



**HAL**  
open science

# Sur certains espaces topologiques de suites et leurs applications

Jacques Robert

► **To cite this version:**

Jacques Robert. Sur certains espaces topologiques de suites et leurs applications. Modélisation et simulation. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1966. tel-00280155

**HAL Id: tel-00280155**

**<https://theses.hal.science/tel-00280155>**

Submitted on 16 May 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° D'ORDRE :

T H E S E S

PRESENTEES

A L A F A C U L T E D E S S C I E N C E S  
D E L ' U N I V E R S I T E D E G R E N O B L E

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ES SCIENCES MATHÉMATIQUES

par

Jacques ROBERT

1<sup>re</sup> THESE.- SUR CERTAINS ESPACES TOPOLOGIQUES DE SUITES ET  
LEURS APPLICATIONS.

2e THESE.- Propositions données par la Faculté.

Soutenues le 20 sept 1966 devant la Commission d'examen

MM. CHABAUTY           Président

GERBER  
BERTRANDIAS           Examineurs



N° D'ORDRE :

T H E S E S

PRESENTEES

A L A F A C U L T E D E S S C I E N C E S  
D E L ' U N I V E R S I T E D E G R E N O B L E

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ES SCIENCES MATHÉMATIQUES

par

Jacques ROBERT

1<sup>re</sup> THESE.- SUR CERTAINS ESPACES TOPOLOGIQUES DE SUITES ET  
LEURS APPLICATIONS.

2e THESE.- Propositions données par la Faculté.

Soutenues le 20 sept 1966 devant la Commission d'examen

MM. CHABAUTY           Président

GERBER  
BERTRANDIAS       Examineurs



LISTE DES PROFESSEURS DE LA FACULTE DES SCIENCES DE GRENOBLE

DOYENS HONORAIRES

MM. FORTRAT P.  
MORET L.

DOYEN

M. WEIL L.

PROFESSEURS TITULAIRES

MM. NEEL	Magnétisme et Physique du Solide
HEILMANN	Chimie organique
KRAVTCHENKO	Mécanique rationnelle
CHABAUTY	Calcul différentiel et intégral
PARDE	Potamologie
BENOIT	Radioélectricité
CHENE	Chimie Papetière
BESSON	Electrochimie
FELICI	Electrostatique
KUNTZMANN	Mathématiques Appliquées
BARBIER R.	Géologie appliquée
SANTON	Mécanique des Fluides
OZENDA	Botanique
FALLOT	Physique Industrielle
GALVANI	Mathématiques
MOUSSA	Chimie nucléaire
TRAYNARD	Chimie
SOUTIF	Physique
CRAYA	Hydrodynamique
REULOS	Théorie des Champs
AYANT	Physique Approfondie
GALLISSOT	Mathématiques Appliquées
M <sup>le</sup> LUTZ	Mathématiques
MM. BLAMBERT	Mathématiques
BOUCHEZ	Physique Nucléaire
LLIBOUTRY	Géophysique
MICHEL	Géologie et Minéralogie
BONNIER	Electrochimie
DESSAUX	Physiologie animale
PILLET	Electrotechnique
DEBELMAS	Géologie
GERBER	Mathématiques
PAUTHENET	Electrotechnique
VAUQUOIS	Mathématiques Appliquées
SILBER	Mécanique des Fluides
BARBIER J.C.	Physique
KOSZUL	Mathématiques
BUYLE-BODIN	Electronique
DREYFUS	Thermodynamique
KLEIN	Mathématiques
VAILLANT	Zoologie
ARNAUD	Chimie

MM.	SENGEL	Zoologie
	BARJON	Physique Nucléaire
	BRISSONNEAU	Physique
Mme	KOFLER	Botanique
	BARNOUD	Bio-synthèse de la Cellulose
	GAGNAIRE	Chimie Papetière

PROFESSEURS SANS CHAIRE

MM.	GIRAUD	Géologie
	GIDON	Géologie et Minéralogie
	PERRET	Servomécanismes
Mme	BARBIER	Electrochimie
Mme	SOUTIF	Physique
MM.	COHEN	Electrotechnique
	DEPASSEL	Mécanique
	ANGLES D'AURIAC	Mécanique des Fluides
	DUCROS	Minéralogie et Cristallographie
	GASTINEL	Mathématiques Appliquées
	GLENAT	Chimie
	LACAZE	Thermodynamique
	BARRA	Mathématiques Appliquées
	COUMES	Electronique
	DEGRANGE	Zoologie
	PEBAY-PEROULA	Physique
	PERRIAUX	Géologie
	RASSAT	Chimie Systématique
	ROBERT A.	Chimie Papetière

MAITRES DE CONFERENCES

MM.	BIAREZ	Mécanique Physique
	DODU	Mécanique des Fluides
	HACQUES	Calcul numérique
	LANCIA	Physique Automatique
Mme	KAHANE	Physique
MM.	POLOUJADOFF	Electrotechnique
	DEPOMMIER	Physique Nucléaire
	DEPORTES	Chimie
Mme	BOUCHE	Mathématiques
MM.	SARROT-REYNAULD	Géologie
	CAUQUIS	Chimie Générale
	BONNET	Physique Expérimentale
Mme	BONNIER	Chimie
MM.	KAHANE	Physique Générale
	DOLIQUE	Electronique
	BRIERE	Physique Expérimentale
	DESRE	Métallurgie
	LAJZEROWICZ	Physique Générale
	VALENTIN	Physique Générale
	BERTRANDIAS	Mathématiques Appliquées
	BONNETAIN	Chimie Générale
	LAURENT	Mathématiques Appliquées
	CAUBET	Mathématiques Appliquées

M.	PAYAN	Mathématiques
Mme	BERTRANDIAS	Mathématiques
MM.	FONTANGE	Physiologie Animale
	LONGEQUEUE	Physique Nucléaire
	NIVAT	Mathématiques Appliquées
	SOHM	Electrochimie
	ZADWORNYY	Radioélectricité

-o-o-



Ce travail a été réalisé sous la direction de Monsieur GERBER qui, après m'avoir donné le goût de l'Analyse fonctionnelle, n'a cessé de me prodiguer des encouragements. Je suis particulièrement heureux d'exprimer ma gratitude à son égard pour l'attention et la bienveillance avec lesquelles il a suivi mes recherches, et pour les nombreux conseils qu'il m'a donnés.

Monsieur CHABAUTY a bien voulu s'intéresser à mon travail, accepter de présider le jury et me proposer un second sujet. Je lui en suis très reconnaissant.

Je remercie bien vivement Monsieur BERTRANDIAS pour sa participation au jury et l'intérêt qu'il a porté à mon travail, et Madame BERTRANDIAS dont les indications m'ont été précieuses pour la préparation du second sujet.

Je m'en voudrais d'oublier Madame GRANGE et Mademoiselle JOURDANET pour la patience et les soins qu'elles ont apportés à la transformation en un texte multigraphié des manuscrits que je leur ai confiés.

o o  
o



TABLE DES MATIERES

	Pages
INTRODUCTION.	
Chapitre I - ESPACES L.C.-MONOTONES DE SUITES.	1
§1. Espaces L.C.-monotones.	2
§2. Sous-espace $[\mathcal{Q}]$ .	8
§3. Espace $\mathcal{Q}'$ .	13
§4. Espace $\mathcal{Q}^{\#}$ .	28
Chapitre II - OPERATEURS MATRICIELS SUR DES ESPACES L.C.-MONOTONES.	32
§1. Opérateurs matriciels définissant des applications continues.	34
§2. Opérateurs matriciels définissant des applications bornées.	41
§3. Opérateurs matriciels définissant des applications pseudo-complètement continues.	46
§4. Opérateurs matriciels définissant des applications complètement continues.	67
Chapitre III - SYSTEMES INFINIS LINEAIRES.	71
§1. Endomorphismes complètement continus d'espaces localement convexes.	72
§2. Applications aux systèmes infinis linéaires.	81

...

...

Chapitre IV	- ETUDE D'UN OPERATEUR NON LINEAIRE SUR DES ESPACES L.C.-MONOTONES.	89
§1.	Conditions de continuité.	90
§2.	§ opérateur gradient.	104
Chapitre V	- FACTORISATION D'UN OPERATEUR MATRICIEL.	110
§1.	Théorème de factorisation.	112
§2.	Cas où A définit une application pseudo-complètement continue.	117
§3.	Méthode de factorisation.	120
Chapitre VI	- SYSTEMES DE HAMMERSTEIN.	123
§1.	Méthode de monotonicité.	124
§2.	Méthode variationnelle.	128
§3.	Fonctions propres.	135
	BIBLIOGRAPHIE.	141
	INDEX DES NOTATIONS.	148
	INDEX DES DEFINITIONS.	149

## I N T R O D U C T I O N

La théorie des espaces de suites, commencée par Hilbert avec l'espace  $\mathcal{L}^2$ , doit pour une bonne part son développement à l'étude des systèmes infinis d'équations. F. Riesz fit la généralisation de  $\mathcal{L}^2$ , avec les espaces  $\mathcal{L}^p$ , dont il établit les propriétés essentielles et au moyen desquels il fit la théorie de la méthode des réduites pour la résolution d'un système infini d'équations linéaires.

Les besoins de l'Analyse devaient conduire à définir d'autres espaces de suites. Pour l'étude des matrices infinies, et aussi pour la théorie des fonctions d'une variable complexe, Köthe et Toeplitz ont introduit une classe d'espaces topologiques de suites, non normables, les "espaces parfaits", qui ont eu plusieurs extensions, et qui devaient servir de modèles à la théorie des espaces vectoriels localement convexes.

Par ailleurs, des mathématiciens soviétiques, dont Gribanov, Krasnoselskii et Rutickii, ont développé la théorie des espaces de suites d'Orlicz  $\mathcal{L}^M$ , cas particuliers des espaces fonctionnels d'Orlicz.

Récemment, Gribanov a considéré une classe d'espaces normés de suites, les "espaces de coordonnées", dont la définition généralise celles que l'on peut donner des

espaces  $\ell^p$  et  $\ell^M$  d'Orlicz à partir de la dualité (\*). Cet auteur a développé la théorie des "espaces de coordonnées" en étudiant spécialement les propriétés des opérateurs matriciels sur ces espaces et leur application à l'étude des systèmes infinis linéaires.

Les "espaces de coordonnées" (qui contiennent les espaces  $\ell^p$  et les espaces  $\ell^M$  d'Orlicz), les espaces vectoriels topologiques "parfaits" de Köthe, ainsi que d'autres espaces de suites introduits par ailleurs - espaces échelonnés de Dieudonné et Gomes, certains des espaces modulaires étudiés par Nakano, Mazur, Musielak, Orlicz - ont en commun la propriété d'être des treillis normaux localement convexes, c'est-à-dire

i) Ce sont des treillis vectoriels pour la relation d'ordre naturelle sur un ensemble de suites.

ii) Ces treillis sont normaux au sens de Birkhoff, la suite  $Y$  appartenant à l'ensemble s'il existe une suite  $X$  de l'ensemble pour laquelle  $|Y| < |X|$ .

iii) Ce sont des espaces vectoriels topologiques localement convexes pour lesquels la topologie est compatible, au sens de Kawaiï, avec la structure de treillis : pour chaque semi-norme  $p$ ,  $|X| < |Y|$  entraîne  $p(X) \leq p(Y)$ .

Nous nous sommes donc proposé d'étudier, pour les espaces de suites ayant la propriété fondamentale d'être des treillis normaux localement convexes, que nous appelons espaces

\*) Un "espace de coordonnées"  $\ell_\omega$  est formé des suites  $X = \{x_i\}$  pour lesquelles

$$\|X\|_\omega = \sup_{\{y_i\} \in \omega} \left| \sum_1^\infty x_i y_i \right| < +\infty$$

où  $\omega$  est un ensemble de suites tel qu'il contient toute suite  $\{\epsilon_i y_i\}$   $\epsilon_i = \pm 1$ , lorsqu'il contient la suite  $\{y_i\}$  et tel que  $\|X\|_\omega = 0$  entraîne  $X = \{0\}$ . Alors  $\|X\|_\omega$  qui est une norme, est par définition celle de l'espace  $\ell_\omega$ . De plus, l'espace  $\ell_\omega$  ainsi défini, doit être complet.

localement convexes monotones (L.C.-monotones), des propriétés topologiques et fonctionnelles importantes établies dans des cas d'espaces de suites particuliers, et d'étudier l'application de ces espaces à la résolution de systèmes infinis d'équations linéaires, et non linéaires.

Dans le chapitre I, on définit les espaces L.C.-monotones, on établit les principales propriétés de leur topologie et on étudie la représentation des fonctionnelles linéaires continues sur ces espaces. A un espace L.C.-monotone  $\mathcal{L}$ , on associe un autre espace L.C.-monotone  $\tilde{\mathcal{L}}$ , tel que la forme bilinéaire usuelle pour des espaces de suites, sur  $\mathcal{L} \times \tilde{\mathcal{L}}$ , définisse des fonctionnelles linéaires continues sur  $\mathcal{L}$ . Lorsque les suites finies sont denses dans  $\mathcal{L}$ ,  $\tilde{\mathcal{L}}$  est isomorphe au dual fort de  $\mathcal{L}$ ; dans le cas général,  $\tilde{\mathcal{L}}$  est isomorphe au dual fort du sous-espace  $[\mathcal{L}]$  de  $\mathcal{L}$ , qui est la fermeture dans  $\mathcal{L}$  des suites finies. Dans le cas où  $\mathcal{L}$  est tonnelé,  $\tilde{\mathcal{L}}$  peut être défini comme l'ensemble des suites  $\{y_i\}$  telles que la série

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i \text{ converge pour toute suite } \{x_i\} \text{ de } \mathcal{L}.$$

Le chapitre II est consacré à l'étude de propriétés topologiques des applications linéaires d'un espace L.C.-monotone  $\mathcal{L}$  dans un espace L.C.-monotone  $\mathcal{M}$ , définies par un opérateur matriciel. On montre que si  $\mathcal{L}$  est tonnelé et si  $\mathcal{M}$  est pleinement complet, toute application matricielle de  $\mathcal{L}$  dans  $\mathcal{M}$  est continue. Une application étant dite pseudo-complètement continue si elle est bornée et si les images des bornés sont relativement compactes, on étudie la pseudo-complète continuité, ainsi que la complète continuité de ces applications matricielles en introduisant des suites d'applications définies

par des matrices tronquées. On donne des conditions suffisantes pour qu'une matrice infinie définisse une application de  $\mathcal{L}$  dans  $\mathcal{M}$  qui soit bornée, pseudo-complètement continue ou complètement continue.

Dans le chapitre III, on considère la résolution d'un système infini d'équations linéaires et on étudie l'extension aux espaces L.C.-monotones de la méthode des "réduites" développée par Von Koch et Riesz dans le cas des espaces  $\mathcal{L}^p$  et généralisée par Gribanov pour les espaces de coordonnées. Les résultats reposent sur une étude de l'algèbre topologique des endomorphismes continus d'un espace localement convexe et sur les propriétés établies au chapitre précédent.

En vue de l'étude des systèmes de Hammerstein, on établit au chapitre IV des propriétés de l'application non linéaire  $\mathfrak{F}$  de  $\mathcal{L}$  dans  $\mathcal{M}$ , L.C.-monotones, définie par :

$$\{x_i\} \xrightarrow{\mathfrak{F}} \{f_i(x_i)\} \quad ,$$

où  $\{f_i\}$  est une suite de fonctions numériques. On donne des conditions de continuité de  $\mathfrak{F}$ . On montre en particulier que si  $\mathcal{L}$  est métrisable complet et si les suites finies sont denses dans  $\mathcal{M}$ , alors la continuité des  $f_i$  entraîne la continuité de  $\mathfrak{F}$ . Ce résultat permet de caractériser la suite  $\{f_i\}$  pour que  $\mathfrak{F}$  applique  $\mathcal{L}_1$  dans  $\mathcal{L}_1$ , ou un espace d'Orlicz dans un espace d'Orlicz. On montre aussi que, sous certaines hypothèses,  $\mathfrak{F}$  est un gradient.

Le chapitre V est consacré à la factorisation d'un opérateur matriciel. Etant donné deux espaces L.C.-monotones  $\mathcal{L}$  et  $\mathcal{M}$  en dualité et un opérateur matriciel  $A$ , on donne des conditions pour que l'on ait  $A = HH^*$ ,  $H$  et  $H^*$  étant deux opérateurs matriciels adjoints opérant respectivement de  $\mathcal{L}$  dans  $\mathcal{L}^2$  et de  $\mathcal{L}^2$  dans  $\mathcal{M}$ , et on montre que si  $A$  définit une application pseudo-complètement continue, il en est de même pour  $H$  et  $H^*$ . Ces résultats qui sont utilisés au chapitre suivant pour l'étude d'un système de Hammerstein sont inspirés des méthodes développées par Krasnoselskii et Rutickii dans le cas des espaces de fonctions d'Orlicz et par Vainberg et Engelson pour les espaces localement convexes.

Le chapitre VI est une application des espaces L.C.-monotones à l'étude des systèmes infinis d'équations non linéaires de Hammerstein. Un tel système est de la forme (1)  $X = A \Phi X$  où  $X$  est une suite réelle,  $A$  un opérateur matriciel, et  $\Phi$  l'opérateur non linéaire du chapitre IV. Les propriétés établies aux chapitres IV et V permettent de ramener l'étude de l'équation (1), sur un espace L.C.-monotone, à celle d'une équation sur un espace de Hilbert et d'obtenir ainsi des théorèmes d'existence pour le système de Hammerstein. L'utilisation des espaces L.C.-monotones conduit à des résultats plus généraux que ceux que l'on peut obtenir avec les espaces normés  $\mathcal{L}^p$  ou d'Orlicz. (\*)

o o  
o

---

(\*) Certains des résultats obtenus ont fait l'objet de trois notes aux Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris : 1964, 259, p. 1287-1290 ; 1965, 260, p. 3544-3546 ; 1965, 261, p. 2423-2426.



## CHAPITRE I .

### ESPACES L.C.-MONOTONES DE SUITES .

Dans ce chapitre, on introduit une classe d'espaces localement convexes de suites réelles qu'on appelle espaces L.C.-monotones.

A un espace L.C.-monotone  $\mathcal{L}$ , on associe un autre espace de suites réelles, noté  $\tilde{\mathcal{L}}$ , également L.C.-monotone, tel que la forme bilinéaire usuelle pour des espaces de suites, sur  $\mathcal{L} \times \tilde{\mathcal{L}}$ , définisse des fonctionnelles linéaires continues sur  $\mathcal{L}$ .

On montre que l'espace  $\tilde{\mathcal{L}}$  est isomorphe au dual fort de  $\mathcal{L}$  lorsque l'ensemble des suites réelles de type fini est dense dans  $\mathcal{L}$ . Dans le cas général,  $\tilde{\mathcal{L}}$  est isomorphe au dual fort de la fermeture dans  $\mathcal{L}$  de l'ensemble des suites de type fini, et est également isomorphe à un sous-espace du dual fort de  $\mathcal{L}$ .

La plupart des espaces topologiques de suites utilisés en analyse fonctionnelle sont des espaces L.C.-monotones. On peut citer notamment les espaces  $\mathbb{R}^p$  ( $1 \leq p \leq +\infty$ ), les espaces de coordonnées d'Orlicz (\*), les espaces de coordonnées introduits par Gribanov (\*\*), certains espaces modulaires de suites (\*\*\*) et certains espaces parfaits (\*\*\*\*). On étend ainsi aux espaces L.C.-monotones la représentation des fonctionnelles linéaires continues sur ces différents espaces.

### §1. ESPACES L.C.-MONOTONES.

#### Notations et définitions.-

Une suite réelle  $X$  est une application  $i \rightarrow x_i$  de l'ensemble  $\mathbb{N}$  des entiers naturels positifs dans l'ensemble  $\mathbb{R}$  des nombres réels. On la notera  $X = \{x_i\}$ .

Soit  $\mathcal{A}$  l'espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  des suites réelles et soient  $X = \{x_i\} \in \mathcal{A}$  et  $Y = \{y_i\} \in \mathcal{A}$ .

a) La relation " Pour tout  $i$ ,  $y_i \leq x_i$  " définit une relation d'ordre sur  $\mathcal{A}$  qu'on note  $Y < X$ .

b) On note  $|X|$  la suite  $\{|x_i|\}$ .

On appelle suite finie une suite réelle qui n'a qu'un nombre fini d'éléments non nuls.

---

(\*) W. Orlicz, Bull. Int. Acad. Polon. Sc., série A, n°3-4, 1936 - p. 97-107.

(\*\*) Yu. Gribanov, Izv. Vyss. Ucebn. Zaved. Matematika, 4, n°29, 1962 - p. 38-48.

(\*\*\*) J. Musielak et W. Orlicz, Studia Math., 18, 1959, p. 49-65.

(\*\*\*\*) G. Köthe, Math. Zeit. t.51 (1948) - p. 317-345 ; et Math. Nach. (1951) - p. 70-80.

Définition 1.1. -

i) Un sous-ensemble M de  $\mathcal{A}$  est normal si les relations  $X \in M$ ,  $Y \in \mathcal{A}$  et  $|Y| < |X|$  entraînent  $Y \in M$ .

ii) L'enveloppe normale d'un sous-ensemble M de  $\mathcal{A}$  est l'ensemble des  $Y \in \mathcal{A}$  tels qu'il existe au moins un  $X \in M$  pour lequel  $|Y| < |X|$ .

Définition 1.2. -

On appellera espace "L.C.-monotone" un espace vectoriel localement convexe séparé  $\ell$  de suites réelles qui vérifie les propriétés suivantes :

$A_1$  :  $\ell$  contient les suites réelles finies ;

$A_2$  :  $\ell$  est normal ;

$A_3$  : Soit  $\Lambda$  la famille filtrante de semi-normes qui définit la topologie de  $\ell$ . Pour toute semi-norme  $\lambda \in \Lambda$ ,  $|Y| < |X|$  entraîne  $\lambda(Y) \leq \lambda(X)$ .

Exemples.-

La plupart des espaces topologiques de suites réelles utilisés en Analyse sont des espaces L.C.-monotones.

1) Les espaces  $\ell^p$ ,  $p \geq 1$ ,  $\ell^\infty$ ,  $c$  et  $c_0$  sont des espaces L.C.-monotones normés et complets.

2) Un espace d'Orlicz  $\mathcal{L}^M$  associé à une fonction  $M(u)$ , est un espace L.C.-monotone normé et complet (\*).

3) Pour  $p \geq 1$ , l'espace  $\mathcal{L}^p$ , ou espace échelonné d'indice  $p$ , (\*\*) est un espace L.C.-monotone métrisable et complet.

4) L'espace  $\mathcal{L}$  muni de la topologie définie par les semi-normes  $\lambda_i(X) = |x_i|$  est un espace L.C.-monotone métrisable et complet.

Propriétés élémentaires.-

De la définition 1.2. résultent des propriétés simples d'un espace L.C.-monotone  $\mathcal{L}$ .

Propriété 1.3. -

Il existe un système fondamental de voisinages normaux de 0 dans  $\mathcal{L}$  qui est obtenu en prenant les sous-ensembles de  $\mathcal{L}$  dont chacun est défini par

$$V = \{X \in \mathcal{L} : \lambda(X) \leq a, \lambda \in \Lambda, a > 0\} .$$

(\*) La fonction  $M(u)$  est définie par  $M(u) = \int_0^{|u|} p(t)dt$  où  $p(t)$  est une fonction numérique définie pour  $t \geq 0$ , continue à droite, non décroissante,  $p(0) = 0$ ,  $p(t) > 0$  si  $t \neq 0$ ,  $p(+\infty) = \lim_{t \rightarrow +\infty} p(t) = +\infty$ .

On pose  $\rho_M(X) = \sum_{i=1}^{\infty} M(x_i)$ .

Alors  $\mathcal{L}^M = \{X = \{x_i\} \in \mathcal{L} : \exists \alpha > 0, \rho_M(\alpha X) < +\infty\}$  muni de la norme  $\|X\| = \text{Inf}\{\beta > 0 : \rho_M\left(\frac{X}{\beta}\right) \leq 1\}$ .

(\*\*)  $\mathcal{L}^p = \{X = \{x_i\} \in \mathcal{L} : \forall m \in \mathbb{N}, \sum_{i=1}^{\infty} m^i |x_i|^p < +\infty\}$ , muni de la topologie définie par les semi-normes  $\lambda_m(X) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} m^i |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$  où  $m$  parcourt  $\mathbb{N}$ .

Propriété 1.4. -

L'ensemble S des parties bornées, convexes et normales de  $\mathfrak{L}$  est un système fondamental de parties bornées de  $\mathfrak{L}$ .

Ceci signifie que toute partie bornée de  $\mathfrak{L}$  est contenue dans un élément de S.

En effet, soit M une partie bornée de  $\mathfrak{L}$ . Il résulte de la propriété 1.3. que l'enveloppe normale N de M est bornée. L'enveloppe convexe C de N est aussi bornée et on montre que l'enveloppe normale de C est alors convexe et bornée, donc appartient à S.

Propriété 1.5. -

Un sous-ensemble normal M de  $\mathfrak{L}$  est fermé.

Soit  $X \in M$  et soit  $V = \{X \in \mathfrak{L} : \lambda(X) \leq a, \lambda \in \Lambda, a > 0\}$ . On pose  $\alpha = \min\{\frac{1}{2}, a[\lambda(X)]^{-1}\}$  si  $\lambda(X) \neq 0$  et  $\alpha = \frac{1}{2}$  si  $\lambda(X) = 0$ . Alors  $(1-\alpha)X \in X+V$  et, d'après la propriété  $A_3$ ,  $(1-\alpha)X \in M$ . Donc M est fermé.

Propriété 1.6. -

Soient  $X_n = \{x_i^{(n)}\} \in \mathfrak{L}$  et  $X = \{x_i\} \in \mathfrak{L}$ . Si  $X_n$  tend vers X lorsque n tend vers  $+\infty$ , alors pour chaque i

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_i^{(n)} = x_i .$$

Soit  $E_i$  la suite dont tous les éléments sont nuls sauf celui de rang i qui est égal à 1. On a  $|x_i^{(n)} - x_i| E_i < |X_n - X|$ , donc d'après la propriété  $A_3$ , on a pour tout  $\lambda \in \Lambda$

$$|x_i^{(n)} - x_i| \lambda(E_i) \leq \lambda(X_n - X) .$$

Mais l'espace  $\mathfrak{L}$  étant séparé, il existe  $\lambda_i \in \Lambda$  tel que  $\lambda_i(E_i) \neq 0$ . Alors, si  $X_n$  tend vers X,  $\lambda_i(X_n - X)$  tend vers zéro et donc aussi  $|x_i^{(n)} - x_i|$ . \*

Espace L.C.-monotone métrisable.-

Un espace L.C.-monotone  $\mathcal{E}$  est métrisable si la famille  $\Lambda$  des semi-normes définissant sa topologie est dénombrable. Soit  $\{\lambda_n\}$  la suite, qu'on peut supposer croissante, des semi-normes de  $\Lambda$ . Les sous-ensembles de  $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$  définis par

$$U_n = \left\{ \{X, Y\} \in \mathcal{E} \times \mathcal{E} : \lambda_n(X-Y) \leq \frac{1}{3^n} \right\}$$

constituent un système fondamental d'entourages de la structure uniforme de  $\mathcal{E}$  et sont tels que, pour tout n,

$$U_{n+1} \subset U_n .$$

Soit g la fonction numérique définie sur  $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$  par  $g(X, Y) = 0$  si  $\{X, Y\} \in U_n$  pour tout n,  $g(X, Y) = 2^{-k}$  si  $\{X, Y\} \in U_n$  pour  $1 \leq n \leq k$  mais  $\{X, Y\} \notin U_{k+1}$ ,  $g(X, Y) = 1$  si  $\{X, Y\} \notin U_1$ . On pose

$$d(X, Y) = \text{Inf} \sum_{i=0}^{i=p-1} g(Z_i, Z_{i+1}),$$

la borne inférieure étant prise sur l'ensemble des "chaînes" d'éléments  $Z_i$  de  $\mathcal{E}$ ,  $0 \leq i \leq p$ , p arbitraire, reliant X à Y, c'est-à-dire telles que  $Z_0 = X$  et  $Z_p = Y$ . On montre (\*) que d(X, Y) est une distance sur  $\mathcal{E}$  qui définit une structure uniforme identique à la structure initiale. On pose

$$\rho(X) = d(0, X) .$$

On désigne par  $E_p$  la suite dont tous les éléments sont nuls sauf celui de rang p qui est égal à 1.

---

(\*) N. Bourbaki, Topologie générale, Chap. 9, p. 15.

Proposition 1.7. -

Soit  $\ell$  un espace L.C.-monotone métrisable. On a les deux propriétés :

$A'_3$  : Quels que soient  $X \in \ell$  et  $p \in \mathbb{N}$ , on a  

$$\rho(X - x_p E_p) \leq \rho(X) .$$

$A''_3$  : Quel que soit  $X \in \ell$ ,  $\rho(\alpha X)$  est une fonction non décroissante de  $|\alpha|$ , ( $\alpha \in \mathbb{R}$ ) .

i) Soient  $X \in \ell$  et  $p \in \mathbb{N}$ . A toute chaîne finie  $\{Z_i = \{z_p^{(i)}\}\} \subset \ell$  reliant 0 à X, on associe la chaîne  $\{Z'_i\} = \{Z_i - x_p^{(i)} E_p\}$  qui relie 0 à  $X - x_p E_p$ . Si  $\{Z_i, Z_{i+1}\} \in U_n$ , il résulte de la propriété  $A_3$  que  $\{Z'_i, Z'_{i+1}\} \in U_n$ . Donc, quel que soit i, on a

$$g(Z'_i, Z'_{i+1}) \leq g(Z_i, Z_{i+1})$$

et, par conséquent

$$\rho(X - x_p E_p) \leq \rho(X) .$$

ii) Soient  $X \in \ell$  et  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $|\alpha| > |\beta|$ . A toute chaîne finie  $\{Z_i\} \subset \ell$  reliant 0 à X, on associe les chaînes  $\{\alpha Z_i\}$  et  $\{\beta Z_i\}$ . Si  $\{\alpha Z_i, \alpha Z_{i+1}\} \in U_n$ , il résulte de la propriété  $A_3$  que  $\{\beta Z_i, \beta Z_{i+1}\} \in U_n$ . Donc, quel que soit i, on a

$$g(\alpha Z_i, \alpha Z_{i+1}) \geq g(\beta Z_i, \beta Z_{i+1})$$

et, par conséquent

$$\rho(\alpha X) \geq \rho(\beta X) . *$$

§2. SOUS-ESPACE  $[\emptyset]$ .

Soit  $\mathcal{E}$  un espace L.C.-monotone et soit  $\Lambda$  la famille de semi-normes qui définit sa topologie.

On note  $[\emptyset]$  la fermeture dans  $\mathcal{E}$  de l'ensemble des suites finies.

Soit  $X = \{x_i\} \in \mathcal{E}$ . On désigne par  $P_n^m X$  la suite  $\{x'_i\}$  avec  $x'_i = x_i$  si  $n \leq i < m$  et  $x'_i = 0$  si  $i \geq m$ , et par  $P_n^\infty X$  la suite  $\{x'_i\}$  avec  $x'_i = 0$  si  $i < n$  et  $x'_i = x_i$  si  $i \geq n$ .

Proposition 1.8. -

Une condition nécessaire et suffisante pour que  $X = \{x_i\} \in [\emptyset]$  est que la suite  $\{P_n^\infty X\}$  tende vers zéro dans  $\mathcal{E}$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .

i) Soit  $X \in [\emptyset]$ . Quel que soit  $V$  appartenant au système fondamental de voisinages normaux de zéro de  $\mathcal{E}$ , il existe une suite finie  $Y = P_1^N Y$  telle que  $X - Y \in V$ . Puisque  $V$  est normal, quel que soit  $n$ ,  $P_n^\infty(X - Y) \in V$ .

Mais pour tout  $n > N$ ,  $P_n^\infty(X - Y) = P_n^\infty X$ . Donc on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n^\infty X = 0.$$

ii) Si  $\{P_n^\infty X\}$  tend vers zéro dans  $\mathcal{E}$ ,  $X$  est limite de  $\{P_1^n X\}$  et chaque  $P_1^n X$  est une suite finie. \*

Proposition 1.9. -

L'espace  $[\mathcal{L}]$ , muni de la topologie induite par celle de  $\mathcal{L}$ , est un espace L.C.-monotone.

i)  $[\mathcal{L}]$  contient les suites finies.

ii) Soit  $X \in [\mathcal{L}]$  et soit  $Y$  tel que  $|Y| < |X|$ .

Quel que soit  $n$ , on a

$$|P_n^\infty Y| < |P_n^\infty X|$$

et il résulte de la propriété  $A_3$  que si  $P_n^\infty X$  appartient à un élément  $V$  du système fondamental de voisinages normaux de  $0$ ,  $P_n^\infty Y$  appartient aussi à  $V$ . Par conséquent, d'après la proposition 1.8,  $Y \in [\mathcal{L}]$ . Donc  $[\mathcal{L}]$  est normal.

iii)  $\Lambda$  est la famille de semi-normes qui définit la topologie de  $[\mathcal{L}]$ . \*

Dans la suite, et sauf mention du contraire, on supposera  $[\mathcal{L}]$  muni de la topologie induite par celle de  $\mathcal{L}$ .

On distingue deux types d'espaces L.C.-monotones  $\mathcal{L}$  :

a) Espaces tels que  $[\mathcal{L}] = \mathcal{L}$ .

Par exemple, pour tout  $p \geq 1$ , on a  $[\mathcal{L}^p] = \mathcal{L}^p$  et  $[\mathbb{R}^p] = \mathbb{R}^p$   
On a aussi  $[\mathcal{C}_0] = \mathcal{C}_0$ .

b) Espaces tels que  $[\mathcal{Q}] \neq \mathcal{Q}$  .

Par exemple, pour  $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}^\infty$  ou pour  $\mathcal{Q} = c$  , on a  $[\mathcal{Q}] = c$  .  
Pour un espace d'Orlicz  $\mathcal{Q}^M$  , on a, en général,  
 $[\mathcal{Q}^M] \subset \mathcal{Q}^M$  . (\*)

Propriétés de  $[\mathcal{Q}]$  .-

L'espace  $[\mathcal{Q}]$  étant un espace L.C.-monotone, il possède les propriétés 1.3. à 1.6..

Lorsque  $[\mathcal{Q}]$  est quasi-complet (\*\*), on caractérise simplement les sous-ensembles relativement compacts de  $[\mathcal{Q}]$  .

Proposition 1.10. -

Soit  $\mathcal{Q}$  un espace L.C.-monotone tel que  $[\mathcal{Q}]$  soit quasi-complet. Pour qu'un sous-ensemble M de  $[\mathcal{Q}]$  soit relativement compact, il faut et il suffit que :

a) M soit borné.

b) Lorsque  $n \rightarrow +\infty$  , la suite  $\{P_n^{\infty X}\}$  converge uniformément vers zéro lorsque X parcourt M.

i) Soit M un sous-ensemble relativement compact de  $[\mathcal{Q}]$ , donc aussi précompact. Cet ensemble M est borné et, de plus, quel que soit V appartenant au système fondamental de voisinages normaux de 0, il existe une suite  $\{Z_i\} \subset M$  ,  $1 \leq i \leq q$  ,

---

(\*) On a  $[\mathcal{Q}^M] = \{X \in \mathcal{L} : \forall \alpha > 0, \rho_M(\alpha X) < +\infty\}$  . On montre qu'une condition nécessaire et suffisante pour que  $[\mathcal{Q}^M] = \mathcal{Q}^M$  est qu'il existe  $u_0 > 0$  et  $K > 0$  tels que pour tout u,  $|u| < u_0$  , on ait  $\frac{M(2u)}{M(u)} < K$  .

(\*\*) On dit qu'un espace vectoriel topologique E est quasi-complet si toute partie bornée et fermée de E est un espace uniforme complet.

telle que pour tout  $X \in M$ , il existe  $Z_i \in \{Z_i\}$  pour lequel  $X - Z_i \in \frac{1}{2}V$ . Puisque  $Z_i \in [\mathcal{Q}]$ , il résulte de la proposition 1.8. qu'il existe  $n_i$  tel que, pour tout  $n \geq n_i$ ,  $P_n^\infty Z_i \in \frac{1}{2}V$ . On a

$$P_{n_i}^\infty X = P_{n_i}^\infty (X - Z_i) + P_{n_i}^\infty Z_i .$$

Puisque  $V$  est normal,  $P_{n_i}^\infty (X - Z_i) \in \frac{1}{2}V$  et par conséquent  $P_{n_i}^\infty X \in V$ . Alors, quel que soit  $X \in M$ , pour tout  $n \geq \max_{1 \leq i \leq q} n_i$ , on a  $P_n^\infty X \in V$ . Donc  $\{P_n^\infty X\}$  converge uniformément sur  $M$  vers 0.

ii) Soit  $M$  un sous-ensemble de  $[\mathcal{Q}]$  vérifiant les conditions a) et b). D'après b), quel que soit  $V$ , il existe  $N$  tel que pour tout  $n \geq N$  et tout  $X \in M$ , on ait  $P_n^\infty X \in \frac{1}{2}V$ . Soient alors  $\mathcal{Q}^{(N)} = \{P_1^N X, X \in \mathcal{Q}\}$  et  $M^{(N)} = M \cap \mathcal{Q}^{(N)}$ . L'ensemble  $\mathcal{Q}^{(N)}$  est isomorphe à un espace vectoriel de dimension finie et la topologie induite sur  $\mathcal{Q}^{(N)}$  par celle de  $\mathcal{Q}$  est normable. L'ensemble  $M$  étant borné d'après a), il résulte de la propriété  $A_3$  que  $M^{(N)}$  est un sous-ensemble borné de  $\mathcal{Q}^{(N)}$  et donc un ensemble précompact de  $\mathcal{Q}^{(N)}$ . Par conséquent, il existe  $\{Z_i\} \subset M^{(N)}$ ,  $1 \leq i \leq q$  telle que, pour tout  $X \in M$ , il existe  $Z_i \in \{Z_i\}$  pour lequel  $P_1^N X - Z_i \in \frac{1}{2}V$ , d'où puisque  $Z_i \in \mathcal{Q}^{(N)}$ ,  $P_1^N (X - Z_i) \in \frac{1}{2}V$ .  
Or

$$X - Z_i = P_1^N (X - Z_i) + P_N^\infty X$$

Donc  $X - Z_i \in V$ . Il en résulte que  $M$  est précompact dans  $[\mathcal{Q}]$ . L'espace  $[\mathcal{Q}]$  étant localement convexe, séparé, et quasi-complet, l'enveloppe convexe fermée de  $M$  est compacte. Donc  $M$  est relativement compact. \*

Lorsque  $\mathcal{L}$  est un espace L.C.-monotone métrisable,  $[\mathcal{L}]$  est aussi métrisable. On conserve les notations introduites dans le paragraphe 1.

