Résolution de quelques problèmes d'analyse numérique linéaire à l'aide de perturbations par des matrices antiscalaires

Marc Duc-Jacquet

▶ **To cite this version:**

Marc Duc-Jacquet. Résolution de quelques problèmes d'analyse numérique linéaire à l'aide de perturbations par des matrices antiscalaires. Modélisation et simulation. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1968. Français. NNT : . tel-00281015

HAL Id: tel-00281015
https://theses.hal.science/tel-00281015

Submitted on 20 May 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre

THESE

présentée à la Faculté des Sciences
de l'Université de Grenoble

pour obtenir
le grade de Docteur de Troisième Cycle
"MATHEMATIQUES APPLIQUEES"

par

Marc DUC-JACQUET
Licencié ès Sciences

RESOLUTION DE QUELQUES PROBLEMES D'ANALYSE NUMERIQUE LINEAIRE A L'AIDE DE PERTURBATIONS PAR DES MATRICES ANTISCALAIRES

Thèse soutenue le 24 janvier 1968, devant la Commission d'examen :

Monsieur	J. KUNTZMANN	Président
Messieurs	N. GASTINEL	Examinateur
	P.J. LAURENT	Examinateur

FACULTE DES SCIENCES

LISTE DES PROFESSEURS

DOYENS HONORAIRES :

M. MORET
M. WEIL

DOYEN :

M. BONNIER E.

PROFESSEURS TITULAIRES :

MM.	NEEL Louis	Chaire de Physique Expérimentale
	HEILMANN René	Chaire de Chimie
	KRAVTCHENKO Julien	Chaire de Mécanique Rationnelle
	CHABAUTY Claude	Chaire de calcul différentiel et intégral
	BENOIT Jean	Chaire de Radioélectricité
	CHENE Marcel	Chaire de Chimie Papetière
	WEIL Louis	Chaire de Thermodynamique
	FELICI Noël	Chaire d'Electrostatique
	KUNTZMANN Jean	Chaire de Mathématiques Appliquées
	BARBIER Reynold	Chaire de Géologie Appliquée
	SANTON Lucien	Chaire de Mécanique des Fluides
	OZENDA Paul	Chaire de Botanique
	FALLOT Maurice	Chaire de Physique Industrielle
	KOSZUL Jean-Louis	Chaire de Mathématiques M.P.C.
	GALVANI O.	Mathématiques
	MOUSSA André	Chaire de Chimie Nucléaire
	TRAYNARD Philippe	Chaire de Chimie Générale

Mme	KOFLER L.	Botanique
MM.	DEGRANGE Charles	Zoologie
	PEBAY-PEROULA J.C.	Physique
	RASSAT A.	Chaire de Chimie Systématique

PROFESSEURS SANS CHAIRE :

MM.	GIDON P.	Géologie et Minéralogie
	GIRAUD P.	Géologie
	PERRET R.	Servomécanismes
Mme	BARBIER M.J.	Electrochimie
Mme	SOUTIF J.	Physique
MM.	COHEN J.	Electrotechnique
	DEPASSEL R.	Mécanique des Fluides
	GASTINEL N.	Mathématiques Appliquées
	ANGLES-d'AURIAC P.	Mécanique des Fluides
	DUCROS P.	Minéralogie et Cristallographie
	GLENAT R.	Chimie
	LACAZE A.	Thermodynamique
	BARRA J.	Mathématiques Appliquées
	COUMES A.	Electronique
	PERRIAUX J.	Géologie et Minéralogie
	ROBERT A.	Chimie Papetière
	BIAREZ J.P.	Mécanique Physique
	BONNET G.	Electronique
	CAUQUIS G.	Chimie Générale
	BONNETAIN L.	Chimie Minérale
	DEPOMMIER P.	Etude Nucléaire et Génie Atomique
	HACQUES Gérard	Calcul Numérique
	POLOUJADOFF M.	Electrotechnique

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance, à Monsieur le Professeur KUNTZMANN, Directeur de l'Institut de Mathématiques Appliquées de l'Université de GRENOBLE, qui a bien voulu me faire l'honneur de présider le Jury,

à Monsieur le Professeur GASTINEL, qui m'a constamment guidé et encouragé dans mon travail, ce dont je le remercie vivement,

à Monsieur LAURENT, Maître de Conférences, qui a accepté de faire partie du Jury.

Je tiens aussi à remercier tous ceux qui de près ou de loin se sont occupés de la réalisation pratique de cette thèse, en particulier Mademoiselle BICAÏS, et Monsieur MOUNET.

A mon père.

INTRODUCTION

En analyse numérique linéaire, il est fréquent de rencontrer des problèmes du type suivant :

A étant une matrice sur laquelle nous avons des informations précises - par exemple la connaissance du polynôme caractéristique de A - quelles propriétés en découlent pour la matrice perturbée $A+\delta A$? - dans le cas présent que pouvons nous dire du polynôme caractéristique de la matrice $A+\delta A$?

Notre étude se limite aux perturbations par des matrices antiscalaires, c'est-à-dire par des matrices de rang un : $\delta A = uv^t \quad u,v \in \mathbb{R}^N$.
Dans cette optique, nous avons traité de façon exhaustive les problèmes suivants :

- inversion de $A+\delta A$ et élaboration complète de la méthode dite "d'annulation du rang".
- recherche du polynôme caractéristique de $A+\delta A$, et mise au point d'un algorithme général de recherche du polynôme caractéristique d'une matrice quelconque.
- détermination des valeurs propres et vecteurs propres de la matrice $A+\delta A$ (cas symétrique).

Dans chaque cas, nous donnons plusieurs applications numériques et effectuons des comparaisons avec les méthodes classiques. Les programmes sont écrits en Algol et ont été exécutés sur ordinateur IBM 7044.

CHAPITRE - I

INVERSE D'UNE MATRICE AUGMENTEE

Les résultats de ce chapitre sont des résultats connus. Cependant ils apparaissent dans la littérature souvent sans démonstration, les formules étant tout simplement vérifiées. Nous donnons donc dans ce chapitre des démonstrations simples des formules dues à SHERMAN et MORRISON.

I-1-a : Notations :

$\mathcal{M}_N(R)$ désignera l'ensemble des matrices carrées d'ordre N, à éléments réels ; x, y, u, v désigneront des vecteurs de $\mathbb{R}^N$; on désignera par A,B,... des éléments de $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$.

I-1-b : Problème :

On se propose de chercher une relation entre les solutions x et x^* des deux systèmes

$$\begin{cases} Ax = y & (1) \\ (A+uv^t)x^* = y & (2) \end{cases}$$

y vecteur donné de $\mathbb{R}^N$, $u \neq 0$, $v \neq 0$

$A \in \mathcal{M}_N(R)$

On suppose A régulière.

De (2), on tire

$$Ax^* + (v^t x^*)u = y = Ax$$

$$A(x^*-x) = -(v^t x^*)u \qquad \text{mais A régulière}$$

$$\Rightarrow \quad x^* = x + kA^{-1}u \qquad (3) \qquad \text{avec } k = -v^t x^*$$

Si on suppose x connu, il est plus intéressant de rattacher l'expression de k à x. Pour cela reportant (3) dans (2), on obtient :

$(A+uv^t)\ (x+kA^{-1}u) = y = Ax$

$u \times \left[k(1+v^tA^{-1}u) + v^tx\right] = 0 \in \mathbb{R}^N$

mais $u \neq 0$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{k(1+v^tA^{-1}u) + v^tx = 0} \qquad (4)$$

Ainsi le système (2) $(A+uv^t)x^* = y$ admettra une solution et une seule si et seulement si k est déterminé de manière unique par (4). Or ceci a lieu si et seulement s le scalaire $1+v^tA^{-1}u$ n'est pas nul. Dans ce cas, nous obtenons :

$$k = -\frac{v^tx}{1+v^tA^{-1}u} \qquad \text{et (3) devient}$$

$$\boxed{x^* = x - \frac{v^tx}{1+v^tA^{-1}u}A^{-1}u} \qquad (5)$$

Si u,v, A^{-1} et $x = A^{-1}y$ sont connus et si $1+v^tA^{-1}u \neq 0$, la relation (5) donne la solution unique du système $(A+uv^t)x^* = y$.
Reprenons (5). Elle peut s'écrire :

$$(A+uv^t)^{-1}y = A^{-1}y - \frac{A^{-1}uv^tA^{-1}}{1+v^tA^{-1}u}y$$

mais ceci est vrai pour tout $y \in \mathbb{R}^N$

$$\Rightarrow \quad \boxed{(A+uv^t)^{-1} = A^{-1} - \frac{1}{1+v^tA^{-1}u}A^{-1}uv^tA^{-1}} \qquad (6)$$

ce qui est la formule élémentaire de SHERMANN et MORRISON cf. [1] et [2] en particulier

Remarques :

(1°) On a donc l'équivalence (avec l'hypothèse A régulière)

$A+uv^t$ régulière $\overset{\rightarrow}{\leftarrow}$ $1+v^tA^{-1}u \neq 0$

(2°) si $1+v^tA^{-1}u = 0$ $A+uv^t$ est donc singulière ce qui peut se voir directement en remarquant que

$(A+uv^t)A^{-1}u = (1+v^tA^{-1}u)u = 0 \in \mathbb{R}^N$

donc $A^{-1}u \neq 0$ appartient au noyau de l'application $A+uv^t$ qui est par conséquent singulière.

I-2 Généralisation

Considérons maintenant les relations :

$$\begin{cases} Ax = y \\ (A+UV^t)x^* = y \end{cases}$$ avec $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ et A régulière et U,V matrices $(N,p) \neq 0$

Sans restreindre la généralité -nous le verrons- nous pouvons supposer que $p \leq N$

$p = \text{rang}(U) = \text{rang}(V)$.

Cherchons par analogie avec ce qui précède x^* sous la forme

$$x^* = x + \sum_{i=1}^{p} k_i A^{-1} U_{.i} \qquad (U_{.i} : \text{ième colonne de U})$$

c'est-à-dire $x^* = x + A^{-1}Uk$ avec $k = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p$

On doit avoir :

$(A+UV^t)(x+A^{-1}Uk) = y = Ax$

$\overset{\rightarrow}{\leftarrow} UV^tx + UV^tA^{-1}Uk + Uk = 0$

$\overset{\rightarrow}{\leftarrow} U\left[V^tx + (V^tA^{-1}U+I_p)k\right] = 0$

et compte-tenu de l'hypothèse U de rang p

$$\overset{\rightarrow}{\leftarrow} \quad \boxed{(I_p+V^tA^{-1}U)k + V^tx = 0 \in \mathbb{R}^p} \qquad (7)$$

relation analogue à la relation (4).

Les conclusions sont tout à fait analogues. Le système $(A+UV^t)x^* = y$ admettra une solution et une seule, c'est-à-dire $A+UV^t$ sera régulière si et seulement si le vecteur k de $\mathbb{R}^p$ est déterminé de manière unique par (7). Ceci aura lieu si et seulement si la matrice d'ordre p: $(I_p+V^tA^{-1}U)$ est régulière et dans ce cas, on aura :

$$k = -(I_p+V^tA^{-1}U)^{-1}V^tx$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x^* = x - A^{-1}U(I_p+V^tA^{-1}U)^{-1}V^tx} \qquad (8)$$

(8) peut aussi s'écrire :

$$(A+UV^t)^{-1}y = A^{-1}y - A^{-1}U(I_p+V^tA^{-1}U)^{-1}V^tA^{-1}y$$

et ceci pour tout y de $\mathbb{R}^N$.

$$\Rightarrow \quad \boxed{(A+UV^t)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}U(I_p+V^tA^{-1}U)^{-1}V^tA^{-1}} \qquad (9)$$

formule qui généralise la formule (6). cf.[3].

Remarques :

(1°) Si A est régulière, alors considérons la matrice d'ordre N+p :

$$B = \begin{pmatrix} A & -U \\ V^t & I_p \end{pmatrix}$$

On peut écrire : (décompositions R,L, et L'R')

$$B = \begin{pmatrix} A+UV^t & -U \\ 0 & I_p \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_N & 0 \\ V^t & I_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ V^t & I_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_N & -A^{-1}U \\ 0 & I_p+V^tA^{-1}U \end{pmatrix}$$

d'où :

$$\boxed{\text{dét } (B) = \text{ dét} \begin{pmatrix} A & -U \\ V^t & I_p \end{pmatrix} = \text{dét}(A) \times \text{dét}(I_p + V^t A^{-1} U) = \text{dét}(A + UV^t)} \qquad (10)$$

cette formule est vraie quel que soit p par rapport à N et avec l'hypothèse A régulière, on a l'équivalence :

$$(A+UV^t) \text{ régulière} \rightleftarrows (I_p + V^t A^{-1} U) \text{ régulière dans } \mathcal{M}_p(R)$$

de plus, on peut constater que la formule (9) donne encore l'inverse de $A+UV^t$, ce qui fait tomber la restriction U,V de rang $p \leq N$. Seule la condition $I_p + V^t A^{-1} U$ régulière importe pour la validité des formules (8) et (9).

(2°) La formule (10) nous montre que le déterminant de la matrice "augmentée" $A+UV^t$ est égal au déterminant de la matrice "bordée" $\begin{pmatrix} A & -U \\ V^t & I_p \end{pmatrix}$.

Nous verrons par la suite, que tout problème relatif à une matrice "augmentée" a son équivalent pour une matrice "bordée".

C H A P I T R E - II

METHODE DITE "D'ANNULATION DU RANG" POUR L'INVERSION DES MATRICES ET RESOLUTION DE SYSTEMES LINEAIRES

II-1 Méthode générale :

Etant donnée la matrice A régulière, d'ordre N, à inverser, la méthode consiste à décomposer A sous la forme :

$$A = A_o + \sum_{i=1}^{i=p} u_i v_i^t \qquad u_i, v_i \in \mathbb{R}^N \qquad i = 1,2,\ldots,p$$

avec A_o régulière, d'inverse A_o^{-1} connue.
Cette décomposition acquise, on pose :

$$\begin{cases} A_k = A_o + \sum_{i \leq k} u_i v_i^t & k = 1,2,\ldots p \\ A_p = A \end{cases}$$

A_o^{-1} étant connue, on a $A_1 = A_o + u_1 v_1^t$ et si $1+v_1^t A_o^{-1} u_1 \neq 0$ on peut, à l'aide de la formule (6) du chapitre I, calculer A_1^{-1} :

$$A_1^{-1} = A_o^{-1} - \frac{A_o^{-1} u_1 v_1^t A_o^{-1}}{1+v_1^t A_o^{-1} u_1}$$

connaissant A_{k-1}^{-1}, on calcule A_k^{-1} par la formule :

$$A_k^{-1} = A_{k-1}^{-1} - \frac{A_{k-1}^{-1} u_k v_k^t A_{k-1}^{-1}}{1+v_k^t A_{k-1}^{-1} u_k}$$

et on obtient ainsi $A_p^{-1} = A^{-1}$.

Cette méthode pose donc deux problèmes :

1°) décomposer A

2°) assurer la non-nullité des pivots rencontrés, pivots de la forme $1+v_i^t A_{i-1}^{-1} u_i$

Cette méthode est dite méthode "d'annulation du rang" car le rang de $(A-A_k)$ s'annule pour $k = p$; elle a été étudiée par H.S. WILF- cf. [4]. Nous allons dans ce qui suit étudier d'abord la méthode employée par WILF, puis à la lumière des problèmes qu'elle soulève, nous donnerons une méthode complète.

II-2-a : Méthode de WILF.

Soit $B \in \mathcal{M}_N(R)$, B régulière. Soit D une matrice diagonale régulière :

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_N \end{pmatrix}$$

La décomposition de WILF est la suivante :

si $A = B-D = A^{(1)}$

on construit la suite $A^{(2)}, A^{(3)}, \ldots$ par les relations $A^{(k)} = (a_{ij}^{(k)})$

avec :

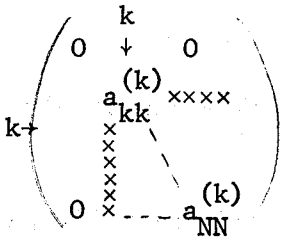
$$\boxed{a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - \frac{a_{ik-1}^{(k-1)} a_{k-1,j}^{(k-1)}}{a_{k-1,k-1}^{(k-1)}} \qquad i,j = 1,2,\ldots N} \qquad (1)$$

Si l'on admet la non-nullité des éléments $a_{k-1,k-1}^{(k-1)}$, alors on détermine une suite de matrices telle que $A^{(N+1)} = 0$. En effet :

Propriétés de la suite $A^{(k)}$

1°) $a_{ij}^{(k)} = 0 \qquad \forall\, i < k \text{ et } \forall\, j < k$

c'est-à-dire que $A^{(k)}$ a la forme $A^{(k)} =$



Le résultat est vrai pour k = 1 et se démontre pour k > 1 par récurrence.
En effet si $a_{ij}^{(k)} = 0$ pour i < k et j < k alors :

$$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - \frac{a_{ik}^{(k)} a_{kj}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} = 0$$

si i < k ou j < k ⟹ par hypothèse

et pour i = k $\quad a_{ij}^{(k+1)} = a_{kj}^{(k)} - a_{kj}^{(k)} = 0 \qquad j = 1,2,..,k$

pour j = k $a_{ik}^{(k+1)} = a_{ik}^{(k)} - a_{ik}^{(k)} = 0 \qquad i = 1,2,..,k$

2°) Il en résulte que $A^{(N+1)} = 0$

II-2-b Décomposition de B :

Reprenons la relation (1)

$$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - \frac{a_{ik}^{(k)} a_{kj}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}$$

En effectuant la sommation de k = 1 à N dans chaque membre et en simplifiant on obtient :

$$a_{ij}^{(N+1)} = a_{ij}^{(1)} - \sum_{k=1}^{N} \frac{a_{ik}^{(k)} a_{kj}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{b_{ij} - \delta_{ij} d_i = \sum_{k=1}^{N} \frac{a_{ik}^{(k)} a_{kj}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}} \qquad (2)$$

Notons :

$$u_i = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ a^{(i)}_{i+1,i}/a^{(i)}_{ii} \\ \vdots \\ a^{(i)}_{N,i}/a^{(i)}_{ii} \end{vmatrix} \in \mathbb{R}^N \qquad v_i = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a^{(i)}_{ii} \\ a^{(i)}_{i,i+1} \\ \vdots \\ a^{(i)}_{i,N} \end{vmatrix}$$

alors les relations (12) s'écrivent sous la forme matricielle

$$\boxed{B = D + \sum_{i=1}^{N} u_i \, v_i^t} \qquad (3)$$

II-2-c Inversion de B

On note alors $B_k = D + \sum_{i \leq k} u_i \, v_i^t \qquad k = 1,2,\ldots,N$

pour trouver B^{-1} à partir de D^{-1} qui est connue, WILF applique N fois la formule de SHERMAN et MORRISON en supposant que les pivots rencontrés $1+v_i^t B_{i-1}^{-1} u_i$ sont non nuls.

Bien évidemment, cette méthode particulière ne résoud rien. D'une part la méthode de décomposition n'est pas assurée puisque les $a^{(i)}_{ii}$ peuvent être nuls ; d'autre part les pivots rencontrés lors des inversions successives peuvent également s'annuler. De plus il n'est pas évident à priori qu'à une certaine décomposition d'une matrice A sous la forme $A = A_o + \sum_1^N u_i \, v_i^t$ (A et A_o régulières), il soit possible d'appliquer la méthode d'annulation du rang telle que la décrit WILF. En effet prenons l'exemple suivant :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} = A_o + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix} -1 & 3 \end{matrix}} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix} -1 & 0 \end{matrix}}$$

avec $A_o = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

A et A_o sont régulières et cependant $A_o + u_1 v_1^t = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$ est singulière.

de même $A_o + u_2 v_2^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est singulière.

Cette décomposition de A ne peut donc donner lieu à une inversion immédiate.

L'exemple ci-dessus nous montre donc qu'il ne suffit peut-être pas d'échanger l'ordre d'utilisation des matrices antiscalaires $u_i v_i^t$ pour trouver A^{-1}. Il est nécessaire

- soit de trouver une autre décomposition pour laquelle les inversions successives sont possibles (ce qui fait l'objet du paragraphe suivant)
- soit de garder cette décomposition et de décrire un algorithme différent, tenant compte des pivots nuls. (ce que nous verrons dans la fin de ce chapitre).

II-3- THEOREME D'EXISTENCE D'UN "CHEMIN"

II-3-a - Position du problème : On suppose connaître une décomposition de la matrice A régulière à inverser sous la forme $A = A_o + \sum_{i=1}^{p} u_i v_i^t$. Une telle décomposition est toujours possible. Sans retenir celle de WILF qui, elle, n'est pas toujours applicable, il suffit par exemple de prendre la décomposition -sur laquelle nous reviendrons- dite "décomposition en colonnes" :

$$A = I + \sum_{i=1}^{N} (A_{.i} - e_i) e_i^t \quad \text{où } A_{.i} \text{ est la } i^{\text{ème}} \text{ colonne de A, et } e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N$$

($i^{\text{ème}}$ composante)

On suppose donc A et A_o régulières, et nous voudrions, à la décomposition indiquée, en associer une autre : $A = A_o + \sum_{i=1}^{r(p)} u'_i v'^t_i$ telle que les inversions successives soient possibles à partir de cette décomposition. Nous allons nous placer dans un cadre un peu plus général en remarquant que les éléments qui décomposent $A-A_o$ sont des éléments du cône des matrices antiscalaires (dans $\mathbb{R}^{N^2}$)

II-3-b Notations : De par sa structure d'espace vectoriel

on sait que $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ est isomorphe à $\mathbb{R}^{N^2}$. Nous parlerons donc indifféremment de la matrice $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ ou du point A de $\mathbb{R}^{N^2}$. On appellera C le cône des matrices singulières dans $\mathbb{R}^{N^2}$, et nous nous donnons un autre cône S^* d'origine O, S^* n'étant pas nécessairement distinct de C.

Soit alors la relation: $A = A_o + \sum_{i=1}^{p} S_i$ avec $\begin{cases} A \notin C \\ A_o \notin C \\ S_i \in S^* \end{cases}$ $i = 1,2,\ldots p$

si on pose $\begin{cases} A_k = A_o + \sum_{i \le k} S_i \\ A_p = A \end{cases}$ $k = 1,2,\ldots p-1.$

Les p+1 points $A_o, A_1, \ldots A_p = A$ forment dans $\mathbb{R}^N$ un "chemin" allant de A_o à A avec la particularité suivante : $A_{i+1} - A_i \in S^*$ $i = 0,1,2,\ldots p-1$. Seulement rien ne nous assure que les A_i sont tous en dehors de C. Nous allons montrer qu'au chemin $A_o, A_1, A_2, .., A_p = A$ nous pouvons en associer un second: $A'_o = A_o$, $A'_1, A'_1, A'_2, .., A'_{r(p)} = A$ tel que:

1) $A'_i \notin C$ $\quad i = 0,1,2,\ldots r(p)$

2) $A'_{i+1} - A'_i \in S^*$ $\quad i = 0,1,\ldots,r(p)-1$

3) on connait une borne supérieure pour l'entier r(p), c'est-à-dire une borne supérieure pour la "longueur" du chemin $A'_o, A'_1, \ldots A'_{r(p)}$ joignant A_o à A.

II-3-c Démonstration :

(1) La propriété est vérifiée pour p = 1. En effet, par hypothèse A_o, $A \notin C$ donc si $A = A_o + S_1$ $\quad S_1 \in S^*$ il suffit de prendre (trivialement)

$$A'_o = A_o, \quad A = A_1 = A'_1 \quad \text{et} \quad r(p) = r(1) = p = 1$$

(2) Supposons que la propriété soit vérifiée jusqu'à l'ordre p-1 inclus, pour tout couple (A_o, A) de matrices non singulières, c'est-à-dire qu'à tout chemin de longueur p-1 au plus (joignant A_o à A) on sait en associer un autre dont tous les sommets sont en dehors de C, et de longueur maximum r(p-1)

(3) Montrons que la propriété est alors vraie jusqu'à l'ordre p inclusivement.

Pour cela, donnons-nous le chemin :

$$\begin{cases} A_o, A_1, A_2, .., A_p = A \\ A_o, A \notin C \\ A_{i+1} - A_i \in S^* \qquad i = 0,1,2,\ldots p-1 \text{ (on notera } A_{i+1} - A_i = S_{i+1}) \end{cases}$$

Considérons l'indice q : $2 \leq q \leq p$ tel que $\left\| \begin{array}{l} A_i \in C \quad 1 \leq i \leq q-1 \\ \\ A_q \notin C, \text{ et q le plus petit possible.} \end{array} \right.$

Un tel q existe puisque $A_p = A \notin C$.

