



**HAL**  
open science

## Synthèse d'une fonction Booléenne par l'opérateur U

Jean Macheras

► **To cite this version:**

Jean Macheras. Synthèse d'une fonction Booléenne par l'opérateur U. Modélisation et simulation. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1966. Français. NNT: . tel-00280357

**HAL Id: tel-00280357**

**<https://theses.hal.science/tel-00280357>**

Submitted on 16 May 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

n° d'Ordre

UNIVERSITE DE GRENOBLE

FACULTE DES SCIENCES

SYNTHESE D'UNE FONCTION BOOLEENNE PAR L'OPERATEUR U

-----

THESE  
POUR OBTENIR

Le titre de DOCTEUR DE TROISIEME CYCLE

MATHEMATIQUES APPLIQUEES

-----

Présentée par

Jean MACHERAS

---

Thèse soutenue le 20 Juin 1966

Devant la commission d'Examen :

M. KUNTZMANN

Mme BERTRANDIAS

M. VAUQUOIS

Président

Examineurs

}



n° d'Ordre

UNIVERSITE DE GRENOBLE

FACULTE DES SCIENCES

SYNTHESE D'UNE FONCTION BOOLEENNE PAR L'OPERATEUR U

-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-

THESE  
POUR OBTENIR

Le titre de DOCTEUR DE TROISIEME CYCLE

MATHEMATIQUES APPLIQUEES

-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-

Présentée par

Jean MACHERAS

-:-:-

Thèse soutenue le 20 Juin 1966

Devant la commission d'Examen :

M. KUNTZMANN

Mme BERTRANDIAS

M. VAUQUOIS

Président :

Examineurs



# FACULTE DES SCIENCES

## LISTE DES PROFESSEURS

DOYENS HONORAIRES :

M. FORTRAT P.

M. MORET L.

DOYEN :

M. WEIL L.

PROFESSEURS TITULAIRES :

MM. NEEL L.	Magnetisme
HEILMANN R.	Chimie Organique
KRAVTCHEKNO J.	Mecanique Rationnelle
CHABAUTY C.	Mathematiques Pures
PARDE M.	Potamologie
BENOIT J.	Radioelectricité
CHENE M.	Chimie Papetière
BESSON J.	Electrochimie
WEIL L.	Thermodynamique
FELICI N.	Electrostatique
KUNTZMANN J.	Mathematiques Appliquées
BARBIER R.	Géologie Appliquée
SANTON L.	Mécanique des Fluides
OZENDA P.	Botanique
FALLOT M.	Physique Industrielle
GALVANI O.	Mathématiques
MOUSSA A.	Chimie Nucléaire et Radioactivité

	TRAYNARD P.	Chimie Générale
	SOUTIF M.	Physique Générale
	CRAYA A.	Hydrodynamique
	REULOS R.	Théorie des Champs
	AYANT Y.	Physique Approfondie
	GALISSOT F.	Mathématiques Pures
Melle	LUTZ E.	Mathématiques Générales
MM.	BLAMBERT M.	Mathématiques
	BOUCHEZ	Physique Nucléaire
	LLIBOUTRY L.	Géophysique
	MICHEL R.	Géologie et Minéralogie
	BONNIER E.	Métallurgie
	DESSAUX G.	Physiologie Animale
	PILLET E.	Electrotechnique
	DEBELMAS J.	Géologie Générale
	GERBER R.	Mathématiques Pures
	PAUTHENET R.	Electrotechnique
	VAUQUOIS B.	Calcul Electronique
	SILBER R.	Mécanique des Fluides
	MOUSSIEGT J.	Electronique
	BARBIER J.C.	Physique Expérimentale
	BUYLE-BODIN M.	Electronique
	KOSZUL J.L.	Mathématiques
	DREYFUS B.	Thermodynamique
	VAILLANT F.	Zoologie
	KLEIN J.	Mathématiques Pures
	SENGEL P.	Zoologie
	ARNAUD P.	Chimie
	BARJON R.	Physique Nucléaire
	BARNOUD F.	Biosynthese de la Cellulose

PROFESSEURS ASSOCIES :

MM.	WAGNER H.	Botanique
	NAPP-ZINN K.	Botanique

PROFESSEURS SANS CHAIRE :

Mme	KÖFLER L.	Botanique
	DEPASSEL R.	Mécanique
	PERRET R.	Servomecanisme
Mme	BARBIER M.J.	Electrochimie
MM.	COHEN J.	Physique
	GIDON P.	Géologie
Mme	SOUTIF J.	Physique Générale
MM.	GIRAUD P.	Géologie
	GASTINEL N.	Mathématiques Appliquées
	LACAZE A.	Thermodynamique
	GLENAT R.	Chimie Organique
	BRISSONNEAU P.	Physique Générale
	DUROS P.	Minéralogie
	ANGLES D'AURIAC	Mécanique des Fluides
	ROBERT A.	Chimie Papetière
	COUMES A.	Electronique
	PEBAY-PEROULA	Physique
	DEGRANGE C.	Zoologie
	GAGNAIRE D.	Chimie Papetière
	RASSAT A.	Chimie
	PERRIAUX J.	Géologie
	BARRA J.	Mathématiques Appliquées



## PROFESSEURS HONORAIRES

MM.	FORTIER A.	Mécanique des fluides
	BRELOT M.	Mathématiques
	WOLFERS F.	Physique
	DORIER A.	Zoologie

## MAITRES DE CONFERENCES

MM.	BIAREZ J.	Mécanique des fluides
	DODU J.	Mécanique des fluides
	DOLIQUE J.M.	Electronique
	HACQUES G.	Mathématiques Appliquées
	LANCIA R.	Physique Automatique
	POULOUJADOFF M.	Electrotechnique
	KAHANE A.	Physique
Mme	BONNIER J.	Chimie
Mme	KAHANE J.	Physique
MM.	DEPORTES C.	Chimie Minérale
	DEPOMMIER P.	Physique Nucléaire
	CAUQUIS G.	Chimie Générale
	BONNET G.	Physique
Mme	BOUCHE L.	Mathématiques
MM.	COLOBERT L.	Physiologie Animale
	PAYANT J.J.	Mathématiques
	CAUBET J.P.	Mathématiques
	LAURENT P.J.	Mathématiques Appliquées
	BERTRANDIAS J.P.	Mathématiques Appliquées
	BRIERE G.	Physique
	LAJZEROWICZ J.	Physique
	VALENTIN J.	Physique
	DESPRE P.	Metallurgie
	BONNETAIN L.	Chimie Minérale

MAITRES DE CONFERENCE ASSOCIE :

M. RADELLI L. Géologie

MAITRE DE CONFERENCE HONORAIRE :

M. GASTEX A. Essais électriques



*Je tiens à remercier tout particulièrement :*

*Monsieur le Professeur KUNTZMANN, directeur de l'Institut de Mathématiques Appliquées de l'Université de GRENOBLE, qui a dirigé l'élaboration de cette thèse tout en m'aidant de ses nombreuses critiques et suggestions.*

*Madame BERTRANDIAS et Monsieur Le Professeur VAUQUOIS qui ont bien voulu faire partie du Jury de ma thèse.*

*Monsieur DESCHIZEAUX, du Service de Mathématiques Appliquées.*

*Le Secrétariat et le Service tirage qui ont assuré la réalisation matérielle de cette thèse.*

*Pour le souci qu'ils ont eu de me faciliter la tâche du fait de mon éloignement, ce dont je leur suis particulièrement reconnaissant.*



## INTRODUCTION

### DEFINITION ET APPLICATIONS DES RESEAUX U

Cette thèse a pour objet la recherche d'une synthèse économique d'une fonction booléenne par l'opérateur U restreint (cf ci-dessous). La bibliographie étant très peu fournie à ce sujet nous avons dû envisager plusieurs accès du problème susceptibles de conduire à des résultats exploitables, en nous inspirant des recherches faites sur d'autres opérateurs (opérateurs croissants, NI, somme-produit-complément etc...), en particulier en ce qui concerne le passage par un réseau arborescent, le rôle de la décomposition et la synthèse "par le bas".

Les trois premiers chapitres sont consacrés à l'énoncé de divers résultats théoriques, le dernier à la définition de la méthode de synthèse la plus intéressante compte tenu des moyens à mettre en oeuvre. Nous venons en conclusion l'avantage qu'on peut tirer au point de vue coût de réalisation de l'opérateur U par rapport à l'opérateur NI.

\* \* \*

Toute fonction booléenne peut être réalisée au noyau de l'opérateur universel

$$U_1(X, Y, Z) = X Y + X' Z,$$

en effet en mettant en évidence une variable simple a dans la fonction

$$f(X) = f(a, Y), \text{ on peut écrire}$$

$$f(a, Y) = a f(1, Y) + a' f(0, Y),$$

et par suite on peut réaliser une fonction de n variables au moyen de  $2^n - 1$  opérateurs  $U_1$  au plus, et des constantes 0 et 1.

Nous nous bornerons à l'étude de l'opérateur restreint

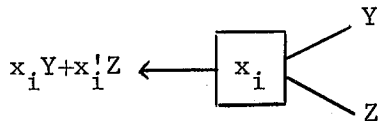
$$U(x, Y, Z) = xY + x'Z,$$

où  $x$  est une variable simple et  $Y$  et  $Z$  des fonctions quelconques réalisées par des opérateurs  $U$ . Cet usage de  $U$  n'est pas le plus général mais d'une part il est plus facile à étudier, d'autre part il a son intérêt propre comme le montre le paragraphe suivant.

Réaliser une fonction de  $n$  variables par  $U(x, Y, Z)$  revient à trouver une synthèse de cette fonction au moyen de  $n$  opérateurs  $U_{x_i}$  à deux entrées et réalisant la fonction

$$U_{x_i}(Y, Z) = U(x_i, Y, Z).$$

On représentera un opérateur  $U_{x_i}$  par un carré à l'intérieur duquel est inscrit le nom de la variable  $x_i$ ,  $Y$  étant l'entrée supérieure et  $Z$  l'entrée inférieure (Fig 1)



-Fig 1-

On appellera "RESEAU U" un réseau ordonné de noeuds fonctionnels constitués par des opérateurs  $U_{x_i}$ , les seules entrées indépendantes du réseau étant 0 et 1 : nous savons déjà que toute fonction booléenne peut être réalisée par un réseau U, et la question qui se pose est de pouvoir la réaliser avec le nombre minimum d'opérateurs possible, ce nombre définissant le COUT du réseau U.

Remarquons qu'avec ces définitions toute fonction non dégénérée d'une variable a un coût minimum de réalisation égal à 1, puisque

$$x = U_x 10 \quad \text{et} \quad x' = U_x 01,$$

ce qui ne correspond pas à la réalité physique où les variables sont données, donc de coût nul, mais d'une part il est aisé de faire la correction une fois le réseau obtenu, d'autre part cette convention facilite l'étude théorique de la question (cF par exemple le théorème II-1).

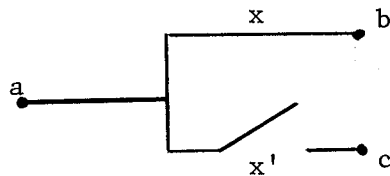
Nous appellerons "RESEAU DE CONTACTS ASSOCIES PAR PAIRE DE CONTACTS COMPLEMENTAIRES" un réseau fini et sans boucles d'étoiles à trois extrémités ayant les deux propriétés suivantes :

1° - À chaque extrémité d'une étoile est associée une variable qu'on appellera "état" de l'extrémité, les états respectifs a,b,c des trois extrémités d'une étoile étant liés entre eux par les relations

$$(1) \begin{cases} a x = b x \\ a x' = c x \end{cases}$$

x étant un paramètre attaché à l'étoile et x' son complément, si x est une variable booléenne.

L'extrémité ayant dans (1) l'état a sera dite "entrée" de l'étoile, les deux autres seront dites "sorties" de l'étoile. On peut par exemple réaliser une telle étoile par deux contacts ayant une extrémité commune et des variables booléennes de commande x, x' complémentaires (Fig 2) ;



-Fig 2-

2° - Les extrémités des différentes étoiles sont reliées entre elles par des noeuds de répartition (la relation entre les états des extrémités d'un même noeud est l'égalité) dont une extrémité au plus est l'entrée d'une étoile.

La figure 3, dans laquelle une étoile est représentée par le schéma de la figure 2 et un noeud par un point confondu avec ses extrémités répond à ces deux définitions.

Puisque le réseau est fini et sans boucles il existe des noeuds



dont aucune extrémité n'est sortie d'une étoile : nous appellerons ces noeuds les "noeuds d'entrée" du réseau. De même il existe des noeuds dont aucune extrémité n'est l'entrée d'une étoile : nous appellerons ces noeuds les "noeuds de sortie" du réseau.

Cas d'un noeud d'entrée unique.

Nous nous bornerons à considérer des réseaux à un noeud d'entrée unique, et nous ajouterons les contraintes suivantes qui permettent de définir entièrement l'état du réseau pour une valeur donnée des paramètres d'étoiles :

a) - l'état du noeud d'entrée est fixe et égal à 1

b) - toute extrémité dont l'état pour une valeur donnée des paramètres n'est pas défini par le système (1) et (a) a pour état 0.

Si les paramètres d'étoiles sont des variables booléennes les états des noeuds de sortie sont des fonctions booléennes de ces variables. On a alors la propriété fondamentale suivante :

Les états des noeuds de sortie sont des fonctions booléennes disjointes et complémentaires des paramètres d'étoiles.

Appelons  $X$  l'ensemble des paramètres d'étoiles,  $f_{N_i}(X)$  l'état du noeud  $N_i$ , et montrons d'abord que  $\sum_i f_{N_i}(X) = 1$ .

Quelle que soit la valeur  $X_0$  des paramètres l'une des extrémités d'une étoile quelconque a le même état que son entrée, car dans (1) si  $x = 1$ ,  $a = b$  et si  $x = 0$ ,  $a = c$ . Or le noeud d'entrée a pour état 1 : son extrémité est l'entrée d'une étoile dont une des deux sorties prend

l'état 1 ; si cette sortie est l'entrée d'une autre étoile on peut faire le même raisonnement sur celle-ci, et ainsi de suite. Comme le réseau est supposé sans boucles et fini on aboutit forcément à un noeud de sortie : il existe donc un noeud de sortie ayant l'état 1, et on a bien  $\sum_i f_{N_i}(X_0)=1$ .

Montrons enfin que si  $N_i$  et  $N_j$  sont deux noeuds de sortie quelconques on a  $f_{N_i}(X) \cdot f_{N_j}(X) = 0$ .

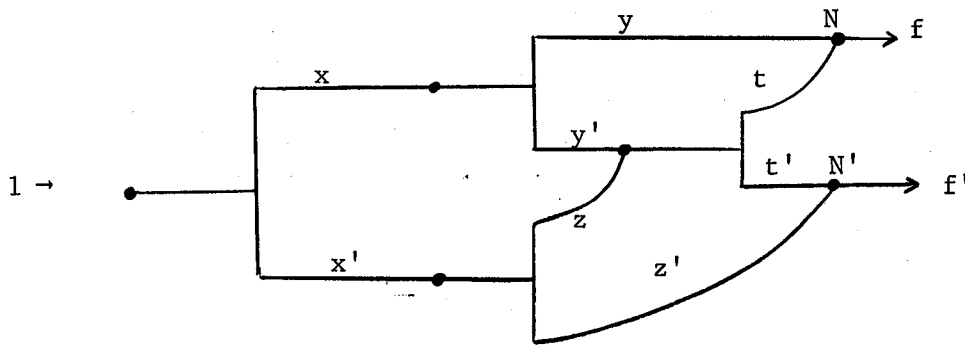
Supposons que pour une valeur  $X_0$  des paramètres on ait  $f_{N_i}(X_0)=1$  : c'est dire qu'il existe un chemin  $C_1$  joignant le noeud d'entrée à  $N_i$  et tel que sur toute étoile située sur ce chemin (1) conclue à l'identité entre les deux extrémités parcourues. Pour que  $f_{N_j}(X_0) = 1$  il est nécessaire qu'il en soit de même pour un certain chemin  $C_2^j$  joignant le noeud d'entrée à  $N_j$  ; or ceci est impossible car d'après (2°)  $C_2$  ne pourrait diverger de  $C_1$  qu'à l'entrée d'une ou plusieurs étoiles, or sur l'une quelconque d'entre elles  $C_1$  emprunterait la sortie dont l'état est défini par (1),  $C_2$  emprunterait donc celle dont l'état n'est pas défini par (1), ce qui est contraire à l'hypothèse. Il est donc impossible de définir l'état de  $N_j$ , et d'après (b)  $f_{N_j}(X_0) = 0$ .

On a donc bien  $f_{N_i}(X) \cdot f_{N_j}(X) = 0$ .

Cas du noeud d'entrée unique et de deux noeuds de sortie.

S'il n'y a que deux noeuds de sorties d'après ce qui précède leurs états sont deux fonctions booléennes compléments l'une de l'autre. Ainsi le réseau de la Figure 3, où une étoile est représentée par une paire de contacts complémentaires associés d'après le schéma de la Fig 2, réalise la fonction

$$f = x (y+t) + x' z t \quad \text{et son complément}$$



-Fig 3-

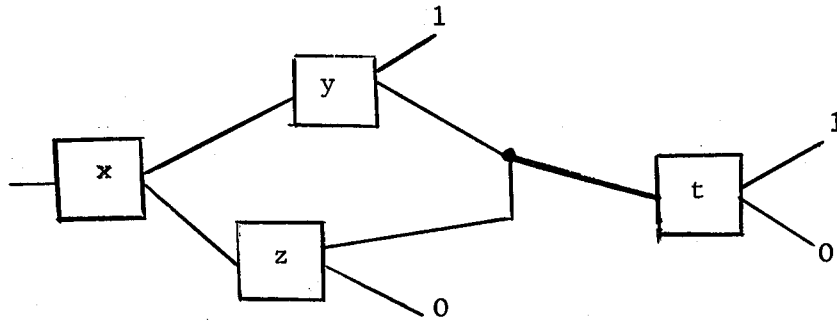
Nous allons montrer que le problème de la réalisation d'une fonction par un tel réseau se ramène à celui de sa synthèse par un réseau U.

Soit N le noeud de sortie dont l'état est  $f(X)$ ,  $f$  prenant la valeur 1 pour certaines valeurs de  $X$  ; si inversement on définit l'état de N comme étant fixe et égal à 1, sans définir préalablement aucune autre extrémité, les relations (1) étant symétriques le noeud d'entrée prend l'état 1 pour le même ensemble de valeurs de  $X$ , autrement dit il est égal à  $f(X)$ . Par ailleurs l'autre noeud  $N'$  a l'état 0, car d'après (2°) tout chemin joignant N à  $N'$  doit parcourir au minimum une même étoile en passant par ses deux sorties, et l'un des relation (1) conduit à une indétermination.

D'autre part sur une étoile donnée les relations (1) donnent par addition

$$a = b x + c x' = U_x (b, c)$$

Le réseau que nous venons de définir n'est autre qu'un réseau U dont les étoiles constituent les opérateurs U, et qui réalise  $f$ . Ainsi à la figure 3 il correspond le réseau U suivant :



Réciproquement, à tout réseau U réalisant une fonction f on peut faire correspondre un réseau de contacts associés par paires de contacts complémentaires, ceci en remplaçant tout opérateur U par une étoile, et par suite de la symétrie des relations (1) si l'on fixe à 1 l'état du noeud d'entrée on obtient f et f' aux deux noeuds de sortie.

Le problème de la réalisation simultanée d'une fonction et de son complément par un réseau de contacts associés par paires de contacts complémentaires se ramène donc à celui de la synthèse de cette fonction par un réseau U.

On peut citer parmi les applications intéressantes la réalisation de fonctions booléennes par des réseaux de cryotrons (cf bibliogr. Réf. 1 et 2).

---



B I B L I O G R A P H I E

- 1 SUSSENGUTH : "an algorithm for automatic design of logical cryogenic circuits, IRE trans ou EC, dec 1961, PP 623-630
- 2 J.P. LAMDITIE : "formes arborescentes des fonctions booléennes. Application aux circuits à cryotrons", thèse de 3<sup>e</sup> cycle, faculté de Grenoble, 1964
- 3 R.A. SHORT : "the design of complementary-output net-work, IRE Trans ou EC, déc. 1962, PP 743-753
- 4 J.P. ROTH : "minimization over boolean trees", I.B.M. J. res and dev., vol. 4 PP 543 - 558, Nov. 1960
- 5 S.N. PORTER : "a new configuration for faster cryotrons circuits", IEEE trans, février 1964, P.56
- 6 J. KUNTZMANN : "algèbre de Boole" (Dunod), 1964
- 7 J. KUNTZMANN : "théorie des réseaux", cours de la faculté des sciences de Grenoble.
- 8 F. LAPSCHER : "propriété des fonctions booléennes admettant certaines décompositions disjointes, séminaire d'Algèbre de Boole du 28 février 1966, Institut de Mathématiques Appliquées de Grenoble, et congrès de l'A.F.I.R.O., Lille, juin 1966.

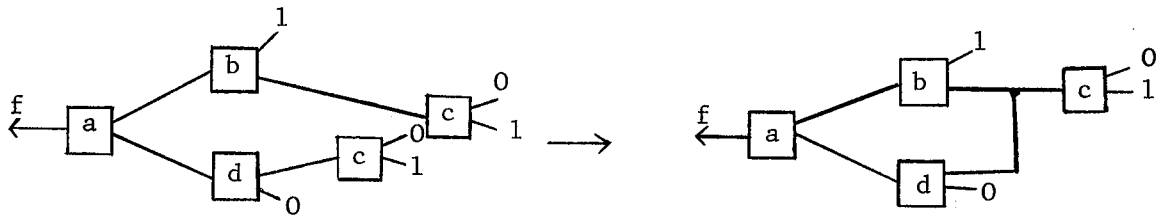


## C H A P I T R E I

### RESEAUX U ARBORESCENTS

Un réseau U sera dit arborescent si la sortie d'un opérateur U quelconque ne sert d'entrée qu'à un seul autre opérateur U au plus. Par opposition nous appellerons réseau U "quelconque" ou "général" un réseau U où l'on n'impose pas cette condition.

On peut passer d'un réseau U arborescent à un réseau U quelconque réalisant la même fonction en remplaçant des sous-réseaux identiques par un seul dont la sortie servira d'entrée à plusieurs opérateurs, et ce faisant on diminue le coût de la réalisation (CF Fig 1) : l'intérêt que présente le passage préalable par un réseau arborescent tient à ce que le problème de la recherche d'un réseau U arborescent optimal peut être résolu par des méthodes simples dont les principes seront exposés dans ce chapitre.



- Fig 1 - Passage d'un réseau arborescent à un réseau quelconque réalisant la même fonction  $f = a(b + b' c') + a' d c'$

#### A - Propriétés fondamentales.

Les quatre propriétés énoncées ci-dessous seront très utiles pour la suite. Les trois premières sont vraies pour un réseau U quelconque.



Propriété 1 : deux fonctions de même type ont des représentations minimales, arborescentes ou non, de même coût.

En effet, par définition on peut passer de l'une à l'autre par des permutations et complémentations sur les variables. Or :

- si une fonction  $\hat{f}$  se déduit de  $f$  par une permutation  $x \leftrightarrow y$  sur deux variables, si  $R$  est un réseau réalisant  $f$  on obtient un réseau  $\hat{R}$  réalisant  $\hat{f}$  en changeant tout opérateur  $U_x$  en un opérateur  $U_y$  et inversement, et  $\hat{R}$  a le même coût que  $R$ .

- si  $\tilde{f}$  se déduit de  $f$  par complémentation d'une variable ( $x \rightarrow x'$ ), si  $R$  est un réseau réalisant  $f$  on obtient un réseau  $\tilde{R}$  réalisant  $\tilde{f}$  en intervertissant les deux entrées de tout opérateur  $U_x$ , puisque  $U_x(Z, Y) = xZ + x'Y = U_x(Y, Z)$ , et  $\tilde{R}$  a le même coût que  $R$ .

On peut donc faire correspondre à tout réseau  $U$  réalisant l'une un réseau  $U$  de même coût réalisant l'autre, ce qui démontre la propriété 1.

Propriété 2 : si dans un réseau  $U$  réalisant une fonction  $f$  ou inverse les entrées 1 et 0, on obtient un réseau  $U$  réalisant son complément  $f'$ .

Supposons en effet démontrée cette propriété pour les fonctions de sortie de numéro de couche  $\leq p$ , et soit

$$f_1 = x \varphi + x' \psi$$

la fonction de sortie d'un noeud quelconque de  $p + 1^e$  couche. Si l'on inverse les entrées 1 et 0,  $\varphi$  et  $\psi$  deviennent, d'après l'hypothèse,  $\varphi'$  et  $\psi'$  ; puisque  $x \varphi' + x' \psi' = (x \varphi + x' \psi)'$ ,  $f_1$  devient  $f'_1$ .

