



**HAL**  
open science

## La torsion de Nijenhuis et quelques applications

van Duc Tong

► **To cite this version:**

van Duc Tong. La torsion de Nijenhuis et quelques applications. Mathématiques [math]. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1967. Français. NNT: . tel-00280722

**HAL Id: tel-00280722**

**<https://theses.hal.science/tel-00280722>**

Submitted on 19 May 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE

DE DOCTORAT DE TROISIEME CYCLE DE MATHEMATIQUES PURES

présentée

A LA FACULTE DES SCIENCES  
DE L'UNIVERSITE DE GRENOBLE

par

M. TONG - VAN - DUC

---

" LA TORSION DE NIJENHUIS ET QUELQUES APPLICATIONS "

Soutenue le 18 décembre 1967 devant la Commission d'examen

C. CHABAUTY	Président
J. KLEIN	Examineurs
J.L. KOSZUL	



THESE

DE DOCTORAT DE TROISIEME CYCLE DE MATHEMATIQUES PURES

présentée

A LA FACULTE DES SCIENCES  
DE L'UNIVERSITE DE GRENOBLE

par

M. TONG - VAN - DUC

---

" LA TORSION DE NIJENHUIS ET QUELQUES APPLICATIONS "

Soutenue le 18 décembre 1967 devant la Commission d'examen

C. CHABAUTY                      Président

J. KLEIN  
J.L. KOSZUL                      Examineurs



S O M M A I R E

pages

INTRODUCTION

Première partie - LA TORSION DE NIJENHUIS.

I. Rappel sur les dérivations de l'algèbre extérieure . . .	1
II. Définition de la torsion de Nijenhuis . . . . .	5
III. Autres manières de caractériser la torsion de Nijenhuis . . . . .	9
IV. Propriétés . . . . .	13

Deuxième partie - LEMME DE POINCARÉ ET LOIS DE CONSERVATION.

I. Lemme de Poincaré relatif à $d_J$ - Théorème de Willmore.	17
II. Lois de conservation dans les cas $J^2 = \gamma I$ où $\gamma$ est une constante réelle . . . . .	22

Troisième partie - SYSTEMES DIFFERENTIELS DEFINIS PAR UN  
OPERATEUR LINEAIRE DE RANG CONSTANT.

I. Préliminaires. . . . .	25
II. Etude des systèmes différentiels associés à un opé- rateur linéaire. . . . .	29

Quatrième partie - ETUDE DE LA STRUCTURE DEFINIE PAR UNE  
FORME VECTORIELLE  $J$  TELLE QUE  $J^3 = -J$

I. Torsion de Nijenhuis dans le cas complexe . . . . .	33
II. Etude de la structure définie par une 1-forme vecto- rielle $J$ vérifiant $J^3 = -J$ . . . . .	35
III. Torsion de structure . . . . .	40
IV. Une autre étude de la structure $J^3 = -J$ . . . . .	44

BIBLIOGRAPHIE . . . . .	51
-------------------------	----



## I N T R O D U C T I O N

Dans la recherche des structures complexes, C. Ehresmann a été amené à poser la définition d'une structure presque-complexe. Sur une variété réelle de dimension paire, une structure presque-complexe est définie par un tenseur  $J$  de type  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  tel que  $J^2 = -I$ . Une variété complexe induit d'une façon canonique une structure presque-complexe sur la variété réelle sous-jacente. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une structure presque-complexe provienne d'une structure complexe a été trouvée par B. Eckmann et A. Frölicher dans le cas où le tenseur  $J$  est analytique réel.

Si l'on pose :

$$t_{jk}^i = J_{\ell j}^i J_k^\ell - J_{\ell k}^i J_j^\ell$$

où

$$J_{jk}^i = \frac{\partial J_j^i}{\partial x^k} - \frac{\partial J_k^i}{\partial x^j}$$

$t_{jk}^i$  s'appelle le tenseur de torsion.

La condition nécessaire et suffisante se traduit par la nullité du tenseur de torsion.

En 1956, A. Frölicher et A. Nijenhuis développèrent la théorie des dérivations de l'algèbre extérieure et introduisirent



la notion du crochet de deux formes vectorielles. La torsion de Nijenhuis de  $J$  est le crochet  $\frac{1}{2} [J, J]$ . Dans le cas  $J^2 = -I$ , cette torsion n'est autre que le tenseur  $t_{jk}^i$  introduit par B. Eckmann et A. Frölicher.

La torsion de Nijenhuis peut être définie indépendamment de la notion de dérivation de l'algèbre extérieure, soit en utilisant la notion de dérivée de Lie, soit en faisant agir la 1-forme vectorielle  $J$  sur les formes scalaires. D'autre part, la dérivée de Lie de la torsion de Nijenhuis est parfaitement déterminée par celle de  $J$ .

Depuis, la torsion de Nijenhuis s'est révélée d'une utilité féconde. Elle se retrouve souvent dans la formulation des conditions d'intégralité des systèmes différentiels définis sur une variété différentiable.

Dans ce travail, j'ai essayé d'appliquer la torsion de Nijenhuis à divers problèmes : lois de conservation dans le cas  $J^2 = \gamma I$ ,  $\gamma$  étant une constante réelle ; intégrabilité des systèmes différentiels associés à une 1-forme vectorielle de rang constant. J'ai également donné une autre démonstration du théorème de Willmore portant sur le lemme de Poincaré relatif à la dérivation  $d_J$ .

Je me suis aussi proposé d'étudier la structure définie par un tenseur  $J$  vérifiant  $J^3 = -J$  et qui est une généralisation de la structure presque-complexe. La recherche d'une condition d'intégrabilité de cette structure m'a permis de retrouver la condition d'intégrabilité de la structure presque-complexe. L'étude de la structure définie par un tenseur  $J$  satisfaisant à  $J^3 = J$  se fait exactement de la même façon et, dans les deux cas, la même condition d'intégrabilité s'applique, à savoir que la torsion de Nijenhuis est nulle.

Qu'il me soit permis d'exprimer ici ma profonde gratitude à Monsieur Le Professeur J. KLEIN pour la direction qu'il m'a donnée, pour les conseils et les encouragements qu'il n'a pas cessé de me prodiguer, enfin pour le soin avec lequel il a voulu revoir ce travail.

-:-:-:-



## PREMIERE PARTIE

### LA TORSION DE NIJENHUIS

#### I. RAPPEL SUR LES DERIVATIONS DE L'ALGEBRE EXTERIEURE.

Soit  $V$  une variété différentiable réelle de dimension  $n$ . Nous désignerons par  $F$  l'algèbre des fonctions différentiables sur  $V$ ;  $T(V)$  le  $F$ -module des champs de vecteurs;  $A_p$  le  $F$ -module des formes scalaires de degré  $p$ ,  $B_p$  le  $F$ -module des formes vectorielles de degré  $p$ .

Nous avons :  $A_0 = F$ ,  $B_0 = T(V)$

Le module  $B_1$  des formes vectorielles de degré 1 sur  $V$  est aussi l'ensemble des endomorphismes de  $T(V)$ .

L'algèbre extérieure sur  $V$  est le module gradué :

$$A = \sum_{p=0}^n \oplus A_p$$

muni du produit extérieur.

Une dérivation  $D_r$  de degré  $r$  de l'algèbre extérieure  $A$  est un endomorphisme de  $A$  tel que :

$$1^\circ) D_r A_p \subset A_{p+r}$$

$$2^\circ) D_r(\omega_p \wedge \omega_q) = D_r \omega_p \wedge \omega_q + (-1)^{pr} \omega_p \wedge D_r \omega_q$$

où  $\omega_p \in A_p$ ,  $\omega_q \in A_q$ .

Nous retenons quelques propriétés fondamentales des dérivations de l'algèbre extérieure  $A$ .

- Chaque dérivation  $D_r$  est un opérateur local, i.e. si  $\omega = 0$  dans un ouvert  $U$  de  $V$ ,  $D_r \omega = 0$  dans  $U$ .

- Toute dérivation est déterminée par son action sur  $A_0 = F$  et  $A_1$ . C'est une conséquence immédiate des relations suivantes où  $x^1, x^2, \dots, x^n$  sont les coordonnées locales dans une carte quelconque  $(U, \varphi)$  de  $V$ :

$$\begin{aligned}
 \omega_p &= \frac{1}{p!} a_{i_1 \dots i_p} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} \\
 (1.1) \quad D_r \omega_p &= \frac{1}{p!} D_r a_{i_1 \dots i_p} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} \\
 &+ \frac{1}{p!} a_{i_1 \dots i_p} \sum_{j=1}^p (-1)^{(j-1)r} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge D_r dx^{i_j} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}
 \end{aligned}$$

- Une dérivation  $D_r$  est dite de type  $i_*$  si elle opère trivialement sur  $A_0$ . Il existe alors une forme vectorielle  $L \in B_{r+1}$  telle que :

$$D_r = i_L$$

$i_L$  étant la dérivation de degré  $r$  définie par :

$$\begin{aligned}
 i_L \omega_p(X_1, \dots, X_{p+r}) &= \\
 \frac{1}{(p-1)!} \frac{1}{(r+1)!} \delta_{1 \dots p+r}^{\alpha_1 \dots \alpha_{p+r}} \omega_p \left( L(X_{\alpha_1}, \dots, X_{\alpha_{r+1}}), X_{\alpha_{r+2}}, \dots, X_{\alpha_{p+r}} \right)
 \end{aligned}$$

Par sa définition même, toute dérivation de type  $i_*$  est déterminée par son action sur  $A_1$ .

En particulier, si  $L \in B_1$  :

$$i_L \omega_p(X_1, \dots, X_p) = \sum_{i=1}^p \omega_p(X_1, \dots, LX_i, \dots, X_p)$$

Si  $L \in B_0$ , i.e.  $L = X$  est un champ de vecteurs :

$$i_X \omega_p(X_2, \dots, X_p) = \omega_p(X, X_2, \dots, X_p)$$

Autrement dit,  $i_X \omega_p$  est le produit intérieur ordinaire de  $X$  par  $\omega_p$ .

Ces formules s'appliquent aussi aux formes vectorielles. Dans ce cas, si  $M \in B_m$ , et  $L \in B_l$ , nous utiliserons la notation  $M \bar{\wedge} L$  pour désigner la  $(m + l - 1)$ -forme vectorielle  $i_L M$ . Dans le cas particulier d'une 1-forme vectorielle  $J$ , nous poserons :

$$i_L J = JL$$

De plus,  $J \bar{\wedge} J$  sera désigné par  $J^2$ ,  $\underbrace{J \bar{\wedge} J \bar{\wedge} \dots \bar{\wedge} J}_k \text{ fois}$  par  $J^k$ , ce qui correspond bien aux notations habituelles des produits d'une transformation linéaire.