Par conséquent $\begin{cases} A_1, A_2, \ldots A_{q-1} \in C \\ A_q \notin C \end{cases}$

Considérons les q polynômes suivants :

$$\begin{cases} g_1(\lambda) = \det(A_o + \lambda S_1) \\ g_2(\lambda) = \det(A_o + \lambda(S_1 + S_2)) \\ \vdots \\ g_{q-1}(\lambda) = \det[A_o + \lambda(S_1 + S_2 + \ldots + S_{q-1})] \\ \text{et } g_q(\lambda) = \det[A_o + \lambda(S_1 + S_2 + \ldots + S_{q-1}) + S_q] \end{cases}$$

puisque $A_i \in C \qquad i = 1,2,\ldots q-1$, on a

$$\det(A_i) = \det[A_o + 1(S_1 + S_2 + \ldots S_i)] = g_i(1) = 0 \qquad i = 1,2,..,q-1$$

mais aussi $g_i(0) = \det(A_o) \neq 0 \qquad i = 1,2,..,q-1$

On a aussi $g_q(1) = \det(A_q) \neq 0$ par hypothèse sur q. Par conséquent, les q polynômes en λ, $g_1, g_2, \ldots g_q$ ne sont pas identiquement nuls et on peut donc choisir un λ_o (λ_o différent des racines de chaque $g_i(\lambda)$) tel que $g_i(\lambda_o) \neq 0$ $i = 1,2,..,q$. Considérons alors la suite de points de $\mathbb{R}^{N^2}$:

$$A'_o = A_o$$
$$A'_1 = A_o + \lambda_o S_1$$
$$A'_2 = A_o + \lambda_o (S_1+S_2)$$
$$\vdots$$
$$A'_{q-1} = A_o + \lambda_o(S_1+S_2+\ldots+S_{q-1})$$
$$A'_q = A_o + \lambda_o(S_1+S_2+\ldots+S_{q-1})+S_q$$

tous ces points sont d'après ce qui précède en dehors de C et de plus ;

$$A'_{i+1}-A'_i = \lambda_o S_{i+1} \in S^* \qquad (i = 0,1,\ldots q-2) \qquad \text{(propriété du cône } S^*)$$
$$A'_q - A'_{q-1} = S_q \in S^*$$

et on peut alors écrire :

$$A = \underbrace{A_o + \lambda_o \sum_{i=1}^{q-1} S_i + S_q}_{A'_q} + (1-\lambda_o) \sum_{i=1}^{q-1} S_i + \sum_{q+1}^{p} S_i$$

c'est-à-dire $A = A'_q + (1-\lambda_o) \sum_{i=1}^{q-1} S_i + \sum_{q+1}^{p} S_i$, donc $A-A'_q$ s'exprime à l'aide d'au plus p-1 éléments de S^*, donc en vertu de l'hypothèse il existe un chemin joignant A'_q à A (A'_q et A sont régulières) :

$$\begin{cases} A'_q \\ A'_{q+1} \\ \vdots \\ A'_{q+s} = A \end{cases} \qquad \text{avec} \qquad \begin{cases} A'_{q+i} \notin C & i = 0,1,2,\ldots s \\ A'_{q+i+1} - A'_{q+i} \in S^* & i = 0,\ldots,s-1 \\ \text{et} \\ s \leq r(p-1) \end{cases}$$

mais alors, on a la suite :

$$A'_o = A_o$$
$$A'_1, A'_2, \ldots A'_q, A'_{q+1}, \ldots A'_{q+s} = A$$

qui vérifie $A'_i \neq C \qquad i = 0,\ldots,q+s$

$$\begin{cases} A'_{i+1}-A'_i \in S^* & i = 0,1,\ldots q+s-1 \\ 1 \leq q \leq p & s \leq r(p-1) \end{cases}$$

c'est-à-dire que nous avons effectivement trouvé un chemin tel que nous nous le proposions. De plus, on a :

$$r(p) \leq \mathrm{Sup}(q+s) \leq p+r(p-1)$$

mais

$$r(1) = 1 \quad \Rightarrow \quad r(p) \leq \frac{p(p+1)}{2}$$

d'où le théorème suivant :

Théorème :

Si S^* est un cône de $\mathbb{R}^{N^2}$, C le cône de $\mathbb{R}^{N^2}$ représentant les matrices singulières de $\mathcal{M}_N(R)$, alors pour tout couple A,B de matrices non singulières ($A,B \notin C$) liées par une relation du type $B = A + \sum_{i=1}^{p} S_i \quad S_i \in S^*$, alors il existe une suite $A_o, A_1, A_2, \ldots A_k$ de points distincts dans $\mathbb{R}^{N^2}$ (c'est-à-dire de matrices), tous situés en dehors de C (c'est-à-dire non singulières) et telle que

$$\begin{cases} A_o = A \\ A_k = B \\ A_{i+1} - A_i \in S^* \qquad i = 0,1,\ldots k-1 \\ \text{et } k \leq \dfrac{p(p+1)}{2} \end{cases}$$

Corollaire :

Toute matrice B régulière $\in \mathcal{M}_N(R)$ peut être inversée par la méthode d'annulation du rang à l'aide d'au plus $\frac{N(N+1)}{2}$ "pas".

Il suffit en effet de prendre la décomposition en colonnes:

$$B = I + \sum_{i=1}^{N} u_i v_i^t \quad \text{avec } u_i = B_{.i} - e_i$$

$$v_i = e_i$$

et d'appliquer le théorème au cône S^* des matrices antiscalaires de $\mathcal{M}_N(R)$

Conclusion :

La méthode d'annulation du rang est donc possible à partir de la nouvelle décomposition. Malheureusement il est fort difficile de trouver le λ_o du théorème. Nous allons voir dans le chapitre suivant ce que nous appelons "algorithme modifié de la méthode d'annulation du rang". Cet algorithme n'a plus de lien avec le théorème, mais nous l'avons découvert effectivement après le théorème ci-dessus, qui permettait d'espérer pouvoir inverser une matrice par l'application répétée de la formule de SHERMAN et MORRISON.

II-4 ALGORITHME COMPLET D'INVERSION :

La méthode que nous décrivons résoud complètement le problème de l'inversion d'une matrice par application de la formule de SHERMAN et MORRISON.

Soit :

$$A = A_o + \sum_{i=1}^{p} u_i v_i^t \qquad \text{avec} \begin{cases} A \text{ régulière} \\ A_o \text{ régulière, d'inverse } A_o^{-1} \text{ connue.} \end{cases}$$

Posons :

$$A_k = A_o + \sum_{i \le k} u_i v_i^t \qquad i = 1,2,\ldots p$$

on a, en particulier $A_p = A$

1°) si le pivot $\Delta_1 = 1 + v_1^t A_o^{-1} u_1 \neq 0$ alors (formule (6) chapitre 1)

$$A_1^{-1} = A_o^{-1} - \frac{A_o^{-1} u_1 v_1^t A_o^{-1}}{\Delta_1}$$

2°) si nous connaissons A_{k-1}^{-1} et que $\Delta_k = 1 + v_k^t A_{k-1}^{-1} u_k \neq 0$ alors

$$A_k^{-1} = A_{k-1}^{-1} - \frac{A_{k-1}^{-1} u_k v_k^t A_{k-1}^{-1}}{\Delta_k}$$

3°) mais supposons que nous rencontrions un pivot nul, c'est-à-dire que nous sommes dans la situation suivante :

$$\begin{cases} A_{k-1} \text{ est régulière et } A_{k-1}^{-1} \text{ est connue} \\ A_{k-1} + u_k v_k^t \text{ est singulière c'est-à-dire : } \Delta_k = 1 + v_k^t A_{k-1}^{-1} u_k = 0 \\ A = A_{k-1} + u_k v_k^t + \sum_{i=k+1}^{p} u_i v_i^t \text{ est régulière} \end{cases}$$

comment poursuivre pour obtenir A^{-1} ?

Nous avons vu qu'il n'est pas forcément possible de trouver j : $j \geq k+1$ tel que $A_{k-1} + u_j v_j^t$ soit régulière (cf. exemple II-2-c)
Posons $U = (u_k, u_{k+1}, \ldots u_p)$ $\quad V = (v_k, v_{k+1}, \ldots v_p)$
U et V sont des matrices (N, p-k+1)

La formule (10) du chapitre 1 page (5) donne, compte-tenu de la relation évidente $A = A_{k-1} + UV^t$:

$$\det(A) = \det(A_{k-1} + UV^t) = \det(A_{k-1}) \times \det(I_{p-k+1} + V^t A_{k-1}^{-1} U) \neq 0 \quad ;$$

par conséquent la matrice (d'ordre p-k+1) $I_{p-k+1} + V^t A_{k-1}^{-1} U$ est régulière.
En particulier sa première colonne n'est pas identiquement nulle.

$$\text{or} \quad (I_{p-k+1} + V^t A^{-1} U)_{.1} = \begin{pmatrix} 1+v_k^t A_{k-1}^{-1} u_k \\ v_{k+1}^t A_{k-1}^{-1} u_k \\ v_{k+2}^t A_{k-1}^{-1} u_k \\ \vdots \\ v_p^t A_{k-1}^{-1} u_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ v_{k+1}^t A_{k-1}^{-1} u_k \\ \vdots \\ v_p^t A_{k-1}^{-1} u_k \end{pmatrix}$$

par conséquent il existe j_o : $k < j_o \leq p$ tel que $v_{j_o}^t A_{k-1}^{-1} u_k \neq 0$
écrivons alors :

$$A = A_{k-1} + u_k v_k^t + \ldots + u_{j_o} v_{j_o}^t + \ldots + u_p v_p^t$$

$$A = A_{k-1} + u_k (v_k^t + v_{j_o}^t) + u_{k+1} v_{k+1}^t + \ldots + (u_{j_o} - u_k) v_{j_o}^t + \ldots + u_p v_p^t$$

et considérons la matrice $\tilde{A}_k = A_{k-1} + u_k (v_k^t + v_{j_o}^t)$. $\tilde{A}_k$ est régulière. En effet, on a

$$\tilde{\Delta}_k = 1 + (v_k^t + v_{j_o}^t) A_{k-1}^{-1} u_k = \Delta_k + v_{j_o}^t A_{k-1}^{-1} u_k = v_{j_o}^t A_{k-1}^{-1} u_k \neq 0$$

on pourra donc inverser $\tilde{A}_k$ par la formule

$$\tilde{A}_k^{-1} = A_{k-1}^{-1} - \frac{A_{k-1}^{-1} u_k (v_k^t + v_{j_o}^t) A_{k-1}^{-1}}{v_{j_o}^t A_{k-1}^{-1} u_k}$$

et nous aurons

$$A = \tilde{A}_k + u_{k+1} v_{k+1}^t + \ldots + u_{j_o-1} v_{j_o-1}^t + \tilde{u}_{j_o} v_{j_o}^t + u_{j_o+1} v_{j_o+1}^t + \ldots + u_p v_p^t$$

avec $\tilde{A}_k^{-1}$ connue

$$\tilde{u}_{j_o} = u_{j_o} - u_k$$

Nous avons ainsi réussi à diminuer d'une unité le nombre de matrices antiscalaires qui décomposent A, et ceci malgré la rencontre d'un pivot nul. Au bout de p étapes, nous obtiendrons A^{-1}. L'algorithme est donc un algorithme d'échange lorsqu'on rencontre un pivot nul, tout comme l'échange des lignes dans l'algorithme de Gauss.

II-5-a Adaptation de l'algorithme à la résolution du système linéaire Ax = y

Considérons A régulière avec $A = A_o + \sum_{i=1}^{p} u_i v_i^t$

A_o^{-1} est supposée connue. Posons $A_i = A_o + \sum_{k \le i} u_k v_k^t$

Considérons le tableau $T^{(o)} = (A_o^{-1}u_1, A_o^{-1}u_2, \ldots A_o^{-1}u_p, A_o^{-1}y)$ à N lignes, p+1 colonnes.

Si $\Delta_1 : 1 + v_1^t A_o^{-1} u_1 \neq 0 = 1 + v_1^t T_{.1}^{(o)}$ on pourra calculer le tableau

$$T^{(1)} = (A_o^{-1}u_1, A_1^{-1}u_2, A_1^{-1}u_3, \ldots, A_1^{-1}u_p, A_1^{-1}y)$$

il suffira de prendre

$$\boxed{T_{.j}^{(1)} = T_{.j}^{(o)} - \frac{v_1^t T_{.j}^{(o)}}{1 + v_1^t T_{.1}^{(o)}} T_{.1}^{(o)}} \qquad j = 2, \ldots, p+1$$

supposons que les k-1 premiers pivots $1+v_i^t T_{.i}^{(i-1)}$ $\quad i = 1,2,\ldots k-1$ soient $\neq 0$
alors nous pouvons construire le tableau :

$$T^{(k-1)} = (A_o^{-1}u_1,\ A_1^{-1}u_2,\ A_2^{-1}u_3,\ldots A_{k-2}^{-1}u_{k-1},\ A_{k-1}^{-1}u_k,\ A_{k-1}^{-1}u_{k+1},\ldots,A_{k-1}^{-1}y)$$

et supposons que $\Delta_k = 1+v_k^t A_{k-1}^{-1}u_k = 1+v_k^t T_{.k}^{(k-1)} = 0$ autrement dit la matrice
$A_k = A_o + \sum_{i=1}^{k} u_i v_i^t$ est singulière. Utilisons ce que nous avons vu dans le paragraphe précédent. Il existe j_o tel que $v_{j_o}^t A_{k-1}^{-1}u_k \neq 0$ c'est-à-dire $v_{j_o}^t T_{.k}^{(k-1)} \neq 0$
Considérons A écrite sous la forme :

$$A = A_{k-1} + u_k\tilde{v}_k^t + u_{k+1}v_{k+1}^t+\ldots+\tilde{u}_{j_o}v_{j_o}^t+\ldots \qquad \text{avec} \begin{cases} \tilde{v}_k^t = v_k^t+v_{j_o}^t \\ u_{j_o} = u_{j_o}-u_k \end{cases}$$

on a $\tilde{A}_k = A_{k-1} + u_k\tilde{v}_k^t$ régulière et le tableau $\tilde{T}^{(k)}$
attaché à cette nouvelle décomposition de A est le tableau :

$$\tilde{T}^{(k)} = (A_o^{-1}u_1,\ A_1^{-1}u_2,\ldots A_{k-1}^{-1}u_k,\ \tilde{A}_k^{-1}u_{k+1},\ \tilde{A}_k^{-1}u_{k+2},\ldots\tilde{A}_k^{-1}u_{j_o-1},\ \tilde{A}_k^{-1}\tilde{u}_{j_o},\ldots,\tilde{A}_k^{-1}y)$$

Or ce tableau se construit facilement à partir de $T^{(k-1)}$. En effet, on a

$$\tilde{T}_{.j}^{(k)} = \left[A_{k-1} + u_k(v_k^t+v_{j_o}^t)\right]^{-1}u_j \qquad \begin{cases} j = k+1,\ldots p \\ j \neq j_o \end{cases}$$

$$T_{.p+1}^{(k)} = \left[A_{k-1} + u_k(v_k^t+v_{j_o}^t)\right]^{-1}y$$

c'est-à-dire

$$\tilde{T}_{.j}^{(k)} = A_{k-1}^{-1}u_j - \frac{(v_k^t+v_{j_o}^t)A_{k-1}^{-1}u_j}{v_{j_o}^t A_{k-1}^{-1}u_k} A_{k-1}^{-1}u_k \qquad (j \neq j_o \quad j = k+1,\ldots p)$$

d'où :

$$\boxed{\tilde{T}_{.j}^{(k)} = T_{.j}^{(k-1)} - \frac{(v_k^t+v_{j_o}^t)T_{.j}^{(k-1)}}{v_{j_o}^t T_{.k}^{(k-1)}} T_{.k}^{(k-1)}} \qquad \begin{matrix} j = k+1,\ldots p \\ j \neq j_o \end{matrix} \qquad (4)$$

pour $j = j_o$, on a :

$$\tilde{T}^{(k)}_{.j_o} = \tilde{A}_k^{-1}(u_{j_o} - u_k)$$

$$= \left[A_{k-1} + u_k(v_k^t + v_{j_o}^t)\right]^{-1}(u_{j_o} - u_k)$$

$$= A_{k-1}^{-1}(u_{j_o} - u_k) - \frac{(v_k^t + v_{j_o}^t)A_{k-1}^{-1}(u_{j_o} - u_k)}{v_{j_o}^t A_{k-1}^{-1} u_k} A_{k-1}^{-1} u_k$$

c'est-à-dire :

$$\tilde{T}^{(k)}_{.j_o} = \left[T^{(k-1)}_{.j_o} - T^{(k-1)}_{.k}\right] - \frac{(v_k^t + v_{j_o}^t)\left[T^{(k-1)}_{.j_o} - T^{(k-1)}_{.k}\right]}{v_{j_o}^t A_{k-1}^{-1} u_k} T^{(k-1)}_{.k} \qquad (5)$$

enfin

$$\tilde{T}^{(k)}_{.p+1} = T^{(k-1)}_{.p+1} - \frac{(v_k^t + v_{j_o}^t)T^{(k-1)}_{.p+1}}{v_{j_o}^t T^{(k-1)}_{.k}} T^{(k-1)}_{.k} \qquad (6)$$

L'algorithme de calcul sera donc le suivant :

(1) initialisation du tableau T : $T = (A_o^{-1}u_1, \ldots A_o^{-1}u_p, A_o^{-1}y)$ T de dimensions (N, p+1)

(2) à l'étape k, on calcule : $\Delta_k = 1 + v_k^t T_{.k}$

si $\Delta_k \neq 0$

on effectue le produit matriciel :

$T := T \times J^{(k)}$

avec $J^{(k)}$ matrice $(p+1,\ p+1)$ définie comme suit

$$J^{(k)} = \begin{array}{c} \\ k \rightarrow \end{array} \begin{array}{c} \overset{k+1}{\downarrow} \\ \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & & & 0 \\ \hline -\rho_{k+1}^{(k)} & -\rho_{k+2}^{(k)} & \cdots & -\rho_{p+1}^{(k)} \\ \hline 0 & & & 0 \end{array}\right) \end{array} + I_{p+1} \qquad (7)$$

et $\rho_j^{(k)} = \dfrac{v_k^t T_{.j}}{1+v_k^t T_{.k}} \qquad j = k+1,\ldots p+1$

si $\Delta_k = 0$ Alors on recherche j_o tel que $v_{j_o}^t T_{.k} \neq 0$. Ceci fait, on remplace la $j_o^{\text{ième}}$ colonne de T par $T_{.j_o} - T_{.k}$ puis comme dans le 1er cas, on effectue le produit

$$T := T \times J^{(k)}$$

mais avec pour éléments de $J^{(k)}$

$$\rho_j^{(k)} = \frac{(v_k^t + v_{j_o}^t) T_{.j}}{v_{j_o}^t T_{.k}} \qquad j = k+1,\ldots p+1$$

Ces calculs se prêtent assez bien à un calcul manuel. (voir exemples suivants)

II-5-b Exemples :

(1) $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

on part de $T^{(o)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad V_1^t = (0\ 2\ 1)$ $\qquad V_2^t = (0\ 0\ 2)$ $\qquad V_3^t = (1\ 1\ -1)$

1ère étape :

$\Delta_1 = 1$

$\rho_2^{(1)} = 2$

$\rho_o^{(1)} = 1$

$\rho_4^{(1)} = 9$

$\Rightarrow \quad T^{(1)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$

↑ colonne devenant inutile

2ème étape :

$\Delta_2 = 1$

$\rho_3^{(2)} = 2$

$\rho_4^{(2)} = 2$

$\Rightarrow \quad T^{(2)} = \left(\begin{array}{ccc|c} \times & -2 & 3 & -2 \\ \times & 1 & -2 & 2 \\ \times & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$

↑ colonne devenant inutile

3ème étape :

$\Delta_3 = 1$

$\rho_4^{(3)} = -1$

$\Rightarrow \quad T^{(3)} = \left(\begin{array}{ccc|c} \times & \times & 3 & 1 \\ \times & \times & -2 & 0 \\ \times & \times & 1 & 2 \end{array}\right)$

solution cherchée $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

(2) Exemple avec pivot nul:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

on prend $T^{(o)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $V_1^t = (0\ 1\ 2)$, $V_2^t = (1\ 0\ 3)$, $V_3^t = (1\ -1\ 1)$

$\uparrow$ I $\quad\quad$ $\uparrow$ b

1ère étape :

$$\Delta_1 = 1 + (0\ 1\ 2) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$$

$\rho_2^{(1)} = 1$, $\rho_3^{(1)} = 2$, $\rho_4^{(1)} = 7$

$$\Rightarrow T^{(1)} = \begin{pmatrix} * & -1 & -2 & -5 \\ * & 1 & 0 & 3 \\ * & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

2ème étape :

$$\Delta_2 = 1 + (1\ 0\ 3) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

mais $(1\ -1\ 1) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = V_3^t T_{.2}^{(1)} = -2 \neq 0$

donc $\Delta_2 = -2$ sera le pivot utilisé, mais à condition de modifier la 3ème colonne de T en $T_{.3}^{(1)} := T_{.3}^{(1)} - T_{.2}^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

et on prend $v_2^t = v_2^t + v_3^t = (2\ -1\ 4)$

et $\rho_j^{(2)} = \dfrac{v_2^t T_{.j}^{(1)}}{\Delta_2} \Rightarrow$ $\rho_3^{(2)} = -3/2$, $\rho_4^{(2)} = 5/2$

$$\Rightarrow T^{(2)} = \begin{pmatrix} * & * & -\frac{5}{2} & -\frac{5}{2} \\ * & * & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ * & * & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

3ème étape

$$\Delta_3 = 1+(1\ -1\ 1)\begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = -1 \qquad \rho_4^{(3)} = \frac{(1\ -1\ 1)\begin{pmatrix} -5/2 \\ 1/2 \\ 2 \end{pmatrix}}{-1} = 1$$

$$\Rightarrow T^{(3)} = \begin{pmatrix} \times & \times & \times & \boxed{0} \\ \times & \times & \times & \boxed{0} \\ \times & \times & \times & \boxed{1} \end{pmatrix}$$

$$\text{solution } x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

II-5-c Expression des pivots dans la méthode d'annulation du rang et relations avec la méthode de Gauss :

Reprenons les notations :

$$A = A_o + \sum_{i=1}^{p} u_i v_i^t$$

$$A_k = A_o + \sum_{i \le k} u_i v_i^t \qquad k = 1,2,..,p$$

A l'étape k de l'algorithme nous avons à considérer les quantités :

$$\delta_{ij} + v_j^t A_{k-1}^{-1} u_i \qquad i,j = k,\ k+1,..,p$$

δ_{ij} (symbole de Kronecker)

c'est-à-dire les éléments de la matrice d'ordre p-k+1 :

$$I_{p-k+1} + \tilde{V}^t A_{k-1}^{-1} \tilde{U}$$

où $\tilde{U} = (u_k, u_{k+1}, \ldots u_p)$ $\qquad \tilde{V} = (v_k, v_{k+1}, \ldots v_p)$

Pour alléger les notations nous supposerons que k = 1 (l'étape k peut toujours être considérée comme la première étape pour un problème différent). Nous considèrerons donc la matrice d'ordre p :

$$P = I_p + V^t A_o^{-1} U$$

avec $U = (u_1, u_2, u_3 \ldots u_p)$ $\qquad$ $V = (v_1, v_2, \ldots v_p)$

Soit M la matrice d'ordre N+p suivante :

$$M = \left(\begin{array}{c|c} A_o & -U \\ \hline V^t & I_p \end{array}\right)$$

et soit $M^{(N)} = (m_{ij}^{(N)})$ la matrice obtenue à l'étape N si l'on triangularise M par l'algorithme de Gauss. On note $M_{\{I\}\{J\}}$ la sous-matrice de M obtenue en sélectionnant les lignes dont l'indice i figure dans I, et les colonnes dont l'indice j figure dans La théorie de l'élimination de Gauss conduit alors aux relations :

$$m_{ij}^{(N)} = \frac{\det(M\{1,2,3,\ldots N,i\}\{1,2\ldots N,j\})}{\det(M\{1,2\ldots N\}\{1,2\ldots N\})} \qquad i,j = N+1,\ldots,N+p$$

$$\Leftrightarrow \qquad m_{N+i,N+j}^{(N)} = \frac{\det\left(\begin{array}{c|c} A_o & -u_i \\ \hline v_j^t & \delta_{ij} \end{array}\right)}{\mathrm{Det}(A_o)} \qquad i,j = 1,2,3,..,p$$

$$\Leftrightarrow \qquad \boxed{m_{N+i,N+j}^{(N)} = \delta_{ij} + v_j^t A_o^{-1} u_i} \qquad i,j = 1,2,\ldots p$$

Conséquence

Pour calculer la matrice $B = I_p + V^t A_o^{-1} U$ il suffit de triangulariser jusqu'à l'étape N la matrice d'ordre N+p:

$$M = \left(\begin{array}{c|c} A_o & -U \\ \hline V^t & I_p \end{array}\right)$$

on obtient B qui est une sous-matrice de $M^{(N)}$

$$M^{(N)} = \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} \times & \times & \times \\ & \times & \times \\ 0 & & \times \end{matrix} & \begin{matrix} \times \ldots \times \\ \quad \times \\ \times \quad \times \end{matrix} \\ \hline 0 & B \end{array}\right)$$

Cas particulier de la décomposition en lignes :

Ce cas correspond à l'écriture de A sous la forme:

$$A = I + \sum_{i=1}^{N} e_i \, (A_{i.} - e_i^t) \qquad \text{donc} \quad \left\| \begin{array}{l} u_i = e_i \\ v_i^t = A_{i.} - e_i^t \end{array} \right. \qquad i = 1,2,..,N$$

Les e_i $\quad i = 1,2,..,N$ étant les vecteurs de base de $\mathbb{R}^N$

$A_{i.}$ $\quad i = 1,2,..,N$ les vecteurs lignes de A.

