



HAL
open science

Étude d'un schéma de différences finies appliqué à l'intégration numérique d'un certain type d'équations hyperboliques d'écoulement

Jan Andrzej Cunge

► **To cite this version:**

Jan Andrzej Cunge. Étude d'un schéma de différences finies appliqué à l'intégration numérique d'un certain type d'équations hyperboliques d'écoulement. Modélisation et simulation. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1966. Français. NNT: . tel-00280204

HAL Id: tel-00280204

<https://theses.hal.science/tel-00280204>

Submitted on 16 May 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

T H E S E S

présentées à la

FACULTE DES SCIENCES DE GRENOBLE

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR-INGENIEUR

par

Jan Andrzej CUNGE

Ingénieur Diplômé de l'Ecole Polytechnique de Varsovie

Diploma of Membership of the Imperial College (D.I.C.)

London University

PREMIERE THESE :

**"ETUDE D'UN SCHEMA DE DIFFERENCES FINIES APPLIQUE
A L'INTEGRATION NUMERIQUE D'UN CERTAIN
TYPE D'EQUATIONS HYPERBOLIQUES D'ECOULEMENT"**

DEUXIEME THESE :

PROPOSITIONS DONNEES PAR LA FACULTE

Thèses soutenues le Mai 1966, devant la Commission d'examen :

JURY	{	M.M. J. KUNTZMANN, Président	}	Examineurs
		N. GASTINEL		
		P. LAURENT		

T H E S E S

présentées à la

FACULTE DES SCIENCES DE GRENOBLE

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR-INGENIEUR

par

Jan Andrzej CUNGE

Ingénieur Diplômé de l'Ecole Polytechnique de Varsovie

Diploma of Membership of the Imperial College (D.I.C.)

London University

PREMIERE THESE :

**"ETUDE D'UN SCHEMA DE DIFFERENCES FINIES APPLIQUE
A L'INTEGRATION NUMERIQUE D'UN CERTAIN
TYPE D'EQUATIONS HYPERBOLIQUES D'ECOULEMENT"**

DEUXIEME THESE :

PROPOSITIONS DONNEES PAR LA FACULTE

Thèses soutenues le Mai 1966, devant la Commission d'examen :

JURY { M.M. J. KUNTZMANN, Président
 { N. GASTINEL }
 { P. LAURENT } Examineurs

Je remercie Monsieur le Professeur J. KUNTZMANN qui m'a fait le très grand honneur d'accepter d'être Président du Jury. Qu'il trouve ici l'expression de ma gratitude.

Je tiens à exprimer à Monsieur le Professeur N. GASTINEL ma profonde reconnaissance pour l'intérêt constant, les précieux conseils et l'amicale sollicitude qu'il a bien voulu me témoigner au cours de ce travail.

Je prie Monsieur le Maître de conférences P. LAURENT d'accepter l'expression de ma gratitude pour ses remarques concernant cette thèse et pour m'avoir fait l'honneur d'être Membre du Jury.

Une partie de ce travail a été réalisée au laboratoire de calcul de la Société Grenobloise d'Etudes et d'Application Hydrauliques. Monsieur F. BIESEL, Directeur Scientifique de la SOGREAH a bien voulu m'accorder les facilités nécessaires. Je tiens à l'en remercier.

Je remercie également Monsieur A. PREISSMANN, Chef de Service des Méthodes Mathématiques à la SOGREAH, pour ses conseils. Qu'il trouve ici le témoignage de ma profonde reconnaissance.

FACULTE DES SCIENCES

LISTE DES PROFESSEURS

DOYENS HONORAIRES

M. FORTRAT P.
M. MORET L.

DOYEN

M. WEIL L.

PROFESSEURS TITULAIRES

MM. NELL L.	<i>Magnétisme</i>
HEILMANN	<i>Chimie organique</i>
KRAVTCHEKNO J.	<i>Mécanique rationnelle</i>
CHABAUTY C.	<i>Mathématiques pures</i>
PARDE M.	<i>Potamologie</i>
BENOIT J.	<i>Radioélectricité</i>
CHENE M.	<i>Chimie papetière</i>
RESSON J.	<i>Electrochimie</i>
WEIL L.	<i>Thermodynamique</i>
FELICI N.	<i>Electrostatique</i>
KUNTZMANN J.	<i>Mathématiques appliquées</i>
BARBIER R.	<i>Géologie appliquée</i>
SANTON L.	<i>Mécanique des fluides</i>
OZENDA P.	<i>Botanique</i>
FALLOT M.	<i>Physique industrielle</i>
GALVANI O.	<i>Mathématiques</i>
MOUSSA A.	<i>Chimie nucléaire et radioactivité</i>
TRAYNARD P.	<i>Chimie générale</i>
SOUTIF M.	<i>Physique générale</i>
CRAYA A.	<i>Hydrodynamique</i>
REULOS R.	<i>Théorie des champs</i>
AYANT Y.	<i>Physique approfondie</i>
GALISSOT F.	<i>Mathématiques pures</i>
Mlle LUTZ E.	<i>Mathématiques générales</i>
MM. BLAMBERT M.	<i>Mathématiques</i>
BOUCHEZ R.	<i>Physique nucléaire</i>
LLIBOUTRY L.	<i>Géophysique</i>
MICHEL R.	<i>Géologie et minéralogie</i>
BONNIER E.	<i>Métallurgie</i>
DESSAUX G.	<i>Physiologie animale</i>
PILLET E.	<i>Electrotechnique</i>

MM.	DEBELMAS J.	<i>Géologie générale</i>
	GERBER R.	<i>Mathématiques pures</i>
	PAUTHENET R.	<i>Electrotechnique</i>
	VAUQUOIS B.	<i>Calcul électronique</i>
	SILBER R.	<i>Mécanique des fluides</i>
	MOUSSIEGT J.	<i>Electronique</i>
	BARBIER J.C.	<i>Physique expérimentale</i>
	BUYLE-BODIN M.	<i>Electronique</i>
	KOSZUL J.L.	<i>Mathématiques</i>
	DREYFUS B.	<i>Thermodynamique</i>
	VAILLANT F.	<i>Zoologie</i>
	KLEIN J.	<i>Mathématiques pures</i>
	SENGEL P.	<i>Zoologie</i>
	ARNAUD P.	<i>Chimie</i>
	BARJON R.	<i>Physique nucléaire</i>
	BARNOUD F.	<i>Biosynthèse de la cellulose</i>

PROFESSEURS ASSOCIES

MM.	WAGNER H.	<i>Botanique</i>
	NAPP-ZINN K.	<i>Botanique</i>

PROFESSEURS SANS CHAIRE

Mme	KOFLER L.	<i>Botanique</i>
	DEPASSEL R.	<i>Mécanique</i>
	PERRET R.	<i>Servomécanisme</i>
Mme	BARBIER M.J.	<i>Electrochimie</i>
	COHEN J.	<i>Physique</i>
	GIDON P.	<i>Géologie</i>
Mme	SOUTIF J.	<i>Physique générale</i>
	GIRAUD P.	<i>Géologie</i>
	GASTINEL N.	<i>Mathématiques appliquées</i>
	LACAZE A.	<i>Thermodynamique</i>
	GLENAT R.	<i>Chimie organique</i>
	BRISSONNEAU P.	<i>Physique générale</i>
	DUCROS P.	<i>Minéralogie</i>
	ANGLES D'AURIAC	<i>Mécanique des fluides</i>
	ROBERT A.	<i>Chimie papetière</i>
	COUMES A.	<i>Electronique</i>
	PEBAY-PEROULA J.C.	<i>Physique</i>
	DEGRANGE C.	<i>Zoologie</i>

GAGNAIRE D.	<i>Chimie papetière</i>
RASSAT A.	<i>Chimie</i>
PERRIAUX J.	<i>Géologie</i>
BARRA J.	<i>Mathématiques appliquées</i>

PROFESSEURS HONORAIRES

MM. FORTIER A.	<i>Mécanique des fluides</i>
BRELOT M.	<i>Mathématiques</i>
WOLFERS F.	<i>Physique</i>
DORIER A.	<i>Zoologie</i>

MAITRES DE CONFERENCES

MM. BIAREZ J.	<i>Mécanique des fluides</i>
DODU J.	<i>Mécanique des fluides</i>
DOLIQUE J.M.	<i>Electronique</i>
HACQUES G.	<i>Mathématiques appliquées</i>
LANCIA R.	<i>Physique automatique</i>
POULOUJADOFF M.	<i>Electrotechnique</i>
KAHANE A.	<i>Physique</i>
Mme BONNIER J.	<i>Chimie</i>
Mme KAHANE J.	<i>Physique</i>
DEPORTES C.	<i>Chimie minérale</i>
DEPOMMIER P.	<i>Physique nucléaire</i>
CAUQUIS G.	<i>Chimie générale</i>
BONNET G.	<i>Physique</i>
Mme BOUCHE L.	<i>Mathématiques</i>
COLOBERT L.	<i>Physiologie animale</i>
PAYAN J.J.	<i>Mathématiques</i>
CAUBET J.P.	<i>Mathématiques</i>
LAURENT P.	<i>Mathématiques appliquées</i>
BERTRANDIAS J.P.	<i>Mathématiques appliquées</i>
BRIERE G.	<i>Physique</i>
LAJZEROWICZ J.	<i>Physique</i>
VALENTIN J.	<i>Physique</i>
DESRE P.	<i>Métallurgie</i>
BONNETAIN L.	<i>Chimie Minérale</i>

MAITRE DE CONFERENCES ASSOCIE

M. RADELLI L.	<i>Géologie</i>
---------------	-----------------

S O M M A I R E

	Page
PREMIERE PARTIE - Etude d'un schéma de différences finies appliqué à l'intégration numérique des équations hyperboliques dans une seule dimension spatiale	1
CHAPITRE 1 - LES EQUATIONS DIFFERENTIELLES ETUDIEES	2
CHAPITRE 2 - ETUDE D'UN SCHEMA DE DIFFERENCES FINIES APPLIQUE AU SYSTEME D'EQUATIONS D'ECOULEMENT	4
2.1. Présentation du schéma de différences finies	4
2.2. Etude d'une approximation des équations différentielles par les équations aux différences finies	7
2.3. Méthode de résolution des équations aux différences	10
2.4. Stabilité numérique. Définitions. Méthode utilisée pour l'étudier	14
2.5. Etude de la stabilité du schéma (2.1.1)-(2.1.2)	19
2.6. Conclusions	27
CHAPITRE 3 - ETUDE NUMERIQUE EXPERIMENTALE DES EQUATIONS D'ECOULEMENT EN UTILISANT LE SCHEMA (2.1.1) (2.1.2)	28
3.1. Exemples de calcul	28
3.2. Interprétation des résultats numériques	33
3.3. Procédé d'extrapolation appliqué aux solutions numériques des équations hyperboliques	37

	Page
DEUXIEME PARTIE - Etude de la méthode des pas séparés appliquée à l'intégration numérique des équations hyperboliques dans deux dimensions spatiales	47
CHAPITRE 4 - LES EQUATIONS DIFFERENTIELLES	48
CHAPITRE 5 - ETUDE D'APPROXIMATION ET DE STABILITE NUMERIQUE DU SYSTEME (4.1.1) EN UTILISANT LA METHODE DES PAS SEPARES	50
5.1. Introduction	50
5.2. Présentation du schéma des différences finies	50
5.3. Estimation d'une approximation du système différentiel par le système aux différences finies	56
5.4. Méthode de résolution du système aux différences finies (5.2,7)	58
5.5. Etude de la stabilité numérique	59
5.6. Conclusions	71
CHAPITRE 6 - ETUDE NUMERIQUE EXPERIMENTALE DES EQUATIONS D'ECOULEMENT EN UTILISANT LA METHODE DES PAS SEPARES	72
6.1. Solution analytique de l'équation des ondes dans un domaine rectangulaire	72
6.2. Résolution numérique d'un système d'équations d'écoulement par la méthode des pas séparés	74
6.3. Etude expérimentale de l'influence des paramètres r_1 , r_2 , θ sur la solution numérique	75
6.4. Interprétation des résultats numériques	79

P R E M I E R E P A R T I E

**ETUDE D'UN SCHEMA DE DIFFERENCES FINIES
APPLIQUE A L'INTEGRATION NUMERIQUE
D'EQUATIONS HYPERBOLIQUES DANS UNE SEULE
DIMENSION SPATIALE**

CHAPITRE 1

LES EQUATIONS DIFFERENTIELLES ETUDIEES

Nous étudierons, dans la première partie, des approximations aux différences finies pour un système de deux équations aux dérivées partielles.

Considérons le problème suivant :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial Z}{\partial t} &= 0 \\ \frac{\partial Z}{\partial X} + \frac{\partial U}{\partial t} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(1.1.1)$$

sur un domaine $0 \leq X \leq L$, $0 \leq t \leq T$, avec les conditions initiales et les conditions aux limites suivantes :

$$\left. \begin{aligned} Z(X,0) &= \tilde{\varphi}(X) \\ U(X,0) &= \tilde{\varphi}(X) \\ Z(L,t) &= \tilde{\psi}(t) \\ U(0,t) &= \tilde{\psi}(t) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(1.1.2)$$

Le système (1.1.1) représente les équations simplifiées de l'hydrodynamique dans une seule dimension spatiale X . Elles sont linéaires et du type hyperbolique, $U(X,t)$ représentant la vitesse, $Z(X,t)$ le niveau ou la pression. Les conditions initiales et aux limites (1.1.2) assurent l'existence et l'unicité de la solution pour (1.1.1) dans $0 \leq X \leq L$, $0 \leq t \leq T$.

En posant :

$$w = \begin{bmatrix} Z \\ U \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad L = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} & \frac{\partial}{\partial X} \\ \frac{\partial}{\partial X} & \frac{\partial}{\partial t} \end{bmatrix}$$

le système (1.1.1) peut être écrit sous la forme :

$$Lw = 0 \quad \dots\dots\dots (1.1.3)$$

Les conditions initiales et aux limites (1.1.2) peuvent être notées sous la forme :

$$lw = \begin{bmatrix} Z(X, 0) & \tilde{\varphi}(X) \\ U(X, 0) & \tilde{\varphi}(X) \\ Z(L, t) & \tilde{\psi}(t) \\ U(0, t) & \tilde{\psi}(t) \end{bmatrix} = \dots\dots\dots (1.1.4)$$

Ensuite nous appellerons les équations (1.1.1) "système d'équations d'écoulement".

L'opérateur différentiel L, défini par (1.1.3), fait correspondre l'élément w de l'espace W à l'élément nul de cet espace. Les éléments U(X,t) et Z(X,t) de l'espace W sont les fonctions continues de X et t, qui possèdent les dérivées premières par rapport à ces variables.

ooo

CHAPITRE 2

ETUDE D'UN SCHEMA DE DIFFERENCES FINIES APPLIQUE AU SYSTEME D'EQUATIONS D'ECOULEMENT

-

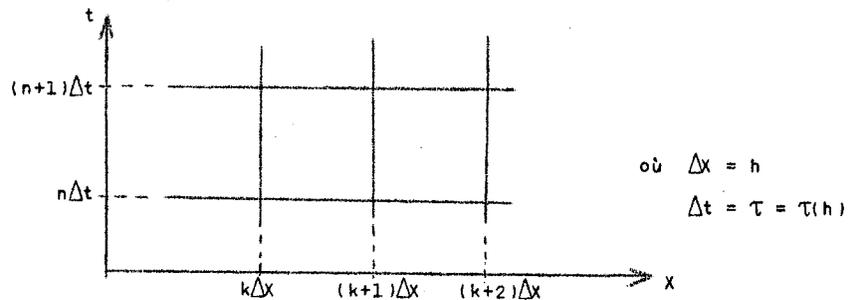
2.1. PRESENTATION DU SCHEMA DES DIFFERENCES FINIES

Introduisons une série de définitions nécessaires au cours de l'étude du schéma des différences finies.

2.1.1. Le maillage (un réseau de points) où nous déterminerons la fonction-vecteur :

$$w^{(h)} = \begin{bmatrix} z^{(h)} \\ U^{(h)} \end{bmatrix}$$

qui est la solution du système d'équations aux différences finies. Soit le maillage M_w défini par le dessin suivant :



Le maillage ainsi défini sera commun aux deux fonctions-grille $z^{(h)}(k\Delta x, n\Delta t)$ et $U^{(h)}(k\Delta x, n\Delta t)$, toutes deux étant la solution des équations aux différences.

2.1.2. L'opérateur aux différences finies L_h agissant sur les fonctions-grille $z^{(h)}$ et $U^{(h)}$ de telle manière que ces fonctions, déterminées aux points $(x=k\Delta x, t=n\Delta t)$ du maillage M_w soient la solution d'un système d'équations linéaires aux différences finies $L_h w^{(h)} = 0$.

Autrement dit l'opérateur L_h fait correspondre à un couple des fonctions-grille (Z, U) un autre couple de fonctions-grille que nous posons égales à zéro.

Au point $(X=k\Delta X, t=n\Delta t)$ l'opérateur définira le schéma des différences finies que nous nous proposons d'étudier :

$$(L_h w^{(h)})_k^n = \left\{ \begin{array}{l} \frac{z_{k+1}^{n+1} - z_{k+1}^n + z_k^{n+1} - z_k^n}{2\Delta t} + \frac{\theta(u_{k+1}^{n+1} - u_k^{n+1}) + (1-\theta)(u_{k+1}^n - u_k^n)}{\Delta X} = 0 \\ \frac{u_{k+1}^{n+1} - u_{k+1}^n + u_k^{n+1} - u_k^n}{2\Delta t} + \frac{\theta(z_{k+1}^{n+1} - z_k^{n+1}) + (1-\theta)(z_{k+1}^n - z_k^n)}{\Delta X} = 0 \end{array} \right. \dots(2.1.1)$$

où :

$$\begin{aligned} z_k^n &= z(k\Delta X, n\Delta t); & u_k^n &= u(k\Delta X, n\Delta t); \\ z_{k+1}^n &= z[(k+1)\Delta X, n\Delta t]; & u_{k+1}^n &= u[(k+1)\Delta X, n\Delta t]; \\ z_k^{n+1} &= z[k\Delta X, (n+1)\Delta t]; & u_k^{n+1} &= u[k\Delta X, (n+1)\Delta t]; \\ z_{k+1}^{n+1} &= z[(k+1)\Delta X, (n+1)\Delta t]; & u_{k+1}^{n+1} &= u[(k+1)\Delta X, (n+1)\Delta t]; \end{aligned}$$

$0 \leq \theta \leq 1$ est un coefficient de pondération entre les valeurs des différences par rapport à l'axe X au temps $t=n\Delta t$ et au temps $t=(n+1)\Delta t$.

Le schéma des différences finies (2.1.1) est un schéma implicite, puisque les valeurs des fonctions-grille $z^{(h)}$ et $u^{(h)}$ au temps $t=(n+1)\Delta t$ ne peuvent être définies qu'en faisant intervenir les valeurs de ces fonctions-grille connues à tous les points du réseau au temps $t=n\Delta t$ et aux limites du domaine au temps $t=(n+1)\Delta t$.

2.1.3. L'opérateur aux différences finies l_h agissant sur la fonction-grille $w^{(h)}$ aux limites du domaine considéré. Par analogie avec les conditions (1.1.4) nous le définissons par :

$$l_h w^{(h)} = \left\{ \begin{array}{l} z_k^o \\ u_k^o \\ z_N^n \\ u_o^n \end{array} \right. \dots\dots\dots(2.1.2)$$

où : $k = 0, 1, 2, \dots, N$

En définissant ainsi $l_h w^{(h)}$ nous admettons que les valeurs des fonctions $z^{(h)}$ ou $u^{(h)}$ sont connues en tout temps et en tout lieu, aux limites du domaine considéré.

2.1.4. L'ensemble des éléments $\varphi^{(h)}$ formant le domaine des valeurs de l'opérateur l_h est défini par :

$$\varphi^{(h)} = \left\{ \begin{array}{l} \tilde{\varphi}_K^0 = \tilde{\varphi}(k\Delta X) \\ \tilde{\varphi}_K^1 = \tilde{\varphi}(k\Delta X) \\ \tilde{\psi}_N^n = \tilde{\psi}_N(n\Delta t) \\ \tilde{\psi}_0^n = \tilde{\psi}_0(n\Delta t) \end{array} \right. \dots\dots\dots(2.1.2)$$

2.1.5. La norme $\| \cdot \|_{W_h}$ dans l'espace W_h des fonctions-grille $w^{(h)}$. Nous choisissons pour cette norme l'expression suivante :

$$\| w^{(h)} \|_{W_h} = \max_n \| w^n \|_{W'_h} \dots\dots\dots(2.1.4)$$

où $\| w^n \|_{W'_h}$ est la norme dans l'espace W'_h des fonctions-grille $w_k^{(h)}$, c'est-à-dire pour n fixe.

Nous pouvons les écrire sous la forme des deux séquences suivantes :

$$\begin{array}{l} \dots, z_{k-1}^n, z_k^n, z_{k+1}^n, z_{k+2}^n, \dots \\ \dots, U_{k-1}^n, U_k^n, U_{k+1}^n, U_{k+2}^n, \dots \end{array} \dots\dots\dots(2.1.5)$$

Une norme dans l'espace W'_k pour n fixe sera définie par :

$$\| w^n \|_{W'_k} = \max_k |z_k^n| + \max_k |U_k^n| \dots\dots\dots(2.1.6)$$

La définition (2.1.4) peut être réécrite sous la forme :

$$\| w^{(h)} \|_{W_h} = \max_n \max_k |z_k^n| + \max_n \max_k |U_k^n| \dots\dots\dots(2.1.7)$$

2.1.6. La norme $\| \cdot \|_{\phi_h}$ dans l'espace ϕ_h des éléments $\varphi^{(h)}$ formant le domaine ϕ_h de l'opérateur l_h .

Nous prendrons cette norme sous la forme :

$$\|\varphi^{(h)}\|_{\phi_h} = \max_k |\tilde{\varphi}_k| + \max_k |\tilde{\varphi}_k| + \max_n \left| \frac{\tilde{\psi}_0^{n+1} - \tilde{\psi}_0^n}{\Delta t} \right| + \max_n \left| \frac{\tilde{\psi}_N^{n+1} - \tilde{\psi}_N^n}{\Delta t} \right| \dots (2.1.8)$$

Nous avons admis que $\tilde{\varphi}_N^0 = \tilde{\psi}_N^0$ et que $\tilde{\varphi}_0^0 = \tilde{\psi}_0^0$. Dans ce cas on voit immédiatement que trois conditions suivantes pour une norme dans l'espace ϕ_h :

- $\|\varphi^{(h)}\|_{\phi_h} = 0$ équivaut à $\varphi^{(h)} = 0 \in \phi_h$
- $\|\varphi_1^{(h)} + \varphi_2^{(h)}\|_{\phi_h} \leq \|\varphi_1^{(h)}\|_{\phi_h} + \|\varphi_2^{(h)}\|_{\phi_h}$ quels que soient $\varphi_1^{(h)}, \varphi_2^{(h)} \in \phi_h$
- $\|\alpha \varphi^{(h)}\|_{\phi_h} = |\alpha| \cdot \|\varphi^{(h)}\|_{\phi_h}$ quels que soient $\varphi^{(h)} \in \phi_h$

sont satisfaites.

2.2. ETUDE D'UNE APPROXIMATION DES EQUATIONS DIFFERENTIELLES PAR LES EQUATIONS AUX DIFFERENCES FINIES

Définissons d'abord la différence entre une fonction-vecteur $w(X, t)$ déterminée sur tout le domaine $0 \leq X \leq L, T \geq t \geq 0$ et la fonction-grille $w^{(h)}(k\Delta X, n\Delta t)$ déterminée uniquement aux points du maillage M_w .

Pour pouvoir comparer ces deux fonctions il faut :

- Soit prolonger la solution des équations aux différences en tous les points du domaine n'appartenant pas au maillage M_w . Cela peut être obtenu par exemple par interpolation entre les points du maillage. Une fois cette prolongation effectuée, nous pouvons admettre que la fonction $w^{(h)}$ est définie sur tout le domaine, donc qu'elle existe dans le même espace fonctionnel que la fonction $w(X, t)$. Alors la comparaison entre les deux fonctions est possible (c'est le procédé utilisé par Lax).
- Soit définir une fonction-grille $[w(X, t)]_h$ uniquement aux points du maillage M_w et l'associer de façon convenable à la fonction $w(X, t)$ définie sur tout le domaine. Alors la différence entre $[w(X, t)]_h$ et $w^{(h)}(k\Delta X, n\Delta t)$ aux points de M_w pourra être utilisée comme mesure de la différence entre $w(X, t)$ et $w^{(h)}(k\Delta X, n\Delta t)$ (c'est le procédé de Godunov - voir [6], pp. 33-34).

Choisissons pour notre étude le deuxième procédé et pour cela déterminons l'opérateur qui à toute fonction $w(X, t)$ fera correspondre une fonction-grille définie sur le maillage M_w . En admettant que les fonctions $Z(X, t)$ et $U(X, t)$ possèdent les

propriétés de continuité suffisantes, nous pouvons déterminer cet opérateur $[\cdot]_h$ comme faisant correspondre à la fonction-vecteur $w(X,t)$ au plan (X,t) une fonction-grille dont les valeurs aux points du maillage sont égales aux valeurs de la fonction $w(X,t)$ à ces points :

$$([\cdot]_h)^{n\Delta t}_{k\Delta X} = w(k\Delta X, n\Delta t) \quad \dots\dots\dots(2.2.1)$$

Introduisons ici une notion supplémentaire : soit un opérateur différentiel L tel que $Lw=f$ et soit un système linéaire aux différences finies $L_h w^{(h)} = f^{(h)}$, qui sera lui-même une approximation (dans un sens à préciser) de $Lw=f$. L'opérateur L_h fait correspondre à toute fonction $w^{(h)}$, définie sur le maillage M_w , une fonction $L_h w^{(h)} = f^{(h)}$, définie en général sur un autre maillage M_f . Appellons $\{\cdot\}_h$ l'opérateur qui à toute fonction $f(X,t)$ fera correspondre une fonction-grille définie sur le maillage M_f . Pour l'espace F_h des fonctions-grille $f^{(h)}$ nous choisissons la norme :

$$\|f^{(h)}\|_{F_h} = \max_n \max_k |f^{(h)}(k\Delta X, n\Delta t)| \quad \dots\dots\dots(2.2.2)$$

Les opérateurs L et L_h définis par (1.1.1) et (2.1.1) sont homogènes de sorte que $f(X,t)=0$ et $f^{(h)}(k\Delta X, n\Delta t)=0$. Toutefois la définition du maillage M_f est nécessaire pour comprendre la définition suivante, donnée par GODUNOV et RYABENKI [6] p.77, de l'approximation :

L'équation aux différences $L_h w^{(h)} = 0$
 approche l'équation différentielle
 $Lw = 0$ à l'ordre p en h par rapport
 à la fonction $w(X,t)$ si :

$$\|L_h [w]_h - \{Lw\}_h\|_{F_h} \leq M_1 h^p \quad \dots\dots\dots(2.2.3)$$

où M_1 est indépendant de h .

Ainsi l'approximation est définie sur un maillage M_f , qui peut être, d'ailleurs, le même que M_w . Pour que l'approximation du problème soit vraiment de l'ordre p en h il faut en plus de (2.2.3) que l'approximation des conditions aux limites soit de même ordre, c'est-à-dire que :

$$\|1_h [w]_h - \{1w\}_h\|_{\Phi_h} \leq M_2 h^p \quad \dots\dots\dots(2.2.4)$$

où M_2 est indépendant de h .

Pour déterminer l'ordre d'approximation de (1.1.1) - (1.1.2) par (2.1.1) - (2.1.2) nous admettons que Z et U ont des propriétés de continuité suffisantes et nous développons les termes des équations (2.1.1) en série de Taylor autour du point $[k\Delta X, (n+1)\Delta t]$. Après substitution des développements dans (2.1.1) et en négligeant les termes d'ordre supérieur nous trouvons :

$$(L_h [w]_h)_{k\Delta X}^{(n+1)\Delta t} = \begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + R_1 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial x} + R_2 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(2.2.5)$$

où :

$$R_1 = \frac{r\Delta X}{4} (1-2\theta) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\Delta X^2}{12} \{2r^2(2-3\theta)-1\} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - 3r(2\theta-1) \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} +$$

$$+ \frac{\Delta X^3}{24} \{(-1-2r^2(3\theta-2))\} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \{r(1-4\theta) + r^2(3-4\theta)\} \frac{\partial^4 z}{\partial x^4}] + \dots\dots\dots(2.2.6a)$$

$$R_2 = \frac{r\Delta X}{4} (1-2\theta) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\Delta X^2}{12} \{2r^2(2-3\theta)-1\} \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} - 3r(2\theta-1) \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} +$$

$$+ \frac{\Delta X^3}{24} \{(-1-2r^2(3\theta-2))\} \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + \{r(1-4\theta) + r^2(3-4\theta)\} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \dots\dots\dots(2.2.6b)$$

$$r = \frac{\Delta t}{\Delta X};$$

Nous pouvons alors écrire :

$$\| L_h [w]_h - \{Lw\}_h \|_{r_h} = \max \begin{bmatrix} |R_1| \\ |R_2| \end{bmatrix} \dots\dots\dots(2.2.7)$$

On remarque que $\max (|R_1|, |R_2|) = O(h)$ pour les valeurs arbitraires de θ et de r . Pour le cas spécial $\theta = \frac{1}{2}$ nous trouvons $\max (|R_1|, |R_2|) = O(h^2)$ et si de plus $r = 1$ nous nous apercevons que tous les termes de (2.2.6) disparaissent. Ceci est valable aussi pour des termes d'ordre supérieur, négligés dans (2.2.6). Cela donne $L_h [w]_h = \{Lw\}_h$. Ce résultat peut être prouvé rigoureusement en résolvant le système (1.1.1) à l'aide de la méthode des caractéristiques. On s'aperçoit alors que les noeuds du réseau des caractéristiques correspondent dans le plan (X, t) aux points du maillage M_w . Ainsi les deux méthodes coïncident pour le cas particulier.

Les conditions aux limites (2.1.2) ont été choisies de sorte qu'elles puissent être imposées d'une façon exacte (les valeurs des fonctions cherchées sont connues sur les frontières). Ce sont d'ailleurs les conditions rencontrées le plus souvent pour les cas réels. Toutefois pour certains problèmes on peut avoir les conditions différentes de celles-ci, et il faut faire alors en sorte que l'ordre de leur approximation convienne à celui des équations (1.1.1).

CONCLUSIONS :

- pour les valeurs arbitraires de θ le système aux différences finies (2.1.1) - (2.1.2) constitue une approximation de l'ordre 1 en h du système différentiel (1.1.1) - (1.1.2);
- pour le cas $\theta = \frac{1}{2}$ et r arbitraire, l'approximation est de l'ordre 2 en h ;
- pour le cas $\theta = \frac{1}{2}$ et $r = 1$ le système aux différences finies correspond exactement au système différentiel aux points du maillage M_p .

2.3. METHODE DE RESOLUTION DES EQUATIONS AUX DIFFERENCES

Le schéma implicite (2.1.1) étendu à tous les points k du maillage M_w au niveau $n\Delta t$ mène à un système d'équations linéaires pour déterminer les valeurs de $z^{(h)}$ et $u^{(h)}$ au temps $(n+1)\Delta t$. Ces équations doivent être résolues à chaque pas de temps en tenant compte des conditions aux limites $k = 0$ et $k = N$.

Nous avons utilisé la méthode du "double balayage" souvent appliquée pour les systèmes d'équations provenant d'équations différentielles ordinaires ou partielles de type parabolique.

Posons :

$$\begin{aligned}
 U_{k+1}^{n+1} - U_{k+1}^n &= \Delta U_{k+1}; & Z_{k+1}^{n+1} - Z_{k+1}^n &= \Delta Z_{k+1}; \\
 & & & \dots\dots(2.3.1) \\
 U_k^{n+1} - U_k^n &= \Delta U_k; & Z_k^{n+1} - Z_k^n &= \Delta Z_k;
 \end{aligned}$$

La substitution dans (2.1.1) nous donne, pour chaque paire de points $(k, k+1)$ du maillage, les deux équations suivantes :

$$\begin{aligned}
 \Delta Z_{k+1} + 2r\theta \Delta U_{k+1} &= -\Delta Z_k + 2r\theta \Delta U_k - 2r(U_{k+1}^n - U_k^n) \\
 2r\theta \Delta Z_{k+1} + \Delta U_{k+1} &= 2r\theta \Delta Z_k - \Delta U_k - 2r(Z_{k+1}^n - Z_k^n)
 \end{aligned}
 \quad \dots\dots(2.3.2)$$

En éliminant ΔU_k de (2.3.2) on obtient :

$$\Delta Z_k = A \Delta Z_{k+1} + B \Delta U_{k+1} + C_k \quad \dots\dots\dots (2.3.3)$$

où :

$$A = \frac{1+4r^2\theta^2}{4r^2\theta^2-1} ; \quad B = \frac{4r\theta}{4r^2\theta^2-1};$$

$$C_k = \frac{2r(U_{k+1}^n - U_k^n) + 4r\theta(Z_{k+1}^n - Z_k^n)}{4r^2\theta^2-1}$$

De même, l'élimination de ΔZ_k de (2.3.2) donne :

$$\Delta U_k = B \Delta Z_{k+1} + A \Delta U_{k+1} + D_k \quad \dots\dots\dots (2.3.3')$$

où :

$$D_k = \frac{2r(Z_{k+1}^n - Z_k^n) + 4r\theta(U_{k+1}^n - U_k^n)}{4r^2\theta^2-1}$$

Les formules (2.3.3) et (2.3.3') montrent, que s'il existe au point k du maillage une relation linéaire entre ΔU_k et ΔZ_k , il existera aussi une relation linéaire entre ΔU_{k+1} et ΔZ_{k+1} . En effet, en posant :

$$\Delta U_k = \Delta Z_k E_k + F_k \quad \dots\dots\dots (2.3.4)$$

et en substituant dans (2.3.3), nous trouvons :

$$\begin{aligned} \Delta U_{k+1} = & \frac{-4r\theta + E_k(1+4r^2\theta^2)}{-4r\theta E_k + (1+4r^2\theta^2)} \Delta Z_{k+1} + \\ & + \frac{2r(U_{k+1}^n - U_k^n)(E_k - 2r\theta) - 2r(Z_{k+1}^n - Z_k^n)(1-2r\theta E_k) - F_k(1-4r^2\theta^2)}{(1+4r^2\theta^2) - 4r\theta E_k} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (2.3.5)$$

Cette relation peut s'écrire sous la forme :

$$\Delta U_{k+1} = \Delta Z_{k+1} E_{k+1} + F_{k+1} \quad \dots\dots\dots (2.3.6)$$

Les formules (2.3.3) et (2.3.5) - (2.3.6) suggèrent une méthode économique pour résoudre les équations (2.3.2) par rapport à ΔZ et ΔU .

A l'instant $n\Delta t$ nous connaissons U et Z pour tous les points $k = 0, 1, 2, \dots, N$. Nous voulons calculer les valeurs de U et Z au temps $(n+1)\Delta t$. A la limite gauche $k=0$ nous connaissons $u_0^{n+1} = \tilde{\psi}_0^{n+1}$ (condition imposée par (2.1.3)), c'est-à-dire $\Delta U_0 = \tilde{\psi}_0^{n+1} - \tilde{\psi}_0^n = \tilde{\Delta\psi}_0$. Or il existe une relation linéaire $\Delta U_0 = E_0 \Delta Z_0 + F_0$ à la limite gauche, nous pouvons donc déterminer les valeurs E_0 et F_0 telles que $\Delta U_0 = \tilde{\Delta\psi}_0$. De même, on peut déterminer E_0 et F_0 si Z_0^{n+1} est imposé à la limite considérée. Une fois E_0 et F_0 déterminés, nous pouvons trouver, de proche en proche, E_k et F_k pour tous les points $k=1, 2, \dots, N$, à partir des formules :

$$E_{k+1} = \frac{E_k(1+4r^2\theta^2) - 4r\theta}{(1+4r^2\theta^2) - 4r\theta E_k} \quad \dots(2.3.7)$$

$$F_{k+1} = \frac{2r(U_{k+1}^n - U_k^n)(E_k - 2r\theta) - 2r(Z_{k+1}^n - Z_k^n)(1 - 2r\theta E_k) - F_k(1 - 4r^2\theta^2)}{(1+4r^2\theta^2) - 4r\theta E_k} \quad \dots(2.3.7')$$

De même, nous pouvons calculer les coefficients A , B et C_k de la formule (2.3.3). A la limite droite, au point $k=N$, nous trouverons une deuxième condition imposée, par exemple $Z_N^{n+1} = \tilde{\psi}_N^{n+1}$, à partir de laquelle nous pouvons déterminer $\Delta Z_N = \tilde{\psi}_N^{n+1} - Z_N^n = \tilde{\Delta\psi}_N$. Connaissant E_N et F_N nous déterminons $\Delta U_N = E_N \tilde{\Delta\psi}_N + F_N$ et ensuite, en nous servant des relation (2.3.3) et (2.3.6) et en calculant de droite à gauche ΔZ_k et ΔU_k à l'aide des coefficients stockés A , B , C_k , E_k et F_k , nous résolvons le système entier. Dans le cas étudié ici, application de cette méthode signifie la triangularisation de la matrice des équations pour ΔU et ΔZ et le retour arrière.

Cette méthode a été appliquée simultanément par les auteurs russes (voir [1], [5], [6]) et américains (voir [11]) pour les équations d'un type différent du nôtre, et pour cette raison quelques remarques s'imposent.

Premièrement il faut que la relation entre ΔZ et ΔU à la limite soit linéaire, sinon tout le système devient non linéaire et la méthode ne peut pas être appliquée telle quelle.

Ensuite la question de l'existence de la solution se pose. En effet, les équations aux différences (2.3.6) et (2.3.7) sont non linéaires du 1er ordre et il n'existe pas de théorie générale de telles équations. Sauf quelques cas exceptionnels on ne connaît pas leurs solutions analytiques. Toutefois on peut remarquer que si E_k est fini, F_k doit l'être aussi, ou alors ΔZ et ΔU ne le sont pas. Ainsi, limitons nous à examiner l'équation :

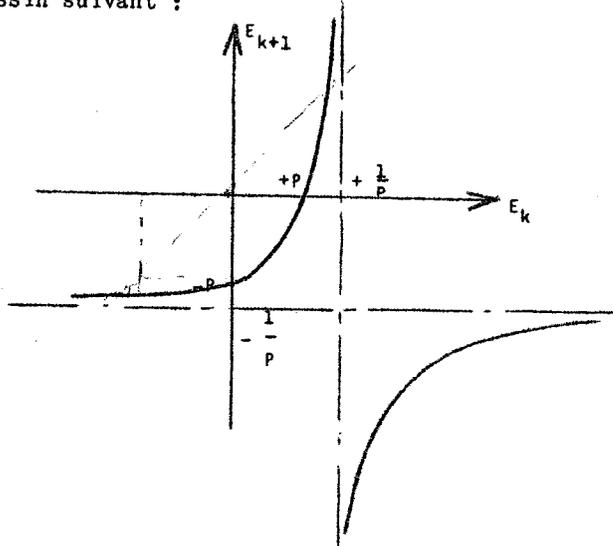
$$E_{k+1} = \frac{E_k - p}{1 - pE_k} \quad \dots(2.3.7a)$$

où :

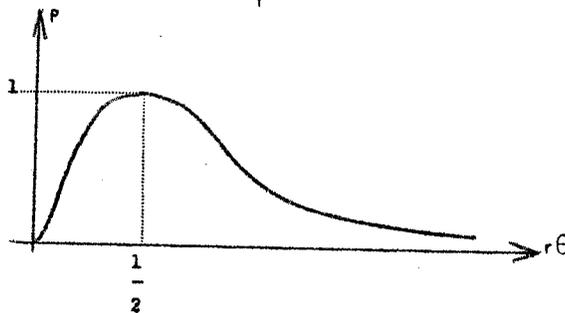
$$p = \frac{4r\theta}{1+4r^2\theta^2} ; \quad r = \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

Nous voulons savoir si les valeurs de E_k augmentent démesurément avec k en fonction de la valeur initiale E_0 . Remarquons que :

La courbe $E_{k+1} = f(E_k)$ est tracée en fonction du paramètre p , sur le dessin suivant :



C'est une hyperbole ayant pour centre le point $(\frac{1}{p}, -\frac{1}{p})$, et pour asymptotes $E_k = \frac{1}{p}$ et $E_{k+1} = \frac{1}{p}$. Le dessin montre clairement que E_0 ne doit pas être égal à $\frac{1}{p}$. On voit aussi bien que même si E_k est proche de $\frac{1}{p}$, E_{k+1} en sera assez éloigné. La fonction p , toujours positive parce que $r\theta \geq 0$, a la forme suivante :



Donc $0 \leq p \leq 1$. En choisissant $0 < r\theta < \infty$ de façon à avoir toujours $p > 0$, et en choisissant $E_0 \neq \frac{1}{p}$, nous pouvons toujours assurer la stabilité des relations de récurrence (2.3.7).