- Une dérivation  $D_r$  est dite de type  $d_*$  si elle commute avec la différentielle extérieure  $d$  au sens de l'algèbre graduée i.e. si :

$$D_r d = (-1)^r d D_r$$

Il existe alors une forme vectorielle  $L \in B_r$  telle que :

$$D_r = d_L$$

cette dernière dérivation étant définie par :

$$d_L = [i_L, d] = i_L d + (-1)^r d_{i_L}$$

En particulier :

$$d_I = d$$

où  $I$  est la transformation identique de  $T(V)$ .

Toute dérivation  $D_r$  de type  $d_*$  est déterminée par son action sur  $A_0$  puisque, d'après (1.1)

$$\begin{aligned} D_r \omega_p &= \frac{1}{p!} D_r a_{i_1 \dots i_p} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} \\ &+ \frac{1}{p!} a_{i_1 \dots i_p} \sum_{j=1}^p (-1)^{jr} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dD_r x^{i_j} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} \end{aligned}$$

Si  $r = 0$ , i.e.  $L$  est un champ de vecteurs  $X$ , nous retrouvons la dérivée de Lie par rapport à  $X$  :

$$d_X = \theta_X = i_X d + di_X$$

- Toute dérivation  $D_r$  se décompose de manière unique en une dérivation de type  $d_*$  et une dérivation de type  $i_*$ .

$$D_r = d_* + i_*$$

- Soient  $D_r, D_s, D_t$  trois dérivations de degré  $r, s, t$ . Il est facile de vérifier que le crochet :

$$[D_r, D_s] = D_r D_s - (-1)^{rs} D_s D_r$$

est une dérivation de degré  $r + s$ .

Ce crochet préserve le type des dérivations, i.e. si  $D_r$  et  $D_s$  sont toutes les deux de type  $i_*$  ou toutes les deux de type  $d_*$ , il en est de même de leur crochet.

Par exemple, de :

$$D_r d = (-1)^r d D_r$$

et de :

$$D_s d = (-1)^s d D_s$$

il résulte que :

$$[D_r, D_s] d = (-1)^{r+s} d [D_r, D_s]$$

D'autre part, nous avons :

$$(1.2) \quad (-1)^{rt} [D_r, [D_s, D_t]] + (-1)^{sr} [D_s, [D_t, D_r]] \\ + (-1)^{ts} [D_t, [D_r, D_s]] = 0$$

Enfin, nous utiliserons souvent la formule suivante :

$$(1.3) \quad d\omega(X, Y) = X \omega(Y) - Y \omega(X) - \omega([X, Y]) \quad \forall \omega \in A_1$$

## II. DEFINITION DE LA TORSION DE NIJENHUIS.

Considérons le crochet :

$$[d_L, d_M] = d_L d_M - (-1)^{lm} d_M d_L \quad \text{où } L \in B_l, M \in B_m.$$

C'est une dérivation de type  $d_*$  de degré  $l + m$ . Il existe donc une forme vectorielle de degré  $l + m$ , que nous désignerons par  $[L, M]$ , telle que :

$$[d_L, d_M] = d_{[L, M]}$$



En particulier  $[I, M] = 0$

Examinons le cas où  $L = M = J \in B_1$ . Le crochet  $[J, J]$  est une forme vectorielle de degré 2 définie par :

$$d_{[J, J]} = [d_J, d_J] = d_J d_J + d_J d_J = 2d_J^2$$

d'où

$$d_J^2 = d_{\frac{1}{2} [J, J]}$$

Posons :

(1.4)

$$N_J = \frac{1}{2} [J, J]$$

de sorte que :

$$d_J^2 = d_{N_J}$$

$N_J$  s'appelle la torsion de Nijenhuis de  $J$ .

Nous allons déterminer l'action de  $N_J$  sur  $T(V) \times T(V)$ .

Dans ce but, nous commençons par établir une formule sur les dérivations.

Considérons le crochet  $[i_J, d_J]$  où  $J \in B_1$ .

C'est une dérivation de degré 1 et par conséquent, elle se décompose en une dérivation de type  $d_*$  et une dérivation de type  $i_*$ .

Posons  $[i_J, d_J] = d_X + i_Y$

$d_X$  est déterminé par son action sur  $A_0$ . Soit  $f \in F$  :

$$d_X f = [i_J, d_J] f = i_J d_J f = i_J i_J df = i_{J^2} df = d_{J^2} f$$

car

$$i_J i_J df(Z) = i_J df(JZ) = df(J^2 Z) = i_{J^2} df(Z) = d_{J^2} f(Z)$$

pour tout  $Z \in T(V)$ .

Donc  $d_X = d_{J^2}$  où  $J^2 \in B_1$ .

$i_Y$  est déterminé par son action sur  $A_1$ . Soit  $df \in A_1$ .

$$\begin{aligned} i_Y df &= [i_J, d_J] df - d_{J^2} df \\ &= i_J d_J df - d_J i_J df - d_{J^2} df \\ &= -i_J dd_J f - d_J d_J f + dd_{J^2} f \\ &= -i_J dd_J f + di_J d_J f - d_J d_J f \\ &= -d_J d_J f - d_J d_J f = -d_{[J, J]} f \end{aligned}$$

car  $d_{J^2} f = i_{J^2} df = i_J i_J df = i_J d_J f$

Enfin nous obtenons :

$$(1.5) \quad [i_J, d_J] = d_{J^2} - i_{[J, J]}$$

Soit  $w \in A_1$ . La formule (1.5) donne :

$$\begin{aligned} i_{[J, J]} w &= i_{J^2} dw - di_{J^2} w - i_J d_J w + d_J i_J w \\ &= i_{J^2} dw - di_{J^2} w - i_J i_J dw + i_J di_J w + i_J di_J w - di_J i_J w \\ &= i_{J^2} dw - 2di_{J^2} w + 2i_J di_J w - i_J i_J dw \end{aligned}$$

$$\text{car } i_{J^2}\omega(X) = i_J i_J \omega(X) = \omega(J^2 X) \quad \forall X \in T(V)$$

d'où

$$\begin{aligned} \omega([J, J](X, Y)) &= d\omega(J^2 X, Y) + d\omega(X, J^2 Y) - 2di_{J^2}\omega(X, Y) + 2di_J\omega(JX, Y) \\ &\quad + 2di_J\omega(X, JY) - d\omega(J^2 X, Y) - d\omega(X, J^2 Y) - 2d\omega(JX, JY) \\ &= 2(di_J\omega(JX, Y) + di_J\omega(X, JY) - di_{J^2}\omega(X, Y) - d\omega(JX, JY)) \end{aligned}$$

Appliquons (1.3) au second membre de cette relation :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \omega([J, J](X, Y)) &= JX\omega(JY) - Y\omega(J^2 X) - \omega(J[JX, Y]) \\ &\quad + X\omega(J^2 Y) - JY\omega(JX) - \omega(J[X, JY]) \\ &\quad - X.\omega(J^2 Y) + Y\omega(J^2 X) + \omega(J^2[X, Y]) \\ &\quad - JX\omega(JY) + JY\omega(JX) + \omega([JX, JY]) \\ &= \omega([JX, JY] + J^2[X, Y] - J[JX, Y] - J[X, JY]) \end{aligned}$$

Par suite :

$$(1.6) \quad \boxed{N_J(X, Y) = [JX, JY] + J^2[X, Y] - J[JX, Y] - J[X, JY]}$$

Cherchons maintenant l'expression de la torsion de Nijenhuis en coordonnées locales :

La formule (1.6) donne :

$$(N_J)^i(X, Y) = [JX, JY]^i + J^i_{\ell} J^{\ell}_k [X, Y]^k - J^i_k [JX, Y]^k - J^i_k [X, JY]^k$$

$$\begin{aligned} \text{Or : } [JX, JY]^i &= J_j^\ell X^j \frac{\partial J_k^i}{\partial x^\ell} Y^k + J_j^\ell J_k^i \frac{\partial Y^k}{\partial x^\ell} X^j \\ &\quad - J_k^\ell \frac{\partial J_j^i}{\partial x^\ell} X^j Y^k - J_k^\ell J_j^i \frac{\partial X^j}{\partial x^\ell} Y^k \end{aligned}$$

$$[X, Y]^k = X^j \frac{\partial Y^k}{\partial x^j} - Y^j \frac{\partial X^k}{\partial x^j}$$

$$[JX, Y]^k = J_j^\ell X^j \frac{\partial Y^k}{\partial x^\ell} - Y^\ell \frac{\partial J_j^k}{\partial x^\ell} X^j - Y^\ell \frac{\partial X^j}{\partial x^\ell} J_j^k$$

$$[X, JY]^k = X^j \frac{\partial J_\ell^k}{\partial x^j} Y^\ell + X^j J_\ell^k \frac{\partial Y^\ell}{\partial x^j} - J_\ell^j Y^\ell \frac{\partial X^k}{\partial x^j}$$

d'où après simplification :

$$(N_J(X, Y))^i = \left[ J_\ell^i \left( \frac{\partial J_j^\ell}{\partial x^k} - \frac{\partial J_k^\ell}{\partial x^j} \right) + J_j^\ell \frac{\partial J_k^i}{\partial x^\ell} - J_k^\ell \frac{\partial J_j^i}{\partial x^\ell} \right] X^j Y^k$$

enfin, nous obtenons :

$$(N_J)^i_{jk} = J_\ell^i \left( \frac{\partial J_j^\ell}{\partial x^k} - \frac{\partial J_k^\ell}{\partial x^j} \right) + J_j^\ell \frac{\partial J_k^i}{\partial x^\ell} - J_k^\ell \frac{\partial J_j^i}{\partial x^\ell}$$

### III. AUTRES MANIERES DE CARACTERISER LA TORSION DE NIJENHUIS.

Soit  $X$  un champ de vecteurs,  $\theta_X$  la dérivée de Lie par rapport à  $X$ .

