HAL
open science

Aide à la conception des microsystèmes

Jérôme Juillard

To cite this version:

Jérôme Juillard. Aide à la conception des microsystèmes. Automatique / Robotique. Université Paris Sud - Paris XI, 2007. tel-00280542

HAL Id: tel-00280542

https://theses.hal.science/tel-00280542v1

Submitted on 23 May 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Mémoire présenté pour obtenir l'Habilitation à Diriger des Recherches

par

Jérôme Juillard

Aide à la conception des microsystèmes

Synthèse des recherches

Professor Jones had been working on time theory for many years.
"And I have found the key equation," he told his daughter one day. "Time is a field. This machine I have made can manipulate, even reverse, that field."
Pushing a button as he spoke, he said, "This should make time run backward backward run time make should this," said he, spoke he as button a pushing.
"Field that, reverse even, manipulate can made have I machine this. Field is a time." Day one daughter his told he, "Equation key the found have I and."
Years many for theory time on working been had Jones Professor.

« The End », Fredric Brown, 1961

Table des matières

Introduction 1
I. Contexte 5
1) Rappel historique 5
2) Physique des MEMS 6
a) Phénomènes de flexion 6
b) Amortissement visqueux 8
c) Actionnement électrostatique 9
3) Conclusion 11
II. Simulation des phénomènes couplés non-linéaires 13
1) Un exemple de couplage faible. Calcul du champ acoustique émis par un EMAT. 14
a) Contexte 14
b) Modélisation de la génération d'ultrasons par des ondes électromagnétiques 15
2) Un exemple de couplage fort. Commande d'une microstructure souple à actionnement électrostatique. 19
a) Contexte 19
b) Approche inverse de la commande de microstructures déformables 20
c) Exemple : commande électrostatique d'un micromiroir 22
d) Implémentation et validation numérique 26
3) Prise en compte des non-linéarités dans les modèles d'ordre réduit de composants MEMS 26
a) Contexte 26
b) Modélisation d'ordre réduit d'une plaque circulaire en grands déplacements 27
4) Conclusion 30
III. Prise en compte des non-linéarités et des incertitudes dans les architectures de microsystèmes 33
1) Actionnement par impulsions de microstructures oscillantes 35
a) MEMS résonants et actionnement par impulsions 35
b) Actionnement par impulsions en temps discret 38
2) Propriétés des systèmes mixtes bouclés à comparateur 40
a) Détermination des cycles limites des systèmes mixtes résonants 40
b) Détermination de la résolution des systèmes mixtes à comparateur et propriétés asymptotiques 44
c) Régimes non-périodiques 47
3) Méthodes d'identification à partir de données binaires 49
a) Méthode MCLF 51
b) Méthode MCLC 52
c) Méthode BIMBO 54
4) Conclusion 58
IV. Perspectives 59
1) Modélisation physique, couplage et réduction d'ordre de modèle 59
2) Traitement des incertitudes en simulation 59
3) Systèmes oscillants 60
4) Identification à partir de données binaires 61
V. Références 63

Introduction

La simulation et la modélisation ont toujours tenu une place importante dans mon travail. De plus, que ce soit à Supélec ou durant ma thèse au CEA, la conception de capteurs et d'actionneurs a été la motivation plus ou moins directe de mes recherches. L'objectif de ma thèse était la conception et l'implémentation d'un code de calcul permettant la simulation et l'optimisation de capteurs EMAT (Electro-Magnetic Acoustic Transducers). La structure qui m'accueillait avait pour vocation le développement de méthodes de contrôle non-destructif innovantes, à base d'ultrasons ou de courants de Foucault, dans des cas précis : contrôle des circuits primaires ou secondaires de générateurs de vapeur, contrôle en sodium liquide, etc. A Supélec, mon objectif est de répondre par des méthodes adaptées et innovantes à des problématiques générales soulevées dans un contexte technologique particulier : dans mon cas, les MEMS (Micro-Electro-Mechanical Systems). La plupart de mes collègues partagent cet objectif ; ce qui nous différencie est essentiellement le contexte dans lequel chacun de nous évolue (conversion analogique-numérique, mathématiques financières,…). Ainsi, un socle commun de connaissances assure au département sa cohérence et le domaine d'application de chacun en garantit la diversité.

La modélisation et la simulation d'EMAT et de MEMS présentent des similitudes (comme le couplage entre phénomènes physiques), mais également des différences notables. Le fonctionnement des capteurs EMAT est régi par des équations aux dérivées partielles (EDP) linéaires. Ces EDP sont faiblement couplées, leurs coefficients sont connus et les hypothèses faites pour les obtenir sont valables. En conséquence, la modélisation de ce genre de capteur est fiable et de coût relativement modéré : il n'est pas rare d'avoir une bonne adéquation (erreurs relatives inférieures à 1%) entre modèle et expérience. En revanche, il apparaît, en parcourant la littérature ou en s'entretenant avec des professionnels du milieu - industriels ou chercheurs - que ceci est rarement le cas dans le contexte des MEMS. Il y a à cela plusieurs raisons :

- *Les phénomènes physiques sont fortement couplés et, en général, non-linéaires*. Les modèles qui en résultent sont donc lourds à mettre en œuvre, délicats à manipuler, et leurs résultats sont parfois sujets à caution.
- *Les phénomènes physiques ne sont pas correctement modélisés*. Les approximations faites pour simplifier les EDP constituant un modèle de MEMS sont plus souvent motivées par les économies de temps de calcul qu'elles entraînent que par une véritable rigueur physique.
- *Les valeurs des paramètres des modèles de MEMS ne sont pas connues*. Des dispersions importantes des propriétés mécaniques sont en effet observées entre différents MEMS issus d'une même tranche de silicium. Ceci se traduit par des valeurs aléatoires de contraintes résiduelles, des épaisseurs de dépôt variables, etc. Par ailleurs, les MEMS sont extrêmement sensibles aux variations dans leurs conditions d'opération (température, pression) : celles-ci jouent directement sur les propriétés physiques des matériaux et affectent donc les paramètres des modèles. Enfin, il n'est pas rare que certaines grandeurs physiques nécessaires à l'établissement d'un modèle soient inconnues.

- Les couplages entre simulateurs électriques et simulateurs physiques (ou d'EDP) sont pénibles à mettre en œuvre. La méthode couramment employée pour résoudre ce problème est de réduire le système d'EDP régissant le fonctionnement de la partie physique du MEMS à un faible nombre d'équations différentielles ordinaires (EDO) qui en donne une approximation de bonne qualité, ce qui est parfois une gageure.
- L'univers des MEMS est caractérisé par des facteurs d'aspect très importants, que les simulateurs physiques ont souvent du mal à prendre en compte : la méthode des

éléments finis, qui est couramment employée dans le domaine des MEMS, n'est pas nécessairement adaptée à ce genre de géométrie.

Ceci explique qu'on considère parfois qu'un modèle de MEMS donne un bon résultat lorsque celui-ci est *qualitativement* proche des résultats expérimentaux. La qualité du résultat n'est cependant pas le seul critère de mérite d'un modèle de MEMS : le temps de calcul est également important; celui-ci doit en effet rester aussi faible que possible, notamment pour permettre l'optimisation automatique de systèmes incluant des MEMS. *Un bon modèle assure donc un compromis entre validité du résultat et temps de calcul*. Du fait de l'absence d'un modèle pratique et fiable, le développement de nouvelles applications MEMS est, de nos jours, une démarche essentiellement expérimentale.

En raison de ces difficultés, il est courant de ne garder d'un modèle de MEMS que sa structure et quelques ordres de grandeur. Ce squelette de modèle a néanmoins son utilité : dans les systèmes avancés intégrant des boucles de réaction (re-)programmables, il sert de base au dimensionnement d'asservissements fiables. Ceci peut avoir lieu au début de la vie du capteur ou bien tout au long de celle-ci, à condition qu'une fonctionnalité d'auto-calibrage ait été incluse au capteur. Au vu des variations importantes que peuvent subir les paramètres d'un modèle de MEMS en fonction de ses conditions d'opération, c'est de loin cette dernière solution qui est préférable. Cependant, en raison des contraintes d'intégration de l'électronique, cette fonctionnalité d'autocalibrage n'est que rarement implémentée.

Mes travaux ont pour but le développement de nouvelles méthodes de modélisation et de conception de capteurs MEMS, qui répondent aux problèmes soulevés ci-dessus par des moyens *adaptés*. Il est important d'insister sur ce dernier aspect : ainsi, il existe plusieurs méthodes permettant de traiter les incertitudes, en modélisation ou dans un cadre expérimental, dans un contexte classique. Par exemple, le modélisateur a en général recours à des méthodes de Monte-Carlo ou de perturbation pour quantifier l'impact des incertitudes sur les résultats de son modèle. Mais dans un contexte de MEMS, les méthodes de Monte-Carlo, qui nécessitent un nombre de tirages et de simulations important, ne sont pas pratiques, du fait de la lourdeur des calculs à mettre en œuvre. Quant aux méthodes de perturbation, elles n'ont de validité que lorsque les incertitudes sont faibles, ce qui est rarement le cas pour les applications MEMS. D'un point de vue plus pratique, il est possible de déterminer les caractéristiques d'un capteur ou d'un actionneur au moyen de méthodes de calibrage. Cependant, les techniques d'identification développées dans un contexte macroscopique ne s'appliquent pas facilement à l'univers des MEMS, du fait des contraintes imposées par la micro-électronique : surface de silicium minimale, coût de la réalisation de convertisseurs analogique-numérique (CAN) de haute résolution, nécessité de réaliser les mesures à proximité du capteur, etc. L'impossibilité de transposer directement des méthodes macroscopiques à un contexte MEMS motive donc une grande partie de mon travail.

Le présent texte a pour objectif d'exposer mes contributions principales aux domaines de la modélisation, de la simulation et de l'aide à la conception des MEMS. Il s'articule comme suit :

- Au premier chapitre, un panorama du domaine des MEMS et de leur physique est ébauché. Les difficultés dont il a été question plus haut y sont mises en relief.
- Le deuxième chapitre porte sur le traitement du couplage entre phénomènes physiques, dans un contexte de modélisation. Mes travaux de thèse y sont présentés. Ce chapitre aborde aussi le thème de la non-linéarité, inhérente à la physique des MEMS, dont le traitement, en simulation, s'apparente à celui du couplage.
- Le troisième chapitre montre comment les incertitudes et non-linéarités intrinsèques aux MEMS et les contraintes de la micro-électronique imposent le choix de certaines architectures de microsystèmes. Les méthodes d'identification à partir de données

binaires, mises au point dans le cadre de la thèse d'Eric Colinet, ainsi que plusieurs méthodes d'analyse des systèmes mixtes à comparateurs y sont développés.

- Enfin, au quatrième chapitre, je donne quelques pistes de développement de ces travaux.

I. Contexte

1) Rappel historique

Le terme MEMS est né à la fin des années 80 [Maluf00] : il est utilisé pour désigner tout ensemble de capteurs, structures, actionneurs – généralement de petite taille – dont la réalisation a été rendue possible par l'utilisation de techniques de micro-usinage [Madou02]. Ainsi les techniques de fabrication des circuits intégrés sont utilisées pour interfacer des éléments mécaniques à des circuits électroniques. Les éléments mécaniques peuvent varier, allant de la simple poutre ou membrane (fig. 1) à des assemblages plus complexes (fig. 2) [Kovacs98].

La technologie MEMS présente plusieurs intérêts :

- les MEMS sont, évidemment, plus petits et plus légers que leurs équivalents macroscopiques,
- les capteurs et actionneurs MEMS peuvent être intégrés à leur électronique de contrôle et de traitement,
- en conséquence de ce dernier point, les MEMS peuvent être réalisés en série, à faible coût, sur des tranches de silicium, tout comme les circuits intégrés classiques.

Leurs applications sont extrêmement diverses. On peut citer, par exemple, les capteurs inertiels [Yazdi98], micro-accéléromètres [Boser96, Kraft97, Sung03] ou microgyroscopes [Ayazi98, Jiang00, Lee00, Yang02], les applications optiques - micromiroirs déformables ou non [Van Kessel97, Vdovin97, Bifano99] -, fluidiques – micropompes [Laser04], micromixeurs [Nguyen05] – ou radiofréquence – capacités variables [Goldsmith99, Zhixiong03], résonateurs HF [Nguyen99, Clark00, Galayko03], micro-interrupteurs [Randall96, Yao99, Park00].

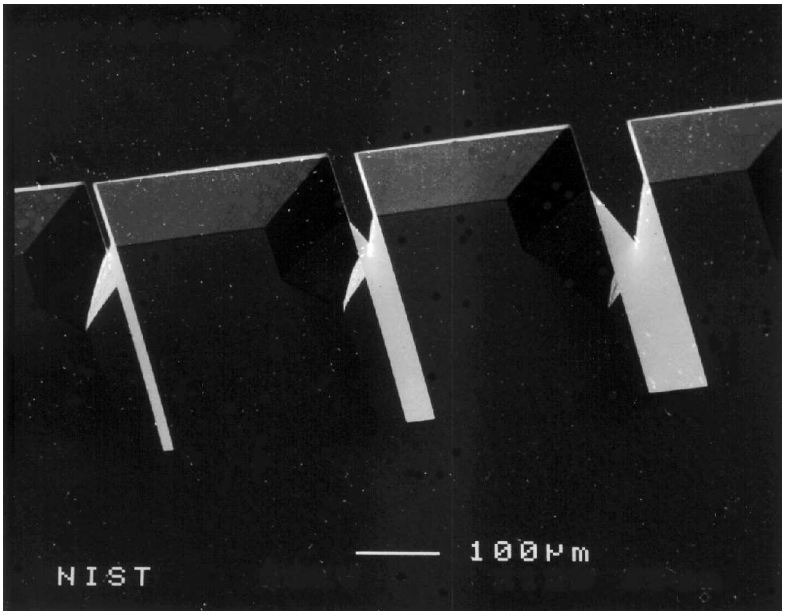

Fig.1 - Trois poutres « cantilever » fabriquées à l'Electronics and Electrical Engineering Laboratory du National Institute of Standards and Technology (NIST). Ce type de structure se retrouve « partout » : microbalances, micro-interrupteurs, pointes d'AFM…

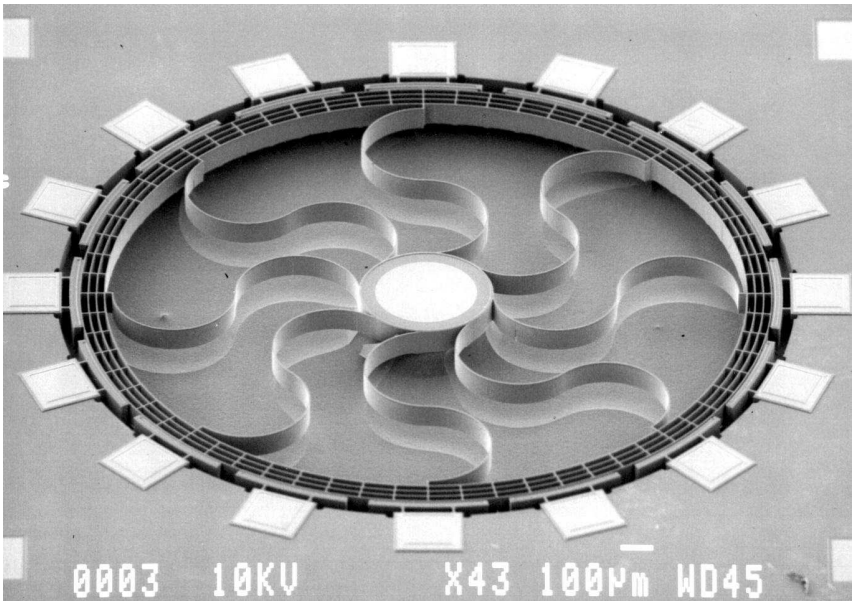

Fig.2 - Microgyroscope résonant développé à l'Electrical and Computer Engineering School du Georgia Institute of Technology. En fait de « micro », cette structure fait plus d'un millimètre de diamètre.

2) Physique des MEMS

La conception des MEMS est rendue délicate par la prépondérance de phénomènes physiques négligeables à l'échelle macroscopique. En particulier, du fait du changement d'échelle, les phénomènes surfaciques (par exemple, les frottements) deviennent dominants. Ainsi, les phénomènes physiques les plus rencontrés dans le domaine – hors applications de micro-fluidique - sont :

- la flexion (et la torsion) de structures minces,
- les phénomènes d'amortissement visqueux,
- l'actionnement (et la détection) électrostatique,
- l'actionnement (et la détection) piézo-électrique.

On expose succinctement, dans la suite de ce paragraphe, les trois premiers de ces phénomènes, en soulignant les limitations des modèles utilisés pour en rendre compte.

a) Phénomènes de flexion

La mécanique des solides élastiques est régie par l'équation de Navier [Landau67], liant les déplacements à l'intérieur du solide aux forces qui lui sont appliquées. Dans le cas de géométries particulières, notamment dans le cas de solides présentant d'importants facteurs d'aspect, cette équation se simplifie.

Les vibrations d'une poutre mince de section rectangulaire uniforme (fig.3), dans l'hypothèse où ses déplacements w sont petits par rapport à son épaisseur h, sont données par [Landau67] :

$$\frac{Ebh^3}{12}\Delta^2 w - T_0 \Delta w + \rho bh \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f \ , \qquad (1)$$

où E désigne le module d'Young du matériau, ρ sa masse volumique, T_0 est une éventuelle tension constante (par exemple due à des contraintes résiduelles) et f est une densité linéique de force[1].

[1] Il s'agit là de l'équation des poutres de Bernouilli.

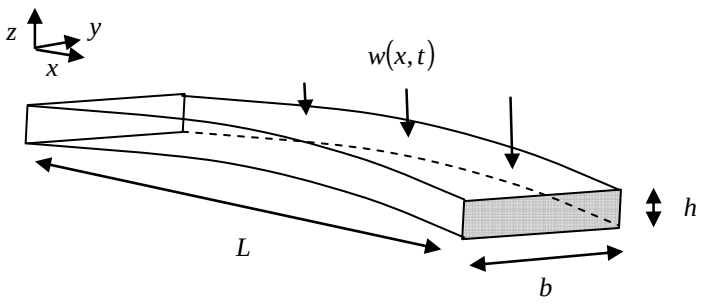

Fig. 3 - Une poutre est un solide élastique dont une des dimensions, la longueur, est très grande par rapport aux deux autres (la largeur et l'épaisseur). L'étude de la poutre peut se ramener à l'étude des déplacements $w(x,t)$ des points de son axe neutre.

Dans le cas où l'hypothèse des petites déformations ne tient plus, ce qui est le cas dès que les déplacements excèdent le tiers de l'épaisseur de la poutre, la relation entre force et déplacements devient non-linéaire :

$$\begin{cases} \dfrac{Ebh^3}{12}\Delta^2 w + T(w)\Delta w + \rho bh\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f \\ T(w) \approx \dfrac{Ebh}{2L}\displaystyle\int_0^L \left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dx \end{cases} . \qquad (2)$$

Cette relation exprime le fait que, lorsqu'une poutre fléchit, elle subit un allongement qui se traduit par des contraintes internes et un raidissement. On peut montrer qu'une poutre oscillant en grands déplacements a un comportement similaire à celui d'un pendule de Duffing [Strogatz00].

Une plaque est un solide dont une des dimensions est très petite par rapport aux deux autres. Sous des hypothèses similaires à celles utilisées pour parvenir à (1), on peut simplifier l'équation de Navier pour parvenir aux équations de Von Karman, qui régissent la flexion forte des plaques :

$$\begin{cases} \dfrac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\Delta^2 w + \rho h\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = P + h\left(\dfrac{\partial^2\chi}{\partial y^2}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\chi}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2\dfrac{\partial^2\chi}{\partial x\partial y}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right) \\ \Delta^2\chi = -E\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2\right) \end{cases} , \qquad (3)$$

où ν est le coefficient de Poisson du matériau et où P désigne une force surfacique. On appelle χ la fonction des contraintes d'Airy. En flexion faible, on considère que cette fonction des contraintes est nulle, ce qui aboutit à un problème linéaire.

Les microsystèmes présentent souvent l'aspect de poutres ou de plaques, c'est pourquoi de nombreux modèles sont bâtis autour des équations précédentes. Dans le cas le plus général, elles sont délicates à résoudre, c'est pourquoi il n'est pas rare d'en trouver des approximations [Nayfeh79, Dufour01, Elka03, Malatkar03, Younis04, Zubert05] plus ou moins bien venues. Remarquons que certaines grandeurs figurant dans ces équations peuvent ne pas être connues : le coefficient de Poisson du silicium, par exemple, peut varier de plus de 50% d'une publication à une autre. D'autre part, les conditions aux limites de ces équations sont en général fortement idéalisées - parce qu'il est difficile de tenir compte précisément des pertes mécaniques dans les encastrements des poutres.

Enfin, il convient de signaler que, lorsque les contraintes internes (par exemple, les contraintes résiduelles qui résultent du processus de fabrication) sont très importantes, les termes de flexion pure dans les équations précédentes (dérivées quatrièmes) deviennent négligeables. Les équations de vibration des poutres ou des plaques doivent alors être remplacées par celles des cordes et des membranes [Landau67].

b) Amortissement visqueux

L'amortissement visqueux provient de l'interaction du fluide ambiant – le plus souvent de l'air - avec une structure mécanique en mouvement. Comme tous les phénomènes surfaciques[2], il a une influence beaucoup plus grande à l'échelle microscopique qu'à l'échelle macroscopique.

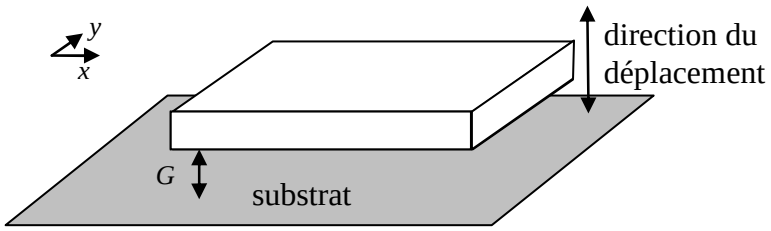

Fig. 4 - L'amortissement fluide des microstructures à entrefer[3] faible, se déplaçant perpendiculairement au substrat, est dominé par le phénomène de « squeeze-film damping ». L'air « coincé » dans l'entrefer G agit comme un amortisseur (à basse fréquence) ou comme un ressort (à haute fréquence).

En général, les géométries des structures micro-usinées sont telles que l'équation de Navier-Stokes, qui régit la dynamique des fluides, peut se simplifier considérablement [Bao00]. Ainsi, dans le cas d'une microstructure se déplaçant perpendiculairement au substrat (fig.4), on a communément recours à l'équation de Reynolds pour déterminer les forces d'amortissement – on parle aussi de « squeeze film damping » :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho G^3 \frac{\partial p}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\rho G^3 \frac{\partial p}{\partial y}\right)=12\mu\frac{\partial \rho G}{\partial t}, \qquad (4)$$

et sa version linéarisée :

$$\Delta p-\frac{12\mu}{G_0{}^2 P_0}\frac{\partial p}{\partial t}=\frac{12\mu}{G_0{}^3}\frac{\partial G}{\partial t}, \qquad (5)$$

où p désigne une variation de la pression ambiante, P_0 la pression de référence du fluide non perturbé, μ la viscosité du fluide, ρ sa masse volumique, G la valeur de l'entrefer à un instant donné, G_0 la valeur de référence de l'entrefer autour de laquelle oscille la structure.

Les hypothèses faites pour parvenir à (4) puis à (5) sont nombreuses [Bao00] : par exemple, petits déplacements (par rapport à l'entrefer), faibles variations de la pression par rapport à la pression de référence, rigidité de la structure, etc. L'équation (5) est très simple d'utilisation, ce qui explique qu'elle soit couramment utilisée bien au-delà de son domaine de validité. Par ailleurs, on résout souvent (4) et (5) en utilisant des conditions aux limites triviales (pression nulle sur les bords de la structure), sans que celles-ci ne soient physiquement justifiées. On recense de nombreuses publications proposant des solutions de (4) ou de (5) dans des

[2] Relativement aux phénomènes volumiques, comme les forces d'inertie, par exemple.

[3] Le terme « entrefer » est couramment utilisé pour désigner la distance entre deux électrodes ou deux structures en vis-à-vis. C'est en ce sens que nous l'employons, même si cela constitue un abus de langage.

configurations particulières ou des adaptations permettant d'en étendre le domaine de validité [Veijola95, Bao03, Younis04] ou des méthodologies permettant de choisir des conditions aux limites adéquates [Veijola05].
Lorsqu'une microstructure se déplace parallèlement au substrat, on parle de « slide film damping » [Bao00]. Dans ce cas, les forces d'amortissement sont inversement proportionnelles à l'entrefer, mais la valeur de l'entrefer à un instant donné ne dépend pas du déplacement de la structure : il est donc beaucoup plus simple de tenir compte « rigoureusement » du « slide-film damping » que du « squeeze-film damping ».
Enfin, notons que ces équations sont valables tant que le fluide ambiant peut être considéré comme un milieu continu. Pour des dimensions d'entrefers très faibles ou dans des conditions de vide partiel, le nombre de particules est trop faible pour que l'équation de Navier-Stokes ait un sens. Certains cas canoniques mis à part [Christian66, Bao02], on doit alors avoir recours à des techniques de simulation de type « dynamique moléculaire » [Gad el Hak99, Hutcherson04], où la relation fondamentale de la dynamique doit être intégrée à chaque pas de calcul pour chacune des particules du fluide. Cette approche peut être fort coûteuse, aussi trouve-t-on nombre de travaux où le problème est traité à l'aide d'équations de Reynolds modifiées, où la viscosité dynamique du fluide est remplacée par un coefficient de viscosité effective [Veijola95] :

$$\mu_{eff} = \frac{\mu}{1 + f(K_n)}, \tag{6}$$

où K_n est le nombre de Knudsen, défini comme le rapport du trajet libre moyen des particules de fluides sur l'entrefer :

$$K_n = \frac{\lambda}{G}. \tag{7}$$

Le tableau (1), qui est extrait de cette dernière référence, recense différentes expressions de la fonction $f(K_n)$.

$\frac{ZK_n}{0.1474}$, où $Z = \frac{K_n + 2.507}{K_n + 3.095}$	$6\frac{2-\alpha}{\alpha}K_n + \frac{8}{3}K_n^2$, où $0 \le \alpha \le 1$	$6K_n + 6K_n^2$	$\frac{K_n}{0.7}$	$6K_n$	$9.638K_n^{1.159}$

Tableau 1 - Différentes expressions de $f(K_n)$.

c) Actionnement électrostatique

L'actionnement et la détection capacitives sont indissociables de l'univers des MEMS. Ceci tient essentiellement au fait qu'il est très facile d'intégrer ces fonctionnalités à une microstructure : il suffit en effet pour cela de créer une capacité entre deux parties de la microstructure. En imposant une tension entre les électrodes, on crée une charge qui se traduit par une pression électrostatique, selon :

$$P = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}, \tag{8}$$

où ε_0 est la permittivité du vide, σ est la densité surfacique de charge, P est la pression électrostatique [Bao00].
Pour déterminer la distribution de la pression électrostatique en surface des électrodes, dans une configuration quelconque, il est nécessaire de résoudre l'équation de Poisson, avec des conditions aux limites appropriées : ceci peut se faire numériquement, en utilisant la méthode

des éléments finis ou, mieux, celle des éléments frontières [Saleh91], voire au moyen de transformations de Schwartz-Christoffel [Leus04]. Etant donnés les facteurs d'aspect importants rencontrés dans les applications MEMS, il n'est pas rare de modéliser les capacités comme des condensateurs plans [Fargas05]. En remarquant que, dans ce cas :

$$\sigma = \frac{\varepsilon_0}{G} V \,, \tag{9}$$

où V est la tension appliquée aux électrodes et G la valeur de l'entrefer les séparant, on peut alors écrire que la pression électrostatique agissant sur une électrode d'un condensateur plan est :

$$P = \frac{\varepsilon_0 V^2}{2G^2} \,. \tag{10}$$

Notons que cette expression est valable même pour les grandes valeurs des déplacements.

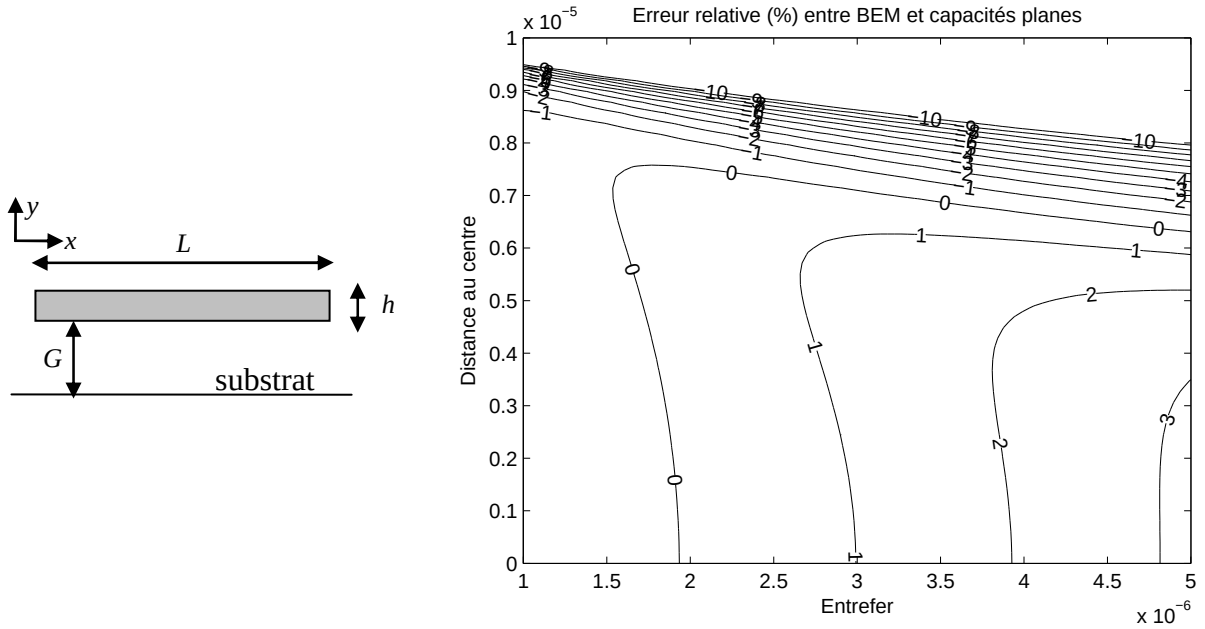

Fig. 5 - Configuration du calcul (à gauche) : une poutre de dimension infinie selon z, de largeur $L = 20\times10^{-6}$m, d'épaisseur h négligeable est porté à un potentiel constant et placé à une distance G du substrat (à la masse). On représente à droite l'erreur relative sur la densité surfacique de charge entre les résultats utilisant l'approximation (9) et un calcul par la méthode des éléments frontières, pour différentes valeurs de l'entrefer.