$$A_{k-1} = I + \sum_{i \leq k-1} e_i v_i^t \quad \text{s'écrit}$$

$$A_{k-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1,k-1} & \cdots & a_{1N} \\ \vdots & & & & \\ a_{k-1,1} \cdots & & a_{k-1,k-1} \cdots & & a_{k-1,N} \\ & & 1 & & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}$$

d'où $\det(A_{k-1}) = \det(A_{\{1,2,..,k-1\}\{1,2,..,k-1\}})$

$$\Rightarrow \quad 1+v_k^t A_{k-1}^{-1} e_k = \frac{\det(A_{k-1}+e_k v_k^t)}{\det(A_{k-1})} = \frac{\det(A_k)}{\det(A_{k-1})} = \frac{\det(A_{\{1,2,..,k\}\{1,2..,k\}})}{\det(A_{\{1,2..,k-1\}\{1;2,..,k-1\}})}$$

plus généralement en calculant $\det(A_{k-1}+e_i v_j^t)$ on trouve :

$$\delta_{ij} + v_j^t A_{k-1}^{-1} e_i = \frac{\det(A_{k-1}+e_i v_j^t)}{\det(A_{k-1})} = \frac{\det(A_{\{1,2,..,k-1,i\}\{1,2,..,k-1,j\}})}{\det(A_{\{1,2,..,k-1\}\{1,2,..,k-1\}})}$$

$$i,j = k, k+1,..,N$$

Or ces expressions sont précisément celles qui interviennent dans le calcul des éléments $a_{ij}^{(k-1)}$ de $A^{(k-1)}$, matrice obtenue à l'issue de la $(k-1)^{ème}$ étape de la triangularisation de A par la méthode de Gauss.

$$A^{(k-1)} = \left(\begin{array}{ccc|ccccc} \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ & \times & \times & & & & \times & \times \\ & \times & & \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & & & & & & & \\ & & \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \hline 0 & & & \multicolumn{5}{c}{\delta_{ij}+v_j^t A_{k-1}^{-1} e_i} \end{array}\right)$$

Notons C la sous-matrice d'ordre N-k+1

$$C = (c_{i-k+1,j-k+1}) = \delta_{ij}+v_j^t A_{k-1}^{-1} e_i \qquad i,j = k,\ldots,N$$

Posons $U = (e_k, e_{k+1}..,e_N)$ que l'on peut écrire: $U = \left(\begin{array}{c} 0 \\ \hline I_{N-k+1} \end{array}\right)$

$$V^t = \left(\begin{array}{c|c} A_{k.} & -e_k^t \\ \vdots & \vdots \\ A_{N.} & -e_N^t \end{array}\right) \quad \text{que l'on peut écrire:}$$

$$V^t = (A_{\{k,..,N\}\{1,2,.,k-1\}}, A_{\{k,..,N\}\{k,.,N\}} \; -I_{N-k+1})$$

ar ailleurs $A_{k-1} = \left(\begin{array}{c|c} A_{\{1,2,..,k-1\}\{1,2,..,k-1\}} & A_{\{1,2,..,k-1\}\{k,..,N\}} \\ \hline 0 & I_{N-k+1} \end{array}\right)$

'où

$$A^{-1}_{k-1} = \left(\begin{array}{c|c} A^{-1}_{\{1,2....-1\}\{1,2..,k-1\}} & -A^{-1}_{\{1,2..,k-1\}\{1,2,..,k-1\}} A_{\{1,2..,k-1\}\{k,..,N\}} \\ \hline 0 & I_{N-k+1} \end{array}\right)$$

insi C peut s'écrire :

$$C = I_{N-k+1} + V\,{}^tA^{-1}_{k-1}U$$

$$= I_{N-k+1} + (A_{\{k,..,N\}\{1,2,..,k-1\}}, A_{\{k,..,N\}\{k,..,N\}} - I_{N-k+1}) \times B$$

avec $B = \left(\begin{array}{c} -A^{-1}_{\{1,2,..,k-1\}\{1,2,..,k-1\}} A_{\{1,2,..,k-1\}\{k,..,N\}} \\ \hline I_{N-k+1} \end{array}\right)$

oit $\boxed{C = A_{\{k,k+1,...,N\}\{k,...,N\}} - A_{\{K,..,N\}\{1,2,..,k-1\}} A^{-1}_{\{1,2,..,k-1\}\{1,2,..,k-1\}} A_{\{1,2,..,k-1\}\{k,..N}}$

(8)

e qui permet d'énoncer :

Si l'on partitionne la matrice A d'ordre N de la manière suivante :

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline A_3 & A_4 \end{array}\right)$$

A_1 matrice carrée d'ordre k-1

A_4 matrice carrée d'ordre N-k+1

A_2 matrice de dimensions k-1,N-k+1

A_3 matrice de dimensions N-k+1, k-1

La matrice $A^{(k-1)}$ obtenue à l'étape k-1 de la triangularisation de A s'écrit :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ & \times & \times & \times & \cdots & \times \\ & & \times & \times & \times & \times \\ \hline 0 & & & & & \\ & & & 0 & & A_4 - A_3 A_1^{-1} A_2 \end{array}\right)$$

Cette proposition généralise la précédente.

Ces résultats que nous avons retrouvés sont indiqués en particulier par GANTMACHER dans [5] ;

La proposition précédente est d'ailleurs à la base d'une généralisation de l'algorithme de Gauss.

Soit en effet la matrice d'ordre 2N :

$$M = \left(\begin{array}{c|c} -A & +I_N \\ \hline I_N & 0 \end{array}\right)$$

si on triangularise M jusqu'à l'étape N on trouve comme sous-matrice :

$C = 0 + IA^{-1}I = A^{-1}$

De même en considérant la matrice rectangulaire (2N,N+1)

$$M = \left(\begin{array}{c|c} -A & y \\ \hline I_N & 0 \end{array}\right)$$

on obtient la sous-matrice (N,1)

$C = 0 + I_N A^{-1} y = A^{-1} y$

(solution du système linéaire Ax = y)

Applications numériques du chapitre II :

Dans la pratique, pour inverser une matrice A ou résoudre un système linéaire $Ax = y$, deux cas sont à envisager :

1er cas On connait A_o et A_o^{-1} avec

$A = A_o + UV^t$ U,V matrices(N,p) ; p << N

On procède alors comme suit :

a) on inverse la matrice d'ordre p : $I_p + V^t A_o^{-1} U$

ou bien on résoud le système $(I_p + V^t A_o^{-1} U)k = -V^t A_o^{-1} y$

b) on applique la formule (9) chapitre I

ou bien la formule (8) chapitre I.

Nous avons écrit deux procédures relatives à ces cas :
RESOLSYSLINGEN et INVGEN (voir résultats obtenus ci-après)

2ème cas On ne connait pas de décomposition particulière de A.
Dans ce cas, on considère soit la décomposition en lignes, soit la décomposition en colonnes. Nous avons donc écrit deux procédures relatives à la résolution d'un système linéaire (procédures RESOLSYSLIN et RESOLANURANG)

a) procédure RESOLSYSLIN, pour une décomposition en lignes (même nombre d'opérations que par la méthode de Gauss).

$$A = I + \sum_{i=1}^{N} e_i (A_{i.} - e_i^t)$$

b) procédure RESOLANURANG, pour une décomposition en colonnes.

$$A = I + \sum_{i=1}^{N} (A_{.i} - e_i) e_i^t$$

Cette seconde procédure donne lieu à des écritures beaucoup plus condensées que la première pour des raisons que nous verrons dans le chapitre consacré aux erreurs de calculs.

```
PROCEDURE RESOLSYSLINGEN(U,V,Y,P,N,IMPOSSIBLE) ;
TABLEAU Y,U,V;
ENTIER N,P;
ETIQUETTE IMPOSSIBLE;

COMMENTAIRE CETTE PROCEDURE RESOUD LE SYSTEME LINEAIRE
 DE MATRICE DE PREMIER MEMBRE I+U*VT, ET DE SECOND
MEMBRE LE VECTEUR Y. U ET V SONT DES MATRICES N*P.
A LA SORTIE DU CORPS DE PROCEDURE, LA SOLUTION SE
TROUVE DANS Y[1:N] QUI CONTIENT INITIALEMENT
LE SECOND MEMBRE. SI LE SYSTEME N'A PAS UNE
SOLUTION UNIQUE ON SORT PAR L'ETIQUETTE IMPOSSIBLE;

DEBUT
        ENTIER I,J,J0,K;
        TABLEAU S[1:P+1];
        REEL R;
        POUR K:=1 PAS 1 JUSQUA P FAIRE
        DEBUT
                S[K]:=1;
                POUR I:=1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
                S[K]:=S[K]+V[K,I]*U[I,K];
                SI ABS(S[K]) < Δ-20 ALORS ALLERA  ECHANGE;
NORMAL:         POUR J:=K+1 PAS 1 JUSQUA P FAIRE
                DEBUT
                        S[J]:=0;
                        POUR I:=1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
                        S[J]:=S[J]+V[K,I]*U[I,J];

                FIN ;

                S[P+1]:=0;
                POUR I:=1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
                S[P+1]:=S[P+1]+V[K,I]*Y[I];
                POUR I:=1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
                DEBUT
                        U[I,K]:=U[I,K]/S[K];
                        POUR J:=K+1 PAS 1 JUSQUA P FAIRE
                        U[I,J]:=U[I,J]-U[I,K]*S[J];
                        Y[I]:=Y[I]-S[P+1]*U[I,K];
                FIN ;

                ALLERA  SUITE;
ECHANGE:        J0:=K+1;
BIDON:          SI J0=P+1 ALORS ALLERA  IMPOSSIBLE;
                S[K]:=0;
                POUR I:=1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
                S[K]:=S[K]+V[J0,I]*U[I,K];
                SI ABS(S[K]) < Δ-20 ALORS
                DEBUT
                        J0:=J0+1;
                        ALLERA  BIDON;
                FIN ;
```

```
                POUR I:=1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
                DEBUT
                        V[K,I]:=V[K,I]+V[J0,I];
                        U[J0,I]:=U[J0,I]-U[K,I];
                        POUR I:=1 PAS 1 JUSQUA P FAIRE
                        ALLERA  NORMAL;
SUITE:
                FIN ;

        FIN RESOL ;
```

Exemples d'utilisation :

(1) Résolution du système linéaire Ax = y

avec $A = \begin{pmatrix} 12 & -19 & 36 & -3 & 0 & 10 \\ 4 & -7 & 12 & 3 & 0 & 2 \\ -4 & 12 & -7 & -18 & 0 & 4 \\ -6 & 18 & -12 & -26 & 0 & 6 \\ -8 & 24 & -16 & -36 & 1 & 8 \\ -10 & 30 & -20 & -45 & 0 & 11 \end{pmatrix}$ $y = \begin{pmatrix} 12 \\ +4 \\ -4 \\ -6 \\ -8 \\ -10 \end{pmatrix}$

la solution exacte est donc $x = e_1$

Nous avons résolu ce système par Gresolsysline, puis par Resolsyslingen en utilisant la décomposition :

$$A = I_6 + u_1 v_1^t + u_2 v_2^t \quad \text{avec } (u_1,u_2) = \begin{pmatrix} 5,2 \\ 1,1 \\ 2,-2 \\ 3,-3 \\ 4,-4 \\ 5,-5 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } (v_1,v_2) = \begin{pmatrix} 1,3 \\ -1,-7 \\ 4,8 \\ -3,6 \\ 0,0 \\ 2,0 \end{pmatrix}$$

Solution obtenue par Resolsyslingen		Solution obtenue par Gresolsyslin	
1,0000005		1,0000005	
0,11920926	10^{-6}	0,16987330	10^{-6}
-0,29802322	10^{-7}	-0,35762792	10^{-7}
-0,11920929	10^{-6}	-0,89406935	10^{-8}
-0,59604644	10^{-7}	-0,71525595	10^{-7}
-0,11920929	10^{-6}	-0,13411049	10^{-6}
$\varphi_\infty(x-x^*) \# 12$	10^{-8}	$\varphi_\infty(x-x^*) \# 17$	10^{-8}

(2) Exemple montrant l'intérêt particulier de Resolsyslingen dans le cas ou p << N.

Résolution de $Ax = y$ avec $a_{ij} = \delta_{ij+i+j}$ $\quad y_i = a_{i1}$

On a $A = I + uv^t + vu^t$ avec $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ N \end{pmatrix}$ $\quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

Bien qu'il n'y ait pas lieu de comparer une méthode particulière avec une méthode générale (Gauss), il est intéressant de voir le gain de temps obtenu pour résoudre le système en tenant compte justement de la structure de A.

Résultats :

N = 50

Solution théorique $x = e_1$	solution par Resolsyslingen obtenu en 0,4 seconde avec $\varphi_\infty(x-x^*) \# 10^{-6}$	solution par Gresolsysli obtenue en 28 secondes a $\varphi_\infty(x-x^*) \# 0,3\ 10^{-6}$

N = 100

Solution théorique $x = e_1$

solution par Resolsyslingen obtenue en 0,6 seconde	solution par Gresolsyslin obtenue en 225 secondes soit 3 minutes 45 secondes

N = 1000	se fait encore facilement car l'encombrement mémoire n'est pas très conséquent avec Resolsyslingen. temps = 6,2 secondes	impossibilité de stockage des données avec Gresolsyslin

Les temps indiqués ne comprennent que l'exécution proprement dite du programme.

Remarque : Ces comparaisons ont une signification toute relative puisque, nous comparons une procédure générale "Gresolsyslin" à une procédure particulière Resolsyslingen

```
PROCEDURE RESOLSYSLIN(A,Y,N,IMPOSSIBLE) ;
TABLEAU A,Y;
ENTIER N;
ETIQUETTE IMPOSSIBLE;

COMMENTAIRE ON RESOUD LE SYSTEME A*X=Y
AVEC A MATRICE D'ORDRE N. ON RANGE DANS
A[1:N,1:N+1] LA MATRICE(A-1,Y]
A LA SORTIE DU CORPS DE PROCEDURE ON
OBTIENT LA SOLUTION EN LIEU ET PLACE
DE Y. SI A EST SINGULIERE ON SE REND
A L' ETIQUETTE IMPOSSIBLE;

DEBUT
      ENTIER I,J,J0,K;
      TABLEAU S[1:N+1];
      REEL R;
      POUR K:=1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
      DEBUT
            S[K]:=A[K,K];
            POUR I:=1 PAS 1 JUSQUA K-1 FAIRE
            S[K]:=S[K]+A[K,I]*A[I,K];
            SI ABS(S[K]) < Δ-5 ALORS ALLERA
            ECHANGE;
NORMAL:     POUR J:=K+1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
            DEBUT
                  S[J]:=A[K,J];
                  POUR I:=1 PAS 1 JUSQUA K-1 FAIRE
                  S[J]:=S[J]+A[K,I]*A[I,J];

            FIN ;

            S[N+1]:=-Y[K];
            POUR I:=1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
            S[N+1]:=S[N+1]+A[K,I]*Y[I];
            POUR I:=1 PAS 1 JUSQUA K-1 FAIRE
            DEBUT
                  A[I,K]:=A[I,K]/S[K];
                  POUR J:=K+1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
                  A[I,J]:=A[I,J]-A[I,K]*S[J];
                  Y[I]:=Y[I]-S[N+1]*A[I,K];
            FIN ;

            A[K,K]:=1/S[K];
            Y[K]:=Y[K]-S[N+1]*A[K,K];
            POUR I:=K+1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
            A[K,I]:=-S[I]*A[K,K];
            ALLERA  SUITE;
ECHANGE:    J0:=K+1;
BIDON:      SI J0=N+1 ALORS ALLERA  IMPOSSIBLE;
            S[K]:=A[J0,K];
            POUR I:=1 PAS 1 JUSQUA K-1 FAIRE
            S[K]:=S[K]+A[J0,I]*A[I,K];

            SI ABS(S[K]) < Δ-5 ALORS
```

```
                DEBUT
                        J0:=J0+1;
                        ALLERA  BIDON;
                FIN ;

                POUR I:=1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
                DEBUT
                        R:=A[K,I];
                        A[K,I]:=A[J0,I];
                        A[J0,I]:=R;
                FIN ;

                POUR I:=1 PAS 1 JUSQUA K-1 FAIRE
                Y[I]:=Y[I]+(Y[J0]-Y[K])*(A[I,K]-
                A[I,J0]);
                R:=Y[K];
                Y[K]:=Y[J0];
                Y[J0]:=R;
                ALLERA  NORMAL;
SUITE:
                        FIN

        FIN RESOLSYSLIN ;
```

Exemples d'utilisation :

-1) systèmes $A_4 x = b$ avec A_4 matrice de Hilbert d'ordre 4

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

dans des temps comparables nous avons obtenu les résultats suivants :

solution exacte :	Gauss	Annul. du rang	Erreur absolue Gauss	Erreur absolue A.
-64	- 64,0037	- 63,999769	$3,7\ 10^{-4}$	$2,3\ 10^{-4}$
900	900,00385	899,99832	$3,8\ 10^{-3}$	$1,7\ 10^{-3}$
-2520	-2520,0090	-2519,9974	$9\ 10^{-3}$	$2,6\ 10^{-3}$
1820	1820,0057	1119,9951	$5,7\ 10^{-3}$	$0,9\ 10^{-3}$

(2) système $A_3 x = \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{vmatrix}$

solution exacte	Gauss	Annul. du rang	Erreur absolue Gauss	Erreur absolue A.R
27	27,000009	26,999976	$9\ 10^{-6}$	$24\ 10^{-6}$
-192	-192,00004	-191,99987	$4\ 10^{-6}$	$23\ 10^{-5}$
210	210,00004	209,99987	$4\ 10^{-5}$	$23\ 10^{-5}$

```
PROCEDURE INVGEN(U,V,Y,P,N,IMPOSSIBLE) ;
TABLEAU Y,U,V;
ENTIER N,P;
ETIQUETTE IMPOSSIBLE;


COMMENTAIRE CETTE PROCEDURE PERMET DE CALCULER
L'INVERSE DE LA MATRICE A+UVT,L'INVERSE DE A ETANT
CONNUE ET RANGEE DANS LE TABLEAU Y[1:N,1:N]. U,V
SONT DES MATRICES N*P. ON OBTIENT LA MATRICE INVERSE
DANS Y. SI A+ U*VT EST SINGULIERE ON SORT PAR
L'ETIQUETTE IMPOSSIBLE;

DEBUT
        ENTIER I,J,J0,K;
        TABLEAU S[1:P+N];
        REEL R;
        POUR K:=1 PAS 1 JUSQUA P FAIRE
        DEBUT
                S[K]:=1;
                POUR I:=1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
                S[K]:=S[K]+V[K,I]*U[I,K];
                SI ABS(S[K]) < Δ-20 ALORS ALLERA  ECHANGE;
NORMAL:         POUR J:=K+1 PAS 1 JUSQUA P FAIRE
                DEBUT
                        S[J]:=0;
                        POUR I:=1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
                        S[J]:=S[J]+V[K,I]*U[I,J];
                FIN ;

                POUR J:=1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
                DEBUT
                        S[P+J]:=0.0;
                        POUR I:=1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
                        S[P+J]:=S[P+J]+V[K,I]*Y[I,J]
                FIN ;

                POUR I:=1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
                DEBUT
                        U[I,K]:=U[I,K]/S[K];
                        POUR J:=K+1 PAS 1 JUSQUA P FAIRE
                        U[I,J]:=U[I,J]-U[I,K]*S[J];
                        POUR J:=1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
                        Y[I,J]:=Y[I,J]-S[P+J]*U[I,K];
                FIN ;

                ALLERA  SUITE;
ECHANGE:        J0:=K+1;
BIDON:          SI J0=P+1 ALORS ALLERA  IMPOSSIBLE;
                S[K]:=0;
                POUR I:=1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
                S[K]:=S[K]+V[J0,I]*U[I,K];
                SI ABS(S[K]) < Δ-20 ALORS
                DEBUT
                        J0:=J0+1;
```

```
                ALLERA  BIDON;
            FIN ;

            POUR I:=1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
            DEBUT
                V[K,I]:=V[K,I]+V[J0,I];
                U[J0,I]:=U[J0,I]-U[K,I];
            FIN ;

            ALLERA  NORMAL;
SUITE:
        FIN ;

FIN INVGEN;
```

```
   PROCEDURE RESOLANURANG(A,N,IMPOSSIBLE);
ENTIER N; TABLEAU A; ETIQUETTE IMPOSSIBLE;


COMMENTAIRE  ON RESOUD LE SYSTEME A*X=Y PAR LA
METHODE D'ANNULATION DU RANG AVEC LA DECOMPOSITION
EN COLONNES. LE TABLEAU A[1:N,1:N+1] EST
INITIALISE A (A-I,Y] APRES ACTIVATION X SE
TROUVE A LA PLACE DE Y. ON SE REND A L'ETIQUETTE
IMPOSSIBLE SI A EST SINGULIERE;

DEBUT  ENTIER I,J,K; REEL R;
         POUR K:=1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
         DEBUT   NORMAL:
                   DEBUT SI ABS(A[K,K] +1) < Δ-20 ALORS
                           ALLERA  ECHANGE;
                           POUR J:=K+1 PAS 1 JUSQUA N+1 FAIRE
                           DEBUT R:=A[K,J]:=A[K,J]/(1+A[K,K]);
                                   POUR I:=1 PAS 1 JUSQUA K-1, K+1
                                   PAS 1 JUSQUA N FAIRE
                                   A[I,J]:= A[I,J] -R*A[I,K] ;
                           FIN ;

                           ALLERA  END;
                           ECHANGE:
                           DEBUT ENTIER M; M:=K+1;
                                   RET: SI ABS(A[M,K]) < Δ-20
                                   ALORS M:=M+1 SINON ALLERA  CONT;
                                   SI M=N+1 ALORS ALLERA
                                   IMPOSSIBLE SINON ALLERA  RET;
                                   CONT: POUR I:=1 PAS 1 JUSQUA K-1,
                                   K+1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE A[I,M]:=
                                   A[I,M]- A[I,K] ;
                                   POUR J:=K+1 PAS 1 JUSQUA N+1 FAIRE
                                   A[K,J]:=A[K,J]+A[M,J];
                                   A[K,K]:= A[M,K] -1;
                                   ALLERA  NORMAL;
                           FIN ;

                END: FIN
         FIN

FIN RESOL;
```

CHAPITRE - III

DECOMPOSITION D'UNE MATRICE EN UNE SOMME DE MATRICES ANTISCALAIRES

III-1 LEMME (WEDDERBURN cf [6])

Si $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ et si rang(A) = p, alors la matrice $B = A - \sigma uv^t$ est de rang p-1 si et seulement si il existe $x, y \in \dot{\mathbb{R}}_N$ vérifiant :

$$(C) \qquad \begin{cases} Ax = u \neq 0 \\ A^t y = v \neq 0 \\ y^t Ax = \dfrac{1}{\sigma} \neq 0 \end{cases}$$

Démonstration de la condition suffisante :

$$(1°) \quad \left.\begin{array}{l} B = A - \sigma uv^t \\ A \text{ de rang } p \\ \text{condition (C) remplies} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \text{rang}(B) \leq p-1$$

En effet, on peut écrire dans ce cas :

$$B = A - \sigma uv^t = A - \sigma Axy^t A$$

donc si $Az = 0 \Rightarrow Bz = 0$

Entre les noyaux des applications A et B nous avons donc l'inclusion :

$$N(A) \subseteq N(B)$$

Mais $Ax = u \neq 0 \Rightarrow x \notin N(A)$

$$Bx = Ax - (\sigma y^t Ax)\, Ax = 0$$

$$\Rightarrow x \in N(B)$$

donc $N(A) \subset N(B)$ (strictement)

$$\Rightarrow \boxed{\text{rang } (B) \leq p-1} \qquad (1)$$

Montrons que rang (B) est exactement égal à p-1.

Soit $z \in \mathbb{R}^N$ avec $\begin{cases} z \notin N(A) \\ z \in N(B) \end{cases}$

On a :

$$Az - \sigma u v^t z = 0$$

$$\Rightarrow Az = (\sigma v^t z)u = \alpha Ax \qquad \text{avec } \alpha = \sigma . v^t z \neq 0 \text{ puisque } z \notin N(A)$$

Donc :

$$A(z-\alpha x) = 0$$

$$\Rightarrow z - \alpha x = z_1 \in N(A)$$

Ainsi, on a la propriété :

$$\left\| \begin{array}{l} z \in N(B) \\ \\ z \notin N(A) \end{array} \right. \Rightarrow z = z_1 + \alpha x \qquad \text{avec } z_1 \in N(A)$$

$$\Rightarrow \dim (N(B)) \leq \dim (N(A)) + 1$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{rang } (B) \geq \text{rang } (A) - 1} \qquad (2)$$

(1) et (2) $\Rightarrow$ rang (B) = rang (A) -1

Démonstration de la condition suffisante :

Hypothèses | rang (A) = p
rang (B) = p-1

Conclusion : | les conditions (C) sont remplies.

En effet :

$$\text{rang } (B) < \text{rang } (A) \Rightarrow \dim (N(B)) > \dim (N(A))$$

donc il existe $x \neq 0$, x appartient au noyau de B, x n'appartenant pas au noyau de A.

$$\Rightarrow \quad \left\| \begin{array}{l} Ax - \sigma u v^t x = 0 \\ Ax \neq 0 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \quad Ax = (\sigma v^t x)u = \alpha u \qquad \text{avec } \alpha \neq 0$$

de même si on considère A^t, $\dim (N(B^t)) > \dim (N(A^t))$

$$\Rightarrow \exists\, y \in \dot{R}_N : y \in N(B^t),\ y \notin N(A^t)$$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} A^t y - \sigma v u^t y = 0 \\ A^t y \neq 0 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \quad A^t y = (\sigma u^t y) v = \beta v \quad \text{avec } \beta = \sigma y^t u \neq 0$$

Par conséquent il existe $x_o = \frac{x}{\alpha}$ $\qquad y_o = \frac{y}{\beta}$ tels que :

$$\left\{ \begin{array}{l} Ax_o = u \\ A^t y_o = v \qquad \text{avec} \\ y_o^t Ax_o = \frac{y^t Ax}{\alpha\beta} = \frac{y^t u}{\beta} = \frac{1}{\sigma} \neq 0 \end{array} \right.$$

ce qui prouve le théorème.

