Étude géométrique des problèmes d'optimisation en présence de contraintes

Claude Lobry

▶ **To cite this version:**

Claude Lobry. Étude géométrique des problèmes d'optimisation en présence de contraintes. Modélisation et simulation. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1967. Français. NNT : . tel-00280686

HAL Id: tel-00280686

https://theses.hal.science/tel-00280686

Submitted on 19 May 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE

DE DOCTORAT DE TROISIEME CYCLE DE MATHEMATIQUES PURES

présentée

A LA FACULTE DES SCIENCES

DE L'UNIVERSITE DE GRENOBLE

par

M. Claude LOBRY

" ETUDE GEOMETRIQUE DES PROBLEMES D'OPTIMISATION EN PRESENCE DE CONTRAINTES ".

Soutenue le 20 juin 1967 devant la Commission d'examen

C. CHABAUTY	Président
J. BARRA J.P. BERTRANDIAS	Examinateurs

THESE

DE DOCTORAT DE TROISIEME CYCLE DE MATHEMATIQUES PURES

présentée

A LA FACULTE DES SCIENCES

DE L'UNIVERSITE DE GRENOBLE

par

M. Claude LOBRY

" ETUDE GEOMETRIQUE DES PROBLEMES D'OPTIMISATION EN PRESENCE DE CONTRAINTES ".

Soutenue le 20 juin 1967 devant la Commission d'examen

C. CHABAUTY	Président
J. BARRA J.P. BERTRANDIAS	Examinateurs

/...

MAITRES DE CONFERENCES :

MM.	DODU J.	Mécanique des Fluides
	LANCIA Roland	Physique Automatique
Mme.	KAHANE J.	Physique
M.	DEPORTES C.	Chimie
Mme.	BOUCHE L.	Mathématiques
M.	SARROT-RAYNAUD	Géologie Propédeutique
Mme.	BONNIER M.J.	Chimie
MM.	KAHANE A.	Physique Générale
	DOLIQUE J.M.	Electronique
	BRIERE G.	Physique M.P.C.
	DESRE P.	Chimie S.P.C.N.
	LAJZEROWICZ J.	Physique M.P.C.
	VALENTIN P.	Physique M.P.C.
	BERTRANDIAS J.P.	Mathématiques appliquées T.M.P.
	LAURENT P.	Mathématiques appliquées T.M.P.
	CAUBET J.P.	Mathématiques Pures
	PAYAN J.J.	Mathématiques
Mme.	BERTRANDIAS F.	Mathématiques Pures M.P.C.
MM.	LONGEQUEUE J.P.	Physique
	NIVAT M.	Mathématiques appliquées
	SOHM J.C.	Electrochimie
	ZADWORNY F.	Electronique
	DURAND F.	Chimie Physique
	CARLIER G.	Biologie Végétale
	AUBERT G.	Physique M.P.C.
	DELPUECH J.J.	Chimie Organique
	PFISTER J.C.	Physique C.P.E.M.
	CHIBON P.	Biologie Animale
	IDELMAN S.	Physiologie Animale
	BLOCH D.	Electrotechnique
	BRUGEL L.	I.U.T.
	SIBILLE R.	I.U.T.

MAITRES DE CONFERENCES ASSOCIES :

MM.	RADELLI L.	Géologie
	KEYSTON J.	Thermodynamismé
	WAKIYAMA T.	Physique du Solide
	SAWCZUK A.	Mécanique des Fluides
	CHEEKE J.	Thermodynamique
	YAMADA O.	Physique du Solide
	WITKOWSKI A.	Physique Générale

-:-:-:-

LISTE des PROFESSEURS

DOYENS HONORAIRES : M. MORET
M. WEIL

DOYEN : M. BONNIER E.

PROFESSEURS TITULAIRES :

MM.	NEEL Louis	Chaire de Physique Expérimentale
	HEILMANN René	Chaire de Chimie
	KRAVTCHENKO Julien	Chaire de Mécanique Rationnelle
	CHABAUTY Claude	Chaire de Calcul différentiel et intégral
	BENOIT Jean	Chaire de Radioélectricité
	CHENE Marcel	Chaire de Chimie Papetière
	WEIL Louis	Chaire de Thermodynamique
	FELICI Noël	Chaire d'Electrostatique
	KUNTZMANN Jean	Chaire de Mathématiques appliquées
	BARBIER Reynold	Chaire de Géologie appliquée
	SANTON Lucien	Chaire de Mécanique des Fluides
	OZENDA Paul	Chaire de Botanique
	FALLOT Maurice	Chaire de Physique industrielle
	KOSZUL Jean-Louis	Chaire de Mathématiques M.P.C.
	GALVANI Octave	Mathématiques
	MOUSSA André	Chaire de Chimie Nucléaire
	TRAYNARD Philippe	Chaire de Chimie Générale
	SOUTIF Michel	Chaire de Physique Générale
	CRAYA Antoine	Chaire d'Hydrodynamique
	REULOS R.	Théorie des Champs
	BESSON Jean	Chaire de Chimie
	AYANT Yves	Physique approfondie
	GALLISSOT François	Mathématiques
Mle.	LUTZ Elisabeth	Mathématiques
MM.	BLAMBERT Maurice	Chaire de Mathématiques
	BOUCHEZ Robert	Physique Nucléaire
	LLIBOUTRY Louis	Géophysique
	MICHEL Robert	Chaire de Minéralogie et Pétrographie
	BONNIER Etienne	Chaire d'Electrochimie et d'Electrométallurgie
	DESSAUX Georges	Chaire de Physiologie animale
	PILLET E.	Chaire de Physique Industrielle et Electrotechnique
	YOCCOZ Jean	Chaire de Physique Nucléaire Théorique
	DEBELMAS Jacques	Chaire de Géologie Générale
	GERBER R.	Mathématiques
	PAUTHENET R.	Electrotechnique
	VAUQUOIS B.	Chaire de Calcul Electronique
	BARJON R.	Physique Nucléaire
	BARBIER Jean-Claude	Chaire de Physique
	SILBER R.	Mécanique des Fluides
	BUYLE-BODIN Maurice	Chaire d'Electronique
	DREYFUS B.	Thermodynamique
	KLEIN Joseph	Mathématiques

...

/...

PROFESSEURS TITULAIRES (Suite)

MM.	VAILLANT F.	Zoologie et Hydrobiologie
	ARNAUD Paul	Chaire de Chimie M.P.C.
	SENGEL P.	Chaire de Zoologie
	BARNOUD F.	Chaire de Biosynthèse de la Cellulose
	BRISSONNEAU P.	Physique
	GAGNAIRE Didier	Chaire de Chimie Physique
Mme.	KOFLER L.	Botanique
MM.	DEGRANGE Charles	Zoologie
	PEBAY-PEROULA J.Claude	Physique
	RASSAT A.	Chaire de Chimie Systèmatique

PROFESSEURS SANS CHAIRE :

MM.	GIDON P.	Géologie et Minéralogie
	GIRAUD P.	Géologie
	PERRET R.	Servomécanismes
Mme.	BARBIER M.J.	Electrochimie
Mme.	SOUTIF J.	Physique
MM.	COHEN J.	Electrotechnique
	DEPASSEL R.	Mécanique des Fluides
	GASTINEL A.	Mathématiques appliquées
	ANGLES-d'AURIAC P.	Mécanique des Fluides
	DUCROS P.	Minéralogie et Cristallographie
	GLENAT R.	Chimie
	LACAZE A.	Thermodynamique
	BARRA J.R.	Mathématiques appliquées
	COUMES A.	Electronique
	PERRIAUX J.	Géologie et Minéralogie
	ROBERT A.	Chimie Papetière
	BIAREZ J.P.	Mécanique Physique
	BONNET G.	Electronique
	CAUQUIS G.	Chimie Générale
	BONNETAIN L.	Chimie Minérale
	DEPOMMIER P.	Etude Nucléaire et Génie Atomique
	HACQUES Gérard	Calcul Numérique
	POLOUJADOFF M.	Electrotechnique

PROFESSEURS ASSOCIES :

MM.	NAPP-ZINN	Botanique
	AMAR H.	Physique du Solide
	PARTHE E.	Physique du Solide
	MURAKAMI Shingo	Mathématiques Pures

...

I N T R O D U C T I O N

Depuis les travaux de Kuhn et Tucker [13] l'étude des problèmes d'optimisation en présence de contraintes connaît un grand développement. Sous des formes diverses, liées à la nature des hypothèses faites, de nombreuses études ont été entreprises. La plupart de ces études reposent sur des idées analogues. Récemment un effort de synthèse et de généralisation a été entrepris, notamment par H. Halkin et L. Neustadt [9,a], [9,b], [9,c], [10], [21]. En particulier, Halkin propose dans [21] une condition nécessaire d'optimisation qui recouvre de nombreux cas classiques.

Des travaux de Doubovitsky et Milioutine [6], J.R. Barra [2] a dégagé une méthode générale permettant d'aborder les problèmes d'optimisation qui peuvent se formuler de la manière suivante.

Etant données p+1 parties E_o, E_1, ..., E_p , d'un espace vectoriel réel X, et f une application de X dans R, déterminer les éléments de X qui réalisent le maximum (resp. minimum) de f sur l'intersection des E_i.

Cette méthode permet de trouver des conditions nécessaires pour que le maximum (resp. minimum) de f soit réalisé. Voyons sur un exemple simple comment se présente le problème.

Soient p+1 formes linéaires f_o, f_1, ..., f_p sur un espace vectoriel réel X de dimension finie, et une application concave (resp. convexe) f de X dans R. Notons :

$$E_o = \{x \in X : f_o(x) = 0\}$$

$$E_i = \{x \in X : f_i(x) \leq 0\} \qquad i = 1...p$$

$$A = \bigcap_{i=0}^{p} E_i$$

$$E_{p+1} = \{x \in X : f(x) > f(0) \quad (\text{resp. } f(x) < f(0)\}$$

Nous allons supposer que E_{p+1} est non vide, c'est-à-dire que l'origine ne réalise pas le maximum (resp. minimum) de f sur X. Dans ces conditions, montrons que si l'origine de X réalise le maximum (resp. minimum) de f sur A, il existe p+2 formes linéaires, non toutes nulles :

$$\omega_o, \omega_1, \ldots, \omega_{p+1}$$

telles que :

$$(1) \qquad \sum_{i=1}^{p+1} \omega_i = 0$$

$$(2) \qquad x \in E_i \Rightarrow \omega_i(x) \geq 0 \qquad i = 1...p .$$

En effet, supposons que 0 réalise le maximum de f sur A, il est clair que le convexe A ne coupe pas le convexe E_{p+1}. Nous pouvons séparer A et E par un hyperplan. Il existe donc une forme linéaire, non nulle, ω_{p+1} positive ou nulle sur E_{p+1}, négative ou nulle sur A.

Une telle forme s'écrit nécessairement :

$$\omega_{p+1} = \mu f_o + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f_i \qquad \lambda_i \geq 0$$

et par suite les formes :

$$\omega_{p+1}$$
$$\omega_o = -\mu f_o$$
$$\omega_i = \lambda_i f_i \qquad i = 1...p$$

vérifient bien les relations (1) et (2).

C'est à une généralisation de ce résultat que nous consacrons notre premier chapitre. La première idée, due à Doubovitsky et Miliotine [6], est de définir, pour une partie quelconque E d'un espace vectoriel, une notion de "cône tangent" en un point à E. Sur l'exemple que nous avons proposé on remarque que les ensembles E_o et E_i ne sont pas de même nature. (Le premier est un sous-espace, donc d'intérieur vide, alors que les autres sont des demi-espaces, donc d'intérieurs non vides).

C'est pourquoi on associe à un ensemble E de l'espace vectoriel X deux types de cônes. Le cône des "déplacements adhérents", noté $K^*(E, x_o)$ que nous pourrons utiliser sans restrictions sur l'ensemble E, le cône des "déplacements intérieurs", noté $K(E, x_o)$, utilisable uniquement pour des ensembles d'intérieur non vide. Ces cônes représentent en quelque sorte une "approximation" de E au voisinage de x_o. Ces notions, approximation, voisinage, n'ont de sens que si X est muni d'une topologie. Aussi nous avons défini les cônes K et K* dans le cadre des "espaces vectoriels quasi topologiques", plus général que celui des espaces vectoriels topologiques. Nous étudions rapidement de tels espaces au paragraphe 1 du Chapitre I.

Nous démontrons ensuite le théorème suivant (Chap.I-§3). Une condition nécessaire pour que x_o réalise le maximum de f sur l'intersection des ensembles E_i est que si on note :

$$E_{p+1} = \left\{x \in X : f(x) > f(x_o)\right\}$$

l'intersection des cônes :

$$\Omega_o = K^*(E_o, x_o) \ , \quad \Omega_i = K(E_i, x_o) \qquad i = 1...p+1$$

soit vide. Nous ramenons donc le problème de l'optimisation de f à un problème géométrique, celui de la vacuité d'une intersection de cônes. Comme dans l'exemple, c'est l'utilisation du théorème de Hahn-Banach, dont nous donnons (Chap.I-§5) une démonstration valable dans le cadre des "espaces vectoriels quasi topologiques", qui va nous permettre de transformer cette condition d'intersection vide en une condition analytique. Nous obtenons le résultat suivant (Chap.I - §4) qui est la généralisation naturelle de la condition nécessaire obtenue sur l'exemple.

Si les cônes Ω_i sont tous convexes et non vides, une condition nécessaire pour que x_o réalise le maximum de f sur l'intersection des E_i est qu'il existe p+2 formes linéaires, continues, non toutes nulles

$$\omega_o, \ \omega_1, \ \ldots, \ \omega_{p+1}$$

telles que :

$$(1') \qquad \sum_{i=0}^{p_1} \omega_i = 0$$

$$(2') \qquad x \in \Omega_i \ \Rightarrow \ \omega_i(x) \geq 0 \qquad i = 0...p+1$$

Au Chapitre II nous faisons une étude plus détaillée des cônes K et K*. Nous étudions plus particulièrement le cas où E est un corps convexe, qui apparaît souvent dans les applications.

Nous abordons au Chapitre III le problème de la détermination pratique des cônes K et K*. En général les ensembles E_i sont images ou images réciproques par une application, d'un ensemble dont on connaît bien les cônes K ou K*. De même que la différentielle d'une application différentiable permet le transport des "espaces tangents", les applications "directionnellement différentiables" (Chap.III - §1, déf.4) sont adaptées au transport des "cônes tangents". Nous terminons le chapitre III par un formulaire donnant les cônes de quelques ensembles courants.

Nous consacrons enfin nos deux derniers chapitres à l'application de cette méthode à des problèmes classiques.

Au Chapitre IV nous démontrons un théorème d'extréma liés, valable dans un espace de Banach. Ce théorème se déduit du théorème proposé par Halkin dans [21]. La démonstration que nous proposons fait cependant appel à des idées différentes.

Nous abordons au Chapitre V le problème du contrôle optimal qui depuis les travaux de Pontryagin [17] connaît un grand développement. Citons à ce sujet la bibliographie publiée par A.T. Fuller [8]. Nous verrons que dans ce cas notre méthode s'applique avec beaucoup moins de bonheur que dans le cas précédent.

En conclusion, nous discutons d'abord rapidement de l'efficacité de la méthode proposée, puis nous nous attachons plus longuement au problème du contrôle optimal. Nous reformulons le problème afin d'introduire le langage et les méthodes de la géométrie différentielle. Nous citons pour terminer un résultat dû à Chow dont Hermann [11] a montré l'importance dans le problème du contrôle optimal.

-:-:-:-

Je suis reconnaissant à Monsieur CHABAUTY d'avoir accepté de présider le Jury. Je remercie Monsieur BARRA de m'avoir proposé ce travail, Monsieur BERTRANDIAS de s'y être intéressé. Les utiles conseils qu'ils m'ont prodigué m'ont été très précieux.

Je tiens enfin à remercier Madame GRANGE et Mademoiselle JOURDANET pour la gentillesse, la rapidité et la compétence avec lesquelles elles ont réalisé l'impression de ce travail.

°0°

S O M M A I R E

ETUDE GEOMETRIQUE DES PROBLEMES D'OPTIMISATION EN PRESENCE DE CONTRAINTES.

Pages

INTRODUCTION.

Chapitre I - UNE CONDITION NECESSAIRE D'OPTIMUM.

1. Esapces vectoriels quasi topologiques. 1
2. Déplacements admissibles - Cônes K et K*. 7
3. Condition nécessaire d'extremum - Forme géométrique. 11
4. Une condition nécessaire d'extremum - Forme analytique. 13
5. Le théorème de Hahn-Banach. 19

Chapitre II - PROPRIETES DES DEPLACEMENTS ADMISSIBLES.

1. Cônes K, K* et contingent vectoriel. 23
2. Les formules fondamentales 25
   a) Formules de dualité.
   b) Inclusions.
   c) Cas de vacuité.
   d) Stabilité.
3. Déplacements admissibles d'un corps convexe. 27

Chapitre III - EXPRESSIONS ANALYTIQUES DES CÔNES K ET K*.

1. Applications directionnellement différentiables. . . 33
2. Transport des cônes par une application directionnellement différentiable 39
3. Quelques expressions analytiques de cônes K et K* - Formulaire 43
   a) Cônes K et K* pour une application admettant une différentielle convexe.
   b) Cônes K et K* pour une application admettant une différentielle linéaire.

...

/...

Chapitre IV - UN THEOREME D'EXTREMA LIES DANS UN ESPACE DE BANACH.

1. Cônes K* pour une application de rang constant. . . 45
2. Un théorème d'extrema liés. 50
3. Un résultat classique du calcul des variations. . . 53

Chapitre V - UN PROBLEME DE CONTRÔLE OPTIMAL.

1. Le problème du contrôle optimal 56
   a) Le système.
   b) Les contraintes.
   c) Le critère.
2. Une approche géométrique du problème du contrôle optimal. 59
   a) Le système.
   b) Les contraintes.
   c) Le critère.
3. Théorèmes et notations sur les équations différentielles. 62
4. Lemme. 66
5. Principe de Pontryagin en horizon fixé avec contraintes de type inégalité sur l'état final. . . 72
6. Principe de Pontryagin en horizon fixé avec contraintes de type égalité et inégalité sur l'état final. 76

CONCLUSION 87

BIBLIOGRAPHIE.

.0.

CHAPITRE I

UNE CONDITION NECESSAIRE D'OPTIMUM

Le but de ce chapitre est de démontrer sous des hypothèses générales une condition nécessaire d'optimum.

On notera l'usage qui est fait de la notion d'espace vectoriel quasi topologique. En particulier la plus fine des topologies d'espace vectoriel quasi topologique est la topologie finie [12], c'est-à-dire la topologie dont les ouverts sont les ensembles dont la trace sur tout sous-espace de dimension finie est un ouvert pour la topologie naturelle de celui-ci :

Cette topologie semble donc utile pour aborder les problèmes d'optimisation quand une topologie ne s'impose pas naturellement.

1. ESPACES VECTORIELS QUASI TOPOLOGIQUES.

La terminologie étant celle de [4], définissons d'abord la notion d'espace vectoriel quasi topologique plus générale que celle d'espace vectoriel topologique.