L'équation (10) met en évidence la double non-linéarité de l'actionnement électrostatique dans le cas des condensateurs plans. Il existe non seulement une non-linéarité en tension (qui est déjà claire dans (8), puisque l'équation de Poisson est linéaire), mais également une non-linéarité en déplacement (la force générée est inversement proportionnelle au carré de l'entrefer, qui dépend du déplacement). Cette dernière non-linéarité est à l'origine du phénomène de « pull-in » : dans (10), lorsque l'entrefer tend vers 0, la force électrostatique tend vers l'infini. Aucune force de rappel élastique, telle que celle générée par une poutre de flexion, ne peut donc la contrer. Enfin, toujours dans le cas d'un condensateur plan, on peut prouver que le pull-in a systématiquement lieu au tiers de l'entrefer[4].

[4] Seule la valeur de la tension nécessaire pour amener l'électrode au point de pull-in est fonction de la raideur mécanique de la structure.

Ce phénomène peut être mis à profit dans certaines applications (micro-interrupteurs) mais il est plus souvent un obstacle. Aussi existe-t-il nombre de publications qui rendent compte de manières d'étendre la limite du pull-in au-delà du tiers de l'entrefer [Seeger03], voire de s'en affranchir [Colinet04, Zhu05] au prix de méthodes de contrôle particulières. C'est une de ces méthodes [Colinet04], développée à l'occasion d'un contrat de recherche passé avec le CEA-LETI, qui a servi de point d'ancrage à la thèse d'Eric Colinet et nous a poussés à étudier les propriétés des systèmes mixtes non-linéaires.
Signalons que l'actionnement électrostatique peut également se faire par variation latérale de capacité : cette méthode permet de parvenir à des déplacements importants des microstructures. En contrepartie, elle impose une certaine forme aux électrodes et ne peut donc être utilisée que dans des contextes particuliers.
Enfin, on insiste sur le fait que l'expression (10), reposant sur l'approximation des capacités planes, ne permet d'aboutir qu'à des ordres de grandeur des pressions électrostatiques. Seules les méthodes numériques mentionnées plus haut permettent d'obtenir des résultats précis (fig. 5), dans le cas où les électrodes ont des géométries quelconques (plaques ou poutres déformées, par exemple).

3) Conclusion

C'est autour des équations qui ont fait l'objet des précédents paragraphes que s'articulent, à tort ou à raison, de nombreux modèles de MEMS existants. Quant à la recherche dans ce domaine, elle explore les voies suivantes :

- développement de nouveaux modèles, basés sur des considérations physiques [Lifshitz00, Bao02, Younis04, Zhao04],
- amélioration de modèles existants [Nayfeh04, Veijola05], résolution dans des géométries complexes [Younis04],
- analyse non-linéaire de certains phénomènes, notamment analyse dynamique du pull-in [Abdel-Rahman03, Malatkar03],
- développement de méthodes de calcul numérique adaptées aux MEMS [Aluru99, Mehner03, Rochus06],
- développement de méthodes aboutissant à des modèles d'ordre réduit de MEMS à partir d'un traitement semi-analytique des équations de la physique [Gabbay98], de la linéarisation de modèles éléments finis [Chen04], d'expériences numériques [Senturia97, Hung99, Chen01, Rewienski03], de données expérimentales [Osterberg97].

Les incertitudes, bien qu'omniprésentes dans le domaine de la conception de MEMS, ne sont que rarement traitées en modélisation. Tout au plus peut on citer quelques articles les abordant sous l'angle de la conception robuste [Rong02, Hwang03, Wittwer06]. Ces incertitudes sont cependant prises en compte à un stade plus avancé du développement du système, lors de la phase de calibrage.
Quant au couplage, il est sous-jacent à la plupart des thèmes de recherche qui viennent d'être évoqués : c'est pourquoi j'y ai consacré une partie importante de mes recherches. Le chapitre suivant traite donc de cet aspect de mon travail.

II. Simulation des phénomènes couplés non-linéaires

On parle de couplage lorsqu'un phénomène est dû à l'interaction entre plusieurs domaines de la physique. Ainsi, la modélisation et la simulation des capteurs, des transducteurs ou des actionneurs de tout type relèvent-elles, par essence, des problèmes couplés. On distingue en général deux types de couplage : le fort et le faible. Il est question de couplage faible lorsqu'il est possible de considérer séparément les différents phénomènes : ceci découle, en général, de différences importantes entre les grandeurs caractéristiques (constantes de temps ou d'espace) des sous-systèmes couplés. Ainsi, dans le cadre de mon travail de thèse, peut-on considérer que, quand l'épaisseur de peau des courants de Foucault est faible devant la longueur d'onde acoustique, il est possible de ramener l'étude des EMAT à celle de trois phénomènes indépendants ou n'étant que faiblement couplés : courants de Foucault, champ magnétique permanent et génération d'ultrasons par des sources de forces surfaciques. En faisant cette approximation, on sous-entend également que les déplacements engendrés par l'onde acoustique sont suffisamment faibles pour ne pas perturber les conditions aux limites du problème électromagnétique, ce qui est effectivement le cas (des ordres de grandeur seront donnés par la suite). Les phénomènes fortement couplés sont en général plus complexes à simuler que les autres : ceci découle du fait que ce type de problème nécessite la résolution d'un *système* d'équations aux dérivées partielles :

$$\begin{cases} R_1(X_1, \cdots, X_m) = 0 \\ \vdots \\ R_m(X_1, \cdots, X_m) = 0 \end{cases}, \qquad (11)$$

où X_k contient les inconnues pour le domaine k, déterminée par l'équation aux résidus R_k. Cette résolution peut se faire simultanément ou séquentiellement (figure 6).

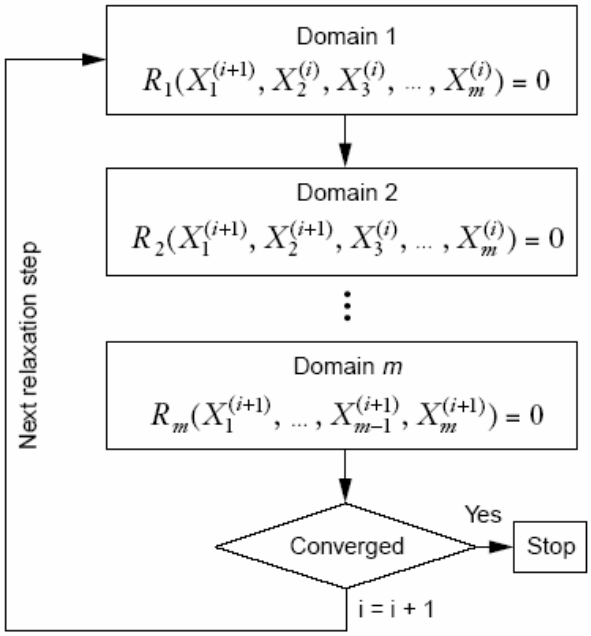

Fig. 6 - Schéma de relaxation pouvant être utilisé pour résoudre le système d'équations (11) (extrait de [Senturia97]).

L'approche simultanée [Avdeev03, Rochus06] est, en général, plus délicate à mettre en œuvre numériquement, étant donné que le système à résoudre est constitué d'EDP dont les types

diffèrent (par exemple, hyperbolique et parabolique, dans le cas d'un couplage thermomécanique ou hyperbolique et elliptique pour un couplage électromécanique).
Le même phénomène se rencontre lors de la simulation des EDP non-linéaires : il est en général impossible de réduire une EDP non-linéaire à un ensemble d'EDO explicites, i.e. de la forme :

$$\dot{X} = F(X, t). \tag{12}$$

Le système d'équations différentielles algébriques (EDA) :

$$F(\dot{X}, X, t) = 0, \tag{13}$$

résultant de la discrétisation (au sens large) d'une EDP doit alors être résolu de manière itérative, comme un problème fortement couplé.
Par ailleurs, dans le contexte des MEMS, on se trouve souvent dans un cas particulier de couplage fort où les phénomènes couplés ne sont pas définis sur le même domaine et où la forme affectée par chacun des domaines dépend de la solution globale : ainsi, dans le cas de l'actionnement électrostatique d'une structure souple (fig. 7), la forme prise par la structure définit-elle les conditions aux limites à imposer à l'équation de Poisson correspondant au problème électrostatique. En retour, la résolution de l'équation de Poisson permet de déterminer la pression électrostatique s'exerçant sur la membrane, et donc sa forme.

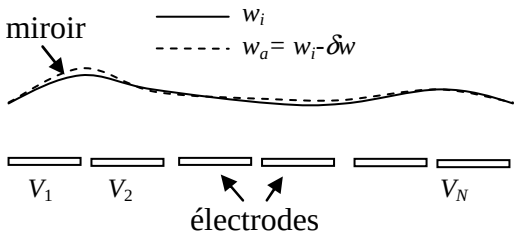

Fig. 7 - Actionnement électrostatique d'un micromiroir déformable [Vdovin97]. Un problème couplé fortement doit être résolu pour déterminer la forme prise par la membrane lorsque des potentiels sont appliqués aux électrodes.

Dans ce chapitre, la thématique du couplage sera abordée au travers de trois illustrations :

- la modélisation du champ acoustique irradié par un capteur de type EMAT, qui a fait l'objet de ma thèse et qui constitue un exemple de couplage faible,
- l'application d'une approche originale des problèmes de couplage fort et des non-linéarités au calcul de la commande d'une microstructure souple à actionnement électrostatique,
- le développement de modèles d'ordre réduit non-linéaires de composants MEMS simples.

1) Un exemple de couplage faible. Calcul du champ acoustique émis par un EMAT.

a) Contexte

De nombreuses techniques (ultrasons, courants de Foucault, rayons X...) permettent aujourd'hui le contrôle non destructif ou l'évaluation non destructive des matériaux. L'usage de ces techniques est particulièrement développé dans les industries aéronautiques, gazières, pétrolières ou nucléaires : elles permettent de révéler la présence de défauts, tels que fissurations, inclusions, corrosion, à l'intérieur de structures et, éventuellement, de les quantifier. Dans le domaine du CND nucléaire, une grande part des méthodes ultrasonores

employées repose sur l'utilisation de traducteurs piézo-électriques. Malgré sa diversité, cette technologie est limitée à plusieurs égards, tels que la nécessité d'un couplant acoustique ou encore la faible tenue en température des matériaux piézo-électriques. D'autres méthodes de contrôle ultrasonore doivent alors être mises en œuvre. L'une d'entre elles, l'inspection par traducteur électromagnéto-acoustique (EMAT), a fait l'objet de ma thèse (de 1996 à 1999). Les EMAT sont des capteurs réservés au contrôle des matériaux métalliques : le plus souvent constitués d'un aimant et d'une bobine inductrice, ils permettent d'émettre ou de capter des ultrasons grâce à l'interaction entre le champ magnétique produit par l'aimant et les courants de Foucault induits dans la pièce. Ainsi, cette technique n'imposant pas de couplage acoustique entre le traducteur et le matériau contrôlé, est-elle d'un intérêt particulier dans le cas de contrôles à haute température : au contraire des traducteurs piézo-électriques, les EMAT peuvent, par exemple, être placés dans des boîtiers refroidis sans que leur efficacité s'en trouve par trop réduite.
La réalisation et la modélisation de ces capteurs constituait la finalité première de mon travail de thèse : l'application visée était le contrôle « on site » des soudures de la cuve de Super Phénix, i.e. le contrôle dans du sodium liquide. Suite à l'arrêt de cette centrale en 1997 et à des difficultés expérimentales importantes [T1], mon travail a essentiellement porté sur la simulation des EMAT, à des fins d'optimisation.

b) Modélisation de la génération d'ultrasons par des ondes électromagnétiques

(1) Principe de la génération et de la réception d'ultrasons par des ondes électromagnétiques

Le principe de fonctionnement des EMAT, tel qu'il est présenté dans [Dobbs73], est le suivant : une bobine parcourue par un courant sinusoïdal de pulsation ω est placé à proximité d'une pièce métallique de perméabilité μ et de conductivité σ. Ceci induit, parallèlement à la surface de la pièce, des courants de Foucault, dont l'amplitude décroît exponentiellement avec la profondeur. On dit que ces courants existent dans l'épaisseur de peau δ, du matériau :

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu\sigma\omega}} . \tag{14}$$

Un champ magnétique, dont l'amplitude suit la même loi que les courants de Foucault, est également généré dans la pièce métallique. Si l'on superpose à l'ensemble un champ magnétique permanent uniforme $\mathbf{B_0}$ dont l'amplitude est grande par rapport à celle du champ magnétique induit - obtenu, par exemple, au moyen d'un aimant permanent ou d'un électro-aimant -, des forces de Lorentz $\mathbf{F}(z)$ naissent dans l'épaisseur de peau, selon :

$$\mathbf{F}(z) = \mathbf{J}(z) \times \mathbf{B}_0 , \tag{15}$$

où $\mathbf{J}(z)$ désigne la densité des courants de Foucault.
Notons que la pulsation de ces forces est égale à celle des courants induits. En l'absence d'un champ magnétique permanent, des forces de Lorentz apparaissent mais à une fréquence double de celle des courants induits.
Considérons à présent que l'épaisseur de peau soit petite devant les longueurs d'onde acoustiques dans le matériau considéré, soit :

$$\delta << \frac{2\pi}{\omega}\sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} , \tag{16}$$

pour les ondes de compression et :

$$\delta << \frac{2\pi}{\omega}\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, \qquad (17)$$

pour les ondes de cisaillement, où λ et μ sont les coefficients de Lamé du matériau et ρ sa masse volumique. Dans ce cas, les forces de Lorentz peuvent s'assimiler à des forces surfaciques et on peut distinguer deux cas :

- le champ $\mathbf{B_0}$ est perpendiculaire à la surface de la pièce métallique. Comme les courants de Foucault sont parallèles à la surface, les forces de Lorentz sont également parallèles à la surface. On engendre alors, majoritairement, des ondes ultrasonores de cisaillement.
- le champ $\mathbf{B_0}$ est parallèle à la surface de la pièce, mais perpendiculaire aux courants de Foucault. On engendre alors, majoritairement, des ondes ultrasonores de compression.

La réception par un EMAT ne peut avoir lieu qu'en présence d'un champ magnétique permanent. Dans ce cas, on peut montrer qu'une onde acoustique interagissant avec le champ magnétique engendre un champ électrique qui peut être capté au moyen d'une bobine, comme dans un contrôle par courants de Foucault classique [Vuillermoz94]. L'orientation du champ magnétique joue aussi un rôle, certaines configurations étant préférables pour la réception de tel ou tel type d'onde ultrasonore.

(2) Méthodologie

Le domaine des fréquences de travail étant fixé aux alentours du MHz par la taille des défauts que l'on souhaite détecter, on peut vérifier que les épaisseurs de peau standard dans les métaux non magnétiques (comme le sodium) sont bien plus faibles que les longueurs d'ondes acoustiques correspondantes. Les phénomènes acoustiques et électromagnétiques sont donc bien faiblement couplés. On peut également considérer que les phénomènes magnétostatiques (le champ $\mathbf{B_0}$) et dynamiques (les courants de Foucault) n'interagissent pas, puisque les bobines qui servent à générer les courants sont constituées de cuivre. Le calcul du champ acoustique irradié par un EMAT peut donc se ramener à :

- un calcul magnétostatique simple, celui du champ magnétique engendré par un aimant de forme quelconque dans le vide,
- un calcul de la densité de courants de Foucault engendrés par une bobine de forme quelconque. La taille des pièces à contrôler étant, souvent, grande par rapport à celle de la bobine, on se limite au cas de la génération de courants de Foucault dans un demi-espace conducteur,
- un calcul du champ ultrasonore créé par une densité surfacique de forces dans un demi-espace. Ce calcul est suffisant pour déterminer l'intensité et la directivité du traducteur ultrasonore, que l'on peut chercher à optimiser.

C'est l'équipe de modélisation du Laboratoire de Contrôle par Méthodes Electromagnétiques (LCME) qui m'a accueilli pour les deux premières parties de ce travail, consistant en un « modèle courants de Foucault 3D ». Le logiciel de simulation qui était développé au LCME, MESSINE, fondé sur des résolutions analytiques des équations de Maxwell, ne permettait alors que de traiter des cas de 2D (bobines axisymétriques). Ma démarche a été de prolonger les modèles 2D existants et d'étendre leur méthode de résolution de l'équation de diffusion à des cas 3D. La décomposition d'une bobine en segments de fils élémentaires, ou sources ponctuelles de courant, permet de réduire le problème d'un capteur de forme arbitraire (3D) à une configuration de quasi-2D, dans la mesure où la source ponctuelle est suffisamment petite devant la distance qui la sépare du métal. En introduisant une condition de jauge particulière liant les potentiels créés par une source selon qu'elle est parallèle ou perpendiculaire à la

surface du métal, l'équation de diffusion peut être résolue analytiquement et aboutit à des solutions simples dans le cas d'une source ponctuelle parallèle ou perpendiculaire à la surface d'un demi-espace ou d'une plaque, en régime stationnaire ou impulsionnel. J'ai représenté à la figure 8 les allures des densités de courant induites en surface d'un demi-espace métallique par une source ponctuelle de courant parallèle ou perpendiculaire à l'interface air-métal.
La solution pour le capteur 3D est obtenue alors par superposition, grâce à une intégration des solutions particulières sur l'ensemble des sources. L'utilisation de transformées de Fourier rapides permet d'accélérer considérablement cette opération [R6-8, C15]. L'apport principal de ce modèle semi-analytique par rapport aux modèles existants similaires [Beissner84, Bowler87] est la plus faible quantité de calculs à mettre en œuvre pour un résultat final identique. L'avantage s'en fait donc essentiellement sentir lors de calculs d'optimisation (par exemple de la forme de la bobine) où le calcul des courants induits doit se faire de manière répétée.

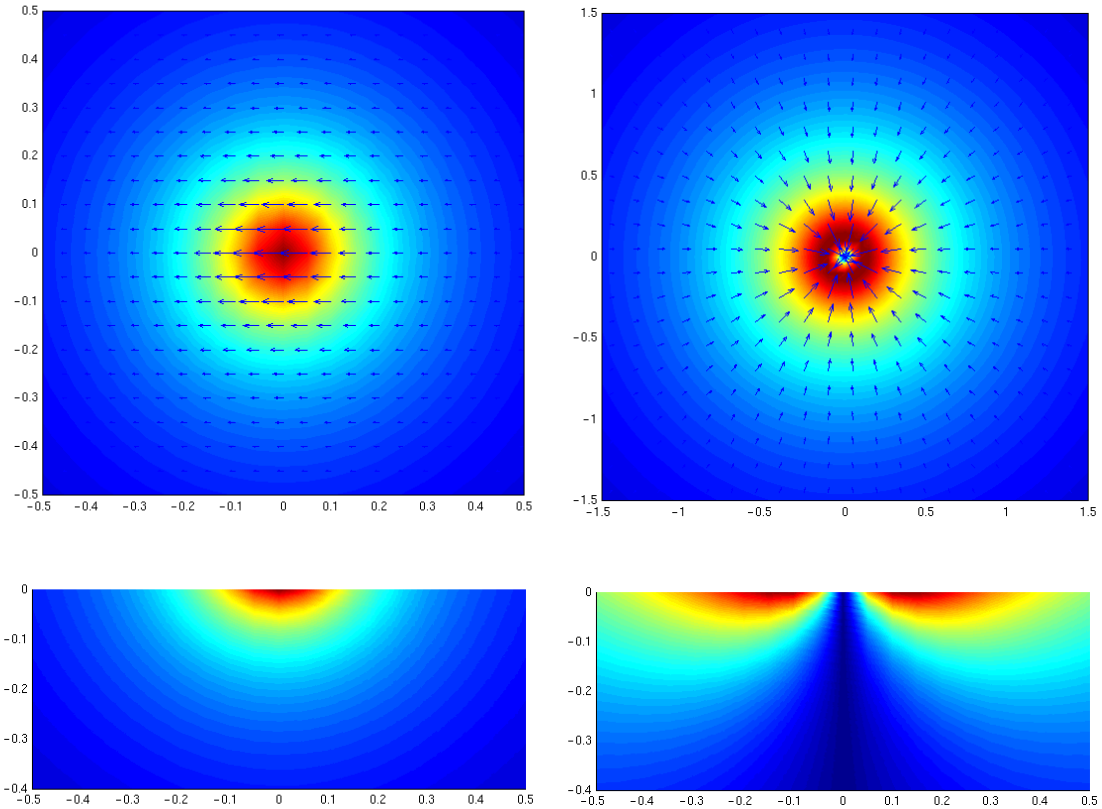

Fig. 8 - Intensité et direction des courants de Foucault pour une source ponctuelle de courant parallèle (à gauche) ou perpendiculaire (à droite) à la surface d'un demi-espace métallique. Les images du haut donnent la distribution des courants en surface, celles du bas illustrent la décroissance exponentielle avec la profondeur.

Une démarche similaire est utilisée pour le calcul canonique du champ magnétique créé dans le vide par un aimant ainsi que pour celui du champ acoustique : pour cette dernière partie du modèle d'EMAT, c'est un modèle d'Alain Lhémery [Lhémery97], chercheur au Laboratoire de Simulation Ultrasonore et Traitements (LSUT), qui a été utilisé, ma contribution ne s'étendant qu'au calcul des coefficients de réflexion du champ acoustique proche [T1] et à la mise en œuvre informatique.

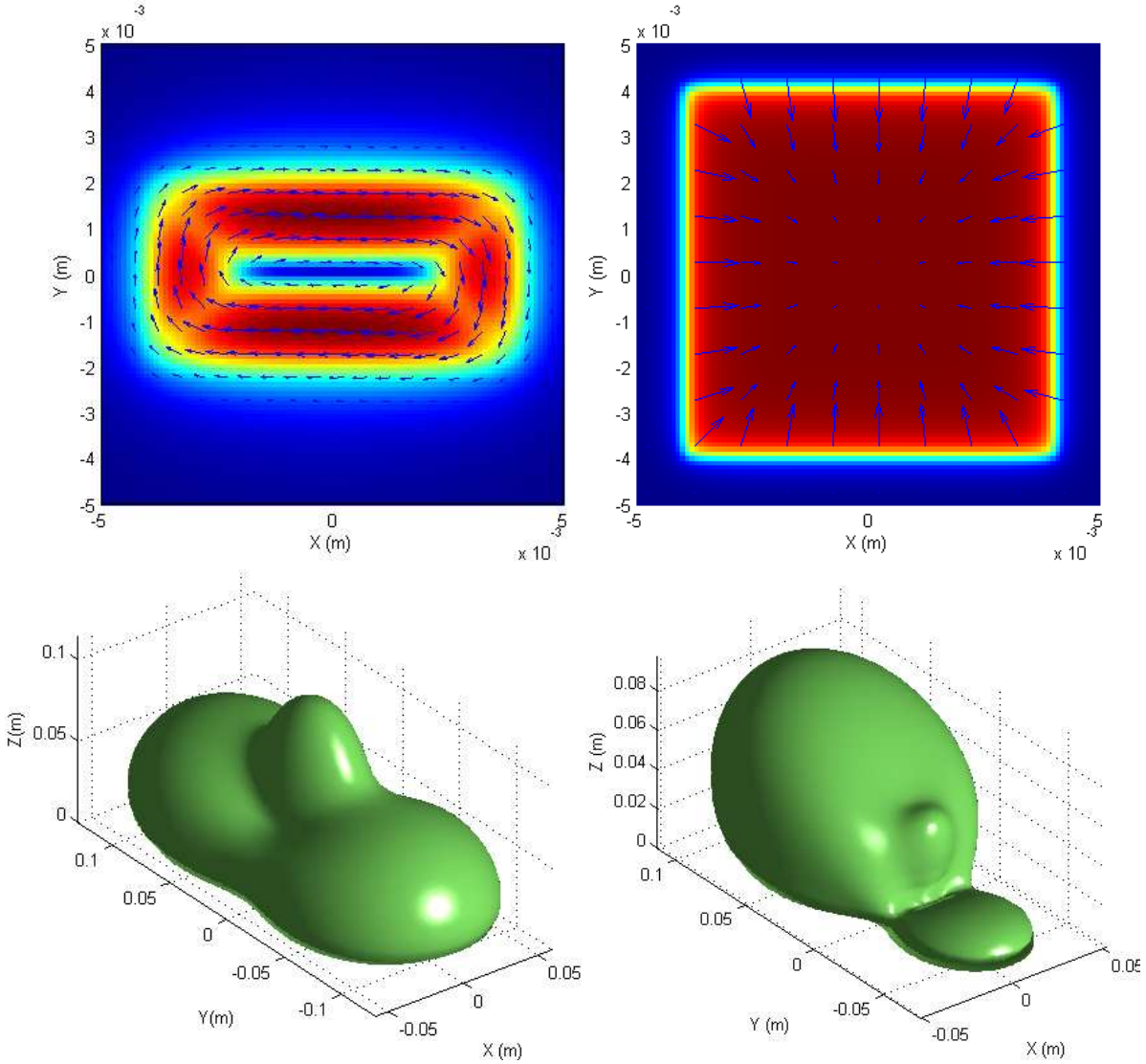

Fig. 9 : Isosurfaces du champ ultrasonore en ondes L émis par un EMAT constitué d'une bobine de type « racetrack » (la densité de courants est donnée en haut à gauche) et d'un aimant permanent de forme cubique. Les deux résultats correspondent à deux configurations aimant-bobine différentes.

(3) Résultats

Ces trois modèles, regroupés, permettent d'accéder rapidement au champ acoustique volumique créé dans un demi-espace par un EMAT de géométrie quelconque, en régime stationnaire ou pulsé. On donne à la figure 9 des résultats typiques de l'exploitation de ces modèles. Connaissant le champ magnétique permanent, ainsi que la densité des courants de Foucault, il est possible d'optimiser, par exemple, la position relative de l'aimant et de la bobine pour obtenir une directivité souhaitée. Les phénomènes physiques n'étant que faiblement couplés, il n'est pas nécessaire de les recalculer pour chaque position testée. Des optimisations plus complexes, comme celle de la forme de la bobine ou de l'aimant, ou de l'inclinaison du capteur, peuvent également avoir lieu avec un coût bien plus faible que si une méthode du type « éléments finis » était utilisée.

2) Un exemple de couplage fort. Commande d'une microstructure souple à actionnement électrostatique.

a) Contexte

On a vu, dans la partie « Contexte » de ce mémoire, que l'utilisation des forces électrostatiques est une des méthodes privilégiées pour actionner les MEMS. Parmi les applications qui en sont faites, on peut faire une distinction entre les applications où c'est une structure rigide qui est commandée (par exemple, la plupart des micro-accéléromètres ou certains micromiroirs) et celles où la structure est déformable. Dans le premier cas, il n'y a qu'un nombre fini de variables à commander (au plus, trois translations et trois rotations) ; dans le second cas, il en existe une infinité. C'est dans ce contexte, celui du contrôle de *forme* de structure, que s'inscrit une partie de mon travail. La problématique générale en est la suivante : étant donnée une structure dotée d'une certaine flexibilité, étant donné un ensemble d'actionneurs commandés en tension, quelles tensions appliquer pour obtenir (ou annuler) une déformation ? Il convient de noter que ce problème n'a pas nécessairement une solution unique ou, plutôt, qu'il est mal posé [Sobolev89, Tarantola05]. Par exemple, si l'on souhaite imposer une forme parabolique à une membrane (associée à une infinité d'actionneurs idéaux), on peut, en pratique, se contenter d'appuyer fortement en son centre ou bien exercer une pression uniforme sur la surface de la membrane : les deux méthodes aboutiront peu ou prou au même résultat, bien que les distributions de pression mises en jeu diffèrent fortement.
Certaines des méthodes permettant de résoudre ce genre de problème, dans le cadre de la mécanique des structures, sont présentées dans [Ziegler05]. Notons que la plupart de ces techniques sont développées dans un contexte d'applications réelles : les données (la forme de la structure) sont connues imparfaitement. Elles ne peuvent être mesurées en tout point et, de surcroît, sont entachées de bruit. La difficulté du calcul de la commande réside alors dans la prise en compte de ces incertitudes. De plus, l'essentiel de ces travaux est consacré à des systèmes macroscopiques. Les difficultés supplémentaires introduites par le couplage électromécanique n'y sont donc pas prises en compte. Aussi, dans le domaine des MEMS, seules quelques rares publications [Wang96a, Wang96b] traitent de ce thème d'un point de vue mathématique ; l'essentiel de la littérature est davantage consacré à des considérations pratiques (par exemple, [Olszewski05], sur la fabrication et la caractérisation de micro-structures déformables) que théoriques. Dans le meilleur des cas, la conception et l'optimisation de MEMS déformables électrostatiques (par exemple, celle de la forme des électrodes) reposent sur des méthodes approximatives ou lourdes à mettre en œuvre. Par ailleurs, des hypothèses simplificatrices sont faites dans [Wang96a], notamment celle de la linéarité de la partie mécanique : ceci restreint donc fortement le domaine d'applicabilité des méthodes qui y sont présentées.
Le schéma de la fig. 11 décrit une démarche possible pour résoudre le problème de conception dans un cas statique non-linéaire. Cette approche possède un inconvénient majeur : elle requiert, à chaque itération de l'algorithme de minimisation des déplacements résiduels, d'effectuer une simulation complète du système physique (en pointillés). Cette tache est malaisée du fait des couplages forts, à la fois dus à l'interaction électromécanique et à l'hypothèse des grands déplacements. L'existence des couplages forts nécessite l'emploi de solveurs itératifs adaptés [Senturia97, Aluru99, Rochus06], ce qui augmente considérablement le temps de calcul. Nous avons donc proposé dans [R3] une approche alternative à ce problème, qui permet d'en alléger le traitement numérique sans pour autant faire d'hypothèses abusives quant à sa linéarité. Le paragraphe suivant lui est consacré.