III-2 PROPOSITION :

> Pour qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_N(R)$ soit de rang p, il faut et il suffit qu'elle puisse s'écrire $A = UV^t$ où U,V sont des matrices de dimensions (N,p) avec rang (U) = rang (V) = p

En effet A étant de rang p (p > 0), A n'est pas identiquement nulle donc il existe au moins un couple d'indices (i,j) tel que $a_{ji} \neq 0$. Considérons les vecteurs

$$u = Ae_i \neq 0 \text{ car } u_i = a_{ji} \neq 0$$
$$v = A^t e_j \neq 0 \text{ car } v_i = a_{ji} \neq 0$$

donc, il existe $x = e_i \neq 0$

$$y = e_j \neq 0$$

avec $y^t Ax = e_j^t A e_i = a_{ji} \neq 0$

par conséquent la matrice $A_1 = A - \dfrac{Ae_i e_j^t A}{a_{ji}}$ est de rang p-1.

c'est-à-dire $A_1 = A - u_1 v_1^t$ de rang p-1 en posant $u_1 = \dfrac{u}{\sigma}$

$$v_1 = v$$

si p-1 > 0, alors on peut répéter l'opération avec A_1. Finalement comme le rang diminue d'une unité chaque fois, on obtient $A_p = 0$. Or

$$A_p = A - u_1 v_1^t - u_2 v_2^t \ldots - u_p v_p^t$$

soit $$A = \sum_{i=1}^{p} u_i v_i^t$$

Si nous considérons les matrices $U = (u_1, u_2, .., u_p)$ $V = (v_1, v_2, .., v_p)$ on a :

$$U \times V^t = U \times I_p \times V^t$$

$$= U(E_{11}+E_{22}+\ldots+E_{pp})V^t \qquad \text{avec } E_{ii} = e_i e_i^t$$

$$= U E_{11} V^t + U E_{22} V^t + \ldots + U E_{pp} V^t$$

$$= \sum_{i=1}^{p} U E_{ii} V^t = \sum_{i=1}^{p} \underbrace{U e_i}_{u_i} \underbrace{e_i^t V^t}_{v_i^t} = \sum_{i=1}^{p} u_i v_i^t$$

par conséquent A de rang p $\overset{\leftarrow}{\rightarrow}$ il existe U,V matrices N,p tels que $A = UV^t$.
Si nous remarquons que $p = \text{rang}(A) \leq \text{rang}(U) \leq p \Rightarrow \text{rang}(U) = p$

de même $\text{rang}(A) \leq \text{rang}(V) \leq p \Rightarrow \text{rang}(V) = p$

Conséquences :

Pour appliquer ce qui précède à la méthode d'annulation du rang, on prendra A_o régulière arbitraire :

$$A = A_o + \underbrace{A-A_o}$$

et on décomposera $A-A_o$ en somme de matrices antiscalaires. On a donc le résultat suiva

> Le nombre de matrices antiscalaires qui interviennent dans la méthode d'annulation du rang appliquée à la matrice régulière A, est au moins égal au rang de $A-A_o$ où A_o est la matrice de départ. Ce nombre peut être pris égal à rang $(A-A_o)$

ainsi, nous aurons toujours intérêt à choisir A_o régulière, d'inverse connue, mais avec rang $(A-A_o) \ll N$ de façon à avoir un nombre de "pas", le plus petit possible.

Remarque :

> La décomposition indiquée par WILF n'est pas générale puisqu'elle suppose que B-D est triangularisable par la méthode de Gauss. Toutefois, lorsque cette décomposition est acquise, WILF indique que les résultats obtenus sont bons. Mais nous devons alors remarquer que le travail de décomposition équivaut à une triangularisation et que par conséquent il est lourd d'utiliser la méthode d'annulation du rang. Cette dernière ne s'impose donc que si rang $(A-A_o) \ll N$.

Définition :

Une décomposition $A-A_o = \sum_{i=1}^{p} u_i v_i^t$ avec $p = \text{rang}\,(A-A_o)$ sera dite "minimale".

III-3 EXEMPLES

(1°)
$$A = \begin{pmatrix} \lambda & \mu & \mu & \dots & \mu \\ \mu & \lambda & \mu & & \mu \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ & & & \lambda & \mu \\ \mu & \mu & \dots & \mu & \lambda \end{pmatrix} \qquad \lambda \neq \mu$$

On peut écrire $A = (\lambda-\mu)I + \mu \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} \overline{1\ 1 \dots 1\ 1}$

On prendra $A_o = (\lambda-\mu)I$, d'inverse $\frac{1}{\lambda-\mu} I$.

$A-A_o$ est alors de rang 1 (si $\mu \neq 0$) et l'inverse de A est

$$A^{-1} = \frac{1}{\lambda-\mu} I - \frac{\frac{1}{\lambda-\mu}\mu u u^t \frac{1}{\lambda-\mu}}{1+N\frac{\mu}{\lambda-\mu}} = \frac{1}{\lambda-\mu}\left[I - \frac{\mu u u^t}{\lambda-\mu+N\mu}\right] \qquad u = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{vmatrix}$$

donc si $\lambda+(N-1)\mu \neq 0$ A^{-1} existe et $A^{-1}_{ij} = \frac{1}{\lambda-\mu}\left[\delta_{ij} - \frac{\mu}{\lambda+(N-1)\mu}\right]$,

sinon A est singulière.

(2°) $A = I + P$ avec $P_{ij} = (i+j)^2 + \delta_{ij}$

On prendra $A_o = I$

et en remarquant que $(A-A_o)_{ij} = p_{ij} = i^2+j^2+2ij$.

On peut écrire

$$A - A_o = UV^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \\ 9 & 1 & 6 \\ \vdots & \vdots & \\ N^2 & 1 & 2N \end{pmatrix} \times \overline{\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 4 & 9 & \dots & N^2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & N \end{matrix}}$$

qui est une décomposition minimale car rang (A-I) = 3 = rang (U) = rang (V).
On peut donc obtenir A^{-1} avec 3 itérations. On voit ici le grand avantage de la méthoc car N peut être grand (N >> 3).

(3°) De façon générale si A = D+P avec P = (p_{ij})

$$p_{ij} = \sum_{p,q} \alpha_{pq}\, i^p j^q \qquad \text{polynôme en } i,j$$

alors A peut s'écrire $A = D + \sum_{i=1}^{K} u_i v_i^t$ où K est le nombre de termes intervenant dans l'écriture des polynômes.
Si N >>K, ceci permet de résoudre des systèmes linéaires très rapidement. voir exemple pages 34-35.

(4°) Proposons nous d'inverser la matrice $A = (a_{ij}) = (|i-j|)$ $\quad i,j = 1,2...N$
On prendra ici A_o définie par :

$$\begin{cases} A_o\ ij = 0 & \text{si } i \geq j \\ A_o\ ij = 2(j-i) & \text{si } i < j \end{cases}$$

On peut alors écrire :

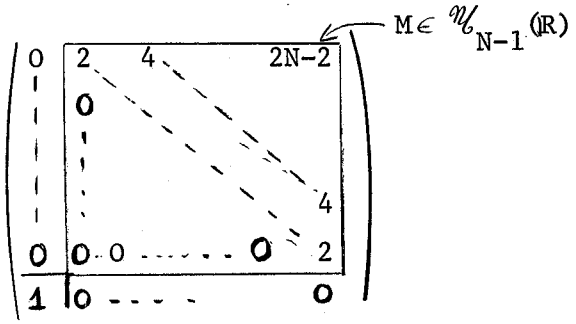
$$A = A_o + uv^t - vu^t$$

avec $u = \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ N \end{vmatrix}$ $\quad v = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{vmatrix}$ $\qquad u,v \in \mathbb{R}^N$

Cependant A_o n'est pas régulière. On lève la difficulté en remarquant que: $A_o + e_N e_1^t = A_1$ est régulière. En effet

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ \vdots & \ddots & & \\ 0\ 0 & & 2(j-i) & \\ 0\ 0 & & & 0 \\ 1\ 0 & \cdots & & 0 \end{pmatrix} \qquad \det(A_1) = 2^{N-1}$$

de plus, si on partitionne A_1 en



alors M est régulière dans $\mathcal{M}_{N-1}(R)$ et si M^{-1} est son inverse:

$$A_1^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ & M^{-1} & & 0 \\ & & & \vdots \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

ainsi $A = A_1 + uv^t - vu^t - e_N e_1^t$

et l'inversion de A nécessite 1) l'inversion d'une matrice triangulaire (M)

2) trois "pas" pour la méthode d'annulation du rang.

(5°) Inversion de $A = (a_{ij}) = \frac{\text{Max}(i,j)}{\text{Min}(i,j)}$ $\quad i,j = 1,2\ldots N$

on prendra $A_o = (A_{oij})$ $\quad A_{oij} = 0 \quad$ si $i \geq j$

$= \frac{j}{i} - \frac{i}{j} \quad$ si $i < j$

alors $A = \underbrace{A_o + e_N e_1^t}_{A_1} - e_N e_1^t + uv^t$ avec $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ N \end{pmatrix}$ $\quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1/3 \\ \vdots \\ 1/N \end{pmatrix}$

comme précédemment A_1 est régulière, et l'inversion de A nécessite :

a) l'inversion d'une matrice triangulaire

b) deux "pas" pour la méthode d'annulation du rang.

On traiterait de même $A = (a_{ij})$ avec $(a_{ij}) = \min(i,j)$

CHAPITRE - IV

LES ERREURS DE CALCUL DANS LA RESOLUTION DES SYSTEMES LINEAIRES PAR LA METHODE D'ANNULATION DE RANG

(Cas de la décomposition dite "en colonnes")

La décomposition dite "en colonnes" de A est la décomposition

$$A = I + \sum_{i=1}^{N} u_i \, e_i^t \qquad \text{avec } u_i = A_{.i} - e_i$$

Appliquons à cette décomposition particulière les résultats généraux de la méthode d'annulation du rang pour la résolution du système Ax = y.

On part de $T^{(o)} = (u_1, u_2, \ldots u_N, y)$ $T^{(o)}$ est un tableau $(N, N+1)$

On peut écrire $T^{(o)} = (A - I_N, y)$

Lorsqu'on connait $T^{(k-1)}$ les formules qui permettent d'obtenir $T^{(k)}$ sont les suivantes : (cf. méthode générale)

$$\begin{cases} t_{ij}^{(k)} = t_{ij}^{(k-1)} & j < k \\ t_{ij}^{(k)} = t_{ij}^{(k-1)} - \rho_j^{(k)} t_{ik}^{(k-1)} \end{cases} \qquad \text{avec } \rho_j^{(k)} = \frac{e_k^t T^{(k-1)}_{.j}}{1 + e_k^t T^{(k-1)}_{.k}} \quad j = k+1, \ldots, N+1$$

$$i = 1, 2, .., N$$

$$j = k+1, \ldots N+1$$

si l'on remarque que $\rho_j^{(k)} = \dfrac{t_{kj}^{(k-1)}}{1 + t_{kk}^{(k-1)}}$ $\qquad j = k+1, .., N+1$

et que $t_{kj}^{(k)} = t_{kj}^{(k-1)} - \dfrac{t_{kj}^{(k-1)}}{1 + t_{kk}^{(k-1)}} t_{kk}^{(k-1)} = \dfrac{t_{kj}^{(k-1)}}{1 + t_{kk}^{(k-1)}} = \rho_j^{(k)}$ $\qquad j = k+1, .., N+1$

les formules que nous appliquons effectivement dans l'algorithme sont les suivantes :

(1)

$$t_{ij}^{(k)} = t_{ij}^{(k-1)} \qquad j < k$$

$$t_{kj}^{(k)} = \rho_j^{(k)} = \frac{t_{kj}^{(k-1)}}{1+t_{kk}^{(k-1)}} \qquad j = k+1,..,N+1$$

$$t_{ij}^{(k)} = t_{ij}^{(k-1)} - \rho_j^{(k)} \times t_{ik}^{(k-1)} \qquad i = 1,2,..,k-1,k+1,..,N$$
$$j = k+1,.....,N+1$$

Nous supposons dans ce qui suit que les pivots rencontrés sont tous non nuls, et nous nous proposons d'étudier les erreurs de calcul.
Nous ferons les hypothèses habituellement admises pour les calculs en fixe ou en flottant. (cf. [7]).

CALCULS EN VIRGULE FIXE :

rappels : si $\oplus$ $\ominus$ $\otimes$ $\oslash$ figurent les opérations machine on a :

$$a \oplus b = a+b$$
$$a \ominus b = a-b$$
$$a \otimes b = a\times b+e \qquad e \sim k\beta^{-N}$$
$$a \oslash b = a:b+e' \qquad e' \sim k'\beta^{-N'}$$

On part de $T^{(o)} = (A-I,y)$ $T^{(o)}$ est donc exactement connu.
Puis on doit calculer $T^{(1)}$, $T^{(2)}$,..,$T^{(N)}$ par les formules (1).
En fait, nous n'obtenons pas la suite des $T^{(k)}$ mais une suite $\overline{T}^{(k)}$

1°) parce que les $\rho_j^{(k)}$ sont mal déterminés (erreur de division)
2°) parce que les produits $\rho_j^k \times t_{ik}^{k-1}$ ne sont pas exactement calculés (erreur de multiplication).

Les calculs réels donnent les formules (2) :

Si $\overline{T^{(k-1)}}$ est le tableau obtenu en machine à l'étape k-1, à l'étape k on a :

(2)

$$\overline{t_{ij}^{(k)}} = \overline{t_{ij}^{(k-1)}} \qquad \text{si } j < k$$

$$\overline{t_{kj}^{(k)}} = \frac{\overline{t_{kj}^{k-1}}}{1+\overline{t_{kk}^{k-1}}} + \varepsilon_j^{(k)} = \rho_j^{(k)} + \varepsilon_j^{(k)} = \overline{\rho_j^{(k)}} \qquad j = k+1..,N+1$$

($\varepsilon_j^{(k)}$ erreur de division de $\overline{t_{kj}^{(k-1)}}$ par $1+\overline{t_{kk}^{(k-1)}}$)

$$\overline{t_{ij}^{(k)}} = \overline{t_{ij}^{(k-1)}} - \overline{\rho_j^{(k)}} \times \overline{t_{ik}^{(k-1)}} + \eta_{ij}^{(k)} \qquad i \neq k$$

$$j = k+1,.,N+1$$

($\eta_{ij}^{(k)}$ erreur de multiplication de ρ_j^k par $\overline{t_{ik}^{(k-1)}}$)

Les formules (2) sont celles qui donnent le tableau $\overline{T^{(k)}}$ obtenu en machine à l'étape k.

posons :

$$\begin{cases} \overline{\overline{t_{ij}^{(k-1)}}} = \overline{t_{ij}^{(k-1)}} & j < k \\ \overline{\overline{t_{kj}^{(k-1)}}} = \overline{t_{kj}^{(k-1)}} + \varepsilon_j^{(k)} \times \left[1+\overline{t_{kk}^{(k-1)}}\right] & j = k+1,\ldots,N+1 \\ \overline{\overline{t_{ij}^{(k-1)}}} = \overline{t_{ij}^{(k-1)}} + \eta_{ij}^{(k)} & i \neq k \\ & j = k+1,..,N+1 \end{cases}$$

ce qui définit le tableau $\overline{\overline{T^{(k-1)}}}$

Les formules (2) deviennent :

(2')

$$\overline{t_{ij}^{(k)}} = \overline{\overline{t_{ij}^{(k-1)}}} \qquad j < k$$

$$\overline{t_{kj}^{(k)}} = \rho_j^{(k)} = \frac{\overline{t_{kj}^{(k-1)}}}{1+\overline{\overline{t_{kk}^{(k-1)}}}} \qquad j = k+1,\ldots,N+1$$

$$\overline{t_{ij}^{(k)}} = \overline{\overline{t_{ij}^{(k-1)}}} - \overline{\rho_j^{(k)}} \times \overline{\overline{t_{ij}^{(k-1)}}} \qquad i \neq k$$

$$j = k+1,..,N+1$$

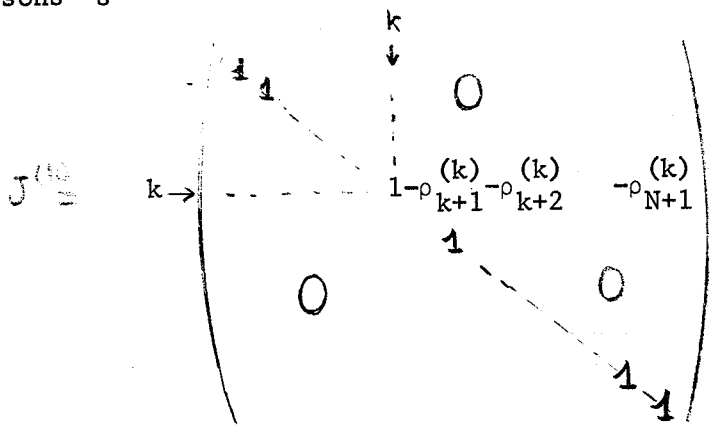
Les formules (2') définissent le tableau $\overline{T^{(k)}}$ effectivement obtenu en machine.

Si nous rapprochons les formules (2') des formules théoriques (1) nous voyons que

* Le tableau $\overline{T^{(k)}}$ obtenu à la $k^{ième}$ itération est identique à celui qui résulterait de l'application, sans erreur de calcul, de l'algorithme à l'étape k, algorithme appliqué au tableau $T^{(k-1)}$

Ecriture matricielle des formules (1) et (2')

Si nous posons $J^{(k)}$



nous pouvons écrire les formules (2') $\overline{T^{(k)}} = \overline{T^{(k-1)}} \times \overline{J^{(k)}}$

et les formules (1) $T^{(k)} = T^{(k-1)} \times J^{(k)}$

Ainsi, si nous ne faisions pas d'erreur de calcul, nous obtiendrions la suite

$$T^{(o)},\ T^{(1)} = T^{(o)}J^{(1)},..,T^{(k)} = T^{(k-1)}J^{(k)},..,T^{(N)} = T^{(N-1)}J^{(N)}$$

donc

$$T^{(N)} = T^{(o)}J^{(1)}J^{(2)}\ldots J^{(N)} \qquad (3)$$

Mais en réalité, nous obtenons la suite :

$$T^{(o)} = T^{(o)},\ T^{(1)} = T^{(o)}J^{(1)},\ldots T^{(N)} = T^{(N-1)}J^{(N)}$$

Or , nous pouvons écrire :

$$\overline{T^{(k)}} = \overline{\overline{T^{k-1}}} \times \overline{J^{(k)}}$$

$$= \left[\overline{T^{(k-1)}} + M^{(k)}\right] \overline{J^{(k)}}$$

$M^{(k)}$ matrice$(N, N+1)$

$$\text{avec } M^{(k)} = \begin{array}{c} \\ \\ k\rightarrow \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \phantom{\eta^{(k)}_{1k+1}} & k+1 & & \\ & \downarrow & & \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|c} \cdots 0 \cdots & \begin{array}{ccc} \eta^{(k)}_{1k+1} & \cdots & \cdots \\ \vdots & \eta^{(k)}_{ij} & \vdots \\ \hline \varepsilon^{(k)}_{k+1}\pi_k, & \varepsilon^{(k)}_{k+2}\pi_k, \cdots & \varepsilon^{(k)}_{N+1}\pi_k \\ \hline \vdots & \eta^{(k)}_{ij} & \vdots \\ \eta^{(k)}_{N,k+1} & \cdots & \end{array} \end{array}\right) \end{array}$$

en posant $\pi_k = (1+\overline{\overline{t^{(k-1)}_{kk}}})$

mais $\overline{T^{(k-1)}} = \left[\overline{T^{(k-2)}} + M^{(k-1)}\right] \overline{J^{(k-1)}}$

$\Rightarrow \overline{T^{(k)}} = \{\left[\overline{T^{(k-2)}} + M^{(k-1)}\right] \overline{J^{(k-1)}} + M^{(k)}\} \overline{J^{(k)}}$

or $M^{(k)} \overline{J^{(k-1)}} = M^{(k)}$ vérification immédiate vu la forme de $J^{(k-1)}$

(ceci signifie que l'on peut indifféremment à l'étape k appl quer l'algorithme à $\overline{T^{(k-1)}} + M^{(k)}$ ou à $\overline{T^{(k-1)}} + M^{(k)} \overline{J^{(k-1)}}$

Nous pouvons donc écrire :

$$\overline{T^{(k)}} = \left[\overline{T^{(k-2)}} + M^{(k-1)} + M^{(k)}\right] \overline{J^{(k-1)}} . \overline{J^{(k)}}$$

et en itérant le processus :

$$\overline{T^{(k)}} = \left[\overline{T^{(o)}} + M^{(1)} + M^{(2)} + \ldots + M^{(k)}\right] \overline{J^{(1)}} . \overline{J^{(2)}} \ldots \overline{J^{(k)}}$$

$$\overline{T^{(k)}} = \left[T^{(o)} + M^{(1)} + \ldots + M^{(k)}\right] \overline{J^{(1)}} . \overline{J^{(2)}} \ldots \overline{J^{(k)}}$$

soit

$$\boxed{\overline{T^{(N)}} = \left[T^{(o)} + M^{(1)} + \ldots + M^{(N)}\right] \overline{J^{(1)}} \ldots \overline{J^{(N)}}} \qquad (4)$$

Si nous rapprochons l'expression théorique (3) de l'expression (4) du tableau finalement obtenu, nous pouvons énoncer le résultat suivant :

> * Le tableau $T^{(N)}$ obtenu en machine par application de l'algorithme est celui qui résulterait de l'application du même algorithme conduit sans erreur de calcul à partir du tableau initial :
>
> $$T^{(o)} + \delta T^{(o)} = T^{(o)} + \sum_{i=1}^{N} M^{(i)}$$

Or $T^{(o)} = (A-I, y) = (A+\delta A-I,\ y+\delta y)$

$$\Rightarrow \quad \boxed{(\delta A, \delta y) = \sum_{i=1}^{N} M^{(i)}} \qquad (5)$$

Nous pouvons énoncer la propriété ci-dessus de la manière suivante :

> Lorsqu'on résoud un système linéaire $Ax = y$, en fixe, par la méthode d'annulation du rang avec décomposition "en colonnes", la solution machine x^* obtenue est la solution exacte du système varié :
> $(A+\delta A)x^* = y+\delta y$ où δA et δy sont donnés par la formule (5)

Structure de la matrice δA et du vecteur δy

posons

$$M^{(k)} = \begin{pmatrix} 0 & \begin{array}{c} 0 \\ \hline \pi_k \varepsilon_{k+1}^{(k)} \cdots\cdots \pi_k \varepsilon_{N+1}^{(k)} \\ \hline 0 \end{array} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \begin{array}{c} \eta_{ij}^{(k)} \\ \hline 0 \cdots\cdots 0 \cdots\cdots 0 \\ \hline \eta_{ij}^{(k)} \end{array} \end{pmatrix}$$

$$= B^{(k)} + C^{(k)} \qquad B^{(k)} \text{ et } C^{(k)} \text{ de dimensions } (N, N+1)$$

On obtient :

$$\sum_{i=1}^{N} M^{(i)} = \sum_{i=1}^{N} B^{(i)} + \sum_{i=1}^{N} C^{(i)}$$

$$\sum_{i=1}^{N} B^{(i)} = \begin{pmatrix} \pi_1 & & & \\ & \pi_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \pi_N \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_2^{(1)} & \varepsilon_3^{(1)} & \cdots & \varepsilon_{N+1}^{(1)} \\ & 0 & \varepsilon_3^{(2)} & & \varepsilon_{N+1}^{(2)} \\ & & 0 & \ddots & \vdots \\ & & & & \\ 0 & 0 & & 0 & \varepsilon_{N+1}^{(N)} \end{pmatrix}$$

$$\sum_{i=1}^{N} C^{(i)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \eta_{13}^{(2)} & \cdots & \cdots \\ 0 & \eta_{22}^{(1)} & \cdots & & \\ & \eta_{32}^{(1)} & \cdots & & \\ \vdots & \vdots & & & \\ 0 & \eta_{N,2}^{(1)} & & & \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \downarrow j \\ \rightarrow i \end{matrix} \quad \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{k=j-1} \eta_{ij}^{(k)}$$

Ordre de grandeur de $\delta T^{(o)}$:

Les $\varepsilon_{ij}^{(k)}$ sont de l'ordre de e'
Les $\eta_{ij}^{(k)}$ sont de l'ordre de e

$$\Longrightarrow \quad \delta T^{(o)} = \delta_1 T^{(o)} + \delta_2 T^{(o)}$$

avec $\delta_1 T^{(o)} \neq e'$ $\times$

$$\begin{pmatrix} \pi_1 & & & \\ & \pi_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \pi_N \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ & 0 & 1 & 1 & & & 1 \\ & & \ddots & & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & & \ddots & 1 \\ & & & & \ddots & & 1 \\ & & 0 & & & \ddots & 1 \\ 0 & - & - & - & - & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\delta_2 T^{(o)} \# + e \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & \vdots & N-1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & & N-1 \\ \vdots & 1 & 2 & 2 & 3 & \vdots & \vdots \\ \vdots & 1 & 2 & 3 & 3 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 4 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & N-2 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & N-2 & \vdots \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & N-1 & N-1 \end{pmatrix}$$

matrice dont le terme général est

$$\alpha_{ij} = j-1 \text{ si } i \geqslant j$$
$$= j-2 \text{ si } i < j$$

On obtient ainsi pour δA et δy les ordres de grandeur suivants :

$$\delta A \# e' \times \begin{pmatrix} \pi_1 & & & \\ & \pi_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \pi_N \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & & 1 \\ \vdots & \ddots & 1 & & 1 \\ \vdots & & \ddots & 1 & \\ \vdots & & & \ddots & \\ \vdots & 0 & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & & \cdots & 0 \end{pmatrix} + e \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & & N-2 \\ 0 & 1 & 1 & & \vdots \\ & 1 & 2 & & \vdots \\ & & & \begin{cases} j-1 \text{ si } i>j \\ j-2 \text{ sinon} \end{cases} & \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & N-2 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & N-1 \end{pmatrix}$$

(terme général en ligne i, colonne j : $j-1$ si $i>j$, $j-2$ sinon ; colonne N : $N-2$; ligne N : $0 \; 1 \; 2 \; \cdots \; N-1$)

$$\delta y \# e' \times \begin{vmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \vdots \\ \pi_N \end{vmatrix} + e \times \begin{vmatrix} N-1 \\ N-1 \\ \vdots \\ N-1 \end{vmatrix}$$

Bornes pour l'erreur

Si x^* est la solution machine, x la solution exacte on a les relations

$$\begin{cases} (A+\delta A)\, x^* = y+\delta y \\ Ax = y \end{cases}$$

introduisons les normes de matrices ψ_1 et ψ_2 c'est-à-dire Φ et $\|\ \|$
On a (cf. [8]).

$$\frac{1}{M_A}\,\Phi(\delta y-\delta A x^*) < \|x^*-x\| < \frac{1}{A}\,\Phi(\delta y-\delta A x^*)$$

où M_A et m_A représentent les bornes supérieure et inférieure du rapport $\frac{\Phi(Ax)}{\|x\|}$, pour x variable.
Si λ_1 est la plus petite valeur propre de la matrice AA^t on a alors :

$$\boxed{\|x^*-x\| < \frac{1}{\sqrt{\lambda 1}}\|\delta y\| + \frac{1}{\lambda_1} \times \|y\| \times N(\delta A)}$$

avec $$N(A) = \Big(\sum_{i,j} a_{ij}^{\,2}\Big)^{1/2}$$

Si le calcul est conduit en virgule fixe, on obtient d'après la forme de δA et de la forme de δy

$$N(\delta A) < e' \times N \begin{pmatrix} 0 & \pi_1 & \pi_1 & \cdots & \pi_1 \\ & 0 & \pi_2 & \cdots & \pi_2 \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & \pi_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} + e \times N \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & \cdots & N-2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & & \vdots \\ & 1 & 2 & \vdots & & \vdots \\ & & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & & N-2 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{R1} \qquad\qquad \underbrace{\qquad\qquad}_{R2}$$

avec $R1^2 = (N-1)\pi_1^2+(N-2)\pi_2^2+\ldots+(\pi_{N-1})^2$

$R2^2 = (N+1)\left[1+2^2+\ldots+(N-2)^2\right] = (N+1)\left[\frac{(N-2)(N-1)(2n-1)}{6}\right] \simeq \frac{N^4}{3}$

Pour $\|\delta y\|$ on a

$$\|\delta y\| < e'R_1' + eR_2'$$

avec $R_1'^2 = \pi_1^2+\pi_2^2+\ldots+\pi_N^2$

$R'^2_2 = N\times(N-1)^2 \Rightarrow R'^2 = (N-1)\sqrt{N}$

d'où $$\|x^*-x\| < \frac{\|y\|}{\lambda_1} e'R_1 + \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} e'R_1' + \frac{\|y\|}{\lambda_1} eR_2 + \frac{(N-1)\sqrt{N}}{\sqrt{\lambda_1}} e$$

① ② ③ ④

formule identique à celle obtenue pour la méthode de Gauss. (cf. [7]). Seule la valeur de R_2 est différente. On trouve ici $R_2^2 \simeq \frac{N^4}{3}$ alors que pour la méthode de Gauss on a $R_2^2 \simeq \frac{N^4}{6}$.