Il est intéressant d'examiner le cas spécial $\theta = \frac{1}{2}$ et $r = \frac{\Delta t}{\Delta x} = 1$.

Nous avons alors :

$$E_{k+1} = \frac{E_k - 1}{1 - E_k} = -1$$

Quelle que soit la valeur de E_k . Autrement dit, l'influence d'une perturbation pendant un cycle de calcul Δt ne s'étend que sur la distance d'un Δx . Cela est tout à fait normal puisque, comme nous l'avons souligné dans le § 2.2., ce cas correspond à la solution exacte à l'aide de la méthode des caractéristiques, où une perturbation pendant le temps Δt ne se déplace qu'à la distance Δx .

2.4. STABILITE NUMERIQUE. DEFINITIONS. METHODE UTILISEE POUR L'ETUDIER

2.4.1. Définitions

Soit le système d'équations aux différences finies :

$$L_h w^{(h)} = f^{(h)} \dots\dots\dots(2.4.1)$$

ayant des conditions au limites définies par :

$$l_h w^{(h)} = \varphi^{(h)} \dots\dots\dots(2.4.2)$$

Supposons que pour n'importe quel $f^{(h)}$, $f^{(h)} \in F_h$, et n'importe quel $\varphi^{(h)}$, $\varphi^{(h)} \in \phi_h$, le problème (2.4.1) - (2.4.2) ait une solution unique $w^{(h)}$ appartenant à l'espace normé w_h des fonctions-grille. Supposons aussi les fonctions $L_h w^{(h)}$ et $l_h w^{(h)}$ construites à partir d'une fonction $w^{(h)}$ appartiennent à leur tour aux deux espaces normés, respectivement F_h et ϕ_h . Nous utiliserons la définition suivante (voir [6] p. 45).

Le système d'équations $L_h w^{(h)} = f^{(h)}$ avec les conditions au limites $l_h w^{(h)} = \varphi^{(h)}$ est stable si sa solution $w^{(h)}$ satisfait à l'inégalité :

$$\|w^{(h)}\|_{w_h} < N_1 \|f^{(h)}\|_{F_h} + N_2 \|\varphi^{(h)}\|_{\phi_h} \dots\dots\dots (2.4.3)$$

avec N_1 et N_2 indépendants de h .

La convergence peut être définie par un théorème dont la preuve se trouve aussi dans [6], pp. 45-46 :

THEOREME :

Soit un système aux différences $L_h w^{(h)} = f^{(h)}$ avec les conditions aux limites $l_h w^{(h)} = \varphi^{(h)}$, qui est une approximation à l'ordre p en h du système différentiel $Lw=f$ avec les conditions aux limites $lw=\varphi$. Alors la stabilité du système aux différences finies entraîne la convergence à l'ordre p en h de sa solution vers la solution du système différentiel.

Plus précisément, l'estimation :

$$\| [w]_h - w^{(h)} \|_{W_h} \leq Nh^D \dots\dots\dots(2.4.4)$$

est satisfaite, où N est une constante indépendante de h .

2.4.2. Réduction du système aux différences à la forme $w^{n+1} = R_h w^n + \tau \zeta^n$

Les équations aux différences (2.4.1) avec les conditions aux limites (2.4.2) nous permettent, en partant des valeurs $w^{(h)}$ sur un ou plusieurs niveaux initiaux, de calculer $w^{(h)}$ aux niveaux suivants. Ainsi nous pouvons "stratifier" la solution $w^{(h)}$, déterminée sur le plan bidimensionnel (XOt) , en la remplaçant par une séquence des fonctions w^0, w^1, \dots, w^M déterminées sur les maillages unidimensionnels. Soit W'_h l'espace des fonctions-grille monodimensionnelles définies ainsi. La norme correspondante sera la norme définie, par exemple, selon (2.1.6) :

$$\| w^n \|_{W'_h} = \max_k |U_k^n| + \max_k |Z_k^n|;$$

Dans tous les cas de calcul par niveaux, ou de solutions stratifiées, les valeurs de la solution au niveau $(n+1)$, $w^{n+1} = \{w^{n+1}\}$, peuvent être écrites sous la forme d'une somme :

$$w^{n+1} = v^{n+1} + \tau \zeta^n \dots\dots\dots(2.4.5)$$

où : $\tau = \Delta t$

$v^{n+1} = \{v^{n+1}\}$ tient compte des valeurs de la solution au niveau n .

$\zeta^n = \{\zeta^n\}$ dépend uniquement du côté droit de l'équation aux différences et des conditions aux limites.

Le terme v^{n+1} est déterminé à partir de w^n et nous pouvons l'écrire sous la forme $v^{n+1} = R_h w^n$, où R_h est un opérateur faisant correspondre à une fonction grille $w^{(h)}$ du W'_h une autre fonction du même espace. Ainsi (2.4.5) peut s'écrire

$$w^{n+1} = R_h w^n + \tau \zeta^n \dots\dots\dots(2.4.6)$$

La structure de R_h est donnée, aux points qui ne sont pas affectés par les conditions aux limites, par la structure de l'opérateur L_h , c'est-à-dire par le schéma des différences finies. Mais la définition de R_h change aux points-limite et par conséquent la définition de ζ^n change aussi. On dispose de plusieurs possibilités

pour le couple (R_h, ζ^n) , le choix de l'un entraînant une structure bien définie pour l'autre. En réalité nous n'avons pas une liberté totale de choix : elle est limitée par la définition des conditions aux limites $1_h w^{(h)}$.

La réduction du système aux différences finies à la forme (2.4.6) rend possible l'application d'un théorème concernant les conditions suffisantes et nécessaires à la stabilité (Cf. [6], chapitre 6). Avant de formuler ce théorème, il faut définir 3 conditions préalables.

Condition (i)
$$\|\zeta^n\| \leq K_1 \|f^{(h)}\|_{F_h} + K_2 \|\varphi^{(h)}\|_{\phi_h} \dots\dots(2.4.7)$$

où K_1 et K_2 sont les constantes ne dépendant pas de h , $f^{(h)}$ et $\varphi^{(h)}$.

Condition (ii)
$$\|w^0\| \leq K_3 \|f^{(h)}\|_{F_h} + K_4 \|\varphi^{(h)}\|_{\phi_h} \dots\dots(2.4.8)$$

où K_3 et K_4 ne dépendent pas de h , $f^{(h)}$ ou $\varphi^{(h)}$

Condition (iii) Soit le système aux différences $L_h w^{(h)} = f^{(h)}$, $1_h w^{(h)} = \varphi^{(h)}$, réduit à la forme $w^{n+1} = R_h w^n + \tau \zeta^n$, w^0 étant donné. Prenons une fonction \bar{w}^0 appartenant à l'espace W'_h et construisons les fonctions-grille $\bar{w}^1, \bar{w}^2, \dots, \bar{w}^n, \dots, \bar{w}^M$ selon la formule recursive $\bar{w}^{n+1} = R_h \bar{w}^n$. La totalité des fonctions-grille $\{\bar{w}^n\}$ ($n = 0, 1, 2, \dots, n, \dots, M$; $M = \frac{T}{\Delta t}$), forme une certaine fonction-grille $\bar{w}^{(h)} \in W_h$. Considérons le système $L_h \bar{w}^{(h)} = \bar{f}^{(h)}$, $1_h \bar{w}^{(h)} = \bar{\varphi}^{(h)}$. La condition (iii) s'écrit alors :

$$\|\bar{f}^{(h)}\|_{F_h} + \|\bar{\varphi}^{(h)}\|_{\phi_h} \leq K_5 \|\bar{w}^0\| \dots\dots(2.4.9)$$

où K_5 ne dépend pas de h ni de \bar{w}^0 .

THEOREME :

Si le système aux différences finies $L_h w^{(h)} = f^{(h)}$, $1_h w^{(h)} = \varphi^{(h)}$ est réduit à la forme (2.4.6) $w^{n+1} = R_h w^n + \tau \zeta^n$, w^0 étant donné, nous pouvons utiliser l'opérateur R_h pour étudier la stabilité de ce système.

Si la réduction à (2.4.6) a été effectuée en satisfaisant à la condition (iii), alors la condition $\|R_h^n\| < K$ est la condition nécessaire à la stabilité. Si la réduction à (2.4.6) a été effectuée en satisfaisant aux conditions (i) et (ii), alors la condition $\|R_h^n\| < K$ est suffisante à la stabilité.

Où :
$$\|R_h\| = \sup_{X \neq 0} \frac{\|R_h X\|}{\|X\|}$$

Il est bien entendu que K ne dépend pas de h et que n prend pour chaque h toutes les valeurs pour lesquelles la région de définition de w^n appartient à la région bidimensionnelle de définition de $w^{(h)}$.

Remarquons que les trois conditions et le théorème exigent une relation bien définie entre les normes choisies dans les espaces W'_h , F_h , ϕ_h et l'opérateur R_h (la forme du vecteur ζ^n ne dépend que du choix de R_h).

2.4.3. Etude des opérateurs R_h

L'étude de la stabilité peut donc être ramenée à l'étude de l'opérateur R_h , pourvu que certaines conditions soient satisfaites. Nous utiliserons la méthode décrite dans [6], fondée sur le concept du spectre d'une famille d'opérateurs.

DEFINITION :

Le point λ dans un plan complexe est un point du spectre de l'opérateur R_h si, quel que soit $\epsilon > 0$, l'inégalité $\|R_h w - \lambda w\| \leq \epsilon \|w\|$ est satisfaite pour une fonction $w \neq 0$ de l'espace W'_h (où W'_h est le domaine de définition de R_h).

La famille des opérateurs $\{R_h\}$ est l'ensemble de ces opérateurs formé par la variation du pas d'espace h . Nous supposons que h peut être arbitrairement petit et qu'il existe la relation $\tau = \tau(h)$.

Le nombre complexe Λ est un point du spectre de la famille des opérateurs $\{R_h\}$ si, quel que soit $\epsilon > 0$, il existe un $h_0 > 0$ tel que pour tout h , $0 < h < h_0$, il existe un vecteur $w \in W'_h$ satisfaisant à l'inégalité :

$$\|R_h w - \Lambda w\| \leq \epsilon \|w\|$$

Le spectre d'une famille d'opérateurs ne s'obtient pas toujours comme domaine "limite" des points du spectre d'un opérateur quand $h \rightarrow 0$ (tout en conservant le rapport $r = \frac{\tau}{h}$). Cela n'est vrai que pour un problème aux valeurs initiales et sans limites latérales.

Dans le cas où R_h correspond à un problème à deux limites latérales, le spectre de la famille d'opérateurs $\{R_h\}$ est la réunion des spectres Λ_Y , Λ_X et Λ_Z des trois familles d'opérateurs $\{Y_h\}$, $\{X_h\}$, $\{Z_h\}$, définies ci-dessous.

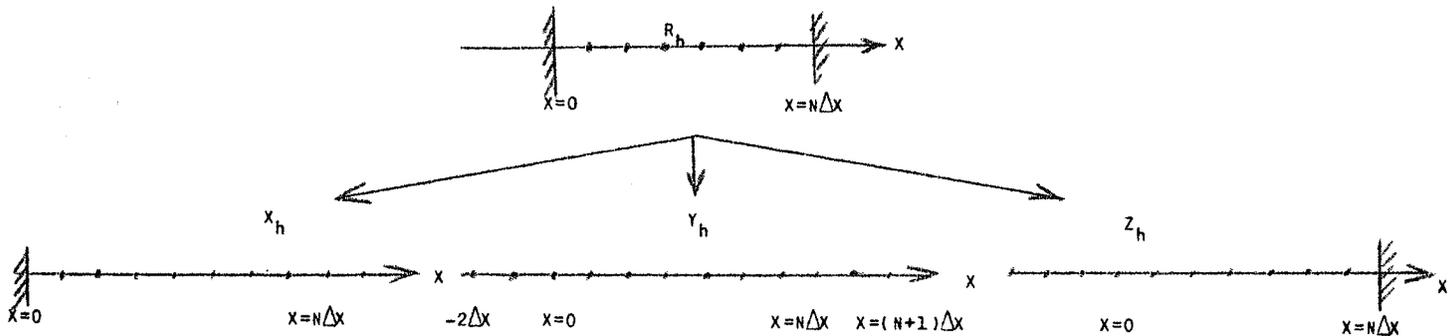
DEFINITION :

Soit Y_h l'opérateur construit à partir de R_h appliqué aux points $k = \dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, N, \dots$. Y_h peut être considéré comme l'opérateur R_h pour lequel les conditions aux limites ont été déplacées vers $+\infty$ et $-\infty$.

Soit X_h l'opérateur construit à partir de R_h en ne conservant que la condition à la limite gauche. C'est l'opérateur R_h appliqué aux points $k = 0, 1, 2, \dots, N, \dots$.

Soit Z_h l'opérateur construit à partir de R_h en ne conservant que la limite droite, c'est-à-dire appliqué aux points $k = \dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, N$.

Le dessin suivant peut servir d'illustration de ces définitions :



THEOREME :

D'après Gelfand, on prouve pour une grande classe de problèmes aux limites latérales (voir [6], chapitre VI et p. 227) que :

- 1° Le spectre de la famille $\{Y_h\}$ est identique au spectre Λ_Y obtenu à partir des points λ tels que $Y_h w - \lambda w = 0$, pour $w \neq 0$ et $h \rightarrow 0$.
- 2° Le spectre de la famille $\{X_h\}$ est identique à la réunion du spectre Λ_Y , et du spectre Λ_X obtenu à partir des points λ tels que $X_h w - \lambda w = 0$, pour $w \neq 0$ et $h \rightarrow 0$.

- 3° Le spectre de la famille $\{Z_h\}$ est identique à la réunion du spectre Λ_Y , et du spectre Λ_Z obtenu à partir des points λ tels que $Z_h w - \lambda w = 0$, pour $w \neq 0$ et $h \rightarrow 0$.
- 4° Le spectre Λ de la famille $\{R_h\}$ est identique à la réunion des spectres $\Lambda_Y, \Lambda_X, \Lambda_Z$.

THEOREME :

Une condition nécessaire pour que $\|R_h^n\| < K$, c'est-à-dire pour que R_h^n soit uniformément borné, est que le spectre de la famille $\{R_h\}$ soit contenu dans le cercle unitaire $|\lambda| \leq 1$.

(Pour la preuve voir [6], pp 188 - 190).

Ainsi à l'aide des deux derniers théorèmes nous pouvons, pour schéma donné des différences finies, vérifier si la condition nécessaire pour que $\|R_h^n\| < K$ est satisfaite. Dans la plupart des cas cela permet d'éliminer les schémas instables. Pour certains cas nous pouvons déterminer aussi la condition suffisante pour que R_h^n soit borné uniformément.

2.5. ETUDE DE LA STABILITE DU SCHEMA (2.1.1) - (2.1.2)
 APPLICATIONS DES THEOREMES DU § 2.4

2.5.1. Réduction du système à $w^{n+1} = R_h w^n + \tau \zeta^n$

Ecrivons le système d'équations (2.1.1) avec les conditions aux limites (2.1.2) sous la forme $w^{n+1} = R_h w^n + \tau \zeta^n$ convenable à l'étude de la stabilité selon la méthode exposée dans le § 2.4. soit :

$$v_k = R_h w_k^n = R_h \begin{bmatrix} z_k^n \\ u_k^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{v}_k \\ \underline{v}_k \end{bmatrix} \dots\dots\dots(2.5.1)$$

$$\zeta_k^n = \frac{w_k^{n+1} - R_h w_k^n}{\Delta t} = \begin{bmatrix} \bar{\zeta}_k \\ \underline{\zeta}_k \end{bmatrix} \dots\dots\dots(2.5.2)$$

En mettant $r = \frac{\Delta t}{\Delta x}$ équations (2.1d) peuvent s'écrire sous la forme (en remplaçant

$$w_h^{n+1} = \begin{bmatrix} z_h^{n+1} \\ U_h^{n+1} \end{bmatrix} \quad \text{par} \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{v}_k + \Delta t \bar{\zeta}_k \\ \bar{v}_k + \Delta t \bar{\zeta}_k \end{array} \right\} :$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{v}_{k+1} - z_{k+1}^n + \bar{v}_k - z_k^n + 2\theta r (\bar{v}_{k+1} - \bar{v}_k) + 2(1-\theta)r (U_{k+1}^n - U_k^n) + \\ + [\bar{\zeta}_{k+1} + \bar{\zeta}_k + 2r\theta (\bar{\zeta}_{k+1} - \bar{\zeta}_k)] \cdot \Delta t = 0 \\ \bar{v}_{k+1} - U_{k+1}^n + \bar{v}_k - U_k^n + 2\theta r (\bar{v}_{k+1} - \bar{v}_k) + 2(1-\theta)r (z_{k+1}^n - z_k^n) + \\ + [\bar{\zeta}_{k+1} + \bar{\zeta}_k + 2r\theta (\bar{\zeta}_{k+1} - \bar{\zeta}_k)] \cdot \Delta t = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots(2.5.3)$$

Cela nous permet de définir l'opérateur R_h par :

$$\left. \begin{aligned} \bar{v}_{k+1} + \bar{v}_k + 2\theta r (\bar{v}_{k+1} - \bar{v}_k) = z_{k+1}^n + z_k^n - 2(1-\theta)r (U_{k+1}^n - U_k^n) \\ \bar{v}_{k+1} + \bar{v}_k + 2\theta r (\bar{v}_{k+1} - \bar{v}_k) = U_{k+1}^n + U_k^n - 2(1-\theta)r (z_{k+1}^n - z_k^n) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{pour tous les} \\ \text{points} \\ k = 0, 1, 2, 3, \dots, N-1. \end{array} \dots\dots(2.5.4)$$

$$v_0 = \begin{bmatrix} \bar{v}_0 \\ \bar{v}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_0^n \\ \approx^n \\ \psi_0 \end{bmatrix} \quad \text{pour le point } k=0; \quad v_N = \begin{bmatrix} \bar{v}_N \\ \bar{v}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \approx_N^n \\ \psi_0 \end{bmatrix} \quad \text{pour le point } k=N$$

et par conséquent $\bar{\zeta}_k$, défini par :

$$\left. \begin{aligned} \bar{\zeta}_{k+1} + 2\theta r (\bar{\zeta}_{k+1} - \bar{\zeta}_k) + \bar{\zeta}_k = 0 \\ \bar{\zeta}_{k+1} + 2\theta r (\bar{\zeta}_{k+1} - \bar{\zeta}_k) + \bar{\zeta}_k = 0 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{pour les} \\ \text{points} \\ k = 0, 1, \dots, N-1 \end{array} \dots\dots(2.5.5)$$

Pour la limite $k=0$ nous avons :

$$\zeta_0 = \frac{w_0^{n+1} - v_0}{\Delta t}, \quad \text{où } w_0^{n+1} = \begin{bmatrix} z_0^{n+1} \\ \approx^{n+1} \\ \psi_0 \end{bmatrix}$$

ici \approx^{n+1} est la "vitesse" imposée à cette limite tandis que z_0^{n+1} est le "niveau" résultant du calcul et inconnu pour le moment.

Donc :

$$\zeta_0 = \begin{bmatrix} \frac{z_0^{n+1} - z_0^n}{\Delta t} \\ \frac{\tilde{\psi}_0^{n+1} - \tilde{\psi}_0^n}{\Delta t} \end{bmatrix}$$

De même, pour le point limite $k=N$, nous trouvons :

$$\zeta_N = \begin{bmatrix} \frac{\tilde{\psi}_N^{n+1} - \tilde{\psi}_N^n}{\Delta t} \\ \frac{U_N^{n+1} - U_N^n}{\Delta t} \end{bmatrix} \dots\dots(2.5.7)$$

2.5.2. Etude de l'opérateur R_h

Nous allons chercher les spectres de trois opérateurs définis dans le § 2.4.

a/ Opérateur Y_h . Posons :

$$\left. \begin{aligned} \bar{v}_{k+1} &= \xi^{n+1} e^{1(k+1)\alpha} ; & \bar{v}_{k+1} &= \eta^{n+1} e^{1(k+1)\alpha} \\ \bar{v}_k &= \xi^{n+1} e^{1k\alpha} ; & \bar{v}_k &= \eta^{n+1} e^{1k\alpha} \end{aligned} \right\} \dots\dots(2.5.8)$$

$$\left. \begin{aligned} z_{k+1}^n &= \xi^n e^{1(k+1)\alpha} ; & U_{k+1}^n &= \eta^n e^{1(k+1)\alpha} \\ z_k^n &= \xi^n e^{1k\alpha} ; & U_k^n &= \eta^n e^{1k\alpha} \end{aligned} \right\} \dots\dots(2.5.8')$$

où $\alpha = m\Delta X$.

Les formules (2.5.8) et (2.5.8') proviennent de la représentation de la solution w_k^n par une série de Fourier du type :

$$w_k^n = \sum_{-\infty}^{\infty} (m) (\varphi(m))^n e^{1km\Delta X}$$

dans laquelle $\varphi(m) = \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}$ sont les coefficients de m et t .

En substituant (2.5.8) et (2.5.8') dans (2.5.4) nous trouvons :

$$\begin{bmatrix} \xi^{n+1} \\ \eta^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1-K^2\theta(\theta-1)}{1-K^2\theta^2} & -\frac{K}{1-K^2\theta^2} \\ \frac{K}{1-K^2\theta^2} & \frac{1-K^2\theta(\theta-1)}{1-K^2\theta^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi^n \\ \eta^n \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots(2.5.9)$$

où $K = 2r \frac{e^{i\alpha} - 1}{e^{i\alpha+1}}$;

Nous pouvons écrire (2.5.9) sous une forme symbolique :

$$\begin{bmatrix} \xi^{n+1} \\ \eta^{n+1} \end{bmatrix} = [G] \cdot \begin{bmatrix} \xi^n \\ \eta^n \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots(2.5.10)$$

On s'aperçoit que la matrice G correspond à la matrice d'amplification utilisée pour étudier la stabilité numérique selon la méthode de RICHTMYER [11], page 55 (voir pour l'application à notre schéma [3]). Cette matrice G correspond ici à l'opérateur Y_h . Déterminons le spectre λ de Y_h . A partir de (2.5.9) nous trouvons :

$$\lambda_{1,2} = 1 - \frac{s^2\theta}{1+s^2\theta^2} \pm i \frac{s}{1+s^2\theta^2} \quad \dots\dots\dots(2.5.11)$$

où $s = 2 \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$.

On voit immédiatement que le spectre de la famille des opérateurs $\{Y_h\}$, pour r donné, est $\Delta_Y = \lim_{h \rightarrow 0} \lambda = \lambda_{1,2}$ de la formule (2.5.11).

On peut vérifier que la matrice G est normale, c'est-à-dire qu'elle commute avec sa conjuguée hermitique G^* : $GG^* = G^*G$. Pour une matrice normale la condition nécessaire et suffisante pour que $\|G^n\| = \|Y_h^n\| < K$, est $|\lambda_1| \leq 1$.

A partir de (2.5.11) nous avons :

$$|\lambda_{1,2}| = \left\{ \left(1 - \frac{s^2\theta}{1+s^2\theta^2} \right)^2 + \frac{s^2}{(1+s^2\theta^2)^2} \right\}^{1/2} \quad \dots\dots\dots(2.5.12)$$

d'où $|\lambda_{1,2}| = \left\{ 1 + \frac{s^2(1-2\theta)}{1+s^2\theta^2} \right\}^{1/2} \quad \dots\dots\dots(2.5.13)$

Donc :

- Pour $1-2\theta > 0$, c'est-à-dire $\theta < \frac{1}{2}$, nous trouvons $\frac{s^2(1-2\theta)}{1+s^2\theta^2} > 0$ et $|\lambda_{1,2}| > 1$.

- Pour $1-2\theta \leq 0$, c'est-à-dire $\theta \geq \frac{1}{2}$, nous trouvons $\frac{s^2(1-2\theta)}{1+s^2\theta^2} \leq 0$ et $|\lambda_{1,2}| \leq 1$.

Ainsi nous avons trouvé que pour $0 \leq \theta \leq \frac{1}{2}$ le spectre $|\lambda| > 1$, donc le schéma est instable, car la condition nécessaire n'est pas satisfaite. De plus nous avons trouvé la condition nécessaire et suffisante pour que $\|Y_h^n\| < K : \frac{1}{2} \leq \theta \leq 1$.

Ces conclusions sont suffisantes pour déterminer la stabilité du calcul au sens où l'entend RICHTMYER. En effet la définition de la stabilité donnée par RICHTMYER ne doit être utilisée que pour étudier les problèmes à valeurs initiales, sans conditions aux limites. Pour ce genre de problèmes, rarement rencontrés dans la pratique, il suffit de considérer l'opérateur Y_h seul. Ici nous irons plus loin en tenant compte des conditions aux limites.

b/ Opérateur X_h . Nous cherchons le point du spectre, λ , de l'opérateur X_h satisfaisant à l'équation $X_h w_0^n - \lambda w_0^n = 0$. Cela est suffisant puisque tous les autres points du spectre de la famille $\{X_h\}$ sont les mêmes que les points du spectre de $\{Y_h\}$.

$$X_h w_0^n = R_h w_0^n = v_0 = \begin{bmatrix} z_0^n \\ \tilde{\psi}_0^n \end{bmatrix}$$

donc :

$$\begin{bmatrix} z_0^n \\ \tilde{\psi}_0^n \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} z_0^n \\ U_0^n \end{bmatrix} = 0, \text{ d'où } \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ \tilde{\psi}_0^n \\ U_0^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} ;$$

De la condition à la limite $0: \tilde{\psi}_0^n = U_0^n$ et alors $\lambda = 1$.

Nous concluons que le spectre de $\{X_h\}$ se compose du spectre de $\{Y_h\}$ et du point 1.

c/ Opérateur Z_h . Le spectre de la famille $\{Z_h\}$ se compose des points du spectre de la famille $\{Y_h\}$ et du point correspondant à $Z_h w_N^n - \lambda w_N^n = 0$.

Or :
$$Z_h^n w_N^n = R_h^n w_N^n = v_N^n = \begin{bmatrix} \tilde{\psi}_N^n \\ \psi_N^n \\ U_N^n \end{bmatrix} ; \text{ Donc } \begin{bmatrix} \tilde{\psi}_N^n \\ \psi_N^n \\ U_N^n \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} z_N^n \\ z_N^n \\ U_N^n \end{bmatrix} = 0$$

et : $\lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, puisque $\psi_N^n = z_N^n$ des conditions à la limite N. D'où $\lambda=1$.
Cela détermine le point manquant du spectre de $\{Z_h\}$ qui est le point 1.

En admettant que le spectre Λ de la famille des operateurs $\{R_h\}$ soit constitué par les spectres des familles $\{X_h\}$, $\{Y_h\}$ et $\{Z_h\}$: $\Lambda = \Lambda_X + \Lambda_Y + \Lambda_Z$, nous arrivons à la conclusion suivante :

- pour $\theta < \frac{1}{2}$, le calcul est instable, puisque la condition nécessaire pour que $\|R_h^n\| < K$ n'est pas satisfaite.
- pour $\frac{1}{2} \leq \theta \leq 1$ nous avons toujours $\|R_h^n\| < K$.

2.5.3. Etude des conditions supplémentaires

Pour nous assurer de la stabilité du schéma (2.1.1) - (2.1.2) pour le cas $\frac{1}{2} \leq \theta \leq 1$ il faut encore vérifier les conditions (i) et (ii) du § 2.4.

La condition (i), appliqué au schéma considéré, stipule $\|\zeta^n\| \leq K_2 \|\phi^{(h)}\|_{\phi_h}$.
Nous constatons que l'équation (2.5.5) peut être réécrite sous la forme :

$$\left. \begin{aligned} (S_k+U)\bar{\zeta}_k + 2r\theta(S_k-U)\bar{\zeta}_k &= 0 \\ 2r\theta(S_k-U)\bar{\zeta}_k + (S_k+U)\bar{\zeta}_k &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.5.14)$$

où S_k et U sont les operateurs définis par :

$$S_k \zeta_k^n = \zeta_{k+1}^n ; U \zeta_k^n = \zeta_k^n$$

De (2.5.14) nous pouvons éliminer $\bar{\zeta}$ et nous obtenons alors :

$$(S_k+U)^2 \bar{\zeta}_k - 4r^2\theta^2(S_k-U)^2 \bar{\zeta}_k = 0$$

ou autrement :

$$\bar{\zeta}_k (1-4r^2\theta^2) + 2\bar{\zeta}_{k+1} (1+4r^2\theta^2) + \bar{\zeta}_{k+2} (1-4r^2\theta^2) = 0 \dots\dots(2.5.15)$$

On sait (voir [6]) qu'un tel système d'équations a une solution unique si les conditions suivantes sont satisfaites :

$$\left. \begin{aligned} 4r^2\theta^2 - 1 > 0 \\ 1 + 4r^2\theta^2 > \frac{1}{2} \cdot 2(4r^2\theta^2 - 1) + \delta ; \quad (\delta > 0) \end{aligned} \right\} \dots\dots(2.5.16)$$

Cette solution unique $\bar{\zeta}_k$ satisfait en plus à la condition :

$$\max_n |\bar{\zeta}_k| \leq \max [|\bar{\zeta}_0|, |\bar{\zeta}_N|] \dots\dots(2.5.17)$$

La première de deux conditions (2.5.16) est satisfaite si $r\theta \geq \frac{1}{2}$. La deuxième est satisfaite toujours pour $\delta \leq 2$. De même nous trouvons, que pour $r\theta \geq \frac{1}{2}$ et $\delta \leq 2$.

$$\max_k |\bar{\zeta}_k| \leq \max [|\bar{\zeta}_0|, |\bar{\zeta}_N|] \dots\dots(2.5.17')$$

Pour le point limite $k=0$ nous avons :

$$\zeta_0 = \begin{bmatrix} \frac{z_0^{n+1} - z_0^n}{\Delta t} \\ \frac{\psi_0^{\approx n+1} - \psi_0^{\approx n}}{\Delta t} \end{bmatrix} \dots\dots(2.5.18)$$

Nous savons, d'après la méthode de la solution des équations aux différences (voir § 2.3) que :

$$U_k^{n+1} - U_k^n = E_k(z_k^{n+1} - z_k^n) + F_k$$

Donc :

$$\frac{z_0^{n+1} - z_0^n}{\Delta t} = \frac{1}{E_0} \cdot \frac{U_0^{n+1} - U_0^n}{\Delta t} - \frac{F_0}{E_0 \Delta t} \dots\dots(2.5.19)$$

d'où :

$$\zeta_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_0} \frac{U_0^{n+1} - U_0^n}{\Delta t} - \frac{F_0}{E_0 \Delta t} \\ \frac{\psi_0^{\approx n+1} - \psi_0^{\approx n}}{\Delta t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_0} \left(\frac{\psi_0^{\approx n+1} - \psi_0^{\approx n}}{\Delta t} - \frac{F_0}{\Delta t} \right) \\ \frac{\psi_0^{\approx n+1} - \psi_0^{\approx n}}{\Delta t} \end{bmatrix} \dots\dots(2.5.20)$$

De même, nous trouvons pour le point $k = N$:

$$\zeta_N = \begin{bmatrix} \frac{\tilde{\psi}_N^{n+1} - \tilde{\psi}_N^n}{\Delta t} \\ \frac{\tilde{\psi}_N^{n+1} - \tilde{\psi}_N^n}{\Delta t} \cdot E_N + \frac{F_N}{\Delta t} \end{bmatrix} \dots\dots(2.5.21)$$

Nous écrivons alors :

$$\|\zeta\| = \max_{k,n} |\zeta| \leq \max_k |\zeta_0| + \max_k |\bar{\zeta}_N| + \max_k |\bar{\zeta}_0| + \max_k |\bar{\zeta}_N|$$

A partir de (2.5.20) et de (2.5.21), en sachant que E_0, E_N, F_0, F_N et Δt sont déterminés et finis, nous trouvons :

$$\|\zeta\| = \max_{k,n} |\zeta| \leq A \cdot \max_n \left| \frac{\tilde{\psi}_0^{n+1} - \tilde{\psi}_0^n}{\Delta t} \right| + B \cdot \max_n \left| \frac{\tilde{\psi}_N^{n+1} - \tilde{\psi}_N^n}{\Delta t} \right| + C \dots\dots(2.5.22)$$

où :

$$A = 1 + \left| \frac{1}{E_0} \right| ; \quad B = 1 + |E_N|;$$

$$C = \frac{1}{\Delta t} (|F_N| + \left| \frac{F_0}{E_0} \right|);$$

En comparant (2.5.22) à la norme dans l'espace ϕ_h (voir la formule (2.1.8)) :

$$\|\varphi^{(h)}\|_{\phi_h} = \max_k |\tilde{\varphi}_k| + \max_k |\tilde{\varphi}_k| + \max_n \left| \frac{\tilde{\psi}_0^{n+1} - \tilde{\psi}_0^{n+1}}{\Delta t} \right| + \max_n \left| \frac{\tilde{\psi}_N^{n+1} - \tilde{\psi}_N^n}{\Delta t} \right|$$

nous constatons que $\|\zeta_k\| \leq K_2 \|\varphi^{(h)}\|_{\phi_h}$.

La norme (2.1.8) est tout à fait "naturelle" puisqu'elle tient compte de la façon dont on résoud les équations aux différences finies-point généralement négligé par les méthodes du type Lax - Richtmyer.

La condition (11) stipule pour le schéma (2.1.1) - (2.1.2) $\|w^0\|_{W'_h} \leq K_4 \|\varphi^{(h)}\|_{\phi_h}$. Elle est satisfaite en vertu de (2.5.22), de la définition de la norme dans l'espace W'_h et du fait que :

$$w_k^0 = \begin{bmatrix} \tilde{\varphi}_k^0 \\ \tilde{\varphi}_k^0 \end{bmatrix}$$

2.6. CONCLUSIONS

Nous constatons que le schéma des différences finies (2.1.1) - (2.1.2) constitue, par rapport aux normes admises dans les espaces w_h , ϕ_h et F_h , une approximation des équations différentielles (1.1.1) - (1.1.2). Cette approximation est de l'ordre 1 en h pour θ arbitraire, de l'ordre 2 en h pour $\theta = \frac{1}{2}$, r arbitraire et donne une solution exacte pour $\theta = \frac{1}{2}$, $r = 1$.

Nous constatons aussi que pour les mêmes normes admises dans les espaces w_h , ϕ_h et F_h le schéma est stable pour $\frac{1}{2} \leq \theta \leq 1$, $r \theta \geq \frac{1}{2}$, $r = \frac{\Delta t}{\Delta x}$. Il est inconditionnellement instable pour $0 \leq \theta < \frac{1}{2}$.

Enfin la solution de notre système aux différences converge vers la solution du système différentiel. L'ordre de la convergence est le même que l'ordre d'approximation.

ooo

CHAPITRE 3

ETUDE NUMERIQUE EXPERIMENTALE DES EQUATIONS D'ECOULEMENT EN UTILISANT LE SCHEMA (2.1.1) - (2.1.2)

-

3.1. EXEMPLES DE CALCUL

Nous avons résolu numériquement un système d'équations aux différences (2.1.1) dans un domaine $0 \leq X \leq L$ pour différentes valeurs du coefficient θ et du rapport $\frac{\Delta t}{\Delta X} = r$. Les conditions initiales et les conditions aux limites ont été choisies selon les formules suivantes :

$$\begin{aligned}
 z_k^0 &= \tilde{\varphi}(k\Delta X) = H_0 \\
 u_k^0 &= \tilde{\varphi}(k\Delta X) = 0 \\
 z_0^n &= \tilde{\psi}_0(t) = \begin{cases} H_0 + \frac{t}{t_1} & \text{pour } 0 \leq t \leq t_1 \\ H_0 + 1,0 & \text{pour } t_1 \leq t \end{cases} \\
 u_N^n &= \tilde{\psi}_N(n\Delta t) = 0
 \end{aligned}
 \tag{3.1.1}$$

La solution analytique de ce problème est connue : il s'agit d'une onde progressive raide se déplaçant sans déformation le long de l'axe X et se réfléchissant ensuite entièrement sur la limite droite $X = L$ du canal. Nous examinerons les solutions numériques obtenues en fonction des paramètres qui interviennent dans le système aux différences.

3.1.1. Conditions aux limites

Pour résoudre (2.1.1) avec les conditions (3.1.1) nous utilisons la méthode de "double balayage" décrite dans le § 2.3. Pour pouvoir calculer de proche en proche les coefficients E_k , F_k , et C_k selon les formules (2.3.7), (2.3.7') et (2.3.3),

il faut connaître E_0 et F_0 au point-limite $X = 0$. En admettant l'existence d'une relation linéaire entre ΔZ_0 et ΔU_0 nous voulons imposer aux coefficients E_0 et F_0 des valeurs telles que, quel que soit ΔU_0 , $\Delta Z_0 = \tilde{\Psi}_0^{n+1} - Z_0^n$, où $\tilde{\Psi}_0(t)$ est la fonction imposée au point $X = 0$ selon (3.1.1). Cette condition sera satisfaite approximativement en supposant :

$$\left. \begin{aligned} E_0 &= \alpha \\ F_0 &= -\alpha(\tilde{\Psi}_0^{n+1} - Z_0^n) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.1.2)$$

où α est très grand par rapport à ΔU_0
 Z_0^n est le niveau au point $X = 0$ calculé au temps précédent t_n .

En effet, en supposant $\Delta U_0 = E_0 \Delta Z_0 + F_0$, nous trouverons :

$$\Delta Z_0 = \frac{\Delta U_0}{\alpha} - \frac{-\alpha(\tilde{\Psi}_0^{n+1} - Z_0^n)}{\alpha} \approx \tilde{\Psi}_0^{n+1} - Z_0^n;$$

Une fois les coefficients E_k , F_k et C_k calculés pour tous les points, y compris le point-limite droite $X = L = N\Delta X$, nous utilisons la condition imposée à cette limite pour y déterminer les valeurs des deux fonctions-grille cherchées : $Z_N^{(h)}$ et $U_N^{(h)}$, au temps $(n+1)\Delta t$. La condition à la limite droite est donnée par la loi $U_N^n = \tilde{\Psi}_N^n = 0$. La loi de continuité dans cette section est :

$$(Z_N^n + \Delta Z_N^n)(U_N^n + \Delta U_N^n) = \tilde{\Psi}_N^{n+1} (Z_N^n + \Delta Z_N^n)$$

En posant $\Delta U_N = E_N \Delta Z_N + F_N$ nous avons, après avoir retenu seulement les termes du 1er ordre en Δ :

$$Z_N^n U_N^n + \Delta Z_N^n U_N^n + Z_N^n (E_N \Delta Z_N^n + F_N^n) = \tilde{\Psi}_N^{n+1} Z_N^n + \tilde{\Psi}_N^{n+1} \Delta Z_N^n$$

d'où :

$$\Delta Z_N^n = \frac{Z_N^n (\tilde{\Psi}_N^{n+1} - U_N^n - F_N^n)}{U_N^n - \tilde{\Psi}_N^{n+1} + Z_N^n E_N^n}$$

et comme $\tilde{\Psi}_N^n = 0$,

$$\Delta Z_N^n = \frac{-Z_N^n (U_N^n + F_N^n)}{U_N^n + Z_N^n E_N^n} \dots\dots\dots(3.1.3)$$

A partir de (3.1.3) nous trouvons :

$$\left. \begin{aligned} \Delta U_N &= E_N \Delta Z_N + F_N \\ Z_N^{n+1} &= Z_N^n + \Delta Z_N \\ U_N^{n+1} &= U_N^n + \Delta U_N \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.1.4)$$

En calculant de proche en proche de la droite vers la gauche nous pouvons ensuite trouver les valeurs de Z_k^{n+1} et U_k^{n+1} pour tous les points $k = 0, 1, \dots, N$. Au point $x = 0$ nous trouverons :

$$U_0^{n+1} = U_0^n + E_0 \Delta Z_0 + F_0 ; Z_0^{n+1} = Z_0^n + \tilde{\psi}_0^{n+1} - Z_0^n = \tilde{\psi}_0^{n+1}$$

3.1.2. Cas spécial $\theta = \frac{1}{2}, r = 1$

Nous avons vu dans le § 2.2 et le § 2.3 que le schéma implicite proposé coïncide, pour $\theta = \frac{1}{2}$ et $r = 1$, avec le réseau des caractéristiques et qu'alors la solution devient (aux erreurs d'arrondi près) exacte.