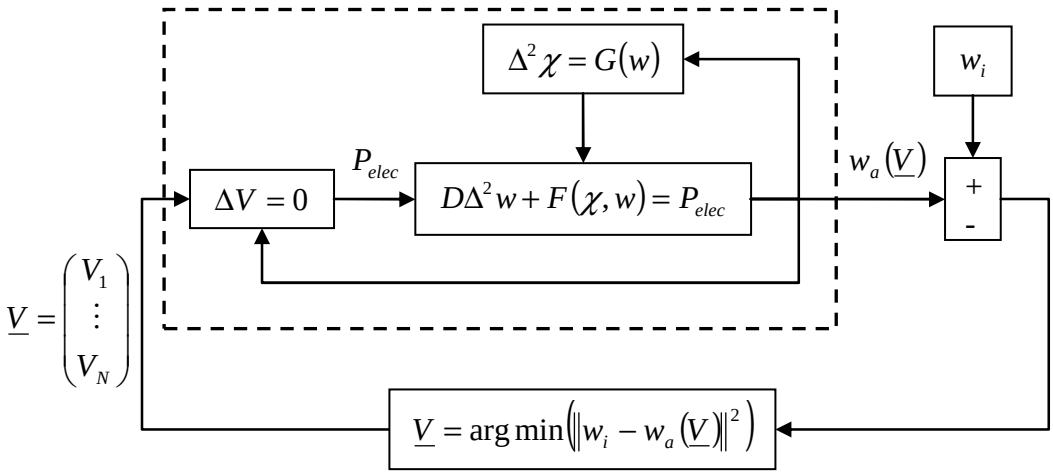

Fig. 11 - Commande électrostatique de la forme d'une plaque en grands déplacements. L'objectif est de trouver les tensions qui minimisent les déplacements résiduels (fig. 7).

b) Approche inverse de la commande de microstructures déformables

La difficulté de la résolution du problème de conception de la fig. 7 est, nous l'avons souligné, liée à l'existence de couplages forts entre les différents phénomènes régissant la forme d'une microstructure. Dans le cas d'une commande de forme dynamique, cette situation est aggravée par l'apparition de phénomènes d'amortissement, dont l'amplitude dépend souvent fortement de la valeur des déplacements (cf. section I). On peut faire du système physique le schéma représenté à la fig. 12.

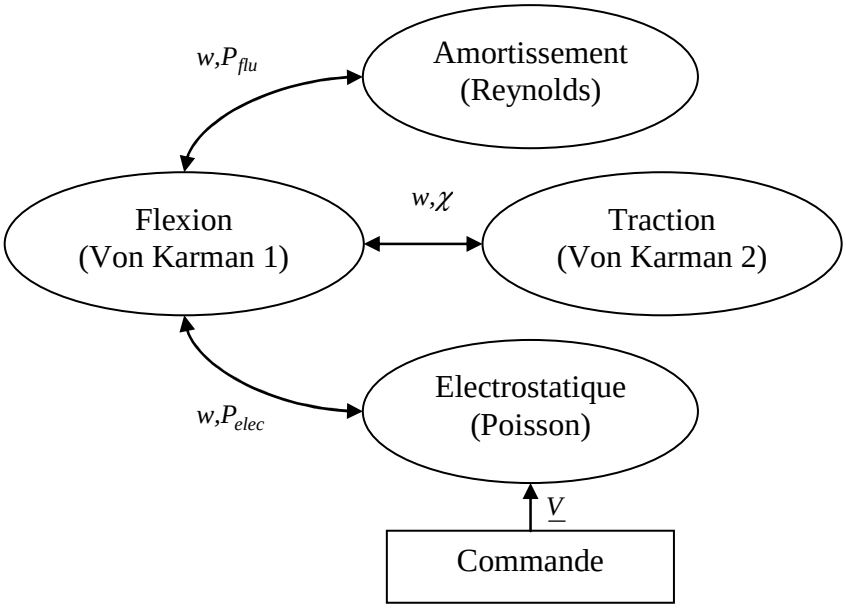

Fig. 12 - Schéma des couplages liant les phénomènes physiques qui interviennent dans la commande de forme dynamique d'un micromiroir électrostatique.

L'approche « inverse » du problème de la commande consiste tout d'abord à imposer la valeur des déplacements dans les EDP régissant les différents phénomènes physiques. Ceci a pour effet de *découpler* et de *linéariser* complètement les différents phénomènes. Par exemple, en imposant les déplacements dans les équations de Von Karman (3), on se ramène à la résolution d'un problème linéaire avec un terme source dépendant des dérivées des

déplacements (pour la seconde équation de Von Karman). Une fois la solution de ce problème calculée, on peut l'injecter dans la première équation de Von Karman. De même, connaissant les déplacements, il est aisé de résoudre l'équation de Reynolds (4) et d'en déduire la valeur de P_{flu}, qui peut également être injectée dans la première équation de Von Karman.

On peut alors calculer simplement la distribution de pression idéale à appliquer à la membrane pour que celle-ci prenne une forme donnée. Si l'on dispose d'une infinité d'actionneurs idéaux, cette solution est suffisante. Bien entendu, dans le cas d'un actionnement électrostatique à l'aide d'un nombre fini d'électrodes, on est loin de cette situation idéale. Tout d'abord, ce mode d'actionnement ne permet d'appliquer des forces qu'à des endroits donnés. Ensuite, il ne permet de générer de forces que dans une direction, du fait de la non-linéarité en tension. On contourne cette dernière difficulté de la façon suivante.

Tout d'abord, on fait l'hypothèse que, même s'il est impossible d'atteindre exactement la forme souhaitée w_i, on espère en trouver une approximation w_a suffisamment bonne pour que l'état mécanique du système soit très peu changé lorsque l'on passe de w_i à w_a. Ceci signifie, par exemple, que la fonction des contraintes d'Airy n'est que peu changée par le passage de w_i à w_a. Ainsi, la linéarisation des équations de Von Karman autour de w_i ou de w_a donne des résultats comparables. D'autre part, l'approximation trouvée doit être assez bonne pour que l'amplitude des déplacements résiduels soit petite comparée à l'entrefer. Ceci implique que le changement de w_i en w_a n'affecte que modérément les distributions de pression, électrostatique ou fluidique.

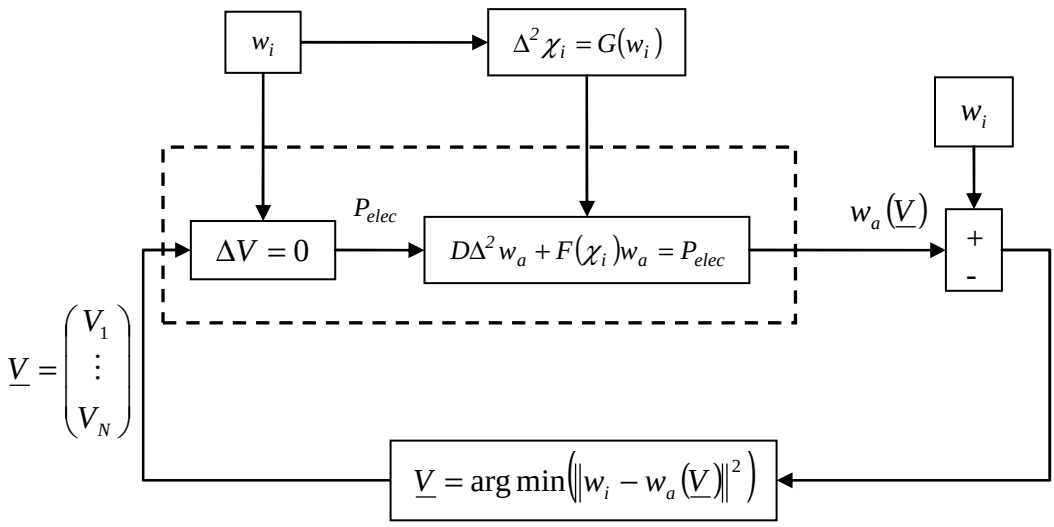

Fig. 13 - Approche inverse de la commande de forme d'un micromiroir électrostatique. L'hypothèse que l'on peut obtenir des déplacements résiduels faibles permet de linéariser et de découpler le problème électromécanique initial. L'optimisation des tensions ne nécessite plus la résolution d'un problème fortement couplé à chaque itération.

Dans le cas du contrôle de forme statique par actionnement capacitif (par exemple, micro-miroirs développés par Okotech, [Vdovin95]), on se ramène alors à un problème d'optimisation sous contrainte de positivité, plus simple à résoudre que le problème initial (fig. 11), puisque les couplages ont disparu (fig. 13). On donne à la section suivante des illustrations de l'implémentation numérique de cette méthode.

c) Exemple : commande électrostatique d'un micromiroir

Nous ne considérons dans cette partie que le cas de membranes circulaires, bien que les solutions que nous avons implémentées s'appliquent à des géométries quelconques. Soit une « plaque » de rayon R_0, d'épaisseur h, pouvant être actionnée à l'aide de N électrodes situées à une distance G de la plaque au repos. Les paramètres physiques définissant la plaque (constantes d'élasticité, éventuelles contraintes résiduelles) sont connus.

Si l'on veut donner à la plaque une forme axisymétrique, définie par un polynôme ou une autre fonction simple, la démarche présentée dans [R3] peut être appliquée. Tout d'abord, on peut trouver une solution analytique au problème de Von Karman inverse, c.-à-d. calculer exactement les distributions des fonctions d'Airy et de la pression à appliquer à la plaque pour lui donner la forme souhaitée.

Ainsi, dans le cas d'une forme définie par un polynôme de degré 4,

$$w_i(r) = W_0\left(1-\frac{r^2}{R_0^2}\right)^2, \tag{18}$$

on obtient la fonction d'Airy et la pression suivantes :

$$\chi_i(r) = -EW_0^2\left(\frac{1}{48}\frac{r^8}{R_0^8}-\frac{1}{9}\frac{r^6}{R_0^6}+\frac{1}{4}\frac{r^4}{R_0^4}-\frac{1}{12}\frac{5-3\nu}{1-\nu}\frac{r^2}{R_0^2}\right), \tag{19}$$

$$P_i(r) = \frac{16}{3(1-\nu^2)}\frac{Eh^3W_0}{R_0^4}+\frac{4}{3}\frac{EhW_0^3}{R_0^4}\left(\frac{5-3\nu}{1-\nu}-\frac{22-18\nu}{1-\nu}\frac{r^2}{R_0^2}+30\frac{r^4}{R_0^4}-20\frac{r^6}{R_0^6}+5\frac{r^8}{R_0^8}\right). \tag{20}$$

Notons que le problème de Von Karman direct est réputé ne pas avoir de solution analytique, même dans les cas les plus simples [Landau67].

Si l'on souhaite donner à la plaque une forme quelconque, ou si la géométrie de la plaque ne se prête pas à une résolution analytique (par exemple, si la plaque est rectangulaire), on est contraint d'avoir recours à des résolutions numériques de la seconde équation de Von Karman. Dans [R12], on décrit la méthode choisie pour résoudre numériquement le problème de Von Karman inverse : celle-ci repose sur le calcul d'une solution particulière à (3) à l'aide de transformées de Fourier 2D et d'une solution homogène obtenue à l'aide de la méthode des éléments frontières. Des solutions typiques de ce problème inverse sont représentées à la figure 14.

Sous les hypothèses faites au paragraphe précédent, on linéarise la première équation de Von Karman au voisinage de w_i pour obtenir :

$$P_a - P_i \approx \Lambda_{w_i}\delta w = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\Delta^2\delta w - h\left(\frac{\partial^2\chi_i}{\partial y^2}\frac{\partial^2\delta w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\chi_i}{\partial x^2}\frac{\partial^2\delta w}{\partial y^2}-2\frac{\partial^2\chi_i}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2\delta w}{\partial x\partial y}\right). \tag{21}$$

En supposant que la contribution de chaque électrode puisse être approchée à l'aide de la formule des capacités planes (10), la pression à appliquer peut s'écrire :

$$P_a = \frac{\varepsilon_0}{2}\sum_{k\le N}\frac{{V_k}^2U_k}{(G-w_i-\delta w)^2}, \tag{22}$$

où U_k est la fonction caractéristique de la $k^{\text{ème}}$ électrode (i.e. $U_k(M)$ vaut 1 si M fait partie du domaine défini par la $k^{\text{ème}}$ électrode et 0 sinon). Enfin, si les déplacements résiduels sont faibles par rapport à G-w_i, on peut écrire :

$$P_a \approx \frac{\varepsilon_0}{2}\sum_{k\le N}\frac{{V_k}^2U_k}{(G-w_i)^2}. \tag{23}$$

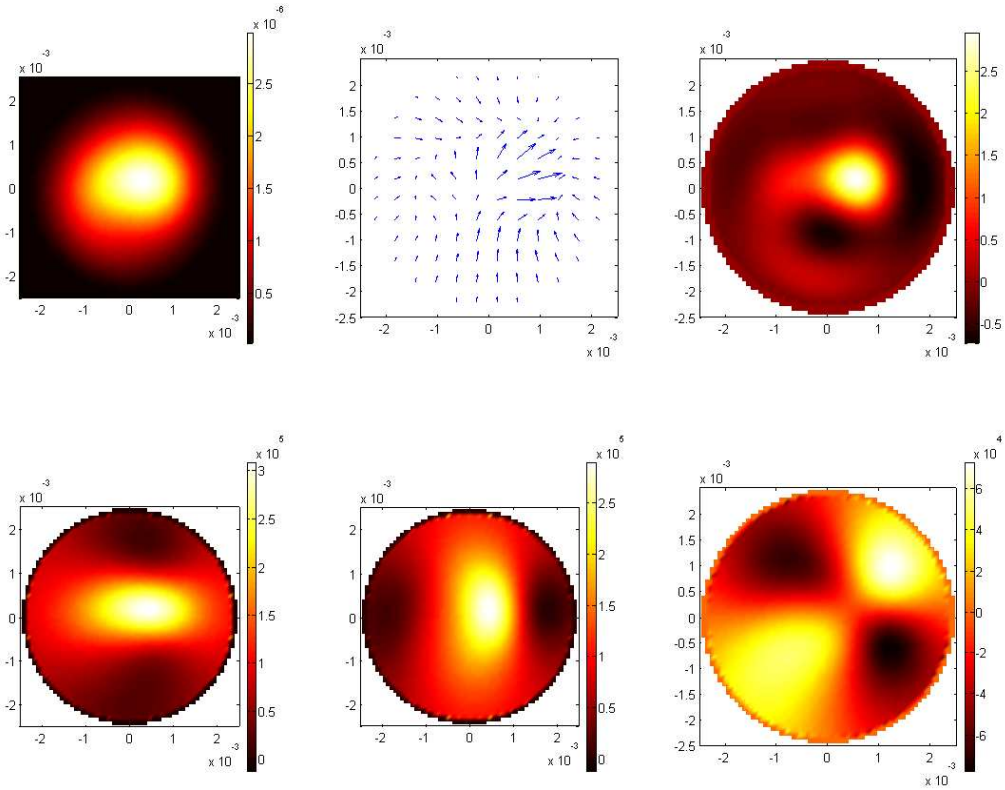

Fig. 14 - Solution du problème inverse pour une distribution de déplacements w_i (en haut, à gauche). La résolution de la seconde équation de Von Karman fournit les déplacements dans le plan (u_x, u_y, en haut, au centre) et les composantes du tenseur des contraintes correspondantes ($\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}$, en bas, de gauche à droite). En injectant ces solutions dans la première équation de Von Karman, on peut déterminer la pression (en haut à droite) à appliquer à la membrane pour obtenir w_i.

Ainsi (21) devient :

$$\Lambda_i \delta w = P_i - \frac{\varepsilon_0}{2} \sum_{k \le N} \frac{V_k{}^2 U_k}{(g - w_i)^2} . \tag{24}$$

On cherche alors les déplacements résiduels sous la forme :

$$\delta w \approx \sum_{i \le M} \alpha_i \delta w_i , \tag{25}$$

où les $\{\delta w_i\}_{i \le M}$ sont des fonctions de bases choisies « convenablement » (par exemple, des éléments finis, des modes propres de la membrane, des fonctions de Green, etc...). La projection de (24) sur (25) aboutit à la relation matricielle:

$$\mathbf{L\alpha} = \mathbf{Rb} - \mathbf{p} \text{ avec} \begin{cases} L_{mp} = \langle \Lambda_i \delta w_p \,|\, \delta w_m \rangle \\ R_{mn} = \dfrac{\varepsilon_0}{2} \left\langle \dfrac{U_n}{(g - w_i)^2} \middle| \delta w_m \right\rangle, \; p \le M, m \le M, n \le N , \\ b_n = V_n{}^2 \\ p_m = \langle P_i \,|\, \delta w_m \rangle \end{cases} \tag{26}$$

où $\langle u | v \rangle$ est un produit scalaire.

Si l'on cherche à minimiser les déplacements résiduels en un nombre de points donnés $C_1, \ldots, C_Q$ (on parle de points de collocation), on doit définir :

$$S_{qm} = \delta w_m(C_q), m \le M, q \le Q, \tag{27}$$

de sorte que :

$$\delta w(C_q) = \sum_{m=1}^{M} S_{qm}\alpha_m \ . \tag{28}$$

Ainsi, on se ramène au problème de la minimisation de :

$$\|\mathbf{S}\boldsymbol{\alpha}\| = \left\|\mathbf{S}\mathbf{L}^{-1}(\mathbf{R}\mathbf{b} - \mathbf{p})\right\| \tag{29}$$

sous la contrainte que les composantes de $\mathbf{b}$ soient positives. Comme nous l'avons précisé dans l'introduction de cette partie, ce problème est « mal posé », dans le sens où il peut avoir plusieurs solutions approchées. Nous avons donc mis en œuvre des techniques de régularisation (par exemple, Tikhonov), permettant de réduire l'espace des solutions à des amplitudes faibles des tensions. Ainsi, le problème de minimisation peut s'écrire sous la forme:

$$\mathbf{b}_s(\lambda) = \arg\min\left(\left\|\mathbf{S}\mathbf{L}^{-1}(\mathbf{R}\mathbf{b} - \mathbf{p})\right\|^2 + \lambda\|\mathbf{b}\|^2, b_n \ge 0, 1 \le n \le N\right). \tag{30}$$

Le problème de minimisation non contraint possède une solution analytique : celle-ci est calculée et conservée si elle vérifie les contraintes. Dans l'autre cas, une méthode de minimisation numérique doit être employée pour résoudre un problème (convexe) de programmation quadratique.
On présente aux figures 15, 16 et 17 des résultats de calcul typiques, avec et sans régularisation, dans des cas 1D[5] et 2D[6].

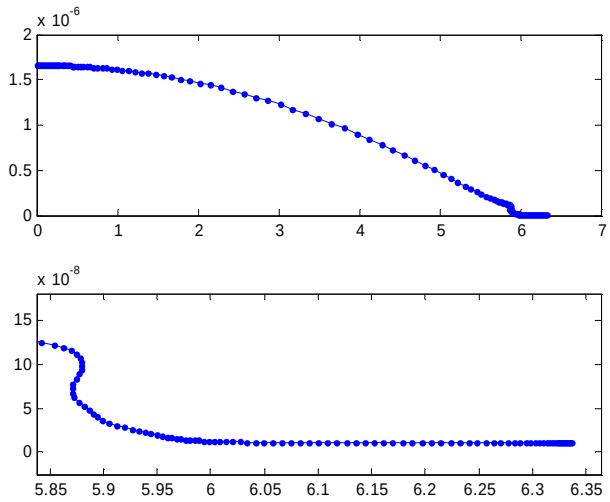

Fig. 15 - Courbe en L correspondant au problème (30) : norme des déplacements résiduels (à comparer à $W_0 = 3\times10^{-6}$m) en fonction de la norme des tensions appliquées.

[5] Membrane circulaire de rayon R0=2.5mm, d'épaisseur h=1 micron, actionnée par 8 électrodes annulaires de rayons internes (0 300 600 900 1200 1500 1800 2100), espacées de 10 microns, avec un entrefer de 10 microns.
[6] Membrane identique au cas 1D. 64 électrodes sont utilisées. Leurs rayons internes et externes sont les mêmes que dans le cas 1D et elles définissent 8 secteurs angulaires égaux.

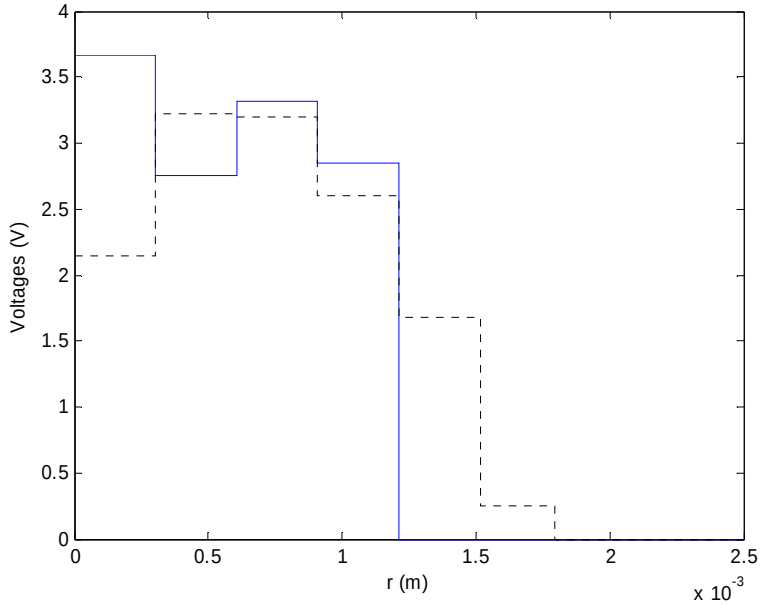

Fig. 16 : tensions trouvées sans régularisation (trait continu) et avec régularisation (à droite), correspondant à l'indice 200 dans la fig. 15. Dans les deux cas, l'amplitude des déplacements résiduels n'excède pas 50 nm. La solution régularisée met en jeu des amplitudes plus faibles que la solution « brute ».

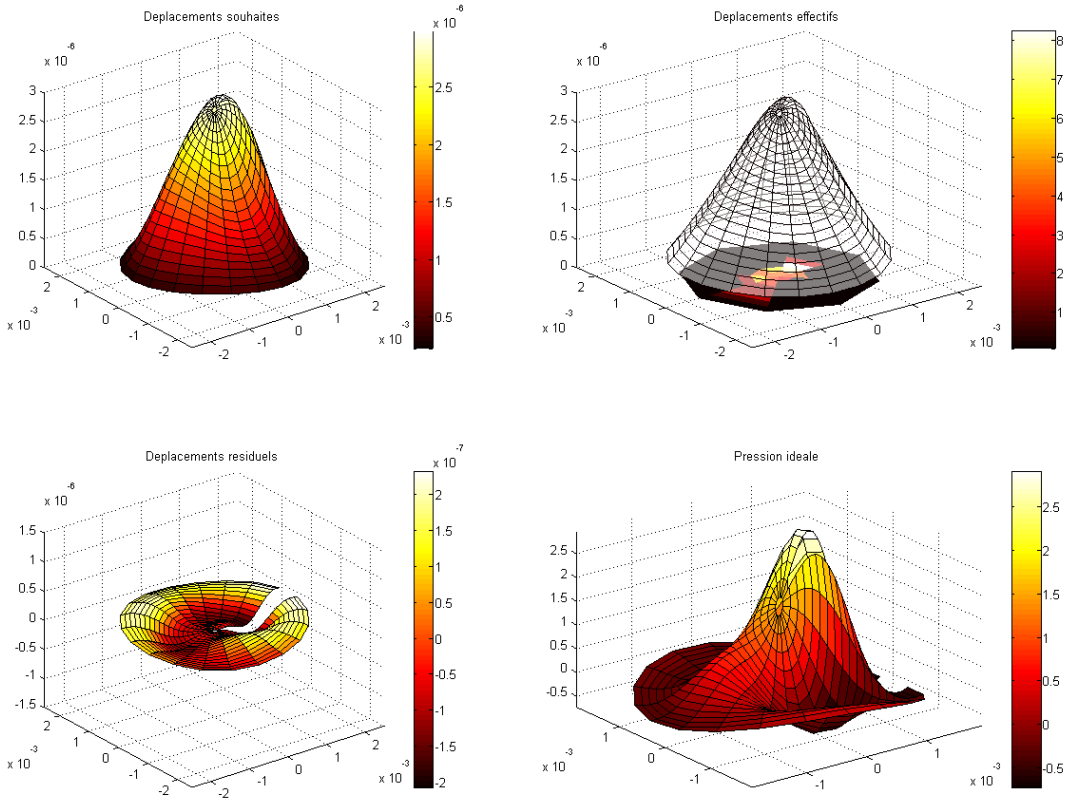

Fig. 17 : résultats typiques dans un cas 2D. La forme à imposer (en haut à gauche) est la même que dans la fig. (14). La pression idéale lui correspondant est représentée en bas à droite. Le résultat de l'optimisation du critère (30) donne des déplacements résiduels (en bas, à gauche) de l'ordre du dixième de micron, avec ou sans régularisation. On obtient une tension maximale de l'ordre de 8V (en haut à droite). Sans régularisation, la tension maximale dépasse 10V.

d) Implémentation et validation numérique

Dans l'approche décrite au paragraphe précédent, quelques points peuvent soulever des difficultés. Tout d'abord, l'implémentation numérique de la méthode est rendue délicate à cause de la présence de dérivations dans le problème inverse : ainsi, dans le cas des équations de Von Karman, est-il nécessaire de connaître la dérivée quatrième du déplacement par rapport à l'espace et, si le contrôle est dynamique, sa dérivée seconde par rapport au temps. Cette approche est donc réservée au domaine de la simulation, où il est possible de définir la consigne de manière analytique. Si on souhaite l'utiliser dans un cadre pratique, où la consigne est déterminée par un ensemble de mesures, qui peuvent être sujettes à du bruit, il conviendra d'estimer conjointement la valeur des déplacements et leurs dérivées.

D'autre part, soulignons qu'il est nécessaire de choisir w_i dans l'espace des solutions admissibles pour les équations de Von Karman. Notamment, w_i doit être suffisamment dérivable et vérifier les conditions aux limites du problème. Si on souhaite imposer une forme qui existe en dehors de cette espace, il faut tout d'abord en trouver une projection sur l'espace des solutions et appliquer l'approche inverse à cette projection. Par exemple, si l'on tente d'imposer une forme parabolique - suffisamment dérivable, mais ne vérifiant pas les conditions d'encastrement - à une plaque circulaire, l'approche inverse aboutit à des résultats [R3], mais ceux-ci sont complètement faux [C12]. En revanche, la démarche qui consiste à chercher une approximation admissible de la forme souhaitée (que ce soit sous forme polynomiale [C12] ou sous forme d'une superposition de modes de l'opérateur linéaire [C4]) fournit de bons résultats. Par ailleurs, tous ces calculs ont été validés en effectuant des simulations du problème direct à l'aide du logiciel éléments finis ANSYS.

Ces difficultés sont prises en compte dans l'outil IDEA (Inverse Design of Electrostatic Actuators), que nous avons développé en langage Matlab. Cet outil, grâce auquel les résultats présentés dans cette partie ont été obtenus, permet d'effectuer l'ensemble des opérations décrites dans cette partie sur des membranes circulaires ou rectangulaires.

3) Prise en compte des non-linéarités dans les modèles d'ordre réduit de composants MEMS

a) Contexte

L'approche présentée au chapitre précédent est limitée aux applications où l'on cherche à imposer une forme : on ne saurait l'utiliser telle quelle pour résoudre un problème direct où c'est la sollicitation qui est connue et les déplacements que l'on cherche à déterminer. La résolution numérique directe du système d'EDP régissant le MEMS doit alors être envisagée [Senturia97, Aluru99]. Sa discrétisation à l'aide de méthodes de type éléments finis, éléments frontières, etc. aboutit souvent à des systèmes comportant des milliers, voire des millions, de degrés de liberté. La co-simulation du MEMS avec son électronique associée devient alors très pénible et la validation, pré-réalisation, ou l'optimisation d'une structure ou d'une architecture en pâtit.

