



HAL
open science

Sur l'estimation de la densité spectrale d'une fonction aléatoire stationnaire du second ordre

Manh Tuong Nguyen

► **To cite this version:**

Manh Tuong Nguyen. Sur l'estimation de la densité spectrale d'une fonction aléatoire stationnaire du second ordre. Modélisation et simulation. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1966. Français. NNT: . tel-00280184

HAL Id: tel-00280184

<https://theses.hal.science/tel-00280184>

Submitted on 16 May 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

SUR L'ESTIMATION DE LA DENSITE SPECTRALE
D'UNE FONCTION ALEATOIRE STATIONNAIRE DU SECOND ORDRE

XXXXXX	XXX XXX	XXXXXX	XXXXX	XXXXXX
X X X	X X X	X X X	X X X	X X X
X X X	X X X	X X X	X X X	X X X
X X X	X X X	X X X	X X X	X X X
X X X	X X X	X X X	X X X	X X X
X X X	X X X	X X X	X X X	X X X
X X X	X X X	X X X	X X X	X X X
X X X	X X X	X X X	X X X	X X X
X X X	X X X	X X X	X X X	X X X
X X X	X X X	X X X	X X X	X X X

pour obtenir

Le Grade de DOCTEUR DE SPECIALITE

(Mathématiques Appliquées)

Présentée par

NGUYEN MANH TUONG

Thèse soutenue le Mars 1966

Devant la Commission d'Examen

MM. KUNTZMANN	Président
GASTINEL	
BETHOUX	Examineurs
LAURENT	

ĐỂ MẸ CỦA CHÚNG CON VUI

TƯỜNG

FACULTE DES SCIENCES

LISTE DES PROFESSEURS

DOYENS HONORAIRES M. FORTRAT P.

M. MORET L.

DOYEN

M. WEIL L.

PROFESSEURS TITULAIRES

MM. NEEL L.	MAGNETISME
HEILMANN R.	CHIMIE ORGANIQUE
KRAVTCHENKO J.	MECANIQUE RATIONNELLE
CHABAUTY C.	MATHEMATIQUES PURES
PARDE M.	POTAMOLOGIE
BENOIT J.	RADIOELECTRICITE
CHENE M.	CHIMIE PAPETIERE
BESSON J.	ELECTROCHIMIE
WEIL L.	THERMODYNAMIQUE
FELICI N.	ELECTROSTATIQUE
KUNTZMANN J.	MATHEMATIQUES APPLIQUEES
BARBIER R.	GEOLOGIE APPLIQUEE
SANTON L.	MECANIQUE DES FLUIDES
OZENDA P.	BOTANIQUE
FALLOT M.	PHYSIQUE INDUSTRIELLE
GALVANI O.	MATHEMATIQUES
MOUSSA A.	CHIMIE NUCLEAIRE ET RADIOACTIVITE
TRAYNARD P.	CHIMIE GENERALE
SOUTIF M.	PHYSIQUE GENERALE
CRAYA A.	HYDRODYNAMIQUE
REULOS R.	THEORIE DES CHAMPS
AYANT Y.	PHYSIQUE APPROFONDIE
GALISSOT F.	MATHEMATIQUES PURES
Mlle LUTZ E.	MATHEMATIQUES GENERALES
MM. BLAMBERT M.	MATHEMATIQUES
BOUCHEZ	PHYSIQUE NUCLEAIRE
LLIBOUTRY L.	GEOPHYSIQUE
MICHEL R.	GEOLOGIE ET MINERALOGIE
BONNIER E.	METALLURGIE
DESSAUX G.	PHYSIOLOGIE ANIMALE
PILLET E.	ELECTROTECHNIQUE
DEBELMAS J.	GEOLOGIE GENERALE
GERBER R.	MATHEMATIQUES PURES
PAUTHENET R.	ELECTROTECHNIQUE
VAUQUOIS B.	CALCUL ELECTRONIQUE
SILBER R.	MECANIQUE DES FLUIDES
MOUSSIEGT J.	ELECTRONIQUE
BARBIER J.C.	PHYSIQUE EXPERIMENTALE

MM. BUYLE-BODIN M.	ELECTRONIQUE
KOSZUL J.L.	MATHEMATIQUES
DREYFUS B.	THERMODYNAMIQUE
VAILLANT F.	ZOOLOGIE
KLEIN J.	MATHEMATIQUES PURES
SENGEL P.	ZOOLOGIE
ARNAUD P.	CHIMIE
BARJON R.	PHYSIQUE NUCLEAIRE
BARNOUD F.	BIOSYNTHESE DE LA CELLULOSE

PROFESSEURS ASSOCIES.

MM. WAGNER H.	BOTANIQUE
NAPP-ZINN K.	BOTANIQUE

PROFESSEURS SANS CHAIRE

Mme KOFLER L.	BOTANIQUE
DEPASSEL R.	MECANIQUE
PERRET R.	SERVOMECHANISME
Mme BARBIER M.J.	ELECTROCHIMIE
MM. COHEN J.	PHYSIQUE
GIDON P.	GEOLOGIE
Mme SOUTIF J.	PHYSIQUE GENERALE
MM. GIRAUD P.	GEOLOGIE
GASTINEL N.	MATHEMATIQUES APPLIQUEES
LACAZE A.	THERMODYNAMIQUE
GLENAT R.	CHIMIE ORGANIQUE
BRISSONNEAU P.	PHYSIQUE GENERALE
DUCROS P.	MINERALOGIE
ANGLES D'AURIAC	MECANIQUE DES FLUIDES
ROBERT A.	CHIMIE PAPETIERE
COUMES A.	ELECTRONIQUE
PEBAY-PEROULA	PHYSIQUE
DEGRANGE C.	ZOOLOGIE
GAGNAIRE D.	CHIMIE PAPETIERE
RASSAT A.	CHIMIE
PERRIAUX J.	GEOLOGIE
BARRA J.	MATHEMATIQUES APPLIQUEES

PROFESSEURS HONORAIRES

MM. FORTIER A.	MECANIQUE DES FLUIDES
BRELOT M.	MATHEMATIQUES
WOLFERS F.	PHYSIQUE
DORIER A.	ZOOLOGIE

MAITRES DE CONFERENCES

MM. BIAREZ J.	MECANIQUE DES FLUIDES
DODU J.	MECANIQUE DES FLUIDES

MM. DOLIQUE J.M.	ELECTRONIQUE
HACQUES G.	MATHEMATIQUES APPLIQUEES
LANCIA R.	PHYSIQUE AUTOMATIQUE
POULOUJADOFF M.	ELECTROTECHNIQUE
KAHANE A.	PHYSIQUE
Mme BONNIER J.	CHIMIE
Mme KAHANE J.	PHYSIQUE
MM. DEPORTES C.	CHIMIE MINERALE
DEPOMMIER P.	PHYSIQUE NUCLEAIRE
CAUQUIS G.	CHIMIE GENERALE
BONNET G.	PHYSIQUE
Mme BOUCHE L.	MATHEMATIQUES
MM. COLOBERT L.	PHYSIOLOGIE ANIMALE
PAYANT J.J.	MATHEMATIQUES
CAUBET J.P.	MATHEMATIQUES
LAURENT P.	MATHEMATIQUES APPLIQUEES
BERTRANDIAS J.P.	MATHEMATIQUES APPLIQUEES
BRIERE G.	PHYSIQUE
LAJZEROWICZ J.	PHYSIQUE
VALENTIN J.	PHYSIQUE
DESRE P.	METALLURGIE
BONNETAIN L.	CHIMIE MINERALE

MAITRE DE CONFERENCE ASSOCIE

MM. RADELLI L.	GEOLOGIE
----------------	----------

Je tiens à exprimer ma respectueuse reconnaissance à Messieurs :

KUNTZMANN pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant de présider le jury de thèse,

BETHOUX qui a suggéré le sujet de ce travail et orienté mes recherches,

GASTINEL et LAURENT pour leurs nombreux conseils et leurs encouragements bienveillants,

BERTRANDIAS dont l'aide m'a souvent été précieuse.

Je tiens également à remercier les membres du Laboratoire de Calcul pour leur collaboration, et le personnel du service tirage pour le soin qu'il a apporté à la réalisation matérielle de ce travail.

I N T R O D U C T I O N

Ce travail a pour objet de présenter le problème d'estimation de la densité spectrale d'une fonction aléatoire. Il est décomposé en six chapitres :

Dans le premier chapitre, outre les rappels théoriques fondamentaux nécessaires à l'élaboration des résultats, nous avons proposé une méthode de simulation de fonctions aléatoires ayant des densités spectrales déterminées. Cette méthode nous a donné ensuite des résultats numériques très satisfaisants (chapitre 6).

Comme il y a une liaison étroite entre la fonction de répartition spectrale $F(x)$ et la fonction de corrélation $B(v)$ d'une fonction aléatoire stationnaire du second ordre quelconque, nous avons consacré le chapitre II au problème de l'estimation de $B(v)$, où nous avons établi un théorème concernant la condition nécessaire et suffisante pour que l'estimateur $B_T(v)$ converge vers $B(v)$ au sens de la convergence en moyenne quadratique. Les expériences numériques ont ensuite montré que la méthode des bandes de confiance proposée en II.C. est significative.

Nous avons étudié, au chapitre III, les comportements asymptotiques du biais et de la variance du périodogramme $f_T(x)$ dans les cas suivants :

- 1) $X(t)$ est laplacienne et a une distribution spectrale mixte
- 2) $X(t)$ a une répartition spectrale purement discrète.

Le chapitre IV est consacré à l'étude détaillée du périodogramme tronqué $f_{\text{T}}^*(x)$, Nous avons pu rétablir, ainsi, les résultats de E. PARZEN [IV] et avoir de nouvelles majorations du biais et de la variance de $f_{\text{T}}^*(x)$ qui nous ont permis de discuter sur le choix optimum de $(k(\cdot), A_{\text{T}})$. Compte-tenu du nombre de pages concernant les expériences numériques relatifs à ce chapitre, nous avons mis ces pages à la fin de l'ouvrage.

Nous avons établi ensuite, au chapitre V, quelques conditions nécessaires et suffisantes pour que $f_{\text{T}}^*(x)$ puisse se mettre sous la forme d'un estimateur de moyenne périodogramme $f_{\text{T}}(x)$, estimateur de la densité spectrale étudié par les auteurs Grenander et Rosenblatt { V }.

Au dernier chapitre, nous avons proposé les méthodes spéciales adaptées aux cas discrets suivants :

- 1) $f(x)$ est un polynôme pair $(x \in [-\pi, \pi])$
- 2) $f(x)$ est de la forme

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^n \frac{A_j |e^{ix} - b_j|^2}{|e^{ix} - a_j|^2}$$

$f(x)$ désignant la densité spectrale de la fonction aléatoire étudiée.

C H A P I T R E I

-=-=-=-=-

A. FONCTION ALÉATOIRE STATIONNAIRE DU SECOND ORDRE - FONCTION DE CORRELATION

Une fonction aléatoire $X(t)$ de paramètre $t \in T$ est dite stationnaire du second ordre si elle satisfait aux conditions a, b, c suivantes

- (1.1) a) $E[X^2(t)]$ existe pour tout $t \in T$
 (2.2) b) $E[X(t)]$ ne dépend pas de t
 (1.3) c) $E[X(t)X(s)]$ ne dépend que de la différence $t - s$ pour tout $(t,s) \in T^2$.

Si T est la droite réelle toute entière, on dira que l'on est dans le cas de paramètre continu (et on notera en abrégé c.c.) ; si T est l'ensemble Z des entiers relatifs, le cas sera dit de paramètre discret (en abrégé c.d.) et la fonction $X(t)$ ne sera autre qu'une suite de variables aléatoires stationnaires.

Soit $X(t)$ une fonction aléatoire stationnaire du second ordre, pour plus de simplification du langage nous conviendrons de l'appeler parfois par fonction aléatoire stationnaire tout court, en désignant par :

$$(1.4) \quad m = E[X(t)]$$

$$(1.5) \quad \text{et } B(t-s) = E[X(t)X(s)],$$

la valeur m est appelée valeur moyenne de $X(t)$ et la fonction $B(\cdot)$ la fonction de corrélation (ou fonction d'autocorrélation) de $X(t)$.

La fonction $R(\tau)$, qui est par définition

$$(1.6) \quad R(\tau) = \frac{B(\tau)}{B(0)}$$

sera appelée par fonction de corrélation normée de $X(t)$.

Posons $x(t) = X(t) - m$, la fonction aléatoire $x(t)$ ainsi définie est aussi stationnaire du second ordre car on a :

$$(1.7) \quad \left\{ \begin{array}{l} E [x(t)] = 0 \quad \text{pour tout } t \\ E [x(t)x(t+\tau)] = E [(X(t+\tau) - m)(X(t) - m)] \\ \qquad \qquad \qquad = B(\tau) - m^2 \quad \text{pour tout } t \end{array} \right.$$

Comme il est souvent facile de déterminer m , nous conviendrons d'étudier les fonctions aléatoires stationnaires de valeur moyenne nulle seulement.

La fonction de corrélation $B(\tau)$ possède plusieurs propriétés intéressantes, citons brièvement les plus importantes.

- (1.9)
- 1) $B(-\tau) = B(\tau)$ pour tout $\tau \in T$
 - 2) Quelle que soit $\tau \in T$ on a $B(\tau) < |B(0)|$
 - 3) Dans le cas de paramètre continu : si la fonction $B(\tau)$ est continue à l'origine elle est partout continue et $X(t)$ est une fonction aléatoire continue en moyenne quadratique.
 - 4) $B(\tau)$ est une fonction définie positive.

En outre, nous avons le théorème* suivant sur la représentation sous forme intégrale de la fonction $B(\tau)$.

* KHINCHIN A.Y. Korrelation theorie der Stationären stochastischen processe Math. Annal. 109 - 604 (1934).

THEOREME (KHINCHIN)

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction continue $B(z)$ soit la fonction d'autocorrélation d'une fonction aléatoire stationnaire $X(t)$ est qu'une représentation sous forme intégrale

$$(1.10) \quad B(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{e \lambda z} dF(\lambda)$$

soit possible, où $F(\lambda)$ est une fonction bornée et non décroissante

Dans le cas d'une suite de variables aléatoires stationnaires, si $B(\nu)$ est sa fonction de corrélation, alors il existe une fonction bornée, non décroissante, définie dans l'intervalle $[-\pi, \pi]$ telle que pour tout $\nu \in \mathbb{Z}$ on ait :

$$(1.11) \quad B(\nu) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{it\nu} dF(t)$$

Dans les deux cas, la fonction $F(\cdot)$ est appelée fonction de répartition spectrale de $X(t)$. [Notons que les intégrales dans (1.10) et (1.11) sont au sens de Stieljes] ; Elle peut s'écrire de façon unique :

$$F(\lambda) = F_1(\lambda) + F_2(\lambda) + F_3(\lambda)$$

où : - $F_1(\lambda)$ est une fonction absolument continue.

- $F_2(\lambda)$ est une fonction de saut.

- $F_3(\lambda)$, dite fonction singulière, est continue et telle que :

$$F'_3(\lambda) = 0 \quad \text{presque partout.}$$

Ces trois fonctions $F_1(\lambda)$, $F_2(\lambda)$, $F_3(\lambda)$ sont toutes non décroissantes.

Si $F_3(\lambda) = 0$ on dira que $X(t)$ est à répartition spectrale mixte.

Si $F_3(\lambda) = 0$ et $F_2(\lambda) = 0$, la fonction aléatoire $X(t)$ est dite de spectre continu et on peut écrire alors :

$$(1.13) \quad \begin{cases} B(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iz\lambda} f(\lambda) d\lambda & (\text{c.c.}) \\ B(\nu) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\nu\lambda} f(\lambda) d\lambda & (\text{c.d.}) \end{cases}$$

où $f(\lambda)$ s'appelle fonction de densité spectrale de $X(t)$. Si de plus $B(\cdot)$ est absolument sommable, c'est-à-dire que :

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} |B(z)| dz < +\infty & (\text{c.c.}) \\ \sum_{\nu=0}^{\infty} |B(\nu)| < +\infty & (\text{c.d.}) \end{cases}$$

les théorèmes sur l'inversion des transformées de Fourier nous permettent d'écrire, pour presque tout λ , :

$$(1.14) \quad \begin{cases} f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda z} B(z) dz & (\text{c.c.}) \\ f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda\nu} B(\nu) & (\text{c.d.}) \end{cases}$$

Ainsi dans le cas où $X(t)$ est de spectre continu, nous voyons par la formule (1.14) comment il est naturel de se ramener, pour résoudre le problème d'estimation de la densité spectrale $f(\lambda)$ de $X(t)$, à la recherche de $B(z)$.

Nous verrons effectivement dans la suite combien cette idée, nous sera utile même si elle ne nous permet pas de résoudre entièrement le problème et c'est ce qui nous pousse à étudier d'abord le problème d'estimation de $B(z)$ (chapitre II).

B. PROCESSUS AVEC MOYENNES GLISSANTES - SIMULATION DES FONCTIONS ALEATOIRES STATIONNAIRES DU SECOND ORDRE DE DENSITE SPECTRALE DONNEE.

Nous nous mettons dans le cas d'un paramètre discret, et nous dirons qu'une fonction aléatoire $X(\nu)$ est un processus avec moyennes glissantes si elle est de la forme :

$$(1.15) \quad X(\nu) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i E_{i+\nu}$$

où on a :

$$(1.16) \quad \begin{array}{l} (1) \quad \sum_{i=-\infty}^{+\infty} |a_i|^2 < +\infty \\ (2) \quad E_i \text{ est une suite de variables aléatoires mutuellement orthogonales telles qu'on ait :} \\ \quad \quad \quad E [E_i E_j] = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \end{array}$$

On démontre [*] qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction aléatoire $X(\nu)$ soit un processus avec moyennes glissantes est qu'elle soit à distribution spectrale absolument continue.

Pour un tel processus nous avons, en désignant par $B(n)$ sa fonction de corrélation :

$$(1.17) \quad B(n) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i \cdot a_{i+n}$$

et ce qu'il y a de plus important ici à remarquer est que l'on peut fabriquer des trajectoires des processus à moyennes glissantes, pourvu qu'il y ait à notre disposition un échantillon, de taille illimitée, d'une variable aléatoire Y quelconque de moyenne nulle et de moyenne d'ordre deux finie.

* J.L. DOOB, stochastic processes, page 499.

En effet, supposons que l'on désire simuler une trajectoire de la fonction aléatoire $X(\nu)$, ayant une densité spectrale égale à la fonction $f(\cdot)$ - fonction définie dans $[-\pi, \pi]$, positive, paire, continue et sommable sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$, et soit Y_i ($i = \dots, -1, 0, 1, \dots$) l'échantillon qui est à notre disposition.

$$(1.18) \quad \begin{cases} E [Y_i] = 0 & \text{pour tout } i \\ E [Y_i^2] = \mu_2 \end{cases}$$

Il suffit donc de poser :

$$(1.19) \quad \begin{cases} Z(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \mu_2}} \sum_{p=-\infty}^{\infty} b_p Y_{p+n} \\ \text{où } b_p = 2 \int_0^{\pi} \sqrt{f(x)} \cos p x dx \end{cases}$$

et nous avons ainsi, par $Z(n)$, une fonction aléatoire stationnaire du second ordre dont la densité est égale à la fonction donnée $f(\cdot)$.

Remarque : Si la fonction $f(\cdot)$ avait des points de discontinuité de première espèce la densité spectrale de $Z(n)$ - donnée par (1.19) - ne sera égale à $f(\cdot)$ que presque partout.

Démonstration

Les relations (1.19) nous permet d'écrire que :

$$(1.19 \text{ bis}) \quad \sqrt{f(x)} = \frac{1}{2\pi} \sum_{p=-\infty}^{\infty} e^{ixp} b_p$$

Calculons maintenant la fonction de corrélation de $Z(n)$.

On a :

$$\begin{aligned} B(\nu) &= E [Z(n)Z(n+\nu)] \\ &= \frac{1}{2\pi\mu_2} \sum_{p,q=-\infty}^{\infty} b_p b_q E[Y_{p+n} Y_{q+n+\nu}] \end{aligned}$$

donc en vertu de (1.18) et du fait que les Y_i sont mutuellement orthogonales :

$$B(\nu) = \frac{1}{2\pi} \sum_{q=-\infty}^{\infty} b_q b_{q+\nu}$$

Il en résulte que si $g(x)$ désigne la fonction de densité spectrale de $Z(n)$, on a :

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{ix\nu} B(\nu) \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{ix\nu} \left(\sum_{q=-\infty}^{\infty} b_{\nu+q} b_q \right) \end{aligned}$$

ce qui donne enfin d'après (1.19 bis) : $g(x) = f(x)$

(c.q.f.d.)

Application :

Supposons que $f(\cdot)$ soit le carré d'un polynôme pair :

$$(1.20) \quad f(x) = \begin{cases} \left[\sum_{h=0}^n a_h x^{2h} \right]^2 & \text{si } x \in [-\pi, +\pi] \\ 0 & \text{si } x \notin [-\pi, \pi] \end{cases}$$

d'après (1.19) nous devons avoir :

$$(1.21) \quad b_p = \sum_{h=0}^n a_h \int_{-\pi}^{\pi} x^{2h} \cos(xp) dx$$

comme en désignant par :

$$(1.22) \quad J(i, j) = \int_{-\pi}^{\pi} x^{2j} \cos(ix) dx$$

Et par une intégration par partie, on a la formule de récurrence valable pour tout $i \geq 1$ suivante :

$$(1.23) \quad J(i, j) = [4j\pi^{(2j-1)}(-1)^i - 2j(2j-1)J(i, j-1)]/i^2 ;$$

Nous voyons, par conséquent, que b_p tend vers zéro comme $1/p^2$ pour p tendant vers l'infini :

$$b_p \approx 0 \ (1/p^2) \quad \text{pour } p \rightarrow \infty$$

Donc en prenant, comme variable aléatoire génératrice, une variable aléatoire Y bornée nous pourrions approcher $Z(n)$ (1.19) par $\tilde{Z}(n)$:

$$(1.24) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{Z}(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \mu_2}} \sum_{|p| \leq NA} b_p Y_{p+n} \\ \text{où } NA \text{ est un entier convenablement grand.} \end{array} \right.$$

Nous dirons dans la suite que $\tilde{Z}(n)$ approche $Z(n)$ jusqu'à l'ordre NA .

C. PROCÉDURES DE BASE. TRAJECTOIRES PSEUDO-ALEATOIRES

Pour nos expériences numériques, nous nous disposons de deux procédures de base qui nous fournissent des échantillons de nombres pseudo-aléatoires uniformément réparties sur des intervalles.

- 1) $[0,1]$ par la REEL PROCEDURE HASARD (NO)
- 2) $[-0.5, 0.5]$ par la REEL PROCEDURE HASAFI (N)

La première procédure fait partie des procédures - bibliothèques du laboratoire du calcul de l'I.M.A.G. La deuxième dont le corps est écrit en MAP fournit des nombres $\epsilon [0,1]$ dont la partie décimale est l'équivalence du nombre en binaire contenu dans les bits $[1,2,\dots,24]$ d'une mémoire C qui contient les premiers bits des nombres d'une suite de FIBBONACI ; N est un nombre entier ; on prendra, sur tous les N nombres de la suite, un pour donner une valeur de HASAFI.

Ces deux procédures nous ont permis de fabriquer d'autres variables pseudo-aléatoires ayant différentes lois de probabilité selon des algorithmes divers.

En outre nous avons écrit d'autres procédures qui nous donnent chacune une trajectoire pseudo-aléatoire d'une fonction aléatoire stationnaire du second ordre d'un modèle déterminé. Nous en donnons ci-dessous quelques exemples :

Les deux premières procédures sont :

- ① FALEAT 1 (X,NX) ;
- ② FALEAT 2 (X,NX) ;

Elles sont les plus simples. L'appel de la première est équivalent au remplissage des mémoires d'adresse X [i], pour $i = 0, 2, \dots, NX$, des valeurs de la fonction définie sur $[0, 1, \dots, \dots, N, \dots]$:

$$(1.25) \quad \varphi(i) = \begin{cases} 1 & \text{pour tout } i : ||i^2 A|| \leq 0.5 \\ -1 & \text{pour tout } i : ||i^2 A|| \geq 0.5 \end{cases}$$

A désignant le nombre $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

$$||a|| = a \text{ (modulo 1).}$$

La deuxième correspond à la fonction

$$(1.26) \quad \begin{cases} \Psi(i) = \cos (||i^2 A|| \cdot 2\pi) \\ A = (1 + \sqrt{5})/2 \\ ||a|| = a \text{ (modulo 1)..} \end{cases}$$

On peut démontrer, comme application du critère de Weyl, que ces deux fonctions $\varphi(i)$ et $\Psi(i)$ définissent bien deux trajectoires de bruits blancs.

Désignons par $B_1(n)$ et $B_2(n)$ respectivement les fonctions de corrélation de $\varphi(i)$ et de $\Psi(i)$; on a :

$$B_1(n) = \begin{cases} 1 & \text{pour } n = 0 \\ 0 & \text{pour } n \neq 0 \end{cases}$$

$$B_2(n) = \begin{cases} 0.5 & \text{pour } n = 0 \\ 0 & \text{pour } n \neq 0 \end{cases}$$

Il en résulte que l'on pourrait aussi considérer $\varphi(n)$ et $\Psi(n)$ comme échantillons de variables aléatoires.

PROCEDURE FALEATZ CONSPE (X,NX, NA, P, NP) ;

TABLEAU X,P ; ENTIER NX, NA, NP ;

COMMENTAIRE

L'appel de cette procédure provoque le remplissage du tableau X [v] pour v = 0 pas 1 à NX, par la trajectoire d'une fonction aléatoire qui approche, jusqu'à l'ordre NA, la fonction aléatoire $\xi(\bullet)$ d'un paramètre discret dont la densité spectrale est le carré du polynôme pair

$$P(x) = p_0 + p_1 x^2 + \dots + p_{NP} x^{2NP}$$

où les coefficients p_i sont donnés dans le tableau P.

L'échantillon, de la variable aléatoire génératrice, est ici celui fourni par HASAFI (5). Il est donc nécessaire de mettre à la tête du programme d'utilisation, le paquet constitué par la procédure HASAFI (N).

PROCEDURE FALEAT2DISCSPE (X,NX, NA, P, NP) ;

TABLEAU X,P ; ENTIER NX, NA, NP ;

COMMENTAIRE

L'appel de cette procédure provoque le remplissage du tableau X[v] pour v = 0 pas 1 à NX, par la trajectoire d'une fonction aléatoire X(t) d'un paramètre discret qui approche, "jusqu'à l'ordre NA, la fonction aléatoire stationnaire du second ordre, d'un paramètre discret, dont la densité spectrale est le carré du polynôme pair.

$$P(x) = p_0 + p_1 x^2 + \dots + p_{NP} x^{2NP}$$

Les coefficients p_i se trouvent dans l'adresse $i^{\text{ième}}$ du tableau P.

L'échantillon générateur ici est la trajectoire $E_i = \varphi(i)$

d'un bruit blanc discret $E[E_i] = 0$ et $E[E_i^2] = 1$. ($\varphi(i)$ étant défini par (1.2)

PROCEDURE FALEAT1 SPE (X,NX,B,NB,F) ;
TABLEAU X,B ; ENTIER NX, NB ; PROCEDURE F ;

COMMENTAIRE

L'appel de cette procédure provoque le remplissage du tableau $X[\nu]$ pour $\nu = 0$ pas 1 à NX, par la trajectoire d'une fonction aléatoire qui approche jusqu'à l'ordre NB une fonction aléatoire linéaire, de paramètre discret, dont la densité spectrale f est donnée par l'appel de la réel procédure F d'une variable ; B étant le tableau contenant les coefficients $b_j = \int_{-\pi}^{+\pi} \sqrt{f(\lambda)} e^{i\lambda\nu} d\lambda$.

L'échantillon générateur, ici, étant la trajectoire

$$E_i = \Psi(i) \quad (\text{d'après 1.26})$$

d'un bruit blanc $E[E_i] = 0$ et $E[E_i^2] = 0.5$.

-:-:-:-:-

-:-:-

C H A P I T R E II

II.A - LES ESTIMATEURS DE B (ν). FONCTION ALEATOIRE STATIONNAIRE DU QUATRIEME ORDRE

Soit $X(t)$ une fonction aléatoire stationnaire dont une réalisation avait été observée pour $t \in [0, T]$ ($t = 0, 1, \dots, N$ dans le cas d'un paramètre discret) et considérons les quantités :

$$(2.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} B_T(z) = \begin{cases} \frac{1}{T} \int_0^{T-|z|} X(t) X(t+|z|) dt & \text{pour } |z| \leq T \\ 0 & \text{pour } |z| > T \end{cases} \quad (\text{c.c.}) \\ B_N(\nu) = \begin{cases} \frac{1}{N+1-|\nu|} \sum_{i=0}^{N-|\nu|} X(i) X(i+|\nu|) & \text{pour } |\nu| \leq N \\ 0 & \text{pour } |\nu| > N \end{cases} \quad (\text{c.d.}) \end{array} \right.$$

Nous allons démontrer que, sous certaines hypothèses faites sur $X(t)$, ces quantités sont des estimateurs asymptotiquement convergents au sens de la convergence en moyenne quadratique de $B(\cdot)$. Pour cela nous nous limitons au cas d'un paramètre continu pour la démonstration des Théorèmes qui resteront valables dans le cas d'un paramètre discret.

Pour une valeur de T fixée, et pour tout $z \neq 0$, nous voyons que $B_T(z)$ est un estimateur biaisé de $B(\cdot)$ et dans ce cas il est préférable de prendre comme estimateur de $B(\cdot)$ les quantités.

$$(2.1) \left\{ \begin{array}{l} B_T^*(z) = \begin{cases} \frac{1}{T-|z|} \int_0^{T-|z|} X(t) X(t+|z|) dt & \text{si } |z| \leq T \\ 0 & \text{pour } |z| > T \end{cases} \quad (\text{c.c.}) \\ B_N^*(v) = \begin{cases} \frac{1}{N+1-|v|} \sum_{i=0}^{N-|v|} X(i) X(i+|v|) & \text{si } |v| \leq N \\ 0 & \text{si } |v| > N \end{cases} \quad (\text{c.d.}) \end{array} \right.$$

Mais pour l'étude de la convergence pour $T \rightarrow \infty$, il me paraît préférable de traiter le cas de $B_T(z)$ donné par (2.1).

Nous dirons que $X(t)$ est une fonction aléatoire stationnaire du quatrième ordre si $X(t)$ est tout d'abord stationnaire du second ordre et si l'on a en plus:

$$(2.2) \quad E [X(t_1+h) X(t_2+h) X(t_3+h) X(t_4+h)] = E [X(t_1)X(t_2)X(t_3)X(t_4)]$$

quelles que soient les valeurs de h, t_1, t_2, t_3, t_4 . La quantité $E [X(t)X(t+v_1)X(t+v_2)X(t+v_3)]$ est alors indépendante de t , c'est donc une fonction des seules variables v_1, v_2, v_3 . Posons :

$$(2.3) \quad \mathcal{Q}(v_1, v_2, v_3) = E[X(0) X(v_1) X(v_2) X(v_3)]$$

$B(t)$ désignant toujours la fonction de corrélation de $X(t)$. Dans le cas où $E[X(t)] = 0$, soit :

$$(2.4) \quad Q(v_1, v_2, v_3) = \mathcal{Q}(v_1, v_2, v_3) - [B(v_1)B(v_1-v_3) + B(v_2)B(v_3-v_1) + B(v_3)B(v_1-v_2)]$$

Nous savons que $Q(v_1, v_2, v_3) \equiv 0$ dans le cas où $X(t)$ est laplacien, nous l'appellerons alors le cumul non laplacienne d'ordre quatre de la fonction aléatoire $X(t)$.

(Hypothèse H_1) :

Désignons par H_1 l'hypothèse selon laquelle une fonction aléatoire $X(t)$ "est stationnaire du quatrième ordre avec un cumulant non laplacien du 4^{ième} ordre intégrable dans R^3 " ; et étudions les quantités $B_T(z)$ et $B_N(v)$ pour une fonction aléatoire stationnaire satisfaisant à cette hypothèse.

II.B COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DE $B_T(\cdot)$

Nous remarquons, tout d'abord, que pour tout $\alpha < 1$, on a

$$(2.5) \quad T^\alpha \left(E[B_T(z)] - B(z) \right) \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0$$

$B_T(z)$ est donc un estimateur asymptotiquement non biaisé de $B(z)$.

Considérons ensuite la quantité

$$(2.6) \quad \text{Cov} [B_T(z_1), B_T(z_2)] = E [B_T(z_1) B_T(z_2)] - E [B_T(z_1)] \cdot E [B_T(z_2)]$$

comme $B_T(z)$ est une fonction paire de z , nous pouvons supposer que $z_2 \geq z_1 \geq 0$ sans pour cela nuire à la généralité du problème.

$$\begin{aligned} \text{Cov} [B_T(z_1), B_T(z_2)] &= \frac{1}{T^2} \int_0^{T-z_1} \int_0^{T-z_2} E[X(t_1)X(t_1+z_1)X(t_2)X(t_2+z_2)] dt_1 dt_2 \\ &\quad - \left(1 - \frac{z_1}{T}\right) \left(1 - \frac{z_2}{T}\right) B(z_1) B(z_2) \end{aligned}$$

et étant donné que $X(t)$ vérifie l'hypothèse H_1 , on a encore :

$$(2.7) \quad \begin{aligned} \text{Cov} [B_T(z_1), B_T(z_2)] &= \frac{1}{T^2} \int_0^{T-z_1} dt_1 \int_0^{T-z_2} dt_2 [B(t_2-t_1)B(t_2-t_1+z_2-z_1) \\ &\quad + B(t_2-t_1+z_2) B(t_2-t_1-z_1) + Q(z_1, t_2-t_1, t_2-t_1+z_2)] \end{aligned}$$

soit par conséquent :

$$\begin{aligned} T \text{ Cov} [B_T(z_1), B_T(z_2)] &= \frac{1}{T} \int_0^{T-z_1} \int_0^{T-z_2} [B(t_2-t_1) B(t_2-t_1+z_2-z_1) \\ &\quad + B(t_2-t_1+z_2) B(t_2-t_1-z_1) + Q(z_1, t_2-t_1, t_2-t_1+z_2)] dt_1 dt_2 \end{aligned}$$

En effectuant le changement de variables $(t_1, t_2) \rightarrow (u, t_2)$

$$\begin{cases} t_2 - t_1 = u \\ t_2 \end{cases}$$

il vient :

$$(2.8) \quad \left\{ \begin{aligned} T \text{ Cov } [B_T(z_1), B_T(z_2)] &= \frac{1}{T} \int_{-T+z_1}^{z_1 - z_2} S(u) \cdot (u+T-z_1) \, du \\ &+ \frac{1}{T} \int_{z_1 - z_2}^0 S(u) \cdot (T-z_2) \, du + \frac{1}{T} \int_0^{T-z_2} S(u) \cdot (T-z_2-u) \, du \\ &\text{avec } S(u) = B(u) B(u+z_2-z_1) + B(u+z_2)B(u-z_1) + Q(z_1, u, u+z_2) \end{aligned} \right.$$

Ainsi donc, si on pose :

$$(2.9) \quad U_T(u, z_1, z_2) = \begin{cases} 1 + \frac{u-z_1}{T} & \text{pour } u \in [-T+z_1, z_1-z_2[\\ 1 - \frac{z_2}{T} & \text{pour } u \in [z_1-z_2, 0[\\ 1 - \frac{z_2+u}{T} & \text{pour } u \in [0, T-z_2[\\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

dès lors :

$$(2.10) \quad T \text{ Cov } [B_T(z_1), B_T(z_2)] = \int_{-\infty}^{+\infty} U_T(u, z_1, z_2) B(u) B(u+z_2-z_1) \, du \\ + \int_{-\infty}^{+\infty} U_T(u, z_1, z_2) B(u+z_2) B(u-z_1) \, du \\ + \int_{-\infty}^{+\infty} U_T(u, z_1, z_2) Q(z_1, u, u+z_2) \, du$$

Notons que pour tout (z_1, z_2) ; $z_2 \geq z_1 > 0$ on a :

$$(2.11) \quad |U_T(u, z_1, z_2)| \leq 1 \quad \text{et que pour tout } u \quad U_T(u, z_1, z_2) \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 1$$

Si donc on suppose que $B(z)$ est de carré sommable, les deux premières intégrales du second membre de (2.10) auront respectivement pour limites :

$$\int_{-\infty}^{\infty} B(u) B(u + z_2 - z_1) du \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} B(u+z_2) B(u - z_1) du$$

En effet, pour la première, par exemple, on aura d'après l'inégalité de Schwarz

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |B(u) B(u + z_2 - z_1)| du \leq \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} B^2(u) du} \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} B^2(u+z_2-z_1) du}$$

$$(2.12) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |B(u) B(u+z_2-z_1)| du < \int_{-\infty}^{+\infty} B^2(u) du$$

La fonction $B(u) \cdot B(u + z_2 - z_1)$ est donc absolument sommable, et comme :

$$|U_T(u, z_1, z_2) B(u) B(u+z_2-z_1)| \leq |B(u) B(u + z_2 - z_1)|$$

En vertu du théorème de convergence dominée on a donc :

$$(2.13) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} U_T(u, z_1, z_2) B(u) B(u + z_2 - z_1) du \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} B(u) B(u + z_2 - z_1) du$$

Par ailleurs $X(t)$ vérifie l'hypothèse H_1 ; $Q(z_1, z_2, z_3)$ est sommable dans R^3 , la fonction $\bar{Q}(z_1, u, z_2) = Q(z_1, u, z_2+u)$ est aussi sommable dans tout l'espace $R^3(u, z_1, z_2)$, d'après le théorème de Fubini la fonction

$$(2.14) \quad \bar{Q}(u) = \bar{Q}(z_1, u, z_2) \quad \{ \text{pour } (z_1, z_2) \text{ fixé} \}$$

est donc sommable pour presque tout $(z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$. De nouveau le théorème de convergence dominée donne :

$$(2.15) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} U_T(u, z_1, z_2) Q(z_1, u, u+z_2) du = \int_{-\infty}^{+\infty} Q(z_1, u, u+z_2) du$$

THEOREME 21 (*)

Si $X(t)$ est une fonction aléatoire stationnaire du 4^e ordre donc la fonction de corrélation $B(z)$ est de carré sommable et le cumulante non laplacien du 4^{ième} ordre est sommable dans \mathbb{R}^3 : Pour tout z on a :

$$(2.16) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} T^\alpha |E[B_T(z)] - B(z)| = 0 \quad \text{pour tout } \alpha < 1$$

et de plus pour presque tout (z_1, z_2) dans \mathbb{R}^2 on a :

$$(2.17) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} T \text{Cov} [B_T(z_1), B_T(z_2)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \{B(u) B(u+z_2-z_1) + B(u+z_2) B(u-z_1) + Q(z_1, u, z_2+u)\} du$$

Pour le cas de paramètre discret, il nous suffira de remplacer les lettres T, v, z_1, z_2 par des entiers N, v, v_1, v_2 ;

Remarque :

Si $z_1 = z_2 = z$ (2.17) devient :

$$(2.18) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ T \cdot E [(B_T(z) - EB_T(z))^2] \right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \{B^2(u) + B(u-z) B(u+z) + Q(z, u, z+u)\} du$$

pour presque tout z .