Nous avons les formules suivantes :

$$\begin{aligned}
 \theta_X f &= Xf & \forall f \in \mathbb{F} \\
 \theta_X Y &= [X, Y] & \forall Y \in T(V) \\
 (1.7) \quad \theta_X [Y, Z] &= [\theta_X Y, Z] + [Y, \theta_X Z] & \forall Y, Z \in T(V) \\
 \theta_X d &= d\theta_X .
 \end{aligned}$$

La dérivée de Lie de  $J$ , forme vectorielle de degré 1, est donnée par la formule de Leibniz [4] :

$$(1.8) \quad \theta_X (JY) = (\theta_X J)(Y) + J(\theta_X Y) \quad \forall Y \in T(V)$$

De même, si  $L \in B_2$  :

$$(1.9) \quad \theta_X (L(Y, Z)) = (\theta_X L)(Y, Z) + L(\theta_X Y, Z) + L(Y, \theta_X Z) .$$

Nous pouvons considérer la torsion de Nijenhuis comme l'application

$$\frac{1}{2} [J, J] : T(V) \rightarrow \text{Hom}(T(V), T(V))$$

définie par :

$$(1.10) \quad \boxed{\frac{1}{2} [J, J] (X) = \theta_{JX} J - J(\theta_X J)}$$

En effet, soit  $Y \in T(V)$

$$\frac{1}{2} ([J, J](X))(Y) = \theta_{JX} J(Y) - (J(\theta_X J))(Y)$$

Comme  $\theta_{JX} J(Y) = [JX, JY] - J[JX, Y]$  d'après (1.8)

$$\begin{aligned} (J(\theta_X J))(Y) &= J([X, JY] - J[X, Y]) \quad \text{d'après (1.8)} \\ &= J[X, JY] - J^2[X, Y] \end{aligned}$$

nous retrouvons bien la formule (1.6)

$$(1.6) \quad \left(\frac{1}{2} [J, J](X)\right)(Y) = [JX, JY] + J^2[X, Y] - J[JX, Y] - J[X, JY]$$

D'autre part :

$$\left(\frac{1}{2} [J, J](X)\right)(Y) = - \left(\frac{1}{2} [J, J](Y)\right)(X)$$

nous pouvons donc considérer la torsion de Nijenhuis comme l'application linéaire

$$\frac{1}{2} [J, J] : T(V) \wedge T(V) \rightarrow T(V)$$

définie par (1.6) .

Soit  $\omega_p \in A_p$  . Nous définissons  $J\omega_p$  par :

$$J\omega_p(X_1, X_2, \dots, X_p) = \omega_p(JX_1, JX_2, \dots, JX_p)$$

d'où

$$J(\omega_p \wedge \omega_q) = J\omega_p \wedge J\omega_q \quad \forall \omega_q \in A_q .$$

Soient d'autre part  $J^{(0)}, J^{(1)}, J^{(2)} \in \text{Hom}\left(T^*(V) \wedge T^*(V), T^*(V) \wedge T^*(V)\right)$

définis par :

$$J^{(0)} = \text{identité dans } T^*(V) \wedge T^*(V)$$

$$J^{(1)}(\omega \wedge \pi) = J\omega \wedge \pi + \omega \wedge J\pi \quad \forall \omega, \pi \in A_1 .$$

$$J^{(2)}(\omega \wedge \pi) = J\omega \wedge J\pi .$$

Autrement dit,  $J^{(2)}$  est précisément l'opérateur  $J$  sur une forme scalaire que nous venons de définir plus haut.

Soit  $X \wedge Y \in T(V) \wedge T(V)$

$$\begin{aligned} (J^{(1)}(\omega \wedge \pi))(X \wedge Y) &= J\omega \wedge \pi(X \wedge Y) + \omega \wedge J\pi(X \wedge Y) \\ &= \omega(JX)\pi(Y) - \omega(JY)\pi(X) + \omega(X)\pi(JY) - \omega(Y)\pi(JX) \\ &= (\omega(JX)\pi(Y) - \omega(Y)\pi(JX)) + (\omega(X)\pi(JY) - \omega(JY)\pi(X)) \end{aligned}$$

$$(1.11) \quad (J^{(1)}(\omega \wedge \pi))(X \wedge Y) = (\omega \wedge \pi)(JX \wedge Y) + (\omega \wedge \pi)(X \wedge JY)$$

Nous pouvons aussi considérer la torsion de Nijenhuis comme la transposée de l'application linéaire

$$\frac{1}{2}{}^t [J, J] : A_1 \rightarrow A_1 \wedge A_1$$

définie par :

$$(1.12) \quad \boxed{\frac{1}{2}{}^t [J, J](\omega) = -J^{(2)}d\omega + J^{(1)}dJ\omega + J^{(0)}dJ^2\omega} \quad \forall \omega \in A_1$$

En effet, vérifions que :

$$\langle \frac{1}{2} [J, J](X \wedge Y), \omega \rangle = \langle X \wedge Y, \frac{1}{2}{}^t [J, J](\omega) \rangle$$

Le second membre de cette relation s'écrit :

$$\left( \frac{1}{2} {}^t [J, J](\omega) \right) (X \wedge Y) = -J^{(2)} d\omega(X \wedge Y) + J^{(1)} dJ\omega(X \wedge Y) \\ - J^{(0)} dJ^2\omega(X \wedge Y)$$

Or

$$J^{(2)} d\omega(X \wedge Y) = d\omega(JX \wedge JY) \\ = JX.\omega(JY) - JY.\omega(JX) - \omega([JX, JY]) \\ \text{d'après (1.3) .}$$

$$J^{(1)} dJ\omega(X \wedge Y) = dJ\omega(JX \wedge Y) + dJ\omega(X \wedge JY) \text{ d'après (1.11)} \\ = JX\omega(JY) - Y\omega(J^2X) - \omega(J[JX, Y]) \\ + X.\omega(J^2Y) - JY\omega(JX) - \omega(J[X, JY])$$

$$J^{(0)} dJ^2\omega(X \wedge Y) = X\omega(J^2Y) - Y\omega(J^2X) - \omega(J^2[X, Y])$$

Donc

$$\left( \frac{1}{2} {}^t [J, J]\omega \right) (X \wedge Y) = \omega([JX, JY] + J^2[X, Y] - J[JX, Y] - J[X, JY])$$

C.Q.F.D.

#### IV. PROPRIETES.

Soient  $L, M \in B_1$  . Nous avons

$$[d_L, d_M] = d_{[L, M]}$$

La 2-forme vectorielle  $[L, M]$  est parfois appelée le tenseur de Nijenhuis associé à  $L$  et  $M$ .



Nous avons les propriétés suivantes :

1).  $[L, M] = [M, L]$

car  $[d_L, d_M] = d_L d_M + d_M d_L = [d_M, d_L]$

2). Le crochet  $[L, M]$  est  $R$ -linéaire par rapport à chacun de ses termes.

Soient  $L, L', M, M' \in B_1$ ,  $\omega \in A_1$  et  $X \in T(V)$

$$\begin{aligned} i_{L+L'} \omega(X) &= \omega(L+L'(X)) = \omega(LX) + \omega(L'X) \\ &= i_L \omega(X) + i_{L'} \omega(X) \end{aligned}$$

d'où  $i_{L+L'} = i_L + i_{L'}$

$$\begin{aligned} d_{L+L'} f &= i_{L+L'} df = i_L df + i_{L'} df \quad \forall f \in A_0 \\ &= d_L f + d_{L'} f \end{aligned}$$

d'où  $d_{L+L'} = d_L + d_{L'}$

$$\begin{aligned} [d_{L+L'}, d_{M+M'}] &= (d_L + d_{L'})(d_M + d_{M'}) + (d_M + d_{M'})(d_L + d_{L'}) \\ &= [d_L, d_M] + [d_L, d_{M'}] + [d_{L'}, d_M] + [d_{L'}, d_{M'}] \end{aligned}$$

d'où :

$$[L+L', M+M'] = [L, M] + [L, M'] + [L', M] + [L', M']$$

3). Dans (1.2) remplaçons  $D_r, D_s, D_t$  par  $d_L, d_M, d_N$  où  $L, M, N \in B_1$

$$[d_L, [d_M, d_N]] + [d_M, [d_N, d_L]] + [d_N, [d_L, d_M]] = 0$$

d'où, en tenant compte de la propriété 2) :

$$[L, [M, N]] + [M, [N, L]] + [N, [L, M]] = 0$$

En particulier :

$$[J, [J, J]] = 0 \quad \forall J \in B_1 .$$

4). Dérivée de Lie de la torsion de Nijenhuis.

Puisque  $N_J$  est une 2-forme vectorielle, nous pouvons appliquer (1.9) :

$$\begin{aligned} (1.13) \quad (\theta_Z N_J)(X, Y) &= \theta_Z (N_J(X, Y)) - N_J(\theta_Z X, Y) - N_J(X, \theta_Z Y) \\ &= \theta_Z([JX, JY]) + \theta_Z(J^2[X, Y]) - \theta_Z(J[JX, Y]) - \theta_Z(J[X, JY]) \\ &\quad - N_J(X, \theta_Z Y) - N_J(\theta_Z X, Y) . \end{aligned}$$

Développons les termes au second membre de cette relation en utilisant (1.7) et (1.5)

$$\begin{aligned} \theta_Z([JX, JY]) &= [\theta_Z(JX), JY] + [JX, \theta_Z(JY)] \\ &= [\theta_Z J(X), JY] + [J(\theta_Z X), JY] + [JX, \theta_Z J(X)] + [JX, J(\theta_Z Y)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta_Z(J(J[X, Y])) &= \theta_Z J(J[X, Y]) + J(\theta_Z(J[X, Y])) \\ &= \theta_Z J(J[X, Y]) + J(\theta_Z J([X, Y]) + J(\theta_Z[X, Y])) \\ &= \theta_Z J(J[X, Y]) + J(\theta_Z J([X, Y])) + J^2[\theta_Z X, Y] + J^2[X, \theta_Z Y] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \theta_Z(J[JX, Y]) &= \theta_Z J([JX, Y]) + J(\theta_Z[JX, Y]) \\
 &= \theta_Z J([JX, Y]) + J[\theta_Z(JX), Y] + J[JX, \theta_Z Y] \\
 &= \theta_Z J([JX, Y]) + J[\theta_Z J(X), Y] + J[J(\theta_Z X), Y] + J[JX, \theta_Z Y]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \theta_Z(J[X, JY]) &= \theta_Z J([X, JY]) + J(\theta_Z[X, JY]) \\
 &= \theta_Z J([X, JY]) + J[\theta_Z X, Y] + J[X, \theta_Z(JY)] \\
 &= \theta_Z J([X, JY]) + J[\theta_Z X, Y] + J[X, \theta_Z J(Y)] + J[X, J(\theta_Z Y)]
 \end{aligned}$$

$$N_J(\theta_Z X, Y) = [J(\theta_Z X), JY] + J^2[\theta_Z X, Y] - J[J(\theta_Z X), Y] - J[\theta_Z X, JY]$$

$$N_J(X, \theta_Z Y) = [JX, J(\theta_Z Y)] + J^2[X, \theta_Z Y] - J[JX, \theta_Z Y] - J[X, J(\theta_Z Y)]$$

Portant ces relations dans (1.13), nous trouvons :

$$\begin{aligned}
 (1.14) \quad (\theta_Z N_J)(X, Y) &= [\theta_Z J(X), JY] + [JX, \theta_Z J(Y)] + \theta_Z J(J[X, Y]) \\
 &\quad + J(\theta_Z J([X, Y])) - \theta_Z J([JX, Y]) - J[\theta_Z J(X), Y] \\
 &\quad - \theta_Z J([X, JY]) - J[X, \theta_Z J(Y)]
 \end{aligned}$$

La formule (1.14) montre que la dérivée de Lie de  $N_J$  se déduit de façon évidente de l'expression de  $N_J$  et que cette dérivée est parfaitement déterminée par  $\theta_Z J$ .

