



Etude mathématique du problème du champ électrique affecté par un flux permanent d'ions unipolaires et application à la théorie de la sonde froide

Pierre Atten

► To cite this version:

Pierre Atten. Etude mathématique du problème du champ électrique affecté par un flux permanent d'ions unipolaires et application à la théorie de la sonde froide. Modélisation et simulation. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1969. tel-00281609

HAL Id: tel-00281609

<https://theses.hal.science/tel-00281609>

Submitted on 23 May 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESES

présentées

A LA FACULTE DES SCIENCES DE L'UNIVERSITE DE GRENOBLE

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR ES SCIENCES PHYSIQUES

par

Pierre ATTEN

////////

Première thèse :

**Etude mathématique du problème du champ électrique
affecté par un flux permanent d'ions unipolaires
et application à la théorie de la sonde froide**

Deuxième thèse :

PROPOSITIONS DONNEES PAR LA FACULTE

////////

soutenues le 12 novembre 1969, devant la Commission d'examen

MM. L. NEEL

Président

N. FELICI

Examinateur

N. GASTINEL

Examinateur

THESES

présentées

A LA FACULTE DES SCIENCES DE L'UNIVERSITE DE GRENOBLE

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR ES SCIENCES PHYSIQUES

par

Pierre ATTEN

////////

Première thèse :

**Etude mathématique du problème du champ électrique
affecté par un flux permanent d'ions unipolaires
et application à la théorie de la sonde froide**

Deuxième thèse :

PROPOSITIONS DONNEES PAR LA FACULTE

////////

soutenues le 12 novembre 1969, devant la Commission d'examen

MM. L. NEEL

Président

N. FELICI

Examineur

N. GASTINEL

Examineur

PROFESSEURS SANS CHAIRE

MM. GIDON P.	Géologie et Minéralogie
GIRAUD P.	Géologie
PERRET R.	Servomécanisme
Mme BARBIER M. J.	Electrochimie
Mme SOUTIF J.	Physique
COHEN Joseph	Electrotechnique
DEPASSEL R.	Mécanique des Fluides
GASTINEL Noël	Mathématiques Appliquées
GLENAT René	Chimie
BARRA Jean	Mathématiques Appliquées
COUMES André	Electrotechnique
PERRIAUX Jacques	Géologie et Minéralogie
ROBERT André	Chimie Papetière
BIAREZ Jean	Mécanique Physique
BONNET Georges	Electronique
CAUQUIS Georges	Chimie Générale
BONNETAIN Lucien	Chimie Minérale
DEPOMMIER Pierre	Physique Nucléaire et Génie Atomique
HACQUES Gérard	Calcul Numérique
POLOUJADOFF Michel	Electrotechnique
Mme KAHANE Josette	Physique
Mme BONNIER J. M.	Chimie
VALENTIN Jacques	Physique
PAYAN Jean-Jacques	Mathématiques

PROFESSEURS ASSOCIES

MM. NAPP-ZINN	Botanique
RODRIGUES Alexandre	Mathématiques Pures
STANDING Kenneth	Physique Nucléaire

JULTE DES SCIENCES
de GRENOBLE

L I S T E des P R O F E S S E U R S

DOYEN HONORAIRE : Monsieur MORET

DOYEN : Monsieur BONNIET

PROFESSEURS T TULAIRES

MM. NEEL Louis	Physique Expérimentale
HEILMANN René	Chimie Organique
KRA TCHENKO Julien	Mécanique Rationnelle
CHABAUTY Claude	Calcul différentiel et intégral
BENOIT Jean	Radioélectricité
CHENE Marcel	Chimie Papetière
FELICI Noël	Electrostatique
KUNTZMANN Jean	Mathématiques Appliquées
BARBIER Reynold	Géologie Appliquées
SANTON Lucien	Mécanique des Fluides
OZENDA Paul	Botanique
FALLOT Maurice	Physique Industrielle
KOSZUL Jean-Louis	Mathématiques
GALVANI O.	Mathématiques
MOUSSA André	Chimie Nucléaire
TRAYNARD Philippe	Chimie Générale
SOUTIF Michel	Physique Générale
CRAYA Antoine	Hydrodynamique
REULOS René	Théorie des Champs
BESSON Jean	Chimie Minérale
AYANT Yves	Physique Approfondie
GALLISSOT	Mathématiques

Melle LUTZ Elisabeth	Mathématiques
BLAMBERT Maurice	Mathématiques
BOUCHEZ Robert	Physique Nucléaire
LLIBOUTRY Louis	Géophysique
MICHEL Robert	Minéralogie et Pétrographie
BONNIER Etienne	Electrochimie et Electrometallurgie
DESSAUX Georges	Physiologie Animale
PILLET E.	Physique Industrielle & Electrotechnique
YOCCOZ Jean	Physique Nucléaire Théorique
DEBELMAS Jacques	Géologie Générale
GERBER Robert	Mathématiques
PAUTHENET R.	Electrotechnique
VAUQUOIS Bernard	Calcul Electronique
BARJON Robert	Physique Nucléaire
BARBIER Jean-Claude	Physique
SILBER R.	Mécanique des Fluides
BUYLE-BODIN Maurice	Electronique
DREYFUS Bernard	Thermodynamique
KLEIN Joseph	Mathématiques
VAILLANT François	Zoologie et Hydrobiologie
ARNAUD Paul	Chimie
SENGEL Philippe	Zoologie
BARNOUD Fernand	Biosynthèse de la Cellulose
BRISSENEAU P.	Physique
GAGNAIRE Didier	Chimie Physique
Mme KOFER Lucie	Botanique
DEGRANGE Charles	Zoologie
PEBAY-PEROULA Jean-Claude	Physique
RASSAT André	Chimie Systématique
DUCROS Pierre	Cristallographie Physique
DODU Jacques	Mécanique Appliquée I.U.T.
ANGLES D'AURIAC Paul	Mécanique des Fluides
LACAZE Albert	Thermodynamique

MAITRES DE CONFERENCES

MM. LANCIA Roland	Physique Atomique
DEPORTES C.	Chimie
Mme BOUCHE Liane	Mathématiques
SARROT-REYNAULD J.	Géologie Propédeutique
KAHANE André	Physique Générale
DOLIQUE Jean-Michel	Electronique
BRIERE Georges	Physique
DESRE Georges	Chimie
LAZEROWICZ	Physique
BERTRANDIAS J. P.	Mathématiques Appliquées
LAURENT P.	Mathématiques Appliquées
Mme BERTRANDIAS Françoise	Mathématiques Pures
LONGEQUEUE J. P.	Physique
SOHM Jean-Claude	Electrochimie
ZADWORNY François	Electrotechnique
DURAND F.	Chimie Physique
CARLIER Georges	Biologie Végétale
AUBERT Georges	Physique
DELPUECH Jean-Jacques	Chimie Organique
PFISTER Jean-Claude	Physique
CHIBON P.	Biologie Animale
IDELMAN S.	Physiologie Animale
BOUVARD Maurice	Hydrologie
RICHARD Lucien	Botanique
PELMONT Jean	Physiologie Animale
BLOCH Daniel	Electrotechnique I. P.
BOUSSARD Jean-Claude	Mathématiques Appliquées
MOREAU René	Hydraulique I.P.
BRUGEL L.	Energétique I.U.T.
SIBILLE R.	Construction Mécanique I.U.T.

ARMAND Yves
BOLLIET Louis
KUHN Gérard
GERMAIN Jean-Pierre
CONTE René
JOLY Jean-René
Mlle PIERY Yvette
BERNARD Alain

Chimie I.U.T.
Information I.U.T.
Energétique I.U.T.
Construction Mécanique I.U.T.
Thermodynamique
Mathématiques Pures
Biologie Animale
Mathématiques Pures

MAITRES DE CONFERENCES ASSOCIES

MM. SAWCZUK A.
CHEEKE John
YAMADA O.
NATR Lubomir
NAYLOR Arch
SILBER Léo
NOZAKI Akihiro
RUTLEDGE Joseph
DONOHO Paul
EGGER Kurt

Mécanique des Fluides
Thermodynamique
Physique du Solide
Biologie Végétale
Physique Industrielle
Radioélectricité
Mathématiques Appliquées
Mathématiques Appliquées
Physique Générale
Biologie Végétale

Je tiens à exprimer ma reconnaissance à Monsieur le Professeur L. NEEL, Membre de l'Institut, qui a bien voulu me faire l'honneur de présider cette commission d'examen.

Ce travail a été effectué dans le Laboratoire d'Electrostatique et de Physique du Métal sous la direction de Monsieur le Professeur N. FELICI à qui je sais gré des moyens qu'il a mis à ma disposition et des conseils judicieux qu'il m'a prodigués.