Soit  $X \in \mathcal{L}$ . On notera  $d(X, [\mathcal{L}])$  la distance de  $X$  à  $[\mathcal{L}]$ , c'est-à-dire

$$d(X, [\mathcal{L}]) = \inf_{Z \in [\mathcal{L}]} \rho(X-Z).$$

Il résulte de la proposition 1.8. que  $d(X, [\mathcal{L}]) = 0$  si et seulement si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \rho(P_n^\infty X) = 0$ . Ceci est un cas particulier du résultat suivant.

Proposition 1.11. -

Soit  $\mathcal{L}$  un espace L.C.-monotone métrisable et soit  $X \in \mathcal{L}$ . On a

$$d(X, [\mathcal{L}]) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \rho(P_n^\infty X)$$

i) On remarque que, d'après la propriété  $A'_3$  d'un espace L.C.-monotone métrisable,  $\{\rho(P_n^\infty X)\}$  est une suite décroissante de nombres positifs ou nuls. Donc  $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(P_n^\infty X)$  existe.

ii) Pour tout  $n$ , on a

$$\rho(P_n^\infty X) = \rho(X - P_1^n X).$$

D'où, puisque  $P_1^n X \in [\mathcal{L}]$ ,

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \rho(P_n^\infty X) \geq \inf_{Z \in [\mathcal{L}]} \rho(X-Z)$$

iii) Pour tout  $Z \in [\mathcal{L}]$ , on a quel que soit  $n$

$$|\rho(P_n^\infty X) - \rho(P_n^\infty Z)| \leq \rho[P_n^\infty(X-Z)]$$

et d'après la propriété  $A'_3$

$$\rho[P_n^\infty(X-Z)] \leq \rho(X-Z) .$$

On a donc

$$|\rho(P_n^\infty X) - \rho(P_n^\infty Z)| \leq \rho(X-Z) .$$

Mais, d'après la proposition 1.8., on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \rho(P_n^\infty Z) = 0$  .

On en déduit

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \rho(P_n^\infty X) \leq \inf_{Z \in [\mathcal{L}]} \rho(X-Z)$$

La proposition résulte alors de (1) et (2). \*

### §3. ESPACE $\mathcal{E}$ .

Notations.-

a) Soient  $X = \{x_i\} \in \mathcal{A}$  et  $Y = \{y_i\} \in \mathcal{A}$  . On pose

$$(X, Y) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$$

lorsque la série converge .

b) Soient  $\mathcal{Q}$  un espace L.C.-monotone,  $\Lambda$  la famille filtrante de semi-normes qui définit sa topologie. Soit  $Y \in \mathcal{A}$ . Pour chaque  $\lambda \in \Lambda$ , on pose

$$\lambda'(Y) = \sup_{X \in \mathcal{Q}, \lambda(X) \leq 1} |(X, Y)| .$$

c) Soit  $\mathcal{Q}$  un espace L.C.-monotone, et soit  $\Lambda$  la famille filtrante de semi-normes qui définit sa topologie. On note  $\tilde{\mathcal{Q}}$  l'ensemble des  $Y \in \mathcal{A}$  tels qu'il existe  $\lambda \in \Lambda$  pour laquelle on a  $\lambda'(Y) < +\infty$ .

Préliminaires.-

Lemme 1.12. -

Soit  $M$  un sous-ensemble normal de  $\mathcal{Q}$ , et soit  $Y = \{y_i\} \in \mathcal{A}$  tel que  $\sup_{X \in M} |(X, Y)| < +\infty$ . Alors, on a

$$\sup_{X \in M} |(X, Y)| = \sup_{X \in M} (|X|, |Y|) = \sup_{X \in M} (X, Y)$$

La première égalité résulte de ce que, d'après la définition 1.1., si  $X = \{x_i\} \in M$ , alors  $X' = \{|x_i| \operatorname{sgn} y_i\} \in M$ . La deuxième égalité résulte de ce que si  $X \in M$ , alors  $(-X) \in M$ . \*

On notera, en particulier que si  $Y \in \tilde{\mathcal{Q}}$ , on a

$$\lambda'(Y) = \sup_{X \in \mathcal{Q}, \lambda(X) \leq 1} (|X|, |Y|) = \sup_{X \in \mathcal{Q}, \lambda(X) \leq 1} (X, Y) .$$

Lemme 1.13. -

Soit M un sous-ensemble normal de  $\mathcal{L}$ , et soit  
 $Y = \{y_i\} \in \mathcal{S}$  tel que  $\sup_{X \in M} |(X, Y)| < +\infty$ . On a

$$\sup_{X \in M} |(X, Y)| = \sup_{X \in M \cap [\mathcal{L}]} |(X, Y)|$$

L'ensemble  $M \cap [\mathcal{L}]$  est un sous-ensemble normal de  $\mathcal{L}$ .  
 D'après le lemme 1.12., il suffit donc de démontrer que

$$\sup_{X \in M} (X, Y) = \sup_{X \in M \cap [\mathcal{L}]} (X, Y) .$$

i) Puisque  $M \cap [\mathcal{L}] \subset M$ , on a

$$\sup_{X \in M} (X, Y) \geq \sup_{X \in M \cap [\mathcal{L}]} (X, Y)$$

ii) Si l'inégalité précédente était stricte, il existerait  $X_0 \in M$ ,  $X_0 \notin M \cap [\mathcal{L}]$  tel que

$$(X_0, Y) > \sup_{X \in M \cap [\mathcal{L}]} (X, Y)$$

et, la série  $\sum_{i=1}^{\infty} x_i^{(0)} y_i$  étant convergente, il existerait

un entier positif  $m$  tel que

$$(P_1^m X_0, Y) > \sup_{X \in M \cap [\mathcal{L}]} (X, Y) .$$

Mais  $|P_1^m X_0| < |X_0|$ , donc  $P_1^m X_0 \in M$ . Comme  $P_1^m X_0$  est une suite finie,  $P_1^m X_0 \in M \cap [\mathcal{L}]$  et on aboutit à une contradiction. \*

On notera, en particulier que si  $Y \in \tilde{\mathcal{L}}$ , on a

$$\lambda'(Y) = \sup_{X \in [\mathcal{L}], \lambda(X) \leq 1} |(X, Y)|.$$

Il en résulte que si on pose  $\mathfrak{m} = [\mathcal{L}]$ , on a  $\tilde{\mathfrak{m}} = \tilde{\mathcal{L}}$ .

Proposition 1.14. -

L'ensemble  $\tilde{\mathcal{L}}$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  qui contient les suites réelles finies et qui est normal.

a) Soient  $Y_1 \in \mathcal{L}$  et  $Y_2 \in \mathcal{L}$ . Il existe  $\lambda_1 \in \Lambda$  telle que  $\lambda'_1(Y_1) < +\infty$  et  $\lambda_2 \in \Lambda$  telle que  $\lambda'_2(Y_2) < +\infty$ . La famille  $\Lambda$  étant filtrante, il existe  $\lambda \in \Lambda$  et deux nombres positifs  $a_1$  et  $a_2$  tels que pour tout  $X \in \mathcal{L}$  on ait  $\lambda_1(X) \leq a_1 \lambda(X)$  et  $\lambda_2(X) \leq a_2 \lambda(X)$ . Soit  $X \in \mathcal{L}$ ,  $\lambda(X) \leq 1$ . Alors  $\frac{X}{a_1} \in \mathcal{L}$ ,  $\lambda_1\left(\frac{X}{a_1}\right) \leq 1$  et  $\frac{X}{a_2} \in \mathcal{L}$ ,  $\lambda_2\left(\frac{X}{a_2}\right) \leq 1$ .

Par conséquent, les séries  $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{a_1} y_i$  et  $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{a_2} y_i$  sont absolument convergentes et on a

$$\sup_{X \in \mathcal{L}, \lambda(X) \leq 1} |(X, Y_1 + Y_2)| \leq a_1 \lambda'_1(Y_1) + a_2 \lambda'_2(Y_2) < +\infty.$$

Donc  $Y_1 + Y_2 \in \tilde{\mathcal{L}}$ .

b) Soit  $Y \in \tilde{\mathcal{L}}$ . Il existe  $\lambda \in \Lambda$  tel que  $\lambda'(Y) < +\infty$ . Alors quel que soit  $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\sup_{X \in \mathcal{L}, \lambda(X) \leq 1} |(X, \alpha Y)| = |\alpha| \lambda'(Y) < +\infty$$

et  $\alpha Y \in \tilde{\mathcal{L}}$ .

c) Soit  $E_i$  la suite dont tous les éléments sont nuls sauf celui de rang  $i$  qui est égal à 1. L'espace  $\mathcal{L}$  étant séparé, il existe  $\lambda_i \in \Lambda$  telle que  $\lambda_i(E_i) \neq 0$ . Soit alors  $X = \{x_i\} \in \mathcal{L}$ ,  $\lambda(X) \leq 1$ . D'après la propriété  $A_3$ , on a  $\lambda_i(x_i E_i) \leq 1$ , d'où  $|x_i| \leq [\lambda_i(E_i)]^{-1}$ . Alors, on a

$$\sup_{X \in \mathcal{L}, \lambda(X) \leq 1} |(X, E_i)| \leq [\lambda_i(E_i)]^{-1}$$

Donc  $E_i \in \tilde{\mathcal{L}}$ . Il résulte alors de a) et b) que toute suite finie appartient à  $\tilde{\mathcal{L}}$ .

d) Soit  $Y \in \tilde{\mathcal{L}}$ . Il existe  $\lambda \in \Lambda$  tel que  $\lambda'(Y) < +\infty$ . Soit  $Z \in \mathcal{L}$  tel que  $|Z| < |Y|$ . Quel que soit  $X \in \mathcal{L}$ , on a

$$(|X|, |Z|) \leq (|X|, |Y|)$$

d'où on déduit

$$\lambda'(Z) \leq \lambda'(Y) < +\infty$$

Donc  $Z \in \tilde{\mathcal{L}}$  et par conséquent  $\tilde{\mathcal{L}}$  est normal. \*

Dualité entre  $\mathcal{L}$  et  $\tilde{\mathcal{L}}$ .

L'application  $\{X, Y\} \in \mathcal{L} \times \tilde{\mathcal{L}} \longrightarrow (X, Y)$  définit une forme bilinéaire sur  $\mathcal{L} \times \tilde{\mathcal{L}}$ . Quel que soit  $X = \{x_i\} \in \mathcal{L}$ ,  $X \neq 0$ , il existe  $x_i \neq 0$ . Alors si  $E_i$  désigne la suite dont tous les éléments sont nuls sauf celui de rang  $i$  qui est égal à 1, on a  $(X, E_i) \neq 0$ . De même, quel que soit  $Y = \{y_i\} \in \tilde{\mathcal{L}}$ ,  $Y \neq 0$ , il existe  $y_i \neq 0$  et  $(E_i, Y) \neq 0$ . Donc les espaces vectoriels  $\mathcal{L}$  et  $\tilde{\mathcal{L}}$  sont en dualité relativement à la forme bilinéaire  $(X, Y)$ .

Soit  $\lambda \in \Lambda$  et soit  $V$  l'ensemble des  $X \in \mathcal{Q}$  tel que  $\lambda(X) \leq 1$ . L'ensemble des  $Y \in \tilde{\mathcal{Q}}$  tels que  $\lambda'(Y) \leq 1$  est donc le polaire de  $V$  dans  $\tilde{\mathcal{Q}}$ .

Il résulte du lemme 1.13. qu'un sous-ensemble normal  $M$  de  $\mathcal{Q}$  et son intersection avec  $[\mathcal{Q}]$  ont le même polaire dans  $\tilde{\mathcal{Q}}$ .

On note  $\sigma(\tilde{\mathcal{Q}}, \mathcal{Q})$  la topologie faible sur  $\tilde{\mathcal{Q}}$  définie par la dualité décrite, c'est-à-dire la topologie localement convexe séparée définie par la famille des semi-normes :  $Y \rightarrow |(X, Y)|$  où  $X$  parcourt  $\mathcal{Q}$ .

Inégalité fondamentale.-

Proposition 1.15. -

Soient  $X \in \mathcal{Q}$  et  $Y \in \tilde{\mathcal{Q}}$ . Pour toute semi-norme  $\lambda \in \Lambda$  telle que  $\lambda'(Y) < +\infty$ , on a

$$(|X|, |Y|) \leq \lambda(X) \cdot \lambda'(Y) .$$

i) Si  $X = 0$ , on a l'égalité.

ii) Si  $\lambda(X) \neq 0$ , on a  $\lambda\left[\frac{X}{\lambda(X)}\right] = 1$  et par conséquent compte tenu du lemme 1.12., on a

$$\lambda'(Y) \leq \left(\frac{|X|}{\lambda(X)}, |Y|\right)$$

d'où

$$(|X|, |Y|) \leq \lambda(X) \cdot \lambda'(Y) .$$

iii) Il reste donc à démontrer que si  $X = \{x_i\} \neq 0$ , mais  $\lambda(X) = 0$ , alors  $(|X|, |Y|) = 0$ . Soit  $I$  l'ensemble des indices  $i$  pour lesquels  $|x_i| > 0$  et soit  $I_m$  l'ensemble des indices  $i$  pour lesquels  $|x_i| > \frac{1}{m}$ ,  $m \in \mathbb{N}$ . Il existe  $m_0$  tel que, pour tout  $m \geq m_0$ ,  $I_m$  ne soit pas vide. Soit

$F = \{f_i\}$  avec  $f_i = 1$  si  $i \in I_m$  et  $f_i = 0$  si  $i \notin I_m$ .  
On a  $|F| < m|X|$ . Alors, d'après les propriétés  $A_2$  et  $A_3$  d'un  
espace L.C.-monotone, on a

$$\lambda(F) \leq m\lambda(X) .$$

Comme  $\lambda(X) = 0$ , on a quel que soit l'entier positif  $n$

$$\lambda(nF) = 0 .$$

Soit alors  $Y = \{y_i\}$ . On a pour tout  $n \in \mathbb{N}$

$$\lambda'(Y) \geq (n|F|, |Y|)$$

c'est-à-dire

$$\lambda'(Y) \geq n \left( \sum_{i \in I_m} |y_i| \right) .$$

Si  $Y \in \mathcal{C}$ , on a  $\lambda'(Y) < +\infty$ . Il résulte alors de l'inégalité  
précédente que pour tout  $i \in I_m$ , on a  $y_i = 0$ . Comme  $I = \bigcup_{m=1}^{\infty} I_m$   
 $y_i$  est nul pour tout  $i \in I$ , et donc

$$(|X|, |Y|) = 0 .*$$

Cette inégalité est importante pour l'étude des proprié-  
tés des espaces L.C.-monotones. C'est pourquoi on l'appellera  
"inégalité fondamentale". Il faut noter que c'est pour obte-  
nir cette inégalité qu'on a imposé à un espace L.C.-monotone  
de posséder les propriétés  $A_2$  et  $A_3$ .

Fonctionnelles linéaires continues sur  $\mathcal{L}$  .-

La première application de l'inégalité fondamentale est l'étude des fonctionnelles linéaires continues sur  $\mathcal{L}$  ou  $[\mathcal{L}]$ .

Proposition 1.16. -

Soit  $Y = \{y_i\} \in \tilde{\mathcal{L}}$  . L'application  $X = \{x_i\} \rightarrow (X, Y)$  est définie sur  $\mathcal{L}$  , linéaire et continue.

Soit  $Y \in \tilde{\mathcal{L}}$  . Il existe  $\lambda \in \Lambda$  tel que  $\lambda'(Y) < +\infty$  . Quel que soit  $X = \{x_i\} \in \mathcal{L}$  , il existe  $\alpha > 0$  tel que  $\lambda(\alpha X) \leq 1$  . Alors, d'après le lemme 1.12. la série

$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha x_i y_i$  est absolument convergente, donc aussi la série

$\sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$  . Il en résulte que l'application  $X \rightarrow (X, Y)$  est

définie sur  $\mathcal{L}$  et linéaire. De plus, on a en utilisant l'inégalité fondamentale

$$|(X, Y)| \leq \lambda(X) \lambda'(Y) .$$

Donc, il existe  $\lambda \in \Lambda$  et  $a = \lambda'(Y)$  tels que pour tout  $X \in \mathcal{L}$  on ait

$$|(X, Y)| \leq a\lambda(X) .$$

Par conséquent, l'application est continue sur  $\mathcal{L}$  . \*

Proposition 1.17. -

L'espace  $\tilde{\mathcal{Q}}$  est algébriquement isomorphe au dual topologique de  $[\mathcal{Q}]$ .

Le dual topologique de  $[\mathcal{Q}]$  est l'ensemble des fonctionnelles linéaires continues sur  $[\mathcal{Q}]$ .

i) D'après la proposition 1.16., à tout  $Y \in \tilde{\mathcal{Q}}$  correspond une fonctionnelle linéaire continue sur  $\mathcal{Q} : X \rightarrow (X, Y)$ . Sa restriction à  $[\mathcal{Q}]$  est donc une fonctionnelle linéaire continue sur  $[\mathcal{Q}]$ .

ii) Inversement, soit  $f$  une fonctionnelle linéaire continue sur  $[\mathcal{Q}]$ . Il existe  $\lambda \in \Lambda$  et  $a > 0$  tels que, pour tout  $X \in [\mathcal{Q}]$ , on ait

$$|f(X)| \leq a\lambda(X) .$$

Soit alors  $Y = \{f(E_i), i \in \mathbb{N}\}$  où  $E_i$  désigne la suite dont tous les éléments sont nuls sauf celui de rang  $i$  qui est égal à 1. Quel que soit  $X = \{x_i\} \in [\mathcal{Q}]$  et quel que soit l'entier  $n$ , on a

$$\sum_{i=1}^{i=n} x_i f(E_i) = f(P_1^{n+1} X)$$

On a donc

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i f(E_i) \right| \leq a\lambda(P_1^{n+1} X) ,$$

et d'après la propriété  $\Lambda_3$

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i f(E_i) \right| \leq a\lambda(X) .$$

On en déduit, compte tenu du lemme 1.13.,

$$\lambda'(Y) \leq a$$

Donc  $Y = \{f(E_i)\} \in \tilde{\mathcal{Q}}$ . Alors  $f$  et l'application  $X \rightarrow (X, Y)$  sont deux fonctionnelles linéaires sur  $[\mathcal{Q}]$  qui prennent les mêmes valeurs sur l'ensemble des suites finies qui est dense dans  $[\mathcal{Q}]$ . Donc, pour tout  $X \in [\mathcal{Q}]$ , on a

$$f(X) = (X, Y) \quad . \quad *$$

Corollaire 1.18. -

Soit  $f$  une fonctionnelle linéaire continue sur  $\mathcal{Q}$ .  
Il existe  $Y \in \tilde{\mathcal{Q}}$  et une fonctionnelle linéaire  $g$  continue  
sur  $\mathcal{Q}$  et nulle sur  $[\mathcal{Q}]$  tels qu'on ait pour tout  $X \in \mathcal{Q}$ .

$$f(X) = (X, Y) + g(X) \quad .$$

Soit  $\hat{f}$  la restriction de  $f$  à  $[\mathcal{Q}]$ . Il résulte de la proposition 1.17. qu'il existe  $Y \in \tilde{\mathcal{Q}}$  tel que  $\hat{f}(X) = (X, Y)$ . D'après la proposition 1.16., l'application  $X \rightarrow (X, Y)$  est continue sur  $\mathcal{Q}$ . Donc  $g(X) = f(X) - (X, Y)$  est une fonctionnelle linéaire continue sur  $\mathcal{Q}$  qui est nulle sur  $[\mathcal{Q}]$ . \*

On notera que si le problème de la représentation de  $g$  est résolu dans le cas où  $\mathcal{Q} = \mathbb{C}$  ou  $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}^\infty$ , il ne semble pas l'être, par exemple, si  $\mathcal{Q}$  est un espace d'Orlicz  $\mathcal{Q}^M$  tel que  $[\mathcal{Q}^M] \neq \mathcal{Q}^M$ .

Topologies de  $\tilde{\mathcal{Q}}$  .

Puisque  $\tilde{\mathcal{Q}}$  est algébriquement isomorphe au dual topologique de  $[\mathcal{Q}]$ , on considère les deux topologies suivantes :

a) La topologie  $\sigma(\tilde{\mathcal{Q}}, [\mathcal{Q}])$  de  $\tilde{\mathcal{Q}}$  , c'est-à-dire la topologie localement convexe séparée définie par les semi-normes

$$p_X(Y) = |(X, Y)|$$

où X parcourt  $[\mathcal{Q}]$ .

b) La topologie forte de  $\tilde{\mathcal{Q}}$  , c'est-à-dire la topologie localement convexe séparée définie par la famille  $\tilde{\Lambda}$  des semi-normes

$$\tilde{\lambda}_M(Y) = \sup_{X \in M} |(X, Y)| ,$$

où M parcourt un système fondamental de parties bornées de  $[\mathcal{Q}]$ , c'est-à-dire, d'après la propriété 1.4. d'un espace L.C.-monotone, l'ensemble S des parties bornées, convexes et normales de  $[\mathcal{Q}]$ . On a alors

L'espace  $\tilde{\mathcal{Q}}$  , muni de la topologie forte, est algébriquement et topologiquement isomorphe au dual fort de  $[\mathcal{Q}]$ .

Proposition 1.19. -

L'espace  $\tilde{\mathcal{Q}}$  , muni de la topologie forte, est algébriquement et topologiquement isomorphe à un sous-espace  $\mathcal{Q}'_0$  du dual fort  $\mathcal{Q}'$  de l'espace  $\mathcal{Q}$  .

Il résulte du corollaire 1.18. que  $\tilde{\mathcal{Q}}$  est algébriquement isomorphe à l'ensemble  $\mathcal{Q}'_0$  des applications  $X \rightarrow (X, Y)$  où  $Y \in \tilde{\mathcal{Q}}$  , qui est un sous-espace vectoriel du dual topolo-

gique  $\mathcal{Q}'$  de l'espace  $\mathcal{Q}$ . La topologie forte de  $\mathcal{Q}'$  est la topologie localement convexe séparée définie par les semi-normes

$$\mu_N(f) = \sup_{X \in N} |f(X)|$$

où  $N$  parcourt le système des parties bornées, convexes et normales de  $\mathcal{Q}$ . La topologie induite sur  $\mathcal{Q}'_0$  est, d'après le corollaire 1.18, la topologie définie par les semi-normes

$$\mu_N(\hat{f}) = \sup_{X \in N} |(X, Y)|$$

où  $\hat{f}$  désigne la restriction de  $f$  à  $[\mathcal{Q}]$  et  $Y$  l'élément de  $\tilde{\mathcal{Q}}$  correspondant.

Il résulte alors du lemme 1.13. qu'on a

$$\mu_N(\hat{f}) = \sup_{X \in N \cap [\mathcal{Q}]} |(X, Y)| .$$

Or, lorsque  $N$  parcourt l'ensemble des parties bornées convexes et normales de  $\mathcal{Q}$ ,  $N \cap [\mathcal{Q}]$  parcourt  $S$ . La proposition est alors établie. \*

Proposition 1.20. -

L'espace  $\tilde{\mathcal{Q}}$ , muni de la topologie forte est un espace L.C.-monotone.

i) Il résulte de la proposition 1.14. que  $\tilde{\mathcal{Q}}$  contient les suites réelles et est normal.

ii) La topologie forte est localement convexe et séparée. Soit  $S$  l'ensemble des parties bornées, convexes et normales de  $[\mathcal{Q}]$ . Soient  $M_1$  et  $M_2 \in S$ . L'ensemble  $M_1 \cup M_2$  est borné. Il existe donc un ensemble  $N \in S$  qui contient

$M_1 \cup M_2$  . Alors, on a pour tout  $Y \in \tilde{\mathcal{Q}}$

$$\tilde{\lambda}_{M_1}(Y) \leq \tilde{\lambda}_N(Y) \quad \text{et} \quad \tilde{\lambda}_{M_2}(Y) \leq \tilde{\lambda}_N(Y) .$$

La famille  $\tilde{\Lambda}$  est donc filtrante. Enfin, il résulte du lemme 1.12. que  $|Z| < |Y|$  entraîne, quel que soit  $M \in S$ ,

$$\tilde{\lambda}_M(Z) \leq \tilde{\lambda}_M(Y) .$$

Donc,  $\tilde{\mathcal{Q}}$  est un espace L.C.-monotone. \*

Dans toute la suite, et sauf mention du contraire, on supposera  $\tilde{\mathcal{Q}}$  muni de la topologie forte.

Exemples.-

On a  $\tilde{\mathcal{Q}}^1 = \mathcal{Q}^\infty$  et  $\tilde{\mathcal{Q}}^\infty = \tilde{\mathcal{C}} = \tilde{\mathcal{C}}_0 = \mathcal{Q}^1$  . Si  $p > 1$ , on a  $\tilde{\mathcal{Q}}^p = \mathcal{Q}^q$  où  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  .

Si  $\mathcal{Q}$  est un espace d'Orlicz  $\mathcal{Q}^M$ , alors  $\tilde{\mathcal{Q}}$  est un autre espace d'Orlicz  $\mathcal{Q}^N$  associé à la fonction  $N(v)$  "complémentaire" de  $M(u)$ . (\*)

L'espace  $\tilde{\mathcal{Q}}^1$  est l'ensemble des  $X = \{x_i\} \in \mathcal{S}$  tels qu'il existe  $m \in \mathbb{N}$  tel que  $\sup_{i \in \mathbb{N}} \frac{|x_i|}{m^i} < +\infty$  . C'est un espace L.C.-monotone, tonnelé, complet, non métrisable. On a  $[\tilde{\mathcal{Q}}^1] = \tilde{\mathcal{Q}}^1$  .

---

(\*) Si  $M(u)$  est définie comme dans la notule (\*) de la page 4, alors la fonction complémentaire  $N(v)$  est définie par  $N(v) = \int_0^{|v|} q(s) ds$ , où  $q$  est la fonction réciproque de la fonction  $p$ .

Si  $p > 1$ , l'espace  $\tilde{\mathcal{A}}^p$  est l'ensemble des  $X = \{x_i\} \in \mathcal{A}$  tels qu'il existe  $m \in \mathbb{N}$  tel que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \binom{m}{i}^{-\frac{q}{p}} |x_i|^q < +\infty \quad \text{où} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \quad \text{C'est un espace}$$

L.C.-monotone tonnelé, complet, non métrisable et réflexif.

On a  $[\tilde{\mathcal{A}}^p] = \tilde{\mathcal{A}}^p$ .

Cas des espaces tonnelés. (\*)

Proposition 1.21. -

Soit  $\mathcal{Q}$  un espace L.C.-monotone tonnelé. L'ensemble  $\tilde{\mathcal{Q}}$  est identique à l'ensemble  $\mathcal{Q}^*$  des suites  $Y = \{y_i\} \in \mathcal{A}$

telles que pour tout  $X = \{x_i\} \in \mathcal{Q}$  la série  $\sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$

converge.

L'inclusion  $\tilde{\mathcal{Q}} \subset \mathcal{Q}^*$  résulte des définitions de  $\tilde{\mathcal{Q}}$  et de  $\mathcal{Q}^*$ . La démonstration de l'inclusion  $\mathcal{Q}^* \subset \tilde{\mathcal{Q}}$  se décompose en deux parties.

1ère partie.

Soit  $Y = \{y_i\} \in \mathcal{A}$  telle que pour tout  $X = \{x_i\} \in \mathcal{Q}$

la série  $\sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$  converge. On considère l'application  $T_Y$

de  $\mathcal{Q}$  dans  $\mathcal{Q}^\infty$  définie par

$$X = \{x_i\} \in \mathcal{Q} \quad \xrightarrow{T_Y} \quad T_Y X = \left\{ \alpha_i = \sum_{k=1}^{k=i} x_k y_k \right\}$$

---

(\*) On rappelle qu'un espace localement convexe  $E$  est tonnelé si tout sous-ensemble convexe, équilibré, absorbant et fermé de  $E$  est un voisinage de 0. Il faut noter qu'un espace L.C.-monotone n'est pas nécessairement tonnelé.

Soit une suite généralisée  $\{X_\alpha, \alpha \in \Gamma\}$  de  $\mathcal{Q}$  convergeant vers  $X \in \mathcal{Q}$  et pour laquelle  $T_Y X_\alpha$  converge vers  $Z = \{z_i\}$ . Soit  $B_i = P_1^{i+1} Y$ . Pour chaque  $i$ ,  $B_i \in \tilde{\mathcal{Q}}$ . Donc, il existe  $\lambda_i \in \Lambda$  telle que  $\lambda'_i(B_i) < +\infty$  et on a en utilisant l'inégalité fondamentale de la proposition 1.15.

$$\left| \sum_{k=1}^{k=i} (x_k^{(\alpha)} - x_k) y_k \right| \leq \lambda_i (X_\alpha - X) \lambda'_i(B_i).$$

Il en résulte que, pour chaque  $i$ ,  $\sum_{k=1}^{k=i} x_k^{(\alpha)} y_k$  tend vers  $\sum_{k=1}^{k=i} x_k y_k$ .

Par ailleurs, la condition  $T_Y X_\alpha \rightarrow Z$  entraîne que pour

chaque  $i$  :  $\sum_{k=1}^{k=i} x_k^{(\alpha)} y_k \rightarrow z_i$ . Par conséquent,  $T_Y X = Z$ .

Les espaces  $\mathcal{Q}$  et  $\mathcal{Q}^\infty$  étant localement convexes et séparés, le graphe de l'application  $T_Y$  est fermé.

### 2ème partie.

$T_Y$  est une application fermée d'un espace tonnelé dans un espace de Banach. Il résulte alors d'une généralisation du théorème du graphe fermé que  $T_Y$  est continue. Donc, il existe  $\lambda \in \Lambda$  et  $a > 0$  tels que, pour tout  $X \in \mathcal{Q}$ , on ait

$$\sup_i \left| \sum_{k=1}^{k=i} x_k y_k \right| \leq a \lambda(X).$$

On en déduit que  $\lambda'(Y) < +\infty$  et donc que  $Y \in \tilde{\mathcal{Q}}$ . D'où  $\mathcal{Q}^* \subset \tilde{\mathcal{Q}}^*$ .

§4. ESPACE  $\tilde{\mathcal{L}}$  .

Soit  $\mathcal{L}$  un espace L.C.-monotone et soit  $\Lambda$  la famille filtrante de semi-normes qui définit sa topologie. On pose  $\tilde{m} = \tilde{\mathcal{L}}$  et on désigne par  $\tilde{\Lambda}$  la famille filtrante de semi-normes qui définit la topologie forte de  $\tilde{\mathcal{L}}$  .

On note  $\tilde{\mathcal{L}}$  l'espace  $\tilde{m}$  muni de la topologie forte. C'est un espace L.C.-monotone.

Proposition 1.22. -

L'espace  $\mathcal{L}$  est un sous-espace vectoriel de  $\tilde{\mathcal{L}}$  .

La topologie  $\sigma(\tilde{\mathcal{L}}, \mathcal{L})$  de  $\tilde{\mathcal{L}}$  est la moins fine des topologies qui rend continues les formes linéaires  $Y \rightarrow (X, Y)$  où  $X \in \mathcal{L}$  . La topologie forte de  $\tilde{\mathcal{L}}$  est plus fine que  $\sigma(\tilde{\mathcal{L}}, \mathcal{L})$ . Donc, quel que soit  $X \in \mathcal{L}$ , l'application  $Y \rightarrow (X, Y)$  est continue sur  $\tilde{\mathcal{L}}$  et donc aussi sur  $[\tilde{\mathcal{L}}]$ . Il résulte alors de la proposition 1.17. que  $X \in \tilde{\mathcal{L}}$  . Donc  $\mathcal{L} \subset \tilde{\mathcal{L}}$  . \*

En général la topologie de  $\mathcal{L}$  est différente de la topologie induite sur  $\mathcal{L}$  par celle de  $\tilde{\mathcal{L}}$  . Toutefois, on a

Proposition 1.23. -

Si  $[\mathcal{L}]$  est tonnelé, la topologie de  $\tilde{\mathcal{L}}$  induit sur  $\mathcal{L}$  une topologie identique à celle de  $\mathcal{L}$  .

Soit  $\mathfrak{T}$  la topologie initiale de  $\mathcal{L}$  et soit  $\tilde{\mathfrak{T}}$  la topologie induite sur  $\mathcal{L}$  par celle de  $\tilde{\mathcal{L}}$  .

i) Soit  $V$  un élément du système fondamental de voisinages normaux de  $0$  de  $\mathfrak{X}$ . D'après le lemme 1.13., le polaire  $V^\circ$  de  $V$  dans  $\tilde{\mathcal{Q}}$  est identique au polaire de  $V \cap [\mathcal{Q}]$  qui est un voisinage de  $0$  de  $[\mathcal{Q}]$ . Puisque  $[\mathcal{Q}]$  est tonnelé, le polaire d'un voisinage de  $0$  est un sous-ensemble borné de  $\tilde{\mathcal{Q}}$ . Donc  $V^\circ$  est borné dans  $\tilde{\mathcal{Q}}$ . Le polaire de  $V^\circ$  dans  $\tilde{\mathcal{Q}}$  est alors un voisinage de  $0$  dans  $\tilde{\mathcal{Q}}$  et sa trace sur  $\mathcal{Q}$  est donc un voisinage de  $0$  pour  $\mathfrak{X}$ . Mais cette trace de  $V^\circ$  sur  $\mathcal{Q}$  est aussi le polaire de  $V^\circ$  dans  $\mathcal{Q}$ . Or, puisque  $V$  est convexe, contient  $0$  et est fermé, le polaire de  $V^\circ$  dans  $\mathcal{Q}$  est identique à  $V$ . Donc  $V$  est un voisinage de  $0$  de  $\mathfrak{X}$ .

ii) Soit  $\tilde{V}$  un élément du système fondamental de voisinages de  $0$  de  $\mathfrak{X}$ . C'est la trace sur  $\mathcal{Q}$  du polaire d'une partie bornée convexe et normale  $\tilde{M}$  de  $[\mathcal{Q}]$ . Mais puisque  $[\mathcal{Q}]$  est tonnelé,  $\tilde{V}$  est un voisinage de  $0$  pour  $\mathfrak{X}$ .

D'après i) et ii), les topologies  $\mathfrak{X}$  et  $\mathfrak{M}$  sont identiques. \*

### Exemples.-

Pour  $p \geq 1$ , on a  $\tilde{\mathcal{Q}}^p = \mathcal{Q}^p$ . On a aussi  $\tilde{\mathcal{Q}}^\infty = \mathcal{Q}^\infty$  et  $\tilde{\mathcal{C}} = \tilde{\mathcal{C}}^0 = \mathcal{C}^\infty$ . Soit  $\mathcal{Q}^M$  un espace d'Orlicz, on a  $\tilde{\mathcal{Q}}^M = \mathcal{Q}^M$ . Pour tout  $p > 1$ , on a  $\tilde{\mathcal{Q}}^p = \mathcal{Q}^p$ .

On remarque que l'égalité  $\tilde{\mathcal{Q}} = \mathcal{Q}$  est fréquemment réalisée dans ces exemples. On étudie donc les conditions pour que cette égalité soit vérifiée.

On note  $\sigma(\mathcal{Q}, [\tilde{\mathcal{Q}}])$  la topologie localement convexe séparée de  $\mathcal{Q}$  définie par la famille de semi-normes  $p_Y(X) = |(X, Y)|$  où  $Y$  parcourt  $[\tilde{\mathcal{Q}}]$ .

Proposition 1.24. -

Une condition nécessaire et suffisante pour que  $\mathcal{Q}$  et  $\tilde{\mathcal{Q}}$  soient algébriquement identiques est que tout sous-ensemble borné, convexe et normal de  $\mathcal{Q}$ , soit compact pour la topologie  $\sigma(\mathcal{Q}, [\tilde{\mathcal{Q}}])$ .

i) Condition nécessaire.

Si  $\mathcal{Q}$  et  $\tilde{\mathcal{Q}}$  sont algébriquement identiques, c'est que  $\mathcal{Q}$  est le dual topologique de  $[\tilde{\mathcal{Q}}]$  muni de la topologie forte. Soit  $M$  un sous-ensemble borné, convexe et normal de  $\mathcal{Q}$ . Par définition de la topologie forte de  $[\tilde{\mathcal{Q}}]$ , le polaire  $M^0$  de  $M$  dans  $[\tilde{\mathcal{Q}}]$  est un voisinage  $\tilde{V}$  de  $0$  dans  $[\tilde{\mathcal{Q}}]$ . Or, on démontre (\*) que le polaire de  $\tilde{V}$  dans  $\mathcal{Q}$  est compact pour  $\sigma(\mathcal{Q}, [\tilde{\mathcal{Q}}])$ . Mais puisque  $M$  est normal il est fermé d'après la propriété 1.5. Comme  $M$  contient  $0$  et est convexe, le polaire de  $\tilde{V}$  dans  $\mathcal{Q}$  est identique à  $M$ . Donc  $M$  est compact pour  $\sigma(\mathcal{Q}, [\tilde{\mathcal{Q}}])$ .

ii) Condition suffisante.

