Décomposition des fonctions booléennes

Etienne Pichat

▶ **To cite this version:**

Etienne Pichat. Décomposition des fonctions booléennes. Modélisation et simulation. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1966. Français. NNT : . tel-00280221

HAL Id: tel-00280221
https://theses.hal.science/tel-00280221

Submitted on 16 May 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre :

DECOMPOSITION DES FONCTIONS BOOLEENNES

-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-

T H E S E

présentée à la

FACULTE DES SCIENCES DE L'UNIVERSITE DE GRENOBLE

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR DE SPECIALITE

Mathématiques Appliquées

---

par

Etienne PICHAT

Ingénieur des Arts et Manufactures

-:-:-:-:-:-:-

Thèse soutenue le 7 Janvier 1966 devant la Commission d'Examen :

Président : Monsieur J. KUNTZMANN, Professeur

Examinateurs : Monsieur B. VAUQUOIS, Professeur

Madame F. BERTRANDIAS, Maître de Conférences

FACULTE DES SCIENCES

LISTE DES PROFESSEURS

DOYENS HONORAIRES M. FORTRAT P.

M. MORET L.

DOYEN M. WEIL L.

PROFESSEURS TITULAIRES

MM.	NEEL L.	MAGNETISME
	HEILMANN R.	CHIMIE ORGANIQUE
	KRAVTCHENKO J.	MECANIQUE RATIONNELLE
	CHABAUTY C.	MATHEMATIQUES PURES
	PARDE M.	POTAMOLOGIE
	BENOIT J.	RADIOELECTRICITE
	CHENE M.	CHIMIE PAPETIERE
	BESSON J.	ELECTROCHIMIE
	WEIL L.	THERMODYNAMIQUE
	FELICI N.	ELECTROSTATIQUE
	KUNTZMANN J.	MATHEMATIQUES APPLIQUEES
	BARBIER R.	GEOLOGIE APPLIQUEE
	SANTON L.	MECANIQUE DES FLUIDES
	OZENDA P.	BOTANIQUE
	FALLOT M.	PHYSIQUE INDUSTRIELLE
	GALVANI O.	MATHEMATIQUES
	MOUSSA A.	CHIMIE NUCLEAIRE ET RADIOACTIVITE
	TRAYNARD P.	CHIMIE GENERALE
	SOUTIF M.	PHYSIQUE GENERALE
	CRAYA A.	HYDRODYNAMIQUE
	REULOS R.	THEORIE DES CHAMPS
	AYANT Y.	PHYSIQUE APPROFONDIE
	GALISSOT F.	MATHEMATIQUES PURES
Mlle	LUTZ E.	MATHEMATIQUES GENERALES
MM.	BLAMBERT M.	MATHEMATIQUES
	BOUCHEZ R.	PHYSIQUE NUCLEAIRE
	LLIBOUTRY L.	GEOPHYSIQUE
	MICHEL R.	GEOLOGIE ET MINERALOGIE
	BONNIER E.	METALLURGIE
	DESSAUX G.	PHYSIOLOGIE ANIMALE
	PILLET E.	ELECTROTECHNIQUE
	DEBELMAS J.	GEOLOGIE GENERALE
	GERBER R.	MATHEMATIQUES PURES
	PAUTHENET R.	ELECTROTECHNIQUE
	VAUQUOIS B.	CALCUL ELECTRONIQUE
	SILBER R.	MECANIQUE DES FLUIDES
	MOUSSIEGT J.	ELECTRONIQUE
	BARBIER J.C.	PHYSIQUE EXPERIMENTALE

	BUYLE-BODIN M.	ELECTRONIQUE
	KOSZUL J.L.	MATHEMATIQUES
	DREYFUS B.	THERMODYNAMIQUE
	VAILLANT F.	ZOOLOGIE
	KLEIN J.	MATHEMATIQUES PURES
	SENGEL P.	ZOOLOGIE
	ARNAUD P.	CHIMIE
	BARJON R.	PHYSIQUE NUCLEAIRE
	BARNOUD F.	BIOSYNTHESE DE LA CELLULOSE

PROFESSEURS ASSOCIES

MM.	WAGNER H.	BOTANIQUE
	NAPP-ZINN K.	BOTANIQUE

PROFESSEURS SANS CHAIRE

Mme	KOFLER L.	BOTANIQUE
	DEPASSEL R.	MECANIQUE
	PERRET R.	SERVOMECANISME
Mme	BARBIER M.J.	ELECTROCHIMIE
	COHEN J.	PHYSIQUE
	GIDON P.	GEOLOGIE
Mme	SOUTIF J.	PHYSIQUE GENERALE
	GIRAUD P.	GEOLOGIE
	GASTINEL N.	MATHEMATIQUES APPLIQUEES
	LACAZE A.	THERMODYNAMIQUE
	GLENAT R.	CHIMIE ORGANIQUE
	BRISSONNEAU P.	PHYSIQUE GENERALE
	DUCROS P.	MINERALOGIE
	ANGLES D'AURIAC	MECANIQUE DES FLUIDES
	ROBERT A.	CHIMIE PAPETIERE
	COUMES A.	ELECTRONIQUE
	PEBAY-PEROULA	PHYSIQUE
	DEGRANGE C.	ZOOLOGIE
	GAGNAIRE D.	CHIMIE PAPETIERE
	RASSAT A.	CHIMIE
	PERRIAUX J.	GEOLOGIE
	BARRA J.	MATHEMATIQUES APPLIQUEES

PROFESSEURS HONORAIRES

MM.	FORTIER A.	MECANIQUE DES FLUIDES
	BRELOT M.	MATHEMATIQUES
	WOLFERS F.	PHYSIQUE
	DORIER A.	ZOOLOGIE

MAITRES DE CONFERENCES

MM.	BIAREZ J.	MECANIQUE DES FLUIDES
	DODU J.	MECANIQUE DES FLUIDES

	DOLIQUE J.M.	ELECTRONIQUE
	HACQUES G.	MATHEMATIQUES APPLIQUEES
	LANCIA R.	PHYSIQUE AUTOMATIQUE
	POULOUJADOFF M.	ELECTROTECHNIQUE
	KAHANE A.	PHYSIQUE
Mme	BONNIER J.	CHIMIE
Mme	KAHANE J.	PHYSIQUE
	DEPORTES C.	CHIMIE MINERALE
	DEPOMMIER P.	PHYSIQUE NUCLEAIRE
	CAUQUIS G.	CHIMIE GENERALE
	BONNET G.	PHYSIQUE
Mme	BOUCHE L.	MATHEMATIQUES
	COLOBERT L.	PHYSIOLOGIE ANIMALE
	PAYAN J.J.	MATHEMATIQUES
	CAUBET J.P.	MATHEMATIQUES
	LAURENT P.	MATHEMATIQUES APPLIQUEES
	BERTRANDIAS J.P.	MATHEMATIQUES APPLIQUEES
	BRIERE G.	PHYSIQUE
	LAJZEROWICZ J.	PHYSIQUE
	VALENTIN J.	PHYSIQUE
	DESRE P.	METALLURGIE
	BONNETAIN L.	CHIMIE MINERALE

MAITRE DE CONFERENCES ASSOCIE

MM.	RADELLI L.	GEOLOGIE

Je voudrais dire toute ma reconnaissance à Monsieur le Professeur KUNTZMANN, Directeur du Laboratoire de Calcul de l'Université de Grenoble, pour les précieux conseils qui m'ont permis d'entreprendre et de mener à bien cette étude. Qu'il me permette de lui exprimer mon profond respect et mes plus vifs remerciements pour avoir bien voulu orienter et aider mes recherches .

Je suis très sensible à l'honneur qu'il me fait en acceptant de présider le Jury.

Je prie Monsieur le Professeur VAUQUOIS et Madame BERTRANDIAS, Maître de Conférences, de trouver ici l'expression de mes remerciements pour avoir accepté de faire partie du Jury.

Je tiens aussi à remercier tous ceux , en particulier l'Equipe de Logique du Laboratoire de Calcul, qui m'ont aidé dans ce travail.

D E C O M P O S I T I O N S

D E S F O N C T I O N S B O O L E E N N E S

TABLES DES MATIERES

CHAPITRE I - ETUDE THEORIQUE DES DECOMPOSITIONS DISJOINTES SIMPLES.

I A. - Nombre des fonctions de n variables admettant une décomposition disjointe simple.

1 - Nombre des fonctions de 3 variables admettant une décomposition disjointe simple.

2 - Borne supérieure du nombre des fonctions de n variables admettant une décomposition disjointe simple.

I B. - Nombre des fonctions de n variables admettant une décomposition disjointe simple suivant la partition (Y, Z).

I C. - Décompositions disjointes simples d'une fonction complète suivant la partition (Y, Z).

1 - Cas général

2 - Fonctions particulières.

I D. - Décompositions disjointes simples d'une fonction incomplète suivant la partition (Y, Z).

1 - Fonctions décomposables additivement.

2 - Fonctions décomposables monotones par rapport à $\varphi(Y)$.

3 - Fonctions particulières.

CHAPITRE II - RECHERCHE DES DECOMPOSITIONS SIMPLES PAR RAPPORT A L'ADDITION, LA MULTIPLICATION OU LA DISJONCTION.

II A. - Recherche des décompositions disjointes simples par rapport à l'additions, la multiplication ou la disjonction.

1 - Etude théorique.

2 - Algorithme.

CHAPITRE III - UNE APPLICATION DE LA RECHERCHE DES DECOMPOSITIONS SIMPLES PAR RAPPORT A L'ADDITION ET LA MULTIPLICATION.

III A. - Etude des décompositions additives de f = abc + adeij + bcdeij + bchij.

1 - Recherche des décompositions non triviales.

2 - Recherche des décompositions triviales.

III B. - Etude des décompositions additives de f.

1 - Recherche des décompositions non triviales.

2 - Recherche des décompositions triviales.

CHAPITRE IV - RECHERCHE DES PARTITIONS REALISANT LES DECOMPOSITIONS SIMPLES.

IV A. - Recherche des partitions réalisant les décompositions simples disjointes.

1 - Etude théorique.

2 - Algorithme.

IV B. - Recherche des partitions réalisant les décompositions simples non disjointes.

1 - Etude théorique.

2 - Algorithme.

CHAPITRE V - PROGRAMME ET EXEMPLES.

V A. - Programme pour la recherche des partitions réalisant les décompositions simples disjointes d'une fonction booléenne simple donnée.

V B. - Des exemples.

CHAPITRE VI - COMPLEMENTS.

VI A. - Sur une relation entre décompositions disjointes et décompositions non disjointes.

VI B. - Un additionneur comme une application de la théorie des décompositions disjointes simples.

- C H A P I T R E I -

ETUDE THEORIQUE DES DECOMPOSITIONS DISJOINTES SIMPLES

DEFINITION. Une fonction booléenne simple f(X) est dite posséder une décomposition disjointe simple si elle peut être exprimée comme une fonction composée g [φ(Y), Z], les ensembles Y et Z de variables étant disjoints.

Dans toute la suite, nous supposerons évidemment cette définition non triviale, c'est-à-dire que :

- f(X) dépend effectivement de ses [X] = n variables,
- 1 < [Y] = s < n.

I - A . NOMBRE DES FONCTIONS DE n VARIABLES ADMETTANT UNE DECOMPOSITION DISJOINTE SIMPLE.

1.- Nombre des fonctions de 3 variables admettant une décomposition disjointe simple.

Sur 218 fonctions booléennes simples dépendant effectivement de 3 variables, il y en a 114 qui admettent une décomposition disjointe simple non triviale.

En effet, dressons le tableau suivant des 16 types propres de fonctions booléennes simples de 3 variables :

Désignation du type	Représentant du type	Caractéristiques des fonctions du type	Nombre de fonctions du type	Type dont les fonctions admettent une décomposition disjointe simple
3A 3A*	xyz x + y + z	monotonie	8 8	X
3B 3B*	z(xy + x'y') z + xy' + x'y	sous-imparité sur-imparité	12 12	X
3C 3C*	xyz + x'y'z' xy'+yz'+zx'+xz'+yx'+zy'	parité	4 4	
3D 3D*	z(x + y) z + xy	monotonie	24 24	X
3E 3E*	xy'z + yz' xy+xz'+yz+y'z'	monotonie en x	24 24	
3F 3F*	xy'z'+x'yz'+x'y'z' xyz+x'y'+y'z'+z'x'		8 8	
G	xy + yz + zx	autodualité, imparité, monotonie	8	
H	z(xy'+x'y)+z'(xy+x'y')	autodualité, imparité	2	X
I	xy + yz + zx'	autodualité, monotonie en y et z	24	
J	xyz + z'(x' + y')	autodualité	24	X
			218	114

Remarque. Le nombre des fonctions de 4 variables admettant une décomposition disjointe simple est plus long à calculer, d'une part parce qu'il existe 380 types propres à 4 variables, d'autre part parce qu'il faut calculer le nombre de fonctions appartenant à chaque type.

2. - Borne supérieure du nombre des fonctions de n variables admettant une décomposition disjointe simple.

a.- Montrons que le nombre des fonctions de n variables admettant une décomposition disjointe simple $g[\varphi(Y),Z]$, où $[Y]+[Z]=n$ et $2 \leq [Y] = s \leq n-1$, est inférieur à $4(n^2-n-2)\,2^{2^{n-1}}$.

Une fonction $g[\varphi(Y), Z]$ dont le nombre des variables Y, soit $[Y] = s$, est fixé, peut toujours être obtenue à partir des fonctions $g(\varphi,Z)$ à n-s+1 variables et $\varphi(Y)$ à s variables en remplaçant la variable φ de $g(\varphi,Z)$ par $\varphi(Y)$. Les $2^{2^{n-s+1}}$ fonctions $g(\varphi,Z)$ et les 2^{2^s} fonctions $\varphi(Y)$ donnant donc naissance à au plus $\frac{n-s+1}{2}\,2^{2^s}\,2^{2^{n-s+1}}$ fonctions de n variables, le facteur n-s+1 provenant de la possiblité de substituer $\varphi(Y)$ à l'une quelconque des n-s+1 variables de $g(\varphi, Z)$ et le dénominateur 2 provenant du fait qui sera démontré par la suite (théorème 5 du chapitre I): une fonction décomposable $f(X) = g[\varphi(Y), Z]$ peut être obtenue de deux façons différentes, soit à partir de $g(\varphi,Z)$ et de $\varphi(Y)$, soit à partir de $h(\varphi',Z)$ $(=g(\varphi,Z))$ et de $\varphi'(Y)$.

Rendons s variable . Une borne supérieure A du nombre des fonctions de n variables admettant une décomposition disjointe simple est alors :

$$A = \sum_{s=2}^{n-1} \frac{n-s+1}{2}\,2^{2^s}\,2^{2^{n-s+1}} = \sum_{s=2}^{n-1} \frac{n-s+1}{2}\,2^{2^s + \frac{2^{n+1}}{2^s}}$$

Lorsque s varie entre 2 et n-1, $2^s + \frac{2^{n+1}}{2^s}$ est majoré par $2^2 + 2^{n-1}$ et A par :

$$A \leqslant 2^{2^2} + 2^{n-1} - 1 \sum_{s=2}^{n-1} 2^{n-s+1}$$

$$A \leqslant 4(n^2-n-2)\, 2^{2^{n-1}}$$

b.- La proportion p(n) des fonctions de n variables admettant une décomposition disjointe simple parmi les fonctions de n variables, tend vers zéro quand n tend vers l'infini.

En effet :

$$p(n) \leqslant \frac{4(n^2-n-2)2^{2^{n-1}}}{2^{2^n} - n.2^{2^{n-1}}} = \frac{4\,(n^2-n-2)}{2^{2^{n-1}} - n} \longrightarrow 0, \text{ quand } n \longrightarrow \infty$$

c. - Calculons quelques valeurs de p(n) :

$p(3) = \frac{16}{13}$ qui n'apporte aucun renseignement et qui serait à comparer à

$\frac{114}{218}$;

$p(4) = \frac{40}{252} < \frac{1}{6}$;

$p(5) \simeq \frac{9}{2^{13}} \simeq 10^{-3}$.

I - B - NOMBRE DES FONCTIONS DE n VARIABLES ADMETTANT UNE DECOMPOSITION DISJOINTE SIMPLE SUIVANT LA PARTITION (Y,Z).

Une fonction f(X) qui admet la décomposition $g[\varphi(Y), Z]$ est obtenue à partir des fonctions $g(\varphi, Z)$ et $\varphi(Y)$, dépendant effectivement de [Z] + 1 et [Y] variables, respectivement. Appelons N_n le nombre de fonctions dépendant effectivement de n variables :

$$N_n = 2^{2^n} - C_n^1 \, 2^{2^{(n-1)}} + C_n^2 \, 2^{2^{(n-2)}} + \ldots + (-1)^n \, 2.$$

Le nombre de fonctions dépendant effectivement de n variables et admettant la décomposition disjointe simple non triviale $g[\varphi(Y),Z]$ $(1 < [Y] = s < n)$ est donc :

$$\frac{N_{n-s+1} \times N_s}{2}$$

l'existence du dénominateur 2 étant toujours expliqué par le théorème 5 du chapitre I.

Application. Le nombre des fonctions dépendant effectivement de 3 variables et admettant la décomposition $g[\varphi(x,y),z]$ est :

$$\frac{N_2 \times N_2}{2} = 50,$$

puisque $2^{2^2} - C_2^1 \, 2^{2^1} + 2 = 10$. Ce nombre 50 est à comparer au nombre de fonctions effectivement de 3 variables admettant une décomposition disjointe simple non triviale (114) (le surplus $3 \times 50 - 114 = 36$ s'explique par les fonctions ayant plusieurs décompositions) et au nombre de fonctions effectivement de 3 variables (218).

Ces 50 fonctions se répartissent ainsi : les types 3A, $3A^*$, 3D, $3D^*$ et J en contiennent chacun 8, les types 3B et $3B^*$ chacun 4 et le type H **2.**

I - C - DECOMPOSITIONS DISJOINTES SIMPLES D'UNE FONCTION COMPLETE SUIVANT LA PARTITION (Y,Z).

1.- Cas Général.

THEOREME 1.- Soit $\tilde{y}_1 \ldots \tilde{y}_l \, \tilde{z}_1 \ldots \tilde{z}_m$ un monôme premier de $f(x_1,\ldots,x_n) = g[\varphi(y_1,\ldots,y_s), z_1,\ldots,z_{n-s}]$, quelconque à condition que $l \geqslant 1$.
Alors $\tilde{y}_1 \ldots \tilde{y}_l$ est un monôme premier de $\varphi(y_1,\ldots,y_s)$ ou de $\varphi'(y_1,\ldots,y_s)$.

DEMONSTRATION. $\tilde{y}_1 \ldots \tilde{y}_l \, \tilde{z}_1 \ldots \tilde{z}_m$ étant monôme premier de $f(x_1,\ldots,x_n)$, nous avons en particulier :

$$\begin{cases} g[\varphi(\tilde{y}_1,\ldots,\tilde{y}_l, y_{l+1},\ldots,y_s), \tilde{z}_1,\ldots,\tilde{z}_m, z_{m+1},\ldots,z_{n-s}] = 1 \, , \\ \qquad\qquad \forall (y_{l+1},\ldots,y_s,z_{m+1},\ldots,z_{n-s}) \qquad (1) \\ \exists\, (u_i,v_i) : g_{v_i}[\varphi_{u_i}(\tilde{y}_1,\ldots,(\tilde{y}_i)',\ldots,\tilde{y}_l),\tilde{z}_1,\ldots,\tilde{z}_m] = 0 \text{ pour } i = 1,\ldots,l \quad (2) \end{cases}$$

où les indices u_i, respectivement v_i, indiquent que la suite des variables non représentées $y_{l+1},\ldots,y_s$, respectivement $z_{m+1},\ldots,z_{n-s}$, a la configuration u_i $(0 \leqslant u_i \leqslant 2^{s-l}-1)$, respectivement v_i $(0 \leqslant v_i \leqslant 2^{n-s-m}-1)$.

a.- $\tilde{y}_1 \ldots \tilde{y}_l$ est un monôme inférieur à $\varphi(y_1,\ldots,y_s)$ ou à $\varphi'(y_1,\ldots,y_s)$.
Sinon, il existerait deux configurations différentes t et s des variables $y_{l+1},\ldots,y_s$ telles que :

$$\varphi_t(\tilde{y}_1,\ldots,\tilde{y}_l) = 1 \qquad (3)$$

$$\varphi_s(\tilde{y}_1,\ldots,\tilde{y}_l) = 0. \qquad (4)$$

(1) et (3), (1) et (4) donnent respectivement :

$g\ (1,\tilde{z}_1,\ldots,\tilde{z}_m,\ z_{m+1},\ldots,z_{n-s}) = 1,\ \forall (z_{m+1},\ldots,z_{n-s})$

$g\ (0,\tilde{z}_1,\ldots,\tilde{z}_m,\ z_{m+1},\ldots,z_{n-s}) = 1,\ \forall (z_{m+1},\ldots,z_{n-s}),$

expressions montrant que $\tilde{z}_1 \ldots \tilde{z}_m$ est un monôme inférieur à $f(x_1,\ldots,x_n)$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

b.- $\tilde{y}_1 \ldots \tilde{y}_1$ est monôme premier de $\varphi\ (y_1,\ldots,y_s)$ ou de $\varphi'\ (y_1,\ldots,y_s)$.

En effet, d'après (1) et (2), on peut trouver u_1 et v_1 tels que :

$g_{v_1}\ [\ \varphi_{u_1}\ (\tilde{y}_1,\ \tilde{y}_2,\ldots,\tilde{y}_1),\ \tilde{z}_1,\ldots,\tilde{z}_m] = 1$

$g_{v_1}\ [\ \varphi_{u_1}\ ((\tilde{y}_1);\ \tilde{y}_2,\ldots,\tilde{y}_1),\tilde{z}_1,\ldots,\tilde{z}_m] = 0.$

Ceci exige que :

$$\varphi_{u_1}(\tilde{y}_1,\ \tilde{y}_2,\ldots,\tilde{y}_1) \neq \varphi_{u_1}\ (\tilde{y}_1,\ \tilde{y}_2,\ldots,\tilde{y}_1),$$

donc que $\tilde{y}_2\ \tilde{y}_3 \ldots \tilde{y}_1$ ne soit pas un monôme inférieur à $\varphi\ (y_1,\ldots,y_s)$.

On démontrerait de même qu'on ne peut enlever aucune des lettres $\tilde{y}_2,\ldots,\tilde{y}_1$.

THEOREME 2. - Si une fonction $f(\mathbf{X}) = g\ [\ \varphi\ (Y),Z]$ admet un monôme premier de la forme Y_1^0 (Y_1^0 est formée de variables extraites de Y), alors tout monôme premier de $f(\mathbf{X})$ est de la forme Y_1 ou Z_i. Soit alors $\Sigma Y_1 + \Sigma Z_i$ la base complète de $f(\mathbf{X})$. Cette fonction admet la décomposition simple disjointe additive $\varphi\ (Y) + \psi\ (Z)$, $\varphi\ (Y)$, respectivement $\psi'(Z)$. Admettant comme base complète ΣY_1, respectivement ΣZ_i.

DEMONSTRATION. Soit Y_{1_0} un monôme premier de $f(X) = g[\varphi(Y), Z]$. Il doit être inférieur à un monôme de $g(\varphi, Z)$, monôme qui ne peut être que $\tilde{\varphi}$; tous les monômes premiers de $g(\varphi, Z)$ sont donc de la forme $\tilde{\varphi}$ ou Z_i. Si $Y_h Z_h$ est un monôme inférieur à $f(X)$, il est inférieur à $\tilde{\varphi}$ ou à un Z_i; donc ou Y_h est inférieur à $\tilde{\varphi}$, ou Z_h est inférieur à un Z_i et $Y_h Z_h$ n'est pas monôme premier de $f(X)$.

Les dernières affirmations sont immédiates en remarquant que si des relations de consensus étaient applicables aux monômes de $\varphi(Y)$ ou $\psi(Z)$, elles seraient a fortiori applicables aux monômes de $\varphi(Y) + \psi(Z) = f(X)$.

La réciproque déclarant que, si $f(X)$ admet la décomposition simple disjointe additive $\varphi(Y) + \psi(Z)$, $\varphi(Y)$, respectivement $\psi(Z)$, admettant pour base complète ΣY_l, respectivement ΣZ_i, alors $f(X)$ admet pour base complète $\Sigma Y_l + \Sigma Z_i$, est évidente.

THEOREME 3. Soit $\sum_{\epsilon} Z_i + \sum_{\epsilon} Y_j Z_j + \sum_{k \epsilon} Y_k Z_k$ la base complète de $f(X) = g[\varphi(Y), Z]$, où les Y_j, respectivement les Y_k, sont monômes premiers de $\varphi(Y)$, respectivement de $\varphi'(Y)$.
Alors $\Sigma Z_i + \varphi \Sigma Z_j + \varphi' \Sigma Z_k$, respectivement ΣY_j et ΣY_k, sont les bases complètes de $g(\varphi, Z)$, respectivement $\varphi(Y)$ si $J \neq \emptyset$ et $\varphi'(Y)$ si $K \neq \emptyset$.

DEMONSTRATION. a. - Montrons que, si $J \neq \emptyset$, ΣY_j est la base complète de $\varphi(Y)$: c'est à dire si Y_j^0 est un monôme premier quelconque de $\varphi(Y)$, alors $Y_j^0 Z_j$ est un monôme premier de $f(X)$, quelque soit Z_j.

En effet, puisque $J \neq \emptyset$, soit $Y_j Z_j = \tilde{y}_1 \ldots \tilde{y}_1 \tilde{z}_1 \ldots \tilde{z}_m$ un monôme premier de $f(X)$:

$$\begin{cases} g\left[\varphi(\tilde{y}_1,\ldots,\tilde{y}_l,y_{l+1},\ldots,y_s),\tilde{z}_1,\ldots,\tilde{z}_m,z_{m+1},\ldots,z_{n-s}\right]=1, \forall (y_{l+1},\ldots,y_s,z_{m+1},\ldots,z_{n-s}) & (1)\\ \exists (u_i,v_i) : g_{v_i}\left[\varphi_{u_i}(\tilde{y}_1,\ldots,(\tilde{y}_i);\ldots,\tilde{y}_l),\tilde{z}_1,\ldots,\tilde{z}_m\right]=0 \quad \text{pour } i=1,\ldots,l & (2)\\ \exists (u_j,v_j) : g_{v_j}\left[\varphi_{u_j}(\tilde{y}_1,\ldots,\tilde{y}_l),\tilde{z}_1,\ldots,(\tilde{z}_j);\ldots,\tilde{z}_m\right]=0 \quad \text{pour } j=1,\ldots,m & (3)\end{cases}$$

Y_j étant inférieur à φ (Y), (1) devient :

$$g(1,\tilde{z}_1,\ldots,\tilde{z}_m, z_{m+1},\ldots,z_{n-s}) = 1 \quad , \forall (z_{m+1},\ldots,z_{n-s}) \qquad (1')$$

(2) devient :

$$\exists v_i : g_{v_i}(0,\tilde{z}_1,\ldots,\tilde{z}_m) = 0 \qquad (2')$$

car sinon, il existerait v_i tel que $g_{v_i}(1, \tilde{z}_1,\ldots,\tilde{z}_m) = 0$, ce qui est contraire à (1'). Enfin (3) devient :

$$\exists v_j : g_{v_j}(1,\tilde{z}_1,\ldots,(\tilde{z}_j)',\ldots,\tilde{z}_m) = 0 \qquad (3')$$

Soit $Y_j^0 = \tilde{y}_{0_1}\ \tilde{y}_{0_2}\ldots\tilde{y}_{0_q}$ un monôme premier de φ (Y), autre que Y_j :

$$\begin{cases} \varphi(\tilde{y}_{0_1},\tilde{y}_{0_2},\ldots,\tilde{y}_{0_q}, y_{0_{q+1}},\ldots,y_{0_s}) = 1, \forall (y_{0_{q+1}},\ldots,y_{0_s}) & (4)\\ \exists w_k : \varphi_{w_k}(\tilde{y}_{0_1},\ldots,(\tilde{y}_{0_k})',\ldots,\tilde{y}_{0_q}) = 0 \quad \text{pour } k=0_1,\ldots,0_q & (5)\end{cases}$$

et montrons que $Y_j^0 z_j$ est un monôme premier de f (X) :

$$g\left[\varphi(\tilde{y}_{0_1},\ldots,\tilde{y}_{0_q}, y_{0_{q+1}},\ldots,y_{0_s}),\tilde{z}_1,\ldots,\tilde{z}_m, z_{m+1},\ldots,z_{n-s}\right]$$

$$= g(1,\tilde{z}_1,\ldots,\tilde{z}_m,z_{m+1},\ldots,z_{n-s}), \quad \forall (y_{0_{q+1}},\ldots,y_{0_s}) \text{ d'après (4)}$$

$$= 1 \quad , \forall (y_{0_{q-1}},\ldots,y_{0_s}, z_{m+1},\ldots,z_{n-s}) \quad \text{, d'après (1')} \qquad (6)$$

D'après (2') et (5), il existe v_i et w_k tels que $g_{v_i}(0,\tilde{z}_1,\ldots,\tilde{z}_m) = 0$ et $\varphi_{w_k}(\tilde{y}_{0_1},\ldots,(\tilde{y}_{0_k})',\ldots,\tilde{y}_{0_q}) = 0$, donc tels que :

$$g_{v_i}[\varphi_{w_k}(\tilde{y}_{0_1},\ldots,(\tilde{y}_{0_k})',\ldots,\tilde{y}_{0_q}),\ \tilde{z}_1,\ldots,\tilde{z}_m] = 0 \qquad (7)$$

D'après (3') et (4), il existe v_j tel que :

$$g_{v_j}[\varphi(\tilde{y}_{0_1},\ldots,\tilde{y}_{0_q},y_{0_{q+1}},\ldots,y_{0_s}),\tilde{z}_1,\ldots,(\tilde{z}_j)',\ldots,\tilde{z}_m] \neq 0,\ \forall (y_{0_{q+1}},\ldots,y_{0_s}) \qquad (8)$$

(6) (7) et (8) montrent bien que $\tilde{y}_{0_1}\ldots\tilde{y}_{0_q}\ \tilde{z}_1\ldots\tilde{z}_m$ est monôme premier de $f(X)$. On démontrerait de même que, si $K \neq \emptyset$, alors $\sum Y_k$ est la base complète de $\varphi'(Y)$.

b. - Montrons que les monômes Z_1 et $\varphi\, Z_j$ (obtenus à partir des $Y_j\ Z_j$, en remplaçant la partie Y_j, monôme premier de $\varphi(Y)$, par φ) sont monômes premiers de $g(\varphi, Z)$.

Supposons $\tilde{z}_1\ldots\tilde{z}_m$ monôme premier de $f(X) = g[\varphi(Y),Z]$:

$$\begin{cases} g[\varphi(y_1,\ldots,y_s),\tilde{z}_1,\ldots,\tilde{z}_m,z_{m+1},\ldots,z_{n-s}] = 1,\ \forall (y_1,\ldots,y_s,z_{m+1},\ldots,z_{n-s}) & (9) \\ \exists (u_j,v_j) : g_{v_j}[\varphi_{u_j},\tilde{z}_1,\ldots,(\tilde{z}_j)',\ldots,\tilde{z}_m] = 0 \quad \text{pour } j = 1,\ldots,m & (10) \end{cases}$$

égalités qui peuvent s'écrire (en posant $\varphi_{u_j} = b_j$) :

$$\begin{cases} g(\varphi,\tilde{z}_1,\ldots,\tilde{z}_m,z_{m+1},\ldots,z_{n-s}) = 1\ ,\ \forall (\varphi, z_{m+1},\ldots,z_{n-s}) & (9') \\ \exists (b_j,v_j): g_{b_j,v_j}(\tilde{z}_1,\ldots,(\tilde{z}_j)',\ldots,\tilde{z}_m) = 0 \quad \text{pour } j = 1,\ \ldots,\ m & (10') \end{cases}$$

ce qui prouve que $\tilde{z}_1\ldots\tilde{z}_m$ est monôme premier de $g(\varphi,Z)$ d'après (1'), (2') et (3'). Si K n'est pas vide, on monterait de même que les $\varphi\, Z_k$ sont des monômes premiers de $g(\varphi,Z)$.

c.- Inversement, tout monôme premier de $g(\varphi,Z)$ est, s'il est de la forme $\tilde{z}_1 \ldots \tilde{z}_m$, monôme premier de $f(X)$, ou, s'il est de la forme $\tilde{\varphi}\ \tilde{z}_1 \ldots \tilde{z}_m$ et si $\tilde{y}_1 \ldots \tilde{y}_l$ est un monôme premier de $\tilde{\varphi}$, tel que $\tilde{y}_1 \ldots \tilde{y}_l\ \tilde{z}_1 \ldots \tilde{z}_m$ est monôme premier de $f(X)$.

Supposons $\tilde{z}_1 \ldots \tilde{z}_m$ monôme premier de $g(\varphi,Z)$:

$$\begin{cases} g(\varphi,\tilde{z}_1,\ldots,\tilde{z}_m,z_{m+1},\ldots,z_{n-s}) = 1, \ \forall\,(\varphi,\ z_{m+1},\ldots,z_{n-s}) & (9') \\ \exists (b_j,v_j) : g_{b_j,v_j}\ (\tilde{z}_1,\ldots,(\tilde{z}_j)',\ldots,\tilde{z}_m) = 0 \quad \text{pour} \quad j = 1, \ldots, m & (10') \end{cases}$$

Or (9') entraîne immédiatement (9), et (10') entraîne (10) puisqu'il existe u_j tel que $\varphi_{u_j} = b_j$. $\tilde{z}_1 \ldots \tilde{z}_m$ est un monôme premier de $f(X)$.

Supposons $\tilde{\varphi}\ \tilde{z}_1 \ldots \tilde{z}_m$ monôme premier de $g(\varphi, Z)$:

$$\begin{cases} g(\tilde{\varphi},\ \tilde{z}_1,\ldots,\tilde{z}_m,\ z_{m+1},\ldots,z_{n-s}) = 1, \ \forall\,(z_{m+1},\ldots,z_{n-s}) & (11) \\ \exists\ v : g_v((\tilde{\varphi})',\tilde{z}_1,\ldots,\ \tilde{z}_m) = 0 & (12) \\ \exists\ v_j : g_{v_j}\ (\tilde{\varphi},\ \tilde{z}_1,\ \ldots,(\tilde{z}_j)',\ldots,\tilde{z}_m) = 0 \quad \text{pour } j = 1, \ldots, m & (13) \end{cases}$$

et $\tilde{y}_1 \ldots \tilde{y}_l$ monôme premier de $\tilde{\varphi}(Y)$:

$$\begin{cases} \varphi\ (\tilde{y}_1,\ldots,\tilde{y}_l,\ y_{l+1},\ldots,y_s) = \tilde{\varphi}\ , \ \forall\,(y_{l+1},\ldots,y_s) \\ \exists\ u_i : \varphi_{u_i}\ (\tilde{y}_1,\ \ldots,\ (\tilde{y}_i)',\ldots,\ \tilde{y}_l) = \tilde{\varphi}' \end{cases}$$

(11), (12) et (13) deviennent : (1) (2) et (3) et $\tilde{y}_1 \ldots \tilde{y}_l\ \tilde{z}_1 \ldots \tilde{z}_m$ est bien monôme premier de $f(X)$.

THEOREME 4. - Soit (Y, Z) l'une des partitions des variables X et soit $\sum_{l \in} Y_l + \sum_{i \in I} Z_i + \sum_{h \in H} Y_h Z_h$ la base complète de $f(X)$.

1.- Si H est vide, $f(X)$ est décomposé.

2.- Si H et L ne sont pas vides, $f(X)$ n'admet pas la décomposition $g[\varphi(Y), Z]$.

3.- Si L est vide, une condition nécessaire et suffisante pour que $f(X)$ admette la décomposition $g[\varphi(Y), Z]$ est que $\sum_h Y_h Z_h$ soit de la forme $Y_j (\sum_j Z_j) + \sum_k Y_k (\sum_k Z_k)$, avec l'une des trois hypothèses :

a.-) $\sum_j Y_j = 0$,

b.-) ou $\sum_k Y_k = 0$,

c.-) ou $\sum_j Y_j + \sum_k Y_k = 1$ et $\sum_j Y_j . \sum_k Y_k = 0$.

DEMONSTRATION. - Immédiate en remarquant que 1 et 2 correspondent au théorème 2, 3 au théorème 3.

REMARQUE. - Etant données la fonction booléenne $f(X)$ sous forme de base complète et la partition (Y,Z) des variables X, le théorème 4 permet de savoir si $f(X)$ admet la décomposition simple disjointe $g[\varphi(Y), Z]$ et, dans l'affirmative, fournit les bases complètes de $g[\varphi, Z]$ et de $\varphi(Y)$ (d'après le théorème 2 ou le théorème 3). Nous verrons au chapitre IV comment trouver les partitions (Y,Z) telles que f(X) soit décomposable suivant ces partitions.

THEOREME 5.- (présent dans [CU]). Si une fonction f(Y,Z) dépendant effectivement des variables Y admet la décomposition disjointe simple g [φ (Y),Z], ϖ (Y) est déterminé à une complémentation près. Les décompositions g (ϖ,Z) et φ (Y) et h(ϖ',Z) et ϖ'(Y) sont liées par : g (i,Z) = h(i',Z).