Définition.-

Soient X un espace vectoriel sur R, $\mathfrak{T}$ une topologie sur X. On dit que le couple $(X, \mathfrak{T})$ est un espace vectoriel quasi topologique, ou plus rapidement un e.v.q.t. s'il satisfait aux axiomes suivants :

e.v.q.t. 1 : La famille des ouverts de $\mathfrak{T}$ est stable par toute translation.

e.v.q.t. 2 : La famille des ouverts de $\mathfrak{T}$ est stable par toute homothétie de rapport non nul.

e.v.q.t. 3 : Pour tout élément x de X et tout voisinage U de 0, il existe ε strictement positif et un voisinage V de x tels que :

$$|\lambda| < \varepsilon \Rightarrow \lambda V \subset U .$$

Ces axiomes sont équivalents aux axiomes :

(e.v.q.t. 1)' : Quel que soit x_0 dans X l'application :

$$t_{x_0} : (X, \mathfrak{T}) \to (X, \mathfrak{T})$$

définie par :

$$t_{x_0}(x) = x_0 + x$$

est continue.

(e.v.q.t. 2)' : Quel que soit le réel λ_0 l'application :

$$h_{\lambda_0} : (X, \mathfrak{T}) \to (X, \mathfrak{T})$$

définie par :

$$h_{\lambda_0}(x) = \lambda_0 x$$

est continue.

(e.v.q.t. 3)' : Quel que soit x dans X l'application :

$$\varphi : R \times (X, \mathfrak{T}) \to (X, \mathfrak{T})$$

définie par :

$$\varphi(\lambda, x) = \lambda x$$

est continue au point (0, x).

Enonçons maintenant quelques propriétés simples de tels espaces. Dans tout ce paragraphe, $(X, \mathfrak{T})$ désignera un e.v.q.t.

Proposition 1.-

Pour tout x dans $(X, \mathfrak{T})$ l'application :

$$I_x : R \to (X, \mathfrak{T})$$

définie par :

$$I_x(\lambda) = \lambda x$$

est continue.

(Il suffit de remarquer que : $\lambda x = (\lambda - \lambda_o)x + \lambda_o x$)

Proposition 2.-

Un e.v.q.t., $(X, \mathfrak{T})$ admet un système fondamental de voisinages de 0 absorbants et équilibrés.

Proposition 3.-

Soient X un espace vectoriel, $(X_i, \mathfrak{T}_i)_{i \in I}$ une famille d'e.v.q.t. et $(f_i)_{i \in I}$ une famille d'applications linéaires:

$$f_i : X \to (X_i, \mathfrak{T}_i)$$

Soit $\mathfrak{T}$ la topologie initiale de la famille $(f_i)_{i \in I}$, c'est-à-dire la topologie la moins fine rendant continues toutes les applications f_i, alors $(X, \mathfrak{T})$ est un e.v.q.t.

Corollaire 1.-

La borne supérieure d'une famille de topologies d'e.v.q. sur X est une topologie d'e.v.q.t. sur X.

Corollaire 2.-

Si M est un sous-espace de l'e.v.q.t. $(X, \mathfrak{T})$, M est un e.v.q.t. pour la topologie induite.

Proposition 4.-

Soient $(X, \mathfrak{T})$ un e.v.q.t. et M un sous-espace de X, le quotient X/M muni de la topologie quotient est un e.v.q.t. et de plus la projection canonique :

$$\pi : X \to X/M$$

est ouverte.

Proposition 5.-

Sur l'ensemble R considéré comme espace vectoriel sur R la plus fine des topologies d'e.v.q.t. est la topologie naturelle.

En effet, si $\mathfrak{T}$ est une topologie d'e.v.q.t. sur R, on a vu que l'application :

$$\varphi : R \to (R, \mathfrak{T})$$

définie par :

$$\varphi(\lambda) = \lambda \times 1$$

est continue (Prop. 1) ce qui montre que la topologie naturelle de R est plus fine que toute topologie d'e.v.q.t. sur R.

Proposition 6.-

Si $\mathfrak{T}$ est la plus fine des topologies d'e.v.q.t. de X et si M est un sous-espace de X, alors $\mathfrak{T}$ induit sur M la plus fine des topologies d'e.v.q.t. de M.

La démonstration se fait facilement en montrant que toute topologie d'e.v.q.t. sur M est induite par une topologie d'e.v.q.t. sur X.

Proposition 7.-

Sur R^n la plus fine des topologies d'e.v.q.t. est l'unique topologie d'espace vectoriel topologique séparée de R^n.

Démonstration :

Démontrons cette proposition par récurrence sur n. Pour cela montrons que si la topologie induite par la norme euclidienne ($\|x\|$) de R^{n-1} est la plus fine des topologies d'e.v.q.t. de R^{n-1}, il en est de même sur R^n ce qui avec la proposition 5 prouvera la proposition 7.

Soient $U_{\mathfrak{T}}$ un voisinage ($\mathfrak{T}$) de 0 dans R^n et S la sphère unité de R^n. Pour tout x de S il existe un voisinage $\mathcal{V}_{\mathfrak{T}}^{x}$ de x et un ε_x strictement positif tels que :

$$|\lambda| < \varepsilon_x \Rightarrow \lambda \mathcal{V}_{\mathfrak{T}}^{x} \subset U$$

La trace $\mathcal{W}_{\mathfrak{T}}^{x}$ de $\mathcal{V}_{\mathfrak{T}}^{x}$ sur le plan tangent T_x en x à S est un voisinage de x pour la topologie d'e.v.q.t. induite par $\mathfrak{T}$ sur T_x. D'après l'hypothèse de récurrence, $\mathcal{W}_{\mathfrak{T}}^{x}$ est un voisinage de x pour la norme euclidienne de T_x et par suite le cône c, défini par :

$$c = \bigcup_{\lambda>0} \mathcal{V}_{\mathfrak{T}}^{x}$$

coupe la sphère S suivant un voisinage O_x de x pour la norme euclidienne. Sa sphère S étant compacte, il existe un recouvrement de S par une famille finie de O_x. Soit $(O_{x_i})_{i=1\ldots p}$ une telle famille.

Soit $\varepsilon = \operatorname{Min}_{i=1\ldots p} (\varepsilon_{x_i})$: ε est strictement positif.

Il est clair que la boule de centre 0 et de rayon ε est incluse dans $U_{\mathfrak{T}}$.

Proposition 8.-

Sur R^n une topologie d'e.v.q.t. séparée est l'unique topologie d'espace vectoriel topologique séparé de R^n.

Démonstration :

Montrons que si $\mathfrak{T}$ est une topologie d'e.v.q.t. séparée, elle est plus fine que la topologie induite par la norme euclidienne ce qui en appliquant la proposition 6 démontre la proposition 7.

Montrons que :

$$B_n = \left\{ x : \|x\| < \frac{1}{n} \right\}$$

contient un voisinage $\mathfrak{T}$ de 0.

Soit :

$$S_n = \left\{ x : \|x\| = \frac{1}{n} \right\}$$

Pour tout x de S_n il existe un voisinage $\mathcal{V}_{\mathfrak{T}}^{x}$ de x et $\mathcal{W}_{\mathfrak{T}}^{x}$ de 0 ne se coupant pas.

Soit :

$$\left(\mathcal{V}_{\mathfrak{T}}^{x_i}\right)_{i = 1 \ldots p}$$

un recouvrement fini de S_n. (Ceci est possible car les $\mathcal{V}_{\mathfrak{T}}^{x}$ sont des voisinages de x pour la norme euclidienne en vertu de la proposition 7).

Soit :

$$W = \bigcap_{i=1}^{P} W_{x_i}$$

W est un voisinage $\mathfrak{T}$ de 0 ne rencontrant pas S_n. D'après la proposition 2, W contient donc un voisinage $\mathfrak{T}$ équilibré W' ne rencontrant pas S_n et il est clair qu'un tel voisinage de 0 est inclus dans B_n.

Nous allons énoncer maintenant un résultat de Kakutani et Klee [12] sur la topologie finie :

Proposition 9.-

Si on note T la topologie finie sur un espace vectoriel X on a les résultats suivants relativement au couple (X, T) :

1) (X, T) est un e.v.q.t.

2) Si X a une dimension inférieure ou égale au dénombrable, (X, T) est un espace vectoriel topologique.

3) Si X a une dimension supérieure au dénombrable, (X, T) n'est jamais un espace vectoriel topologique.

Cette proposition montre que la topologie finie est la plus fine des topologies d'e.v.q.t. et qu'il existe des e.v.q.t. séparés qui ne sont pas des espaces vectoriels topologiques.

2. DEPLACEMENTS ADMISSIBLES - CÔNES K ET K*.

Les deux notions suivantes (cônes K et K*) sont directement inspirées des définitions données par Doŭbovitsky et Milioutine dans [6].

Soient X un e.v.q.t., E une partie de X, et x_o un élément de X.

Définition 1.-

On dit qu'un vecteur non nul x de X est un déplacement intérieur de E (relativement au point x_o) si il existe un voisinage V de x et un réel strictement positif ε tels que :

$$y \in V,\ 0 < \eta < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad x_o + \eta y \in E$$

Il est clair que l'ensemble des déplacements intérieurs de E est un cône que nous notons :

$$K(E, x_o)$$

Définition 2.-

On dit qu'un vecteur x de X est un déplacement adhérent de E (relativement au point x_o) si il est nul ou si pour tout voisinage V de x et tout réel strictement positif ε il existe un élément y de V et un réel η de l'intervalle ouvert $]0, \varepsilon[$ tels que :

$$x_o + \eta y \in E.$$

Il est clair que l'ensemble des déplacements adhérents de E est un cône que nous notons :

$$K^*(E, x_o).$$

Lorsque l'espace X est séparé, on peut encore écrire les deux définitions précédentes de la manière suivante :

Définition 1'.-

Un vecteur non nul x est un déplacement intérieur de E si il existe un voisinage V de x et un voisinage U de 0 tels que :

$$\left[x_o + U \cap \left(\bigcup_{\lambda>0} \lambda V\right)\right] \subset E$$

Définition 2'.-

Un vecteur x est un déplacement adhérent si il est nul ou si pour tout voisinage V de x et tout voisinage U de 0, on a :

$$\left[x_o + U \cap \left(\bigcup_{\lambda>0} \lambda V\right)\right] \cap E \neq \phi$$

L'équivalence des définitions se démontre essentiellement en utilisant l'axiome e.v.q.t. 3 et en remarquant qu'on a les formules de dualité suivantes :

$$(1) \qquad K(E, x_o) = \complement\left[K^*(\complement E, x_o)\right]$$

$$(2) \qquad K^*(E, x_o) = \complement\left[K(\complement E, x_o)\right]$$

aussi bien au sens des définitions 1 et 2 qu'au sens des définitions 1' et 2'. Il suffit donc de démontrer que si on note le cône des déplacements intérieurs relativement à la définition 1', on a les inclusions :

$$\text{i)} \quad K'(E, x_o) \subset K(E, x_o)$$

$$\text{ii)} \quad K'(E, x_o) \supset K(E, x_o)$$

i) se démontre simplement à l'aide d'e.v.q.t. 3 et ii) se démontre en utilisant la séparation de l'espace X.

Remarque : Il découle immédiatement des définitions 1 et 2 que les cônes K et K^* sont une "approximation" locale de E, c'est-à-dire que quel que soit le voisinage U de x_o, on a :

$$K(E, x_o) = K(E \cap U, x_o) \tag{3}$$

$$K^*(E, x_o) = K^*(E \cap U, x_o) \tag{4}$$

Proposition 1.-

Le cône $K(E, x_o)$ est ouvert, le cône $K^*(E, x_o)$ est fermé.

En effet, soit x un vecteur de $K(E, x_o)$. Il existe un voisinage V de x et un réel strictement positif ϵ tels que :

$$\eta \in]0, \epsilon[\Rightarrow x_o + \eta V \subset E.$$

Si U est un ouvert contenant x inclus dans V, V est un voisinage de chacun des points de U, et par suite U appartient à $K(E, x_o)$.

$K^*(E, x_o)$ est le complémentaire de $K(\complement E, x_o)$, il est donc fermé.

iii) Si $X = R^2$, si l'ensemble d'indice est N et si on pose

$$E_n = \left\{ x \in R^2 : \|x\| < \frac{1}{n} \right\}$$

on a clairement :

$$\forall n \quad K(E_n, 0) = R^2 \quad \Rightarrow \quad \bigcap_{n \in N} K(E_n, 0) = R^2$$

$$\bigcap_{n \in N} E_n = 0 \quad \Rightarrow \quad K(\cap E_n, 0) = \phi$$

Proposition 3.-

Soit $(E_i)_{i \in I}$ une famille de parties de X. On a :

i) $K^*\left(\bigcap_{i \in I} E_i, x_o \right) \supset \bigcap_{i \in I} \left(K^*(E, x_o) \right)$

ii) Si l'ensemble d'indice I est fini, alors :

$$K^*\left(\bigcap_{i \in I} E_i, x_o \right) = \bigcap_{i \in I} \left(K^*(E, x_o) \right)$$

iii) Si l'ensemble d'indice I n'est pas fini, ii) n'est pas nécessairement vraie.

Démonstration :

Il suffit d'appliquer la formule (2) aux relations (5) et (6).

3. CONDITION NECESSAIRE D'EXTREMUM - FORME GEOMETRIQUE.

Nous démontrons un théorème qui ramène un problème d'optimisation à un problème d'intersection de cônes dans un espace vectoriel quasi topologique.

Proposition 2.-

Soit $(E_i)_{i \in I}$ une famille de parties de X. On a :

i) $$K\Big(\bigcap_{i\in I} E_i,\ x_o\Big) \subset \bigcap_{i\in I} K(E_i,\ x_o) \qquad (5)$$

ii) Si l'ensemble d'indice est fini, alors :

$$K\Big(\bigcap_{i\in I} E_i,\ x_o\Big) = \bigcap_{i\in I} K(E_i,\ x_o) \qquad (6)$$

iii) Si l'ensemble d'indice I est infini, ii) n'est pas nécessairement vraie.

Démonstration :

i) Soit x un vecteur de $K\Big(\bigcap_{i\in I} E_i,\ x_o\Big)$, il existe un voisinage V de x et un réel strictement positif ε tels que :

$$0 < \eta < \varepsilon,\ y \in V \Rightarrow x_o + \eta y \in \bigcap_{i\in I} E_i$$

donc pour tout i de I :

$$0 < \eta < \varepsilon,\ y \in V \Rightarrow x_o + \eta y \in E_i$$

ce qui montre que quel que soit i dans I, x appartient à $K(E_i,\ x_o)$.

ii) Soit x un vecteur de $\bigcap_{i\in I} K(E_i,\ x_o)$. Pour tout i de I il existe un voisinage V_i de x et un réel strictement positif ε_i tels que :

$$0 < \eta < \varepsilon_i,\ y \in V_i \Rightarrow x_o + \eta y \in E_i$$

L'ensemble I étant fini, l'intersection V de V_i est un voisinage de x, le plus petit des nombres ε_i est un réel strictement positif et il est clair que :

$$0 < \eta < \operatorname{Min}_{i\in I}(\varepsilon_i),\ y \in \bigcap_{i\in I} V_i \Rightarrow x_o + \eta y \in \bigcap E_i$$

ce qui démontre ii).

Théorème 1.-

Soient E_o, E_1, ..., E_n n parties d'un e.v.q.t. X, notons A leur intersection et soit f une application de A dans R. Une condition nécessaire pour que x_o réalise le maximum de la fonctionnelle f sur A est que :

si on note : $\Omega_o = K^*(E_o, x_o)$

$$\Omega_i = K(E_i, x_o) \quad i = \{1...n\}$$

$$\Omega_{n+1} = K(E_{n+1}, x_o) \; ; \; E_{n+1} = \{x \in X : f(x) > f(x_o)\}$$

l'intersection des cônes Ω_i pour $i = (0,...,n+1)$ soit vide.

Démonstration :

Montrons que si l'intersection des Ω_i est non vide, l'hypothèse de maximalité est contredite.

Soit x un élément de $\bigcap_{i=0}^{n+1} \Omega_i$, x appartient à l'intersection pour $i = (1...n+1)$ des cônes Ω_i, donc d'après la relation (6) du paragraphe 3 x appartient au cône :

$$K\left(\bigcap_{i=1}^{n+1} E_i, x_o\right)$$

Il existe donc un voisinage V de x et un réel strictement positif tel que l'on ait :

$$0 < \eta < \varepsilon, \; y \in V \Rightarrow x_o + \eta y \in \bigcap_{i=1}^{n+1} E_i$$

Le vecteur x appartient également au cône $K^*(E^\circ, x_o)$ et par suite il existe un y de V et un nombre η tels que :

$$0 < \eta < \varepsilon, \quad x_o + \eta y \in E_o$$

Par suite l'élément de X, $x_o + \eta y$ appartient à l'intersection de tous les E_i c'est-à-dire :

$$x_o + \eta y \in A \quad \text{et} \quad f(x_o + \eta y) > f(x_o)$$

ce qui contredit la maximalité de $f(x_o)$ sur A.

Il est clair que si un des cônes Ω_i $(i = 0...n)$ est vide ou réduit à $\{0\}$, la condition nécessaire énoncée est sans intérêt. On voit donc que l'on a ramené un problème de recherche de maximum à un problème d'intersection de cônes. Dans le cas où $n = 0$, il s'agit de séparer deux cônes Ω_o et Ω_1. Si ces cônes sont convexes, on pourra utiliser le théorème de Hahn-Banach.

Dans le paragraphe suivant, nous donnons un théorème qui permet d'aborder le cas général.

4. UNE CONDITION NECESSAIRE D'EXTREMUM - FORME ANALYTIQUE.

Le théorème 3 de ce paragraphe est énoncé dans [6]. Nous en donnons une démonstration dans le cadre des e.v.q.t. Cette démonstration est due à A. Bernard [3].

Théorème 1.-

Les hypothèses et les notations étant les mêmes que pour le théorème 1 du paragraphe 3, et si de plus les cônes Ω_i sont tous convexes et non vides, une condition nécessaire pour que x_o réalise le maximum de la fonctionnelle f sur A est qu'il existe n+2 formes linéaires ω_o, ω_1, ..., ω_{n+1} continues, non toutes nulles telles que :

$$x \in \Omega_i \Rightarrow \omega_i(x) \geq 0$$

$$\sum_{i=0}^{n+1} \omega_i = 0 \quad .$$

Démonstration du Théorème 1 :

Ce théorème est une conséquence du Théorème 3 que nous allons démontrer.

Le théorème de Hahn Banach dont nous rappelons l'énoncé ci-dessous fait l'objet du paragraphe 5 de ce chapitre.

Théorème 2. (Hahn-Banach)-

Soit X un e.v.q.t. et U un ouvert convexe non vide de X. Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

1) 0 n'appartient pas à U.

2) Il existe une forme linéaire continue strictement positive sur U (et par suite non nulle).

Corollaire 1.-

Soit X un e.v.q.t., U_1 et U_2 deux parties convexes non vides de X. Si U_1 est ouvert les deux propositions suivantes sont équivalentes :

1) $U_1 \cap U_2 = \phi$.

2) Il existe une forme affine continue, non nulle ω telle que :

$$x \in U_1 \Rightarrow \omega(x) \geq 0$$
$$x \in U_2 \Rightarrow \omega(x) \leq 0 .$$

Il suffit de remarquer que :

$$U_1 \cap U_2 = \phi \Leftrightarrow 0 \notin U_1 - U_2$$

et d'appliquer le théorème 2, car $U_1 - U_2$ est un ouvert convexe.