DEUXIEME PARTIE

LEMME DE POINCARE ET LOIS DE CONSERVATION

I. LEMME DE POINCARE RELATIF A  $d_J$  .

Rappelons la définition de l'opérateur  $J \in B_1$  qui agit sur une forme scalaire  $\omega_p \in A_p$  .

$$J\omega_p(X_1, \dots, X_p) = \omega_p(JX_1, \dots, JX_p)$$

Nous avons les propriétés suivantes :

- 1)  $J(\omega_p + \omega'_p) = J\omega_p + J\omega'_p \quad \forall \omega_p, \omega'_p \in A_p$
- 2)  $J(\omega_p \wedge \omega_q) = J\omega_p \wedge J\omega_q \quad \forall \omega_q \in A_q$
- 3)  $J\omega = 0 \Leftrightarrow \omega = 0$  si et seulement si  $J$  est régulier.

Nous poserons  $Jf = f \quad \forall f \in A_0$  .

Lemme de Poincaré relatif à  $d$ .

Soit  $\omega$  une  $p$ -forme fermée sur un voisinage  $U$  d'un point  $x$  d'une variété différentiable  $V$ . Alors, il existe une  $(p-1)$ -forme  $\pi$  définie sur un voisinage  $W$  de  $x$  telle que  $\omega = d\pi$  sur  $U \cap W$ .

Lors de la définition de la torsion de Nijenhuis, nous avons vu que :

$$d^2_J = d_{\frac{1}{2}[J, J]}$$

Par conséquent :

$$d^2_J = 0 \quad \text{si} \quad N_J = 0$$

Par analogie avec le lemme de Poincaré relatif à  $d$ , nous dirons que  $d_J$  vérifie le lemme de Poincaré si  $d_J$  possède la propriété suivante :

Lemme de Poincaré relatif à  $d_J$ .

Soit  $N_J$  la torsion de Nijenhuis supposée nulle. Si  $\omega$  est une  $p$ -forme scalaire définie sur un voisinage  $U$  de  $x$ , telle que  $d_J\omega = 0$ , alors il existe une  $(p-1)$ -forme  $\pi$  et un voisinage  $W$  de  $x$  tels que  $\omega = d_J\pi$  sur  $U \cap W$ .

Théorème de Willmore.

Soit  $N_J$  la torsion de Nijenhuis supposée nulle. Pour que  $d_J$  vérifie le lemme de Poincaré, il faut et il suffit que  $J$  soit régulier.

Condition nécessaire :

Supposons  $J$  singulier. Soit  $\omega = a_i dx^i$  une 1-forme scalaire telle que  $d_J \omega = 0$  sur un voisinage  $U$  d'un point  $x \in V$  et telle que  $a_1 \neq 0$ . Puisque  $J$  est singulier,  $\det(J) = 0$ . Nous pouvons trouver un champ de vecteurs  $e$  sur  $U$  tel que  $Je = 0$  au point  $x$ . D'après [1], il existe un système de coordonnées locales  $x^1, x^2, \dots, x^n$  dans un voisinage  $W$  de  $x$  tel que  $\frac{\partial}{\partial x^1} = e$ . Par rapport à ce système de coordonnées locales,  $J$  est représenté par une matrice dont les éléments de la première colonne sont nuls, i.e. les composantes  $J_1^i$  de  $J$  sont toutes nulles.

Supposons le lemme de Poincaré satisfait. Alors il existe sur  $W$  une fonction  $f$  telle que :

$$\omega = d_J f$$

ou

$$a_i dx^i = i_J df = \frac{\partial f}{\partial x^k} J_i^k dx^i$$

$$\text{Par suite} \quad a_1 = \frac{\partial f}{\partial x^1} J_1^1 = 0$$

Il y a contradiction.

Condition suffisante :

Considérons l'opérateur :  $D_J = Jd J^{-1}$

Il possède les propriétés suivantes :

$$D_J(\omega_p + \omega'_p) = D_J \omega_p + D_J \omega'_p$$

$$D_J(\omega_p \wedge \omega_q) = D_J \omega_p \wedge \omega_q + (-1)^p \omega_p \wedge D_J \omega_q$$

C'est une dérivation de degré 1 .

De plus :

$$D_J^2 = (JdJ^{-1}) (JdJ^{-1}) = 0$$

Nous allons montrer que  $d_J$  et  $D_J$  coïncident moyennant la condition  $N_J = 0$  . Pour cela, il suffit de démontrer que ces deux dérivations ont même action sur  $A_0$  et  $A_1$  .

Soit  $f \in A_0$

$$D_J f = JdJ^{-1}f = Jdf = i_J df = d_J f$$

puisque pour les formes de degré 1 :

$$J\omega = i_J \omega$$

Soient d'autre part  $X, Y$  deux champs de vecteurs et  $\omega \in A_1$  :

$$\begin{aligned} d_J \omega(X, Y) &= i_J d\omega(X, Y) - di_J \omega(X, Y) \\ &= d\omega(JX, Y) + d\omega(X, JY) - di_J \omega(X, Y) \\ &= JX\omega(Y) - Y\omega(JX) - \omega([JX, Y]) + X\omega(JY) \\ &\quad - JY\omega(X) - \omega([X, JY]) - X\omega(JY) + Y\omega(JX) + \omega(J[X, Y]) \end{aligned}$$

$$d_J \omega(X, Y) = JX\omega(Y) - JY\omega(X) - \omega([JX, Y] + [X, JY] - J[X, Y])$$

$$\begin{aligned} D_J \omega(X, Y) &= JdJ^{-1}\omega(X, Y) = dJ^{-1}\omega(JX, JY) \\ &= JX\omega(Y) - JY\omega(X) - \omega(J^{-1}[JX, JY]) \end{aligned}$$

$$D_J \omega(X, Y) = JX\omega(Y) - JY\omega(X) - \omega([JX, Y] + [X, JY] - J[X, Y]) \\ - \omega(J^{-1}(N_J[X, Y]))$$

car

$$[JX, JY] = N_J(X, Y) - J^2[X, Y] + J[JX, Y] + J[X, JY]$$

d'où :

$$d_J \omega(X, Y) = D_J \omega(X, Y) + \omega(J^{-1}N_J(X, Y))$$

quels que soient  $X$  et  $Y \in T(V)$ . Par suite :

$$(2.1) \quad D_J \omega = d_J \omega + i_{J^{-1}N_J} \omega$$

En définitive,  $d_J = D_J$  si  $N_J = 0$ .

Soit maintenant  $\omega$  une  $p$ -forme telle que  $d_J \omega = 0$  sur un voisinage  $U$  de  $x$ .

$$\text{Alors} \quad JdJ^{-1}\omega = 0$$

Cette condition est équivalente à :

$$dJ^{-1}\omega = 0$$

puisque  $J$  est régulier.

D'après le lemme de Poincaré relatif à  $d$ , il existe une  $(p-1)$ -forme  $\alpha$  sur un voisinage  $W$  de  $x$  telle que :

$$J^{-1}\omega = d\alpha$$



d'où :

$$\omega = Jd\alpha = JdJ^{-1} (J\alpha)$$

soit

$$\omega = d_J \pi$$

en posant  $J\alpha = \pi$ .

Remarque :

Dans le cas général où  $N_J$  n'est pas nul, la formule (2.1) donne la décomposition de  $D_J$  en une dérivation de type  $d_*$  et une dérivation de type  $i_*$  et partant cette formule s'applique à une forme  $\omega$  de degré quelconque.

## II. LOIS DE CONSERVATION DANS LE CAS $J^2 = \gamma I$ OU $\gamma$ EST UNE CONSTANTE REELLE.

Soient  $\omega$  une 1-forme scalaire et  $J$  une 1-forme vectorielle sur une variété différentiable  $V$ .

Définition.

On dit que  $\omega$  est une loi de conservation par rapport à  $J$  si les formes  $\omega$  et  $J\omega$  sont exactes.

On montre qu'une telle forme a certaines relations avec les lois de conservations en physique.

Proposition 2.1.

Si  $\omega$  est une loi de conservation par rapport à  $J$  et si  $J^2 = \gamma I$ , alors la torsion de Nijenhuis  $N_J$  est nulle.

Comme on peut toujours se ramener aux cas  $J^2 = -I, 0$  et  $I$ , nous allons démontrer la proposition dans ces cas.

Soient  $X, Y \in T(V)$ . Par hypothèse, nous avons :

$$(2.2) \quad d\omega(JX, JY) = JX\omega(JY) - JY\omega(JX) - \omega([JX, JY]) = 0$$

$$(2.3) \quad dJ\omega(JX, Y) = JX\omega(JY) - Y\omega(J^2X) - \omega(J[JX, Y]) = 0$$

$$(2.4) \quad dJ\omega(X, JY) = X\omega(J^2Y) - JY\omega(JX) - \omega(J[X, JY]) = 0$$

puisque  $d\omega(X, Y) = 0$  et  $dJ\omega(X, Y) = 0$  quels que soient  $X$  et  $Y \in T(V)$ .

Par combinaison de (2.2), (2.3), (2.4) nous obtenons :

$$(2.5) \quad \omega([JX, JY] - J[X, JY] - J[JX, Y]) + X\omega(J^2Y) - Y\omega(J^2X) = 0$$

Comme  $J^2 = -I, 0$  ou  $I$ ,

$$X\omega(J^2Y) - Y\omega(J^2X) = \omega(J^2[X, Y])$$

puisque  $d\omega(X, Y) = X\omega(Y) - Y\omega(X) - \omega([X, Y]) = 0$

Par conséquent, (2.5) devient :

$$\omega([JX, JY] + J^2[X, Y] - J[JX, Y] - J[X, JY]) = 0$$

d'où :

$$N_J = 0$$

Remarques :

1) La forme  $\omega$  est toujours supposée exacte. Si  $N_J = 0$

et si  $J^2 = I, -I, 0$ , en calculant (2.3) + (2.4) - (2.2), nous trouvons :

$$dJ\omega(JX, Y) + dJ\omega(X, JY) = 0$$

soit

$$i_J dJ\omega(X, Y) = 0 \quad \forall X, Y \in T(V)$$

Par suite

$$i_J dJ\omega = 0$$

2) Les conditions suivantes sont équivalentes :

$$\begin{cases} d\omega = 0 \\ dJ\omega = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} d\omega = 0 \\ d_J\omega = 0 \end{cases}$$

puisque  $d\omega = 0$  implique  $d_J\omega = -di_J\omega$  et que pour les formes  $\omega$  de degré 1,  $i_J\omega = J\omega$  ; ce qui permet d'énoncer :

Proposition 2.1'.

Soit  $\omega$  une 1-forme fermée :

- 1) Si  $d_J\omega = 0$  et si  $J^2 = I, -I, 0$ , alors la torsion de Nijenhuis est nulle.
- 2) Si  $J^2 = I, -I, 0$ , et si  $N_J = 0$ , alors  $i_J d_J\omega = 0$ .