Comme on a :

$$(2.19) \quad E [B_T(z) - B(z)]^2 = E (B_T(z) - EB_T(z))^2 + (EB_T(z) - B(z))^2$$

En combinant (2.16), (2.18), (2.19) nous obtenons le résultat suivant :

* Emmanuel Parzen {IV}.

THEOREME 2.2

Si $X(t)$ est une fonction aléatoire du 4ième ordre avec un cumulants non laplacien sommable dans R^3 , et dont la fonction de corrélation $B(z)$ est de carré sommable. Alors pour presque tout z nous aurons :

$$(2.20) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} T^\alpha E [B_T(z) - B(z)]^2 = 0$$

pour tout $\alpha < 1$

D'après ce théorème on voit que, pour certaines fonctions aléatoires, l'estimateur $B_T(v)$ converge en moyenne quadratique

$$\lim_{T \rightarrow \infty} B_T(v) = B(v)$$

donc converge en probabilité puisque le premier mode de convergence entraîne le second.

Nous allons démontrer dans la suite un autre théorème, concernant l'estimation de $B(z)$ pour une fonction aléatoire stationnaire du quatrième ordre par la formule (2.1), en utilisant un théorème ergodique.

Rappelons tout d'abord ce résultat :

THEOREME 2.3

Soit $X(t)$ une fonction aléatoire stationnaire de moyenne m , et de fonction de corrélation $B(z)$; désignons par $B_1(z)$ la fonction suivante (où z est à remplacer par v dans le cas discret):

$$B_1(z) = B(z) - m^2$$

alors : une condition nécessaire et suffisante pour que l'on ait :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(t) dt = m \quad (\text{c.c.}) \\ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^N X(i) = m \quad (\text{c.d.}) \end{array} \right.$$

au sens de la convergence en moyenne quadratique, est que :

$$(2.22) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T B_1(z) dz = 0 \quad (\text{c.c.}) \\ \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{\nu=0}^N B_1(\nu) = 0 \quad (\text{c.d.}) \end{array} \right.$$

Soit, maintenant, $X(t)$ une fonction aléatoire stationnaire du 4^{ième} ordre de moyenne nulle, de fonction de corrélation $B(z)$ et de cumulants d'ordre 4 : $Q(u, v, z)$; désignons par :

$$(2.23) \quad Y(t) = X(t) X(t+s)$$

$Y(t)$ est une fonction aléatoire stationnaire du second ordre.

En effet, on a :

$$(2.24) \quad E [Y(t)] = B(s) \quad \text{quel que soit } t$$

$$\begin{aligned} E [Y(t_1)Y(t_2)] &= E [X(t_1)X(t_1+s) X(t_2) X(t_2+s)] \\ &= Q(s, t_2-t_1, t_2-t_1+s) + B^2(s) + B^2(t_2-t_1) \\ &\quad + B(t_2-t_1+s) \cdot B(t_2-t_1-s) \end{aligned}$$

Désignons par $\mathcal{B}_2(z)$ la fonction de corrélation de $Y(t)$, nous avons donc

$$(2.25) \quad \begin{aligned} \mathcal{B}_2(z) &= E [Y(0) Y(z)] = E [Y(t) Y(t+z)] \\ &= B^2(s) + B^2(z) + B(z+s) \cdot B(z-s) + Q(s, z, z+s) \end{aligned}$$

Donc en vertu du théorème 2.3 pour que

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T Y(t) dt \right\} = E [Y(t)] = B(s)$$

il faut et il suffit que l'on ait ;

$$(2.26) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T (\mathbb{R}_2(z) - B^2(s)) dz = \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T [B^2(z) + B(z+s) B(z-s) + Q(s, z, z+s)] dz \right\} = 0$$

(on remplacera le signe d'intégration par le signe de sommation dans le cas d'un paramètre discret).

THEOREME 2.4.

Pour que l'on ait (au sens de la convergence en moyenne quadratique)

$$(2.27) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(t) X(t+z) dt = B(z) \quad (\text{c.c.}) \\ \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^N X(i) X(i+v) = B(v) \quad (\text{c.d.}) \end{array} \right.$$

où X (t) est une fonction aléatoire stationnaire du 4ième ordre dont la fonction de corrélation est B(.) et le cumulatif non laplacien d'ordre 4 est Q(u,v,z), il faut et il suffit que la condition (2.26) soit satisfaite.

Par ailleurs, nous pouvons remarquer qu'il y a équivalence (**) entre deux propriétés A et B suivantes :

$$\text{Propriété A : } \left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T B^2(t) dt = 0 \right\}$$

$$\text{Propriété B : } \left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T B(t+s) B(t-s) dt = 0, \text{ pour tout } s \right\}$$

et par conséquent, si la fonction X(t) est laplacienne, la fonction Q(u,v,z) étant alors nulle, on aura le résultat suivant:

Corollaire 2.5

Pour que $B(z)$, d'une fonction aléatoire stationnaire laplacienne $X(t)$, soit la limite de $B_T(z)$ pour $T \rightarrow \infty$:

$$(2.28) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \frac{X(t) X(t+z)}{T} dt = B(z) \quad (\text{c.c.}) \\ \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^N \frac{X(i) X(i+\nu)}{N} = B(\nu) \quad (\text{c.d.}) \end{array} \right.$$

il faut et il suffit que l'on ait :

$$(2.29) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T B^2(z) dz = 0 \quad (\text{c.c.}) \\ \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{\nu=0}^N B^2(\nu) = 0 \quad (\text{c.d.}) \end{array} \right.$$

Conséquences

- Pour que (2.29) soit satisfait il suffit que $B(z) \xrightarrow{z \rightarrow \infty} 0$, c'est ce qui s'est produit dans beaucoup de cas.
- Si $X(t)$ a un spectre pourvu d'une raie, ce qui correspond à une composante périodique dans l'expression de $B(\cdot)$, la condition (2.29) ne sera donc plus remplie, l'estimation par la formule (2.28) ne sera plus valable.

(**) - Il est évident que B entraîne A : il suffit de prendre $s = 0$.

- Supposons que A est vrai, ce qui signifie que la quantité $\frac{1}{T} \int_0^T B^2(t) dt$ existe et tend vers zéro pour $T \rightarrow \infty$. Comme pour tout T on a :

$$(2.29) \quad 0 \leq \left| \int_0^T \frac{B(t+s) B(t-s)}{T} dt \right| \leq \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T B^2(t+s) dt} \cdot \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T B^2(t-s) dt}$$

et comme pour tout s fixé on a encore la double égalité :

$$(2.30) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T B^2(t+s) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T B^2(t-s) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T B^2(t) dt$$

On a donc pour tout s :

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T B(t+s) B(t-s) dt = 0$$

(c.q.f.d.)

II . C . FONCTION ALEATOIRE LINEAIRE - EXPERIENCES NUMERIQUES

Tous nos calculs sont effectués sur IBM 7044 du laboratoire de l'I.M.A.G. Les fonctions que nous simulons en machine sont d'une catégorie particulière des processus avec moyennes glissantes : appelées fonctions aléatoires linéaires :

$$(2.31) \quad X(v) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i E_{i+v}$$

où $\left\{ \begin{array}{l} \alpha) \sum_{i=-\infty}^{\infty} |a_i| < \infty \end{array} \right.$

$\left\{ \begin{array}{l} \beta) E_i \text{ est une suite des variables aléatoires indépendantes de même loi de probabilité, de moyenne nulle et telles : } \\ \mu_2 = E[E_i^2] \text{ et } \mu_4 = E[E_i^4] \text{ soient finis.} \end{array} \right.$

Pour une telle fonction aléatoire, la loi de probabilité de $B_N(v)$ tend vers une loi laplacienne^(*) quand $N \rightarrow \infty$, dans le sens que pour toute famille de nombres entiers (v_1, v_2, \dots, v_K) et de nombres réels (u_1, u_2, \dots, u_K) on a :

$$(2.33) \quad \left\{ \begin{array}{l} E \left[\exp(i \sum_{j=1}^K u_j N^{1/2} (B_N(v_j) - EB_N(v_j))) \right] \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \exp - \frac{1}{2} \left\{ \sum_{j,h=1}^K u_j D(v_j, v_h) u_h \right\} \\ D(v_j, v_h) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ N \text{ Cov } [B_N(v_j), B_N(v_h)] \right\} \end{array} \right.$$

(*) AN APPROACH TO THE TIME SERIES, E. PARZEN, An. M. Statistics 3.61 page 982.

Par ailleurs on a :

$$\begin{aligned}
 E [X(v_1)X(v_2)X(v_3)X(v_4)] &= E \left[\sum_{i,j,k,l=-\infty}^{\infty} a_i a_j a_k a_l E_{i+v_1} E_{j+v_2} E_{k+v_3} E_{l+v_4} \right] \\
 &= (\mu_4 - 3 \mu_2^2) \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i a_{i+v_1-v_2} a_{i+v_1-v_3} a_{i+v_1-v_4} \\
 &\quad + B(v_1-v_2) B(v_3-v_4) + B(v_2-v_3) B(v_1-v_4) + B(v_1-v_3) B(v_2-v_4)
 \end{aligned}$$

Ce qui nous donne donc l'expression suivante du cumulante du quatrième ordre non la placent de X(t) :

$$Q(v_1, v_2, v_3) = (\mu_4 - 3 \mu_2^2) \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i a_{i+v_1} a_{i+v_2} a_{i+v_3}$$

et par conséquent :

$$\begin{aligned}
 \sum_{u=-\infty}^{+\infty} Q(v_1, u, v_2+u) &= (\mu_4 - 3 \mu_2^2) \sum_{i=-\infty}^{\infty} (a_i a_{i+v_1} \sum_{u=-\infty}^{\infty} a_{i+u} a_{i+u+v_2}) \\
 (2.34) \quad \sum_{u=-\infty}^{\infty} Q(v_1, u, v_2+u) &= \left(\frac{\mu_4}{\mu_2} - 3 \right) B(v_1) B(v_2)
 \end{aligned}$$

Finalement, tout en tenant compte du théorème 2.1, nous avons pu démontrer que la quantité $D(v_i, v_h)$, pour une fonction aléatoire, est égale à :

$$(2.35) \quad D(v_i, v_h) = \left(\frac{\mu_4}{\mu_2} - 3 \right) B(v_i) B(v_h) + \sum_{j=-\infty}^{\infty} B(j) (B(j+v_i-v_h) + B(j+v_i+v_h))$$

Comme $B_N(v)$ tend vers une variable laplacienne, on peut donc déduire que, pour N assez grand, on a :

$$(2.36) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Prob} \left\{ |B_N(v) - B(v)| \leq \frac{2\sigma}{\sqrt{N}} \right\} \approx 0.95 \\ \text{ou } \sigma = \sqrt{D(v,v)} \end{array} \right.$$

Ces derniers résultats vont nous permettre de vérifier la validité de nos théorèmes au point de vue numérique. Ainsi désignerons par « Bande de sécurité » la bande comprise entre les deux courbes :

$$(2.37) \quad \begin{cases} y_1(i) = B(i) - 2 \cdot \sqrt{D(i,i)/N} \\ \text{et } y_2(i) = B(i) + 2 \cdot \sqrt{D(i,i)/N} \end{cases}$$

Si le procédé d'estimation est bonne, d'après (2.36) on doit avoir une probabilité égale 0.95 que le point $B_N(i)$ se trouve à l'intérieur de cette bande, pour des valeurs de N assez grandes.

Première série d'expériences.

Nous commençons par l'estimation des fonctions de corrélation des fonctions pseudo-aléatoires stationnaires du second ordre suivantes :

$$X_1(t) = \sum_{|i| \leq 5} \{\text{HASAFI}(7)\}_{i+t}$$

$$X_2(t) = \sum_{|i| \leq 10} \{\text{HASAFI}(7)\}_{i+t}$$

$$X_3(t) = \sum_{|i| \leq 5} (21 - |i|) \{\text{HASAFI}(7)\}_{i+t}$$

selon la formule (2.1) ; $\{\text{HASAFI}(7)\}_i$ désigne le $i^{\text{ième}}$ appel de la REEL PROCEDURE HASAFI(N) (renvoi à C. du chapitre 1). Les résultats obtenus se retrouvent dans ces quelques courbes ci-jointes de derrière, où $NX+1$ est la longueur de la trajectoire observée et qui est un paramètre de l'expérience.

Deuxième série d'expériences

Nous avons ensuite estimé la fonction de corrélation des fonctions aléatoires $\varphi(i)$ et $\Psi(i)$ dont les trajectoires sont données respectivement par FALÉAT1 et FALÉAT2. (Voir partie C. chapitre 1).

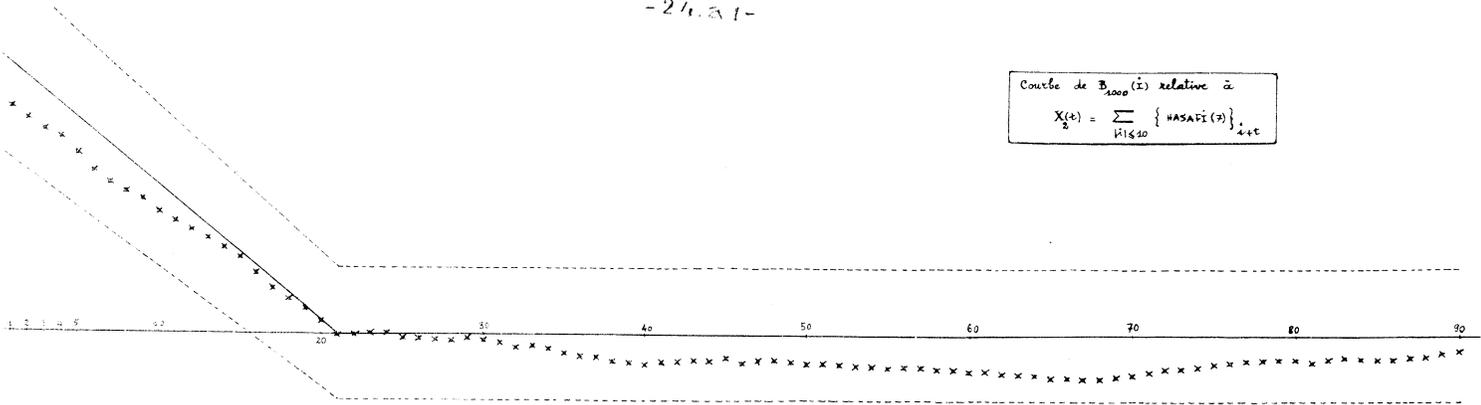
Les résultats obtenus constituent les colonnes de la page ci-jointe.

Rappelons que :

$$B_{\varphi}(i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 0 \\ 0 & \text{si } i \neq 0 \end{cases}$$
$$B_{\Psi}(i) = \begin{cases} 0.5 & \text{si } i = 0 \\ 0 & \text{si } i \neq 0 \end{cases}$$

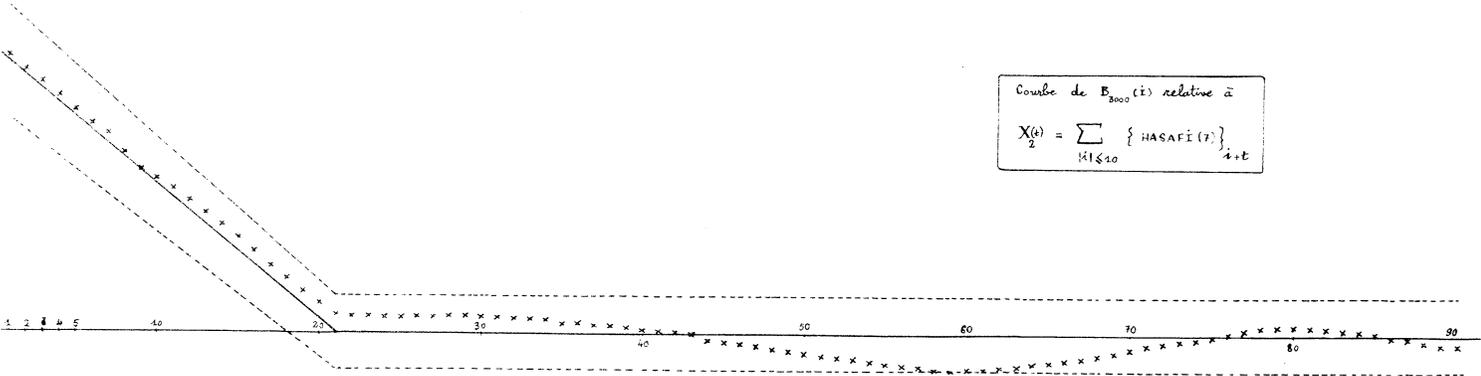
Courbe de $B_{2000}(i)$ relative \bar{a}

$$X_2^{(t)} = \sum_{|i| \leq 20} \{ \text{HASAFI}(i) \}_{i+t}$$



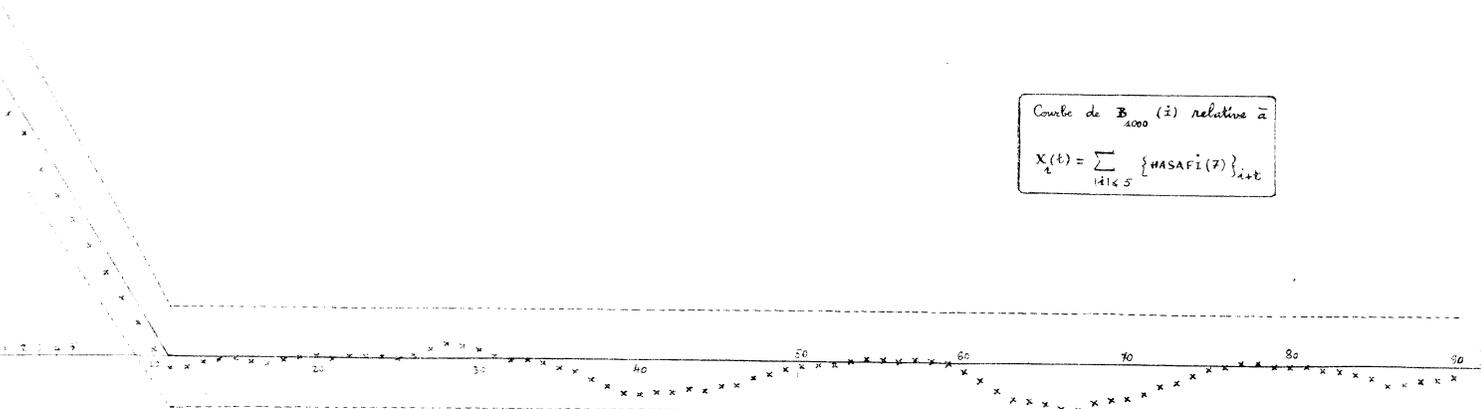
Courbe de $B_{3000}(i)$ relative \bar{a}

$$X_2^{(t)} = \sum_{|i| \leq 40} \{ \text{HASAFI}(i) \}_{i+t}$$



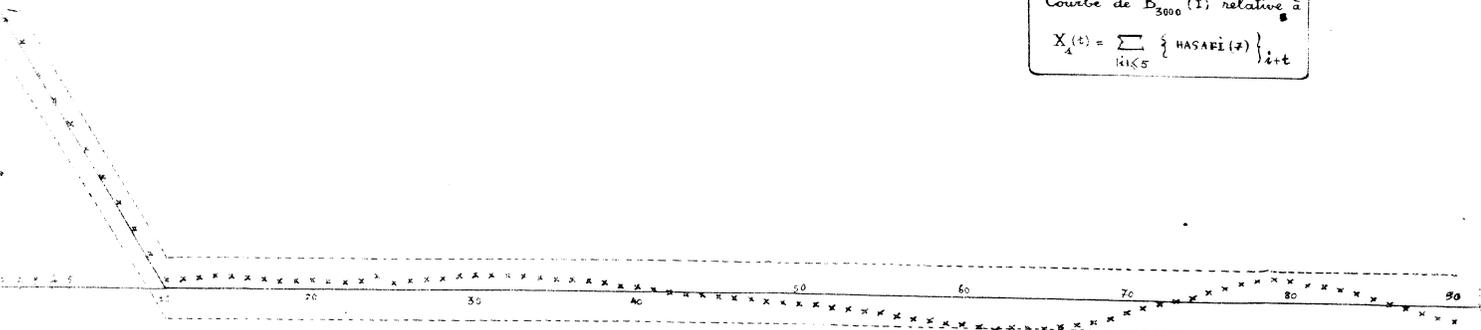
Courbe de $B_{4000}(i)$ relative \bar{a}

$$X_4^{(t)} = \sum_{|i| \leq 5} \{ \text{HASAFI}(i) \}_{i+t}$$



Courbe de $B_{5000}(i)$ relative \bar{a}

$$X_4^{(t)} = \sum_{|i| \leq 5} \{ \text{HASAFI}(i) \}_{i+t}$$



$$X(t) = \sum_{|i| \leq 5} (21 - |i|) \{H_{\text{asafi}}(z)\}_{i+t}$$

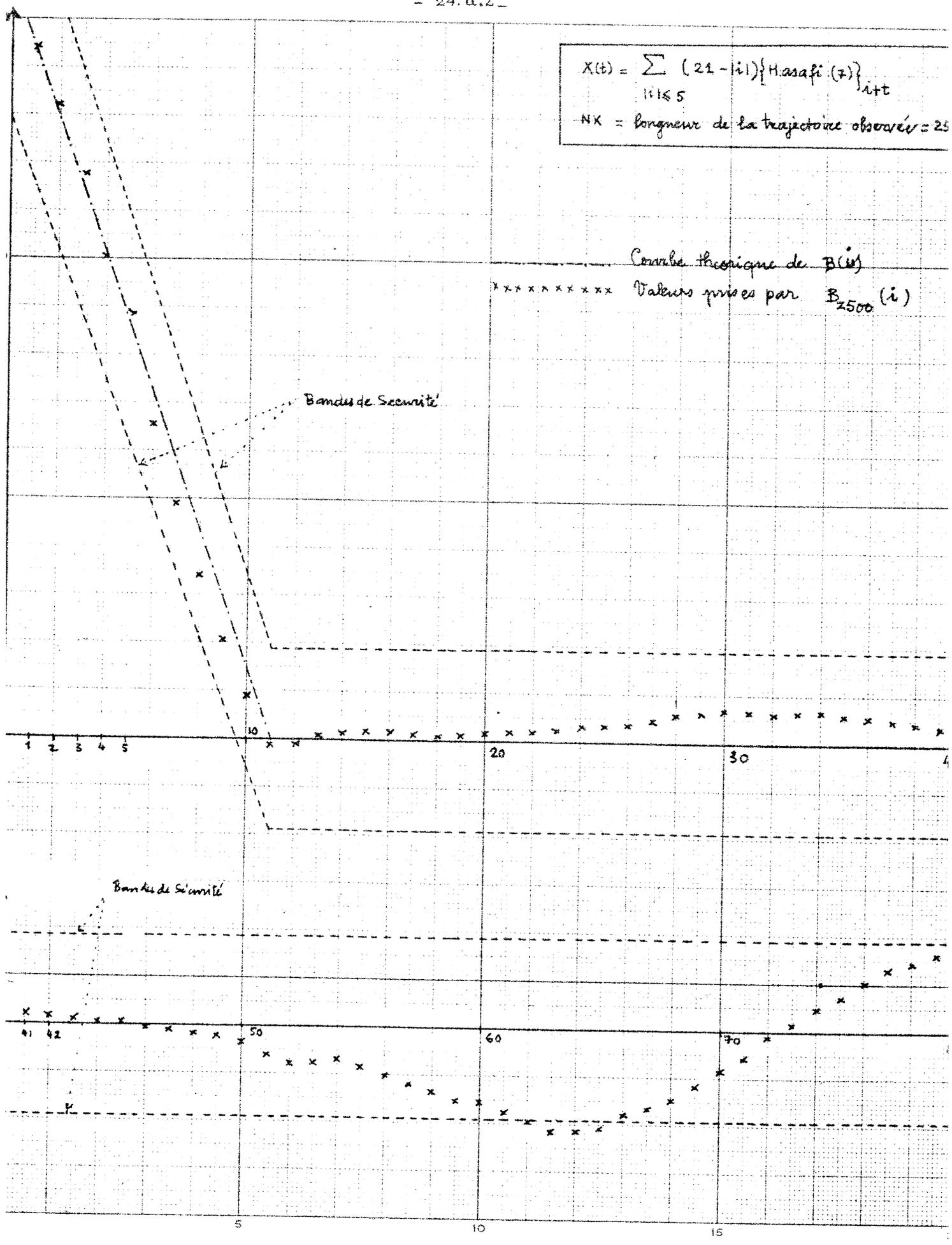
$NX = \text{longueur de la trajectoire observée} = 25$

Courbe théorique de $B(i)$

xxxxxxxxxxxxxxxxx Valeurs prises par $B_{2500}(i)$

Bandes de Sécurité

Bandes de Sécurité



RESULTATS DE L' ESTIMATION DE LA FONCTION
DE CORRELATION DE LA TRAJECTORIE

$$\varphi(\xi) = \begin{cases} -1 & \text{si } \|\xi\| \leq 0.5 \\ +1 & \text{si } \|\xi\| > 0.5 \end{cases}$$

RESULTATS DE
L' ESTIMATION DE LA FONCTION DE COR-
RELATION DE LA TRAJECTORIE

$$\psi(\xi) = \cos(2\pi \|\xi\|^2 + 1)$$

ν	$B_{1000}(\nu)$
0	.10000000+01
1	-.17017017-01
2	-.40080160-02
3	.17051153-01
4	-.26104417-01
5	-.90452260-02
6	-.10060362-01
7	-.45317220-01
8	-.26209677-01
9	-.17154389-01
10	-.80808080-01
11	-.30333670-02
12	.10121457-01
13	.91185409-02
14	.60851926-02
15	.50761420-02
16	-.24390244-01
17	-.30518819-02
18	-.16293279-01
19	-.91743118-02
20	.12244898-01
21	-.21450459-01
22	-.34764826-01
23	.10235414-02
24	-.61475409-02
25	-.27692307-01
26	-.94455850-01
27	-.92497429-02
28	.20576131-01
29	.11328527-01
30	-.41237113-02
31	.17543859-01
32	.28925620-01
33	.21716649-01
34	-.22774327-01
35	.13471503-01
36	.24896265-01
37	-.10384216-02
38	-.41580041-02
39	-.31217481-02
40	.31250000-01
41	.72992700-02
42	-.27139874-01
43	-.21943573-01
44	.20920502-02
45	.19895288-01
46	-.16771488-01
47	.43022035-01
48	-.35714285-01
49	.22082019-01
50	.23157894-01

ν	$B_{2000}(\nu)$
0	.10000000+01
1	.11505753-01
2	.50050049-02
3	.15022534-02
4	.14028056-01
5	.35087719-02
6	.40120360-02
7	-.10536879-01
8	-.20080321-02
9	-.65293822-02
10	-.19095477-01
11	.33685269-01
12	.60362172-02
13	.95621538-02
14	.12084592-01
15	.75566750-02
16	-.26209677-01
17	.75642964-02
18	-.13118062-01
19	-.45431599-02
20	.17171717-01
21	-.45477513-02
22	.20222447-02
23	.12645422-01
24	.40485829-02
25	-.55696202-02
26	-.20263424-01
27	.26862645-01
28	.81135901-02
29	-.86250633-02
30	-.16243655-01
31	.45708481-02
32	.20325203-02
33	.19827147-01
34	.30518819-02
35	.17811705-01
36	.81466393-02
37	-.45848191-02
38	-.30581039-02
39	.50994390-03
40	.40816326-02
41	.27054619-01
42	-.20429009-01
43	.51098620-03
44	-.20449897-02
45	.86956520-02
46	.92118729-02
47	.49667178-01
48	-.10245901-01
49	.12813941-01
50	.14358974-01

ν	$B_{2000}(\nu)$
0	.50780442+00
1	-.28689427-02
2	.42658669-02
3	.15481543-02
4	.71507597-02
5	.14007153-02
6	.35853668-02
7	.24119664-02
8	-.12919650-02
9	.32831973-02
10	.20760266-02
11	-.25922322-02
12	-.62870563-02
13	-.11078759-02
14	-.67847930-02
15	-.50874723-02
16	.62686203-02
17	-.34668718-02
18	.63714311-02
19	-.40254430-02
20	-.48410875-02
21	-.20696755-02
22	-.64717386-02
23	-.49300824-02
24	.74670456-02
25	.37576951-02
26	.30401131-02
27	.30801907-04
28	-.67011371-03
29	.19928393-02
30	.90102046-02
31	.32553173-02
32	-.73270431-02
33	-.42894190-02
34	.29658367-02
35	.68247324-02
36	-.62781021-02
37	.61656122-02
38	.59614497-02
39	.33101280-02
40	-.39784629-02
41	-.48487436-02
42	.59448848-02
43	-.32090017-02
44	.26950647-02
45	.42492264-03
46	.27691146-02
47	-.48469607-02
48	.72299616-02
49	.49359493-02
50	-.81120416-02

CONCLUSION

Les résultats numériques obtenus dans toutes ces expériences correspondent bien aux prévisions théoriques. En effet, pour la première série, tous les points $B_N(i)$ se trouvent à l'intérieur des bandes de sécurité, sauf les points $N_{2500}(i)$, pour $i = 62, 63, 64$ et 65 , dans l'estimation de la fonction de corrélation de $X_3(t)$ (page 24 . a2).

Quant à la deuxième série d'expériences, d'après (2.36) on doit avoir :

$$a) \text{ En 1ère colonne } \text{Prob} \{ |B_N(i)| < 2/\sqrt{1000} \} \approx 0.95$$

$$b) \text{ En 2ième colonne } \text{Prob} \{ |B_N(i)| < 2/\sqrt{2000} \} \approx 0.95$$

$$c) \text{ En 3ième colonne } \text{Prob} \{ |B_N(i)| < 2/\sqrt{1000} \} \approx 0.95$$

pour tout $i \geq 1$, et ce qui a été vérifié expérimentalement.

Remarque importante :

La relation (2.35) montre que les valeurs $B_N(v)$ convergent très lentement vers $B(v)$, plus précisément : pour avoir une bonne estimation de $B(v)$ par $B_N(v)$ il est nécessaire parfois d'avoir N assez grand. En effet supposons qu'il s'agit de la fonction aléatoire :

$$X(v) = \sum_{i=1}^{NA} E_{v+i}$$

E_i : v.a. deux à deux indépendantes de moyenne nulle et dont $\mu_2 = 1$ d'après (2.36) on a :

CHAPITRE III

L'ESTIMATION DE LA DENSITE SPECTRALE
PAR LE PERIODOGRAMME

III.A. Définition du Périodogramme

$X(t)$ désigne toujours la fonction aléatoire stationnaire dont une trajectoire a été observée pour $t \in [0, T]$ (pour $t = 0, 1, \dots, N$ dans le cas d'un paramètre discret). Nous voulons estimer la densité spectrale de $X(t)$ à partir des données de cette trajectoire. Supposons que la répartition spectrale de $X(t)$ soit absolument continue, et soit $B(\cdot)$ sa fonction de corrélation, alors on peut écrire :

$$(3.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} B(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\nu w} f(w) dw \quad (\text{c.c.}) \\ B(\nu) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\nu w} f(w) dw \quad (\text{c.d.}) \end{array} \right.$$

Si de plus $B(\cdot)$ est sommable, d'après les théorèmes d'inversion des transformées de Fourier, nous aurons, pour presque tout w :

$$(3.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} f(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\nu w} B(\nu) d\nu \quad (\text{c.c.}) \\ f(w) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} e^{-i\nu w} B(\nu) \quad (\text{c.d.}) \end{array} \right.$$

Par ailleurs, d'après les résultats obtenus dans le chapitre II, nous savons que les quantités

$$(3.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} B_T(\nu) = \frac{1}{T} \int_{0}^{T-|\nu|} X(t) X(t+|\nu|) dt \quad (\text{c.c.}) \\ B_N(\nu) = \frac{1}{N+1} \sum_{i=0}^{N-|\nu|} X(i) X(i+|\nu|) \quad (\text{c.d.}) \end{array} \right.$$

sont, sous certaines conditions, des estimateurs convergents de $B(\cdot)$ quand $T \rightarrow \infty$ ($N \rightarrow \infty$ dans les cas d'un paramètre discret).

Nous voyons, par conséquent combien il pourrait paraître ^{naturel} de prendre comme estimateur de $f(\omega)$ les quantités appelées périodogrammes :

$$(3.4) \quad \begin{cases} f_T(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{|v| \leq T} e^{-i\omega v} B_T(v) dv & (\text{c.c.}) \\ f_N(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{|v| \leq N} e^{-i\omega v} B_N(v) & (\text{c.d.}) \end{cases}$$

Nous allons étudier le comportement asymptotique de ces quantités tout d'abord dans le cas d'un paramètre continu ; les résultats obtenus resteront valables pour le cas d'un paramètre discret, mais comme les techniques de démonstration dans les deux cas sont loin d'être semblables, nous referons les démonstrations dans le cas discret, tout en énonçant tous les résultats élémentaires, et en poussant plus loin l'étude du périodogramme aux voisinages des points de saut de la répartition spectrale de $X(t)$.

III.B. Etude du comportement asymptotique de $f_T(\omega)$ (cas d'un paramètre continu).

Nous nous limitons au cas où la fonction aléatoire stationnaire observée $X(t)$ est laplacienne et pourvue d'une répartition spectrale absolument continue.

Rappelons que $f_T(\omega)$ est donné par la formule (3.4). Donc si $B(v)$ est sommable, on aura pour presque tout ω :

$$(3.5) \quad E [f_T(\omega) - f(\omega)] = \frac{-1}{2\pi T} \int_{|v| \leq T} e^{-i\omega v} |v| B(v) dv - \frac{1}{2\pi} \int_{|v| > T} e^{-i\omega v} B(v) dv$$

Le biais de $f_T(\omega)$ est donc la somme de deux intégrales qui tendent vers zéro avec $T \rightarrow \infty$.

En effet, pour la lère on a, et pour tout T :

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2\pi T} \int_{|v| \leq T} e^{-i\omega v} |v| B(v) dv \right| &\leq \left[\frac{1}{2\pi} \int_{|v| < T} \frac{|v|}{T} |B(v)| dv \right] \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} V_T(v) \frac{|v|}{T} |B(v)| dv \\ \text{avec } V_T(v) &= \begin{cases} 0 & |v| > T \\ 1 & |v| \leq T \end{cases} \end{aligned}$$

donc à la limite, pour T tendant à l'infini :

$$\left| \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi T} \int_{|v| \leq T} e^{-i\omega v} |v| B(v) dv \right| \leq \frac{1}{2\pi} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} V_T(v) \frac{|v|}{T} |B(v)| dv$$

et comme $V_T(v) \frac{|v|}{T} |B(v)| \leq |B(v)|$ qui est une fonction sommable et que par ailleurs

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ V_T(v) \frac{|v|}{T} |B(v)| \right\} = 0$$

le théorème de convergence dominée nous donne :

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} V_T(v) \frac{|v|}{T} |B(v)| dv &= \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ V_T(v) \frac{|v|}{T} |B(v)| \right\} dv \\ &= 0 \end{aligned}$$

et par conséquent :

$$(3.6) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi T} \int_{|v| < T} e^{-i\omega v} |v| B(v) dv = 0.$$

Duant à la deuxième intégrale :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{|v| > T} e^{-i\omega v} B(v) dv$$

tend aussi vers zéro pour $T \rightarrow \infty$: $f_T(\omega)$ est donc, asymptotiquement, un estimateur non biaisé de $f(\omega)$ pour presque tout ω .

Avant d'étudier la limite de $\text{Cov} [f_T(\omega_1), f_T(\omega_2)]$ nous allons tout d'abord démontrer un lemme dont nous allons avoir besoin.