Je tiens à remercier très vivement Monsieur le Professeur N. GASTINEL des encouragements et des suggestions qu'il m'a prodigués et de l'aide précieuse qu'il m'a apporté en ce qui concerne la partie mathématique de ce travail.

Je remercie Monsieur E. GARTNER de l'aide qu'il m'a apportée avec beaucoup d'obligeance. Je tiens à assurer de ma vive sympathie tout le personnel de la section Electrostatique et en particulier Messieurs BONNET, LAULIER et PAGEAULT de l'aide qu'ils m'ont accordé dans l'étude expérimentale.

C'est avec une amicale pensée que je remercie Mademoiselle BICAIS et le personnel du service d'impression de Mathématiques Appliquées qui ont assuré avec rapidité et dévouement l'impression de ce travail.

TABLE DES MATIERES

Pages

INTRODUCTION

1

CHAPITRE - I

HISTORIQUE - CONSIDERATIONS CONCERNANT LA FORMULATION ET LES METHODES DE RESOLUTION DU PROBLEME

1) Equation fondamentale	4
2) Cas particuliers : résolution exacte	6
3) Cas général : méthodes approchées	8
4) Cas général : méthodes de Cyrllin et de Cooperman	12
5) Problème physique et problème mathématique ..	15

CHAPITRE - II

ETUDE MATHEMATIQUE - EXISTENCE ET UNICITE DANS LE CAS DES FAIBLES DENSITES

1) Formulation mathématique	20
2) Définition de l'application T	24
3) Restrictions sur le choix de la fonction g ..	28
4) Existence d'une solution dans le cas de faible densité	31
5) Unicité de la solution du système (3)	39
6) Conclusion concernant la formulation du problème (3)	44

CHAPITRE - III

DETERMINATION NUMERIQUE : METHODE D'APPROXIMATIONS SUCCESSIVES DANS LE CAS DES FAIBLES DENSITES

1) Généralités	48
2) Problème aux différences finies	51
3) Restrictions sur les valeurs de g	59
4) Existence d'une solution dans le cas de faible densité	62
5) Convergence de la méthode d'approximations suc- cessives	66
6) Convergence des solutions approchées	72
7) Utilisation pratique de la méthode d'approximi- tions successives	74

CHAPITRE - IV

DETERMINATION NUMERIQUE : METHODES GENERALES

1) Première méthode générale de résolution	77
2) Explicitation du cas particulier	79
3) Existence d'une solution au système (6)	84
4) Unicité de la solution	89
5) Convergence de l'itération au voisinage de la solution	92
6) Convergence des solutions approchées	100
7) Autres méthodes	104
8) Etude de l'application T^4	107
9) Remarques sur les autres méthodes	116
10) Utilisation dans le cas général	118
11) Conclusion	120

CHAPITRE - V

ELEMENTS D'UNE THEORIE DE SONDE

1) Généralités	122
2) Théorie simplifiée	125
3) Esquisse d'une théorie générale	128
4) Sonde cylindrique dans un condensateur plan ...	133
5) Sonde cylindrique insérée dans la configuration fil-cylindre coaxiaux	138
6) Sonde cylindrique entre plaques parallèles	142

CHAPITRE - VI

1) Etude expérimentale de la méthode de sonde froide	145
2) Configuration fil entre deux plans parallèles .	158
3) Autres configurations	165
4) Etude du système pointe entre deux plans	171
5) Remarques concernant le mouvement de l'air	179

<u>CONCLUSION</u>	185
-------------------------	-----

<u>BIBLIOGRAPHIE</u>	189
----------------------------	-----

Les notations sont définies au cours de l'étude ; nous nous sommes efforcés, dans la mesure du possible, d'éviter de donner de nombreuses significations à une même notation. Des remarques en bas de page sont faites dans le cas où il apparaît une ambiguïté.

La numérotation des formules est spécifique à chaque chapitre ; pour éviter des lourdeurs d'écriture, nous convenons que le numéro du chapitre n'est indiqué que lorsqu'on se réfère à une formule d'un chapitre différent.

La même convention est valable pour la numérotation des paragraphes. Par exemple, l'indication § III-1 renvoie au paragraphe de titre GENERALITES du chapitre III.

Les chiffres entre crochets se rapportent aux références bibliographiques groupées à la fin du travail.

La numérotation des figures, tableaux et planches est indépendante de la division en chapitres.

Le système d'unités employé est le système international. Cependant, les résultats sont souvent exprimés avec des unités utilisées fréquemment dans la pratique.

INTRODUCTION

Dans un certain nombre de problèmes électriques, on rencontre le phénomène de charge d'espace qui modifie souvent de façon notable les propriétés du système étudié et peut prendre une importance fondamentale, comme par exemple, dans le mécanisme de claquage dans les gaz par streamer [1]. Si les modifications qualitatives résultant de la présence d'une charge d'espace sont bien connues, une analyse plus poussée se heurte, dans la plupart des cas, à des difficultés sérieuses en raison de la non-linéarité qu'elle introduit. Ainsi le problème du champ électrique affecté par un flux d'ions produits par effet couronne, malgré son apparente simplicité, n'échappe pas à cette règle. La propriété de limitation du courant par la charge d'espace est bien connue, mais en dehors de quelques cas particuliers, la résolution de l'équation non linéaire n'était pas possible.

C'est ce problème du champ électrique affecté par un flux permanent d'ions unipolaires qui est étudié dans ce travail et la mise au point d'une méthode de résolution générale en constitue un des résultats essentiels.

Jusqu'en 1963 environ, toutes les études concernant ce problème avaient en commun un certain nombre de caractères. Le premier de ces caractères réside dans le mode de création de la charge d'espace unipolaire : celle-ci résulte d'une décharge par effet couronne dans un gaz.

Le deuxième caractère concerne le point de vue d'après lequel les auteurs entreprenaient l'étude théorique du champ affecté par la décharge couronne : c'est essentiellement celui de l'ingénieur qui se soucie des applications pratiques, électrofiltres ou transport d'énergie sous haute tension, et qui se contente de relations globales approchées.

Le troisième caractère général consiste en ce que les méthodes de résolution proposées étaient très approximatives et ne visaient qu'à obtenir la caractéristique courant-tension. Ceci peut s'expliquer par les difficultés dues à la non-linéarité de l'équation et par le fait que la majorité des auteurs n'ont pas beaucoup approfondi son aspect mathématique. En outre, il ne faut pas oublier la mise au point de calculatrices numériques puissantes est assez récente et a conditionné, dans une très grande mesure, l'apparition de méthodes nouvelles.

Le dernier point commun concerne les conditions aux limites. Par généralisation du cas particulier où les ions sont créés par effet couronne sur un fil cylindrique, il était admis que l'une des conditions à imposer était celle fixant la valeur du champ sur l'électrode émettrice.

Rompant de façon nette avec la pratique antérieure, FELICI a effectué une étude plus fondamentale, à la fois physique et mathématique. Il a montré que pour obtenir un problème mathématiquement bien posé, il fallait substituer à la condition sur le champ une condition fixant les valeurs de la densité de charge sur l'électrode émettrice (*). Pour obtenir alors la solution il a proposé la méthode d'approximations successives mise en oeuvre grâce à l'utilisation d'une calculatrice numérique.

Le présent travail, qui est la continuation logique de la démarche de FELICI, comporte principalement l'étude mathématique du problème de l'injection unipolaire à l'état stationnaire.

(*) Dans tout ce travail, on entend par l'expression "densité de charge q sur l'électrode émettrice", la limite, lorsqu'on tend vers un point appartenant à cette électrode, de q densité volumique de charge (q est supposée continue dans le domaine et sa frontière). Cette densité q introduite pour des raisons mathématiques, ne doit pas être confondue avec la densité superficielle σ des charges sur les électrodes.

Dans un premier temps, l'existence et l'unicité de la solution sont établies pour une configuration géométrique quelconque assez régulière mais dans le cas de faible densité. Cela permet de conclure que, dans ce cas, la substitution de la condition fixant la densité de charge à celle concernant le champ conduit à un problème mathématiquement bien posé.

Il s'agit dans un deuxième temps de déterminer la solution de ce problème. La mise en oeuvre de la méthode d'approximations successives est étudiée mais avec la même restriction de faible densité. Plusieurs méthodes générales de résolution sont ensuite exposées ; une justification complète est développée pour un cas particulier.

Ces différents points constituent une étude d'un problème non-linéaire présentant un intérêt mathématique certain ; il semble même que les propriétés des différents opérateurs étudiés pourraient être justifiées de façon générale. Cependant, une telle étude requerrait probablement des outils mathématiques plus fins que ceux mis en oeuvre et sortirait du cadre de ce travail.