Ainsi la discussion de l'inégalité ci-dessus est exactement la même que celle faite par M. GASTINEL. Rappelons-en avec la nouvelle valeur de R_2 les conclusions :

(1°) Pour N assez grand, c'est le terme ③ qui prédomine et si l'on veut obtenir une erreur sur la solution inférieure à β^{-m}, il suffit de prendre e de sorte que

$$\frac{1}{\sqrt{3}} e \frac{\|y\|}{\lambda_1} N^2 < \beta^{-m}$$

or $e = k\,\beta^{-p}$, si l'on fait $k = \frac{1}{2}$ on énonce :

Pour pouvoir résoudre un système linéaire en virgule fixe par la méthode d'annulation du rang avec décomposition en colonnes, et pour un ordre assez élevé afin que ce soit le terme ③ qui prédomine, et pour assurer une erreur sur la solution inférieure à β^{-m}, il suffit de conduire les calculs avec p chiffre après la virgule : p satisfaisant à

$$p > m - \log_\beta \left(\frac{3,5}{N^2} \frac{\lambda_1}{\|y\|}\right) \qquad (2.\sqrt{3} \# 3,5)$$

(2°) Nous pouvons pour les autres termes poursuivre exactement la même discussion qu pour Gauss, puisque les autres termes ①, ②, ④ sont strictement les mêmes dans les deux méthodes. Rappelons brièvement les résultats :

a) $\sqrt{\lambda_1}$ est plus grand que $\|y\|$ ou bien N est peu élevé de sorte que R_1' et R_1 sont du même ordre de grandeur : on applique alors la règle dite du choix des pivots :

Règle I

Dans le cas où $\sqrt{\lambda_1}$ est plus grand que $\|y\|$ ou N assez faible pour que l'on puisse considérer R_1 et R_1' du même ordre de grandeur, le choix le plus avantageux des pivots est celui qui les rend sensiblement faux en valeur absolue et forcément alors peu différents de $\pm\sqrt[N]{|\Delta|}$.

b) $\sqrt{\lambda_1}$ est plus petit que $\|y\|$ et N est assez élevé pour que R_1 soit le facteu prédominant. On a alors la règle II :

Règle II

Dans le cas où $\sqrt{\lambda_1} < \|y\|$ et N assez grand pour que le facteur prédominant soit R_1, alors le choix le plus avantageux est obtenu de la façon suivante :

1) "organisation" de la matrice de façon que le mineur principal d'ordre N-1 (N-1 premières lignes et N-1 premières colonnes) soit le plus petit possible.

2) Le pivot N° 1 doit petre pris le plus près possible de

$$\left[(N-1)!\right]^{\frac{1}{2(N-1)}} \times \left[M\right]^{\frac{1}{N-1}} \times (N-1)^{\frac{1}{2}}$$

le pivot n° 2 doit être pris le plus près possible de

$$\left[(N-1)!\right]^{\frac{1}{2(N-1)}} \times \left[M\right]^{\frac{1}{N-1}} \times (N-2)^{\frac{1}{2}}$$

etc...

où $|M| \# |\pi_1| \times |\pi_2| \cdots \times |\pi_{N-1}|$

$$M \# \frac{\left[\pi_{N-1}\right]^{N-1}}{\sqrt{(N-1)!}}$$

Ainsi avec un algorithme différent de celui de l'élimination de Gauss, nous avons obtenu sensiblement le même résultat. N. GASTINEL a montré que l'on pouvait faire un raisonnement analogue pour les calculs en virgule flottante. Nous n'avons pas conduit cette étude ici, car cela est plus difficile que pour la méthode de Gauss. A fortiori nous n'avons pas fait l'étude dans le cas d'une décomposition arbitraire de A. En effet les $t_{ij}^{(k)}$ ne s'expriment plus simplement à partir des $t_{ij}^{(k-1)}$, et nous avons à considérer les erreurs machines sur des produits scalaires ce qui complique beaucoup le problème.

CHAPITRE - V

APPLICATION DE LA METHODE D'ANNULATION DU RANG A LA RECHERCHE DE L'INVERSE GENERALISEE D'UNE MATRICE AUGMENTEE

Problème :

On a vu que si A est régulière alors on a l'équivalence :

$$A+uv^t \text{ régulière} \Leftrightarrow 1+v^tA^{-1}u \neq 0$$

dans le cas où ce scalaire est nul, on se propose de chercher la pseudo-inverse de la matrice $A+uv^t$ c'est-à-dire (cf. [8]) la matrice X vérifiant les conditions (C).

$$\begin{cases} X(A+uv^t)X = X \\ (A+uv^t)X(A+uv^t) = A+uv^t \\ \left[(A+uv^t)X\right]^t = (A+uv^t)X \\ \left[X.(A+uv^t)\right]^t = X.(A+uv^t) \end{cases} \qquad (C)$$

On montre que cette matrice est unique et coïncide avec l'inverse de la matrice $A+uv^t$ si celle-ci est régulière.

Théorème (BLATTNER) Cf. [9]

Soit B une matrice carrée N,N de rang $r < N$. On considère deux matrices P,Q de dimensions (N,r) telles que

1°) les colonnes de B et P forment un système de générateurs de R^N

2°) les colonnes de B^t et Q forment un système de générateurs de R^N

alors la matrice $\begin{vmatrix} B & P \\ Q^t & 0 \end{vmatrix}$ d'ordre N+r est régulière

et si on note $\begin{vmatrix} B_1 & R \\ S^t & 0 \end{vmatrix}$ son inverse

alors la matrice

$$\begin{vmatrix} \beta & S \\ R^t & 0 \end{vmatrix}$$ est régulière et a pour inverse

$$\begin{vmatrix} B & S \\ R^t & 0 \end{vmatrix}^{-1} = \begin{vmatrix} \overline{B} & T \\ W^t & 0 \end{vmatrix}$$

où $\overline{B}$ est l'inverse généralisée de la matrice B.

Proposition :

Si A est régulière et $1+v^tA^{-1}u = 0$ alors les conditions du théorème de BLATTNER sont remplies pour la matrice $\begin{pmatrix} (A+uv^t) & u \\ v^t & 0 \end{pmatrix}$

Démonstration :

(1°) puisque A est régulière et $A+uv^t$ singulière, d'après le théorème de Wedderburn (cf. chap. III) on a rang $(A+uv^t) = N-1$

(2°) u n'appartient pas à l'espace engendré par les colonnes de $A+uv^t$, autrement dit les colonnes de $A+uv^t$ et la colonne u, forment un système de générateurs de R^N.
En effet, soit x de R^N. A étant régulière, il existe $y \in R^N$ tel que $Ay = x \Rightarrow (A+uv^t-uv^t)y = (A+uv^t)y - (v^ty)u$ ce qui démontre bien que tout $x \in R^N$ s'exprime comme une combinaison linéaire des colonnes de $A+uv^t$ et de la colonne u.

(3°) v n'appartient pas à l'espace engendré par les colonnes de $(A+uv^t)^t$, autrement dit les colonnes de $(A+uv^t)^t$ et la colonne v forment un système de générateurs de R^N.
En effet soit x de R^N ; on a $x = A^t y \qquad y \in R^N$
c'est-à-dire $x = (A+uv^t)^t y - (u^t y)v$
ce qui démontre bien la propriété.

Aussi la matrice $M = \begin{pmatrix} A+uv^t & , & u \\ v^t & , & 0 \end{pmatrix}$ est telle que l'on peut appliquer le théorème de BLATTNER ;

Inverse généralisée de $A+uv^t$:

$$\text{Ecrivons } M = M - e_{N+1}e_{N+1}^t + e_{N+1}e_{N+1}^t$$

$$= \begin{pmatrix} A+uv^t & , & u \\ v^t & , & 1 \end{pmatrix} - e_{N+1}e_{N+1}^t$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} A & , & u \\ 0 & , & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_N & , & 0 \\ v^t & , & 1 \end{pmatrix}}_{K} - e_{N+1}e_{N+1}^t$$

$$K^{-1} = \begin{pmatrix} I_N & , & 0 \\ v^t & & 1 \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{pmatrix} A & , & u \\ 0 & , & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} I_N & , & 0 \\ -v^t & , & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A^{-1} & , & -A^{-1}u \\ 0 & , & 1 \end{pmatrix}$$

$$K^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & , & -A^{-1}u \\ -v^tA^{-1} & , & 0 \end{pmatrix}$$

et on peut écrire :

$$M = K - e_{N+1} e_{N+1}^t \qquad \text{avec } K^{-1} \text{ connue}$$

On a $1 - e_{N+1}^t K^{-1} e_{N+1} = 1$

d'où

$$M^{-1} = K^{-1} + K^{-1} e_{N+1} e_{N+1}^t K^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}u \\ -v^t A^{-1} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -A^{-1}u \\ 0 \end{pmatrix} \overbrace{\quad -v^t A^{-1}, 0 \quad}$$

$$\Rightarrow \qquad M^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} + A^{-1} u v^t A^{-1} & -A^{-1}u \\ -v^t A^{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

Pour trouver $(A+uv^t)$ nous devons maintenant inverser la matrice

$$B = \begin{pmatrix} A+uv^t & -A^{t-1}v \\ -(A^{-1}u)^t & 0 \end{pmatrix}$$

Ecrivons

$$B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix} \overbrace{\quad v^t, 0 \quad} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \overbrace{\quad -(A^{-1}u)^t, 0 \quad} + \begin{pmatrix} -A^{t-1}v \\ -1 \end{pmatrix} \overbrace{\quad 0,1 \quad}$$

Nous savons que B est régulière. Nous allons inverser B en <u>explicitant le "cheminement de l'algorithme du chapitre II</u>.

La matrice $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix} \overbrace{\quad v^t, 0 \quad}$ est singulière. Nous considérons donc la matrice

antiscalaire suivante et nous écrivons :

$$B = \underbrace{\begin{pmatrix} A & , & 0 \\ 0 & , & 1 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A^{t^{-1}} v \\ 1 \end{pmatrix}\right] \times \overline{v^t, 0}}_{B_1} + \begin{pmatrix} A^{t^{-1}} v \\ 1 \end{pmatrix} \overline{v^t, -1} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \overline{-(A^{-1}u)^t, 0}$$

B_1 est régulière. En effet le pivot à considérer s'écrit :

$$\Delta = 1 + \overline{v^t, 0} \times \begin{pmatrix} A^{-1} & , & 0 \\ 0 & , & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u - A^{t^{-1}} v \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Delta = 1 + v^t A^{-1} u - v^t A^{-1} A^{t^{-1}} v = - \|A^{t^{-1}} v\|^2 \neq 0$$

$$\Rightarrow B_1^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & , & 0 \\ 0 & , & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sigma} \times \begin{pmatrix} A^{-1} & , & 0 \\ 0 & , & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u - A^{t^{-1}} v \\ -1 \end{pmatrix} \overline{v^t, 0} \times \begin{pmatrix} A^{-1} & , & 0 \\ 0 & , & 1 \end{pmatrix}$$

avec $\sigma = -\|A^{t^{-1}} v\|^2$

$$\text{soit } B_1^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} - \frac{1}{\sigma}\left[A^{-1} u v^t A^{-1} - (A^t A)^{-1} v v^t A^{-1}\right] & , & 0 \\ \frac{1}{\sigma} v^t A^{-1} & , & 1 \end{pmatrix}$$

On peut maintenant écrire :

$$B = \underbrace{B_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \overline{-(A^{-1}u)^t, 0}}_{B_2} + \begin{pmatrix} A^{t^{-1}} v \\ 1 \end{pmatrix} \overline{v^t, -1}$$

B_2 est régulière. En effet le nouveau pivot s'écrit :

$$\Delta = 1 + \overbrace{-(A^{-1}u)^t, 0} \times B_1^{-1} \times \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} = 1$$

et on a :

$$B_2^{-1} = B_1^{-1} - B_1^{-1} \times \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} \times \overbrace{-(A^{-1}u)^t, 0} \times B_1^{-1}$$

Or $$B_1^{-1} \times \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} = B_1^{-1} e_{N+1} = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

et

$$\overbrace{-(A^{-1}u)^t, 0} \times B_1^{-1} = \overbrace{-u^t(AA^t)^{-1} - \frac{\sigma'}{\sigma} v^t A^{-1} - \frac{\sigma''}{\sigma} v^t A^{-1}, 0}$$ (vecteur ligne de $\mathbb{R}^{N+1}$)

avec

$$\sigma' = -\|A^{-1}u\|^2$$

$$\sigma'' = u^t(A^tAA^t)^{-1}v$$

ce qui donne

$$B_2^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} - \frac{1}{\sigma}[A^{-1}uv^tA^{-1} - (A^tA)^{-1}vv^tA^{-1}] & , & 0 \\ v^t(AA^t)^{-1} + \frac{(\sigma''+\sigma'+1)}{\sigma} v^tA^{-1} & , & 1 \end{pmatrix}$$

Enfin on a :

$$B = B_2 + \begin{vmatrix} A^{t^{-1}}v \\ \\ 1 \end{vmatrix} \times \overbrace{v^t, -1}$$

B est régulière comme prévu. Le pivot s'écrit :

$$\Delta = 1 + \overbrace{v^t,-1}^{} \times B_2^{-1} \times \begin{pmatrix} A^{t^{-1}} v \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Or } B_2^{-1} \times \begin{pmatrix} A^{t^{-1}} v \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (A^tA)^{-1}v - \frac{1}{\sigma}\left[-\sigma A^{-1}u + \sigma (A^tA)^{-1}v\right] \\ \\ \sigma'' - \frac{(\sigma''+\sigma'+1)}{\sigma} \times \sigma + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{-1}u \\ \\ -\sigma' \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \Delta = 1 + v^tA^{-1}u + \sigma' = \sigma' = \|A^{-1}u\|^2 \neq 0$$

On peut donc calculer B^{-1} :

$$B^{-1} = B_2^{-1} - \frac{1}{\sigma'} B_2^{-1} \times \begin{pmatrix} A^{t^{-1}} v \\ 1 \end{pmatrix} \overbrace{\times v^t,-1}^{} \times B_2^{-1}$$

Or

$$B_2^{-1} \times \begin{pmatrix} A^{t^{-1}} v \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{-1}u \\ \\ -\sigma' \end{pmatrix}$$

et

$$\overbrace{v^t,-1}^{} \times B_2^{-1} = \overbrace{-\frac{\sigma''+\sigma'}{\sigma} v^tA^{-1} - u^t(AA^t)^{-1},-1}^{}$$

d'où

$$B_2^{-1} \begin{pmatrix} A^{t^{-1}} v \\ 1 \end{pmatrix} \times \overbrace{v^t,-1}^{} B_2^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1}u \\ \\ -\sigma' \end{pmatrix} \times \overbrace{-\frac{\sigma''+\sigma'}{\sigma} v^tA^{-1} - u^t(AA^t)^{-1},-1}^{}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{\sigma''+\sigma'}{\sigma} A^{-1}uv^tA^{-1} - A^{-1}uu^t(AA^t)^{-1} & , & -A^{-1}u \\ \\ \frac{\sigma'}{\sigma}(\sigma''+\sigma')v^tA^{-1} - \sigma' u^t(AA^t)^{-1} & , & \sigma' \end{pmatrix}$$

Nous obtenons donc :

$$B^{-1}_{\{1,2\ldots N\}\{1,2\ldots N\}} = A^{-1} - \frac{1}{\sigma}\left[A^{-1}uv^tA^{-1} - (A^tA)^{-1}vv^tA^{-1}\right] + \frac{\sigma''+\sigma'}{\sigma\sigma'} A^{-1}uv^tA^{-1} + \frac{1}{\sigma'}A^{-1}uu^t($$

$$= A^{-1} + \frac{\sigma''}{\sigma\sigma'} A^{-1}uv^tA^{-1} + \frac{1}{\sigma}(A^tA)^{-1}vv^tA^{-1} + \frac{1}{\sigma'} A^{-1}uu^t(AA^t)^{-1}$$

c'est-à-dire

$$\overline{(A+uv^t)} = A^{-1} + \frac{\sigma''}{\sigma\sigma'} A^{-1}uv^tA^{-1} + \frac{1}{\sigma} (A^tA)^{-1}vv^tA^{-1} + \frac{1}{\sigma'} A^{-1}uu^t(AA^t)^{-1}$$

avec $\quad \sigma = -\|A^{t^{-1}}v\|^2$

$\sigma' = -\|A^{-1}u\|^2$

$\sigma'' = u^t(A^tAA^t)^{-1}v$

si on pose $x = A^{-1}u$

$y = A^{t^{-1}}v$

$$\overline{(A+Axy^tA)} = A^{-1} + \frac{x^tA^{-1}y}{\|x\|^2\,\|y\|^2} xy^t - \frac{1}{\|y\|^2} A^{-1}yy^t - \frac{1}{\|x\|^2} xx^tA^{-1}$$

Conclusion : La formule précédente donne l'inverse généralisée de $A+uv^t$ lorsque A es régulière et $A+uv^t$ singulière. L'intérêt en est donc limité. Cependant, nous devons remarquer que dans la littérature tout ce qui touche aux résultats sur l'inverse généralisée d'une matrice, suppose une connaissance du rang de cette matrice.
Comme application de ce qui précède, on peut toutefois prendre le cas d'un système $Ax = b$ de solution x connue.
Si maintenant, nous modifions A par addition d'une matrice antiscalaire, nous sauron dans tous les cas trouver $\tilde{x}$ tel que $||(A+uv^t)x - b||^2$ soit minimum. En effet si $A+uv^t$ est régulière $(1+v^tA^{-1}u \neq 0)$ alors $\tilde{x} = (A+uv^t)^{-1}b$ sinon $\tilde{x} = \overline{(A+uv^t)}b$
(on suppose en fait connaitre $A^{-1}b$ et $A^{-1}u$)

C'est-à-dire que nous savons résoudre le problème des moindres carrés pour une matri $A+uv^t$ quand nous connaissons l'inverse A^{-1} de A.

Remarque : Dans la pratique, pour calculer $\overline{(A+uv^t)}$, nous utiliserons l'algorithme de la méthode d'annulation du rang et pas forcément la formule explicite, c'est-à-dire que nous inverserons la matrice :

$$B= \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix} \overline{v^t \; 0} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \overline{-(A^{-1}u)^t \; 0} + \begin{pmatrix} A^{-1}u \\ 1 \end{pmatrix} \overline{0 \; -1}$$

en partant de $\begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ supposée connue.