Lemme préliminaire

Si $\{f_t(x)\}_{t \in [0, \infty]}$ une famille de fonctions sommables sur $[-\infty, \infty]$ et telle que :

a) $\varphi(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \{f_t(x)\}$ existe

b) Il existe une fonction sommable $f(x)$ telle que

$$|f_t(x)| \leq f(x) \text{ pour tout } t$$

Alors : $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{|x| < \Omega_t} e^{-i\Omega_t x} f_t(x) dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{-i\Omega_t x} dx = 0$

pour toute suite croissante Ω_t tendant vers ∞ avec t :

Démonstration :

Soit
$$\gamma_t = \int_{|x| < \Omega_t} e^{-i\Omega_t x} f_t(x) dx - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\Omega_t x} \varphi(x) dx$$

$$\gamma_t = \int_{|x| < \Omega_t} e^{-i\Omega_t x} (f_t(x) - \varphi(x)) dx - \int_{|x| \geq \Omega_t} e^{-i\Omega_t x} \varphi(x) dx$$

$$|\gamma_t| \leq \int_{|x| < \Omega_t} |f_t(x) - \varphi(x)| dx + \int_{|x| \geq \Omega_t} |\varphi(x)| dx$$

Il est manifeste que $\int_{|x| \geq \Omega_t} |\varphi(x)| dx \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$

D'autre part :

$$\int_{|x| < \Omega_t} |f_t(x) - \varphi(x)| dx \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f_t(x) - \varphi(x)| dx \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$$

d'après le théorème convergence dominée de Lebesgue

(c.q.f.d.)

Par ailleurs, on a :

$$\text{Cov} [f_T(\omega_1), f_T(\omega_2)] = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-T}^{+T} \int_{-T}^{+T} e^{-i(v_1 \omega_1 - v_2 \omega_2)} \cdot E[D_T(v_1) D_T(v_2)] dv_1 dv_2$$

$$(3.7.\text{bis}) \quad \text{où } D_T(v) = \frac{1}{T} \int_0^{T-|v|} [X(t) X(t+|v|) - B(v)] dt$$

Donc en désignant par $U_T(u, v_1, v_2)$, la fonction qui généralise celle donnée par (2.9),

$$(3.8) \quad U_T(u, v_1, v_2) = \begin{cases} 1 - \frac{u-|v_1|}{T} & \text{pour } u \in [-T+|v_1|, \min(|v_1|-|v_2|, 0) [\\ 1 - \frac{|v_2|}{T} & \text{si } u \in [\min(|v_1|-|v_2|, 0), 0 [\\ 1 - \frac{|v_1|}{T} & \text{si } u \in [0, \max(|v_1|-|v_2|, 0) [\\ 1 - \frac{u+|v_2|}{T} & \text{si } u \in [\max(0, |v_1|-|v_2|), T - |v_2| [\\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Alors, en tenant compte des hypothèses faites sur $X(t)$, voir le début de II.B, la relation (2.10) du chapitre précédent nous donne :

$$(3.9.) \quad \left\{ \begin{aligned} \text{Cov} [f_T(\omega_1), f_T(\omega_2)] &= A_T + B_T \\ A_T &= \frac{1}{4\pi^2} \cdot \frac{1}{T} \int_{-T}^{+T} dv_1 \int_{-T}^{+T} dv_2 e^{-i(v_1 \omega_1 - v_2 \omega_2)} \int_{-\infty}^{\infty} U_T(u, v_1, v_2) \cdot B(u) \cdot B(u+v_2-v_1) du \\ B_T &= \frac{1}{4\pi^2} \cdot \frac{1}{T} \int_{-T}^{+T} dv_1 \int_{-T}^{+T} dv_2 e^{-i(v_1 \omega_1 - v_2 \omega_2)} \int_{-\infty}^{\infty} U_T(u, v_1, v_2) \cdot B(u+v_2) \cdot B(u-v_1) du \end{aligned} \right.$$

d'où en effectuant le changement de variables d'intégration en posant :

$$(3.10) \quad \begin{cases} u_1 = v_1 - v_2 \\ v = v_2 / T \end{cases}$$

On a une autre expression de A_T

$$A_T = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-1}^{+1} dv e^{-i(\omega_1 - \omega_2)vT} \int_{-T(1+v)}^{+T(1-v)} du_1 e^{-i u_1 \omega_1} \int_{-\infty}^{+\infty} U_T(u, u_1 + v, T, vT) \cdot B(u) B(u - u_1) du$$

Désignons en outre par :

$$(3.11) \quad \begin{cases} g_T(u_1, v) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} U_T(u, u_1 + vT, vT) B(u) B(u - u_1) du \\ H_T(v) = \int_{-T-vT}^{T-vT} e^{-i u_1 \omega_1} g_T(u_1, v) du_1 \end{cases}$$

Comme $B(u)$ est bornée est supposée sommable, $|U_T(u, u_1 + vT, vT)| \leq 1$, pour tout couple v et u_1 , et que :

$$(3.12) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} U_T(u, u_1 + vT, vT) = \begin{cases} 1 - v & \text{pour tout } v \geq 0 \\ 1 + v & \text{pour tout } v < 0 \end{cases}$$

On a par conséquent :

$$(3.13) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ g_T(u_1, v) \right\} = \begin{cases} \frac{1}{4\pi^2} (1-v) \int_{-\infty}^{+\infty} B(u) B(u - u_1) du & \text{pour } v \geq 0 \\ \frac{1}{4\pi^2} (1+v) \int_{-\infty}^{+\infty} B(u) B(u - u_1) du & \text{pour } v < 0 \end{cases}$$

$$(3.14) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ g_T(u_1, v) \right\} = \frac{1}{4\pi^2} (1 - |v|) \int_{-\infty}^{+\infty} B(u) B(u - u_1) du$$

Par ailleurs la fonction

$$\xi(u_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} |B(u) B(u-u_1)| du$$

est sommable en u_1 et l'on peut écrire :

$$|g_T(u_1, v) e^{-iu_1 \omega_1 v}| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |B(u) B(u-u_1)| du = \xi(u_1)$$

On a donc finalement :

$$(3.14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lim_{T \rightarrow \infty} H_T(v) = (1-|v|) f^2(\omega_1) \\ \text{et } |H_T(v)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \xi(u_1) du_1 \end{array} \right.$$

Comme par ailleurs on a :

$$(3.15) \quad A_T = \int_{-1}^{+1} H_T(v) e^{-i(\omega_1 - \omega_2)vT} dv$$

deux cas se présentent donc :

1°) Cas $\omega_1 = \omega_2$:

$$A_T = \int_{-1}^{+1} H_T(v) dv$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} A_T = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-1}^{+1} H_T(v) dv$$

en vertu de (3.14), et en appliquant le théorème de convergence dominée, on obtient

$$(3.16) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} A_T = f^2(\omega_1)$$

2°) Cas $\omega_1 \neq \omega_2$.

Comme $H_T(\omega)$ pour tout $T \in [0, \infty]$ est une famille de fonctions sommables et satisfaisant aux conditions (a) et (b) du lemme préliminaire. : on a donc d'après ce lemme :

$$\lim_{T \rightarrow \infty} A_T = 0.$$

Et finalement, on obtient en désignant par $\delta(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = y \\ 0 & \text{si } x \neq y \end{cases}$

$$(3.15) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} A_T = \delta(\omega_1, \omega_2) f^2(\omega_1)$$

De même on peut démontrer, sous les mêmes hypothèses, que :

$$(3.16) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} B_T = \delta(\omega_1, -\omega_2) f^2(\omega_1)$$

Ce qui donne à la fin le résultat suivant :

$$(3.17) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \text{Cov}[f_T(\omega_1), f_T(\omega_2)] = (\delta(\omega_1, \omega_2) + \delta(\omega_1, -\omega_2)) f^2(\omega_1)$$

Théorème 3.1

Soit $X(t)$ une fonction aléatoire stationnaire laplacienne dont une trajectoire a été observée pour $t \in [0, T]$, et soit $f_T(\omega)$ le périodogramme au point ω :

$$f_T(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{|v| \leq T} e^{-iv\omega} B_T(v) dv$$

Si la fonction de corrélation $B(v)$ est sommable, alors pour presque tout $\omega, \omega_1, \omega_2$ on a :

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ E [f_T(\omega)] \right\} = f(\omega)$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \text{Cov} (f_T(\omega_1), f_T(\omega_2)) \right\} = (\delta(\omega_1, \omega_2) + \delta(\omega_1, -\omega_2)) f^2(\omega_1)$$

où la fonction $\delta(,)$ est telle que $\delta(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = y \\ 0 & \text{si } x \neq y \end{cases}$

On peut préciser ce résultat en disant : en tout point ω de continuité de $f(\cdot)$ on a encore :

$$\lim_{T \rightarrow \infty} E[f_T(\omega)] = f(\omega)$$

On voit par conséquent qu'en ces points $f_T(\cdot)$ est bien un estimateur asymptotiquement non biaisé de $f(\cdot)$.

Par ailleurs on a, pour tout ω

$$\begin{aligned} \text{Variance } [f_T(\omega)] &= D [f_T(\omega)] \\ &= \text{Cov } [f_T(\omega), f_T(\omega)] \end{aligned}$$

Donc en vertu du théorème 3.1 on voit qu'en tout point de continuité de $f(\cdot)$ on a :

$$(3.18) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} D [f_T(\omega)] = (1 + \delta(o, \omega)) f^2(\omega)$$

Conclusion :

Bien que le périodogramme $f_T(\cdot)$ soit un estimateur asymptotiquement non biaisé de $f(\cdot)$ en tout point de continuité de celle-ci, on ne peut l'utiliser pour estimer $f(\cdot)$.

III. C. Comportement asymptotique de $f_N(\cdot)$.

Passons à l'étude du périodogramme dans le cas d'un paramètre discret. Il est naturel de retrouver les résultats déjà vus au cas d'un paramètre continu.

C.1. Etude du biais de $f_N(\cdot)$.

Supposons tout d'abord que le spectre, de la fonction aléatoire enregistrée $X(t)$ soit absolument continu. D'après (3.4), $f_N(\omega)$ peut s'écrire encore sous les formes différentes suivantes :

$$(3.19) \quad \begin{aligned} f_N(\omega) &= \frac{1}{2\pi(N+1)} \left| \sum_{\nu=0}^N X(\nu) e^{-i\nu\omega} \right|^2 \\ f_N(\omega) &= \frac{1}{2\pi(N+1)} \sum_{\nu, \mu=0}^N X(\nu) X(\mu) e^{-i\omega(\nu-\mu)} \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned}
 E [f_N(\omega)] &= \frac{1}{2\pi(N+1)} \sum_{\nu, \mu=0}^N e^{-i\omega(\nu-\mu)} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{i(\nu-\mu)\lambda} dF(\lambda) \\
 (3.19) \quad &= \frac{1}{2\pi(N+1)} \int_{-\pi}^{+\pi} \left[\sum_{\nu, \mu=0}^N e^{-i\omega(\nu-\mu)+i(\nu-\mu)\lambda} \right] f(\lambda) d\lambda
 \end{aligned}$$

$$(3.20) \quad E[f_N(\omega)] = \frac{1}{2\pi(N+1)} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\sin^2(N+1)(\lambda-\omega)/2}{\sin^2(\omega-\lambda)/2} f(\lambda) d\lambda$$

FEJER de

On voit que $E[f_N(\omega)]$ n'est autre que la somme de $f(\lambda)$ au point ω :

$E[f_N(\omega)]$ converge donc vers $f(\omega)$ en tout point de continuité de $f(\omega)$ (d'après le théorème de Féjer).

Dans le cas où $X(t)$ a une distribution spectrale mixte avec un nombre fini de points de discontinuité on peut écrire :

$$(3.21) \quad F(\lambda) = F_1(\lambda) + F_2(\lambda)$$

où $F_1(\lambda) = \int_{-\infty}^{\lambda} f(\mu) d\mu$ et $F_2(\lambda)$ une fonction purement en escalier et croissante,

telle qu'il n'existe qu'un nombre fini de points λ_i ($i=1,2,\dots,P$) tels que :

$$(3.22) \quad d_i = F_2(\lambda_i + 0) - F_2(\lambda_i - 0) \neq 0$$

Au lieu de (3.20) nous devrions avoir :

$$\begin{aligned}
 E[f_N(\omega)] &= \frac{1}{2\pi(N+1)} \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2(N+1)(\omega-\lambda)/2}{\sin^2(\omega-\lambda)/2} f(\lambda) d\lambda + \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{j=1}^P d_j \frac{\sin^2(N+1)(\omega-\lambda_j)/2}{\sin^2(\omega-\lambda_j)/2} \right\}
 \end{aligned}$$

Comme pour tout point où $\omega \neq \lambda_j$ ($j = 1, 2, \dots, P$) on a :

$$(3.23) \quad \frac{1}{N+1} \sum_{j=1}^P d_j \frac{\sin^2(N+1)(\omega-\lambda_j)/2}{\sin^2(\omega-\lambda_j)/2} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$$

Nous avons donc le résultat suivant :

Théorème 3.1

Si $X(t)$ est une fonction aléatoire stationnaire du second ordre de distribution spectrale mixte n'ayant qu'un nombre fini de sauts .
Alors :

$$(3.24) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} E[f_N(\lambda)] = f(\lambda)$$

en tout point de continuité de f différent des points de saut de $F(\lambda)$.

C.2. Etude de la convergence en moyenne quadratique de $f_N(\cdot)$

Nous supposons la fonction aléatoire stationnaire $X(n)$ est de valeur moyenne nulle et laplacienne. Alors pour toutes les valeurs de $(\nu, \nu_1, \nu_2, \nu_3)$ nous avons la relation suivante :

$$(3.25) \quad E \{X(\nu)X(\nu+\nu_1)X(\nu+\nu_2)X(\nu+\nu_3)\} = B(\nu_1)B(\nu_2-\nu_3) + B(\nu_2)B(\nu_3-\nu_1) + B(\nu_3)B(\nu_1-\nu_2)$$

On en déduit que :

$$E[f_N(\lambda) f_N(\mu)] = \frac{1}{4\pi^2(N+1)^2} \sum_{\nu, h, l, m=0}^N E(X_\nu X_h X_l X_m) e^{-i\lambda(\nu-h)-i\mu(1-m)}$$

$$(3.26) \quad E[f_N(\lambda) f_N(\mu)] = H_1 + H_2 + H_3$$

$$\text{avec } \begin{cases} H_1 = \frac{1}{4\pi^2(N+1)^2} \sum_{\nu, h, l, m=0}^N B(h-\nu) B(1-m) e^{-i\lambda(\nu-h)-i(1-m)\mu} \\ H_2 = \frac{1}{4\pi^2(N+1)^2} \sum_{\nu, h, l, m=0}^N B(1-\nu) B(m-h) e^{-i\lambda(\nu-h)-i(1-m)\mu} \\ H_3 = \frac{1}{4\pi^2(N+1)^2} \sum_{\nu, h, l, m=0}^N B(m-\nu) B(h-1) e^{-i\lambda(\nu-h)-i(1-m)\mu} \end{cases}$$

Etudions séparément ces quantités H_i ($i=1,2,3$); $F(\lambda)$ désigne la fonction de répartition spectrale de $X(\nu)$, on a :

$$B(\nu) = \int_{-\pi}^{+\pi} e^{+i\omega\nu} dF(\omega)$$

$$H_1 = \frac{1}{4\pi^2(N+1)^2} \sum_{\nu, h, l, m=0}^{+N} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{+i(h-\nu)\omega} dF(\omega) \int_{-\pi}^{+\pi} e^{+i(1-m)\omega'} dF(\omega') e^{-i(\nu-h)\lambda}$$

$$H_1 = \frac{1}{4\pi^2(N+1)^2} \left(\sum_{h, \nu=0}^N \int_{-\pi}^{+\pi} e^{i(h-\nu)\omega} e^{-i(h-\nu)\lambda} dF(\omega) \right) \left(\sum_{l, m=0}^N \int_{-\pi}^{+\pi} e^{i(1-m)\omega'} e^{-i(1-m)\mu} dF(\omega') \right)$$

D'après (3.19') on voit sans peine que :

$$(3.27) \quad H_1 = E [f_N(\lambda)] \cdot E [f_N(\mu)]$$

Quant à H_2 on a :

$$H_2 = \frac{1}{4\pi^2(N+1)^2} \sum_{\nu, h, l, m=0}^N \int_{-\pi}^{+\pi} e^{i(1-\nu)\omega} dF(\omega) \int_{-\pi}^{+\pi} e^{i(m-h)\omega'} dF(\omega') e^{-i\lambda(\nu-h)-i(1-m)\mu}$$

$$H_2 = \frac{1}{4\pi^2(N+1)^2} \left(\sum_{l, \nu=0}^N \int_{-\pi}^{+\pi} e^{i(\omega-\mu)l} e^{-i(\omega+\lambda)\nu} dF(\omega) \right) \left(\sum_{m, h=0}^N \int_{-\pi}^{+\pi} e^{i(\omega'+\mu)m} e^{-i(\omega'-\lambda)h} dF(\omega') \right)$$

$$H_2 = \frac{1}{4\pi^2(N+1)^2} \left(\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1 - e^{i(N+1)(\omega-\mu)}}{1 - e^{i(\omega-\mu)}} \cdot \frac{1 - e^{-i(N+1)(\omega+\lambda)}}{1 - e^{-i(\omega+\lambda)}} dF(\omega) \right)$$

$$\cdot \left(\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1 - e^{i(N+1)(\omega'+\mu)}}{1 - e^{i(\omega'+\mu)}} \cdot \frac{1 - e^{-i(N+1)(\omega'-\lambda)}}{1 - e^{-i(\omega'-\lambda)}} dF(\omega') \right)$$

$$H_2 = \frac{1}{4\pi^2(N+1)^2} \left(\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{e^{-i\frac{N+1}{2}(\omega-\mu)} - e^{i\frac{N+1}{2}(\omega-\mu)}}{e^{-i(\omega-\mu)/2} - e^{i(\omega-\mu)/2}} \cdot \frac{e^{i\frac{N+1}{2}(\omega+\lambda)} - e^{-i\frac{N+1}{2}(\omega+\lambda)}}{e^{i(\omega+\lambda)/2} - e^{-i(\omega+\lambda)/2}} dF(\omega) \right)$$

$$\cdot \left(\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{e^{-i\frac{N+1}{2}(\omega'+\mu)} - e^{i\frac{N+1}{2}(\omega'+\mu)}}{e^{-i(\omega'+\mu)/2} - e^{i(\omega'+\mu)/2}} \cdot \frac{e^{i\frac{N+1}{2}(\omega'-\lambda)} - e^{-i\frac{N+1}{2}(\omega'-\lambda)}}{e^{i(\omega'-\lambda)/2} - e^{-i(\omega'-\lambda)/2}} dF(\omega') \right)$$

On obtient donc :

$$H_2 = \frac{1}{4\pi^2(N+1)^2} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(N+1)(\omega-\mu)/2}{\sin(\omega-\mu)/2} \cdot \frac{\sin(N+1)(\omega+\lambda)/2}{\sin(\omega+\lambda)/2} dF(\omega) \right) \\ \left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(N+1)(\omega'+\mu)/2}{\sin(\omega'+\mu)/2} \cdot \frac{\sin(N+1)(\omega'-\lambda)/2}{\sin(\omega'-\lambda)/2} dF(\omega') \right)$$

D'après les propriétés de symétrie de F (ω) résultant de l'hypothèse X(ν) réel :

$$H_2 = \frac{1}{4\pi^2(N+1)^2} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(N+1)(\omega-\mu)/2}{\sin(\omega-\mu)/2} \cdot \frac{\sin(N+1)(\omega+\lambda)/2}{\sin(\omega+\lambda)/2} dF(\omega) \right)^2$$

Quant à H₃ on peut écrire :

$$H_3 = \frac{1}{4\pi^2(N+1)^2} \sum_{\nu, h, l, m=0}^N \int_{-\pi}^{+\pi} e^{i(m-\nu)\omega} dF(\omega) \int_{-\pi}^{+\pi} e^{i(h-l)\omega'} dF(\omega') e^{-i\lambda(\nu-h)-i(1-m)\mu}$$

$$H_3 = \frac{1}{4\pi^2(N+1)^2} \left(\sum_{\nu, m=0}^N \int_{-\pi}^{+\pi} e^{i(m-\nu)\omega} e^{im\mu - i\lambda\nu} dF(\omega) \right) \left(\sum_{h, l=0}^N \int_{-\pi}^{+\pi} e^{i(h-l)\omega'} e^{ih\lambda - il\mu} dF(\omega') \right)$$

$$H_3 = \frac{1}{4\pi^2(N+1)^2} \left(\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1 - e^{i(\omega+\mu)(N+1)}}{1 - e^{i(\omega+\mu)}} \cdot \frac{1 - e^{-i(\omega+\nu)(N+1)}}{1 - e^{-i(\omega+\nu)}} dF(\omega) \right) \\ \cdot \left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - e^{i(\omega'+\lambda)(N+1)}}{1 - e^{i(\omega'+\lambda)}} \cdot \frac{1 - e^{-i(\omega'+\mu)(N+1)}}{1 - e^{-i(\omega'+\mu)}} dF(\omega') \right)$$

ce qui donne enfin

$$H_3 = \frac{1}{4\pi^2(N+1)^2} \left(\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\sin(N+1)(\omega+\mu)/2}{\sin(\omega+\mu)/2} \cdot \frac{\sin(N+1)(\omega+\lambda)/2}{\sin(\omega+\lambda)/2} dF(\omega) \right)^2$$

Théorème 3.2

Si $X(\nu)$ est une suite aléatoire stationnaire du second ordre, laplacienne et à distribution spectrale absolument continue alors pour tout couple $(\lambda, \mu) \in \{[-\pi, \pi]\}^2$ on a :

$$(3.30) \quad \text{Cov } [f_N(\lambda), f_N(\mu)] = \frac{1}{4\pi^2(N+1)^2} \left\{ \left(\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\sin(N+1)(\omega+\lambda)/2}{\sin(\omega+\lambda)/2} \cdot \frac{\sin(N+1)(\omega+\mu)/2}{\sin(\omega+\mu)/2} f(\omega) d\omega \right)^2 \right. \\ \left. + \left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(N+1)(\omega+\mu)/2}{\sin(\omega+\mu)/2} \cdot \frac{\sin(N+1)(\omega+\lambda)/2}{\sin(\omega+\lambda)/2} f(\omega) d\omega \right)^2 \right\}$$

En vertu du théorème on peut écrire :

$$(3.31) \quad \text{Variance de } f_N(\lambda) = \frac{1}{4\pi^2(N+1)^2} \left\{ \left[\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\sin^2(N+1)(\omega+\lambda)/2}{\sin^2(\omega+\lambda)/2} f(\omega) d\omega \right]^2 \right. \\ \left. + \left[\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(N+1)(\omega+\lambda)/2}{\sin(\omega+\lambda)/2} \cdot \frac{\sin(N+1)(\omega-\lambda)/2}{\sin(\omega-\lambda)/2} f(\omega) d\omega \right]^2 \right\}$$

Faisons tendre N vers $+\infty$, nous avons :

1er cas $\lambda = 0$

$$\text{Var } [f_N(\lambda)] = \frac{2}{4\pi^2(N+1)^2} \cdot \left[\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2(N+1) \omega/2}{\sin^2 \omega/2} f(\omega) d\omega \right]^2$$

Si donc $f(\omega)$ est continu à l'origine (théorème de Féjer)

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \{ \text{Variance de } f_N(0) \} = 2 f^2(0)$$

2^e Cas $\lambda \neq 0$, Supposons que $\lambda > 0$

Ecrivons que $\text{Var} [f_N(\lambda)] = I_N^2 + J_N^2$; avec I_N et J_N donnés par (3.31) et (3.32) ci-dessous :

$$(3.31) \quad I_N(\lambda) = \frac{1}{2\pi(N+1)} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2(N+1)(\omega+\lambda)/2}{\sin^2(\omega+\lambda)/2} f(\omega) d\omega$$

qui pour tout point λ de continuité de $f(\cdot)$ tend vers $f(\lambda)$:

$$I_N^2(\lambda) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} [f(\lambda)]^2$$

Quant à $J_N(\lambda)$ qui est égale à

$$(3.32) \quad J_N(\lambda) = \frac{1}{2\pi(N+1)} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\sin(N+1)(\omega+\lambda)/2}{\sin(\omega+\lambda)/2} \cdot \frac{\sin(N+1)(\omega-\lambda)/2}{\sin(\omega-\lambda)/2} f(\omega) d\omega$$

et qui peut s'écrire, en décomposant l'intégrale en 3 parties :

$$(3.33) \quad J_N(\lambda) = \frac{2}{2\pi(N+1)} \left\{ \int_0^{\lambda-\epsilon} \dots d\omega + \int_{\lambda-\epsilon}^{\lambda+\epsilon} \dots d\omega + \int_{\lambda+\epsilon}^{\pi} \dots d\omega \right\}$$

Pour tout $\lambda > \epsilon > 0$, comme $f(\omega)$ est absolument sommable, on voit facilement que :

$$\frac{1}{2\pi(N+1)} \left\{ \int_0^{\lambda-\epsilon} \dots d\omega + \int_{\lambda+\epsilon}^{\pi} \dots d\omega \right\} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$$

On peut donc écrire , pour tout $\epsilon : \{ \lambda > \epsilon > 0 \}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{N \rightarrow \infty} J_N(\lambda) = \lim_{N \rightarrow \infty} \{ A(N, \epsilon) \} \\ A(N, \epsilon) = \frac{1}{\pi(N+1)} \int_{\lambda-\epsilon}^{\lambda+\epsilon} \frac{\sin(N+1)(\omega+\lambda)/2}{\sin(\omega+\lambda)/2} \cdot \frac{\sin(N+1)(\omega-\lambda)/2}{\sin(\omega-\lambda)/2} f(\omega) d\omega \end{array} \right.$$

En posant $l = \omega - \lambda$, il vient :

$$A(N, \epsilon) = \frac{1}{\pi(N+1)} \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \frac{\sin(N+1)(2\lambda+1)/2}{\sin(2\lambda+1)/2} \cdot \frac{\sin(N+1)l/2}{\sin(l/2)} f(1+\lambda) dl$$

Comme, pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ on a :

$$|\sin Nx| \leq N |\sin x|$$

pour tout $\epsilon : \{0 < \epsilon < \lambda\}$ assez petit on a la majoration

$$\begin{aligned} |A(N, \epsilon)| &\leq \frac{1}{\pi(N+1)} \cdot \frac{1}{|\sin(2\lambda-\epsilon)/2|} \cdot \text{Max}_{l \in [-\epsilon, \epsilon]} |f(\lambda+1)| \cdot 2\epsilon \cdot (N+1) \\ &\leq \frac{2\epsilon}{\pi |\sin(2\lambda-\epsilon)/2|} \cdot \text{Max}_{l \in [-\epsilon, \epsilon]} |f(\lambda+1)| \end{aligned}$$

Ce qui prouve que J_N tend vers zéro quand $\epsilon \rightarrow 0$ pour tout $\lambda > 0$.
Mais comme c'est une fonction paire de la variable λ on a en vertu de (3.33) :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} J_N = 0 \quad \text{pour tout } \lambda \text{ non nul.}$$

Finalement, nous pouvons écrire :

$$(3.34) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} [\text{Variance de } f_N(\lambda)] = \begin{cases} 2f^2(\lambda) & \text{si } \lambda = 0 \\ f^2(\lambda) & \text{si } \lambda \neq 0 \end{cases}$$

Comme par ailleurs, on a :

$$E (f_N(\lambda) - f(\lambda))^2 = (\text{Variance de } f_N(\lambda)) + (\text{Biais de } f_N(\lambda))^2$$

nous avons donc le résultat :

THEOREME 3.3.

Pour toute fonction aléatoire laplacienne, d'un paramètre discret, stationnaire du second ordre à répartition spectrale absolument continue, on a :

$$(3.35) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} E [f_N(\lambda) - f(\lambda)]^2 = (1 + \delta(0, \lambda)) f^2(\lambda)$$

Passons maintenant à l'étude du comportement asymptotique d'un périodogramme au voisinage d'un point de saut de $F(\lambda)$.

III.D. COMPORTEMENT DU PERIODOGRAMME AU VOISINAGE D'UN POINT DU SPECTRE (CAS DISCRET)

Nous supposons que la fonction aléatoire considérée $X(\nu)$ soit telle que, conformément à (1.12) :

$$(3.36) \quad F_1(\lambda) \equiv 0 \text{ et } F_3(\lambda) \equiv 0$$

Désignons par λ_i, d_i pour $i = 1, 2, \dots, P$ respectivement les abscisses et les amplitudes des sauts du spectre de $X(\nu)$; $X(\nu)$ étant réel, si λ est un point du spectre, $-\lambda$ l'est aussi et les sauts en ces points sont égaux. D'après (3.19) on a

$$E [f_N(\omega)] = \frac{1}{2\pi(N+1)} \sum_{\nu, \mu=0}^N e^{-i\omega(\nu-\mu)} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(\nu-\mu)\lambda} dF(\lambda)$$

Soit dans notre cas on a :

$$(3.37) \quad E[f_N(\lambda)] = \begin{cases} \frac{1}{2\pi(N+1)} \sum_{i=1}^P d_i \frac{\sin^2(N+1)(\lambda-\lambda_i)/2}{\sin^2(\lambda-\lambda_i)/2} & \text{pour tout } \lambda (\lambda \neq \lambda_i, \\ & i=1, 2, \dots, P) \\ \frac{(N+1)d_j}{2\pi} + \frac{1}{2\pi(N+1)} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^P \frac{d_i \sin^2(N+1)(\lambda_j - \lambda_i)/2}{\sin^2(\lambda_j - \lambda_i)/2} & \text{si } \lambda = \lambda_j \end{cases}$$

et :

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_j} \{E [f_N(\lambda)]\} = \frac{(N+1) d_j}{2\pi} + \frac{1}{2\pi(N+1)} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^P \frac{d_i \sin^2(N+1) (\lambda_j - \lambda_i)/2}{\sin^2 (\lambda_j - \lambda_i)/2}$$

Il en résulte, en conséquence ; que quand $N \rightarrow \infty$ on a :

$$(3.39) \quad E \left[\frac{f_N(\lambda_j)}{N+1} \right] = \frac{d_j}{2\pi} + o \left(\frac{1}{N^2} \right)$$

D'une façon plus générale soit M un entier ≥ 1 et posons

$$(3.40) \quad g_{M,N}(\lambda) = f_{N+M}(\lambda) - f_N(\lambda)$$

Nous aurons pour $j = 1, 2, \dots, P$:

$$(3.41) \quad \left\{ \begin{aligned} E[g_{M,N}(\lambda_j)] &= \frac{M}{2\pi} d_j + \frac{1}{2\pi(N+M+1)} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^P \frac{d_i \sin^2(N+M+1)(\lambda_j - \lambda_i)/2}{\sin^2(\lambda_j - \lambda_i)/2} \\ &\quad - \frac{1}{2\pi(N+1)} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^P \frac{d_i \sin^2(N+1)(\lambda_j - \lambda_i)/2}{\sin^2(\lambda_j - \lambda_i)/2} \end{aligned} \right.$$

Théorème

Si la fonction aléatoire $X(\nu)$ a une répartition spectrale $F(\cdot)$ purement discrète. En désignant par λ_i et d_i les abscisses et les amplitudes des sauts de $F(\cdot)$ ($i=1,2,\dots,P$)

Alors pour $N \rightarrow \infty$ on a pour $j = 1,2,\dots,P$:

$$(3.41) \quad E \left[\frac{f_N(\lambda_j)}{N+1} \right] = \frac{d_j}{2\pi} + o \left(\frac{1}{N^2} \right)$$

$$(3.42) \quad \text{et } E[g_{M,N}(\lambda_j)] = \frac{M d_j}{2\pi} + o \left(\frac{1}{N} \right) \text{ pour tout } M \geq 1$$

La quantité $g_{M,N}(\lambda)$ est définie dans (3.40),

Les mêmes résultats peuvent être transposés au cas d'un paramètre continu. En effet, on a dans ce cas

$$(3.43) \quad E[f_T(\lambda)] = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^P d_j \int_{-T}^{+T} (1 - \frac{|v|}{T}) e^{-i(\lambda - \lambda_j)v} dv$$

$$E[f_T(\lambda)] = \begin{cases} \frac{1}{\pi T} \cdot \sum_{j=1}^P d_j \frac{1 - \cos(\lambda - \lambda_j)T}{(\lambda - \lambda_j)^2} & \text{pour tout } \lambda \neq \lambda_j \\ \frac{T d_i}{2\pi} + \frac{1}{\pi T} \cdot \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^P \frac{1 - \cos(\lambda_i - \lambda_j)T}{(\lambda_i - \lambda_j)^2} & \text{si } \lambda = \lambda_i \end{cases}$$

(c.q.f.d.)

Mais dès lors on peut se poser la question suivante : "Puisque $\lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ E \left[\frac{f_N(\lambda_i)}{N+1} \right] \right\} = d_i/2\pi$, est ce que l'on peut utiliser $\frac{f_N(\lambda_i)}{N+1} \cdot 2\pi$

pour estimer d_i ? "

D'après (3.28) et (3.29) nous pouvons écrire dans le cas présent, pour tout $\lambda \neq \lambda_j$:

$$\text{Variance de } f_N(\lambda) = \frac{1}{4\pi^2(N+1)^2} \left\{ \left[\sum_{j=1}^P d_j \frac{\sin^2(N+1)(\lambda+\lambda_j)/2}{\sin^2(\lambda+\lambda_j)/2} \right]^2 + \left[\sum_{j=1}^P d_j \frac{\sin(N+1)(\lambda+\lambda_j)/2 \cdot \sin(N+1)(\lambda-\lambda_j)/2}{\sin(\lambda+\lambda_j)/2 \cdot \sin(\lambda-\lambda_j)/2} \right]^2 \right\}$$

Donc si $\lambda = \lambda_j$, on a :

$$(3.44) \quad \text{Variance } f_N(\lambda_j) = \frac{1}{4\pi^2(N+1)^2} \left\{ \left[d_j(N+1)^2 + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^P d_i \frac{\sin^2(N+1)(\lambda_j+\lambda_i)/2}{\sin^2(\lambda_j+\lambda_i)/2} \right]^2 + \left[\frac{d_j(N+1) \sin(N+1)\lambda_j}{\sin \lambda_j} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^P d_i \frac{\sin(N+1)(\lambda_i+\lambda_j)/2}{\sin(\lambda_i+\lambda_j)/2} \right]^2 + \left[\frac{\sin(N+1)(\lambda_i-\lambda_j)/2}{\sin(\lambda_i-\lambda_j)/2} \right]^2 \right\}$$

Pour $N \rightarrow \infty$, on aura donc :

$$(3.45) \quad \text{Variance } \left(\frac{f_N(\lambda_j)}{N+1} \right) = \frac{d_j^2}{4\pi^2} + o\left(\frac{1}{N^2}\right)$$

Ce qui montre que $\frac{f_N(\lambda_j)}{N+1}$ ne peut être utilisé pour estimer $d_j / 2\pi$.

III.E. QUELQUES RESULTATS NUMERIQUES SUR L'ESTIMATION DE LA DENSITE SPECTRALE PAR LE PERIODOGRAMME.

E1) Nous avons choisi pour la première série d'expériences de ce chapitre la trajectoire :

$$\begin{cases} X(t) = \sum_{|i| \leq 20} E(i+t) \\ E(i) = \{ \text{HASARD}(7) - 0.5 \}_i \end{cases}$$

Théoriquement $X(t)$ est donc une trajectoire de la fonction aléatoire stationnaire de fonction de répartition spectrale absolument continue de densité $f(x)$.

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{|i| \leq 41} B(i) \cos i x \\ B(i) = \begin{cases} (41 - |i|)/12 & \text{si } |i| \leq 41 \\ 0 & \text{si } |i| > 41 \end{cases} \end{cases}$$

Pour le calcul des valeurs du périodogramme $f_{NX}(x)$, nous évaluons d'abord les quantités $B_{NX}(i)$, pour $i = 0, 1, 2, \dots, NX$; puis les valeurs de $f_{NX}(x)$ d'après la formule explicite :

$$f_{NX}(x) = \frac{1}{2\pi} (B_{NX}(0) + 2 \cdot \sum_{n=1}^{NX} B_{NX}(n) \cos n x)$$

Remarquons que ce calcul devient très coûteux * dès que NX prend des grandes valeurs. En effet pour NX grand, et pour la première valeur de $f_{NX}(x)$, on aura à effectuer approximativement :

- $(NX + 2) (NX + 1)/2 \approx (NX)^2/2$ multiplications
- NX appels de la fonction bibliothèque COSINUS
- NX additions.

*Pour calculer $f_N(x)$ pour $315 > N > 200$	la "IBM 7044" avait mis près de 0.2	seconde
" " " $440 \geq N > 315$	" " " "	0.3 seconde
" " " $560 \geq N > 440$	" " " "	0.4 seconde
" " " $715 \geq N > 560$	" " " "	0.5 seconde

Les résultats obtenus sont présentés de la façon suivante :
 Il s'agit de deux expériences, pour $NX = 100$ (50 a et 50 b) et $NX = 150$
 (50 c et 50 d)

Dans ces pages on trouvera de gauche à droite :

- la colonne des abscisses (λ) - la colonne de valeurs de $f(\lambda)$
- la colonne des valeurs de $f_{NX}(\lambda)$ - puis de $f_{NX}(\lambda) - f(\lambda)$.

Remarque :

La très grande différence des valeurs de $f(\lambda)$ nous a empêché de présenter ces résultats par des graphiques.

B) Pour la deuxième série d'expériences nous nous intéressons à l'écart quadratique moyenne.

$$I_{NX} = \left[\int_{-\pi}^{\pi} (f_{NX}(x) - f(x))^2 dx \right] / \left[\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx \right]$$

La fonction observée étant :

$$\left\{ \begin{array}{l} X(t) = \sum_{i=1}^{12} E(i+t) \\ X(i) = \{ \text{HASARD (121)} \}_i \end{array} \right.$$

Les résultats se trouvent dans la "feuille III. 3."

C) Conclusion

En observant ces tableaux de chiffres, nous devons reconnaître que le périodogramme est bien mauvais pour l'estimation de $f(\lambda)$. :

- Dans la première série d'expériences on observe bien des erreurs aux dernières colonnes qui sont en valeurs absolues beaucoup plus grandes que des valeurs prises par $f(\lambda)$.

- Dans la deuxième série on peut y constater que les valeurs de I_{NX} décroissent d'abord puis croissent ; on voit donc qu'il y a pas d'amélioration pour NX croissant, ceci n'est pas en contradiction avec le fait que :

$$E \left[\int_{-\pi}^{\pi} [f_{NX}(x) - f(x)]^2 dx \right]$$

soit grand.