La méthode de résolution générale est appliquée en particulier au problème de la sonde placée dans un champ affecté par une charge d'espace unipolaire. Certains éléments de la "théorie" de sonde sont ainsi précisés et discutés en liaison avec l'étude expérimentale.

Enfin quelques expériences permettent de confronter calculs et mesures et donnent des indications intéressantes concernant le problème du mouvement de l'air.

Ces résultats par certains côtés originaux laissent pressentir l'intérêt qui s'attache à une connaissance précise des distributions de potentiel, de champ et de charge. Les résultats ainsi que les méthodes élaborées au cours de ce travail permettront des développements futurs. De tels développements sont préfigurés par les 2 études [33,58] qui, par ailleurs, ne peuvent pas être intégrées au présent travail.

CHAPITRE - I

HISTORIQUE - CONSIDERATIONS CONCERNANT LA FORMULATION
ET LES METHODES DE RESOLUTION DU PROBLEME

I - EQUATION FONDAMENTALE

Le problème physique qu'on se propose d'étudier est celui du champ électrique affecté par un flux permanent d'ions identiques, quelle que soit l'origine de ces ions. Par exemple, dans le cas d'une décharge par effet couronne, on ne tient pas compte de la gaine, zone bi-ionisée mal définie et d'épaisseur en général suffisamment faible pour que l'on puisse y négliger la chute de potentiel. Si l'injection est due à l'effet thermoionique ou à tout autre mode de création de porteurs, on néglige au voisinage de l'émetteur, la zone où le champ est inversé (lorsque cette zone existe).

Soit K la mobilité supposée constante des ions formant une charge d'espace unipolaire de densité volumique q ; alors

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{j} = Kq\vec{E} - D \overrightarrow{\text{grad}} q \\ \text{div } \vec{E} = q/\epsilon. \end{array} \right.$$

A l'état stationnaire les autres équations de Maxwell se réduisent à :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{div } \vec{j} = 0 \\ \vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V. \end{array} \right.$$

En éliminant q et $\vec{j}$ il vient :

$$(1) \quad (D/K) \Delta (\Delta V) + (\Delta V)^2 + \overrightarrow{\text{grad } V} \cdot \overrightarrow{\text{grad } \Delta V} = 0$$

avec $D/K = kT/e$, soit 0.025 volt à la température ordinaire.

(1) est l'équation correspondant à des ions positifs ; dans le cas de charges négatives, il est nécessaire de changer le signe du premier terme de (1).

En général, le terme $\pm(D/K)\Delta(\Delta V)$ peut être négligé. Examinant un cas particulier unidimensionnel, SCHILLING et SCHACHTER [2] ont montré que le fait de négliger la diffusion n'introduit qu'une erreur insignifiante dès que :

$$kT/e \ll U$$

(U : tension appliquée)

Cette conclusion est valable aussi bien pour l'état transitoire que pour l'état stationnaire. Cette condition est remplie dans le problème qui nous intéresse.

On peut remarquer par contre que la diffusion ne peut plus être négligée lorsqu'il y a de fortes hétérogénéités ou des discontinuités dans la distribution de densité de charge. Pour ces questions qui ne seront pas abordées ici, on peut se reporter à FELICI [4,7,8].

L'équation fondamentale que nous allons étudier est :

$$(2) \quad (\Delta V)^2 + \overrightarrow{\text{grad } V} \cdot \overrightarrow{\text{grad } \Delta V} = 0.$$

Elle appelle deux remarques :

a) L'homogénéité permet de changer V en $-V$; il suffit donc d'étudier le problème correspondant à des charges positives.

b) L'équation (2) n'est valable en toute rigueur que si la mobilité est constante.

II - CAS PARTICULIERS : RESOLUTION EXACTE

TOWNSEND [9], en 1914, a donné la solution exacte pour le cas fil-cylindre coaxiaux (configuration bi-dimensionnelle : $n = 2$) ; par intégration de (2), en tenant compte de la symétrie de révolution on obtient :

$$(3) \quad E^2 = i/2\pi\epsilon K + B/r^2$$

où i est le courant par unité de longueur, r la distance à l'axe et B une constante d'intégration déterminée par le champ sur le fil ($E(r_0) = E_0$). Quand le courant est intense, le champ est pratiquement constant en dehors d'une zone entourant le fil [7] :

$$E \approx \left(\frac{i}{2\pi\epsilon K}\right)^{1/2}$$

Townsend détermine alors la relation courant-tension et en déduit une méthode pour mesurer la mobilité des ions dans un gaz. Il est à noter que cette technique, avec quelques modifications, est une des plus utilisées pour obtenir des valeurs de mobilité [10].

La constante B intervenant dans (3) peut être exprimée en fonction de la tension appliquée U au lieu du champ E_0 sur le fil ; on obtient alors (pour $B > 0$, c'est-à-dire pour un champ décroissant à partir du fil)

$$\left\{ \begin{array}{l} U = (B+Ar^2)^{1/2} - (B+Ar_0^2)^{1/2} - B^{1/2} \left[\text{Argsh}\left(\frac{B}{A}\right)^{1/2} \frac{1}{R} - \text{Argsh}\left(\frac{B}{A}\right)^{1/2} \frac{1}{r_0} \right] \\ i = 2\pi\epsilon KA. \end{array} \right.$$

Dans les 2 autres cas où (2) se ramène à une équation différentielle, l'intégration s'effectue aisément. Pour le cas unidimensionnel ($n=1$) de 2 plaques indéfinies et parallèles distantes de L , la solution est de la forme :

$$(4) \quad E^2 = Ax+B \quad x \in [0, L].$$

Les constantes A et B s'expriment en fonction de la tension U et de la densité de courant i :

$$\begin{cases} U = \frac{2}{3A} [(AL+B)^{3/2} - B^{3/2}] \\ i = K\epsilon A/2. \end{cases}$$

Dans le cas à symétrie sphérique (n=3) on trouve :

$$(5) \quad E^2 = A/r + B/r^4.$$

On voit facilement que :

$$i = 6\pi\epsilon KA$$

et B peut être déterminé en fonction de U et i.

Sur ces trois cas particuliers, nous allons faire une remarque intéressante. Les deux constantes d'intégration peuvent être reliées par 2 relations faisant intervenir U (tension totale) et i (courant total pour n = 3, courant par unité de longueur pour n = 2 et courant par unité de surface pour n = 1). Dans l'expression de i, ($j = KqE$), le champ E et la densité de charge q semblent jouer un rôle symétrique ; pourtant on ne peut pas remplacer la donnée du courant indifféremment par celle de E ou par celle de q sur l'électrode émettrice, parce que E_0 est limité supérieurement par la valeur $E_{\text{harm}}(r_0)$ du champ harmonique. Bien que l'examen de ces 3 cas ne permette pas de conclure à propos de la validité de l'une ou l'autre de ces conditions au contour, il ressort que la donnée du champ sur l'électrode émettrice, soumise à des restrictions, est moins satisfaisante que la donnée de la densité de charge qui peut prendre toutes les valeurs entre 0 et $+\infty$.

En dehors de ces 3 cas à haute symétrie, il existe une configuration pour laquelle on connaît une solution de (2) : il s'agit du cylindre de révolution d'axe Oz avec une électrode émettrice de dimension finie placée dans l'axe. En supposant que le diamètre du cylindre est π , la fonction

$$(6) \quad V(r,z) = e^{-z} \cos r$$

satisfait à l'équation (2) : c'est la solution "saturée" telle que la définit FELICI [6,7]. Physiquement cette solution n'est pas réalisable mais est l'asymptote vers laquelle tend (à une constante multiplicative près) toute solution, à une distance z suffisamment grande de l'émetteur.

Pour obtenir la solution de (2) dans une configuration géométrique qui n'est pas à haute symétrie, il faut utiliser d'autres méthodes.

III - CAS GENERAL - METHODES APPROCHEES

Dans ce paragraphe, de préférence à une exposition même brève (qu'on peut trouver dans [11]) des 4 méthodes comparées par DUPUY, nous allons discuter les hypothèses et les approximations des différents auteurs.

En 1927 MAYR [12] a obtenu des formules dans lesquelles le champ et la densité de charge sont exprimés en fonction de j , densité de courant en tout point et de E_0 , valeur du champ sur le fil émetteur. Bien qu'elles soient correctes, ces formules sont de peu d'utilité car il faudrait connaître la répartition de densité de courant ou bien le réseau de lignes de force.