Elle résulte de la définition de la topologie forte de  $[\tilde{\mathcal{Q}}]$  et du théorème de Mackey-Arens (\*\*): " Soient  $E$  et  $E'$  deux espaces vectoriels en dualité et soit  $\mathfrak{T}$  une topologie localement convexe séparée de  $E$ . Alors  $E'$  est le dual topologique de  $E$  si et seulement si  $\mathfrak{T}$  est une topologie de convergence uniforme sur les parties de  $E'$  convexes, équilibrées et compactes pour  $\sigma(E', E)$  qui recouvrent  $E'$  ". \*

---

(\*) Plus généralement : Soient  $E$  un espace localement convexe et  $E'$  son dual topologique. Si  $U$  est un voisinage de l'origine dans  $E$ , son polaire est compact pour  $\sigma(E', E)$ .

(\*\*) Mackey G.W. - Trans. Amer. Math. Soc., 60, (1946), p. 519-537.

En utilisant les propositions 1.23. et 1.24. on note que si  $[\mathcal{Q}]$  est tonnelé et si tout sous-ensemble borné, convexe et normal de  $\mathcal{Q}$  est compact pour la topologie  $\sigma(\mathcal{Q}, [\mathcal{Q}])$ , alors  $\mathcal{Q}$  et  $\tilde{\mathcal{Q}}$  sont algébriquement et topologiquement identiques.



CHAPITRE II.

OPERATEURS MATRICIELS SUR DES ESPACES L.C.-MONOTONES.

Soit une matrice infinie  $\{a_{ji} ; i, j \in \mathbb{N}\}$  à coefficients réels. On appelle opérateur matriciel associé à  $\{a_{ji}\}$  l'opérateur  $A$  qui, à une suite réelle  $X = \{x_i\}$ , fait correspondre la suite  $AX = \{y_j\}$  où  $y_j = \sum_{i=1}^{\infty} a_{ji}x_i$ .

Dans ce chapitre, on se propose d'étudier les opérateurs matriciels qui définissent des applications linéaires d'un espace L.C.-monotone  $\mathcal{L}$  dans un espace L.C.-monotone  $\mathfrak{m}$ .

Dans la première partie, on envisage les opérateurs matriciels qui définissent des applications continues. On montre notamment que si  $\mathcal{L}$  est tonnelé et si  $\mathfrak{m}$  est pleinement complet, toute application de  $\mathcal{L}$  dans  $\mathfrak{m}$  définie par un opérateur matriciel est continue.

Dans la deuxième partie, on étudie des conditions pour qu'un opérateur matriciel définisse une application bornée.

Dans la troisième partie, on introduit l'ensemble  $\mathcal{E}$  des opérateurs matriciels qui définissent une application bornée transformant tout sous-ensemble borné de  $\mathcal{L}$  en un ensemble relativement compact dans  $\mathfrak{m}$ . Lorsque  $\mathfrak{m}$  est quasi-complet, on met en évidence quatre sous-ensembles de  $\mathcal{E}$ , on étudie certaines de leurs propriétés et on donne des conditions pour qu'un opérateur matriciel appartienne à l'un de ces sous-ensembles.

Dans la quatrième partie enfin, on étudie les opérateurs matriciels qui définissent des applications complètement continues.

Il faut noter que, dans le cas où  $\mathcal{L}$  et  $\mathfrak{m}$  sont des "espaces de coordonnées", on retrouve les résultats de Gribanov. (\*)

#### Notations.-

a) Soit  $A$  l'opérateur associé à la matrice infinie  $\{a_{ji}\}$   
On pose

$$A_j = \{a_{ji}, i \in \mathbb{N}, j \text{ fixé}\}$$

$$A^i = \{a_{ji}, j \in \mathbb{N}, i \text{ fixé}\}.$$

On désigne par  $A^*$  l'opérateur associé à la matrice transposée de  $\{a_{ji}\}$ .

b) Soient  $\mathcal{L}$  et  $\mathfrak{m}$  deux espaces L.C.-monotones. On désignera par  $\Lambda$  et  $\tilde{\Lambda}$  les familles filtrantes de semi-normes qui définissent les topologies de  $\mathcal{L}$  et  $\tilde{\mathcal{L}}$ , et par  $\pi$  et  $\tilde{\pi}$  celles qui définissent les topologies de  $\mathfrak{m}$  et  $\tilde{\mathfrak{m}}$ .

---

(\*) Yu. I. Gribanov - Izv. Vyss. Uceb. Zaved. Matematika, 4, n°29 (1962), p. 38-48 ; et 3, n°34 (1963), p. 27-39.

On désigne par  $\{\text{mat} ; \mathcal{E} \rightarrow \mathfrak{m}, (P)\}$  l'ensemble des opérateurs matriciels qui définissent des applications de  $\mathcal{E}$  dans  $\mathfrak{m}$  possédant la propriété (P).

### §1. OPERATEURS MATRICIELS DEFINISSANT DES APPLICATIONS CONTINUES.

Soient  $\mathcal{E}$  et  $\mathfrak{m}$  deux espaces L.C.-monotones et soit  $A$  un opérateur matriciel définissant une application de  $\mathcal{E}$  dans  $\mathfrak{m}$ . On va étudier des conditions pour que cette application soit continue.

#### Conditions de continuité.-

On montre que l'application définie par  $A$  est nécessairement continue si  $\mathcal{E}$  est un espace tonnelé et si  $\mathfrak{m}$  est un espace pleinement complet. (\*)

#### Proposition 2.1. -

Soit  $\mathcal{E}$  un espace L.C.-monotone tonnelé et soit  $\mathfrak{m}$  un espace L.C.-monotone pleinement complet. Si l'opérateur matriciel  $A$  définit une application de  $\mathcal{E}$  dans  $\mathfrak{m}$ , alors cette application est continue.

Si  $A$  applique  $\mathcal{E}$  dans  $\mathfrak{m}$ , quel que soit  $X \in \mathcal{E}$  la

série  $\sum_{i=1}^{\infty} a_{ji}x_i = (X, A_j)$  converge, et on a  $AX = \{(X, A_j)\}$ .

---

(\*) Un espace localement convexe séparé  $E$  est dit pleinement complet si un sous-espace de son dual ~~est~~  $E'$  est fermé pour la topologie  $\sigma(E', E)$  lorsque son intersection avec le polaire dans  $E'$  de tout voisinage de 0 de  $E$  est fermé pour  $\sigma(E', E)$ .

Puisque  $\mathcal{Q}$  est tonnelé, il résulte de la proposition 1.21. que, quel que soit  $j$ ,  $A_j \in \mathcal{Q}$ .

Soit  $\{X_\alpha, \alpha \in \Gamma\}$  une suite généralisée de  $\mathcal{Q}$  convergeant vers  $X \in \mathcal{Q}$  et pour laquelle  $\{AX_\alpha\}$  converge vers  $Z = \{z_i\} \in \mathfrak{m}$ . D'une part, puisque  $\mathfrak{m}$  est un espace L.C.-monotone, il résulte de la propriété 1.6. que pour tout  $j$ ,  $(X_\alpha, A_j)$  tend vers  $z_j$ . D'autre part, puisque  $A_j \in \mathcal{Q}$ , il résulte de la proposition 1.16. que l'application  $X \rightarrow (X, A_j)$  est une fonctionnelle linéaire continue sur  $\mathcal{Q}$  et que par conséquent  $(X_\alpha, A_j)$  tend vers  $(X, A_j)$ . Les espaces  $\mathcal{Q}$  et  $\mathfrak{m}$  étant séparés, le graphe de l'application définie par  $A$  est donc fermé dans  $\mathcal{Q} \times \mathfrak{m}$ .

Puisque  $\mathcal{Q}$  est tonnelé et  $\mathfrak{m}$  est pleinement complet, il résulte d'une généralisation du théorème du graphe fermé (\*) que l'application définie par  $A$  est continue. \*

La condition de continuité ainsi obtenue a un caractère assez général. En effet, tous les espaces L.C.-monotones précédemment cités sont tonnelés et, par ailleurs, un espace de Banach, un espace de Fréchet, le dual fort d'un espace de Fréchet réflexif, sont des espaces pleinement complets.

Dans le paragraphe consacré aux opérateurs matriciels définissant des applications bornées, on trouvera d'autres conditions suffisantes de continuité qui sont obtenues en utilisant l'inégalité fondamentale et s'expriment à l'aide de propriétés des vecteurs lignes  $A_j$  ou des vecteurs colonnes  $A^i$ .

---

(\*) A.P. et W.J. Robertson - Proc. Glasgow. Math. Assoc., 3, 1956, p. 9-12.

Relation entre A et A\*.-

De la continuité de l'application définie par A sur des espaces L.C.-monotones, on déduit une propriété de continuité de l'application définie par A\*. On établit d'abord une proposition préliminaire qui sera souvent utilisée par la suite.

Proposition 2.2. -

Soient  $\mathcal{Q}$  et  $m$  deux espaces L.C.-monotones. Si  $A \in \{\text{mat} ; [\mathcal{Q}] \rightarrow m, \text{ continue}\}$ , alors  $A^*(\tilde{m}) \subset \tilde{\mathcal{Q}}$  et quels que soient  $X \in [\mathcal{Q}]$  et  $Y \in \tilde{m}$ , on a

$$(AX, Y) = (X, A^*Y) .$$

Soit  $Y \in \tilde{m}$ . Si  $A \in \{\text{mat} ; [\mathcal{Q}] \rightarrow m\}$ , l'application  $X \rightarrow (AX, Y)$  est une fonctionnelle linéaire sur  $[\mathcal{Q}]$ . D'après la définition de  $\tilde{m}$  et la proposition 1.15., il existe  $w \in \pi$  tel que pour tout  $X \in [\mathcal{Q}]$ , on ait

$$|(AX, Y)| \leq w(AX) w'(Y) .$$

Si A définit une application continue, il existe  $\lambda \in \Lambda$  et  $a > 0$  tels que, pour tout  $X \in [\mathcal{Q}]$ , on ait

$$w(AX) \leq a\lambda(X) .$$

Par conséquent, quel que soit  $X \in [\mathcal{Q}]$ , on a

$$|(AX, Y)| \leq a w'(Y) \lambda(X) ,$$

et l'application  $X \rightarrow (AX, Y)$  est donc continue sur  $[\mathcal{Q}]$ .

Il résulte de la proposition 1.17. qu'il existe  $Z = \{z_i\} \in \tilde{\mathcal{Q}}$  tel que pour tout  $X \in [\mathcal{Q}]$ , on ait

$$(AX, Y) = (X, Z) .$$

En particulier, si  $X$  est la suite dont tous les éléments sont nuls, sauf celui de rang  $i$  qui est égal à 1, on a

$$z_i = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ji} y_j .$$

Donc  $Z = A^*Y$ . L'égalité est établie et, puisque  $Z \in \tilde{\mathcal{Q}}$ , on a

$$A^*(\tilde{m}) \subset \tilde{\mathcal{Q}} \quad . \quad *$$

Soient  $[\mathcal{Q}]'$  et  $m'$  les duals forts de  $[\mathcal{Q}]$  et de  $m$ , et soit  $A'$  l'application adjointe de celle définie par  $A \in \{\text{mat} ; [\mathcal{Q}] \rightarrow m, \text{ continue}\}$ . Puisque  $\tilde{\mathcal{Q}}$  est isomorphe à  $[\mathcal{Q}]$  et  $\tilde{m}$  est isomorphe à un sous-espace  $m'_0$  de  $m'$ , il résulte de la proposition 2.2. que  $A^*$  définit l'application "transmuée" de la restriction de  $A'$  à  $m'_0$ .

D'après la théorie générale de la dualité, on a les deux résultats suivants (\*):

1) Si  $A \in \{\text{mat} ; [\mathcal{Q}] \rightarrow m, \text{ continue}\}$ , alors  $A'$  est une application continue de  $m'$  dans  $\mathcal{Q}'$ , donc aussi une application continue de  $m'_0$  dans  $\mathcal{Q}'$ .

2) Soient  $M$  une partie de  $[\mathcal{Q}]$ ,  $N$  une partie de  $m$ , et soient  $M^0$  et  $N^0$  leurs polaires respectifs dans  $[\mathcal{Q}]'$  et  $m'$ . Si  $A(M) \subset N$ , alors  $A'(N^0) \subset M^0$ .

---

(\*) N. Bourbaki - Espaces vectoriels topologiques. Chap. IV - §4.

On en déduit alors les deux propositions :

Proposition 2.3. -

Soient  $\mathcal{Q}$  et  $m$  deux espaces L.C.-monotones.

Si

$$A \in \{ \text{mat}; [\mathcal{Q}] \rightarrow m, \text{ continue} \} ,$$

alors

$$A^* \in \{ \text{mat}; \tilde{m} \rightarrow \hat{\mathcal{Q}}, \text{ continue} \} .$$

Proposition 2.4. -

Soient  $\mathcal{Q}$  et  $m$  deux espaces L.C.-monotones et soit  $A \in \{ \text{mat}; [\mathcal{Q}] \rightarrow m, \text{ continue} \}$ . Soient  $M$  une partie de  $[\mathcal{Q}]$ ,  $N$  une partie de  $m$  et soient  $M^0$  et  $N^0$  leurs polaires respectifs dans  $\hat{\mathcal{Q}}$  et  $\tilde{m}$ . Si  $A(M) \subset N$ , alors  $A^*(N^0) \subset M^0$ .

On notera que la proposition 2.3. permet d'obtenir de nouvelles conditions de continuité. Par exemple, si  $[\mathcal{Q}]$  est tonnelé, si  $m$  est pleinement complet et si  $A^*$  définit une application de  $[\mathcal{Q}]$  dans  $m$ , alors on a

$$A \in \{ \text{mat}; \tilde{m} \rightarrow \hat{\mathcal{Q}}, \text{ continue} \} .$$

Forme générale des applications linéaires continues.-

Les deux propositions suivantes mettent en évidence l'importance des applications définies par une matrice infinie parmi l'ensemble des applications linéaires continues sur des espaces L.C.-monotones.

Proposition 2.5. -

Soient  $\mathcal{Q}$  et  $m$  deux espaces L.C.-monotones. A toute application linéaire continue  $f$  de  $[\mathcal{Q}]$  dans  $m$  correspond un opérateur matriciel  $A$  tel qu'on ait pour tout  $X \in [\mathcal{Q}]$

$$f(X) = AX .$$

On a  $f(X) = \{\varphi_j(X)\}$ , où chaque  $\varphi_j$  est une application linéaire de  $[\mathcal{Q}]$  dans  $\mathbb{R}$ . Soit  $E_j$  la suite dont tous les éléments sont nuls sauf celui de rang  $j$  qui est égal à 1. L'espace  $\mathfrak{m}$  étant séparé, quel que soit  $j$ , il existe  $\omega \in \pi$  tel que  $\omega(E_j) \neq 0$ . Il résulte alors de la propriété  $A_3$  que lorsque  $f$  applique  $[\mathcal{Q}]$  dans  $\mathfrak{m}$ , on a

$$(1) \quad |\varphi_j(X)| \omega(E_j) \leq \omega[f(X)].$$

Si  $f$  est continue, quel que soit  $\omega \in \pi$ , il existe  $\lambda \in \Lambda$  et  $a > 0$  tels qu'on ait pour tout  $X \in [\mathcal{Q}]$

$$(2) \quad \omega[f(X)] \leq a\lambda(X).$$

Donc, compte tenu de (1) et (2), quel que soit  $j$ , il existe  $\lambda \in \Lambda$  et  $b = a[\omega(E_j)]^{-1}$  tels qu'on ait pour tout  $X \in [\mathcal{Q}]$

$$|\varphi_j(X)| \leq b\lambda(X).$$

Par conséquent, chaque  $\varphi_j$  est une fonctionnelle linéaire continue sur  $[\mathcal{Q}]$ . Il résulte alors de la proposition 1.17. qu'on a pour tout  $X = \{x_i\} \in [\mathcal{Q}]$

$$\varphi_j(X) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i^{(j)} x_i$$

où  $\{a_i^{(j)}\} \in \mathfrak{Q}$ . On a donc  $f(X) = \Lambda X$  où  $\Lambda$  est l'opérateur associé à la matrice  $\{a_{ji}\}$  avec  $a_{ji} = a_i^{(j)}$ . \*

Proposition 2.6. -

Soient  $\mathcal{Q}$  et  $\mathfrak{m}$  deux espaces L.C.-monotones tels que  $[\mathcal{Q}]$  et  $[\mathfrak{m}]$  soient tonnelés. A toute application linéaire continue  $f$  de  $\mathcal{Q}$  dans  $\mathfrak{m}$  correspondent un opérateur  $A \in \{\text{mat} ; \mathcal{Q} \rightarrow \hat{\mathfrak{m}}, \text{continue}\}$  et une application linéaire continue  $g$  de  $\mathcal{Q}$  dans  $\hat{\mathfrak{m}}$ , nulle sur  $[\mathcal{Q}]$  tels qu'on ait pour tout  $X \in \mathcal{Q}$

$$f(X) = AX + g(X)$$

On a  $f(X) = \{\varphi_j(X)\}$ . Par une démonstration analogue à celle utilisée dans la proposition précédente, on montre que chaque  $\varphi_j$  est une fonctionnelle linéaire continue sur  $\mathcal{Q}$ . Il résulte alors du corollaire 1.18. qu'on a pour tout  $X = \{x_i\} \in \mathcal{Q}$

$$\varphi_j(X) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i^{(j)} x_i + g_j(X)$$

où  $Y_j = \{a_i^{(j)}\} \in \tilde{\mathcal{Q}}$  et où  $g_j$  est une fonctionnelle linéaire continue sur  $\mathcal{Q}$  et nulle sur  $[\mathcal{Q}]$ .

On a donc

$$f(X) = AX + \{g_j(X)\}$$

où  $A$  est l'opérateur associé à la matrice  $\{a_{ji}\}$  avec  $a_{ji} = a_i^{(j)}$ .

Puisque  $\{g_j(X)\} = 0$  pour tout  $X \in [\mathcal{Q}]$ , on a

$$A \in \{\text{mat} ; [\mathcal{Q}] \rightarrow \mathfrak{m}, \text{continue}\}.$$

Par deux applications successives de la proposition 2.3., on obtient

$$A \in \{\text{mat} ; \tilde{\mathcal{Q}} \rightarrow \hat{\mathfrak{m}}, \text{continue}\}.$$

Si  $[\mathcal{Q}]$  est tonnelé, on a d'après la proposition 1.23.

$$A \in \{ \text{mat} ; \mathcal{Q} \rightarrow \hat{\tilde{m}}, \text{ continue} \} .$$

Si  $[m]$  est tonnelé,  $f$  est une application continue de  $\mathcal{Q}$  dans  $\hat{\tilde{m}}$ . Par conséquent, l'application  $g : X \rightarrow \{g_j(X)\}$  est une application continue de  $\mathcal{Q}$  dans  $\hat{\tilde{m}}$ , nulle sur  $[\mathcal{Q}]$ . \*

## §2. OPERATEURS MATRICIELS DEFINISSANT DES APPLICATIONS BORNEES.

Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels topologiques. Une application  $T$  de  $E$  dans  $F$  est dite bornée s'il existe un voisinage  $V$  de  $0$  de  $E$  tel que  $T(V)$  soit un sous-ensemble borné de  $F$ .

Une application linéaire bornée est continue. Par contre, une application linéaire continue n'est pas nécessairement bornée. Par exemple, si  $E$  est un espace localement convexe séparé non normable et si  $F = E$ , l'application identique est continue et n'est pas bornée puisqu'aucun voisinage de  $0$  n'est borné.

On se propose de chercher des conditions pour qu'un opérateur matriciel  $A$  définisse une application bornée d'un espace L.C.-monotone dans un autre espace L.C.-monotone.

Notation.-

Soit  $\mathcal{Q}$  un espace L.C.-monotone, et soit  $\lambda \in \Lambda$ .

On désigne par  $\tilde{\mathcal{Q}}_\lambda$  l'ensemble des  $Y \in \mathcal{S}$  tels que

$$\sup_{X \in [\mathcal{Q}], \lambda(X) \leq 1} |(X, Y)| < +\infty .$$

Il résulte de la définition de  $\tilde{\mathcal{Q}}$  que  $\tilde{\mathcal{Q}}_\lambda$  est un sous-espace vectoriel de  $\tilde{\mathcal{Q}}$ .

Conditions pour que  $\Lambda$  définisse une application bornée.-

Une première condition suffisante est obtenue en utilisant l'inégalité fondamentale.

Proposition 2.7. -

Soient  $\mathcal{Q}$  et  $m$  deux espaces L.C.-monotones. S'il existe  $\lambda \in \Lambda$  tel que, pour tout  $j \in \mathbb{N}$ , le vecteur ligne  $A_j \in \tilde{\mathcal{Q}}_\lambda$ , et si la suite  $B = \{\lambda'(A_j)\} \in m$ , alors

$$A \in \{\text{mat}; \mathcal{Q} \rightarrow m, \text{bornée}\} .$$

Puisque  $A_j \in \tilde{\mathcal{Q}}_\lambda$ , on a  $\lambda'(A_j) < +\infty$  et il résulte de la proposition 1.15. que, pour tout  $X \in \mathcal{Q}$ , on a

$$|(A_j, X)| \leq \lambda(X) \cdot \lambda'(A_j) .$$

Soit le voisinage de 0 dans  $\mathcal{Q}$   $V_\lambda = \{X \in \mathcal{Q} : \lambda(X) \leq 1, \lambda \in \Lambda\}$ . Pour tout  $X \in V_\lambda$ , on a  $|(A_j, X)| \leq \lambda'(A_j)$  et par conséquent

$$\Lambda X < B .$$

Donc  $\Lambda(V_\lambda)$  est inclus dans l'enveloppe normale de B. La suite B appartenant à  $m$ , il résulte de la propriété  $A_3$  que l'enveloppe normale de B est un sous-ensemble borné de  $m$ . Donc  $\Lambda$  définit une application bornée. \*

Il faut noter que les conditions sur les vecteurs lignes de la matrice  $\{a_{ji}\}$  indiquées dans la proposition 2.7. fournissent également des conditions pratiques de continuité de l'application définie par  $A$ .

Lorsque l'espace image est le dual fort d'un espace quasi-complet ou tonnelé, il y a identité dans cet espace entre les parties bornées et les parties faiblement bornées. On en déduit alors une condition nécessaire et suffisante pour qu'un opérateur matriciel soit borné.

Lemme .-

Soient  $\Phi$  et  $m$  deux espaces L.C.-monotones et soit  
 $V_\lambda = \{X \in [\Phi] : \lambda(X) \leq 1, \lambda \in \Lambda\}$  . On suppose que  
 $A \in \{\text{mat}; [\Phi] \rightarrow \tilde{m}, \text{continue}\}$  . Alors, pour que  $\Lambda(V_\lambda)$  soit  
borné pour la topologie  $\sigma(\tilde{m}, [m])$ , il faut et il suffit que  
 $A^*$  applique  $[m]$  dans  $\tilde{\Phi}_\lambda$ .

i) D'après la définition de la topologie  $\sigma(\tilde{m}, [m])$ , pour que  $\Lambda(V_\lambda)$  soit borné pour la topologie  $\sigma(\tilde{m}, [m])$ , il faut et il suffit que pour tout  $Y \in [m]$ , on ait

$$\sup_{X \in V_\lambda} |(AX, Y)| < +\infty .$$

ii) Si  $A \in \{\text{mat}; [\Phi] \rightarrow \tilde{m}, \text{continue}\}$ , il résulte de la proposition 2.2. et du fait que  $[m] \subset \tilde{m}$  que pour tout  $X \in [\Phi]$  et tout  $Y \in [m]$ , on a

$$(AX, Y) = (X, A^*Y)$$

iii) D'après i) et ii), pour que  $\Lambda(V_\lambda)$  soit borné pour  $\sigma(\tilde{m}, [m])$ , il faut et il suffit que pour tout  $Y \in [m]$ , on ait

$$\sup_{X \in V_\lambda} |(X, A^*Y)| < +\infty ,$$

ce qui signifie que  $A^*Y$  appartient à  $\tilde{\Phi}_\lambda$  . \*

Proposition 2.8. -

Soit  $\mathcal{E}$  un espace L.C.-monotone quelconque et soit  $m$  un espace L.C.-monotone tel que  $[m]$  soit quasi-complet ou tonnelé. Pour que  $A \in \{\text{mat}; [\mathcal{E}] \rightarrow \hat{m}, \text{bornée}\}$ , il faut et il suffit que

- 1)  $A \in \{\text{mat}; [\mathcal{E}] \rightarrow \hat{m}, \text{continue}\}$  .
- 2) Il existe  $\lambda \in \Lambda$  tel que  $A^* \in \{\text{mat}; [m] \rightarrow \hat{\mathcal{E}}_\lambda\}$  .

Si  $[m]$  est quasi-complet ou tonnelé,  $A(V_\lambda)$  est borné si et seulement si  $A(V_\lambda)$  est borné pour la topologie  $\sigma(\hat{m}, [m])$ .

Si les conditions 1) et 2) sont vérifiées, il résulte du lemme que  $A(V_\lambda)$  est borné pour  $\sigma(\hat{m}, [m])$ . Réciproquement, si  $A \in \{\text{mat}; [\mathcal{E}] \rightarrow \hat{m}, \text{bornée}\}$ ,  $A$  définit une application continue et de plus, il existe  $\lambda \in \Lambda$  tel que  $A(V_\lambda)$  soit borné. Donc d'après le lemme, la condition 2) est vérifiée. \*

Par exemple, soit  $A$  un opérateur matriciel symétrique ( $A = A^*$ ). Pour que  $A \in \{\text{mat}; \mathcal{E}^2 \rightarrow \hat{\mathcal{E}}^2, \text{bornée}\}$ , il faut et il suffit qu'il existe une semi-norme  $\lambda$  de  $\mathcal{E}^2$  telle que  $A \in \{\mathcal{E}^2 \rightarrow \hat{\mathcal{E}}^2_\lambda\}$ . Pour le démontrer, on utilise la proposition 2.8. et la proposition 2.1. en tenant compte de ce que  $\mathcal{E}^2 = [\mathcal{E}^2] = \hat{\mathcal{E}}^2$  est tonnelé et  $\hat{\mathcal{E}}^2$  est pleinement complet.

Relation entre  $A$  et  $A^*$ . -

On obtient des résultats analogues à ceux du paragraphe 1 lorsque  $[\mathcal{E}]$  est tonnelé.

Proposition 2.9. -

Soit  $\mathcal{Q}$  un espace L.C.-monotone tel que  $[\mathcal{Q}]$  soit tonnelé et soit  $\mathfrak{m}$  un espace L.C.-monotone quelconque.

Si

$$\Lambda \in \{ \text{mat}; [\mathcal{Q}] \rightarrow \mathfrak{m}, \text{ bornée} \} ,$$

alors

$$\Lambda^* \in \{ \text{mat}; \tilde{\mathfrak{m}} \rightarrow \hat{\mathcal{Q}}, \text{ bornée} \} .$$

Si l'application définie par  $\Lambda$  est bornée, elle est continue et d'après la proposition 2.2.,  $\Lambda^* \in \{ \text{mat}; \tilde{\mathfrak{m}} \rightarrow \hat{\mathcal{Q}} \} .$

Soit  $V$  un voisinage de  $0$  dans  $[\mathcal{Q}]$  tel que  $\Lambda(V)$  soit borné dans  $\mathfrak{m}$ . Il existe un sous-ensemble borné  $P$  du système fondamental de parties bornées de  $\mathfrak{m}$  tel que

$$\Lambda(V) \subset P .$$

Si  $V^0$  est le polaire de  $V$  dans  $\hat{\mathcal{Q}}$  et si  $P^0$  est le polaire de  $P$  dans  $\tilde{\mathfrak{m}}$ , on a d'après la proposition 2.4.

$$\Lambda^*(P^0) \subset V^0 .$$

Or  $P^0$  est un voisinage de  $0$  de  $\tilde{\mathfrak{m}}$  et, puisque  $[\mathcal{Q}]$  est tonnelé,  $V^0$  est une partie bornée de  $\hat{\mathcal{Q}}$ .

Donc  $\Lambda^*$  définit une application bornée. \*

En utilisant cette proposition, on obtient de nouvelles conditions pour qu'un opérateur matriciel  $\Lambda$  définisse une application bornée. Par exemple, en introduisant les vecteurs colonnes de la matrice  $\{a_{ji}\}$ , on a :

1) Si  $[\mathcal{Q}]$  est tonnelé, s'il existe  $\lambda \in \Lambda$  tel que, pour tout  $i > 0$ ,  $\Lambda^i \in \hat{\mathcal{Q}}_\lambda$  et si  $B = \{\lambda^i(\Lambda^i)\} \in \mathfrak{m}$ , alors  $\Lambda \in \{ \text{mat}; \tilde{\mathfrak{m}} \rightarrow \hat{\mathcal{Q}}, \text{ bornée} \} .$

2) Si  $[\mathcal{Q}]$  et  $[\tilde{\mathfrak{m}}]$  sont tonnelés, s'il existe  $\tilde{w} \in \tilde{\pi}$  tels que pour tout  $i > 0$ ,  $\Lambda^i \in \tilde{\mathfrak{m}}_{\tilde{w}}$  et si  $B = \{\tilde{w}^i(\Lambda^i)\} \in \hat{\mathcal{Q}}$ , alors  $\Lambda \in \{ \text{mat}; \mathcal{Q} \rightarrow \tilde{\mathfrak{m}}, \text{ bornée} \} .$

§3. OPERATEURS MATRICIELS DEFINISSANT DES APPLICATIONS  
PSEUDO-COMPLETEMENT CONTINUES.

La notion d'application complètement continue, définie pour les espaces normés, peut se généraliser de plusieurs façons au cas des espaces localement convexes. L'une de ces généralisations, introduite par M. J. Leray (\*), sera envisagée dans le paragraphe suivant. Au préalable, on va considérer une notion moins forte mais suffisante pour une partie de ce travail.

Définition 2.10. -

Soient E et F deux espaces localement convexes. Une application de E dans F sera dite pseudo-complètement continue si :

- 1) Elle est bornée,
- 2) Elle applique tout sous-ensemble borné de E sur un sous-ensemble relativement compact de F.

On notera que si E et F sont normés, cette définition coïncide avec celle de la complète continuité d'une application de E dans F.

Proposition 2.11. -

Soit E un espace localement convexe séparé, soit F un espace localement convexe séparé et quasi-complet et soit  $\{T_n\}$  une suite d'applications linéaires de E dans F qui converge uniformément sur un sous-ensemble M de E vers l'appli-

---

(\*) J. Leray - Acta Sci. Math. Szeged. 12 B, 1950, p. 177-186.

cation linéaire T de E dans F (\*). Si chaque  $T_n(M)$  est relativement compact, alors  $T(M)$  est relativement compact.

Soit  $W$  un voisinage de  $0$  de  $F$ . Par hypothèse  $T_n(M)$  est relativement compact, donc précompact dans  $F$ . Il existe donc un nombre fini de points  $Z_i^{(n)}$  de  $F$ ,  $1 \leq i \leq q$ , tels que

$$T_n(M) \subset \bigcup_{i=1}^q \left( Z_i^{(n)} + \frac{1}{2}W \right).$$

De plus,  $\{T_n\}$  convergeant vers  $T$  uniformément sur  $M$ , il existe  $N > 0$  tel que pour tout  $n \geq N$ ,  $(T - T_n)(M) \in \frac{1}{2}W$ . On a alors

$$T(M) \subset \bigcup_{i=1}^q \left( Z_i^{(n)} + W \right).$$

Par conséquent,  $T(M)$  est précompact dans  $F$ .

Mais, dans un espace localement convexe séparé et quasi-complet, l'enveloppe fermée convexe de tout ensemble précompact est compacte. Donc  $T(M)$  est relativement compact. \*

On se propose, en utilisant cette proposition, d'introduire et d'étudier différentes classes d'opérateurs matriciels définissant des applications pseudo-complètement continues d'un espace L.C.-monotone dans un autre espace L.C.-monotone.

---

(\*) La suite  $\{T_n\}$  converge uniformément sur  $M$  vers  $T$  si, quel que soit le voisinage  $W$  de  $0$  dans  $F$ , il existe  $N > 0$  tel que pour tout  $n \geq N$ , on ait  $(T - T_n)(M) \subset W$ .

Notations.-

Soit  $A$  l'opérateur matriciel associé à la matrice  $\{a_{ji}\}$

$A_{n,\infty}$  désigne l'opérateur associé à la matrice  $\{\alpha_{ji}\}$   
avec  $\alpha_{ji} = a_{ji}$  si  $j \leq n$ ,  $\alpha_{ji} = 0$  si  $j > n$ .

$A_{\infty,n}$  désigne l'opérateur associé à la matrice  $\{\beta_{ji}\}$   
avec  $\beta_{ji} = a_{ji}$  si  $i \leq n$ ,  $\beta_{ji} = 0$  si  $i > n$ .

$A_{n,n}$  désigne l'opérateur associé à la matrice  $\{\gamma_{ji}\}$   
avec  $\gamma_{ji} = a_{ji}$  si  $i \leq n$  et  $j \leq n$ ,  $\gamma_{ji} = 0$  si  $i > n$  ou  
 $j > n$ .

$A_n^{\infty,\infty}$  désigne l'opérateur associé à la matrice  $\{\delta_{ji}\}$   
avec  $\delta_{ji} = a_{ji}$  si  $i \leq n$  ou  $j \leq n$ ,  $\delta_{ji} = 0$  si  $i > n$  et  
 $j > n$ .

On remarquera que l'on a :

$$A_{n,\infty}X = P_1^{n+1}AX \quad ;$$

$$A_{\infty,n}X = AP_1^{n+1}X \quad ;$$

$$A_{n,n}X = P_1^{n+1}AP_1^{n+1}X \quad ;$$

$$A_n^{\infty,\infty}X = P_1^{n+1}AX + P_{n+1}^{\infty}AP_1^{n+1}X \quad .$$

Définition 2.12. -

Soient  $\mathcal{Q}$  et  $m$  deux espaces L.C.-monotones et soit  $A$   
un opérateur matriciel définissant une application de  $\mathcal{Q}$  dans  
 $m$ . Cette application sera dite  $\alpha$ -bornée (respectivement  
 $\beta$ -bornée,  $\gamma$ -bornée ou  $\delta$ -bornée) si

- 1) Elle est bornée,
- 2) Elle est limite uniforme sur tout sous-ensemble borné de  $\mathcal{L}$  de la suite des applications définies par les opérateurs  $A_{n,\infty}$  (respectivement  $A_{\infty,n}$ ,  $A_{n,n}$ , ou  $A_n^{\infty,\infty}$ ).

Proposition 2.13. -

Soient  $\mathcal{L}$  et  $m$  deux espaces L.C.-monotones. Si  $m$  est quasi-complet, toute application de  $\mathcal{L}$  dans  $m$  définie par un opérateur matriciel qui est  $\alpha$ -bornée, ou  $\beta$ -bornée, ou  $\gamma$ -bornée, ou  $\delta$ -bornée, est aussi une application pseudo-complètement continue.

$$a) \quad \underline{\{\text{mat}; \mathcal{L} \rightarrow m, \alpha\text{-bornée}\} \subset \{\text{mat}; \mathcal{L} \rightarrow m, \text{pseudo-comp.cont.}\}}.$$

Soit  $A \in \{\text{mat}; \mathcal{L} \rightarrow m, \alpha\text{-bornée}\}$  et soit  $M$  un sous-ensemble borné de  $\mathcal{L}$ .

On a

$$(1) \quad A_{n,\infty} X = P_1^{n+1} A X.$$

Il résulte de (1) et de la propriété  $A_3$  des espaces L.C.-monotones que  $A_{n,\infty}(M)$  est un sous-ensemble borné d'un sous-espace de  $m$  de dimension finie. Par conséquent  $A_{n,\infty}(M)$  est relativement compact dans  $m$ .

Puisque  $m$  est quasi-complet et puisque l'application définie par  $A$  est limite uniforme sur  $M$  des applications définies par  $\{A_{n,\infty}\}$ , il résulte de la proposition 2.11. que  $A(M)$  est relativement compact dans  $m$ .

Par conséquent,  $A \in \{\text{mat}; \mathcal{L} \rightarrow m, \text{pseudo-comp.cont.}\}.$

$$b) \quad \frac{\{\text{mat}; \mathcal{Q} \rightarrow m, \beta\text{-bornée}\}}{\subset \{\text{mat}; \mathcal{Q} \rightarrow m, \text{pseudo-comp.cont.}\}}.$$

Soit  $A \in \{\text{mat}; \mathcal{Q} \rightarrow m, \beta\text{-bornée}\}$  et soit  $M$  un sous-ensemble borné de  $\mathcal{Q}$ .

On a

$$(2) \quad A_{\infty, n} X = AP_1^{n+1} X.$$

D'après la propriété  $\Lambda_3$  des espaces L.C.-monotones, l'application de  $\mathcal{Q}$  dans un sous-espace de dimension finie de  $\mathcal{Q}$  définie par  $X \rightarrow P_1^{n+1} X$  est continue. Donc  $P_1^{n+1}(M)$  est un sous-ensemble relativement compact de  $\mathcal{Q}$ .

Puisque  $A$  définit une application bornée, donc continue de  $\mathcal{Q}$  dans  $m$ , il résulte de (2) que  $A_{\infty, n}(M)$  est relativement compacte dans  $m$ .

Alors, puisque  $m$  est quasi-complet et puisque l'application définie par  $A$  est limite uniforme sur  $M$  des applications définies par  $\{A_{\infty, n}\}$ , on a, d'après la proposition 2.11.,  $A \in \{\text{mat}; \mathcal{Q} \rightarrow m, \text{pseudo-comp.cont.}\}$ .

$$c) \quad \frac{\{\text{mat}; \mathcal{Q} \rightarrow m, \gamma\text{-bornée}\}}{\subset \{\text{mat}; \mathcal{Q} \rightarrow m, \text{pseudo-comp.cont.}\}}.$$

Soit  $A \in \{\text{mat}; \mathcal{Q} \rightarrow m, \gamma\text{-bornée}\}$  et soit  $M$  un sous-ensemble borné de  $\mathcal{Q}$ .