Les calculs des I_{NX} sont extrêmement couteux : rien que pour établir la première moitié de la table III.3, l'ordinateur IBM 7044 a dû travailler pendant plus d'une heure.

. : . : . : . :
. : . :

6065, 0062, 0024, NGLYEN ETUDIE LE PERIODOGRAMME

CAS NX= 100

0	.22294960+02	.82990665+01	-.13995893+02
.31415991-01	.19379624+02	.68721463+01	-.12507478+02
.62831982-01	.12396218+02	.26550036+01	-.97412140+01
.94247974-01	.52301116+01	.24540085+02	.19309974+02
.12566397+00	.96581082+00	-.62333778+00	-.15891486+01
.15707996+00	.13268652-01	-.60171239+01	-.60303926+01
.18849595+00	.65494415+00	.53556575+01	.47007133+01
.21991194+00	.10561330+01	.14756249+01	.41949187+00
.25132793+00	.69124807+00	-.91035638+00	-.16016044+01
.28274392+00	.14627194+00	-.21050364+00	-.35677557+00
.31415991+00	.13268935-01	-.19548382+00	-.20875276+00
.34557590+00	.23139812+00	.78072923+00	.54933110+00
.37699190+00	.37180462+00	.52342314+00	.15161852+00
.40840789+00	.24334667+00	.59783242+00	.35448575+00
.43982388+00	.43960215-01	-.90745385+00	-.95141406+00
.47123987+00	.13268957-01	.12355056+01	.12222367+01
.50265586+00	.12732387+00	.10063538+01	.87902997+00
.53407186+00	.19006066+00	-.13999102+01	-.15899708+01
.56548784+00	.11656089+00	-.65656081+00	-.77312171+00
.59690384+00	.16096566-01	.17206559+01	.17045593+01
.62831983+00	.13268932-01	.47223935+00	.45897041+00
.65973582+00	.64619751-01	-.16545218+01	-.17391416+01
.69115181+00	.11547696+00	.37209318+00	.25661622+00
.72256780+00	.64653756-01	.14217473+01	.13570935+01
.75398380+00	.60553790-02	.48072525-01	.42017146-01
.78539979+00	.13269089-01	-.14075243+01	-.14207934+01
.81681578+00	.62305139-01	-.58071958-01	-.12037710+00
.84823177+00	.77379342-01	.18900530+01	.18126737+01
.87964776+00	.38877746-01	-.39305860+00	-.43193635+00
.91106375+00	.20285406-02	-.12710071+01	-.12730356+01
.94247974+00	.13269006-01	.40872117+00	.39545217+00
.97389573+00	.48854900-01	.12544070+01	.12055521+01
.10053117+01	.55142802-01	-.50551222+00	-.56065502+00
.10367277+01	.24473761-01	-.80696859+00	-.83144236+00
.10681437+01	.45686330-03	.35603726+00	.35558040+00
.10995597+01	.13268867-01	.83380066+00	.82053179+00
.11309757+01	.39939836-01	-.32897896+00	-.36891879+00
.11623916+01	.40939792-01	-.80839283+00	-.84933262+00
.11938076+01	.15771647-01	.36652536+00	.35075371+00
.12252236+01	.13678474-04	.74495599+00	.74494231+00
.12566396+01	.13268860-01	-.36094630+00	-.37421516+00
.12880556+01	.33613979-01	-.71614278+00	-.74975675+00
.13194716+01	.31257626-01	.35387546+00	.32261784+00
.13508876+01	.10228770-01	.69462604+00	.68439726+00
.13823035+01	.13294260-03	-.35264573+00	-.35277867+00
.14137195+01	.13268650-01	-.64621360+00	-.65948225+00
.14451355+01	.28888529-01	.34290516+00	.31401663+00
.14765515+01	.24325524-01	.75384610+00	.72952057+00
.15079675+01	.65712585-02	-.43655076+00	-.44312202+00
.15393835+01	.54832441-03	-.60199950+00	-.60254782+00
.15707994+01	.13268959-01	.39650359+00	.38323463+00
.16022154+01	.25211782-01	.71749890+00	.69228711+00
.16336314+01	.19168515-01	-.47457735+00	-.49374586+00
.16650474+01	.41082947-02	-.55011654+00	-.55422483+00

.16964634+01	.11264202-02	.46279910+00	.46167268+00
.17278794+01	.13268328-01	.51204492+00	.49877659+00
.17592953+01	.22256101-01	-.35446267+00	-.37671876+00
.17907113+01	.15214051-01	-.53772736+00	-.55294141+00
.18221273+01	.24403484-02	.48757958+00	.48513923+00
.18535433+01	.17980599-02	.50132976+00	.49953170+00
.18849593+01	.13268456-01	-.51969737+00	-.53296582+00
.19163753+01	.19813140-01	-.40439160+00	-.42420474+00
.19477912+01	.12107111-01	.53499436+00	.52288725+00
.19792072+01	.13250506-02	.39705569+00	.39573064+00
.20106232+01	.25263169-02	-.53325033+00	-.53577664+00
.20420392+01	.13268172-01	-.37587239+00	-.38914056+00
.20734552+01	.17747127-01	.63696071+00	.61921358+00
.21048711+01	.96184453-02	.28270547+00	.27308703+00
.21362871+01	.60989226-03	-.51005383+00	-.51066372+00
.21677031+01	.32915137-02	-.27789412+00	-.28118563+00
.21991190+01	.13267760-01	.51552545+00	.50225769+00
.22305350+01	.15963571-01	.25256490+00	.23660133+00
.22619510+01	.75939155-02	-.47049676+00	-.47809067+00
.22933669+01	.19625779-03	-.24485704+00	-.24505330+00
.23247829+01	.40858359-02	.48543274+00	.48134691+00
.23561989+01	.13267621-01	.24051569+00	.22724807+00
.23876148+01	.14396517-01	-.45185554+00	-.46625206+00
.24190308+01	.59276385-02	-.24154840+00	-.24747604+00
.24504468+01	.18624211-04	.53120701+00	.53118838+00
.24818628+01	.49044703-02	.20180978+00	.19690531+00
.25132787+01	.13267822-01	-.53955317+00	-.55282099+00
.25446947+01	.12997755-01	-.15969177+00	-.17268953+00
.25761107+01	.45465302-02	.52700830+00	.52246177+00
.26075266+01	.35773504-04	.15161405+00	.15157828+00
.26389426+01	.57491661-02	-.51600835+00	-.52175751+00
.26703586+01	.13267875-01	-.10745087+00	-.12071874+00
.27017745+01	.11732567-01	.54451966+00	.53278709+00
.27331905+01	.33983924-02	.97862120-01	.94463726-01
.27646065+01	.22027166-03	-.52344627+00	-.52366654+00
.27960224+01	.66242099-02	-.75571941-01	-.82196150-01
.28274384+01	.13267268-01	.53554321+00	.52227594+00
.28588544+01	.10571595-01	.35279585-01	.24707989-01
.28902704+01	.24456356-02	-.48579392+00	-.48823956+00
.29216863+01	.55643030-03	-.28323379-01	-.28879809-01
.29531023+01	.75350347-02	.48565727+00	.47812223+00
.29845183+01	.13267606-01	.37478677-01	.24211071-01
.30159342+01	.94956826-02	-.48736641+00	-.49686208+00
.30473502+01	.16638705-02	-.54039142-02	-.70677847-02
.30787662+01	.10384212-02	.48427361+00	.48323519+00
.31101821+01	.84893520-02	.17818301-01	.93289491-02

0	.22294960+02	-.35922140+01	-.25887174+02
.31415991-01	.19379624+02	.28427412+02	.90477879+01
.62831982-01	.12396218+02	.20062758+02	.76665407+01
.94247974-01	.52301116+01	-.66638398+01	-.11893951+02
.12566397+00	.96581082+00	.46425677+01	.36767569+01
.15707996+00	.13268652-01	-.33557326+01	-.33690013+01
.18849595+00	.65494415+00	.24782555+01	.18233113+01
.21991194+00	.10561330+01	.19554460+01	.89931302+00
.25132793+00	.69124807+00	-.13087523+01	-.20000004+01
.28274392+00	.14627194+00	.10399453+01	.89367332+00
.31415991+00	.13268935-01	-.10736238+01	-.10868927+01
.34557590+00	.23139812+00	.18425413+01	.16111432+01
.37699190+00	.37180462+00	-.51286578+00	-.88467040+00
.40840789+00	.24334667+00	.21664681+00	-.26699859-01
.42982388+00	.43960215-01	.25370258-02	-.41423189-01
.47123987+00	.13268957-01	-.38489193-03	-.13653849-01
.50265586+00	.12732387+00	-.79975151-01	-.20729902+00
.52407186+00	.19006066+00	.40733531+00	.21727464+00
.56548784+00	.11656089+00	-.21398336+00	-.33054425+00
.59690384+00	.16096566-01	.14962664+00	.13353007+00
.62831983+00	.13268932-01	-.18865693+00	-.20192586+00
.65973582+00	.84619751-01	.25278228+00	.16816253+00
.69115181+00	.11547696+00	-.30052807+00	-.41600503+00
.72256780+00	.64653756-01	.66388111+00	.59922734+00
.75398380+00	.60553790-02	-.30662826+00	-.31268363+00
.78539979+00	.13269089-01	.22719327+00	.21392418+00
.81681578+00	.62305139-01	-.26457676+00	-.32688190+00
.84823177+00	.77379342-01	.48013231+00	.40275297+00
.87964776+00	.38877746-01	-.20339833-01	-.59217579-01
.91106375+00	.20285406-02	-.36342503-01	-.38371043-01
.94247974+00	.13269006-01	.17607518+00	.16280617+00
.97389573+00	.48854900-01	-.37548998-01	-.86403898-01
.10053117+01	.55142802-01	.17354262-01	-.37788540-01
.10367277+01	.24473761-01	-.32076425-01	-.56550186-01
.10681437+01	.45686330-03	.33742542-01	.33285678-01
.10995597+01	.13268867-01	-.11520031-01	-.24788898-01
.11309757+01	.39939836-01	.80492204-02	-.31890615-01
.11623916+01	.40939792-01	-.29224765-01	-.70164557-01
.11938076+01	.15771647-01	.12559575+00	.10982410+00
.12252236+01	.13678474-04	-.88542265-01	-.88555944-01
.12566396+01	.13268860-01	.70364413-01	.57095553-01
.12880556+01	.33613979-01	-.46466535-01	-.80080513-01
.13194716+01	.31257626-01	.78613014-01	.47355388-01
.13508876+01	.10228770-01	-.23847659-01	-.34076429-01
.13823035+01	.13294260-03	.21336022-01	.21203079-01
.14137195+01	.13268650-01	-.23299583-01	-.36568234-01
.14451355+01	.28888529-01	.70532802-01	.41644273-01
.14765515+01	.24325524-01	-.39923946-01	-.64249470-01
.15079675+01	.65712585-02	.47996196-01	.41424937-01
.15393835+01	.54832441-03	-.17331929-01	-.17880253-01
.15707994+01	.13268959-01	.30252765-01	.16983805-01
.16022154+01	.25211782-01	-.27566023-01	-.52777805-01
.16336314+01	.19168515-01	.57110451-01	.37941936-01
.16650474+01	.41082947-02	-.38386756-01	-.42495050-01

.16964634+01	.11264202-02	.28444367-01	.27317946-01
.17278794+01	.13268328-01	-.46663082-01	-.59931410-01
.17592953+01	.22256101-01	.72259600-01	.50003499-01
.17907113+01	.15214051-01	.59975839-01	.44761788-01
.18221273+01	.24403484-02	-.22856186-01	-.25296534-01
.18535433+01	.17980599-02	.91286834-02	.73306236-02
.18849593+01	.13268456-01	.34913494-01	.21645038-01
.19163753+01	.19813140-01	-.33267035-01	-.53080175-01
.19477912+01	.12107111-01	.69634259-01	.57527148-01
.19792072+01	.13250506-02	-.51587490-01	-.52912541-01
.20106232+01	.25263169-02	.46181467-01	.43655150-01
.20420392+01	.13268172-01	-.52470230-01	-.65738402-01
.20734552+01	.17747127-01	.45116143-01	.27369016-01
.21048711+01	.96184453-02	-.53700367-01	-.63318812-01
.21362871+01	.60989226-03	.43935924-01	.43326032-01
.21677031+01	.32915137-02	-.33597139-01	-.36888653-01
.21991190+01	.13267760-01	.65335011-01	.52067252-01
.22305350+01	.15963571-01	-.56298979-01	-.72262549-01
.22619510+01	.75939155-02	.57929458-01	.50335542-01
.22933669+01	.19625779-03	-.48268179-01	-.48464437-01
.23247829+01	.40858359-02	.33539723-01	.29453887-01
.23561989+01	.13267621-01	.19476432-02	-.11319978-01
.23876148+01	.14396517-01	.80029763-01	.65633245-01
.24190308+01	.55276385-02	-.65998164-01	-.71925803-01
.24504468+01	.18624211-04	.77603301-01	.77584677-01
.24818628+01	.49044703-02	-.80723630-01	-.85628099-01
.25132787+01	.13267822-01	.74700340-01	.61432518-01
.25446947+01	.12997755-01	-.81788896-01	-.94786651-01
.25761107+01	.45465302-02	.76849180-01	.72302650-01
.26075266+01	.35773504-04	-.77257962-01	-.77293735-01
.26389426+01	.57491661-02	.83405761-01	.77656594-01
.26703586+01	.13267875-01	-.85153095-01	-.98420969-01
.27017745+01	.11732567-01	.99026848-01	.87294281-01
.27331905+01	.33983924-02	-.10266116+00	-.10605955+00
.27646065+01	.22027166-03	.11224518+00	.11202491+00
.27960224+01	.66242099-02	-.10983783+00	-.11646204+00
.28274384+01	.13267268-01	.14099109+00	.12772382+00
.28588544+01	.10571595-01	-.10991433+00	-.12048593+00
.28902704+01	.24456356-02	.11601572+00	.11357008+00
.29216863+01	.55643030-03	-.12003112+00	-.12058755+00
.29531023+01	.75350347-02	.13176968+00	.12423464+00
.29845183+01	.13267606-01	-.12789199+00	-.14115960+00
.30159342+01	.94956826-02	.13268676+00	.12319108+00
.30473502+01	.16638705-02	-.12979562+00	-.13145949+00
.30787662+01	.10384212-02	.12213435+00	.12109593+00
.31101821+01	.84893520-02	-.11909128+00	-.12758064+00

FEUILLE III.3

$$I_{NX} = \frac{\int_{-\pi}^{+\pi} (f_{NX}(x) - f(x))^2 dx}{\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx}$$

NX	I_{NX}
100	.98331728+00
200	.66883857+00
300	.64732897+00
400	.62613580-01
500	.70856974+00
600	.14703974+01
700	.15542830+01
800	.99748099+00
900	.13881004+00
1000	.32522787+01

CHAPITRE IV

IV - A. LE PERIODOGRAMME PONDERE

Nous avons montré dans le chapitre précédent que le périodogramme n'est pas un estimateur asymptotiquement convergent de la densité spectrale. Etant donné que $f_T(\lambda)$ (ou $f_N(\lambda)$ dans le cas de paramètre discret) n'est autre que la transformée inverse de Fourier de la fonction de corrélation expérimentale $B_T(v)$ - {ou $B_N(v)$, cas de paramètre discret} comme $f(\lambda)$ est celle de $B(v)$, il y aura donc lieu de penser que cette absence de convergence provient de l'erreur due à $B_T(v)$ (ou $B_N(v)$), en tant qu'estimateur de $B(v)$.

Au fait nous avons démontré que $B_T(v)$ est un estimateur convergent de $B(v)$, pour $T \rightarrow \infty$, pour toute valeur fixe de v , ou d'une autre manière pour tout v tel $\frac{v}{T} \xrightarrow{T \rightarrow \infty} > 0$; Or en calculant le périodogramme comme estimateur de $f(\lambda)$, nous avons pris même les valeurs de $B_T(v)$ pour lesquelles le rapport v/T ne tend pas vers zéro.

Afin de remédier à cette facheuse situation, nous allons introduire une pondération de façon à rendre moins importantes les valeurs $B_T(v)$ qui sont moins bonnes (c'est à dire pour les $B_T(v)$ dont le rapport v/T ne tend pas vers zéro).

Ainsi considérons les estimateurs de la forme suivante :

$$(4.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} f_T^*(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{+T} e^{-i\lambda v} k(A_T v) B_T(v) dv \quad (\text{c.c.}) \\ f_N^*(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{|v| \leq N} e^{-i\lambda v} k(A_N v) B_N(v) \quad (\text{c.d.}) \end{array} \right.$$

La fonction $k(\cdot)$ est appelée fonction de poids, A_T est une famille des nombres positifs dépendants au paramètre T ; et $f_T^*(\lambda)$ est appelé périodogramme pondéré associé à $(k(\cdot), A_T)$. Dans la suite nous allons montrer qu'il existe une classe de fonctions $k(\cdot)$ et des suites A_T de constantes telles que $f_T^*(\lambda)$ soit un estimateur asymptotiquement convergent de $f(\lambda)$ en tout point λ de continuité de $f(\cdot)$.

Les démonstrations seront faites dans le cas de paramètre continu mais les résultats obtenus peuvent être transposés au cas discret.

IV. B. Etude du biais de $f_T^*(\lambda)$

Rappelons que :

$$E [B_T(v)] = \left(1 - \frac{|v|}{T}\right) B(v)$$

Donc, pour une fonction aléatoire stationnaire dont la fonction de corrélation $B(z)$ est sommable, nous avons pour presque tout λ

$$(4.2) \quad E[f_T^*(\lambda) - f(\lambda)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{+T} e^{-i\lambda v} k(A_T v) \left(1 - \frac{|v|}{T}\right) B(v) dv - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda v} B(v) dv$$

Il s'ensuit qu'en désignant par

$$(4.3) \quad \begin{cases} I_T = \frac{1}{2\pi} \int_{|v| \leq T} e^{-i\lambda v} (k(A_T v) - 1) B(v) dv \\ J_T = -\frac{1}{2\pi T} \int_{|v| \leq T} e^{-i\lambda v} k(A_T v) |v| B(v) dv \\ K_T = -\frac{1}{2\pi} \int_{|v| > T} e^{-i\lambda v} B(v) dv \end{cases}$$

le biais de $f_T^*(\lambda)$ s'écrira :

$$(4.4) \quad E[f_T^*(\lambda) - f(\lambda)] = I_T + K_T + J_T$$

Et il sera donc suffisant de prendre $k(\cdot)$ et A_T de façon à ce que I_T, K_T, J_T tendent séparément vers zéro, pour $T \rightarrow \infty$, pour que $f_T^*(\lambda)$ soit un estimateur asymptotiquement non biaisé de $f(\lambda)$.

Supposons que l'on ait :

$$\text{(Hypothèse } H_2) \left\{ \begin{array}{l} \int_{-\infty}^{+\infty} |B(z) z^\alpha| dz < +\infty \\ \sum_{z=0}^{\infty} |B(z) z^\alpha| < +\infty \end{array} \right. \quad \text{pour un certain } \alpha > 0$$

a) Etudions tout d'abord la quantité J_T .

(Condition 1) ; Supposons que $k(\cdot)$ borné : $|k(z)| < M$ pour tout z .

$$(4.5) \quad |J_T| \leq \frac{M}{2\pi T} \int_{|v| \leq T} |B(v) v| dv$$

Si $\alpha \geq 1$ on obtient donc, pour $T \rightarrow \infty$, l'inégalité asymptotique :

$$(4.6) \quad |J_T| \leq O(T^{-1})$$

Sinon on écrira (4.5) sous la forme :

$$\begin{aligned} |J_T| &\leq \frac{M}{2\pi T} \int_{|v| \leq T} |B(v) v^\alpha| |v^{1-\alpha}| dv \\ &\leq \frac{M}{2\pi T^\alpha} \int_{|v| \leq T} |B(v) v^\alpha| dv \end{aligned}$$

Ce qui donne, pour $T \rightarrow \infty$, l'inégalité

$$(4.7) \quad |J_T| \leq O(T^{-\alpha})$$

On a donc la majoration suivante de J_T

$$(4.8) \quad J_T \leq O (T^{-[\min(\alpha \text{ et } 1)]})$$

b) Quant à K_T :

$$|K_T| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{|v| > T} |v|^{-\alpha} |B(v) v^\alpha| dv < \frac{1}{2\pi T^\alpha} \int_{|v| > T} |B(v) v^\alpha| dv$$

On a donc :

$$(4.9) \quad |K_T| < O (T^{-\alpha})$$

c) Etudions maintenant la quantité I_T , d'après (4.3) on peut écrire encore :

$$I_T = \frac{A_T^s}{2\pi} \int_{|v| \leq T} e^{-i\lambda v} \frac{k(A_T v) - 1}{(A_T v)^s} B(v) v^s dv$$

pour une valeur s quelconque.

Si donc :

$$(Condition 2): \quad \left\{ \begin{array}{l} A_T \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0 \\ \text{et} \quad \frac{1 - k(z)}{z^q} \xrightarrow{z \rightarrow 0} 0 \end{array} \right. \quad \text{pour un certain } q > 0$$

Alors, pour tout $s \leq q$, on a :

$$|I_T| \leq \frac{A_T^s}{2\pi} \int_{|v| \leq T} M_1 |B(v) v^s| dv, \quad M_1 \text{ est une constante.}$$

et si de plus $s \leq \alpha$ on peut alors écrire :

$$\begin{aligned} |I_T| &\leq \frac{A_T^s}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} M_1 |B(v) v^s| dv \\ &\leq M_2 A_T^s \end{aligned}$$

C'est donc qu'on a :

$$(4.10) \quad | \gamma_T | < 0 \quad (A_T^{\min(q, \alpha)})$$

On peut donc, finalement résumer les résultats obtenus dans l'énoncé suivant :

Théorème 4.1

Si la fonction aléatoire stationnaire $X(t)$ est telle que sa fonction de corrélation $B(\cdot)$ satisfait à l'hypothèse 1 :

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |v^\alpha B(v)| dv < +\infty \right. \\ \left. < \sum_{v=0}^{\infty} |v^\alpha B(v)| < +\infty \right)$$

pour un certain nombre $\alpha > 0$, alors si on choisit $\{k(\cdot), A_T\}$ de telle façon que l'on ait (conditions 1 et 2)

$$(4.11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{a) } A_T \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0 \\ \text{b) } |k(z)| < M \text{ pour tout } z \\ \text{c) } \lim_{z \rightarrow 0} \frac{k(z)-1}{z^q} = 0 \text{ pour 1 certain } q > 0 \end{array} \right.$$

Dans ce cas, on peut caractériser le biais de $f_T^*(\lambda)$ par l'inégalité :

$$(4.12) \quad |E[f_T^*(\lambda) - f(\lambda)]| \leq K_1 T^{-\min(q, 1)} + K_2 A_T^{\min(q, \alpha)} + K_3 T^{-\alpha}$$

où K_1 et K_2 sont des constantes.

IV - C. ETUDE ASYMPTOTIQUE DE LA VARIANCE DE $f_T^*(\lambda)$

Etudions tout d'abord $\text{cov} [f_T^*(\omega_1), f_T^*(\omega_2)]$, et soit la quantité suivante :

$$(4.13) \quad \begin{aligned} T \text{ Cov} [f_T^*(\omega_1), f_T^*(\omega_2)] &= T E \left[(f_T^*(\omega_1) - E f_T^*(\omega_1)) (f_T^*(\omega_2) - E f_T^*(\omega_2)) \right] \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-T}^{+T} \int_{-T}^{+T} \left\{ e^{-i(v_1 \omega_1 - v_2 \omega_2)} k(A_T v_1) k(A_T v_2) T \cdot \text{Cov} [B_T(v_1), B_T(v_2)] \right\} dv_1 dv_2 \end{aligned}$$

donc avec les notations :

$$(4.14) \quad \left\{ \begin{aligned} L_T &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-T}^{+T} dv_1 \int_{-T}^{+T} dv_2 e^{-i(v_1 \omega_1 - v_2 \omega_2)} k(A_T v_1) k(A_T v_2) \int_{-\infty}^{+\infty} U_T(u, v_1, v_2) Q(v_1, u, u+v_2) du \\ M_T &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-T}^{+T} dv_1 \int_{-T}^{+T} dv_2 e^{-i(v_1 \omega_1 - v_2 \omega_2)} k(A_T v_1) k(A_T v_2) \int_{-\infty}^{+\infty} U_T(u, v_1, v_2) B(u) B(u+v_2 - v_1) du \\ N_T &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-T}^{+T} dv_1 \int_{-T}^{+T} dv_2 e^{-i(v_1 \omega_1 - v_2 \omega_2)} k(A_T v_1) k(A_T v_2) \int_{-\infty}^{+\infty} U_T(u, v_1, v_2) B(u+v_2) B(u-v_1) du \end{aligned} \right.$$

En vertu de (2.10) nous avons :

$$(4.15) \quad \left\{ \begin{aligned} T \cdot \text{Cov} [f_T^*(\omega_1), f_T^*(\omega_2)] &= L_T + M_T + N_T \\ &\text{avec } U_T(u, v_1, v_2) \text{ donné par (3.8)} \end{aligned} \right.$$

(4.16) $\alpha)$ Supposons ensuite que $Q(u, v, w)$ soit intégrable dans \mathbb{R}^3 , comme on a :
 $|U_T(u, v_1, v_2)| \leq 1$ et $|k(z)| \leq M$, on aura :

$$(4.17) \quad |L_T| \leq \frac{M^2}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |Q(v_1, u, u+v_2)| du dv_1 dv_2$$

La quantité L_T reste donc bornée pour $T \rightarrow +\infty$.

b) Quant à M_T , en posant $\begin{cases} u_1 = v_1 - v_2 \\ u_2 = v_2 \end{cases}$ il vient :

$$18) \quad M_T = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-T}^T du_2 e^{-i(\omega_1 - \omega_2)u_2} k(A_T u_2) \int_{-T-u_2}^{T-u_2} [e^{-iu_1\omega_1} k(A_T u_1 + A_T u_2) U_T(u, u_1 + u_2, u_2) B(u) B(u-u_1) du] du_1$$

Si on posait $z = A_T u_2$, on obtient une autre expression de M_T :

$$19) \quad M_T = \frac{1}{A_T} \int_{-TA_T}^{TA_T} e^{-i(\omega_1 - \omega_2)z/A_T} k(z) \hat{\Phi}_T(z) dz$$

$$20) \quad \hat{\Phi}_T(z) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-T(1+z/A_T)}^{T(1-z/A_T)} du_1 \left[k(A_T u_1 + z) e^{-iu_1\omega_1} \int_{-\infty}^{+\infty} U_T(u, u_1 + \frac{z}{A_T}, \frac{z}{A_T}) B(u) B(u-u_1) du \right]$$

Désignons par $\varphi_T(u_1, z)$

$$21) \quad \varphi_T(u_1, z) = \frac{k(A_T u_1 + z)}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} U_T(u, u_1 + \frac{z}{A_T}, \frac{z}{A_T}) B(u) B(u-u_1) du$$

Supposons que $B(v)$ est sommable, comme $B(v)$ est bornée $B(v)$ est aussi de carré sommable, il en résulte que la fonction $|B(u) B(u-u_1)|$ est sommable en u sur $[-\infty, +\infty]$; la fonction sous signe somme au second membre de (4.21) est donc dominée par une fonction sommable, l'application du théorème de Convergence dominée de Lebesgue donne :

$$2) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \varphi_T(u_1, z) = \frac{k(z)}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} B(u) B(u-u_1) du$$

Rappelons que la fonction $\Phi_T(z)$ est donnée par (4.20) ; comme $B(u)$ est de carré sommable le produit de convolution $\mathcal{C}(u_1)$ de $|B(u)|$

$$4.23) \quad \mathcal{C}(u_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} |B(u) B(u-u_1)| du$$

est sommable en u_1 , comme $|k(z)| \leq M$, on a :

$$|4\pi^2 \varphi_T(u_1, z)| = |k(A_T u_1 + z) e^{-iu_1 \omega_1} \int_{-T}^{+T} U_T(u, u_1 + \frac{z}{A_T}, \frac{z}{A_T}) B(u) B(u-u_1) du| \leq M \mathcal{C}(u_1)$$

d'après (4.20) et (4.21) :

$$4.24) \quad \Phi_T(z) = \int_{-T(1+z/A_T T)}^{T(1-z/A_T T)} e^{-iv_1 \omega_1} \varphi_T(u_1, z) du_1$$

Alors si $A_T T \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \infty$ l'application du théorème de convergence dominée donne :

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \Phi_T(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \varphi_T(u_1, z) e^{-iu_1 \omega_1} \right\} du_1 \\ &= k(z) \int_{-\infty}^{+\infty} \left[e^{-iu_1 \omega_1} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{B(u) B(u-u_1)}{4\pi^2} du \right] du_1 \end{aligned}$$

en appliquant le théorème sur la transformée de Fourier d'un produit de convolution on a :

$$(4.25) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \Phi_T(z) = k(z) f^2(\omega_1)$$

Comme :

$$|\Phi_T(z)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi_T(u_1, z)| du_1 \leq M \int_{-\infty}^{+\infty} du_1 \int_{-\infty}^{+\infty} |B(u) B(u-u_1)| du$$

et que :

$$A_T M_T = \int_{-TA_T}^{+TA_T} e^{-i(\omega_1 - \omega_2)z/A_T} k(z) \Phi_T(z) dz$$

si donc $k(v)$ est sommable alors d'après le lemme préliminaire on a :

$$\lim_{T \rightarrow \infty} (A_T M_T) = 0 \quad \text{si } (\omega_1 - \omega_2 \neq 0)$$

Dans le cas où $\omega_1 = \omega_2$, on a :

$$A_T M_T = \int_{-TA_T}^{TA_T} k(z) \Phi_T(z) dz$$

donc avec les mêmes conditions imposées, nous aurons :

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \{A_T M_T = f_2(\omega_1) \int_{-\infty}^{+\infty} k^2(z) dz\}$$

En résumé, nous avons :

$$(4.27) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} A_T/M_T = \begin{cases} 0 & \text{si } \omega_1 \neq \omega_2 \\ f_2(\omega_1) \int_{-\infty}^{+\infty} k^2(z) dz & \text{si } \omega_1 = \omega_2. \end{cases}$$

c) Il reste à étudier N_T . D'après (4.14), pour v_2 fixé le changement de variables d'intégration :

$$\begin{cases} z = u - v_1 \\ z_1 = v_1 + v_2 \end{cases}$$

nous amène à écrire :

$$(4.28) \quad N_T = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-T}^{+T} dv_2 e^{i(\omega_1 + \omega_2)v_2} k(A_T v_2) \int_{-T+v_2}^{T+v_2} dz_1 e^{-iz_1 \omega_1} k(A_T z_1 - A_T v_2) \int_{-\infty}^{+\infty} dz U_T(z+v_1, z_1-v_2, v_2) B(z) B(z+z_1)$$

En posant $z_2 = A_T v_2$, il vient :

$$\begin{aligned}
 4.29) \quad A_T N_T &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-TA_T}^{TA_T} dz_2 e^{i(\omega_1 + \omega_2)z_2/A_T} k(z_2) \int_{-T(1-z_2/A_T)}^{+T(1+z_2/A_T)} dz_1 e^{-iz_1\omega_1} k(A_T z_1 - z_2) \\
 &\cdot \int_{-\infty}^{+\infty} U_T(z+v_1, z_1 - \frac{z_2}{A_T}, \frac{z_2}{A_T}) B(z) B(z+z_1) dz
 \end{aligned}$$

Sous cette forme on voit qu'avec les mêmes hypothèses faites dans l'étude de M_T , on peut écrire :

$$4.30) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} A_T N_T = \begin{cases} 0 & \text{pour tout couple } (\omega_1, \omega_2) \text{ avec } \omega_1 \neq -\omega_2 \\ f^2(\omega_1) \int_{-\infty}^{+\infty} k^2(z) dz & \text{pour tout } \omega_1 = -\omega_2. \end{cases}$$

On peut donc résumer ces résultats, en énonçant le théorème 4.2

Théorème 4.2 {IV}

Soit $X(t)$ une fonction aléatoire stationnaire dont la fonction de corrélation $B(\cdot)$ et le cumulatif non laplacien d'ordre 4: $Q(u, v, z)$ sont tels que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{-\infty}^{+\infty} B(v) dv < +\infty \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |Q(u, v, z)| du dv dz < +\infty \end{array} \right.$$

Alors, si $\{k(\cdot), A_T\}$ satisfait aux conditions

$$\left\{ \begin{array}{l} |k(z)| < M \text{ pour tout } z \\ \int_{-\infty}^{+\infty} |k(z)| dz < +\infty \end{array} \right.$$

$$\text{et } \left\{ \begin{array}{l} A_T \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0 \\ A_T T \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \infty \end{array} \right.$$

On a :

$$\lim_{T \rightarrow \infty} T^{-1} \text{Cov} [f_T^*(\omega_1), f_T^*(\omega_2)] = (\delta(\omega_1, \omega_2) + \delta(\omega_1, -\omega_2)).$$

$$f^2(\omega_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} k^2(z) dz$$

$$\text{avec } \delta(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{pour } x \neq y \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

IV - D. CONVERGENCE EN MOYENNE QUADRATIQUE DE $F_T^*(\lambda)$.

En remarquant que l'on a :

$$(4.32) \quad E (f_T^*(\lambda) - f(\lambda))^2 = E [f_T^*(\lambda) - E f_T^*(\lambda)]^2 + (E f_T^*(\lambda) - f(\lambda))^2$$

et en réunissant les résultats obtenus des théorèmes (4.1) et (4.2), nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Théorème 4.3.

Si $X(t)$ est une fonction aléatoire stationnaire du 4^{ième} ordre $X(t)$ qui est telle que :

$$(4.33) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_{-\infty}^{+\infty} |B(v) v^\alpha| dv < +\infty \quad \text{pour une certaine valeur } \alpha > 0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |Q(x, y, z)| dx dy dz < +\infty \end{array} \right.$$

où $B(v)$ et $Q(x, y, z)$ désignent respectivement sa fonction de corrélation et son cumulants d'ordre 4 non laplacien. Si la fonction $k(\cdot)$ et la suite A_T sont telles que :

$$(4.34) \quad \left\{ \begin{array}{l} |k(z)| < M \\ \lim_{z \rightarrow 0} \left\{ \frac{k(z)-1}{z^q} \right\} = 0 \quad \text{pour un certain } q > 0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} |k(z)| dz < +\infty \end{array} \right.$$

$$(4.35) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_T \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0 \\ TA_T \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \infty \end{array} \right.$$

Alors pour $T \rightarrow \infty$ la quantité $E [f_T^*(\lambda) - f(\lambda)]^2$ tend vers 0 au moins aussi vite que la quantité :

$$(4.36) \quad [K_1 T^{-\min(\alpha \text{ et } 1)} + K_2 A_T^{\min(\alpha \text{ et } q)} + o(T^{-\alpha})]^2 + K_3 (A_T T)^{-1}$$

où K_1, K_2, K_3 sont des constantes .

Etant donné que $A_T \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0$, d'après (4.35), on aura intérêt à choisir $k(\cdot)$ qui correspond à une valeur assez grande de q telle que (4.34) ait lieu.

Pour fixer les idées choisissons A_T de telle sorte que pour $T \rightarrow \infty$ on ait :

$$A_T = O(T^{-\beta}) \quad 1 > \beta > 0$$

Soit $\epsilon_T = E [f_T^*(\lambda) - f(\lambda)]^2$, d'après les résultats précédents on a :

$$(4.37) \quad \epsilon_T \leq (O(T)^{-\min(\alpha \text{ et } 1)} + O(T)^{-\min(\alpha\beta \text{ et } q\beta)})^2 + O(T^{\beta-1})$$

Par ailleurs on peut encore écrire :

$$(4.38) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{si } 0 < \alpha < q \quad : \epsilon_T \leq O(T^{-\min[2\alpha, 2\alpha\beta, 1-\beta]}) \\ \text{si } 1 \leq \alpha < q \quad : \epsilon_T \leq O(T^{-\min[2\alpha\beta, 1-\beta]}) \\ \text{si } q \leq \alpha \quad : \epsilon_T \leq O(T^{-\min[2q\beta, 1-\beta]}) \end{array} \right.$$

d'où, dans des cas pratiques où q et α seront fixés : le choix optimum — celui qui assurera la plus forte convergence de ϵ_T vers zéro — est le suivant :

$$(4.39) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{a) Si } 0 < \alpha < q \text{ on prendra } \beta = \frac{1}{1 + 2\alpha} \text{ et on aura} \\ \epsilon_T = O\left(T^{-\frac{2\alpha}{1+2\alpha}}\right) \\ \text{b) Si } q \leq \alpha \text{ on prendra } \beta = \frac{1}{1+2q} \text{ et il correspond} \\ \epsilon_T = O\left(T^{-\frac{2q}{1+2q}}\right) \end{array} \right.$$

Dans tous les cas l'ordre de convergence en moyenne quadratique de $f_T^*(\lambda)$ vers $f(\lambda)$ ne peut donc être supérieur à $\frac{1}{T}$.

Comme on a toujours intérêt à choisir $k(\cdot)$ de façon que $f_T^*(\lambda)$ converge aussi vite que possible vers $f(\lambda)$: il y aura donc à choisir une fonction $k(\cdot)$ constante dans un voisinage de zéro et égale à 1 dans ce voisinage, et dans ce cas on aura :

$$(4.40) \quad \epsilon_T = O\left(T^{-\frac{2\alpha}{1+2\alpha}}\right)$$

Si donc $B(v)$ converge vers zéro plus vite que toute puissance de $\frac{1}{v}$ on voit qu'il existe un choix des A_T pour lequel ϵ_T converge vers zéro plus vite que n'importe quelle puissance $C < 1$ de $\frac{1}{T}$.