Quelques années plus tard, DEUTSCH [13] a proposé une méthode pour obtenir essentiellement la relation courant-tension. Il suppose que le réseau harmonique de lignes de force n'est pas modifié par la charge d'espace. De plus il fait l'hypothèse que la densité de charge q reste constante le long d'une ligne de force.

C'est là une approximation grossière, valable uniquement pour des densités très faibles, donc des courants très faibles. Dès que la densité de charge devient notable, elle varie en décroissant le long de la ligne de force orientée de l'émetteur vers l'électrode réceptrice. L'exemple des cas particuliers (§ 2) indique qu'alors, q décroît comme $r^{-n/2}$, n étant la dimension du domaine fini soumis au champ.

PROKOPOVITCH [14] donne une illustration de l'imprécision de cette méthode. Pour la configuration pointe-plan, il indique que les valeurs de la densité de courant mesurées sur le plateau récepteur sont, en dehors de la zone centrale, environ 10 fois plus faibles que celles déterminées par la méthode de DEUTSCH. On voit ainsi que cette méthode ne peut donner que le courant total.

POPKOV [15] et CYRLIN [11] en 1952 postulent également la conservation du réseau d'équipotentielles de la solution harmonique, leur échelonnement seul variant. Ils obtiennent des formules qui donnent l'ordre de grandeur des valeurs locales de la densité et du champ.

La critique de ces méthodes a été faite par DUPUY dont on peut résumer ainsi les conclusions : les approximations sont de valeurs très inégales suivant les grandeurs physiques et la forme des électrodes [16]. La méthode de DEUTSCH permet toutefois d'obtenir des formules simples de la caractéristique courant-tension, d'une approximation suffisante pour la pratique industrielle [17] (essentiellement la précipitation de particules à l'aide d'électro-filtres [18]).

Il existe un autre domaine pratique qui a suscité et suscite encore de nombreuses études : c'est celui du transport d'énergie sous haute tension pour lequel il est important de connaître les pertes par effet couronne. Dans ce cas encore, c'est principalement la relation courant-tension qui intéresse l'ingénieur. Des études systématiques ont été menées par VOROBEEV et TIKHODEEV [19, 20, 21].

Les caractéristiques sont mises sous forme "universelle" (c'est-à-dire en définissant des paramètres sans dimension) [19] :

$$\varepsilon_0 \theta = \frac{IL^2}{KU_0^2} = f\left(\frac{U}{U_0}, g_1, \dots, g_n\right)$$

I est le courant total, L une longueur typique, K la mobilité, U_0 la tension pour laquelle apparaît l'effet couronne et les g_i sont des paramètres géométriques (sans dimension). L'étude effectuée sur un modèle de ligne de transmission d'énergie a mis en évidence que le paramètre essentiel est U/U_0 , la caractéristique universelle ne dépendant que très peu des différents paramètres géométriques. Ceci nous confirme dans l'idée que l'accord observé entre les caractéristiques I (V) calculées et celles mesurées n'est en aucun cas un critère suffisant pour juger de la validité d'une méthode approchée.

Reportant la discussion du choix de la 3ème condition au contour au paragraphe 5, examinons maintenant de façon plus précise l'hypothèse postulant la conservation du réseau de lignes de force. Cette approximation est valable dans le cas où la densité de charge est extrêmement faible de sorte que le problème peut être linéarisé (*) : les 4 méthodes donneront alors des résultats satisfaisants. Il faut restreindre néanmoins cette conclusion à des configurations géométriques de dimensions limitées. S'il y a une extension indéfinie, à une distance suffisamment grande de l'émetteur, le champ prend des valeurs très faibles, de sorte que la linéarisation n'est plus valable. En se référant à l'exemple du tube (§2) on voit que l'on aura une décroissance du type exponentiel du potentiel, du champ et de la densité q.

(*) Détaillons cette linéarisation : q étant assimilé à un infiniment petit du 1^{er} ordre, dans (2) on néglige $(\Delta V)^2 = (q/\varepsilon)^2$; grad V.grad q est alors nul ce qui impose à la densité de charge d'être constante le long de chaque ligne de force. De plus, dans l'équation de Poisson q est négligeable, car ce terme apporte une contribution qui est un infiniment petit du 1^{er} ordre par rapport au potentiel harmonique.

Pour des configurations de dimensions limitées, lorsque la densité de charge n'est plus très faible, la linéarisation du problème n'est plus possible; la conservation de la forme des équipotentiellles, et par conséquent du réseau de lignes de force, ne peut plus être valablement postulée. Il suffit pour s'en convaincre d'examiner les résultats expérimentaux relatifs à la configuration fil-plan : les équipotentiellles de la solution harmonique (cercles) sont très déformées par la présence de la charge d'espace [11, 22] et la déviation angulaire atteint 10° à 15° environ (voir [23]).

Du point de vue mathématique, la conservation du réseau de lignes de force ne peut résulter que d'une distribution très particulière de la densité de charge, ainsi que l'a montré CYRLIN [24] dont on reprend ci-dessous le raisonnement. En résolvant l'équation de Laplace on obtient une famille d'équipotentiellles de la forme

$$\psi_0(x,y,z) = \alpha_1$$

les valeurs $\alpha_1 = a$ et $\alpha_1 = b$ correspondant aux 2 électrodes (surfaces régulières). L'équation de Poisson s'écrit dans le système curviligne orthogonal basé sur les surfaces $\psi_0 = \alpha_1$:

$$(7) \quad \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \left(\frac{h_1 h_2 h_3}{h_i^2} \frac{\partial \psi_0}{\partial \alpha_i} \right) = - \frac{q}{\epsilon}$$

α_2 et α_3 sont les coordonnées relatives aux 2 autres familles orthogonales de surfaces et les h_i sont les coefficients métriques. En l'absence de charge l'équation (7) se réduit à :

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \psi_0}{\partial \alpha_1} \right) = 0$$

ce qui conduit à la relation :

$$(8) \quad \frac{h_2 h_3}{h_1} = g(\alpha_1) p(\alpha_2, \alpha_3).$$

La conservation de la forme des équipotentiellles se traduit par le fait que φ n'est fonction que de α_1 : $\varphi = \varphi(\alpha_1)$; en tenant compte en outre de (8), on tire de (7) la relation :

$$q = f(\alpha_1) h_1^{-2}$$

qui constitue la condition nécessaire et suffisante pour que la charge d'espace q ne modifie pas la forme des équipotentiellles. Cette distribution est très particulière et ne peut pas être rencontrée dans le cas général.

IV - CAS GENERAL : METHODES DE CYRLIN (1956) ET DE COOPERMAN (1960)

En vue d'obtenir une meilleure approximation, CYRLIN [25] a cherché à appliquer certaines méthodes classiques en physique mathématique et qui visent à remplacer une équation aux dérivées partielles par un système d'équations différentielles. La première méthode de CYRLIN (mentionnée au paragraphe précédent) rentre dans ce cadre et les solutions obtenues peuvent être considérées comme des approximations d'ordre un au sens de la méthode plus générale exposée ci-dessous. L'équation (2), qui peut également s'écrire :

$$(9) \quad B(V) = \text{div}(\Delta V \text{ grad } V) = 0$$

était remplacée par la condition imposant la conservation du courant total sur chaque équipotentielle $\alpha_1 = C^{\text{te}}$ de la solution harmonique ; la solution approchée de la forme $\varphi = \varphi_0(\alpha_1)$ était alors déterminée [11].

La généralisation s'effectue ainsi : choisissons une suite $\{\chi_k(\beta)\}$ de fonctions linéairement indépendantes et satisfaisant certaines conditions (on peut prendre par exemple des fonctions périodiques en tenant compte des éventuelles propriétés de symétrie et en outre telles que dans (10), $\varphi_n(\alpha, \beta)$ soit déterminée de façon unique). On recherche une approximation d'ordre n de la solution sous la forme :

$$(10) \quad \varphi_n(\alpha, \beta) = \varphi_n^0(\alpha) + \sum_{k=1}^{n-1} \varphi_n^k(\alpha) \chi_k(\beta)$$

La conservation du courant est alors exprimée non plus sur la totalité de chaque équipotentielle du problème $\Delta V = 0$, mais sur plusieurs parties ; l'intervalle $[0, \ell]$ de définition de β est subdivisé en n parties et (9) est remplacée par les n équations :

$$(11) \quad \int_0^{\ell \frac{m}{n}} B(\varphi) h_\alpha h_\beta d\beta = 0 \quad m = 1, 2, \dots, n.$$

En intégrant par rapport à β ($\alpha = \mathcal{E}^{te}$ sur toute équipotentielle de la solution harmonique), on obtient un système de n équations différentielles de variable α . Dans un deuxième temps, en faisant un développement en série des fonctions φ_n^k ($k = 0, 1, 2, \dots, n-1$), le système différentiel est transformé en un système récurrent d'équations ordinaires.