La propriété est donc vraie pour les fonctions de sortie de tous les noeuds de  $p + 1^e$  couche.

Or elle est vraie pour les noeuds de première couche, car

$$U x 10 = x \quad \text{et} \quad U x 01 = x'$$

elle est donc vraie par récurrence pour les fonctions de sortie de tous les noeuds, et en particulier pour  $f$ .

Conséquence des propriétés 1 et 2 : une fonction, son complément et sa duale ont des représentations minimales de même coût.

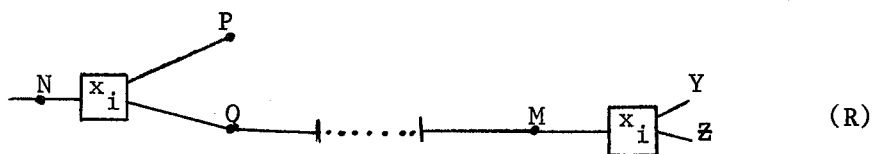
Propriété 3 : dans un réseau  $U$  la fonction de sortie d'un noeud quelconque est une fonction croissante de la fonction de sortie de tout noeud situé en amont.

En effet, cette propriété est vraie pour tout réseau d'opérateurs croissants, or les opérateurs  $U x_i$  sont bien croissants par rapport à leurs deux entrées.

Propriété 4 : si dans un réseau  $U$  arborescent de coût minimum deux noeuds utilisent le même opérateur, aucun des deux n'est en amont de l'autre.

Considérons en effet un réseau  $U$  arborescent  $R$  ayant deux noeuds  $M$  et  $N$  tels que :

- $M$  soit en amont de  $N$
- $M$  et  $N$  utilisent le même opérateur  $U x_i$



- Fig 3.

Montrons que R ne peut être de coût minimum.

Soient P et Q les deux noeuds dont les départs sont les arrivées de N. M est en aval soit de P soit de Q, mais pas des deux sinon nous n'aurions pas un arbre. Supposons M en amont de Q : d'après la propriété 3 la fonction de sortie de Q est une fonction croissante de celle de M, ce qui revient à dire qu'elle peut s'écrire sous la forme

$$f_Q = A f_M + B$$

La fonction de sortie de N est :

$$(1) f_N = x_i f_P + x'_i (A f_M + B)$$

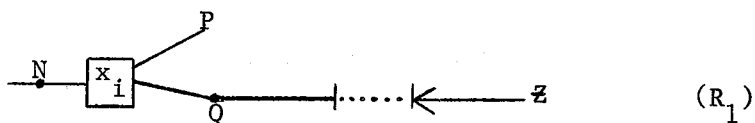
Soient Y et Z les fonctions d'entrée de M (cf Fig 3). On a :

$$f_M = x_i Y + x'_i Z$$

$$(2) f_N = x_i f_P + x'_i (A Z + B)$$

Si l'on compare (1) et (2) on voit qu'en remplaçant  $f_M$  par Z on obtient la même fonction sortie pour N : cela revient à supprimer le noeud M et à appliquer directement Z à sa sortie. On obtient le réseau  $R_1$  de la

Fig 4 :



- Fig 4.

$R_1$  réalise par rapport à  $R$  l'économie d'un opérateur :  $R$  n'est donc pas minimal.

Les réseaux  $U$  arborescents que nous étudierons désormais vérifieront la propriété 4.

B - Forme P.L.L. de sortie d'un réseau  $U$  arborescent.

Définition. A tout noeud  $i$  d'un réseau  $U$  arborescent vérifiant la propriété 4 on peut faire correspondre de façon unique une forme polynomiale lexicographique locale irrédondante<sup>1</sup> de sa fonction de sortie, et que nous appellerons "FORME P.L.L. DE SORTIE" du noeud  $i$ , notée  $F_i$  et définie de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{si } 0 \text{ et } 1 \text{ sont les noeuds correspondant aux constantes d'entrées} \\ \text{respectives } 0 \text{ et } 1, \\ F_0 = 0 ; F_1 = 1 ; \\ \\ \text{si } U x_i \text{ est l'opérateur utilisé par le noeud } i, \text{ avec pour noeuds} \\ \text{d'entrée } j \text{ et } k \text{ dans cet ordre.} \\ F_i = x_i F_j + x'_i F_k. \end{array} \right.$$

Si  $F_j$  et  $F_k$  sont des formes p.l.l. irrédondantes,  $x_i F_j$  et  $x'_i F_k$  en sont aussi car  $F_j$  et  $F_k$  ne contiennent pas  $x_i$  (propriété 4), et comme ils ont en tête la même variable sous deux formes différentes leur somme est aussi une forme p.l.l. irrédondante. Or 0 et 1 sont des formes p.l.l. irrédondantes, on obtient bien une forme p.l.l. irrédondante pour tout noeud  $i$ .

---

<sup>1</sup> C'est-à-dire à monômes tous disjoints. Pour la définition des formes polynomiales lexicographiques locales—pour lesquelles nous employerons l'abréviation "p.l.l." - cf bibliographie, Réf. 6, pp 53 - 67.

La forme p.l.l. de sortie du noeud le plus en aval du réseau sera dite "Forme p.l.l. de sortie" du réseau.

Réciproquement, une forme p.l.l. irrédondante quelconque est forme p.l.l. de sortie d'un et d'un seul réseau U arborescent.

En effet, si nous appelons F cette forme :

si  $F = 1$  le réseau R cherché utilise 0 opérateurs, sinon F contiendrait des noms de variables. La fonction de sortie de R étant égale à 1, R ne peut être que le réseau réduit au seul noeud d'entrée 1 : celui-ci existe et est unique ;

si  $F = 0$ , R se réduit de même à un seul noeud d'entrée qui est 0 ; R existe donc et est unique ;

supposons démontrée la réciproque pour toute forme p.l.l. irrédondante avec  $n - 1$  variables ; soit F une forme p.l.l. avec  $n$  variables, et x sa première lettre. On peut écrire F sous la forme

$$F = x F_1 + x' F_2,$$

$F_1$  et  $F_2$  étant des formes p.l.l. irrédondantes indépendantes de x. S'il existe un réseau U arborescent R ayant pour forme p.l.l. de sortie F, celui-ci a nécessairement  $U_x$  comme opérateur le plus en aval, avec :

pour entrée supérieure la sortie d'un réseau U arborescent ( $R_1$ ) ayant pour forme p.l.l. de sortie  $f_1$  ;

pour entrée inférieure la sortie d'un réseau U arborescent ( $R_2$ ) ayant pour forme p.l.l. de sortie  $f_2$ .

Or  $F_1$  et  $F_2$  contiennent  $n - 1$  variables, donc ( $R_1$ ) et ( $R_2$ ) existent et sont uniques : par conséquent (R) existe et est unique ;

comme la réciproque est vraie pour 0 variables, elle est vraie pour  $n$  variables ( $n$  quelconque).

Ecriture par lignes d'une forme p.l.l.

A tout monôme de la forme p.l.l. de sortie correspond un chemin du réseau (et un seul) joignant dans l'ordre le noeud le plus en aval au noeud d'entrée 1. A deux monômes ayant les mêmes p premières lettres sous la même forme et différant par la p + 1 ième, complétée dans l'un et non complétée dans l'autre, correspondent deux chemins parcourant les mêmes p + 1 premiers noeuds et n'ayant plus aucun noeud fonctionnel commun à partir du p + 1 ième (par définition même des réseaux arborescents).

Ayant la forme p.l.l. de sortie d'un réseau, on peut donc compter le nombre total de noeuds fonctionnels, c'est-à-dire le coût du réseau, en écrivant cette forme p.l.l. de la manière suivante :

- on affecte une ligne à chacun de ses monômes ;
- supposons écrits les p premiers monômes, et soit  $\alpha \beta \dots \gamma \delta \epsilon \dots \lambda$  le p + 1 ième, dans lequel :
  - $\alpha \beta \dots \gamma$  est paquet de tête d'au moins l'un des p premiers monômes, soit  $m_i$  ;
  - $\alpha \beta \dots \gamma \delta$  ne l'est d'aucun,alors sur la p + 1 ième ligne on fera figurer :
  - d'une part  $\alpha, \beta, \dots, \gamma, \delta$  juste en dessous des lettres correspondantes ( $\alpha, \beta, \dots, \gamma, \delta'$ ) du monôme  $m_i$
  - d'autre part les lettres restantes  $\epsilon, \dots, \lambda$  sur des colonnes non encore utilisées par les p premiers monômes.

Le nombre total de colonnes utilisées par cette écriture est égal au nombre de noeuds fonctionnels du réseau, autrement dit à son coût : on a donc là un moyen de connaître le coût du réseau sans avoir à le tracer.

Exemple. Une écriture par lignes de la forme p.l.l.

$$f = a b + a b' c e + a b' c' d + a' d e$$

est la suivante :

$$\begin{aligned} F = & a b \\ & + a b' c e \\ & + a b' c' d \\ & + a' d e , \end{aligned}$$

le réseau U arborescent dont elle est la forme p.l.l. de sortie a donc pour coût 7.

Coût d'un ordre lexicographique local relativement à une fonction.

Définition : on appellera COUT ARBORESCENT d'une forme p.l.l. le nombre de colonnes de son écriture par lignes ;

on appellera COUT D'UN ORDRE LEXICOGRAPHIQUE LOCAL relativement à une fonction le coût arborescent de la forme p.l.l. irréductible<sup>1</sup> de la fonction selon cet ordre.

Remarque : deux formes p.l.l. de la même fonction peuvent avoir le même coût en lettres et avoir des coûts arborescents différents.

Exemple :

$$\begin{aligned} f = & x y z \\ & + x y z' t \quad (\text{coût arborescent : } 4) \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} f = & z x y \\ & + z' x y t \quad (\text{coût arborescent : } 6) \end{aligned}$$

---

1. Par les réductions  $m_1 + m_1 m_2 = m_1$  (irrédondance)  
 $ma + ma' = m$

Les théorèmes que nous allons énoncer s'appliquent au coût arborescent et non au coût en lettres : en ce qui concerne ce dernier il existe pour chacun de ces théorèmes des contre-exemples.

Il existe aussi des théorèmes vrais pour le coût en lettres et qui ne s'appliquent pas au coût arborescent, ainsi celui que démontre Lamoitier<sup>2</sup> : << si les composants premiers d'une fonction ont tous soit la lettre a, soit la lettre a', alors pour chercher la forme p.l.l. la moins coûteuse en lettres il suffit de la chercher parmi celles dont la première variable est a >> ;

si nous considérons la fonction  $f = a b c + a' b c'$ , ces deux monômes sont des monômes premiers de f et sont les seuls ; la lettre a est présente dans ces deux monômes, donc la forme p.l.l. citée est optimale relativement au coût en lettres. Elle ne l'est pas quant au coût arborescent, car :

$$\begin{array}{l} a b c \\ + a' b c' \end{array} \quad \text{a pour coût 5,}$$

or

$$\begin{array}{l} b a c \\ + b a' c' \end{array} \quad \text{a pour coût 4 ;}$$

il existe donc une nette distinction entre les deux. Dans le cadre de notre étude le coût arborescent présente plus d'intérêt car il correspond à la réalité physique que constitue un coût exprimé en nombre d'opérateurs.

C - Recherche d'un ordre lexicographique local optimal.

Nous appellerons ordre lexicographique local optimal relativement à une fonction un ordre lexicographique local dont le coût arborescent est inférieur ou égal à celui de tous les autres ordres.

Soit P un point de l'hypercube à k dimensions ; on notera  $X_p^*$  le monôme

$$x_1^* x_2^* \dots x_k^*$$

dans lequel  $x_i^* = x_i$  si la  $i^e$  composante de P est 1  
 $x_i^* = x_i'$  si la  $i^e$  composante de P est 0

---

2 cf Bibliographie Réf 2.



Lemme I - 1. Soit E une forme p.l.l. et  $k + 1$  variables :  $\{x_1, x_2, \dots, x_k\} = X$ , et  $x_{k+1}$ , telles que :

a) un monôme quelconque de E a pour  $k + 1$  premières lettres  $x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}$  dans cet ordre ;

b) pour tout  $P \in \{0,1\}^k$  il existe au moins un monôme de E multiple de  $X_P^*$  (autrement dit : les  $2^k$  formes  $x_1^* x_2^* \dots x_k^*$  sont toutes représentées dans E) :

alors on obtient une forme p.l.l. de même coût que E, ou le coût inférieur, en effectuant sur tous ses monômes une même permutation quelconque de l'ordre des  $k + 1$  premières lettres, sans changer les autres <sup>1</sup>.

Exemple : soit  $E = x y z + x' y t$ . Le lemme s'applique à E, avec  $k = 1$ . En effet : a) un monôme quelconque de E a pour deux premières lettres  $x, y$  dans cet ordre ; b) il existe un monôme commençant par  $x$  et un monôme commençant par  $x'$ .

En permutant  $x$  et  $y$ , on obtient l'écriture

$$E' = y x z + y x' t,$$

de coût inférieur à E car :

$$\begin{array}{l} E = \quad x y z \\ \quad \quad + x' \quad y t \end{array} \quad \text{a pour coût 5 ;}$$

$$\begin{array}{l} E' = \quad y x z \\ \quad \quad + y x' t \end{array} \quad \text{a pour coût 4.}$$

---

1 On peut même dire d'une manière plus précise (cf démonstration)  
- toute permutation des  $k$  premières lettres entre elles est indifférente  
- si la propriété b) est vraie avec  $k + 1$ , toute permutation des  $k + 1$  premières lettres est indifférente ; sinon on a intérêt à mettre en tête la  $k + 1$  ième.

Démonstration : on peut numérotter les  $2^k$  variables générales  $P_i \in \{0,1\}^k$  par  $i =$  valeur décimale du nombre binaire dont les chiffres sont les composantes de  $P_i$ . E peut s'écrire sous la forme :

$$E = \sum_{i=0}^{2^k-1} X_{P_i}^* (x_{k+1} A_i + x'_{k+1} B_i),$$

$A_i$ , ou  $B_i$ , pouvant être nul, mais pas les deux.

- Si  $\forall i$ ,  $A_i$  et  $B_i$  sont tous deux différents de zéro, E peut s'écrire :

$$E = \sum_{i=0}^{2^{k+1}-1} Y_{Q_i}^* D_i ; D_i \neq 0 \text{ pour tout } i$$

avec  $Y = \{X, x_{k+1}\}$  et  $Q_i \in \{0,1\}^{k+1}$

Tous les monômes  $Y_{Q_i}^* = x_1^* \dots x_k^* x_{k+1}^*$  sont représentés dans E, les  $k + 1$  premières variables jouent un rôle symétrique, par conséquent toute écriture p.l.l. se différenciant de E par la seule permutation des  $k + 1$  premières lettres a même coût que E.

- Si l'un des deux est nul, par exemple  $B_i$ , on ne change pas le coût de E en écrivant, au lieu de la ligne

$$X_{P_i}^* x_k A_i,$$

les deux lignes :

$$X_{P_i}^* x_k A_i$$

$$+ X_{P_i}^* x'_k 0,$$

en convenant qu'une colonne de zéros a pour coût 0. On obtient ainsi une écriture  $E_1$ , de même coût que E et pouvant s'écrire sous la même forme que ci-dessus :

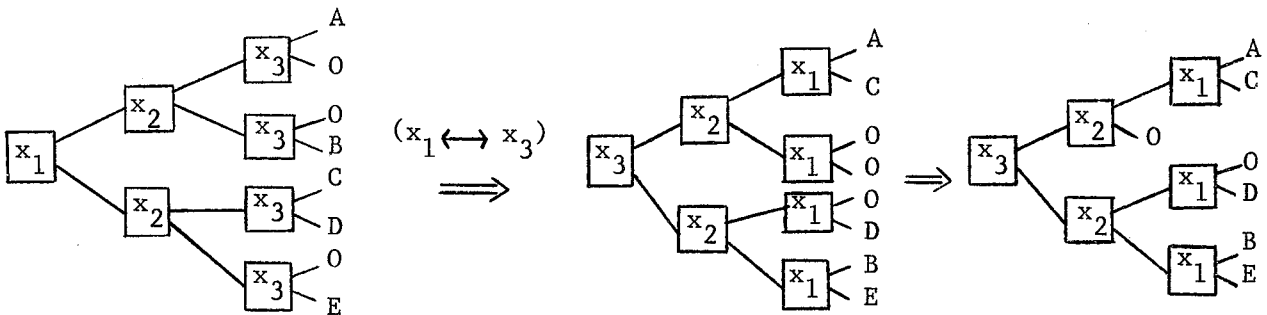
$$E_1 = \sum_{i=0}^{2^{k+1}-1} Y_{Q_i}^* D_i,$$

certaines  $D_i$  pouvant être nuls. Pour la même raison que tout à l'heure on peut permuter les  $k + 1$  premières lettres sans changer le coût de  $E_1$ . Si enfin on supprime toutes les lignes ayant un coefficient 0 on obtient une forme p.l.l. de même coût, ou de coût inférieur. Le lemme est donc démontré.

Interprétation : le lemme I-1 s'applique en particulier à une forme p.l.l. irrédondante, donc à un réseau U arborescent ; il équivaut alors à l'énoncé suivant :

Si dans un réseau U arborescent toutes les bifurcations possibles passent par  $x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}$  dans l'ordre, sans omission d'aucune de ces variables, alors on obtient un réseau de même coût en permutant cet ordre de façon quelconque, avec de plus possibilité de réduction s'il apparaît des opérateurs ayant deux entrées identiques.

Exemple (k = 2) :



Ce lemme ne sera utilisé qu'au cours de la démonstration du théorème I-2, son seul énoncé ne permet pas en effet de définir de synthèse optimale.

Théorème I-1. Si une fonction non égale à une constante est de la forme

$$f = x Y + x' Z,$$

Y et Z étant deux fonctions ne dépendant d'aucun argument commun (en particulier, Y peut être égal à 0 ou 1, ainsi que Z), il existe un ordre lexicographique local ayant pour première lettre x et optimal par rapport à f.

Exemple :  $f = x y z + x' y t$

On peut appliquer le théorème à y car

$$f = y(x z + x' t) + y'.0$$

On peut appliquer le théorème une seconde fois au coefficient de y : en effet z et t sont deux variables distinctes. Une forme p.l.l. optimale de f est donc :

$$f = y x z + y x' t$$

Démonstration : soient  $f = x Y + x' Z$ , Y et Z n'ayant aucun argument effectif en commun, et E la forme p.l.l. ayant pour première lettre x, pour coefficient de x une forme p.l.l. optimale de Y de coût  $C_m(Y)$  et pour coefficient de  $x'$  une forme p.l.l. optimale de Z de coût  $C_m(Z)$ .

Soit E' une forme p.l.l. quelconque de f ; montrons que son coût ne peut être inférieur à C (E).

Dans E' le nombre de colonnes réservées aux variables dont dépend Y et supérieur ou égal à  $C_m(Y)$ , car si dans E' on fait  $x = 1$  et qu'on donne à toutes les variables de Z une valeur quelconque (0 ou 1), on obtient une

forme p.l.l. égale à Y et n'utilisant que des colonnes réservées aux variables dont dépend Y : ces colonnes sont en nombre supérieur ou égal à  $C_m(Y)$ , par définition même de  $C_m(Y)$ .

On démontrerait de même que le nombre de colonnes réservées aux variables dont dépend Z est supérieur ou égal à  $C_m(Z)$ .

Or ces deux ensembles de colonnes sont disjoints, puisque Y et Z n'ont aucun argument en commun. Par ailleurs il existe au moins une colonne réservée à la variable x, par conséquent :

$$C(E') \geq 1 + C_m(Y) + C_m(Z)$$

$$C(E') \geq C(E)$$

La méthode algébrique de recherche d'un ordre lexicographique local optimal (Chap.IV, A) utilise ce théorème.

Théorème I-2. Si une fonction  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  non égale à une constante est telle que

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} \forall i : f(1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n) \text{ et } f(0, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n) \\ \text{soient comparables,} \end{array} \right.$$

il existe un ordre lexicographique local ayant pour première lettre  $x_1$  et optimal par rapport à f.

Exemple :  $f = x(y' + z') + x'(y z + y' z')$

$f(1, y, z) = y' + z'$  et  $f(0, y', z) = y' z + y z'$  sont comparables

" " et  $f(0, y, z') = y z' + y' z$  " "

(le premier est supérieur au second dans les deux cas). Il existe donc une forme p.l.l. optimale de f avec x en tête.



Les seuls cas où l'hypothèse ne s'applique pas sont donc :

$$\begin{cases} f = \hat{y} \\ f = 0 \text{ ou } 1 \end{cases}$$

Il reste douze fonctions auxquelles l'hypothèse s'applique. Elles se répartissent en 4 ensembles :

- (1)  $\hat{x}$
- (2)  $\hat{x} \hat{y}$
- (3)  $\hat{x} + \hat{y}$
- (4)  $\hat{x} \otimes \hat{y}$

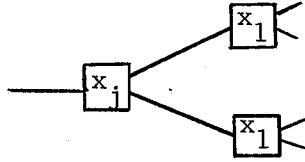
Or pour chacun de ces quatre ensembles il existe une forme p.l.l. optimale avec x en tête : en effet (1) n'a qu'une variable, en elle forcément en tête ; dans (2), (3) et (4), x est équivalent soit à y soit à y', il existe donc certainement une forme p.l.l. optimale avec x en tête.

Le théorème est démontré pour  $n = 2$  ; supposons qu'il le soit pour  $n = k-1$  variables et démontrons le pour k variables : il suffit de montrer qu'en partant d'une forme p.l.l. quelconque avec en tête  $x_j \neq x_1$ , on peut trouver une forme p.l.l. aussi peu - sinon moins - coûteuse avec  $x_1$  en tête.

Les coefficients de  $x_j$  et  $x'_j$  dans cette forme sont respectivement  $f(x_j = 1, \dots)$  et  $f(x_j = 0, \dots)$  : dans ces deux fonctions de k-1 variables l'hypothèse est réalisée donc il existe pour chacune une forme p.l.l. optimale avec  $x_1$  en tête.

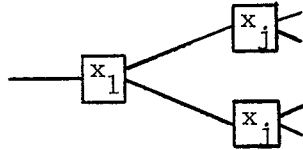
Arrivés à ce stade nous avons une forme p.l.l. dont les premières lettres sont  $x_j, x_1$  dans cet ordre pour tous les monômes, et où les

coefficients de  $x_j$  et  $x'_j$  sont différents de 0 et de 1 (cf Fig 6).



- Fig 6.

D'après le lemme I-1 il existe une forme p.l.l. aussi peu -sinon moins -coûteuse que celle-ci, avec  $x_1$  en tête.



Le théorème est donc vrai pour  $k$  variables, et comme il l'est pour 2, il l'est pour un nombre de variables quelconques.

Interprétation géométrique : étant donné un hypercube booléen de dimension  $n$ , nous appellerons "flèche" de cet hypercube tout vecteur joignant un de ses sommets à un autre. Si la valeur prise par la fonction  $f$  est 0 à l'origine de ce vecteur et 1 à son extrémité, nous dirons qu'une telle flèche est croissante par rapport à  $f$ .

Supposons que la comparaison impliquée dans (1) soit

$$(1') : \forall i \quad f(1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n) \geq f(0, x_2, \dots, x'_i, \dots, x_n)$$

Cela équivaut à dire que "toute flèche de longueur 2 décroissante par rapport à  $x_i$ , s'il en existe, est non croissante par rapport à  $f$ ". Il est encore équivalent de dire : toute flèche de longueur 2 croissante par rapport à  $f$ , s'il en existe, est non décroissante par rapport à  $x_i$ .

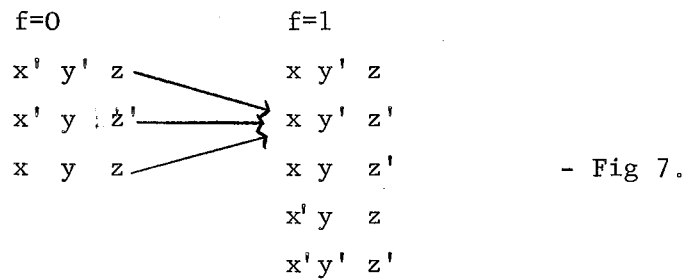
Le théorème peut donc s'énoncer comme suit :



Si une fonction  $f$  non égale à une constante est telle que les flèches de longueur 2 croissantes par rapport à  $f$  ou bien n'existent pas, ou bien sont toutes non décroissantes, ou toutes non croissantes par rapport à  $x_1$ , alors il existe un ordre lexicographique local ayant pour première lettre  $x_1$ , et optimal par rapport à  $f$ .

Exemple :  $f = x(y' + z') + x' (y z + y' z')$ .