IV - E. EXEMPLES DE FONCTIONS DE POIDS

D'après le théorème 4.3, on voit que les conditions à imposer sur une fonction $k(\cdot)$ pour qu'elle puisse servir de fonction de poids d'un périodogramme pondéré convergent ne sont pas difficiles à remplir. Il ne sera donc pas étonnant de voir que de nombreuses de ces fonctions ont été proposées.

Citons en les plus courantes.

1°)

Une classe de fonctions de poids, des plus simples, a été proposée par Parzen. Ces fonctions sont de la forme - notons les par $k_r(z)$ -

$$(4.11) \quad k_r(z) = \begin{cases} 1 - |z|^r & \text{pour } |z| \leq 1 \\ 0 & \text{pour } |z| > 1 \end{cases}$$

et où r est une constante positive.

On voit, sans difficulté, que pour tout $r > 0$ fixé, $k_r(z)$ satisfait bien à (4.34) pour tout $q < r$.

Pour $r = 1$ on retrouve le périodogramme pondéré

$$\begin{cases} f_T^*(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{|v| \leq 1/A_T} (1 - |A_T v|) B_T(v) \cos(v\lambda) dv & (\text{c.c.}) \\ f_N^*(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{|v| \leq 1/A_N} (1 - |A_N v|) B_N(v) \cos(v\lambda) & (\text{c.d.}) \end{cases}$$

qui est connu sous le nom de périodogramme de Bartlett modifié

D'après (4.39), le périodogramme pondéré associé à $k_r(z)$ donné en (4.11) ne peut être certifié d'avoir d'un ordre de convergence en moyenne quadratique

supérieur à $\left(\frac{1}{T}\right)^{\frac{2r}{1+2r}}$ le choix optimum de A_T dépend dans ce cas du comportement asymptotique de $B(v)$, pour $v \rightarrow \infty$.

2°)

Périodogramme pondéré de Daniels: On appelle ainsi tout périodogramme pondéré associé à la fonction de poids :

$$(4.43) \quad k(z) = \begin{cases} \frac{\sin z}{z} & |z| \leq 1 \\ 0 & |z| > 1 \end{cases}$$

et à une famille de constante A_T :

$$\left\{ \begin{array}{l} A_T \longrightarrow 0 \\ TA_T \longrightarrow \infty \text{ avec } T \rightarrow \infty \end{array} \right.$$

Le choix optimum de A_T , évidemment dépend encore de la nature que $B(v)$.

L'ordre de convergence optimum du périodogramme pondéré de Daniels est comme celui de $(\frac{1}{T})^{2/3}$

3°)

Périodogramme associe la fonction à COSINUS :

La fonction :

$$(4.44) \quad k(z) = \begin{cases} \cos z & \text{pour } |z| \leq 1 \\ 0 & \text{pour } |z| > 1 \end{cases}$$

est évidemment bornée et sommable , elle est donc se servir de fonction de poids.

Comme on a ici :

$$\frac{k(z) - 1}{z^2} = - \frac{1}{2}$$

l'ordre de convergence de $E[f_T^*(\lambda) - f(\lambda)]^2$ qui lui est associée, avec un choix adéquat de A_T , est au maximum comme celui de $(\frac{1}{T})^{2/3}$

4°)

Le périodogramme tronqué :

$$(4.45) \quad \left\{ \begin{array}{l} f_T^*(\omega) = \int_{|v| \leq m_T} B_T(v) \cos(v\omega) dv \quad (\text{c.c.}) \\ f_N^*(\omega) = \int_{|v| \leq m_N} B_N(v) \cos(v\omega) \quad (\text{c.d.}) \end{array} \right.$$

qui correspond à la fonction de poids

$$(4.46) \quad \left\{ \begin{array}{l} k(z) = \begin{cases} 1 & \text{pour } |z| \leq 1 \\ 0 & \text{pour } |z| > 1 \end{cases} \\ \text{et avec } A_N = \frac{1}{m_N} \quad (\text{c.d.}) \\ A_T = \frac{1}{m_T} \quad (\text{c.c.}) \\ \text{où } M_T \text{ est une famille de constantes convenablement choisie } (m_T \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{} \infty) \end{array} \right.$$

On voit qu'ici, l'ordre de convergence de $f_T^*(\lambda)$ vers $f(\lambda)$ dépend uniquement du comportement asymptotique de $B(v)$, et qui est indépendante de q . Pour une fonction aléatoire $X(t)$ dont la fonction de corrélation $B(v)$ converge vers zéro plus vite que toute puissance de $\frac{1}{T}$, l'ordre de convergence de $E [f_T^*(\lambda) - f(\lambda)]^2$ vers zéro peut-être rendu plus grand que celui de n'importe quelle fonction de la forme $(\frac{1}{T})^a$ avec $a < 1$.

5°)

Périodogramme pondéré de Rosenblatt^(*).

Remarquons tout d'abord que toute combinaison linéaire finie $K(\cdot)$ de fonction de poids $k_i(\cdot)$ vérifiant (4.34)

$$(4.47) \quad \left\{ \begin{array}{l} K(x) = \sum_{i=1}^M a_i k_i(x) \\ \text{avec } \sum_{i=1}^M a_i = 1 \end{array} \right.$$

est encore une fonction de poids qui vérifie (4.34). C'est cette idée qui a permis à Rosenblatt* de proposer l'estimateur de la densité spectrale suivant, pour le cas d'un paramètre discret

$$f_N^*(x) = \frac{1}{2\pi} B_N(0) + \frac{1}{\pi} \sum_{\nu=1}^{m_N} B_N(\nu) (0.46 \cos \frac{\pi\nu}{m_N} + 0.54) \cos \nu x$$

* ULF GRENANDER AND MURRAY ROSENBLATT. Statistical analysis of stationary time series. ALMQUIST WIKSELL STOCKHOM (page 149).

IV - F. EXPERIENCES NUMERIQUES

Nous classons nos résultats en trois catégories qui correspondent à chacune une série d'expériences :

IV - F1. Première série d'expériences (ou ERREURS PAR POINT en fonction de NX).

La trajectoire observée dans cette série est celle de la fonction aléatoire

$$(4.48) \quad \left\{ \begin{array}{l} X(t) = \sum_{i=0}^{12} E(t+i) \\ E(i) \text{ est une suite de nombres aléatoires ayant } (0,1) \text{ comme} \\ \text{loi de probabilité et qui est fabriquée d'après la méthode de} \\ \text{rejection.} \end{array} \right.$$

Nous voulons avoir, par ces expériences, une idée sur ce qui donnent les différents périodogrammes pondérés en tant que estimateurs de la densité spectrale de la fonction $X(t)$ définie dans (4.48).

En ajoutant à la liste des périodogrammes exposés dans IV. E le périodogramme pondéré suivant :

$$(4.49) \quad f_N^*(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{|n| \leq \sqrt{N}} \left(1 - \frac{|n|}{\sqrt{N}}\right) \cdot \left(\frac{N}{N-1}\right) B_N(n) \cos(nx)$$

qui a été proposé par BARTLETT (*) les calculs sur IBM 7044 nous ont fourni les valeurs dans les tables A.j (pour $j = 1, 2, 3, 4, 5$) où nous avons noté par :

$$(4.50) \quad \Delta_{NX}^i(v) = f_{NX}^{*(i)}\left(v \frac{\pi}{34}\right) - f\left(v \frac{\pi}{34}\right)$$

avec la convention suivante :

(*) M. S. BARTLETT Périodogram analysis and continuons spectra BIOMETRIKA, 37 (1950) pp 1 - 16.

(4.51)

si $i = 1$:	$f_{NX}^{*(i)}$	(.)	désigne	le	périodogramme	pondéré	de	Bartlett
"	$i = 2$	"	"	"	"	"	"	"	Bartlett modifié
"	$i = 3$	"	"	"	"	"	"	"	Daniels
"	$i = 4$	"	"	"	"	"	"	"	tronqué
"	$i = 5$	"	"	"	"	"	"	"	proposé par Rosenblatt.

Remarque :

D'après (4.39) nous voyons que, dans le cas discret, nous devons prendre ou $\beta = \frac{1}{1+2\alpha}$ ou $\beta = \frac{1}{1+2q}$; il en résulte par conséquent, qu'il

faut prendre NX assez grand pour qu'un nombre raisonnable de $B_{NX}(\nu)$ (avec $|\nu| \leq \left\{ T^{-\frac{1}{1+2\alpha}} \text{ ou } T^{-\frac{1}{1+2q}} \right\}$) se présentent dans le calcul de $f_{NX}^{*(i)}$ (.) .

Conclusion :

Ces tables nous montrent que, sur cet exemple d'estimation, dans l'ensemble, il y a amélioration pour NX croissant, mais il est difficile de voir si un tel estimateur est meilleur qu'un tel autre. En effet, prenons la première ligne page A_i ($i=1,2,3,4,5$) et intéressons nous à l'estimateur qui donne le meilleur résultat ; on trouve :

Pour $NX = 1000$	le meilleur est donné par	$f^{*(5)}$	avec une erreur \approx	- 1.0269
Pour $NX = 2000$	" " " " "	$f^{*(4)}$	" " " \approx	- 0.3956
Pour $NX = 3000$	" " " " "	$f^{*(5)}$	" " " \approx	0.2649
Pour $NX = 4000$	" " " " "	$f^{*(5)}$	" " " \approx	- 0.2586
Pour $NX = 5000$	" " " " "	$f^{*(5)}$	" " " \approx	- 0.3258

Il paraît donc que $f^{*(5)}$ est meilleur, mais à la 3ième ligne on trouve :

Pour $NX = 1000$	le meilleur est donné par	$f^{*(3)}$	avec une erreur \approx	- 0.00721
Pour $NX = 2000$	" " " " "	$f^{*(4)}$	" " " \approx	- 0.08325
Pour $NX = 3000$	" " " " "	$f^{*(4)}$	" " " \approx	- 0.00138
Pour $NX = 4000$	" " " " "	$f^{*(1)}$	" " " \approx	0.00828
Pour $NX = 5000$	" " " " "	$f^{*(4)}$	" " " \approx	- 0.00169

Ce qui donne raison à $f^{*(4)}$ et contraire, par conséquent, l'hypothèse selon laquelle $f^{*(5)}$ est le meilleur. On trouvera encore un autre résultat en observant les 13ième lignes de ces pages :

{	Pour NX = 1000	le meilleur	est donné	par	$f^{*(2)}$	avec une	erreur	\approx	0.0000874
"	NX = 2000	"	"	"	$f^{*(3)}$	"	"	"	\approx -0.000357
"	NX = 3000	"	"	"	$f^{*(2)}$	"	"	"	\approx 0.002881
"	NX = 4000	"	"	"	$f^{*(3)}$	"	"	"	\approx -0.001028
"	NX = 5000	"	"	"	$f^{*(2)}$	"	"	"	\approx 0.001335

Globalement nous avons eu vraiment une amélioration pour NX croissant, comme nous avons dit, mais si on s'intéresse à une valeur λ précise (qui correspond à une valeur de ν , voir (4.50) on voit que - pour $i=1,2,3,4,5$ - les quantités

$$\Delta_{NX}^i(\nu)$$

ne semblent pas être des fonctions monotones de NX, on est donc bien dans un domaine aléatoire.

IV. F.2. Deuxième série d'expériences (ou ERREURS PAR POINT en fonction de $NB = 1/A_N$). Désignons par :

$$(4.52) \quad \Delta_{NX,NB}^i(v) = f_{NX,NB}^{*(i)} \left(v \cdot \frac{\pi}{35} \right) - f \left(v \frac{\pi}{35} \right) \quad \left\{ \begin{array}{l} v=0,1,\dots,34 \\ i=1,2,3,4,5 \end{array} \right\}$$

où

$$f_{NX,NB}^{*(i)}(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{|n| \leq NB} k^{(i)}(n/NB) B_{NX}(n) \cos(n x)$$

Nous ferons $NX = 7000$

Le but de cette série d'expériences est de calculer $\Delta_{NX,NB}^i(v)$ en fonction de NB donc de voir l'influence du choix de NB sur la qualité de ces différents estimateurs.

La trajectoire observée est celle de la fonction :

$$(4.53) \quad X(n) = \sum_{i=0}^{12} (13-i) \{ \text{HASAFI (7)} \}_{i+n}$$

Les résultats numériques se trouvent dans les tables (B.j) pour $j = 1, 2, 3, 4$. On y lira :

- en 1ère colonne les valeurs de i
- en 2ième colonne les valeurs théoriques de $f \left(i \frac{\pi}{35} \right)$; $f(\cdot)$ désignant la fonction de densité spectrale de $X(v)$ — (4.53) —
- ensuite les erreurs commises par les différents périodogrammes pondérés dont les noms sont écrits en haut des colonnes.

Chaque table correspond à une expérience associée à une valeur du paramètre NB . Ainsi la table B.1 est relative à la valeur $NB = 5$, B.2 relative à $NB = 10$, ... B.4 à la valeur $NB = 20$.

Conclusion :

En parcourant ces pages de résultats on observe des faits suivants :

- a) Le périodogramme tronqué et le périodogramme de Daniels sont les meilleurs si on s'intéresse à l'erreur absolue maximum (voir le graphique ci-joint) les autres sont de loin moins bons.

On constate aussi que les plus grandes erreurs se trouvent, pour l'ensemble de ces périodogrammes, au voisinage de l'origine.

- b) On observe que les erreurs dues à l'emploi des trois estimateurs

- tronqué
- de Rosenblatt
- de Daniels

ont une répartition plus régulière (autour de la fonction théorique)

- c) Dans l'ensemble les meilleurs résultats sont relatifs aux cas où $NB \geq 13$ (Rappelons que la fonction observée est donnée par (4.53) dont la fonction de corrélation $B(\nu)$ s'annule pour tout $|\nu| > 13$).

Remarquons, enfin, qu'il est à prévoir qu'en prenant des valeurs de NB nettement plus grandes que 13 les périodogrammes de Parzen ou Bartlett modifié de Bartlett seraient meilleurs. Etant donnée la forme de la fonction $k(z)$ dans ces deux cas ; on voit qu'elle tend à diminuer toutes les valeurs de $B_{NX}(n)$ pour n proche de NB tout en laissant fixes les valeurs $B_{NX}(n)$ pour n relativement petit. Donc dans le cas précis si l'on prenait NB nettement plus grand que 13 : on voit que la présence de $k(\cdot)$ dans le périodogramme de Parzen tend à diminuer les quantités $B_{NX}(n)$, pour $n > 13$, qui par ailleurs ne sont que parasites (théoriquement parlant). L'usage du périodogramme pondéré est précieux mais délicat.

Il me semble donc qu'il serait mauvais de procéder à l'estimation de $f(\cdot)$ de façon automatique sans se préoccuper de l'hypothèse " $B(n) = 0$ pour $n > N$, un certain entier".

- d) Pour les valeurs $x > 10 \pi / 35$ le périodogramme de Rosenblatt donne les meilleurs résultats.

↑ ERREURS ABSOLUES MAXIMUMS

IV. F. 3. TROISIEME SERIE D'EXPERIENCES

Nous avons pris pour cette série la fonction pseudo aléatoire

$$X(t) = \sum_{i=0}^{20} \{ \text{HASAFI (2)} \}_{i+t}$$

et nous nous intéressons particulièrement aux " ECARTS QUADRATIQUES MOYENS "

(4.54) $\left\{ \begin{array}{l} \Delta_{NX,NB}^{(i)} = \left[\int_{-\pi}^{\pi} (f_{NX,NB}^{*(i)}(x) - f(x))^2 dx \right] / \left[\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx \right] \\ \text{avec :} \\ f_{NX,NB}^{*(i)} = \frac{1}{2\pi} \sum_{|n| < NB} k^{(i)} (A_{NX}^n) B_{NX}(n) \end{array} \right.$

Les résultats obtenus se trouvent dans les TABLES c.j (j = 1, 2, ..., 16) chaque table correspond à une valeur de NX écrite en haut de la page, en faisant varier NB on obtient les colonnes des valeurs $\Delta_{NX,NB}^{(i)}$ pour i = 1,2,3,4,5 qui sont des erreurs quadratiques moyennes respectives des périodogrammes pondérés usuels considérés.

Conclusion

Encore une fois nous observons que les estimations de f(x) par ces différents estimateurs s'améliorent avec NX grandissant, et que le Périodogramme tronqué et celui de Damiels donnent les meilleurs résultats pour NB proche de 20 (valeur de N telle que B(n) = 0 si |n| > N). Pour les valeurs NB > 20 les meilleurs performances ont été obtenues par les autres estimateurs et qu'on a cela indépendamment de NX (longueur des trajectoires observées).

Outre de ces quelques exemples nous avons fait beaucoup d'autres expériences de ce type. Tout en effectuant des variations sur le paramètre NA et sur les fonction a(i) des trajectoires pseudo-aléatoires :

$$\left\{ \begin{array}{l} X(t) = \sum_{0 \leq i \leq NA} a(i) \cdot E_{i+t} \\ \{ E_i \}_{i=0,1,\dots} \text{ bruit blanc de différente loi de distribution.} \end{array} \right.$$

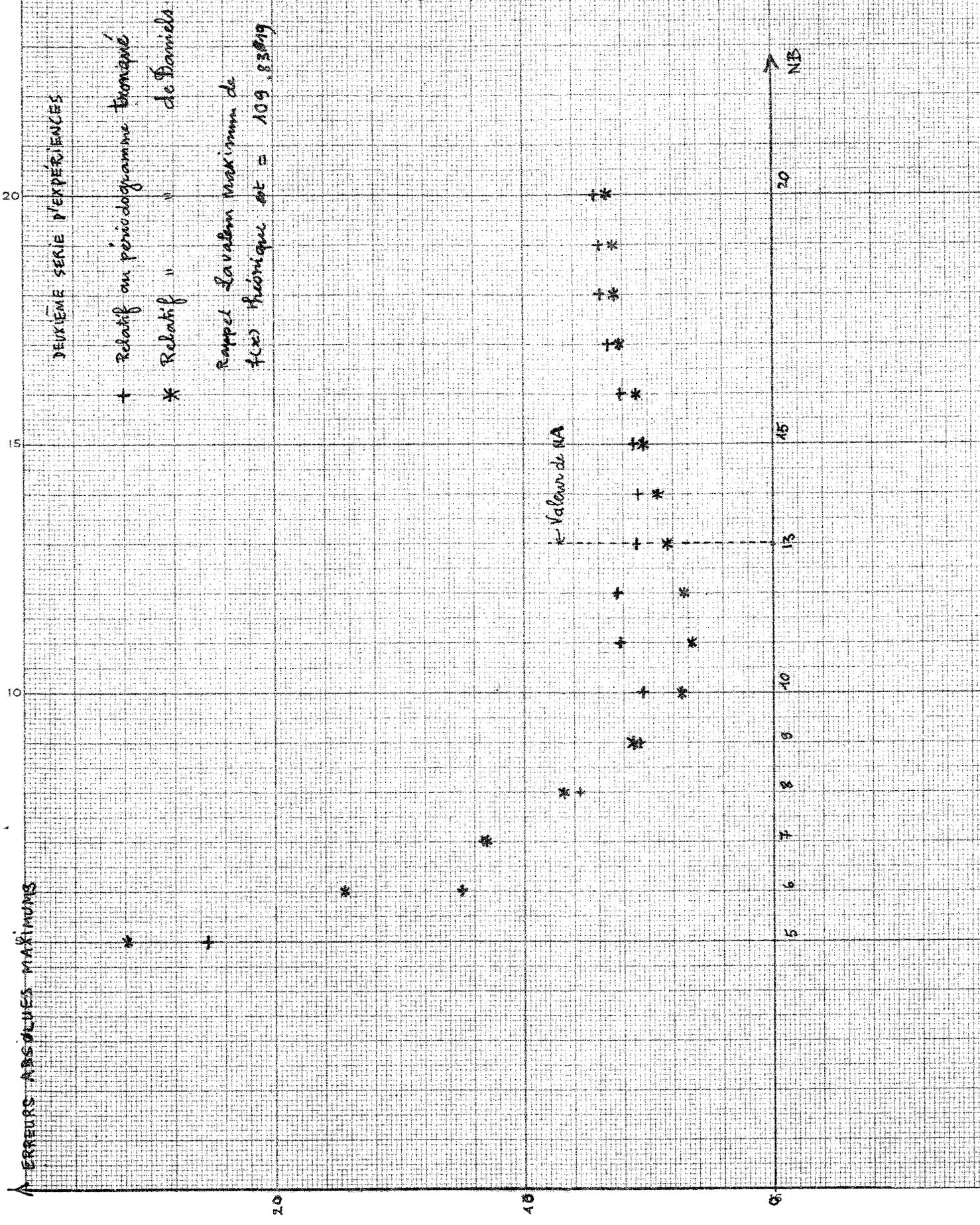
A ERREURS ABSOLUES MAXIMUMS

DEUXIÈME SÉRIE D'EXPÉRIENCES

+ Relatif au périodogramme tronqué

* Relatif " de Daniels

Rappel: L'erreur maximum de l'ES théorique est = 109,83819



Ces expériences ont toutes confirmé cette constatation. On peut donc dire que dans les cas considérés tous les périodogrammes pondérés sont équivalents, et que tout dépend de la manière avec laquelle on choisira NB. L'usage du périodogramme tronqué pour NX grand exige un choix délicat de la valeur que doit prendre NB.

IV. G - LE PERIODOGRAMME TRONQUE ET SA BANDE DE CONFIANCE

Supposons qu'on soit dans un cas où, par un moyen ou par un autre, nous avons pu détecter que la fonction B(n) est nulle si |n| > NB. L'usage du périodogramme tronqué est alors pleinement justifié.

$$(4.55) \quad f_N^*(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{|i| \leq NB} B_N(i) \cos(ix)$$

La longueur de la trajectoire observée étant fixée, nous nous proposons de construire une bande de confiance dans laquelle f(x) devrait se trouver avec une probabilité approximativement égale à 0.95.

D'après le chapitre II, nous savons que, pour N assez grand, les quantités $B_N(i)$ sont approximativement laplaciennes, et par conséquent $f_N^*(x)$ l'est aussi. Comme d'après le même chapitre on a aussi :

$$(4.56) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Cov } [B_N(i), B_N(j)] \approx \frac{1}{N} D(i, j) \\ \text{où } D(i, j) = \left(\frac{\mu_4}{\mu_2^2} - 3 \right) B(i) B(j) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} B(k) [B(k+i-j) + B(k+i+j)] \end{array} \right.$$

Il en résulte dans ce cas :

$$(4.57) \quad \begin{aligned} \text{Cov } [B_N(i), B_N(j)] \approx & \frac{1}{N} \left[\left(\frac{\mu_4}{\mu_2^2} - 3 \right) B(i) B(j) \right. \\ & + \sum_{k=-NB}^{NB-|i-j|} B(k) B(k+|i-j|) + \sum_{k=-NB}^{NB-|i+j|} B(k) B(k+i+j) \left. \right] \end{aligned}$$

Il en résulte alors :

$$(4.60) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Variance } [f_N^*(x)] = \frac{1}{4\pi^2} \left\{ \text{cov } [B_N(o), B_N(o)] \right. \\ \left. + 4 \cdot \sum_{i=1}^{NB} \text{cov } [B_N(o), B_N(i)] \cdot \cos(ix) \right. \\ \left. + 4 \cdot \sum_{i=1}^{NB} \text{cov } [B_N(i), B_N(j)] \cdot \cos(ix) \cdot \cos(jx) \right\} \end{array} \right.$$

Par conséquent, en vertu de (4.58), il vient :

$$(4.61) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Variance } [f_N^*(x)] \approx V_N(x) \text{ où :} \\ V_N(x) = \frac{1}{4\pi^2} \left\{ D_N(o,o) + 4 \cdot \sum_{i=1}^{NB} D_N(o,i) \cos(ix) \right. \\ \left. + 4 \cdot \sum_{i,j=1}^{NB} D_N(i,j) \cdot \cos(ix) \cdot \cos(jx) \right\} \end{array} \right.$$

et $D_N(i,j)$ est défini par (4.58).

D'où en tenant compte du caractère approximativement laplacienne de $f_N(x)$: la bande de confiance qu'on cherche est donc limitée par les graphes de deux fonctions $f_N^1(\cdot)$ et $f_N^2(\cdot)$ suivantes :

$$(4.62) \quad \left\{ \begin{array}{l} f_N^1(x) = f_N^*(x) - 2\sqrt{V_N(x)} \\ f_N^2(x) = f_N^*(x) + 2\sqrt{V_N(x)} \end{array} \right. \text{ avec } V_N(x) \text{ donné par (4.61)}$$

IV. G.1. Quelques exemples d'estimation

Les résultats obtenus de quelques expériences numériques faites sur cette méthode se présentent sous forme de graphique que l'on trouvera derrière les tables (C.i). Comme les valeurs de $f_N^*(x)$ ne sont calculées que pour les valeurs x_i :

$$x_i = i \pi/34 \quad (\text{pour } i = 0, 1, \dots, 33)$$

nous ne donnerons la bande de confiance qu'en ces points : elle y est présentée par une barre verticale dessinée en plein.

Les points théoriques $(x_i, f(x_i))$ seront marqués par des astérisques.

Ces quatre graphiques ne sont que représentatives, je voudrais dire qu'elles ne sont que des exemples pris parmi les expériences effectuées sur cette méthode, qui ont montré que dans presque tous les cas : les points théoriques appartiennent vraiment aux intervalles de confiance.

L'estimation de $f(x)$ par la donnée de $f_N^*(x)$ et sa bande de confiance $[f_N^1(x), f_N^2(x)]$ est plus significative que si la seule donnée est $f_N^*(x)$.

ESTIMATEURS DE MOYENNES PERIOGRAMMES

Nous désignerons par estimateur de moyenne périodogramme tout estimateur, de la densité spectrale $f(x)$ d'une fonction aléatoire stationnaire $X(t)$, qui est de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{f}_T(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_T(l) \omega_{T,x}(l) dl \quad (\text{c.c.}) \\ \tilde{f}_N(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f_N(l) \omega_{N,x}(l) dl \quad (\text{c.d.}) \end{array} \right.$$

où $f_T(l)$ et $f_N(l)$ désigne respectivement les périodogrammes de $X(t)$ dans le cas d'un paramètre continu et dans le cas d'un paramètre discret.

Les fonctions $\omega_{T,x}(l)$ et $\omega_{N,x}(l)$ dépendent de deux paramètres (T,x) dans le premier cas, et (N,x) dans le second. Nous allons démontrer, que sous certaines conditions imposées à $k(\cdot)$, on peut mettre le périodogramme pondéré sous forme d'un estimateur de moyenne périodogramme.

Ainsi soient :

$$\left\{ \begin{array}{l} f_T^*(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T e^{-ixv} k(A_T v) B_T(v) dv \\ f_N^*(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{|n| \leq N} e^{-inx} k(A_N n) B_N(n) \end{array} \right.$$

les périodogrammes pondérés, et intéressons nous tout d'abord au cas d'un paramètre continu.

Donc, si $k(v)$ est la transformée de Fourier d'une certaine fonction sommable $W(t)$:

$$(5.2) \quad k(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ivt} W(t) dt$$

On a :

$$(5.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} k(A_T v) = \int_{-\infty}^{+\infty} W_T(t) e^{-ivt} dt \\ \text{où } W_T(t) = \frac{1}{A_T} W\left(\frac{t}{A_T}\right) \end{array} \right.$$

Il en résulte par conséquent que :

$$f_T^*(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{+T} e^{-ixv} B_T(v) \int_{-\infty}^{+\infty} W_T(t) e^{-ivt} dt dv$$

En vertu d'un théorème de Fubini on a encore

$$(5.4) \quad \begin{aligned} f_T^*(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} W_T(t) \int_{-T}^{+T} e^{-i(t+x)v} B_T(v) dv dt \\ f_T^*(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} W_T(t) f_T(t+x) dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} W_T(t-x) f_T(t) dt. \end{aligned}$$

Proposition 5.1.

Si $k(v)$ est la transformée de Fourier d'une certaine fonction $W(t)$

$$(5.5) \quad \left[\begin{array}{l} k(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itv} W(t) dt \\ \text{Alors : } f_T^*(x) = \frac{1}{A_T} \int_{-\infty}^{+\infty} f_T(t) W\left(\frac{t-x}{A_T}\right) dt \end{array} \right.$$

Dans le cas d'un paramètre discret, posons :

$$W_N(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} k(A_N n) e^{-int}$$

Etant donné que $k(\cdot)$ satisfait à (4.34), la fonction $W_N(t)$ est continue et intégrable sur $[-\pi, \pi]$, et on a :

$$k(A_N n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} W_N(t) e^{int} dt$$

et par conséquent :

$$\begin{aligned} f_N^*(x) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{|n| \leq N} e^{-inx} k(A_N n) B_N(n) \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \sum_{|n| \leq N} \int_{-\pi}^{\pi} W_N(t) e^{int} dt e^{-inx} B_N(n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_N^*(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} W_N(t) f_N(x-t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} W_N(x-t) f_N(t) dt \end{aligned}$$

Proposition 5.2

Si $f_N^*(x)$ est le périodogramme associé à la fonction de poids $k(\cdot)$ qui satisfait à (4.34), alors en désignant par :

$$W_N(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} k(A_N n) e^{-int}$$

On a :

9)
$$f^*(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} W_N(x-t) f_N(t) dt$$

Ainsi en posant :

$$(5.10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega_{T,x}(1) = \frac{1}{A_T} W\left(\frac{1-x}{A_T}\right) \quad (\text{c.c.}) \\ \omega_{N,x}(1) = \frac{1}{2\pi} W_N(1-x) \quad (\text{c.d.}) \end{array} \right.$$

Nous voyons que certains périodogrammes pondérés peuvent se mettre sous la forme de moyennes périodogrammes.

Inversement, soit un estimateur de moyenne périodogramme $\tilde{f}_T(x)$ associé à une fonction $\omega_{T,x}(1)$ telle que l'on ait

$$(5.11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega_{T,x}(1) = \frac{1}{A_T} F\left(\frac{1-x}{A_T}\right) \\ \text{où a) La fonction } F(t) \text{ peut s'écrire} \\ F(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} k(v) e^{-ivt} dv \\ \text{et où } k(.) \text{ satisfait à (3.34)} \\ \text{b) } A_T \text{ est une famille de constantes telles que} \\ A_T \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0 \\ A_T T \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \infty \end{array} \right.$$

Alors $\tilde{f}_T(.)$ est un estimateur pondéré satisfaisant à (4.34) et (4.35).

Dans le cas discret si $\tilde{f}_N(.)$ est un estimateur de moyenne périodogramme associé à $\omega_{N,x}(t)$ tel que l'on ait :

$$(5.12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega_{N,x}(t) = \frac{1}{2\pi} W_N(t-x) \\ \text{avec } \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} W_N(t) dt = 1 \end{array} \right.$$

alors en désignant par $K_N(n)$

$$K_N(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} W_N(t) e^{int} dt$$

on voit que $\tilde{f}_N(\cdot)$ est bien un périodogramme pondéré associé à la fonction de poids $k(\cdot)$ telle que $k(A_N n) = K_N(n)$.

Donnons nous maintenant quelques exemples de périodogrammes pondérés qui peuvent se mettre sous forme de moyennes périodogrammes.

Exemple 1

Soit le périodogramme pondéré associé à la fonction de poids suivante :

$$k(z) = \frac{\sin z}{z}$$

qui n'est autre que la transformée de Fourier de $W(t)$:

$$W(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } |t| < 1 \\ \frac{1}{4} & \text{si } |t| = 1 \\ 0 & \text{si } |t| > 1 \end{cases}$$

On peut donc écrire ce périodogramme sous la forme suivante :

$$f_T^*(x) = \frac{1}{2A_T} \int_{x-A_T}^{x+A_T} f_T(t) dt$$

$f_T^*(x)$ est donc la moyenne de $f_T(t)$ dans l'intervalle $[x - A_T, x + A_T]$.

Exemple 2

Le périodogramme pondéré associé à la fonction de poids

$$k(z) = \begin{cases} \cos z & \text{si } |z| \leq 1 \\ 0 & \text{si } |z| > 1 \end{cases}$$

peut s'écrire :

$$f_T^*(x) = \frac{1}{2\pi A_T} \int_{-\infty}^{+\infty} f_T(t) \left[\frac{\sin\left(1 + \frac{t-x}{A_T}\right)}{1 + \frac{t-x}{A_T}} + \frac{\sin\left(1 - \frac{t-x}{A_T}\right)}{1 - \frac{t-x}{A_T}} \right] dt$$

Exemple 3

Le périodogramme pondéré Bartlett modifié, qui est relatif à la fonction de poids

$$k(z) = \begin{cases} 1 - |z| & \text{si } |z| \leq 1 \\ 0 & \text{si } |z| > 1 \end{cases}$$

peut s'écrire

$$f_T^*(x) = \frac{1}{2\pi A_T} \int_{-\infty}^{+\infty} f_T(t) \left\{ \frac{\sin [(t-x)/2A_T]}{(t-x)/2A_T} \right\}^2 dt$$

Exemple 4

Si la fonction de poids $k(z)$ est égale à $e^{-|z|}$ alors le périodogramme qui lui est associé s'écrit :

$$f_T^*(x) = \frac{1}{\pi A_T} \int_{-\infty}^{+\infty} f_T(t) \frac{1}{1 + \frac{(t-x)^2}{A_T^2}} dt$$

Exemple 5

Le périodogramme tronqué associé à la fonction de poids :

$$k(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } |z| \leq 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

s'écrit donc encore sous la forme

$$f_T^*(x) = \frac{1}{\pi A_T} \int_{-\infty}^{+\infty} f_T(x) \frac{\sin \frac{t}{A_T}}{\frac{t}{A_T}} dt$$

C H A P I T R E VI

M E T H O D E S S P E C I A L E S

Nous nous intéressons, dans ce chapitre, à l'estimation paramétrique de la densité spectrale dans deux cas discrets suivants :

a) où la densité spectrale $f(\cdot)$ est de la forme

$$(6.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} f(x) = a_0 + a_1 x^2 + \dots + a_n x^{2n} \quad \text{pour } |x| \leq \pi \\ n \text{ est un entier connu, et } a_i \text{ (} i=0,1,\dots,n \text{) sont des paramètres à déterminer.} \end{array} \right.$$

b) où $f(\cdot)$ est de la forme :

$$(6.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^n \frac{A_j |e^{ix} - b_j|^2}{|e^{ix} - a_j|^2} \\ = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^n \frac{A_j [(\cos x - b_j)^2 + \sin^2 x]}{(\cos x - a_j)^2 + \sin^2 x} \\ n \text{ étant connu : les constantes } A_j, b_j, a_j \text{ sont réelles ;} \\ a_j, b_j \text{ distincts et} \\ \left\{ \begin{array}{l} 0 < a_j < 1 \\ 0 < b_j < 1 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

VI. A. ESTIMATION POLYNOMIALE

Soit $X(v)$ une fonction aléatoire stationnaire du second ordre ayant une densité spectrale de la forme (6.1) et dont une trajectoire a été observée pour $v = 0, 1, \dots, N$. On a alors pour tout p entier:

$$(6.3) \quad B(p) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ixp} f(x) dx = \sum_{h=0}^n a_h \int_{-\pi}^{\pi} e^{ixp} x^{2h} dx$$

soit :

$$(6.4) \quad \begin{cases} B(p) = \sum_{h=0}^n a_h \cdot J(p, h) \\ \text{avec } J(p, h) = \int_{-\pi}^{\pi} x^{2h} \cos(px) dx. \end{cases}$$

On voit par conséquent que les quantités a_h ($h = 0, 1, \dots, n$) satisfont à un système d'équations linéaires dont les coefficients du premier membre sont indépendants de $f(\cdot)$. Si donc on considère les $P + 1$ premières de ces équations, on a le système suivant :

$$(6.5) \quad \begin{cases} J.A = B \\ \text{avec } A = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} & B = \begin{bmatrix} B(0) \\ B(1) \\ \vdots \\ B(P) \end{bmatrix} \\ \text{et } J \text{ telle que } J_{i,j} = J(i, j) \text{ (défini dans 6.4),} \\ i = 0, 1, \dots, P ; j = 0, 1, \dots, n ; \end{cases}$$

On a :

Proposition 6.1

$$(6.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Si } P \geq n \text{ alors la matrice } J^T J \text{ est inversible et on a :} \\ A = (J^T J)^{-1} J^T B \end{array} \right.$$

Démonstration

En effet l'équation (6.5) s'écrit encore :

$$J^T J A = J^T B$$

Il suffit donc de prouver que l'on a bien

(6.7) déterminant $(J^T J) \neq 0$

Or d'après un théorème* sur les déterminants de Gram on a

(6.8) $\text{dét}(J^T J) = \sum_k \delta_k^2$

où δ_k représente les C_{P+1}^{n+1} mineur d'ordre $(n+1)$ de la matrice J . Comme J est une matrice à éléments réels tous les δ_k^2 sont donc réels positifs et par conséquent pour prouver (6.7) il suffit de montrer qu'il existe un élément δ_k^2 non nul.

Ainsi soit la matrice K suivante, qui est un mineur d'ordre $(n+1)$ de J :

(6.9) $K =$
$$\begin{bmatrix} (1,1) & (1,x^2) & (1,x^4) & \dots & (1,x^{2n}) \\ (\cos x,1) & (\cos x,x^2) & (\cos x,x^4) & \dots & (\cos x,x^{2n}) \\ (\cos 2x,1) & (\cos 2x,x^2) & (\cos 2x,x^4) & \dots & (\cos 2x,x^{2n}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (\cos nx,1) & (\cos nx,x^2) & (\cos nx,x^4) & \dots & (\cos nx,x^{2n}) \end{bmatrix}$$

avec la convention :

(6.10) $(f(x), g(x)) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot g(x) dx$

(*) Théorème 1.3.1 (page 26) Méthode des moindres carrés de Y.V. LINNIK Dunod, Paris 1963.