Cette méthode est mise en oeuvre dans le cas de la configuration pointe-plan [25]. L'ordre d'approximation est deux :

$$\varphi(\alpha, \beta) = \varphi_0(\alpha) + \varphi_1(\alpha) \cos \beta$$

CYRLIN obtient diverses formules qui dépendent du choix du paramètre intervenant dans le développement en série des fonctions φ_0 et φ_1 et d'approximations ultérieures. Le cas fil-cylindre non coaxiaux a également été traité de cette manière [26].

Cette méthode réalise en quelque sorte une séparation des variables ; dans les équations (11), l'intégration est effectuée par rapport à la variable β et l'on obtient ainsi un système différentiel dépendant de la variable α . On peut remarquer qu'il y a 2 approximations différentes. La première consiste à remplacer l'équation (9) par le système (11) qui ne lui est pas équivalent ((11) n'implique pas (9)). La deuxième approximation intervient au cours du calcul et consiste à tronquer certaines séries.

La méthode de CYRLIN améliore-t-elle la précision de l'approximation obtenue ? On peut le penser, puisque maintenant la solution approchée est fonction de α et β ; cependant ce fait n'est pas clairement établi car nous savons que le bon accord observé par cet auteur entre caractéristiques courant-tension théorique et expérimentale, ne constitue pas un critère suffisant pour tester la méthode et apprécier le degré de précision de l'approximation proposée.

Une autre critique valable aussi bien pour les méthodes déjà examinées que pour le cas présent, porte sur le choix de la 3ème des conditions aux limites ; CYRLIN se fixe la valeur du champ $E = E_0$ sur l'électrode émettrice (même lorsque celle-ci est une pointe) et il ne se préoccupe pas de savoir si le problème est alors bien posé (au sens de Hadamard, c'est-à-dire s'il admet une solution unique dépendant continûment des données au contour).

En résumé, la méthode proposée par CYRLIN permet d'obtenir des solutions approchées de (2) sous forme explicite ; cependant aucun renseignement n'est fourni sur la précision de l'approximation obtenue et l'on n'a aucune indication sur la validité de cette méthode.

La méthode utilisée par COOPERMAN [27] est très différente. C'est dans son principe, celle proposée par FELICI [8] et étudiée en détails dans les chapitres II et III. En effet, examinant le problème mathématique, COOPERMAN propose de déterminer la solution par une méthode d'approximations successives et se donne comme 3ème condition au contour les valeurs de la densité de charge sur l'électrode émettrice, $q = f(E)$, relation qui peut être remplacée par $q = q_0$ dans le cas où la création de charges est réalisée par effet couronne sur un fil cylindrique.

Cet auteur envisageait de justifier mathématiquement la convergence du processus itératif ; cependant aucune trace d'un tel travail n'a pu être trouvée, et seul son article peut être discuté ici. Il étudie les 2 configurations habituelles de précipitateur (fil-cylindrique coaxiaux et nappe de fils entre 2 plans) en modifiant ainsi sa méthode : arrêt au premier tour d'itération et approximation $q=q_0$ dans tout le volume (obtenue de façon très discutable).

La publication [27] ne permet pas de se faire une opinion nette à propos des conceptions de COOPERMAN ; il semble néanmoins qu'il n'ait pas très clairement vu l'aspect mathématique du problème (en particulier la validité de la formulation) et il est possible qu'il ne se soit fixé la donnée $q = q_0$ sur l'émetteur que dans la mesure où une telle condition est nécessaire pour calculer la distribution de densité de charge, étape indispensable dans la méthode d'approximations successives.

V - PROBLEME PHYSIQUE ET PROBLEME MATHEMATIQUE

A la différence de la plupart de ses prédécesseurs et même, dans une moindre mesure, de COOPERMAN, FELICI a étudié le problème dans son ensemble. Sa démarche l'a amené à lier étroitement les considérations physiques à l'analyse mathématique [7,8].

Ayant montré que les hypothèses faites par la plupart des auteurs équivalent à l'introduction dans le champ de sources parasites de courant [3], il s'est dès lors attaché à obtenir des solutions exactes dans des cas nouveaux. Les résultats ont mis en évidence des singularités : gorges et arêtes. L'examen de l'effet de la

diffusion, qui n'est plus alors négligeable, a permis d'établir [4,7] que, si les gorges peuvent avoir une existence, les arêtes par contre n'ont pas de sens physique et leur apparition doit être attribuée à une mauvaise formulation du problème [3].

Etudiant de deux points de vue différents, le cas particulier uni-dimensionnel brièvement examiné au § 2, FELICI a montré que les conditions au contour qu'il faut se donner concernant le potentiel sur les 2 électrodes et la densité de charge sur l'électrode émettrice (*) [5,7]. Des considérations sur les lignes de force, leur orientation et leur dissymétrie, lui ont permis d'affirmer que ces conditions au contour conduisent, dans le cas général, à un problème bien posé [7].

Pour obtenir effectivement les solutions, FELICI propose une méthode d'approximations successives. Sa mise en oeuvre, telle qu'elle est envisagée au chapitre III, est celle indiquée dans [8] sauf en ce qui concerne la simplification qui s'est avérée ne pas être nécessaire. En adaptant cette méthode aux possibilités de l'ordinateur utilisé, FELICI a déterminé un grand nombre de solutions nouvelles [6,8].

Parvenu à ce point, il est nécessaire d'examiner la contradiction qui apparaît entre la formulation fondée mathématiquement et celle basée sur l'examen du problème physique (champ électrique modifié par le flux d'ions créés par effet couronne). COURANT ([28] p. 226) analysant la démarche générale qui conduit à un problème bien posé, précise que les conditions (initiales, au contour ou mixtes) à adjoindre à une équation, doivent, d'une part être motivées par la *réalité* physique et d'autre part, recevoir une justification purement mathématique. Il semble donc qu'on se trouve en présence d'un problème plus complexe

(*) Il s'agit de la densité volumique q et non pas de la densité superficielle σ .

Voir note page 2.

que celui de Dirichlet par exemple, où la situation physique guide le choix des bonnes conditions supplémentaires.

L'étude mathématique ne laissant aucun doute sur les conditions à fixer, il convient de discuter les motivations physiques qui ont amené de nombreux auteurs à s'imposer, comme 3ème condition, le champ sur l'émetteur. Cette condition, qui découle assez naturellement de l'examen de la décharge couronne [11], ne caractérise que ce seul cas particulier.

En effet, le phénomène de charge d'espace n'est pas particulier aux isolants gazeux : il peut se rencontrer dans des milieux liquides et solides. D'autre part, il existe des mécanismes de création de porteurs de charge à une électrode autres que l'effet couronne : dans un gaz par des rayonnements X et ultra-violet ou par l'effet thermo-électronique [29], dans un liquide par une diode tunnel [30] ou des membranes semi-perméables [31], et dans un solide semi-conducteur, par une électrode métallique injectant des électrons [32]. Dans ces différents cas, c'est l'aptitude de l'électrode injectrice à délivrer des porteurs de charge, ions ou électrons, qui est le phénomène fondamental. Cette aptitude est souvent indépendante du champ électrique régnant à la surface. La densité des charges émises apparaît alors comme la seule donnée fondée d'un point de vue physique. C'est cette donnée qui est utilisée par RICE [29] dans son calcul de la caractéristique $I(V)$ d'une diode à gaz à électrodes cylindriques coaxiales.

On peut justifier le choix de la densité de charge par un autre argument physique. L'état stationnaire d'injection unipolaire peut être considéré comme la limite, pour des temps très grands, du problème transitoire et les conditions au contour apparaissent comme la limite pour $t \rightarrow \infty$ des conditions dépendant du temps. Or pendant l'état transitoire, à un instant t donné, le champ $E_o(Q,t)$ (Q : point quelconque de l'émetteur) sur l'émetteur est déterminé par la répartition des charges dans l'espace entre les électrodes ; il apparaît physiquement arbitraire de fixer

l'évolution dans le temps de $E_0(Q,t)$, l'échelle de cette évolution étant le temps de transit $T = L^2/KU$ (avec L longueur typique, K mobilité et U tension appliquée). Par contre la donnée de $q_0(Q,t)$ par l'intermédiaire d'un mécanisme physique faisant intervenir éventuellement la courbure de la surface émissive et le champ qui y règne conduit à un problème bien déterminé. Cette formulation du problème transitoire nous a permis de généraliser un calcul effectué par MANY et RAKAVY [33], et amènerait apparemment un traitement plus cohérent dans le cas étudié par GUSHCHIN [34].