DEMONSTRATION.- Supposons que la fonction f(Y,Z), dépendant effectivement des variables Y, admette les décompositions disjointes simples g [$\boldsymbol{\varphi}$(Y),Z] et h [$\boldsymbol{\psi}$(Y), Z] et montrons que $\boldsymbol{\psi}$(Y) = $\tilde{\varpi}$ (Y).

En effet si $\boldsymbol{\psi}$(Y) $\neq$ $\boldsymbol{\varphi}$ (Y), il existe un point $\tilde{\mathbf{Y}}$ tel que $\boldsymbol{\psi}(\tilde{Y}) = \varpi'(\tilde{Y})$, et si $\boldsymbol{\psi}$(Y) $\neq$ ϖ'(Y), il existe un point $\tilde{\tilde{Y}}$ tel que $\boldsymbol{\psi}(\tilde{\tilde{Y}}) = \varphi\ (\tilde{\tilde{Y}})$.

$$f(Y,Z) = g\ [\varphi\ Y),Z] = h\ [\boldsymbol{\psi}(Y),Z]$$

ou ϖ' g (0,Z) + φ g(1,Z) = $\boldsymbol{\psi}$'h(0,Z) + $\boldsymbol{\psi}$ h (1,Z)

devient en $\tilde{Y}$: φ' g (0,Z) + ϖ g (1,Z) = ϖ h (0,Z) + φ' h (1 Z)

et en $\tilde{\tilde{Y}}$: φ' g(0 Z) + ϖ g(1,Z) = ϖ' h (0,Z) + φ h (1,Z).

Donc : φ h (0,Z) + φ' h (1,Z) = ϖ'h (0,Z) + φh(1,Z)

h (0,Z) = h (1,Z)

et f(Y,Z) = h [φ (Y),Z] est indépendant de Y, ce qui est contraire à l'hypothèse.

La dernière affirmation : g (i,Z) = h (i',Z), où i est une variable booléenne simple, est évidente.

EXEMPLE. - Soit la fonction f(v,w,x,y,z) de base complète :

vw'yz + vw'xz + x'y'z' + v'z' + wz'.

Le tableau de décomposition $\{v,w\}$ $\{x,y,z\}$ de f (v,w,x,y,z)

x'y'z'	vw'	v'	w
yz	1		
xz	1		
z'		1	1

où les lignes sont caractérisées par les parties Z_h (formées des variables x, y, z) des monômes premiers, où les colonnes sont caractérisées par les parties Y_h des monômes premiers et où un 1, à l'intersection d'une ligne et d'une colonne, indique l'existence du monôme premier produit des configurations Z_h et Y_h de la ligne et de la colonne, a deux lignes distinctes. D'autre part vw' et v'+ w sont complémentaires. La décomposition g $[\varphi (v,w), x,y,z]$ existe donc et les bases complètes de φ (v, x, z), φ' (v,x,z) et g(φ, x,y,z) sont par exemple :

$$\begin{cases} \varphi(v,w) = vw' \\ \varphi'(v,w) = v' + w \\ g(\varphi, x, y, z) = x'y'z' + \varphi yz + \varphi xz + \varphi' z'. \end{cases}$$

Grâce au théorème 3, nous pouvons maintenant examiner g (φ, x, y, z) donnée par sa base complète. Son tableau de décomposition $\{x, y\}$ | $\{\varphi, z\}$

φ' z'	x'y'	y	x
z'	1		
φz		1	1

montre qu'elle admet la décomposition g(ψ, φ, z) de base complète

$\varphi'z' + \psi z' + \psi' \varphi z$ si $\psi(x,y) = x'y'$ et $\psi'(x,y) = x+y$.

Enfin le tableau de décomposition $\{\varphi, \psi\} \mid \{z\}$ de $h(\psi, \varphi, z)$

	φ'	ψ	$\psi'\varphi$
z'	1	1	
z			1

révèle la décomposition $z \oplus \psi' \varphi$. D'où finalement :

$$f = z \oplus (x+y)\, vw'$$

Les théorèmes 2, 3 et 4 sont relatifs à la base complète d'une fonction booléenne. Il peut être intéressant (nous le verrons au chapitre V) de rechercher les décompositions disjointes simples éventuelles d'une fonction booléenne à partir d'une de ses bases irredondantes ou d'une somme quelconque de monômes premiers. Voici le correspondant du théorème 3 dans cette nouvelle optique (alors que le correspondant du théorème 2 sera automatiquement trouvé au chapitre II en II A 2 a α) :

THEOREME 6. - Si la fonction $f(Y,Z)$ possède la décomposition simple disjointe $g[\varphi(Y), Z]$ et si elle est donnée par la somme de monômes premiers $\sum_{i \in I} Z_i + \sum_{j \in J} Y_j Z_j + \sum_{k \in K} Y_k Z_k$ où les Y_j (respectivement les Y_k) sont inférieurs à $\varphi(Y)$ (respectivement $\varphi'(Y)$), alors $\sum_{\epsilon} Z_i + \varphi \sum_{\epsilon} Z_j + \varphi' \sum_{\epsilon} Z_k$, respectivement $\sum Y_j$ et $\sum Y_k$, sont des sommes de monômes premiers de $g(\varphi, Z)$, respectivement $\varphi(Y)$ si $J \neq \emptyset$ et $\varphi'(Y)$ si $K \neq \emptyset$.

Démonstration immédiate à l'aide des théorèmes 1 et 3, et en sachant que les déterminations de g (φ, Z), φ (Y) et φ'(Y) sont pratiquement uniques (théorème 5).

EXEMPLE. - Considérons la fonction f(u, v,w,x,y,z) de base complète :

u' v' x' y' A + v' w' x' y' B + u' v' y' z' C + v' w' y' z' D

+ u' v' x' z E + v' w' x' z F + u' w x' y' G + u' w y' z' H + u' v' yz I

+ v' w' yz J + u' wx' z K + vw x' y' L + vw y' z' M + u' w yz N

+vw x' z O + vwyz P.

Le tableau montrant les décompositions $g_1[\varphi_1(x,y,z),u,v,w]$ et $g_2[\varphi_2(u,v,w),x,y,z]$ est :

	x'y'	y'z'	x'z	yz
u'v'	A	C	E	I
v'w'	B	D	F	J
u'w	G	H	K	N
vw	L	M	O	P

Considérons la base irredondante suivante de f (u,v,w,x,y,z) : B+C+D+E+I+J+L+M+P. le tableau correspondant est :

	x'y'	y'z'	x'z	yz
v'w'	B	D		J
u'v'		C	E	I
vw	L	M		P

On en déduit les écritures suivantes de $g_1(\varphi_1,\varphi_2)$, $\varphi_1(x, y, z)$ et $\varphi_2(u, v, w)$ est croissante en u et que $g(\varphi, x, y)$ est croissante en φ et en y.

$$\begin{cases} g(\varphi_1, \varphi_2) = \varphi_1 \varphi_2 \\ \varphi_1(x, y, z) = x'y' + y'z' + x'z + yz \\ \varphi_2(u,v,w) = v' w' + u'v' + vw \end{cases}$$

Nous constatons que, d'une part, un tableau construit à partir d'une base non complète n'a évidemment pas de forme singulière (on ne peut en déduire les formes des fonctions g (φ, Z) et φ (Y) que si l'on sait, à priori, l'existence de la décomposition suivant la partition (Y, Z)), que, d'autre part, φ(Y) n'est pas donnée par une base non complète alors que f(Y,Z) est donnée par une base non complète.

REMARQUE. - Si f(X) = g [φ(Y), Z] est donnée par une somme de monômes quelconques, alors φ(Y) et φ'(Y) ne sont pas données directement.

2. - Fonctions particulières. -

THEOREME 7. - Sur les fonctions monotones décomposables.

Si une fonction booléenne f(y, Y, z, Z) dépendant effectivement des variables y et z, admet une décomposition disjointe g [φ(y,Y), z, Z] et

1.- si elle est croissante (respectivement décroissante) en y, alors φ (y,Y) peut être choisie croissante (respectivement décroissante) en y et g (φ z, Z) est croissante en φ;

2.- si elle est croissante (respectivement décroissante en z), alors g (φ, z, Z) est croissante (respectivement décroissante) en z.

DEMONSTRATION.- Nous savons qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction soit croissante en x est que ses monômes premiers ne contiennent pas x'.

1.- Donc si f(X) est croissante en y, ses monômes premiers ne contiennent pas y': ils donnent, par suppression des lettres z et Z,

tous les monômes premiers soit d'une seule fonction que nous appellerons $\varphi(y, Y)$ (on pourrait l'appeler $\varphi'(y, Y)$),soit de deux fonctions complémentaires $\varphi(y, Y)$ et $\varphi'(y, Y)$ (d'après les théorèmes 2 et 3). Supposons que nous obtenons les bases complètes de $\varphi(y, Y)$ et de $\varphi'(y, Y)$; elles ne contiennent pas y'; $\varphi(y, Y)$ et $\varphi'(y, Y)$, croissantes en y, doivent être indépendantes de y, ce qui est absurde puisque $f(y, Y, z, Z)$ dépend effectivement de y. Nous n'obtenons donc que la base complète de $\varphi(y, Y)$, croissante en y et $g(\varphi, z, Z)$ est croissante en φ.

2. - Le raisonnement est le même lorsque $f(y, Y, z, Z)$ est décroissante en y ou monotone en z.

EXEMPLE. - $f(x, y, u, v, w) = yuv'w + yvw' + uv'wx' + vw'x' + xy$ est croissante en u et en y et est décomposable :

$f(x, y, u, v, w) = g[\varphi(u, v, w), x, y] = xy + \varphi x' + \varphi y$

avec $(u,v,w) = uv'w + vw'$.

Nous constatons bien que $\varphi(u,v,w)$ est croissante en u et que $g(\varphi,x,y)$ est croissante en φ et en y.

THEOREME 8. - Sur les fonctions paires décomposables.

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction décomposable $f(Y, Z) = g[\varphi(Y), Z]$ soit paire est :

$\varphi(Y)$ paire et $g(\varphi, Z) = g(\varphi, Z')$

ou $\varphi(Y)$ impaire et $g(\varphi, Z)$ paire.

DEMONSTRATION.- Une condition nécessaire et suffisante pour que $f(Y,Z)$ soit paire est :

$f(Y, Z) = f(Y',Z')$,

égalité équivalente à :

$g[\varphi(Y), Z] = g[\varphi(Y'), Z']$

ce qui exige, d'après le théorème 5 :

soit $\varphi(Y) = \varphi(Y')$ ($\varphi(Y)$ est paire) et (1) devient :

$g[\varphi(Y), Z] = g[\varphi(Y), Z']$

$g(\varphi, Z) = g(\varphi, Z')$,

soit $\varphi(Y) = \varphi'(Y')$ ($\varphi(Y)$ est impaire) et (1) devient :

$g(\varphi, Z) = g(\varphi', Z')$ ($g(\varphi, Z)$ est paire).

Réciproquement, les conditions $\varphi(Y)$ est paire et $g(\varphi, Z) = g(\varphi, Z')$ ou $\varphi(Y)$ est impaire et $g(\varphi, Z)$ est paire sont suffisantes pour que $f(Y, Z) = g[\varphi(Y), Z]$ soit paire, car elles entrainent (1).

EXEMPLE. - La clé de parité à 4 variables : $u \oplus v \oplus w \oplus x$, qui est une fonction paire, admet la décomposition $\varphi(u, v, w,) \oplus x$ où $\varphi = u \oplus v \oplus w$ est impaire et où $g(\varphi, x) = \varphi \oplus x$ est paire.

THEOREME 9. - Sur les fonctions sous-impaires décomposables.

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction décomposable $f(Y, Z) = g[\varphi(Y, Z)]$ soit sous-impaire ($f(Y', Z') < f'(Y, Z)$) est que $g(\varphi, Z)$ soit sous-impaire à la fois lorsque φ, si $\varphi(Y)$ n'est pas paire, est une variable indépendante ($g(\varphi', Z') < g'(\varphi, Z)$), lorsque φ, si $\varphi(Y)$ n'est pas sur-impaire, est identique à 0 ($g(0, Z') < g'(0, Z)$) et lorsque φ, si $\varphi(Y)$ n'est pas sous-impaire, est identique à 1 ($g(1, Z') < g'(1, Z)$).

DEMONSTRATION.- Une condition nécessaire et suffisante pour que $f(Y,Z)$ soit sous-impaire est :

$f(Y', Z') < f'(Y, Z)$,

soit :

$$g[\varphi(Y'), Z'] < g'[\varphi(Y), Z]. \qquad (2)$$

Si $\varphi(Y)$ est paire : $\varphi(Y') = \varphi(Y)$, et (2) devient : $g(\varphi, Z') < g'(\varphi, Z)$, équivalent à :

$$\begin{cases} g(0, Z') < g'(0, Z) \\ g(1, Z') < g'(1, Z) ; \end{cases}$$

si $\varphi(Y)$ est impaire : $\varphi(Y) = \varphi'(Y')$, et (2) devient :

$g(\varphi', Z') < g'(\varphi, Z)$;

si $\varphi(Y)$ est sous-impaire, soit $\varphi(Y) = \varphi(Y') = 0$, soit $\varphi(Y) = \varphi'(Y')$ et (2) est équivalent à :

$$\begin{cases} g\ (0, Z') < g'\ (0, Z) \\ g\ (\varphi', Z') < g'\ (\varphi, Z)\ ; \end{cases}$$

si $\varphi(Y)$ est sur-impaire, soit $\varphi(Y) = \varphi(Y') = 1$, soit $\varphi(Y) = \varphi'(Y')$ et (2) devient équivalent à :

$$\begin{cases} g\ (1, Z') < g'(\ 1, Z) \\ g\ (\varphi', Z') < g'\ (\varphi, Z); \end{cases}$$

enfin si φ (Y) n'est ni paire, si sur et sous-impaire, (2) donne :

$$\begin{cases} g\ (0, Z') < g'(0, Z) \\ g\ (1, \ \ ') < g'(1, Z) \\ g\ (\varphi', Z') < g'(\varphi, Z). \end{cases}$$

On obtient bien l'énoncé du théorème 9.

EXEMPLE. - La fonction sous-impaire $f(x, y, u, v) = xy + yu + yv$ admet la décomposition $xy + y(u+v)$, où

$$\begin{cases} \varphi = u + v \text{ est sur-impaire} \\ g(\varphi, x, y) = xy + y\varphi \text{ est sous-impaire lorsque } \varphi \text{ est une variable indépendante et lorsque } \varphi \text{ est identique à } 1. \end{cases}$$

THEOREME 10. - Sur les fonctions sur-impaires décomposables.

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction décomposable $f(Y, Z) = g\ [\varphi(Y), Z]$ soit sur-impaire est que $g\ (\varphi, Z)$ soit sur-impaire à la fois lorsque φ, si $\varphi(Y)$ n'est pas paire, est une variable indépendante, lorsque φ, si $\varphi(Y)$ n'est pas sur-impaire, est identique à 0 et lorsque φ, si $\varphi(Y)$ n'est pas sous-impaire, est identique à 1.

DEMONSTRATION. - duale de la précédente.

THEOREME 11.- Sur les fonctions impaires décomposables.

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction décomposable $f(Y, Z) = g[\varphi(Y), Z]$ soit impaire est que :

$\varphi(Y)$ paire et $g(\varphi, Z) = g'(\varphi, Z')$

ou $\varphi(Y)$ et $g(\varphi, Z)$ impaires.

DEMONSTRATION.- Une condition nécessaire et suffisante pour que $f(Y, Z)$ soit impaire est : $f(Y, Z) = f'(Y', Z')$

$$g[\varphi(Y), Z) = g'[\varphi(Y'), Z'], \qquad (3)$$

donc ou $\varphi(Y) = \varphi(Y')$ ($\varphi(Y)$ est paire) et (3) devient :

$$g(\varphi, Z) = g'(\varphi, Z')$$

ou $\varphi(Y) = \varphi'(Y')$ ($\varphi(Y)$ est impaire) et (3) devient :

$$g(\varphi, Z) = g'(\varphi', Z') \quad (g(\varphi, Z) \text{ est impaire}).$$

Réciproquement, $\varphi(Y)$ paire et $g(\varphi,Z) = g'(\varphi,Z')$ ou $\varphi(Y)$ et $g(\varphi,Z)$ impaires entrainent (3).

EXEMPLE 1.- La clé de parité à 3 variables $u \oplus v \oplus z$, qui est une fonction impaire, admet la décomposition $g(\varphi,z) = \varphi \oplus z$,

où $\varphi = u \oplus v$ est paire

et où $g'(\varphi, z) = g'(\varphi, z')$.

EXEMPLE 2.- La clé de parité à 5 variables $x \oplus y \oplus u \oplus v \oplus w$ est une fonction impaire décomposable où $\varphi(u, v, w) = u \oplus v \oplus w$ et $g(\varphi,x,y) = x \oplus y \oplus \varphi$ sont impaires).

EXEMPLE 3.- Les fonctions impaires à 4 variables

$f_1(u, v, x, y) = xy + x(uv + u'v') + y(uv' + u'v)$ et

$f_2(u, v, w, x) = x'(u'v' + u'w' + uv + uw + v'w + vw') + x(u'vw + uv'w')$

sont décomposables :

$$\begin{cases} g_1(\varphi_1, x,y) = xy + x\varphi_1 + y\varphi_1' \\ \varphi_1(u, v) = uv + u'v' \text{ est paire} \\ \varphi_1'(u, v) = uv' + u'v \text{ est paire} \end{cases}$$

$$\begin{cases} g_2(\varphi_2, x) = x'\varphi + x\varphi' \\ \varphi_2(u, v, w) = u'v' + u'w' + uv + uw + v'w + vw' \text{ est paire} \\ \varphi_2'(u, v, w) = u'vw + uv'w' \text{ est paire.} \end{cases}$$

I - D - DECOMPOSITIONS DISJOINTES SIMPLES D'UNE FONCTION INCOMPLETE SUIVANT LA PARTITION (Y, Z).

Etant données la partition (Y, Z) des variables X et la fonction incomplète f(X) donnée par les bases complètes de ses bornes

$$\underline{f}(X) = \sum_{l \in \underline{L}} \underline{Y}_l + \sum_{i \in \underline{I}} \underline{Z}_i + \sum_{h \in \underline{H}} \underline{Y}_h \, \underline{Z}_h$$

et $\overline{f}(X) = \sum_{l \in \overline{L}} \overline{Y}_l + \sum_{i \in \overline{I}} \overline{Z}_i + \sum_{h \in \overline{H}} \overline{Y}_h \, \overline{Z}_h$,

il s'agit de trouver les fonctions k(X) compatibles avec f(X) et décomposables suivant (Y, Z) :

$$\underline{f}(X) \leq k(X) = g[\varphi(Y), Z] \leq \overline{f}(X).$$

Nous ne considérerons que les deux cas particuliers suivants : celui des fonctions décomposables additivement et celui des fonctions décomposables qui sont monotones par rapport à $\varphi(Y)$.

1. - Fonctions décomposables additivement (de base complète $\sum Y_l + \sum Z_i$).

THEOREME 12. - Les fonctions décomposables additivement supérieures à $\underline{f}(Y, Z) = \sum_{l \in \underline{L}} \underline{Y}_l + \sum_{i \in \underline{I}} \underline{Z}_i + \sum_{h \in \underline{H}} \underline{Y}_h \, \underline{Z}_h$ sont supérieures à au moins une fonction

$$\underline{f}^0(Y, Z) = \sum_{l \in \underline{L}} \underline{Y}_l \sum_{i \in \underline{I}} \underline{Z}_i + \sum_{h \in H} (a_h \underline{Y}_h + a'_h \underline{Z}_h), \quad (1)$$

où les a_h ($h \in \underline{\quad}$) sont des variables booléennes.

DEMONSTRATION. - Soit k(X) une fonction décomposable additivement supérieure à $\underline{f}(X)$, de base complète $\sum_{l \in L} Y_l + \sum_{i \in I} Z_i$:

$$\sum \underline{Y}_l + \sum \underline{Z}_i + \sum \underline{Y}_h \underline{Z}_h \leqslant \sum Y_l + \sum Z_i$$

Donc, quel que soit $\underline{Y}_l$, il existe un Y_l, soit Y_l, , tel que $\underline{Y}_l \leqslant \underline{Y}_l$, ;

de même, $\forall \underline{Z}_i, \exists i' \in I : \underline{Z}_i \leqslant Z_i$,

et $\forall \underline{Y}_h \ \underline{Z}_h, \exists (l' \in L, i' \in I) : \underline{Y}_h \leqslant Y_{l''}$ ou $\underline{Z}_h \leqslant Z_{i''}$,

soit : $\underline{Y}_h \ \underline{Z}_h \leqslant a_h \underline{Y}_h + a'_h \underline{Z}_h \leqslant a_h Y_{l''} + a'_h Z_{i''}$,

où a_h est une variable booléenne. Alors :

$$\underline{f}(X) = \sum \underline{Y}_l + \sum \underline{Z}_i + \sum \underline{Y}_h \underline{Z}_h \leqslant \sum \underline{Y}_l + \sum \underline{Z}_i + \sum (a_h \underline{Y}_h + a'_h \underline{Z}_h) \qquad (2)$$

$$\leqslant \sum Y_{l'} + \sum Z_{i'} + \sum (a_h Y_{l''} + a'_h Z_{i''})$$

$$\leqslant \sum Y_l + \sum Z_i = k(X),$$

ce qui montre que k(X) est bien supérieure à une fonction $\underline{f}^0(X)$: la fonction (2). D'autre part, il est évident que les fonction $\underline{f}^0(X)$ sont décomposables additivement.

THEOREME 13. - Les fonctions décomposables additivement inférieures à

$$\overline{f}(Y, Z) = \sum_{l \in \overline{L}} \overline{Y}_l + \sum_{i \in \overline{I}} \overline{Z}_i + \sum_{h \in \overline{H}} \overline{Y}_h \ \overline{Z}_h$$

sont inférieures ou égales à

$$\overline{f}^0(Y,Z) = \sum_{l \in \overline{L}} \overline{Y}_l + \sum_{i \in \overline{I}} \overline{Z}_i .$$

DEMONSTRATION. - En effet, soit Y_l (respectivement Z_i) un monôme premier d'une fonction décomposable; il existe un monôme premier $\overline{Y}_l$ (respectivement $\overline{Z}_i$) de $\overline{f}(X)$ tel que $Y_l \leqslant \overline{Y}_l$ (respectivement $Z_i \leqslant \overline{Z}_i$): donc $\sum Y_l \leqslant \sum \overline{Y}_l$ (respectivement $\sum Z_i \leqslant \sum \overline{Z}_i$) et $k(X) = \sum Y_l + \sum Z_i \leqslant \sum \overline{Y}_l + \sum \overline{Z}_i$.

Le théorème 13 veut donc dire qu'on peut remplacer la borne supérieure $\bar{f}(Y,Z)$ par une autre, plus petite, qui est une solution.

THEOREME 14. - Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe des fonctions additivement décomposables $k(Y,Z) = \Sigma Y_l + \Sigma Z_i$ compatibles avec la fonction incomplète $f(Y,Z)$ donnée par les bases complètes de ses bornes :

$$\underline{f}(Y, Z) = \sum_{l \in \underline{L}} \underline{Y}_l + \sum_{i \in \underline{I}} \underline{Z}_i + \sum_{h \in \underline{H}} \underline{Y}_h \, \underline{Z}_h$$

$$\text{et } \bar{f}(Y,Z) = \sum_{l \in \bar{L}} \bar{Y}_l + \sum_{i \in \bar{I}} \bar{Z}_i + \sum_{h \in \bar{H}} \bar{Y}_h \, \bar{Z}_h,$$

est :

$$\Sigma \underline{Y}_h \, \underline{Z}_h \leqslant \Sigma \bar{Y}_l + \Sigma \bar{Z}_i. \qquad (3)$$

Elles sont :

$$k(Y,Z) = \sum_{l \in \underline{L}} \underline{Y}_l + \sum_{i \in \underline{I}} \underline{Z}_i + \sum_{a_h \in H_1} \underline{Y}_h + \sum_{a_h \in H_2} \underline{Z}_h +$$

$$\sum_{a_h \in H_3} (a_h \underline{Y}_h + a'_h \underline{Z}_h) + \lambda \Sigma \bar{Y}_l + \mu \Sigma \bar{Z}_i \qquad (4)$$

où $\{H_1, H_2, H_3\}$ est une partition de H telle que :

$a_h \in H_1$ si et seulement si $Z_h \not\leqslant \Sigma \bar{Z}_i$

$a_h \in H_2$ si et seulement si $Y_h \not\leqslant \Sigma \bar{Y}_l$

$a_h \in H_3$ dans tous les autres cas,

et où λ et μ sont des paramètres booléens dépendant respectivement des variables Y et Z.

DEMONSTRATION. - Supposons qu'il existe des fonctions $k(X)$ décomposables additivement. D'après le théorème 13, $\bar{f}^0(X) = \Sigma \bar{Y}_l + \Sigma \bar{Z}_i$ en est une, donc :

$\underline{f}(X) = \Sigma \underline{Y}_l + \Sigma \underline{Z}_i + \Sigma \underline{Y}_h \underline{Z}_h \leqslant \Sigma \bar{Y}_l + \Sigma \bar{Z}_i$ et on obtient (3).

D'autre part, les théorèmes 12 et 13 permettent d'écrire :

$\underline{f}^0(X) = \Sigma \underline{Y}_l + \Sigma \underline{Z}_i + \Sigma (a_h \underline{Y}_h + a'_h \underline{Z}_h) \leqslant k(X) = \Sigma Y_l + \Sigma Z_i \leqslant \bar{f}^0(X) = \Sigma \bar{Y}_l + \Sigma \bar{Z}_i$

soit :

$$\begin{cases} \Sigma \underline{Y}_l + \Sigma a_h \underline{Y}_h \leqslant \Sigma Y_l \leqslant \Sigma \bar{Y}_l \\ \Sigma \underline{Z}_i + \Sigma a'_h \underline{Z}_h \leqslant \Sigma Z_i \leqslant \Sigma \bar{Z}_i, \end{cases} \qquad (5)$$

pour toute borne inférieure $\underline{f}^0(X)$ inférieure à $\bar{f}^0(X)$, c'est-à-dire lorsque les variables booléennes a_h sont soumises aux contraintes suivantes :

$$\begin{cases} a_h = 1 \text{ si } \underline{Z}_h \not\leqslant \Sigma \bar{Z}_i \\ a_h = 0 \text{ si } \underline{Y}_h \not\leqslant \Sigma \bar{Y}_l. \end{cases}$$

Si H_1 est l'ensemble des a_h égaux à 1, H_2 celui des a_h nuls et H_3 l'ensemble des a_h tels que $\underline{Z}_h \leqslant \Sigma \bar{Z}_i$ et $\underline{Y}_h \leqslant \Sigma \bar{Y}_l$, (5) devient :

$$\begin{cases} \Sigma \underline{Y}_l + \sum_{\epsilon} \underline{Y}_h + \sum_{a_h \in H_3} a_h \underline{Y}_h \leqslant \Sigma Y_l \leqslant \Sigma \bar{Y}_l & (5') \\ \Sigma \underline{Z}_i + \sum_{a_h \in H_2} \underline{Z}_h + \sum_{a_h \in H_3} a'_h \underline{Z}_h \leqslant \Sigma Z_i \leqslant \Sigma \bar{Z}_i, & (5'') \end{cases}$$

inégalités que l'on peut représenter par (4). λ et μ sont des paramètres booléens et on obtiendra toutes les solutions de (4) (voir [CA]) à l'aide de paramètres indépendants $\lambda_0, \ldots, \lambda_{2^s-1}$ et $\mu_0, \ldots, \mu_{2^{n-s}-1}$, en développant λ et μ par les formules matricielles :

$$\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{2^s-1}) \begin{pmatrix} y'_1 & y'_2 & \ldots & y'_s \\ y_1 & y'_2 & \ldots & y'_s \\ \vdots & & & \\ y_1 & y_2 & \ldots & y_s \end{pmatrix} \text{et} \mu = (\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_{2^{n-s}-1}) \begin{pmatrix} z'_1 & z'_2 & \ldots & z'_{n-} \\ z_1 & z'_2 & \ldots & z'_{n-} \\ \vdots & & & \\ z_1 & z_2 & \ldots & z_{n-s} \end{pmatrix}$$

Inversement si (3) est vérifié, $\sum \underline{Y}_l + \sum \underline{Z}_i + \sum \underline{Y}_h \underline{Z}_h \leqslant \sum \overline{Y}_l + \sum \overline{Z}_i \leqslant \overline{f}(X)$, et il existe au moins une fonction additivement décomposable : $\sum \overline{Y}_l + \sum \overline{Z}_i$.

REMARQUE 1. - De (4), on déduit qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une fonction f(Y, Z) indépendante des variables Y (respectivement Z) est, en plus de la condition (3), que les ensembles d'indices $\underline{L}$ et H_1 soient vides (respectivement $\underline{I}$ et H_2).

REMARQUE 2. - Les fonctions $\sum Y_l$ vérifiant (5') forment un treillis d'élément minimal $\sum \underline{Y}_l + \sum_{\epsilon} \underline{Y}_h$ et d'élément maximal $\sum \overline{Y}_l$; de même les fonctions $\sum Z_i$ vérifiant (5'') forment un treillis d'éléments extrémaux $\sum \underline{Z}_i + \sum_{\epsilon} \underline{Z}_h$ et $\sum \overline{Z}_i$. La somme $\sum Y_l + \sum Z_i = k(X)$ forme un sup demi-treillis, d'élément maximal $\sum \overline{Y}_l + \sum \overline{Z}_i$.

EXEMPLE. - Considérons la fonction incomplète donnée par :

$$\begin{cases} \underline{f}(x, y, z) = xy + yz + zx \\ \overline{f}(x, y, z) = x + y + z \end{cases}$$

et cherchons en les fonctions additivement décomposables suivant la partition (z, xy) (Z = z, Y = {x, y}).

La condition (3) : yz + zx < x + y + z, est vérifiée Même, nous constatons, d'après la remarque 1, qu'il existe au moins une fonction indépendante de z.

Les solutions k(X) sont données par (4) :

$f(X) = xy + hy + h'z + kx + k'z + \lambda(x+y) + \mu z$

où $\lambda = (\lambda_0\ \lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3)\begin{pmatrix} x'y' \\ xy' \\ x'y \\ xy \end{pmatrix}$ et $\mu = (\mu_0\ \mu_1)\begin{pmatrix} z' \\ z \end{pmatrix}$

(λ se réduit aux paramètres λ_1, λ_2 et μ à μ_1).

Parmi les solutions minimales : $xy + hy + h'z + kz + k'z$, les solutions réellement minimales sont : $xy\,(y+z)\,(x+z) = xy\,(z + x|y)$ soient $xy + z$ et $x + y$. Les solutions sont donc :

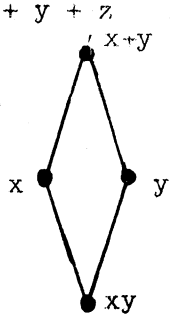
$xy + z + \lambda(x+y) + \mu z$

$\lambda_1 = 0$	$\lambda_2 = 0$	$f(X) = xy + z$
$\lambda_1 = 0$	$\lambda_2 = 1$	$f(X) = y + z$
$\lambda_1 = 1$	$\lambda_2 = 0$	$f(X) = x + z$
$\lambda_1 = 1$	$\lambda_2 = 1$	$f(X) = x + y + z$

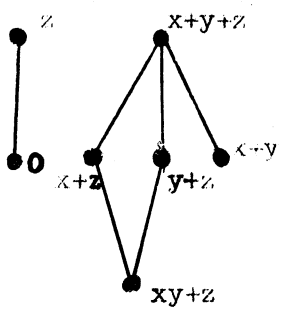
et $x + y + \lambda + \mu z$

$\mu = 0$	$f(X) = x + y$
$\mu = 1$	$f(X) = x + y + z$

soit finalement : xy+z, x+z, y+z, x+y, x+y+z.



Treillis des $\sum Y_1$



Treillis Sup demi-treillis des $\sum Z_i$

Treillis des $\sum Y_1 + \sum Z_i$

2. - Fonctions décomposables monotones par rapport à $\varphi(Y)$.

Ce sont en particulier, d'après le théorème 7, les fonctions monotones par rapport à l'une des variables Y. Nous supposerons dans la suite, par mesure de simplification la fonction décomposable croissante par rapport à $\varphi(Y)$.

Remarquons que, pour qu'il existe des fonctions décomposables suivant la partition (Y, Z) monotones par rapport à $\varphi(Y)$ et compatibles avec f(X), la borne inférieure de f(X) ne contient pas de $\underline{Y}_1$:

$$\underline{f}(X) = \sum \underline{Z}_i \cdot \sum \underline{Y}_h \underline{Z}_h .$$

Sinon, toute fonction supérieure à $\underline{f}(X)$ aurait au moins un monôme premier constitué seulement de variables Y et n'admettrait que des décompositions additives suivant la partition (Y,Z) d'après le théorème 4.

THEOREME 15. - Les fonctions décomposables croissantes par rapport à $\varphi(Y)$ et supérieures à $\underline{f}(Y,Z) = \sum_{i \in \underline{I}} \underline{Z}_i + \sum_{h \in \underline{H}} \underline{Y}_h \underline{Z}_h$

sont égales et supérieures à au moins une fonction

$$\underline{g}^{0}(\underline{\varphi}^{0}, Z) = \sum_{i \in \underline{I}} \underline{Z}_i + \sum_{h \in \underline{H}} a_h \underline{Z}_h + \underline{\varphi}^{0} \sum_{h \in \underline{H}} a'_h \underline{Z}_h$$

où $\underline{\varphi}^{0}(Y) = \sum a'_h \underline{Y}_h$ et où les $a_h (h \in \underline{H})$ sont des variables booléennes.

DEMONSTRATION. - Soit $g(\varphi, Z) = \sum_{i \in I} Z_i + \varphi \sum_{j \in J} Z_j$ la base complète d'une fonction décomposable suivant (Y,Z), croissante par rapport à φ et supérieure à $\underline{f}(X) = \sum \underline{Z}_i + \sum \underline{Y}_h \underline{Z}_h$:

$$\sum \underline{Z}_i + \sum \underline{Y}_h \underline{Z}_h < \sum Z_i + \varphi \sum Z_j .$$

Donc, quelque soit $\underline{Z}_i$, il existe un Z_i, soit Z_i', tel que :

$$\underline{Z}_i \leqslant Z_i' ;$$

de même, $\forall \underline{Y}_h \ \underline{Z}_h, \exists (i'' \in I, j'' \in J) : \underline{Z}_h \leqslant Z_{i''}$, ou $\underline{Y}_h \underline{Z}_h \leqslant \varphi Z_{j''}$, avec

$\underline{Y}_h \leqslant \varphi$, soit

$\underline{Y}_h \underline{Z}_h \leqslant a_h \underline{Z}_h + a'_h \underline{Y}_h \underline{Z}_h \leqslant a_h Z_{i''} + a'_h \varphi Z_{j''}$, où a_h est une variable booléenne. Alors :

$$\underline{f}(Y,Z) = \Sigma \underline{Z}_i + \Sigma \underline{Y}_h \underline{Z}_h \leqslant \Sigma \underline{Z}_i + \Sigma (a_h \underline{Z}_h + a'_h \underline{Y}_h \underline{Z}_h)$$

$$\leqslant \Sigma \underline{Z}_i + \Sigma [a_h \underline{Z}_h + a'_h (\Sigma a'_h \underline{Y}_h) \underline{Z}_h] \qquad (2)$$

$$\leqslant \Sigma Z_{i'} + \Sigma (a_h Z_{i''} + a'_h \varphi Z_{j''})$$

$$\leqslant \Sigma Z_i + \Sigma a_h Z_i + \varphi \Sigma a'_h Z_j$$

$$\leqslant \Sigma Z_i + \varphi \Sigma Z_j = g(\varphi, Z),$$

ce qui montre bien que $g(\varphi, Z)$ est supérieure à une fonction $\underline{g}^0(\varphi^0, Z)$: la fonction (2).