Pour contourner cette difficulté, on cherche souvent à réduire la complexité du modèle de la partie physique du système, à l'aide d'outils variés, que l'on regroupe sous le nom de ROM (pour « réduction d'ordre de modèle » ou « reduced-order modelling ») ou de MOR. Les démarches les plus communes pour réduire la complexité du problème initial sont les suivantes :

A. Extraire les modes fondamentaux du système d'EDP discrétisé. La solution du problème initial est alors cherchée comme une combinaison linéaire de ces modes. Par « modes », on entend soit les modes propres de l'opérateur différentiel (linéarisé) correspondant au système d'EDP [Gabbay98, Chen04], soit, plus généralement, toute base orthonormée permettant de représenter correctement la sortie du système pour un

ensemble d'entrées donné [Hung99, Chen01]. Dans ce dernier cas, il est nécessaire d'effectuer plusieurs simulations du système complet pour créer une base de données des sorties que l'on puisse traiter à l'aide de méthodes de type Analyse en Composantes Principales [Hung99]. Cette dernière méthode semble aboutir à des modèles d'ordre réduits valables sur une étendue plus grande que la première [Chen01] ; en contrepartie, elle est plus lourde à implémenter, puisqu'elle nécessite une simulation du système complet, au contraire des méthodes reposant sur l'extraction des modes propres de l'opérateur linéarisé.

B. Extraire les modes propres du système d'EDP (ou d'une partie de ce système) de manière analytique. Cela exige que l'on puisse simplifier suffisamment la géométrie du problème pour, par exemple, remplacer un solide 3D dont le comportement élastique serait décrit par l'équation de Navier [Landau67] par une poutre monodimensionnelle (1), ou réduire l'écoulement d'air autour de la structure, décrit par les équations de Navier-Stokes, aux phénomènes d'amortissement du type SFD décrits à la section I (4-5). Cette démarche simplificatrice a comme principale vertu d'aboutir à des expressions littérales du modèle d'ordre réduit, où apparaissent les différents paramètres physiques du système étudié [Veijola95, Younis04, Abdel-Rahman03]. Ainsi, les modèles réduits obtenus par ces méthodes sont plus volontiers manipulés par des « physiciens » que ceux issus de démarches purement numériques. Par ailleurs, l'existence de résultats analytiques ou semi-analytiques peut alléger sensiblement l'optimisation des paramètres d'un système. Des hypothèses supplémentaires peuvent être faites, notamment sur le type d'excitation utilisée : par exemple, la méthode des perturbations, développée dans [Bogolioubov62] puis dans [Nayfeh79], permet d'obtenir des expressions analytiques de la tension de pull-in de micro-poutres soumis à des excitations sinusoïdales [Abdel-Rahman03].

J'ai eu l'occasion de développer des modèles d'ordre réduit, de préférence avec une approche semi-analytique, notamment pour la modélisation de la cellule physique de l'accéléromètre Locadyn-3D, en partenariat avec le CEA-LETI et Tronic's. Si des équivalents de ces modèles peuvent être obtenus à l'aide de logiciels du commerce (CoventorWare, par exemple), le modèle d'ordre réduit de plaque circulaire en grands déplacements dont la présentation suit constitue un apport à ce champ de recherche.

b) Modélisation d'ordre réduit d'une plaque circulaire en grands déplacements

(1) Position du problème

De nombreux composants MEMS (micro-pompes, micro-miroirs) peuvent être modélisés comme des plaques circulaires. Lorsque l'ordre de grandeur des déplacements de la structure dépasse le tiers de l'épaisseur de la plaque, on considère que le régime des grands déplacements est atteint ; sous certaines hypothèses [Landau67], on peut alors modéliser le comportement de la plaque à l'aide des équations de Von Karman (3). Par exemple, dans le cas des micro-miroirs présentés dans [Vdovin95], les déplacements que l'on cherche à obtenir sont environ 10 fois plus grands que l'épaisseur de la plaque.

(2) Construction du modèle

Le modèle d'ordre réduit que nous avons proposé dans [R1] repose sur une décomposition modale de la solution de la première équation de Von Karman ; les déplacements sont cherchés sous la forme

$$w(r,t) \approx \tilde{w}(r,t) = \sum_{k=1}^{N} a_k(t) w_k(r), \qquad (31)$$

où les fonctions $w_k(r)$ vérifient:

$$\begin{aligned} &\Delta^2 w_k = \alpha_k{}^4 w_k \\ &w_k(R_0) = 0, \frac{dw_k}{dr}(R_0) = 0 \end{aligned}, \tag{32}$$

de sorte que toute superposition de ces fonctions vérifie les conditions d'encastrement en R_0. Ainsi, on trouve le résultat (connu) :

$$w_k(r) = A_k\left(I_0(\alpha_k R_0)J_0(\alpha_k r) - J_0(\alpha_k R_0)I_0(\alpha_k r)\right), \tag{33}$$

où α_k est solution de :

$$I_0(\alpha_k R_0)J_1(\alpha_k R_0) + J_0(\alpha_k R_0)I_1(\alpha_k R_0) = 0 \tag{34}$$

et A_k peut être choisi de sorte que les $w_k(r)$ forment une base orthonormée.
On procède de manière similaire pour la seconde équation de Von Karman (3). On cherche à exprimer la fonction des contraintes d'Airy comme une superposition de fonctions

$$\chi(r,t) \approx \tilde{\chi}(r,t) = \sum_{k=1}^{N} b_k(t)\chi_k(r), \tag{35}$$

où

$$\begin{aligned} &\Delta^2 \chi_k = \beta_k{}^4 \chi_k \\ &\chi_k(R_0) = 0, \left.\frac{\partial \chi_k}{\partial r}\right|_{R_0} - R_0 \left.\frac{\partial^2 \chi_k}{\partial r^2}\right|_{R_0} = 0 \end{aligned}. \tag{36}$$

La première de ces conditions aux limites est arbitraire : seules les dérivées de la fonction des contraintes ont une signification physique. La deuxième condition équivaut à imposer un déplacement radial nul en R_0.
On trouve une solution de la même forme que (33) :

$$\chi_k(r) = B_k\left(I_0(\beta_k R_0)J_0(\beta_k r) - J_0(\beta_k R_0)I_0(\beta_k r)\right), \tag{37}$$

où β_k est la $k^{\text{ème}}$ solution non-triviale de :

$$\Lambda_{\nu,R_0}(\beta) = (\nu+1)\left(J_1(\beta R_0) + J_0(\beta R_0)\frac{I_1(\beta R_0)}{I_0(\beta R_0)}\right) - 2\beta R_0 J_0(\beta R_0) = 0\,. \tag{38}$$

On a représenté, à la figure 18, $\Lambda_{\nu,1}(\beta)$ et le premier mode propre pour différentes valeurs du coefficient de Poisson.

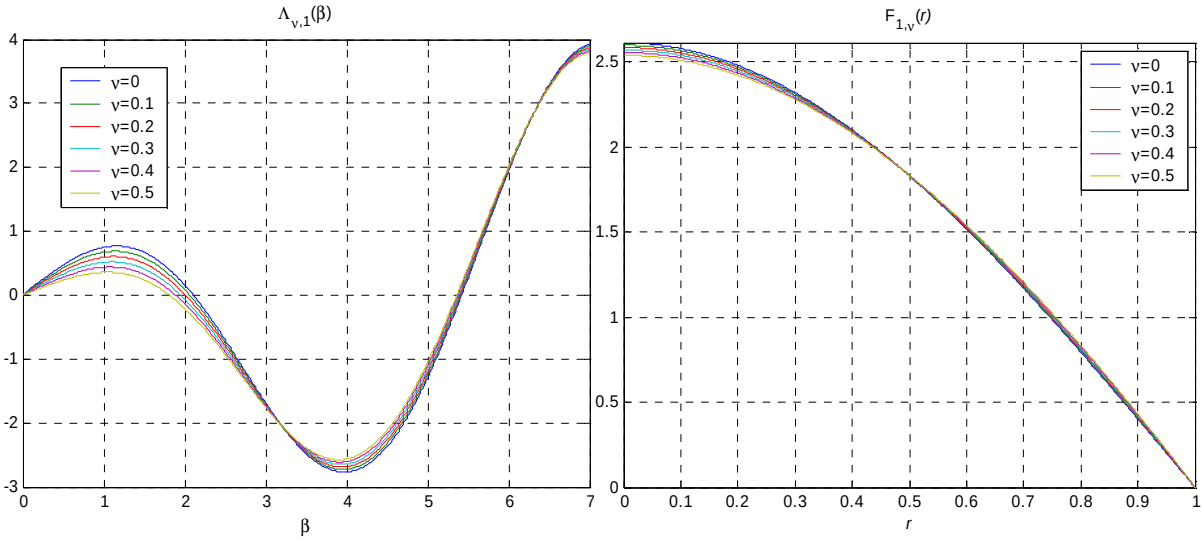

Fig. 18 - Allure de $\Lambda_{\nu,1}(\beta)$ pour 6 valeurs du coefficient de Poisson (à gauche) et fonction de base χ_1 correspondant (à droite).

Ainsi, un modèle d'ordre réduit des équations de Von Karman est donné par le système d'équations différentielles :

$$\begin{cases} \mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\rho h s^2 + \dfrac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\alpha_1^{\,4}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \dfrac{1}{\rho h s^2 + \dfrac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\alpha_N^{\,4}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle P + \Phi(\mathbf{a},\mathbf{b}) | w_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle P + \Phi(\mathbf{a},\mathbf{b}) | w_N \rangle \end{pmatrix} \\ \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\beta_1^{\,4}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \dfrac{1}{\beta_1^{\,M}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle F(\mathbf{a}) | \chi_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle F(\mathbf{a}) | \chi_M \rangle \end{pmatrix} \end{cases}, \tag{39}$$

où l'on a noté :

$$F(\mathbf{a}) = -\frac{E}{r}\frac{\partial \tilde{w}}{\partial r}\frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial r^2}, \tag{40}$$

et

$$\Phi(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \frac{h}{r}\left(\frac{\partial^2 \tilde{\chi}}{\partial r^2}\frac{\partial \tilde{w}}{\partial r} + \frac{\partial \tilde{\chi}}{\partial r}\frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial r^2}\right). \tag{41}$$

L'apparente simplicité de (39) peut prêter à confusion : tout d'abord, du fait de la dépendance en $\mathbf{a}$ du second membre de la première équation, il s'agit là d'un système d'équations aux dérivées algébriques, c.-à-d. qu'il n'est pas possible d'expliciter. Par ailleurs, il est possible de supprimer toute référence à $\mathbf{b}$ de ces expressions mais ceci alourdit considérablement les

notations. Les paramètres de « réglage » de ce modèle sont les entiers N et M (ordres des troncatures).
En fait, un modèle presque similaire, reposant sur une approximation modale de la première équation de Von Karman, existe dans [Nayfeh79]. En revanche, pour tenir compte des grands déplacements, Nayfeh a recours à une astuce de calcul qui lui permet de simplifier certaines expressions : il multiplie la deuxième équation de Von Karman par r et l'intègre une fois, ce qui lui permet de trouver une équation vérifiée par la dérivée de la fonction d'Airy. C'est donc cette dérivée qu'il cherche - et parvient - à approximer sous la forme d'une décomposition modale. Ainsi, lorsque les ordres des troncatures tendent vers l'infini, les deux modèles doivent-ils donner des résultats identiques. En revanche, on peut démontrer que, à ordre de troncature égal, la précision de notre modèle devient rapidement meilleure que celle du modèle de Nayfeh (fig. 19).

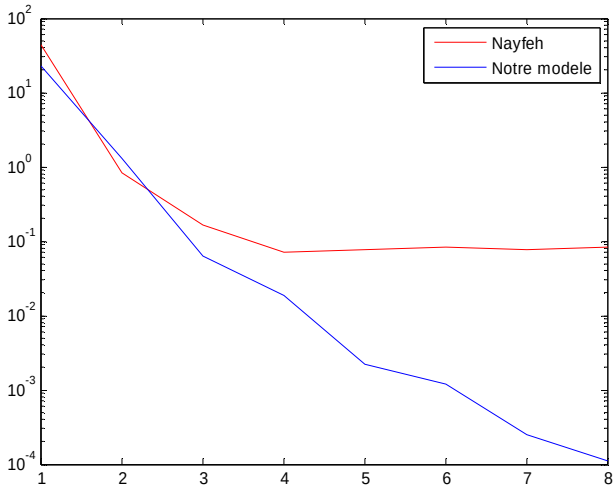

Fig. 19 - Norme des résidus des modèles en fonction de l'ordre de la troncature M. Les résidus sont obtenus en comparant les déplacements obtenus à l'aide de notre modèle (courbe bleue) et de celui de Nayfeh (courbe rouge) à une solution analytique.

Ce modèle a été validé numériquement en comparant les résultats obtenus à l'aide d'une implémentation Simulink et une solution analytique des équations de Von Karman dynamiques - obtenue par inversion du problème, comme dans la partie précédente. A nouveau, on a pu constater que, pour des paramètres identiques, l'implémentation numérique du modèle de Nayfeh entraîne des erreurs plus importantes. Dans le contexte de la conception de MEMS, ceci ne doit pas être négligé. Ainsi, une approche de conception reposant sur l'emploi de techniques de recuit simulé (par exemple, pour optimiser les paramètres d'une structure) nécessiterait un nombre très important de simulations, dont on doit s'efforcer de réduire le coût unitaire : le compromis précision-temps de calcul est donc crucial. Ceci vaut également dans un contexte d'identification de modèles non-linéaires. Enfin, les différences entre les deux modèles peuvent se trouver amplifiées dans le cas des comportements instables (pull-in) ou à la limite de l'instabilité (chaos [Wang98, Liu04]), que l'on rencontre souvent dans le domaine des MEMS.

4) Conclusion

J'ai présenté dans ce chapitre quelques manières de traiter, en modélisation, des problèmes inhérents à la physique des MEMS, liés notamment à l'existence de couplages forts et de non-linéarités.

Si de telles approches, ancrées dans la physique, sont essentielles à la conception des MEMS, puisque elles seules permettent le dimensionnement *a priori* de microstructures, elles sont loin d'être suffisantes. Tout d'abord, on ne saurait réduire un MEMS à sa composante micromécanique et ignorer complètement, durant la phase de conception, l'électronique de mesure, de traitement et éventuellement de commande qui sera associée au capteur. Cette électronique doit être adaptée aux non-linéarités de fonctionnement (par exemple, grands déplacements mécaniques), de détection ou d'actionnement (par exemple, électrostatique) évoquées aux parties précédentes. De plus, comme je l'ai souligné dans l'introduction de ce mémoire, les composants MEMS souffrent de dispersions importantes lors de leur réalisation et leur comportement peut varier en fonction des conditions d'opération[7]. Par ailleurs, à supposer que l'impact des dispersions et des variations environnementales puisse être négligé, l'ignorance ou la méconnaissance de certains phénomènes (notamment l'amortissement, fluidique ou structurel), de certaines grandeurs physiques, est également la source de nombreuses incertitudes. Ainsi la fiabilité des modèles de MEMS n'est en général pas suffisante pour permettre de définir exactement les traitements réalisés par l'électronique : il est plus réaliste de considérer que la modélisation est suffisante pour fournir une structure du modèle de la partie physique du MEMS mais pas une valeur précise des paramètres de ce modèle.

En conséquence, l'architecture de l'électronique associée à la microstructure doit, d'une part, être adaptée aux non-linéarités de la physique des MEMS et doit, d'autre part, répondre à la problématique des incertitudes, liées aux dispersions, aux variations et aux erreurs de modèle. Ces deux points sont inhérents à l'électronique associée aux MEMS : ils constituent un problème inévitable lors de la conception d'un microsystème. J'ai donc décidé d'y consacrer l'autre partie de mon travail.

[7] Ceci constitue en général un problème, même s'il existe des applications, comme les « capteurs résonants », où c'est un effet recherché.

III. Prise en compte des non-linéarités et des incertitudes dans les architectures de microsystèmes

Concevoir une électronique co-intégrée à une microstructure pose des problèmes relevant à la fois de la technologie (compatibilité entre les procédés de fabrication du MEMS et ceux de l'électronique, par exemple), de l'électronique « pure » (comment mesurer pratiquement de très faibles variations de capacités ?) et de l'architecture [Boser96, Senturia01]. C'est ce dernier aspect qui est abordé dans ce chapitre.

Deux méthodes de mesure sont communément employées dans l'univers des MEMS : la mesure d'amplitude et la mesure de fréquence. La première suppose une relation connue entre l'entrée (le phénomène à mesurer, par exemple une accélération) et la sortie du système (par exemple un déplacement). Il « suffit » alors d'inverser la relation entrée-sortie pour déterminer l'amplitude du phénomène à mesurer, connaissant l'amplitude de la sortie. La seconde nécessite la détermination de la fréquence de résonance du système et suppose l'existence d'une relation entre cette fréquence et le phénomène à mesurer.

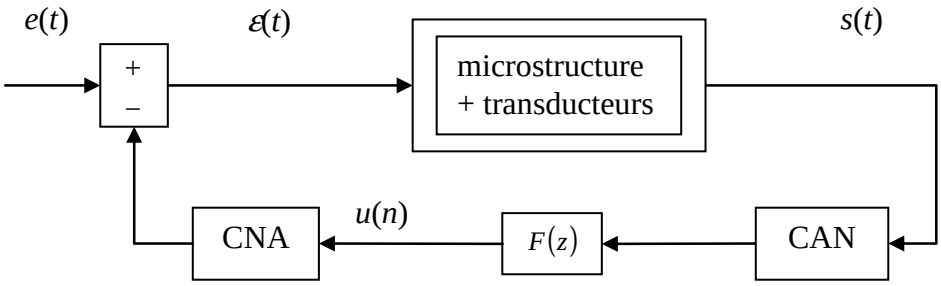

Fig. 20 - Pour une mesure d'amplitude, la sortie $s(t)$ du système est numérisée puis, éventuellement, traitée par un filtre $F(z)$ pour générer une commande $u(n)$ qui s'oppose à l'entrée $e(t)$. Si l'asservissement est correctement réalisé, la relation entre $\varepsilon(t)$ et $s(t)$ peut être linéarisée.

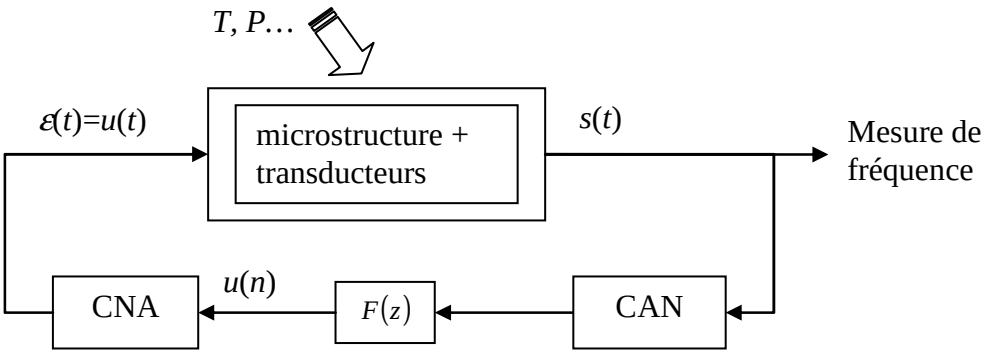

Fig. 21 - Pour une mesure de fréquence, le filtre de réaction $F(z)$ est choisi pour que la microstructure oscille à une fréquence proche de sa fréquence naturelle, laquelle est affectée par les phénomènes à mesurer.

En supposant que l'électronique associée au capteur, hors pré-amplification, soit numérique, les exigences d'une mesure d'amplitude sont (figure 20) une conversion analogique-numérique précise, qui fixe la résolution de la mesure et une électronique de traitement et, éventuellement, de commande permettant de linéariser la relation entrée-sortie.

Pour une mesure de fréquence (figure 21), il est nécessaire de placer la microstructure dans une boucle de réaction assurant sa mise en oscillation et de déterminer la fréquence de ces oscillations à l'aide d'un oscillateur de référence.

Les deux méthodes présentent des similitudes structurelles, mais leurs modes de fonctionnement diffèrent profondément : alors que la mesure de fréquence nécessite la mise en oscillation de la cellule mécanique, la mesure d'amplitude requiert, quant à elle, l'annulation des oscillations qui pourraient y naître et des mouvements résultant des variations de l'entrée du système. En conséquence, les composants apparaissant dans chacune des architectures ne présentent-ils pas les mêmes caractéristiques. Par exemple, la mise en oscillation d'une microstructure exige la connaissance de la phase de la sortie du système : ainsi, dans ce type d'application, peut-on se contenter d'utiliser un simple comparateur comme CAN. Cette solution est d'autant plus attrayante qu'un comparateur est un composant de faible coût. Par opposition, un CAN de haute résolution exige une surface d'intégration importante et des composants analogiques de qualité (par exemple, des résistances appariées). Une solution alternative, couramment utilisée dans les applications MEMS [Kraft97, Jiang00, projet Locadyn] consiste à réaliser la conversion analogique-numérique à l'aide d'une architecture sigma-delta (fig. 22). L'étude théorique des systèmes mixtes (continu-discret) bouclés à comparateur, que nous avons menée dans le cadre de la thèse d'Eric Colinet, est donc motivée par leur émergence dans les deux types de capteurs, passe-bas [Kraft97] ou résonants [Dominguez05]. Notons également que l'utilisation d'un comparateur et d'un filtre de retour $F(z)$ convenablement choisi peut permettre de « gommer » certaines non-linéarités intrinsèques aux MEMS.

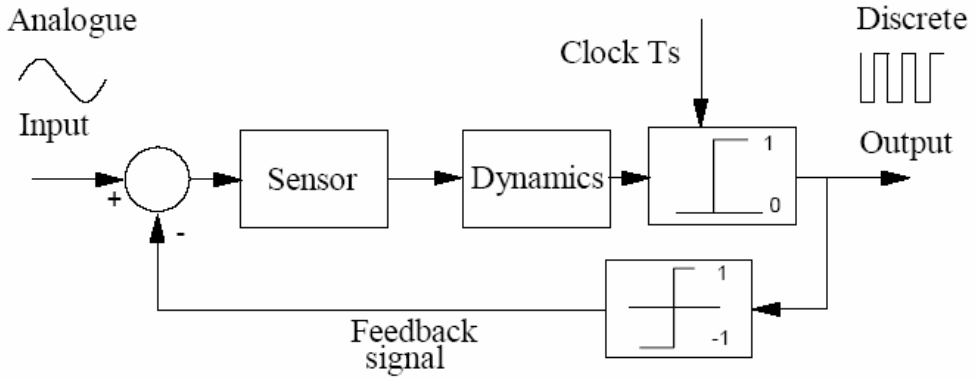

Fig. 22 - Un exemple de capteur sigma-delta (extrait de [Kraft97]). La position du capteur est maintenue proche de zéro grâce à un retour binaire sur-échantillonné (la fréquence d'échantillonnage est très grande devant la fréquence de coupure du capteur).

Pour fonctionner correctement, chacune de ces méthodes requiert un calibrage du capteur. Celui-ci est nécessaire pour la détermination et l'inversion de la relation entre le phénomène physique que l'on cherche à déterminer et la quantité mesurée, car cette relation varie d'une microstructure à une autre. L'ajustement des coefficients du filtre de retour $F(z)$ en fonction des résultats de cette étape de calibrage permet au capteur de fonctionner de manière optimale. Comme les caractéristiques de la structure varient au cours de sa vie (en fonction des conditions d'opération, par exemple), il est souhaitable que cette étape de calibrage ait lieu régulièrement, voire, idéalement, que le filtrage réalisé soit adaptatif. Les méthodes « macroscopiques » d'identification de paramètres reposent toutes [Walter94] sur la mesure de la sortie quantifiée du système étudié. Du fait du coût d'intégration et de conception des CAN de haute résolution, nous avons développé plusieurs méthodes d'identification reposant uniquement sur la mesure du signe de la sortie du système. Ces méthodes ne nécessitent donc, en pratique, qu'un seul comparateur : en contrepartie, le traitement numérique à appliquer aux données est plus lourd que dans les méthodes classiques.
Dans ce chapitre, nous développons les trois points suivants :

- un exemple de système résonant qui repose sur la méthode « d'actionnement par impulsions », qui permet de réduire l'influence des non-linéarités en déplacement sur le fonctionnement du système complet ;
- quelques résultats théoriques sur les systèmes mixtes bouclés à comparateur et leur application ;
- des méthodes originales d'identification à partir de données binaires, en boucle fermée - méthodes MCL (Mesure de Cycle Limite) - et en boucle ouverte - méthode BIMBO (Basic Identification Method using Binary Observations).

1) Actionnement par impulsions de microstructures oscillantes

a) MEMS résonants et actionnement par impulsions

En pratique, il existe un grand nombre de dispositifs électriques permettant de mettre en oscillation un microrésonateur. Une première approche consiste à utiliser la structure résonante comme élément actif d'une boucle de réaction. Cette boucle est constituée d'un filtre, communément de type intégrateur, qui assure un déphasage approprié entre la sortie et l'entrée de la structure [Bientsman96, Clark97, Nguyen99, Seshia02]. Ces solutions ont l'avantage d'être très compactes mais sont très sensibles aux dispersions de fabrication et surtout à toutes les sources de non-linéarité présentes dans la boucle.

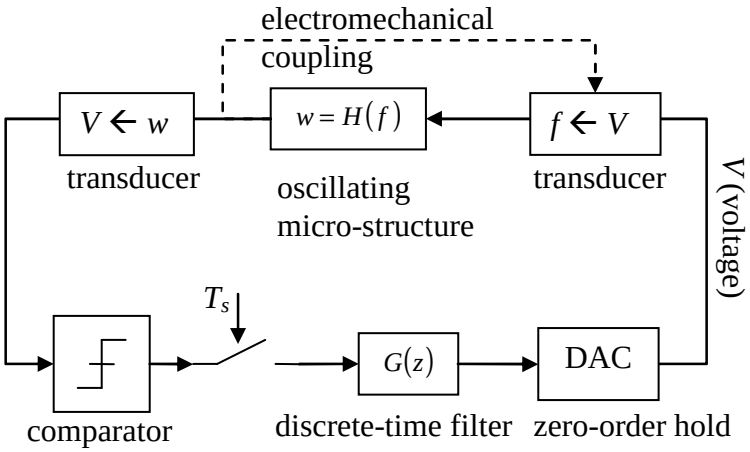

Fig. 23 - Architecture mixte de MEMS résonant à comparateur.

Afin de contourner ces difficultés, des approches plus robustes ont été élaborées pour exciter la structure mécanique à sa résonance. Elles font appel à un oscillateur externe dont la fréquence des oscillations est commandée en tension (VCO) [Andrews93, Corman00, Melin00, Xie02]. A l'aide d'une mesure de la différence de phase entre le signal à la sortie du résonateur mécanique et le signal d'excitation, on peut ajuster la tension de commande du VCO jusqu'à obtenir le déphasage souhaité. Ce principe, identique à celui d'une boucle à verrouillage de phase (PLL), est souvent associé à une détection synchrone qui permet à la fois d'assurer une bonne détection des vibrations et de mesurer la différence de phase. Le correcteur utilisé pour délivrer le signal de commande au VCO à partir de la mesure de phase est généralement du type proportionnel intégral (PI), ce qui assure, moyennant quelques hypothèses, le suivi de la variation de la fréquence de résonance de la structure. On dit alors que l'oscillateur est verrouillé. La structure mécanique résonante est donc utilisée dans cette configuration comme un élément passif de l'oscillateur car sa transmittance n'agit pas à proprement parler sur la forme des oscillations. C'est en ce sens que cette architecture est

moins sensible aux sources de dispersion, le prix à payer étant bien évidemment une complexité accrue du circuit électronique.
Comme d'autres chercheurs [Dominguez05, Kraft97], je me suis intéressé au cas où une non-linéarité de type comparateur est introduite dans la boucle de réaction du microsystème (fig. 23). Tout d'abord, l'utilisation d'un comparateur se justifie de manière intuitive par le fait que la valeur du signe de la position d'un système est suffisante pour mettre ce système en oscillation. Par ailleurs, en considérant un comparateur comme un CAN 1 bit, on peut imaginer le faire suivre par un traitement numérique et ainsi obtenir un système oscillant sans composant analogique coûteux (par exemple, en utilisant un CNA sigma-delta dans la boucle de retour) et d'une complexité très modérée. Enfin, l'utilisation d'un comparateur autorise les moyens de détection non-linéaires (par exemple, capacitifs), tant que leur non-linéarité préserve le signe de la position du système.
En négligeant l'impact de l'échantillonnage sur le fonctionnement du système, en supposant qu'on ne commet pas d'erreur sur le signe de la position et en modélisant la microstructure comme un système linéaire du deuxième ordre, le schéma de la fig. 23 se simplifie en celui de la fig. 24.

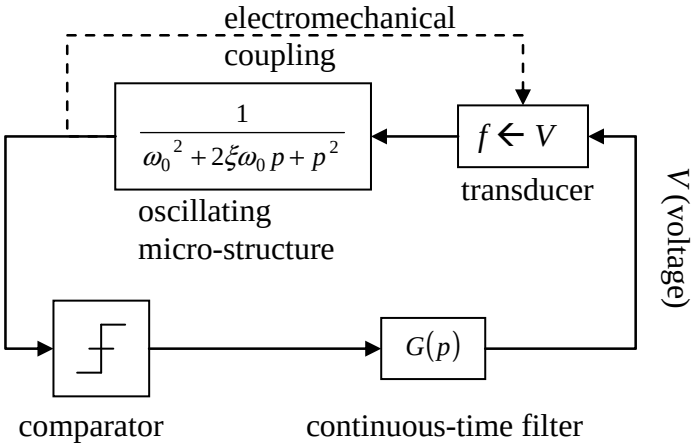

Fig. 24 - Simplification du système de la fig. 23.