On a

$$(3) \quad A_{n, n} X = P_1^{n+1} AP_1^{n+1} X.$$

Comme dans b),  $AP_1^{n+1}(M)$  est relativement compacte dans  $m$ . Puisque  $P_1^{n+1}$  définit une application continue de  $m$  dans  $m$ ,  $A_{n, n}(M)$  est relativement compact.

L'inclusion est alors une conséquence de la proposition 2.11..

$$d) \quad \{\text{mat}; \mathcal{L} \rightarrow \mathfrak{m}, \delta\text{-bornée}\} \subset \{\text{mat}; \mathcal{L} \rightarrow \mathfrak{m}, \text{pseudo-comp.cont.}\}.$$

Soit  $A \in \{\text{mat}; \mathcal{L} \rightarrow \mathfrak{m}, \delta\text{-bornée}\}$  et soit  $M$  un sous-ensemble borné de  $\mathcal{L}$ .

On a

$$A_n^{\infty, \infty} X = A_{n, \infty} X + (A - A_{n, \infty})_{\infty, n} X.$$

On montre comme dans a) et b) que  $A_{n, \infty}(M)$  et  $(A - A_{n, \infty})_{\infty, n}(M)$  sont relativement compacts. Alors,  $\mathfrak{m}$  étant quasi-complet, il résulte de la proposition 2.11. que  $A \in \{\text{mat}; \mathcal{L} \rightarrow \mathfrak{m}, \text{ps.c.c.}\}.*$

Cette proposition met en évidence, lorsque  $\mathfrak{m}$  est quasi-complet, quatre sous-ensembles de l'ensemble des opérateurs matriciels définissant des applications pseudo-complètement continues. Il est alors utile de donner des conditions pour qu'un opérateur  $A$  appartienne à l'un de ces sous-ensembles.

Conditions pour que  $A$  définisse une application  $\alpha, \beta, \gamma$ -ou  $\delta$ -bornée.-

Les conditions suivantes sont obtenues en utilisant l'inégalité fondamentale.

Proposition 2.14. -

Soient  $\mathcal{L}$  et  $\mathfrak{m}$  deux espaces L.C.-monotones et soit  $A$  un opérateur matriciel. Si

$$1) \quad \text{Il existe } \lambda \in \Lambda \text{ telle que pour tout } j \in \mathbb{N}, \\ A_j \in \hat{\mathcal{L}}_{\lambda},$$

$$2) \quad B = \{\lambda'(A_j), j \in \mathbb{N}\} \in [m]$$

alors  $A \in \{\text{mat}; \mathcal{L} \rightarrow \mathfrak{m}, \alpha\text{-bornée}\}.$

Si les conditions 1) et 2) sont vérifiées, il résulte de la proposition 2.7. que  $A \in \{\text{mat}; \mathcal{Q} \rightarrow \mathfrak{m}, \text{bornée}\}$  .

Soit  $V = \{X \in \mathcal{Q}, \lambda(X) \leq 1\}$  . D'après la proposition 1.15., on a pour tout  $X \in V$

$$|(\mathbb{A}_j, X)| \leq \lambda'(\mathbb{A}_j) ,$$

et par conséquent aussi

$$(i) \quad |AX| < B .$$

Si  $B \in [\mathfrak{m}]$  , il résulte de la proposition 1.9. que la suite  $\{P_n^\infty B\}$  tend vers 0 dans  $[\mathfrak{m}]$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$  . Il résulte alors de (i) et de la propriété  $A_3$  des espaces L.C.-monotones que  $\{P_n^\infty AX\}$  tend vers 0 lorsque  $n \rightarrow +\infty$  et ceci uniformément lorsque  $X$  parcourt  $V$ .

Or, on a

$$(\mathbb{A} - \mathbb{A}_{n,\infty})X = P_n^\infty AX .$$

Donc les applications définies par  $\{\mathbb{A}_{n,\infty}\}$  convergent uniformément sur  $V$  vers l'application définie par  $\mathbb{A}$ . Soit  $M$  un sous-ensemble borné de  $\mathcal{Q}$  . Il est absorbé par  $V$ , donc les applications définies par  $\{\mathbb{A}_{n,\infty}\}$  convergent uniformément sur  $M$  vers l'application définie par  $\mathbb{A}$ . Donc  $\mathbb{A} \in \{\text{mat}; \mathcal{Q} \rightarrow \mathfrak{m}, \alpha\text{-bornée}\}$  . \*

Proposition 2.15. -

Soient  $\mathcal{Q}$  et  $\mathfrak{m}$  deux espaces L.C.-monotones et soit  $\mathbb{A}$  un opérateur matriciel. Si

1) Il existe  $\lambda \in \Lambda$  telle que pour tout  $j \in \mathbb{N}$  ,  
 $\mathbb{A}_j \in \hat{\mathcal{Q}}_\lambda$  ,

2)  $B = \{\lambda'(\mathbb{A}_j), j \in \mathbb{N}\} \in \mathfrak{m}$

3) Lorsque  $n \rightarrow +\infty$ , la suite  $\{B_n\}$ , avec  
 $B_n = \{\lambda'(P_n^\infty A_j), j \in \mathbb{N}\}$ , tend vers 0 dans  $m$ .

alors  $A \in \{\text{mat}; \mathcal{Q} \rightarrow m, \beta\text{-bornée}\}$ .

Si les conditions 1) et 2) sont vérifiées, il résulte de la proposition 2.7. que  $A \in \{\text{mat}; \mathcal{Q} \rightarrow m, \text{bornée}\}$ .

Quel que soit  $X \in \mathcal{Q}$ , on a

$$(A - A_{\infty, n})X = \{(P_{n+1}^\infty A_j, X)\}.$$

Soit  $V = \{X \in \mathcal{Q}, \lambda(X) \leq 1\}$ . D'après la proposition 1.15., on a pour tout  $X \in V$

$$|(P_{n+1}^\infty A_j, X)| \leq \lambda'(P_{n+1}^\infty A_j).$$

D'où pour tout  $X \in V$

$$|(A - A_{\infty, n})X| < B_{n+1}.$$

Par conséquent, si la condition 3) est vérifiée, les applications définies par  $\{A_{n, \infty}\}$  convergent uniformément sur  $V$  vers l'application définie par  $A$ . Il y a donc aussi convergence uniforme sur tout sous-ensemble borné de  $\mathcal{Q}$ .

Donc  $A \in \{\text{mat}; \mathcal{Q} \rightarrow m, \beta\text{-bornée}\} . *$

Proposition 2.16. -

Soient  $\mathcal{Q}$  et  $m$  deux espaces L.C.-monotones et soit  $A$  un opérateur matriciel. Si

1) Il existe  $\lambda \in \Lambda$  telle que, pour tout  $j \in \mathbb{N}$ ,  
 $A_j \in \mathcal{Q}_\lambda$ ,

2)  $B = \{\lambda'(A_j), j \in \mathbb{N}\} \in [m]$

3) Lorsque  $n \rightarrow +\infty$ , la suite  $\{B_n\}$ , avec  
 $B_n = \{\lambda'(P_n^\infty A_j), j \in \mathbb{N}\}$ , tend vers 0 dans  $m$ .

Alors  $A \in \{\text{mat}; \mathcal{Q} \rightarrow m, \gamma\text{-bornée}\}$ .

Si les conditions 1), 2) et 3) sont vérifiées, il résulte des propositions 2.14. et 2.15. que

$A \in \{\text{mat}; \mathcal{Q} \rightarrow m, \alpha\text{-bornée}\} \cap \{\text{mat}; \mathcal{Q} \rightarrow m, \beta\text{-bornée}\}$ .

Par ailleurs, quel que soit  $w \in \pi$ , on a, en utilisant la propriété  $A_3$  des espaces L.C.-monotones

$$w[(A - A_{n,n})X] \leq w[(A - A_{\infty,n})X] + w[(A - A_{n,\infty})X],$$

d'où il résulte que  $A \in \{\text{mat}; \mathcal{Q} \rightarrow m, \gamma\text{-bornée}\}$  . \*

Proposition 2.17. -

Soient  $\mathcal{Q}$  et  $m$  deux espaces L.C.-monotones et soit  $A$  un opérateur matriciel. Si

1) Il existe  $\lambda \in \Lambda$  telle que, pour tout  $j \in \mathbb{N}$ ,  
 $A_j \in \mathcal{Q}_\lambda$ ,

2)  $B = \{\lambda'(A_j), j \in \mathbb{N}\} \in m$

3) Lorsque  $n \rightarrow +\infty$ , la suite  $\{P_n^\infty B_n\}$ , avec  
 $B_n = \{\lambda'(P_n^\infty A_j), j \in \mathbb{N}\}$ , tend vers 0 dans  $m$ ,

Alors  $A \in \{\text{mat}; \mathcal{Q} \rightarrow m, \delta\text{-bornée}\}$ .

Si les conditions 1) et 2) sont vérifiées, il résulte de la proposition 2.7. que  $A \in \{\text{mat}; \mathcal{Q} \rightarrow m, \text{bornée}\}$ .

Quel que soit  $X \in \mathcal{Q}$ , on a

(i)  $(A - A_n^{\infty, \infty})X = P_{n+1}^\infty A P_{n+1}^\infty X$ .

Soit  $V = \{X \in \mathcal{L}, \lambda(X) \leq 1\}$ . D'après la proposition 1.15, on a pour tout  $X \in V$

$$|(P_{n+1}^{\infty} A_j, X)| \leq \lambda'(P_{n+1}^{\infty} A_j).$$

D'où, en utilisant (i)

$$|(A - A_n^{\infty, \infty})X| < P_{n+1}^{\infty} B_{n+1}.$$

Il résulte alors de la condition 3) que l'application définie par  $A$  est limite uniforme sur  $V$ , et donc aussi sur tout sous-ensemble borné de  $\mathcal{L}$ , des applications définies par  $\{A_n^{\infty, \infty}\}$ .

Donc  $A \in \{\text{mat}; \mathcal{L} \rightarrow m, \delta\text{-bornée}\} . *$

#### Relations entre $A$ et $A^*$ .

On cherche tout d'abord quelle propriété résulte pour  $A^*$  du fait que  $A$  définisse une application  $\alpha$ -,  $\beta$ -,  $\gamma$ -, ou  $\delta$ -bornée

Proposition 2.18. -

Soient  $\mathcal{L}$  et  $m$  deux espaces L.C.-monotones tels que  $[\mathcal{L}]$  et  $[m]$  soient tonnelés. On a

1) Si  $A \in \{\text{mat}; [\mathcal{L}] \rightarrow m, \alpha\text{-bornée}\}$ , alors  
 $A^* \in \{\text{mat}; \hat{m} \rightarrow \hat{\mathcal{L}}, \beta\text{-bornée}\}$

2) Si  $A \in \{\text{mat}; [\mathcal{L}] \rightarrow m, \beta\text{-bornée}\}$ , alors  
 $A^* \in \{\text{mat}; \hat{m} \rightarrow \hat{\mathcal{L}}, \alpha\text{-bornée}\}$

3) Si  $A \in \{\text{mat}; [\mathcal{L}] \rightarrow m, \gamma \text{ ou } \delta\text{-bornée}\}$ , alors  
 $A^* \in \{\text{mat}; \hat{m} \rightarrow \hat{\mathcal{L}}, \gamma \text{ ou } \delta\text{-bornée}\}$

Compte tenu de la proposition 2.9. il suffit de démontrer que si les opérateurs  $A_n \in \{\text{mat}; [\mathcal{Q}] \rightarrow \mathfrak{m}, \text{continues}\}$  définissent une suite d'applications qui convergent uniformément sur tout borné de  $[\mathcal{Q}]$  vers l'application définie par l'opérateur  $A \in \{\text{mat}; [\mathcal{Q}] \rightarrow \mathfrak{m}, \text{continue}\}$ , alors la suite d'applications définies par  $A_n^*$  converge uniformément sur tout borné de  $\tilde{\mathfrak{m}}$  vers l'application définie par  $A^*$ .

i) Soit  $\tilde{M}$  appartenant au système fondamental de parties bornées de  $\tilde{\mathfrak{m}}$ . Puisque  $[\mathfrak{m}]$  est tonnelé,  $\tilde{M}$  est le polaire d'un voisinage  $U$  de  $0$  de  $[\mathfrak{m}]$ . Il existe  $w \in \pi$  tel que, si  $V_w = \{X \in \mathfrak{m} : w(X) \leq a\}$ , on ait  $V_w \cap [\mathcal{Q}] \subset U$ . Il résulte du lemme 1.13. que le polaire  $V_w^0$  de  $V_w$  contient  $\tilde{M}$ .

ii) Soit alors  $\tilde{W}$  un voisinage de  $0$  de  $\hat{\mathcal{Q}}$ . C'est le polaire d'un sous-ensemble borné, convexe normal  $M$  de  $[\mathcal{Q}]$ . Par hypothèse, il existe  $N > 0$  tel que, pour tout  $n \geq N$ ,  $(A - A_n)M \subset V_w$ . Il résulte alors de la proposition 2.4. qu'on a

$$(A^* - A_n^*)V_w^0 \subset \tilde{W}$$

et, compte tenu de i)

$$(A^* - A_n^*)\tilde{M} \subset \tilde{W}$$

La proposition en résulte. \*

On déduit de cette proposition de nouvelles conditions pour qu'un opérateur matriciel  $A$  définisse une application  $\alpha$ - ou  $\beta$ -bornée. Ces conditions font intervenir les vecteurs colonnes  $A^i$  de la matrice  $\{a_{ji}\}$ .

Corollaire 2.19. -

Soit  $\mathcal{L}$  un espace L.C.-monotone tel que  $[\mathcal{L}]$  et  $[\tilde{\mathcal{L}}]$  soient tonnelés et soit  $\mathfrak{M}$  un espace L.C.-monotone tel que  $[\hat{\mathfrak{M}}]$  soit tonnelé. On a

1) S'il existe  $\tilde{\omega} \in \tilde{\pi}$  tel que pour tout  $i \in \mathbb{N}$ ,  $A^i \in \hat{\mathfrak{M}}_{\tilde{\omega}}$ ; si  $C = \{\tilde{\omega}'(A^i), i \in \mathbb{N}\} \in \tilde{\mathcal{L}}$  et si lorsque  $n \rightarrow +\infty$ , la suite  $\{C_n\}$ , avec  $C_n = \{\tilde{\omega}'(P_n^\infty A^i), i \in \mathbb{N}\}$  tend vers 0, alors  $A \in \{\text{mat}; \mathcal{L} \rightarrow \hat{\mathfrak{M}}, \alpha\text{-bornée}\}$ .

2) S'il existe  $\tilde{\omega} \in \tilde{\pi}$  tel que pour tout  $i \in \mathbb{N}$ ,  $A^i \in \hat{\mathfrak{M}}_{\tilde{\omega}}$ ; et si  $C = \{\tilde{\omega}'(A^i), i \in \mathbb{N}\} \in [\tilde{\mathcal{L}}]$ , alors  $A \in \{\text{mat}; \mathcal{L} \rightarrow \hat{\mathfrak{M}}, \beta\text{-bornée}\}$ .

3) Si les conditions de 1) et 2) sont vérifiées simultanément, alors  $A \in \{\text{mat}; \mathcal{L} \rightarrow \hat{\mathfrak{M}}, \gamma\text{-bornée}\}$ .

4) S'il existe  $\tilde{\omega} \in \tilde{\pi}$  tel que pour tout  $i \in \mathbb{N}$ ,  $A^i \in \hat{\mathfrak{M}}_{\tilde{\omega}}$ ; si  $C = \{\tilde{\omega}'(A_i), i \in \mathbb{N}\} \in \tilde{\mathcal{L}}$  et si lorsque  $n \rightarrow +\infty$ , la suite  $\{P_n^\infty C_n\}$  tend vers 0, alors  $A \in \{\text{mat}; \mathcal{L} \rightarrow \hat{\mathfrak{M}}, \delta\text{-bornée}\}$ .

On cherche maintenant si la pseudo-complète continuité de l'application définie par  $A$  entraîne celle de l'application définie par  $A^*$ .

D'une façon générale, on démontre la propriété suivante (\*):

" Soient  $E$  et  $F$  deux espaces localement convexes séparés,  $E'$  et  $F'$  leurs duals forts et soit  $T$  une application linéaire continue de  $E$  dans  $F$ . L'application  $T$  applique les sous-ensembles bornés de  $E$  dans des sous-ensembles précompacts si et seulement si l'application adjointe  $T'$  applique les sous-ensembles équicontinus de  $F'$  dans des sous-ensembles compacts de  $E'$  ".

---

(\*) A.P. et W.J. Robertson - Topological vector spaces, p. 152, lemme 6.

Proposition 2.20. -

Soient  $\mathcal{Q}$  et  $m$  deux espaces L.C.-monotones tels que  $[\mathcal{Q}]$  et  $[m]$  soient tonnelés et soit

$A \in \{\text{mat}; [\mathcal{Q}] \rightarrow m, \text{ pseudo-complètement continue} \}$  .

Alors, on a

$A^* \in \{\text{mat}; \tilde{m} \rightarrow \hat{\mathcal{Q}}, \text{ pseudo-complètement continue} \}$  .

Soit  $A \in \{\text{mat}; [\mathcal{Q}] \rightarrow m, \text{ pseudo-complètement continue} \}$  .

A définit une application bornée et applique tout sous-ensemble borné  $M$  de  $[\mathcal{Q}]$  dans un sous-ensemble compact (donc aussi précompact) de  $m$  .

i) Puisque  $[\mathcal{Q}]$  est tonnelé, il résulte de la proposition 2.9. que  $A^* \in \{\text{mat}; \tilde{m} \rightarrow \hat{\mathcal{Q}}, \text{ bornée} \}$  .

ii) D'après la propriété rappelée ci-dessus, l'application  $A'$ , adjointe de celle définie par  $A$ , applique les sous-ensembles équicontinus du dual fort  $m'$  de  $m$  dans des sous-ensembles compacts du dual fort  $[\mathcal{Q}]'$  de  $[\mathcal{Q}]$ . Or, on a vu que  $\tilde{m}$  est isomorphe à un sous-espace  $m'_0$  de  $m'$ , que  $\hat{\mathcal{Q}}$  est isomorphe à  $[\mathcal{Q}]'$  et que  $A^*$  définit l'application transmuée de la restriction de  $A'$  à  $m'_0$ . Par conséquent  $A^*$  transforme tout sous-ensemble équicontinu de  $\tilde{m}$  en un sous-ensemble relativement compact de  $\hat{\mathcal{Q}}$ . Or, puisque  $[m]$  est tonnelé, tout sous-ensemble borné  $\tilde{M}$  de  $\tilde{m}$  est équicontinu. Donc  $A^*(\tilde{M})$  est relativement compact dans  $\hat{\mathcal{Q}}$  . \*

Positions respectives des ensembles  $\{\text{mat}; \varphi \rightarrow m, \alpha-, \beta-, \gamma-$  ou  $\delta\text{-bornées}\}$ .-

Proposition 2.21. -

Soient  $\varphi$  et  $m$  deux espaces L.C.-monotones. On a  
 $\{\text{mat}; \varphi \rightarrow m, \alpha\text{-bornée}\} \cap \{\text{mat}; \varphi \rightarrow m, \beta\text{-bornée}\} \subset \{\text{mat}; \varphi \rightarrow m, \gamma\text{-bornée}\}$   
 $\{\text{mat}; \varphi \rightarrow m, \gamma\text{-bornée}\} \subset \{\text{mat}; \varphi \rightarrow m, \alpha\text{-bornée}\}.$

On a

$$(1) \quad (\Lambda - \Lambda_{n, \infty})X = P_{n+1}^{\infty} \Lambda X ,$$

$$(2) \quad (\Lambda - \Lambda_{\infty, n})X = \Lambda P_{n+1}^{\infty} X ,$$

$$(3) \quad (\Lambda - \Lambda_{n, n})X = P_1^{n+1} \Lambda P_{n+1}^{\infty} X + P_{n+1}^{\infty} \Lambda X .$$

i) Il résulte de (1) et (3) qu'on a

$$|(\Lambda - \Lambda_{n, \infty})X| < |(\Lambda - \Lambda_{n, n})X|$$

Donc, d'après la propriété  $\Lambda_3$  des espaces L.C.-monotones, quels que soient  $w \in \pi$  et  $X \in \varphi$ , on a

$$w[(\Lambda - \Lambda_{n, \infty})X] \leq w[(\Lambda - \Lambda_{n, n})X] ,$$

et par conséquent

$$\{\text{mat}; \varphi \rightarrow m, \gamma\text{-bornée}\} \subset \{\text{mat}; \varphi \rightarrow m, \alpha\text{-bornée}\}.$$

ii) D'après (3) on a

$$w[(\Lambda - \Lambda_{n, n})X] \leq w(P_1^{n+1} \Lambda P_{n+1}^{\infty} X) + w(P_{n+1}^{\infty} \Lambda X)$$

d'où, en utilisant la propriété  $\Lambda_3$  et les égalités (1) et (2),

$$w[(\Lambda - \Lambda_{n, n})X] \leq w[(\Lambda - \Lambda_{\infty, n})X] + w[(\Lambda - \Lambda_{n, \infty})X].$$

On en déduit

$$\{\text{mat}; \varphi \rightarrow m, \alpha\text{-bornée}\} \cap \{\text{mat}; \varphi \rightarrow m, \beta\text{-bornée}\} \subset \{\text{mat}; \varphi \rightarrow m, \gamma\text{-bornée}\}. *$$

Proposition 2.22. -

Soit  $\varphi$  un espace L.C.-monotone tel que  $[\varphi]$  et  $[\check{\varphi}]$  soient tonnelés et soit  $m$  un espace L.C.-monotone tel que  $[m]$  et  $[\check{m}]$  soient tonnelés. On a

$$\{\text{mat}; \varphi \rightarrow m, \gamma\text{-bornée}\} = \{\text{mat}; \varphi \rightarrow m, \alpha\text{-bornée}\} \cap \{\text{mat}; \varphi \rightarrow m, \beta\text{-bornée}\}.$$

i) D'après la proposition 2.21., on a

$$\{\text{mat}; \varphi \rightarrow m, \gamma\text{-bornée}\} \supset \{\text{mat}; \varphi \rightarrow m, \alpha\text{-bornée}\} \cap \{\text{mat}; \varphi \rightarrow m, \beta\text{-bornée}\}.$$

ii) Soit  $A \in \{\text{mat}; \varphi \rightarrow m, \gamma\text{-bornée}\}$ . Puisque  $[\varphi]$  et  $[m]$  sont tonnelés, il résulte de la proposition 2.18. que  $A^* \in \{\text{mat}; \check{m} \rightarrow \check{\varphi}, \gamma\text{-bornée}\}$ . Alors, d'après la proposition 2.21., on a  $A^* \in \{\text{mat}; \check{m} \rightarrow \check{\varphi}, \alpha\text{-bornée}\}$ , et puisque  $[\check{m}]$  et  $[\check{\varphi}]$  sont tonnelés, on en déduit  $A^{**} = A \in \{\text{mat}; \check{\varphi} \rightarrow \check{m}, \beta\text{-bornée}\}$ . Compte tenu de la proposition 1.23., on a aussi  $A \in \{\text{mat}; \varphi \rightarrow m, \beta\text{-bornée}\}$ . Comme par ailleurs  $A \in \{\text{mat}; \varphi \rightarrow m, \alpha\text{-bornée}\}$ , la proposition est établie. \*

Proposition 2.23. -

Soient  $\varphi$  et  $m$  deux espaces L.C.-monotones. On a  
 $\{\text{mat}; \varphi \rightarrow m, \alpha\text{-bornée}\} \cup \{\text{mat}; \varphi \rightarrow m, \beta\text{-bornée}\} \subset \{\text{mat}; \varphi \rightarrow m, \delta\text{-bornée}\}.$

i) On a  $(A - A_{n, \infty})X = P_{n+1}^\infty AX$  et  
 $(A - A_n^{\infty, \infty})X = P_{n+1}^\infty AP_{n+1}^\infty X$ . Soit  $A \in \{\text{mat}; \varphi \rightarrow m, \alpha\text{-bornée}\}$  et soit  $M$  un sous-ensemble borné de  $\varphi$ . L'enveloppe normale  $N$  de  $M$  est aussi bornée. Si  $X \in N$ ,  $P_{n+1}^\infty X \in N$  et on a donc

$$\sup_{X \in N} w[(A - A_n^{\infty, \infty})X] \leq \sup_{X \in N} w[(A - A_{n, \infty})X]$$

Il en résulte que les applications définies par  $\{A_n^{\infty, \infty}\}$  convergent vers  $A$  uniformément sur  $N$  et donc aussi sur  $M$ . D'où

$$\{\text{mat}; \varphi \rightarrow m, \alpha\text{-bornée}\} \subset \{\text{mat}; \varphi \rightarrow m, \delta\text{-bornée}\} .$$

ii) On a  $(A - A_n^{\infty, \infty})X = P_{n+1}^{\infty}(A - A_{\infty, n})X$  et par conséquent

$$w[(A - A_n^{\infty, \infty})X] \leq w[(A - A_{\infty, n})X] .$$

Soit  $A \in \{\text{mat}; \varphi \rightarrow m, \beta\text{-bornée}\}$ . Il résulte de l'inégalité précédente que  $A \in \{\text{mat}; \varphi \rightarrow m, \delta\text{-bornée}\}$ . \*

On va maintenant situer avec plus de précision chacun des ensembles étudiés par rapport à l'ensemble des opérateurs définissant des applications pseudo-complètement continues.

Proposition 2.24. -

Soit  $\varphi$  un espace L.C.-monotone et soit  $m$  un espace L.C.-monotone quasi-complet. On a

$$\{\text{mat}; \varphi \rightarrow m, \alpha\text{-bornée}\} = \{\text{mat}; \varphi \rightarrow m, \text{pseudo-comp. cont.}\}$$

si et seulement si  $[m] = m$ .

i) On suppose  $[m] = m$ . On considère l'opérateur  $A \in \{\text{mat}; \varphi \rightarrow m, \text{pseudo-comp. cont.}\}$ . L'application définie par  $A$  est bornée. Soit  $M$  un sous-ensemble borné de  $\varphi$ .  $A(M)$  est relativement compact dans  $[m]$ , donc, d'après la proposition 1.10. la suite  $\{P_n^{\infty}AX\}$  converge uniformément vers 0 lorsque  $X$  parcourt  $M$ . Mais,  $P_n^{\infty}AX = (A - A_{n, \infty})X$ . Donc

$$A \in \{\text{mat}; \varphi \rightarrow m, \alpha\text{-bornée}\} .$$

Par ailleurs, d'après la proposition 2.13., on a  $\{\text{mat}; \varphi \rightarrow m, \alpha\text{-bornée}\} \subset \{\text{mat}; \varphi \rightarrow m, \text{pseudo-comp. cont.}\}$ . Donc, on a

$$\{\text{mat}; \varphi \rightarrow m, \alpha\text{-bornée}\} = \{\text{mat}; \varphi \rightarrow m, \text{pseudo-comp. cont.}\} .$$

ii) On suppose  $[m] \neq m$ . Il existe  $C = \{a_j\} \in m$ ,  $C \notin [m]$ . Soit alors  $A$  l'opérateur associé à la matrice  $\{a_{ji}\}$  où  $a_{ji} = a_j$  si  $i = 1$  et  $a_{ji} = 0$  si  $i \neq 1$ . Soit  $E_1$  la suite dont tous les éléments sont nuls sauf le premier qui est égal à 1. On a  $AE_1 = C$  et  $(A - A_{n,\infty})E_1 = P_{n+1}^\infty C$ . Puisque  $C \notin [m]$ ,  $\{P_{n+1}^\infty C\}$  ne tend pas vers 0 quand  $n \rightarrow +\infty$ . Donc  $A \notin \{\text{mat}; \mathcal{L} \rightarrow m, \alpha\text{-bornée}\}$ .

Mais par ailleurs, il existe  $\lambda \in \Lambda$  tel que  $\lambda(E_1) \neq 0$ . Pour tout  $X \in V = \{X \in \mathcal{L}, \lambda(X) \leq 1\}$ , on a

$$|AX| < [\lambda(E_1)]^{-1} |C|.$$

Donc  $A \in \{\text{mat}; \mathcal{L} \rightarrow m, \text{bornée}\}$ . Comme pour tout  $n > 1$  et tout  $X \in \mathcal{L}$ , on a  $(A - A_{n,\infty})X = 0$ , on a aussi

$$A \in \{\text{mat}; \mathcal{L} \rightarrow m, \delta\text{-bornée}\},$$

donc

$$A \in \{\text{mat}; \mathcal{L} \rightarrow m, \text{pseudo-complètement continue}\}. *$$

Proposition 2.25. -

Soit  $\mathcal{L}$  un espace L.C.-monotone tel que  $[\mathcal{L}]$  et  $[\hat{\mathcal{L}}]$  soient tonnelés et soit  $m$  un espace L.C.-monotone quasi-complet tel que  $[m]$  et  $[\hat{m}]$  soient tonnelés. On a

$$\{\text{mat}; \mathcal{L} \rightarrow m, \beta\text{-bornée}\} = \{\text{mat}; \mathcal{L} \rightarrow m, \text{pseudo-comp.cont.}\}$$

si et seulement si  $\hat{\mathcal{L}} = [\hat{\mathcal{L}}]$ .

i) On suppose  $\hat{\mathcal{L}} = [\hat{\mathcal{L}}]$ . D'après la proposition 2.13., on a déjà

$$\{\text{mat}; \mathcal{L} \rightarrow m, \beta\text{-bornée}\} \subset \{\text{mat}; \mathcal{L} \rightarrow m, \text{pseudo-comp.cont.}\}.$$

Soit alors  $A \in \{\text{mat}; \mathcal{L} \rightarrow m, \text{pseudo-comp.cont.}\}$ . D'après la proposition 2.20., puisque  $[\mathcal{L}]$  et  $[m]$  sont tonnelés, on a

$$A^* \in \{\text{mat}; \hat{m} \rightarrow \hat{\mathcal{L}}, \text{pseudo-comp.cont.}\}.$$

Mais,  $[\mathcal{L}]$  étant tonnelé,  $\hat{\mathcal{L}}$  est quasi-complet. Il résulte alors de la proposition 2.24. que  $A^* \in \{\text{mat}; \hat{m} \rightarrow \hat{\mathcal{L}}, \alpha\text{-bornée}\}$ .

Mais,  $[\tilde{\mathcal{Q}}]$  et  $[\tilde{m}]$  étant tonnelés, on a d'après la proposition 2.18.,  $\Lambda = \Lambda^{**} \in \{\text{mat}; \tilde{\mathcal{Q}} \rightarrow \tilde{m}, \beta\text{-bornée}\}$ , d'où compte tenu de la proposition 1.23.,  $\Lambda \in \{\text{mat}; \mathcal{Q} \rightarrow m, \beta\text{-bornée}\}$ .

Donc, on a

$$\{\text{mat}; \mathcal{Q} \rightarrow m, \beta\text{-bornée}\} \supset \{\text{mat}; \mathcal{Q} \rightarrow m, \text{pseudo-comp. cont.}\} .$$

ii) On suppose  $\tilde{\mathcal{Q}} = [\tilde{\mathcal{Q}}]$ . Il existe  $D = \{a_i\} \in \tilde{\mathcal{Q}}$ ,  $D \notin [\tilde{\mathcal{Q}}]$ . On considère l'opérateur  $\Lambda$  associé à la matrice  $\{a_{ji}\}$  où  $a_{ji} = a_i$  si  $j = 1$  et  $a_{ji} = 0$  si  $j > 1$ . Il résulte de la proposition 2.14. que  $\Lambda \in \{\text{mat}; \mathcal{Q} \rightarrow m, \alpha\text{-bornée}\}$ . Donc, on a  $\Lambda \in \{\text{mat}; \mathcal{Q} \rightarrow m, \text{pseudo-comp. cont.}\}$ . Or, on a par ailleurs  $\Lambda \notin \{\text{mat}; \mathcal{Q} \rightarrow m, \beta\text{-bornée}\}$ , car, sinon il résulterait de la proposition 2.18. que  $\Lambda^*$  appartiendrait à  $\{\text{mat}; \tilde{m} \rightarrow \tilde{\mathcal{Q}}, \alpha\text{-bornée}\}$  et alors on aurait  $\Lambda^*(\tilde{m}) \subset [\tilde{\mathcal{Q}}]$  ce qui contredirait le fait que  $\Lambda^*E_1 = D \notin [\tilde{\mathcal{Q}}]$ . \*

Proposition 2.26. -

Soit  $\mathcal{Q}$  un espace L.C.-monotone et  $m$  un espace L.C.-monotone quasi-complet. Si on a  $[m] \neq m$  et  $[\tilde{\mathcal{Q}}] \neq \tilde{\mathcal{Q}}$ , alors l'inclusion

$\{\text{mat}; \mathcal{Q} \rightarrow m, \delta\text{-bornée}\} \subset \{\text{mat}; \mathcal{Q} \rightarrow m, \text{pseudo-comp. cont.}\}$   
est une inclusion stricte.

Soient  $C = \{c_i\} \in \tilde{\mathcal{Q}}$ ,  $C \notin [\tilde{\mathcal{Q}}]$  et  $D = \{d_j\} \in m$ ,  $D \notin [m]$ . On considère l'opérateur  $\Lambda$  associé à la matrice  $\{a_{ji}\}$  avec  $a_{ji} = c_i d_j$ . On a

$$\Lambda X = (C, X)D$$

Puisque  $C \in \tilde{\mathcal{Q}}$ , il existe  $\lambda \in \Lambda$  tel que  $\lambda'(C) < +\infty$ . D'après l'inégalité fondamentale de la proposition 1.15., on a

$$|(C, X)| \leq \lambda(X) \lambda'(C) .$$

Soit  $M$  un sous-ensemble borné de  $\mathcal{Q}$ . Il existe  $m > 0$  tel que, pour tout  $X \in M$ , on ait  $\lambda(X) \leq m$ . Alors, pour tout  $X \in M$ , on a

$$AX = \mu D \text{ avec } |\mu| \leq m \lambda'(0) .$$

Donc  $A(M)$  est un sous-ensemble borné d'un sous-espace de  $m$  de dimension 1, et par conséquent, il est relativement compact. D'où

$$A \in \{ \text{mat}; \mathcal{Q} \rightarrow m, \text{pseudo-comp. cont.} \} .$$

Par ailleurs, on a

$$(A - A_n^{\infty, \infty})X = (P_{n+1}^{\infty}C, X)P_{n+1}^{\infty}D ,$$

et donc

$$\omega[(A - A_n^{\infty, \infty})X] \leq |(P_{n+1}^{\infty}C, X)| \omega(P_{n+1}^{\infty}D) .$$

Puisque  $D \notin [m]$ , il résulte de la proposition 1.8. et du fait que  $\omega(P_{n+1}^{\infty}D)$  est une fonction décroissante de  $n$ , qu'il existe  $\omega \in \pi$  et  $\alpha > 0$  tels que pour tout  $n$

$$\omega(P_{n+1}^{\infty}D) > \alpha .$$

Puisque  $C \notin [\mathcal{Q}]$ , il résulte de la proposition 1.8. qu'il existe un sous-ensemble borné normal convexe  $M$  de  $[\mathcal{Q}]$  et  $\beta > 0$  tels que pour tout  $N > 0$ , il existe  $n > N$  pour lequel

$$\tilde{\lambda}_M(P_{n+1}^{\infty}C) > \beta .$$

Or

$$\tilde{\lambda}_M(P_{n+1}^{\infty}C) = \sup_{X \in M} |(P_{n+1}^{\infty}C, X)| .$$

Donc, il existe un sous-ensemble borné  $M$  de  $\mathcal{C}$ ,  $\beta > 0$ , et quel que soit  $N > 0$ , un entier  $n_0 > N$  et  $X_0 \in M$  tels que

$$|(P_{n_0+1}^\infty \mathcal{C}, X_0)| > \frac{\beta}{2}.$$

On a alors

$$\mathfrak{w}[(\Lambda - \Lambda_{n_0}^{\infty, \infty})X_0] > \frac{\alpha\beta}{2} > 0$$

Donc  $\{\Lambda_n^{\infty, \infty}\}$  définit une suite d'applications qui ne converge pas uniformément sur  $M$  vers l'application définie par  $\Lambda$ .

Donc  $\Lambda \notin \{\text{mat}; \mathcal{C} \rightarrow m, \delta\text{-bornée}\}.$  \*

Récapitulation.-

Les principaux résultats obtenus sont résumés dans le tableau ci-dessous.  
La notation  $\subset$  indique une inclusion stricte.

