réseau une série de grandeurs physiques (par exemple les masses des hadrons ou les éléments de matrices hadroniques), les étapes suivantes consistent à renormaliser certaines de ces quantités et à revenir à la limite du continu, $a \rightarrow 0$. La dernière étape importante est l'étude des approximations utilisées afin d'estimer les erreurs systématiques de la simulation.

Détaillons maintenant ce qui vient d'être annoncé en portant une attention particulière à l'étude des symétries qui peuvent être incluses sur réseau.

Chapitre 1

La QCD discrétisée

Pour étudier la QCD sur un réseau, la première étape consiste à la transposer dans un espace discrétisé en prenant soin de conserver le plus grand nombre possible d'invariances du lagrangien.

1.1 La discrétisation de l'espace-temps

Quand on passe du continu au réseau, les coordonnées d'espace-temps euclidien (cf. Appendice à la fin du chapitre) sont caractérisées par des nombres entiers n_μ

$$x_\mu^C \longrightarrow x_\mu^L = n_\mu a, \quad (\text{I.1.1})$$

où les indices 'C' et 'L' rappellent respectivement les cas du *continu* et du *réseau* («lattice» en anglais). En pratique, on travaille souvent en unités de maille a et on utilise la notation $x_\mu \equiv x_\mu^L$. Le volume du réseau est souvent noté $V = \mathfrak{L} \times T$, où L est le côté spatial (supposé isotrope dans ce cas) et T l'extension temporelle du réseau. A nouveau, l'habitude est de noter L et T en unités de réseau (ce sont donc des entiers). Des conditions périodiques sont souvent imposées sur les bords du réseau. Les grandeurs du réseau dépendent de a et sont donc *a priori* adimensionnées. C'est uniquement une fois que la maille a été *calibrée* à partir d'une grandeur physique bien déterminée, que l'on peut retraduire en unités physiques toutes les quantités obtenues dans une simulation.

Travailler dans un réseau implique la rupture de la symétrie $O(4)$ du «groupe de Lorentz» (de l'euclidien). On peut cependant utiliser sa version discrétisée (la symétrie hypercubique $H(4)$). Les effets de ce changement de groupe de symétrie ne semblent pas engendrer des difficultés de principe.

Une des conséquences de l'utilisation d'un réseau de volume fini est que les impulsions sont elles aussi discrétisées:

$$p = \pm \frac{2\pi n}{La} \quad \text{avec } n = 0, 1, \dots, L/2. \quad (\text{I.1.2})$$

L'existence d'une zone de Brillouin $]-\pi/a, \pi/a]$ fait que sur le réseau les impulsions sont conservées *modulo* $2\pi/a$.

1.2 La discrétisation des champs

On peut maintenant écrire les champs de quarks et de gluons des réseaux. La volonté de conserver l'invariance de jauge implique que la transcription du champ de gluons est moins directe que celle des quarks.

Commençons donc par le cas le plus simple. Les champs de quarks $\Psi(x)$ et $\bar{\Psi}(x)$ sont directement transposés sur les sites du réseau. Les propriétés de ces champs sont correctement préservées: ils appartiennent à la représentation fondamentale du groupe $SU(3)$ et ce sont des variables de Grassmann anti-commutantes. Cette deuxième propriété se révèle être très utile puisque l'intégrale de chemin sur les champs fermioniques peut être remplacée par le calcul d'un déterminant que l'on a évoqué auparavant.

La possibilité de retranscrire les champs de jauge a été le premier pas décisif qui a permis d'étudier la QCD sur un réseau [1]. Wilson a remarqué que les champs de jauge $A_\mu(x)$ du continu agissent comme une phase sur un fermion se déplaçant suivant un chemin menant du point x vers le point y :

$$\Psi(y) = \mathcal{P} e^{\int_x^y ig_s A_\mu(x) dx_\mu} \Psi(x), \quad (\text{I.1.3})$$

où \mathcal{P} est le produit ordonné en chemin et où on note pour simplifier: $A_\mu = A_\mu^a \lambda_a$. Le terme exponentiel peut donc être interprété comme un transporteur parallèle connectant deux points de l'espace. Ainsi, les champs de jauge vont être situés sur les liens du réseau de façon à connecter les quarks localisés sur les sites. L'indice ' μ ' de Lorentz des champs de jauge $A_\mu(x)$ est alors interprété de façon univoque comme la direction μ du lien ayant comme origine le site x . Chaque lien du réseau porte alors une matrice $U_\mu(x)$ appartenant à la même représentation fondamentale (du groupe $SU(3)$) que les quarks. Les champs de jauge sont définis par:

$$U_\mu(x) \equiv U(x, x + \hat{\mu}) = e^{ia g_0 A_\mu(x + \frac{\hat{\mu}}{2})}, \quad (\text{I.1.4})$$

où il a été choisi de prendre le champ A_μ au centre du lien. Le terme $\hat{\mu}$ d'énote le vecteur unitaire dans la direction μ . Deux notations différentes sont présentées pour les champs U .

Noter que l'on a remplacé la constante de couplage effective g du continu par sa version «lattice» notée g .

À ce stade seul le sens positif des directions μ a été considéré. Le sens négatif est pris en compte par l'expression suivante:

$$U_{-\mu}(x) \equiv U(x, x - \hat{\mu}) = e^{-iag_0 A_\mu(x - \frac{\hat{\mu}}{2})} = U^\dagger(x - \hat{\mu}, x) \equiv U_\mu^\dagger(x - \hat{\mu}). \quad (\text{I.1.5})$$

Concluons cette partie sur la discrétisation des champs en définissant la dérivée (*i.e.* la différence finie) des champs du réseau. Le choix n'est pas unique mais l'habitude est de considérer la différence symétrique:

$$\partial_x \phi(x) \rightarrow \Delta_x \phi(x) = \frac{1}{2a} (\phi(x+a) - \phi(x-a)), \quad (\text{I.1.6})$$

où $\phi(x)$ est indifféremment un champ de jauge ou de quark. Par commodité, la différence finie $\Delta_x \phi(x)$ est souvent notée de la même façon que la dérivée du continu $\partial_x \phi(x)$.

1.3 L'invariance de jauge

La formulation d'une théorie de jauge sur réseau passe d'abord par la définition des transformations des champs sous la rotation de jauge, puis, par l'identification des objets (composés de ces champs) restant invariants sous ces transformations.

Sous une transformation de jauge locale, $V(x)$, les champs $\Psi(x)$, $\bar{\Psi}(x)$ et $U_\mu(x)$ deviennent:

$$\Psi(x) \rightarrow V(x)\Psi(x), \quad (\text{I.1.7})$$

$$\bar{\Psi}(x) \rightarrow \bar{\Psi}(x)V^\dagger(x), \quad (\text{I.1.8})$$

$$U_\mu(x) \rightarrow V(x)U_\mu(x)V^\dagger(x + \hat{\mu}). \quad (\text{I.1.9})$$

Ces transformations conservent la forme de celles du continu. On peut remarquer que dans le cas des champs $U_\mu(x)$, la matrice $V(x)$ de $SU(3)$ agit de part et d'autre du champ considéré.

Les propriétés des matrices de $SU(3)$ permettent d'identifier les objets invariants de jauge. Ils sont de deux types: les lignes composées de champs de jauge avec à leurs extrémités des champs de quarks (souvent appelées des *cordes*) et les boucles fermées de champs de jauge.

La figure 1.1 représente schématiquement les champs de quarks et de gluons sur un réseau ainsi que les objets invariants sous la symétrie de jauge.

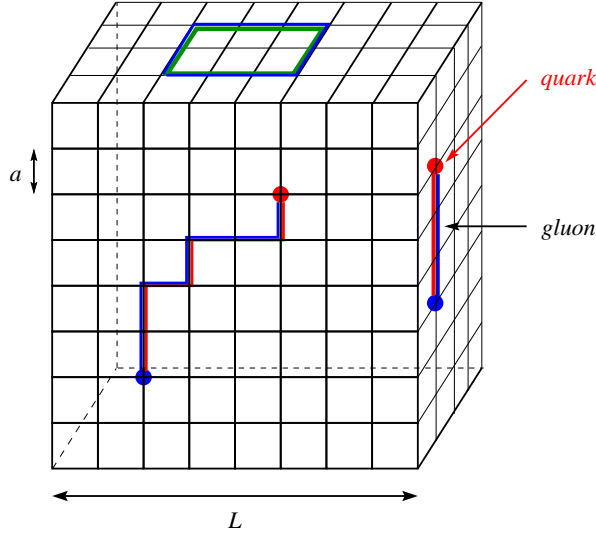


FIG. 1.1 – Représentation schématique d'un réseau

L'expression la plus générale d'une corde joignant un quark et un anti-quark situés aux points x et y est donnée par:

$$\text{Tr } \bar{\Psi}(x) \left[\prod_{z=x}^{y-\hat{\mu}(z)} U_{\mu}(z) \right] \Psi(y), \quad (\text{I.1.10})$$

où la trace est prise sur les indices de couleur et de spin. La notation $\hat{\mu}(z)$ indique la direction du lien partant du site z (appartenant au chemin menant de x à y). Remarquons que le dernier site dans le produit est bien $y - \hat{\mu}(z)$, et non pas y , puisque par définition les champs $U_{\mu}(x)$ partent du site x et arrivent au site $x + \hat{\mu}(x)$. Le produit ordonné en chemin des champs de jauge est appelé la ligne de Wilson. Lorsque cette ligne parcourt entièrement une des dimensions du réseau elle est appelée la ligne de Polyakov : du fait des conditions périodiques elle correspond à une boucle fermée. Elle est donc invariante de jauge même en l'absence des champs de quarks situés aux bouts de la corde.

Ces objets sont invariants de jauge puisque chaque produit de deux liens U_{μ} se transforme de la façon suivante:

$$\text{Tr } \dots U_{\mu}(x) U_{\mu}(x + \hat{\mu}) \dots \rightarrow \text{Tr } \dots U_{\mu}(x) V^{\dagger}(x + \hat{\mu}) V(x + \hat{\mu}) U_{\mu}(x + \hat{\mu}) \dots, \quad (\text{I.1.11})$$

où l'on voit que les champs V se compensent deux à deux en raison de l'unitarité des matrices V .

Les boucles fermées de champs de jauge $U_{\mu}(x)$ sont appelées les boucles de Wilson. La boucle la plus simple est formée par le produit ordonné en chemin des quatre liens formant

un carré de côté a . La figure 1.2 représente cette boucle. Elle est associée à l'objet que l'on appelle communément la *plaquette*.

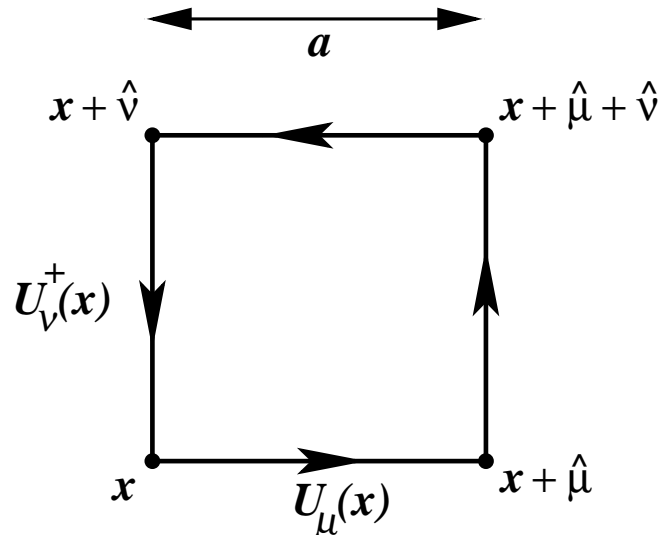


FIG. 1.2 – Illustration de l'objet le plus simple respectant l'invariance de jauge (cf. éq. (I.1.12)). Cette boucle élémentaire est liée à la plaquette définie par l'éq. (I.1.14).

L'expression de la boucle élémentaire $W_{\mu\nu}^{\square}(x)$ est donnée par:

$$W_{\mu\nu}^{\square}(x) = U_{\mu}(x) U_{\nu}(x + \hat{\mu}) U_{\mu}^{\dagger}(x + \hat{\nu}) U_{\nu}^{\dagger}(x), \quad (\text{I.1.12})$$

$$= \mathcal{P} e^{-i \oint_{\square} g_0 A \cdot dx}. \quad (\text{I.1.13})$$

La plaquette est alors définie par l'expression suivante:

$$P_{\mu\nu}(x) = \frac{1}{3} \text{Re Tr } W_{\mu\nu}^{\square}(x), \quad (\text{I.1.14})$$

où la trace est effectuée sur les indices de couleur. Dans cette expression, il suffit de considérer la partie réelle puisque la boucle élémentaire vérifie $W_{\mu\nu}^{\square}(x) = W_{\nu\mu}^{\square}(x)$. De façon générale, prendre la partie réelle sur une boucle de Wilson correspond à moyenner sur les contributions de la boucle et de sa transformée par conjugaison de charge C .

Ajoutons une remarque sur les symétries discrètes C , P et T : Elles peuvent être mises en œuvre sur le réseau afin de moyenner leurs effets (comme on vient de le voir pour la boucle de Wilson) ce qui améliore la précision des mesures.

1.4 La formulation «naïve» de la QCD sur réseau

On peut maintenant considérer l'action de la QCD afin de la récrire en fonction des champs du réseau. L'opération à réaliser peut être exprimée de la manière suivante:

$$S^C = \int d^4x \mathcal{L}_{QCD}^C \rightarrow S^L = a^4 \sum_n \mathcal{L}_{QCD}^L, \quad (\text{I.1.15})$$

où \mathcal{L}_{QCD}^C est le lagrangien (du continu) de la QCD donné par:

$$\mathcal{L}_{QCD} = \mathcal{L}_{\text{quarks}} + \mathcal{L}_{\text{jauge}}, \quad (\text{I.1.16})$$

$$= \sum_{\Psi=u,d,s,c,b,t} \bar{\Psi}(i \not{D} - m_{\Psi})\Psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}. \quad (\text{I.1.17})$$

La dérivée covariante s'écrit:

$$D_{\mu} = \partial_{\mu} - ig_s A_{\mu}^a \frac{\lambda_a}{2}, \quad (\text{I.1.18})$$

et le tenseur gluonique $F_{\mu\nu}$ est donné par:

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_{\mu} A_{\nu}^a - \partial_{\nu} A_{\mu}^a - g_s \sum_{b,c=1}^8 f^{bca} A_{\mu}^b A_{\nu}^c. \quad (\text{I.1.19})$$

Les λ_a , $a = 1, \dots, N_c^2 - 1 = 8$, sont les matrices de Gell-Mann correspondant aux générateurs du groupe $SU(N=3)$. Elles satisfont la relation:

$$[\lambda_a, \lambda_b] = \sum_{c=1}^8 f_{abc} \lambda_c \quad (\text{I.1.20})$$

où f^{abc} est la constante de structure du groupe $SU(3)$.

Dans l'éq. (I.1.15), l'intégrale sur l'espace continu a été remplacée, dans l'espace discrétisé, par une somme sur les sites.

1.4.1 L'action de jauge

Commençons par considérer la partie pure jauge du lagrangien de la QCD. Pour assurer l'invariance de jauge il va falloir construire le lagrangien du réseau à partir de boucles de Wilson. Pour illustrer les étapes de cette construction, nous considérons ici le cas des champs de gluons A_{μ} dans le groupe de symétrie $U(1)$. Dans le cas d'un groupe non-abélien comme $SU(3)$, ces étapes se généralisent en considérant la relation du produit des exponentielles de deux éléments A et B du groupe:

$$e^A e^B = e^{A+B + \frac{1}{2}[A,B] + \dots}, \quad (\text{I.1.21})$$

où intervient le commutateur des matrices A et B . Les résultats obtenus pour le groupe $U(1)$ ont la même forme que ceux de $SU(3)$ à des facteurs numériques près.

Considérons alors pour commencer l'expression de la boucle élémentaire $W_{\mu\nu}^{\square}(x)$ et écrivons sa dépendance explicite en fonction des champs A

$$W_{\mu\nu}^{\square}(x) = \mathcal{P}e^{-i \oint_{\square} g_0 A \cdot dx}, \quad (\text{I.1.22})$$

$$= \exp \left[iag_0 \left(A_{\mu}(x + \frac{\hat{\mu}}{2}) + A_{\nu}(x + \hat{\mu} + \frac{\hat{\nu}}{2}) - A_{\mu}(x + \hat{\nu} + \frac{\hat{\mu}}{2}) - A_{\nu}(x + \frac{\hat{\nu}}{2}) \right) \right]. \quad (\text{I.1.23})$$

En notant le centre de la plaquette $x_0 = x + (\hat{\mu} + \hat{\nu})/2$ on peut réécrire l'expression précédente:

$$W_{\mu\nu}^{\square}(x_0) = \exp \left[ia g_0 \left(A_{\mu}(x_0 - \frac{\hat{\nu}}{2}) + A_{\nu}(x_0 + \frac{\hat{\mu}}{2}) - A_{\mu}(x_0 + \frac{\hat{\nu}}{2}) - A_{\nu}(x_0 - \frac{\hat{\mu}}{2}) \right) \right]. \quad (\text{I.1.24})$$

Par un développement autour de x_0 , on arrive à une expression en fonction des dérivées des champs A_{μ} :

$$W_{\mu\nu}^{\square}(x_0) = \exp \left[ia^2 g_0 (\partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu}) + \frac{ia^4 g_0}{12} (\partial_{\mu}^3 A_{\nu} - \partial_{\nu}^3 A_{\mu}) + \dots \right], \quad (\text{I.1.25})$$

puis en développant l'exponentielle on obtient,

$$W_{\mu\nu}^{\square}(x_0) = 1 + ia^2 g_0 F_{\mu\nu} - \frac{a^4 g_0^2}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \mathcal{O}(a^6). \quad (\text{I.1.26})$$

Ainsi, à des petites corrections d'ordre a^6 , l'expression de la plaquette de l'éq. (I.1.14) est donnée par:

$$P_{\mu\nu}(x_0) = \frac{1}{3} \text{Tr} \left(1 - \frac{a^4 g_0^2}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right) + \mathcal{O}(a^6). \quad (\text{I.1.27})$$

On peut alors isoler le terme $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ et exprimer la partie pure jauge de l'action de la QCD sur un réseau:

$$S_g^L \equiv \frac{6}{g_0^2} \sum_x \sum_{\mu < \nu} (1 - P_{\mu\nu}(x)), \quad (\text{I.1.28})$$

$$= \frac{a^4}{4} \sum_x \sum_{\mu, \nu} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (\text{I.1.29})$$

$$\rightarrow S_g^C = \frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (\text{I.1.30})$$

où dans l'éq. (I.1.28), on est revenu au cas du groupe $SU(N_c = 3)$ (en fixant en particulier le facteur $2N_c = 6$) et où la somme sur les indices μ et ν permet de contracter les indices suivant une plaquette orientée positivement. L'éq. (I.1.30) montre que l'action de Yang-Mills peut être retrouvée lorsqu'on fait tendre la maille a vers zéro en conservant fixe le couplage nu. L'expression de l'éq. (I.1.28) est connue sous le nom de l'action de jauge de Wilson.

Le préfacteur de cette action est habituellement noté $\beta = 6/g_0^2$. Le paramètre β est donc relié au couplage nu g . De même qu'en QCD, le couplage et les masses nues des quarks sont ici les seuls paramètres de la théorie. Dans les simulations on fait varier ces paramètres de façon à reproduire les conditions physiques. Dans le cas de β , ses variations permettent d'étudier les extrapolations vers la limite de maille nulle. En effet, du fait de la liberté asymptotique, la limite de couplage g faible est atteinte aux courtes distances. Lorsque la maille du réseau tend vers zéro, le couplage β se met à croître. En variant les valeurs de ce paramètre on peut donc étudier la dépendance en fonction de la maille et atteindre ainsi la limite du continu.

D'autre part, dans la limite de couplage fort, les théories de jauge sur réseau sont confinantes. Un des premiers succès des simulations sur réseau a été de montrer que les grandes boucles de Wilson suivent une loi proportionnelle à l'aire de la boucle. Ceci peut se traduire comme un comportement linéaire du potentiel entre un quark et un anti-quark lorsque ceux-ci sont suffisamment éloignés l'un de l'autre. Ce comportement linéaire du potentiel est interprété comme un critère de confinement.

Les premières corrections à l'éq. (I.1.29) apparaissent à l'ordre \hat{a} . Il est en principe possible d'inclure ces corrections mais pour les mailles de réseau utilisées actuellement elles sont suffisamment faibles pour que ces effets puissent être négligés. D'autre part, nous allons voir que les corrections dans le secteur fermionique sont d'ordre a et donc bien plus urgentes à éliminer. Les effets $\mathcal{O}(\hat{a})$ pourraient être supprimés en considérant par exemple des boucles de Wilson plus grandes que celles de la plaquette. Ceci suppose cependant une augmentation d'un facteur 3 des temps de calcul.

Il est important d'insister sur le fait qu'aucun nouveau paramètre n'apparaît dans l'action de l'éq. (I.1.28). En particulier, les gluons nus restent sans masse et la seule constante de couplage de leurs interactions est le couplage nu g_0 : ceci est une conséquence de l'invariance de jauge.

1.4.2 La fixation de jauge

Avant de passer au secteur fermionique, donnons quelques détails sur la manière de fixer la jauge sur un réseau. Les grandeurs étudiées sur réseau sont souvent invariantes de jauge et il n'est donc pas nécessaire de travailler dans une jauge particulière. De plus, les fonctions de corrélations non invariantes de jauge doivent s'annuler (en moyenne sur les configurations). Ceci est une conséquence du théorème d'Elitzur qui établit qu'une symétrie locale continue (comme $SU(3)$) ne peut pas être spontanément brisée [2].

Parmi les quantités que l'on veut étudier sur réseau il y a par exemple le propagateur des gluons. En considérant uniquement le terme de pure jauge du lagrangien de la QCD, il n'est pas possible de définir une expression de ce propagateur. Il faut donc rajouter au lagrangien un terme de fixation de jauge (GF):

$$\mathcal{L}_{GF} = -\frac{1}{2\xi} \sum_{a=1}^8 (\partial_\mu A_\mu^a)^2, \quad (\text{I.1.31})$$

où ξ est le paramètre de la fixation. Le choix de l'éq. (I.1.31) n'est pas unique. Le terme présent est cependant le plus simple que l'on puisse considérer.

D'autres quantités qui doivent être étudiées à jauge fixée sont, par exemple, le couplage à trois gluons, les propagateurs des quarks ou certaines façons d'obtenir les constantes de renormalisation ou les fonctions d'onde hadroniques.

Les jauges les plus habituellement employées sur les réseaux sont les jauges linéaires, comme la jauge de Landau ($\partial_\mu A_\mu = 0$) ou de Coulomb ($\partial_i A_i = 0$).

La condition de jauge de Landau (qui correspond au choix $\xi \rightarrow 0$) est équivalente à trouver le minimum de la fonctionnelle:

$$F[V] = \int d^4x \text{Tr} (A_\mu^V(x))^2, \quad (\text{I.1.32})$$

où, comme précédemment, V est une matrice de transformation de jauge et $A_\mu^V(x)$ est le champ A_μ après cette transformation.

Un algorithme peut être mis en œuvre pour effectuer la minimisation de l'éq. (I.1.32). Dans les jauges de Landau et de Coulomb, les minima de $F[V]$ ne sont pas uniques : c'est le problème des copies de Gribov. Du fait du problème des copies, on ne peut pas être sûr que l'algorithme de minimisation de l'éq. (I.1.32) converge vers le même point à partir de n'importe quel choix de la configuration de départ. Bien que ces copies de Gribov doivent apparaître, leurs effets se sont à présent montrés négligeables.

La fixation de jauge a aussi un intérêt pratique: en comparant les résultats avant et après la transformation, on peut tester l'invariance de jauge des corrélateurs et l'exactitude des algorithmes.

1.4.3 L'action fermionique

Présentons maintenant la manière la plus directe d'inclure la dynamique des quarks sur le réseau. La partie fermionique du lagrangien de l'éq. (I.1.17) dépend de la dérivée covariante:

$$D_\mu = \partial_\mu - ig_s A_\mu^a \frac{\lambda_a}{2}. \quad (\text{I.1.33})$$

Pour transposer D_μ dans le discret on doit donc considérer, d'une part, une dérivation (cf. l'éq. (I.1.6)) et, d'autre part, l'expression des champs de jauge (cf. l'éq. (I.1.4)).

Le terme dépendant de D_μ peut alors être écrit comme il suit:

$$\bar{\Psi} \not{D} \Psi = \frac{1}{2a} \bar{\Psi}(x) \sum_\mu \gamma_\mu [U_\mu(x) \Psi(x + \hat{\mu}) - U_\mu^\dagger(x - \hat{\mu}) \Psi(x - \hat{\mu})]. \quad (\text{I.1.34})$$

Par un développement de Taylor (en puissances de a) des champs $\Psi(x + \hat{\mu})$ et $U_\mu(x)$, il est possible de montrer que l'ordre dominant du développement redonne à la limite $a \rightarrow 0$, l'expression de l'opérateur de Dirac.

L'action dite naïve (N) des fermions peut s'écrire:

$$S_q^N = \sum_x \bar{\Psi}(x) M_{x,y} \Psi(y). \quad (\text{I.1.35})$$

Dans ce cas (nous verrons par la suite d'autres formulations possibles pour les fermions), l'opérateur de Dirac $M_{x,y}$ est donné par:

$$M_{x,y} = m_0 \delta_{x,y} + \frac{1}{2a} \sum_\mu [\gamma_\mu U_\mu(x) \delta_{x,y-\hat{\mu}} - \gamma_\mu U_\mu^\dagger(x - \hat{\mu}) \delta_{x-\hat{\mu},y}], \quad (\text{I.1.36})$$

où m_0 désigne la masse nue du quark.

L'action fermionique préserve un grand nombre de symétries: elle est invariante sous les transformations de jauge et sous les symétries discrètes (C, P, T). Elle est aussi invariante sous une transformation de phase de type:

$$\Psi(x) \rightarrow e^{i\theta} \Psi(x), \quad (\text{I.1.37})$$

$$\bar{\Psi}(x) \rightarrow \bar{\Psi}(x) e^{-i\theta}, \quad (\text{I.1.38})$$

où θ est un paramètre continu. Cette symétrie est reliée à la conservation du nombre baryonique. Elle permet de construire les identités de Ward-Takahashi reliant les éléments de matrice des courants du réseau. A la limite du continu cette symétrie $U(1)$ globale permet de retrouver la conservation du courant vectoriel.

A la limite chirale, $m_0 \rightarrow 0$, la discrétisation *naïve* de l'opérateur de Dirac de l'éq. (I.1.36) est aussi invariante sous la transformation axiale $U(1)$:

$$\Psi(x) \rightarrow e^{i\theta\gamma_5} \Psi(x), \quad (\text{I.1.39})$$

$$\bar{\Psi}(x) \rightarrow \bar{\Psi}(x) e^{i\theta\gamma_5}. \quad (\text{I.1.40})$$

Dans le continu, cette symétrie permet d'identifier, *via* le théorème de Noether, le courant axial conservé dans l'action *classique*. Cependant, il a été démontré (*cf.* le théorème d'Adler-Bell-Jackiw [3]) que cette symétrie n'est pas valable au niveau quantique à cause des effets des instantons: on parle alors de l'anomalie de la divergence du courant axial (singlet de $SU(3)$) qui brise la symétrie de jauge. Les fluctuations quantiques empêchent l'annulation de la divergence de ce courant. A la limite chirale ($m_0 \rightarrow 0$) cette anomalie a des conséquences physiques. Elle explique par exemple que le méson η' se découple de l'octet des mésons pseudoscalaires légers (le pion, le kaon,...). Nous reviendrons sur ce point dans les chapitres suivants lorsqu'on abordera la symétrie chirale.

Sur le réseau, l'invariance sous la transformation de l'éq. (I.1.39) (dans le cas de la discrétisation *naïve* et nous verrons que ce n'est plus le cas dans la formulation de Wilson) assure l'invariance chirale de l'action. La transformation de l'éq. (I.1.39) est réalisée sur le réseau lorsqu'un opérateur M vérifie:

$$\gamma_5 M + M \gamma_5 = 0. \quad (\text{I.1.41})$$

D'autre part, l'opérateur de l'éq. (I.1.36) satisfait la propriété d'hermiticité (appelée aussi la symétrie \mathfrak{F}):

$$\gamma_5 M \gamma_5 = M^\dagger. \quad (\text{I.1.42})$$

Ainsi, la symétrie chirale est satisfaite sur le réseau lorsque l'opérateur M est anti-hermitique, ce qui est bien le cas dans la formulation *naïve*. Le théorème de Adler-Bell-Jackiw implique alors que la théorie sur réseau ne peut pas contenir l'anomalie axiale: ceci pose un problème de principe puisque nous avons indiqué que cette anomalie avait des conséquences physiques.

Avant d'aborder une solution à ce problème, commençons par indiquer comment l'anomalie axiale est éliminée dans la formulation de l'opérateur de Dirac de l'éq. (I.1.36).

Le problème du «dédoublage» Considérons donc l'éq. (I.1.36) et prenons l'inverse de l'opérateur de Dirac (après une transformée de Fourier) pour exprimer le propagateur $S(p)$ d'un quark de quadri-impulsion p :

$$[M^{-1}]_p = \frac{1}{a} S(p) = \frac{1}{i\gamma_\mu \sin p_\mu a + m_0 a} = \frac{-i\gamma_\mu \sin p_\mu a + m_0 a}{\sum_\mu \sin^2 p_\mu a + m_0^2 a^2}. \quad (\text{I.1.43})$$

où, pour simplifier le problème, on a considéré un champ de quark libre (*i.e.* $\bar{L}(x) = 1$).

A la limite chirale, $m_0 \rightarrow 0$, ce propagateur a des pôles pour tout p_μ vérifiant $\sin^2 p_\mu a = 0$. Donc, à l'intérieur de la zone de Brillouin et du fait de la discrétisation des impulsions (*cf.* l'éq. (I.1.2)), le propagateur contient 16 pôles. Seul celui qui correspond à $\vec{p} = 0$ est physique. Pour revenir au cas du continu il faut donc pouvoir se débarrasser des pôles du type: $p = (\pi, 0, 0, 0)$, $(0, \pi, 0, 0)$, \dots (π, π, π, π) . Chacun de ces pôles peut être interprété comme l'effet d'un nouveau fermion: dans le cas de l'action *naïve* de Dirac on doit donc considérer 16 saveurs de fermions sur le réseau. Cette difficulté est connue sous le nom du problème du «dédoublage».

L'effet physique des «doublons» (les fermions issus de ce problème) est de supprimer l'anomalie axiale et donc d'assurer la symétrie chirale sur le réseau. Il a été démontré [4] que les charges *axiales* des 16 fermions apparaissent par paires et que leur somme s'annule.

En partant de la formulation *naïve*, on est donc confronté à un choix: soit on décide de conserver la symétrie chirale et on doit donc faire face dans les simulations à des saveurs non-physiques de quarks, soit on sacrifie la symétrie chirale et on travaille avec des saveurs physiques de quarks.

Le théorème de Nielsen-Ninomiya Ce problème a été formulé rigoureusement par le théorème «no go» de Nielsen-Ninomiya [5]. Ce théorème a comme hypothèses: (i) Considérer une action comme celle de l'éq. (I.1.35) (*i.e.* quadratique dans les champs de quarks avec un opérateur *anti-hermitique* $M(x - y)$). La transformée de Fourier de M doit être dérivable sur l'ensemble de la zone de Brillouin et doit se comporter comme $\gamma_\mu p_\mu$ à la limite des p_μ petits. (ii) Considérer un courant dépendant (*localement*) des champs de quark. La charge Q associée à ce courant étant *quantifiée*.

Avec ces hypothèses, le théorème de Nielsen-Ninomiya assure que l'opérateur $M(p)$ doit avoir (pour toute valeur propre Q) un nombre égal de fermions «left» et de fermions «right» (*i.e.* les fermions apparaissent par paires indissociables). La conséquence de ce théorème est qu'une théorie locale, préservant la symétrie chirale, doit avoir des «doublons». La «localité» de la théorie doit être comprise sur le réseau comme la propriété assurant que les couplages décroissent exponentiellement avec la distance. Ceci permet de retrouver la localité de la théorie du continu. Cette propriété peut être mise en œuvre sans trop de restrictions sur le réseau. Par contre, si les conditions du théorème de Nielsen-Ninomiya sont vérifiées (ce qui est le cas dans l'action *naïve*) il faut choisir entre éliminer les «doublons» ou briser la symétrie chirale. Nous allons voir par la suite que le choix de Wilson a été de briser l'invariance chirale (qui peut tout de même être restaurée à la limite du continu) afin d'éliminer la multiplicité des saveurs non-physiques de quarks. Le choix

inverse a aussi été proposée (les fermions de Kogut-Susskind ou «staggered» [6, 7]). Ces deux formulations permettent de reconstituer l'anomalie axiale à la limite du continu.

D'une part, la brisure de la symétrie chirale implique l'apparition de nouveaux couplages des opérateurs et la nécessité d'une renormalisation additive (en plus de la renormalisation multiplicative déjà présente dans la théorie du continu) pour certaines quantités physiques (comme la masse des quarks). D'autre part, conserver les doublons pose le problème de l'identification de la saveur physique du quark ainsi que celui du mélange des opérateurs de saveurs différentes.

La solution *idéale* au problème consiste à contourner le théorème de Nielsen-Ninomiya. La possibilité de le faire a été démontrée ces dernières années et constitue un des progrès importants du domaine des réseaux. L'idée permettant de retrouver la symétrie chirale à maille finie (en l'absence de «doublons») passe par l'abandon de la *quantification* de la charge Q . La condition nécessaire pour rétablir les bonnes propriétés chirales sur le réseau est de satisfaire la relation de Ginsparg-Wilson [8]:

$$\gamma_5 D + D \gamma_5 = a D \gamma_5 D. \quad (\text{I.1.44})$$

où D est une matrice reliée à l'opérateur de Dirac M . Les fermions dits de «domain-wall» [9–11] et «d'overlap» [12] réalisent cette relation. Ils conservent donc la symétrie chirale à maille finie tout en éliminant les «doublons» et en rétablissant l'anomalie axiale.

Après avoir présenté la façon la plus directe de discrétiser la QCD sur un réseau, passons à l'étude de l'action fermionique de Wilson qui permet d'éliminer les effets des «doublons».

Chapitre 2

Les fermions de Wilson

Puisque les résultats physiques ne sont obtenus qu'une fois que la limite du continu a été prise, il est possible d'ajouter à l'action des termes proportionnels à la maille a sans pour autant altérer le pouvoir prédictif de la théorie du réseau.

C'est sur ce principe que Wilson a ajouté à l'action fermionique *naïve* un terme d'érivatif proportionnel à a permettant d'éliminer les «doublons» :

$$S^W = -\frac{r}{2a} \sum_{x,\mu} \bar{\Psi}(x) (U_\mu(x)\Psi(x + \hat{\mu}) - 2\Psi(x) + U_\mu^\dagger(x - \hat{\mu})\Psi(x - \hat{\mu})) = ar\bar{\Psi}D^2\Psi, \quad (\text{I.2.1})$$

où r est un paramètre réel généralement pris égal à 1, $r = 1$, mais ce choix est *arbitraire* (tant que $r \neq 0$). Notons de plus que r est un paramètre qui reste fixe.

Ecrivons maintenant l'action complète du secteur fermionique en sommant les eqs. (I.1.35) et (I.2.1):

$$\begin{aligned} S_q^W &= m_0 \sum_x \bar{\Psi}(x)\Psi(x), \\ &+ \frac{1}{2a} \sum_{x,\mu} \bar{\Psi}(x)\gamma_\mu [U_\mu(x)\Psi(x + \hat{\mu}) - U_\mu^\dagger(x - \hat{\mu})\Psi(x - \hat{\mu})] \\ &- \frac{r}{2a} \sum_{x,\mu} \bar{\Psi}(x) [U_\mu(x)\Psi(x + \hat{\mu}) - 2\Psi(x) + U_\mu^\dagger(x - \hat{\mu})\Psi(x - \hat{\mu})], \\ &= \frac{m_0a + 4r}{a} \sum_x \bar{\Psi}(x)\Psi(x) + \frac{1}{2a} \sum_x \bar{\Psi} [(\gamma_\mu - r)U_\mu(x)\Psi(x + \hat{\mu}) \\ &\quad - (\gamma_\mu + r)U_\mu^\dagger(x - \hat{\mu})\Psi(x - \hat{\mu})]. \end{aligned} \quad (\text{I.2.2}) \quad (\text{I.2.3})$$

L'habitude est alors de redéfinir les grandeurs suivantes:

$$\kappa = \frac{1}{2m_0a + 8r}, \quad (\text{I.2.4})$$

$$\Psi \rightarrow \sqrt{m_0a + 4r} \Psi = \frac{1}{\sqrt{2\kappa}} \Psi. \quad (\text{I.2.5})$$

Dans le cas $r = 1$ on peut aussi définir les projecteurs:

$$P_\mu^\pm = \frac{1}{2} (1 \pm \gamma_\mu), \quad (\text{I.2.6})$$

et les opérateurs:

$$D_\mu^+ \Psi(x) = \frac{1}{a} [U_\mu(x) \Psi(x + \hat{\mu}) - \psi(x)], \quad (\text{I.2.7})$$

$$D_\mu^- \Psi(x) = \frac{1}{a} [\Psi(x) - U_\mu^\dagger(x - \hat{\mu}) \Psi(x - \hat{\mu})]. \quad (\text{I.2.8})$$

En rassemblant ces définitions on peut écrire une expression compacte de l'action fermionique de Wilson:

$$S_q^W = \sum_x \left[\bar{\Psi}(x) \Psi(x) - \kappa \sum_\mu \bar{\Psi}(x) (P_\mu^+ D_\mu^- - P_\mu^- D_\mu^+) \Psi(x) \right], \quad (\text{I.2.9})$$

$$= \sum_{x,y} \bar{\Psi}(x) M_{x,y}^W \Psi(y), \quad (\text{I.2.10})$$

où l'opérateur de Dirac-Wilson $M_{x,y}^W$ s'écrit:

$$M_{x,y}^W a = \delta_{xy} - \kappa \sum_\mu [(r - \gamma_\mu) U_\mu(x) \delta_{x,y-\hat{\mu}} + (r + \gamma_\mu) U_\mu^\dagger(x - \hat{\mu}) \delta_{x-\hat{\mu},y}]. \quad (\text{I.2.11})$$

L'opérateur $M_{x,y}^W$ a une interprétation simple, il correspond à deux contributions à la dynamique des quarks: le terme δ_{xy} maintient le quark sur le même site et le deuxième terme indique la possibilité de passer au site voisin avec une probabilité proportionnelle à κ . Ce paramètre est d'après l'éq. (I.2.4) relié à la masse nue du quark. Les paramètres β (défini à partir du couplage nu g_0) et κ sont les seuls paramètres (variables) de la QCD sur réseau. Tant que la théorie de jauge sur réseau est locale et ne dépend que de ces deux paramètres des arguments du groupe de renormalisation suggèrent que la limite du continu de la théorie est dans la même classe d'universalité que la QCD.

A la limite $m_0 \rightarrow 0$, on définit la valeur critique du paramètre $\kappa = \kappa_c$. On peut ainsi utiliser l'éq. (I.2.4) et exprimer la masse nue de la façon suivante:

$$m_0 a \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\kappa} - \frac{1}{\kappa_c} \right). \quad (\text{I.2.12})$$

Cette expression est définie dans la cas de la théorie libre, on a alors $\kappa_c = 1/8r$. En présence d'interactions, *i.e.* lorsque $g_0 \neq 0$, la valeur de κ_c dépend de la maille. Pour éviter des confusions, on utilise alors la notation m_q :

$$m_q a \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\kappa} - \frac{1}{\kappa_c} \right), \quad (\text{I.2.13})$$

où m_q n'est plus le paramètre du lagrangien dans l'éq. (I.2.3). La masse m_q est une grandeur non-perturbative issue de la simulation. L'expression de l'éq. (I.2.13) indique alors que la masse des quarks subit une renormalisation additive: $m_q = m_0 - m_c$, où m_c est la masse générée par la brisure de la symétrie chirale du fait de la présence du paramètre r . L'expression de l'éq. (I.2.13) permet d'extraire la valeur des masses des quarks à partir des simulations.

Précisons comment l'action de Wilson a fait disparaître les «doublons». Pour cela, comme auparavant, écrivons l'expression du propagateur $\mathcal{S}^W(p)$ des quarks:

$$\left[(M^W)^{-1} \right]_p = \frac{1}{a} S^W(p) = \frac{-i\gamma_\mu \sin p_\mu a + m_0 a - r \sum_\mu (\cos p_\mu a - 1)}{\sum_\mu \sin^2 p_\mu a + (m_0 a - r \sum_\mu (\cos p_\mu a - 1))^2}. \quad (\text{I.2.14})$$

Pour toute valeur non nulle de r , le propagateur de la limite chirale ne présente plus des pôles non physiques. Le seul pôle lorsque $m_0 = 0$ est à $p = 0$.

2.1 Les symétries de l'action fermionique de Wilson

Étudions maintenant les propriétés de transformation de l'action fermionique de Wilson sous l'effet des symétries. De même que dans la version *naïve*, les symétries de jauge et discrètes (C , P et T) sont effectivement respectées. Sous l'action des symétries discrètes, les transformations du propagateur $S^W(x, y, [U])$ (où l'on explicite la dépendance dans les coordonnées spatiales et en fonction de la configuration de jauge U) s'écrivent:

$$C : \quad S^W(x, y, [U]) \rightarrow \gamma_4 \gamma_2 \left(S^W(x, y, [U^C]) \right)^T \gamma_2 \gamma_4, \quad (\text{I.2.15})$$

$$P : \quad S^W(x, y, [U]) \rightarrow \gamma_4 S^W(x^P, y^P, [U^P]) \gamma_4, \quad (\text{I.2.16})$$

$$T : \quad S^W(x, y, [U]) \rightarrow \gamma_4 \gamma_5 S^W(x^T, y^T, [U^T]) \gamma_5 \gamma_4, \quad (\text{I.2.17})$$

$$H : \quad S^W(x, y, [U]) \rightarrow \gamma_5 \left(S^W(y, x, [U]) \right)^\dagger \gamma_5. \quad (\text{I.2.18})$$

On a aussi indiqué dans cette liste les propriétés sous la transformation H , dite «hermitique» ou « γ_5 ». Ces symétries permettent par exemple de savoir si un corrélateur est réel ou imaginaire. On peut moyenner sur les configurations, avant et après transformation, et

améliorer ainsi la précision des résultats. Dans le cas de la symétrie H , la transformation de l'éq. (I.2.18) permet d'éviter de recalculer le propagateur de l'anti-quark une fois que celui du quark a été obtenu: ceci représente une économie considérable en temps de calcul.

Comme nous l'avons déjà signalé, l'action fermionique de Wilson brise la symétrie chirale. La raison en est que l'opérateur de l'éq. (I.2.11) n'est pas anti-hermitique (ce qui d'après les eqs. (I.1.41)-(I.1.42) est la condition pour préserver la symétrie). En effet, M vérifie:

$$M_W^\dagger(\kappa, r) = M_W(-\kappa, -r). \quad (\text{I.2.19})$$

Nous avons déjà évoqué quelques unes des conséquences de la brisure de cette symétrie. Indiquons tout de même une dernière qui a pour effet d'interdire des simulations à très faibles masses de quarks: l'absence de symétrie autorise l'apparition de valeurs propres nulles de l'opérateur de Dirac M^W . En effet, si pour une configuration de champs de jauge, M^W génère une valeur propre réelle λ , il n'est pas interdit qu'elle s'annule sous l'effet d'une contribution $-\lambda$ de la masse nue du quark m_0 : c'est ce qu'on appelle une «configuration exceptionnelle». Lorsque m_0 décroît, le nombre de «configurations exceptionnelles» augmente et l'opérateur de Dirac ne peut donc plus être inversé pour calculer les propagateurs. Ainsi, en pratique, les simulations avec des fermions de Wilson ne permettent pas de diminuer arbitrairement la valeur des masse des quarks.

Une proposition récente, connue sous le nom de «twisted mass QCD», supprime les «configurations exceptionnelles» des fermions de Wilson [13]. L'idée a été d'ajouter dans l'expression de l'opérateur de Dirac un terme permettant d'éviter l'annulation de son déterminant (et donc de garantir qu'il soit toujours inversible).

2.2 Autres propriétés des fermions de Wilson

Précisons quelques unes des conséquences de l'élimination des «doublons». En leur donnant une masse $2rn/a$, où n provient de la discrétisation de l'impulsion dans la zone de Brillouin, on garantit que les «doublons» se découplent de la dynamique à la limite du continu. Il a été démontré que l'anomalie axiale est alors restaurée [4].

Le fait d'avoir une correspondance univoque entre les fermions du réseau et ceux du continu fournit une formulation simple (analogue à celle de la QCD) des opérateurs fermioniques. En particulier, les champs interpolants (*i.e.* les opérateurs permettant d'exciter le vide à travers les nombres quantiques des hadrons que l'on cherche à simuler) conservent la même forme que dans la théorie du continu.

En l'absence des symétries issues des éqs. (I.1.37) et (I.1.39), les courants vectoriel et axial ne sont pas conservés. Ils doivent donc être renormalisés. Les constantes de renormalisation Z_V et Z_A doivent être déterminées de préférence non-perturbativement. D'autre part, le mélange des opérateurs de chiralités différentes n'est pas interdit. L'étude de certains éléments de matrice est donc bien plus complexe en l'absence de symétrie chirale. Comme nous allons voir par la suite, les identités de Ward entre opérateurs peuvent recevoir des contributions proportionnelles à ra . Ceci a pour effet de changer le comportement chirale de certains opérateurs. Par exemple, les opérateurs à quatre fermions intervenant dans les éléments de matrice des hamiltoniens de l'interaction faible (en particulier dans le mélange $K^0 - \bar{K}^0$) n'ont pas le même comportement chirale sur le réseau et dans le continu.

Finalement, notons que le terme rajouté par Wilson (*cf.* l'éq. (I.2.1)) implique que les corrections par rapport à l'action du continu sont d'ordre a et qu'elles peuvent donc être assez grandes. Ceci sera l'objet de l'introduction d'un terme *d'amélioration* de l'action permettant d'éliminer tous les effets d'ordre $\mathcal{O}(a)$. Nous reviendrons sur ce point par la suite. Pour l'instant, montrons comment extraire les informations sur les observables physiques à partir de l'action de la QCD sur réseau.

Chapitre 3

L'étude de la QCD par des outils de physique statistique

Nous avons d'écidé dès le départ de travailler dans l'espace euclidien. Cependant ce n'est que maintenant que nous allons voir les conséquences pratiques de ce choix.

En théorie des champs, la détermination des fonctions de Green passe par le calcul de l'intégrale de chemin sur les champs de quarks et de gluons. Considérons le cas de l'espace minkowskien et écrivons l'expression d'une fonction de Green à deux points pour les opérateurs \mathcal{O} et \mathcal{O}' dépendant des champs A_μ , Ψ et $\bar{\Psi}$:

$$\langle 0 | \mathcal{O}(x) \mathcal{O}'(0) | 0 \rangle = \frac{1}{Z} \int D[A_\mu(z)] D[\Psi(z)] D[\bar{\Psi}(z)] e^{iS_{QCD}(A_\mu, \Psi, \bar{\Psi})} \mathcal{O}(x) \mathcal{O}'(0), \quad (\text{I.3.1})$$

où le facteur Z assure la normalisation de telle sorte que $\langle 0 | \mathbb{1} | 0 \rangle = 1$ et où $S_{QCD}(A_\mu, \Psi, \bar{\Psi})$ est l'action de la QCD. Les mesures d'intégration sur les champs dépendent de toutes les positions le long des chemins considérés.

Quand on passe du continu au réseau, l'éq. (I.3.1) est simplifiée considérablement: l'intégrale de chemin ne dépend plus que d'un nombre fini de variables qu'on peut envisager d'introduire dans un ordinateur.

Cependant, à ce stade, l'étude est encore inabordable en raison du comportement oscillatoire du terme $e^{iS_{QCD}}$: les fluctuations produites par la moindre variation des champs rendent impossible l'intégration. Grâce au passage à l'espace euclidien les variables temporelles deviennent complexes sous l'effet de la rotation de Wick et l'on peut vérifier que l'action devient:

$$i S_{QCD}^{(M)} = -S_{QCD}^{(E)}. \quad (\text{I.3.2})$$

Ecrivons alors l'expression de la fonction de Green de l'éq. (I.3.1) dans l'espace euclidien du réseau:

$$\langle 0 | \mathcal{O}(x) \mathcal{O}'(0) | 0 \rangle = \frac{1}{Z} \int \prod_{z,\mu} d[U_\mu(z)] \prod_{z,\mu} d[\Psi(z)] d[\bar{\Psi}(z)] e^{-S_{QCD}(A_\mu, \Psi, \bar{\Psi})} \mathcal{O}(x) \mathcal{O}'(0), \quad (\text{I.3.3})$$

où S_{QCD} est la somme des contributions de pure jauge et de fermions à l'action du réseau (cf. les éqs. (I.1.28) et (I.2.10)): $S_{QCD} = S_g^W + S_q^W$. En passant du minkowskien à l'euclidien on arrive à donner une formulation mathématiquement rigoureuse à l'intégrale de chemin (elle devient une intégrale de Wiener).

Sous la forme de l'éq. (I.3.3), la fonction de Green peut être étudiée numériquement à condition que S_{QCD} soit définie-positive. L'action de jauge de l'éq. (I.1.28) est positive puisque la plaquette est un élément de $SU(3)$. L'action fermionique peut par contre changer de signe mais, dans certaines conditions, elle peut être rendue positive. Dans ces cas, du fait du prolongement analytique dans l'euclidien et de l'utilisation d'un réseau, la théorie des champs peut être réinterprétée comme un système statistique. L'intégrale de chemin de l'exponentielle de l'action devient alors une fonction de partition suivant une loi de probabilité de Boltzmann, $e^{-S_{QCD}}$.

Donnons quelques détails sur les propriétés et sur les simplifications possibles de l'éq. (I.3.3).

3.1 L'intégrale de chemin fermionique et l'approximation

«quenched»

Les champs fermioniques sont des variables anti-commutantes de Grassmann qui vérifient des relations particulières sous l'intégration:

$$\int d\Psi d\bar{\Psi} = \int d\Psi d\bar{\Psi} \Psi = \int d\Psi d\bar{\Psi} \bar{\Psi} = 0, \quad (\text{I.3.4})$$

$$\int d\Psi \Psi = \int d\bar{\Psi} \bar{\Psi} = i, \quad (\text{I.3.5})$$

$$\int d\Psi d\bar{\Psi} \Psi \bar{\Psi} = 1. \quad (\text{I.3.6})$$

Comme les champs de fermions n'apparaissent que linéairement dans l'action, ces propriétés d'intégration permettent de calculer analytiquement l'intégrale de chemin fermionique et de restreindre les variables d'intégration à la partie de jauge. Dans ce cas, l'ex-

pression du facteur Z devient:

$$Z \equiv \int \prod_{z,\mu} d[U_\mu(z)] \prod_{z,\mu} d[\Psi(z)] d[\bar{\Psi}(z)] e^{-(S_g^W + S_q^W)}, \quad (\text{I.3.7})$$

$$= \int \prod_{z,\mu} d[U_\mu(z)] \det M e^{-S_g^W}, \quad (\text{I.3.8})$$

où M est l'opérateur de Dirac de l'éq. (I.2.11) pour une saveur de quark.

L'expression de l'éq. (I.3.8) (et son extension au calcul des fonctions de Green, cf. l'éq. (I.3.3)) montre que les champs des fermions évoluent sous l'effet d'un «champ de fond» gluonique qu'on appelle usuellement le champ de la mer. Le secteur fermionique se réduit au calcul du déterminant de M . Celui-ci contient les effets de la polarisation du vide de la théorie, *i.e.* la possibilité de créer et d'annihiler les boucles de quarks de la mer.

La simplification de principe que représente le fait de pouvoir intégrer les champs de fermions suppose tout de même, dans la pratique, de devoir calculer le déterminant fermionique. Ceci se révèle être extrêmement coûteux en puissance de calcul. L'opérateur de Dirac dépend des champs U_μ et son déterminant doit, d'après l'éq. (I.3.8), être recalculé à chaque variation des champs de jauge. Le déterminant étant un objet non local, tenir compte de ces variations implique un temps de calcul proportionnel au volume V du réseau. De plus chacune des saveurs de quarks fait apparaître un déterminant différent. Lorsqu'on considère N_f saveurs de quark (dégénérées), on peut écrire la dépendance exponentielle de l'action sous la forme:

$$(\det M)^{N_f} \exp(-S_g^W) = \exp(-S_g^W + N_f \text{Tr} \ln(M)). \quad (\text{I.3.9})$$

Ainsi la variation de l'action sous l'effet d'un changement δU du champ de jauge peut être exprimée de la manière suivante:

$$\delta S_{QCD} = -\delta S_g^W + N_f \delta(\text{Tr} \ln(M)) = -\delta S_g^W + N_f \text{Tr} \delta U M^{-1}. \quad (\text{I.3.10})$$

On peut observer que la variation de la partie de jauge, δS_g^W , est locale alors que celle de la partie fermionique fait intervenir l'inverse de l'opérateur de Dirac (le propagateur) et est donc hautement non locale.

Finalement, le calcul du déterminant lui-même est laborieux compte tenu du nombre élevé de variables en jeu et de l'étalement des valeurs propres à déterminer. Dans le cas des fermions, le nombre de variables est donné par $N = (4 \times 3) V$, où l'on a considéré la dépendance spinorielle, en couleur et en volume. En prenant un volume correspondant aux réseaux habituellement utilisés, $V \sim 30 \times 40$, on a alors $N \sim 10^7$ variables à considérer. Le calcul du déterminant revient à inverser l'opérateur M . Lorsque les masses de quarks

sont faibles, la vitesse de convergence de l'algorithme est réduite considérablement parce que le rapport entre les grandes et les petites valeurs propres de l'opérateur M commence à diverger.

Ces difficultés obligent souvent à éviter le calcul du déterminant de M en le supposant égal à une constante. C'est ce qu'on appelle l'approximation «quenched». La conséquence physique de cette approximation est que les effets des boucles de fermions de la mer ne peuvent plus être considérés. Ainsi, la théorie «quenched» est une version modifiée de la QCD mais l'expérience montre que ces deux théories ne sont pas très différentes: la théorie «quenched» est confinante, asymptotiquement libre et conserve la propriété de brisure spontanée de la symétrie chirale en donnant une valeur non nulle du condensat des quarks. Cependant, au cours des dernières années, plusieurs secteurs où les effets des quarks «dynamiques» (*i.e.* de la mer) ne sont pas négligeables ont été identifiés. Ainsi, on assiste actuellement à une utilisation de plus en plus habituelle des simulations «unquenched» *i.e.* incluant des effets de quarks dynamiques. Ceci a été rendu possible par l'amélioration des performances des ordinateurs de calcul parallèle.

Lorsqu'on considère plusieurs saveurs de quarks de la mer, il faut pouvoir garantir que l'action soit définie-positive afin d'éviter des grandes variations de l'exponentielle de l'action de l'éq. (I.3.8). La positivité est effectivement accomplie pour un nombre pair de saveurs de quarks (mais pas nécessairement pour le cas impair). Dans l'eulidien, le déterminant de M est de manière générale un nombre complexe. Dans le cas des fermions de Wilson on peut démontrer qu'il est réel (les valeurs propres complexes de M viennent par paires qui sont complexes conjuguées l'une de l'autre). Cependant, les valeurs propres réelles peuvent être négatives. Dans le cas $N = 2$, il est cependant facile de voir que le déterminant est réel et positif puisque $(\det M)^2 = \det(M^\dagger M)$. Ainsi, les simulations incluant les effets des quarks de la mer correspondent généralement à $N = 2$ saveurs d'égénérées de quarks (une saveur pour M et une autre pour M^\dagger). Ces simulations sont appelées «partiellement quenched». Quelques résultats avec $N = 2 + 1$ (*i.e.* deux saveurs d'égénérées et une troisième de masse élevée) ont été présentés ces dernières années. Les algorithmes permettant de traiter ces cas font cependant encore l'objet de discussions et doivent être considérés comme étant en cours de d'amélioration.

La difficulté de l'approximation «quenched» est qu'elle ne peut être testée sur réseau que par des simulations «unquenched» (ou plus exactement «partiellement quenched»). Afin de comprendre les effets du «quenching» il faut donc: d'une part, utiliser les simulations «partiellement quenched» comme point de comparaison pour estimer les erreurs systématiques de la méthode et, d'autre part, vérifier que les résultats «partiellement quenched» sont en effet proches de ceux de la théorie complète (*i.e.* la QCD). Une fois cette

étude effectuée pour certaines grandeurs pouvant être mesurées expérimentalement on peut utiliser la valeur de l'écart relatif par rapport aux déterminations du réseau comme une estimation des incertitudes systématiques de la méthode. Il est utile de remarquer que ces erreurs systématiques seront mieux contrôlées à l'aide des moyens numériques à venir.

3.2 L'intégrale de chemin sur les champs de jauge

Travailler avec des champs U_μ (au lieu des champs A_μ) permet de profiter du fait que les champs de jauge sont bornés sur $[0, 1]$ (cf. l'éq. (I.1.4)). On peut alors utiliser la mesure de Haar pour l'intégration des champs U de $SU(3)$. La propriété principale de cette mesure est donnée par:

$$\int dU \mathcal{O}(U) = \int dU \mathcal{O}(UV), \quad (\text{I.3.11})$$

où V est un élément de $SU(3)$ et $\mathcal{O}(U)$ un opérateur quelconque dépendant de U . L'intérêt de cette mesure est qu'elle préserve l'invariance de jauge. Cette invariance et le fait que l'on considère un nombre fini de variables (le volume du groupe de jauge est alors fini) est ce qui permet de laisser de côté la partie de fixation de jauge du lagrangien (cf. l'éq. (I.1.31)) sans changer les résultats physiques. Cette mesure d'intégration est aussi invariante sous les symétries discrètes C , P et T et l'on peut ainsi démontrer que les valeurs moyennes dans le vide des corrélateurs du réseau (d'impulsion nulle) sont toujours réelles.

3.3 Les simulations numériques par la méthode de Monte Carlo

Après avoir montré les propriétés de l'intégration des champs de jauge et de fermions, revenons à l'étude de fonction de Green de l'éq. (I.3.3) que l'on peut écrire en utilisant l'éq. (I.3.8):

$$\langle 0 | \mathcal{O}(x) \mathcal{O}'(0) | 0 \rangle = \frac{1}{Z} \int \prod_{z,\mu} dU_\mu(z) \det(M^W) \mathcal{O}(x) \mathcal{O}'(0) e^{-S_g^W}, \quad (\text{I.3.12})$$

où, d'après l'éq. (I.1.28), on a:

$$S_g^W = \beta \sum_x \sum_{\mu < \nu} (1 - P_{\mu\nu}(x)) = \beta \tilde{S}_g^W. \quad (\text{I.3.13})$$

Cette fonction de Green est, dans le langage de la physique statistique, une fonction de corrélation. La théorie de jauge sur réseau peut être vue de manière équivalente comme

une théorie des champs ou comme un système de physique statistique. Cette propriété est d'autant plus utile que même la renormalisation (le fait d'envoyer le cutoff à l'infini pour retrouver les propriétés physiques) peut être comprise, du point de vue du système statistique du réseau, comme le fait de faire tendre la maille du réseau vers zéro.

L'intégrale de chemin sur les champs de jauge de la théorie des champs devient dans le système statistique une somme sur les configurations des champs de jauge. La fonction de Green est transformée en une moyenne probabiliste sur l'ensemble de ces configurations. Une configuration est la donnée des champs de jauge sur tous les liens du réseau. Pour obtenir des résultats physiques il faut en principe moyenner sur un nombre infini de configurations. Cependant, comme la loi de probabilité est boltzmannienne, la plupart des configurations sont exponentiellement supprimées. En pratique, on ne peut considérer qu'un nombre fini de configurations dont la distribution doit suivre une loi aussi proche que possible de la loi théorique (et d'autant plus proche que le nombre des configurations est grand). Ainsi, pour assurer que la moyenne soit prise sur des configurations d'écorchées et en raison du nombre élevé de variables à considérer (comme il y a huit composantes des champs de jauge, le nombre de variables gluoniques est encore plus grand que celui des fermions), on doit faire appel à des méthodes de simulation de Monte Carlo.

Les algorithmes de type Monte Carlo [14] permettent de générer stochastiquement une configuration indépendante en partant d'une configuration initiale. La règle de Metropolis (*i.e.* le fait de générer aléatoirement un nombre qui sera accepté ou rejeté suivant une loi de probabilité) permet de fixer la probabilité de modifier la valeur du champ de jauge sur un lien. Cette probabilité définit alors un maillon de la chaîne de Markov qui consiste à construire une marche «aléatoire» (biaisée par une loi de probabilité) de telle sorte que le système évolue vers «l'équilibre thermique». La thermalisation indique qu'après un nombre suffisant de pas de la chaîne de Markov (ce nombre d'itérations est relié au temps d'auto-corrélation du système) on peut engendrer une configuration indépendante de l'état initial et vérifiant la distribution de Boltzmann $e^{-\beta \tilde{S}_g^W}$. L'appellation «équilibre thermique» vient de la présence du facteur de Boltzmann β . Dans le cas qui nous intéresse, β n'a pas de rapport avec la température. Il y a cependant une similitude entre la température d'un système thermodynamique et l'inverse de la constante de couplage: la phase d'ordonnée à grande température correspond à la liberté asymptotique et la phase de basse température à celle des effets du confinement. En répétant N_{conf} fois le processus de génération de configurations, le théorème de la limite centrale permet de montrer que la distribution des observables physiques (la valeur moyenne dans le vide des opérateurs) est gaussienne et que les erreurs statistiques sont promotionnelles à $1/\sqrt{N_{\text{conf}}}$. Cette méthode fournit des résultats de plus en plus exacts lorsque le nombre de configurations croît et devient exacte

lorsque $N_{\text{conf}} \rightarrow \infty$.

Ecrivons l'expression de la fonction de corrélation de l'éq. (I.3.12) après intégration par la méthode de Monte-Carlo:

$$\langle 0 | \mathcal{O}(x) \mathcal{O}'(0) | 0 \rangle = \frac{1}{N_{\text{conf}}} \sum_{n=1}^{N_{\text{conf}}} \mathcal{O}_n(x) \mathcal{O}'_n(0) + O\left(\frac{1}{\sqrt{N_{\text{conf}}}}\right); \quad (\text{I.3.14})$$

l'indice n dans l'opérateur \mathcal{O}_n indique qu'il dépend de la $n^{\text{ème}}$ configuration des champs de jauge.

Passons maintenant à l'étude des éléments de matrices hadroniques et du spectre de la QCD à partir des simulations sur réseau.

Chapitre 4

Le calcul des éléments de matrices hadroniques

Le principe du calcul des éléments de matrices hadroniques et du spectre de la théorie est basé sur l'étude de fonctions de Green comme celle que nous avons présentée auparavant (cf. l'éq. (I.3.12)). Par un choix approprié des opérateurs \mathcal{O} on va pouvoir fixer les nombres quantiques des hadrons ou des courants et extraire ainsi les propriétés physiques.

4.1 Les champs interpolants

On appelle champ interpolant l'opérateur composé de champs fermioniques permettant d'exciter le vide de la théorie afin de créer des états hadroniques possédant des nombres quantiques prédéfinis. Ils peuvent être interprétés comme des «sources» de hadrons construites à partir des champs de quarks (il n'existe pas en QCD d'opérateurs de création de hadrons). Une des richesses majeures de la QCD sur réseau est qu'en partant des champs fondamentaux de la théorie de l'interaction forte on peut arriver à décrire les états liés hadroniques.

Les champs interpolants permettent de spécifier la composition en spin, parité et conjugaison de charge des états hadroniques. Ainsi, dans le cas des mésons, un choix convenable des champs interpolants permet de créer les états scalaires, pseudoscalaires, vectoriels, *etc.* Notons par ailleurs que le choix des champs interpolants n'est pas unique *i.e.* on peut engendrer les mêmes états à l'aide de différents opérateurs. Réciproquement, un champ interpolant peut créer simultanément différents états hadroniques: les excitations du vide engendrent un méson, les excitations radiales qui lui sont associées ou encore des états à

plusieurs particules.

Le tableau 4.1 présente les différents champs interpolants utilisés pour créer des états mésoniques:

Etat	Notation $J_\Gamma(x)$	J^{PC}	Champ interpolant $\bar{\Psi}_q(x) \Gamma \Psi_{q'}(x)$
Scalaire	$J_S(x)$	0^{++}	$\bar{\Psi}_q(x) \Psi_{q'}(x)$
		0^{++}	$\bar{\Psi}_q(x) \gamma_0 \Psi_{q'}(x)$
Pseudoscalaire	$J_P(x)$	0^{-+}	$\bar{\Psi}_q(x) \gamma_5 \Psi_{q'}(x)$
		0^{-+}	$\bar{\Psi}_q(x) \gamma_0 \gamma_5 \Psi_{q'}(x)$
Vecteur	$J_V(x)$	1^{--}	$\bar{\Psi}_q(x) \gamma_i \Psi_{q'}(x)$
		1^{--}	$\bar{\Psi}_q(x) \gamma_i \gamma_0 \Psi_{q'}(x)$
Axial	$J_A(x)$	1^{++}	$\bar{\Psi}_q(x) \gamma_i \gamma_5 \Psi_{q'}(x)$
Tenseur	$J_T(x)$	1^{+-}	$\bar{\Psi}_q(x) \gamma_i \gamma_j \Psi_{q'}(x)$

TAB. 4.1 – Champs interpolants locaux permettant de créer les différents états mésoniques composés de deux quarks q et q' .

Notons qu'il est aussi possible de considérer des champs interpolants non locaux correspondant à des sources étendues. Le but de cet étirement est de permettre l'introduction de la contribution de la fonction d'onde du méson que l'on cherche à créer. Par un choix adéquat de la fonction d'onde, il est possible de renforcer la contribution de l'état fondamental ou d'isoler la contribution d'un état excité. Ces méthodes dites de «smearing» seront présentées en détail lorsqu'on abordera les calculs relatifs aux mésons lourds-légers sur réseau.

4.2 Les éléments de matrices hadroniques

4.2.1 Les corrélateurs à deux points

Considérons une fonction de corrélation à deux points comme celle que l'on a étudiée précédemment (cf. l'éq. (I.3.3)). Dans le cas présent, les opérateurs \mathcal{O} sont des champs interpolants que nous notons de façon générique $\mathcal{I}_\Gamma(x)$, où l'indice Γ rappelle leur contenu en matrices de Dirac (cf. tableau 4.1). La transformée de Fourier spatiale du

corrélateur à deux points est appelée $C_{\Gamma}^{(2)}$ et peut être écrite de la manière suivante:

$$C_{\Gamma\Gamma}^{(2)}(t_x, \vec{p}) = \int d\vec{x} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} \langle 0 | J_{\Gamma}(x) J_{\Gamma}^{\dagger}(0) | 0 \rangle, \quad (\text{I.4.1})$$

où \vec{p} est la partie spatiale de la quadri-impulsion transférée aux champs de quarks au point x .

Les propagateurs des quarks Commençons par exprimer le corrélateur $C_{\Gamma\Gamma}^{(2)}$ en termes des propagateurs des quarks. Pour cela considérons une expression générique des champs interpolants $J_{\Gamma}(x)$ de la forme:

$$J_{\Gamma}(x) = \bar{\Psi}_q(x) \Gamma \Psi_{q'}(x). \quad (\text{I.4.2})$$

On peut alors récrire l'éq. (I.4.2) sous la forme:

$$C_{\Gamma\Gamma}^{(2)}(t_x, \vec{p}) = \int d\vec{x} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} \langle 0 | \bar{\Psi}_q(x) \Gamma \Psi_{q'}(x) \bar{\Psi}_{q'}(0) \Gamma \Psi_q(0) | 0 \rangle, \quad (\text{I.4.3})$$

Les contractions de Wick permettent d'exprimer ce corrélateur en fonction des propagateurs des quarks q et q' :

$$C_{\Gamma\Gamma}^{(2)}(t_x, \vec{p}) = \int d\vec{x} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} \langle 0 | \text{Tr} S_q(0, x) \Gamma S_{q'}(x, 0) \Gamma | 0 \rangle, \quad (\text{I.4.4})$$

où le propagateur du quark est donné par: $S_q(x, y) = (M_q^{-1})_{(x,y)} = \langle \Psi_q(x) \bar{\Psi}_q(y) \rangle$.

C'est sous cette forme que l'on calcule les corrélateurs sur le réseau. Ce calcul suppose l'inversion de l'opérateur de Dirac M de chaque saveur de quark. L'éq. (I.4.4) montre que l'invariance de jauge est bien préservée pour les corrélateurs puisqu'ils sont formés de propagateurs de quarks connectés (à l'origine et au point x).

L'extraction des éléments de matrice et du spectre Reprenons maintenant l'expression du corrélateur de l'éq. (I.4.1) et considérons l'ensemble complet des états de l'espace de Hilbert:

$$\sum_n \frac{|H_{\Gamma}^{(n)}\rangle\langle H_{\Gamma}^{(n)}|}{2E_{H_{\Gamma}^{(n)}}}, \quad (\text{I.4.5})$$

où l'on note $H_{\Gamma}^{(n)}$ le $n^{\text{ème}}$ état excité hadronique possédant les nombres quantiques fixés par le champ interpolant J_{Γ} . La normalisation des états est donnée par: $\langle H_{\Gamma}^{(n)} | H_{\Gamma}^{(n)} \rangle = 2E_{H_{\Gamma}^{(n)}}$.

Introduisons à présent l'éq. (I.4.5) dans le corrélateur de l'éq. (I.4.1):

$$C_{\Gamma\Gamma}^{(2)}(t_x, \vec{p}) = \int d\vec{x} \langle 0 | J(x) J_{\Gamma}^{\dagger}(0) | 0 \rangle = \sum_n \int d\vec{x} \langle 0 | J(x) \frac{|H_{\Gamma}^{(n)}\rangle\langle H_{\Gamma}^{(n)}|}{2E_{H_{\Gamma}^{(n)}}} J_{\Gamma}^{\dagger}(0) | 0 \rangle. \quad (\text{I.4.6})$$

On peut maintenant faire agir l'opérateur de Heisenberg des translations dans l'espace (euclidien):

$$C_{\Gamma\Gamma}^{(2)}(t_x, \vec{p}) = \sum_n \langle 0 | J_\Gamma(0) e^{-\mathcal{H}t_x} \frac{|H_\Gamma^{(n)}\rangle \langle H_\Gamma^{(n)}|}{2E_{H_\Gamma^{(n)}}} J_\Gamma^\dagger(0) | 0 \rangle. \quad (\text{I.4.7})$$

Les valeurs propres de l'hamiltonien \mathcal{H} correspondent aux énergies des états $|H_\Gamma^{(n)}\rangle$:

$$\mathcal{H} |H_\Gamma^{(n)}\rangle = E_{H_\Gamma^{(n)}} |H_\Gamma^{(n)}\rangle. \quad (\text{I.4.8})$$

En appliquant l'hamiltonien \mathcal{H} , on obtient alors,

$$C_{\Gamma\Gamma}^{(2)}(t_x, \vec{p}) = \sum_n \frac{|\langle 0 | J_\Gamma(0) | H_\Gamma^{(n)} \rangle|^2}{2E_{H_\Gamma^{(n)}}} e^{-E_{H_\Gamma^{(n)}} t_x}, \quad (\text{I.4.9})$$

où, dans le cas particulier où l'on prend les mêmes champs interpolants à l'origine et au point x , on peut faire apparaître le module au carré de l'élément de matrice d'annihilation $\langle 0 | J_\Gamma(0) | H_\Gamma^{(n)} \rangle$. Cet élément de matrice est souvent noté $\mathcal{Z}_\Gamma^{(n)}$:

$$\mathcal{Z}_\Gamma^{(n)} \equiv |\langle 0 | J_\Gamma(0) | H_\Gamma^{(n)} \rangle|^2. \quad (\text{I.4.10})$$

On obtient ainsi l'expression:

$$C_{\Gamma\Gamma}^{(2)}(t_x, \vec{p}) = \mathcal{Z}_\Gamma^{(0)} \frac{e^{-E_{H_\Gamma^{(0)}} t_x}}{2E_{H_\Gamma^{(0)}}} + \mathcal{Z}_\Gamma^{(1)} \frac{e^{-E_{H_\Gamma^{(1)}} t_x}}{2E_{H_\Gamma^{(1)}}} + \dots \quad (\text{I.4.11})$$

L'intérêt de travailler dans l'euclidien est que l'opérateur de translation engendre une exponentielle dont l'argument est réel et négatif. Or, lorsqu'on considère des excitations d'ordre de plus en plus élevées, l'énergie augmente: on peut ainsi négliger les effets des excitations $n \geq 1$ lorsque $t_x \rightarrow \infty$. Dans cette limite, seul l'état fondamental peut contribuer à la fonction de corrélation:

$$C_{\Gamma\Gamma}^{(2)}(t_x, \vec{p}) \xrightarrow{t_x \rightarrow \infty} \mathcal{Z}_\Gamma \frac{e^{-E_{H_\Gamma} t_x}}{2E_{H_\Gamma}}, \quad (\text{I.4.12})$$

où pour simplifier les notations on a éliminé l'indice '(0)' de l'état fondamental. Ainsi, de l'étude de la dépendance en temps de la fonction de corrélation on peut tirer les valeurs des éléments de matrice (par exemple les \mathcal{Z}) et des énergies des hadrons.

Il est facile de montrer que lorsqu'on impose des conditions périodiques aux bords du réseau, une contribution au signal se propageant dans le sens inverse du temps (correspondant à la propagation d'une antiparticule) doit être incluse. D'autre part, l'expression du propagateur de l'éq. (I.2.14) dans l'espace de configuration fait apparaître un terme d'énergie qui impose la transformation $aE \rightarrow \sinh(aE)$.

Si on prend en compte ces deux effets l'expression de la fonction de corrélation de l'éq. (I.4.14) devient finalement :

$$C_{\Gamma\Gamma}^{(2)}(t_x, \vec{p}) = \frac{\mathcal{Z}_\Gamma}{2 \sinh(E_{H_\Gamma})} \left[e^{-E_{H_\Gamma} t_x} + e^{-E_{H_\Gamma} (T-t_x)} \right], \quad (\text{I.4.13})$$

$$= \frac{\mathcal{Z}_\Gamma}{\sinh(E_{H_\Gamma})} e^{-E_{H_\Gamma} t_x/2} \cosh[E_{H_\Gamma} (T - t_x)], \quad (\text{I.4.14})$$

où T est la dimension temporelle du réseau.

Sur le réseau, l'énergie du hadron vérifie une relation de dispersion analogue à celle d'Einstein, $E^2 = m^2 + \vec{p}^2$. L'équivalent sur le réseau s'écrit :

$$\sinh^2\left(\frac{E_{H_\Gamma}}{2}\right) = \sinh^2\left(\frac{m_{H_\Gamma}}{2}\right) + \sum_{k=1}^3 \sin^2\left(\frac{p_k}{2}\right). \quad (\text{I.4.15})$$

Ce qui devient à l'ordre $\mathcal{O}(a^2)$:

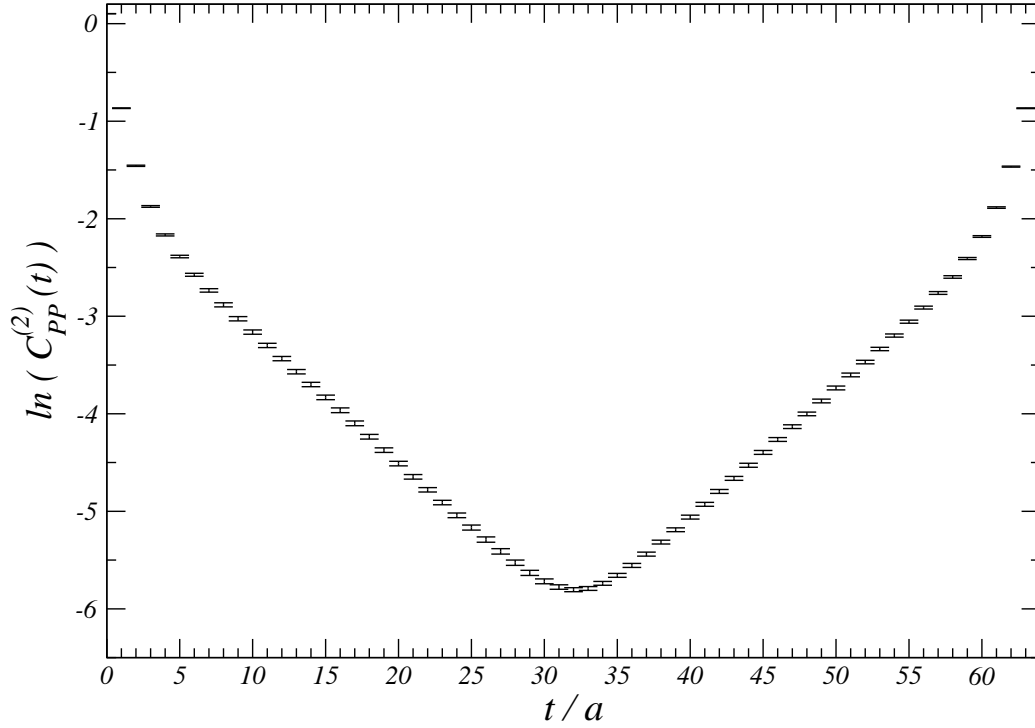
$$E_{H_\Gamma}^2 = m_{H_\Gamma}^2 + \vec{p}^2 + \mathcal{O}(a^2). \quad (\text{I.4.16})$$

Ainsi, dans le cas où l'impulsion insérée est nulle, $\vec{p} = \vec{0}$, on peut directement extraire les masses des hadrons.

Notons finalement que lorsque le champ interpolant est $J_\Gamma = J_P$, l'élément de matrice \mathcal{Z}_Γ entre le méson pseudoscalaire et le vide est une constante indépendante de l'impulsion \vec{p} . Par contre, dans le cas $J_\Gamma = J_V$, il faut prendre en compte les effets du vecteur de polarisation du méson vecteur.

L'analyse du spectre Considérons le cas du champ interpolant $\mathcal{J} = J_P$ et utilisons la fonction de corrélation $C_{PP}^{(2)}(t, \vec{p} = \vec{0})$ pour étudier les propriétés du méson pseudoscalaire.

La figure 4.1 montre la dépendance en temps de la fonction de corrélation à deux points $C_{PP}^{(2)}(t, \vec{p} = \vec{0})$ du « pion » (le méson pseudoscalaire léger des réseaux). Afin de mettre en évidence la masse du pion, la figure représente le logarithme de $C_{PP}^{(2)}(t_x)$. Le corrélateur présentée est obtenu à partir d'une simulation sur un réseau $V = 32 \times 64$ avec une maille inverse $a^{-1} = 2.71(12)$ GeV (*i.e.* $a \sim 0.07$ fm correspondant à un choix du paramètre β : $\beta = 6.2$). Avec cette maille, l'extension spatiale du réseau est $L = 24a \sim 1.7$ fm. On a utilisé 100 configurations indépendantes de champs de jauge pour effectuer la moyenne de l'éq. (I.3.14), les effets des quarks dynamiques sont négligés (on se place dans l'approximation « quenched ») et on a utilisé des fermions de Wilson améliorés afin d'éliminer les effets d'ordre a . Le paramètre κ est choisi pour que la masse m_q du quark soit voisine de celle du quark étrange: $\kappa = 0.1344$ *i.e.* $m_q \sim 110$ MeV. L'impulsion \vec{p} du pion est prise


 FIG. 4.1 – Dépendance en temps de $\ln C_{PP}^{(2)}$.

égale à $\vec{0}$ de façon à extraire la masse, m_{H_T} . Le comportement symétrique par rapport à $t = T/2 = 32a$ visible sur la figure 4.1 est une conséquence des conditions périodiques du réseau : les temps $t = 0 \text{ modulo } T$ produisent des signaux qui se propagent dans le sens positif et négatif du temps (ils correspondent à la propagation d'un quark et de son anti-quark). La symétrie par renversement de temps permet alors de moyenner ces deux contributions et de gagner ainsi un facteur 2 en statistique. L'interférence entre ces signaux est exponentiellement supprimée pour les temps intermédiaires : $0 \ll t \ll T/2$. Le comportement linéaire observé dans cette région indique que les excitations radiales ont été éliminées et que seul l'état fondamental contribue au corrélateur $C_{PP}^{(2)}$. Ainsi, dans cet intervalle, on peut interpréter la pente de $\ln(C_{PP}^{(2)}(t_x))$ comme étant égale à la masse m_p du méson pseudoscalaire.

Dans la pratique, à partir des valeurs du corrélateur $C_{PP}^{(2)}(t_x)$ (obtenues via l'éq. (I.4.4)), on fait un fit des données suivant la fonction de l'éq. (I.4.14). Les paramètres libres du fit sont l'élément de matrice \bar{z} et la masse m_{H_P} . On notera que l'expression de l'éq. (I.4.14) contient un «cosh» prenant en compte la symétrie du corrélateur par rapport à $t = T/2$. Pour identifier plus précisément la zone en temps où l'on atteint l'état fondamental, on peut

construire, à partir de $C_{\Gamma\Gamma}^{(2)}$, une quantité que l'on appelle la masse effective $m_{\text{eff}}^{H_\Gamma}(t)$:

$$m_{\text{eff}}^{H_\Gamma}(t) \equiv \ln \left(\frac{C_{\Gamma\Gamma}^{(2)}(t)}{C_{\Gamma\Gamma}^{(2)}(t+1)} \right) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} m_{H_\Gamma}. \quad (\text{I.4.17})$$

La figure 4.2 montre la dépendance de $m_{\text{eff}}^{H_P}(t)$ en fonction du temps. On peut remarquer qu'aux petits temps les effets des excitations radiales sont importants. Ils sont cependant exponentiellement supprimés en fonction du temps. Pour $t \in [10, 20]$, on observe un plateau qui indique que l'on a isolé l'état fondamental. La valeur du plateau s'identifie à la masse m_{H_P} . Le résultat de la simulation est: $am_{H_P} = 0.306(1)$ *i.e.* $m_{H_P} \sim 830$ MeV. Ceci correspond à la masse d'un méson pseudoscalaire formé d'un quark et d'un anti-quark d'équivalents. En prenant plusieurs valeurs du paramètre κ on peut interpoler les masses des quarks vers celle du quark étrange et comparer le résultat obtenu à celui fourni par la relation $m_{s_s}^2 = (2m_K^2 - m_\pi^2)$. En pratique, on fait plutôt le travail inverse: on utilise la valeur expérimentale de $m_{s_s}^2$ pour vérifier que l'on travaille effectivement à la masse physique du quark s et on peut alors faire des prédictions sur les éléments de matrice dépendant du secteur du quark étrange.

Nous avons considéré jusqu'ici le cas du méson pseudoscalaire. En utilisant les autres champs interpolants, les caractéristiques des autres mésons peuvent être étudiées suivant les mêmes procédures que l'on vient de présenter. On peut par exemple calculer les constantes de désintégration f_{H_P} des mésons pseudoscalaires H_P à partir des éléments de matrice:

$$\mathcal{Z}_A^{1/2} = \langle 0 | J_A(0) | H_P^{(n)} \rangle. \quad (\text{I.4.18})$$

La valeur de $\mathcal{Z}_A^{1/2}$ peut être obtenue à partir de la fonction de corrélation à deux points $C_{AP}^{(2)}(t, \vec{p})$.

De façon générale, les valeurs fournies par les corrélateurs sont des nombres complexes. Sur le réseau elles deviennent réelles en raison de l'invariance sous les symétries C , P et T (ceci n'est vrai qu'à impulsion nulle, puisqu'à $\vec{p} \neq \vec{0}$ la phase de la transformation de Fourier peut introduire des composantes imaginaires). Dans le cas des mésons pseudoscalaires cette propriété est vérifiée configuration par configuration. Pour les autres mésons, la partie imaginaire s'annule en moyenne sur l'ensemble des configurations générées.

Présentons pour finir quelques remarques générales. Plusieurs études doivent être effectuées afin d'étudier les effets de volume fini et de discrétisation. Pour les premiers, il faut faire varier le volume V du réseau en laissant la maille a fixe; c'est l'inverse pour les effets de maille finie. En répétant la simulation pour plusieurs valeurs de la maille a , on peut extrapoler les observables vers la limite du continu, $a \rightarrow 0$. Pour obtenir des résultats physiques, la dernière étape est de faire le prolongement analytique de l'eulidien vers

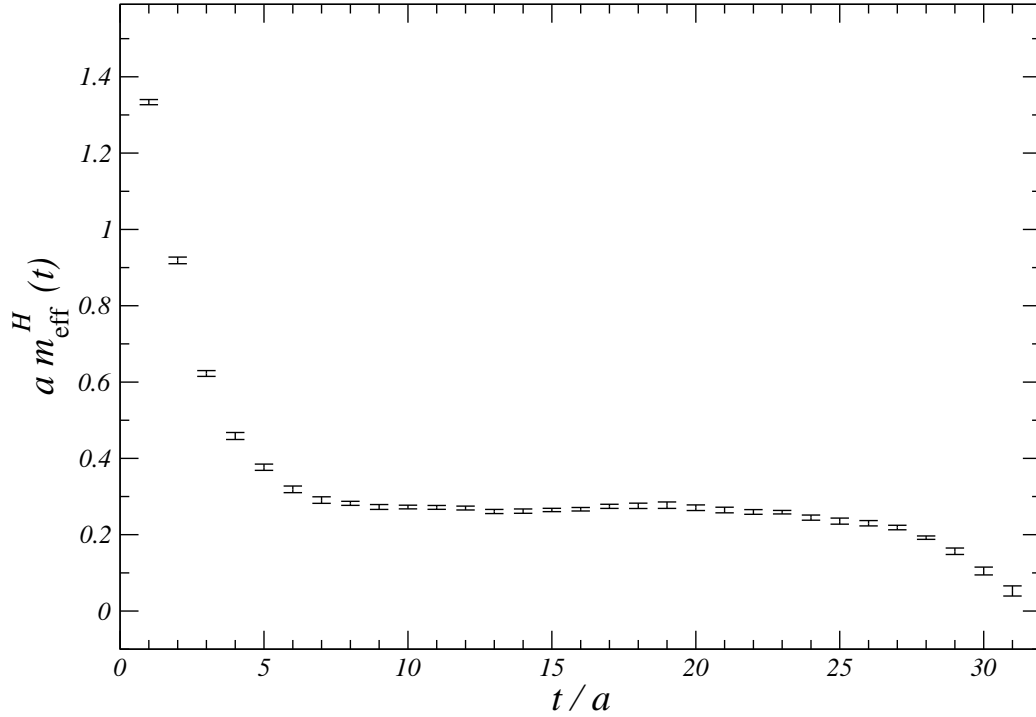


FIG. 4.2 – Dépendance de la masse effective $m_{\text{eff}}^{HP}(t)$ par rapport au temps (cf. l'éq. (I.4.17)). Le plateau en temps de cette quantité correspond à la valeur de masse du méson pseudoscalaire (en unités de maille a).

le minkowskien. Ce passage est immédiat lorsqu'on considère un seul hadron dans l'état initial et dans l'état final. Le problème devient par contre très compliqué lorsqu'on doit considérer plusieurs hadrons ou lorsqu'un hadron a un pôle *complexe* dans son propagateur (ce qui serait le cas, par exemple, si l'on voulait étudier la masse et la largeur du méson). En effet, sur le réseau, la présence d'un nombre complexe dans l'exponentielle de l'éq. (I.4.11) empêche d'extraire les propriétés des hadrons (les états d'énergie et les éléments de matrice). Par exemple, pour étudier les propriétés du méson ρ il faudrait pouvoir isoler, pour chaque impulsion du réseau, les contributions de toutes les excitations: à la fois les excitations radiales et celles du continuum des états (*i.e.* les énergies supérieures au seuil de production des états $2\pi, 4\pi, \text{etc}$). On pourrait ainsi faire une transformée de Fourier inverse et extraire l'information sur le pôle du propagateur *via* la transformation:

$$\int dt e^{ip_4 t} \frac{e^{-\tilde{E}_n t}}{2\tilde{E}_n} = \frac{1}{2\tilde{E}_n(\tilde{E}_n - ip_4)} + \frac{1}{2\tilde{E}_n(\tilde{E}_n + ip_4)}, \quad (\text{I.4.19})$$

$$= \frac{1}{\widetilde{E}_n^2 + p_4^2}, \quad (\text{I.4.20})$$

$$\xrightarrow{p_4 \rightarrow -iE} \frac{1}{\widetilde{E}_n^2 - E^2}, \quad (\text{I.4.21})$$

où pour éviter la confusion entre le minkowskien et l'eulidien, on note explicitement p_4 l'énergie dans l'eulidien. Les énergies des états excités du méson ρ sont notées \widetilde{E}_n . L'éq. (I.4.21) montre le prolongement analytique vers le minkowskien. En pratique l'extraction de l'ensemble des excitations et l'étude de la dépendance dans toutes les impulsions ne peut pas être effectuée sur les réseaux. D'une part, seules les premières excitations peuvent être isolées, et ce avec moins de précision que l'état fondamental puisqu'elles sont exponentiellement supprimées. D'autre part, les grandes impulsions introduisent du «bruit» : l'énergie d'un hadron ayant une grande impulsion peut devenir du même ordre ou supérieure à celle d'une excitation, ce qui empêche d'obtenir un bon signal pour identifier les états. La description de la diffusion de particules [15] pose un problème analogue à celui du pôle du méson ρ . Ainsi, les réseaux doivent se limiter à l'étude de processus hadroniques simples comme les transitions entre états à un seul hadron dans l'état initial et dans l'état final (une exception importante étant la diffusion de deux particules près du seuil [16, 17]).

La figure 4.3 montre l'exemple d'un calcul du spectre des baryons par des simulations de QCD sur réseau. La figure présente les résultats «quenched» ($N_f = 0$) et «unquenched» ($N_f = 2$) obtenus par la collaboration JLQCD [18] en utilisant des fermions de Wilson (améliorés) dans un réseau de maille $a = 0.09$ fm et de volume $V = 20 \times 48$. La maille du réseau a été calibrée à l'aide de la masse du kaon. Le spectre issu des mesures expérimentales est aussi indiquée pour la comparaison. Cette figure montre d'une part que les théories «quenched» et «unquenched» fournissent des résultats compatibles entre eux et d'autre part, que l'accord avec les valeurs expérimentales est en général bon: les écarts relatifs sont inférieurs à 10%

4.2.2 Les corrélateurs à trois points

On peut généraliser la méthode qui vient d'être présentée à l'étude des fonctions de corrélation à trois points. Il est alors possible d'extraire les éléments de matrice entre états hadroniques: $\langle H_2 | \mathcal{O} | H_1 \rangle$. Un grand nombre de quantités physiques sont liées à ces éléments de matrice: les désintégrations entre hadrons, les mélanges de saveurs de quarks, les constantes de couplage, *etc.*

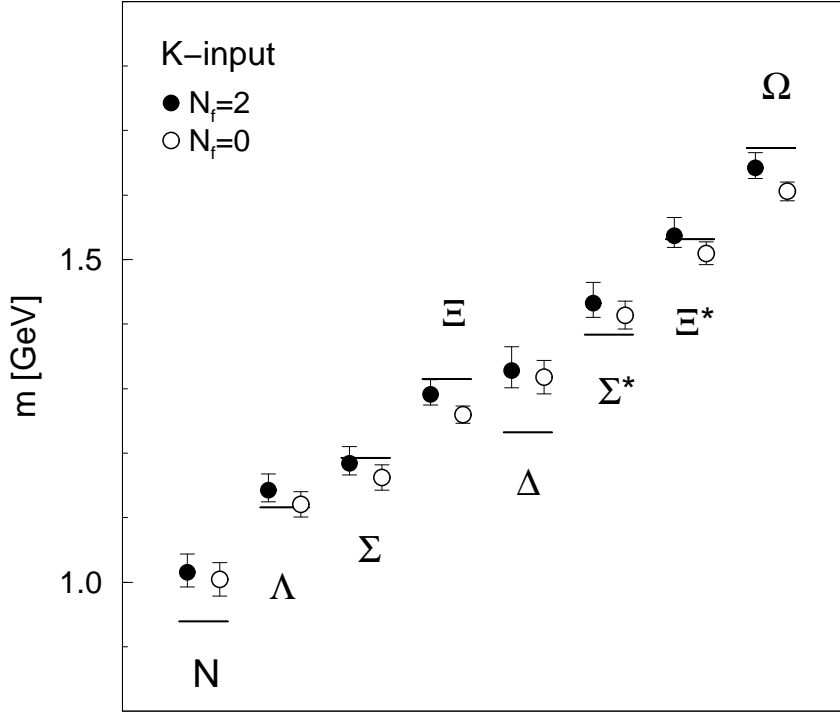


FIG. 4.3 – Exemple d’une détermination du spectre baryonique issu de simulations «quenched» et «unquenched» de la QCD [18]. La ligne horizontale indique la valeur expérimentale.

L’expression d’une fonction de corrélation à trois points est donnée par :

$$C_{\Gamma_2\Gamma\Gamma_1}^{(3)}(t_x, \vec{p}; t_y, \vec{q}) = \int d\vec{x}d\vec{y} e^{i(\vec{p}\cdot\vec{x}+\vec{q}\cdot\vec{y})} \langle 0 | J_{\Gamma_2}(y) J_{\Gamma}(x) J_{\Gamma_1}^\dagger(0) | 0 \rangle, \quad (\text{I.4.22})$$

où p et q sont les quadri-impulsions insérées aux points x et y , respectivement. La dépendance des champs interpolants en termes des champs de quarks q_1 , q_2 et Q est donnée par :

$$J_{\Gamma}(x) = \bar{\Psi}_{q_2}(x) \Gamma \Psi_{q_1}(x), \quad (\text{I.4.23})$$

$$J_{\Gamma_1}(x) = \bar{\Psi}_Q(x) \Gamma_1 \Psi_{q_1}(x), \quad (\text{I.4.24})$$

$$J_{\Gamma_2}(x) = \bar{\Psi}_Q(x) \Gamma_2 \Psi_{q_2}(x). \quad (\text{I.4.25})$$

En termes de propagateurs des quarks l’éq. (I.4.22) devient :

$$C_{\Gamma_2\Gamma\Gamma_1}^{(3)}(t_x, \vec{p}; t_y, \vec{q}) = \int d\vec{x}d\vec{y} e^{i(\vec{p}\cdot\vec{x}+\vec{q}\cdot\vec{y})} \langle 0 | \text{Tr} S_Q(0, y) \Gamma_2 S_{q_2}(y, x) \Gamma S_{q_1}(x, 0) \Gamma_1 | 0 \rangle \quad (\text{I.4.26})$$

Comme pour le cas du corrélateur à deux points, on peut insérer l'ensemble complet des états et obtenir ainsi une somme sur les contributions de tous les états hadroniques créés par les champs interpolants. A limite $0 \ll t_x \ll t_y$, toutes ces excitations sont exponentiellement supprimées et la seule contribution à $C_{\Gamma_2\Gamma_1}^{(3)}$ provient de l'état fondamental. On peut alors écrire son expression sous la forme:

$$C_{\Gamma_2\Gamma_1}^{(3)}(t_x, \vec{p}; t_y, \vec{q}) \xrightarrow{0 \ll t_x \ll t_y} \frac{e^{-E_{H_1} t_x}}{2E_{H_1}} \frac{e^{-E_{H_2}(t_y-t_x)}}{2E_{H_2}} \langle 0 | J_{\Gamma_2}(0) | H_2(\vec{p}+\vec{q}, E_{H_2}) \rangle \times \\ \langle H_2(\vec{q}, E_{H_2}) | J_{\Gamma}(0) | H_1(\vec{p}, E_{H_1}) \rangle \langle H_1(\vec{p}+\vec{q}, E_{H_1}) | J_{\Gamma_1}^\dagger(0) | 0 \rangle, \quad (\text{I.4.27})$$

où H_1 et H_2 sont les mésons (composés des quarks $Q\bar{q}$ et $Q\bar{q}_2$, respectivement).