TROISIEME PARTIE

SYSTEMES DIFFERENTIELS DEFINIS PAR

UN OPERATEUR LINEAIRE DE RANG CONSTANT.

I. PRELIMINAIRES.

SYSTEMES DIFFERENTIELS.

Soit  $V$  une variété différentiable réelle de dimension

Un système différentiel  $D$  de dimension  $n$  sur  $V$  est une application qui à  $x \in V$ , fait correspondre un sous-espace vectoriel  $D_x$  de dimension  $r$  de  $T_x(V)$  de sorte que, pour tout  $x \in V$ , il existe un voisinage  $U$  de  $x$  et  $r$  champs de vecteurs définis sur  $U$  tels que :

$$\{(X_1)_y, \dots, (X_r)_y\}$$

engendrent  $D_y$  pour tout  $y \in U$  ;

Une sous-variété  $W$  de dimension  $r$  de  $V$  est une variété intégrale si

$$D_x = T_x(W) \quad \text{pour tout } x \in W .$$

Un système différentiel  $D$  est dit intégrable si pour tout  $y \in V$ , il existe un système de coordonnées locales  $(x^1, x^2, \dots, x^n)$  dans un voisinage  $U$  de  $y$  tel que la variété intégrale soit définie par

$$x^{r+1} = \dots = x^n = 0$$

THEOREME DE FROBENIUS.

Pour qu'un système différentiel  $D$  de dimension  $r$  sur  $V$  soit intégrable, il faut et il suffit que pour tout  $y \in V$ , il existe une base locale  $\{X_1, \dots, X_r\}$  définie dans un voisinage  $U$  de  $y$  telle que :

$$[X_i, X_j]_x \in D_x$$

pour  $x \in U$  et pour tout  $i$  et tout  $j$  variant entre 1 et  $r$ .

Remarque :

Pour démontrer qu'un système différentiel  $D$  est intégrable, au lieu de démontrer que le crochet de deux vecteurs de la base locale appartient à  $D$ , il suffit de vérifier ce fait pour deux vecteurs quelconques de  $D$ .

Proposition 3.1.

Soit  $J$  une 1-forme vectorielle de rang constant sur  $V$ . Si la torsion de Nijenhuis est nulle, le système différentiel  $x \rightarrow J_x(T_x(V))$  est intégrable.

Soit  $X, Y \in T_x(V)$ . Par hypothèse :

$$[JX, JY] + J^2[X, Y] - J[JX, Y] - J[X, JY] = 0$$

Il en résulte que :

$$[JX, JY] = J([JX, Y] + [X, JY] - J[X, Y])$$

Donc  $[JX, JY] \in J_x(T_x(V))$  et le système différentiel considéré est intégrable d'après le théorème de Frobénius.

Proposition 3.2.

$J$  est toujours supposé de rang constant et vérifie  $J^2 = J$ . Alors le système différentiel  $x \rightarrow J_x(T_x(V))$  et son supplémentaire :  $x \rightarrow (I - J)_x(T_x(V))$  sont intégrables si et seulement si la torsion de Nijenhuis de  $J$  est nulle.

Posons  $\tilde{J} = I - J$ ,  $I$  étant la transformation identique de  $T(V)$ .

$$\text{Alors :} \quad \tilde{J}^2 = \tilde{J} \quad J\tilde{J} = \tilde{J}J = 0$$

$$[\tilde{J}, \tilde{J}] = [I-J, I-J] = [J, J]$$

Soient  $X, Y \in T_x(V)$  :

$$\begin{aligned} (3.1) \quad \frac{1}{2} \tilde{J}[J, J](X, Y) &= \tilde{J}[JX, JY] + \tilde{J}J^2[X, Y] - \tilde{J}J[JX, Y] - \tilde{J}J[X, JY] \\ &= \tilde{J}[JX, JY] \end{aligned}$$

D'après le théorème de Frobénius, le système différentiel défini par  $J$  est intégrable si et seulement si  $\tilde{J}[JX, JY] = 0$ . D'après (3.1) cette condition est équivalente à :

$$\tilde{J}[J, J] = 0$$

De même, le système différentiel défini par  $\tilde{J}$  est intégrable si et seulement si :

$$J[\tilde{J}, \tilde{J}] = J[J, J] = 0$$

Par conséquent, ces deux systèmes sont tous les deux intégrables si et seulement si  $N_J = 0$ .

Considérons un système de projecteurs supplémentaires  $P_1, P_2, \dots, P_r$ .

$$P_1 + P_2 + \dots + P_r = I$$

$$P_i^2 = P_i \quad P_i P_j = 0 \quad \text{si } i \neq j.$$

Nous désignerons par  $T_i$  le système différentiel  $x \rightarrow (P_i)_x(T_x(V))$ .

Proposition 3.3.

Les systèmes différentiels  $T_{i_1} + T_{i_2} + \dots + T_{i_k}$  où  $k = 1, 2, \dots, r-1$ ,  $i_j = 1, 2, \dots, r$  sont intégrables si et seulement si :

$$[P_i, P_j] = 0 \quad \forall i, j = 1, \dots, r$$

D'après la proposition 3.2, les systèmes  $T_i$  sont intégrables si et seulement si :

$$[P_i, P_i] = 0 \quad \text{où } i = 1, 2, \dots, r$$

Appliquant ce résultat à  $T_i + T_j$ , nous trouvons :

$$[P_i, P_j] = 0 \quad \forall i, j = 1, \dots, r!$$

## II. ETUDE DES SYSTEMES DIFFERENTIELS ASSOCIES A UN OPERATEUR LINEAIRE DE RANG CONSTANT.

Soit maintenant  $p(\lambda)$  le polynôme minimal à coefficients supposés constants sur  $V$ , d'une 1-forme vectorielle  $J$  de rang constant.

Ce polynôme peut se mettre sous la forme :

$$p(\lambda) = [p_1(\lambda)]^{n_1} [p_2(\lambda)]^{n_2} \dots [p_r(\lambda)]^{n_r}$$

où les  $p_i(\lambda)$  sont des polynômes du premier ou du second degré en  $\lambda$ , irréductibles sur les réels et premiers deux à deux.

Posons  $T_i = \{X \in T_X(V) \text{ tel que } [p_i(J_X)]^{n_i}(T_X(V))=0\}$

On démontre [5] qu'il existe des polynôme  $h_i(\lambda)$  à coefficients constants sur  $V$  tels que, si nous posons :

$$P_i = h_i(J)$$

nous obtenons

$$P_1 + P_2 + \dots + P_r = I$$

$$P_i^2 = P_i \quad P_i P_j = 0 \quad \text{si } i \neq j$$

$$I_m(P_i)_X = T_i$$



Autrement dit, les  $P_i$  forment un système de projecteurs supplémentaires de l'espace tangent en chaque point  $x$  de  $V$ . Il en résulte que :

$$T_x(V) = T_1 + \dots + T_r$$

et que chaque  $P_i$  détermine un système différentiel  $T_i$  sur la variété différentiable  $V$ .

La formule suivante est un cas particulier d'une formule plus générale établie dans [3]

$$(3.2) \quad [L, MN] + [M, NL] = [L, M] \wedge N + L[M, N] + M[N, L]$$

où  $L, M, N \in B_1$

Remplaçons dans (3.2)  $L, M, N$  par  $J, J$  et  $J^{k-1}$

$$2[J^k, J] = [J, J] \wedge J^{k-1} + 2J[J, J^{k-1}]$$

ou

$$[J^k, J] = J[J^{k-1}, J] + N_J \wedge J^{k-1}$$

de même :

$$[J^{k-1}, J] = J[J^{k-2}, J] + N_J \wedge J^{k-2}$$

$$[J^{k-2}, J] = J[J^{k-3}, J] + N_J \wedge J^{k-3}$$

---

$$[J^3, J] = J[J^2, J] + N_J \wedge J^2$$

$$[J^2, J] = J[J, J] + N_J \wedge J$$

Faisons agir  $[J^{k-1}, J], [J^{k-2}, J], \dots, [J^2, J]$  respectivement sur  $J, J^2, \dots, J^{k-2}$  par l'opération  $\bar{\pi}$  et ajoutons membre à membre les égalités ainsi obtenues :

$$(3.3) \quad [J^k, J] = 2 J^{k-1} N_J + \sum_{i=1}^{k-1} J^{i-1} (N_J \bar{\pi} J^{k-i})$$

Dans (3.2) faisons  $L = J^k, M = J, N = J^{\ell-1}$

$$[J^k, J^\ell] + [J, J^{k+\ell-1}] = [J^k, J] \bar{\pi} J^{\ell-1} + J^k [J, J^{\ell-1}] + J [J^{\ell-1}, J^k]$$

et en tenant compte de (3.3)

$$\begin{aligned} [J^k, J^\ell] &= J [J^k, J^{\ell-1}] + 2 (J^{k-1} N_J) \bar{\pi} J^{\ell-1} + \sum_{i=1}^{k-1} (J^{i-1} N_J \bar{\pi} J^{k-i}) \bar{\pi} J^{\ell-1} \\ &\quad + 2 J^{k+\ell-2} N_J + \sum_{i=1}^{\ell-2} J^{k+i-1} N_J \bar{\pi} J^{\ell-1-i} \\ &\quad - 2 J^{k+\ell-2} N_J - \sum_{i=1}^{k+\ell-2} J^{i-1} N_J \bar{\pi} J^{k+\ell-1-i} \end{aligned}$$

$$(3.4) \quad [J^k, J^\ell] = J [J^k, J^{\ell-1}] + 2 J^{k-1} N_J \bar{\pi} J^{\ell-1} + \sum_{i=1}^{k-1} (J^{i-1} N_J \bar{\pi} J^{k-i}) \bar{\pi} J^{\ell-1} - \sum_{i=1}^k J^{i-1} N_J \bar{\pi} J^{k+\ell-i-1}$$

Nous avons une relation de récurrence entre  $[J^k, J^\ell]$  et  $[J^k, J^{\ell-1}]$ . En opérant comme précédemment, nous voyons que  $[J^k, J^\ell]$  est une somme de formes vectorielles qui sont les transformées de la torsion de Nijenhuis  $N_J$  par l'opérateur  $\bar{\pi}$ . Il s'ensuit que, quels que soient les entiers positifs  $k$  et  $\ell$ ,  $[J^k, J^\ell] = 0$  dès que  $N_J = 0$ .

Reprenons les opérateurs  $P_i$ . Ce sont des polynômes en  $J$  à coefficients constants. Par suite,  $[P_i, P_j] = 0$   
 $\forall i, j = 1, 2, \dots, r$  si  $N_J = 0$ .

Nous pouvons maintenant appliquer la proposition 3.3 aux systèmes différentiels  $T_i$  et  $T_{i_1} + \dots + T_{i_k}$ ; ce qui permet d'énoncer.

Théorème 3.1.