Dans le cas d'une structure rigide actionnée de manière électrostatique, en faisant l'hypothèse des capacités planes, on a :

$$f(x,V) = C\frac{V^2}{(d-x)^2}, \tag{42}$$

où f désigne la force électrostatique, C est une constante positive, V est la différence de potentiel entre les électrodes et $(d-x)$ est la distance séparant les électrodes à un instant donné. Si l'on utilise deux électrodes d'actionnement situées de part et d'autre de la microstructure, chacune pouvant tirer dans une direction opposée, (42) devient :

$$f(x,V) = C\frac{\mathrm{sign}(V)V^2}{(d-\mathrm{sign}(V)x)^2}. \tag{43}$$

Il est alors possible de linéariser cette expression, par exemple en déterminant la racine carrée - si elle existe - de la commande que l'on souhaite appliquer à la microstructure ou bien en utilisant un signal binaire ([Corman00], par exemple) :

$$V = K\mathrm{sign}(V). \tag{44}$$

La force devient alors :

$$f(x,V) = CK^2 \frac{\operatorname{sign}(V)}{(d - \operatorname{sign}(V)x)^2} = \begin{cases} \dfrac{CK^2}{(d-x)^2}, \text{si } \operatorname{sign}(V) = 1 \\ 0, \text{si } \operatorname{sign}(V) = 0 \\ -\dfrac{CK^2}{(d+x)^2}, \text{si } \operatorname{sign}(V) = -1 \end{cases} . \quad (45)$$

Le seul moyen de linéariser cette expression vis-à-vis des déplacements x consiste alors à délivrer des impulsions lorsque la position du système passe par zéro, c.-à-d. à chaque commutation du comparateur. Ceci peut se faire aisément en choisissant :

$$G(p) = p \quad (46).$$

Le système original devient alors celui de la fig. 25. Ce système oscille[8], quelles que soient ses conditions initiales [R4, C14, Paven98], à la pulsation :

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2} \ . \quad (47)$$

Il est donc possible d'utiliser cette méthode dans des applications de type capteur résonant[9]. En revanche, il est impossible, dans la pratique, de générer des impulsions de tension de type Dirac. De plus, la réalisation d'un dérivateur en électronique numérique est plus facile et moins coûteuse que celle d'un dérivateur analogique. Il est donc plus réaliste d'envisager l'actionnement par impulsions sous la forme de la fig. 25, où le couplage électromécanique est négligé du fait de la brièveté des impulsions.

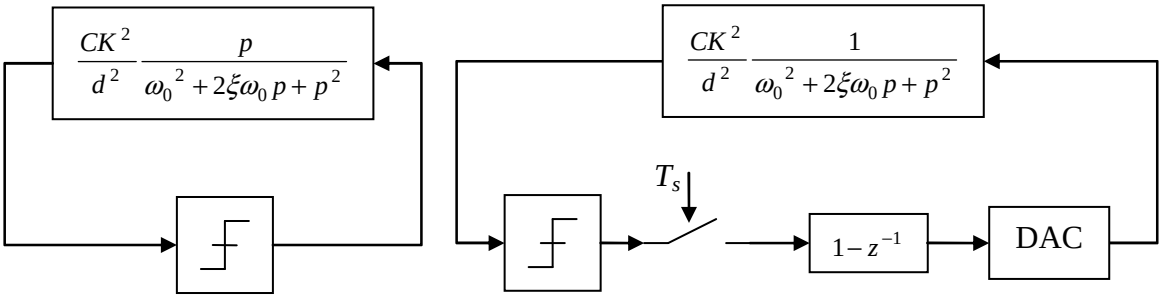

Fig. 25 - Actionnement par impulsion à temps continu (à gauche) et à temps discret (à droite).

Nous avons proposé cette solution dans [R4] et montré son applicabilité à un accéléromètre résonant (fig. 26) à détection et actionnement électrostatique, proposé dans [Sung03]. La simulation du système complet a été faite au moyen de VHDL-AMS et a permis de valider ce choix d'architecture (fig. 27).

[8] Le choix de $G(p) = -p$ ne permet pas de faire entrer le système en oscillation.

[9] Ou dans toute autre application où l'on cherche à entretenir les oscillations d'une microstructure. En fait, l'utilisation d'impulsions permet d'éviter complètement le problème de l'instabilité électrostatique et, en conséquence, d'obtenir des déplacements d'amplitude aussi grande que voulue et d'atténuer l'effet des bruits, notamment du bruit thermomécanique, sur le fonctionnement du système.

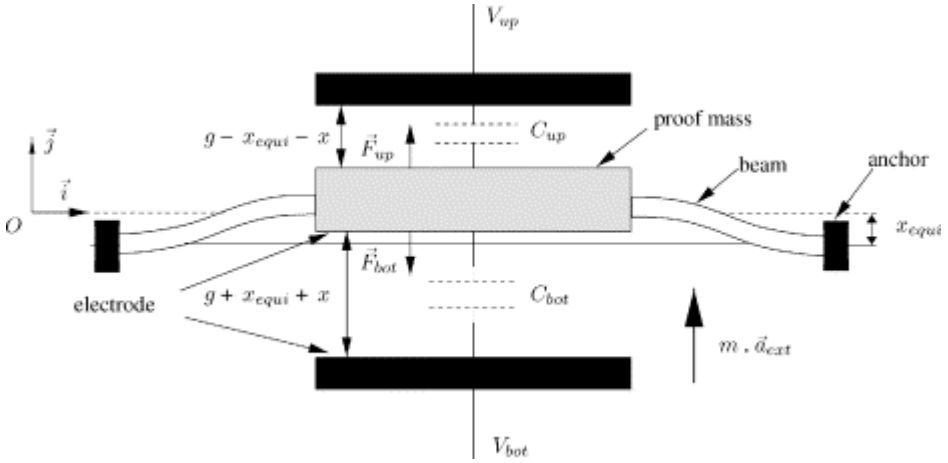

Fig. 26 - Schéma de la cellule physique de l'accéléromètre résonant de [Sung03].

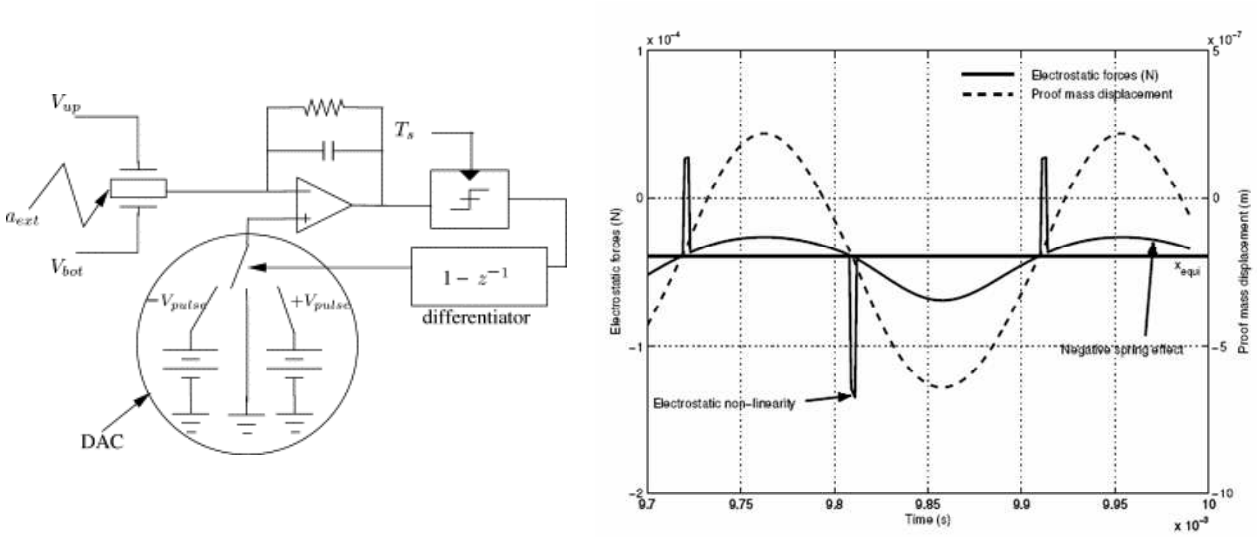

Fig. 27 - Implémentation électronique de l'actionnement par impulsions (à gauche) et résultats de simulation du système complet à l'aide de VHDL-AMS (à droite).

b) Actionnement par impulsions en temps discret

L'introduction d'un bloc échantillonné dans le système résonant est la source de phénomènes d'accrochage de phase entre sa partie discrète et sa partie continue. On observe en pratique que la période d'oscillation du système varie par paliers en fonction du paramètre que l'on cherche à mesurer (par exemple, la raideur de la structure) (fig. 28). Dans un système (linéaire) à temps continu, ce phénomène est inexistant. Les courbes de la figure 28 ont une structure fractale : il s'agit des « escaliers du diable » que l'on rencontre notamment dans le contexte de la modulation sigma-delta [Feely97]. On constate également que la valeur de la période des oscillations du système mixte dépend de ses conditions initiales (fig. 29).

Ajoutons que ces phénomènes de synchronisation sont observés expérimentalement par de nombreux auteurs [Kraft97, Feely97, Dominguez05] pour différents filtres $G(z)$. Le terme de « synchronisation » provient du fait que le rapport de la période mesurée en sortie du comparateur (temps moyen entre deux fronts montants) sur la période d'échantillonnage du système discret est nécessairement un nombre rationnel. On peut vérifier que les marches les plus larges des escaliers du diable correspondent à des valeurs entières de ce rapport.

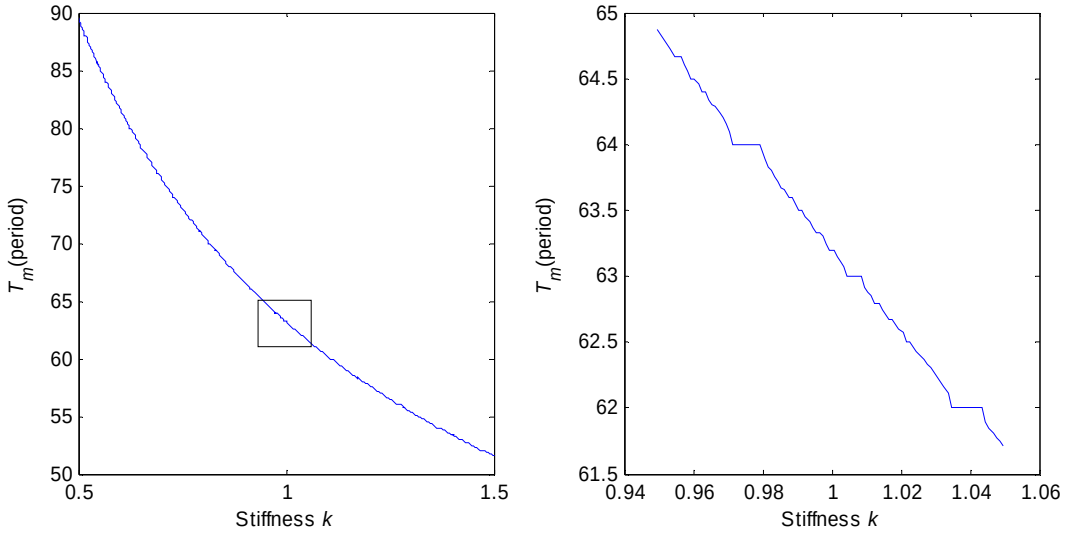

Fig. 28 - Réponse typique (période des oscillations en fonction de la raideur du système) d'un système résonant mixte, obtenue en simulation. Les phénomènes de synchronisation donnent à la courbe une forme d'escalier du diable (le motif se répète indéfiniment lorsque l'on zoome sur la courbe).

Dans le contexte des MEMS [Kraft97, Dominguez05], l'analyse de ces phénomènes est faite à l'aide de l'approximation de la première harmonique. La méthode de la première harmonique [Taylor99] consiste à remplacer les éléments non-linéaires d'un système en des gains et déphasages équivalents et à étudier le système linéaire ainsi obtenu. Elle repose sur l'hypothèse que, si une oscillation à la période fondamentale T_0 prend naissance dans le système, celui-ci est suffisamment sélectif pour pouvoir négliger toutes les harmoniques, de sorte que tous les états du système sont approchés par des sinusoïdes. Cette hypothèse ne tient que si le système a un facteur de qualité important ou s'il est suffisamment passe-bas.

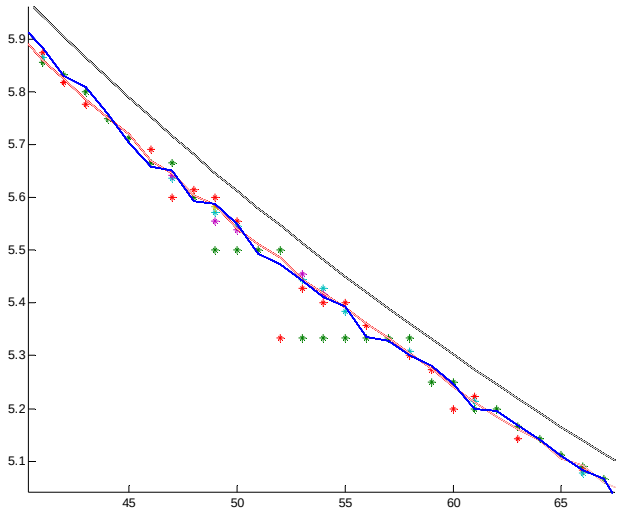

Fig. 29 - Réponse d'un système résonant mixte, obtenue en simulation (trait continu). On constate (par exemple en balayant l'ensemble des conditions initiales du système) qu'à chaque valeur de l'entrée du système correspondent en fait plusieurs régimes d'oscillation possibles (les étoiles).

En raison de cette dernière limitation, l'actionnement par impulsions ne peut pas s'étudier quantitativement avec cette méthode. Par exemple, l'étude du système continu de la fig. 25

avec une approche « première harmonique » aboutit au résultat erroné (cf. équation (47)) que la pulsation des oscillations qui y prend place est :

$$\omega = \omega_0 \neq \omega_0 \sqrt{1-\xi^2} \ . \tag{48}$$

Du fait de l'importance des phénomènes de synchronisation, notamment de leur impact sur la résolution des capteurs résonants, et de l'insuffisance des méthodes pour les traiter quantitativement, nous y avons consacré une partie de nos travaux, dont l'exposé est fait à la prochaine section.

2) Propriétés des systèmes mixtes bouclés à comparateur

Les oscillations des systèmes à comparateur ont été principalement étudiées dans deux contextes scientifiques distincts : celui de la commande par tout-ou-rien à temps continu et celui de la conversion sigma-delta à temps discret. Dans le premier cas, les travaux de référence sont ceux de Hamel [Hamel49], de Tsypkin [Tsypkin84] et leurs continuations [Atherton66, Kaya01]. Dans le cadre de la modulation sigma-delta, c'est le formalisme développé par Chua et Feely [Feely91] qui est le plus usité. Atherton a également consacré une partie de ses travaux [McNamara85, Goucem86] à l'étude des oscillations de systèmes échantillonnés. Une synthèse et une généralisation de ces différentes méthodes ont été réalisées dans le cadre de la thèse d'Éric Colinet, dans le but de disposer d'un outil de simulation capable de prédire de manière quantitative les oscillations des systèmes mixtes bouclés à comparateurs.

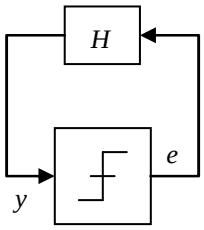

Fig. 30 - Notations pour l'étude des systèmes bouclés à comparateur. Le système H peut être discret, continu ou mixte.

a) Détermination des cycles limites des systèmes mixtes résonants

L'ensemble des méthodes d'étude des systèmes résonants à comparateur, que ce soit en temps discret ou en temps continu, reposent sur la même démarche :

- on fait l'hypothèse que la sortie du comparateur est un signal périodique connu, $e(t)$ ou $e(k)$, selon que le comparateur est échantillonné ou pas ;
- on calcule la réponse du système H (fig. 30) à ce signal, ce qui fournit l'entrée du comparateur, $y(t)$ ou $y(k)$;
- on vérifie que $e(t) = \mathrm{sign}(y(t))$.

Cette démarche est rendue possible par le fait que la sortie du comparateur est un signal binaire. En particulier, dans le cas continu, l'hypothèse que $e(t)$ est un signal carré symétrique est souvent justifée [Tsypkin84]. Les approches de Tsypkin, de Hamel et d'Atherton diffèrent par la méthode employée pour représenter $e(t)$ et calculer $y(t)$. Elles fournissent donc strictement les mêmes résultats, sous des formes différentes : séries de Fourier (Tsypkin et Atherton), somme finie sur les pôles du système H (Hamel)… Dans le cas discret, une oscillation périodique est nécessairement constituée d'un nombre entier d'échantillons. Contrairement au cas continu, $e(k)$ n'est que rarement symétrique et des hypothèses

supplémentaires doivent être faites [Friedman88, Feely91] pour parvenir à déterminer les différents régimes d'oscillation périodique possibles.

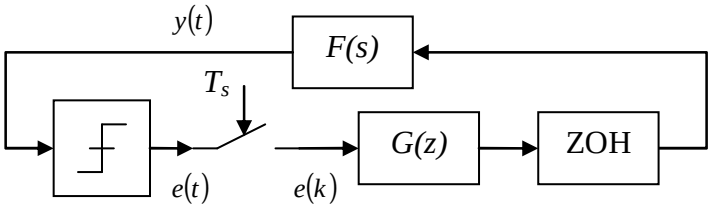

Fig. 31 - Schéma du système mixte étudié.

Nous avons tout d'abord proposé dans [R5] différentes heuristiques permettant de déterminer les cycles limites d'un système mixte, tel que celui représenté à la fig. 31. Elles sont présentées ici avec le même formalisme que dans [Colinet05].

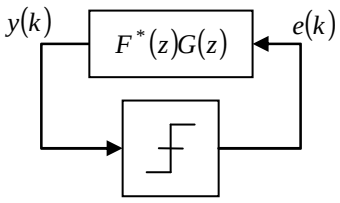

Fig. 32 - Système canonique correspondant au système mixte de la fig. 31.

Tout d'abord, le système mixte original est transformé en un système canonique équivalent, à temps discret (fig. 32), comme dans [Colinet05], ou à temps continu, comme dans [R5]. La transmittance $F^*(z)$ est donnée par la transformation en z de $F(p)$, à l'aide de la formule de l'invariance indicielle.
On détermine ensuite s'il existe des entiers N tels que $e(k)$ soit un signal carré symétrique de période $2N$ échantillons, c.-à-d. :

$$e(k) = \mathrm{sq}\left(\pi \frac{k}{N}\right). \tag{49}$$

Le calcul du signal $y(k)$ correspondant se fait au moyen de transformées de Fourier discrètes, comme dans [Feely91]. On peut alors vérifier si un cycle limite de longueur $2N$ est possible, c'est-à-dire si :

$$e(k) = \mathrm{sign}(y(k)). \tag{50}$$

On peut encore introduire un critère quadratique :

$$J_1(N) = \frac{1}{8N} \sum_{k=1}^{2N} (e(k) - \mathrm{sign}(y(k)))^2 , \tag{51}$$

compris entre 0 et 1, dont l'annulation est équivalente à (50).
Pratiquement, on observe qu'il n'existe pas toujours de mode propre de la forme (49). Ceci se traduit par des formes d'oscillations complexes en sortie du comparateur (fig. 33) : le signal binaire $e(k)$ est alors constitué d'intervalles de longueurs différentes. Dans ce cas, la période moyenne des oscillations - définie comme la durée moyenne entre deux fronts montants du comparateur - est un multiple rationnel de la période d'échantillonnage :

$$T_m = \frac{P}{Q} T_s \,, \tag{52}$$

où P et Q sont des entiers premiers entre eux.

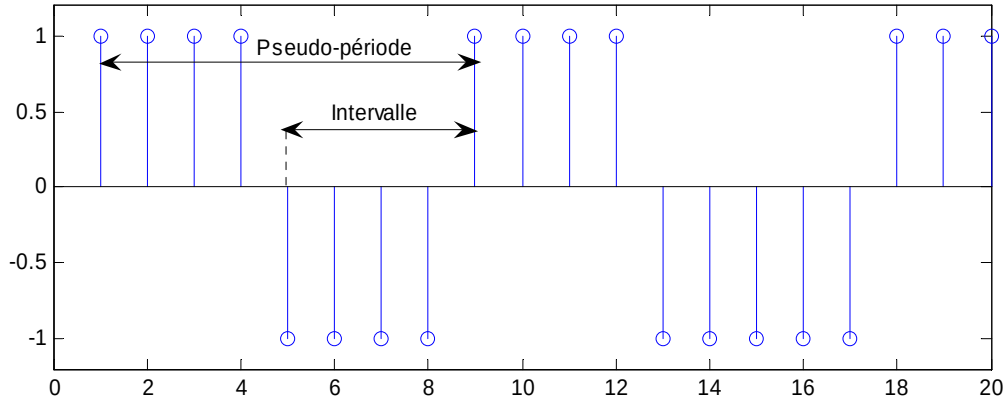

Fig.33 - Oscillations complexes : le signal $e(k)$ est « presque » carré de période 8 échantillons. En fait, il s'agit d'un signal périodique long, constitué de pseudo-périodes courtes (de durée 8 ou 9 échantillons), elles-mêmes séparées en deux intervalles (de durée 4 ou 5 échantillons).

Si l'hypothèse d'équirépartition des intervalles courts et des intervalles longs [Friedman88] est justifiée, on peut chercher les cycles limites sous la forme :

$$e(k) = \mathrm{sq}\left(2\pi \frac{kQ}{P}\right), \tag{53}$$

ce qui signifie que $e(k)$ est un signal de période PT_s constitué de Q pseudo-périodes de durée :

$$\mathrm{int}\left(\frac{P}{Q}\right) T_s \text{ ou } \left(\mathrm{int}\left(\frac{P}{Q}\right)+1\right) T_s \,. \tag{54}$$

Le critère quadratique à annuler pour que ce signal soit un mode propre du système canonique est alors :

$$J_1(P,Q) = \frac{1}{4P} \sum_{k=1}^{P} \left(e(k) - \mathrm{sign}(y(k))\right)^2 \,. \tag{55}$$

La méthode proposée dans [R5] consiste à :

- imposer la valeur de $n = \mathrm{int}\left(\frac{P}{Q}\right)$ en fonction de l'entier minimisant (55) ;
- pour un Q donné, chercher l'entier $r_{\min}^{Q}$ qui minimise (55), avec $P = nQ + r$;
- itérer cette dernière étape, de $Q = 2$ jusqu'à $Q_{\max}$ [10].

Pour limiter le nombre d'opérations, on peut ne tester à chaque étape que deux valeurs de l'entier r, données par :

$$r_1^Q = 1 + \mathrm{int}\left(r_{\min}^{Q_{opt}} \frac{Q}{Q_{opt}}\right) \text{ et } r_2^Q = \mathrm{int}\left(r_{\min}^{Q_{opt}} \frac{Q}{Q_{opt}}\right), \tag{56}$$

[10] Comme il peut exister plusieurs modes d'oscillation, l'algorithme ne s'arrête pas au premier mode trouvé.

où Q_{opt} est l'étape à laquelle la plus petite valeur de J_1 a été atteinte, pour $P = nQ_{opt} + r_{\min}^{Q_{opt}}$.
Ceci peut se justifier par l'allure typique de J_1 en fonction du rapport r/Q (fig. 34). Cette méthode de recherche des modes propres n'est pas complètement satisfaisante. Tout d'abord, elle est essentiellement heuristique et ne repose pas sur une base mathématique très solide, l'hypothèse d'équirépartition n'étant valable que pour des systèmes purement intégrateurs [Friedman88]. Une approche plus rigoureuse consisterait à faire l'hypothèse que $e(k)$ est un signal de période PT_s constitué de Q pseudo-périodes de durées données par (54) et à générer, puis à tester, toutes les combinaisons de ces pseudo-périodes. On peut prouver que ceci équivaut à chercher l'ensemble des colliers pouvant être réalisés avec Q boules de 3 couleurs. On peut montrer que le nombre N de combinaisons à vérifier à la $Q^{\text{ème}}$ étape avoisine :

$$N \approx 3^Q / Q. \tag{57}$$

Du fait de son coût prohibitif, cette méthode ne peut être utilisée que pour un faible nombre de pseudo-périodes (en pratique $Q \leq 12$) : seule l'heuristique présentée plus haut permet donc de trouver des cycles limites très longs (Q supérieur à 100).

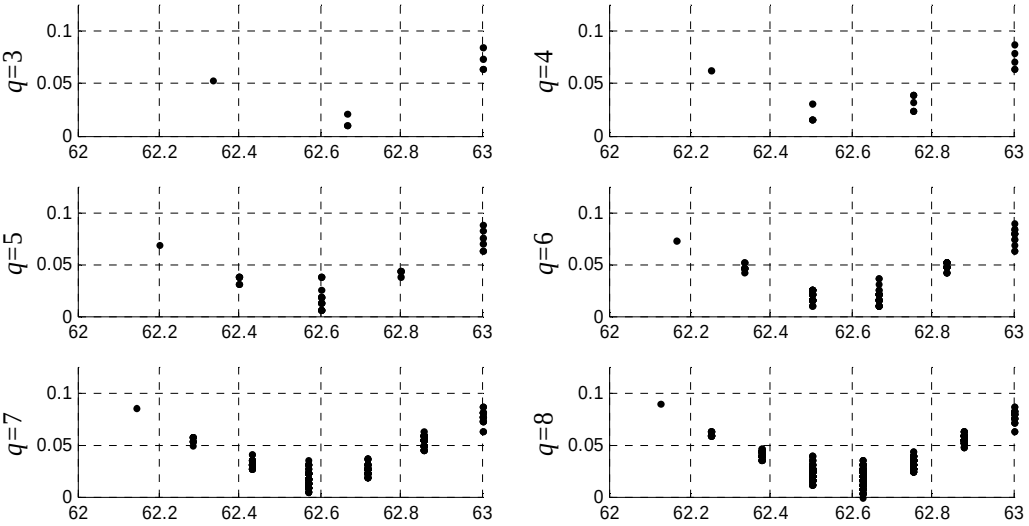

Fig. 34 - Valeur prise par le critère J_1 en fonction de la période moyenne T_m, pour différentes valeurs de Q. Le critère s'annule pour une combinaison d'intervalles correspondant à $T_m = 62.625T_s$. On constate que, pour tout $Q < 8$, le minimum de J_1 est atteint au voisinage de $T_m = 62.625T_s$. Pour des valeurs de Q et de T_m données, toutes les combinaisons de pseudo-périodes générées possibles sont testées.

Par ailleurs, le coût calculatoire de l'heuristique à l'étape Q est de l'ordre de $P\log(P)$ opérations, où $P = nQ + r$. La valeur de n a donc un impact immédiat sur la durée des calculs. Ceci n'est pas vraiment satisfaisant : que n soit petit ou grand, le phénomène de synchronisation est qualitativement le même et le coût de la détermination quantitative des modes propres ne devrait donc pas en dépendre.
Enfin, la détermination des modes propres des systèmes oscillants mixtes à comparateur ne constitue pas une fin en soi : à vrai dire, seul l'impact de la synchronisation sur les performances des systèmes résonants (notamment sur leur résolution) a une importance fondamentale pour la conception de MEMS. Aussi avons-nous développé une autre approche

du problème qui permet de répondre à ces questions de manière plus appropriée. Elle est présentée à la section suivante.

b) Détermination de la résolution des systèmes mixtes à comparateur et propriétés asymptotiques

Nous nous sommes tout d'abord attachés à déterminer la résolution des capteurs résonants dont l'architecture est donnée à la fig. 31. Cette résolution est liée, d'une part, à la qualité de la mesure de la période moyenne du système [Chronos91] et, d'autre part, à l'importance des phénomènes de synchronisation dans le système. En effet, la réponse du capteur (fig. 28) comporte des paliers dont la taille détermine la résolution de la mesure : par exemple, à supposer que l'on dispose de la courbe de la figure 28 et que l'on mesure une période moyenne de $T_m = 64T_s$, il est impossible de donner une estimation de la raideur du système avec une précision meilleure que 1%. Une autre incertitude provient également du fait que plusieurs cycles limites sont possibles pour chaque valeur de la raideur (fig. 29).
Nous avons proposé dans [R11, C2] une méthode de calcul de la taille de ces paliers. Cette méthode est exacte dans le cas des paliers correspondant aux cycles limites simples (49), de période $T_m = 2NT_s$. Dans le cas des cycles limites complexes, cette méthode fournit un résultat approché.

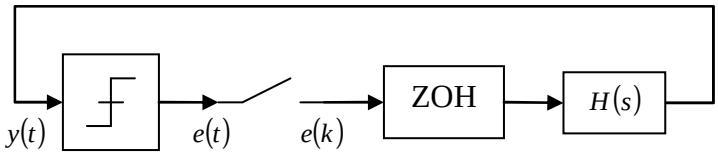

Fig. 35 - Système canonique continu équivalent au système mixte de la fig. 31. On a posé $H(s) = F(s)G(\exp(-sT_s))$.

Considérons d'abord le système canonique à temps continu (fig. 35), équivalent au système de la fig. 31. En supposant que le système linéaire H n'ait pas de pôle en zéro[11], il est équivalent de dire qu'un cycle limite pair (de la forme (49)) y prend place et que le signal $e(t)$ est un signal carré symétrique. Dans ce cas, on peut modéliser l'ensemble échantillonneur-bloqueur par un simple retard de phase, comme à la fig. 36. Ce système à temps continu n'a souvent qu'un seul régime d'oscillation possible, de période T_{φ_0}. On suppose que T_{φ_0} est monotone lorsque φ_0 parcourt l'intervalle $[0, T_s[$: ceci n'aboutit pas à une grande perte de généralité. On suppose également que le système H est « suffisamment passe-bas », par exemple que sa fréquence de coupure est inférieure à la moitié de la fréquence d'échantillonnage. Par ailleurs, on définit :

$$T_0 = T_{\varphi_0 = 0}, \tag{58}$$

$$T_1 = T_{\varphi_0 = T_s}, \tag{59}$$

$$T_- = \min(T_0, T_1), \tag{60}$$

$$T_+ = \max(T_0, T_1). \tag{61}$$

[11] Plus généralement, on peut tolérer que le système soit non-linéaire, à condition que le signe de la valeur moyenne soit conservé [R2].