CHAPITRE - VI

POLYNOME CARACTERISTIQUE D'UNE MATRICE AUGMENTEE

Soit $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$. Nous notons $F_A(\lambda)$ son polynôme caractéristique :

$$F_A(\lambda) = (-1)^N \lambda^N + p_{N-1}\lambda^{N-1} + \ldots + p_1\lambda + p_o \qquad (1)$$

On se propose de calculer les coefficients du polynôme caractéristique de la matrice $A+uv^t$ $\quad u,v \in \mathbb{R}^N$, autrement dit on cherche $F_{A+uv^t}(\lambda)$.
On a la formule :

$$\det(A+uv^t) = \det \left(\begin{array}{c|c} A & -u \\ \hline v^t & 1 \end{array}\right) = \det(B) \quad \text{en posant :}$$

$$B = \left(\begin{array}{c|c} A & -u \\ \hline v^t & 1 \end{array}\right) \quad B \in \mathcal{M}_{N+1}(R)$$

$$F_{A+uv^t}(\lambda) = \det(A+uv^t-\lambda I_N)$$

$$\Rightarrow \quad F_{A+uv^t}(\lambda) = \det \left(\begin{array}{c|c} A-\lambda I_N & -u \\ \hline v^t & 1 \end{array}\right)$$

$$= \det \left(\begin{array}{c|c} A-\lambda I_N & -u \\ \hline v^t & 1-\lambda+\lambda \end{array}\right)$$

$$= \lambda \det(A-\lambda I_n) + \det \left(\begin{array}{c|c} A-\lambda I_n & -u \\ \hline v^t & 1-\lambda \end{array}\right)$$

c'est-à-dire :

$$F_{A+uv^t}(\lambda) = \lambda F_A(\lambda) + F_B(\lambda) \qquad (2)$$

Nous allons déterminer $F_B(\lambda)$ à l'aide de la méthode dite des partitionnements cf.[10]

On a :

$$B-\lambda I_{N+1} = \left(\begin{array}{c|c} A-\lambda I_N & -u \\ \hline v^t & 1-\lambda \end{array}\right)$$

Soit $C(\lambda)$ la matrice $\left[(B- I_{N+1})^D\right]^t$ (transposée de l'adjointe de $B-\lambda I_{N+1}$)
on a alors:

$$\boxed{(B-\lambda I_{N+1})C(\lambda) = F_B(\lambda)I_{N+1}} \qquad (3)$$

Décomposons
$C(\lambda)$ en blocs comme on l'a fait pour $B-\lambda I_N$:

$$C(\lambda) = \left(\begin{array}{c|c} \Phi(\lambda) & f(\lambda) \\ \hline \tilde{f}(\lambda) & F_A(\lambda) \end{array}\right)$$

$\Phi(\lambda)$, $f(\lambda)$, $\tilde{f}(\lambda)$ sont des matrices polynômes en λ de dimensions respectives (N,N) ; (N,1) ; (1,N).
En utilisant la dernière colonne du produit (3) on a :

$$(B-\lambda I_{N+1}) \times \left|\begin{array}{c} f(\lambda) \\ \hline F_A(\lambda) \end{array}\right| = F_B(\lambda) \times \left|\begin{array}{c} 0 \\ \hline 1 \end{array}\right|$$

c'est-à-dire

$$\left(\begin{array}{c|c} A-\lambda I_N & -u \\ \hline v^t & 1-\lambda \end{array}\right) \times \left|\begin{array}{c} f(\lambda) \\ \hline F_A(\lambda) \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c} 0 \\ \hline F_B(\lambda) \end{array}\right|$$

d'où

$$\boxed{Af(\lambda) - \lambda f(\lambda) - uF_A(\lambda) = 0 \in \mathbb{R}^N} \qquad (4)$$

$$\boxed{v^t f(\lambda) + (1-\lambda) F_A(\lambda) = F_B(\lambda)} \qquad (5)$$

Si nous reportons (5) dans (2) on obtient :

$$F_{A+uv^t}(\lambda) = \lambda F_A(\lambda) + v^t f(\lambda) + (1-\lambda) F_A(\lambda)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{F_{A+uv^t}(\lambda) = F_A(\lambda) + v^t f(\lambda)} \qquad (6)$$

Expression des coefficients de $F_{A+uv^t}(\lambda)$:

Les polynômes qui figurent dans la colonne $f(\lambda)$ sont de degré au plus égal à N-1 car ils représentent le développement d'un mineur non diagonal de $B-\lambda I_{N+1}$
Posons donc :

$$f(\lambda) = \lambda^{N-1}\varphi_{N-1} + \lambda^{N-2}\varphi_{N-2} + \ldots + \lambda\varphi_1 + \varphi_o$$

$$\varphi_i \in \mathbb{R}^N \qquad i = N-1, N-2, \ldots 1, 0.$$

On a en identifiant les termes de même degré en λ dans la relation (4) :

termes en λ^N : $-\varphi_{N-1} + (-1)^N(-u) = 0$

c'est-à-dire $\boxed{\varphi_{N-1} = (-1)^{N-1}u}$ (7)

termes en λ^i $\quad i < N$:

$$A\varphi_i - \varphi_{i-1} - p_i \times u = 0$$

$$\boxed{\varphi_{i-1} = A\varphi_i - p_i u} \qquad (8)$$

$$i = N-1, N-2, .., 1$$

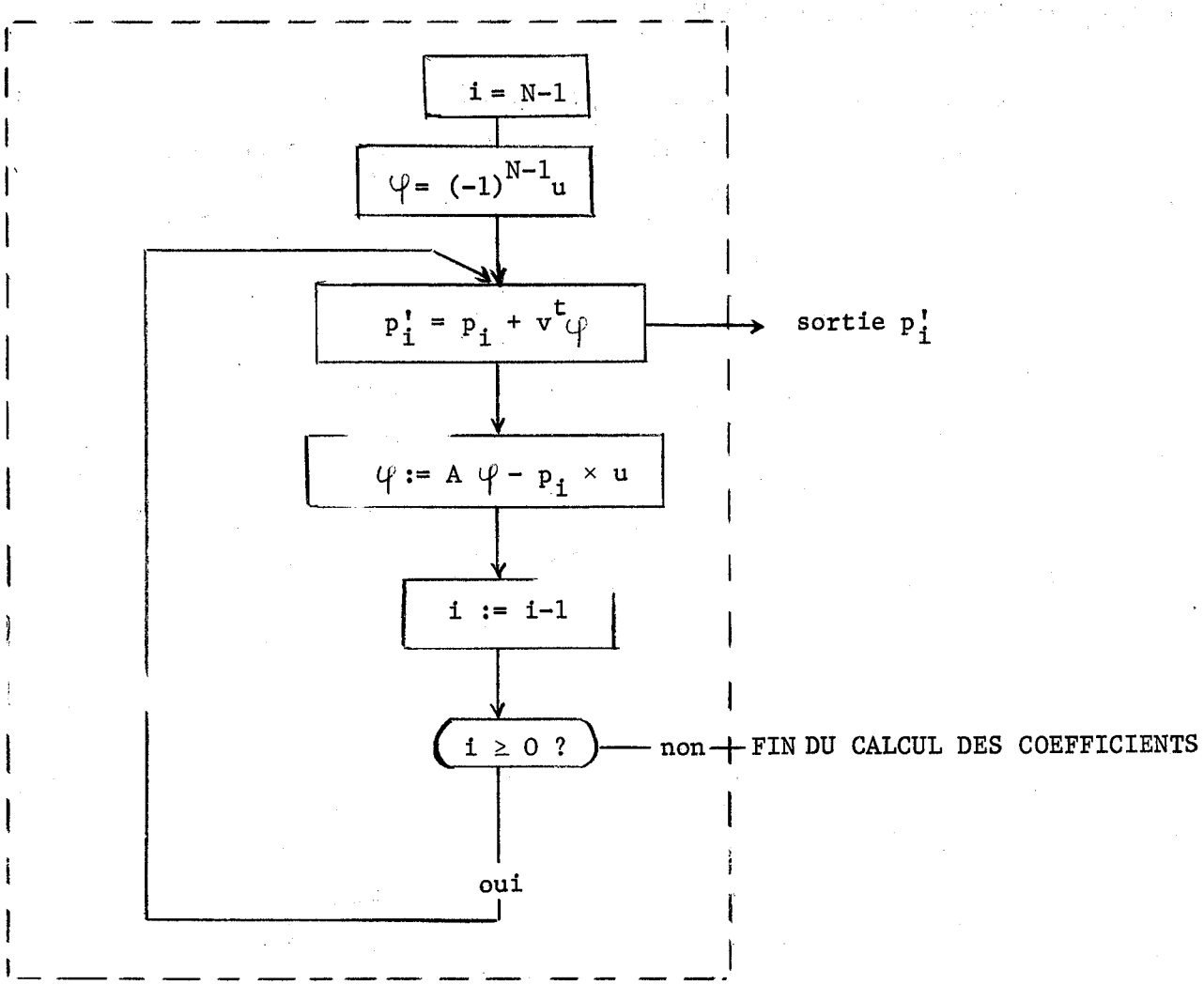
Posons $F_{A+uv^t}(\lambda) = (-1)^N\lambda^N + p'_{N-1}\lambda^{N-1} + \ldots + p'_1\lambda + p'_o$
On a en identifiant dans (6) :

$$\boxed{p'_i = p_i + v^t\varphi_i} \qquad (9)$$

$$i = N-1, N-2, \ldots 1, 0$$

Ainsi dans la pratique, la détermination de $F_{A+uv^t}(\lambda)$ requiert le calcul des vecteurs φ_j $j = N-1,..,0$ par les formules (7) et (8). Le calcul des p'_i est ensuite immédiat

Organigramme pour le calcul des coefficients de $F_{A+uv^t}(\lambda)$.



Applications : détermination du polynôme caractéristique d'une matrice.

Cas général : on ne sait rien de particulier sur A. On écrit alors $A = \sum_i^N e_i A_i$. En partant du polynôme caractéristique de la matrice nulle $F_0(\lambda) = (-1)^N \lambda^N$ et en appliquant N fois les formules précédentes on obtient $F_A(\lambda)$. Cette méthode correspond exactement à la méthode des partitionnements mais la programmation en est bien plus aisée.

Cas particulier : On connait une décomposition de A en $A_0 + \sum_i^p u_i v_i^t$; $p << N$ et $F_{Ao}(\lambda)$ connu. Alors en p étapes on obtient $F_A(\lambda)$.

voir exemples numériques (procédure POLCAR)

```
REEL PROCEDURE SIGMA(LIGNE,NOMBRE,COLONNE,TOTO) ;
ENTIER LIGNE,NOMBRE;
TABLEAU COLONNE,TOTO;
DEBUT
        REEL RESULT;
        ENTIER I;
        RESULT:=0;
        POUR I:=1 PAS 1 JUSQUA NOMBRE FAIRE
        RESULT:=RESULT+TOTO[LIGNE,I]*COLONNE[I];
        SIGMA:=RESULT
FIN SIGMA ;

PROCEDURE POLCAR(N,A,P) ;
ENTIER N;
TABLEAU A,P;

COMMENTAIRE CETTE PROCEDURE CALCULE DANS LE TABLEAU P
LES COEFFICIENTS DU POLYNOME CARACTERISTIQUE DE A,
MATRICE D'ORDRE 2 AU MOINS ;

DEBUT
        TABLEAU FI,PSI[1:N];
        ENTIER J,K,S;
        REEL GAMMA;
        P[0]:=A[1,1]*A[2,2]-A[1,2]*A[2,1];
        P[1]:=-A[1,1]-A[2,2];
        P[2]:=1;
        POUR K:=3 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
        DEBUT
                P[K]:=-P[K-1];
                P[K-1]:=-P[K-2]+P[K-1]*A[K,K];
                POUR J:=1 PAS 1 JUSQUA K-1 FAIRE
                FI[J]:=-P[K]*A[J,K];
                POUR S:=2 PAS 1 JUSQUA K-1 FAIRE
                DEBUT
                        GAMMA:=P[K-S];
                        P[K-S]:=A[K,K]*P[K-S]-P[K-S-
                        1]+SIGMA(K,K-1,FI,A);
                        POUR J:=1 PAS 1 JUSQUA K-1 FAIRE
                        PSI[J]:=SIGMA(J,K-1,FI,A)+GAMMA*
                        A[J,K];
                        POUR J:=1 PAS 1 JUSQUA K-1 FAIRE
                        FI[J]:=PSI[J];
                FIN ;

                P[0]:=P[0]*A[K,K]+SIGMA(K,K-1,FI,A);
        FIN

FIN POLCAR ;
```

Résultats numériques :

(1) Matrice(9,9) Durand : Equations algébriques Tome II. page 371

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 8 & -9 & 5 & -12 & -4 & 0 & 4 & -4 \\ -1 & -2 & 8 & -1 & 5 & -1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 16 & 2 & 3 & -10 & -13 & 0 & -3 \\ -1 & 9 & -13 & 0 & -2 & 14 & 13 & -10 & 1 \\ 6 & 11 & 6 & 7 & 5 & -2 & -6 & -5 & -6 \\ 2 & 5 & -5 & -6 & -2 & 13 & 5 & -3 & -2 \\ -1 & -3 & 9 & 2 & 3 & -12 & -6 & 2 & 1 \\ 7 & 1 & 3 & -7 & 3 & 4 & 3 & 8 & -7 \\ -5 & -3 & -1 & 4 & -7 & -5 & -2 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

Pour cet exemple comme pour les suivants nous effectuons la comparaison avec les résultats obtenus par la méthode de Leverrier.

on trouve les résultats suivants:(coefficients dans l'ordre des puissances croissant

Méthode de Leverrier	POLCAR	Coefficients exacts
.36285511 + 06	.36288000 + 06	362880
-.10265810 + 07	-.10265760 + 07	-1026576
.11727000 + 07	.11727000 + 07	1172700
6.72368000 + 06	-.72368000 + 06	-723680
.26932500 + 06	.26932500 + 06	269325
-.63273000 + 05	-.63273000 + 05	-63273
.94499999 + 04	.94499999 + 04	9450
-.86999999 + 03	-.86999999 + 03	-870
.45000000 + 02	.45000000 + 02	45
-1	-.1000000 + 01	-1

les chiffres inexacts sont soulignés.

(2) matrice $A = (a_{ij})$

avec $\begin{cases} a_{i1} = a_{1i} = 1 & i = 1,2,..,N \\ a_{ij} = a_{i-1,j} + a_{i,j-1} & \text{sinon} \end{cases}$

(matrice tirée du triangle de Pascal)

$N = 8$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 15 & 21 & 28 & 36 \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 35 & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 5 & 15 & \vdots & \vdots & & & \\ 1 & 6 & 21 & & & & & \\ 1 & 7 & 28 & & & & & \\ 1 & 8 & 36 & \vdots & & & & \end{pmatrix}$$

Résultats obtenus :

LEVERRIER	POLCAR	Coefficients exacts
0	.45944204 + 13	1
0	.37595455 + 10	-4707
0	.38204430 + 07	744193
-.34359738 + 10	-.99497579 + 07	-9952274
.22020096 + 08	.21537276 + 08	21537270
-.99519145 + 07	-.99522740 + 07	-9952274
.74419300 + 06	.74419300 + 06	744193
-.47070000 + 04	-.47070000 + 04	-4707
1	.10000000 + 01	1

(chiffres inexacts soulignés)

Matrice symétrique d'ordre 8 suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1.8125 & 2.3125 & 3.0625 & 1.5625 & 1.0625 & -3.4375 & 2.0625 & 2.8125 \\ \times & 2.5625 & 1.3125 & 1.0625 & 0.625 & 0.5625 & -3.9375 & 1.5625 \\ \times & \times & 1.3125 & 2.0625 & 1.8125 & 1.3125 & -3.1875 & 2.3125 \\ \vdots & \vdots & \times & 3.8125 & 0.5625 & 0.0625 & -4.4375 & 1.0625 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & 4.3125 & -0.1875 & -4.6875 & 0.8125 \\ & & & & & 5.3125 & -5.1875 & 0.3125 \\ & & & & & & 14.3125 & -4.1875 \\ \times & & & & & & \times & 3.3125 \end{pmatrix}$$

on obtient :

procédure LEVERRIER	Procédure POLCAR	Coefficients exacts
1	1	1
-37	-37	-37
361	361	361
-1183	-1183	-1183
-97,9999	-97,999923	-98
6692,0124	6692,0012	6692
-7175,3333	-7175,9691	-7176
-5476,5714	-5471,3067	-5472
7679,9999	6927,6947	6912

(chiffres inexacts soulignés)

CHAPITRE VII

Nous étudions dans ce chapitre, les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice augmentée $B = A+uu^t$, où A est symétrique. En permier lieu nous étudions la localisation des valeurs propres de B. Nous retrouvons ainsi, un résultat dû à GANTMACHER, résultat auquel nous ajoutons une propriété réciproque. Nous étudions aussi les vecteurs propres de la matrice B.

VII-1-1 Notations :

On désigne par A une matrice symétrique d'ordre N, et u un vecteur donné de $\mathbb{R}^N$.

(X,XO) est une matrice carrée d'ordre N, dont les colonnes constituent un système orthonormé de vecteurs propres de A.

X est un tableau(N,p)

XO est un tableau(N, N-p)

avec les propriétés :

1°) Les colonnes $X_{.i}$ de X $\quad i = 1,2,\ldots p$ sont les vecteurs propres normés de A qui vérifient $u^t X_{.i} \neq 0$

2°) Les colonnes $XO_{.i}$ de X $\quad i = 1,2,\ldots N-p$ sont les vecteurs propres normés de A qui vérifient $u^t XO_{.i} = 0$.

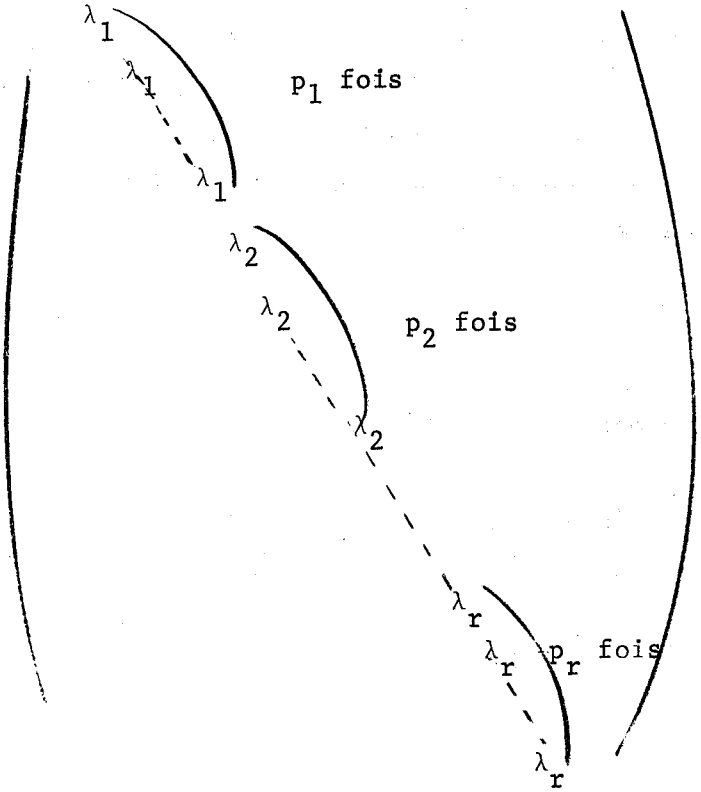
A la matrice orthonormale (X,XO) correspond la matrice des valeurs propres

$$\begin{pmatrix} \Lambda & \\ & \Lambda O \end{pmatrix}$$

avec Λ matrice diagonale des valeurs propres de A relatives aux vecteurs propres figurant dans X et ΛO matrice diagonale des valeurs propres de A relatives aux vecteurs propres figurant dans XO ;

On suppose de plus, pour la commodité de l'exposé, que les colonnes de X sont ordonnées de sorte que Λ s'écrive :

$\Lambda =$



avec $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_r$ et $\sum_{i=1}^{r} p_i = p$.

Les autres valeurs propres de A, figurant dans $\Lambda 0$ sont $\lambda_{r+1}, \ldots \lambda_{r+s}$ que l'on peut également supposer ordonnées :

$\lambda_{r+1} < \lambda_{r+2} < \ldots < \lambda_{r+s}$ où λ_{r+i} a la multiplicité q_i $\quad i = 1,2,\ldots s$

avec $\sum_{i=1}^{s} q_i = N-p$.

A admet ainsi les r+s valeurs propres distinctes :

$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 \ldots < \lambda_r$ d'une part

$\lambda_{r+1} < \lambda_{r+2} \ldots < \lambda_{r+s}$ d'autre part

et on a la relation :

$$A(X,XO) = (X,XO) \times \left(\begin{array}{c|c} \Lambda & \\ \hline & \Lambda O \end{array}\right) \qquad \text{avec } (X,XO) \text{ orthonormale}$$

soit :

$$\boxed{\begin{aligned} AX &= X\Lambda \\ AXO &= XO\Lambda O \\ X^tX &= I_p \\ XO^tXO &= I_{N-p} \end{aligned}} \qquad (1)$$

VII-1-2 Localisation des valeurs propres de $B = A+uu^t$

D'après nos hypothèses $u^tXO = 0 \in R^{N-p}$

d'où $(A+uu^t)XO = AXO = XO\Lambda O$

par conséquent nous avons le résultat suivant :

> $A+uu^t$ admet N-p valeurs propres en commun avec A (celles de ΛO) et les mêmes N-p vecteurs propres orthonormés associés (ceux de XO).

B étant symétrique, nous allons chercher les autres vecteurs propres dans l'espace orthonormal supplémentaire de l'espace engendré par les colonnes de XO, c'est-à-dire dans l'espace engendré par les colonnes de X.

Si y est un vecteur propre on pose donc :

$y = X\omega$ $\qquad \omega \in R^p$ et on a à résoudre en μ et ω l'équation :

$$\boxed{(A+uu^t)X\omega = \mu X\omega} \qquad (2)$$

$$\rightleftarrows \quad X^t(A+uu^t)X\omega = \mu X^tX\omega$$

$$\rightleftarrows \quad [\Lambda+(X^tu)(u^tX)]\omega = \mu\omega$$

soit

$$\boxed{(\Lambda+cc^t)\omega = \mu\omega} \qquad (3)$$

en posant $c = X^tu$ $\qquad c \in \mathbb{R}^p$

Notre problème se ramène donc à la recherche des valeurs propres et vecteurs propres de la matrice $\Lambda+cc^t$ de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

Nous pourrions appliquer les résultats du chapitre précédent pour déterminer le polynôme caractéristique de $\Lambda+cc^t$ mais il est plus simple de procéder comme suit :

En vertu de l'identité $\det(M+uv^t) = \det \begin{pmatrix} M & u \\ v^t & -1 \end{pmatrix}$

on a :

$$-\det(\Lambda+cc^t-\mu I_p) = \det \begin{pmatrix} \Lambda-\mu I_p & c \\ c^t & -1 \end{pmatrix} = 0$$

ce que nous pouvons écrire :

$$\det \begin{pmatrix} (\lambda_1-\mu)I_{p_1} & & & c_1 \\ & (\lambda_2-\mu)I_{p_2} & & c_2 \\ & & (\lambda_r-\mu)I_{p_r} & c_r \\ c_1^t & c_2^t & c_r^t & -1 \end{pmatrix} = 0 \qquad (4)$$

en notant c_1 le vecteur de $\mathbb{R}^{p1}$ composé des p_1 premières composantes de c,

c_2 le vecteur de $\mathbb{R}^{p2}$ composé des p_2 composantes suivantes,

c_r le vecteur de $\mathbb{R}^{pr}$ composé des p_r dernières composantes de c.

Soit μ une racine de $\det(\Lambda+cc^t-\mu I_p) = 0$.

Si on suppose $\mu \neq \lambda_i$ $\quad i = 1,2,..,r$ on a :

$$\det(\Lambda+cc^t-\mu I_p) = \left[1+c^t(\Lambda-\mu I_p)^{-1}c\right] \times \det(\Lambda-\mu I_p) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \left(1+\sum_{i=1}^{r} \frac{\|c_i\|^2}{\lambda_i-\mu}\right) \times \prod_{i=1}^{r} (\lambda_i-\mu)^{p_i} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\prod_{i=1}^{r} (\lambda_i-\mu)^{p_i} + \sum_{i=1}^{r} \left[(\lambda_i-\mu)^{p_i-1} \times \|c_i\|^2 \times \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{r} (\lambda_j-\mu)\right] = 0} \qquad (5)$$

Cette formule obtenue en supposant $\mu \neq \lambda_i \quad i = 1,2,...r$ est en fait le développement de (4), c'est-à-dire le polynôme caractéristique de la matrice $\Lambda+cc^t$.
En reprenant les notations du chapitre précédent on peut écrire :

$$F_{\Lambda+cc^t}(\mu) \equiv \prod_{i=1}^{r} (\lambda_i-\mu)^{p_i-1} \times \left[\prod_{i=1}^{r} (\lambda_i-\mu) + \sum_{i=1}^{r} \|c_i\|^2 \times \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{r} (\lambda_j-\mu)\right] = 0 \qquad (5')$$

de cette identité nous pouvons conclure :

① λ_i est racine d'ordre p_i-1 pour $\Lambda+cc^t \qquad i = 1,2,..,r$
Nous déterminons ainsi un nombre $\sum_{i=1}^{r} (p_i-1) = p-r$ racines de (5') c'est-à-dire $p-r$ valeurs propres de la matrice $\Lambda+cc^t$.

② Posons $g(\mu) = \prod_{i=1}^{r} (\lambda_i-\mu) + \sum_{i=1}^{r} \|c_i\|^2 \prod_{j\neq i} (\lambda_j-\mu)$. On a donc :

$$F_{\Lambda+cc^t}(\mu) \equiv \prod_{i=1}^{r} (\lambda_i-\mu)^{p_i-1} \times g(\mu)$$

Or :

$$g(\lambda_i) = \|c_i\|^2 \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{r} (\lambda_j-\lambda_i)$$

$$g(\lambda_{i+1}) = \|c_{i+1}\|^2 \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i+1}}^{r} (\lambda_j-\lambda_{i+1})$$

mais pour $j > i+1$ et $j < i \qquad (\lambda_j-\lambda_i)(\lambda_j-\lambda_{i+1}) > 0$

$\Rightarrow$ $g(\lambda_i) \times g(\lambda_{i+1})$ du signe de $(\lambda_i-\lambda_{i+1}) \times (\lambda_{i+1}-\lambda_i)$

$\Rightarrow$ $g(\lambda_i)\, g(\lambda_{i+1}) < 0$

$g(\mu)$ admet donc une racine μ_i sur l'intervalle $]\lambda_i, \lambda_{i+1}[\qquad i = 1,2,...r-1$

Par ailleurs :

$g(\lambda_r)$ est du signe de $(-1)^{r-1}$

et $g(\mu)$ est du signe de $(-1)^r$ si μ tend vers $+\infty$, donc

$g(\mu)$ admet une racine μ_r sur l'intervalle $]\lambda_r, +\infty[$

Nous avons ainsi localisé les r racines de $g(\mu)$. En conséquence nous avons localisé toutes les racines de (5') c'est-à-dire toutes les valeurs propres de la matrice $\Lambda+cc^t$.

En résumé nous obtenons le tableau suivant :

valeurs propres de Λ	λ_1		λ_2			λ_r	
multiplicité	p_1		p_2			p_r	
valeurs propres de $\Lambda+cc^t$	λ_1	μ_1	λ_2	μ_2		λ_r	μ_r
multiplicité	p_1-1	1	p_2-1	1		p_r-1	1

avec $\lambda_1 < \mu_1 < \lambda_2 < \mu_2 \ldots < \lambda_r < \mu_r$

Nous traduirons cette propriété en disant que les valeurs propres de la matrice $\Lambda+cc^t$ "séparent" les valeurs propres de la matrice Λ.

Théorème 1 Les valeurs propres de la matrice $A+uu^t$, séparent les valeurs propres de

En effet les racines de $A+uu^t$ sont celles de $\Lambda+cc^t$ d'une part, et celles qui figurent dans ΛO d'autre part, alors que celles de A sont à la fois celles de Λ et ΛO. Nous devons donc ajouter au tableau précédent, les valeurs propres $\lambda_{r+1}, \lambda_{r+2}, \ldots \lambda_{r+s}$ avec la même multiplicité pour A et $A+uu^t$. Ce qui démontre le théorème.

VII-2 - Recherche des vecteurs propres de la matrice $\Lambda+cc^t$.