Les calculs effectués confirment cette conclusion. Le tableau 3.1 donne la comparaison entre la solution analytique et la solution numérique pour $\theta = \frac{1}{2}, r = 1$ et pour les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} \Delta x &= 10 \text{ m} ; \Delta t = 10 \text{ secondes} ; H_0 = 2,0 \text{ m} ; \\ L &= 240 \text{ m} ; t_1 = 40 \text{ s/m} ; N = 24 ; \end{aligned}$$

x_m	$k = \frac{x}{\Delta x}$	$Z_{\text{analytique}}$	$Z_{\text{numérique}}$	$\delta = Z_{\text{num}} - Z_{\text{anal}} $
100	10	3,00000000	2,99999970	3×10^{-7}
110	11	3,00000000	2,99999970	3×10^{-7}
120	12	3,00000000	2,99999970	3×10^{-7}
130	13	3,00000000	2,99986220	$1,378 \times 10^{-4}$
140	14	2,75000000	2,74991230	$0,877 \times 10^{-4}$
150	15	2,50000000	2,49996230	$0,377 \times 10^{-4}$
160	16	2,25000000	2,25001240	$0,124 \times 10^{-4}$
170	17	2,00000000	2,00000000	0
180	18	2,00000000	2,00000000	0
190	19	2,00000000	2,00000000	0

Les différences entre les deux solutions correspondent aux erreurs d'arrondi.

3.1.3. Vérification expérimentale de l'instabilité du calcul pour $\theta < \frac{1}{2}$.

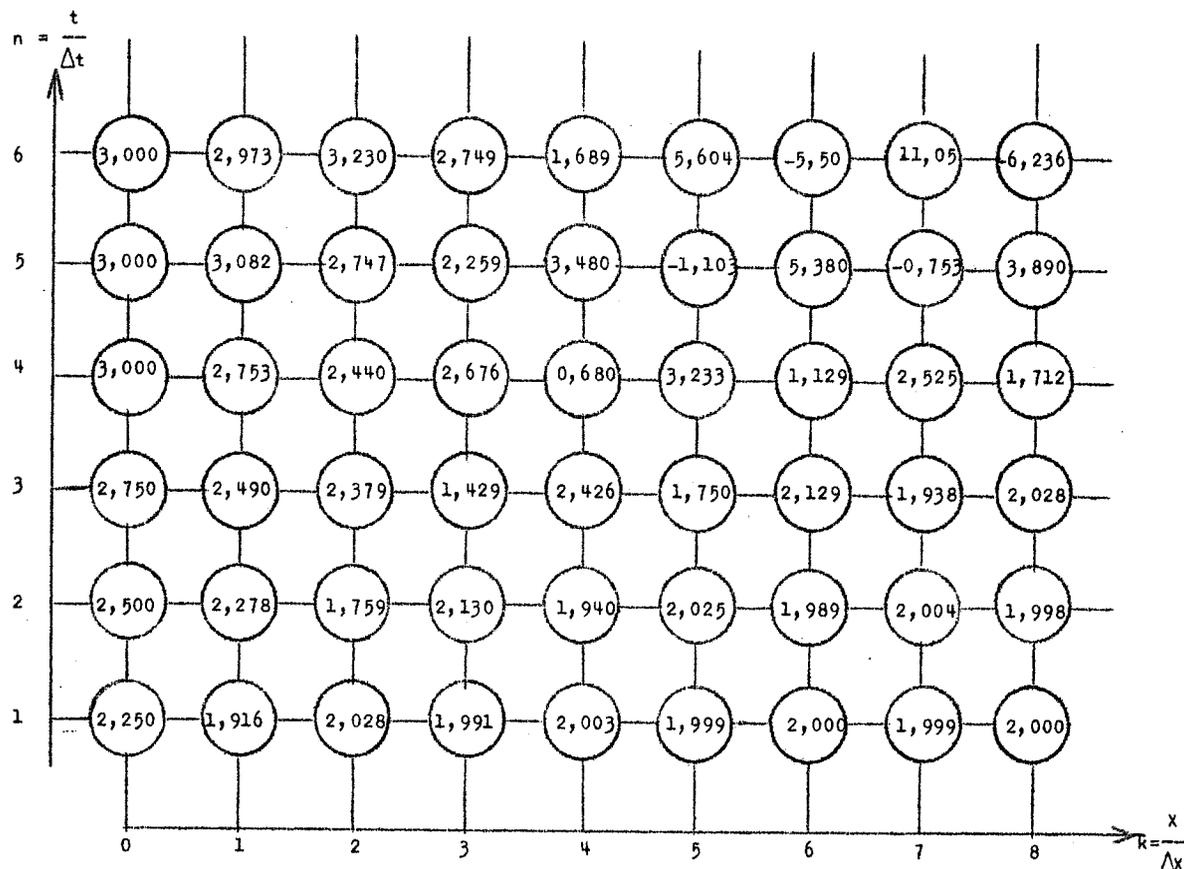
Nous avons démontré analytiquement dans le § 2.5 que le calcul est instable pour les valeurs de θ inférieures à $\frac{1}{2}$. L'étude expérimentale a confirmé cette conclusion pour tous les cas considérés. Nous nous bornerons à décrire un exemple pour montrer la façon dont l'instabilité se manifeste.

Effectuons un calcul identique à celui du point précédent 3.1.2, c'est-à-dire :

$\Delta x = 10$ m	$L = 240,0$ m
$\Delta t = 10$ secondes	$t_1 = 40$ s/m
$r = 1$	$H_0 = 2,0$ m
$N = 24$	

mais en posant $\theta = 1/4$. La figure 3.1 montre le profil de l'onde calculée par rapport au profil obtenu avec $\theta = \frac{1}{2}$. Pour voir mieux le phénomène, portons dans le tableau (X,t) les valeurs des niveaux Z pour différents points du maillage M_w . Ce tableau est caractéristique de l'instabilité, avec des valeurs dont les écarts relatifs alternent, en positifs et négatifs, à la fois le long des verticales et des horizontales.

Les écarts croissent en valeur absolue avec le temps dans la zone du front de l'onde et le calcul diverge totalement pour finir, comme le montre la figure 3.1.



3.1.4. Etude expérimentale de l'influence des paramètres θ et r

Ayant vérifié que $\theta < \frac{1}{2}$ conduit effectivement à des instabilités et que $\theta = \frac{1}{2}$ et $r = 1$ donnent pratiquement la solution exacte, nous avons effectué une série de calculs qui met en évidence l'influence des deux paramètres du schéma : θ et r . Les calculs ont été effectués pour les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} \Delta X &= 10,0 \text{ m} & t_1 &= 60 \text{ s/m} & N &= 100 \\ H_0 &= 1,0 \text{ m} & L &= 1000 \text{ m} \end{aligned}$$

La séquence de calculs est définie par le tableau suivant :

Tableau 3.2.				
N° de calcul	Δt secondes	$r = \frac{\Delta t}{\Delta X}$	θ	N° de la figure donnant les résultats au temps $t=240s$
3.1.1 3.1.2 3.1.3 3.1.4	10	1,0	0,50 0,55 0,66 1,00	3.2
3.2.1 3.2.2 3.2.3 3.2.4	15	1,5	0,50 0,55 0,66 1,00	3.3
3.3.1 3.3.2 3.3.3 3.3.4	10	2,6	0,50 0,55 0,66 1,00	3.4
3.4.1 3.4.2 3.4.3	60	6,0	0,50 0,55 0,66 1,00	3.5

Après l'examen des figure 3.2 - figure 3.5, où les résultats de chaque série de calculs sont comparés avec la solution analytique, nous constatons que :

1° Pour $\theta = \frac{1}{2}$

La forme "analytique" du front d'onde est obtenue pour $r = 1$. Pour les valeurs de $r > 1$ il existe un phénomène d'ondulation derrière le front d'onde. Cette distorsion

de la forme rend les résultats pratiquement inutilisables.

2° Pour $\frac{1}{2} < \theta \leq 1$

La solution numérique donne une onde nettement atténuée par rapport à la solution analytique. Les angles de l'onde raide disparaissent. Cette diffusion de l'onde de part et d'autre du front "analytique" est une fonction croissante du θ .

3.2. INTERPRETATION DES RESULTATS NUMERIQUES.

Nous avons démontré dans le § 2.2. que le schéma proposé des différences finies approche les équations différentielles avec une erreur égale à zéro pour $\theta = \frac{1}{2}$, $r = 1$, égale à $O(h^2)$ pour $\theta = \frac{1}{2}$, r arbitraire, et égale à $O(h)$ pour $\theta \neq \frac{1}{2}$. En principe donc nous pouvions espérer qu'en posant $\theta = \frac{1}{2}$ nous obtiendrions un meilleur résultat qu'avec $\theta > \frac{1}{2}$. Cela n'est vrai pourtant que si les fonctions-grille $U^{(h)}$ et $Z^{(h)}$ ont des dérivées petites. Il suffit, comme on le voit d'après les formules (2.2.5) et (2.2.6) que leurs dérivées soient grandes, pour que notre estimation perde sa valeur. C'est précisément le cas d'une onde raide. Nous verrons plus loin, qu'un calcul analogue pour les ondes longues donne des résultats acceptables.

Ces remarques exigent une interprétation du phénomène d'atténuation et de distorsion de l'onde dû à la méthode de calcul.

3.2.1. Application de l'analyse de Fourier à l'interprétation des résultats

a/ Equations différentielles (1.1.1)

En considérant le cas d'une ondulation sinusoïdale nous cherchons la solution de (1.1.1) sous la forme :

$$Z = Z^* e^{i(\alpha X + \beta t)} \quad ; \quad U = U^* e^{i(\alpha X + \beta t)} \quad ; \quad \dots (3.2.1)$$

La substitution de (3.2.1) dans (1.1.1) nous donne la relation entre les deux nombres, α et β : $\beta = \pm \alpha$, d'où nous tirons, pour la vitesse de propagation des ondes $\tilde{\omega} = \pm \frac{\beta}{\alpha} = \pm 1$. Ce résultat correspond à la solution analytique de (1.1.1).

b/ Equations aux différences (2.1.1)

Suivant le raisonnement exposé dans [10], nous chercherons la solution du système d'équations aux différences sous la forme :

$$Z = Z^* e^{i(\alpha k \Delta X + \beta n \Delta t)} \quad ; \quad U = U^* e^{i(\alpha k \Delta X + \beta n \Delta t)} \quad \dots (3.2.2.)$$

La substitution de (3.2.2) dans (2.1.1) donne une relation entre α et β . Il est évident, que si $\alpha \neq \beta$ la solution de (2.1.1) est différente de la solution (1.1.1). Si pour α réel β est réel, mais différent de α , nous avons une vitesse de propagation $\tilde{\omega}_\Delta$ des ondes calculées à l'aide de (2.1.1) différente de la vitesse exacte $\tilde{\omega} = 1$, mais l'amplitude de ces ondes n'est pas atténuée. Si β est complexe et sa partie imaginaire est positive, les ondes calculées selon (2.1.1) sont atténuées par rapport à la solution analytique. Enfin le calcul est instable quand β est imaginaire ou quand sa partie imaginaire est négative.

Pour le cas $\theta = \frac{1}{2}$, la relation entre α et β obtenue par substitution de (3.2.2) dans (2.1.1) est donnée par M. PREISSMANN dans [10] :

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\beta \Delta t}{2} = \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha \Delta x}{2} \dots\dots\dots (3.2.3)$$

On s'aperçoit que pour le cas spécial $\frac{\Delta t}{\Delta x} = r = 1$ la relation devient $\beta = \pm \alpha$, c'est-à-dire que les solutions de (1.1.1) et (2.1.1) sont identiques.

Ce n'est pas le cas pour $r \neq 1$. Nous avons résolu numériquement l'équation (3.2.3) pour différentes longueurs d'ondes (ou différentes valeurs de α) et différentes valeurs de r . Ainsi nous avons pu calculer la vitesse de propagation $\tilde{\omega}_\Delta \neq \tilde{\omega}$. Les résultats de ces calculs sont montrés par le tableau 3.3 et la figure 3.6.

Tableau 3.3. La valeur de $\tilde{\omega}_\Delta$ trouvée à partir de (3.2.3)

$\frac{\Delta t}{r \Delta x}$ \ $\alpha \Delta x$	0,3	0,5	0,8	1,0	1,2	1,5	2,0	2,5	3,0	4,0
$\frac{\pi}{6}$	1,030	1,028	1,010	1	0,992	0,980	0,937	0,905	0,864	0,783
$\frac{\pi}{4}$	1,065	1,045	1,025	1	0,982	0,943	0,882	0,819	0,758	0,655
$\frac{\pi}{3}$	1,097	1,082	1,032	1	0,975	0,908	0,817	0,736	0,665	0,555
$\frac{\pi}{2}$	1,240	1,178	1,085	1	0,933	0,835	0,705	0,608	0,531	0,392

A partir de la formule (3.2.3) on trouve qu'aux valeurs réelles de α correspondent les valeurs réelles de β . Ainsi nous assistons (voir figure 3.6) à une variation de la vitesse de propagation des ondes par rapport à la solution analytique. On ne constate par contre aucune atténuation de leur amplitude.

Pour le cas $\theta \neq \frac{1}{2}$ nous avons, en substituant (3.2.2) dans (2.1.1) :

$$e^{i\beta\Delta t} - 1 = - \frac{4\theta K^2}{1+4\theta^2 K^2} \pm \frac{2K1}{1+4\theta^2 K^2} \dots\dots\dots(3.2.4)$$

où $K = r \cdot \text{tg} \frac{\alpha\Delta x}{2}$.

Posons $\beta = \beta_1 + i \beta_2$. Nous trouvons alors, à partir de (3.2.4) :

$$e^{-\beta_2\Delta t} \cos \beta_1 \Delta t - 1 = - \frac{4\theta K^2}{1+4\theta^2 K^2} \dots\dots\dots(3.2.5a)$$

$$e^{-\beta_2\Delta t} \sin \beta_1 \Delta t = \pm \frac{2K1}{1+4\theta^2 K^2} \dots\dots\dots(3.2.5b)$$

La solution du système (3.2.5) par rapport à β_1 et β_2 nous donne les deux relations suivantes :

$$\text{tg} \beta_1 \Delta t = \pm \frac{2r \text{tg} \left(\frac{\alpha\Delta x}{2} \right)}{1-4\theta(1-\theta)r^2 \text{tg}^2 \left(\frac{\alpha\Delta x}{2} \right)} \dots\dots\dots(3.2.6)$$

$$e^{\beta_2\Delta t} = \frac{1 + 4\theta^2 r^2 \text{tg}^2 \left(\frac{\alpha\Delta x}{2} \right)}{\sqrt{4K^2 + [1-4\theta(1-\theta)r^2 \text{tg}^2 \left(\frac{\alpha\Delta x}{2} \right)]^2}} \dots\dots\dots(3.2.7)$$

On voit que pour $\theta = \frac{1}{2}$ la formule (3.2.6) se transforme en (3.2.3) tandis que (3.2.7) devient :

$$e^{\beta_2\Delta t} = 1, \text{ d'où } \beta_2 = 0$$

Pour $\theta < \frac{1}{2}$ on trouve $e^{\beta_2\Delta t} < 1$, donc $\beta_2 < 0$ et par conséquent le schéma n'est pas stable.

Pour $\theta > \frac{1}{2}$ on a $e^{\beta_2\Delta t} > 1$, donc $\beta_2 > 0$. Le calcul est stable, mais l'amplitude des ondes est atténuée. Leur vitesse de propagation diffère de la vitesse exacte calculée selon (1.1.1). On peut la trouver, par exemple pour $\theta = \frac{2}{3}$ à partir de la formule (3.2.6). La vitesse de propagation $\tilde{\omega}_\Delta = \frac{\beta_1}{\alpha}$, pour différentes longueurs d'ondes et différentes valeurs de r sera :

Tableau 3.4 $\tilde{\omega}_\Delta$ trouvé à partir de (3.2.6) pour $\theta = 2/3$

$\frac{\Delta t}{r \Delta x}$ \ $\alpha \Delta x$	0,3	0,5	0,8	1,0	1,2	1,5	2,0	2,5	3,0	4,0
$\frac{\pi}{6}$	1,040	1,015	1,000	0,999	0,968	0,960	0,915	0,867	0,838	0,755
$\frac{\pi}{4}$	1,080	1,035	1,010	0,987	0,963	0,920	0,857	0,793	0,728	0,633
$\frac{\pi}{3}$	1,090	1,065	1,015	0,977	0,935	0,880	0,790	0,710	0,643	0,537
$\frac{\pi}{2}$	1,230	1,155	1,038	0,965	0,895	0,804	0,680	0,589	0,516	0,412

Ces résultats sont représentés graphiquement sur la figure 3.7.

Les courbes des figures 3.6 et 3.7 et les formules (3.2.6) et (3.2.7) permettent d'expliquer le phénomène d'atténuation des ondes et leur distorsion. En effet, on peut imaginer une onde progressive en la décomposant en série de Fourier comme un train d'ondulations sinusoïdales. Si la forme de l'onde originale est continue et sa longueur suffisamment grande, les ondulations à grande fréquence ne prennent pas une place importante dans ce train d'ondes. Alors l'atténuation des ondulations principales est petite et leurs vitesses de propagation ne diffèrent pas beaucoup. Elles se déplacent pratiquement en un seul bloc.

Par contre, quand il s'agit d'une onde raide et courte, ce sont les ondulations à grande fréquence qui comptent dans la série de Fourier. Alors le corps d'onde ne se déplace pas en un seul bloc mais au contraire, chaque ondulation a sa propre vitesse de propagation. Les ondulations courtes (comme on le voit sur les figures 3.6 et 3.7) se déplacent avec un certain retard par rapport aux ondulations longues et aussi par rapport à la vitesse réelle de propagation, au moins pour $r \geq 1$. De plus, pour $\theta = \frac{1}{2}$, elles ne sont pas atténuées et ceci explique bien les ondulations "parasites" apparaissant derrière le front d'onde (voir fig. 3.3 - fig. 3.5).

La formule (3.2.7) et la Fig. 3.7 montrent que pour $\theta \neq \frac{1}{2}$ les ondulations sont atténuées d'autant plus qu'elles sont courtes. Ceci explique pourquoi ces ondulations "parasites" disparaissent apparemment (tout en existant en réalité) sur la Fig. 3.2).

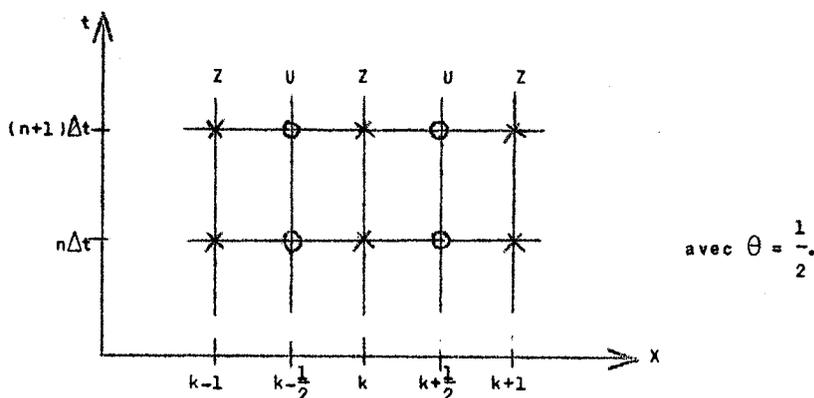
3.2.2. Autres schémas aux différences finies

Le phénomène d'atténuation et de distorsion de l'onde dû à la méthode du calcul se manifeste fréquemment et surtout quand on applique le schéma implicite des différences finies (voir FEDORENKO [4], LAX et WENDROFF [9], ZAJAC [12]).

On peut procéder à une analyse semblable à celle du § 3.2.1 pour tous ces schémas et arriver aux mêmes conclusions qui imposent la prudence surtout lorsqu'on applique un schéma à des problèmes nouveaux. Nous nous bornerons à citer un seul exemple. M. RICHTMYER [12] propose, pour remplacer les équations différentielles (1.1.1), le schéma suivant :

$$\left. \begin{aligned} \frac{z_k^{n+1} - z_k^n}{\Delta t} + \frac{\theta(U_{k+1/2}^{n+1} - U_{k-1/2}^{n+1}) + (1-\theta)(U_{k+1/2}^n - U_{k-1/2}^n)}{\Delta x} &= 0 \\ \frac{U_{k-1/2}^{n+1} - U_{k-1/2}^n}{\Delta t} + \frac{\theta(z_k^{n+1} - z_{k-1}^{n+1}) + (1-\theta)(z_k^n - z_{k-1}^n)}{\Delta x} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots(3.2.8)$$

Sur deux maillages :



Ce schéma est inconditionnellement stable, mais son application au calcul des ondes raides, selon la méthode préconisée par RICHTMYER, n'est nullement encourageante. La figure 3.8 montre que pour $r = 1$ le schéma (2.1.1) donne une solution numérique qui coïncide avec la solution exacte, tandis que la solution selon schéma de RICHTMYER s'écarte d'elle en montrant les mêmes oscillations parasites que celles que nous avons examinées dans le § 3.2.1.

3.3. PROCÉDE D'EXTRAPOLATION APPLIQUÉ AUX SOLUTIONS NUMÉRIQUES DES ÉQUATIONS HYPERBOLIQUES

3.3.1. Introduction

Le procédé d'extrapolation en analyse numérique est connu et largement utilisé pour le problème d'intégration numérique dans une ou plusieurs dimensions. Nous avons essayé d'appliquer les principes d'extrapolation donnés par M. LAURENT [7] à la solution numérique des équations différentielles partielles du type hyperbolique. Il est bien évident que ce procédé ne peut être appliqué que lorsque les équations satisfont à certaines conditions de continuité. Notamment, l'existence des dérivées supérieures de

la fonction calculée est nécessaire pour que la solution numérique \bar{u} puisse être écrite sous la forme :

$$\bar{u} = U + \alpha h + \beta h^2 + \gamma h^3 + \dots \dots \dots (3.3.1)$$

où U est la solution analytique

h est le pas d'espace choisi pour la solution numérique

α, β, γ , sont les coefficients dépendant des dérivées de U.

Nous savons, de la théorie des équations hyperboliques, que les discontinuités existant au bord du domaine se propagent à l'intérieur de celui-ci le long des caractéristiques. Les équations non-linéaires peuvent avoir les solutions discontinues, même si les conditions initiales et aux limites sont continues.

Ainsi le domaine de la validité du procédé d'extrapolation doit être déterminé avec prudence.

Toutefois, pour les équations linéaires, et pour les conditions aux limites relativement lisses, on peut espérer pouvoir appliquer le procédé d'extrapolation avec succès. Nous avons effectué une série d'essais pour le cas d'équations d'écoulement dans une seule dimension spatiale et les résultats ont été encourageants.

Considérons le système d'équations aux différences (2.1.1). Leur solution peut être trouvée numériquement si seulement le rapport $r = \frac{\Delta t}{\Delta x}$, le nombre de points de calcul $N = \frac{L}{\Delta x}$ et les valeurs du coefficient θ sont fixés au départ. Admettons que nous ayons fixé θ et r, admettons $N_1 = \frac{L}{\Delta x_1}$, et que nous cherchions la solution de (2.1.1) à un certain moment $T = m\Delta t$. Cette solution numérique sera une fonction-grille \bar{w}_1 déterminée aux points $(k.\Delta x, n.\Delta t)$ du maillage, où $k=1,2,\dots,N$; $n=m$.

Nous savons du § 2.2, qu'en remplaçant les équations (1.1.1) par (2.1.1) nous avons commis une erreur de discrétisation et de plus nous savons (voir les formules (2.2.5) - (2.2.7)) que :

$$L_h[w]_h - \{Lw\}_h = A_1(1-2\theta)h + A_2h^2 + A_3h^3 + \dots \dots (3.3.2)$$

où : $h = \Delta x$ est le pas d'espace.

Cela est vrai si w est suffisamment continu et possède des dérivées d'ordre supérieur.

3.3.2. Formules d'extrapolation

Connaissant la solution numérique de (2.1.1) pour $\Delta X_1 = h_1$ au moment $T = m \cdot \Delta t$ nous répétons les calculs en conservant les mêmes valeurs de θ et de r mais sur un autre maillage avec $\Delta X_2 = h_2 = \frac{1}{2} h_1$.

Autrement dit, nous doublons le nombre d'intervalles entre les points de calcul (nous doublons également le nombre de pas de temps en conservant le même r). La solution numérique correspondante est une fonction-grille \bar{w}_2 . Enfin nous répétons les calculs en admettant un troisième maillage avec $\Delta X_3 = h_3 = \frac{1}{2h_2} = \frac{1}{4h_1}$ et en conservant les mêmes valeurs de r et de θ . Il en résulte une troisième solution numérique \bar{w}_3 . Ces trois maillages ont un certain nombre de points communs : ceux du maillage correspondant à h_1 . Aux points de ce maillage nous trouvons trois valeurs numériques pour la fonction-grille $w^{(h)}$: $\bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3$. La forme de la relation (3.3.2) suggère la possibilité d'une formule d'extrapolation.

Si w est la solution analytique, nous écrivons :

$$\left. \begin{aligned} w &= \bar{w}_1 - \alpha h_1 - \beta h_1^2 - \dots \\ w &= \bar{w}_2 - \alpha h_2 - \beta h_2^2 - \dots \\ w &= \bar{w}_3 - \alpha h_3 - \beta h_3^2 - \dots \end{aligned} \right\} \dots (3.3.3)$$

En connaissant \bar{w}_1, \bar{w}_2 et \bar{w}_3 nous pouvons, en négligeant les termes d'ordre supérieur, déterminer les coefficients α et β :

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{(\bar{w}_1 - \bar{w}_2)(h_2^2 - h_3^2) - (\bar{w}_2 - \bar{w}_3)(h_1^2 - h_2^2)}{(h_1 - h_2)(h_2^2 - h_3^2) - (h_2 - h_3)(h_1^2 - h_2^2)} \\ \beta &= \frac{(\bar{w}_2 - \bar{w}_3)(h_1 - h_2) - (\bar{w}_1 - \bar{w}_2)(h_2 - h_3)}{(h_1 - h_2)(h_2^2 - h_3^2) - (h_2 - h_3)(h_1^2 - h_2^2)} \end{aligned} \right\} \dots (3.3.4)$$

Pour la valeur extrapolée de la fonction-grille cherchée $w_{\text{extr}}^{(h)}$, nous avons une formule d'extrapolation quadratique :

$$\bar{w}_{\text{extr}}^{(h)} = \bar{w}_1 - \alpha h_1 - \beta h_1^2 \quad \text{ou} \quad \bar{w}_{\text{extr}}^{(h)} = \bar{w}_2 - \alpha h_2 - \beta h_2^2$$

$$\text{ou} \quad \bar{w}_{\text{extr}}^{(h)} = \bar{w}_3 - \alpha h_3 - \beta h_3^2$$

D'où, en admettant le pas en progression $\frac{1}{2}$ ($h_1 = 2h_2 = 4h_3$ nous avons :

$$\bar{w}_{extr} = \frac{1}{3}\bar{w}_1 - 2\bar{w}_2 + \frac{6}{3}\bar{w}_3 \dots\dots\dots(3.3.5)$$

Une autre formule d'extrapolation peut être obtenue en ne retenant dans les développements (3.3.3) que les deux premiers termes :

$$\left. \begin{aligned} \bar{w}_{extr}(h) &= \bar{w}_1 - \alpha' h_1 \\ \bar{w}_{extr}(h) &= \bar{w}_2 - \alpha' h_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.3.6)$$

Nous trouvons alors, pour ces formules d'extrapolation linéaire :

$$\alpha' = \frac{\bar{w}_1 - \bar{w}_2}{h_1 - h_2} \dots\dots\dots(3.3.7)$$

soit : $\bar{w}_{extr}(h) = 2\bar{w}_2 - \bar{w}_1$, pour $h_1 = 2h_2$; $\dots\dots\dots(3.3.6)$

Enfin, pour le cas spécial $\theta = \frac{1}{2}$ la forme de la relation (3.3.2) nous indique la formule spéciale d'extrapolation quadratique :

$$\text{ou } \left. \begin{aligned} \bar{w}_{extr}(h) &= \bar{w}_1 - \beta' h_1^2 \\ \bar{w}_{extr}(h) &= \bar{w}_2 - \beta' h_2^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.3.8')$$

où $\beta' = \frac{\bar{w}_2 - \bar{w}_1}{\frac{h_2^2}{2} - \frac{h_1^2}{2}} \dots\dots\dots(3.3.9)$

soit : $\bar{w}_{extr}(h) = \frac{4}{3}\bar{w}_2 - \frac{1}{3}\bar{w}_1$, pour $h_1 = 2h_2$; $\dots\dots\dots(3.3.8)$

Dans les paragraphes suivants nous examinerons l'application de ces formules.

Evidemment il n'est pas sûr que pour $\theta = \frac{1}{2}$ tous les termes impairs suivants du développement disparaissent. Nous devons cette remarque à M. LAURENT qui a suggéré, comme exemple, la formule suivante :

$$w_{extr} = \bar{w}_1 - \beta h_1^2 - \gamma h_1^3$$

$$w_{extr} = \bar{w}_2 - \beta h_2^2 - \gamma h_2^3$$

$$w_{extr} = \bar{w}_3 - \beta h_3^2 - \gamma h_3^3$$

d'où, pour $h_1 = 2h_2 = 4h_3$, nous trouvons :

$$w_{extr} = \frac{1}{21} \bar{w}_1 - \frac{4}{7} \bar{w}_2 + \frac{32}{21} \bar{w}_3 \quad \dots\dots\dots(3.3.6'')$$

3.3.3. Calcul d'une onde sinusoïdale

Considérons l'équation (2.1.1) ayant pour conditions initiales :

$$\tilde{\varphi}(X) = 2,0 + \sin \frac{\pi X}{2L} \quad m$$

$$\tilde{\dot{\varphi}}(X) = 0 \quad m/s$$

et pour conditions aux limites :

$$X = 0 \quad \tilde{\psi}(t) = 2,0 \text{ m (niveau constant)}$$

$$X = 240 \text{ m, } \tilde{\dot{\psi}}(t) = 0 \text{ m/s (vitesse nulle)}$$

.....(3.3.10)

La solution analytique de (1.1.1) pour ce problème est connue et elle s'écrit selon les formules :

$$Z(X,t) = 2,0 + \sin \frac{\pi X}{2L} \cdot \cos \frac{\pi t}{2L}$$

$$U(X,t) = \cos \frac{\pi X}{2L} \cdot \sin \frac{\pi t}{2L}$$

.....(3.3.11)

Nous avons intégré numériquement les équations (1.1.1) selon le schéma (2.1.1) en tenant compte des conditions (3.3.10). Ces calculs ont été effectués six fois pour les conditions suivantes :

Tableau 3.5					
N° de calcul	θ	Pas d'espace h m	Nombre d'intervalles N	Solution numérique	$r = \frac{\Delta t}{\Delta x}$
3.5.1	$\frac{2}{3}$	$h_1 = 20$	12	\bar{w}_1	2,0
3.5.2		$h_2 = 10$	24	\bar{w}_2	
3.5.3		$h_3 = 5$	48	\bar{w}_3	
3.5.4	$\frac{1}{2}$	$h_1 = 20$	12	\bar{w}_1	2,0
3.5.5		$h_2 = 10$	24	\bar{w}_2	
3.5.6		$h_3 = 5$	48	\bar{w}_3	

Pour comparer les solutions numériques à la solution analytique, nous avons choisi les 4 points suivants :

X = 120 m
160 m
200 m
240 m

et 3 moments différents :

t = 400 s
600 s
880 s

Nous avons comparé les résultats pour les niveaux Z obtenus à l'aide des calculs numériques et des extrapolations selon les formules (3.3.5), (3.3.6) et (3.3.8) aux niveaux calculés analytiquement selon les formules (3.3.11). La comparaison des erreurs commises par intégration numérique est donnée par les figures 3.9, 3.11 pour le cas $\theta = \frac{2}{3}$, tandis que les figures 3.12 - 3.14 représentent le cas $\theta = \frac{1}{2}$.

Les deux tableaux suivants donnent la comparaison des résultats obtenus par intégration numérique et par extrapolation avec les résultats exacts au moment t = 400 s et au point X = 200 m.

Tableau 3.6 Résultats de calculs pour X = 200, t = 400			
		$\theta = \frac{2}{3}$	$\theta = \frac{1}{2}$
Solution analytique selon (3.3.11)	Z =	1,1634835	1,1634835
Solutions numériques obtenues pour	$\bar{z}_1 =$	1,2593822	1,1689725
	$\bar{z}_2 =$	1,2115754	1,1648270
	$\bar{z}_3 =$	1,1674801	1,1638155
Solution obtenue par extrapolation selon (3.3.6)	$\bar{z}_{extr}^{(h)} =$	1,1637686	1,1607815
Solution obtenue par extrapolation selon (3.3.5)	$\bar{z}_{extr}^{(h)} =$	1,1632568	1,1634782
Solution obtenue par extrapolation selon (3.3.8)	$\bar{z}_{extr}^{(h)} =$	-	1,1634785

Il faut remarquer que l'extrapolation selon (3.3.8) donne 1,1634831, tandis que une autre formule suggérée par M. Laurent donne :

$$z_{extr} = \frac{64}{45} \bar{z}_3 - \frac{20}{45} \bar{z}_2 + \frac{1}{45} \bar{z}_1 = 1,1634805$$

Tableau 3.7. Comparaison des résultats pour X = 200 m, t = 400 s			
		$\theta = \frac{2}{3}$	$\theta = \frac{1}{2}$
Erreurs commises par rapport à la solution analytique	$ \bar{z}_1 - z =$	$9589,87 \times 10^{-5}$	$538,90 \times 10^{-5}$
	$ \bar{z}_2 - z =$	$4609,19 \times 10^{-5}$	$134,35 \times 10^{-5}$
	$ \bar{z}_3 - z =$	$2399,66 \times 10^{-5}$	$33,20 \times 10^{-5}$
	$ \bar{z}_{extr}^{(h)} - z =$	$28,51 \times 10^{-5}$	$270,20 \times 10^{-5}$
	$ \bar{z}_{extr}^{(h)} - z =$	$22,66 \times 10^{-5}$	$0,5333 \times 10^{-5}$
	$ \bar{z}_{extr}^{(h)} - z =$	-	$0,5000 \times 10^{-5}$

L'examen de ces tableaux et des figures mène aux conclusions suivantes :

1° Cas $\theta = \frac{1}{2}$

L'erreur commise par intégration numérique diminue en général linéairement avec la division par 2 du pas d'espace h. Ainsi la formule (3.3.5) ou (3.3.6) doit être employée pour l'extrapolation.

L'extrapolation donne des résultats excellents.

2° Cas $\theta \neq \frac{1}{2}$

L'erreur d'intégration numérique varie en général linéairement en fonction de h². Les formules (3.3.5) et (3.3.8) doivent être utilisées. L'extrapolation donne de très bons résultats.

3° On s'aperçoit que l'extrapolation donne de moins bons résultats (surtout pour $\theta \neq \frac{1}{2}$) avec le temps. Ainsi l'erreur croît, par rapport au temps t = 400 s, quand on examine les résultats pour t = 600 ou 880 secondes. Ces phénomènes s'expliquent par l'atténuation de l'onde due à la méthode du calcul (voir § 3.2).

3.3.4. Calcul d'une onde raide

Reprenons l'exemple examiné dans le § 3.1 en posant pour conditions initiales :

$\tilde{\varphi}(X,0) = 2,00 \text{ m} ; \quad \tilde{\dot{\varphi}}(X,0) = 0 \text{ m/s} \quad \dots\dots\dots(3.3.12)$

et pour conditions aux limites :

$$\tilde{\psi}_0(t) = \left. \begin{array}{l} \left\{ 2,0 + \frac{t}{40} \text{ pour } 0 \leq t \leq 40 \right\} \\ \left\{ 3,0 \qquad \qquad \qquad 40 \leq t \right\} \end{array} \right\} \\ \tilde{\psi}_N(t) = 0 \text{ m/s} \quad \dots\dots\dots(3.3.13) \\ L = 240 \text{ m}$$

Nous avons effectué une série de 6 calculs dans les mêmes conditions que les calculs décrits dans le § 3.3.3. Le tableau 3.8 donne la liste et les caractéristiques des calculs effectués.

Pour comparer les solutions numériques à la solution analytique, nous choisissons 3 moments différents : $t = 80$ secondes, $t = 200$ secondes et $t = 280$ secondes.

Tableau 3.6					
N° de calcul	θ	Pas d'espace h m	Nombre d'intervalles N	Solution numérique	$r = \frac{\Delta t}{\Delta x}$
3.6.1	$\frac{2}{3}$	$h_1 = 20$	12	\bar{w}_1	2,0
3.6.2		$h_2 = 10$	24	\bar{w}_2	
3.6.3.		$h_3 = 5$	48	\bar{w}_3	
3.6.4	$\frac{1}{2}$	$h_1 = 20$	12	\bar{w}_1	2,0
3.6.5		$h_2 = 10$	24	\bar{w}_2	
3.6.6		$h_3 = 5$	48	\bar{w}_3	

La Fig. 3.15 montre la solution analytique, les trois solutions numériques et le résultat de l'extrapolation linéaire effectuée à partir de ces solutions pour le cas $\theta = \frac{2}{3}$. La fig. 3.16 montre la solution analytique et les 3 solutions numériques pour le cas $\theta = \frac{1}{2}$. Les remarques suivantes s'imposent à l'examen de ces résultats :

1° Cas $\theta = \frac{2}{3}$

La solution numérique donne une onde nettement atténuée par rapport à la solution analytique. L'extrapolation linéaire donne une amélioration des résultats mais elle n'est pas aussi bonne que dans le cas d'une onde sinusoïdale.

2° Cas $\theta = \frac{1}{2}$

Il existe un phénomène d'ondulation derrière le front d'onde qui rend les résultats pratiquement inutilisables. L'extrapolation donne des résultats aberrants.

3.3.5. Conclusions

Nous venons de constater expérimentalement que le procédé d'extrapolation, pour les équations linéaires du type hyperbolique, est valable en principe, en admettant un schéma implicite des différences finies. Les formules d'extrapolation doivent être du 1er ordre pour $\theta \neq \frac{1}{2}$ et parabolique pour $\theta = \frac{1}{2}$.

Le procédé doit être appliqué plusieurs fois au cours du calcul au moment T_1 tels que $T_{1+1} - T_1$ ne soit pas grand. En effet, l'atténuation artificielle des ondes introduit une erreur qui croît avec le temps et diminue l'efficacité du procédé. La séquence d'opération à suivre est la suivante :

- . Déterminer T_1 .
- . Calculer $\bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3$ au moment T_1 sur les 3 maillages différents à partir des conditions initiales.
- . Déterminer, par extrapolation \bar{w}_{extr} au temps T_1 . Cette solution doit être déterminée pour tous les points des 3 maillages au temps T_1 , de sorte qu'elle puisse servir comme état initial pour le calcul suivant, entre T_1 et T_2 . Un procédé d'interpolation entre les points du maillage ΔX_1 doit être défini à cette fin.
- . Déterminer T_2 .
-etc.

L'extrapolation ne peut pas s'appliquer aux calculs des ondes raides où $\theta = \frac{1}{2}$. On peut l'appliquer à ce genre de calculs pour $\theta \neq \frac{1}{2}$, mais l'efficacité du procédé est moindre que pour les calculs des ondes longues.

DEUXIEME PARTIE

ETUDE DE LA METHODE DES PAS SEPARES
APPLIQUEE A L'INTEGRATION NUMERIQUE DES EQUATIONS
HYPERBOLIQUES DANS DEUX DIMENSIONS SPATIALES

CHAPITRE 4

LES EQUATIONS DIFFERENTIELLES

-

Nous examinerons une méthode d'intégration numérique d'un système de 3 équations aux dérivées partielles du 1er ordre, du type hyperbolique. Soit :

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial x} &= 0 \\
 \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} &= 0 \\
 \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4.1.1)$$

Sur un domaine $0 \leq X \leq b_1$, $0 \leq y \leq b_2$, $0 \leq t \leq T$, avec les conditions initiales et les conditions aux limites déterminées, par exemple :

$$\left. \begin{aligned}
 z(X,y,0) &= \tilde{\varphi}(X,y) \\
 u(X,y,0) &= \tilde{\varphi}(X,y) \\
 v(X,y,0) &= \tilde{\varphi}(X,y) \\
 z(0,y,t) &= \tilde{\psi}_{0,j}(y,t) \\
 u(b_1,y,t) &= \tilde{\psi}_{N,j}(y,t) \\
 v(X,0,t) &= \tilde{\psi}_{X,0}(X,t) \\
 v(X,b_2,t) &= \tilde{\psi}_{X,J}(X,t)
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(4.1.2)$$

où : $b_1 = N \cdot \Delta X$, $b_2 = J \cdot \Delta y$.