Les systèmes différentiels  $T_i$  et  $T_{i_1} + \dots + T_{i_k}$  où  $i = 1, \dots, r$ ,  $k = 2, \dots, r-1$ ,  $i_j = 1, \dots, r$  définis par un opérateur linéaire  $J$  dont le polynôme minimal est à coefficients constants sur  $V$  sont intégrables si la torsion de Nijenhuis est nulle.

QUATRIEME PARTIE

ETUDE DE LA STRUCTURE DEFINIE

PAR UNE FORME VECTORIELLE  $J$  TELLE QUE  $J^3 = -J$  .

Dans cette partie, nous travaillerons sur des champs de vecteurs et des formes complexes. Pour cette raison nous commençons par étudier la validité de la torsion de Nijenhuis dans le cas complexe.

I. TORSION DE NIJENHUIS DANS LE CAS COMPLEXE.

Soit  $V$  une variété différentiable réelle de dimension  $n$  et  $F^{\mathbb{C}}$  la  $\mathbb{C}$ -algèbre des fonctions différentiables définies sur  $V$  à valeurs dans le corps complexe  $\mathbb{C}$  . Soit  $f \in F^{\mathbb{C}}$  , alors :

$$f = g + ih \quad \text{où} \quad g, h \in F$$

Désignons par  $T^{\mathbb{C}}$  l'ensemble des dérivations de  $F^{\mathbb{C}}$  . Il est évident que  $T^{\mathbb{C}}$  est défini par son action sur  $F$  et que chaque élément  $X$  de  $T^{\mathbb{C}}$  est de la forme :

$$X = X' + iX'' \quad \text{où} \quad X', X'' \in T(V)$$

D'une façon analogue, nous définissons une p-forme scalaire complexe (resp. vectorielle complexe) comme une application p-linéaire et alternée de  $(T^{\mathbb{C}})^p$  dans  $F^{\mathbb{C}}$  (resp.  $T^{\mathbb{C}}$ ). Le complexifié d'un objet mathématique 0 sera désigné par  $0^{\mathbb{C}}$ .

Si  $\alpha_p \in A_p^{\mathbb{C}}$ , alors :

$$\alpha_p = \omega_p^1 + i\omega_p^2 \quad \text{où } \omega_p^1, \omega_p^2 \in A_p.$$

Si nous définissons les opérations  $i_L, \wedge, [ , ]$  comme dans la première partie en remplaçant  $F$  et  $T(V)$  par  $F^{\mathbb{C}}$  et  $T^{\mathbb{C}}$ , toutes les formules que nous avons établies - en particulier, celle qui donne la torsion de Nijenhuis - restent valables.

$$(4.1) \quad N_J(X, Y) = [JX, JY] + J^2[X, Y] - J[JX, Y] - J[X, JY]$$

où  $J \in B_1^{\mathbb{C}}$ ,  $X, Y \in T^{\mathbb{C}}$ .

Soit maintenant  $J$  une 1-forme vectorielle réelle. Nous pouvons l'étendre à une forme vectorielle complexe  $J^{\mathbb{C}}$  en posant :

$$J^{\mathbb{C}}(X' + iX'') = JX' + iJX''.$$

De même, si  $L \in B_2$ , nous posons :

$$L^{\mathbb{C}}(X' + iX'', Y' + iY'') = L(X', Y') - L(X'', Y'') + i(L(X', Y'') + L(X'', Y'))$$

Ainsi, si  $J \in B_1$ ,  $J^{\mathbb{C}}$ ,  $[J^{\mathbb{C}}, J^{\mathbb{C}}]$  et  $[J, J]^{\mathbb{C}}$  sont définis et nous avons :

$$[J^{\mathbb{C}}, J^{\mathbb{C}}] = [J, J]^{\mathbb{C}}$$

$$\begin{aligned} \text{car } [J^{\mathbb{C}}, J^{\mathbb{C}}](X, Y) &= [J, J]^{\mathbb{C}}(X, Y) \\ &= [J, J](X', Y') - [J, J](X'', Y'') \\ &\quad + i \left( [J, J](X', Y'') + [J, J](X'', Y') \right) \end{aligned}$$

où nous avons posé  $X = X' + iX''$ ,  $Y = Y' + iY''$

## II. ETUDE DE LA STRUCTURE DEFINIE PAR UNE 1-FORME VECTORIELLE J VERIFIANT $J^3 = -J$ .

Supposons que  $J$  soit de rang pair constant  $r$  sur  $V$  et cherchons ses valeurs propres  $\lambda$ . Celles-ci sont données par l'équation :

$$\lambda^3 = -\lambda$$

d'où  $\lambda = 0$   $\lambda = i$  et  $\lambda = -i$

De plus, nous supposons que les racines  $\lambda = i$  et  $\lambda = -i$  ont pour ordre de multiplicité  $m = \frac{r}{2}$ .

Soient  $T_1, T_2, T_3$  les espaces propres associés aux valeurs propres  $0, i$ , et  $-i$ .  $T_1$  est aussi le noyau de  $J$ . Par suite,  $\dim T_1 = n-r$  et  $\dim T_2 = \dim T_3 = m$ . En chaque point  $x$  de  $V$ , nous avons :

$$(4.2) \quad T^{\mathbb{C}} = T_1 + T_2 + T_3 \quad (\text{somme directe})$$

Considérons les opérateurs complexes :

$$(4.3) \quad P_1 = I + J^2, \quad P_2 = \frac{1}{2} (-J^2 - iJ), \quad P_3 = \frac{1}{2} (-J^2 + iJ)$$

où  $I$  est la transformation identique de  $T^{\mathbb{C}}$ .

Nous avons :

$$P_1 + P_2 + P_3 = I$$
$$P_i^2 = P_i \quad \text{et} \quad P_i P_j = 0 \quad \text{si } i \neq j$$

De plus,  $P_i(T^{\mathbb{C}}) = T_i$  où  $i = 1, 2, 3$ .  
ce qui montre que les  $P_i$  sont les projecteurs de  $T^{\mathbb{C}}$  associés à la décomposition (4.2).

Nous désignerons encore par  $T_i$  le système différentiel  $x \rightarrow T_i(x)$ .

Définition.

Nous dirons que la structure définie par  $J$  est intégrable si les systèmes différentiels  $T_i$  et  $T_i + T_j$  où  $i, j = 1, 2, 3$ , sont intégrables.

D'après la proposition 3.3, la structure définie par  $J$  est intégrable si et seulement si :

$$[P_i, P_j] = 0 \quad \forall i, j = 1, 2, 3.$$

Considérons la 2-forme vectorielle  $H$  définie par :

$$(4.4) \quad H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 P_i [P_i, P_i]$$

$H$  s'appelle la torsion de la structure [9]

Nous avons la proposition suivante :

Proposition 4.1.

Les conditions suivantes sont équivalentes :

a)  $[P_i, P_j] = 0 \quad \forall i, j = 1, 2, 3$

b)  $H = 0$

Il est évident que a) implique b).

Réciproquement, supposons que  $\sum_{i=1}^3 P_i [P_i, P_i] = 0$  ,

ce qui implique :

(4.5)  $P_i [P_i, P_i] = 0 \quad \text{où } i = 1, 2, 3$

Reprenons la formule (3.2)

(4.6)  $[L, MN] + [M, NL] = [L, M] \wedge N + L[M, N] + M[N, L]$

et remplaçons  $L, M, N$  par  $P_i, P_i, P_j$  .

(4.7)  $0 = 2 P_i [P_i, P_j] + [P_i, P_i] \wedge P_j$

d'où en utilisant (4.5)

(4.8)  $P_i [P_i, P_j] = 0 \quad \forall i, j = 1, 2, 3$  .

Dans (4.6) faisons  $L = P_i, M = P_j, N = P_k$  :

(4.9)  $0 = P_i [P_j, P_k] + P_j [P_i, P_k] + [P_i, P_j] \wedge P_k$



En tenant compte de (4.8) , (4.9) devient :

$$P_i [P_j, P_k] = 0 \quad \forall i, j, k = 1, 2, 3 .$$

Par suite :

$$[P_i, P_j] = 0 \quad \forall i, j = 1, 2, 3 .$$

Théorème 4.1.

Pour que la structure définie par J soit intégrable, il faut et il suffit que la torsion de Nijenhuis soit nulle.

Remplaçons dans (4.4) les  $P_i$  par leurs valeurs (4.3) :

$$(4.10) \quad H = \frac{1}{8} \left( 4[J^2, J^2] + 3J^2[J^2, J^2] + 2J[J^2, J] + J^2[J, J] \right)$$

De la formule (4.3), nous tirons :

$$(4.11) \quad [J^2, J] = 2 JN_J + N_J \wedge J$$

$$(4.12) \quad [J^2, J^2] = 2 J^2 N_J + 2 JN_J \wedge J + (N_J \wedge J) \wedge J - N_J \wedge J .$$

Portons ces relations dans (4.10)

$$(4.13) \quad H = \frac{1}{8} \left( 8 J^2 N_J - 3J^2 N_J \wedge J + 4(N_J \wedge J) \wedge J + 3(J^2 N_J \wedge J) \wedge J \right)$$

D'après (4.13) ,

$$H = 0 \quad \text{si} \quad N_J = 0$$

Réciproquement, supposons que la structure soit intégrable. Alors :

$$[P_i, P_i] = 0 \quad \text{pour } i = 1, 2, 3 .$$

Soit

$$[P_1, P_1] = [J^2, J^2] = 0$$

$$[P_2, P_2] = [J^2, J^2] - 2i[J^2, J] - [J, J] = 0$$

$$[P_3, P_3] = [J^2, J^2] + 2i[J^2, J] - [J, J] = 0$$

d'où

$$N_J = 0$$

Remarques :

1) Si le rang de  $J$  est  $n$ , nous avons  $J^2 = -I$  puisque  $P_1 = 0$ .  $J$  définit alors sur la variété différentiable  $V$  une structure presque-complexe et  $n$  doit être pair. Le théorème 4.1 nous permet de retrouver la condition d'intégrabilité de cette structure.

2) L'étude de la structure définie par un tenseur  $J$  tel que  $J^3 = J$  se fait de la même façon. Si le rang de  $J$  est égal à la dimension de  $V$ ,  $J$  vérifie  $J^2 = I$  et nous avons une structure presque-produit.

Si le rang de  $J$  est  $r \neq n$ , en utilisant les projecteurs :

$$P_1 = I + J^2, \quad P_2 = \frac{1}{2} (-J^2 - J), \quad P_3 = \frac{1}{2} (-J^2 + J)$$

nous verrons que la structure est encore intégrable si et seulement si la torsion de Nijenhuis de  $J$  est nulle.

### III. TORSION DE STRUCTURE.

Nous allons chercher la relation entre les torsions de structure définies respectivement par A. G. Walker et G. Legrand dans [9] et [6].