Corollaire 2.-

Soient $U_1, U_2, \ldots, U_{p-1}$ p-1 ouverts convexes d'un e.v.q.t. X. Soit U_p un convexe quelconque de X. Si quel que soit i le complémentaire de U_i est non vide et si l'intersection des U_i est vide, alors il existe p-1 formes affines continues toutes non constantes et une forme affine continue ω_p telles que :

$$\bigcap_{i=1}^{p} \omega_i^{-1}(]0 +\infty[) = \phi \qquad (1)$$

$$x \in U_i \Rightarrow \omega_i(x) \geq 0 \qquad (2)$$

Démonstration :

Il existe une forme ω_1 non constante telle que :

$$\omega_1^{-1}(]0 +\infty[) \cap (U_2 \cap U_3 \dots \cap U_p) = 0$$

$$x \in U_1 \quad \Rightarrow \quad \omega_1(x) \geq 0$$

En effet, si $(U_2 \cap U_3 \dots \cap U_p)$ est non vide, il suffit d'appliquer le corollaire 1 du théorème 2, sinon il suffit de prendre n'importe quelle forme affine non constante sur U_1 ce qui est toujours possible car U_1 est un ouvert convexe propre.

Supposons maintenant construite n $(n < p)$ formes $\omega_1 \dots \omega_n$ non constantes, telles que :

$$\left[\bigcap_{i=1}^{n} \omega_i^{-1}(]0 +\infty[)\right] \cap \left[U_{n+1} \cap \dots \cap U_p\right] = 0$$

$$x \in U_i \quad \Rightarrow \quad \omega_i(x) \geq 0$$

Distinguons deux cas suivant que n est égal à p-1 ou non.
Si n est strictement plus petit que p-1, on applique le corollaire 1 du théorème 2 aux ensembles :

- U_{n+1} (qui est un ouvert convexe)
- $\left[\bigcap_{i=1}^{n} \omega_i^{-1}(]0 +\infty[)\right] \cap \left[U_{n+2} \cap \dots \cap U_p\right] = A_n$

Si A_n était vide, on prendrait n'importe quelle forme non constante positive ou nulle sur U_{n+2}.
Si maintenant n est égal à p-1, on applique le corollaire 1 du théorème 2 aux ensembles :

- $\bigcap_{i=1}^{p-1} \omega_i^{-1}(]0 +\infty[) = A_{p-1}$ qui est un ouvert convexe.
- U_p .

Si A_{p-1} était vide, on prendrait n'importe quelle forme affine positive ou nulle sur U_p. (Une telle forme peut être constante car U_p n'est pas ouvert).

Il est clair que les p formes ainsi construites satisfont aux relations (1) et (2) du corollaire 2.

Corollaire 3.-

Soient $U_1 \ldots U_{p-1}$ p-1 ouverts convexes non vides d'un e.v.q.t. X. Soit U_p un convexe quelconque non vide de X. Si l'intersection des U_i $i = (1 \ldots p)$ est vide, il existe p formes affines continues non toutes constantes $\omega_1 \ldots \omega_p$ telles que :

$$\bigcap_{i=1}^{p} \omega_i^{-1}(]0 +\infty[) = \phi$$

$$x \in U_i \Rightarrow \omega_i(x) \geq 0$$

Il suffit de remarquer que la condition :

$$\bigcap_{i=1}^{p} U_i = \phi$$

entraîne l'existence d'au moins deux U_i dont le complémentaire est non vide, et par suite il suffit d'appliquer le corollaire 2 à ceux des U_i qui ont un complémentaire non vide et d'associer aux autres des formes ω_i constantes.

Théorème 3.- Théorème de Séparation des convexes.

Soient $U_1 \ldots U_{p-1}$ p-1 ouverts convexes non vides d'un e.v.q.t. X, U_p un convexe non vide quelconque de X. Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

i) $\bigcap_{i=1}^{p} U_i = \phi$

ii) Il existe p formes affines continues non toutes constantes et une constante c telles que :

$$\sum_{i=1}^{p} \omega_i = c \quad ; \quad c \leq 0$$

$$x \in U_i \Rightarrow \omega_i(x) \geq 0 \quad .$$

Démonstration :

ii) ⇒ i) : Si x est un élément de l'intersection de U_i on a :

$$\forall i \quad \omega_i(x) \geq 0 \quad .$$

Et par suite comme pour tout x on a :

$$\sum_{i=1}^{p} \omega_i(x) = c \leq 0 \quad .$$

On a nécessairement quel que soit i :

$$\omega_i(x) = 0 \quad .$$

Il existe donc un ouvert U_i et une forme non constante ω_i qui s'annule en un point x de cet ouvert. Un telle forme ω_i prendra donc nécessairement des valeurs négatives sur U_i ce qui est contraire à l'hypothèse ii).

i) ⇒ ii) : D'après le corollaire 3 il existe q formes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q$ non constantes et p - q formes $\alpha_{q+1}, \ldots, \alpha_p$ constantes telles que après une permutation convenable des indices relatifs aux U_i :

$$\bigcap_{i=1}^{q} \alpha_i^{-1}(]0 +\infty[) = \phi$$

$$x \in U_i \Rightarrow \alpha_i(x) \geq 0 \quad , \quad i = 1 \ldots p \quad .$$

Notons f l'application

$$f : X \to R^q$$

définie par :

$$f(x) = \left(\alpha_i(x)\right)_{i = 1 \ldots q} - \left(\alpha_i(0)\right)_{i = 1 \ldots q}$$

il est clair que f est une application linéaire et que de plus si on note P^+ l'ensemble des $(x_i)_{i = 1 \ldots q}$ de R^q tels que x_i soit strictement positif on a :

$$f(X) \cap \left[\left(-\alpha_i(0) \right)_{i=1\ldots q} + P^+ \right] = \phi$$

et que par suite il existe une forme linéaire non nulle séparant ces deux ensembles. Il existe donc p nombres $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_p$ positifs ou nuls, non tous nuls tels que :

$$(x_i)_{i=1\ldots q} \in f(X) \Rightarrow \sum_{i=1}^{q} \lambda_i \, x_i = 0$$

$$(x_i)_{i=1\ldots q} \in \left(-\alpha_i(0) \right) + P^+ \Rightarrow \sum_{i=1}^{q} \lambda_i \, x_i > 0 \quad .$$

On a donc les propositions suivantes :

$$\sum_{i=1}^{q} \lambda_i \, \alpha_i(x) = \sum_{i=1}^{q} \lambda_i \, \alpha_i(0)$$

$$(x_i)_{i=1\ldots q} \in P^+ \Rightarrow \sum_{i=1}^{q} \lambda_i \, x_i > \sum_{i=1}^{q} \lambda_i \, \alpha_i(0) \quad .$$

Il est donc clair que les formes ω_i définies par :

$\omega_i(x) = \lambda_i \, \alpha_i(x)$, $i = 1\ldots q$: $\omega_i(x) = 0$, $i = q+1, \ldots, p$

satisfont à toutes les exigences de ii).

Démonstration du théorème 1 :

Pour obtenir maintenant le théorème 1, il suffit d'appliquer le théorème 3 aux n+2 cônes convexes Ω_o, ..., Ω_{n+1}. Ces cônes ayant tous leurs sommets en 0, il est clair que les n+2 formes ω_o, ω_1, ω_2, ..., ω_{n+1} seront toutes linéaires et que par suite leur somme sera nulle.

Il convient de remarquer que le théorème 3 étant une condition nécessaire et suffisante, son application au théorème 1 du paragraphe 3 n'enlève rien à la force de la condition nécessaire obtenue sous forme géométrique.

5. LE THEOREME DE HAHN-BANACH.

Nous reprenons dans ce paragraphe la démonstration classique du théorème de Hahn-Banach, dans le contexte des espaces vectoriels quasi topologiques.

Lemme 1.-

L'adhérence d'un sous-espace E d'un e.v.q.t. X est un sous-espace de X.

En effet, pour tout y dans l'adhérence de E l'application :

$$f_y : X \to X$$

définie par :

$$f_y(x) = x+y$$

est continue (e.v.q.t. 1') et par suite :

$$x \in \bar{E},\ y \in E \Rightarrow x+y \in \bar{E}$$

Pour tout x dans $\bar{E}$ on a donc :

$$f_x(\dot{E}) \subset \bar{E}$$

et par suite :

$$x \in \bar{E},\ y \in \bar{E} \Rightarrow x+y \in \bar{E}\ .$$

D'après e.v.q.t. 2', il est clair que $\bar{E}$ est stable par homothéties.

Corollaire.-

Dans un e.v.q.t. un hyperplan est soit fermé soit partout dense.

Lemme 2.-

Dans un e.v.q.t. X, un sous-espace propre M est d'intérieur vide.

Soit x un point intérieur de M. D'après la proposition 2 du paragraphe 1 il existe un voisinage absorbant U de 0 tel que x+U soit inclus dans M, et par suite U est inclus dans M. U étant absorbant l'union des $\lambda.M$ pour λ parcourant R est égale à X et par suite M n'est pas propre.

Lemme 3.-

Soit H un hyperplan fermé d'un e.v.q.t. X. Le quotient X/H est un e.v.q.t. isomorphe à $\mathbb{R}$.

La projection canonique :

$$\pi : X \to X/H$$

est ouverte (Paragraphe 1, Proposition 4) et par suite comme H est fermé, les points sont fermés dans X/H.

Soit R muni de la topologie quotient X/H. Montrons que $\mathbb{R}$ est séparé. Soit x un point de $\mathbb{R}$ différent de 0. x est fermé, donc il existe un voisinage V de 0 que l'on peut supposer équilibré, ne rencontrant pas x. Par homothétie, on peut toujours amener un tel voisinage à être inclus dans l'intervalle :

$$\left]-\frac{|x|}{4}, \frac{|x|}{4}\right[$$

et par suite, le voisinage :

$$W = x + V$$

de x ne rencontre pas le voisinage V de 0.
$\mathbb{R}$ muni de la topologie quotient est séparé, il est donc isomorphe à $\mathbb{R}$ (muni de la topologie naturelle) d'après la Proposition 7 du paragraphe 1.

Corollaire.-

Si f est une forme linéaire sur l'e.v.q.t. X, les deux propositions suivantes sont équivalentes :

1) $f^{-1}(0)$ est un hyperplan fermé.

2) f est continue.

Théorème de Hahn-Banach.-

Soit U un ouvert convexe non vide d'un e.v.q.t. X. Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

1) $0 \notin U$.

2) Il existe une forme linéaire continue strictement positive sur U.

Démonstration :

L'implication : 2) ⇒ 1) est évidente.

Démontrons que 1) ⇒ 2). Pour cela il suffit de montrer qu'il existe un hyperplan fermé H ne rencontrant pas U et d'appliquer le corollaire du lemme 3.
Soit H un sous-espace maximal (pour la relation d'inclusion) parmi l'ensemble des sous-espaces qui ne rencontrent pas U. D'après le lemme 1, H est fermé. Il reste donc à montrer que H est un hyperplan, ou, ce qui revient au même, que l'e.v.q.t. quotient X/H est de dimension 1.
Soit $(X/H)^*$ le complémentaire de {0} dans X/H.
Le cône C défini par :

$$C = \bigcup_{\lambda>0} \lambda\pi(U) ,$$

où π est la projection canonique de X sur X/H, est ouvert et convexe (Paragraphe 1, Proposition 4).

Comme le sous-espace H ne rencontre pas le convexe U le cône C n'est pas égal à $(X/H)^*$ tout entier.
Montrons que le cône C est fermé dans $(X/H)^*$.
Supposons qu'il existe un élément x de $(X/H)^*$ tel que :

$$x \in \mathrm{Adh}(C) \setminus C$$

Du fait de la maximalité de H, la droite :

$$D_x = \bigcup_{\lambda\in\mathbb{R}^*} \lambda x$$

coupe nécessairement le cône C au point -x.

Le cône C étant ouvert, il existe un voisinage qu'on peut supposer symétrique de 0 tel que :

$$-x + V \subset C .$$

Par suite, comme x est adhérent à C il existe y tel que :

$$y \in C \quad \text{et} \quad y \in x-V$$

Donc :

$$-y \in -x + V \subset C .$$

Le cône convexe C contient les points y et -y, il contient donc 0 ce qui est impossible.
Le cône C est ouvert et fermé dans $(X/H)^*$, $(X/H)^*$ n'est donc pas connexe.
Il est clair que si l'e.v.q.t. X/H a une dimension supérieure ou égale à 2, $(X/H)^*$ est connexe, X/H est donc de dimension 1 ce qui achève la démonstration.

CHAPITRE II

PROPRIETES DES DEPLACEMENTS ADMISSIBLES.

Dans ce chapitre, nous poursuivons l'étude des cônes K et K^*. L'étude géométrique que nous faisons ici éclaire sur la nature de certaines difficultés qui surgiront par la suite. La terminologie reste celle de [4].

1. CÔNES K, K^* ET CONTINGENT VECTORIEL.

Dans ce paragraphe, nous faisons la liaison entre les notions de déplacements intérieurs, adhérents, et la notion classique de contingent vectoriel.

Soient X un e.v.q.t., E une partie de X et x_o un élément de l'adhérence $\bar{E}$ de E.

Définition 1.-

On dit qu'un vecteur V de X est tangent à E en x_o, si il existe un arc continu d'origine x_o :

$$\alpha : [0\ 1] \to X$$

tel que :

$$t \in\ ]0\ 1] \ \Rightarrow\ \alpha(t) \in E$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{\alpha(t) - \alpha(0)}{t} = V$$

L'ensemble des vecteurs tangents à E en x_o est un cône que l'on appelle contingent vectoriel et que nous noterons :

$$\Gamma(E, x_o).$$

Proposition 1.-

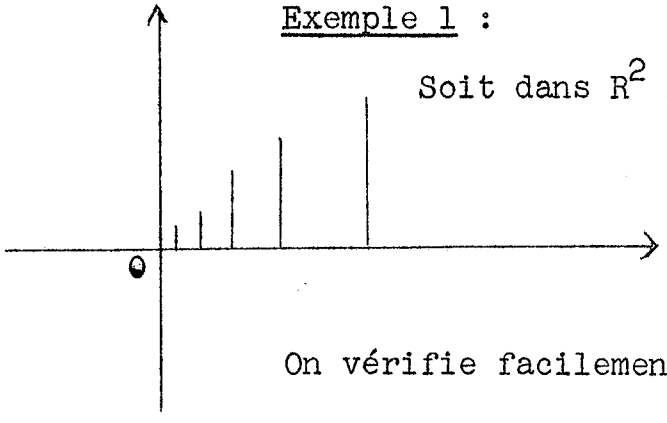
Soit E une partie de l'e.v.q.t. X et x_o un point de l'adhérence de E. On a :

(1) $$K(E, x_o) \subset \Gamma(E, x_o) \subset K^*(E, x_o)$$

et en général les inclusions sont strictes.

Démonstration :

Ces inégalités sont une conséquence immédiate des définitions et l'exemple suivant montre qu'en général les inégalités sont strictes même si l'ensemble E est connexe par arc.



Exemple 1 :

Soit dans R^2 muni de la topologie naturelle :

$$E_o = \{(x, y) : y = 0,\ x \geq 0\}$$

$$E_n = \{(x, y) : x = \frac{1}{n},\ y \in [0, \frac{1}{n}]\}$$

$$E = \bigcup_{n=0}^{\infty} E_n \ .$$

On vérifie facilement que :

$$K(E, 0) = \emptyset$$

$$\Gamma(E, 0) = \{(x, y) : \begin{cases} y = 0 \\ x \geq 0 \end{cases}\}$$

$$K^*(E, x) = \{(x, y) : y \in [0,x]\}$$

2. LES FORMULES FONDAMENTALES.

Ce paragraphe est un formulaire dont certaines formules ont déjà été vues au Chapitre I. Toutes sont des conséquences immédiates des définitions. Nous donnons à la fin du paragraphe quelques exemples.

a) Formules de dualité.

Soient E une partie de l'e.v.q.t. X et x_o un élément de X.

$$(2) \qquad \complement K(\complement(E),\ x_o) = K^*(E,\ x_o)$$

$$(3) \qquad \complement K^*(\complement(E),\ x_o) = K(E,\ x_o)$$

Ces formules ont été vues au Chapitre I.

b) Inclusions.

Soient E, E_1, E_2 des parties d'un e.v.q.t. X et x_o un point de X.

$$(4) \qquad K(E,\ x_o) \subset K^*(E,\ x_o)$$

$$(5) \qquad E_1 \subset E_2 \ \Rightarrow\ K(E_1, x_o) \subset K(E_2,\ x_o)$$

$$(6) \qquad E_1 \subset E_2 \ \Rightarrow\ K^*(E_1, x_o) \subset K^*(E_2,\ x_o)$$

Ceci découle immédiatement des définitions.

c) Cas de vacuité.

Soient E une partie d'un e.v.q.t. X et x_o un point de X. Notons $\bar{E}$ l'adhérence de E et E° l'intérieur de E.

$$(7) \qquad x_o \notin \bar{E} \ \Rightarrow\ K(E,\ x_o) = \phi \ ;\ K^*(E,\ x_o) = \{0\}$$

$$(8) \qquad E^\circ = \phi \ \Rightarrow\ K(E,\ x_o) = \phi$$

Ceci découle du caractère local des définitions.

d) Stabilité.

Soient E une partie d'un e.v.q.t. X et x_o un point de X. Notons $\bar{E}$ l'adhérence de E et E° l'intérieur de E.

$$K(E^\circ, x_o) = K(E, x_o) \tag{9}$$

$$K^*(E, x_o) = K(\bar{E}, x_o) \tag{10}$$

Ceci découle immédiatement des définitions.

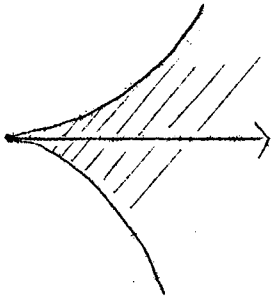
Exemples : Ces exemples sont relatifs à des parties E de R^2 muni de la topologie naturelle.

Exemple 2 :

Déplacements d'un ensemble "effilé".

Soit E l'ensemble des (x,y) de R^2 tels que :

$$x \geq 0 \quad ; \quad |y| \leq x^2$$



On a :

$$K(E, 0) = \phi$$

$$K^*(E, 0) = \{(x, y) : x \geq 0 \text{ et } y = 0\}$$

Cet exemple montre qu'en général le cône fermé $K^*(E, x_o)$ n'est pas l'adhérence du cône ouvert $K(E, x_o)$.

Exemple 3 :

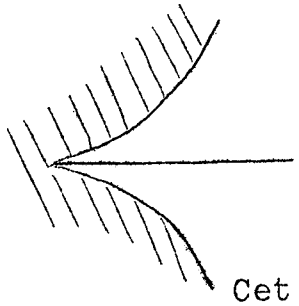
Déplacements d'un ensemble de complémentaire "effilé".

Soit F le complémentaire de l'ensemble E de l'exemple 2.

On a :

$$K(F, 0) = \complement(K^*(E, 0)) = \{(x,y) : x > 0 \Rightarrow y \neq 0\}$$

$$K^*(F, 0) = \complement(K(E, 0)) = R^2$$



Cet exemple montre qu'en général le cône ouvert $K(E, x_o)$ n'est pas l'intérieur du cône fermé $K^*(E, x_o)$.

On remarquera que dans ces deux exemples l'ensemble E n'est pas convexe.

3. DEPLACEMENTS ADMISSIBLES D'UN CORPS CONVEXE.

Nous démontrons ici que les propriétés classiques des ensembles convexes dans les espaces vectoriels topologiques restent vraies dans un e.v.q.t. Les démonstrations sont sensiblement les mêmes que dans [4]. Nous montrons ensuite que si E est un corps convexe et si x_o est un point adhérent de E, les formules suivantes sont vraies :

$$K(E, x_o) = \mathrm{Int}[K^*(E, x_o)]$$

$$K^*(E, x_o) = \mathrm{Adh}[K(E, x_o)]$$

Proposition 1.-

Soit E (resp. C) une partie (resp. un cône) convexe de l'e.v.q.t. X. L'adhérence de E (resp. de C) est un ensemble (resp. un cône) convexe.