En posant :

$$w = \begin{bmatrix} u \\ v \\ z \end{bmatrix} \text{ et } L = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial t} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial t} \end{bmatrix}$$

Nous pouvons écrire symboliquement (4.1.1) sous la forme $Lw = 0$, tandis que (4.1.2) sera $lw = \varphi$, où l est l'opérateur sur des fonctions définies sur la surface latérale du cylindre.

ooo

CHAPITRE 5

ETUDE D'APPROXIMATION ET DE STABILITE NUMERIQUE DU SYSTEME (4.1.1) EN UTILISANT LA METHODE AUX PAS SEPARES

5.1. INTRODUCTION

Les méthodes numériques de résolution des équations aux dérivées partielles décrivant des phénomènes évolutifs dans deux dimensions spatiales se heurtent à plusieurs difficultés. Les schémas explicites de différences finies introduisent une limitation du pas de temps trop rigoureuse. Les approximations fondées sur les schémas implicites mènent à des formules de programmation très compliquées.

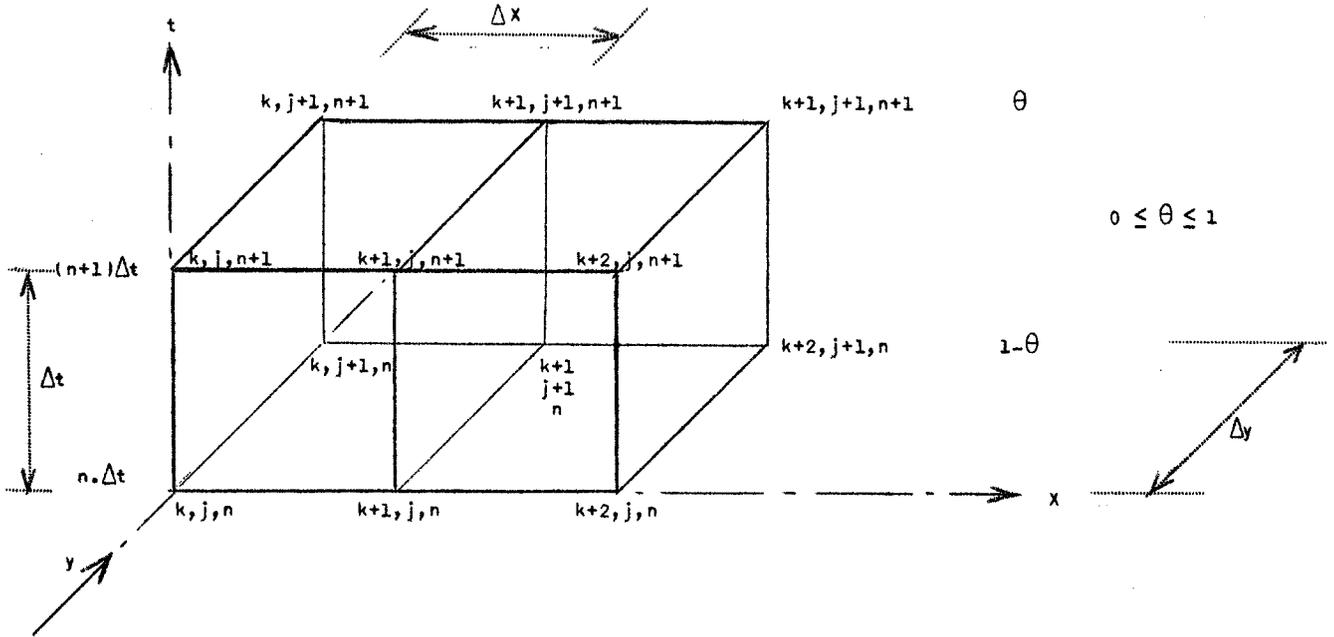
Depuis un certain temps on a introduit, pour des équations des types parabolique et elliptique dans les deux dimensions spatiales, la méthode aux pas séparés. On a pu prouver la convergence de la méthode et la stabilité de calcul pour les nombreux cas pratiques.

Nous examinerons par la suite la possibilité d'application de cette méthode aux équations hyperboliques. Ainsi certains problèmes pratiques, inabordables actuellement faute d'ordinateurs suffisamment puissants, pourraient être résolus numériquement. Par exemple, la solution numérique de (4.1.1) dans un domaine $20 \Delta x$ sur $20 \Delta y$ à l'aide d'un schéma ordinaire implicite des différences finies exigerait des inversions des matrices 20×20 pour chaque pas de temps Δt . En appliquant la méthode des pas séparés et la méthode de "double balayage" décrite dans le § 2.3, nous ramenons le problème dans deux dimensions à une série de problèmes unidimensionnels, économisant ainsi du temps de calcul et de la place dans la mémoire de l'ordinateur.

5.2. PRESENTATION DU SCHEMA DE DIFFERENCES FINIES

Introduisons une série de définitions analogues aux définitions du § 2.1. Elles nous permettront d'étudier la méthode et le schéma proposés.

5.2.1. Le maillage où nous déterminerons les trois fonctions-grille $u^{(h)}$, $v^{(h)}$ et $z^{(h)}$, est le maillage M_W défini par le dessin suivant :



Nous posons $\Delta x = h_1$, $\Delta y = h_2$ et nous admettons que $\Delta t = \tau(h_1, h_2)$.

Le maillage ainsi défini sera commun aux 3 fonctions-grille qui sont la solution du système d'équations aux différences finies.

5.2.2. L_h est l'opérateur aux différences finies agissant sur les fonctions-grille $u^{(h)}$, $v^{(h)}$, $z^{(h)}$ de telle manière que ces fonctions soient la solution d'un système d'équations aux différences $L_h w^{(h)} = 0$.

Pour définir l'opérateur L_h correspondant à la méthode proposée, écrivons les équations aux différences finies en deux étapes :

- dans la direction X , entre les instants $t_n = n\Delta t$ et $t_{n+\frac{1}{2}} = (n + \frac{1}{2})\Delta t$, selon le schéma décrit dans le § 2.1 :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &\approx \theta \frac{f_{k+1,1}^{n+\frac{1}{2}} - f_{k,1}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta x} + (1-\theta) \frac{f_{k+1,1}^n - f_{k,1}^n}{\Delta x}; \\ \frac{\partial f}{\partial t} &\approx \frac{f_{k+1,1}^{n+\frac{1}{2}} - f_{k+1,1}^n + f_{k,1}^{n+\frac{1}{2}} - f_{k,1}^n}{2\Delta t} \end{aligned} \right\} \dots\dots(5.2.1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

- dans la direction y , entre les instants $t_{n+1/2} = (n+\frac{1}{2})\Delta t$ et $t_{n+1} = (n+1)\Delta t$, selon les formules :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y} &\approx \frac{\theta(f_{k,j+1}^{n+1} - f_{k,j}^{n+1}) + (1-\theta)(f_{k,j+1}^{n+1/2} - f_{k,j}^{n+1/2})}{\Delta y} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &\approx \frac{f_{k,j+1}^{n+1} - f_{k,j+1}^{n+1/2} + f_{k,j}^{n+1} - f_{k,j}^{n+1/2}}{2\Delta t} ; \\ \frac{\partial f}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots(5.2.2)$$

En appliquant les formules (5.2.1) - (5.2.2) pour remplacer les dérivées dans (4.1.1) nous trouvons deux systèmes d'équations aux différences, correspondant aux deux étapes $n\Delta t \rightarrow (n+\frac{1}{2})\Delta t$ et $(n+\frac{1}{2})\Delta t \rightarrow (n+1)\Delta t$, ou aux deux directions : X et y . Ces deux systèmes s'écrivent :

- dans la direction X :

$$\left. \begin{aligned} \frac{u_{k+1,j}^{n+1/2} - u_{k+1,j}^n + u_{k,j}^{n+1/2} - u_{k,j}^n}{2\Delta t} + \frac{1}{\Delta x} [\theta(z_{k+1,j}^{n+1/2} - z_{k,j}^{n+1/2}) + (1-\theta)(z_{k+1,j}^n - z_{k,j}^n)] &= 0; \\ \frac{z_{k+1,j}^{n+1/2} - z_{k+1,j}^n + z_{k,j}^{n+1/2} - z_{k,j}^n}{2\Delta t} + \frac{1}{\Delta x} [\theta(u_{k+1,j}^{n+1/2} - u_{k,j}^{n+1/2}) + (1-\theta)(u_{k+1,j}^n - u_{k,j}^n)] &= 0; \\ \frac{v_{k,j}^{n+1/2} - v_{k,j}^n}{\Delta t} &= 0; \end{aligned} \right\} \dots\dots(5.2.3)$$

. dans la direction y

$$\left. \begin{aligned}
 & \frac{v_{k,j}^{n+1} - v_{k,j}^{n+1/2} + v_{k,j+1}^{n+1} - v_{k,j+1}^{n+1/2}}{2\Delta t} + \frac{1}{\Delta y} [\theta(z_{k,j+1}^{n+1} - z_{k,j}^{n+1}) + \\
 & \quad + (1-\theta)(z_{k,j+1}^{n+1/2} - z_{k,j}^{n+1/2})] = 0; \\
 & \frac{z_{k,j}^{n+1} - z_{k,j}^{n+1/2} + z_{k,j+1}^{n+1} - z_{k,j+1}^{n+1/2}}{2\Delta t} + \frac{1}{\Delta y} [\theta(v_{k,j+1}^{n+1} - v_{k,j}^{n+1}) + \\
 & \quad + (1-\theta)(v_{k,j+1}^{n+1/2} - v_{k,j}^{n+1/2})] = 0; \\
 & \frac{u_{k,j}^{n+1} - u_{k,j}^{n+1/2}}{\Delta t} = 0;
 \end{aligned} \right\} \dots\dots(5.2.4)$$

A partir de (5.2.3) et (5.2.4) nous trouvons que :

$$\left. \begin{aligned}
 u_{k,j}^{n+1} &= u_{k,j}^{n+1/2} \\
 v_{k,j}^{n+1/2} &= v_{k,j}^n
 \end{aligned} \right\} \dots\dots(5.2.5)$$

Introduisons une série d'opérateurs linéaires faisant correspondre à une fonction-grille $f^{(h)}$ appartenant à l'espace w_h et définie sur le maillage M_w , une autre fonction-grille appartenant au même espace et définie sur le même maillage M_w :

$$\left. \begin{aligned}
 T f^{(h)}(k\Delta x, j\Delta y, n\Delta t) &= f^{(h)}[k\Delta x, j\Delta y, (n+1)\Delta t] \quad \text{ou} \quad T f_{k,j}^n = f_{k,j}^{n+1} \\
 S_k f^{(h)}(k\Delta x, j\Delta y, n\Delta t) &= f^{(h)}[(k+1)\Delta x, j\Delta y, n\Delta t] \quad \text{ou} \quad S_k f_{k,j}^n = f_{k+1,j}^n \\
 S_j f^{(h)}(k\Delta x, j\Delta y, n\Delta t) &= f^{(h)}[k\Delta x, (j+1)\Delta y, n\Delta t] \quad \text{ou} \quad S_j f_{k,j}^n = f_{k,j+1}^n \\
 U f^{(h)}(k\Delta x, j\Delta y, n\Delta t) &= f^{(h)}(k\Delta x, j\Delta y, n\Delta t) \quad \text{ou} \quad U f_{k,j}^n = f_{k,j}^n
 \end{aligned} \right\} \dots\dots(5.2.6)$$

Ainsi nous pouvons écrire, en utilisant la définition (5.2.6) des opérateurs T , S_k , S_j et U , que :

$$T^2 f_{k,j}^n = f_{k,j}^{n+2} ; S_k^2 f_{k,j}^n = f_{k+2,j}^n ;$$

$$S_j^2 f_{k,j}^n = f_{k,j+2}^n ; U^2 f_{k,j}^n = U f_{k,j}^n = f_{k,j}^n ;$$

En substituant (5.2.6) dans (5.2.3) et (5.2.4) et en utilisant les relations (5.2.5), nous déterminons l'opérateur L_h pour le point $[x = k\Delta x, y = j\Delta y, t = (n+1)\Delta t]$ du maillage M_w par un système d'équations aux différences finies :

$$L_h^w(h) = \left\{ \begin{array}{l} (T-U)(S_k+U)u + 2r_1(1-\theta)(S_k-U)Z + 2r_1\theta(S_k-U)Z^{n+1/2} = 0 ; \\ 2r_1[(1-\theta)U+\theta T](S_k-U)u - (S_k+U)Z + (S_k+U)Z^{n+1/2} = 0 ; \\ (T-U)(S_j+U)v + 2r_2(1-\theta)(S_j-U)Z^{n+1/2} + 2r_2\theta(S_j-U)Z^{n+1} = 0 ; \\ 2r_2[(1-\theta)U+\theta T](S_j-U)v - (S_j+U)Z^{n+1/2} + (S_j+U)Z^{n+1} = 0 ; \end{array} \right. \dots (5.2.7)$$

où $r_1 = \frac{\Delta t}{\Delta x}$; $r_2 = \frac{\Delta t}{\Delta y}$;

On peut éliminer de ce système la fonction-grille intermédiaire $Z^{n+1/2}$ et alors on obtient :

$$(L_h^w(h))_{k\Delta x, j\Delta y}^{(n+1)\Delta t} = \left\{ \begin{array}{l} [4r_1^2\theta(1-\theta)(S_k-U)^2 + (S_k+U)^2]u^n + [4r_1^2\theta^2(S_k-U)^2 - (S_k+U)^2]u^{n+1} - \\ - 2r_1(S_k+U)(S_k-U)Z^n = 0 ; \\ [4r_2^2(1-\theta)^2(S_j-U)^2 - (S_j+U)^2]v^n + [4r_2^2\theta(1-\theta)(S_j-U)^2 + (S_j+U)^2]v^{n+1} + \\ + 2r_2(S_j+U)(S_j-U)Z^{n+1} = 0 ; \\ 2r_1(S_k-U)(S_j+U)[\theta u^{n+1} + (1-\theta)u^n] + 2r_2(S_k+U)(S_j-U)[\theta v^{n+1} + (1-\theta)v^n] + \\ + (S_k+U)(S_j+U)(Z^{n+1} - Z^n) = 0 ; \end{array} \right. \dots (5.2.8)$$

L'opérateur $L_n^{w(h)} = 0$ définit un schéma implicite des différences finies. La solution $u^{(h)}, v^{(h)}, z^{(h)}$ peut être trouvée soit par la résolution du système (5.2.8) par l'une des méthodes classiques, soit par la résolution du système (5.2.7) par la méthode des pas séparés.

5.2.3. L'opérateur aux différences $l_n^{w(h)}$ agissant aux limites est défini par :

$$l_n^{w(h)} = \begin{pmatrix} 0 \\ z_{k,j} \\ 0 \\ u_{k,j} \\ 0 \\ v_{k,j} \\ n \\ z_{0,j} \\ n \\ u_{N,j} \\ n \\ v_{k,0} \\ n \\ v_{k,J} \end{pmatrix} \dots\dots\dots(5.2.9)$$

5.2.4. L'ensemble des éléments $\varphi^{(h)}$ est :

$$\varphi^{(h)} = \begin{pmatrix} \tilde{\varphi}_{k,j} = \tilde{\varphi}(k\Delta x, j\Delta y) \\ \tilde{\varphi}_{k,j} = \tilde{\varphi}(k\Delta x, j\Delta y) \\ \tilde{\varphi}_{k,j} = \tilde{\varphi}(k\Delta x, j\Delta y) \\ \tilde{\psi}_{0,j} = \tilde{\psi}(0, j\Delta y, n\Delta t) \\ \tilde{\psi}_{N,j} = \tilde{\psi}(N\Delta x, j\Delta y, n\Delta t) \\ \tilde{\psi}_{k,0} = \tilde{\psi}(k\Delta x, 0, n\Delta t) \\ \tilde{\psi}_{k,J} = \tilde{\psi}(k\Delta x, J\Delta y, n\Delta t) \end{pmatrix} \dots\dots\dots(5.2.10)$$

5.2.5. La norme $\| \cdot \|_{w_h}$ dans l'espace des fonctions-grille $w^{(h)}$ est définie par :

$$\begin{aligned} \| w^{(h)} \|_{w_h} &= \max_n \| w^n \|_{w_h} = \max_n \max_{k,j} | u_{k,j}^n | + \\ &+ \max_n \max_{k,j} | v_{k,j}^n | + \max_n \max_{k,j} | z_{k,j}^n | \end{aligned} \quad \dots\dots(5.2.11)$$

5.2.6. La norme $\| \cdot \|_{\phi_h}$ dans l'espace ϕ_h des éléments $\varphi^{(h)}$ sera admise sous la forme :

$$\begin{aligned} \| \varphi^{(h)} \|_{\phi_h} &= \max_{k,j} | \tilde{\varphi}_{k,j} | + \max_{k,j} | \tilde{\tilde{\varphi}}_{k,j} | + \max_{k,j} | \tilde{\tilde{\tilde{\varphi}}}_{k,j} | + \\ &+ \max_{n,j} \left| \frac{\tilde{\psi}_{0,j}^{n+1} - \tilde{\psi}_{0,j}^n}{\Delta t} \right| + \max_{n,j} \left| \frac{\tilde{\tilde{\psi}}_{N,j}^{n+1} - \tilde{\tilde{\psi}}_{N,j}^n}{\Delta t} \right| + \\ &+ \max_{n,k} \left| \frac{\tilde{\tilde{\psi}}_{k,0}^{n+1} - \tilde{\tilde{\psi}}_{k,0}^n}{\Delta t} \right| + \max_{n,k} \left| \frac{\tilde{\tilde{\tilde{\psi}}}_{k,j}^{n+1} - \tilde{\tilde{\tilde{\psi}}}_{k,j}^n}{\Delta t} \right| \end{aligned} \quad \dots\dots(5.2.12)$$

Nous admettons que :

$$\tilde{\varphi}_{0,j} = \tilde{\psi}_{0,j} \quad ; \quad \tilde{\tilde{\varphi}}_{N,j} = \tilde{\tilde{\psi}}_{N,j};$$

$$\tilde{\tilde{\tilde{\varphi}}}_{k,0} = \tilde{\tilde{\tilde{\psi}}}_{k,0} \quad ; \quad \tilde{\tilde{\tilde{\varphi}}}_{k,j} = \tilde{\tilde{\tilde{\psi}}}_{k,j};$$

Alors (5.2.12) satisfait les trois conditions nécessaire pour être une norme dans l'espace ϕ_h .

5.3. ESTIMATION DE L'APPROXIMATION DU SYSTEME DIFFERENTIEL PAR LE SYSTEME AUX DIFFERENCES

Nous admettons comme précédemment (voir § 2.2) que l'opérateur $[\cdot]_h$ qui fait correspondre les fonctions-grille $u^{(h)}, v^{(h)}, z^{(h)}$ aux fonctions dans le plan (x, y, t) est tel que :

$$([w(x,y,t)]_h)_{\substack{k\Delta x \\ j\Delta y}}^{n\Delta t} = w(k\Delta x, j\Delta y, n\Delta t)$$

En admettant que les fonctions-grille $u^{(h)}$, $v^{(h)}$ et $z^{(h)}$ sont suffisamment continues, nous développons les termes des équations (5.2.8) en série de Taylor autour du point $[k\Delta x, j\Delta y, (n+1)\Delta t]$. En négligeant les termes d'ordre supérieur nous trouvons :

$$\begin{aligned}
 (L_h[w]_h)_{k,j}^{n+1} = & \left\{ \begin{aligned}
 & (u_t + z_x) + \frac{rh}{2} (2\theta-1) u_{xx} + h^2 \{ u_{xxx} r(\theta-\frac{1}{2}) + \\
 & \qquad \qquad \qquad + \frac{z_{xxx}}{12} [1-2r^2(6\theta-1)] \} ; \\
 & (v_t + z_y) + rh [(1-\theta)v_{yy} - \frac{1}{2}v_{tt}] + h^2 \{ v_{yyy}r(1-\theta) - \\
 & \qquad \qquad \qquad - z_{yyy} [\frac{1}{12} + r^2\theta(1-\theta)] + \frac{r}{2} z_{yyt} - \frac{r^3}{3} v_{ttt} \} ; \\
 & (u_x + v_y + z_t) + \frac{rh}{2} [z_{tt} - 2\theta(z_{xx} + z_{yy})] + \dots ;
 \end{aligned} \right. \dots(5.3.1)
 \end{aligned}$$

où $r = r_1 = r_2$; $\Delta x = \Delta y = h$

$$u_t = \frac{\partial u}{\partial t} ; \quad u_x = \frac{\partial u}{\partial x} \text{ etc...}$$

Nous avons alors :

$$L_h[w]_h = (Lw)_h + \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{bmatrix}$$

$$\text{où : } \left. \begin{aligned}
 R_1 &= \frac{rh}{2} (2\theta-1)u_{xx} + A_1h^2 ; \\
 R_2 &= rh [(1-\theta)v_{yy} - \frac{1}{2}v_{tt}] + A_2h^2 ; \\
 R_3 &= \frac{rh}{2} [z_{tt} - 2\theta(z_{xx} + z_{yy})] + A_3h^2 ;
 \end{aligned} \right\} \dots\dots(5.3.2)$$

$$\text{Donc : } \| L_h[w]_h - (Lw)_h \|_{F_h} = \max \begin{bmatrix} |R_1| \\ |R_2| \\ |R_3| \end{bmatrix} = \sigma(h) \dots\dots(5.3.3)$$

L'amélioration de l'approximation n'est pas possible pour le schéma adopté, à moins que $\frac{\partial^2 y}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$, auquel cas, pour $\theta = \frac{1}{2}$, nous aurions eu l'erreur $O(h^2)$.

L'approximation des conditions aux limites ne fait pas de difficultés : ou bien ces conditions peuvent être imposées exactement, ou bien il est toujours facile de les exprimer approximativement avec une erreur de l'ordre 1 en h.

CONCLUSION :

{ Le système aux différences finies (5.2.8) - (5.2.10) constitue une approximation de l'ordre 1 en h du système différentiel (4.1.1) - (4.1.2), quelle que soit la valeur de θ .

5.4. METHODE DE RESOLUTION DU SYSTEME AUX DIFFERENCES FINIES (5.2.7)

Le système (5.2.7) des 4 équations aux différences finies peut être divisé en deux systèmes des deux équations chacun. Les deux premières équations lient les 2 fonctions-grille : $u^{(h)}$ et $z^{(h)}$. Si l'état initial (c'est-à-dire $u^{(h)}(k\Delta x, j\Delta y, 0)$ et $z^{(h)}(k\Delta x, j\Delta y, 0)$) est connu, et si les conditions aux limites $x=0$, $x=b_1$ sont imposées au temps $t=\Delta t$, nous pouvons déterminer les 2 fonctions-grille inconnue : $u^{(h)}(k\Delta x, j\Delta y, \Delta t)$ et $z^{(h)}(k\Delta x, j\Delta y, \frac{1}{2}\Delta t)$. Afin de déterminer ces deux fonctions, nous utilisons la méthode de calcul décrite dans le § 2.3, où elle était appliquée aux problèmes unidimensionnels. Nous appliquons cette méthode du "double balayage" aux deux premières équations de (5.2.7) en admettant que le calcul se déroule le long des droites $y = j\Delta y$, $j = 0, 1, 2, \dots, J$. Ainsi la solution numérique est trouvée pour la première étape (direction X) comme s'il s'agissait d'une série des problèmes unidimensionnels. Cette solution est constituée par la fonction-grille $u^{(h)}$, dont les valeurs sont ainsi déterminées sur tout le maillage M_w au temps Δt , et par la fonction-grille $z_{\frac{1}{2}}^{(h)}$. Cette dernière est une fonction auxiliaire déterminée sur le même maillage que $u^{(h)}$, mais au temps $0 < t < \Delta t$. La solution intermédiaire $z^{(h)}(k\Delta x, j\Delta y, \frac{1}{2}\Delta t)$ et la fonction-grille initiale $v^{(h)}(k\Delta x, j\Delta y, 0)$ nous servent d'état initial pour la deuxième phase du calcul, analogue à la première, à cette différence près, que la méthode du "double balayage" est appliquée dans la direction y, le long des droites $x = k\Delta x$, $k = 0, 1, 2, \dots, N$. Ainsi nous calculons les valeurs des deux fonctions-grille $z^{(h)}(k\Delta x, j\Delta y, \Delta t)$ et $v^{(h)}(k\Delta x, j\Delta y, \Delta t)$ dans tous les points du maillage au temps $t = \Delta t$. La solution numérique du système (5.2.7) au temps $t = \Delta t$ est constituée par ces trois fonctions-grille : $u^{(h)}$, calculée dans la direction X en partant de $u^{(h)}$ et $z^{(h)}$ connues au temps $t=0$, $v^{(h)}$ et $z^{(h)}$, calculées dans la direction y en partant de $v^{(h)}$ connue au temps $t=0$ et la fonction intermédiaire $z_{\frac{1}{2}}^{(h)}$, connue après avoir effectué le calcul dans la direction X. Le calcul se poursuit de la même façon pour déterminer la solution $u^{(h)}$, $v^{(h)}$, $z^{(h)}$ aux temps $t = 2\Delta t, 3\Delta t, \dots$ etc.

5.5. ETUDE DE LA STABILITE NUMERIQUE

5.5.1. Réduction du système aux différences finies à la forme $w^{n+1} = R_h w^n + \tau \zeta^n$

Pour pouvoir examiner la stabilité numérique de la méthode décrite nous utilisons les théorèmes du § 2.4. Nous commençons par la stratification de la solution en la ramenant à la forme $w_{k,j}^{n+1} = R_h w_{k,j}^n + \tau \zeta_{k,j}^n$. Soit une nouvelle variable :

$$\begin{matrix}
 {}^{n+1} \\
 \zeta_{k,j}
 \end{matrix}
 = R_h
 \begin{matrix}
 {}^n \\
 w_{k,j}
 \end{matrix}
 = R_h
 \begin{bmatrix}
 {}^n u_{k,j} \\
 {}^n v_{k,j} \\
 {}^n z_{k,j} \\
 {}^{n+1/2} z_{k,j}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 \bar{v}_{k,j} \\
 \bar{v}_{k,j} \\
 \bar{v}_{k,j} \\
 \tilde{v}_{k,j}
 \end{bmatrix}
 \quad \dots\dots(5.5.1)$$

et un vecteur :

$$\zeta_{k,j}^n = \frac{w_{k,j}^{n+1} - R_h w_{k,j}^n}{\Delta t} =
 \begin{bmatrix}
 \zeta_{k,j} \\
 \zeta_{k,j} \\
 \zeta_{k,j} \\
 \zeta_{k,j}
 \end{bmatrix}
 \quad \dots\dots(5.5.2)$$

La nouvelle variable σ définie par (5.5.1) correspond à la variable v du § 2.4.2. En partant des équations (5.2.7) nous définissons les opérateurs R_h et ζ pour les points du domaine considéré.

Ainsi R_h sera défini par :

$$\left. \begin{aligned}
 (s_k+U)\bar{v} + 2r_1\theta(s_k-U)\tilde{v} &= -2r_1(1-\theta)(s_k-U)z^n + (s_k+U)u^n ; \\
 2r_1\theta(s_k-U)\bar{v} + (s_k+U)\tilde{v} &= (s_k+U)z^n - 2r_1(1-\theta)(s_k-U)u^n ; \\
 (s_j+U)\bar{v} + 2r_2\theta(s_j-U)\bar{v} + 2r_2\theta(1-\theta)(s_j-U)\tilde{v} &= (s_j+U)v^n ; \\
 2r_2\theta(s_j-U)\bar{v} + (s_j+U)\bar{v} - (s_j+U)\tilde{v} &= -2r_2(1-\theta)(s_j-U)v^n ;
 \end{aligned} \right\} \dots\dots(5.5.3)$$

En éliminant \tilde{v} entre les première et deuxième, troisième et quatrième et deuxième et quatrième des équations (5.5.3) nous trouvons pour R_h un système suivant :

$$\begin{aligned}
 [4r_1^2\theta^2(s_k-U)^2 - (s_k+U)^2]\bar{v} &= [-4r_1^2\theta(1-\theta)(s_k-U)^2 - (s_k+U)^2]u^n + \\
 &+ [2r_1(s_k^2 - U)]z^n ; \\
 [4r_2^2\theta(1-\theta)(s_j-U)^2 + (s_j+U)^2]\bar{v} + 2r_2(s_j^2 - U)\bar{v} &= \\
 &= [-4r_2^2(1-\theta)^2(s_j-U)^2 + (s_j+U)^2]v^n ; \dots\dots\dots(5.5.4) \\
 [2r_1\theta(s_k-U)(s_j+U)]\bar{v} + [2r_2\theta(s_k+U)(s_j-U)]\bar{v} + [(s_k+U)(s_j+U)]\bar{v} &= \\
 &= [-2r_1(1-\theta)(s_k-U)(s_j+U)]u^n + [-2r_2(1-\theta)(s_k+U)(s_j-U)]v^n + \\
 &+ [(s_k+U)(s_j+U)]z^n ;
 \end{aligned}$$

Aux points limites l'opérateur R_h prend, selon (4.1.2), la forme suivante :

$$\sigma_{0,j} = \begin{bmatrix} \bar{v}_{0,j} \\ \bar{v}_{0,j} \\ \bar{v}_{0,j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ u_{0,j} \\ n \\ v_{0,j} \\ \tilde{\psi}_0 \end{bmatrix} ; \quad \sigma_{b_1,j} = \begin{bmatrix} \bar{v}_{b_1,j} \\ \bar{v}_{b_1,j} \\ \bar{v}_{b_1,j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\psi}_{N,j} \\ n \\ v_{b_1,j} \\ n \\ z_{b_1,j} \end{bmatrix} ; \dots\dots\dots(5.5.5a)$$

$$\sigma_{k,0} = \begin{bmatrix} \bar{v}_{k,0} \\ \bar{v}_{k,0} \\ \bar{v}_{k,0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ u_{k,0} \\ \tilde{\psi}_{k,0} \\ n \\ z_{k,0} \end{bmatrix} ; \quad \sigma_{k,b_2} = \begin{bmatrix} \bar{v}_{k,b_2} \\ \bar{v}_{k,b_2} \\ \bar{v}_{k,b_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ u_{k,b_2} \\ \tilde{\psi}_{k,b_2} \\ n \\ z_{k,b_2} \end{bmatrix} ; \dots\dots\dots(5.5.5b)$$

Le choix de l'opérateur R_h , défini selon (5.5.4) et (5.5.5) et les conditions aux limites déterminent l'opérateur $\zeta_{k,j}$. Pour les points intérieurs du domaine nous trouvons, à partir de (5.2.7) :

$$\left. \begin{aligned}
 (s_k + U)\bar{\zeta} + 2r_1\theta(s_k - U)\tilde{\zeta} &= 0; \\
 2r_1\theta(s_k - U)\bar{\zeta} + (s_k + U)\tilde{\zeta} &= 0; \\
 (s_j + U)\bar{\zeta} + 2r_2\theta(s_j - U)\bar{\zeta} + 2r_1(1-\theta)(s_j - U)\tilde{\zeta} &= 0; \\
 2r_2\theta(s_j - U)\bar{\zeta} + (s_j + U)\bar{\zeta} - (s_j + U)\tilde{\zeta} &= 0;
 \end{aligned} \right\} \dots\dots(5.5.6)$$

Pour les points limites, en utilisant la relation :

$$\zeta_{k,j} = \frac{w_{k,j}^{n+1} - \sigma_{k,j}}{\Delta t}$$

Nous trouvons :

$$\zeta_{0,j} = \left[\begin{array}{c} \frac{u_{0,j}^{n+1} - u_{0,j}^n}{\Delta t} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{z_{0,j}^{n+1/2} - \tilde{z}_{0,j}^n}{\Delta t} \end{array} \right] ; \quad \zeta_{b_1,j} = \left[\begin{array}{c} \frac{u_{b_1,j}^{n+1} - \tilde{u}_{b_1,j}^n}{\Delta t} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{z_{b_1,j}^{n+1/2} - z_{b_1,j}^n}{\Delta t} \end{array} \right] ; \quad \dots(5.5.7)$$

$$\zeta_{k,0} = \left[\begin{array}{c} 0 \\ \frac{v_{k,0}^{n+1} - \tilde{v}_{k,0}^n}{\Delta t} \\ \frac{z_{k,0}^{n+1} - z_{k,0}^{n+1/2}}{\Delta t} \\ 0 \end{array} \right] ; \quad \zeta_{k,b_2} = \left[\begin{array}{c} 0 \\ \frac{v_{k,b_2}^{n+1} - \tilde{v}_{k,b_2}^n}{\Delta t} \\ \frac{z_{k,b_2}^{n+1} - z_{k,b_2}^{n+1/2}}{\Delta t} \\ 0 \end{array} \right] ; \quad \dots(5.5.8)$$

5.5.2. Etude de l'opérateur R_h

Nous cherchons les conditions telles que $\|R_h^n\|$ soit borné uniformément. Comme dans le § 2.5.5 nous étudierons 3 familles d'opérateurs : $\{Y_h\}$, $\{X_h\}$ et $\{Z_h\}$.

(a) La famille des opérateurs $\{Y_h\}$ déterminée pour les points $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$; $j=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ par les relations (5.5.4).

Posons :

$$\begin{aligned} \bar{v}_{k,j} &= \xi^{n+1} e^{ik\alpha} e^{ij\beta} \\ \bar{v}_{k,j} &= \eta^{n+1} e^{ik\alpha} e^{ij\beta} \\ \bar{v}_{k,j} &= \varphi^{n+1} e^{ik\alpha} e^{ij\beta} \\ u_{k,j}^n &= \xi^n e^{ik\alpha} e^{ij\beta} \\ v_{k,j}^n &= \eta^n e^{ik\alpha} e^{ij\beta} \\ z_{k,j}^n &= \varphi^n e^{ik\alpha} e^{ij\beta} \\ &\dots\dots(5.5.9) \\ &\text{etc...} \end{aligned}$$

Pour simplifier les formules mettons $\Delta x = \Delta y = h$, $\Delta t = rh$, $\alpha = \beta$. En substituant (5.5.9) dans (5.5.4) nous obtenons, après les transformations, un système d'équations :

$$\begin{bmatrix} \xi^{n+1} \\ \eta^{n+1} \\ \varphi^{n+1} \end{bmatrix} = [Y_h] \begin{bmatrix} \xi^n \\ \eta^n \\ \varphi^n \end{bmatrix}$$

où :

$$Y_h = \begin{pmatrix} \frac{[1-K^2\theta(1-\theta)](1+K^2\theta^2)}{(1+K^2\theta^2)^2} ; & 0 ; & -\frac{1K(1+K^2\theta^2)}{(1+K^2\theta^2)^2} ; \\ -\frac{K^2}{(1+K^2\theta^2)^2} ; & \frac{[1+K^2(1-\theta)^2][1+K^2\theta^2]-K^2}{[1-K^2\theta(1-\theta)](1+K^2\theta^2)} ; & -\frac{1K[1-K^2\theta(1-\theta)]}{(1+K^2\theta^2)^2} ; \\ -\frac{1K[1-K^2\theta(1-\theta)]}{(1+K^2\theta^2)^2} ; & -\frac{1K(1+K^2\theta^2)}{(1+K^2\theta^2)^2} ; & \frac{[1-K^2\theta(1-\theta)]^2}{(1+K^2\theta^2)^2} ; \end{pmatrix} \dots (5.5.10)$$

$$K = r \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\Delta t}{h} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$$

$$\alpha = m\Delta X = m\Delta y = mh.$$

On s'aperçoit que l'opérateur Y_h peut être, comme dans le § 2.5.2, comparé à la matrice d'amplification définie par RICHTMYER.

Nous cherchons les conditions pour lesquelles l'inégalité $\|Y_h^n\| \leq K$ ($n=1,2,\dots$) est satisfaite.

Nous savons (voir [6], p 190) qu'il faut que le spectre de la famille des opérateurs $\{Y_h\}$ soit à l'intérieur ou sur la limite du cercle unitaire $|\lambda| < 1$ pour que l'inégalité $\|Y_h^n\| < K$ soit satisfaite. Cette condition nécessaire est toujours satisfaite pour notre cas si $\frac{1}{2} \leq \theta \leq 1$. En effet en posant :

$$1 + K^2 \theta^2 = p ;$$

$$1 - K^2 \theta (1-\theta) = s ;$$

$$1 + K^2 (1-\theta)^2 = t ;$$

Nous trouvons l'équation caractéristique de (5.5.10) :

$$\begin{vmatrix} \frac{sp}{p^2} - \lambda & 0 & -\frac{1Kp}{p^2} \\ -\frac{K^2}{p^2} & \frac{tp-K^2}{sp} - \lambda & -\frac{1Ks}{p^2} \\ -\frac{1Ks}{p^2} & -\frac{1Kp}{p^2} & \frac{s^2}{p^2} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \dots(5.5.11)$$

D'où nous trouvons pour les valeurs propres λ_i ($i=1,2,3$) de l'opérateur Y_h l'équation :

$$\lambda^3 + \lambda^2 \left(-\frac{s^2}{p^2} - \frac{s}{p} + \frac{K^2 - tp}{Sp} \right) + \lambda \left[\frac{s^3}{p^3} + \frac{t(D+s)}{p^3} + \frac{K^2(s-p)}{p^3} \right] - \frac{t(K^2 + s^2)}{p^3} = 0 \quad \dots(5.5.12)$$

L'analyse des racines de cette équation prouve que pour $\frac{1}{2} \leq \theta \leq 1$, la condition $|\lambda_i| \leq 1$, ($i=1,2,3$) est toujours satisfaite. Nous avons trouvé numériquement une série de valeurs de λ_i en fonction de $K \geq 0$ pour différentes valeurs du coefficient θ . Les courbes $\max |\lambda_i| = f(K, \theta)$ sont représentées sur les fig. 5.1 et fig. 5.2.

On s'aperçoit que pour toutes les valeurs de $\frac{1}{2} \leq \theta \leq 1$ les valeurs de $\max |\lambda_i|$ sont limitées entre zéro et un (fig. 5.1), tandis que pour toutes les valeurs de $0 \leq \theta < \frac{1}{2}$, $\max |\lambda_i|$ est supérieur à 1 pour certaines valeurs de K (fig. 5.2). Ainsi nous pouvons supposer que la condition $\|Y_h^n\| < K$ est satisfaite pour $\frac{1}{2} \leq \theta \leq 1$.

En réalité on trouve des exemples de familles d'opérateurs dont le spectre est situé entièrement à l'intérieur du cercle unitaire et qui ne satisfont pas à la condition $\|Y_h^n\| < K$. Ainsi une vérification s'impose pour les cas pratiques.

Pour certains cas on peut trouver une condition suffisante. Généralement une voie expérimentale est utilisée : on effectue les calculs-essais qui permettent d'estimer la validité du schéma. Cette méthode est conseillée par GODUNOV et RYABENKI (voir [6], p. 214) et, en règle générale, la stabilité est confirmée par les calculs.

Nous avons effectué un certain nombre de ces calculs (voir chapitre 6) et sur la base de leurs résultats nous admettons que l'inégalité $\|Y_h^n\| < \kappa$ est satisfaite pour $\frac{1}{2} \leq \theta \leq 1$. Nous pouvons toutefois affirmer que le schéma de différences finies est instable pour $0 \leq \theta < \frac{1}{2}$.

(b) Considérons la famille des opérateurs $\{X_h\}$ déterminée pour les points $k=0, 1, 2, \dots; j=0, 1, 2, \dots;$ pour que λ soit un point du spectre de l'opérateur X_h il faut que $X_h w - \lambda w = 0$. Le spectre de X_h se compose des points du spectre de Y_h et des points correspondant aux points $k=0$ et $j=0$ dans le plan (X, y) . Pour $k=0$ nous avons :

$$X_h w_{0,j}^n = R_h w_{0,j}^n = \sigma_{0,j},$$

c'est-à-dire que :

$$\begin{bmatrix} u_{0,j}^n \\ v_{0,j}^n \\ \tilde{w}_{0,j}^n \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} u_{0,j}^n \\ v_{0,j}^n \\ z_{0,j}^n \end{bmatrix} = 0$$

d'où :

$$\lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{\tilde{w}_{0,j}^n}{z_{0,j}^n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{en vertu de (5.5.5)}$$

De même pour $j=0$ la relation $X_h w_{k,0}^n = \sigma_{k,0}$ donne :

$$\begin{bmatrix} u_{k,0}^n \\ \tilde{v}_{k,0}^n \\ z_{k,0}^n \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} u_{k,0}^n \\ v_{k,0}^n \\ z_{k,0}^n \end{bmatrix} = 0, \quad \text{d'où } \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ainsi le spectre Λ_X de la famille des opérateurs $\{X_n\}$ est composé des points du spectre Λ_Y de la famille $\{Y_n\}$ et des points $\lambda=1$.

(c) La famille $\{Z_n\}$ est définie pour les points :

$$k = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, N ;$$

$$j = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, J ;$$

On trouve facilement, à l'aide de (5.5.5) le même résultat que pour le cas de la famille des opérateurs $\{X_n\}$: le spectre Λ_Z se compose des points du spectre Λ_Y et des points $\lambda=1$.