Ecrivons sur deux colonnes d'une part l'ensemble des monômes canoniques pour lesquels  $f=1$ , d'autre part ceux pour lesquels  $f=0$ . On obtient la Fig 7 :



Il existe 3 flèches de longueur 2 croissantes par rapport à  $f$ , matérialisées sur la Fig 7. Ces trois flèches sont toutes non décroissantes par rapport à  $x$ , il existe donc une forme p.l.l. optimale avec  $x$  en tête. Remarquons que le même cas se produit pour  $y$  et  $z$  ; on peut donc mettre indifféremment en tête l'une quelconque de ces trois variables.

L'intérêt de ce théorème est de n'exiger aucun calcul : c'est pourquoi nous l'avons utilisé comme principe de recherche d'un ordre lexicographique local optimal (ChapIV, A, 1°, a). Il permet en outre de traiter le cas des fonctions monotones ordonnées (corollaire 2).

Corollaire 1 : si une fonction  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  différente d'une constante est telle que l'une des deux fonctions  $f(1, x_2, \dots, x_n)$  ;  $f(0, x_2, \dots, x_n)$  est égale à une constante, alors il existe un ordre lexicographique local optimale avec  $x_1$  en tête.

Ce résultat est aussi une conséquence du théorème I-1 ; on vérifiera qu'en dehors de ce cas il est impossible que les deux théorèmes à la fois s'appliquent.

Corollaire 2 : si une fonction  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  est croissante et totalement ordonnée avec

$$x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n,$$

un ordre lexicographique local optimal relativement à  $f$  est l'ordre lexicographique total<sup>1</sup>  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$

En effet, si nous utilisons la comparaison entre classes de variables  $\geq$  définie par

$\ll U \geq V$  dans  $f(U, V, W) \iff f(I, 0, W) \geq f(0, I, W)$ ,  $\gg$  la condition suffisante (1') du théorème I-2 s'exprime, si l'on fait successivement  $x_i = 1$  et  $x_i = 0$ , par les deux conditions suivantes :

$$\forall i \quad x_1 \geq x_i \text{ et } (x_1, x_i) \geq \emptyset \quad (\emptyset = \text{la classe vide})$$

Si une fonction est croissante on a bien  $(x_1, x_i) \geq \emptyset$  : le corollaire est donc démontré.

Une fonction monotone ordonnée se ramène à une fonction croissante ordonnée par complémentation des variables non croissantes : le corollaire 2 permet donc d'obtenir pour une telle fonction une forme p.l.l. optimale.

---

1 ou "ordre lexicographique "tout court : c'est un ordre l.l. dans lequel l'ordre des lettres est le même pour tous les embranchements.

Exemple :  $f = x(y + z') + y z' t$

On a  $x > y \geq z' > t$ , par conséquent un ordre lexicographique optimal est  $(x, y, z, t)$ , la forme p.l.l. correspondante étant :

$$\begin{aligned} f = & \quad x y \\ & + x y' z' \\ & + x' \quad y z' t \end{aligned}$$

Conclusion : ces deux théorèmes prouvent qu'il est assez aisé de trouver un ordre lexicographique optimal pour une fonction quelconque. C'est pourquoi la méthode du chapitre II qui consiste à partir d'un réseau  $U$  arborescent de coût minimal pour en déduire un réseau  $U$  général de coût raisonnable a pour principal avantage sur les autres d'être assez rapide et d'exiger moins de calculs.

Nous reviendrons sur ces deux théorèmes au chapitre IV.

#### D - Borne supérieure du coût arborescent optimal.

Cette borne supérieure est  $2^n - 1$  pour une fonction de  $n$  variables. Nous allons montrer que pour  $n$  donné cette borne est effectivement atteinte pour deux fonctions seulement.

Pour qu'une fonction atteigne cette borne supérieure il faut que tout réseau  $U$  arborescent qui la réalise ait : 1 opérateur au 1<sup>er</sup> étage à partir de la gauche, 2 au second, etc., ...,  $2^{n-1}$  au  $n$  ième ; autrement dit tout chemin du réseau passe obligatoirement par  $x_1, x_2, \dots, x_n$  dans cet ordre, sans omission d'aucune de ces variables. Une telle fonction doit nécessairement vérifier les deux propriétés suivantes :

a) elle n'a pas deux points représentatifs voisins, en effet deux tels points, par exemple  $(x = y = z = 1, t = 1)$  et  $(x = y = z = 1, t = 0)$  conduiraient avec l'ordre lexicographique  $(x, y, z, t)$  à une économie d'un opérateur "t".

b) elle n'a pas deux points non représentatifs voisins, sinon d'après a) la fonction complément aurait un coût inférieur à  $2^n - 1$ , et d'après la propriété 2 il en serait de même pour la fonction donnée.

Pour  $n=1$  les deux seules fonctions vérifiant a) et b) sont :

$$f_1(t) = t \quad \text{et} \quad f_2(t) = t'.$$

Pour  $n$  quelconque, soit

$$f = x \varphi (y, z, \dots, t) + x' \psi (y, z, \dots, t)$$

une fonction vérifiant a) et b).  $\varphi$  et  $\psi$  n'ont aucun point représentatif en commun, sinon  $f$  aurait deux points représentatifs voisins, et pour la même raison ils n'ont pas de point non représentatif en commun.

$$\text{Donc } \psi = \varphi'$$

$$\text{et } f = x \otimes \psi$$

$\psi = f(x=0)$  vérifie a) et b) donc peut s'écrire sous la forme  $\psi = y \otimes \psi_1$ , et ainsi de suite jusqu'à  $n=1$ .

Comme pour  $n=1$  il y a deux solutions, on obtient seulement deux fonctions, qui sont d'ailleurs complément l'une de l'autre :

$$\begin{aligned} & x \otimes y \otimes z \otimes \dots \otimes t \\ \text{et} & x \otimes y \otimes z \otimes \dots \otimes t' \end{aligned}$$

Si  $n$  est impair, la première est la fonction "clé de parité" et la seconde la fonction "clé d'imparité", et inversement si  $n$  est pair.

Ces deux fonctions ont bien un coût minimum de représentation égal à  $2^n - 1$ , en effet aucune simplification n'est possible sur leur forme canonique.

---

## C H A P I T R E II

### RESEAUX U QUELCONQUES

#### RECHERCHE D'UNE SYNTHÈSE DE COUT RAISONNABLE

Les réseaux U arborescents que nous avons vus jusqu'ici étaient caractérisés par le fait que la sortie d'un opérateur ne servait d'entrée qu'à un seul autre opérateur. Si nous ne faisons plus cette restriction certains résultats du chapitre I restent valables, en particulier les propriétés 1, 2 et 3, et le théorème I-1.

La principale difficulté rencontrée dans la recherche d'un réseau "optimal" - c'est-à-dire de coût minimum - réside dans le fait qu'un sous-réseau d'un réseau optimal non arborescent n'est pas forcément optimal. La seule méthode qui permette d'obtenir pour tous les cas de fonctions un réseau optimal est la méthode de synthèse "par le bas" (cf chapitre IV), mais le fait que la propriété 4 n'est plus forcément valable (cf exemple Fig 4) augmente considérablement le nombre de fonctions à calculer pour parvenir à une synthèse optimale.

C'est pourquoi il est commode de disposer de méthodes plus rapides qui tout en ne donnant pas forcément le coût minimum conduisent à des solutions s'écartant assez peu de celui-ci : c'est le cas des deux méthodes qui seront exposées dans ce chapitre, et qui consistent à passer

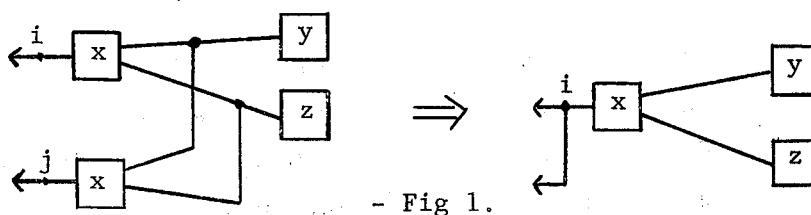
- l'une par un réseau arborescent
- l'autre par une expression en somme produit complément.

A - Passage par un réseau arborescent.

Etant donné un ordre lexicographique local, nous avons vu au chapitre I qu'il lui correspondait un réseau U arborescent R. Si dans R deux sous-réseaux sont identiques on peut, sans changer la fonction de sortie, en supprimer un et rattacher l'extrémité du réseau laissée vacante à la sortie de l'autre.

Le réseau le plus simple qu'on puisse obtenir en appliquant cette règle est unique, en effet on peut l'interpréter en disant qu'on ne change pas le réseau mais que deux noeuds sorties de deux sous-réseaux identiques sont considérés comme faisant partie d'une même classe ; le réseau le plus simple correspond au nombre minimum de classes qu'on peut ainsi obtenir, il est donc unique. Il suffira pour l'avoir d'appliquer jusqu'à épuisement de toutes les possibilités la "règle de réduction" suivante :

Règle de réduction (Fig 1) : si deux noeuds utilisent le même opérateur et ont les deux mêmes entrées dans le même ordre, on en supprime un et on rattache l'extrémité du réseau laissée vacante à la sortie de l'autre.



Remarquons qu'on a souvent intérêt pour obtenir le plus de réductions possibles à garder le même ordre des lettres dans les divers embranchements, autrement dit à partir d'un ordre lexicographique total.

Nous avons donc une méthode simple pour obtenir un réseau U de coût raisonnable réalisant une fonction donnée, qui consiste à :

a) chercher un ordre lexicographique (total si possible) de coût arborescent minimum relativement à la fonction (par une des méthodes du chapitre IV).

b) appliquer la règle de réduction à la forme p.l.l. irréductible selon cet ordre de la fonction.

Ce procédé donne en général de bons résultats. Il ne donne pas forcément un réseau U de coût minimum, pour plusieurs raisons :

1° parmi tous les ordres lexicographiques locaux dont le coût arborescent est minimum, certains peuvent donner un réseau optimal et d'autres non.

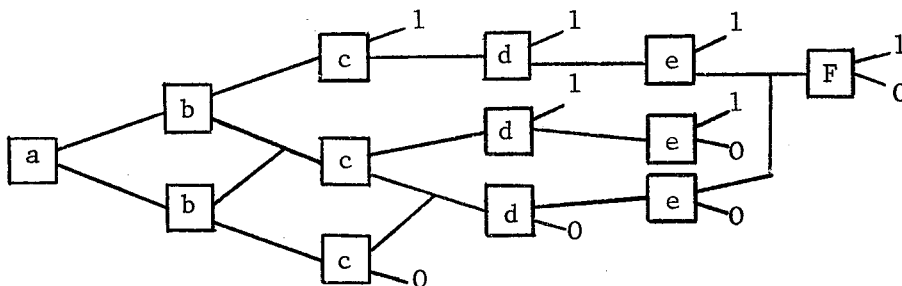
Considérons par exemple la fonction

$$f = a b (c + d + e + f) + (a + b) [c(d + e) + d e f] + c d e f$$

Cette fonction est croissante ordonnée avec

$$a \equiv b > c > d \equiv e > f,$$

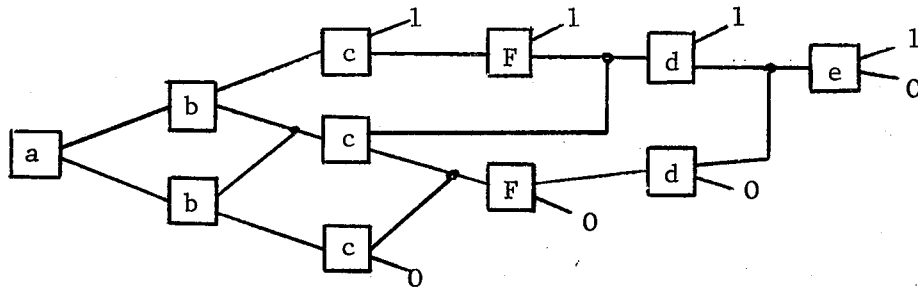
l'ordre lexicographique total (a, b, c, d, e, f) est donc optimal relativement à elle. En appliquant la règle de réduction à la forme p.l.l. irréductible selon cet ordre on obtient un réseau de coût 13 (Fig 2).



- Fig 2.



Si l'on fait de même avec l'ordre (a, b, c, f, d, e) qui est lui aussi optimal, on obtient un réseau de coût 11 (Fig 3) ;



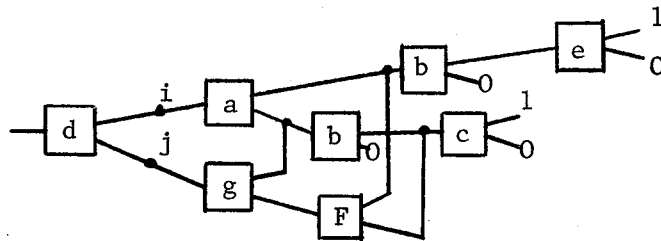
- Fig 3.

2° il peut se produire qu'il existe un ordre de coût arborescent non minimal donnant un réseau moins coûteux que tout ordre de coût arborescent minimal.

Soit, par exemple,

$$f = d(a b e + a' b c) + d'(g b c + g' f b e + g' f' c)$$

un réseau optimal réalisant f est celui de la Fig 4.



- Fig 4.

Sur cette figure, le sous-réseau ayant pour noeud de sortie i n'est pas optimal : en mettant b avant a on réaliserait l'économie d'un opérateur ; mais alors il faudrait rajouter deux opérateurs au sous-réseau ayant j pour sortie, et on augmenterait le coût global.

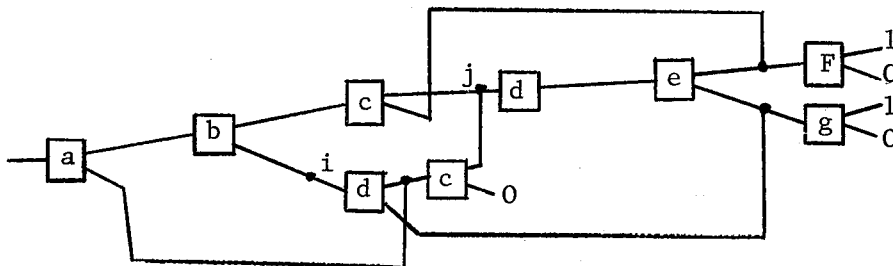
On vérifiera qu'il n'est pas possible de réaliser f par un réseau de coût inférieur ou égal à 8 dans lequel tous les sous-réseaux sont optimaux.

Nous ne disposons pas de méthode pour trouver l'ordre adéquat <sup>1</sup> ;

3° il peut enfin se produire, pour des fonctions de 7 variables ou plus, qu'il n'existe pas d'ordre lexicographique local donnant par la règle de réduction un réseau de coût minimal : cela est possible s'il n'existe pas de réseau de coût minimal vérifiant la propriété 4, ce qui est le cas pour la fonction suivante :

$$f = a( b c' f + b' d' g ) + c d ( e f + e' g )$$

On vérifiera que tout réseau U réalisant f et vérifiant la propriété 4 est de coût supérieur ou égal à 10. Or le coût minimal est 9, une réalisation minimale étant celle de la Fig 5 :



- Fig 5.

Dans ce réseau, i est en amont de j et utilise le même opérateur  $U_d$ .

---

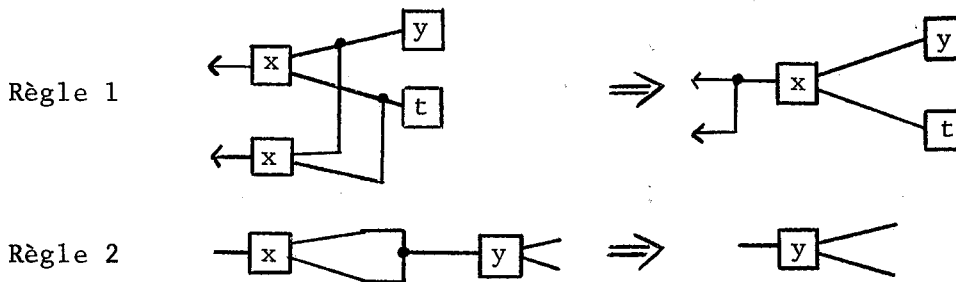
<sup>1</sup> Tout au plus peut-on dire de lui qu'il est "non abrégéable", c'est-à-dire qu'il est son propre ordre lexicographique abrégé. Si l'on part d'un ordre quelconque comme le fait Lamoitier, on peut retomber sur un ordre non abrégéable en utilisant la règle 2 de Sussenguth (cf ci-après). Un ordre lexicographique local de coût arborescent minimum est non abrégéable, c'est pourquoi nous n'avons pas besoin ici d'appliquer cette règle.

Pour toutes ces raisons nous avons cherché s'il n'était pas possible d'obtenir des résultats meilleurs autrement qu'en partant d'un réseau arborescent. La méthode que nous exposons au chapitre suivant est moins simple au point de vue calcul, mais elle permet souvent d'obtenir des résultats plus proches du résultat optimal.

Obtention du réseau à partir de la forme canonique.

Au lieu de rechercher la forme p.l.l irréductible selon l'ordre donné et de lui appliquer la règle de réduction, on peut partir du réseau U à  $2^n - 1$  opérateurs dans lequel tous les embranchements possibles figurent, selon l'ordre donné, et le simplifier en utilisant les deux règles suivantes énoncées par : Sussenguth <sup>1</sup> :

- règle 1 : c'est la règle de réduction dont nous avons parlé
- règle 2 : supprimer tout noeud dont les deux arrivées sont les départs d'un même autre noeud (cf Fig 6).



- Fig 6.

Lamoitier <sup>2</sup> a repris cette méthode en utilisant la matrice des noeuds d'un réseau de contacts.

Partant d'un ordre donné, cette méthode conduit au même réseau que la règle de réduction appliquée à son ordre lexicographique local abrégé.

---

1 cf Bibliogr. Réf 1

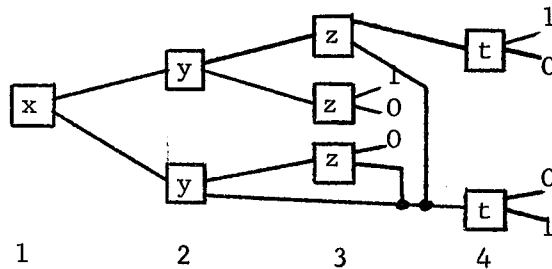
2 cf Bibliogr. Réf 2

Elle est plus directe car elle ne nécessite pas de passage par une forme p.l.l irréductible ; cependant elle présente l'inconvénient de ne donner au départ aucune indication sur l'ordre lexicographique local convenable à choisir.

Borne supérieure du coût avec un ordre lexicographique total abrégé.

Nous connaissons déjà une borne supérieure du coût de synthèse d'une fonction de n variables par un réseau U, qui est  $2^n - 1$ . A partir de  $n=3$  cette valeur est loin d'être atteinte, comme on va le voir.

Supposons avoir établi une synthèse de la fonction donnée par la méthode que nous venons d'étudier, à partir d'un ordre lexicographique total abrégé. Si nous appelons "étage" l'ensemble des opérateurs de même nom, tous les chemins du réseau traversent les différents étages dans le même ordre (cf Fig 7).



- Fig 7.

Le dernier étage à partir de la gauche (en adoptant des schémas tel que la progression d'amont en aval se fait de droite à gauche) comprend au maximum deux opérateurs. En effet :

- la sortie d'un de ces opérateurs est une fonction non dégénérée d'une seule variable (sinon l'opérateur aurait dû être supprimé par la règle 2). Or il n'existe que deux telles fonctions : t et t'.

- deux quelconques de ces opérateurs ont des sorties différentes (sinon l'un d'entre eux aurait dû être supprimé par la règle 1).

On démontrerait de même que le n-k+1 ième étage à partir de la gauche contient des opérateurs ayant des fonctions de sortie de k-1 arguments toutes distinctes et dépendant effectivement de la n-k+1 ième variable. De telles fonctions sont au nombre de

$$2^{2^k} - 2^{2^{k-1}} = v_k,$$

qui est une borne supérieure du nombre d'opérateurs du n-k+1 ième étage.

Par ailleurs le premier étage à partir de la gauche a un seul opérateur, et le nombre d'opérateurs ne peut ensuite que doubler d'un étage au suivant : nous avons donc une autre borne supérieure du nombre d'opérateurs du n-k+1 ième étage, qui est :

$$2^{n-k} = u_k$$

On peut donc affirmer qu'une borne supérieure du nombre d'opérateurs U nécessaires pour réaliser une fonction de n variables est

$$\Gamma(n) = \sum_{k=1}^n \text{Min} [u_k ; v_k]$$

On peut obtenir une formule plus simple pour  $\Gamma(n)$ . Posons en effet

$$\Gamma'(n) = \text{Min}_{1 \leq p \leq n} \left( \sum_{k=1}^{n-p} u_k + \sum_{k=n-p+1}^n v_k \right)$$

La suite  $u_k$  est croissante, la suite  $v_k$  décroissante et  $u_1 < v_1$  (cf Fig 8). On obtiendra donc le minimum en choisissant p tel que

$$\begin{cases} u_{n-p} \leq v_{n-p} \\ u_{n-p+1} > v_{n-p+1} \end{cases} \quad (\text{Fig 8 bis})$$

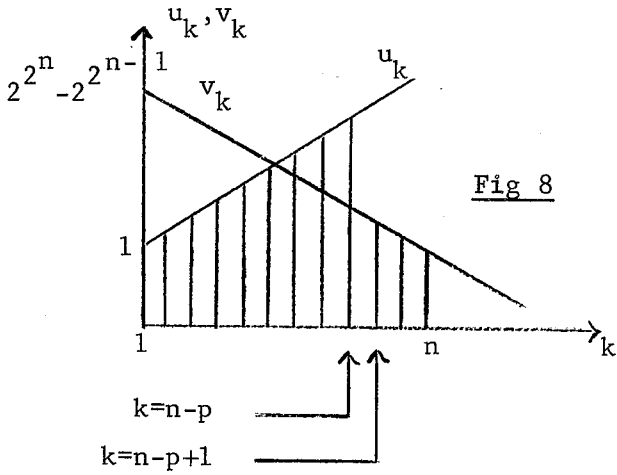


Fig 8

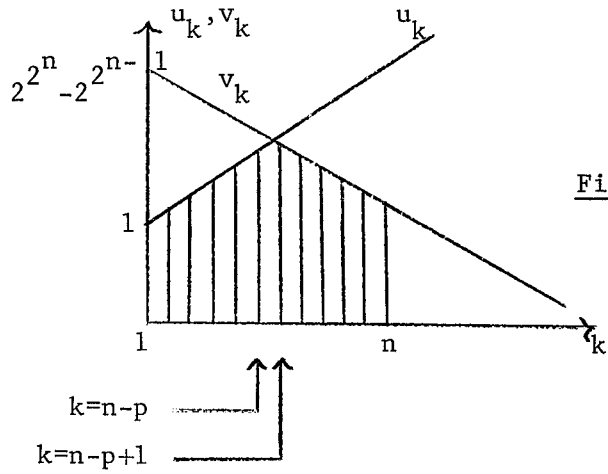


Fig 8 bis

On voit sur la figure 8 bis que  $\Gamma'(n)$  est aussi égal à

$$\begin{aligned} \Gamma'(n) &= \sum_{k=1}^n \text{Min} (u_k ; v_k) \\ &= \Gamma(n) \end{aligned}$$

Il reste à développer cette nouvelle expression de  $\Gamma(n)$

$$\begin{aligned} \Gamma(n) &= \text{Min}_{1 \leq p \leq n} (1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-p-1} + 2^{2^p} - 2^{2^{p-1}} + 2^{2^{p-1}} - 2^{2^{p-2}} + \dots + 2^2 - 2) \\ &= \text{Min}_{1 \leq p \leq n} (2^{n-p} - 1 + 2^{2^p} - 2) \end{aligned}$$

En posant :  $n_1 = n - k$

$$n_2 = k$$

$$\Gamma(n) = \text{Min}_{n_1 + n_2 = n} (2^{n_1} + 2^{n_2} - 3)$$

Le tableau ci-dessous donne les valeurs de  $\Gamma(n)$  correspondant aux 12 premières valeurs de  $n$

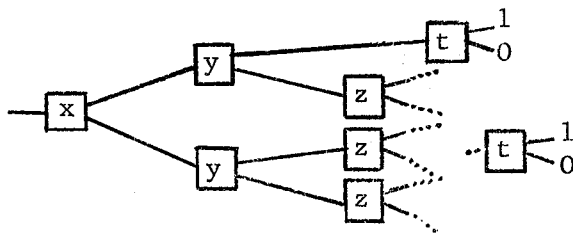
n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\Gamma(n)$	1	3	5	9	17	29	45	77	141	269	509	765

On peut se demander s'il existe des fonctions dont le coût minimal de synthèse, indépendamment de toute méthode, atteigne la valeur  $\Gamma(n)$ . Il en est ainsi pour  $n \leq 3$  avec les fonctions :

$x$  (coût minimal 1)  
 $x \otimes y$  ( " " 3)  
 $x \otimes y \otimes z$  ( " " 5)

Par contre on peut démontrer que pour  $n=4$  et  $n=5$  le coût minimal n'atteint jamais les valeurs citées ; démontrons-le par exemple pour  $n=4$ .