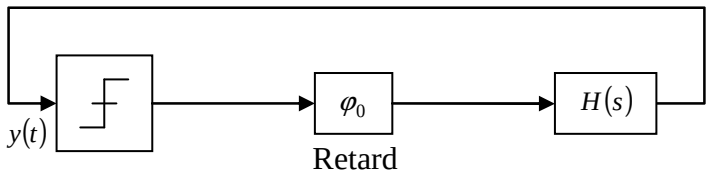

Fig. 36 - Système à retard équivalent au système de la fig. 35, lorsqu'un cycle limite pair y prend place. Le retard φ_0 appartient à l'intervalle $[0, T_s[$.

Alors, pour une valeur donnée de l'entrée (par exemple, sa raideur k) du système mixte, on a prouvé dans [R11] que :

- si $T_m = 2NT_s$ alors $T_m \in [T_-, T_+]$;
- la taille du palier correspondant à $T_m = 2NT_s$ est égale à $\left|T_+^{-1}(2NT_s) - T_-^{-1}(2NT_s)\right|$, où T_+^{-1} désigne la réciproque de l'application $k \mapsto T_+(k)$ et T_-^{-1} celle de $k \mapsto T_-(k)$.

Pratiquement, ceci revient à dire que :

- pour k donnée, la valeur de la période moyenne du système, si elle est paire, appartient à l'intervalle $[T_-(k), T_+(k)]$;
- la taille des plus grandes marches de l'escalier du diable est déterminée par la distance entre les courbes $k \mapsto T_+(k)$ et $k \mapsto T_-(k)$.

Ceci est illustré à la fig. 37.

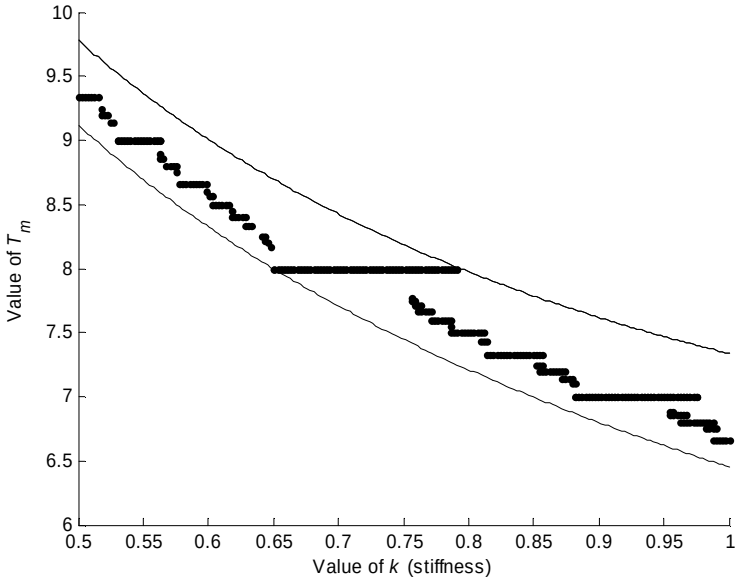

Fig. 37 - Allure typique de la réponse d'un système mixte résonant à comparateur. Les points correspondent aux différents cycles limites possibles ($Q < 35$), déterminés à l'aide de l'heuristique définie dans la section précédente. Les courbes continues, déterminées avec la méthode de Hamel à temps continu, correspondent à $k \mapsto T_+(k)$ et $k \mapsto T_-(k)$. On vérifie que tous les cycles limites possibles sont compris entre ces deux courbes et que la taille du palier pair $T_m = 8T_s$ est égal à l'écart entre les courbes continues.

Ainsi, il est possible de déterminer exactement la résolution des capteurs résonants mixtes à comparateur à partir d'une étude en temps continu. Le calcul des valeurs de $T_+(k)$ et de $T_-(k)$

peut, par exemple, se faire à l'aide de la méthode de Hamel en temps continu : la complexité du calcul ne dépend alors que du nombre de pôles du système H et non plus de la valeur du rapport de sur-échantillonnage T_m / T_s.

On a proposé dans [C2] une extension de cette méthode au cas où le bloqueur est de type RZ (Return-to-Zero), c.-à-d. au cas où les impulsions délivrées par le bloqueur durent moins d'une période d'échantillonnage (fig. 38). On a ainsi démontré que la résolution des capteurs résonants munis d'un actionnement par impulsions (cf. section précédente) est meilleure lorsque des impulsions plus courtes sont employées (à période d'échantillonnage constante), mais que c'est le phénomène inverse qui se produit dans des architectures du type PDO [Dominguez05, R9, C1-2].

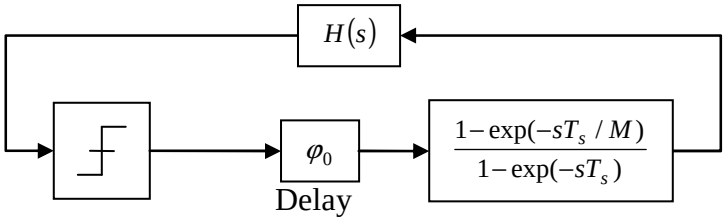

Fig. 38 - Système à retard équivalent au système de la fig. 35, lorsqu'un cycle limite pair y prend place et que le bloqueur délivre des impulsions de durée T_s / M. Le retard φ_0 appartient à l'intervalle $[0, T_s[$.

Pour étendre ces méthodes au cas des paliers correspondant à des cycles limites complexes, des hypothèses supplémentaires doivent être faites, notamment que les variations rapides de la phase liées à la succession d'intervalles courts et longs à l'intérieur du cycle limite se compensent « en moyenne ».

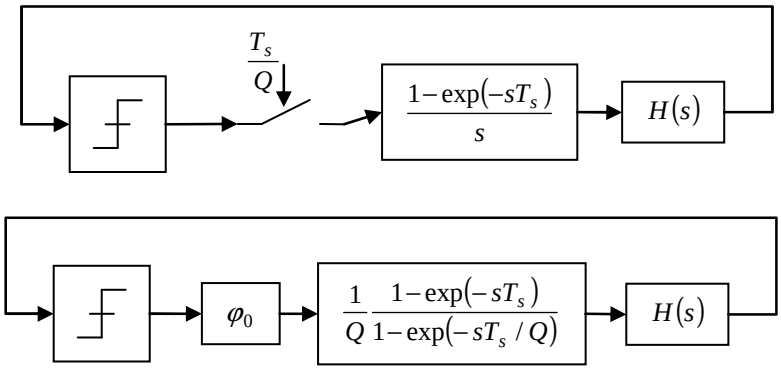

Fig. 39 - Lorsqu'un cycle limite complexe, avec $T_m = P / QT_s$ et P pair, prend place dans le système de la fig. 35, on peut prouver que, si (63) est vérifiée, le système échantillonné à T_s / Q (a) est le siège d'un cycle limite pair de période PT_s. Le système à retard équivalent est donné en (b), où φ_0 appartient à l'intervalle $[0, 1/QT_s]$.

Ainsi, lorsque l'on construit, pour un cycle limite défini par les entiers P et Q (53), le signal T_m-périodique :

$$\hat{y}(t) = \frac{1}{2Q} \sum_{q=0}^{2Q-1} (-1)^q \, y\left(t + \frac{qT_m}{2}\right), \tag{62}$$

on prouve, moyennant l'hypothèse que :

$$\mathrm{sign}(y(k)) = \mathrm{sign}(\hat{y}(k)), \tag{63}$$

que $\hat{y}(t)$ est un cycle limite pair :

- de période PT_s d'un système mixte échantillonné à T_s / Q, si P est pair (fig. 39) ;
- de période $2PT_s$ d'un système mixte échantillonné à $T_s / 2Q$, si P est impair.

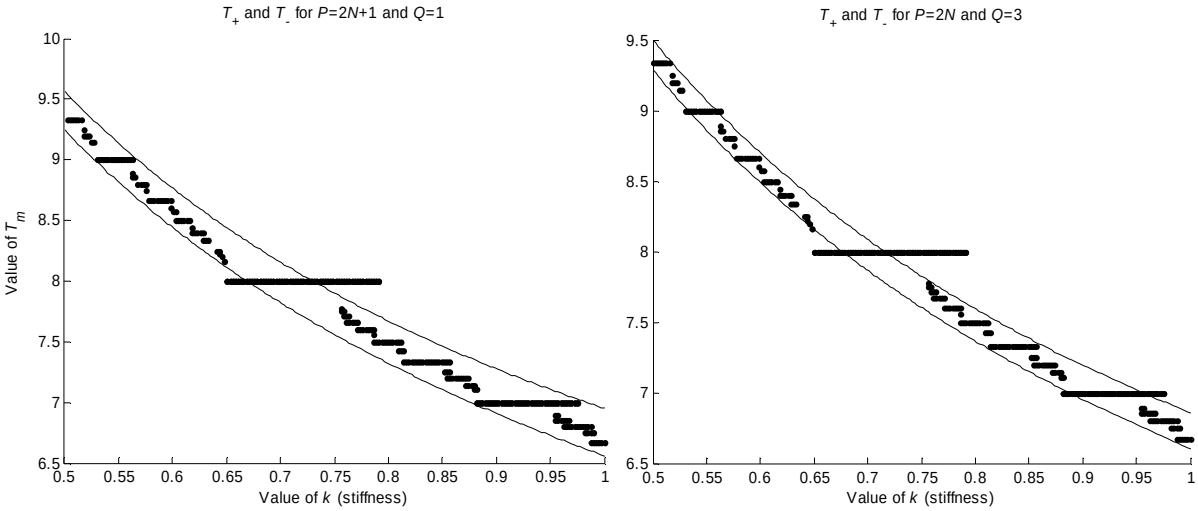

Fig. 40 - Les courbes continues, déterminées avec la méthode de Hamel, correspondent à $k \mapsto T_+(k)$ et $k \mapsto T_-(k)$ pour $P = 2N+1$, $Q = 1$ (cycles limites impairs, à gauche) et pour $P = 2N$, $Q = 3$ (cycles limites rationnels, à droite). On vérifie que les paliers correspondants sont bien compris entre les courbes continues.

Il est alors possible d'appliquer nos résultats sur les cycles limites pairs des systèmes mixtes à comparateur pour majorer la taille des paliers correspondants (il n'y a plus égalité) (fig. 40). Enfin, si on fait tendre Q vers l'infini, c.-à-d. si le cycle limite devient « infiniment long », le système échantillonné tend à se comporter comme le système asymptotique de la fig. 41, où l'opération d'échantillonnage a disparu. Dans tous les cas, le calcul des valeurs de $T_+(k)$, de $T_-(k)$ ou de $T_\infty(k)$ peut se faire à l'aide de la méthode de Hamel : la complexité du calcul ne dépend alors pas de la valeur de Q.

c) Régimes non-périodiques

Nous l'avons vu dans les deux précédentes sections, les phénomènes de synchronisation affectent considérablement le fonctionnement des capteurs résonants mixtes. Nous avons exploré quelques voies qui permettent de contourner ces problèmes tout en conservant les aspects pratiques des mesures résonantes. Par exemple, on peut introduire dans la boucle du capteur un élément perturbateur, comme un bruit, dont la nature aléatoire empêchera la périodicité parfaite du système. Ainsi, l'introduction d'un bruit additif à l'entrée du comparateur aboutit à une atténuation des phénomènes de paliers (fig. 42). Pour un bruit trop important, le système ne parvient plus à osciller (du moins, il n'existe plus de lien entre le rythme des commutations du comparateur et la valeur de ce qu'on cherche à mesurer). Il existe donc un niveau de bruit optimal permettant de réaliser un compromis résolution-sensibilité : on parle de résonance stochastique [Wellens04]. Ianelli présente également, dans [Ianelli02], l'analyse de ce phénomène, dans le cadre des systèmes à comparateurs.

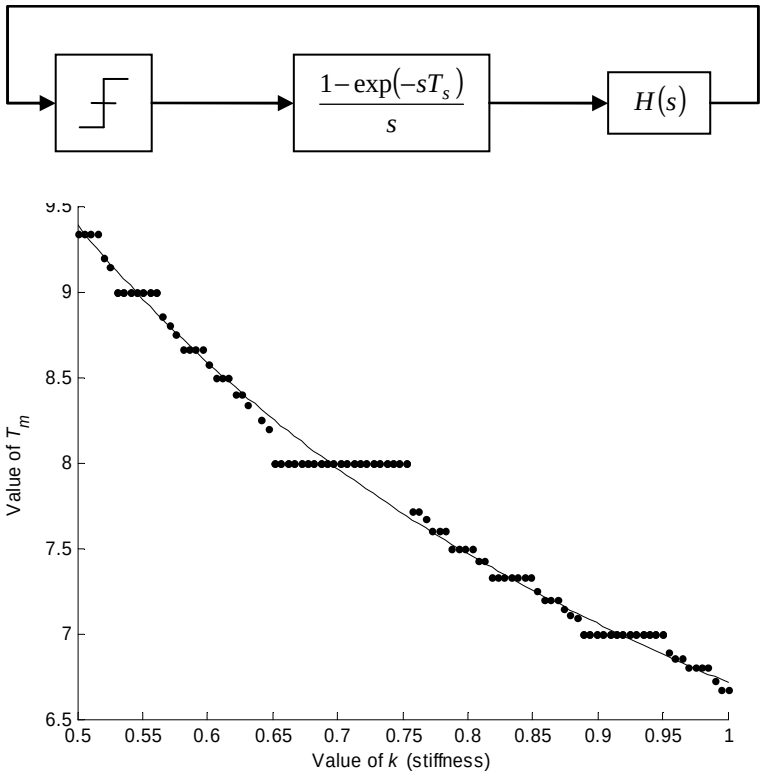

Fig. 41 - Si un cycle limite « infiniment long » de période T_m prend place dans le système de la fig.35, le « système asymptotique » (en haut) oscille à $T_\infty = T_m$. La courbe continue (en bas) correspond à $T_\infty(k)$, déterminée à l'aide de la méthode de Hamel.

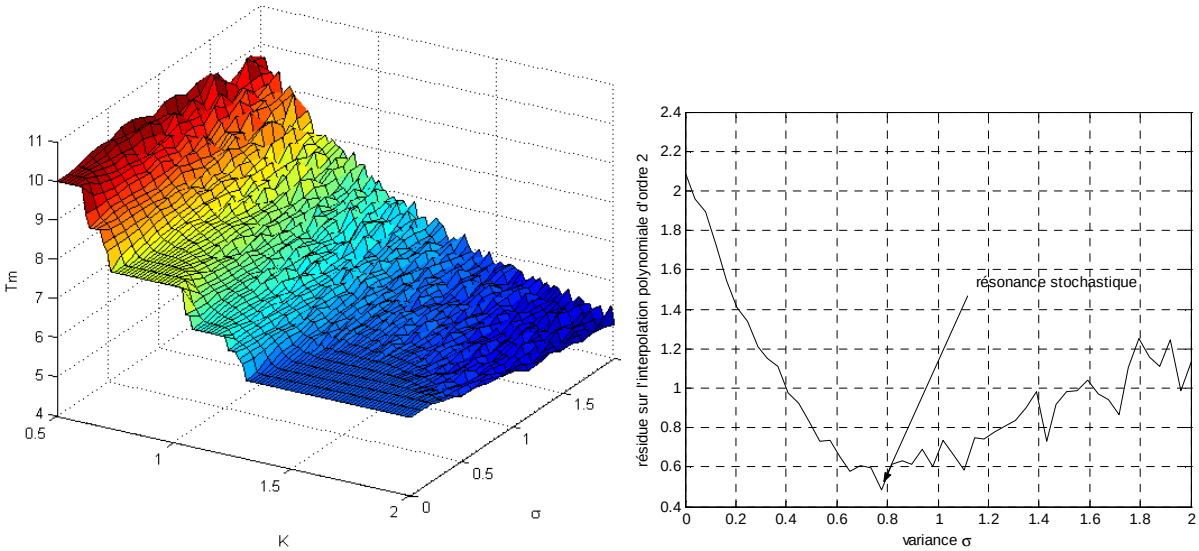

Fig. 42 - Allure de la réponse du système mixte en fonction du niveau de bruit α ajouté à l'entrée du comparateur (à gauche). A droite, norme quadratique des résidus $\int (T_m(\alpha,k) - T_\infty(k))^2\, dk$. On constate qu'il existe un α optimal minimisant les résidus.

Une autre approche pour désynchroniser les phénomènes tout en conservant l'avantage d'une électronique échantillonnée consiste à ajouter un bruit de phase synthétique à l'horloge du

système[12]. On observe (par simulation) que les paliers semblent complètement lissés pour un bruit de phase uniforme de support $[0, T_s]$ et que la période moyenne des oscillations du système est alors proche de la période T_∞ du système asymptotique. L'ajout de bruit de phase ne nuit donc apparemment pas à la sensibilité du capteur, même s'il manque encore une démonstration rigoureuse de ce phénomène.

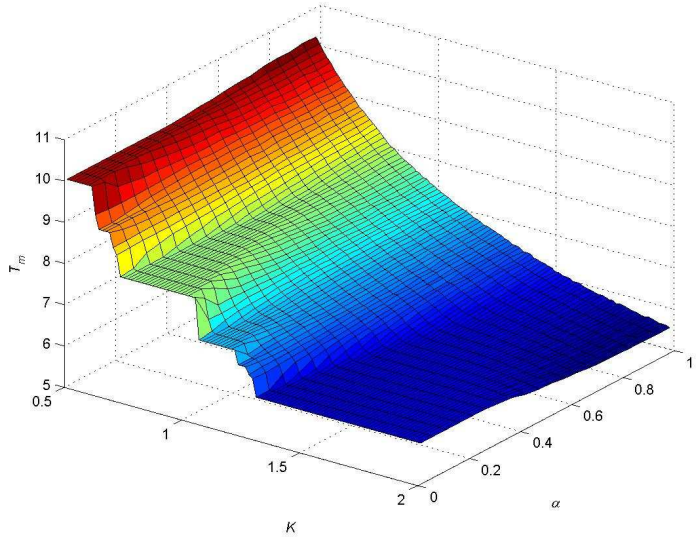

Fig. 43 - Allure de la réponse du système mixte en fonction du niveau de bruit ajouté sur les instants d'échantillonnage.

Enfin, nous avons exploré une dernière voie qui consiste à rendre le système chaotique[13] en introduisant un filtre numérique du type :

$$G(z) = \frac{1}{\alpha + z}, \text{ où } \alpha > 1, \tag{64}$$

dans la boucle de rétroaction. Les phénomènes de synchronisation sont d'autant plus atténués que α est grand. Cependant, au-delà d'une certaine valeur, le système devient instable. A nouveau, tout semble indiquer (mais rien ne démontre) que la période moyenne des oscillations du système chaotique tend vers celle du système asymptotique[14] (fig. 44).

3) Méthodes d'identification à partir de données binaires

Nous avons vu, dans les sections précédentes, qu'il était possible de corréler, d'une manière se prêtant facilement à l'intégration, la valeur d'un paramètre variable d'un système à la période d'oscillation de ce système. Cependant, il est clair que la valeur de ce paramètre ne saurait être déterminée avec exactitude si les autres paramètres du système ne sont eux-mêmes connus précisément. Par exemple, dans le cas de l'actionnement par impulsions à temps continu, la valeur de ω_0 ne peut pas être déterminée à partir de (47) si la valeur du coefficient

[12] On pourrait également ajouter ce bruit de manière micromécanique en provoquant des variations rapides de la raideur du système, par exemple à l'aide de forces électrostatiques.

[13] En fait le système passe sans cesse d'une orbite périodique instable à une autre. Ces orbites peuvent être déterminées à l'aide des méthodes présentées aux sections précédentes.

[14] Notons que pour le système échantillonné, seuls les états périodiques sont instables, ce qui engendre le chaos. En revanche, le système asymptotique continu correspondant est BIBO-instable dès que $\alpha > 1$. Le seul moyen de déterminer T_∞ est donc de faire appel à des méthodes de type Hamel ou Tsypkin.

d'amortissement est incertaine. De manière plus générale, comme nous l'avons dit dans l'introduction de ce chapitre, la plupart des grandeurs d'un MEMS sont sujettes à des incertitudes qui ont pour origine des variations du processus de fabrication, des changements de conditions d'opération ou encore un simple manque de connaissances. Un capteur MEMS doit donc être calibré, non seulement à sa mise en service mais à intervalles réguliers tout au long de sa vie : c'est pourquoi, idéalement, une fonctionnalité d'auto-calibrage devrait lui être intégrée.

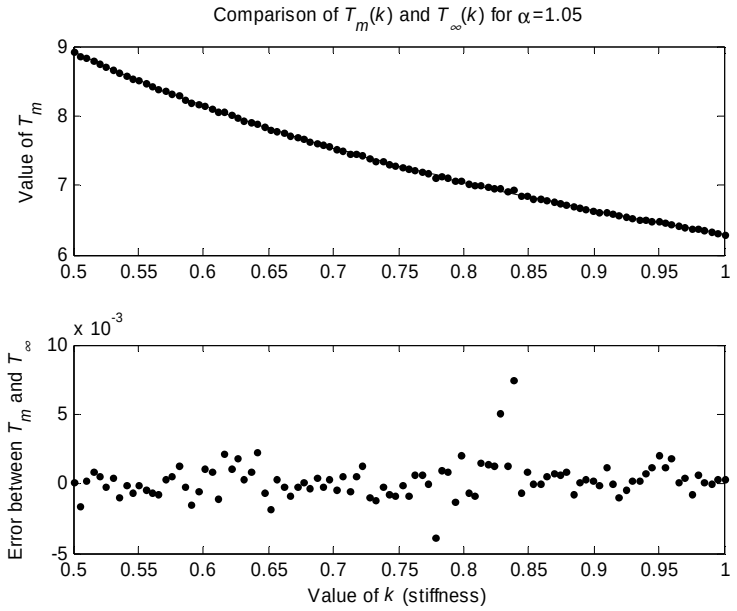

Fig. 44 - Réponse du système (en haut) lorsque $G(z)$ est un intégrateur chaotique et comparaison à T_∞. Les deux courbes sont presque confondues : leur différence est donnée en bas.

Il existe plusieurs méthodes d'auto-calibrage des MEMS [Aikele01, Charlot01, Puers02, Emmert03, Dhayni05, Rufer05, Xingguo05, Deb06], à base de composants analogiques ou numériques. Dans ce dernier cas, la conception de l'électronique associée au capteur est rendue délicate par la nécessité d'avoir une conversion analogique-numérique (et éventuellement numérique-analogique) sur plusieurs bits. En effet, la plupart des méthodes d'estimation de paramètres [Walter94] reposent sur la détermination précise de l'amplitude de la sortie du système : en fait, ces approches sont toutes fondées sur une approximation de type « bruit blanc additif » de l'opération de quantification, bruit qui doit être aussi faible que possible pour permettre une estimation efficace des paramètres.

Nos travaux sur les capteurs résonants nous ont permis de constater qu'il était possible, pour des coûts d'intégration très réduits, d'estimer précisément la valeur d'un paramètre d'un système à partir d'une seule mesure de fréquence, en boucle fermée. Nous avons donc essayé d'étendre cette approche à la détermination de plusieurs paramètres, à l'aide de composants analogiques (méthode MCLF) ou numériques (méthode MCLC). Même si ces méthodes permettent de parvenir au but fixé, elles souffrent de défauts qui nous ont poussés à développer une méthode d'identification en boucle ouverte, à partir de la mesure du signe du signal de sortie (méthode BIMBO).

Le plus proche parent de ces méthodes, dans le domaine des MEMS, est la méthode de « self-test » d'Aikele [Aikele01] qui ne permet pas de déterminer précisément la valeur des paramètres du système mais dont la structure est très proche de MCLC et de MCLF. Hors MEMS, la méthode KLV [Landau88, Voda95], puis, plus récemment, OBT [Huertas02, Huertas03], ou encore la méthode d'Astrom et Hagglund [Astrom84], présentent également

des ressemblances avec MCLC et MCLF. Cependant, toutes nécessitent une mesure d'amplitude précise et ne se prêtent donc pas facilement à l'intégration. Par ailleurs, elles reposent sur une approximation « première harmonique » du comparateur, dont nous avons vu qu'elle n'était pas toujours justifiée.

a) Méthode MCLF

La meilleure manière d'appréhender la méthode MCLF (Mesure de Cycle Limite en Fréquence) est de partir des considérations suivantes. Nous savons que la pulsation d'oscillation d'un système du deuxième ordre actionné par impulsions est :

$$\omega_{\text{impulsions}} = \omega_0 \sqrt{1-\xi^2} \ . \tag{65}$$

Par ailleurs, on peut démontrer - par exemple avec la méthode de Hamel - que lorsqu'un intégrateur est placé dans la boucle de réaction à la place du dérivateur, la pulsation des oscillations du système est :

$$\omega_{\text{intégrateur}} = \omega_0 \left(1-\alpha\xi^2+\beta\xi^4+o\left(\xi^5\right)\right), \tag{66}$$

où $\alpha = \dfrac{10-\pi^2}{4} \approx 0.0326$ et $\beta = \dfrac{150-35\pi^2+2\pi^4}{48} \approx -0.0129$.

Ainsi, à partir des mesures de $\omega_{\text{intégrateur}}$ et de $\omega_{\text{impulsions}}$, peut-on déterminer avec précision la valeur de la pulsation naturelle d'un système, ainsi que son coefficient d'amortissement [C14]. Cette méthode peut se généraliser à l'identification de plus de deux paramètres, pour des systèmes autres que du deuxième ordre [R10, Colinet05]. Pour cela, il suffit d'avoir réalisé un nombre de mesures de pulsation au moins égal au nombre de paramètres que l'on souhaite identifier, chacune de ces mesures ayant été obtenue avec un filtre dont les paramètres $\mathbf{q}$ sont connus. Soit $\boldsymbol{\theta}$ le vecteur des paramètres que l'on souhaite identifier (par exemple, l'emplacement des pôles et des zéros du système). Il est possible d'exprimer, à l'aide de la méthode de Hamel par exemple, la réponse d'un système linéaire à un créneau de pulsation ω, dont un front montant est situé en $t=0$:

$$y(\omega,t) = F(\boldsymbol{\theta},\mathbf{q},\omega,t). \tag{67}$$

Une condition nécessaire pour que la pulsation ω soit la pulsation d'oscillation du système linéaire bouclé par un comparateur est que la réponse du système linéaire s'annule à mi-période, c.-à-d.

$$y\left(\omega,\frac{\pi}{\omega}\right) = 0 \ . \tag{68}$$

Soient $\{\omega_1,...,\omega_N\}$ les pulsations obtenues expérimentalement, pour les paramètres $\{\mathbf{q}_1,...,\mathbf{q}_N\}$ du filtre de rétroaction. Les paramètres recherchés $\boldsymbol{\theta}$ doivent donc vérifier simultanément :

$$\begin{cases} F\left(\boldsymbol{\theta},\mathbf{q}_1,\omega_1,\dfrac{\pi}{\omega_1}\right)=0 \\ \vdots \\ F\left(\boldsymbol{\theta},\mathbf{q}_N,\omega_N,\dfrac{\pi}{\omega_N}\right)=0 \end{cases}, \tag{69}$$

qu'on peut résoudre à l'aide de la méthode de Newton-Raphson.

Notons qu'il est impossible d'identifier le gain statique du système à l'aide de cette méthode, à moins de disposer d'une référence d'amplitude : offset, dither à l'entrée du comparateur, hystérésis…

b) Méthode MCLC

La méthode MCLC (Mesure de Cycle Limite Complexe) est le pendant discret de la méthode MCLF. Cette dernière se prête en effet assez mal à l'intégration car elle requiert l'implémentation d'un filtre analogique de rétroaction qui soit programmable avec précision. Malheureusement, l'insertion d'un filtre discret dans la boucle de rétroaction, comme à la fig. 31, entraîne les phénomènes d'accrochage de phase dont nous avons présenté l'étude plus haut. On rappelle que, pour un capteur résonant mixte dont la raideur varie, par exemple, une période moyenne mesurée correspond à un intervalle de valeurs de la raideur. Ainsi, la mesure de N pulsations moyennes correspondant à N jeux de paramètres du filtre discret ne permet-elle généralement pas de déterminer avec précision les N paramètres du système que l'on cherche à identifier.

Le principe de la méthode MCLC est donc, dans un premier temps, de générer $M >> N$ cycles limites $\{C_1,...,C_M\}$, mesurés en sortie du comparateur, pour des paramètres $\{\mathbf{q}_1,...,\mathbf{q}_M\}$ du filtre de rétroaction. Pour chacun de ces cycles, la relation :

$$J_1(C_i) = \frac{1}{4N_i}\sum_{k=1}^{N_i}\left(e_i(k) - \mathrm{sign}(y_i(k))\right)^2 = 0 \qquad (70)$$

doit être vérifiée, où N_i est la période en échantillons du cycle C_i, e_i est la sortie mesurée du comparateur et y_i l'entrée échantillonnée du comparateur. Les paramètres recherchés $\boldsymbol{\theta}$ doivent donc vérifier :

$$\sum_{i=1}^{M} J_1(\boldsymbol{\theta}, C_i) = \sum_{i=1}^{M}\frac{1}{4N_i}\sum_{k=1}^{N_i}\left(e_i(k) - \mathrm{sign}(y_i(\boldsymbol{\theta}, k))\right)^2 = 0\,. \qquad (71)$$

Ce critère est discontinu : on est obligé, pour le minimiser, d'avoir recours à des méthodes du type Hooke-Jeeves, Nelder-Meade ou recuit simulé. La figure 45 présente des allures typiques de ce critère. Expérimentalement, on observe que la taille de la zone d'acceptabilité (zone dans laquelle le critère vaut 0) dépend fortement de la longueur des cycles limites mesurés : plus un cycle est long, plus la zone est petite. La qualité de l'identification est donc fortement tributaire de la capacité à générer des cycles limites longs [R10].