$H_1$ . -  $\mathcal{L}$  et  $m$  L.C.-monotones,  $m$  quasi-complet.

$$\begin{aligned} \{\text{mat}; \mathcal{L} \rightarrow m, \alpha\text{-bornée}\} \cap \{\text{mat}; \mathcal{L} \rightarrow m, \beta\text{-bornée}\} &\subset \{\text{mat}; \mathcal{L} \rightarrow m, \gamma\text{-bornée}\} \subset \{\text{mat}; \mathcal{L} \rightarrow m, \alpha\text{-bornée}\} \\ \{\text{mat}; \mathcal{L} \rightarrow m, \alpha\text{-bornée}\} \cup \{\text{mat}; \mathcal{L} \rightarrow m, \beta\text{-bornée}\} &\subset \{\text{mat}; \mathcal{L} \rightarrow m, \delta\text{-bornée}\} \subset \{\text{mat}; \mathcal{L} \rightarrow m, \text{pseudo-comp. cont.}\} \end{aligned}$$

$H_2$ . -  $\mathcal{L}$  et  $m$  L.C.-monotones,  $m$  quasi-complet,  $[\mathcal{L}]$ ,  $[\tilde{\mathcal{L}}]$ ,  $[m]$  et  $[\tilde{m}]$  tonnelés.

a)  $[m] = m$  et  $[\tilde{\mathcal{L}}] = \tilde{\mathcal{L}}$ .

$$\{\text{mat}; \mathcal{L} \rightarrow m, \gamma\text{-bornée}\} = \{\text{mat}; \mathcal{L} \rightarrow m, \beta\text{-b.}\} = \{\text{mat}; \mathcal{L} \rightarrow m, \alpha\text{-b.}\} = \{\text{mat}; \mathcal{L} \rightarrow m, \delta\text{-b.}\} = \{\text{mat}; \mathcal{L} \rightarrow m, \text{pseudo-comp. cont.}\}$$

b)  $[m] = m$  et  $[\tilde{\mathcal{L}}] \neq \tilde{\mathcal{L}}$ .

$$\{\text{mat}; \mathcal{L} \rightarrow m, \gamma\text{-bornée}\} = \{\text{mat}; \mathcal{L} \rightarrow m, \beta\text{-b.}\} \subset \{\text{mat}; \mathcal{L} \rightarrow m, \alpha\text{-b.}\} = \{\text{mat}; \mathcal{L} \rightarrow m, \delta\text{-b.}\} = \{\text{mat}; \mathcal{L} \rightarrow m, \text{pseudo-comp. cont.}\}$$

c)  $[m] \neq m$  et  $[\tilde{\mathcal{L}}] = \tilde{\mathcal{L}}$ .

$$\{\text{mat}; \mathcal{L} \rightarrow m, \gamma\text{-bornée}\} = \{\text{mat}; \mathcal{L} \rightarrow m, \alpha\text{-b.}\} \subset \{\text{mat}; \mathcal{L} \rightarrow m, \beta\text{-b.}\} = \{\text{mat}; \mathcal{L} \rightarrow m, \delta\text{-b.}\} = \{\text{mat}; \mathcal{L} \rightarrow m, \text{pseudo-comp. cont.}\}$$

d)  $[m] \neq m$  et  $[\tilde{\mathcal{L}}] \neq \tilde{\mathcal{L}}$ .

$$\{\text{mat}; \mathcal{L} \rightarrow m, \gamma\text{-bornée}\} = \{\text{mat}; \mathcal{L} \rightarrow m, \alpha\text{-bornée}\} \cap \{\text{mat}; \mathcal{L} \rightarrow m, \beta\text{-bornée}\}$$

$$\begin{aligned} \{\text{mat}; \mathcal{L} \rightarrow m, \alpha\text{-bornée}\} \\ \{\text{mat}; \mathcal{L} \rightarrow m, \beta\text{-bornée}\} \end{aligned} \begin{array}{l} \searrow \\ \nearrow \end{array} \subset \{\text{mat}; \mathcal{L} \rightarrow m, \delta\text{-bornée}\} \subset \{\text{mat}; \mathcal{L} \rightarrow m, \text{pseudo-comp. cont.}\}$$

§4. OPERATEURS MATRICIELS DEFINISSANT DES APPLICATIONS  
COMPLETEMENT CONTINUES.

On considère maintenant la notion d'application complètement continue telle qu'elle a été généralisée par M. J. Leray pour étendre aux espaces localement convexes les résultats de la théorie de Fredholm.

Définition 2.27. -

Soient E et F deux espaces localement convexes. Une application f de E dans F est complètement continue si

- 1) f est continue,
- 2) Il existe un voisinage V de 0 de E tel que f(V) soit relativement compact dans F.

Lorsque E et F sont des espaces normés, on retrouve la notion habituelle d'application complètement continue.

On notera que si f est linéaire, la condition 2) entraîne la condition 1) et aussi que toute application linéaire complètement continue est pseudo-complètement continue.

On se propose d'étudier des opérateurs matriciels qui définissent des applications complètement continues d'un espace L.C.-monotone  $\mathcal{Q}$  dans un espace L.C.-monotone  $\mathcal{M}$ .

Définition 2.28. -

Soient  $\mathcal{L}$  et  $m$  deux espaces L.C.-monotones et soit  $A$  un opérateur matriciel définissant une application de  $\mathcal{L}$  dans  $m$ . Cette application sera dite  $V$ - $\alpha$ -bornée (respectivement  $V$ - $\beta$ -bornée,  $V$ - $\gamma$ -bornée ou  $V$ - $\delta$ -bornée) si

1) Il existe un voisinage  $V$  de  $0$  de  $\mathcal{L}$  tel que  $A(V)$  soit borné dans  $m$ .

2) Cette application est limite uniforme sur  $V$  de la suite des applications définies par les opérateurs  $A_{n,\infty}$  (respectivement  $A_{\infty,n}$ ,  $A_{n,n}$  ou  $A_n^{\infty,\infty}$ ).

On notera que les conditions indiquées dans la proposition 2.14., 2.15., 2.16. ou 2.17. sont suffisantes pour que l'application définie par  $A$  soit respectivement  $V$ - $\alpha$ -bornée,  $V$ - $\beta$ -bornée,  $V$ - $\gamma$ -bornée ou  $V$ - $\delta$ -bornée.

Par des démonstrations analogues à celles du paragraphe 3, on obtient les résultats suivants.

Proposition 2.29. -

Soient  $\mathcal{L}$  et  $m$  deux espaces L.C.-monotones. On a

$$\{\text{mat}; \mathcal{L} \rightarrow m, V\text{-}\alpha\text{-bornée}\} \cap \{\text{mat}; \mathcal{L} \rightarrow m, V\text{-}\beta\text{-bornée}\} \subset \{\text{mat}; \mathcal{L} \rightarrow m, V\text{-}\gamma\text{-bornée}\}$$

$$\{\text{mat}; \mathcal{L} \rightarrow m, V\text{-}\gamma\text{-bornée}\} \subset \{\text{mat}; \mathcal{L} \rightarrow m, V\text{-}\alpha\text{-bornée}\}$$

$$\{\text{mat}; \mathcal{L} \rightarrow m, V\text{-}\alpha\text{-bornée}\} \cup \{\text{mat}; \mathcal{L} \rightarrow m, V\text{-}\beta\text{-bornée}\} \subset \{\text{mat}; \mathcal{L} \rightarrow m, V\text{-}\delta\text{-bornée}\}.$$

Proposition 2.30. -

Soient  $\mathcal{L}$  et  $m$  deux espaces L.C.-monotones. Si  $m$  est quasi-complet, on a

- 1)  $\{\text{mat}; \mathcal{L} \rightarrow m, V\text{-}\gamma\text{-bornée}\} \subset \{\text{mat}; \mathcal{L} \rightarrow m, \text{comp. cont.}\}$
- 2)  $\{\text{mat}; \mathcal{L} \rightarrow m, V\text{-}\alpha\text{-bornée}\} \subset \{\text{mat}; \mathcal{L} \rightarrow m, \text{comp. cont.}\}$

Il ne semble pas possible, en général, d'obtenir d'autres résultats analogues à ceux du paragraphe précédent. En effet, soit  $V$  un voisinage de  $0$  de  $\mathcal{L}$  et soit  $V^{(n)} = \{P_1^{n+1}X, X \in V\}$ . On a  $A_{\infty, n}(V) = A(V^{(n)})$ . Mais, en général  $V^{(n)}$  n'est pas un sous-ensemble borné de  $\mathcal{L}$  et on ne peut pas pousser plus loin une démonstration analogue à celle de la proposition 2.13.b).

Toutefois, on démontre :

Proposition 2.31. -

Soient  $\mathcal{L}$  et  $m$  deux espaces L.C.-monotones. On suppose qu'il existe une norme  $\lambda \in \Lambda$  et on pose  $V_\lambda = \{X \in \mathcal{L} : \lambda(X) \leq 1\}$ . Alors, si  $m$  est quasi-complet, on a

$$\{\text{mat}; \mathcal{L} \rightarrow m, V_\lambda\text{-}\beta\text{-bornée}\} \subset \{\text{mat}; \mathcal{L} \rightarrow m, \text{complètement continue}\}.$$

Soit  $E_i$  la suite dont tous les éléments sont nuls sauf celui de rang  $i$  qui est égal à  $1$ . Si  $\lambda$  est une norme, on a, quel que soit  $i$ ,  $\lambda(E_i) \neq 0$ . Alors, pour tout  $X = \{x_i\} \in V_\lambda$ , on a d'après la propriété  $A_3$  des espaces L.C.-monotones

$$|x_i| \leq [\lambda(E_i)]^{-1}.$$

Par conséquent  $V_\lambda^{(n)}$  est un sous-ensemble borné d'un sous-espace de  $\mathcal{L}$  de dimension finie. Donc  $V_\lambda^{(n)}$  est relativement compact. L'application définie par  $A$  étant continue,  $A(V_\lambda^{(n)})$  est relativement compact.

La proposition résulte alors de la proposition 2.11. \*

En conservant les mêmes notations et en supposant encore que  $\lambda$  est une norme et que  $m$  est quasi-complet, on aura de même

$$\{\text{mat}; \mathcal{L} \rightarrow m, V_\lambda\text{-}\delta\text{-bornée}\} \subset \{\text{mat}; \mathcal{L} \rightarrow m, \text{complètement continue}\}.$$

Enfin, la complète continuité d'une application  $T$  n'entraîne pas, en général, la complète continuité de l'application adjointe  $T'$ , ce qui nuit à la poursuite de l'analogie entre les propriétés des applications complètement continues et celles des applications pseudo-complètement continues.



CHAPITRE III.

SYSTEMES INFINIS LINEAIRES.

Soit une matrice infinie  $\{a_{ji}\}$  à coefficients réels  
et soit une suite réelle  $Y = \{y_i\}$ .

On considère le système infini (L) d'équations linéaires

$$(L) \quad x_j - \sum_{i=1}^{\infty} a_{ji} x_i = y_j \quad , \quad (j \in \mathbb{N})$$

et on lui associe les systèmes finis  $(L_n)$  de  $n$  équations à  
 $n$  inconnues

$$(L_n) \quad x_j - \sum_{i=1}^{i=n} a_{ji} x_i = y_j \quad (1 \leq j \leq n).$$

Soit  $X = \{x_i, i \in \mathbb{N}\}$  une solution de (L) et soit  
 $X_n = \{x_i^{(n)}, 1 \leq i \leq n\}$  une solution de  $(L_n)$ .

Dans le cas où l'opérateur linéaire associé à la matrice  $\{a_{ji}\}$  opère sur  $\mathcal{Q}^{\mathbb{P}}$ , Von Koch et Riesz (\*) ont donné des conditions pour que la méthode des réduites s'applique, c'est-à-dire pour qu'on ait, quel que soit  $i \in \mathbb{N}$ ,

$$x_i = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_i^{(n)} .$$

On se propose d'étendre cette méthode au cas où l'opérateur linéaire associé à  $\{a_{ji}\}$  définit un endomorphisme d'un espace L.C.-monotone. Dans ce but, on commencera par établir une extension aux endomorphismes complètement continus d'un espace localement convexe des propriétés classiques des endomorphismes complètement continus d'espaces de Banach.

Il faut noter qu'on obtiendra, comme cas particulier, les résultats de Griбанov (\*\*\*) sur la résolution des systèmes infinis linéaires dans les "espaces de coordonnées".

## §1. ENDOMORPHISMES COMPLETEMENT CONTINUS D'ESPACES LOCALEMENT CONVEXES.

Soit un espace vectoriel localement convexe  $E$ , réel et séparé. On désigne par  $\Lambda$  la famille des semi-normes définissant la topologie de  $E$ .

---

(\*) F. Riesz - Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues. Gauthier-Villars (1913).

(\*\*) Yu. Griбанov - Izv. Vyss. Uceb. Zaved. Matematika, 2, n°39, 1964, p. 53-64.

On considère l'ensemble des endomorphismes continus de  $E$ . Cet ensemble est un espace vectoriel localement convexe lorsqu'on le munit de la topologie "de la convergence bornée" qui est définie par les semi-normes

$$p_{M,\lambda}(T) = \sup_{x \in M} \lambda[Tx] ,$$

où  $\lambda$  parcourt  $\Lambda$  et où  $M$  parcourt l'ensemble des parties bornées de  $E$ .

Cet ensemble des endomorphismes continus de  $E$  est aussi une algèbre unitaire. On notera  $I$  l'unité, c'est-à-dire l'application identique de  $E$ .

On désignera par  $\mathfrak{L}(E)$  l'algèbre des endomorphismes continus de  $E$ , munie de la topologie de la convergence bornée.

Lemme 3.1. -

La multiplication :  $(S, T) \rightarrow S.T$  est une application de  $\mathfrak{L}(E) \times \mathfrak{L}(E)$  dans  $\mathfrak{L}(E)$  qui est continue par rapport à chacun des arguments.

i) Soit  $M$  un sous-ensemble borné de  $E$ , et soit  $\lambda \in \Lambda$ .  
On a

$$p_{M,\lambda}(ST - S_0T) = \sup_{x \in M} \lambda[(S - S_0)Tx] .$$

L'endomorphisme  $T$  étant continu,  $T(M)$  est un sous-ensemble borné de  $E$ . Par conséquent, il existe un sous-ensemble borné  $M'$  de  $E$  tel que

$$p_{M,\lambda}(ST - S_0T) \leq p_{M',\lambda}(S - S_0) .$$

La continuité de la multiplication par rapport à  $S$  en résulte.

ii) On a de même

$$p_{M,\lambda}(ST - ST_0) = \sup_{x \in M} \lambda[S(T - T_0)x] .$$

L'endomorphisme  $S$  étant continu, il existe  $\mu \in \Lambda$  et  $a > 0$  tels qu'on ait pour tout  $y \in E$

$$\lambda(Sy) \leq a \mu(y) .$$

On en déduit

$$p_{M,\lambda}(ST - ST_0) \leq a p_{M,\mu}(T - T_0) ,$$

d'où résulte la continuité de la multiplication par rapport à  $T$ . \*

Un endomorphisme de  $E$  est dit borné s'il existe un voisinage  $V$  de  $0$  dans  $E$  dont l'image est un sous-ensemble borné de  $E$ .

On considèrera une suite d'endomorphismes bornés de  $E$  et il sera nécessaire que ce soit le même voisinage  $V$  dont les images sont des sous-ensembles bornés. On utilisera alors la notation suivante :

Un endomorphisme  $T$  de  $E$  est  $V$ -borné s'il existe un voisinage  $V$  de  $0$  dans  $E$  tel que  $T(V)$  soit borné.

Définition 3.2. -

Un endomorphisme  $T$  de  $E$  est  $V$ -contractant s'il existe un nombre  $\alpha$ ,  $0 < \alpha < 1$ , tel que  $T(V) \subset \alpha V$ .

On a la proposition

Proposition 3.3. -

Si E est un espace vectoriel réel, localement convexe, séparé, tonnelé et quasi-complet, et si T est un endomorphisme V-borné et V-contractant de E, alors l'endomorphisme I - T est inversible dans  $\mathfrak{L}(E)$ , avec

$$(I-T)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} T^n .$$

a) T étant V-borné,  $T^n(V)$  est borné. Soit M un sous-ensemble borné de E. Par définition, il existe  $m > 0$  tel que  $M \subset mV$ . On en déduit

$$(1) \quad p_{M, \lambda}(T^n) \leq m \sup_{x \in V} \lambda(T^n x) < +\infty .$$

b) T étant V-contractant, il existe  $\alpha$ ,  $0 < \alpha < 1$ , tel que

$$T(V) \subset \alpha V .$$

Alors, pour tout  $n > 1$ , on a

$$T^n(V) \subset \alpha^{n-1} T(V) ,$$

d'où

$$(2) \quad \sup_{x \in V} \lambda(T^n x) \leq \alpha^{n-1} \sup_{x \in V} \lambda(Tx) .$$

c) Soit

$$S_p = \sum_{n=0}^{n=p} T^n .$$

Des inégalités (1) et (2), on déduit que pour tout  $\lambda \in \Lambda$ , il existe  $k > 0$ ;  $k = m \sup_{x \in V} \lambda(Tx)$ , tel que

$$p_{M,\lambda}(S_q - S_p) \leq k \sum_{n=p+1}^{n=q} \alpha^{n-1}.$$

Il s'ensuit que la suite  $\{S_p\}$  est une suite de Cauchy de  $\mathfrak{L}(E)$ .

L'espace  $E$  étant tonnelé et quasi-complet,  $\mathfrak{L}(E)$  est quasi-complet (\*). Par conséquent, la suite  $\{S_p\}$  converge dans  $\mathfrak{L}(E)$ .

d) En utilisant le lemme 3.1., on a alors

$$I = (I-T) \sum_{n=0}^{\infty} T^n = \sum_{n=0}^{\infty} T^n (I-T) \quad . \quad *$$

On considère maintenant une suite d'endomorphismes de  $E$  qui converge uniformément sur le voisinage  $V$  de  $0$  dans  $E$  vers un endomorphisme de  $E$  (Notule, p. 47).

Lemme 3.4. -

Soit une suite  $\{S_n\}$  d'endomorphismes de  $E$  qui converge uniformément sur  $V$  vers un endomorphisme  $S$  inversible dans  $\mathfrak{L}(E)$ . Si pour  $n \geq N_1$ ,  $S - S_n$  est  $V$ -borné, alors il existe  $N > 0$  tel que pour  $n \geq N$  l'endomorphisme  $S^{-1}(S - S_n)$  soit  $V$ -borné et  $V$ -contractant.

$S^{-1}$  étant continu et  $S - S_n$  étant  $V$ -borné pour  $n \geq N_1$ ,  $S^{-1}(S - S_n)$  est alors  $V$ -borné.

---

(\*) Bourbaki - Espaces vectoriels topologiques, livre V, Chap.III-§3, Corollaire 2 du Théorème 4.

Soit maintenant  $\alpha$ ,  $0 < \alpha < 1$ . La continuité de  $S^{-1}$  et le fait que  $\{S_n\}$  converge uniformément sur  $V$  vers  $S$ , entraînent que pour  $n$  assez grand  $S^{-1}(S - S_n)V \subset \alpha V$ .

Donc  $S^{-1}(S - S_n)$  est  $V$ -contractant. \*

On a alors

Proposition 3.5. -

Soit  $E$  un espace vectoriel réel, localement convexe séparé, tonnelé et quasi-complet, et soit  $\{T_n\}$  une suite d'endomorphismes  $V$ -bornés de  $E$  qui converge uniformément sur  $V$  vers l'endomorphisme  $V$ -borné  $T$ . Si  $I - T$  est inversible dans  $\mathfrak{L}(E)$ , il existe  $N > 0$  tel que, pour  $n \geq N$ ,  $I - T_n$  soit inversible dans  $\mathfrak{L}(E)$ , et, de plus,  $(I - T_n)^{-1}$  tend vers  $(I - T)^{-1}$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ .

a) La suite  $\{S_n\}$ , où  $S_n = I - T_n$  converge uniformément sur  $V$  vers  $S = I - T$ . De plus,  $T$  et  $T_n$  étant  $V$ -bornés,  $S - S_n = T_n - T$  est  $V$ -borné quel que soit  $n$ . D'après le lemme 3.4., il existe donc  $N > 0$  tel que pour  $n \geq N$ , l'endomorphisme  $(I - T)^{-1}(T_n - T)$  soit  $V$ -borné et  $V$ -contractant.

Alors, d'après la proposition 3.3.,  $I - (I - T)^{-1}(T_n - T)$  est inversible dans  $\mathfrak{L}(E)$  et on a

$$\left[ I - (I - T)^{-1}(T_n - T) \right]^{-1} = \sum_{p=0}^{\infty} \left[ (I - T)^{-1}(T_n - T) \right]^p .$$

b) Si  $I - T$  est inversible, on peut écrire

$$I - T_n = (I - T) \left[ I - (I - T)^{-1}(T_n - T) \right] .$$

Il résulte alors de a) que  $(I - T_n)$  est inversible dans  $\mathfrak{L}(E)$  et

$$(I - T_n)^{-1} - (I-T)^{-1} = \left\{ \sum_{p=1}^{\infty} [(I-T)^{-1}(T_n - T)]^p \right\} (I-T)^{-1} .$$

On applique alors les inégalités (1) et (2) établies dans la démonstration de la proposition 3.3. à l'opérateur  $(I-T)^{-1}(T_n - T)$ , et on obtient

$$p_{M,\lambda} \left\{ \sum_{p=1}^{\infty} [(I-T)^{-1}(T_n - T)]^p \right\} \leq m \sup_{x \in V} \lambda [(I-T)^{-1}(T_n - T)x] \sum_{p=1}^{\infty} \alpha^{p-1} .$$

$(I-T)^{-1}$  étant continu et  $\{T_n\}$  convergeant uniformément sur  $V$  vers  $T$ , l'endomorphisme  $\sum_{p=1}^{\infty} [(I-T)^{-1}(T_n - T)]^p$  tend donc vers l'endomorphisme nul quand  $n \rightarrow +\infty$ .

Alors, d'après le lemme 3.1.,  $(I - T_n)^{-1}$  tend vers  $(I-T)^{-1}$ . \*

On se demande maintenant si  $I - T$  est inversible lorsque tous les  $I - T_n$  sont inversibles à partir d'un certain rang.

Proposition 3.6. -

Soit  $E$  un espace vectoriel réel, localement convexe séparé, tonnelé et quasi-complet, et soit  $\{T_n\}$  une suite d'endomorphismes  $V$ -bornés de  $\mathfrak{L}(E)$  qui converge uniformément sur  $V$  vers l'endomorphisme  $V$ -borné  $T$  et telle qu'à partir du rang  $N$ ,  $I - T_n$  soit inversible dans  $\mathfrak{L}(E)$ . Alors, une condition suffisante pour que  $(I-T)$  soit inversible est qu'il existe un voisinage  $W$  de  $0$  dans  $E$  tel qu'à partir d'un certain rang, on ait  $(I - T_n)^{-1}W \subset V$ .

$(I - T_n)^{-1}$  étant continu pour  $n > N$ ,  $T$  et  $T_n$  étant  $V$ -bornés,  $(I - T_n)^{-1}(T - T_n)$  est  $V$ -borné.

Soit  $\alpha$ ,  $0 < \alpha < 1$ . La suite  $\{T_n\}$  convergeant uniformément sur  $V$  vers  $T$ , il existe  $N_1 > 0$  tel que pour tout  $n > N_1$ , on ait  $(T - T_n)V \subset \alpha W$ . On a alors  $(I - T_n)^{-1}(T - T_n)V \subset \alpha V$ . Donc  $(I - T_n)^{-1}(T - T_n)$  est  $V$ -contractant.

Alors, d'après la proposition 3.3.,  $I - (I - T_n)^{-1}(T - T_n)$  est inversible dans  $\mathfrak{L}(E)$ . Mais, par ailleurs, si  $(I - T_n)^{-1}$  est inversible, on peut écrire

$$(I - T) = (I - T_n) \left[ I - (I - T_n)^{-1}(T - T_n) \right].$$

D'où il résulte que  $I - T$  est inversible. \*

On notera que si  $E$  est un espace de Banach, la condition énoncée dans la proposition 3.6. est aussi une condition nécessaire. En effet, si  $I - T$  est inversible, il résulte de la proposition 3.5. que pour  $n$  assez grand, on a  $\|(I - T_n)^{-1}\| \leq 2 \|(I - T)^{-1}\|$ . Il suffit alors de prendre  $V = \{x \in E, \|x\| \leq 1\}$  et  $W = \frac{V}{2\|(I - T)^{-1}\|}$ .

On considère maintenant une suite d'endomorphismes complètement continus d'un espace vectoriel réel localement convexe séparé  $E$  (Définition 2.27.). Il sera alors nécessaire que ce soit le même voisinage  $V$  de  $0$  dans  $E$  dont les images sont relativement compactes. On utilisera la notation suivante :

Un endomorphisme  $T$  de  $E$  est  $V$ -complètement continu s'il existe un voisinage  $V$  de  $0$  dans  $E$  tel que  $T(V)$  soit relativement compact dans  $E$ .

M. J. Leray a démontré le théorème suivant (\*):

" Soit  $T$  un endomorphisme complètement continu de  $E$  et soit  $\lambda$  réel. Alors  $\lambda I - T$  est une application bicontinue de  $E$  sur lui-même quand  $\lambda$  diffère de 0 et des valeurs propres de  $T$  ".

Ce théorème implique l'extension de l'alternative de Fredholm aux espaces localement convexes :

" Si  $\lambda \neq 0$ , ou bien l'équation  $(\lambda I - T)x = 0$  possède une solution  $x \neq 0$ , ou bien l'équation  $(\lambda I - T)x = y$  possède une solution unique  $x \in E$  quel que soit  $y \in E$  ".

On en déduit la proposition suivante :

Proposition 3.7. -

Soit  $E$  un espace vectoriel réel localement convexe, séparé, tonnelé et quasi-complet, et soit  $\{T_n\}$  une suite de  $\mathfrak{L}(E)$  d'endomorphismes  $V$ -complètement continus qui converge uniformément sur  $V$  vers l'endomorphisme  $T$ . Si  $I - T$  est injectif, alors il existe  $N > 0$  tel que pour  $n \geq N$ ,  $I - T_n$  soit inversible dans  $\mathfrak{L}(E)$ , et de plus,  $(I - T_n)^{-1}$  tend vers  $(I - T)^{-1}$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ .

Les endomorphismes  $T_n$  étant  $V$ -complètement continus, et la suite  $\{T_n\}$  convergeant uniformément sur  $V$  vers  $T$ , il résulte de la proposition 2.11. que  $T$  est  $V$ -complètement continu. D'après le théorème de M. J. Leray,  $I - T$  qui est injectif est alors inversible dans  $\mathfrak{L}(E)$  et la proposition 3.5. permet de conclure. \*

---

(\*) J. Leray - Acta Sci. Math. Szeged 12 B (1950), p. 177-186, (théorème 7.1.).

On notera qu'on a

$$x - x_n = (I-T)^{-1}(T - T_n)(I - T_n)^{-1} y.$$

Lorsque E est un espace normé, cette égalité permet d'obtenir un majorant de  $\|x - x_n\|$ .

## §2. APPLICATIONS AUX SYSTEMES INFINIS LINEAIRES.

Soient  $\{a_{j,i}\}$  une matrice infinie réelle et A l'opérateur matriciel associé, et soit  $Y = \{y_i\}$  une suite réelle.

On considère le système infini d'équations linéaires

$$(L) \quad x_j - \sum_{i=1}^{\infty} a_{j,i} x_i = y_j \quad (j \in \mathbb{N})$$

c'est-à-dire l'équation fonctionnelle

$$(E) \quad X - AX = Y,$$

et le système homogène (L') associé

$$(L') \quad x_j - \sum_{i=1}^{\infty} a_{j,i} x_i = 0 \quad (j \in \mathbb{N})$$

c'est-à-dire l'équation fonctionnelle

$$(E') \quad X - AX = 0.$$

Soit  $\mathcal{L}$  un espace L.C.-monotone de suites. Il résulte du théorème précédemment cité de M. J. Leray que si on a  $A \in \{\text{mat}; \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}, \text{comp. cont.}\}$ , alors

a) ou bien (E) a une solution unique  $X = \{x_i\} \in \mathcal{L}$  quel que soit  $Y \in \mathcal{L}$ ,

b) ou bien (E') a une solution non nulle.

Dans le cas a) où la solution de (E) est unique, on se propose d'étudier cette solution. Pour cela, on associe à (L) les systèmes  $(L_{n,n})$

$$(L_{n,n}) \quad \left\{ \begin{array}{ll} x_j - \sum_{i=1}^{i=n} a_{ji} x_i = y_j & \text{si } 1 \leq j \leq n \\ x_j = y_j & \text{si } j > n \end{array} \right.$$

c'est-à-dire les équations fonctionnelles

$$(E_{n,n}) \quad X - A_{n,n}X = Y$$

où  $A_{n,n}$  est l'opérateur matriciel défini au Chapitre II (Notations, p. 48).

On notera que la résolution de  $(L_{n,n})$  se ramène à celle d'un système fini de  $n$  équations linéaires à  $n$  inconnues.

Proposition 3.8. -

Soit  $\mathcal{L}$  un espace L.C.-monotone tonnelé et quasi-complet, et soit

$$A \in \{\text{mat}; \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}, V\text{-}\gamma\text{-bornée}\}.$$

Si l'équation (E) a une solution unique  $X \in \mathcal{L}$  quel que soit  $Y \in \mathcal{L}$ , alors on a les propriétés suivantes

- a) L'équation  $(E_{n,n})$  a une solution unique  $X_n \in \mathcal{L}$   
pour n assez grand
- b) On a  $X = \lim_{n \rightarrow +\infty} X_n$
- c) La solution X dépend continûment de Y.

Puisque  $A \in \{\text{mat}; \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}, V\text{-}\gamma\text{-bornée}\}$ ,  $A$  définit une application  $V$ -bornée de  $\mathcal{L}$  dans  $\mathcal{L}$  qui est limite uniforme sur  $V$  de la suite des applications complètement continues définies par les opérateurs  $A_{n,n}$  (Définition 2.28.).

L'espace  $\mathcal{L}$  étant tonnelé et quasi-complet, la proposition résulte donc de la proposition 3.7. \*

En utilisant les propriétés des espaces L.C.-monotones étudiés au Chapitre I et des opérateurs matriciels étudiés au Chapitre II, on obtient

Proposition 3.9. -

Soit  $\mathcal{L}$  un espace L.C.-monotone tonnelé et quasi-complet,  
et soit  $\{a_{ji}\}$  une matrice infinie réelle dont les vecteurs  
lignes  $A_j$  vérifient les trois conditions suivantes :

1) Il existe  $\lambda \in \Lambda$  telle que pour tout  $j \in \mathbb{N}$ ,  
 $A_j \in \mathcal{L}_\lambda$ ,

2)  $B = \{\lambda'(A_j), j \in \mathbb{N}\} \in [\mathcal{L}]$ ,

3) Lorsque  $n \rightarrow +\infty$ , la suite  $\{B_n\}$ , avec  
 $B_n = \{\lambda'(P_n^\infty A_j), j \in \mathbb{N}\}$ , tend vers 0 dans  $\mathcal{L}$ .

Si le système (L) admet une solution unique  $\{x_i\} \in \mathcal{L}$  quelle  
que soit  $\{y_i\} \in \mathcal{L}$ , alors

a) Le système  $(L_{n,n})$  admet une solution  $\{x_i^{(n)}\} \in \mathcal{L}$   
pour n assez grand

b) On a pour tout i :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_i^{(n)} = x_i$

c) Les applications  $\varphi_i : Y \rightarrow x_i$  sont continues.

D'après la proposition 2.16., les conditions 1), 2) et 3) étant vérifiées, l'opérateur A associé à la matrice  $\{a_{ji}\}$  appartient à  $\{\text{mat}; \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}, V\text{-}\gamma\text{-bornée}\}$ .

Par conséquent, d'après la proposition 3.9., si (L) a une solution unique  $X = \{x_i\} \in \mathcal{L}$  quel que soit  $Y = \{y_i\} \in \mathcal{L}$ ,  $(L_{n,n})$  a aussi une solution unique  $X_n = \{x_i^{(n)}\} \in \mathcal{L}$  pour n assez grand.

De plus, on a  $X = \lim_{n \rightarrow +\infty} X_n$ . Mais, d'après la propriété 1.6. des espaces L.C.-monotones, cette égalité entraîne que, pour chaque i, on a

$$x_i = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_i^{(n)} .$$

De cette même propriété 1.6. et de la proposition 3.9. résulte aussi que chaque  $\varphi_i$  est une application continue. \*

Remarque.- Dans le cas où  $\mathcal{L}$  est un espace de Banach L.C.-monotone, il y a identité entre les notions de complète continuité et de pseudo-complète continuité. De plus,  $\tilde{\mathcal{L}}$  est alors un espace de Banach et  $[\mathcal{L}]$  et  $[\tilde{\mathcal{L}}]$  sont tonnelés. On peut donc utiliser les résultats du Chapitre II, §3 (tableau récapitulatif) pour remplacer les conditions 1), 2) et 3) de la proposition précédente par des conditions plus simples.

En particulier

i) Si  $\tilde{\mathcal{Q}} = [\tilde{\mathcal{Q}}]$ , on utilisera les conditions suivantes

1') Pour tout  $j$ ,  $A_j \in \tilde{\mathcal{Q}}$

2') La suite  $\{\|A_j\|_{\tilde{\mathcal{Q}}}\} \in [\tilde{\mathcal{Q}}]$ .

ii) Si  $[\mathcal{Q}] = \mathcal{Q} = \tilde{\mathcal{Q}}$ , on utilisera les conditions suivantes sur les vecteurs colonnes  $A^i$

1'') Pour tout  $i$ ,  $A^i \in \mathcal{Q}$

2'') La suite  $\{\|A^i\|_{\mathcal{Q}}\} \in [\mathcal{Q}]$ .

Exemples.-

1) Cas où  $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}^p$  ( $p > 1$ ).

Lorsque les coefficients de la matrice  $\{a_{ji}\}$  vérifient la condition

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left( \sum_{i=1}^{\infty} |a_{ji}|^{\frac{p}{p-1}} \right)^{p-1} < +\infty$$

alors, si le système (L) a une solution unique  $X = \{x_i\} \in \mathcal{Q}^p$  quelle que soit  $Y = \{y_i\} \in \mathcal{Q}^p$ , on a

$$x_i = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_i^{(n)}$$

où  $X_n = \{x_i^{(n)}\} \in \mathcal{Q}^p$  est la solution de  $(L_{n,n})$ .

2) Cas où  $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}^\infty$ .

Lorsque les coefficients de la matrice  $\{a_{ji}\}$  vérifient la condition

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{j \geq n} \sum_{i=1}^{\infty} |a_{ji}| = 0,$$

alors, si le système (L) a une solution unique  $X = \{x_i\} \in \mathcal{Q}^\infty$  quelle que soit  $Y = \{y_i\} \in \mathcal{Q}^\infty$ , on a

$$x_i = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_i^{(n)}$$

où  $X_n = \{x_i^{(n)}\} \in \mathcal{Q}^\infty$  est la solution de  $(L_{n,n})$ .

3) Cas où  $\mathcal{Q} = \tilde{\mathcal{Q}}_2^2$ . (\*)

Lorsqu'il existe une suite  $\{\alpha_j\} \in \tilde{\mathcal{Q}}_2^2$ ,  $\alpha_j \neq 0$ , une suite  $\epsilon_n$  avec  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \epsilon_n = 0$  et une suite  $\{b_m\}$  telles que pour tout  $m$ , tout  $j$  et tout  $n$ , on ait

$$\sum_{i=n}^{\infty} \frac{m^i |a_{ji}|^2}{\alpha_j^2} \leq \epsilon_n^2 b_m^2,$$

alors, si le système (L) a une solution unique  $X = \{x_i\} \in \tilde{\mathcal{Q}}_2^2$  quelle que soit  $Y = \{y_i\} \in \tilde{\mathcal{Q}}_2^2$ , on a

$$x_i = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_i^{(n)}$$

où  $X = \{x_i^{(n)}\} \in \tilde{\mathcal{Q}}_2^2$  est la solution de  $(L_{n,n})$ .

---

(\*) cf. Notule p. 4. et exemples p. 26.

Problème inverse.-

On envisage maintenant le problème inverse :  
Est-ce que le système (L) a une solution unique quel que soit  $Y = \{y_i\} \in \mathcal{L}$  lorsque, à partir d'un certain rang  $n$ , le système  $(L_{n,n})$  a une solution unique ?

Proposition 3.10. -

Soit  $\mathcal{L}$  un espace L.C.-monotone tonnelé et quasi-complet, et soit  $\{a_{ji}\}$  une matrice infinie réelle dont les vecteurs lignes  $A_j$  vérifient les conditions 1), 2) et 3) de la proposition 3.9. Alors, si à partir d'un certain rang le système  $(L_{n,n})$  a une solution unique quel que soit  $Y = \{y_i\} \in \mathcal{L}$ , une condition suffisante pour que le système (L) ait une solution unique quel que soit  $Y \in \mathcal{L}$  est qu'il existe  $b > 0$  et  $\mu \in \Lambda$  telles que pour tout  $n$  suffisamment grand, on ait quel que soit  $X \in \mathcal{L}$

$$\lambda[(I - A_{n,n})^{-1}X] \leq b\mu(X) .$$

En effet, si les conditions 1), 2) et 3) sont vérifiées, l'application linéaire associée à  $\{a_{ji}\}$  est  $V$ - $\gamma$ -bornée, avec  $V = \{X \in \mathcal{L} : \lambda(X) \leq 1\}$  .

Soit alors  $W = \{X \in \mathcal{L} : \mu(X) \leq b^{-1}\}$  . C'est un voisinage de 0 dans  $\mathcal{L}$  . Si la condition indiquée est vérifiée, on a pour tout  $X \in W$

$$\lambda[(I - A_{n,n})^{-1}X] \leq 1 .$$

Donc  $(I - A_{n,n})^{-1}W \subset V$  , et on utilise alors la proposition 3.6. \*

Dans le cas particulier où  $\mathcal{L}$  est un espace de Banach L.C.-monotone, la condition suffisante énoncée dans la proposition 3.10. devient

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|(I - A_{n,n})^{-1}\| < +\infty ,$$

et c'est aussi une condition nécessaire.

Bien que la situation envisagée dans tout ce paragraphe, où on suppose que  $A \in \{\text{mat}; \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}, V\text{-}\gamma\text{-bornée}\}$ , semble la plus utilisable pratiquement, il faut noter qu'on obtiendra des énoncés analogues à ceux des trois propositions précédentes en utilisant un opérateur matriciel  $A$  définissant un endomorphisme de  $\mathcal{L}$  qui est soit  $V\text{-}\alpha\text{-borné}$ , soit  $V\text{-}\beta\text{-borné}$ , soit  $V\text{-}\delta\text{-borné}$ .

Toutefois, il faut préciser que si cet endomorphisme est  $V\text{-}\beta\text{-borné}$  ou  $V\text{-}\delta\text{-borné}$ , on devra supposer que  $V$  est l'ensemble des  $X \in \mathcal{L}$  tels que  $\lambda(X) \leq 1$ , où  $\lambda$  est une norme de  $\Lambda$ .

CHAPITRE IV.

ETUDE D'UN OPERATEUR NON LINEAIRE SUR DES ESPACES L.C.-MONOTONES.