Remarquons d'abord que si une fonction de 4 variables a deux points représentatifs voisins, son coût minimum de synthèse est  $< \Gamma(4)$  : en effet, soient  $x y z t$  et  $x y z' t$  deux monômes voisins compatibles avec  $f$  : le réseau obtenu en appliquant à  $f$  la règle de réduction avec l'ordre  $(x, y, z, t)$  abrégé ne comportera au 3<sup>e</sup> étage que  $2^2 - 1 = 3$  opérateurs  $U_z$  au maximum (cf Fig8).



- Fig 8.

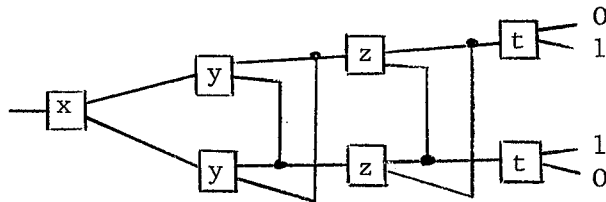
Or,  $2^2 - 1 < \min(2^2; 12)$ , donc le coût total est  $< \Gamma(4)$ .

De même, si une fonction de 4 a deux points non représentatifs voisins, le coût minimum de synthèse de son complément est  $< \Gamma(4)$ , et d'après la propriété 2 il en est de même pour la fonction elle-même.

De ceci il ressort que s'il existe une fonction de 4 variables dont le coût minimum de synthèse est égal à  $\Gamma(4)$ , ce ne peut être que l'une des deux fonctions clés de parité et d'imparité :

$$\begin{cases} x \otimes y \otimes z \otimes t \\ x \otimes y \otimes z \otimes t' \end{cases}$$

Or la synthèse optimale de chacune de ces deux fonctions a pour coût  $7 < (\Gamma(4) = 9)$ . (cf Fig 9).



- Fig 9.

Il n'existe donc pas de fonction de 4 variables de coût optimal de synthèse = 9.

On démontrerait de même qu'il n'existe pas de fonction de 5 variables de coût optimal  $\Gamma(5) = 17$  (pour  $n \geq 6$  le raisonnement n'est plus valable car  $\text{Min}(2^4; 12) = 12$  et non plus  $2^4$ ).



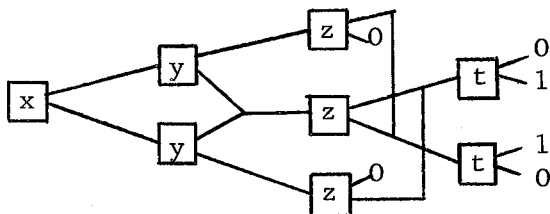
Notons que pour  $n=4$  le coût 8 est atteint par la fonction <sup>1</sup>

$$f = x y z t + x' y' z' t' + (x \otimes y).(z \otimes t) ;$$

en effet, à cause des symétries entre variables il suffit seulement d'examiner les 3 ordres lexicographiques

x, y, z, t  
 x, z, y, t  
 x z, t, y,

et on constate qu'aucun d'eux ne donne un coût inférieur à 8 (cf Fig 10).



- Fig 10.

En résumé, pour  $n \leq 4$  on connaît avec précision la borne supérieure du coût, atteinte par au moins une fonction : cf Fig 11).

n	1	2	3	4	5
$\Gamma(n)$	1	3	5	8	( $\leq 16$ )

- Fig 11.

Remarque : en multipliant  $\Gamma(n)$  par deux on obtient une borne supérieure du nombre de contacts nécessaire à la réalisation simultanée d'une fonction et de son complément par un réseau de contacts (cf introduction).

<sup>1</sup> Pour trouver cette fonction on a utilisé un raisonnement analogue à celui qui a été fait ci-dessus et on est conduit à chercher une fonction vérifiant la condition suivante, nécessaire pour que son coût minimum soit  $\Gamma(4) - 1$  :

pour chaque variable, la fonction doit posséder au maximum un couple de points représentatifs, et au maximum un couple de points non représentatifs, ne différant que par leur composante sur cette variable.

B - Passage par une expression en somme-produit-complément.

B<sub>1</sub> Généralités.

Propriété 2 bis. Si dans un réseau U réalisant une fonction f on remplace les entrées 1 et 0 respectivement par des fonctions  $\varphi(X)$  et  $\psi(X)$ , on obtient à la sortie, au lieu de f, la fonction

$$f \varphi + f' \psi.$$

La propriété 2 (chapitre I) en est un cas particulier.

En effet,

- ou bien  $\varphi = 1 \quad \psi = 0$  on réalise f par définition
- "  $\varphi = 0 \quad \psi = 1$  " f' d'après la propriété 2
- "  $\varphi = \psi = 1$  , on réalise une sortie égale à 1 (car on peut démontrer de proche en proche que toutes les sorties de noeuds sont égales à 1)
- ou bien  $\varphi = \psi = 0$ , on réalise une sortie égale à 0 (même raison).

Substitution d'un réseau à un opérateur.

Soient : R un réseau U quelconque,  $U_x$  un opérateur de ce réseau ;  
 $R_f$  un réseau U réalisant une fonction f(X).

Remplaçons dans R tout opérateur  $U_x$  par le réseau  $R_f$  de telle façon que les extrémités

j de R rattachée à l'entrée supérieure de  $U_x$   
k " " " inférieure "  
i " " à la sortie de  $U_x$

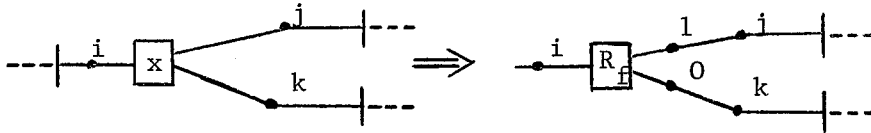
soient maintenant rattachés respectivement :

au noeud d'entrée "1" de  $R_f$

au noeud d'entrée "0" de  $R_f$

à la sortie de  $R_f$ .

On dira qu'on a effectué dans  $R$  une substitution  $U_x \rightarrow R_f$  (cf Fig 9).



- Fig 9.

Le nouveau réseau  $R$  est encore un réseau  $U$ . En effet (cf définition dans l'introduction)

- il est constitué uniquement d'opérateurs  $U$  et a pour seuls noeuds d'entrée ceux de  $R$ , c'est-à-dire 1 et 0.

- il est ordonné, autrement dit la relation  $\ll i$  est en amont de  $j \gg$  sur les noeuds est une relation d'ordre partiel. En effet c'est vrai pour tout ensemble de noeuds situés dans  $R_f$  (puisque  $R_f$  est un réseau  $U$ ) et pour tout ensemble de noeuds situés dans  $R'$  et n'appartenant pas à  $R_f$  (puisque  $R$  est un réseau  $U$ ). Il reste à vérifier que si  $p$  est un noeud de  $R'$  n'appartenant pas à  $R_f$  et  $q$  un noeud appartenant à  $R_f$ , le couple  $(p-q)$  est ordonné, c'est-à-dire que  $p$  ne peut être à la fois en amont et en aval de  $q$  : si  $p$  est en amont de  $q$  il est en amont de l'un des deux noeuds  $j$  et  $k$  de la figure 9, ou confondu avec lui ; s'il est en aval de  $q$  il est aussi en aval de  $i$  (ou confondu avec lui), donc en aval de  $j$  et  $k$  ; or ces deux états sont incompatibles puisque  $R$  est ordonné :  $p$  ne peut donc être à la fois en amont et en aval de  $q$ , ce qui achève la démonstration.

Théorème II-1. Soit  $\varphi(\chi)$  une fonction d'un ensemble  $\chi$  et  $X, Y$  deux parties de  $\chi$  (non forcément disjointes) telles qu'il existe deux fonctions  $g(X)$  et  $\psi(g, Y)$  (où  $g$  est une variable simple) vérifiant l'identité :

$$(1) \varphi(\chi) = \psi[g(X), Y],$$

alors si  $R_\psi$  est un réseau  $U$  réalisant  $\psi(g, Y)$  et  $R_g$  un réseau  $U$  réalisant  $g(X)$ , en effectuant dans  $R_\psi$  la substitution  $U_g \rightarrow R_g$  on obtient un réseau  $U$  réalisant  $\varphi(\chi)$ .

Dans  $R_\psi$  la fonction de sortie  $f_i$  du noeud de sortie  $i$  d'un opérateur  $U_g$  est

$$f_i = g f_j + g' f_k,$$

$j$  et  $k$  étant les noeuds d'entrée de cet opérateur. Si on substitue  $R_g$  à  $U_g$  on obtient en  $i$ , d'après la propriété 2 bis, la fonction de sortie

$$g(X) f_j + g'(X) f_k,$$

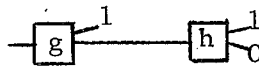
par conséquent dans la substitution  $U_g \rightarrow R_g$  tout se passe comme si la variable  $g$  était changée en la fonction  $g(X)$  ; en particulier la fonction de sortie du nouveau réseau est celle de  $R_\psi$  dans laquelle  $g$  est changée en  $g(X)$  : c'est donc bien  $\varphi(\chi)$ , et le théorème est démontré.

Le cas particulier où  $X$  et  $Y$  sont disjoints est intéressant au point de vue recherche du coût minimal de réalisation, et sera étudié au chapitre III. Nous allons examiner ici le cas où  $\psi$  est constitué par une somme ou un produit de deux termes, ce qui nous conduira à énoncer une borne supérieure du coût de réalisation.

B<sub>2</sub> - Obtention d'une borne supérieure du coût.

Soit  $f(X) = g(X) + h(Y)$ . D'après le théorème II-1 on obtient une réalisation de  $f(X)$  par un réseau U en construisant d'abord une réalisation par deux opérateurs U de la fonction de 2 variables

$$\psi(g,h) = g + h \quad (\text{cf Fig 10})$$



- Fig 10.

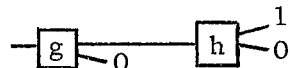
puis en effectuant sur ce réseau les substitutions

$$U_g \rightarrow R_g$$

$$U_h \rightarrow R_h$$

$R_g$  et  $R_h$  étant des réseaux U réalisant respectivement  $g(X)$  et  $h(Y)$ . On dira qu'on a "additionné" les deux réseaux  $R_g$  et  $R_h$ .

De même si  $f(X) = g(X) \cdot h(Y)$  on peut obtenir une réalisation de  $f(X)$  en "multipliant" les deux réseaux  $R_g$  et  $R_h$  suivant le schéma de la figure 11



- Fig 11.

Lemme II-1. Soit  $f(X, Y) = g(X) + h(Y)$  [resp<sup>t</sup>  $g(X) \cdot h(Y)$ ] une fonction décomposée en une somme [resp<sup>t</sup> un produit] de deux fonctions de variables prises sur des ensembles disjoints. Pour trouver une synthèse minimale de  $f$  par un réseau U il suffira d'additionner [resp<sup>t</sup> multiplier] entre eux un réseau U réalisant une synthèse minimale de  $g$  et un réseau U réalisant une synthèse minimale de  $h$ .

En effet, soient :

$R_g$  un réseau optimal réalisant  $g(X)$  et  $C(R_g)$  son coût ;

$R_h$  " " " "  $h(X)$  " $C(R_h)$  "

Le réseau  $R$  obtenu en additionnant  $R_g$  et  $R_h$  a pour coût :

$$C(R) = C(R_g) + C(R_h).$$

Soit  $R'$  un réseau quelconque, de coût  $C(R')$ , réalisant  $f(X,Y) = g(X) + h(Y)$ . Montrons que  $C(R') \geq C(R)$ .

Soient :  $N_x$  le nombre d'opérateurs  $U_x[x \in X]$  dans  $R'$

$N_y$  " " "  $U_y[y \in Y]$  "

On a  $C(R') = N_x + N_y$

On supposera que  $g(X)$  est différent d'une constante, donc que  $f(X,Y)$  dépend effectivement de  $X$ . Il existe donc  $X_0$  tel que :

$$g(X_0) = 0$$

ou  $f(X_0, Y) = h(Y)$

Si dans  $R'$  on remplace les opérateurs  $U_x[x \in X]$  par  $U_{x_0}$  ( $x_0$  étant la valeur que prend la variable  $x$  dans  $X_0$ ), on obtient un nouveau réseau  $U$  dans lequel il n'y a plus que des opérateurs  $U_y$ , les opérateurs  $U_x$  disparaissant en vertu de la relation

$$U_{x_0}(\varphi, \psi) = \begin{cases} \varphi & \text{si } x_0 = 1 \\ \psi & \text{si } x_0 = 0. \end{cases}$$

Or ce nouveau réseau réalise  $h(Y)$ , donc

$$N_y \geq C(R_h)$$

On démontrerait de même que

$$N_x \geq C(R_y)$$

Ces deux relations donnent

$$N_x + N_y \geq C(R_g) + C(R_h)$$

$$C(R') \geq C(R),$$

ce qui démontre le lemme. Par dualité la démonstration s'étend aussi à la multiplication.

Une application du lemme II-1 est le cas des fonctions privilégiées pour une expression en somme-produit-complément : on appelle ainsi des fonctions pour lesquelles il existe une expression booléenne utilisant les seuls symboles + , ' ( ) et dans laquelle chaque lettre n'est écrite qu'une fois :

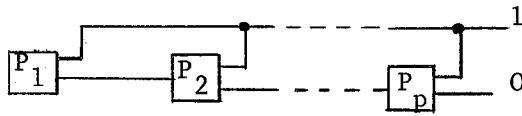
Lemme II-2. Une fonction privilégiée pour une expression en somme-produit-complément est aussi privilégiée pour U : autrement dit elle peut être réalisée par un réseau U tel qu'à chaque variable x corresponde un et un seul opérateur  $U_x$ .

D'autre part on peut obtenir une telle représentation en mettant n'importe quelle lettre en tête.

a) supposons que l'expression soit une somme de produits (si c'est un produit de sommes on passe à b).

$$f(X) = P_1(X_1) + P_2(X_2) + \dots + P_p(X_p),$$

$P_1, P_2, \dots, P_p$  étant des produits de sommes et  $X_1, X_2, \dots, X_p$  des ensembles de variables disjoints. D'après le lemme II-1 on obtient une réalisation minimale de  $f(X)$  en additionnant entre elles des réalisations minimales de  $P_1, P_2, \dots, P_p$  (Fig. 12).



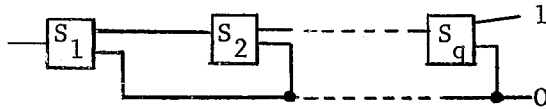
- Fig 12.

Remarquons que dans ce schéma  $P_1, P_2, \dots, P_p$  peuvent être commutés de façon quelconque

b)  $P_k(X_k)$  ( $1 \leq k \leq p$ ) est un produit de la forme

$$S_1(Y_1) \cdot S_2(Y_2) \dots S_q(Y_q)$$

$S_1, S_2, S_q$  étant des sommes de produits et  $Y_1, Y_2, \dots, Y_q$  des ensembles de variables disjoints. D'après le lemme II-1 on obtient une réalisation minimale de  $P_k$  en multipliant entre elles des réalisations minimales de  $S_1, S_2, \dots, S_q$  (Fig 13)



- Fig 13.

Remarquons que dans ce schéma  $S_1, S_2, \dots, S_q$  peuvent être commutés de façon quelconque.

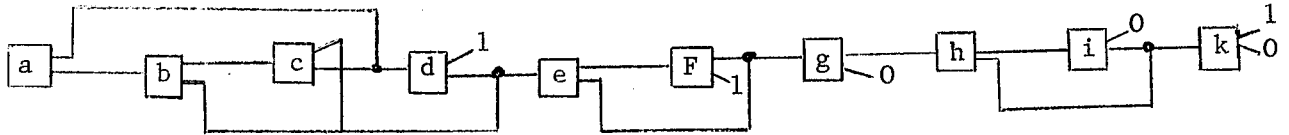
On appliquera de nouveau le lemme à chacun des  $S_i$ , et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on n'ait plus que des opérateurs simples : on obtiendra une représentation minimale ; d'autre part un opérateur  $U_x$  donné n'est présent qu'une fois dans le réseau puisque la variable  $x$  ne peut se trouver ni dans deux termes d'une somme ni dans deux termes d'un produit.

Exemple : la fonction

$$f = (a + b c') d + e f' + g(h i + k')$$

a la représentation minimale suivante :





Théorème II-2. Le coût minimum de réalisation par un réseau U d'une fonction quelconque est compris entre deux valeurs connues :

- le nombre de lettres dont dépend réellement la fonction (borne inférieure).

- le coût en lettres de l'expression en somme-produit-complément la moins coûteuse qu'on ait pu trouver (borne supérieure).

La borne inférieure est évidente.

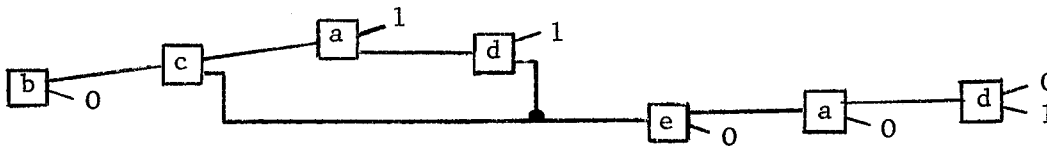
Soit E une expression en somme-produit-complément de la fonction f. On peut toujours obtenir une représentation de f par un réseau U en représentant la fonction privilégiée déduite de E par remplacement d'une variable écrite p fois par p nouvelles variables écrites chacune une fois.

Exemple : Soit  $f = b[c(a + d) + e a d']$

On pourra représenter la fonction privilégiée

$$f_1 = b[c(a + d) + e a_1 d_1]$$

et dans la représentation de cette dernière remplacer de nouveau  $a_1$  et  $d_1$  par a et d'. On obtient le réseau de la fig. 14,



- Fig 14.

qui approche le coût minimum d'une unité.

Remarques :

- Le théorème II-2 permet d'obtenir en général une meilleure approximation du coût minimum que la valeur  $\Gamma(n)$  calculée au paragraphe A.

- Lorsqu'on est en présence d'une fonction incomplète, une façon de procéder commode, et justifiée par ce théorème, consiste à chercher la fonction compatible avec elle ayant l'expression en somme-produit-complément la moins coûteuse - ou même à la rigueur la base première la plus simple.

- Les réseaux qu'on obtient par application du théorème II-2 ont une structure en chaîne, autrement dit ils ne présentent d'encombrement que dans une seule direction, ce qui peut constituer un avantage du point de vue technologique.

B<sub>3</sub> Recherche d'une méthode conduisant à des solutions moins coûteuses que A.

L'étude qui va suivre a pour principal but de rechercher s'il est possible de concevoir une méthode conduisant à des solutions moins coûteuses que celle qui consiste à passer par un réseau arborescent, et ceci sans qu'on perde trop en simplicité et rapidité de calcul.

La méthode que nous avons choisie consiste à partir d'une expression en somme-produit-complément dont on déduit un réseau par application du théorème II-2, et à essayer de simplifier celui-ci. Remarquons que les réseaux que nous obtiendrons ne sont plus astreints à priori à vérifier la propriété 4, ce qui constituait pour la méthode précédente une limitation.

Nous donnerons d'abord quelques définitions.

On rappelle qu'une forme p.l.l. est dite irrédondante si aucun de ses monômes n'est multiple d'un autre : si  $m_1$  et  $m_2$  sont deux monômes de la forme p.l.l., il existe une lettre x telle que

$$m_1 = m \times p$$

$$m_2 = m \times' q$$

(m, p, q étant des monômes).

Produit de deux formes p.l.l. irrédondantes.

On dira que deux formes p.l.l. sont identiques si tout monôme de l'une se retrouve dans l'autre avec le même ordre des lettres<sup>1</sup>.

On appellera produit de deux formes p.l.l. irrédondantes  $E_1, E_2$  dans cet ordre, et on le notera  $E_1.E_2$ , la somme des monômes obtenus en multipliant de toutes les manières possibles un monôme  $m_1$  de  $E_1$  par un monôme  $m_2$  de  $E_2$ , avec l'ordre suivant des lettres (si  $m_1.m_2 \neq 0$ ) : d'abord les lettres de  $m_1$  dans le même ordre, puis les lettres de  $m_2$  non contenues dans  $m_1$ , dans l'ordre qu'elles ont dans  $m_2$ .

Exemple :  $(a b + a b' d) (c a + c a') = a b c + a b' d c$

Le produit est aussi une forme p.l.l.<sup>2</sup> irrédondante. En effet, considérons deux monômes non nuls du produit :

- ou bien ils proviennent de deux monômes de  $E_1$  différents,  $m_1$  et  $\mu_1$ .  $m_1 + \mu_1$  est une forme p.l.l. irrédondante, soit :

$$A \times B + A \times' C$$

---

1 Sans réduction possible. Ainsi,  $a b + a b' \neq a$

2 Ce n'est pas vrai si l'une des formes n'est pas irrédondante. Ainsi,  $(a + a b) c = a c + a b c$  n'est pas une forme p.l.l.

Signalons d'autre part que le produit n'est pas forcément irréductible, même si les deux formes le sont.

Ainsi,  $a(b a + b') = a b + a b'$

(A, B et C étant des monômes). Si on multiplie à droite par un monôme de  $E_2$ , on obtient :

$$A \times B B_1 + A x' C C_1$$

( $B_1$  et  $C_1$  étant des monômes), qui est encore une forme p.l.l. irrédondante.

- ou bien ils proviennent d'un même monôme de  $E_1$ , soit  $m_1$ . Ils proviennent alors de deux monômes de  $E_2$  différents, soient  $m_2$  et  $u_2$ .  $m_2 + u_2$  est une forme p.l.l. irrédondante, soit :

$$A \times B + A x' C.$$

Les produits  $m_1 \cdot A \times B$  et  $m_1 \cdot A x' C$  sont non nuls par hypothèse. Soient :  $A_1$  le monôme déduit de A par suppression des lettres qui figurent aussi dans  $m_1$ ,  $B_1$  et  $C_1$  les monômes déduits de même de B et C. On a :

$$m_1 \cdot (A \times B + A x' C) = m_1 A_1 \times B_1 + m_1 A_1 x' C_1,$$

qui est encore une forme p.l.l. irrédondante, ce qui démontre la proposition.

Le produit n'est pas commutatif ( $a.b \neq b.a$ ) ; il est associatif. En effet, effectuer  $(m_1 \cdot m_2) \cdot m_3$  d'une part,  $m_1 \cdot (m_2 \cdot m_3)$  d'autre part revient dans chacun des deux cas à remplacer par 0 si une lettre se trouve sous deux formes différentes, et sinon à ne conserver, parmi deux ou trois lettres identiques, que celle qui est le plus à gauche, et globalement on obtient le même résultat dans les deux cas.

On peut donc écrire  $E_1 \cdot E_2 \cdot E_3$  sans mettre de parenthèses.

Formes p.l.l. amont et aval d'un noeud.

On appellera forme p.l.l. de sortie ou forme p.l.l. amont d'un noeud  $i$ , et on notera  $F_i$ , une forme p.l.l. de sa fonction de sortie définie ainsi :

$$\left\{ \begin{array}{l} F_0 = 0 ; \\ F_1 = 1 ; \\ \text{si } U_{x_i} \text{ est l'opérateur utilisé par le noeud } i, \text{ avec pour noeuds} \\ \text{d'entrée } j \text{ et } k \text{ dans cet ordre,} \\ F_i = x_i \cdot F_j + x'_j \cdot F_k, \text{ au sens des produits de formes p.l.l. }^1 \end{array} \right.$$

Si  $F_j$  et  $F_k$  sont des formes p.l.l. irrédondantes, les produits  $x_i \cdot F_j$  et  $x'_j \cdot F_k$  en sont aussi, et comme ils ont en tête la même lettre sous deux formes différentes leur somme est aussi une forme p.l.l. irrédondante.

Comme 0 et 1 sont des formes p.l.l. irrédondantes, on voit qu'il est possible de définir pour tous les noeuds une forme p.l.l. de sortie, irrédondante et définie de façon unique.

On appellera forme p.l.l. aval d'un noeud  $i$ , et on la notera  $G_i$ , une forme p.l.l. définie ainsi :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{si } S \text{ est le noeud de sortie du réseau,} \\ G_S = 1 ; \\ \text{si } h_1, h_2, \dots, h_k \text{ sont les noeuds immédiatement en aval de } i \\ \text{(c'est-à-dire dont } i \text{ est une arrivée),} \\ G_i = \sum_{p=1}^k G_{h_p} \cdot d_{h_p, i} \text{ au sens des produits de formes p.l.l.} \end{array} \right.$$

---

<sup>1</sup> Car  $F_j$  et  $F_k$  peuvent contenir  $x$ .