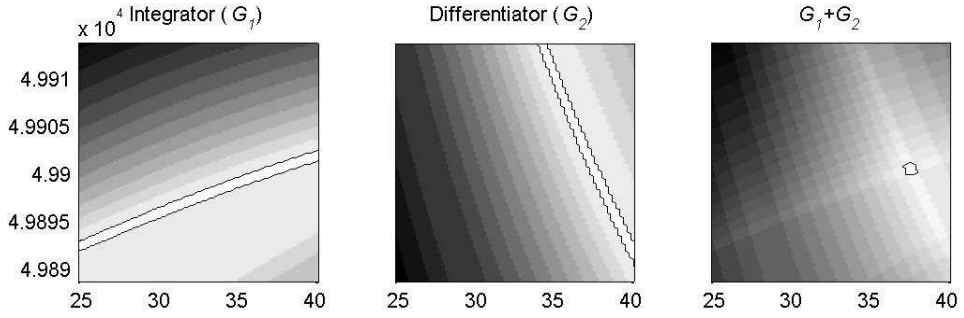

Fig. 45 - Allure du critère J_1 (70) obtenu pour un intégrateur (à gauche) et pour un dérivateur (au centre). Le critère composite (71) est représenté à droite. La zone d'acceptabilité (en blanc) est fortement réduite.

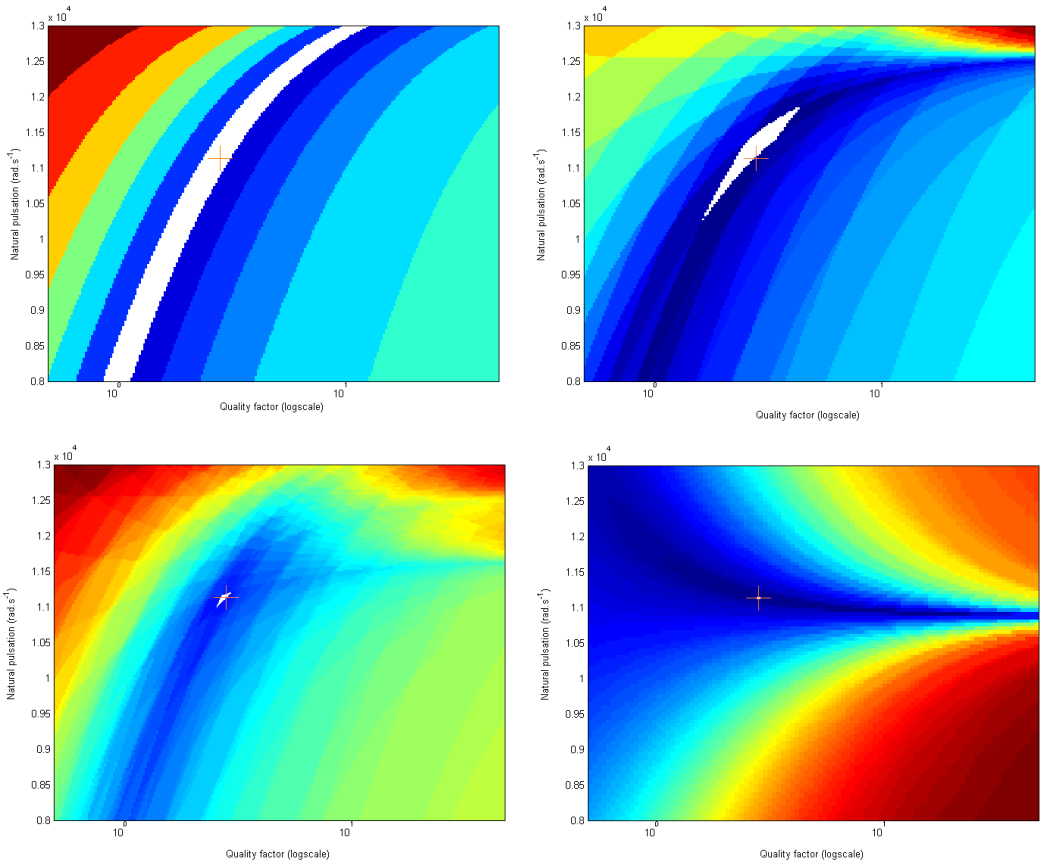

Fig. 46 - Allure du critère composite (71) et évolution de la zone d'acceptabilité lorsque 1, 2 et 7 filtres non chaotiques (retards purs) sont utilisés. Critère simple (70) lorsqu'un intégrateur chaotique est utilisé.

Les solutions présentées pour lisser les paliers des réponses des systèmes mixtes résonants peuvent être envisagées. Nous avons notamment étudié l'utilisation d'un filtre de retour du type (64) [R10, C6]. Le cycle limite résultant du régime chaotique est infiniment long : on doit le tronquer pour appliquer MCLC. Cette approche permet donc de réduire fortement la zone d'acceptabilité (fig. 46). De plus, elle ne requiert qu'une seule expérience. En revanche, elle présente le risque de rendre le système étudié instable (et donc de casser la microstructure), lorsque le coefficient α est trop important. Enfin, la sortie de l'intégrateur chaotique, qui n'est pas binaire, doit être convertie vers l'analogique : ceci nécessite donc l'implémentation d'un CNA multi-bits. Une autre solution consisterait à utiliser un CNA sigma-delta (qui délivre un signal monobit équivalent statistiquement à son entrée).
La méthode MCLC a pu être mise en pratique sur plusieurs systèmes : circuits électroniques à composants discrets et microstructures (poutres cantilever), fournies par le LAAS. La boucle numérique programmable de mise à la résonance était notamment réalisée à l'aide d'un FPGA (fig. 47).

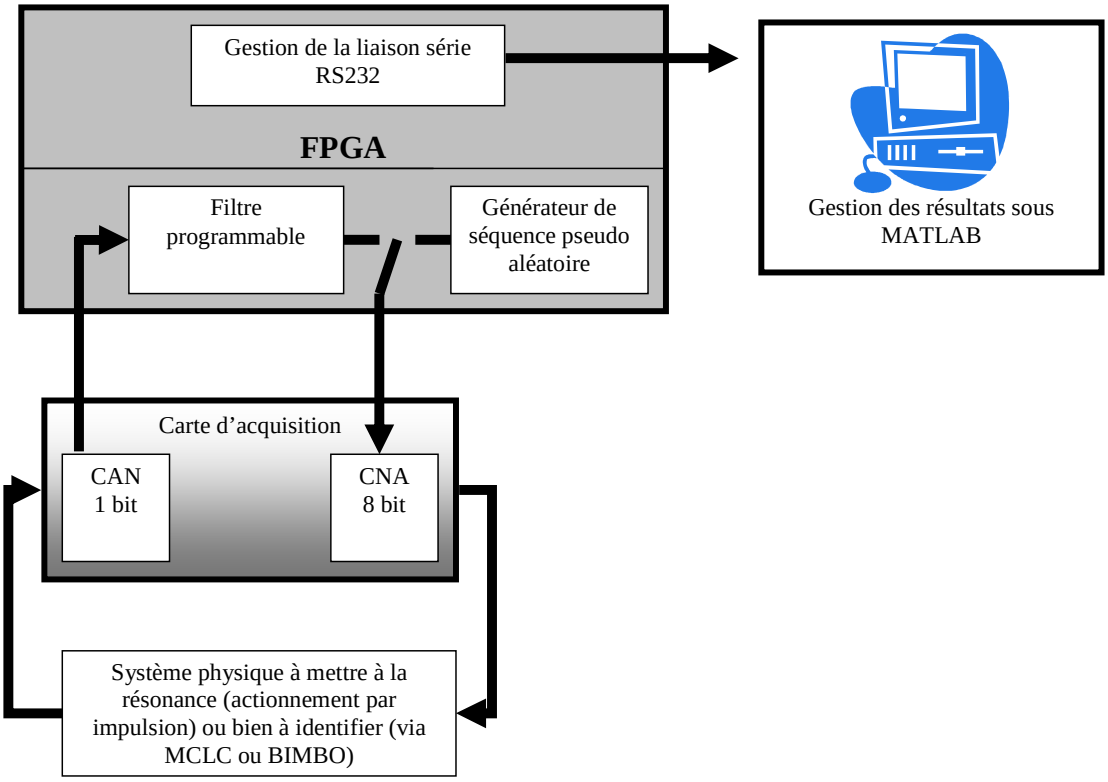

Fig. 47 - Schéma de la boucle numérique programmable de mise à la résonance.

c) Méthode BIMBO

(1) Principe et propriétés de la méthode BIMBO

La méthode MCLC présente un coût d'intégration moindre que MCLF. Par contre, nous avons vu qu'elle ne permet une identification correcte que si des cycles limites suffisamment longs sont générés. Par ailleurs, les deux méthodes nécessitent de mettre le système en oscillation : en conséquence, il est identifié au voisinage d'un point de fonctionnement qui n'est, en général, pas son point de fonctionnement nominal. Ceci est particulièrement vrai pour les applications passe-bas, comme de nombreux accéléromètres.

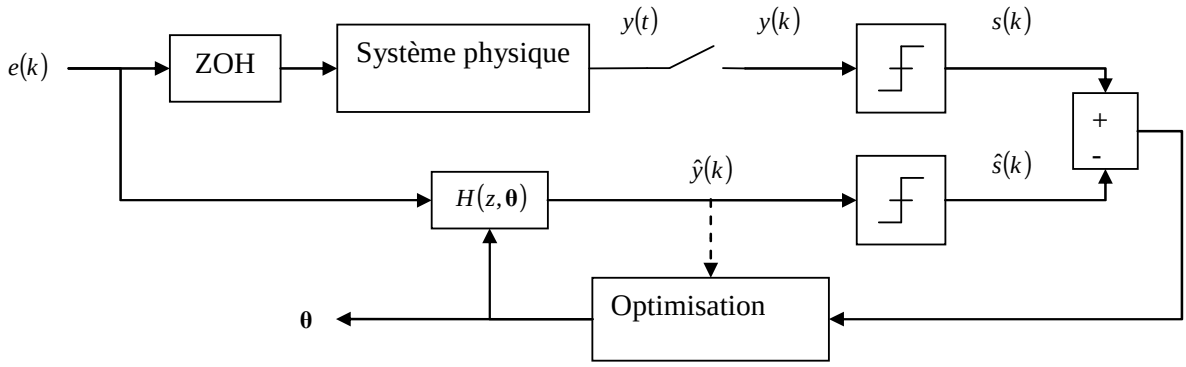

Fig. 48 - Principe de la méthode BIMBO.

Une dernière approche a donc été mise au point pour tenter de répondre à ces problèmes : la méthode BIMBO (Basic Identification Method using Binary Observations). Elle est à la fois une continuation directe de MCLC et un parent proche des méthodes d'identification classiques. Le principe de BIMBO est représenté à la figure 48 : un signal « spectralement riche » (par exemple, un bruit blanc) est généré, appliqué au système physique que l'on

cherche à identifier et le signe $s(k)$ de la sortie du système est mesuré. On cherche alors à trouver les paramètres $\boldsymbol{\theta}$ maximisant la ressemblance entre $s(k)$ et le signe de la sortie $\hat{y}(k)$ d'un modèle paramétrique discret $H(z,\boldsymbol{\theta})$ du système. Un critère possible pour cette optimisation est :

$$J_1 = \frac{1}{4N}\sum_{k=1}^{N}\left(s(k)-\hat{s}(k)\right)^2 , \tag{72}$$

où N est la longueur du signal $e(k)$. Nous avons vu que ce critère était discontinu. C'est pourquoi le critère J_2 est introduit :

$$J_2 = \frac{1}{4\sum_{k=1}^{N}\hat{y}(k)^2}\sum_{k=1}^{N}\hat{y}(k)^2\left(s(k)-\hat{s}(k)\right)^2 . \tag{73}$$

On prouve aisément que ce critère est continu et qu'il s'annule pour les mêmes valeurs de $\boldsymbol{\theta}$ que J_1 (fig. 49). La méthode BIMBO est donc une méthode des moindres carrés dans laquelle on tient compte exactement de l'opération de quantification au lieu d'en faire une approximation de type « bruit blanc ».

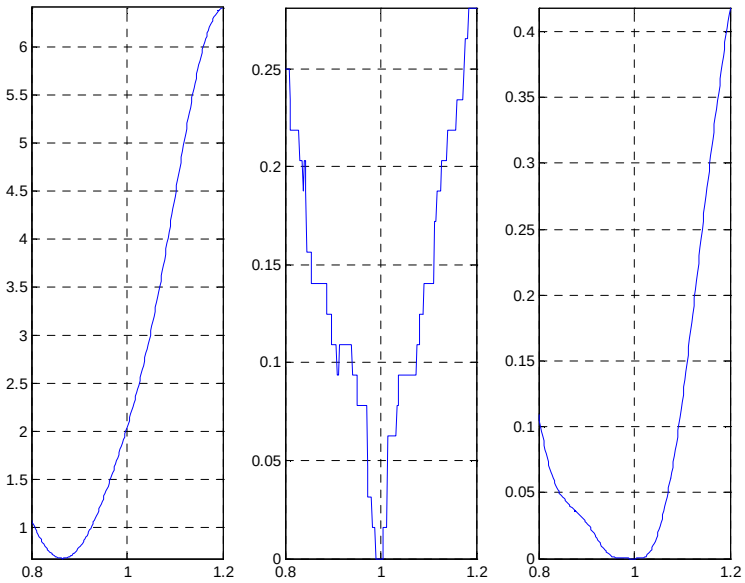

Fig. 49 - Allure du critère à optimiser pour un système du deuxième ordre en fonction de la raideur, les autres paramètres étant connus. De gauche à droite : critère des moindres carrés « classique » $J_0 = \sum\left(s(k)-\hat{y}(k)\right)^2$, critère discontinu J_1 et critère continu J_2. La valeur nominale de la raideur est égale à 1.

L'intérêt principal de BIMBO par rapport aux méthodes décrites précédemment est la possibilité de choisir $e(k)$ (bruit blanc ou coloré, binaire ou non, etc.) en fonction des contraintes d'intégration et des *a priori* sur le système étudié. De plus, il est possible d'en établir rigoureusement certaines propriétés. Ainsi, on peut démontrer que, si $e(k)$ est un bruit blanc gaussien centré[15], de variance $\sigma_e{}^2$, la zone d'acceptabilité des deux critères J_1 et J_2 se

[15] En pratique, on utilisera plutôt un bruit blanc binaire, qui ne requiert qu'un CNA 1-bit.

réduit en un point lorsque N tend vers l'infini. En particulier, on peut prouver [R10] que la valeur asymptotique prise par le critère J_1 est :

$$J_1(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{\pi}\operatorname{acos}(r), \tag{74}$$

où r est le coefficient de corrélation entre h_k^θ, la réponse impulsionnelle du système $H(z,\boldsymbol{\theta})$, et h_k^0, celle du système inconnu :

$$r = \sum h_k^0 h_k^\theta \ , \tag{75}$$

où l'on a supposé, pour simplifier les expressions, que

$$\sum \left(h_k^0\right)^2 = \sum \left(h_k^\theta\right)^2 = 1 \, . \tag{76}$$

De plus, on peut prouver que, s'il existe un bruit blanc gaussien centré de variance $\sigma_b{}^2$ en amont du comparateur, l'expression (74) reste valable avec :

$$r = \frac{\sum h_k^0 h_k^\theta}{\left(1 + \dfrac{\sigma_b{}^2}{\sigma_e{}^2}\right)^{1/2}} \, . \tag{77}$$

On peut donc déduire de la valeur J_1^{optim} prise par J_1 à la fin de l'optimisation la valeur de la variance d'un « bruit de mesure équivalent » en entrée du comparateur :

$$\sigma_b{}^2 = \tan^2\left(\pi J_1^{optim}\right)\sigma_e{}^2 \, . \tag{78}$$

Ce bruit équivalent n'est pas nécessairement imputable à la présence réelle de bruit de mesure à l'entrée du comparateur : il peut être également lié à une insuffisance du modèle paramétrique $H(z,\boldsymbol{\theta})$. Ainsi, une démarche possible pour choisir l'ordre du modèle $H(z,\boldsymbol{\theta})$ est de :

- choisir un ordre faible pour $H(z,\boldsymbol{\theta})$;
- optimiser le critère lisse J_2 ;
- calculer la valeur de J_1 à la fin de l'optimisation et donc de $\sigma_b{}^2$;
- si cette valeur est importante, augmenter l'ordre du modèle $H(z,\boldsymbol{\theta})$ et recommencer la suite d'opérations.

L'ordre « optimal » est atteint lorsque le niveau de bruit de mesure équivalent ne diminue pas significativement (ou si J_1 vaut 0).

Enfin, l'expression (74) peut permettre d'estimer approximativement le nombre de points N nécessaires à une « bonne » identification du système. En effet, lorsque N tend vers l'infini, on peut interpréter J_1 comme la probabilité que deux variables aléatoires Y^0 et Y^θ soient de signes différents, où Y^0, respectivement Y^θ, est la sortie du système pour les valeurs nominales, respectivement courantes, des paramètres. Ainsi, lorsque les paramètres courants sont égaux aux paramètres nominaux, la probabilité que les variables soient de signes différents est nulle, tout comme J_1. Pour déterminer le nombre de points nécessaires à l'identification, on fait l'approximation que, pour un coefficient de corrélation r donné, à chaque instant d'échantillonnage, indépendamment des instants précédents, la probabilité que les signes de la sortie du système nominal et du système courant soient différents vaut :

$$P(W = -1) = J_1 = \frac{1}{\pi}\operatorname{acos}(r), \tag{79}$$

où W désigne le produit des signes de Y^0 et de Y^θ. La variable W suit donc une loi de Bernouilli.
Posons $r = 1-\varepsilon$, ε positif. Pour que la zone d'acceptabilité soit plus petite que ε, la probabilité qu'au moins un des N tirages (indépendants) de la variable W donne -1 doit être proche de 1, c.-à-d.

$$1-\left(1-\frac{1}{\pi}\operatorname{acos}(r)\right)^N \approx 1-10^{-p}. \tag{80}$$

En supposant que ε est petit, on trouve :

$$N \approx \frac{\pi \log(10)}{\sqrt{2}} p\varepsilon^{-1/2}. \tag{81}$$

(2) Application de la méthode BIMBO

L'optimisation du critère J_2 ne se fait pas de la même manière selon le modèle $H(z,\boldsymbol{\theta})$. Ainsi, si on modélise le système inconnu comme un filtre à réponse impulsionnelle finie (RIF), on peut choisir les coefficients de la réponse impulsionnelle comme paramètres $\boldsymbol{\theta}$. On prouve que, dans ce cas, le critère J_2 est convexe. Il se prête donc à l'utilisation de méthodes de type gradient [R10]. Dans le cas plus général, on est obligé d'avoir recours à des méthodes plus lourdes, par exemple Levenberg-Marquardt, à supposer que le critère n'ait pas de minimum local. En pratique, on peut donc :

- commencer par chercher un modèle du système à identifier sous la forme RIF ;
- en déduire les paramètres d'un modèle RII correspondant (par exemple, sous la forme ARX) ;
- se servir de ces paramètres pour initialiser l'algorithme d'optimisation.

Nous avons validé la méthode BIMBO sur plusieurs systèmes électroniques ou électromécaniques. En particulier, son efficacité a pu être testée sur le micro-accéléromètre passe-bas à conversion sigma-delta conçu lors du projet Locadyn 3D (fig. 50).

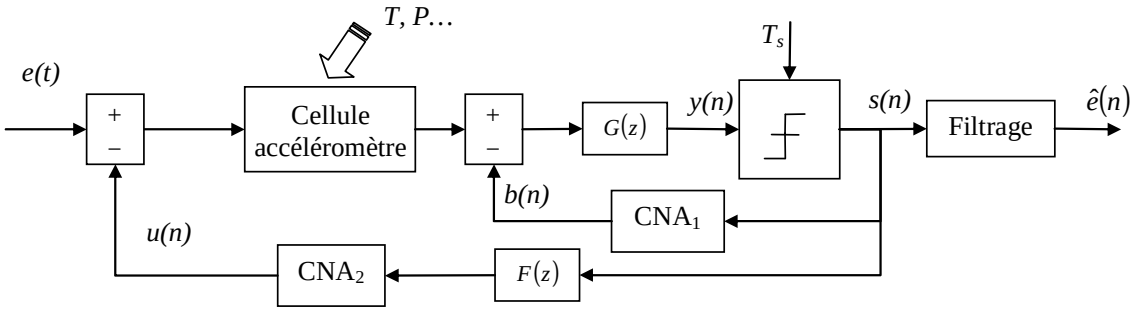

Fig. 50 - Schéma de principe de l'accéléromètre Locadyn 3D

Lors de l'étape de calibrage, on suppose que le signal d'entrée est constant et qu'une estimation correcte nous en est fournie par la sortie filtrée du système. Connaissant $b(n)$, $u(n)$ et $e(t)$, on peut appliquer la méthode BIMBO pour trouver les valeurs des coefficients d'un modèle ARX de la cellule de l'accéléromètre ainsi que celles des coefficients de $G(z)$, également sujettes à des incertitudes. Notons que dans le cas de la conversion sigma-delta, il est possible d'identifier tous les paramètres de la cellule physique, y compris son gain statique, le signal $b(n)$ (connu) jouant le rôle de référence d'amplitude.

4) Conclusion

On a vu dans ce chapitre quelques exemples d'architectures de MEMS, appliquées à la mesure « résonante » ou à l'implantation de méthodes d'auto-calibrage. Les solutions présentées reposent sur l'utilisation d'un comparateur échantillonné et de composants à temps discret. En conséquence, leur réalisation présente un faible coût d'intégration.

Nous avons également présenté des méthodes développées pour l'analyse des systèmes mixtes à comparateur. Ces outils rendent possible la détermination précise des limites des performances des architectures proposées. De plus, cette étude nous a permis d'approfondir notre compréhension des phénomènes d'accrochage de phase propres aux systèmes mixtes et, en conséquence, de proposer des solutions palliant les problèmes qui découlent de la synchronisation.

Enfin, des méthodes d'identification à base de données binaires, MCLF, MCLC et BIMBO, qui découlent naturellement de l'étude des systèmes résonants à comparateurs, ont été présentées. Les MEMS ne constituent pas le seul domaine d'application de ces méthodes : elles touchent, plus généralement, l'identification de systèmes en électronique intégrée (par exemple, CAN sigma-delta) ainsi que l'identification de systèmes dont les sorties sont naturellement binaires : par exemple, la méthode MCLC a été appliquée pour identifier les règles d'un automate cellulaire du type « Jeu de la Vie », à partir d'observations faites du comportement de cet automate.

IV. Perspectives

1) Modélisation physique, couplage et réduction d'ordre de modèle

On a évoqué, au cours de ce mémoire, la profusion des modèles d'ordre réduits de MEMS, qu'il s'agisse de modèles de structures simples (poutres ou plaques) ou plus complexes, reposant sur des développements en séries de Taylor [Chen01], sur des décompositions modales [Gabbay98, Younis04, R1] ou sur des approches utilisant des simulations du problème direct pour générer une base d'apprentissage d'un modèle réduit [Hung99, Rewienski03].

Actuellement, ces méthodes co-existent sans qu'il y ait de véritable tentative de les hiérarchiser, que ce soit du point de vue de leurs performances ou de leur complexité. Un travail de synthèse de ces méthodes est actuellement mené dans la thèse d'Alexia Missoffe (thèse ECP-Supélec). Cette thèse abordera également les points restant en suspens dans les méthodes citées plus haut :

- le choix de la nature du modèle d'ordre réduit (temps discret ou temps continu, linéaire par morceaux ou non-linéaire), dicté par l'application qui en sera faite ;
- le choix de l'ordre du modèle ;
- le choix de la base d'apprentissage du modèle.

Par ailleurs, la réduction des dimensions des MEMS/NEMS qui semble inévitable entraîne l'apparition de phénomènes, jusqu'alors inobservés ou négligés (forces de Casimir, forces de Van der Waals, amortissement thermo-élastique [Lifshitz00]), auxquels les méthodes actuelles de simulation et de ROM doivent être adaptées.

Enfin, les descriptions de type « milieu continu », reposant sur des équations aux dérivées partielles, perdent leur sens à mesure que les tailles caractéristiques des structures diminuent. Ceci entraîne l'émergence de techniques de simulation du type « dynamique moléculaire », où les particules en présence sont simulées une à une. La quantité de calculs impliquée par de telles approches est exorbitante, aussi a-t-on souvent recours à des techniques de simulation hybrides (ou multi-échelle), où une partie de la structure étudiée est modélisée comme un milieu continu [Ghoniem02]. L'étude de ces méthodes d'approximation constitue un domaine de recherche à part entière où se retrouvent plusieurs des thématiques abordées dans ce mémoire : couplage de systèmes, réduction d'ordre, etc.

2) Traitement des incertitudes en simulation

Nous avons abordé, dans la section III, le thème des incertitudes en électronique. Les méthodes d'identification que nous y avons présentées constituent des outils pratiques permettant de concevoir des architectures reprogrammables robustes. Cependant, ce type d'architecture peut présenter un surcoût important, en particulier dans le cas de MEMS très simples, comme, par exemple, les micro-interrupteurs. Aussi, dans les cas où il est difficile, en pratique, de contrer l'impact d'inévitables incertitudes, doit-on se contenter de le prévoir, à l'aide d'outils de simulation.

Si l'on dispose d'un *a priori* suffisant sur les incertitudes paramétriques d'un système, on peut utiliser plusieurs méthodes pour en prédire le comportement, de manière probabiliste (méthodes de Monte-Carlo ou méthodes de perturbation, par exemple) ou autre (analyse par intervalles, ensembles flous, etc.). Cependant, dans le cas des MEMS, la mise au point d'un outil de simulation de système à paramètre incertains est une véritable gageure : le coût unitaire de chaque simulation rend les méthodes de Monte-Carlo inadaptées et les fortes dispersions empêchent l'application des méthodes de perturbation. Nous avons essayé de répondre à ces problèmes en proposant dans [C7, C13] des méthodes de simulation de système (non-linéaire) incertain, reposant sur des approximations de la surface de réponse du

système. Ces méthodes ne donnent pour l'instant de résultats satisfaisants que pour un faible nombre de paramètres incertains (≤3) (fig. 51), aussi l'extension de ces outils à un nombre important de paramètres incertains constitue-t-elle une véritable voie de recherche.

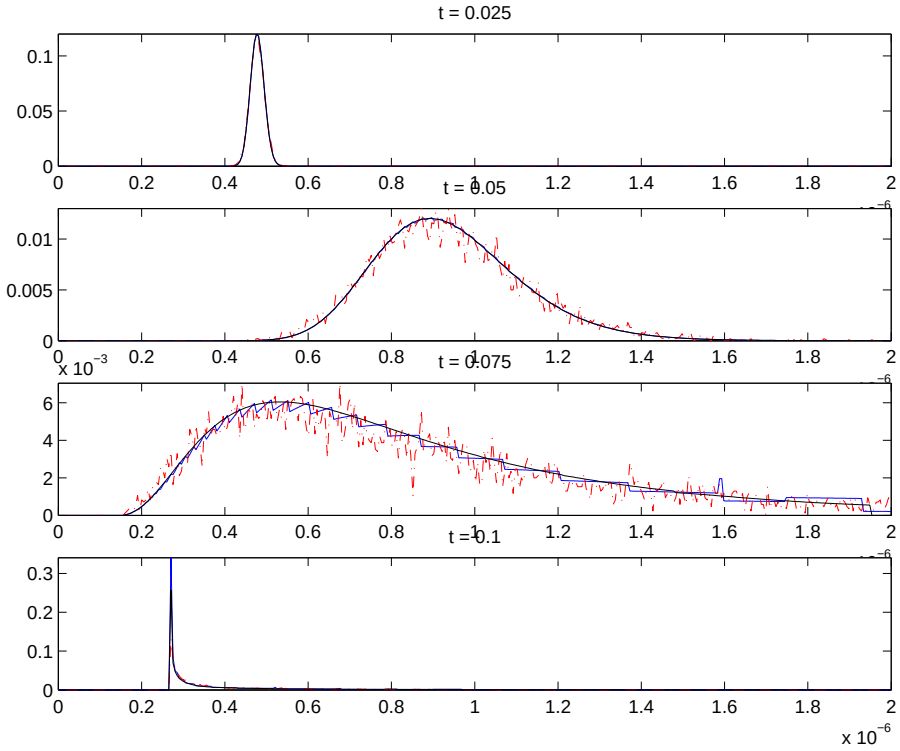

Fig. 51 - Densité de probabilité, à quatre instants différents, de la position du centre d'une poutre encastrée-encastrée, de raideur incertaine, soumise à un échelon de tension. La courbe rouge correspond aux résultats obtenus à l'aide de la méthode de Monte-Carlo (10^5 simulations), les courbes bleue et noire correspondent à des méthodes présentées dans [C13], nécessitant moins de 100 simulations chacune.

D'autres sources d'incertitudes sont indissociables de l'univers des MEMS. Tout d'abord, celles qui pèsent sur les modèles mêmes des microsystèmes : elles découlent d'approximations de type physique (un solide 3D est représenté par une plaque, Navier-Stokes est remplacé par Reynolds) ou numérique (par exemple, comment tenir compte de l'erreur de modèle commise suite à une réduction d'ordre ?). Enfin, les incertitudes liées à la présence de bruits, qu'ils relèvent de phénomènes parasites, comme le bruit thermomécanique, ou qu'ils soient inhérents à la nature du MEMS, comme dans les applications « d'energy scavenging », ne sont que rarement prises en compte lors de la simulation des microsystèmes. D'autres axes de recherche importants sont donc la mise au point d'outils de résolution numérique d'équations différentielles stochastiques et leur utilisation, par exemple pour optimiser une quantité d'énergie récoltée, ainsi que le développement de méthodes de conception tenant compte des erreurs commises sur les modèles des MEMS.