THEOREME 16. - Les fonctions décomposables croissantes par rapport à $\varphi(Y)$ et compatibles avec $f(Y, Z)$ admettent pour bornes inférieures :

$$\underline{f}^0(Y,Z) \quad \Sigma \underline{Z}_i + \sum_{h \in H_2} \underline{Z}_h + \sum_{h \in H_3} a_h \underline{Z}_h +$$

$$(\sum_{h \in H_1} \underline{Y}_h + \sum_{h \in H_3} a'_h \underline{Y}_h)(\sum_{h \in H_1} \underline{Z}_h + \sum_{h \in H_3} a'_h \underline{Z}_h)$$

où $\{H_1, H_2, H_3\}$ est une partition de H telle que :

$$\begin{cases} h \in H_1 \text{ si et seulement si } \underline{Z}_h \not< \Sigma \bar{Z}_i \\ h (\in H - H_1) \in H_2 \text{ si et seulement si } \underline{Y}_h \sum_{h \in H_1} \underline{Z}_h \ / \ \bar{f}(Y,Z) \\ h \in H_3 \text{ dans tous les autres cas.} \end{cases}$$

DEMONSTRATION.- Les fonctions $\underline{f}^{0}(Y,Z) = \sum \underline{Z}_i + \sum a_h \underline{Z}_h + \sum a'_h \underline{Y}_h \sum a'_h \underline{Z}_h$, données par le théorème précédent, doivent être inférieures à $\overline{f}(Y, Z) = \sum \overline{Y}_1 + \sum \overline{Z}_i + \sum \overline{Y}_h \overline{Z}_h$, ce qui suppose :

$$a.- \quad a_h \underline{Z}_h \leqslant \sum \overline{Z}_i .$$

H_1 sera l'ensemble des h tels que les monômes $\underline{Y}_h \underline{Z}_h$ correspondants ne sont pas majorés par au moins un monôme premier $\overline{Z}_i$. Nous obtenons ainsi des bornes inférieures des fonctions $\varphi(Y)$ et $\sum Z_j$ (en posant toujours : $g(\varphi, Z) = \sum Z_i + \varphi \sum Z_j$) :

$$\underline{\varphi}(Y) = \sum_{h \in H_1} \underline{Y}_h \quad \text{et} \quad \underline{\sum Z_i} = \sum_{h \in H_1} Z_h ,$$

Il faut s'assurer que $\sum_{h \in H_1} \underline{Y}_h \sum_{h \in H_1} \underline{Z}_h \leqslant \overline{f}(Y,Z)$.

$$b.- \left(\sum_{h \in H_1} \underline{Y}_h + a'_h \underline{Y}_h \right) \left(\sum_{h \in H_1} \underline{Z}_h + a'_h \underline{Z}_h \right) \leqslant \overline{f}(Y,Z)$$

pour tout $h \in H - H_1$, soit :

$$a'_h \underline{Y}_h \sum_{h \in H_1} Z_h \leqslant \overline{f}(Y, Z) .$$

H_2 sera l'ensemble des $h \in H - H_1$ tels que $\underline{Y}_h \sum_{h \in H_1} Z_h$ n'est pas majoré par $\overline{f}(Y, Z)$. Le théorème 16 est démontré.

Le théorème 16 relatif aux fonctions décomposables bornées est une extension du théorème 15 relatif aux fonctions décomposables bornées inférieurement. Tous deux donnent, par dualité, des théorèmes analogues.

ALGORITHME pour la recherche des fonctions décomposables croissantes par rapport à $\varphi(Y)$.

a.- Vérifier que $\underline{L} = \emptyset$.

b.- Appliquer le théorème 16, ce qui fournit les bornes inférieures $\underline{g}^0(\underline{\varphi}^0, Z)$. Eliminer celles qui ne sont pas inférieures à $\overline{f}(Y, Z)$ et celles qui sont superflues.

c.- Passer à la fonction duale; en déduire les bornes supérieures $\overline{g}^0(\overline{\varphi}^0, Z)$. Eliminer celles qui ne sont pas supérieures à $\underline{f}(Y, Z)$ et celles qui sont superflues.

d.- Nous sommes ramenés au problème suivant : pour tout couple de bornes inférieure et supérieure ordonnées $\underline{g}^0(\underline{\varphi}^0, Z)$ et $\overline{g}^0(\underline{\varphi}^0, Z)$, trouver les fonctions décomposables croissantes autres que $\underline{g}^0(\underline{\varphi}^0, Z)$ et $\overline{g}^0(\underline{\varphi}^0, Z)$ vérifiant :

$$\underline{g}^0(\underline{\varphi}^0, Z) = \underline{\sum} z_i^0 + \underline{\varphi}^0 \underline{\sum} z_j^0 \leqslant g(\varphi, Z) = \sum z_i + \varphi \sum z_j \leqslant \overline{g}^0(\overline{\varphi}^0, Z) = \overline{\sum} z_i^0 + \overline{\varphi}^0 \overline{\sum} z_j^0,$$

ce qui nécessite :

$$\begin{cases} \underline{\sum} z_i^0 < \sum z_i < \overline{\sum} z_i^0 \\ \underline{z}_j^0 < \sum z_i \quad \text{ou} \quad \underline{\varphi}^0 < \varphi \quad \text{et} \quad \underline{z}_j^0 < \sum z_j \\ z_j < \overline{\sum}_i^0 \quad \text{ou} \quad \varphi < \overline{\varphi}^0 \quad \text{et} \quad z_i < \overline{\sum}_j^0. \end{cases}$$

EXEMPLE 1.- $xy + yz + zx + \emptyset(x+y+z)$ n'admet pas de décomposition croissante suivant la partition (z, xy) puisque xy est monôme premier de $\underline{f}(x, y, z)$.

EXEMPLE 2. - $\underline{f}\ (a,b,c,u,v,w) = uvw + abuv + acw + bvw + cvw$

$\overline{f}\ (a,b,c,u,v,w) = vw + ab + ac + bw + buv$

et cherchons les fonctions décomposables suivant la partition (uvw, abc) croissantes par rapport à $\varphi(a, b,c)$.

1. - Il n'existe pas de monômes premiers de $\underline{f}\ (a,b,c,u,v,w)$ en a,b,c.

2. - L'expression donnée de $\underline{f}\ (a,b,c,u,v,w)$ est sa base complète. Appliquons lui le théorème 15 :

$uv + w \not\leq vw \Rightarrow \underline{\varphi}\ (a,b,c) = a(b+c)$ et $\underline{\sum Z_j} = \sum_{h \in H_1} Z_h = uv + w$

$c(uv + w) \not\leq \overline{f}\ (a,b,c,u,v,w) \Rightarrow \sum_{h \in H_2} Z_h = vw.$

Les bornes inférieures sont donc :

$\underline{f}^0 = \cancel{uvw} + vw + \cancel{hvw} + (ab+ac+h'b)\ (uv + w + \cancel{h'vw}).$

La seule borne inférieure, obtenue en donnant à h la valeur 1, est :

$\underline{f}^0 = vw + a(b+c)\ (uv + w).$

3. - La fonction duale $f^*\ (a,b,c,u,v,w)$ est définie par :

$auw + avw + abv + bcv + abw + bcw < f^*\ (a,b,c,u,v,w) < uw + vw + av + aw + bw + cv$

$v,w \not\leq uw + vw \Rightarrow \underline{\varphi}\ (a,b,c) = b(a+c)$ et $\sum_{h \in H_1} Z_h = v+w$; on vérifie que

$b(a+c)(v+w) < \overline{f^*}(a,b,c,u,v,w).$

Les bornes inférieures de $f^*(a,b,c,u,v,w)$ sont :

$\underline{f}^{*0} = huw + kvw + (ab + ac + h'v + k'a)(v+w+h'uw+k'vw)$, soient :

$$\begin{cases} \underline{f}^{*\,1} = (u+v)\ w + a(b+c)(v+w) \\ \underline{f}^{*\,2} = uw + a(v+w) \\ \underline{f}^{*\,3} = vw + a(v+w). \end{cases}$$

Les bornes supérieures de f(a,b,c,u,v,w) sont :

$$\begin{cases} \bar{f}^1 = vw + (a+bc)\,(uv+w) \\ \bar{f}^2 = vw + a\,(u+w) \\ \bar{f}^3 = vw + a(v+w) \end{cases}$$

4. - Les solutions sont telles que :

$$\underline{f}^0 = vw + a(b+c)\,(uv+w) < g^1\,(\varphi, Z) < \bar{f}^1 = vw + (a+bc)(uv+w)$$

$$\underline{f}^0 = vw + a(b+c)\,(uv+w) < g^2\,(\varphi, Z) < \bar{f}^2 = vw + a(u+w)$$

$$\underline{f}^0 = vw + a(b+c)\,(uv+w) < g^3\,(\varphi, Z) < \bar{f}^3 = vw + a(v+w).$$

3. - Fonctions particulières.

Nous avons étudié en IC2 les décompositions disjointes simples suivant la partition (Y, Z) de fonctions complètes particulières. Analogiquement, étudions les décompositions disjointes simples des fonctions incomplètes monotones :

CONTRE-EXEMPLE à la proposition : si une fonction incomplète, croissante en u, est décomposable, elle possède au moins une décomposition croissante en u.

Considérons la fonction :

$k\,(u, v,w,x) = g\,[\varphi(u,v), w,x] = (uv'+u'v)\,wx' + (uv + u'v')\,x.$

Les enveloppes supérieure et inférieure croissantes en u de k (u,v,w,x) sont :

$$\hat{k}^u = (uv' + v)\,wx' + (uv + v')\,x$$
$$= vwx' + ux + v'x + uw$$
$$\underset{\vee u}{k} = uv'\,wx' + uvx.$$

On vérifie que les fonctions $\hat{k}^u$ et $\underset{\vee u}{k}$ n'admettent pas de décomposition simple disjointe.

Le contre-exemple à la proposition est donc trouvé en prenant :

$$\begin{cases} \underline{f}\ (u,v,w,x) = \underset{\vee u}{k} = uv'\ wx' + uvx, \text{ croissante en } u \\ \overline{f}\ (u,v,w,x) = \overset{\wedge u}{k} = vwx' + ux + v'x + uw, \text{ croissante en } u. \end{cases}$$

k(u,v,w,x) est décomposable et compatible avec f(u,v,w,x), et pourtant il n'existe pas de fonction décomposable croissante en u et compatible avec f (u,v,w,x).

- C H A P I T R E II -

RECHERCHE DES DECOMPOSITIONS SIMPLES PAR RAPPORT A L'ADDITION , LA MULTIPLICATION OU LA DISJONCTION

-=-=-=-

II - A - RECHERCHE DES DECOMPOSITIONS DISJOINTES SIMPLES PAR RAPPORT A L'ADDITION, LA MULTIPLICATION OU LA DISJONCTION.

1 - Etude théorique

DEFINITION 1. Une fonction booléenne f(X) est dite admettre une décomposition disjointe simple par rapport à un opérateur $*$ si elle peut être mise sous la forme $\varphi(Y) * \Psi(Z)$, les ensembles de variables Y et Z étant disjoints.

Dans toute la suite, nous prendrons comme opérateur $*$ uniquement les opérateurs addition, multiplication et disjonction :

1. Pour une raison pratique. En effet, une fonction booléenne f(X) est ordinairement donnée par une des ses bases premières ou par sa base complète (écriture sous forme de somme de produits) ou par son écriture galoisienne (écriture sous forme de somme disjonctive de produits).

Or, comme nous le verrons, les décompositions disjointes simples par rapport à l'addition de f(X) sont très facilement obtenues à partir d'une de ses bases premières ou de sa base complète; les décomposi - tions disjointes simples par rapport à la multiplication en prenant la duale d'une ses bases premières ou de sa base complète (après suppression des multiples, on obtient une base première ou la base complète de f* (X)) ; les décompositions disjointes simples par rapport à la disjonction à partir de son écriture galoisienne.

2. Car le choix du nouveau domaine de définition de *(+, .et $\oplus$) est exhaustif. En effet, une fonction booléenne admettant une dé - composition disjointe simple par rapport à un opérateur quelconque* , c'est-à-dire de la forme φ (Y) * ψ(Z) ou g (φ, ψ), admet une décomposition disjointe simple par rapport à l'addition, la multiplication ou la disjonction (puisque toute fonction g(φ, ψ) de deux variables φ et ψ est exprimable par $\tilde{\varphi}$. $\tilde{\psi}$ ou $\tilde{\varphi} + \tilde{\psi}$ ou $\tilde{\varphi} \oplus \tilde{\psi}$).

THEOREME 1. Une fonction booléenne ne peut admettre une décomposition disjointe simple que par rapport à un seul des opérateurs* (voir [CU]).

DEFINITION 2. A une fonction booléenne f(X) est associé un ensemble de décompositions disjointes simples par rapport à l'opéra - teur * : φ_i (X_i) * ψ_i ($\bar{X}_i$). Soient X_1, ..., X_k, ..., X_r les divers sous-ensembles X_i ou $\bar{X}_i$ de X ($\emptyset$ et X en font partie). Le sous-ensemble X_k de X est dit <u>minimal</u> s'il n'est pas vide et s'il n'existe pas de X_j non vide tel que $X_j \subset X_k$ (voir [CU]).

THEOREME 2. (C'est la restriction aux décompositions disjointes simples par rapport à l'opérateur * d'un théorème de [CU] sur les décompositions disjointes simples quelconques d'une fonction booléenne). Les sous-ensembles minimaux X_k de X partitionnent X.

Démonstration. Supposons que deux ensembles minimaux X_i et X_j ne soient pas disjoints : $X_i \cap X_j = C \neq \emptyset$. Posons $X_i = A \cup C$ et $X_j = B \cup C$ où A et C, B et C sont disjoints. Les décompositions disjointes simples par rapport au même opérateur* (d'après le théorème 1) correspondantes à X_i et Y_j sont :

$$f(X) = \varphi_i(A, C) * \psi_i(B,D)$$
$$f(X) = \varphi_j(B, C) * \psi_j(A,D)$$

où $D = X - (A \cup B \cup C)$.

Considérons le cas où * est + et où f (X) est donnée par sa base complète. Un monôme premier est de la forme m_{AC} ou m_{BD} d'après (1), m_{BC} ou m_{AD} d'après (2). La base complète étant unique, les monômes sont de la forme ou m_A ou m_B ou m_C ou m_D et $f(X) = \alpha(A) + \beta(B) + \gamma(C) + \delta(D)$. $X_i = A \cup C$ et $X_j = B \cup C$ ne seraient plus minimaux, ce qui est contraire à l'hypothèse. X_i et X_j sont donc disjoints.

Si * est ., respectivement $\oplus$, la démonstration est semblable en considérant la base complète de la fonction duale de f(X), respectivement la forme galoisienne de f(X).

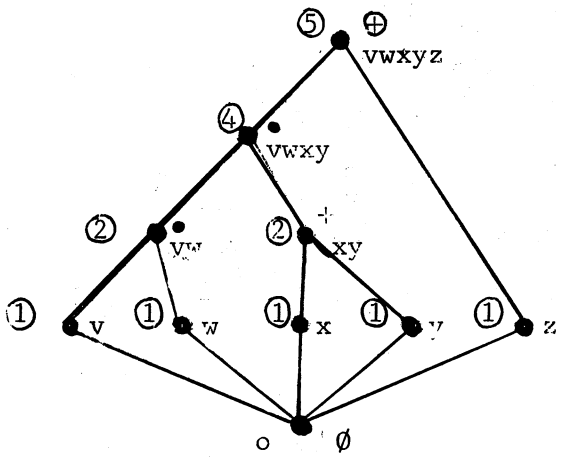
D'autre part, les sous-ensembles X_i partitionnent X, puisque tout élément x de X appartient à au moins un X_i.

THEOREME 3. Les sous-ensembles minimaux X_k forment un treillis d'élément minimal $\emptyset$, d'élément maximal X, généralement non modulaire (a fortiori non distributif et non complémenté). C'est un treillis série-parallèle(voir [B]). Il peut être pondéré en

donnant à chaque élément la somme des poids des éléments qui lui sont immédiatement inférieurs et aux atomes un poids égal au nombre de leurs variables : le poids s'identifie alors avec le nombre des variables. Tous les éléments, sauf les atomes, sont U-expressibles.

Démonstration. Construisons le treillis relatif à l'exemple qui suit le théorème 5 (chapitre I) :

$$f(v,w,x,y,z) = z \oplus (x+y)\, vw'$$



où les groupes de lettres sont les classes minimales, où les signes * indiquent les opérateurs par rapport auxquels les décompositions sont disjointes simples et où les poids sont encerclés. On constate que ce treillis n'est pas modulaire.

2. - Algorithmes pour trouver les décompositions disjointes simples par rapport à un opérateur *.

a. Recherchons successivement les décompositions disjointes simples par rapport à la somme, au produit et à la disjonction.

α) Décomposition disjointe simple par rapport à la somme.

Une condition nécessaire et suffisante pour que f (X) soit égale à $f_1 (X_1) + \ldots + f_p (X_p)$ est que les monômes premiers d'une base quelconque de f(X)(donc non nécessairement complète, ni première) soient des formes m_{X_1} ou m_{X_2} ..... ou m_{X_p} (d'après le théorème 2 du chapitre I).

Pour la recherche des sous-ensembles disjoints minimaux X_k de X, deux variables a et b sont dans la même classe X_k s'il existe une chaîne de variables $x_o = a, x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k, \ldots, x_j = b$ telle que deux éléments consécutifs de la chaîne x_{k-1} et x_k figurent dans un même monôme premier.

Exemple a. α) $f(x,y,z,t) = xy + x'z + t$ admet deux sous-ensembles disjoints minimaux $\{x, y, z\}$ et $\{t\}$. On aurait aussi bien pu partir de la base complète de f (x, y, z, t) : xy + x'z + yz + t, au lieu de sa base irredondante, et on aurait obtenu les bases complètes de f_1 (x, y, z) et de f_2(t), respectivement xy + x'z + yz et t, au lieu de bases irredondantes.

β) Décomposition disjointe simple par rapport au produit.

La méthode est la même que la précédente, en partant de la fonction duale de la fonction à décomposer.

γ. Décomposition disjointe simple par rapport à la disjonction.

Il faut encore appliquer la même méthode, mais à la forme galoisienne de la fonction à décomposer.

En effet, si f (X) admet la décomposition $f_1 (X_1) \oplus \ldots \oplus f_p (X_p)$, la forme galoisienne de f(X) étant unique, les monômes de f(X) sont de la forme m_{X_1} ou m_{X_2} .... ou m_{X_p}. Inversement, si les monômes de f(X) sont de la forme m_{X_1} ou m_{X_2} .... ou m_{X_p}, en posant $f_1 (X_1) = \Sigma_\oplus m_{X_1}, \ldots, f_p(X_p) = \Sigma_\oplus m_{X_p}$, on obtient : $f (X) = f_1 (X_1) \oplus \ldots \oplus f_p(X_p)$.

Exemple a. γ) $f (x_1, x_2, x_3, x_4) = x'_1 x_2 x_3 x'_4 + x_1 x'_2 x_3 x'_4 + x'_1 x'_2 x'_3 + x_1x_2x'_3 + x'_3x_4$ est donnée par sa base complète.

α. Il est évident que $f (x_1, x_2, x_3, x_4)$ n'admet pas de décomposition disjointe simple par rapport à l'opérateur somme.

β. $f^*(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1\, x'_2 + x'_3\, x_4 + x'_1\, x'_2\, x'_3 + x_1 x_2 x'_3 + x'_1\, x_2\, x_4$ n'admet pas de décomposition disjointe simple par rapport à la somme, donc $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ n'admet pas de décomposition disjointe simple par rapport au produit.

γ. La forme galoisienne de $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ étant $x_2 \oplus x_3 \oplus x_4 \oplus x_1\, x_3 \oplus x_1\, x_4$, $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ admet la décomposition disjointe simple par rapport à la disjonction $x_2 \oplus [x_3 \oplus x_4 \oplus x_1\, x_3 \oplus x_1 x_4]$.

b. Les fonctions admettant des décompositions disjointes simples par rapport à un opérateur * ne sont qu'une sous-famille de la famille des fonctions admettant des décompositions disjointes simples. Une partition (Y,Z) des variables X ayant été choisie de telle façon que f(X) soit décomposable suivant (Y,Z) (Ce choix sera trouvé au chapitre IV, d'ailleurs par l'intermédiaire de la méthode a. α), la recherche des décompositions disjointes simples par rapport à un opérateur * de f(X) donnée par sa base complète est alors particulièrement simple.

α. Si la base(complète) de f(X) est de la forme $\Sigma Y_i + \Sigma Z_j$, alors f(X) admet une décomposition disjointe simple par rapport à la somme et réciproquement.

β. Si la base complète de f(X) est de la forme $(\Sigma Y_i)\ (\Sigma Z_j)$, alors f(X) admet une décomposition disjointe simple par rapport au produit $\varphi(Y).\ \psi(Z)$ et réciproquement (ΣY_i est la base complète de $\varphi(Y)$, ΣZ_j celle de $\psi(Z)$).

Cette décomposition multiplicative est aisément mise en évidence à l'aide du tableau indiqué au paragraphe I C1. Une condition nécessaire et suffisante pour que la décomposition soit multiplicative est que ce tableau soit totalement rempli de 1.

Exemple b. β) Considérons f(u,v,x,y,z) donnée par sa base complète u' v x y + uv'xy + u'v x'z + uv' x'z + u'vyz + uv'yz et supposons donnée la partition (xyz,yv). Le tableau du paragraphe I C1

	u'v	uv'
xy	1	1
x'z	1	1
xz	1	1

montre l'existence de la décomposition multiplicative $\varphi(u,v).\psi(x,y,z)$, les bases complètes de φ (u,v) et ψ (x,y,z)étant respectivement :

u'v + uv' et xy + x'z + yz.

γ. Si la base complète de f(X) est de la forme $(\sum Y_i) \oplus (\sum Z_j)$, alors f (X) admet une décomposition disjointe simple par rapport à la disjonction φ (Y) $\oplus$ ψ (Z) et réciproquement ($\sum Y_i$ est la base complète de φ (Y), $\sum Z_j$ celle de ψ (Z)).

Exemple b.γ) Prenons la fonction f (x_1, x_2, x_3, x_4) de l'exemple a.γ) de base complète : $x'_1\ x_2\ x_3\ x'_4 + x_1\ x'_2\ x_3\ x'_4 + x'_1\ x'_2\ x'_3 + x_1\ x_2\ x'_3 + x'_3\ x_4$. Le tableau de décomposition correspondant à la partition $(x_3, x_1\ x_2\ x_4)$

	$x'_1\ x_2\ x'_4$	$x_1\ x'_2\ x'_4$	$x'_1\ x'_2$	$x_1\ x_2$	x_4
x_3	1	1			
x'_3			1	1	1

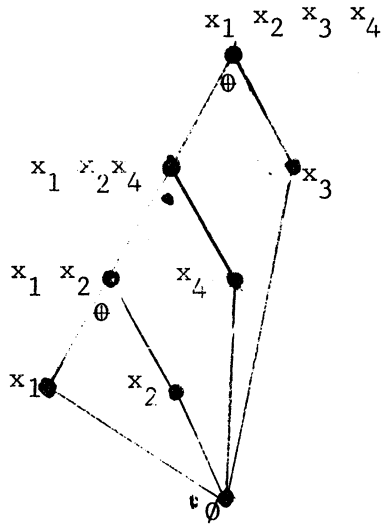
en remarquant que $(x'_1\ x_2\ x'_4 + x_1\ x'_2\ x'_4)' = x'_1\ x'_2 + x_1\ x_2 + x_4$ et $(x_3)' = x'_3$, met à jour la décomposition disjointe simple par rapport à $\oplus$:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x'_1\ x_2\ x'_4 + x_1\ x'_2\ x'_4) \oplus x'_3 .$$

$x'_1\ x_2\ x'_4 + x_1\ x'_2\ x'_4$ admet une décomposition disjointe simple par rapport au produit évidente : $x'_4\ (x'_1\ x_2 + x_1\ x'_2) = x'_4\ (x_1 \oplus x_2)$;

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = [x'_4\ (x_1 \oplus x_2)] \oplus x'_3$$

et le treillis des décompositions disjointes simples par rapport à un opérateur * est :



où les groupes de lettres sont les classes minimales et où les signes * indiquent les opérateurs par rapport auxquels les décompositions sont disjointes simples.

c. Cas particulier d'une fonction croissante.

Les algorithmes se simplifient puisque le domaine de définition de * se réduit aux opérateurs somme et produit. En particulier, pour le premier algorithme (a), on prend une base de f(X), puis, si c'est nécessaire, une base de f*(X) ; pour les termes $f_i\ (X_i)$ correspondant à un sous-ensemble minimal X_i, il suffit de passer au dual $f^*_i(X_i)$. Cette remarque sera très utile au chapitre III.

Exemple c. $f(x,y,z,t) = xy + xz + t$

$$f_1\ (x,y,z) = xy + xz$$
$$f_2\ (t) = t$$
$$f(x,y,z,t) = \left[xy + xz\right] + t$$

Prenons le dual du terme $f_1\ (x, y, z)$ qui correspond à un sous-ensemble (x,y,z) minimal : $f^*_1\ (x,y,z) = x + yz$

$$f_1\ (x,y,z) = x\ (y+z)$$

Donc $f\ (x,y,z,t) = \left[x\ (y+z)\right] + t$.

d. Autre méthode pour la recherche d'une décomposition disjointe simple par rapport à la disjonction.

L'intérêt de cette méthode, qui sera utilisée aux chapitres IV et V, est d'éviter le calcul de la notation galoisienne d'une fonction f(X) ; elle fait usage des coefficients des variables X dans la notation galoisienne.

THEOREME 4. Une condition nécessaire est suffisante pour que f(X) soit égal à $\varphi_1 (Z_1) * \ldots * \varphi_p (Z_p)$ est que les coefficients galoisiens des variables Z_i $(1 \leqslant i \leqslant p)$ ne contiennent que des variables Z_i (ou qu'ils soient l'unité si $[Z_i] = 1$).

Démonstration. Que la condition soit nécessaire est évident, puisque la notation galoisienne est unique.

Réciproquement, si le coefficient de la variable x_i est 1, alors f(X) est de la forme $x_i \oplus \gamma (\mathcal{C}_X x_i)$. Si les coefficients galoisiens $\Delta^*_{z_1}, \ldots, \Delta^*_{z_j}$ des variables $z_1, \ldots, z_j$ appartenant à Z_i ne contiennent que les variables $z_1, \ldots, z_j$, on peut écrire :

$$f(X) = \Delta^*_{z_1} z_1 \oplus \gamma_1 (\mathcal{C}_X z_1).$$

Les monômes contenant z_2 de f(X) sont $\Delta^*_{z_2} z_2$. Soit ils appartiennent à $\Delta^*_{z_1} z_1$, soit ils ne contiennent pas z_1, ils appartiennent à $\gamma_1 (\mathcal{C}_X z_1)$; extrayons-les de $\gamma_1 (\mathcal{C}_X z_1)$; f (X) prend la forme :

$$f(X) = \Delta^*_{z_1} z_1 \oplus \Delta^*_{z_1 z_2} z_2 \oplus \gamma_2 (\mathcal{C}_X \{z_1, z_2\})$$

où les deux premiers termes ne contiennent que des variables Z_i. On continue jusqu'à ce qu'un $\gamma_1 (\mathcal{C}_X \{z_1, z_2, \ldots, z_1\})$ ne contienne plus de variables Z_i $(1 \leqslant j)$; on est alors arrivé à :

$$f(X) = \varphi_i (Z_i) \oplus \gamma_1 (\mathcal{C}_X Z_i)$$

qui est décomposable par rapport à la disjonction.

Les exemples du paragraphe IV A2 appliquent ce théorème.

II - B - RECHERCHE DES DECOMPOSITIONS NON DISJOINTES SIMPLES PAR RAPPORT A L'ADDITION, LA MULTIPLICATION OU LA DISJONCTION.

1 - Etude théorique

DEFINITION 1. Une fonction booléenne simple f(Y,Z,T) est dite admettre une décomposition non disjointe simple par rapport à un opérateur $*$ si et seulement si elle peut être mise sous la forme $f(Y, Z,T) = \varphi(Y,T) * \psi(Z,T)$, les ensembles Y,Z,T de variables étant disjoints.

Dans toute la suite, nous supposerons évidemment cette définition non triviale, c'est-à-dire que :

- f (Y,Z,T) dépend effectivement de ses $[Y]+[Z]+[T]= n$ variables,
- $1 <[Y]< n -[T]$,
- $1 <[Z]< n -[T]$.

Une décomposition disjointe simple par rapport à un opérateur* apparait comme une décomposition non disjointe simple par rapport à un opérateur * vérifiant $[Z]= 0$.

DEFINITION 2. A une fonction booléenne f(X) est associé un ensemble de décompositions non disjointes simples par rapport aux opérateurs * : $f(X) = \varphi_i(Y_i, T_i)* \psi_i (Z_i, T_i)$ (les ensembles Y_i, Z_i, T_i partitionnent X). Le sous-ensemble T_i de X est dit minimal s'il n'existe pas de T_j tel que $T_j \subset T_i$ et la décomposition correspondante est dite maximale.

Dans toute la suite, comme en II A, pour des raisons de commodité qui n'enlèvent rien à la généralité de la théorie, nous supposerons que l'opérateur $*$ est ou l'addition ou la multiplication ou la disjonction.

THEOREME 5. Une fonction f(Y,Z,T) admettant une décomposition non disjointe simple par rapport à l'addition (respectivement la multiplication et la disjonction) $\varphi(Y,T) + \psi(Z,T)$ (respectivement $\varphi(Y,T) \cdot \psi(Z,T)$ et $\varphi(Y,T) \oplus \psi(Z,T)$) a une base irredondante (respectivement une base irredondante en produit de sommes et une écriture galoisienne) dont les monômes sont de la forme m_{YT} ou m_{ZT}.

Démonstration. Si l'opérateur * est +, soit $\tilde{Y}\ \tilde{Z}\ \tilde{T}$ un point du domaine de définition de f(Y,Z,T); il appartient au domaine de définition de $\varphi(Y,T)$ par exemple et est donc inférieur à un monôme p_{YT} de $\varphi(Y,T)$, donc à un monôme premier m_{YT} de f (Y,Z,T) et il existe bien au moins une base irredondante constituée de monômes premiers de la forme m_{YT} ou m_{ZT}.

Si l'opérateur * est . , le théorème 5 reste vrai par dualité.

Enfin, si l'opérateur* est la disjonction, l'écriture galoisienne étant unique, il est évident qu'une condition nécessaire et suffisante pour que f (X,Z, T) soit égal à $\varphi(Y, T) \oplus \psi(Z,T)$ est que tout monôme de sa forme galoisienne ne soit formé que des lettres $\{Y, T\}$ ou $\{Z,T\}$.

Conséquence 1. Soit une fonction f (Y,Z,T) ayant une et une seule base irredondante et admettant une décomposition non disjointe simple par rapport à l'addition : $f(Y,Z,T) = \varphi(Y,T) + \psi(Z,T)$.

Alors un monôme premier de la base irredondante unique de f(Y,Z,T) est obligatoirement de la forme m_{YT} ou m_{ZT}.

Conséquence 2. Extension de la conséquence 1 aux fonctions incomplètes. Si une fonction incomplète a une fonction qui lui est compatible de la forme $f(Y,Z,T)=\varphi(Y,T)+\psi(Z,T)$ et telle que sa base complète soit irredondante, alors à tout monôme premier de sa borne inférieure correspond un monôme premier de sa borne supérieure qui le majore de la forme m_{YT} ou m_{ZT}.

Démonstration. En effet soit $\underline{m}_{YZT}$ un monôme premier de la borne inférieure $\underline{f}(Y,Z,T)$. Il est majoré par au moins un monôme premier de f(Y,Z,T), de la forme m_{YT} par exemple (d'après la conséquence 1 et puisque sa base complète est irredondante). m_{YT} est lui-même majoré par au moins un monôme premier de $\bar{f}(Y,Z,T)$ formé des lettres $\{Y, T\}$.

THEOREME 6. Soit $m_Y + m_{YT} + m_Z + m_{ZT} + m_T$ une base de $f(X) = \varphi(Y,T)+\psi(Z,T)$ (1)
(m_{YT} , par exemple , représente ici tous les monômes premiers de f(X) constitués d'au moins une variable Y et d'au moins une variable T et que des variables Y et T).

$$\text{Alors} \begin{cases} \underline{\varphi}(Y,T) = (m_Y + m_{YT})\ (m_T)' & (2) \\ \bar{\varphi}(Y,T) = m_Y + m_{YT} + m_T & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \underline{\psi}(Z,T) = (m_Z + m_{ZT})\ (m_T)' \\ \bar{\psi}(Z,T) = m_Z + m_{ZT} + m_T \end{cases}$$

Démonstration. L'existence de l'expression (1) de $f(X) = \varphi(Y,T)+\psi(Z,T)$ est immédiate, puisqu'il existe au moins une base irredondante de f(X) dont les monômes premiers sont constitués des variables $\{Y,T\}$ ou $\{Z,T\}$ d'après le théorème 5.

Montrons (2) , c'est à dire que tout point d'un monôme m_Y ou m_{YT} , qui n'est pas un point d'un monôme m_T est un point de φ (Y,T). En effet, soit $\tilde{Y}\ \tilde{Z}\ \tilde{T}$ un point de m_Y ou m_{YT} tel que $\varphi(\tilde{Y},\tilde{T}) = 0$; $\tilde{Y}\tilde{T}$ inférieur à m_{YT} (ou m_Y) et non inférieur à φ (Y,T) doit donc être inférieur à ψ (Z,T), donc à un monôme ne contenant que des variables T.

(3) est évident, en remarquant que tout point de φ (Y,T) est inférieur à un monôme m_Y ou m_{YT} ou m_T.

2. - Algorithme pour trouver les décompositions(non disjointes) simples maximales par rapport aux opérateurs somme, produit et disjonction.

Nous recherchons les décompositions non disjointes(la méthode est aussi évidemment valable pour les décompositions disjointes) simples maximales de f (X) par rapport à la somme (respectivement produit et disjonction) en considérant une base irredondante de f(X) (respectivement une base irredondante de f* (X)) et la forme galoisienne de f(X)).

a. Décompositions simples maximales par rapport à la somme.

α. f(X) admet une base irredondante unique.

A partir de cette base irredondante, construisons le tableau suivant: mettons en abscisses et en ordonnées les différentes variables, et dans chaque case de ce tableau, plaçons un 1 lorsque les variables de la ligne et de la colonne correspondantes appartiennent à un même monôme premier (le tableau ainsi obtenu est symétrique).

THEOREME 7. Une condition nécessaire et suffisante pour que la fonction f(X) admette la décomposition $\varphi(Y,T) + \Psi(Z,T)$ est que le sous-tableau de lignes Y et de colonnes Z (ou de colonnes Y et de lignes Z) (Y,Z) du tableau précédemment construit soit vide.

Démonstration. La condition est nécessaire. En effet, supposons $f(X) = \varphi(Y,T) + \Psi(Z,T)$ et soit y une variable de Y. Dans la ligne y du tableau, d'après la conséquence 1 du théorème 3, un 1 correspond à une variable Y ou T et l'ensemble des vides correspond donc à toutes les variables Z ; et ceci pour tout $y \in Y$. Par suite le sous-tableau ayant pour lignes Y et pour colonnes Z est vide.

Réciproquement, si un sous-tableau (Y,Z) est vide, il correspond à une décomposition semi-disjointe simple φ (Y,T) + ψ (Z,T), puisqu'il n'existe aucun monôme contenant à la fois une variable Y et une variable Z.

Nous déduisons du théorème 7 l'algorithme suivant pour trouver les décompositions (disjointes ou non disjointes) simples par rapport à la somme φ (Y,T) + ψ (Z,T) de f(X) :

Les divers couples (Y,Z) sont les deux groupes de variables (disjoints) correspondant l'un aux colonnes, l'autre aux lignes des sous-tableaux vides du tableau construit précédemment (à partir des monômes de la base irrédondante;les décompositions maximales correspondent aux sous-tableaux vides maximaux (c'est-à-dire non inclus dans d'autres sous-tableaux vides).

L'obtention de tous les sous-tableaux vides maximaux en un nombre fini d'itérations est obtenue (voir [MAL]) par l'application jusqu'à épuisement des deux règles ci-dessous à une couverture de tous les vides du tableau formé précédemment :

première règle : supprimer tout sous-tableau vide contenu dans un autre sous-tableau vide déjà obtenu;

deuxième règle : adjoindre aux sous-tableaux vides déjà obtenus (Y_1, Z_1), (Y_2, Z_2), ... les sous-tableaux $(Y_1 \cup Y_2, Z_1 \cap Z_2)$, $(Y_1 \cap Y_2, Z_1 \cup Z_2)$, ...

Exemple a α. En remarquant qu'une fonction croissante admet une base irrédondante unique, considérons la fonction :

xyz + yzu + uvw

et le tableau correspondant :

	x	y	z	u	v	w
x	1	1	1			
y	1	1	1	1		
z	1	1	1	1		
u		1	1	1	1	1
v				1	1	1
w				1	1	1

Choisissons pour couverture des vides les tableaux suivants :

(x, uvw)

(y, vw)

(z, vw)

(u, x)

(v, xyz)

(w, xyz)

Appliquons la deuxième règle ; on obtient les tableaux :

(xy, vw) , (xz, vw) , (yz, vw) , (uv, x) , (uw, x) , (vw, xyz).

Appliquons la première règle ; la couverture devient :

(x,uvw), (xy,vw), (xz,vw), (yz,vw), (uv,x), (uw,x), (vw, xyz)

La deuxième règle donne : (xyz, vw), (uvw, x)

La couverture obtenue par la première règle est : (x,uvw), (uvw,x); (xyz, vw), (vw, xyz).

L'application des deux règles ne donne pas de nouveaux tableaux. Les partitions des décompositions maximales sont donc :

$$\begin{cases} Y = x \\ Z = uvw \\ T = yz \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} Y = xyz \\ Z = vw \\ T = u \end{cases}$$

soit : $f(X) = \left[xyz\right] + \left[uvw + uyz\right]$ et $f(X) = \left[xyz + yzu\right] + \left[uvw\right]$

β. f(X) n'admet pas une base irredondante unique.