$d_{h_p, i}$  étant défini ainsi : soit  $U_x$  l'opérateur dont  $i$  est une entrée et  $h_p$

la sortie,

$$d_{h_p, i} = \begin{cases} x & \text{si } i \text{ est l'entrée supérieure} \\ x' & \text{" " " inférieure} \end{cases}$$

$d_{h_p, i}$  sera appelé "transmittance entre  $h_p$  et  $i$ ".

De même que pour  $F_i$  on démontre que  $G_i$  est une forme p.l.l. irrédondante.

Lemme II-3. Soient  $F_i$  et  $G_i$  les formes p.l.l. respectivement amont et aval d'un noeud  $i$  du réseau :  $G_i$  est le coefficient de  $F_i$  dans le calcul de la forme p.l.l. de sortie du réseau ; autrement dit celle-ci est de la forme

$$F = G_i \cdot F_i + B_i$$

( $B_i$  = somme des termes ne faisant pas intervenir le noeud  $i$ ).

Le lemme est vrai pour le noeud de sortie  $S$  du réseau.

En effet  $F = F_S$  ;

Par définition,  $G_S = 1$

Et on a bien :  $F = G_S \cdot F_S$

Considérons un noeud quelconque  $i$  et supposons que le lemme soit vrai pour tout noeud situé en aval de lui.

La forme p.l.l. de sortie du réseau peut s'écrire

$$F = A_i F_i + B_i,$$

$A_i$  étant le coefficient de  $F_i$  dans le calcul de la forme p.l.l. de sortie. Soient

$$h_1, h_2, \dots, h_k$$

les noeuds immédiatement en aval de  $i$

$A_i$  est de la forme,

$$\sum_{p=1}^k A_{h_p} \cdot d_{i,h_p}$$

$A_{h_p}$  est le coefficient de  $d_{i,h_p} \cdot F_i$  dans le calcul de la forme p.l.l. de sortie, il est donc aussi le coefficient de  $F_p$ . Par conséquent

$$A_{h_p} = G_{h_p} \quad \text{d'après l'hypothèse.}$$

On a donc

$$A_i = \sum_{p=1}^k G_{h_p} \cdot d_{i,h_p}$$

$$= G_i \quad \text{par définition}$$

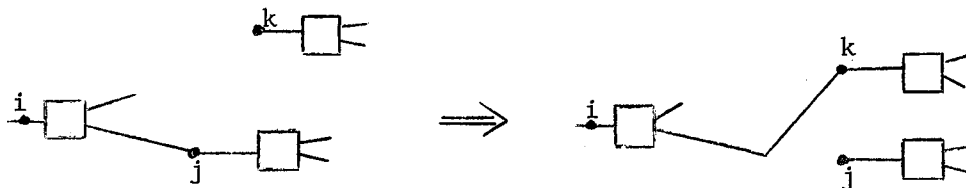
d'où

$$F = G_i \cdot F_i + B_i, \quad \text{ce qui démontre le lemme.}$$

Théorème II-3. Soit  $i$  un noeud du réseau,  $j$  l'un de ses deux noeuds d'arrivée et  $d_{ij}$  la transmittance entre  $i$  et  $j$ . S'il existe un noeud  $k$  non en aval de  $i$  vérifiant la relation

$$(1) \quad G_i \cdot d_{ij} \cdot F_j = G_i \cdot d_{ik} \cdot F_k$$

(au sens de l'égalité des fonctions), on ne change pas la fonction de sortie du réseau en remplaçant  $j$  par  $k$  comme entrée de  $i$  (Fig 15)



- Fig 15.

En effet, d'après le lemme II-3 la fonction de sortie du réseau est de la forme

$$F = G_i \cdot F_i + B_i$$

Si  $j_1$  est l'autre noeud d'arrivée de  $i$ ,

$$F_i = d_{ij} \cdot F_j + d'_{ij} \cdot F_{j_1}, \text{ et}$$

$$F = G_i \cdot d_{ij} \cdot F_j + G_i \cdot d'_{ij} \cdot F_{j_1} + B_i$$

D'après (1) on ne change pas  $F$  en remplaçant  $j$  par  $k$ , ce qui démontre le théorème.

Si après remplacement de  $j$  par  $k$  il se trouve que le noeud  $j$  n'a plus de départ sur aucun autre noeud, il sera devenu inutile et on pourra le supprimer.

Deux problèmes se posent quant à l'utilisation de la formule (1) :

1° l'ordre dans lequel faire intervenir les noeuds  $i$ , et le choix entre  $j$  et  $k$ . A partir du réseau donné l'application de la formule (1) de toutes les manières possible conduirait à une famille de réseaux, parmi lesquels il faudrait prendre le moins coûteux. L'ordre dans lequel prendre les  $i, j, k$  de façon à obtenir un tel réseau le plus rapidement possible dépend de l'écriture de départ.

Dans l'algorithme que nous allons exposer nous choisirons à priori un ordre pour les  $i$ , choisi de façon à rendre la méthode la plus simple possible, et nous modifierons l'écriture de départ en conséquence ;



2° il faut pouvoir identifier les deux membres de la formule (1) : en effet ils peuvent être égaux au sens de l'égalité entre fonctions, mais pas au sens de l'identité entre formes p.l.l., or c'est l'égalité entre fonctions qui nous intéresse. On peut réduire la comparaison à des fonctions plus simples. Posons en effet

$$H = G_i \cdot d_{ij} ;$$

soient  $m_p$  un monôme de  $H$  et  $R_{m_p}(F_j)$  une forme p.l.l. vérifiant les deux conditions suivantes :

$$\left| \begin{array}{l} m_p \cdot F_j = m_p \cdot R_{m_p}(F_j) \text{ (identité entre formes p.l.l.)} \\ R_{m_p}(F_j) \text{ ne contient aucune lettre de } m_p \end{array} \right.$$

On obtient  $R_{m_p}(F_j)$  en faisant la somme des monômes de  $F_j$  ayant une intersection non nulle avec  $m_p$ , puis en supprimant de cette somme les lettres de  $m_p$ .

$R_{m_p}(F_j)$  et  $R_{m_p}(F_k)$  étant ainsi définis, une condition nécessaire et suffisante pour que

$$H F_j = H F_k$$

est que pour tout  $m_p \in H$  on ait

$$R_{m_p}(F_j) = R_{m_p}(F_k).$$

En effet,  $H F_j = H F_k$  équivaut à

$$\sum m_p F_j = \sum m_p F_k$$

ou :

$$\sum m_p R_{m_p}(F_j) = \sum m_p R_{m_p}(F_k)$$

Les  $m_p$  étant des monômes d'une même forme p.l.l. sont tous dis-joints ; cette dernière égalité équivaut donc à

$$R_{m_p}(F_j) = R_{m_p}(F_k) \text{ pour tout } m_p \in H.$$

Exemple : soient  $H = a b$

$$F_j = a c d e + a c' d e + a' b$$

$$F_k = e f d + e f' d$$

Posons  $m_1 = a b$  ; on obtient

$$R_{m_1}(F_j) = c d e + c' d e$$

$$R_{m_1}(F_k) = e f d + e f' d$$

Les deux fonctions sont égales à de, donc

$$H F_j = H F_k.$$

Matrice des noeuds.

On appellera matrice des noeuds d'un réseau U la matrice N formée par les transmittances  $d_{ij}$  ; l'élément placé à la  $i^e$  ligne et la  $j^e$  colonne de cette matrice est :

- vide si le noeud  $j$  n'est pas un des deux noeuds d'arrivée du noeud  $i$  ;
- égal à  $d_{ij}$  dans le cas contraire.

La matrice des noeuds permet de caractériser le réseau ; le changement de connection résultant du théorème II-3 peut s'effectuer directement sur cette matrice : remplacer, à l'entrée de  $i$ ,  $j$  par  $k$  revient à remplacer

$$d_{ij} \text{ par } d_{ij}^1 = 0$$

$$d_{ik} \text{ par } d_{ik}^1 = d_{ik} + d_{ij}$$

#### Choix de l'ordre.

Les noeuds fonctionnels d'un réseau obtenu à partir d'une expression en somme-produit-complément étant totalement ordonnés par la relation  $\ll i \text{ en amont de } j \gg$ , chaque couche possède un seul noeud et on pourra les numéroter de la façon suivante : 0 et 1 : les noeuds d'entrées "0" et "1", 2 : le noeud ayant pour entrées 0 et 1, ...,  $p$  : le noeud de  $p-1$  ième couche.

On appliquera le théorème III-1 successivement à tous les noeuds de  $i=2$  à  $N$  ( $N$  étant le numéro du noeud de sortie) par valeurs croissantes, ce qui présente l'avantage de n'exiger qu'une seule fois le calcul de  $F_i$  et  $G_i$  en chaque noeud.

#### Algorithme.

a) calculer de proche en proche, en utilisant le lemme III-1, les  $G_i$  de  $i = N$  à  $i = 2$  (cf note 1).

---

1  $G_i$  reste inchangé tant qu'on effectue b) sur des noeuds inférieurs ou égal à  $i$  ; ensuite  $G_i$  changera mais on n'en aura plus besoin.

Poser  $F_0 \equiv 0$ ,  $F_1 = 1$ ,  $i = 2$ .

b) successivement pour les deux noeuds d'arrivée de  $i$  :

- calculer  $H \equiv G_i \cdot d_{ij}$

- s'il existe  $k$ , distinct de  $j$  et le plus en amont possible, tel que

$$H F_j = H F_k,$$

remplacer  $d_{ij}$  par  $d_{ij}^1 = 0$  (équivalent à un élément vide).

$$d_{ik} \text{ par } d_{ik}^1 = d_{ik} + d_{ij}$$

c) - supprimer de la matrice  $N$  toute colonne vide ainsi que la ligne de même numéro, et refaire cela jusqu'à ce que le cas ne se produise plus

- calculer  ${}^2 F_i \equiv d_{ik_1} \cdot F_{k_1} + d_{ik_2} \cdot F_{k_2}$ ,

$k_1$  et  $k_2$  étant les noeuds d'arrivée de  $i$  déterminés en b)

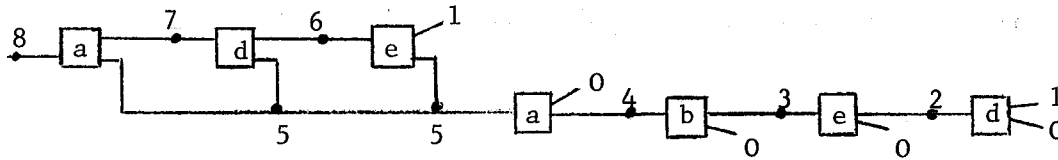
- si  $i=N$  l'algorithme est terminé ; sinon poser  $i=i+1$  et revenir en b)

Remarque : Le choix de l'ordre des  $i$  et celui du noeud  $k$  le plus en amont sont arbitraires ; cependant ils sont justifiés moyennant une écriture convenable de départ.

---

${}^2 F_i$  ne changera plus par la suite.

Exemple : l'écriture  $f = a d e + a' b e d$   
 conduit au réseau et à la matrice des noeuds :



	8	7	6	5	4	3	2	1	0
8	a	a'							
7		d	d'						
6			e'			e			
5				a'			a		
4					b		b'		
3						e	e'		
2							d	d'	

a) calcul des  $G_i$  (par la formule du lemme III-1)

$$G_8 = 1$$

$$G_7 = a$$

$$G_6 = a d$$

$$G_5 = a' + a d' + a d e'$$

$$G_4 = a'$$

$$G_3 = a' b$$

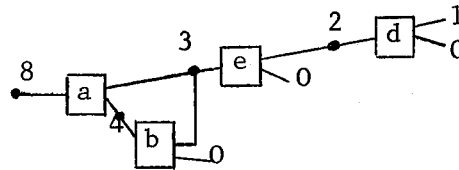
$$G_2 = a' b e$$

b) et c) : les calculs sont effectués dans le tableau de la page suivante.

i	j	$d_{ij}$	$H = G_i \cdot d_{ij} = \sum_{m_p} d_{ij}$	$R_{m_p}(F_j)$	k	$R_{m_p}(F_k)$	$F_i$
2	0	d'					
	1	d					d
3	0	e'					
	2	e	a' b e	d	0 1	0 1	e d
4	0	b'					
	3	b	a' b	e d	0 1 2	0 1 d	b e d
5	0	a					
	4	a'	a'	b e d	0 1 2 3	0 1 d e d	a' b e d
6	1	e					
	5	e'	a d e'	0	0	0 5 → 0	e
7	5	d'	a d'	0	0	0 5 → 0	
	6	d	a d	e	0 1 2 3	0 1 d e	d e
						6 → 3	
8					0 1 2 3 4	0 1 d e d b e d	
	5	a'	a'	b e d		5 → 4	
	7	a	a	d e	0 1 2 3	0 1 d e d	

On aboutit finalement à la matrice des noeuds suivante (où 5, 6 et 7 ont disparu)

	8	4	3	2	1	0
8	a' a					
4		b			b'	
3			e		e'	
2				d	d'	



Conclusion :

- Choix d'une écriture de départ : il est impossible d'énoncer une règle générale, et nous retiendrons seulement qu'il y a intérêt à ce que deux sommes <sup>1</sup> qui se suivent commencent ou terminent par le même groupe de lettres.

Exemple : soit

$$E = a b (c+f+d+e) + (a+b) [c(d+e) + f d e] + c f d e$$

Cette écriture est bonne puisqu'elle conduit à un réseau de coût 11 (probablement optimal).

De même, l'expression

$$E = a(b+d c) + g c + (g+f) d e$$

donne avec l'algorithme le coût minimum.

<sup>1</sup> Dans le cas le plus fréquemment utilisé d'expressions en sommes de produits.

- Comparaison avec la première méthode. Cette deuxième méthode ne présente d'intérêt qu'à partir de 6 ou 7 variables : en effet, en dessous de ce chiffre on a des réseaux assez simples et pouvant être obtenus beaucoup plus rapidement à partir d'un réseau arborescent. Il semble en particulier que pour toutes les fonctions de 4 variables le passage par un réseau arborescent conduise à une solution optimale - et la méthode exposée dans ce paragraphe est alors inutile. A partir de 7 variables cette deuxième méthode peut devenir plus intéressante au point de vue coût ; c'est le cas par exemple de la fonction

$$f = a b c + a b' (d+c' e) + f c' e$$

Le passage par un réseau arborescent conduit à un coût minimum égal à 8, tandis que l'algorithme appliqué à cette expression donne un réseau à 7 opérateurs seulement.

L'inconvénient de cette méthode est d'être longue et peu explicite quant au choix de la meilleure écriture de départ : on ne pourra l'appliquer qu'à des fonctions dont on posséderait une expression simple en somme-produit-complément, mais dans le cas général il y a intérêt à passer par un réseau arborescent.

---





C H A P I T R E III

ROLE DE LA DECOMPOSITION :

- dans la synthèse d'une fonction par un réseau U
- dans la synthèse d'une fonction par un réseau  $U_1$ .

Ce chapitre est le seul où nous ferons mention de l'opérateur

$$U_1 = X Y + X' Z$$

à trois entrées quelconques réalisées par des opérateurs  $U_1$ . Son étude générale est en effet compliquée par le fait qu'il n'y a plus d'influence monotone d'une sortie de noeud sur une sortie de noeud située en aval : aussi les méthodes directes de synthèse exposées au chapitre suivant ne sont-elles plus applicables telles quelles.

C'est pourquoi nous bornerons l'étude de cet opérateur à l'examen des avantages qu'on peut en tirer dans le cas d'une décomposition disjointe de la fonction.

1° Réseaux U.

Nous étudierons le cas d'une décomposition disjointe simple, où la fonction possède une expression de la forme :

$$(1) \varphi(X,Y) = \psi[g(X),Y]$$

X et Y étant disjoints.

Une question d'un grand intérêt pour l'étude de la synthèse d'une fonction par un opérateur donné est celle de savoir si la présence d'une décomposition disjointe sur la fonction peut faciliter la recherche de sa synthèse optimale. Pour l'opérateur  $U$  nous ne pouvons répondre que dans trois cas particuliers :

1° celui du lemme II-1 relatif à la forme

$$F(X,Y) = g(X) + h(Y) \quad (\text{ou : } g(X).h(Y))$$

(X,Y disjoints)

2° celui du théorème I-1 relatif à

$$F(z,X,Y) = z g(X) + z' h(Y)$$

(X,Y disjoints, et  $z$  est une variable simple) ;

dans ces deux premiers cas la recherche de la synthèse minimale de  $F$  se ramène à celle d'une synthèse minimale de  $g$  et d'une synthèse minimale de  $h$ .

3° celui où la fonction  $g(X)$  est privilégiée pour l'opérateur  $U$  :

Théorème V-1. (LAPSCHER)

Si une fonction peut s'écrire sous la forme (1) où  $g(X)$  est une fonction privilégiée pour  $U$ , alors il existe une synthèse de la fonction  $\psi(g,Y)$  (où  $g$  est une variable simple) qui donne une synthèse optimale de  $\varphi$  par substitution  $U_g \rightarrow R_g$ ,  $R_g$  étant une synthèse optimale de  $g$ .

Le théorème s'étend en fait à un opérateur quelconque<sup>2</sup>, comme le montre la démonstration :

Partons d'un réseau R' réalisant  $\varphi(X,Y)$  et montrons qu'il est toujours possible de trouver un réseau R réalisant  $\varphi$  et tel que :

- son coût soit au plus égal à celui de R'
- il existe un réseau  $R_\psi$  réalisant  $\psi(g,Y)$  dont R se déduise par substitution  $U_g \rightarrow R_g$ .

Soit a une variable de X et  $X_{a_0}$  un ensemble de valeurs particulières des autres variables de X tel que<sup>0</sup>

$$g(a, X_{a_0}) = \hat{a} \quad ,$$

$\hat{a}$  désignant soit a soit a' ;  $X_{a_0}$  existe si g dépend effectivement de a, et l'ensemble  $\left\{ a_0 \text{ (tel que } \hat{a}_0 = 1), X_{a_0} \right\}$  est appelé "point frontière de g(X) associé à la variable a.

Si les variables de X prennent ces valeurs,  $\varphi(X,Y)$  devient égale à

$$\begin{aligned} & \varphi(\hat{a}, Y) \\ & = \psi(g, Y) \quad \text{si on pose } g = \hat{a} \end{aligned}$$

et le réseau R' se transforme en un réseau  $R_\psi$  réalisant à sa sortie la fonction  $\psi(g,Y)$  ; notons qu'en vertu des identités

$$\begin{aligned} U_1(Z, T) &= Z \\ U_0(Z, T) &= T, \end{aligned}$$

---

2 cf Bibliogr. Réf. 8.

ce réseau  $R_\psi$  ne comporte plus d'opérateurs  $U_{x_i}$  ( $x_i \in X$ ), et que le nombre d'opérateurs  $U_{y_i}$  ( $y_i \in Y$ ) n'a pas augmenté dans cette transformation.

Faisons maintenant sur  $R_\psi$  la substitution  $U_g \rightarrow R_g$ .  $R_\psi$  se transforme en un réseau  $R$  réalisant  $\psi[g(X), Y]$  c'est-à-dire  $\varphi(X, Y)$ . Le passage de  $R'$  à  $R$  n'ayant pas fait augmenter le nombre d'opérateurs  $U_{y_i}$  ( $y_i \in Y$ ), il nous suffira de démontrer qu'il en est de même pour les opérateurs  $U_{x_i}$  ( $x_i \in X$ ) à condition de choisir convenablement  $a$  parmi les variables de  $X$ .

Soient :  $\ell$  le nombre de variables de  $X$ , et

$$n_1, n_2, \dots, n_\ell$$

le nombre respectif d'opérateurs

$$U_{x_1}, U_{x_2}, \dots, U_{x_\ell}$$

dans  $R'$ . Soit

$$n_i = \text{Min}_{1 \leq k \leq \ell} (n_k)$$

Choisissons  $a = x_i$  tel qu'il y ait  $n_i$  opérateurs  $U_{x_i}$ . Dans le réseau  $R$  que nous obtenons le nombre d'opérateurs  $U_{x_k}$  ( $x_k \in X$ ) est égal à  $\ell \cdot n_i$  puisque  $g(X)$  a pour coût  $\ell$ .

On a  $(2) \sum_{1 \leq k \leq l} n_k \geq l n_i$

donc le passage de  $R'$  à  $R$  n'a pas fait augmenter le nombre d'opérateurs  $U_{x_i}$ , ce qui achève la démonstration.

Corollaire 1 : dans un réseau minimal réalisant  $\varphi(X,Y) = \psi[g(X),Y]$  le nombre d'opérateurs  $U_{x_i}$  ( $x_i \in X$ ) est le même pour tous les  $x_i$ .

En effet si ce réseau  $R'$  est minimal on doit aboutir en (2) à une égalité, qui n'est possible que si tous les  $n_k$  sont égaux à  $n_i$ .

Corollaire 2 : si aux hypothèses du théorème on ajoute l'hypothèse suivante sur  $\psi$  : << il existe une synthèse optimale de  $\psi(g,Y)$  à un seul opérateur  $U_g$ , >> alors on peut affirmer que cette synthèse donne par substitution  $U_g \rightarrow R_g$  une synthèse optimale de  $\varphi$ .

En effet, soit  $R_\psi$  une telle synthèse optimale de  $\psi$ , à un seul opérateur  $U_g$  et  $n_Y$  opérateurs  $U_{y_i}$  ( $y_i \in Y$ ) ; elle donne par substitution  $U_g \rightarrow R_g$  une synthèse de coût

$$c = l + n_Y.$$

Toute autre synthèse de  $\psi$ , à  $n'_g$  opérateurs  $U_g$  et  $n'_Y$  opérateurs  $U_{y_i}$ , donne par substitution  $U_g \rightarrow R_g$  une synthèse de coût

$$c' = l n'_g + n'_Y$$

Comme  $R_\psi$  est une synthèse optimale de  $\psi$ ,

$$n'_g + n'_Y \geq 1 + n_Y$$

et, comme  $n'_g \geq 1$ ,

$$\begin{aligned} \ell n'_g + n'_Y &\geq \ell + n_Y \\ c' &\geq c \end{aligned}$$

Exemples :

1° Soit  $\varphi = a b (c + d e) + (a' + b') d' e$

Posons  $g(a, b) = a b$  ; il vient

$$\begin{aligned} \varphi &= g(a, b) \cdot (c + d e) + g'(a, b) \cdot d' e \\ &= \psi[g(a, b), c, d, e] \end{aligned}$$

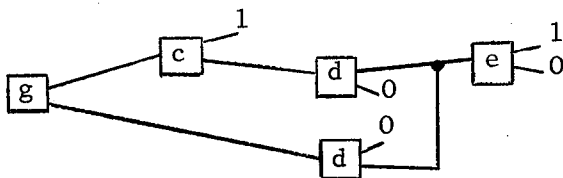
avec  $\psi(g, c, d, e) = g(c + d e) + g' d' e$

Le coût minimum de synthèse de  $\psi$  est  $\geq 5$ . En effet

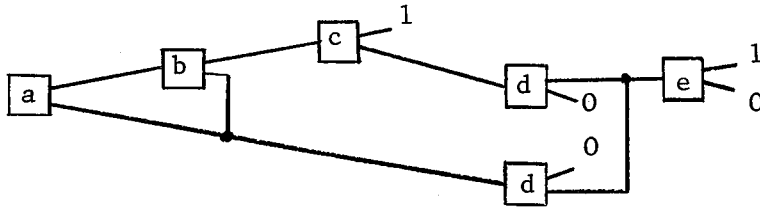
$$\psi(g, 0, d, 1) = g d + g' d'$$

Cette fonction a un coût minimum de synthèse égal à 3, donc le nombre total d'opérateurs ( $U_g$  ou  $U_d$ ) d'un réseau réalisant  $\psi$  est au moins égal à 3, et comme  $\psi$  dépend aussi de  $c$  et  $e$  le nombre total d'opérateurs est au moins égal à 5.