On peut redéfinir les éléments de matrice en utilisant la notation \mathcal{Z} :

$$\mathcal{Z}_{\Gamma_1}^{1/2} = \langle H_1(\vec{p}+\vec{q}, E_{H_1}) | J_{\Gamma_1}^\dagger(0) | 0 \rangle, \quad (\text{I.4.28})$$

$$\mathcal{Z}_{\Gamma_2}^{1/2} = \langle 0 | J_{\Gamma_2}(0) | H_2(\vec{p}+\vec{q}, E_{H_2}) \rangle. \quad (\text{I.4.29})$$

Le corrélateur à trois points peut ainsi être exprimé sous la forme:

$$C_{\Gamma_2\Gamma_1}^{(3)}(t_x, \vec{p}; t_y, \vec{q}) = \mathcal{Z}_{\Gamma_1}^{1/2} \frac{e^{-E_{H_1} t_x}}{2E_{H_1}} \mathcal{Z}_{\Gamma_2}^{1/2} \frac{e^{-E_{H_2}(t_y-t_x)}}{2E_{H_2}} \langle H_2 | J_{\Gamma}(0) | H_1 \rangle. \quad (\text{I.4.30})$$

L'extraction de l'élément de matrice $\langle H_2 | J_{\Gamma}(0) | H_1 \rangle$ se fait alors en utilisant la détermination préalable des énergies et des facteurs \mathcal{Z} à partir des corrélateurs à deux points. La méthode habituellement utilisée pour extraire l'élément de matrice consiste à construire le rapport du corrélateur à trois points et du produit de deux corrélateurs à deux points de façon à éliminer tous les préfacteurs de l'éq. (I.4.30) et à ne garder que l'élément de matrice $\langle H_2 | J_{\Gamma}(0) | H_1 \rangle$:

Un exemple d'un tel rapport est donné par:

$$R_{\Gamma}(t) = \frac{C_{\Gamma_2\Gamma_1}^{(3)}(t_x, \vec{0}; t_y, \vec{0})}{C_{\Gamma_1\Gamma_1}^{(2)}(t_x, \vec{0}) C_{\Gamma_2\Gamma_2}^{(2)}(t_y - t_x, \vec{0})} \times \mathcal{Z}_{\Gamma_1}^{1/2} \mathcal{Z}_{\Gamma_2}^{1/2}, \quad (\text{I.4.31})$$

$$\xrightarrow{0 \ll t_x \ll t_y} \langle H_2 | J_{\Gamma}(0) | H_1 \rangle, \quad (\text{I.4.32})$$

où pour simplifier le problème on a choisi $\vec{p} = \vec{q} = \vec{0}$. La recherche du plateau en temps de $R_{\Gamma}(t)$ permet alors d'extraire l'élément de matrice recherché.

4.3 L'estimation des erreurs statistiques

Il existe plusieurs méthodes pour extraire les erreurs statistiques des quantités dépendant d'un nombre N_{conf} de configurations. Le but est d'estimer l'erreur en minimisant les corrélations possibles entre les configurations. Le principe de ces méthodes consiste à distribuer les données en différents paquets. En jouant sur la taille des paquets et la façon dont ils sont construits (la région de l'espace des configurations qu'ils incluent) on peut éviter de moyenner sur des configurations corrélées. La méthode de *Jackknife* est un des procédés utilisés pour évaluer les erreurs sur les corrélateurs et sur les paramètres des fits que l'on effectue à partir des données des simulations.

Supposons que l'on veuille estimer l'erreur statistique σ_ϕ d'une quantité ϕ . On commence par créer un nombre p de paquets à partir des N_{conf} configurations, tous les paquets contenant un nombre égal de configurations: $N_j = N_{\text{conf}}/p$. On calcule d'abord les moyennes ϕ_i de la quantité ϕ paquet par paquet (ϕ_i désigne la moyenne sur le $i^{\text{ème}}$ paquet, $i \in [1, p]$), puis la moyenne $\tilde{\phi}_j$ des ϕ_i sur tous les paquets sauf le $j^{\text{ème}}$:

$$\tilde{\phi}_j = \frac{1}{p-1} \sum_{i \neq j}^p \phi_i. \quad (\text{I.4.33})$$

On crée donc p mesures différentes de la moyenne $\tilde{\phi}_j$. Chaque valeur de j permet de considérer un échantillon important de l'ensemble des configurations. Notons par ailleurs que, par construction (et du fait de la linéarité de la moyenne algébrique), la moyenne de $\tilde{\phi}_j$ sur les p paquets coïncide avec la moyenne $\langle \phi \rangle$ de ϕ sur l'ensemble des N_{conf} configurations:

$$\langle \phi \rangle \equiv \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p \tilde{\phi}_j. \quad (\text{I.4.34})$$

Pour un choix adéquat du nombre de configurations incluses dans chaque paquet (ce nombre doit être suffisamment grand pour éviter les corrélations entre configurations voisines et suffisamment faible pour avoir un nombre important de paquets) on peut trouver une zone de stabilité où les incertitudes statistiques restent constantes.

Dans cette région, l'erreur *Jackknife* est donnée par:

$$\sigma_\phi^2 = \frac{p-1}{p} \sum_{j=1}^p \left(\tilde{\phi}_j - \langle \phi \rangle \right)^2, \quad (\text{I.4.35})$$

$$= (p-1) \left(\langle \phi^2 \rangle - \langle \phi \rangle^2 \right). \quad (\text{I.4.36})$$

Les méthodes d'estimation des erreurs comme celle de *Jackknife* permettent de constater que les incertitudes statistiques sont en général bien contrôlées dans les simulations sur réseau.

Chapitre 5

Renormalisation et amélioration

Nous avons commencé cet exposé en indiquant que la théorie du réseau est une régularisation de la QCD. Nous avons ensuite indiqué que la procédure de renormalisation consistait à faire tendre la maille du réseau vers zéro pour retrouver la limite du continu. Cette démarche permet alors d'extraire des résultats physiques à partir d'une série de simulations réalisées à différentes valeurs de la maille. Dans le cas des fermions de Wilson, le fait de devoir briser la symétrie chirale afin d'éliminer les «doublons», change le comportement de la théorie et oblige à une renormalisation supplémentaire de certaines quantités physiques (par exemple, la constante de couplage, les masses des quarks ou les opérateurs composés de champs de quarks).

De plus, nous avons vu que l'action de la QCD sur réseau (*cf.* eqs (I.1.28) et (I.2.10) pour le cas de l'action de Wilson) s'identifie à celle de la QCD à des corrections d'ordre a^n près. Pour la partie pure jauge de l'action, ces corrections sont d'ordre a^2 et sont donc assez bien contrôlées pour les mailles de réseau utilisées actuellement, $a \leq 0.1fm$. La partie fermionique reçoit par contre des corrections d'ordre a . Les résultats obtenus à maille finie peuvent dans ce cas contenir des effets de discrétisation importants. La procédure de réduction des effets d'ordre a est ce que l'on appelle habituellement *l'amélioration*. Le but est de rendre l'action et les opérateurs du réseau le plus proches possible de leur valeur à la limite du continu, *i.e.* égaux à ceux du continu à des corrections d'ordre $\mathcal{O}(a^2)$. Ainsi les valeurs obtenues à maille finie seront déjà proches de celles du continu et leur extrapolation vers cette limite suivra une loi dite de *scaling*. Le terme de *scaling* est utilisé dans ce contexte pour caractériser la façon dont une quantité physique ϕ dépend de la maille du réseau. Ecrivons l'expression la plus générale de ϕ en fonction de la maille a :

$$\phi(a) = \phi(0) + a\phi_1 + a^2\phi_2 + \dots \quad (\text{I.5.1})$$

Le meilleur comportement de *scaling* est obtenu en réduisant les effets des ϕ . Noter que le choix des ϕ_i est arbitraire du point de vue physique puisque la seule chose importante est que la limite du continu corresponde au monde physique. Dans la pratique on peut chercher cependant à établir des conditions de simulation permettant d'améliorer le *scaling*, *i.e.* de réduire ou d'éliminer les ϕ .

Par ce travail *d'amélioration* on peut atteindre de façon contrôlée la limite du continu et on améliore ainsi la procédure de renormalisation. Nous allons voir que l'amélioration permet aussi de restaurer une partie des effets de la symétrie chirale. La mise en œuvre de l'amélioration ne représente que 20% d'augmentation dans les temps de calcul à une maille de réseau donnée. Ceci est négligeable par rapport à ce qu'implique le fait de travailler avec une maille du réseau plus faible (le temps de calcul augmente alors en puissances de a). C'est pour ces raisons que l'amélioration est devenue une procédure courante dans les calculs sur réseau.

Détaillons maintenant un peu plus les étapes de son implantation dans les simulations. Pour cela je vais commencer par présenter comment est atteinte la limite du continu à partir des résultats à maille finie. Ensuite, je vais présenter l'amélioration de l'action de Wilson, puis celle des opérateurs bilinéaires. Comme annoncé précédemment ces opérateurs nécessitent une renormalisation supplémentaire. Pour étudier cette renormalisation nous ferons appel aux identités de Ward chirales, ce qui nous permettra en même temps de comprendre comment l'élimination des effets d'ordre a corrige le comportement chirale de la théorie du réseau.

5.1 La limite du continu

Les simulations sur réseau sont adimensionnées. Les différentes grandeurs calculées lors d'une simulation dépendent de la maille a , mais celle-ci est *a priori* sans rapport avec le monde physique. Cette dépendance n'est pas explicite puisque les quantités sont adimensionnées. C'est uniquement à la fin de la simulation que l'on *calibre* le réseau à l'aide d'une quantité physique connue: on identifie cette quantité à celle obtenue sur réseau en unités de maille. Ainsi, on peut donner une valeur physique à la maille en utilisant, par exemple, les constantes de désintégration f_π ou f_K , la masse du méson ρ , ou bien, la distance r_0 caractérisant la force entre un quark et un anti-quark statiques [19].

Ensuite, en refaisant une simulation avec d'autres paramètres β et κ , *i.e.* la constante de couplage nue g_0 et les masses de quarks m_0 respectivement, on peut obtenir une nouvelle valeur de la maille du réseau (en la calibrant à l'aide de la même grandeur physique que précédemment). On peut ainsi obtenir une série de simulations faites de différentes valeurs

de la maille a . La limite du continu, *i.e.* la renormalisation non-perturbative, est alors atteinte en faisant tendre a vers zéro, tout en gardant *constante* la quantité physique ayant servi à la calibration. La *condition de renormalisation* est donnée par le choix particulier de la quantité physique que l'on conserve fixe. Supposons que cette quantité soit une masse m_C . Formellement, l'approche de la limite du continu peut s'écrire:

$$m_C \xrightarrow{a \rightarrow 0} \frac{1}{a} m_L(g_0(a)), \quad (\text{I.5.2})$$

où les indices ' C ' et ' L ' indiquent respectivement les valeurs du continu et du réseau. La masse m_L dépend des paramètres de la simulation. Il est utile de rappeler que la constante de couplage *nue* g_0 dépend de la maille a et n'est donc pas constante lorsqu'on prend la limite du continu. Ceci est une conséquence de la calibration. Du fait de la liberté asymptotique, le couplage tend vers zéro à la limite du continu: c'est un point critique de la QCD.

L'expression de l'éq. (I.5.2) est en fait valable pour toute grandeur f ayant la dimension d'une masse ($m \rightarrow f$). Elle indique qu'après calibration, les grandeurs du réseau (*i.e.* les f_L) s'annulent à la limite $a \rightarrow 0$, ou bien, dit autrement, que les longueurs de corrélation $1/af_C$ du système statistique divergent au voisinage du point critique.

Voyons maintenant comment est définie la notion de *scaling* à partir de considérations du groupe de renormalisation. La condition de calibration $f_C = \text{cste}$ se traduit dans l'éq. (I.5.2) de la façon suivante:

$$\frac{d}{da} f_C = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f_L(g_0) - \beta(g_0) \frac{df_L(g_0)}{dg_0} = 0, \quad (\text{I.5.3})$$

où la fonction $\beta(g_0)$ est telle que:

$$\beta(g_0(a)) = \frac{dg_0}{d \ln(a)} = -\beta_0 \frac{g_0^3}{(4\pi)^2} - \beta_1 \frac{g_0^5}{(4\pi)^4} + \mathcal{O}(g_0^7). \quad (\text{I.5.4})$$

Les coefficients β_0 et β_1 sont définis par:

$$\beta_0 \equiv \frac{33 - 2N_f}{3}, \quad (\text{I.5.5})$$

$$\beta_1 \equiv \frac{306 - 38N_f}{3}, \quad (\text{I.5.6})$$

où N_f est le nombre de saveurs de quarks (pour l'approximation quenched, $N_f = 0$) et β_0 et β_1 sont indépendants de la prescription utilisée (ils sont dits «universels»). Les valeurs numériques dans les définitions de β_0 et β_1 sont reliées au nombre de couleurs, ici $N_c = 3$. L'expression de la fonction β de l'éq. (I.5.4) s'écrit suivant une série en puissances de g et dépend donc du nombre de boucles considérées. A un ordre donné de la fonction β , la

condition $df_C/da = 0$ est rigoureusement satisfaite uniquement lorsque le couplage g_0 est faible (*i.e.* lorsque $a \rightarrow 0$) pour que les termes d'ordre supérieur puissent effectivement être négligés.

Rappelons que la fonction β décrit la dépendance de la constante de couplage de la QCD en fonction de l'échelle de renormalisation. Nous pouvons voir d'après l'éq. (I.5.4) que $g_0 = 0$ est un point fixe de la théorie et que la fonction β est négative. Ceci permet de caractériser la liberté asymptotique. De plus, la résolution de cette fonction génère dynamiquement l'échelle Λ_{QCD} de la théorie, même en l'absence de quarks. Notons aussi que l'éq. (I.5.4) correspond à la définition de β dans la théorie régularisée du réseau. La théorie de perturbations permet de relier les définitions des fonctions β de deux schémas de régularisation différents.

En intégrant l'éq. (I.5.3) entre deux valeurs quelconques du couplage $g_0(a_i)$ et $g_0(a_f)$ on obtient:

$$\frac{f_L(g_0(a_f))}{f_L(g_0(a_i))} = \exp \left(\int_{g_0(a_i)}^{g_0(a_f)} \frac{dg'_0}{\beta(g'_0)} \right). \quad (\text{I.5.7})$$

En laissant par exemple a_i fixe et en faisant varier $a = a_f$ dans la zone permise par le développement de l'éq. (I.5.4) on retrouve le *scaling* de f , *i.e.* la dépendance de f en fonction de la maille a lorsque celle-ci est faible. La limite du continu peut ainsi être atteinte en ayant comme guide un développement perturbatif. L'existence de la limite du continu, issue d'un développement perturbatif, a été démontrée rigoureusement à tous les ordres du développement [16]. Pour que ce développement soit valable il faut cependant que les simulations soient effectuées avec des couplages suffisamment petits: $\beta = 6/g^2 \geq 5.9$, *i.e.* $a \lesssim 0.12$ fm. Notons que le membre de droite de l'éq. (I.5.7) est indépendant de la quantité physique f considérée: c'est un paramètre d'échelle *universal* de la région de *scaling*. C'est cette propriété qui permet d'assurer que la *condition de renormalisation* est indépendante du choix de la quantité utilisée pour la fixer.

Comme il devient de plus en plus difficile de faire des simulations à des mailles très faibles, il est de grande importance de commencer par éliminer les effets d'ordre a pour que les résultats à maille finie soient le plus proches possibles de la limite du continu.

5.2 L'amélioration de l'action

De même que Wilson a proposé un terme éliminant les effets des «doublons» et disparaissant à la limite du continu, il est possible de considérer d'autres termes permettant d'absorber la dépendance d'ordre a de l'action du réseau.

Pour cela, Symanzik a proposé de construire une théorie effective du *continu* où apparaît explicitement une dépendance dans la maille a [20–22]. L’action effective de cette théorie peut être écrite de la façon suivante:

$$S_{\text{eff}} = \int d^4x \left[\mathcal{L}_{QCD}(x) + a\mathcal{L}_1(x) + a^2\mathcal{L}_2(x) + \dots \right], \quad (\text{I.5.8})$$

où \mathcal{L}_{QCD} est le lagrangien de la QCD (du continu) et les termes \mathcal{L}_i , $i \geq 1$ sont des combinaisons linéaires d’opérateurs de dimensions $4 + i$. Ces termes sont supprimés par des puissances de a .

La notion de théorie effective doit être comprise dans ce contexte de la façon suivante: pour tout énergie μ telle que $\mu \leq \bar{a}^{-1}$, l’action S_{eff} du continu décrit la physique de basse énergie d’une théorie plus complète et se manifestant à des énergies plus grandes que le cutoff a^{-1} (*i.e.* la QCD, lorsque $a \rightarrow 0$). On peut ensuite identifier l’action effective de l’éq. (I.5.8) et celle du réseau ‘ L ’, *i.e.* $S_{\text{eff}} = S_L$. Cette identification est effectuée de façon à ce que la théorie effective et celle du réseau aient les mêmes éléments de matrice pris sur leurs couches de masse.

Pour obtenir une information sur la QCD du continu (*i.e.* le terme \mathcal{L}_{QCD}), on peut incorporer dans l’action du réseau des contre-terms permettant d’éliminer les effets d’ordre a^i provenant des \mathcal{L}_i , $i \geq 1$. En incluant tous les contre-terms il serait en principe possible d’obtenir à partir d’une simulation à maille finie (et donc sans devoir prendre la limite $a \rightarrow 0$) des résultats sur la théorie du continu. Cependant en pratique, il est de plus en plus difficile d’inclure tous les opérateurs de dimensions élevées. On se limite donc ici à éliminer les effets d’ordre a . Cette approximation est cependant légitime puisque les effets d’ordre a^2 peuvent être négligés pour des mailles suffisamment faibles.

Pour construire le contre-terme que l’on doit rajouter à l’action du réseau de façon à éliminer la contribution de \mathcal{L}_1 dans la théorie effective du continu, il faut commencer par comprendre la structure de \mathcal{L}_1 . Cela revient à considérer tous les opérateurs de dimension cinq dépendant des champs de jauge et de quarks. Ces opérateurs doivent être invariants sous les symétries *du réseau*. De plus les équations du mouvement permettent de relier certains opérateurs entre eux. Parmi les cinq opérateurs de dimension cinq à considérer, il est possible de conserver uniquement trois opérateurs indépendants:

$$\mathcal{O}_1 = \bar{\Psi} i\sigma_{\mu\nu} F_{\mu\nu} \Psi, \quad (\text{I.5.9})$$

$$\mathcal{O}_2 = m_q \text{Tr}(F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}), \quad (\text{I.5.10})$$

$$\mathcal{O}_3 = m_q^2 \bar{\Psi} \Psi, \quad (\text{I.5.11})$$

où $\sigma_{\mu\nu} = i[\gamma_\mu, \gamma_\nu]/2$ et $F_{\mu\nu}$ a été défini dans l’éq. (I.1.19).

Le lagrangien effectif \mathcal{L}_1 est donc une combinaison linéaire de ces trois termes. Le contre-terme que nous devons ajouter à l'action du réseau pour éliminer le terme \mathcal{L} sera donc aussi une combinaison linéaire de la version discrétisée des opérateurs $\mathcal{O} = 1, 2, 3$, que l'on note $\widehat{\mathcal{O}}_j$. De façon générique, ce contre-terme s'écrit :

$$\delta S_L = a^5 \sum_x \left[c_1 \widehat{\mathcal{O}}_1(x) + c_2 \widehat{\mathcal{O}}_2(x) + c_3 \widehat{\mathcal{O}}_3(x) \right]. \quad (\text{I.5.12})$$

où les coefficients c_j peuvent être déterminés dans le cadre de la théorie effective.

Intéressons-nous maintenant à l'action de Wilson du réseau définie à partir des eqs. (I.1.29) et (I.2.9). On peut remarquer que des opérateurs de la forme de $\widehat{\mathcal{O}}_2$ et $\widehat{\mathcal{O}}_3$ (cf. les eqs. (I.5.10)-(I.5.11)) sont déjà présents dans l'action de Wilson. Ainsi, ces deux opérateurs peuvent simplement être pris en compte par une «redéfinition» du couplage nu g et de la masse nue des quarks m_0 .

$$\widetilde{g}_0^2 = g_0^2 (1 + b_g a m_q), \quad (\text{I.5.13})$$

$$\widetilde{m}_q = m_q (1 + b_m a m_q), \quad (\text{I.5.14})$$

où m_q est défini à partir de m_\emptyset : $m_q = m_0 - m_c$. Le terme m_c apparaît du fait de la renormalisation *additive* qui implique la brisure de la symétrie chirale dans le cas des fermions de Wilson [23]. Les coefficients b_g et b_m dépendent de g et doivent être déterminés (de préférence non-perturbativement) de façon à éliminer les effets d'ordre $q^2 m$

Du fait de l'absorption de $\widehat{\mathcal{O}}_{2,3}$, il reste uniquement le terme $\widehat{\mathcal{O}}_1$ à ajouter à l'action de Wilson. D'après l'eq. (I.5.9), ce terme correspond à donner aux champs de quarks un moment chromomagnétique anormal d'ordre a . L'expression de l'action de Wilson améliorée \widetilde{S}_W peut donc être écrite comme il suit :

$$\widetilde{S}_W = S_W + a^5 \frac{i}{4} c_{SW} \sum_x \bar{\Psi}(x) \sigma_{\mu\nu} \widehat{F}_{\mu\nu}(x) \Psi(x), \quad (\text{I.5.15})$$

où la version réseau du tenseur gluonique s'écrit :

$$\begin{aligned} \widehat{F}_{\mu\nu}(x) = & \frac{1}{8} \left[U_\mu(x) U_\nu(x + \hat{\mu}) U_\mu^\dagger(x + \hat{\nu}) U_\nu^\dagger(x) \right. \\ & + U_\nu(x) U_\mu^\dagger(x + \hat{\nu} - \hat{\mu}) U_\nu^\dagger(x - \hat{\mu}) U_\mu(x - \hat{\mu}) \\ & + U_\mu^\dagger(x - \hat{\mu}) U_\nu^\dagger(x - \hat{\nu} - \hat{\mu}) U_\mu(x - \hat{\nu} - \hat{\mu}) U_\nu(x - \nu) \\ & \left. + U_\nu^\dagger(x - \nu) U_\mu(x - \nu) U_\nu(x - \hat{\nu} + \hat{\mu}) U_\mu^\dagger(x) - \text{h.c.} \right], \quad (\text{I.5.16}) \end{aligned}$$

La figure 5.1 représente la composition du terme $\widehat{F}_{\mu\nu}(x)$ qui est souvent connu sous le nom de «clover» (trèfle en anglais).

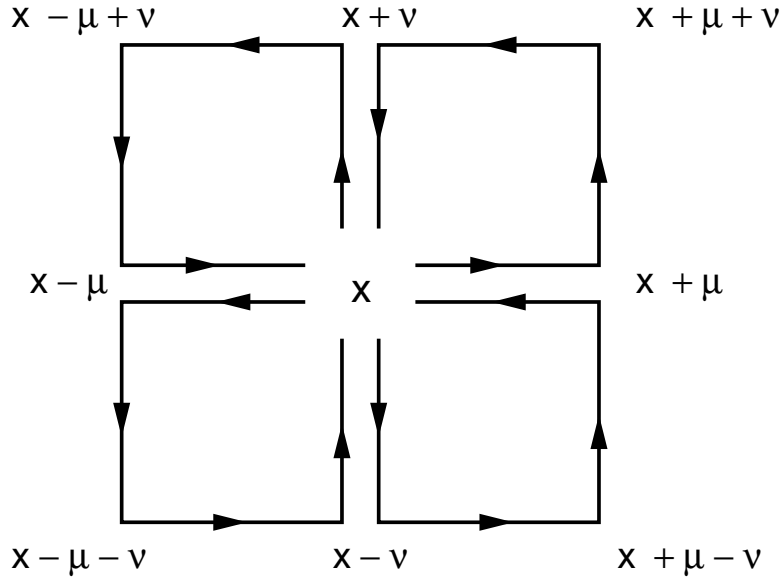


FIG. 5.1 – Représentation du terme «clover» $\widehat{F}_{\mu\nu}(x)$.

L'expression du terme d'amélioration a été proposée par Sheikholeslami-Wohlert (SW) [24]. Le coefficient c_{SW} dans l'éq. (I.5.15) doit être choisi de façon à éliminer tous les effets d'ordre a dans l'action. Il existe une procédure non-perturbative pour déterminer la valeur de c_{SW} pour toute valeur du couplage nu g_0 (dans la zone de *scaling*). Notons que si les fermions sont libres (*i.e.* $g_0 = 0$), alors $c_{SW} = 1$. Nous allons voir par la suite que la symétrie chirale entre en jeu dans la détermination de c_{SW} .

Pour une simulation ayant comme action l'expression de \widehat{S}_W de l'éq. (I.5.15), on peut s'assurer que l'approche de la limite du continu reçoit uniquement des petites corrections d'ordre a^2 . Cependant, pour que toutes les quantités calculées aient ce comportement, il faut aussi améliorer les opérateurs composés de champs de quarks et fixer leurs conditions de renormalisation.

5.3 L'amélioration et la renormalisation des opérateurs

De la même façon que l'on a écrit l'action de la théorie effective de Symanzik comme une série en puissances de a (*cf.* l'éq. (I.5.8)), on peut aussi développer les champs sous la forme:

$$\phi_{\text{eff}} = \phi_{QCD} + a\phi_1 + a^2\phi_2 + \dots, \quad (\text{I.5.17})$$

où ϕ est une notation générique pour les champs renormalisés (ou des combinaisons linéaires de ces champs). Les champs ϕ_i doivent vérifier les mêmes lois de transformation sous les

symétries que ceux du réseau.

Considérons maintenant le cas des opérateurs locaux de champs de quarks. Par analogie avec la démarche présentée précédemment, essayons d'éliminer les effets d'ordre a dans leur version discrétisée sur réseau. Les opérateurs bilinéaires du continu considérés sont de la forme:

$$\mathcal{O}_\Gamma^a(x) = \bar{\Psi}(x) \Gamma \frac{\sigma_a}{2} \Psi(x), \quad (\text{I.5.18})$$

où σ_a est une matrice de Pauli agissant sur les indices d'isospin du champ de quark et Γ est la matrice de Dirac considérée: $\Gamma = \{\mathbb{1}, \gamma_5, \sigma_{\mu\nu}, \gamma_\mu \gamma_5, \gamma_5\}$. Les opérateurs de l'éq. (I.5.18) correspondent aux champs interpolants que nous avons présentés dans la section I.4.1.

On peut ensuite identifier les opérateurs de dimensions supérieures contribuant aux ϕ dans l'éq. (I.5.17) puis rajouter aux champs du réseau les contre-termes appropriés afin d'éliminer les effets de ϕ .

Les courants conservés du continu ont des charges associées qui sont fixées par le théorème de Noether. C'est la raison pour laquelle ces courants ne doivent donc pas être renormalisés. Cependant, sur le réseau, la brisure de la symétrie chirale induite par les fermions de Wilson fait que la conservation des courants n'est pas vérifiée. Les courants doivent dans ce cas être renormalisés. De façon générique ceci peut être écrit sous la forme:

$$\mathcal{O}_\Gamma^{(R)}(x) = Z_\Gamma(g_0) \hat{\mathcal{O}}_\Gamma(x). \quad (\text{I.5.19})$$

où le chapeau rappelle que l'on est sur réseau. Les Z_Γ sont les constantes de renormalisation (R) que l'on peut déterminer à partir des relations entre les courants conservés du continu (les identités de Ward) [25–31].

Le cas du courant axial

Pour illustrer la procédure d'amélioration, prenons le cas particulier du courant axial:

$$A_\mu^a(x) = \bar{\Psi}_1(x) \gamma_\mu \gamma_5 \frac{\sigma_a}{2} \Psi_2(x), \quad (\text{I.5.20})$$

où l'on a considéré deux champs de quarks Ψ_1 et Ψ_2 ayant des masses différentes, m_{q_1} et m_{q_2} , respectivement.

Pour construire le champ effectif ϕ_1 il faut en principe considérer six opérateurs bilinéaires de dimension quatre vérifiant les lois de transformation des symétries du réseau. A cette liste il faut aussi ajouter les opérateurs brisant l'invariance de jauge. En utilisant les équations du mouvement, les symétries et le fait que l'on cherche à améliorer uniquement les quantités sur couche de masse on peut réduire le nombre d'opérateurs à seulement

deux:

$$\mathcal{O}_\mu^{(1)a}(x) = (m_{q_1} + m_{q_2}) \bar{\Psi}_1(x) \gamma_\mu \gamma_5 \frac{\sigma_a}{2} \Psi_2(x), \quad (\text{I.5.21})$$

$$= (m_{q_1} + m_{q_2}) A_\mu^a(x), \quad (\text{I.5.22})$$

et

$$\mathcal{O}_\mu^{(2)a}(x) = \partial_\mu \left(\bar{\Psi}_1(x) \gamma_5 \frac{\sigma_a}{2} \Psi_2(x) \right) = \partial_\mu P^a(x), \quad (\text{I.5.23})$$

L'amélioration du courant axial du réseau passe par l'inclusion d'un contre-terme composé d'une combinaison linéaire de la formulation «lattice» des opérateurs $\hat{\mathcal{O}}_\mu^{(1)}(x)$ et $\mathcal{O}_\mu^{(2)}(x)$.

Ecrivons l'expression du courant axial renormalisé:

$$A_\mu^{(\text{R})}(x) = Z_A(g_0) \hat{A}_\mu(x), \quad (\text{I.5.24})$$

où, pour commencer, on considère que le membre de droite est composé de quantités calculées sur réseau avant la procédure d'amélioration.

Le premier opérateur (cf. l'éq. (I.5.22)) fait intervenir la courant axial et peut donc être vu comme une redéfinition de la constante de renormalisation $Z_A(g_0)$. Ceci peut être exprimé de la manière suivante:

$$\tilde{Z}_A(g_0) = Z_A(g_0) \left(1 + b_A \frac{am_{q_1} + am_{q_2}}{2} \right), \quad (\text{I.5.25})$$

où b_A est le coefficient du contre-terme venant de l'opérateur $\hat{\mathcal{O}}_\mu^{(1)a}(x)$. Les m_{q_i} sont définis à partir de la masse nue m_0 comme nous l'avons vu auparavant. Il est utile de remarquer que le coefficient b_A (mais ceci reste vrai pour les coefficients b_g et b_m dans les eqs. (I.5.13)-(I.5.14) et pour les b_Γ lorsqu'on considère d'autres opérateurs bilinéaires) ne dépendent pas de la condition de renormalisation utilisée: ce sont les facteurs Z_F qui fixent les conditions de la renormalisation.

Finalement, la prise en compte du deuxième opérateur (cf. l'éq. (I.5.23)) permet d'obtenir l'expression du courant axial amélioré (et renormalisé):

$$\tilde{A}_\mu^{(\text{R})}(x) = \tilde{Z}_A(g_0) \left[\hat{A}_\mu(x) + c_{AA} \partial_\mu \hat{P}(x) \right], \quad (\text{I.5.26})$$

$$= Z_A(g_0) \left(1 + b_A \frac{am_{q_1} + am_{q_2}}{2} \right) \left[\hat{A}_\mu(x) + c_{AA} \partial_\mu \hat{P}(x) \right], \quad (\text{I.5.27})$$

où le coefficient c_{AA} élimine (à la limite chirale, $m_{q_i} = 0$) les effets d'ordre a de la divergence de la densité pseudoscalaire P [23].

Le cas des autres opérateurs

La procédure que nous avons présentée dans le cas du courant axial se généralise aux autres opérateurs bilinéaires mais aussi aux opérateurs à quatre quarks nécessaires, par exemple, pour la détermination du paramètre \widehat{B}_K du mélange $K^0 - \overline{K}^0$.

Dans l'appendice de la fin de ce chapitre sont présentées les expressions des différents opérateurs bilinéaires utiles aux calculs du spectre et des différents éléments de matrice.

Donnons maintenant quelques détails sur la façon d'obtenir les coefficients nécessaires à l'amélioration. Pour cela il est utile de faire appel à la symétrie chirale et en particulier aux identités de Ward.

5.4 Les identités de Ward

L'étude de la variation de l'action et des champs *du continu* sous les transformations chirales infinitésimales permet d'obtenir des relations entre différents opérateurs. Ces relations sont connues sous le nom d'identités de Ward. Un exemple de ces identités est la relation de PCAC (Partial Conservation of the Axial Current):

$$\langle \partial_\mu A_\mu(x) \mathcal{O} \rangle = 2m_q \langle P(x) \mathcal{O} \rangle, \quad (\text{I.5.28})$$

où \mathcal{O} est un opérateur quelconque et m_q est la masse du quark. L'expression de PCAC indique qu'à la limite chirale, $m_q = 0$, le courant axial est conservé.

Ecrivons maintenant l'expression de PCAC du réseau, avant d'avoir effectué la procédure d'amélioration:

$$\langle \partial_\mu \widehat{A}_\mu^R(x) \mathcal{O} \rangle = 2m_q^R \langle \widehat{P}^R(x) \mathcal{O} \rangle + O(a), \quad (\text{I.5.29})$$

où l'on considère les masses m_q^R et les opérateurs \widehat{A}_μ^R et \widehat{P}^R renormalisés. L'expression de PCAC est donc valable à des corrections d'ordre a près. Ces corrections indiquent le degré de brisure de la symétrie chirale. Par la procédure d'amélioration on peut arriver à réduire les effets d'ordre a et à restaurer partiellement le bon comportement chiral. Inversement, en imposant que les corrections d'ordre a soient nulles on peut arriver à calculer les coefficients nécessaires à l'amélioration. La relation de PCAC fait intervenir la masse renormalisée des quarks et peut être aussi utilisée pour déterminer la renormalisation (*i.e.* m_c) de la masse nue m_0 . Tout ceci fait que même en l'absence de symétrie chirale, les identités de Ward permettent d'établir une meilleure connexion entre les résultats du réseau et ceux du monde physique.

Regardons comment le coefficient c_{SW} peut être calculé non-perturbativement à partir de la relation de PCAC. La même masse renormalisée m_q^R peut être obtenue *via* l'éq. (I.5.29)

à partir de deux opérateurs Q et \mathcal{O}_2 . La différence entre ces deux déterminations doit s'annuler et peut être écrite de la manière suivante:

$$\Delta m_q^R(t) \equiv 0 = \frac{\langle \partial_\mu \widehat{A}_\mu^R(x) \mathcal{O}_2(0) \rangle}{\langle \widehat{P}^R(x) \mathcal{O}_2(0) \rangle} - \frac{\langle \partial_\mu \widehat{A}_\mu^R(x) \mathcal{O}_2(0) \rangle}{\langle \widehat{P}^R(x) \mathcal{O}_2(0) \rangle}. \quad (\text{I.5.30})$$

En déterminant $\Delta m_q^R(t)$ pour plusieurs valeurs de t on peut alors ajuster la valeur de c_{SW} pour que la condition $\Delta m_q^R = 0$ soit toujours satisfaite. Pour des valeurs du paramètre $\beta = 6/g_0^2 > 6.0$, l'expression de l'ajustement de c_{SW} peut être écrite sous la forme [32, 33]:

$$c_{SW}(g_0) = \frac{1 - 0.656 g_0^2 - 0.152 g_0^4 - 0.054 g_0^6}{1 - 0.922 g_0^2}. \quad (\text{I.5.31})$$

Des procédures analogues permettent d'obtenir les autres coefficients d'amélioration ainsi que les constantes de renormalisation Z_Γ des opérateurs bilinéaires.

En utilisant ces résultats on peut s'assurer que les erreurs de discrétisation sont bien maîtrisées et que les résultats à maille finie sont proches de ceux de la limite du continu: l'approche de la limite $a \rightarrow 0$ reçoit des petites corrections d'ordre a^2 lorsque les mailles utilisées sont effectivement assez faibles.

Bref récapitulatif Avant de finir cette introduction à la méthode de calcul de la QCD sur réseau, récapitulons les principales sources d'incertitude dans les résultats et les façons de les améliorer.

Nous venons de voir comment on peut réduire les effets de maille finie. Les améliorations supplémentaires que l'on peut envisager à ce sujet concernent, d'une part les algorithmes d'inversion de l'opérateur de Dirac afin d'optimiser leur convergence lorsque la maille décroît, et d'autre part, l'utilisation de machines plus performantes. Ces deux améliorations permettraient aussi de travailler à des masses de quarks plus faibles. Nous aborderons en détail dans la suite de cet exposé les problèmes liés aux extrapolations vers la limite chirale et leur lien avec l'approximation «quenched». Ces deux points constituent actuellement les contributions dominantes aux incertitudes systématiques des simulations.

Pour améliorer le comportement chirale des simulations plusieurs stratégies peuvent être utilisées. Il y a en effet deux problèmes à aborder: d'une part celui de la conservation de la symétrie chirale et d'autre part celui de l'extrapolation vers la limite $m_q \rightarrow m_{u,d}$ afin d'obtenir des prédictions pour les nombreuses grandeurs physiques dépendant des quarks u et d . Pour résoudre le premier point, la stratégie la plus rigoureuse est cependant la plus coûteuse en temps de calcul: on peut implémenter des fermions *chiraux* «d'overlap» ou de «domain-wall» et retrouver ainsi la symétrie chirale à maille finie. Ceci suppose des

augmentations de plus d'un ordre de grandeur dans les temps de calcul. On peut envisager que d'ici quelques années, l'utilisation de fermions chiraux sera devenue une pratique habituelle dans la communauté «lattice». Nous avons indiqué au cours de ce chapitre d'autres manières d'améliorer les effets chiraux. On peut par exemple faire appel à des fermions «staggered» qui ont de meilleures propriétés chirales que les fermions de Wilson. Néanmoins, les fermions «staggered» produisent des saveurs non-physiques de quarks et la procédure d'identification de la saveur physique peut générer des ambiguïtés. Dans le cas de l'action de Wilson, nous avons vu que le programme d'amélioration de Symanzik permet d'améliorer le comportement chirale des fermions. En ce qui concerne le deuxième point, nous allons voir par la suite que la théorie de perturbation chirale joue un rôle important pour guider les résultats des réseaux (obtenus à des masses «légères» de quarks autour de celle du quark étrange). Nous avons aussi indiqué que l'utilisation de la «twisted mass QCD» permet d'éliminer les «configurations exceptionnelles» apparaissant aux faibles masses de quarks dans le cas de la formulation de Wilson. Il est ainsi possible de diminuer les masses sans perdre la possibilité d'inverser l'opérateur de Dirac pour calculer les propagateurs des quarks.

Parmi les incertitudes systématiques à étudier il y a aussi celles provenant des effets de volume fini. Il a été démontré que pour des volumes suffisamment grands ces effets d'écroissent exponentiellement [17]. Plus précisément, les effets de volume fini sur les masses m des hadrons simulés actuellement sont exponentiellement faibles lorsque le côté du réseau vérifie $L \gtrsim 4/m$. Lorsque m est la masse d'un hadron léger (*i.e.* ayant une longueur de Compton grande et pouvant être susceptible de recevoir des effets de volume fini), la relation $L \gtrsim 4/m$ est vérifiée pour $L \gtrsim 2.5$ fm (pour les masses pouvant être simulés actuellement). Ceci correspond effectivement bien à la taille typique des réseaux couramment utilisés. Ainsi, les effets de volume fini sont souvent bien maîtrisés. D'ailleurs, nous allons voir par la suite que ces effets peuvent être «exploités» pour construire des procédures itératives ouvrant la possibilité d'inclure une série d'échelles d'énergie dans les simulations. Remarquons tout de même qu'il est nécessaire d'aller vers de grands volumes de réseau pour affiner la résolution en impulsion: $ap = 2\pi/L$. Pour faire croître la valeur de L il faut d'abord pouvoir augmenter les espaces mémoire des machines.

En plus des incertitudes systématiques que nous venons de récapituler, il faut prendre en compte les incertitudes statistiques. A ce propos nous avons déjà indiqué qu'avec un nombre suffisant de configurations indépendantes de champs de jauge, il est possible de réduire considérablement les fluctuations statistiques et de les rendre généralement inférieures aux incertitudes systématiques.

La possibilité de contrôler systématiquement les approximations et les incertitudes est

ce qui permet d'améliorer progressivement les résultats des réseaux. Le but est alors non seulement de reproduire les valeurs obtenues expérimentalement et tester ainsi la validité de la QCD, mais aussi, de faire des prédictions, à partir des premiers principes de la théorie, sur les grandeurs non-perturbatives intervenant dans la phénoménologie du Modèle Standard. C'est ce que nous allons tenter de décrire dans les chapitres suivants. Avant de passer à l'étude de la phénoménologie des saveurs de quarks, nous allons commencer par reprendre quelques unes des idées sur les théories effectives (énoncées dans ce chapitre lors de la construction de la procédure d'amélioration), pour voir comment elles s'appliquent aux phénomènes physiques dépendant de masses de quarks beaucoup plus grandes ou beaucoup plus faibles par rapport à l'échelle du confinement Λ_{QCD} .

Appendice

A continuation sont présentées les correspondances entre les propriétés des espaces minkowskien et euclidien.

La m etricue de l'espace de Minkowski est prise comme étant $(1, -1, -1, -1)$.

Les composantes du quadrivecteur de position du minkowskien (M) et de euclidien (E) sont reliées par

$$x_4^{(E)} = ix^{(M)0} = ix_0^{(M)} \quad \text{et} \quad x_j^{(E)} = x^{(M)j} = -x_j^{(M)}, \quad (\text{I.5.32})$$

où j est l'indice spatial.

Noter que, par abus de langage, on note souvent l'indice temporel de l'euclidien de la même façon que dans le minkowskien:

$$x_4^{(E)} = x_0^{(E)} = x_0, \quad (\text{I.5.33})$$

où l'absence de l'indice ' E ' indique implicitement que l'on est dans l'euclidien.

Transformation de Fourier

La transformée de Fourier dans l'espace l'euclidien du réseau est définie par:

$$\tilde{\phi}(k) = \sum_x e^{-ik \cdot x} \phi(x) \quad (\text{I.5.34})$$

et la transformée de Fourier inverse:

$$\phi(x) = \frac{1}{V} \sum_k e^{ik \cdot x} \tilde{\phi}(k) \quad (\text{I.5.35})$$

Le produit scalaire de l'euclidien est tel que:

$$k \cdot x \equiv k_\mu x_\mu \equiv \sum_{\mu=1}^4 k_\mu x_\mu. \quad (\text{I.5.36})$$

Dérivées covariantes

Les dérivées covariantes définies dans l'espace de Minkowski sont définies par:

$$D^{(M)\mu} = \partial^{(M)\mu} - igA^{(M)\mu} . \quad (\text{I.5.37})$$

$$(\text{I.5.38})$$

Dans l'espace euclidien elles deviennent:

$$iD^{(M)0} = -D_4 \quad \text{et} \quad iD^{(M)j} = -iD_j . \quad (\text{I.5.39})$$

Matrices de Dirac

Les matrices de Dirac de l'euclidien sont hermitiques, $\gamma_\mu = \gamma_\mu^\dagger$, et vérifient $\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2\delta_{\mu\nu}$. La correspondance avec celles du minkowskien est donnée par:

$$\gamma^{(M)0} = \gamma_4 \quad , \quad \gamma^{(M)j} = i\gamma_j . \quad (\text{I.5.40})$$

La matrice γ_5 est définie par:

$$\gamma_5^{(M)} = i\gamma^{(M)0}\gamma^{(M)1}\gamma^{(M)2}\gamma^{(M)3} , \quad (\text{I.5.41})$$

$$\gamma_5 = \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4 = -\gamma_5^{(M)} . \quad (\text{I.5.42})$$

La représentation utilisée pour les matrices de Dirac est la suivante:

$$\gamma_i = \begin{pmatrix} 0 & i\sigma_i \\ -i\sigma_i & 0 \end{pmatrix} , \quad \gamma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} , \quad \gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \quad (\text{I.5.43})$$

où les σ_i sont les matrices 2×2 de Pauli.

On note:

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma_\mu, \gamma_\nu] . \quad (\text{I.5.44})$$

Corrélateurs et champs interpolants

Précisons la dépendance des corrélateurs à deux points en fonction des champs interpolants du minkowskien. La notation $C_\Gamma(p^2)$ indique les objets invariants de Lorentz formés à partir du même champ interpolant \mathcal{I} (cf. tableau 4.1).

$$C_{SS}^{(2)}(p) = C_S(p^2) ,$$

$$\begin{aligned}
C_{PP}^{(2)}(p) &= C_P(p^2), \\
C_{VV}^{(2)}(p) &= \left(\frac{p_\mu p_\nu}{p^2} - g_{\mu\nu} \right) C_V(p^2) + \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} C_S(p^2), \\
C_{AA}^{(2)}(p) &= \left(\frac{p_\mu p_\nu}{p^2} - g_{\mu\nu} \right) C_A(p^2) + \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} C_P(p^2), \tag{I.5.45}
\end{aligned}$$

$$C_{TT}^{(2)}(p) = \mathcal{P}_{\mu\nu\alpha\beta}^{(-)} C_V(p^2) + \mathcal{P}_{\mu\nu\alpha\beta}^{(+)} C_A(p^2), \tag{I.5.46}$$

où $\mathcal{P}^{(\pm)}$ sont les projecteurs sur la parité positive et négative définis par:

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_{\mu\nu\alpha\beta}^{(-)} &= \frac{1}{12 p^2} [g_{\mu\alpha} p_\nu p_\beta + g_{\nu\beta} p_\mu p_\alpha - g_{\mu\beta} p_\nu p_\alpha - g_{\nu\alpha} p_\mu p_\beta], \\
\mathcal{P}_{\mu\nu\alpha\beta}^{(+)} &= \mathcal{P}_{\mu\nu\alpha\beta}^{(-)} - \frac{1}{12} (g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} - g_{\mu\beta} g_{\nu\alpha}). \tag{I.5.47}
\end{aligned}$$

États vectoriels

Le vecteur de polarisation d'une particule vectorielle de masse m vérifie les relations suivantes (on considère le cas d'une impulsion $\vec{p} = (p, 0, 0)$):

$$p^{(M)\mu} \epsilon_\mu^{(M)}(\vec{p}, \lambda) = 0 \quad \text{et} \quad \epsilon^{(M)\mu}(\vec{p}, \lambda) \epsilon_\mu^{(M)}(\vec{p}, \lambda') = -m^2 \delta_{\lambda\lambda'} \tag{I.5.48}$$

où l'indice de la polarisation λ est tel que, $\lambda = \pm, 0$.

Les expressions de ces vecteurs dans le minkowskien est donné par:

$$\epsilon^{(M)\mu}(\vec{p}, \lambda) = \left(\frac{\vec{p} \cdot \vec{e}_\lambda}{m}, \vec{e}_\lambda + \frac{\vec{p} \cdot \vec{e}_\lambda}{m(m+E)} \vec{p} \right) \tag{I.5.49}$$

où la base (\vec{e}_0, \vec{e}_\pm) est telle que:

$$\vec{e}_0 = m(1, 0, 0), \tag{I.5.50}$$

$$\vec{e}_\pm = \mp \frac{m}{\sqrt{2}} (0, 1, \pm i). \tag{I.5.51}$$

Ces vecteurs satisfont la relation de complétude:

$$\sum_\lambda \epsilon_i^{(M)*}(\vec{p}, \lambda) \epsilon_j^{(M)}(\vec{p}, \lambda) = m^2 \left(\delta_{ij} + \frac{1}{m^2} p_i p_j \right). \tag{I.5.52}$$

Dans l'espace euclidien les vecteurs polarisation deviennent:

$$\epsilon_j(\vec{p}, \lambda) = \epsilon^{(M)j}(\vec{p}, \lambda). \tag{I.5.53}$$

Amélioration des opérateurs bilinéaires

On note $\tilde{\mathcal{O}}$ les opérateurs améliorés et renormalisés. Par contre, les opérateurs directement issus d'une simulation sont notés \mathcal{O} . Les définitions des opérateurs sont celles du tableau 4.1.

$$\tilde{S}(x, \mu) = Z_S(g_0, \mu) (1 + b_S(g_0) a \bar{m}) S(x), \quad (\text{I.5.54})$$

$$\tilde{V}_\mu(x) = Z_V(g_0) (1 + b_V(g_0) a \bar{m}) [V_\mu(x) + c_V a \partial_\nu T_{\mu,\nu}(x)], \quad (\text{I.5.55})$$

$$\tilde{T}_{\mu\nu}(x, \mu) = Z_T(g_0, \mu) (1 + b_T(g_0) a \bar{m}) [T_{\mu\nu}(x) + c_T a (\partial_\mu V_\nu(x) - \partial_\nu V_\mu(x))], \quad (\text{I.5.56})$$

$$\tilde{A}_\mu(x) = Z_A(g_0) (1 + b_A(g_0) a \bar{m}) [A_\mu(x) + c_A a \partial_\mu P(x)], \quad (\text{I.5.57})$$

$$\tilde{P}(x, \mu) = Z_P(g_0, \mu) (1 + b_P(g_0) a \bar{m}) P(x). \quad (\text{I.5.58})$$

La masse \bar{m} est la moyenne des masses des quarks q et q' :

$$\bar{m} = \frac{1}{2}(m_q + m_{q'}), \quad (\text{I.5.59})$$

où $m_q = m_0 - m_c$ est la masse du quark renormalisée additivement. La présence de l'échelle μ indique que les constantes de renormalisation Z ont une dimension anormale non-nulle.

Deuxième partie

Les théories effectives des mésons lourds-légers

Les symétries des théories effectives

Quand on travaille à des énergies suffisamment grandes par rapport à l'échelle propre de la QCD, Λ_{QCD} , comme dans le cas des systèmes composés de quarks lourds (le c ou le b), il est légitime d'approcher la QCD par une théorie effective décrivant la dynamique du système. En effet, de même que pour des masses de quarks faibles par rapport à Λ_{QCD} on voit surgir les effets de la symétrie chirale, lorsqu'on passe à des masses de quarks $m_Q \gg \Lambda_{QCD}$, les effets d'une autre symétrie appelée la symétrie des quarks lourds (HQS) voient le jour [34].

L'idée physique derrière cette approximation est de considérer que la dynamique des secteurs lourds et légers peut être découplée dans le lagrangien de la QCD lorsque l'on considère explicitement l'effet des quarks très massifs. Il y a dans l'esprit de cette approximation une certaine similitude avec le système de l'atome d'hydrogène. Dans un atome où la masse du noyau est bien plus grande que les énergies d'excitation des orbitales électroniques, les niveaux d'énergie du système sont des doublets dégénérés de spin indépendants de la masse du noyau. Il y a donc un découplage des effets de la masse et du spin du noyau. Dans la QCD, les effets hadroniques étant typiquement de l'ordre de Λ_{QCD} , la masse lourde $m_Q \gg \Lambda_{QCD}$ n'est pratiquement pas sensible aux échanges d'impulsion propres à l'échelle de la QCD. Inversement, l'échelle de la QCD est trop faible pour sonder la composition en masse et en spin du quark lourd qui se découple ainsi de la dynamique du système. Dans ces conditions, ce sont les degrés de liberté légers qui gouvernent la dynamique du système.

Dans la limite de masse infinie, aussi appelée limite statique, la symétrie de quarks lourds induit des conséquences sur le spectre des hadrons. En particulier, les masses des mésons pseudoscalaires et vecteurs, B et \bar{B} respectivement, sont dégénérées. Il faudra donc introduire des corrections d'ordre $1/m_Q$ et des corrections radiatives pour pouvoir relier les estimations issues de la symétrie des quarks lourds avec la QCD.

En toute rigueur, l'approximation des quarks lourds est valable uniquement lorsque le quark est très massif par rapport à $\Lambda_{QCD} \sim 300$ MeV. Laissant de côté le quark top qui

a une durée de vie beaucoup trop courte pour pouvoir hadroniser, le candidat idéal pour l'approximation des quarks lourds est le quark beau b qui a une masse $m_b \sim 4.5$ GeV. Par contre, dans le cas du quark charmé (où $m_c \sim 1$ GeV), pour pouvoir employer l'approximation des quarks lourds, il faut prendre en compte des effets de plus en plus importants des corrections en $1/m_c$.

La difficulté se situe dans le fait que, même si l'on connaît assez bien le comportement dominant de ces théories effectives, lorsqu'on s'éloigne du comportement asymptotique, les corrections aux ordres supérieurs en Λ_{QCD}/m_Q , sont de plus en plus délicates à déterminer. Du point de vue théorique, l'étude de ces corrections est un des enjeux importants de la physique des saveurs lourdes.

Il existe plusieurs théories effectives reliées au Modèle Standard (MS) des interactions élémentaires faisant intervenir des échelles de grande énergie. Par la suite nous allons nous concentrer sur deux de ces théories. La première est la théorie effective des quarks lourds (HQET) qui inclut la symétrie des quarks lourds. La deuxième est la théorie effective chirale des mésons lourds, qui associe symétrie chirale et symétrie des quarks lourds pour décrire des phénomènes faisant intervenir à la fois des quarks lourds et des quarks légers.

Chapitre 1

La théorie effective des quarks lourds

Reprenons d'abord les idées principales qui découlent de la symétrie des quarks lourds que nous avons brièvement introduite précédemment. Lorsqu'on considère un système hadronique composé d'un quark très massif ($m_Q \rightarrow \infty$), seul un processus dur peut modifier la vitesse du hadron. Ces processus sont traités de façon satisfaisante à l'aide de la théorie des perturbations. Inversement, les effets non-perturbatifs ne vont pas changer la vitesse du hadron (le quark lourd n'est pas dévié par les échanges de gluons mous) mais vont plutôt agir sur les degrés de liberté légers du système. Les effets relativistes sont supprimés en $1/m_Q$, ce qui a pour conséquence de découpler le spin du quark lourd. Ainsi, le quark lourd apparaît comme une source statique de couleur dont le flux chromomagnétique assure la cohésion de l'état lié hadronique. En raison du découplage des secteurs lourd et léger le système hadronique devient insensible à la masse et à la saveur du quark lourd, ce qui a pour effet de générer de façon naturelle une symétrie de spin et de saveur.

1.1 Construction du Lagrangien

Cette symétrie se manifeste lorsqu'on introduit l'approximation des masses lourdes dans le lagrangien de la QCD. On se place alors dans le cadre de la théorie effective des quarks lourds (HQET) [34–44]. La HQET est une théorie des champs incluant les simplifications que fait apparaître la QCD lorsqu'on considère les interactions à l'intérieur d'un hadron composé d'un seul quark lourd. Cependant, ces simplifications ne vont pas jusqu'au point de pouvoir traiter la théorie à l'aide uniquement d'un développement perturbatif. Il reste une partie non-perturbative à déterminer par des méthodes telles que la QCD sur réseau. La HQET permet néanmoins de séparer de façon systématique les effets

perturbatifs des effets non-perturbatifs.

En partant du lagrangien de la QCD, faisons l'approximation des quarks lourds pour en déduire le lagrangien de la HQET. Cette approximation suppose aussi que les impulsions des degrés de liberté légers soient petites par rapport à m_Q ce qui est légitime dans un système hadronique dont les distances typiques sont de l'ordre de $1/\Lambda_{QCD}$.

La partie de la densité lagrangienne de la QCD associée à un champ de quark lourd Ψ de masse m_Q s'exprime de la façon suivante:

$$\mathcal{L}_Q = \bar{\Psi} i \not{D} \Psi - m_Q \bar{\Psi} \Psi, \quad (\text{II.1.1})$$

où la dérivée covariante est donnée par:

$$D_\mu = \partial_\mu - i g_s \frac{\lambda_a}{2} A_\mu^a, \quad (\text{II.1.2})$$

où les λ_a sont les générateurs de $SU(3)$ et $g_s = \sqrt{4\pi\alpha_s}$ est la constante de couplage de la QCD.

La première étape est de décomposer l'impulsion p du quark lourd en deux termes,

$$p = m_Q v + k. \quad (\text{II.1.3})$$

On note v la quadri-vitesse du hadron lourd et k la composante résiduelle de l'impulsion provenant des interactions de l'ordre de Λ_{QCD} .

On décompose ensuite le champ de quark Ψ à l'aide des deux projecteurs $(1 \pm \not{v})/2$ sur les petites et les grandes composantes de spin,

$$h_v(x) \equiv e^{im_Q v \cdot x} \frac{1 + \not{v}}{2} \Psi(x), \quad (\text{II.1.4})$$

$$H_v(x) \equiv e^{im_Q v \cdot x} \frac{1 - \not{v}}{2} \Psi(x), \quad (\text{II.1.5})$$

et donc, par construction,

$$\Psi(x) = e^{-im_Q v \cdot x} (h_v(x) + H_v(x)). \quad (\text{II.1.6})$$

L'effet de la projection $(1 \pm \not{v})/2$ sur les petites et les grandes composantes est particulièrement clair dans le cas d'un hadron au repos, où $\not{v} = \gamma^\mu v_\mu = \gamma^0$. Le champ h_v est interprété comme un opérateur d'annihilation d'un quark lourd ayant la quadri-vitesse v . Dans le cadre de la HQET, les secteurs des quarks et des anti-quarks sont découplés. Avec les notations actuelles utilisées dans les équations précédentes, on est en train de considérer le cas d'un quark lourd. Pour étudier les anti-quarks, il faudrait tout simplement changer le signe de v .

D'autre part, sur la base de l'éq. (II.1.4), on peut observer que l'équation du mouvement pour les grandes composantes dépend explicitement de \hbar : $m_Q(\not{v} - 1)h_v = 0$.

Le facteur exponentiel $\exp(im_Q v \cdot x)$ dans les eqs. (II.1.4, II.1.5), dépend de la masse lourde m_Q et permet d'extraire de $\Psi(x)$, lorsque x est petit, la contribution des grandes fréquences. Il en résulte que la dépendance en x des champs h et H_v est gouvernée uniquement par la fraction résiduelle de l'impulsion de l'ordre de Λ_{QCD} .

A partir de l'équation du mouvement des quarks dans la QCD,

$$(i \not{D} - m_Q)\Psi = 0, \quad (\text{II.1.7})$$

on peut à nouveau utiliser les projecteurs $(1 \pm \not{v})/2$ et les eqs. (II.1.4) à (II.1.6) afin d'obtenir les équations du mouvement en termes des champs h et H_v . On génère ainsi un système couplé de deux équations,

$$iv \cdot Dh_v = -i \not{D}_\perp H_v, \quad (\text{II.1.8})$$

$$(iv \cdot D + 2m_Q)H_v = i \not{D}_\perp h_v, \quad (\text{II.1.9})$$

où on définit

$$D_\perp^\mu \equiv D^\mu - v^\mu v \cdot D. \quad (\text{II.1.10})$$

On peut noter que dans l'éq. (II.1.9) il y a une dépendance explicite dans la masse lourde m_Q . Le champ H_v a donc une dépendance de type: $\hbar \mathcal{O}(\Lambda_{QCD}/m_Q)$. Il sera donc supprimé par rapport au champ h . On dit que h_v contient les grandes composantes et H_v les petites. Ceci implique qu'à la limite statique, la création d'anti-quarks via le champ H est supprimée.

Maintenant on peut partir du lagrangien de QCD donné par l'éq. (II.1.1), utiliser les nouveaux champs h_v et H_v qui viennent d'être définis puis éliminer la dépendance en H à travers l'éq. (II.1.9) afin d'obtenir le lagrangien de la HQET:

$$\mathcal{L}_Q = \bar{h}_v iv \cdot Dh_v + \bar{h}_v i \not{D}_\perp \frac{1}{iv \cdot D + 2m_Q} i \not{D}_\perp h_v. \quad (\text{II.1.11})$$

Cette expression ne dépend que du champ h qui correspond dans la HQET à un champ de quark statique.

Réciproquement, si l'on part de l'équation du mouvement (II.1.8) pour h et qu'on élimine via l'éq. (II.1.9) la dépendance en H on retrouve immédiatement le lagrangien de la HQET en appliquant les petites variations par rapport à \bar{h}_v : $\delta \mathcal{L}_Q / \delta \bar{h}_v = 0$.

Jusqu'à ce moment nous avons uniquement réécrit le lagrangien de la QCD en termes des champs h_v et H_v , sans avoir encore introduit des approximations. Nous pouvons à présent simplifier le deuxième terme du lagrangien de la HQET contenant l'opérateur non

local $(iv \cdot D + 2m_Q)^{-1}$, le but étant de faire un développement en puissances de Λ_{QCD}/m_Q afin d'obtenir une série d'opérateurs locaux.

La première correction en Λ_{QCD}/m_Q à l'opérateur $(iv \cdot D + 2m_Q)^{-1}$ est simplement $(2m_Q)^{-1}$. Ainsi, le lagrangien de la HQET, incluant à présent le secteur gluonique s'écrit:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_Q &= \bar{h}_v iv \cdot D h_v + \frac{1}{2m_Q} \bar{h}_v (iD_\perp)^2 h_v \\ &+ \frac{g_s}{4m_Q} \bar{h}_v \sigma^{\mu\nu} G_{\mu\nu} h_v + \mathcal{O}(1/m_Q^2) . \end{aligned} \quad (\text{II.1.12})$$

Détaillons un peu l'interprétation physique de chacun de ces termes:

- Le premier terme $\bar{h}_v iv \cdot D h_v$ est l'ordre le plus bas du lagrangien de la HQET. C'est dans ce terme que l'on voit apparaître les symétries propres aux quarks lourds. Ce terme contient l'effet résiduel de la QCD lorsque la masse lourde m_Q a été isolée. Comme il ne dépend pas de m_Q , il n'a plus de paramètre pour distinguer la saveur, il est donc *symétrique de saveur*. La dynamique qui découle de la HQET à l'ordre dominant, c'est à dire à la limite des masses de quark $m_Q \rightarrow \infty$ (limite statique), est donc identique pour les quarks b et c . De plus, l'opérateur $v \cdot D$ ne fait pas intervenir les matrices de Dirac *i.e.* le propagateur du quark lourd et son couplage aux gluons deviennent insensibles au spin du quark lourd: c'est la *symétrie de spin* $SU(2)$ du lagrangien de la HQET. A la limite statique, le spin des quarks se découple. Ainsi, la symétrie des quarks lourds se définit par la symétrie de spin et de saveur $SU(2N)$ du lagrangien de la HQET à la limite statique, N_f étant le nombre de saveurs lourdes actives.
- Les deux autres termes dans le membre de droite de l'éq. (II.1.12) correspondent aux premières corrections en $1/m_Q$ à la HQET. Ces termes brisent la symétrie de spin et de saveur mais ils sont supprimés en $1/m_Q$. Le premier fait apparaître une contribution de type $p^2/(2m_Q)$. Il est donc relié à l'énergie cinétique du quark lourd. Il prend en compte le mouvement résiduel du quark lourd par rapport aux degrés de liberté légers, à l'intérieur du hadron. Le dernier terme fait intervenir les champs de gluons et correspond à l'interaction chromomagnétique entre le quark lourd et le nuage de gluons.

Lorsqu'on considère une autre interaction que la QCD, l'emploi de l'approximation de la HQET reste encore valable. En particulier, dans le cas des interactions faibles, un courant intervenant dans une transition lourd-léger $\bar{q}\Gamma\Psi$, devient dans le cadre de la HQET:

$$\bar{q}\Gamma\Psi = \bar{q}\Gamma h_v + \mathcal{O}\left(\frac{1}{m_Q}\right) , \quad (\text{II.1.13})$$

où l'on a remplacé le champ du quark lourd Ψ par le champ de la HQET h et l'on a négligé les termes sous-dominants en $1/m_Q$.

1.2 Spectroscopie des hadrons lourds

Le premier intérêt de la HQET est qu'elle permet de classer et de décrire la spectroscopie des hadrons lourds [34].

Considérons l'état fondamental des mésons B et B^* et voyons comment la HQET décrit leurs masses. Ces mésons forment un doublet qui provient du couplage du spin $s = 1/2$ du quark lourd avec le spin $s_q = 1/2$ des degrés de liberté légers. On forme ainsi des états dégénérés $J = 0$ et $J = 1$ qui correspondent respectivement aux mésons pseudoscalaires et vectoriels B et B^* . Ce doublet forme ensuite les anti-triplets de $SU(3)_V$, donnant lieu lorsque $J = 0$, aux mésons B^0 , B^+ et B_s et lorsque $J = 1$, aux mésons B^{*0} , B^{*+} et B_s^* . Cependant, comme le spin du quark lourd se découple à la limite des quarks lourds et que l'effet du moment magnétique du quark lourd s'annule, les effets des degrés de liberté légers sont identiques dans les mésons B et B^* .

En laissant de côté les termes en $1/m_Q$ dans le lagrangien de l'éq. (II.1.11), on peut écrire la masse des mésons lourds de la façon suivante:

$$m_B^{(0)} = m_{B^*}^{(0)} = m_b + \bar{\Lambda}. \quad (\text{II.1.14})$$

La masse du méson lourd est égale à la masse du quark lourd à des effets d'ordre Λ_{CD} près que l'on prend en compte à travers le terme $\bar{\Lambda}$. On peut déterminer $\bar{\Lambda}$ par les interactions entre les degrés de liberté légers et le champ h du quark statique dans le premier terme (indépendant de m_b) de l'éq. (II.1.11). La décomposition dans l'éq. (II.1.14), relie une grandeur physique (la masse des hadrons) à des paramètres qui dépendent de la théorie effective et du schéma utilisé.

On peut ensuite inclure les premiers effets des corrections en puissances de $1/m_b$. La prise en compte de ces corrections a pour effet de briser la symétrie de spin: le spin s des degrés de liberté légers n'est plus le bon nombre quantique et les états $J = s + s_q$ ne sont plus dégénérés.

Pour formuler la correction en masse, δm_B , il faut considérer les termes en $1/m_b$ dans l'éq. (II.1.11) comme des perturbations à l'ordre dominant. Au premier ordre, les corrections à la masse du méson lourd viennent des valeurs moyennes dans le vide des opérateurs d'énergie cinétique et chromomagnétique. On appelle λ_2 ces valeurs moyennes dans

le vide:

$$\lambda_1 \equiv \frac{\langle B | \bar{h}(iD)^2 h | B \rangle}{2m_B}, \quad (\text{II.1.15})$$

$$\lambda_2 \equiv \frac{1}{6} \frac{\langle B | \bar{h} g \sigma \cdot G h | B \rangle}{2m_B}, \quad (\text{II.1.16})$$

où la masse m_B provient de la normalisation habituelle des états $\langle B | B \rangle$. Le paramètre λ est relié à la valeur moyenne dans le vide de l'impulsion du quark lourd, $\lambda = \langle \vec{p}_h^2 \rangle = \mathcal{O}(\Lambda_{QCD}^2)$. Il va donc correspondre dans la correction δm_B à la contribution de l'impulsion du quark lourd à la masse du méson. Ce terme est indépendant du spin, donc sa contribution à la masse du hadron doit être la même pour le B et le B^* . Par contre λ_2 ne va pas agir de la même façon sur ces deux mésons. L'opérateur chromomagnétique $\sigma \cdot G$ est proportionnel à $s_b \cdot s_q$ et donc,

$$\langle \sigma \cdot G \rangle \propto (J(J+1) - s_b(s_b+1) - s_q(s_q+1)). \quad (\text{II.1.17})$$

En prenant en compte cet effet, on peut ainsi écrire une relation entre les éléments de matrice des mésons B et B^* :

$$\mu^2 = \langle B | \bar{h} g \sigma \cdot G h | B \rangle = -3 \langle B^* | \bar{h} g \sigma \cdot G h | B^* \rangle, \quad (\text{II.1.18})$$

où μ est le moment chromomagnétique du méson lourd-léger.

De cette façon on peut expliquer que les corrections δm_B et δm_{B^*} soient différentes et prennent la forme suivante:

$$\delta m_B = -\frac{\lambda_1 + 3\lambda_2}{2m_b}, \quad (\text{II.1.19})$$

$$\delta m_{B^*} = -\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2m_b}. \quad (\text{II.1.20})$$

En rassemblant les corrections on en déduit que les masses des mésons pseudoscalaires et vecteurs s'écrivent,

$$m_B = m_b + \bar{\Lambda} - \frac{\lambda_1 + 3\lambda_2}{2m_b}, \quad (\text{II.1.21})$$

$$m_{B^*} = m_b + \bar{\Lambda} - \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2m_b}, \quad (\text{II.1.22})$$

où l'on perçoit clairement que l'effet de la levée de la dégénérescence des états (au premier ordre non trivial de la HQET) est en $1/m_b$.

En considérant la différence de masses $m_{B^*} - m_B$ on peut écrire le splitting des masses vectorielles et pseudoscalaires en fonction du paramètre λ_2 ,

$$m_{B^*} - m_B = \frac{2\lambda_2}{m_b}, \quad (\text{II.1.23})$$

et donc aussi,

$$m_{B^*}^2 - m_B^2 \sim 4\lambda_2. \quad (\text{II.1.24})$$

On peut alors utiliser la valeur expérimentale du splitting, $m_{B^*} - m_B = 46$ MeV, pour déterminer λ_2 . Il est à noter que la valeur de $m_{B^*} - m_B$ est très petite par rapport aux masses des mésons lourds, $m_B \sim 5.3$ GeV. On en déduit la valeur de $\lambda_2 = 0.12$ GeV².

Par ailleurs, en utilisant cette valeur ainsi que la valeur du splitting des masses dans le secteur des mésons D , on peut avoir une idée des lois d'échelles de la HQET pour les valeurs des masses des quarks lourds. L'analogie de l'éq. (II.1.23) pour les mésons D est la suivante:

$$m_{D^*} - m_D = \frac{2\lambda_2}{m_c} = 141 \text{ MeV}. \quad (\text{II.1.25})$$

Du point de vue de la HQET, les masses des mésons B et D ne diffèrent que par la valeur de la masse du quark lourd qui les compose, en particulier, les paramètres $\bar{\Lambda}$, λ_1 et λ_2 sont inchangés lorsque l'on passe du méson B au méson D .

Ceci implique que les masses des quarks lourds s'échelonnent suivant le splitting des masses des mésons lourds qui leur sont associés:

$$\frac{m_b}{m_c} = \frac{m_{D^*} - m_D}{m_{B^*} - m_B} \sim 3. \quad (\text{II.1.26})$$

Cette propriété est en assez bon accord quantitatif avec les estimations actuelles des masses des quarks lourds. Si on considère que la masse du quark b est dans la fenêtre $m_b = 4.0 - 4.5$ GeV, alors l'éq. (II.1.26) indique que la masse du méson charmé est dans l'intervalle $m_c = 1.3 - 1.5$ GeV. Cette valeur peut être comparée aux estimations du Particle Data Group [45], $m_c = 1.0 - 1.4$ GeV. L'écart observé, au delà des difficultés propres aux calculs des masses des quarks, peut aussi être une manifestation du fait que le quark charmé n'a pas une masse beaucoup plus grande que Λ_{QCD} et donc que le traitement en puissances de Λ_{QCD}/m_c commence à éprouver des difficultés au niveau de la masse du quark c .

Contrairement à λ_2 , le paramètre λ_1 ne peut pas être déterminé directement par l'expérience. Les estimations théoriques de λ permettent de quantifier la différence des masses $m_b - m_c$, qui est bien mieux connue que chaque valeur m_b et m_c séparément. Pour cela on considère la masse des mésons moyennée sur les spins:

$$\bar{m}_B \equiv \frac{m_B + 3m_{B^*}}{4} = m_b + \bar{\Lambda} - \frac{\lambda_1}{2m_b}, \quad (\text{II.1.27})$$

$$\bar{m}_D \equiv \frac{m_D + 3m_{D^*}}{4} = m_c + \bar{\Lambda} - \frac{\lambda_1}{2m_c}. \quad (\text{II.1.28})$$

De cette façon on élimine la dépendance en λ . On peut maintenant construire la différence

de masses $m_b - m_c$:

$$m_b - m_c = (\bar{m}_B - \bar{m}_D) \left(1 - \frac{\lambda_1}{2\bar{m}_B\bar{m}_D} \right). \quad (\text{II.1.29})$$

Les déterminations théoriques de $\bar{\Lambda}$ et de λ_1 présentent encore des incertitudes assez grandes. A partir du spectre d'énergie des leptons formés dans les désintégrations semi-leptoniques inclusives du méson B , on obtient $\bar{\Lambda} \sim 0.4 \text{ GeV}$ et $\lambda_1 \sim -0.2 \text{ GeV}^2$. Cependant le fait d'avoir une valeur faible pour λ_1 permet d'avoir une estimation assez précise de $m_b - m_c \sim 3.4 \text{ GeV}$, où l'on a utilisé $\bar{m}_B = 5.3 \text{ GeV}$ et $\bar{m}_D = 1.8 \text{ GeV}$.

Récapitulons ce que l'on vient d'exposer à propos de la spectroscopie des mésons lourds à l'aide de la figure 1.1.

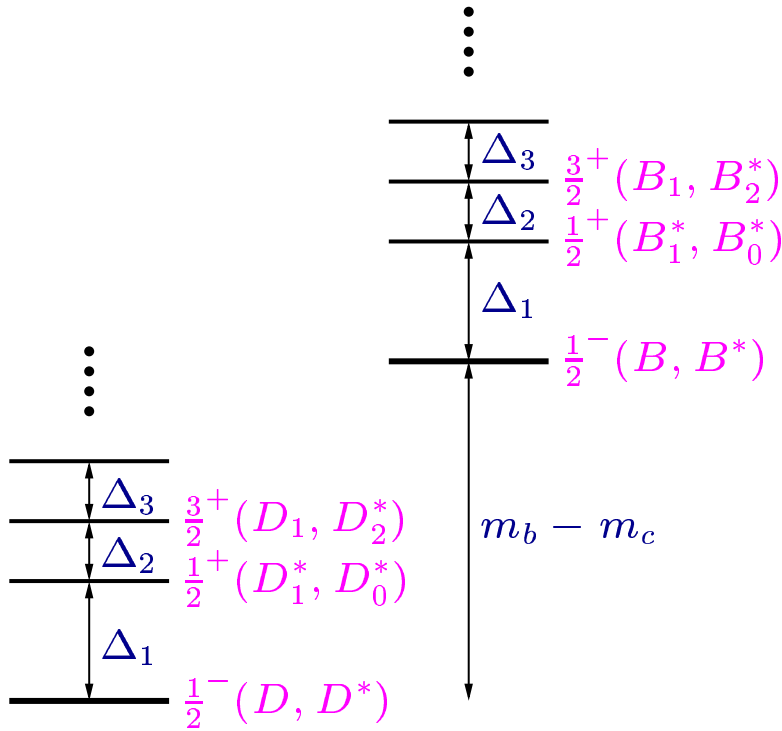


FIG. 1.1 – Spectroscopie des mésons D et B issue de la HQET. Le spin et la parité des degrés de liberté légers sont indiqués à côté des noms des mésons.

Les splittings de masse Δ_i entre les doublets sont de l'ordre de Λ_{QCD} et indépendants de la masse lourde, à l'ordre dominant en Λ_{QCD}/m_Q . Le splitting de masse à l'intérieur d'un doublet est quant à lui d'ordre Λ_{QCD}^2/m_Q . Il est donc plus important dans le secteur du D que dans celui du B : $m_{D^*} - m_D \approx 140 \text{ MeV}$ alors que $m_{B^*} - m_B \approx 45 \text{ MeV}$. Finalement l'écart en masse entre les secteurs du D et du B provient de la différence de masse des quarks, $m_b - m_c$.

1.3 Comment relier la HQET à la QCD

Lorsqu'on considère des quantités physiques définies à partir de courants contenant un quark lourd, il devient nécessaire de faire le passage entre les valeurs fournies par la théorie effective des quarks lourds et celles de la QCD. En d'autres termes, il faut savoir comment relier les champs h_v de la HQET aux champs de quarks $\Psi = b, c$ de la QCD.

Prenons l'exemple de la constante de désintégration, f_B , du méson B . Elle représente le couplage avec le vide d'un méson B d'impulsion $p = m_B v$ et se définit de la façon suivante:

$$\langle 0 | A_\mu | B(p) \rangle = -i f_B p, \quad (\text{II.1.30})$$

en termes de l'élément de matrice du courant axial,

$$A_\mu \equiv \bar{q} \gamma_\mu \gamma_5 \Psi, \quad (\text{II.1.31})$$

où, à présent, le champ $\Psi = b$.

Considérons le courant A_μ dans la HQET et faisons un développement en puissances de $1/m_Q$ tout en incluant les corrections radiatives de la QCD. La procédure reliant le courant de la QCD à la HQET consiste en un développement en produit d'opérateurs (OPE) où l'on factorise les effets de longues et de courtes distances [116]. Écrivons le développement de A_μ à l'ordre dominant en $1/m_Q$:

$$A = C_1(\mu) \tilde{A}_1 + C_2(\mu) \tilde{A}_2 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{m_Q}\right), \quad (\text{II.1.32})$$

où

$$\tilde{A}_1 = \bar{q} \gamma_\mu \gamma_5 h_v, \quad (\text{II.1.33})$$

$$\tilde{A}_2 = \bar{q} v_\mu \gamma_5 h_v. \quad (\text{II.1.34})$$

Les coefficients C_1 et C_2 , appelés coefficients de Wilson dans le langage de la procédure du développement en produit d'opérateurs, sont des fonctions qui dépendent de l'échelle d'énergie μ , mais qui sont indépendantes des champs externes. Ces coefficients reflètent la possibilité de factoriser les énergies en jeu puisqu'ils incluent tous les effets de courte distance (c'est à dire ceux qui agissent pour des énergies au delà de l'échelle μ et jusqu'à des valeurs de l'ordre de m_Q). Ils sont donc calculables à l'aide de la théorie des perturbations et les corrections qu'ils reçoivent de la QCD sont de l'ordre de $\mathcal{O}(\alpha_s)$.

Dans le cadre des Hamiltoniens effectifs des interactions faibles, les développements OPE permettent d'intégrer, à l'intérieur des coefficients du type de \tilde{A}_2 , les degrés de liberté massifs associés au boson W . Dans le cas présent, les degrés de liberté massifs

absorbées par les coefficients de Wilson sont ceux du champ H_b de la HQET (contenant les petites composantes et ayant une masse égale à $2m_Q$).

D'autre part, les longues distances incluent des effets non-perturbatifs et sont factorisées dans les éléments de matrice hadroniques \tilde{A}_1 et \tilde{A}_2 . L'échelle μ de factorisation n'est pas physique. Elle s'annule entre les coefficients $C_{1,2}$ et les éléments de matrice à chaque ordre en $\mathcal{O}(\alpha_s)$.

L'intérêt de ce type de développements est qu'en séparant les échelles on simplifie considérablement le problème puisqu'on dispose de différentes techniques de calcul pour déterminer chaque élément de la factorisation: la théorie de perturbation pour les courtes distances et des méthodes comme la QCD sur réseau pour les effets non-perturbatifs. Le concept de factorisation est un outil indispensable dans un grand nombre d'applications en QCD car il permet d'aborder une difficulté essentielle propre à cette théorie: la coexistence des effets perturbatifs et non-perturbatifs même à des courtes distances.

L'échelle propre à l'étude de \mathcal{B} est la masse du quark b . Les conditions de raccordement pour $\mu = m_b$ (*i.e.* l'échelle au dessus de laquelle on intègre les degrés de liberté lourds) s'écrivent:

$$C_1(m_b) = 1 + \mathcal{O}(\alpha_s), \quad (\text{II.1.35})$$

$$C_2(m_b) = \mathcal{O}(\alpha_s). \quad (\text{II.1.36})$$

Si on se limite à l'ordre dominant de la QCD, alors seul le terme \tilde{A}_1 est présent dans la HQET et le coefficient $C_1(\mu)$ vaut 1. Les corrections radiatives font apparaître le terme en \tilde{A}_2 et introduisent les effets $\mathcal{O}(\alpha_s)$ dans C_1 et C_2 .

Contrairement au cas de la QCD, dans la HQET le courant axial a une dimension anormale qui provient de la dépendance logarithmique de \mathcal{B} dans la masse du quark lourd à l'ordre $\mathcal{O}(\alpha_s)$. Regardons un peu plus en détail comment les méthodes du groupe de renormalisation permettent de resommer ces logarithmes.

Commençons par le coefficient $C_1(\mu)$. Nous avons vu auparavant qu'il pouvait être calculé en perturbations. Les étapes de ce calcul sont les suivantes: il faut tout d'abord calculer l'élément de matrice de A_μ pour des champs externes arbitraires. En effet, nous avons préalablement noté que les coefficients C_2 sont indépendants des champs externes. Il est donc possible de choisir les champs externes qui simplifient le calcul de l'élément de matrice de A_μ . On détermine ensuite les éléments de matrice des différents opérateurs du développement, \tilde{A}_1 et \tilde{A}_2 , pour les mêmes champs externes. On peut donc finalement résoudre un système linéaire de deux équations à deux inconnues pour extraire C_1 et C_2 .

Cette procédure permet d'obtenir l'expression suivante pour C_1 :

$$C_1(\mu) = 1 + \frac{\alpha_s(\mu)}{4\pi} \frac{\gamma_0}{2} \ln \frac{m_b^2}{\mu^2}, \quad (\text{II.1.37})$$

où $\gamma_0 = 4$. Cette expression indique la forme des corrections logarithmiques $\mathcal{O}(\alpha_s \log)$.

Numériquement le facteur $\alpha_s(m_b)/4\pi \sim 0.02$ est petit. Ceci est dû au fait que nous avons utilisé $\alpha_s(\mu = m_b = 4.2 \text{ GeV}) = 0.22$. Cependant, à des échelles $\mu \sim 1 \text{ GeV}$, le terme logarithmique fait que $\alpha_s \ln(m_b/\mu)$ est $\mathcal{O}(1)$ ce qui interdit l'utilisation habituelle du développement perturbatif en puissances de α_s uniquement. La façon de traiter ce problème consiste à resommer les termes du type $(\alpha_s \ln(m_b/\mu))^n$ à tous les ordres en n . Le développement se fait donc en puissances de $\mathcal{O}(\frac{\alpha_s}{\alpha_s^k})$, mais chaque ordre k contient les effets de la resommation des logarithmes. Par exemple, l'ordre $\mathcal{O}(\alpha_s^0 = 1)$ va contenir les effets de la resommation (sur n) des termes du type $\alpha_s^n (\ln(m_b/\mu))^n$ et l'ordre suivant, $\mathcal{O}(\alpha_s)$, ceux de la resommation des termes du type $\alpha_s^n (\ln(m_b/\mu))^{n-1}$.

Cette réorganisation du développement s'effectue en résolvant l'équation du Groupe de Renormalisation (RGE) appliquée aux coefficients $G_1(\mu)$ et $C_2(\mu)$. La RGE est l'équation décrivant la variation des coefficients $G_{1,2}(\mu)$ en fonction de l'échelle d'énergie.

En appliquant cette équation au coefficient $G_1(\mu)$, à l'ordre dominant *i.e.* $(\alpha_s \ln(m_b/\mu))$ on obtient:

$$\frac{d}{d \ln \mu} C_1(\mu) = -\gamma_0 \frac{\alpha_s}{4\pi} \cdot C_1(\mu). \quad (\text{II.1.38})$$

Le facteur $(\alpha_s/4\pi)\gamma_0$ est appelé la dimension anormale de G_1 . La dénomination de «dimension anormale» vient de l'analogie avec l'équation de la dérivée logarithmique d'une puissance de l'énergie. En effet, la dimension de μ^n est n , en échelle d'énergie et la dérivée s'écrit:

$$\frac{d}{d \ln \mu} \mu^n = n \cdot \mu^n. \quad (\text{II.1.39})$$

Dans le cas de C_1 , la similitude dans la forme des eqs. (II.1.38) et (II.1.39) rappelle l'idée d'une dimension pour le terme $(\alpha_s/4\pi)\gamma_0$, même si dans le cas présent G_1 est adimensionnée. On peut voir dans l'eq. (II.1.37) que la dépendance explicite en μ apparaît dans le rapport m_b/μ . Le terme $(\alpha_s/4\pi)\gamma_0/2$ joue donc le rôle d'une dimension dans le sens qu'il donne une échelle aux variations de G_1 en fonction de μ . D'autre part, le facteur $(\alpha_s/4\pi)\gamma_0/2$ apparaît du fait des corrections en boucles à l'ordre $\mathcal{O}(\alpha_s)$: il s'agit d'un phénomène purement quantique. Nous parlons donc de dimension «anormale» parce que la symétrie existante au niveau classique (*i.e.* lorsque $G_1 \equiv 1$) est brisée par des effets quantiques. Il est habituel d'attribuer au coefficient γ_0 le nom de dimension anormale du coefficient de Wilson.

Il est maintenant facile d'utiliser la fonction β donnant l'évolution de la constante de couplage α_s en fonction de l'échelle μ pour obtenir une expression de G_1 incluant à ce stade la resommation des logarithmes. En considérant donc,

$$\frac{d\alpha_s}{d \ln \mu} = -2\beta_0 \frac{\alpha_s^2}{4\pi}, \quad (\text{II.1.40})$$

où

$$\beta_0 = \frac{33 - 2N_f}{3}, \quad (\text{II.1.41})$$

et N_f le nombre de saveurs actives de quarks dans la fenêtre d'énergie comprise entre μ et l'échelle des masses lourdes. L'éq. (II.1.40) correspond à la RGE appliquée à α_s avec $2\beta_0$ comme dimension anormale.

En combinant les éqs. (II.1.38) et (II.1.40) et en utilisant le fait que $G_1(m_b) = 1$, on obtient:

$$C_1(\mu) = \left[\frac{\alpha_s(m_b)}{\alpha_s(\mu)} \right]^{-\gamma_0/(2\beta_0)} = \left[\frac{1}{1 + \beta_0 \frac{\alpha_s(\mu)}{4\pi} \ln \frac{m_b^2}{\mu^2}} \right]^{-\gamma_0/(2\beta_0)}. \quad (\text{II.1.42})$$

Cette expression est la solution de la RGE pour le coefficient C_1 à l'approximation des logarithmes dominants (LLA). Dans le deuxième terme on peut voir explicitement l'effet de la resommation à tous les ordres des termes du type $\alpha_s \log$.

Pour exprimer f_B dans le cadre de la HQET, il ne reste plus qu'à considérer l'élément de matrice de l'opérateur \tilde{A}_1 , qui est défini de la façon suivante:

$$\langle 0 | \tilde{A}_1 | B(p) \rangle = -i \tilde{f}(\mu) \sqrt{m_B} v_\mu. \quad (\text{II.1.43})$$

La constante de désintégration $\tilde{f}(\mu)$ est indépendante de la masse m_b puisque toute la dynamique de la HQET l'est. Donc toute la dépendance dans la masse lourde est dans le facteur $\sqrt{m_B}$.

On peut combiner les expressions précédentes pour aboutir à l'expression de f_B , valable à l'ordre dominant du développement en Λ_{QCD}/m_b de la HQET et l'approximation des logarithmes dominants de la QCD:

$$f_B = \frac{\tilde{f}(\mu)}{\sqrt{m_B}} \left[\frac{\alpha_s(m_b)}{\alpha_s(\mu)} \right]^{-2/\beta_0}. \quad (\text{II.1.44})$$

Pour obtenir des estimations de f_B , il faut donc faire des mesures de $\tilde{f}(\mu)$ par des méthodes non-perturbatives. L'éq. (II.1.44) indique aussi la dépendance en $\sqrt{m_B}$ attendue pour f_B . Cette loi d'échelle est une référence utile pour comparer les effets des corrections en $1/m_Q$ lorsqu'on passe du secteur des mésons B à celui des mésons D . C'est aussi une façon simple de voir l'intérêt pratique de la HQET.

Cette théorie effective est utile pour d'autres déterminations de grandeurs physiques. En particulier elle permet d'extraire la valeur de l'élément de matrice $|\mathcal{Y}|$ de la matrice de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa (CKM) [46, 47] à partir des désintégrations semi-leptoniques $\bar{B} \rightarrow D^* \ell \bar{\nu}$. Un résultat remarquable de la HQET dans ce contexte est qu'à la

limite statique des quarks lourds, c'est à dire, à l'ordre le plus bas dans la HQET, la symétrie des quarks lourds implique que tous les facteurs de forme hadroniques (l'outil théorique pour écrire la probabilité que les quarks forment un certain hadron dans l'état final) s'expriment en termes d'une seule fonction ξ , appelée la fonction de Isgur-Wise [34]. La raison de cette simplification est que, puisque dans la désintégration $\bar{B} \rightarrow D^*$ les états initiaux et finaux font intervenir un quark lourd, la HQET va traiter de façon identique le méson B et le méson D , générant ainsi des relations entre les différents facteurs de forme. D'autre part la HQET fournit une procédure systématique d'inclusion des corrections qui apparaissent lorsqu'on s'éloigne de la limite statique. Noter que dans le cas des désintégrations $\bar{B} \rightarrow D^* \ell \bar{\nu}$ le théorème de Luke [49] indique que les corrections en $1/m_Q$ sont absentes, ce qui permet d'obtenir des déterminations assez précises de $|V|$. Dans le chapitre suivant nous reprendrons un peu plus d'étail les méthodes impliquées dans la détermination de cet élément de la matrice CKM.

Quelques mots sur LEET et SCET Il est important de noter que la HQET s'applique correctement aux désintégrations $\bar{B} \rightarrow D^*$ parce que l'état initial et l'état final contiennent des quarks lourds. Lorsqu'on s'intéresse à des transitions lourd à léger ($\bar{B} \rightarrow \pi(\rho)$ par exemple), la HQET ne peut plus écrire l'ensemble du processus.

Ainsi, d'autres théories effectives reprennent les idées de la HQET dans des conditions cinématiques différentes. En particulier la LEET (Large Energy Effective Theory) est une théorie effective qui s'applique lors des processus lourd à léger faisant intervenir dans l'état final un hadron léger de grande impulsion [50, 51, 53].

Prenons le cas des désintégrations du type $B \rightarrow \pi$, et appelons q le transfert de quadri-impulsion entre les mésons initiaux et finaux, $q = p - p_f = p - p'$. Les facteurs de forme en jeu seront des fonctions de q^2 . Nous verrons par la suite que, suivant la valeur de q^2 , il sera nécessaire de faire appel à différents outils théoriques pour traiter ces désintégrations.

Dans le repère du méson B , $q^2 = 0$ correspond au recul maximal du pion alors que $q^2 = q_{max}^2 = (m_B - m_\pi)^2$ est la zone de recul nul où le pion est au repos. En écrivant l'énergie du pion comme:

$$E_\pi = \frac{q_{max}^2 - q^2}{2m_B} + m_\pi, \quad (\text{II.1.45})$$

on obtient dans les cas limites

$$q^2 = 0 \Rightarrow E_\pi = E_\pi|_{max} = \frac{m_B^2 + m_\pi^2}{2m_B} \sim \frac{m_B}{2}, \quad (\text{II.1.46})$$

$$q^2 = q_{max}^2 \Rightarrow E_\pi = E_\pi|_{min} = m_\pi, \quad (\text{II.1.47})$$

ce qui correspond au passage d'une échelle de basse énergie (μ) à l'échelle des masses

lourdes (m_B). Dans le cas $q^2 \sim q_{max}^2$, la HQET donne une description valable de la désintégration puisque le processus n'a pas généré une grande impulsion (de l'ordre de m_b) dans le secteur hadronique. Mais ceci correspond à une zone limitée de l'espace de phase de la désintégration $B \rightarrow \pi$.

Il est possible de relier *via* la HQET les facteurs de forme des désintégrations des mésons B et D (cependant la symétrie ne réduit pas le nombre de facteurs de forme en jeu ni ne permet de déterminer leurs normalisations). Par exemple, en combinant des symétries (HQS et symétrie chirale) on peut arriver à relier les désintégrations $B \rightarrow \pi \ell \bar{\nu}$ et $D \rightarrow K \ell \bar{\nu}$. D'une part, la symétrie des quarks lourds va relier les mésons B et D et, d'autre part, la symétrie chirale reliera les mésons K et π . Les facteurs de forme de ces désintégrations prennent la même valeur lorsque $v \cdot v'$ est constant et d'ordre 1, *i.e.* quand les énergies des mésons légers (dans le repère du méson lourd) sont proches. Noter que, pour un recul maximal, seules les désintégrations lourd à lourd vérifient $v' \cdot v \simeq 1$:

$$B \rightarrow D \quad : \quad v \cdot v' \simeq 1.5, \quad (\text{II.1.48})$$

$$B \rightarrow \rho \quad : \quad v \cdot v' \simeq 3.5, \quad (\text{II.1.49})$$

$$B \rightarrow \pi \quad : \quad v \cdot v' \simeq 18.9. \quad (\text{II.1.50})$$

La difficulté de cette approche est que les corrections aux symétries des saveurs lourdes et chirales peuvent être de l'ordre de 20%.

Loin du recul nul, le pion a une grande impulsion par rapport à Λ_{QCD} et il faut donc pouvoir écrire un quark actif énergétique (dans le pion) en interaction avec le milieu (l'interaction étant à l'échelle Λ_{QCD}). Dans ces conditions il faut prendre en compte dans la théorie deux grandes échelles: la masse lourde du quark dans l'état initial et la grande impulsion du hadron final. Le quark léger de grande impulsion génère lors de la désintégration une hélicité qui ne peut plus être modifiée sous l'effet des gluons mous. Ceci donne lieu à des symétries supplémentaires. A la limite où les masses lourdes et les énergies des mésons légers sont infinies, la LEET prédit des relations qui permettent de contraindre le nombre des facteurs de forme impliqués dans les désintégrations semi-leptoniques des mésons lourds-légers [51].

Une théorie effective des champs analogue à LEET est en développement actuellement, il s'agit de la SCET (soft-collinear effective theory) [54, 55]. De même que pour LEET, on cherche à créer un cadre théorique pour écrire les interactions entre une particule peu massive mais de grande impulsion et des gluons mous. La dynamique du quark léger se déplaçant dans la direction z avec une énergie E est mieux décrite à l'aide des coordonnées du cône de lumière $p = (\bar{p}, p_\perp, p^+)$ et l'on utilise $\lambda \sim \mathcal{O}(|p_\perp|/p^+)$ comme

petit paramètre. La décomposition de la quadri-impulsion est de la forme:

$$p^\mu = \bar{n} \cdot p \frac{n^\mu}{2} + p_\perp^\mu + n \cdot p \frac{\bar{n}^\mu}{2}, \quad (\text{II.1.51})$$

$$\equiv p^- \frac{n^\mu}{2} + p_\perp^\mu + p^+ \frac{\bar{n}^\mu}{2}, \quad (\text{II.1.52})$$

$$\sim \left[\mathcal{O}(\lambda^0) + \mathcal{O}(\lambda^1) + \mathcal{O}(\lambda^2) \right] E, \quad (\text{II.1.53})$$

où $n = (1, 0, 0, 1)$ et $\bar{n} = (1, 0, 0, -1)$ sont les vecteurs du cône de lumière ($n^2 = 0$).

Le but est de décrire la dynamique en séparant les contributions de trois échelles: $p^- E^2$, $E\Lambda_{QCD}$ et Λ_{QCD}^2 . Dans la plupart des applications $\lambda \sim \Lambda_{QCD}/m_b$.

De même que dans la HQET, en SCET on redéfinit les champs de quark pour absorber les grandes impulsions du quark colinéaire:

$$\xi_n(x) = e^{i\tilde{p} \cdot x} \psi(x), \quad (\text{II.1.54})$$

où $\tilde{p} = p^- n/2 + p_\perp$, contient les termes d'impulsion grandes par rapport à Λ_{QCD} . Une difficulté supplémentaire de la SCET par rapport à la HQET est que \tilde{p} n'est pas une constante comme l'est la quadri-vitesse v dans la HQET. Il faut donc aussi introduire une décomposition pour les champs de gluons et faire apparaître des gluons colinéaires. La SCET permet alors de prouver la factorisation des différentes échelles d'impulsion en jeu à tous les ordres en α_s et à l'ordre dominant en $1/E$.