Comme nous l'avons déjà noté, si $\omega \in \mathbb{R}^p$ est vecteur propre de $\Lambda+cc^t$, relativement à la valeur propre μ, $X\omega$ est vecteur propre de $A+uu^t$ relativement à la même valeur propre. Nous allons distinguer plusieurs cas :

1er cas : Vecteurs propres associés à une valeur propre μ, telle que $\mu = \lambda_i$ $\quad 1 \leq i \leq r$

Dans ce cas nous avons donc nécessairement $p_i > 1$, puisque λ_i est racine de (5'). Le système aux vecteurs propres s'écrit :

$$(\Lambda+cc^t-\lambda_i I_p)\omega = 0 \in \mathbb{R}^p$$

Notons ω_i, le vecteur de $\mathbb{R}^{p_i}$, constitué des composantes de ω dont les indices correspondent à ceux du vecteur c_i, défini précédemment. On a donc :

$$\begin{bmatrix} (\lambda_1-\lambda_i)I_{p_1} & & & & & \\ & (\lambda_2-\lambda_i)I_{p_2} & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & (\lambda_{i-1}-\lambda_i)I_{p_{i-1}} & & \\ & & & & 0 \times I_{p_i} & \\ & & & & & (\lambda_{i+1}-\lambda_i)I_{p_{i+1}} \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & (\lambda_r-\lambda_i)I_{p_r} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_i \\ \vdots \\ c_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1^t & \cdots & c_r^t \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \vdots \\ \omega_i \\ \vdots \\ \omega_r \end{bmatrix} = 0$$

système qui s'écrit :

$$\left(\sum_{j=1}^{r} c_j^t \omega_j\right) \times \begin{vmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_r \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} (\lambda_1-\lambda_i)\omega_1 \\ (\lambda_2-\lambda_i)\omega_2 \\ 0 \times \omega_i \\ \vdots \\ (\lambda_r-\lambda_i)\omega_r \end{vmatrix} = 0 \qquad (6)$$

ce qui donne :

$$\begin{cases} \left(\sum_{j\neq i} c_j^t \omega_j\right) c_i + (c_i^t \omega_i) c_i = 0 \\ \left(\sum_{j\neq i} c_j^t \omega_j\right) c_k + (c_i^t \omega_i) c_k + (\lambda_k-\lambda_i)\omega_k = 0 \qquad k = 1,2,..,i-1,\ i+1,..,r \end{cases}$$

$$c_i \neq 0 \Rightarrow \sum_{j\neq i} c_j^t \omega_j + c_i^t \omega_i = 0$$

$$\Rightarrow (\lambda_k-\lambda_i)\omega_k = 0 \Rightarrow \boxed{\omega_k = 0} \qquad k \neq i$$

$$\Rightarrow (c_i^t \omega_i) = 0 \Rightarrow \boxed{c_i^t \omega_i = 0}$$

Nous prendrons donc : $\omega = \begin{vmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \vdots \\ \omega_r \end{vmatrix}$ $\qquad \omega_j \in \mathbb{R}^{p_j}$

avec $\omega_k = 0$ si $k \neq i$ et $c_i^t \omega_i = 0$

Nous obtenons donc $p_i - 1$ vecteurs ω_i de $\mathbb{R}^{p_i}$ que nous noterons $\omega_i^{(1)}, .., \omega_i^{(p_i-1)}$.

On pourra prendre $\omega_i^{(k)} \in \mathbb{R}^{p_i}$ de la façon suivante :

$$\omega_i^{(k)} = \beta_k \times \begin{vmatrix} c_i^{(k)} \\ \hline \alpha_{i+1} \\ \hline 0 \\ \vdots \\ 0 \end{vmatrix}$$

où $c_i^{(k)}$ est le vecteur constitué des k premières composantes de c_i

$\alpha_{i+1} = -\dfrac{\|c_i^{(k)}\|^2}{c_i(k+1)}$ où $c_i(k+1)$ est la $(k+1)^{ème}$ composante de c_i

β_k étant choisie de sorte que $\|\omega_i^{(k)}\|^2 = 1$

Nous avons alors $c_i^t \omega_i^{(k)} = c_i^{(k)t} c_i^{(k)} + \alpha_{i+1}\, c_i(k+1) = 0$

et $<\omega_i^{(k)}, \omega_i^{(k')}> = 0$ si $k \neq k'$ $\quad 1 \leq k,k' \leq p_i - 1$.

Nous déterminons ainsi entièrement l'espace propre de $\Lambda+cc^t$ associé à la valeur propre λ_i.

2ème cas : Vecteurs propres de $\Lambda+cc^t$ associés à une valeur propre μ, $\mu \neq \lambda_i$ $\quad i = 1,2,\ldots$

On a alors:

$dét(\Lambda+cc^t-\mu I_p) = 0 \overset{\rightarrow}{\leftarrow} 1 + c^t(\Lambda-\mu I_p)^{-1}c = 0$

On peut prendre alors $\omega = (\Lambda-\mu I_p)^{-1}c$. En effet :

$(\Lambda-\mu I_p+cc^t) \times (\Lambda-\mu I_p)^{-1}c = c(1+c^t(\Lambda-\mu I_p)^{-1}c = 0$

donc

$\omega = (\Lambda-\mu I_p)^{-1}c$ est vecteur propre relativement à μ.

Ceci achève donc la détermination des vecteurs propres de la matrice $\Lambda+cc^t$, et en conséquence ceux de $A+uu^t$.

VII-3 Applications :

Nous avons du point de vue pratique écrit la procédure "AUGMENTATION". Lorsqu'on connait les valeurs propres et vecteurs propres d'une matrice symétrique A, cette procédure permet de calculer les valeurs propres et un système de vecteurs propres pour la matrice augmentée $A+uu^t$. Nous avons testé cette procédure de la façon suivante :

Soit A symétrique d'ordre N que l'on écrit sous la forme $A = \sum_{i=1}^{p} u_i v_i^t$ (pour une matrice symétrique définie positive, p peut être pris égal à N). On part de la matrice identiquement nulle, qui admet la valeur propre 0 avec la multiplicité N, et les vecteurs de la base canonique comme vecteurs propres orthornormés. En activant ensuite p fois la procédure "Augmentation", nous obtenons les valeurs propres de A ainsi qu'un système orthonormé de vecteurs propres. Les résultats que nous avons obtenus semblent assez satisfaisants. (voir les exemples qui suivent).

```
PROCEDURE BISSECTION(F,Y1,Y2,EPS,ETA,X,PASDERACINE);
VALEUR Y1,Y2;
REEL PROCEDURE F;
REEL Y1,Y2,EPS,ETA,X;
ETIQUETTE PASDERACINE;
COMMENTAIRE CETTE PROCEDURE EST DESTINEE A TROUVER UN ZERO DE LA
FONCTION F (DECLAREE REEL PROCEDURE F(X)) ENTRE Y1 ET Y2 . -CALCUL DE
F(Y1) ET DE F(Y2) . - SI L'UNE DE CES QUANTITES EST INFERIEURE A EPS
EN VALEUR ABSOLUE , LA RACINE X EST EGALE A L'ABCISSE CORRESPONDANTE .
- SINON , SI CES QUANTITES SONT DE MEME SIGNE , ON SORT DE LA
PROCEDURE POUR ALLER A PASDERACINE . ( CETTE ETIQUETTE DEVRA
OBLIGATOIREMENT FIGURER DANS LE PROGRAMME ) . - DANS LE CAS OU F(Y1)
ET F(Y2) SONT DE SIGNES DIFFERENTS , ON PARTAGE L'INTERVALLE EN 2
PARTIES EGALES , ON TESTE CELLE OU LA FONCTION CHANGE DE SIGNE ET ON
RECOMMENCE JUSQU'A CE QUE - - SOIT LA LONGUEUR DE L'INTERVALLE EST
'INFER'ETA - - SOIT LA FONCTION EST 'INFER'EPS A L'UNE DES EXTREMITES
DE L'INTERVALLE . REMARQUES :1 - CETTE PROCEDURE EST AVANTAGEUSE DANS
LE CAS OU L'ON A DEJA LOCALISE GROSSIEREMENT UN ZERO DE F . 2 - SI
DANS L'INTERVALLE (Y1,Y2) ,ON A UN NOMBRE PAIR DE ZEROS DE F , CETTE
PROCEDURE N'EN TROUVERA AUCUN (SIGNE(F(Y1)) = SIGNE(F(Y2))) . SORTIE
VERS PASDERACINE . 3 - SI CE NOMBRE EST IMPAIR , BISSECTION FOURNIRA
UN QUELCONQUE DE CES ZEROS ;
DEBUT
        ENTIER I,J,K;
        REEL G,G1;
        I:=J:=K:=1;
        X:=Y2;
ALPHA:  G:=F(X);
        SI ABS(G) < EPS ALORS ALLERA  TERM;
        SI I=1 ALORS
        DEBUT
                I:=2;
                G1:=G;
                X:=Y1;
                ALLERA  ALPHA
        FIN ;
        SI SIGN(G)=SIGN(G1) ALORS
        DEBUT
                SI J=1 ALORS ALLERA  PASDERACINE;
                Y2:=X;
                ALLERA  TEST
        FIN ;
        SI K=1 ALORS
        DEBUT
                J:=K:=2;
                ALLERA  MILIEU
        FIN ;
        Y1:=X;
TEST:   SI ABS(Y1-Y2) < ETA ALORS ALLERA  TERM;
MILIEU:X:=(Y1+Y2)/2.0;
        ALLERA  ALPHA;
TERM:
FIN PROCEDURE BISSECTION ;
```

```
PROCEDURE AUGMENTATION(N,X,L,Z,M,XX,LL,ZZ,MM,U) ;
ENTIER N,L,LL;
TABLEAU X,Z,ZZ,U,XX;
ENTIER TABLEAU M,MM;

COMMENTAIRE  SI A MATRICE CARREE D'ORDRE N
ADMET LES VALEURS PROPRES RANGEES DANS
L'ORDRE CROISSANT Z[I] I=1,2,...L AVEC
LA MULTIPLICITE M[I] , AINSI QUE LE SYSTEME
ORTHONORME DE VECTEURS PROPRES X[1:N,1:N],
LA PROCEDURE CALCULE LES LL VALEURS PROPRES
DE A+U*UT  ET LES RANGE DANS L'ORDRE CROISSANT
DANS LE TABLEAU ZZ[1:LL], ZZ[I] AYANT LA
MULTIPLICITE MM[I]. ON OBTIENT EGALEMENT UN
SYSTEME  ORTHONORME DE VECTEURS PROPRES POUR
LA MATRICE AUGMENTEE DANS LE TABLEAU XX[1:N,1:N];

DEBUT
        ENTIER I,J,K,A,B,ALFA,S,W;
        ENTIER NN;
        REEL R,RR,EPS1,EPS2,MU,EPS,ETA,TOTO;
        TABLEAU C[1:N],CC[1:L];
        ENTIER TABLEAU P,Q,SI[1:L];
        EPS1:=EPS2:=Δ-20;
        K:=0;
        EPS:=Δ-5;
        ETA:=Δ-6;
        TOTO:=0.0;
ET1:    POUR I:=1 PAS 1 JUSQUA L FAIRE
        DEBUT
                Q[I]:=0;
                CC[I]:=0.0;
                A:=K+M[I];
                B:=K+1;
ET2:            POUR J:=K+1 PAS 1 JUSQUA K+M[I] FAIRE
                DEBUT
                        R:=0.0;
                        POUR ALFA:=1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
ET3:                    R:=R+U[ALFA]*X[ALFA,J];
                        SI ABS(R) ≤ EPS1 ALORS
                        DEBUT
                                Q[I]:=Q[I]+1;
                                C[B]:=0.0;
                                POUR ALFA:=1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
ET4:                            XX[ALFA,B]:=X[ALFA,J];
                                B:=B+1;

                        FIN

                        SINON ET5:
                        DEBUT
                                C[A]:=R;
                                CC[I]:=CC[I]+R**2;
                                POUR ALFA:=1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
```

```
                                XX[ALFA,A]:=X[ALFA,J];
                                A:=A-1;
ET6:
                        FIN
                FIN ;

                K:=K+M[I];
                P[I]:=ABS(M[I]-Q[I]);

        FIN ;

        POUR I:=1 PAS 1 JUSQUA L FAIRE
        TOTO:=TOTO+CC[I];
        DEBUT
                REEL PROCEDURE G(MU) ;
                VALEUR MU;
                REEL MU;
                DEBUT
                        REEL PI,PIPI;
                        ENTIER I,J;
                        J:=0;
                        PI:=1.0;
                        POUR I:=1 PAS 1 JUSQUA L FAIRE
                        SI P[I] ≠ 0 ALORS
                        DEBUT
                                SI ABS(Z[I]-MU) ≠ 0 ALORS
                                PI:=PI*(Z[I]-MU)
                                SINON J:=I;
                        FIN ;

                        PIPI:=PI;
                        SI J ≠ 0 ALORS G:=PI*CC[J]
                        SINON
                        DEBUT
                                POUR I:=1 PAS 1 JUSQUA L FAIRE
                                SI P[I] ≠ 0 ALORS PIPI:=PIPI+
                                CC[I]*PI/(Z[I]-MU);
                                G:=PIPI;

                        FIN ;

                FIN G ;

                A:=1;
                POUR I:=1 PAS 1 JUSQUA L FAIRE
                SI ABS(P[I]) ≠ 0 ALORS
                DEBUT
                        SI[I]:=A;
                        A:=-A;

                FIN
                SINON
                DEBUT
                        R:=G(Z[I]);
                        SI ABS(R) < EPS ALORS SI[I]:=0
```

```
                    SINON SI[I]:=SIGNE(R);

                FIN ;
T10:            POUR I:=1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
                POUR J:=1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
                X[I,J]:=0.0;
                K:=LL:=0;
                W:=1;
                POUR I:=1 PAS 1 JUSQUA L FAIRE
                DEBUT
                        A:=K+Q[I];
                        B:=P[I]-1;
                        POUR J:=K+1 PAS 1 JUSQUA A FAIRE
                        X[J,W+J-1-K]:=1.0;
                        RR:=0.0;
                        W:=W+Q[I];
                        POUR J:=1 PAS 1 JUSQUA B FAIRE
                        DEBUT
                                A:=A+1;
:T11:                           R:=C[A];
                                POUR ALFA:=J PAS 1 JUSQUA B FAIRE
                                X[A,W+ALFA-1]:=R;
                                RR:=RR-R**2;
                                X[A+1,W+J-1]:=RR/C[A+1];

                        FIN ;
:T12:                   W:=W+P[I]-1+(
                        SI P[I]=0 ALORS 1
                        SINON 0);
                        MM[LL+1]:=Q[I]+(
                        SI P[I] ≠ 0 ALORS P[I]-1
                        SINON 0)+(
                        SI SI[I]=0 ALORS 1
                        SINON 0);
                        SI MM[LL+1] ≠ 0 ALORS
                        DEBUT
                                LL:=LL+1;
                                ZZ[LL]:=Z[I];
                                SAUTLIGNE;
                                SAUTLIGNE;
:T13:
                        FIN ;
                        SI SI[I]=0 ALORS
                        DEBUT
                                S:=0;
                                POUR J:=1 PAS 1 JUSQUA L FAIRE
                                DEBUT
                                        SI J ≠ I ALORS
                                        POUR ALFA:=S+1 PAS 1 JUSQUA S+
                                        M[J] FAIRE
                                        X[ALFA,W]:=C[ALFA]/
                                        (Z[J]-Z[I]);
                                        S:=S+M[J];

                                FIN ;
```

```
                                W:=W+1;

                        FIN
                        SINON
                        SI  I  <  L  ALORS
                        DEBUT
                                SI SI[I]*SI[I+1] < 0 ALORS
                                DEBUT
                                        S:=0;
ET14:                                   BISSECTION(G,Z[I],Z[I+1],
                                        EPS,ETA,MU,NON);
                                        LL:=LL+1;
                                        ZZ[LL]:=MU;
                                        MM[LL]:=1;
                                        POUR J:=1 PAS 1 JUSQUA L FAIRE
                                        DEBUT
                                        POUR ALFA:=S+1 PAS 1 JUSQUA S+
                                        M[J]
                                        FAIRE
                                        X[ALFA,W]:=C[ALFA]/
                                        (Z[J]-MU);
                                        S:=S+M[J];
ET15:
                                FIN ;
                                W:=W+1;

                        FIN
                FIN
                SINON
                DEBUT
                        TOTO:=Z[L]+TOTO;
                        S:=J:=0;
                        BISSECTION(G,Z[L],TOTO,EPS,ETA,MU,NON);
                        LL:=LL+1;
                        ZZ[LL]:=MU;
                        MM[LL]:=1;
                        POUR J:=1 PAS 1 JUSQUA L FAIRE
                        DEBUT
                                POUR ALFA:=S+1 PAS 1 JUSQUA S+M[J]
                                FAIRE
                                X[ALFA,W]:=C[ALFA]/(Z[J]-MU);
                                S:=S+M[J];

                        FIN ;

                FIN ;
                K:=K+M[I];

        FIN BOUCKI ;

FIN ;
POUR I:=1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
DEBUT
        POUR J:=1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
        C[J]:=0.0;
```

```
                POUR J:=1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
                POUR K:=1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
                C[J]:=XX[I,K]*X[K,J]+C[J];
                POUR J:=1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
                XX[I,J]:=C[J];

        FIN ;
        POUR I:=1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
        DEBUT
                R:=0.0;
                POUR J:=1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
                R:=R+XX[J,I]**2;
                R:=RAC2(R);
                POUR J:=1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
                XX[J,I]:=XX[J,I]/R;

        FIN
FIN AUGMENTATION ;
```

Exemple ①

$$\text{Matrice A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

On a obtenu pour les valeurs propres: (nous effectuons la comparaison des résultats donn par DURAND [11])

Procédure AUGMENTATION	Méthode de RUTISHAUSER (13ème itération)	Valeurs "exactes"
$0.00380159\ 10^1$	0.038016017	0.038016015
$0.04538336\ 10^1$	0.045383458	0.45384500
$0.22034471\ 10^1$	2.2034461	2.203446167
$0.26304702\ 10^2$	26.304703	26.304703267

Exemple ②

$$\text{Matrice A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

résultats obtenus :

Procédure Augmentation	Valeurs exactes
0.38196653	$(3-\sqrt{5})/2 \# 0.38196601$
$0.13819661\ 10^1$	$(5-\sqrt{5})/2 \# 0.13819660\ 10^1$
$0.26180336\ 10^1$	$(3+\sqrt{5})/2 \# 0.26180340\ 10^1$
$0.36180343\ 10^1$	$(5+\sqrt{5})/2 \# 0.36180340\ 10^1$

VII-4 Généralisation :

Nous nous donnons les matrices :

A symétrique d'ordre N ,
B symétrique définie positive d'ordre N.

On considère la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^N$:

$$\Phi(x,\lambda) = x^t(A-\lambda B)x \qquad \text{où } \lambda \in \mathbb{R}.$$

$\lambda \in R$ est dite valeur propre de Φ , et x vecteur propre associé à λ, si et seulement si :

$$\boxed{Ax = \lambda Bx} \qquad (7)$$

La recherche des couples (λ,x) vérifiant (7) est en effet un problème classique. B étant symétrique définie positive, il existe une matrice régulière que nous noterons $B^{1/2}$ telle que : (a) $B^{1/2}$ est symétrique

(b) $(B^{1/2})^2 = B$

Notons $(B^{1/2})^{-1} = B^{-1/2}$. L'équation (7) peut s'écrire en posant $x = B^{-1/2}y$

$$AB^{-1/2}y = \lambda B^{1/2}y$$

$$\Rightarrow \quad B^{-1/2}AB^{-1/2}y = \lambda y$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{(B^{-1/2}AB^{-1/2}-\lambda I)y = 0} \qquad (8)$$

donc si λ est valeur propre de Φ, et x vecteur propre associé, λ est valeur propre de la matrice symétrique $B^{-1/2}AB^{-1/2}$, et $y = B^{1/2}x$ est vecteur propre de $B^{-1/2}AB^{-1/2}$ associé à λ.

Remplaçons maintenant A par $A+uu^t$; nous obtenons la forme quadratique "augmentée"

$$\Psi(x,\lambda) = x^t(A+uu^t-\lambda B)x$$

$$= \Phi(x,\lambda) + (u^t x)^2$$

$$= \Phi(x,\lambda) + \varphi^2(x)$$

où $\varphi(x)$ est une forme linéaire homogène.

Les valeurs propres de la forme quadratique Ψ , sont celles de la matrice symétri
$C = B^{-1/2}(A+uu^t)B^{-1/2}$

c'est-à-dire $C = B^{-1/2}AB^{-1/2} + (B^{-1/2}u) \cdot (u^tB^{-1/2})$

$$= B^{-1/2}AB^{-1/2} + vv^t \qquad \text{avec } v = B^{-1/2}u$$

en effet $B^{1/2}$ est symétrique, donc $u^tB^{-1/2} = (B^{-1/2}u)^t = v^t$.

D'après le théorème 1 nous avons donc :

Théorème 2

> Si $\varphi(x)$ est une forme linéaire homogène, les valeurs propres de la forme quadratique augmentée, $\Psi(x,\lambda) = \Phi(x,\lambda) + \varphi^2(x)$, séparent les valeurs propr
> de la forme quadratique $\Phi(x,\lambda)$.

Ceci est un résultat dû à GANTMACHER (voir [12]). La manière dont nous l'avons obtenu ici, va nous permettre de donner une propriété réciproque intéressante.

VII-4 - Une propriété réciproque du théorème de séparation

On peut énoncer le problème de la manière suivante : A étant une matrice symétrique dont les valeurs propres $\lambda_1,\lambda_2,..,\lambda_N$ sont connues, et $\mu_1,\mu_2,..,\mu_N$ étant N nombres réels donnés, existe-t-il $u \in \mathbb{R}^N$ tel que la matrice symétrique $A+uu^t$ admette comme valeurs propres les μ_i $\quad i = 1,2,..,N$.

(1°) D'après le théorème direct, une condition nécessaire est que les μ_i séparent les λ_i $i = 1,2..,N$ c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \lambda_i \leq \mu_i \leq \lambda_{i+1} & i = 1,2...N-1 \\ \lambda_N \leq \mu_N \end{cases}$$

(2°) Supposons cette condition satisfaite. Nous allons distinguer un cas particulier plus le cas général.

1er cas

$$\lambda_1 < \mu_1 < \lambda_2 < \mu_2 < \ldots < \lambda_{N-1} < \mu_{N-1} < \lambda_N < \mu_N$$

Toutes les valeurs propres de A et $A+uu^t$ (u inconnu) sont donc distinctes, donc simples. Le polynôme caractéristique de $A+uu^t$ s'écrit d'après (5') :

$$F_{A+uu^t}(\mu) \equiv \prod_{i=1}^{N} (\lambda_i - \mu) + \sum_{i=1}^{N} c_i^2 \prod_{j \neq i} (\lambda_j - \mu) = 0$$

avec $c_i = u^t X_{.i}$ $\quad i = 1,2..,N.$

Posons $c_i^2 = x_i$ $\quad i = 1,2..,N.$ Ce sont les inconnues de notre problème.
Ecrivons que

$$F_{A+uu^t}(\mu_k) = 0 \qquad k = 1,2..,N$$

$$\Leftrightarrow \quad \prod_{i=1}^{N} (\lambda_i - \mu_k) + \sum_{i=1}^{N} x_i \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} (\lambda_j - \mu_k) = 0 \qquad k = 1,2,..,N$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 + \sum_{i=1}^{N} \frac{x_i}{\lambda_i - \mu_k} = 0 \qquad (7) \qquad (\text{car } \lambda_i \neq \mu_k \quad \forall\, i, \forall\, k)$$

Nous avons donc à résoudre le système :

$$Ax = b$$

avec

$$a_{ij} = \frac{1}{\mu_i - \lambda_j} \qquad b_i = 1 \qquad i,j = 1,2,..,N$$

La matrice A est dite matrice généralisant la matrice d'Hilbert, et on sait en calcul formellement l'inverse. cf. GASTINEL [13]. Posons:

$$A^{-1} = (a_{ij}^{-1})$$

$$q(x) = (x-\lambda_1)\ (x-\lambda_2)\ldots(x-\lambda_N)$$

$$p(x) = (x-\mu_1)\ (x-\mu_2)\ldots(x-\mu_N)$$

on a $$\boxed{a_{ij}^{-1} = \frac{q(\mu_j)\ p(\lambda_i)}{q'(\lambda_i)p'(\mu_j)(\lambda_i-\mu_j)}} \qquad (8)$$

$$\Rightarrow \qquad x_i = \sum_{j=1}^{N} a_{ij}^{-1}\, b_j = \sum_{j=1}^{N} a_{ij}^{-1}$$

$$\Rightarrow \qquad x_i = \frac{p(\lambda_i)}{q'(\lambda_i)} \sum_{j=1}^{N} \frac{q(\mu_j)}{p'(\mu_j)(\lambda_i-\mu_j)}$$

Considérons la fraction rationnelle $\frac{q(x)}{p(x)}$. En la décomposant en éléments simples on obtient :

$$\frac{q(x)}{p(x)} = 1 + \sum_{j=1}^{N} \frac{\alpha_j}{x-\mu_j}$$

avec $\alpha_j = \frac{q(\mu_j)}{p'(\mu_j)}$ puisque les μ_j sont pôles simples.

$$\Rightarrow \qquad \frac{q(x)}{p(x)} = 1 + \sum_{j=1}^{N} \frac{q(\mu_j)}{p'(\mu_j)(x-\mu_j)}$$

mais pour $x = \lambda_i$ $\quad q(x) = 0$

$$\Rightarrow \qquad 0 = 1 + \sum_{j=1}^{N} \frac{q(\mu_j)}{p'(\mu_i)\times(\lambda_i-\mu_j)}$$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{x_i = -\frac{p(\lambda_i)}{q'(\lambda_i)}} \qquad i = 1,2,..,N \qquad (9)$$

Or $p(\lambda_i) = (\lambda_i-\mu_1)\ (\lambda_i-\mu_2)\ldots(\lambda_i-\mu_{i-1})\ (\lambda_i-\mu_i)\ (\ldots)\ (\lambda_i-\mu_N)$

donc $p(\lambda_i)$ du signe de $(-1)^{N-i+1}$.