On pourrait être tenté d'arrêter ici la discussion physique et conclure que le champ électrique modifié par la charge d'espace unipolaire créée par effet couronne, loin de constituer le problème type permettant de déduire la formulation correcte du problème mathématique, n'est qu'un cas très particulier en raison de la condition au contour fixant E_0 . Il faudrait admettre alors que l'on est en présence d'un problème ayant un sens physique mais mal posé du point de vue mathématique. C'est une situation qui se rencontre pour certains problèmes et dont COURANT ([28] p. 230) et LAVRENTIEV [38] donnent des exemples. Cette conception, attrayante à première vue, doit être écartée parce qu'il n'y a aucune raison fondamentale de distinguer ce cas particulier du problème général.

Examinant les conditions au contour, DUPUY [11] et d'autres auteurs prennent comme 3ème condition : $E = E_0$ à la surface de l'émetteur, E_0 étant défini comme le champ disruptif ; mais ce champ n'est pas très nettement caractérisé. D'abord la définition de E_0 est sujette à la critique comme en témoigne la vigoureuse polémique qui s'est développée entre ALEKSANDROV, TIKHODEEV [35], POPKOV [36] et CYRLIN [37]. Si l'on tient compte en plus que cette valeur de E_0 est supposée invariable lorsque la gaine augmente de taille et le courant croît et que l'émission pour des courants faibles se produit en des zones très restreintes, on s'aperçoit que même pour un fil siège de l'effet couronne, la condition $E = E_0$ résulte de plusieurs approximations. Si l'ionisation a lieu au voisinage d'une arête ou d'une pointe, le champ est mal déterminé et ne peut plus être supposé constant.

Cependant l'objection principale ne porte pas sur le degré de précision de l'approximation effectuée, mais sur sa nature. Bien qu'elle ait une épaisseur mal définie et un fonctionnement irrégulier dans l'espace et dans le temps, la gaine joue un rôle essentiel et détermine l'émission. Le fait de la négliger constitue une simplification abusive qui rend impossible la description de phénomènes non stationnaires comme, par exemple, les pulsations de Trichel. Une analyse quantitative du fonctionnement de cette zone bi-ionisée serait nécessaire. Toutefois, il semble plausible de supposer que l'influence du champ s'exprime, en première approximation, par la loi d'émission de charges dont la densité prend la forme

$$(12) \quad q = f(E) \quad \text{avec} \quad \frac{\partial f}{\partial E} \quad \text{très grand.}$$

Cette relation tient compte du fait que le champ E régnant au voisinage de l'émetteur est peu sensible aux variations de courant (cas du fil ionisant l'air) ; dans le cas pointe-plan, la relation (12) est tout-à-fait compatible avec l'existence des pulsations de Trichel et permet même d'envisager une approche quantitative.

En conclusion, la formulation incorrecte obtenue avec le choix de la condition sur le champ résulte d'une part de l'absence d'étude mathématique approfondie du problème et d'autre part de la simplification trop sommaire du problème physique rencontré avec la décharge couronne.

Dans la suite de ce travail, est effectuée l'étude mathématique du problème caractérisé par la condition :

$$q = q(Q, E)$$

Q : point de l'électrode

sur l'électrode émettrice, la configuration étant quelconque. Nous allons d'abord montrer que la formulation mathématique est correcte dans le cas des faibles densités (ch. II). Nous examinerons ensuite le problème de l'obtention des solutions.

CHAPITRE II

ETUDE MATHEMATIQUE - EXISTENCE ET UNICITE DANS LE CAS DES
FAIBLES DENSITES

I - FORMULATION MATHEMATIQUE

(I-2) est une équation aux dérivées partielles du 3ème ordre non linéaire. Pour que le problème soit mathématiquement déterminé, il faut préciser le domaine G où la distribution du potentiel est régie par l'équation (I-2) et adjoindre les conditions sur le contour Γ de G. Le problème est envisagé dans $\mathbb{R}^3$.

a) Domaine G

Physiquement, le domaine où règne le champ est toujours limité par 2 électrodes conductrices formant 2 équipotentielles ; d'où :

Définition

G est l'ensemble ouvert, borné, doublement connexe, compris entre 2 surfaces assez régulières (ou 2 courbes dans $\mathbb{R}^2$) sans point commun, dont l'une est à l'intérieur de l'autre. Γ_e et Γ_r sont les 2 surfaces (ou 2 courbes) formant la frontière ou "contour" Γ de G. ($\Gamma = \Gamma_e + \Gamma_r$). Leurs propriétés géométriques seront précisées ultérieurement.

b) Conditions au contour

Leur choix a été discuté au chapitre précédent :

$$\left\{ \begin{array}{ll} V(Q) = V_1 = \mathcal{E}^{te} & Q \in \Gamma_e \\ V(Q) = V_2 = \mathcal{E}^{te} \neq V_1 & Q \in \Gamma_r \\ \Delta V(Q) = -g(Q)/\epsilon & Q \in \Gamma_e \end{array} \right.$$

c) Grandeurs adimensionnelles

Pour la commodité de l'étude mathématique, il est intéressant d'introduire des variables sans dimension. En primant les grandeurs dimensionnelles rencontrées jusqu'à présent, on définit les grandeurs adimensionnelles suivantes :

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{ll} x_i = x'_i/L & L \text{ longueur typique de } G \\ V = V'/U & U = V'_1 - V'_2 \neq 0 \text{ tension appliquée} \\ q = q'/\rho'_0 & \rho'_0 = \epsilon U/L^2. \end{array} \right.$$

L'introduction de ces grandeurs n'apporte aucun changement dans l'expression de l'équation (I-2). Pour les conditions aux limites, par contre, il intervient une simplification ; V n'apparaissant que par ses dérivées dans (I-2), cette équation n'est pas modifiée lorsqu'on ajoute une constante arbitraire à V. Les conditions au contour deviennent :

$$\left\{ \begin{array}{ll} V(Q) = 1 & Q \in \Gamma_e \\ V(Q) = 0 & Q \in \Gamma_r \\ \Delta V(Q) = -g(Q) & Q \in \Gamma_e \end{array} \right.$$

avec

$$g = g'/\rho'_0.$$

La définition physique du problème assure que les charges sont "émises" par Γ_e , donc qu'elles sont positives ; ceci entraîne :

$$g(Q) > 0.$$

La fonction g est supposée dans toute la suite strictement positive (car physiquement il y a toujours des ions créés au voisinage de l'électrode émettrice). Les conditions mathématiques sur g seront précisées ultérieurement. Rappelons simplement que l'approximation consistant à négliger le terme de diffusion dans (I-1) n'est valable que si la fonction g est suffisamment régulière.

d) Système équivalent

En introduisant la densité de charge q , on obtient le système suivant, équivalent à l'équation (I-2) :

$$(2) \quad \begin{cases} \Delta V = -q \\ q^2 - \text{grad } V \cdot \text{grad } q = 0 \end{cases}$$

ou encore, avec l'hypothèse que $q(P) > 0 \quad \forall P \in G \cup \Gamma$

$$(2') \quad \begin{cases} \Delta V = -q \\ \text{grad } V \cdot \text{grad } \frac{1}{q} = -1. \end{cases}$$

En associant les conditions au contour à ce système (2'), on voit que V et q sont liés par l'intermédiaire de deux problèmes partiels :

$$\begin{array}{l}
 (3) \left\{ \begin{array}{l}
 1^{\circ} \text{ Problème de Poisson} \\
 \left\{ \begin{array}{l}
 \Delta V(P) = -q(P) \\
 V(Q) = 1 \\
 V(Q) = 0
 \end{array} \right. \begin{array}{l}
 P \in G \\
 Q \in \Gamma_e \\
 Q \in \Gamma_r
 \end{array} \\
 \\
 2) \text{ Problème linéaire du } 1^{\text{er}} \text{ ordre en } u = \frac{1}{q} \\
 \left\{ \begin{array}{l}
 \text{grad} V(P) \cdot \text{grad } u(P) = -1 \\
 u(Q) = 1/g(Q)
 \end{array} \right. \begin{array}{l}
 P \in G \\
 Q \in \Gamma_e
 \end{array}
 \end{array}
 \right.$$

Ce système (3) fournit une justification formelle du choix des conditions au contour ; en effet, q étant supposé donné, le problème de Poisson est bien posé ; pour le problème linéaire en u , si l'on suppose le potentiel V donné les caractéristiques sont les lignes de force de ce potentiel, toutes normales à Γ_e ; la donnée de u sur Γ_e et l'hypothèse que $\text{grad } V$ ne s'annule pas dans G permettent de dire que ce problème est alors, lui aussi, correctement posé. Il est donc raisonnable de s'attendre à ce que (3) constitue un problème bien posé. Cet argument ne nous dispense nullement de démontrer le résultat.