Un facteur de forme g'énerique d'une désintégration du méson B en un méson léger M d'énergie E peut être décomposé en deux contributions:

$$F(E) = f^F(E) + f^{NF}(E), \quad (\text{II.1.55})$$

où les indices F et NF indiquent la possibilité de factoriser chacune des parties. Ces deux termes font intervenir des opérateurs différents pris entre les mêmes états. Ils s'écrivent:

$$f^F(E) = \frac{f_B f_M}{E^2} \int_0^1 \delta z \int_0^1 \delta x \int_0^\infty \delta r_+ T(z, E, \mu_0) \\ \times J(z, x, r_+, E, \mu_0, \mu) \phi_M(x, \mu) \phi_B^\dagger(r_+, \mu), \quad (\text{II.1.56})$$

$$f^{NF}(E) = C_k(E, \mu) \zeta_k^M(E, \mu). \quad (\text{II.1.57})$$

Les coefficients T , C_k et J peuvent être calculés en perturbation. Les fonctions d'onde sur le cône de lumière ϕ_M et ϕ_B^\dagger des mésons M et B ainsi que les trois facteurs de forme du méson léger M_k^M , sont, par contre, des objets non-perturbatifs indépendants du processus considéré. Les facteurs de forme M_k^M reproduisent les relations des facteurs de forme lourds à l'éger de la LEET [51]. La figure 1.2 montre comment sont traitées dans la SCET les différentes échelles d'impulsion.

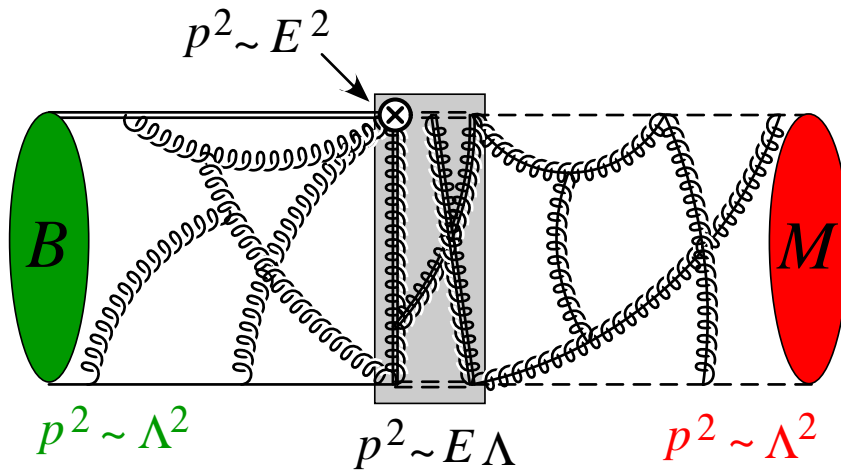


FIG. 1.2 – Désintégration $B \rightarrow M$ du point de vue de la SCET.

Pour étudier les processus dépendant de mésons lourds-légers comme le B ou le D , on peut aussi faire appel à la symétrie chirale afin de décrire la dynamique des quarks légers. Nous pourrions alors «mesurer» le couplage entre les secteurs des mésons lourds et celui des légers, en tirant profit des symétries qui leur sont associées. C'est ce que nous allons tenter de présenter dans le chapitre suivant.

Chapitre 2

Comment combiner symétrie des quarks lourds et symétrie chirale

Lorsqu'on s'intéresse à des mésons contenant à la fois un quark lourd $Q = c, b$ et un quark léger $q = u, d, s$, il est possible d'incorporer dans une théorie effective les symétries (non explicites dans la QCD) apparaissant dans les limites de masse infinie du quark lourd Q et de masse nulle pour le quark q . Ces symétries sont la symétrie de quarks lourds et la symétrie chirale.

Dans certaines conditions cinématiques proches de la limite statique pour le quark lourd et chirale pour le léger, il est possible de combiner l'approche de la HQET et celle de la théorie de perturbations chirale pour construire un lagrangien effectif incluant les deux symétries. Ce lagrangien aura comme champs les opérateurs des mésons lourds-légers et non plus des champs de quarks comme dans la HQET.

Commençons par un bref rappel sur la théorie de perturbations chirale.

2.1 La symétrie chirale

Le fait que les masses des quarks u et d soient très proches l'une de l'autre a historiquement suggéré de réutiliser l'idée d'une symétrie d'isospin $SU(2)$ dans le cas des quarks, en analogie avec la notion d'isotope en physique nucléaire, induite par la proximité des masses du proton et du neutron. On peut aussi passer du groupe $SU(2)$ à $SU(3)$ en incluant le quark étrange s , qui a une masse, $m_s \sim 100$ MeV, 30 à 50 fois plus grande que la masse de quarks u, d . Mais ceci implique qu'il va falloir considérer des effets de rupture de symétrie plus importants. La validité des prédictions provenant de l'introduction

de cette symétrie sera donc caractérisée par le rapport entre l'échelle typique de la rupture de la symétrie et l'échelle des interactions de la QCD. De plus, comme les masses qui sont en jeu sont faibles par rapport à Λ_{QCD} , le groupe de symétrie peut être élargi à $SU(3) \times SU(3)$ qui est ce que l'on appelle la symétrie chirale. Cette symétrie est valable exactement, dans le cadre de la QCD, lorsque les masses des quarks sont nulles. La symétrie chirale se brise spontanément pour redonner la symétrie $SU(3)$ de saveur. Le pion et le kaon sont alors interprétés comme les bosons de Goldstone de cette brisure de symétrie. Cette symétrie permet de comprendre l'origine des termes d'un lagrangien effectif pouvant être développé systématiquement en théorie de perturbations [56]. On peut ainsi contraindre les paramètres apparaissant à chaque ordre de la théorie chirale par des données phénoménologiques.

Regardons d'un peu plus près la composition de cette théorie. A la limite de masse nulle pour les quarks u , d et s , le lagrangien de la QCD possède la symétrie $SU(3)_L \times SU(3)_R$ qui est brisée spontanément en $SU(3)$. Cette brisure de symétrie fait apparaître les mésons pseudoscalaires légers π , K et η qui sont interprétés comme les bosons de Goldstone. D'autre part, la brisure explicite de la symétrie par un terme de masse de quark, donne à ces mésons une masse non nulle.

On peut ensuite construire un lagrangien en termes de ces champs de mésons de Goldstone. Le développement perturbatif se fait en fonction des impulsions et des masses des mésons, ces échelles étant petites par rapport à l'échelle de rupture de la symétrie chirale $\Lambda_\chi \sim 1$ GeV. Les mésons de Goldstone sont décrits par la matrice $\Sigma(x)$ de $SU(3)$ (cf. eq. (II.2.2)) et se transforment sous le groupe de la symétrie chirale $SU(3)_L \times SU(3)_R$ de la façon suivante:

$$\Sigma \rightarrow L \Sigma R^\dagger, \quad (\text{II.2.1})$$

où $L \in SU(3)_L$ et $R \in SU(3)_R$. L'octet des mésons pseudoscalaires est introduit dans $\Sigma(x)$ à travers:

$$\Sigma = \exp\left(\frac{2i\mathcal{M}}{f}\right), \quad (\text{II.2.2})$$

où $f = f_\pi = 131$ MeV est la constante de désintégration du pion et \mathcal{M} est la matrice 3×3 hermitienne et de trace nulle:

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1}{2}}\pi^0 + \sqrt{\frac{1}{6}}\eta & \pi^+ & K^+ \\ \pi^- & -\sqrt{\frac{1}{2}}\pi^0 + \sqrt{\frac{1}{6}}\eta & K^0 \\ K^- & \bar{K}^0 & -\sqrt{\frac{2}{3}}\eta \end{pmatrix}. \quad (\text{II.2.3})$$

A l'ordre le plus bas en impulsion et dans la limite des masses nulles des quarks, le lagran-

gien le plus g'eneral qu'on peut construire en fonction de Σ est:

$$\mathcal{L} = \frac{f^2}{8} \text{Tr} [\partial^\mu \Sigma \partial_\mu \Sigma^\dagger] . \quad (\text{II.2.4})$$

Ce lagrangien donne le terme d'energie cin'etique des m'esons dans la matrice \mathcal{M} . Le coefficient $f^2/8$ est choisi pour retrouver la forme canonique du terme cin'etique. Noter aussi que les matrices Σ sont adimensionn'ees.

On peut ensuite inclure les corrections d'ordres sup'erieurs en impulsion ou encore l'effet de brisure explicite de la sym'etrie à travers le terme de masse de quarks:

$$\sum_{a=u,d,s} \bar{q}_a \hat{m}_{ab} q_b , \quad (\text{II.2.5})$$

où \hat{m} est la matrice de masse des quarks l'egers,

$$\hat{m} = \begin{pmatrix} m_u & 0 & 0 \\ 0 & m_d & 0 \\ 0 & 0 & m_s \end{pmatrix} . \quad (\text{II.2.6})$$

La brisure de sym'etrie est prise en compte en incluant dans le lagrangien le terme:

$$\lambda_0 \text{Tr} (\hat{m} \Sigma + \Sigma^\dagger \hat{m}) . \quad (\text{II.2.7})$$

Les bosons de Goldstone reçoivent alors une contribution à leurs masses carr'ees.

Pour introduire les interactions des m'esons pseudoscalaires avec les autres champs de matiere (m'esons vectoriels l'egers, m'esons lourds-l'egers, ...) il est utile de d'efinir le champ $\xi(x)$ à partir de $\Sigma(x)$ [57],

$$\Sigma(x) = \xi^2(x) . \quad (\text{II.2.8})$$

Les transformations chirales $SU(3)_L \times SU(3)_R$ appliqu'ees à ξ sont d'efinies par:

$$\xi(x) \rightarrow L \xi(x) U^\dagger(x) = U(x) \xi(x) R^\dagger , \quad (\text{II.2.9})$$

où $U(x)$ est une matrice de $SU(3)_V$ construite en fonction de L , R et $\xi(x)$, *i.e.* en fonction des pseudo-m'esons de Goldstone ('pseudo' parce qu'ils ont acquis une masse). Par ailleurs, dans le cas des transformations du groupe $SU(3)_V$ on est ramen'e à la situation simple où $U = V = L = R$.

Les champs de matiere ont des propri'etes de transformation particulieres sous le groupe $SU(3)_V$. Par exemple, un m'eson lourd l'eger $H = Q \bar{q}_a$, avec $a = u, d, s$ se transforme sous la forme:

$$H_a \rightarrow H_b U_{ba}^\dagger(x) . \quad (\text{II.2.10})$$

En raison de la dépendance de U en x , il est nécessaire d'introduire des dérivées covariantes et des champs de jauge spécifiques. Ainsi les couplages faisant intervenir des dérivées pourront rester invariants par les transformations chirales. Ces dérivées covariantes et ces champs de jauges sont des fonctions du courant vecteur (cf. eq. (II.2.21)):

$$\mathcal{V}_\mu = \frac{1}{2} (\xi^\dagger \partial_\mu \xi + \xi \partial_\mu \xi^\dagger) . \quad (\text{II.2.11})$$

De même, on définit aussi le courant axial par:

$$\mathcal{A}_\mu = \frac{1}{2} (\xi^\dagger \partial_\mu \xi - \xi \partial_\mu \xi^\dagger) . \quad (\text{II.2.12})$$

Ces courants se transforment sous l'effet de la symétrie chirale de la façon suivante:

$$\mathcal{V}_\mu \rightarrow U \mathcal{V}_\mu U^\dagger + U \partial_\mu U^\dagger , \quad (\text{II.2.13})$$

$$\mathcal{A}_\mu \rightarrow U \mathcal{A}_\mu U^\dagger . \quad (\text{II.2.14})$$

Nous allons par la suite utiliser ces courants pour écrire le couplage entre mésons lourds et légers.

2.2 Le lagrangien chiral des mésons lourds-légers

Dans ce qui suit nous allons combiner ce que nous avons vu à propos de la symétrie chirale avec les simplifications que l'on voit apparaître lorsqu'on passe à la limite des quarks lourds [58]-[68]. D'un point de vue physique, il s'agit de écrire les interactions de faible impulsion entre les mésons pseudoscalaires légers (π , K et η) et les mésons lourds-légers (D^* , B^*). Regardons pour cela la façon de construire le lagrangien effectif.

2.2.1 L'ordre dominant du lagrangien effectif

Notons P_a et V_a les opérateurs (d'annihilation) des champs des mésons lourds-légers pseudoscalaire et vectoriel, respectivement, formés d'un quark léger $a = u, d, s$ et ayant une quadri-vitesse v . Ces opérateurs sont normalisés de la façon suivante:

$$\langle 0 | P | Q \bar{q} (0^-) \rangle = \sqrt{m_P} , \quad (\text{II.2.15})$$

$$\langle 0 | V^\mu | Q \bar{q} (1^-) \rangle = \epsilon^\mu \sqrt{m_V} . \quad (\text{II.2.16})$$

On peut combiner P_a et V_a dans une matrice 4×4 (du type des matrices de Dirac) que l'on nomme H_a :

$$H_a = \frac{1 + \not{v}}{2} (V_{a\mu} \gamma^\mu - P_a \gamma_5) . \quad (\text{II.2.17})$$

Il faut remarquer qu'à la limite statique, la production de paires particules-antiparticules est supprimée. On définit aussi la matrice \overline{H} par la relation:

$$\overline{H}_a = \gamma^0 H_a^\dagger \gamma^0, \quad (\text{II.2.18})$$

ce qui implique d'après l'éq. (II.2.17),

$$\overline{H}_a = (V_{a\mu}^\dagger \gamma^\mu + P_a^\dagger \gamma_5) \frac{1 + \not{v}}{2}. \quad (\text{II.2.19})$$

Les matrices H_a et \overline{H}_a ont des lois de transformation bien définies en fonction des symétries que l'on veut que le lagrangien respecte, *i.e.* symétries chirale, des quarks lourds, du groupe de Lorentz, C, P, T.

A l'ordre dominant en $1/M$, M étant la masse des mésons lourds ($M = m_P = m_V$), et dans limite de masse nulle de quarks légers, le lagrangien effectif s'écrit [58–60]:

$$\mathcal{L} = i \text{Tr} H_b v^\mu D_{\mu ba} \overline{H}_a + i \hat{g} \text{Tr} H_b \gamma_\mu \gamma_5 \mathcal{A}_{ba}^\mu \overline{H}_a + \frac{f^2}{8} \partial^\mu \Sigma_{ab} \partial_\mu \Sigma_{ba}^\dagger, \quad (\text{II.2.20})$$

où la dérivée covariante est définie par:

$$D_\mu = \partial_\mu + \mathcal{V}_\mu. \quad (\text{II.2.21})$$

Les courants vectoriel \mathcal{V}_μ et axial \mathcal{A}^μ ont été définis dans les éqs. (II.2.11, II.2.12). Ce lagrangien vérifie les symétries énoncées précédemment et est indépendant de la masse M . La dépendance dans la masse M est en fait cachée dans les champs P et V_a qui sont de dimension $3/2$.

Donnons quelques précisions sur les termes du lagrangien (II.2.20). Le premier est le terme cinétique des mésons lourds. Les interactions avec les mésons légers sont dues aux courants \mathcal{V}_μ et \mathcal{A}^μ . Le courant vectoriel décrit les interactions avec un nombre pair de mésons légers et le courant axial avec un nombre impair. La raison de cette différence est qu'en faisant un développement des courants \mathcal{V}_μ et \mathcal{A}^μ , le premier terme en $\partial_\mu \mathcal{M}$ est nul dans le cas de \mathcal{V}_μ et non nul pour \mathcal{A}^μ (eq. (II.2.29)). Le dernier terme de l'éq. (II.2.20) décrit les interactions entre mésons légers et provient directement de la symétrie chirale (*cf.* eq. (II.2.4)).

Noter l'apparition de la constante de couplage \hat{g} , qui par la suite sera l'objet de notre étude. Ce couplage est un des paramètres les plus importants de cette théorie effective. Il mesure la force de l'interaction entre les mésons contenus dans les matrices H_b et \overline{H}_a , *i.e.* les champs lourds-légers P et V , et un nombre impair de mésons de Goldstone. Les champs H_a et \overline{H}_a sont de dimension $3/2$ et les Σ et ξ sont adimensionnés. Il en résulte que \hat{g} n'a pas de dimension. Notons de plus que le couplage \hat{g} est défini, d'une part, pour des quarks lourds pris à la limite statique et, d'autre part, pour des quarks légers pris à la limite chirale. Ce couplage est donc indépendant de la masse lourde.

2.2.2 Les premières corrections

On peut ensuite introduire les corrections aux ordres supérieurs provenant de la brisure de la symétrie chirale et des effets en $1/M$. Dans le premier cas, et en analogie avec ce qui a été écrit dans la section II.2.1, les termes qui brisent la symétrie proviennent de la présence de la matrice de masse des quarks légers \hat{m} définie par l'éq. (II.2.6). L'expression la plus générale du terme engendré par cette brisure de symétrie est la suivante:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_\chi &= \lambda_0 (\hat{m}_{ab}\Sigma_{ba} + \hat{m}_{ab}\Sigma_{ba}^\dagger) \\
&+ \lambda_1 \text{Tr} \bar{H}_a H_b (\xi \hat{m} \xi + \xi^\dagger \hat{m} \xi^\dagger)_{ba} \\
&+ \lambda'_1 \text{Tr} \bar{H}_a H_a (\hat{m} \Sigma + \hat{m} \Sigma^\dagger)_{bb} \\
&+ i\lambda_3 \text{Tr} H_b \gamma_\mu \gamma_5 \mathcal{A}_{bc}^\mu (\xi \hat{m} \xi + \xi^\dagger \hat{m} \xi^\dagger)_{ca} \bar{H}_a \\
&+ i\lambda'_3 \text{Tr} H_a \bar{H}_a \gamma_\mu \gamma_5 \mathcal{A}_{cd}^\mu (\xi \hat{m} \xi + \xi^\dagger \hat{m} \xi^\dagger)_{dc}.
\end{aligned} \tag{II.2.22}$$

Les termes de ce lagrangien sont classés par ordre croissant dans les dimensions des opérateurs. En particulier ceux des deux dernières lignes sont de dimension 5, ce qui veut dire que les coefficients λ_3 et λ'_3 sont 'supprimés' en $1/\Lambda_\chi$. D'autres opérateurs de dimension 6 peuvent être pris en compte, mais ils sont quant à eux réduits suivant $1/\Lambda_\chi \times 1/M$. Noter aussi que les corrections chirales sont responsables de la différence de masse entre les mésons lourds-légers formés d'un quark u, d ou d'un quark s . Mais à ce stade: $\delta = m_{D_s} - m_D = m_{B_s} - m_B$.

Les corrections d'ordre $1/M$ peuvent aussi être introduites [69, 70]. Pour cela on peut tirer profit de ce qu'on appelle l'invariance par reparamétrisation [71]. Cette invariance provient du fait que la décomposition dans l'impulsion du quark lourd, introduite dans le formalisme de la HQET *via* l'éq. (II.1.3), n'est pas unique. On peut par exemple modifier v et k de la façon suivante:

$$\begin{aligned}
v &\rightarrow v + \frac{q}{m_Q}, \\
k &\rightarrow k - q,
\end{aligned} \tag{II.2.23}$$

sans pour autant changer les observables physiques, puisque la seule quantité physique bien définie est l'impulsion du quark lourd. Ensuite, il faut aussi introduire l'invariance par parité P et par renversement du temps T . Ces transformations doivent agir de la façon suivante:

$$\begin{aligned}
H_v(x) &\rightarrow TH_{v_P}(-x_P)T^{-1}, \\
\mathcal{M}(x) &\rightarrow -\mathcal{M}(-x_P), \\
\mathcal{A}^\mu(x) &\rightarrow \mathcal{A}_\mu(-x_P).
\end{aligned} \tag{II.2.24}$$

où x et v sont transformées par parité en \bar{x} et v_P de sorte que $x_P^\mu = x_\mu$ et $v_P^\mu = v_\mu$. On vérifie de plus que:

$$T\gamma^\mu T^{-1} = \gamma_\mu^*. \quad (\text{II.2.25})$$

Ceci permet d'écrire la contribution des termes en $1/M$ au lagrangien [69]:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{1/M} &= \frac{\lambda_2}{M} \text{Tr} \bar{H}_a \sigma_{\mu\nu} H_a \sigma^{\mu\nu} \\ &+ i \frac{\hat{g}_1}{M} \text{Tr} H_b \gamma_\mu \gamma_5 \mathcal{A}_{ba}^\mu \bar{H}_a \\ &+ i \frac{\hat{g}_2}{M} \text{Tr} \gamma_\mu \gamma_5 \mathcal{A}_{ba}^\mu H_b \bar{H}_a . \end{aligned} \quad (\text{II.2.26})$$

Le premier terme de ces corrections génère le splitting Δ des masses pseudoscalaires, et vectorielles des mésons lourds, m_P et m_V respectivement. Le terme λ_2 a en effet la forme (cf. eq. (II.1.23)),

$$\lambda_2 = M \frac{\Delta}{2} = M \frac{m_V - m_P}{2}. \quad (\text{II.2.27})$$

Les couplages \hat{g}_1 et \hat{g}_2 des deux derniers termes correspondent à des corrections en $1/M$ par rapport au couplage \hat{g} du lagrangien (II.2.20) à l'ordre dominant. Plus précisément, \hat{g}_1 et \hat{g}_2 permettent de distinguer les couplages du type VV ou VP :

$$\begin{aligned} \hat{g} &\rightarrow \hat{g}_{VV} = \hat{g} + \frac{1}{M}(\hat{g}_1 + \hat{g}_2), \\ \hat{g} &\rightarrow \hat{g}_{VP} = \hat{g} + \frac{1}{M}(\hat{g}_1 - \hat{g}_2). \end{aligned} \quad (\text{II.2.28})$$

On peut par la suite continuer avec la construction du lagrangien en incluant par exemple dans le secteur léger, les résonances vectorielles (ρ , \bar{K}) ou bien, dans le secteur lourd, les résonances des états à parité positive (DD_2^*). Cependant, ceci ne sera pas détaillé dans cet exposé.

2.3 La constante de couplage \hat{g}

Discutons un peu plus en détail sur la constante de couplage \hat{g} apparaissant dans le lagrangien de l'éq. (II.2.20).

Comme on l'a vu préalablement, le couplage \hat{g} est un des paramètres fondamentaux de la théorie effective des mésons lourds, intégrant à la fois la symétrie de quark lourd et la symétrie chirale. Le couplage \hat{g} est un paramètre du lagrangien et par conséquent il n'est pas fixé par la théorie. Ceci constitue un des intérêts majeurs pour sa détermination.

D'autre part, comme on le verra par la suite, il intervient dans une variété de grandeurs physiques importantes de la phénoménologie des quarks lourds et des effets chiraux.

Considérons à nouveau le lagrangien effectif de l'éq. (II.2.20) et intéressons nous en particulier au terme dépendant de \hat{g} . Le courant axial \mathcal{A} a été défini dans l'éq. (II.2.12). En utilisant les eqs. (II.2.2) et (II.2.8), on peut développer l'expression de \mathcal{A} et la récrire en fonction de la matrice \mathcal{M} (cf. eq. (II.2.3)). En ne gardant que l'ordre dominant dans ce développement, on trouve l'expression approchée suivante pour le courant axial :

$$\mathcal{A}_\mu \approx \frac{i}{f} \partial_\mu \mathcal{M} + \dots \quad (\text{II.2.29})$$

On peut ainsi récrire le terme contenant \hat{g} dans l'éq. (II.2.20):

$$\mathcal{L} = -\frac{\hat{g}}{f} \text{Tr} (\overline{H}_a H_b \gamma_\mu \gamma_5) \partial^\mu \mathcal{M}_{ba}, \quad (\text{II.2.30})$$

$$= \left[-\frac{2\hat{g}}{f} V_\mu \partial^\mu \mathcal{M} P^\dagger + \text{h.c.} \right] + \frac{2\hat{g}i}{f} \epsilon_{\alpha\beta\mu\nu} V^\beta \partial^\mu \mathcal{M} V^{\dagger\alpha} v^\nu, \quad (\text{II.2.31})$$

où l'on a aussi utilisé les définitions des matrices \mathcal{H} et \overline{H}_a fournies par les eqs. (II.2.17) et (II.2.19).

Notons qu'il n'y a pas de terme de type PP dans l'expression (II.2.31). La raison en est que les interactions $PP\pi$ sont interdites par des critères de parité.

Les largeurs de désintégration des transitions $V \rightarrow P\pi$ peuvent être calculées à partir de l'expression (II.2.31). Dans le secteur du méson B il n'y a pas suffisamment d'espace de phase pour la transition $B^* \rightarrow B\pi$. En effet, $m_{B^*} - m_B \sim 46 \text{ MeV} < m_\pi$. Cependant, dans le secteur du méson D , $m_{D^*} - m_D \sim 142 \text{ MeV} > m_\pi$, et donc la transition $D^* \rightarrow D\pi$ est bien permise.

Les largeurs de désintégration dépendent de \hat{g} et s'écrivent [58–60]:

$$\Gamma(D^{*+} \rightarrow D^0 \pi^+) = \frac{\hat{g}_c^2}{6\pi f_\pi^2} |\vec{p}_\pi|^3, \quad (\text{II.2.32})$$

$$\Gamma(D^{*+} \rightarrow D^+ \pi^0) = \Gamma(D^{*0} \rightarrow D^0 \pi^0) = \frac{\hat{g}_c^2}{12\pi f_\pi^2} |\vec{p}_\pi|^3. \quad (\text{II.2.33})$$

La désintégration $D^* \rightarrow D^+ \pi^-$ est elle aussi interdite pour des raisons d'espace de phase. L'indice c dans le couplage \hat{g} rappelle que l'on est dans le secteur du quark charmé. En effet, nous avons vu à travers l'éq. (II.2.28) que \hat{g} peut subir des corrections d'ordre $1/M$.

Le couplage \hat{g} de la théorie effective peut être récrit sous une forme analogue dépendant de la masse du méson lourd et rappelant sa signification physique en tant que couplage des mésons lourds vectoriels et pseudoscalaires au pion. De façon générale, on note ce

couplage $g_{VP\pi}$. En prenant comme exemple le secteur du méson D , on le définit par:

$$g_{D^*D\pi} = \begin{cases} 2m_{D^*} \hat{g}_c / f_\pi, \\ 2\sqrt{m_D m_{D^*}} \hat{g}_c / f_\pi, \\ 2m_D \hat{g}_c / f_\pi. \end{cases} \quad (\text{II.2.34})$$

Ces trois définitions sont identiques à l'ordre dominant en $1/m_l$, la deuxième définition ayant cependant la structure la plus symétrique des trois. Noter que $g_{D^*D\pi}$, et de façon générique $g_{VP\pi}^{-1}$, dépend linéairement de la masse lourde (contrairement à \hat{g} qui est une constante ou les effets de masse lourde entrent uniquement comme des corrections).

La figure 2.1 schématise les interactions ayant lieu dans le couplage $D^*D\pi$.

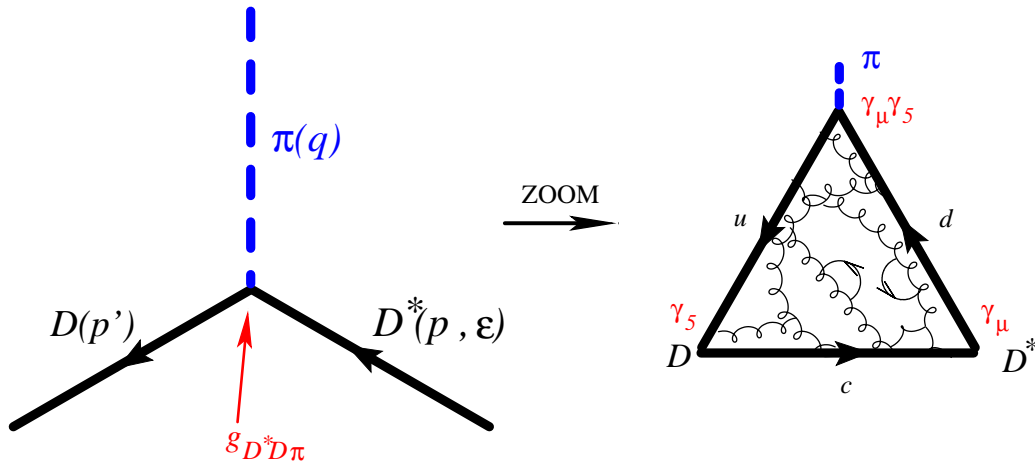


FIG. 2.1 – Représentation schématique des interactions décrites par la constante de couplage \hat{g} lorsqu'on considère le secteur du méson D .

Du point de vue des désintégrations $D \rightarrow D\pi$, la définition du couplage en termes des éléments de matrice est la suivante:

$$\langle \pi(p_\pi) D(p') | D^*(p, \lambda) \rangle = g_{D^*D\pi} (p_\pi \cdot \epsilon^\lambda(p)) , \quad (\text{II.2.35})$$

1. Nous utilisons les notations P et V en accord avec les notations des opérateurs des mésons pseudoscalaires et vecteurs de la théorie effective. Lorsqu'on s'intéressera aux aspects phénoménologiques nous utiliserons aussi les notations H et H^* pour indiquer que l'on considère un méson lourd pseudoscalaire et vecteur respectivement. Du point de vue physique, H correspond au mésons B ou D et du point de vue des calculs sur réseau (où la masse lourde est un paramètre variable), c'est une notation générique pour un méson lourd-léger.

où le transfert d'impulsion est donné par, $\not{k} = \not{p} - \not{p}'$ et on désigne par, $\epsilon^\lambda(p)$, la polarisation du méson vecteur D .

Nous présenterons dans le chapitre suivant les résultats de la première mesure expérimentale du couplage $g_{D^*D\pi}$ par l'expérience CLEO.

Dans ce chapitre nous avons introduit les théories effectives permettant d'exploiter les symétries qui se manifestent dans les limites des grandes et de petites masses des quarks. Je vais par la suite montrer comment elles peuvent être utilisées pour la description de la phénoménologie des saveurs lourdes. En parallèle à ces théories effectives, j'introduirai d'autres outils théoriques indispensables à notre compréhension actuelle du Modèle Standard et en particulier des effets non-perturbatifs provenant de la QCD. J'insisterai en particulier sur les domaines où les calculs de la QCD sur réseau peuvent permettre d'avancer dans cette compréhension.

Nous avons aussi introduit au cours de ce chapitre la théorie effective chirale des mésons lourds dont la constante de couplage \hat{g} apparaissant dans le lagrangien constitue le paramètre le plus important à déterminer par des moyens non-perturbatifs. Nous montrerons dans les chapitres suivants un certain nombre de phénomènes physiques où ce couplage intervient puis nous essayerons de dresser un bilan des différentes prédictions théoriques en vue de sa détermination.

Troisième partie

La phénoménologie des saveurs lourdes et le rôle des réseaux

Chapitre 1

Le mélange des saveurs

Pour commencer, rappelons pourquoi la physique des saveurs lourdes est à présent un des principaux sujets d'intérêt de la physique des particules [76]-[90]. Tout d'abord elle fait intervenir la saveur des quarks. Dans le Modèle Standard (MS) des interactions entre particules élémentaires, le changement de saveur des quarks est un effet des interactions faibles et plus précisément du couplage de courants chargés des quarks aux bosons W . Ces interactions sont décrites par le Hamiltonien:

$$\mathcal{H}_W = \frac{1}{2} (J_\mu W^\mu + h.c.), \quad (\text{III.1.1})$$

où le courant chargé prend la forme,

$$J_\mu = \frac{g_w}{2\sqrt{2}} (\bar{u}, \bar{c}, \bar{t}) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) V_{\text{CKM}} \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}, \quad (\text{III.1.2})$$

et où g_w est la constante de couplage $SU(2)$, reliée à la constante de Fermi à travers l'expression:

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g_w^2}{8m_W^2}. \quad (\text{III.1.3})$$

La matrice de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa V_{CKM} permet de quantifier le mélange de saveurs tout en introduisant des effets de violation de CP [46–48].

1.1 La matrice CKM

La matrice CKM est unitaire. Cette propriété provient de sa construction en termes de matrices unitaires permettant la diagonalisation de la matrice de masse des quarks.

D'étailons un peu plus les étapes de cette construction.

A partir des couplages de Yukawa du Modèle Standard, on fait intervenir un champ de Higgs ϕ pour générer les masses des quarks, de la façon suivante:

$$\mathcal{L}_Y = -Y_{ij}^d \overline{Q_{Li}^I} \phi d_{Rj}^I - Y_{ij}^u \overline{Q_{Li}^I} \tilde{\phi} u_{Rj}^I + \text{h.c.}, \quad (\text{III.1.4})$$

où les Y sont les couplages de Yukawa entre des quarks de type «right», u, d , et des quarks de type «left», Q . Les indices i, j font référence aux trois familles de quarks et le I au fait que les quarks sont dans la base des interactions. On définit par ailleurs, à partir du champ scalaire ϕ :

$$\tilde{\phi} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \phi^*. \quad (\text{III.1.5})$$

Les termes de masse des quarks apparaissent uniquement après brisure spontanée de symétrie. Cette brisure donne au champ de Higgs une valeur moyenne dans le vide v non nulle. En remplaçant les champs ϕ par v dans l'éq. (III.1.4) et en introduisant les matrices de masse M_u et M_d telles que:

$$M_{u,d} = (v/\sqrt{2}) Y^{u,d}, \quad (\text{III.1.6})$$

on peut écrire les termes de masses,

$$\mathcal{L}_{\text{masse}} = -(M_d)_{ij} \overline{d_{Li}^I} d_{Rj}^I - (M_u)_{ij} \overline{u_{Li}^I} u_{Rj}^I + \text{h.c.} . \quad (\text{III.1.7})$$

Pour obtenir les états propres physiques de masse, il faut diagonaliser les matrices $M_{u,d}$. Pour cela on peut utiliser deux matrices unitaires V_L et V_R de sorte que:

$$M_f^{\text{diag}} \equiv V_{fL} M_f V_{fR}^\dagger, \quad (\text{III.1.8})$$

où l'on note de façon générique $f = u, d$.

Les matrices V_L et V_R permettent de passer des états propres d'interaction faible aux états propres de masse:

$$f_{Li} \equiv (V_{fL})_{ij} f_{Lj}^I, \quad (\text{III.1.9})$$

$$f_{Ri} \equiv (V_{fR})_{ij} f_{Rj}^I. \quad (\text{III.1.10})$$

Les matrices de masse sont diagonalisées de façon différente pour les quarks de type u et d . Cette différence est prise en compte par la matrice de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa CKM que l'on définit par la relation:

$$V_{\text{CKM}} \equiv V_{uL} V_{dL}^\dagger. \quad (\text{III.1.11})$$

En terme de ses ´el´ements, la matrice V_{CKM} s’´ecrit:

$$V_{\text{CKM}} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix}. \quad (\text{III.1.12})$$

Ces ´el´ements de matrice constituent les couplages des quarks au courants charg´es qui dans le cadre du Mod`ele Standard sont la seule source de changement de saveur.

L’unitarit´e de la matrice CKM permet de relier les ´el´ements de matrice entre eux. Au lieu des neuf ´el´ements, on peut en r´ealit´e se limiter `a quatre en red´efinissant les champs de quarks. Ceci est d’une particuli`ere importance puisque les ´el´ements de la matrice CKM sont des param`etres fondamentaux du Mod`ele Standard, au mˆeme titre que les masses des quarks ou les masses des bosons W ou Z .

On peut donc r´ecrire la matrice CKM en fonction de trois angles θ_j avec $i, j = 1, 2, 3$ et $i < j$, et d’une phase δ qui introduit la brisure de la sym´etrie CP . En utilisant la notation $c_{ij} = \cos \theta_{ij}$ et $s_{ij} = \sin \theta_{ij}$ pour $i = 1, 2, 3$, l’expression de la matrice CKM devient [45]:

$$V_{\text{CKM}} = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -s_{23}c_{12} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix}. \quad (\text{III.1.13})$$

La ph´enom´enologie du Mod`ele Standard permet de contraindre les coefficients de cette param´etrisation. A une bonne approximation pr`es, on peut les approcher de telle sorte que:

$$s_{12} = |V_{us}|, \quad s_{13} = |V_{ub}|, \quad s_{23} = |V_{cb}| \quad \text{et} \quad \delta \in [0, \pi]. \quad (\text{III.1.14})$$

La matrice V_{CKM} a des ´el´ements non-diagonaux non nuls parce que les ´etats propres de l’interaction faible ne sont pas les mˆemes que ceux de l’interaction forte. Cependant, l’interaction faible m´elange les saveurs selon une certaine hi´erarchie. Les ´el´ements diagonaux sont plus grands que les non-diagonaux, et cette d´ecroissance s’accroˆıt au fur et `a mesure qu’on s’´ecarte de la diagonale. On peut exploiter cette propri´ete par une reparam´etrisation de la matrice qui a l’avantage d’ˆetre plus proche des implications ph´enom´enologiques, la param´etrisation de Wolfenstein [91]:

$$V_{\text{CKM}} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\lambda^2}{2} & \lambda & A\lambda^3(\varrho - i\eta) \\ -\lambda & 1 - \frac{\lambda^2}{2} & A\lambda^2 \\ A\lambda^3(1 - \varrho - i\eta) & -A\lambda^2 & 1 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\lambda^4). \quad (\text{III.1.15})$$

Pour passer de la paramétrisation (III.1.13) à celle de (III.1.15), il faut redéfinir (III.1.14) par les paramètres réels

$$\lambda, \quad A, \quad \varrho, \quad \text{et} \quad \eta. \quad (\text{III.1.16})$$

Le développement se fait en fonction du petit paramètre $\lambda = \sin \theta_C \simeq 0.22$, où θ_C est l'angle de Cabibbo. Notons que cet angle a été déterminé avec précision avant même la construction du formalisme de la matrice CKM, c'est d'ailleurs un des points de départ de l'étude du mélange des saveurs des quarks. Sous la forme (III.1.15), la violation de CP est due à une valeur non nulle de η .

Rappelons l'origine de violation de CP : elle est associée à une partie complexe (une phase) dans les couplages de Yukawa Y . Si on écrit de façon générique un des couplages «left-right» de l'éq. (III.1.4) avec son hermitique conjuguée sous la forme:

$$Y_{ij} \overline{\psi_{Li}} \phi \psi_{Rj} + Y_{ij}^* \overline{\psi_{Rj}} \phi^\dagger \psi_{Li}, \quad (\text{III.1.17})$$

la transformation sous la symétrie CP donne

$$Y_{ij} \overline{\psi_{Rj}} \phi^\dagger \psi_{Li} + Y_{ij}^* \overline{\psi_{Li}} \phi \psi_{Rj}. \quad (\text{III.1.18})$$

Ces deux expressions ne sont équivalentes que si les couplages Y sont réels, *i.e.* si $Y = Y_{ij}^*$. Vu d'une autre façon, la violation de CP provient de l'apparition d'une phase dans ces couplages.

Revenons maintenant à l'unitarité de la matrice CKM: cette propriété permet d'écrire les relations d'orthogonalité entre les éléments de matrice:

$$\sum_k V_{ik} V_{jk}^* = \sum_k V_{ki} V_{kj}^* = \delta_{ij}. \quad (\text{III.1.19})$$

ce qui en particulier implique:

$$V_{ud} V_{ub}^* + V_{cd} V_{cb}^* + V_{td} V_{tb}^* = 0. \quad (\text{III.1.20})$$

On donne habituellement une représentation graphique de cette relation à l'aide d'un triangle dont la base est de longueur 1. La figure 1.1 représente ce triangle dans le plan (ρ, η) .

Les côtés et les angles sont définis à partir des éléments de la matrice CKM:

$$\alpha \equiv \phi_2 \equiv \arg \left(-\frac{V_{td} V_{tb}^*}{V_{ud} V_{ub}^*} \right), \quad (\text{III.1.21})$$

$$\beta \equiv \phi_1 \equiv \arg \left(-\frac{V_{cd} V_{cb}^*}{V_{td} V_{tb}^*} \right), \quad (\text{III.1.22})$$

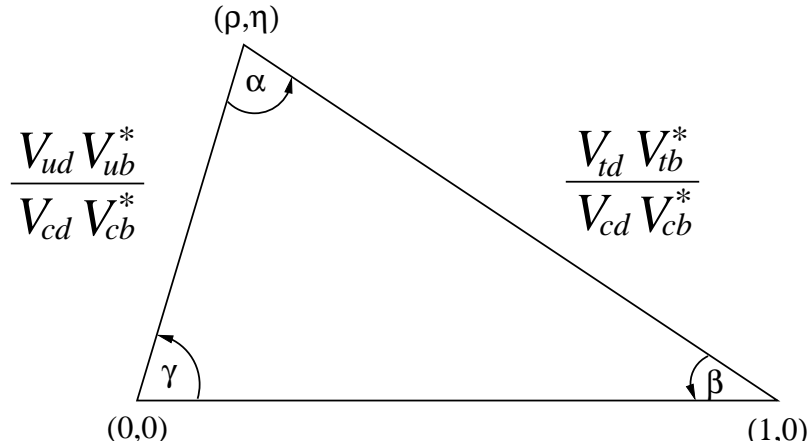


FIG. 1.1 – Le triangle d’unitarité dans le plan (ρ, η) .

$$\gamma \equiv \phi_3 \equiv \arg \left(-\frac{V_{ud}V_{ub}^*}{V_{cd}V_{cb}^*} \right), \quad (\text{III.1.23})$$

$$R_b \equiv \frac{|V_{ud}V_{ub}^*|}{|V_{cd}V_{cb}^*|} = \left(1 - \frac{\lambda^2}{2}\right) \frac{1}{\lambda} \left| \frac{V_{ub}}{V_{cb}} \right|, \quad (\text{III.1.24})$$

$$R_t \equiv \frac{|V_{td}V_{tb}^*|}{|V_{cd}V_{cb}^*|} = \frac{1}{\lambda} \left| \frac{V_{td}}{V_{cb}} \right|. \quad (\text{III.1.25})$$

Il est intéressant de noter que les aires A_{\triangle} de tous les triangles issus des éqs. (III.1.19) sont identiques et qu’elles mesurent la violation de CP (l’aire est non nulle lorsque $\eta \neq 0$).

La détermination des angles et des côtés du triangle d’unitarité est actuellement une des préoccupations majeures de la physique des particules. Il est possible de déterminer indépendamment les côtés et les angles afin d’obtenir des contraintes redondantes quantifiant notre degré de connaissance du Modèle Standard. La qualité de ces mesures sera aussi notre façon d’évaluer la sensibilité à des processus faisant intervenir de la nouvelle physique.

Deux mesures sont particulièrement précises du point de vue expérimental et théorique: celle de $\sin 2\beta$ à partir de l’asymétrie CP dans la désintégration $B \rightarrow \psi K$ et celle de $|V_{td}/V_{ts}|$ à partir du rapport de la différence de masse entre les systèmes de mésons neutres B_d et B_s , $\Delta m_d/\Delta m_s$. Le secteur du méson B a la particularité d’avoir un grand effet de mélange des mésons \bar{B} et B_s . Ceci est une conséquence de la présence (non supprimée par les mécanismes de GIM [48] ni de CKM) du quark top dans les diagrammes en boucle. D’autre part, le fait que $|V_{cb}| \approx 0.04$ soit petit fait que le temps de vie du méson B est assez grand: $\tau_B \approx 1.6$ ps. Les autres mesures sont beaucoup plus difficiles et nécessitent en général une connaissance plus détaillée des désintégrations du méson B .

Notre connaissance actuelle du triangle d’unitarité peut être représentée par une fi-

figure récapitulant les différentes mesures contraignant la position du sommet du triangle. La figure 1.2 est un exemple de l'état actuel de ces déterminations. Cette figure montre

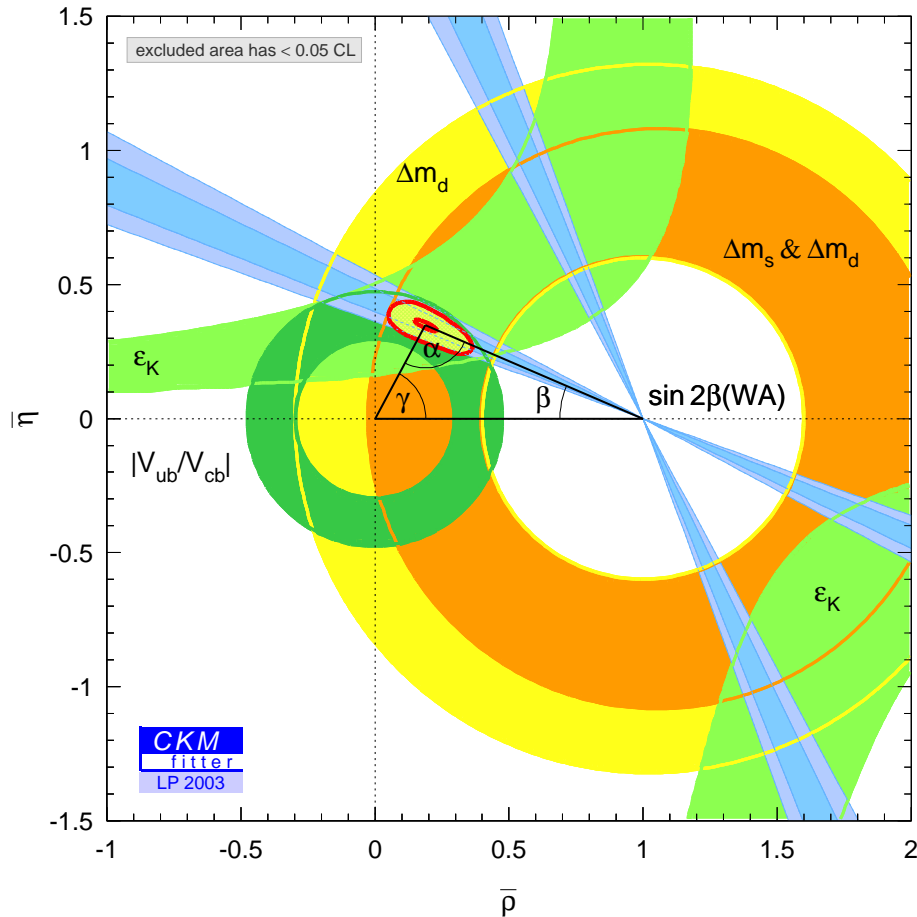


FIG. 1.2 – Mesures récentes du triangle d'unitarité [92].

les contraintes provenant des mesures de ϵ_K , du mélange $B_{d,s}$, de $|V_{ub}/V_{cb}|$ et de $\sin 2\beta$. La mesure de $\sin 2\beta$ est dans l'état actuel la plus précise de toutes. Elle permet en particulier d'interpréter la matrice CKM comme étant effectivement la source prépondérante de violation de CP dans le Modèle Standard, ce qui a par ailleurs pour effet de valider le mécanisme CKM. Les effets d'une nouvelle physique devraient donc apparaître uniquement comme des corrections à ce mécanisme. Ces corrections pourront être isolées en comparant les mesures expérimentales aux prédictions issues du Modèle Standard.

Pendant la dernière décennie, la précision des tests de validité du Modèle Standard a gagné plusieurs ordres de grandeur par rapport aux déterminations précédentes. A ce jour, aucun signal direct de physique au delà du Modèle Standard n'a été trouvé. Nous savons cependant que le MS doit être une théorie effective à basse énergie d'une théorie plus

complète, et que par exemple, le mécanisme de violation de CP apparaissant dans la matrice CKM ne suffit pas quantitativement pour expliquer l'asymétrie de matière/anti-matière dans l'Univers. En effet, si l'on rapporte le nombre de baryons au nombre de photons dans l'état actuel de l'Univers, on peut avoir une estimation du taux d'asymétrie quark/anti-quark quelques 10^{-6} sec après le Big Bang:

$$\frac{N_{\text{baryons}}}{N_{\text{photons}}}\Big|_{\text{actuel}} \sim \frac{n_q - n_{\bar{q}}}{n_q + n_{\bar{q}}}\Big|_{t \sim 10^{-6} \text{ sec}} \sim 5 \times 10^{-10}. \quad (\text{III.1.26})$$

Sakharov a observé qu'il y a trois conditions [93] pour qu'une théorie g'ènère dynamiquement l'asymétrie de l'éq. (III.1.26). Il faut: (i) des interactions brisant le nombre baryonique, (ii) de la violation de C et de CP , (iii) l'écart par rapport à l'équilibre thermique.

La nécessité de la première condition est immédiate parce qu'on cherche effectivement à mettre en évidence une asymétrie baryonique. La deuxième permet de distinguer les taux de production de quarks «left» et «right». La troisième est nécessaire parce qu'à l'équilibre thermique, même si les deux premières conditions sont vérifiées, les taux de création et d'annihilation de quarks et d'anti-quarks sont identiques.

Dans le cas du Modèle Standard, d'une part la violation de CP g'énérée est faible, et d'autre part, lors de la transition de phase électrofaible, l'écart par rapport à l'équilibre thermique est aussi trop faible en présence d'un seul doublet de Higgs pour expliquer l'éq. (III.1.26). Ceci est un signe clair du besoin d'une physique au delà du Modèle Standard qui inclurait des nouvelles sources de violation de CP et qui aurait une déviation plus importante par rapport à l'équilibre thermique.

Dans ce contexte le rôle de la physique des saveurs est de tester le Modèle Standard pour vérifier s'il décrit toutes les interactions changeant la saveur avec uniquement l'aide de la matrice CKM.

Il convient de distinguer les déterminations d'éléments de matrices CKM provenant de mesures à l'ordre des arbres, de celles venant des effets de boucles. Il est aussi utile d'isoler les mesures de quantités conservant la symétrie CP de celles qui la brisent. C'est par la cohérence des résultats découlant de ces différentes déterminations que l'on peut tester la validité du Modèle Standard. Ceci veut tout aussi bien dire que c'est ainsi que l'on arrive à délimiter les domaines où l'on peut voir apparaître des effets de nouvelle physique.

Les mesures de plus en plus précises des éléments de la matrice CKM se traduisent par une meilleure détermination de la position du sommet du triangle d'unitarité. Pour vérifier la validité du Modèle Standard et en particulier celle du mécanisme CKM de la violation de CP , il est souhaitable de comparer la position du sommet A du triangle d'après des mesures d'observables conservant et brisant la symétrie CP . A ce stade, ces deux ensembles de mesures fournissent des résultats compatibles. La validité du mécanisme

CKM de mélange de saveur et de violation de CP a été vérifiée à 10% près. Ces tests révèlent aussi notre degré de confiance dans les outils théoriques permettant de traiter la physique de la saveur. Les calculs de la QCD sur réseau sont en particulier en train de devenir un outil indispensable pour une grande variété de mesures faisant intervenir les effets non-perturbatifs.

La figure 1.3 indique quelques unes des désintégrations qui font intervenir les différents éléments de la matrice CKM. A partir de cette figure, on voit immédiatement que le rôle des saveurs lourdes est prépondérant pour la bonne connaissance de la matrice CKM. Les

$$\left(\begin{array}{ccc} V_{ud} = 1 - \frac{\lambda^2}{2} & V_{us} = \lambda & V_{ub} = \mathbf{A}\lambda^3(\rho - i\eta) \\ \pi \rightarrow \ell\nu & K \rightarrow \pi\ell\nu & B \rightarrow \pi(\rho)\ell\nu \\ V_{cd} = -\lambda & V_{cs} = \mathbf{1} - \frac{\lambda^2}{2} & V_{cb} = \mathbf{A}\lambda^2 \\ D \rightarrow \ell\nu & D_s \rightarrow \ell\nu & B \rightarrow D^{(*)}\ell\nu \\ D \rightarrow \pi\ell\nu & D \rightarrow K^{(*)}\ell\nu & \\ V_{td} = \mathbf{A}\lambda^3(\mathbf{1} - \rho - i\eta) & V_{ts} = -\mathbf{A}\lambda^2 & V_{tb} = \mathbf{1} \\ \langle B_d | \bar{B}_d \rangle & \langle B_s | \bar{B}_s \rangle & \end{array} \right)$$

FIG. 1.3 – Processus physiques intervenant dans la détermination des éléments de la matrice CKM et où les résultats des calculs de QCD sur réseau ont un rôle à jouer.

désintégrations du méson B sont de différents types et peuvent être classées de plusieurs façons. On peut par exemple distinguer les types suivants:

- Désintégrations dominantes:
 $b \rightarrow c\bar{u}d$, $b \rightarrow c\bar{c}s$, $b \rightarrow cl\bar{\nu}$
 $\bar{B} \rightarrow D\pi$, $\bar{B} \rightarrow \Psi K$, $\bar{B} \rightarrow D^{(*)}l\bar{\nu}$
- Désintégrations rares:
 $b \rightarrow u\bar{u}d$, $b \rightarrow u\bar{u}s$, $b \rightarrow ul\bar{\nu}$
 $\bar{B} \rightarrow \pi\pi$, $\bar{B} \rightarrow \pi K$, $\bar{B} \rightarrow \pi l\bar{\nu}$, $\bar{B} \rightarrow l\bar{\nu}$
- Désintégrations rares et radiatives (effets de boucles):
 $b \rightarrow s(d)\gamma$, $b \rightarrow s(d)l^+l^-$, $b \rightarrow s(d)\nu\bar{\nu}$
 $\bar{B} \rightarrow K^{(*)}\gamma$, $\bar{B} \rightarrow \rho\gamma, \dots$
- Oscillations $\Delta B = 2$:
mélanges $B_d - \bar{B}_d$, $B_s - \bar{B}_s$.

Cette classification peut aussi être faite entre des désintégrations inclusives ou exclusives, hadroniques ou semi-leptoniques.

Passons maintenant à une présentation de quelques unes de ces désintégrations afin d'y extraire les informations nécessaires à l'étude de la matrice CKM.

1.2 Déterminations des éléments de la matrice CKM

Je vais à présent exposer de façon sommaire les méthodes impliquées dans la détermination des éléments de la matrice CKM en détaillant un peu celles qui font intervenir la physique des saveurs lourdes. Le but est de dresser un panorama des domaines où les théories effectives et les déterminations des observables non-perturbatives à travers la QCD sur réseau entrent en jeu.

Il existe dans la littérature un nombre important d'études récapitulant notre connaissance des éléments de la matrice CKM [76]-[90]. C'est un domaine en pleine évolution autant du point de vue expérimental que théorique. Afin de mettre en contact la diversité des approches et des données impliquées dans ce domaine de la physique des particules, des «workshops CKM» ont été organisés. Les comptes rendus de ces workshops [76, 87, 88] montrent bien l'ampleur et la variété des approches mises en jeu dans la physique des saveurs des quarks et de la violation de CP .

Les mesures de $|V_{us}|$, $|V_{cb}|$ et $|V_{ub}|$ sont particulièrement importantes puisqu'elles peuvent être obtenues à l'ordre des arbres et sont donc insensibles aux effets non-standards. Toute mesure provenant d'effets de boucles ou de violation de CP qui serait en désaccord avec les déterminations à l'ordre des arbres pourrait donc être interprétée comme le signal d'effets de nouvelle physique.

La valeur de $|V_{us}|$ est connue à présent avec une précision de l'ordre du pourcent. Par contre $|V_{cb}|$ et $|V_{ub}|$ sont encore entachées de plus grandes incertitudes. En particulier $|V_{ub}|$ est déterminé actuellement avec une incertitude de l'ordre de 15%. L'intérêt que l'on porte à la physique des saveurs lourdes est en grande partie motivé par la nécessité d'améliorer ces déterminations, autant du point de vue expérimental que théorique. Restreindre les incertitudes sur $|V_{cb}|$ et $|V_{ub}|$ est notre meilleur moyen de contraindre des effets de nouvelle physique dans le cadre du mélange des saveurs de quarks.

Les déterminations actuelles de $|V_{us}|$, $|V_{cb}|$ et $|V_{ub}|$ sont les suivantes [76],

$$|V_{us}| = \lambda = 0.2240 \pm 0.0036, \quad (\text{III.1.27})$$

$$|V_{cb}|_{\text{incl.}} = (41.4 \pm 0.9) \cdot 10^{-3}, \quad (\text{III.1.28})$$

$$\frac{|V_{ub}|}{|V_{cb}|} = 0.086 \pm 0.008, \quad (\text{III.1.29})$$

$$|V_{ub}| = (35.7 \pm 3.1) \cdot 10^{-4}. \quad (\text{III.1.30})$$

Dans le tableau 1.1 nous présentons quelques uns des résultats récents pour les éléments de la matrice CKM en précisant la façon dont chacune des valeurs a été obtenue et les incertitudes dont elle est entachée.

Elément de matrice	Origine Mesure	Valeur centrale	Incertitude expérimentale	Incertitude théorique	Incertitude (%)
$ V_{ud} $	$SFT + D$ désintégration β	0.9739	0.0001	0.0005	< 0.1%
$\lambda = V_{us} $	$K \rightarrow \pi \ell \nu_\ell$	0.2196	0.0019	0.0018	$\sim 1\%$
$\lambda = V_{us} $	Unitarité	0.2269	0.0021	-	$\sim 1\%$
$\lambda = V_{us} $	Unitarité + $K \rightarrow \pi \ell \nu$	0.2240	0.0036	-	$\sim 2\%$
$ V_{ub} (\times 10^{-4})$	$B \rightarrow \pi(\rho) \ell \nu_\ell$ (exclusive)	33.8	2.4	4.6	$\sim 15\%$
$ V_{ub} (\times 10^{-4})$	$b \rightarrow u \ell \nu_\ell$ (incl. LEP)	40.9	5.8	3.3	$\sim 16\%$
$ V_{ub} (\times 10^{-4})$	$b \rightarrow u \ell \nu_\ell$ (incl. CLEO)	40.8	5.2	3.9	$\sim 16\%$
$ V_{cd} $	$\nu_\mu d \rightarrow \mu^- c$	0.224	0.016	-	$\sim 7\%$
$ V_{cs} $	$W^+ \rightarrow c \bar{s}$ et $D \rightarrow K \ell \nu_\ell$	0.97	0.09	0.07	$\sim 11\%$
$ V_{cb} (\times 10^{-3})$	$B \rightarrow D^* \ell \nu_\ell$ (exclusive)	40.2	0.9	1.8	$\sim 5\%$
$ V_{cb} (\times 10^{-3})$	$b \rightarrow c \ell \nu_\ell$ (inclusive)	41.4	0.7	0.6	$\sim 2\%$
$ V_{td} (\times 10^{-4})$	Δm_{B_d} et $B \rightarrow \rho \gamma$	85	10	-	$\sim 12\%$
$ V_{ts} (\times 10^{-3})$	Δm_{B_s} et $B \rightarrow X_s \gamma$	47	8	-	$\sim 17\%$
$ V_{tb} $	$t \rightarrow W b$	0.96	0.2	-	$\sim 20\%$
$ V_{tb} $	Unitarité	0.99992	-	-	-

TAB. 1.1 – Résultats des mesures des éléments de matrice CKM. Les espaces vides “-” indiquent (sauf pour la dernière ligne) que les incertitudes théoriques et expérimentales ont été combinées.

1.2.1 Déterminations de $|V_{ud}|$ et $|V_{us}|$: le secteur léger

Parmi les éléments de matrice CKM, $|V_{ud}|$ et $|V_{us}|$ sont ceux que l’on connaît avec la plus grande précision. Ces éléments ont en commun le fait qu’ils dépendent unique-

ment des quarks légers, u , d et s . On s'attend donc à ce que la théorie de perturbation chirale joue un rôle important dans quelques unes des façons d'extraire ces paramètres. En effet nous allons voir qu'il existe en général plusieurs voies menant à l'obtention des éléments de la matrice CKM. Les résultats finaux sont en général obtenus en moyennant sur l'ensemble de méthodes utilisées. De plus, si des écarts entre les différentes approches viennent à être confirmés on aura des indices de nouvelle physique. Cependant, avant d'arriver là il faut commencer par interpréter ces écarts comme une méconnaissance des incertitudes systématiques et donc comme la nécessité de revoir plus en détail une partie des déterminations. Je montrerai par la suite quelques cas de ce type.

Les facteurs de forme des transitions $d \rightarrow u$ et $s \rightarrow u$ sont totalement déterminés à de petites corrections près dues à la brisure de la symétrie $SU(3)$ de saveur, ce qui permet d'atteindre les précisions présentées dans le tableau 1.1.

L'élément de matrice $|V_{ud}|$ peut être déterminé par plusieurs moyens : d'abord, à partir des transitions β nucléaires $\mathcal{F} = 0^+ \rightarrow 0^+$ (superallowed Fermi transition, *SFT*) de différents noyaux (^{10}C , ^{14}O , ^{26}Al , ^{34}Cl , ^{38}K , ^{42}Sc , ^{46}V , ^{50}Mn , ^{54}Co) [94]; d'autre part, à partir de la désintégration β du neutron, $n \rightarrow p\bar{e}\bar{\nu}_e$ [95] et finalement à travers la désintégration semi-leptonique $\pi^+ \rightarrow \pi^0 e^+ \nu_e$ où les facteurs de forme de la désintégration sont obtenus en passant par la théorie de perturbation chirale [96–98]. Ces mesures sont en parfait accord entre elles mais la moyenne présentée dans le tableau 1.1 est largement dominée par la détermination *via* les transitions *SFT* du fait de leur faible incertitude. Dans les années à venir, les deux autres moyens d'obtenir $|V_{ud}|$ devraient pouvoir fournir des résultats plus précis.

L'élément de matrice $|V_{us}|$ peut être évalué de façon directe et de façon indirecte (*via* l'utilisation de l'unitarité de la matrice CKM). Les mesures directes les plus contraignantes proviennent des désintégrations semi-leptoniques $K \rightarrow \pi \ell \nu$ [99, 100]. Cependant, ces dernières années d'autres façons d'aborder la mesure de $|V_{us}|$ ont été poursuivies. Ces nouvelles mesures font par exemple intervenir les désintégrations $K \rightarrow \pi e \nu_e$, $K_L \rightarrow \pi \mu \nu_\mu$ et $K_L \rightarrow \pi e \nu_e$ [101, 102]. Par ailleurs, des études ne faisant pas appel aux désintégrations des kaons ont aussi été proposées récemment: d'une part, une nouvelle analyse des désintégrations semi-leptoniques des hyperons (Λ , Σ , Ξ) [108] et d'autre part, une étude des désintégrations hadroniques du lepton τ .

Les mesures directes de $|V_{us}|$ Considérons le cas des désintégrations semi-leptoniques du kaon ($K_{\ell 3}$). La valeur de $|V_{us}|$ citée par le Particle Data Group [45] est pratiquement celle découlant de l'étude de Leutwyler et Roos [96] dans les années 80. Récemment quelques progrès théoriques et expérimentaux ont été accomplis sans que pour autant on

ait réussi à améliorer l'incertitude sur $|V_{us}|$ de façon notable. Pour déterminer $|V_{us}|$ il faut d'une part une détermination théorique des facteurs de forme des désintégration semi-leptoniques $K_{\ell 3}$ et d'autre part l'obtention des mesures expérimentales des rapports de branchement [101–103].

L'amplitude de la désintégration semi-leptonique $K(k) \rightarrow \pi(p)\ell(p_\ell)\nu_\ell(p_\nu)$ s'écrit, en termes de l'élément de matrice du courant vectoriel entre le kaon et le pion, de la façon suivante:

$$\mathcal{M} = \frac{G}{\sqrt{2}} V_{us} C_K \langle \pi(p) | \bar{u} \gamma_\mu s | K(k) \rangle J_{\ell\nu}^\mu, \quad (\text{III.1.31})$$

où interviennent V_{us} , le couplage effectif faible G et les coefficients de Clebsh-Gordan, C_K , prenant en compte les effets d'isospin du kaon. Le terme $J_{\ell\nu}^\mu = \bar{v}(p_\ell)\gamma^\mu(1 - \gamma_5)u(p_\nu)$ contient le courant $V - A$ correspondant à la partie leptonique de l'amplitude. La factorisation des parties leptonique et hadronique de la désintégration est possible du fait de la valeur élevée de la masse du boson W et parce que les leptons ne se couplent pas aux gluons. La partie leptonique peut être traitée par un Hamiltonien effectif. Nous devons donc nous intéresser prioritairement aux effets non-perturbatifs de l'interaction forte dans le secteur hadronique. C'est dans ce secteur que les incertitudes théoriques sont les plus importantes.

L'expression de la largeur $\Gamma(K \rightarrow \pi\ell\nu_\ell)$ de la désintégration $K \rightarrow \pi\ell\nu_\ell$ dépend du module au carré de l'amplitude \mathcal{M} . Voyons maintenant comment s'exprime $\Gamma(K \rightarrow \pi\ell\nu_\ell)$ en fonction des facteurs de forme des désintégrations semi-leptoniques.

L'élément de matrice du courant vectoriel entre le kaon et le pion est paramétrisé par deux facteurs de forme, $f_{K\pi}^+(q^2)$ et $f_{K\pi}^0(q^2)$, où q^2 est le transfert de quadri-impulsion entre le kaon et le pion: $q^2 = (k - p)^2$. La paramétrisation standard s'écrit,

$$\begin{aligned} \langle \pi(p) | \bar{u} \gamma^\mu s | K(k) \rangle &= f_{K\pi}^+(q^2) \left[(p + k)^\mu - \frac{m_K^2 - m_\pi^2}{q^2} q^\mu \right] \\ &+ f_{K\pi}^0(q^2) \left(\frac{m_K^2 - m_\pi^2}{q^2} \right) q^\mu. \end{aligned} \quad (\text{III.1.32})$$

Les facteurs de forme $f_{K\pi}^+(q^2)$ et $f_{K\pi}^0(q^2)$ correspondent, respectivement, aux configurations de moment angulaire $l = 1, 0$ dans la voie croisée du système $K - \pi$. Des contraintes d'analyticité imposent que pour $q^2 = 0$ les facteurs de forme vérifient:

$$f_{K\pi}^0(0) = f_{K\pi}^+(0). \quad (\text{III.1.33})$$

Ces propriétés des facteurs de forme vont réapparaître par la suite lorsqu'on s'intéressera aux désintégrations semi-leptoniques $D \rightarrow K\ell\nu$ ou $B \rightarrow \pi\ell\nu_\ell$. Cependant une particularité importante des désintégrations $K \rightarrow \pi\ell\nu_\ell$ est que les premières corrections à

$f_{K\pi}^0(0) \sim 1$ sont faibles (apparaissent uniquement au second ordre) du fait du théorème d'Ademollo-Gatto [104]. Le facteur de forme est alors protégé contre les effets importants de la brisure de $SU(3)$. En effet, la symétrie $SU(3)$ de saveur peut être invoquée pour relier les éléments de matrice des désintégrations $K \rightarrow \pi \ell \nu$ à ceux de $\pi^+ \rightarrow \pi^0 \ell^+ \nu_\ell$. C'est cette propriété et le fait que la théorie de perturbation chirale puisse être utilisée dans ces désintégrations qui permet d'obtenir de très faibles incertitudes sur $|V_{us}|$.

Grâce à la symétrie $SU(3)$ on peut aussi profiter de la connaissance de la dépendance en q^2 du facteur de forme du pion. En effet il a été observé qu'en première approximation une dépendance linéaire en q^2 permet de décrire les données expérimentales de façon assez précise:

$$f_{K\pi}^{+,0}(q^2) = f_{K\pi}^+(0) \left(1 + \lambda_{+,0} \frac{q^2}{m_\pi^2} \right), \quad (\text{III.1.34})$$

où la région physique en q^2 est $m_l^2 \leq q^2 \leq (m_K - m_\pi)^2$. Dans ce cas la dépendance en q^2 se réduit donc à la connaissance des pentes $\lambda_{+,0}$. On peut faire quelques remarques sur la dépendance en q^2 des facteurs de forme des désintégrations semi-leptoniques: la forme la plus générale de la dépendance en q^2 doit faire intervenir la partie imaginaire de $f_{K\pi}^{+,0}$ pour satisfaire l'unitarité. Ce terme est souvent mal connu et on doit donc faire appel à des modèles ou à des approximations pour inclure les effets de certaines régions en q^2 . Dans le cas présent, les effets du terme contenant la partie imaginaire sont numériquement faibles. Cependant, nous verrons par la suite qu'une paramétrisation plus complète que la linéaire (eq. (III.1.34)) peut permettre de mieux contraindre $f_{K\pi}^+$. Le facteur de forme est alors décrit par une forme analytique composée de pôles (souvent associés aux masses des états physiques résonants). Je reviendrai aussi sur ce point lorsque je présenterai la désintégration semi-leptonique $B \rightarrow \pi \ell \nu$.

Pour obtenir $|V_{us}|$ à partir des désintégrations semi-leptoniques du kaon il faut suivre quelques étapes. D'abord, calculer $f_{K\pi}^+(0)$ à l'aide de la théorie de perturbation chirale en incluant les effets de la brisure d'isospin [96]. Des modèles de quarks relativistes [105] et des formalismes basés sur les équations de Schwinger-Dyson [106] ont aussi été utilisés. Les résultats de ces trois méthodes de calcul sont en accord, mais seule la théorie de perturbations chirales permet d'estimer précisément les incertitudes théoriques. Ainsi, le calcul de Leutwyler et Roos [96] à l'ordre $\mathcal{O}(p^4)$ en théorie de perturbation chirale donne pour ces facteurs de forme:

$$f_+^{K^0\pi^-}(0) = 0.961 \pm 0.008, \quad (\text{III.1.35})$$

$$\frac{f_+^{K^+\pi^0}(0)}{f_+^{K^0\pi^-}(0)} = 1.022. \quad (\text{III.1.36})$$

On notera que les corrections dues à la brisure d'isospin sont en effet faibles ($\sim 2\%$) du

fait du théorème d'Ademollo-Gatto.

Il faut ensuite déterminer à partir des données expérimentales la dépendance en q^2 de $f_{K\pi}^{+,0}$, i.e. les valeurs des pentes $\lambda_{+,0}$ dans le cas de l'éq. (III.1.34). Comme nous l'avons annoncé, d'autres paramétrisations de la dépendance en q^2 des facteurs de forme que la linéaire (qui *a priori* est arbitraire) on s'en propose. La façon rigoureuse de traiter cette dépendance passe par l'utilisation des relations de dispersion afin d'exprimer $f_{K\pi}^+(q^2)$ à travers des pôles des mésons vecteurs du kaon. Pour cela, on peut utiliser les facteurs de forme des désintégrations $\tau \rightarrow K\pi\mu$ en les extrapolant vers la région physique des désintégrations semi-leptoniques du kaon. Le facteur de forme $f_{K\pi}^+$ contient alors une dépendance en q^2 sous la forme de deux pôles de kaons: K^* et K'^* [107]. L'expression peut s'écrire:

$$f_{K\pi}^+(q^2) = \frac{f_{K\pi}^+(0)}{1 + \beta_{K^*}} \left[\frac{m_{K^*}^2}{m_{K^*}^2 - q^2} + \beta_{K^*} \frac{m_{K'^*}^2}{m_{K'^*}^2 - q^2} \right]. \quad (\text{III.1.37})$$

Les pôles correspondent à des masses $m_{K^*} = 892$ MeV et $m_{K'^*} = 1410$ MeV. Cette paramétrisation permet de retrouver l'expression de l'éq. (III.1.34). Si l'on prend $\beta_{K^*} = 0$ et que l'on développe en puissances de q^2 on retrouve l'éq. (III.1.34) avec une pente $\lambda_+ = (m_\pi/m_{K^*})^2 = 0.024$.

Pour avoir une estimation de $|V_{us}|$ il faut traiter les corrections électromagnétiques: d'une part les effets des boucles de photons sur les facteurs de forme et d'autre part les effets d'émission de photons réels intervenant dans la largeur de désintégration observée expérimentalement.

En rassemblant tous les éléments qui viennent d'être présentés on peut obtenir $|V_{us}|$ à l'aide de l'expression suivante [100]:

$$|V_{us}| f_{K^0\pi^-}^+(0) = 0.2215 \pm 0.0015 \quad (\text{III.1.38})$$

où la valeur numérique dans le membre de droite contient d'une part les mesures des rapports de branchement et d'autre part les corrections électromagnétiques et celles issues de la brisure de l'isospin. Cette valeur numérique doit évidemment évoluer suivant les améliorations de la précision des mesures.

La valeur obtenue pour $|V_{us}|$ à partir des désintégrations $K \rightarrow \pi$ est alors (d'après l'éq. (III.1.35)),

$$\begin{aligned} |V_{us}| &= 0.2196 \pm 0.0019_{\text{exp}} \pm 0.0018_{\text{th}} \\ &= 0.2196 \pm 0.0026. \end{aligned} \quad (\text{III.1.39})$$

Ce résultat correspond à la première valeur présentée dans la figure 1.4 qui rassemble les résultats des différentes mesures de $|V_{us}|$ ainsi que les moyennes mondiales (notées

WA). Les deux valeurs suivantes dans cette figure correspondent aux résultats récents des expériences E865 à Brookhaven (BNL) et KLOE au collisionneur DAΦNE (Frascati, Italie).

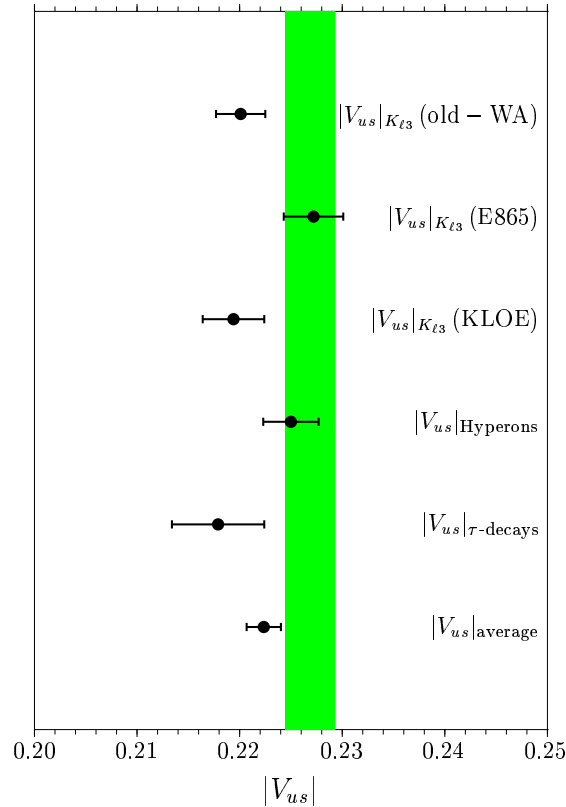


FIG. 1.4 – Mesures de $|V_{us}|$ [90]. La colonne verticale hachurée représente la valeur obtenue en imposant l'unitarité de la matrice CKM.

D'autre part, les mesures notées $|V_{us}|_{Hyperons}$ et $|V_{us}|_{\tau-decays}$ correspondent à de nouvelles façons de déterminer $|V_{us}|$ sans faire intervenir les désintégrations des kaons. La valeur du bas de la figure est la moyenne des différentes déterminations [90] :

$$|V_{us}|_{moyenne} = 0.2224 \pm 0.0017, \quad (\text{III.1.40})$$

La mesure de $|V_{us}|$ via l'unitarité Connaissant $|V_{ud}|$ et $|V_{us}|$ il est alors possible de tester la relation d'unitarité issue de la première ligne de la matrice CKM:

$$|V_{ud}|^2 + |V_{us}|^2 + |V_{ub}|^2 = 1. \quad (\text{III.1.41})$$

Dans cette égalité l'effet de la valeur de $|V_{ub}|$ est très faible par rapport à celui de $|V_{ud}|$ et $|V_{us}|$ et peut donc légitimement être négligé. En remplaçant les valeurs obtenues pour

$|V_{ud}|$ et $|V_{us}|$ (tableau 1.1) dans le membre de gauche de la relation d'unitarité (III.1.41) on obtient:

$$|V_{ud}|^2 + |V_{us}|^2 + |V_{ub}|^2 = 0.9967 \pm 0.0015. \quad (\text{III.1.42})$$

Une interprétation directe de l'éq. (III.1.42) indique qu'au stade actuel les mesures expérimentales suggèrent un écart de 2.5σ par rapport à l'unitarité exprimée par l'éq. (III.1.41). Avant d'interpréter cet écart comme l'effet de contributions non-standards, il serait utile de mieux comprendre les incertitudes statistiques et systématiques dans les mesures de $|V_{ud}|$ et $|V_{us}|$. Noter par ailleurs que si on prend pour $|V_{us}|$ la valeur moyennée de l'éq (III.1.40) l'écart par rapport à l'unitarité devient 1.5σ . La précision des futures mesures de $|V_{us}|$ doit permettre de trancher sur cette possible déviation par rapport à l'unitarité. On peut se servir de l'éq. (III.1.41) pour obtenir une mesure indirecte de $|V_{us}|$:

$$|V_{us}|_{\text{unit.}} = 0.2269 \pm 0.0021. \quad (\text{III.1.43})$$

Cette mesure correspond à la colonne hachurée dans la figure 1.4. D'autre part, en combinant les mesures directes et indirectes à l'aide d'une pondération, on obtient:

$$|V_{us}|_{\text{unit.}+K\rightarrow\pi} = 0.2240 \pm 0.0036. \quad (\text{III.1.44})$$

Une détermination complète des facteurs de forme $f_{K\pi}^{\pm}(q^2)$ et $f_{K\pi}^0(q^2)$ par des simulations sur réseau atteignant le degré de précision que permet la théorie de perturbation chirale (cf. éq. (III.1.35)) est inenvisageable à présent, d'autant plus que les masses de quarks en jeu dans ces désintégrations sont faibles, ce qui pose des problèmes supplémentaires quant à l'efficacité des algorithmes des simulations. Il est cependant intéressant de noter que des calculs de QCD sur réseau doivent permettre d'améliorer la mesure de $|V_{us}|$ grâce à la détermination des «Low-Energy Constants» (LEC) apparaissant aux ordres supérieurs des développements chiraux. En effet, Bijmens et Talavera [110] ont observé récemment que les LEC apparaissant à l'ordre $\mathcal{O}(p^6)$ dans le développement du facteur de forme $f_{K\pi}^{\pm}(0)$ peuvent être déterminées par les mesures de la pente et la courbure du facteur de forme scalaire $f_{K\pi}^0(q^2)$. Ceci doit pouvoir être fait sur réseau en suivant par exemple la méthode utilisée dans le cas des désintégrations $B \rightarrow D\ell\nu$. Des études préliminaires encourageantes [111] sont actuellement en cours de réalisation par la collaboration SPQDR (Southampton, Paris et Rome). Ces études indiquent que la valeur de $|V_{us}|$ obtenue à partir des désintégrations $K \rightarrow \pi\ell\nu$ se rapproche de ce qu'impose l'unitarité de la matrice CKM (éq. (III.1.42)). Dans le chapitre suivant, je reviendrai sur le problème posé par les LEC. Pour conclure sur $|V_{us}|$ je noterai simplement que les déterminations des facteurs de forme des désintégrations semi-leptoniques des hyperons devraient aussi pouvoir être obtenues par des calculs sur réseau.

1.2.2 Mesure de $|V_{cs}|$ au moyen des résultats des réseaux

Trois méthodes au moins permettent d'extraire la valeur de l'élément de matrice $|V_{cs}|$. Je n'évoquerai cependant que celle qui fait appel à des déterminations de QCD sur réseau: la désintégration semi-leptonique $D \rightarrow K\ell\nu_\ell$. Notons cependant que les mesures les plus précises sont actuellement celles qui font intervenir les désintégrations du boson W .

Pour étudier la désintégrations $D \rightarrow K\ell\nu_\ell$, on fait ici aussi appel au facteur de forme des désintégrations semi-leptoniques: $f_{D \rightarrow K}^+(q^2)$. L'expression de la largeur de la désintégration $D \rightarrow K\ell\nu_\ell$ en fonction de $|V_{cs}|$ et de $f_{D \rightarrow K}^+(q^2)$ est la suivante:

$$\Gamma(D \rightarrow K\ell^+\nu_\ell) \equiv \frac{\mathcal{B}(D \rightarrow K\ell^+\nu_\ell)}{\tau_D}, \quad (\text{III.1.45})$$

$$= \frac{G_F^2 |V_{cs}|^2}{192\pi^3 m_D^3} \int_0^{(m_D - m_K)^2} dq^2 \lambda^{3/2}(q^2) |f_{D \rightarrow K}^+(q^2)|^2, \quad (\text{III.1.46})$$

où $\lambda(q^2) = (q^2 - m_D^2 - m_K^2)^2 - 4m_D^2 m_K^2$ est un facteur d'épendant uniquement de la cinématique. Notons que cette expression de la largeur de la désintégration reste valable pour les autres désintégrations semi-leptoniques ($D \rightarrow \pi$ ou $B \rightarrow \pi$).

La QCD sur réseau s'est intéressée à ces facteurs de forme depuis maintenant plusieurs années. La raison en est que les masses des mésons K et D peuvent être simulées directement: les facteurs de forme sont calculables sur réseau sans faire appel à de grandes extrapolations en masses des quarks ce qui permet d'avoir une assez bonne assurance sur la validité des résultats. De plus, toute la zone physique en q^2 ($0 \lesssim q^2 \lesssim 2 \text{ GeV}^2$) peut être couverte et il est donc possible d'effectuer l'intégrale sur $f_{D \rightarrow K}^+(q^2)$ (cf. eq. (III.1.46)). On verra par la suite que ceci n'est pas le cas des désintégrations $B \rightarrow \pi\ell\nu$. On dispose par exemple d'une détermination de $f_{D \rightarrow K}^+(q^2 = 0)$ faite par la collaboration UKQCD [112] qui obtient: $f_{D \rightarrow K}^+(0) = 0.67_{-0.08}^{+0.07}$. Une étude plus récente des groupes de Rome et d'Orsay [113] donne: $f_{D \rightarrow K}^+(0) = 0.66 \pm 0.04_{-0.0}^{+0.01}$. En prenant la valeur expérimentale de largeur de désintégration on peut obtenir une estimation de $|V_{cs}|$:

$$|V_{cs}| = 1.07 \pm 0.09, \quad (\text{III.1.47})$$

Le tableau 1.2 rassemble les résultats pour les largeurs des désintégrations $D \rightarrow K\ell\nu$ et $D \rightarrow \pi\ell\nu$. Je n'entrerai pas davantage dans les détails de ces déterminations puisqu'au niveau du principe elles sont analogues à l'étude des désintégrations semi-leptoniques $B \rightarrow \pi\ell\nu$ que j'aborderai par la suite.

Avec l'arrivée des nouvelles mesures expérimentales de CLEO- c au CESR (Cornell Electron-positron Storage Ring) et de BES-III (futur détecteur au Beijing Electron Positron

Source des résultats	$\Gamma(D^{\pm} \rightarrow K^{\mp} \ell \nu)$ [ps ⁻¹]	$\Gamma(D^0 \rightarrow \pi^{\mp} \ell \nu)$ [ps ⁻¹]
Expériences [45]	$(8.4 \pm 0.5) \cdot 10^{-2}$	$(8.6 \pm 1.8) \cdot 10^{-3}$
Rome-Orsay 99 [113] (Méthode I)	$(6.9 \pm 1.1) \cdot 10^{-2}$	$(5.6 \pm 1.4) \cdot 10^{-3}$
Rome-Orsay 99 [113] (Méthode II)	$(7.3 \pm 1.1) \cdot 10^{-2}$	$(5.9 \pm 1.5) \cdot 10^{-3}$
APE 95 [114]	$(9.1 \pm 2.0) \cdot 10^{-2}$	$(8 \pm 2) \cdot 10^{-3}$
UKQCD 95 [112]	$(7.0 \pm 1.7) \cdot 10^{-2}$	$(5.2 \pm 1.8) \cdot 10^{-3}$
LANL 95 [115]	$(9.4 \pm 1.5) \cdot 10^{-2}$	$(7.4 \pm 1.1) \cdot 10^{-3}$
LCSR 2000 [161]	$(9.2 \pm 3.5) \cdot 10^{-2}$	$(6.3 \pm 2.4) \cdot 10^{-3}$

TAB. 1.2 – Bilan [113] des résultats des déterminations des largeurs des désintégrations $D \rightarrow K \ell \nu_{\ell}$ et $D \rightarrow \pi \ell \nu_{\ell}$ à partir des données expérimentales, des réseaux et des règles de somme sur le cône de lumière (LCSR). Les valeurs $|V_{cs}| = 0.9745(8)$ et $|V_{cd}| = 0.220(3)$ [45] ont été utilisées pour la comparaison.

Collider) les mesures de $|V_{cs}|$ via les désintégrations semi-leptoniques du méson D devraient devenir la façon la plus précise d'extraire ce paramètre. On s'attend donc à obtenir des mesures précises de l'amplitude et de la pente des facteurs de forme des désintégrations $D \rightarrow (K, K^*) \ell \nu_{\ell}$ et $D \rightarrow (\pi, \rho) \ell \nu_{\ell}$. En particulier ces expériences devraient permettre de tester la validité (et de comprendre les écarts) des déterminations des réseaux présentés dans le tableau 1.2. Les projections de CLEO- c pour $|V_{cs}|$ sont: $\delta|V_{cs}|/|V_{cs}| = 1.6\%$.

1.2.3 Les déterminations de $|V_{cb}|$

Les déterminations des éléments de matrice $|V_{cb}|$ et $|V_{ub}|$ font intervenir les désintégrations lourde à lourde des mésons B . La présence d'une masse lourde, m_b permet d'utiliser toute un ensemble d'outils théoriques propres à la physique des saveurs lourdes. Nous allons voir que selon que l'on s'intéresse aux désintégrations inclusives ($b \rightarrow c \ell \bar{\nu}$, $b \rightarrow u \ell \bar{\nu}$) ou exclusives ($B \rightarrow D^{(*)} \ell \bar{\nu}$, $B \rightarrow \pi(\rho) \ell \bar{\nu}$) différentes approches théoriques vont intervenir.

Rôle de l'OPE dans la mesure inclusive de $|V_{cb}|$

La transition $b \rightarrow c\ell\bar{\nu}$ est étudiée expérimentalement en considérant les désintégrations $B \rightarrow X_c\ell\nu_\ell$, où X_c est un hadron composé d'un quark charmé. L'intérêt que l'on porte aux désintégrations inclusives provient du fait qu'en sommant sur l'ensemble des états finaux hadroniques on arrive à mettre de côté les difficultés de calcul propres au confinement des quarks en QCD. En effet, une image simple des désintégrations inclusives consiste à considérer le quark- b comme une particule libre. Le quark- b se désintègre par interaction faible avec un temps caractéristique ($t \sim 1/m_b$) bien plus petit que celui des phénomènes hadroniques (*i.e.* $t_{had} \sim 1/\Lambda_{QCD}$). Une fois le quark- b désintégré, en sommant sur les états finaux, on obtient une probabilité égale à un pour que le système hadronise. On évite ainsi les difficultés des déterminations des détails de l'hadronisation. Cette séparation des échelles va formellement se traduire par l'utilisation d'un développement en produit d'opérateurs (OPE).

Complétons ce qui a été introduit dans la section II.1.3 à propos de l'OPE. Le but à présent est d'obtenir une expression de l'élément de matrice $\langle X_c\ell\bar{\nu} | \mathcal{O}_{sl} | B \rangle$ en fonction des largeurs de désintégration inclusives pouvant être mesurées dans les expériences. De façon schématique l'expression de la largeur de désintégration $B \rightarrow X_c\ell\bar{\nu}$ prend la forme :

$$\Gamma(B \rightarrow X_c\ell\bar{\nu}) \sim \sum_{X_c} \int d[\text{Espace de Phase}] |\langle X_c\ell\bar{\nu} | \mathcal{O}_{sl} | B \rangle|^2, \quad (\text{III.1.48})$$

où l'on somme les états finaux X_c à l'intérieur de l'intégrale sur l'ensemble des variables de l'espace de phase. L'élément de matrice fait intervenir l'opérateur \mathcal{O}_{sl} de la désintégration semi-leptonique:

$$\mathcal{O}_{sl} = -\frac{4G_F}{\sqrt{2}} V_{cb} (J_{bc})^\mu (J_{\ell\nu})_\mu, \quad (\text{III.1.49})$$

où les courants dans le secteur des quarks et des leptons sont respectivement: $J_{bc}^\mu = (\bar{c}\gamma^\mu P_L b)$ et $J_{\ell\nu}^\mu = (\bar{\ell}\gamma^\mu P_L \nu)$. Le projecteur de chiralité «left», P_L , est tel que: $P_L = (1 - \gamma_5)/2$.

On peut maintenant factoriser les parties leptonique et hadronique et s'intéresser au tenseur hadronique:

$$W^{\mu\nu} \sim \sum_{X_c} \delta^4(p_B - q - p_X) |\langle B | J_{bc}^{\mu\dagger} | X_c \rangle \langle X_c | J_{bc}^\nu | B \rangle|^2. \quad (\text{III.1.50})$$

Cette expression peut être réécrite au moyen d'un produit ordonné en temps des deux opérateurs (théorème optique):

$$W^{\mu\nu} \sim \text{Im} \int \delta x e^{-iq \cdot x} \langle B | T \{ J_{bc}^{\mu\dagger}(x) J_{bc}^\nu(0) \} | B \rangle. \quad (\text{III.1.51})$$

A partir de cette expression il est possible de faire un développement en produit d'opérateurs locaux [116]. A la limite des masses lourdes ($m_b \gg \Lambda_{QCD}$), le produit ordonné en temps est dominé par les courtes distances. Le tenseur hadronique peut alors être réécrit comme une somme d'opérateurs locaux.

A l'ordre dominant ce développement est déterminé uniquement par le contenu en quark- b de l'état initial. Par contre, en allant aux ordres supérieurs il faut considérer un plus grand nombre d'opérateurs de dimensions croissantes qui, cependant, sont supprimés par des puissances de m_b . Ces opérateurs se présentent sous la forme d'éléments de matrice hadroniques qui doivent être calculés non-perturbativement.

Dans le cas présent des désintégrations semi-leptoniques $B \rightarrow D$, on peut illustrer le développement de l'éq.(III.1.51) de la façon suivante [89]:

$$(III.1.52)$$

Typiquement, un développement OPE est valable pour des énergies vérifiant:

$$m_{X_c}^2 - m_q^2 \gg E_{X_c} \Lambda_{QCD} \gg \Lambda_{QCD}^2. \quad (III.1.53)$$

Ces contraintes sont vérifiées dans le cas des désintégrations $B \rightarrow D \bar{\chi}_c \ell$ ($m_q = m_\ell$ ($\ell = e, \mu$) et $m_{X_c} \gg \Lambda_{QCD}$ car X_c contient un quark- c ; $k \sim \Lambda_{QCD}$ et $m_b \gg \Lambda_{QCD}$). L'équation III.1.52 permet d'interpréter l'OPE comme un développement ayant comme petit paramètre l'impulsion résiduelle k du quark- b . En fixant le domaine de convergence de la série, on précise simultanément la région de validité de l'OPE.

Détaillons un peu plus les termes non-perturbatifs apparaissant dans ce développement. A l'ordre le plus bas en Λ_{QCD}/m_b , les opérateurs intervenant dans le développement sont du type $\bar{b} \Gamma b$ où Γ est une façon générique de nommer les matrices de Dirac liées au processus étudié. Les invariances de la QCD par parité et par conservation de la saveur des quarks permettent de contraindre les éléments de matrice de ces opérateurs. En particulier, pour $\Gamma = \gamma^\mu$ et pour $\Gamma = \gamma^\mu \gamma_5$ les éléments de matrice s'écrivent:

$$\begin{aligned} \langle B(p_B) | \bar{b} \gamma^\mu b | B(p_B) \rangle &= 2p_B^\mu = 2m_B v^\mu, \\ \langle B(p_B) | \bar{b} \gamma^\mu \gamma_5 b | B(p_B) \rangle &= 0. \end{aligned} \quad (III.1.54)$$

Une propriété remarquable issue de la symétrie des quarks lourds est que les opérateurs faisant intervenir d'autres matrices Γ que γ^μ ou $\gamma^\mu \gamma_5$ peuvent toujours être ramenés à ceux

de l'éq. (III.1.54) avec des corrections uniquement d'ordre $\mathcal{O}(\Lambda_{QCD}^2/m_b^2)$. Autrement dit, à travers un développement OPE on arrive à justifier une certaine indépendance des éléments de matrice par rapport au processus considérée : c'est cette remarque qui justifie l'image d'un quark- b libre dans les désintégrations inclusives. La validité des développements OPE repose implicitement sur des considérations liées à la dualité quark-hadron [117]: en moyennant sur un nombre important d'états finaux, les grandeurs hadroniques peuvent être obtenues à partir des processus partoniques.

Les premières corrections viennent uniquement à l'ordre (Λ_{QCD}^2/m_b^2) . En effet, les termes d'ordre (Λ_{QCD}/m_b) sont supprimés puisque tous les opérateurs de dimension 4 ont des éléments de matrices nuls à la limite des quarks lourds [118]:

$$\langle B | \bar{b} i D_\mu \Gamma b | B \rangle = 0. \quad (\text{III.1.55})$$

Les corrections d'ordre (Λ_{QCD}^2/m_b^2) [119]-[122] dépendent des deux paramètres λ et λ_2 . Ces paramètres ont été introduits lors de la présentation de la spectroscopie des hadrons lourds issue de théorie effective des quarks lourds (cf. éqs. (II.1.15) et (II.1.16) dans la section II.1.2). Nous avons vu que λ_2 est assez bien connu, $\lambda_2(m_b) \simeq 0.12 \text{ GeV}^2$, mais que par contre $\lambda_1 = [-0.1, -0.5] \text{ GeV}^2$ présente encore une grande incertitude. Des mesures expérimentales plus précises devraient permettre d'améliorer la détermination de λ_1 et de réduire ainsi les incertitudes sur les termes sous-dominants du développement OPE.

En récapitulant ce qui vient être dit, on peut maintenant écrire schématiquement l'expression de la largeur de désintégration (éq.(III.1.48)) résultant de l'OPE:

$$\Gamma = \left(\begin{array}{c} \text{désintégration} \\ \text{du quark } b \end{array} \right) \times \left\{ 1 + \frac{0}{m_b} + \frac{f(\lambda_1, \lambda_2)}{m_B^2} + \dots + \alpha_s(\dots) + \alpha_s^2(\dots) + \dots \right\}. \quad (\text{III.1.56})$$

Les termes d'ordre Λ_{QCD}^3/m_b^3 font intervenir des opérateurs encore mal connus qui sont en général estimés par des critères simples d'analyse dimensionnelle. Les calculs sur réseau de ces corrections sont aussi difficiles à maîtriser puisqu'ils font appel à des masses voisines de celles du méson B et parce que les opérateurs de dimension élevée dont intervenir des termes dérivatifs qui posent des problèmes dans un espace discret. En ce qui concerne les corrections perturbatives de QCD, elles sont connues jusqu'à l'ordre $\alpha_s^2 \beta_0$ [123].

Des progrès récents ont permis de réduire considérablement les incertitudes sur les mesures de $|V_{cb}|$. Il a été remarqué que les moments des spectres hadronique et leptoniques peuvent contraindre les valeurs des paramètres du développement OPE ainsi que les masses des quarks. Ces moments sont mesurables expérimentalement et peuvent aussi être écrits par un développement OPE. Par un fit combiné des données des différents moments on peut alors extraire les paramètres du développement OPE. Certains de ces paramètres sont aussi

ceux du développement de $|V_{cb}|$. Il est ainsi possible à présent d'estimer expérimentalement les termes d'ordre (Λ_{QCD}^3/m_b^3) qu'on a évoqué auparavant. Par ce procédé ce qui était avant une incertitude théorique est maintenant devenu une incertitude expérimentale.

Ecrivons finalement l'expression de $|V_{cb}|$ issue de l'OPE [124, 125] :

$$|V_{cb}| = (41.9 \pm 1.2) \times 10^{-3} \left(\frac{\mathcal{B}(B \rightarrow X_c \ell \bar{\nu})}{0.105} \frac{1.6 \text{ ps}}{\tau_B} \right)^{1/2}. \quad (\text{III.1.57})$$

où l'erreur tient compte des incertitudes sur le développement perturbatif, sur la valeur de la masse du quark- b et sur celle de λ_1 .