Nous avons vu que :

$$T_X^{\mathbb{C}} = T_1 + T_2 + T_3$$

où les  $T_i$  sont des espaces propres associés à  $0$ ,  $i$  et  $-i$ .

Nous dirons qu'une base  $e_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) de  $T_X^{\mathbb{C}}$  est une base adaptée à la structure si les  $(n-r)$  premiers vecteurs de cette base appartiennent à  $T_1$ , les  $m$  suivants à  $T_2$  et les  $m$  derniers à  $T_3$ . Par rapport à une base adaptée,  $J$  est représentée par une matrice de la forme :

$$\begin{bmatrix} 0_{n-r} & & \\ & iI_m & \\ & & -iI_m \end{bmatrix}$$

où  $0_{n-r}$  est la matrice nulle d'ordre  $n-r$  et  $I_m$  est la matrice unité d'ordre  $m$ .

Soit  $\theta^i$  la base duale de la base adaptée ( $e_i$ ).

Nous avons :

$$d\theta^i = \frac{1}{2} C_{jk}^i \theta^j \wedge \theta^k$$

où

$$C_{jk}^i + C_{kj}^i = 0$$

Dans ce paragraphe, nous supposons :

$$1 \leq i, j, k, \dots, \leq n$$

$$1 \leq i_1, j_1, k_1, \dots, \leq n-r$$

$$n-r+1 \leq i_2, j_2, k_2, \dots, \leq n-r+m$$

$$n-\frac{r}{2}+1 \leq i_3, j_3, k_3, \dots, \leq n$$

$$1 \leq \alpha, \beta, \gamma, \dots, \leq 3$$

$\overline{i_\alpha}$  désignera le complémentaire de  $i_\alpha$  dans l'ensemble  $(1, 2, \dots, n)$ . Posons :

$$t_{\overline{j_\alpha} \overline{k_\alpha}}^{i_\alpha} = C_{\overline{j_\alpha} \overline{k_\alpha}}^{i_\alpha} \quad \text{et} \quad t_{jk}^i = 0 \quad \text{pour tous les autres indices.}$$

Il est facile de vérifier que  $t_{jk}^i$  est un tenseur. C'est le tenseur de torsion.

La 2-forme vectorielle  $T$  définie par :

$$T^i = \frac{1}{2} t_{jk}^i \theta^j \wedge \theta^k$$

s'appelle la forme de torsion [6].

Une forme  $\omega$  est dite de type  $(p, q, t)$  si :

$$\omega(X_1, X_2, \dots, X_{p+q+t}) = 0$$

si la suite  $X_1, \dots, X_{p+q+t}$  contient plus de  $p$  vecteurs de  $T_1$ , ou plus de  $q$  vecteurs de  $T_2$  ou plus de  $t$  vecteurs de  $T_3$ .  
Pour une telle forme, nous avons (\*) :

$$J\omega = J^2\omega = 0$$

$$i_J\omega = i(q-t)\omega$$

$$i_{J^2}\omega = -(q+t)\omega$$

Soit  $\omega$  une 1-forme scalaire quelconque. Nous nous proposons d'établir la formule suivante :

(4.14)

$$\begin{aligned} 4 i_T\omega &= 4J^2d\omega + 2i_JdJ\omega + i_JJdJ\omega - 4dJ^2\omega - 2i_{J^2}dJ^2\omega \\ &+ JdJ^2\omega + 3J^2dJ^2\omega \end{aligned}$$

Soit  $\omega^{1,0,0}$  une 1-forme de type  $(1,0,0)$ . Nous avons :

$$\omega^{1,0,0} = a_{i_1} \theta^{i_1}$$

d'où

$$d\omega^{1,0,0} = da_{i_1} \wedge \theta^{i_1} + a_{i_1} d\theta^{i_1}$$

(\*) Les formes scalaires  $J\omega$  et  $i_J\omega$  ne sont autres que les formes  $C\omega$  et  $M\omega$  définies par G. Legrand dans [6].

$d\omega^{1,0,0}$  est la somme des formes des 6 types suivants :

$$\begin{aligned} & (2, 0, 0), \quad (0, 2, 0), \quad (0, 0, 2) \\ & (1, 1, 0), \quad (1, 0, 1), \quad (0, 1, 1) \end{aligned}$$

Remplaçons dans (4.14)  $\omega$  par  $\omega^{1,0,0}$ . Les coefficients des formes de type  $(2, 0, 0)$  qui figurent aux deux membres de la formule (4.14) sont nuls. Les coefficients des formes des 5 autres types sont égaux à 4, 4, 0, 0, 4.

Il est facile de vérifier que les deux membres de la formule (4.14) sont encore égaux si nous y remplaçons  $\omega$  par des formes de type  $(0, 1, 0)$  ou  $(0, 0, 1)$ . Par conséquent, (4.14) est valable quelle que soit la 1-forme  $\omega$ .

De la formule (4.14), nous tirons :

$$\begin{aligned} -4i_T\omega(X, Y) &= -4\omega(T(X, Y)) \\ &= 4\omega([J^2X, J^2Y]) - 4\omega(J^2[X, Y]) - 2\omega(J^2[J^2X, Y]) \\ &\quad - 2\omega(J^2[X, J^2Y]) + 3\omega(J^2[J^2X, J^2Y]) + \omega(J^2[JX, JY]) \\ &\quad + 2\omega(J[JX, Y]) + 2\omega(J[X, JY]) + \omega(J[J^2X, JY]) \\ &\quad + \omega(J[JX, J^2Y]) \end{aligned}$$

D'autre part, nous savons que :

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{8} \left( 4[J^2, J^2] + 3J^2[J^2, J^2] + 2J[J^2, J] + J^2[J, J] \right) \\ &= \frac{1}{8} \left( 4[J^2, J^2] + 3J^2[J^2, J^2] + 3J^2[J, J] + J[J, J] \bar{\wedge} J \right) \end{aligned}$$

En calculant  $H(X, Y)$ , nous trouvons :

$$H(X, Y) = -T(X, Y)$$

quels que soient  $X$  et  $Y$ .

Par suite :

$$H = -T$$

ce qui montre que  $T$  s'exprime uniquement en fonction de  $J$ .

#### IV. UNE AUTRE ETUDE DE LA STRUCTURE $J^3 = -J$ .

$J$  est toujours supposé de rang constant sur la variété  $V$ . Soit  $p(\lambda)$  le polynôme minimal de  $J$  :

$$p(\lambda) = \lambda^3 + \lambda = \lambda(\lambda^2 + 1)$$

Les polynômes  $\lambda$  et  $\lambda^2 + 1$  étant premiers et irréductibles sur les réels, il existe des polynômes  $g_1$  et  $g_2$  en  $\lambda$  tels que :

$$\lambda g_1 + (\lambda^2 + 1)g_2 = 1$$

Il est évident que :  $g_1 = -\lambda$  et  $g_2 = 1$ .

Conformément à [5], nous posons :

$$h_1(\lambda) = \lambda g_1 = -\lambda^2 \quad \text{et} \quad h_2(\lambda) = (\lambda^2 + 1)g_2 = \lambda^2 + 1$$

de telle sorte que :

$$(4.15) \quad P_1 = P_1(J) = -J^2 \quad \text{et} \quad P_2 = P_2(J) = J^2 + I$$

et nous retrouvons bien les propriétés de  $P_1$  et  $P_2$  :

$$\begin{aligned} P_1 + P_2 &= I, & P_1 P_2 &= P_2 P_1 = 0 \\ P_1^2 &= P_1 & P_2^2 &= P_2 \end{aligned}$$

Il existe donc sur la variété  $V$  deux systèmes différentiels supplémentaires  $T_1$  et  $T_2$  associés à  $P_1$  et  $P_2$ .

D'autre part, nous avons :

$$J^2 P_1 = -J^4 = +J^2 = -P_1.$$

ce qui montre que  $J$  définit sur  $T_1$  une structure presque-complexe.

D'après le théorème 3.1, les systèmes différentiels  $T_1$  et  $T_2$  sont intégrables si  $N_J = 0$ . Nous allons chercher d'autres conditions d'intégrabilité de ces deux systèmes qui soient à la fois nécessaires et suffisantes.

D'après la définition de  $P_1$  et  $P_2$ , nous avons :

$$J P_1 = -J^3 = J \quad \text{et} \quad J P_2 = J + J^3 = 0$$

Il en résulte que :

$$(4.16) \quad \begin{aligned} J P_1 &= P_1 J = J & J P_2 &= P_2 J = 0 \\ J^2 P_1 &= -P_1 & J^2 P_2 &= 0 \end{aligned}$$



D'autre part, la torsion de Nijenhuis peut s'écrire :

$$N_J(X, Y) = [JX, JY] - P_1[X, Y] - J[JX, Y] - J[X, JY]$$

d'où en utilisant (4.16) :

$$P_2 N_J(X, Y) = P_2 [JX, JY]$$

$$P_2 N_J(P_1 X, P_1 Y) = P_2 [JP_1 X, JP_1 Y] = P_2 [JX, JY]$$

Comme d'après le théorème de Frobenius, le système différentiel  $T_1$  est intégrable si et seulement si  $P_2 [P_1 X, P_1 Y] = 0$  et que, quels que soient  $X$  et  $Y$  :

$$P_2 [P_1 X, P_1 Y] = 0 \Leftrightarrow P_2 [JX, JY] = 0$$

nous avons le

Théorème 4.2.

Le système différentiel  $T_1$  est intégrable si et seulement si l'une des conditions équivalentes suivantes est satisfaite :

- a)  $P_2(N_J(X, Y)) = 0$
- b)  $P_2(N_J(P_1 X, P_1 Y)) = 0$

quels que soient les champs de vecteurs  $X$  et  $Y$ .

De la même façon, nous avons :

$$\begin{aligned} - P_1 [P_2 X, P_2 Y] &= P_1 (N_J(P_2 X, P_2 Y)) + P_1 [JP_2 X, JP_2 Y] + J [JP_2 X, P_2 Y] \\ &+ J [P_2 X, JP_2 Y] \end{aligned}$$

$$P_1[P_2X, P_2Y] = -P_1(N_J(P_2X, P_2Y))$$

$$N_J(P_2X, P_2Y) = -P_1[P_2X, P_2Y]$$

ce qui permet d'énoncer le :

Théorème 4.3.

Le système différentiel  $T_2$  est intégrable si et seulement si l'une des deux conditions équivalentes suivantes est satisfaite :

a)  $N_J(P_2X, P_2Y) = 0$

b)  $P_1(N_J(P_2X, P_2Y)) = 0$

quels que soient les champs de vecteurs  $X$  et  $Y$ .