L'examen du système (3) amène une autre remarque.

La décomposition du problème sous la forme de 2 problèmes distincts suggère l'emploi d'une méthode d'itération pour obtenir la solution. Cette forme du système (3) conduit également à la définition d'une application qui va jouer un rôle fondamental dans toute l'étude mathématique.

II - DEFINITION DE L'APPLICATION T

Dans toute la suite de ce chapitre, seul le cas

$$q(P) > 0 \quad \forall P \in G+\Gamma \quad (\text{fermé})$$

est envisagé. Etudions avec quelques détails les 2 problèmes distincts apparaissant dans (3).

a) Problème de Poisson

On suppose la distribution $q(P)$ connue dans $G+\Gamma$

$$(4) \quad \begin{cases} \Delta V(P) = -q(P) & P \in G \\ V(Q) = 1 & Q \in \Gamma_e \\ V(Q) = 0 & Q \in \Gamma_r \end{cases}$$

Il faut préciser les propriétés de Γ_e et Γ_r ; par hypothèse, Γ_e et Γ_r sont 2 surfaces dont le plan tangent est défini en chaque point et varie continûment. Avec ces conditions de régularité, on est certain de l'existence de la fonction de Green dans G ([63] p. 650). Rappelons le résultat classique : la solution du système (4) existe et est continue ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre 2 inclus si $q(P)$ est une fonction lipschitzienne (elle est alors continue au sens de Hölder). On peut trouver les démonstration dans [28] p. 246.

b) Problème du 1^{er} ordre

On suppose la fonction $V(P)$ donnée et telle que V et ses dérivées jusqu'à l'ordre 2 sont continues.

$$(5) \quad \begin{cases} \text{grad } V(P) \cdot \text{grad } \frac{1}{q}(P) = -1 & P \in G \\ q(Q) = g(Q) & Q \in \Gamma_e \end{cases}$$

Posons : $\vec{E} = - \text{grad } V$ et $u = 1/q$.

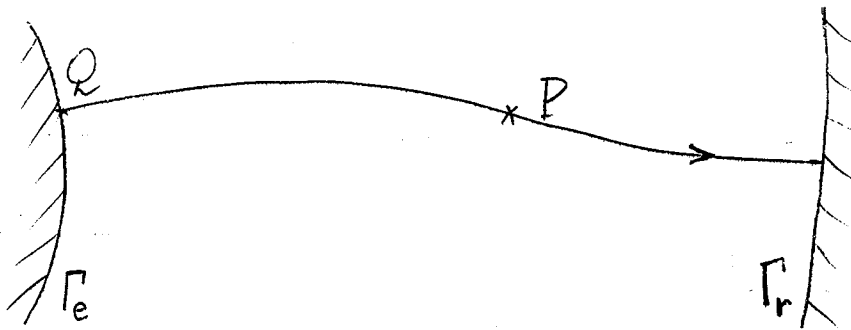
L'équation est du 1^{er} ordre, linéaire en u ; les caractéristiques sont les courbes définies par :

$$\frac{dx}{ds} = - \frac{\text{grad } V}{\|\text{grad } V\|}$$

avec $\vec{x} = \vec{OP}$, s étant l'abscisse curviligne. Les caractéristiques sont identiques aux lignes de force du potentiel V . Supposons que le potentiel V soit tel que l'on ait :

$$\|\text{grad } V(P)\| \geq \varepsilon > 0$$

$$\forall P \in G + \Gamma \quad (\varepsilon \text{ arbitrairement petit})$$



En projetant sur la caractéristique C orientée de Γ_e vers Γ_r et en intégrant le long de C on obtient :

$$(6) \quad u(P) - u(Q) = \int_C \frac{ds}{\|\vec{E}\|} \quad (\text{intégration entre } Q \text{ et } P).$$

c) Notations

La propriété $\|\text{grad } V\| \geq \varepsilon > 0$ entraîne que par tout point $P \in G$, il passe une ligne de force C et une seule, dont l'intersection avec Γ_e est le point Q . Le point P est parfaitement défini par la donnée de (Q, s)

$$\begin{cases} Q : \text{point origine sur } \Gamma_e \text{ de } C_Q \text{ passant par } P. \\ s : \text{abscisse curviligne de } P \text{ sur } C_Q. \end{cases}$$

A tout point P correspond un seul couple (*) (Q,s) ; réciproquement à tout couple (Q,s) correspond un seul point P. (si $s < L_Q$ = longueur de C_Q).

On a la relation biunivoque et continue :

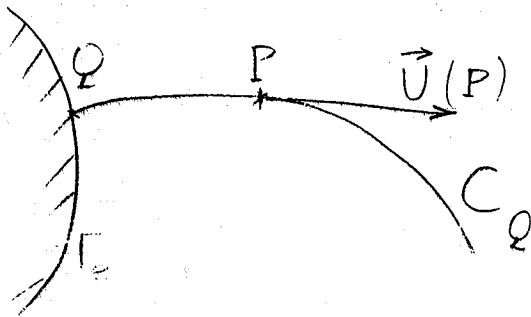
$$P \longleftrightarrow (Q,s)$$

$\vec{E}$ ne s'annule pas et conserve la même orientation tout le long d'une ligne de force C_Q : c'est l'orientation de Γ_e vers Γ_r . Soit $\vec{U}(P)$ le vecteur unitaire orienté de C_Q en chaque point P ; on peut écrire :

$$\vec{E}(P) = E(P) \vec{U}(P)$$

alors :

$$\|\text{grad } V(P)\| \geq \epsilon \iff E(P) \geq \epsilon.$$



En associant le couple (Q,s) à P :

$$E(P) = E(Q,s)$$

on peut mettre alors le 2ème membre de (6) sous la forme d'une intégrale ordinaire :

$$(7) \quad \frac{1}{q(P)} - \frac{1}{g(Q)} = \int_0^s \frac{dt}{E(Q,t)} \quad \text{avec} \quad P \longleftrightarrow (Q,s)$$

Remarquons que l'on a ainsi inversé le système (5).

(*) Cette appellation n'est pas correcte d'un point de vue mathématique, car on associe un scalaire et un point $\in \Gamma_e$. N'en ayant pas trouvé d'autre, nous l'avons conservée par raison de commodité.

d) Application T

C'est l'application associée au système formé par (4) et (7). Soit $q_1(P)$ une fonction lipschitzienne représentant une certaine densité de charge et soit $V_1(P)$ le potentiel correspondant obtenu en résolvant le problème de Poisson (4). Si $q_1(P)$ est telle que :

$$E_1(P) = \|\text{grad } V_1(P)\| \geq \varepsilon \quad \forall P \in G+\Gamma$$

alors le réseau de lignes de force est parfaitement défini ; en appliquant (7) on détermine une nouvelle distribution de densité $q_2(P)$.

Définition II-1

T est l'application faisant correspondre q_2 à q_1 :

$$q_2 = Tq_1.$$

S'il existe un couple de fonctions V et q satisfaisant au système (3), alors q est un point fixe de l'application T :

$$q = Tq.$$

Le problème de l'existence d'une solution peut donc se ramener à celui de l'existence d'un point fixe de T, existence qui peut être établie en appliquant la théorie de SCHAUDER-LERAY.

Cette façon de procéder introduit d'emblée une restriction notable. En effet, la définition II-1 est soumise à la condition

$$E_1(P) \geq \varepsilon \quad \forall P \in G+\Gamma$$

Il est donc nécessaire de préciser le domaine de définition de T ; la limitation de ce domaine va amener des restrictions sur le choix de la fonction g et par conséquent une restriction de la généralité du problème étudié.

III - RESTRICTIONS SUR LE CHOIX DE LA FONCTION G

a) Domaine de définition de T

Plaçons-nous dans l'espace de Banach C_0 des fonctions continues, définies sur $G+\Gamma$, avec la norme :

$$\|F\| = \max_{P \in G+\Gamma} |F(P)|$$

Lemme II-1
.....

Soit $q \in C_0$ ($q(P) > 0 \quad \forall P \in G+\Gamma$) et V le potentiel correspondant solution du système (4) ; $\varepsilon > 0$ étant donné, il existe $q_0 > 0$ dépendant de ε et tel que :

$$\|q\| \leq q_0 \Rightarrow \|\text{grad } V(P)\| \geq \varepsilon \quad \forall P \in G+\Gamma$$

Démonstration

Soit $q_m = \|q\|$; en utilisant la fonction de Green $K(P,M)$ le potentiel solution de (4) :

$$\begin{cases} \Delta V(P) = -q(P) & P \in G \\ V(Q) = 1 & Q \in \Gamma_e \\ V(Q) = 0 & Q \in \Gamma_r \end{cases}$$

s'écrit de façon explicite :

$$(8) \quad V(P) = V_h(P) + \int_G K(P,M) q(M) dv$$

où V_h est la fonction harmonique solution du problème de Laplace ($q = 0$).