La réalisation suivante de  $\psi$  est donc optimale :



Ce réseau ne comporte qu'un opérateur  $U_g$ ,  $g = a b$  est privilégiée, par conséquent le théorème s'applique, ainsi que le corollaire 2 : par substitution  $U_g \rightarrow R_g$  on aboutit à une réalisation optimale de  $\varphi$  qui est la suivante :



2° Soit  $\varphi = a(b + c d) f + a'[e b' (c' + d') f + e']$

Posons  $g(b, c, d) = b + c d$  ; il vient

$$\psi(a, g, f, e) = a g f + a' (e g' f + e')$$

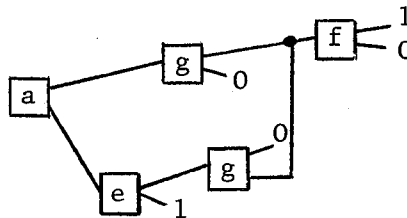
$$\text{et } \varphi = \psi(a, b, + cd, f, e)$$

$\psi$  a un coût minimum de synthèse au moins égal à 5 :

$$\text{en effet } \psi(a, g, 1, 1) = a g + a' g'$$

et on fera le même raisonnement qu'au 1er exemple.

La réalisation suivante de  $\psi$  est donc optimale :



- Fig 1.

On vérifiera qu'il est impossible de trouver une synthèse optimale de  $\psi$  à un seul opérateur  $U_g$ . On ne peut donc appliquer le corollaire 2.

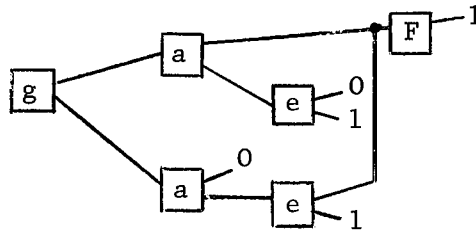
Comme  $g = b + c d$  est privilégiée on peut appliquer le théorème : il suffit de chercher la synthèse de  $\psi$  qui conduise par substitution  $U_g \rightarrow R_g$  à la synthèse la moins coûteuse de  $\varphi$ .



Celle de la figure 1 conduit à une synthèse de coût

$$6 + 2(3-1) = 10 \text{ opérateurs.}$$

Cherchons s'il existe une synthèse de  $\psi$  conduisant à une synthèse de  $\varphi$  moins coûteuse. Il n'est permis d'espérer de gain qu'en diminuant le nombre d'opérateurs  $U_g$  dans la synthèse de  $\psi$  ; on vérifiera que si l'on impose un seul opérateur  $U_g$  la synthèse la moins coûteuse de  $\psi$  est la suivante (Fig 2).



Par substitution  $U_g \rightarrow R_g$  on obtient une synthèse de  $\varphi$  de coût :

$$7 + (3-1) = 9 \text{ opérateurs.}$$

c'est donc cette solution qui conduit à la synthèse optimale.

On voit sur cet exemple qu'une synthèse optimale de  $\psi$  peut ne pas conduire à une synthèse optimale de  $\varphi$ . Néanmoins si la fonction  $\psi$  n'est pas trop compliquée il est encore assez facile de trouver la synthèse optimale.

#### Nombre de fonctions privilégiées pour U.

Ce nombre est assez faible, comme le nombre le tableau suivant pour un nombre d'arguments allant de 1 à 5.

n	Nombre de types non dégénérés	Nombre de types privilégiés pour une expression en S-P-C	Nombre de types privilégiés pour U
1	1	1	1
2	3	2	2
3	16	4	5
4	380	10	18
5	1227756	24	$45 < N(5) < 152$

Obtention des bornes pour  $n = 5$  : soit  $f = x Y + x' Z$ , on obtient une borne inférieure en comptant le nombre de types pour lesquels Y et Z sont privilégiées et n'ont aucun argument en commun, et une borne supérieure en comptant le nombre de types pour lesquels Y et Z sont privilégiées.

Pour  $n \leq 4$  on constate qu'il n'y a que 9 types de fonctions privilégiées pour U tout en ne l'étant pas pour une expression en somme-produit-complément. Ce sont :

- pour  $n = 3$        $x y + x' z$
- pour  $n = 4$        $x + y z + y' t$
- $x(y z + y' t)$
- $x y + x'(z + t)$
- $x y + x' z t$
- $x t + x' y(z + t)$
- $x t + x'(y + z t)$
- $x t + x'(y z + y' t)$
- $x(y + t) + z t$

Contre exemple au théorème V-1 pour  $g(X)$  quelconque.

Soit  $\varphi = (a \ b) \otimes c \otimes d$ .

On peut poser  $g(c, d) = c \otimes d$  ; il vient alors :

$$\varphi = (a \ b) \otimes g(c, d)$$

Le théorème ne s'applique pas puisque la synthèse de  $g$  exige au minimum 3 opérateurs ; nous allons montrer qu'effectivement l'énoncé est faux dans le cas de cet exemple.

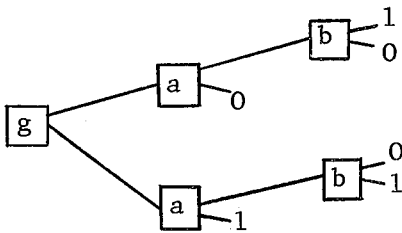
Toute représentation par un réseau  $U$  de

$$\psi(a, b, g) = (a \ b) \otimes g$$

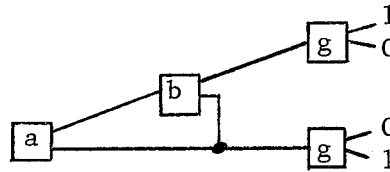
exige au minimum :

- soit deux relais  $U_a$  et deux relais  $U_b$  si on ne veut qu'un relais  $U_g$  (cf Fig 5).

- soit deux relais  $U_g$  si on ne veut qu'un relais  $U_a$  (ou qu'un relais  $U_b$ ) (cf Fig 6).



- Fig 5.

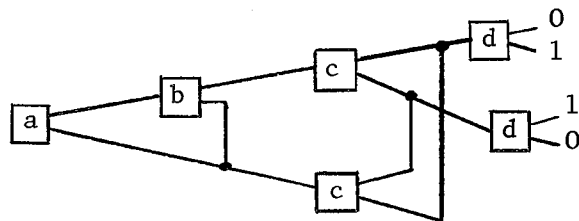


- Fig 6.

Le coût minimal de synthèse de  $g = c \otimes d$  étant 3, si on fait la substitution  $U \rightarrow R_g$  :

- la figure 5 conduit pour F à une synthèse de coût : 7 opérateurs
- " 6 " " " " " : 8 opérateurs

Or ni l'une ni l'autre ne donne la synthèse optimale, puisqu'il existe pour F la synthèse suivante (de coût 6) :



- Fig 7.

Il n'existe donc pas de synthèse de  $\psi$  conduisant par substitution  $U \rightarrow R_g$  à une synthèse optimale de la fonction donnée.

Conclusion :

On remarque le réseau de la figure 7 ne diffère que du réseau auquel conduit la figure 6 que parce que le sous-réseau qui réalise  $g$  utilise des résultats intermédiaires du sous-réseau qui réalise  $g'$ . C'est cette possibilité de mise en commun de résultats intermédiaires entre plusieurs réseaux  $R_g$  qui invalide l'énoncé du théorème si  $g$  est quelconque. Un énoncé général serait alors le suivant :

si une fonction de  $n$  variables peut s'écrire sous la forme (1), alors il existe une synthèse de  $\psi(g, Y)$  conduisant par les deux opérations suivantes :

- substitution  $U \rightarrow R_g$
- mise en commun de résultats intermédiaires entre les différents  $R_g$  obtenus, à une synthèse optimale de  $\varphi$ .

N'étant pas assuré de l'exactitude de cet énoncé, nous nous contenterons de le poser comme hypothèse, car même s'il s'avérait exact, le fait qu'il ne fournit pas de moyen direct d'arriver à une synthèse optimale le rendrait assez difficilement exploitable.

Il en est tout autrement si l'on utilise l'opérateur  $U_1$ , comme le montre le paragraphe suivant :

2° Réseaux  $U_1 = X Y + X' Z$ .

Si l'on autorise l'opérateur  $U_1$ , une manière de réaliser

$$\varphi(X,Y) = \psi[g(X),Y]$$

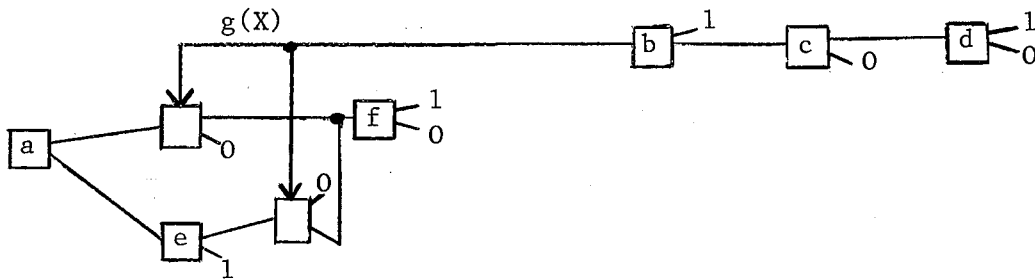
est de réaliser séparément

$\psi(g,Y)$  par un réseau  $R_\psi$   
et  $g(X)$  " "  $R_g$ ,

puis, au lieu de faire la substitution  $U_g \rightarrow R_g$  du 1°, de remplacer comme première entrée de tous les opérateurs  $U_g$  la variable  $g$  par la fonction de sortie du réseau  $R_g$ .

Cette façon de procéder n'est évidemment intéressante que si le réseau  $R_\psi$  comporte plusieurs opérateurs  $U_g$ .

Avec l'exemple n°2 du précédent paragraphe et la synthèse de  $\psi(g,Y)$  de la Fig 3, l'utilisation de l'opérateur  $U_1$  conduit à la synthèse de  $F$  suivante :



et permet le gain d'un opérateur.

Un schéma analogue montrerait que le coût de réalisation par  $U_1$  de  $g(X) \otimes h(Y)$  est inférieur ou égal à :

$$1 + \text{somme des coûts de réalisations de } g \text{ et } h.$$

De même l'estimation de la borne supérieure du coût par le nombre de lettres d'une expression en somme-produit-complément peut être améliorée par la remarque suivante :

si  $k$  sous-expressions de cette expression sont identiques, on peut ne construire qu'un seul réseau qui les réalise et dont on utilisera la sortie comme entrée dans le réseau principal de  $k$  opérateurs  $U_1$ .

Ainsi, l'expression suivante

$$F = a b (h c d + e + f g) + h c d (b + e + f g)$$

contient 15 lettres. Les deux sous-expressions

$$h c d$$

et

$$e + f g$$

s'y trouvant chacune deux fois, l'introduction de deux relais  $U_1$  permet d'abaisser le coût à la valeur

$$7 + 2 \times 3 = 13$$



C H A P I T R E IV

CHOIX D'UNE METHODE PRATIQUE DE SYNTHÈSE

Nous avons donné au cours des trois précédents chapitres divers résultats théoriques pouvant conduire à des méthodes de résolution du problème de la synthèse par l'opérateur U. Leur disparité fait qu'il est impossible d'en tirer une méthode unique, aussi seront amenés à énoncer en particulier deux méthodes - dites "algébrique" et "géométrique" - de passage par un réseau arborescent optimal auquel on applique ensuite la règle de réduction du chapitre II ; nous y adjoindrons la méthode générale de synthèse d'une fonction par des opérateurs croissants - dite aussi méthode "par le bas" - proposée par M. Kuntzmann <sup>1</sup>.

Nous montrerons enfin que la plus commode au point de vue pratique est la méthode algébrique à laquelle on applique la règle de réduction, et nous l'utiliserons pour traiter quelques fonctions de 4 variables.

Nous laisserons de côté parmi les diverses considérations des précédents chapitres :

- d'une part celles relatives au passage par une expression en somme-produit-complément : il s'avère en effet qu'elles se prêtent difficilement à une méthode générale à cause de la difficulté de trouver par programme une expression de départ idéale.

---

1 cf Bibliogr. Réf 6 pp 227 - 279



- d'autre part le chapitre III relatif à la décomposition : en effet dans le cas général où une fonction n'a pas de décomposition disjointe il resterait à prouver qu'il est intéressant d'appliquer le principe de substitution énoncé dans ce chapitre à certaines décompositions partielles choisies d'après des critères donnés <sup>1</sup>.

A - Détermination d'un réseau arborescent optimal.

1° Méthodes de synthèse "par le haut".

Les deux méthodes qui suivent s'appuient toutes deux sur la propriété fondamentale des réseaux arborescents : << un réseau arborescent optimal est formé de sous-réseaux arborescents optimaux. >>

Sur le reste elles n'ont pas de point commun car elles font appel à des traitements de calcul différents dans la forme : l'une traite des polynômes, l'autre un tableau, c'est pourquoi une combinaison des deux ne serait pas rentable au point de vue calcul en machine ; elles ne sont pas avantageuses dans les mêmes conditions : la méthode dite "algébrique" est d'autant plus intéressante que la fonction, ou son complément, a peu de points représentatifs ; si au contraire le nombre de points représentatifs est du même ordre pour la fonction et son complément il est plus simple d'utiliser la méthode dite "géométrique" qui n'utilise qu'un simple tableau, mais par ailleurs on est limité au point de vue encombrement.

a) Méthode algébrique :

Elle part de la représentation canonique de la fonction f à réaliser et s'appuie sur les trois remarques suivantes :

---

1 On pourra consulter à ce sujet la thèse de M. Pichat : <<Décomposition des fonctions Booléennes>> Grenoble, 1966.

1. si  $f$  est indépendante de  $x_i$  cette variable n'intervient dans aucune représentation optimale de  $f$ .

2. si deux variables  $x_k$  et  $x_\ell$  sont telles que dans  $f$   $x_k$  soit "équivalente" soit à  $x_\ell$  soit à  $x'_\ell$ , à tout réseau réalisant  $f$  et ayant  $x_k$  en tête correspond un réseau de même coût réalisant  $f$  et ayant  $x_\ell$  en tête. Il est donc inutile d'essayer ces deux variables à la fois comme variables de tête <sup>1</sup>.

On rappelle que dans  $f$   $x_k$  est dite équivalente à  $x_\ell$  si

$$f(x_k = 1, x_\ell = 0, \dots) = f(x_k = 0, x_\ell = 1, \dots)$$

et on note  $x_k \equiv x_\ell$ .

La relation

$$x_k \sim x_\ell \iff x_k \equiv x_\ell \text{ ou } x'_\ell$$

est aussi une relation d'équivalence qui définit sur l'ensemble des variables  $K$  classes distinctes qu'on notera  $C_1, C_2, \dots, C_k$  ;

3. d'après le théorème I-1, si  $f = U x_1 \varphi_1 \psi_1$  et si  $\varphi_1$  et  $\psi_1$  dépendent effectivement de deux ensembles disjoints de variables, il suffira de chercher les représentations optimales de  $f$  ayant  $x_1$  en tête.

---

<sup>1</sup> La remarque 2 permet de résoudre quasi instantanément certains cas tel que celui de la fonction clé de parité.

Méthode : à partir de la représentation canonique on écrit la fonction sous les k formes successives (cf Remarques 1 et 2) :

$$\begin{aligned}
 f &= U x_1 \varphi_1 \psi_1 && (x_1 \in C_1 \quad \text{et} \quad \varphi_1 \neq \psi_1) \\
 &= U x_2 \varphi_2 \psi_2 && (x_2 \in C_2 \quad \text{et} \quad \varphi_2 \neq \psi_2) \\
 &\text{-----} && \text{-----} \\
 &= U x_K \varphi_K \psi_K && (x_K \in C_K \quad \text{et} \quad \varphi_K \neq \psi_K)
 \end{aligned}$$

- si  $K=1$  et si  $(\varphi_1 = 1 ; \psi_1 = 0)$  ou  $(\varphi_1 = 0 ; \psi_1 = 1)$  la forme  $U x_1 \varphi_1 \psi_1$  est optimale et a pour coût 1 ; sinon :

- s'il existe  $x_i \in C_i$  tel que les variables dont dépendent effectivement  $\varphi_i$  et  $\psi_i$  forment deux ensembles d'arguments disjoints, d'après 3. le problème se ramène à la recherche des formes p.l.l. optimales de deux fonctions de  $n-1$  variables,  $\varphi_i$  et  $\psi_i$ , et le coût pour  $f$  sera égal à la somme de leurs coûts + 1 ;

- sinon il faudra chercher : la forme p.l.l. de plus faible coût ayant  $x_1$  en tête, de même pour  $x_2, \dots$ , de même pour  $x_K$ , et comparer les coûts des  $K$  formes p.l.l. obtenues : le problème se ramène donc à la recherche des formes p.l.l. optimales de  $2K$  fonctions de  $n-1$  variables.

Exemple :

$$\text{Soit } f = a b c d + a b c d' + a b c' d + a' b c d + a' b' c d'$$

Il y a 3 classes distinctes :

$$a \sim d, b, c$$

$$\varphi_a = b c d + b c d' + b c' d$$

$$\psi_a = b c d + b' c d'$$

$$\varphi_b = a c d + a c d' + a c' d + a' c d$$

$$\psi_b = a' c d'$$

$$\varphi_c = a b d + a b d' + a' b d + a' b' d'$$

$$\psi_c = a b d$$

La remarque 3. ne s'applique à aucun couple  $(\varphi_i, \psi_i)$ . Il faut donc étudier les 6 fonctions séparément.

- dans  $\varphi_a$ , d'après 3. il suffit de mettre b en tête, puis c d'après 2. Une forme P.L.L. optimale de  $\varphi_a$  est donc :

$$\begin{aligned} \varphi_a &= b c \\ &+ b c' d, \quad \text{de coût} \quad \underline{C(\varphi_a) = 3} \end{aligned}$$

- dans  $\psi_a$ , d'après 3. il suffit de mettre c en tête, puis b d'après 2. Une forme P.L.L. optimale de  $\psi_a$  est donc :

$$\begin{aligned} \psi_a &= c b d \\ &+ c b' d', \quad \text{de coût} \quad \underline{C(\psi_a) = 4} \end{aligned}$$

- dans  $\varphi_b$ ,  $a \sim c \sim d$ . On peut par exemple commencer par a et prendre c pour deuxième lettre :

$$\begin{aligned} \varphi_b &= a c \\ &+ a c' d \\ &+ a' \quad c d, \quad \text{et} \quad \underline{C(\varphi_b) = 5} \end{aligned}$$

- dans  $\psi_b$ ,  $a \sim c \sim d$

$$\psi_b = a' c d', \quad \text{et} \quad \underline{C(\psi_b) = 3}$$

- dans  $\varphi_c$ , on a 2 classes :  $b, a \sim d$

$$\begin{aligned} \text{avec } b \text{ en tête :} \quad \varphi_c &= b a \\ &+ b a' d \\ &+ b' a' d' \quad (\text{coût } 5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{avec } a \text{ en tête :} \quad \varphi_c &= a b \\ &+ a' b d \\ &+ a' b' d' \quad (\text{coût } 5) \end{aligned}$$

$$\text{donc} \quad \underline{C(\varphi_c) = 5}$$

- dans  $\psi_c$ ,  $a \sim b \sim d$

$$\psi_c = a b d \quad \text{et} \quad \underline{C(\psi_c) = 3}$$

On constate qu'il faut mettre en tête a, car

$$C(\varphi_a) + C(\psi_a) = 7$$

$$C(\varphi_b) + C(\psi_b) = C(\varphi_c) + C(\psi_c) = 8$$

Le coût minimum de synthèse arborescente est  $7 + 1 = 8$  ; on l'obtient par exemple avec

$$\begin{aligned} f &= a b c \\ &+ a b c' d \\ &+ a' c b d \\ &+ a' c b' d' \end{aligned}$$

La règle de réduction appliquée à cette forme p.l.l. donne un coût égal à 7 (la lettre d est mise en commun). On peut démontrer - en effectuant des réductions sur certaines variables comme nous l'avons fait sur les exemples du chapitre III - que le coût d'une synthèse quelconque de cette fonction est supérieur ou égal à 6.

b) Méthode géométrique :

Cette méthode est basée sur le théorème I-2 du chapitre I :  
<<si une fonction f non égale à une constante est telle que les flèches de longueur 2 croissantes par rapport à f ou bien n'existent pas, ou bien sont toutes non décroissantes, ou toutes non croissantes par rapport à une variable  $x_1$ , alors il existe un ordre lexicographique local ayant pour première lettre  $x_1$  et optimal par rapport à f.>>

On peut appliquer ce théorème comme suit : soit  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  la fonction, et  $M_f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  une matrice dont les éléments non vides sont des couples de lettres, formés de la façon suivante :

- à chaque point représentatif de f correspond une colonne de  $M_f$ , et à chaque point non représentatif une ligne.

- à toute flèche de longueur 2 joignant un point non représentatif P à un point représentatif Q il correspond, à l'intersection de la ligne et de la colonne correspondantes, les deux variables par lesquelles les deux points diffèrent, sous la forme qu'elles ont dans Q.

Avec l'exemple du 1°,

$$f = a b c d + a b c d' + a b c' d + a' b c d + a' b' c d',$$

on obtient la matrice M(a, b, c, d) représentée figure 1.

Interprétation du théorème.

Si dans  $M_f(a, b, c, d)$  une variable donnée ne se trouve que sous une seule forme (la variable ou son complément), il existe un ordre lexicographique local dont elle est la première lettre.

	a'b'c'd'	a' b c d	a b c' d	a b c d'	a b c d
a'b'c'd'	:	:	:	:	:
a'b'c'd	c,d'	b,c	a,b	:	:
a'b'c d	:	:	:	:	a,b
a'b c'd'	b',c	c,d	a,d	a,c	:
a'b c'd	:	:	:	:	a,c
a'b c d'	:	:	:	:	a,d
a b'c'd'	a',c	:	b,d	b,c	:
a b'c'd	:	:	:	:	b,c
a b'c d'	:	:	:	:	b,d
a b'c d	a',d'	a',b	b,c'	b,d'	:
a b c'd'	:	:	:	:	c,d

- Fig 1.

Remarquons que cette matrice peut être utilisée pour la recherche non seulement de la première lettre de l'ordre l.l. optimal, mais aussi des lettres suivantes. En effet :

Soit  $f(a, b, c, d) = a\varphi + a'\psi$  ; la matrice  $M_{\varphi}(b, c, d)$  n'est autre que la matrice déduite de  $M_f$  par suppression de toutes les lignes et colonnes des points où  $a=0$  ; de même,  $M_{\psi}(b, c, d)$  est la matrice déduite de  $M_f$  par suppression de toutes les lignes et colonnes des points où  $a=1$ .

Partant de  $M_f$ , la méthode géométrique de recherche d'un ordre  $l.l.$  optimal se résume de la façon suivante :

- si  $M_f$  a 0 colonnes,  $f=0$  ; si  $M_f$  a 0 lignes,  $f=1$  et dans les deux cas le coût minimal de réalisation de  $f$  - qu'on notera  $C(f)$  - est nul.

- si  $M_f$  est monotone par rapport à une variable  $x_i$ , d'après le théorème I-2 le problème se ramène à l'étude des deux fonctions  $\varphi_i$  et  $\psi_i$  données par  $f = x_i \varphi_i + x'_i \psi_i$ , c'est-à-dire à l'étude de deux matrices extraites de  $M_f$ , et on aura :  $C(f) = C(\varphi_i) + C(\psi_i) + 1$ .

- sinon, il faudra chercher : une réalisation optimale de  $f$  avec  $x_1$  en tête, puis avec  $x_2$  en tête, etc..., enfin avec  $x_n$  en tête, et comparer leurs coûts respectifs ;  $C(f)$  sera égal au plus petit d'entre eux ; le problème se ramène donc à l'étude de  $2n$  matrices extraites de  $M_f$ .

#### Conclusion :

La méthode géométrique est plus simple que la précédente au point de vue calcul ; cependant, à cause des dimensions de la matrice  $M_f$  - qui peut contenir jusqu'à 10 000 éléments pour 8 variables - la méthode géométrique n'est pratiquement applicable qu'à un nombre de variables assez restreint, ce qui n'est pas le cas pour la méthode algébrique : nous considérons donc celle-ci comme la plus sûre dans le cas général (et pour une fonction complète), compte tenu d'ailleurs de la méthode "par le bas" qui va être exposée.



2° Méthode de synthèse "par le bas".

Nous terminerons cette étude par l'exposé, dans le cas arborescent puis dans le cas quelconque, d'une méthode de synthèse applicable à n'importe quel opérateur croissant mais aussi à U - bien que cet opérateur ne soit pas croissant par rapport à sa première entrée - : comme nous le montrerons sur un exemple cette méthode est beaucoup moins rapide que la méthode algébrique, et nous n'en exposerons le principe que parce-qu'elle présente l'avantage de s'appliquer aussi aux fonctions incomplètes, et que dans le cas du réseau quelconque elle est la seule qui permette d'obtenir une synthèse optimale.

Principe :

La méthode consiste à construire un réseau de coût minimum en commençant par les noeuds les plus en amont, la progression vers l'aval se faisant par sélection, entre toutes les solutions possibles, de certaines dont on sait qu'au moins l'une d'entre elles conduira à la solution optimale ; le principe de cette sélection repose sur le théorème suivant :

Théorème IV-1.