D'après le théorème 5 , si f (X) admet la décomposition simple $\varphi(Y,T) + \Psi(Z,T)$, alors il existe une base irredondante de f(X) dont les monômes sont soit de la forme m_{YT} soit de la forme m_{ZT}.

Appliquons donc la méthode précédente (a α) aux différentes bases de f(X), mais en faisant la remarque suivante : le tableau est indépendant de la complémentation des variables. On remplace donc la base complète de f(X) par une somme de monômes de lettres non accentuées et on fait dans les ba-

ses premières les simplifications en résultant (règle un : on ne conserve de deux monômes premiers de la même base multiples l'un de l'autre que celui qui a le plus de lettres ; règle deux : de deux bases ainsi obtenues, on ne conserve que celle qui a le moins de monômes).

Exemple a β. Soit f (x,y,z,t) = x'y1+x'zt2 + xy'3 + xt'4+y'zt5+yt'6 donnée par tous ses monômes premiers numérotés de 1 à 6.

Les bases irredondantes sont 1.3 (2.4 + 2.6 + 4.5 + 5.6). (1)
En ne tenant plus compte de l'accentuation des lettres, f(x,y,z,t) devient:

xy 1 + xzt 2 + xy 3 + xt 4 + yzt 5 + yt 6. (2)

Le monôme 3 est identique à 1, on le supprime et (2) devient :

xy 1 + xzt 2 + xt 4 + yzt 5 + yt 6
(1) devient : 1(2.4 + 2.6 + 4.5 + 5.6) (1')

La règle un permet de supprimer 4 devant 2, 6 devant 5 ; (1') devient donc : 1 (2 + 2.6 + 4.5 + 5)

La règle deux donne : 1(2+5)

A partir de 4 bases premières, nous sommes ramenés à étudier les décompositions simples de deux sommes de monômes :

xy + xzt et xy + yzt

de tableaux de décomposition :

	x	y	z	t
x	1	1	1	1
y	1	1		
z	1		1	1
t	1		1	1

et

	x	y	z	t
x	1	1		
y	1	1	1	1
z		1	1	1
t		1	1	1

Les partitions des décompositions simples maximales par rapport à la somme sont donc : (y, zt, x) et (x, zt, y).

Les variables x et y jouant un rôle symétrique, comme le montre la base complète de f (x, y, z, t), ne considérons que la première décomposition :

$$f(y, zt, x) = \varphi(y,x) + \Psi(zt, x)$$

avec $\varphi(y, x) = x'y + xy'$

$\Psi(zt, x) = x'zt + xt'$

b. Décompositions simples maximales par rapport au produit.

On applique le procédé précédent à la fonction duale f* (X).

Exemple b. Considérons la fonction de l'exemple a.

f* (x, y, z, u, v, w) = ux + uy + uz + vy + vz + wy + wz est une fonction croissante, elle admet donc une base première unique.

A partir du tableau

	u	v	w	x	y	z
u	1			1	1	1
v		1			1	1
w			1		1	1
x	1			1		
y	1	1	1		1	
z	1	1	1			1

on calcule les partitions des décompositions maximales :

$$\begin{cases} X = v\,w\,y\,z \\ Y = x \\ Z = u \end{cases} \qquad \begin{cases} X = u\,w\,x \\ Y = v \\ Z = y\,z \end{cases} \qquad \begin{cases} X = x\,z \\ Y = y \\ Z = u\,v\,w \end{cases} \qquad \begin{cases} X = u\,v\,x \\ Y = w \\ Z = y\,z \end{cases} \qquad \begin{cases} X = x\,y \\ Y = z \\ Z = u\,v\,w \end{cases}$$

Le dédoublement de u donne par exemple :

$$f^*(x, y, z, u, v, w) = [ux] + [(u+v+w)(y+z)]$$

$$f(x, y, z, u, v, w) = (u+x)(uvw + yz).$$

Exemple bβ. Considérons la fonction majorité xy + yz + zx qui est sa propre duale. Son tableau

	x	y	z
x	1	1	1
y	1	1	1
z	1	1	1

montre que deux dédoublements sont nécessaires pour obtenir une décomposition non disjointe. Il n'existe donc que des décompositions non disjointes triviales.

c. Décompositions simples maximales par rapport à la disjonction.

Le procédé précédent a α appliqué à la forme galoisienne de f(X) est toujours valable, quelle que soit f (X) puisque la notation galoisienne est unique.

Exemple c. Soit la fonction

$$f(x,y,z,u,v,w) = xyz \oplus yzu \oplus uvw.$$

Le tableau correspondant est celui de l'exemple a α. Les partitions des décompositions maximales sont donc :

$$\begin{cases} Y = x \\ z = uvw \\ T = yz \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} Y = xyz \\ Z = vw \\ T = u \end{cases}$$

et les décompositions correspondantes de f(X) sont :

$$f(X) = [xyz] \oplus [uvw \oplus uyz]$$

et

$$f(X) = [xyz \oplus yzu] \oplus [uvw].$$

- C H A P I T R E III -

UNE APPLICATION DE LA RECHERCHE DES DECOMPOSITIONS SIMPLES PAR RAPPORT A L'ADDITION ET LA MULTIPLICATION.

-=-=-=-

Comme application de la recherche des décompositions simples par rapport à l'addition et la multiplication, démontrons le résultat suivant :

THEOREME 1. La proposition qu'une fonction simple booléenne monotone en x admet toujours une écriture en sommes et produits ayant le minimum d'occurrences et monotone en x, est fausse.

Ce résultat est énoncé par MAC NAUGHTON (voir [MAC]) à l'aide du contre-exemple suivant : abc + adefhij + bcdefhij + bcghij admet l'écriture accentuée abc + (a+bc) (def+a'g) hij à 14 occurrences alors qu'il n'admet pas d'écriture non accentuée à moins de 15 occurrences (aucune démonstration de cette affirmation n'est donnée). La démonstration devient aisée à l'aide du chapitre II. Nous allons la faire sur une fonction analogue à celle de MAC NAUGHTON, mais plus simple :

$$f(a,b,c,d,e,h,i,j)=abc+adeij+bcdeij+bchij$$

Une écriture accentuée abc+(a+bc)(de+a'h)ij a 12 occurrences. Montrons que f n'admet pas d'écriture non accentuée à moins de 13 occurrences.

Dans tout le chapitre III, par souci de racourcissement, nous appellerons fonction décomposable (au lieu de fonction additivement décomposable*) une fonction qui peut se mettre sous l'une des formes :

$f(Y,Z) = f_1(Y) + f_2(Z)$ (décomposition disjointe additive)

$f(Y,Z,T) = f_1(Y,T) + f_2(Z,T)$ (décomposition non disjointe additive)

$f(Y,Z) = f_1(Y) + f_2(Y,Z)$ (décomposition triviale additive).

Pour dire qu'une fonction est multiplicativement décomposable, nous dirons que sa fonction duale est décomposable. Faisons encore les deux remarques suivantes :

1. - Remarque relative aux décompositions non triviales de fonctions incomplètes.

La conséquence 2 du théorème 5 (chapitre II) permet d'énoncer :

THEOREME 2. Une condition nécessaire pour qu'une fonction incomplète ait une fonction compatible de base première irredondante et de la forme $f(Y,Z,T) = \varphi(Y,T) + \Psi(Z,T)$ est que la somme $g(Y,Z,T)$ des monômes premiers de la borne supérieure uniques diviseurs de monômes premiers de la borne inférieure admette la décomposition non triviale $g_1(Y,T) + g_2(Z,T)$.

2. - Remarque relative aux décompositions triviales de fonctions incomplètes.

THEOREME 3. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction incomplète $f(Y,Z)$ admette une décomposition de la forme $f(Y,Z) = f_1(Y) + f_2(Y,Z)$ est que sa borne supérieure $\bar{f}(Y,Z)$ admette une décomposition de la même forme :

$$\bar{f}(Y,Z) = g_1(Y) + g_2(Y,Z)$$

avec $g_1(Y) \geqslant f_1(Y)$.

---

* ou trivialement additivement décomposable

Démonstration. En effet tout monôme premier m de $f_1(Y)$ est multiple d'un monôme premier p de $\bar{f}(Y,Z)$. Donc :

$$\sum m = f_1(Y) \leqslant \sum p = g_1(Y).$$

Réciproquement, si $\bar{f}(Y,Z) = g_1(Y) + g_2(Y,Z)$, alors $f(Y,Z)$ admet une décomposition de la forme $f_1(Y) + f_2(Y,Z)$(il suffit de prendre $f(Y,Z) = \bar{f}(Y,Z)$; alors $f_1(Y) = g_1(Y)$, $g_2(Y,Z) = f_2(Y,Z)$).

Un cas particulier du théorème 3 est :

THEOREME 4. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction incomplète $f(Y,Z)$ admette une décomposition de la forme $f(Y,Z) = m_Y + f_2(Y,Z)$ est que sa borne supérieure $\bar{f}(Y,Z)$ admette comme monôme premier un diviseur de m_Y.

Par dualité, on obtient les énoncés suivants :

THEOREME 3'. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction incomplète $f(Y,Z)$ ait une fonction qui lui soit compatible de la forme $f_1(Y).\ f_2(Y,Z)$ est que sa borne inférieure admette la décomposition :

$$\underline{f}(Y,Z) = g_1(Y).\ g_2(Y,Z),$$

avec $g_1(Y) \leqslant f_1(Y)$.

THEOREME 4'. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction incomplète $f(Y,Z)$ ait une fonction qui lui soit compatible de la forme $m_Y.\ f_2(Y,Z)$ est que sa borne inférieure admette la décomposition :

$$\underline{f}(Y,Z) = p_Y.\ g_2(Y,Z),$$

où p_Y est un multiple de m_Y.

Nous montrerons d'abord que :
f = abc + adeij + bcdeij + bchij n'a pas d'écriture additive non accentuée à moins de 13 occurrences (A), puis que f n'a pas d'écriture multiplicative non accentuée à moins de 13 occurrences, c'est-à-dire que

$$f^* = g = ab + ac + adg + aeg + afg + ah + ai + aj + bd + be + bf + bh + bi + bj + cd + ce + cf + ch + ci + cj$$

n'a pas d'écriture additive non accentuée à moins de 13 occurrences (B).

III - A. ETUDE DES DECOMPOSITIONS (ADDITIVES) DE f=abc + adeij + bcdeij + bchij.

1. Recherche des décompositions non triviales : $f(Y,Z,T) = f_1(Y,T) + f_2(Z,T)$ avec $Y \neq \emptyset$ et $Z \neq \emptyset$.

Le tableau relatif à f est :

	abc	de	hij
a	111	11	11
b	111	11	111
c	111	11	111
d	111	11	11
e	111	11	11
h	11		111
i	111	11	111
j	111	11	111

Les sous-tableaux vides maximaux sont (h, ade) et (ade,h). La fonction obtenue par le minimum (4) de dédoublements de variables est telle que :

$$\begin{cases} Y = ade \\ Z = h \\ T = bcij . \end{cases}$$

Son expression est (d'après le théorème 6 du chapitre II) :

$$f = \left[abc + adeij + bcdeij\right] + \left[bchij\right] .$$

Elle a au moins 12 occurrences de variables (7 pour $f_1(Y,T) = abc + adeij + bcdeij$ et 5 pour $f_2(Z,T) = bchij$). Si on remarque que $f_1(Y,T)$ et $f^*_1(Y,T) = ab + ac + ad + ae + ai + aj + bd + be + bi + bj + cd + ce + ci + cj$ n'admettent pas de décomposition disjointe, $f_1(Y,T)$ s'écrit avec plus de 7 occurrences et f avec plus de 12 occurrences.

2. - Recherche des décompositions triviales : $f(Y,Z) = f_1(Y) + f_2(Y,Z)$ avec $\left[Y\right] + \left[Z\right] = 8$ ($f_2(Y,Z)$ contient toutes les variables) et avec $\left[Y\right] \leqslant 4$.

Ces décompositions devant être constituées de lettres non accentuées, $f_1(Y)$ et $f_2(Y,Z)$ sont des fonctions croissantes. Le point caractéristique d'un monôme premier de $f(Y,Z)$ est compatible avec $f_1(Y)$ ou $f_2(Y,Z)$ et tout monôme premier de $f(Y,Z)$ est inférieur à $f_1(Y)$ ou à $f_2(Y,Z)$. $f_1(Y)$ doit donc être supérieur à au moins un monôme premier d'au plus 4 lettres de $f(Y,Z)$, monôme premier qui ne peut être que abc.

$f_1(Y)$ contient par suite au moins 3 lettres. Pour que l'affirmation (A) soit fausse, $f_2(Y,Z)$ défini par

$$\underline{adeij} + \underline{bcdeij} + \underline{bchij} \leqslant f_2(Y,Z) < abc + \underline{adeij} + \underline{bcdeij} + \underline{bchij}$$

devrait s'écrire avec répétition d'au plus une lettre x. Montrons que $f_2(Y,Z)$ et que sa duale $f_2^*(Y,Z)$, définie par :

$$\underline{ab} + \underline{ac} + \underline{adh} + \underline{aeh} + \underline{ai} + \underline{aj} + \underline{bd} + \underline{be} + \underline{bi} + \underline{bj} + \underline{cd} + \underline{ce} + \underline{ci} + \underline{cj} <$$

$$f_2^*(Y,Z) \leqslant \underline{ab} + \underline{ac} + \underline{dh} + \underline{eh} + \underline{bd} + \underline{be} + \underline{cd} + \underline{ce} + \underline{i} + \underline{j} ,$$

n'admettent pas de décomposition triviale (c'est l'objet de a et b) et de décomposition non triviale (c'est l'objet de c et d) avec répétition d'au plus une lettre x.

a. f_2 (Y,Z) n'admet pas de décomposition triviale de la forme x + ... puisque $\bar{f}_2$ (Y,Z) n'est pas de cette forme (théorème 4).

b. Par contre f_2 (Y,Z) est de la forme ij (ade + bcde + bch) ; d'après le théorème 4', il existe des fonctions k(Y,Z) compatibles avec f^*_2 (Y,Z) et de la forme i + φ, où φ, défini par ab + ac + adh + aeh + aj + bd + be + bj + cd + ce + cj ≤ φ < ab + ac + dh + eh + bd + be + cd + ce + i + j, doit dépendre de toutes les variables et s'écrire avec 8 occurrences.

Nous ne cherchons pas à décomposer φ, car la décomposition de k(Y,Z) ne serait alors plus triviale.

φ* défini par : adeij + bcdeij + bchij < φ* ≤ abc + adej + bcdej + bchj n'est pas décomposable d'après le théorème 2 : en effet, les monômes soulignés adeij, bcdeij et bchij admettent chacun pour unique majorant parmi les monômes premiers de la borne supérieure respectivement adej, bcdej et bchj; ces 3 monômes (soulignés) permettent de constituer une chaîne de 7 lettres et i en fait partie puisque φ* dépend de i et puisque i n'est pas un monôme premier de $\bar{\varphi}$*.

c. Pour la recherche des décompositions non triviales de f_2(Y,Z), considérons le tableau relatif à adeij + bcdeij + bchij (théorème 2) :

	abc	deh	ij
a	1	11	11
b	11	111	11
c	11	111	11
d	111	11	11
e	111	11	11
h	11	1	11
i	111	111	11
j	111	111	11

dont les décompositions minimales sont (a,bch) et (h, ade). Il y a donc au moins 4 dédoublements pour obtenir une décomposition non disjointe de la fonction incomplète f_2 (Y,Z).

d. Pour la recherche des décompositions non triviales de $f^*_2(Y,Z)$, le tableau relatif à ab + ac + dh + eh + bd + be + cd + ce + i + j :

	abc	deh	ij
a	111		
b	11	11	
c	1 1	11	
d	11	1 1	
e	11	11	
h		111	
i			1
j			1

a des sous-tableaux vides qui ont au plus 6 lignes et colonnes, mis à part les sous-tableaux (abcdeh, ij), (abcdehi, j). Les fonctions correspondant à ces partitions sont g_{ij} et g_j définies par :

$$g_{ij} = ab + ac + adh + \emptyset\ dh + aeh + \emptyset\ eh + bd + be + cd + ce,$$
$$g_j = ab + ac + adh + \emptyset\ dh + aeh + \emptyset\ eh + bd + be + cd + ce + ai + bi + ci + \emptyset\ i.$$

Montrons que g_{ij} et g_j ne peuvent s'écrire avec répétition d'au plus une lettre x.

a'. g_{ij} n'admet pas de décomposition triviale de la forme x + ... puisque $\bar{g}_{ij}$ n'en admet pas. g_j n'admet que la décomposition triviale i + ..., ce qui redonne g_{ij}.

b'. $\underline{g}_{ij}$ et $\underline{g}_j$ ne sont pas de la forme x •...

c'. g_{ij} n'admet pas de décomposition non triviale, puisque son tableau est le tableau précédent auquel on aurait enlevé les deux dernières lignes et colonnes. La décomposition triviale de g_j donne naissance à g_{ij}.

d'. $\underline{ade} + \underline{bcde} + \underline{bch} \leqslant g^*_{ij} \leqslant abc + \underline{ade} + \underline{bcde} + \underline{bch}$.

Son tableau

	abc	deh
a	1	11
b	11	11
c	11	111
d	111	11
e	111	11
h	11	1

montre que 2 dédoublements au moins sont nécessaires.

adei + bcdei + bchi $\leqslant g^*_j \leqslant$ abc + adei + bcdei + bchi
a un tableau identique au précédent mais avec une ligne et une colonne de 1 supplémentaires. Deux dédoublements sont encore au moins nécessaires.

III - B. ETUDE DES DECOMPOSITIONS (ADDITIVES) DE f* = g = ab+ac+adh+aeh+ai+aj + bd+ be+bi+bj + cd+ ce+ci+cj.

1. Recherche des décompositions non triviales : $g(Y,Z,T)=g_1(Y,T)+g_2(Z,T)$ avec $Y \neq \emptyset$ et $Z \neq \emptyset$.

Le tableau relatif à g est :

	abc	de	hij
a	111	11	111
b	11	11	11
c	1 1	11	11
d	111	1	1
e	111	1	1
h	1	11	1
i	111		1
j	111		1

Une couverture des vides du tableau est formée par les sous-tableaux

- (h, bcij), (bcij, h),
- les tableaux tels que Y + Z = bch,
- les tableaux tels que Y + Z = deij.

Nous trouvons alors comme sous-tableaux vides maximaux, en tenant compte de la symétrie des variables :

(h, bcij) } T = ade ,

(deh, ij)] } T = abc ,
(dehi, j)]

(d,eij)] } T = abch ,
(di,ej)]

(b, ch) } T = adeij.

Etudions maintenant les 5 partitions correspondant à des tableaux maximaux tels que $[T] \leq 4$. Les fonctions $g_1(Y,T)$ et $g_2(Z,T)$ correspondantes sont :

écompositions maximales	g_1 (Y,T)	nombre de variables	g_2 (Z,T)	nombre de variables	nombre minimal d'écurre de $g(Y,Z$
α	Øab + Øac + adh + aeh + ai + bd + be + bi + cd + ce + ci	7	Øab + Øac + aj + bj + cj	4	11
β	ab + ac + ai + aj + bd + be + bi + bj + cd + ce + ci + cj	7	adh + aeh	4	11
γ	Øab + Øac + adh + aeh + bd + be + cd + ce	6	Øab + Øac + ai + aj + bi + bj + ci + cj	5	11
δ	Øab + Øac + aeh + ai + aj + be + bi + bj + ce + ci + cj	7	Øab + Øac + adh + bd + cd	5	12
ε	Øab + Øac + adh + ai + bd + bi + cd + ci	6	Øab + Øac + aeh + aj + be + bj + ce + cj	6	12

et montrons que la somme des occurrences de g_1 (Y,T) et g_2 (Z,T) est supérieure à 12.

α. Soit g_1 (Y,T) = Øab + Øac + adh + aeh + ai
+ bd + be + bi
+ cd + ce + ci.

Examinons toutes les décompositions possibles de g_1(Y,T) triviales ou non triviales, additives ou multiplicatives).

a. g_1(Y,T) n'est pas de la forme x + ... puisque $\bar{g}_1$ (Y,T) ne l'est pas (théorème 4).

g_1(Y,T) est de la forme xy + φ. A cause de la symétrie des variables, il suffit de considérer pour xy les réalisations ab, ai, bd, bi.

adh + aeh + be + cd + ce + ci < $\varphi \leqslant$ ab + ac + adh + aeh + ai + bd + be + bi + cd + ce + ci

montre, d'après le théorème 2, que φ n'admet pas de décomposition disjointe, puisque adh + aeh + be + cd + ce + ci n'en admet pas. Prenons la duale de (1):

abc + adei + bcdei + bchi $\leqslant \varphi^* <$ abc + dei + cde + bch + ace + ceh

inégalités qui montrent que, puisque abc + dei + cde + bch admet une décomposition disjointe pour la partition (abch, dei), φ^* (encore d'après le théorème 2) en admet une, toujours pour cette même partition. La fonction compatible avec φ^* et décomposable est alors : abc + dei + bch ; sa duale est adh + aeh + aih + bd + be + bi + cd + ce + ci et elle ne contient ni ab, ni ac. Or la fonction g_2 (Z,T) correspondante ab + ac + aj + bj + cj ne peut s'écrire avec 4 occurrences puisqu'elle n'admet pas de décomposition disjointe et puisque sa duale abc + aj + bcj n'en admet pas aussi.

b. g_1 (Y,T) n'est pas de la forme x .... puisque $\underline{g_1}$ (Y,T) ne l'est pas (théorème 4').

c. Pour la recherche des décompositions non triviales de $g_1(Y,T)$, utilisons le théorème 2. Le tableau relatif aux monômes premiers communs à $\underline{g_1}$ (Y,T) et $\overline{g_1}$ (Y,T)

	abc	de	hi
a	1	11	11
b	1	11	1
c	1	11	1
d	111	1	1
e	111	1	1
h	1	11	1
i	111		1

dont les sous-tableaux vides ont au plus 4 lignes et colonnes, montre qu'au moins 3 occurrences supplémentaires sont nécessaires.

d. Pour la recherche des décompositions non triviales de $g^*_1(Y,T)$ défini par $\underline{abc} + \underline{adei} + bcdei + \underline{bchi} \leqslant g^*_1(Y,T) < \underline{abc} + \underline{dei} + \underline{bchi}$, le tableau relatif à abc + dei + bchi

	abc	de	hi
a	111		
b	111		11
c	111		11
d		11	1
e		11	1
h	11		11
i	11	11	11

montre que 2 occurrences supplémentaires sont nécessaires, sauf en dédoublant i. La seule fonction décomposable suivant la partition (abch,de) et compatible avec $g_1(Y,T)$ est : abc + dei + bchi. Or la fonction $g_2(Z,T)$

correspondante ab + ac + ai + aj + bi + bj + ci + cj est écrite avec plus de 5 occurrences, puisqu'elle n'admet pas de décomposition disjointe additive ou multiplicative.

β. $g_1(Y,T)$ = ab + ac + ai + aj + bd + be + bi + bj + cd + ce + ci + cj.

Montrons que g_1 (Y,T), qui a 7 variables, ne peut s'écrire avec moins de 9 occurrences, c'est-à-dire avec moins de 2 répétitions.

a. g_1 (Y,T) n'est pas de la forme x + ...

g_1 (Y,T) est de la forme xy + φ. A cause de la symétrie des variables, il suffit de considérer pour xy les réalisations ab, ai , bd, bi : ac + aj + be + bj + cd + ce + ci + cj < φ ≤ ab + ac + ai + aj + bd + be + bi + bj + cd + ce + ci + cj (1) montre que φ n'admet pas de décomposition disjointe, puisque ac + aj + be + bj + cd + ce + ci + cj n'en admet pas.

L'expression duale de (1) :

abc + bcij + adeij ≤ φ* < abc + bcj + adeij + cej fait apparaître la chaîne abcdeij.

b. g_1 (Y,T) n'est pas de la forme x •... puisque g_1(Y,T) ne l'est pas.

c. Le tableau relatif à g_1 (Y,T)

	abc	de	ij
a	111		11
b	11	11	11
c	1 1	11	11
d	11	1	
e	11	1	
i	111		1
j	111		1

montre que 2 occurrences supplémentaires sont nécessaires.

d. Le tableau relatif à g_1^* (Y,T) = abc + bcij + adeij

	abc	de	ij
a	111	11	11
b	111		11
c	111		11
d	1	11	11
e	1	11	11
i	111	11	11
j	111	11	11

montre que 3 occurrences supplémentaires sont nécessaires.

γ. g_1 (Y,T) = Øab + Øac + adh + aeh + bd + be + cd + ce.

a. g_1 (Y,T) est de la forme xy + φ.

$\underline{adh} + \underline{aeh} + \underline{be} + \underline{cd} + \underline{ce} < \varphi \leqslant ab + ac + \underline{adh} + \underline{aeh} + bd + \underline{be} + \underline{cd} + \underline{ce}$

montre que φ n'a pas de décomposition disjointe.

$\underline{abc} + \underline{ade} + bcde + \underline{bch} \leqslant \varphi^* < \underline{abc} + \underline{de} + \underline{bch} + ace + ceh$

montre que la seule fonction qui soit compatible avec φ^* et qui admette une décomposition disjointe est : abc + bch + de ; sa duale ne contient ni ab, ni ac. Alors on vérifie que ac + ai + aj + bi + bj + ci + cj, par exemple, en utilisant la symétrie de b et c, s'écrit avec plus de 5 occurrences (sa duale est : abc + aij + cij).

b. g_1 (Y,T) n'est pas de la forme x•...

c. Le tableau relatif à $\underline{g_1}$ (Y,T)

	abc	de	h
a	1	11	1
b	1	11	
c	1	11	
d	111	1	1
e	111	1	1
h	1	11	1

montre que 2 occurrences supplémentaires sont nécessaires.

d. $\underline{abc} + \underline{ade} + \underline{bcde} + \underline{bch} \leqslant g_1^*(Y,T) \leqslant \underline{abc} + \underline{de} + \underline{bch}$.

Le tableau relatif à $g_1^*(Y,T)$

	abc	de	h
a	111		
b	111		1
c	111		1
d		11	
e		11	
h	11		1

montre que 2 occurrences supplémentaires sont nécessaires sauf pour la partition (abch, de). La fonction $g_1(Y,T)$ correspondante est abc + de + bch et la fonction $g_2(Z,T)$: ab + ac + ai + aj + bi + bj + ci + cj. Montrons qu'elle s'écrit avec au moins 7 occcurences :

a'. Elle est de la forme xy + φ.

$\underline{ac} + \underline{aj} + \underline{bj} + \underline{ci} + \underline{cj} < \varphi \leqslant ab + \underline{ac} + ai + \underline{aj} + bi + \underline{bj} + \underline{ci} + \underline{cj}$

montre que φ n'a pas de décomposition disjointe.

$\underline{abc} + \underline{aij} + \underline{bcij} \leqslant \varphi^* < \underline{abc} + \underline{aij} + \underline{cj}$

montre que φ* n'a pas non plus de décomposition disjointe.

b'. $g_2(Z,T)$ n'est pas de la forme x •...

c'. d'. $g^*_2(Z,T) = abc + aij + bcij$. Les tableaux de $g_2(Z,T)$ et $g_2^*(Z,T)$, soient :

	abc	ij
a	111	11
b	11	11
c	1 1	11
i	111	1
j	111	1

	abc	ij
a	111	11
b	111	11
c	111	11
i	111	11
j	111	11

montrent que, respectivement, 3 et 4 dédoublements non nécessaires.

δ. ε.

Le nombre minimal d'occurrences de $g(Y,Z,T) = g_1(Y,T) + g_2(Z,T)$ étant déjà de 12, il suffit de remarquer que :

$$\delta.\ g_1(Z,T) = \emptyset ab + \emptyset ac + aeh + ai + aj + be + bi + bj + ce + ci + cj$$

et $g^*_1(Z,T)$ défini par : $\underline{abc} + \underline{aeij} + \underline{bceij} + \underline{behij} \leqslant g^*_1(Z,T) \leqslant \underline{abc} + \underline{eij} + \underline{bchij}$

$$\varepsilon.\ g_1(Z,T) = \emptyset ab + \emptyset ac + adh + ai + bd + bi + cd + ci$$

et $g^*_1(Z,T)$ défini par : $\underline{abc} + \underline{adi} + \underline{bcdi} + \underline{bchi} \leqslant g^*_1(Z,T) \leqslant \underline{abc} + \underline{di} + \underline{bchi}$

n'ont pas de décompositions disjointes.

2. - Recherche des décompositions triviales : $g(Y,Z) = g_1(Y) + g_2(Y,Z)$

avec $[Y] + [Z] = 8$ ($g_2(Y,Z)$ contient toutes les variables) et avec $[Y] \leqslant 4$.

En faisant jouer un rôle particulier à a, b, c et en tenant compte de la symétrie des variables , Y est un des monômes ou un diviseur des monômes suivants : abc (d + h + i) + (ab + bc) (de + dh + di + hi + ij) + (a+b) (deh + dei + ehi + eij + hij).

Un Y étant donné, Y_i (diviseur d'un monôme de la liste précédente), les bornes de la fonction g_2 (Y,Z) correspondante sont g(Y,Z) et $\underline{g_2}(Y,Z)$ qui contient tous les monômes de g(Y,Z) qui ne sont pas diviseurs de Y_i. Un ensemble de Y_i étant donné, les bornes des $g_2(Y,Z)$ correspondantes sont g(Y,Z) et $\underline{g_2}$ (Y,Z) qui contient les monômes de g (Y,Z) qui ne sont pas diviseurs de l'un quelconque des Y_i.

Vérifions que g_2 (Y,Z) qui dépend de toutes les variables (8) a plus de 8 occurrences (respectivement 9,10) lorsque[Y] = 4 (respectivement 3,2).

Remarque 1. $g_2(Y,Z)$ dépendant de toutes les variables ne peut avoir une décomposition de la forme xy + φ (car ou φ est indépendant de x ou y et nous sommes ramenés au cas déjà traité des décompositions non triviales, ou φ dépend de x et y et nous supposons le monôme xy inclus dans $g_1(Y)$).

$g_2(Y,Z)$ ne pourra avoir une décomposition de la forme x •... (a fortiori xy •...) car x devrait appartenir, d'après le théorème 4', à tous les monômes premiers de $\underline{g_2}(Y,Z)$.

Nous ne chercherons donc pour g_2 (Y,Z) et $g^*_2(Y,Z)$ que les décompositions non triviales.

Remarque 2. $g_2(Y,Z)$ (respectivment $g^*_2(Y,Z)$) dépendant de toute variable x, au moins un multiple d'un monôme premier contenant x est un monôme de g_2 (Y,Z) (respectivement $g^*_2(Y,Z)$).

α. g_1 (Y) a 4 variables.

Les diverses combinaisons de 4 variables pour Y sont :

a. abc (d+i)

b. ab (de + dh + di + hi + ij) + a (eij + hij)

c. a (deh + dei + ehi)

d. bc (de + dh + di + hi + ij) + b (deh + dei + ehi + eij + hij)

et vérifions que les fonctions $g_2(Y,Z)$ et $g^*_2(Y,Z)$ correspondantes n'admettent pas de décomposition disjointe.

a. Y = abc (d + i).

$$adh + aeh + aj + be + bj + ce + cj = \underline{g_2}\ (Y,Z) < g_2\ (Y,Z) < g\ (Y,Z) \qquad (1)$$

avec les monômes premiers communs à $\underline{g_2}$ (Y,Z) et g(Y,Z), on peut constituer la chaîne abcdehj de 7 lettres, à laquelle i appartient d'après la remarque 2.

Prenons la duale de (1) :

$$\underline{abc} + adeij + \underline{bcdeij} + \underline{bchij} < g^*_2\ (Y,Z) < \underline{abc} + aej + \underline{dej} + \underline{bchj} + ehj.$$

Avec les monômes abc, dej, bchj, on constitue une chaîne de 7 lettres, dont h fait partie toujours d'après la remarque 2.

b. Y = ab (de + dh + di + hi + ij) + a (eij + hij).

$$ac + aeh + cd + ce + ci + cj < g_2\ (Y,Z) < g\ (Y,Z)$$

et $\underline{abc} + \underline{adeij} + \underline{bcdeij} + \underline{bchij} < g^*_2\ (Y,Z) < \underline{ac} + \underline{adeij} + \underline{ce} + \underline{ch}$

permettent de construire une chaîne de 7 lettres, auxquelles on ajoute b encore d'après la remarque 2.

c. Y = a (deh + dei + ehi).

$$ab + ac + aj + bd + be + bi + bj + cd + ce + ci + cj < g_2\ (Y,Z) < g\ (Y,Z)$$

et $\underline{abc} + \underline{adeij} + \underline{bcdeij} + \underline{bchij} < g^*_2(Y,Z) < \underline{abc} + \underline{adeij} + \underline{bcj}$

permettent de construire une chaîne de 7 lettres auxquelles on ajoute h.

d. $Y = bc\,(de + dh + di + hi + ij) + b\,(deh + dei + ehi + eij + hij)$.

$ab + ac + adh + aeh + ai + aj < g_2\,(Y,Z) < g\,(Y,Z)$

permet de construire une chaîne de 8 lettres.

$\underline{abc} + \underline{adeij} + \underline{bcdeij} + \underline{bchij} < g^*_2\,(Y,Z) < \underline{a} + \underline{bcdeij} + \underline{bchij}$

permet de construire une chaîne de 7 lettres auxquelles on ajoute a.

β. $g_1\,(Y)$ a 3 variables.

En tenant compte de la symétrie des variables, Y peut prendre les configurations suivantes :

a. $Y = abc + bc\,(d + h + i)$.

$adh + aeh + ai + aj + be + bj + ce + cj < g_2\,(Y,Z) < g\,(Y,Z)$

$abc + adeij + bcdeij + bchij < g^*_2\,(Y,Z) < abc + aej + deij + bchij + ehij$.

Les tableaux construits à partir des monômes premiers des bornes supérieures uniques diviseurs de monômes des bornes inférieures

	abc	deh	ij
a	1	111	11
b	1	1	1
c	1	1	1
d	1	1 1	
e	111	11	
h	1	111	
i	1		1
j	111		1

	abc	deh	ij
a	111		
b	111	1	11
c	111	1	11
d		11	11
e		11	11
h	11	1	11
i	11	111	11
j	11	111	11

montrent qu'un seul dédoublement est possible pour la fonction $g_2\,(Y,Z)$ lorsqu'on considère la partition (bcdehj,i). On a alors : $g_1(Y) = (b+c)i$; $g_2\,(Y,Z) = [ab + ac + adh + aeh + aj + bd + be + bj + cd + ce + cj] + [ai]$. On constate alors que $g_2\,(Y,Z)$ s'écrit avec plus de 7 occurrences puisqu' elle n'admet pas de décomposition disjointe additive ou multiplicative.

b. $Y = b\,(de + dh + di + hi + ij)$.

$ab + ac + adh + aeh + ai + aj + cd + ce + ci + cj < g_2\,(Y,Z) < g\,(Y,Z)$

$\underline{abc} + \underline{adeij} + \underline{bcdeij} + \underline{bchij} < g^*_2\,(Y,Z) < \underline{ac} + \underline{adeij} + \underline{bcdeij} + \underline{bchij}$

Les tableaux

	abc	deh	ij
a	111	111	11
b	11		
c	1 1	11	11
d	1 1	1 1	
e	1 1	11	
h	1	111	
i	1 1		1
j	1 1		1

	abc	deh	ij
a	1 1	11	11
b	11	111	11
c	111	111	11
d	111	11	11
e	111	11	11
h	11	1	11
i	111	111	11
j	111	111	11

montrent qu'un seul dédoublement est possible pour la fonction $g_2(Y,Z)$ lorsqu'on considère la partition (cdehij, b). On a alors : $g_1(Y)$ = bd + be + bi + bj, ce qui est en oontradiction avec l'hypothèse que $g_1(Y)$ n'a que 3 variables.

c. Y = ab (d + h + i) + a (de + dh + di + hi + ij).

ac + aeh + be + bj + cd + ce + ci + cj < g_2 (Y,Z) < g (Y,Z)

abc + adeij + bcdeij + bchij < $g^*_2(Y,Z)$ < abc + adeij + bce + cej + bch.

Les tableaux

	abc	deh	ij
a	1 1	11	1
b	1	1	1
c	1 1	11	11
d	1	1	
e	111	11	
h	1	11	
i	1		1
j	11		1

	abc	deh	ij
a	111	11	11
b	111	1	
c	111	1	
d	1	11	11
e	1	11	11
h	11	1	
i	1	11	11
j	1	11	11

montrent qu'un seul dédoublement est possible pour les fonctions $g_2(Y,Z)$ et $g^*_2(Y,Z)$.

Considérons la partition (abehij, d). g_1 (Y) est alors égal à adh + bd et a 4 variables.

Pour la partition (abdehj, i), $g_1(Y)$ vaut ai + bi + ci et a encore plus de 3 variables.

Enfin il n'y a pas de fonction compatible avec g^*_2 (Y,Z) et décomposable suivant la partition (bch, deij) puisque bce et cej contiennent des lettres des deux éléments de la partition.