Les expériences CLEO [126], BABAR [127] et DELPHI [128] ont utilisé le formalisme de l'OPE dans leurs analyses et ont obtenu des résultats compatibles pour $|V_{cb}|$ (cf. tableau 1.1). Il reste cependant à éclaircir un décalage entre les valeurs de $|V_{cb}|$ obtenues à partir des moments hadroniques et leptoniques. Dans ce désaccord la valeur de la masse du quark- b joue un rôle important. Des études de cet écart doivent aussi permettre dans le futur de quantifier de possibles écarts à la dualité quark-hadron qui, comme on l'a vu, est au cœur des développements du type OPE.

Rôle de la HQET dans la mesure exclusive de $|V_{cb}|$

Pour déterminer $|V_{cb}|$ à partir des désintégrations semi-leptoniques $B \rightarrow (D, \bar{D})\ell\nu_\ell$ il faut pouvoir calculer les éléments de matrice des courants chargés : $\langle D_\mu | B \rangle$ et $\langle D^* | J_\mu | B \rangle$. La difficulté principale de cette approche est qu'au stade actuel, on ne dispose pas des moyens nécessaires aux calculs (à partir des premiers principes de la QCD) des facteurs de forme de ces désintégrations (et de leur dépendance en q dans toute la région physique : $0 < q^2 < 12 \text{ GeV}^2$). Les calculs sur réseau ne permettent par encore d'étudier directement les facteurs de forme impliqués dans les désintégrations entre deux états lourds. Une autre difficulté des simulations sur réseau est la limitation dans les valeurs des quadri-impulsions q accessibles. Non seulement le fait de travailler sur un réseau implique une discrétisation des impulsions, mais en plus, les grandes valeurs de ces impulsions détériorent la qualité des signaux. Il est difficile de couvrir un domaine vaste en impulsions sans voir apparaître des fluctuations importantes dans les corrélateurs lorsque les impulsions sont près des bords de la zone de Brillouin. Ainsi la dépendance des facteurs de forme sur le domaine physique en q^2 est souvent un point délicat à traiter sur les réseaux. Je reviendrai sur l'étude de ces problèmes (et sur la façon de les surmonter) dans le chapitre suivant traitant des simulations de mésons lourds sur réseau. Une fois que ces difficultés seront surmontées, les désintégrations exclusives devraient devenir notre meilleur outil pour fixer la valeur $|V_{cb}|$.

D'ici là, l'utilisation d'une théorie effective comme la HQET permet de simplifier considérablement l'étude des désintégrations $B \rightarrow^{(*)} D \ell \nu_\ell$ (cf. 1.3). A la limite de masse

lourde les six facteurs de forme qui jouent un rôle dans ces transitions se réduisent à un seul: la fonction $\xi(\omega)$ de Isgur-Wise [34], où $\omega = v \cdot v'$ est le produit des quadri-vitesses des mésons B et $D(D^*)$. Cette simplification est un effet de la symétrie des quarks lourds. A la limite statique, les degrés de liberté légers (insensibles à la masse et au spin du quark lourd) subissent uniquement l'effet de la quadri-vitesse de la source statique de couleur au centre du système mésonique. Ainsi les facteurs de forme, décrivant le recouvrement des fonctions d'onde des états initiaux et finaux, seront insensibles à la structure en termes de matrices de Dirac et vont dépendre uniquement de ω . C'est cette propriété qui permet de relier tous les facteurs de forme à une fonction universelle. De plus, à la limite de recul nul, *i.e.* lorsque le quark c est immobile dans le repère du quark b , les degrés de liberté ne voient aucune transition ce qui permet de normaliser la fonction de Isgur-Wise : $\xi(1) = 1$. Le théorème de Luke [49] assure par ailleurs que les premières corrections de brisure de symétrie n'apparaissent qu'au deuxième ordre dans le développement en masse lourde. Nous allons voir que des calculs sur réseau dans le cadre de la HQET permettent de contraindre les corrections des ordres supérieurs.

L'expression de la largeur différentielle de la désintégration $B \rightarrow D^* \ell \bar{\nu}_\ell$ prend la forme:

$$\frac{d\Gamma}{d\omega} = \frac{G_F^2}{4\pi^3} (\omega^2 - 1)^{1/2} m_{D^*}^3 (m_B - m_{D^*})^2 \mathcal{G}(\omega) |V_{cb}|^2 |\mathcal{F}(\omega)|^2, \quad (\text{III.1.58})$$

où l'on note $\mathcal{F}(\omega)$ une fonction égale à $\xi(\omega)$ à la limite $m_\ell \rightarrow \infty$. Le facteur d'espace de phase $\mathcal{G}(\omega)$ est tel que $\mathcal{G}(1) = 1$.

On peut exprimer la dépendance de \mathcal{F} sur ω de la façon suivante:

$$\mathcal{F}(\omega) = \mathcal{F}(1) [1 + \rho^2(\omega - 1) + c(\omega - 1)^2 + \dots] . \quad (\text{III.1.59})$$

où ρ^2 et c sont respectivement la pente et la courbure de \mathcal{F} . Des considérations théoriques permettent de contraindre les valeurs de $\mathcal{F}(1)$, ρ^2 et c [129]-[141]. Notons que la connaissance de la dépendance en ω de \mathcal{F} est importante puisque des extrapolations de la largeur différentielle mesurée expérimentalement sont nécessaires pour atteindre la zone de faible recul $\omega = 1$. La zone physique en ω est:

$$1 \leq \omega \leq \frac{m_B^2 + m_{D^*}^2}{2m_B m_{D^*}} \simeq 1.51 . \quad (\text{III.1.60})$$

Schématiquement la fonction $\mathcal{F}(\omega = 1)$ prend la forme:

$$\mathcal{F}(1) = \xi(1) + c_A(\alpha_s) + \frac{0_{(\text{Luke})}}{m_{c,b}} + \frac{(\text{théorie})}{m_{c,b}^2} + \dots, \quad (\text{III.1.61})$$

où $c_A(\alpha_s) = -0.04$ est la correction perturbative d'ordre α_s^2 [143] et «théorie» fait référence à des calculs soit effectués sur réseau soit faisant appel à des modèles phénoménologiques. Les estimations de $\mathcal{F}(\omega = 1)$ donnent:

$$\mathcal{F}(1) = 0.91 \pm 0.04. \quad (\text{III.1.62})$$

Cette valeur n'a pas beaucoup changé au cours des dernières années [80]. Elle a d'ailleurs été confirmée récemment par un calcul «quenched» sur réseau [140–142]. En prenant la moyenne des valeurs obtenues par les expériences LEP (ALEPH, DELPHI et OPAL), CLEO, BELLE et BABAR on obtient la valeur (*cf.* figure 1.5):

$$\mathcal{F}(1)|V_{cb}| = (36.7 \pm 0.8) \times 10^{-3}. \quad (\text{III.1.63})$$

Une valeur moyenne de la pente ρ^2 de $\mathcal{F}(1)$ peut aussi être obtenue par des fits des données des expériences [144]:

$$\rho^2 = 1.44 \pm 0.14 \quad (\text{III.1.64})$$

La connaissance de la pente ρ^2 et de la courbure c de $\mathcal{F}(1)$ sont importantes puisqu'elles interviennent dans l'étude des corrélations des mesures expérimentales du produit $\mathcal{F}(1)|V_{cb}|$. Des critères d'analyticité permettent de contraindre ρ^2 et c dans la région de recul nul [129].

En utilisant le formalisme de l'OPE à la limite des quarks lourds, des règles de somme ont été construites [133]–[136] afin d'établir des bornes sur la pente et la courbure (et de façon générale sur les dérivées de la fonction $\mathcal{F}(\omega)$). Il a été par ailleurs démontré que $\mathcal{F}(\omega)$ est une série alternée en puissances de $\omega - 1$. A partir de la connaissance des bornes sur les dérivées, une paramétrisation simple de $\mathcal{F}(\omega)$ a été proposée:

$$\mathcal{F}(\omega) = \left(\frac{2}{\omega + 1} \right)^{2\rho^2} \quad (\text{III.1.65})$$

Cette paramétrisation devient utile dans la zone de faible recul ($\omega \sim 1.5$) où l'on attend une contribution des dérivées d'ordres supérieurs (et pas uniquement des premières, *i.e.* ρ et c).

Quelques mots à propos des mesures de $\mathcal{F}(1)$ sur réseau: la détermination non-perturbative de $\mathcal{F}(1)$ revient à obtenir de l'information sur les corrections $1/m_Q^2$ et $1/m_Q^3$ de l'éq. (III.1.61). Des calculs sur réseau [140–142] ont été effectués dans l'approche dite de «Fermilab» (je présenterai les différentes façons de simuler des quarks lourds dans le

prochain chapitre). Cette approche permet d'utiliser le formalisme de la HQET à partir des fermions de Wilson. Dans la HQET l'expression de $\mathcal{F}(1)$ est donnée par:

$$\mathcal{F}(1) = h_{A_1}(1) = \langle D^*(v) | A^\mu | \overline{B}(v) \rangle, \quad (\text{III.1.66})$$

où A_μ est le courant axial $A_\mu = \bar{c} \gamma_\mu \gamma_5 b$. Les corrections en $1/m_Q^2$ et $1/m_Q^3$ à $h_{A_1}(1) - 1$ dépendent de coefficients qui peuvent être obtenus sur les réseaux. Il a été proposé pour cela de construire des doubles rapports d'éléments de matrices entre les mésons B et D afin d'obtenir une précision adéquate. Notons qu'une erreur de 20% sur les corrections à $h_{A_1}(1) - 1$ constitue déjà un résultat intéressant puisque ces corrections ne peuvent pas être calculées de façon systématique autrement que par des simulations sur réseau: on ne retrouve malheureusement pas dans la mesure exclusive de $|V_{cb}|$ ce qui a été observé dans le cas inclusif à propos des déterminations par les expériences des corrections au développement OPE. Les rapports d'éléments de matrice qu'on vient d'évoquer dépendent aussi d'effets de courte distance qui doivent être calculés en perturbation. Le raccordement entre les calculs perturbatifs et ceux des éléments de matrice obtenus par les simulations est responsable d'une partie de l'incertitude sur la détermination de $\mathcal{F}(1)$. Les autres indéterminations proviennent des extrapolations des masses des quarks légers vers la limite chirale et de l'approximation «quenched». En prenant en compte ces incertitudes, le résultat obtenu pour $\mathcal{F}(1)$ est en bon accord avec ceux des autres méthodes de calcul (*i.e.* les règles de somme ou les modèles de quarks non-relativistes).

Les différentes expériences montrent encore une assez grande dispersion dans leurs mesures de la corrélation entre $\mathcal{F}(1)$ et la pente $\hat{\rho}$ comme le montre la figure 1.5. Au stade actuel, l'incertitude sur $|V_{cb}|$ est dominée par celle de $\mathcal{F}(1)$. Des déterminations plus précises de $\mathcal{F}(1)$ sur réseau doivent donc permettre d'améliorer les estimations de $|V_{cb}|$.

En combinant les résultats des éqs. (III.1.62 et III.1.63) on obtient une estimation de $|V_{cb}|$:

$$|V_{cb}|_{B \rightarrow D^* \ell \nu_\ell} = (40.2 \pm 0.9_{\text{exp}} \pm 1.8_{\text{théo}}) \times 10^{-3}. \quad (\text{III.1.67})$$

Cette valeur est en bon accord avec le résultat des mesures inclusives.

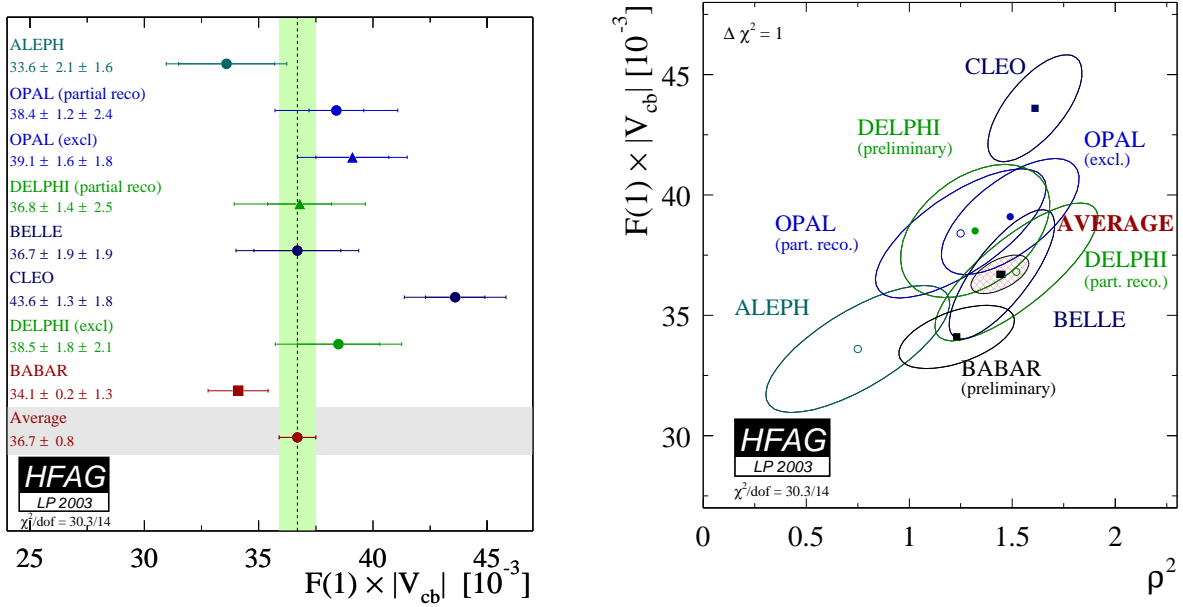


FIG. 1.5 – Déterminations de $F(1)|V_{cb}|$ (à gauche) et de la dépendance de $F(1)|V_{cb}|$ en fonction de la pente ρ^2 (à droite) à partir des désintégrations $B \rightarrow D^* \ell \nu_\ell$ [144].

Chapitre 2

La détermination de $|V_{ub}|$

Je vais d'écrire à présent les outils et les approximations impliqués dans l'étude des désintégrations semi-leptoniques (exclusives) $B \rightarrow \pi \ell \nu$. Le formalisme propre au traitement des désintégrations semi-leptoniques a déjà été évoqué à plusieurs reprises auparavant (cf. section III.1.2.1). Dans ce qui suit, je vais donner quelques détails supplémentaires sur les étapes de la détermination des facteurs de forme de ces désintégrations, le but étant aussi de mettre en évidence le rôle de la constante de couplage \hat{g} introduite dans le chapitre précédent (cf. section II.2.3).

Le chapitre précédent (section II.1.3) nous a permis d'annoncer quelques unes des difficultés propres aux désintégrations lourde à légère des mésons B , *i.e.* $B \rightarrow \pi(\rho)$. Pour d'écrire la dynamique de la transition sur l'ensemble de la région physique en²il faudrait disposer d'un outil théorique pouvant traiter simultanément les effets des échelles de grande énergie (m_B et dans la limite de grand recul, l'énergie E_π du pion), l'échelle hadronique Λ_{QCD} et l'échelle de basse énergie associée à la physique du pion. Des théories effectives comme la HQET (dans la limite de recul nul) et la LEET (dans la limite de grand recul) sont des guides utiles pour aborder ces désintégrations mais ne permettent pas de couvrir l'ensemble de la région en q^2 :

$$0 \leq q^2 \leq q_{\max}^2 = (m_B - m_\pi)^2 \sim 26 \text{ GeV}^2. \quad (\text{III.2.1})$$

C'est ce manque de connaissance de la dépendance en q^2 des facteurs de forme qui introduit les grandes incertitudes dans les déterminations des éléments de matrice CKM à l'aide des désintégrations semi-leptoniques exclusives. De plus les simplifications qu'elles peuvent introduire ne permettent de toute façon pas de contourner la nécessité de déterminer des grandeurs non-perturbatives comme les facteurs de forme, les constantes de désintégration, la fonction d'onde du pion ou la constante de couplage $g_{B^* B \pi}$. Ainsi, contrairement au cas

de $|V_{cb}|$ où nous avons présentée les simplifications introduites par la HQET, dans le cas présent nous devons en grande partie aborder le problème à l'aide de la QCD sur réseau, des règles de somme de QCD (QCDSR) et de modèles phénoménologiques.

2.1 La dépendance en q^2 du facteur de forme $f_{B\pi}^+(q^2)$

Ecrivons pour commencer l'expression de la largeur différentielle de la désintégration $B^0 \rightarrow \pi^- \ell^+ \nu$:

$$\frac{d\Gamma}{dq^2} = \frac{|V_{ub}|^2 G_F^2}{24\pi^3} [(v \cdot k)^2 - m_\pi^2]^{3/2} |f_{B\pi}^+(q^2)|^2, \quad (\text{III.2.2})$$

Elle fait intervenir le facteur de forme $f_{B\pi}^+(q^2)$ ainsi que l'élément de matrice $|\bar{u}b|$ que l'on cherche à déterminer. On appelle $p = m_B v$ et k les quadri-impulsions du méson B et du pion, respectivement. Le transfert d'impulsion q est tel que $q = p - k$.

Les facteurs de forme $f_{B\pi}^+(q^2)$ et $f_{B\pi}^0(q^2)$ sont définis à partir de la paramétrisation habituelle (déjà présentée auparavant, cf. eq. (III.1.32)) de l'élément de matrice du courant vectoriel entre le méson B et le pion.

$$\begin{aligned} \langle \pi^-(k) | \bar{b} \gamma^\mu u | B^0(p) \rangle &= f_{B\pi}^+(q^2) \left[(p+k)^\mu - \frac{m_B^2 - m_\pi^2}{q^2} q^\mu \right] \\ &\quad + f_{B\pi}^0(q^2) \frac{m_B^2 - m_\pi^2}{q^2} q^\mu, \end{aligned} \quad (\text{III.2.3})$$

Le besoin d'éliminer les résidus des pôles non-physiques en q^2 impose la contrainte:

$$f_{B\pi}^0(0) = f_{B\pi}^+(0). \quad (\text{III.2.4})$$

Le cas $B \rightarrow \pi$ semble plus simple du point de vue théorique que le cas $B \rightarrow \rho$ où trois facteurs de forme sont nécessaires pour écrire la désintégration, puisque seul $f_{B\pi}^+(q^2)$ entre en jeu dans la largeur de désintégration comme on le voit sur l'eq. (III.2.2). Cette équation montre cependant aussi la difficulté à laquelle on est confronté lorsqu'on cherche à déterminer $|V_{ub}|$: il faut être capable d'intégrer $f_{B\pi}^+(q^2)$, *i.e.* il faut connaître sa dépendance en q^2 .

Les facteurs de forme sont des fonctions analytiques qui vérifient des relations de dispersion [148]. Les expressions de $f_{B\pi}^+(q^2)$ et $f_{B\pi}^0(q^2)$ s'écrivent,

$$f_{B\pi}^+(q^2) = \frac{1}{2m_{B^*}} \frac{f_{B^*} g_{B^* B\pi}}{1 - \frac{q^2}{m_{B^*}^2}} + \frac{1}{\pi} \int_{(m_\pi + m_B)^2}^{\infty} dt \frac{\text{Im} f_{B\pi}^+}{t - q^2 - i\varepsilon}, \quad (\text{III.2.5})$$

$$f_{B\pi}^0(q^2) = \frac{1}{\pi} \int_{(m_\pi + m_B)^2}^{\infty} dt \frac{\text{Im} f_{B\pi}^0(t)}{t - q^2 - i\epsilon} . \quad (\text{III.2.6})$$

Dans ces expressions, l'intégrale sur la partie imaginaire des facteurs de forme contient toutes les contributions des excitations et du continuum du méson B au delà du seuil de production de la paire $B\pi$, *i.e.* $t_0 = (m_\pi + m_B)^2$. Le continuum est la zone d'impulsion où les états intermédiaires avec un nombre élevé de particules brise l'approximation des états liés (*i.e.* les résonances).

Le premier terme dans l'expression de $f_{B\pi}^+(q^2)$ (eq. (III.2.5)) contient le pôle du méson vecteur B^* . Le résidu de ce pôle dépend de la constante de désintégration \mathcal{B}_{B^*} et de la constante de couplage $g_{B^*B\pi}$. Ce couplage contient toute l'information non-perturbative sur l'interaction des mésons B^* et B au pion. Dans le chapitre précédent 2.3 nous avons vu que $g_{B^*B\pi}$ est reliée, *via* une relation analogue à l'eq. (II.2.34) dans le secteur du méson B , à la constante de couplage \hat{g} de la théorie effective chirale des mésons lourds:

$$g_{B^*B\pi} = \frac{2\sqrt{m_B m_{B^*}}}{f_\pi} \hat{g}_b, \quad (\text{III.2.7})$$

où l'indice « b » dans \hat{g} indique que l'on est dans le secteur du quark- b . En effet, le couplage \hat{g} est défini à la limite statique ($m_b \rightarrow \infty$) et peut donc recevoir des corrections en $1/m_b$ lorsqu'on se s'éloigne de cette limite.

La figure 2.1 représente le mécanisme de la désintégration $B \rightarrow \pi$. On retrouve les éléments qui composent le facteur de forme $f_{B\pi}^+(q^2)$ dans l'eq. (III.2.5): le vertex $\mathcal{B}_{B^*B\pi}$, le propagateur du méson B^* et son couplage au boson W décrite par \mathcal{F}_{B^*} . Le deuxième terme (avec l'intégrale sur la partie imaginaire de $\mathcal{F}_{B\pi}$) correspond aux cas où l'on remplace le méson B^* par les excitations plus élevées. Rappelons les échelles d'énergie en jeu dans ce problème. Les masses des mésons pseudoscalaire et vecteur étant $m_B = 5.279$ GeV et $m_{B^*} = 5.325$ GeV la région physique en q^2 est telle que $0 < q^2 < (m_B - m_\pi)^2 = 26.4$ GeV². Le pôle du B^* est situé à $q^2 = m_{B^*}^2 = 28.4$ GeV² et le seuil du continuum à $t_0 = (m_\pi + m_B)^2 = 29.4$ GeV².

Ces valeurs sont d'une part le reflet du fait que les désintégrations $B \rightarrow \pi$ font intervenir des mésons de masses très différentes ($m_{B^*}/m_\pi \sim 40$) et d'autre part du fait qu'à la limite des masses lourdes les mésons pseudoscalaires et vectoriels sont pratiquement dégénérés. Ces particularités ont plusieurs conséquences :

- La région physique en q^2 est très étendue.
- La différence de masse $m_{B^*} - m_B = 46$ MeV est insuffisante pour qu'on puisse observer la désintégration $B^* \rightarrow B + \pi$ ce qui interdit une mesure expérimentale du couplage $g_{B^*B\pi}$.

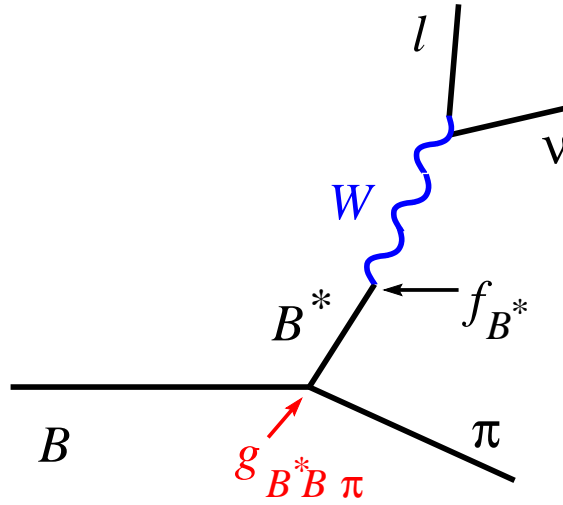


FIG. 2.1 – Représentation schématique de la désintégration $B \rightarrow \pi \ell \nu_\ell$

- Le pôle du B^* est très proche du seuil du continuum des états.

Le premier point est ce qui rend difficile l'étude de la dépendance en q^2 des facteurs de forme. Le deuxième implique que les déterminations du couplage $g_{B^*B\pi}$ peuvent uniquement provenir de calculs de QCD non-perturbative. Le troisième point fait que des effets du continuum peuvent venir s'ajouter à ceux dus au pôle du B^* et contribuer à $f_{B\pi}^+(q^2)$ de façon considérable dans la région des q^2 petits (loin du pôle). La présence de ces effets empêche de faire l'approximation du simple pôle pour $f_{B\pi}^+(q^2)$ (comme pourraient le suggérer des considérations de dominance vectorielle). De plus, se limiter à un simple pôle pour $f_{B\pi}^+(q^2)$ ne permet pas de reproduire la loi de scaling en m_B attendue pour $q^2 \sim 0$ (cf. eq. (III.2.12)), ainsi qu'on le verra dans la suite.

2.2 Les lois d'échelle

En l'absence d'une description théorique complète de la dépendance en q^2 de $f_{B\pi}^+(q^2)$, on peut commencer par exploiter les symétries de la HQET et de la LEET pour la modéliser. Cette modélisation peut alors servir de guide pour l'extrapolation de résultats des réseaux aux zones de grand recul ($q^2 \sim 0$) où des simulations ne peuvent pas encore être réalisées (je reviendrai sur ce point par la suite).

A la limite de recul nul, *i.e.* lorsque le transfert $v \cdot k$ est constant et faible, la HQET permet d'exprimer les facteurs de forme $f_{B\pi}^+(q^2)$ et $f_{B\pi}^0(q^2)$ en fonction de deux facteurs

de forme $f_1(v \cdot k)$ et $f_2(v \cdot k)$ qui tiennent compte des simplifications dues à la symétrie des quarks lourd [145]. Les expressions de $f_{B\pi}^+(q^2)$ et $f_{B\pi}^0(q^2)$ en fonction de $f_1(v \cdot k)$ et de $f_2(v \cdot k)$ sont données par:

$$f_{B\pi}^+(q^2) = \sqrt{m_B} \left\{ \frac{f_2(v \cdot k)}{v \cdot k} + \frac{f_1(v \cdot k)}{m_B} \right\}, \quad (\text{III.2.8})$$

$$f_{B\pi}^0(q^2) = \frac{2}{\sqrt{m_B}} \frac{m_B^2}{m_B^2 - m_\pi^2} \left\{ [f_1(v \cdot k) + f_2(v \cdot k)] - \frac{v \cdot k}{m_B} \left[f_1(v \cdot k) + \frac{m_\pi^2}{(v \cdot k)^2} f_2(v \cdot k) \right] \right\}. \quad (\text{III.2.9})$$

Les simplifications qu'entraîne la HQET pour $f_1(v \cdot k)$ et de $f_2(v \cdot k)$ permettent d'établir des lois d'échelle sur $f_{B\pi}^+(q^2)$ et $f_{B\pi}^0(q^2)$. Il découle immédiatement des eqs. (III.2.8) et (III.2.9) qu'à la limite de masse lourde la dépendance en m_B des facteurs de forme est du type:

$$f_{B\pi}^+(q^2) \sim \sqrt{m_B}, \quad (\text{III.2.10})$$

$$f_{B\pi}^0(q^2) \sim \frac{1}{\sqrt{m_B}}. \quad (\text{III.2.11})$$

Cette expression est valable à l'ordre dominant en $1/m_B$ et pour $v \cdot k$ constant (*i.e.* près du recul nul, $q^2 \sim q_{\text{max}}^2$). Des corrections logarithmiques provenant de la renormalisation du courant doivent aussi être prises en compte.

Dans la limite de grande impulsion du pion (*i.e.* $q^2 \sim 0$), les symétries de la LEET permettent d'obtenir une autre loi d'échelle pour $f_{B\pi}^+(q^2)$ et $f_{B\pi}^0(q^2)$ [51]:

$$f_{B\pi}^+(q^2 \simeq 0) = f_{B\pi}^0(q^2 \simeq 0) \sim m_B^{-3/2}. \quad (\text{III.2.12})$$

Notons que cette loi d'échelle a d'abord été établie à partir des règles de somme de QCD sur le cône de lumière [159].

2.3 Modélisation de $f_{B\pi}^+(q^2)$

L'étape suivante de l'étude de $f_{B\pi}^+(q^2)$ consiste à combiner les informations provenant des lois d'échelle avec une modélisation en termes de pôles. Nous avons déjà dit qu'un simple pôle n'est pas suffisant pour reproduire les lois d'échelle. Pour inclure, les effets du continuum on peut alors penser à considérer l'approximation dipolaire [146, 147]:

$$f_{B\pi}^+(q^2) = \frac{f(0)}{(1 - q^2/m_{1-}^2)^2}, \quad (\text{III.2.13})$$

avec $m_{1^-} > m_{B^*}$. Le principal défaut de cette approche est de ne pas exploiter la présence du pôle physique du m_{B^*} .

Becirevic et Kaidalov (BK) [149] ont donc proposé une paramétrisation évitant la forme dipolaire et contenant les informations sur le pôle du m_{B^*} et satisfaisant aux lois d'échelle :

$$f_{B\pi}^+(q^2) = \frac{c_B (1 - \alpha_B)}{\left(1 - \frac{q^2}{m_{B^*}^2}\right) \left(1 - \alpha_B \frac{q^2}{m_{B^*}^2}\right)}, \quad (\text{III.2.14})$$

$$f_{B\pi}^0(q^2) = \frac{c_B (1 - \alpha_B)}{1 - \frac{1}{\beta_B} \frac{q^2}{m_{B^*}^2}}. \quad (\text{III.2.15})$$

Chaque facteur de forme dépend de deux paramètres mais la contrainte $\mathcal{F}_{B\pi}^\dagger(0) = f_{B\pi}^0(0)$ réduit le nombre total de paramètres à trois: α_B , β_B et c_B . L'intérêt de cette modélisation est que les paramètres conservent une certaine signification physique: α_B et β_B permettent de prendre en compte la contribution du continuum en introduisant un pôle effectif. Le paramètre c_B peut être contraint par la détermination du couplage $g_{B^*B\pi}$. En effet, à la limite $q^2 = 0$, le facteur de forme s'écrit d'après l'éq. (III.2.14)

$$f_{B\pi}^+(0) = c_B (1 - \alpha_B), \quad (\text{III.2.16})$$

et nous avons vu plus haut que $g_{B^*B\pi}$ était reliée au résidu du pôle du B^* (eq. (III.2.5)).

Il est intéressant de noter qu'on peut prédire qualitativement le comportement des coefficients α_B et c_B en fonction de la masse lourde: à la limite statique, les mésons lourds-légers sont dégénérés; il en résulte que l'effet du pôle effectif introduit par le coefficient α_B doit disparaître pour que seul le pôle du B^* ne subsiste.

Il a été montré [145] qu'à la limite statique des quarks lourds et à la limite chirale des quarks légers l'expression du facteur de forme $\mathcal{F}_{B\pi}^\dagger(q^2)$ ne contient plus que la contribution du pôle du B^* (lorsque le pion est mou):

$$\lim_{q^2 \rightarrow m_B^2} f_{B\pi}^+(q^2) = \frac{1}{2m_{B^*}} \frac{f_{B^*} g_{B^*B\pi}}{1 - \frac{q^2}{m_{B^*}^2}} = \frac{f_B}{f_\pi} \frac{\hat{g}}{1 - \frac{q^2}{m_{B^*}^2}}, \quad (\text{III.2.17})$$

$$\lim_{q^2 \rightarrow m_B^2} f_{B\pi}^0(q^2) = \frac{f_B}{f_\pi}. \quad (\text{III.2.18})$$

Ces relations sont valables à des corrections d'ordre $1/m_b^2$ près.

Des eqs. (III.2.17) et (III.2.14) il ressort que si l'on fait tendre la masse lourde vers l'infini

$$\lim_{m_b \rightarrow \infty} \alpha_B = 0 \quad \text{et} \quad (\text{III.2.19})$$

$$\lim_{m_b \rightarrow \infty} c_B = g_{B^*B\pi} \frac{f_{B^*}}{f_\pi}. \quad (\text{III.2.20})$$

La paramétrisation BK s'est montrée très utile pour extrapoler les résultats des réseaux vers la limite de recul maximal du pion où il est encore impossible d'effectuer des simulations. En particulier, elle permet de constater un bon accord entre les résultats des réseaux et ceux des règles de somme de QCD.

Récemment une autre paramétrisation a été proposée [150]. L'idée de cette nouvelle paramétrisation, qui présente par rapport à l'approche de BK l'inconvénient de faire appel à un paramètre supplémentaire, est de découper le domaine de variation de q^2 et d'utiliser des formes fonctionnelles différentes dans chaque région. Dans le cadre des règles de somme, elle obtient des résultats compatibles avec ceux de la paramétrisation BK.

D'autres paramétrisations des facteurs de forme font appel à des modèles de quarks [151, 152] ou à des approches combinant les relations de dispersion avec des données provenant des règles de somme de QCD (sur le cône de lumière) ou des réseaux [153, 154]

Avant d'aborder la détermination de $f_{B\pi}^+(q^2)$ à partir des règles de somme, je vais présenter les résultats de la première mesure expérimentale de $g_{B\pi}$. Ce résultat permet d'avoir un repère pour estimer le couplage $g_{B^*B\pi}$ qui apparaît dans l'expression de $f_{B\pi}^+(q^2)$. Rappelons cependant qu'une détermination non-perturbative sur réseau est nécessaire pour obtenir $g_{B^*B\pi}$ puisque la désintégration $B \rightarrow B\pi$ est interdite par manque d'espace de phase.

2.4 La mesure expérimentale de $g_{D^*D\pi}$ par CLEO

Précisons pour commencer l'intérêt qu'a cette expérience dans la physique des saveurs lourdes et plus particulièrement son rôle important dans la validation des déterminations des grandeurs non-perturbatives provenant des calculs sur réseau. En s'intéressant à la physique du quark charmé [75] CLEO-*c* va permettre de calibrer les mesures obtenues à partir des calculs de la QCD sur réseau à l'aide de masses simulées dans la région du charme. En effet, s'il est difficile avec nos moyens techniques actuels de simuler directement des masses légères de quarks (le *u* et le *d*) ou des masses lourdes (le *b*) il est en revanche possible de travailler directement avec les quarks *s* et *c*. En comparant les mesures issues des réseaux et les déterminations expérimentales il sera possible de contraindre les erreurs systématiques des simulations de la QCD. Une fois ces biais mieux compris on aura une plus grande assurance dans les prédictions théoriques d'autres éléments de matrices hadroniques. Ceci doit être aussi compris comme un point de repère pour des mesures similaires dans le secteur du *B* : D'une part, des mesures précises au niveau du quark-*c* peuvent déjà nous permettre de mieux contraindre le secteur du *b* via des outils théoriques comme ceux que nous avons décrit précédemment. D'autre part, il sera possible de mieux isoler les dif-

difficultés des déterminations à venir avec la prochaine génération de machines de calcul (où le quark- b devra pouvoir être simulé directement). La détermination sur réseau de \hat{g} dans le secteur du quark- c que nous avons entreprise à Orsay [72] suit en effet cette démarche puisque notre résultat peut être directement comparé à la mesure expérimentale (à quelques approximations près qui doivent être incluses dans les incertitudes systématiques).

L'expérience CLEO à Cornell a mesuré récemment la largeur de désintégration du \bar{D} et en a extrait la valeur de \hat{g}_c [73]. La largeur totale de la désintégration du \bar{D} est la somme de trois contributions: d'une part, les désintégrations hadroniques $\bar{D} \rightarrow D^0\pi^+$ et $D^{*+} \rightarrow D^+\pi^0$ et d'autre part, la désintégration électromagnétique $\bar{D} \rightarrow D^+\gamma$. Cette dernière a un taux d'embranchement très faible (cf. tableau 2.1) et sa contribution peut être négligée dans l'expression de la largeur de désintégration totale.

En combinant les expressions (cf. section II.2.3) des largeurs de désintégration du \bar{D} des eqs. (II.2.33) avec la définition du lien entre \hat{g} et $g_{D^*D\pi}$ donnée par l'eq. (II.2.34), on peut retrouver le relation d'isospin entre les couplages $g_{D^* \rightarrow D^0\pi^+}$ et $g_{D^* \rightarrow D^+\pi^0}$:

$$g_{D^*D\pi} = g_{D^* \rightarrow D^0\pi^+} = -\sqrt{2}g_{D^* \rightarrow D^+\pi^0}. \quad (\text{III.2.21})$$

En réécrivant maintenant la largeur de désintégration à partir des eqs. (II.2.33) on obtient:

$$\Gamma(D^{*+}) = \Gamma(D^0\pi^+) + \Gamma(D^+\pi^0) + \Gamma(D^+\gamma), \quad (\text{III.2.22})$$

$$\approx \Gamma(D^0\pi^+) + \Gamma(D^+\pi^0), \quad (\text{III.2.23})$$

$$= \frac{2\hat{g}_c^2}{12\pi f_\pi^2} |\vec{p}_{\pi^+}|^3 + \frac{\hat{g}_c^2}{12\pi f_\pi^2} |\vec{p}_{\pi^0}|^3, \quad (\text{III.2.24})$$

$$= \frac{g_{D^*D\pi}^2}{24\pi(m_{D^*+}m_D)} |\vec{p}_{\pi^+}|^3 + \frac{g_{D^*D\pi}^2}{48\pi(m_{D^*+}m_D)} |\vec{p}_{\pi^0}|^3, \quad (\text{III.2.25})$$

$$= \frac{g_{D^* \rightarrow D^0\pi^+}^2}{24\pi(m_{D^*+}m_D)} |\vec{p}_{\pi^+}|^3 + \frac{g_{D^* \rightarrow D^+\pi^0}^2}{24\pi(m_{D^*+}m_D)} |\vec{p}_{\pi^0}|^3. \quad (\text{III.2.26})$$

La mesure expérimentale de $\Gamma(D^+)$ permet donc d'obtenir la valeur $g_{D^*D\pi}$ et d'en déduire une estimation de \hat{g} dans le secteur du charme. Le couplage $g_{D^*D\pi}$ est interprété comme l'amplitude d'émission d'un pion mou à partir d'un méson \bar{D}

CLEO utilise la désintégration $\bar{D} \rightarrow D^0\pi^+$ pour déterminer $\Gamma(D^+)$. Il s'agit d'une détermination délicate puisque le pion émergent de la désintégration a une très faible impulsion, $|p_\pi| \sim 40$ MeV (ce qui implique aussi que la durée de vie du \bar{D} est très longue). Cette mesure suppose une connaissance très précise du système de reconstitution des traces de la chaîne de désintégration $\bar{D} \rightarrow \pi_{\text{mou}}^+ D^0$ puis $D^0 \rightarrow K^-\pi^+$. Par ailleurs, la résolution expérimentale (typiquement 150 keV) est légèrement supérieure à la valeur trouvée pour la largeur de désintégration $\Gamma(\bar{D})$, (cf. eq. (III.2.27)), et on ne dispose pas

Mode de désintégration	Rapport d'embranchement
$D^{*+} \rightarrow D^0 \pi^+$	67.7 ± 0.5
$D^{*+} \rightarrow D^+ \pi^0$	30.7 ± 0.5
$D^{*+} \rightarrow D^+ \gamma$	1.6 ± 0.4
$D^{*0} \rightarrow D^0 \pi^0$	61.9 ± 2.9
$D^{*0} \rightarrow D^0 \gamma$	38.1 ± 2.9

TAB. 2.1 – *Rapports de branchement du méson D^* (en %) [45]*

d'un mode de désintégration physique qui puisse aider à la calibration. Il faut donc faire appel et suivre de près les résultats obtenus à travers les simulations du détecteur pour pouvoir valider les mesures. Les déterminations faites par trois méthodes différentes, chacune utilisant des particularités cinématiques de la désintégration ou une connaissance plus approfondie de certaines parties du détecteur, permettent d'obtenir des résultats compatibles, les erreurs systématiques étant assez grandes ($\sim 20\%$) et comparables dans les trois cas.

Le résultat obtenu par CLEO pour la mesure de $\Gamma(D^+)$ est:

$$\Gamma(D^{*+}) = 96 \pm 4 \pm 22 \text{ keV}. \quad (\text{III.2.27})$$

Il s'agit de la première détermination de cette grandeur qui auparavant n'était connue que par une borne supérieure $\Gamma(D^+) < 131 \text{ keV}$, [74].

On peut maintenant utiliser ce résultat pour obtenir la valeur du couplage $g_{D^*D\pi}$:

$$g_{D^* \rightarrow D\pi} = 17.9 \pm 0.3 \pm 1.9, \quad (\text{III.2.28})$$

et via l'éq. (II.2.34), le couplage \hat{g} :

$$\hat{g}_c = 0.61 \pm 0.01 \pm 0.07. \quad (\text{III.2.29})$$

Cette mesure est importante puisqu'elle a permis d'avoir une référence par rapport au grand nombre d'estimations théoriques du couplage \hat{g} qui avaient été produites, et qui continuent à l'être. Nous ne discuterons cependant ce point que plus tard. Il serait important qu'une autre expérience vienne confirmer cette délicate mesure expérimentale. Ceci devrait être réalisable à CLEO-*c* et dans les usines à *B* [75].

Revenons maintenant à l'étude de $\mathcal{B}_{\pi}^{\#}$ et plus particulièrement à la façon de l'aborder à travers l'outil de calcul non-perturbatif que constituent les règles de somme de la QCD.

2.5 Les règles de somme de la QCD

Les règles de somme de la QCD (QCDSR) sont un outil permettant de traiter de manière systématique les effets non-perturbatifs liés aux calculs d'éléments de matrice hadroniques [155, 156]. En principe, la procédure des QCDSR devrait permettre d'obtenir des résultats exacts: le degré de précision de la méthode peut-être arbitrairement amélioré. Cependant, en pratique, les calculs font intervenir plusieurs paramètres qu'il faut pouvoir ajuster. Les incertitudes sur les valeurs de ces paramètres font que les résultats typiques des QCDSR sont entachés d'une incertitude systématique de l'ordre de 20%. Il faut donc concevoir les QCDSR plus comme un guide que comme un outil de précision.

Les calculs des QCDSR ont permis d'estimer un nombre important de grandeurs physiques associées à des déterminations d'éléments de matrices hadroniques. En particulier, les règles de somme sur le cône de lumière (LCSR) [157]-[159], se sont intéressées aux transitions lourd à l'éger [161]-[163].

Dans les LCSR, le point d'écart du calcul du facteur de forme $f_{B\pi}^+$ est la fonction de corrélation $F_\mu(p, q)$ définie par:

$$F_\mu(p, q) = i \int dx e^{iq \cdot x} \langle \pi(p) | T \{ \bar{u}(x) \gamma_\mu b(x), m_b \bar{b}(0) i \gamma_5 d(0) \} | 0 \rangle, \quad (\text{III.2.30})$$

$$= F((p+q)^2, q^2) p_\mu + O(q_\mu). \quad (\text{III.2.31})$$

L'expression de $F_\mu(p, q)$ fait intervenir un élément de matrice composé du champ interpolant du méson B , $m_b \bar{b}(0) i \gamma_5 d(0)$, et du courant chargé de la transition, $\bar{u}(x) \gamma_\mu b(x)$, pris entre le vide et le pion. Dans cette expression p est la quadri-impulsion du pion et q est le transfert de quadri-impulsion porté par le courant lourd à l'éger.

L'étape suivante consiste à calculer $F_\mu(p, q)$ de deux façons, la première *via* les relations de dispersion et la deuxième par un calcul OPE. En identifiant les résultats de ces deux calculs il est possible d'extraire les grandeurs non-perturbatives en jeu dans la désintégration. L'utilisation des relations de dispersion permet de réécrire l'amplitude $F((p+q)^2, q^2)$ de la façon suivante:

$$F((p+q)^2, q^2) = \frac{2f_B f_{B\pi}^+(q^2) m_B^2}{m_B^2 - (p+q)^2} + \sum_{B_h} \frac{2f_{B_h} f_{B_h\pi}^+(q^2) m_{B_h}^2}{m_{B_h}^2 - (p+q)^2}. \quad (\text{III.2.32})$$

La contribution de l'état fondamental fait intervenir le facteur de forme $f_{B\pi}^+$ ainsi que la constante de désintégration f_B . La somme porte sur les états excités et le continuum des états du méson B .

L'amplitude $F((p+q)^2, q^2)$ peut aussi être déterminée par un développement en produit d'opérateurs près du cône de lumière. En effet dans la limite de grande virtualité pour le

transfert q^2 , *i.e.* $|(p+q)^2 - m_b^2| \gg \Lambda_{QCD}^2$ et $q^2 \ll m_b^2$, la fonction de corrélation (dans l'espace de configuration) est dominée par la dynamique des distances $\vec{x} \sim 0$ (voir aussi l'éq. (III.1.53)). On peut alors faire un développement en série qui, à chaque ordre, factorise les effets perturbatifs et non-perturbatifs. Ce développement se présente sous la forme:

$$F((p+q)^2, q^2) = \sum_{t=2,3,4} \int Du_i \sum_{k=0,1} \left(\frac{\alpha_s}{\pi}\right)^k T_k^{(t)}((p+q)^2, q^2, u_i, m_b, \mu) \varphi_\pi^{(t)}(u_i, \mu). \quad (\text{III.2.33})$$

La partie non-perturbative est composée de la fonction d'onde du pion sur le cône de lumière: $\varphi_\pi^{(t)}(u_i, \mu)$. L'amplitude de la transition $T_k^{(t)}$ ne dépend que des petites distances et est donc calculable par un développement perturbatif. Précisons les notations: μ est l'échelle de factorisation des effets perturbatifs et non-perturbatifs, l'indice t indique l'ordre du développement en *twist* et les u_i sont les fractions de l'impulsion longitudinale du pion portées par les quarks et les gluons qui le composent. Par exemple, au twist le plus bas, *i.e.* $t = 2$, les fractions d'impulsion du quark et de l'anti-quark formant le pion sont: $u_1 = u$ et $u_2 = 1 - u$. La mesure d'intégration est définie par: $Du_i \equiv du_1 du_2 \dots \delta(1 - \sum_i u_i)$. L'indice k indique l'ordre du développement perturbatif de l'amplitude «dure» $T_k^{(t)}$.

Je reviendrai dans le paragraphe suivant 2.6 sur l'étude la fonction d'onde $\varphi_\pi^{(t)}(u_i, \mu)$ du pion. Pour l'instant regardons comment se combinent les deux expressions $F((p+q)^2, q^2)$ dans les éqs. (III.2.32) et (III.2.33). Par des considérations de dualité, la somme sur les états excités B du méson B dans l'éq. (III.2.32) peut être remplacée par une intégrale sur la densité spectrale de partons, dépendant du seuil s_0^B . Le paramètre s_0^B doit être fixé par des critères de stabilité des signaux.

A partir des expressions de $F((p+q)^2, q^2)$, le facteur de forme $f_{B\pi}^+(q^2)$ calculé par les LCSR prend la forme (au premier ordre en α_s et au twist dominant):

$$f_{B\pi}^+(q^2) = \frac{1}{2m_B^2 f_B} e^{-\frac{m_B^2}{M^2}} m_b^2 f_\pi \int_\Delta^1 \frac{du}{u} e^{-\frac{m_b^2 - p^2(1-u)}{u M^2}} \varphi_\pi(u, \mu_b), \quad (\text{III.2.34})$$

où la borne inférieure d'intégration Δ dépend de s_0^B $\Delta = (m_b^2 - q^2)/(s_0^B - q^2)$. Le paramètre de Borel M^2 caractérise l'écart du quark- b par rapport à sa couche de masse. Pour obtenir l'éq. (III.2.34) il a fallu faire une transformation de Borel: ce procédé permet d'accorder un poids dominant à la partie inférieure du spectre physique. Le choix du paramètre M permet d'inclure une plus ou moins grande contribution de la zone inférieure du spectre. Cependant le choix de M est conditionné par le domaine de validité du développement OPE.

L'étape suivante est de fixer les inconnues ($\mu, M, \varphi_\pi, s_0^B, m_b$) afin d'obtenir des prédictions pour $f_{B\pi}^+(q^2)$. Dans ce calcul, la valeur de la constante de désintégration f_B

peut être obtenue par des règles de somme à l'ordre (α_s) [155, 165]. L'incertitude théorique de la méthode est déterminée par la variation de ces paramètres dans les domaines autorisés [161]. Parmi les approximations à contrôler de près dans les calculs de LCSR, il y a celles qui portent sur la détermination de la fonction d'onde du pion φ_π .

2.6 Quelques mots sur la fonction d'onde du pion sur le cône de lumière

Précisons un peu plus la nature de la fonction d'onde du pion sur le cône de lumière [166, 167]. Comme nous l'avons dit précédemment, il s'agit d'une fonction non-perturbative et indépendante du processus considérée. Dans le cas le plus général, cette fonction d'onde est un objet compliqué incluant à la fois l'ensemble des états de Fock ($q\bar{q}$, $q\bar{q}g$, $q\bar{q}gg$, \dots ; où q , \bar{q} et g évoquent la composition en quarks et en gluons du pion) et les contributions de tous les twists t . De plus, la fonction d'onde $\varphi_\pi^{(t)}(u_i, \mu)$ dépend de l'échelle μ . Le développement en «twists» repose sur la propriété que près du cône de lumière, $x=0$, il est possible de faire un développement OPE. Le «twist» t est alors défini comme étant égal à la dimension de l'opérateur de l'ordre considéré (en soustrayant le spin de l'opérateur) : $t = d - s$, où d est la dimension et s le spin de l'opérateur. Les opérateurs du développement OPE sont supprimés en puissances de $1/\mu$ lorsqu'on va vers les «twists» croissants.

Dans le cas des désintégrations $B \rightarrow \pi$, si on se place dans le repère du méson B , μ^2 peut être vu comme la grande impulsion longitudinale P_z^2 transférée au pion lors de la désintégration. Dans cette limite de grande impulsion, la fonction d'onde subit des simplifications importantes : d'une part les états de Fock $q\bar{q}$ dominent [168] et d'autre part, les contributions des twists supérieurs ($t \geq 3$) sont supprimées par des puissances de Λ_{QCD}^2/P_z^2 .

Cette propriété fait qu'en général on ne s'intéresse qu'à la contribution de plus bas twist. Dans ces conditions, il est utile de définir $\varphi_\pi(u, \mu)$, la fonction d'onde du pion (composée d'un quark et d'un anti-quark de valence), par une relation faisant intervenir la constante de désintégration du pion f_π

$$\varphi_\pi^{(2)}(u_1, u_2, \mu) = f_\pi \varphi_\pi(u, \mu). \quad (\text{III.2.35})$$

Ainsi $\varphi_\pi(u, \mu)$ est reliée à la probabilité de trouver, à l'intérieur d'un pion énergétique, un quark et un anti-quark portant respectivement les fractions d'impulsion u et $1 - u$.

A la limite d'une impulsion infiniment grande, la fonction d'onde asymptotique [166, 169] a une forme simple : $\varphi_\pi(u) = 6u(1 - u)$. C'est une parabole symétrique avec un

maximum à $u = 1/2$, c'est à dire lorsque le quark et l'anti-quark se déplacent dans la même direction avec des impulsions égales. Dans cette limite $\varphi_\pi(u)$ devient un objet perturbatif et toute la physique non-perturbative est décrite par \mathcal{F} dans l'éq. (III.2.35).

On peut prendre en compte les corrections logarithmiques d'ordre $(1/\log(\mu^2/\Lambda_{QCD}^2))$ à la forme asymptotique par un développement du type [167, 169, 170] :

$$\varphi_\pi(u, \mu) = 6u(1-u) \left(1 + \sum_n a_{2n}(\mu) C_{2n}^{3/2}(2u-1) \right). \quad (\text{III.2.36})$$

Dans cette expression, les termes $C_{2n}^{3/2}(x)$ sont les polynômes de Gegenbauer et les $a_{2n}(\mu)$ sont des coefficients non-perturbatifs logarithmiquement supprimés.

Les études de $\varphi_\pi(u)$ sont faites au moyen d'outils théoriques non-perturbatifs comme les QCDSR [172]-[177], les réseaux [178]-[181] ou des modèles d'instantons [182]-[184]. Les expériences CLEO [185] (à Cornell) et E791 [186] (à Fermilab) se sont aussi intéressées aux déterminations de $\varphi_\pi(u, \mu)$.

Les méthodes non-perturbatives sont centrées sur la détermination des moments \mathcal{M} de $\varphi_\pi(u)$:

$$\mathcal{M}_n = \int_0^1 du u^n \varphi_\pi(u). \quad (\text{III.2.37})$$

Il y a quelques années, Chernyak et Zhitnitsky (CZ) ont utilisé les règles de somme de QCD [172] et ont trouvé une expression de $\varphi_\pi(u)$ à partir des deux premiers moments. A l'échelle à laquelle elle a été obtenue, $\mu \sim 1$ GeV, ils observent déjà un écart considérable par rapport à la forme asymptotique:

$$\varphi_\pi^{\text{CZ}}(u) = 120u(1-u)(u-0.5)^2. \quad (\text{III.2.38})$$

Les figures. 2.2 montrent la dépendance des fonctions d'onde sur la fraction d'impulsion.

Les résultats expérimentaux de CLEO sur les facteurs de forme de transition méson-photon, $\gamma^*(Q^2)\gamma(q^2) \rightarrow \pi^0$, ont fait l'objet de plusieurs analyses afin d'extraire les valeurs des coefficients a_2 et a_4 du développement de l'éq. (III.2.36) [187, 188]. Les résultats les plus récents [171] semblent suggérer un écart de la forme de la fonction d'onde par rapport aux cas asymptotique et CZ (éq. (III.2.38)). On peut observer cet écart en comparant les corrélations entre les a_2 et a_4 issues des différentes études de \mathcal{F} (théoriques et expérimentales). La figure. 2.3 (gauche) montre ces résultats dans le plan (a_2, a_4) .

Des données plus précises des transitions $\gamma^* \rightarrow \pi^0$ doivent pouvoir être fournies dans le futur par les usines à B .

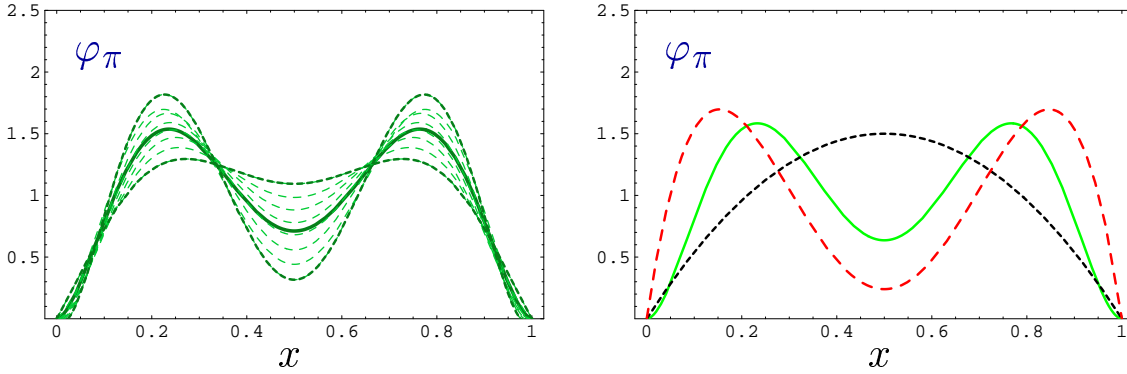


FIG. 2.2 – Dépendance dans la fraction d'impulsion $x \equiv u$ de la fonction d'onde du pion sur le cône de lumière φ_π . La figure de gauche montre l'effet de l'inclusion d'un nombre de plus en plus élevé de moments \mathcal{M}_n . La figure de droite compare l'allure de φ_π suivant les formes asymptotiques (ligne en pointillés), CZ (ligne segmentée) [172] et issue d'une détermination récente des règles de somme de QCD (ligne continue) [177].

L'expérience E789 a étudié la production de di-jets par dissociation diffractive à grande impulsion. Une image physique simple consiste à considérer ces deux jets comme des partons formant le pion. Cependant, l'interprétation des résultats de l'expérience E789 fait l'objet d'une controverse quant à leur validité dans l'étude de la fonction d'onde φ [188]-[191]. La figure. 2.3 (droite) montre une comparaison des résultats de l'expérience E789 par rapport à différentes prédictions théoriques.

Les simulations de QCD sur réseau se sont aussi intéressées aux calculs des moments de la fonction d'onde [178]. Cependant le nombre d'opérateurs augmente de façon importante lorsqu'on passe aux moments d'ordre supérieur, ce qui dans la pratique empêche de déterminer les moments d'ordre 3 ou plus.

C'est à cause de ces difficultés que nous avons entrepris à Orsay une étude directe (sans passer par les moments) de la fonction d'onde du pion sur le cône de lumière sur réseau. Notre étude [179] a établi une méthode systématique permettant d'extraire l'information contenue dans $\varphi_\pi(u)$ à partir d'un calcul d'éléments de matrices. Nous avons établi une expression permettant de relier les valeurs de $\varphi_\pi(u_i)$, où u_i est la fraction d'impulsion discrétisée sur le réseau, à un corrélateur (invariant de jauge) faisant intervenir l'élément de matrice du courant axial A_μ entre le pion et le vide. Nous avons aussi observé que le choix de ce corrélateur n'est pas unique et que pour préserver l'invariance de jauge, plusieurs types de propagateurs peuvent être utilisés (par exemple, une ligne de Wilson ou

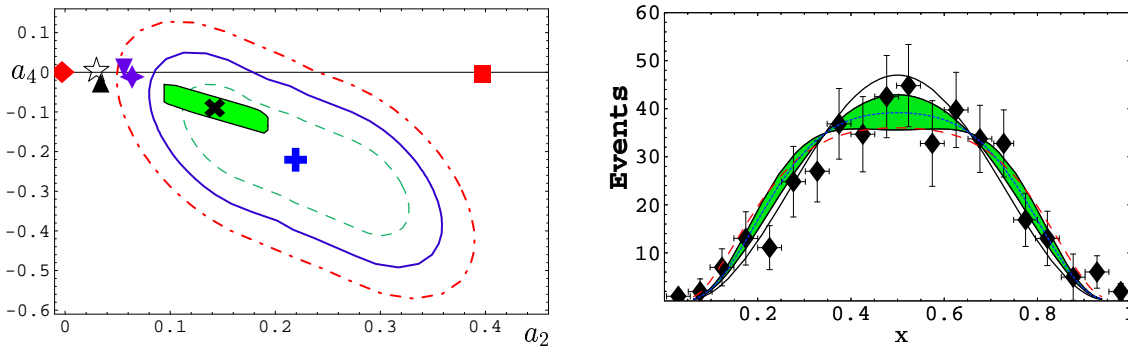


FIG. 2.3 – A gauche: comparaison des mesures de expérimentales CLEO (\blackplus) et théoriques pour les deux coefficients a_2 et a_4 de l'éq. (III.2.36). Les symboles (\blacklozenge) correspondent à la forme asymptotique de $\varphi_\pi(u)$ et (\blacksquare) à CZ (eq. (III.2.38)). Les autres symboles proviennent des calculs plus récents des règles de somme (\blackcross) [177], de modèles d'instantons (\bullet) [187]), (\blackstar) [182] et (\blacklozenge) [183]) et des réseaux (\blacktriangledown) [181]). Toutes les données correspondent à une échelle $\mu^2 \sim 6 \text{ GeV}^2$. A droite: comparaison des mesures de E791 (points) et des formes asymptotique (ligne continue), CZ [172] (ligne segmentée) et issue d'une détermination par les règles de somme de QCD (bande hachurée)[177].

un quark 'scalaire') une fois que le champ interpolant du pion a été insérée. Les conditions cinématiques pour l'obtention d'un signal physique ont aussi été établies. La difficulté pour appliquer en pratique cette méthode est que l'on doit introduire dans le réseau une hiérarchie contraignante d'échelles (ce problème est semblable à celui auquel on doit faire face lorsqu'on étudie des mésons lourds-légers). Les échelles d'énergie en jeu sont ici: la masse du pion m_π , l'échelle du confinement Λ_{QCD} et la grande impulsion longitudinale du pion P_z . De plus, pour pouvoir extraire l'information «partonique» contenue dans la fonction d'onde on doit transférer une grande impulsion transverse à un des quarks du pion. Les contraintes cinématiques obligent à chercher un signal dans des zones où les effets des artefacts des réseaux et des excitations radiales des états sont grandes. D'autre part, l'utilisation de grandes impulsions détériore la qualité des signaux. Des études plus approfondies devraient pouvoir dans le futur tester plus en détail la méthode qui a été proposée. Cependant, en appliquant cette méthode, nous avons observé des signaux qui pourraient être interprétés comme des effets partoniques sur les réseaux (jusqu'à présent les réseaux n'avaient pas permis d'extraire directement les propriétés partoniques à partir des hadrons

présents dans les simulations). Il serait utile de poursuivre ce travail pour identifier plus clairement l'efficacité pratique de cette nouvelle méthode qui, en principe, doit permettre d'étudier $\varphi(u)$ en contrôlant rigoureusement les approximations introduites.

Notons que des études sur des réseaux «transverses» ont été entreprises récemment [181]. Ces réseaux tirent profit du fait qu'aux grandes impulsions longitudinales, les effets non-perturbatifs à l'intérieur du pion sont «comprimés» dans le plan transverse à l'intérieur d'un disque de taille $\sim \Lambda_{QCD}$. On peut donc faire une étude de $\varphi(u)$ en s'intéressant prioritairement à la dynamique dans le plan transverse. Ceci peut être implémenté sur réseau. Ces études semblent suggérer des résultats proches de ceux de la limite asymptotique.

La fonction d'onde φ_π est une fonction universelle (indépendante du processus physique) qui apparaît dans un nombre important de processus hadroniques [192, 193]. Son étude est d'une importance majeure autant du point de vue théorique que phénoménologique. Notons par ailleurs que les fonctions d'onde sur le cône de lumière des mésons interviennent dans les approches de factorisation de QCD [194] et dans les formalismes de la LEET [50, 51, 53] et la SCET [54, 55]. Ceci a entraîné un regain d'intérêt pour leur étude. En particulier, il serait important d'arriver à établir une définition rigoureuse de la fonction d'onde du méson B (qui contrairement à celle du pion est à l'heure actuelle encore indéterminée du point de vue sa définition théorique). Pour cela, l'idéal serait de pouvoir utiliser une méthode non-perturbative comme celle des réseaux. Il reste cependant à construire une méthodologie fiable permettant d'estimer, au moins de façon préliminaire, ces fonctions d'onde des mésons lourds.

2.7 Retour sur $f_{B\pi}^+(q^2)$: résultats

Revenons sur l'étude du facteur de forme $f_{B\pi}^+(q^2)$. Commençons par donner les résultats des calculs des règles de somme de QCD sur le cône de lumière (LCSR). Les LCSR sont valables dans l'intervalle $0 < q^2 \leq 15 \text{ GeV}^2$ qui correspond au domaine de validité du développement sur le cône de lumière: $|(p+q)^2 - m_b^2| \gg \Lambda_{QCD}^2$ et $q^2 \ll m_b^2$. En particulier, la deuxième contrainte empêche de monter jusqu'à la région de faible recul, là où le pion est mou.

Les résultats des LCSR peuvent être retraduits en termes des paramétrisations du facteur de forme que l'on a présentée auparavant (section III.2.3). Lorsqu'on applique la paramétrisation BK de l'éq. (III.2.14) aux données des LCSR, on peut obtenir les valeurs des paramètres α_B et c_B [161]:

$$c_B \in [0.23; 0.33], \quad (\text{III.2.39})$$

$$\alpha_B \in [0.38; 0.39]. \quad (\text{III.2.40})$$

La valeur de c_B a été obtenue en utilisant une valeur de $g_{B^*B\pi}$ provenant d'un calcul des LCSR à partir d'une fonction de corrélation analogue à celle de l'éq. (III.2.33). Le résultat pour $g_{B^*B\pi}$ étant:

$$g_{B^*B\pi} = 22 \pm 7 \quad i.e. \quad \hat{g}_b = 0.22(9). \quad (\text{III.2.41})$$

Les règles de somme sur le cône de lumière prédisent typiquement des valeurs faibles pour \hat{g} , autour de $\hat{g} \sim 0.3$. Je reviendrai sur ce point dans le chapitre suivant lorsque je comparerai les différentes prédictions théoriques pour ce couplage.

Connaissant $f_{B\pi}^+(q^2)$ via la paramétrisation de l'éq. (III.2.14) il est maintenant possible de l'intégrer sur la région physique en q^2 . A partir de l'expression de la largeur de désintégration donnée par l'éq. (III.2.2), l'étude issue des LCSR obtient:

$$\Gamma(B^0 \rightarrow \pi^- \ell^+ \nu) = (7.3 \pm 2.5) |V_{ub}|^2 \text{ps}^{-1}, \quad (\text{III.2.42})$$

Passons maintenant à une présentation rapide des déterminations de $f_{B\pi}^+(q^2)$ sur réseau. Dans le chapitre suivant nous reviendrons un peu plus en détail sur la façon de traiter la physique des saveurs lourdes sur réseau. Nous aurons en particulier l'occasion de revenir sur les calculs du facteur de forme $f_{B\pi}^+(q^2)$ du fait de sa relation directe avec la constante de couplage $g_{B^*B\pi}$.

Les simulations sur réseau ne permettent pas d'atteindre la région $q^2 \sim 0$ où le pion de la désintégration $B \rightarrow \pi$ est énergétique. La raison en est que les grandes impulsions détériorent considérablement les signaux produits dans les simulations. Cependant, comme je l'ai déjà dit, cette limitation n'est pas de principe et dans le futur des réseaux de maille plus fine (*i.e.* avec cutoff a^{-1} plus grand) et des volumes adéquats devraient permettre de couvrir une zone plus grande en q^2 . Ceci permettrait d'avoir une estimation de $f_{B\pi}^+(q^2)$ issue de la QCD, sans passer par des modélisations telles que celles que j'ai présentées antérieurement.

La région de q^2 accessible actuellement par les simulations des réseaux est: $q^2 \in [13, 22] \text{ GeV}^2$. Pour extrapoler les résultats à la zone $q^2 \sim 0$ on doit faire appel à des paramétrisations. Les résultats des LCSR, obtenus aux faibles q^2 constituent un complément utile pour couvrir l'ensemble de la zone physique.

La figure 2.4 superpose les résultats pour $f_{B\pi}^+(q^2)$ et $f_{B\pi}^0(q^2)$ à partir des données de quatre groupes effectuant de simulations sur réseau (APE [113], UKQCD [196], FNAL [197], JLQCD [198]). L'accord entre ces séries de données est remarquable si l'on considère que chacun des groupes utilise une approche différente pour traiter le problème. Il est meilleur pour $f_{B\pi}^+(q^2)$ que pour $f_{B\pi}^0(q^2)$ et l'écart peut alors être estimé comme étant inférieur à 20%.

La figure 2.4 montre aussi l'extrapolation des données du réseau vers $q^2 \sim 0$ suivant la paramétrisation BK des éqs. (III.2.14) et (III.2.15). On peut observer que la forme fonctionnelle obtenue est en parfait accord avec les résultats des LCSR.

Il est important de noter que l'ensemble des simulations sur réseau des facteurs de forme de désintégration $B \rightarrow \pi \ell \nu$ ont été effectuées dans l'approximation «quenched». Les premiers résultats «unquenched» devraient voir le jour prochainement.

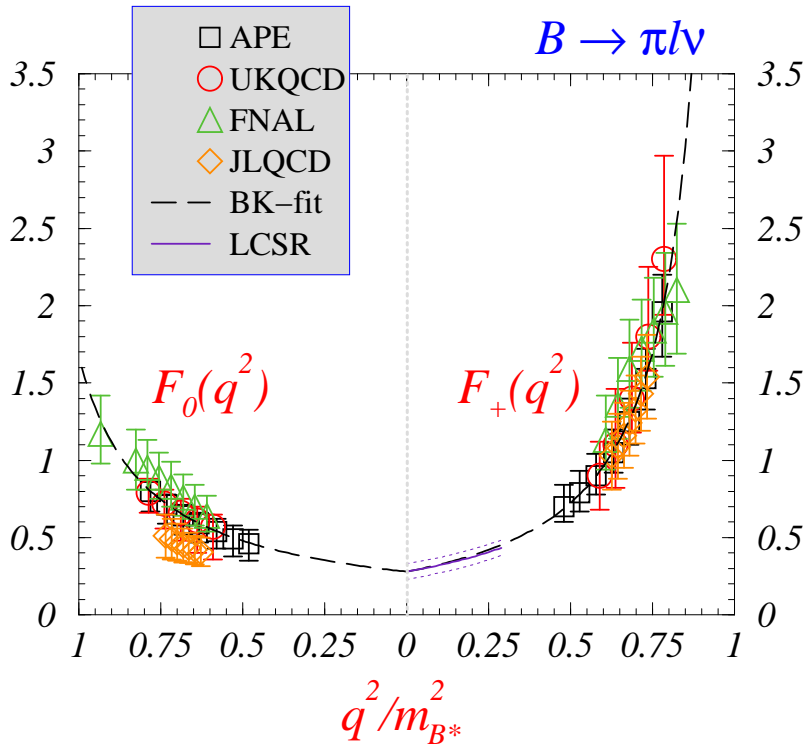


FIG. 2.4 – Bilan des résultats [199] des réseaux pour les facteurs de forme $f_{B\pi}^+(q^2)$ et $f_{B\pi}^0(q^2)$ d'après les résultats de des groupes APE [113], UKQCD [196], FNAL [197] et JLQCD [198]. Sont aussi représentées, l'extrapolation des données vers $q^2 = 0$ suivant la paramétrisation BK [149] (ligne en pointillés) et les résultats des LCSR [161] (ligne continue).

Les mesures expérimentales de la largeur de désintégration $B \rightarrow \pi \ell \nu$ de l'éq. (III.2.2) peuvent alors permettre d'obtenir une valeur de $|V_{ub}|$. Les données disponibles proviennent de CLEO [200, 201]. Les usines à B doivent pouvoir présenter des résultats pour les désintégrations $B \rightarrow \pi$ dans un futur proche. Les premiers résultats des mesures de $|V_{ub}|$

au moyen des désintégrations $B \rightarrow \rho$ ont été présentées par BABAR [202] et par BELLE (résultats préliminaires [203]). La difficulté de ces mesures est que les rapports de branchement des transitions lourd à léger sont très faibles (plus faibles par quatre ordres de grandeur que les désintégrations $B \rightarrow D$).

Les résultats récents de CLEO [201] combinant les données de réseaux (dans la région $16 \text{ GeV}^2 < q^2 < q_{\text{max}}^2$) et celles des LCSR ($0 < q^2 < 16 \text{ GeV}^2$) fournissent pour $|V_{ub}|$:

$$|V_{ub}| = (3.24 \pm 0.22 \pm 0.13_{-0.39}^{+0.55} \pm 0.09) \times 10^{-3} \quad (\text{III.2.43})$$

La figure. 2.5 montre les résultats récents pour la mesure de $|V_{ub}|$ via les désintégrations semi-leptoniques exclusives $B \rightarrow \pi(\rho)$. L'accord entre les différentes mesures est bon mais les erreurs (expérimentales et surtout théoriques) sont encore grandes. La moyenne de ces mesures est la suivante:

$$|V_{ub}|_{\text{excl}} = (3.38 \pm 0.24_{\text{exp}} \pm 0.54_{\text{theo}}^{+0.37}) \times 10^{-3}. \quad (\text{III.2.44})$$

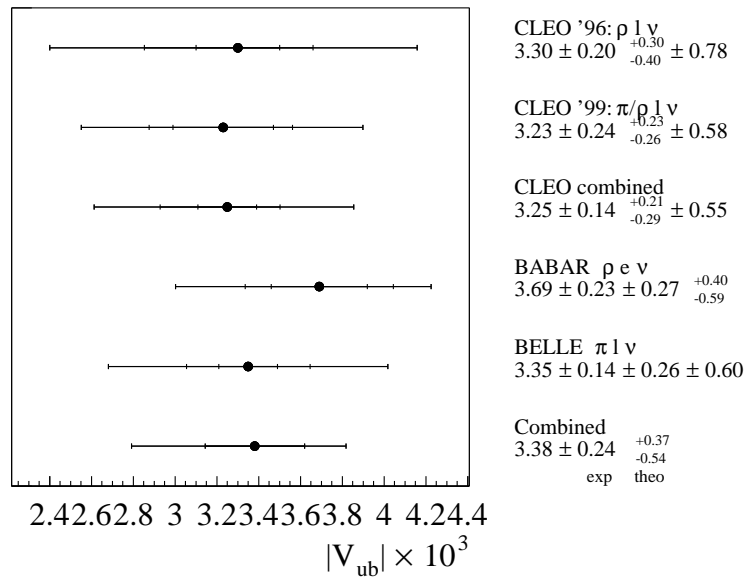


FIG. 2.5 – Bilan des mesures de $|V_{ub}|$ au moyen des désintégrations semi-leptoniques exclusives $B \rightarrow \pi(\rho)$ [76]. Les incertitudes sont typiquement de l'ordre de 15%.

Dans l'état actuel, les mesures inclusives et exclusives de $|V_{ub}|$ présentent encore des incertitudes grandes et du même ordre de grandeur (cf. tableau. 1.1). L'écart entre les

valeurs inclusives et exclusives devra aussi être réétudiée à la lumière des déterminations plus précises. Dans le cas inclusif, les analyses des données des transitions $b \rightarrow u$ doivent éliminer les effets dominants des transitions $b \rightarrow c$ par des coupures sur les variables cinématiques en jeu. Prochainement BELLE et BABAR doivent fournir des résultats plus complets pour les désintégrations $B \rightarrow \pi(\rho)$. Sur le réseau, les nouveautés proviendront par exemple des déterminations des facteurs de forme de la désintégrations $B \rightarrow \rho$ (notons qu'une première étude a été r  alis  e très récemment [204]). En rassemblant ces efforts on espère que les déterminations exclusives puissent aider à réduire l'incertitude sur $|V_{ub}|$.

Les calculs sur réseau interviennent de manière décisive dans les déterminations d'autres paramètres importants du Modèle Standard. Si l'on considère la troisième ligne de la matrice CKM et le mélange $\hat{B} - \overline{B}^0$, les résultats du réseau sont impliqu  es dans la mesure de $|V_{td}|$ et $|V_{ts}|$ via les déterminations de $\hat{f}_{B_d} \sqrt{\hat{B}_{B_d}}$ et $f_{B_s} \sqrt{\hat{B}_{B_s}}$. Dans le chapitre suivant je reviendrai sur la détermination de certaines de ces grandeurs (en particulier \hat{f}_{B_d} et f_{B_s}). Rappelons aussi que la détermination des masses des quarks est un autre versant important des calculs sur réseau immédiatement utile à la phénoménologie.

Avant de finir quelques mots sur \hat{B}_K En ce qui concerne la violation de CP dans le secteur du kaon (mélange $K^0 - \overline{K}^0$), un certain nombre de déterminations du paramètre \hat{B}_K ont été effectu  es sur réseau. Le paramètre relié au rapport des amplitudes des désintégrations $K \rightarrow \pi\pi$ et $K_S \rightarrow \pi\pi$ apparaît sous la forme d'une hyperbole dans le plan (ρ, η) du triangle d'unitarité (cf. figure.1.2). Le rapport $\hat{\epsilon}_K$ est proportionnel à \hat{B}_K . L'incertitude sur la valeur de \hat{B}_K est actuellement une des plus grandes limitations dans l'étude du triangle d'unitarité. Le paramètre \hat{B}_K est la version invariante par le groupe de renormalisation de l'élément de matrice \hat{B} :

$$\langle \overline{K}^0 | Q(\Delta S = 2) | K^0 \rangle \equiv \frac{8}{3} B_K(\mu) f_K^2 m_K^2, \quad (\text{III.2.45})$$

où l'opérateur $\Delta S = 2$ de mélange (   4 fermions) est défini par:

$$Q(\Delta S = 2) = (\bar{s}\gamma_\mu(1 - \gamma_5)d)(\bar{s}\gamma^\mu(1 - \gamma_5)d). \quad (\text{III.2.46})$$

Le calcul sur réseau de B_K suppose un bon contrôle des effets des masses légères; en particulier les fermions utilisés doivent avoir un comportement chirale am  lior  e si on veut obtenir des résultats crédibles. Des efforts considérables ont été réalisés à ce sujet. En particulier, récemment, des résultats utilisant des fermions «overlap» et «domain wall» (où la symétrie chirale est respect  e) ont été pr  sent  es. Le tableau 2.2 rassemble les déterminations les plus récentes de B_K sur les réseaux (les autres manières de déterminer ce paramètre font appel aux règles de somme, aux modèles de quarks ou aux développements

en $1/N_c$). Notons aussi que les déterminations actuelles sont obtenues dans l'approximation «quenched». Des estimations préliminaires indiquent que l'effet du «quenching» sont de l'ordre de 15% et donc comparables aux autres incertitudes systématiques qui affectent les mesures «quenched». L'approximation «quenched» semble cependant être assez bien contrôlée du point de vue du comportement chirale de B_K : il a la même forme dans les cas «quenched» et «unquenched» (je reviendrai sur ces problèmes dans le chapitre suivant).

Globalement, un assez bon accord entre les différentes mesures de B_K peut être remarquée dans les résultats du tableau 2.2. Il y a cependant plusieurs points à éclaircir et à améliorer: les effets des procédures de raccordement par la renormalisation (multiplicative), le contrôle des résultats «staggered» (où justement une renormalisation non-perturbative n'est pas possible et où l'on doit éliminer des saveurs non-physiques de quarks). Les fermions de Wilson n'ont pas un bon comportement chirale, il faut donc, soit éliminer le mélange (non-physique) des opérateurs brisant la chiralité, soit améliorer le comportement chirale des fermions par la «twisted-mass QCD» (qui assure l'élimination des configurations exceptionnelles lors de l'inversion de l'opérateur de Dirac). Les fermions «domain wall» permettent en principe de conserver la symétrie chirale à maille de réseau finie. Cependant, en pratique, un terme de masse résiduel ne garantit pas l'obtention d'une symétrie chirale exacte. Des études sont en cours pour obtenir une façon systématique de réduire l'effet de cette masse. Les résultats des fermions «domain wall» par deux stratégies (notées «I» et «II» dans le tableau 2.2) sont en désaccord. Les fermions «overlap» fournissent des résultats compatibles mais il reste encore à faire des études sur des réseaux de volume plus grand et de maille plus faible. Ceci doit pouvoir être réalisé avec l'arrivée prochaine de la nouvelle génération de machines.

Dans ce chapitre nous avons tenté de montrer la diversité des phénomènes physiques en cours d'exploration dans le secteur des saveurs lourdes de quarks. Cette diversité s'applique aussi aux approches théoriques impliquées dans la détermination des paramètres du Modèle Standard. Parmi les outils théoriques présentés, nous avons vu que les résultats de QCD sur réseau jouent un rôle déterminant dans un nombre important de résultats. Le chapitre suivant sera consacré aux applications des simulations de QCD sur réseau à la physique des mésons lourds-légers. Nous verrons quelles sont les difficultés des calculs dans ce secteur et nous présenterons différentes méthodes pour les surmonter tout en précisant les limitations auxquelles nous devons faire face à présent. Je présenterai finalement une application pratique de ces méthodes au calcul des couplages $g_{D^*D\pi}$ et $g_{B^*B\pi}$.

Groupe	Année	$B_K(2\text{GeV})$	Fermions	Renormalisation	a^{-1}
Staggered [205]	1997	0.62(2)(2)	Staggered	1-boucle	∞
JLQCD [206]	1997	0.63(4)	Staggered	1-boucle	∞
Lee <i>et al.</i> [207]	2003	0.59(2)	Staggered + HYP	1-boucle	2 GeV
Rome I [208]	2002	0.63(10)	Wilson	NP	∞
Rome II [208]	2002	0.70(12)	Wilson	NP	∞
Alpha [209]	2003	0.67(2)	«twisted-mass»	NP	2 GeV
CP-PACS I [210]	2001	0.58(1)	Domain Wall	1-boucle	1.8 GeV
CP-PACS I [210]	2001	0.57(1)	Domain Wall	1-boucle	2.8 GeV
CP-PACS II [211]	2003	0.70(3)	Domain Wall	1-boucle	∞
RBC [212]	2002	0.53(1)	Domain Wall	NP	1.9 GeV
RBC [213]	2003	0.55(1)	Domain Wall	NP	2.9 GeV
MILC [214]	2002	0.66(3)	Overlap	1-boucle	1.6 GeV
MILC [214]	2002	0.66(4)	Overlap	1-boucle	2.2 GeV
MILC [215]	2003	0.56(5)	Overlap + HYP	1-boucle	∞
Marseille [216]	2003	0.62(7)	Overlap	NP	2.1 GeV
Moyenne [111]	2003	0.63(4)	-	-	-

TAB. 2.2 – Détermination de B_K à partir des réseaux [76, 111]. Les types de fermions utilisés ainsi que le type de renormalisation (perturbative à une boucle ou non-perturbative) sont indiqués. Il est aussi précisé si le résultat est obtenu à maille finie ou à la limite du continu: $a^{-1} = \infty$.

Quatrième partie

La physique des mésons lourds-légers sur réseau

Chapitre 1

Présentation du problème

J'ai dit à plusieurs reprises dans les parties précédentes à quel point il était important, du point de vue de la phénoménologie, de disposer de déterminations *non-perturbatives, sûres et précises* des paramètres fondamentaux du Modèle Standard. Satisfaire cette exigence se heurte, dans le secteur des systèmes lourds-légers à des difficultés particulières dues à la coexistence de plusieurs échelles d'énergie très différentes les unes des autres. En effet il faut prendre en compte, en plus des masses lourdes des quarks b et c et des masses légères des quarks u , d et s , l'échelle typique des interactions fortes Λ_{QCD} . Nous avons vu en outre que dans les désintégrations lourd à léger, $B \rightarrow \pi$ par exemple, une grande gamme d'impulsions du pion émergent doit aussi pouvoir être considérée.

Contrairement à ce qui se passe dans le traitement perturbatif de la QCD où la présence de plusieurs échelles pose le problème essentiel de la validité des développements aux grandes distances, dans la QCD sur réseau il est possible, en principe, d'inclure simultanément toutes ces échelles. En pratique cependant, la puissance limitée des calculateurs disponibles empêche la mise en œuvre effective de ce programme.

Pour décrire les propriétés du méson B , il faudrait pouvoir inclure dans les simulations des masses *physiques* de quarks, avoir le bon comportement chirale et tenir compte des effets des quarks de la mer. Sur la base de notre connaissance actuelle des théories de jauge sur réseau et au vu des algorithmes dont nous disposons pour traiter numériquement la QCD, de telles simulations ne pourront malheureusement pas être traitées même avec la prochaine génération de machines. Il faut donc penser à des voies alternatives. La première, et la plus légitime, est de faire appel à des théories effectives de la QCD. Nous avons présenté dans les chapitres précédents plusieurs exemples de ces modèles et de la façon dont ils s'appliquent, souvent avec succès, à la phénoménologie du Modèle Standard.

En ce qui concerne le secteur des quarks lourds, les symétries de spin et de saveur sim-

plifient considérablement la dynamique du système. La théorie effective des quarks lourds fournit un développement en puissances de $1/m_Q$ des quantités physiques qui peut être amélioré systématiquement en incluant les effets des ordres supérieurs. Notons d'ailleurs que les simulations sur réseau ont été un des premiers outils théoriques à exploiter la symétrie des quarks lourds. Dans le secteur des quarks légers, la symétrie chirale permet aussi de traiter de façon rigoureuse les effets des masses faibles par rapport à Λ_{QCD} . Nous avons aussi introduit la théorie effective chirale des mésons lourds, qui combine symétries des quarks lourds et chirales dans un lagrangien dont la constante de couplage \hat{g} est le paramètre qui mesure la force des interactions entre les mésons lourds et les mésons légers.

Nous allons voir qu'outre les théories effectives, d'autres techniques exploitant les particularités des simulations sur réseau peuvent être utilisées (souvent en parallèle avec l'usage des théories effectives) pour traiter la physique des quarks lourds.

Expliquons brièvement pourquoi il est si difficile d'introduire des mésons B dans les simulations des réseaux. Pour que ces mésons puissent être «vus» sur le réseau (*i.e.* une grille de maille a occupant dans l'espace à quatre dimensions un volume $V = L^3 \times T$), il faut que les longueurs d'onde de Compton des quarks lourds et légers puissent être situées (conmodément) à l'intérieur du volume V et qu'elles soient bien plus grandes que la granularité a du réseau. Si l'on considère qu'il faut une dizaine d'unités de maille pour décrire la longueur d'onde de Compton la plus courte (celle du quark- b) et qu'il faut une longueur L du réseau à peu près cinq fois plus grande que la longueur d'onde de Compton des quarks u, d , et si en plus on impose la hiérarchie d'échelle physique $m_B/m_\pi \sim 40$, on voit qu'il faudrait utiliser des réseaux de côté $L \sim 1000$ pour pouvoir faire une simulation «réaliste». Ceci est plus d'un ordre de grandeur au dessus des capacités actuelles des machines. De plus, ceci implique l'utilisation de mailles fines et la simulation de masses de quarks très légères; or nous savons que les algorithmes de calcul des propagateurs de quarks ralentissent considérablement dans ces cas là. Finalement, l'utilisation des améliorations récentes que connaît le domaine des réseaux (l'implantation progressive des simulations «unquenched» et l'emploi de fermions préservant les bonnes propriétés chirales) est une étape supplémentaire que le secteur du méson B devra encore franchir.

Ainsi, une approche directe est actuellement hors de portée. L'idée est donc de procéder par analogie avec la QCD du continu où, pour pouvoir faire des prédictions, on fait appel à des théories effectives. Cette approche est tout à fait rigoureuse si l'on contrôle correctement les approximations. En fin de compte, les difficultés pour simuler les mésons B peuvent tirer profit des simplifications physiques qu'implique le fait de travailler avec des masses très lourdes et très faibles de quarks. Par ailleurs, dans le cas des quarks lourds, l'utilisation de la HQET sur réseau (à l'ordre dominant ou en incluant, comme on le sou-

haite dans le futur, des corrections en $1/m_Q$) réduit considérablement les temps de calcul. En effet, l'inversion de l'opérateur de Dirac (la partie la plus coûteuse du calcul numérique) peut être faite au préalable analytiquement. Dans ce cas, des résultats «unquenched» sont déjà disponibles (avec par exemple l'action NRQCD que je présenterai par la suite) et on peut même prévoir dans un futur proche des simulations avec des fermions chiraux.

1.1 Les quarks lourds sur réseau

Le méson D est un méson lourd et peut actuellement être simulé sur les réseaux sans faire appel à une théorie effective *i.e.* tel qu'il est dans la QCD. A ce sujet, il est important de préciser les termes: d'une part, une grande partie des simulations sont dans l'approximation «quenched» (et donc pas dans la QCD complète) et, d'autre part, la théorie effective chirale est utilisée pour atteindre les masses légères des quarks. Dans le secteur du D on dispose en plus de données expérimentales qui permettent de comparer les résultats issus des simulations (ce qu'on utilise pour calibrer les réseaux en vue des mesures dans le secteur du B). Je présenterai par la suite un exemple de ce dialogue entre théorie et expérience à travers les déterminations du couplage de $g_{B^*D\pi}$ [72].

Pour étudier les mésons B , *i.e.* le secteur qui est actuellement le plus activement étudié du point de vue phénoménologique, on dispose de trois méthodes:

La première consiste à faire des études là où les simulations de QCD sont possibles (autour du méson D), puis à extrapoler les données suivant les critères de symétrie des quarks lourds vers le secteur du B . Cette méthode peut être complétée par une étude à la limite statique: on transforme ainsi le passage au B d'une extrapolation en une interpolation.

La deuxième exploite les avantages des théories effectives: les simulations sont faites en remplaçant le lagrangien des quarks de la QCD par celui de la théorie effective. Ces théories sont la HQET et une approximation non-relativiste de la QCD. Nous verrons que deux approches exploitent ces idées: l'approche dite de «Fermilab» et la NRQCD (Non Relativistic QCD).

La troisième a été proposée récemment. Elle consiste à «profiter» des effets de volume fini pour extraire les effets du quark lourd par étapes successives.

Détaillons un peu ces différentes approches.

Combiner le secteur du D et la limite statique La validité d'une *extrapolation* vers le B des résultats obtenus par simulation directe dans le secteur du D peut être mise en doute. En effet, la masse du méson D est ~ 4 fois plus faible que celle du B et il faut donc faire une très grande extrapolation. En outre, les corrections à la symétrie des quarks lourds sont grandes à la masse du D . Pour contrôler les résultats on inclut des données obtenues à la limite statique ($m_Q \rightarrow \infty$) et on les combine avec les résultats fournis par QCD autour de la masse du D pour *interpoler* vers la région du B par un fit dicté par des considérations de symétrie des quarks lourds:

$$\Phi_b = \Phi_\infty + \frac{a}{m_B} + \frac{b}{m_B^2} + \dots \quad (\text{IV.1.1})$$

Pour que le raccordement de la limite statique [41, 217] au secteur du B respecte la symétrie des quarks lourds, il convient de prendre la limite du continu (à partir d'une série de données des réseaux à maille finie) *avant* de faire l'interpolation vers le B . Il a été observé qu'opérer dans l'ordre inverse peut introduire certains biais systématiques.

Cette approche est utilisée par les groupes de QCD sur réseau: APE, SPQR, ALPHA, UKQCD. C'est aussi cette méthode que le groupe d'Orsay a utilisé pour le calcul du couplage $g_{B^*B\pi}$ [218].

Dans la section IV.1.2, je reviendrai plus en détail sur cette procédure d'interpolation. Je vais donc ici uniquement traiter les principes généraux et les difficultés de la méthode en laissant pour la suite l'étude des solutions possibles.

Pour obtenir des prédictions physiques, il faut commencer par extraire des résultats exploitables à la limite $m_Q \rightarrow \infty$. Outre le problème pratique de l'identification d'un signal dans les simulations se pose ici la question théorique du raccordement des résultats de la HQET à ceux de la QCD. Le principe de cette connexion repose sur une renormalisation non-perturbative des quantités calculées sur réseau dans le cadre de la HQET (qui est une théorie des champs renormalisable).

Prenons le cas de la constante de désintégration f_B du méson B qui est définie à partir de l'élément de matrice du courant axial entre le méson B et le vide. Dans la limite $m_Q \rightarrow \infty$ le courant axial contient un champ de quark statique. Pour tirer la valeur physique de f_B des données des réseaux à la limite statique, il faut procéder en deux étapes: d'abord à partir de $f_B^{(0)\text{stat}}$ des réseaux («0» indique la quantité nue) obtenir la valeur de f_B^{stat} du continu, puis faire le lien entre la limite statique et la QCD. La première étape consiste à éliminer les divergences linéaires (en $1/a$) dues à la self-énergie du quark statique pour pouvoir prendre ensuite la limite du continu [219]. Cela nécessite de déterminer la constante de renormalisation $Z_A^{\text{stat}}(\mu)$ du courant axial statique qui dépend de l'échelle μ . Une procédure menant à la détermination non-perturbative de $Z_A^{\text{stat}}(\mu)$ a été développée

par le groupe Alpha au cours des dernières années [220, 221]. Elle repose sur un processus itératif où l'on détermine de proche en proche (*via* des rapports du type $Z_A^{\text{stat}}(2L)/Z_A^{\text{stat}}(L)$, connus sous le nom de «step scaling function») la dépendance de $Z_A^{\text{stat}}(\mu)$ sur l'échelle de renormalisation, $\mu = 1/L$. Pour accomplir l'étape suivante (établir la correspondance entre la valeur statique et celle de la QCD) il faut d'abord écrire $f_B^{\text{stat}}(\mu)$ sous une forme invariante sous le groupe de renormalisation (RGI) (*i.e.* éliminer la dépendance en μ) puis utiliser la théorie des perturbations (à une échelle d'énergie, μ , où effectivement le couplage est faible) pour relier les valeurs RGI au f_B physique. Cette procédure est à présent connue à des corrections $\mathcal{O}(1/m_B)$ près. Il est important de travailler dans le même schéma de renormalisation afin de combiner les coefficients de raccordement (courtes distances) et les éléments de matrice non-perturbatifs de la HQET de façon à éliminer la dépendance dans l'échelle μ non-physique. Notons finalement que les coefficients d'amélioration de l'action et du courant axial de la limite statique (éliminant les effets $\mathcal{O}(a)$) ont aussi été calculés.

Un des projets actuels est d'inclure les termes d'ordres supérieurs du développement en $1/m_B$ de la HQET. Pour cela, il faut d'abord vérifier que la limite statique est bien contrôlée (nous allons voir que des progrès ont été faits dans ce sens). Ensuite, il faut pouvoir incorporer un nombre croissant de paramètres dans les simulations. Ces paramètres doivent être calculés non-perturbativement car la limite du continu est mal définie si l'on utilise un développement perturbatif. Finalement, comme on vient de le voir, il faudrait aussi pousser la renormalisation aux ordres suivants en $\mathcal{O}(1/m_B)$. Ceci constitue un projet en cours qui permettrait (de même que l'on a pu implémenter la QCD sur des réseaux) de calculer non-perturbativement la HQET sur réseau.

La NRQCD Cette approche vise à vaincre les difficultés d'obtention de signaux stables dans la limite statique et à tenir compte des effets non-relativistes qui se manifestent dans les systèmes composés de deux quarks lourds.

Les mésons $c\bar{c}$ et $b\bar{b}$ sont du point de vue théorique relativement simples puisque les interactions de la QCD peuvent dans ce cas être écrites par des potentiels non-relativistes. Les résultats des simulations sur réseau de ces potentiels, complétées par des calculs perturbatifs aux courtes distances, sont en bon accord avec les mesures expérimentales du spectre de ces systèmes et constituent un des succès des réseaux. On remarquera d'ailleurs qu'il est devenu habituel de «calibrer» la valeur physique de la maille des réseaux à partir des données du potentiel $\bar{Q}Q$ entre deux quarks statiques: l'échelle de Sommerfeld $r \sim 0.5$ fm. Pour les systèmes lourds-légers, les potentiels non-relativistes ne peuvent en général pas être utilisés parce que les impulsions typiques du système ($k \sim \Lambda_{QCD}$) sont plus grandes

que la masse réduite \bar{m} :

$$\bar{m} \equiv \frac{m_{u,d} m_b}{m_{u,d} + m_b} \sim m_{u,d} < \Lambda_{QCD}. \quad (\text{IV.1.2})$$

Cependant cette configuration présente l'avantage qu'au moins le quark lourd peut être considéré comme non-relativiste et dans le cas limite, comme statique.

La NRQCD tire profit de cette situation en remplaçant la dynamique des quarks lourds par une action non-relativiste. Le lagrangien de la NRQCD [222] s'écrit donc en termes de quarks lourds (des spineurs de Pauli) de façon analogue à celui de la théorie de Schrödinger. On doit ensuite ajouter des termes (en principe une infinité) pour prendre en compte les corrections relativistes. Le paramètre du développement est la quadri-vitesse v du quark lourd. L'avantage de la NRQCD est que les propagateurs de quarks sont peu coûteux en temps de calcul. L'inversion de l'opérateur de Dirac est évitée du fait de l'impossibilité de créer à la fois des quarks et des anti-quarks. Ceci reste vrai dans le cas statique, qui est en fait la limite $v \rightarrow 0$ de la NRQCD. En réalité, il est plus rigoureux de dire que la NRQCD est un cas particulier de la HQET où l'on inclut une partie des corrections en $1/m_Q$, celles qui sont dues au terme cinétique du quark lourd ayant la quadri-vitesse v . Par contre, le deuxième terme (celui qui permet de tenir compte de l'interaction chromomagnétique entre le quark lourd et le nuage de gluons) est négligé (cf. eq. (II.1.12)).

Le principal défaut de la NRQCD est qu'elle n'est pas renormalisable: la limite du continu n'est pas définie (des divergences en puissance apparaissent lorsque $a \rightarrow 0$). Il faut donc travailler à maille finie et contrôler les erreurs dues à la discrétisation en rajoutant des termes dans le lagrangien. D'autre part, les coefficients de ces termes sont d'habitude calculés en perturbation, les effets non-perturbatifs doivent donc être contrôlés par un choix approprié de la maille: *i.e.* $a \sim 1/m_b$.

C'est surtout en raison de son économie de moyens et parce qu'elle permet d'atteindre des masses de quarks élevées que cette action est utilisée par quelques groupes de QCD sur réseau (JLQCD, CP-PACS, ...). Le fait que les simulations ne soient pas très coûteuses en moyens de calculs numériques a permis d'introduire les effets des fermions dynamiques dans les études les plus récentes. Nous présenterons quelques résultats par la suite. Il faut toutefois noter que la NRQCD ne peut pas être utilisée pour étudier le secteur du quark charmé parce que la théorie de perturbations utilisée pour fixer les coefficients converge mal à ces échelles.