Ainsi, en admettant que le spectre Λ de la famille des opérateurs $\{R_n\}$ est égal à la somme des spectres $\Lambda_X + \Lambda_Y + \Lambda_Z$ des familles $\{X_n\}$, $\{Y_n\}$ et $\{Z_n\}$, nous pouvons constater que :

- pour $\theta < \frac{1}{2}$ le schéma est instable puisque la condition nécessaire pour que $\|R_n^n\| < K$ n'est pas satisfaite.
- pour $\frac{1}{2} \leq \theta \leq 1$ nous avons toujours $\|R_n^n\| < K$.

5.5.3. Etudes des conditions supplémentaires

La condition (1) (voir le § 2.4.2) stipule :

$$\|\zeta_{k,j}\| \leq K_2 \|\varphi^{(h)}\|_{\phi_n}$$

Des deux premières équations (5.5.6) nous pouvons éliminer $\tilde{\zeta}$. Nous obtenons alors :

$$(S_k+U)^2 \bar{\zeta} - 4r_1^2 \theta^2 (S_k-U)^2 \bar{\zeta} = 0$$

ou autrement :

$$\bar{\zeta}_{k,j}(1-4r_1^2\theta^2) + 2\bar{\zeta}_{k+1,j}(1+4r_1^2\theta^2) + \bar{\zeta}_{k+2,j}(1-4r_1^2\theta^2) = 0$$

Nous savons que si :

$$1 + 4r_1^2 \theta^2 > \frac{1}{2} \times 2(4r_1^2 \theta^2 - 1) + \delta$$

($\delta > 0$)

et si : $4r_1^2 \theta^2 - 1 > 0$

alors : $\max_n |\bar{\zeta}_j| \leq \max (|\bar{\zeta}_{0,j}|, |\bar{\zeta}_{N,j}|)$

La première condition est toujours satisfaite pour $\delta \leq 2$. La deuxième est satisfaite si $r_1 \theta \geq \frac{1}{2}$. Ainsi nous trouvons, pour $r_1 \theta \geq \frac{1}{2}$:

$$\max_{k,j} |\bar{\zeta}_{k,j}| \leq \max_j (|\bar{\zeta}_{0,j}|, |\bar{\zeta}_{N,j}|) \quad \dots (5.5.18)$$

et par le même procédé :

$$\max_{k,j} |\tilde{\zeta}_{k,j}| \leq \max_j (|\tilde{\zeta}_{0,j}|, |\tilde{\zeta}_{N,j}|) \quad \dots (5.5.18')$$

Les deux dernières équations (5.5.6) peuvent être maintenant écrites sous la forme :

$$\left. \begin{aligned} (s_j + U)\bar{\zeta} + 2r_2\theta(s_j - U)\bar{\zeta} &= f_1 \\ 2r_2\theta(s_j - U)\bar{\zeta} + (s_j + U)\bar{\zeta} &= f_2 \end{aligned} \right\} \quad \dots (5.5.19)$$

où : $f_1 = -2r_1(1-\theta)(s_j - U)\tilde{\zeta};$

$$f_2 = (s_j + U)\tilde{\zeta};$$

A partir de (5.5.18) nous savons que :

$$\left. \begin{aligned} |f_1| \leq 2r_1(1-\theta) \cdot 2 \max |\tilde{\zeta}_{k,j}| &\leq 4r_1(1-\theta) \max (|\tilde{\zeta}_{0,j}|, |\tilde{\zeta}_{N,j}|); \\ |f_2| \leq 2 \max |\tilde{\zeta}_{k,j}| &\leq 2 \max (|\tilde{\zeta}_{0,j}|, |\tilde{\zeta}_{N,j}|); \end{aligned} \right\} \quad \dots (5.5.20)$$

De (5.5.19), en éliminant $\bar{\zeta}$, nous trouvons :

$$(s_j+u)^2 \bar{\zeta} - 4r_2^2 \theta^2 (s_j-u)^2 \bar{\zeta} = (s_j+u)f_1 - 2r_1\theta(s_j-u)f_2 \quad \dots(5.5.21)$$

Posons : $g_1 = (s_j+u)f_1 - 2r_1\theta(s_j-u)f_2$

Alors :

$$|g_1| \leq |8r_1(1-\theta) \max_j (|\tilde{\zeta}_{0,j}|, |\tilde{\zeta}_{N,j}|) - 8r_2\theta \max_j (|\tilde{\zeta}_{0,j}|, |\tilde{\zeta}_{N,j}|)|$$

A partir de (5.5.21) nous pouvons écrire que si $r_2\theta \geq \frac{1}{2}$, alors :

$$\max_{k,j} |\bar{\zeta}_{k,j}| \leq \max_k (|\bar{\zeta}_{k,0}|, |\bar{\zeta}_{k,j}|, \frac{1}{2\delta} \max |g_1|) \quad \dots(5.2.22)$$

En éliminant $\bar{\zeta}$ de (5.5.19), nous trouvons de même que :

$$\max_{k,j} |\bar{\zeta}_{k,j}| \leq \max_k (|\bar{\zeta}_{k,0}|, |\bar{\zeta}_{k,j}|, \frac{1}{2\delta} \max |g_2|) \quad \dots(5.5.22')$$

où :

$$|g_2| \leq |8r_1r_2\theta(1-\theta) \max_j (|\tilde{\zeta}_{0,j}|, |\tilde{\zeta}_{N,j}|) + 4 \max_j (|\tilde{\zeta}_{0,j}|, |\tilde{\zeta}_{N,j}|)|$$

En conclusion nous écrivons que :

$$\left. \begin{aligned} \|\bar{\zeta}\| &\leq \max_j (|\bar{\zeta}_{0,j}|, |\bar{\zeta}_{N,j}|) \\ \|\bar{\zeta}\| &\leq \max_k (|\bar{\zeta}_{k,0}|, |\bar{\zeta}_{k,j}|, \frac{1}{2\delta} \max |g_1|) \\ \|\bar{\zeta}\| &\leq \max_k (|\bar{\zeta}_{k,0}|, |\bar{\zeta}_{k,j}|, \frac{1}{2\delta} \max |g_2|) \\ \|\tilde{\zeta}\| &\leq \max_j (|\tilde{\zeta}_{0,j}|, |\tilde{\zeta}_{N,j}|) \end{aligned} \right\} \quad \dots(5.5.23)$$

D'après la méthode utilisée pour résoudre numériquement le problème nous savons que (voir § 2.3.) :

$$u_{0,j}^{n+1} - u_{0,j}^n = F_{0,j}(Z_{0,j}^{n+1/2} - Z_{0,j}^n) + F_{0,j} ; \quad Z_{0,j}^{n+1/2} = \tilde{\psi}_{0,j}^{n+1}$$

d'où :

$$\frac{u_{0,j}^{n+1} - u_{0,j}^n}{\Delta t} = E_{0,j} \frac{\psi_{0,j}^{n+1} - \psi_{0,j}^n}{\Delta t} + \frac{F_{0,j}}{\Delta t};$$

De (5.5.7) nous tirons alors, pour la direction X :

$$\zeta_{0,j} = \begin{bmatrix} E_{0,j} \frac{\psi_{0,j}^{n+1} - \psi_{0,j}^n}{\Delta t} + \frac{F_{0,j}}{\Delta t} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\psi_{0,j}^{n+1} - \psi_{0,j}^n}{\Delta t} \end{bmatrix}; \quad \zeta_{N,j} = \begin{bmatrix} \frac{\tilde{\psi}_{N,j}^{n+1} - \tilde{\psi}_{N,j}^n}{\Delta t} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\tilde{\psi}_{N,j}^{n+1} - \tilde{\psi}_{N,j}^n - F_{N,j}}{\Delta t \cdot E_{N,j}} \end{bmatrix}; \quad \dots (5.5.24)$$

De (5.5.8) nous trouvons, pour la direction y :

$$\zeta_{k,0} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\tilde{\psi}_{k,0}^{n+1} - \tilde{\psi}_{k,0}^n}{\Delta t} \\ \frac{\tilde{\psi}_{k,0}^{n+1} - \tilde{\psi}_{k,0}^n - F_{k,0}}{\Delta t \cdot E_{k,0}} \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \zeta_{k,J} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\tilde{\psi}_{k,J}^{n+1} - \tilde{\psi}_{k,J}^n}{\Delta t} \\ \frac{\tilde{\psi}_{k,J}^{n+1} - \tilde{\psi}_{k,J}^n - F_{k,J}}{\Delta t \cdot E_{k,J}} \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \dots (5.5.24')$$

Nous écrivons que :

$$\|\zeta\| \leq \max |\bar{\zeta}| + \max |\bar{\zeta}| + \max |\bar{\zeta}| + \max |\bar{\zeta}|$$

En utilisant (5.5.23), (5.5.24) et (5.5.24'), et en posant $r_1=r_2$, $\delta=2$, nous trouvons :

$$\|\zeta\| \leq A_1 \cdot \max_{n,j} \left| \frac{\psi_{0,j}^{n+1} - \psi_{0,j}^n}{\Delta t} \right| + A_2 \cdot \max_{n,j} \left| \frac{\tilde{\psi}_{N,j}^{n+1} - \tilde{\psi}_{N,j}^n}{\Delta t} \right| + \\ + B_1 \cdot \max_{n,k} \left| \frac{\tilde{\psi}_{k,0}^{n+1} - \tilde{\psi}_{k,0}^n}{\Delta t} \right| + B_2 \cdot \max_{n,k} \left| \frac{\tilde{\psi}_{k,J}^{n+1} - \tilde{\psi}_{k,J}^n}{\Delta t} \right| + C \quad \dots (5.5.24'')$$

où :

$$A_1 = 1 + \max_{n,j} |E_{0,j}|; \quad A_2 = 1 + \max_{n,j} \left| \frac{1}{E_{N,j}} \right|;$$

$$B_1 = 1 + \max_{n,k} \left| \frac{1}{E_{k,0}} \right| + 2r_1 + |1-r_1^2|;$$

$$B_2 = 1 + \max_{n,k} \left| \frac{1}{E_{k,J}} \right| + 2r_1 + |1-r_1^2|;$$

$$C = \max_{n,j} \left| \frac{F_{0,j}}{\Delta t} \right| + \max_j \left| \frac{F_{N,j}}{E_{N,j} \Delta t} \right| + \max_{n,k} \left| \frac{F_{k,0}}{E_{k,0} \Delta t} \right| + \max_{n,k} \left| \frac{F_{k,J}}{E_{k,J} \Delta t} \right|;$$

Ainsi pour la norme $\|\varphi^{(h)}\|_{\phi_h}$ dans l'espace ϕ_h choisie selon la formule (5.2.12) et pour $\delta=2$, la condition (1) est satisfaite et :

$$\|\zeta\| < K_2 \|\varphi^{(h)}\|_{\phi_h}$$

La condition (11) stipule la relation : $\|w^0\|_{w_h} \leq K_4 \|\varphi^{(h)}\|_{\phi_h}$.

$$w^0 = \begin{bmatrix} u^0 \\ v^0 \\ z^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi \\ \varphi \\ \varphi \end{bmatrix}; \quad \dots(5.5.25)$$

donc : $\|w^0\|_{w_h} = \max_{k,j} |\varphi| + \max_{k,j} |\varphi| + \max_{k,j} |\varphi| \quad \dots(5.5.26)$

En comparant (5.2.26) à (5.2.12) nous pouvons constater que la condition (11) est satisfaite.

5.6. CONCLUSIONS

Nous constatons que pour les normes admises le schéma des différences finies, résolu à l'aide de la méthode aux pas séparés, est numériquement stable pour $\frac{1}{2} \leq \theta \leq 1$ et $r\theta \geq \frac{1}{2}$. Il est instable pour $0 \leq \theta < \frac{1}{2}$.

La solution du système aux différences finies converge vers la solution du système différentiel et l'ordre de la convergence est le même que l'ordre de l'approximation, c'est-à-dire $O(h)$.

CHAPITRE 6

ETUDE NUMERIQUE EXPERIMENTALE DES EQUATIONS D'ECOULEMENT EN UTILISANT LA METHODE AUX PAS SEPARES

-

6.1. SOLUTION ANALYTIQUE DE L'EQUATION DES ONDES DANS UN DOMAINE RECTANGULAIRE

Soit un domaine rectangulaire $0 \leq X \leq b_1$, $0 \leq y \leq b_2$. Nous cherchons la solution de l'équation :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \quad \dots\dots(6.1.1)$$

satisfaisant aux conditions initiales :

$$z(X,y,0) = \tilde{\varphi}(X,y); \quad \frac{\partial z(X,y,0)}{\partial t} = \psi(X,y); \quad \dots\dots(6.1.2)$$

et aux conditions aux limites :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial z(0,y,t)}{\partial x} = \frac{\partial z(b_1,y,t)}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial z(X,0,t)}{\partial y} = 0; \\ z(X,b_2,t) = H_0 = \text{const}; \end{aligned} \right\} \dots\dots(6.1.3)$$

La solution de ce problème, obtenue à l'aide de la méthode classique de séparation des variables est (voir par exemple "Les équations de la physique mathématique" par A.N. Tikhonov et A.A. Samarskii, p.414) :

$$z(X,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (\bar{B}_{n,m} \cos \sqrt{\lambda_{n,m}} t + \bar{B}_{n,m} \sin \sqrt{\lambda_{n,m}} t) w_{n,m}; \quad \dots(6.1.4)$$

où les coefficients $\bar{B}_{n,m}$ et $\tilde{B}_{n,m}$ s'expriment à l'aide des conditions initiales :

$$\bar{B}_{n,m} = \int_0^{b_1} \int_0^{b_2} \tilde{\Phi}(X,y) w_{n,m} dX dy \quad \dots(6.1.5)$$

$$= \int_0^{b_1} \int_0^{b_2} \frac{\psi(X,y)}{\sqrt{\lambda_{n,m}}} w_{n,m} dX dy \quad \dots(6.1.6)$$

$$\lambda_{n,m} = \left(\frac{\pi n}{b_1}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{2b_2}\right)^2 \quad \dots(6.1.7)$$

$$w_{n,m} = \frac{2\sqrt{b_1 b_2}}{b_1 b_2} \cos \frac{n\pi}{b_1} X \cos \frac{m\pi}{2b_2} y \quad \dots(6.1.8)$$

Admettons :

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\Phi}(X,y) = Z(X,y,0) &= H_0 + \cos \frac{\pi X}{b_1} \cos \frac{\pi y}{2b_2} ; \\ \psi(X,y) &= 0; \end{aligned} \right\} \quad \dots(6.1.9)$$

Les conditions aux limites aux temps $t=0$ sont satisfaites par ce choix des conditions initiales, puisque :

$$\frac{\partial \tilde{\Phi}(0,y)}{\partial X} = \frac{\partial \tilde{\Phi}(b_1,y)}{\partial X} = \frac{\partial \tilde{\Phi}(X,0)}{\partial y} = 0; \quad \tilde{\Phi}(X,b_2) = H_0; \quad \dots(6.1.9')$$

Nous trouvons de (6.1.5) que :

$$\bar{B}_{n,m} = \begin{cases} 0 & \text{pour } n \neq 1, m \neq 1 \\ \frac{\sqrt{b_1 b_2}}{2} & \text{pour } n = m = 1 \end{cases}$$

De (6.1.6), pour $\psi(X,y) = 0$ nous tirons $\bar{B}_{n,m} = 0$. Donc la solution de (6.1.1) avec les conditions (6.1.3) et (6.1.9) est la suivante :

$$Z(X,y,t) = H_0 + \cos \frac{\pi X}{b_1} \cos \frac{\pi y}{2b_2} \cos \pi \sqrt{\frac{1}{b_1^2} + \frac{1}{4b_2^2}} t; \quad \dots(6.1.10)$$

6.2. RESOLUTION NUMERIQUE D'UN SYSTEME D'EQUATIONS D'ECOULEMENT PAR LA METHODE DES PAS SEPARÉS

Nous nous proposons d'intégrer numériquement le système (4.1.1) :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial Z}{\partial X} &= 0 ; \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial Z}{\partial y} &= 0 ; \\ \frac{\partial Z}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial X} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 ; \end{aligned} \right\} \dots (6.2.1)$$

dans un domaine rectangulaire $0 \leq X \leq b_1, 0 \leq y \leq b_2$, en imposant les conditions aux limites qui correspondent au problème (6.1.1) - (6.1.9) résolu analytiquement :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial Z(0,y,t)}{\partial X} = \frac{\partial Z(b_1,y,t)}{\partial X} = \frac{\partial Z(X,0,t)}{\partial y} &= 0 ; \\ Z(X,b_2,t) &= 2,00 ; \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(6.2.2)$$

Cela peut s'écrire sous une forme qui convienne mieux à (6.2.1) :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u(0,y,t)}{\partial t} = \frac{\partial u(b_1,y,t)}{\partial t} &= 0 ; \\ \frac{\partial v(X,0,t)}{\partial t} = 0 ; \quad Z(X,b_2,t) &= 2,0 ; \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(6.2.3)$$

Admettons que l'état initial soit donné par les relations suivantes, correspondant à (6.1.9) :

$$\left. \begin{aligned} Z(X,y,0) &= 2,0 + \cos \frac{\pi X}{b_1} \cos \frac{\pi y}{2b_2} ; \\ u(X,y,0) &= v(X,y,0) = 0 ; \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(6.2.4)$$

Ainsi le système (6.2.1) assujéti aux conditions (6.2.3) et (6.2.4) correspond à l'équation du second ordre (6.1.1) avec ses conditions (6.1.2) et (6.1.3).

En effet, on obtient (6.1.1) à partir de (6.2.1) par élimination de u et de v . Il faut remarquer qu'il s'agit en réalité de deux problèmes différents. On s'aperçoit que la solution (6.1.10) de (6.1.1) ne dépend pas de u et v . Ainsi il suffit, pour résoudre (6.1.1) de définir les conditions initiales et aux limites ne concernant que la fonction Z , tandis que la solution de (6.2.1) doit dépendre aussi des conditions imposées à u et v . Cette remarque a son importance dans le traitement des problèmes plus complexes et la comparaison des résultats numériques avec la solution analytique.

Nous avons intégré (6.2.1) - (6.2.4) numériquement par la méthode des pas séparés décrite dans le § 5.4. Le domaine considéré a été remplacé par un réseau de points de calcul. Nous avons admis 10 points dans la direction X et 20 points dans la direction y . La fig. 6.1 indique la numérotation adoptée par le programme. Le programme de calcul a été écrit en langage FORTRAN II et assemblé sur ordinateur IBM 7070. Ce programme nous a permis d'étudier les limites de la stabilité numérique et l'influence des différents facteurs sur la solution.

6.3. ETUDE EXPERIMENTALE DE L'INFLUENCE DES PARAMETRES r_1, r_2, θ SUR LA SOLUTION NUMERIQUE

6.3.1. Les calculs effectués

Les essais ont été menés sur ordinateur IBM 7070, en faisant varier systématiquement les paramètres essentiels : $\theta, \Delta t, \Delta x, \Delta y$. Le tableau 6.1. donne la liste des essais effectués. Pour analyser les résultats nous avons considéré quelques points du réseau décrit dans le § 6.2, notamment les points de calcul (5,2) (10,5), (16,9), (20,9) (voir Fig 6.1).

Tableau 6.1

Numéro de calcul	Δt secondes	$r_1 = \frac{\Delta t}{\Delta x}$	$r_2 = \frac{\Delta t}{\Delta y}$	θ	Remarques		
6.1.1	10	1,0	1,0	0,25	Calculs instables		
6.1.2				0,40			
6.1.3	5	0,5	0,5				
6.1.4	6	0,6	0,6				
6.1.5	8	0,8	0,8				
6.1.6	10	1,0	1,0	0,495			
6.1.7				0,50			
6.1.8	3	0,3	0,3	2/3		proche de la solution exacte	
6.1.9	10	1,0	1,0	1,0		Calculs stables	
6.1.10	3	0,3	0,3			Ondes atténuées	
6.1.11	10	1,0	1,0	0,50	Calculs stables		
6.2.1	3	0,3	0,3		La vitesse de propagation des ondes faussée par le calcul		
6.2.2	6	0,6	0,6				
6.2.3	8	0,8	0,8				
6.2.4	20	2,0	2,0				
6.2.5	30	3,0	3,0				
6.2.6	40	4,0	4,0				
6.2.7	20	2,0	2,0				
6.2.8	30	3,0	3,0			2/3	Calculs stables
6.2.9	20	2,0	2,0			1,0	Ondes atténuées
6.2.10	30	3,0	3,0				
6.3.1	10	1,0	2/3	0,50	Calculs stables La vitesse de propagation faussée par le calcul		
6.3.2			1/2				
6.3.3			1/3				

6.3.2. Limite de la stabilité numérique

En examinant le tableau 6.1 nous nous apercevons que le calcul est instable numériquement pour les valeurs de θ inférieures à $\frac{1}{2}$ et cela, quelles que soient les valeurs de Δx , Δy , Δt . La façon selon laquelle l'instabilité se manifeste est montrée sur les fig. 6.9 - 6.12, où nous avons porté les résultats du calcul n° 6.1.2 effectué pour $r_1=r_2=1$ et $\theta = 0,40$. On voit qu'au début du calcul les résultats ne s'écartent pas trop de la solution analytique, bien que la différence s'amplifie avec le temps de calcul. Cela est dû à la forme sinusoïdale de l'état initial qui retarde considérablement l'apparition d'instabilités franches.

Ainsi l'étude expérimentale confirme les conclusions théoriques du § 5.6 : la limite de la stabilité est $\theta = \frac{1}{2}$; pour $\theta < \frac{1}{2}$ le calcul est instable; pour $\frac{1}{2} \leq \theta \leq 1$ il est numériquement stable.

6.3.3. Cas spécial $\theta = \frac{1}{2}$, $r_1 = r_2 = 1$

Nous ne citons ici qu'une partie des résultats, notamment les niveaux Z en fonction du temps, calculés pour les points :

- (5,2), (10,5), (16,9) à l'intérieur du domaine,
- (20,9) à la limite du domaine.

La fig. 6.1 indique les positions respectives de ces 4 points de calcul.

En admettant $H_0 = 2,0$ nous avons pu calculer les valeurs exactes de Z en fonction du temps pour les 4 points à l'aide de la formule (6.1.10). Cette formule prend la forme :

$$Z(x,y,t) = 2,0 + \cos\alpha \cos\beta \cos 0,03587t ;$$

$$\text{où : } \alpha = \frac{\pi k \Delta x}{9 \Delta x} = \frac{\pi k}{9}; \quad \beta = \frac{\pi j \Delta y}{2,19 \Delta y} = \frac{\pi j}{38};$$

Le tableau 6.2 donne la comparaison de ces valeurs exactes avec les valeurs calculées numériquement à l'aide de la méthode des pas séparés en admettant $\Delta x = \Delta y = 10$ m, $\Delta t = 10$ secondes et $\theta = \frac{1}{2}$. Le calcul a été effectué pendant une période $T = 300$ secondes, c'est-à-dire 30 cycles de calcul.

On voit d'après le tableau 6.2 que pendant cette période et pour des amplitudes égales au maximum à 2,0 m l'écart entre les deux solutions ne dépasse pas 0,005 m, c'est-à-dire 0,25 %.

t secondes	Point (5Δx, 2Δy)			Point (16Δx, 9Δy)			Point (20Δx, 9Δy)		
	Z valeur exacte	Z valeur numérique	Erreur	Z valeur exacte	Z valeur numérique	Erreur	Z valeur exacte	Z valeur numérique	Erreur
180	2,300	2,301	+1.10 ⁻³	1,124	1,124	0	2,982	2,982	0
190	2,263	2,263	0	1,234	1,233	-1.10 ⁻³	2,859	2,860	+1.10 ⁻³
200	2,192	2,192	0	1,441	1,440	-1.10 ⁻³	2,627	2,628	+1.10 ⁻³
210	2,096	2,097	+1.10 ⁻³	1,720	1,717	-3.10 ⁻³	2,314	2,317	+3.10 ⁻³
220	1,989	1,990	+1.10 ⁻³	2,034	2,030	-4.10 ⁻³	1,963	1,966	+3.10 ⁻³
230	1,882	1,883	+1.10 ⁻³	2,343	2,340	-3.10 ⁻³	1,615	1,619	+4.10 ⁻³
240	1,791	1,792	+1.10 ⁻³	2,609	2,605	-4.10 ⁻³	1,317	1,321	+4.10 ⁻³
250	1,726	1,727	+1.10 ⁻³	2,798	2,794	-4.10 ⁻³	1,105	1,110	+5.10 ⁻³
260	1,697	1,697	0	2,885	2,881	-4.10 ⁻³	1,008	1,012	+4.10 ⁻³
270	1,705	1,706	+1.10 ⁻³	2,859	2,857	-2.10 ⁻³	1,037	1,040	+3.10 ⁻³
280	1,752	1,752	0	2,724	2,722	-2.10 ⁻³	1,188	1,190	+2.10 ⁻³
290	1,830	1,830	0	2,496	2,496	0	1,443	1,444	+1.10 ⁻³
300	1,929	1,929	0	2,206	2,207	+1.10 ⁻³	1,770	1,768	-2.10 ⁻³

6.3.4. Influence du pas de temps Δt

Il faut distinguer deux cas différents en étudiant ce problème :

$$1^\circ \quad \theta = \frac{1}{2}, \quad \Delta t \text{ variable, } \Delta x \text{ et } \Delta y \text{ constants}$$

La série de calculs correspondant à ces conditions comprend les calculs : 6.1.7, 6.2.1, 6.2.2, 6.2.3, 6.2.4 et 6.2.5. Les résultats sont portés sur les fig. 6.2, 6.3, 6.4, et 6.5 pour les points de calcul (16,9), (20,9), (10,5) et (5,2). Les conclusions pratiques qui s'imposent à l'examen de ces graphiques sont les suivantes :

- la variation du rapport $\frac{\Delta t}{\Delta x} = \frac{\Delta t}{\Delta y}$ influence nettement la vitesse de propagation des ondes, surtout pour $\frac{\Delta t}{\Delta x} > 1$. On s'aperçoit que la vitesse de propagation des ondes pour $\frac{\Delta t}{\Delta x} > 1$ est plus petite que la vitesse réelle trouvée à l'aide de la solution analytique.
- pour les rapports $\frac{\Delta t}{\Delta x} < 1$ on observe une vitesse de propagation pratiquement identique (un peu supérieure) à celle de la solution analytique.
- dans aucun cas nous n'observons une atténuation de l'amplitude des ondes.
- elles sont déphasées, mais non atténuées par rapport à la solution analytique.

$$2^\circ \quad \theta \neq \frac{1}{2}, \quad r_1 = r_2 \text{ variable}$$

Examinons les résultats des calculs 6.1.8, 6.1.9, 6.2.7 et 6.2.8 pour $\theta = 2/3$ et 6.1.10, 6.1.11, 6.2.9 et 6.2.10 pour $\theta = 1$. Les fig. 6.6, 6.7 et 6.8 montrent un phénomène nouveau par rapport à 1° : non seulement la vitesse de propagation est affectée, mais aussi l'amplitude des ondes. De ces calculs nous pouvons tirer les conclusions suivantes :

- pour les valeurs de $\theta > \frac{1}{2}$ le calcul introduit une atténuation artificielle des ondes par rapport à la solution analytique. Cette atténuation augmente avec le temps du calcul et provoque à la longue la disparition totale des oscillations du système, le phénomène étant en contradiction évidente avec la réalité. L'atténuation est d'autant plus rapide que le rapport $\frac{\Delta t}{\Delta x} = \frac{\Delta t}{\Delta y}$ est plus grand.
- de plus il existe le même phénomène du déphasage des ondes qu'au point 1°.

Ces conclusions sont bien illustrées par les fig. 6.9, 6.10, 6.11 et 6.12 qui montrent, pour les points (16,9), (20,9), (10,5) et (5,2) les résultats des calculs effectués avec le rapport fixe $\frac{\Delta t}{\Delta x} = \frac{\Delta t}{\Delta y}$ mais en variant θ (calculs n° 6.1.2, 6.1.7, 6.1.9 et 6.1.11).

6.4. INTERPRETATION DES RESULTATS NUMERIQUES

Pour interpréter les résultats du § 6.3 nous utiliserons la méthode exposée dans le § 3.2 et fondée sur l'analyse de Fourier. Puisque la comparaison de la solution numérique avec la solution analytique s'est limitée à la fonction Z, nous nous bornerons ici à étudier ces résultats seulement.

a/ Equation différentielle (6.2.1)

Soit :

$$\left. \begin{aligned} u &= u^* e^{i(\alpha X + \gamma y + \beta t)} \\ v &= v^* e^{i(\alpha X + \gamma y + \beta t)} \\ z &= z^* e^{i(\alpha X + \gamma y + \beta t)} \end{aligned} \right\} \dots\dots(6.4.1)$$

la solution du système (6.2.1). La substitution de (6.4.1) dans (6.2.1) donne, après élimination de u^* , v^* et z^* , la relation : $\beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2$. En posant $\alpha = \gamma$, nous trouvons $\beta = \pm \sqrt{2} \alpha$ et nous savons que $\frac{\beta}{\alpha} = \pm \sqrt{2}$.

b/ Equations aux différences (5.2.8)

Nous cherchons la solution du système (5.2.8) sous la forme :

$$\left. \begin{aligned} u^{(h)} &= u^* e^{i(\alpha k \Delta X + \gamma j \Delta y + \beta n \Delta t)} \\ v^{(h)} &= v^* e^{i(\alpha k \Delta X + \gamma j \Delta y + \beta n \Delta t)} \\ z^{(h)} &= z^* e^{i(\alpha k \Delta X + \gamma j \Delta y + \beta n \Delta t)} \end{aligned} \right\} \dots\dots(6.4.2)$$

La substitution de (6.4.2) dans (5.2.8) et l'élimination de u^* et v^* mène, si l'on admet que $\Delta X = \Delta y$ et $r_1 = r_2 = r$, à l'équation suivante :

$$\frac{4r^2 s^2 [\theta(e^{i\beta\Delta t} - 1) + 1]}{4r^2 s^2 \theta [\theta(e^{i\beta\Delta t} - 1) + 1] - (e^{i\beta\Delta t} - 1)} z^* - \frac{4r^2 s^2 e^{i\beta\Delta t} [\theta(e^{i\beta\Delta t} - 1) + 1]}{4r^2 s^2 (1-\theta) [\theta(e^{i\beta\Delta t} - 1) + 1] + (e^{i\beta\Delta t} - 1)} z^* + (e^{i\beta\Delta t} - 1) z^* = 0 \dots (6.4.3)$$

où : $r = \frac{\Delta t}{\Delta X} = \frac{\Delta t}{\Delta y}$;

$$s = 1 \operatorname{tg} \frac{\alpha \Delta X}{2} = 1 \operatorname{tg} \frac{\gamma \Delta y}{2};$$

La relation (6.4.3) peut être analysée, selon la méthode décrite dans le § 3.2, pour les différentes valeurs de θ et r . Nous nous bornerons à décrire un seul cas particulier : $\theta = \frac{1}{2}$. Nous avons vu dans le § 6.3.2 que la solution numérique correspondant à $\theta = \frac{1}{2}$ et $r = 1$ coïncide pratiquement avec la solution analytique, tandis que pour $\theta = \frac{1}{2}$ et $r \neq 1$ la vitesse de propagation des ondes calculées varie, mais leurs amplitudes restent constantes. Nous expliquons ici ce phénomène.

Pour $\theta = \frac{1}{2}$ nous tirons de (6.4.3) :

$$\frac{2r^2 s^2 (e^{i\beta\Delta t} + 1)}{r^2 s^2 (e^{i\beta\Delta t} + 1) - (e^{i\beta\Delta t} - 1)} - \frac{2r^2 s^2 e^{i\beta\Delta t} + 1(e^{i\beta\Delta t} + 1)}{r^2 s^2 (e^{i\beta\Delta t} + 1) + (e^{i\beta\Delta t} - 1)} + (e^{i\beta\Delta t} - 1) = 0 \dots (6.4.4)$$

d'où :

$$e^{2i\beta\Delta t} + 2e^{i\beta\Delta t} \cdot \frac{1+2r^2 s^2 - r^4 s^4}{-1+2r^2 s^2 - r^4 s^4} + 1 = 0 \dots (6.4.5)$$

et :

$$e^{i\beta\Delta t} = \frac{1-K_1}{1+K_1} \pm \frac{2i\sqrt{K_1}}{1+K_1} \dots (6.4.6)$$

où : $K_1 = 2r^2 \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\alpha \Delta X}{2} \right) + r^4 \operatorname{tg}^4 \left(\frac{\alpha \Delta X}{2} \right)$

En admettant que β soit un nombre complexe posons $\beta = \beta_1 + i \beta_2$. Alors (6.4.6) devient :

$$e^{-\beta_2 \Delta t} \cdot (\cos \beta_1 \Delta t + i \sin \beta_1 \Delta t) = \frac{1-K_1}{1+K_1} \pm i \frac{2\sqrt{K_1}}{1+K_1} \quad \dots(6.4.7)$$

d'où :

$$\left. \begin{aligned} e^{-\beta_2 \Delta t} \cos \beta_1 \Delta t &= \frac{1-K_1}{1+K_1} ; \\ e^{-\beta_2 \Delta t} \sin \beta_1 \Delta t &= \pm \frac{2\sqrt{K_1}}{1+K_1} ; \end{aligned} \right\} \dots(6.4.8)$$

et :

$$\operatorname{tg} \beta_1 \Delta t = \pm \frac{2\sqrt{K_1}}{1-K_1} ; \quad \dots(6.4.9)$$

tandis que :

$$e^{-\beta_2 \Delta t} = \pm \frac{1}{\sin \beta_1 \Delta t} \cdot \frac{2\sqrt{K_1}}{1+K_1} = \pm \frac{1+K_1}{2\sqrt{K_1}} \cdot \frac{2\sqrt{K_1}}{1+K_1} = 1,$$

donc $\beta_2 = 0$, $\beta = \beta_1$ et finalement :

$$\cos \beta_2 \Delta t = \frac{1-K_1}{1+K_1}; \quad \dots(6.4.10)$$

Ainsi nous avons prouvé que pour $\theta = \frac{1}{2}$ l'atténuation des ondes sinusoïdales ne peut pas exister puisque aux valeurs réelles de α correspondent les valeurs réelles de β quel que soit r . Il reste à examiner la vitesse de propagation. Pour que la solution (6.4.2) coïncide avec la solution analytique il faut que la relation (6.4.10) satisfasse à la condition $\frac{\beta}{\alpha \sqrt{2}} = \pm 1$. Nous avons résolu numériquement (6.4.10) pour différentes longueurs d'ondes (ou différentes valeurs de $\alpha \Delta x$) et différentes valeurs de r . Ensuite nous avons calculé le rapport $\frac{\tilde{\omega} \Delta t}{\omega} = \frac{\beta \Delta t}{\sqrt{2r\alpha \Delta x}}$, où $\tilde{\omega} \Delta t$ représente la vitesse de propagation calculée numériquement, ω la vitesse réelle de propagation, $\beta \Delta t$ est calculé à partir de (6.4.10) pour $\alpha \Delta x$ et r différents. Si $\frac{\tilde{\omega} \Delta t}{\omega} = 1$, la solution numérique coïncide avec la solution exacte. Si $\frac{\tilde{\omega} \Delta t}{\omega} < 1$ la vitesse de propagation calculée numériquement est plus petite que la vitesse réelle. Si $\frac{\tilde{\omega} \Delta t}{\omega} > 1$, elle est plus grande. Le tableau 6.3 et la fig. 6.13 montrent les résultats de ces calculs.

Tableau 6.3 Le rapport $\frac{\tilde{\omega}\Delta}{\omega}$

$\alpha\Delta x \backslash r = \frac{\Delta t}{\Delta x}$	0,3	0,5	0,8	1,0	1,2	1,5	2,0	2,5	3,0	4,0
$\frac{\pi}{6}$	1,020	1,015	1,005	0,993	0,983	0,959	0,919	0,873	0,837	0,726
$\frac{\pi}{4}$	1,062	1,030	1,013	0,983	0,957	0,918	0,841	0,766	0,700	0,583
$\frac{\pi}{3}$	1,138	1,095	1,015	0,975	0,934	0,867	0,759	0,670	0,594	0,476
$\frac{\pi}{2}$	1,225	1,160	1,030	0,940	0,860	0,753	0,615	0,515	0,441	0,339

L'analyse des résultats montre qu'il n'y a pas de point commun à toutes les courbes, c'est-à-dire que la solution numérique ne coïncide jamais avec la solution analytique. Toutefois on doit obtenir de bons résultats en admettant $r \approx 0,85$. On s'aperçoit aussi que pour $0,3 \leq r \leq 0,85$ la différence absolue entre la vitesse calculée et la vitesse réelle de propagation est plus petite, même pour $\alpha\Delta x = \frac{\pi}{2}$, que pour $0,85 < r \leq 4,0$. Cela explique bien les phénomènes décrits dans le § 6.3.

En refaisant cette analyse pour les valeurs de $\theta \neq \frac{1}{2}$, on aurait pu constater que pour $\theta > \frac{1}{2}$ la partie imaginaire β_2 de β existe et qu'elle est positive si bien que les amplitudes des ondes sont atténuées en fonction du temps.

B I B L I O G R A P H I E

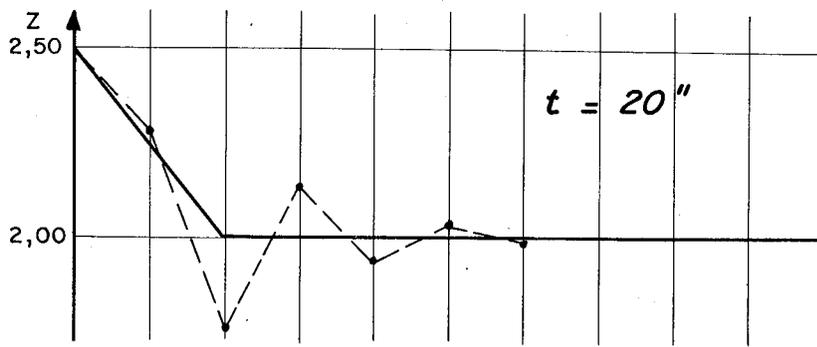
-

- [1] A. A. ABRAMOV "On the translation of boundary conditions for systems of linear ordinary differential equations (a variant of the sweep method)", URSS Comput. Math. and Math. Phys., n° 1, 1961.
- [2] I.S. BEREZIN "Computing Methods" vol. II,
N.P. ZHIDKOV Pergamon Press, 1965.
- [3] J.A. CUNGE "Contribution à l'étude de certains schéma aux différences finies", SOGREAH, N.T. 1080, 1964.
M. WEGNER
- [4] R.P. FEDORENKO "The application of difference schemes of high accuracy to the numerical solution of hyperbolic equations", URSS Comput. Math. and Math. Phys., n° 6, 1963.
- [5] I.M. GELFAND "The double sweep method for solution of difference equations",
O.V. LOKUTSIEVSKI Appendix II, Theory of difference schemes, Godunov and Ryabenki.
- [6] S.K. GODUNOV "Theory of difference schemes"
V.S. RYABENKI North Holland Publishing Company,
Amsterdam, 1964.
- [7] P.J. LAURENT "Etude de procédés d'extrapolation en analyse numérique",
thèse présentée à la Faculté des sciences de l'Université de Grenoble, le 15.6.1964.
- [8] P.D. LAX "Difference schemes for hyperbolic equations with high
B. WENDROFF order of accuracy", Comm. on Pure Appl. Mathematics,
vol. XVII, n° 3, August 1964.
- [9] P.D. LAX "Systems of conservation laws" comm. on Pure and Appl.
B. WENDROFF Math., vol. XIII 1960.