Enfin, puisque  $P_1 + P_2 = I$ , nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} N_J(X, Y) &= N_J(P_1X, P_1Y) + N_J(P_1X, P_2Y) + N_J(P_2X, P_1Y) + N_J(P_2X, P_2Y) \\ &= P_1(N_J(P_1X, P_1Y)) + P_2(N_J(P_1X, P_1Y)) + N_J(P_1X, P_2Y) \\ &\quad + N_J(P_2X, P_1Y) + N_J(P_2X, P_2Y) . \end{aligned}$$

Nous déduisons des théorèmes 4.2 et 4.3 le :

Théorème 4.4.

Les systèmes différentiels  $T_1$  et  $T_2$  sont intégrables si et seulement si :

$$N_J(X, Y) = P_1N_J(P_1X, P_1Y) + N_J(P_1X, P_2Y) + N_J(P_2X, P_1Y)$$

quels que soient les champs de vecteurs  $X$  et  $Y$ .

Considérons maintenant la torsion de la structure :

$$H = \frac{1}{2} (P_1[P_1, P_1] + P_2[P_2, P_2])$$

Par définition de  $P_1$  et  $P_2$  :

$$[P_1, P_1] = [P_2, P_2] = [-J^2, -J^2] = [J^2, J^2]$$

Par suite :

$$H = \frac{1}{2} (-J^2[J^2, J^2] + (J^2 + I)[J^2, J^2])$$

i.e.

$$H = N_{J^2}$$

Nous pouvons donc énoncer le :

Théorème 4.5.

Pour que les systèmes différentiels  $T_1$  et  $T_2$  soient intégrables, il faut et il suffit que la torsion de Nijenhuis  $N_{J^2}$  soit nulle.

Comme précédemment, nous dirons qu'une base  $(e_i)$  ( $i = 1, \dots, n$ ) est adaptée à la structure si les  $m$  premiers vecteurs de cette base appartiennent à  $T_1$  et les  $n-r$  vecteurs restants à  $T_2$ . Soit  $(\theta^i)$  la base duale de la base adaptée  $(e_i)$ .

Nous définirons encore le tenseur de structure par :

$$t_{\frac{i}{j} \frac{\alpha}{\alpha}} = C \frac{i}{j} \frac{\alpha}{\alpha} \quad \text{et} \quad t_{jk}^i = 0 \quad \text{pour tous les autres indi-}$$

ces en supposant cette fois que :

$$1 \leq \alpha \leq 2$$

$$1 \leq i_1, j_1, k_1, \dots \leq m$$

$$m+1 \leq i_2, j_2, k_2, \dots \leq n$$

La forme de torsion  $T$  a pour expression

$$T^i = \frac{1}{2} t_{jk}^i \theta^j \wedge \theta^k$$

et nous avons la formule suivante :

(4.17)

$$i_T \omega = J^2 d\omega - i_{J^2} dJ^2 \omega - dJ^2 \omega$$

où  $\omega$  est une 1-forme scalaire quelconque.

En effet,

$$\omega = \omega^{1,0} + \omega^{0,1}$$

où  $\omega^{1,0}$  et  $\omega^{0,1}$  sont des 1-formes de type (1,0) et (0,1).

D'autre part,  $d\omega^{1,0}$  est la somme de 3 formes de type (2,0), (1,1) et (0,2). Il en est de même de  $d\omega^{0,1}$ .

Nous avons :

$$(4.18) \quad \begin{array}{lll} J^2 \omega^{2,0} = \omega^{2,0} & J^2 \omega^{1,1} = 0 & J^2 \omega_+^{0,2} = 0 \\ i_{J^2} \omega^{2,0} = -2\omega^{2,0} & i_{J^2} \omega^{1,1} = -\omega^{1,1} & i_{J^2} \omega^{0,2} = 0 \end{array}$$

En remplaçant dans (4.17)  $\omega$  par  $\omega^{1,0}$  et en utilisant (4.18), nous trouverons que les coefficients des formes de type (0,2), (1,1) et (0,2) qui figurent aux deux membres de la formule (4.17) sont égaux à 0, 0, 1.

Pour une forme de type (0,1), ces coefficients sont égaux à 1, 0, 0. Ainsi la formule (4.17) est valable pour une 1-forme  $\omega$  quelconque.

Enfin, en calculant  $i_T \omega(X, Y)$  où  $X$  et  $Y$  sont deux champs de vecteurs quelconques, nous obtenons :

$$i_T \omega(X, Y) = - \omega \left( \frac{1}{2} [J^2, J^2](X, Y) \right)$$

d'où :

$$T = - N_{J^2}$$

En définitive

$$\boxed{H = N_{J^2} = - T}$$

---:---:---:---:---

B I B L I O G R A P H I E

- [1] - L. AUSLANDER - R. E. MACKENZIE - "Introduction to differential manifolds".  
Mac. Grow-Hill, New-York (1963)
- [2] - BECKMANN - A. FRÖLICHER - "Sur l'intégralité des structures presque-complexes".  
C. R. Acad. Sc. Paris (1951)  
p. 2284 - 2286.
- [3] - A. FRÖLICHER - A. NIJENHUIS - "Theory of vector-valued differential forms".  
Part. I. Proc. Kon. Ned. Akad. A, 59  
(1956) p. 338 - 359.
- [4] - S. KOBAYASHI - K. NOMIZU - "Foundations of differential geometry".  
Wiley (Interscience), New-York,  
Vol. I (1963).
- [5] - D. P. LACHAT - "Géométrie des opérateurs linéaires".  
Paris, Dunod (1966).
- [6] - G. LEGRAND - "Sur les variétés à structure de presque-produit complexe".  
C. R. Acad. Sc. Paris (1956)  
p. 335 - 337.
- [7] - J. LEHMANN - LEJEUNE - "Intégrabilité des G-structures définies par une 1-forme 0-déformable à valeurs dans le fibré tangent".  
Annales de l'Institut de Fourier.  
XVI (1966) p. 329 - 387.
- [8] - H. OSBORN - "Les lois de conservation".  
Annales de l'Institut de Fourier.  
XIV (1964) p. 71 - 81.

[9] - A. G. WALKER

- "Almost-product structures".  
Differential Geometry, Proc. of sym-  
posia in Pure Math. 3 (1961) p. 94-100

[10] - T. J. WILLMORE

- "The Poincare Lemma associated with  
certain derivations".  
Journal of the Math. Soc. London  
(1962) p. 345 - 350.

[11] - K. YANO

- "On a structure defined by a tensor  
field  $f$  of type (1,1) satisfying  
 $f^3 + f = 0$ ".  
Tensor, N. S. 14 (1963) - p. 99 - 109.

-:-:-:-:-





PROFESSEURS TITULAIRES (suite)

MM. VAILLANT F.	Zoologie et hydrobiologie
ARNAUD Paul	Chaire de Chimie M. P. C.
SENGEL P.	Chaire de Zoologie
BARNOUD F.	Chaire de Biosynthèse de la Cellulose
BRISSONNEAU P.	Physique
GAGNAIRE Didier	Chaire de Chimie Physique
Mme KOFLER L.	Botanique
DEGRANGE Charles	Zoologie
PEBAY-PEROULA J.C.	Physique
RASSAT A.	Chaire de Chimie Systématique

PROFESSEURS SANS CHAIRE

MM. GIDON P.	Géologie et Minéralogie
GIRAUD P.	Géologie
PERRET R.	Servomécanismes
Mme BARBIER M. J.	Electrochimie
Mme SOUTIF J.	Physique
DEPASSEL R.	Mécanique des Fluides
GASTINEL A.	Mathématiques Appliquées
ANGLES d'AURIAC P.	Mécanique des Fluides
DUCROS P.	Minéralogie et Cristallographie
GLENAT R.	Chimie
LACAZE A.	Thermodynamique
BARRA J.	Mathématiques Appliquées
COUMES A.	Electronique
PERRIAUX J.	Géologie et Minéralogie
ROBERT A.	Chimie papetière
BIAREZ J. P.	Mécanique Physique
BONNET G.	Electronique
CAUQUIS G.	Chimie générale
BONNETAIN L.	Chimie minérale
DEPOMMIER P.	Etude Nucléaire et Génie Atomique
HACQUES Gérard	Calcul numérique
POLOUJADOFF M.	Electrotechnique
COHEN J.	Electrotechnique

PROFESSEURS ASSOCIES

MM. NAPP-ZINN	Botanique
AMAR H.	Physique du Solide
PARTHE E.	Physique du Solide
MURAKAMI SHINGO	Mathématiques Pures

MAITRES DE CONFERENCES :

MM. DODU J.	Mécanique des Fluides
LANCIA Roland	Physique Automatique
Mme KAHANE J.	Physique
DEPORTES C.	Chimie
Mme BOUCHE L.	Mathématiques
SARROT-RAYNAUD	Géologie propédeutique
Mme BONNIER M. J.	Chimie
KAHANE A.	Physique générale
DOLIQUE J. M.	Electronique
BRIERE G.	Physique M.P.C.
DESRE P.	Chimie S.P.C.N.
LAJZEROWICZ J.	Physique M.P.C.
VALENTIN P.	Physique M.P.C.
BERTRANDIAS J.P.	Mathématiques Appliquées T.M.P.
LAURENT P.	Mathématiques Appliquées T.M.P.
CAUBET J. P.	Mathématiques Pures
PAYAN J. J.	Mathématiques
Mme BERTRANDIAS F.	Mathématiques Pures M.P.C.
LONGEQUEUE J. P.	Physique
NIVAT M.	Mathématiques Appliquées
SOHM J. C.	Electrochimie
ZADWORNY F.	Electronique
DURAND F.	Chimie physique
CARLIER G.	Biologie Végétale
AUBERT G.	Physique M.P.C.
DELPUECH J. J.	Chimie Organique
PFISTER J. C.	Physique C.P.E.M.
CHIBON P.	Biologie animale
IDELMAN S.	Physiologie animale
BLOCH D.	Electrotechnique
BRUGEL L.	I.U.T.
SIBILLE R.	I.U.T.

MAITRES DE CONFERENCES ASSOCIES :

MM. RADELLI L.	Géologie
KEYSTON J.	Thermodynamique
WAKIYAMA T.	Physique du Solide
SAWCZUK A.	Mécanique des Fluides
CHEEKE J.	Thermodynamique
YAMADA O.	Physique du Solide
WITKOWSKI A.	Physique Générale



VU,

Grenoble, le 20 novembre 1967

Le Président de la thèse,

C. CHABAUTY

VU,

Grenoble, le 25 novembre 1967

Le Doyen de la Faculté des Sciences

E. BONNIER

VU, et permis d'imprimer,

Le Recteur de l'Académie de Grenoble,

M. NIVEAU

E R R A T U M

THESE DE TONG VAN DUC

Page 9 ligne -5 :  $(N_J)_{jk}^i$

Page 22 ligne -1 et

Page 24 ligne -3 : après alors intercaler "la composée de  $w$  avec".

Page 23 ligne -3 :  $\omega N_J = 0$  au lieu de  $N_J = 0$

Page 29 ligne -8 :  $[p_i(J_x)]^{n_i} X = 0$

-:-:-:-:-