L'approche de Fermilab Elle repose sur la constatation que les fermions de Wilson ont les mêmes symétries que les champs de quarks lourds de la QCD [223]. Ainsi, les corrélateurs obtenus dans une simulation à partir de ces fermions peuvent être transformés

dans des corrélateurs de la HQET, en analogie avec la construction des champs h de la HQET du continu (*cf.* section II.1.1). L'avantage est qu'on peut alors profiter des symétries de la HQET à maille finie. Les masses de quarks en unités réseau, $m_Q a$, ne doivent pas obligatoirement satisfaire la contrainte habituelle $m_Q a \ll 1$. Lorsque $m_Q a \ll 1$, on est dans le cas bien connu des réseaux avec des quarks relativistes et dans le cas, $m_Q a \gg 1$, on peut faire appel à la HQET. Il reste cependant à savoir ce qui arrive lorsque $m_Q a \sim 1$. Dans cette approche, comme dans la NRQCD, les coefficients du lagrangien sont calculés en perturbation, mais la limite du continu peut être atteinte. Les collaborations FNAL, MILC, JLQCD, CP-PACS utilisent cette approche dans leurs simulations du secteur du B . Des simulations avec des fermions dynamiques ont aussi été effectuées par cette approche.

L'approche de Tor Vergata Il s'agit d'une proposition récente [224, 225] qui ne fait pas appel à une théorie effective. L'argument central de la méthode est de considérer que les effets de volume fini viennent principalement des quarks légers parce que le quark lourd est insensible à la taille du réseau. On se place donc dans le cadre de la QCD et à travers un processus itératif (analogue à celui évoqué précédemment sous le nom de fonction de «step-scaling») on augmente le volume du réseau de façon à inclure de proche en proche les longueurs d'onde de quarks de plus en plus légers. La figure 1.1 illustre cette procédure.

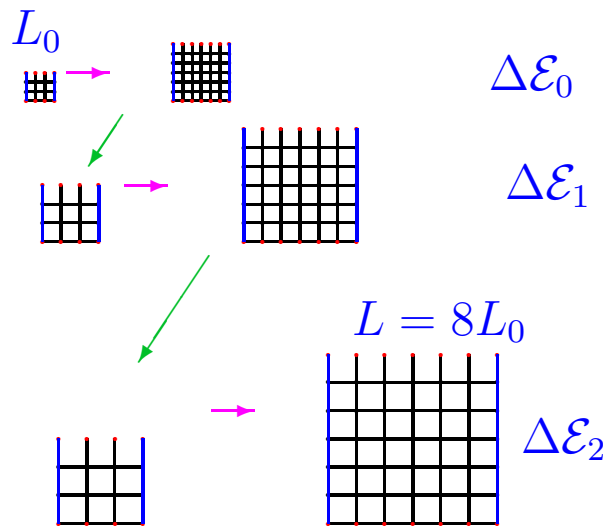


FIG. 1.1 – *Étapes du processus récursif.*

Pour prendre en compte les effets de volume fini à chaque étape il faut construire le rapport:

$$\sigma_f(m_Q, L) = \frac{f(m_Q, 2L)}{f(m_Q, L)}, \quad (\text{IV.1.3})$$

où f est la quantité physique recherchée, par exemple la constante de désintégration $\neq f(m_B, \infty)$. Si les effets de volume fini du quark lourd Q sont faibles, on peut alors extrapoler $\sigma_f(m_Q, L)$ en m_Q vers m_B .

Au départ on considère un réseau de maille faible sur lequel on peut « installer » un quark b . Ceci impose de commencer par un volume physique petit, de côté L_0 , où l'on s'attend à des effets de volume fini importants pour les quarks légers. On calcule sur ce réseau $f(m_B, L_0)$. Ensuite, on double le volume physique $L_1 = 2L_0$ et on calcule $f(m_Q, L_1)$, avec m_Q la masse de quark la plus lourde possible. On peut alors extrapoler $\sigma_f(m_Q, L_0)$ vers $m_Q \rightarrow m_B$. Ce processus est répété jusqu'à obtention d'un volume de côté L suffisamment grand pour qu'on puisse y inclure le quark léger. On construit alors $\hat{f} = f(m_B, \infty)$ de la manière suivante:

$$f(\mu_b, \infty) \sim f(\mu_b, 4L_0) = \underbrace{\frac{f(\mu_b, 4L_0)}{f(\mu_b, 2L_0)}}_{=\sigma_f(\mu_b, 2L_0)} \times \underbrace{\frac{f(\mu_b, 2L_0)}{f(\mu_b, L_0)}}_{=\sigma_f(\mu_b, L_0)} \times f(\mu_b, L_0), \quad (\text{IV.1.4})$$

où l'on a fait deux itérations. Le choix de la valeur à $L = 4L_0$ pour s'arrêter résulte du fait que les effets de volume fini décroissent exponentiellement une fois que $L > 4/m_\pi$ [17].

La difficulté de cette méthode réside dans les extrapolations $m_Q \rightarrow m_B$ de la fonction $\sigma_f(m_Q, L)$. Quand on augmente le volume, surtout lors de la deuxième étape $2L_0 \rightarrow 4L_0$, les masses m_Q en jeu sont déjà relativement petites et il faut donc faire une longue extrapolation vers m_B . Ce problème pourrait être résolu par une simulation à la limite statique qui, encore une fois, transformerait une extrapolation en une interpolation. Un « inconvénient » supplémentaire est que cette approche suppose un nombre important de simulations pour obtenir un résultat.

Les premiers résultats obtenus par le groupe de Rome-II sont encourageants [225]. La valeur de f_{B_s} est en accord (et avec de faibles incertitudes) avec la moyenne des réseaux.

Il existe d'autres propositions pour simuler les quarks lourds mais leur application et leur efficacité reste encore à vérifier. Il a été proposé par exemple d'utiliser des réseaux anisotropes (des mailles a_s et a_t d'espace et de temps différentes) pour prendre en compte le fait que dans la limite non-relativiste les effets de temps et d'espace sont dissociés [226]. On peut alors espérer que la longueur d'onde de Compton du quark lourd puisse être plus grande qu'une de ces mailles. Il n'existe pas encore de preuve formelle de ceci, et d'autre part, la brisure de la symétrie d'espace-temps entraîne que des opérateurs du lagrangien brisent l'invariance de Lorentz.

Je vais à présent écrire plus en détail la méthode combinant à travers la symétrie des quarks lourds les résultats de simulations dans le secteur du D et à la limite statique. Avant de conclure la présentation des méthodes permettant de traiter les quarks lourds sur réseau,

il est utile de préciser que c'est la moyenne (et l'accord) entre les résultats de ces différentes approches qui permettra de fournir des valeurs fiables aux études phénoménologiques.

1.2 Combiner QCD et limite statique de la HQET

L'avantage de cette méthode réside d'abord dans sa simplicité: D'une part, le secteur du D peut être étudié sur les réseaux disponibles actuellement sans introduire des approximations par rapport à la QCD. D'autre part, on peut faire appel à des considérations issues de la symétrie des quarks lourds pour guider les interpolations vers le secteur du B (via l'éq. (IV.1.1)). De cette façon il est possible d'extraire les corrections $\mathcal{O}(1/m_b^2)$ des grandeurs physiques étudiées (ces corrections étant, par ailleurs, difficilement calculables au sein même de la HQET). Je ne détaillerai pas ici davantage la façon de traiter les simulations dans le secteur du D étant donné qu'elles correspondent aux techniques présentées dans la première partie à propos des calculs des éléments de matrices hadroniques. Je vais plutôt présenter la façon de traiter les quarks statiques dans la perspective des progrès récents.

1.2.1 La limite statique

Nous avons vu dans le chapitre consacré à la théorie effective des mésons lourds (HQET) qu'à la limite statique, le quark lourd se découple de la dynamique du hadron. Une image physique simple pour comprendre la dynamique du système est celle de l'atome d'hydrogène. Dans le cas du méson B , le quark- b se comporte comme une source de champ de couleur immobile alors que le quark léger peut être décrit par une fonction d'onde dépendant de la distance entre les deux quarks. Le quark lourd étant statique, son «propagateur» se réduit, du point de vue du spin, à une projection entre les petites et les grandes composantes (via les opérateurs $(1 \pm \gamma_5)/2$) et du point de vue de la couleur, au produit ordonné en temps des matrices de $SU(3)$ (la ligne de Wilson dans la direction temporelle). Ces simplifications dans la dynamique des systèmes contenant un quark lourd se sont montrées efficaces pour reproduire la spectroscopie des systèmes des mésons lourds-légers (section II.1.2).

L'idée d'introduire des quarks statiques sur réseau a été proposée par Eichten et Hill [41, 217] il y a déjà quelques années. Cependant, l'application pratique de cette méthode s'est avérée délicate du fait des difficultés à observer un signal stable dans les simulations. C'est en raison de cette impasse que des méthodes alternatives ont été développées (en particulier la NRQCD). Récemment, l'intérêt pour cette technique a été ravivé à la suite de l'ap-

parition de nouvelles techniques d'amélioration des signaux des simulations [228, 239]. D'autre part, une étude détaillée de la renormalisation non-perturbative des éléments de matrice de la limite statique est en cours de développement [220, 221]. Des études à la limite statique ont été consacrées ces dernières années à la détermination de la masse du quark- b ou aux grandeurs liées au mélange $\mathcal{B}-\overline{\mathcal{B}}^0$, *i.e.* les constantes de désintégration, f_{B_d} et f_{B_s} [221, 228] et les paramètres B_{B_d} et B_{B_s} [229]-[231] des mésons B_d et B_s , respectivement, .

1.2.2 L'action de Eichten-Hill

Pour construire l'action des quarks statiques sur réseau, on peut commencer par considérer un quark lourd se propageant dans un champ de jauge non-abélien. En QCD, l'équation de Dirac pour le propagateur S_Q du quark lourd Q s'écrit:

$$(i\gamma^\mu D_\mu - m_Q)S_Q(x, y) = \delta^4(x - y), \quad (\text{IV.1.5})$$

où la dérivée covariante est définie par

$$D_\mu \equiv \partial_\mu - ig_s \frac{\lambda_a}{2} A_\mu^a, \quad (\text{IV.1.6})$$

et le propagateur du quark Q par

$$S_Q(x, y; A) \equiv -i\langle 0 | T \Psi_Q(x) \overline{\Psi}_Q(y) | 0 \rangle. \quad (\text{IV.1.7})$$

A la limite statique $m_Q \rightarrow \infty$, seule la composante temporelle de l'éq. (IV.1.5) de Dirac intervient et l'équation se réduit à :

$$(i\gamma^0 D_0 - m_Q)S_Q(x, y) = (i\gamma^0 \partial_0 + g_s \frac{\lambda_a}{2} \gamma^0 A_0^a - m_Q)S_Q(x, y) = \delta^4(x - y). \quad (\text{IV.1.8})$$

On peut inverser formellement l'éq. (IV.1.8) et obtenir l'expression du propagateur du quark statique [41, 217]:

$$S_Q(x, y) = -i P_y^x \left[\left(\frac{1 + \gamma_0}{2} \right) \theta(x^0 - y^0) e^{-im_Q(x^0 - y^0)} + \left(\frac{1 - \gamma_0}{2} \right) \theta(y^0 - x^0) e^{-im_Q(y^0 - x^0)} \right], \quad (\text{IV.1.9})$$

où P_y^x est le produit ordonné en chemin \mathbf{P} des champs de jauge suivant une ligne temporelle entre y^0 et x^0 :

$$P_y^x = \mathbf{P} \exp \left[ig_s \int_{y^0}^{x^0} dz^0 A^0(\vec{x}, z^0) \right] \delta(\vec{x} - \vec{y}). \quad (\text{IV.1.10})$$

Dans l'éq. (IV.1.9), les opérateurs $(1 \pm \sigma)/2$ projettent sur les états d'énergie positive et négative des quarks. On notera aussi que le caractère statique est manifesté explicitement dans les équations par le terme $\delta(\vec{x} - \vec{y})$.

En principe, il est ensuite possible d'introduire des corrections $\mathcal{O}(1/m_Q)$ à l'expression du propagateur statique (eq. (IV.1.9)). Il faut pour cela considérer les termes cinétiques et chromomagnétiques que l'on a vu apparaître dans le lagrangien de la HQET à l'ordre $1/m_Q^2$ (cf. eq. (II.1.12)). Je ne détaillerai pas ici d'avantage le procédé permettant de prendre en compte ces corrections au propagateur du quark lourd car les simulations actuelles à la limite statique n'introduisent pas de termes d'ordre $1/m_Q$ dans le propagateur.

L'expression de l'éq. (IV.1.9) doit maintenant être transposée dans l'eulidien pour pouvoir être utilisée sur les réseaux. Comme nous l'avons vu dans le premier chapitre, le passage du minkowskien à l'eulidien revient à faire une rotation de Wick qui équivaut à passer aux temps imaginaires ($t^E = it^M$). Ceci introduit une décroissance exponentielle dans chacun des deux termes de l'éq. (IV.1.9). D'autre part les produits ordonnés en chemin de l'éq. (IV.1.10) se traduisent dans le langage des réseaux par des produits des champs de jauge suivant une ligne temporelle (la ligne de Wilson):

$$P_y^x = \delta(\vec{x} - \vec{y}) \prod_{t_z=t_y}^{t_x-1} U_t(y + t_z \hat{t}), \quad (\text{IV.1.11})$$

où l'on a utilisé la définition du transporteur parallèle $U(\mathcal{C})$ de $SU(3)$:

$$U(\mathcal{C}) = \mathbf{P} \exp \left[ig_s \int_{\mathcal{C}} dx^\mu A_\mu \right] \quad (\text{IV.1.12})$$

\mathcal{C} correspondant au chemin considéré.

Précisons les notations: dans, l'éq. (IV.1.11), les champs de jauge U (vivant sur les liens de réseaux) sont connectés de façon à construire une ligne temporelle \hat{t} (indique le vecteur unitaire dans cette direction) entre les temps t_y et t_x . $U_t(y + t_z \hat{t})$ représente le lien partant de la position $y + t_z \hat{t}$ dans la direction de l'indice t du champ U_t .

L'expression du propagateur de l'éq. (IV.1.9) est donc extrêmement simple si on la compare à celle d'un quark relativiste: pour simuler un quark statique il suffit de construire une ligne de Wilson temporelle et d'utiliser les projecteurs $(1 \pm \gamma_0)/2$. Par ailleurs, à la limite des quarks lourds la production d'anti-quarks est supprimée. Ainsi, du fait de la projection, on s'attend à ce que les contributions des signaux se propageant dans la direction négative du temps (signal de retour en boucle dans les réseaux périodique) soient pratiquement inexistantes (les quarks ne peuvent se propager qu'en avant dans le temps).

L'expression du propagateur du quark statique sur réseau prend finalement la forme:

$$S_Q(\vec{x}, t_x; \vec{y}, t_y) = -i P_{\vec{y}, t_y}^{\vec{x}, t_x} \left(\frac{1 + \gamma_0}{2} \right) e^{-m_Q(t_x - t_y)}, \quad (\text{IV.1.13})$$

où les temps euclidiens sont tels que $t_x > t_y$ et par définition $\vec{x} = \vec{y}$.

L'action de Eichten-Hill (EH) d'un quark statique Q peut donc s'écrire sous la forme suivante [41, 217]:

$$\Sigma_Q^{\text{EH}} = a^4 \sum_x \bar{\Psi}_Q(x) \left(\frac{1 + \gamma_0}{2} \right) D_0 \Psi_Q(x), \quad (\text{IV.1.14})$$

où la dérivée covariante doit intervenir le maillon élémentaire U de la ligne de Wilson:

$$D_0 \Psi_Q(x) = \frac{1}{a} [\Psi_Q(x) - U_t^\dagger(x - a\hat{t}) \Psi_Q(x - a\hat{t})]. \quad (\text{IV.1.15})$$

D'après l'éq. (I.2.8), cette expression correspond à une des composantes de l'opérateur de Dirac-Wilson (prise uniquement dans la direction temporelle).

1.2.3 Le problème du signal

Paradoxalement, le problème posé par les simulations des quarks statiques est une conséquence de la simplification de l'expression du propagateur que nous venons de décrire. Les réseaux permettent de calculer des éléments de matrice par des méthodes de physique statistique: si les propagateurs des quarks relativistes (non-statiques) arrivent à fournir des signaux pouvant par exemple reproduire le spectre physique des hadrons, c'est parce qu'il est possible de moyennner sur l'ensemble des chemins reliant les points initiaux et finaux. Par contre, dans le cas statique, la trajectoire se réduit à la seule ligne de Wilson et l'on perd donc cette possibilité de moyennner sur un grand nombre de chemins. Il en résulte que les signaux pour des corrélateurs sont difficilement exploitables à moins de faire appel à des améliorations.

Considérons maintenant une fonction de Green à deux points G_2 du champ interpolant J d'un méson statique-léger:

$$C_2(t_x) = \int d\vec{x} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} \langle 0 | J(x) J^\dagger(0) | 0 \rangle, \quad (\text{IV.1.16})$$

avec dans ce cas particulier $J(x) = \bar{\Psi}_q(x) \gamma_5 \Psi_Q(x)$, q et Q indiquant le quark léger et le quark statique respectivement. Nous considérerons le cas où le champ interpolant $J(x)$ est introduit avec une impulsion nulle, $\vec{p} = \vec{0}$. Notons qu'à la limite statique les champs interpolants des mésons pseudoscalaires et vecteurs engendrent la même fonction

de corrélation. La raison physique est la dégénérescence de ces états du fait de la symétrie de quarks lourds. La raison formelle est que les matrices de Dirac γ_i des champs interpolants des mésons vecteurs commutent avec le propagateur du quark statique et peuvent donc être éliminées.

Reprenons ce qui a été présenté dans la première partie de cet exposé à propos des fonctions de corrélation à deux points en introduisant dans le cas présent les particularités qu'implique le travail à la limite statique. En insérant dans l'éq. (IV.2.62) le jeu complet d'états $\sum_n |H^{(n)}\rangle\langle H^{(n)}|$, on obtient:

$$\begin{aligned} C_2(t_x) &= \int d\vec{x} \langle 0 | J(x) J^\dagger(0) | 0 \rangle = \sum_n \int d\vec{x} \langle 0 | J(x) \frac{|H^{(n)}\rangle\langle H^{(n)}|}{2m_{H^{(n)}}} J^\dagger(0) | 0 \rangle, \\ &= \sum_n \frac{|\langle 0 | J(0) | H^{(n)} \rangle|^2}{2m_{H^{(n)}}} e^{-E_H^{(n)} t_x}, \\ &= |\mathcal{Z}_0|^2 e^{-E_H^{(0)} t_x} + |\mathcal{Z}_1|^2 e^{-E_H^{(1)} t_x} + \dots \quad (\text{IV.1.17}) \end{aligned}$$

On définit les constantes d'annihilation \mathcal{Z}_n par:

$$\mathcal{Z}_n \equiv \frac{\langle 0 | J(0) | H^{(n)} \rangle}{(2m_H^{(n)})^{1/2}}. \quad (\text{IV.1.18})$$

Pour des t_x suffisamment grands, les contributions des excitations $n \geq 1$ sont supprimées exponentiellement et seul le terme en $E_H^{(0)} = E_H$ contribue:

$$C_2(t_x) \xrightarrow{t_x \rightarrow \infty} |\mathcal{Z}|^2 e^{-E_H t_x}, \quad (\text{IV.1.19})$$

Dans le cas relativiste E_H correspond à la masse de l'état fondamental. Cependant, à la limite statique, ce terme devient l'énergie de liaison $E_H \sim m_H - m_Q$ du système $Q\bar{q}$. Cette énergie de liaison provient de la présence du terme exponentiel en \mathcal{W} dans l'éq. (IV.1.13) qui vient se combiner avec le terme de masse du méson $Q\bar{q}$ (que l'on note H) provenant de l'insertion de la relation de complétude. Dans la pratique, l'énergie de liaison E_H des réseaux n'est pas une quantité physique à proprement parler puisqu'elle inclut des divergences linéaires [219].

Un raisonnement qualitatif simple permet d'estimer le rapport bruit/signal des corrélateurs contenant un quark statique. Nous venons de voir que:

$$C_2(t_x) \equiv \langle 0 | \text{Tr} S_q(t_x) S_Q^\dagger(t_x) | 0 \rangle \propto e^{-E_H t_x}, \quad (\text{IV.1.20})$$

où nous avons écrit le corrélateur \mathcal{C} en termes des propagateurs du quark statique Q et l'éger q , une fois que l'on a effectué la transformée de Fourier sur \vec{x} .

On peut estimer l'erreur sur C_2 à partir de la variance σ^2 :

$$\sigma^2(t_x) = (\delta C_2(t_x))^2, \quad (\text{IV.1.21})$$

$$\propto \langle 0 | (\text{Tr } S_q(t_x) S_q^\dagger(t_x)) (\text{Tr } S_Q(t_x) S_Q^\dagger(t_x)) | 0 \rangle. \quad (\text{IV.1.22})$$

D'après l'expression du propagateur statique (cf. eq. (IV.1.13)), les deux S_Q s'éliminent dans l'eq. (IV.1.22) et l'erreur devient:

$$(\delta C_2(t_x))^2 \propto \langle 0 | (\text{Tr } S_q(t_x) S_q^\dagger(t_x)) | 0 \rangle, \quad (\text{IV.1.23})$$

$$\propto e^{-m_\pi t_x}. \quad (\text{IV.1.24})$$

Le rapport bruit/signal devient alors [227]:

$$R_{NS} = \frac{\delta C_2}{C_2} \propto e^{(E_H - m_\pi/2) t_x}. \quad (\text{IV.1.25})$$

Le bruit croît donc exponentiellement lorsque le temps t_x augmente (cf. figure. (1.2)). Or les éléments de matrice (par exemple Z dans l'eq. (IV.2.64)) doivent être déterminés aux grands temps t_x (cf. eq. (IV.1.19)): si l'on extrayait ces éléments à des temps trop faibles (avant que l'état fondamental ne soit isolé) ils seraient contaminés par des effets des excitations et l'on ne serait pas en train de mesurer l'élément de matrice voulu.

C'est ce comportement qui dans le passé a rendu difficile l'implantation des quarks statiques sur réseau et a constitué une des raisons qui ont conduit à mettre en place une nouvelle approche comme la NRQCD. Dans ce cas le rapport bruit/signal s'écrit:

$$\frac{\delta C_2}{C_2} \Big|_{\text{NRQCD}} \propto \exp \left[\left(E_{Q\bar{q}} - \frac{E_{Q\bar{Q}} + m_\pi}{2} \right) t_x \right], \quad (\text{IV.1.26})$$

où $E_{Q\bar{q}} = E_H$ et $E_{Q\bar{Q}}$ sont les énergies de liaison des systèmes $Q\bar{q}$ et $Q\bar{Q}$ respectivement. L'énergie de liaison $E_{Q\bar{Q}}$ étant non nulle (dans les cas les plus généraux), elle permet donc de compenser l'effet de E_H dans l'expression précédente. Lorsque $m_\pi \rightarrow \infty$, l'énergie de liaison $E_{Q\bar{Q}}$ s'annule et les propagateurs de la NRQCD redonnent ceux de la limite statique.

Il existe cependant plusieurs alternatives pour aborder ce délicat problème. Elles ont en commun l'idée d'augmenter le nombre de chemins possibles pour les champs de quarks afin d'augmenter la statistique. Physiquement cela peut être compris comme si, au lieu de considérer le quark lourd comme une source *ponctuelle* de couleur, on autorisait que la source devienne *étalée* sur un certain volume. De plus, on peut introduire une fonction d'onde $\phi(r)$, où r est la distance entre les quarks Q et \bar{q} , afin d'optimiser le recouvrement des champs interpolants avec l'état fondamental et réduire ainsi la présence des excitations.

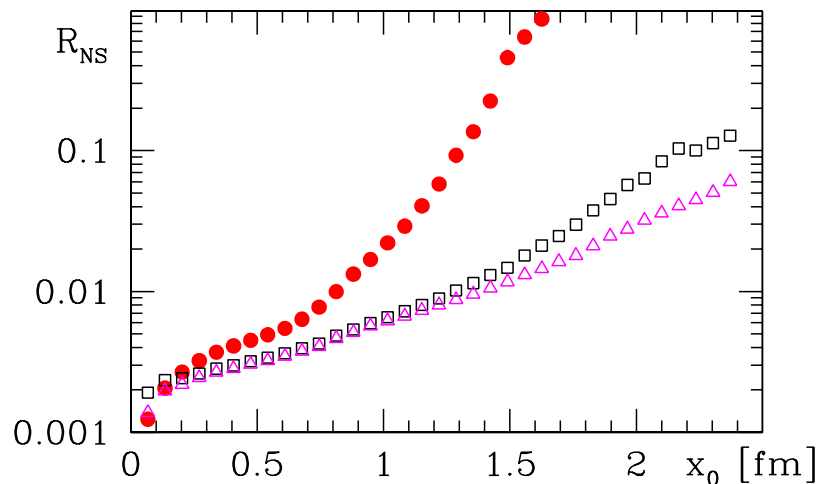


FIG. 1.2 – Rapport bruit/signal (en échelle logarithmique) en fonction du temps pour un corrélateur à deux points contenant un quark statique [228]. Les cercles correspondent à l'action de Eichten-Hill. Les carrés à la version «staple» de l'action et les triangles à l'action «HYP». Ces signaux sont obtenus à partir d'une moyenne sur 2500 configurations.

Une autre idée proposée récemment [228] consiste à modifier l'action de Eichten-Hill en remplaçant chaque lien U_t de la ligne de Wilson par la somme des «staples» (agrafes) qui lui sont associées (cf. figure 1.7). Pour un lien donné, nous appelons «staple» le produit des trois liens immédiatement voisins formant une «agrafe» dans le demi-plan considérée. Je reviendrai sur ces techniques par la suite.

Deux phénomènes sont en compétition du point de vue de l'extraction d'un signal. D'une part, il faut éviter la contamination par les excitations et d'autre part il faut obtenir un signal sur un intervalle de temps suffisamment long pour qu'on puisse extraire les énergies de liaison ou les éléments de matrice qui nous intéressent. Pour être plus concret prenons l'exemple de l'énergie de liaison effective définie à partir des corrélateurs par :

$$E_{\text{eff}}(t_x) \equiv \ln \left(\frac{C_2(t_x)}{C_2(t_x + 1)} \right) \xrightarrow{t_x \rightarrow \infty} E_H. \quad (\text{IV.1.27})$$

A des temps t_x suffisamment grands, l'énergie effective doit développer un plateau dont la valeur correspond à l'énergie de liaison E_H . Un bon signal suppose d'aller à des t_x grands et une fois ce temps atteint, de pouvoir extraire E_H au moyen d'un plateau de $E_{\text{eff}}(t_x)$ étendu sur un intervalle de temps suffisamment long. Le premier problème suppose l'élimination rapide des excitations et le deuxième la réduction des fluctuations statistiques

du signal. Chacun de ces problèmes doit être traité à l'aide d'une procédure appropriée. Notons qu'une mauvaise identification du plateau induit non seulement une erreur dans l'extraction de l'énergie effective (la valeur incorrectement isolée serait agrandie sous l'effet des excitations) mais aussi un biais sur la valeur des éléments de matrice hadroniques Z que l'on cherche à obtenir.

Il est important de vérifier que les procédés visant à améliorer les signaux n'engendrent pas d'effets indésirables sur les phénomènes physiques étudiés. La mise en œuvre de ces techniques doit être telle que les effets non-physiques puissent être éliminés à la fin du calcul. Donnons quelques détails supplémentaires sur chacune de ces techniques d'amélioration des signaux de la limite statique.

1.2.4 L'étalement de la source de couleur

Au lieu de considérer un champ interpolant $J(x)$ local, la première approche pour améliorer les signaux, consiste à étaler $J(\vec{x}, t)$ sur un certain volume spatial [233]-[236]. En étalant la source on augmente le nombre de points que peut atteindre le propagateur du quark mobile et on peut ainsi réduire les fluctuations statistiques. Les champs interpolants de la théorie des champs sont locaux. Il en résulte que ce procédé d'étalement (ou «smearing») n'est valable que si l'on arrive à écarter suffisamment les instants de création t_i et d'annihilation t_f des champs de quarks, de sorte qu'à des temps t intermédiaires, $t_i \ll t \ll t_f$, la source semble redevenir locale. En pratique, les effets de smearing sont factorisables et ils peuvent donc être éliminés par des rapports *ad hoc*. Pour construire ces rapports on peut choisir d'étaler la source uniquement à l'origine t et pas au temps d'insertion t_f (ou vice versa).

La manière la plus simple d'étaler la source est d'utiliser une ligne de Wilson spatiale reliant les extrémités des propagateurs. En effet, il est crucial de s'assurer que l'invariance de jauge des corrélateurs est bien satisfaite, ce qui, comme on l'a vu dans le chapitre d'introduction aux réseaux, suppose de construire des boucles fermées de champs de quarks ou de gluons. Par exemple, si l'on décide d'étaler la source statique placée à l'origine du réseau (donc à $t = 0$ fixe), le «smearing» est la procédure de construction des lignes de Wilson partant de $\vec{x} = \vec{0}$ et suivant les 6 directions de l'espace. On définit ainsi un «rayon» R_{max} d'étalement qui correspond au demi-côté du cube centré sur l'origine, à la surface duquel viennent se brancher les propagateurs des quarks mobiles.

A ce stade on n'a considéré qu'un étalement restreint aux axes. Pour «remplir» l'intérieur du volume du cube, on peut, de façon itérative, remplacer chacun des liens de la ligne de Wilson spatiale par les «staples» qui leurs sont associées (dans les deux dimensions

d'espace restantes). La figure 1.3 représente schématiquement une étape de ce processus. Formellement ceci revient à répéter N fois la transformation de «fuzzing» (brouillage) suivante [232, 233]:

$$U_j(x) \rightarrow U_j^F(x) = \mathcal{P} \left[C U_j(x) + \sum_{i \neq j} \left[U_i^{\text{Staple}}(x, x + \hat{j}) + U_{-i}^{\text{Staple}}(x, x + \hat{j}) \right] \right], \quad (\text{IV.1.28})$$

où les i sont les indices d'espace, C est un paramètre réel et \mathcal{P} un projecteur dans le groupe $SU(3)$. En effet, $SU(3)$ n'est pas stable sous l'addition et pour garantir que les champs de jauge restent dans ce groupe la projection est nécessaire. U^{Staple} fait référence au produit des trois liens immédiatement voisins formant une «agrafe» autour du lien consid er e.

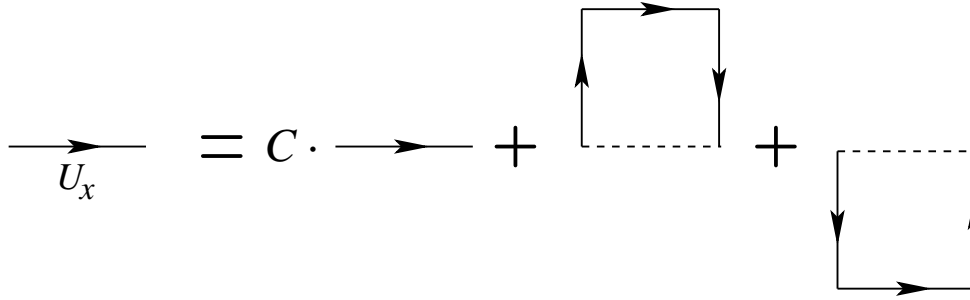


FIG. 1.3 – Sch ematization de la procédure de «fuzzing» (cf. éq. (IV.2.71)).

Le paramètre C est là pour quantifier l'effet relatif du lien consid er e par rapport au terme des «staples». Comme pour chaque lien spatial il y a 4 «staples» spatiales on peut prendre $C = 4$ pour que l'effet de l'introduction des «staples» ait un poids équivalent à celui du lien originel. On peut ainsi étaler la source de façon homogène. L'effet des «staples» est de moyenner chaque lien par l'effet de ses plus proches voisins. Chaque itération de «fuzzing» revient à explorer un volume autour du lien et après N_F itérations, le lien consid er e inclura l'effet des champs de jauge contenus à l'intérieur d'un volume de rayon $R_F \sim (N_F + 1)^{1/2} a$. Il faut donc en principe choisir N_F de sorte que R_F coïncide avec le rayon R_{max} de «smearing». En pratique, le critère qui guide le choix des paramètres est plutôt la qualité du signal et on a observ e qu'un nombre excessif d'itérations de «fuzzing» peut avoir comme conséquence la disparition du signal. En moyennant les effets de chaque lien avec ceux des voisins, on est aussi en train de changer le cutoff effectif de la théorie: la maille effective initiale, *i.e.* a , devient $\sim R_F$. A chaque itération on est donc en train d'eliminer de plus en plus les effets de l'ultraviolet. Ce procède est par exemple utilis e pour étudier le comportement des champs de jauge dans l'infrarouge là où des structures

semi-classiques comme les instantons apparaissent. Dans le choix des paramètres il y donc un compromis à faire entre le fait de moyenner sur les liens pour couvrir le volume de la source et le risque de perdre une partie des fluctuations quantiques des champs de jauge par la diminution du cutoff effectif.

La projection \mathcal{P} , ramenant les liens modifiés dans $SU(3)$, pose quelques problèmes quant à l'invariance de jauge. Nous avons vu qu'une transformation de jauge revient à multiplier les champs U à gauche et à droite par une matrice de rotation de jauge et que lorsqu'on construit un chemin fermé contenant ces liens U , les opérateurs locaux de la rotation s'éliminent deux à deux. Lorsque, sur le réseau, on cherche à tester l'invariance de jauge, on commence par faire une transformation sur les liens et l'on vérifie ensuite que leur assemblage produit bien un corrélateur invariant sous la transformation. Il reste donc à savoir si la projection \mathcal{P} peut préserver cette propriété d'invariance. La façon habituelle de projeter consiste à normaliser les champs modifiés pour rendre sa matrice unitaire *via* des opérations sur les lignes et les colonnes. En l'absence de projection \mathcal{P} , nous avons vérifié que le lien après «fuzzing», U^F , permet de préserver l'invariance de jauge des corrélateurs. Par contre, les opérations de la normalisation changent l'ordre des éléments matrice des opérateurs de la transformation de jauge et finissent par briser l'invariance.

On ne connaît pas à l'heure actuelle de procédure de projection dans $SU(3)$ permettant de conserver l'invariance de jauge. Ceci serait un problème sérieux si l'on était, par cette procédure, en train de décrire des phénomènes physiques. Le «fuzzing» et plus généralement l'étalement de la source sont des outils techniques aidant à isoler un signal et doivent à la fin être éliminés du résultat. Là aussi nous devons faire un choix : préserver l'invariance de jauge (en laissant de côté la projection \mathcal{P}) ou revenir dans $SU(3)$. Dans ce cas les calculs numériques nous obligent à choisir la deuxième option. En effet, sans la projection, pour $N_F > 5$ itérations les valeurs de U^F deviennent très grandes et dépassent la limite supérieure d'une machine en simple précision. De plus, même en se limitant à $2 \leq N_F \leq 4$ les fluctuations qu'induisent les grandes valeurs des corrélateurs empêchent d'isoler un signal.

Une idée qui permettrait d'éviter la projection tout en empêchant que les éléments U croissent arbitrairement serait de normaliser l'éq. (IV.2.71) par un facteur numérique global compensant l'effet de la somme sur les «staples». Un modèle simple reproduisant ce processus d'itérations en considérant des matrices U dans $U(1)$, nous a cependant indiqué que, là aussi, de faibles changements de la valeur du facteur de normalisation pouvaient produire des grandes variations de U^F après $N_F > 5$ itérations. Nous avons donc finalement opté par la stabilité du signal tout en vérifiant qu'avant la projection \mathcal{P} les corrélateurs

1. C'est le cas de la machine APEmille d'Orsay que je présenterai par la suite

sont bien invariants de Jauge. Evidemment, toutes ces incertitudes devront être à la fin introduites parmi les incertitudes systématiques de calcul. Une remarque afin d'éclaircir un malentendu possible : lorsqu'on introduit le terme de «clover» afin d'améliorer l'action des fermions de Wilson on préserve bien l'invariance de jauge même en faisant appel à la projection dans $SU(3)$. La raison en est que la rotation de jauge est faite sur les liens déjà améliorés (par les «staples») et donc préalablement projetés. Dans le cas du «fuzzing», l'ordre est inversé, on exécute d'abord la transformation de jauge et c'est sur les liens modifiés qu'on fait la projection dans $SU(3)$. Notons d'ailleurs que si l'on réalise la transformation de jauge après avoir modifié et projeté les champs de jauge l'invariance de jauge est bien vérifiée.

Du fait de l'utilisation fréquente des procédures de «fuzzing» (ou d'autres du même type et portant des noms divers: «cooling», «fattening», «blocking» ...) il serait important de réfléchir à un algorithme permettant de préserver l'invariance de jauge tout en projetant les liens modifiés dans $SU(3)$. Les procédures du type «fuzzing» sont utilisées pour traiter un certain nombre de problèmes. Nous avons cité l'étude des instantons : les itérations de cooling éliminent les fluctuations quantiques dans l'UV (en «lissant» les effets des champs de jauge) permettant ainsi d'isoler la structure IR d'une configuration de champs de jauge. Nous avons aussi cité l'amélioration de l'action de Wilson *via* le terme de «Clover» («trèfle» du fait de l'image produite par l'association des «agrafes») qui permet d'améliorer le comportement chiral des quarks : la modification des liens diminue les fluctuations de la plaquette et réduit ainsi la présence de configurations exceptionnelles (les valeurs propres nulles du propagateur de Dirac). D'ailleurs ceci est en rapport avec le cas précédent puisque les valeurs propres réelles de l'opérateur de Dirac sont associées à la présence d'instantons. On peut étudier la distribution de ces valeurs propres en présence d'instantons afin d'apprendre à éviter les effets des pôles du propagateur de Dirac dans la région des faibles masses de quarks. D'autres utilisations de ces procédures incluent l'amélioration de la symétrie de saveur des fermions «staggered» (cette symétrie est brisée en raison du problème du «dédoublage» des fermions) ou l'implantation des propriétés chirales pour les fermions «overlap» (préservant la symétrie chirale à maille finie). Les limites de ces procédures ont aussi pu être étudiées, par exemple, dans la forme du potentiel statique $Q\bar{Q}$ qui aux courtes distances est détériorée par un nombre excessif d'itérations de «fuzzing» (alors que les longues distances restent inchangées). Dans le système du méson B , des effets analogues peuvent apparaître du fait de la coexistence de plusieurs échelles.

La figure 1.4 (gauche) présente une comparaison des signaux obtenus avec et sans étalement de la source. Les indices «L» (local) et «S» (smeared *i.e.* étalé) informent sur le type de champs interpolants utilisés aux temps $t_0 = 0$ et $t_x = t$ (*cf.* eq. (IV.2.62)). Par

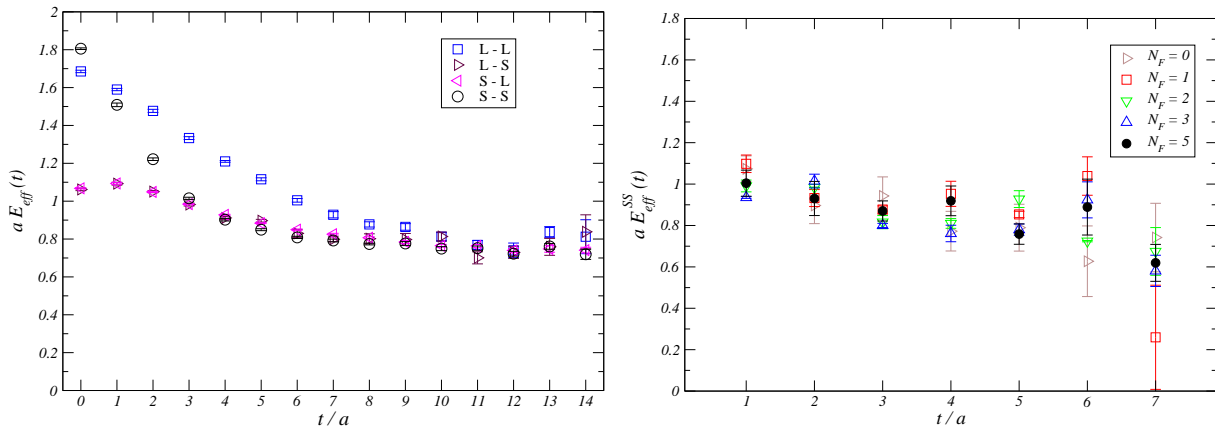


FIG. 1.4 – Evolution de l'énergie de liaison effective E_{eff} en fonction du temps (en unités de maille a). A gauche, on illustre la dépendance dans le type de source utilisés: locales (L) ou étalée (S). A droite, on montre l'effet du nombre d'itérations N_F de la procédure de fuzzing. Toutes les grandeurs sont en unités de maille a .

exemple le cas «L - S» correspond à un corrélateur à deux points où la source à $t = 0$ est locale alors que la source à $t_x = t$ est étalée. Les signaux correspondent à l'énergie de liaison effective définie dans l'éq. (IV.2.74). L'obtention d'un plateau pour $\overline{E}_{\text{eff}}(t)$ indique que les excitations radiales ont été éliminées et que l'on atteint bien l'état fondamental. On peut observer dans cette figure que le rôle de l'étalement de la source est de permettre d'atteindre l'état fondamental à des temps t courts. Les signaux issus des sources locales montrent des contaminations bien plus grandes dues aux excitations. La figure 1.4 (droite) montre l'effet du changement du paramètre N_F (le nombre d'itérations de «fuzzing»). Une meilleure stabilité du signal est observée pour $N \geq 3$.

1.2.5 L'introduction d'une fonction d'onde

Une fois la source statique de couleur étalée à l'intérieur d'un volume de rayon R_{max} , il est utile d'introduire une «fonction d'onde» permettant de favoriser la contribution de l'état fondamental du méson statique-léger [237]. Derrière cette idée de fonction d'onde, il y a la similitude du système de quarks statiques-légers avec l'atome d'hydrogène: on considère un système pouvant être décrit par un potentiel non-relativiste à symétrie sphérique. En exploitant cette analogie, on peut introduire dans le calcul la fonction d'onde de l'état fondamental de l'atome d'hydrogène. Cependant, l'analogie est uniquement formelle et, par

exemple, le «rayon de Bohr» du système ne doit pas être déterminé par des considérations physiques mais par des critères d'optimisation du signal. Il se trouve que nous avons remarqué que le rayon de Bohr R_b qui optimise le signal correspond à peu près à ce que l'on attend pour la longueur d'onde de Compton du méson B . Ceci ne peut néanmoins pas être interprété comme une détermination rigoureuse des propriétés de la «vraie» fonction d'onde du méson B .

La fonction d'onde (radiale) utilisée, $\phi(r) = e^{-r/R_b}$, est donc celle de l'état fondamental de l'atome d'hydrogène mais dans la simulation on rajoute un facteur $(r + 1/2)^2$. Le terme en r^2 est là pour compenser l'absence d'un effet du volume. Mais si l'on ajoute uniquement le facteur r^2 , l'effet de la fonction d'onde disparaît à $r = 0$. Il a été observé qu'un terme en $(r + 1/2)^2$ permet d'obtenir de meilleurs signaux. De même, le paramètre R_b doit être varié dans l'intervalle $R_b \in [0, R_{max}]$ jusqu'à ce qu'on parvienne à isoler au mieux l'état fondamental en un nombre réduit d'unités de temps. Noter que l'introduction d'une fonction d'onde revient à donner un «poids» (dépendant de la distance entre quarks) aux champs de jauge formant la ligne de Wilson de l'étalement de la source. A grande distance, l'effet de la fonction d'onde disparaît. On peut donc fixer le rayon R_{max} du volume où agit la fonction d'onde à la valeur maximale permise par la machine (du fait des limitations en espace mémoire).

En faisant un bilan des outils dont l'on dispose pour traiter le quark statique, nous sommes ramenés à considérer quatre paramètres (R_{max} , C , N_F et R_b) qui doivent être déterminés par des critères de qualité du signal et de limitations informatiques.

L'expression du champ de quark après ces procédures de «smearing» prend la forme:

$$\Psi(x) \rightarrow \sum_{r=0}^{R_{max}} \left(r + \frac{1}{2}\right)^2 \phi(r) \sum_{i=x,y,z} \left\{ \left[\prod_{k=1}^r U_i^F(x + (k-1)\hat{i}) \right] \Psi(x + r\hat{i}) + \left[\prod_{k=1}^r U_i^{F\dagger}(x - k\hat{i}) \right] \Psi(x - r\hat{i}) \right\} \quad (\text{IV.1.29})$$

où les champs U^F ont été définis dans l'éq. (IV.2.71).

La figure 1.5 représente de façon schématique la procédure d'étalement de la source et la figure 1.6 illustre l'effet de la variation du rayon R_b de la fonction d'onde. Les signaux correspondent à ceux de l'énergie de liaison effective $E_{\text{eff}}^{LS}(t)$. On observe que l'augmentation de la valeur du rayon permet de diminuer l'effet des excitations radiales aux temps t faibles. Pour des rayons $R_b \geq 3a$, les différentes courbes se superposent. Cependant, pour les rayons les plus grands, $R_b \sim 5a$, les signaux commencent à croître lorsque $t \sim 11a$.

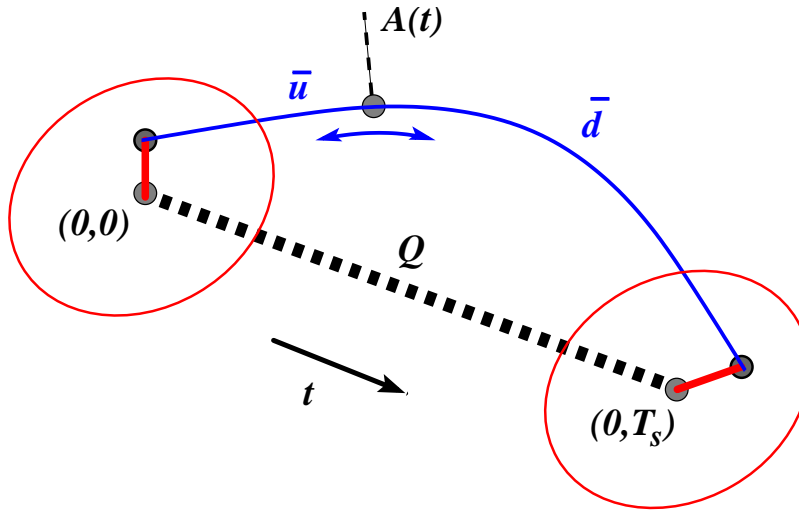


FIG. 1.5 – Schéma représentant l'étalement des sources aux temps de création $t = 0$ et d'annihilation $t = T_s$ des champs de quarks. La ligne en pointillés représente le quark statique alors que la ligne courbe désigne le quark léger. Les ellipses représentent la zone d'étalement de la source, la ligne connectant les quarks est la ligne de Wilson spatiale où l'on applique la fonction d'onde. Dans ce cas, nous avons aussi représenté l'insertion du courant axial (local) à un temps t variable. Globalement ce schéma représente la fonction de Green à trois points d'où l'on extrait le couplage \hat{g} .

1.2.6 La modification de l'action de Eichten-Hill

L'idée du «fuzzing» présentée auparavant peut aussi être appliquée à la ligne de Wilson temporelle *i.e.* au propagateur du quark statique venant de l'action de Eichten-Hill de l'éq. (IV.1.14). L'idée est à nouveau de moyenniser sur les liens par l'effet des plus proches voisins et d'enrichir ainsi la statistique. Cette procédure (que nous appellerons de «fattening» pour la distinguer du «fuzzing» qui s'applique plutôt à l'étalement de la source) a été proposée récemment par le groupe Alpha [228] et peut être schématisée par la figure 1.7.

Les avantages et les défauts que nous avons présentés à propos du «fuzzing» s'appliquent aussi au cas du «fattening». Cependant les choix ne sont pas les mêmes. En effet, nous avons vu que le «fuzzing» était un moyen de calcul factorisable et donc pouvant être éliminé en construisant des rapports adéquats (nous reviendrons sur ce point par la suite en expliquant clairement comment éliminer les effets de l'étalement de la source). Par contre, le

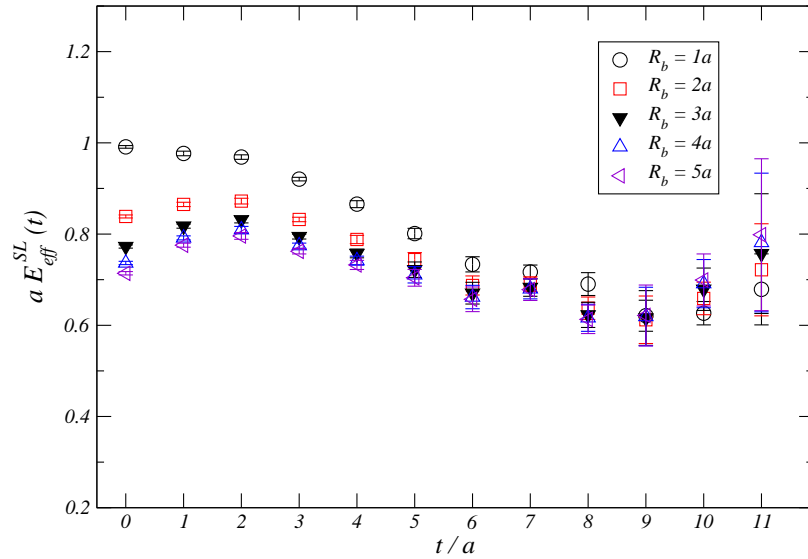


FIG. 1.6 – Cette figure montre le changement de l'énergie de liaison effective $E_{\text{eff}}(t)$ sous l'effet de la variation du rayon R_b de la fonction d'onde.

propagateur du quark est un objet physique et ses propriétés doivent donc être préservées sur le réseau. La modification de l'action de Eichten-Hill sur le réseau doit donc être faite de façon à retrouver l'action physique à la limite du continu. Comme le «fattening» ne fait intervenir qu'un nombre fini de liens dans le voisinage du lien considéré, les liens modifiés sont dans la même classe d'universalité que les liens originaux. D'autre part l'invariance de jauge doit impérativement être respectée. Le respect des propriétés physiques contraint donc le choix des modifications.

Dans le cas de l'action de Eichten-Hill nous considérons donc un remplacement des liens dans la direction temporelle U_t avec une seule itération du processus et sans projection \mathcal{P} dans $SU(3)$ afin de garantir l'invariance de jauge. L'expression des liens modifiés est donnée par (cf. figure 1.7):

$$U_t(x) \rightarrow U_t^{\text{fat}}(x) = \frac{1}{6} \sum_{i=x,y,z} \left[U_i^{\text{Staple}}(x, x + \hat{t}) + U_{-i}^{\text{Staple}}(x, x + \hat{t}) \right]. \quad (\text{IV.1.30})$$

où le facteur $1/6$ permet de normaliser l'effet des 6 agrafes dans l'espace à 3 dimensions.

Le choix de modification n'est pas unique pourvu qu'il laisse l'action du continu inchangée. Des études récentes [228, 238] ont montré que l'utilisation de la procédure des liens «HYP» [239] améliore encore plus la stabilité des signaux (en comparaison à la procédure simple de l'éq. (IV.2.69)). Ce procédé consiste à prendre aussi en compte l'effet

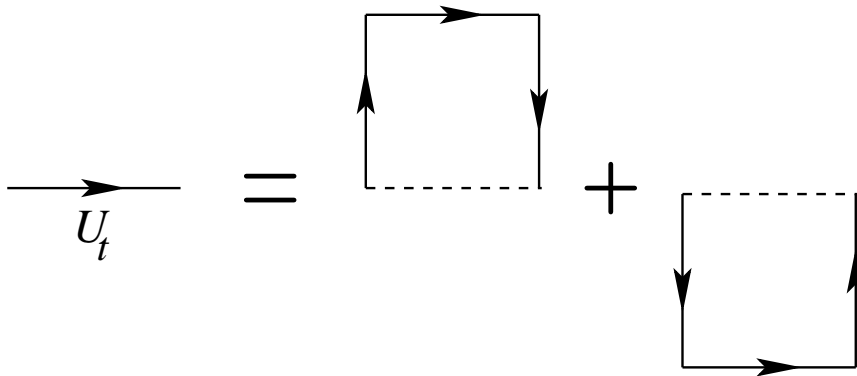


FIG. 1.7 – Schématisation de la procédure de modification de l'action de Eichten-Hill: on remplace chaque lien de la ligne de Wilson temporelle par la somme des «staples» (le produit des liens voisins). Cette procédure est faite dans les trois dimensions d'espace.

des deuxièmes plus proches voisins. C'est une généralisation de la procédure utilisant le «fuzzing» où au lieu de considérer uniquement les «staples» on utilise maintenant les liens situés sur l'hypercube attaché au lien considéré.

Formellement la procédure revient à faire trois étapes de «fuzzing» (cf. eq. (IV.2.71) permettant, de proche en proche, de couvrir le lien de départ par ceux de l'hypercube qui lui est associé. Chaque étape de «fuzzing» contient un paramètre C : il faut donc dans le cas des liens «HYP» optimiser 3 paramètres par des critères d'amélioration du signal. La figure 1.8 illustre les deux premières étapes de la construction de l'action «HYP».

La figure 1.2 montre la comparaison des rapports bruit/signal dans le cas de l'action Eichten-Hill (ligne de Wilson avec des liens «minces» *i.e.* sans «fattening»), de l'action modifiée par le «fattening» et celle obtenue avec des liens «HYP». L'amélioration notable de la qualité des signaux obtenue grâce à l'utilisation de ces actions modifiées accompagnée de l'étalement de la source est ce qui permet à présent d'étudier la limite statique dans les systèmes de mésons lourds-légers. On peut en particulier voir que des signaux de corrélateurs avec des incertitudes de l'ordre du pourcent peuvent être obtenus (avec tout de même une statistique très élevée: 2500 configurations indépendantes de champs de jauge) jusqu'à des temps de 1.5 fm, *i.e.* $t = 21a$ à $\beta = 6.2$. On notera que même avec une très grande statistique, l'action de Eichten-Hill ne permet pas d'obtenir un signal exploitable puisque lorsque l'état fondamental apparaît à $t \gtrsim 0.7$ fm, le bruit se met à croître exponentiellement et augmente d'un ordre de grandeur entre $0.7 < t < 1.2$ fm.

La figure 1.9 présente une comparaison des signaux obtenus en utilisant les trois façons

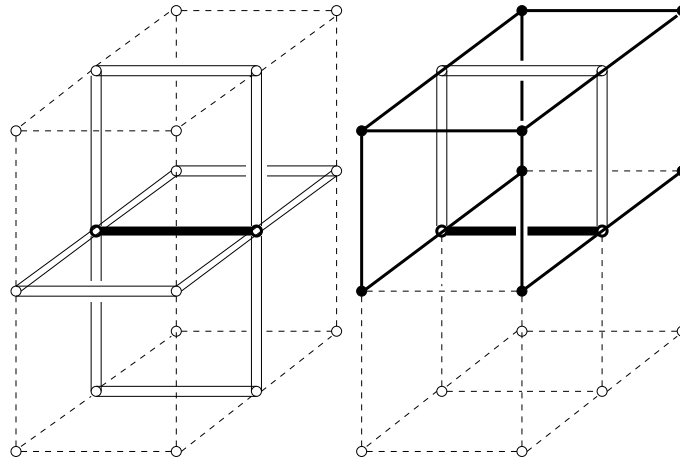


FIG. 1.8 – Représentation de la construction de l’action «HYP». La figure de gauche représente la première étape: on remplace le lien de départ (en noir foncé) par les «staples» (lignes doubles). La deuxième étape (à droite) consiste remplacer chacun des liens en lignes doubles (précédemment considérés) par les deux «staples» (lignes noires) complétant l’hypercube attaché au lien de départ.

de simuler les quarks lourds que l’on a présentées: avec l’action de Eichten-Hill, l’action après «fattening» et l’action «HYP». Les signaux correspondent à l’énergie de liaison effective E_{eff} en fonction du temps (cf. eq. (IV.2.74)).

On peut observer une nette amélioration des signaux lorsqu’on passe aux actions «fat» ou «HYP». Le changement de la valeur de E_{eff} lorsqu’on change l’action provient du fait que l’énergie de liaison n’est pas une quantité physique à proprement parler: nous avons anticipé précédemment qu’elle contient des divergences linéaires en $1/a$. Le changement de la valeur de E_{eff} est donc le témoignage que par ces procédures de fattening on est en train de changer la maille effective du réseau. La dépendance dans l’énergie de liaison doit être éliminée lorsqu’on cherche à extraire des éléments de matrice physiques. Pour cela, un ajustement du plateau en temps de $E_{\text{eff}}(t)$ permet d’extraire l’énergie de liaison E_H et de soustraire son effet par des rapports adéquats. Nous allons tout de suite voir un exemple dans l’étude de la constante de désintégration f_{B_s} .

1.2.7 Le cas de f_{B_s}

Passons à présent à une application des techniques qui viennent d’être présentées. L’application la plus directe, et qui en même temps est importante du point de vue de

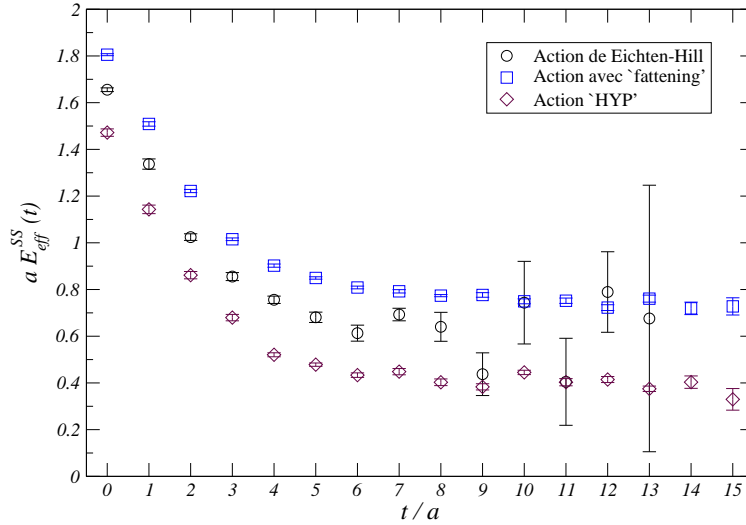


FIG. 1.9 – Comparaison des signaux pour l'énergie de liaison effective E_{eff} en fonction du temps (en unité de maille a): les signaux proviennent des quarks lourds simulés avec l'action de Eichten-Hill, l'action après «fattening» et l'action «HYP» et de quarks légers avec une masse autour de celle du quark- s . Les fluctuations sont considérablement diminuées et la durée des signaux allongées lorsqu'on passe aux actions «fat» [218] ou «HYP» [238].

la phénoménologie, est le calcul des constantes de désintégration f_{B_a} des mésons B_d et B_s . Nous avons en effet signalé dans le chapitre consacré à la phénoménologie des saveurs lourdes le fait que ces constantes de désintégration interviennent dans la détermination du mélange $B - \bar{B}^0$, qui lui-même intervient dans la connaissance de la dernière ligne de la matrice CKM.

Nous considérons pour le moment le cas de f_{B_s} puisqu'il ne nécessite pas d'extrapolations chirales vers la masse du quark d .

La constante de désintégration $f_{B_s}^f$ est définie à partir de l'élément de matrice du courant axial entre le méson B_s^f et le vide:

$$if_{B_s}p_\mu = \langle 0 | A_\mu | B_s(p) \rangle, \quad (\text{IV.1.31})$$

où l'expression du courant axial en termes des champs de quarks s et b est,

$$A_\mu(x) = \bar{\Psi}_s(x) \gamma_5 \gamma_\mu \Psi_b(x). \quad (\text{IV.1.32})$$

L'expression de $f_{B_q}^{\text{stat}}$ sur réseau

Nous allons maintenant considérer le cas de la limite de masse infinie. Nous remplaçons donc le champ du quark b par celui du quark statique Q et, puisque la masse légère est un paramètre des simulations, nous désignerons génériquement par q les quarks de masse voisine de celle du quark étrange. Nous noterons par ailleurs, $f_{B_s}^{\text{stat}}$, la constante de désintégration dans cette limite.

Sur les réseaux, $f_{B_s}^{\text{stat}}$ est obtenue à partir d'un corrélateur à deux points comme celui de l'éq. (IV.2.62) avec le courant axial $J_\mu^L(x) = A_\mu^{\text{stat}}(x) = \bar{\Psi}_q(x)\gamma_5\gamma_\mu\Psi_Q(x)$. L'indice « L » indique que nous considérons le cas d'un champ interpolant local, *i.e.* celui qui définit le $f_{B_s}^{\text{stat}}$ «physique». Puisque nous avons montré par l'étude du rapport bruit/signal que les simulations à la limite statique avec des champs interpolants locaux ne permettaient pas d'obtenir des signaux stables sur les réseaux nous allons maintenant introduire ce qui a été dit précédemment à propos de l'étalage de la source statique de couleur (ou «smearing»). Pour cela, ayant remplacé les champs des quarks légers $\Psi(x)$ par des champs modifiés sous l'effet de la fonction d'onde introduite dans l'éq. (IV.2.70), nous introduisons les champs interpolants et les corrélateurs marqués de l'indice « S » pour indiquer qu'ils ont subi un «smearing». Des exemples ont été donnés dans les figures 1.4 ou 1.9.

En suivant les mêmes étapes que les eqs. (IV.2.62-IV.1.19), on peut définir les corrélateurs à deux points $C_2^{SS}(t_x)$, $C_2^{SL}(t_x)$ et $C_2^{LS}(t_x)$, où le premier indice dans l'exposant signale le type de source (locale « L » ou étalée « S ») au temps $t = 0$ et le deuxième, au temps $t = t_x$. Ces notations s'étendent aussi aux énergies de liaison E et aux éléments de matrice Z . A ce stade précisons aussi que le propagateur du quark statique peut être remplacé par sa version après «fattening».

Dans le cas de $f_{B_q}^{\text{stat}}$, nous avons dit que le corrélateur était formé de champs interpolants locaux:

$$C_2^{LL}(t_x) = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \int d\vec{x} \langle 0 | J_i^L(x) J_P^{L\dagger}(0) | 0 \rangle, \quad (\text{IV.1.33})$$

$$\xrightarrow{t_x \rightarrow \infty} |\mathcal{Z}_L|^2 e^{-E_H^{LL} t_x}, \quad (\text{IV.1.34})$$

où $J_\mu^L(x)$ désigne le courant axial et $J_P^L(x)$ la densité pseudoscalaire:

$$J_\mu^L(x) = A_\mu^{\text{stat}}(x) = \bar{\Psi}_q(x)\gamma_5\gamma_\mu\Psi_Q(x), \quad (\text{IV.1.35})$$

$$J_P^L(x) = P^{\text{stat}}(x) = \bar{\Psi}_q(x)\gamma_5\Psi_Q(x). \quad (\text{IV.1.36})$$

Dans l'éq. (IV.1.34), on moyenne sur les contributions des trois composantes d'espace, $i = 1, 2, 3$ (elles doivent coïncider puisque l'impulsion \vec{p} est nulle). On appelle \mathcal{Z}_L la constante

définie par l'élément de matrice suivant:

$$\mathcal{Z}_L \equiv \frac{\langle 0 | J^L(0) | H \rangle}{(2m_H)^{1/2}} \equiv \frac{\langle 0 | A^{\text{stat}}(0) | H \rangle}{(2m_H)^{1/2}}, \quad (\text{IV.1.37})$$

où l'on a enlevé l'indice de Lorentz au courant axial pour indiquer, comme précédemment, que l'on a sommé sur les composantes spatiales. Cet élément de matrice, une fois renormalisé, est relié à $f_{B_s}^{\text{stat}}$ (d'après la définition de l'éq. (IV.1.31)) par l'expression:

$$f_{B_s}^{\text{stat}} = Z_A^{\text{stat}} \mathcal{Z}_L \sqrt{\frac{2}{m_{B_s}}} a^{-3/2}, \quad (\text{IV.1.38})$$

où le terme $a^{-3/2}$ apparaît pour fixer la dimension de l'équation. La renormalisation de $f_{B_s}^{\text{stat}}$ est multiplicative. La constante de renormalisation Z_A^{stat} du courant axial à la limite statique a été déterminée non-perturbativement par le groupe Alpha [220].

Trouver $f_{B_s}^{\text{stat}}$ revient à déterminer la constante \mathcal{Z}_L et pour cela il faut faire appel aux corrélateurs formés de sources élargies. Nous avons insisté précédemment sur l'importance d'éliminer les effets de l'étalement de la source. Ceci peut être fait par la construction de rapports appropriés. Dans le cas de $f_{B_s}^{\text{stat}}$, nous nous ramenons au cas local en considérant deux étapes: d'une part, on extrait la valeur de \mathcal{Z}_S à partir du corrélateur \mathcal{C}_2^{SS} (l'analogue de l'éq. (IV.1.34)) et ensuite on construit le rapport des corrélateurs $\mathcal{C}_2^S / \mathcal{C}_2^{SS}$:

$$R_Z(t_x) = \mathcal{Z}_S \times \frac{C_2^{LS}(t_x)}{C_2^{SS}(t_x)} \xrightarrow{t_x \rightarrow \infty} \mathcal{Z}_L. \quad (\text{IV.1.39})$$

Ce rapport permet d'éliminer l'effet des constantes \mathcal{Z}_S dues au «smearing» et revenir ainsi au cas des éléments de matrice d'opérateurs locaux.

Remarque: Pour la détermination de $f_{B_s}^{\text{stat}}$ nous avons considéré l'expression du courant axial (cf. l'éq. (IV.1.35)). Cependant, à la limite $m_Q \rightarrow \infty$ et du fait de la symétrie des quarks lourds, le corrélateur de l'éq. (IV.1.33) coïncide (à un signe près) avec un corrélateur analogue où l'on a remplacé le courant axial $J_\mu = A_\mu$ par la densité pseudoscalaire $\mathcal{P} = P$ de l'éq. (IV.1.36).

Résultats d'une simulation

Nous considérons à présent une simulation sur un réseau périodique de volume $24^3 \times 28$ avec une maille $a^{-1} = 2.71(12)$ GeV, i.e. $a \sim 0.07$ fm (correspondant au paramètre $\beta = 6.2$). On utilise pour le secteur des quarks légers l'action des fermions de Wilson améliorée à l'ordre $\mathcal{O}(a)$ et pour le quark statique, l'action de Eichten-Hill ou sa version après «fattening» (nous préciserons suivant le cas laquelle est utilisée). On considère

trois valeurs des masses de quarks légers ($60 \text{ MeV} < m_q < 110 \text{ MeV}$, donc autour de celles du quark étrange) caractérisées par les paramètres de «hopping» de Wilson: $\kappa_q = 0.1344_{q_1}$, 0.1348_{q_2} et 0.1351_{q_3} . Nous moyennons les corrélateurs sur 160 configurations indépendantes des champs de jauge. Les fermions dynamiques de la mer sont négligés (approximation «quenched»). En ce qui concerne l'étalement de la source, nous prenons les paramètres permettant d'optimiser les signaux suivant les critères que nous avons présentés auparavant: $R_{max} = 5 a$, $R_b = 3.0 a$, $N_F = 5$ et $C = 4$.

La figure 1.10 représente le rapport $R_E(t)$ de l'éq. (IV.2.75). Du plateau en temps on extrait la valeur de Z_S qui via l'éq. (IV.1.38) donne une estimation de $f_{B_s}^{\text{stat}}$. On remarquera le changement de la valeur de $R_Z(t)$ lorsqu'on passe de l'action de Eichten-Hill vers les actions après «fattening» ou «HYP». Ce changement explique pourquoi dans le passé les valeurs de f_B obtenues à partir de la limite statique étaient anormalement grandes. Les valeurs de $f_{B_s}^{\text{stat}}$ obtenues par ces nouvelles données sont en accord avec des résultats d'autres simulations récentes des réseaux. L'utilisation des masses de quarks légers voisines de la masse de l'étrange nous permet de faire une *interpolation* vers la masse du quark étrange. Pour cela on utilise la masse carrée du méson pseudoscalaire léger et on l'interpole vers la masse du méson $s\bar{s}$, $m_{s\bar{s}}^2 = 2m_K^2 - m_\pi^2 \sim 690^2 \text{ MeV}^2$.

Une fois que les masses légères ont été interpolées à la masse du quark- s (une illustration de ce procédé est donnée dans la figure 2 de l'article ci-joint sur la détermination de $g_{B^* B\pi}$), on obtient la valeur de $f_{B_s}^{\text{stat}}$ suivante:

$$f_{B_s}^{\text{stat}} = 251 \pm 20 \text{ MeV}, \quad (\text{IV.1.40})$$

où l'on a utilisé l'éq. (IV.1.38) avec $Z_A^{\text{stat}} = 0.77(3)$ [220, 228] et $m_{B_s} = 5.37 \text{ GeV}$ [45]. Ce résultat est en bon accord avec une mesure similaire (à la limite statique et avec la même maille de réseau) du groupe Alpha [228].

Signalons un problème de principe: en modifiant l'action de Eichten-Hill on est aussi en train de changer le cutoff du réseau. Il faut donc en principe, dans le calcul de $f_{B_s}^{\text{stat}}$, changer aussi la valeur de la constante de renormalisation Z_A^{stat} du courant axial (qui dépend du cutoff). Le calcul détaillé de ces constantes de renormalisation n'a pas encore été réalisé. Le groupe Alpha a cependant observé que la fonction de «step-scaling», l'outil qu'ils utilisent pour déterminer Z_A^{stat} , change peu lorsqu'on remplace l'action de Eichten-Hill par l'action de «fattening» ou «HYP». Un argument intuitif permet de comprendre cet effet: nous avons vu qu'en élargissant les liens on diminue le cutoff effectif du réseau, on est donc en train de *réduire* les effets UV. La constante de renormalisation (contenant ces effets UV) ne reçoit par ce changement du cutoff que des contributions de faible énergie. Ces changements doivent donc *a priori* changer faiblement la valeur de Z_A^{stat} puisqu'elle contient déjà tous

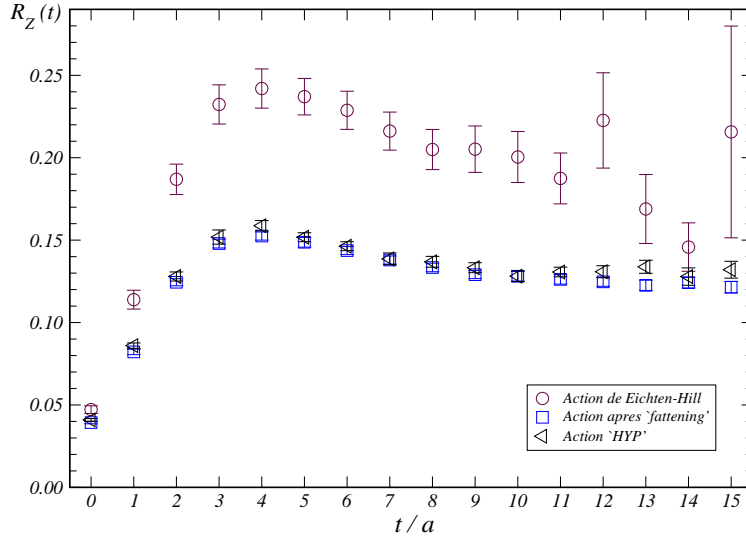


FIG. 1.10 – Etude du rapport R_Z en fonction du temps. De la valeur du plateau en temps de ce rapport on extrait la constante Z_S qui est directement reliée à $f_{B_s}^{\text{stat}}$. On présente pour la comparaison les résultats des différentes actions de quark lourd. Une amélioration notable des signaux est obtenue par l'utilisation des actions «fat» ou «HYP». La masse du quark léger est dans cette illustration proche de celle du quark-s, $\kappa_q = 0.1344$.

les effets du secteur «dur». Du fait des avantages visibles de ces méthodes d'amélioration des signaux, il est souhaitable de disposer d'une détermination précise des constantes de renormalisation Z_A^{stat} suivant les différentes actions utilisées. Ceci devrait être effectué très prochainement.

Dans cette section nous avons voulu illustrer les méthodes propres aux calculs des éléments de matrice, en introduisant des éléments nouveaux qui rendent possible l'exploitation numérique des quarks statiques. Nous allons présenter par la suite comment les techniques précédentes peuvent aussi s'appliquer à l'étude de la constante de couplage \hat{g} . En utilisant des considérations venant de la symétrie des quarks lourds, on peut combiner ces résultats avec ceux obtenus avec des quarks mobiles (relativistes) autour du quark charmé, et obtenir ainsi une estimation du couplage $g_{B^* B \pi}$ nécessaire à la phénoménologie.

Mais à présent, après avoir traité le cas du quark lourd, je vais tenter de compléter une description des phénomènes liés à la physique du méson lourd-léger en détaillant les effets de masses légères, et plus particulièrement, ce qui concerne les extrapolations chirales des données des réseaux. Nous allons voir que la constante de couplage \hat{g} joue là aussi un rôle

important.

1.3 Rôle du couplage \hat{g} dans les effets chiraux

Le problème des extrapolations chirales est au cœur des préoccupations actuelles d'une grande partie de la communauté des réseaux. En effet, la limite chirale est à l'origine de nombre des limitations actuelles des simulations. Elle est d'une part reliée aux effets de «quenching»: on s'attend à ce que dans ce régime les effets des boucles de quarks de la mer jouent un rôle important. D'autre part lorsque les masses de quarks deviennent faibles les moyens informatiques nécessaires croissent selon une loi de puissance et, en pratique, afin d'éviter les effets de volume fini on doit actuellement se limiter à des masses de quarks autour de celles du quark étrange. De plus, les fermions utilisés habituellement (surtout dans le cas des systèmes lourds-légers) brisent la symétrie chirale à maille finie. Lorsqu'on tente de diminuer les masses de quarks on est alors confronté à des configurations exceptionnelles qui invalident les résultats. Une très bonne nouvelle est qu'il a été démontré dans les dernières années qu'il est possible de restaurer la symétrie chirale en utilisant des fermions vérifiant la relation de Ginsparg-Wilson (fermions «overlap» ou «domain-wall»). A l'heure actuelle, ces simulations sont encore trop coûteuses pour les moyens de calcul et on attend l'arrivée de la nouvelle génération de machines pour pouvoir en faire un usage complet. Ensuite, et ce problème relie quelques uns de ceux que je viens de citer, pour pouvoir faire des prédictions sur des grandeurs physiques, nous devons extrapoler les quantités obtenues sur des réseaux (à des masses légères plutôt lourdes) vers la limite chirale. Nous pouvons utiliser pour cela la théorie de perturbation chirale sachant qu'il reste une incertitude quant à l'échelle à partir de laquelle on peut considérer que les masses des quarks sont compatibles avec le domaine de validité des développements chiraux. Finalement, comme nous allons le voir par la suite, les effets observés lors de ces extrapolations vont aussi être un moyen de mesurer notre connaissance des problèmes liés au «quenching».

1.3.1 Les effets chiraux et le «quenching»

Commençons par rappeler ce qui a été dit dans le chapitre précédent à propos de l'approximation «quenched» et de la théorie de perturbations chirales tout en montrant en quoi ces deux éléments sont reliés dans les simulations numériques de la QCD.

Les quarks légers ont des masses bien plus faibles que l'échelle du confinement: $m \ll \Lambda_{QCD}$, où $q = u, d$. Lorsque nous essayons de simuler ces masses légères nous sommes confrontés à une augmentation considérable des temps de calcul nécessaires pour inverser l'opérateur de Dirac et obtenir ainsi les propagateurs de quarks. Les algorithmes actuels ne sont pas optimisés pour les inversions de matrices ayant des valeurs propres très

écartées. On estime que le temps caractéristique nécessaire pour inverser l'opérateur de Dirac se comporte comme $\tau_q \propto (\lambda_{max}/\lambda_{min})^p \sim 1/(m_q a)^p$, où λ_{max} et λ_{min} sont les valeurs propres maximales et minimales de l'opérateur de Dirac et où, $p \sim 2 - 3$, selon que l'on utilise ou pas l'approximation «quenched». Le temps du calcul croît donc en puissances lorsqu'on tente de diminuer la masse des quarks. En pratique, il n'est pas possible actuellement de faire des simulations directes de QCD aux masses physiques des quarks u et d . Il faut donc obligatoirement faire appel à une théorie effective comme la théorie de perturbation chirale (χ PT) pour obtenir des résultats physiques à partir des données des réseaux qui sont obtenues autour de la masse du quark étrange et dans les meilleures conditions avec $m_q \sim 0.3 m_s$ alors que dans la QCD, on estime, $m_q \sim 0.05 m_s$.

Le problème est maintenant de savoir si la région de masses où l'on fait les simulations est aussi une zone où la théorie de perturbation chirale peut s'appliquer. Il reste aussi à savoir comment l'approximation «quenched» a pu modifier la physique des basses énergies *i.e.* voir comment ont été modifiées les termes du développement chiral lorsqu'on sort de la QCD pour entrer dans l'approximation «quenched».

L'approximation «quenched» est le choix fait habituellement pour pouvoir mener au bout les calculs sur réseau. Elle vient des difficultés numériques qu'implique le calcul du déterminant de chaque saveur de fermion. Le déterminant est pris égal à 1 dans le calcul de l'intégrale fonctionnelle. Des calculs «unquenched» avec des masses légères de quarks nécessitent des moyens intensifs de calcul. L'arrivée de la nouvelle génération de machines (au niveau du Tera-flops) est en grande partie liée au besoin de traiter les effets des quarks dynamiques avec une plus grande précision.

Le principal problème posé par l'approximation «quenched» est qu'elle n'a pas de paramètre ajustable permettant d'améliorer son comportement suivant les situations physiques. Plus que d'une approximation il s'agit d'une troncation. La seule façon de la tester est de comparer les résultats à ceux de la QCD complète (l'expérience ou les calculs «unquenched»). Rappelons que le «quenching» est une version modifiée de la QCD où l'on a supprimé la polarisation du vide et on a donc interdit les boucles de quarks de la mer. Dans cette approximation les quarks de la mer sont de masse infinie et les particules que l'on crée (les hadrons) ne peuvent pas se désintégrer. Par contre, toutes les propriétés physiques des quarks de valence sont préservées. La pratique a montré que dans un nombre important de cas, l'approximation «quenched» produit des résultats tout à fait compatibles avec l'expérience. En particulier, le spectre hadronique est bien reproduit. Cependant, au cours des dernières années il a été possible d'isoler des cas où les effets des quarks de la mer deviennent importants et où il devient donc indispensable de faire des simulations «unquenched». Pour la compréhension de ces effets, la théorie de perturbation chirale joue

un rôle central.

Nous avons vu (section II.2.1) que la χ PT est décrite par un lagrangien dont les champs fondamentaux sont les mésons pseudoscalaires légers (π , K , η). Les paramètres de la théorie effective (les masses de mésons, f_π ...) doivent être fournis par la QCD. Le développement perturbatif est possible parce que les masses de ces mésons sont faibles par rapport à Λ_{QCD} . Concrètement, l'échelle qui apparaît dans les expressions est $\Lambda_\chi \sim 4\pi f_\pi = 1.65$ GeV. Souvent on assimile aussi Λ_χ à l'échelle de masse du méson ρ , $m_\rho = 770$ MeV. Pour que le paramètre du développement soit petit il faudrait, approximativement, des masses de mésons pseudoscalaires autour de $m_{PS} \sim 200$ MeV $\sim 0.4m_K$.

La QCD et la QCD «quenched» (QQCD) sont deux théories en principe différentes (mais en pratique similaires) : leurs développements à la limite chirale doivent donc aussi être différents. Les effets des boucles des quarks viennent majoritairement des quarks légers provenant des fluctuations quantiques du vide. Concrètement, l'octet des mésons pseudoscalaires de la théorie chirale n'a pas les mêmes propriétés dans la QCD et dans la QQCD. Dans la QCD, le méson η est lourd ($m_{\eta'} \sim 1$ GeV) et peut donc se découpler des interactions des autres mésons pseudoscalaires, de ce fait il n'apparaît pas dans la matrice \mathcal{M} des mésons pseudoscalaires (cf. eq. (II.2.3)). Par contre dans la QQCD, le méson η n'est pas une vraie particule, il ne se découple pas de l'octet et les propagateurs des mésons font alors intervenir un double pôle : c'est cela qui induit des comportements différents entre ces théories à la limite chirale [240]-[242].

Il est intéressant de voir plus en détail d'où proviennent ces différences puisque ces effets déterminent la forme des développements chiraux des quantités physiques que l'on cherche à mesurer sur les réseaux. Nous allons considérer trois cas qui correspondent aux types de simulations que l'on peut faire actuellement : l'approximation «quenched» (QQCD), l'approximation «partiellement quenched» (PQQCD) et la théorie complète «unquenched» (QCD). L'approximation «quenched» revient à négliger les saveurs de quarks de la mer, $N_f = 0$, en gardant cependant les quarks de valence, $N_v \neq 0$. La QCD est la théorie où $N_f = N_v \neq 0$. Finalement, la PQQCD [243]-[245] est l'approximation où l'on inclut des saveurs de quarks dynamiques mais où leur nombre est différent de celui des quarks de valence, $N_f \neq 0$ et $N_f \neq N_v$. Notons d'ailleurs que l'identification de la théorie «unquenched» à la QCD suppose en plus $N_f = 3$, les effets des boucles des saveurs lourdes pouvant légitimement être négligés. La plupart des simulations «unquenched» sont faites avec $N_f = 2$ saveurs de quarks de la mer. L'introduction d'une troisième saveur est un processus en cours. Quelques résultats de simulations sont déjà disponibles [246, 247] mais la compréhension détaillée des algorithmes impliqués suscite encore des interrogations.

Pour voir les différences entre ces théories, considérons l'expression du propagateur

du méson η en laissant les saveurs N_f et N_v comme des paramètres libres. On peut aussi considérer un nombre indéfini de couleurs afin d'étudier le comportement à la limite de grand nombre de couleurs. Le propagateur du η' est obtenu par la somme d'une série de diagrammes où des paires de quarks $q\bar{q}$ se créent et s'annihilent en un nombre de plus en plus important lorsqu'on va vers les ordres élevés de la série. Le diagramme à chaque ordre de la série est usuellement appelé un «hairpin» («épingle à cheveux»). Les «hairpins» sont là pour introduire des boucles de quarks permettant d'augmenter la masse du η' jusqu'à sa valeur physique.

En sommant tous les termes de la série on obtient l'expression suivante pour le propagateur:

$$\eta'(q) = \frac{1}{q^2 + m_\pi^2} \left(1 - \frac{N_v}{N_f}\right) + \frac{N_v}{N_f} \frac{1}{q^2 + m_\pi^2 + m_0^2 \frac{N_f}{N_c}}. \quad (\text{IV.1.41})$$

Le premier terme correspond au propagateur habituel des mésons de Goldstone avec une quadri-impulsion q . Le deuxième terme fait par contre intervenir le paramètre m_0 introduit par la contribution des «hairpins» (m_0 est reliée à la susceptibilité topologique du vide de la théorie [248]). Dans la limite «quenched», uniquement le premier «hairpin» (le premier ordre de la série) intervient puisque ceux des ordres supérieurs font intervenir des boucles de quarks.

Voyons ce que devient ce propagateur lorsqu'on considère les différentes limites en N_f et N_v . Dans la QCD, *i.e.* $N_f = N_v$, le premier terme correspondant aux effets des bosons de Goldstone disparaît: le méson η est découplé de l'octet. Le deuxième terme engendre une masse pour le η' une masse $m_{\eta'}^2 = m_0^2 N_f / N_c$ qui comme on l'a dit précédemment est plutôt grande.

Dans le cas PQQCD, les deux termes de l'éq. (IV.1.41) sont présents. Les mésons pseudoscalaires légers se couplent alors à la fois aux mésons η et η'

Dans le cas «quenched», il y a aussi deux termes à considérer (ils sont obtenus à partir de l'éq. (IV.1.41), à la limite $N_f = 0$). L'expression du propagateur du η' est alors:

$$\eta'(q) = \frac{1}{q^2 + m_\pi^2} - m_0^2 \frac{1}{(q^2 + m_\pi^2)^2} \frac{N_v}{N_c}, \quad (\text{IV.1.42})$$

Dans ce cas, en plus de la contribution habituelle du propagateur des bosons de Goldstone, un double pôle apparaît dans le deuxième terme. De plus, ce terme intervient avec un signe moins et est donc interprété comme dû à un fantôme pouvant se coupler aux bosons de Goldstone. Ces fantômes ('ghost quarks', notés \tilde{q}) sont des bosons et on les interprète comme des champs venant éliminer les boucles fermioniques. L'équivalent de la matrice \mathcal{M} des mésons pseudoscalaires de la χ PT habituelle («unquenched») contient donc maintenant les bosons de Goldstone $q\bar{q}$ (π , K , η) mais aussi le méson η et les états liés de

fantômes $\tilde{q}\tilde{q}$ et de quarks avec des fantômes $\bar{q}\tilde{q}$ et $\tilde{q}q$. Ainsi, les théories de perturbation chirale de chacune des théories (QCD, QQCD, PQQCD) sont différentes et il faut prendre en compte chacune de ces particularités lorsqu'on les utilise pour guider les extrapolations chirales. Remarquons en passant que d'après l'éq. (IV.1.42), à la limite $N_c \rightarrow \infty$, la théorie quenched redevient identique à la QCD.

1.3.2 Le couplage \hat{g} et les logs-chiraux

Lorsqu'on passe à l'ordre des boucles (de mésons pseudoscalaires) dans les développements chiraux, on voit apparaître des contributions logarithmiques dans les termes du développement. La figure 1.11 schématise une boucle de pion dans le cas d'un méson D . Les vertex sont donnés par le couplage des mésons lourds-légers au pion, $g_{D^*\pi}$. La présence

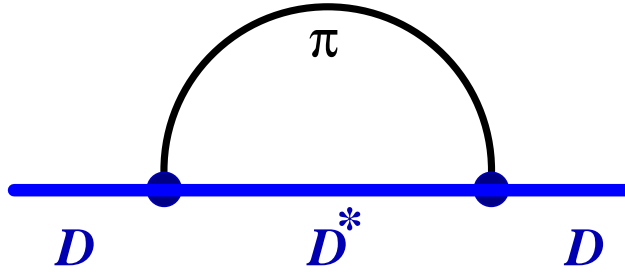


FIG. 1.11 – Boucle de pion et vertex où apparaît le couplage $g_{D^*\pi}$.

de ces logarithmes chiraux («logs-chiraux») est visible dans les trois théories considérées précédemment (QCD, QQCD et PQQCD) mais la forme de leurs contributions dans les expressions des quantités physiques est différente suivant le cas.

Nous allons revenir sur le cas des constantes de désintégration f_{B_q} , où $q = d, s$. Dans la section IV.1.2.7 nous avons présenté quelques résultats d'une étude de $f_{B_s}^{\text{stat}}$ à la limite statique. Nous avons aussi indiqué que les constantes de désintégration f_{B_q} jouent un rôle décisif dans l'étude des mélanges $\bar{B}_q B_q$. En effet, l'élément de matrice de l'opérateur responsable de ce mélange est proportionnel à f_{B_q} :

$$\langle \bar{B}_q | (\bar{b}q)_{V-A} (\bar{b}q)_{V-A} | B_q \rangle = \frac{8}{3} m_{B_q}^2 f_{B_q}^2 B_{B_q}, \quad (\text{IV.1.43})$$

où B_{B_q} est un autre paramètre non-perturbatif qu'il est important d'obtenir sur réseau.

Étudions f_{B_q} du point de vue de la théorie effective chirale des mésons lourds (cf. section II.2.2). L'expression des corrections au deuxième ordre du développement chirale

peut être écrite de la façon suivante:

$$f_{B_q} = \frac{\Phi}{\sqrt{m_{B_q}}} [1 + \Delta f_{B_q}] , \quad (\text{IV.1.44})$$

où l'on considère l'ordre dominant en $(1/m_B)$. Le terme Φ correspond à la valeur de $f_{B_q} \sqrt{m_{B_q}}$ aux limites statique et chirale. D'autre part Δf_{B_q} désigne la correction à une boucle.

Dans la QCD, les corrections Δf_{B_q} [56, 69, 250] sont données par les expressions suivantes:

$$\begin{aligned} \Delta f_{B_s} = & -\frac{1+3\widehat{g}^2}{(4\pi f)^2} \left[m_K^2 \ln(m_K^2/\Lambda_\chi^2) + \frac{1}{3} m_\eta^2 \ln(m_\eta^2/\Lambda_\chi^2) \right] \\ & + c_1(\Lambda_\chi) (m_K^2 + \frac{1}{2} m_\pi^2) + c_2(\Lambda_\chi) (m_K^2 - \frac{1}{2} m_\pi^2), \end{aligned} \quad (\text{IV.1.45})$$

et

$$\begin{aligned} \Delta f_{B_d} = & -\frac{1+3\widehat{g}^2}{(4\pi f)^2} \left[\frac{3}{4} m_\pi^2 \ln(m_\pi^2/\Lambda_\chi^2) + \frac{1}{2} m_K^2 \ln(m_K^2/\Lambda_\chi^2) + \frac{1}{12} m_\eta^2 \ln(m_\eta^2/\Lambda_\chi^2) \right] \\ & + c_1(\Lambda_\chi) (m_K^2 + \frac{1}{2} m_\pi^2) + \frac{1}{2} c_2(\Lambda_\chi) m_\pi^2, \end{aligned} \quad (\text{IV.1.46})$$

où \widehat{g} est la constante de couplage de la théorie effective. Comme on l'a vu précédemment, elle est reliée au couplage des mésons B et B au pion. On note, conformément aux notations de la théorie, $f = f$, la constante de désintégration du pion (à la limite chirale). Les éqs. (IV.1.45) et (IV.1.46) font aussi intervenir les «Low-Energy Constants» (LEC), c_i , et les logarithmes chiraux. L'effet de l'échelle non-physique Λ_χ est globalement absorbé dans l'expression finale de Δf_{B_q} : les LEC jouent le rôle de contre-termes pour éliminer ces dépendances.

La connaissance explicite de la forme des logarithmes chiraux est ce qui permet de guider les extrapolations chirales des données des réseaux. L'inconnue principale est donc la valeur du couplage \widehat{g} . Nous allons voir que la méconnaissance de sa valeur entraîne des variations considérables sur les résultats de B_q^f à la limite chirale. On peut espérer que les premières déterminations sur réseau de $B_{B\pi}$ (faites récemment à Orsay [218]) pourront aider à contraindre les extrapolations chirales de f_{B_q} et de bien d'autres quantités physiques liées aux saveurs lourdes. Notons aussi que la détermination précise des logs-chiraux permettra à la longue d'extraire les LEC, qui jusqu'à présent sont mal connues.

Un mot sur ces «Low-Energy Constants»: Elles sont des paramètres de la χ PT et ne sont donc pas déterminées par cette théorie. Les LEC doivent donc être obtenues par

des expériences ou par des calculs sur réseau. Comme on vient de le voir, la présence des LEC est liée à celle des «logs-chiraux» (par la nécessité d'éliminer les échelles non-physiques). Pour étudier les LEC sur réseau il faut donc en principe d'abord identifier les «logs-chiraux». Or, les données des réseaux, là où les simulations sont possibles actuellement, n'isolent pas de façon inambigüe leurs effets. La dépendance des quantités physiques suit généralement un comportement linéaire en m_{PS}^2 (la masse carrée du méson pseudoscalaire léger). D'après les eqs. (IV.1.45) et (IV.1.46), ceci correspond par exemple au derniers termes ayant pour coefficients la LEC $c_2(\Lambda_\chi)$. On pourrait donc penser à extraire cette LEC à partir de la pente de f_{B_q} en fonction de m_{PS}^2 . Cependant, ces développements chiraux ne sont valables que là où la χ PT s'applique et pour extraire $c_2(\Lambda_\chi)$, il faudrait d'abord atteindre cette zone de masses tout en soustrayant les effets des «logs-chiraux». Une fois que ces effets seront observés sur les réseaux, non seulement les extrapolations des quantités physiques seront mieux contrôlées, mais on disposera aussi des moyens pour déterminer les LEC. Les mêmes LEC réapparaissent dans les développements chiraux de différentes grandeurs: la connaissance de ces constantes est donc importante pour améliorer le pouvoir prédictif de la χ PT.

Afin de montrer comment les données des réseaux utilisent les expressions de la χ PT pour atteindre les masses légères des quarks, écrivons d'abord l'équivalent des eqs. (IV.1.45) et (IV.1.46) dans les cas «quenched» et «partiellement quenched» présentés précédemment.

Dans l'approximation «quenched» (Q), avec un quark de valence v , on obtient [249, 250]:

$$\Delta f_{\bar{v}v}^Q = -\frac{1}{(4\pi f)^2} \left[\frac{1 + 3\widehat{g}^2}{6} m_0^2 + \gamma m_{vv}^2 \right] \ln(m_{vv}^2/\Lambda_\chi^2) + c_0^Q(\Lambda_\chi) m_0^2 + c_2^Q(\Lambda_\chi) m_{vv}^2, \quad (\text{IV.1.47})$$

où m_0^2 est le terme de «hairpin» (présent dans le résidu du pôle double du méson, ηf , eq. (IV.1.42)). La constante γ est une combinaison des LEC de la théorie «quenched». La masse du pseudoscalaire léger contenant des quarks de valence v est notée m_b . Les LEC de la théorie «quenched», \mathcal{C} , sont propres à cette théorie et ne peuvent donc pas être reliées à celles de la QCD.

A la limite chirale, $m_{vv}^2 \rightarrow 0$, les termes proportionnels à m_0^2 divergent à cause des «logs». C'est une particularité de la théorie «quenched». Des tentatives pour mettre en évidence ces divergences dans les simulations ont été entreprises. A l'heure actuelle aucun résultat définitif n'a été établi. Il faut cependant admettre que ces divergences sont le symptôme que l'approximation «quenched» doit être utilisée avec précaution lorsqu'on s'intéresse à des grandeurs physiques contenant des logs-chiraux.

Une façon de contourner le problème est de construire des rapports *ad hoc* éliminant les termes logarithmiques. Plusieurs propositions de rapports ont été avancées, nous verrons par la suite un exemple précis de ces procédés pour étudier les logs-chiraux.

Dans la pratique, on n'arrive pas à extraire f_{B_q} à partir de l'éq. (IV.1.47). La plupart des extrapolations négligent les «logs-chiraux» et on considère uniquement une dépendance linéaire en m_{bv}^2 (dernier terme dans l'éq. (IV.1.47)). La raison en est que, comme on l'a remarqué précédemment, les données des réseaux montrent effectivement un comportement linéaire en m_{bv}^2 dans les régions de masse où les simulations sont effectuées ($\eta \sim m_s$). A ces valeurs de masses, les effets de logs-chiraux ne sont pas encore visibles. Une des tâches importantes à franchir par les calculs des réseaux sera justement celle de caractériser l'échelle à laquelle les effets chiraux commencent à être importants.

Considérons maintenant le cas «partiellement quenched» (PQ). Dans ce cas on peut éviter l'apparition des divergences qui sont présentes dans les logs-chiraux quenched. L'expression de la correction à f_{B_q} avec N_f saveurs de quarks dynamiques d'égénérées s'écrit [250]:

$$\Delta f_{bv}^{\text{PQ}} = -\frac{1 + 3\widehat{g}^2}{(4\pi f)^2} \left[\frac{N_f m_{vf}^2}{2} \ln(m_{vf}^2/\Lambda_\chi^2) + \frac{m_{ff}^2 - 2m_{vv}^2}{2N_f} \ln(m_{vv}^2/\Lambda_\chi^2) \right] + c_1(\Lambda_\chi)m_{ff}^2 + c_2(\Lambda_\chi)m_{vv}^2. \quad (\text{IV.1.48})$$

Cette expression a la même structure que celles que l'on obtient dans le cadre de la QCD (cf. éq. (IV.1.45) et (IV.1.46)). En effet, il est possible de passer à la théorie complète en prenant un même nombre de saveurs de quarks de la mer et de valence et en imposant qu'ils aient les mêmes masses. Ceci permet aussi de constater que les LEC, c_i , de la PQ-QCD coïncident avec celles de la QCD. Dans la pratique, les extrapolations chirales dans le cas «partiellement quenched» sont effectuées en deux étapes, d'abord pour les quarks de la mer (dans l'éq. (IV.1.48) il n'y a pas de «logs-chiraux» dépendant uniquement de ces quarks-là) puis pour les quarks de valence. Il est difficile de quantifier précisément les effets de ces extrapolations, mais on considère habituellement que les effets peuvent être de l'ordre de 5 à 10%.