En effet, l'application :

$$f_{\lambda,y} : X \to X$$

définie par :

$$f_{\lambda,y}(x) = \lambda x + (1-\lambda)y$$

pour tout y dans E et tout λ compris entre 0 et 1, est continue d'après e.v.q.t. 1' et e.v.q.t. 2' et par suite :

$$y \in E,\ x \in \bar{E} \ \Rightarrow\ \lambda x + (1-\lambda)y \in \bar{E}$$

Pour tout x dans $\bar{E}$ l'application :

$$g_{\lambda,x} : X \to X$$

définie par :

$$g_{\lambda,x}(y) = \lambda x + (1-\lambda)y$$

est continue, et par suite quels que soient x et y dans $\bar{E}$ et quel que soit λ compris entre 0 et 1 :

$$\lambda x + (1-\lambda)y \in \bar{E}$$

ce qui montre que $\bar{E}$ est convexe.

Il suffit maintenant de remarquer que si C est un cône, $\bar{C}$ est un cône d'après e.v.q.t. 2'.

Proposition 2.-

Soit E une partie de l'e.v.q.t. X et x_o un point adhérent à E. Notons E° l'intérieur de E. Si x est un point de $E^\bullet$ on a :

$$0 < \lambda \leq 1 \Rightarrow x_o + \lambda(x-x_o) \in E^\bullet$$

En effet, soit λ appartenant à $]0\ 1]$, notons :

$$y = x_o + \lambda(x-x_o)$$

et montrons que y est un point intérieur de E.

Soit f l'homothétie centre y et de rapport k (strictement négatif) qui transforme le point x en le point x_o. Si V est un voisinage ouvert de x contenu dans E, f(V) est un voisinage de x_o et par suite il existe un point z de V tel que f(z) appartienne à E.

L'homothétie g de centre f(z) qui transforme le point z en le point y a un rapport μ donné par :

$$y = f(z) + \mu(z-f(z))$$

soit :

$$y = y + k(y-z) + \mu(z-y-k(y-z))$$

d'où :

$$\mu(1-k)(y-z) + k(y-z) = 0$$

$$\mu = \frac{k}{k-1}$$

k étant strictement négatif, μ est compris entre 0 et 1 strictement, et par suite l'ouvert V de E est transformé en un ouvert g(V) contenu dans E et contenant y ce qui démontre la proposition 2.

Corollaire 1.-

Soit E un ensemble convexe, E° l'intérieur de E, $\bar{E}$ l'adhérence de E. E° est un ensemble convexe et de plus si E est d'intérieur non vide, on a :

$$E^\circ = \mathrm{Int}(\bar{E})$$

$$\bar{E} = \mathrm{Adh}(E^\circ)$$

Il est clair que l'intérieur de E est un ensemble convexe et de plus d'après la proposition 2, si E° n'est pas vide, tout point de $\bar{E}$ est adhérent à E°. Montrons maintenant que tout point intérieur y de $\bar{E}$ est dans E°. On ne diminue pas la généralité en supposant que $y = 0$. Soit V un voisinage symétrique de l'origine contenu dans $\bar{E}$. D'après ce qui vient d'être vu un tel voisinage coupe nécessairement E° en un point x. Si $x = 0$ la proposition est démontrée, sinon comme V est symétrique, le point -y appartient à $\bar{E}$, et par suite 0 est dans E° d'après la proposition 2.

Corollaire 2.-

Si C est un cône convexe et si on note C° l'intérieur de C et $\bar{C}$ l'adhérence de C, alors C° est un cône convexe et de plus si C° est non vide, on a :

$$C^\circ = \mathrm{Int}(\bar{E})$$

$$\bar{C} = \mathrm{Adh}(C^\circ)$$

Il suffit de montrer que C° est un cône, ce qui est évident, car les homothéties strictement positives sont continues.

Proposition 3.-

Soit E une partie convexe d'un e.v.q.t. X, E° l'intérieur de E et $\bar{E}$ l'adhérence de E. Si x_o appartient à $\bar{E}$, on a :

$$K(E, x_o) = \bigcup_{\lambda>0} \lambda[E^\circ - x_o] \tag{11}$$

$$K^*(E, x_o) = \mathrm{Adh} : \Big[\bigcup_{\lambda>0} \lambda(\bar{E} - x_o)\Big] \tag{12}$$

Si x est un élément de $K(E, x_o)$ il existe un voisinage ouvert V de x et un réel ε tels que l'ouvert :

$$\bigcup_{0<\lambda<\varepsilon} x_o + \lambda V$$

soit inclus dans E ce qui démontre que :

$$K(E, x_o) \subset \bigcup_{\lambda>0} \lambda[E^\circ - x_o]$$

Soit maintenant x un élément de $\bigcup_{\lambda>0} \lambda[E^\circ - x_o]$.

Il existe donc un voisinage ouvert V de x et un réel ε tels que :

$$x_o + \varepsilon V \subset E^\circ$$

Par suite, en appliquant la proposition 2 on a :

$$\lambda \in]0\ \varepsilon[\ \Rightarrow\ x_o + \lambda V \subset E^\circ$$

ce qui achève la démonstration de (11).

Démontrons (12). Soit x un élément de $K^*(\bar{E}, x_o)$. Soit V un voisinage de x. Par définition il existe :

$$y \in V \ ; \ \lambda > 0$$

tels que :

$$x_o + \lambda y \in \bar{E}$$

d'où :

$$y = \frac{1}{\lambda}(z - x_o) \qquad z \in \bar{E}$$

ce qui montre que :

$$K^*(\bar{E}, x_o) \subset \overline{\bigcup_{\lambda>0} \lambda(\bar{E} - x_o)}$$

Soit maintenant x un élément de $\overline{\bigcup_{\lambda>0} \lambda(\bar{E} - x_o)}$, pour tout voisinage V de x il existe un élément y de V tel que :

$$y \in \bigcup_{\lambda>0} \lambda(\bar{E} - x_o)$$

d'où :

$$y = \lambda(z - x_o) \quad ; \quad z \in \bar{E}$$

et par suite :

$$x_o + \frac{1}{\lambda} y = z \in \bar{E}$$

D'autre part, $\bar{E}$ étant convexe comme x_o est un élément de $\bar{E}$ pour η tel que :

$$0 < \eta < \frac{1}{\lambda}$$

on a :

$$x_o + \eta y \in \bar{E}$$

ce qui achève la démonstration.

Proposition 4.-

Soit E un corps convexe (c'est-à-dire un convexe d'intérieur non vide) d'un e.v.q.t. X. Si x_o appartient à l'adhérence de E on a :

$$K(E, x_o) = \mathrm{Int}(K^*(E, x_o)) \tag{13}$$

$$K^*(E, x_o) = \mathrm{Adh}(K(E, x_o)) \tag{14}$$

Montrons que :

$$K^*(E, x_o) = \mathrm{Adh}(K(E, x_o))$$

$K^*(E, x_o)$ étant fermé, il suffit de montrer qu'il est inclus

dans $\mathrm{Adh}(K(E, x_o))$. Soit V un voisinage ouvert d'un élément x de $K^*(E, x_o)$. D'après (12), il existe un élément y de V tel que :

$$x_o + \lambda y \in \bar{E}$$

Soit W un voisinage de y. D'après la proposition 2, il existe z dans W tel que :

$$x_o + \lambda z \in E^\circ$$

et par suite d'après (11) :

$$z \in \bigcup_{\lambda>0} [E^\circ - x_o] = K(E, x_o)$$

ce qui montre bien que x est adhérent à $K(E, x_o)$.
Si E° est non vide, il en est de même pour le cône $K(E, x_o)$ et par suite d'après le corollaire 2 de la proposition 2 :

$$(\overline{K(E, x_o)})^\circ = (K(E, x_o))^\circ$$

Comme $K(E, x_o)$ est ouvert, on a d'après ce qui précède :

$$(K^*(E, x_o))^\circ = K(E, x_o) .$$

CHAPITRE III

EXPRESSIONS ANALYTIQUES DES CÔNES K ET K*.

Dans ce chapitre, nous abordons le problème du calcul des cônes K et K*. Nous utilisons la notion d'application "directionnellement différentiable". Cette notion introduite dans [6] couvre de nombreux cas intéressants. Le théorème que nous énonçons au paragraphe 2 contient comme corollaire les formules pratiques énoncées par la suite.

1) Applications directionnellement différentiables.-

Dans ce paragraphe, X et Y désignent deux e.v.q.t. séparés.

Définition 1.-

On dit que deux applications f et g de X dans Y sont tangentes au sens de Gâteaux en x_o si l'application :

$$\varepsilon(x,t) \quad : \quad X \times R^+ \to Y$$

définie par :

$$\varepsilon(x,t) = \frac{f(x_o+tx) - g(x_o+tx)}{t}$$

$$\varepsilon(x,0) = 0$$

satisfait à :

$$\lim_{t\to 0} \varepsilon(x,t) = 0$$

Définition 2·-

On dit que deux applications f et g de X dans Y sont uniformément tangentes au sens de Gâteaux en x_o si l'application $\varepsilon(x,t)$ de la définition 1 satisfait à la condition :

T { Pour tout voisinage U de 0 dans Y et tout x différent de 0 dans X il existe un voisinage V de x et un réel η strictement positif tels que :

$$y \in V,\ t \in [0,\eta] \Rightarrow \varepsilon(y,t) \in U$$

Remarque 1 :

Soient f et g deux applications de X dans Y. L'application $\varepsilon(x,t)$ de la définition 1 satisfait aux relations suivantes :

(1) $\quad \lambda > 0 \Rightarrow \varepsilon(\lambda x,t) = \lambda\varepsilon(x,\lambda t)$

(2) $\quad \lambda > 0 \Rightarrow \varepsilon(x,t) = \frac{1}{\lambda}\,\varepsilon(\lambda x,\frac{t}{\lambda})$

Remarque 2 :

Soient f et g deux applications de X dans Y et $\varepsilon(x,t)$ l'application de la définition 1. Considérons la condition :

τ { Pour tout voisinage V de 0 dans Y il existe un voisinage V de 0 dans X et un réel strictement positif η tels que :

$$x \in V,\ t \in [0,\eta] \Rightarrow \varepsilon(x,t) \subset U$$

On a les propositions suivantes :

(i) $\quad \tau \not\Rightarrow T.$

(ii) $\quad T \Rightarrow \tau$ si X est de dimension finie.

(iii) $\quad T \not\Rightarrow \tau$ si X n'est pas de dimension finie.

Démonstration :

i) Donnons dans R^2 l'exemple suivant :

$$f : R^2 \to R$$

$$g : R^2 \to R$$

Définies en coordonnées polaires par :

$$\begin{cases} f(\rho,\theta) = 0 & \text{si} \quad \theta \neq \frac{1}{n} \\ f(\rho,\frac{1}{n}) = 0 & \text{si} \quad \rho < \frac{1}{n} \\ f(\rho,\frac{1}{n}) = \frac{1}{n} & \text{si} \quad \rho \geq \frac{1}{n} \end{cases}$$

$$\{ g(\rho,\theta) = 0$$

On a au point (0,0) :

$$\varepsilon(\rho,\theta,t) = \frac{f(t\rho,\theta) - g(t\rho,\theta)}{t} = \frac{1}{t} f(t\rho,\theta)$$

$\varepsilon(\rho,\theta,t)$ satisfait la condition τ. En effet :
Pour tout ε strictement positif, considérons le voisinage V de 0 dans R^2 défini par :

$$V = \{(\rho,\theta) : \rho < \varepsilon\}$$

Pour tout point (ρ,θ) de V et tout réel t compris entre 0 et 1, nous avons :

$$\theta \neq \frac{1}{n} \Rightarrow \varepsilon(\rho,\theta,t) = 0$$

$$\theta = \frac{1}{n}, \; t < \frac{1}{n\rho} \Rightarrow \varepsilon(\rho,\theta,t) = 0$$

$$\theta = \frac{1}{n}, \; \frac{1}{n\rho} \leq t \leq 1 \Rightarrow \varepsilon(\rho,\theta,t) = \frac{1}{nt} < \varepsilon$$

Montrons maintenant que la condition T n'est pas satisfaite :
Considérons dans R le voisinage de 0 :

$$V = \left]-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right[$$

et le point de R^2 :

$$(\rho,\theta) = (1,0)$$

Pour tout voisinage V de (1,0) et tout réel ε strictement positif, il existe un entier n tel que :

$$(1, \frac{1}{n}) \in V \quad ; \quad n < \varepsilon$$

et par suite :

$$\varepsilon(1, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = nf(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = 1$$

ce qui contredit T.

ii) Cette proposition se montre facilement en utilisant le fait que si X est de dimension finie une topologie d'e.v.q.t. séparée sur X est la topologie naturelle (Chap.I, §1, proposition 8) et par suite est localement compacte.

iii) Donnons dans l'espace X des fonctions continues sur [0,1] muni de la norme de la convergence uniforme le contre-exemple suivant :
Soit h l'application :

$$h : X \to R$$

définie par :

$$h(x) = 1 - \int_0^1 \frac{|x(t)|}{\|x\|} dt$$

$$h(0) = 0$$

Etant donné le réel strictement positif ε et pour tout x de X différent de 0, il existe un voisinage V de x tel que :

$$y \in V \Rightarrow |h(x) - h(y)| < \varepsilon$$

Soient maintenant les fonctions :

$$f : X \to R$$

$$g : X \to R$$

définies par :

$$f(x) = \frac{\|x\|^2}{h(x)}$$

$$g(x) = 0$$

On a dans ces conditions au point 0 de X :

$$\varepsilon(x,t) = \frac{f(0+tx) - g(0+tx)}{t} = t\,\frac{\|x\|^2}{h(x)}$$

$\varepsilon(x,t)$ satisfait évidemment la condition T. Par contre, pour tout voisinage V de 0 dans X et tout ε strictement positif, on peut trouver une fonction y de V telle que :

$$h(y) < \varepsilon\,\|y\|^2$$

et par suite :

$$\varepsilon(x,\varepsilon) = \frac{\varepsilon\,\|y\|^2}{\varepsilon\,\|y\|^2} = 1$$

ce qui contredit la condition τ.

Définition 3.-

On dit qu'une application df de X dans Y est positivement homogène si quel que soit x dans X on a :

$$\lambda \geq 0 \;\Rightarrow\; df(\lambda x) = \lambda df(x)$$

Définition 4.-

On dit qu'une application f de X dans Y est directionnellement différentiable en x_o si il existe une application positivement homogène df_{x_o} uniformément tangente en 0 à l'application :

$$f(x_o+x) - f(x_o)$$

On appellera l'application df_{x_o} la "différentielle" de f en x_o.

Il est clair que pour tout x dans X on a nécessairement

$$df_{x_o}(x) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_o+tx) - f(x_o)}{t}$$

et que par suite l'espace Y étant séparé la "différentielle", si elle existe, est unique.

Exemple 1 :

Soit f l'application :

$$f : R^2 \to R$$

définie par :

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + (x^2+y^2)$$

Il est clair que :

$$df_o(x) = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\varepsilon(x,t) = t(x^2+y^2)$$

Exemple 2 :

L'application f définie ici n'est pas directionnellement différentiable.
Soit :

$$f : R^2 \to R$$

définie en coordonnées polaires par :

$$\begin{cases} f(\rho,\theta) = \dfrac{\rho^2}{\theta} & \text{si} \quad \theta \neq 0 \\ f(\rho,0) = 0 \end{cases}$$

Si f est directionnellement différentiable en (0,0) on a nécessairement :

$$df_o(\rho,\theta) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t\rho,\theta)}{t} = 0$$

et par suite :

$$\theta \neq 0 \Rightarrow \varepsilon(\rho,\theta,t) = \frac{t\rho^2}{\theta}$$

$$\theta = 0 \Rightarrow \varepsilon(\rho,\theta,t) = 0$$

Il est clair que l'application $\varepsilon(\rho,\theta)$ ne satisfait pas la condition T (considérer le point (1,0)).

Dans la suite, nous aurons besoin de supposer que l'application df est continue autour de 0, c'est-à-dire :

Définition 5.-

On dit que l'application positivement homogène df est continue autour de 0 si elle est continue en tout point différent de 0.

On montre facilement, en utilisant la locale compacité, que si l'espace X est de dimension finie la continuité de df autour de 0 entraîne la continuité de df en 0.

Par contre, ceci n'est plus vrai lorsque X est de dimension infinie. Si nous reprenons les hypothèses et les notations de la remarque 2.iii) l'application :

$$\varphi \ : \ X \to R$$

définie par :

$$\varphi(x) = \frac{\|x\|}{h(x)}$$

est positivement homogène, continue autour de 0, mais pas continue en 0.

Lorsque l'espace Y est un espace vectoriel topologique on démontre facilement que la continuité de f autour de x_o entraîne celle de df_{x_o} autour de 0.

2) Transport des cônes par une application directionnellement différentiable.-

Dans ce paragraphe, X désignera un e.v.q.t. et Y un espace vectoriel topologique, f une application de X dans Y et df_{x_o} la "différentielle" de f en x_o. (Chap.III, §1).

Nous démontrons ici le théorème duquel vont découler toutes les formules pratiques du paragraphe suivant. On remarquera la restriction importante faite sur la nature de l'espace Y.

Théorème 1.-

Soit f une application de l'e.v.q.t. X dans l'espace vectoriel topologique Y. Soit df_{x_o} la différentielle de f au point x_o. Si l'application df_{x_o} est continue autour de 0 (§1, définition 5) on a l'inclusion :

$$(F_1) \qquad K^*(f^{-1}(E),\ x_o) \subset df_{x_o}^{-1}\left[K^*(E,\ f(x_o))\right]$$

Démonstration :

Soit x un vecteur de $K^*(f^{-1}(E),\ x_o)$ que nous supposons non nul. Montrons que $df_{x_o}(x)$ est un vecteur de $K^*(E,\ f(x_o))$.

Soient U un voisinage de 0 dans Y et ε un réel strictement positif. Y est un espace vectoriel topologique, donc il existe un voisinage W de 0 dans Y tel que :

$$W+W \subset U$$

D'après la condition T (§1, définition 2) il existe un voisinage V_1 de x dans X et un réel η strictement positif tels que :

$$y \in V_1 \ ;\ t \in [0,\eta] \ \Rightarrow \ \varepsilon(y,t) \in W$$

La "différentielle" df_{x_o} est continue autour de 0, il existe donc un voisinage V_2 de x dans X tel que :

$$y \in V_2 \ \Rightarrow \ df_{x_o}(y) \in df_{x_o}(x) + W$$

Par définition de $K^*(f^{-1}(E), x_o)$ il existe y dans $V_1 \cap V_2$ et t dans l'intervalle $]0, \min(\epsilon,\eta)[$ tels que :

$$x_o + ty \in f^{-1}(E)$$

Par suite :

$$f(x_o+ty) \in E$$

$$f(x_o+ty) = f(x_o) + tdf_{x_o}(y) + t\epsilon(y,t)$$

$$f(x_o+ty) = f(x_o) + t\left[df_{x_o}(y) + \epsilon(y,t)\right] \in E$$

Par construction :

$$df_{x_o}(y) + \epsilon(y,t) = df_{x_o}(x) + df_{x_o}(y) - df_{x_o}(x) + \epsilon(y,t) \in df_{x_o}(x) + W + W$$

$$df_{x_o}(y) + \epsilon(y,t) \in df_{x_o}(x) + U$$

Ce qui prouve que $df_{x_o}(x)$ appartient à $K^*(E, f(x_o))$.