- [10] A. PREISSMANN "Difficultés rencontrées dans le calcul des ondes de translation à front raide" XI Congrès d'AIKH, Leningrad, Sept. 1965.
- [11] R. RICHTMYER "Difference methods for initial-value problems"; Interscience Publishers, New York, 1957.
- [12] E.E. ZAJAC "Note on overly - stable difference approximations", Journ. of Math. and Physics, n° 1, March 1964.

ooo

Fig 3.1

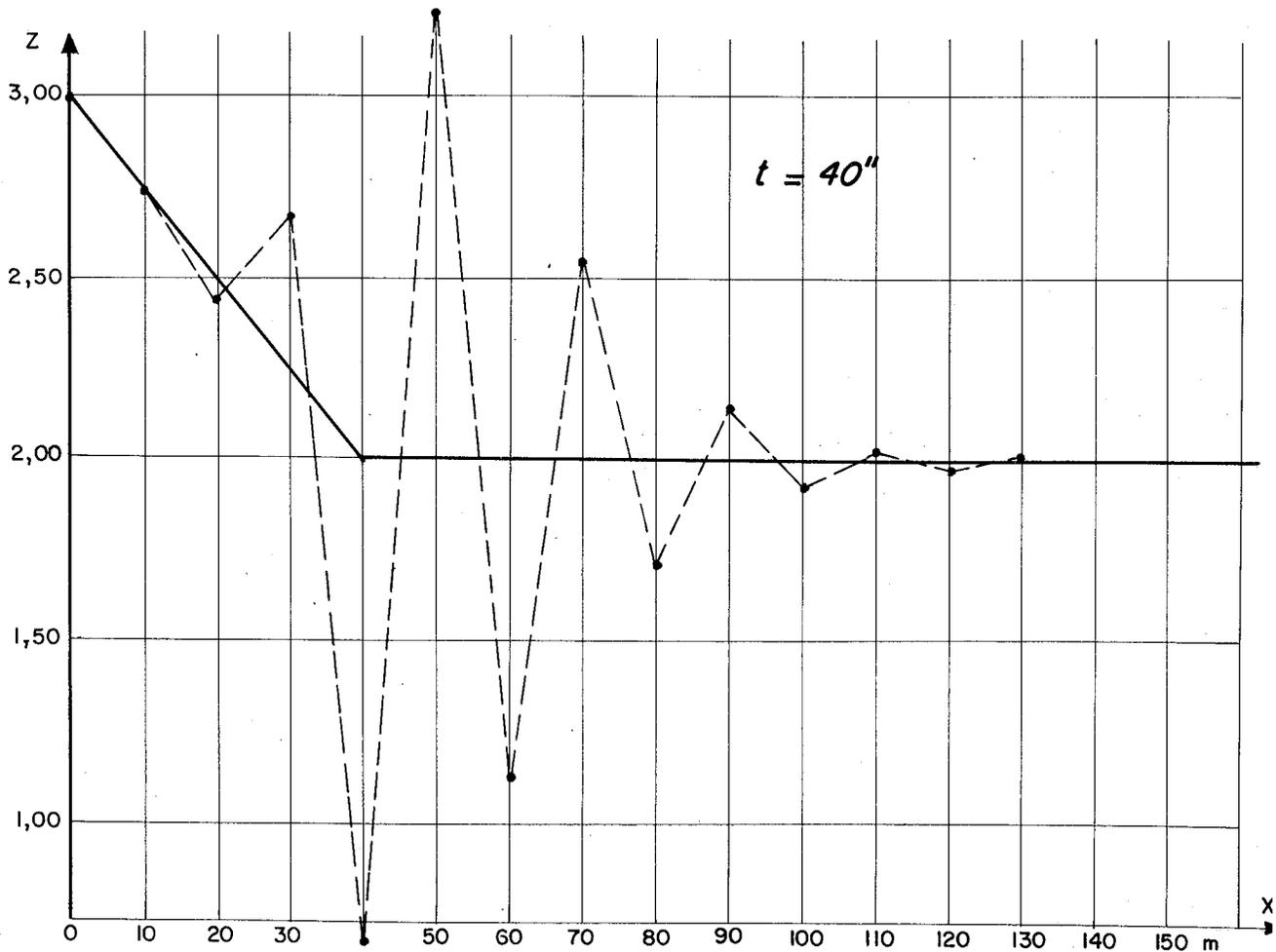
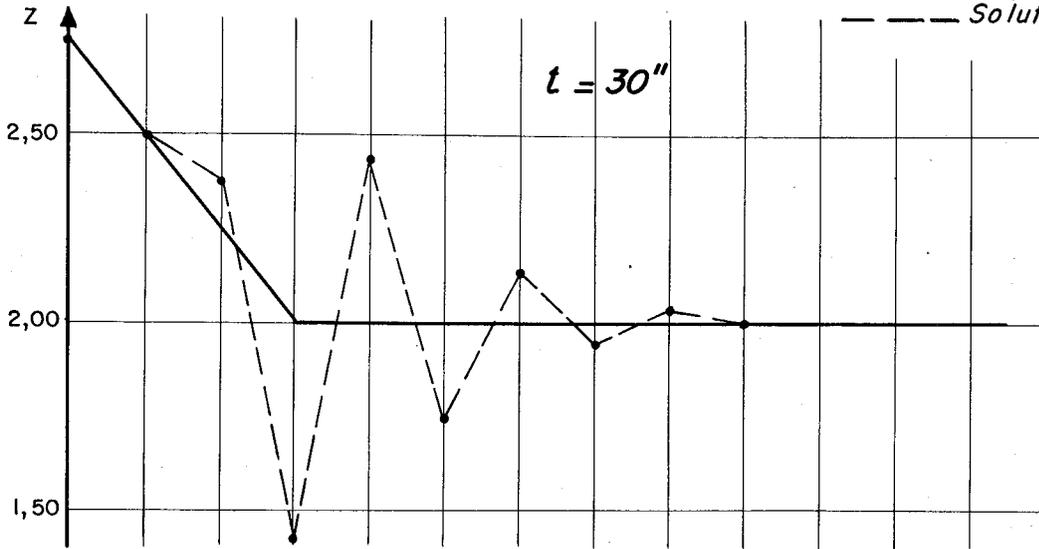


CALCUL D'UNE ONDE
PROGRESSIVE AVEC

$$r = 1, \theta = \frac{1}{4}$$

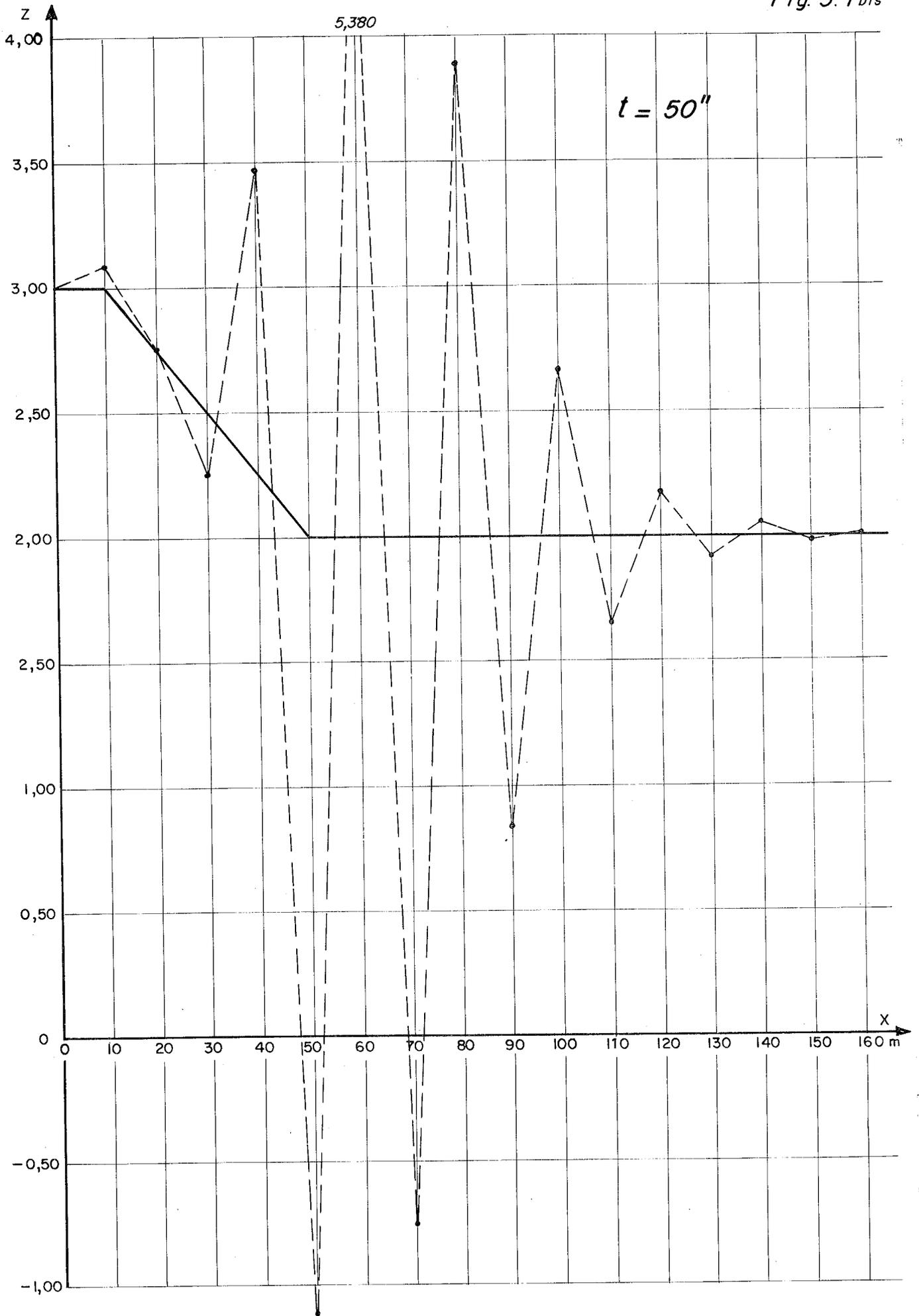
APPARITION D'INSTABILITES

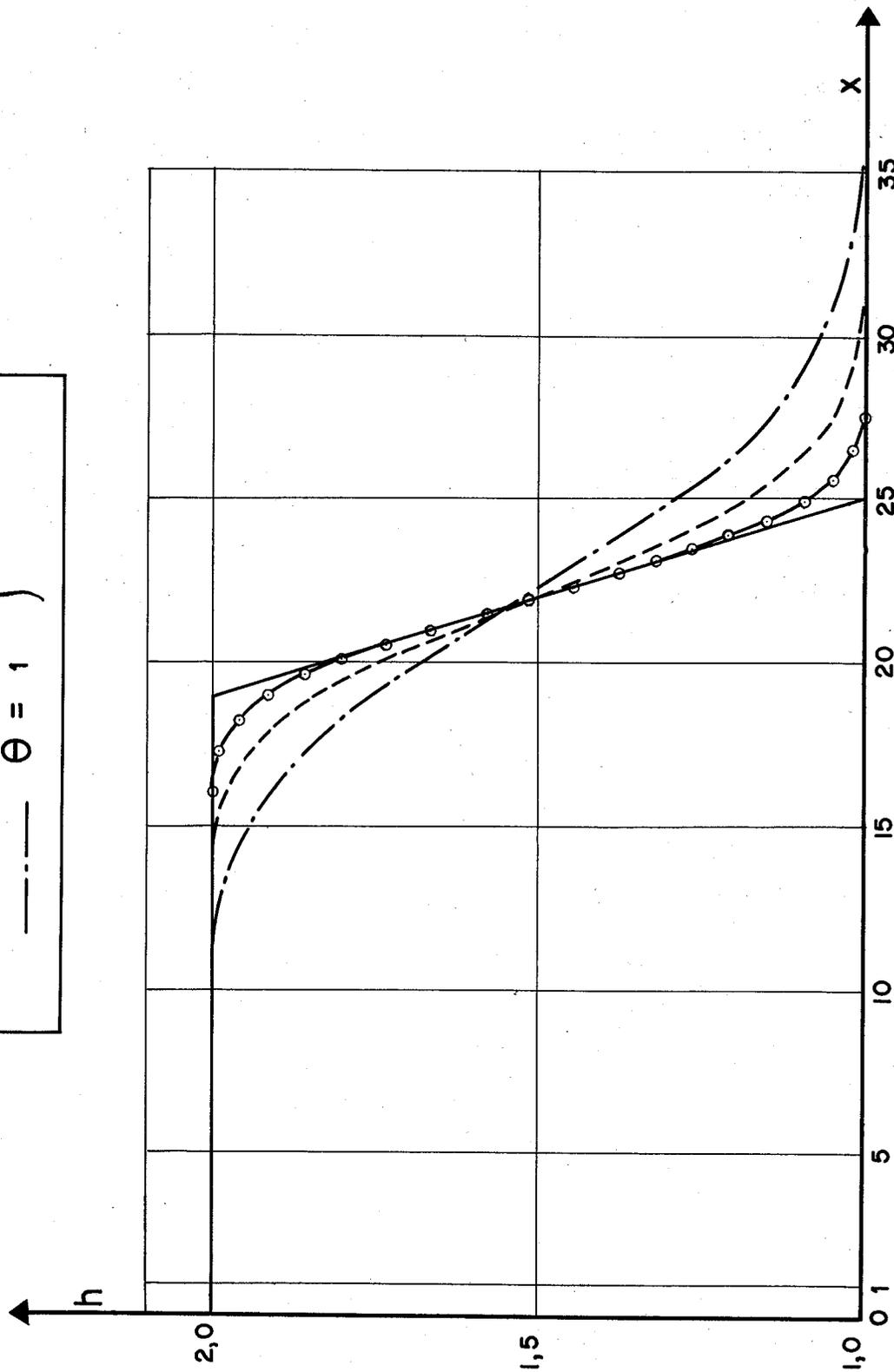
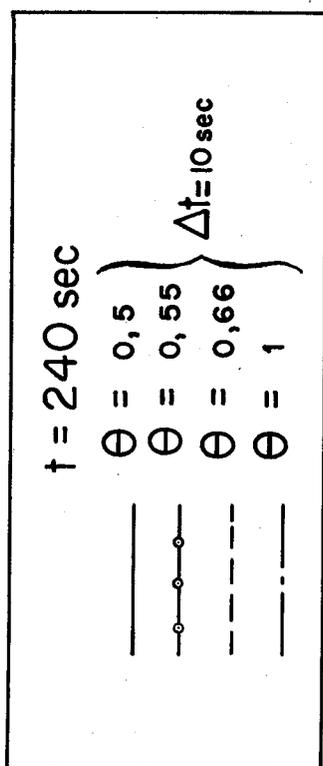
— Solution analytique
- - - Solution numérique

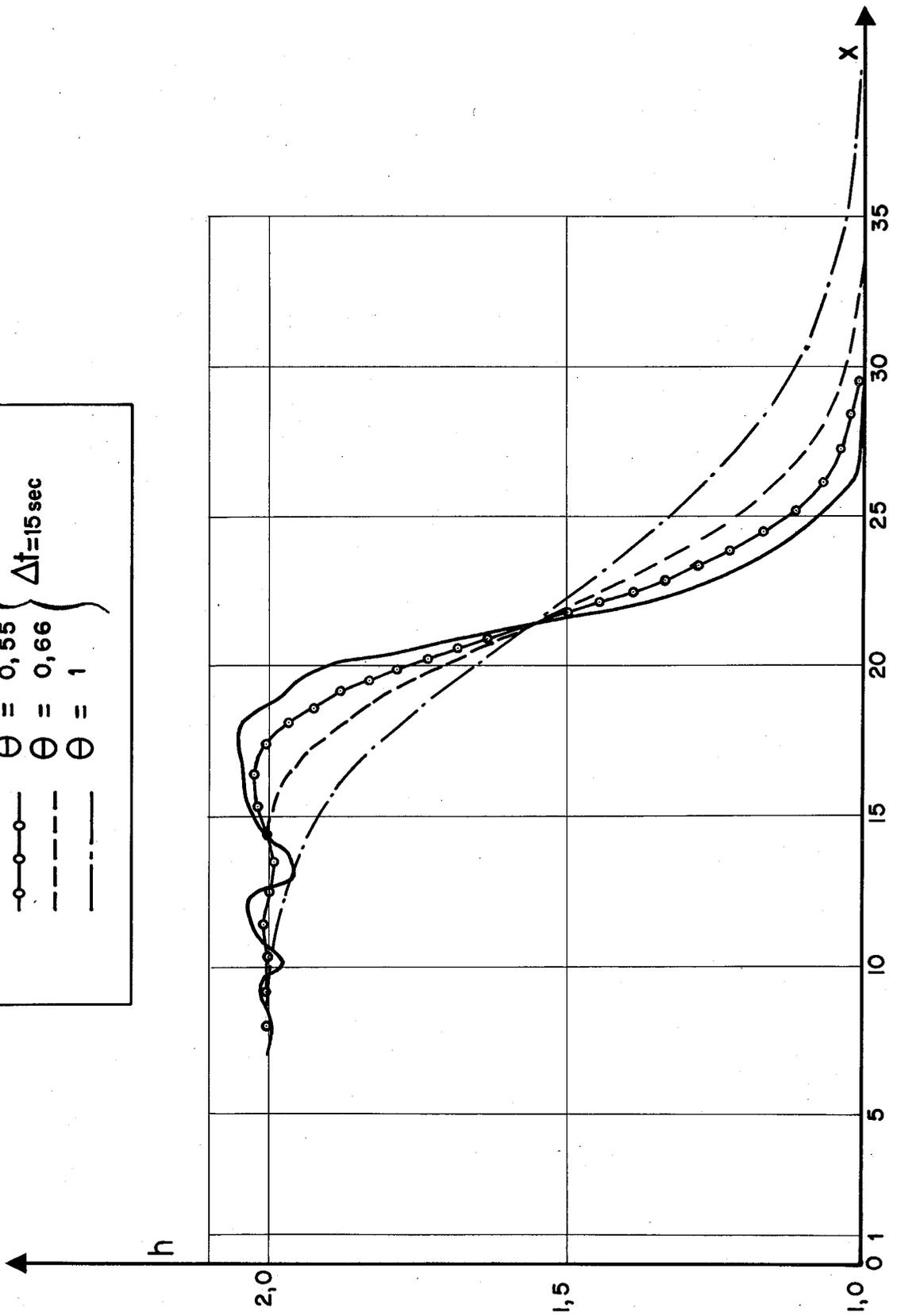
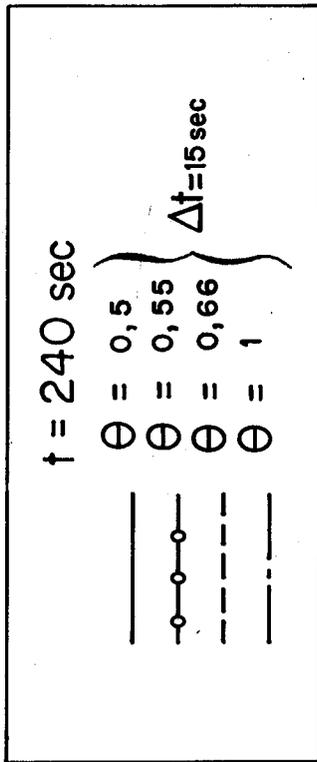


NY 1270-101

Fig. 3. 1 bis







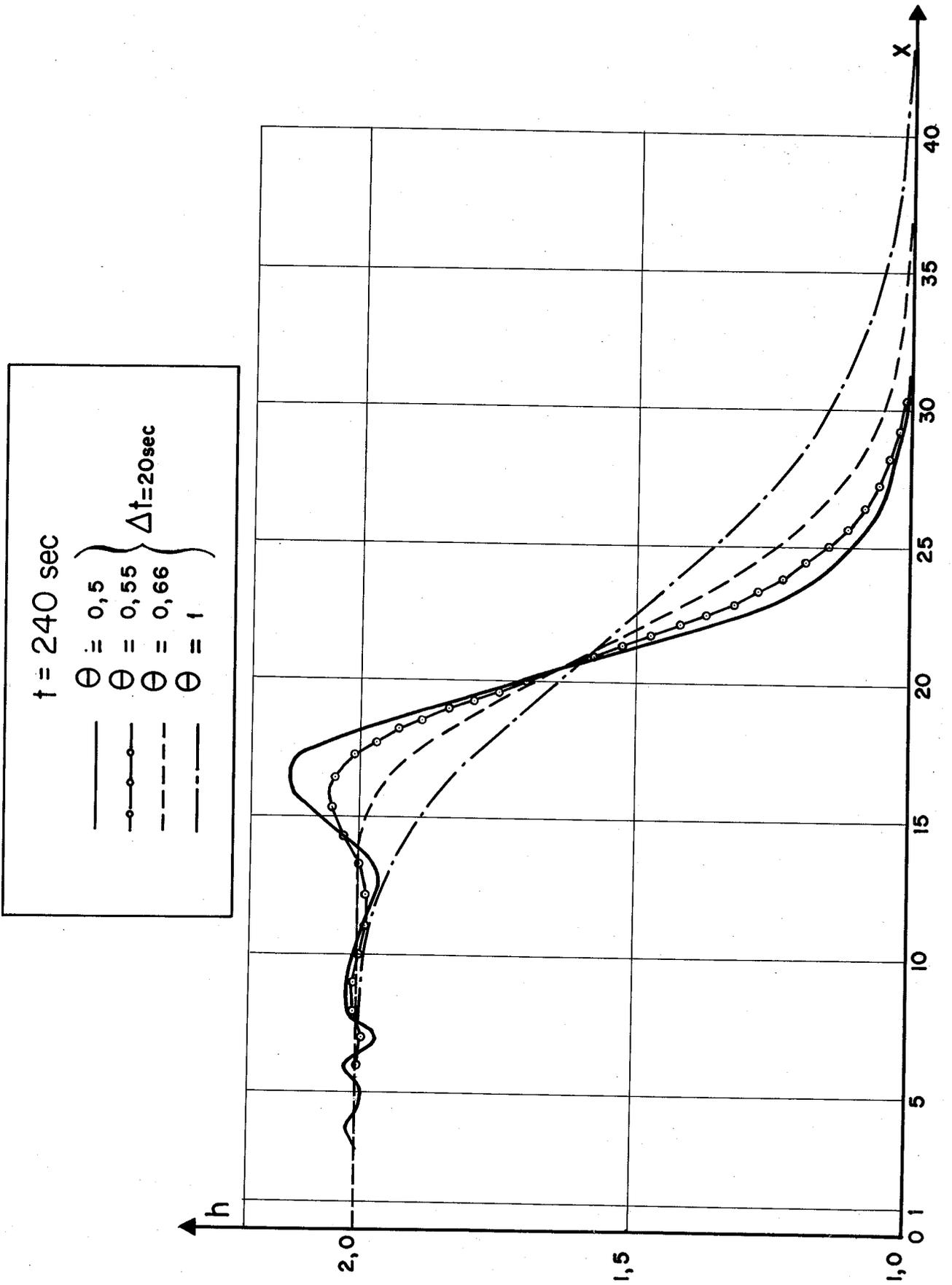
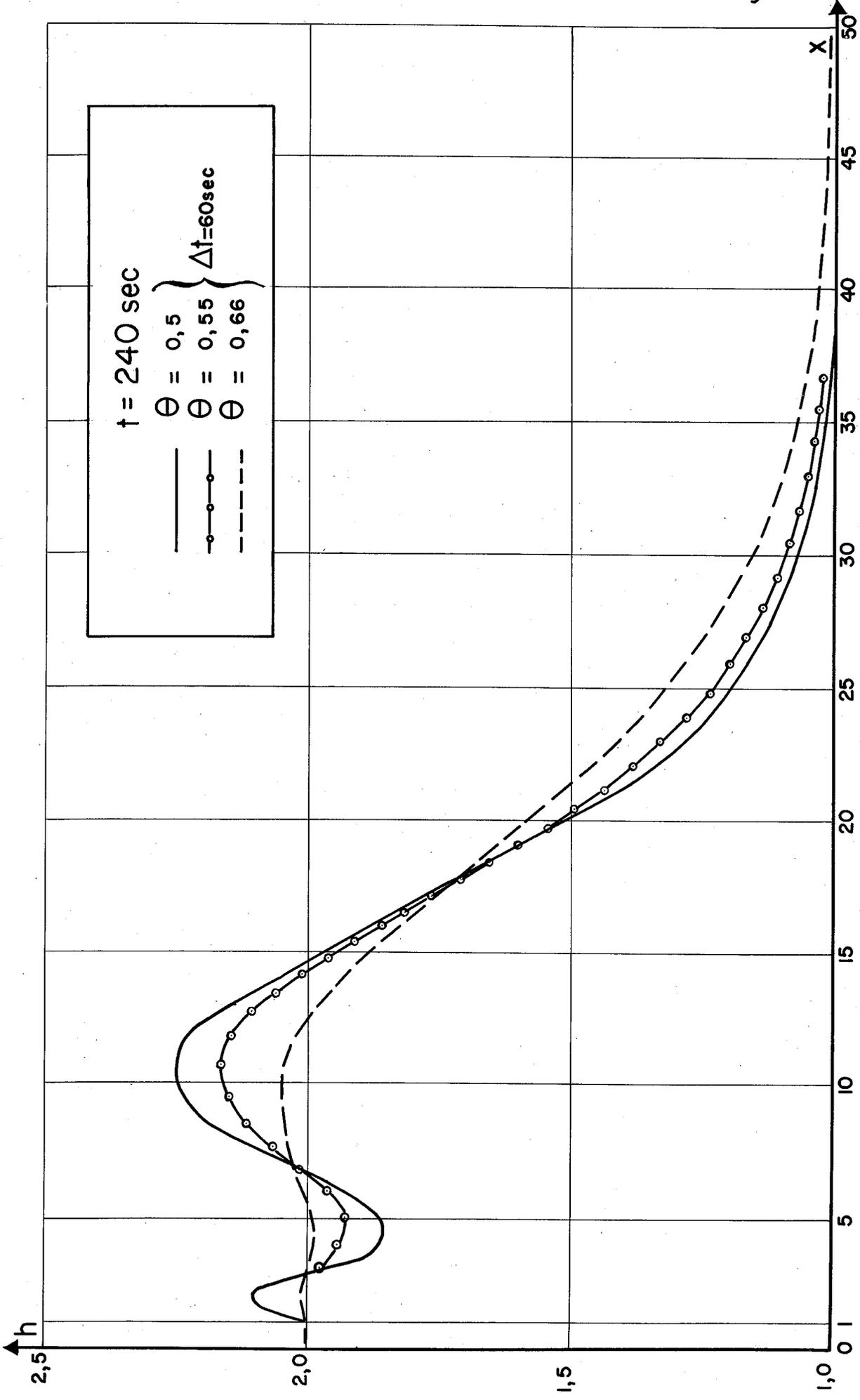