γ. g_1 (Y) a 2 variables. Y = ab + ai + bd + bi.
ac + adh + aeh + aj + be + bj + cd + ce + ci + cj < g_2 (Y,Z) < g (Y,Z)
abc + adeij + bcdeij + bchij < g^*_2 (Y,Z) < abc + adeij + cdej + bchj + acej + cehj. les tableaux correspondants

	abc	deh	ij
a	1 1	111	1
b	1	1	1
c	1 1	11	11
d	1 1	1 1	
e	111	11	
h	1	111	
i	1		1
j	111		1

	abc	deh	ij
a	111	11	11
b	111	1	1
c	111	111	1
d	1 1	11	11
e	1 1	11	11
h	11	1	1
i	1	11	11
j	111	111	11

montrent qu'un ou deux dédoublements sont possibles pour g_2 (Y,Z).

Pour la partition (acdhi, b), g_1 (Y) vaut : ab + bd + bi et a donc plus de 2 variables.

Pour la partition (abdehj, i), g_1 (Y) vaut : ai + bi. On peut aussi considérer les partitions (adehj, i) et (bdehj,i) dont les g_1(Y) sont : ai et bi, et ont deux variables, et dont les g_2 (Y,Z) sont respectivement [ab + ac + adh + aeh + aj + bd + be + bj + cd + ce + cj] + [bi + ci] et [ab + adh + aeh + aj + bd + be + bj + cd + ce + cj + Øac] +[ai + ci + Øac] . Or les fonctions à 7 variables ab + ac + adh + aeh + aj + bd + be + bj + cd + ce + cj et ab + adh + aeh + aj + bd + be + bj + cd + ce + cj + Øac n'ont pas de décomposition disjointe additive ou multiplicative.

C H A P I T R E IV

-=-=-=-

RECHERCHE DES PARTITIONS REALISANT LES DECOMPOSITIONS SIMPLES

IV - A. RECHERCHE DES PARTITIONS REALISANT LES DECOMPOSITIONS SIMPLES DISJOINTES.

1. Etude théorique.

A la base de toute cette étude est une propriété de linéarité exprimée par le lemme 1 et utilisée par le théorème 1.

LEMME 1. La forme galoisienne d'une fonction admettant une décomposition simple disjointe $f(Y,Z) = g[\varphi(Y), Z]$ est :

$$f(Y,Z) = \alpha(Z)\,\varphi_Y \oplus \gamma(Z), \qquad (1)$$

où $\alpha(Z)$ et $\gamma(Z)$ sont des fonctions quelconques de Z (elles peuvent en particulier être égales à 1) et où φ_Y est une somme disjonctive de monômes contenant au moins une des variables Y, égale à $\tilde{\varphi}(Y)$.

Démonstration. La forme galoisienne de $g(\varphi,Z)$ est :
$g(\varphi,Z) = \alpha(Z)\,\varphi \oplus \beta(Z)$, où $\alpha(Z)$ et $\beta(Z)$ sont des fonctions quelconques de Z. En posant $\varphi(Y) = a \oplus \varphi_Y$, où a est une constante booléenne et où φ_Y est une somme disjonctive de monômes contenant au moins l'une des variables Y et ne contenant que des variables Y, la forme galoisienne de $f(Y,Z)$ est :

$$\begin{aligned} f(Y,Z) &= \alpha(Z)\,(a \oplus \varphi_Y) \oplus \beta(Z) \\ &= \alpha(Z)\,\varphi_Y \oplus a\,\alpha(Z) \oplus \beta(Z) \\ &= \alpha(Z)\,\varphi_Y \oplus \gamma(Z) \end{aligned}$$

en posant $\gamma(Z) = a\,\alpha(Z) \oplus \beta(Z)$. La formule (1) est démontrée.

LEMME 2. Une condition nécessaire et suffisante pour que la fonction $f(y_i, Y_i, Z)$ admette la décomposition $g[\varphi(y_i, Y_i), Z]$ est qu'elle soit de la forme :

$$f(y_i, Y_i, Z) = \alpha(Z)\ [\varphi_i(Y_i)\ y_i \oplus m_{Y_i}] \oplus \gamma(Z) \quad (2)$$

où $\alpha(Z)$, $\varphi_i(Y_i)$, $\gamma(Z)$ sont des fonctions quelconques (elles peuvent en particulier être égales à 1) et où m_{Y_i} est une somme disjonctive de monômes contenant au moins une variable Y_i.

Démonstration. En posant $Y = \{y_i, Y_i\}$, (1) donne :
$f(y_i, Y_i, Z) = \alpha(Z)\ \varphi_{y_i Y_i} \oplus \gamma(Z)$.
Faisons deux parts des monômes de la somme disjonctive $\varphi_{y_i Y_i}$:

- ceux qui contiennent y_i ; ils donnent $\varphi_i(Y_i)\ y_i$ de (2);
- ceux qui ne contiennent pas y_i (mais au moins une variable Y_i) ; ils donnent m_{Y_i} de (2).

THEOREME 1. Une condition nécessaire et suffisante pour que la fonction $f(Y,Z)$ admette la décomposition $g[\varphi(Y), Z]$ est que tout coefficient d'une variable $y_i \in Y$ dans l'écriture galoisienne de $f(Y,Z)$ soit de la forme :

$$\alpha(Z)\ \varphi_i(Y_i)$$

où $Y_i = \complement_Y y_i$. Alors $\varphi(Y)$ est la somme disjonctive sans omission et sans répétition des monômes des $\varphi_i(Y_i)\ y_i$ et :

$$g(\varphi, Z) = \alpha(Z)\ \varphi(Y) \oplus \gamma(Z).$$

Démonstration. En faisant jouer le rôle de y_i à toute variable appartenant à Y à l'intérieur même du crochet de la formule (2) ($\alpha(Z)$ reste ainsi identique), on voit bien que tout coefficient d'une variable $y_i \in Y$ dans l'écriture galoisienne de $f(Y,Z)$ est de la forme : $\varphi(Z)\varphi_i(Y_i)$.

Réciproquement, la condition est suffisante. En effet, on peut écrire :

$$f(Y,Z) = \alpha(Z)\,\varphi_1(Y_1)\,y_1 \oplus \gamma_1(Y_1,Z).$$

Les monômes contenant y_2 sont : $\alpha(Z)\,\varphi_2(Y_2)\,y_2$. Soit ils contiennent y_1 et ils appartiennent à $\alpha(Z)\,\varphi_1(Y_1)\,y_1$, soit ils ne contiennent pas y_1, ils appartiennent à $\gamma_1(Y_1, Z)$ et on peut mettre en facteur $\alpha(Z)$. On continue jusqu'à ce que $\gamma_j(Y_j, Z)$ ne contienne plus de y_i ; on est alors arrivé à :

$$f(Y,Z) = \alpha(Z)\,\varphi(Y) \oplus \gamma(Y,Z)$$

qui est décomposable.

Remarque. Le théorème 1 suppose qu'on puisse savoir si le coefficient galoisien d'une variable x_i peut être mise sous la forme d'un produit de deux facteurs de variables distinctes $\alpha(Z)\,\varphi_i(Y_i)$. Or il est vain de passer à la forme duale $\prod_{\Theta} \sum_{+}$ a de $\alpha(Z)\,\varphi_i(Y_i) = \sum_{\oplus} \prod$ a, car la distributivité de la multiplication par rapport à la disjonction $a(b \oplus c) = ab \oplus ac$ donne par dualité la distributivité de l'addition par rapport à la conjonction : $a + (x \ominus y) = (a + x) \ominus (a + y)$ et non l'inverse. Pour contourner cette difficulté, transposons le théorème 1 en algèbre de Boole :

THEOREME 2. Une condition nécessaire et suffisante pour que la fonction $f(Y,Z)$ admette la décomposition disjointe $g[\varphi(Y),Z]$ est que :

$$\Delta_{y_i} = f^*(0, Y_i, Z)\, f^*(1, Y_i, Z) + f(0,Y'_i,Z')\, f(1,Y'_i,Z')$$

soit de la forme $\alpha^*(Z) + \varphi^*_i(Y_i)$, pour tout $y_i \in Y$ ($Y_i = \int_Y y_i$)

Première démonstration. D'après le théorème 1, une condition nécessaire et suffisante pour que f (Y,Z) admette la décomposition g [φ (Y), Z] est que le coefficient d'une variable y_i (pour tout $y_i \in Y$) dans l'écriture galoisienne, c'est à dire f (0, Y_i, Z) ⊕ f (1, Y_i, Z) (où $Y_i = \int_Y y_i$), soit de la forme α (Z) φ_i (Y_i) ; ce qui devient par dualité, en remarquant que f* (Y,Z) = g* [φ* (Y), Z]:

$$f^*(0, Y_i, Z) \Theta f^*(1, Y_i, Z) = \alpha^*(Z) + \varphi^*_i(Y_i)$$

$$f^*(0, Y_i, Z)\, f^*(1, Y_i, Z) + f^{*\prime}(0, Y_i, Z)\, f^{*\prime}(1, Y_i, Z) = \alpha^*(Z) + \varphi^*_i(Y_i)$$

$$f^*(0, Y_i, Z)\, f^*(1, Y_i, Z) + f(0, Y'_i, Z')\, f(1, Y'_i, Z') = \alpha^*(Z) + \varphi^*_i(Y_i)$$

Deuxième démonstration. La condition est nécessaire. En effet, supposons f (Y,Z) = g [φ(Y),Z] . Alors f' (Y,Z) = g' [φ(Y), Z] et

Δ_{y_i} = f* (0, Y_i, Z) f* (1, Y_i, Z) + f(0, Y'_i, Z') f(1, Y'_i, Z') devient :

$$\Delta_{y_i} = f'(1, Y'_i, Z')\, f'(0, Y'_i, Z') + f(0, Y'_i, Z')\, f(1, Y'_i, Z')$$

$$= g'[\varphi(1, Y'_i), Z']\, g'[\varphi(0, Y'_i), Z'] + g[\varphi(0, Y'_i), Z']\, g[\varphi(1, Y'_i), Z']$$

$$= [\varphi'(1, Y'_i) g'(0, Z') + \varphi(1, Y'_i) g'(1, Z')]\, [\varphi'(0, Y'_i) g'(0, Z') + \varphi(0, Y'_i) g'(1, Z')]$$

$$+ [\varphi'(0, Y'_i) g'(0, Z') + \varphi(0, Y'_i) g'(1, Z')]\, [\varphi'(0, Y'_i) g(0, Z') + \varphi(0, Y'_i) g(1, Z')]$$

$$= \varphi(0, Y') \Theta \varphi(1, Y') + [\varphi(0, Y') \oplus \varphi(1, Y')]\, [g(0, Z') \Theta g(1, Z')].$$

Puisque φ (0,Y') Θ φ (1,Y') et φ (0,Y') ⊕ φ (1,Y') sont complémentaires, on a :

$$\Delta_{y_i} = \varphi(0, Y') \Theta \varphi(1, Y') + g(0, Z') \Theta g(1, Z') .$$

La condition nécessaire est démontrée en posant :

$$\begin{cases} \alpha^*(Z) = g(0, Z') \Theta g(1, Z') \\ \varphi^*_i(Y_i) = \varphi(0, Y'_i) \Theta \varphi(1, Y'_i). \end{cases}$$

Rappel (voir [CU]) nécessaire à l'algorithme qui suit. Parmi les partitions (Y,Z) des décompositions simples disjointes d'une fonction booléenne f(X), choisissons celles telles que les Z soient minimaux et les Y maximaux, soient (Y_i, Z_i) $(1 \leqslant i \leqslant p)$; les décompositions correspondantes sont dites maximales. Rappelons les résultats suivants :

- si les Y_i partitionnent X, alors $f(X) = g[\varphi_1(X_1), \ldots, \varphi_p(X_p)]$;

- si les $\overline{Y}_i = Z_i$ partitionnent X, alors $f(X) = \varphi_1(Z_1) * \ldots * \varphi_p(Z_p)$,

où * est +, . ou $\oplus$, c'est-à-dire que f(X) est décomposable par rapport à l'addition, la multiplication ou la disjonction;

- les deux possibilités précédentes sont les seules.

2. - Algorithme pour trouver les décompositions disjointes simples.

a. Etant donnée la fonction booléenne f(X) où $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, on recherche les décompositions disjointes simples par rapport à la somme et au produit (voir II A). Si elles existent, on passe en d.

b. On calcule les n quantités :

$$\Delta_{x_i} = f^*(0, X_i)\, f^*(1, X_i) + f(0, X'_i)\, f(1, X'_i)$$

où $X_i = \int_X x_i$. On recherche les décompositions disjointes simples par rapport à la disjonction, à l'aide du théorème 4 du chapitre II.

c. On calcule les décompositions disjointes par rapport à l'addition de chaque Δ_{x_i} : $\Delta_{x_i} = \alpha^*_{i,1}(C_1) + \alpha^*_{i,2}(C_2) + \ldots$ (C_1, C_2, ... sont des sous-ensembles disjoints de X).

Considérons arbitrairement une variable x_i et son coefficient Δ_{x_i}. Considérons toujours arbitrairement un terme $\alpha^*_{i,j}(C_j)$ ou plusieurs termes $\alpha^*_{i,j}(C_j) + \ldots + \alpha^*_{i,k}(C_k)$ de Δ_i, que nous appelons $\alpha^*(Z)$ ($\alpha^*(Z)$ peut être choisi égal à Δ_{x_i}, mais non à 0, puisque nous avons traité l'éventualité de la décomposition disjonctive $\varphi(Y) \oplus \gamma(Z)$). Comme dans le théorème 2, appelons $\varphi^*_i(Y_i)$ l'ensemble des termes de Δ_{x_i} qui n'appartiennent pas à $\alpha^*(Z)$ ($\Delta_{x_i} = \alpha^*(Z) + \varphi^*_i(Y_i)$).

D'après le théorème 2, une condition nécessaire et suffisante pour que $f(X)$ admette la décomposition disjointe $g[\varphi(Y), Z] = \alpha(Z)\varphi(Y) \oplus \gamma(Z)$ est :

C 1 : pour toute lettre y_j apparaissant dans $\varphi^*_i(Y_i)$, le coefficient correspondant Δ_{x_j} est de la forme : $\Delta_{x_j} = \alpha^*(Z) + \varphi^*_j(Y_j)$; pour les lettres x_k de X n'apparaissant ni dans $\alpha^*(Z)$, ni dans $\varphi^*_i(Y_i)$, ou

C 2 : $\Delta_{x_k} = \alpha^*(Z) + \varphi^*_k(Y_k)$. Ces lettres x_k, x_i et les variables y_j de $\varphi^*_i(Y_i)$ forment Y,

ou C 3 : leur coefficient Δ_{x_k} ne contient pas de lettres Y (ces variables x_k sont des variables de $\gamma(Z)$ qui ne sont pas des variables de $\alpha(Z)$).

d. Appelons $(\tilde{Y}_i, \tilde{Z}_i)$ les partitions (Y_i, Z_i) si les Y_i partitionnent X, les partitions (Z_i, Y_i) si les Z_i partitionnent X. Les fonctions $g(\varphi_1, \ldots, \varphi_p)$, $\varphi_1(\tilde{Y}_1)$, $\ldots$, $\varphi_p(\tilde{Y}_p)$ sont déterminées à partir de la base complète de $f(X)$ par la méthode du chapitre I, en procédant par cascade : $(\tilde{Y}_1, \tilde{Z}_1)$ étant donné, on détermine $g_1(\varphi_1, \tilde{Z}_1)$ et $\varphi_1(\tilde{Y}_1)$, puis, $(\tilde{Y}_2, \tilde{Z}_2)$ étant donné, on détermine $g_2(\varphi_1, \varphi_2, \tilde{Z}_1 \cap \tilde{Z}_2)$ et $\varphi_2(\tilde{Y}_2)$ ...

e. On décompose ensuite $\varphi_1(\tilde{Y}_1)$ ou $\varphi'_1(\tilde{Y}_1)$, $\varphi_2(\tilde{Y}_2)$ ou $\varphi'_2(\tilde{Y}_2)$, $\ldots$, $\varphi_p(\tilde{Y}_p)$ ou $\varphi'_p(\tilde{Y}_p)$.

•••

Exemple 1. Soit la fonction

$f(v,w,x,y,z) = vw'\,yz + vw'\,xz + x'y'z' + v'z' + wz'$.

a. On vérifie qu'elle n'admet pas de décomposition disjointe additive et multiplicative.

b. On calcule les coefficients $\Delta_v, \Delta_w, \Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$:

α. $f(o,w,x,y,z) = x'y'z' + z' + wz'$

$f(1,w,x,y,z) = w'\,yz + w'xz + x'y'z' + wz'$

$f^*(0,w,x,y,z)f^*(1,w,x,y,z) = z'(w'+y+z)\,(w'+x+z)\,(x'+y'+z')\,(w+z')$

$= w'z' + xyz'$

$f(0,w,x',y',z')f(1,w',x',y',z') = z(wy'z' + wx'z' + xyz + w'z)$

$= w'z + xyz$

$\Delta_v = w'z' + xyz' + w'z + xyz = [w'] + [xy]$.

β. $f(v,0,x,y,z) = vyz + vxz + x'y'z' + v'z'$

$f(v,1,x,y,z) = x'y'z' + v'z' + z'$

$f^*(v,0,x,y,z)\,f^*(v,1,x,y,z) = (v+y+z)(v+x+z)(x'+y'+z')(v'+z')\,z'$

$= vz' + xyz'$

$f(v',0,x',y',z')\,f(v',1,x',y',z') = (y'z'+y'x'z'+xyz+vz)\,z$

$= vz + xyz$

$\Delta_w = vz' + xyz' + vz + xyz = [v] + [xy]$.

γ. $f(v,w,0,y,z) = vw'\,yz + y'z' + v'z' + wz'$

$f(v,w,1,y,z) = vw'\,yz + vw'z + v'z' + wz'$

$f^*(v,w,0,y,z)f^*(v,w,1,y,z) = (v + w' + z)\,(y' + z')(v'+z')(w+z')$

$= vz' + w'z' + v'\,w\,y'\,z$

$f(v',w',0,y',z')f(v',w',1,y',z') = (v'wy'z' + yz+vz + w'z)(v'wz+vz+w'z)$

$= vz + w'z + v'w\,y'z'$

$\Delta_x = vz' + w'z' + v'\,wy'z + vz + w'z + v'wy'z' = [v] + [w'] + [y']$.

δ. $f(v,w,x,0,z) = vw'xz + x'z' + v'z' + wz'$

$f(v,w,x,1,z) = vw'z + vw'xz + v'z' + wz'$

$f^*(v,w,x,0,z)\ f^*(v,w,x,1,z) = (v+w'+z)(x'+z')(v'+z')(w+z') = vz' + w'z' + v'wx'z$

$f(v',w',x',o,z')\ f(v',w',x',1,z') = (v'wx'z' + xz + w'z)(v'wz' + vz + w'z) = vz + w'z + v'wx'z$

$\Delta_y = vz' + w'z' + v'wx'z + v'wx'z' + vz + w'z = [v] + [w'] + [x']$.

ε. $f(v,w,x,y,0) = x'y' + v' + w$

$f(v,w,x,y,1) = vw'y + vw'x$

$f^*(v,w,x,y,0)\ f^*(v,w,x,y,1) = (x' + y')\,v'\,w\,(v+w'+xy) = 0$

$f(v',w',x',y',0)\ f(v',w',x',y',1) = (xy + v + w')(v'wy' + v'wx') = 0$

$\Delta_z = 0$.

Appliquons le théorème 4 du chapitre II, en cherchant une décomposition disjointe additive de l'expression :

$$v.(\text{lettres de } \Delta_v)^* + w.(\text{lettres de } \Delta_w)^* + x.(\text{lettres de } \Delta_x)^* + y.(\text{lettres de } \Delta_y)^* + z.(\text{lettres de } \Delta_z)^* = vwxy + vwxy + vwxy + vwxy + z = vwxy + z.$$

f(v,w,x,y,z) est donc décomposable disjonctivement suivant la partition (vwxy,z).

d. A partir de la base complète de f(v,w,x,y,z) et de la donnée de la partition (vwxy,z), on déduit le tableau de décomposition

	vw'y	vw'x	x'y'	v'	w
z	1	1			
z'			1	1	1

et les écritures suivantes de f(v, w, x, y, z) :

$z \oplus (x'y' + v' + w)$,

$z' \oplus (vw'y + vw'x)$.

e. On constate immédiatement que φ (v,w,x,y) $=[x'y'] + [v'] + [w]$ et que φ' (v,w,x,y) = vw' (x+y). Donc :

$$\boxed{f(v,w,x,y,z) = z \oplus (x'y' + w + v') = z' \oplus [vw' (x + y)]}$$

Exemple 2. Soit la fonction :

$$f(u,v,w,x,y,z) = uv'w'x'y'z' + vx'yz' + u'v'w\ x'y'z' + uv'\ w'\ xyz' + u'vw\ xyz + vxy'z' + u'vw\ x'\ y'z + u'v'w\ xyz' + uvw'x'y'z + u'vw'z' + uvwz'.$$

a. On vérifie qu'elle n'admet pas de décomposition disjointe additive et multiplicative.

b. Les coefficients $\Delta_u, \Delta_v, \Delta_w, \Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$ sont :

$\alpha.\ \Delta_u = [vz'] + [x'y + xy']$

$\beta.\ \Delta_v = [uwz' + u'\ w'\ z' + x'\ yz' + xy'z']$

$\gamma.\ \Delta_w = [v\ z'] + [x'y + xy']$

$\delta.\ \Delta_x = [uw + u'w'] + [y\ z']$

$\varepsilon.\ \Delta_y = [uw + u'w'] + [v\ z']$

$\varphi.\ \Delta_z = [u'vw' + uvw + vxy' + vx'y]$

On constate que : v. (lettres de $\Delta_v)^* = uvwxyz$; f(u,v,w,x,y,z) n'est pas décomposable disjonctivement.

c. Considérons la variable u et posons $\alpha^*(Z) = vz'$. On vérifie que vz' apparait dans Δ_x, Δ_y, mais aussi dans Δ_w, ce qui met à jour la partition de décomposition (uwxy, vz). On constate qu'il n'existe pas d'autre décomposition maximale.

d. A partir de la base complète de f(u,v,w,x,y,z) et de la partition (uwxy,vz), on déduit le tableau de décomposition :

	uw'x'y'	x'y	u'wx'y'	uw'xy	u'wxy	xy'	u'w'	uw
v'z'	1		1		1			
vz'		1		1		1	1	1
vz	1		1		1			

(on constate bien que (x'y + uw'xy + xy' + u'w' + uw)'=uw'x'y'+u'wx'y'+u'wxy) et l'écriture de f (u,v,w,x,y,z) :

$$f(u,v,w,x,y,z) = g(\varphi,v,z) = \varphi v'z' + \varphi vz + \varphi' vz'$$
$$\varphi(u,w,x,y) = uw'\,x'\,y' + u'w\,x'\,y' + u'w\,xy$$

e. La fonction $\varphi(u,w,x,y)$ n'admet pas de décomposition simple disjointe.

III - B . RECHERCHE DES PARTITIONS REALISANT LES DECOMPOSITIONS SIMPLES NON DISJOINTES.

Cette étude est très semblable à la précédente, mais plus générale, les décompositions disjointes étant des décompositions non disjointes particulières.

1. Etude théorique.

LEMME 3. La forme galoisienne d'une fonction admettant une décomposition simple non disjointe $f(Y,Z,T) = g[\varphi(Y,T), Z,T]$ est :

$$f(Y,Z,T) = \alpha(Z,T)\ \varphi_{YT} \oplus \gamma(Z,T) \qquad (3)$$

où $\alpha(Z,T)$ et $\gamma(Z,T)$ sont des fonctions quelconques de Z et T (elles peuvent en particulier être égales à 1) et où φ_{YT} est une somme disjonctive de monômes contenant au moins une des variables Y ou T, égale à $\tilde{\varphi}(Y,T)$.

Démonstration. La forme galoisienne de $g(\varphi,Z,T)$ est :

$$g(\varphi,Z,T) = \alpha(Z,T)\ \varphi \oplus \beta(Z,T)$$

où $\alpha(Z,T)$ et $\beta(Z,T)$ sont des fonctions quelconques de Z et T.

En posant $\varphi(Y,T) = a \oplus \varphi_{YT}$, où a est une constante booléenne et où φ_{YT} est une somme disjonctive de monômes contenant au moins l'une des variables Y ou T, la forme galoisienne de $f(Y,Z,T)$ est :

$$\begin{aligned} f(Y,Z,T) &= \alpha(Z,T)\ (a \oplus \varphi_{YT}) \oplus \beta(Z,T) \\ &= \alpha(Z,T)\ \varphi_{YT} \oplus a\,\alpha(Z,T) \oplus \beta(Z,T) \\ &= \alpha(Z,T)\ \varphi_{YT} \oplus \gamma(Z,T) \end{aligned}$$

en posant $\gamma(Z,T) = a\,\alpha(Z,T) \oplus \beta(Z,T)$. La formule (3) est démontrée.

LEMME 4. Une condition nécessaire et suffisante pour que la fonction $f(y_i, Y_i, Z,T)$ admette la décomposition $g[\varphi(y_i, Y_i,T),Z,T]$ est qu'elle soit de la forme :

$$f(y_i, Y_i, Z, T) = \alpha(Z,T)\ [\varphi_i(Y_i, T)\ y_i \oplus m_{Y_i\ T}] \oplus \gamma(Z,T) \qquad (4)$$

où $\alpha\ (Z,T)$, $\varphi_i\ (Y_i, T)$, $\gamma\ (Z,T)$ sont des fonctions quelconques (elles peuvent en particulier être égales à 1) et où m_{Y_iT} est une somme disjonctive de monômes contenant au moins une des variables Y_i ou T.

Démonstration. En posant $Y = \{y_i, Y_i\}$, (3) donne :
$f\ (y_i, Y_i, Z, T) = \alpha\ (Z,T)\ \varphi_{y_i\ Y_iT} \oplus \gamma\ (Z,T)$.
Faisons deux parts des monômes de la somme disjonctive $\varphi_{y_i\ Y_i\ T}$:

- ceux qui contiennent y_i ; ils donnent $\varphi_i(Y_i,T)\ y_i$ de (4);
- ceux qui ne contiennent pas y_i ; ils contiennent au moins une des variables Y_i ou T et donnent m_{Y_iT} de (4).

THEOREME 3. Une condition nécessaire et suffisante pour que la fonction $f(Y,Z,T)$ admette la décomposition $g[\varphi(Y,T), Z,T]$ est que le coefficient de toute variable $y_i \in Y$ dans l'écriture galoisienne de $f\ (Y,Z,T)$ soit de la forme :

$$\alpha\ (Z,T)\ \varphi_i\ (Y_i, T)$$

où $Y_i = \int_Y y_i$. Alors $\tilde{\varphi}(Y,T)$ est la somme disjonctive sans répétition des monômes $\varphi_i\ (Y_i, T)\ y_i$ et :

$$g(\varphi,Z,T) = \alpha\ (Z,T)\ \varphi\ (Y,T) \oplus \gamma\ (Z,T).$$

Démonstration. La condition est nécessaire, d'après la formule (4), en faisant jouer le rôle de y_i à toute variable appartenant à Y, à l'intérieur même du crochet ($\alpha(Z,T)$ reste ainsi identique).

Réciproquement, la condition est suffisante. En effet, on peut écrire : $f(Y,Z,T) = \alpha(Z,T)\ \varphi_1(Y_1, T)\ y_1 \oplus \gamma_1(Y_1, Z,T)$.

Les monômes contenant y_2 sont : $\alpha(Z,T)\ \varphi_2(Y_2, T)\ y_2$. Soit ils contiennent y_1 et ils appartiennent à $\alpha(Z,T)\ \varphi_1(Y_1, T)\ y_1$, soit ils ne contiennent pas y_1, ils appartiennent à $\gamma_1(Y_1, Z, T)$ et on peut mettre en facteur $\alpha(Z,T)$. On continue jusqu'à ce que $\gamma_j(Z_j, T)$ ne contienne plus de y_i ; on est alors arrivé à :

$$f(Y,Z,T) = \alpha(Z,T)\ \varphi(Y,T) \oplus \gamma(Z,T)$$

qui est décomposable.

THEOREME 4. Une condition nécessaire et suffisante pour que la fonction $f(Y,Z,T)$ admette la décomposition non disjointe $g[\varphi(Y,T), Z, T]$ est que :

$$\Delta_{y_i} = f^*(0, Y_i, Z, T)\ f^*(1, Y_i, Z,T) + f(0,Y'_i,Z',T')\ f(1, Y'_i, Z', T')$$

soit de la forme $\alpha^*(Z,T) + \varphi^*_i(Y_i, T)$, pour tout $y_i \in Y (Y_i = \int_Y y_i)$

Démonstration. D'après le théorème 3, une condition nécessaire et suffisante pour que $f(Y,Z,T)$ admette la décomposition $g[\varphi(Y,T),Z,T]$ est que le coefficient d'une variable y_i (pour tout $y_i \in Y$) dans l'écriture galoisienne, c'est-à-dire $f(0, Y_i, Z, T) \oplus f(1,Y_i,Z,T)$ (où $Y_i = \int_Y y_i$), soit de la forme $\alpha(Z,T)\ \varphi_i(Y_i, T)$; ce qui devient par dualité, en remarquant que $f^*(Y, Z, T) = g^*(\varphi^*, Z, T)$:

$$f^*(0,Y_i,Z,T) \Theta f^*(1,Y_i,Z,T) = \alpha^*(Z,T) + \varphi^*_i(Y_i,T)$$

$$f^*(0,Y_i,Z,T)\, f^*(1,Y_i,Z,T) + f^{*\prime}(0,Y_i,Z,T)\, f^{*\prime}(1,Y_i,Z,T) = \alpha^*(Z,T) + \varphi^*_i(Y_i,T)$$

$$f^*(0,Y_i,Z,T)\, f^*(1,Y_i,Z,T) + f(0,Y'_i,Z',T')\, f(1,Y'_i,Z',T') = \alpha^*(Z,T) + \varphi^*_i(Y_i,T).$$

2. Algorithme pour trouver les décompositions non disjointes simples.

a. Etant donnée la fonction booléenne f(X) où $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, on calcule les n quantités :

$$\Delta_{x_i} = f^*(0,X_i)\, f^*(1,X_i) + f(0, X'_i)\, f(1,X'_i)$$

où $X_i = \int_X x_i$, puis leurs décompositions non disjointes simples par rapport à l'addition.

b. Considérons arbitrairement une variable x_i et son coefficient galoisien Δ_{x_i}. Considérons toujours arbitrairement une somme de termes de la décomposition non disjointe additive de Δ_{x_i}, soit $\alpha^*(Z,T)$ ($\alpha^*(Z,T)$ peut être choisi nul ou égal à Δ_{x_i}). Comme dans le théorème 4, appelons $\varphi^*_i\,(Y_i, T)$ l'ensemble des termes de Δ_{x_i} n'appartenant pas à $\alpha^*(Z,T)$ ($\Delta_{x_i} = \alpha^*(Z,T) + \varphi^*_i\,(Y_i, T)$).

D'après le théorème 4, une condition nécessaire et suffisante pour que f (X) admette la décomposition non disjointe simple $g[\varphi(Y,T), Z,T] = \alpha(Z,T)\,\varphi(Y,T) \oplus \gamma(Z,T)$ est :

C1 : Y est l'ensemble des lettres apparaissant dans $\varphi^*_i\,(Y_i,T)$ et dont les coefficients Δ_j sont de la forme :
$\Delta_j = \alpha^*(Z,T) + \varphi^*_j\,(Y_j, T)$, de x_i, enfin des variables x_k de X n'apparaissant pas dans Δ_j et telles que $\Delta_k = \alpha^*(Z,T) + \varphi^*_k\,(Y_k)$;

C2 : T est l'ensemble des variables des $\varphi^*_j\,(Y_j, T)$ (pour toute variable y_j de Y) qui ne sont pas des variables Y.

C3 : Z est l'ensemble des variables restantes de X.

Exemple,

$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x'_3\, x'_4 + x_1\, x'_2\, x'_3 + x'_2\, x_3\, x_4 + x_1 x_3 x_4 + x_1 x'_2 x_4$

est donnée par sa base complète.

a. Une base première est : $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = x'_3 x'_4 + x_1 x'_2 x'_3 + x'_2 x_3 x_4 + x_1 x_3 x_4$.

Calculons les quatre quantités Δ_{x_i} et leurs décompositions non disjointes par rapport à l'addition:

α. $f(0,x_2,x_3,x_4) = x'_3\, x'_4 + x'_2\, x_3\, x_4$

$f(1,x_2,x_3,x_4) = x'_3\, x'_4 + x'_2\, x'_3 + x'_2\, x_3\, x_4 + x_3\, x_4$

$f^*(0,x_2,x_3,x_4)\ f^*(1,x_2,x_3,x_4) = (x'_3+x'_4)(x'_2+x'_3)(x_3+x_4) = x'_3 x_4 + x'_2 x_3 x_4$

$f(0,x'_2,x'_3,x'_4) f(1,x'_2,x'_3,x'_4) = (x_3x_4 + x_2 x'_3 x'_4)(x_3x_4 + x_2x_3 + x'_3x'_4)$

$= x_3\, x_4 + x_2\, x'_3\, x'_4$

$\Delta_{x_1} = x_4 + x'_2\, x_3 + x_2\, x'_3$.

Δ_{x_1}, qui admet une base première unique, a pour tableau

	x_2	x_3	x_4
x_2	1	1	
x_3	1	1	
x_4			1

et a donc pour décomposition :

- décomposition disjointe maximale : $[x_4] + [x'_2 x_3 + x_2\, x'_3]$;
- décompositions non disjointes : $[x_4] + [x'_2\, x_3 + x_2\, x'_3]$ toujours,

puisque $Y = x_2$, $Z = x_4$, $T = x_3$ ou $Y = x_3$, $Z = x_4$, $T = x_2$.

β. $f(x_1, 0, x_3, x_4) = x'_3 x'_4 + x_1 x'_3 + x_3 x_4 + x_1 x_3 x_4$

$f(x_1,1,x_3,x_4) = x'_3 x'_4 + x_1 x_3 x_4$

$f^*(x_1,0,x_3,x_4) f^*(x_1,1,x_3,x_4) = (x'_3+x'_4)(x_1+x'_3)(x_3+x_4) = x_1 x_3 x'_4 + x'_3 x_4$

$f(x'_1,0,x'_3,x'_4) f(x'_1,1,x'_3,x'_4) = (x_3x_4 + x'_1x_3 + x'_3x'_4)(x_3x_4 + x'_1x'_3x'_4)$

$= x_3\, x_4 + x'_1\, x'_3\, x'_4$

$\Delta_{x_2} = x_4 + x_1\, x_3 + x'_1 x'_3$.

On trouve, de même , pour seule décomposition **non** disjointe de Δ_{x_2} la décomposition disjointe $[x_4]+[x_1\ x_3 + x'_1\ x'_3]$.

γ. $f(x_1,x_2,0,x_4)=x'_4+x_1x'_2$

$f(x_1,x_2,1,x_4)=x'_2x_4+x_1x_4$

$f^*(x_1,x_2,0,x_4)f^*(x_1,x_2,1,x_4)=x'_4(x_1+x'_2)(x'_2+x_4)(x_1+x_4)=x_1x'_2x'_4$

$f(x'_1,x'_2,0,x'_4)f(x'_1,x'_2,1,x'_4)=(x_4+x'_1x_2)(x_2x'_4+x'_1x'_4)=x'_1x_2x'_4$

$\Delta_{x_3} = x'_1\ x_2\ x'_4 + x_1\ x'_2\ x'_4$ n'admet pas de décomposition **non** disjointe simple non triviale (son tableau n'étant constitué que de 1).

δ. $f(x_1,x_2,x_3,0) = x'_3+x_1x'_2x'_3$

$f(x_1,x_2,x_3,1) = x_1\ x'_2\ x'_3 + x'_2\ x_3 + x_1\ x_3 + x_1\ x'_2$

$f^*(x_1,x_2,x_3,0)\ f^*(x_1,x_2,x_3,1) = x'_3(x'_2+x_3)(x_1+x_3)(x_1+x'_2)=x_1x'_2x'_3$

$f(x'_1,x'_2,x'_3,0)f(x'_1,x'_2,x'_3,1) = x_3(x_2x'_3+x'_1x'_3+x'_1x_2) =x'_1x_2x_3$

$\Delta_{x_4} = x_1\ x'_2\ x'_3 + x'_1\ x_2\ x_3$ n'admet aussi pas de décomposition **non** disjointe.

b. Le seul terme commun à plusieurs des quantités Δ_{x_i} est x_4.

D'où :
$$\begin{cases} \alpha^*(Z,T) = x_4 \\ \varphi^*_1(Y_1,T)= x'_2\ x_3 + x_2x'_3 \\ \varphi^*_2(Y_2,T)= x_1\ x_3 + x'_1\ x'_3 . \end{cases}$$

La partition de X correspondant à l'unique décomposition est donc :

$$\boxed{Y = \{x_1,\ x_2\}\ ,\ Z = x_4,\ T = x_3}$$

c. Pour construire la fonction décomposée correspondante $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = g\left[\varphi(x_1, x_2, x_3), x_3, x_4\right]$, on peut opérer de deux façons :

α. à partir de la forme galoisienne de $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 1 \oplus x_3 \oplus x_4 \oplus x_1 x_2 x_4 \oplus x_1 x_3 x_4 \oplus x_1 x_4 \oplus x_2 x_3 x_4$$

Considérons d'une part les monômes qui contiennent ni x_1, ni x_2 ; d'autre part les autres monômes :

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left[x_1 x_2 x_4 \oplus x_1 x_3 x_4 \oplus x_1 x_4 \oplus x_2 x_3 x_4\right] \oplus \left[1 \oplus x_3 \oplus x_4\right]$$

D'après la démonstration du théorème 3, on peut construire $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ à partir de $\varphi_1(Y_1, T) = x_2 x_3 + x'_2 x'_3 = x_2 \oplus x_3 \oplus 1$ et $\varphi_2(Y_2, T) = x'_1 x_3 + x_1 x'_3 = x_1 \oplus x_3$.