Il est clair que le vecteur 0 appartient à $df_{x_o}^{-1}\left[K^*(E,f(x_o))\right]$.

Corollaire 1.-

En appliquant les formules du dualité (Chap.II, (2),(3)) on a immédiatement la formule :

$$(F_2) \qquad K(f^{-1}(E), x_o) \supset df_{x_o}^{-1}\left[K(E, f(x_o))\right]$$

Corollaire 2.-

En appliquant df_{x_o} aux deux membres des inclusions précédentes, on a :

$$(F_3) \qquad df\left[K^*(f^{-1}(E), x_o)\right] \subset K^*(E, f(x_o))$$

$$(F_4) \qquad df\left[K(f^{-1}(E), x_o)\right] \supset K(E, f(x_o))$$

Exemple :

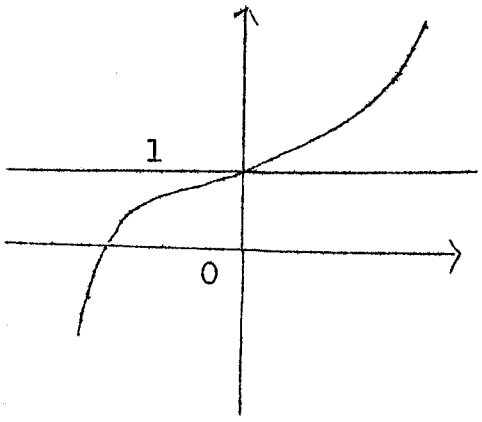
L'exemple suivant montre qu'en général les inclusions sont strictes.

Soit :

$$f : R \to R$$

définie par :

$$f(x) = 1 + x^3$$



On a :

$$df_o(x) = 0$$

et par suite, si on pose :

$$E = [1, +\infty[$$

on a :

$$\begin{cases} K^*(E, f(0)) = K^*([1,+\infty[, 1) = [0,+\infty[\\ K^*(f^{-1}(E), 0) = K^*([0,+\infty[, 0) = [0,+\infty[\\ df_o^{-1}\left[K^*(E, f(0))\right] = df_o^{-1}\left[[0,+\infty[\right] =]-\infty,+\infty[\end{cases}$$

$$\begin{cases} K(E, f(0)) = K([1,+\infty[, 1) =]0,+\infty[\\ K(f^{-1}(E), 0) = K([0,+\infty[, 0) =]0,+\infty[\\ df_o^{-1}\left[K(E, f(0)\right] = df_o^{-1}\left[]0,+\infty[\right] = \phi \end{cases}$$

Corollaire 3.-

Les deux égalités :

$$df_{x_o}^{-1}\left[K(E, f(x_o))\right] = \mathrm{Int}\left\{df_{x_o}^{-1}\left[K^*(E, f(x_o))\right]\right\}$$

$$df_{x_o}^{-1}\left[K^*(E, f(x_o))\right] = \mathrm{Adh}\left\{df_{x_o}^{-1}\left[K(E, f(x_o))\right]\right\}$$

entraînent respectivement :

$$(F_5) \qquad df_{x_o}^{-1}\left[K(E,\ f(x_o))\right] = K(f^{-1}(E),\ x_o)$$

$$(F_6) \qquad df_{x_o}^{-1}\left[K^*(E,\ f(x_o))\right] = K^*(f^{-1}(E),\ x_o)$$

La démonstration utilise la relation 4) du Chapitre II et le fait que K^* (resp. K) est fermé (resp. ouvert).

3) Quelques expressions analytiques de cônes K et K^*. Formulaire.-

Les formules énoncées ici sont des conséquences immédiates des formules du paragraphe précédent et des définitions.

a) Cônes K et K^* pour une application admettant une différentielle convexe.-

Hypothèses :

- X est un e.v.q.t.
- Y est un espace vectoriel topologique.
- f est une application de X dans Y.
- df_{x_o} est la "différentielle" (Chap.III, §1).
- df_{x_o} est continue autour de 0.

$$E =]-\infty,\ f(x_o)[\quad ; \quad df_{x_o}^{-1}(]-\infty,0[) \neq \phi$$

Formules :

$$(F_7) \qquad K(f^{-1}(E),\ x_o) = df_{x_o}^{-1}(]-\infty,0[)$$

$$(F_8) \qquad K^*(f^{-1}(E),\ x_o) = df_{x_o}^{-1}(]-\infty,0])$$

Démonstration :

Il suffit de remarquer que $df_{x_o}^{-1}(]-\infty,0])$ est un corps convexe et que par suite nous pouvons appliquer les formules (F_5) et (F_6).

b) Cônes K et K* pour une application admettant une "différentielle" linéaire.-

Hypothèses :

- X est un vectoriel normé.
- f est une application de X dans R.
- df_{x_o} est la différentielle de f en x_o (au sens de Fréchet).
- df_{x_o} est continue et non nulle.

Formules :

$$(F_9)\quad \left\{ f(x_o) > 0 \Rightarrow \begin{array}{l} K(f^{-1}([0,+\infty[),\ x_o) = X \\ K(f^{-1}(]0,+\infty[),\ x_o) = X \\ K^*(f^{-1}([0,+\infty[),\ x_o) = X \\ K^*(f^{-1}(]0,+\infty[),\ x_o) = X \end{array} \right.$$

$$(F_{10})\quad \left\{ f(x_o) = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} K(f^{-1}([0,+\infty[),\ x_o) = \{x : df_{x_o}(x) > 0\} \\ K(f^{-1}(]0,+\infty[),\ x_o) = \{x : df_{x_o}(x) > 0\} \\ K^*(f^{-1}([0,+\infty[),\ x_o) = \{x : df_{x_o}(x) \geq 0\} \\ K^*(f^{-1}(]0,+\infty[),\ x_o) = \{x : df_{x_o}(x) \geq 0\} \end{array} \right.$$

$$(F_{11})\quad \left\{ f(x_o) < 0 \Rightarrow \begin{array}{l} K(f^{-1}([0,+\infty[),\ x_o) = \phi \\ K(f^{-1}(]0,+\infty[),\ x_o) = \phi \\ K^*(f^{-1}([0,+\infty[),\ x_o) = \{0\} \\ K^*(f^{-1}(]0,+\infty[),\ x_o) = \{0\} \end{array} \right.$$

Démonstration :

Il suffit d'appliquer les résultats du paragraphe précédent.

Nous verrons au chapitre suivant, dans les applications, quelques précisions sur le calcul des cônes K et K* dans certains cas particuliers intéressants.

CHAPITRE IV

UN THEOREME D'EXTREMA LIES DANS UN ESPACE DE BANACH.

Nous nous proposons ici d'illustrer la méthode exposée au Chapitre I en démontrant un théorème d'extréma liés valable dans un espace de Banach. Le problème abordé est le suivant :

Etant donnés un espace de Banach X et q+1 applications f_o, f_1, ..., f_q de X dans R, trouver des conditions nécessaires pour que l'élément $\hat{x}$ de X réalise le maximum de f_o sur l'ensemble des x satisfaisant aux contraintes :

$$f_i(x) \geq 0 \qquad i = 1,\ldots,p$$

$$f_j(x) = 0 \qquad j = p+1,\ldots,q$$

On verra que moyennant des hypothèses naturelles sur les applications f_i on retrouve des conditions classiques lorsque l'espace X est de dimension finie.

1) CÔNES K* POUR UNE APPLICATION DE RANG CONSTANT.

Etant donnée une application f de X dans R^q on a vu (Chap.III-§2) que si f est différentiable en x_o et si $f(x_o) = 0$ on a l'inclusion :

$$(1) \qquad K^*\left[f^{-1}(0),\ x_o\right] \subset \left\{x \in X : df_{x_o}(x) = 0\right\}$$

Nous démontrons ici que si l'application f est de rang p au voisinage de x_o (c'est-à-dire si f est continuement différentiable dans un voisinage V de x_o et si l'application linéaire tangente df_x est de rang p sur V) on peut remplacer dans (1) l'inclusion par l'égalité. La démonstration s'appuie sur le lemme suivant :

Lemme.-

Soit f une application de X dans R^q de rang p au voisinage de 0 telle que $f(0) = 0$. Il existe un difféomorphisme local :

$$\varphi \; : \; V \to \mathcal{V}$$

d'un voisinage V de 0 dans X sur un voisinage $\mathcal{V}$ de 0 dans X tel que :

1) $d\varphi_o$ est l'application identique de X dans X.

2) L'application $f \circ \varphi$ est constante sur les translatés du noyau de df_o.

Démonstration :

Introduisons les notations :

- N est le noyau de df_o,
- I est l'image de df_o.
- M est un supplémentaire algébrique de N (M est de dimension p).
- J est un supplémentaire algébrique de I.
- p_N et p_I sont respectivement les projections sur N et I parallèlement à M et J.
- $\tilde{df}_o$ est la restriction de df_o à M. $\tilde{df}_o$ est un isomorphisme entre M et J.

Soit ψ l'application de X dans X définie par :

$$\psi(x) = \tilde{df}^{-1} \circ p_I \circ f(x) + p_N(x)$$

ψ est continuement différentiable dans un voisinage de 0.
On a :

$$d\psi_o(x) = \tilde{df}_o^{-1} \circ p_I \circ df_o(x) + p_N(x)$$

$d\psi_o$ est donc l'application identique de X dans X et par suite nous pouvons appliquer le théorème de fonctions implicites.
Il existe donc un difféomorphisme local :

$$\varpi \ : \ V \to \mathcal{V}$$

d'un voisinage V de 0 dans X sur un voisinage V de 0 dans X tel que : $\varpi \circ \psi$ soit l'identité de X.
φ satisfait évidemment à la première condition du lemme, montrons qu'il en est de même pour la seconde. Pour cela il est clair qu'il suffit de démontrer que pour tout x dans V :

$$d(f\circ\varphi)_x^{-1}(0) \supset N.$$

Du fait que l'application f est de rang p pour tout x dans V le sous-espace :

$$d(f\circ\varphi)_x^{-1}(0)$$

est de codimension p et par suite si nous montrons que :

$$d(f\circ\varphi)_x^{-1}(0) \subset N$$

nous aurons montré que :

$$d(f\circ\varphi)_x^{-1}(0) = N$$

ce qui est suffisant.

Soit ξ un élément de $d(f\circ\varphi)_x^{-1}(0)$. ξ est l'image par $d\psi_{\varphi(x)}$ d'un élément η de X.

On a :

$$d(f\circ\varphi)_x \circ d\psi_{\varphi(x)}(\eta) = 0$$

$$df_{\varphi(x)} \circ d\omega_x \circ d\psi_{\varphi(x)}(\eta) = 0 \Rightarrow df_{\varphi(x)}(\eta) = 0$$

Comme :

$$d\psi_{\varphi(x)} = \tilde{df}_o^{-1} \circ p_I \circ df_{\varphi(x)} + p_N$$

On a :

$$\xi = d\psi_{\varphi(x)}(\eta) = 0 + p_N \Rightarrow \xi \in N$$

ce qui achève la démonstration.

Corollaire.-

Soit f une application de X dans R^q, de rang p dans un voisinage de 0 telle que $f(0) = 0$. Notons N le noyau de df_o.
Il existe un difféomorphisme local :

$$\varphi : V \to \mathcal{V}$$

d'un voisinage V de 0 dans X sur un voisinage $\mathcal{V}$ de 0 dans X tel que :

$$x \in V \cap N \Rightarrow f \circ \varphi(x) = 0$$

Théorème.-

Si f est une application d'un espace de Banach X dans R^q de rang p au voisinage de x_o et si $f(x_o) = 0$ on a l'égalité :

$$K^*\left[f^{-1}(0), x_o\right] = \left\{x \in X : df_{x_o}(x) = 0\right\}$$

Il suffit de démontrer l'inclusion :

$$\left\{x \in X : df_o(x) = 0\right\} \subset K^*\left(f^{-1}(0),\ x_o\right) .$$

Nous ne diminuons pas la généralité en supposant $x_o = 0$. Soit :

$$\varphi \ : \ V \to \mathcal{V}$$

le difféomorphisme défini dans le corollaire du lemme. On a :

$$f \circ \varphi(V \cap N) = 0 \ \Rightarrow \ \varphi(V \cap N) \subset f^{-1}(0) .$$

Par suite :

$$K^*(\varphi(V \cap N),\ 0) \subset K^*\left(f^{-1}(0),\ 0\right)$$

Nous savons (Chap.III - §2) que :

$$d\varphi_o\left(K^*(V \cap N,\ 0)\right) \subset K^*(\varphi(V \cap N),\ 0)$$

Il est clair que :

$$K^*(V \cap N,\ 0) = N$$

et par suite, comme df_o est l'application identique nous avons :

$$N = d\varphi_o(N) = d\varphi_o\left(K^*(V \cap N,\ 0)\right) \subset K^*(f^{-1}(0),\ 0)$$

soit par définition de N :

$$\left\{x : df_o(x) = 0\right\} \subset K^*\left(f^{-1}(0),\ 0\right)$$

ce qui démontre le théorème.

2) UN THEOREME D'EXTREMA LIES.

Soit $f = (f^o, f^1, \ldots, f^q)$ une application d'un espace de Banach X dans R^{q+1}. Nous notons $df^i_{x_o}$ la différentielle au point x_o de l'application f^i.

Nous dirons que f satisfait les conditions H au point x_o si :

Conditions H.-

- $f^i(x) = 0, \quad i = (1, \ldots, q)$
- $df^i_{x_o} \neq 0, \quad i = 1 \ldots p$
- L'application h :

$$x \rightsquigarrow h(x) = \left(f^{p+1}(x), \ldots, f^q(x) \right)$$

de X dans R^{q-p} est de rang constant r dans un voisinage de x_o.

On note dh_x la différentielle de h.

Théorème.-

Si l'application f satisfait aux conditions H au point x_o une condition nécessaire pour que x_o réalise le maximum de f^o sur l'ensemble E défini par :

$$E = \left\{ x \in X : f^i(x) \geq 0, \ (i=1 \ldots p) \ ; \ f^j(x) = 0, \ (j = p+1 \ldots q) \right\}$$

est qu'il existe q+1 constantes réelles :

$$\lambda_o, \lambda_1, \ldots, \lambda_p, \lambda_{p+1}, \ldots, \lambda_q$$

non toutes nulles telles que :

1) $\lambda_i \geq 0, \quad i=0...p$

2) $\sum_{i=1}^{q} \lambda_i \, df^i_{x_o} = 0$

Démonstration :

Conformément aux notations du §3 du Chapitre I, notons :

- $E_o = \left\{x \in X : f^j(x) = 0, \ (j=p+1...q)\right\}$
- $E_i = \left\{x \in X : f^i(x) \geq 0\right\} \quad i=(1...p)$
- $E_{p+1} = \left\{x \in X : f^o(x) > f^o(x_o)\right\}$
- $\Omega_o = K^*(E_o, x_o)$
- $\Omega_i = K(E_i, x_o) \quad i=(1...p+1)$

D'après les formules (Chap.III - §3) que nous pouvons appliquer :

$$1 \leq i \leq p+1 \ ; \ f^i(x_o) = 0 \ \Rightarrow \ \Omega_i = \left\{x \in X : df^i_{x_o}(x) > 0\right\}$$

L'application h étant de rang q-p au voisinage de x_o nous pouvons appliquer le théorème démontré au §1 de ce chapitre et par suite :

$$\Omega_o = \left\{x \in X : df^j_{x_o}(x) = 0\right\}$$

Les ensembles Ω_i étant tous convexes et non vides nous pouvons appliquer maintenant le théorème d'extrémum sous sa forme analytique. Nous obtenons :

Il existe p+1 formes linéaires continues

$$\omega_o, \ \omega_1, \ \ldots, \ \omega_{p+1}$$

telles que :

$$x \in \Omega_i \Rightarrow \omega_i(x) \geq 0$$

$$\sum_{i=0}^{p+1} \omega_i = 0$$

On a donc nécessairement étant donnée la nature particulière des cônes Ω_i :

$$\omega_i = \lambda_i \, df^i_{x_o} \qquad i = 1,\ldots,p \qquad \lambda_i \geq 0$$

$$\omega_{p+1} = \lambda_o \, df^o_{x_o} \qquad \lambda_o \geq 0$$

$$\omega_o = \sum_{j=p+1}^{q} \lambda_j \, df^j_{x_o} \qquad j = p+1,\ldots,q$$

ce qui démontre le théorème.

Remarques :

a) Nous avons supposé que l'application

$$h : X \longrightarrow R^{q-p}$$

était de rang constant r dans un voisinage de x_o.

Cette circonstance se produira en particulier lorsque les formes linéaires :

$$df^i_{x_o} \qquad i = p+1 \ldots q$$

sont indépendantes. En effet, dans ce cas, par continuité, les formes

$$df^i_x \qquad i = p+1 \ldots q$$

restent indépendantes dans un voisinage V de x_o et par suite f est de rang constant q-p sur V.

b) Nous avons supposé que pour $i = (1,\ldots,p)$ $f^i(x_o)$ était nul car si $f^i(x_o)$ était strictement positif on aurait :

$$K(E_i, x_o) = X$$

ce qui est sans intérêt.

c) Nous ne donnons pas ici de conditions sur les applications f_i qui permettraient d'affirmer la non nullité de λ_o et par suite d'écrire :

$$df^o_{x_o} = \sum_{i=1}^{q} \lambda_i \, df^i_{x_o}$$

3) UN RESULTAT CLASSIQUE DU CALCUL DES VARIATIONS.

Le théorème énoncé au §2 contient comme corollaire le résultat classique suivant :

Soient $F^o(U,V,t)$, ..., $F^q(U,V,t)$ q+1 applications de R^3 dans R de classe C_2 en U et V, de classe C_1 en t. Moyennant les conditions usuelles une condition nécessaire pour que l'application $\tilde{x}(t)$ réalise le maximum de la fonctionnelle :

$$\int_0^1 F^o(x'(t), x(t), t)dt$$

sur l'ensemble des applications de [0, 1] dans R, de classe C_2 telles que :

$$x(0) = x'(0) = x(1) = x'(1)$$

$$\int_0^1 F^i(x'(t), x(t), t)dt \geq 0 \qquad i = 1,\ldots,p$$

$$\int_0^1 F^j(x'(t), x(t), t)dt = 0 \qquad j = p+1,\ldots,q$$

est qu'il existe q+1 constantes réelles $\lambda_o, \lambda_1, \ldots, \lambda_q$ telles que :

1) $\lambda_i \geq 0 \qquad i = (0,\ldots,p)$

2) $\sum_{i=0}^{q} \lambda_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F^i}{\partial U}(\tilde{x}'(t),x(t),t)\right) = \sum_{i=0}^{q} \lambda_i \frac{\partial F^i}{\partial V}(x'(t),\tilde{x}(t),t)$

Démonstration :

Soit X l'espace vectoriel des couples $(x'(t), x(t))$ tels que :

$$x(t) \in C_2([0\ 1])$$
$$x(0) = x(1) = x'(0) = x'(1) = 0$$

X est un espace de Banach pour la norme de la convergence C_2.