Soit une suite  $\{f_i\}$  de fonctions réelles définies sur  $\mathbb{R}$ . On désigne par  $\Phi$  l'opérateur qui, à une suite réelle  $X = \{x_i\}$ , fait correspondre la suite  $\Phi X = \{f_i(x_i)\}$ .

L'opérateur  $\Phi$  intervient en particulier dans l'étude du système infini d'équations non linéaires

$$x_j - \sum_{i=1}^{\infty} a_{ji} f_i(x_i) = 0 \quad j = 1, 2, \dots$$

où les coefficients réels  $a_{ji}$  et les fonctions réelles  $f_i$  sont connus. Ce système, qui sera étudié ultérieurement, sera appelé système de Hammerstein.

Dans ce chapitre, on se propose d'étudier les opérateurs  $\Phi$  qui définissent des applications d'un espace L.C.-monotone  $\mathcal{Q}$  dans un espace L.C.-monotone  $\mathcal{M}$ , lorsqu'on suppose que les fonctions  $f_i$  sont continues.

Dans la première partie, on montre que si on suppose l'espace  $\mathcal{Q}$  métrisable et complet, on obtient des conditions simples de continuité. En particulier, si  $\mathfrak{g}$  définit une application de  $\mathcal{Q}$  dans  $[m]$ , cette application est continue.

On verra que l'hypothèse de métrisabilité de  $\mathcal{Q}$  n'est pas très restrictive pour les applications.

Dans la seconde partie de ce chapitre, on montre que si l'opérateur  $\mathfrak{g}$  définit une application de  $\mathcal{Q}$  dans l'espace  $[\mathcal{Q}]$ , il est le gradient d'une fonctionnelle définie sur  $\mathcal{Q}$ . Ce résultat sera utilisé ultérieurement pour étudier le système de Hammerstein.

### §1. CONDITIONS DE CONTINUITÉ.

#### Notations.-

Soit  $\mathcal{Q}$  un espace L.C.-monotone et soit  $\mathcal{V}$  un système fondamental de voisinages de 0 dans  $\mathcal{Q}$ . Dans le cas général,  $\mathcal{V}$  sera la famille des sous-ensembles  $V$  de  $\mathcal{Q}$  définis par

$$V = \{X \in \mathcal{Q} : \lambda(X) \leq a\}$$

où  $\lambda$  parcourt la famille filtrante de semi-normes qui définit la topologie de  $\mathcal{Q}$  et où  $a > 0$ . Dans le cas où  $\mathcal{Q}$  est métrisable, on utilisera les notations du Chapitre I, p. 6, et  $\mathcal{V}$  sera la famille des sous-ensembles  $V$  de  $\mathcal{Q}$  définis par

$$V = \{X \in \mathcal{Q} : \rho(X) \leq \frac{1}{n}\}$$

où  $n$  parcourt  $\mathbb{N}$ .

a) Soient  $X \in \mathcal{E}$  et  $V \in \mathcal{V}$ . On pose

$$B(\mathcal{E}, X, V) = \{Y \in \mathcal{E} : Y-X \in V\} .$$

Lorsque l'espace  $\mathcal{E}$  est métrisable,  $B(\mathcal{E}, X, V)$  est une boule fermée de centre  $X$ . On notera aussi  $B(\mathcal{E}, X, r)$  la boule fermée de centre  $X$  et de rayon  $r > 0$ .

b) Soient  $X \in \mathcal{E}$  et  $V \in \mathcal{V}$ .

Dans le cas général, on a  $V = \{X \in \mathcal{E} : \lambda(X) \leq a\}$  et on pose

$$\overset{\circ}{V} = \{X \in \mathcal{E} : \lambda(X) < a\} .$$

Si l'espace  $\mathcal{E}$  est métrisable, on a  $V = \{X \in \mathcal{E} : \rho(X) \leq r\}$  et on pose

$$\overset{\circ}{V} = \{X \in \mathcal{E} : \rho(X) < r\} .$$

Dans tous les cas, on pose alors :

$$C(\mathcal{E}, X, V) = \{Y \in \mathcal{E} : \exists n \in \mathbb{N}, P_n^\infty(Y-X) \in \overset{\circ}{V}\} . (*)$$

Lorsque l'espace  $\mathcal{E}$  est métrisable, il résulte des propositions 1.7. et 1.11. qu'on a, en utilisant la notation du Chapitre I, p. 12 :

$$C(\mathcal{E}, X, V) = \{Y \in \mathcal{E} : d(Y, X+[\mathcal{E}]) < r\} .$$

Cet ensemble sera aussi noté  $C(\mathcal{E}, X, r)$ .

#### Continuité en un point.-

Soient  $\mathcal{E}$  un espace L.C.-monotone métrisable complet et  $\mathcal{V}$  une base de voisinages de 0 dans  $\mathcal{E}$ , et soient  $m$  un espace L.C.-monotone quelconque et  $\mathcal{W}$  une base de voisinages de 0 dans  $m$ .

---

(\*) On a aussi  $C(\mathcal{E}, X, V) = X + [\mathcal{E}] + \overset{\circ}{V}$ .

On considère un opérateur  $\Phi$  définissant une application de  $\mathcal{U}$  dans  $\mathcal{M}$  et on cherche une condition pour que cette application soit continue en  $X \in \mathcal{U}$ .

On démontre d'abord

Lemme 4.1. -

Si les fonctions  $f_i$  sont continues et nulles en  $u = 0$ , alors la propriété

(P) : " Pour tout  $W \in \mathcal{W}$ , il existe  $V \in \mathcal{V}$  et  $n \in \mathbb{N}$  tels que pour tout  $X \in V$ , on ait  $P_n^\infty \Phi X \in \overset{\circ}{W}$  "

entraîne la continuité en  $X = 0$  de l'application définie par  $\Phi$ .

Soit  $E_i$  la suite dont tous les éléments sont nuls sauf celui de rang  $i$  qui est égal à 1. On a

$$\Phi X = \sum_{i=1}^{n-1} f_i(x_i) E_i + P_n^\infty \Phi X .$$

i) Soit  $W \in \mathcal{W}$ . Si la propriété (P) est vérifiée, il existe  $V \in \mathcal{V}$  et  $n \in \mathbb{N}$  tels que pour tout  $X \in V$ , on ait  $P_n^\infty \Phi X \in \overset{\circ}{W}$ .

ii) Il existe  $\alpha > 0$  tel que si pour tout  $i$ ,  $i < n$ , on a  $|f_i(x_i)| \leq \alpha$ , alors

$$\sum_{i=1}^{n-1} f_i(x_i) E_i \in \overset{\circ}{W} .$$

iii) Puisque chaque  $f_i$  est continue et nulle en  $u = 0$ , il existe  $\beta_i > 0$  tel que  $|u| \leq \beta_i$  entraîne  $|f_i(u)| \leq \alpha$ .

On considère alors  $\eta = \min_{1 \leq i \leq n-1} [\beta_i \rho(E_i)]$ . L'espace  $\mathcal{Q}$  étant métrisable,  $\rho(E_i) \neq 0$  pour tout  $i$ , et par conséquent  $\eta$  est positif.

Soit alors  $V_\eta = \{X \in \mathcal{Q} : \rho(X) \leq \eta\}$ . Si  $X = \{x_i\} \in V_\eta$ , on a d'après la propriété  $A'_3$  d'un espace L.C.-monotone métrisable :  $|x_i| \rho(E_i) \leq \eta$ , d'où pour  $i < n$

$$|x_i| < \beta_i.$$

Il résulte alors de i) et ii) que pour tout  $X \in \bigcap V_\eta$ , on a  $\Phi X \in W$ . Donc  $\Phi$  définit une application continue en  $X = 0$ . \*

On en déduit une condition nécessaire et suffisante de continuité de l'application :  $\mathcal{Q} \xrightarrow{\Phi} m$  en un point  $X = \{x_i\} \in \mathcal{Q}$ .

Proposition 4.2. -

Soient  $\mathcal{Q}$  un espace L.C.-monotone métrisable complet et  $m$  un espace L.C.-monotone quelconque. Si les fonctions  $f_i$  sont continues en  $u = x_i$ , alors une condition nécessaire et suffisante pour que l'application définie par  $\Phi$  soit continue en  $X = \{x_i\} \in \mathcal{Q}$  est :

(C) Pour tout  $W \in \mathcal{W}$ , il existe  $V \in \mathcal{V}$  tel que  $\Phi$  applique  $B(\mathcal{Q}, X, V)$  dans  $C(m, \Phi X, W)$ .

i) Condition nécessaire.-

Si l'application définie par  $\Phi$  est continue en  $X = \{x_i\}$ , quel que soit  $W \in \mathcal{W}$ , il existe  $V \in \mathcal{V}$  tel que  $\Phi$  applique  $B(\mathcal{Q}, X, V)$  dans  $B(m, \Phi X, \frac{W}{2})$ . Or, d'après la propriété  $A_3$  d'un espace L.C.-monotone, on a  $B(m, \Phi X, \frac{W}{2}) \subset C(m, \Phi X, W)$ .

ii) Condition suffisante.-

Il suffit de considérer le cas où  $X = 0$  et  $\mathfrak{E}0 = 0$ .

On suppose alors que la condition (C) est vérifiée et que l'application définie par  $\mathfrak{E}$  n'est pas continue en  $X = 0$ , et on va montrer qu'on aboutit à une contradiction.

Si l'application n'est pas continue en  $X = 0$ , on a d'après le lemme 4.1. :

" Il existe  $W \in \mathcal{W}$ , tel que pour tout  $V \in \mathcal{V}$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe  $X \in V$  pour lequel  $P_n^\infty \mathfrak{E}X \notin \overset{\circ}{W}$  ".

La condition (C) de la proposition étant vérifiée, on a :  
" Il existe  $V_0 \in \mathcal{V}$  tel que  $\mathfrak{E}$  applique  $B(\emptyset, 0, V_0)$  dans  $C(m, 0, \frac{\overset{\circ}{W}}{2})$  ".

Ceci entraîne que pour tout  $X \in V_0$ , il existe  $m$  tel que  $P_m^\infty \mathfrak{E}X \in \frac{\overset{\circ}{W}}{2}$ .

Des deux résultats précédents résulte que pour toute boule  $B(\emptyset, 0, r) \subset V_0$ , et pour tout  $n$ , il existe  $X \in B(\emptyset, 0, r)$  tel que  $P_n^\infty \mathfrak{E}X \notin \overset{\circ}{W}$  et il existe  $m > 0$  tel que  $P_m^\infty \mathfrak{E}X \in \frac{\overset{\circ}{W}}{2}$ . D'après la propriété  $A_3$  des espaces L.C.-monotones, on peut supposer  $m > n+1$ , et on a alors

$$P_n^m \mathfrak{E}X \notin \frac{\overset{\circ}{W}}{2}.$$

Soit alors  $\lambda > 0$  tel que  $B(\emptyset, 0, \lambda) \subset V_0$  et soit une suite  $\{\eta_p\}$ ,  $\eta_p > 0$ , telle que  $\sum_{p=1}^{\infty} \eta_p < \lambda$ . Par récurrence sur l'indice  $p$ , on construit une suite d'entiers

$$0 < n_1 < m_1 < \dots < n_p < m_p < \dots$$

et une suite  $\{X_p\} \subset \mathcal{Q}$ ,  $X_p \in B(\mathcal{Q}, 0, \eta_p)$  telles que pour tout  $p$ , on ait

$$P_{n_p}^{m_p} X_p \notin \frac{\circ}{2}.$$

On considère maintenant la suite  $\{Y_q\}$  où  $Y_q = \sum_{p=1}^{p=q} P_{n_p}^{m_p} X_p$ .

Il résulte de la propriété  $A_3$  des espaces L.C.-monotones et de la construction de  $\{X_p\}$  que la suite  $\{Y_q\}$  est une suite de Cauchy de  $\mathcal{Q}$ . Puisque  $\mathcal{Q}$  est complet, cette suite converge vers  $Y_0 \in B(\mathcal{Q}, 0, \lambda)$ .

Par ailleurs, comme  $f_i(0) = 0$ , on a

$$P_{n_p}^{m_p} \mathfrak{E} Y_0 = P_{n_p}^{m_p} \mathfrak{E} X_p \notin \frac{\circ}{2}.$$

Alors, quel que soit  $n \in \mathbb{N}$ , il existe  $n_p > n$ , et en utilisant la propriété  $A_3$  des espaces L.C.-monotones, on a

$$P_n^\infty \mathfrak{E} Y_0 \notin \frac{\circ}{2}.$$

Donc, il existe un voisinage  $\frac{W}{2} \in \mathcal{Y}$  tel que pour tout  $V \in \mathcal{Y}$ , il existe  $Y_0 \in B(\mathcal{Q}, 0, V)$  tel que  $\mathfrak{E} Y_0 \notin C(m, \mathfrak{E} 0, \frac{W}{2})$  ce qui est en contradiction avec l'hypothèse que la condition (C) est vérifiée. \*

Continuité globale.-

Lorsque  $\Phi$  définit une application de  $\mathcal{Q}$  dans  $[m]$ , on a le résultat suivant :

Proposition 4.3. -

Soient  $\mathcal{Q}$  un espace L.C.-monotone métrisable complet et  $m$  un espace L.C.-monotone quelconque. Si les fonctions  $f_i$  sont continues sur  $\mathbb{R}$ , il suffit que  $\Phi$  définisse une application de  $\mathcal{Q}$  dans  $[m]$  pour que cette application soit continue en tout point de  $\mathcal{Q}$ .

En effet, si  $\Phi X \in [m]$ , il résulte de la proposition 1.8. que pour tout  $W \in \mathcal{W}'$ , on a

$$[m] \subset C(m, \Phi X, W)$$

et la proposition résulte alors de la proposition 4.2. \*

Lorsque  $\Phi$  ne définit pas une application de  $\mathcal{Q}$  dans  $[m]$ , mais seulement dans  $m$ , la proposition suivante permet de simplifier l'étude de la continuité globale.

Proposition 4.4. -

Soient  $\mathcal{Q}$  un espace L.C.-monotone métrisable complet et  $m$  un espace L.C.-monotone quelconque. Si les fonctions  $f_i$  sont continues sur  $\mathbb{R}$  et si  $\Phi$  définit une application de  $\mathcal{Q}$  dans  $m$  continue en  $X \in \mathcal{Q}$ , alors cette application est continue en tout point de  $X + [\mathcal{Q}]$ .

Il suffit de considérer le cas où  $X = 0$  et  $\Phi 0 = 0$ .

i) On va montrer d'abord que si  $X_0 \in [\mathcal{Q}]$ ,  $\Phi X_0 \in [m]$ .

En effet, soit  $W \in \mathcal{W}$ . Puisque  $\bar{\sigma}$  définit une application continue en  $X = 0$ , il existe  $V \in \mathcal{V}$  tel que  $\bar{\sigma}(V) \subset W$ .

Or, d'après la proposition 1.8., si  $X_0 \in [\mathcal{C}]$ , il existe  $n_0 > 0$  tel que  $P_{n_0}^\infty X_0 \in V$  et on a donc  $\bar{\sigma}(P_{n_0}^\infty X_0) \in W$ .

Mais, comme  $f_i(0) = 0$  pour tout  $i$ , on a

$$\bar{\sigma}(P_{n_0}^\infty X_0) = P_{n_0}^\infty \bar{\sigma}X_0$$

et par conséquent, d'après la proposition 1.8.,  $\bar{\sigma}X_0 \in [m]$ .

ii) On va montrer ensuite que si  $X_0 \in [\mathcal{C}]$ , si  $V \in \mathcal{V}$  et si  $W \in \mathcal{W}$ , on a  $B(\mathcal{C}, X_0, \frac{V}{2}) \subset C(\mathcal{C}, 0, V)$  et  $C(m, 0, \frac{W}{2}) \subset C(m, \bar{\sigma}X_0, W)$ .

En effet, si  $X_0 \in [\mathcal{C}]$ , il existe  $n_0$  tel que  $P_{n_0}^\infty X_0 \in \frac{V}{3}$ . Soit alors  $Y \in B(\mathcal{C}, X_0, \frac{V}{2})$ . Quel que soit  $n > 0$ ,  $P_n^\infty Y - P_n^\infty X_0 \in \frac{V}{2}$ . Par conséquent, on a  $P_{n_0}^\infty Y \in \overset{\circ}{V}$ . Donc  $B(\mathcal{C}, X_0, \frac{V}{2}) \subset C(\mathcal{C}, 0, V)$ .

D'autre part, d'après i),  $\bar{\sigma}X_0 \in [m]$ , donc il existe  $n_1$  tel que  $P_{n_1}^\infty \bar{\sigma}X_0 \in \frac{W}{3}$ . Soit alors  $Z \in C(m, 0, \frac{W}{2})$ . Il existe  $n_2 > 0$  tel que  $P_{n_2}^\infty Z \in \overset{\circ}{\frac{W}{2}}$ . Alors, si  $n = \max(n_1, n_2)$ , on a  $P_n^\infty(Z - \bar{\sigma}X_0) \in \overset{\circ}{W}$  et donc  $C(m, 0, \frac{W}{2}) \subset C(m, \bar{\sigma}X_0, W)$ .

iii) On va montrer enfin que si l'application définie par  $\bar{\sigma}$  est continue en  $X = 0$ , elle l'est aussi en  $X_0 \in [\mathcal{C}]$ .

L'application étant continue en  $X = 0$ , d'après la proposition 4.2., quel que soit  $W \in \mathcal{W}$ , il existe  $V \in \mathcal{V}$  tel que  $\bar{\sigma}$  applique  $B(\mathcal{C}, 0, V)$  dans  $C(m, 0, \frac{W}{2})$ . Soit alors  $X \in C(\mathcal{C}, 0, V)$ . Il existe  $n > 0$  tel que  $P_n^\infty X \in \overset{\circ}{V}$ , donc

$\Phi(P_n^\infty X) \in \frac{0}{2}$ . Or, comme  $f_i(0) = 0$  pour tout  $i$ , on a  
 $\Phi(P_n^\infty X) = P_n^\infty \Phi X$ . Par conséquent  $\Phi$  applique  $C(\mathcal{U}, 0, V)$  dans  
 $C(m, 0, \frac{W}{2})$ . Il résulte alors de ii) que, si  $X_0 \in [\mathcal{U}]$  quel  
que soit  $W \in \mathcal{W}$ , il existe  $V \in \mathcal{V}$  tel que  $\Phi$  applique  
 $B(\mathcal{U}, X_0, \frac{V}{2})$  dans  $C(m, \Phi X_0, W)$ . Alors, d'après la proposi-  
tion 4.2., l'application définie par  $\Phi$  est continue en  $X_0$ . \*

Allure des fonctions  $f_i(u)$ .

Pour certains espaces L.C.-monotones, on peut utiliser les résultats précédents pour donner des conditions sur l'allure des fonctions  $f_i(u)$  pour que l'application :  $\mathcal{U} \xrightarrow{\Phi} m$  soit définie et continue en  $X \in \mathcal{U}$ .

1) Application de  $\mathcal{U}^1$  dans  $\mathcal{U}^1$ .

On se place, pour simplifier, dans le cas où  $X = 0$  et  $\Phi 0 = 0$ .

Proposition 4.5.-

Si les fonctions  $f_i$  sont nulles et continues en  $u = 0$  et bornées sur un même voisinage de zéro, une condition nécessaire et suffisante pour que  $\Phi$  définisse une application de  $\mathcal{U}^1$  dans  $\mathcal{U}^1$  est qu'il existe des constantes positives  $\epsilon$  et  $b$ , et une suite  $\{a_i\} \in \mathcal{U}^1$  telles que pour tout  $i$  et  $|u| \leq \epsilon$ , on ait

$$|f_i(u)| \leq a_i + b|u| .$$

i) Si les inégalités sont vérifiées, il est évident que, quel que soit  $X \in \mathcal{U}^1$ ,  $\Phi X \in \mathcal{U}^1$ .

ii) Si les fonctions  $f_i$  sont continues et nulles en  $u=0$  et si  $\Phi$  définit une application de  $\mathcal{U}^1$  dans  $\mathcal{U}^1$ , cette application est continue en  $X = 0$  d'après la proposition 4.2.. Les fonctions  $f_i$  étant bornées sur un même voisinage de 0, il existe  $\epsilon > 0$  tel que chaque  $f_i$  soit bornée sur  $[-\epsilon, +\epsilon]$  et que l'inégalité

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| \leq \epsilon \text{ entraîne } \sum_{i=1}^{\infty} |f_i(x_i)| \leq 1 .$$

Soient alors les fonctions

$$g_i(u) = \begin{cases} |f_i(u)| - \frac{2}{\epsilon}|u| & \text{si } |f_i(u)| \geq \frac{2}{\epsilon}|u| \\ 0 & \text{si } |f_i(u)| \leq \frac{2}{\epsilon}|u| \end{cases}$$

On considère  $a_i = \sup_{|u| \leq \epsilon} g_i(u)$  . Pour chaque  $i$ , il existe  $u_i$ ,  $|u_i| \leq \epsilon$  tel que

$$g_i(u_i) \geq a_i - \frac{1}{2^i}$$

Soit alors un entier positif  $n$ . On considère la suite réelle

$$U_n = \{u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, 0, 0, \dots\}.$$

Cette suite appartient à  $\mathcal{Q}^1$  et pour tout  $i \leq n$ , on a  $|u_i| \leq \epsilon$ . Soit  $p$  l'entier positif tel que

$$p\epsilon \leq \sum_{i=1}^n |u_i| < (p+1)\epsilon .$$

L'ensemble  $\{1, 2, \dots, n\}$  peut être subdivisé en un nombre fini de parties disjointes  $N_q$  telles que  $\sum_{i \in N_q} |u_i| \leq \epsilon$  . De plus, ce nombre peut être pris inférieur ou égal à  $2p+1$ .

On a alors  $\sum_{i \in N_q} |f_i(u_i)| \leq 1$  et par conséquent

$$\sum_{i=1}^n |f_i(u_i)| \leq 2p+1 .$$

D'après la définition des fonctions  $g_i(u)$ , on a

$$\sum_{i=1}^n |g_i(u_i)| \leq \sum_{i=1}^n |f_i(u_i)| - \frac{2}{\epsilon} \sum |u_i|$$

et compte tenu de ce qui précède

$$\sum_{i=1}^n |g_i(u_i)| \leq (2p+1) - \frac{2}{\epsilon} \cdot p\epsilon = 1.$$

Cette inégalité étant valable quel que soit l'entier positif  $n$ , la suite  $\{g_i(u_i)\} \in \mathcal{Q}^1$ . La suite  $\{\frac{1}{2^i}\} \in \mathcal{Q}^1$ ; on a donc aussi  $\{a_i\} \in \mathcal{Q}^1$ . Or, pour tout  $i$ , et pour  $|u| \leq \epsilon$ , on a par définition de  $a_i$

$$a_i \geq |f_i(u)| - \frac{2}{\epsilon}|u| \quad . \quad *$$

2) Application d'un espace d'Orlicz dans un espace d'Orlicz (en particulier, application de  $\mathcal{Q}^p$  dans  $\mathcal{Q}^q$ ,  $1 < p, q < +\infty$ ).

Pour simplifier, on se place encore dans le cas où  $X = 0$ ,  $\mathcal{Q}0 = 0$ .

Proposition 4.6.-

Soient  $\mathcal{Q}^{M_1}$  et  $\mathcal{Q}^{M_2}$  deux espaces de coordonnées d'Orlicz associés aux fonctions  $M_1(u)$  et  $M_2(u)$  (\*) . Si les fonctions  $f_i$  sont nulles et continues en  $u = 0$  et bornées sur un même voisinage de zéro, une condition nécessaire et suffisante pour que l'application :  $\mathcal{Q}^{M_1} \xrightarrow{\mathcal{Q}} \mathcal{Q}^{M_2}$  soit définie et continue en  $X = 0$  est que pour tout  $\alpha > 0$ , il existe des constantes positives  $\epsilon, b, \beta$  et une suite  $\{a_i\} \in \mathcal{Q}^1$  telles que pour tout  $i$  et  $|u| \leq \epsilon$ , on ait

$$M_2(\alpha |f_i(u)|) \leq a_i + bM_1(\beta |u|) \quad .$$

---

(\*) Ces espaces ont été définis au Chapitre I, §1, Exemple 2 - p.4.

Dans un espace d'Orlicz  $\Phi^M$ , on a (\*)

$$c(\Phi^{M_1}, 0, 1) \subset \{X = \{x_i\} : \sum_{i=1}^{\infty} M(x_i) < +\infty\} \subset \overline{c(\Phi^{M_1}, 0, 1)}$$

Soient  $\alpha$  et  $\beta$  deux nombres positifs. On désigne par  $\Psi_{\alpha\beta}$  l'opérateur qui à une suite réelle  $Z = \{z_i\}$  fait correspondre la suite  $\{M_2[\alpha f_i(\frac{1}{\beta} M_1^{-1}(z_i))]\}$ .

i) Condition nécessaire.-

Si l'application  $\Phi^{M_1} \xrightarrow{\mathfrak{F}} \Phi^{M_2}$  est définie et continue en  $X = 0$ , il résulte de la proposition 4.2. que pour tout  $\alpha > 0$ , il existe  $\gamma > 0$  tel que  $\mathfrak{F}$  applique  $B(\Phi^{M_1}, 0, \gamma)$  dans  $c(\Phi^{M_2}, 0, \frac{1}{\alpha})$ .

Du fait que  $f_i(0) = 0$  pour tout  $i$ , on déduit que  $\mathfrak{F}$  applique  $c(\Phi^{M_1}, 0, \gamma)$  dans  $c(\Phi^{M_2}, 0, \frac{1}{\alpha})$ .

On considère alors  $\beta > 0$  tel que  $\frac{1}{\beta} < \gamma$ . Soit  $Z = \{z_i\} \in \Phi^1$ .

On considère  $X = \{x_i\}$  avec  $x_i = \frac{1}{\beta} M_1^{-1}(z_i)$ . On a

$$\sum_{i=1}^{\infty} M_1(\beta x_i) < +\infty. \text{ Par conséquent } \beta X \in \overline{c(\Phi^{M_1}, 0, 1)}.$$

On en déduit que  $X \in c(\Phi^{M_1}, 0, \gamma)$  et donc que  $\mathfrak{F}X \in c(\Phi^{M_2}, 0, \frac{1}{\alpha})$ .

Mais alors, on a  $\sum_{i=1}^{\infty} M_2[\alpha f_i(\frac{1}{\beta} M_1^{-1}(z_i))] < +\infty$  et  $\Psi_{\alpha\beta} Z \in \Phi^1$ .

---

(\*) M.A. Krasnoselskii et Y.B. Rutickii - Convex functions and Orlicz spaces (1961).

Donc, pour tout  $\alpha > 0$ , il existe  $\beta > 0$  tel que  $\Psi_{\alpha\beta}$  applique  $\mathcal{Q}^1$  dans  $\mathcal{Q}^1$ . Il résulte de la proposition 4.5. que, quel que soit  $\alpha > 0$ , il existe des constantes positives  $\beta, \eta, b$  et une suite  $\{a_i\} \in \mathcal{Q}^1$  telles que pour tout  $i$  et  $|u| \leq \eta$  on ait

$$M_2\left[\alpha f_i\left(\frac{1}{\beta} M_1^{-1}(u)\right)\right] \leq a_i + b|u|$$

On pose alors  $v = \frac{1}{\beta} M_1^{-1}(u)$ . Compte tenu de la continuité de la fonction  $M(u)$ , on déduit que pour tout  $\alpha > 0$ , il existe des constantes positives  $\beta, \epsilon, b$  et une suite  $\{a_i\} \in \mathcal{Q}^1$  telles que pour tout  $i$  et  $|v| \leq \epsilon$  on ait

$$M_2(\alpha |f_i(v)|) \leq a_i + b M_1(\beta |v|).$$

ii) Condition suffisante.-

On suppose vérifiée la condition de l'énoncé. Alors, pour tout  $\alpha > 0$ , il existe  $\beta > 0$  tel que  $\Psi_{\alpha\beta}$  définisse une application de  $\mathcal{Q}^1$  dans  $\mathcal{Q}^1$ .

Soit  $\alpha > 0$  et  $\alpha_0$  tel que  $0 < \frac{1}{\alpha_0} < \alpha$ . Il existe donc

$\beta_0 > 0$  tel que  $\Psi_{\alpha_0\beta_0}$  applique  $\mathcal{Q}^1$  dans  $\mathcal{Q}^1$ .

On considère  $X = \{x_i\} \in B(\mathcal{Q}^{M_1}, 0, \frac{1}{\beta})$  où  $\beta > \beta_0$ . Alors  $\beta_0 X \in \mathcal{C}(\mathcal{Q}^{M_1}, 0, 1)$ . Soit alors  $Z = \{z_i\}$  avec  $z_i = M_1(\beta_0 x_i)$ .

On a  $Z \in \mathcal{Q}^1$ . Donc  $\Psi_{\alpha_0\beta_0} Z \in \mathcal{Q}^1$ , ce qui signifie que

$\sum_{i=1}^{\infty} M_2[\alpha_0 f_i(x_i)] < +\infty$ . Donc  $\beta X \in \mathcal{C}(\mathcal{Q}^{M_2}, 0, \frac{1}{\alpha_0})$  et par consé-

quent  $\beta X \in \mathcal{C}(\mathcal{Q}^{M_2}, 0, \alpha)$ .

Donc, quel que soit  $\alpha > 0$ , il existe  $\beta > 0$  tel que  $\Phi$  applique  $B(\mathcal{Q}^{M_1}, 0, \frac{1}{\beta})$  dans  $C(\mathcal{Q}^{M_2}, 0, \alpha)$ . Alors, d'après la proposition 4.2., l'application  $\mathcal{Q}^{M_1} \xrightarrow{\Phi} \mathcal{Q}^{M_2}$  est continue en  $X = 0$ . \*

3) Application de  $\mathcal{Q}_r^2$  dans  $\hat{\mathcal{Q}}_r^2$ . (\*)

Proposition 4.7. -

Si les fonctions  $f_i$  sont continues sur  $\mathbb{R}$  et s'il existe  $\epsilon > 0$  et un entier positif  $p$  tels qu'on ait pour tout  $i$  et  $|u| \leq \epsilon$

$$|f_i(u)| \leq p^i$$

alors  $\Phi$  définit une application de  $\mathcal{Q}_r^2$  dans  $\hat{\mathcal{Q}}_r^2$  continue en tout point  $X \in \mathcal{Q}_r^2$ .

Soit  $X = \{x_i\} \in \mathcal{Q}_r^2$ . Il existe  $n > 0$  tel que pour tout  $i > n$ , on ait  $|x_i| \leq \epsilon$ . Soit alors  $m = 2p^2$ . On a

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{|f_i(x_i)|^2}{m^i} \leq \sum_{i=1}^n \frac{|f_i(x_i)|^2}{m^i} + \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} < +\infty$$

Donc  $\Phi X \in \hat{\mathcal{Q}}_r^2$ .

Mais l'espace  $\mathcal{Q}_r^2$  est métrisable et complet et  $\hat{\mathcal{Q}}_r^2 = [\hat{\mathcal{Q}}_r^2]$ , par conséquent, d'après la proposition 4.3.,  $\Phi$  définit une application de  $\mathcal{Q}_r^2$  dans  $\hat{\mathcal{Q}}_r^2$  qui est continue en tout point  $X \in \mathcal{Q}_r^2$ . \*

D'une façon analogue, on obtiendra des conditions simples pour que  $\Phi$  définisse une application continue de  $\mathcal{A}^p$  dans  $\hat{\mathcal{Q}}_r^p$  ( $p > 1$ ).

---

(\*) cf. Chapitre I, §1. Exemple 3 - page 4 et §3. page 26.

## §2. $\Phi$ OPERATEUR GRADIENT.

Soit un espace L.C.-monotone  $\Phi$ . On se propose d'étudier plus particulièrement les opérateurs  $\Phi$  qui définissent des applications de l'espace  $\tilde{\Phi}$  associé à  $\Phi$  dans l'espace  $\Phi$ .

En utilisant l'inégalité fondamentale (Chapitre I, proposition 1.15.), on montrera que si les fonctions  $f_i$  sont continues sur  $\mathbb{R}$  et si  $\Phi$  définit une application continue de  $\tilde{\Phi}$  dans  $\Phi$ , alors  $\Phi$  est un opérateur gradient.

On va tout d'abord considérer la notion de différentielle de Gâteaux et celle d'opérateur gradient telles qu'elles ont été généralisées par Marinescu (\*) dans les espaces localement convexes.

### Différentielle de Gâteaux et opérateur gradient.-

Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels réels, localement convexes et séparés. Soit  $T$  une application définie sur un voisinage  $V$  de  $x \in E$  et à valeurs dans  $F$ .

Si, pour tout  $k \in E$ ,  $\frac{T(x+tk) - T(x)}{t}$  tend vers une limite  $T'_x(k)$  lorsque  $t$  tend vers zéro par valeurs réelles, on dit que  $T$  est différentiable au sens de Gâteaux au point  $x$ . La limite  $T'_x(k)$  est appelée différentielle de Gâteaux de  $T$  en  $x$ .

Si la différentielle de Gâteaux  $T'_x(k)$  est linéaire et continue par rapport à  $k$ ,  $T'_x$  est un élément de l'espace  $\mathcal{L}(E, F)$  des applications linéaires continues de  $E$  dans  $F$ . On appelle

---

(\*) Marinescu - Différentielle de Gâteaux et Fréchet dans les espaces localement convexes. Bull. Math. Soc. Sci. Math. Phys. R.P. Roumaine (N.S.) 1/49 (1957) - pp. 77-86.

alors dérivée de T l'application :  $x \rightarrow T'_x$  , définie dans E et à valeurs dans  $\mathfrak{L}(E, F)$ .

Dans le cas où  $F = \mathbb{R}$  , T est une fonctionnelle. Sa dérivée, si elle existe, est alors une application définie dans E et à valeurs dans le dual topologique  $E'$ . L'opérateur qui définit cette application est alors appelé opérateur gradient de la fonctionnelle.

§ opérateur gradient.-

Proposition 4.8. -

Soit  $\mathcal{Q}$  un espace L.C.-monotone. Si les fonctions  $f_i$  sont continues sur  $\mathbb{R}$  et si  $\mathfrak{g}$  définit une application continue de  $\tilde{\mathcal{Q}}$  dans  $\mathcal{Q}$  , alors  $\mathfrak{g}$  est le gradient de la fonctionnelle f définie sur  $\tilde{\mathcal{Q}}$  par

$$X = \{x_i\} \xrightarrow{f} f(X) = \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^{x_i} f_i(u) du .$$

i) Soit  $X = \{x_i\} \in \tilde{\mathcal{Q}}$  . La fonction  $f_i$  étant continue sur  $\mathbb{R}$ , il existe  $\theta_i$ ,  $0 < \theta_i < 1$  tel que

$$\int_0^{x_i} f_i(u) du = x_i f_i(\theta_i x_i)$$

L'espace  $\tilde{\mathcal{Q}}$  étant normal,  $\{\theta_i x_i\} \in \tilde{\mathcal{Q}}$  , et,  $\mathfrak{g}$  définissant une application de  $\tilde{\mathcal{Q}}$  dans  $\mathcal{Q}$  ,  $\{f_i(\theta_i x_i)\} \in \mathcal{Q}$  .

Il résulte alors de la proposition 1.15. que la série

$\sum_{i=1}^{\infty} x_i f_i(\theta_i x_i)$  est absolument convergente. Donc f est définie sur  $\tilde{\mathcal{Q}}$  .

ii) Soit  $K = \{k_i\} \in \tilde{\mathcal{E}}$ . En tenant compte de la convergence absolue des séries, on a pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $t \neq 0$

$$\frac{f(X+tK) - f(X)}{t} = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^{\infty} \int_{x_i}^{x_i+tk_i} f_i(u) du$$

Or, il existe une suite  $\{\alpha_i\}$ ,  $0 < \alpha_i < 1$ , telle qu'on ait pour tout  $i$

$$\int_{x_i}^{x_i+tk_i} f_i(u) du = tk_i f_i(x_i + t\alpha_i k_i).$$

D'où

$$\frac{f(X+tK) - f(X)}{t} = \sum_{i=1}^{\infty} k_i f_i(x_i + t\alpha_i k_i)$$

iii) L'espace  $\tilde{\mathcal{E}}$  étant normal,  $K_0 = \{\alpha_i k_i\} \in \tilde{\mathcal{E}}$  et par conséquent  $\{f_i(x_i + t\alpha_i k_i)\} \in \mathcal{E}$ .

D'autre part, d'après la définition de  $\tilde{\mathcal{E}}$ , il existe  $\lambda \in \Lambda$  telle que  $\lambda'(K) < +\infty$  et, on a, en utilisant la proposition 1.15.

$$\left| \sum_{i=1}^{\infty} k_i [f_i(x_i + t\alpha_i k_i) - f_i(x_i)] \right| \leq \tilde{\lambda}(K) \lambda[\mathfrak{F}(X+tK_0) - \mathfrak{F}(X)].$$

On a  $|tK_0| < |tK|$ , donc il résulte de la propriété  $A_3$  des espaces L.C.-monotones que si  $\mathfrak{F}$  définit une application continue de  $\tilde{\mathcal{E}}$  dans  $\mathcal{E}$ ,  $\mathfrak{F}(X+tK_0) - \mathfrak{F}(X)$  tend vers 0 lorsque  $t \rightarrow 0$  et on a donc

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \in \mathbb{R}}} \frac{f(X+tK) - f(X)}{t} = (K, \mathfrak{F}X)$$

La fonctionnelle  $f$  est donc différentiable au sens de Gâteaux en  $X$ .

De plus, comme  $\mathcal{Q} \subset \hat{\mathcal{Q}}$ , (Proposition 1.22.), il résulte de la proposition 1.16. que l'application linéaire

$$K \rightarrow (K, \mathfrak{Q}X)$$

est continue en  $K$ .

Par conséquent l'application

$$X \rightarrow \mathfrak{Q}X$$

est l'application dérivée de la fonctionnelle  $f$  et  $\mathfrak{Q}$  est donc un opérateur gradient. \*

En particulier lorsque  $\tilde{\mathcal{Q}}$  est métrisable et complet, si les fonctions  $f_i(u)$  sont continues et si  $\mathfrak{Q}$  définit une application de  $\tilde{\mathcal{Q}}$  dans  $[\mathcal{Q}]$ , alors  $\mathfrak{Q}$  est un opérateur gradient.