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = x_1 (x_2 \oplus x_3 \oplus 1) \oplus x_2 x_3 = x_1 x_2 \oplus x_1 x_3 \oplus x_1 \oplus x_2 x_3$$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_4 (x_1 x_2 \oplus x_1 x_3 \oplus x_1 \oplus x_2 x_3) \oplus 1 \oplus x_3 \oplus x_4$$

$$= x_4 (x_1 x_2 \oplus x_1 x_3 \oplus x_1 \oplus x_2 x_3 \oplus a) \oplus 1 \oplus x_3 \oplus a' x_4$$

si a est un paramètre booléen.

Finalement :

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = a \oplus x_1 x_2 \oplus x_1 x_3 \oplus x_1 \oplus x_2 x_3$$
$$g(\varphi, x_3, x_4) = \varphi x_4 \oplus x_3 \oplus 1 \oplus a' x_4$$

β. à partir de la forme canonique de $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$.

- C H A P I T R E V -

P R O G R A M M E E T E X E M P L E S

V - A - PROGRAMME POUR LA RECHERCHE DES PARTITIONS REALISANT LES DECOMPOSITIONS SIMPLES DISJOINTES D'UNE FONCTION BOOLEENNE SIMPLE DONNEE.

Le programme ALGOL est mis sous forme de procédures juxtaposées; il réalise la partie essentielle de l'algorithme IV A 2 pour trouver les décompositions simples disjointes d'une fonction booléenne simple : la recherche des partitions réalisant ces décompositions.

Le programme ne suit pas mot à mot l'algorithme qui est adapté à un calcul fait à la main. Par exemple, on calcule aisément manuellement :

$$\Delta_i = f^* (0, X_i)\, f^* (1, X_i) + f (0, X_i')\, f (1, X_i'),$$

tandis qu'il nous a semblé plus rapide de calculer à la machine :

$$\Delta_i = [f(0,X) + f(1,X)]^* + [f^*(0, X') + f^*(1, X')]^*$$

(c'est la procédure DERIVDUALES).

Faisons encore la remarque suivante. Supposons que Δ_i admette p décompositions disjointes minimales par rapport à l'addition :

$$\Delta_i = \alpha^*_{i,1}(C_1) + \alpha^*_{i,2} (C_2) + \ldots + \alpha^*_{i,p} (C_p).$$

En théorie, il faudrait considérer 2^p $\alpha^*(Z)$ différents. Pratiquement, après avoir choisi un $\alpha^*(Z)$ non nul et si C_1 (voir toujours IV A 2) n'est pas vérifié pour la lettre y_1 apparaissant dans $\varphi_i^*(Y_i)$, alors tout $\alpha^*(Z)$ multiple de l'ancien $\alpha^*(Z)$ doit obligatoirement contenir $\alpha^*_{i,k}(C_k)$, si C_k est la classe de y_1 (autrement y_1 ne vérifierait toujours pas C_1).

Les données du programme sont N (le nombre de variables), F[I] (des monômes de la fonction à décomposer), M (le nombre des monômes F[I])et les entrées de la procédure PREPARE1(N) (le détail des entrées est fourni par le COMMENTAIRE de PREPARE1(N)).

Les résultats sont :

- la base complète de la fonction à décomposer;
- une base irredondante;
- l'inscription DECOMPOSITION ADDITIVE (respectivement MULTIPLICATIVE et DISJONCTIVE) si la fonction est décomposable par rapport à la somme (respectivement au produit et à la disjonction) suivie de la liste des sous-ensembles minimaux;
- si la fonction n'est pas décomposable par rapport à un opérateur, l'inscription DECOMPOSITION suivie de la liste des sous-ensembles maximaux (si tout sous-ensemble maximal ne contient qu'une seule variable, la fonction donnée n'admet pas de décomposition simple disjointe).

Le programme est :

RECHERCHE DES PARTITIONS REALISANT LES DECOMPOSITIONS SIMPLES DISJOINTES D'UNE FONCTION BOOLEENNE SIMPLE DONNEE.

```
'DEBUT'
    'ENTIER' I,K,N,M :: LIRE(N,M) ::
    'DEBUT'
    'ENTIER' 'TABLEAU'   F.(1:200).,Y.(1:N).,NOM,RANG,MASQUE.(1:36), ::

'PROCEDURE'ECRIRDCL(A)::'ENTIER'A::
                                                                    'CODE'
        TRA     *+6
LOCAT   PSS     1
LISTE1  PZE     1
        MZE     LOCAT,C,1
LISTE2  PZE     1
        PZE     LOCAT,C,C
        TSX     P1-1,4
        SXA     LOCAT,2
        CLA*    LOCAT
        STO     LOCAT
        EXTERN  JOBOL
        CALL    JOBOL(LISTE1)
'FCODE'::

'PROCEDURE'RCH::
                                                                    'CODE'
        CALL    JOBOL(LISTE2)
        CLA     =48
        STO     LOCAT
        CALL    JOBOL(LISTE1)
'FCODE'::

'ENTIER' 'PROCEDURE' OU(A,B) :: 'VALEUR' A,B :: 'ENTIER' A,B ::
'COMMENTAIRE' UNION LOGIQUE DE A ET DE B ::
                                                                    'CODE'
        CAL     F3+1
        ORA     F3+2
        SLW     F3
'FCODE' ::

'ENTIER' 'PROCEDURE' ET(A,B) :: 'VALEUR' A,B :: 'ENTIER' A,B ::
'COMMENTAIRE' INTERSECTION LOGIQUE DE A ET DE B ::
                                                                    'CODE'
        CAL     F4+1
        ANA     F4+2
        SLW     F4
'FCODE' ::

'ENTIER' 'PROCEDURE' DJ(A,B) :: 'VALEUR' A,B :: 'ENTIER' A,B ::
'COMMENTAIRE ' DISJONCTION DE A ET DE B ::
                                                                    'CODE'
        CAL     F5+1
        COM
```

```
        SLW     F5
        CAL     F5+2
        COM
        ANA     F5+1
        ORA     F5
        SLW     F5
'FCODE' ::

'ENTIER' 'PROCEDURE' NG(A) :: 'VALEUR' A :: 'ENTIER' A ::
'COMMENTAIRE' COMPLEMENT LOGIQUE DE A ::
                                                        'CODE'
        CAL     F6+1
        COM
        SLW     F6
'FCODE' ::

'REEL' 'PROCEDURE' HASARD(NO) :: 'ENTIER' NO ::
                                                        'CODE'
        TSX     P7-1,4
        SXA     F7+1,2
        CLA*    F7+1
        ALS     7
        ADD*    F7+1
        ADD     *+8
        STO*    F7+1
        CLA*    F7+1
        ARS     8
        ORA     *+5
        FAD     *+4
        STO     F7
        TRA     *+3
        OCT     211715164025
        PTW
'FCODE' ::

'ENTIER' 'PROCEDURE' TD(A,N) :: 'VALEUR' A,N :: 'ENTIER' A,N ::
'COMMENTAIRE' A EST TRANSLATE VERS LA DROITE DE N POSITIONS , LES
POSITIONS LIBEREES SONT MISES A ZERO ::
                                                        'CODE'
        CLA     F8+2
        STA     *+2
        CAL     F8+1
        ARS     **
        SLW     F8
'FCODE' ::

'ENTIER' 'PROCEDURE' TG(A,N) :: 'VALEUR' A,N :: 'ENTIER' A,N ::
'COMMENTAIRE' A EST TRANSLATE VERS LA GAUCHE DE N POSITIONS , LES
POSITIONS LIBEREES SONT MISES A ZERO ::
                                                        'CODE'
        CLA     F9+2
```

```
        STA     *+2
        CAL     FS+1
        ALS     **
        SLW     FS
'FCODE' ::


'ENTIER' 'PROCEDURE' ROT(A,N) :: 'VALEUR' A,N :: 'ENTIER' A,N ::
'COMMENTAIRE' A SUBIT UNE ROTATION DE N POSITIONS ::
                                                        'CODE'
        CLA     F1C+2
        STA     *+2
        LDQ     F1C+1
        RQL     **
        STQ     F1C
'FCODE' ::


'ENTIER' 'PROCEDURE' REUNION(F,M) :: 'VALEUR' M ::
   'ENTIER' M :: 'ENTIER' 'TABLEAU' F ::
'COMMENTAIRE ' CETTE PROCEDURE PREND L'UNION LOGIQUE DES
M PREMIERES MEMOIRES DU TABLEAU ::
                                                        'CODE'
        CLA     F11+2
        PAX     ,1
        ADD     F11+1
        STA     F11+1
        CLA     =0
        ORA*    F11+1
        TIX     *-1,1,1
        SLW     F11
        CLA     F11+1
        SUB     F11+2
        STA     F11+1
'FCODE' ::


   'ENTIER' 'PROCEDURE' CR    (A) :: 'VALEUR' A :: 'ENTIER' A ::
                                                        'CODE'
        CAL     F12+1
        ARS     18
        ORA     F12+1
        ANA     =0777777
        SLW     F12
'FCODE' ::


'PROCEDURE' HASFONC1(F,M,N,NC) :: 'VALEUR' M,N ::
   'ENTIER' M,N,NC :: 'ENTIER' 'TABLEAU' F ::
'COMMENTAIRE'
CETTE PROCEDURE FABRIQUE DANS LE TABLEAU F UNE FONCTION AU HASARD
DE M MONOMES ET DE N VARIABLES.
NO EST UNE VALEUR SANS SIGNIFICATION QUI DOIT ETRE INITIALISEE A UNE
VALEUR IMPAIRE ::
   'DEBUT' 'ENTIER' B.S.I.A :: 'REEL' R ::
```

```
    B:=262143 ::
    S:=REUNION(RANG,N) :: S:=OU(S,TG(S,18)) ::
    'POUR' I:=1 'PAS' 1 'JUSQUA' M 'FAIRE'
    'DEBUT' R:=HASARD(NC) ::
       A:=NG(NC) ::
'SI' R 'SUPER' 0.5 'ALORS'
A:=OU(ET(NC,TG(A,18)),ET(NC,B))
'SINON' A:=OU(ET(NC,NG(B)),ET(TD(A,18),NC)) ::
    F.(I).:=ET(S,A)
    'FIN'
'FIN' HASFONC1 ::


    'PROCEDURE' PREPARE1(N) :: 'VALEUR' N :: 'ENTIER' N ::
'COMMENTAIRE'
CETTE PROCEDURE FABRIQUE LE TABLEAU DES MASQUES .
ELLE PREPARE LA MACHINE A TRAITER DES PROBLEMES DE N VARIABLES.
ELLE LIT PAR EDONNEE 2*N DONNEES :
CHAQUE GROUPE DE 2 NOMBRES CORRESPOND A UNE VARIABLE :
LE PREMIER NOMBRE EST LE RANG BINAIRE ( COMPRIS ENTRE 1 ET 18 ) DE LA
VARIABLE ,LE DEUXIEME NOMBRE EST LE CODE D.C.B. DU NOM DE LA VARIABLE ::
    'DEBUT' 'ENTIER' I,S ::
       MASQUE.(1).:=1 ::
    'POUR' I:=2 'PAS' 1 'JUSQUA' 36 'FAIRE'
       MASQUE.(I).:=TG(MASQUE.(I-1).,1) ::
       'POUR' I:=1 'PAS' 1 'JUSQUA' N 'FAIRE'
       'DEBUT' S:=EDONNEE ::
       RANG.(I).:=MASQUE.(S). ::
       RANG.(I+18).:=MASQUE.(S+18). ::
       NOM.(I).:=EDONNEE
    'FIN'
    'FIN' PREPARE1 ::


'PROCEDURE' EXTRF1(F,M,N,LIGNE) ::
    'VALEUR' M,N,LIGNE :: 'ENTIER' M,N,LIGNE ::
    'ENTIER' 'TABLEAU' F ::
'COMMENTAIRE' CETTE PROCEDURE IMPRIME LES M MONOMES D'UNE FONCTION
DE N VARIABLES . LIGNE EST LE NOMBRE DE CARACTERES PAR LIGNE.
CE NOMBRE DOIT ETRE INFERIEUR A 120 ::
'DEBUT' 'ENTIER' CAR,LIBRE,TAU,I,J,A,B,LA ::
    CAR:=0 :: LIBRE:=LIGNE-2*N ::
    SAUTLIGNE :: RCH ::
    'POUR' I:=1 'PAS' 1 'JUSQUA' M 'FAIRE'
    'DEBUT' 'SI' CAR'SUPER'LIBRE 'ALORS' 'DEBUT' SAUTLIGNE :: RCH ::
    CAR:=0 'FIN' ::
       CAR:=CAR+3 :: A:=F.(I). :: B:=TD(A,18) ::
       A:=ET(A,262143) :: TAU:=OU(A,B) ::
       'SI' TAU=0 'ALORS' 'DEBUT' ECRIRDCB(1) :: 'ALLER' STOP 'FIN' ::
       'POUR' J:=1 'PAS' 1 'JUSQUA' N 'FAIRE'
       'DEBUT' 'SI' ET(TAU,RANG.(J).)'NONEG'0 'ALORS'
       'DEBUT' LA:=NOM.(J). :: ECRIRDCB(LA) :: CAR:=CAR+1 ::
          'SI' LA'INFER'0 'ALORS' 'DEBUT' LA:=TD(LA,6) ::
       ECRIRDCB(LA) :: CAR:=CAR+1 'FIN' ::
       'SI' ET(B,RANG.(J).)'NONEG'0 'ALORS' 'DEBUT' CAR:=CAR+1 ::
```

```
        ECRIRDCB(12) 'FIN'
        'FIN'
    'FIN' ::
    'SI' I'NONEG'M 'ALORS' 'DEBUT' ECRIRDCB(48) :: ECRIRDCB(16) ::
        ECRIRDCB(48) 'FIN' ::
    'FIN' ::
STOP: 'FIN' EXTRF1 ::


    'PROCEDURE' DUALE1(F,M,N,G,P,DC,MAX) :: 'VALEUR' M,N,MAX ::
    'ENTIER' M,N,P,MAX :: 'ETIQUETTE' DC :: 'ENTIER' 'TABLEAU' F,G ::
'COMMENTAIRE'
CETTE PROCEDURE CALCULE LA DUALE DE LA FONCTION DE M MONOMES
ET LA PLACE DANS LE TABLEAU G.(1:MAX).   . SI LE NOMBRE DE MONOMES DE
G EST SUPERIEUR A MAX ON EST RENVOYE A L'ETIQUETTE DC ::
    'DEBUT' 'ENTIER' S,I,Q,P1,P2,J,K,R,L ::
        'ENTIER' 'TABLEAU' AUX.(1:MAX). ::
    S:=F.(1). :: P:=1 ::
    'POUR' I:=1 'PAS' 1 'JUSQUA' N 'FAIRE'
    'DEBUT' Q:=ET(RANG.(I).,S) ::
        'SI' Q'NONEG'0 'ALORS' 'DEBUT' G.(P).:=Q :: P:=P+1 'FIN'
            'SINON' 'DEBUT' Q:=ET(RANG.(I+18).,S) ::
            'SI' Q'NONEG'0 'ALORS' 'DEBUT' G.(P).:=Q ::
            P:=P+1 'FIN'
        'FIN'
    'FIN' :: P:=P-1 ::
    'POUR' I:=2 'PAS' 1 'JUSQUA' M 'FAIRE'
    'DEBUT' S:=F.(I). :: P1:=P2:=0 ::
    'POUR' J:=1 'PAS' 1 'JUSQUA' P 'FAIRE'
        'DEBUT' 'SI' ET(G.(J).,S)'NONEG'0 'ALORS'
            'DEBUT' P1:=P1+1 :: G.(P1).:=G.(J). 'FIN'
        'SINON' 'DEBUT' P2:=P2+1 :: AUX.(P2).:=G.(J). 'FIN'
    'FIN' :: P:=P1 ::
    'SI' P2=0 'ALORS' 'ALLERA' FINI ::
    'POUR' J:=1 'PAS' 1 'JUSQUA' N 'FAIRE'
    'DEBUT' Q:=RANG.(J). ::
        'SI' ET(Q,S)=0 'ALORS'
        'DEBUT' Q:=RANG.(J+18). :: 'SI' ET(Q,S)=0
        'ALORS' 'ALLERA' FINJ 'FIN' ::
        'POUR' K:=1 'PAS' 1 'JUSQUA' P2 'FAIRE'
        'DEBUT' R:=OU(Q,AUX.(K).) ::
        'SI' ET(R,TB(R,18))'NONEG'0 'ALORS' 'ALLERA' FINK ::
        'POUR' L:=1 'PAS' 1 'JUSQUA' P1 'FAIRE'
        'SI' OU(R,G.(L).)=R 'ALORS' 'ALLERA' FINK ::
        P:=P+1 ::
        'SI' P'SUPER'MAX 'ALORS' 'ALLERA' DC ::
        G.(P).:=R ::
    FINK: 'FIN' ::
    FINJ: 'FIN' ::
FINI: 'FIN'
'FIN' DUALE1 ::


    'PROCEDURE' BASEPREMI(F,M,N) :: 'VALEUR' N ::
```

```
'COMMENTAIRE'
CETTE PROCEDURE CALCULE UNE BASE IRREDONDANTE DE LA FONCTION F ,
LE NOMBRE  M  DE MONOMES EST RECALCULE ::
   'DEBUT' 'ENTIER' I,A,K,J,X,IC,SAM,SAB,S,KO,K1,K2,ALPHA,BETA,
   I1,I2 :: 'ENTIER' 'TABLEAU' AUX,RD,RC.(1:M). ::
      I:=M ::
   DEPART: A:=F.(I). :: K:=0 ::
      'POUR' J:=1 'PAS' 1 'JUSQUA' I-1,I+1 'PAS' 1 'JUSQUA' M 'FAIRE'
      'DEBUT' X:=OU(A,F.(J).) ::
      'SI' ET(X,TD(X,18))=0 'ALORS' 'DEBUT' K:=K+1 ::
      AUX.(K).:=ET(X,NG(A)) 'FIN'
   'FIN' ::
   'SI' K'INFEG'1 'ALORS' ECHEC: 'DEBUT' 'SI' I=1 'ALORS'
   'ALLERA' STOP ::
   I:=I-1 :: 'ALLERA' DEPART 'FIN' ::
   IO:=1 :: REDUC1(AUX,K) ::
   TEST: 'SI' K'INFEG'1 'ALORS' 'ALLERA' ECHEC ::
      SAM:=REUNION(AUX,K) :: SAB:=ET(SAM,TD(SAM,18)) ::
      'SI' SAB=0 'ALORS' 'ALLERA' ECHEC ::
      SAM:=DJ(SAM,OU(SAB,TG(SAB,18))) ::
   CHOIX: S:=RANG.(IO). :: BETA:=TG(S,18) ::
      'SI' ET(S,SAB)=0 'ALORS' 'DEBUT' 'SI' IO=N 'ALORS'
      'ALLERA' ECHEC 'SINON' 'DEBUT' IO:=IO+1 ::
      'ALLERA' CHOIX 'FIN'
      'FIN' :: KO:=K1:=K2:=0 ::
   'POUR' J:=1 'PAS' 1 'JUSQUA' K 'FAIRE'
   'DEBUT' ALPHA:=AUX.(J). ::
      'SI' ET(SAM,ALPHA)=0 'ALORS'
      'DEBUT' 'SI' ET(S,ALPHA)'NONEG'0 'ALORS'
         'DEBUT' K1:=K1+1 ::
         RD.(K1).:=DJ(S,ALPHA)
      'FIN'
      'SINON'
         'SI' ET(BETA,ALPHA)'NONEG'0 'ALORS'
         'DEBUT' K2:=K2+1 :: RC.(K2).:=DJ(BETA,ALPHA) 'FIN'
         'SINON'
         'DEBUT' KO:=KO+1 ::
         AUX.(KO).:=ALPHA 'FIN'
      'FIN'
   'FIN' ::
   K:=KO ::
   'SI' K1*K2=0 'ALORS' Z: 'DEBUT' 'SI' IO=N 'ALORS' 'ALLERA'
   ECHEC :: IO:=IO+1 :: 'ALLERA' TEST 'FIN' ::
   'POUR' I1:=1 'PAS' 1 'JUSQUA' K1 'FAIRE'
   'DEBUT' ALPHA:=RD.(I1). ::
      'POUR' I2:=1 'PAS' 1 'JUSQUA' K2 'FAIRE'
      'DEBUT' BETA:=OU(ALPHA,RC.(I2).) ::
      'SI' BETA=0 'ALORS' 'ALLERA' SUCCES ::
      'SI' ET(BETA,TD(BETA,18))=0 'ALORS'
      INCLURE1(AUX,K,BETA)
      'FIN'
   'FIN' ::
   'ALLERA' Z ::
   SUCCES: 'POUR' J:=I+1 'PAS' 1 'JUSQUA' M 'FAIRE'
      F.(J-1).:=F.(J). :: M:=M-1 ::
```

```
      'ALLERA' ECHEC ::
   STOP: 'FIN' BASEPREM1 ::


'PROCEDURE' INCLUREI(F,J,A) ::
   'VALEUR' A :: 'ENTIER' A,J :: 'ENTIER' 'TABLEAU' F ::
'COMMENTAIRE'
CETTE PROCEDURE INTRODUIT DANS LA FONCTION F DE J MONOMES LE
MONOME A . J EST RECALCULE . TOUTES LES SIMPLIFICATIONS SONT FAITES.
NOTA: IL FAUT QUE DANS F TOUTE LES SIMPLIFICATIONS AIENT ETE FAITES ::
   'DEBUT' 'ENTIER' B,C,I,K :: 'BOOLEEN' RECUP ::
      'AIGUILLAGE' AIG:= MOINS,PLUS ::
      'SI' J=0 'ALORS' 'ALLERA' ALPHA ::
      I:=0 :: K:=1 :: RECUP:= 'FAUX' ::
   DEPART: I:=I+1 :: B:=F.(I). :: 'ALLERA' AIG.(K). ::
   MOINS: 'SI' A=OU(A,B) 'ALORS' 'ALLERA' STOP ::
   PLUS: C:=OU(A,B) ::
      'SI' C=B 'ALORS' 'DEBUT' 'SI' I=J 'ALORS' 'ALLERA' BETA ::
      B:=F.(J). :: J:=J-1 :: RECUP:= 'VRAI' :: K:=2 ::
      'ALLERA' PLUS 'FIN' ::
      'SI' RECUP 'ALORS' 'DEBUT' F.(I).:=B::RECUP:='FAUX' 'FIN' ::
        'SI' I=J 'ALORS' 'ALLERA' ALPHA :: 'ALLERA' DEPART ::
   ALPHA: J:=J+1 ::
      BETA: F.(J).:=A ::
   STOP: 'FIN' INCLURE1 ::


   'PROCEDURE' REDUC1(F,M) :: 'ENTIER' M :: 'ENTIER' 'TABLEAU' F ::
   'DEBUT' 'ENTIER' I,J ::
      J:=1 ::
      'POUR' I:=2 'PAS' 1 'JUSQUA' M 'FAIRE'
   INCLURE1(F,J,F.(I).) :: M:=J
   'FIN' REDUC1 ::


   'PROCEDURE' ENTR1(F,M) :: 'ENTIER' M :: 'ENTIER' 'TABLEAU' F ::
   'DEBUT' 'ENTIER' I,J,NV,A ::
      'POUR' I:=1 'PAS' 1 'JUSQUA' M 'FAIRE'
      'DEBUT' F.(I).:=0 ::
      NV:=EDONNEE ::
      'POUR' J:=1 'PAS' 1 'JUSQUA' NV 'FAIRE'
      'DEBUT' A:=EDONNEE ::
'SI' A'INFER' 0'ALORS' F.(I).:=OU( RANG.(18-A).,F.(I).)
      'SINON' F.(I).:=OU(RANG.(A).,F.(I).)
      'FIN'
   'FIN'
'FIN' ENTR1 ::


'PROCEDURE' COMPREM1(F,M,N,MAX,DC) :: 'VALEUR' N,MAX ::
   'ENTIER' M,N,MAX :: 'ENTIER' 'TABLEAU' F :: 'ETIQUETTE' DC ::
'COMMENTAIRE'
CETTE PROCEDURE CALCULE LES COMPOSANTS PREMIERS DE LA FONCTION.
M EST RECALCULE . EN CAS DE DEPASSEMENT DE CAPACITE ON OBTIENT DANS F
UNE BASE QUELCONQUE , ET ON EST RENVOYE A L' ETIQUETTE DC ::
```

```
    'DEBUT' 'ENTIER' I,J,S,I1,I2,P,Q,R,N1,N2 ::
       'ENTIER' 'TABLEAU' AUX.(1:MAX). ::
       I:=0 ::
    CAL: S:=REUNION(F,M) ::
    S:=ET(S,TD(S,18)) ::
    VAR: I:=I+1 :: 'SI' I'SUPER'N 'ALORS' 'ALLERA' STOP ::
    Q:=RANG.(I). :: R:=RANG.(I+18). ::
    'SI' ET(Q,S)=0 'ALORS' 'ALLERA' VAR ::
    N1:=0 :: N2:=MAX+1 ::
    'POUR' J:=1 'PAS' 1 'JUSQUA' M 'FAIRE'
    'DEBUT' P:=F.(J). ::
    'SI' ET(Q,P)'NONEG'0 'ALORS' 'DEBUT' N2:=N2-1 ::
AUX.(N2).:=DJ(P,Q)'FIN' 'SINON'
'SI' ET(R,P) 'NONEG' 0 'ALORS'
'DEBUT' N1:=N1+1::AUX.(N1).:=DJ(P,R)'FIN'
    'FIN' ::
    'POUR' I1:=1 'PAS' 1 'JUSQUA' N1 'FAIRE'
    'DEBUT' P:=AUX.(I1). ::
       'POUR' I2:=N2 'PAS' 1 'JUSQUA' MAX 'FAIRE'
       'DEBUT' R:=OU(P,AUX.(I2).) ::
       'SI' ET(R,TD(R,18))'NONEG'0 'ALORS' 'ALLERA'
       FINI :: INCLURE1(F,M,R) ::
       'SI' M=MAX 'ALORS' 'ALLERA' DC ::
    FINI: 'FIN'
    'FIN' :: 'ALLERA' CAL ::
    STOP:  'FIN' COMPREM1 ::


'PROCEDURE' DERIVDUALES(F,M,N,S,P,DC,MAX) ::
'VALEUR' M,N,MAX ::
'ENTIER' M,N,MAX ::
'ETIQUETTE' DC ::
'ENTIER' 'TABLEAU' F,S,P ::
'DEBUT'
    'ENTIER' K,J,K1,K0,P0,P1::
    'ENTIER' 'TABLEAU' SK.(1:200).,T0,T1,G0,G1.(1:400). ::
    'POUR' K:=1 'PAS' 1 'JUSQUA' N 'FAIRE'
    'DEBUT' K0:=K1:=0 ::
    'POUR' J:=1 'PAS' 1 'JUSQUA' M 'FAIRE'
    'DEBUT'
    'SI' ET(MASQUE.(K).,F.(J).)=MASQUE.(K). 'ALORS'
       'DEBUT'
       K1:=K1+1 ::
       T1.(K1).:=ET(F.(J).,NG(MASQUE.(K).)) ::
       'ALLERA' E10
       'FIN' ::
    'SI' ET(MASQUE.(K+18).,F.(J).)=MASQUE.(K+18). 'ALORS'
       'DEBUT'
       K0:=K0+1. ::
       T0.(K0).:=ET(F.(J).,NG(MASQUE.(K+18).)) ::
       'ALLERA' E10
       'FIN' ::
   K1:=K1+1 :: T1.(K1).:=F.(J). ::
   K0:=K0+1 :: T0.(K0).:=F.(J). ::
E10: 'FIN' ::
```

```
   'SI' K0    = 0 'ALORS'
'DEBUT'
   DUALE1(T1,K1,N,G1,P1,DC,200) ::
    P.(K).:=   P1::
   'POUR' J:=1 'PAS' 1 'JUSQLA' P.(K). 'FAIRE'
   S.(J,K).:=G1.(J). ::
      'ALLERA' E11
      'FIN' ::
   'SI' K1    = 0 'ALORS'
'DEBUT'
   DUALE1(T0,K0,N,G0,P0,DC,200) ::
    P.(K).:=   P0::
   'POUR' J:=1 'PAS' 1 'JUSQLA' P.(K). 'FAIRE'
   S.(J,K).:=G0.(J). ::
      'ALLERA' E11
      'FIN' ::
   DUALE1(T0,K0,N,G0,P0,DC,200) ::
   DUALE1(T1,K1,N,G1,P1,DC,200) ::
   'POUR' J:=1 'PAS' 1 'JUSQLA' K1 'FAIRE' T0.(K0+J).:=T1.(J). ::
   'POUR' J:=1 'PAS' 1 'JUSQLA' P1 'FAIRE' G0.(P0+J).:=G1.(J). ::
   K0:=K0+K1 :: P0:=P0+P1 ::
   DUALE1(T0,K0,N,T1,K1,DC,200) ::
   DUALE1(G0,P0,N,G1,P1,DC,200) ::
   'POUR' J:=1 'PAS' 1 'JUSQLA' P1 'FAIRE'
   T1.(J+K1).:=ROT(G1.(J).,18) ::
    P.(K).:=K1+P1::
   COMPREM1( T1,P.(K).,N,200,DC)::
   'POUR' J:=1 'PAS' 1 'JUSQLA' P.(K). 'FAIRE'
   S.(J,K).:=T1.(J).::
E11: 'FIN'
'FIN' DERIVDUALES ::


'ENTIER' 'PROCEDURE' EGTEDI(CACHE,S1,S2,L1,L2) ::
'ENTIER' CACHE,L1,L2 :: 'ENTIER' 'TABLEAU' S1,S2 ::
'DEBUT' 'ENTIER' I1,I2,Q1,Q2,R,CAC::Q1:=Q2:=0 ::
   CAC  :=OU(CACHE,ROT(CACHE,18))::
   'POUR' I1:=1 'PAS' 1 'JUSQLA' L1 'FAIRE'
   'SI' OU(S1.(I1).,CAC)=CAC 'ALORS'
   'DEBUT' Q1:=Q1+1 :: S1.(Q1).:=S1.(I1).
   'FIN' ::
   'POUR' I2:=1 'PAS' 1 'JUSQLA' L2 'FAIRE'
   'SI' OU(S2.(I2).,CAC)=CAC 'ALORS'
   'DEBUT' Q2:=Q2+1 :: S2.(Q2).:=S2.(I2).
   'FIN' ::
   'SI' Q1'NONEG'Q2 'ALORS' 'ALLERA' E2 ::
   'POUR' I1:=1 'PAS' 1 'JUSQLA' Q1 'FAIRE'
   'DEBUT' 'POUR' I2:=1 'PAS' 1 'JUSQLA' Q2 'FAIRE'
      'SI' S1.(I1).=S2.(I2). 'ALORS' 'ALLERA' E1 ::
      'ALLERA' E2 ::
E1: 'FIN' ::
   R:=1 :: 'ALLERA' E3 ::
   E2: R:=0 ::
   E3: EGTEDI:=R
```

```
'PROCEDURE' DECOMPOADDIT(S,P,N,C,L) ::
   'VALEUR' N ::
   'ENTIER' N ::
   'ENTIER' 'TABLEAU' S,P,C,L ::
   'COMMENTAIRE'
   ON PART D'UN TABLEAU S A DEUX ENTREES, ENSEMBLE DE
   TABLEAU S.(.,K)..UN TABLEAU S.(.,K). A P.(K). ELEMENTS
   REPRESENTE UN ENSEMBLE DE MONOMES PREMIERS.
   ON OBTIENT UN TABLEAU C A DEUX ENTREES, ENSEMBLE DE
   TABLEAUX C.(.,K)..UN TABLEAU C.(.,K). A L.(K).
   ELEMENTS REPRESENTE LES L.(K). SOUS-ENSEMBLE MINIMAUX
   CORRESPONDANT AUX DECOMPOSITIONS DISJOINTES SIMPLES
   PAR RAPPORT A L'ADDITION DE L'ENSEMBLE S.(.,K). DE
   MONOME PREMIERS ::
   'DEBUT'
   'ENTIER' H,I,J,K,M ::
   'ENTIER' 'TABLEAU' B.(1:200). ::
   'POUR' K:=1 'PAS' 1 'JUSQUA' N 'FAIRE'
   'DEBUT'
   B.(1).:=C ::
   'POUR' I:=1 'PAS' 1 'JUSQUA' P.(K). 'FAIRE'
   B.(I).:=CR(S.(I,K).) ::
   'SI' B.(1).=0 'ALORS'
   'DEBUT' C.(1,K).:=C :: M:=1 :: 'ALLERA' E20 'FIN' ::
   J:=P.(K). ::
   M:=0 ::
   ITER1: M:=M+1 :: C.(M,K).:=B.(1). ::
   ITER2: H:=1 ::
   'POUR' I:=1 'PAS' 1 'JUSQUA' J 'FAIRE'
   'SI' ET(C.(M,K).,B.(I).)=0 'ALORS'
   'DEBUT' B.(H).:=B.(I). :: H:=H+1 'FIN'
   'SINON' C.(M,K).:=OU(C.(M,K).,B.(I).) ::
   'SI' J'NONEG'H-1 'ALORS' J:=H-1 'SINON' 'ALLERA' ITER1 ::
   'SI' J'NONEG'0 'ALORS' 'ALLERA' ITER2 ::
   E20:
   C.(0,K).:=MASQUE.(K). :: C.(M+1,K).:=0 ::
   'POUR' I:=1 'PAS' 1 'JUSQUA' M 'FAIRE'
   C.(M+1,K).:=OU(C.(M+1,K).,C.(I,K).)::
   L.(K).:=M
'FIN'
'FIN' DE DECOMPOADDIT ::


   'PROCEDURE' DECOM(S,P,N,C,L,Y) ::
   'VALEUR' N ::
   'ENTIER' N ::
   'ENTIER' 'TABLEAU' S,P,C,L,Y ::
   'COMMENTAIRE'
   ELLE FOURNIT LE TABLEAU Y A N ELEMENTS. L'ELEMENT
   Y.(K). DONNE L'ENSEMBLE DES VARIABLES APPARTENANT
   A LA CLASSE MAXIMALE CONTENANT LA VARIABLE K ::
   'DEBUT'
   'ENTIER' K,J,I,M,Q,I1,E ::
```

```
'ENTIER' 'TABLEAU' D.(1:N).,S1,S2.(1:200). ::
'POUR' K:=1 'PAS' 1 'JUSQUA' N 'FAIRE'
'DEBUT' 'POUR' J:=1 'PAS' 1 'JUSQUA' L.(K). 'FAIRE'
'DEBUT' D.(J).:=C.(J,K). :: 'POUR' I:=1 'PAS' 1 'JUSQUA' L.(K).
'FAIRE'
'DEBUT' 'SI' ET(D.(J).,C.(I,K).)=C.(I,K). 'ALORS' 'ALLERA' E1 ::
'POUR' M:=1 'PAS' 1 'JUSQUA' N 'FAIRE'
'DEBUT'
'SI' ET(C.(J,M).,C.(I,K).)=0 'ALORS' 'ALLERA' E2 ::
'POUR' Q:=1 'PAS' 1 'JUSQUA' L.(M). 'FAIRE'
'DEBUT'
'SI' ET(C.(Q,M).,D.(J).) 'NONEG' C.(Q,M). 'ALORS' 'ALLERA' E3 ::
'POUR' I1:=1 'PAS' 1 'JUSQUA' P.(M). 'FAIRE' S1.(I1).:=S.(I1,M). ::
'POUR' I1:=1 'PAS' 1 'JUSQUA' P.(K). 'FAIRE' S2.(I1).:=S.(I1,K). ::
'SI' ECTEDI(D.(J).,S1,S2,P.(M).,P.(K).)=0 'ALORS'
'DEBUT' D.(J).:=OU(C.(I,K).,D.(J).) ::
 I:=0 ::'ALLERA' E1
'FIN' ::
'ALLERA' E2 ::
E3: 'FIN' ::
D.(J).:=OU(C.(I,K).,D.(J).) :: I:=0   :: 'ALLERA' E1 ::
E2: 'FIN' ::
E1: 'FIN'
'FIN' ::
'POUR' J:=2 'PAS' 1 'JUSQUA' L.(K). 'FAIRE' D.(1).:=ET(D.(1).,C.(J).)
::
L:=0 :: Y.(K).:=0 ::
'POUR' M:=1 'PAS' 1 'JUSQUA' N 'FAIRE'
'DEBUT'
'SI' ET(C.(L.(K).+1,K).+MASQUE.(K).,MASQUE.(M).)=0 'ALORS'
 'DEBUT'
'POUR' Q:=1 'PAS' 1 'JUSQUA' L.(M). 'FAIRE'
'DEBUT'
'SI' ET(C.(Q,M).,D.(1).) 'NONEG' C.(Q,M). 'ALORS' 'ALLERA' E5 ::
'POUR' I1:=1 'PAS' 1 'JUSQUA' P.(M). 'FAIRE'
S1.(I1).:=S.(I1,M). ::
'POUR' I1:=1 'PAS' 1 'JUSQUA' P.(K). 'FAIRE' S2.(I1).:=S.(I1,K). ::
'SI' ECTEDI(D.(1).,S1,S2,P.(M).,P.(K).)=1 'ALORS'
'DEBUT' Y.(K).:=OU(Y.(K).,MASQUE.(M).) :: 'ALLERA' E4 'FIN' ::
E5: 'FIN' 'FIN'
            'SINON' 'ALLERA' E4 ::
L:=L+MASQUE.(M). ::
E4: 'FIN' ::Y.(K).:=OU(Y.(K).,ET(C.(L.(K).+1,K).+C.(0,K).,NG(D.(1).)))
 ::
'POUR' M:=1 'PAS' 1 'JUSQUA' N 'FAIRE'
'DEBUT'
'SI' ET(MASQUE.(M).,E)=MASQUE.(M). 'ALORS' 'DEBUT'
'SI' ET(Y.(K).,C.(L.(M).+1,M).)=0
'ALORS' 'ALLERA' E8 'SINON' 'ALLERA' E6 'FIN' ::
E8: 'FIN' ::
'ALLERA' E7 ::
E6: Y.(K).:=MASQUE.(K). ::
E7: 'FIN'
'FIN' DECOM ::
```

```
'PROCEDURE' DECOMPOSITION(F,M,N,Y,K,DC) ::
  'VALEUR' N,M ::
  'ENTIER' N,M,K ::
  'ENTIER' 'TABLEAU' F,Y ::
  'ETIQUETTE' DC ::
  'DEBUT'
  'ENTIER' I ::
  'ENTIER' 'TABLEAU' AUX.(1:200).,S.(1:200,1:N).,
  C.(0:N+1,1:N).,P,L.(1:N).,TAB.(1:N,1:1).,
  CRA.(0:N+1,1:1).,TA,CA.(1:1). ::
  REDUC1 (F,M) ::
  ECRIRE ('('MONOMES')','('PREMIERS')') ::
  COMPREM1 (F,M,N,200,DC) ::
  EXTRF1 (F,M,N,75) ::
  SAUTLIGNE :: SAUTLIGNE ::
  ECRIRE ('('BASE')','('IRREDONDANTE')') ::
  BASEPREM1(F,M,N) ::
  EXTRF1 (F,M,N,75) ::
  SAUTLIGNE :: SAUTLIGNE ::
  'POUR' I:=1 'PAS' 1 'JUSQLA' M 'FAIRE' S.(I,1).:=F.(I). ::
  P.(1).:=M ::
  DECOMPO ADDIT(S,P,1,C,L) ::
  'SI' L.(1).'NONEG'1 'ALORS'
  'DEBUT'
  ECRIRE('('DECOMPOSITION')','('ADDITIVE')') ::
  K:=L.(1). ::
  'POUR' I:=1 'PAS' 1 'JUSQLA' K 'FAIRE' Y.(I).:=C.(I,1). ::
  'ALLERA' E30
  'FIN' ::
 DUALE1(F,M,N,AUX,K,DC,200) ::
  'POUR' I:=1 'PAS' 1 'JUSQLA' K 'FAIRE' S.(I,1).:=AUX.(I). ::
  P.(1).:=K ::
  DECOMPO ADDIT(S,P,1,C,L) ::
  'SI' L.(1).'NONEG'1 'ALORS'
  'DEBUT'
  ECRIRE('('DECOMPOSITION')','('MULTIPLICATIVE')') ::
  K:=L.(1). ::
  'POUR' I:=1 'PAS' 1 'JUSQLA' K 'FAIRE' Y.(I).:=C.(I,1). ::
  'ALLERA' E30
  'FIN' ::
  DERIVDUALES(F,M,N,S,P,DC,200) ::
  DECOMPO ADDIT(S,P,N,C,L) ::
  'POUR' K:=1 'PAS' 1 'JUSQLA' N 'FAIRE'
  TAB.(K,1).:=OU(MASQUE.(K).,C.(L.(K).+1,K).) ::
  TA.(1).:=N ::
  DECOMPO ADDIT(TAB,TA,1,CRA,CA) ::
  'SI' CA.(1).'NONEG'1 'ALORS'
  'DEBUT'
  ECRIRE('('DECOMPOSITION')','('DISJONCTIVE')') ::
  K:=CA.(1). ::
  'POUR' I:=1 'PAS' 1 'JUSQLA' K 'FAIRE' Y.(I).:=CRA.(I,1). ::
  'ALLERA' E30
  'FIN' ::
  DECOM(S,P,N,C,L,Y) ::
```

```
    ECRIRE('('DECOMPOSITION')') ::
    K:=N ::
    QUALF1(Y,K,N,F,I,DC,200) ::
    QUALF1(F,I,N,Y,K,DC,4) ::
    DC: EXTRF1(Y,K,N,120) ::
    'FIN' DECOMPOSITION ::

-------------------------------------------------------------

    PREPARE1(N) ::
    F.(1). := 6 + MASQUE.(22). :: F.(2). := 9 ::
    F.(3). := 8 + MASQUE.(20). :: F.(4). := 5 ::
    DC: ECRIRE('('DC')') ::
    SAUTLIGNE :: SAUTLIGNE ::
    DECOMPOSITION(F,M,N,Y,K,DC) ::
    'FIN'
'FIN' ::
```