Soient f^i $i=0,\ldots,q$ les applications de X dans R définies par :

$$f^i(x(t)) = \int_0^1 F^i(x'(t),x(t),t)dt$$

On a :

$$df^i_{\tilde{x}(t)}(\xi(t)) = \int_0^1 \left[\frac{\partial F^i}{\partial U}(x'(t),\tilde{x}(t),t).\xi'(t) + \frac{\partial F^i}{\partial V}(x'(t),x(t),t).\xi(t)\right]dt$$

Si l'application :

$$f(x) = \left(f^o(x), \ldots, f^q(x)\right)$$

satisfait aux conditions H au point $\tilde{x}(t)$ nous pouvons appliquer le théorème précédent et par suite il existe q+1 constantes $\lambda_o, \ldots, \lambda_q$ telles que :

1) $\lambda_i \geq 0 \qquad i = (0,\ldots,p)$

2) $$\sum_{i=0}^{q} \lambda_i \int_0^1 \left[\frac{\partial F^i}{\partial U}(\tilde{x}'(t),\tilde{x}(t),t).\xi'(t)+\frac{\partial F^i}{\partial V}(\tilde{x}'(t),\tilde{x}(t),t).\xi(t)\right] dt = 0$$

pour tout élément $\xi(t)$ de X.

La classique intégration par partie achève la démonstration du théorème.

CHAPITRE V

UN PROBLEME DE CONTRÔLE OPTIMAL.

Nous proposons ici une application de la méthode exposée au Chapitre I au problème du contrôle optimal. Dans un premier paragraphe nous posons rapidement le problème.

1) LE PROBLEME DU CONTRÔLE OPTIMAL.

La terminologie que nous introduisons ici est en grande partie celle de [16]. Posons le problème de la manière suivante.

a) Le système.-

Soit $\mathfrak{T}$ l'ensemble des triplets $([t_o t_1], x(t), u(t))$ où $[t_o t_1]$, $x(t)$, $u(t)$ sont respectivement un intervalle fermé de R, une application continue de $[t_o t_1]$ dans un espace vectoriel normé X, une application de $[t_o t_1]$ dans un espace topologique séparé H.

Nous dirons que X est l'espace des états, $x(t)$ une évolution, $u(t)$ une commande.

b) les contraintes.-

Nous distinguerons les trois types de contraintes suivants :

- La liaison commande évolution : Soit une application :

$$f : X \times R \times H \rightarrow X$$

L'évolution et la commande sont liées par l'équation d'évolution :

$$(E) \qquad \frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), t, u(t))$$

Le sens que l'on donne à cette égalité est à préciser.
On peut voir dans (E) une équation différentielle ordinaire $\frac{dx(t)}{dt}$ étant la dérivée de x(t).

- Les contraintes sur la commande : à chaque intervalle $[t_o t_1]$ on associe une partie de l'ensemble des applications de $[t_o t_1]$ dans H. Par définition les commandes u(t) appartenant à une de ces parties sont dites admissibles.

- Les contraintes sur l'évolution : à chaque intervalle $[t_o t_1]$ on associe une partie de l'ensemble des applications continues de $[t_o t_1]$ dans X. Par définition les évolutions appartenant à une de ces parties sont dites admissibles.

On dit enfin qu'un triplet $([t_o t_1], x(t), u(t))$ de $\mathfrak{T}$ est admissible si x(t) et u(t) sont admissibles et satisfont de plus à l'équation d'évolution (E).

c) Le critère.-

Soit enfin g une application de $\mathfrak{T}$ dans R que nous appellerons critère.

Le problème du contrôle optimal est de déterminer des triplets admissibles réalisant le maximum du critère g sur l'ensemble des triplets admissibles.

Rappelons brièvement dans quel cadre Pontryagin [17] présente le problème.

Dans [17] l'espace X est de dimension finie, les évolutions sont absolument continues (cf. [18], p.49), les commandes sont mesurables et bornées, et l'égalité de l'équation d'évolution (E) doit être réalisée presque partout.

Dans une première partie les auteurs de [17] (Chap.I et II) imposent uniquement des contraintes sur l'état final aux évolutions (c'est-à-dire qu'on exige que $x(t_1)$ appartienne à une partie déterminée de l'espace des états). Dans une deuxième partie on pose le problème avec des contraintes quelconques sur l'état. (On exige qu'à chaque instant x(t) appartienne à une partie de X).

Nous n'aborderons pas dans cette étude ce deuxième type contraintes.

Signalons enfin l'étude récente de H. Halkin [21] où l'on procède de la manière suivante.

- Dans un premier temps on démontre un théorème d'optimisation en présence de contraintes valable dans un espace de Banach.

- On considère ensuite l'espace de Banach $\mathfrak{X}$ des applications absolument continues de [0 1] dans X. Les contraintes décrites en b) se traduisent en termes de parties de $\mathfrak{X}$ et on applique le théorème d'optimisation. Cette méthode permet en particulier de traiter le cas où l'évolution est bornée (quel que soit t, $\|x(t)\| \leq k$).

Bien que valable dans un espace de Banach le résultat que nous démontrons au Chapitre IV n'est cependant pas assez fort pour nous permettre de procéder comme dans [21], aussi nous allons proposer une méthode plus proche de l'étude classique de [17].

2) UNE APPROCHE GEOMETRIQUE DU PROBLEME DU CONTRÔLE OPTIMAL.

La méthode que nous proposons ici est directement inspirée par celle de Pallu de la Barrière [16]. Elle consiste à ne considérer que des problèmes en horizon fixé (c'est-à-dire où ne sont admissibles que les évolutions et les commandes définies sur un intervalle fixé [0 T]) et à travailler sur l'espace des états accessibles à l'instant T. (cf. déf. 1). Notre méthode diffère essentiellement de celle de [16] par l'utilisation des cônes K et K* (Chapitre I). Elle nous permet notamment, sans difficultés supplémentaires, de considérer des contraintes sur l'état final d'un type plus général que dans [16].

Plus précisément nous appellerons comme dans [16] " Problème de Pontryagin en Horizon fixé " le problème suivant. (On peut voir dans [16] comment de nombreux problèmes se ramènent à celui-ci).

a) Le système.-

$\mathcal{X}$ est l'ensemble des couples (x(t), u(t)) où x(t) et u(t) sont respectivement, une application continue de l'intervalle [0 T] dans un espace de Banach X, une application de [0 T] dans un espace topologique séparé H.

b) Les contraintes.-

- La liaison commande-évolution :

Soit une application :

$$f : X \times R \times H \rightarrow X$$

continue et continuement différentiable par rapport à la première variable. On doit avoir :

$$(E) \qquad \frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), t, u(t))$$

cette égalité étant prise au sens de la définition 1 du paragraphe 3.

- Les contraintes sur la commande :

Sont admissibles toutes les applications continues par morceaux de [0 T] dans H. (Par "continues par morceaux" nous entendons ayant un nombre fini de discontinuités de première espèce).

- Les contraintes sur l'évolution :

Nous ne considérons que des contraintes sur l'état final. Plus précisément, soit C une partie de X, sont admissibles les évolutions x(t) telles que :

$$x(o) = 0$$

$$x(T) \in C$$

c) Le critère.-

Soit h une application de X dans R. Au couple admissible (x(t), u(t)) on associe la valeur h(x(T)). On dit que le critère est final.

Définition 1.-

Comme dans [16] nous appellerons ensemble des états accessibles à l'instant T et nous noterons $\Gamma(T)$ l'ensemble des x de X tels qu'il existe un couple admissible $(x(t), u(t))$ pour lequel on ait :

$$x(T) = x .$$

Supposons que le couple $(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t))$ réalise le maximum de h. Nous pouvons appliquer le théorème d'optimisation (Chapitre I, §3, théorème 1) aux ensembles :

$$\Gamma(T)$$

$$C$$

$$\{x \in X : h(x) > h(\tilde{x}(T))\}$$

et au point $\tilde{x}(T)$.

Deux cas peuvent se présenter :

1) L'ensemble C est d'intérieur non vide. (contraintes de type "inégalités"). Dans ce cas nous exprimerons que l'intersection des cônes :

$$K^*(\Gamma(T),\tilde{x}(T)), \quad K(C,\tilde{x}(T)), \quad K(\{x:h(x)>h(\tilde{x}(T))\},\tilde{x}(T))$$

est vide.

2) L'ensemble C est d'intérieur vide. Supposons que c soit l'intersection d'un ensemble C_1 d'intérieur vide (contraintes de type égalité) et d'un ensemble C_2 d'intérieur non vide (contraîntes de type inégalité). Dans ce cas nous exprimerons que l'intersection des cônes :

$$K^*(\Gamma(T)\cap C_1,\tilde{x}(T)), \quad K(C_2,\tilde{x}(T)), \quad K(\{x:h(x)>h(\tilde{x}(T))\},\tilde{x}(T))$$

est vide.

Nous étudions ces deux types de contraintes aux paragraphes 5 et 6. Dans les deux cas nous utiliserons pour déterminer le cône K^* le lemme présenté au paragraphe 4. Ce lemme utilise quelques théorèmes relatifs aux équations différentielles que nous allons rappeler.

3) THEOREMES ET NOTATIONS SUR LES EQUATIONS DIFFERENTIELLES.

Les théorèmes que nous énonçons ici sont classiques (voir par exemple (5)) pour des équations différentielles du type :

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x, t)$$

où f est continue et continuement différentiable par rapport à x. Ces théorèmes se généralisent immédiatement aux équations différentielles du type :

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x, t, u(t))$$

où f est continue et continuement différentaible par rapport à x, u(t) étant une application continue par morceaux, de la manière suivante.

Nous notons :

- X un espace de Banach.
- H un espace topologique séparé.
- $f(x, t, u)$ une application continue de $X \times R \times H$ dans X continuement différentiable par rapport à x.
- $f'_x(x, t, u)$ la différentielle de f par rapport à x au point (x, t, u).
- u(t) une application continue par morceaux de R dans X. (Nous entendons que u(t) a un nombre fini de discontinuités de première espèce sur tout ensemble borné de R).

Définition 1.-

On appelle courbe intégrale de l'équation différentielle

$$(E) \qquad \frac{dx}{dt} = f(x, t, u(t))$$

toute application continue d'un intervalle ouvert I de R :

$$x(t) : I \to R$$

dérivable en tout point de continuité de u(t) et telle que sa dérivée $\frac{d\alpha(t)}{dt}$ vérifie partout où elle est définie :

$$\frac{d\alpha(t)}{dt} = f(x, t, u(t))$$

Théorème 1.- Théorème d'existence et d'unicité.

Soit (x_o, t_o) un élément de $X \times R$.

Il existe un voisinage V de x_o et un réel strictement positif ε tels que pour tout ξ appartenant à V et tout ι appartenant à l'intervalle $]t_o-\varepsilon, t_o+\varepsilon[$ il existe une courbe intégrale $\alpha(t)$ de (E) et une seule définie sur $]t_o-\varepsilon, t_o+\varepsilon[$ vérifiant :

$$\alpha(\iota) = \xi .$$

Théorème 2.-

Soit $\gamma(t)$ une courbe intégrale de l'équation différentielle (E) définie sur un intervalle ouvert contenant l'intervalle $[t_o t_1]$.

Il existe :

- un voisinage V de $\gamma(t_o)$.
- un réel strictement positif ε.

tels que :

- Pour tout ξ appartenant à V,
- Pour tout ι appartenant à $]t_o-\varepsilon, t_o+\varepsilon[$,

il existe une courbe intégrale $\alpha(t)$ de (E) définie sur $]t_o-\varepsilon, t_1+\varepsilon[$ vérifiant :

$$\alpha(\iota) = \xi .$$

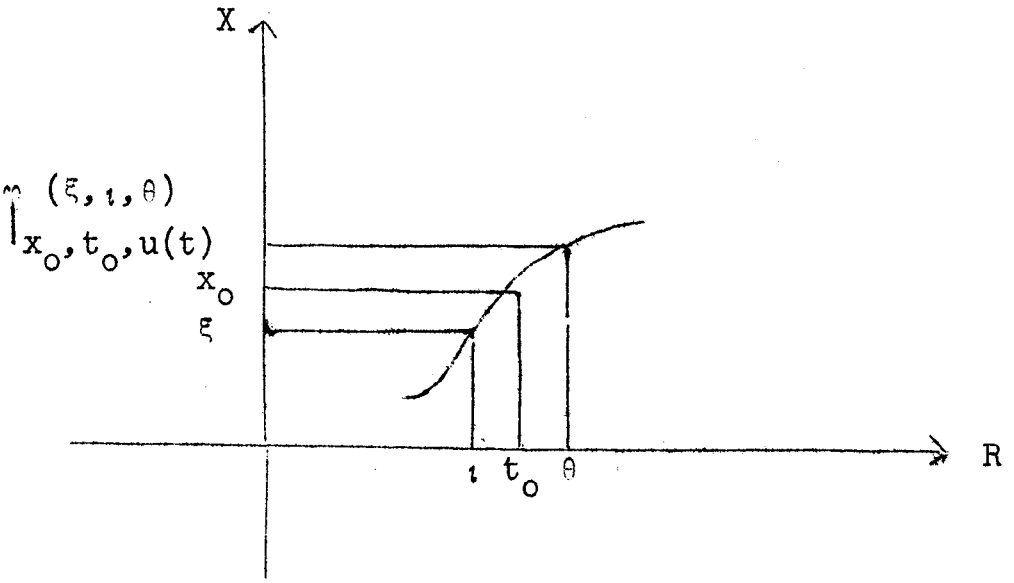
Notation :

Notons :

$$\varphi\,(\xi, \tau, \theta)\Big|_{x_o, t_o, u(t)}$$

l'application qui à ξ suffisamment voisin de x_o, τ et θ suffisamment voisins de t_o fait correspondre la valeur en $t = \theta$ de l'unique courbe intégrale $\alpha(t)$ (théorème 1) de (E) telle que :

$$x(\tau) = \xi \ .$$



Soit $\gamma(t)$ une courbe intégrale de (E) définie sur un intervalle ouvert I.

Notons :

$$\varphi\,(\xi, \tau, \theta)\Big|_{\gamma(t), u(t)}$$

l'application qui à τ et θ appartenant à I et à ξ suffisamment voisin de $\gamma(\tau)$ fait correspondre la valeur en $t = \theta$ de l'unique courbe intégrale $\alpha(t)$ de (E) (théorème 2) satisfaisant à :

$$X(\tau) = \xi \ .$$

Théorème 3.-

L'application $\varphi\Big|_{\gamma(t),u(t)}(\xi,\iota,\theta)$ est une application continuement différentiable dans un voisinage du point :

$$\gamma(\iota_o),\ \iota_o,\ \theta_o$$

et ses dérivées partielles sont données par les formules suivantes :

- $$\frac{\partial}{\partial\xi}\varphi\Big|_{\gamma(t),u(t)}(\gamma(\iota_o),\iota_o,\theta_o) = A^{\gamma(t),u(t)}_{\iota_o\ \theta_o}$$

où $A^{\gamma(t),u(t)}_{\iota_o\ \theta_o}$ désigne la valeur en t de l'unique application continue de $[\iota_o\ \theta_o]$ dans $\mathcal{L}(X,X)$ telle que :

$$\frac{dA(t)}{dt} = f'_x(\gamma(t),\ t,\ u(t))\ .\ A(t)$$

lorsque u(t) est continue et égale à l'identité pour $t = \iota_o$.

- $$\frac{\partial}{\partial\iota}\varphi\Big|_{\gamma(t),u(t)}(\gamma(\iota_o),\iota_o,\theta_o) = A^{\gamma(t),u(t)}_{\iota_o\ \theta_o}.\ \left[-f(\gamma(\iota_o),\iota_o,u(\iota_o))\right]$$

- $$\frac{\partial}{\partial\theta}\varphi\Big|_{\gamma(t),u(t)}(\gamma(\iota_o),\iota_o,\theta_o) = f(\gamma(\theta_o),\theta_o,u(\theta_o))$$

Remarque :

Nous pouvons appliquer les formules du théorème 3 à l'application $\varphi\Big|_{x_o,t_o,u(t)}(\xi,\iota,t)$.

4) LEMME.

Le lemme que nous proposons ici est fondamental dans l'étude des déplacements admissibles.

Lemme.-

Soient $\tilde{u}(t)$ une application continue par morceaux de l'intervalle $[0\ T]$ dans H et $\tilde{x}(t)$ une courbe intégrale de (E) (§3, définition 1) définie sur $[0\ T]$ et telle que :

$$\tilde{x}(o) = 0$$

Soient n vecteurs de X définis par :

$$V_k = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} \lambda_{ij}^k \, A_{t_i T}^{\tilde{x}(t),\tilde{u}(t)} \left[f(\tilde{x}(t_i), t_i, u_{ij}^k) - f(\tilde{x}(t_i), t_i, \tilde{u}(t_i)) \right]$$

avec $k = 1, \ldots, n$

$0 < t_1 < t_2 \ldots < t_p \leq T$

$u_{i,j}^k \in H$

$\tilde{u}(t)$ continue en t_i .

Dans ces conditions il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de 0 dans R^n et une application :

$$\varphi_{V_1,V_2,..,V_n}(\alpha_1,\alpha_2,..,\alpha_n) \ : \mathcal{V} \to X$$

satisfaisant aux propriétés suivantes :

a) $\varphi_{V_1 \ldots V_n}(0) = \tilde{x}(T)$

$\varphi_{V_1 \ldots V_n}$ est continuement différentiable sur $\mathcal{V}$ et ses dérivées partielles sont données par :

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_k} \int_{V_1 \ldots V_n}^{\varphi} (0) = V_k$$

b) Pour tout n-uple $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ de réels positifs ou nuls appartenant à $\mathcal{V}$ l'élément de X :

$$\int_{V_1 \ldots V_n}^{\varphi} (\alpha_1 \ldots \alpha_n)$$

appartient à l'ensemble des états accessibles.

Corollaire.-

Si on note comme dans [16] (p. 384) K(T) le cône convexe engendré par les vecteurs de la forme :

$$A_{tT}\left[f(\tilde{x}(t),t,u) - f(\tilde{x}(t),t,\tilde{u}(t)) \right]$$

où t appartient à l'ensemble des points de continuité de $\tilde{u}(t)$ du segment $]0\ T]$ et u appartient à H, on a l'inclusion :

$$K(T) \subset K^*(\Gamma(T),\tilde{x}(T))$$

En effet si nous appliquons le lemme dans le cas $n = 1$ nous voyons que tout vecteur de K(T) est tangent à un arc dont l'image est incluse dans $\Gamma(T)$ et donc que K(T) est inclus dans le contingent vectoriel de $\Gamma(T)$ en $\tilde{x}(T)$ et par suite dans $K^*(\Gamma(T),\tilde{x}(T))$ (Chapitre II - §1). Nous retrouvons donc le résultat de [16].

Démonstration du lemme :

L'idée est de généraliser la méthode qui permet d'obtenir des arcs tangents aux vecteurs de K(T). Pour cela, comme dans [16] (p. 383 - Théorème 4), nous faisons subir à la commande $\tilde{u}(t)$ des "petites perturbations". Cependant à la différence de [16] nous considèrerons des perturbations "dépendant" non pas de 1 paramètre mais de n paramètres indépendants.

La démonstration de ce lemme ne présente pas de difficultés théoriques. Elle consiste à composer des applications différentiables et à calculer la différentielle de l'application obtenue. Nous donnons le principe de cette démonstration dans le cas particulier suivant :

Soient :

$$V_1 = A_{t_1 T}^{\tilde{x}(t),\tilde{u}(t)}\left[f(\tilde{x}(t_1),t_1,u^1) - f(\tilde{x}(t_1),t_1,\tilde{u}(t_1))\right]$$

$$V_2 = A_{t_1 T}^{\tilde{x}(t),\tilde{u}(t)}\left[f(\tilde{x}(t_1),t_1,u^2) - f(\tilde{x}(t_1),t_1,\tilde{u}(t_1))\right]$$

avec $0 < t_1 \leq T$.