1.3.3 Les mesures de f_{B_q}

Présentons maintenant comment apparaissent les effets des logs-chiraux dans les extrapolations chirales des données des réseaux. La figure 1.12 montre les données du groupe JLQCD (Japan Lattice QCD) [251] obtenues sur un réseau de maille $a \sim 0.09$ fm. Les quarks lourds sont décrits par l'action NRQCD et les quarks légers (de valence et de la

mer) par l'action de Wilson améliorée. Les masses légères se situent dans l'intervalle, $0.5 m_s \leq m_q \leq 1.5 m_s$. La figure 1.12 montre l'extrapolation vers la limite chirale de $\Phi_{f_{B_q}} \equiv f_{B_q} \sqrt{m_{B_q}}$ à partir des cinq masses carrées $m_\pi^2 \equiv m_{ff}^2$ des mésons pseudoscalaires de la mer. Ces extrapolations sont effectuées en gardant d'abord la masse du quark de valence fixe, $m_v = m_s$ et en considérant pour les masses de la mer un fit quadratique (du type, $a + bm_{ff}^2 + cm_{ff}^4$, où a , b et c sont les paramètres libres du fit) et selon une forme incluant des logs-chiraux, du type $m_{ff}^2 \ln(m_{ff}^2)$.

On peut observer que la prise en compte des «logs-chiraux» change (diminue) considérablement les valeurs extrapolées. De plus, quand la valeur du couplage \hat{g} varie entre 0.27 et 0.59 on constate un effet de l'ordre de 20% sur la valeur physique de f_{B_d} (à la limite chirale).

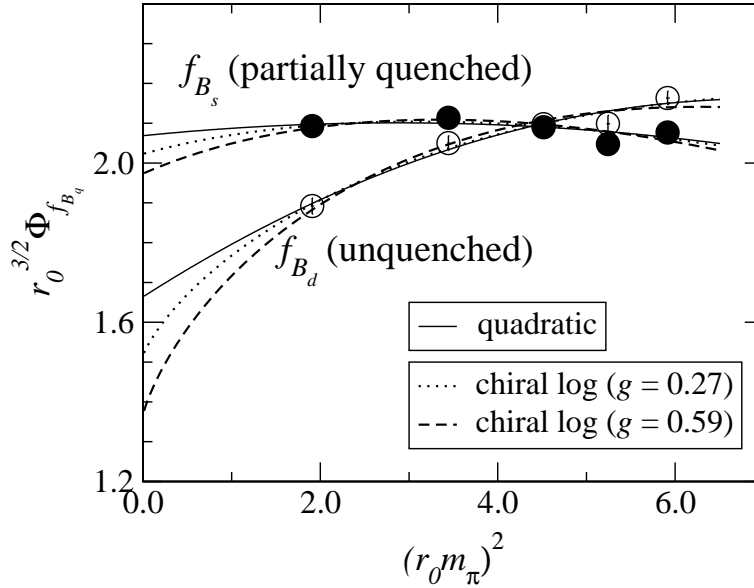


FIG. 1.12 – Extrapolations chirales de $\Phi_{f_{B_q}}$ en fonction de la masse carrée du méson pseudoscalaire léger $m_\pi = m_{ff}$ (de la mer) en unités de l'échelle de Sommer $r_0 \sim 0.5$ fm [19]. L'incertitude sur la connaissance de $g \equiv \hat{g}$ peut produire des variations de $\sim 20\%$ sur la valeur de f_{B_d} .

Les effets des logs-chiraux peuvent donc introduire des incertitudes importantes sur la mesure de f_{B_d} . Faisons tout de même une remarque quant aux résultats de JLQCD: les masses de quarks d'où l'on extrait la forme de logs-chiraux sont élevées. Il est donc possible que l'effet observé soit fortement dépendant du fait qu'on extrapole de très loin, dans une région où les effets «physiques» des logarithmes ne sont pas encore observables,

ou bien où les contributions des ordres supérieurs du développement chirale peuvent jouer un rôle. Prendre en compte les effets des ordres supérieurs suppose de considérer un plus grand nombre de paramètres de fit et donc nécessite plus de données. Si on réduit la valeur de la masse des quarks à partir de laquelle on autorise l'apparition des logarithmes chiraux leurs effets possibles diminuent. Pour certains choix de ce point de raccordement les logs-chiraux peuvent représenter un effet de seulement 10%. De façon générale il serait aussi intéressant de voir quel est l'effet des termes d'ordre supérieur en $1/m_q$ dans des développements tels que ceux des eqs. (IV.1.45) et (IV.1.46).

En raison de leur importance dans la phénoménologie il convient de suivre de près les effets systématiques qu'introduisent les extrapolations chirales dans les prédictions des réseaux. Dans le cas de la physique du B ce sont ces incertitudes qui dominent les erreurs systématiques des résultats. Nous avons déjà mentionné qu'une détermination indépendante de \hat{g} permet de réduire les incertitudes. Une façon complémentaire de traiter le problème est de construire des rapports permettant de réduire les effets des logarithmes.

Il a été observé récemment [252] que le double rapport

$$R = \frac{R_{f_B}}{R_{f_\pi}} = \frac{(f_{B_s}\sqrt{m_{B_s}})/(f_{B_d}\sqrt{m_{B_d}})}{f_K/f_\pi}, \quad (\text{IV.1.49})$$

permet de réduire de façon notable l'effet des logs-chiraux. En effet les expressions du développement chirale au premier ordre des rapports R_{f_B} et R_{f_π} sont semblables et les coefficients du développement numériquement comparables. La figure 1.13 montre ces effets en fonction de la masse du quark léger m_q .

En combinant les informations obtenues à partir du rapport R avec la valeur expérimentale $f_K/f_\pi = 1.22(1)$ on peut contraindre le rapport f_{B_s}/f_{B_d} . La valeur obtenue en prenant $\hat{g} = 0.52(7)(7)$ est $f_{B_s}/f_{B_d} = 1.22(8)$, en bon accord avec la moyenne de l'ensemble des résultats des réseaux [253] $f_{B_s}^f/f_{B_d} = 1.21(5)(1)$. Il est intéressant de remarquer que, dans la limite des incertitudes actuelles, les résultats des expériences et des réseaux indiquent que $f_{B_s}/f_{B_d} \sim f_{D_s}/f_{D_d} \sim f_K/f_\pi$. On peut interpréter la première relation comme un effet de la symétrie des quarks lourds. La troisième égalité montre qu'en construisant des rapports on peut isoler le contenu en quarks s et d des mésons au numérateur et au dénominateur, respectivement. Remarquons qu'un comportement analogue, mais moins bien compris, se manifeste dans la différence entre les masses carrées des mésons vectoriels et pseudoscalaires:

$$\begin{aligned} m_{B^*}^2 - m_B^2 &= 0.49 \text{ GeV}^2, & m_{B_s^*}^2 - m_{B_s}^2 &= 0.50 \text{ GeV}^2, \\ m_{D^*}^2 - m_D^2 &= 0.54 \text{ GeV}^2, & m_{D_s^*}^2 - m_{D_s}^2 &= 0.58 \text{ GeV}^2, \\ m_\rho^2 - m_\pi^2 &= 0.57 \text{ GeV}^2, & m_{K^*}^2 - m_K^2 &= 0.55 \text{ GeV}^2. \end{aligned} \quad (\text{IV.1.50})$$

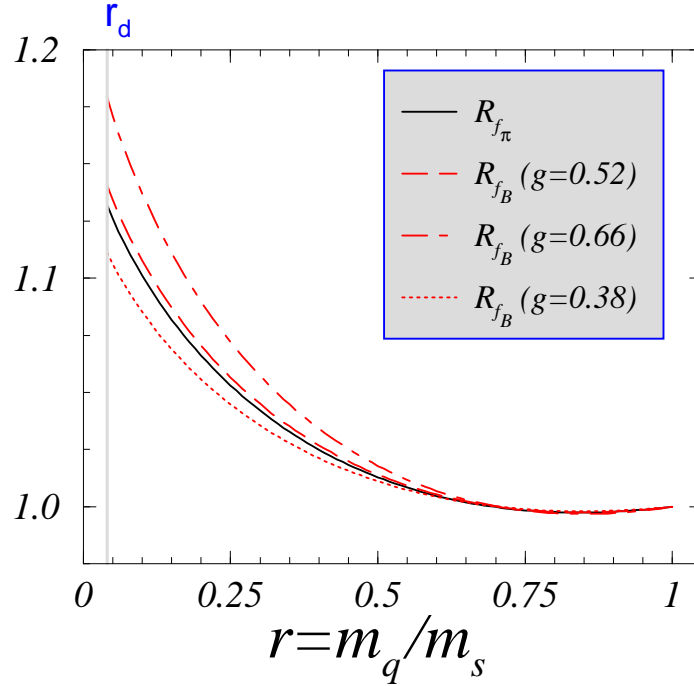


FIG. 1.13 – Effets des logs-chiraux dans les rapports R_{f_π} et R_{f_B} en fonction du rapport $r = m_q/m_s$, où la masse du quark étrange m_s est fixée. L'effet de la variation de \hat{g} sur la valeur de R_{f_B} est aussi présenté. Cette étude [252] montre que pour $\hat{g} \sim 0.52$ les effets des logarithmes de R_{f_π} et R_{f_B} sont pratiquement identiques. Notons que la valeur $\hat{g} = 0.48$ récemment obtenue par le groupe d'Orsay [218] permet de confirmer cet effet de suppression de logs-chiraux.

On observe une étonnante uniformité des valeurs alors que les échelles en jeu sont très différentes. Notons finalement qu'on obtient pour le rapport $f_{B_s}^{\text{unqu.}}/f_{B_s}^{\text{qu.}}$ entre les simulations «unquenched» et «quenched» de f_{B_s} la valeur $f_{B_s}^{\text{unqu.}}/f_{B_s}^{\text{qu.}} \sim 1.15$. L'effet du quenching est donc assez important (15%) et a tendance à diminuer la valeur de f_{B_s} . Ceci est l'un des exemples où l'on a pu quantifier l'effet du quenching directement sur le réseau. Des rapports du même type que R_{f_B} peuvent ici aussi être utilisés pour «factoriser» et réduire les effets du quenching. Par exemple, le rapport

$$\frac{(f_{B_s}/f_{B_d})^{N_f=2}}{(f_{B_s}/f_{B_d})^{N_f=0}} = 1.02 \pm 0.03 \quad (\text{IV.1.51})$$

montre un bon accord entre les valeurs obtenues par des simulations avec et sans quarks

dynamiques.

Les figures 1.14 et 1.15 font un bilan des mesures sur réseau de f_{B_s} et f_{B_d} . La première figure montre l'évolution des moyennes de f_{B_s} au cours du temps. La deuxième présente la distribution de ces mesures selon les groupes «lattice» et les actions de quarks lourds qu'ils utilisent.

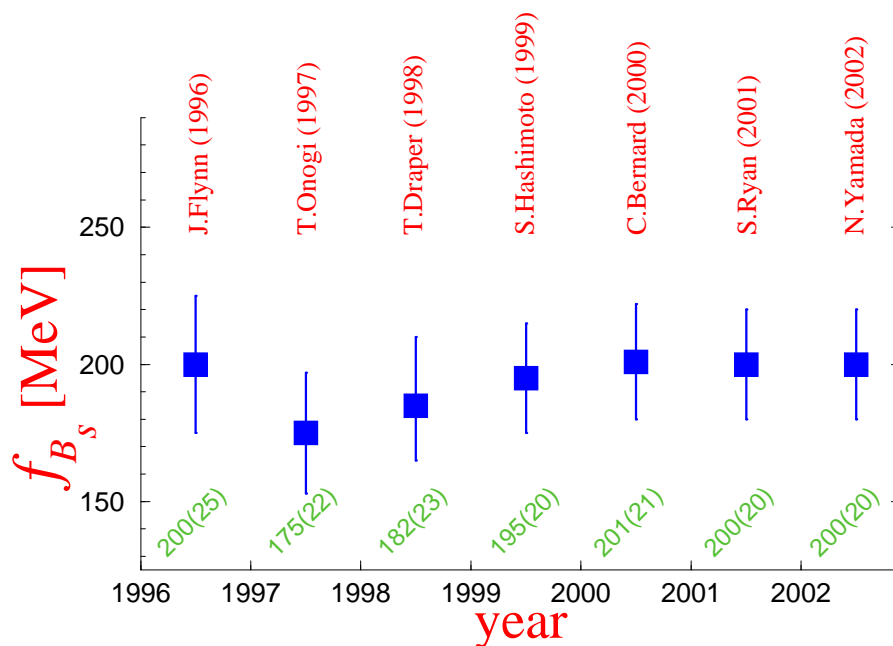


FIG. 1.14 – Evolution au cours du temps des déterminations «quenched» de f_{B_s} moyennées sur l'ensemble des données des réseaux [253].

Avant de passer à l'étude du couplage \hat{g} , il est bon de rappeler que la manière correcte de traiter les effets de la limite chirale serait d'effectuer les simulations avec des masses plus faibles de quarks. Pour cela il faudrait non seulement des machines plus puissantes mais aussi des algorithmes plus efficaces. Ces deux aspects sont déjà en pleine évolution: d'une part, plusieurs machines d'une performance de l'ordre du multi Tera-flops (cf. 1.4) doivent entrer en service dans les mois à venir, et d'autre part, des idées et des propositions nouvelles sont en cours de vérification [255–257] pour améliorer les algorithmes. Ces progrès auront sans doute un impact important dans la physique des saveurs lourdes. Dans la suite, je vais présenter brièvement l'état des lieux des outils de calcul actuels (en particulier ceux dont dispose le groupe d'Orsay) et les projets de construction de nouvelles machines.

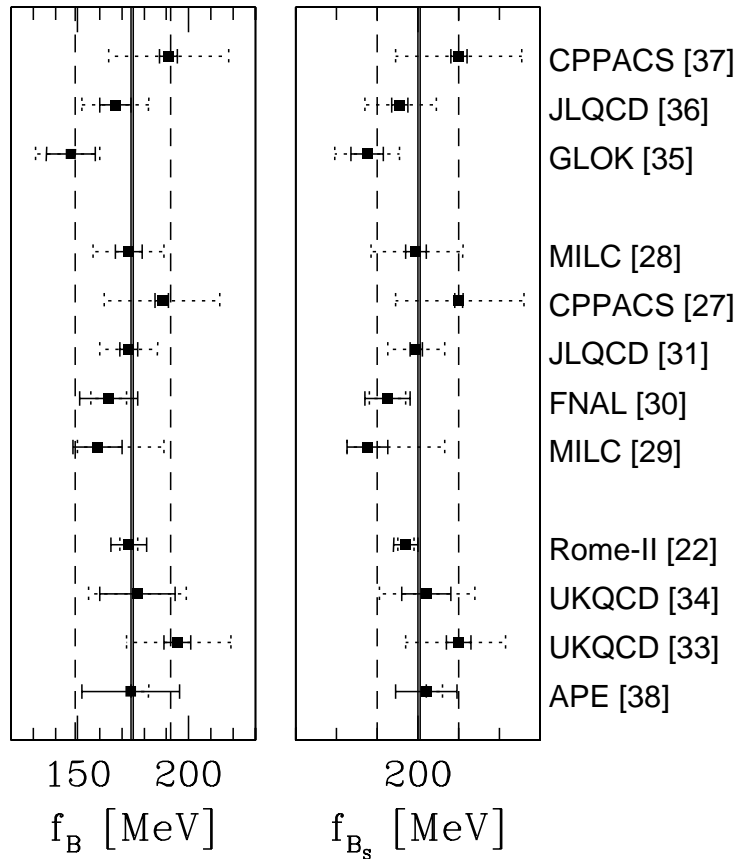


FIG. 1.15 – Mesures «quenched» de $f_B \equiv f_{B_d}$ et f_{B_s} provenant de différentes collaborations de QCD sur réseau [254]. De haut en bas, le premier groupe de données utilise les quarks lourds de l'action de la NRQCD; le deuxième groupe la méthode dite de Fermilab et le troisième groupe des quarks relativistes. Le résultat de l'approche de Tor Vergata est celui qui est noté «Rome II».

1.4 Les moyens de calcul de la QCD sur réseau

Les calculs de QCD sur réseau effectués au Laboratoire de Physique Théorique d'Orsay utilisent une machine APEmille de la troisième génération des machines APE (Array Processor Experiment, projet initié dans les années 80 en Italie). L'APEmille est une machine massivement parallèle spécifiquement optimisée pour des calculs de QCD. Elle est composée de nœuds (processeurs) distribués sur une grille à trois dimensions avec des conditions périodiques. L'architecture est du type SIMD (Single Instruction - Multiple Data) : un même programme est exécuté dans l'ensemble des nœuds qui réalisent simultanément la même instruction (la fréquence de l'horloge étant de 66 GHz). Chaque nœud a par contre accès à une mémoire locale et est connecté avec ses 6 plus proches voisins. Ceci permet de distribuer les données des quantités physiques (les éléments de matrice des champs) sur les différents nœuds tout en réalisant les mêmes opérations en parallèle sur chaque processeur.

A chaque cycle d'horloge, un nœud est capable de faire une opération $a + b \times c$, où a , b et c sont des nombres complexes en simple précision. Ceci correspond à 8 opérations sur des nombres réels par cycle et donc, du fait de la fréquence de 66 GHz, chaque nœud a un rendement de 528 Mflops. Les «flops» (floating-point operations per second) correspondent au nombre d'opérations sur les nombres réels faites par seconde. La machine APEmille d'Orsay est composée de 32 nœuds et a donc une puissance de 17 Gflops. Dans la communauté des calculs de QCD sur réseau ceci constitue cependant une performance plutôt limitée. Cela représente plus d'un ordre de grandeur en moins par rapport aux autres APEmille européennes (Italie, Allemagne).

Au vu du rôle majeur des simulations numériques sur réseau dans les calculs de QCD (nous avons vu plusieurs exemples en présentant la phénoménologie du Modèle Standard mais les applications sont encore bien plus vastes) il devient essentiel, non seulement de diminuer ces différences mais aussi d'organiser des collaborations afin de mettre en place la nouvelle génération de machines (de l'ordre du multi Tera flops, 1 Tera = 10^{12}). Alors que le premier point reste encore non résolu (les moyens financiers accordés aux calculs sur réseau en France sont bien inférieurs à ceux de ses voisins européens), le deuxième est déjà dans une étape avancée : le groupe d'Orsay collabore avec l'INFN (Italie) et DESY (Allemagne) dans le projet apeNEXT [258] visant à la construction d'une machine de 10 Tera flops effectuant des calculs en double précision. Un autre collaboration européenne en cours est SciParC (Science on Parallel Computers). Ce projet vise à optimiser les échanges entre différents grands centres de calculs numériques afin d'optimiser leurs capacités et d'élargir leur domaine d'application. Récemment un nouvel axe de collaboration avec la physique des particules expérimentale est en train d'être poursuivi. Le dialogue entre le

monde expérimental et celui des calculs non-perturbatifs de QCD est d'une importance majeure comme on a pu le constater dans le chapitre consacré à la phénoménologie du Modèle Standard. Le renforcement du contact entre ces groupes au sein même des laboratoires d'Orsay suit en effet la tendance propre au domaine de la phénoménologie: il devient indispensable de comprendre les méthodes et de pouvoir interpréter à la fois les résultats expérimentaux et théoriques. La physique des saveurs est remplie d'exemples qui témoignent des avantages de ces échanges. On s'attend donc à ce que cette nouvelle collaboration soit l'occasion de créer un pôle de phénoménologie tirant profit de la diversité des approches que l'on peut rencontrer parmi les projets de recherche des laboratoires d'Orsay.

Revenons au problème du manque relatif en moyens de calcul et à quelques unes de ses conséquences. L'une d'entre elles est que les projets entrepris par le groupe d'Orsay² doivent se focaliser sur des approches originales plutôt que sur des mesures de précision. En particulier les projets auxquels j'ai participé pendant la thèse, *i.e.* l'étude la fonction d'onde du pion sur le cône de lumière et celle du couplage \hat{g} , s'inscrivent sur cette ligne dans la mesure où ils constituent une première approche directe sur réseau en vue de leur détermination. Une autre conséquence est qu'il est nécessaire de chercher des moyens de calcul supplémentaires. Sur ce point, l'idée a été de construire une grappe ('cluster') composée actuellement de 12 PCs travaillant en parallèle. Ce cluster pourra par exemple être utilisé pour des simulations avec des fermions «overlap». Je donnerai par la suite quelques détails sur les avantages et les limites de ces outils.

Rappelons pour finir l'état d'avancement actuel de trois grands projets de calcul numérique sur réseau:

Le projet **apeNEXT** [258] est dans son étape finale. Les premiers processeurs ont déjà été construits et au cours de l'année 2004, 256 nœuds doivent être assemblés.

Les premiers tests des processeurs sont en cours de réalisation et des résultats préliminaires de physique doivent être présentés dans les mois à venir. La machine apeNEXT devra permettre de faire des simulations de la QCD «unquenched» sur des réseaux de volume de l'ordre de $48^3 \times 96$, *i.e.* des tailles physiques $L = 2 \div 4$ fm et $a = 0.05 \div 0.1$ fm, et des masses $m_\pi/m_\rho \simeq 0.35$ (à comparer à la valeur physique 0.18). Pour des simulations «quenched», utiles pour les calculs des saveurs lourdes, on pourra atteindre des volumes très grands: $100^3 \times 100 \div 200$, *i.e.* $L = 1.5 \div 2.0$ fm et $a = 0.02 \div 0.1$ fm. Pour établir un point de comparaison, les simulations actuelles sont faites sur des réseaux $3\theta \times 60$ et des dimensions physiques $L \sim 2$ fm et $a \sim 0.07$ fm. Pour les calculs «unquenched», il

2. Nous entendons par là le groupe issu de la collaboration du LPT-Orsay avec l'Ecole Polytechnique ainsi qu'avec d'autres institutions en France (LPC de Clermont-Ferrand) et Espagne (Universidades de Huelva y de Sevilla).

faut des processeurs performants permettant de calculer le déterminant fermionique. Par contre, pour améliorer les calculs «quenched» il faut faire appel à de grands volumes, ce que nécessite de grands espaces mémoire. Améliorer d'un facteur deux les incertitudes des résultats physiques réclame des améliorations de deux ordres de grandeur dans la puissance de calcul.

Le projet **QCDOC** ('QCD on a chip') [259] est un projet commun de l'Université de Columbia, UKQCD (la collaboration britannique pour les calculs sur réseau) et IBM. De même que pour apeNEXT il vise à des performances dans le domaine des multi-Tera flops. Il en est actuellement à l'étape du test des prototypes. Un premier système composé de 128 nœuds doit pouvoir être utilisé très prochainement et on s'attend à des performances de 5 Tflops pour la fin de 2004 sur les machines situées à Edinbourg et Riken et 2.5 Tflops pour celle de Columbia. Cette machine est optimisée pour des déterminations des propriétés de quarks de masses faibles.

Les **grappes de PC**: elles connaissent un développement très important et, pour certains calculs, sont devenues compétitives avec l'arrivée des connections de réseau rapides. Elles bénéficient de plusieurs avantages: la vitesse croissante et les prix des processeurs du commerce, la flexibilité des améliorations du matériel informatique, la diffusion d'un nombre important de logiciels en accès libre. Les limites sont la consommation énergétique, le dégagement de chaleur et le système de réfrigération qu'implique le fait d'héberger un grand nombre de processeurs. Le coût énergétique est estimé à 5 ou 10 fois celui des machines apeNEXT ou QCDOC. D'autre part, la performance des «grappe» de PCs est encore un ordre de grandeur en dessous de ce que l'on pourra atteindre avec les machines apeNEXT ou QCDOC. L'utilisation des PCs pour des calculs de QCD date d'il y a déjà quelques années. Actuellement un nombre considérable de groupes de QCD sur réseau utilisent cet outil pour faire du calcul parallèle [260]. Des travaux visant à optimiser la compatibilité des calculs de QCD aux contraintes informatiques actuelles sont en cours de développement [261].

Le tableau 1.1 montre une comparaison des performances et des coûts de différents moyens de calculs devant jouer un rôle important dans le futur proche. Dans le cas des grappes de PC, l'exemple choisi est celui de Latfor [262] qui peut actuellement simuler des fermions de Wilson dynamiques sur des réseaux de volume $32^3 \times 64$ avec des masses légères $0.3 < m_{\bar{\kappa}}/m_{\rho} < 0.6$.

Le domaine de la QCD sur réseau subit actuellement la transition vers la généralisation des simulations «unquenched». De plus, des progrès théoriques importants ont été réalisés de sorte qu'il est à présent possible de simuler des quarks avec les bonnes propriétés chirales à maille de réseau finie. Finalement, on espère que les mailles et les volumes des

Projet	Année	Nbre. Proc.	P	R	W	C
apeNEXT	2004/5	256	0.5 ÷ 10-15	~1	0.02	2048
QCDOC	2004	512	2.5 ÷ 10	~1	0.01	> 16k
Grappes de PCs	2003	512	0.220	~1	0.12	512

TAB. 1.1 – *Comparaison des différents moyens de calcul de QCD sur réseau en cours de construction et d'utilisation. La deuxième colonne désigne le nombre de processeurs en jeu, P est la performance totale en Tflops soutenus (pour apeNEXT et QCDOC, la première valeur indique ce qu'on attend pour les première versions et la deuxième les limites supérieures visées), R est le rapport prix/performance en \$/Mflops extrapolé à janvier 2005, W est la consommation énergétique en W/Mflops et C le nombre total de processeurs considérés ou projetés [260].*

réseaux permettront d'étudier directement des mésons B , *i.e.* sans faire appel à des théories effectives et, idéalement, en incluant des fermions dynamiques. Ce sont des projets ambitieux et importants pour le domaine et sans doute aussi pour l'ensemble de la physique des particules. Ils impliquent non seulement des moyens de calculs importants mais aussi, et en parallèle, des progrès du point de vue théorique et algorithmique.

Chapitre 2

La constante de couplage \hat{g} sur réseau

Au cours des chapitres précédents nous avons présenté l'origine de la constante de couplage \hat{g} et son rôle dans les théories effectives des mésons lourds-légers et dans certains phénomènes reliés en particulier aux désintégrations semi-leptoniques des mésons lourds-légers ou aux effets de boucles de pions dans les développements chiraux de grandeurs contenant des saveurs lourdes.

2.1 Principe du calcul

Je vais à présent montrer comment on peut calculer ce couplage au moyen de simulations de QCD. Les étapes menant à l'expression de \hat{g} en termes des éléments de matrice calculés sur le réseau sont présentées en détail dans les articles joints. Je vais donc ici me limiter ici à rappeler et à compléter quelques points qui ne sont abordés que très rapidement dans les articles.

Je vais montrer dans ce qui suit comment le couplage \hat{g} est relié à l'élément de matrice du courant axial. Le point de départ est l'expression de $g_{H^*H\pi}$, où H désigne de façon générique les mésons B ou D ; $g_{H^*H\pi}$ est défini par l'élément de matrice (cf. eq. II.2.35) :

$$\langle \pi(q) | H(p') | H^*(p, \lambda) \rangle = g_{H^*H\pi} (q \cdot \epsilon^\lambda(p)) , \quad (\text{IV.2.1})$$

où $q = p - p'$ et $\epsilon^\lambda(p)$ est le vecteur polarisation du méson vecteur H^* .

Quelques rappels sur les notations: le couplage \hat{g} est défini à la limite de masse infinie du quark lourd et à la limite des masses nulles des quarks légers. Lorsqu'on travaille dans le secteur des mésons B ou D des corrections en puissances de l'inverse de la masse lourde peuvent apparaître (malgré le fait que par sa définition à la limite statique, \hat{g} est

une constante adimensionnée). Pour prendre en compte ces effets nous incluons, lorsque l'ambiguïté se présente, des indices « ∞ », « b » ou « c » pour distinguer les masses de quarks statique, b et c respectivement.

Nous présentons ici brièvement le rapport entre cette expression et l'élément de matrice du courant axial l'éger-l'éger $A_\mu(x) = \bar{\Psi}_q(x)\gamma_5\gamma_\mu\Psi_q(x)$ entre les états des mésons D et \bar{D}

En appliquant le courant $A_\mu(x)$ entre le pion et le vide on trouve l'expression de f_π :

$$\langle 0|A_\mu|\pi(q)\rangle = if_\pi q_\mu, \quad (\text{IV.2.2})$$

et la divergence du courant axial s'écrit donc:

$$\langle 0|\partial^\mu A_\mu|\pi(q)\rangle = if_\pi m_\pi^2. \quad (\text{IV.2.3})$$

La relation de PCAC (Partial Conservation of the Axial Current) découle de l'éq. (IV.2.3) a la forme suivante :

$$\pi = \frac{1}{f_\pi m_\pi^2} \partial^\mu A_\mu. \quad (\text{IV.2.4})$$

PCAC indique qu'une fois les états bien normalisés on peut, de façon équivalente, utiliser la divergence du courant axial comme un champ du pion.

Considérons maintenant la formule de réduction de Lehmann-Symanzik-Zimmermann (LSZ). Elle s'écrit:

$$\langle \pi(q) H | \mathcal{O}(0) | H^* \rangle = i \int d^4x e^{iq \cdot x} (m_\pi^2 - q^2) \langle H | T\pi(x)\mathcal{O}(0) | H^* \rangle, \quad (\text{IV.2.5})$$

où T est le produit ordonné en temps. On s'intéresse ici au cas le plus simple où l'opérateur \mathcal{O} est l'identité (cf. éq. (IV.2.1)).

En remplaçant l'expression de PCAC dans l'éq. (IV.2.5) on trouve:

$$\langle \pi(q) H | H^* \rangle = i \frac{(m_\pi^2 - q^2)}{f_\pi m_\pi^2} \int d^4x e^{iq \cdot x} \langle H | \partial^\mu A_\mu(x) | H^* \rangle. \quad (\text{IV.2.6})$$

On peut donc écrire une expression $g_{H^*H\pi}$ de l'éq. (IV.2.1) en fonction de la divergence du courant axial sous la forme:

$$g_{H^*H\pi} (q \cdot \epsilon^\lambda(p)) = i \frac{(m_\pi^2 - q^2)}{f_\pi m_\pi^2} \langle H(p') | \partial^\mu A_\mu(q^2) | H^*(p, \lambda) \rangle. \quad (\text{IV.2.7})$$

La figure 2.1 illustre comment est défini le couplage $g_{*D\pi}$ entre les mésons \bar{D} , D et le pion. Pour éclaircir ce point récrivons l'éq. (IV.2.7) en isolant l'élément de matrice:

$$\langle H(p') | \partial^\mu A_\mu(q^2) | H^*(p, \lambda) \rangle = -i g_{H^*H\pi} (q \cdot \epsilon^\lambda(p)) \frac{f_\pi m_\pi^2}{(m_\pi^2 - q^2)}. \quad (\text{IV.2.8})$$

Sous cette forme on peut interpréter facilement la figure 2.1: $g_{D^*D\pi}$ apparaît au vertex en tant que couplage des mésons lourds au pion (ou comme l'amplitude d'émission d'un pion mou). Le propagateur de pion $1/(m_\pi^2 - q^2)$ correspond à la ligne en pointillés et la désintégration du pion au terme πf

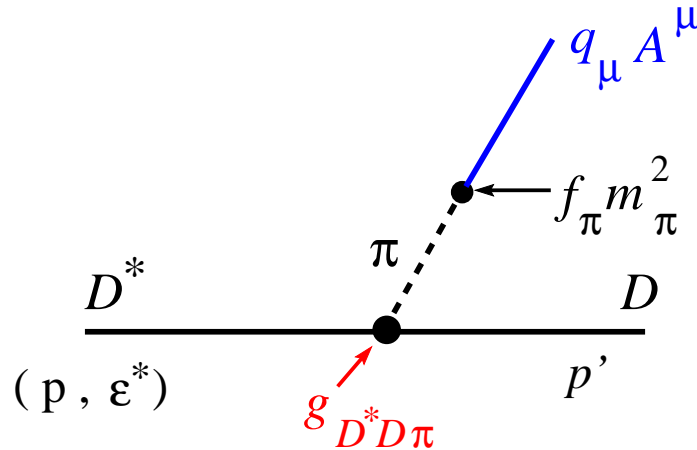


FIG. 2.1 – Définition du couplage $g_{D^*D\pi}$. Ce schéma illustre la relation entre ce couplage et l'élément de matrice de la divergence du courant axial entre les états D^* et D .

A la limite du pion mou $q^2 \rightarrow 0$, cette expression devient:

$$g_{H^*H\pi} (q \cdot \epsilon^\lambda(p)) = i \frac{1}{f_\pi} \langle H(p') | \partial^\mu A_\mu(0) | H^*(p, \lambda) \rangle. \quad (\text{IV.2.9})$$

Il est légitime de considérer la limite du pion mou puisque les états H et H^* sont lourds et que le pion est léger: si l'impulsion vérifie $\vec{q} = \vec{0}$ alors $q^2 = m_{H^*}^2 - m_H^2 \rightarrow 0$ lorsque $m_Q \rightarrow \infty$ (i.e. à la limite statique).

L'étape finale consiste à écrire la paramétrisation habituelle de l'élément de matrice du courant axial en termes des trois facteurs de forme $A_{0,1,2}(q^2)$. Ce sont ces facteurs de forme que l'on calcule sur réseau. A partir de cette paramétrisation on détermine la divergence du courant axial et l'on utilise l'expression obtenue dans l'éq. (IV.2.9) afin d'obtenir $g_{H^*H\pi}$. Ces étapes du calcul sont détaillées dans les articles. La figure 2.2 illustre le corrélateur à trois points que l'on calcule sur réseau. On voit en particulier qu'il fait intervenir le courant axial à un temps t variable.

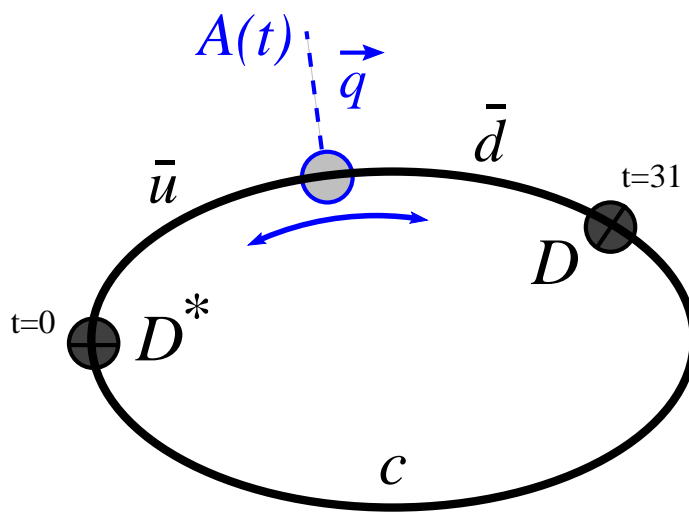


FIG. 2.2 – Représentation schématique du corrélateur à trois points du réseau permettant d'extraire $g_{D^*D\pi}$. Les champs interpolants des mésons pseudoscalaires sont insérés à des temps fixes, $t = 0$ et $t = 31a$, respectivement. Le courant axial est par contre inséré à un temps variable t . La position particulière des quarks utilisée dans ce schéma correspond uniquement à une illustration. Dans la simulation, les quarks et les antiquarks peuvent en réalité se propager sur l'ensemble de la ligne représentée.

2.2 Première détermination du couplage $g_{D^*D\pi}$ sur réseau

Dans l'article suivant [72] sont exposés les résultats d'un calcul sur réseau du couplage $g_{D^*D\pi}$. L'intérêt de ce calcul est d'une part qu'il est obtenu dans des régions de masses lourdes (autour du quark charmé) où les réseaux actuels peuvent opérer sans faire appel à des approximations (des théories effectives en particulier). D'autre part, ce résultat (à l'approximation «quenched» près) peut être directement comparé à la mesure expérimentale de CLEO. L'accord avec cette mesure étant bon, on peut alors non seulement tester la validité de la méthode des réseaux et sa capacité à fournir des résultats physiques fiables, mais on peut aussi considérer ce résultat comme une référence pour un calcul de $g_{B^*B\pi}$ (qui, rappelons-le, n'est pas mesurable expérimentalement). Cette détermination sera l'objet de l'article présentée par la suite.

Les outils nécessaires à la compréhension des aspects techniques de ces articles, ainsi que le contexte physique dans lequel ils s'inscrivent ont fait l'objet d'une bonne partie de ce qui a été présenté auparavant.

LPT Orsay 02-01

ROMA-1330/02

UHU-FT/02-22

hep-ph/0206237

Phys. Rev. D **66** (2002) 074504

First lattice QCD estimate of the $g_{D^*D\pi}$ coupling

A. ABADA^a, D. BEĆIREVIĆ^b, PH. BOUCAUD^a, G. HERDOIZA^a,
J.P. LEROY^a, A. LE YAOUANC^a, O. PÈNE^a, J. RODRÍGUEZ-QUINTERO^c

^a *Laboratoire de Physique Théorique (Bât.210), Université de Paris XI,
Centre d'Orsay, 91405 Orsay-Cedex, France.*

^b *Dipartimento di Fisica, Università di Roma "La Sapienza",
Piazzale Aldo Moro 2, I-00185 Rome, Italy.*

^c *Dpto. de Física Aplicada, E.P.S. La Rábida, Universidad de Huelva,
21819 Palos de la fra., Spain*

Abstract

We present the results of the first lattice QCD study of the strong coupling $g_{D^*D\pi}$. From our simulations in the quenched approximation, we obtain $g_{D^*D\pi} = 18.8 \pm 2.3_{-2.0}^{+1.1}$ and $\hat{g}_c = 0.67 \pm 0.08_{-0.06}^{+0.04}$. Whereas previous theoretical studies gave different predictions, our result favours a large value for \hat{g}_c . It agrees very well with the recent experimental value by CLEO. \hat{g} varies very little with the heavy mass and we find in the infinite mass limit $\hat{g}_\infty = 0.69(18)$.

PACS: 12.38.Gc (Lattice QCD calculations), 13.75.Lb (Meson-meson interactions)

2.2.1 Introduction

Recent measurement of the full width of the charged D^* -meson, $\Gamma(D^{*+}) = 96 \pm 4 \pm 22$ keV [73], allowed for the experimental determination of the strong coupling of D -mesons to the P -wave pion $g_{D^{*+}D^0\pi}$, namely

$$g_{D^*D\pi} = 17.9 \pm 0.3 \pm 1.9, \quad \text{i.e. } \hat{g} = 0.59 \pm 0.07, \quad (\text{IV.2.10})$$

where the definition of \hat{g} in [73] is quoted below. This coupling has been extensively studied in the literature¹, with a variety of approaches: model independent approaches, the QCD sum rules, the quark models.

Model independent approaches [2, 3] have produced windows or bounds which have been confirmed by experiment eq. (IV.2.49). By the way a rigorous bound $\hat{g} < 1$ is set by the Adler-Weisberger sum rule [2, 4]. Notice that $\hat{g} = 1$ is the naive non relativistic quark model result, to be lowered by relativistic corrections.

The various *QCD sum rules* have been discussed with much care before and after the measurement in eq. (IV.2.49) and have shown a surprising convergence towards a very low value, almost a factor two below eq. (IV.2.49), see [6]. In particular, in [7], a value $g_{D^*D\pi} = 10.5 \pm 3.0$ has been quoted. No convincing explanation has been found for this discrepancy.

Quark models, on the contrary, can accommodate large values. Good predictions have been produced, prior to the experimental measure [2, 8]. But there is a large spectrum of predictions 0.3-0.8, corresponding to a multiplicity of models or choice of parameters, therefore one can wonder whether successes are truly significant, or rather due to a happy choice. Without entering into details, one can answer as follows:

1) Light-front quark models have indeed a large range of predictions 0.3-0.8, mainly because they use free quark Dirac spinors, which yield relativistic corrections very sensitive to the choice of the ill-determined light quark mass.

2) Dirac type models, on the contrary, yield naturally large values of $\hat{g} \geq 0.6$, because anyway, a large effective mass is generated for the light quark through the potential [2]. These authors find $\hat{g} = 0.6$. Too large values obtained in other calculations can be corrected by a quark current renormalisation factor, but one loses predictive power.

Before claiming that the QCD based evaluations for this coupling are in conflict with the experimental value, it is important to compute this coupling by employing the lattice QCD simulations, as recently suggested in ref. [11]. An exploratory lattice calculation

1. A rather exhaustive list of results for this coupling can be found in [2, 3]. To the references listed there, one should add also ref. [10].

has been performed in ref. [13] but in the static limit of the heavy quark effective theory (HQET). Here we will directly work in QCD with relativistic propagating quarks since, contrary to the case of b -physics, currently accessible lattices allow to accommodate the charm quark mass and therefore no heavy quark extrapolation is needed. This makes the lattice study of $g_{D^*D\pi}$ rather clean.

In this paper, we report the first calculation of this type in which we used the (improved) Wilson fermions. Our final result at $\beta = 6.2$ is

$$g_{D^*D\pi} = 18.8 \pm 2.3_{-2.0}^{+1.1}, \quad (\text{IV.2.11})$$

thus in a very good agreement with experiment. The small value predicted by the QCD sum rule still needs an explanation.

The value of the coupling $g_{D^*D\pi}$ provides also the access to the \hat{g} -coupling which is one of the main parameters of the approach based on the use of chiral perturbation theory for the heavy-light systems. \hat{g} is related to $g_{D^*D\pi}$ through

$$g_{D^*D\pi} = \begin{cases} 2m_{D^*} \hat{g}_c / f_\pi & , \\ 2\sqrt{m_D m_{D^*}} \hat{g}_c / f_\pi & , \\ 2m_D \hat{g}_c / f_\pi & , \end{cases}$$

where we use $f_\pi = 132$ MeV. All the above definitions coincide up to $1/m_c$ corrections. Throughout this paper we will use the most symmetric definition [2]. Notice that we assigned a subscript c , to stress that the \hat{g} is not obtained with the infinitely heavy quark (mesons), but rather from the (not-so-heavy) charmed heavy-light mesons. By using the definition [2], from our result (IV.2.11), we obtain

$$\hat{g}_c = 0.67 \pm 0.08_{-0.06}^{+0.04}. \quad (\text{IV.2.12})$$

We performed the simulations at two values of the lattice spacing ($\beta = 6.0$ and $\beta = 6.2$) to study the systematic effects which are discussed in section 6. The simulation was firstly done at $\beta = 6.0$ and will be summarized in section 5. Our main results are given from the simulations at $\beta = 6.2$ since they have smaller $\mathcal{O}(a)$ -effects. This analysis is detailed in sections 2 to 4.

2.2.2 Lattice parametrization and results of the analysis of the two-point functions

The main results presented in this paper and detailed in this section are obtained from the simulation on a $24^3 \times 64$ lattice with periodic boundary conditions, at $\beta = 6.2$. Our sample contains 100 independent $SU(3)$ gauge configurations produced in the quenched approximation (*i.e.* $n_F = 0$). The quark propagators are computed by using the following Wilson hopping parameters for light (q) and heavy (Q) quarks:

$$\begin{aligned} \kappa_q &= 0.1344_{q_1}, 0.1348_{q_2}, 0.1351_{q_3}; \\ \kappa_Q &= 0.1250_{Q_1}, 0.1220_{Q_2}, 0.1190_{Q_3}, \end{aligned} \quad (\text{IV.2.13})$$

where we introduced the labels q_{1-3} and Q_{1-3} that will be used throughout this paper. We have implemented the non-perturbative $\mathcal{O}(a)$ improvement of the Wilson fermion action, by setting $c_{SW} = 1.614$ [29].

In this section we consider the standard two-point correlation functions

$$C_{PP}^{(2)}(t_x; \vec{p}) = \langle \sum_{\vec{x}} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} P(0)P(x) \rangle, \quad C_{V_\mu V_\nu}^{(2)}(t_x; \vec{p}) = \langle \sum_{\vec{x}} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} V_\mu(0)V_\nu(x) \rangle \quad (\text{IV.2.14})$$

where $t_x > 0$ and where $P \equiv \bar{q}'\gamma_5 q$ and $V_\mu \equiv \bar{q}'\gamma_\mu q$ which will be used with heavy-light and light-light quarks. We define the constants \mathcal{Z}_P and \mathcal{Z}_V so that

$$C_{PP}^{(2)}(t_x; \vec{p}) \simeq \mathcal{Z}_P \frac{e^{-E_P t_x}}{2E_P}, \quad C_{V_\mu V_\nu}^{(2)}(t_x; \vec{p}) \simeq \mathcal{Z}_V \frac{e^{-E_V t_x}}{2E_V} (\delta_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu / p^2). \quad (\text{IV.2.15})$$

at large t_x , where E_P (E_V) is the ground state pseudoscalar (vector) meson energy.

From the standard study of these two-point light-light correlation functions, we extracted the masses of pseudoscalar (am_P) and vector mesons (am_V), the decay constant (af_P) and the (bare improved) light quark mass ($a\rho$) that we obtain by using the axial Ward identity, $\partial_\mu A_\mu^I = 2\rho P$. In table 2.1, we list our results for both the degenerate and non-degenerate combinations of our light quarks. In the computation of the pseudoscalar decay constant and of the bare quark mass we improved the axial current at $\mathcal{O}(a)$, *i.e.*

$$A_\mu^I(x) = A_\mu(x) + c_A(g_0^2)\partial_\mu P(x), \quad (\text{IV.2.16})$$

where $c_A = -0.038(4)$, as determined non-perturbatively at $\beta = 6.2$ in refs. [16, 19, 29]. In the computation of the renormalized decay constant, the $\mathcal{O}(a\rho)$ effects are eliminated by redefining

$$Z_A^I(g_0^2) = Z_A^{(0)}(g_0^2) \left(1 + \tilde{b}_A(g_0^2)a\rho \right), \quad (\text{IV.2.17})$$

	am_P	am_V	$a\rho$	af_P^R
$\kappa_{q1} - \kappa_{q1}$	0.306(1)	0.409(3)	0.0413(4)	0.068(2)
$\kappa_{q1} - \kappa_{q2}$	0.284(2)	0.393(4)	0.0354(3)	0.065(2)
$\kappa_{q1} - \kappa_{q3}$	0.266(2)	0.381(4)	0.0310(3)	0.063(2)
$\kappa_{q2} - \kappa_{q2}$	0.259(2)	0.377(5)	0.0296(3)	0.062(2)
$\kappa_{q2} - \kappa_{q3}$	0.240(2)	0.364(5)	0.0252(3)	0.060(2)
$\kappa_{q3} - \kappa_{q3}$	0.219(2)	0.350(6)	0.0208(2)	0.058(2)

TAB. 2.1 – *Light meson masses, bare quark masses and (renormalized) pseudoscalar decay constants. The time intervals chosen for the fits are: $P : t \in [10, 30]$, $V : t \in [11, 25]$, and $\rho, f_P : t \in [12, 29]$.*

where the non-perturbatively estimated constants are $Z_A^{(0)} = 0.81(1)$ [18, 19, 30], and $\tilde{b}_A = 1.19(6)$ [19].

By using the lattice plane method [21], illustrated in fig. 2.3, we get $af_\pi = 0.0488(24)$, which after comparison with the physical $f_\pi = 0.132$ GeV, leads to the following value of the inverse lattice spacing:

$$a^{-1}(f_\pi) = 2.71(12) \text{ GeV} . \quad (\text{IV.2.18})$$

That value is consistent with the one obtained by using the ρ -meson mass ($a^{-1}(m_\rho) = 2.62(9)$ GeV) and/or the K^* -meson ($a^{-1}(m_{K^*}) = 2.67(8)$ GeV).

As for the heavy-light systems, in what follows, we will need the pseudoscalar and vector meson masses, in addition to the constants $\mathcal{Z}_P, \mathcal{Z}_V$ (IV.2.64). We obtain those quantities by fitting our lattice results for the correlators (IV.2.62) with the mesons at rest ($\vec{p} = 0$), to the forms given in eq.(IV.2.64). The results are presented in table 2.2.

2.2.3 Computation of the three-point functions: Basics and Results

In this section we define the quantities that we need to compute and explain the strategy that will allow us extracting the coupling $g_{VP\pi}$, where P and V stand for the heavy-light vector and pseudoscalar mesons respectively. We will then present our results obtained for the heavy and light quark masses that are directly accessible from our lattice.

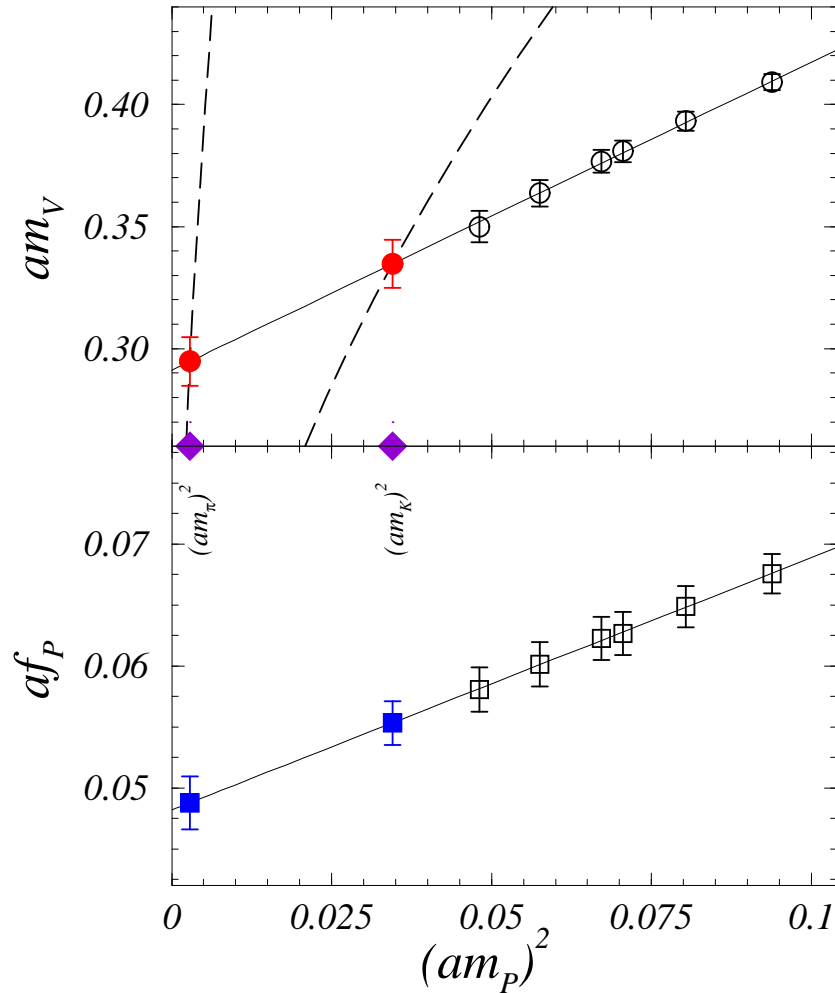


FIG. 2.3 – We illustrate the so-called method of lattice planes [21] by which we get the value of $af_{K/\pi}$: In the upper plane, the points in which the fit (solid) line to our data crosses the dashed lines, corresponding to $am_V = C_{K/\pi} \sqrt{(am_P)^2}$ with $C_K = (m_{K^*}/m_K)_{phys}$ and $C_\pi = (m_\rho/m_\pi)_{phys}$ respectively, determine the values of $(am_{K/\pi})^2$, denoted by diamonds. These values are then used to fit $af_{K/\pi}$ (filled squares) in the lower plane, where we fit the pseudoscalar decay constants as $\alpha + \beta(am_P)^2$.

	am_P	am_V	\mathcal{Z}_P	\mathcal{Z}_V
$\kappa_{Q_1} - \kappa_{q_1}$	0.692(2)	0.732(2)	0.0187(9)	0.0068(4)
$\kappa_{Q_1} - \kappa_{q_2}$	0.678(2)	0.719(3)	0.0176(9)	0.0062(5)
$\kappa_{Q_1} - \kappa_{q_3}$	0.669(2)	0.710(4)	0.0171(10)	0.0059(6)
$\kappa_{Q_2} - \kappa_{q_1}$	0.788(2)	0.822(2)	0.0207(10)	0.0080(5)
$\kappa_{Q_2} - \kappa_{q_2}$	0.775(2)	0.809(3)	0.0195(11)	0.0073(6)
$\kappa_{Q_2} - \kappa_{q_3}$	0.766(3)	0.800(4)	0.0189(12)	0.0070(7)
$\kappa_{Q_3} - \kappa_{q_1}$	0.878(2)	0.907(2)	0.0222(11)	0.0091(6)
$\kappa_{Q_3} - \kappa_{q_2}$	0.866(2)	0.894(3)	0.0208(12)	0.0083(7)
$\kappa_{Q_3} - \kappa_{q_3}$	0.857(3)	0.885(4)	0.0203(13)	0.0079(8)

TAB. 2.2 – Meson masses and \mathcal{Z} 's in lattice units extracted from our lattice data. Indices in the hopping parameters (q_{1-3} and Q_{1-3}) are specified in eq. (IV.2.72). The time-intervals used for the fits are $P : t \in [15, 30]$, $V : t \in [17, 28]$.

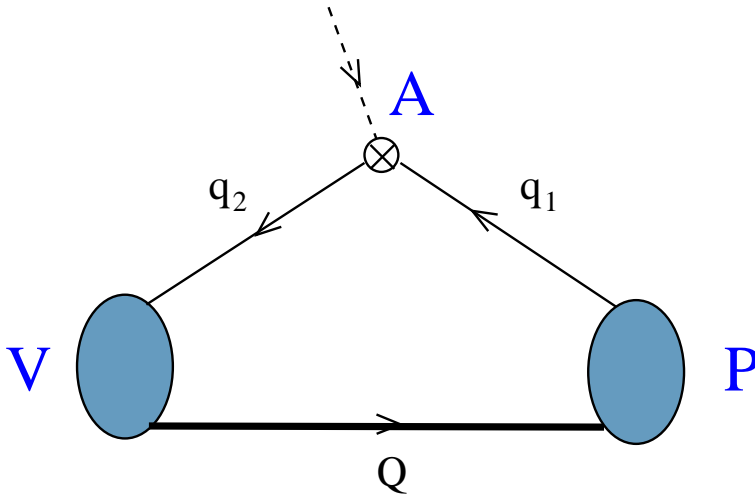


FIG. 2.4 – The graph of the three-point function that we compute in this work.

Theoretical basis

We start from the computation of the transition matrix element between the heavy-light vector meson (V) and the heavy-light pseudoscalar (P), mediated by the axial light-light current $A_\mu = \bar{q}\gamma_\mu\gamma_5q$ (see fig. 2.4). It is parametrized as

$$\begin{aligned} \langle P(p') | A^\mu | V(p, \lambda) \rangle &= 2m_V A_0(q^2) \frac{\epsilon^\lambda \cdot q}{q^2} q^\mu + (m_P + m_V) A_1(q^2) \left[\epsilon^{\lambda\mu} - \frac{\epsilon^\lambda \cdot q}{q^2} q^\mu \right] \\ &+ A_2(q^2) \frac{\epsilon^\lambda \cdot q}{m_P + m_V} \left[p^\mu + p'^\mu - \frac{m_V^2 - m_P^2}{q^2} q^\mu \right] \end{aligned} \quad (\text{IV.2.19})$$

where $q = p - p'$ ². The matrix element of the divergence $q_\mu A^\mu$ is dominated by the pion pole for q^2 in the vicinity of m_π^2 :

$$\langle P(p') | q_\mu A^\mu | V(p, \lambda) \rangle = g_{VP\pi} \frac{\epsilon^\lambda(p) \cdot q}{m_\pi^2 - q^2} \times f_\pi m_\pi^2 + \dots \quad (\text{IV.2.20})$$

From eq. (IV.2.20), we find for $q^2 = 0$:

$$g_{VP\pi} = \frac{2m_V A_0(0)}{f_\pi}. \quad (\text{IV.2.21})$$

With our settings, the lattice transfer at $\vec{q} = \vec{0}$ happens to be close to $q^2 = 0$ (see table 2.3). However, the lattice simulations at $\vec{q} = \vec{0}$ can only give the form factor A_1 . The other ones, $A_{0,2}$, can be computed at $\vec{q} \neq \vec{0}$ which in our case is no longer close to $q^2 = 0$, as can be seen in table 2.3. Since A_0 has the pion pole, it varies very fast in the vicinity of $q^2 = 0$ and thus cannot be directly extrapolated. To overcome this difficulty, we express $A_0(0)$ in terms of $A_{1,2}(0)$ which do not have a pion pole. This relation can be obtained by using the fact that in eq. (IV.2.19), the axial current cannot have a singularity at $q^2 = 0$. The three residues of $1/q^2$ -terms must cancel, this leads to:

$$g_{VP\pi} = \frac{1}{f_\pi} \left[(m_V + m_P) A_1(0) + (m_V - m_P) A_2(0) \right]. \quad (\text{IV.2.22})$$

In this relation, one can see that the A_1 contribution is dominant. This dominant contribution is directly obtained from lattices at $\vec{q} = \vec{0}$, as already mentioned. A_2 has to be extrapolated from $\vec{q} \neq \vec{0}$ to $q^2 = 0$. Its nearest pole is the a_1 meson mass. The error generated with this extrapolation will be discussed in the next subsection. This error is anyhow harmless since it applies only to the subdominant contribution ($\lesssim 5\%$) to $g_{VP\pi}$.

2. This definition of form factors is equivalent to the usual one: the matrix element $\langle V | A^\mu | P \rangle$ has a “-” sign in front of A_2 .

In the heavy quark limit ($m_Q \rightarrow \infty$), in which $m_V = m_P$, only the form factor $A_1(0)$ contributes. In that limit one recovers the formula used in ref. [13] to compute this coupling. For heavy quarks close to charm, the corrections in powers of the inverse heavy quark mass are expected to be sizable, which is why we decided to compute $g_{VP\pi}$ with the relativistic (propagating) heavy quark. Notice that isospin symmetry relates various charge combinations of the $VP\pi$ couplings:

$$g_{VP\pi} \equiv g_{V^+P^0\pi^+} = -\sqrt{2}g_{V^+P^+\pi^0} = -g_{V^0P^+\pi^-} . \quad (\text{IV.2.23})$$

For simplicity, we define

$$G_1(q^2) = \frac{m_V + m_P}{f_\pi} A_1(q^2) , \quad G_2(q^2) = \frac{m_V - m_P}{f_\pi} A_2(q^2) , \quad (\text{IV.2.24})$$

and rewrite eq. (IV.2.22) as

$$g_{VP\pi} = G_1(0) \cdot \left(1 + \frac{G_2(0)}{G_1(0)} \right) . \quad (\text{IV.2.25})$$

As already mentioned $G_1(0)$ is the dominant contribution to $g_{VP\pi}$, the G_2/G_1 being a few percent correction to it.

Analogously, the expression for \hat{g}_Q at a given heavy quark Q mass is

$$\hat{g}_Q = \hat{g}_Q^{(0)} \cdot \left(1 + \frac{G_2(0)}{G_1(0)} \right) , \quad (\text{IV.2.26})$$

where we note, according to [2],

$$\hat{g}_Q^{(0)} = \frac{m_V + m_P}{2\sqrt{m_V m_P}} A_1(0) . \quad (\text{IV.2.27})$$

Computation of the three point functions

To access the matrix element (IV.2.19) from the lattice, we compute the following three-point functions

$$C_{\mu\nu}^{(3)}(0, \vec{q}, t_x; \vec{0}, t_y) = \left\langle \sum_{\vec{x}, \vec{y}} V_\mu(0) A_\nu(x) P(y) e^{-i\vec{q}\cdot\vec{x}} \right\rangle \Bigg|_{0 < t_x < t_y} , \quad (\text{IV.2.28})$$

where the pseudoscalar meson is inserted at rest ($\vec{p}' = (0, 0, 0)$) at a fixed time chosen to be $t_y = 31 a$, while the current operator has a momentum $\vec{q} \in \{(0, 0, 0), (1, 0, 0)\}$ in units of the elementary momentum ($2\pi/La \simeq 0.7 \text{ GeV}$). The vector meson interpolating field is at the origin $(0, \vec{0})$ of the lattice.

When both mesons are at rest, the only useful ratio is ($t \equiv t_x$)

$$R_1(t) = \frac{C_{ii}^{(3)}(t) \mathcal{Z}_V^{1/2} \mathcal{Z}_P^{1/2}}{C_{V_i V_i}^{(2)}(t) C_{PP}^{(2)}(t_y - t)}, \quad (\text{IV.2.29})$$

which develops a plateau for $t \in [12, 17]$. At that plateau we extract the matrix element (IV.2.19), *i.e.* the value of the form factor $A_1(q^2)$. To access the ratio A_2/A_1 , we study the ratios with the momentum injection $\vec{q} = (1, 0, 0) \times 2\pi/L$, namely

$$\begin{aligned} R_2(t) &= \frac{C_{10}^{(3)}(t; \vec{q}) \mathcal{Z}_V^{1/2} \mathcal{Z}_P^{1/2}}{C_{V_2 V_2}^{(2)}(t; \vec{q}) C_{PP}^{(2)}(t_y - t)}, \\ R_3(t) &= \frac{C_{11}^{(3)}(t; \vec{q}) \mathcal{Z}_V^{1/2} \mathcal{Z}_P^{1/2}}{C_{V_2 V_2}^{(2)}(t; \vec{q}) C_{PP}^{(2)}(t_y - t)}, \\ R_4(t) &= \frac{C_{22}^{(3)}(t; \vec{q}) \mathcal{Z}_V^{1/2} \mathcal{Z}_P^{1/2}}{C_{V_2 V_2}^{(2)}(t; \vec{q}) C_{PP}^{(2)}(t_y - t)}. \end{aligned} \quad (\text{IV.2.30})$$

After inspecting the ratios (IV.2.30) for all the combinations of heavy and light quarks, we choose to fit them to a plateau at $t \in [14, 17]$. We illustrate in fig. 2.5 the signals for all the four ratios for a given κ_Q, κ_q . We notice that the ratio $R_2(t)$ has a hardly observable plateau, the value of which is compatible with zero. As just stated the ratio $R_1(t)$ contributes more than 95% to g_{VPp} and its plateau is very good.

Denoting r_i the average value of R_i on the plateaus, the form factors $A_{1,2}$ are then given by :

$$A_1(\vec{q} = \vec{0}) = -\frac{r_1}{m_V + m_P}, \quad A_1\left(\vec{q} = \frac{2\pi}{L}(1, 0, 0)\right) = -\frac{r_4}{m_V + m_P}, \quad (\text{IV.2.31})$$

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{(m_P + m_V)^2}{2m_P^2 \vec{q}^2} \left[(\vec{q}^2 - E_V(E_V - m_P)) + \frac{m_V^2(E_V - m_P)}{E_V} \frac{r_3}{r_4} + i \frac{m_V^2 q_1}{E_V} \frac{r_2}{r_4} \right], \quad (\text{IV.2.32})$$

where E_V is the energy of the vector meson.

Our numerical simulations indicate that the ratio A_2/A_1 is positive and of the order of 1. It results from eq. (IV.2.24) that $G_2/G_1 \sim (m_V - m_P)/(m_V + m_P)$ which leads to a small and positive correction to $G_1(0)$ in (IV.2.25).

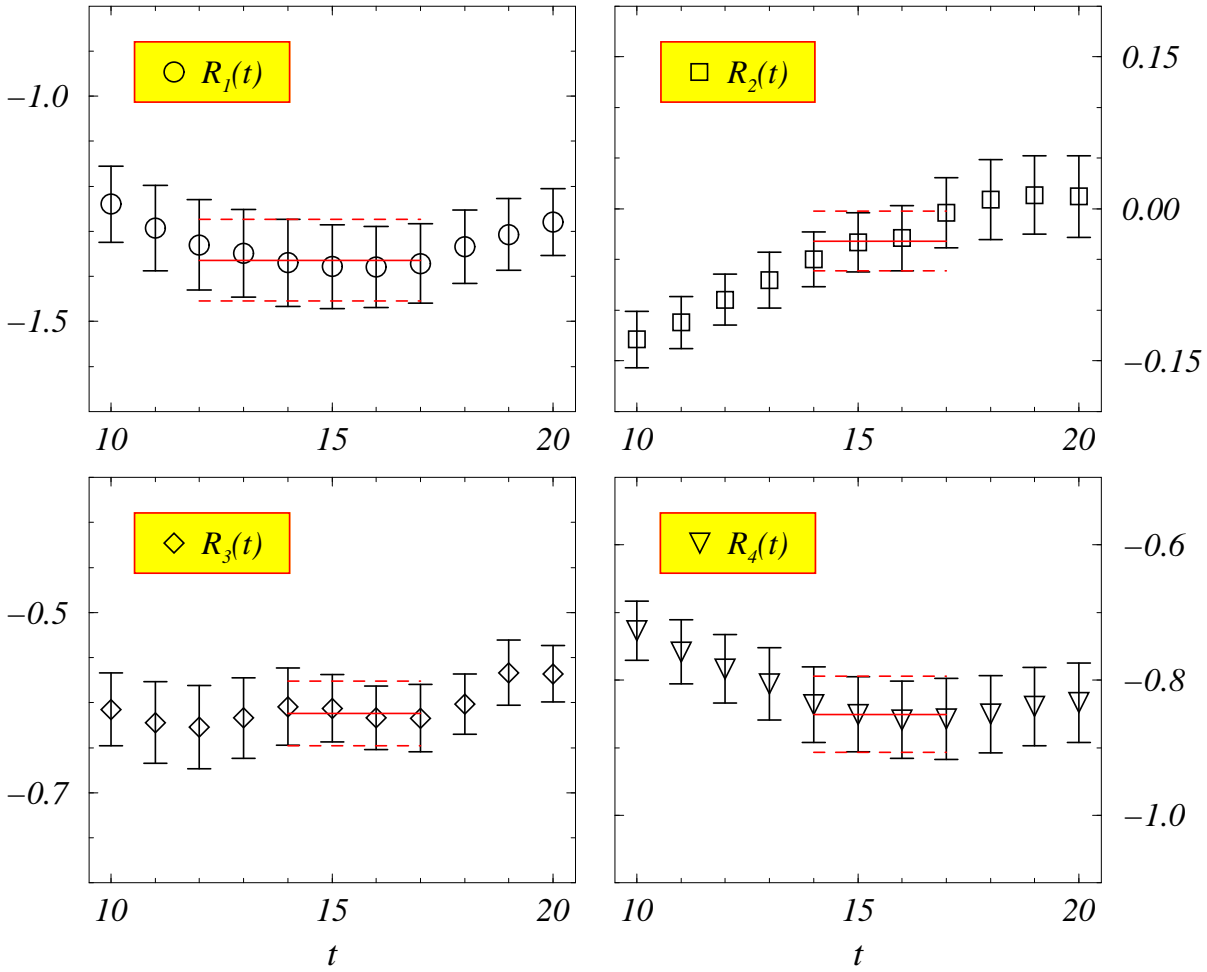


FIG. 2.5 – Signals for the ratios $R_{1-4}(t)$ (real part of R_1, R_3, R_4 and imaginary part of R_2), defined in eqs. (IV.2.29, IV.2.30), as computed on our lattice. Illustration is provided for $\kappa_Q = 0.1220$ and $\kappa_q = 0.1348$.

In the left part of table 2.3, we present our results for the form factor $A_1(q^2)$ ($G_1(q^2)$) for all the quark combinations and with both mesons at rest, $q^2 = (m_V - m_P)^2$. In this case, $q^2 \in (0.04, 1.16) \cdot 10^{-2} \text{ GeV}^2$. They are obviously very close to zero and it is reasonable to assume that, at such small q^2 , $G_1(q^2) \simeq G_1(0)$.

The results for the ratios of the form factors A_2/A_1 (or, equivalently, G_2/G_1) with $\vec{q} = (1, 0, 0) \times 2\pi/L$ are listed in the right part of table 2.3. They are obtained from the ratios r_{2-4} (see eq. (IV.2.32)). As expected, the ratios of the form factors G_2/G_1 are positive and very small (they never exceed 5%). Now this ratio has to be extrapolated to $q^2 = 0$. The $A_{1,2}$ form factors may change significantly but without changing sign since the nearest pole, the a_1 -meson, lies at larger q^2 ($m_{a_1} \approx 1.2 \text{ GeV}$ [19])³. On the other hand, the ratio A_2/A_1 is expected to be rather constant because $A_{1,2}$ have the same pole factor $1/(1 - q^2/m_{a_1}^2)$ which cancels out in the ratio⁴. We thus extrapolate A_2/A_1 by keeping this ratio constant.

Comment about the effect of improvement on the form factors

As a side remark, we comment on the effect of the improvement of the bare axial current (see eq. (IV.2.16)) on the form factors $A_{1,2,0}(q^2)$. The divergence of the current in the matrix element (IV.2.19) leads to

$$\langle P(p') | \bar{q} \gamma_5 q | V(p, \lambda) \rangle = 2m_V \frac{(e_\lambda \cdot q)}{2\rho_q} A_0(q^2), \quad (\text{IV.2.33})$$

where we used eq. (IV.2.19) and the axial Ward identity, $\partial_\mu A_\mu^I = 2\rho_q P$. Therefore the improvement will only affect the form factor $A_0(q^2)$, but not the other two ($A_{1,2}(q^2)$). In other words,

$$\begin{aligned} A_{1,2}(q^2) &\rightarrow A_{1,2}^I(q^2) = A_{1,2}(q^2), \\ A_0(q^2) &\rightarrow A_0^I(q^2) = \left(1 - c_A \frac{q^2}{2\rho_q}\right) A_0(q^2). \end{aligned} \quad (\text{IV.2.34})$$

As our method to compute $g_{D^*D\pi}$ relies on the computation of the form factors A_1 and A_2 only, our result does not depend at all on the improvement of the bare axial current.

3. This is confirmed by the ratio $r_4/r_1 = A_1(\vec{q} = (1, 0, 0) \times 2\pi/L) / A_1(\vec{q} = \vec{0}) \sim 0.6$.

4. $1/(1 - q^2/m_{a_1}^2)$ varies of about 30%–40% since for $\vec{q} = (1, 0, 0) \times 2\pi/L$, $q^2 \in (-0.48, -0.44) \text{ GeV}^2$.

2.2.4 Chiral extrapolations and the heavy quark interpolation

Now it is a simple matter to combine our results from table 2.3 in the way indicated in eq. (IV.2.25), and to compute the values of the couplings g_{VPp} ⁵. Those numbers should now be extrapolated to the to the physical pion mass, to get $g_{VP\pi}$ for each of our heavy quarks. Finally this is to be followed by interpolation in the heavy meson masses to the ones corresponding to D and D^* .

Chiral extrapolations

Our light pseudoscalar mesons (“pions”) are rather heavy and we need to extrapolate to the physical pion mass⁶, $m_\pi = 0.14$ GeV. From the lattice planes method [21], the physical pion mass in lattice units is $am_\pi = 0.053(2)$. To obtain $g_{VP\pi}$, we can fit the g_{VPp} -dependence on the quark mass with three formulae:

- Linear extrapolation: by fitting our data to

$$g_{VPp} = a_0 + a_1(am_p)^2, \quad (\text{IV.2.35})$$

where the values of (am_p) are listed in the first column of table 2.1. This fit allows to fix the parameters $a_{0,1}$ and thus to extract $g_{VP\pi}$ by either simply reading off a_0 (chiral limit), or by combining $a_{0,1}$ with am_π . We will give results by opting for the latter choice.

- Quadratic extrapolation: we also attempt the quadratic fit :

$$g_{VPp} = b_0 + b_1(am_p)^2 + b_2(am_p)^4. \quad (\text{IV.2.36})$$

- “Chiral Log” extrapolation: One can also fit to a form motivated by the chiral perturbative expansion for the heavy-light systems (for a review, see ref. [9]). In particular, the coupling of the pion to the heavy meson doublet receives logarithmic corrections [22] :

$$g_{VPp} = c_0 + c_1(am_p)^2 + c_2(am_p)^2 \log((am_p)^2). \quad (\text{IV.2.37})$$

The results of all three fits are presented in table 2.4 and illustrated in fig. 2.6. The quadratic and logarithmic extrapolations are rather unstable i.e. significantly dependent on small changes in the analysis procedure, because we extrapolate from too heavy quark masses. We present them mainly as an estimate of the systematic error.

5. The lower subscript “p” labels the light pseudoscalar meson.

6. In physical units, our light pseudoscalar mesons are in the range $m_p \in (0.5, 0.8)$ GeV.

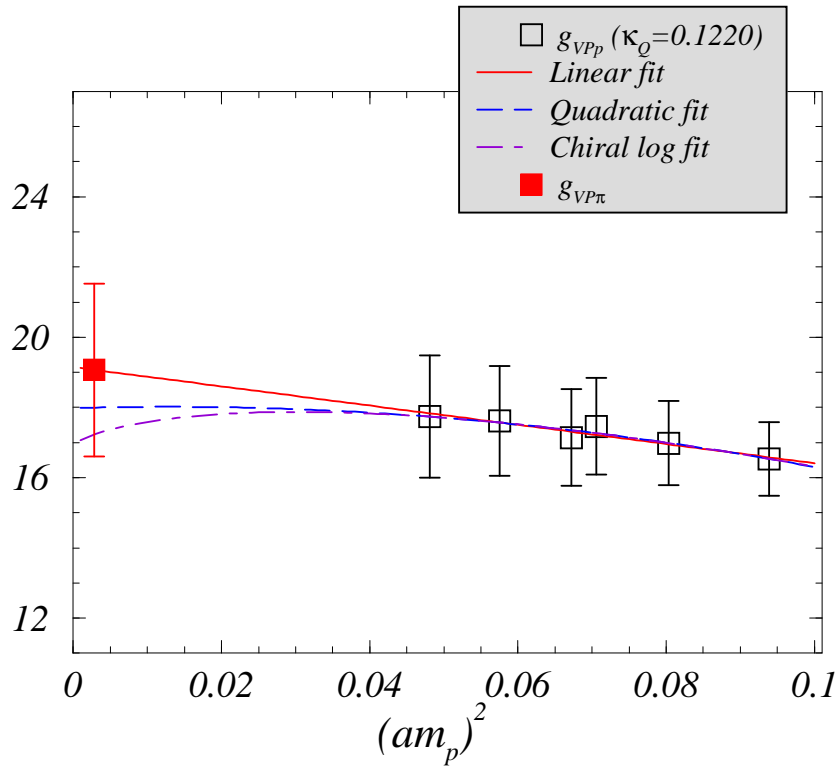


FIG. 2.6 – Chiral extrapolation of g_{VPp} without the G_2/G_1 corrections for a fixed heavy quark at $\beta = 6.2$. The curves obtained from the fit to eqs. (IV.2.35, IV.2.36, IV.2.37) are displayed. The filled square point with its error bars corresponds to the linear extrapolation. The complete list of results can be found in table 2.4.

Chiral extrapolations with two different light quarks

We have computed the three-point Green functions with two different light quark masses m_1, m_2 for the quarks q_1, q_2 shown in fig 2.4. The form factors extracted from the latter depend, in general, both on $m_2 + m_1$ and $m_2 - m_1$ what makes the chiral extrapolation rather tricky. Luckily, however, it can be shown⁷ that, in the heavy quark limit, the dominant contribution to $g_{VP\pi}$, *i.e.* $G_1(0)$, only depends on $m_2 + m_1$. In this limit, we can use data with ($m_1 \neq m_2$) to perform our chiral extrapolation as a function of $m_2 + m_1$ (or similarly, as a function of $(m_p)^2$). We have compared the results of the linear extrapolation using this method with the one which uses Green functions with only $m_1 = m_2$. The extrapolated results agree within 2% while the statistical error is typically $\sim 15\%$. Considering six (m_1, m_2) couples allows to estimate the systematic error due to the chiral extrapolation by comparing the linear, quadratic and logarithmic extrapolations as explained in the preceding subsection. As can be seen in table 2.4, $G_1(0)$ was computed in this way.

The quark mass dependence of the corrective term $G_2(0)/G_1(0)$ in eqs. (IV.2.25, IV.2.26) is dominated by the factor $m_V - m_P$ in eq. (IV.2.24). In the infinite mass limit, it is known that $m_V - m_P \propto m_2 - m_1 + \mathcal{O}(1/m_Q)$. The corrective term $G_2(0)/G_1(0)$ is then dominantly proportional to $m_2 - m_1$ ⁸ and the contributions with $m_1 \neq m_2$ are useless for the chiral extrapolation. Therefore, we have only considered the case $m_1 = m_2$ when including the correction $G_2(0)/G_1(0)$.

Interpolation to the charm sector

Finally, we need to reach the mass of the charm quark. To that end we will use the values of the spin-averaged masses of the heavy-light mesons

$$\bar{m}_H = \frac{3m_V + m_P}{4} . \quad (\text{IV.2.38})$$

When converted to the physical units by means of $a^{-1}(f_\pi)$ (given in eq. (IV.2.18)), we have

$$\bar{m}_H \in \{ 1.83(9), 2.08(10), 2.32(11) \} \text{ GeV} . \quad (\text{IV.2.39})$$

7. Using the heavy quark symmetry and the hermiticity of A_μ , one derives that

$$\langle V(m_2)|A_\mu|P(m_1) \rangle = \langle P(m_2)|A_\mu|V(m_1) \rangle = \langle V(m_1)|A_\mu|P(m_2) \rangle .$$

8. We have indeed checked that the slope of $G_2(0)/G_1(0)$ as a function of $m_2 - m_1$ is four times larger than the one as a function of $m_1 + m_2$.

and $\bar{m}_D = 1.974$ GeV is within this range. The coupling \hat{g}_Q that we already mentioned in the introduction :

$$g_{VP\pi} = \frac{2\sqrt{m_P m_V}}{f_\pi} \hat{g}_Q . \quad (\text{IV.2.40})$$

is the proper parameter to be used for an interpolation in the heavy quark mass. The heavy quark symmetry suggests us to fit our data to the following forms

$$\frac{g_{VP\pi}}{\bar{m}_H} = a_1 + \frac{a_2}{\bar{m}_H} \quad \text{and} \quad \hat{g}_Q = b_1 + \frac{b_2}{\bar{m}_H} . \quad (\text{IV.2.41})$$

Using these forms we now interpolate to the charm region each of our three sets of chirally extrapolated data from the previous subsection. The results are presented in table 2.6.

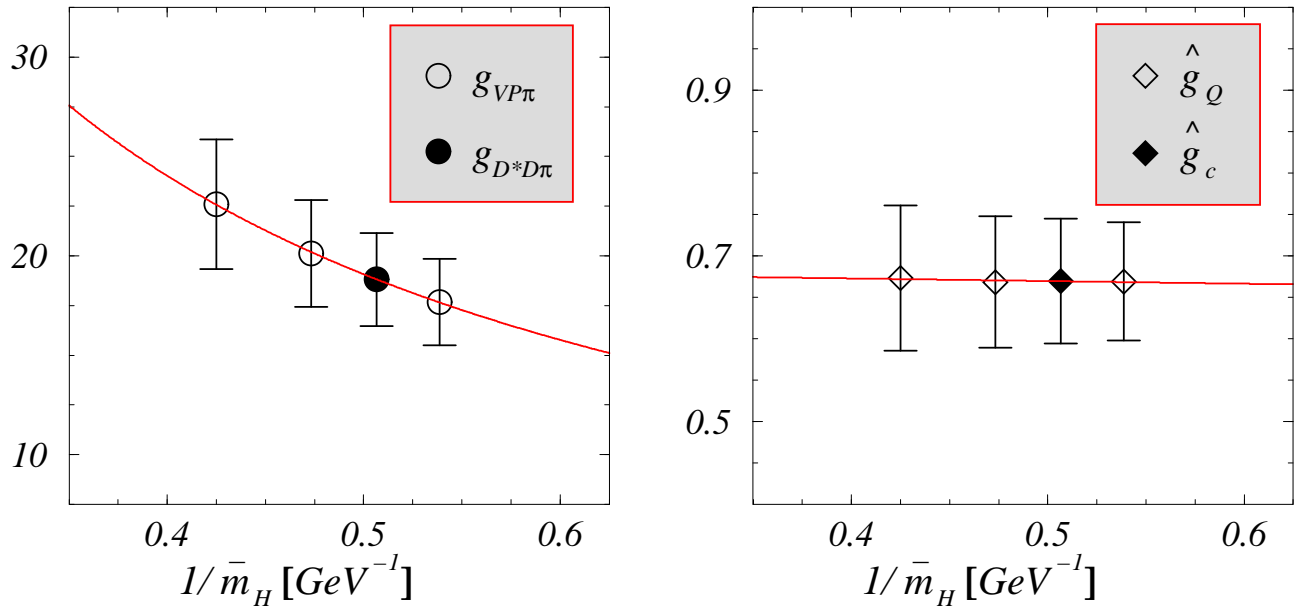


FIG. 2.7 – Fit of our data (empty symbols) for $g_{VP\pi}$ and \hat{g}_Q , at $\beta = 6.2$, to the forms (IV.2.41). The results of interpolation to the \bar{D} -meson is denoted by the filled symbols.

Illustration of that interpolation for the case of the linear chiral extrapolation is provided in fig. 2.7. Note that our results indicate that the slope in $1/m_H$ for the coupling \hat{g}_Q is small and negative. Assuming that the linear dependence in $1/m_H$ holds all the way to $1/m_H \rightarrow 0$, we obtain that \hat{g}_∞ is not more than 15 % larger than \hat{g}_c (numerical results for \hat{g}_∞ are also given in table 2.6).

2.2.5 Results at $\beta = 6.0$

In this section we briefly summarize the results obtained at $\beta = 6.0$. The analysis follows the lines presented in the previous sections. We have run in a $16^3 \times 64$ volume over 100 configurations with the following set of light quarks Wilson hopping parameters: $\kappa_q = 0.1339, 0.1342, 0.1344, 0.1346$. We will only show results for one heavy quark, the closest to the physical charm, $\kappa_Q = 0.1190$ ($m_P = 1.77(11)$ GeV), for several values of the light quark mass (see table 2.7). For $\beta = 6.0$, the ratio $G_2(0)/G_1(0)$ has about 100% error, and we prefer to give the uncorrected result $g_Q^{(0)}$ (see eq. (IV.2.26)), in table 2.7.

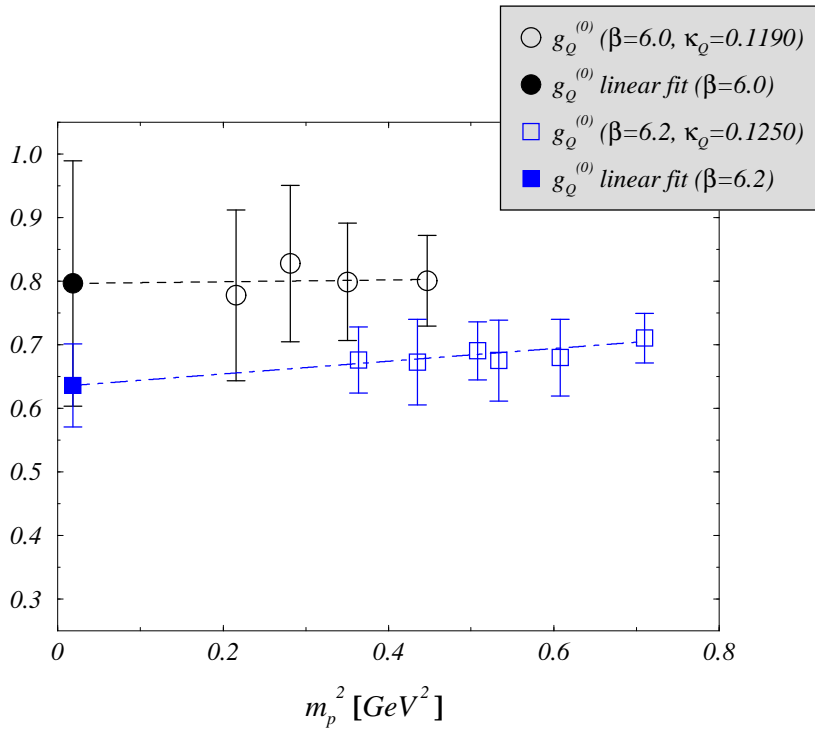


FIG. 2.8 – Chiral extrapolation of $\hat{g}_Q^{(0)}$ for a fixed heavy quark $\kappa_Q = 0.1190$ at $\beta = 6.0$ and $\kappa_Q = 0.1250$ at $\beta = 6.2$ corresponding approximately to the same heavy meson mass.

It is worth noticing that the results at $\beta = 6.0$ agree within errors with those at $\beta = 6.2$. This is illustrated in fig. 2.8 where we compare the case $\beta = 6.0, \kappa_Q = 0.1190$ to $\beta = 6.2, \kappa_Q = 0.1250$, which corresponds to approximately the same physical mass of the heavy-light meson ($m_P = 1.77(11)$ GeV and $1.75(9)$ GeV respectively). Notice that the numerical results at $\beta = 6.0$ are more noisy than those at $\beta = 6.2$.

For this reason and also because the lattice spacing at $\beta = 6.0$ implies strong limitations on heavy quark masses, we did not attempt an extrapolation to the charm and even less to

the infinite mass limit. Notice nevertheless that the charm mass region is almost reached with $\kappa_Q = 0.1190$ in our setup.

2.2.6 Physical results and discussion of errors

Systematic uncertainties

- *Discretisation errors-I*: In our study we implemented the full $\mathcal{O}(a)$ improvement of the Wilson QCD action and the axial current. As we discussed in the text, the improvement of the bare axial current does not influence the value of our $g_{D^*D\pi}$. As for the renormalization constant, we used the non-perturbatively determined value, including the coefficient \tilde{b}_A , which ensures the elimination of the artifacts of $\mathcal{O}(a\rho)$.
- *Discretisation errors-II*: Our calculation has been made at $\beta = 6.2$. With intention to study the $\mathcal{O}(a)$ effects, we have also performed the simulation at $\beta = 6.0$ which has been summarized in the preceding section. The good agreement illustrated in fig. 2.8 shows a small discretization error. One might wonder if the small decrease of \hat{g} from $\beta = 6.0$ to $\beta = 6.2$ is the sign of a systematic finite a effect. This would then point toward a continuum limit lower than the values quoted here. This difference might also simply be a statistical one since it is smaller than one standard deviation. With only two values of the lattice spacing it is not possible to try a systematic study of the continuum limit and thus to discriminate between these hypotheses. Further studies at different values of β are badly needed. From the experience about similar quantities one might hope that the continuum limit will not be too different from the result at $\beta = 6.2$.
- *Discretisation errors-III*: When interpolating to the charm quark, *i.e.* to the \bar{D} -meson sector (IV.2.41), we used the value of the lattice spacing as obtained from the pion decay constant. If the lattice spacing is fixed by the ρ -meson mass, the value of the $g_{D^*D\pi}$ remains practically unchanged. This is not surprising since the slope of $g_{VP\pi}/m_H$ in $1/m_H$ is very small so that the slight change of the position of the $1/\bar{m}_D$ does not make any visible impact on the final result (it increases by $\approx 1\%$).
- *Chiral extrapolations*: This source of uncertainty actually dominates our systematic error bars. This shows up also in the difference between linear, quadratic and logarithmic fits. Indeed, at $\beta = 6.0$ the additional lightest quark ($\kappa = 0.1346$) has been added in order to reduce this error. We decide to take the result of the linear extrapolation as our central value since our data follow rather clearly that form. The

difference between that central value (of the linear extrapolations) and the ones obtained through the quadratic and the “log” fits will be included in the systematic uncertainty.

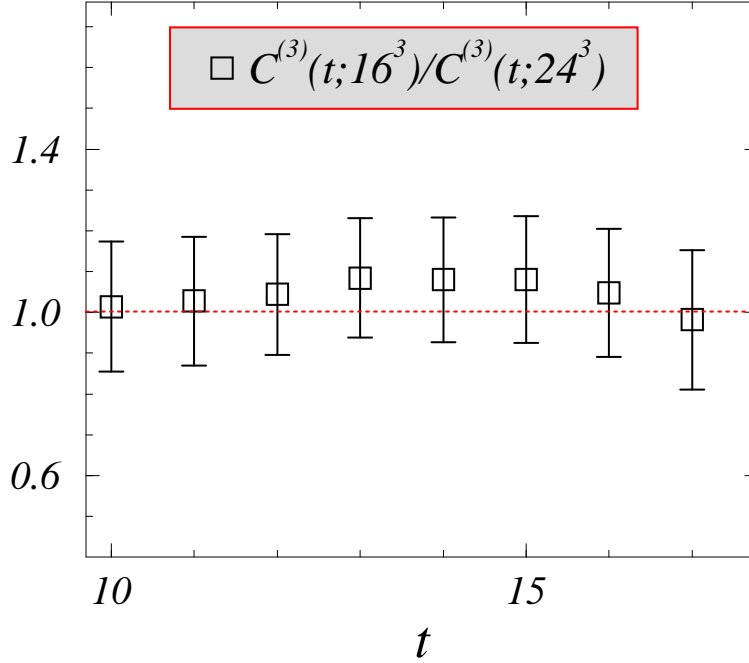


FIG. 2.9 – Ratio of the three point functions (IV.2.28) as obtained for the same meson masses at $\beta = 6.0$ but on different volumes $16^3 \times 64$ and $24^3 \times 64$. Illustrated is the case of the heavy quark corresponding to $\kappa_Q = 0.1220$ and the light ones to $\kappa_q = 0.1344$.

- *Finite volume effects:* We also studied the finite volume effect by performing two parallel simulations at $\beta = 6.0$, with lattice of size $16^3 \times 64$ and $24^3 \times 64$. To illustrate the net effect, we plot in fig. 2.9 the ratio of a three-point correlation functions (IV.2.28) as obtained from the simulations with two lattice volumes and for both heavy-light mesons being at rest. Within our statistics, we do not see any evidence for the presence of finite lattice volume effects. To be conservative, however, we will take into account the observation that the central values are in the interval

$$0.95 \leq \frac{C_{ii}^{(3)}(t; 16^3)}{C_{ii}^{(3)}(t; 24^3)} \leq 1.07, \quad (\text{IV.2.42})$$

and thus will include 6 % in the systematic error.

- *Quenching effects*: When discussing the chiral extrapolations we also considered the effect of using the leading chiral log behavior. It is important to stress that such a behavior is only valid for the full (unquenched) QCD. In the quenched approximation, however, one encounters the so-called quenched logs which are not of the form $m_p^2 \log(m_p^2)$ as in full QCD but rather divergent, of the form $m_0^2 \log(m_p^2)$. Here m_0 stands for the mass of the η' -meson, which in the quenched theory does not decouple from the octet of light pseudoscalar mesons. One could thus envisage a fit to the form [23]

$$g_{VPp} = c_0 + c_1(am_p)^2 \log(am_p) + c_1^{(quench.)} \log(am_p) + c_2(am_p)^2 + \dots \quad (\text{IV.2.43})$$

If we had been in the region of very small masses we should have used this form of the fit to determine the coefficient $c_1^{(quench.)}$ and then correct for it when getting the quenched physical results. In our case, however, the meson masses we were able to simulate directly are in the region in which the dependence of g_{VPp} on $(am_p)^2$ is linear as can be seen in fig. 4.

Conclusion

In this paper, we made the first lattice QCD study of the strong coupling of the pion to the spin-doublet of D -mesons, $g_{D^*D\pi}$. Our results, obtained in the quenched approximation, are in a very good agreement with the recent experimental measurement [73]. Our numbers are much larger than the predictions made by using various QCD sum rule techniques. It is also larger than the previous lattice estimate which has been made in the static limit of the heavy quark effective theory [13] and on a very coarse lattice. The reason for that disagreement remains to be understood. It should be noted that our data suggest that the dependence on the heavy quark mass is very weak and that the static value $\hat{g}_\infty \gtrsim \hat{g}_c$. A careful extrapolation to the continuum limit is still needed but, inspired from the experience with similar quantities, one might hope that the continuum limit will not be too different from the result at $\beta = 6.2$.

On the basis of our results and from the discussion of the systematic uncertainties which we combine in the quadratic sum, we conclude that

$$g_{D^*D\pi} = 18.8 \pm 2.3_{-2.0}^{+1.1}, \quad \text{and} \quad \hat{g}_c = 0.67 \pm 0.08_{-0.6}^{+0.4}, \quad (\text{IV.2.44})$$

which is the result that we quoted at the beginning of this paper (IV.2.11, IV.2.12).

The coupling \hat{g} varies very little with the heavy mass and we find in the infinite mass limit

$$\hat{g}_\infty = 0.69 \pm 0.18. \quad (\text{IV.2.45})$$

A further improvement of our results includes the increase of the statistical sample, computations with static heavy quarks, computations at larger β (such as $\beta = 6.4$), and most importantly the attempt of an unquenched study of this coupling.

Acknowledgement

We thank V. Lubicz, G. Martinelli, S. Prelovsek, J.-C. Raynal and J. Zupan for precious discussions and comments. This work has been supported in part by the European Network “Hadron Phenomenology from Lattice QCD”, HPRN-CT-2000-00145. We have used for this work the APE1000 located in the Centre de Ressources Informatiques (Paris-Sud, Orsay) and purchased thanks to a funding from the Ministère de l’Education Nationale and the CNRS.

	$\vec{q} = (0, 0, 0)$			$\vec{q} = (1, 0, 0) \times 2\pi/L$		
	$q^2 \times 10^{-2} \text{ GeV}^2$	$A_1(q^2)$	$G_1(q^2)$	$q^2 \times 10^{-2} \text{ GeV}^2$	A_2/A_1	G_2/G_1
$\kappa_{Q_1} - \kappa_{q_1} - \kappa_{q_1}$	1.17(17)	0.71(4)	14.9 ± 0.9	-44.8(3.9)	0.85(14)	0.024(4)
$\kappa_{Q_1} - \kappa_{q_1} - \kappa_{q_2}$	0.52(12)	0.68(6)	14.8 ± 1.2	-46.3(4.0)	0.74(12)	0.014(2)
$\kappa_{Q_1} - \kappa_{q_1} - \kappa_{q_3}$	0.23(10)	0.68(6)	15.1 ± 1.3	-47.1(4.1)	0.70(19)	0.009(2)
$\kappa_{Q_1} - \kappa_{q_2} - \kappa_{q_2}$	1.20(22)	0.69(5)	15.5 ± 1.2	-44.7(3.9)	0.93(22)	0.027(6)
$\kappa_{Q_1} - \kappa_{q_2} - \kappa_{q_3}$	0.73(21)	0.67(7)	15.5 ± 1.5	-45.7(3.9)	0.85(25)	0.019(5)
$\kappa_{Q_1} - \kappa_{q_3} - \kappa_{q_3}$	1.24(30)	0.68(5)	16.0 ± 1.5	-44.5(3.8)	1.13(35)	0.034(9)
$\kappa_{Q_2} - \kappa_{q_1} - \kappa_{q_1}$	0.82(12)	0.71(4)	16.9 ± 1.1	-46.1(4.1)	0.89(14)	0.018(3)
$\kappa_{Q_2} - \kappa_{q_1} - \kappa_{q_2}$	0.31(9)	0.68(6)	16.7 ± 1.4	-47.3(4.2)	0.77(14)	0.010(2)
$\kappa_{Q_2} - \kappa_{q_1} - \kappa_{q_3}$	0.11(7)	0.68(6)	17.1 ± 1.5	-48.0(4.2)	0.73(22)	0.006(2)
$\kappa_{Q_2} - \kappa_{q_2} - \kappa_{q_2}$	0.84(17)	0.69(5)	17.5 ± 1.5	-46.0(4.0)	1.19(22)	0.025(4)
$\kappa_{Q_2} - \kappa_{q_2} - \kappa_{q_3}$	0.47(16)	0.68(7)	17.7 ± 1.7	-46.9(4.1)	0.92(29)	0.015(4)
$\kappa_{Q_2} - \kappa_{q_3} - \kappa_{q_3}$	0.85(24)	0.68(6)	18.3 ± 1.8	-45.9(3.9)	1.27(38)	0.028(7)
$\kappa_{Q_3} - \kappa_{q_1} - \kappa_{q_1}$	0.60(9)	0.71(4)	18.9 ± 1.3	-46.9(4.2)	0.93(14)	0.015(2)
$\kappa_{Q_3} - \kappa_{q_1} - \kappa_{q_2}$	0.19(6)	0.68(7)	18.5 ± 1.7	-48.0(4.2)	0.80(15)	0.007(1)
$\kappa_{Q_3} - \kappa_{q_1} - \kappa_{q_3}$	0.04(5)	0.68(7)	19.1 ± 1.8	-48.7(4.3)	0.78(25)	0.003(1)
$\kappa_{Q_3} - \kappa_{q_2} - \kappa_{q_2}$	0.61(14)	0.70(5)	19.6 ± 1.7	-46.9(4.1)	1.08(23)	0.018(4)
$\kappa_{Q_3} - \kappa_{q_2} - \kappa_{q_3}$	0.62(20)	0.68(7)	19.9 ± 2.1	-47.7(4.2)	1.00(32)	0.012(3)
$\kappa_{Q_3} - \kappa_{q_3} - \kappa_{q_3}$	0.25(8)	0.68(6)	20.5 ± 2.2	-46.9(4.1)	1.43(41)	0.024(6)

TABLE 2.3 – $A_1, G_1, A_2/A_1, G_2/G_1$ at $\beta = 6.2$ for several values of q^2 in the physical units (GeV^2) as obtained by using $a^{-1} = 2.71(12) \text{ GeV}$ (from eq. (IV.2.18)).