IV - B - DES EXEMPLES.

Suivent six exemples. Le premier utilise le programme précédent. Le programme traitant les quatre exemples suivants en diffère par une plus grande abondance de sorties; il donne, à la suite de l'inscription DERIVDUALES la base complète de chaque coefficient Δ_{x_i}, à la suite de l'inscription DECOMPO ADDIT les décompositions disjointes par rapport à l'addition de chaque Δ_{x_i}, et enfin, à la suite de l'inscription DECOM, les sous-ensembles maximaux ou minimaux contenant chacune des variables. L'exemple 6 est le traitement de 100 fonctions de 4 variables générées par les procédures HASARD et HASFONC1.

Le premier exemple est la fonction $\hat{k}^u$ du contre-exemple du paragraphe ID3. Nous constatons bien qu'elle n'admet pas de décomposition simple disjointe.

Les deux exemples suivants sont ceux du paragraphe IV A 2. La fonction de l'exemple 4 n'admet pas de décomposition simple disjointe.

Etudions le cinquième exemple, fonction de 10 variables admettant 112 monômes premiers.

EXEMPLE 5. - A la base complète de f(Q,R,S,T,U,V,W,X,Y,Z), appliquons les parties d et e de l'algorithme IV A 2, puisque les parties a, b, c, ont été faites par le programme.

d. - Nous considérerons successivement les partitions (XYZ, QRSTUVW), ce qui introduira la fonction φ_1(X, Y, Z);(TUVW,φ_1 QRS), ce qui introduira la fonction φ_2(T,U,V,W); (RS, φ_1 φ_2 Q), ce qui introduira la fonction φ_3(R, S).

α. - Le tableau de décomposition de f(Q,R,S,T,U,V,W,X,Y,Z) relatif à la partition (XYZ, QRSTUVW)

QR'ST' + QR'SU' + QR'SV' + QR'SW' + QRS'T' + QRS'U' + QRS'V' + QRS'W'
+ Q'RST' + Q'RSU' + Q'RSV' + Q'RSW' + Q'R'S'T' + Q'R'S'U' + Q'R'S'V'
+ Q'R'S'W'

	QRS	QR'S'	QR'S	QRS'	Q'RS	Q'R'S'	Q'R'STUVW	Q'RS'TUVW	Q'T'	Q'U'	Q'V'	Q'W'
X'Y'	1	1					1	1				
X'Z	1	1					1	1				
Y'Z'	1	1					1	1				
YZ	1	1					1	1				
XY'Z			1	1	1	1			1	1	1	1
Y Z'			1	1	1	1			1	1	1	1

	RST'	RSU'	RSV'	RSW'	R'S'T'	R'S'U'	R'S'V'	R'S'W'	RS'T'	R'ST'	RS'U'	R'SU'
X'Y'	1	1	1	1	1	1	1	1				
X'Z	1	1	1	1	1	1	1	1				
Y'Z'	1	1	1	1	1	1	1	1				
Y Z	1	1	1	1	1	1	1	1				
XY'Z									1	1	1	1
YZ'									1	1	1	1

	RS'V'	R'SV'	RS'W'	R'SW'	QT'	QW'	QV'	QU'
X'Y'					1	1	1	1
X'Z					1	1	1	1
Y'Z'					1	1	1	1
Y Z					1	1	1	1
XY'Z	1	1	1	1				
YZ'	1	1	1	1				

donne :

$$\varphi_1 (X, Y, Z) = X'Y' + X'Z + Y'Z' + YZ$$

$$\varphi_1' (X, Y, Z) = XY'Z + YZ'$$

$$f(Q,R,S,T,U,V,W,X,Y,Z) = g_1(\varphi_1,Q,R,S,T,U,V,W) = QR'ST' + QR'SU' + QR'SV$$
$$+ QR'SW' + QRS'T' + QRS'U' + QRS'V' + QRS'W' + Q'RST' + Q'RSU' +$$
$$Q'RSV' + Q'RSW' + Q'R'S'T' + Q'R'S'U' + Q'R'S'V' + Q'R'S'W' + {}_1QRS$$
$$+ \varphi_1 QR'S' + \varphi_1' QR'S' + \varphi_1' QRS' + \varphi_1' Q'RS + \varphi_1' Q'R'S' + \varphi_1 Q'R'STUV$$
$$+ \varphi_1 Q'RS'TUVW + \varphi_1' Q'T' + \varphi_1' Q'U' + \varphi_1' Q'V' + \varphi_1' Q'W' + \varphi_1 RST' +$$
$$\varphi_1 RSU' + \varphi_1 RSV' + \varphi_1 RSW' + \varphi_1 R'S'T' + \varphi_1 R'S'U' + \varphi_1 R'S'V' +$$
$$\varphi_1 R'S'W' + \varphi_1' RS'T + \varphi_1' R'ST' + \varphi_1' RS'U' + \varphi_1' R'SU' +$$
$$\varphi_1' RS'V' + \varphi_1' R'SV' + \varphi_1' RS'W' + \varphi_1' R'SW' + \varphi_1 QT' + \varphi_1 QW' + \varphi_1 QV'$$
$$\varphi_1 QU'$$

β. - Le tableau de décomposition de $g_1(\varphi_1,Q,R,S,T,U,V,W)$ relatif à la partition $(TUVW, \varphi_1 QRS)$.

${}_1QRS + \varphi_1 QR'S' + \varphi_1' QR'S$

${}_1'QRS' + \varphi_1' Q'RS + \varphi_1' Q'R'S'$	$QR'S$	QRS'	$Q'RS$	$Q'R'S'$	$\varphi_1 Q'R'S$	$\varphi_1 Q'RS'$	$\varphi_1 Q'$	$\varphi_1 RS'$	$\varphi_1' R'S$	$\varphi_1 RS'$	$\varphi_1' R'S$	$\varphi_1 Q$
T'	1	1	1	1			1	1	1	1	1	1
U'	1	1	1	1			1	1	1	1	1	1
V'	1	1	1	1			1	1	1	1	1	1
W'	1	1	1	1			1	1	1	1	1	1
TUVW					1	1						

Donne :

$$\varphi_2(T,U,V,W) = T' + U' + V' + W'$$
$$\varphi_2'(T,U,V,W) = TUVW$$
$$g_2(\varphi_1,\varphi_2,Q,R,S) = \varphi_1 QRS + \varphi_1 QR'S' + \varphi_1' QR'S + \varphi_1' QRS' + \varphi_1 Q'RS + \varphi_1' Q'R'S$$
$$+ \varphi_2 QR'S + \varphi_2 QRS' + \varphi_2 Q'RS + \varphi_2 Q'R'S' + \varphi_1 \varphi_2 Q'R'S + \varphi_1 \varphi_2 Q'RS'$$
$$+ \varphi_1 \varphi_2' Q' + \varphi_1 \varphi_2' RS + \varphi_1 \varphi_2' R'S' + \varphi_1 \varphi_2 RS' + \varphi_1 \varphi_2 R'S + \varphi_1 \varphi_2 Q.$$

γ. - Le tableau de décomposition de $g_2(\varphi_1,\varphi_2,Q,R,S)$ relatif à la partition (RS, φ_1 φ_2 Q)

$\varphi_1'\varphi_2 Q' + \varphi_1\varphi_2 Q$	$\varphi_1 Q$	$\varphi_1' Q$	$\varphi_1' Q'$	$\varphi_2 Q$	$\varphi_2 Q'$	$\varphi_1\varphi_2' Q'$	$\varphi_1\varphi_2$	$\varphi_1'\varphi_2$
RS	1		1		1		1	
R'S'	1		1		1		1	
R'S		1		1		1		1
RS'		1		1		1		1

donne :

$$\begin{cases} \varphi_3(R,S) = RS + R'S' \\ \varphi_3'(R,S) = R'S + RS' \\ g_3(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,Q) = \varphi_1'\varphi_2 Q' + \varphi_1\varphi_2 Q + \varphi_1\varphi_3 Q + \varphi_1'\varphi_3' Q + \varphi_1'\varphi_3 Q' + \\ \qquad \varphi_2\varphi_3' Q + \varphi_2\varphi_3 Q' + \varphi_1\varphi_2'\varphi_3' Q' + \varphi_1\varphi_2\varphi_3 + \varphi_1'\varphi_2\varphi_3. \end{cases}$$

On vérifie bien que $g_3(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, Q)$ n'est pas décomposable, puisque c'est la fonction de l'exemple 3 où :

$$X = Q,\ Y = \varphi_3,\ Z = \varphi_1',\ T = \varphi_2'.$$

e. - $\varphi_1(X,Y,Z)$ et $\varphi_1'(X,Y,Z)$ n'admettent pas de décomposition simple disjointe puisqu'elles font partie des types 3E et 3E*.
Les décompositions de $\varphi_2(T,U,V,W)$ et $\varphi_3(R,S)$ sont immédiates. Le résultat final est donc :

$$f(Q,R,S,T,U,V,W,X,Y,Z) = g_3(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3, Q) = \varphi_1'\varphi_2 Q' + \varphi_1\varphi_2 Q + \varphi_1\varphi_3 Q + \varphi_1'\varphi_3' Q + \varphi_1'\varphi_3 Q' + \varphi_2\varphi_3' Q + \varphi_2\varphi_3 Q' + \varphi_1\varphi_2'\varphi_3' Q' + \varphi_1\varphi_2\varphi_3 + \varphi_1'\varphi_2\varphi_3$$

avec
$$\begin{cases} \varphi_1(X,Y,Z) = X'Y' + X'Z + Y'Z' + YZ \\ \varphi_2'(T,U,V,W) = TUVW \\ \varphi_3'(R,S) = R \oplus S \end{cases}$$

Remarquons que, puisque dans cet exemple la base complète et la base irredondante considérée sont très dissemblables, il est commode d'utiliser le théorème 6 du chapitre I :

α'. - Le tableau de décomposition de la base irrédondante considérée de f(Q,R,S,T,U,V,W,X,Y,Z) relatif à la partition (XYZ,QRSTUVW)

QR'ST'+QR'SU'+QR'SV'+ QR'SW'+QRS'T'+QRS'U'+ QRS'V'+QRS'W'+Q'RST'+ Q'RSU'+Q'RSV'+Q'RSW'+ Q'R'S'T'+Q'R'S'U'+ Q'R'S'V'+ Q'R'S'W'	QRS	QR'S'	QR'S	QRS'	Q'RS	Q'R'S'	Q'R'STUVW	QRS'TUVW	Q'T'	Q'U'	Q'V'	Q'W'
X'Y'	1	1					1	1				
Y'Z'	1	1					1	1				
YZ	1	1					1	1				
XY'Z			1	1	1	1			1	1	1	1
YZ'			1	1	1	1			1	1	1	1

donne :

$$\begin{cases} \varphi_1(X,Y,Z) = X'Y' + Y'Z' + YZ \\ \varphi_1'(X,Y,Z) = XY'Z + YZ' \\ g_1(\varphi_1,Q,R,S,T,U,V,W) = QR'ST' + QR'SU' + QR'SV' + QR'SW' + QRS'T' + QRS'U' + \\ \quad QRS'V' + QRS'W' + Q'RST' + Q'RSU' + Q'RSV' + Q'RSW' + Q'R'S'T' + \\ \quad Q'R'S'U' + Q'R'S'V' + Q'R'S'W' + \varphi_1 QRS + \varphi_1 QR'S' + \\ \quad \varphi_1 Q'R'STUVW + \varphi_1 Q'RS'TUVW + \varphi_1' QR'S + \varphi_1' QRS' + \varphi_1' Q'RS + \\ \quad \varphi_1' Q'R'S' + \varphi_1' Q'T' + \varphi_1' Q'U' + \varphi_1' Q'V' + \varphi_1' Q'W'. \end{cases}$$

β'.- Le tableau de décomposition de $g_1(\varphi_1,Q,R,S,T,U,V,W)$ relatif à la partition (TUVW, φ_1 QRS):

φ_1QRS+φ_1QR'S'+φ_1'QR'S +φ_1'QRS'+φ_1'Q'RS+φ_1'Q'R'S'	QR'S	QRS'	Q'RS	Q'R'S'	φ_1Q'R'S	φ_1Q'RS'	φ_1' Q'
T'	1	1	1	1			1
U'	1	1	1	1			1
V'	1	1	1	1			1
W'	1	1	1	1			1
TUVW					1	1	

donne :

$$\begin{cases} \varphi_2(T,U,V,W) = T' + U' + V' + W' \\ \varphi_2'(T,U,V,W) = TUVW \\ g_2(\varphi_1,\varphi_2,Q,R,S) = \varphi_1 QRS + \varphi_1 R'S' + \varphi_1' QR'S + \varphi_1' Q'RS + \varphi_1' Q'R'S' + \\ \qquad \varphi_2 QR'S + \varphi_2 QRS' + \varphi_2 Q'RS + \varphi_2 Q'R'S' + \varphi_1' \varphi_2 Q' + \\ \qquad \varphi_1 \varphi_2' Q'R'S + \varphi_1 \varphi_2' Q'RS'. \end{cases}$$

γ'.- Le tableau de décomposition de $g_2(\varphi_1,\varphi_2,Q,R,S)$ relatif à la partition $(RS, \varphi\ \varphi_2 Q)$

$\varphi_1'\ \varphi_2 Q'$	$\varphi_1 Q$	$\varphi_1' Q$	$\varphi_1' Q'$	$\varphi_2 Q$	$\varphi_2 Q'$	$\varphi_1\ \varphi_2' Q'$
RS	1		1		1	
R'S'	1		1		1	
R'S		1		1		1
RS'		1		1		1

donne :

$$\begin{cases} \varphi_3(R,S) = RS + R'S' \\ \varphi_3'(R,S) = R'S + RS' \\ g_3(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, Q) = \varphi_1'\ \varphi_2\ Q' + \varphi_1 \varphi_3 Q + \varphi_1'\ \varphi_3\ Q' + \varphi_2 \varphi_3 Q' + \varphi_1'\ \varphi_3'\ Q + \\ \qquad \varphi_2\ \varphi_3'\ Q + \varphi_1\ \varphi_2'\ \varphi_3'\ Q'. \end{cases}$$

Le résultat final est :

$$f(Q,R,S,T,U,V,W,X,Y,Z) = g_3(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,Q) = \varphi_1'\ \varphi_2\ Q' + \varphi_1\ \varphi_3\ Q + \varphi_1'\ \varphi_3\ Q' + \varphi_2\ \varphi_3\ Q' + \varphi_1'\ \varphi_3'\ Q + \varphi_2\ \varphi_3'\ Q + \varphi_1\ \varphi_2'\ \varphi_3'\ Q'$$

avec $\begin{cases} \varphi_1(X,Y,Z) = X'Y' + Y'Z' + YZ \\ \varphi_2'(T,U,V,W) = TUVW \\ \varphi_3'(R,S) = R \oplus S. \end{cases}$

L'exemple 6 donne une idée de la vitesse de la recherche des partitions réalisant une décomposition simple disjointe. En 1 minute 7 secondes, les décompositions simples disjointes de 75 fonctions de 4 variables sont étudiées, alors que sont rejetées 25 fonctions de moins de 4 variables.

EXEMPLE 1.

MONOMES PREMIERS

VWX' + UX + V'X + UW

BASE IRREDONDANTE

VWX' + UX + V'X + UW

DECOMPOSITION

U + V + W + X

09 HEURES 00 MINUTES 27 SECONDES
09 HEURES 00 MINUTES 27 SECONDES

LE TRAVAIL PRECEDENT A DURE .57 MILLIEMES D'HEURE

EXEMPLE 2.

18 HEURES 27 MINUTES 09 SECONDES

COMPOSANTS PREMIERS
VW'YZ + VW'XZ + X'Y'Z' + V'Z' + WZ'

18 HEURES 27 MINUTES 09 SECONDES

BASE PREM1

VW'YZ + VW'XZ + X'Y'Z' + V'Z' + WZ'

DERIVDUALES

I = 1

0000001000 w'
0011000000 xy

K = 2

1000000000 v
0011000000 xy

K = 3

0000001000 w'
1000000000 v
0000000010 y'

K = 4

0000001000 w'
1000000000 v
0000000100 x'

K = 0 5

18 HEURES 27 MINUTES 12 SECONDES

DECOMPO ADDIT

K = 1

1000000000
0100000000 [w]
0011000000 [x,y]
0111000000

K = 2

0100000000
1000000000 [v]
0011000000 [xy]
1011000000

K = 3

0010000000
0100000000 [w]
1000000000 [v]
0001000000 [y]
1101000000

```
K =                                    4

 0001000000
 0100000000        [w]
 1000000000        [v]
 0010000000        [x]
 1110000000
K =                                    5
 0000100000
 0000000000        []
 0000000000
```

DECOMPOSITION DISJONCTIVE

Y + Z

TEMPS = 35 DIXIEMES DE SEC
18 HEURES 27 MINUTES 13 SECONDES

LE TRAVAIL PRECEDENT A DURE 45 MILLIEMES D'HEURE

EXEMPLE 3.

10 HEURES 03 MINUTES 00 SECONDES

COMPOSANTS PREMIERS

UV'W'X'Y'Z' + VX'YZ' + U'V'WX'Y'Z'+ UV'W'XYZ' + U'VWXYZ + UVW'XYZ + VXY'Z'+ U'VWX'Y'Z + U'V'WXYZ'+ UVW'X'Y'Z + U'VW'Z' + UVWZ'

10 HEURES 03 MINUTES 01 SECONDES

BASE PREM1

UV'W'X'Y'Z' + VX' YZ' + U'V'WX'Y'Z' + UV'W'XYZ' + U'VWXYZ + UVW' XYZ + VXY'Z' + U'VWX'Y'Z + U'V'WXYZ' + UVW'X'Y'Z + U'VW'Z' + UVWZ'

DERIVDUALES

```
K =                                    1
 010000 000001    vz'
 000010 000100    x'y
 000100 000010    xy'
K =                                    2
 101000 000001    uwz'
 000000 101001    u'w'z'
 000010 000101    x'yz'
 000100 000011    xy'z'
K =                                    3
 000010 000100    x'y
 010000 000001    vz'
 000100 000010    xy'
```

```
K =                                  4
 101000 000000   uw
 010000 000001   vz'
 000000 101000   u'w'
K =                                  5
 101000 000000   uw
 010000 000001   vz'
 000000 101000   u'w'
K =                                  6
 010000 101000   u'vw'
 111000 000000   uvw
 010100 000010   vxy'
 010010 000100   vx'y
                 10 HEURES   03 MINUTES   13 SECONDES
DECOMPO  ADDIT
K =                                  1
 100000 000000
 010001 000000   [vz]
 000110 000000   [xy]
 010111 000000
K =                                  2
 010000 000000
 101111 000000   [uwxyz]
 101111 000000
K =                                  3
 001000 000000
 000110 000000   [xy]
 010001 000000   [vz]
 010111 000000
K =                                  4
 000100 000000
 101000 000000   [uw]
 010001 000000   [vz]
 111001 000000
K =                                  5
 000010 000000
 101000 000000   [uw]
 010001 000000   [vz]
 111011 000000
K =                                  6
 000001 000000
 111110 000000   [uvwxy]
 111110 000000

                 10 HEURES   03 MINUTES   14 SECONDES
```

```
DECOM
 101110 000000
 010000 000000
 101110 000000
 101110 000000
 101110 000000
 000001 000000

V + Z + UWXY
TEMPS =                    148 DIXIEMES DE SEC
                  10 HEURES 03 MINUTES  15 SECONDES

LE TRAVAIL PRECEDENT A DURE  53 MILLIEMES D'HEURE
```

EXEMPLE 4.

07 HEURES 34 MINUTES 55 SECONDES

COMPOSANTS PREMIERS

XYZ' + XY'Z + X'YZ + X'Y'Z'T + XY'T' + X'YT' + X'ZT' + YZ'T' + Y'ZT' + XZ'T'

07 HEURES 34 MINUTES 56 SECONDES

BASE PREMI

XYZ' + XY'Z + X'YZ + X'Y'Z'T + XY'T' + X'YT' + X'ZT'

07 HEURES 34 MINUTES 56 SECONDES

DERIVDUALES

K=
01010010
00110100

K=
10010010
00111000

K=
10010100
01011000

K=
00000110
00001010
00001100

07 HEURES 34 MINUTES 58 SECONDES

DECOMPO ADDIT

K=
10000000
01110000
01110000

K=
01000000
10110000
10110000

K=
00100000
11010000
11010000

K=
00010000
11100000
11100000

07 HEURES 34 MINUTES 59 SECONDES

DECOM
10000000
01000000
00100000
00010000

X + Y + Z + T fonction non décomposable

TEMPS= 38DIXIEMES DE SEC

07 HEURES 34 MINUTES 59 SECONDES

LE TRAVAIL PRECEDENT A DURE 58 MILLIEMES D'HEURE

EXEMPLES.

17 HEURES 39 MINUTES 30 SECONDES

MONOMES PREMIERS

QRSX'Y' + QRSX'Z + QRSY'Z' + QRSYZ + QR'S'X'Y' + QR'S'X'Z +
QR'S'Y'Z' + QR'S'YZ + QR'SXY'Z + QR'SYZ' + QRS'XY'Z + QRS'YZ' +
Q'RSXY'Z + Q'R'S'XY'Z + Q'RSYZ' + Q'R'S'YZ' + Q'R'STUVWX'Y' +
Q'R'STUVWX'Z + Q'R'STUVWY'Z' + Q'R'STUVWYZ + Q'RS'TUVWX'Y' +
Q'RS'TUVWX'Z + Q'RS'TUVWY'Z' + Q'RS'TUVWYZ + QR'ST' + QR'SU' +
QR'SV' + QR'SW' + QRS'T' + QRS'U' + QRS'V' + QRS'W' + Q'RST' +
Q'RSU' + Q'RSV' + Q'RSW' + Q'R'S'T' + Q'R'S'U' + Q'R'S'V' +
Q'R'S'W' + Q'T'XY'Z + Q'U'XY'Z + Q'V'XY'Z + Q'W'XY'Z + Q'T'YZ' +
Q'U'YZ' + Q'V'YZ' + Q'W'YZ' + RST'YZ + RST'Y'Z' + RST'X'Z +
RST'X'Y' + RSU'YZ + RSU'Y'Z' + RSU'X'Z + RSU'X'Y' + RSV'YZ +
RSV'Y'Z' + RSV'X'Z + RSV'X'Y' + RSW'YZ + RSW'Y'Z' + RSW'X'Z +
RSW'X'Y' + R'S'T'YZ + R'S'T'Y'Z' + R'S'T'X'Z + R'S'T'X'Y' +
R'S'U'YZ + R'S'U'Y'Z' + R'S'U'X'Z + R'S'U'X'Y' + R'S'V'YZ +
R'S'V'Y'Z' + R'S'V'X'Z + R'S'V'X'Y' + R'S'W'YZ + R'S'W'Y'Z' +
R'S'W'X'Z + R'S'W'X'Y' + RS'T'XY'Z + R'ST'XY'Z + RS'U'XY'Z +
R'SU'XY'Z + RS'V'XY'Z + R'SV'XY'Z + RS'W'XY'Z + R'SW'XY'Z +
RS'T'YZ' + R'ST'YZ' + RS'U'YZ' + R'SU'YZ' + RS'V'YZ' + R'SV'YZ' +
RS'W'YZ' + R'SW'YZ' + QT'X'Y' + QW'X'Y' + QV'X'Y' + QU'X'Y' +
QU'YZ + QW'X'Z + QV'X'Z + QU'X'Z + QT'X'Z + QW'Y'Z' + QV'Y'Z' +
QU'Y'Z' + QT'Y'Z' + QW'YZ + QV'YZ + QT'YZ

17 HEURES 43 MINUTES 23 SECONDES

BASE IRREDONDANTE

QRSX'Y' + QRSX'Z + QRSY'Z' + QR'S'X'Y' + QR'S'X'Z +
QR'S'Y'Z' + QR'S'YZ + QR'SXY'Z + QR'SYZ' + QRS'XY'Z + QRS'YZ' +
Q'RSXY'Z + Q'R'S'XY'Z + Q'RSYZ' + Q'R'S'YZ' + Q'R'STUVWX'Y' +
Q'R'STUVWX'Z + Q'R'STUVWY'Z' + Q'R'STUVWYZ + Q'RS'TUVWX'Y' +
Q'RS'TUVWX'Z + Q'RS'TUVWY'Z' + Q'RS'TUVWYZ + QR'ST' + QR'SU' +
QR'SV' + QR'SW' + QRS'T' + QRS'U' + QRS'V' + QRS'W' + Q'RST' +
Q'RSU' + Q'RSV' + Q'RSW' + Q'R'S'T' + Q'R'S'U' + Q'R'S'V' +
Q'R'S'W' + Q'T'XY'Z + Q'U'XY'Z + Q'V'XY'Z + Q'W'XY'Z + Q'T'YZ' +
Q'U'YZ' + Q'V'YZ' + Q'W'YZ' + RST'YZ + RST'Y'Z' + RST'X'Z +
RST'X'Y' + RSU'YZ + RSU'Y'Z' + RSU'X'Z + RSU'X'Y' + RSV'YZ +
RSV'Y'Z' + RSV'X'Z + RSV'X'Y' + RSW'YZ + RSW'Y'Z' + RSW'X'Z +
RSW'X'Y' + R'S'T'YZ + R'S'T'Y'Z' + R'S'T'X'Z + R'S'T'X'Y' +
R'S'U'YZ + R'S'U'Y'Z' + R'S'U'X'Z + R'S'U'X'Y' + R'S'V'YZ +
R'S'V'Y'Z' + R'S'V'X'Z + R'S'V'X'Y' + R'S'W'YZ + R'S'W'Y'Z' +
R'S'W'X'Z + R'S'W'X'Y' + RS'T'XY'Z + R'ST'XY'Z + RS'U'XY'Z +
R'SU'XY'Z + RS'V'XY'Z + R'SV'XY'Z + RS'W'XY'Z + R'SW'XY'Z +
RS'T'YZ' + R'ST'YZ' + RS'U'YZ' + R'SU'YZ' + RS'V'YZ' + R'SV'YZ' +
RS'W'YZ' + R'SW'YZ' + QT'X'Y' + QW'X'Y' + QV'X'Y' + QU'X'Y' +
QU'YZ + QW'X'Z + QV'X'Z + QU'X'Z + QT'X'Z + QW'Y'Z' + QV'Y'Z' +
QU'Y'Z' + QT'Y'Z' + QW'YZ + QV'YZ + QT'YZ

Q R ' S X Y ' Z + Q R ' S Y Z ' + Q R S ' X Y ' Z + Q R S ' Y Z ' + Q ' R S X Y ' Z + Q ' R ' S ' X Y ' Z +
Q ' R S Y Z ' + Q ' R ' S ' Y Z ' + Q ' R ' S T U V W X ' Y ' + Q ' R ' S T U V W Y ' Z ' + Q ' R ' S T U V W Y Z +
Q ' R S ' T U V W X ' Y ' + Q ' R S ' T U V W Y ' Z ' + Q ' R S ' T U V W Y Z + Q R ' S T ' + Q R ' S U ' +
Q R ' S V ' + Q R ' S W ' + Q R S ' T ' + Q R S ' U ' + Q R S ' V ' + Q R S ' W ' + Q ' R S T ' +
Q ' R S U ' + Q ' R S V ' + Q ' R S W ' + Q ' R ' S ' T ' + Q ' R ' S ' U ' + Q ' R ' S ' V ' +
Q ' R ' S ' W ' + Q ' T ' X Y ' Z + Q ' U ' X Y ' Z + Q ' V ' X Y ' Z + Q ' W ' X Y ' Z + Q ' T ' Y Z ' +
Q ' U ' Y Z ' + Q ' V ' Y Z ' + Q ' W ' Y Z '

17 HEURES 44 MINUTES 06 SECONDES

DERIVDUALES

K= 1

0101000010001000010 1
0100100010001000C1C1
0100010010001000C1C1
0100001010001000C1C1
0011000010010000C1C1
0010100010010000C1C1
0010001001001000001C1
0010000101001000001 1
0111000110000000000
0110100110000000000

```
0110010110000000000
0110001110000000000
0111000011000000000
0110100011000000000
0110010011000000000
0110001011000000000
0111001000000000001
0110100100000000001
0110010100000000001
0110001100000000001
0111000000000000011
0110100000000000011
0110010000000000011
0110001000000000011
0101000001001000010
0100100001001000010
0100010001001000010
0100001001001000010
0011000001010000010
0010100001010000010
0010010001010000010
0010001001010000010
0001000110011000000
0000100110011000000
0000010110011000000
0000001110011000000
0001000011011000000
0000100011011000000
0000010011011000000
0000001011011000000
0001000100011000001
0000100100011000001
0000010100011000001
0000001100011000001
0001000000011000011
0000100000011000011
0000010000011000011
0000001000011000011
```

K=

2

```
0001000110100000000
0001000011100000000
0001000100100000001
0000100110100000000
0000100011100000000
0000100100100000001
0000010110100000000
0000010011100000000
0000010100100000001
0000001110100000000
0000001011100000000
0000001100100000001
0001000000100000011
0000100000100000011
0000010000100000011
0000001000100000011
```

```
 1001000010000000C1C1
 1000100010000000C1C1
 1000010010000000C1C1
 1000001010000000C1C1
 1001000001000000C010
 1000100001000000C010
 1000010001000000C010
 1000001001000000C010
K=                                3
 0001000110100000C0C0
 0001000011100000C0C0
 0001000100100000C0C1
 0000100110100000C0C0
 0000100011100000C0C0
 0000100100100000C0C1
 0000010110100000C0C0
 0000010011100000C0C0
 0000010100100000C001
 0000001110100000C0C0
 0000001011100000C0C0
 0000001100100000C001
 0001000001000000C011
 0000100000100000C011
 0000010000100000C011
 0000001000100000C011
 1001000010000000C1C1
 1000100010000000C1C1
 1000010010000000C1C1
 1000001010000000C1C1
 1001000001000000C010
 1000100001000000C010
 1000010001000000C010
 1000001001000000C010
K=                                4
 0000100000000000C0C0
 0000000010011000C1C1
 0110000010000000C1C1
 0000000001011000C1C0
 0000000010100000C1C1
 0000001000000000C0C0
 0000000001100000C010
 0110000000100000C0C0
 0000000000111000C0C0
 0110000001000000C1C0
 0000100000000000C0C0
K=                                5
 0000010000000000C0C0
 0000000010011000C1C1
 0110000010000000C1C1
 0000000001011000C1C0
 0000000010100000C1C1
 0000001000000000C0C0
 0000000001100000C010
 0110000000100000C0C0
 0000000000111000C0C0
```

```
 01100000010000000010
 00010000000000000000
K=                                 6
 00001000000000000000
 00000000100110000101
 01100000100000000101
 00000000010110000010
 00000000101000000101
 00000010000000000000
 00000000011000000010
 01100000001000000000
 00000000001110000000
 01100000010000000010
 00010000000000000000
K=                                 7
 00001000000000000000
 00000000100110000101
 01100000100000000101
 00000000010110000010
 00000000101000000101
 00000100000000000000
 00000000011000000010
 01100000001000000000
 00000000001110000000
 01100000010000000010
 00010000000000000000
K=                                 8
 00000000010000000000
 11110000000000000000
 00100010001100000000
 11100100000000000000
 00100100001100000000
 11100010000000000000
 00101000001100000000
 10000010000110000000
 00110000001100000000
 01001000001010000000
 10010000000110000000
 01010000001010000000
 10001000000110000000
 01000010001010000000
 11101000000000000000
 10000100000110000000
 01000100001010000000
 00000000000000000010
K=                                 9
 11101000000000000000
 11100010000000000000
 11110000000000000000
 00100010001100000000
 10001000000110000000
 00100100001100000000
 10000010000110000000
 10010000000110000000
 11100100000000000000
```

```
 0010100000110000000
 1000010000011000000
 0011000000110000000
 0101000000101000000
 0100100000101000000
 0100001000101000000
 0100001000101000000
 0000000100000000001
K=                    1C
 1110100000000000000
 1110001000000000000
 1111000000000000000
 0010001000110000000
 1000100000011000000
 0010010000110000000
 1000001000011000000
 1001000000011000000
 1110010000000000000
 0010100000110000000
 1000010000011000000
 0011000000110000000
 0101000000101000000
 0100100000101000000
 0100001000101000000
 0100001000101000000
 0000000110000000000
          17  HEURES  59  MINUTES 10  SECONDES
DECOMPO ADDIT
K=                    1
 1000000000000000000
 0111111111000000000
 0111111111000000000
K=                    2
 0100000000000000000
 1001111111000000000
 1001111111000000000
K=                    3
 0010000000000000000
 1001111111000000000
 1001111111000000000
K=                    4
 0001000000000000000
 0000010000000000000
 1110000111000000000
 0000001000000000000
 0000100000000000000
 1110111111000000000
K=                    5
 0000100000000000000
 0000010000000000000
 1110000111000000000
 0000001000000000000
 0001000000000000000
 1111011111000000000
K=                    6
 0000010000000000000
```

```
 0000100000000000000
 1110000111000000000
 0000001000000000000
 0001000000000000000
 1111101111000000000
K=                    7
 0000001000000000000
 0000100000000000000
 1110000111000000000
 0000010000000000000
 0001000000000000000
 1111110111000000000
K=                    8
 0000000100000000000
 0000000001000000000
 1111111000000000000
 0000000010000000000
 1111111011000000000
K=                    9
 0000000010000000000
 1111111000000000000
 0000000101000000000
 1111111101000000000
K=                   10
 0000000001000000000
 1111111000000000000
 0000000110000000000
 1111111110000000000
          17  HEURES  59  MINUTES 13  SECONDES
DECOM
 1000000000000000000
 0110000000000000000
 0110000000000000000
 0001111000000000000
 0001111000000000000
 0001111000000000000
 0001111000000000000
 0000000111000000000
 0000000111000000000
 0000000111000000000
```