Considérons les applications ψ_1, ψ_2, ψ_3, ψ_4 définies par :

$$\psi_1 : R^2 \longrightarrow X \times R^2$$

$$(\alpha_1,\alpha_2) \longmapsto (\tilde{x}(t_1-(\alpha_1+\alpha_2)),\ t_1-(\alpha_1+\alpha_2),\ t_1-\alpha_1)$$

$$\psi_2 : X \times R^2 \longrightarrow X \times R$$

$$(\xi,\iota,\theta) \longmapsto \left(\varphi_{\tilde{x}(t_1),t_1,u^1}(\xi,\iota,\theta),\ \theta\right)$$

$$\psi_3 : X \times R \longrightarrow X$$

$$(\xi,\mu) \rightsquigarrow \varphi_{\tilde{x}(t_1),t_1,u^2}(\xi,\mu,t_1)$$

$$\psi_4 : X \longrightarrow X$$

$$(\xi) \rightsquigarrow \varphi_{\tilde{x}(t),\tilde{u}(t)}(\xi,t_1,T)$$

Posons :

$$\varphi_{V_1V_2}(\alpha_1\alpha_2) = \psi_4 \circ \psi_3 \circ \psi_2 \circ \psi_1 (\alpha_1\alpha_2)$$

Il est clair que (§3 - théorème 2) que $\varphi_{V_1V_2}(\alpha_1\alpha_2)$ est définie dès que α_1 et α_2 sont suffisamment petits. Calculons la différentielle de cette application en 0. D'après le théorème 3 du §3 nous avons en employant une écriture matricielle :

$$(d\psi_1)_{(0,0)} = X \left\{ \begin{bmatrix} -f(\tilde{x}(t_1),t_1,\tilde{u}(t)) \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -f(\tilde{x}(t_1),t_1,\tilde{u}(t_1) \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right.$$

$$(d\psi_2)_{(\tilde{x}(t_1),t_1,t_1)} = X\left\{\begin{bmatrix}\overbrace{\quad}^{X}\\ \mathrm{id}\\ \\ 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-f(\tilde{x}(t_1),t_1,u^1)\\ \\ 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}f(\tilde{x}(t_1),t_1,u^1)\\ \\ 1\end{bmatrix}\right.$$

$$(d\psi_3)_{(\tilde{x}(t_1),t_1)} = X\left\{\begin{bmatrix}\overbrace{\quad}^{X}\\ \mathrm{id}\\ \\ \\ \end{bmatrix}\begin{bmatrix}-f(\tilde{x}(t_1),t_1,u^2)\\ \\ \\ \end{bmatrix}\right.$$

$$(d\psi_4)_{\tilde{x}(t_1)} = A_{t_1T}^{\tilde{x}(t),\tilde{u}(t)}$$

en composant ces opérateurs linéaires on obtient :

$$d(\psi_4\circ\psi_3\circ\psi_2\circ\psi_1)_{(0,0)}(\lambda_1,\lambda_2) = \lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2$$

Pour achever la démonstration du lemme il nous reste à montrer que :

$$\left.\begin{array}{l}\alpha_1 \geq 0\\ \\ \alpha_2 \geq 0\end{array}\right\} \Rightarrow \quad \varphi_{V_1V_2}(\alpha_1\alpha_2) \in \Gamma(T)$$

Si α_1 et α_2 sont suffisamment petits on a :

$$0 < t_1-(\alpha_1+\alpha_2) \leq t_1-\alpha_2 \leq t_1 \leq T$$

Soient $u_{\alpha_1\alpha_2}(t)$ et $x_{\alpha_1\alpha_2}(t)$ la commande et l'évolution définies par :

$$0 \le t \le t_1-(\alpha_1+\alpha_2) \Rightarrow u_{\alpha_1\alpha_2}(t) = \tilde{u}(t) \quad ; \quad x_{\alpha_1\alpha_2}(t) = \tilde{x}(t)$$

$$t_1-(\alpha_1+\alpha_2) < t \le t_1-\alpha_1 \Rightarrow u_{\alpha_1\alpha_2}(t) = u^1 \quad ; \quad x_{\alpha_1\alpha_2}(t) = \varphi\Big|_{\tilde{x}(t_1),t_1,u^1}(\tilde{x}(t_1-(\alpha_1+\alpha_2)),t_1-(\alpha_1+\alpha_2),t$$

$$t_1-\alpha_1 < t \le t_1 \Rightarrow u_{\alpha_1\alpha_2}(t) = u^2 \quad ; \quad x_{\alpha_1\alpha_2}(t) = \varphi\Big|_{\tilde{x}(t_1),t_1,u^2}(x_{\alpha_1\alpha_2}(t_1-\alpha_1),t_1-\alpha_1,t)$$

$$t_1 < t \le T \Rightarrow u_{\alpha_1\alpha_2}(t) = \tilde{u}(t) \quad ; \quad x_{\alpha_1\alpha_2}(t) = \varphi\Big|_{\tilde{x}(t),\tilde{u}(t)}(x_{\alpha_1\alpha_2}(t_1),t_1,t)$$

En revenant à la définition des applications φ (§3) et à la définition des états accessibles (§2) on vérifie immédiatement que :

$$\frac{dx_{\alpha_1\alpha_2}(t)}{dt} = f(x_{\alpha_1\alpha_2}(t),\ t,\ u_{\alpha_1\alpha_2}(t))$$

$$x_{\alpha_1\alpha_2}(T) = \varphi\Big|_{V_1V_2}(\alpha_1,\alpha_2)$$

ce qui achève la démonstration du lemme.

5) PRINCIPE DE PONTRYAGIN EN HORIZON FIXE AVEC CONTRAINTES DE TYPE INEGALITE SUR L'ETAT FINAL.

Nous supposons réalisées toutes les hypothèses du "problème de contrôle optimal en horizon fixé" (§2). Nous supposons de plus que les contraintes sur l'évolution sont définies de la manière suivante :

Contraintes sur l'évolution :

Soient $f_1, \ldots, f_p$ p applications de X dans R. Sont admissibles les évolutions qui satisfont aux conditions :

$$x(o) = 0$$

$$f_i(x(T)) \leq i = 1 \ldots p$$

Théorème.-

Soit $(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t))$ un couple admissible. Si quel que soit $i = 1 \ldots p$ on a l'égalité :

$$f_i(\tilde{x}(T)) = 0$$

et si les applications h, f_i admettent au point $\tilde{x}(T)$ des différentielles non nulles dh, df_i, une condition nécessaire pour que le couple $(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t))$ réalise le maximum de h(x(T)) sur l'ensemble des couples admissibles est qu'il existe p+1 constantes réelles, positives ou nulles, non toutes nulles, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{p+1}$ telles qu'en tout instant de continuité de $\tilde{u}(t)$ on ait l'égalité :

$$(1) \qquad \langle \tilde{p}^*(t), f(\tilde{x}(t), t, \tilde{u}(t)) \rangle = \operatorname*{Max}_{u \in H} \langle \tilde{p}^*(t), f(\tilde{x}(t), t, u) \rangle \quad (*)$$

où $\tilde{p}^*(t)$ est l'application continue de [0 T] dans le dual X* de X définie par :

(*) Si x* est une forme linéaire continue sur X et x un élément de X nous notons :

$$\langle x^*, x \rangle$$

la valeur de la forme x* au point x.

$$\frac{d\tilde{p}^*(t)}{dt} = - {}^t f'_x(\tilde{x}(t),t,\tilde{u}(t)) \cdot \tilde{p}^*(t)$$

$$\tilde{p}^*(t) = - \lambda_{p+1} dh + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \, df_i$$

Démonstration :

i) Il existe p+1 constantes $\lambda_1 \ldots \lambda_{p+1}$, positives ou nulles, non toutes nulles telles que :

$$(2) \qquad \langle \lambda_{p+1} dh - \sum_{i=1}^{p} \lambda_i df_i, \; A_{tT}^{\tilde{x}(t),\tilde{u}(t)} \left[f(\tilde{x}(t),t,u) - f(\tilde{x}(t),t,\tilde{u}(t)) \right] \rangle \leq 0$$

quels que soient :

- $t > 0$, $\tilde{u}$ continue en t
- $u \in H$.

Nous allons appliquer le théorème d'optimisation (Chapitre I, §4, théorème 1) sous sa forme analytique dans l'espace X des états finals.

Introduisons les notations :

$$E_i = \left\{ x \in X : f_i(x) \leq 0 \right\} \quad i = 1 \ldots p$$

$$E_{p+1} = \left\{ x \in X : h(x) > h(\tilde{x}(T)) \right\}$$

D'après le corollaire du lemme fondamental (§4) et les formules F_{10} (Chapitre III, §3) que nous pouvons appliquer, on a les relations suivantes :

$$\Omega_o = K^*(\Gamma(T),\tilde{x}(T)) \supset K(T)$$

$$\Omega_i = K(E_i,\tilde{x}(T)) = \left\{ x \in X : df_i(x) < 0 \right\} \quad i=1 \ldots p$$

$$\Omega_{p+1} = K(E_{p+1},\tilde{x}(T)) = \left\{ x \in X : dh(x) > 0 \right\}$$

Si $\tilde{x}(T)$ réalise le maximum de h d'après (Chapitre I, §4, théorème 1) il existe p+2 formes linéaires continues non toutes nulles $\omega_o, \omega_1, \ldots, \omega_{p+1}$ telles que :

$$x \in \Omega_i \Rightarrow \omega_i(x) \geq 0 \qquad i=0\ldots p+1$$

$$\sum_{i=1}^{p+1} \omega_i = 0.$$

Si maintenant nous tenons compte de la nature particulière des cônes Ω_i (demi-espaces) pour $i = 1\ldots p+1$ nous pouvons dire qu'il existe p+1 constantes $\lambda_1 \ldots \lambda_{p+1}$, positives ou nulles, non toutes nulles, telles que :

$$\omega_i = - \lambda_i \, df_i$$

$$\omega_{p+1} = + \lambda_{p+1} \, dh$$

et par suite on aura :

$$x \in K(T) \Rightarrow \langle + \lambda_{p+1} \, dh - \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \, df, \, x \rangle \leq 0$$

ce qui d'après la définition de K(T) démontre la relation (2).

ii) En tout instant de continuité de u(t) différent de 0 on a la relation :

(3) $$\langle \tilde{p}^*(t), \, f(\tilde{x}(t),t,\tilde{u}(t)) \rangle = \operatorname*{Max}_{u \in H} \langle \tilde{p}^*(t), \, f(\tilde{x}(t),t,u) \rangle$$

On démontre simplement que ([16], p. 272, prop.1) si $\tilde{p}^*(t)$ est une application continue de [0 T] dans le dual X* de X telle que :

$$\frac{d\tilde{p}^*(t)}{dt} = - \, {}^t f'_x(\tilde{x}(t),t,\tilde{u}(t)) \, . \, \tilde{p}^*(t)$$

en tout instant de continuité de $\tilde{u}(t)$ et telle que :

$$\tilde{p}^*(t) = \lambda_{p+1}\, dh - \sum_{i=1}^{p} \lambda_i\, df_i$$

on a alors l'égalité :

$$\tilde{p}^*(T) = {}^tA_{tT}\left[\lambda_{p+1}\, dh - \sum_{i=1}^{p} \lambda_i\, df_i\right] \tag{4}$$

Il suffit d'utiliser (4) et de remarquer que quel que soit x on a :

$$\langle \lambda_{p+1} dh - \sum_{i=1}^{p} \lambda_i df_i,\ A_{tT}[x]\rangle = \langle {}^tA_{tT}\left[\lambda_{p+1} dh - \sum_{i=1}^{p} \lambda_i df_i\right],\ x\rangle$$

pour déduire la relation (3) de la relation (2).

iii) En tout instant de continuité de $\tilde{u}(t)$ on a la relation :

$$\langle \tilde{p}^*(t),\ f(\tilde{x}(t),t,\tilde{u}(t))\rangle = \operatorname*{Max}_{u\in H} \langle \tilde{p}^*(t),\ f(\tilde{x}(t),t,u)\rangle \tag{1}$$

Supposons que $\tilde{u}(t)$ soit continue en 0.
Notons :

$$G(t) \ :\ [0\ \varepsilon] \to R$$

l'application définie par :

$$G(t) = \langle \tilde{p}^*(t),\ f(\tilde{x}(t),t,\tilde{u}(t))\rangle$$

Si nous choisissons ε suffisamment petit, $G(t)$ est continue.
Notons enfin :

$$F(t,u) \ :\ [0\ \varepsilon] \times H \to R$$

l'application définie par :

$$F(t,u) = \langle \tilde{p}(t),\ f(\tilde{x}(t),t,u)\rangle$$

Supposons que l'on ait :

$$G(0) < F(0,u_o)$$

Les applications F et G étant continues pour t suffisamment voisin de 0 nous aurons :

$$G(t) < F(t,u_o)$$

ce qui contredit la relation (3).

6) PRINCIPE DE PONTRYAGIN EN HORIZON FIXÉ AVEC CONTRAINTES DE TYPE EGALITE ET INEGALITE SUR L'ETAT FINAL.

Nous avons vu au §5 que dans la démonstration du théorème le point le plus important (le point i) était une conséquence immédiate des théorèmes d'optimisation du Chapitre I. Dans la situation que nous considérons maintenant il n'en est plus ainsi.

Nous supposons réalisées les hypothèses du "problème de contrôle optimal en horizon fixé" (§2). Nous supposons de plus que l'évolution est soumise aux contraintes suivantes.

Contraintes sur l'évolution :

Soient $f_1, f_2, \ldots, f_p, f_{p+1}, \ldots, f_q$ q applications de X dans R. Sont admissibles les évolutions qui satisfont aux conditions :

$$x(0) = 0$$

$$f_i(x) \leq 0 \qquad i = 1 \ldots p$$

$$f_j(x) = 0 \qquad j = p+1 \ldots q$$

Enonçons deux hypothèses que nous ferons par la suite :

Hypothèse H_1 :

1) L'espace X est de dimension finie.

2) L'application :

$$f : X \to R^{q-p}$$

$$x \longmapsto (f_{p+1}(x), \ldots, f_q(x))$$

est de rang constant q-p.

Hypothèse H_2 :

1) K(T) et $\Gamma(T)$ sont des ensembles convexes d'intérieur non vide.

2) L'application f est de rang constant q-p.

Théorème.-

Supposons réalisée une des hypothèses H_1 ou H_2. Si le couple admissible $(\tilde{x}(t),\tilde{u}(t))$ est tel que :

$$f_i(\tilde{x}(T)) = 0 \qquad i = 1 \ldots q$$

et si les applications h et f_i admettent des différentielles non nulles dh et df_i au point $\tilde{x}(T)$, une condition nécessaire pour que le couple $(\tilde{x}(t),\tilde{u}(t))$ réalise le maximum du critère $h(x(T))$ sur l'ensemble des couples admissibles est qu'il existe q+1 constantes réelles non toutes nulles :

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p, \mu_{p+1}, \ldots, \mu_q, \lambda_{q+1}$$

telles que :

$$\lambda_i \geq 0 \qquad i = 1 \ldots p, q+1$$

et en tout instant de continuité de $\tilde{u}(t)$ on ait :

(1) $$\langle \tilde{p}^*(t),\ f(\tilde{x}(t),t,\tilde{u}(t))\rangle = \operatorname*{Max}_{u\in H} \langle \tilde{p}^*(t),\ f(\tilde{x}(t),t,u)\rangle$$

où $\tilde{p}^*(t)$ est l'application continue de $[0\ T]$ dans X^* définie par :

$$\frac{d\tilde{p}^*(t)}{dt} = -\ {}^t f'_x(\tilde{x}(t),t,\tilde{u}(t))\ .\ \tilde{p}^*(t)$$

en tout instant de continuité de $\tilde{u}(t)$ et :

$$\tilde{p}^*(T) = \lambda_{q+1}\ dh - \sum_{i=1}^{p} \lambda_i\ df_i - \sum_{j=p+1}^{q} \mu_i\ df_j$$

Considéré avec l'hypothèse H_1 ce théorème est une généralisation du théorème obtenu dans [16] (p. 387 - théorème 5) au cas où les contraintes sont définies par des applications différentiables et non plus seulement linéaires. Notre démonstration est basée sur l'utilisation du lemme fondamental (§4) et ne fait pas appel comme dans [16] à un théorème de point fixe, conséquence du théorème de Brouwer.

Démonstration :

Si nous supposons démontrée la relation :

2) $$\langle \lambda_{p+1}dh - \sum_{i=1}^{p} \lambda_i df_i - \sum_{j=p+1}^{q} \mu_j df_j,\ A_{tT}^{\tilde{x}(t),\tilde{u}(t)}\left[f(\tilde{x}(t),t,u)-f(\tilde{x}(t),t,\tilde{u}(t))\right]\rangle \leq 0$$

quels que soient :

- $t > 0$, $\tilde{u}$ continue en t
- $u \in H$.

nous pourrons obtenir la relation (1) en procédant exactement comme aux points ii) et iii) de la démonstration du théorème précédent.

i) Si l'hypothèse H_2 est réalisée, la relation (2) est vraie :

Introduisons les notations :

$$E_o = \{x \in X \ : \ f_j(x) = 0, \ j=p+1...q\}$$

$$E_i = \{x \in X \ : \ f_i(x) \leq 0\} \ i=1...p$$

$$E_{q+1} = \{x \in X \ : \ h(x) > h(\tilde{x}(T))\}$$

D'après les formules F_{10} que nous pouvons appliquer on a :

$$\Omega_i = K(E_i, \tilde{x}(T)) = \{x \in X \ : \ df_i(x) < 0\} \quad i=1...p$$

$$\Omega_{q+1} = K(E_{q+1}, \tilde{x}(T)) = \{x \in X \ : \ dh(x) < 0\}$$

D'après la seconde partie de l'hypothèse H_2 nous pouvons appliquer le théorème démontré au paragraphe 1 du Chapitre IV et par suite nous aurons :

$$\Omega_o = K^*(E_o, \tilde{x}(T)) = \{x \in X : df_j(x) = 0 \ ; \ j=p+1..q\}$$

Si maintenant nous utilisons la première partie de l'hypothèse H_2 nous obtenons en utilisant (Chapitre II, §3 - prop.4)

$$K(\Gamma(T), \tilde{x}(T)) = \text{Int}(K^*(\Gamma(T), \tilde{x}(T))$$

et par suite comme (§3 - corollaire)

$$K(T) \subset K^*(\Gamma(T), \tilde{x}(T))$$

nous aurons :

$$\text{Int}(K(T)) \subset K(\Gamma(T), \tilde{x}(T)) = \Omega_{q+1}$$

Nous pouvons donc appliquer le théorème d'optimisation (Chapitre I - §4, théorème 1) et par suite si $\tilde{x}(T)$ réalise le maximum de h il existe p+3 formes linéaires continues :

$$\omega_o,\ \omega_1,\ \ldots,\ \omega_p,\ \omega_{q+1},\ \omega_{q+2}$$

telles que :

$$x \in \Omega_i \ \Rightarrow\ \omega_i(x) \geq 0$$

$$\sum_{i=0}^{p} \omega_i + \omega_{q+1} + \omega_{q+2} = 0$$

En tenant compte de la nature particulière des cônes Ω_i (i=1,...,p) (demi-espace) et Ω_o (sous-espace) nous pouvons transformer la proposition précédente en :

Il existe q+1 constantes réelles :

$$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_p,\ \lambda_{q+1}$$

$$\mu_{p+1},\ \ldots,\ \mu_q$$

non toutes nulles telles que :

$$\lambda_i \geq 0$$

$$\omega_o = -\sum_{j=p+1}^{q} \mu_j\, df_j$$

$$\omega_i = -\lambda_i\, df_i \qquad i=1\ldots p$$

$$\omega_{q+1} = \lambda_{q+1}\, dh$$

$$x \in \mathrm{Int}(K(T)) \ \Rightarrow\ \langle \lambda_{q+1}\, dh - \sum_{i=1}^{p} \lambda_i\, df_i - \sum_{j=1}^{q} \mu_j\, df_j,\ x\rangle \leq 0$$

Comme K(T) est un convexe d'intérieur non vide l'inégalité se prolonge à K(T) ce qui démontre la relation (2).

ii) Supposons maintenant réalisée l'hypothèse H_1.