κ_Q	am_P	am_V	$G_1(0)^{(lin.)}$	$G_1(0)^{(quad.)}$	$G_1(0)^{(log.)}$	$g_{VP\pi}^{(lin.)}$
$Q_1 : 0.1250$	0.645(3)	0.688(6)	16.8 ± 1.9	15.6 ± 2.4	15.0 ± 3.0	17.7 ± 2.2
$Q_2 : 0.1220$	0.744(4)	0.779(6)	19.3 ± 2.4	18.0 ± 3.3	17.2 ± 4.2	20.1 ± 2.7
$Q_3 : 0.1190$	0.836(4)	0.865(7)	21.7 ± 3.0	20.3 ± 4.3	19.3 ± 5.6	22.6 ± 3.3

TAB. 2.4 – For each heavy quark directly simulated on the lattice we show the values of the heavy-light meson masses for which the light quark is (linearly) extrapolated to the u/d -quark mass. We also list the values of the corresponding $G_1(0)$ (i.e. the $g_{VP\pi}$ coupling without the G_2/G_1 correction) by using eqs. (IV.2.35, IV.2.36, IV.2.37), and in the last column, the $g_{VP\pi}$ linearly extrapolated including the G_2/G_1 correction (see eq. (IV.2.25)).

κ_Q	$\hat{g}_Q^{(0, lin.)}$	$\hat{g}_Q^{(lin.)}$
$Q_1 : 0.1250$	0.636(65)	0.669(72)
$Q_2 : 0.1220$	0.641(76)	0.668(79)
$Q_3 : 0.1190$	0.648(86)	0.673(88)

TAB. 2.5 – For each heavy quark we show the values of $\hat{g}_Q^{(0)}$ for which the light quark is linearly extrapolated to the u/d -quark mass and the \hat{g}_Q linearly extrapolated including the $G_2(0)/G_1(0)$ correction (see eq.(IV.2.26)).

χ -extrap.	$g_{D^*D\pi}$	\hat{g}_c	\hat{g}_∞
linear	18.82 ± 2.34	0.669(75)	0.69(18)
quadratic	17.11 ± 3.10	0.574(88)	0.62(27)
χ -log	16.39 ± 4.02	0.551(118)	0.57(37)

TAB. 2.6 – Results of the linear interpolation of the form (IV.2.41) to D - D^* mesons at $\beta = 6.2$, for each of the three chiral extrapolations discussed in the text. Note that only the linearly extrapolated result incorporates the G_2/G_1 correction. The other two are uncorrected.

	0.1339	0.1342	0.1344	0.1346	κ_{ud}
$G_1(0)$	19.9 ± 2.4	20.8 ± 3.0	22.7 ± 4.3	19.3 ± 4.0	21.4 ± 6.0
$\hat{g}_Q^{(0)}$	0.80(7)	0.80(9)	0.83(12)	0.78(13)	0.80(19)

TAB. 2.7 – Values of $G_1(0)$ and $\hat{g}_Q^{(0)}$ at $\beta = 6.0$ for one fixed heavy quark: $\kappa_Q = 0.1190$ and several light quarks. The extrapolation to the physical pion mass is presented in the last column.

Bibliographie

- [73] S. Ahmed *et al.* [CLEO Collaboration], Phys. Rev. Lett. **87** (2001) 251801, [hep-ex/0108013], A. Anastassov *et al.*, [hep-ex/0108043]. K. K. Gan, [hep-ex/0202012].
- [2] P. L. Cho and H. Georgi, Phys. Lett. B **296**, 408 (1992) [Erratum-ibid. B **300**, 410 (1993)] [arXiv:hep-ph/9209239].
- [3] D. Melikhov and M. Beyer, Phys. Lett. B **452** (1999) 121, [hep-ph/9901261];
- [4] C. A. Dominguez and N. Paver, Z. Phys. C **41**, 217 (1988).
- [2] D. Becirevic and A. Le Yaouanc, JHEP **9903** (1999) 021, [hep-ph/9901431].
- [6] P. Colangelo and A. Khodjamirian, “*At the frontier of particle physics*”, vol. 3, 1495-1576, [hep-ph/0010175].
- [7] A. Khodjamirian, R. Ruckl, S. Weinzierl and O. I. Yakovlev, Phys. Lett. B **457** (1999) 245, [hep-ph/9903421].
- [8] P.J. O’Donnell, Q.P. Xu, Phys. Lett. **B336** (1994) 113, [hep-ph/9406300]; W. Jaus, Phys. Rev. **D53** (1996) 1349.
- [3] P. Singer, Acta Phys. Polon. B **30** (1999) 3849, [hep-ph/9910558]; D. Guetta and P. Singer, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **93** (2001) 134, [hep-ph/0009057].
- [10] D. Melikhov and B. Stech, Phys. Rev. D **62** (2000) 014006 [hep-ph/0001113]. J. L. Goity and W. Roberts, Phys. Rev. D **64** (2001) 094007, [hep-ph/0012314]; M. Di Pierro and E. Eichten, Phys. Rev. D **64** (2001) 114004, [hep-ph/0104208]; P. Colangelo and F. De Fazio, [hep-ph/0201305]; F. S. Navarra, M. Nielsen and M. E. Bracco, Phys. Rev. D **65**, 037502 (2002) [arXiv:hep-ph/0109188].

- [11] P. Roudeau, at the “Lepton-Photon 2001”, Rome, Italy, Jul.2001, [hep-ph/0110397].
- [13] G. M. de Divitiis, L. Del Debbio, M. Di Pierro, J. M. Flynn, C. Michael and J. Peisa [UKQCD Collaboration], JHEP **9810** (1998) 010, [hep-lat/9807032].
- [9] R. Casalbuoni, A. Deandrea, N. Di Bartolomeo, R. Gatto, F. Feruglio and G. Nardulli, Phys. Rept. **281** (1997) 145, [hep-ph/9605342].
- [29] M. Luscher, S. Sint, R. Sommer, P. Weisz and U. Wolff, Nucl. Phys. B **491** (1997) 323, [hep-lat/9609035].
- [19] T. Bhattacharya, R. Gupta, W. J. Lee and S. R. Sharpe, Phys. Rev. D **63** (2001) 074505, [hep-lat/0009038], see also [hep-lat/0111001].
- [16] S. Collins, C. T. Davies, G. P. Lepage and J. Shigemitsu [UKQCD collaboration], hep-lat/0110159, see also [hep-lat/0109036].
- [30] M. Luscher, S. Sint, R. Sommer and H. Wittig, Nucl. Phys. B **491** (1997) 344, [hep-lat/9611015].
- [18] D. Becirevic, V. Lubicz and G. Martinelli, Phys. Lett. B **524** (2002) 115, [hep-ph/0107124],
D. Becirevic, V. Lubicz, G. Martinelli and M. Testa, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **83** (2000) 863, [hep-lat/9909039].
- [19] M. Gockeler, R. Horsley, H. Perlt, P. Rakow, G. Schierholz, A. Schiller and P. Stephenson, Phys. Rev. D **57** (1998) 5562, [hep-lat/9707021].
- [20] T. Kaneko, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **106** (2002) 133 [hep-lat/0111005].
- [21] C. R. Allton, V. Gimenez, L. Giusti and F. Rapuano, Nucl. Phys. B **489** (1997) 427, [hep-lat/9611021].
- [22] A. F. Falk and B. Grinstein, Nucl. Phys. B **416** (1994) 771, [hep-ph/9306310].
- [23] D. Becirevic, S. Prelovsek and J. Zupan, “Quenching errors in $B \rightarrow \pi$ and $B \rightarrow K$ transitions” *in preparation*.

2.3 Détermination des couplages \hat{g}_∞ et $g_{B^*B\pi}$ sur réseau

Cet article [218] complète l'étude précédente par une détermination de la constante de couplage \hat{g}_∞ de la théorie effective chirale des mésons lourds. Une détermination du couplage $g_{B^*B\pi}$ est aussi présentée: pour cela il est nécessaire de se placer à la limite de masse infinie de quarks et d'utiliser des considérations de symétrie des quarks lourds pour atteindre le secteur du méson B , en ayant comme référence le résultat précédant dans le secteur du D .

Dans la suite je présenterai un bilan comparatif des différentes prédictions théoriques du couplage \hat{g} .

LPT Orsay 03-72
SWAT/386
hep-lat/0310050
JHEP **0402** (2004) 016

Lattice measurement of the couplings \hat{g}_∞ and $g_{B^*B\pi}$

A. ABADA^a, D. BEĆIREVIĆ^a, PH. BOUCAUD^a, G. HERDOIZA^{a,b}, J.P. LEROY^a,
A. LE YAOUANC^a, O. PÈNE^a

^a *Laboratoire de Physique Théorique (B^{at}.210), Université de Paris XI,
Centre d'Orsay, 91405 Orsay-Cedex, France.*

^b *Department of Physics, University of Swansea,
Singleton Park, Swansea, SA2 8PP, United Kingdom.*

Abstract

We present the results of a quenched lattice QCD study of the coupling \hat{g} , in the static heavy quark limit. After combining this with our previous results obtained by using propagating heavy quarks with a mass around the physical charm quark, we are able to interpolate to the b -quark sector. Our results are $\hat{g}_\infty = 0.48 \pm 0.03 \pm 0.11$, $\hat{g}_b = 0.58 \pm 0.06 \pm 0.10$, and $g_{B^*B\pi} = 47 \pm 5 \pm 8$.

PACS: 12.38.Gc (Lattice QCD calculations), 13.75.Lb (Meson-meson interactions)

2.3.1 Introduction

The coupling of the vector and pseudoscalar heavy-light mesons to the pion, $g_{H^*H\pi}$, and the related \widehat{g}_Q defined through⁹

$$g_{H^*H\pi} = \frac{2\sqrt{m_H m_{H^*}}}{f_\pi} \widehat{g}_Q, \quad (\text{IV.2.46})$$

have been extensively studied in the literature, both for phenomenological and theoretical reasons (a list of results can be found in refs. [1–5]). \widehat{g}_Q is particularly important in the studies of the q^2 -dependence of the form factor $F_+(q^2)$ which encodes the non-perturbative QCD dynamics of $D \rightarrow \pi$ and $B \rightarrow \pi$ semileptonic decays. To better illustrate this, we consider the dispersion formula for $F_+^{B \rightarrow \pi}(q^2)$:

$$F_+^{B \rightarrow \pi}(q^2) = \frac{1}{2m_{B^*}} \frac{f_{B^*} g_{B^*B\pi}}{1 - \frac{q^2}{m_{B^*}^2}} + \frac{1}{\pi} \int_{(m_\pi + m_B)^2}^{\infty} dt \frac{\text{Im}F_+(t)}{t - q^2 - i\varepsilon}, \quad (\text{IV.2.47})$$

where m_{B^*} and f_{B^*} are the mass and the decay constant of the B^* -meson. Near the B^* -pole, F_+ can be approximated by the first term of the r.h.s of eq. (IV.2.47), which is why $g_{B^*B\pi}$ is so important. Inversely, from the q^2 -dependence deduced from the lattice data for $F_+^{B \rightarrow \pi}$, one can extract indirectly the value of $g_{B^*B\pi}$ (see e.g. [113]). Moreover the need for a more accurate estimate of \widehat{g}_Q became recently more evident since the guidance of the chiral extrapolations by the predictions of the heavy meson chiral perturbation theory necessarily involves \widehat{g}_Q [7]. In the effective theory based on the combination of the heavy quark and chiral symmetries [8, 9] one of the essential parameters is the coupling \widehat{g}_∞ which appears as the infinite quark mass limit of \widehat{g}_Q :

$$\widehat{g}_Q = \widehat{g}_\infty + \mathcal{O}(1/m_Q^n). \quad (\text{IV.2.48})$$

While the $B^* \rightarrow B\pi$ decay is forbidden by the lack of phase space and therefore the coupling $g_{B^*B\pi}$ cannot be measured in experiment, the coupling $g_{D^*D\pi}$ has already been measured. CLEO reported recently [73]:

$$g_{D^*D\pi} = 17.9 \pm 0.3 \pm 1.9, \quad (\text{IV.2.49})$$

$$i.e. \quad \widehat{g}_c^{\text{exp.}} = 0.61 \pm 0.01 \pm 0.07, \quad (\text{IV.2.50})$$

where we used eq. (IV.2.46) to obtain \widehat{g}_c from $g_{D^*D\pi}$. Since the pion emerging from this decay is soft, the experimental measurement of $\Gamma(D^{*+})$ is difficult. The experimental confirmation of the CLEO results would be highly welcome.

9. The subscript $Q \in \{c, b\}$ refers to the heavy quark constituent of the heavy-light meson.

Regarding the theoretical estimates the situation is still quite unsatisfactory. Typical values for \hat{g}_Q , as obtained by using the QCD sum rules (QCDSR) are low, around 0.3 [1], in disagreement with \hat{g}_c^{exp} . Such a disagreement with the experimental value was not, however, observed with similar couplings, such as $g_{\rho\omega\pi}$, $g_{NN\pi}$, or $g_{\Sigma_c^*\Lambda_c\pi}$. To overcome that problem, in ref. [270] it has been proposed to include the first radial excitations in the hadronic part of the sum rules, below the duality threshold. As a result the coupling \hat{g}_c becomes much larger ($\hat{g}_c \sim 0.7$), while the similar modification of the sum rule leaves the decay constants (f_D and f_{D^*}) unchanged.

Predictions of various quark models are in the range $0.3 \lesssim \hat{g}_\infty \lesssim 0.8$ [12]. In particular, in the model with the Dirac equation a value of \hat{g}_∞ around 0.6 was found before the experimental result became available [2]. On the lattice, a quenched calculation by UKQCD [13] led to $\hat{g}_\infty = 0.42(4)(9)$. This exploratory study was carried out in the static heavy quark limit where the difficulties to isolate the ground state are well known. In addition it was performed on a coarse lattice, with a low statistics and with only two light quark masses from which it was extrapolated to the chiral limit. Finally, the indirect measurements using the lattice data for the form factors F_+ and F_0 [113] have extracted rather small values [113].

In our recent paper [4], we presented the results of the quenched lattice simulation in which we used the propagating heavy quarks with the mass around the physical charm quark. We obtained, $\hat{g}_c = 0.67 \pm 0.08_{-0.06}^{+0.04}$, and observed no apparent dependence on the heavy quark mass. Actually the 3 values of \hat{g}_Q measured directly in the neighbourhood of the c -quark mass were compatible within our error bars and shew only a very small negative slope (see section 4.3 of ref. [4]). This situation allowed a safe *interpolation* to the c -quark but the determination of \hat{g}_∞ relied heavily on the hypothesis that the observed behaviour was valid over the whole mass-range. In order to check the validity of this assumption we have performed a lattice quenched computation of \hat{g} In the static heavy quark limit, the outcome of which is presented in this paper. Our result is

$$\hat{g}_\infty = 0.48 \pm 0.03 \pm 0.11 , \quad (\text{IV.2.51})$$

where the errors are statistical and systematic, respectively. Using this and the results we presented in ref. [4], we were able to interpolate to the b -quark. We get

$$\begin{aligned} \hat{g}_b &= 0.58 \pm 0.06 \pm 0.10 , & (\text{IV.2.52}) \\ g_{B^*B\pi} &= 47 \pm 5 \pm 8 . \end{aligned}$$

By comparing eqs. (IV.2.51) and (IV.2.52), our results suggest that the $1/m_B$ corrections to \hat{g}_∞ are of the order of 20 – 30%.

The paper is organized as follows: after this introduction we explain in Sec. 2.3.2 the relation between \widehat{g} and the matrix elements that we compute on the lattice; in Secs. 2.3.3 and 2.3.4 we present the details of our lattice study and show our main results; Sec. 2.3.5 is devoted to the discussion of systematic errors; in Sec. 2.3.6 we interpolate to the physical B -meson mass; finally we summarize our findings in Sec. 2.3.7.

2.3.2 Extracting \widehat{g}_∞

The coupling $g_{H^*H\pi}$ (with $H \in \{D, B\}$) is defined by the matrix element

$$\langle H(p') \pi(q) | H^*(p, \lambda) \rangle = g_{H^*H\pi} (q \cdot \epsilon^\lambda(p)) , \quad (\text{IV.2.53})$$

where $q = p - p'$ and $\epsilon^\lambda(p)$ is the polarization of the vector meson. To determine $g_{H^*H\pi}$, we can consider the matrix element of the divergence of the light–light axial current, $A_\mu = \bar{q}\gamma_\mu\gamma_5q$. In the limit where the pion is soft, we can write

$$\langle H(p') | q_\mu A^\mu | H^*(p, \lambda) \rangle = g_{H^*H\pi} \frac{q \cdot \epsilon^\lambda(p)}{m_\pi^2 - q^2} \times f_\pi m_\pi^2 + \dots \quad (\text{IV.2.54})$$

where the dots stand for terms suppressed when q^2 is small and close to the m_π^2 -pole. To bring out $g_{H^*H\pi}$ from (IV.2.54) we express the l.h.s in terms of the form factors, $A_{0,1,2}$, evaluated on the lattice. The standard parametrization reads

$$\begin{aligned} \langle H(p') | A^\mu | H^*(p, \lambda) \rangle &= 2m_{H^*} A_0(q^2) \frac{\epsilon^\lambda \cdot q}{q^2} q^\mu + (m_{H^*} + m_H) A_1(q^2) \left[\epsilon^{\lambda\mu} - \frac{\epsilon^\lambda \cdot q}{q^2} q^\mu \right] \\ &\quad + A_2(q^2) \frac{\epsilon^\lambda \cdot q}{m_H + m_{H^*}} \left[p^\mu + p'^\mu - \frac{m_{H^*}^2 - m_H^2}{q^2} q^\mu \right] . \end{aligned} \quad (\text{IV.2.55})$$

Note that when $\vec{q} = \vec{0}$, the soft pion limit is verified, since $q^2 = (m_{H^*} - m_H)^2 \sim 0$. Moreover, if we choose $\vec{q} = \vec{0}$ and $\vec{p} = \vec{p}' = \vec{0}$, eq. (IV.2.55) simplifies to

$$\langle H | A_i | H^* \rangle = (m_{H^*} + m_H) A_1(0) \epsilon_i^\lambda . \quad (\text{IV.2.56})$$

As discussed in our previous paper [4], when $q^2 = 0$ the form factors $A_{0,1,2}$ are related to one another because the q^2 -poles in eq. (IV.2.55) are unphysical and therefore their residues have to cancel. This leads to the relation

$$2m_{H^*} A_0(0) = (m_{H^*} + m_H) A_1(0) + (m_{H^*} - m_H) A_2(0) . \quad (\text{IV.2.57})$$

When taking the divergence of the axial current in (IV.2.55), only the term in A_0 remains on the r.h.s. so that by using eq. (IV.2.54), we arrive at

$$g_{H^*H\pi} = \frac{2m_{H^*} A_0(0)}{f_\pi} \quad (\text{IV.2.58})$$

$$= \frac{1}{f_\pi} [(m_{H^*} + m_H) A_1(0) + (m_{H^*} - m_H) A_2(0)] . \quad (\text{IV.2.59})$$

Finally, inserting the definition (IV.2.46) leads to the expression for \widehat{g}_Q

$$\widehat{g}_Q = \frac{(m_{H^*} + m_H)}{2\sqrt{m_H m_{H^*}}} A_1(0) + \frac{(m_{H^*} - m_H)}{2\sqrt{m_H m_{H^*}}} A_2(0). \quad (\text{IV.2.60})$$

Owing to the heavy quark symmetry, the vector and the pseudoscalar heavy–light mesons are degenerate in the static limit and eq. (IV.2.60) simply becomes

$$\widehat{g}_\infty = A_1(0). \quad (\text{IV.2.61})$$

Thus, the value of \widehat{g}_∞ (in the static heavy quark limit) is simply given by the form factor A_1 at $\vec{q} = \vec{0}$.

2.3.3 Strategy for the calculation of \widehat{g}_∞ on the lattice

To determine the form factor $A_1(0)$ from the lattice evaluation of the matrix element $\langle H | A^\mu | H^* \rangle$, we use eq. (IV.2.56) where H and H^* now refer to the pseudoscalar and vector mesons containing an infinitely heavy quark. We consider the two- and three-point correlation functions, C_2 and $C_{3\mu\nu}$, with local (L) and smeared (S) interpolating fields for mesons consisting of a static heavy and a propagating light quarks.

In the case in which both the source and the sink are smeared, the two-point functions are defined as

$$C_2^{SS}(t_x) = \left\langle \sum_{\vec{x}} P^S(x) P^{S\dagger}(0) \right\rangle = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \left\langle \sum_{\vec{x}} V_i^S(x) V_i^{S\dagger}(0) \right\rangle, \quad (\text{IV.2.62})$$

where P^S and V_μ^S are the smeared interpolating fields of the pseudoscalar and vector mesons. $C_2^{SL}(t_x)$ is obtained by simply replacing $P^S \rightarrow P^L = \bar{q}\gamma_5 h$, $V^S \rightarrow V^L = \bar{q}\gamma_\mu h$, where h stands for the static heavy quark field. The equality between the pseudoscalar and vector meson correlation functions in eq. (IV.2.62) is a consequence of the heavy quark symmetry. When the excited states are decoupled and the ground state isolated (at large enough t_x), the two-point function becomes

$$C_2^{SS}(t_x) = (\mathcal{Z}^S)^2 e^{-E_H^{SS} t_x}, \quad (\text{IV.2.63})$$

where E_H is the binding energy of the static heavy–light meson, and

$$\mathcal{Z}^S \equiv \frac{\langle 0 | P^S | H \rangle}{(2m_H)^{1/2}}. \quad (\text{IV.2.64})$$

The *three-point* Green functions with smeared interpolating fields are defined in the following way,

$$C_{3\mu\nu}^{SS}(0, t_x, t_y) = \left\langle \sum_{\vec{x}, \vec{y}} P^S(y) A_\nu(x) V_\mu^{S\dagger}(0) \right\rangle_{0 < t_x < t_y}, \quad (\text{IV.2.65})$$

where the vector and pseudoscalar mesons are inserted at the origin and at a fixed time t_y , respectively. The insertion time t_x of the (local) axial current ($A_\mu = \bar{q}\gamma_\mu\gamma_5q$) varies in the range $0 - t_y$. The matrix element we are considering, $\langle H | A_\mu | H^* \rangle$, is then extracted from the following ratio:

$$\begin{aligned} R^{SS}(t_x) &= \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \frac{C_{3i}^{SS}(t_x) \mathcal{Z}_S \mathcal{Z}_S}{C_2^{SS}(t_x) C_2^{SS}(t_y - t_x)} \\ &\rightarrow \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \epsilon_i^\lambda(\vec{0}) \left. \frac{\langle H | A_i(t_x) | H^* \rangle}{2m_H} \right|_{0 \ll t_x \ll t_y} = A_1(0) = \hat{g}_\infty. \end{aligned} \quad (\text{IV.2.66})$$

The time dependence cancels in the ratio, so that a plateau in time of $R^{SS}(t_x)$ directly leads to the value of $A_1(0)$, which for $m_q \rightarrow 0$ becomes the desired coupling \hat{g}_∞ . In what follows we will use the notation in which $A_1(0) \equiv \hat{g}_\infty$, even though this is strictly true only for $m_q \rightarrow 0$.

In our simulation we choose to work with the usual (improved) Wilson light quarks and with the static heavy quark by using the Eichten–Hill action [15]. In terms of quark propagators and the Wilson line, the three-point correlation function (IV.2.65) can be written as

$$C_{3\mu\nu}^{LL}(t_x) = \left\langle \sum_{\vec{x}, \vec{y}} \text{Tr} \left[\frac{1 + \gamma_0}{2} P_y^0 \gamma_\mu S_u(0; x; U) \gamma_\nu \gamma_5 S_d(x; y; U) \gamma_5 \right] \right\rangle_U, \quad (\text{IV.2.67})$$

where $S_q(x; y; U) = q(x)\bar{q}(y)$ is the propagator of the light quark q . In our study the two light quarks are degenerate, $m_u = m_d \equiv m_q$. The brackets $\langle \dots \rangle_U$ indicate the average over the background gauge field configurations (U), whereas P_y^x is the ordered product of links in the time direction (Wilson line),

$$P_y^x = \delta(\vec{x} - \vec{y}) \prod_{t_z=t_x}^{t_y-1} U_t(x + t_z \hat{t}), \quad (\text{IV.2.68})$$

with \hat{t} being the unit vector in the time direction.

To improve the statistical quality of the signal we implement the recent proposal of ref. [228] and replace the simple link variables in the Wilson line by the so called “*fat*

links”, defined as

$$U_t(x) \rightarrow U_t^{\text{fat}}(x) = \frac{1}{6} \sum_{i=x,y,z} \left[U_i^{\text{Staple}}(x, x + \hat{t}) + U_{-i}^{\text{Staple}}(x, x + \hat{t}) \right]. \quad (\text{IV.2.69})$$

In order to isolate the ground state from the correlators (IV.2.67) at the smallest time separations, it is necessary to devise an efficient smearing procedure. We use the proposal of ref. [237] and replace the quark fields $q(x)$ by

$$q(x) \rightarrow \sum_{r=0}^{R_{\text{max}}} (r+\frac{1}{2})^2 \phi(r) \sum_{i=x,y,z} \left\{ \left[\prod_{k=1}^r U_i^F(x+(k-1)\hat{i}) \right] q(x+r\hat{i}) + \left[\prod_{k=1}^r U_i^{F\dagger}(x-k\hat{i}) \right] q(x-r\hat{i}) \right\}. \quad (\text{IV.2.70})$$

The wave function $\phi(r)$ is chosen in such a way that the overlap with the ground state is increased. We take $\phi(r) = e^{-r/R_b}$, where R_b is a parameter which is fixed by requiring that the smearing be optimal. Note that it is not necessary to normalize the wave function since the normalisation factors cancel in the ratio (IV.2.66). The smearing also includes the so called fuzzing: the gauge links U^F are fuzzed by N_F iterations of the following procedure

$$U_j(x) \rightarrow U_j^F(x) = \mathcal{P} \left[C U_j(x) + \sum_{i \neq j} \left[U_i^{\text{Staple}}(x, x + \hat{j}) + U_{-i}^{\text{Staple}}(x, x + \hat{j}) \right] \right], \quad (\text{IV.2.71})$$

where \mathcal{P} is used to project the fuzzed fields onto $SU(3)$, and C is a real parameter.

2.3.4 Conditions and results of the simulation

The main results presented in this work are obtained from the simulation performed on a $24^3 \times 28$ lattice with periodic boundary conditions, at $\beta = 6.2$. We collect 160 independent $SU(3)$ gauge configurations in the quenched approximation. The Wilson fermion action is non-perturbatively $\mathcal{O}(a)$ improved with $c_{SW} = 1.614$ [18]. The light quark propagators are computed with the following Wilson hopping parameters:

$$\kappa_q = 0.1344_{q_1}, 0.1348_{q_2}, 0.1351_{q_3}, \quad (\text{IV.2.72})$$

corresponding to quark masses around the physical strange quark.

We will present our results using our preferred set of parameters, $t_y = 13a$, $R_{\text{max}} = 5a$, $R_b = 3.0a$, $N_F = 5$ and $C = 4$. The motivation for this choice of parameters, the effect of the smearing (IV.2.70) and of the modification of the static heavy quark action (IV.2.69), will be discussed in section 2.3.5, where we will also quantify the systematic effects involved in our calculation.

Study of the two-point functions

Light–light operator: The axial current appearing in eq. (IV.2.65) consists of two light quarks. Even though we use the improved Wilson quarks, for our purpose there is no need to improve the bare axial current since the form factor A_1 is insensitive to the presence of the $\mathcal{O}(a)$ improvement term. On the other hand, the improvement of the renormalization constant is of course necessary. We use

$$Z_A^I(g_0^2) = Z_A^{(0)}(g_0^2) \left(1 + \tilde{b}_A(g_0^2)a\rho\right), \quad (\text{IV.2.73})$$

where the quark mass $a\rho$ is obtained from the axial Ward identity, $\partial_\mu A_\mu = 2\rho P$ ($P = \bar{q}\gamma_5 q$). The non-perturbatively evaluated renormalization constants are: $Z_A^{(0)} = 0.81(1)$ [19, 20] and $\tilde{b}_A = 1.19(6)$ [19] at $\beta = 6.2$. We have checked that the inverse lattice spacing obtained from the pion decay constant is consistent with the one we reported in our previous paper. Since the temporal extension of the lattice used in our previous paper is much larger than the present one we will use, whenever needed, $a^{-1}(f_\pi) = 2.71(12)$ GeV from ref. [4].

Static heavy–light correlators: The binding energy E_H and the constant \mathcal{Z} are obtained from the two-point correlation function as indicated in eq. (IV.2.63). To identify the plateau in time where the ground state is properly isolated, we study the effective binding energy,

$$E_{\text{eff}}^{SS}(t) = \ln \left(\frac{C_2^{SS}(t)}{C_2^{SS}(t+1)} \right). \quad (\text{IV.2.74})$$

The superscript “ SS ” refers to the situation in which both interpolating fields are smeared. Note also that the projection $\frac{1+\gamma_0}{2}$ of the static quark onto the positive energy states reduces the contamination of the signal coming from the opposite side of the periodic lattice. Therefore, the time reversal symmetry over the time dimension of the lattice is not preserved in the heavy quark limit and the two-point functions are no longer symmetric with respect to $t = T/2$. We illustrate in fig. 2.10 the signals for the effective binding energies of the C_2^{SS} and C_2^{SL} correlators. By fitting to the form (IV.2.63) in the time interval in which the plateau is observed, we extract E_H and \mathcal{Z} . We have also considered a fit with two exponentials, but did not observe any noticeable effect. The double exponential fit becomes necessary only for when performing simulations without the “fattening” indicated in eq. (IV.2.69) because in that case the plateaus of $E_{\text{eff}}(t)$ are much shorter.

We first calculate the B -meson decay constant, $f_{B_s}^{\text{static}}$. Rather than providing an accurate value for this quantity (a precision determination of $f_{B_s}^{\text{static}}$, has already been made in ref. [228]), our intention is only to test the validity of our computation. \mathcal{Z}^L is not obtained directly from the local–local correlators because the corresponding correlators are much less stable and statistically noisier than the smeared–local ones. For this reason \mathcal{Z}^L

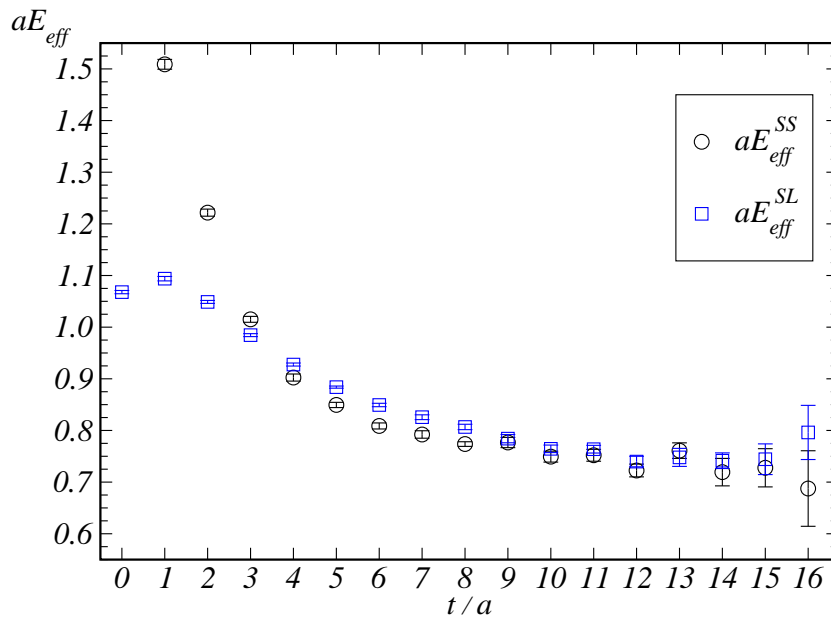


FIG. 2.10 – Signals for the effective binding energies obtained by using eq. (IV.2.74) in case of Smeared-Smeared (“SS”) and Smeared-Local (“SL”) sources. In both cases the light quark mass corresponds to $\kappa_q = 0.1344$, whereas for the static quark we use the “fat” links as discussed in the text (see eq. (IV.2.69)).

is extracted from

$$R_Z(t) = Z^S \times \frac{C_2^{SL}(t)}{C_2^{SS}(t)} \Big|_{t \gg 1} \rightarrow Z^L. \quad (\text{IV.2.75})$$

In table 2.8, we present the values of E_H^{SS} , E_H^{SL} , Z^S , and Z^L for a static heavy quark and light quarks with masses corresponding to the κ_{q_i} 's specified in eq. (IV.2.72). The decay

	aE_H^{SS}	aE_H^{SL}	Z^S	Z^L
static- q_1	0.760(4)	0.758(4)	64.8 ± 2.3	0.126(3)
static- q_2	0.748(5)	0.745(5)	60.8 ± 2.4	0.121(3)
static- q_3	0.740(5)	0.737(6)	57.8 ± 2.5	0.117(3)

TAB. 2.8 – The values of the binding energies obtained by using the Smear-Smeared and Smear-Local two-point correlation functions. The corresponding constants Z^S and Z^L are also given (see eq. (IV.2.63)). The time intervals chosen for the fits are: $t/a \in [8, 13]$ for E_H^{SS} , Z^S , and $t/a \in [9, 13]$ for E_H^{SL} , Z^L .

constant $f_{B_s}^{\text{static}}$ is obtained from Z^L using $m_{B_s} = 5.37$ GeV, i.e. the physical B_s -meson mass,

$$f_{B_s}^{\text{static}} = Z_A^{\text{stat}} Z^L \sqrt{\frac{2}{m_{B_s}}} a^{-3/2}, \quad (\text{IV.2.76})$$

and $Z_A^{\text{stat}} = 0.77(3)$, the static heavy-light axial current renormalization constant computed non-perturbatively in ref. [221]. Notice that this value of Z_A^{stat} is obtained by using the Eichten-Hill static heavy quark action, i.e. without including the effects of the fattening (IV.2.69). In ref. [228], however, it has been argued, on the basis of the observed behaviour of the step scaling function, that the effect on Z_A^{stat} of the modification of the static quark action is only very small. Therefore the value we are using is certainly sufficient to achieve our present goal which, we recall, is to check the compatibility of our results with previous ones.

In fig. 2.11, we provide an illustration of the signal (plateau) of the ratio $R_z(t)$, and plot the corresponding $f_{B_q}^{\text{static}}$, as obtained by using eq. (IV.2.76). From the linear interpolation to the strange quark mass (corresponding to $m_{ss}^2 = 2m_K^2 - m_\pi^2$), we obtain f_{B_s} , which we quote as

$$f_{B_s}^{\text{static}} = \frac{Z_A^{\text{stat}}}{0.77} (251 \pm 20 \text{ MeV}). \quad (\text{IV.2.77})$$

This value agrees quite well with the one, $f_{B_s}^{\text{static}} = 225 \pm 10$ MeV, recently obtained also at $\beta = 6.2$, in ref. [228].

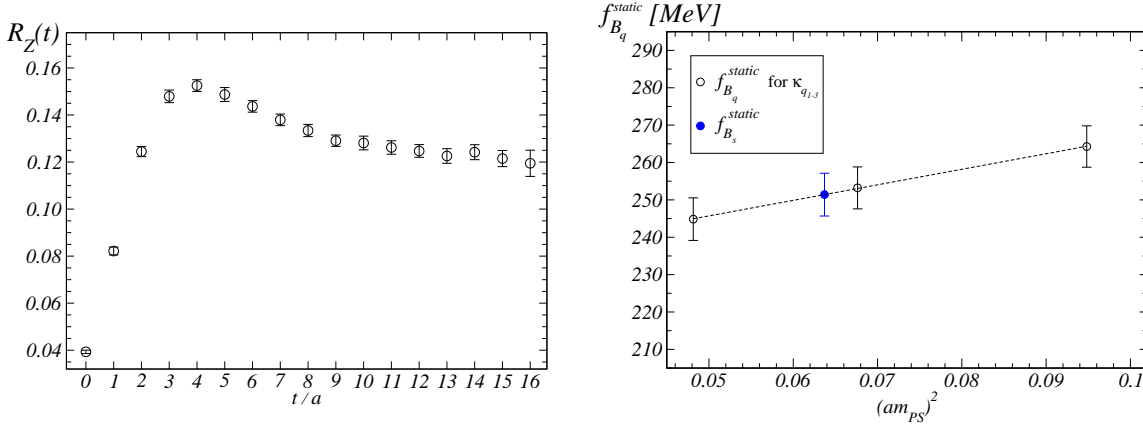


FIG. 2.11 – On the left, we illustrate the signal for the ratio $R_z(t)$ in the case $\kappa = 0.1344$. The fit of the plateau ($t/a \in [9; 13]$) to a constant gives \mathcal{Z}^L , which is then used to compute $f_{B_q}^{\text{static}}$ (see eq. (IV.2.76)). The corresponding decay constants are shown in the right plot (empty circles). The result of the linear interpolation to the strange light quark, i.e. $f_{B_s}^{\text{static}}$, is marked by the filled circle. Notice that on the right plot only the statistical errors due to \mathcal{Z}_L are displayed.

Study of the three-point functions

We observe that, for t_x not too close to 0 or t_y , the three-point function, $C_{3ii}^{SS}(0, t_x, t_y)$, introduced in eq. (IV.2.65), does not depend on t_x . The reason for this is that, in the static limit, the ground states of the vector and pseudo-scalar mesons are degenerate. Therefore, by writing $C_{3ii}^{SS}(0, t_x, t_y)$ as

$$\sum_k \sum_l \langle 0 | P(t_y) | H_k \rangle \langle H_k | A_i(t_x) | H_l^* \rangle \langle H_l^* | V_i^\dagger(0) | 0 \rangle, \quad (\text{IV.2.78})$$

where k and l label the excitations, one sees that in the *diagonal* contribution ($k = l$) the exponential time dependence writes

$$e^{-(E_{H_l^*} - E_{H_k})t_x - E_{H_k}t_y} = e^{-E_{H_k}t_y}, \quad (\text{IV.2.79})$$

which is independent of t_x (t_y is kept fixed). The same is true for the ratio (IV.2.66) in which the denominator is composed of two correlators C_2 which are degenerate in this

case so that the exponential t_x dependence explicitly cancels out, and one ends up with

$$R^{SS}(t_x) = \frac{C_{3ii}^{SS}(t_x)}{\mathcal{Z}_S^2 e^{-E_H^{SS} t_y}}. \quad (\text{IV.2.80})$$

In other words, the plateau for the ratio $R^{SS}(t_x)$ is equivalent to a plateau of $C_{3ii}^{SS}(t_x)$. A remarkable feature is that C_3 already develops a plateau at very a small time t_x . The physical interpretation could be that in the static limit, the *non-diagonal* matrix elements of the axial current simply vanish,

$$\langle H_k | A_i(t_x) | H_l^* \rangle_{k \neq l} \sim 0, \quad (\text{IV.2.81})$$

which implies that the t_x -dependence in the l.h.s. of eq. (IV.2.79) vanishes as well when $k \neq l$. Note that this is the case in a quark model framework where the axial current reduces to a light quark spin operator. Since the spatial wave functions of the ground state and the excited states are orthogonal, the spin operator does verify eq. (IV.2.81)¹⁰.

As shown in eq. (IV.2.66), the value of the bare coupling $\hat{g}_\infty^{(0)}$, is obtained from the fit of $R^{SS}(t_x)$ to a constant. We illustrate the signal for $R^{SS}(t_x)$ in fig. 2.12. The corresponding results are listed in table 2.9, where we also give the final results for $\hat{g}_\infty = Z_A^I \hat{g}_\infty^{(0)}$, for our set of light quarks (IV.2.72). We also include the values of \hat{g}_∞ when the light quark is either the strange or the u/d quark. From the linear extrapolation to the chiral limit¹¹, shown in fig. 2.13, we finally obtain,

$$\hat{g}_\infty = 0.48(3). \quad (\text{IV.2.82})$$

The results presented in this section have been obtained after having fixed $t_y = 13a < T/2$. This choice was made after we performed several simulations with $t_y/a \in [8, 13]$ and studied $R^{SS}(t_x) \mathcal{Z}_S^2$ for each t_y . We have checked that the result for $R^{SS}(t_x) \mathcal{Z}_S^2$ does not change as soon as t_y gets larger than $10a$. To separate the sources as far as possible we have chosen to fix t_y at $13a$.

2.3.5 Smearing, Fattening and Systematic uncertainties

As we already mentioned, to improve the statistical quality of the correlation functions computed with the static heavy quark action, we used the ‘‘fattening’’ procedure [228].

10. This statement is verified by our results using the static heavy quark. It is further corroborated by the matrix elements obtained by using the propagating heavy quark with a mass around the physical charm quark: we see that, as the heavy quark mass is increased, the three-point function $C_{3ii}^{SS}(0, t_x, t_y)$ begins to develop a plateau for smaller and smaller values of t_x .

11. We defer to subsection (2.3.5) the discussion of the validity of this procedure and of the uncertainties it induces.

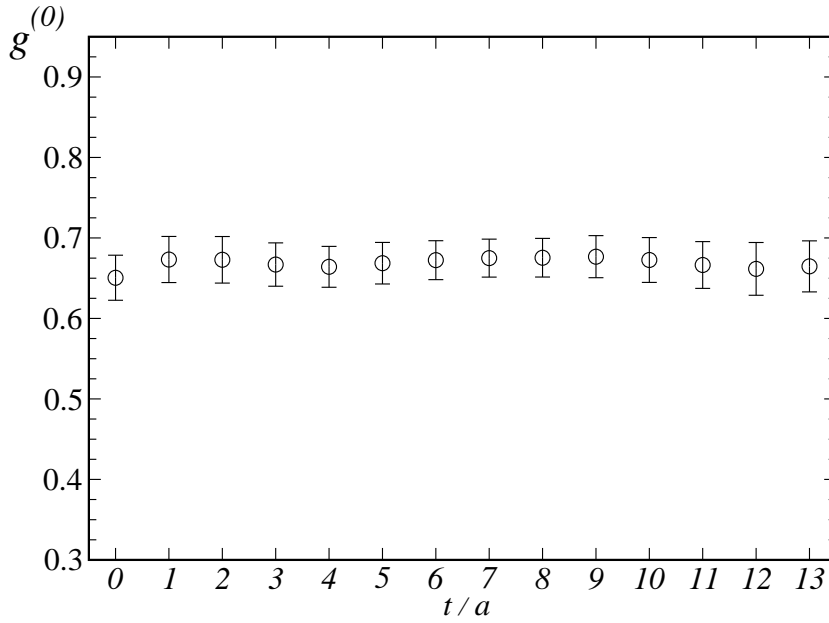


FIG. 2.12 – Signal for the ratio $R^{SS}(t_x)$ (see eq. (IV.2.80)). Illustration is provided for $\kappa_{q_1} = 0.1344$. From the fit in $t/a \in [3, 10]$, we obtain the value of $\hat{g}_\infty^{(0)}$.

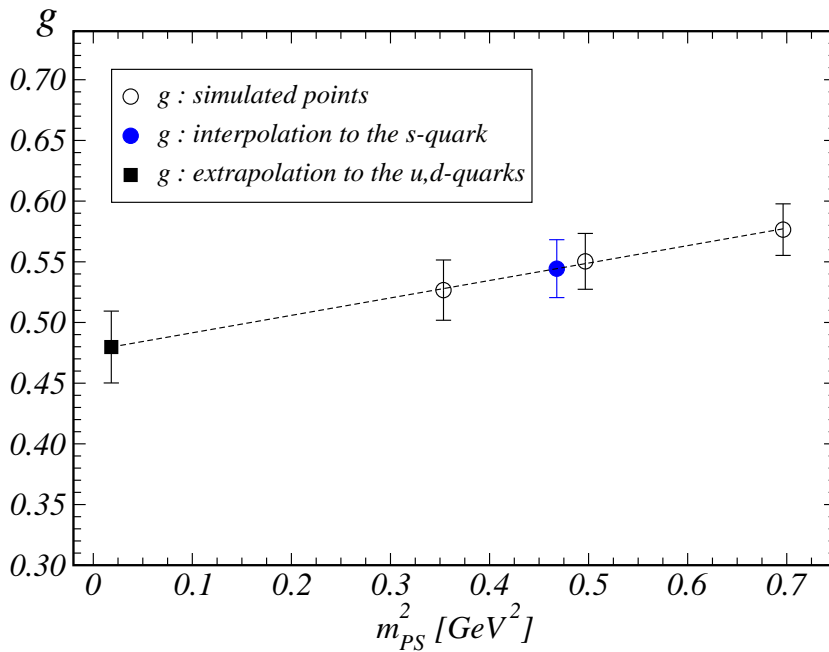


FIG. 2.13 – Linear extrapolation of \hat{g}_∞ to the chiral limit. The empty circles correspond to the simulated points whereas the filled symbols are the result of extra(inter)polation.

	$\widehat{g}_\infty^{(0)}$	\widehat{g}_∞
static- q_1	0.67(2)	0.58(2)
static- q_2	0.65(3)	0.55(2)
static- q_3	0.63(3)	0.53(2)
static- s	0.64(3)	0.54(3)
static- u/d	0.59(3)	0.48(3)

TAB. 2.9 – Bare and renormalized values of \widehat{g}_∞ . The time interval chosen to fit for a plateau in the ratio $R^{SS}(t)$ is $t/a \in [3, 10]$.

In addition, we use the smearing of the heavy–light interpolating fields [237], which helps isolating the lowest bound state at lower time separations. In this section we explain how the parameters of the smearing procedure were chosen (IV.2.70) and show the benefits of using the “fat link” static heavy action instead of the standard Eichten–Hill one. After that discussion, we enumerate the sources of systematic uncertainties and estimate the related errors.

Smearing

The smearing procedure involves four parameters: R_{\max} , R_b , N_F and C (these parameters are defined in eqs. (IV.2.70–IV.2.71)). The value of R_{\max} represents half the size of the hypercube where the smearing wave function lives and it is set to the maximal value allowed by the memory limitations. In our case, $R_{\max} = 5a$. The parameter R_b , which appears in the wave function $\phi(r) = e^{-r/R_b}$, is not fixed by any physical requirement other than improving the shape of the plateau for R_Z . The smeared–local correlators are much more sensitive to the variation of R_b than the smeared–smeared ones. In fig.2.14 we show the shape of $R_Z(t)$ for $R_b \in [1.0a, 4.0a]$. We see that if $R_b \geq 3.0a$, the value of $R_Z(t)$ on the plateau, and thus also the corresponding $f_{B_q}^{\text{static}}$, remains unchanged. The reason is that, as the wave function $\phi(r)$ lives in a typical volume of radius $R_{\max} = 5a$, the shape of the normalized wave function term $[(r + 1/2)^2 \phi(r)]$ in eq. (IV.2.70) does not vary much when changing R_b in $3a - 5a$. Of course, all the physical quantities are built in such a way that, at the end, the effect of the normalization of $\phi(r)$ (i.e. the unwanted effect of the smearing)

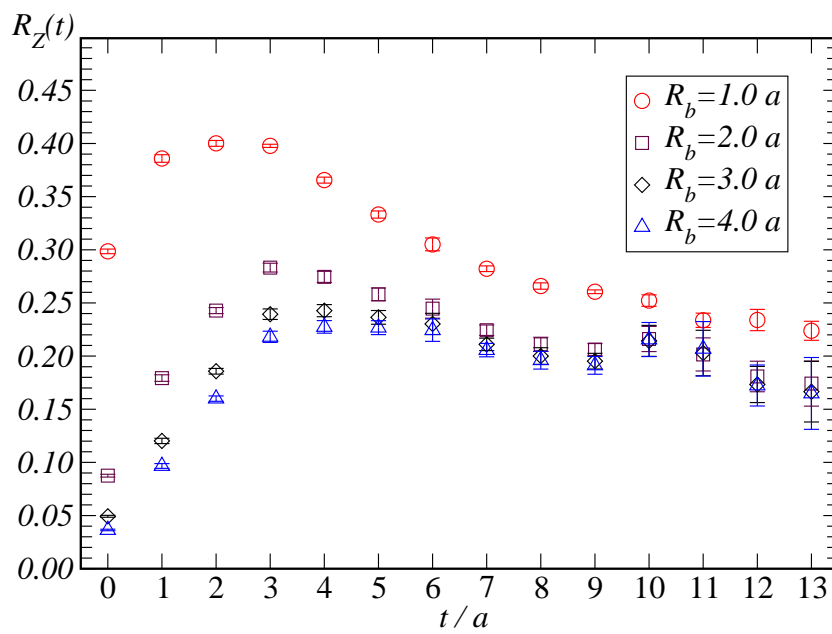


FIG. 2.14 – Effect on the ratio $R_Z(t)$ of the variation of R_b . For $R_b > 2.0 a$ the value of R_Z remains almost unchanged in the region $t \geq 7 a$. For this illustration we used the Eichten–Hill static heavy quark action, while the light Wilson quark κ is 0.1344.

cancels. On the basis of these observations, we fix $R_b = 3a$.¹²

The remaining two parameters, C and N_F , enter in the fuzzing procedure (IV.2.71). As far as C is concerned, it turns out that its value does not make any significant effect on our result. We varied its value in the range $C \in [0.8, 4.0]$, and the shape of $R_Z(t)$ does not change at all (of course, within our present statistical accuracy). On the other hand, the number of fuzzing iterations, N_F , is chosen to be $N_F = 5$. The effect of each iteration is to fuzz the spatial links by the gauge fields in the immediate neighborhood. By several iterations we can restore the effect of the wave function inside the volume of radius R_b , where $\phi(r)$ is supposed to live. As N_F iterations cover a volume of typical radius $(N_F + 1)^{1/2} a$, we should require $N_F \sim 8$ to fill a volume of radius $R_b = 3.0 a$. It turns out, however, that for $N_F \geq 6$, the signal for R_Z begins to increase sharply: a large number of fuzzing iterations destroy the quantum fluctuations as it was observed in the cooling procedures used to study instantons [21]. We checked that R_Z , and thus f_B^{static} , remain stable for $N_F \in [3, 5]$, and for the final simulation we chose $N_F = 5$.

Effect of “fattening” the static heavy quark propagator

In this subsection we show that replacing the link variables in the Eichten–Hill action by the “fat” ones (see eq. (IV.2.69)), does make the plateau for the effective binding energies much larger, including a visible reduction of the statistical noise. In fact, after replacing $U_t \rightarrow U_t^{\text{fat}}$ in the Wilson line, the plateau gets extended to $t \sim 12 a - 13 a$, which is actually the upper limit ($T/2 = 14 a$). From the comparison of the effective energy, eq. (IV.2.74), obtained by using the “fat” Wilson line and of the standard one (i.e. without fattening), we can clearly see the improvement in the signal. This is illustrated in fig. 2.15, where in the case of “fat” Wilson line, the statistics is half what it was in the other case. This improvement is still more striking in the case where one uses the so-called Hyp-fattening (cf. refs. [22, 23]) instead of the standard one (see ref. [238]). We see that not only the plateau appears much clearer, but the signal remains longer in time. We also see that the two values of the effective binding energies are different, as expected, since the heavy quark lattice action was modified. In table 2.10, we compare the results obtained in both cases, i.e. with and without using the fattening procedure.

Before closing this subsection, we note also that, as far as the stability of the signal is concerned, the effect of replacing the standard Eichten–Hill action by the fat-link one

12. As a side remark, we note that the physical Compton wavelength of the D -mesons λ_D is given by the mass splitting between the D and the D_1 mesons masses. Its value, $\lambda_D = 2.2$ fm, is somewhat similar to $R_b = 3.0 a \sim 2$ fm, that we use in our simulation.

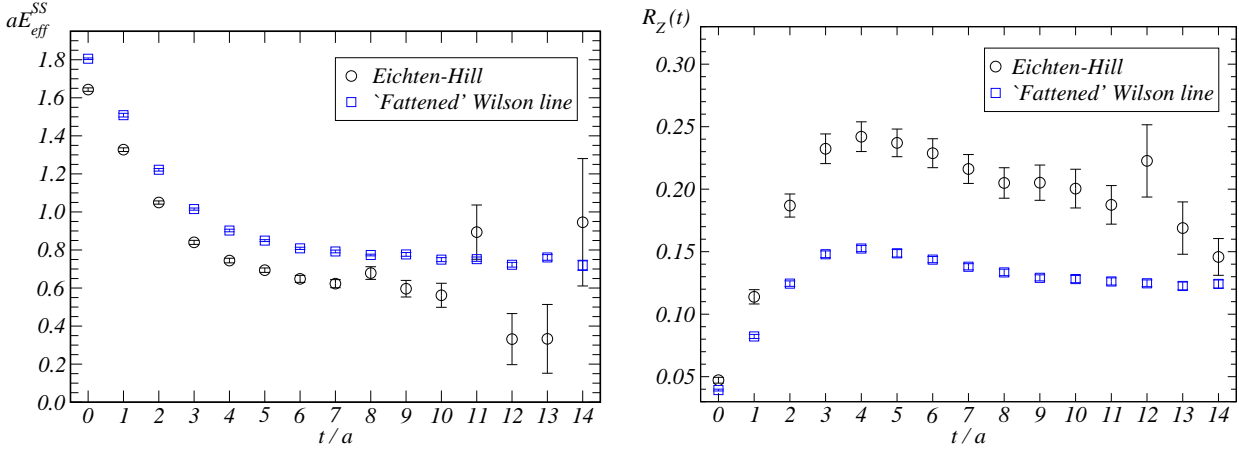


FIG. 2.15 – Comparison of the signals for the effective binding energies E_{eff}^{SS} and Z^L when using either the usual Eichten–Hill action or its “fattened” version (see eq. (IV.2.69)).

	Eichten–Hill	‘Fattened’
$f_{B_s}^{\text{static}}$ [MeV]	410(56)	251(20)
\hat{g}_∞	0.58(8)	0.50(3)

TAB. 2.10 – Values of $f_{B_s}^{\text{static}}$ and \hat{g}_∞ as computed from the usual Eichten–Hill static quark action and the new procedure with “fat” links. Parameters of both simulations are kept identical. In particular, to determine \hat{g}_∞ we have taken in this case $t_y = 10 a$.

is much more rewarding in the case of the heavy–light decay constant than for our \hat{g}_∞ . This is so because the operator whose matrix element is related to f_B^{static} includes a static quark, whereas the one related to \hat{g}_∞ does not. The fat link action however helps improving the statistical quality of the signal for \hat{g}_∞ . We note that, besides this improvement, the use of fattened links leads to a dramatic decrease of the value of $f_{B_s}^{\text{static}}$ with respect to what had been found with the Eichten–Hill action. The fact that the plain EH formalism faces problems when trying to study f_B has been known for some time. In refs. [25, 27] it was shown that the smearing led to systematically lower values¹³. We show here that a similar effect results from the use of fattened links. In ref. [238] we show that the Hyp-fattening confirms fully the present results.

13. We thank the anonymous referee for drawing those references to our attention.

Systematic errors

– Smearing:

We combine in quadrature the effects of the variation of all the parameters of the smearing procedure on the resulting value for \widehat{g}_∞ (see discussion in sec. 2.3.5). We estimate that systematics to be $\pm 15\%$.

– Discretization errors:

In our study we implemented the full $\mathcal{O}(a)$ improvement of the Wilson QCD action and the axial current. As we discussed in the text, the improvement of the bare axial current does not influence the value of \widehat{g}_∞ . As for the renormalization constant, we used the non-perturbatively determined value, including the coefficient \widetilde{b}_A , which ensures the elimination of the artifacts of $\mathcal{O}(a\rho)$.

Our main result is obtained from the simulation at $\beta = 6.2$. In order to study the $\mathcal{O}(a)$ effects, we also performed the simulations at $\beta = 6.1$ and $\beta = 6.0$, keeping the physical volume approximately the same and rescaling the smearing parameters. In fig. 2.16, we show the chiral behavior of \widehat{g}_∞ , as computed in all three simulations. We

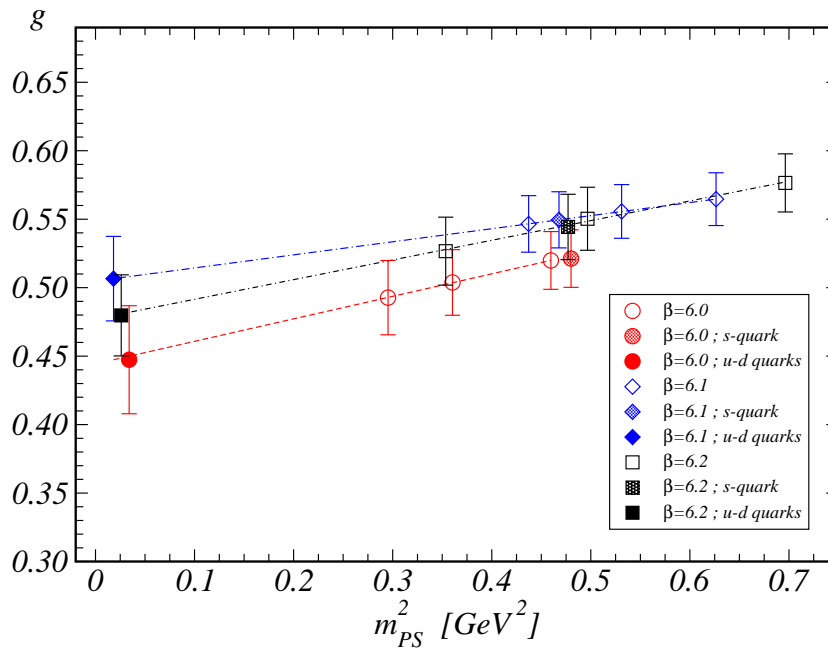


FIG. 2.16 – Comparison of the chiral extrapolations of \widehat{g}_∞ from three simulations at $\beta = 6.0$, 6.1 and 6.2. The values extracted from these simulations are compatible within one standard deviation.

see that both the results accessed directly from our simulations and those obtained

after the linear extrapolation agree within the error bars. To give the reader a more quantitative insight into this effect, we collect in table 2.11 the results for \hat{g}_∞ and $f_{B_s}^{\text{static}}$ from all three simulations.

β	6.0	6.1	6.2
$f_{B_s}^{\text{static}}$ [MeV]	250(35)	257(27)	251(20)
\hat{g}_∞	0.45(4)	0.51(3)	0.48(3)

TAB. 2.11 – Values of $f_{B_s}^{\text{static}}$ and \hat{g}_∞ from three simulations at $\beta = 6.0, 6.1$ and 6.2 . Consistent results are found when comparing these studies.

Since in this work we do not deal with propagating heavy quarks (which are usually the dominant source of discretization errors in the heavy–light meson observables), and since we do not observe any noticeable discretization error on \hat{g}_∞ from our simulations at three different lattice spacings, we will not account for any extra discretization error in our overall systematic uncertainty¹⁴.

– *Finite volume:*

In this work we did not carry out a detailed study of the finite volume effects. Instead, we will rely on our previous study with the propagating heavy quark where the finite volume effects are estimated to be $\pm 6\%$ [4]. This uncertainty will be added in our overall systematic error estimate.

– *Chiral extrapolations:*

Since we have only three values for the bare light-quark masses, we cannot make a detailed study of the effect of the chiral extrapolation like the one we did in [4]. The values of \hat{g}_∞ that are directly accessed from our simulations follow a very smooth linear behavior when the value of the light quark mass is changed. The result (IV.2.82) is obtained from the linear extrapolation. To that we will add an error of $\pm 15\%$, as estimated in our previous paper [4]. This error is considered symmetric for the reasons explained in detail in ref. [282]: the chiral logs in the full (unquenched) theory have a tendency to lower the value of the coupling \hat{g}_∞ , whereas those in the quenched theory do the opposite (increase the value \hat{g}_∞).

¹⁴. Notice also that \hat{g}_∞ is dimensionless so that no discretization errors due to the conversion from the lattice to physical units arise.

After combining the above sources of systematic uncertainty in quadrature, we end up with 22% of error to the value given in eq. (IV.2.82), i.e.

$$\hat{g}_\infty = 0.48 \pm 0.03 \pm 0.11 . \quad (\text{IV.2.83})$$

2.3.6 Heavy mass interpolation to the b -quark

We can now combine our static heavy quark result, \hat{g}_∞ , with those obtained in our previous study in which propagating heavy quarks with masses around the physical charm quark were used [4], to interpolate to the b -quark sector. For that purpose we use the spin-averaged mass of the heavy–light mesons, i.e.

$$\bar{m}_H = \frac{3m_V + m_P}{4} . \quad (\text{IV.2.84})$$

Motivated by the heavy quark symmetry, we fit our results to the linear and quadratic forms:

$$\hat{g}_Q = \hat{g}_\infty + \frac{a_1}{m_H} , \quad (\text{IV.2.85})$$

$$\hat{g}_Q = \hat{g}_\infty + \frac{b_1}{m_H} + \frac{b_2}{m_H^2} . \quad (\text{IV.2.86})$$

These fits are shown in fig. 2.17, from which we read off the values at $1/\bar{m}_B = (5.314 \text{ GeV})^{-1}$, i.e. \hat{g}_b :

$$\hat{g}_b^{(lin)} = 0.55(4)(9), \quad \hat{g}_b^{(quad)} = 0.60(7)(9) . \quad (\text{IV.2.87})$$

As our final estimate we will take the average of the two, and add the difference in the overall systematics. Thus we have

$$\hat{g}_b = 0.58 \pm 0.06 \pm 0.10 , \quad (\text{IV.2.88})$$

which by means of eq. (IV.2.46) gives

$$g_{B^*B\pi} = 47 \pm 5 \pm 8 . \quad (\text{IV.2.89})$$

2.3.7 Summary and conclusions

In this paper we made a study of \hat{g}_∞ , the coupling of the lowest-lying doublet of heavy–light mesons to a charged pion, in the infinitely heavy quark limit. The static heavy quark action used in this work is the Eichten and Hill one with fat-links, which ensures a

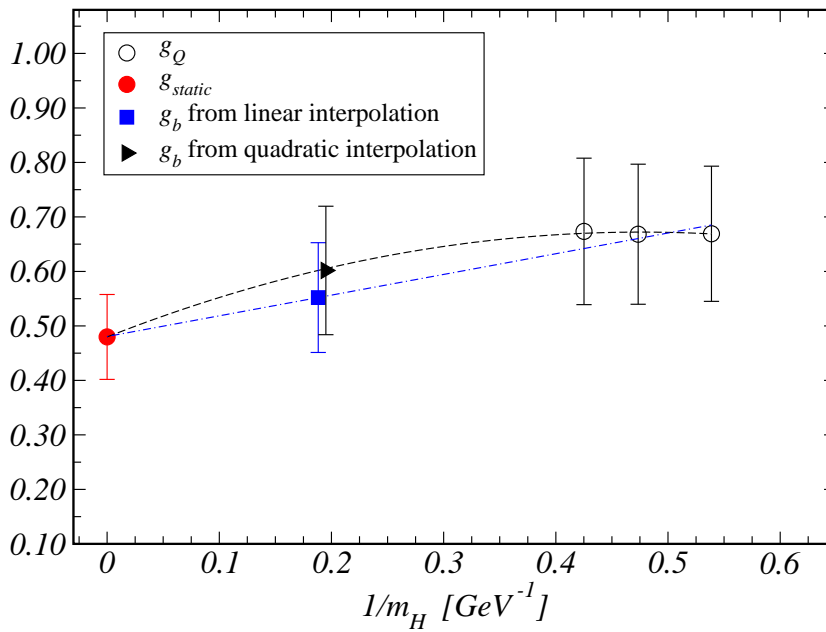


FIG. 2.17 – Heavy mass interpolation of the coupling \hat{g} to the B -meson sector, using heavy masses around the charm (empty circles) and our new result at the static limit (filled circle). The linear and quadratic fits defined in eqs. (IV.2.85) and (IV.2.86) give compatible results for \hat{g} (filled square and triangle).

better statistical quality of the correlation functions computed on the lattice. Our result, in the quenched approximation, is

$$\hat{g}_\infty = 0.48 \pm 0.03 \pm 0.11, \quad (\text{IV.2.90})$$

where the errors are statistical and systematic respectively. The most significant sources of systematic uncertainty are those related to the chiral extrapolation and to the smearing procedures used to suppress the contribution of the higher excited states in the relevant correlation functions.

That result is then combined with the ones reported in our previous work [4], in which we used propagating heavy quarks with masses close to the one of the physical charm quark. Interpolation to the b -quark sector leads to

$$\hat{g}_b = 0.58 \pm 0.06 \pm 0.10 \quad \text{and} \quad g_{B^* B \pi} = 47 \pm 5 \pm 8. \quad (\text{IV.2.91})$$

The quantities we have studied in this paper, \hat{g}_∞ and $g_{B^* B \pi}$, are very interesting because

- 1 they are of high phenomenological relevance,
- 2 they escape direct measurement,
- 3 their theoretical determinations are very widespread.

Still, as the attentive reader will have noticed, the errors remain larger large. Referring for instance to eq. (28) above, the statistical error is 6% and the systematic one 22%.

Concerning the statistical error a first factor is obviously the performance level of the available computing facilities. Since this is getting higher and higher rather fast and, at the same time, new computational techniques have been discovered which greatly improve the signal/noise ratio this source of uncertainty will probably be tamed very soon. Some of the systematic errors are no serious problems : most of the various renormalization and improvement constants we need have now been non perturbatively determined with an accuracy at the %-level. Note also that some of the (less well-known) heavy-light constants (e.g. $Z_{B_s}^{static}$) simply drop out of our computation. Some other ones are more serious :

The chiral extrapolation (which we have very roughly estimated to contribute by 15%) can be attacked on both the theoretical side (determination of the chiral logs) and the numerical one.

In this study we have used the static limit only as a limit point for our extrapolations from the finite-mass region. It is possible to go beyond this approach and to determine higher order $\frac{1}{M_Q}$ coefficients, which would allow a kind of “educated fit” and to decrease the theoretical uncertainties. This is part of an ambitious program which has been undertaken by the Alpha-group 3 years ago and is still under progress [29–32].

There remains the question of the unquenching. Its possibility while using the fattening procedures has been established (see ref. [33]) at least in the staggered-fermions case and probably with Wilson fermions too. This is one of the tasks we should undertake in the future.

These are just a few hints regarding what will have to be done now but it is impossible at present to outline any really sensible quantitative perspective regarding the time evolution in the near future of the various uncertainty factors we have just mentioned. Still, pursuing in the direction of a “pure QCD” determination of \hat{g} is clearly of primary importance.

Acknowledgement

We thank M. Della Morte, J. Reyes and A. Shindler for discussions and comments. The simulation was performed with the APE1000 located in the Centre de Ressources Informatiques (Paris-Sud, Orsay) and purchased thanks to a funding from the Ministère de l’Education Nationale and the CNRS. This work was supported in part by the European Union Human Potential Program under contract HPRN-CT-2000-00/45, Hadrons/Lattice Phenomenology.

Bibliographie

- [1] P. Colangelo and A. Khodjamirian, “*At the frontier of particle physics*”, vol. 3, 1495-1576; A. Khodjamirian, R. Ruckl, S. Weinzierl and O. I. Yakovlev, Phys. Lett. B **457** (1999) 245; F. S. Navarra, M. Nielsen and M. E. Bracco, Phys. Rev. D **65** (2002) 037502; A. Khodjamirian, eConf **C0304052** (2003) WG504.
- [2] D. Becirevic and A. Le Yaouanc, JHEP **9903** (1999) 021.
- [3] P. Singer, Acta Phys. Polon. B **30** (1999) 3849.
- [4] A. Abada *et al.*, Phys. Rev. D **66** (2002) 074504, and Nucl. Phys. Proc. Suppl. **119** (2003) 641.
- [5] P. Colangelo and F. De Fazio, Phys. Lett. B **532** (2002) 193; P. Colangelo, F. De Fazio and T. N. Pham, Phys. Lett. B **542** (2002) 71.
- [113] A. Abada *et al.*, Nucl. Phys. B **619**, 565 (2001); J.N. Simone, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **119** (2003) 632.
- [7] S. R. Sharpe and Y. Zhang, Phys. Rev. D **53** (1996) 5125; A. S. Kronfeld and S. M. Ryan, Phys. Lett. B **543** (2002) 59; C. Bernard *et al.* [MILC Collaboration], Phys. Rev. D **66** (2002) 094501; D. Becirevic, S. Fajfer, S. Prelovsek and J. Zupan, Phys. Lett. B **563** (2003) 150; J. J. Sanz-Cillero, J. F. Donoghue and A. Ross, hep-ph/0305181.
- [8] M. B. Wise, Phys. Rev. D **45** (1992) 2188; T. M. Yan *et al.*, Phys. Rev. D **46** (1992) 1148 [Erratum-ibid. D **55** (1997) 5851]; G. Burdman and J. F. Donoghue, Phys. Lett. B **280** (1992) 287.
- [9] R. Casalbuoni, A. Deandrea, N. Di Bartolomeo, R. Gatto, F. Feruglio and G. Nardulli, Phys. Rept. **281** (1997) 145.

- [73] S. Ahmed *et al.* [CLEO Collaboration], Phys. Rev. Lett. **87** (2001) 251801; A. Anastassov *et al.*, Phys. Rev. D **65** (2002) 032003.
- [270] D. Becirevic, J. Charles, A. LeYaouanc, L. Oliver, O. Pène and J. C. Raynal, JHEP **0301** (2003) 009.
- [12] D. Melikhov and M. Beyer, Phys. Lett. B **452** (1999) 121; J. L. Goity and W. Roberts, Phys. Rev. D **64** (2001) 094007; M. Di Pierro and E. Eichten, Phys. Rev. D **64** (2001) 114004; W. Jaus, Phys. Rev. D **67** (2003) 094010.
- [13] G. M. de Divitiis *et al.* [UKQCD Collaboration], JHEP **9810** (1998) 010.
- [237] P. Boyle [UKQCD Collaboration], J. Comput. Phys. **179** (2002) 349.
- [15] E. Eichten and B. Hill, Phys. Lett. B **234** (1990) 511; A. Duncan *et al.*, Phys. Rev. D **51** (1995) 5101.
- [221] J. Heitger, M. Kurth and R. Sommer [ALPHA Collaboration], Nucl. Phys. B **669** (2003) 173
- [228] M. Della Morte *et al.* [ALPHA Collaboration], hep-lat/0307021.
- [18] M. Luscher, S. Sint, R. Sommer, P. Weisz and U. Wolff, Nucl. Phys. B **491** (1997) 323;
- [19] T. Bhattacharya, R. Gupta, W. J. Lee and S. R. Sharpe, Phys. Rev. D **63** (2001) 074505.
- [20] M. Luscher, S. Sint, R. Sommer and H. Wittig, Nucl. Phys. B **491** (1997) 344; D. Becirevic, V. Lubicz and G. Martinelli, Phys. Lett. B **524** (2002) 115.
- [21] M. Teper, Phys. Lett. B **162** (1985) 357; C. Michael and P. S. Spencer, Phys. Rev. D **52** (1995) 4691; P. Boucaud *et al.*, JHEP **0304** (2003) 005.
- [22] A. Hasenfratz and F. Knechtli, Phys. Rev. D **64** (2001) 034504
- [23] A. Hasenfratz, R. Hoffmann and F. Knechtli, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **106**(2002) 418
- [238] A. Abada *et al.*, in preparation
- [25] G.P. Lepage, Nucl. Phys. Proc. Supp. **26** (1992) 51
- [26] S. Hashimoto and Y. Saeki, Nucl. Phys. Proc. Supp. **26** (1992) 381

- [27] C. Bernard, C.M. Heard, J. Labrenz and A. Soni, Nucl. Phys. Proc. Supp. 26 (1992) 384
- [282] D. Becirevic, S. Prelovsek and J. Zupan, Phys. Rev. D **67** (2003) 054010. and in preparation.
- [29] ALPHA, M. Kurth and R. Sommer, Nucl. Phys. B597 (2001) 488.
- [30] ALPHA, J. Heitger and R. Sommer, Nucl. Phys. B Proc. Supp. 106 (2002) 358.
- [31] R. Sommer, Nucl. Phys. B Proc. Suppl. 119 (2003) 185.
- [32] J. Heitger, M. Kurth and R. Sommer, Nucl. Phys. B Proc. Suppl. 119 (2003) 607
- [33] A. Hasenfratz ,Nucl. Phys. B Proc. Suppl. 1119 (2003) 131

2.4 Bilan des prédictions théoriques

La constante de couplage \hat{g} a fait l'objet d'un nombre considérable d'études. C'est une des motivations pour la déterminer par la QCD sur réseau. Plusieurs outils peuvent être utilisés pour déterminer la valeur et la dépendance dans la masse lourde de \hat{g} . Ce couplage constitue donc un terrain d'étude pour les outils eux mêmes. Il est possible de comparer leurs prédictions, d'autant plus que l'on dispose dans le secteur du D , d'un résultat expérimental qui constitue une référence. Nous avons évoqué en présentant ce résultat qu'il s'agissait d'une mesure délicate et qu'il serait important qu'une nouvelle mesure expérimentale vienne confirmer cette valeur. Je rappelle le résultat de CLEO:

$$g_{D^*D\pi} = 17.9 \pm 0.3 \pm 1.9, \quad (\text{IV.2.92})$$

$$\hat{g}_c = 0.61 \pm 0.01 \pm 0.07. \quad (\text{IV.2.93})$$

Cette mesure présente une incertitude de l'ordre de 12% qui indique les difficultés, surtout systématiques, de la mesure. La valeur de \hat{g} étant obtenue dans le secteur du D , on s'attend à ce qu'elle soit sensible à des effets relativement importants d'ordre $1/m_D$ (la masse du méson D , $m_D \sim 2$ GeV, commence à être relativement éloignée de la limite des quarks lourds). Rappelons aussi que $g_{B^*B\pi}$ n'est pas mesurable expérimentalement et qu'il faut donc l'obtenir par la théorie.

La mesure de CLEO date de 2001. Avant cette mesure on ne disposait que d'une limite supérieure [74]: $\hat{g} < 0.72$. Par ailleurs il existe pour \hat{g} une borne supérieure stricte issue de la règle de somme d'Adler-Weisberger (à ne pas confondre avec les QCDSR): $\hat{g} < 1$. La borne supérieure $\hat{g} = 1$ est atteinte par des modèles de quarks non-relativistes. Ainsi, avant CLEO, l'absence de référence expérimentale contraignante a engendré le besoin d'obtenir des prédictions théoriques pour \hat{g} . Une raison pour cela est, comme on l'a déjà dit, liée à la nécessité d'une mesure précise de $g_{B^*B\pi}$ pour contraindre les déterminations du facteur de forme $f_{B\pi}^+$ intervenant dans la détermination de $|V_{ub}|$, mais nous avons vu aussi qu'il y a d'autres domaines où la valeur de \hat{g} fait défaut.

Il est intéressant de constater qu'avant la mesure expérimentale, les prédictions théoriques étaient très dispersées: $0.2 \lesssim \hat{g} \lesssim 0.8$ avec des écarts considérables entre les différentes méthodes de calcul. En plus de son utilité phénoménologique, c'est aussi cette dispersion des résultats théoriques qu'il était nécessaire de comprendre et pour cela un calcul direct sur réseau représentait une option naturelle. On assiste actuellement à une convergence des résultats autour de valeurs « élevées » de \hat{g} , autour de $0.5 - 0.6$. Il reste cependant à améliorer la précision des mesures et à mieux comprendre la dépendance de ce couplage dans la masse lourde.

Je présenterai dans la suite un bilan rapide et non exhaustif des résultats des déterminations de \hat{g} provenant de la théorie.

2.4.1 Déterminations de \hat{g} par les règles de somme de QCD

Dans la section III.2.5, nous avons présentée la méthode de calcul des règles de somme de QCD (QCDSR). Nous avons en particulier indiqué que dans le cas des règles de somme sur le cône de lumière (LCSR) le couplage \hat{g} pouvait être obtenu à partir d'une expression telle que celle de l'éq. (III.2.33). Nous avons aussi indiqué que du fait de la sensibilité dans le choix des paramètres cet outil est entaché d'une incertitude typique de l'ordre de 20% lorsqu'il s'applique aux mésons lourds-légers.

L'intérêt des LCSR est qu'elles fournissent des informations sur la dépendance de \hat{g} dans la masse lourde puisque pour une même règle de somme, il est possible de changer la valeur des masses lourdes entre le B et le D .

Les résultats des règles de somme de QCD pour \hat{g} sont typiquement en accord entre eux et dans la zone $\hat{g} \sim 0.2 - 0.3$. Ces valeurs sont d'ailleurs assez stables entre les différentes approches au sein des QCDSR. Une étude des LCSR antérieure à la mesure expérimentale et incluant les corrections perturbatives à l'ordre (α_s) donne [263, 264] :

$$\hat{g}_c = 0.35(10), \quad (\text{IV.2.94})$$

$$\hat{g}_b = 0.27(9). \quad (\text{IV.2.95})$$

Par le passé, ces résultats ont fait penser que la valeur de \hat{g} était plutôt faible ($\hat{g} \sim 0.2$). La valeur expérimentale (bien plus élevée que celle de l'éq. (IV.2.94)) est donc apparue comme une surprise dans ce contexte : on observe un écart assez important par rapport à cette mesure. De plus, en comparant les eqs. (IV.2.94) et (IV.2.95), les LCSR indiquent que cet écart s'accroît lorsque la masse lourde augmente. Notons par ailleurs que l'effet des corrections perturbatives tend à diminuer encore plus la valeur de \hat{g} .

Des écarts entre les résultats des QCDSR et les mesures expérimentales comme ceux qu'on constate dans le cas présent n'avaient pas été observés lors des études de couplages analogues à $D^*D\pi$: par exemple pour $\rho\omega\pi$, $NN\pi$ ou $\Sigma_c^*\Lambda_c\pi$.

Une des raisons possibles de cet écart est que le calcul de $g_{D^*D\pi}$ par les LCSR doit utiliser une double relation de dispersion, alors que les autres couplages étaient déterminés à l'aide des relations de dispersion à une seule variable [264]. Afin d'éclaircir l'origine de cet écart, il a été proposé récemment [270] de prendre en compte dans les déterminations de $g_{D^*D\pi}$ par LCSR, l'effet de la première excitation radiale des états D et \bar{D} . En effet, ces excitations sont d'habitude considérées comme faisant partie du continuum des états

et les contributions d'états isolés (en général supprimées exponentiellement) ne sont pas prises en compte explicitement. Il a été observé que si on admet une contribution négative de l'excitation radiale les valeurs de $g_{D^*D\pi}$ peuvent augmenter (et atteindre $\hat{g}_c \sim 0.7$) et que simultanément la stabilité des signaux s'améliore. D'autre part, la présence de cette excitation ne modifie pas les prédictions pour d'autres grandeurs physiques comme f_D où les résultats des LCSR [265] sont en assez bon accord avec les réseaux [266] :

$$f_D^{\text{LCSR}} = 195(20) \text{ MeV}, \quad (\text{IV.2.96})$$

$$f_D^{\text{Qu.}} = 203(14) \text{ MeV}, \quad (\text{IV.2.97})$$

$$f_D^{\text{Unqu.}} = 226(14) \text{ MeV}, \quad (\text{IV.2.98})$$

où les deux dernières valeurs sont des résultats des réseaux «quenched» et «unquenched». Un calcul détaillé utilisant cette proposition récente devrait permettre d'élucider le degré de précision que les prédictions des QCDSR peuvent atteindre pour \hat{g} .

2.4.2 Déterminations de \hat{g} par les modèles de quarks

Là aussi, depuis plusieurs années, un grand nombre de déterminations sont disponibles dans la littérature. Contrairement aux déterminations des QCDSR qui ont tendance à obtenir des valeurs faibles de $\hat{g} \sim 0.3$, les modèles de quarks fournissent des résultats qui s'étagent entre ~ 0.3 et 1.0 . Les valeurs voisines de 1 viennent de modèles de quarks naïfs [271] et introduisant la chiralité [272]. Les modèles relativistes [273]-[276] donnent des valeurs intermédiaires $\hat{g} \sim 0.45 - 0.65$. La plupart des modèles sont très dépendants du choix des masses de quarks légers. Pour stabiliser ces effets, un modèle de quarks construit à partir de l'équation de Dirac avec un potentiel central confinant a été proposé [278]. Les masses effectives des quarks sont alors plus grandes. Les paramètres du modèle sont fixés de façon à reproduire le spectre physique. Le résultat obtenu (avant la mesure expérimentale) est $\hat{g}_c = 0.6(1)$. D'autre part une étude précise montre que pour saturer à 1 la règle de somme d'Adler-Weisberger, les valeurs élevées de \hat{g} sont naturellement favorisées (les effets des résonances supérieures sont généralement faibles et c'est donc la première résonance qui doit majoritairement contribuer à la somme).

2.4.3 Déterminations de \hat{g} sur réseau

Dans les articles précédents et dans le chapitre sur la phénoménologie des saveurs lourdes nous avons déjà présenté quelques uns des résultats qui seront rappelés brièvement ici.

Commençons par les *mesures indirectes* de \widehat{g} à travers les déterminations du facteur de forme $f_{B\pi}^+$ de la désintégration semi-leptonique $B \rightarrow \pi$. Nous avons indiqué auparavant que \widehat{g} apparaît dans le résidu du pôle du B dans l'expression de $f_{B\pi}^+$:

$$f_{B\pi}^+(q^2) = \frac{1}{2m_{B^*}} \frac{f_{B^*} g_{B^*B\pi}}{1 - \frac{q^2}{m_{B^*}^2}} + \frac{1}{\pi} \int_{(m_\pi+m_B)^2}^{\infty} dt \frac{\text{Im} f_{B\pi}^+}{t - q^2 - i\varepsilon}. \quad (\text{IV.2.99})$$

Afin de prendre en compte la présence des résonances et du continuum des états du méson B (dans l'intégrale de l'expression précédente), on peut faire appel à des paramétrisations fournissant une forme analytique qui permette d'ajuster les données des réseaux. Nous avons présenté à ce propos la paramétrisation de Becirevic et Kaidalov (BK) qui est habituellement utilisée par les réseaux et les QCDSR. La paramétrisation BK incorpore une bonne partie de l'information que l'on peut tirer des lois d'échelle issues de HQET et LEET. Elle dépend pour $f_{B\pi}^+$ de deux paramètres c_B et α_B qui peuvent être déterminés à partir des données:

$$f_{B\pi}^+(q^2) = \frac{c_B (1 - \alpha_B)}{\left(1 - \frac{q^2}{m_{B^*}^2}\right) \left(1 - \alpha_B \frac{q^2}{m_{B^*}^2}\right)}. \quad (\text{IV.2.100})$$

En identifiant les eqs. (IV.2.99) et (IV.2.100) et en déterminant les paramètres on peut estimer la valeur de $g_{B^*B\pi}$. En première approximation on peut exprimer ce couplage par:

$$g_{B^*B\pi} = \frac{2c_B m_{B^*}}{f_{B^*}}. \quad (\text{IV.2.101})$$

Noter que l'on peut passer du secteur du B à celui du D , en considérant aussi les désintégrations semi-leptoniques $D \rightarrow \pi$. Le formalisme des facteurs de forme et de la paramétrisation reste le même. Ceci permet aussi d'extraire des informations sur $g_{D^*\pi}$. L'avantage du secteur du D est que les simulations sur réseau ne font pas appel à des extrapolations et donnent directement des résultats physiques.

Les valeurs des paramètres c_H et α_H (où $H \in [D, B]$) obtenues par l'étude du groupe APE [113] sont présentées dans le tableau 2.12. En utilisant les valeurs de η^* [45] et de f_{H^*} [279] on indique aussi les estimations indirectes de \widehat{g} telles qu'on les obtient à partir des facteurs de forme $f_{H\pi}^+$.

Les paramètres c_H et α_H sont obtenus [279] par deux méthodes. Je présente cependant dans ce tableau uniquement les résultats d'une des méthodes, l'autre conduisant à des valeurs un peu plus grandes de \widehat{g} mais les deux résultats étant compatibles entre eux. La moyenne de ces méthodes permet d'obtenir:

$$\widehat{g}_c = 0.44(10), \quad (\text{IV.2.102})$$

$$\widehat{g}_b = 0.31(9). \quad (\text{IV.2.103})$$

Secteur: $H \in [D, B]$	c_H	α_H	$g_{H^*H\pi}$	\hat{g}	\hat{g}_{LCSR}
mésoson D	0.76(13)	0.27(14)	12(2)	0.41(7)	0.35(10)
mésoson B	0.42(14)	0.40(17)	22(8)	0.28(9)	0.27(9)

TAB. 2.12 – Valeurs de \hat{g} obtenues à partir des données des réseaux pour les facteurs de forme $f_{B\pi}^+$ et $f_{D\pi}^+$. On note de façon générique par H les mésons B ou D . On inclut aussi, comme point de comparaison, les valeurs obtenues par les LCSR [263].

Les valeurs de \hat{g} extraites à partir des facteurs de forme sont donc plutôt faibles et compatibles avec les prédictions usuelles des QCDSR. Ce point reste encore à élucider, en particulier l'incompatibilité entre ces valeurs et la valeur expérimentale. Il serait par exemple intéressant de voir l'effet du choix de la paramétrisation de la dépendance en q^2 des facteurs de forme dans ce problème. Pour cela, on peut soit tenter de nouvelles paramétrisations (construites sur des critères physiques et en évitant d'introduire trop de paramètres), soit faire des fits des données du réseau en fixant le paramètre β à partir des mesures de $g_{D^*D\pi}$ et $g_{B^*B\pi}$ expérimentales ou des réseaux (mesures directes).

Dans la section III.2.3 nous avons indiqué ce que l'on attend intuitivement quant à la dépendance de c_H et α_H en fonction de la masse lourde. La connaissance de la forme de $f_{B\pi}^+$ lorsque $m_Q \rightarrow \infty$ suggérerait qu'à cette limite $\alpha_H \rightarrow 0$. Les données du tableau 2.12 semblent plutôt montrer que α_H croît avec la masse lourde. Du fait de l'importance des facteurs de forme $f_{B\pi}^+$ dans la détermination de $|V_{cb}|$ il serait utile d'éclaircir ces désaccords. Les mesures directes de \hat{g} sur réseau peuvent permettre de réduire le nombre de paramètres libres des fits et contraindre la dépendance en q^2 de $f_{B\pi}^+(q^2)$.

Ces mesures ont été présentées précédemment dans les articles, je me limiterai donc à résumer les résultats. La mesure de $g_{D^*D\pi}$ est en bon accord avec la détermination expérimentale de CLEO. Le résultat de ce calcul est [72]:

$$g_{D^*D\pi} = 18.8 \pm 2.3_{-2.0}^{+1.1} \quad i.e. \quad (\text{IV.2.104})$$

$$\hat{g}_c = 0.67 \pm 0.08_{-0.06}^{+0.04}. \quad (\text{IV.2.105})$$

Un calcul récent à la limite statique a permis de déterminer \hat{g} [218]. En combinant les résultats de l'éq. (IV.2.104) avec ceux de la limite statique (via la symétrie des quarks lourds) on a pu obtenir une première détermination de $g_{B^*B\pi}$ sur réseau. Les résultats sont les suivants:

$$\hat{g}_\infty = 0.48 \pm 0.03 \pm 0.11, \quad (\text{IV.2.106})$$

$$\hat{g}_b = 0.58 \pm 0.06 \pm 0.10 \quad i.e. \quad (IV.2.107)$$

$$g_{B^*B\pi} = 47 \pm 5 \pm 8. \quad (IV.2.108)$$

Ces résultats confirment les valeurs « élevées » de \hat{g} et en comparant les eqs. (IV.2.106) et (IV.2.107), ils indiquent que les corrections à \hat{g} en puissances de l'inverse de la masse lourde peuvent être de l'ordre de 20% dans le secteur du B . La décroissance de \hat{g} observée par les LCSR est confirmée par les résultats des réseaux. Notons qu'une étude exploratoire de UKQCD [280] a trouvé une valeur plutôt faible pour \hat{g} . Cependant, cette détermination doit être considérée comme préliminaire puisque les paramètres de la simulation ne sont pas optimisés et qu'elle a été faite à la limite statique où l'on sait que les difficultés pour isoler un signal sont grandes (et les améliorations permettant de traiter ces problèmes sont très récentes).

2.4.4 Panorama des mesures de \hat{g}

Nous présentons dans la suite un tableau récapitulatif des mesures du couplage \hat{g} . Nous indiquons en particulier si \hat{g} a été obtenu à la limite statique ou aux masses physiques des mésons B ou D . Ce tableau montre une certaine évolution pendant les dernières années vers des valeurs de \hat{g} voisines de 0.5 – 0.6.

La figure. 2.18 récapitule différentes mesures de \hat{g} en fonction de la masse lourde. On remarque qu'il y a un assez bon accord entre les différentes déterminations. Cependant plusieurs points restent à éclaircir. La détermination des LCSR à la masse du B doit être réétudiée. Comme nous l'avons indiquée, il existe déjà des propositions permettant d'expliquer ce désaccord [270]. Il reste cependant à refaire une étude complète incluant ces propositions. D'autre part, des études plus détaillées de la dépendance ~~en~~ des facteurs de forme $B \rightarrow \pi \ell \nu_\ell$ et $D \rightarrow \pi \ell \nu_\ell$ semblent nécessaires pour comprendre la valeur plutôt faible de \hat{g} qu'on extrait des paramétrisations utilisées. Nous avons aussi indiqué qu'il serait utile d'avoir une deuxième mesure expérimentale de $g_{B^*D\pi}$ pour confirmer (et améliorer) le résultat de CLEO. Finalement, en ce qui concerne les déterminations directes de \hat{g} sur réseau, des études plus détaillées doivent pouvoir être réalisées dans un futur proche. En effet, plusieurs améliorations sont envisageables: la première consisterait à faire des simulations à des mailles de réseau plus fines afin d'atteindre la limite du continu (ce qui n'était malheureusement pas envisageable dans notre étude à Orsay, vues les capacités de notre machine). Le comportement chirale de \hat{g} doit aussi être mieux compris. Des études en cours indiquent que le développement chirale de \hat{g} fait intervenir des « logs-chiraux » qui ont des effets opposés dans les théories « quenched » et « unquenched » [282]. Ceci indiquerait que la mesure quenched peut probablement être assez écartée de celle de la théorie complète.

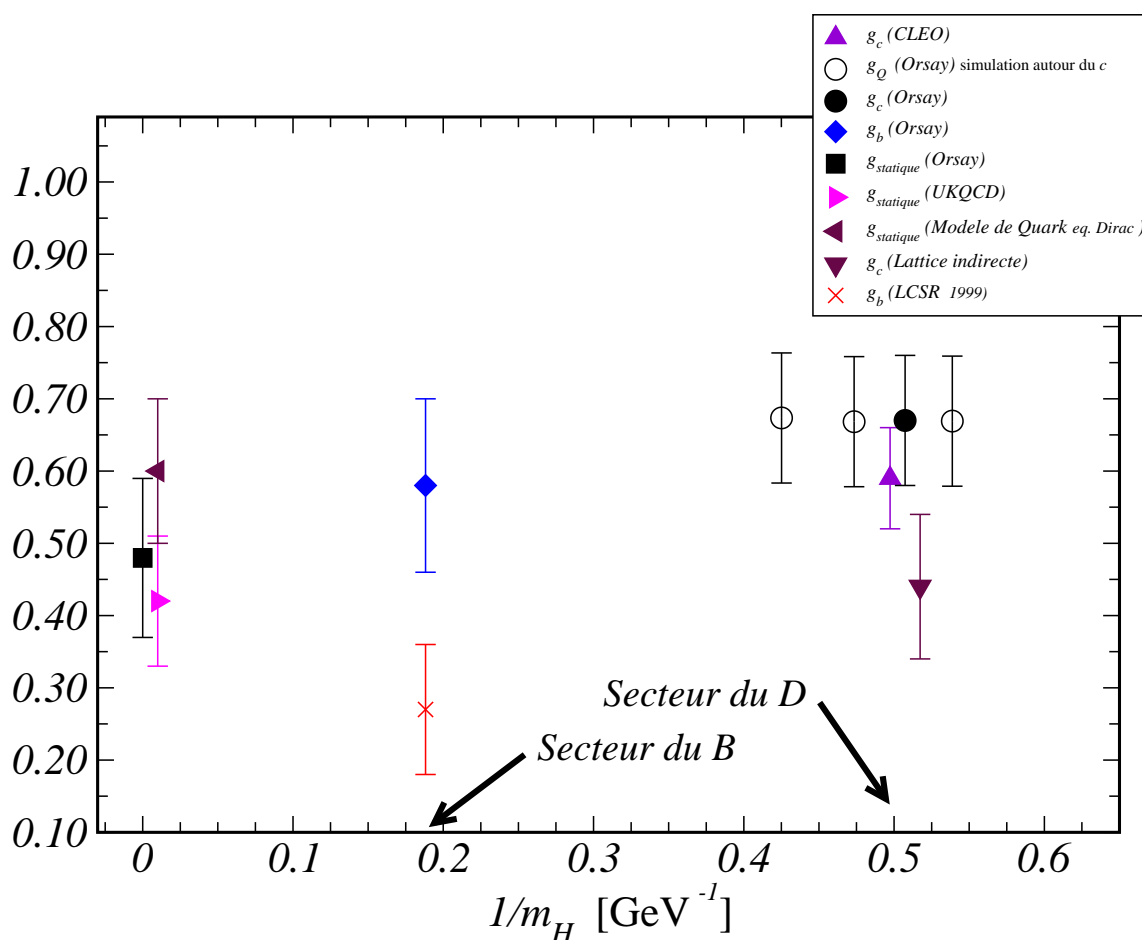


FIG. 2.18 – Récapitulation des mesures de \hat{g} en fonction de la masse du méson lourd.

Une mesure «unquenched» de \hat{g} serait donc une étape importante à franchir. Pour cela, le fait de travailler à la limite statique pour le quark lourd peut être un avantage parce que dans ce cas le coût du calcul du corrélateur est largement réduit par rapport au cas des quarks relativistes. Avant une mesure «unquenched» une première étape naturelle consisterait à utiliser des fermions «overlap» pour garantir un meilleur comportement chirale. Les propositions récentes visant à combiner la HQET et les fermions «chiraux» [231] pourraient être appliquées à la détermination de \hat{g} . Une étude de ce type est envisageable avec les moyens de calcul actuels. Finalement, il serait intéressant que les autres groupes faisant des calculs de saveurs lourdes sur réseau viennent confirmer les valeurs trouvées à Orsay. Les actions NRQCD et l'approche de «Fermilab» doivent pouvoir aussi fournir prochainement des déterminations de \hat{g} . Ceci devrait aussi permettre de réduire les incertitudes

des mesures qui, à l'heure actuelle, sont encore de l'ordre de 20%. Avec une valeur de \hat{g} mieux contrainte, il sera possible de quantifier son impact dans les différents processus de la phénoménologie où elle joue un rôle.