Soit  $\varphi(X)$  une fonction (qui peut être incomplète) ; si dans un réseau d'opérateurs croissants, ou un réseau U, on remplace une sortie  $f_i$  par une autre fonction  $f_i$  vérifiant

$$(1) \quad f_i(X) = \varphi(X) \implies \tilde{f}_i(X) = \varphi(X),$$

alors, si le réseau par ailleurs n'est pas changé, toute sortie  $f_j$  en aval de  $f_i$  sera changée en une fonction  $\tilde{f}_j$  vérifiant

$$f_j(X) = \varphi(X) \implies \tilde{f}_j(X) = \varphi(X)$$

En effet  $f_j$  peut s'écrire

$$f_j = A f_i + B$$

(où A et B sont indépendants de  $f_i$ ), et ceci aussi bien pour U que pour un opérateur croissant (propriété 3).

Si  $f_i$  est changée en  $\tilde{f}_i$  et si le réseau par ailleurs n'est pas changé,  $f_j$  est changée en

$$\tilde{f}_j = A \tilde{f}_i + B.$$

Il s'agit de montrer que

$$A f_i(X) + B = \varphi(X) \implies A \tilde{f}_i(X) + B = \varphi(X) ;$$

la propriété est évidente pour  $B=1$  ou  $A=0$  ; pour  $A=1$  et  $B=0$  elle se réduit à

$$f_i(X) = \varphi(X) \implies \tilde{f}_i(X) = \varphi(X)$$

qui est bien exacte d'après l'hypothèse.

Corollaire : si un réseau d'opérateurs croissants, ou un réseau U, réalise à sa sortie une fonction  $\varphi$ , il la réalisera encore si on remplace une sortie  $f_i$  quelconque d'un noeud de ce réseau par une fonction  $f_i$  vérifiant (1).

C'est en effet l'énoncé de théorème dans lequel on remplace  $f_j$  par  $\varphi$ .

Application aux réseaux arborescents.

Supposons qu'un réseau arborescent R formé d'opérateurs croissants, ou d'opérateurs U, et réalisant une fonction  $\varphi(X)$  contienne un sous-réseau

$R_i$ , de coût  $c_i$  et de sortie la plus en aval  $f_i$ , tel qu'il existe un autre réseau arborescent formé des mêmes opérateurs  $\tilde{R}_i$ , de coût  $c_i$  et de sortie la plus en aval  $f_i$ , réalisant les conditions suivantes :

- d'une part la relation (1)

- d'autre part  $\tilde{c}_i < c_i$ , ou :  $\tilde{c}_i = c_i$  et  $\tilde{f}_i(X) \neq f_i(X)$  pour au moins

un  $X$  avec  $\varphi(X) \neq \emptyset$  ;

alors, d'après (1) et le théorème IV-1, si on remplace  $R_i$  par  $\tilde{R}_i$   $R$  sera changé en un réseau  $\tilde{R}$  réalisant lui aussi  $\varphi(X)$ , et le coût de  $R$  sera inférieur ou égal à celui de  $\tilde{R}$  (ceci étant dû au fait que le réseau est arborescent -c'est-à-dire que  $R_i$  n'est rattaché à  $R$  que par sa sortie  $f_i$ ).

On dira que  $R_i$  est améliorable par rapport à  $\varphi$ .

Il résulte de ceci et du corollaire du théorème IV-1 qu'il existe un réseau arborescent de coût minimum réalisant  $\varphi(X)$  et tel qu'aucune de ses sorties ne soit améliorable par rapport à cette fonction.

Pour obtenir un réseau arborescent de coût minimum, il suffit donc de former, en partant des entrées 1 et 0 et pour les coûts successifs 1, 2, 3 ... tous les réseaux non améliorables qui existent ; ayant obtenu ceux de coût  $k-1$  on obtient ceux de coût  $k$  par l'opération  $U \times f_i f_j$  (dans le cas de  $U$ ),  $x$  étant une variable quelconque,  $f_i$  et  $f_j$  des sorties de réseaux non améliorables dont la somme des coûts est  $k-1$ . On compare ces nouvelles sorties à toutes les sorties déjà obtenues et on ne garde que celles qui sont non améliorables. Remarquons que si deux réseaux de même coût ont des fonctions de sortie égales ( $\tilde{c}_i = c_i$  ;  $\tilde{f}_i = f_i$ ), on pourra n'en garder qu'un, par exemple le premier qui a été calculé ; on dira donc par extension que le second est "améliorable".

Le moyen de comparaison des fonctions entre elles est le tableau de vérité à  $2^n$  lignes correspondant aux différentes valeurs possibles des variables. Remarquons à ce sujet qu'un réseau d'opérateurs croissants (par rapport à toutes leurs entrées) a ses sorties toutes croissantes par rapport aux variables d'entrée du réseau, et qu'on démontre à partir de là qu'il suffit de ne garder parmi les  $2^n$  lignes que celles qui correspondent aux points caractéristiques de 1<sup>e</sup> et de 2<sup>e</sup> espèce de la fonction à réaliser.

Cette réduction n'est pas valable pour l'opérateur U, et on est obligé de garder toutes les lignes si l'on veut être sûr d'aboutir à un réseau optimal (dans les exemples qui seront cités plus bas, nous ne l'avons pas fait afin de simplifier les calculs).

Il est commode de caractériser toute fonction  $f_i$  par une fonction  $g_i$  ne différant d'elle qu'aux points où  $\varphi=0$ , les valeurs que prend  $g_i$  en ces points étant les compléments des valeurs qu'y prend  $f_i$ . Le fait que  $f_i$  est améliorable par  $\tilde{f}_i$  se traduit alors par :

$$\left\{ \begin{array}{ll} g_i \leq \tilde{g}_i & \text{et} \quad c_i < c_i \\ \text{ou : } c_i = \tilde{c}_i & \text{et} \quad g_i < \tilde{g}_i \end{array} \right.$$

Si l'opérateur est U, la fonction  $g_k$  correspondant à

$$f_k = U \times f_i \times f_j$$

est donnée par :

$$\begin{array}{ll} U \times g_i \times g_j & \text{en un point où } \varphi=1 \\ U \times g_j \times g_i & \text{" " " } \varphi=0 \end{array}$$

Afin d'éviter un trop grand nombre de comparaisons on peut adjoindre au tableau principal formé par les fonctions  $g_i$  un "tableau d'élimination" que l'on forme ainsi :

- initialement il formé des  $g_i$  correspondant aux fonctions de coût 0, c'est-à-dire 0 et 1 dans le cas de U, les variables simples dans le cas des opérateurs croissants.

- chaque fois que l'on a calculé une fonction  $g_k$  - à partir de deux fonctions  $g_i$  et  $g_j$  non améliorables situées dans le tableau principal - on la compare à toutes les colonnes du tableau d'élimination :

Si elle est inférieure ou égale à une colonne de ce tableau on ne la met pas dans le tableau principal et on passe à la suivante ;

Si elle n'est inférieure ou égale à aucune colonne de ce tableau on la met dans le tableau principal et on l'ajoute au tableau d'élimination, puis on raye de celui-ci les colonnes qui lui sont inférieures. On dispose ainsi à tous les stades du calcul d'un tableau d'élimination complet et non redondant.

- enfin, quand toutes les colonnes de coût  $k$  donné ont été envisagées, certaines doivent être rayées du tableau principal par le fait qu'elles sont inférieures ou égales à une colonne écrite après elles. Pour cela il suffira de reconsidérer l'une après l'autre toutes les colonnes de coût  $k$  inscrites dans ce tableau :

si une telle colonne se trouve non rayée dans le tableau d'élimination, la garder dans le tableau principal (elle est non améliorable) sinon la rayer aussi dans le tableau principal.

Application à l'opérateur U.

Les considérations a), b), c) permettent d'apporter des simplifications dans le cas de l'opérateur U.

a) la fonction de sortie de tout noeud d'un réseau U arborescent de coût minimum réalisant une fonction  $\varphi$  croissante par rapport à une variable donnée est non décroissante par rapport à cette variable. En effet :

soit  $f_i$  une sortie quelconque,  $\varphi$  peut s'écrire :

$$\varphi = A f_i + B,$$

où A et B sont disjoints et A et  $f_i$  sont des fonctions n'ayant aucun argument en commun (propriété 4).

on a  $\varphi(A=1) = f_i$

Si  $\varphi$  est croissante par rapport à une variable donnée,  $\varphi(A=1)$  est non décroissante par rapport à cette variable et il en est de même de  $f_i$ .

Conséquence : si la fonction à réaliser est croissante par rapport à la variable x, nous ne garderons parmi tous les sous-réseaux  $U_x(f_i, f_j)$  qu'on peut envisager que ceux pour lesquels  $f_i > f_j$ .

b) si  $f_i$  ou  $f_j$  a pour argument x, il est inutile d'envisager la fonction  $U_x f_i f_j$  : celle-ci est en effet améliorable d'après la propriété 4.

c) soit  $f_k = U_x f_i f_j$  et  $g_k$  sa fonction associée. On posera

$$\underline{g_{xij}} = g_k$$

Si  $\varphi$  est la fonction à réaliser, on posera aussi

$$\underline{g_{xi\varphi}} = \text{fonction associée à } U_x f_i \varphi$$

$$\underline{g_{x\varphi j}} = \text{ " " " } U_x \varphi f_j$$

$g_{xij}$ ,  $g_{xi\varphi}$  et  $g_{x\varphi j}$  sont liées entre elles par la relation

$$(2) \quad \underline{g_{xij}} = g_{xi\varphi} \cdot g_{x\varphi j}$$

qui permet de calculer  $g_k$  à partir de  $g_i$  et  $g_j$ .

Démontrons (2).

En un point où  $\varphi=1$  :

$$g_{xi\varphi} = U_x f_i \varphi = x f_i + x'$$

$$g_{x\varphi j} = U_x \varphi f_j = x + x' f_j$$

$$\text{et} \quad g_{xi\varphi} \cdot g_{x\varphi j} = x f_i + x' f_j$$

$$\text{Or,} \quad g_{xij} = U_x f_i f_j \text{ par définition,}$$

donc (2) est bien vérifiée ;

en un point où  $\varphi=0$  :

$$g_{xi\varphi} = U_x f'_i \varphi' = x f'_i + x'$$

$$g_{x\varphi j} = U_x \varphi' f'_j = x + x' f'_j$$

$$\text{et} \quad g_{xi\varphi} \cdot g_{x\varphi j} = x f'_i + x' f'_j$$

$$\text{Or,} \quad g_{xij} = U_x f'_i f'_j \text{ par définition,}$$

donc (2) est bien vérifiée.

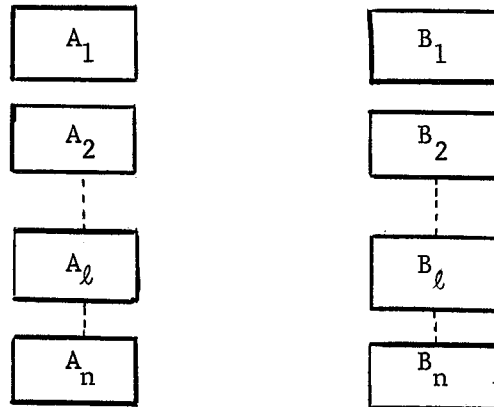
Conséquence :

- si  $g_{x_i \varphi}$  est inférieure ou égale à une colonne du tableau d'élimination, toutes les fonctions  $g_{x_{ij}}$  ( $j$  quelconque) le seront aussi, il est donc inutile de les essayer.

- si de même  $g_{x_{\varphi j}}$  est inférieure à une colonne de ce tableau, il est inutile d'essayer les fonctions  $g_{x_{ij}}$  ( $j$  quelconque).

Méthode :

En plus du tableau principal et du tableau d'élimination, que nous nommerons respectivement  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}_E$ , nous prévoirons  $2n$  tableaux ( $n$  étant le nombre de variables) disposés de la façon suivante :



et que nous ferons progresser, pour chaque valeur de  $k$ , après détermination de toutes les fonctions non améliorables de coût  $k$ , de la manière suivante : soit  $f_i$  une fonction non améliorable de coût  $k$ , on calculera, pour  $\ell=1, \dots, n$  et tel que  $x_\ell$  ne soit pas un argument de  $f_i$  :

- d'une part  $g_{x_\ell}^{i \varphi}$  qu'on placera dans  $A_\ell$
- d'autre part  $g_{x_\ell}^{\varphi i}$  " " "  $B_\ell$



Nous appellerons  $A_\ell^{(k)}$  et  $B_\ell^{(k)}$  l'ensemble des colonnes que nous venons de créer, respectivement dans  $A_\ell$  et  $B_\ell$ .

Tenant compte de b), on rayera de l'ensemble  $A_\ell^{(k)}$  les colonnes qui sont inférieures à une autre de ce même ensemble, et si plusieurs d'entre elles sont égales on les rayera toutes sauf une.

On fera de même pour  $B_\ell^{(k)}$ , et ceci quel que soit  $\ell$ .

La comparaison de ces colonnes avec  $\mathcal{C}_E$  se fera au fur et à mesure de leur utilisation : en effet le calcul de toute fonction  $f_i$  à n'importe quel stade se ramène au produit de deux colonnes non rayées d'un couple  $(A_\ell, B_\ell)$  et appartenant l'une à  $A_\ell$ , l'autre à  $B_\ell$  ; avant de faire le calcul on s'assure que la colonne de  $A_\ell$  choisie n'est inférieure à aucune colonne de  $\mathcal{C}_E$  ; sinon on la raye, et de même pour  $B_\ell$ .

#### Organigramme :

Dans l'organigramme résumant cette méthode, nous emploierons les notations suivantes :

$x_\ell$  ( $\ell=1, \dots, n$ ) : noms des variables

$K$  : ensemble des variables par rapport auxquelles  $\varphi$  est croissante

$\mathcal{C}_p^{(k)}$   $p^e$  fonction non améliorable de coût  $k$

$\mathcal{C}_E$  : tableau d'élimination

$p_{\max}^{(k)}$  : nombre des fonctions de coût  $k$  non améliorables

$\chi(f_i)$  : ensemble des arguments de  $f_i$

$A_\ell^{(k)}_s$  :  $s^{i\text{ème}}$  colonne de  $A_\ell^{(k)}$

$B_\ell^{(k)}_t$  :  $t^{i\text{ème}}$  colonne de  $B_\ell^{(k)}$

L'organigramme est décrit dans les annexes 1-2-3.

Exemples :

Dans l'annexe 4 se trouve traitée d'après l'organigramme la fonction

$$\varphi = x_1 + x_2 + x_3 x_4 ;$$

afin de simplifier les calculs nous n'avons gardé que les lignes correspondant aux points caractéristiques, bien qu'en théorie on ne puisse le faire que pour un opérateur croissant. On constate qu'on obtient tout de même le résultat optimal. Il en est de même pour la fonction

$$\varphi = a b c d + a b c d' + a b c' d + a' b c d + a' b' c d'$$

(croissante par rapport à c ; 11 points caractéristiques) qui a déjà servi d'exemple aux deux méthodes "par le haut" ; la méthode "par le bas" réalisée d'après l'organigramme conduit à écrire 617 fonctions (pour  $\mathcal{C}$  uniquement) réparties de la manière suivante :

coût	Nombre de fonctions à calculer	Nombre de ces fonctions non améliorables
0	2	2
1	7	7
2	57	21
3	143	35
4	202	43
5	146	31
6	52	15
7	7	5
8	1	1

Précisons que l'adjonction des tableaux  $G_E, A_\ell, B_\ell$  réduit sur cet exemple de 1/3 le nombre de fonctions à calculer.

Il n'en reste pas moins que cette méthode s'avère beaucoup plus coûteuse que la méthode algébrique, et ne peut présenter d'intérêt que s'il s'agit de traiter une fonction incomplète.

### B - Réseau Général.

Pour réaliser une synthèse optimale d'une fonction par un réseau U avec réutilisation possible des états intermédiaires nous ne disposons pas comme dans le cas arborescent de méthodes "par le haut" ; la méthode de synthèse "par le bas" que nous allons exposer est la seule dont nous disposions en dehors des cas particuliers résolus par le lemme II-1 et le théorème V-1.

Le principe de la méthode exposée à la fin du paragraphe précédent restant valable pour un réseau général, la partie "application aux réseaux arborescents" doit être modifiée comme suit :

Supposons qu'un réseau R formé d'opérateurs croissants, ou d'opérateurs U, et réalisant à sa sortie une fonction  $\varphi(X)$  contienne un sous-réseau  $R_i$  de coût  $c_i$  et avec des sorties  $f_{i_1}, f_{i_2}, \dots, f_{i_p}$ , tel qu'il existe un réseau  $\tilde{R}_i$  de coût  $\tilde{c}_i$  et avec des sorties  $f_{j_1}, f_{j_2}, \dots, f_{j_q}$ , réalisant les conditions suivantes :

- d'une part à toute  $f_{i_\alpha}$  ( $\alpha=1, \dots, p$ ) on peut faire correspondre une fonction  $f_{j_\beta}$  ( $\beta=1, \dots, q$ ) vérifiant avec  $f_{i_\alpha}$  la relation (1) dans laquelle

$$f_i = f_{i_\alpha} \text{ et } \tilde{f}_i = f_{j_\beta}$$

- d'autre part  $\tilde{c}_i < c_i$ , ou  $\tilde{c}_i = c_i$  et il existe au moins une  $f_{i\alpha}$  telle qu'aucune  $f_{j\beta}$  ne lui soit égale en tous les points où  $\varphi(X) \neq \emptyset$  ;

alors, d'après le théorème IV-1, si dans R on remplace  $R_i$  par  $\tilde{R}_i$  - les  $f_{i\alpha}$  étant remplacées par les  $f_{j\beta}$  correspondantes - R sera changé en réseau  $\tilde{R}$  réalisant lui aussi  $\varphi(X)$ , et de coût inférieur ou égal à celui de R.

On dira que  $R_i$  est améliorable par rapport à  $\varphi$ . Il résulte de ceci qu'il existe un réseau optimal réalisant  $\varphi(X)$  et tel qu'aucun de ses sous-réseaux ne soit améliorable par rapport à cette fonction.

Sous-réseau anormal : c'est un sous-réseau pour lequel il existe une sortie  $f_i$  et une sortie  $\tilde{f}_i$  située en amont de  $f_i$  et vérifiant (1).

Un réseau de coût minimum ne peut être anormal, sinon on pourrait le remplacer par un réseau moins coûteux.

#### Méthode :

Pour obtenir un réseau minimal on procèdera de la manière suivante : supposons qu'on ait tous les sous-réseaux normaux et non améliorables de coût  $\leq k$ , soient :  $f_0, f_1, f_2, \dots, f_p$  ; on obtiendra tous ceux de coût  $k+1$  en cherchant tous les couples  $(f_i, f_j)$  ( $0 \leq i \leq p$ ) tels que le nombre total de sorties de noeuds en amont soit de  $f_i$  soit de  $f_j$  soit égal à  $k-2$  ; soit  $x_{ij}$  une variable : le réseau  $U_{x_{ij}} f_i f_j$  a pour coût  $k$  ; on ne placera cette fonction dans "le tableau principal" que si elle est normale (pour cela la comparer à toutes les sorties en amont d'elle) et non améliorable (pour cela la comparer à toutes les sorties  $f_i$  de coût inférieur ou égal à  $k$  du tableau principal, ainsi que ses sorties aux sorties de  $f_i$ ).

Remarquons que si deux réseaux ont les mêmes coûts et qu'à toute sortie de l'un il corresponde une sortie identique de l'autre ou pourra n'en garder qu'un, par exemple le premier qui a été calculé : on dira par extension que le second est "améliorable".

#### APPLICATION A L'OPERATEUR U

L'application de la méthode à l'opérateur U ne comporte pas de simplifications spéciales, contrairement à ce que nous avons dans le cas arborescent : on ne peut se servir ici ni d'un tableau d'élimination, ni des tableaux  $A_\ell$  et  $B_\ell$ . Enfin rien ne prouve que dans un réseau optimal réalisant  $\varphi$  les sorties de tous les noeuds sont croissantes par rapport aux mêmes variables que  $\varphi$ .

Pour un nombre de variables inférieur ou égal à 6 la propriété 4 des réseaux arborescents reste vraie pour un réseau général : on pourra donc éliminer tout réseau  $U_{x_\ell} f_i f_j$  tel que  $f_i$  ou  $f_j$  aient  $x_\ell$  pour argument. Pour  $n > 6$  on n'est plus assuré en utilisant cette simplification d'obtenir un réseau minimal (CF chap. II, § A)

#### Exemple :

L'application de cette méthode à la fonction  $f = a+b+cd$  donne le tableau de l'annexe 5 (les colonnes anormales sont marquées par la lettre A, les colonnes normales sont numérotées). Là encore nous n'avons gardé que les lignes correspondant aux points caractéristiques, bien qu'on ne soit pas assuré théoriquement d'obtenir une synthèse optimale.

#### CONCLUSION

Nous avons étudié en détail la méthode "par le bas" afin de montrer qu'elle pouvait aussi s'appliquer aux réseaux U. On peut d'ailleurs généraliser en disant qu'elle s'applique à n'importe quel opérateur

$f(x, y, \dots, Z, T, \dots)$

croissant par rapport à  $Z, T, \dots$  (fonctions pouvant être créées à partir de ce même opérateur) et où  $x, y, \dots$  sont des variables simples. Exemple :

$(x \otimes y) Z + xy T.$

### C - Programmation en Machine.

Nous concluerons cette étude en constatant que des trois méthodes exposées dans ce chapitre : méthode algébrique + règle de réduction, méthode géométrique + règle de réduction, méthode "par le bas", la première est la plus commode, aussi bien en calcul à la main qu'à la machine.

Nous avons réalisé pour la méthode algébrique un programme en langage machine (LSM BULL) basé sur le principe suivant :

Une fonction est représentée par une zone de mémoire comprenant plusieurs mots consécutifs contenant les renseignements suivants :

- adresse de la fonction "primitive" (CF plus loin)
- adresse du couple de fonctions "dérivées" ( $\varphi_i, \psi_i$ ) dont on a déjà calculé le coût minimum ( $= (\varphi_i) + C(\varphi_i)$ ) ; numéro du couple dérivé ayant le plus faible coût, et valeur de ce coût
- nombre d'arguments, et nombre de monômes de la forme canonique
- liste des arguments qu'on gardera comme variables de "dérivation" à envisager
- valeur de la fonction : celle-ci est écrite sous forme canonique, un monôme est représenté par une chaîne de digits égaux à 0 ou 1 suivant que la variable correspondante est complétement ou non, et les monômes sont juxtaposés. Ils sont lexicographiques et rangés par ordre d'affixes croissants (dans le but de pouvoir comparer plus facilement deux

fonctions).

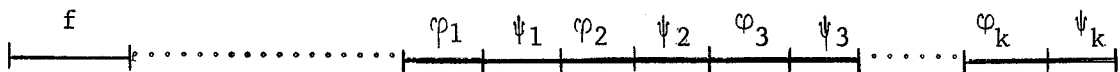
Le programme utilise un sous-programme "dérivation" d'une fonction qui opère de la façon suivante :

Ayant la fonction  $f(x_1, x_2, \dots, x_k)$ , on calcule les "dérivations" suivantes :

$$\begin{aligned} f &= U_{x_1} \varphi_1 \psi_1 \\ &= U_{x_2} \varphi_2 \psi_2 \\ &\dots\dots\dots \\ &= U_{x_k} \varphi_k \psi_k \end{aligned}$$

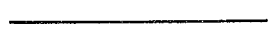
Un couple  $(\varphi_i, \psi_i)$  est appelé "couple dérivé" de  $f$  par rapport à  $x_i$ , et  $f$  est la "primitive" de  $\varphi_i$  et de  $\psi_i$ .

Les couples dérivés sont calculés à partir de la valeur de la fonction par décalages sur chacun des monômes. Ils sont rangés sur des zones juxtaposées à partir de la première adresse libre :



Le programme suit la méthode du paragraphe A - 1<sup>e</sup> - a.

Le coût de représentation des fonctions de 4 variables du tableau placé en annexe 6 a été obtenu par cette méthode et en appliquant ensuite la règle de réduction.



C O N C L U S I O N

Le présent travail a consisté à énoncer certaines propriétés des réseaux utilisant l'opérateur U et a montré qu'il existait une méthode simple pour trouver une réalisation proche de l'optimum d'une fonction quelconque. Il reste à voir quel est l'avantage que l'on peut tirer de U comparé à d'autres opérateurs.

- Par rapport au groupe d'opérateurs somme-produit-complément U présente l'avantage de l'homogénéité, donc d'une plus grande simplicité au point de vue schéma. Le nombre d'opérateurs est du même ordre.