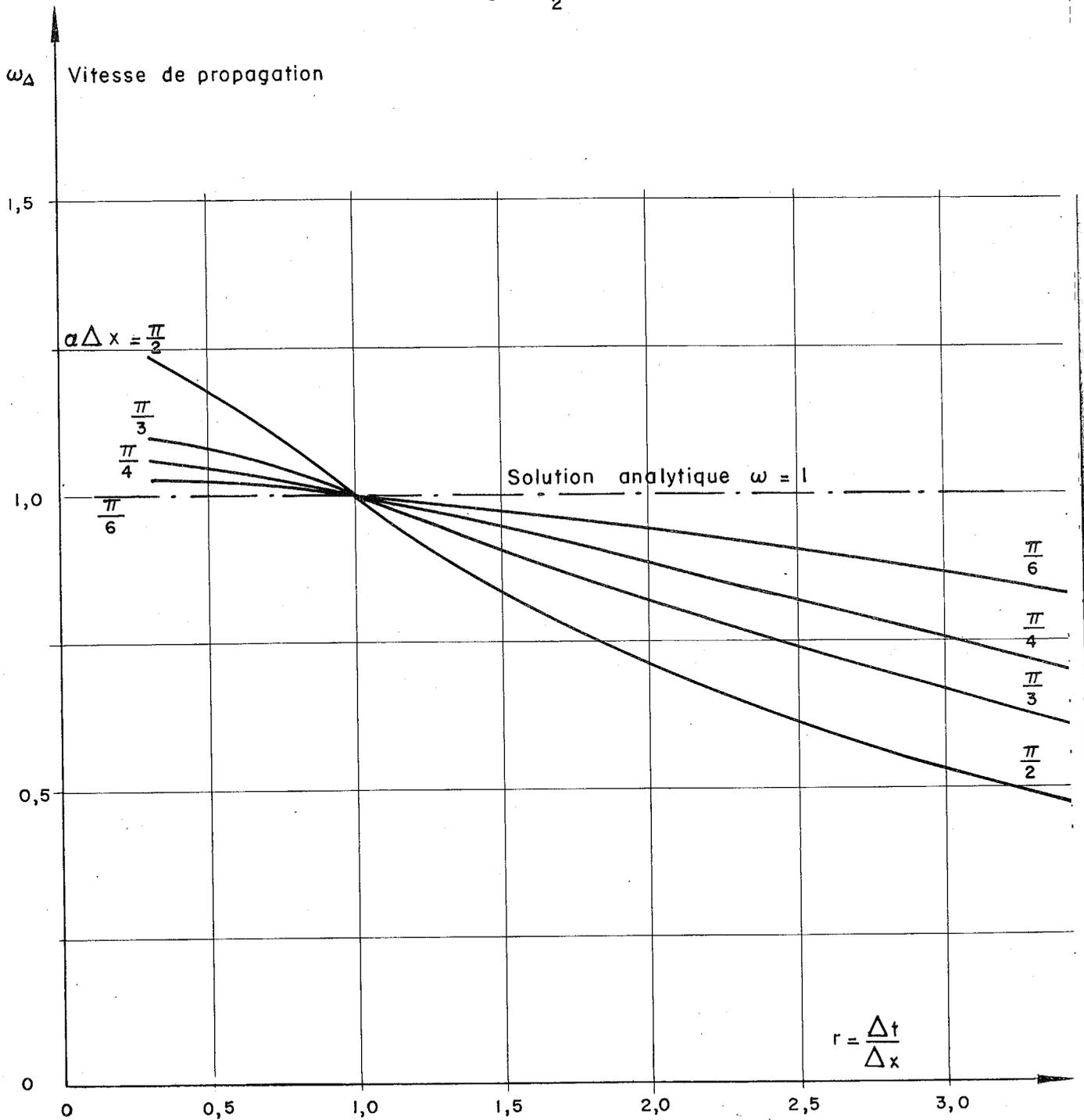
Fig. 3.5



UNE SEULE DIMENSION SPATIALE
 SYSTEME D'EQUATIONS D'ECOULEMENT

Schéma implicite des différences finies

$$\theta = \frac{1}{2}$$



UNE SEULE DIMENSION SPATIALE
 SYSTEME D'EQUATIONS D'ECOULEMENT

Schéma implicite des différences finies

$$\theta = 2/3$$

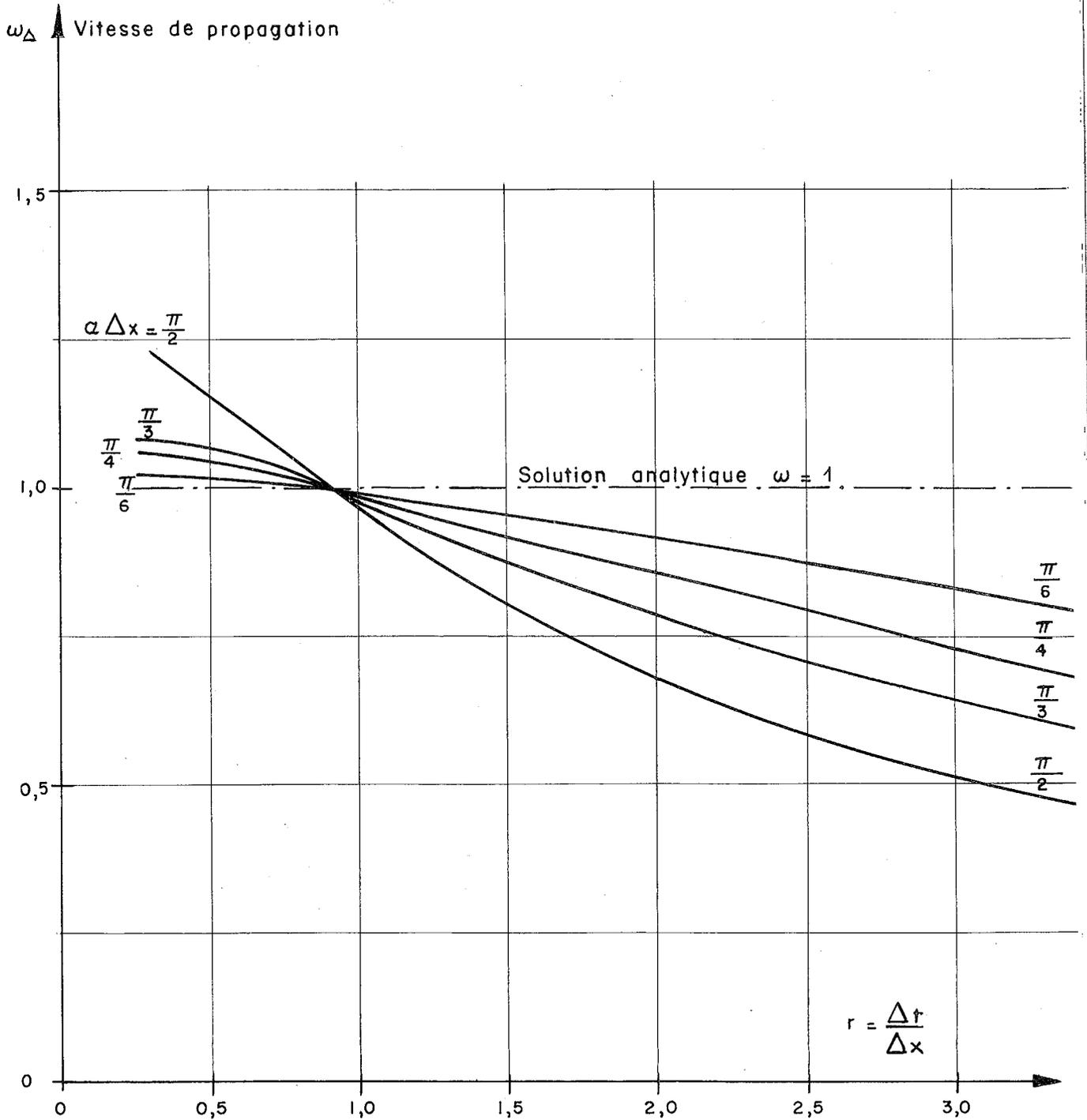


Fig. 3.8

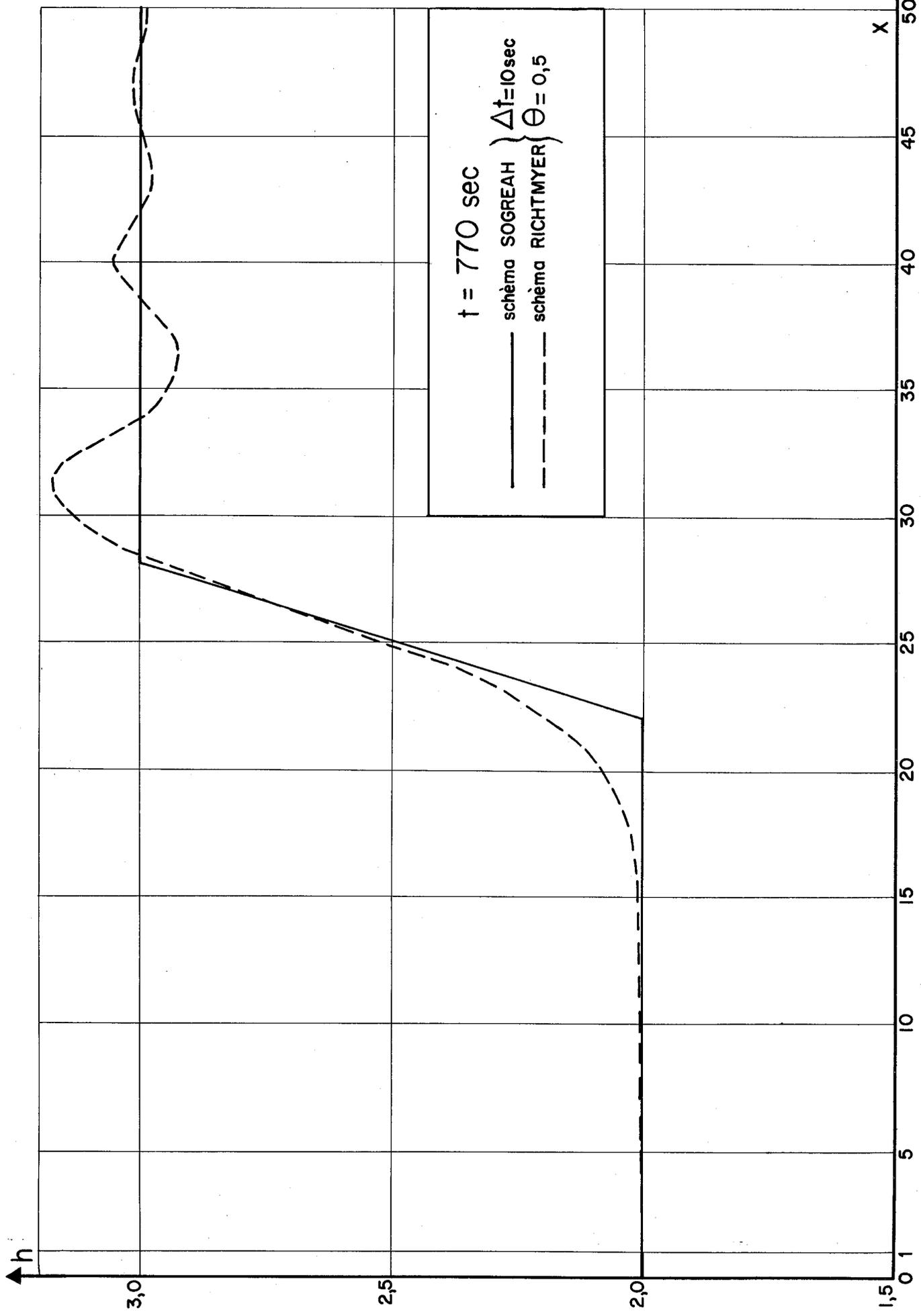


Fig. 3.9

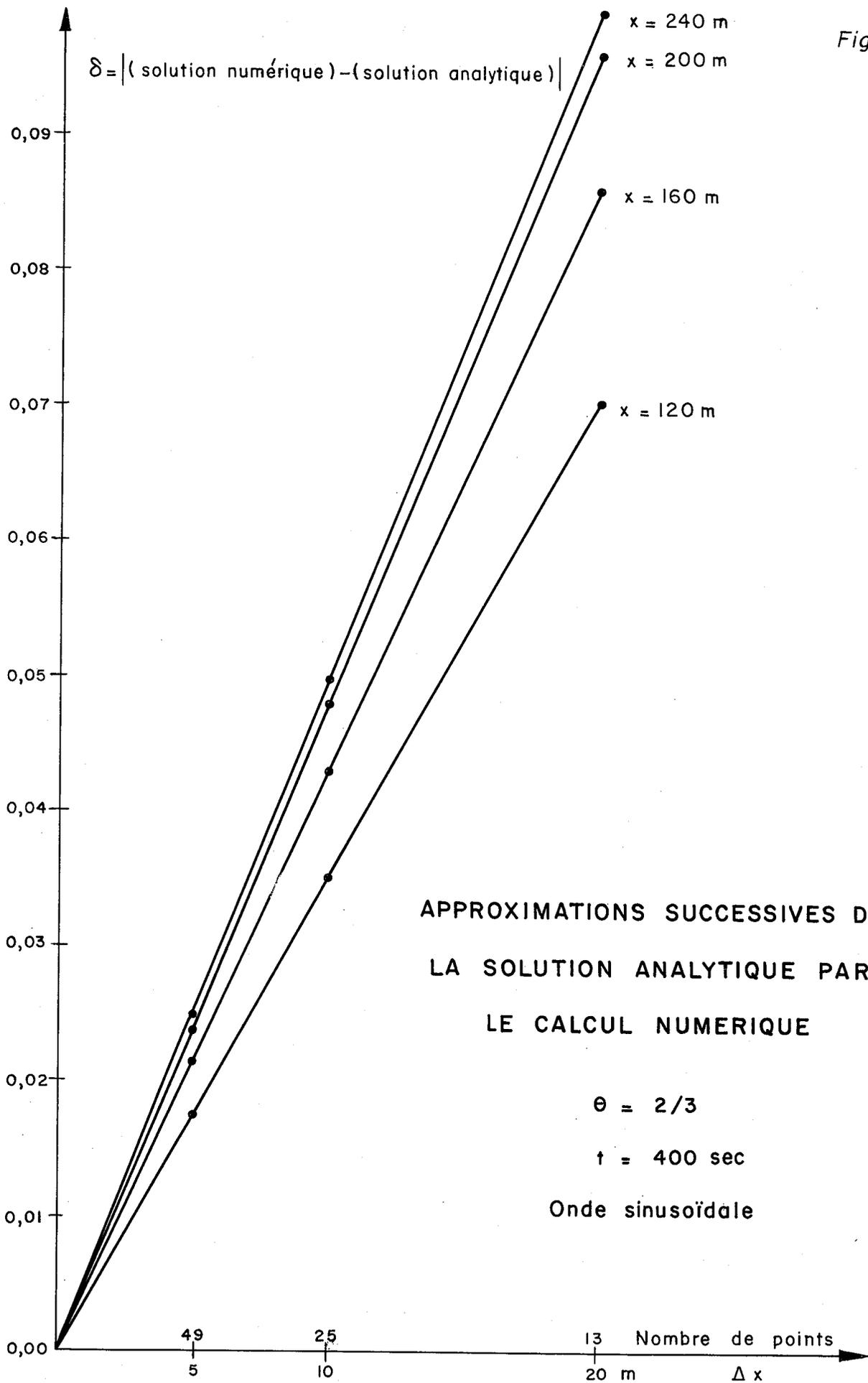
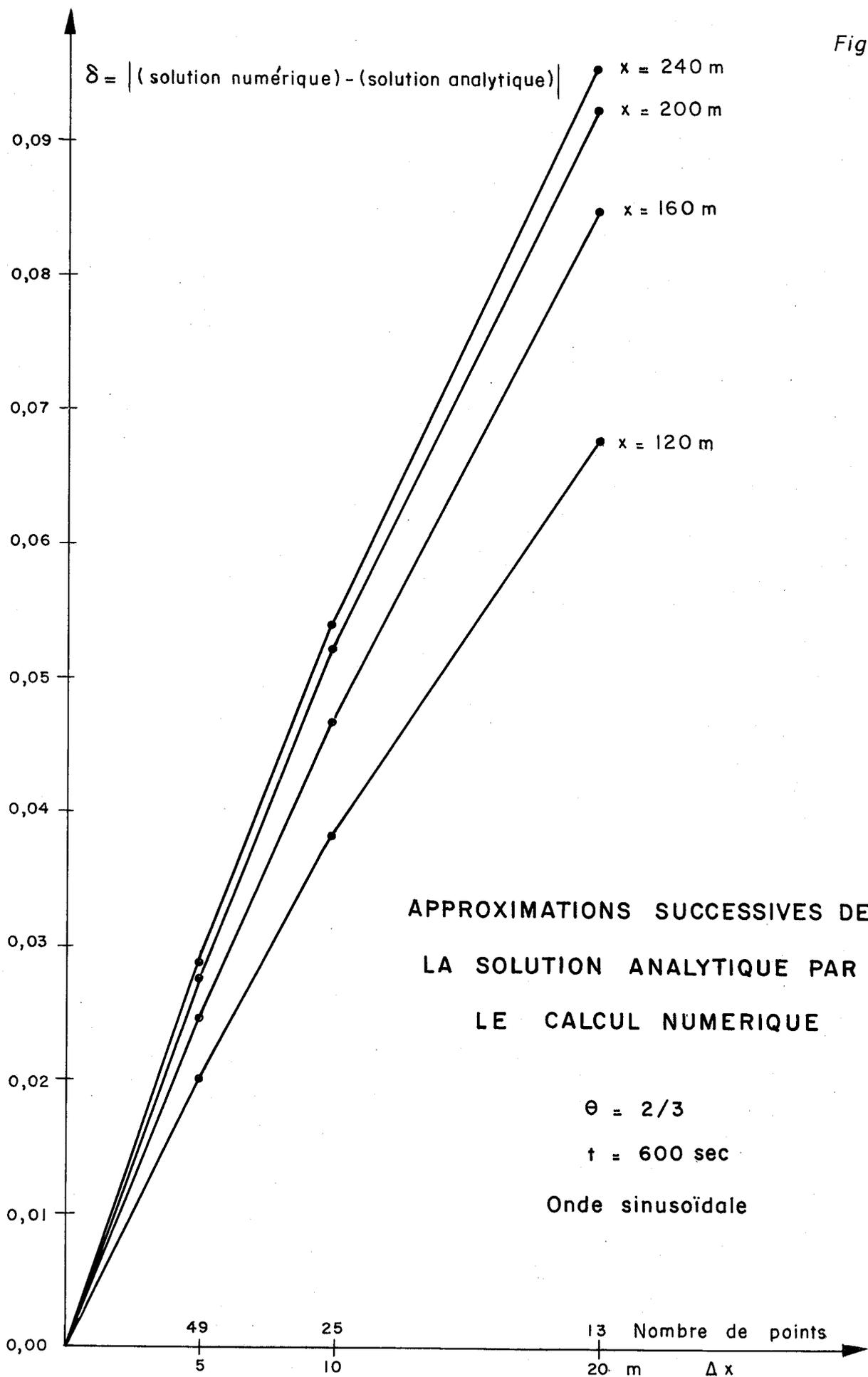
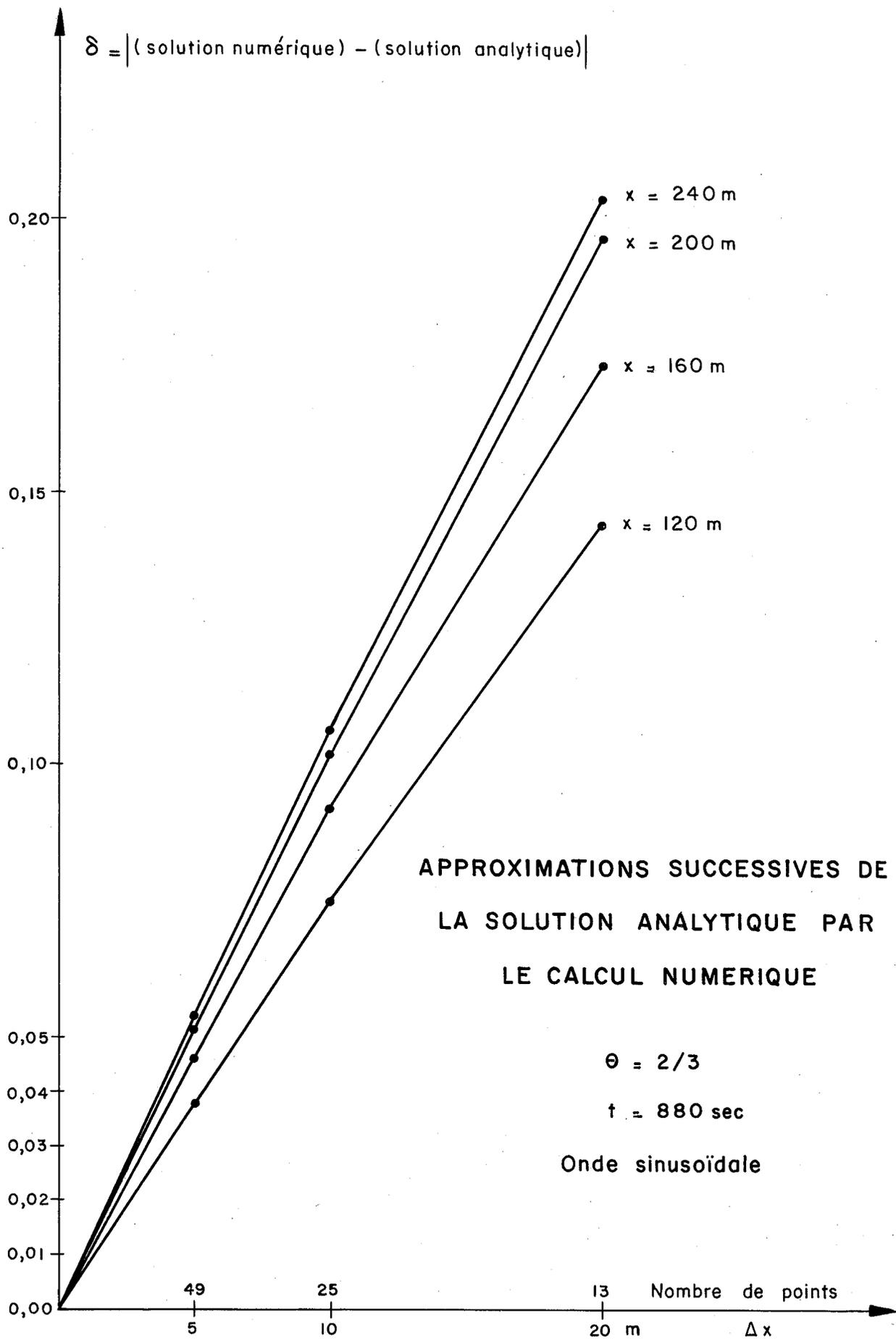
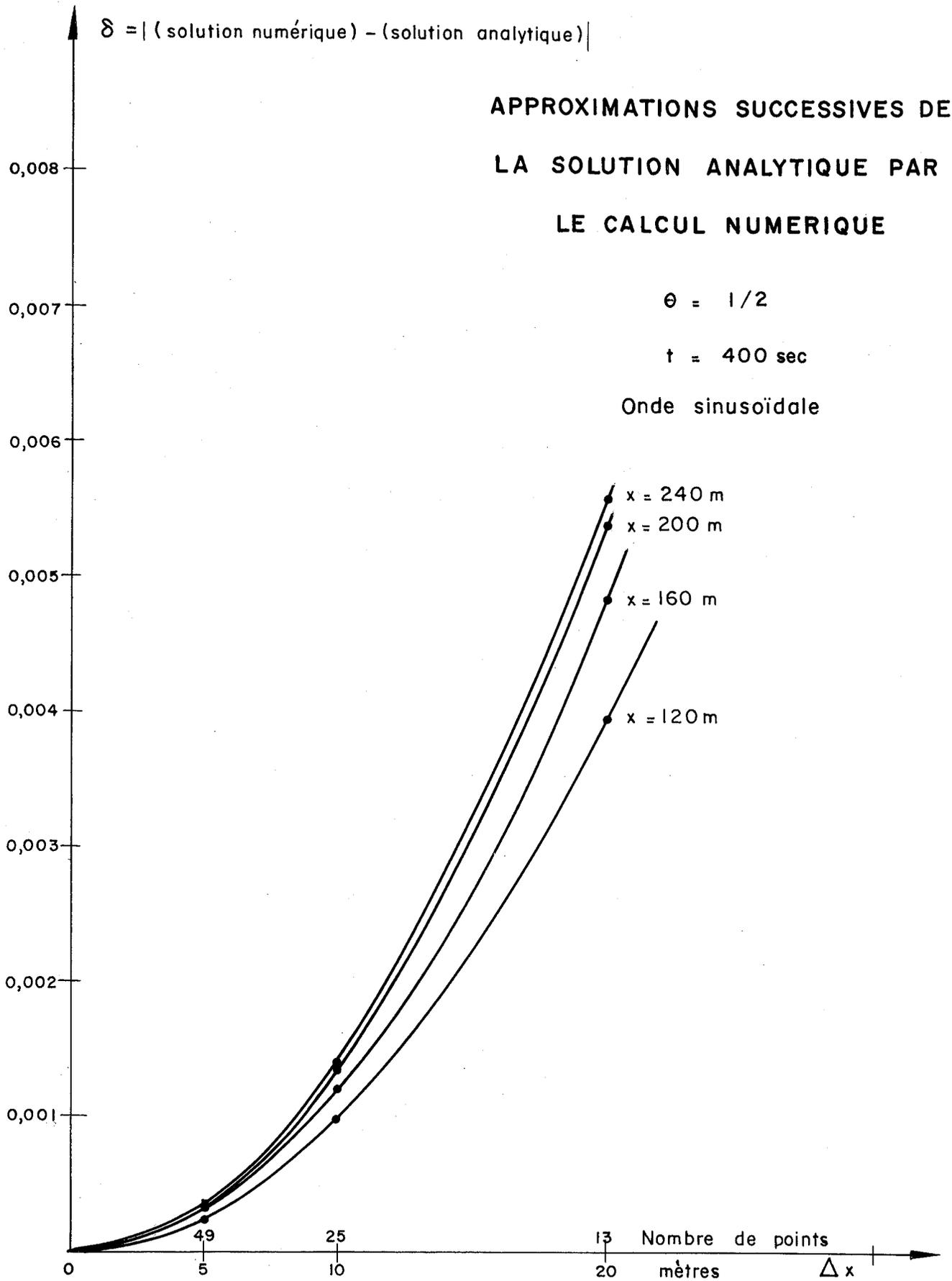


Fig. 3.11



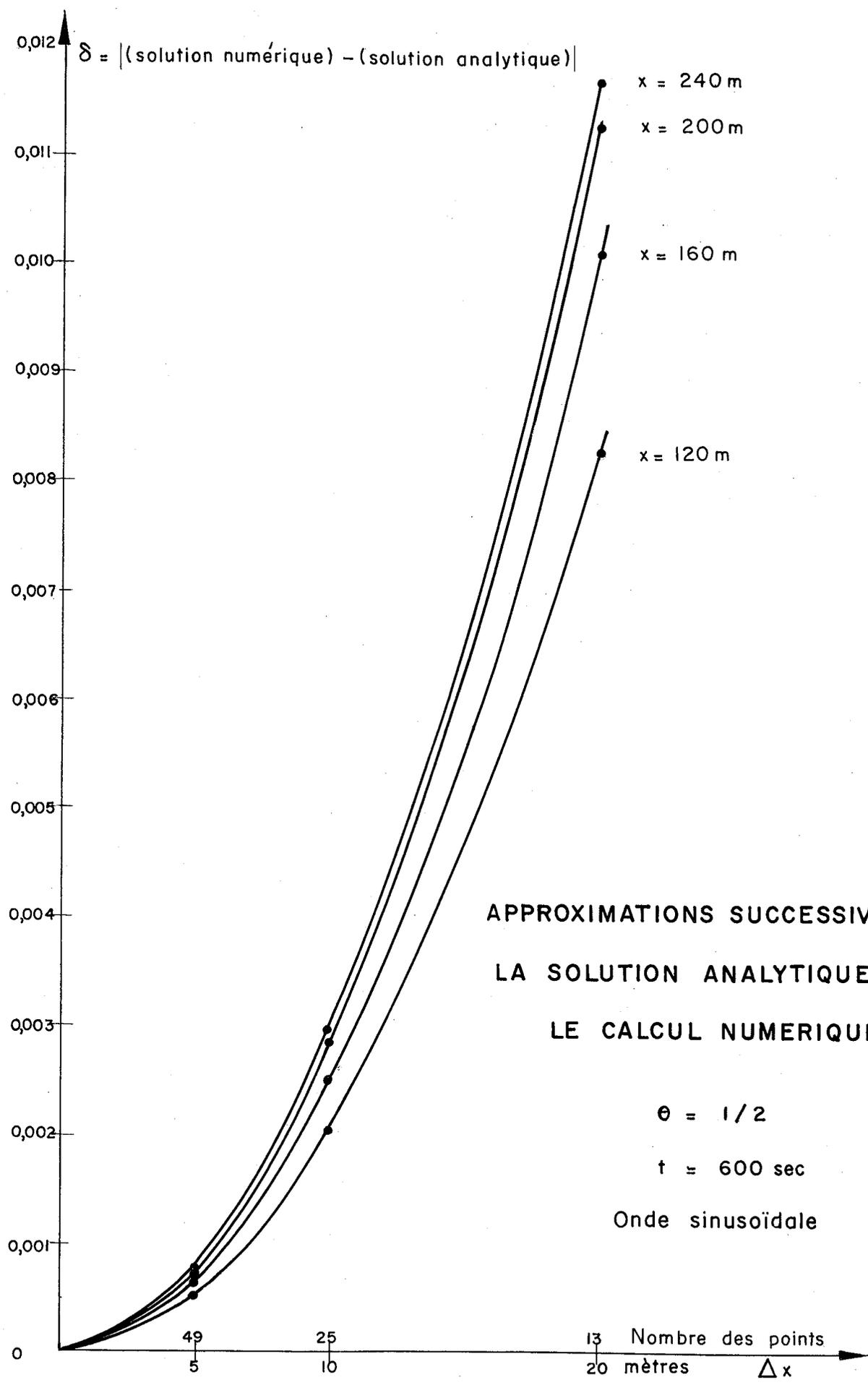
111 12/07/10





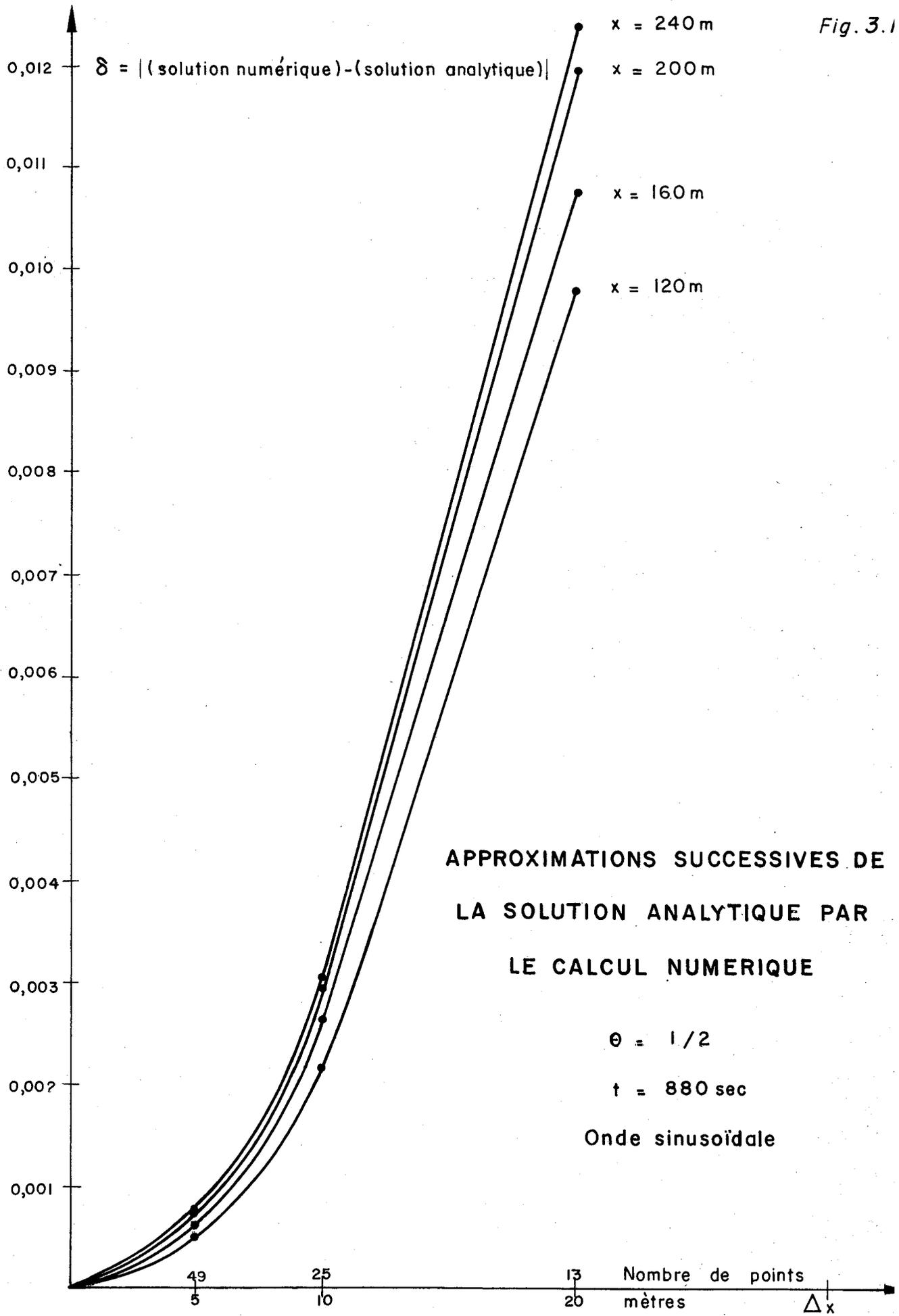
NT 1210-112

Fig. 3.13



NT 1210-113

Fig. 3.1



NT 1210-114

CALCUL D'UNE ONDE RAIDE $\theta = \frac{2}{3}$, $\frac{\Delta t}{\Delta x} = 2,0$

- Solution analytique
 Calcul 6.1 N = 12 Δx
 Calcul 6.2 N = 24 Δx
 Calcul 6.3 N = 48 Δx
 Extrapolation linéaire 2,4 ; 2,1

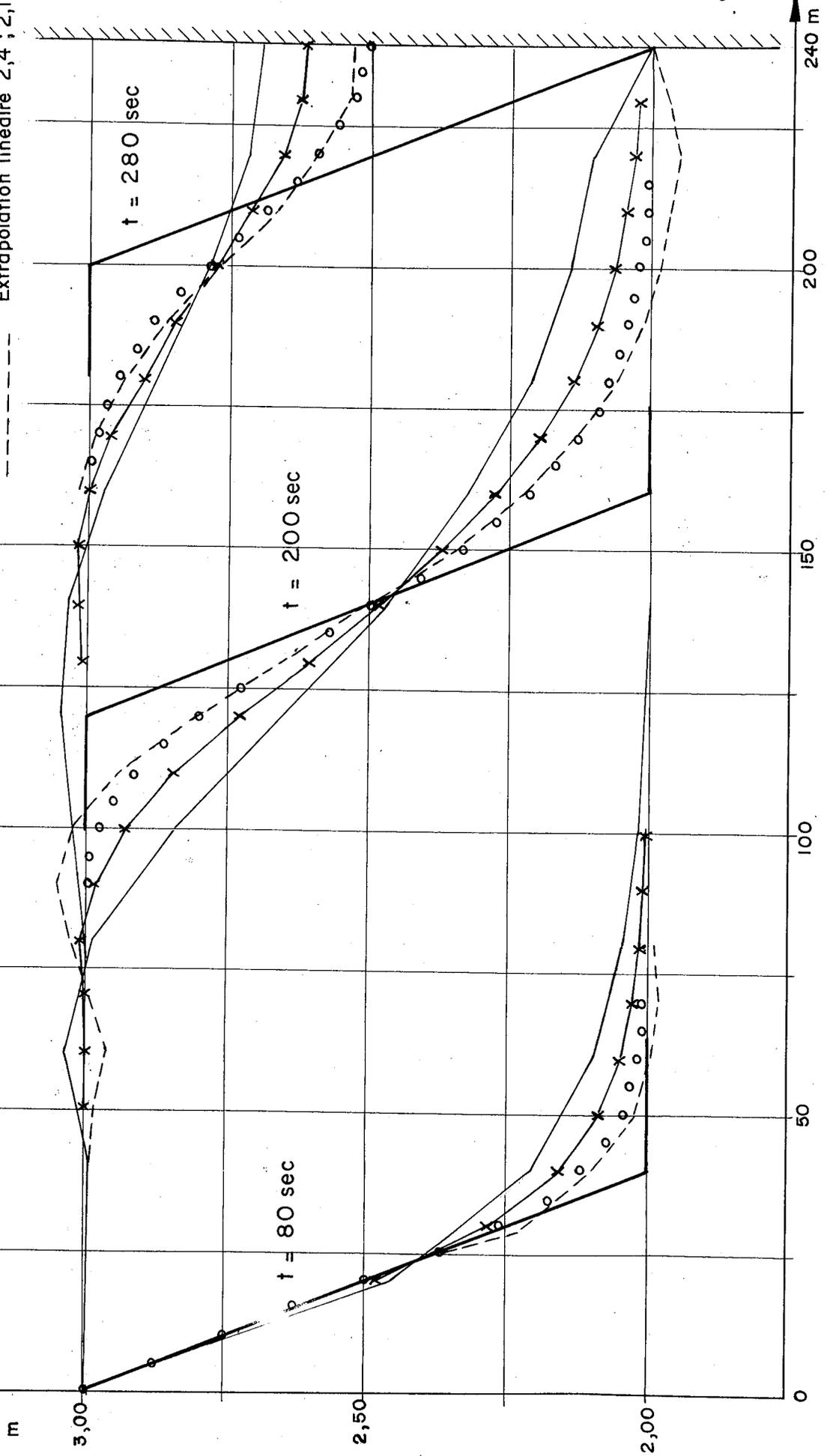
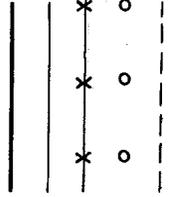


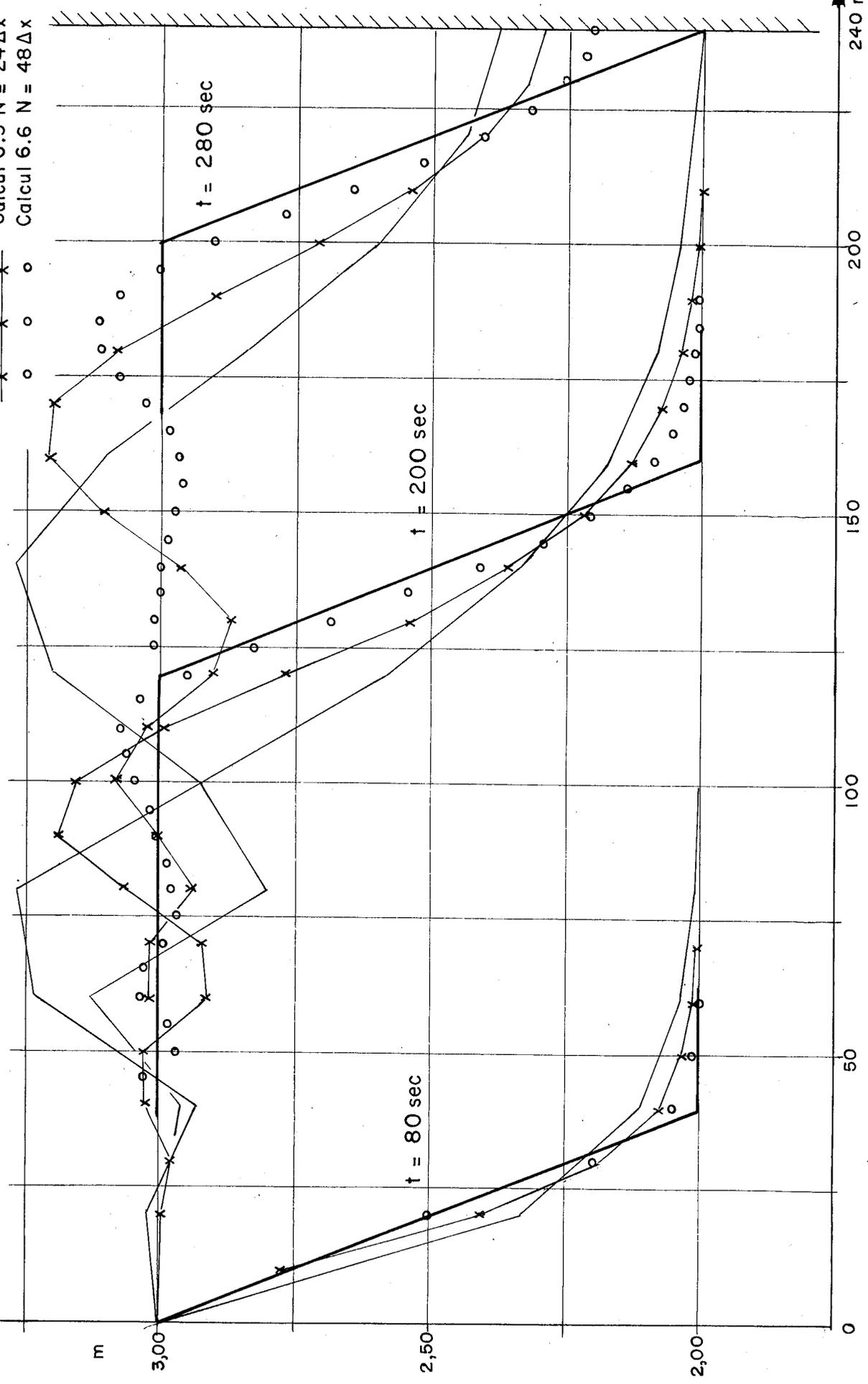
Fig. 3.15

Fig. 3.16

CALCUL D'UNE ONDE RAIDE $\theta = \frac{1}{2}, \frac{\Delta t}{\Delta x} = 2,0$

Solution analytique
 Calcul 6.4 N = 12 Δx
 Calcul 6.5 N = 24 Δx
 Calcul 6.6 N = 48 Δx

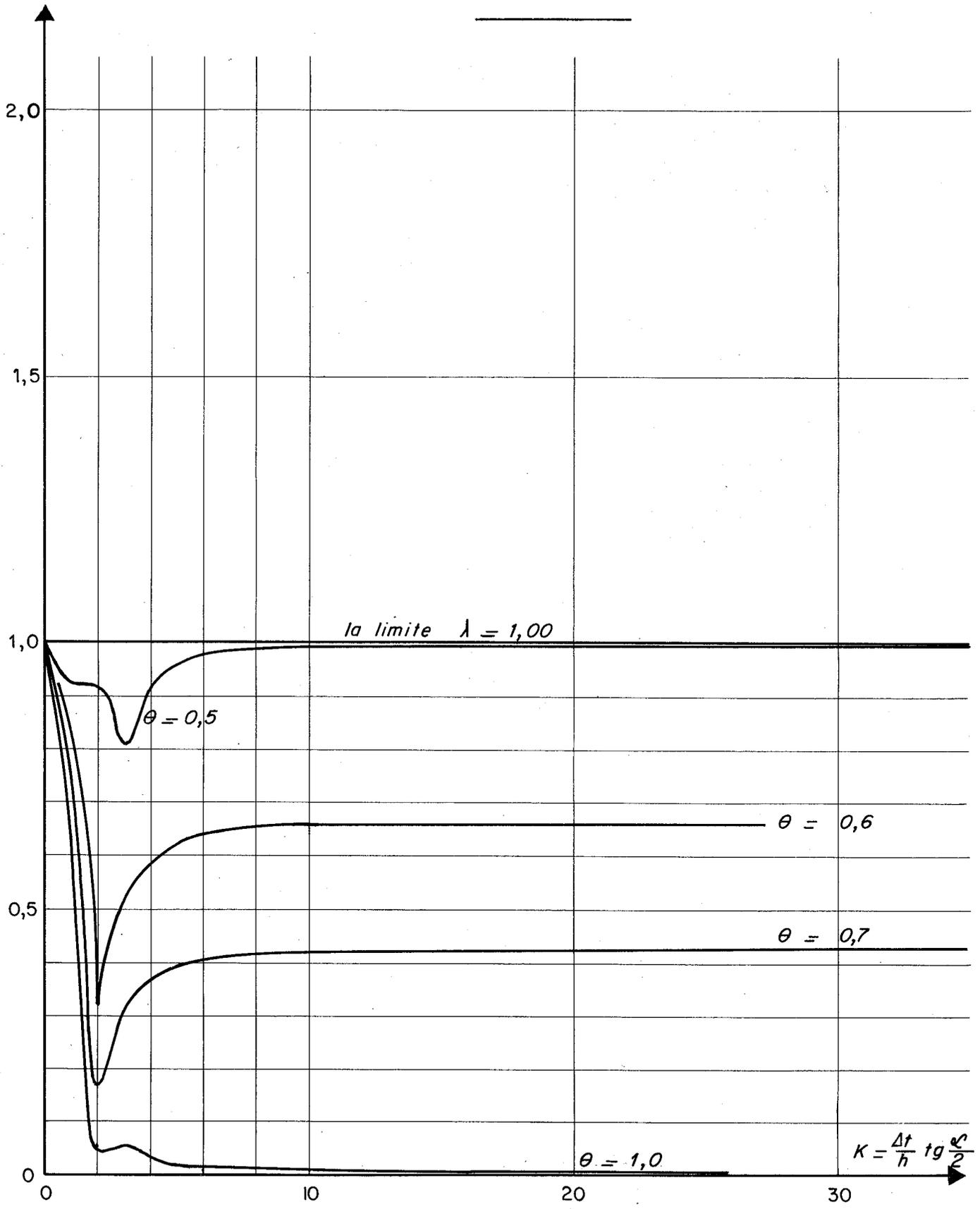
—
 — x — o —
 — x — o —



LES VALEURS PROPRES MAXIMALES ABSOLUES DE

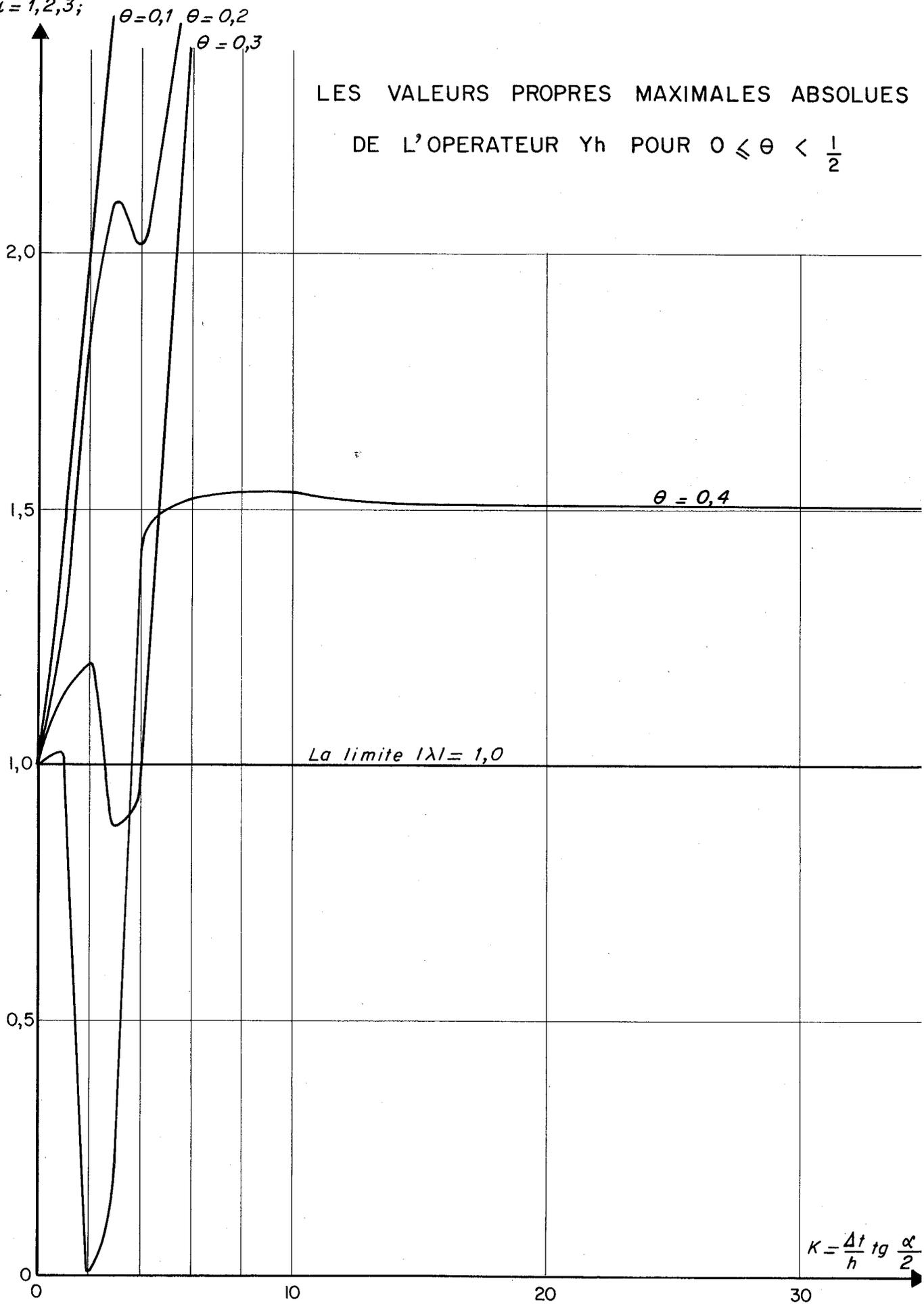
L'OPERATEUR Y_h POUR $\frac{1}{2} \leq \theta \leq 1$

$\max_{i=1,2,3} |\lambda_i|$

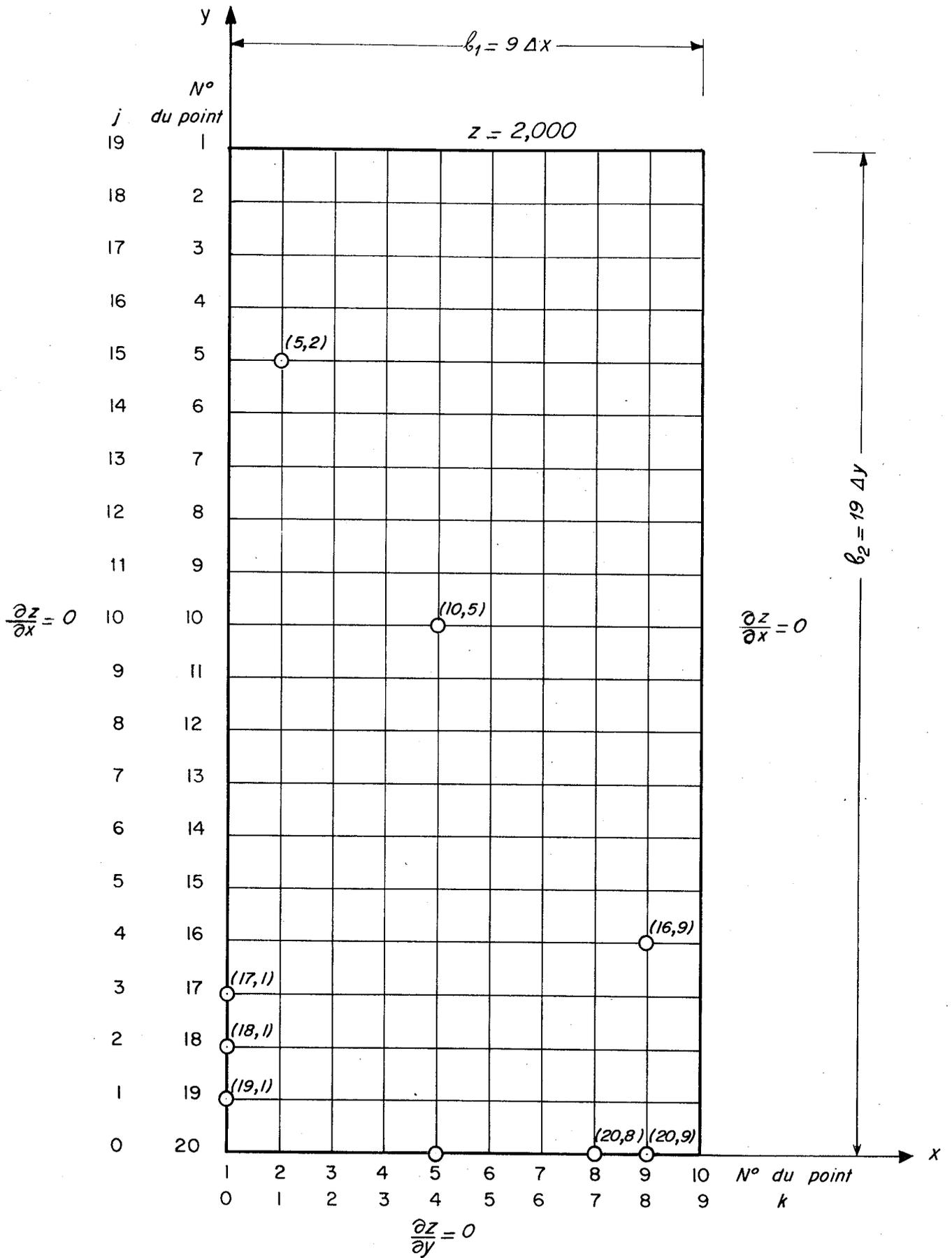


$\max |\lambda_i|$
 $i = 1, 2, 3;$

LES VALEURS PROPRES MAXIMALES ABSOLUES
DE L'OPERATEUR Y_h POUR $0 \leq \theta < \frac{1}{2}$