3) Systèmes oscillants

Plusieurs développements possibles aux résultats présentés dans le mémoire ont déjà été mentionnés : étude théorique de l'impact du bruit de phase sur le fonctionnement des systèmes mixtes résonants, étude des régimes chaotiques dans ces mêmes systèmes et quantification des phénomènes de résonance stochastique lorsqu'un bruit est présent à l'entrée du comparateur.

D'autres problèmes restent cependant en suspens, notamment l'extension des méthodes présentées au cas des systèmes non-linéaires. En effet, les solutions existantes [Moeini97] sont inadaptées aux non-linéarités rencontrées dans l'univers des MEMS (par exemple, Duffing ou non-linéarité électrostatique) et les techniques reposant sur des méthodes de perturbation [Bogolioubov62, Nayfeh79] ne permettent pas de traiter efficacement les signaux spectralement riches générés par un comparateur.

4) Identification à partir de données binaires

En ce qui concerne les méthodes d'identification à partir de données binaires, en particulier la méthode BIMBO, qui donne les meilleurs résultats en pratique, il existe un nombre important de développements envisageables. Tout d'abord, l'étude théorique de la méthode doit être poussée plus avant, en particulier pour déterminer précisément la quantité de points nécessaires à une identification de précision donnée. Un autre sujet intéressant consiste à étudier l'adjonction d'un bruit de type « dither » à l'entrée du comparateur, pour en linéariser la caractéristique et permettre l'identification du gain statique du système inconnu.
Enfin, les extensions de ces méthodes à :

- l'identification de systèmes non-linéaires ;
- l'estimation « online » de paramètres ;
- l'identification de systèmes complexes ;

sont toutes des voies à explorer. On présente à la figure 52 un modèle de système complexe identifié à l'aide de la méthode MCLC.

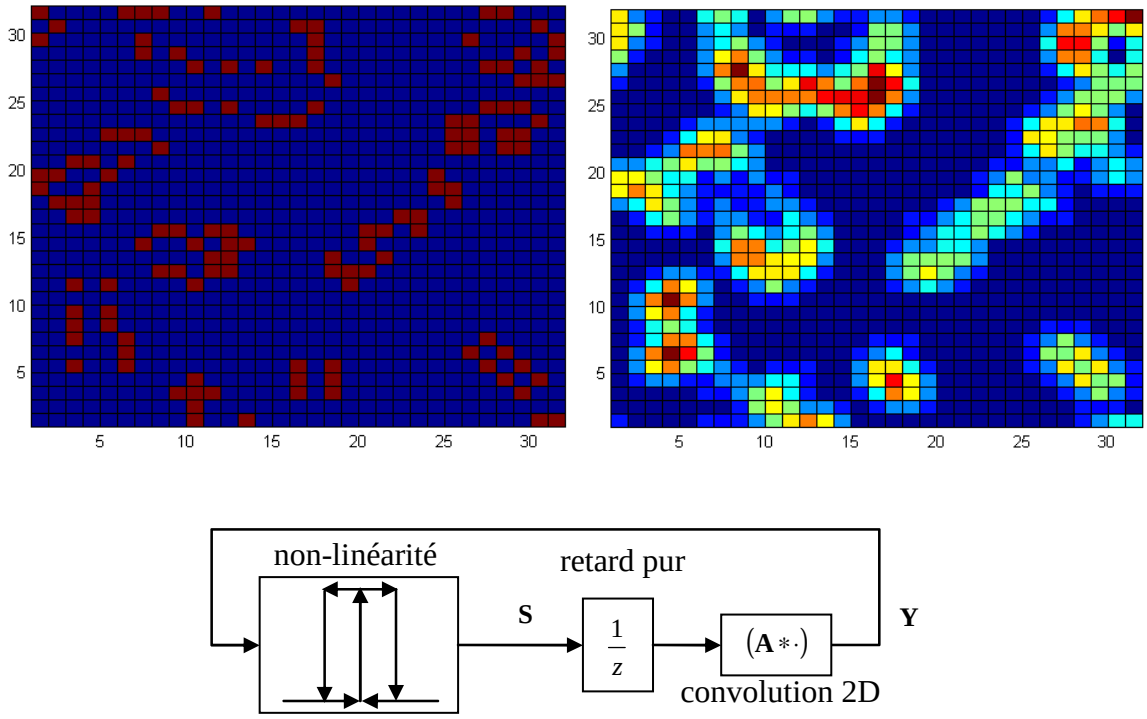

Fig. 52 - Modèle du jeu de la vie identifié à l'aide de MCLC (en bas). Les paramètres à identifier à partir des seules observations **S** *étaient les coefficients de la matrice 3×3* **A** *et les niveaux des commutations de la non-linéarité. Des allures typiques de* **S** *(à gauche) et du* **Y** *correspondant (déterminé après identification, à droite) sont données en haut.*

V. Références

[Abdel-Rahman03] E.M. Abdel-Rahman, A. H. Nayfeh, “Secondary resonances of electrically actuated resonant microsensors”, *Journal of Micromechanics and Microengineering*, vol. 13, pp. 491-501, 2003

[Aikele01] M. Aikele, K. Bauer, W. Ficker, F. Neubauer, U. Prechtel, J. Schalk, H. Seidel, “Resonant accelerometer with self-test”, *Sensors and Actuators A*, vol. 92, pp. 161-167, 2001

[Aluru99] N.R. Aluru et J. White, “A multilevel Newton method for mixed-energy domain simulation of MEMS”, *Journal of Microelectromechanical Systems*, vol. 8, pp. 299-308, 1999

[Andrews93] M.K. Andrews, G.C. Turner, P.D. Harris, M. Harris, “A resonant pressure sensor based on a squeezed film of gas”, *Sensors and Actuators A*, vol. 36, pp. 219-226, 1993

[Astrom84] K.J. Astrom, T.H. Hagglund, “Automatic tuning of simple regulators with specifications on phase and amplitude margins”, *Automatica*, vol. 20, pp. 645-651, 1984

[Atherton66] D.P. Atherton, “Conditions for periodicity in control systems containing several relays”, 3rd IFAC Congress, 1966, Paper 28E

[Avdeev03] I.V. Avdeev, “New formulation for finite element modeling electrostatically driven microelectromechanical systems”, Thèse de l’Université de Pittsbugh, U.S., 2003

[Ayazi98] F. Ayazi, K. Najafi, “Design and fabrication of a high-performance polysilicon vibrating ring gyroscope”, International Conference on MEMS, 1998, pp. 621-626

[Bao00] M.H. Bao, “Micro mechanical transducers: pressure sensors, accelerometers and gyroscopes”, *Handbook of Sensors and Actuators*, vol. 8, Elsevier, Amsterdam, 2000

[Bao02] M. Bao, H. Yang, H. Yin, Y. Sun, “Energy transfer model for squeeze–film air damping in low vacuum,” *Journal of Micromechanics and Microengineering*, vol. 12, pp. 341–346, 2002

[Bao03] M. Bao, H. Yang, Y. Sun, “Modified Reynolds equation and analytical analysis of squeezed-film air damping of perforated microstructures”, *Journal of Micromechanics and Microengineering*, vol. 13, pp. 795-800, 2003

[Beissner84] R.E. Beissner, M.J. Sablik, “Theory of eddy currents induced by a nonsymmetric coil above a conducting half-space”, *Journal of Applied Physics*, vol. 56, pp. 448-454, 1984

[Bientsman96] J.Bienstman, H.A.C. Tilmans, E.Peeters, M.Steyaert, R.Puers, “An oscillator circuit for electrostatically driven silicon-based one-port resonators”, *Sensors and Actuators A*, vol. 52, pp. 179-186, 1996

[Bifano99] T.G. Bifano, J. Perrault, R. Krishnamoorthy Mali, M.N. Horenstein, “Microelectromechanical deformable mirrors,” *IEEE Journal of Selected Topics on Quantum Electronics*, vol. 5, pp. 83–89, 1999.

[Bogolioubov62] N. Bogolioubov, I. Mitropolski, “Les méthodes asymptotiques en théorie des oscillations non linéaires”, Gauthier-Villars et Cie, Paris, 1962

[Boser96] B.E. Boser, R.T. Howe, “Surface Micromachined Accelerometers”, *IEEE Journal of Solid-State Circuits*, vol. 31, pp. 366-375, 1996

[Bowler87] J.R. Bowler, “Eddy current calculations using half-space Green's functions”, *Journal of Applied Physics*, vol. 61, pp. 833-839, 1987

[Charlot01] B. Charlot, S. Mir, F. Parrain, B. Courtois, “Electrically induced stimuli for MEMS self-test”, 19th IEEE VLSI Test Symposium, 2001, pp. 210-215

[Chen01] J.H. Chen, “Modeling and simulation of integrated microstructures and systems”, Thèse de l’Université d’Urbana-Champaign, U.S., 2001

[Chen04] J.H. Chen, S. Kang, J. Zou, C. Liu, J.E. Schutt-Ainé, “Reduced-Order Modeling of Weakly Nonlinear MEMS Devices With Taylor-Series Expansion and Arnoldi Approach”, *Journal of Microelectromechanical Systems*, vol. 13, pp. 441-451, 2004

[Christian66] R.G. Christian, “The theory of oscillating-vane vacuum gauges”, *Vacuum*, vol. 16, pp. 175-178, 1966
[Chronos91] Chronos, “La mesure de la fréquence des oscillateurs”, Masson, Paris, 1991
[Clark97] J.R. Clark, F.D. Bannon, A. Wong, C.T.C. Nguyen, “Parallel-resonator HF micromechanical bandpass filters”, International Conference on Solid-State Sensors and Actuators, 1997, pp. 1161-1164
[Clark00] J.R. Clark, Wan-Thai Hsu, C.T.C. Nguyen, “High-*Q* VHF Micromechanical Contour-Mode Disk Resonators”, International Electron Devices Meeting, 2000, pp. 493-496
[Colinet05] E. Colinet, “Nouvelles architectures et méthodes de conception de microsystèmes sigma-delta et de microsystèmes résonants”, Thèse de l’Université Paris-Sud Orsay, 2005
[Corman00] T. Corman, K. Noren, P. Enoksson, J. Melin, G. Stemme, “Burst technology with feedback-loop control for capacitive detection and electrostatic excitation of resonant silicon sensors”, *IEEE Transactions on electron devices*, vol. 47, pp. 2228-2235, 2000
[Deb06] N. Deb, R.D. Blanton, “Built-in self-test of MEMS accelerometers”, *Journal of Microelectromechanical Systems*, vol. 15, pp. 52-68, 2006
[Dhayni05] A. Dhayni, S. Mir, L. Rufer, “Evaluation of impulse response-based BIST techniques for MEMS in the presence of weak nonlinearities”, European Test Symposium, 2005, pp. 82-87
[Dobbs73] E.R. Dobbs, “Electromagnetic generation of ultrasound”, *Physical Acoustics*, vol. 10, pp. 419-441, 1973
[Dominguez05a] M. Dominguez, J. Pons-Nin, J. Ricart, A. Bermejo, E.F. Costa, “A novel ΣΔ Pulsed Digital Oscillator (PDO) for MEMS”, *IEEE Sensors Journal*, vol. 5, pp. 1379-1388, 2005
[Dominguez05b] M. Dominguez, J. Pons-Nin, J. Ricart, A. Bermejo, E. F. Costa, M. Morata, “Analysis of the ΣΔ Pulsed Digital Oscillator for MEMS”, *IEEE Transactions on Circuits and Systems I*, vol. 52, pp. 2286-2297, 2005
[Dufour01] I. Dufour, E. Sarraute, “Analytical modeling of beam behavior under different actuations: profile and stress expressions”, *Journal of Modeling and Simulation of Microsystems*, vol. 1, 8 pp., 2001
[Elka03] E. Elka, D. Elata, H. Abramovich “The electromechanical response of multilayered piezoelectroc structures”, Rapport Technique ETR-2003-2, Technion, Israel Institute of Technology, 2003
[Emmert03] J.M. Emmert, J.A. Cheatham, B. Jagannathan, S. Umarani, “A monolithic spectral BIST technique for control or test of analog or mixed-signal circuits”, 18th IEEE International Symposium on Defect and Fault Tolerance in VLSI Systems, 2003, pp. 303-310
[Fargas05] A. Fargas Marquès, R. Costa Castelló, A.M. Shkel, “Modelling the electrostatic actuation of MEMS: state of the art 2005”, Rapport Technique IOC-DT-P-2005, Université Polytechnique de Catalogne, 2005
[Feely91] O. Feely, L. O. Chua, “The effect of integrator leak in sigma-delta modulation”, *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, vol. 38, pp. 1294-1305, 1991
[Feely97] O. Feely, “A tutorial introduction to non-linear dynamics and chaos and their application to sigma–delta modulators”, *International Journal on Circuit Theory and Applications*, vol. 25, pp. 347–367, 1997
[Friedman88] V. Friedman, “The structure of the limit cycles in sigma-delta modulation”, *IEEE Transactions on Communications*, vol. 36, pp. 972-979, 1988
[Gabbay98] L. D. Gabbay, “Computer aided macromodeling for MEMS”, Thèse du Massachussets Institute of Technology, U.S., 1998
[Gad el Hak99] M. G. el Hak, “The fluid mechanics of microdevices-the freeman scholar lecture”, *Journal of Fluids Engineering*, vol. 121, pp. 5–33, 1999

[Galayko03] D. Galayko, A. Kaiser, L. Buchaillot, B. Legrand, D. Collard, C. Combi, “Design, realization and testing of micro-mechanical resonators in thick-film silicon technology with postprocess electrode-to-resonator gap reduction”, *Journal of Micromechanics and Microengineering*, vol. 13, pp. 134-140, 2003
[Ghoniem02] N.M. Ghoniem, C. Kyeongjae, “The Emerging Role of Multiscale Modeling in Nano- and Micro-mechanics of Materials”, *Computer Modeling in Engineering & Sciences*, vol. 3, pp. 147-173, 2002
[Goldsmith99] C.L. Goldsmith, A. Malczewski, Z.J. Yao, S. Chen, J. Ehmke, D.H. Hinzel, “RF MEMs variable capacitors for tunable filters”, *International Journal of RF and Microwave Computer-Aided Engineering*, vol. 9, pp. 362-374, 1999
[Goucem86] A. Goucem, D.P. Atherton, “Limit cycles in nonlinear discrete systems,” 25th IEEE Conference on Decision and Control, 1986, vol. 1, pp. 573-577
[Hamel49] B. Hamel, “Contribution à l’étude mathématique des systèmes de réglage par tout-ou-rien”, Centre d’Etudes Mathématiques du Vol, n. 17, Service Technique Aéronautique, 1949
[Huertas02] G. Huertas, D. Vazquez, A. Rueda, J.L.Huertas, “Oscillation-based test in oversampled ΣΔ modulators”, *Microelectronics Journal*, vol. 33, pp. 799-806, 2002
[Huertas03] G. Huertas, D. Vazquez, E. Peralia, A. Rueda, J.L.Huertas, “Oscillation-based test in bandpass oversampled A/D converters”, *Microelectronics Journal*, vol. 34, pp. 927-936, 2003
[Hung99] E.S. Hung, S.D. Senturia, “Generating efficient dynamical models for microelectromechanical systems from a few finite-element simulation runs”, *Journal of Microelectromechanical Systems*, vol. 8, pp. 280-289, 1999
[Hutcherson04] S.M. Hutcherson, “Theoretical and numerical studies of the air-damping of micro-resonators in the non-continuum regime”, Thèse du Georgia Institute of Technology, U.S., 2004
[Hwang03] K.H Hwang, K.H. Lee, G.J Park, B.L. Lee, Y.C. Cho, S.H. Lee, “Robust design of a vibratory gyroscope with an unbalanced inner torsion gimbal using axiomatic design”, *Journal of Micromechanics and Microengineering*, vol. 13, pp. 8-17, 2003
[Jiang00] X. Jiang, J.I. Seeger, M. Kraft, B.E. Boser, “A monolithic surface micromachined Z-axis gyroscope with digital output”, Symposium on VLSI Circuits, 2000, pp. 16-19
[Kaya01] I. Kaya, D.P. Atherton, “Parameter estimation from relay autotuning with asymmetric limit cycle data”, Journal of Process Control, vol. 11, pp. 429-439, 2001
[Kovacs98] G. Kovacs, “Micromachined transducers sourcebook”, McGraw-Hill, Boston, 1998
[Kraft97] M. Kraft, “Closed loop digital accelerometer employing oversampling conversion”, Thèse de l’Université de Coventry, U.K., 1997
[Ianelli02] Ianelli L., “Dither for smoothing relay feedback systems : an averaging approach”, Thèse de l’Université Frédéric II de Naples, IT, 2002
[Landau67] L. Landau, E. Lifchitz, “Théorie de l’élasticité”, Mir, Moscow, 1967
[Landau88] Landau I., « Identification et commande des systèmes », Traité des nouvelles technologies, Hermès, Paris 1988
[Laser04] D.J. Laser, J.G. Santiago, “A review of micropumps”, *Journal of Micromechanics and Microengineering*, vol. 14, pp. 35-64, 2004
[Lee00] Lee S., Park S., Kim J., Lee S., Cho D., “Surface/bulk micromachined single-crystalline-silicon micro-gyroscope”, *Journal of Microelectromechanical Systems*, vol. 9, n°4, pp. 557-567, 2000
[Leus04] V. Leus, D. Elata, “Fringing field effect in electrostatic actuators”, Rapport Technique ETR-2004-2, Technion, Israel Institute of Technology, 2004
[Lhémery97] A. Lhémery, Rapport STA n° 3632, Commissariat à l’Energie Atomique, 1997

[Lifshitz00] R. Lifschitz, M.L. Roukes, “Thermoelastic damping in micro- and nanomechanical systems”, *Physical Review B*, vol. 61, pp. 5600-5609, 2000
[Liu04] S. Liu, A. Davidson, Q. Lin, “Simulation studies on nonlinear dynamics and chaos in a MEMS cantilever control system”, *Journal of Micromechanics and Microengineering*, vol. 14, pp. 1064-1073, 2004
[Madou02] M. Madou, “Fundamentals of Microfabrication”, CRC Press, Boca Raton, 2002
[Malatkar03] P. Malatkar, “Nonlinear Vibrations of Cantilever Beams and Plates”, Thèse du Virginia Polytechnic Institute and State University, U.S., 2004
[Maluf00] N. Maluf, “An Introduction to Microelectromechanical Systems Engineering”, Artech House, Inc., Norwood, 2000
[McNamara85] O.P. McNamara, D.P. Atherton, “Limit cycles in nonlinear sampled data systems”, 9th Triennial World Congress of IFAC, 1985, vol.1, pp. 507-512
[Mehner03] J. Mehner, W. Doetzel, B. Schauwecker and D. Ostergaard, “Reduced Order Modelling of Fluid Structural Interactions in MEMS Based on Modal Projection Technique”, 12th International Conference on Solid-State Sensors, Actuators and Microsystems, 2003, vol. 2, pp 1840-1843
[Melin00] J. Melin, P. Enoksson, T. Corman, G. Stemme, “A low-pressure encapsulated deep reactive ion etched resonant pressure sensor electrically excited and detected using burst technology”, *Journal of Micromechanics and Microengineering*, vol. 10, pp. 209-217, 2000
[Moeini97] A. Moeini, D.P. Atherton, “Exact determination of the limit cycles in relay control systems with additional nonlinearities in the feedback loops”, *IEE Proceedings-Control Theory and Applications*, vol. 144, pp. 269-275, 1997
[Nayfeh79] A.H. Nayfeh, D.T. Mook, “Nonlinear oscillations”, Wiley and Sons, New York, 1979
[Nayfeh04] A.H. Nayfeh, M.I. Younis, “Modeling and simulations of thermoelastic damping in microplates”, *Journal of Micromechanics and Microengineering*, vol. 14, pp. 1711-1717, 2004
[Nguyen99] C.T.C. Nguyen, R.T. Howe, “An integrated CMOS micromechanical resonator high-Q oscillator”, *IEEE Journal of Solid-State Circuits*, vol. 34, pp. 440-455, 1999
[Nguyen05] N.T. Nguyen, Zhigang Wu, “Micromixers - a review”, *Journal of Micromechanics and Microengineering*, vol. 15, pp. 1-16, 2005
[Olszewski05] Z. Olszewski, M. Hill, C. O’Mahony, R. Duane, R. Houlihan, “Characterization, modelling and performance evaluation of CMOS integrated multielectrode tunable capacitor (MTC)”, *Journal of Micromechanics and Microengineering*, vol. 15, pp. 122-131, 2005
[Osterberg97] P.M. Osterberg, S.D. Senturia, “M-TEST: a test chip for MEMS material property measurement using electrostatically actuated test structures”, *Journal of Microelectromechanical Systems*, vol. 6, pp. 107-118, 1997
[Park00] J.Y. Park, G.H. Kim, K.W. Chung, J.U. Bu, “Monolithically integrated micromachined RF MEMS capacitive switches”, *Sensors and Actuators A*, vol. 89, pp. 88-94, 2001
[Paven98] S. Paven, Y. Tsividis, “An analytical solution for a class of oscillators and its application to filter tuning”, *IEEE Transactions on Circuits and Systems I*, vol. 45, pp. 547–556, 1998
[Puers02] R. Puers, S. Reyntjens, “RASTA—real-acceleration-for-self-test accelerometer: a new concept for self-testing accelerometers”, *Sensors and Actuators A*, vol. 97, pp. 359-368, 2002
[Randall96] J.N. Randall, C. Goldsmith, D. Denniston, T.H. Lin, “Fabrication of micromechanical switches for routing radio frequency signals”, *Journal of Vacuum Science and Technology B*, vol. 14 pp. 3692–3696, 1996

[Rewienski03] M. Rewienski, J. White, “A Trajectory Piecewise-Linear Approach to Model Order Reduction and Fast Simulation of Nonlinear Circuits and Micromachined Devices”, IEEE Transactions on CAD of Integrated Circuits and Systems, vol. 22, pp. 155-169, 2003
[Rochus06] V. Rochus, J.C. Golinval, C. Louis, C. Mendez, I. Klapka, “Model of electrostatic actuated deformable mirror using strongly coupled electro-mechanical finite element”, Design, Test, Integration and Packaging of MEMS/MOEMS, 2006, pp. 217-222
[Rong02] L. Rong, B. Paden, K. Turner, “MEMS resonators that are robust to process-induced feature width variations”, *Journal of Microelectromechanical Systems*, vol. 11, pp. 505-511, 2002
[Rufer05] L. Rufer, S. Mir, E. Simeu, C. Domingues, “On-chip pseudorandom MEMS testing”, *Journal of Electronic Testing: Theory and Applications*, vol. 21, pp. 233-241, 2005
[Saleh91] R. Saleh, J. White, "Fast-Cap: a multipole-accelerated 3-D capacitance extraction program," *IEEE Transactions on Computer-Aided Design*, vol.10, pp. 1447-1459, 1991
[Seeger03] J.I. Seeger, B.E. Boser, “Charge control of parallel-plate, electrostatic actuators and the tip-in instability”, *Journal of Microelectromechanical Systems*, vol. 12, pp. 656-71, 2003
[Senturia97] S.D. Senturia, N. Aluru, J. White, “Simulating the behavior of MEMS devices: computational methods and needs”, *IEEE Computational Science and Engineering*, vol. 4, pp. 30-43, 1997
[Senturia01] S.D. Senturia, “Microsystem design”, Kluwer Academic Publishers, Norwell, 2001
[Seshia02] A. Seshia, W.Z. Low, S.A. Bhave, R.T. Howe, S. Montague, “Micromechanical pierce oscillator for resonant sensing applications”, Conference on Modeling and Simulation of Microsystems, 2002, pp.162-165,
[Sobolev89] S.L. Sobolev, “Partial differential equations of mathematical physics”, Dover, New York, (1989)
[Strogatz00] S.D. Strogatz, “Nonlinear Dynamics and Chaos. With Applications to Physics, Biology, Chemistry and Engineering”, PERSEUS, New York, 2000
[Sung03] S. Sung, J. G. Lee, B. Lee, T. Kang, “Design and performance test of an oscillation loop for a MEMS resonant accelerometer”, *Journal of Micromechanics and Microengineering*, vol. 13, pp. 246-253, 2003
[Tarantola05] A. Tarantola, “Inverse Problem Theory”, SIAM, New York, 2005
[Taylor99] J.H. Taylor, “Describing functions”, Electrical Engineering Encyclopedia, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1999
[Tsypkin84] Y.Z. Tsypkin, “Relay control systems”, Cambridge University Press, Cambridge, 1984
[Van Kessel97] P.F. Van Kessel, L.J. Hornbeck, R.E. Meier, M.R. Douglass, “A MEMS-based projection display”, *Proceedings of the IEEE*, vol. 86, pp. 1687-1670, 1997
[Vdovin95] G. Vdovin, P. M. Sarro, “Flexible mirror micromachined in silicon”, *Applied Optics*, vol. 34, pp. 2968–2972, 1995
[Vdovin97] G. Vdovin, S. Middelhoek, P.M. Sarro, “Technology and applications of micromachined silicon adaptive mirrors”, *Optical Engineering*, vol. 36, pp. 1382–1390, 1997
[Veijola95] T. Veijola, H. Kuisma, J. Lahdenpera, T. Ryhanen, “Equivalent-circuit model of the squeezed gas film in a silicon accelerometer”, *Sensors and Actuators A*, vol. 48, pp. 239-248, 1995
[Veijola05] T. Veijola, A. Pursula, P. Raback, “Extending the validity of existing squeezed-film damper models with elongations of surface dimensions”, *Journal of Micromechanics and Microengineering*, vol. 15, pp. 1624-1636, 2005

[Voda95] K. Voda, I..D. Landau, “The autocalibration of PI controllers based on two frequency measurements”, *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, vol. 9, pp. 395-421, 1995
[Vuillermoz94] P.L. Vuillermoz, “Les courants de Foucault : principes, mesure et contrôle”, Afnor, Paris, 1994
[Walter94] E. Walter, L. Pronzato, “Identification de modèles paramétriques à partir de données expérimentales”, Masson, Paris 1994
[Wang96a] P.K.C. Wang, F.Y. Hadaegh, “Computation of static shapes and voltages for micromachined deformable mirrors with nonlinear electrostatic actuators”, *Journal of Microelectromechanical Systems*, vol. 5, pp. 205-220, 1996
[Wang96b] P.K.C. Wang, R.C. Gutierrez, R.K. Bartman, “A method for designing electrostatic-actuator electrode pattern in micromachined deformable mirrors”, *Sensors and Actuators A*, vol. 55, pp. 211-217, 1996
[Wang98] Y.C. Wang, S.G. Adams, J.S. Thorp, N.C. McDonald, P. Hartwell, F. Bertsch, “Chaos in MEMS, parameter estimation and its potential application”, *IEEE Transactions on Circuits and Systems I*, vol. 45, pp. 1013-1020, 1998
[Wellens04] T. Wellens, V. Shatokhin, S. Buchleitner, “Stochastic resonance”, *Reports on Progress in Physics*, vol. 67, pp. 45-105, 2004
[Wittwer06] J.W. Wittwer, M.S. Baker, L.L. Howell, “Robust design and model validation of nonlinear compliant micromechanisms”, *Journal of Microelectromechanical Systems*, vol. 15, pp. 33-41, 2006
[Xie02] H. Xie, G.K. Fedder, “Vertical comb-finger capacitive actuation and sensing for CMOS-MEMS”, *Sensors and Actuators A*, vol. 95, pp. 212-221, 2002
[Xingguo05] Xingguo Xiong, Yu-Liang Wu, W.B. Jone, “A dual-mode built-in self-test technique for capacitive MEMS devices”, *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, vol. 54, pp. 1739-1750, 2005
[Yang02] H. Yang, M. Bao, H. Yin, S. Shen, “Two-dimensional excitation operation mode and phase detection scheme for vibratory gyroscopes”, *Journal of Micromechanics and Microengineering*, vol. 12, pp. 193-197, 2002
[Yao99] Z.J. Yao, S. Chen, S. Eshelman, D. Denniston, C. Goldsmith, “Micromachined low-loss microwave switches”, *Journal of Microelectromechanical Systems*, vol. 8, pp. 129-134, 1999.
[Yazdi98] N. Yazdi, F. Ayazi, K. Najafi, “ Micromachined inertial sensors”, *Proceedings of the IEEE*, vol. 86, pp. 1640-1659, 1998.
[Younis04] M.I. Younis, “Modeling and Simulation of Microelectromechanical Systems in Multi-Physics Fields”, Thèse du Virginia Polytechnic Institute and State University, 2004
[Zhao04] X. Zhao, E. Abdel-Rahman, A.H. Nayfeh, “A reduced-order model for electrically actuated microplates”, *Journal of Micromechanics and Microengineering*, vol. 14, pp. 900-906, 2004
[Zhixiong03] Zhixiong Xiao, Wuyong Peng, R.F. Wolffenbuttel, K.R. Farmer, “Micromachined variable capacitors with wide tuning range”, *Sensors and Actuators A*, vol. 104, pp. 299-305, 2003
[Zhu05] G. Zhu, J. Levine, L. Praly, “On the differential flatness and control of electrostatically actuated MEMS”, American Control Conference, 2005, vol. 4, pp. 2493-2498
[Ziegler05] F. Ziegler, “Computational aspects of structural shape control”, *Computers and Structures*, vol. 83, pp. 1191-1204, 2005
[Zubert05] M. Zubert, M. Napieralska, A. Napieralski, “Electro-Static Membrane Model in CAD”, Nanotechnology Conference and Trade Show, 2005, vol. 3, pp. 581-584