Nota Bene.-

On obtiendra un énoncé analogue à celui de la proposition 4.8. en permutant les rôles de  $\mathcal{Q}$  et  $\tilde{\mathcal{Q}}$ .

Application.-

Soit  $\mathcal{Q}$  un espace L.C.-monotone tel que  $\tilde{\mathcal{Q}} \subset \mathcal{Q}^2 \subset [\mathcal{Q}]$ . On considère un opérateur  $\mathfrak{Q}$ , associé à une suite  $\{f_i\}$  de fonctions réelles continues sur  $\mathbb{R}$ , définissant une application continue de  $\tilde{\mathcal{Q}}$  dans  $[\mathcal{Q}]$ , et un opérateur matriciel  $H$  associé à une matrice infinie réelle  $\{a_{ji}\}$  et définissant une application continue de  $[\mathcal{Q}]$  dans  $\mathcal{Q}^2$ . On désigne par  $H^*$  l'opérateur matriciel associé à la matrice transposée de  $\{a_{ji}\}$ .

Proposition 4.9. -

L'opérateur  $H\delta H^*$  est le gradient de la fonctionnelle  $g$  définie sur  $\mathcal{Q}^2$  par

$$g(X) = f(H^*X)$$

où on a

$$Y = \{y_i\} \xrightarrow{f} f(Y) = \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^{y_i} f_i(u) du .$$

i) Si  $H \in \{\text{mat}; [\mathcal{Q}] \rightarrow \mathcal{Q}^2, \text{ continue}\}$ , il résulte de la proposition 2.3. qu'on a  $H^* \in \{\text{mat}; \mathcal{Q}^2 \rightarrow \mathcal{Q}, \text{ continue}\}$ . Par conséquent, l'opérateur  $H\delta H^*$  définit une application continue de  $\mathcal{Q}^2$  dans  $\mathcal{Q}^2$ .

ii) Il résulte de la proposition 4.8. que  $g$  est définie sur  $\mathcal{Q}^2$  et que pour tout  $X \in \mathcal{Q}^2$  et pour tout  $K \in \mathcal{Q}^2$ , on a

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \in \mathbb{R}}} \frac{g(X+tK) - g(X)}{t} = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \in \mathbb{R}}} \frac{f(H^*X+tH^*K) - f(H^*X)}{t} = (H^*K, \delta H^*X) .$$

Or, puisque  $\delta H^*X \in [\mathcal{Q}]$  et  $H \in \{\text{mat}; [\mathcal{Q}] \rightarrow \mathcal{Q}^2, \text{ continue}\}$ , il résulte de la proposition 2.2. qu'on a

$$(H\delta H^*X, K) = (\delta H^*X, H^*K) .$$

On a donc

$$\lim_{\substack{t \in \mathbb{R} \\ t \rightarrow 0}} \frac{g(X+tK) - g(X)}{t} = (K, H\delta H^*X) .$$

La fonctionnelle  $g$  est donc différentiable au sens de Gâteaux en tout point  $X \in \mathcal{Q}^2$  et l'opérateur gradient est  $H\delta H^*$ . \*

On notera que,  $\mathcal{Q}^2$  étant un espace de Banach et  $H\hat{\otimes}H^*$  définissant une application continue de  $\mathcal{Q}^2$  dans  $\mathcal{Q}^2$ ,  $g$  est aussi différentiable au sens de Fréchet, les différentielles étant les mêmes. On a donc

$$\lim_{\|K\|_2 \rightarrow 0} \frac{|g(X+K) - g(X) - (K, H\hat{\otimes}H^*X)|}{\|K\|_2} = 0 .$$



CHAPITRE V.

FACTORISATION D'UN OPERATEUR MATRICIEL.

Soit  $\mathcal{K}$  un espace de Hilbert et soit  $B$  un opérateur linéaire définissant un endomorphisme continu, auto-adjoint, positif de  $\mathcal{K}$ . Il existe un opérateur linéaire unique  $K$  qui définit un endomorphisme continu auto-adjoint positif de  $\mathcal{K}$  et tel que  $B = K^2$ .

Krasnoselskii et Rutickii (\*) ont généralisé cette propriété pour l'opérateur intégral de noyau  $k(s, t)$ , agissant sur des espaces de fonctions d'Orlicz.

Soit  $E$  un espace d'Orlicz tel que l'espace  $L^2$  soit dense dans le dual fort  $E'$  de  $E$  et tel qu'on ait

$$E \subset L^2 \subset E' .$$

Soit  $B$  un opérateur linéaire intégral de noyau  $k(s, t)$  qui définit une application continue de  $E'$  dans  $E$  dont la restriction à  $L^2$  est une application auto-adjointe positive. Alors,

---

(\*) Krasnoselskii M.A. - Doklady Akad. Nauk SSSR 97, 6 (1954), p. 777-780 (Russe).

Krasnoselskii et Rutickii - Trudy Mosk. matem. ob-va 7 (1958), p. 63-120 (Russe).

il existe un opérateur  $K$  définissant une application continue de  $L^2$  dans  $E$ , dont l'opérateur adjoint  $\tilde{K}$  définit une application continue de  $E'$  dans  $L^2$  et tel qu'on ait

$$A = K\tilde{K} .$$

Vainberg et Engelson (\*) ont étendu ce résultat à des opérateurs linéaires bornés agissant sur des espaces localement convexes.

Soient  $E$  un espace localement convexe réel quasi-tonnelé, et  $E'$  son dual fort. On suppose réalisée les deux conditions suivantes :

$\alpha$ ) Il existe un espace de Hilbert  $\mathcal{K}$ , dense dans  $E'$ , tel qu'on ait

$$E \subset \mathcal{K} \subset E' ,$$

et que les applications canoniques de  $E$  dans  $\mathcal{K}$  et de  $\mathcal{K}$  dans  $E'$  soient continues.

$\beta$ ) La forme bilinéaire  $\langle x, y \rangle$  où  $x \in E$  et  $y \in E'$  coïncide avec le produit scalaire dans  $\mathcal{K}$  lorsque  $y \in \mathcal{K}$  et  $x \in E$ .

Soit un opérateur  $B$  définissant une application linéaire bornée de  $E'$  dans  $E$  dont la restriction à  $\mathcal{K}$  est positive et auto-adjointe. Alors, il existe un opérateur  $K$  définissant une application linéaire bornée de  $\mathcal{K}$  dans  $E''$  dont l'opérateur adjoint  $\tilde{K}$  définit une application de  $E$  dans  $\mathcal{K}$  et tel que

$$B = K\tilde{K} .$$

---

(\*) M.M. Vainberg et Ya.L. Engelson - Sur la racine carrée d'un opérateur linéaire dans les espaces localement convexes.

On se propose d'obtenir une extension analogue pour un opérateur matriciel  $A$  définissant une application bornée d'un espace L.C.-monotone  $[\mathcal{Q}]$  dans son dual fort  $\hat{\mathcal{Q}}$ . La démonstration utilisée est une adaptation de celle de Vainberg et Engelson au cas des espaces L.C.-monotones.

On étudiera ensuite l'influence de la pseudo-complète continuité de l'opérateur matriciel  $A$ .

On montrera enfin comment les résultats obtenus permettent de ramener l'étude des solutions dans un espace L.C.-monotone de certains systèmes infinis d'équations à l'étude des solutions dans  $\mathcal{Q}^2$  d'autres systèmes infinis d'équations.

### §1. THEOREME DE FACTORISATION.

Définition 5.1. -

Soient  $\mathcal{Q}$  et  $m$  deux espaces L.C.-monotones tels qu'on ait

$$m \subset \mathcal{Q}^2 \subset \mathcal{Q}.$$

et soit  $A \in \{\text{mat}; \mathcal{Q} \rightarrow m\}$ . On dira que l'application de  $\mathcal{Q}$  dans  $m$  définie par  $A$  est positive si elle satisfait aux conditions suivantes :

1) Pour tout  $X \in \mathcal{Q}^2$  et tout  $Y \in \mathcal{Q}^2$ , on a

$$(AX, Y) = (X, AY).$$

2) Pour tout  $X \in \mathcal{Q}^2$ , on a

$$(AX, X) \geq 0.$$

La condition 1) entraîne l'égalité

$$A = A^*$$

où  $A^*$  désigne toujours l'opérateur associé à la matrice transposée de celle à laquelle est associé l'opérateur  $A$ .

Proposition 5.2. - (Théorème de factorisation)

Soit  $\mathcal{Q}$  un espace L.C.-monotone tel que  $[\mathcal{Q}]$  soit tonnelé et

$$\tilde{\mathcal{Q}} \subset \mathcal{Q}^2 \subset [\mathcal{Q}] ,$$

et soit  $A \in \{\text{mat}; [\mathcal{Q}] \rightarrow \tilde{\mathcal{Q}}, \text{positive bornée}\}$  . Alors, il existe  $H \in \{\text{mat}; [\mathcal{Q}] \rightarrow \mathcal{Q}^2, \text{positive bornée}\}$  tel que  $H^* \in \{\text{mat}; \mathcal{Q}^2 \rightarrow \tilde{\mathcal{Q}}, \text{positive bornée}\}$  et que, pour tout  $X \in [\mathcal{Q}]$ , on ait

$$AX = H^*HX .$$

i) Si  $A \in \{\text{mat}; [\mathcal{Q}] \rightarrow \tilde{\mathcal{Q}}, \text{positive}\}$  , il définit une application de  $\mathcal{Q}^2$  dans  $\mathcal{Q}^2$  qui est continue d'après la proposition 2.1. puisque l'espace  $\mathcal{Q}^2$  est tonnelé et pleinement complet.

Il existe donc un opérateur  $H$  unique définissant une application continue positive de  $\mathcal{Q}^2$  dans  $\mathcal{Q}^2$  et tel que, pour tout  $X \in \mathcal{Q}^2$  , on ait

$$AX = HHX .$$

Il résulte de la proposition 2.5. que  $H$  est un opérateur matriciel.

ii) On va montrer que l'application de  $\mathcal{Q}^2$  dans  $\mathcal{Q}^2$  définie par H admet un prolongement continu sur  $[\mathcal{Q}]$ .

Quel que soit  $X \in \mathcal{Q}^2$ , on a

$$(1) \quad \|HX\|_2^2 = (HX, HX) = (AX, X) .$$

Si  $A \in \{\text{mat}; [\mathcal{Q}] \rightarrow \mathbb{C}, \text{ bornée} \}$ , il existe un voisinage  $V$  de 0 de  $[\mathcal{Q}]$  tel que  $A(V)$  soit un sous-ensemble borné de  $\mathbb{C}$ . Soit  $U$  le polaire de  $A(V)$  dans  $[\mathcal{Q}]$ . L'espace  $[\mathcal{Q}]$  étant tonnelé,  $U$  est un voisinage de 0 de  $[\mathcal{Q}]$ .

Soit alors  $\epsilon$ ,  $0 < \epsilon < 1$ . On considère  $W = \epsilon(V \cap U)$ . L'ensemble  $W$  est un voisinage de 0 de  $[\mathcal{Q}]$ . Quel que soit  $Y \in V \cap U$ , on a  $AY \in A(V)$  et par conséquent

$$|(AY, Y)| \leq 1 .$$

Alors, quel que soit  $X \in W$ , on a  $X = \epsilon Y$  avec  $Y \in V \cap U$ . On a donc

$$(2) \quad |(AX, X)| \leq \epsilon^2 .$$

Par conséquent, pour tout  $X \in W \cap \mathcal{Q}^2$ , on a, compte tenu de l'égalité (1) et de l'inégalité (2)

$$\|HX\|_2^2 \leq \epsilon^2 .$$

Il en résulte que l'opérateur H définit une application linéaire uniformément continue de l'ensemble  $\mathcal{Q}^2$ , muni de la topologie induite par celle de  $[\mathcal{Q}]$ , dans l'espace  $\mathcal{Q}^2$ . Or, l'ensemble des suites finies étant dense dans  $[\mathcal{Q}]$ , l'ensemble  $\mathcal{Q}^2$  est aussi dense dans  $[\mathcal{Q}]$ . L'application de  $\mathcal{Q}^2$  dans  $\mathcal{Q}^2$  définie par H admet donc un prolongement continu  $\varphi$  sur  $[\mathcal{Q}]$ .

Il résulte alors de la proposition 2.5. que  $\varphi$  est définie par un opérateur matriciel qui est l'opérateur H.

iii) On montre ensuite qu'on a  $A = H^*H$  .

L'opérateur H définissant une application continue de  $[\mathcal{Q}]$  dans  $\mathcal{Q}^2$ , il résulte de la proposition 2.3. qu'on a

$$H^* \in \{ \text{mat}; \mathcal{Q}^2 \rightarrow \tilde{\mathcal{Q}}, \text{ continue} \} .$$

De plus, H définissant une application positive, on a  $H = H^*$ . Les opérateurs A et  $H^*H$  définissent alors deux applications continues de  $[\mathcal{Q}]$  dans  $\tilde{\mathcal{Q}}$  qui prennent les mêmes valeurs sur l'ensemble  $\mathcal{Q}^2$  qui est dense dans  $[\mathcal{Q}]$ . Donc, pour tout  $X \in [\mathcal{Q}]$  on a

$$AX = H^*HX .$$

iiii) On montre enfin que H et  $H^*$  définissent des applications bornées.

On considère les voisinages V et U de 0 de  $[\mathcal{Q}]$  introduits dans ii). Pour tout  $X \in V \cap U$ , on a

$$|(AX, X)| \leq 1 ,$$

et donc

$$|(H^*HX, X)| \leq 1 .$$

Mais, il résulte de la proposition 2.2. qu'on a

$$(HX, HX) = (X, H^*HX) .$$

Donc, quel que soit  $X \in V \cap U$ , on a

$$\|HX\|_2^2 \leq 1$$

et par conséquent

$$H \in \{ \text{mat}; [\mathcal{Q}] \rightarrow \mathcal{Q}^2, \text{ bornée} \} .$$

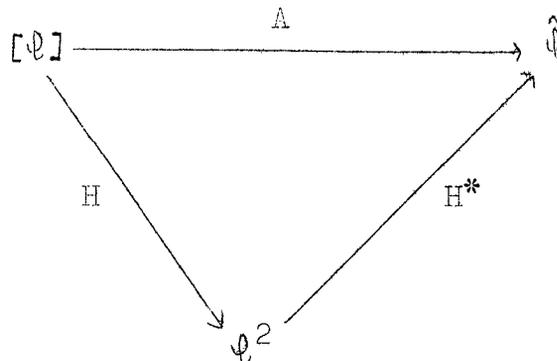
Enfin, comme  $[\mathcal{C}]$  est tonnelé, il résulte de la proposition 2.9. qu'on a

$$H^* \in \{ \text{mat}; \mathcal{C}^2 \rightarrow \tilde{\mathcal{C}}, \text{ bornée} \} . *$$

Il faut noter le fait que  $H = H^*$ . L'opérateur matriciel  $H$  définit donc une application bornée de  $[\mathcal{C}]$  dans  $\mathcal{C}^2$ , et une application bornée de  $\mathcal{C}^2$  dans  $\tilde{\mathcal{C}}$ .

Dans la suite, on continuera à écrire  $A = H^*H$  pour marquer le fait que  $H$  est considéré comme opérateur définissant une application de  $[\mathcal{C}]$  dans  $\mathcal{C}^2$  alors que  $H^*$  est considéré comme opérateur définissant une application de  $\mathcal{C}^2$  dans  $\tilde{\mathcal{C}}$ .

La situation décrite par la proposition 5.2. se résume dans le schéma suivant



$$A = H^*H$$

On dira alors que l'opérateur matriciel  $A$  est factorisable relativement à l'espace L.C.-monotone  $\mathcal{C}$ .

§2. CAS OÙ A DÉFINIT UNE APPLICATION  
PSEUDO-COMPLÈTEMENT CONTINUE.

Soit B un opérateur linéaire définissant un endomorphisme complètement continu, auto-adjoint et positif d'un espace de Hilbert  $\mathcal{K}$ . L'opérateur "racine carrée" K définit aussi un endomorphisme complètement continu de  $\mathcal{K}$ .

On se propose, en utilisant l'inégalité fondamentale de la proposition 1.15., d'étendre ce résultat à un opérateur matriciel factorisable relativement à un espace L.C.-monotone  $\mathcal{Q}$ .

Proposition 5.3. -

Soit  $\mathcal{Q}$  un espace L.C.-monotone tel que  $[\mathcal{Q}]$  soit tonnelé  
et

$$\tilde{\mathcal{Q}} \subset \mathcal{Q}^2 \subset [\mathcal{Q}] ,$$

et soit  $A \in \{\text{mat}; [\mathcal{Q}] \rightarrow \tilde{\mathcal{Q}}, \text{positive, pseudo-complètement continue}\}$ .  
Alors, il existe  $H \in \{\text{mat}; [\mathcal{Q}] \rightarrow \mathcal{Q}^2, \text{positive, pseudo-comp.cont.}\}$   
tel que  $H^* \in \{\text{mat}; \mathcal{Q}^2 \rightarrow \tilde{\mathcal{Q}}, \text{positive, pseudo-comp.cont.}\}$  et que,  
pour tout  $X \in [\mathcal{Q}]$ , on ait

$$AX = H^*HX .$$

D'après la proposition 5.2., A définissant une application positive pseudo-complètement continue, donc aussi bornée, est factorisable relativement à l'espace  $\mathcal{Q}$ . Il reste donc à démontrer que H et H\* définissent des applications pseudo-complètement continues.

i) Soit  $M$  un sous-ensemble borné de  $[\mathcal{Q}]$ . L'espace  $[\mathcal{Q}]$  étant tonnelé, il existe un voisinage  $\tilde{U}$  de 0 de  $\tilde{\mathcal{Q}}$  dont le polaire  $\tilde{U}^\circ$  dans  $[\mathcal{Q}]$  contient le sous-ensemble  $M' = 2M$  de  $[\mathcal{Q}]$  qui est borné. Or, dans  $\tilde{\mathcal{Q}}$ , la famille  $\tilde{\mathcal{V}}$  des sous-ensembles  $\tilde{V} = \{X \in \tilde{\mathcal{Q}} : \tilde{\lambda}(X) \leq a\}$ , où  $\tilde{\lambda}$  parcourt la famille filtrante  $\tilde{\Lambda}$  des semi-normes définissant la topologie de  $\tilde{\mathcal{Q}}$  et où  $a > 0$ , constitue une base de voisinages de 0 de  $\tilde{\mathcal{Q}}$ . Donc il existe  $\tilde{V} \in \tilde{\mathcal{V}}$  tel que

$$\tilde{V} \subset \tilde{U} .$$

On a alors pour les polaires  $\tilde{V}^\circ$  et  $\tilde{U}^\circ$  de  $\tilde{V}$  et  $\tilde{U}$  dans  $[\mathcal{Q}]$

$$\tilde{V}^\circ \supset \tilde{U}^\circ$$

et donc

$$\tilde{V}^\circ \supset 2M .$$

Par conséquent, pour tout  $Y \in 2M$ , on a

$$\sup_{X \in \tilde{V}} |(X, Y)| \leq 1 .$$

D'où

$$(\tilde{\lambda})'(Y) = \sup_{X \in \tilde{\mathcal{Q}}, \tilde{\lambda}(X) \leq 1} |(X, Y)| \leq a .$$

Donc, il existe  $\tilde{\lambda} \in \tilde{\Lambda}$  et  $a > 0$  tels que pour tout  $Y \in 2M$ , on ait

$$(\tilde{\lambda})'(Y) \leq a .$$

ii) Soit alors une suite  $\{X_n\} \subset M$ . On a  $HX_n \in \mathcal{Q}^2$   
et

$$\|H(X_n - X_m)\|_2^2 = (H(X_n - X_m), H(X_n - X_m))$$

ou encore, d'après la proposition 2.2. et la proposition 5.2.

$$\|H(X_n - X_m)\|_2^2 = (X_n - X_m, \Lambda(X_n - X_m)) .$$

Or, quels que soient  $n$  et  $m$ ,  $X_n - X_m \in 2M$  et on a, d'après i)

$$(1) \quad (\tilde{\lambda})'(X_n - X_m) \leq a$$

Alors, on a, d'une part d'après la proposition 1.22.

$$X_n - X_m \in [\mathcal{Q}] \subset \hat{\mathcal{Q}}$$

et d'autre part, puisque  $\Lambda \in \{\text{mat}; [\mathcal{Q}] \rightarrow \hat{\mathcal{Q}}\}$

$$\Lambda(X_n - X_m) \in \hat{\mathcal{Q}} .$$

Alors, en utilisant l'inégalité fondamentale de la proposition 1.15. et l'inégalité (1), on a

$$|(X_n - X_m, \Lambda(X_n - X_m))| \leq a\tilde{\lambda}[\Lambda(X_n - X_m)]$$

d'où

$$(2) \quad \|H(X_n - X_m)\|_2^2 \leq a\tilde{\lambda}[\Lambda(X_n - X_m)] .$$

L'opérateur  $\Lambda$  définissant une application pseudo-complètement continue de  $[\mathcal{Q}]$  dans  $\hat{\mathcal{Q}}$ ,  $\Lambda(M)$  est relativement compacte dans  $\hat{\mathcal{Q}}$ . On peut donc extraire de la suite  $\{X_n\}$  une sous-suite  $\{X_{n_k}\}$  telle que  $\{\Lambda X_{n_k}\}$  converge dans  $\hat{\mathcal{Q}}$ .

Il résulte alors de l'inégalité (2) que la suite  $\{HX_{n_k}\}$  est une suite de Cauchy de  $\mathcal{Q}^2$ , donc une suite convergente.

Par conséquent, de toute suite de  $H(M)$ , on peut extraire une sous-suite convergente et, l'espace  $\mathcal{Q}^2$  étant un espace métrique,  $H(M)$  est relativement compact.

Il s'ensuit qu'on a

$$H \in \left\{ \text{mat}; [\mathcal{Q}] \rightarrow \mathcal{Q}^2, \text{ pseudo-complètement continue} \right\} .$$

iii) Les espaces  $[\mathcal{Q}]$  et  $\mathcal{Q}^2$  étant tonnelés, il résulte de la proposition 2.20. qu'on a aussi

$$H^* \in \left\{ \text{mat}; \mathcal{Q}^2 \rightarrow \mathfrak{F}, \text{ pseudo-complètement continue} \right\} . *$$

On remarquera que lorsque  $[\mathcal{Q}]$  est tonnelé,  $\mathfrak{F}$  est quasi-complet. Il résulte alors de la proposition 2.13. qu'on obtiendra des conditions sur les coefficients de la matrice  $\{a_{ji}\}$  pour que l'application associée soit pseudo-complètement continue en utilisant les critères, fournis au Chapitre II, pour que A définisse une application de  $[\mathcal{Q}]$  dans  $\mathfrak{F}$  qui soit  $\alpha$ -bornée,  $\beta$ -bornée ou  $\delta$ -bornée. (Propositions 2.14., 2.15. et 2.17.).

### §3. METHODE DE FACTORISATION.

Soient A l'opérateur matriciel associé à une matrice infinie  $\{a_{ji}\}$ ,  $\mathfrak{F}$  l'opérateur non linéaire associé à une suite de fonctions réelles  $\{f_i\}$  étudié au Chapitre IV, et  $\mu$  un paramètre réel.

On considère le système infini d'équations non linéaires

$$x_j - \mu \sum_{i=1}^{\infty} a_{ji} f_i(x_i) = 0 \quad j = 1, 2, \dots$$

dit système de Hammerstein. Son étude est celle de l'équation

fonctionnelle

$$(E_1) \quad X - \mu A \hat{\Phi} X = 0 \quad \text{où } X = \{x_i\} .$$

Soit alors  $\mathcal{Q}$  un espace L.C.-monotone tel que

- 1)  $[\mathcal{Q}]$  soit tonnelé et  $\hat{\mathcal{Q}} \subset \mathcal{Q}^2 \subset [\mathcal{Q}]$
- 2)  $\hat{\Phi}$  définisse une application de  $\hat{\mathcal{Q}}$  dans  $[\mathcal{Q}]$
- 3)  $A \in \{\text{mat}; [\mathcal{Q}] \rightarrow \hat{\mathcal{Q}}\}$  soit factorisable relativement à  $\mathcal{Q}$ . (On a alors  $A = H^*H$ ).

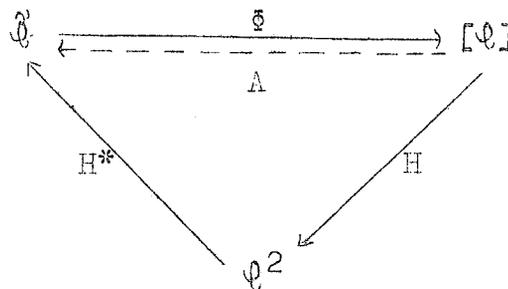
La proposition suivante montre que l'étude dans  $\hat{\mathcal{Q}}$  des solutions de l'équation  $(E_1)$  se ramène à l'étude dans  $\mathcal{Q}^2$  des solutions de l'équation

$$(E_2) \quad Y - \mu H \hat{\Phi} H^* Y = 0 .$$

Proposition 5.4. -

Si  $X \in \hat{\mathcal{Q}}$  est solution de  $(E_1)$ , alors  $Y = \mu H \hat{\Phi} X \in \mathcal{Q}^2$  est solution de  $(E_2)$ ; et si  $Y \in \mathcal{Q}^2$  est solution de  $(E_2)$ , alors  $X = H^* Y \in \hat{\mathcal{Q}}$  est solution de  $(E_1)$ .

On a le schéma suivant



$$A = H^*H$$

i) Soit  $X \in \tilde{\mathcal{Q}}$  tel que  $X = \mu A \tilde{\Phi} X$ , c'est-à-dire  $X = \mu H^* H \tilde{\Phi} X$ . Alors  $Y = \mu H \tilde{\Phi} X \in \mathcal{Q}^2$ . L'opérateur  $H^*$  définissant une application linéaire, on a

$$Y = \mu H \tilde{\Phi} (\mu H^* H \tilde{\Phi} X) = \mu H \tilde{\Phi} H^* (\mu H \tilde{\Phi} X)$$

c'est-à-dire

$$Y = \mu H \tilde{\Phi} H^* Y.$$

Donc  $Y$  est solution de  $(E_2)$ .

ii) Soit  $Y \in \mathcal{Q}^2$  tel que  $Y = \mu H \tilde{\Phi} H^* Y$ . Alors  $X = H^* Y \in \tilde{\mathcal{Q}}$  et

$$H^* Y = \mu H^* H \tilde{\Phi} H^* Y$$

c'est-à-dire

$$X = \mu H^* H \tilde{\Phi} X.$$

Donc  $X$  est solution de  $(E_1)$ . \*

Cette méthode de réduction de l'équation  $(E_1)$  sur un espace L.C.-monotone  $\tilde{\mathcal{Q}}$  à l'équation  $(E_2)$  sur  $\mathcal{Q}^2$  sera appelée méthode de factorisation.

Si l'opérateur  $A$ , factorisable relativement à  $\mathcal{Q}$ , définit une application de  $[\mathcal{Q}]$  dans  $\tilde{\mathcal{Q}}$  qui est seulement bornée et si  $\tilde{\Phi}$  définit une application continue de  $\tilde{\mathcal{Q}}$  dans  $[\mathcal{Q}]$ , alors l'opérateur  $H \tilde{\Phi} H^*$  définit une application continue de  $\mathcal{Q}^2$  dans  $\mathcal{Q}^2$ .

Si, de plus, l'application de  $[\mathcal{Q}]$  dans  $\tilde{\mathcal{Q}}$  définie par  $A$  est pseudo-complètement continue, alors l'application de  $\mathcal{Q}^2$  dans  $\mathcal{Q}^2$  définie par  $H \tilde{\Phi} H^*$  est complètement continue.



CHAPITRE VI.

SYSTEMES DE HAMMERSTEIN.

On appelle système de Hammerstein un système d'une infinité d'équations  $E_j$ ,  $j \in \mathbb{N}$ , à une infinité d'inconnues  $x_j$ ,  $j \in \mathbb{N}$ , de la forme

$$(E_j) \quad x_j - \mu \sum_{i=1}^{\infty} a_{ji} f_i(x_i) = 0,$$

$\mu$  étant un paramètre réel,  $a_{ji}$  les coefficients réels d'une matrice infinie, et  $f_i$  des fonctions réelles définies sur  $\mathbb{R}$ .

Une solution de ce système est donc une suite réelle  $X = \{x_i\}$  qui est solution de l'équation fonctionnelle

$$(E) \quad X - \mu A\Phi X = 0$$

où  $A$  désigne l'opérateur linéaire associé à la matrice  $\{a_{ji}\}$ , et où  $\Phi$  désigne l'opérateur non linéaire défini par

$$\{x_i\} \xrightarrow{\Phi} \{f_i(x_i)\} \text{ et étudié au Chapitre IV.}$$

On se propose de montrer comment on peut utiliser les espaces L.C.-monotones de suites et les résultats des chapitres précédents pour obtenir des théorèmes d'existence de solutions de certains systèmes de Hammerstein.

### §1. METHODE DE "MONOTONICITE".

#### Opérateur monotone sur un espace de Hilbert.-

Soit  $\mathcal{K}$  un espace de Hilbert réel. Un opérateur  $K$  définissant une application de  $\mathcal{K}$  dans  $\mathcal{K}$  est dit monotone si pour tout  $x_1 \in \mathcal{K}$  et tout  $x_2 \in \mathcal{K}$ , le produit scalaire

$$\langle x_1 - x_2, Kx_1 - Kx_2 \rangle$$

est positif ou nul.

On a le théorème suivant (\*) :

#### Théorème de monotonicité.-

Soit  $K$  un opérateur monotone définissant une application continue de  $\mathcal{K}$  dans  $\mathcal{K}$ . Alors, quel que soit  $u \in \mathcal{K}$ , l'équation

$$x + Kx = u$$

a une solution unique  $x \in \mathcal{K}$ .

#### Théorème d'existence.-

En utilisant la méthode de factorisation étudiée au Chapitre V et la méthode de monotonicité, on obtient le théorème d'existence suivant pour un système de Hammerstein.

---

(\*) G.J. MINTY - Monotone (non-linear) operators in Hilbert Space. Duke Math. J., 8, (1961) - p. 341-346.

Proposition 6.1.-

Soient  $\{a_{ji}\}$  une matrice infinie réelle et  $\{f_i\}$  une suite de fonctions réelles continues sur  $\mathbb{R}$ . Lorsque les conditions suivantes sont réalisées :

i) L'espace L.C.-monotone  $\mathcal{Q}$  est tel que  $[\mathcal{Q}]$  soit tonnelé et

$$\tilde{\mathcal{Q}} \subset \mathcal{Q}^2 \subset [\mathcal{Q}] ,$$

ii) L'opérateur linéaire  $A$  associé à la matrice  $\{a_{ji}\}$  définit une application de  $[\mathcal{Q}]$  dans  $\tilde{\mathcal{Q}}$  qui est positive et bornée,

iii) L'opérateur non linéaire  $\phi$  associé à la suite  $\{f_i\}$  définit une application continue de  $\tilde{\mathcal{Q}}$  dans  $[\mathcal{Q}]$ ,

iiii) Pour tout  $X_1 \in \tilde{\mathcal{Q}}$  et tout  $X_2 \in \tilde{\mathcal{Q}}$  , on a

$$\mu(X_1 - X_2, \phi X_1 - \phi X_2) \leq 0 ,$$

Alors le système de Hammerstein

$$(S) \quad x_j - \mu \sum_{i=1}^{\infty} a_{ji} f_i(x_i) = 0 \quad (j \in \mathbb{N})$$

admet une solution unique  $X = \{x_i\}$  dans  $\tilde{\mathcal{Q}}$ .

Démonstration :

Si les conditions i) et ii) sont vérifiées, il résulte de la proposition 5.2. que l'opérateur matriciel  $A$  est factorisable relativement à  $\mathcal{Q}$ . On a alors  $A = H^*H$  avec

$$H \in \{ \text{mat}; [\mathcal{Q}] \rightarrow \mathcal{Q}^2, \text{ positive bornée} \}$$

et

$$H^* \in \{ \text{mat}; \mathcal{Q}^2 \rightarrow \tilde{\mathcal{Q}}, \text{ positive bornée} \} .$$

D'après la proposition 5.4., il y a correspondance biunivoque entre les solutions  $X \in \tilde{\mathcal{Q}}$  de (S) et les solutions  $Y \in \mathcal{Q}^2$  de l'équation fonctionnelle

$$(E) \quad Y - \mu H\tilde{\mathcal{Q}}H^*Y = 0 .$$

Les applications définies par  $H$  et  $H^*$  étant bornées sont continues. Si la condition iii) est vérifiée, l'opérateur  $H\tilde{\mathcal{Q}}H^*$  définit une application continue de  $\mathcal{Q}^2$  dans  $\mathcal{Q}^2$ .

D'après la proposition 2.2. appliquée à l'opérateur  $H \in \{\text{mat}; [\mathcal{Q}] \rightarrow \mathcal{Q}^2, \text{ continue}\}$ , on a pour tout  $Y_1 \in \mathcal{Q}^2$  et tout  $Y_2 \in \mathcal{Q}^2$

$$\langle Y_1 - Y_2, H\tilde{\mathcal{Q}}H^*Y_1 - H\tilde{\mathcal{Q}}H^*Y_2 \rangle = \langle H^*Y_1 - H^*Y_2, \tilde{\mathcal{Q}}H^*Y_1 - \tilde{\mathcal{Q}}H^*Y_2 \rangle .$$

Si la condition iiiii) est réalisée, on a donc

$$\mu \langle Y_1 - Y_2, H\tilde{\mathcal{Q}}H^*Y_1 - H\tilde{\mathcal{Q}}H^*Y_2 \rangle \leq 0 .$$

L'opérateur  $K = -\mu H\tilde{\mathcal{Q}}H^*$  est alors monotone et définit une application continue de  $\mathcal{Q}^2$  dans  $\mathcal{Q}^2$ . Il résulte du théorème de monotonie que l'équation (E) a une solution unique  $Y \in \mathcal{Q}^2$ . Le système (S) a donc une solution unique  $X = H^*Y \in \tilde{\mathcal{Q}}$  .\*

#### Remarques-

1) La proposition 2.7. permet d'obtenir des conditions sur les coefficients  $a_{ji}$  pour que  $A \in \{\text{mat}; [\mathcal{Q}] \rightarrow \tilde{\mathcal{Q}}, \text{ bornée}\}$ .

2) Si l'espace  $[\mathcal{Q}]$  est tonnelé, son dual fort  $\tilde{\mathcal{Q}}$  est quasi-complet. Si l'espace  $\tilde{\mathcal{Q}}$  est métrisable, il est donc aussi complet. Alors, les fonctions  $f_i$  étant continues sur  $\mathbb{R}$ , il résulte de la proposition 4.3. qu'il suffit que  $\tilde{\mathcal{Q}}$  définisse une application de  $\tilde{\mathcal{Q}}$  dans  $[\mathcal{Q}]$  pour qu'elle soit continue et que la condition iii) soit ainsi vérifiée.

3) Si  $\mathfrak{F}$  définit une application de  $\hat{\mathcal{Q}}$  dans  $[\mathcal{Q}]$ , la condition iii) est vérifiée pour tout  $\mu > 0$  si toutes les fonctions  $f_i$  sont non croissantes, et pour tout  $\mu < 0$  si les fonctions  $f_i$  sont non décroissantes.

Exemple 1.-

Soit

$$f_i(u) = a_i + b|u|^{p-1} \operatorname{sgn} u \quad \text{avec} \quad \begin{cases} 1 < p \leq 2 \\ \{a_i\} \in \mathcal{Q}^p, b > 0 \end{cases}$$

Soit  $q$  tel que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Il résulte de la proposition 4.6. que l'opérateur  $\mathfrak{F}$  applique  $\mathcal{Q}^p$  dans  $\mathcal{Q}^q$ . Or, on a

$$\mathcal{Q}^p \subset \mathcal{Q}^2 \subset \mathcal{Q}^q = [\mathcal{Q}^q].$$

Pour qu'on puisse appliquer la proposition 6.1., il suffira alors qu'on ait

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} |a_{ji}|^p < +\infty,$$

et que l'application définie par  $A$  soit positive.

Si ces conditions sont réalisées, pour tout  $\mu < 0$  le système (S) a une solution unique  $X = \{x_i\} \in \mathcal{Q}^p$ .

Exemple 2.-

Soit  $\{f_i\}$  une suite de fonctions réelles continues sur  $\mathbb{R}$  et croissantes telles qu'il existe  $\epsilon > 0$  et  $p \in \mathbb{N}$  tels que pour tout  $i$  et pour  $|u| \leq \epsilon$ , on ait

$$|f_i(u)| \leq p^i.$$

D'après la proposition 4.7.,  $\Phi$  définit alors une application de  $\mathcal{A}^2$  dans  $\tilde{\mathcal{A}}^2$  continue en tout point de  $\mathcal{A}^2$ .

Par ailleurs, on a

$$\mathcal{A}^2 = \hat{\mathcal{A}}^2 \subset \mathcal{Q}^2 \subset \tilde{\mathcal{A}}^2 = [\hat{\mathcal{A}}^2] .$$

Pour qu'on puisse appliquer la proposition 6.1., il suffira qu'il existe  $\{\alpha_p\}$  telle que pour tout entier positif  $m$ , il existe  $\beta_m > 0$  tel que pour tout entier positif  $p$ , on ait

$$\sum_{j=1}^{\infty} p^j \sum_{i=1}^{\infty} m^i \beta_m^2 |a_{ji}|^2 \leq \alpha_p^2 ,$$

et que l'application définie par  $A$  soit positive.

Si ces conditions sont réalisées, pour tout  $\mu < 0$  le système (S) a une solution unique  $X = \{x_i\} \in \mathcal{A}^2$ .