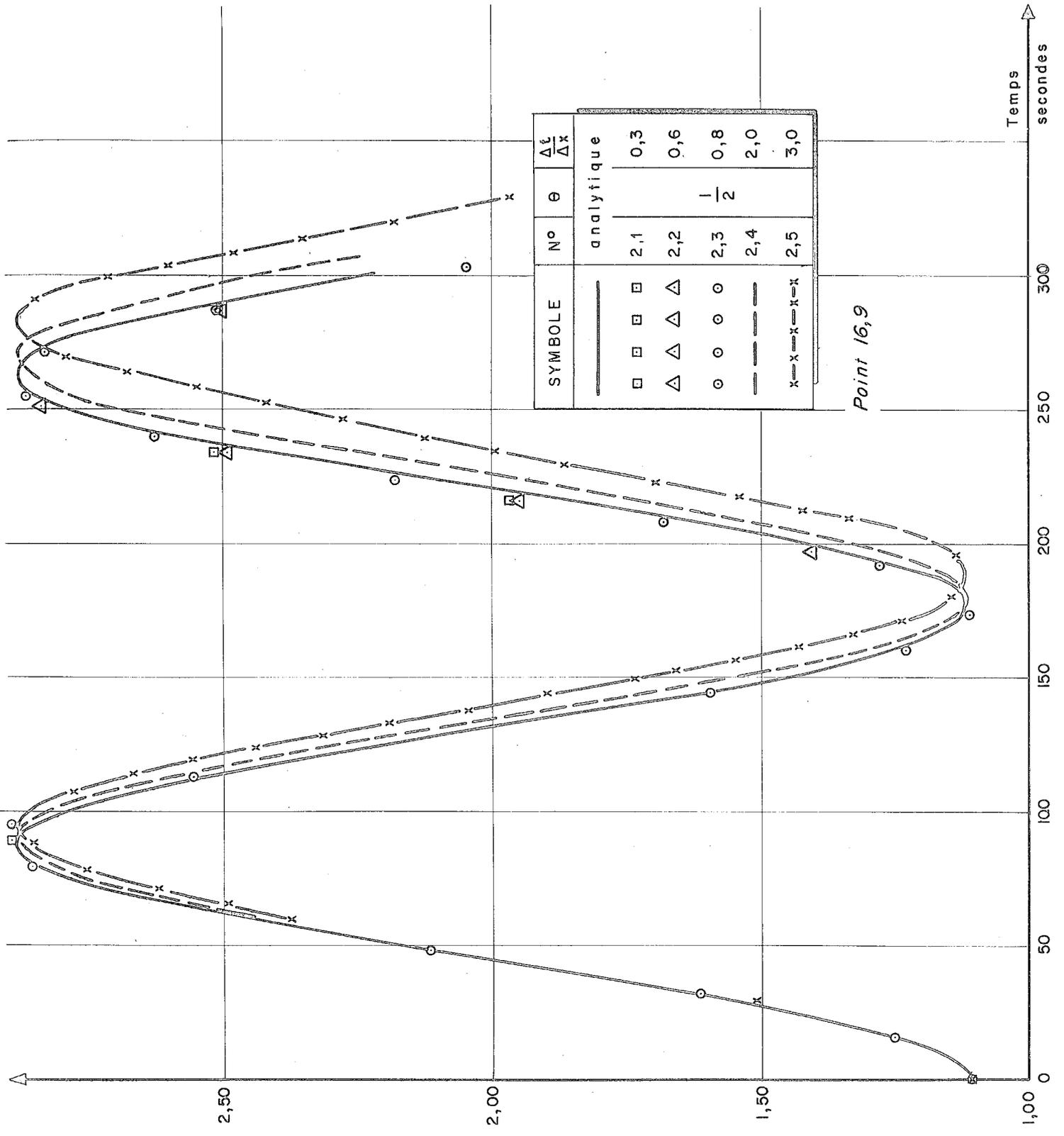


PLAN DU DOMAINE INDIQUANT LES POINTS DU CALCUL



111 1210-112

Fig. 6.2



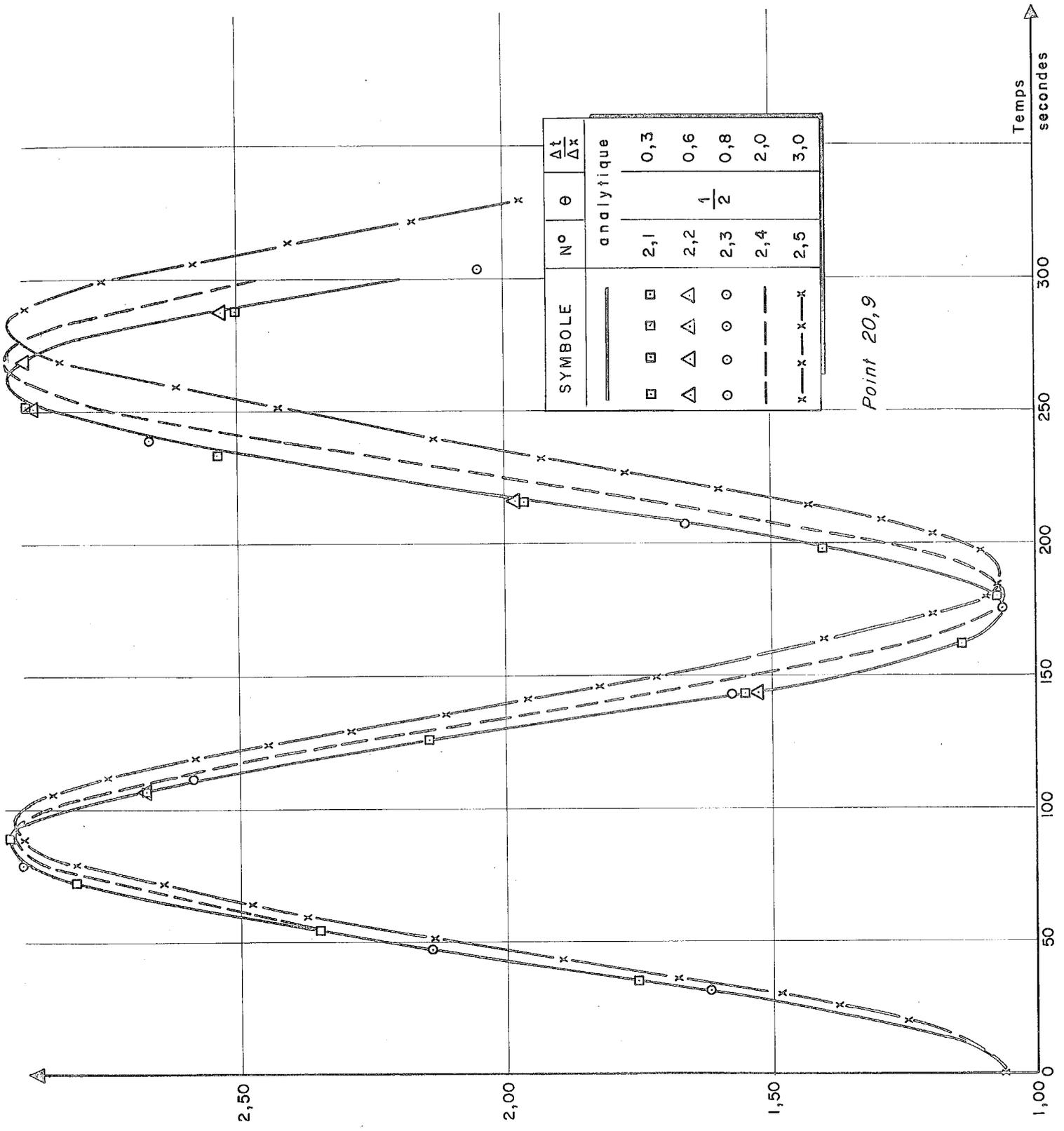


Fig 6_4

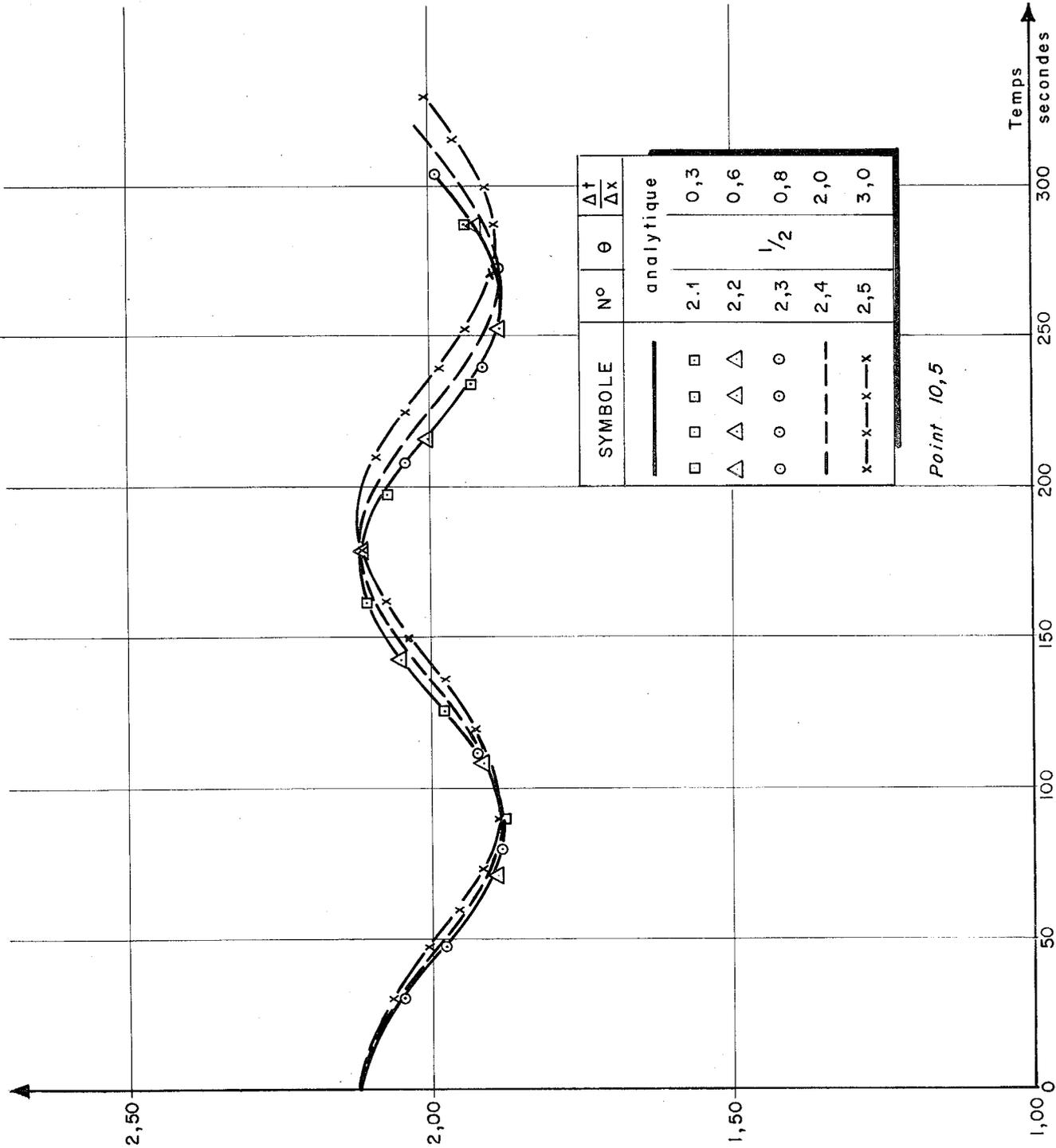


Fig 6. 5

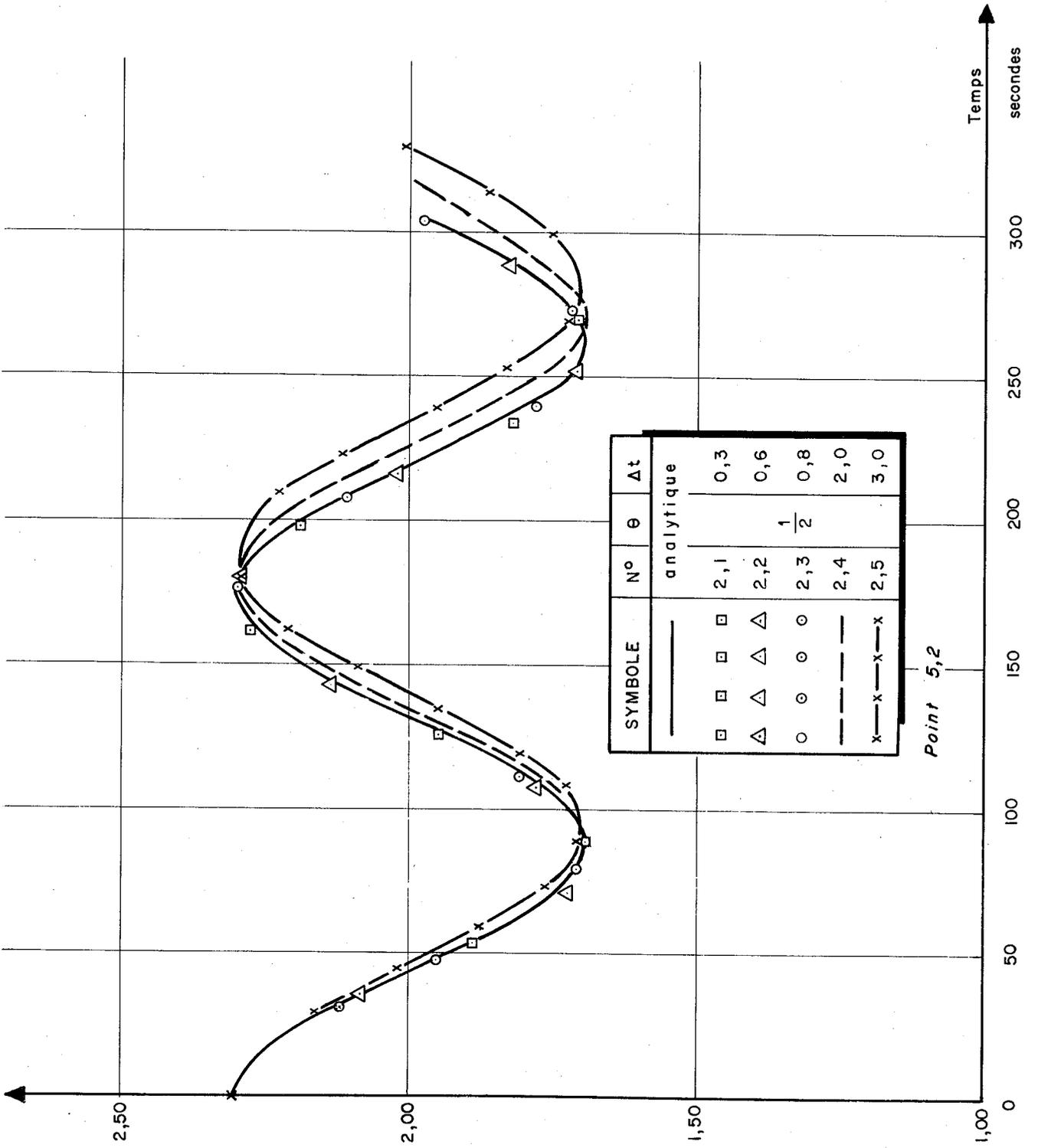


Fig. 6.6

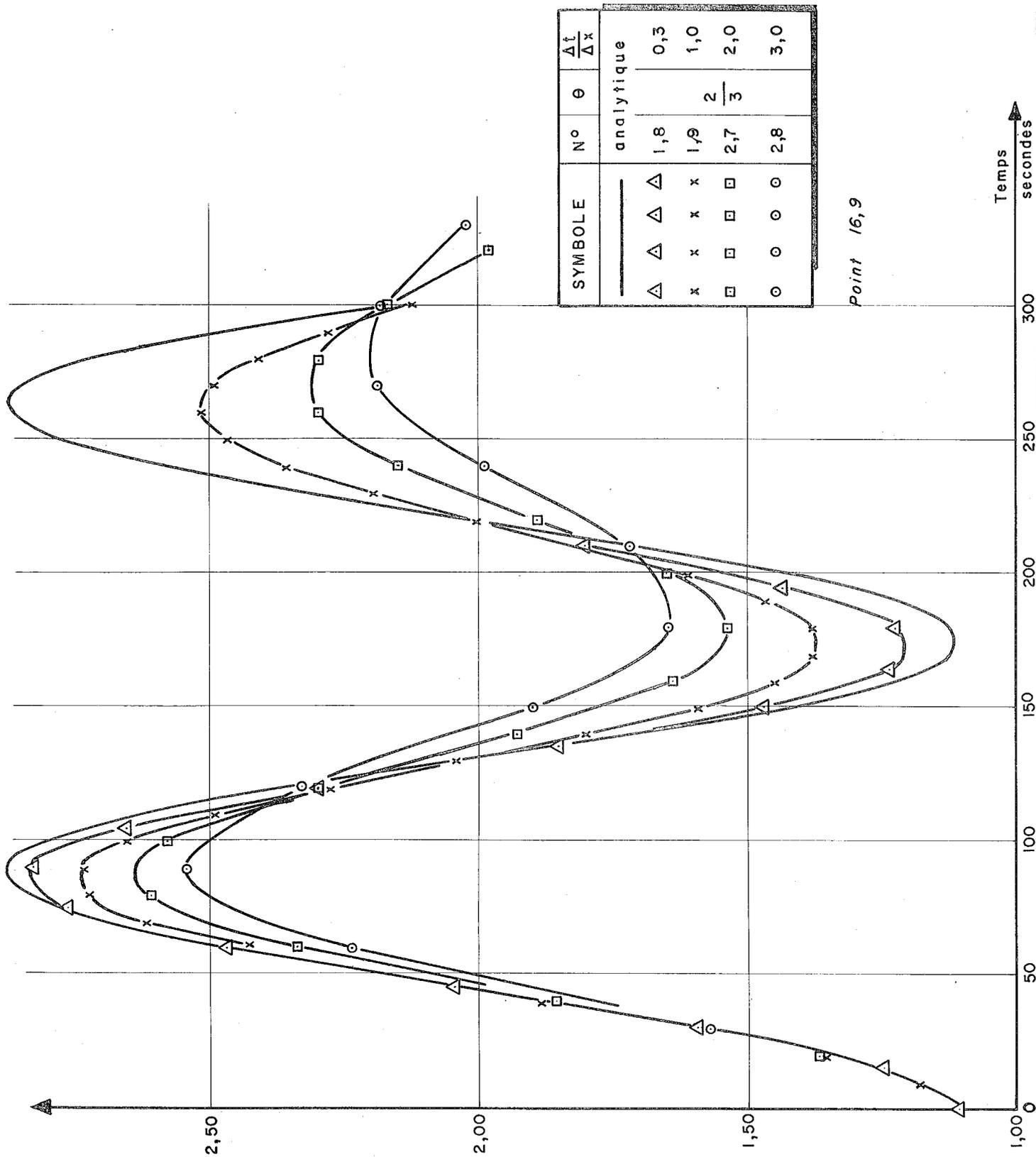


Fig. 6. i



NT 1210-125

Fig. 6. 8

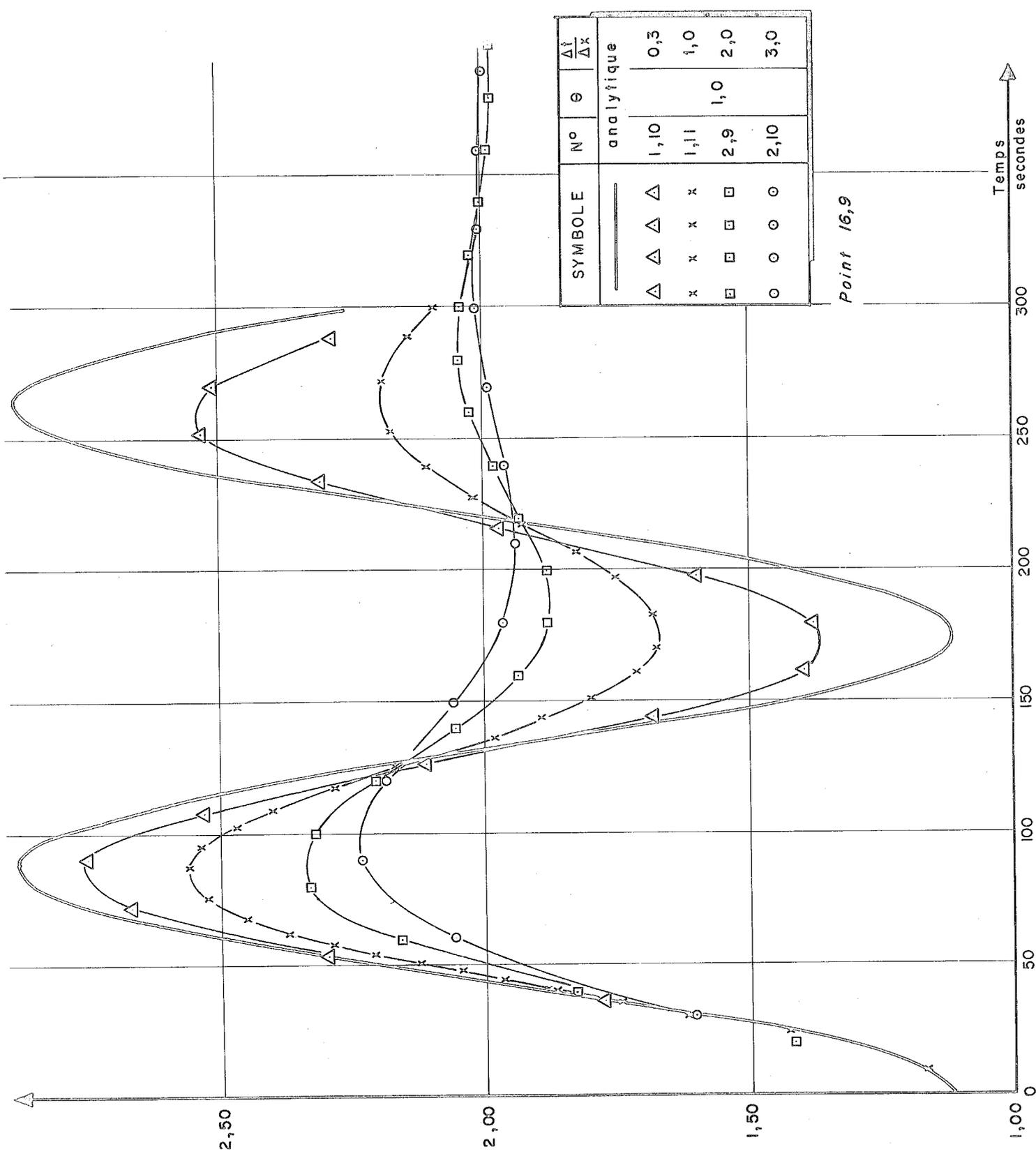
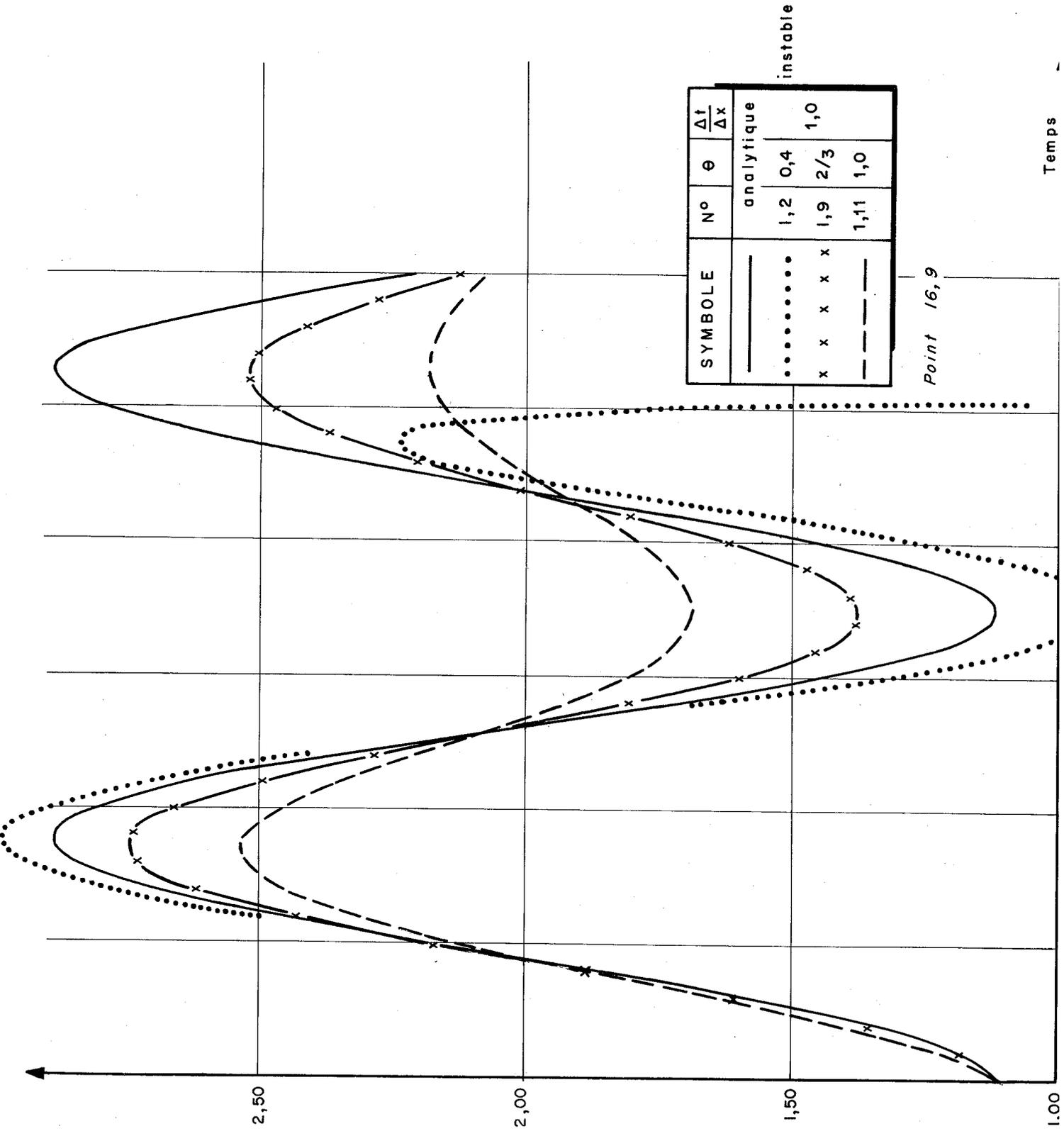


Fig 6.



NI 1270-127

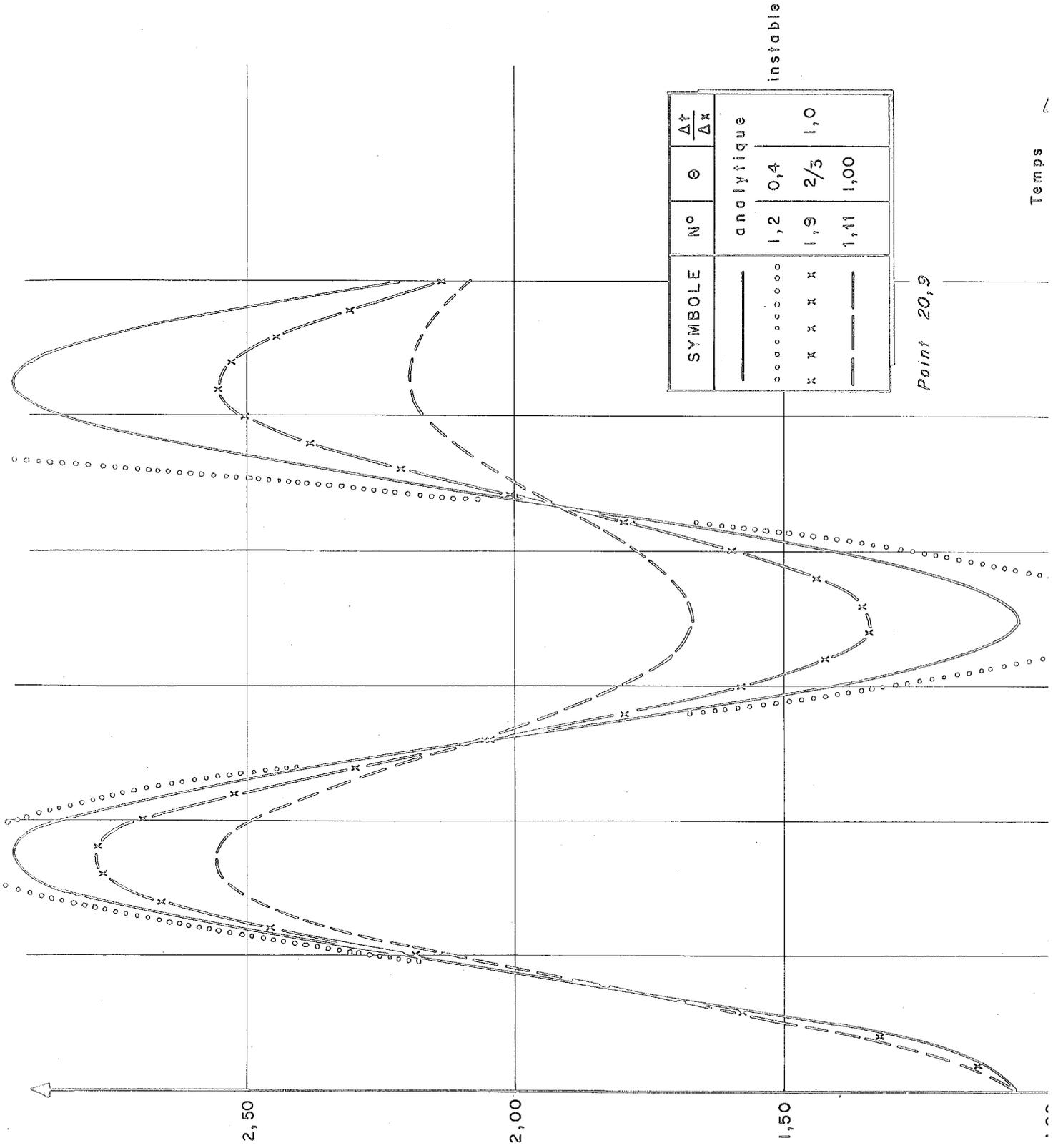
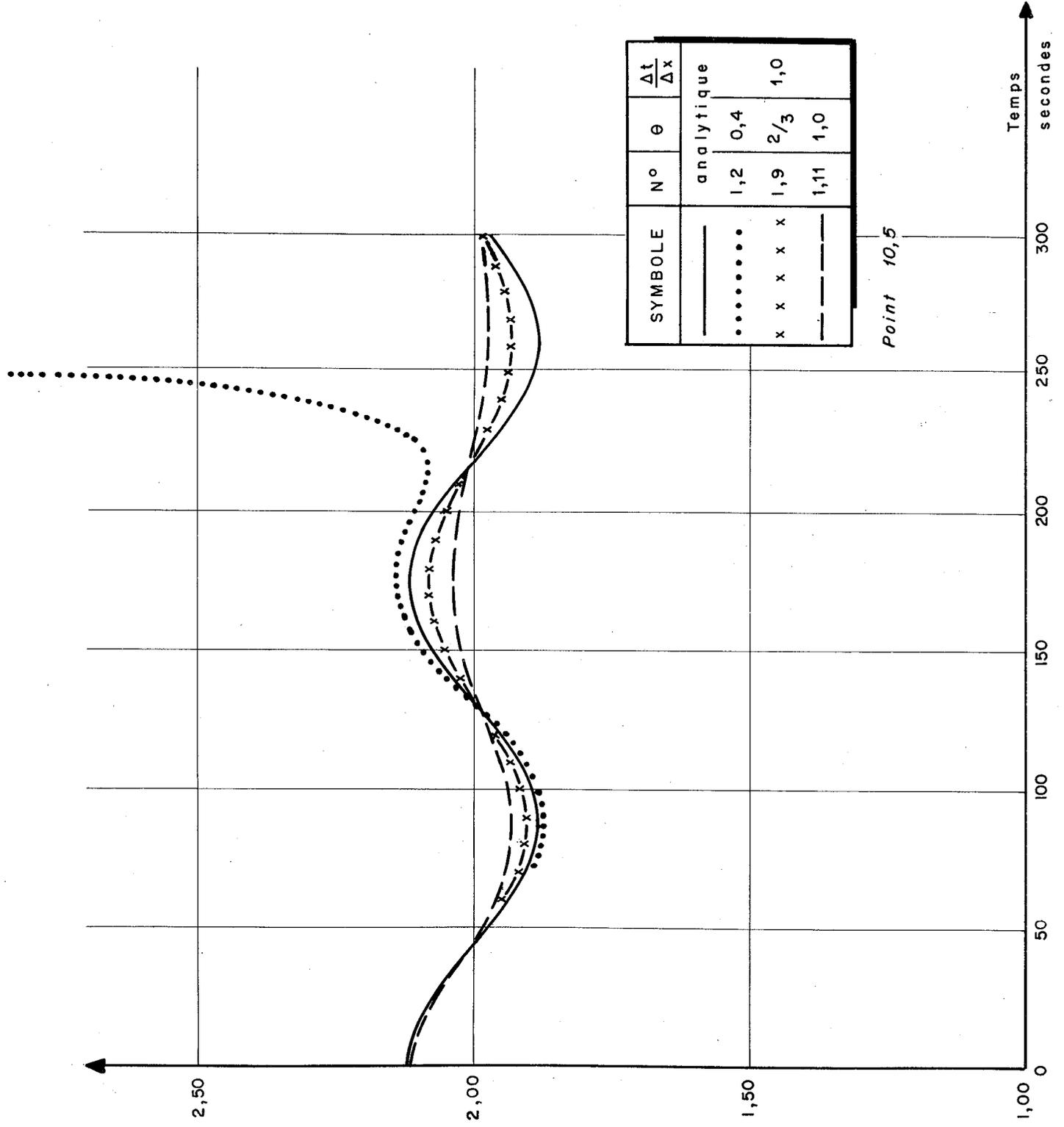


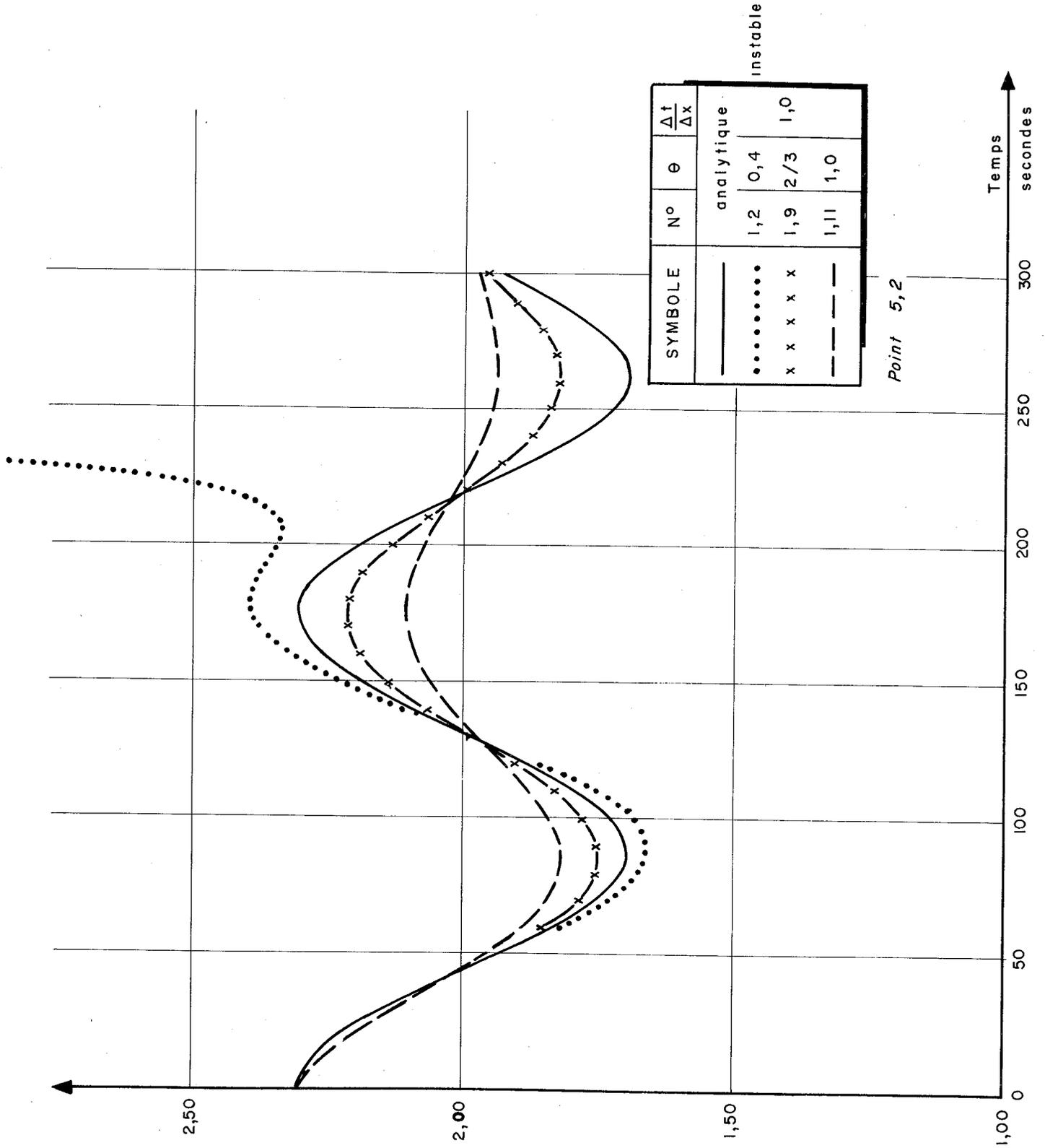
Fig 6.1



SYMBOLE	N°	θ	$\frac{\Delta t}{\Delta x}$
—	analytique		
•••••	1,2	0,4	
x x x x x	1,9	$\frac{2}{3}$	1,0
- - - - -	1,11	1,0	

Point 10,5

Fig. 6.1.

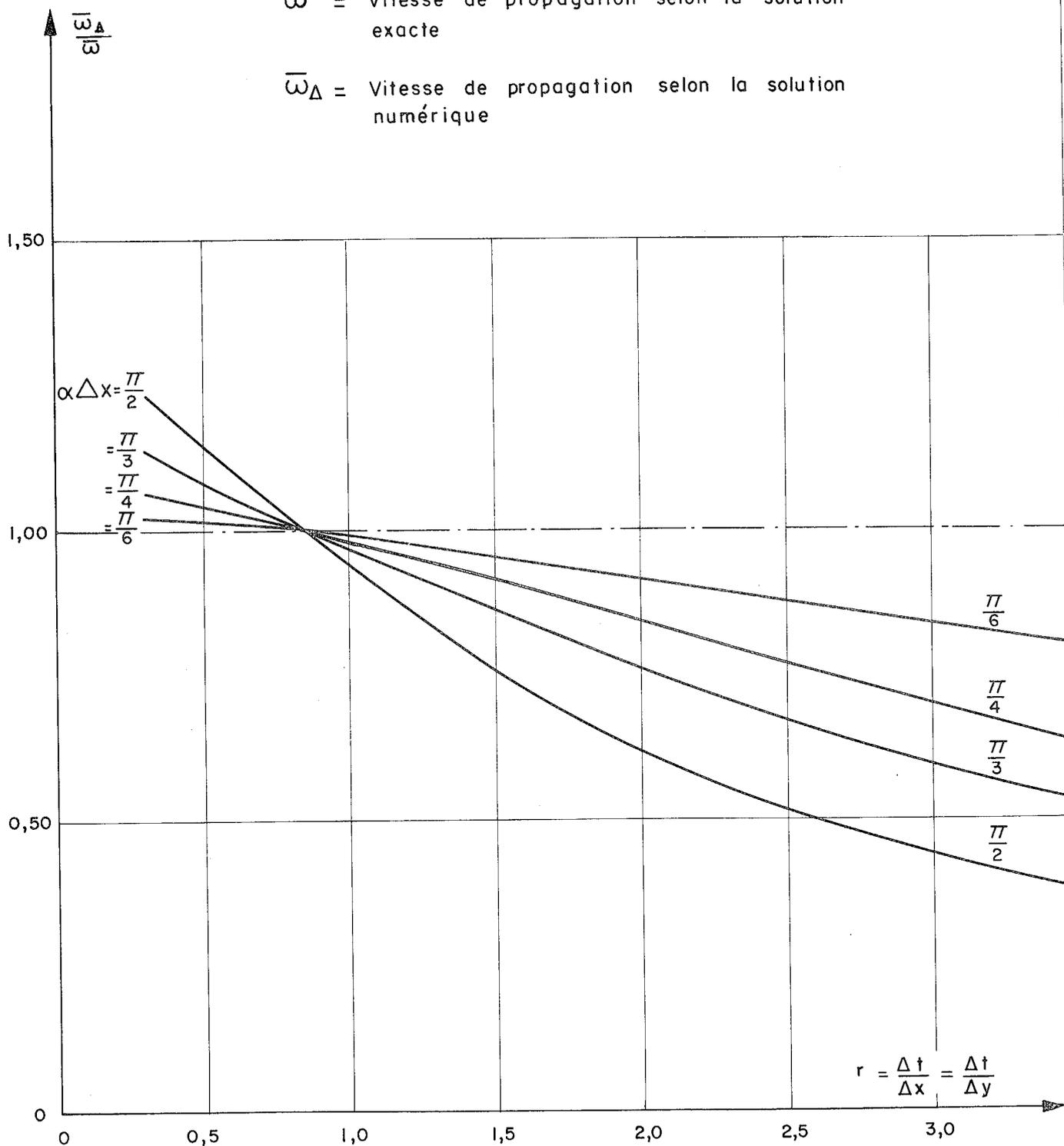


DEUX DIMENSIONS SPATIALES

METHODE DES PAS SEPARES POUR LE SYSTEME
D'EQUATIONS D'ECOULEMENT $\theta = \frac{1}{2}$

$\bar{\omega}$ = Vitesse de propagation selon la solution exacte

$\bar{\omega}_\Delta$ = Vitesse de propagation selon la solution numérique



VU,

Grenoble, le

Le Président de la Thèse

VU,

Grenoble, le

Le Doyen de la Faculté des Sciences

VU et permis d'imprimer,

Le Recteur de l'Académie de Grenoble