D'après cette notation (6.10) il est facile de voir que :

" $\det(K) = 0$ " est équivalent à "il existe une combinaison linéaire des fonctions $\cos(jx)$:

$$(6.11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \pi(x) = \sum_{j=0}^n \alpha_j \cos(jx) \\ \text{avec les } \alpha_j \text{ non tous nuls.} \end{array} \right.$$

(6.12) tel que l'on ait : $(\pi(x), x^{2i}) = 0$ pour $i = 0, 1, \dots, n$." qui conduit à une suite contradiction.

Démontrons cela : En effet désignons par $x_1, x_2, x_3, \dots, x_p, -x_1, -x_2, \dots, -x_p$ les racines de $\pi(x)$ comprises dans $]-\pi, \pi]$, p ne peut être supérieur à n (*) et considérons le polynôme suivant :

$$(6.13) \quad \left\{ \begin{array}{l} P(x) = A \cdot \prod_{j=1}^p (x^2 - x_j^2) = \sum_{j=0}^p B_j x^{2j} \\ \text{avec } A = \text{constante choisie de telle façon que } P(x) \text{ ait le} \\ \text{même signe que } \pi(x) \text{ en un point } x \text{ où } \pi(x) \neq 0 \end{array} \right.$$

$P(x)$ est donc un polynôme pair de degré inférieur à $2n$ et tel que :

$$P(x) \cdot \pi(x) \geq 0$$

Comme $P(x)$ et $\pi(x)$ ne sont pas identiquement nuls on doit avoir nécessairement :

$$(P(x), \pi(x)) = \sum_{j=0}^p B_j (\pi(x), x^{2j}) > 0$$

ce qui constitue une contradiction avec (6.12).

(c.q.f.d.)

(*) $\pi(x) = \sum_{j=0}^n \alpha_j \cos(jx)$; en posant $X = \cos x$ on peut encore écrire

$$\pi(x) = P(X) = \sum_{j=0}^n \beta_j X^j.$$

Comme $P(X)$ ne peut avoir au plus $2n$ racines dans $[-1, 1]$, $\pi(x)$ ne peut donc avoir plus de $2n$ racines dans $]-\pi, \pi]$.

Soient, maintenant les quantités suivantes

$$(6.14) \quad \tilde{B}_N = \begin{bmatrix} B_N(0) \\ B_N(1) \\ \vdots \\ B_N(P) \end{bmatrix} \quad X(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ x^2 \\ x^4 \\ \vdots \\ x^{2n} \end{bmatrix}$$

puis :

$$(6.15) \quad \tilde{A}_N = \begin{bmatrix} \tilde{a}_0 \\ \tilde{a}_1 \\ \vdots \\ \tilde{a}_n \end{bmatrix} = (J^T J)^{-1} J^T \tilde{B}_N = L \tilde{B}_N$$

On a les résultats suivants

Proposition 6.2

Si la fonction aléatoire $X(v)$ a une densité spectrale de la forme (6.1), alors pour tout $P \geq n$ nous aurons :

$$(6.16) \quad a) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} E[\tilde{A}_N] = A$$

b) En désignant par C_N la matrice de covariance de \tilde{A}_N on a :

$$(6.17) \quad \begin{cases} C_N \approx L D_N L^T \\ \text{où } L = (J^T J)^{-1} J^T \text{ et } D_N \text{ la matrice de covariance de } \tilde{B}_N \end{cases}$$

Démonstration

Le deuxième résultat est dû au fait que \tilde{A}_N est donné par (6.15) et que \tilde{B}_N est approximativement laplacienne. Quant au premier :

Comme on a :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E [B_N(i)] = B(i) \text{ pour tout } i = 0, 1, \dots, P; \text{ on a donc}$$

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} E [L \tilde{B}_N] &= \lim_{N \rightarrow \infty} L \cdot E[\tilde{B}_N] \\ &= L \lim_{N \rightarrow \infty} E [\tilde{B}_N] = L \cdot B = A \end{aligned}$$

Théorème 6.1

Si la fonction aléatoire $X(v)$ a une densité spectrale $f(x)$ de la forme (6.1) et a son cumulant non laplacien d'ordre quatre sommable dans N^3 , alors en désignant par :

$$(6.18) \quad \begin{cases} \tilde{f}_N(x) = \tilde{a}_0 + \tilde{a}_1 x^2 + \dots + \tilde{a}_n x^{2n} \\ \text{les } \tilde{a}_i \text{ étant donnés par (6.15)} \end{cases}$$

on a :

$$(6.19) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} E \left[\text{Max}_{x \in [\pi, \pi]} (\tilde{f}_N(x) - f(x))^2 \right] = 0$$

Démonstration

$$(6.20) \quad \tilde{f}_N(x) = X^T(x) \tilde{A}_N$$

$$(6.21) \quad \begin{cases} \tilde{f}_N(x) = Q(x) \tilde{B}_N \\ \text{où } Q(x) = X^T(x) (J^T J)^{-1} J^T \end{cases}$$

Comme $f(x) = Q(x) B$

On a donc :

$$(6.22) \quad [\tilde{f}_N(x) - f(x)] = Q(x) [\tilde{B}_N - B]$$

$Q(x)$ est une matrice ligne du type $(1, P+1)$; soit $q_j(x)$ son $j^{\text{ième}}$ élément, on pourrait alors écrire :

$$\begin{aligned}
 6.23) \quad E [\tilde{f}_N(x) - f(x)] &= E \left\{ \sum_{j=0}^P q_j(x) [B_N(j) - B(j)] \right\} \\
 &= \sum_{j=0}^P q_j(x) (E B_N(j) - B(j))
 \end{aligned}$$

On voit par conséquent que $(E \tilde{f}_N(x) - f(x)) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} 0$: $\tilde{f}_N(x)$

est donc un estimateur asymptotiquement non biaisé de $f(x)$.

Par ailleurs :

$$6.24) \quad (\tilde{f}_N(x) - f(x)) (\tilde{f}_N(y) - f(y)) = (\tilde{B}_N - B)^T Q^T(x) Q(y) (\tilde{B}_N - B)$$

$$\begin{aligned}
 6.25) \quad |(\tilde{f}_N(x) - f(x))(\tilde{f}_N(y) - f(y))| &\leq \text{Max}_{p=0,1,\dots,P} |B_N(p) - B(p)|^2 \\
 &\quad (P+1)^2 \cdot \text{Max}_{j=0,1,\dots,P} |q_j(x)| \cdot \text{Max}_{j=0,1,\dots,P} |q_j(y)|
 \end{aligned}$$

Il en résulte :

$$6.26) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Max}_{x \in [-\pi, \pi]} (\tilde{f}_N(x) - f(x))^2 \leq K \cdot (P+1)^2 \text{Max}_{j=0,1,\dots,P} |B_N(j) - B(j)|^2 \\ \text{où } K = \text{Max}_{x \in [-\pi, \pi]} (\text{Max}_{j=0,1,\dots,P} |q_j(x)|)^2 \end{array} \right.$$

Donc en prenant l'espérance mathématique des deux membres de (6.26) en tenant compte de l'inégalité :

$$E \left[\text{Max}_{j=0,1,\dots,P} (B_N(j) - B(j))^2 \right] \leq \sum_{j=0}^P E(B_N(j) - B(j))^2$$

On a :

$$(6.27) \quad E \left[\text{Max}_x (\tilde{f}_N(x) - f(x))^2 \right] \leq K \cdot (P+1)^2 \cdot \sum_{j=0}^P E(B_N(j) - B(j))^2$$

Par ailleurs on sait que pour tout $j \leq P$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ E (B_N(j) - B(j))^2 \right\} = 0$$

d'après le théorème 2.2 (étant donné que $f(x)$ est de carré sommable) ,
il vient donc :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E \left[\max_{x \in [-\pi, \pi]} (\tilde{f}_N(x) - f(x))^2 \right] = 0$$

(c.q.f.d.)

VI - B. ESTIMATION DES PARAMETRES DES FRACTIONS DE LA FORME 6.2

Nous allons proposer une méthode numérique concernant l'estimation de la densité spectrale du type :

$$(6.28) \quad \left\{ \begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^n \frac{A_j |e^{ix-b_j}|^2}{|e^{ix-a_j}|^2} = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^n \frac{A_j [(\cos x - b_j)^2 + \sin^2 x]}{(\cos x - a_j)^2 + \sin^2 x} \\ \text{ou } A_j, b_j, a_j &\text{ sont des constantes réelles, tous les } a_j \text{ sont diffé-} \\ \text{rents et } a_j, b_j &\text{ sont distincts avec } \begin{cases} 0 < a_j < 1 \\ 0 < b_j < 1 \end{cases} \end{aligned} \right.$$

Si $B(l)$ désigne la fonction de corrélation de $X(t)$; on obtient par la méthode des résidus

$$(6.29) \quad B(l) = \int_{-\pi}^{+\pi} e^{ilx} f(x) dx = \begin{cases} \sum_{j=1}^n \frac{A_j [1 - 2a_j b_j + b_j^2]}{1 - a_j^2} & \text{si } l = 0 \\ \sum_{j=1}^n \frac{A_j [a_j - b_j] [1 - a_j b_j]}{1 - a_j^2} a_j^{|l|-1}, l \neq 0. \end{cases}$$

Dans le cas particulier où tous les b_j sont nuls on obtient pour tout l :

$$(6.30) \quad \left\{ \begin{aligned} B(l) &= \sum_{j=1}^n H_j a_j^{|l|} \\ \text{avec } H_j &= \frac{A_j}{(1 - a_j^2)} \end{aligned} \right.$$

Lemme 6.1

Si la densité spectrale de la fonction aléatoire $X(v)$ est de la forme (6.28) et si $P(x) = \sum_{k=0}^n C_k x^k$ est un polynôme de degré n ayant pour racines : $(a_j - 1), j=1, 2, \dots, n$; alors on a :

$$(6.31) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum_{k=0}^n C_k \Delta^k B(l) &= 0 \quad \text{pour tout } l > 1 \\ \text{ou } B(l) &\text{ désigne la fonction de corrélation de } X(v). \end{aligned} \right.$$

Démonstration :

Rappelons tout d'abord que

$$(6.32) \quad \begin{cases} \Delta^0 B(\ell) = B(\ell) \\ \Delta^1 B(\ell) = B(\ell+1) - B(\ell) \\ \Delta^i B(\ell) = \Delta^{i-1} (\Delta^1 B(\ell)) \end{cases} \quad \text{pour tout } i, i \geq 1 ;$$

Donc : si $f(x)$ est de la forme (6.28) d'après (6.29) on pourra écrire, pour tout $\ell \geq 1$:

$$(6.33) \quad \begin{cases} B(\ell) = \sum_{j=1}^n K_j a_j^{|\ell|} \\ K_j = \frac{A_j (a_j - b_j) (1 - a_j b_j)}{a_j (1 - a_j^2)} \end{cases}$$

Par conséquent, pour tout $\ell \geq 1$, on a les relations suivantes :

$$(6.34) \quad \begin{cases} \Delta^i B(\ell) = \sum_{j=1}^n K_j a_j^{\ell} (a_j - 1)^i \\ \text{pour } i = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

Or si $P(x)$ est un polynôme de degré n ayant pour racines : $a_j - 1$, on doit avoir pour $j = 1, 2, \dots, n$:

$$P(a_j - 1) = \sum_{k=0}^n C_k (a_j - 1)^k = 0$$

ce qui entraîne donc pour tout ℓ :

$$(6.35) \quad \sum_{j=1}^n [K_j a_j^{\ell} \sum_{k=0}^n C_k (a_j - 1)^k] = 0$$

et par conséquent, en permutant les signes sommes de (6.35) et en tenant compte de (6.34), on obtient :

$$\sum_{k=0}^n C_k \Delta^k B(\ell) = 0 \quad (\text{c.q.f.d.})$$

Proposition 6.3.

Si la fonction aléatoire $X(v)$ est telle que sa fonction de densité spectrale vérifie (6.28), en désignant par G la matrice de type (n,n) et d'éléments

$$G_{ij} = \Delta^j B(i)$$

et par B et C les colonnes: $B = \begin{bmatrix} B(1) \\ B(2) \\ \vdots \\ B(n) \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{bmatrix}$

Alors on a : $C = -G^{-1} B$ (C_1, C_2, \dots, C_n désignent les coefficients du polynôme $P(x) = 1 + \sum_{k=1}^n C_k x^k$ dont les racines sont $(a_j - 1)$, $j = 1, 2, \dots, n$).

Démonstration :

L'hypothèse sur $X(v)$ implique que l'on a (6.32) pour $i=1, 2, 3, \dots, n$; autrement dit que C_i ($i=1, 2, \dots, n$) vérifie le système suivant :

$$(6.36) \quad \begin{cases} C_1 \Delta^1 B(1) + C_2 \Delta^2 B(1) + \dots + C_n \Delta^n B(1) = - B(1) \\ C_2 \Delta^1 B(2) + C_2 \Delta^2 B(2) + \dots + C_n \Delta^n B(2) = - B(2) \\ \vdots \\ C_1 \Delta^1 B(n) + C_2 \Delta^2 B(n) + \dots + C_n \Delta^n B(n) = - B(n) \end{cases}$$

ou encore :

$$(6.36 \text{ bis}) \quad G C = - B$$

Il suffit donc de démontrer que $\det(G) \neq 0$

Or en désignant par U, K et H les matrices suivantes :

$$(6.37) \quad U = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_2 & a_2^2 & & a_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_n^2 & & a_n^n \end{bmatrix} \quad K = \begin{bmatrix} K_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & K_n \end{bmatrix}$$

$$(6.38) \quad \text{et } H = \begin{bmatrix} (a_1-1) & (a_1-1)^2 & (a_1-1)^3 & \dots\dots\dots & (a_1-1)^n \\ (a_2-1) & (a_2-1)^2 & (a_2-1)^3 & \dots\dots\dots & (a_2-1)^n \\ (a_3-1) & (a_3-1)^2 & (a_3-1)^3 & \dots\dots\dots & (a_3-1)^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ (a_n-1) & (a_n-1)^2 & (a_n-1)^3 & & (a_n-1)^n \end{bmatrix}$$

Alors d'après la relation (6.34) on voit que la matrice G peut s'écrire sous la forme d'un produit de matrices :

$$(6.39) \quad G = U \cdot K \cdot H$$

Par ailleurs, d'après (6.28) les hypothèses sur les nombres a_i et b_i ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) nous devons donc avoir tous les déterminants de U , H et K non nuls, et par conséquent :

$$\det(G) \neq 0 ;$$

(c.q.f.d.)

Remarque :

Si nous avons considéré, au lieu du système (6.36), le système formé par les équations dans (6.32) associées aux P premières valeurs de ℓ ($\ell = 1, 2, 3, \dots, P ; P > n$), c'est à dire le système :

(6.39 bis)

$$G_{P,n} \cdot C = - B_P$$

où on a désigné par

$$(6.40) \quad G_{P,n} = \begin{bmatrix} \Delta^1 B(1) & \Delta^2 B(1) & \dots & \Delta^n B(1) \\ \Delta^1 B(2) & \Delta^2 B(2) & \dots & \Delta^n B(2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta^1 B(P) & \Delta^2 B(P) & \dots & \Delta^n B(P) \end{bmatrix} ; B_P = \begin{bmatrix} B(1) \\ B(2) \\ \vdots \\ B(P) \end{bmatrix}$$

nous pouvons écrire encore , pour tout $P > n$, l'équation (6.39) sous le forme :

$$(6.41) \quad G_{P,n}^T G_{P,n} C = - G_{P,n}^T B_P$$

$$(6.42) \quad \text{d'où : } C = - (G_{P,n}^T G_{P,n})^{-1} G_{P,n} B_P$$

En effet, d'après (6.8) on a :

$$(6.43) \quad \det (G_{P,n}^T G_{P,n}) \geq \{ \det (G) \}^2 > 0$$

ce qui prouve que $G_{P,n}^T G_{P,n}$ est inversible. D'où on a le théorème suivant, qui généralise la proposition 6.3

Théorème 6.2

Si la fonction aléatoire $X(t)$ est telle que sa densité spectrale vérifie (6.28) alors on a :

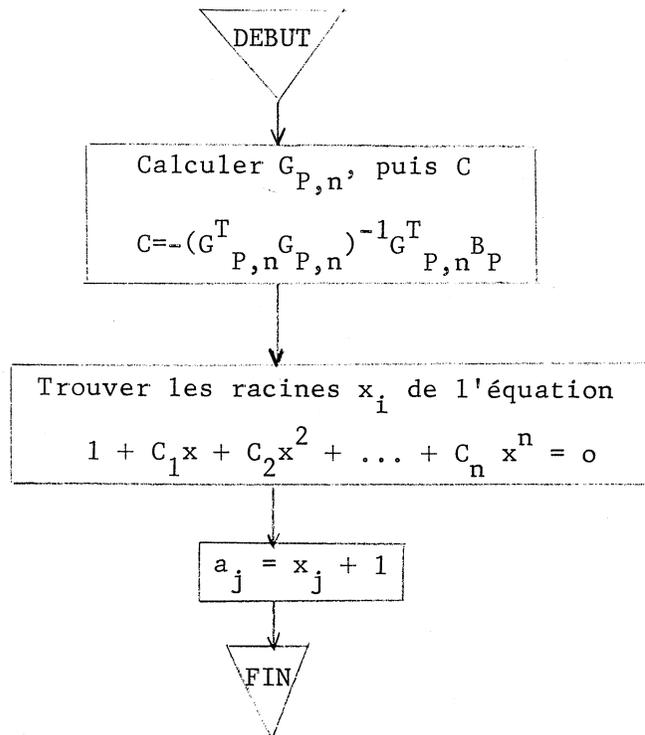
$$\sum_{i=0}^n c_i (a_j - 1)^i = 0 \quad (\text{pour } j = 1, 2, \dots, n)$$

où $C_0 = 1$, et C_j pour $j = 1, 2, 3, \dots, n$ sont composantes du vecteur C :

$$\left\{ \begin{array}{l} C = - (G_{P,n}^T G_{P,n})^{-1} \cdot G_{P,n}^T \cdot B_P \\ G_{P,n} \text{ et } B_P \text{ donnés dans (6.40)} \end{array} \right.$$

Application :

On voit, par conséquent, que pour calculer a_j , il suffit de suivre l'organigramme suivant :



-97-

Dans la pratique on ne connaît pas les valeurs de $B(\hat{l})$ mais comme on sait d'après le chapitre II que dans certains cas on peut écrire :

$$\text{Prob} \left\{ \lim_{N \rightarrow \infty} B_N(\hat{l}) = B(\hat{l}) \right\} = 1$$

donc, dans ces cas on aura aussi

$$\text{Prob} \left\{ \lim_{N \rightarrow \infty} \tilde{C}_i^N = C_i \right\} = 1 \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, n$$

où nous avons désigné par \tilde{C}_i^N le $i^{\text{ième}}$ élément de la colonne \tilde{C}^N donnée par l'égalité :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{C}^N = - (\tilde{G}_{P,n}^T \tilde{G}_{P,n}^T)^{-1} \tilde{G}_{P,n}^T \tilde{B}_P \\ \tilde{G}_{P,n} \text{ et } \tilde{B}_P \text{ étant donnés par (6.40) en remplaçant} \\ B(i) \text{ par } B_N(i), G_{P,n} \text{ par } \tilde{G}_{P,n} \text{ et } B_P \text{ par } \tilde{B}_P \end{array} \right.$$

Il en résulte , par conséquent, que les racines x_i^N de l'équation

$$1 + \tilde{C}_1^N x + \tilde{C}_2^N x^2 + \dots + \tilde{C}_n^N x^n = 0$$

tendent aussi vers x_i , et que l'on a, en posant $a_i^N = x_i^N + 1$

$$\text{Prob} \left\{ \lim_{N \rightarrow \infty} a_i^N = a_i \right\} = 1$$

VI - B.2. Détermination des paramètres K_j , b_j et A_j

Etant donné que K_j vérifie (6.33), si donc on connaît les valeurs de $B(\hat{l})$ et de a_j ($\hat{l} = 1, 2, \dots, n$; $j = 1, 2, \dots, n$) on peut calculer K_j . Quant à pour retrouver les valeurs des b_j et A_j ($j = 1, 2, \dots, n$) il nous faudra résoudre le système à $2n$ inconnues :

$$\left\{ \begin{array}{l} B(\hat{p}) = \sum_{j=1}^n \frac{A_j (a_j - b_j) (1 - a_j b_j) a_j^{\hat{p}-1}}{1 - a_j^2} \\ \text{pour } \hat{p} = 1, 2, \dots, 2n \end{array} \right.$$

Nous avons essayé de faire des expériences numériques sur cette méthode, mais nous n'avons pas pu obtenir de bons résultats numériques, ce qui est sans doute dû à :

- a) soit une simulation assez mauvaise des fonctions aléatoires ayant pour densités spectrales de la forme (6.28) _
- b) soit la présence des systèmes linéaires mal conditionnés rencontrés quand nous recherchons à résoudre les systèmes de la forme (6.41).

Exemples numériques

On trouvera dans les pages suivantes les graphiques concernant l'estimation spectrale dans le cas des polynômes. Nous avons choisi la procédure FALFAT2DISCSPE (X,NX,NA,P,NP) pour les simulations des trajectoires.

Ainsi en prenant l'ordre d'approximation NA = 10, nous avons choisi comme exemples de fonctions aléatoires celles ayant des densités spectrales suivantes :

- 1) $f_1(x) = 2 \pi * (x^2 + 4)^2$ graphe 6.i (i=1,2,3,4)
- 2) $f_2(x) = 2 \pi * (0.1 x^4 + 0.7x^2 + 3)^2$ 6.i (i=5,6,7,8)

Les résultats obtenus sont satisfaisants. Pour la première fonction $f_1(x)$ nous avons constaté que ce n'est pas en augmentant P (le nombre d'équations à résoudre = P+1) que l'on améliore les résultats.

Rappelons que l'on désignera par :

$NX + 1$ = longueur de la trajectoire

Q = ordre du polynôme $g(x) = \sqrt{f(x)}$

$P + 1$ = nombre d'équations

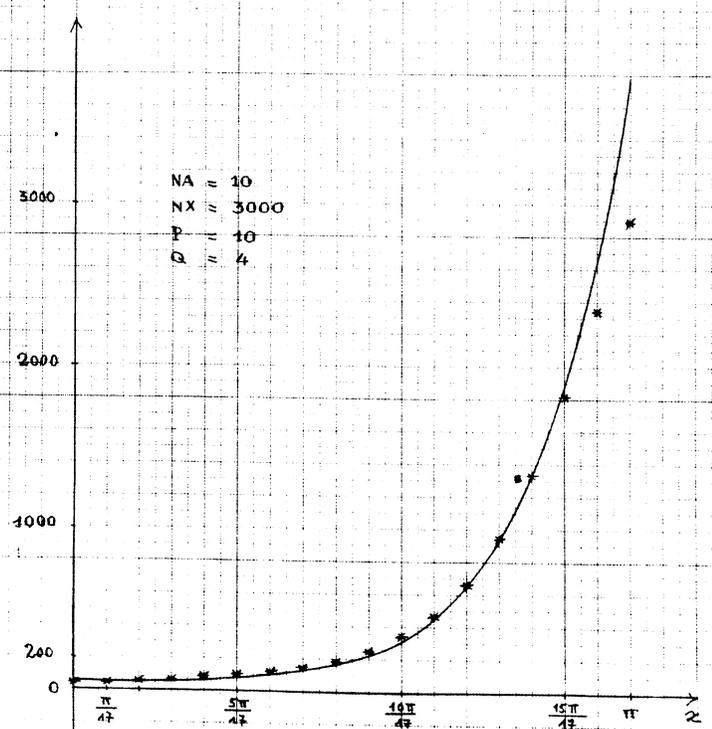
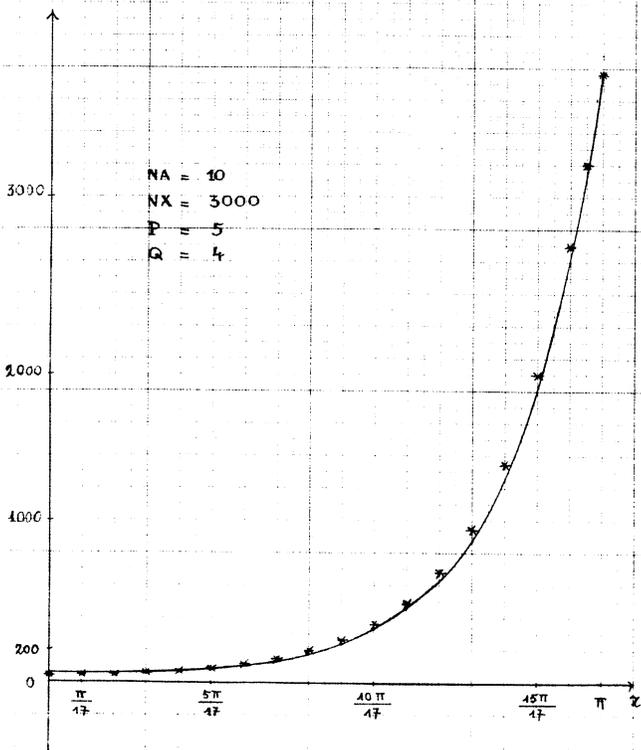
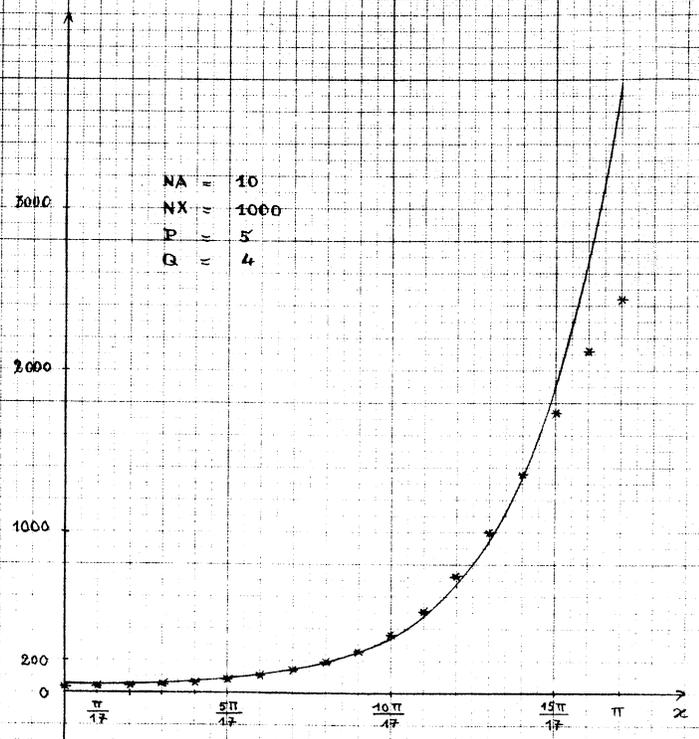
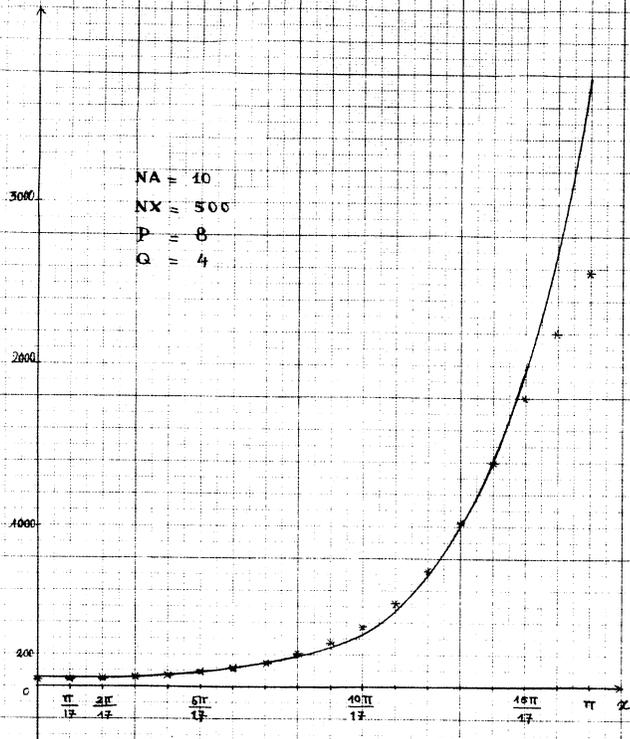
La même constatation , pour ce qui concerne la deuxième fonction, reste valable. Les résultats s'améliorent assez bien avec NX croissant. On constate qu'avec $NX = 3000$, pour $P = 5$ on obtient de résultats bien meilleurs que pour $P = 10$.

.

. . .

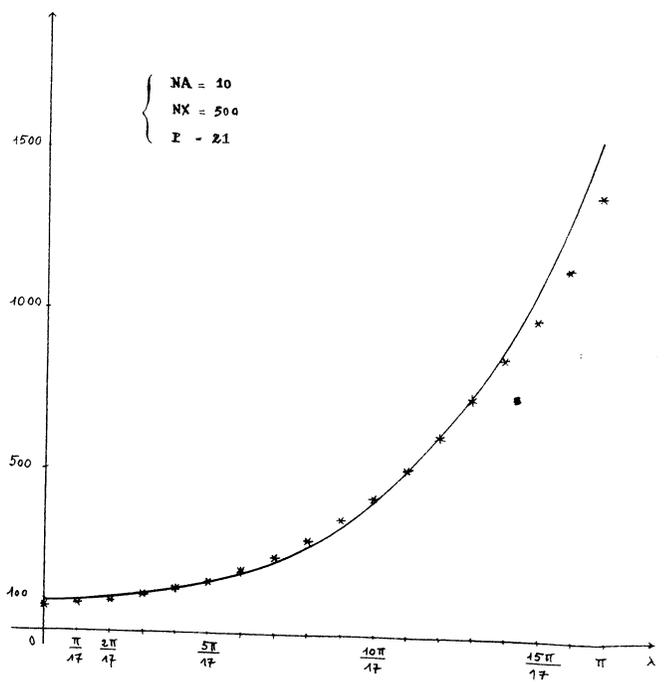
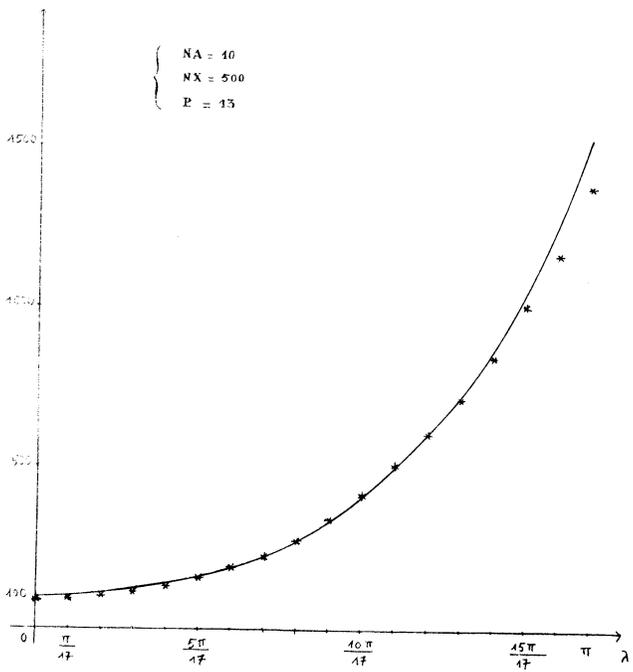
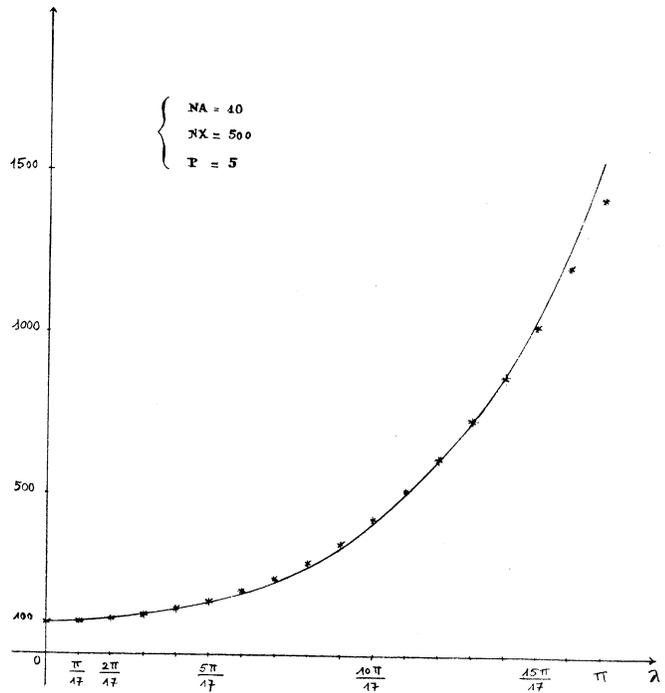
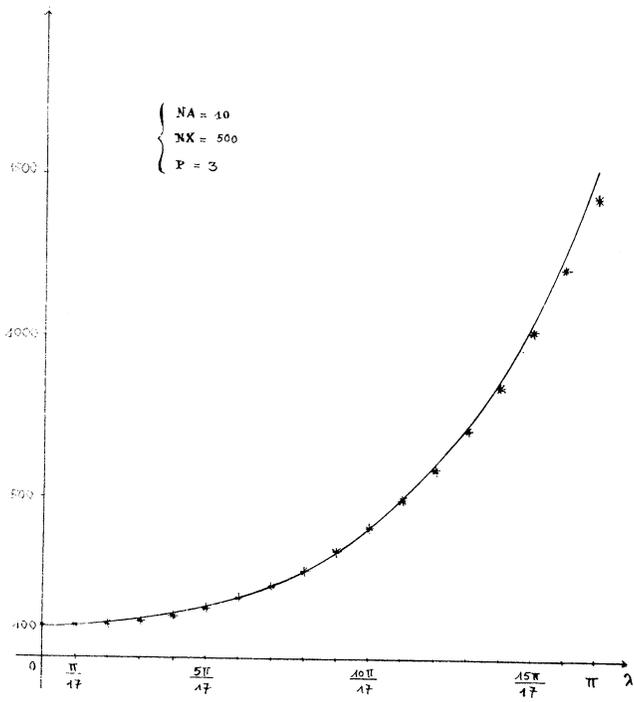
!