- Il est intéressant de comparer U à un autre opérateur universel tel que NI. On considérera dans ce qui va suivre l'opérateur NI à un nombre d'entrées quelconques (le monôme  $x'y'...t'$  est réalisé par un seul opérateur NI)

Il semble que pour la grande majorité des fonctions l'opérateur U donne des réseaux moins coûteux que NI ; ainsi sur 80 fonctions de 4 variables appartenant à 40 types différents nous avons trouvé un coût minimum de réalisation égal à

5,62	en moyenne	pour U
7,86	"	pour NI

On peut d'ailleurs obtenir deux évaluations assez significatives des coûts de synthèse respectifs en opérateurs U et NI d'une fonction. Ce sont :



- Pour U, le coût en lettres de l'expression en somme-produit-complément la moins coûteuse qu'on ait pu trouver (Théorème II-2) ;

- Pour NI, l'expression suivante :

Nombre de monômes d'une base première + nombre de variables non décroissantes + 2.

En effet :

- une somme  $A + B + \dots + C$  peut être réalisée à partir de  $A, B, \dots, C$  par 2 opérateurs NI ;

- un monôme  $x' y' \dots t'$  peut être réalisé par un opérateur NI ;

- à partir de  $x$  on obtient  $x'$  par un opérateur NI.

Pour  $n = 4$  variables cette estimation semble donner pour la majorité des fonctions le coût minimum ; nous supposons dans le raisonnement qui va suivre qu'elle reste bonne pour  $n > 4$ .

Le nombre de variables étant fixé, la synthèse par NI d'une fonction est d'autant plus coûteuse que le nombre de monômes d'une base première de la fonction est grand ; pour U au contraire, si le nombre de monômes augmente le nombre de mises en facteur possible augmente lui aussi et le coût résultant d'une expression minimale en somme-produit-complément augmente peu.

On peut conclure de ceci que l'opérateur U, comparé à NI, est d'autant plus intéressant que le nombre de monômes d'une base première de la fonction est important.

Dans l'annexe 6 sont comparés les coûts de réalisation de certaines fonctions de 4 variables par un réseau U et par un réseau d'opérateurs NI. Les fonctions choisies appartiennent à des types différents, elles sont connexes<sup>1</sup> et ont huit points représentatifs au plus. L'ordre choisi pour l'écriture de ces fonctions est le suivant : étant données deux fonctions, on compare les affixes (avec l'ordre x,y,z,t) d'un point représentatif de l'une et d'un point représentatif de l'autre en procédant par valeurs croissantes de ces affixes, jusqu'à ce qu'on trouve deux nombres différents : la fonction auquel appartient le plus petit est écrite avant l'autre. Ce même procédé a été utilisé pour choisir la fonction représentative d'un type de fonction donné : nous avons pris celle dont les affixes ont les plus petites valeurs.

Le coût minimum de synthèse par un réseau U est commun à toutes les fonctions d'un même type ; il n'en est pas de même pour NI, aussi avons-nous calculé deux coûts ; d'une part celui de la fonction écrite  $f(X)$ , d'autre part celui de  $f(X')$ .

Le coût de synthèse par U a été calculé par la méthode algébrique suivie de la règle de réduction ; celui de la synthèse par NI a été obtenu par la borne inférieure définie plus haut, et pour certaines fonctions grâce à une expression simple permettant d'améliorer cette estimation. Le nombre inscrit n'est pas forcément le coût minimum, mais on peut penser qu'en moyenne l'estimation est assez proche de la réalité.

Les moyennes calculées pour un nombre de monômes donné de la base première ont les valeurs suivantes :

---

1 le choix de telles fonctions a été fait dans l'intention de voir ce qu'on pouvait dire de leur ordre lexicographique local optimal ; or il ne semble pas qu'on puisse formuler de règle précise.

nombre de monômes	moyenne pour U	moyenne pour NI	moyenne pour U moyenne pour NI
1	4	3	0,75
2	4	4,33	1,08
3	5,31	7,31	1,37
4	6,22	9,08	1,46
5	6,0	10,0	1,66

Remarques au sujet de la synthèse par U

- En considérant certaines fonctions réduites de la fonction donnée on peut obtenir une borne inférieure de son coût de synthèse par U (CF exemples du chap. III) ; par ce procédé on peut démontrer pour la plupart des fonctions de l'annexe 6 que le coût trouvé est bien le coût minimum.

- La fonction marquée du signe \* a en fait un coût minimum égal à 7 et on ne peut obtenir celui-ci qu'en passant par un réseau arborescent non optimal (CF aussi chap. II, A, Ex. n° 2).

- Si dans la réalité on suppose qu'une variable simple a pour coût 0, il convient de retrancher du coût de synthèse trouvé le nombre de noeuds de première couche dont la fonction de sortie est une variable simple sous forme directe.

A l'issu de cette étude, deux problèmes en particulier restent à résoudre :

- La recherche d'une réalisation technologique simple de  $U$ , qui justifierait son emploi ;

- La recherche d'une méthode de synthèse raisonnable par l'opérateur  $U_1 (X, Y, Z)$  à trois entrées quelconques, et l'estimation du gain qu'il permettrait d'obtenir par rapport à  $U$ .

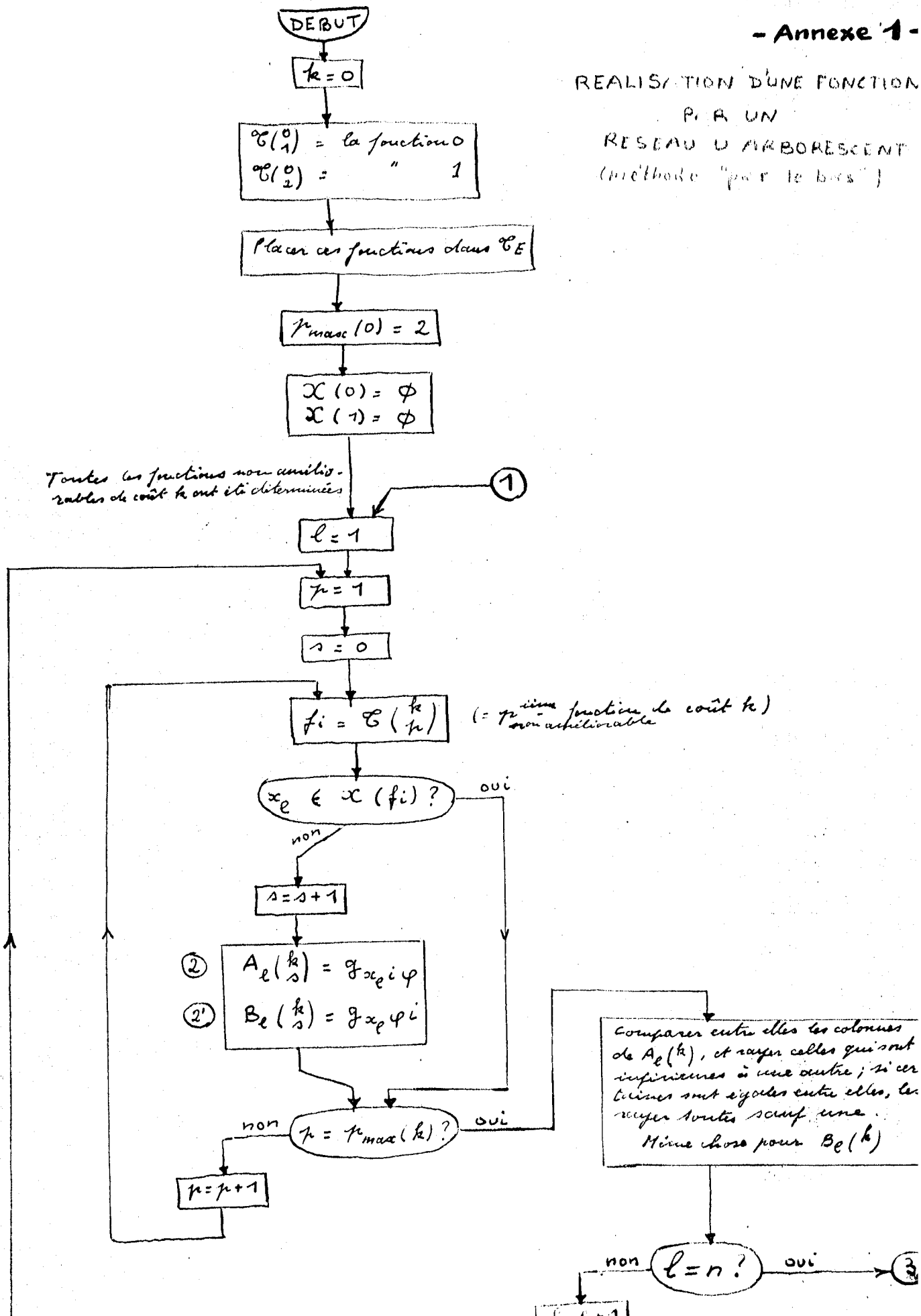
---



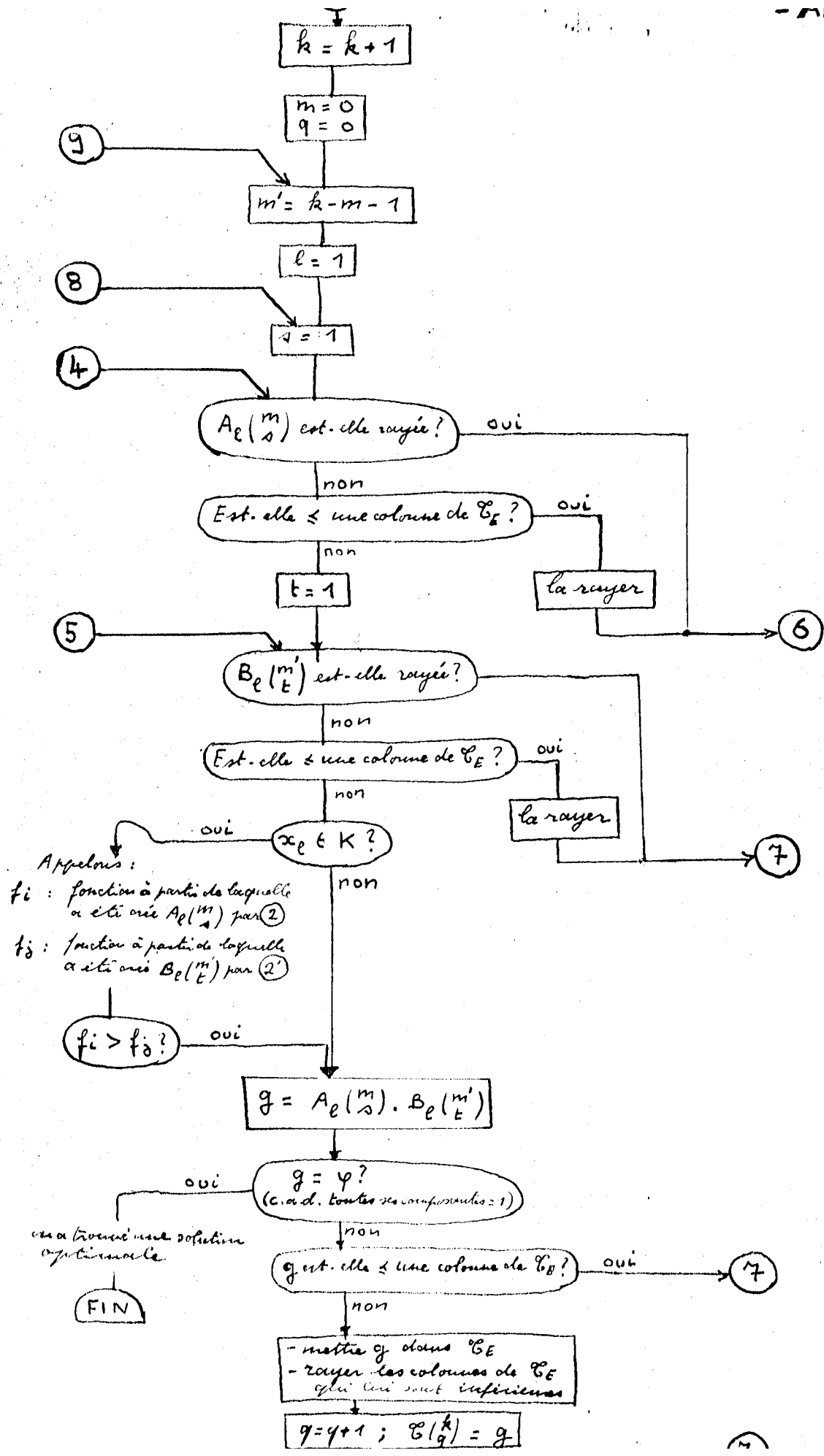
<u>INTRODUCTION.</u> DEFINITION ET APPLICATIONS DES RESEAUX U.....	1
BIBLIOGRAPHIE.....	8
<u>CHAPITRE I.</u> RESEAUX U ARBORESCENTS	
A Propriétés Fondamentales.....	9
B Forme p.l.l. de sortie d'un réseau U arborescent.....	13
C Recherche d'un ordre lexicographique local optimal.....	17
D Borne supérieure du coût arborescent optimal.....	28
<u>CHAPITRE II.</u> RESEAUX U QUELCONQUES. RECHERCHE D'UNE SYNTHESE DE COUT RAISONNABLE.	
A Passage par un réseau arborescent.....	32
B Passage par une expression en somme-produit-complément	
B <sub>1</sub> Généralités.....	43
B <sub>2</sub> Obtention d'une borne supérieure du coût.....	46
B <sub>3</sub> Recherche d'une méthode conduisant à des solutions moins coûteuses que A.....	51
<u>CHAPITRE III.</u> ROLE DE LA DECOMPOSITION :	
1° Dans la synthèse d'une fonction par un réseau U.....	66
2° " " " " " U <sub>1</sub> .....	77
<u>CHAPITRE IV.</u> CHOIX D'UNE METHODE PRATIQUE DE SYNTHESE	
A Détermination d'un réseau arborescent optimal	
1° Méthodes de synthèses "par le haut".....	80
2° Méthode de Synthèse "par le bas".....	88
B Réseau général.....	97
C Programmation en machine.....	100
<u>CONCLUSION</u> .....	102
<u>ANNEXES</u> : .....	1 à 6

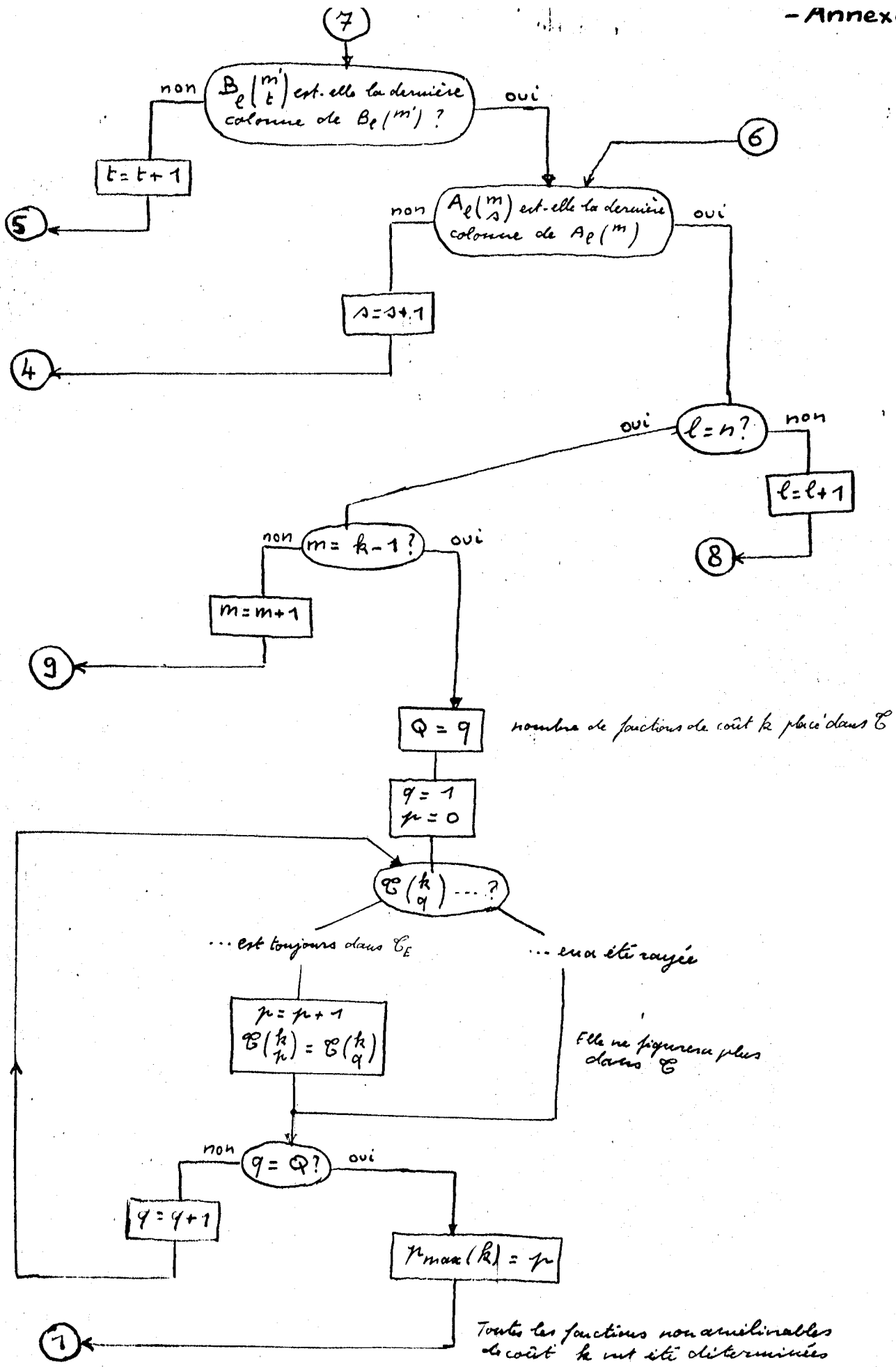


REALISATION D'UNE FONCTION  
P. A. UN  
RESEAU U ARBORESCENT  
(méthode "par le bas")









Optimisation de  $f = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$   
 par un réseau arborescent. Méthode "par le bas".

$\mathcal{C}$

$k=0$	$k=1$				$k=2$					$k=3$			$k=4$	
	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_1(1,3)$	$x_1(1,4)$	$x_1(1,5)$	$x_2(1,3)$	$x_2(1,4)$	$x_2(1,5)$	$x_3(1,3)$	$x_3(1,4)$	$x_3(1,5)$	$x_4(1,5)$
0 1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0 1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	1
0 1	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	1	0	0	1
1 0	1	1	1	0	1	1	0	1	1	0	0	1	1	1
1 0	1	1	0	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1
0 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

Note - Toutes les fonctions calculées ont été marquées dans  $\mathcal{C}$

$\mathcal{C}_E$

0	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1	1
1	0	1	1	0	1	1	0	1	0	1	1	1

$A_1$

$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$
0 1	3 4 5	9 10 11	15
0	1	0	0
0	0	0	0
1	0	0	0

$B_1$

$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$
0 1	3 4 5	9 10 11	15
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	1	1
1	0	1	0

$A_2$

$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$
0 1	2 4 5	7 8 11 14	
0	1	0	0
0	0	0	0
1	0	0	0

$B_2$

$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$
0 1	2 4 5	7 8 11 14	
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	1	1
1	0	1	0

$A_3$

$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$
0 1	2 3 5	6 8 10 13	
0	1	0	1
0	0	1	1
1	0	1	1
1	0	1	1

$B_3$

$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$
0 1	2 3 5	6 8 10 13	
0	1	0	1
0	1	0	0
1	0	1	0
1	0	1	0

$A_4$

$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$
0 1	2 3 4	6 7 9 12	
0	1	0	1
0	0	1	1
1	0	1	1
1	0	1	1

$B_4$

$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$
0 1	2 3 4	6 7 9 12	
0	1	0	1
0	1	0	1
1	0	1	0
1	0	1	0



# COUTS DE SYNTHÈSE DE FONCTIONS BOOLEENNES PAR LES OPERATEURS U ET NI

(CF Conclusion)

BASE PREMIERE	U	NI
$x'y'z't'$	4	1 - 5
$x'y'z' + x'y't'$	4	4 - 4
$x'y't' + x'z't' + y'z't'$	5	5 - 5
$x'z't' + x'y't'$	4	5 - 5
$x'y't' + z't'$	4	4 - 4
$x'y't' + x'z't' + y'z't'$	6	5 - 5
$x'y't' + x'z't' + y'z't'$	5	6 - 9
$x'y't' + x'z't' + x'z't'$	5	7 - 9
$x'y't' + x'z't' + y'z't'$	5	7 - 9
$x'y't' + x'z't' + x'z't'$	5	7 - 7
$x'y't' + x'z't' + y'z't'$	5	5 - 9
$x'y't' + x'z't' + y'z't'$	5	6 - 9
$x'y't' + x'z't' + y'z't'$	6	7 - 9
$x'y't' + x'z't' + y'z't'$	5	6 - 9
$x'y't' + x'z't' + x'y't' + y'z't'$	6	8 - 10
$x'y't' + x'z't' + x'z't'$	6	8 - 9
$x'y't' + x'z't' + x'z't' + y'z't'$	6	9 - 10
$x'y't' + x'z't' + y'z't' + y'z't'$	7	9 - 10
$x'y't' + x'z't' + x't' + y'z't'$	6	6 - 9
$x'y't' + x'z't' + x't' + y'z't'$	6	7 - 8
$x'y't' + x'z't' + x't' + y'z't'$	6	8 - 7
$x'y't' + x'z't' + y't'$	4	5 - 8
$x'y't' + x'z't' + y'z't' + y'z't'$	6	8 - 10
$x'y't' + x'z't' + y'z't' + y'z't'$	6	8 - 10
$x'y't' + x'z't' + y'z't' + y'z't'$	7	9 - 10
$x'y't' + x'z't' + x'z't' + y'z't'$	5	7 - 7
$x'y't' + x'z't' + x'z't' + y'z't' + y'z't'$	6	9 - 11
$x'y't' + x'z't' + z't'$	6	7 - 9
$x'y't' + x'z't' + y'z't' + y'z't'$	8	9 - 10
$x'y't' + x'z't' + y'z't' + y'z't'$	5	8 - 10
$x'y't' + x'z't' + y'z't' + y'z't'$	7	9 - 10
$x'y't' + x'z't' + x'z't' + x'z't'$	6	9 - 10
$x'y't' + x'z't' + x'y'z' + y'z't'$	6	10 - 10
$x'y't' + y'z't' + y'z't'$	5	8 - 9
$x'y't' + x'z't' + y'z't'$	6	8 - 9
$x'y't' + x'y'z' + y'z't' + y'z't'$	6	9 - 10
$x'y't' + x'y'z' + y'z't' + y'z't'$	6	10 - 10
$x'y't' + x'y'z' + y'z't' + y'z't'$	6	70 - 10
$x'y't' + x'y'z' + y'z't' + y'z't'$	6	8 - 10
$x'y't' + x'y'z' + y'z't' + y'z't'$	5	8 - 9

## ERRATA

CHAPITRE I, THEOREME I-1 : l'énoncé et la démonstration donnés p21 se limitent au cas arborescent ; il aurait été préférable de donner l'énoncé suivant, valable dans le cas général :

Si une fonction non égale à une constante est de la forme

$$f = x Y + x' Z,$$

Y et Z étant deux fonctions ne dépendant d'aucun argument commun (en particulier Y peut être égal à 0 ou 1, ainsi que Z), une synthèse optimale de f est

$$U_x (R_Y, R_Z)$$

où  $R_Y$  et  $R_Z$  sont des synthèses optimales de Y et Z.

[ La démonstration s'appuie sur le même principe que celle du lemme II-1 (p46) : il suffit de partir d'un réseau quelconque et de montrer que le nombre d'opérateurs  $U_y$  (y étant un argument de Y) de ce réseau est au moins égal au coût de  $R_Y$ , et de même pour Z].

Les mentions faites du théorème I-1 aus débuts des chapitres II et III concernent en fait ce dernier énoncé.

p 12 , 14e ligne, lire : "la même fonction de sortie...."

CHAPITRE II , p. 43 2<sup>e</sup> ligne lire : "de même si une fonction de 4 variables..."

CHAPITRE III, p. 76 10<sup>e</sup> ligne, lire : "on remarque que le réseau de la figure 7 ne diffère du réseau...."

CHAPITRE IV, p. 79, 4<sup>e</sup> ligne, lire : "aussi serons-nous amenés...."

p. 98, 4<sup>e</sup> ligne, lire : "R sera changé en un réseau  $\tilde{R}$ ...."



VU

Grenoble, le

*Le Président de la Thèse*

VU

Grenoble, le

*Le Doyen de la Faculté des Sciences*

VU, et permis d'imprimer,

*Le Recteur de l'Académie de GRENOBLE*