Les ensembles E_o et $\Gamma(T)$ pouvant être tous deux d'intérieur vide nous sommes obligés de calculer :

$$K^*(E_o \cap \Gamma(T), \tilde{x}(T))$$

a) Supposons que K(T) et le noyau T^{n-q+p} de $df_{\tilde{x}(T)}$ ne soient pas contenus dans un même hyperplan. Nous allons montrer que l'on a :

$$T^{n-q+p} \cap K(T) \subset K^*(E_o \cap \Gamma(T), \tilde{x}(T)) \tag{3}$$

Pour cela, montrons que si x est un point interne de K(T), c'est-à-dire un point intérieur de K(T) relativement au sous-espace engendré par K(T) on a :

$$x \in T^{n-q+p} \Rightarrow x \in K^*(E_o \cap \Gamma(T), \tilde{x}(T)) \tag{4}$$

La relation (4) entraîne la relation (3) car K(T) est inclus dans l'adhérence de l'ensemble de ses points internes.

Si x est un point interne de K(T) il existe une base de l'espace engendré par K(T), $V_1, \ldots, V_k$, telle que :

$$x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i V_i \qquad \alpha_i > 0$$

Posons :

$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) = \xi$$

$$p^{k+} = \{(\lambda_1 \ldots \lambda_k) \in R^k \ : \ \lambda_i > 0\}$$

Soient $\mathcal{V}$ et $\varphi_{V_1 \dots V_k}$ le voisinage de 0 dans R^k et l'application définis par le lemme (§3).

Supposons démontrée la relation :

$$(5) \qquad \xi \in K^*\left(\varphi^{-1}_{V_1 \dots V_k}\left(\varphi_{V_1 \dots V_k}(p^{k+})\right) \cap (f \circ \varphi)^{-1}(0),\ 0\right)$$

D'après F_3 (Chapitre III - §2) nous aurons :

$$(6) \qquad x = d\varphi_{V_1 \dots V_k}(\xi) \in K^*\left(\varphi_{V_1 \dots V_k}(p^{k+}) \cap f^{-1}(0),\ \tilde{x}(T)\right)$$

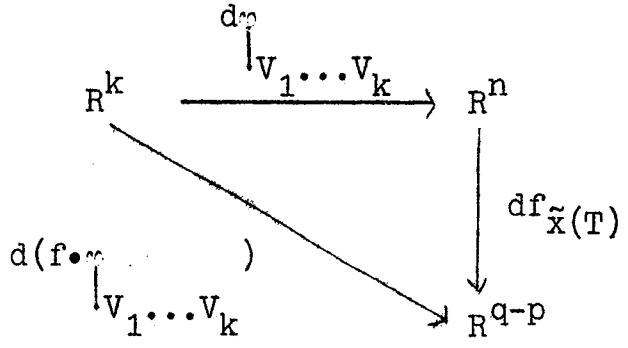
et comme d'après le lemme

$$\varphi_{V_1 \dots V_k}(p^{k+}) \subset \Gamma(T)$$

la relation (3) sera démontrée.

Démontrons maintenant la relation (5).
Considérons l'application :

$$d\left(f \circ \varphi_{V_1 \dots V_k}\right)_0 = df_{\tilde{x}(T)} \circ d\varphi_{V_1 \dots V_k}$$



L'application $d(f \circ \varphi_{|V_1 \ldots V_k})$ est surjective. En effet d'après l'hypothèse H_1, $df_{\tilde{x}(T)}$ est surjective.
Soit :

$$\eta = df_{\tilde{x}(T)}(\theta)$$

un élément de R^{q-p}.
$(V_1 \ldots V_k)$ étant une base de l'espace engendré par $K(T)$, $K(T)$ et T^{n-q+p} n'étant pas dans un même hyperplan nous pouvons écrire :

$$\theta = \theta_o + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i V_i \qquad \theta_o \in T^{n-p+q}$$

ou encore :

$$\theta = \theta_o + d\varphi_{|V_1 \ldots V_k}(\lambda_1 \ldots \lambda_k)$$

et par suite :

$$\eta = df(\theta) = df(\theta_o) + df \circ d\varphi_{|V_1 \ldots V_k}(\lambda_1 \ldots \lambda_k) = df \circ d\varphi_{|V_1 \ldots V_k}(\lambda_1 \ldots, \lambda_k)$$

$d(f \circ \varphi_{|V_1 \ldots V_k})$ étant surjective, l'application $f \circ \varphi_{|V_1 \ldots V_k}$ est une application de rang maximum, donc constant dans un voisinage de 0.
Nous avons donc (Chapitre IV - §1) :

$$(7) \qquad \xi \in K^*\left((f \circ \varphi_{|V_1 \ldots V_k})^{-1}(0), 0\right)$$

Comme ξ est un élément de p^{k+} on a la proposition suivante :

Il existe un voisinage V de ξ tel que :

$$z \in V, \quad t > 0 \Rightarrow tz \in V$$

et par suite en revenant à la définition des cônes K* on vérifie facilement que :

$$\xi \in K^*\Big((f \circ \varphi_{V_1 \ldots V_k})^{-1}(0) \cap p^{k+},\ 0\Big)$$

et comme :

$$\varphi^{-1}_{V_1 \ldots V_k}\Big(\varphi_{V_1 \ldots V_k}(p^{k+})\Big) \supset p^{k+}$$

la relation (5) est démontrée ce qui achève la démonstration de (3).

b) Posons :

$$\Omega_i = K(E_i,\ \tilde{x}(T)) = \left\{x : df_i(x) < 0\right\}$$

$$\Omega_{q+1} = K(E_{q+1},\ \tilde{x}(T)) = \left\{x : dh(x) > 0\right\}$$

et montrons que

$$K(T) \quad \text{et} \quad \left[T^{n-q+p} \cap \left(\bigcap_{i=1}^{p} \Omega_i\right) \cap \Omega_{q+1}\right] = E$$

sont séparés au sens large par un même hyperplan.

Si K-T) et E sont dans un même hyperplan, la proposition est démontrée.

Si K(T) et E ne sont pas dans un même hyperplan, il en est de même pour K(T) et T^{n-q+p} et par suite nous pouvons appliquer a).

Appliquons le théorème d'extremum (Chapitre I - §3 - Théorème 1) aux cônes

$$\Omega_i \quad : \quad i = 1,\ldots,p,q+1$$

$$\Omega_o = K^*(\Gamma(T) \cap E_o,\ \tilde{x}(T)) = K(T) \cap T^{n-q+p}$$

nous avons :

$$\left(\bigcap_{i=0}^{p} \Omega_i\right) \cap \Omega_{q+1} = \phi$$

d'où :

$$\left(K(T) \cap T^{n-q+p}\right) \cap \left[\left(\bigcap_{i=0}^{p} \Omega_i\right) \cap \Omega_{q+1}\right] = K(T) \cap \left[T^{n-q+p} \cap \left(\bigcap_{i=1}^{p} \Omega_i\right) \cap \Omega_{q+1}\right] = \phi$$

et par suite il existe une forme séparant K(T) de E.

c) Soit ω une forme négative ou nulle sur K(T), positive ou nulle sur E.

Nous avons :

$$\left\{ \begin{array}{ll} df_i(x) < 0 & i=1\ldots p \\ -dh(x) < 0 & \\ df_j(x) = 0 & j=p+1\ldots q \end{array} \right\} \Rightarrow \quad \omega(x) \geq 0$$

et par suite nous savons qu'il existe q+1 constantes non toutes nulles :

$$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_p,\ \lambda_{q+1}$$

$$\mu_{p+1},\ \ldots,\ \mu_q$$

telles que :

$$\lambda_i \geq 0 \qquad i=1\ldots p,q+1$$

$$\omega(x) = \lambda_{p+1}\, dh - \sum_{i=1}^{p} \lambda_i\, df_i - \sum_{j=p+1}^{q} \mu_j\, df_j$$

Nous avons donc :

$$x \in K(T) \Rightarrow \langle \lambda_{p+1}\, dh - \sum_{i=1}^{p} \lambda_i\, df_i - \sum_{j=p+1}^{q} \mu_j\, df_j,\ x \rangle \leq 0$$

et par suite, d'après la définition de K(T), nous avons démontré (2).

C O N C L U S I O N

Nous retiendrons de cette méthode qu'elle permet de situer immédiatement les difficultés du problème, c'est-à-dire la détermination des cônes K et K*. Toutes les questions de séparation d'ensembles convexes qu'on trouve dans la plupart des théorèmes d'optimisation sont contenues dans le théorème d'optimisation sous forme analytique (Chap.I - §4, théorème 1).

Le plus grave inconvénient de la méthode est de ne pouvoir utiliser qu'un seul cône K* ce qui oblige à considérer toutes les contraintes de type égalité à la fois. Les plus grandes difficultés sont apparues au Chapitre V dans l'étude du problème de contrôle optimal en présence de contraintes mixtes sur l'état final. Elles sont dues au fait que l'ensemble dont nous cherchions à déterminer le cône K* était l'intersection de deux ensembles de nature très différente : l'ensemble des états accessibles $\Gamma(T)$ et l'ensemble défini par les contraintes de type égalité.

Par contre, cette méthode est efficace en ce sens qu'une fois les résultats du Chapitre III acquis, elle permet sans difficultés supplémentaires de considérer des problèmes où les contraintes sont définies par des applications d'un type général (différentibles, directionnellement différentiables).

Si maintenant nous revenons au problème du contrôle optimal, nous constatons que celui-ci repose pour une grande part sur l'étude des états accessibles. Nous allons proposer maintenant une nouvelle formulation du problème permettant d'introduire les méthodes de la géométrie différentielle.

Soient X un espace de Banach, H un espace topologique séparé, f une application de $X \times R \times H$ dans X. Notons $\mathcal{C}(R,H)$ l'ensemble des applications continues de R dans X. Considérons sur $X \times R$ le champ de vecteur $X_{u(t)}$ défini par :

$$\mathfrak{X}_{u(t)}(x,t) = f(x,\ t,\ u(t))$$

$$\mathfrak{T}_{u(t)}(x,t) = 1$$

Nous avons ainsi sur $X \times R$ une famille de champs de vecteurs dont l'ensemble d'indice parcourt $\mathcal{C}(R,H)$. Si $\tilde{u}(t)$ est une commande continue par morceaux, l'évolution correspondante $\tilde{x}(t)$ s'obtiendra en recollant un certain nombre de courbes intégrales des champs $X_{u(t)}$. Plus précisément, nous reposerons le problème de l'accessibilité ainsi.

Soit $(X^i)_{i \in I}$ une famille de champs de vecteurs sur un espace de Banach X. Pour simplifier, nous supposons que les champs X^i sont de classe C_∞.

Définition 1.-

On dit que l'application continue :

$$\alpha(t) \ : \ [t_o\ t_1] \to X$$

est une courbe intégrale de la famille $(X^i)_{i \in I}$ si :

1) $\alpha(t)$ est C_∞ par morceaux.

2) Si $\alpha(t)$ est C_∞ sur [a b], la restriction de α à [a b] est une courbe intégrale d'un des champs X^i.

Définition 2.-

Un point x est accessible à partir du point x_o si il existe une courbe intégrale (définition 1) de $(X^i)_{i \in I}$

$$\alpha(t) \quad : \quad [0 \; t_1] \to X$$

telle que :

$$\alpha(0) = x_o$$

$$\alpha(t_1) = x_1$$

Notons G^i le groupe local à 1 paramètre engendré par X^i [15] et g^i_t une transformation locale de G^i. Dire que x est accessible à partir de x_o revient à dire qu'il existe une suite de transformations locales :

$$g^{i_1}_{t_1}, \ldots, g^{i_p}_{t_p} \qquad t_i > 0$$

telles que :

$$g^{i_p}_{t_p} \circ g^{i_{p-1}}_{t_{p-1}} \circ \ldots \circ g^{i_1}_{t_1}(x_o) = x \; .$$

Le problème est donc un problème de composition de transformations locales, et en introduisant le groupe libre engendré par $I \times R^+$ on peut définir un groupe opérant (en un certain sens différentiablement) sur X. Dans un tel formalisme l'ensemble des états accessibles devient la trajectoire de x_o sous l'effet d'une partie du groupe.

Nous allons maintenant rappeler un résultat de Chow dont Hermann [11] a montré l'importance qu'il jouait dans l'étude des états accessibles.

- Supposons X de dimension finie (en fait le théorème est valable sur une variété). Soit H un système de Pfaff, c'est-à-dire la donnée en tout point de X d'un sous-espace H_x de X. Soit P(H) le saturé de H sous l'effet du crochet de Jacobi. C'est-à-dire que si nous posons :

$$H_1 = H + [H,H]$$

$$H_{i+1} = H + [H_i,H_i]$$

nous aurons

$$P(H) = \bigcup_{i \in N} H_i$$

- Si nous supposons que P(H) est régulier (i.e. la dimension de $P(H)_x$ est constante) P(H) étant stable par crochet nous pouvons appliquer le Théorème de Frobénius [15] et par suite, il passe par x_o une sous-variété intégrale et une seule, M_{x_o}, de P(H).

Soit maintenant $(X^i)_{i \in I}$ la famille de <u>tous</u> les champs de vecteurs C_∞ tels que :

$$X^i_x \in H_x .$$

<u>Théorème de Chow</u>.-

Si H et P(H) sont réguliers, l'ensemble des points qui peuvent être joints à x_o par une courbe intégrale (Définition 1) de la famille $(X^i)_{i \in I}$ est exactement la sous-variété M_{x_o}.

On voit tout le parti qu'on peut tirer d'un tel théorème dans l'étude des états accessibles. En fait, dans la situation décrite ci-dessus la famille $(X_i)_{i \in I}$ est très riche. Pratiquement, le théorème, plus général, suivant serait plus intéressant.

X est un espace de Banach.

$(X_i)_{i \in I}$ est une famille de champs de vecteurs C_∞ sur X.

$P(X^i)$ est le plus petit système de Pfaff engendré par $(X^i)_{i \in I}$ stable par crochet.

Si $P(X^i)$ et $(X^i)_{i \in I}$ sont réguliers, est-il vrai que l'ensemble des points qui peuvent être joints à x_o par une courbe intégrale de $(X^i)_{i \in I}$ est exactement la sous-variété intégrale (en un sens à définir) de $P(X^i)$ passant par x_o ?

Un tel théorème permettrait de préciser dans quelles conditions l'hypothèse H_2 (Chapitre V - §6) est réalisée.

-:-:-:-

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. ATTEIA - " Théorie du contrôle optimal et calcul des variations ".
2ème Thèse soutenue le 20 juin 1966 devant un jury de la Faculté des Sciences de Grenoble.

[2] J.R. BARRA - " Problème d'extrema sous contraintes, un théorème de Pontryagin ".
Séminaire d'Analyse Fonctionnelle du 27 janvier 1966. (Multigraphié). Faculté des Sciences de Grenoble.

[3] A. BERNARD - " Séparation des convexes dans les e.v.t. ".
Séminaire d'Analyse Fonctionnelle du 18 novembre 1965. Faculté des Sciences de Grenoble.

[4] N. BOURBAKI - " Espaces vectoriels topologiques ".
Actualités scientifiques et industrielles 1189. Hermann. Paris.

[5] G. CHOQUET - " Equations différentielles ".
Les cours de Sorbonne. 5, Place de la Sorbonne, Paris V.

[6] A. YA. DOUBOVITSKY ET A.A. MILIOUTINE
" Problèmes d'optimisation en présence de contraintes ".
Th, Vychisl. Mat. I. Mat. Fiz., 5 (1965) p.p. 395-453.

[7] M.R. ESTENES - " On variationnal theory and optimal control theory ".
S.I.A.M. journal on control. Ser. A. Vol. 3 N° 1 (1965).

[8] A.T. FULLER - " Bibliography of Pontryagin's Maximum Principle ".
Journal of Electronics and Control, Vol. 15 N° 5, p. 513 Nov. 1963.

[9, a] H. HALKIN - " A maximum principle of the Pontryagin type for systems described by non linear difference equations ".
First international conference on programming and control. 15-16 avril 1965.

[9, b] H. HALKIN - " An abstract framework for the theory of process optimization ".
Bull. of A. M. S., Vol 72 N° 4, juillet 1966, p.p. 677-678.

[9, c] H. HALKIN - " Optimal control as programming in infinite dimensional spaces ".
Department of Mathematics - University of California - San Diego. Juillet 1966.

[10] H. HALKIN - L. NEUSTADT
" General necessary conditions for optimization problems ".
Proceedings of the National Academy of Sciences. Vol 56, N° 4, pp. 1066-1071 (Octobre 1966).

[11] R. HERMANN - " On the accessibility problem in control theory ".
International Symposium on Non. Linear Differential Equations and Non Linear Mechanics. Edited by J.P. La Salle and S. Lefschetz. Ac. Press. NeW-York and London 1963.

[12] S. KAKUTANI - V. KLEE
" The finite topology of a linear space ".
Arch. Math. Vol 14, (1963) p.p. 55-58.

[13] H.W. KUHN - M.A. TUCKER
" Non linear programming ".
Proceeding of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability. J. Neyman (ed.) University of California Press. 1951, pp. 481-492.

[14] LYONS - " Théorie du contrôle ".
Electricité de France. Direction des études et recherches. Cours du 21 juin 1966. 17 octobre 1966 (Multigraphié).

[15] Y. MATSUSHIMA - " Groupes de Lie ".
Université de Grenoble. Faculté des Sciences Service de Mathématiques Pures. (Multigraphié).

[16] R. PALLU DE LA BARRIERE

" Cours d'automatique théorique ".
Dunod - Paris 1966.

[17] L.S. PONTRYAGIN, V.G. BOLTYANSKII, R.V. GAMKRELIDZE, E.F. MISHCHENKO.

" The Mathematical Theory of Optimal Processes ".
Interscience Publishers. 1962.

[18] RIEZ ET NAGY - " Leçons d'Analyse Fonctionnelle ".
Académie des Sciences de Hongrie - 3ème édition 1955.

[19] E. ROXIN - " A geometric interpretation of Pontryagin's maximum principle ".
International symposium on non linear differential equations andnon linear mechanics. Academic. Press. New-York and London (1963).

[20] TERRENOIRE - " Application de la programmation linéaire et convexe à la proximation au sens de Tchebycheff avec contraintes ".
Université de Grenoble - Faculté des Sciences. Service de Mathématiques Appliquées.

[21] H. HALKIN - " Non linear non convex programming in an infinite dimensional space ".
Department of Mathematics. University of California - San Diego.

[22] D.L. RUSSEL - " The Kuhn-Tucker Conditions in Banach Space with an Application to Control Theory ".
J. of. Math. Anal. 15, p.p. 200-212 (1966).

[23] BLAQUIERE - LEITMANN

" Quelques aspects géométriques des processus optimaux ".
" Sur la géométrie des processus optimaux".
Actes du congrès d'automatique théorique. Paris 1966. Dunod.

VU,

Grenoble, le 9 juin 1967

Le Président de la thèse,

C. CHABAUTY

VU,

Grenoble, le 9 juin 1967

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

E. BONNIER

VU, et permis d'imprimer,

Le Recteur de l'Académie de Grenoble,

M. NIVEAU