ESTIMATION POLYNOMIALE DE LA DENSITÉ
SPECTRALE THÉORIQUE $f(\lambda)$
 $f(x) = 2\pi (0.1x^4 + 0.7x^2 + 5)^2$



LÉGENDE
~~~~~ courbe théorique  $f(x)$   
\* \* \* \* points expérimentaux  $\tilde{f}_{NX}(x)$

ESTIMATION POLYNOMIALE DE LA DENSITÉ  
SPECTRALE THÉORIQUE  $F(\lambda)$

$$F(\lambda) = 2\pi (\lambda^4 + 8\lambda^2 + 46)$$




RESULTATS NUMERIQUES  
RELATIFS AU CHAPITRE IV

TABLE A.2

| $\nu$ | $\Delta_{1000}^4 (\nu)$ | $\Delta_{1000}^2 (\nu)$ | $\Delta_{1000}^3 (\nu)$ | $\Delta_{1000}^4 (\nu)$ | $\Delta_{1000}^5 (\nu)$ |
|-------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|
| 0     | -.11242011+01           | -.11221874+01           | -.10583528+01           | -.10580492+01           | -.10269588+01           |
| 1     | -.78625415+00           | -.78230882+00           | -.68595007+00           | -.68958883+00           | -.70449190+00           |
| 2     | -.25071862+00           | -.24671896+00           | -.72120577-02           | .16227260-01            | -.18932892+00           |
| 3     | -.25636639-01           | -.26536405-01           | -.15586998+00           | -.17570097+00           | -.17348792-01           |
| 4     | .74390326-01            | .71973533-01            | .26984953-01            | .31684364-01            | .43376098-01            |
| 5     | .79779750-01            | .78084137-01            | -.25052133-01           | -.35141111-01           | .40385883-01            |
| 6     | .39062767-01            | .38673961-01            | .67212169-01            | .74872559-01            | .22079007-01            |
| 7     | .13211127-02            | .13371305-02            | -.12765248-01           | -.15379105-01           | -.11709364-01           |
| 8     | -.89735323-02           | -.94808167-02           | -.14943348-01           | -.13209585-01           | -.15979240-01           |
| 9     | -.20447931-01           | -.20008220-01           | -.47637319-02           | -.69478167-02           | .57021842-02            |
| 10    | .16268293-01            | .15778617-01            | .71829872-02            | .82485126-02            | .76552098-02            |
| 11    | .25853305-03            | .87478430-04            | -.11722978-01           | -.12941687-01           | -.92122546-02           |
| 12    | -.12920583-01           | -.13070510-01           | -.82116429-02           | -.64560654-02           | -.16717163-01           |
| 13    | -.11308144-02           | -.12539888-02           | -.13187697-01           | -.14720224-01           | -.75526363-02           |
| 14    | .98129660-02            | .95787652-02            | .11036908-01            | .12605793-01            | .54528793-02            |
| 15    | .85886093-02            | .83722963-02            | -.96398824-02           | -.11836160-01           | .27226387-02            |
| 16    | .17910192-02            | .17221859-02            | .10361478-01            | .12391111-01            | -.68810046-03           |
| 17    | -.23943977-02           | -.24181164-02           | -.10260286-01           | -.11581035-01           | -.58868075-02           |
| 18    | .45455503-03            | .33690338-03            | .39561425-02            | .52919362-02            | -.18270027-02           |
| 19    | .61611241-02            | .59992763-02            | -.64202093-02           | -.78603064-02           | .15694571-02            |
| 20    | .48562881-02            | .47140690-02            | .53622587-02            | .62678041-02            | .24023161-02            |
| 21    | .14627310-02            | .14410203-02            | -.33484053-02           | -.41090562-02           | -.13183355-02           |
| 22    | -.12130940-02           | -.12353337-02           | .40374318-02            | .51681075-02            | -.24831374-02           |
| 23    | .12340401-02            | .11386256-02            | -.68907673-02           | -.78729034-02           | -.16208575-02           |
| 24    | .47589657-02            | .46338480-02            | .43604700-02            | .50035080-02            | .21373895-02            |
| 25    | .23623772-02            | .22588759-02            | -.46761175-02           | -.54081824-02           | -.47327322-03           |
| 26    | -.13447552-02           | -.13796671-02           | .56262372-03            | .11337955-02            | -.29379742-02           |
| 27    | -.10808324-02           | -.11000616-02           | -.23023505-02           | -.24085133-02           | -.28419634-02           |
| 28    | .23745648-02            | .22975125-02            | .34676026-03            | .40949602-03            | .33540843-03            |
| 29    | .41935383-02            | .40805170-02            | .15821861-03            | .44469351-04            | .16642867-02            |
| 30    | .12760715-02            | .11914133-02            | -.26463486-02           | -.28978699-02           | -.10090380-02           |
| 31    | -.20718489-02           | -.20978370-02           | -.51824189-03           | -.64166263-04           | -.35933025-02           |
| 32    | -.16578468-02           | -.16895186-02           | -.42164733-02           | -.45047546-02           | -.36429052-02           |
| 33    | .19028664-02            | .18069593-02            | .12001362-02            | .16168990-02            | -.75921271-04           |
| 34    | .43046024-02            | .41957851-02            | -.31658656-02           | -.39490784-02           | .13989764-02            |

TABLE A2

| $\nu$ | $\Delta_{2000}^4 (\nu)$ | $\Delta_{2000}^2 (\nu)$ | $\Delta_{2000}^b (\nu)$ | $\Delta_{2000}^4 (\nu)$ | $\Delta_{2000}^5 (\nu)$ |
|-------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|
| 0     | .56487399+00            | .56230299+00            | .40309600+00            | .39559101+00            | .43424348+00            |
| 1     | .32295993+00            | .31948720+00            | .15575711+00            | .15469785+00            | .21304215+00            |
| 2     | .15986697+00            | .15855458+00            | .85666343-01            | .83246633-01            | .11079499+00            |
| 3     | .98906882-01            | .10039989+00            | .17930655+00            | .18163288+00            | .11984938+00            |
| 4     | .68166849-01            | .67004143-01            | .21794516-01            | .28455553-01            | .18189294-01            |
| 5     | .53198969-01            | .52159343-01            | .11215127-01            | .12456439-01            | .17394816-01            |
| 6     | .14699059-01            | .14349284-01            | .72940271-02            | .90427192-02            | .39386600-02            |
| 7     | .87083493-02            | .87807280-02            | .25166424-01            | .27571602-01            | .18657300-01            |
| 8     | .79762097-03            | .63973013-03            | .37567299-02            | .57381810-02            | .71018510-02            |
| 9     | .17435880-01            | .17135228-01            | .41703430-02            | .43123962-02            | .71149403-02            |
| 10    | .14992997-01            | .14729386-01            | .82642511-02            | .10313344-01            | .34876089-02            |
| 11    | .76223700-03            | .63615874-03            | .35707489-03            | .56341988-03            | .54174426-02            |
| 12    | .40573505-02            | .40999488-02            | .61946688-03            | .42035756-03            | .69486293-02            |
| 13    | .51607524-02            | .51079564-02            | .38975703-02            | .51193472-02            | .64297486-03            |
| 14    | .93503319-02            | .92006907-02            | .34644794-02            | .36722760-02            | .42558380-02            |
| 15    | .81865478-02            | .80633640-02            | .59608340-02            | .66294063-02            | .37385766-02            |
| 16    | .99569954-03            | .94422488-03            | .68578966-02            | .78727145-02            | .25443522-02            |
| 17    | .22232302-02            | .22407523-02            | .74918079-03            | .30078692-03            | .42594687-02            |
| 18    | .50468847-03            | .44108205-03            | .10345143-02            | .16979128-02            | .18774048-02            |
| 19    | .44154120-02            | .43149849-02            | .51030616-02            | .60111967-02            | .31889410-03            |
| 20    | .44339424-02            | .43666068-02            | .98532865-03            | .93643975-03            | .12305629-02            |
| 21    | .13152475-02            | .13539040-02            | .77652802-03            | .15147028-02            | .27814963-02            |
| 22    | .17925001-02            | .18057644-02            | .45236115-02            | .49087510-02            | .37205648-02            |
| 23    | .11950170-02            | .11429505-02            | .30685765-02            | .34105039-02            | .11458360-02            |
| 24    | .44116691-02            | .43391320-02            | .50762167-02            | .58425791-02            | .19651718-02            |
| 25    | .29343445-02            | .28731681-02            | .33530317-02            | .40001588-02            | .51313562-03            |
| 26    | .15049210-02            | .15035606-02            | .10900578-02            | .10387428-02            | .22939057-04            |
| 27    | .10919294-02            | .11176519-02            | .91611302-03            | .15217422-02            | .18826664-02            |
| 28    | .21787522-02            | .21347327-02            | .79959491-03            | .96652633-03            | .10023365-03            |
| 29    | .36871280-02            | .36196691-02            | .29380740-02            | .35916258-02            | .88574127-03            |
| 30    | .15647695-02            | .15140180-02            | .27910118-02            | .3473199-02             | .67474321-04            |
| 31    | .10175235-03            | .11087407-03            | .69585465-03            | .71858160-03            | .13471144-02            |
| 32    | .11972152-05            | .13963785-04            | .36250102-02            | .41671441-02            | .15858661-02            |
| 33    | .20676527-02            | .20120382-02            | .29712235-02            | .36326886-02            | .25557197-03            |
| 34    | .36909174-02            | .36240333-02            | .45038755-03            | .64158658-03            | .11751869-02            |

TABLE A.3

| $L$ | $\Delta_{3000}^4 (\mu)$ | $\Delta_{3000}^2 (\mu)$ | $\Delta_{3000}^5 (\mu)$ | $\Delta_{3000}^4 (\mu)$ | $\Delta_{3000}^5 (\mu)$ |
|-----|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|
| 0   | .49398243-01            | .54469168-01            | .39575332+00            | .40743703+00            | .20649409+00            |
| 1   | .34502223+00            | .34416862+00            | .39895095+00            | -.41898653+00           | -.24294089+00           |
| 2   | .19569886+00            | .19489682+00            | -.25253832-01           | -.13846159-02           | -.17912538+00           |
| 3   | .68677135-01            | .69589477-01            | -.10778593+00           | -.10558329+00           | -.87801464-01           |
| 4   | .76541989-01            | .75675039-01            | -.22424458-01           | -.31840008-01           | .36665682-01            |
| 5   | .46321559-01            | .45566638-01            | -.36177045-01           | -.43618568-01           | .72502046-02            |
| 6   | .14720819-01            | .14507787-01            | .46206871-02            | .50886692-02            | -.34771291-02           |
| 7   | .77075865-02            | .77640823-02            | .10252870-01            | .14282788-01            | -.12510304-01           |
| 8   | .35369042-02            | .34251725-02            | .14225489-01            | .17441647-01            | -.88851060-03           |
| 9   | .13724952-01            | .13495547-01            | .23557192-02            | .26649035-02            | .39781108-02            |
| 10  | .12782771-01            | .12594520-01            | -.93131628-02           | -.11446409-01           | .18917564-02            |
| 11  | .29681583-02            | .28812685-02            | -.18383154-01           | -.21465674-01           | -.35468419-02           |
| 12  | .15765149-02            | .15764250-02            | -.42191846-03           | -.77383918-03           | -.10319976-02           |
| 13  | .44260239-02            | .43815479-02            | .13250643-01            | .15403290-01            | .21283522-02            |
| 14  | .67388290-02            | .66232691-02            | .10478892-01            | .12413772-01            | .31543787-02            |
| 15  | .53317398-02            | .52453680-02            | .32033536-02            | .37327542-02            | .10918733-02            |
| 16  | .30733093-02            | -.31216842-02           | -.14309006-01           | -.15902455-01           | -.66542639-02           |
| 17  | .48599373-02            | -.48794597-02           | -.15835996-01           | -.17683802-01           | -.77819591-02           |
| 18  | .12892674-02            | .12584164-02            | -.24783134-02           | -.28472235-02           | -.13212239-02           |
| 19  | .46517069-02            | .45846226-02            | .68834176-02            | .80222005-02            | .21974019-02            |
| 20  | .29952166-02            | .29374220-02            | .85038620-02            | .10160556-01            | .11790660-02            |
| 21  | .42562897-03            | -.44399639-03           | .17792412-02            | .23976437-02            | -.16567091-02           |
| 22  | .25793518-02            | -.25998713-02           | -.98445660-02           | -.10991016-01           | -.43663254-02           |
| 23  | .28896245-02            | .28679499-02            | -.61574231-02           | -.76196529-02           | .18921611-03            |
| 24  | .40522792-02            | .39978253-02            | -.28300209-02           | -.35436439-02           | .12870389-02            |
| 25  | .28802596-02            | .28431298-02            | .58395165-02            | .67973385-02            | .13949265-02            |
| 26  | .68861269-03            | -.70340244-03           | .69791629-02            | .85856851-02            | -.97056687-03           |
| 27  | .16236923-02            | -.16407216-02           | .70113980-03            | .13234713-02            | -.23260328-02           |
| 28  | .23643287-02            | .23378626-02            | -.35822496-02           | -.44131331-02           | .15823531-03            |
| 29  | .31798766-02            | .31335338-02            | -.81343781-02           | -.97673292-02           | .76570240-04            |
| 30  | .11216748-02            | .10876953-02            | -.48490679-02           | -.56079642-02           | -.10066835-02           |
| 31  | .11530749-02            | -.11633432-02           | .34361102-02            | .44152932-02            | -.16313884-02           |
| 32  | .92000723-03            | -.93337543-03           | .71833014-02            | .88571250-02            | -.11319452-02           |
| 33  | .15824131-02            | .15441098-02            | .26037984-02            | .32074179-02            | .37279038-04            |
| 34  | .31261202-02            | .30787520-02            | -.49459425-02           | -.59588020-02           | .43621385-03            |

| $\Delta_{4000}^1 (\mu)$ | $\Delta_{4000}^2 (\mu)$ | $\Delta_{4000}^3 (\mu)$ | $\Delta_{4000}^4 (\mu)$ | $\Delta_{4000}^5 (\mu)$ |
|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|
| -.36588679+00           | -.36626185+00           | -.59524406+00           | -.63539940+00           | -.25861686+00           |
| .19179045+00            | .19499688+00            | .49067811+00            | .50908731+00            | .30476208+00            |
| .82841753-01            | .83499833-01            | .19271962+00            | .20561381+00            | .11828507+00            |
| .11030842+00            | .10988004+00            | .98987676-01            | .10196897+00            | .93345574-01            |
| .65368621-01            | .64293730-01            | -.25777823-01           | -.30179997-01           | .20861989-01            |
| .45290077-01            | .44617592-01            | -.58744698-02           | -.74337701-02           | .83839574-02            |
| .23207714-01            | .23041399-01            | .16055561-01            | .16776915-01            | .70788273-02            |
| -.16358277-01           | -.16484073-01           | -.29385087-01           | -.30322718-01           | -.24356374-01           |
| -.44985451-02           | -.46355109-02           | -.19903216-01           | -.21160851-01           | -.12576657-01           |
| .17712687-01            | .17563337-01            | .33399027-02            | .25563349-02            | .77654875-02            |
| .12329881-01            | .12166174-01            | -.12912952-02           | -.18823122-02           | .25432622-02            |
| .62300074-02            | .61687347-02            | -.10296707-02           | -.16514354-02           | .14925687-02            |
| -.16319966-02           | -.16683289-02           | -.82998098-02           | -.91201559-02           | -.40816944-02           |
| .23145752-02            | .22683269-02            | -.23893609-02           | -.27098234-02           | -.14018102-02           |
| .61685101-02            | .60802657-02            | -.98975884-03           | -.12741093-02           | .95908326-03            |
| .52582065-02            | .51849104-02            | -.26724525-03           | -.42141642-03           | .65690407-03            |
| -.82956394-03           | -.87481574-03           | -.45805927-02           | -.47419919-02           | -.34792197-02           |
| .28089538-02            | .28160619-02            | .45190676-02            | .47712074-02            | .16909826-02            |
| .19719937-02            | .19328800-02            | -.10069221-02           | -.10964482-02           | -.31389098-03           |
| .41473511-02            | .40882882-02            | -.32450309-03           | -.45522392-03           | .74880583-03            |
| .36773632-02            | .36323554-02            | .21459823-03            | .10706275-03            | .81836638-03            |
| .52745908-03            | .50596403-03            | -.17265327-02           | -.18896353-02           | -.10577930-02           |
| .15339993-02            | .15273008-02            | .49567083-04            | -.14582951-03           | .63353683-03            |
| .32461438-02            | .32187958-02            | .14579634-03            | -.10803423-03           | .14650279-02            |
| .33460597-02            | .32984500-02            | -.10040035-02           | -.12504512-02           | .60733898-03            |
| .28607894-02            | .28297660-02            | -.15340131-03           | -.34517576-03           | .76957774-03            |
| -.17951941-03           | -.19371288-03           | -.23087574-02           | -.25374241-02           | -.12919397-02           |
| -.13136539-02           | -.13291837-02           | -.32800843-02           | -.34620595-02           | -.24503818-02           |
| .20397983-02            | .20156938-02            | .24624704-03            | .20311051-03            | .21053332-03            |
| .28484550-02            | .28073317-02            | -.46808508-03           | -.59794261-03           | .53230551-03            |
| .19520871-02            | .19240583-02            | -.35913708-03           | -.45613589-03           | .24382694-03            |
| .54739974-03            | .53978012-03            | .10649057-03            | .11935388-03            | -.31450775-03           |
| .91084011-03            | .90272572-03            | .63612114-03            | .68714073-03            | -.46818866-04           |
| .21298537-02            | .20978072-02            | -.27930888-03           | -.34682022-03           | .26128712-03            |
| .28766200-02            | .28361018-02            | -.17279966-03           | -.25980050-03           | .62864802-03            |
| .19752389+00            | .19883702+00            | .64438937+00            | .71836844+00            | .18389288+00            |
| .21554770+00            | .21527707+00            | .10158282+00            | .82642231-01            | .26475703+00            |

TABLE A.4

| $\Delta_{5000}^1 (\nu)$ | $\Delta_{5000}^2 (\nu)$ | $\Delta_{5000}^3 (\nu)$ | $\Delta_{5000}^4 (\nu)$ | $\Delta_{5000}^5 (\nu)$ |
|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|
| -.41713093+00           | -.41570070+00           | -.49605286+00           | -.52976984+00           | -.32581851+00           |
| -.46607059+00           | -.46629494+00           | -.72839198+00           | -.77598566+00           | -.39553858+00           |
| .77831149-02            | .89152752-02            | .12136906-01            | -.16918778-02           | .59592977-01            |
| -.13761323+00           | -.13849160+00           | -.24494852+00           | -.25397497+00           | -.17434889+00           |
| .57476560-01            | .56978210-01            | .18809357-01            | .17764521-01            | .28508271-01            |
| .34573117-01            | .34114299-01            | .13872226-01            | .15929226-01            | .74142987-02            |
| .28302308-01            | .28230035-01            | .33370470-01            | .35306385-01            | .20128287-01            |
| -.70040551-02           | -.70596495-02           | -.15203297-01           | -.16031401-01           | -.10341758-01           |
| -.62935706-03           | -.69159362-03           | -.11343771-01           | -.12540177-01           | -.65639265-02           |
| .11977398-01            | .11848449-01            | -.20577145-02           | -.30289511-02           | .37013429-02            |
| .95643922-02            | .94475304-02            | .30615679-02            | .33544133-02            | .24344993-02            |
| .13812952-02            | .13355394-02            | .46780570-02            | .58987527-02            | -.14551219-02           |
| -.21535600-02           | -.21607685-02           | .33862982-02            | .45332680-02            | -.30564717-02           |
| .47209488-02            | .47037233-02            | .44219452-02            | .45986352-02            | .27544223-02            |
| .56805983-02            | .56117089-02            | -.45780915-02           | -.56202644-02           | .13421485-02            |
| .47891199-02            | .47351285-02            | -.52176163-02           | -.64025462-02           | .88814113-03            |
| -.93814636-03           | -.96601689-03           | -.66929656-02           | -.74196495-02           | -.26831780-02           |
| -.32384982-02           | -.32566164-02           | -.47547549-02           | -.48130694-02           | -.37044203-02           |
| .27592038-03            | .24649233-03            | .83284336-04            | .42325223-03            | -.85873727-03           |
| .34517594-02            | .34106041-02            | .15424639-02            | .17163324-02            | .10486358-02            |
| .28454518-02            | .28123704-02            | -.17076998-02           | -.21362750-02           | .60926427-03            |
| -.32740237-03           | -.34084485-03           | -.52556363-02           | -.60091731-02           | -.15964856-02           |
| -.56268716-03           | -.56549464-03           | -.29965229-02           | -.34143931-02           | -.14034572-02           |
| .21304443-02            | .21141834-02            | .17917528-02            | .19414574-02            | .93569391-03            |
| .25678509-02            | .25309632-02            | .26463125-02            | .31368009-02            | .87710961-03            |
| .18468571-02            | .18215338-02            | .29883539-02            | .35322894-02            | .55936491-03            |
| .14990771-02            | .15028465-02            | .29680683-02            | .32036625-02            | .10218145-02            |
| -.14545611-02           | -.14664128-02           | -.47422565-02           | -.52083048-02           | -.23530650-02           |
| .21712177-02            | .21550486-02            | -.17891660-02           | -.23235309-02           | .70780149-03            |
| .23498259-02            | .23199090-02            | -.88276356-03           | -.11040254-02           | .47041036-03            |
| .68210769-03            | .66004257-03            | .54611783-03            | .80587453-03            | -.45565795-03           |
| -.41914067-03           | -.42374315-03           | .17914898-02            | .22684572-02            | -.58393611-03           |
| -.41027972-03           | -.41757978-03           | .24878536-04            | .20200782-03            | -.84481003-03           |
| .10665641-02            | .10423250-02            | -.24791199-02           | -.28332465-02           | -.52785579-03           |
| .23326162-02            | .23023784-02            | -.30565302-02           | -.36803008-02           | .27461696-03            |
| .41595464+00            | .41513445+00            | .83908733+00            | .94995378+00            | .29805993+00            |
| -.84848377+00           | -.84899726+00           | -.14340315+01           | -.15391721+01           | -.79886565+00           |

TABLE A.5

|    | LE THEORIQUE | ERREUR PAR LE PERIODCGRAMME TRACQUE | ERREUR PAR LE PERIODCGRAMME DE PARZEN | ERREUR PAR LE PERIODCGRAMME DE BARTLETT | ERREUR PAR LE PERIODCGRAMME DE ROSENBLATT | ERREUR PAR LE PERIODCGRAMME DE DANIELS |
|----|--------------|-------------------------------------|---------------------------------------|-----------------------------------------|-------------------------------------------|----------------------------------------|
| 0  | .10983019+03 | .21364985+02                        | .63056019+02                          | .63046547+02                            | .58922992+02                              | .25950893+02                           |
| 1  | .99327241+02 | .14367837+02                        | .53326540+02                          | .53317376+02                            | .49305859+02                              | .18585278+02                           |
| 2  | .73024144+02 | -.19836559+01                       | .29277496+02                          | .29269224+02                            | .25571833+02                              | .12009726+01                           |
| 3  | .42945006+02 | -.17251110+02                       | .27415757+01                          | .27346878+01                            | -.50684500+00                             | -.15561572+02                          |
| 4  | .20102871+02 | -.22716139+02                       | -.15562623+02                         | -.15567773+02                           | -.18295090+02                             | -.22695852+02                          |
| 5  | .85884304+01 | -.16848372+02                       | -.21908453+02                         | -.21911680+02                           | -.24151623+02                             | -.18358737+02                          |
| 6  | .54957277+01 | -.48987557+01                       | -.19595033+02                         | -.19596334+02                           | -.21441231+02                             | -.75293273+01                          |
| 7  | .53929378+01 | .59889559+01                        | -.14434253+02                         | -.14433791+02                           | -.16005411+02                             | .28244596+01                           |
| 8  | .48079354+01 | .11533406+02                        | -.10226553+02                         | -.10224632+02                           | -.11631314+02                             | .84684440+01                           |
| 9  | .34177988+01 | .11576520+02                        | -.75411084+01                         | -.75381252+01                           | -.88364773+01                             | .91595606+01                           |
| 10 | .23139689+01 | .82165278+01                        | -.54321404+01                         | -.54285327+01                           | -.66000876+01                             | .68044429+01                           |
| 11 | .20063085+01 | .35159379+01                        | -.34298308+01                         | -.34260236+01                           | -.43755286+01                             | .32153009+01                           |
| 12 | .20384369+01 | -.12691869+01                       | -.19332937+01                         | -.19296529+01                           | -.25062007+01                             | -.60220045+00                          |
| 13 | .18519682+01 | -.52106423+01                       | -.13559825+01                         | -.13627795+01                           | -.13990806+01                             | -.39148124+01                          |
| 14 | .14479007+01 | -.73463197+01                       | -.15418139+01                         | -.15392070+01                           | -.89945573+00                             | -.58600705+01                          |
| 15 | .11662372+01 | -.70528700+01                       | -.19165888+01                         | -.19146202+01                           | -.53886750+00                             | -.58032870+01                          |
| 16 | .11367463+01 | -.45758817+01                       | -.21571923+01                         | -.21658038+01                           | -.99180846-01                             | -.36788055+01                          |
| 17 | .11627512+01 | -.97305527+00                       | -.23325752+01                         | -.23316332+01                           | .26985023+00                              | -.96713293+00                          |
| 18 | .10549321+01 | .24940652+01                        | -.24964214+01                         | -.24957520+01                           | .39408667+00                              | .18656454+01                           |
| 19 | .87280729+00 | .49036922+01                        | -.25522123+01                         | -.25516366+01                           | .33251605+00                              | .38621652+01                           |
| 20 | .78423756+00 | .57869825+01                        | -.23403177+01                         | -.23396833+01                           | .25349982+00                              | .46480896+01                           |
| 21 | .81159283+00 | .50194583+01                        | -.18599945+01                         | -.18891987+01                           | .19335756+00                              | .41041238+01                           |
| 22 | .82516328+00 | .28214427+01                        | -.14084340+01                         | -.14074353+01                           | .54639645-01                              | .23704645+01                           |
| 23 | .74686520+00 | -.16307398+00                       | -.10572634+01                         | -.10560803+01                           | -.19362774+00                             | -.48882812-01                          |
| 24 | .65039151+00 | -.29834740+01                       | -.83389852+00                         | -.83259825+00                           | -.42584259+00                             | -.23635093+01                          |
| 25 | .63473321+00 | -.47571611+01                       | -.68393469+00                         | -.68261285+00                           | -.49941675+00                             | -.38280246+01                          |
| 26 | .67816777+00 | -.50278505+01                       | -.63961092+00                         | -.63836810+00                           | -.41267802+00                             | -.40647069+01                          |
| 27 | .68128518+00 | -.38438525+01                       | -.77666593+00                         | -.77558450+00                           | -.26875195+00                             | -.31226938+01                          |
| 28 | .61816562+00 | -.16077576+01                       | -.10699739+01                         | -.10691010+01                           | -.12405470+00                             | -.13296341+01                          |
| 29 | .56861299+00 | .10722186+01                        | -.13733644+01                         | -.13727019+01                           | .51598556-01                              | .83493944+00                           |
| 30 | .59321541+00 | .34568726+01                        | -.15592653+01                         | -.15587701+01                           | .26305899+00                              | .27783087+01                           |
| 31 | .64331559+00 | .48130082+01                        | -.16231144+01                         | -.16227081+01                           | .41463196+00                              | .38914008+01                           |
| 32 | .63726630+00 | .46820267+01                        | -.16183311+01                         | -.16179163+01                           | .39892439+00                              | .37836381+01                           |
| 33 | .58475829+00 | .31096292+01                        | -.15378928+01                         | -.15373744+01                           | .22808293+00                              | .24942327+01                           |
| 34 | .57212279+00 | .62105460+00                        | -.13284782+01                         | -.13277821+01                           | .18435336-01                              | .46918656+00                           |

|    | I DENSITE SPEC-<br>-LE THEORIQUE | ERREUR PAR LE<br>PERIODOGRAMME<br>TRONQUE | ERREUR PAR LE<br>PERIODOGRAMME<br>DE PARZEN | ERREUR PAR LE<br>PERIODOGRAMME<br>DE BARTLETT | ERREUR PAR LE<br>PERIODOGRAMME<br>DE ROSENBLATT | ERREUR PAR LE<br>PERIODOGRAMME<br>DE DANIELS |
|----|----------------------------------|-------------------------------------------|---------------------------------------------|-----------------------------------------------|-------------------------------------------------|----------------------------------------------|
| 0  | .10983019+03                     | -.52026854+01                             | .35183374+02                                | .35156968+02                                  | .28653754+02                                    | -.16365786+01                                |
| 1  | .99327241+02                     | -.51763058+01                             | .28378457+02                                | .28354734+02                                  | .22085141+02                                    | -.24099445+01                                |
| 2  | .73024144+02                     | -.45881500+01                             | .12114836+02                                | .12098208+02                                  | .64789715+01                                    | -.37436495+01                                |
| 3  | .42945006+02                     | -.27103596+01                             | -.43118811+01                               | -.43194385+01                                 | -.89819217+01                                   | -.38057561+01                                |
| 4  | .20102871+02                     | .40539741-01                              | -.13202341+02                               | -.13201666+02                                 | -.16692061+02                                   | -.20213542+01                                |
| 5  | .85884304+01                     | .20112370+01                              | -.13153400+02                               | -.13147358+02                                 | -.15292446+02                                   | .22625589+00                                 |
| 6  | .54957277+01                     | .18457182+01                              | -.83500988+01                               | -.83421272+01                                 | -.90197768+01                                   | .10692840+01                                 |
| 7  | .53929378+01                     | -.12142181-01                             | -.40263988+01                               | -.40191361+01                                 | -.32549750+01                                   | .13128251+00                                 |
| 8  | .48079354+01                     | -.16256961+01                             | -.25237607+01                               | -.25183679+01                                 | -.59516150+00                                   | -.11769835+01                                |
| 9  | .34177988+01                     | -.14722309+01                             | -.28755384+01                               | -.28718572+01                                 | -.32801166+00                                   | -.12826657+01                                |
| 10 | .23139689+01                     | .80514966-01                              | -.31266702+01                               | -.31239133+01                                 | -.58453685+00                                   | -.11697978+00                                |
| 11 | .20063085+01                     | .13038990+01                              | -.24995280+01                               | -.24969977+01                                 | -.41759783+00                                   | .98273059+00                                 |
| 12 | .20384369+01                     | .10084991+01                              | -.15823582+01                               | -.15798091+01                                 | -.71506082-01                                   | .87753202+00                                 |
| 13 | .18519682+01                     | -.27725266+00                             | -.11358232+01                               | -.11333968+01                                 | .55969506-02                                    | -.14809518+00                                |
| 14 | .14479007+01                     | -.10474112+01                             | -.12077005+01                               | -.12056260+01                                 | -.13374779+00                                   | -.84454447+00                                |
| 15 | .11662372+01                     | -.52626474+00                             | -.13353866+01                               | -.13337328+01                                 | -.15996960+00                                   | -.47022412+00                                |
| 16 | .11367463+01                     | .57510442+00                              | -.12213435+01                               | -.12199757+01                                 | .40174126-02                                    | .44398309+00                                 |
| 17 | .11627512+01                     | .97895923+00                              | -.97971561+00                               | -.97843158+00                                 | .12422977+00                                    | .81192672+00                                 |
| 18 | .10549321+01                     | .28421170+00                              | -.83510561+00                               | -.83379449+00                                 | .36183133-01                                    | .25162949+00                                 |
| 19 | .87280729+00                     | -.67631932+00                             | -.81433479+00                               | -.81302795+00                                 | -.12707288+00                                   | -.55462032+00                                |
| 20 | .78423756+00                     | -.84325145+00                             | -.79647449+00                               | -.79527137+00                                 | -.13936937+00                                   | -.70323553+00                                |
| 21 | .81159283+00                     | -.85862151-01                             | -.73045260+00                               | -.72940770+00                                 | .12479313-01                                    | -.71811243-01                                |
| 22 | .82516328+00                     | .74028947+00                              | -.67928461+00                               | -.67735601+00                                 | .13351260+00                                    | .61941955+00                                 |
| 23 | .74686520+00                     | .77733469+00                              | -.67636961+00                               | -.67546312+00                                 | .88802583-01                                    | .64808720+00                                 |
| 24 | .65039151+00                     | .48962756-01                              | -.66785672+00                               | -.66691175+00                                 | -.41477672-01                                   | .39857976-01                                 |
| 25 | .63473321+00                     | -.65280220+00                             | -.60502322+00                               | -.60405961+00                                 | -.95804288-01                                   | -.53921923+00                                |
| 26 | .67816777+00                     | -.64049123+00                             | -.54248327+00                               | -.54157071+00                                 | -.38106762-01                                   | -.52432029+00                                |
| 27 | .68128518+00                     | .26580915-02                              | -.56277136+00                               | -.56195581+00                                 | .31173743-01                                    | .37576928-02                                 |
| 28 | .61816562+00                     | .58682797+00                              | -.64186049+00                               | -.64111672+00                                 | .31034350-01                                    | .47544797+00                                 |