Q + RS + TUVW + XYZ

TEMPS= 11892DIXIEMES DE SEC

17 HEURES 59 MINUTES 19 SECONDES

LE TRAVAIL PRECEDENT A DURE 397 MILLIEMES D'HEURE

<20 minutes

<24 minutes

EXEMPLE 6.

```
COMPOSANTS      PREMIERS      1


I=                                2
COMPOSANTS      PREMIERS

 XT' + Y'T' + X'Z' + Z'T' + XYZ + X'YT + YZT
DECOMPOSITION

 X + Y + Z + T
            10  HEURES  53  MINUTES 22  SECONDES


I=                                3
COMPOSANTS      PREMIERS

 XY'ZT + X'ZT'
DECOMPOSITION  MULTIPLICATIVE

 Z + XYT
            10  HEURES  53  MINUTES 22  SECONDES


I=                                4
COMPOSANTS      PREMIERS

 XY' + Y'T + XT' + XZ' + Y'Z' + X'YZ + X'ZT + YZT'
DECOMPOSITION

 X + Y + Z + T
            10  HEURES  53  MINUTES 24  SECONDES


I=                                5
COMPOSANTS      PREMIERS

 X'YZ + XY'ZT
DECOMPOSITION  MULTIPLICATIVE

 Z + XYT
            10  HEURES  53  MINUTES 24  SECONDES
```

I=
COMPOSANTS PREMIERS (6)

T' + XY + YZ'
DECOMPOSITION ADDITIVE

T + XYZ
10 HEURES 53 MINUTES 25 SECONDES

I=
COMPOSANTS PREMIERS (7)

X'Y + X'Z + X'T
DECOMPOSITION MULTIPLICATIVE

X + YZT
10 HEURES 53 MINUTES 25 SECONDES

I=
COMPOSANTS PREMIERS /8

X + Z' + T

I=
COMPOSANTS PREMIERS /9

X' + Y

I= 10
COMPOSANTS PREMIERS

X'Y' + X'Z + X'T' + YZT'
DECOMPOSITION

X + Y + Z + T
10 HEURES 53 MINUTES 27 SECONDES

I=
COMPOSANTS PREMIERS (11)

DECOMPOSITION MULTIPLICATIVE

X + Z + YT

10 HEURES 53 MINUTES 27 SECONDES

I= 12
COMPOSANTS PREMIERS

XYT' + X'ZT' + YZT'

DECOMPOSITION MULTIPLICATIVE

T + XYZ

10 HEURES 53 MINUTES 28 SECONDES

I= 13
COMPOSANTS PREMIERS

X'Z' + YZ' + Z'T

DECOMPOSITION MULTIPLICATIVE

Z + XYT

10 HEURES 53 MINUTES 28 SECONDES

I= 14
COMPOSANTS PREMIERS

T + XY + XZ' + X'Y' + Y'Z' + X'Z + YZ

DECOMPOSITION ADDITIVE

T + XYZ

10 HEURES 53 MINUTES 29 SECONDES

I= 15
COMPOSANTS PREMIERS

YT

I= 16
COMPOSANTS PREMIERS

Y'Z' + X'Y'T' + X'Z'T

DECOMPOSITION

X + Y + Z + T

10 HEURES 53 MINUTES 30 SECONDES

I= 17
COMPOSANTS PREMIERS

YZ' + XT' + X'Y + YT' + X'Z + ZT' + X'T
DECOMPOSITION

X + Y + Z + T
10 HEURES 53 MINUTES 32 SECONDES

I= 18
COMPOSANTS PREMIERS

XYZ' + XZ'T + YZ'T + XYT'
DECOMPOSITION

X + Y + Z + T
10 HEURES 53 MINUTES 33 SECONDES

I= 19
COMPOSANTS PREMIERS

XY'Z + X'Y'Z'T'
DECOMPOSITION MULTIPLICATIVE

Y + XZT
10 HEURES 53 MINUTES 34 SECONDES

I= 20
COMPOSANTS PREMIERS

T' + XY' + XZ + Y'Z + X'YZ'
DECOMPOSITION ADDITIVE

T + XYZ
10 HEURES 53 MINUTES 34 SECONDES

I= 21
COMPOSANTS PREMIERS

Y'Z' + X'Y' + X'Z' + X'T'
DECOMPOSITION

X + Y + Z + T
10 HEURES 53 MINUTES 36 SECONDES

I=
COMPOSANTS PREMIERS (22)

X'Y'T + X'Y'Z' + X'YZ + X'ZT
DECOMPOSITION MULTIPLICATIVE

X + YZT
10 HEURES 53 MINUTES 34 SECONDES

I=
COMPOSANTS PREMIERS (23)

XY' + Y'T + X'Z + X'YT' + Y'Z + ZT
DECOMPOSITION

X + Y + Z + T
10 HEURES 53 MINUTES 38 SECONDES

I=
COMPOSANTS PREMIERS (24)

X' + Y' + T

I=
COMPOSANTS PREMIERS (25)

XY' + X'Y + X'Z + Y'Z + X'T + Y'T'
DECOMPOSITION

X + Y + Z'
10 HEURES 53 MINUTES 32 SECONDES

I=
COMPOSANTS PREMIERS (26)

XY'Z + XY'T' + Y'ZT
DECOMPOSITION MULTIPLICATIVE

Y + XZT
10 HEURES 53 MINUTES 30 SECONDES

I=
COMPOSANTS PREMIERS (27)

XZ + Y'Z + ZT
DECOMPOSITION MULTIPLICATIVE

Z + XYT
10 HEURES 53 MINUTES 40 SECONDES

I=
COMPOSANTS PREMIERS (28)

Y' + Z' + XT
DECOMPOSITION ADDITIVE

Y + Z + XT
10 HEURES 53 MINUTES 41 SECONDES

I= 29
COMPOSANTS PREMIERS

XY'Z' + XZ'T + XYZ + XYT + YZT'
DECOMPOSITION

X + Y + Z + T
10 HEURES 53 MINUTES 42 SECONDES

I= 30
COMPOSANTS PREMIERS

XYZ' + XZ'T + Y'Z'T + X'Y'Z' + X'Y'T
DECOMPOSITION

X + Y + Z + T
10 HEURES 53 MINUTES 44 SECONDES

I=
COMPOSANTS PREMIERS

X' + Y'

I=
COMPOSANTS PREMIERS

Y + XZ' + XT' + ZT'
DECOMPOSITION ADDITIVE

Y + XZT
10 HEURES 53 MINUTES 44 SECONDES

I= 33
COMPOSANTS PREMIERS

XYT' + X'YZ' + YZ'T' + X'Z'T + Y'Z'T
DECOMPOSITION

X + Y + Z + T
10 HEURES 53 MINUTES 46 SECONDES

I= 34
COMPOSANTS PREMIERS

X + Y' + T

I= 35
COMPOSANTS PREMIERS

YT + X'YZ + XY'Z' + XZ'T + XY'T'
DECOMPOSITION

X + Y + Z + T
10 HEURES 53 MINUTES 47 SECONDES

I= 36
COMPOSANTS PREMIERS

XZ'T + X'Y'Z' + Y'Z'T + X'Y'T' + Y'ZT'
DECOMPOSITION

X + Y + Z + T
10 HEURES 53 MINUTES 49 SECONDES

I= 37
COMPOSANTS PREMIERS

X' + Y + Z' + T
DECOMPOSITION ADDITIVE

X + Y + Z + T
10 HEURES 53 MINUTES 49 SECONDES

I=
COMPOSANTS PREMIERS (38)

T + X'Y' + XY + XZ + Y'Z
DECOMPOSITION ADDITIVE

T + XYZ
10 HEURES 53 MINUTES 50 SECONDES

I=
COMPOSANTS PREMIERS ~~39~~

YZ' + YT

I=
COMPOSANTS PREMIERS ~~40~~

Z + T

I=
COMPOSANTS PREMIERS (41)

Y'ZT + XY'T
DECOMPOSITION MULTIPLICATIVE

Y + T + XZ
10 HEURES 53 MINUTES 50 SECONDES

I= 42
COMPOSANTS PREMIERS

X'Y + X'ZT' + YZT' + XY'Z'T
DECOMPOSITION

X + Y + Z + T
10 HEURES 53 MINUTES 52 SECONDES

I=
COMPOSANTS PREMIERS

43

X'T' + X'YZ
DECOMPOSITION MULTIPLICATIVE

X + YZT
10 HEURES 53 MINUTES 52 SECONDES

I=
COMPOSANTS PREMIERS

44

XY' + XT + YT

I=
COMPOSANTS PREMIERS

45

X'Z + XY'Z' + ZT' + XY'T'
DECOMPOSITION

X + Y + Z + T
10 HEURES 53 MINUTES 54 SECONDES

I=
COMPOSANTS PREMIERS

46

Y'

I=
COMPOSANTS PREMIERS

47

X'Z + ZT

I=
COMPOSANTS PREMIERS

48

Y'T' + YZ' + Z'T'

I=

49

COMPOSANTS PREMIERS

X'Y'Z' + XY'T' + XZ'T' + YZ'T' + Y'ZT'

DECOMPOSITION

X + Y + Z + T

10 HEURES 53 MINUTES 56 SECONDES

I=

COMPOSANTS PREMIERS

X + Y' + T

I= 51

COMPOSANTS PREMIERS

X'YZ'T + Y'Z + XY'T

DECOMPOSITION

X + Y + Z + T

10 HEURES 53 MINUTES 57 SECONDES

I=

COMPOSANTS PREMIERS

YZT'

I= 53

COMPOSANTS PREMIERS

XY'Z + XYT' + XZ'T' + X'YZ'T

DECOMPOSITION

X + Y + Z + T

10 HEURES 53 MINUTES 59 SECONDES

I= 54

COMPOSANTS PREMIERS

X'Y' + Y'Z + XYZ'T' + XYZT' + YZ'T'

DECOMPOSITION

X + Y + Z + T

I= 55
COMPOSANTS PREMIERS

X'Z + XY'Z' + XY'T' + X'Y'T + Y'Z'T + Y'ZT' + YZT
DECOMPOSITION

X + Y + Z + T
10 HEURES 54 MINUTES 02 SECONDES

I= 56
COMPOSANTS PREMIERS

XYZ' + XZ'T'
DECOMPOSITION MULTIPLICATIVE

X + Z + YT
10 HEURES 54 MINUTES 03 SECONDES

I= 57
COMPOSANTS PREMIERS

X'T' + X'Y'Z
DECOMPOSITION MULTIPLICATIVE

X + YZT
10 HEURES 54 MINUTES 03 SECONDES

I= 58
COMPOSANTS PREMIERS

Y'T' + X'Y'Z' + X'YZT
DECOMPOSITION

X + Y + Z + T
10 HEURES 54 MINUTES 05 SECONDES

I= 59
COMPOSANTS PREMIERS

I=
COMPOSANTS PREMIERS

Y + T'

I=
COMPOSANTS PREMIERS

Y'Z + X'T
DECOMPOSITION ADDITIVE

YZ + XT
10 HEURES 54 MINUTES 05 SECONDES

I=
COMPOSANTS PREMIERS

Y + Z'

I=
COMPOSANTS PREMIERS

X'ZT' + X'Y'T'
DECOMPOSITION MULTIPLICATIVE

X + T + YZ
10 HEURES 54 MINUTES 06 SECONDES

I=
COMPOSANTS PREMIERS

YZ'T' + YZT + XY'Z'T + X'ZT
DECOMPOSITION

X + Y + Z + T
10 HEURES 54 MINUTES 07 SECONDES

I=
COMPOSANTS PREMIERS

X' + Z + YT
DECOMPOSITION ADDITIVE

X + Z + YT
10 HEURES 54 [illegible]

I=
COMPOSANTS PREMIERS

Y' + Z' + T'

I=
COMPOSANTS PREMIERS

XZ' + YZ'T'
DECOMPOSITION MULTIPLICATIVE

Z + XYT
10 HEURES 54 MINUTES 08 SECONDES

I=
COMPOSANTS PREMIERS

X + Y' + Z' + T
DECOMPOSITION ADDITIVE

X + Y + Z + T
10 HEURES 54 MINUTES 09 SECONDES

I=
COMPOSANTS PREMIERS

YT + X'Y'T' + X'YZ + X'ZT' + XZ'T
DECOMPOSITION

X + Y + Z + T
10 HEURES 54 MINUTES 1[illegible] SECONDES

I=
COMPOSANTS PREMIERS

YT' + XY'ZT + XZ'T'
DECOMPOSITION

X + Y + Z + T
10 HEURES 54 MINUTES 12 SECONDES

I=
COMPOSANTS PREMIERS

XT + YT + X'Y'Z'T'
DECOMPOSITION

Z + T + XY
10 HEURES 54 MINUTES 13 SECONDES

I=
COMPOSANTS PREMIERS

X'T + X'YZ + X'Y'Z' + XY'ZT'
DECOMPOSITION

X + Y + Z + T
10 HEURES 54 MINUTES 15 SECONDES

I=
COMPOSANTS PREMIERS

XT' + X'T + XY'Z' + Y'Z'T + XYZ + X'Y'Z + Y'ZT' + YZT
DECOMPOSITION

X + Y + Z + T
10 HEURES 54 MINUTES 17 SECONDES

I=
COMPOSANTS PREMIERS

X + Y + T'

I=
COMPOSANTS PREMIERS

X' + Y' + Z' + T
DECOMPOSITION ADDITIVE

X + Y + Z + T
10 HEURES 54 MINUTES 17 SECONDES

I=
COMPOSANTS PREMIERS

(76)

X + Y + Z + T'
DECOMPOSITION ADDITIVE

X + Y + Z + T
10 HEURES 54 MINUTES 17 SECONDES

I=
COMPOSANTS PREMIERS

(77)

XY + YZ' + YT' + XZ + ZT'
DECOMPOSITION

Y + Z + XT
10 HEURES 54 MINUTES 19 SECONDES

I=
COMPOSANTS PREMIERS

78

YT' + X'YZ + X'ZT + Y'ZT
DECOMPOSITION

X + Y + Z + T
10 HEURES 54 MINUTES 20 SECONDES

I=
COMPOSANTS PREMIERS

79

YT + X'YZ + X'ZT' + XY'Z' + XZ'T
DECOMPOSITION

X + Y + Z + T
10 HEURES 54 MINUTES 22 SECONDES

I=
COMPOSANTS PREMIERS

(80)

X + Y' + Z' + T'
DECOMPOSITION ADDITIVE

X + Y + Z + T
10 HEURES 54 MINUTES 22 SECONDES

I= (81)
COMPOSANTS PREMIERS

X' + Y + Z' + T'
DECOMPOSITION ADDITIVE

X + Y + Z + T
10 HEURES 54 MINUTES 23 SECONDES

I= 82
COMPOSANTS PREMIERS

X'Z + X'T' + XY' + Y'Z + Y'T' + Z'T' + ZT
DECOMPOSITION

X + Y + Z + T
10 HEURES 54 MINUTES 24 SECONDES

I= (83)
COMPOSANTS PREMIERS

XY + YT + XZ' + Z'T + XT'
DECOMPOSITION

X + T + YZ
10 HEURES 54 MINUTES 26 SECONDES

I= 84
COMPOSANTS PREMIERS

XY'T' + XZT' + X'YZ' + Y'Z'T' + X'Z'T'
DECOMPOSITION

X + Y + Z + T
10 HEURES 54 MINUTES 27 SECONDES

I= 85
COMPOSANTS PREMIERS

XT' + YZ' + Y'T' + Z'T'
DECOMPOSITION

X + Y + Z + T
10 HEURES 54 MINUTES 28 SECONDES

I=
COMPOSANTS PREMIERS

Z

I=
COMPOSANTS PREMIERS

Y + XZ + XT + X'Z' + Z'T + X'T' + ZT'
DECOMPOSITION ADDITIVE

Y + XZT

10 HEURES 54 MINUTES 29 SECONDES

I=
COMPOSANTS PREMIERS

X + Y' + Z + T
DECOMPOSITION ADDITIVE

X + Y + Z + T

10 HEURES 54 MINUTES 29 SECONDES

I=
COMPOSANTS PREMIERS

X + Y + Z

I=
COMPOSANTS PREMIERS

X'Y + X'Z' + X'T
DECOMPOSITION MULTIPLICATIVE

X + YZT

10 HEURES 54 MINUTES 30 SECONDES

I=
COMPOSANTS PREMIERS

XZ' + XT' + Y'Z' + Y'T' + Z'T
DECOMPOSITION

Z + T + XY
10 HEURES 54 MINUTES 31 SECONDES

I= 92
COMPOSANTS PREMIERS

XT + X'Y' + X'Z'T' + Y'Z + Y'T
DECOMPOSITION

X + Y + Z + T
10 HEURES 54 MINUTES 33 SECONDES

I= 93
COMPOSANTS PREMIERS

XT + XY' + XZ + Y'T' + ZT'
DECOMPOSITION

X + T + YZ
10 HEURES 54 MINUTES 34 SECONDES

I= 94
COMPOSANTS PREMIERS

Z' + X'Y + X'T + XY' + Y'T
DECOMPOSITION ADDITIVE

Z + XYT
10 HEURES 54 MINUTES 35 SECONDES

I= 95
COMPOSANTS PREMIERS

XY' + Y'Z + Y'T + ZT
DECOMPOSITION

X + Y + Z + T
10 HEURES 54 MINUTES 36 SECONDES

I= 96
COMPOSANTS PREMIERS

Y' + Z' + T'

I=
COMPOSANTS PREMIERS (97)

T + XZ' + X'Y' + Y'Z' + X'Z
DECOMPOSITION ADDITIVE

T + XYZ
10 HEURES 54 MINUTES 37 SECONDES

I=
COMPOSANTS PREMIERS ~~98~~

X'Y + X'Z + XZ' + YZ'

I=
COMPOSANTS PREMIERS ~~99~~

I=
COMPOSANTS PREMIERS (100)

XZ' + XT + Y'Z' + Y'T + Z'T' + X'YT'
DECOMPOSITION

Z + T + XY
10 HEURES 54 MINUTES 39 SECONDES
10 HEURES 54 MINUTES 39 SECONDES

LE TRAVAIL PRECEDENT A DURE 78 MILLIEMES D'HEURE

25 / fonctions de moins de 4 variables
42 0 " décomposables
33 fonctions non "
100

/

- C H A P I T R E VI -

C O M P L E M E N T S

VI - A - SUR UNE RELATION ENTRE DECOMPOSITIONS DISJOINTES ET DECOMPOSITIONS NON DISJOINTES.

Cette relation est obtenue grâce à l'introduction de variables surabondantes; elles vraie, que les décompositions soient simples ou non ($\Phi(Y)$, dans $g\,[\Phi(Y),Z]$, est alors une fonction booléenne générale).

THEOREME 1. - Une condition nécessaire et suffisante pour que la fonctio $\emptyset$-booléenne simple $\psi(X,Y,Z)$ admette la décomposition non disjointe $g\,[\Phi(X,Z),\ Y,Z]$ est que la fonction

$$\gamma(X,Y,Z,T) = \begin{cases} \psi(X,Y,Z) \text{ si } T = Z \\ \emptyset \text{ si } T \neq Z \end{cases}$$

admette la décomposition disjointe $g\,[\Phi(X,Z),Y,T]$.

DEMONSTRATION. - Puisque la fonction $\emptyset$-booléenne simple $\psi(X,Y,Z)$ admet une décomposition non disjointe, il existe une fonction $f(X,Y,Z)$ compatible avec $\psi(X,Y,Z)$ et de la forme $g\,[\Phi(X,Z),Y,Z]$:

$$\underline{\psi}(X,Y,Z) \leq f(X,Y,Z) = g\,[\Phi(X,Z),Y,Z] \leq \overline{\psi}(X,Y,Z) \qquad (1)$$

Introduisons la fonction $\gamma(X,Y,Z,T)$ définie par :

$$\gamma(X,Y,Z,T) = \begin{cases} \Psi(X,Y,Z) & \text{si } T = Z \\ \emptyset & \text{si } T \neq Z. \end{cases}$$

$\overline{\gamma}(X,Y,Z,T) = \overline{\Psi}(X,Y,Z) + (TZ' + T'Z)$ $^{+}$

$\underline{\gamma}(X,Y,Z,T) = \underline{\Psi}(X,Y,Z) \cdot (TZ + T'Z')$ $^{\times}$.

Considérons les inégalités :

$$\underline{\gamma}(X,Y,Z,T) \leqslant g[\Phi(X,Z),Y,T] \leqslant \overline{\gamma}(X,Y,Z,T) \qquad (2)$$

$$\underline{\gamma}(X,Y,Z,T) \leqslant g[\Phi(X,T),Y,Z] \leqslant \overline{\gamma}(X,Y,Z,T) \qquad (3)$$

Montrons par exemple que (1) et (2) sont équivalents (la démonstration serait semblable pour (1) et (3)). En effet (2) entraine (1) car si, dans (2), on fait T = Z, (2) devient (1) puisque $\gamma(X,Y,Z,Z) = \Psi(X,Y,Z)$.

Inversement (1) entraine (2) puisque, si $T = Z$, (2) est (1) et, si $T \neq Z$, (2) est une banalité ($0 \leqslant g[\Phi(X,Z),Y,T] \leqslant 1$).

Ce théorème est un cas particulier du théorème de substitution ([K]).

EXEMPLE. - Soit la fonction :

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = x'_1 x'_2 x_4 x'_5 + x'_1 x_2 x'_3 x'_4 + x'_1 x_2 x'_4 x'_5 + x'_1 x'_2 x_3 x_4$$

$$+ x_2 x'_3 x'_4 x_5 + x'_2 x_3 x_4 x_5 + x_1 x_5.$$

En introduisant la variable t par dédoublement de x_5 pour obtenir une fonction incomplète $\gamma(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,t)$ et en faisant apparaître certaines décompositions disjointes de γ, on met en évidence une décomposition non disjointe de $f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)$.

$$\overline{\gamma}(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,t) = f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) + (x'_5 t + x_5 t')$$

$$\underline{\gamma}(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,t) = f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \cdot (x_5 t + x'_5 t')$$

La matrice $(x_1\ x_5, x_2\ x_3\ x_4 t)$ de γ

$$\begin{pmatrix} 0\ \emptyset\ 1\ \emptyset & 0\ \emptyset\ 1\ \emptyset & 1\ \emptyset\ 0\ \emptyset & 1\ \emptyset\ 0\ \emptyset \\ \emptyset\ 0\ \emptyset\ 0 & \emptyset\ 0\ \emptyset\ 1 & \emptyset\ 1\ \emptyset\ 0 & \emptyset\ 0\ \emptyset\ 0 \\ 0\ \emptyset\ 0\ \emptyset & 0\ \emptyset\ 0\ \emptyset & 0\ \emptyset\ 0\ \emptyset & 0\ \emptyset\ 0\ \emptyset \\ \emptyset\ 1\ \emptyset\ 1 & \emptyset\ 1\ \emptyset\ 1 & \emptyset\ 1\ \emptyset\ 1 & \emptyset\ 1\ \emptyset\ 1 \end{pmatrix}$$

est compatible avec les matrices décomposables suivantes :

1. $$\begin{pmatrix} 0\ 0\ 1\ 0 & 0\ 0\ 1\ 1 & 1\ 1\ 0\ 0 & 1\ 0\ 0\ 0 \\ 0\ 0\ 1\ 0 & 0\ 0\ 1\ 1 & 1\ 1\ 0\ 0 & 1\ 0\ 0\ 0 \\ 0\ 0\ 0\ 0 & 0\ 0\ 0\ 0 & 0\ 0\ 0\ 0 & 0\ 0\ 0\ 0 \\ 1\ 1\ 1\ 1 & 1\ 1\ 1\ 1 & 1\ 1\ 1\ 1 & 1\ 1\ 1\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\ 1 \\ 0\ 1 \\ 0\ 0 \\ 1\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1\ 1\ 0\ 1 & 1\ 1\ 0\ 0 & 0\ 0\ 1\ 1 & 0\ 1\ 1\ 1 \\ 0\ 0\ 1\ 0 & 0\ 0\ 1\ 1 & 1\ 1\ 0\ 0 & 1\ 0\ 0\ 0 \end{pmatrix}$$

Revenons à la fonction initiale, en faisant $t = x_5$:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = g\,[x_1, x_5, \varphi(x_2, x_3, x_4, x_5)]$$

où $\boxed{g\,(x_1, x_5, \varphi) = x_1\ x_5 + x_1'\ \varphi + x_5'\ \varphi}$

avec $\varphi(x_2, x_3, x_4, x_5) = x_2'\ x_3'\ x_4\ x_5' + x_2'\ x_3\ x_4 + x_2\ x_3'\ x_4' + x_2\ x_3\ x_4'\ x_5'$

$$\boxed{\varphi\,(x_2, x_3, x_4, x_5) = x_2'\ x_4\ x_5' + x_2'\ x_3\ x_4 + x_2\ x_3'\ x_4' + x_2\ x_4'\ x_5'}$$

2. $$\begin{pmatrix} 0\ 0\ 1\ 0 & 0\ 0\ 1\ 1 & 1\ 1\ 0\ 0 & 1\ 0\ 0\ 0 \\ 0\ 0\ 1\ 0 & 0\ 0\ 1\ 1 & 1\ 1\ 0\ 0 & 1\ 0\ 0\ 0 \\ 0\ 1\ 0\ 1 & 0\ 1\ 0\ 1 & 0\ 1\ 0\ 1 & 0\ 1\ 0\ 1 \\ 0\ 1\ 0\ 1 & 0\ 1\ 0\ 1 & 0\ 1\ 0\ 1 & 0\ 1\ 0\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\ 0 \\ 1\ 0 \\ 0\ 1 \\ 0\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0\ 0\ 1\ 0 & 0\ 0\ 1\ 1 & 1\ 1\ 0\ 0 & 1\ 0\ 0\ 0 \\ 0\ 1\ 0\ 1 & 0\ 1\ 0\ 1 & 0\ 1\ 0\ 1 & 0\ 1\ 0\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = h\,[\psi(x_1, x_5), x_2, x_3, x_4, x_5)$$

où $\psi(x_1, x_5) = x_1$. Cette décomposition est donc triviale.

VI - B - UN ADDITIONNEUR COMME UNE APPLICATION DE LA THEORIE DES DECOMPOSITIONS DISJOINTES SIMPLES.

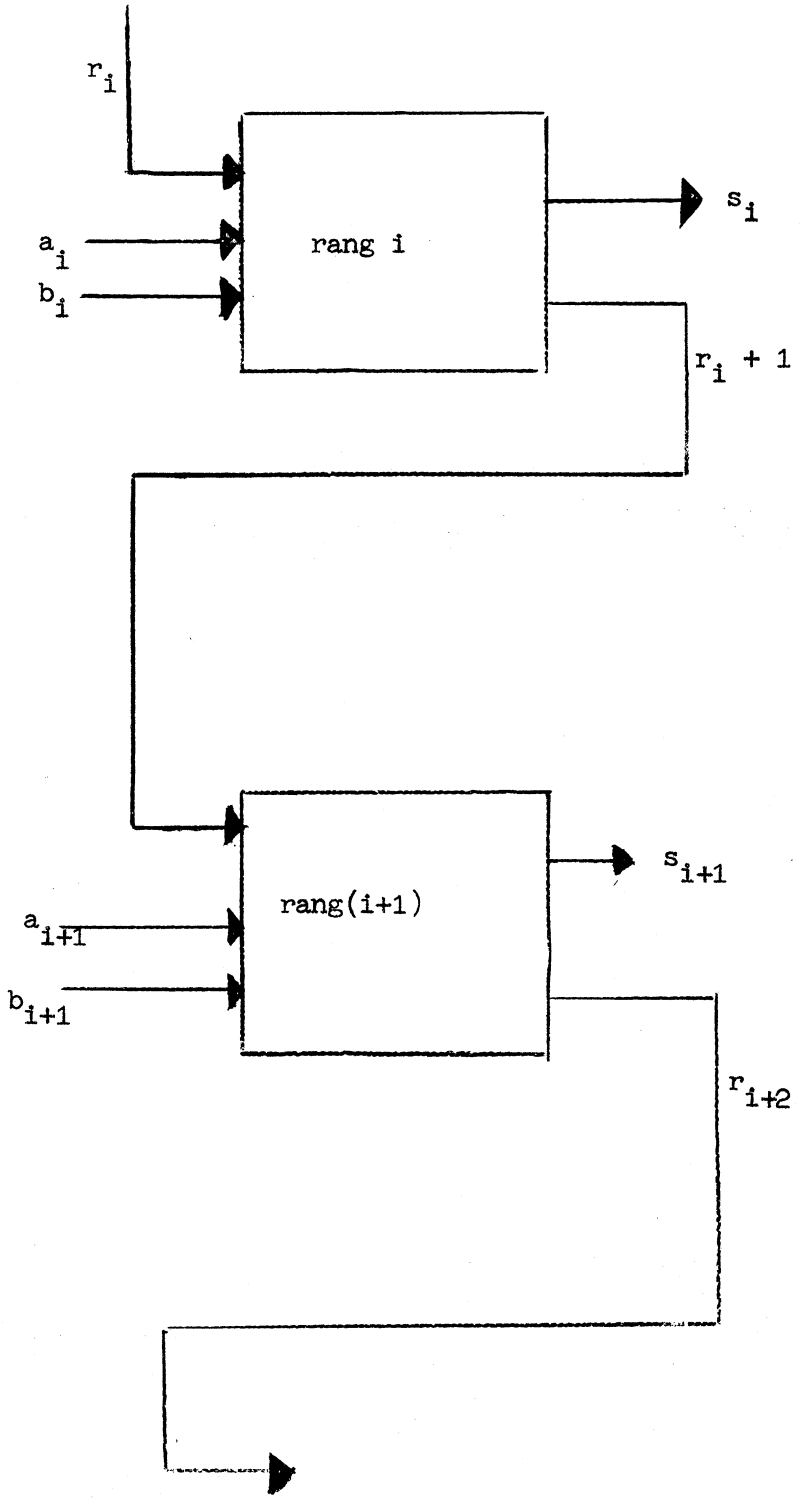
Soit à additionner deux nombres binaires A = ... $a_4a_3a_2a_1$ et B = ... $b_4b_3b_2b_1$ (les chiffres de plus faible poids sont à droite); soit S = ... $s_4s_3s_2s_1$ leur somme. Le tableau :

	...$s_4s_3s_2s_1$ \ ...$a_4a_3a_2a_1$	...0000	...0001	...0010	...0011	...
	...0000	...0000	...0001	...0010	...0011	...
	...0001	...0001	...0010	...0011	...0100	...
...$b_4b_3b_2b_1$	...0010	...0010	...0011	...0100	...	
	...0011	...0011	...0100	...		
	.	.	.	.	.	
	.	.	.	.	.	
	.	.	.	.	.	

ou un raisonnement simple conduisent à la relation suivante entre A,B et S :

$$(I)\begin{cases} s_1 = a_1 \oplus b_1 \\ s_2 = a_2 \oplus b_2 \oplus r_2(a_1, y_1) & \text{avec } r_2 = a_1\, b_1 \\ s_3 = a_3 \oplus b_3 \oplus r_3(a_1, a_2, b_1, b_2) & \text{avec } r_3 = \mathrm{Maj}(r_2, a_2, b_2) \\ \quad \vdots \\ s_i = a_i \oplus b_i \oplus r_i(a_1, \ldots, a_{i-1}, b_1, \ldots, b_{i-1}) & \text{avec } r_i = \mathrm{Maj}(r_{i-1}, a_{i-1}, b_{i-1}) \\ \quad \vdots \end{cases}$$

Ainsi se trouve mise en évidence la possibilité d'utiliser un additionneur série ou d'employer toujours le même opérateur pour réaliser chaque étage d'un additionneur parallèle :


r_i
a_i
b_i
rang i
s_i
$r_i + 1$
rang(i+1)
a_{i+1}
b_{i+1}
s_{i+1}
r_{i+2}

Après ce rappel, considérons la fonction générale S = F(A,B) de composante :

$$(1)\begin{cases} s_i = f_i(A,B) = a_i \oplus b_i \oplus r_i(a_1,a_2,\ldots,a_{i-1},b_1,b_2,\ldots,b_{i-1}) \\ \text{où } r_i = \text{Maj}\ (r_{i-1},\ a_{i-1},\ b_{i-1}). \end{cases}$$

$f_i(A,B)$ admet une décomposition disjointe simple par rapport à la disjonction suivant la partition $(a_i,b_i,a_1\ a_2\ldots a_{i-1}\ b_1\ b_2\ \cdots\ b_{i-1})$, la décomposition $a_i \oplus b_i \oplus r_i$; r_i admet une décomposition disjointe simple suivant la partition $(a_{i-1},b_{i-1},a_1\ a_2\ldots a_{i-2}\ b_1\ b_2\ldots b_{i-2})$, la décomposition Maj $(r_{i-1},\ a_{i-1},\ b_{i-1})$. La théorie des décompositions disjointe simples permet :

- de trouver, à partir par exemple du tableau précédent, les décompositions disjointes simples des fonctions $s_i = f_i(A,B)$ et $r_i(a_1,a_2,\ldots,a_{i-1},\ b_1,b_2,\ldots,b_{i-1})$ (voir II A et IV A), décompositions qui mettent à jour les opérateurs : fonction linéaire à 3 variables et majorité;

- d'affirmer que ces décompositions sont uniques (voir [CU]), donc que les opérateurs correspondants sont uniques.

Nous pouvons énoncer :

THEOREME 2. Le fait d'utiliser les décompositions disjointes simples pour la réalisation d'un additionneur conduit à l'additionneur traditionnel utilisant les opérateurs linéaire à 3 entrées et majorité, et à celui-là seulement.

B I B L I O G R A P H I E

[B] C. BENZAKEN, Treillis série-parallèle, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 260 p. 5431-5434, 24 mai 1965.

[CA] M. CARVALLO, Principes et applications de l'analyse booléenne, Gauthier-Villers, Paris, 1965.

[CU] H. Allen CURTIS, A new approach to the design of switching circuits, Van Nostrand, 1962.

[K] J. KUNTZMANN, Algèbre de Boole, Dunod, 1965.

[LA] F. LAPSCHER, Introduction de variables surabondantes dans une fonction booléenne et applications, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 259, 1964, p. 4206-4208.

[LE] R.S. LEDLEY, Programming and utilizing digital computers, Mac Graw-Hill New-York, 1962.

[MAC] R. MAC NAUGHTON, Unate truth Functions, I.R.E. Trans., EC 10, 1961, p. 1-6.

[MAL] Y. MALGRANGE, Présentation d'un algorithme. Application à certains problèmes de la théorie des graphes, Publications Bull 1961.

[P] E. PICHAT, Décompositions simples disjointes de fonctions booléennes données par leurs composants premiers, R.F.T.I. - CHIFFRES, vol. 8, n° 1, 1965, p. 63-66.

L'ouvrage auquel on peut se référer, en particulier lors de définitions non données, est le livre du Professeur J. KUNTZMANN (Voir [K]).

VU,

Grenoble, le

Le Président de la Thèse

VU,

Grenoble, le

Le Doyen de la Faculté des Sciences

VU et permis d'imprimer,

Le Recteur de l'Académie de Grenoble