DÉTERMINATIONS DU COUPLAGE \hat{g}	
EXPÉRIENCE: CLEO (à partir de la mesure de $g_{D^*D\pi}$) [73] (2001)	0.61 ± 0.07
RÈGLES DE SOMME DE QCD (QCDSR)	
Sum Rule + limite du pion mou (à la limite statique)	0.39(16)
Corrections $\mathcal{O}(\alpha_s)$ P. Colangelo <i>et al.</i> [267] (1994)	0.21(6)
Sum Rule dans un champ axial externe (à la limite statique) A.G. Grozin, O.I. Yakovlev [268] (1998)	$0.2 \div 0.4$
Light cone SR (à partir du calcul de $g_{B^*B\pi}$) P. Colangelo, F. De Fazio [269] (1998)	0.21(7)
Light cone SR (à partir du calcul de $g_{B^*B\pi}$) A. Khodjamirian <i>et al.</i> [263] (1999)	0.27(9)
Light cone SR avec excitation radiale (à partir du calcul de $g_{D^*D\pi}$) Becirevic, Charles, Le Yaouanc, Oliver, Pène, Raynal [270] (2002)	0.7
MODÈLES DES QUARKS (MQ)	
MQ non-relativiste T.M. Yan <i>et al.</i> [271] (1992)	1.0
Modèle partiellement relativiste (à la limite statique) P. Colangelo, F. De Fazio, G. Nardulli [277] (1994)	1/3
MQ Light front (à partir du calcul de $g_{D^*D\pi}$) P.J. O'Donnell, Q.P. Xu [275] (1994)	0.60(5)
Incluant HQS et approximant χS (à la limite statique) A. Deandrea <i>et al.</i> [276] (1998)	0.46(4)
Modèle avec eq. de Dirac (à la limite statique) D. Becirevic, A. Le Yaouanc [278] (1999)	0.6(1)
QCD SUR RÉSEAU	
MESURES INDIRECTES:	
APE [113] (2000) à partir de $f_{D \rightarrow \pi}^{\pm}(q^2)$ et f_{D^*}	0.44(10)
Bornes d'unitarité avec données des réseaux pour $f_{B \rightarrow \pi}^{\pm}$ L. Lellouch [281] (1996)	0.35(5)
MESURES DIRECTES:	
UKQCD [280] (1998) (à la limite statique)	0.42(4)(8)
ORSAY A partir du calcul de $g_{D^*D\pi}$ [72] (2002)	0.67(8)(5)
A partir du calcul de $g_{B^*B\pi}$ [218] (2003)	0.58(6)(10)
A la limite statique [218] (2003)	0.48(3)(11)

Conclusion

L'étude du couplage \hat{g} des mésons lourds au pion contient à lui seul une bonne partie de ce qui caractérise l'étude actuelle de la physique des saveurs de quarks: une diversité d'approches ayant comme objectif commun la détermination d'un paramètre fondamental d'une théorie ou d'une quantité nécessaire à la phénoménologie.

Nous avons en effet montré comment \hat{g} apparaît en tant que paramètre fondamental de la théorie effective chirale des mésons lourds. Afin d'exploiter le pouvoir prédictif de cette théorie, il est nécessaire d'obtenir une détermination indépendante de sa constante de couplage \hat{g} . L'ordre dominant de la théorie fait intervenir à la fois la limite statique des quarks lourds et la limite chirale des légers. Une détermination directe de \hat{g} suppose donc la possibilité d'atteindre ces deux limites.

D'autre part, nous avons étudié le rôle de \hat{g} (ou plus précisément, celle de $g_{B^*B\pi}$ et $g_{B^*B\pi}$) dans plusieurs domaines de la phénoménologie des saveurs des quarks. Nous avons en particulier indiqué que la détermination de $|V_{ub}|$ via les désintégrations semi-leptoniques $B \rightarrow \pi \ell \nu_\ell$ passe par la connaissance du facteur de forme $f_{B\pi}^+(q^2)$. La dépendance dans le transfert d'impulsion q^2 de $f_{B\pi}^+(q^2)$ est caractérisée par le couplage $g_{B^*B\pi}$. Pour extraire $|V_{ub}|$ il faut d'une part pouvoir intégrer le facteur de forme sur l'ensemble de la zone physique en q^2 et d'autre part utiliser la largeur de désintégration mesurée par les expériences. Pour résoudre le premier point il est nécessaire de combiner les résultats des mesures de $f_{B\pi}^+(q^2)$ sur réseau avec la forme fonctionnelle dépendant de $g_{B^*B\pi}$ afin d'extrapoler le facteur de forme vers $q^2 = 0$. Le deuxième point est une des études en cours des usines à B . Dans un futur proche des résultats plus précis des largeurs de désintégration $B \rightarrow \pi \ell \nu$ devraient être présentés. Pour que les déterminations expérimentales et théoriques puissent avancer en parallèle, il est important de réduire simultanément les incertitudes sur les mesures et une détermination précise de \hat{g} doit permettre de contraindre les incertitudes théoriques de $|V_{ub}|$.

L'amélioration des résultats des simulations de QCD sur réseau, et en particulier celles de $f_{B\pi}^+(q^2)$, doit faire face à deux limitations majeures: l'approximation «quenched» et

les difficultés dues aux masses légères des quarks. Des simulations «unquenched» des désintégrations $B \rightarrow \pi(\rho)$ n'ont jusqu'à présent pas pu voir le jour en raison des difficultés qu'implique le fait de travailler à la fois avec des quarks lourds et légers tout en devant considérer au moins une partie de la zone physique en \hat{q} allant de 0 à 26 GeV^2 . De plus, les masses légères de quarks des simulations actuelles peuvent difficilement atteindre des masses beaucoup plus faibles que celle du quark étrange. Pour atteindre les masses physiques des quarks u et d , on doit faire appel à la théorie de perturbation chirale. Le domaine des masses légères des quarks est à présent un des principaux centres d'intérêt des études de la communauté «lattice» puisqu'on y rencontre une bonne partie des difficultés auxquelles on est confronté dans les calculs. Parmi ces difficultés il faut par exemple considérer les suivantes:

- (i) Les moyens de calcul numérique disponibles, pourtant déjà énormes, ne sont pas encore suffisants pour qu'on puisse diminuer les masses des quarks (de valence et de la mer). De plus, l'utilisation de fermions «chiraux» (*i.e.* «overlap» ou «domain-wall») suppose des temps de calcul un ordre de grandeur plus grands que ceux avec des fermions de Wilson.
- (ii) Les algorithmes permettant de déterminer les propagateurs des quarks ont une durée qui augmente selon une loi de puissance lorsque la masse diminue. Par ailleurs, des «configurations exceptionnelles» apparaissent lorsque les masses sont trop faibles ce qui empêche d'effectuer les calculs des propagateurs.
- (iii) Les effets de volume fini deviennent importants pour les faibles masses de quarks.
- (iv) Les théories «quenched», «partiellement quenched» et «unquenched» ont des comportements différents du point de vue de la théorie de perturbation chirale.
- (v) L'échelle d'énergie à partir de laquelle les effets des «logs-chiraux» doivent être considérées est encore inconnue.

La validité des résultats des réseaux passe donc par une étude précise de chacune de ces contraintes. Là encore, une mesure de \hat{g} peut contribuer: les extrapolations chirales des quantités physiques dépendant à la fois des quarks lourds et légers font intervenir des logarithmes chiraux dont le coefficient est donné par \hat{g} . Par exemple, ce couplage intervient dans le développement chiral des constantes de désintégration B_d et f_{B_s} . Il a été observé que la méconnaissance de \hat{g} pourrait induire des variations de 15–20% sur les valeurs de f_{B_d} extrapolées à la limite chirale.

Du point de vue des déterminations de \hat{g} on peut distinguer deux cas (celui de $g_{B^*D\pi}$ et celui de $g_{B^*B\pi}$) qui correspondent à la possibilité ou non de faire une mesure expérimentale. La mesure récente de $g_{B^*D\pi}$ par CLEO a permis d'avoir un point de référence face au grand nombre de déterminations théoriques déjà existantes. Une première étude directe de $g_{B^*B\pi}$ sur réseau nous a permis de constater un bon accord avec la mesure expérimentale. Le secteur du méson D peut être étudié dans les réseaux actuels sans faire appel à des extrapolations de la masse lourde. On peut donc considérer que les incertitudes systématiques doivent surtout provenir du «quenching», des extrapolations chirales et des effets de volume fini. L'accord avec la mesure expérimentale est alors un indice que ces effets sont assez bien contrôlés dans le cas de $g_{B^*D\pi}$. De plus, comme ces effets dépendent fondamentalement du secteur léger, on s'attend à ce qu'ils restent du même ordre lorsqu'on passe du secteur du D à celui B . Le cas de $g_{D^*D\pi}$ est un exemple du dialogue qui peut être établi entre les résultats des réseaux et les mesures expérimentales. Dans ce cas précis, la mesure de CLEO permet de constater que les simulations sur réseau de \hat{g} sont bien maîtrisées dans le secteur du D . On dispose donc d'un point de départ solide pour calculer $g_{B^*B\pi}$ et pouvoir ainsi répondre aux besoins théoriques et phénoménologiques que l'on a évoqué précédemment.

La détermination de $g_{B^*B\pi}$ repose uniquement sur des prédictions théoriques non-perturbatives. Il est alors utile d'étudier les différents outils de calcul dont on dispose et de comparer leurs résultats. Le cas de \hat{g} est intéressant parce que les différentes méthodes permettant de le déterminer (les réseaux, les règles de somme de QCD et les modèles des quarks) fournissent des valeurs qui sont souvent en désaccord. Ce couplage est donc aussi un laboratoire d'étude des outils de calcul non-perturbatif. Nous avons présenté les prédictions sur \hat{g}_0 et $g_{B^*B\pi}$ que nous avons obtenues récemment sur réseau. Nous avons aussi indiqué quelques unes des déterminations qui à nos yeux semblent poser des problèmes et qui devraient être réétudiées à l'aide de nouvelles propositions. Depuis l'arrivée de la mesure expérimentale de $g_{B^*D\pi}$ on constate une certaine convergence des résultats qu'il serait important de confirmer par une nouvelle mesure expérimentale et par des calculs non-perturbatifs plus précis. Nous avons indiqué, en particulier dans le cas des calculs sur réseau, quelques unes des améliorations envisageables à court et à long terme.

En prenant comme appui le cas de \hat{g} , cet exposé a voulu présenter une partie de la grande diversité d'outils théoriques intervenant dans l'étude des phénomènes reliés au Modèle Standard. J'ai particulièrement insisté sur l'importance des résultats de la QCD sur réseau dans l'étude d'un grand nombre de quantité physiques indispensables à la phénoménologie. J'ai essayé de ne pas laisser de côté toutes les difficultés et les limitations auxquelles cette méthode de calcul doit faire face. J'espère fournir ainsi une image qui

corresponde à l'état d'avancement actuel des calculs sur réseau. Ces calculs traversent à présent une période de transition importante vers une généralisation des simulations incluant les effets des quarks de la mer. De plus, on peut aussi à présent étudier sur réseau des quarks ayant les bonnes propriétés chirales. Ces progrès nous font penser que notre connaissance des phénomènes non-perturbatifs de la QCD va pouvoir être testée avec une plus grande finesse dans les années à venir.

Table des figures

1.1	16
1.2	17
4.1	Dépendance en temps de $\ln C_{PP}^{(2)}$	46
4.2	Dépendance de la masse effective $m_{\text{eff}}^{HP}(t)$ par rapport au temps (cf. l'éq. (I.4.17). Le plateau en temps de cette quantité correspond à la valeur de masse du méson pseudoscalaire (en unités de maille a).	48
4.3	50
5.1	59
1.1	Spectroscopie des mésons D et B issue de la HQET. Le spin et la parité des degrés de liberté légers sont indiqués à côté des noms des mésons.	82
1.2	Désintégration $B \rightarrow M$ du point de vue de la SCET.	90
2.1	Représentation schématique des interactions décrites par la constante de couplage \hat{g} lorsqu'on considère le secteur du méson D	99
1.1	Le triangle d'unitarité dans le plan (ρ, η)	107
1.2	Mesures récentes du triangle d'unitarité [92].	108
1.3	Processus physiques intervenant dans la détermination des éléments de la matrice CKM et où les résultats des calculs de QCD sur réseau ont un rôle à jouer.	110
1.4	Mesures de $ V_{us} $ [90]. La colonne verticale hachurée représente la valeur obtenue en imposant l'unitarité de la matrice CKM.	117
1.5	Déterminations de $F(1) V_{bb} $ (à gauche) et de la dépendance de $F(1) V_{bb} $ en fonction de la pente ρ^2 (à droite) à partir des désintégrations $B \rightarrow$ $D^* \ell \nu_\ell$ [144].	128

2.1	Représentation schématique de la désintégration $B \rightarrow \bar{\pi} \ell \nu$	132
2.2	Dépendance dans la fraction d'impulsion $x \equiv u$ de la fonction d'onde du pion sur le cône de lumière φ_π . La figure de gauche montre l'effet de l'inclusion d'un nombre de plus en plus élevé de moments \mathcal{M} . La figure de droite compare l'allure de φ_π suivant les formes asymptotiques (ligne en pointillés), CZ (ligne segmentée) [172] et issue d'une détermination récente des règles de somme de QCD (ligne continue) [177].	142
2.3	A gauche: comparaison des mesures de expérimentales CLEO (♣) et théoriques pour les deux coefficients a_2 et a_4 de l'éq. (III.2.36). Les symboles (◆) correspondent à la forme asymptotique de $\varphi_\pi(u)$ et (■) à CZ (éq. (III.2.38)). Les autres symboles proviennent des calculs plus récents des règles de somme ((✕) [177], de modèles d'instantons (●) [187]), ((★) [182] et (◆) [183]) et des réseaux ((▼) [181]). Toutes les données correspondent à une échelle $\mu^2 \sim 6 \text{ GeV}^2$. A droite: comparaison des mesures de E791 (points) et des formes asymptotique (ligne continue), CZ [172] (ligne segmentée) et issue d'une détermination par les règles de somme de QCD (bande hachurée)[177].	143
2.4	Bilan des résultats [199] des réseaux pour les facteurs de forme $f_{B\pi}^+(q^2)$ et $f_{B\pi}^0(q^2)$ d'après les résultats de des groupes APE [113], UKQCD [196], FNAL [197] et JLQCD [198]. Sont aussi représentées, l'extrapolation des données vers $q^2 = 0$ suivant la paramétrisation BK [149] (ligne en pointillés) et les résultats des LCSR [161] (ligne continue).	146
2.5	Bilan des mesures de $ V_{ub} $ au moyen des désintégrations semi-leptoniques exclusives $B \rightarrow \pi(\rho)$ [76]. Les incertitudes sont typiquement de l'ordre de 15%.	147
1.1	Étapes du processus récursif.	159
1.2	Rapport bruit/signal (en échelle logarithmique) en fonction du temps pour un corrélateur à deux points contenant un quark statique [228]. Les cercles correspondent à l'action de Eichten-Hill. Les carrés à la version «staple» de l'action et les triangles à l'action «HYP». Ces signaux sont obtenus à partir d'une moyenne sur 2500 configurations.	167
1.3	Schématisme de la procédure de «fuzzing» (cf. éq. (IV.2.71)).	169
1.4	Évolution de l'énergie de liaison effective E_{eff} en fonction du temps (en unités de maille a). A gauche, on illustre la dépendance dans le type de source utilisées: locales (L) ou étalée (S). A droite, on montre l'effet du nombre d'itérations N_F de la procédure de fuzzing. Toutes les grandeurs sont en unités de maille a	172

- 1.5 Schéma représentant l'étirement des sources aux temps de création $t = 0$ et d'annihilation $t = T_s$ des champs de quarks. La ligne en pointillés représente le quark statique alors que la ligne courbe désigne le quark léger. Les ellipses représentent la zone d'étirement de la source, la ligne connectant les quarks est la ligne de Wilson spatiale où l'on applique la fonction d'onde. Dans ce cas, nous avons aussi représenté l'insertion du courant axial (local) à un temps t variable. Globalement ce schéma représente la fonction de Green à trois points d'où l'on extrait le couplage \hat{g} 174
- 1.6 Cette figure montre le changement de l'énergie de liaison effective $E_{\text{eff}}(t)$ sous l'effet de la variation du rayon R_b de la fonction d'onde. 175
- 1.7 Schématisation de la procédure de modification de l'action de Eichten-Hill: on remplace chaque lien de la ligne de Wilson temporelle par la somme des «staples» (le produit des liens voisins). Cette procédure est faite dans les trois dimensions d'espace. 176
- 1.8 Représentation de la construction de l'action «HYP». La figure de gauche représente la première étape: on remplace le lien de départ (en noir foncé) par les «staples» (lignes doubles). La deuxième étape (à droite) consiste remplacer chacun des liens en lignes doubles (précédemment considérés) par les deux «staples» (lignes noires) complétant l'hypercube attaché au lien de départ. 177
- 1.9 Comparaison des signaux pour l'énergie de liaison effective E_{eff} en fonction du temps (en unité de maille a): les signaux proviennent des quarks lourds simulés avec l'action de Eichten-Hill, l'action après «fattening» et l'action «HYP» et de quarks légers avec une masse autour de celle du quark- s . Les fluctuations sont considérablement diminuées et la durée des signaux allongées lorsqu'on passe aux actions «fat» [218] ou «HYP» [238]. 178
- 1.10 Etude du rapport R_Z en fonction du temps. De la valeur du plateau en temps de ce rapport on extrait la constante Z_S qui est directement reliée à $f_{B_s}^{\text{stat}}$. On présente pour la comparaison les résultats des différentes actions de quark lourd. Une amélioration notable des signaux est obtenue par l'utilisation des actions «fat» ou «HYP». La masse du quark léger est dans cette illustration proche de celle du quark- s , $\kappa_q = 0.1344$ 182
- 1.11 Boucle de pion et vertex où apparaît le couplage $g_{D^*D\pi}$ 188

- 1.12 Extrapolations chirales de $\Phi_{f_{B_q}}$ en fonction de la masse carrée du méson pseudoscalaire léger $m_{\pi} = m_{ff}$ (de la mer) en unités de l'échelle de Sommer $r_0 \sim 0.5$ fm [19]. L'incertitude sur la connaissance de $g \equiv \hat{g}$ peut produire des variations de $\sim 20\%$ sur la valeur de f_{B_d} 192
- 1.13 Effets des logs-chiraux dans les rapports $R_{f_{\pi}}$ et R_{f_B} en fonction du rapport $r = m_q/m_s$, où la masse du quark étrange m_s est fixée. L'effet de la variation de \hat{g} sur la valeur de R_{f_B} est aussi présentée. Cette étude [252] montre que pour $\hat{g} \sim 0.52$ les effets des logarithmes de $R_{f_{\pi}}$ et R_{f_B} sont pratiquement identiques. Notons que la valeur $\hat{g} = 0.48$ récemment obtenue par le groupe d'Orsay [218] permet de confirmer cet effet de suppression de logs-chiraux. 194
- 1.14 195
- 1.15 Mesures «quenched» de $f_B \equiv f_{B_d}$ et f_{B_s} provenant de différentes collaborations de QCD sur réseau [254]. De haut en bas, le premier groupe de données utilise les quarks lourds de l'action de la NRQCD; le deuxième groupe la méthode dite de Fermilab et le troisième groupe des quarks relativistes. Le résultat de l'approche de Tor Vergata est celui qui est noté «Rome II». 196
- 2.1 Définition du couplage $g_{D^*D\pi}$. Ce schéma illustre la relation entre ce couplage et l'élément de matrice de la divergence du courant axial entre les états D^* et D 203
- 2.2 Représentation schématique du corrélateur à trois points du réseau permettant d'extraire $g_{D^*D\pi}$. Les champs interpolants des mésons pseudoscalaires sont insérées à des temps fixes, $t = 0$ et $t = 31a$, respectivement. Le courant axial est par contre insérée à un temps variable t . La position particulière des quarks utilisée dans ce schéma correspond uniquement à une illustration. Dans la simulation, les quarks et les antiquarks peuvent en réalité se propager sur l'ensemble de la ligne représentée. 204
- 2.3 We illustrate the so-called method of lattice planes [21] by which we get the value of $af_{K/\pi}$: In the upper plane, the points in which the fit (solid) line to our data crosses the dashed lines, corresponding to $am_V = C_{K/\pi}\sqrt{(am_P)^2}$ with $C_K = (m_{K^*}/m_K)_{phys}$ and $C_{\pi} = (m_{\rho}/m_{\pi})_{phys}$ respectively, determine the values of $(am_{K/\pi})^2$, denoted by diamonds. These values are then used to fix $af_{K/\pi}$ (filled squares) in the lower plane, where we fit the pseudoscalar decay constants as $\alpha + \beta(am_P)^2$ 211
- 2.4 The graph of the three-point function that we compute in this work. 212

-
- 2.5 Signals for the ratios $R_{1-4}(t)$ (real part of R_1, R_3, R_4 and imaginary part of R_2), defined in eqs. (IV.2.29, IV.2.30), as computed on our lattice. Illustration is provided for $\kappa_Q = 0.1220$ and $\kappa_q = 0.1348$ 216
- 2.6 Chiral extrapolation of g_{VPp} without the G_2/G_1 corrections for a fixed heavy quark at $\beta = 6.2$. The curves obtained from the fit to eqs. (IV.2.35, IV.2.36, IV.2.37) are displayed. The filled square point with its error bars corresponds to the linear extrapolation. The complete list of result can be found in table 2.4. 219
- 2.7 *Fit of our data (empty symbols) for $g_{VP\pi}$ and \hat{g}_Q , at $\beta = 6.2$, to the forms (IV.2.41). The results of interpolation to the \bar{D} -meson is denoted by the filled symbols. 221*
- 2.8 Chiral extrapolation of $\hat{g}_Q^{(0)}$ for a fixed heavy quark $\kappa_Q = 0.1190$ at $\beta = 6.0$ and $\kappa_Q = 0.1250$ at $\beta = 6.2$ corresponding approximately to the same heavy meson mass. 222
- 2.9 Ratio of the three point functions (IV.2.28) as obtained for the same meson masses at $\beta = 6.0$ but on different volumes $16^3 \times 64$ and $24^3 \times 64$. Illustrated is the case of the heavy quark corresponding to $\kappa_Q = 0.1220$ and the light ones to $\kappa_q = 0.1344$. 224
- 2.10 *Signals for the effective binding energies obtained by using eq. (IV.2.74) in case of Smeared-Smeared (“SS”) and Smeared-Local (“SL”) sources. In both cases the light quark mass corresponds to $\kappa_q = 0.1344$, whereas for the static quark we use the “fat” links as discussed in the text (see eq. (IV.2.69)). 242*
- 2.11 *On the left, we illustrate the signal for the ratio $R_z(t)$ in the case $\kappa = 0.1344$. The fit of the plateau ($t/a \in [9; 13]$) to a constant gives Z^L , which is then used to compute $f_{B_q}^{\text{static}}$ (see eq. (IV.2.76)). The corresponding decay constants are shown in the right plot (empty circles). The result of the linear interpolation to the strange light quark, i.e. $f_{B_s}^{\text{static}}$, is marked by the filled circle. Notice that on the right plot only the statistical errors due to Z_L are displayed. 244*
- 2.12 *Signal for the ratio $R^{SS}(t_x)$ (see eq. (IV.2.80)). Illustration is provided for $\kappa_{q1} = 0.1344$. From the fit in $t/a \in [3, 10]$, we obtain the value of $\hat{g}_\infty^{(0)}$ 246*
- 2.13 *Linear extrapolation of \hat{g}_∞ to the chiral limit. The empty circles correspond to the simulated points whereas the filled symbols are the result of extra(inter)polation. 246*
- 2.14 *Effect on the ratio $R_Z(t)$ of the variation of R_b . For $R_b > 2.0a$ the value of R_Z remains almost unchanged in the region $t \geq 7a$. For this illustration we used the Eichten–Hill static heavy quark action, while the light Wilson quark κ is 0.1344. 248*
- 2.15 *Comparison of the signals for the effective binding energies E_{eff}^{SS} and Z^L when using either the usual Eichten–Hill action or its “fattened” version (see eq. (IV.2.69)). 250*

2.16	<i>Comparison of the chiral extrapolations of \hat{g}_∞ from three simulations at $\beta = 6.0$, 6.1 and 6.2. The values extracted from these simulations are compatible within one standard deviation.</i>	251
2.17	<i>Heavy mass interpolation of the coupling \hat{g} to the B-meson sector, using heavy masses around the charm (empty circles) and our new result at the static limit (filled circle). The linear and quadratic fits defined in eqs. (IV.2.85) and (IV.2.86) give compatible results for \hat{g}_b (filled square and triangle).</i>	254
2.18	<i>Récapitulation des mesures de \hat{g} en fonction de la masse du méson lourd.</i>	267

Bibliographie

- [1] K. G. Wilson, “Confinement Of Quarks”, *Phys. Rev. D* **10** (1974) 2445.
- [2] S. Elitzur, “Impossibility Of Spontaneously Breaking Local Symmetries”, *Phys. Rev. D* **12** (1975) 3978.
- [3] S. Adler, in *Lectures on Elementary Particles and Quantum Field Theory (1970 Brandeis Summer Institute in Theoretical Physics)*. MIT Press, 1970.
- [4] L. H. Karsten and J. Smit, “Lattice Fermions: Species Doubling, Chiral Invariance, And The Triangle Anomaly”, *Nucl. Phys.* **B 183**, 103 (1981).
- [5] H. B. Nielsen and M. Ninomiya, “No Go Theorem For Regularizing Chiral Fermions”, *Phys. Lett.* **B105** 219 (1981);
“Absence Of Neutrinos On A Lattice. 2. Intuitive Topological Proof”, *Nucl. Phys.* **B193** 173 (1981);
“Absence Of Neutrinos On A Lattice. 1. Proof By Homotopy Theory”, *Nucl. Phys.* **B185** 20 (1981);
D. Friedan, “A Proof Of The Nielsen-Ninomiya Theorem”, *Commun. Math. Phys.* **85**, 481 (1982).
- [6] J. B. Kogut and L. Susskind, “Hamiltonian Formulation Of Wilson’s Lattice Gauge Theories”, *Phys. Rev. D* **11** (1975) 395;
J. B. Kogut, D. K. Sinclair and L. Susskind, “A Quantitative Approach To Low-Energy Quantum Chromodynamics”, *Nucl. Phys. B* **114** (1976) 199.
- [7] L. Susskind, “Lattice Fermions”, *Phys. Rev. D* **16** (1977) 3031.
- [8] P. H. Ginsparg and K. G. Wilson, “A Remnant Of Chiral Symmetry On The Lattice”, *Phys. Rev. D* **25** (1982) 2649.
- [9] D. B. Kaplan, “A Method for simulating chiral fermions on the lattice”, *Phys. Lett. B* **288** (1992) 342 [*hep-lat/9206013*].

- [10] Y. Shamir, “Chiral fermions from lattice boundaries”, Nucl. Phys. B **406** (1993) 90 [*hep-lat/9303005*].
- [11] V. Furman and Y. Shamir, “Axial Symmetries In Lattice QCD With Kaplan Fermions”, Nucl. Phys. B **439** (1995) 54 [*hep-lat/9405004*].
- [12] H. Neuberger, “Exactly massless quarks on the lattice”, Phys. Lett. B **417** (1998) 141 [*hep-lat/9707022*].
- [13] R. Frezzotti, P. A. Grassi, S. Sint and P. Weisz, “A local formulation of lattice QCD without unphysical fermion zero modes”, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **83**, 941 (2000) [*hep-lat/9909003*];
R. Frezzotti, P. A. Grassi, S. Sint and P. Weisz [Alpha collaboration], “Lattice QCD with a chirally twisted mass term”, JHEP **0108**, 058 (2001) [*hep-lat/0101001*];
R. Frezzotti and G. C. Rossi, “Twisted-mass lattice QCD with mass non-degenerate quarks”, arXiv:hep-lat/0311008.
- [14] N. Metropolis, A. Rosenbluth, M. Rosenbluth, A. Teller, and E. Teller, *J. Chem. Phys.* **21** 1087 (1953); F. R. Brown and T. J. Woch, “Overrelaxed Heat Bath And Metropolis Algorithms For Accelerating Pure Gauge Monte Carlo Calculations”, *Phys. Rev. Lett.* **58** 2394 (1987). M. Creutz, “Overrelaxation And Monte Carlo Simulation”, *Phys. Rev. D* **36** 515 (1987).
- [15] L. Maiani and M. Testa, “Final State Interactions From Euclidean Correlation Functions”, Phys. Lett. B **245** (1990) 585.
- [16] M. Lüscher, *Selected Topics In Lattice Field Theory*, Lectures at the 1988 Les Houches Summer School, North Holland, 1990.
- [17] M. Lüscher, “Volume Dependence Of The Energy Spectrum In Massive Quantum Field Theories. 1. Stable Particle States”, Commun. Math. Phys. **104** (1986) 177; Commun. Math. Phys. **105** (1986) 153; Nucl. Phys. **B354** (1991) 531; Nucl. Phys. **B364** (1991) 237.
- [18] S. Aoki *et al.* [JLQCD Collaboration], “Light hadron spectroscopy with two flavors of O(a)-improved dynamical quarks”, Phys. Rev. D **68** (2003) 054502 [*hep-lat/0212039*].
- [19] R. Sommer, “A New way to set the energy scale in lattice gauge theories and its applications to the static force and alpha-s in SU(2) Yang-Mills theory”, Nucl. Phys. B **411** (1994) 839 [*hep-lat/9310022*];

-
- M. Guagnelli, R. Sommer and H. Wittig [ALPHA collaboration], “Precision computation of a low-energy reference scale in quenched lattice QCD”, Nucl. Phys. B **535** (1998) 389 [*hep-lat/9806005*].
- [20] K. Symanzik, “Cutoff dependence in lattice ϕ_4^4 theory”, *dans*: Recent developments in gauge theories (Cargèse 1979), eds. G. 't Hooft et al. (Plenum, New York, 1980).
- [21] K. Symanzik, “Some topics in quantum field theory”, *dans*: Mathematical problems in theoretical physics, eds. R. Schrader et al., Lecture Notes in Physics, Vol. 153 (Springer, New York, 1982).
- [22] K. Symanzik, “Continuum Limit And Improved Action In Lattice Theories. 1. Principles And ϕ_4^4 Theory”, Nucl. Phys. B **226** (1983) 187;
“Continuum Limit And Improved Action In Lattice Theories. 2. O(N) Nonlinear Sigma Model In Perturbation Theory”, Nucl. Phys. B **226** (1983) 205.
- [23] M. Lüscher, S. Sint, R. Sommer, P. Weisz and U. Wolff, Non-perturbative O(a) improvement of lattice QCD Nucl. Phys. B491 (1997) 323
- [24] B. Sheikholeslami and R. Wohlert, “Improved Continuum Limit Lattice Action For QCD With Wilson Fermions”, Nucl. Phys. B **259** (1985) 572.
- [25] M. Bochicchio, L. Maiani, G. Martinelli, G. C. Rossi and M. Testa, “Chiral Symmetry On The Lattice With Wilson Fermions”, Nucl. Phys. B **262** (1985) 331.
- [26] L. Maiani and G. Martinelli, “Current Algebra And Quark Masses From A Monte Carlo Simulation With Wilson Fermions”, Phys. Lett. B **178** (1986) 265.
- [27] G. Martinelli, S. Petrarca, C. T. Sachrajda and A. Vladikas, Phys. Lett. B311 (1993) 241 [E: B317 (1993) 660]
- [28] M. L. Paciello, S. Petrarca, B. Taglienti and A. Vladikas, Phys. Lett. B341 (1994) 187
- [29] D. S. Henty, R. D. Kenway, B. J. Pendleton and J.I. Skullerud, Phys. Rev. D51 (1995) 5323
- [30] M. Luscher, S. Sint, R. Sommer and H. Wittig, “Non-perturbative determination of the axial current normalization constant in O(a) improved lattice QCD”, Nucl. Phys. B **491** (1997) 344 [*hep-lat/9611015*].
- [31] T. Bhattacharya, R. Gupta, W. J. Lee and S. R. Sharpe, “Order a improved renormalization constants”, Phys. Rev. D **63** (2001) 074505 [*hep-lat/0009038*].

- [32] M. Luscher, S. Sint, R. Sommer and P. Weisz, “Chiral symmetry and $O(a)$ improvement in lattice QCD”, Nucl. Phys. B **478** (1996) 365 [*hep-lat/9605038*].
- [33] R. G. Edwards, U. M. Heller and T. R. Klassen, “The Schrödinger functional and non-perturbative improvement”, hep-lat/9710054
- [34] Isgur N and Wise M B, 1989, “Weak decays of heavy mesons in the static quark approximation”, *Phys. Lett. B* **232** 113;
1990, “Weak transition form-factors between heavy mesons”, *Phys. Lett. B* **237** 527.
- [35] H. Georgi, “An Effective Field Theory For Heavy Quarks At Low-Energies”, *Phys. Lett. B* **240** (1990) 447.
- [36] B. Grinstein, “The Static Quark Effective Theory”, Nucl. Phys. B **339** (1990) 253.
- [37] M. A. Shifman and M. B. Voloshin, “On Annihilation Of Mesons Built From Heavy And Light Quark And Anti- $B_0 - B_0$ Oscillations”, *Sov. J. Nucl. Phys.* **45** (1987) 292 [*Yad. Fiz.* **45** (1987) 463];
“On Production Of D And D^* Mesons In B Meson Decays”, *Sov. J. Nucl. Phys.* **47** (1988) 511 [*Yad. Fiz.* **47** (1988) 801];
- [38] A. F. Falk, H. Georgi, B. Grinstein and M. B. Wise, “Heavy Meson Form-Factors From QCD”, Nucl. Phys. B **343** (1990) 1.
- [39] H. Georgi, contribution to the *Proceedings of TASI 91*, R.K. Ellis ed., World Scientific, Singapore, 1991 ;
B. Grinstein, contribution to *High Energy Phenomenology*, R. Huerta and M.A. Peres eds., World Scientific, Singapore, 1991;
N. Isgur and M. Wise, contribution to *Heavy Flavours*, A. Buras and M. Lindner eds., World Scientific, Singapore, 1992;
T. Mannel, contribution to the Workshop *QCD 94*, Montpellier, 7-13 July 1994, preprint CERN-TH.7499/94.
- [40] M. Neubert, “Heavy quark symmetry”, *Phys. Rept.* **245** (1994) 259 [*hep-ph/9306320*];
“B physics and CP violation”, *Int. J. Mod. Phys. A* **11** (1996) 4173 [*hep-ph/9604412*].
- [41] E. Eichten and B. Hill, “An Effective Field Theory For The Calculation Of Matrix Elements Involving Heavy Quarks”, *Phys. Lett. B* **234** (1990) 511.

-
- [42] H. D. Politzer and M. B. Wise, “Leading Logarithms Of Heavy Quark Masses In Processes With Light And Heavy Quarks”, *Phys. Lett. B* **206** (1988) 681;
“Effective Field Theory Approach To Processes Involving Both Light And Heavy Fields”, *Phys. Lett. B* **208** (1988) 504.
- [43] J.D. Bjorken in *Results and Perspectives in Particle Physics*, proc. of the 4th Rencontres de Physique de la Valle d’Aoste, La Thuile, Italy 1990, M. Greco ed. (ed. Frontieres, Gif-sur-Yvette, France, 1990) p. 583.
- [44] N. Isgur and M. B. Wise, “Excited Charm Mesons In Semileptonic Anti-B Decay And Their Contributions To A Bjorken Sum Rule”, *Phys. Rev. D* **43** (1991) 819.
- [45] K. Hagiwara *et al.* [Particle Data Group Collaboration], “Review Of Particle Physics”, *Phys. Rev. D* **66** (2002) 010001.
- [46] N. Cabibbo, “Unitary Symmetry And Leptonic Decays”, *Phys. Rev. Lett.* **10** (1963) 531.
- [47] M. Kobayashi and T. Maskawa, “CP Violation In The Renormalizable Theory Of Weak Interaction”, *Prog. Theor. Phys.* **49** (1973) 652.
- [48] S. L. Glashow, J. Iliopoulos and L. Maiani, “Weak Interactions With Lepton - Hadron Symmetry”, *Phys. Rev. D* **2** (1970) 1285.
- [49] M. E. Luke, “Effects Of Subleading Operators In The Heavy Quark Effective Theory”, *Phys. Lett. B* **252** (1990) 447.
- [50] Dugan M J and Grinstein B, 1991, “QCD basis for factorization in decays of heavy mesons”, *Phys. Lett. B* **255** 583.
- [51] Charles J, Le Yaouanc A, Oliver L, Pène O and Raynal J-C, 1999, “Heavy-to-light form factors in the final hadron large energy limit of QCD”, *Phys. Rev. D* **60** 014001 [*hep-ph/9812358*].
- [52] Beneke M and Feldmann T, 2001, “Symmetry-breaking corrections to heavy-to-light B meson form factors at large recoil”, *Nucl. Phys. B* **592** 3 [*hep-ph/0008255*].
- [53] Bauer C W, Fleming S, Pirjol D and Stewart I W, 2001a, “An effective field theory for collinear and soft gluons: heavy to light decays”, *Phys. Rev. D* **63** 114020 [*hep-ph/0011336*].

- [54] C. W. Bauer, S. Fleming and M. E. Luke, “Summing Sudakov logarithms in $B \rightarrow X/s$ gamma in effective field theory”, *Phys. Rev. D* **63** (2001) 014006 [*hep-ph/0005275*].
- [55] C. W. Bauer and I. W. Stewart, “Invariant operators in collinear effective theory”, *Phys. Lett. B* **516** (2001) 134 [*hep-ph/0107001*];
C. W. Bauer, D. Pirjol and I. W. Stewart, “Soft-collinear factorization in effective field theory”, *Phys. Rev. D* **65** (2002) 054022 [*hep-ph/0109045*].
- [56] J. Gasser and H. Leutwyler, “Chiral Perturbation Theory To One Loop”, *Annals Phys.* **158** (1984) 142;
“Chiral Perturbation Theory: Expansions In The Mass Of The Strange Quark”, *Nucl. Phys. B* **250** (1985) 465.
- [57] S. R. Coleman, J. Wess and B. Zumino, “Structure Of Phenomenological Lagrangians. 1”, *Phys. Rev.* **177** (1969) 2239;
C. G. Callan, S. R. Coleman, J. Wess and B. Zumino, “Structure Of Phenomenological Lagrangians. 2”, *Phys. Rev.* **177** (1969) 2247.
- [58] M. B. Wise, “Chiral Perturbation Theory For Hadrons Containing A Heavy Quark”, *Phys. Rev. D* **45** (1992) 2188.
- [59] T. M. Yan, H. Y. Cheng, C. Y. Cheung, G. L. Lin, Y. C. Lin and H. L. Yu, “Heavy Quark Symmetry And Chiral Dynamics”, *Phys. Rev. D* **46** (1992) 1148 [Erratum-*ibid.* *D* **55** (1997) 5851].
- [60] G. Burdman and J. F. Donoghue, “Union Of Chiral And Heavy Quark Symmetries”, *Phys. Lett. B* **280** (1992) 287;
“Two Component Semileptonic Form-Factors”, *Phys. Rev. Lett.* **68** (1992) 2887.
- [61] R. Casalbuoni, A. Deandrea, N. Di Bartolomeo, R. Gatto, F. Feruglio and G. Nardulli, “Phenomenology of heavy meson chiral Lagrangians”, *Phys. Rept.* **281**, 145 (1997) [*hep-ph/9605342*].
- [62] R. Casalbuoni, A. Deandrea, N. Di Bartolomeo, R. Gatto, F. Feruglio and G. Nardulli, “Light vector resonances in the effective chiral Lagrangian for heavy mesons”, *Phys. Lett. B* **292** (1992) 371 [*hep-ph/9209248*].
- [63] R. Casalbuoni, A. Deandrea, N. Di Bartolomeo, R. Gatto, F. Feruglio and G. Nardulli, “Estimates with an effective chiral Lagrangian for heavy mesons”, *Phys. Lett. B* **294** (1992) 106 [*hep-ph/9209247*].

-
- [64] R. Casalbuoni, A. Deandrea, N. Di Bartolomeo, R. Gatto, F. Feruglio and G. Nardulli, “Effective Lagrangian for heavy and light mesons: Semileptonic decays”, Phys. Lett. B **299** (1993) 139 [*hep-ph/9211248*].
- [65] J. Schechter and A. Subbaraman, “Role of light vector mesons in the heavy particle chiral Lagrangian”, Phys. Rev. D **48** (1993) 332 [*hep-ph/9209256*].
- [66] A. F. Falk and M. E. Luke, “Strong decays of excited heavy mesons in chiral perturbation theory”, Phys. Lett. B **292** (1992) 119 [*hep-ph/9206241*].
- [67] U. Kilian, J. G. Korner and D. Pirjol, “Excited Charmed Mesons In Chiral Perturbation Theory”, Phys. Lett. B **288** (1992) 360.
- [68] D. Ebert, T. Feldmann, R. Friedrich and H. Reinhardt, “Effective meson Lagrangian with chiral and heavy quark symmetries from quark flavor dynamics”, Nucl. Phys. B **434** (1995) 619 [*hep-ph/9406220*].
- [69] C. G. Boyd and B. Grinstein, “Chiral and heavy quark symmetry violation in B decays”, Nucl. Phys. B **442** (1995) 205 [*hep-ph/9402340*].
- [70] H. Y. Cheng, C. Y. Cheung, G. L. Lin, Y. C. Lin, T. M. Yan and H. L. Yu, “Corrections to chiral dynamics of heavy hadrons. 1. $1/M$ correction”, Phys. Rev. D **49** (1994) 2490 [*hep-ph/9308283*].
- [71] M. E. Luke and A. V. Manohar, “Reparametrization invariance constraints on heavy particle effective field theories”, Phys. Lett. B **286** (1992) 348 [*hep-ph/9205228*].
- [72] A. Abada, D. Becirevic, P. Boucaud, G. Herdoiza, J. P. Leroy, A. Le Yaouanc and O. Pène, “First lattice QCD estimate of the $g(D^* D \pi)$ coupling”, Phys. Rev. D **66** (2002) 074504 [*hep-ph/0206237*];
“A lattice estimate of the $g(D^* D \pi)$ coupling”, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **119** (2003) 641 [*hep-lat/0209092*].
- [73] S. Ahmed *et al.* [CLEO Collaboration], “First measurement of $\Gamma(D^{*+})$ ”, Phys. Rev. Lett. **87** (2001) 251801, [*hep-ex/0108013*];
A. Anastassov *et al.*, “First measurement of $\Gamma(D^{*+})$ and precision measurement of $m(D^{*+}) - m(D^0)$ ”, [*hep-ex/0108043*];
K. K. Gan, “New CLEO II results on charm hadron decays”, [*hep-ex/0202012*].
- [74] S. Barlag *et al.* [ACCMOR Collaboration], “Measurement of the mass and width of the charmed meson D^{*+} (2010)”, Phys. Lett. B **278** (1992) 480.

- [75] P. Roudeau, “Tau and charm physics highlights”, *Int. J. Mod. Phys. A* **17** (2002) 3037 [*hep-ph/0110397*].
- [76] M. Battaglia *et al.*, “The CKM matrix and the unitarity triangle”, [*hep-ph/0304132*].
<http://ckm-workshop.web.cern.ch>
- [77] A. V. Manohar and M. B. Wise, “Heavy Quark Physics”, Cambridge Monogr. Part. Phys. Nucl. Phys. Cosmol. **10** (2000) 1.
- [78] I. I. Y. Bigi and A. I. Sanda, “CP Violation”, Cambridge Monogr. Part. Phys. Nucl. Phys. Cosmol. **9** (2000) 1.
- [79] G.C. Branco, L. Lavoura and J.P. Silva, *CP Violation*, International Series of Monographs on Physics, No. 103 Oxford University Press. Clarendon Press, Oxford (1999).
- [80] P. F. Harrison and H. R. Quinn [BABAR Collaboration], “The BaBar physics book: Physics at an asymmetric B factory”, SLAC-R-0504, *Papers from Workshop on Physics at an Asymmetric B Factory (BaBar Collaboration Meeting), Rome, Italy, 11-14 Nov 1996, Princeton, NJ, 17-20 Mar 1997, Orsay, France, 16-19 Jun 1997 and Pasadena, CA, 22-24 Sep 1997*.
- [81] K. Anikeev *et al.*, “B physics at the Tevatron: Run II and beyond”, *hep-ph/0201071*.
- [82] A. J. Buras, “Weak Hamiltonian, CP violation and rare decays”, *hep-ph/9806471*.
- [83] P. Ball *et al.*, “B decays at the LHC”, *hep-ph/0003238*.
- [84] Y. Nir, “CP violation: A new era”, *hep-ph/0109090*.
- [85] A. F. Falk, “The CKM matrix and the heavy quark expansion”, *hep-ph/0007339*.
- [86] M. Ciuchini *et al.*, “2000 CKM-triangle analysis: A critical review with updated experimental inputs and theoretical parameters”, *JHEP* **0107** (2001) 013 [*hep-ph/0012308*].
- [87] M. Ciuchini, E. Franco, F. Parodi, V. Lubicz, L. Silvestrini and A. Stocchi, “Unitarity triangle analysis in the standard model and sensitivity to new physics”, eConf **C0304052** (2003) WG306 [*hep-ph/0307195*].
- [88] L. Lellouch, “CKM matrix elements from tree-level decays and b-hadron lifetimes”, [*hep-ph/0310265*].
- [89] Z. Ligeti, “Introduction to heavy meson decays and CP asymmetries”, eConf **C020805** (2002) L02 [*hep-ph/0302031*].

-
- [90] A. Ali, “CKM phenomenology and B-meson physics: Present status and current issues”, *hep-ph/0312303*.
- [91] L. Wolfenstein, “Parametrization Of The Kobayashi-Maskawa Matrix”, *Phys. Rev. Lett.* **51**, 1945 (1983).
- [92] A. Hocker, H. Lacker, S. Laplace and F. Le Diberder, “A new approach to a global fit of the CKM matrix”, *Eur. Phys. J. C* **21** (2001) 225 [*hep-ph/0104062*]; <http://ckmfitter.in2p3.fr/>.
- [93] A. D. Sakharov, “Violation Of CP Invariance, C Asymmetry, And Baryon Asymmetry Of The Universe”, *Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **5** (1967) 32 [*JETP Lett.* **5** (1967) 32] [*SOPUA*,34,392-393.1991 *UFNAA*,161,61-64.1991) 24].
- [94] I. S. Towner and J. C. Hardy, “The current status of $V(ud)$ ”, *nucl-th/9809087*;
J. C. Hardy, I. S. Towner, V. T. Koslowsky, E. Hagberg and H. Schmeing, “Superal-
lowed $0^+ \rightarrow 0^+$ Nuclear Beta Decays: A Critical Survey With Tests Of Cvc And The
Standard Model”, *Nucl. Phys. A* **509** (1990) 429;
B. K. Fujikawa *et al.*, “A new measurement of the partial $0^+ \rightarrow 0^+$ half life of C-10
with GAMMASPHERE”, *nucl-ex/9806001*;
I. S. Towner *et al.*, “Recent Chalk River experiments on superallowed $0^+ \rightarrow 0^+$ beta
decays”, *nucl-th/9507004*.
- [95] H. Abele *et al.*, “Is the unitarity of the quark-mixing-CKM-matrix violated in neutron
beta-decay?”, *Phys. Rev. Lett.* **88** (2002) 211801 [*hep-ex/0206058*];
P. Bopp *et al.*, “The Beta Decay Asymmetry Of The Neutron And $G(A) / G(V)$ ”, *Phys.*
Rev. Lett. **56** (1986) 919 [Erratum-*ibid.* **57** (1986) 1192];
B. Erokolimsky, I. Kuznetsov, I. Stepanenko and Y. A. Mostovoi, “Corrigendum: Cor-
rected Value Of The Beta-Emission Asymmetry In The Decay Of Polarized Neutrons
Measured In 1990”, *Phys. Lett. B* **412** (1997) 240;
P. Liaud, K. Schreckenbach, R. Kossakowski, H. Nastoll, A. Bussiere, J. P. Guillaud
and L. Beck, “The Measurement Of The Beta Asymmetry In The Decay Of Polarized
Neutrons”, *Nucl. Phys. A* **612** (1997) 53;
Y. A. Mostovoi *et al.*, “Experimental Value Of $G(A)/G(V)$ From A Measurement Of
Both P-Odd Correlations In Free-Neutron Decay”, *Phys. Atom. Nucl.* **64** (2001) 1955.
[*Yad. Fiz.* **64** (2001) 2040].
- [96] H. Leutwyler and M. Roos, “Determination Of The Elements $V(Us)$ And $V(Ud)$ Of
The Kobayashi-Maskawa Matrix”, *Z. Phys. C* **25** (1984) 91.

- [97] V. Cirigliano, M. Knecht, H. Neufeld and H. Pichl, “The pionic beta decay in chiral perturbation theory”, *Eur. Phys. J. C* **27**, 255 (2003) [*hep-ph/0209226*].
- [98] D. Pocanic [PIBETA Collaboration], “New results from the PIBETA experiment”, [*hep-ph/0307258*].
- [99] G. Isidori et al., ”Determination of the Cabibbo Angle”, dans *The CKM Matrix and the Unitarity Triangle*, edited by M. Battaglia et al., CERN-2003, p.43, [*hep-ph/0304132*].
- [100] V. Cirigliano, “K(e3) and pi(e3) decays: Radiative corrections and CKM unitarity”, [*hep-ph/0305154*].
- [101] B. Sciascia [KLOE Collaboration], “KLOE prospects and preliminary results for K(l3) decay measurements”, eConf **C0304052**, WG607 (2003) [*hep-ex/0307016*].
- [102] M. Moulson [KLOE Collaboration], “Recent results from the KLOE experiment at DAPHNE”, [*hep-ex/0308023*].
- [103] A. Sher *et al.*, “New, high statistics measurement of the $K^+ \rightarrow \pi^0 e^+ \nu$ (K(e3)+) branching ratio”, [*hep-ex/0305042*].
- [104] M. Ademollo and R. Gatto, “Nonrenormalization Theorem For The Strangeness Violating Vector Currents”, *Phys. Rev. Lett.* **13** (1964) 264.
- [105] W. Jaus, “Relativistic Constituent Quark Model Of Electroweak Properties Of Light Mesons”, *Phys. Rev. D* **44** (1991) 2851.
- [106] C. R. Ji and P. Maris, “K(l3) transition form factors”, *Phys. Rev. D* **64** (2001) 014032 [*nucl-th/0102057*].
- [107] J. Kühn and A. Santamaría, *Z. Phys.* **C48**, 445 (1990); M. Finkemeier and E. Mirkes, *Z. Phys.* **C72**, 619 (1996).
- [108] N. Cabibbo, E. C. Swallow and R. Winston, “Semileptonic hyperon decays and CKM unitarity”, [*hep-ph/0307214*].
- [109] E. Gamiz, M. Jamin, A. Pich, J. Prades and F. Schwab, “Determination of $m(s)$ and $|V(us)|$ from hadronic tau decays”, *JHEP* **0301**, 060 (2003) [*hep-ph/0212230*].
- [110] J. Bijnens and P. Talavera, “K(l3) decays in chiral perturbation theory”, *Nucl. Phys. B* **669** (2003) 341 [*hep-ph/0303103*].

-
- [111] D. Becirevic, “Lattice Calculations of Weak Matrix Elements”, Plenary Talk at the 21st International Symposium on Lattice Field Theory (LATTICE 2003), Tsukuba, Ibaraki, Japan, 15-19 Jul 2003.
- [112] K. C. Bowler *et al.* [UKQCD Collaboration], “An ‘improved’ lattice study of semi-leptonic decays of D mesons”, *Phys. Rev. D* **51**, 4905 (1995) [*hep-lat/9410012*].
- [113] A. Abada, D. Becirevic, P. Boucaud, J. P. Leroy, V. Lubicz and F. Mescia, “Heavy \rightarrow light semileptonic decays of pseudoscalar mesons from lattice QCD”, *Nucl. Phys. B* **619**, 565 (2001) [*hep-lat/0011065*].
- [114] C. R. Allton *et al.* [APE Collaboration], “Lattice calculation of D and B meson semileptonic decays using the Clover action at beta = 6.0 on APE”, *Phys. Lett. B* **345** (1995) 513 [*hep-lat/9411011*].
- [115] T. Bhattacharya and R. Gupta, “Lattice analysis of semi-leptonic form factors”, *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **47** (1996) 481 [*hep-lat/9512007*].
- [116] J. Chay, H. Georgi and B. Grinstein, “Lepton Energy Distributions In Heavy Meson Decays From QCD”, *Phys. Lett. B* **247** (1990) 399;
M. A. Shifman and M. B. Voloshin, “Preasymptotic Effects In Inclusive Weak Decays Of Charmed Particles”, *Sov. J. Nucl. Phys.* **41** (1985) 120 [*Yad. Fiz.* **41** (1985) 187];
I. I. Y. Bigi, N. G. Uraltsev and A. I. Vainshtein, “Nonperturbative corrections to inclusive beauty and charm decays: QCD versus phenomenological models”, *Phys. Lett. B* **293** (1992) 430 [Erratum-*ibid.* **B 297** (1993) 477] [*hep-ph/9207214*];
I. I. Y. Bigi, M. A. Shifman, N. G. Uraltsev and A. I. Vainshtein, “QCD predictions for lepton spectra in inclusive heavy flavor decays”, *Phys. Rev. Lett.* **71** (1993) 496 [*hep-ph/9304225*];
A. V. Manohar and M. B. Wise, “Inclusive semileptonic B and polarized Lambda(b) decays from QCD”, *Phys. Rev. D* **49** (1994) 1310 [*hep-ph/9308246*].
- [117] E. C. Poggio, H. R. Quinn and S. Weinberg, “Smearing The Quark Model”, *Phys. Rev. D* **13** (1976) 1958.
- [118] J. Chay, H. Georgi and B. Grinstein, “Lepton Energy Distributions In Heavy Meson Decays From QCD”, *Phys. Lett. B* **247** (1990) 399;
M. A. Shifman and M. B. Voloshin, “Preasymptotic Effects In Inclusive Weak Decays Of Charmed Particles”, *Sov. J. Nucl. Phys.* **41** (1985) 120 [*Yad. Fiz.* **41** (1985) 187].

- [119] I. I. Y. Bigi, N. G. Uraltsev and A. I. Vainshtein, “Nonperturbative corrections to inclusive beauty and charm decays: QCD versus phenomenological models”, *Phys. Lett. B* **293** (1992) 430 [Erratum-ibid. *B* **297** (1993) 477] [*hep-ph/9207214*];
I. I. Y. Bigi, M. A. Shifman, N. G. Uraltsev and A. I. Vainshtein, “QCD predictions for lepton spectra in inclusive heavy flavor decays”, *Phys. Rev. Lett.* **71** (1993) 496 [*hep-ph/9304225*].
- [120] A. V. Manohar and M. B. Wise, “Inclusive semileptonic B and polarized Lambda(b) decays from QCD”, *Phys. Rev. D* **49** (1994) 1310 [*hep-ph/9308246*]
- [121] B. Blok, L. Koyrakh, M. A. Shifman and A. I. Vainshtein, “Differential distributions in semileptonic decays of the heavy flavors in QCD”, *Phys. Rev. D* **49**, 3356 (1994) [Erratum-ibid. *D* **50**, 3572 (1994)] [*hep-ph/9307247*]. [122]
- [122] T. Mannel, “Operator product expansion for inclusive semileptonic decays in heavy quark effective field theory”, *Nucl. Phys. B* **413**, 396 (1994) [*hep-ph/9308262*].
- [123] M. E. Luke, M. J. Savage and M. B. Wise, “Charm mass dependence of the $O(\alpha_s^2 n(f))$ correction to inclusive $B \rightarrow X(c) e \text{ anti-electron-neutrino}$ decay”, *Phys. Lett. B* **345**, 301 (1995) [*hep-ph/9410387*].
- [124] A. H. Hoang, Z. Ligeti and A. V. Manohar, “B decays in the Upsilon expansion”, *Phys. Rev. D* **59** (1999) 074017 [*hep-ph/9811239*].
- [125] I. I. Y. Bigi, M. A. Shifman and N. Uraltsev, “Aspects of heavy quark theory”, *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* **47** (1997) 591 [*hep-ph/9703290*].
- [126] A. H. Mahmood *et al.*, “Measurement of lepton momentum moments in the decay $\text{anti-B} \rightarrow X l \text{ anti-nu}$ and determination of heavy quark expansion parameters and $|V(cb)|$ ”, *Phys. Rev. D* **67**, 072001 (2003) [*hep-ex/0212051*].
- [127] B. Aubert *et al.* [BABAR Collaboration], “Measurement of the first and second moments of the hadronic mass distribution in semileptonic B decays”, [*hep-ex/0307046*].
- [128] M. Battaglia *et al.* [DELPHI Collaboration], Report DELPHI 2003-028, CONF 648 (2003).
- [129] C. G. Boyd, B. Grinstein and R. F. Lebed, “Model independent determinations of $\text{anti-B} \rightarrow D$ (lepton), D^* (lepton) anti-neutrino form-factors”, *Nucl. Phys. B* **461** (1996) 493 [*hep-ph/9508211*];

-
- I. Caprini, L. Lellouch and M. Neubert, “Dispersive bounds on the shape of anti- $B \rightarrow D^{(*)} l$ anti- ν form factors”, Nucl. Phys. B **530** (1998) 153 [*hep-ph/9712417*].
- [130] M. Neubert, “Theoretical update on the model independent determination of $|V(cb)|$ using heavy quark symmetry”, Phys. Lett. B **338**, 84 (1994) [*hep-ph/9408290*].
- [131] M. A. Shifman, N. G. Uraltsev and A. I. Vainshtein, “ $V(Cb)$ From Ope Sum Rules For Heavy Flavor Transitions”, Phys. Rev. D **51**, 2217 (1995) [Erratum-ibid. D **52**, 3149 (1995)] [*hep-ph/9405207*].
- [132] I. I. Bigi, M. A. Shifman, N. G. Uraltsev and A. I. Vainshtein, “Sum Rules For Heavy Flavor Transitions In The SV Limit”, Phys. Rev. D **52**, 196 (1995) [*hep-ph/9405410*].
- [133] V. Morenas, A. Le Yaouanc, L. Oliver, O. Pène and J. C. Raynal, “Slope of the Isgur-Wise function in the heavy mass limit of quark models a la Bakamjian-Thomas”, Phys. Lett. B **408** (1997) 357 [*hep-ph/9705324*].
- [134] A. Le Yaouanc, L. Oliver and J. C. Raynal, “Bounds on the derivatives of the Isgur-Wise function from sum rules in the heavy quark limit of QCD.”, Phys. Lett. B **557** (2003) 207 [*hep-ph/0210231*].
- [135] A. Le Yaouanc, L. Oliver and J. C. Raynal, “Bounds On The Derivatives Of The Isgur-Wise Function”, eConf **C0304052** (2003) WG111.
- [136] A. Le Yaouanc, L. Oliver and J. C. Raynal, “Lower bounds on the curvature of the Isgur-Wise function”, [*hep-ph/0307197*].
- [137] A. Kapustin, Z. Ligeti, M. B. Wise and B. Grinstein, “Perturbative corrections to zero recoil inclusive B decay sum rules”, Phys. Lett. B **375**, 327 (1996) [*hep-ph/9602262*].
- [138] C. G. Boyd, Z. Ligeti, I. Z. Rothstein and M. B. Wise, “Corrections to the Bjorken and Voloshin sum rules”, Phys. Rev. D **55**, 3027 (1997) [*hep-ph/9610518*].
- [139] N. Uraltsev, “New exact heavy quark sum rules”, Phys. Lett. B **501**, 86 (2001) [*hep-ph/0011124*].
- [140] S. Hashimoto, A. X. El-Khadra, A. S. Kronfeld, P. B. Mackenzie, S. M. Ryan and J. N. Simone, “Lattice QCD calculation of anti- $B \rightarrow D l$ anti- ν decay form factors at zero recoil”, Phys. Rev. D **61** (2000) 014502 [*hep-ph/9906376*].

- [141] S. Hashimoto, A. S. Kronfeld, P. B. Mackenzie, S. M. Ryan and J. N. Simone, “Lattice calculation of the zero recoil form factor of anti- $B \rightarrow D^* l$ anti- ν : Toward a model independent determination of $|V(cb)|$ ”, Phys. Rev. D **66**, 014503 (2002) [*hep-ph/0110253*].
- [142] A. S. Kronfeld, P. B. Mackenzie, J. N. Simone, S. Hashimoto and S. M. Ryan, “ $F(1)$ for $B \rightarrow D^* l \nu$ from lattice QCD”, [*hep-ph/0207122*].
- [143] A. Czarnecki, “Two-loop QCD corrections to $b \rightarrow c$ transitions at zero recoil”, Phys. Rev. Lett. **76** (1996) 4124 [*hep-ph/9603261*];
A. Czarnecki and K. Melnikov, “Two-loop QCD corrections to $b \rightarrow c$ transitions at zero recoil: Analytical results”, Nucl. Phys. B **505** (1997) 65 [*hep-ph/9703277*].
- [144] Heavy Flavor Averaging Group [HFAG]: <http://www.slac.stanford.edu/xorg/hfag/>.
- [145] G. Burdman, Z. Ligeti, M. Neubert and Y. Nir, “The Decay $B \rightarrow \pi l \nu$ in heavy quark effective theory”, Phys. Rev. D **49** (1994) 2331 [*hep-ph/9309272*].
- [146] D. R. Burford, H. D. Duong, J. M. Flynn, J. Nieves, B. J. Gough, N. M. Hazel and H. P. Shanahan [UKQCD Collaboration], “Form-factors for $B \rightarrow \pi l \nu$ and $B \rightarrow K^* \gamma$ decays on the lattice”, Nucl. Phys. B **447** (1995) 425 [*hep-lat/9503002*].
- [147] R. Aleksan, A. Le Yaouanc, L. Oliver, O. Pène and J. C. Raynal, “Critical Analysis Of Theoretical Estimates For B To Light Meson Form-Factors And The $B \rightarrow \Psi K(K^*)$ Data”, Phys. Rev. D **51** (1995) 6235 [*hep-ph/9408215*].
- [148] G. Burdman and J. Kambor, “Dispersive Approach to Semileptonic Form-Factors in Heavy-to-Light Meson Decays”, Phys. Rev. D **55** (1997) 2817 [*hep-ph/9602353*].
- [149] D. Becirevic and A.B. Kaidalov, “Comment on the heavy \rightarrow light form factors”, Phys. Lett. B **478** (2000) 417 [*hep-ph/9904490*].
- [150] P. Ball and R. Zwicky, “Improved analysis of $B \rightarrow \pi e \nu$ from QCD sum rules on the light-cone”, JHEP **0110** (2001) 019 [*hep-ph/0110115*].
- [151] D. Scora and N. Isgur, “Semileptonic meson decays in the quark model: An update”, Phys. Rev. D **52** (1995) 2783 [*hep-ph/9503486*].
- [152] D. Melikhov, “Form Factors of Meson Decays in the Relativistic Constituent Quark Model”, Phys. Rev. D **53** (1996) 2460 [*hep-ph/9509268*].

-
- [153] M. Wirbel, B. Stech and M. Bauer, “Exclusive Semileptonic Decays Of Heavy Mesons”, *Z. Phys. C* **29** (1985) 637.
- [154] B. Stech, “Form-factor relations for heavy to light transitions”, *Phys. Lett. B* **354** (1995) 447 [*hep-ph/9502378*].
- [155] M. A. Shifman, A. I. Vainshtein and V. I. Zakharov, “QCD And Resonance Physics. Sum Rules”, *Nucl. Phys. B* **147**, 385 (1979);
“QCD And Resonance Physics: Applications”, *Nucl. Phys. B* **147**, 448 (1979).
- [156] P. Colangelo and A. Khodjamirian, “QCD sum rules: A modern perspective”, [*hep-ph/0010175*].
- [157] I. I. Balitsky, V. M. Braun and A. V. Kolesnichenko, “Radiative Decay $\Sigma^+ \rightarrow P$ Gamma In Quantum Chromodynamics”, *Nucl. Phys. B* **312** (1989) 509.
- [158] V.M. Braun and I.E. Filyanov, “QCD Sum Rules In Exclusive Kinematics And Pion Wave Function”, *Z. Phys. C* **44** (1989) 157.
- [159] V. L. Chernyak and I. R. Zhitnitsky, “B Meson Exclusive Decays Into Baryons”, *Nucl. Phys. B* **345** (1990) 137.
- [160] V.M. Belyaev, A. Khodjamirian and R. Rückl, “QCD calculation of the $B \rightarrow \pi, K$ form-factors”, *Z. Phys. C* **60** (1993) 349.
- [161] E. Bagan, P. Ball and V. M. Braun, “Radiative corrections to the decay $B \rightarrow \pi e \nu$ and the heavy quark limit”, *Phys. Lett. B* **417**, 154 (1998) [*hep-ph/9709243*];
A. Khodjamirian, R. Rückl and C. W. Winhart, “The scalar $B \rightarrow \pi$ and $D \rightarrow \pi$ form factors in QCD”, *Phys. Rev. D* **58**, 054013 (1998) [*hep-ph/9802412*];
A. Khodjamirian, R. Rückl, S. Weinzierl, C. W. Winhart and O. I. Yakovlev, “Predictions on $B \rightarrow \pi \text{ anti-}l \nu/l$, $D \rightarrow \pi \text{ anti-}l \nu/l$ and $D \rightarrow K \text{ anti-}l \nu/l$ from QCD light-cone sum rules”, *Phys. Rev. D* **62**, 114002 (2000) [*hep-ph/0001297*].
- [162] P. Ball, “ $B \rightarrow \pi$ and $B \rightarrow K$ transitions from QCD sum rules on the light-cone”, *JHEP* **9809**, 005 (1998) [*hep-ph/9802394*].
- [163] P. Ball and R. Zwicky, “Improved analysis of $B \rightarrow \pi e \nu$ from QCD sum rules on the light-cone”, *JHEP* **0110**, 019 (2001) [*hep-ph/0110115*].
- [164] P. Ball, “Weak decay form factors from QCD sum rules on the light-cone”, *eConf C0304052*, WG101 (2003) [*hep-ph/0306251*].

- [165] M. Jamin and B.O. Lange, “ $f(B)$ and $f(B/s)$ from QCD sum rules”, *Phys. Rev. D* **65** (2002) 056005. [*hep-ph/0108135*].
- [166] G. P. Lepage and S. J. Brodsky, “Exclusive Processes In Quantum Chromodynamics: Evolution Equations For Hadronic Wave Functions And The Form-Factors Of Mesons”, *Phys. Lett. B* **87** (1979) 359;
G. P. Lepage and S. J. Brodsky, “Exclusive Processes In Perturbative Quantum Chromodynamics”, *Phys. Rev. D* **22** (1980) 2157.
- [167] S. J. Brodsky, Y. Frishman, G. P. Lepage and C. T. Sachrajda, “Hadronic Wave Functions At Short Distances And The Operator Product Expansion”, *Phys. Lett. B* **91** (1980) 239;
S. J. Brodsky, Y. Frishman and G. P. Lepage, “On The Application Of Conformal Symmetry To Quantum Field Theory”, *Phys. Lett. B* **167** (1986) 347;
S. J. Brodsky and G. Peter Lepage, ”Exclusive processes in Quantum chromodynamics”, contribution to ”Perturbative Quantum Chromodynamics”, Ed. by A.H. Mueller, World Scientific Publising Co. (1990); SLAC-PUB-4947.
- [168] S. J. Brodsky and G. R. Farrar, “Scaling Laws At Large Transverse Momentum”, *Phys. Rev. Lett.* **31** (1973) 1153.
- [169] A.V. Efremov and A.V. Radyushkin, “Factorization and asymptotic behaviour of pion form factor in QCD”, *Phys. Lett. B* **94** (1980) 245;
“Field Theoretic Treatment Of High Momentum Transfer Processes. 3. Gauge Theories”, *Theor. Math. Phys.* **42** (1980) 97.
- [170] G. Bertsch, S. J. Brodsky, A. S. Goldhaber and J. F. Gunion, “Diffractive Excitation In QCD”, *Phys. Rev. Lett.* **47** (1981) 297.
- [171] A. P. Bakulev, S. V. Mikhailov and N. G. Stefanis, “What is this thing called pion distribution amplitude? From theory to data”, [*hep-ph/0310267*].
- [172] V. L. Chernyak and A. R. Zhitnitsky, “Asymptotic Behavior Of Exclusive Processes In QCD”, *Phys. Rept.* **112** (1984) 173.
- [173] S.V. Mikhailov and A.V. Radyushkin, “Nonlocal Condensates And QCD Sum Rules For Pion Wave Function”, [*Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **43**, 551 (1986)]. *JETP Lett.* **43** (1986) 712;
“Quark Condensate Nonlocality And Pion Wave Function In QCD: General Formalism”, *Sov. J. Nucl. Phys.* **49** (1989) 494;

- “The Pion Wave Function And QCD Sum Rules With Nonlocal Condensates”, Phys. Rev. D **45** (1992) 1754;
- A.P. Bakulev and A.V. Radyushkin, “Nonlocal Condensates And QCD Sum Rules For The Pion Form-Factor”, Phys. Lett. B **271** (1991) 223;
- A.P. Bakulev and S.V. Mikhailov, “QCD sum rules for pion wave function revisited”, Z. Phys. C **68** (1995) 451. [*hep-ph/9412366*]
- [174] V.M. Braun and I.E. Filyanov, “QCD Sum Rules In Exclusive Kinematics And Pion Wave Function”, Z. Phys. C **44** (1989) 157. [Sov. J. Nucl. Phys. **50** (1989) 511 YAFIA,50,818 (1989 YAFIA,50,818-830.1989)].
- [175] V.M. Belyaev and M.B. Johnson, “Distribution of valence quarks and light-cone QCD sum rules”, Phys. Rev. D **56** (1997) 1481; [*hep-ph/9702207*];
- “Twist-2 light-cone pion wave function”, Mod. Phys. Lett. A **13** (1998) 2909; [*hep-ph/9703244*];
- “Pion light-cone wave functions and light-front quark model”, Phys. Lett. B **423** (1998) 379. [*hep-ph/9707329*].
- [176] A.P. Bakulev and S.V. Mikhailov, “The rho meson and related meson wave functions in QCD sum rules with nonlocal condensates”, Phys. Lett. B **436** (1998) 351. [*hep-ph/9803298*].
- [177] A.P. Bakulev, S.V. Mikhailov, and N.G. Stefanis, “QCD-based pion distribution amplitudes confronting experimental data”, Phys. Lett. B **508** (2001) 279.
- [178] G. Martinelli and C. T. Sachrajda, “A Lattice Calculation Of The Second Moment Of The Pion’s Distribution Amplitude”, Phys. Lett. B **190** (1987) 151;
- L. Del Debbio, M. Di Pierro and A. Dougall, “The second moment of the pion light cone wave function”, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **119** (2003) 416 [*hep-lat/0211037*].
- [179] A. Abada, P. Boucaud, G. Herdoiza, J. P. Leroy, J. Micheli, O. Pène and J. Rodriguez-Quintero, “Preliminaries on a lattice analysis of the pion light cone wave function: A partonic signal?”, Phys. Rev. D **64** (2001) 074511 [*hep-ph/0105221*].
- [180] A. Abada, P. Boucaud, G. Herdoiza, J. P. Leroy, J. Micheli, O. Pène and J. Rodriguez-Quintero, “The pion light-cone wave function $\Phi(\pi)$ on the lattice: A partonic signal?”, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **106** (2002) 338 [*hep-lat/0110181*].
- [181] S. Dalley and B. van de Sande, “Transverse lattice calculation of the pion light-cone wavefunctions”, Phys. Rev. D **67** (2003) 114507; [*hep-ph/0212086*]

- [182] V.Y. Petrov et al., “Pion and photon light-cone wave functions from the instanton vacuum”, *Phys. Rev. D* **59** (1999) 114018. [*hep-ph/9807229*]
- [183] M. Praszalowicz and A. Rostworowski, “Pion light cone wave function in the non-local NJL model”, *Phys. Rev. D* **64** (2001) 074003;
“Vacuum condensates and the pion wave functions in the nonlocal chiral model”, *ibid.* **66** (2002) 054002. [*hep-ph/0111196*]
- [184] I. V. Anikin, A. E. Dorokhov and L. Tomio, “On high Q^2 behavior of the pion form-factor for transitions $\gamma^* \gamma \rightarrow \pi^0$ and $\gamma^* \gamma^* \rightarrow \pi^0$ within the nonperturbative approach”, *Phys. Lett. B* **475** (2000) 361 [*hep-ph/9909368*].
- [185] J. Gronberg *et al.* [CLEO Collaboration], “Measurements of the meson photon transition form factors of light pseudoscalar mesons at large momentum transfer”, *Phys. Rev. D* **57** (1998) 33 [*hep-ex/9707031*].
- [186] E. M. Aitala *et al.* [E791 Collaboration], “Direct measurement of the pion valence quark momentum distribution, the pion light-cone wave function squared”, *Phys. Rev. Lett.* **86** (2001) 4768 [*hep-ex/0010043*].
- [187] A. Schmedding and O. Yakovlev, “Perturbative effects in the form factor $\gamma^* \gamma \rightarrow \pi^0$ and extraction of the pion wave function from CLEO data”, *Phys. Rev. D* **62** (2000) 116002. [*hep-ph/9905392*]
- [188] A.P. Bakulev, S.V. Mikhailov, and N.G. Stefanis, “Unbiased analysis of CLEO data at NLO and pion distribution amplitude”, *Phys. Rev. D* **67** (2003) 074012, [*hep-ph/0212250*];
“CLEO and E791 data: A smoking gun for the pion distribution amplitude?”, *hep-ph/0303039*.
- [189] V. Chernyak, “Does the E791 experiment have measured the pion wave function profile?”, *Phys. Lett. B* **516** (2001) 116. [*hep-ph/0103295*];
V.L. Chernyak and A.G. Grozin, “Calculation of the cross section for the pion diffractive dissociation into two jets”, *Phys. Lett. B* **517** (2001) 119. [*hep-ph/0106162*]
- [190] N.N. Nikolaev, W. Schäfer, and G. Schwiete, “Coherent production of hard dijets on nuclei in QCD”, *Phys. Rev. D* **63** (2001) 014020, [*hep-ph/0009038*].
- [191] V.M. Braun et al., D. Y. Ivanov, A. Schaefer, and L. Szymanowski, “Towards the theory of coherent hard dijet production on hadrons and nuclei”, *Nucl. Phys. B* **638** (2002) 111, [*hep-ph/0204191*].

-
- [192] S. J. Brodsky, “Physics at the light-front”, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **108** (2002) 327 [*hep-ph/0112309*].
- [193] T. Onogi, “Review of lattice calculation of light–cone wavefunction”, *Presented at the Miniworkshop on QCD for B decays, Kyoto, Japan, 4 March 2003*.
- [194] M. Beneke, G. Buchalla, M. Neubert and C. T. Sachrajda, “QCD factorization for $B \rightarrow \pi \pi$ decays: Strong phases and CP violation in the heavy quark limit”, Phys. Rev. Lett. **83** (1999) 1914 [*hep-ph/9905312*];
M. Beneke, G. Buchalla, M. Neubert and C. T. Sachrajda, “QCD factorization for exclusive, non-leptonic B meson decays: General arguments and the case of heavy-light final states”, Nucl. Phys. B **591** (2000) 313 [*hep-ph/0006124*];
M. Beneke, G. Buchalla, M. Neubert and C. T. Sachrajda, “QCD factorization in $B \rightarrow \pi K$, $\pi \pi$ decays and extraction of Wolfenstein parameters”, Nucl. Phys. B **606** (2001) 245 [*hep-ph/0104110*].
- [195] V.M. Belyaev, V.M. Braun, A. Khodjamirian and R. Ruckl, “ $D^* D \pi$ and $B^* B \pi$ couplings in QCD”, Phys. Rev. D **51** (1995) 6177 [*hep-ph/9410280*]; A. Khodjamirian, R. Ruckl, S. Weinzierl and O. Yakovlev, “Perturbative QCD correction to the light-cone sum rule for the $B^* B \pi$ and $D^* D \pi$ couplings”, Phys. Lett. B **457** (1999) 245 [*hep-ph/9903421*].
- [196] K. C. Bowler *et al.* [UKQCD Collaboration], “Improved $B \rightarrow \pi l \nu/l$ form factors from the lattice”, Phys. Lett. B **486**, 111 (2000) [*hep-lat/9911011*].
- [197] A. X. El-Khadra, A. S. Kronfeld, P. B. Mackenzie, S. M. Ryan and J. N. Simone, “The semileptonic decays $B \rightarrow \pi l \nu$ and $D \rightarrow \pi l \nu$ from lattice QCD”, Phys. Rev. D **64**, 014502 (2001) [*hep-ph/0101023*].
- [198] S. Aoki *et al.* [JLQCD Collaboration], “Differential decay rate of $B \rightarrow \pi l \nu$ semileptonic decay with lattice NRQCD”, Phys. Rev. D **64**, 114505 (2001) [*hep-lat/0106024*].
- [199] D. Becirevic, “Lattice results relevant to the CKM matrix determination”, [*hep-ph/0211340*].
- [200] J.P. Alexander *et al.* [CLEO Collaboration], “First measurement of the $B \rightarrow \pi$ lepton neutrino and $B \rightarrow \rho$ (ω) lepton neutrino branching fractions”, Phys. Rev. Lett. **77** (1996) 5000.

- [201] S. B. Athar *et al.* [CLEO Collaboration], “Study of the q^2 dependence of $B \rightarrow \pi l \nu$ and $B \rightarrow \rho(\omega) l \nu$ decay and extraction of $|V_{ub}|$ ”, Phys. Rev. D **68** (2003) 072003 [*hep-ex/0304019*].
- [202] B. Aubert *et al.* [BABAR Collaboration], “Measurement of the CKM matrix element $|V_{ub}|$ with $B \rightarrow \rho e \nu$ decays. ((B))”, Phys. Rev. Lett. **90** (2003) 181801 [*hep-ex/0301001*].
- [203] BELLE Collaboration, H. Ishino [Belle Collaboration], talk at XXXVII Rencontres de Moriond, March 2002, <http://www.ichep02.nl/Transparencies/CP/CP-1/CP-1-4.kwon.pdf>, ICHEP (2002).
- [204] K. C. Bowler, J. F. Gill, C. M. Maynard and J. M. Flynn, “ $B \rightarrow \rho l \nu$ form factors in lattice QCD”, [*hep-lat/0402023*].
- [205] G. Kilcup, R. Gupta and S. R. Sharpe, “Staggered fermion matrix elements using smeared operators”, Phys. Rev. D **57** (1998) 1654 [*hep-lat/9707006*].
- [206] S. Aoki *et al.* [JLQCD Collaboration], “Kaon B parameter from quenched lattice QCD”, Phys. Rev. Lett. **80** (1998) 5271 [*hep-lat/9710073*].
- [207] T. Bhattacharya, G. T. Fleming, G. Kilcup, R. Gupta, W. Lee and S. Sharpe, “Calculating weak matrix elements using HYP staggered fermions”, [*hep-lat/0309105*].
- [208] D. Becirevic *et al.* [SPQCDR Collaboration], “Kaon weak matrix elements with Wilson fermions”, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **119** (2003) 359 [*hep-lat/0209136*].
- [209] P. Dimopoulos, J. Heitger, C. Pena, S. Sint and A. Vladikas [ALPHA Collaboration], “ $B(K)$ from twisted mass QCD”, [*hep-lat/0309134*].
- [210] A. Ali Khan *et al.* [CP-PACS Collaboration], “Kaon B parameter from quenched domain-wall QCD”, Phys. Rev. D **64** (2001) 114506 [*hep-lat/0105020*].
- [211] CP-PACS Collaboration, R´esultats pr´eliminaires, 21st International Symposium on Lattice Field Theory (LATTICE 2003), Tsukuba, Ibaraki, Japan, 15-19 Jul 2003.
- [212] T. Blum *et al.* [RBC Collaboration], “Kaon matrix elements and CP-violation from quenched lattice QCD. I: The 3-flavor case”, Phys. Rev. D **68** (2003) 114506 [*hep-lat/0110075*].
- [213] J. Noaki [RBC Collaboration], “Calculation of kaon matrix elements in quenched domain-wall QCD with DBW2 gauge action”, [*hep-lat/0309175*].

-
- [214] T. DeGrand [MILC collaboration], “Kaon B-parameter using overlap fermions”, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **119** (2003) 353 [*hep-lat/0208054*].
- [215] T. DeGrand [MILC Collaboration], “Kaon B parameter in quenched QCD”, Phys. Rev. D **69** (2004) 014504 [*hep-lat/0309026*].
- [216] N. Garron, L. Giusti, C. Hoelbling, L. Lellouch and C. Rebbi, “B(K) from quenched overlap QCD”, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **119** (2003) 356 [*hep-lat/0212015*];
N. Garron, L. Giusti, C. Hoelbling, L. Lellouch and C. Rebbi, “B(K) from quenched QCD with exact chiral symmetry”, [*hep-ph/0306295*].
- [217] E. Eichten, “Heavy Quarks On The Lattice”, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **4** (1988) 170.
- [218] A. Abada, D. Becirevic, P. Boucaud, G. Herdoiza, J. P. Leroy, A. Le Yaouanc and O. Pène, “Lattice measurement of the couplings $g_{\text{hat}}(\infty)$ and $g(B^* B \pi)$ ”, JHEP **0402** (2004) 016 [*hep-lat/0310050*].
- [219] P. Boucaud, J. P. Leroy, J. Micheli, O. Pène and G. C. Rossi, “A Rigorous treatment of the lattice renormalization problem of $f(B)$ ”, Phys. Rev. D **47** (1993) 1206 [*hep-lat/9208004*].
- [220] M. Kurth and R. Sommer [ALPHA Collaboration], “Renormalization and $O(a)$ -improvement of the static axial current”, Nucl. Phys. B **597** (2001) 488 [*hep-lat/0007002*].
- [221] J. Heitger, M. Kurth and R. Sommer [ALPHA Collaboration], “Non-perturbative renormalization of the static axial current in quenched QCD”, Nucl. Phys. B **669** (2003) 173 [*hep-lat/0302019*].
- [222] B. A. Thacker and G. P. Lepage, “Heavy Quark Bound States In Lattice QCD”, Phys. Rev. D **43** (1991) 196.
- [223] A. X. El-Khadra, A. S. Kronfeld and P. B. Mackenzie, “Massive Fermions in Lattice Gauge Theory”, Phys. Rev. D **55** (1997) 3933 [*hep-lat/9604004*].
- [224] G. M. de Divitiis, M. Guagnelli, R. Petronzio, N. Tantalo and F. Palombi, “Heavy quark masses in the continuum limit of lattice QCD”, Nucl. Phys. B **675** (2003) 309 [*hep-lat/0305018*].
- [225] G. M. de Divitiis, M. Guagnelli, F. Palombi, R. Petronzio and N. Tantalo, “Heavy-light decay constants in the continuum limit of lattice QCD”, Nucl. Phys. B **672** (2003) 372 [*hep-lat/0307005*].

- [226] J. Harada, H. Matsufuru, T. Onogi and A. Sugita, “Heavy quark action on the anisotropic lattice”, *Phys. Rev. D* **66** (2002) 014509 [*hep-lat/0203025*];
S. Hashimoto and M. Okamoto, “Anisotropic lattice actions for heavy quark”, *Phys. Rev. D* **67** (2003) 114503 [*hep-lat/0302012*].
- [227] G. P. Lepage, “Simulating heavy quarks”, *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **26** (1992) 45.
- [228] M. Della Morte, S. Durr, J. Heitger, H. Molke, J. Rolf, A. Shindler and R. Sommer [ALPHA Collaboration], “Lattice HQET with exponentially improved statistical precision”, *Phys. Lett. B* **581** (2004) 93 [*hep-lat/0307021*].
- [229] D. Becirevic, V. Gimenez, G. Martinelli, M. Papinutto and J. Reyes, “B-parameters of the complete set of matrix elements of $\Delta(B) = 2$ operators from the lattice”, *JHEP* **0204** (2002) 025 [*hep-lat/0110091*].
- [230] D. Becirevic, V. Gimenez, G. Martinelli, M. Papinutto and J. Reyes, “Combined relativistic and static analysis for all $\Delta(B) = 2$ operators”, *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **106** (2002) 385 [*hep-lat/0110117*].
- [231] D. Becirevic and J. Reyes, “HQET with chiral symmetry on the lattice”, [*hep-lat/0309131*].
- [232] M. Albanese *et al.* [APE Collaboration], “Glueball Masses And String Tension In Lattice QCD”, *Phys. Lett. B* **192**, 163 (1987); M. Falcioni, M. L. Paciello, G. Parisi and B. Taglienti, “Again On SU(3) Glueball Mass”, *Nucl. Phys. B* **251** 624 (1985).
- [233] M. Teper, “An Improved Method For Lattice Glueball Calculations”, *Phys. Lett. B* **183** (1987) 345.
- [234] S. Gusken, “A Study Of Smearing Techniques For Hadron Correlation Functions”, *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **17** (1990) 361.
- [235] C. R. Allton *et al.* [UKQCD Collaboration], “Gauge Invariant Smearing And Matrix Correlators Using Wilson Fermions At Beta = 6.2”, *Phys. Rev. D* **47** (1993) 5128 [*hep-lat/9303009*].
- [236] P. Lacock, A. McKerrell, C. Michael, I. M. Stopher and P. W. Stephenson [UKQCD Collaboration], “Efficient hadronic operators in lattice gauge theory”, *Phys. Rev. D* **51** (1995) 6403 [*hep-lat/9412079*].

-
- [237] P. Boyle [UKQCD Collaboration], “A novel gauge invariant multi-state smearing technique”, *J. Comput. Phys.* **179**, 349 (2002) [*hep-lat/9903033*].
- [238] B. Blossier *et al.* [Groupe Lattice d’Orsay], Travail en cours d’elaboration.
- [239] A. Hasenfratz and F. Knechtli, “Flavor symmetry and the static potential with hypercubic blocking”, *Phys. Rev. D* **64** (2001) 034504 [*hep-lat/0103029*].
- [240] A. Morel, “Chiral Logarithms In Quenched QCD”, *J. Phys. (France)* **48**, 1111 (1987).
- [241] S. R. Sharpe, “Chiral Logarithms In Quenched $M(\text{Pi})$ And $F(\text{Pi})$ ”, *Phys. Rev.* **D41**, 3233 (1990); “Quenched chiral logarithms”, **46**, 3146 (1992) [*hep-lat/9205020*].
- [242] C. W. Bernard and M. F. L. Golterman, “Chiral perturbation theory for the quenched approximation of QCD”, *Phys. Rev.* **D46**, 853 (1992) [*hep-lat/9204007*].
- [243] C. W. Bernard and M. F. L. Golterman, “Partially quenched gauge theories and an application to staggered fermions”, *Phys. Rev.* **D49**, 486 (1994) [*hep-lat/9306005*].
- [244] P. H. Damgaard, J. C. Osborn, D. Toublan, and J. J. Verbaarschot, “The microscopic spectral density of the QCD Dirac operator”, *Nucl. Phys.* **B547**, 305 (1999) [*hep-th/9811212*].
- [245] S. R. Sharpe and N. Shores, “Partially quenched chiral perturbation theory without ϕ^0 ”, *Phys. Rev.* **D64**, 114510 (2001) [*hep-lat/0108003*].
- [246] C. Bernard *et al.*, “Heavy-light decay constants with three dynamical flavors”, *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **106** (2002) 412 [*hep-lat/0110072*].
- [247] C. Bernard *et al.* [MILC Collaboration], “Heavy-light meson decay constants with $N(f) = 3$ ”, *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **119** (2003) 613 [*hep-lat/0209163*].
- [248] E. Witten, “Current Algebra Theorems For The $U(1)$ ‘Goldstone Boson’”, *Nucl. Phys. B* **156** (1979) 269.
G. Veneziano, “ $U(1)$ Without Instantons”, *Nucl. Phys. B* **159** (1979) 213.
- [249] M. J. Booth, “Quenched chiral perturbation theory for heavy-light mesons”, *Phys. Rev.* **D51**, 2338 (1995) [*hep-ph/9411433*], “Quenched chiral corrections to heavy-light decay constants at order $1/M$ ”, *hep-ph/9412228*.

- [250] S. R. Sharpe and Y. Zhang, “Quenched Chiral Perturbation Theory for Heavy-light Mesons”, *Phys. Rev. D* **53** (1996) 5125 [*hep-lat/9510037*].
- [251] S. Hashimoto *et al.* [JLQCD Collaboration], “Chiral extrapolation of light-light and heavy-light decay constants in unquenched QCD”, *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **119** (2003) 332 [*hep-lat/0209091*].
- [252] D. Becirevic, S. Fajfer, S. Prelovsek and J. Zupan, “Chiral corrections and lattice QCD results for $f(B/s)/f(B/d)$ and $\Delta(m(B/s))/\Delta(m(B/d))$ ”, *Phys. Lett. B* **563** (2003) 150 [*hep-ph/0211271*].
- [253] D. Becirevic, “Status of the computation of $f(B/s,d)$, ξ and g ”, [*hep-ph/0310072*].
- [254] H. Wittig, “Status of lattice calculations of B-meson decays and mixing”, [*hep-ph/0310329*].
- [255] M. Hasenbusch, “Speeding up the Hybrid-Monte-Carlo algorithm for dynamical fermions”, *Phys. Lett. B* **519** (2001) 177 [*hep-lat/0107019*].
- [256] M. Hasenbusch and K. Jansen, “Speeding up lattice QCD simulations with clover-improved Wilson fermions”, *Nucl. Phys. B* **659** (2003) 299 [*hep-lat/0211042*].
- [257] M. Luscher, “Lattice QCD and the Schwarz alternating procedure”, *JHEP* **0305** (2003) 052 [*hep-lat/0304007*].
- [258] R. Alfieri *et al.* [APE Collaboration], [*hep-lat/0102011*];
F. Bodin *et al.*, “The apeNEXT project”, *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **106** (2002) 173 [*hep-lat/0110197*];
R. Ammendola *et al.*, “Status of the apeNEXT project”, *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **119** (2003) 1038 [*hep-lat/0211031*].
- [259] D. Chen *et al.*, “QCDOC: A 10-teraflops scale computer for lattice QCD”, *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **94** (2001) 825 [*hep-lat/0011004*];
P. A. Boyle *et al.*, “Status of the QCDOC project”, *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **106** (2002) 177 [*hep-lat/0110124*];
P. A. Boyle *et al.*, “Status of and performance estimates for QCDOC”, *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **119** (2003) 1041 [*hep-lat/0210034*].
- [260] T. Lippert, “Recent development and perspectives of machines for lattice QCD”, [*hep-lat/0311011*].

-
- [261] M. Luscher, “Lattice QCD on PCs?”, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **106** (2002) 21 [*hep-lat/0110007*].
- [262] M. Hasenbusch, K. Jansen, D. Pleiter, H. Stuben, P. Wegner, T. Wettig and H. Wittig, “Benchmarking computer platforms for lattice QCD applications”, [*hep-lat/0309149*].
- [263] A. Khodjamirian, R. Ruckl, S. Weinzierl and O. I. Yakovlev, “Perturbative QCD correction to the light-cone sum rule for the $B^* B \pi$ and $D^* D \pi$ couplings”, Phys. Lett. B **457** (1999) 245 [*hep-ph/9903421*].
- [264] A. Khodjamirian, “Charmed meson decays and QCD sum rules”, eConf **C0304052** (2003) WG504 [*hep-ph/0306253*].
- [265] A. A. Penin and M. Steinhauser, “Heavy-light meson decay constant from QCD sum rules in three-loop approximation”, Phys. Rev. D **65** (2002) 054006 [*hep-ph/0108110*].
- [266] S. M. Ryan, “Heavy quark physics from lattice QCD”, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **106** (2002) 86 [*hep-lat/0111010*].
- [267] P. Colangelo, G. Nardulli, A. Deandrea, N. Di Bartolomeo, R. Gatto and F. Feruglio, “On the coupling of heavy mesons to pions in QCD”, Phys. Lett. B **339** (1994) 151 [*hep-ph/9406295*].
- [268] A. G. Grozin and O. I. Yakovlev, “Couplings of heavy hadrons with soft pions from QCD sum rules”, Eur. Phys. J. C **2** (1998) 721 [*hep-ph/9706421*].
- [269] P. Colangelo and F. De Fazio, “QCD interactions of heavy mesons with pions by light-cone sum rules”, Eur. Phys. J. C **4** (1998) 503 [*hep-ph/9706271*].
- [270] D. Becirevic, J. Charles, A. LeYaouanc, L. Oliver, O. Pène and J. C. Raynal, “Possible explanation of the discrepancy of the light-cone QCD sum rule calculation of $g(D^* D \pi)$ coupling with experiment”, JHEP **0301** (2003) 009 [*hep-ph/0212177*].
- [271] T. M. Yan, H. Y. Cheng, C. Y. Cheung, G. L. Lin, Y. C. Lin and H. L. Yu, “Heavy Quark Symmetry And Chiral Dynamics”, Phys. Rev. D **46** (1992) 1148 [Erratum-ibid. D **55** (1997) 5851].
- [272] T. N. Pham, “Pcac Condition In The Quark Model: $G(A) / G(V)$ For Vector Meson And The Omega Rho Pi Coupling Constant”, Phys. Rev. D **25** (1982) 2955.
- [273] E. Eichten, K. Gottfried, T. Kinoshita, K. D. Lane and T. M. Yan, “Charmonium: Comparison With Experiment”, Phys. Rev. D **21** (1980) 203.

- [274] S. Godfrey and N. Isgur, “Mesons In A Relativized Quark Model With Chromodynamics”, *Phys. Rev. D* **32** (1985) 189.
- [275] P. J. O’Donnell and Q. P. Xu, “Strong And Radiative D^* Decays”, *Phys. Lett. B* **336** (1994) 113 [*hep-ph/9406300*].
- [276] A. Deandrea, N. Di Bartolomeo, R. Gatto, G. Nardulli and A. D. Polosa, “A constituent quark-meson model for heavy-meson processes”, *Phys. Rev. D* **58** (1998) 034004 [*hep-ph/9802308*].
- [277] P. Colangelo, F. De Fazio and G. Nardulli, “ D^* radiative decays and strong coupling of heavy mesons with soft pions in a QCD relativistic potential model”, *Phys. Lett. B* **334** (1994) 175 [*hep-ph/9406320*].
- [278] D. Becirevic and A. L. Yaouanc, “ g -hat coupling ($g(B^* B \pi)$, $g(D^* D \pi)$): A quark model with Dirac equation”, *JHEP* **9903** (1999) 021 [*hep-ph/9901431*].
- [279] D. Becirevic, “Heavy quark phenomenology from lattice QCD”, *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **94** (2001) 337 [*hep-lat/0011075*].
- [280] G. M. de Divitiis, L. Del Debbio, M. Di Pierro, J. M. Flynn, C. Michael and J. Peisa [UKQCD Collaboration], “Towards a lattice determination of the $B^* B \pi$ coupling”, *JHEP* **9810** (1998) 010 [*hep-lat/9807032*].
- [281] L. Lellouch, “Lattice-Constrained Unitarity Bounds for $\bar{B}^0 \rightarrow \pi + \ell - \bar{\nu}_\ell$ Decays”, *Nucl. Phys. B* **479** (1996) 353 [*hep-ph/9509358*].
- [282] D. Becirevic, S. Prelovsek and J. Zupan, “ $B \rightarrow \pi$ and $B \rightarrow K$ transitions in standard and quenched chiral perturbation theory”, *Phys. Rev. D* **67** (2003) 054010 [*hep-lat/0210048*]; et une nouvelle ´etude est en pr´eparation.