## §2. METHODE VARIATIONNELLE.

### Principe de la méthode variationnelle.-

La méthode variationnelle a été utilisée en particulier par Hammerstein (1930), Lichtenstein (1931), Golomb (1934). Depuis 1945, de nombreux travaux concernant cette méthode ont été réalisés, parmi lesquels on peut citer ceux de Rothe, Vainberg, Krasnoselskii et Citlanadze.

Le principe de la méthode variationnelle est simple : Soit un opérateur  $T$  définissant une application d'un espace de Hilbert réel  $\mathcal{K}$  dans lui-même. Si  $T$  est le gradient, au sens de Fréchet, d'une fonctionnelle  $\varphi$  définie sur  $\mathcal{K}$ , alors tout  $x_0 \in \mathcal{K}$  pour lequel  $\varphi(x)$  a un maximum ou un minimum relatif est une solution de l'équation  $Tx = 0$ .

On considère alors l'équation

$$(I - \mu K)x = 0$$

où  $I$  est l'identité de  $\mathcal{K}$  et  $\mu \in \mathbb{R}$ . Si  $K$  est le gradient d'une fonctionnelle  $g$  définie sur  $\mathcal{K}$ , l'opérateur  $T = I - \mu K$  est le gradient de la fonctionnelle

$$\varphi(x) = \frac{\|x\|^2}{2} - \mu g(x).$$

La fonctionnelle  $\frac{\|x\|^2}{2}$  est semi-continue inférieurement pour la topologie faible bornée (\*) de  $\mathcal{K}$  (\*\*). De plus, si  $K$  définit une application complètement continue,  $g(x)$  est continue pour la topologie faible bornée ; donc  $\varphi(x)$  est semi-continue inférieurement pour cette topologie. Les boules fermées de  $\mathcal{K}$  étant compactes pour la topologie faible bornée,  $\varphi(x)$  atteindra alors un minimum sur toute boule fermée de  $\mathcal{K}$ .

D'après le principe de la méthode variationnelle, pour obtenir un théorème d'existence de solutions de l'équation

$$(I - \mu K)x = 0$$

on est conduit à donner une condition suffisante pour qu'on soit certain que sur une boule fermée de rayon assez grand, le minimum de  $\varphi(x)$  est atteint en un point intérieur à cette boule. Cette condition sera notamment réalisée si

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \left\{ \inf_{\|x\|=r} \left[ \frac{1}{2} - \mu \frac{g(x)}{\|x\|^2} \right] \right\} > 0.$$

---

(\*) Les voisinages d'un point pour la topologie faible bornée de  $\mathcal{K}$  sont les intersections des voisinages de ce point pour la topologie faible avec une boule  $\{x \in \mathcal{K} : \|x\| < a, a > 0\}$ .

(\*\*) E. ROTHE - Gradient mappings and extrema in Banach Spaces. Duke Math. J. - 15 (1948) - p. 421-431.

On a donc :

Théorème variationnel.-

Soit  $K$  l'opérateur gradient au sens de Fréchet d'une fonctionnelle  $g$  définie sur un espace de Hilbert réel  $\mathcal{H}$ . Si  $K$  définit une application complètement continue de  $\mathcal{H}$  dans  $\mathcal{H}$ , alors l'équation

$$x - \mu Kx = 0 \quad (\mu \in \mathbb{R})$$

admet au moins une solution  $x_0 \in \mathcal{H}$  pour toute valeur de  $\mu$  telle que

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \left\{ \inf_{\|x\|=r} \left[ \frac{1}{2} - \mu \frac{g(x)}{\|x\|^2} \right] \right\} > 0 .$$

Théorème d'existence.-

En utilisant la méthode de factorisation et la méthode variationnelle, on obtient le théorème d'existence suivant pour un système de Hammerstein.

Proposition 6.2.-

Soient  $\{a_{ji}\}$  une matrice infinie réelle et  $\{f_i\}$  une suite de fonctions réelles continues sur  $\mathbb{R}$ . Lorsque les conditions suivantes sont réalisées :

i) L'espace L.C.-monotone  $\mathcal{E}$  est tel que  $[\mathcal{E}]$  soit tonnelé et

$$\mathcal{E} \subset \mathcal{E}^2 \subset [\mathcal{E}] ,$$

ii) L'opérateur linéaire  $A$  associé à la matrice  $\{a_{ji}\}$  définit une application de  $[\mathcal{E}]$  dans  $\mathcal{E}$  qui est positive et pseudo-complètement continue,

iii) L'opérateur non linéaire  $\mathfrak{B}$  associé à la suite  $\{f_i\}$  définit une application continue de  $\mathcal{E}$  dans  $[\mathcal{E}]$ ,

iiii) Pour tout  $v \in \mathbb{R}$  et tout  $i \in \mathbb{N}$ , on a

$$\mu \int_0^v f_i(u) \, du \leq \frac{a}{2} v^2 + b_i |v|^{2-\gamma} + c_i$$

où a est inférieur à la plus petite constante caractéristique  
de  $A \in \{\text{mat}; \mathcal{E}^2 \rightarrow \mathcal{E}^2\}$ ,  $0 < \gamma < 2$ ,  $\{b_i\} \in \mathcal{E}^{2/\gamma}$  et  
 $\{c_i\} \in \mathcal{E}^1$ ,

Alors le système de Hammerstein

$$(S) \quad x_j - \mu \sum_{i=1}^{\infty} a_{ji} f_i(x_i) = 0 \quad (j \in \mathbb{N})$$

admet au moins une solution  $X = \{x_i\}$  dans  $\hat{\mathcal{E}}$ .

Démonstration :

Si les conditions i) et ii) sont vérifiées, il résulte de la proposition 5.3. qu'on a  $A = H^*H$  avec

$$H \in \{\text{mat}; [\mathcal{E}] \rightarrow \mathcal{E}^2, \text{pseudo-compl.cont.}\}$$

et

$$H^* \in \{\text{mat}; \mathcal{E}^2 \rightarrow \hat{\mathcal{E}}, \text{pseudo-compl.cont.}\}.$$

D'après la proposition 5.4., il y a correspondance biunivoque entre les solutions  $X \in \hat{\mathcal{E}}$  de (S) et les solutions  $Y \in \mathcal{E}^2$  de l'équation fonctionnelle

$$Y - \mu H \hat{Q} H^* Y = 0.$$

Les applications définies par  $H$  et  $H^*$  étant pseudo-complètement continues, si la condition iii) est vérifiée, l'opérateur  $H \hat{Q} H^*$  définit une application complètement continue de  $\mathcal{E}^2$  dans  $\mathcal{E}^2$ . De plus, les fonctions  $f_i$  étant supposées

continues, il résulte de la proposition 4.9. que  $H^*H^*$  est le gradient, au sens de Fréchet, de la fonctionnelle  $g(Y) = f(H^*Y)$  avec

$$Z = \{z_i\} \longrightarrow f(Z) = \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^{z_i} f_i(u) du .$$

Soit alors  $Y = \{y_i\} \in \mathcal{Q}^2$ . On pose  $H^*Y = \{h_i\} \in \hat{\mathcal{Q}}$ . On désigne par  $\|Z\|_{\alpha}$  la norme de  $Z$  dans  $\mathcal{Q}^{\alpha}$ . On note alors que  $\{|h_i|^{2-\gamma}\}$  appartient à  $\mathcal{Q}^{2/2-\gamma}$ . Par conséquent, si  $B = \{b_i\} \in \mathcal{Q}^{2/\gamma}$ , en utilisant l'inégalité de Hölder, on a :

$$\sum_{i=1}^{\infty} b_i |h_i|^{2-\gamma} \leq \|B\|_{2/\gamma} \|H^*Y\|_2^{2-\gamma} .$$

Si la condition iii) est vérifiée, on a en posant  $C = \{c_i\} \in \mathcal{Q}^1$  :

$$\mu g(Y) \leq \frac{a}{2} \|H^*Y\|_2^2 + \|B\|_{2/\gamma} \|H^*Y\|_2^{2-\gamma} + \|C\|_1 .$$

Mais, en temps qu'opérateur définissant une application de  $\mathcal{Q}^2$  dans  $\mathcal{Q}^2$ ,  $H^*$  est positif et auto-adjoint et  $H^{*2} = A$ .

Donc

$$\|H^*Y\|_2^2 \leq \frac{1}{\mu_0} \|Y\|_2^2$$

où  $\mu_0$  est la plus petite constante caractéristique de  $A$ , c'est-à-dire le plus petit nombre réel  $\mu_0$  tel qu'il existe  $Y \in \mathcal{Q}^2$ ,  $Y \neq 0$  et  $\mu_0 AY = Y$ .

On a donc, en définitive

$$\frac{\mu g(Y)}{\|Y\|_2^2} \leq \frac{a}{2\mu_0} + \frac{\|B\|_2/\gamma}{\mu_0^{2-\gamma}\|Y\|_2} + \frac{\|C\|_1}{\|Y\|_2^2}$$

D'où

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \left\{ \inf_{\|Y\|_2=r} \left[ \frac{1}{2} - \mu \frac{g(Y)}{\|Y\|_2^2} \right] \right\} \geq \frac{\mu_0 - a}{2\mu_0} > 0 .$$

La proposition résulte alors du théorème variationnel. \*

Remarques-

1) Si l'espace  $[\mathcal{Q}]$  est tonnelé,  $\tilde{\mathcal{Q}}$  est quasi-complet. Les propositions 2.13., 2.14., 2.15., 2.16. et 2.17. fournissent alors des conditions pour que

$$A \in \left\{ \text{mat}; [\mathcal{Q}] \rightarrow \tilde{\mathcal{Q}}, \text{ pseudo-compl. cont.} \right\} .$$

2) Si  $\tilde{\mathcal{Q}}$  est alors métrisable, il est complet, et il suffit que  $\mathfrak{g}$  définisse une application de  $\tilde{\mathcal{Q}}$  dans  $[\mathcal{Q}]$  pour qu'elle soit continue.

3) La condition iii) est indépendante de l'espace L.C.-monotone utilisé.

Exemple 1.-

Soit  $\{\alpha_i\} \in \mathcal{Q}^2$ , et soit  $\{f_i\}$  définie par

$$\begin{cases} f_i(u) = \alpha_i + u \text{Log}|u| & \text{si } 0 < u \leq 1 \\ f_i(u) = \alpha_i & \text{si } u \leq 0 \text{ ou si } u > 1. \end{cases}$$

Soit  $\epsilon$ ,  $0 < \epsilon < 1$ . Il résulte de la proposition 4.6. que  $\mathfrak{g}$  définit une application continue de  $\mathcal{Q}^{2-\epsilon}$  dans  $\tilde{\mathcal{Q}}^{2-\epsilon} = \mathcal{Q}^{\frac{2-\epsilon}{1-\epsilon}}$ .

De plus, on a

$$\varphi^{2-\epsilon} = \varphi^{2-\epsilon} \subset \varphi^2 \subset [\varphi^{2-\epsilon}] .$$

Pour que la condition ii) de la proposition 6.2, soit vérifiée, il suffit qu'on ait

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} |a_{ji}|^{2-\epsilon} < +\infty ,$$

et que l'application définie par A soit positive.

Alors le système (S) a une solution  $\{x_i\} \in \varphi^{2-\epsilon}$  pour tout  $\mu > 0$ , car on montre que pour tout  $v \in \mathbb{R}$  et tout  $i$ , on a

$$\mu \int_0^v f_i(u) du \leq \mu \alpha_i |v|$$

et puisque  $\{\alpha_i\} \in \varphi^2$ , la condition iii) est vérifiée avec  $\gamma = 1$ ,  $a = 0$ ,  $c_i = 0$ .

Exemple 2.-

Soit  $\{f_i\}$  la suite définie par

$$\begin{cases} f_i(u) = a_i & \text{si } u \leq 0 \\ f_i(u) = a_i + \frac{1}{\text{Log}|u|} & \text{si } 0 < u < \frac{1}{2} \\ f_i(u) = a_i - \frac{1}{\text{Log}2} & \text{si } u \geq \frac{1}{2} . \end{cases}$$

On considère l'espace de suites d'Orlicz  $\varphi^M$  associé à la

fonction  $M(u) = \int_0^{|u|} p(t)dt$  avec

$$p(t) = \begin{cases} \left(-\frac{1}{\text{Log}|t|}\right)^{1-\epsilon} & \text{si } 0 < t < \frac{1}{2} \\ t + \left(\frac{1}{\text{Log}2}\right)^{1-\epsilon} - \frac{1}{2} & \text{si } t > \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{et } p(0) = 0 .$$

Soit alors  $N(v)$  la fonction complémentaire de  $M(u)$ . On a

$$\hat{\mathcal{Q}}^N = \mathcal{Q}^M \subset \mathcal{Q}^2 \subset [\mathcal{Q}^N].$$

En utilisant la proposition 4.6., on montre que si  $\{a_i\} \in [\mathcal{Q}^N]$ , l'opérateur  $\mathfrak{s}$  définit une application continue de  $\mathcal{Q}^M$  dans  $[\mathcal{Q}^N]$ .

D'autre part si  $a_i > 0$  et si  $\{a_i\} \in \mathcal{Q}^2 \subset [\mathcal{Q}^N]$ , alors la condition iii) est vérifiée pour tout  $\mu < 0$ .

Le système (S) aura donc une solution  $X = \{x_i\} \in \mathcal{Q}^M$  pour tout  $\mu < 0$  si l'opérateur associé à  $\{a_{j_i}\}$  définit une application positive complètement continue de  $[\mathcal{Q}^N]$  dans  $\mathcal{Q}^M$ . On obtiendra des conditions pour qu'il en soit ainsi en utilisant les critères obtenus au Chapitre 2, ou les résultats obtenus par Rutickii en utilisant les propriétés des fonctions d'Orlicz (\*).

### §3. FONCTIONS PROPRES.

Lorsque  $\mathfrak{r}0 = 0$ , le système (S) admet la solution  $X = 0$ . On est alors conduit à chercher des fonctions propres de l'équation fonctionnelle

$$A\mathfrak{s}X - \lambda X = 0.$$

Théorème des fonctions propres.-

Soit  $K$  l'opérateur gradient au sens de Fréchet d'une fonctionnelle  $g$  définie sur un espace de Hilbert réel  $\mathcal{H}$ . Si  $K$  définit une application complètement continue de  $\mathcal{H}$  dans  $\mathcal{H}$  et si pour tout  $x \in \mathcal{H}$ ,  $x \neq 0$ , le produit scalaire

---

(\*) Ja. RUTICKII - Opérateurs linéaires dans les espaces d'Orlicz. Dokl. Akad. Nauk. SSSR 145 (1962) p. 1232-1234 (Russe)  
M.R. 27 - n°6 - rev. 6117.

$\langle Kx, x \rangle$  est différent de zéro, alors  $K$  possède une fonction propre sur toute sphère  $\{x \in \mathcal{K} : \|x\| = a, a > 0\}$ .

Si  $K$  est un opérateur gradient définissant une application complètement continue de  $\mathcal{K}$  dans  $\mathcal{K}$ ,  $g$  est continue pour la topologie faible bornée. Par conséquent sur toute boule fermée  $\mathcal{B} = \{x \in \mathcal{K} : \|x\| \leq a, a > 0\}$ ,  $g(x)$  atteint un maximum et un minimum en des points qui sont distincts puisque  $K$  n'est pas identiquement nul. L'un au moins de ces points,  $x_0$ , est donc distinct de l'origine. Si  $x_0$  était intérieur à  $\mathcal{B}$ , il correspondrait à un extremum relatif de  $g$  et, d'après le principe de la méthode variationnelle, on aurait  $Kx_0 = 0$  et donc  $\langle Kx_0, x_0 \rangle = 0$  ce qui est en contradiction avec les hypothèses.

Donc,  $x_0$  est un extremum pour la restriction de  $g$  à la sphère  $S = \{x \in \mathcal{K} : \|x\| = \|x_0\| = a\}$ . Alors, comme  $\text{grad } g(x_0) = Kx_0 \neq 0$  et  $\text{grad } \frac{\|x_0\|^2}{2} \neq 0$ , il existe  $\lambda$  réel,  $\lambda \neq 0$  tel que

$$\text{grad } g(x_0) = \lambda \text{ grad } \frac{\|x_0\|^2}{2}$$

c'est-à-dire

$$Kx_0 = \lambda x_0 \quad . *$$

En utilisant ce théorème et la méthode de factorisation, on obtient la proposition suivante concernant un système de Hammerstein.

Proposition 6.3.-

Soient  $\{a_{ji}\}$  une matrice infinie réelle et  $\{f_i\}$  une suite de fonctions réelles continues sur  $\mathbb{R}$ . Lorsque les conditions précédentes sont réalisées :

i) L'espace L.C.-monotone  $\Phi$  est tel que  $[\Phi]$  soit tonnelé et

$$\tilde{\Phi} \subset \Phi^2 \subset [\Phi],$$

ii) L'opérateur linéaire  $A$  associé à la matrice  $\{a_{ji}\}$  définit une application de  $[\Phi]$  dans  $\tilde{\Phi}$  qui est définie positive (\*) et pseudo-complètement continue,

iii) L'opérateur non linéaire  $\phi$  associé à la suite  $\{f_i\}$  définit une application continue de  $\tilde{\Phi}$  dans  $[\Phi]$ ,

iiii) On a  $\phi 0 = 0$  et pour tout  $u \neq 0$ , le produit  $uf_i(u)$  a un signe constant indépendant de  $i$ ,

Alors, il existe une infinité de suites  $X = \{x_i\} \in \tilde{\Phi}$  et des nombres réels  $\lambda$  tels qu'on ait :

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_{ji} f_i(x_i) = \lambda x_j \quad (j = 1, 2, \dots)$$

Démonstration :

Si les conditions i) et ii) sont vérifiées, il résulte de la proposition 5.3. que  $A$  est factorisable relativement à  $\Phi$ , et on a  $A = H^*H$ , avec

$$H \in \{ \text{mat}; [\Phi] \rightarrow \Phi^2, \text{ pseudo-compl. cont.} \}$$

et

$$H^* \in \{ \text{mat}; \Phi^2 \rightarrow \tilde{\Phi}, \text{ pseudo-compl. cont.} \}.$$

---

(\*) L'application définie par  $A$  sera définie-positive si pour tout  $X \in [\Phi]$ ,  $X \neq 0$ , on a  $(AX, X) > 0$ .

Si la condition iii) est vérifiée, il résulte de la proposition 4.9. que l'opérateur  $H\bar{\phi}H^*$  est le gradient d'une fonctionnelle  $g$  définie sur  $\mathcal{Q}^2$ . De plus,  $H\bar{\phi}H^*$  définit une application complètement continue de  $\mathcal{Q}^2$  dans  $\mathcal{Q}^2$ .

Par ailleurs, en utilisant la proposition 2.2., on a

$$(H\bar{\phi}H^*Y, Y) = (\bar{\phi}H^*Y, H^*Y) .$$

Si on pose  $H^*Y = \{h_i\}$ , on a donc

$$(H\bar{\phi}H^*Y, Y) = \sum_{i=1}^{\infty} h_i f_i(h_i) .$$

Si la condition iiiii) est vérifiée, pour tout  $Y \in \mathcal{Q}^2$  tel que  $H^*Y \neq 0$ , on a

$$(H\bar{\phi}H^*Y, Y) \neq 0 .$$

Par ailleurs, si  $H^*Y = 0$ , on a aussi  $HY = 0$ , et donc  $AY = 0$ . Si l'application définie par  $A$  est définie positive, ceci entraîne  $Y = 0$ .

Il résulte alors du théorème des fonctions propres que l'opérateur  $H\bar{\phi}H^*$  possède une fonction propre sur toute sphère de  $\mathcal{Q}^2$ . D'après la proposition 5.4., à chaque fonction propre  $Y \in \mathcal{Q}^2$  de l'opérateur  $H\bar{\phi}H^*$  correspond  $X = \{x_i\} = H^*Y \in \mathcal{Q}$  qui est une fonction propre de  $A\bar{\phi}$ .

De plus, soient  $Y_1 \in \mathcal{Q}^2$  et  $Y_2 \in \mathcal{Q}^2$ ,  $Y_1 \neq 0$ ,  $Y_2 \neq 0$  et  $Y_1 \neq Y_2$ , tels que

$$H\bar{\phi}H^*Y_1 = \lambda_1 Y_1 \quad \text{et} \quad H\bar{\phi}H^*Y_2 = \lambda_2 Y_2 .$$

On a alors  $H^*Y_1 \neq H^*Y_2$ , car si on avait  $H^*Y_1 = H^*Y_2$ , on aurait  $\lambda_1 Y_1 = \lambda_2 Y_2$  et par conséquent

$$(\lambda_1 - \lambda_2)H^*Y_1 = 0$$

c'est-à-dire, soit  $\lambda_1 = \lambda_2$  et donc  $Y_1 = Y_2$ , soit  $H^*Y_1 = 0$  ce qui est impossible puisque  $K$  définit une application définie-positive et  $Y_1 \neq 0$ .

La proposition est alors démontrée. \*

On notera que l'égalité

$$H\phi H^*Y = \lambda Y$$

entraîne

$$(H\phi H^*Y, Y) = \lambda(Y, Y)$$

d'où il résulte que les valeurs propres  $\lambda$  trouvées précédemment ont le même signe que le produit  $u f_i(u)$  dont le signe est supposé constant pour tout  $i$  et tout  $u \neq 0$ .

#### REMARQUES

1) Les trois propositions établies dans ce chapitre ne sont utilisables que pour des systèmes de Hammerstein tels que l'opérateur  $A$  définisse une application positive de  $\mathcal{Q}^2$  dans  $\mathcal{Q}^2$ , ce qui suppose notamment que la matrice  $\{a_{ji}\}$  soit symétrique.

2) L'espace  $\mathcal{Q}^2$  étant un espace tonnelé, il résulte de la proposition 2.1. que pour tout espace  $[\mathcal{Q}]$  pleinement complet contenant  $\mathcal{Q}^2$ , l'injection canonique  $\mathcal{Q}^2 \xrightarrow{I} [\mathcal{Q}]$  est continue. Puisque  $\tilde{\mathcal{Q}}$  est le dual fort de  $[\mathcal{Q}]$ , on a alors

$$\tilde{\mathcal{Q}} \subset \mathcal{Q}^2 \subset [\mathcal{Q}] .$$

3) Lorsque les fonctions  $f_i$ , continues sur  $\mathbb{R}$ , sont données, la détermination des espaces  $\mathcal{Q}$  et  $\tilde{\mathcal{Q}}$  pour que l'hypothèse iii) commune aux trois propositions soit vérifiée, résulte de l'allure des fonctions à l'origine.

4) L'espace  $\mathcal{Q}$  étant déterminé, si les fonctions  $f_i$  vérifient une condition iiiii) intervenant dans l'une des trois propositions, on cherchera des conditions sur la matrice  $\{a_{ji}\}$  pour que l'opérateur matriciel associé  $A$  définisse une application de  $[\mathcal{Q}]$  dans  $\tilde{\mathcal{Q}}$  qui soit, selon les cas, positive et bornée, positive et pseudo-complètement continue ou définie-positive et pseudo-complètement continue.

BIBLIOGRAPHIE

N. BOURBAKI

Eléments de Mathématiques.

- 1) Topologie générale, Livre III, Chapitre II, Chapitre IX. Hermann Paris.
- 2) Espaces vectoriels topologiques, Livre V. Hermann Paris.

E.S. CITLANADZE

- 1) "Sur la question des valeurs propres d'un opérateur non-linéaire compact sur un espace de Hilbert". Doklady Akad. Nauk. SSSR 57 (1947) p. 879 (Russe); M.R. 9 - p. 447.
- 2) "Quelques problèmes sur les opérateurs non-linéaires et le calcul des variations dans des espaces de Banach". Uspehi Mat. Nauk. 5 (1950) p. 141 (Russe) M.R. 12 - p. 110.

J. DIEUDONNE et L. SCHWARTZ

"La dualité dans les espaces  $\mathfrak{F}$  et  $(\mathfrak{F}\mathfrak{F})$ ". Ann. Inst. Fourier 1 (1949) p. 61-101 ; M.R. 12 - p. 417.

J. DIEUDONNE et Pereira GOMES

"Sur certains espaces vectoriels topologiques". C.R. Acad. Sci. Paris t.230 (1950) p. 1129-1130 ; M.R. 11 - p. 668.

- C.L. DOLPH "Non linear integral equations of the Hammerstein type".  
Trans Amer. Math. Soc. 66 (1949)  
p. 289-307 ;  
M.R. 11 - p. 367.
- Ya. L. ENGELSON 1) "Sur la racine carrée des opérateurs linéaires dans les espaces vectoriels topologiques".  
Latv. Valst. Univ. Zinatn. Raksti 8 (1956) n°2 - p. 73-80 (Russe) ;  
M.R. 21 - r. 5146.
- 2) "Quelques questions de la théorie variationnelle des équations non linéaires dans les espaces localement convexes".  
Latv. Valst. Univ. Zinatn. Raksti 28 (1959) n°4 - p. 45-65 ;  
M.R. 22 - r. 9834.
- M. GOLOMB "Zur Theorie der nichtlinearen Integralgleichungen, Integralgleichungssysteme und allgemeinen Funktionalgleichungen".  
Math. Z. 39 (1934) - p. 45-75.
- Ya. I. GRIBANOV 1) "Sur la théorie des espaces  $\mathcal{L}^M$ ".  
Uc. zap. Kazansk-un-ta. 117, 2 (1957) (Russe).
- 2) "Espaces de coordonnées et systèmes infinis d'équations linéaires".  
I, II, III, IV. Izv. Vyss. Ucebn. Zaved. Matematika (Russe)  
29 (n°4), 1962 ; M.R. 26 - r. 4171.  
32 (n°1), 1963 ; M.R. 27 - r. 562.  
34 (n°3), 1963 ; M.R. 27 - r. 1798.  
39 (n°2), 1964 ; M.R. 29 - r. 469
- 3) "Sur la méthode de réduction des équations linéaires dans les espaces de Banach".  
Izv. Vyss. Ucebn. Zaved. Matematika 44 (n°1) 1965 (Russe).

- A. HAMMERSTEIN "Nichtlineare Integralgleichungen nebst Anwendungen".  
Acta Math. 54 (1930) - p. 117-176.
- I. KAWAI "Locally convex lattices".  
J. Math. Soc. Japan 9, n°3 (1957)  
p. 281-314 ;  
M.R. 20 - r. 1902.
- G. KOTHE
- 1) "Die Stufenräume, eine einfache Klasse linearer vollkommener Räume".  
Math. Z. t.51 (1948) - p. 317-345 ;  
M.R. 10 - p. 255.
  - 2) "Neubegründung der Theorie der vollkommenen Räume".  
Math. Nach. (1951) - p. 70-80 ;  
M.R. 12 - p. 615.
  - 3) "Lösbarkeitsbedingungen für Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten".  
J. Reine. Angew. Math. 178 (1938)  
p. 193-213.
- T. et Y. KOMURA "Sur les espaces parfaits de suites et leurs généralisations".  
J. Math. Soc. Japan 15 (1963) - p.319-338  
M.R. 28 - r. 451.
- M.A. KRASNOSELSKII
- 1) "La factorisation d'un opérateur intégral linéaire opérant d'un espace d'Orlicz dans un autre".  
Doklady Akad. Nauk. SSSR 97, 6 (1954)  
p. 777-780 (Russe).
  - 2) "Méthodes topologiques dans la théorie des équations intégrales non linéaires".  
Gos. Izdat. Fiz. Mat., Moscow (1956).  
Traduction anglaise Pergamon Press :  
International series of monographs  
in Pure and Applied Mathematics (1964);  
M.R. 20 - r. 3464.

3) "Some problems of non-linear analysis"  
Am. Math. Soc. Transl. Ser. 2, Vol. 10  
(1958) - p. 354;  
M.R. 17 - p. 769.

M.A. KRASNOSELSKII et Ya. RUTICKII

1) "Espaces d'Orlicz et équations intégrales non-linéaires".  
Trudy Mosk. matem. ob-va, 7 (1958)  
p. 63 ; (Russe)  
M.R. 21 - r. 7433.

2) "Convex functions and Orlicz spaces".  
Noordhoff, Groningen (1961).

J. LERAY

"Valeurs propres et vecteurs propres d'un endomorphisme complètement continu d'un espace vectoriel à voisinages convexes".  
Acta. Sci. Math. Szeged 12 B (1950)  
p. 177-186 ;  
M.R. 12 - p. 32.

G.W. MACKEY

"On convex topological linear spaces".  
Trans. Amer. Math. Soc. 60, (1946)  
p. 519-537 ;  
M.R. 8 - p. 519.

G. MARINESCU

"Différentielles de Gâteaux et Fréchet dans les espaces localement convexes".  
Bull. Math. Soc. Sci. Math. Phys.  
R.P. Roumaine (N.S.) 1/49 (1957)  
p. 77-86 ;  
M.R. 20 - r. 1188.

MAZUR et ORLICZ

"On some classes of linear spaces".  
Studia Math. 17 (1958) - p. 97-119 ;  
M.R. 20 - r. 4780.

G.J. MINTY

- 1) "On the maximal domain of a monotone function".  
Mich. Math. J., 8 (1961) - p. 135-137.
- 2) "Monotone (non-linear) operators in Hilbert Space".  
Duke Math. J., 29 (1962) - p. 341-346 ;  
M.R. 29 - r. 6319.
- 3) "On a monotonicity method for the solution of non-linear equations in Banach spaces".  
Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 50 (1963)  
p. 1038-1041 ;  
M.R. 28 - r. 5358.

J. MUSIELAK et W. ORLICZ

- "On modular spaces".  
Studia Math., 18 (1959) - p. 49-65 ;  
M.R. 21 - r. 298.

W. ORLICZ

- 1) "Über eine gewisse Klasse von Räumen vom Typus B".  
Bull. Intern. Acad. Polon., série A (1932) - p. 207-220.
- 2) "Über Räume ( $L^M$ )".  
Bull. Intern. Acad. Polon. Sc., série A n°3-4 (1936) - p. 97-107.

A. PIETSCH

- 1) "Verallgemeinerte vollkommene Folgenräume".  
Studia Math. (ser. Specjalna) Zeszyt 1 (1963) - p. 89 ;  
M.R. 27 - r. 563.
- 2) "Verallgemeinerte vollkommene Folgenräume".  
Akademie Verlag, Berlin (1962) ;  
M.R. 28 - r. 452.

F. RIESZ

- 1) "Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues".  
Gauthier-Villars (1913) Paris.
- 2) "Über lineare Funktionalgleichungen".  
Acta Math. 41 (1918) - p. 71-98.

J. ROBERT

- 1) "Continuité d'un opérateur non linéaire sur certains espaces de suites".  
C.R. Acad. Sc. Paris, t.259 (1964)  
p. 1287-1290.
- 2) "Continuité d'un opérateur matriciel sur certains espaces de suites".  
C.R. Acad. Sc. Paris, t.260 (1965)  
p. 3544-3546.
- 3) "Etude des solutions de systèmes infinis d'équations linéaires sur certains espaces de suites".  
C.R. Acad. Sc. Paris, t.261 (1965)  
p. 2423-2426.

A.P. et W.J. ROBERTSON

- 1) "On the closed-graph theorem".  
Proc. Glasgow. Math. Assoc. 3 (1956)  
p. 9-12;  
M.R. 18 - p. 810.
- 2) "Topological vector spaces".  
Cambridge-University Press (1964).

E.H. ROTHE

- 1) "Gradient mappings in Hilbert space".  
Ann. of Math. 47 (1946) - p. 580-582;  
M.R. 8 - p. 158.
- 2) "Completely continuous scalars and variationnal methods".  
Ann. of Math. 49 (1948) - p. 265-279 ;  
M.R. 10 - p. 461.
- 3) "Gradient mappings and extrema in Banach spaces".  
Duke of Math. 15 (1948) - p. 421-431 ;  
M.R. 10 - p. 548.
- 4) "Weak topology and non-linear integral equations".  
Trans. Amer. Math. Soc. 66 (1949)  
p. 75-92 ;  
M.R. 11 - p. 184.

- Ya. RUTICKII "Linear operators in coordinate Orlicz spaces".  
Dokl. Akad. Nauk. SSSR 145 (1962)  
p. 1232-1234 ;  
M.R. 27 - r. 6117.
- J.J. SCHÄFFER "Sur une classe de treillis vectoriels topologiques".  
Bol. Fac. Ing. Agrimens. Montevideo  
7 (1961) - p. 375-386 ;  
M.R. 31 - r. 590.
- V.I. SOBOLEV "Sur une équation intégrale non linéaire".  
Dokl. Akad. Nauk. SSSR (N.S.) 71 (1960)  
p. 831-834 (Russe).
- M.M. VAINBERG "Méthodes variationnelles pour l'étude des opérateurs non linéaires".  
GITTL, Moscou (1956) (Russe) ;  
M.R. 19 - p. 567.
- M.M. VAINBERG et Ya. ENGELSON "Sur la racine carrée d'un opérateur linéaire dans un espace localement convexe".  
Doklady Akad. Nauk. SSSR, t.122 - n°5  
(1958) - p. 755-758 ;  
M.R. 21 - r. 303.
-



INDEX DES NOTATIONS

Espaces de suites.

$\lambda$	I, 1, p. 2
$\mathcal{P}^p$	I, 1, p. 4
$\hat{\mathcal{P}}^p$	I, 3, p. 25-26
$\tilde{\mathcal{C}}, \tilde{m}$	I, 3, p. 14
$\tilde{\mathcal{C}}_\lambda, \tilde{m}_\omega$	II, 2, p. 42
$\tilde{\mathcal{C}}, \tilde{m}$	I, 4, p. 28
$\mathcal{C}', m'$	I, 3, p. 23
$\mathcal{C}'_0, m'_0$	I, 3, p. 23
$\mathcal{C}^*$	I, 3, p. 26
$[\mathcal{C}], [m]$	I, 2, p. 8
$\mathcal{C}^M$	I, 1, p. 4

Matrices infinies et opérateurs matriciels.

$\{a_{ji}\}$	II, p. 32
A	II, p. 32
A*	II, p. 33
A <sub>j</sub>	II, p. 33
A <sup>i</sup>	II, p. 33
A <sub>n,∞</sub>	II, 3, p. 48
A <sub>∞,n</sub>	II, 3, p. 48
A <sub>n,n</sub>	II, 3, p. 48
A <sub>n</sub> <sup>∞,∞</sup>	II, 3, p. 48

Ensembles.

$\{\text{mat}; \mathcal{C} \rightarrow m, (P)\}$	II, p. 34
$\mathfrak{E}(E)$	.III, 1, p. 73
$\Lambda$	I, 1, p. 3
$\tilde{\Lambda}$	I, 3, p. 23
$\Pi$	II, p. 33
$\tilde{\Pi}$	II, p. 33
$B(\mathcal{C}, X, V)$ ou $B(\mathcal{C}, X, r)$	IV, 1, p. 91
$C(\mathcal{C}, X, V)$ ou $C(\mathcal{C}, X, r)$	IV, 1, p. 91

Suites.

$Y \leq X$	I, 1, p. 2
$ X $	I, 1, p. 2
$P_n^m X$	I, 2, p. 8
$P_n^\infty X$	I, 2, p. 8

Fonctions.

M(u)	I, 1, p. 4
(X, Y)	I, 3, p. 13
$\lambda'(Y)$	I, 3, p. 14
$\rho(X)$	I, 1, p. 6
$d(X, [\mathcal{C}])$	I, 2, p. 12



INDEX DES DEFINITIONS

$A_1, A_2, A_3$ (Propriétés des espaces L.C.-monotones) . . . . .	I, 1, p.3
$A'_3, A''_3$ (Propriétés des espaces L.C.-monotones métrisables) . . . . .	I, 1, p.7
Bornée (application) . . . . .	II, 2, p.41
$\alpha$ -, $\beta$ -, $\gamma$ -, ou $\delta$ -bornée (application). . . . .	II, 3, p.48
V- $\alpha$ -, V- $\beta$ -, V- $\gamma$ -, ou V- $\delta$ -bornée (application). . . . .	II, 4, p.68
complètement continue (application). . . . .	II, 4, p.67
Convergence uniforme (d'une suite d'applications). . . . .	II, 3, p.47
Définie-positive (application) . . . . .	VI, 3, p.137
Différentielle de Fréchet . . . . .	IV, 2, p.109
Différentielle de Gâteaux . . . . .	IV, 2, p.104
factorisable (Opérateur matriciel) . . . . .	V, 1, p.116
Factorisation (méthode de) . . . . .	V, 3, p.122
Gradient (opérateur) . . . . .	IV, 2, p.105
Hammerstein (Système) . . . . .	V, 3, p.120 et VI, p.123
Inégalité fondamentale . . . . .	I, 3, p.18
L.C.-monotone (espace) . . . . .	I, 1, p.3
matriciel (Opérateur) . . . . .	II, p.32
monotone (Opérateur) . . . . .	VI, 1, p.124
normal (Ensemble) . . . . .	I, 1, p.3
normale (Enveloppe) . . . . .	I, 1, p.3
pleinement complet (Espace) . . . . .	II, 1, p.34
positive (Application) . . . . .	IV, 1, p.112
pseudo-complètement continue (Application) . . . . .	II, 3, p.46
quasi-complet (Espace) . . . . .	I, 2, p.10
Réduites (méthode des) . . . . .	III, p.72

...

Suite finie . . . . .	I,1,p.2
tonnelé (Espace). . . . .	I,3,p.26
V-borné (Endomorphisme) . . . . .	III,1,p.74
V-complètement continu <del>e</del> (Endomorphisme) . . . . .	III,1,p.79
V-contractant (Endomorphisme) . . . . .	III,1,p.74

DEUXIEME THESE

Propositions données par la Faculté  
ENSEMBLES A RAPPORT CONSTANT SUR  
CERTAINS ENSEMBLES D'ADELES ALGEBRIQUES

Vu  
Grenoble, le  
Le Président de la Thèse  
C. CHABAUTY

Vu et approuvé :  
Grenoble, le  
Le Doyen de la Faculté des Sciences  
L. WEIL

Vu et Permis d'imprimer :  
Le Recteur de l'Académie de Grenoble  
NIVEAU