| 29 | .56861299+00                     | .54197721+00                              | -.66370937+00                               | -.66296104+00                                 | -.10851487-01                                   | .43455520+00                                 |
| 30 | .59321541+00                     | -.49098424-01                             | -.57812645+00                               | -.57731322+00                                 | -.31238630-01                                   | -.42884253-01                                |
| 31 | .64331559+00                     | -.57926715+00                             | -.48034368+00                               | -.47947285+00                                 | -.25623858-01                                   | -.46780351+00                                |
| 32 | .63726630+00                     | -.52251237+00                             | -.49137250+00                               | -.49050770+00                                 | -.26824608-01                                   | -.42240402+00                                |
| 33 | .58475829+00                     | .65291181-01                              | -.59735366+00                               | -.59655297+00                                 | -.30408732-01                                   | .49091316-01                                 |
| 34 | .57212279+00                     | .59898097+00                              | -.66809443+00                               | -.66735221+00                                 | -.40483474-02                                   | .48122388+00                                 |

|    | ERREUR PAR LE PERIODOGRAMME TRACQUE | ERREUR PAR LE PERIODOGRAMME DE PARZEN | ERREUR PAR LE PERIODOGRAMME DE BARTLETT | ERREUR PAR LE PERIODOGRAMME DE ROSENBLATT | ERREUR PAR LE PERIODOGRAMME DE DANIELS |
|----|-------------------------------------|---------------------------------------|-----------------------------------------|-------------------------------------------|----------------------------------------|
| 0  | .10983019+03                        | -.49593143+01                         | .21533534+02                            | .13280015+02                              | -.34407024+01                          |
| 1  | .99327241+02                        | -.54257212+01                         | .17092851+02                            | .93843966+01                              | -.41686153+01                          |
| 2  | .73024144+02                        | -.51546974+01                         | .66373749+01                            | .50914097+00                              | -.46666851+01                          |
| 3  | .42945006+02                        | -.22876511+01                         | -.35670829+01                           | -.73612099+01                             | -.27989421+01                          |
| 4  | .20102871+02                        | .12691460+01                          | -.86690180+01                           | -.99655445+01                             | .17435670+00                           |
| 5  | .85884304+01                        | .21082804+01                          | -.82225348+01                           | -.74985898+01                             | .12581815+01                           |
| 6  | .54957277+01                        | .27967620+00                          | -.52096324+01                           | -.32694271+01                             | .11491245+00                           |
| 7  | .53929378+01                        | -.10739584+01                         | -.27882588+01                           | -.39984119+00                             | -.86162508+00                          |
| 8  | .48079354+01                        | -.50292349+00                         | -.20263161+01                           | .24212259+00                              | -.42118317+00                          |
| 9  | .34177988+01                        | .31663665+00                          | -.21253164+01                           | -.28954262+00                             | .19563416+00                           |
| 10 | .23139689+01                        | .27652383-01                          | -.20285781+01                           | -.63313589+00                             | -.47017693-01                          |
| 11 | .20063085+01                        | -.40598667+00                         | -.15030212+01                           | -.33522159+00                             | -.35547361+00                          |
| 12 | .20384369+01                        | .36076963-01                          | -.97186208+00                           | .14435801+00                              | .62373474-01                           |
| 13 | .18519682+01                        | .56325626+00                          | -.78361202+00                           | .26021841+00                              | .50817258+00                           |
| 14 | .14479007+01                        | .23551461+00                          | -.85197028+00                           | .27880609-01                              | .20742472+00                           |
| 15 | .11662372+01                        | -.31150416+00                         | -.88556780+00                           | -.14504975+00                             | -.27188110+00                          |
| 16 | .11367463+01                        | -.15958643+00                         | -.75363587+00                           | -.61631321-01                             | -.14240727+00                          |
| 17 | .11627512+01                        | .24993184+00                          | -.60938588+00                           | .72371527-01                              | .21276075+00                           |
| 18 | .10549321+01                        | .10139022+00                          | -.56376232+00                           | .38928225-01                              | .89246466-01                           |
| 19 | .87280729+00                        | -.26198127+00                         | -.59564305+00                           | -.72640851-01                             | -.22458266+00                          |
| 20 | .78423756+00                        | -.10159358+00                         | -.57381541+00                           | -.61557896-01                             | -.91560587-01                          |
| 21 | .81159283+00                        | .28785372+00                          | -.46549906+00                           | .55790253-01                              | .24738142+00                           |
| 22 | .82516328+00                        | .19096609+00                          | -.37743043+00                           | .10202079+00                              | .17640361+00                           |
| 23 | .74686520+00                        | -.16923732+00                         | -.39418718+00                           | .29107391-01                              | -.13175606+00                          |
| 24 | .65039151+00                        | -.11362056+00                         | -.45639404+00                           | -.37240058-01                             | -.98756924-01                          |
| 25 | .63473321+00                        | .19448812+00                          | -.45390813+00                           | -.17450198-01                             | .15661605+00                           |
| 26 | .67816777+00                        | .12036724+00                          | -.38834262+00                           | .21702915-01                              | .10237578+00                           |
| 27 | .68128518+00                        | -.20332675+00                         | -.36018114+00                           | .52562132-02                              | -.16648018+00                          |
| 28 | .61816562+00                        | -.16320302+00                         | -.40628357+00                           | -.38064107-01                             | -.14154470+00                          |
| 29 | .56861299+00                        | .14400416+00                          | -.44174406+00                           | -.43726675-01                             | .10998026+00                           |
| 30 | .59321541+00                        | .12951444+00                          | -.39547959+00                           | -.76563134-02                             | .10569466+00                           |
| 31 | .64331559+00                        | -.13807464+00                         | -.32597380+00                           | .25580540-01                              | -.10699838+00                          |
| 32 | .63726630+00                        | -.10211493+00                         | -.33416231+00                           | .22060431-01                              | -.78218959-01                          |
| 33 | .58475829+00                        | .16356162+00                          | -.40798433+00                           | -.14875568-01                             | .13213258+00                           |
| 34 | .57212279+00                        | .10214884+00                          | -.44101540+00                           | -.46521305-01                             | .74995547-01                           |

|    | ERREUR PAR LE<br>PERIODOGRAMME<br>DE TRANCHE | ERREUR PAR LE<br>PERIODOGRAMME<br>DE PARZEN | ERREUR PAR LE<br>PERIODOGRAMME<br>DE BARTLETT | ERREUR PAR LE<br>PERIODOGRAMME<br>DE ROSENBLATT | ERREUR PAR LE<br>PERIODOGRAMME<br>DE DANIELS |
|----|----------------------------------------------|---------------------------------------------|-----------------------------------------------|-------------------------------------------------|----------------------------------------------|
| 0  | .10983019+03                                 | -.26464329+01                               | .15111373+02                                  | .62078257+01                                    | -.20875587+01                                |
| 1  | .99327241+02                                 | -.59244337+01                               | .11396360+02                                  | .34388475+01                                    | -.51441698+01                                |
| 2  | .73024144+02                                 | -.71688967+01                               | .34381914+01                                  | -.19892740+01                                   | -.66384668+01                                |
| 3  | .42945006+02                                 | -.99337816+00                               | -.31630964+01                                 | -.54902163+01                                   | -.14638095+01                                |
| 4  | .20102871+02                                 | .25327761+01                                | -.59773707+01                                 | -.57622597+01                                   | .17666676+01                                 |
| 5  | .85884304+01                                 | .51497614+00                                | -.57517681+01                                 | -.39372351+01                                   | .25084066+00                                 |
| 6  | .54957277+01                                 | -.13381189+00                               | -.39763744+01                                 | -.15240417+01                                   | -.20033848+00                                |
| 7  | .53929378+01                                 | .28848755+00                                | -.22105460+01                                 | -.26849687-01                                   | .23588246+00                                 |
| 8  | .48079354+01                                 | -.67958659+00                               | -.15412818+01                                 | .60888469-01                                    | -.57801557+00                                |
| 9  | .34177988+01                                 | -.50940681+00                               | -.16505906+01                                 | -.35705185+00                                   | -.48775133+00                                |
| 10 | .23139689+01                                 | .35947058+00                                | -.15699566+01                                 | -.44435212+00                                   | .24884120+00                                 |
| 11 | .20063085+01                                 | -.90012192-01                               | -.11048102+01                                 | -.16981781+00                                   | -.76677709-01                                |
| 12 | .20384369+01                                 | -.95089792-01                               | -.68486440+00                                 | .17407571+00                                    | -.51040053-01                                |
| 13 | .18519682+01                                 | .48881337+00                                | -.54058785+00                                 | .25472473+00                                    | .44225086+00                                 |
| 14 | .14479007+01                                 | .58265611-01                                | -.59967306+00                                 | .42385488-01                                    | .65123334-01                                 |
| 15 | .11662372+01                                 | -.17853922+00                               | -.66733414+00                                 | -.94239428-01                                   | -.15673913+00                                |
| 16 | .11367463+01                                 | .19126534+00                                | -.58856411+00                                 | -.27426555-01                                   | .15120512+00                                 |
| 17 | .11627512+01                                 | -.84472462-01                               | -.45086421+00                                 | .23710981-01                                    | -.68511277-01                                |
| 18 | .10549321+01                                 | -.19718914+00                               | -.42545746+00                                 | .32772124-02                                    | -.16465724+00                                |
| 19 | .87280729+00                                 | .20678153+00                                | -.45975042+00                                 | -.22779889-01                                   | .16788870+00                                 |
| 20 | .78423756+00                                 | .76900198-02                                | -.41899672+00                                 | -.33435687-01                                   | .59217810-02                                 |
| 21 | .81159283+00                                 | -.13465643+00                               | -.32746264+00                                 | .30195579-01                                    | -.10498014+00                                |
| 22 | .82516328+00                                 | .23332684+00                                | -.27225839+00                                 | .10464746+00                                    | .20777274+00                                 |
| 23 | .74686520+00                                 | .72097458-01                                | -.28322290+00                                 | .52233785-01                                    | .70233300-01                                 |
| 24 | .65039151+00                                 | -.14901525+00                               | -.33388717+00                                 | -.30237943-01                                   | -.12498785+00                                |
| 25 | .63473321+00                                 | .12116131+00                                | -.34539280+00                                 | -.18688202-01                                   | .95919534-01                                 |
| 26 | .67816777+00                                 | .67676231-02                                | -.29196315+00                                 | .82122384-02                                    | .58311298-02                                 |
| 27 | .68128518+00                                 | -.15871532+00                               | -.26832153+00                                 | .28759464-02                                    | -.13027729+00                                |
| 28 | .61816562+00                                 | .11334089+00                                | -.31620371+00                                 | -.17998785-01                                   | .89606843-01                                 |
| 29 | .56861299+00                                 | -.18874951-01                               | -.34115812+00                                 | -.55519961-01                                   | -.25423981-01                                |
| 30 | .59321541+00                                 | .19246031+00                                | -.29218552+00                                 | -.29836312-01                                   | -.16284473+00                                |
| 31 | .64331559+00                                 | .17982413+00                                | -.23662788+00                                 | .56424685-01                                    | .15860100+00                                 |
| 32 | .63726630+00                                 | .11748632+00                                | -.24271155+00                                 | .44835209-01                                    | .10531101+00                                 |
| 33 | .58475829+00                                 | -.20994547+00                               | -.30346741+00                                 | -.41561179-01                                   | -.17938384+00                                |
| 34 | .57212279+00                                 | .39957717-01                                | -.34257040+00                                 | -.50702519-01                                   | .23675561-01                                 |

TROISIEME SERIE

TABLE C1

N X = 500

| NB | PERI. TRONQUE   |      | PARZEN          |      | BARILETT        |      | ROSENBLATT      |      | DANIELS         |      |
|----|-----------------|------|-----------------|------|-----------------|------|-----------------|------|-----------------|------|
|    | ERREUR MOY. PAR | QUA. |
| 5  | .37860865+00    |      | .61970202+00    |      | .61880137+00    |      | .59672795+00    |      | .39312163+00    |      |
| 6  | .30849472+00    |      | .56088383+00    |      | .55966161+00    |      | .53682005+00    |      | .32322081+00    |      |
| 7  | .24800766+00    |      | .50754435+00    |      | .50598695+00    |      | .48222759+00    |      | .26273760+00    |      |
| 8  | .19725055+00    |      | .45902747+00    |      | .45712915+00    |      | .43268110+00    |      | .21162482+00    |      |
| 9  | .15460198+00    |      | .41510746+00    |      | .41287150+00    |      | .38780594+00    |      | .16849585+00    |      |
| 10 | .11975199+00    |      | .37545959+00    |      | .37287635+00    |      | .34739040+00    |      | .13307809+00    |      |
| 11 | .91904964-01    |      | .33984720+00    |      | .33697491+00    |      | .31118295+00    |      | .10464777+00    |      |
| 12 | .70092537-01    |      | .30814293+00    |      | .30498654+00    |      | .27889006+00    |      | .82235308-01    |      |
| 13 | .53610251-01    |      | .28006154+00    |      | .27665001+00    |      | .25022933+00    |      | .65083694-01    |      |
| 14 | .41351401-01    |      | .25531771+00    |      | .25168224+00    |      | .22487935+00    |      | .52126437-01    |      |
| 15 | .32888575-01    |      | .23357905+00    |      | .22975089+00    |      | .20257470+00    |      | .42900503-01    |      |
| 16 | .27440313-01    |      | .21455756+00    |      | .21056786+00    |      | .18302167+00    |      | .36669639-01    |      |
| 17 | .24700033-01    |      | .19796992+00    |      | .19384883+00    |      | .16596474+00    |      | .33093948-01    |      |
| 18 | .24233944-01    |      | .18357008+00    |      | .17934671+00    |      | .15114188+00    |      | .31726166-01    |      |
| 19 | .25511100-01    |      | .17112564+00    |      | .16682747+00    |      | .13827576+00    |      | .32016077-01    |      |
| 20 | .27974420-01    |      | .16039916+00    |      | .15605092+00    |      | .12710212+00    |      | .33407869-01    |      |
| 21 | .31464285-01    |      | .15115218+00    |      | .14677482+00    |      | .11739169+00    |      | .35665433-01    |      |
| 22 | .35349849-01    |      | .14316305+00    |      | .13877358+00    |      | .10896293+00    |      | .38349404-01    |      |
| 23 | .39636586-01    |      | .13624232+00    |      | .13185494+00    |      | .10165760+00    |      | .41436331-01    |      |
| 24 | .44056340-01    |      | .13023376+00    |      | .12586051+00    |      | .95336177-01    |      | .44723343-01    |      |
| 25 | .48422478-01    |      | .12500776+00    |      | .12065904+00    |      | .89863629-01    |      | .48051515-01    |      |
| 26 | .52823372-01    |      | .12045255+00    |      | .11613725+00    |      | .85141826-01    |      | .51477962-01    |      |
| 27 | .57465044-01    |      | .11647633+00    |      | .11220431+00    |      | .81082509-01    |      | .55149587-01    |      |
| 28 | .62147990-01    |      | .11301435+00    |      | .10878880+00    |      | .77599339-01    |      | .58910051-01    |      |
| 29 | .67258251-01    |      | .10999769+00    |      | .10582718+00    |      | .74635743-01    |      | .63045075-01    |      |
| 30 | .72554092-01    |      | .10738188+00    |      | .10327282+00    |      | .72124097-01    |      | .67370589-01    |      |

TROISIEME SERIE

TABLE C2

NX = 1000

| NB | ERREUR QUA.<br>MOY. PAR |         | ERREUR QUA.<br>MOY. PAR |              | ERREUR QUA.<br>MOY. PAR |              | ERREUR QUA.<br>MOY. PAR |  |
|----|-------------------------|---------|-------------------------|--------------|-------------------------|--------------|-------------------------|--|
|    | PERI.                   | TRONQUE | PARZEN                  | BARTLETT     | ROSENBLATT              | DANIELS      |                         |  |
| 5  | .62272670-01            |         | .10211801+00            | .10204264+00 | .98352185-01            | .64571046-01 |                         |  |
| 6  | .50681703-01            |         | .92232139-01            | .92130277-01 | .88330272-01            | .53061829-01 |                         |  |
| 7  | .40893228-01            |         | .83355809-01            | .83226737-01 | .79290983-01            | .43320858-01 |                         |  |
| 8  | .32742094-01            |         | .75391213-01            | .75235000-01 | .71175156-01            | .35175502-01 |                         |  |
| 9  | .25984533-01            |         | .68276098-01            | .68093466-01 | .63907215-01            | .28391876-01 |                         |  |
| 10 | .20487795-01            |         | .61926161-01            | .61718270-01 | .57423699-01            | .22842870-01 |                         |  |
| 11 | .16082763-01            |         | .56279393-01            | .56047843-01 | .51652685-01            | .18361927-01 |                         |  |
| 12 | .12645027-01            |         | .51271939-01            | .51018610-01 | .46535716-01            | .14832296-01 |                         |  |
| 13 | .10077689-01            |         | .46848914-01            | .46575961-01 | .42016350-01            | .12155191-01 |                         |  |
| 14 | .82691987-02            |         | .42962070-01            | .42671839-01 | .38042467-01            | .10223099-01 |                         |  |
| 15 | .71792605-02            |         | .39565075-01            | .39260062-01 | .34570343-01            | .89878520-02 |                         |  |
| 16 | .67310368-02            |         | .36619474-01            | .36302289-01 | .31553140-01            | .83663977-02 |                         |  |
| 17 | .68187264-02            |         | .34085897-01            | .33759189-01 | .28941100-01            | .82478573-02 |                         |  |
| 18 | .73762324-02            |         | .31921460-01            | .31587802-01 | .26690401-01            | .85576649-02 |                         |  |
| 19 | .82824457-02            |         | .30084057-01            | .29745783-01 | .24753793-01            | .91776781-02 |                         |  |
| 20 | .94595125-02            |         | .28529473-01            | .28188706-01 | .23089360-01            | .10028895-01 |                         |  |
| 21 | .10862090-01            |         | .27215481-01            | .26874004-01 | .21656609-01            | .11056289-01 |                         |  |
| 22 | .12298998-01            |         | .26101888-01            | .25761131-01 | .20433481-01            | .12142548-01 |                         |  |
| 23 | .13750545-01            |         | .25159344-01            | .24820590-01 | .19392266-01            | .13264740-01 |                         |  |
| 24 | .15129183-01            |         | .24362668-01            | .24027072-01 | .18510520-01            | .14357517-01 |                         |  |
| 25 | .16468521-01            |         | .23690758-01            | .23359366-01 | .17767680-01            | .15438640-01 |                         |  |
| 26 | .17721756-01            |         | .23125957-01            | .22799704-01 | .17147047-01            | .16472075-01 |                         |  |
| 27 | .18870737-01            |         | .22653319-01            | .22333059-01 | .16631640-01            | .17439026-01 |                         |  |
| 28 | .19916104-01            |         | .22259538-01            | .21946020-01 | .16209536-01            | .18337564-01 |                         |  |
| 29 | .20872030-01            |         | .21933475-01            | .21627363-01 | .15869099-01            | .19174920-01 |                         |  |
| 30 | .21772027-01            |         | .21665639-01            | .21367509-01 | .15601820-01            | .19974459-01 |                         |  |

## TROISIEME SERIE

TABLE C.3

NX=1500

| NB | ERREUR QUA. MOY. PAR |              |              | ERREUR QUA. MOY. PAR |              |              | ERREUR QUA. MOY. PAR |              |  |
|----|----------------------|--------------|--------------|----------------------|--------------|--------------|----------------------|--------------|--|
|    | PERI. TRONQUE        | PARZEN       | BARTILETT    | ROSENBLATT           | DANIELS      | ROSENBLATT   | DANIELS              | ROSENBLATT   |  |
| 5  | .59465429-01         | .97726563-01 | .97674227-01 | .93970335-01         | .60629172-01 | .93970335-01 | .60629172-01         | .93970335-01 |  |
| 6  | .47390906-01         | .66811159-01 | .86741762-01 | .82978592-01         | .48390842-01 | .82978592-01 | .48390842-01         | .82978592-01 |  |
| 7  | .37419076-01         | .76852251-01 | .76762776-01 | .72980109-01         | .38180232-01 | .72980109-01 | .38180232-01         | .72980109-01 |  |
| 8  | .29045455-01         | .67805251-01 | .67696610-01 | .63906314-01         | .29571803-01 | .63906314-01 | .29571803-01         | .63906314-01 |  |
| 9  | .22254411-01         | .59627143-01 | .59501356-01 | .5729051-01          | .22530889-01 | .5729051-01  | .22530889-01         | .5729051-01  |  |
| 10 | .16777960-01         | .52271653-01 | .52127606-01 | .46390428-01         | .16811629-01 | .46390428-01 | .16811629-01         | .46390428-01 |  |
| 11 | .12447679-01         | .45685034-01 | .45526021-01 | .41839413-01         | .12252320-01 | .41839413-01 | .12252320-01         | .41839413-01 |  |
| 12 | .91563082-02         | .39815595-01 | .39641759-01 | .36023803-01         | .87401223-02 | .36023803-01 | .87401223-02         | .36023803-01 |  |
| 13 | .66798538-02         | .34603097-01 | .34422205-01 | .30882442-01         | .60685554-02 | .30882442-01 | .60685554-02         | .30882442-01 |  |
| 14 | .49719517-02         | .30008927-01 | .29813035-01 | .26368586-01         | .41809183-02 | .26368586-01 | .41809183-02         | .26368586-01 |  |
| 15 | .38295853-02         | .25969367-01 | .25765648-01 | .22419403-01         | .28843948-02 | .22419403-01 | .28843948-02         | .22419403-01 |  |
| 16 | .32164695-02         | .22437137-01 | .22227715-01 | .16985669-01         | .21254225-02 | .16985669-01 | .21254225-02         | .16985669-01 |  |
| 17 | .29677118-02         | .19362186-01 | .19149168-01 | .16015830-01         | .17570537-02 | .16015830-01 | .17570537-02         | .16015830-01 |  |
| 18 | .30167698-02         | .16696317-01 | .16485667-01 | .13463792-01         | .17081946-02 | .13463792-01 | .17081946-02         | .13463792-01 |  |
| 19 | .32552048-02         | .14401904-01 | .14187535-01 | .11283822-01         | .18771714-02 | .11283822-01 | .18771714-02         | .11283822-01 |  |
| 20 | .35657809-02         | .12432253-01 | .12219869-01 | .94336801-02         | .21571146-02 | .94336801-02 | .21571146-02         | .94336801-02 |  |
| 21 | .38994381-02         | .10751137-01 | .10542270-01 | .76715238-02         | .24937473-02 | .76715238-02 | .24937473-02         | .76715238-02 |  |
| 22 | .42642401-02         | .93213596-02 | .91173261-02 | .65441425-02         | .28497103-02 | .65441425-02 | .28497103-02         | .65441425-02 |  |
| 23 | .46667957-02         | .80985761-02 | .79003689-02 | .54268773-02         | .32350699-02 | .54268773-02 | .32350699-02         | .54268773-02 |  |
| 24 | .50937117-02         | .70488781-02 | .68572704-02 | .44910700-02         | .36366031-02 | .44910700-02 | .36366031-02         | .44910700-02 |  |
| 25 | .55512126-02         | .61440839-02 | .59596688-02 | .37156255-02         | .40635849-02 | .37156255-02 | .40635849-02         | .37156255-02 |  |
| 26 | .60165601-02         | .53628384-02 | .51860913-02 | .30759851-02         | .44956023-02 | .30759851-02 | .44956023-02         | .30759851-02 |  |
| 27 | .65180823-02         | .46866752-02 | .45179651-02 | .25556741-02         | .49568828-02 | .25556741-02 | .49568828-02         | .25556741-02 |  |
| 28 | .70635269-02         | .41013746-02 | .39410118-02 | .21356912-02         | .54499602-02 | .21356912-02 | .54499602-02         | .21356912-02 |  |
| 29 | .76794306-02         | .35942110-02 | .34424459-02 | .16038128-02         | .59973441-02 | .16038128-02 | .59973441-02         | .16038128-02 |  |
| 30 | .83653059-02         | .31553211-02 | .30123824-02 | .13468312-02         | .65960021-02 | .13468312-02 | .65960021-02         | .13468312-02 |  |

TROISIEME SERIE

TABLE C.4

NX= 2000

| NB | ERREUR QUA. MOY. PAR |              |              | ERREUR QUA. MOY. PAR |              |              | ERREUR QUA. MOY. PAR |              |              |
|----|----------------------|--------------|--------------|----------------------|--------------|--------------|----------------------|--------------|--------------|
|    | PERI. TRONQUE        | PARZEN       | BARTLETT     | ROSENBLATT           | DANIELS      | ROSENBLATT   | DANIELS              | ROSENBLATT   | DANIELS      |
| 5  | .32299435-01         | .52545150-01 | .52525806-01 | .50537523-01         | .32702655-01 | .50537523-01 | .32702655-01         | .50537523-01 | .32702655-01 |
| 6  | .25754086-01         | .46471974-01 | .46443172-01 | .44441815-01         | .26032777-01 | .44441815-01 | .26032777-01         | .44441815-01 | .26032777-01 |
| 7  | .20459436-01         | .40927341-01 | .40890803-01 | .38898515-01         | .20543337-01 | .38898515-01 | .20543337-01         | .38898515-01 | .20543337-01 |
| 8  | .16026960-01         | .35884197-01 | .35839991-01 | .35856718-01         | .15911590-01 | .35856718-01 | .15911590-01         | .35856718-01 | .15911590-01 |
| 9  | .12526926-01         | .31307937-01 | .31256304-01 | .29306330-01         | .12189739-01 | .29306330-01 | .12189739-01         | .29306330-01 | .12189739-01 |
| 10 | .97712784-02         | .27177701-01 | .27119136-01 | .25214057-01         | .92161393-02 | .25214057-01 | .92161393-02         | .25214057-01 | .92161393-02 |
| 11 | .76721180-02         | .23468203-01 | .23403417-01 | .21556430-01         | .69100564-02 | .21556430-01 | .69100564-02         | .21556430-01 | .69100564-02 |
| 12 | .61743255-02         | .20155349-01 | .20085018-01 | .18311234-01         | .52176500-02 | .18311234-01 | .52176500-02         | .18311234-01 | .52176500-02 |
| 13 | .51239834-02         | .17216697-01 | .17141869-01 | .15445750-01         | .39980139-02 | .15445750-01 | .39980139-02         | .15445750-01 | .39980139-02 |
| 14 | .45314909-02         | .14624545-01 | .14546080-01 | .12939232-01         | .32467735-02 | .12939232-01 | .32467735-02         | .12939232-01 | .32467735-02 |
| 15 | .42403940-02         | .12354385-01 | .12275383-01 | .10757426-01         | .28225476-02 | .10757426-01 | .28225476-02         | .10757426-01 | .28225476-02 |
| 16 | .42512044-02         | .10377804-01 | .10295299-01 | .86800362-02         | .27177075-02 | .86800362-02 | .27177075-02         | .86800362-02 | .27177075-02 |
| 17 | .44368221-02         | .86710126-02 | .85880424-02 | .72758241-02         | .28178003-02 | .72758241-02 | .28178003-02         | .72758241-02 | .28178003-02 |
| 18 | .47504950-02         | .72085245-02 | .71260859-02 | .59227124-02         | .30788680-02 | .59227124-02 | .30788680-02         | .59227124-02 | .30788680-02 |
| 19 | .51117750-02         | .59676433-02 | .58866890-02 | .47929000-02         | .34235135-02 | .47929000-02 | .34235135-02         | .47929000-02 | .34235135-02 |
| 20 | .54540760-02         | .49249185-02 | .48463215-02 | .38609138-02         | .37871785-02 | .38609138-02 | .37871785-02         | .38609138-02 | .37871785-02 |
| 21 | .57439223-02         | .40568947-02 | .39814230-02 | .31016154-02         | .41294954-02 | .31016154-02 | .41294954-02         | .31016154-02 | .41294954-02 |
| 22 | .60103382-02         | .33403310-02 | .32686231-02 | .24832833-02         | .44475214-02 | .24832833-02 | .44475214-02         | .24832833-02 | .44475214-02 |
| 23 | .62636534-02         | .27478368-02 | .26803667-02 | .19905568-02         | .47508504-02 | .19905568-02 | .47508504-02         | .19905568-02 | .47508504-02 |
| 24 | .64865954-02         | .22583047-02 | .21954211-02 | .16055259-02         | .50248531-02 | .16055259-02 | .50248531-02         | .16055259-02 | .50248531-02 |
| 25 | .66863600-02         | .18541697-02 | .17961243-02 | .13143635-02         | .52769311-02 | .13143635-02 | .52769311-02         | .13143635-02 | .52769311-02 |
| 26 | .68467907-02         | .15218813-02 | .14686517-02 | .11016784-02         | .54932742-02 | .11016784-02 | .54932742-02         | .11016784-02 | .54932742-02 |
| 27 | .69933019-02         | .12498010-02 | .12018992-02 | .95618758-03         | .56939079-02 | .95618758-03 | .56939079-02         | .95618758-03 | .56939079-02 |
| 28 | .71064690-02         | .10286660-02 | .98595862-03 | .86616100-03         | .58635942-02 | .86616100-03 | .58635942-02         | .86616100-03 | .58635942-02 |
| 29 | .71978870-02         | .85053673-03 | .81304622-03 | .62275956-03         | .60115663-02 | .62275956-03 | .60115663-02         | .62275956-03 | .60115663-02 |
| 30 | .72656383-02         | .70893987-03 | .67665818-03 | .61757712-03         | .61361358-02 | .61757712-03 | .61361358-02         | .61757712-03 | .61361358-02 |

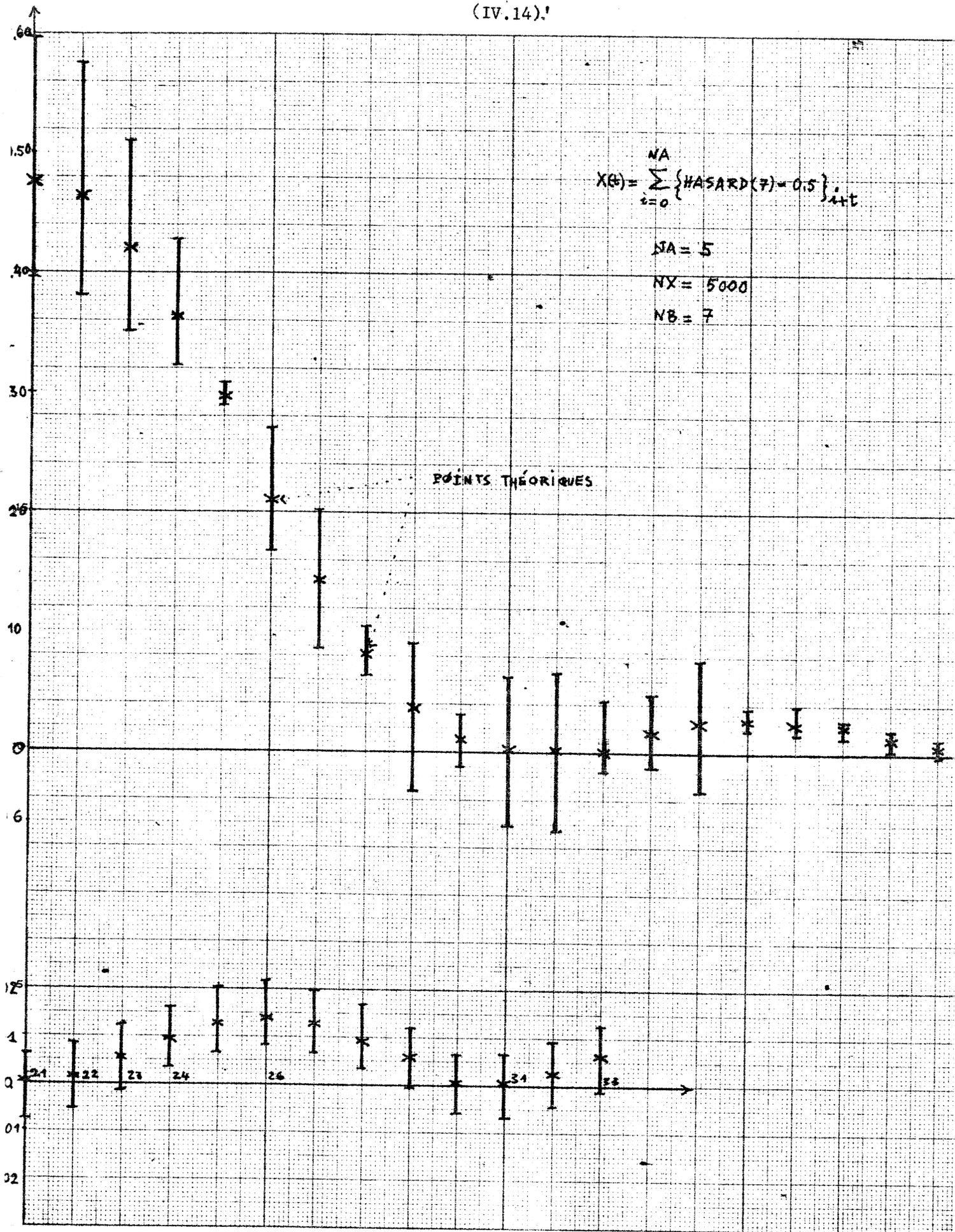
$$X(t) = \sum_{i=0}^{NA} \{ \text{HASARD}(T) = 0.5 \}_{i,t}$$

$$NA = 5$$

$$NX = 5000$$

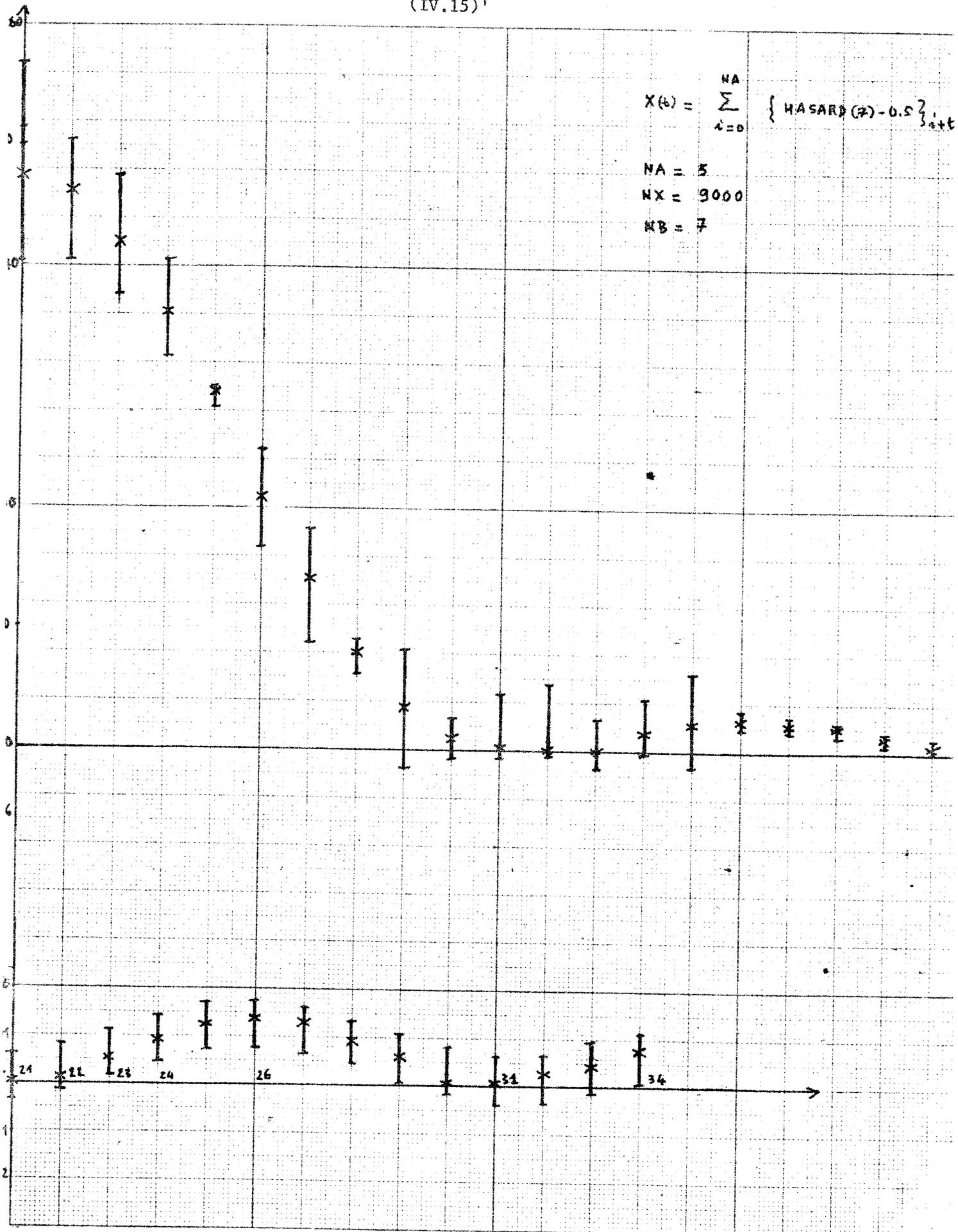
$$NB = 7$$

POINTS THÉORIQUES



$$X(t) = \sum_{k=0}^{NA} \{ \text{HASARD}(x) - 0.5 \}_{k+t}$$

NA = 5  
NX = 9000  
NB = 7



BANDE DE CONFIDANCE DANS L'ESTIMATION DE LA DENSITE SPECTRALE DE LA FONCTION

$$X(t) = \sum_{k=0}^{12} (RANDOM(2) - 0.5) \cos(kt)$$

Pointe théorique  $(\lambda, f(\lambda, \frac{\pi}{24}))$

Intervalle de confiance pour chaque valeur de  $\lambda = \lambda_j$

Longueur de la Trajectoire  $NX + 1 = 9000$



0  
1  
2  
3  
4  
5  
6  
7  
8  
9  
10  
11  
12  
13  
14  
15  
16  
17  
18  
19  
20  
21  
22

BANDE DE CONFIANCE DANS L'ESTIMATION DE LA DENSITÉ SPECTRALE DE LA FONCTION

$$K(f) = \sum_{NA} \frac{1}{NA} \{ \text{MAG}(\hat{F}) - 0.5 \} \text{MSE}$$

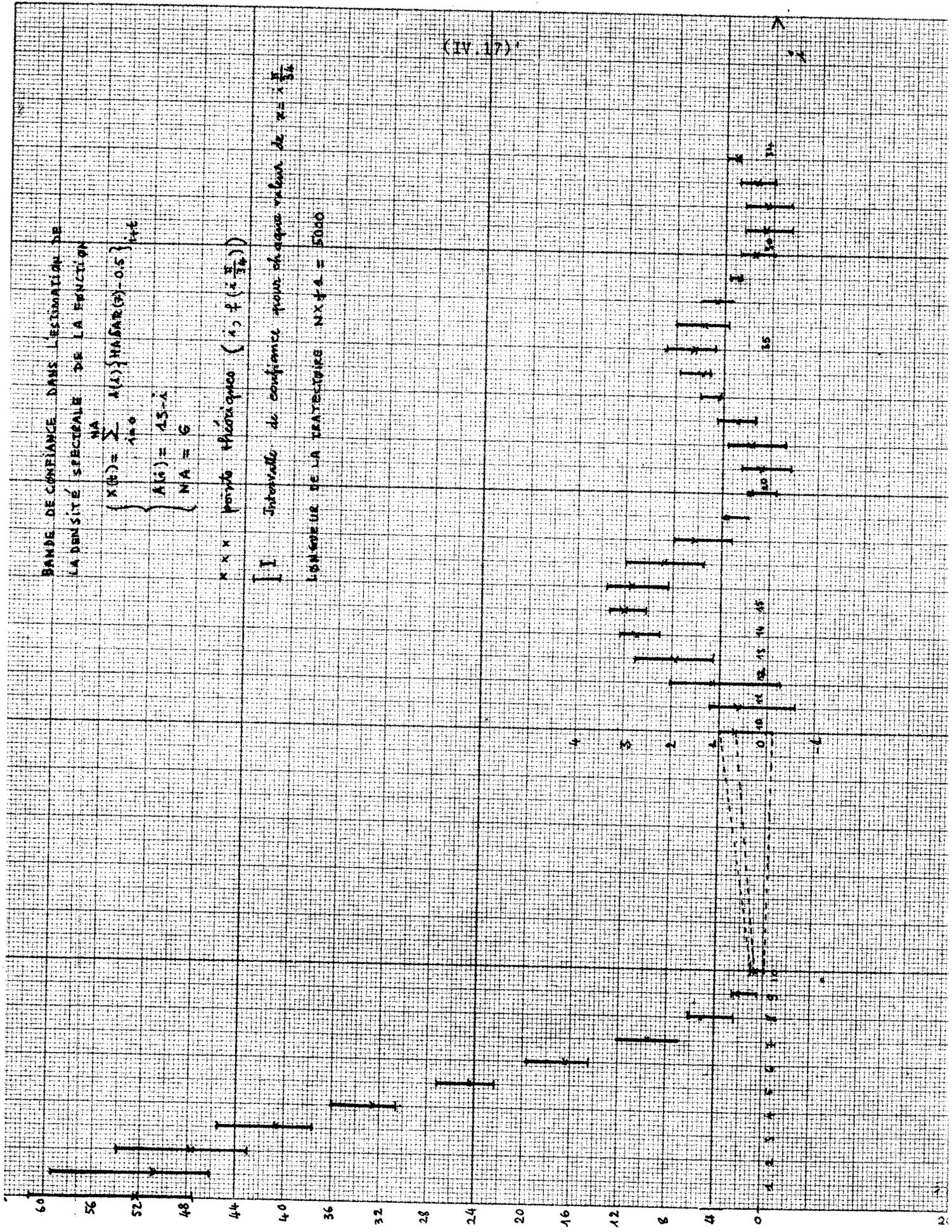
$$A(f) = 1.5 - \lambda$$

$$NA = 6$$

$N \times N$  points théoriques  $(1, f(\frac{i}{N}))$

Intervalle de confiance pour chaque valeur de  $x = x \frac{1}{56}$

LONGUEUR DE LA TRAJECTOIRE  $N \times f \times \Delta = 5000$



B I B L I O G R A P H I E

-----

- [I] KHINCHIN A.Y. Korrelation theorie der Stationären  
Stochastischen processe Math. an.  
109-604 (1934)
- [II] J.L. BOOB Stochastic processes
- [III] EMANUEL PARZEN An approach to time series analysis  
An.of Math. Stat. 3.61
- [IV] EMANUEL PARZEN On consistent estimates of the spec-  
trum of a Stationary time serie.  
An. of Math. Stat., 1956, tome 42,  
pp 154 - 157
- [V] ULF FRENANDER et Statistical analysis of Stationary  
MURRAY ROSENBLATT time series. ALMQUIST & WIKSEL Stocklomb
- [VI] M.S. BARTLETT Periodogram analysis and continuons  
spectra Biometrika 37 (1950) 1-16
- [VII] P. WHITTLE Curve and periodogramme smoothing.  
J.R. Statist. Sco. B 19, 38 - 37.

-----



TABLE DES MATIERES

-----

| <u>CHAPITRE I</u>                                                                                  | <u>pages</u> |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------|
| A - . Fonction aléatoire stationnaire du Second ordre .....                                        | 1            |
| . Fonction de Corrélacion                                                                          |              |
| B - . Processus avec moyennes glissantes .....                                                     | 5            |
| . Simulation des fonctions aléatoires stationnaires<br>du second ordre de densité spectrale donnée |              |
| C - . Procédures de base .....                                                                     | 8            |
| . Trajectoires pseudo-aléatoires                                                                   |              |
| <br><u>CHAPITRE II</u>                                                                             |              |
| A - . Les estimateurs $B_T(v)$ et $B_T^*(v)$ .....                                                 | 12           |
| . Fonction aléatoire stationnaire du quatrième ordre                                               |              |
| B - . Comportement asymptotique de $B_T(v)$ .....                                                  | 14           |
| C - . Fonctions aléatoires linéaires .....                                                         | 22           |
| . Expériences numériques                                                                           |              |
| <br><u>CHAPITRE III</u>                                                                            |              |
| A - . Définition des périodogrammes $f_T(x)$ et $f_N(x)$ .....                                     | 28           |
| . Comportement asymptotique de $f_T(x)$ .....                                                      | 29           |
| . Comportement asymptotique de $f_N(x)$ .....                                                      | 36           |
| . Etude de $f_T(x)$ et de $f_N(x)$ au voisinage .....                                              | 44           |
| des points du spectre                                                                              |              |
| E - . Quelques résultats numériques .....                                                          | 48           |

.../...

CHAPITRE IV

|                                                                                                                                     |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| A - . Le périodogramme pondéré $f_{\text{T}}^*(x)$ associé à la fonction de $k(v)$ et à la famille des nombres $A_{\text{T}}$ ..... | 51 |
| B - . Etude du biais de $f_{\text{T}}^*(x)$ .....                                                                                   | 52 |
| C - . Etude de la variance de $f_{\text{T}}^*(x)$ .....                                                                             | 56 |
| D - . Convergence en moyenne quadratique de $f_{\text{T}}^*(x)$ .....                                                               | 61 |
| E - . Exemples de fonctions de poids .....                                                                                          | 63 |
| F - . Expériences numériques .....                                                                                                  | 67 |
| G - . Le périodogramme tronqué et sa bande de confiance .....                                                                       | 73 |
| . Quelques exemples d'estimation.                                                                                                   |    |

CHAPITRE V

|                                                    |    |
|----------------------------------------------------|----|
| A - . Estimateurs de moyennes périodogrammes ..... | 77 |
| B - . Quelques exemples .....                      | 81 |

CHAPITRE VI

|                                                                     |    |
|---------------------------------------------------------------------|----|
| A - . Estimation polynomiale .....                                  | 83 |
| B - . Estimation des paramètres des densités spectrales de la forme | 91 |

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^n \frac{A_j |e^{ix-b_j}|^2}{|e^{ix-a_j}|^2}$$

|                                                    |     |
|----------------------------------------------------|-----|
| C - . Expériences numériques .....                 | 98  |
| RESULTATS Numériques relatifs au chapitre IV ..... | 100 |

---

VU

Grenoble, le

Le Président de la thèse

VU

Grenoble, le

Le Doyen de la Faculté des Sciences

VU, et permis d'imprimer,

Le Recteur de l'Académie de Grenoble