De même $q'(\lambda_i) = (\lambda_i-\lambda_1)\ (\lambda_i-\lambda_2)\ldots(\lambda_i-\lambda_{i-1})\ (\lambda_i-\lambda_{i+1})\ldots(\lambda_i-\lambda_N)$

donc $q'(\lambda_i)$ du signe de $(-1)^{N-i}$.

$$\Rightarrow \qquad x_i > 0 \qquad\qquad i = 1,2,..,N$$

Par conséquent le système $Ax = b$ admet une solution strictement positive $x_i = \dfrac{-p(\lambda_i)}{q'(\lambda_i)}$ $i = 1,..,N$

Calcul de u :

$$x_i = (u^t X_{.i})^2 = \frac{-p(\lambda_i)}{q'(\lambda_i)}$$

$$\Rightarrow \qquad (u^t X_{.i}) = \pm\sqrt{\frac{-p(\lambda_i)}{q'(\lambda_i)}} = \varepsilon_i\sqrt{\frac{-p(\lambda_i)}{q'(\lambda_i)}} \qquad \varepsilon_i = \pm 1$$

or $u^t X_{.i} = X^t_{.i} u = (X^r u)_i$

$$\Rightarrow \qquad X^t u = y \text{ avec } y = \begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{vmatrix} \qquad y_i = \varepsilon_i\sqrt{\frac{-p(\lambda_i)}{q'(\lambda_i)}}$$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{u = Xy} \qquad\qquad (10)$$

Ainsi dans la base orthonormée des vecteurs propres de A, le vecteur u (unique à des symétries près par rapport aux axes) admet comme composantes les

$$y_i = \sqrt{\frac{-p(\lambda_i)}{q'(\lambda_i)}} \qquad i = 1,2,..,N$$

Cas général :

A admet les valeurs propres λ_i $\quad i = 1,2,..,r$
avec la multiplicité p_i

La propriété directe nous impose le choix de p_i-1 valeurs propres de $A+uu^t$ égal à λ_i. Il reste donc r nombres $\mu_1,\mu_2,\ldots\mu_r$ qui doivent vérifier :

$$\lambda_1 \leq \mu_1 \leq \lambda_2 \ldots \leq \lambda_r < \mu_r.$$

Le polynôme caractéristique de $A+uu^t$ (u inconnu) s'écrit d'après (5') :

$$F_{A+uu^t}(\mu) \equiv \prod_{i=1}^{r} (\lambda_i-\mu)^{p_i-1} \times \Big[\prod_{i=1}^{r} (\lambda_i-\mu) + \sum_{i=1}^{r} \|c_i\|^2 \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{r} (\lambda_j-\mu)\Big] = 0 \qquad (11)$$

où $\|c_i\|^2 = \sum_{k\in I} (u^t X_{.k})^2$

avec $k \in I \overset{\rightarrow}{\leftarrow} AX_{.k} = \lambda_i X_{.k}$

c'est-à-dire que $\|c_i\|^2$ est le carré de la norme de la projection du vecteur inconnu $X^t u$, sur l'espace propre E_i de A, associé à la valeur propre λ_i.
Nous devons pour déterminer les $\|c_i\|^2$ $\quad i = 1,2,..,r$ écrire que :

① $F_{A+uu^t}(\mu)$ admet la racine λ_i, p_i-1 fois ce qui est réalisé par l'écriture

② $F_{A+uu^t}(\mu_k) = 0 \qquad k = 1,2,..,r.$

* Si nous avons les inégalités strictes

$$\lambda_1 < \mu_1 < \lambda_2 \ldots < \lambda_r < \mu_r$$

alors nous obtenons de manière tout-à-fait analogue au premier cas le système d'ordre r :

$$1 + \sum_{i=1}^{r} \frac{x_i}{\lambda_i-\mu_j} = 0 \qquad (12) \qquad j = 1,2,..,r$$

où $x_i = \|c_i\|^2$ $\quad i = 1,2,\ldots r$

et ce système admet la solution strictement positive $x_i = -\dfrac{p(\lambda_i)}{q'(\lambda_i)}$

avec $\begin{cases} p(x) = \prod_{i=1}^{r} (x-\mu_i) \\ q(x) = \prod_{i=1}^{r} (x-\lambda_i) \end{cases}$

u n'est alors connu que par le carré de la norme de sa projection sur chacun des espaces propres E_i de A $\quad i = 1,2\ldots r$.

En prenant par exemple:

$$(u^t X_{.k})^2 = \frac{x_i}{p_i} \qquad \text{pour } k \in I$$

on a :

$$u = Xy \text{ avec } \quad y = \begin{vmatrix} \varepsilon_1 \sqrt{-\frac{1}{p_1}\frac{p(\lambda_1)}{q'(\lambda_1)}} \\ \vdots \\ \varepsilon_2 \sqrt{-\frac{1}{p_2}\frac{p(\lambda_2)}{q'(\lambda_2)}} \\ \vdots \\ \varepsilon_r \sqrt{-\frac{1}{p_r}\frac{p(\lambda_r)}{q'(\lambda_r)}} \end{vmatrix} \begin{matrix} \} p_1 \text{ fois} \\ \\ \} p_2 \text{ fois} \\ \\ \vdots \\ \} p_r \text{ fois} \end{matrix}$$

* Si pour un indice i nous avons $\mu_i = \lambda_i$ cela signifie que λ_i est d'ordre p_i pour $A+uu^t$. L'équation (11) nous impose alors de prendre $\|c_i\|^2 = 0$.

Si pour un indice i nous avons $\mu_{i-1} = \lambda_i$ et $\mu_i \neq \lambda_i$ alors λ_i est de multiplicité p_i et nous devons prendre $\|c_i\|^2 = 0$

Si on a à la fois $\mu_i = \mu_{i-1} = \lambda_i$ on devra également prendre $\|c_i\|^2 = 0$. Dans ce cas λ_i est de multiplicité p_i+1 pour $A+uu^t$. Les quantités c_i^2 qui ne sont pas nulles sont obtenues en résolvant le système résultant du système (12) après suppression des équations inutiles et inconnues inutiles. Nous donnons un exemple ci-après.

Exemple : Soit A avec comme valeurs propres :

$$\begin{cases} \lambda_1 \text{ avec la multiplicité } 3 \\ \lambda_2 \quad " \quad " \quad 2 \\ \lambda_3 \quad " \quad " \quad 1 \\ \lambda_4 \quad " \quad " \quad 3 \end{cases}$$

et on cherche $u \in \mathbb{R}^9$ tel que $A+uu^t$ admette les valeurs propres :

$$\begin{cases} \lambda_1 \text{ avec la multiplicité } 2 \\ \lambda_2 \quad " \quad " \quad 2 \\ \mu_2 \quad " \quad " \quad 1 \\ \lambda_4 \quad " \quad " \quad 4 \end{cases}$$

avec $\lambda_1 < \lambda_2 < \mu_2 < \lambda_3 < \lambda_4$ la condition nécessaire de séparation est satisfaite

Le polynôme caractéristique de $A+uu^t$ s'écrit :

$$F_{A+uu^t}(\mu) \equiv (\lambda_1-\mu)^2 (\lambda_2-\mu) (\lambda_4-\mu)^2 \times g(\mu) \qquad \text{avec}$$

$$g(\mu) \equiv (\lambda_1-\mu) (\lambda_2-\mu) (\lambda_3-\mu) (\lambda_4-\mu) + c_1^2(\lambda_2-\mu) (\lambda_3-\mu) (\lambda_4-\mu)$$

$$+ c_2^2(\lambda_1-\mu) (\lambda_3-\mu) (\lambda_4-\mu) + c_3^2(\lambda_1-\mu) (\lambda_2-\mu) (\lambda_4-\mu)$$

$$+ c_4^2(\lambda_1-\mu) (\lambda_2-\mu) (\lambda_3-\mu)$$

Les valeurs que nous nous sommes imposées comme valeurs propres pour $A+uu^t$, nous mont que λ_2 doit être racine de $g(\mu)$ c'est-à-dire $c_2^2 = 0$ de même $g(\lambda_4) = 0 \Rightarrow c_4^2 = 0$

$$\Rightarrow g(\mu) \equiv (\lambda_1-\mu) (\lambda_2-\mu) (\lambda_3-\mu) (\lambda_4-\mu) + c_1^2(\lambda_2-\mu) (\lambda_3-\mu) (\lambda_4-\mu)$$

$$+ c_3^2(\lambda_1-\mu) (\lambda_2-\mu) (\lambda_4-\mu)$$

et il nous reste à écrire que $g(\mu)$ admet les racines μ_2 et $\mu_4 = \lambda_4$

$$\Rightarrow \quad \left\| \begin{array}{l} 1 + \dfrac{c_1^2}{\lambda_1 - \mu_2} + \dfrac{c_3^2}{\lambda_3 - \mu_2} = 0 \\ \\ 1 + \dfrac{c_1^2}{\lambda_1 - \lambda_4} + \dfrac{c_3^2}{\lambda_3 - \lambda_4} = 0 \end{array} \right.$$

système qui admet une solution strictement positive en c_1^2, c_3^2 car $\lambda_1 < \mu_2 < \lambda_3 < \lambda_4$.

Théorème 3

Si la matrice A, symétrique, d'ordre N, admet les valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_N$, une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe $u \in \mathbb{R}^N$ tel que la matrice augmentée $A+uu^t$ admette les valeurs propres $\mu_1, \mu_2, .., \mu_N$ est que les μ_i $i = 1,2,..,N$ séparent les λ_i $i = 1,2,.,N$ c'est-à-dire :

$$\lambda_i \leq \mu_i \leq \lambda_{i+1} \qquad i = 1,2,.,N-1$$

$$\lambda_N \leq \mu_N$$

Soit A symétrique d'ordre N. Considérons l'application φ de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}^N$:

$$u \in \mathbb{R}^N \Rightarrow \varphi(u) = \left| \begin{array}{l} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_N \end{array} \right|$$

où les μ_i sont les valeurs propres ordonnées de la matrice symétrique $A+uu^t$.

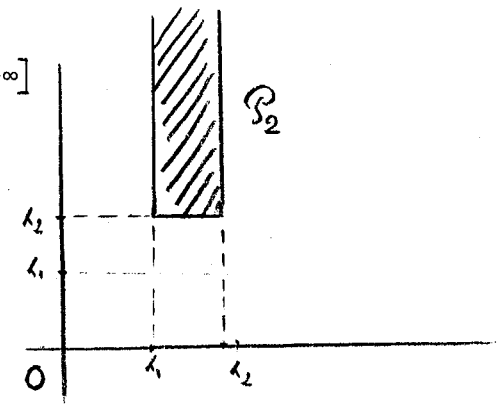
Si $\varphi(\vec{0}) = \left| \begin{array}{l} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_N \end{array} \right|$ alors nous pouvons énoncer le résultat suivant :

L'image dans $\mathbb{R}^N$ de $\mathbb{R}^N$ par l'application φ est le pavé infini

$$\mathcal{P}_N = [\lambda_1,\lambda_2] \times [\lambda_2,\lambda_3] \times \ldots \times [\lambda_{N-1}\lambda_N] \times [\lambda_N,+\infty]$$

pour N = 2 nous avons

$$\mathcal{P}_2 = [\lambda_1,\lambda_2] \times [\lambda_2 + \infty]$$



Autre conséquence :

Soit A une matrice symétrique définie positive d'ordre N ; $\lambda_1,\lambda_2,..,\lambda_N$ ses valeurs propres :

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \ldots \leq \lambda_N.$$

Le conditionnement $\gamma(A)$ de la matrice A peut être mesuré par le rapport $\frac{\lambda_1}{\lambda_N}$

$$\gamma(A) = \frac{\lambda_1}{\lambda_N}$$

$$0 < \gamma(A) \leq 1$$

Plus $\gamma(A)$ sera proche de 1, meilleur sera le conditionnement de A.
Si nous considérons alors la matrice augmentée $B = A+uu^t$, B est également symétrique définie positive et les valeurs propres μ_i $i = 1,2,..,N$ de B séparent celles de A.

$$\lambda_i \leq \mu_i \leq \lambda_{i+1} \qquad i = 1,2,..,N-1$$

$$\lambda_N \leq \mu_N$$

et on a $0 < \gamma(B) = \frac{\mu_1}{\mu_N}$

Or d'après le théorème (3) on peut choisir u_o de telle sorte que $\mu_1 = \lambda_2$ et $\mu_N = \lambda_N$ et alors en posant $B_o = A+u_o u_o^t$

$$\gamma(B_o) = \frac{\lambda_2}{\lambda_N}$$

De même il existe u_1 tel que $\gamma(B_1) = \frac{\lambda_1}{\lambda_{N-1}}$. On a donc :

Théorème 4

Soit A est symétrique définie positive d'ordre N, avec les valeurs propres $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \cdots \leq \lambda_N$. On note $\gamma(A) = \frac{\lambda_1}{\lambda_N}$ son conditionnement. Alors quel que soit $u \in \mathbb{R}^N$ on a

$$0 < \gamma(A+uu^t) \leq \frac{\lambda_2}{\lambda_N}$$

l'égalité ayant lieu pour un choix particulier du vecteur u.

Ainsi si l'on veut par addition de la matrice antiscalaire uu^t, améliorer le conditionnement de la matrice A, nous ne pourrons faire mieux que prendre $\gamma(A+uu^t) = \frac{\lambda_2}{\lambda_N}$

Remarque :

Soit A une matrice symétrique dont toutes les valeurs propres sauf une sont en module strictement inférieures à l'unité. Par exemple :

$$-1 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \cdots \leq \lambda_{N-1} < 1 \leq \lambda_N$$

D'après le théorème (3) il existe u tel que la matrice $A-uu^t$ admette les valeurs propres μ_i $\quad i = 1,2..,N$ avec

$$-1 < \mu_1 \leq \lambda_1 \leq \mu_2 \leq \lambda_2 \cdots \leq \lambda_{N-1} \leq \mu_N < 1 \leq \lambda_N$$

autrement dit le rayon spectral de $A+uu^t$ est inférieur strictement à l'unité. Ce qui est on le sait une condition suffisante de convergence pour l'itération linéaire :

$$x_{N+1} = (A+uu^t)x_N + k \qquad x_{N+1}, x_N, k \in \mathbb{R}^N$$

CHAPITRE - VIII

Relations entre matrices bordées et matrices augmentées

Nous essayons dans ce chapitre de rapprocher les propriétés des matrices augmentées, de celles des matrices bordées. Les résultats que nous avons obtenus dans les chapitres précédents, nous montrent en effet que les deux notions sont très voisines, en un sens que nous allons préciser.

VIII-1 - Rappel

Nous avons vu chapitre I la relation :

$$\det(A+uv^t) = \det \begin{pmatrix} A & -u \\ v^t & 1 \end{pmatrix}$$

De plus nous avons avec les hypothèses $\begin{cases} A \text{ régulière} \\ 1+v^t A^{-1} u \neq 0 \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} A & -u \\ v^t & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} (A+uv^t)^{-1} & , & \dfrac{-A^{-1}u}{1+v^t A^{-1}u} \\ \dfrac{v^t A^{-1}}{1+v^t A^{-1}u} & , & \dfrac{1}{1+v^t A^{-1}u} \end{pmatrix}$$

Il y a donc une liaison étroite entre l'inversion de la matrice bordée $\begin{pmatrix} A & -u \\ v^t & 1 \end{pmatrix}$ et celle de la matrice augmentée $A+uv^t$.

VIII-2 - Un résultat dû à Hearon, cf. [14] est le suivant :

Soit la matrice bordée : $B = \begin{pmatrix} D & a \\ b^t & \alpha \end{pmatrix}$

avec D matrice diagonale de $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ $\quad D = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & d_2 & \\ & & d_N \end{pmatrix}$

$$a = \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{vmatrix} \in \mathbb{R}^N, \qquad b = \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_N \end{vmatrix} \in \mathbb{R}^N \text{ et } a_i b_i > 0 \qquad i = 1,2,\ldots N$$

$\alpha \in \mathbb{R}$

Dans ces conditions il existe une matrice diagonale régulière, T, telle que:

(1°) $T^{-1}BT = A$ est symétrique .

(2°) les valeurs propres λ_i $\quad i = 0,1,2,..N$ de A vérifient :

$$\lambda_o \leq d_1 \leq \lambda_2 \leq d_2 \leq \ldots \leq \lambda_{N-1} \leq d_N \leq \lambda_N$$

Nous pouvons démontrer le résultat "voisin" suivant :

Soit D diagonale de $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$;
Soient $u,v \in \mathbb{R}^N$ avec $u_i v_i > 0 \qquad i = 1,2,..,N$
Alors il existe $T \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$, T diagonale, régulière telle que :

(1°) $T^{-1}(D+uv^t)T = A$ est symétrique

(2°) les valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_N$ de A séparent les d_i $\quad i = 1,2,..,N$
c'est-à-dire :
$d_1 \leq \lambda_1 \leq d_2 \leq \lambda_2 \ldots d_N \leq \lambda_N \qquad (1)$

en effet $T^{-1}(D+uv^t)T = D+T^{-1}uv^tT$
La matrice $T^{-1}uv^tT$ doit donc être symétrique soit : $T^{-1}u = (v^tT)^t = Tv$

$$\rightleftarrows \frac{u_i}{t_i} = t_i v_i \Rightarrow t_i^2 = \frac{u_i}{v_i} \qquad i = 1,2..,N$$

or $u_i v_i > 0 \quad \forall i$ d'où $t_i = \varepsilon_i \sqrt{\frac{u_i}{v_i}} \qquad \varepsilon_i = \pm 1$
$i = 1,2..,N.$

ainsi A s'écrit $A = D + (T^{-1}u)(T^{-1}u)^t$
et d'après le théorème 1 du chapitre VI, les valeurs propres de A séparent celles de D.

VIII-3 - Un résultat classique dû à MIRSKY cf. [15] est le suivant :

Soit $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$, A symétrique.
Soient $a \in \mathbb{R}^N$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.
Considérons la matrice bordée symétrique :

$$B = \begin{pmatrix} A & a \\ a^t & \alpha \end{pmatrix}$$

On démontre alors que si les valeurs propres de A sont λ_i $i=1,..,N$ avec $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \ldots \leq \lambda_N$, et si $\mu_0, \mu_1, \ldots \mu_N$ sont les valeurs propres de B alors

$$\mu_o \leq \lambda_1 \leq \mu_1 \leq \lambda_2 \leq \mu_2 \ldots \leq \lambda_N \leq \mu_N \qquad (2)$$

Réciproquement si nous nous donnons les nombres μ_i $i = 0,1,..,N$ vérifiant (2), MIRSKY a montré qu'il existe $a \in \mathbb{R}^N$ et $\alpha \in \mathbb{R}^N$ tels que la matrice bordée $\begin{pmatrix} A & a \\ a^t & \alpha \end{pmatrix}$ admet les valeurs propres μ_i $i = 0,1,..,N$

Nous avons donc ici un théorème très "voisin" du théorème de séparation du chapitre VI. Précisons un peu plus le lien entre ces deux résultats.

Considérons $B = \begin{pmatrix} A & a \\ a^t & \alpha \end{pmatrix}$ avec A matrice symétrique de $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$.

les valeurs propres λ_i $i = 1,2..,N$ de A et les valeurs propres μ_i $i = 0,1,2..,N$ de B vérifient :

$$\mu_o \leq \lambda_1 \leq \mu_1 \leq \lambda_2 \leq \mu_2 \ldots \leq \lambda_N \leq \mu_N$$

Considérons uniquement les inégalités

$$\lambda_1 \leq \mu_1 \leq \lambda_2 \ldots \leq \lambda_N \leq \mu_N.$$

D'après le théorème 1 - chap. VI on peut dire qu'il existe $u \in \mathbb{R}^N$ tel que la matrice $A+uu^t$ admet les valeurs propres $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_N$ par conséquent la matrice :

$$C = \begin{pmatrix} A+uu^t & , & 0 \\ & & \\ 0 & , & \mu_o \end{pmatrix}$$

admet les mêmes valeurs propres que B, c'est-à-dire B est semblable à C. On peut donc énoncer :

Théorème :

Si B est une matrice symétrique d'ordre N+1 qui s'écrit $B = \begin{pmatrix} A & , a \\ a^t & , \alpha \end{pmatrix}$ avec A matrice symétrique d'ordre N, $a \in \mathbb{R}^N$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
alors il existe $u \in \mathbb{R}^N$ tel que les matrices symétriques B et $\begin{pmatrix} A+uu^t & , & o \\ o & , & \mu_o \end{pmatrix}$ sont semblables, où μ_o la plus petite valeur propre de B.

Remarque : On peut donc dire qu'il existe T, matrice régulière d'ordre N+1 telle que :

$$T^{-1} \times \begin{pmatrix} A & , a \\ a^t & , \alpha \end{pmatrix} \times \quad T = \begin{pmatrix} A+uu^t & , & 0 \\ & & \\ 0 & , & \mu_o \end{pmatrix}$$

Si nous connaissions la matrice T, nous possèderions là une méthode de déflation pour le calcul des valeurs propres d'une matrice symétrique.

BIBLIOGRAPHIE

|1| J. SHERMAN and W.J. MORRISON
Adjustment of an inverse matrix corresponding to a change in one element of a given matrix.
Annals of Math. Stat. Vol. 21 (1950), p. 124.

|2| J. SHERMAN and W.J. MORRISON
Adjustment of an inverse matrix corresponding to changes in the elements of a given column or a given row of the original matrix
Annals of Math. Stat. Vol. 20 (1949), p. 621.

|3| J.M. BENNETT
Triangular factors of modified matrices
Numerische Mathematik, Vol. 7 (1965), pp. 217-221

|4| H.S. WILF
Matrix inversion by the annihilation of rank.
J. Soc. Indust. Appl. Math., Vol 7 n° 2, June 1959.

|5| GANTMACHER
Matrix Theory
Tome 1 - Chelsea Publishing Company. New York, N.Y. (1960) pp. 47-48.

[6] J.M. WEDDERBURN
Référence non précisée. Voir A.S. HOUSEHOLDER
The theory of matrices in Numerical Analysis.
Blaisdel Publishing Company, New York (1964) p. 33

[7] N. GASTINEL
Matrices du second degré et normes générales en analyse numérique linéaire
Thèse - Grenoble - décembre 1960 - pp. 60-80.

[8] R. PENROSE
A generalized inverse for matrices
Proc. Cambridge Philos. Soc., 51 (1955), pp. 406-413

[9] J.M. BLATTNER
Bordered Matrices
J.Soc. Indust. Appl. Math., Vol 10 n° 3 (1962)

[10] N. GASTINEL
Matrice généralisant la matrice de Hilbert
CHIFFRES, Vol. 3, (1960)

|11| DURAND
Solutions numériques des équations algébriques p.302.

|12| GANTMACHER
Matrix Theory
Tome 1 - Chelsea Publishing Company, New York, N.Y. (1960). p. 326.

[13] N. GASTINEL
Analyse Numérique Linéaire
Hermann p. 297-298

[14] J.Z. HEARON
On the roots of a certain type of matrix
Bulletin of Mathematical Biophysics, Vol. 23 (1961)

[15] L. MIRSKY
Matrices with prescribed characteristic roots, and diagonal elements
J. London Math. Soc. Vol. 33 (1958) pp. 14-21.

TABLE DES MATIERES

Page

INTRODUCTION

CHAPITRE-I - INVERSION D'UNE MATRICE AUGMENTEE 1
I-1 a) Notations 1
b) Formule élémentaire de SHERMAN et MORRISON 2
I-2 Généralisation de la formule de SHERMAN et MORRISON 3

CHAPITRE-II - LA METHODE D'ANNULATION DU RANG 6
II-1 - Méthode générale 6
II-2 - Méthode de WILF 7
Problème posés par cette méthode 10
II-3 - Un théorème de cheminement dans R^{N^2} .....
Position du problème 10
Notations 11
Enoncé du théorème 14
II-4 - Un algorithme complet d'inversion 15
II-5 - a) Adaptation de l'algorithme de la résolution d'un système linéaire 17
b) Exemples numériques 20
c) Expression des pivots et relations avec la méthode de GAUSS 23
Application numériques du Chapitre II 29

CHAPITRE_III - DECOMPOSITION D'UNE MATRICE EN UNE SOMME DE MATRICES ANTISCALAIRES 42
III-1 - Lemme de Wedderburn 42
III-2 - Théorème sur le rang d'une matrice 45
III-3 - Exemples de décomposition 47

CHAPITRE_IV - LES ERREURS DE CALCUL DANS LA METHODE D'ANNULATION DU RANG 50
Bornes pour l'erreur, dans la résolution d'un système linéaire 58

CHAPITRE V - INVERSE GENERALISEE D'UNE MATRICE AUGMENTEE 62
Définition du problème 62
Théorème de Blattner 62
Formule générale 69

CHAPITRE VI - POLYNOME CARACTERISTIQUE D'UNE MATRICE AUGMENTEE 71
Expression des coefficients 73
Organigramme de calcul 74
Applications numériques 77

CHAPITRE VII - VALEURS PROPRES ET VECTEURS PROPRES D'UNE MATRICE SYMETRIQUE AUGMENTEE 81
VII-1 - Notations 81
VII-2 - Localisation des valeurs propres 83
Théorème de séparation 86
Recherche des vecteurs propres 87
Procédure Algol 91
Applications numériques 96
VII-3 - Généralisation du théorème de séparation 97
VII-4 - Une propriété réciproque 98
Une propriété sur le conditionnement d'une matrice 107

CHAPITRE VIII - RELATIONS ENTRE MATRICES BORDEES ET MATRICES AUGMENTEES 108
Un théorème de similitude 111

VU

Grenoble, le

Le Président de la Thèse

VU

Grenoble, le

Le Doyen de la Faculté des Sciences

VU, et permis d'imprimer,

Le Recteur de l'Académie de GRENOBLE