Après dérivation :

$$(8') \quad \text{grad } V(P) = \text{grad } V_h(P) + \text{grad}_P \int_G K(P,M) q(M) dv$$

(la notation grad_P indique que la dérivation est relative aux variables liées à P). Cette relation a un sens car les dérivées partielles de

$$\int_G K(P,M) q(M) dv$$

existent(cf[28]) .

De (8') on déduit la relation entre normes euclidiennes :

$$\|\text{grad } V(P)\| \geq \|\text{grad } V_h(P)\| - \|\text{grad}_P \int_G K(P,M) q(M) dv\|$$

Or l'on a :

$$\begin{aligned} \|\text{grad}_P \int_G K(P,M) q(M) dv\| &= \left\| \int_G \text{grad}_P K(P,M) q(M) dv \right\| \\ &\leq \int_G \|\text{grad}_P K(P,M)\| q(M) dv \quad (q(M) > 0) \\ &\leq q_m \int_G \|\text{grad}_P K(P,M)\| dv \end{aligned}$$

D'après la définition de la fonction de Green et la régularité de Γ , cette dernière intégrale a un sens.

Donc :

$$\|\text{grad } V(P)\| \geq \|\text{grad } V_h(P)\| - q_m \int_G \|\text{grad}_P K(P,M)\| dv.$$

ε suffisamment petit étant donné, il existe $q_0 > 0$ tel que

$$q_m \leq q_0 \Rightarrow \|\text{grad } V(P)\| \geq \varepsilon \quad \forall P \in G+\Gamma$$

en effet soient :

$$\left\{ \begin{aligned} K_1 &= \min_{P \in G+\Gamma} \|\text{grad } V_h(P)\| > 0 \\ K_2 &= \max_{P \in G+\Gamma} \int_G \|\text{grad}_P K(P,M)\| dv \\ q_0 &= \frac{K_1 - \varepsilon}{K_2} \end{aligned} \right.$$

il vient :

$$\|\text{grad } V(P)\| \geq K_1 - q_m K_2 \geq K_1 - q_0 K_2 = \varepsilon.$$

Remarque :

K_1 est bien positif ; les hypothèses de régularité de Γ_e et Γ_r assurent que le champ harmonique n'est pas nul sur le contour (absence de points anguleux, coniques, etc...). Ceci achève la démonstration.

b) Définition des "faibles densités"

La notion de "faible densité" est définie mathématiquement à partir du domaine de définition de T dans C_0 , c'est-à-dire par la condition :

$$\|q\| \leq q_0$$

la borne q_0 dépendant de ε et du domaine G .

L'utilisation du théorème de SCHAUDER-LERAY demande l'existence d'un sous-ensemble $S \subset C_0$ appliqué dans lui-même par T . Les fonctions de S auront toutes la propriété :

$$q(Q) = g(Q)$$

$$Q \in \Gamma_e.$$

On peut remarquer de plus, que pour déterminer $q_2 = Tq_1$, on utilise (7) dont la forme montre que, si $E_1(P) \geq \varepsilon > 0$, q_2 décroît le long de chaque ligne de force décrite de Γ_e vers Γ_r ; d'où :

$$\max_{P \in C_Q} q(P) = g(Q).$$

La limitation des valeurs des fonctions q se réduit donc à la limitation des valeurs de g . Lorsqu'on utilise l'application T , le cas des faibles densités est défini pratiquement par la condition :

$$\max_{Q \in \Gamma_e} g(Q) \leq q_0.$$

Pour la suite, on suppose que g a les propriétés suivantes :

- 1) $0 < a \leq g(Q) \leq q_0 \quad \forall Q \in \Gamma_e$
- 2) g est lipschitzienne de constante K .

IV - EXISTENCE D'UNE SOLUTION DANS LE CAS DE FAIBLE DENSITE

Nous allons d'abord appliquer le théorème de SCHAUDER-LERAY dont nous rappelons l'énoncé :

"Si T est une application continue d'une partie fermée, compacte et convexe d'un espace de Banach dans elle-même, alors T a un point fixe ([28] p. 357)."

a) Définition II-2

S_ϵ est la partie de C_0 possédant les propriétés suivantes :

$$(9) f \in S_\epsilon \Leftrightarrow \begin{cases} f \in C_0 & 0 < \alpha \leq f(P) \leq q_0 & P \in G+\Gamma \\ f(Q) = g(Q) & & Q \in \Gamma_e \\ |f(P_1) - f(P_2)| \leq k \|P_1 - P_2\| & & P_1, P_2 \in G+\Gamma \end{cases}$$

α et k étant 2 constantes dépendant de ϵ , comme q_0 et qui seront précisées par la suite.

b) Lemme II-2

S_ϵ est convexe, fermé, compact.

Démonstration :

1) Convexité : soit $f_1 \in S_\varepsilon$, $f_2 \in S_\varepsilon$

D'après la définition de S_ε :

$$f' = \lambda f_1 + \mu f_2 \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda + \mu = 1 \\ \lambda \geq 0 \\ \mu \geq 0 \end{array} \right.$$

est un élément de S_ε .

2) Fermeture de S_ε :

Soit une suite $\{f_n\}$ d'éléments de S_ε convergeant uniformément vers f (c'est-à-dire pour la norme de C_0).

f est alors élément de C_0 ; de plus f vérifie toutes les propriétés définissant S_ε , donc appartient à S_ε .

3) Compacité de S_ε :

Toute suite infinie $\{f_n\}$ de fonctions $f_n \in S_\varepsilon$ est telle que les f_n forment une famille de fonctions équicontinues (car lipschitziennes de constante k indépendante de n) ; on peut donc en extraire une suite convergente (Théorème d'ASCOLI).

c) Lemme II-3

On peut choisir α et k de sorte que l'application T applique S_ε dans lui-même.

Démonstration :

Soit $f \in S_\varepsilon$. Etudions le transformé f' :

$$f' = T f$$

$$1) \quad f \in S_\varepsilon \Rightarrow 0 < \alpha \leq f(P) \leq q_0 \quad \forall P \in G+\Gamma$$

D'après le lemme II-1, le potentiel solution de :

$$\begin{cases} \Delta V(P) = -f(P) & P \in G \\ V(Q) = 1 & Q \in \Gamma_e \\ V(Q) = 0 & Q \in \Gamma_r \end{cases}$$

est tel que :

$$\|\text{grad } V(P)\| \geq \varepsilon \quad \text{ou} \quad E(P) \geq \varepsilon \quad \forall P \in G+\Gamma$$

D'après la relation (7) qui s'écrit ici :

$$\frac{1}{f'(P)} - \frac{1}{g(Q)} = \int_0^s \frac{dt}{E(Q,t)} \quad (P \leftrightarrow (Q,s))$$

on voit que :

$$i) \quad f'(Q) = g(Q) \quad \forall Q \in \Gamma_e$$

$$ii) \quad \frac{1}{E(Q,s)} < \frac{1}{\varepsilon} \quad \forall P \in G+\Gamma$$

$\Rightarrow$

$$f'(P) \geq \frac{1}{\frac{1}{g(Q)} + \frac{s}{\varepsilon}} \gg \frac{1}{\frac{1}{g(Q)} + \frac{L}{\varepsilon}}$$

L étant la borne supérieure de la longueur curviligne des caractéristiques C ;

L existe parce que les L_Q sont bornés ; en effet :

$$\int_{C_Q} E(Q,s) ds = \int_{C_Q} \vec{E} \cdot d\vec{l} = V(Q) - V(Q') = 1$$

$$E(P) \geq \varepsilon \Rightarrow \int_{C_Q} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_0^{L_Q} E(Q,s) ds \geq \varepsilon L_Q$$

D'où :
$$L = \sup_{Q \in \Gamma_e} L_Q < \frac{1}{\varepsilon}$$

Soit :
$$m = \min_{Q \in \Gamma_e} g(Q) \quad (m > 0 \text{ par hypothèse})$$

Il vient :

$$f'(P) \geq \frac{m}{1 + \frac{mL}{\varepsilon}} = \frac{m\varepsilon}{\varepsilon + mL} \quad VP \in G+\Gamma$$

et l'on prendra :

$$\alpha = \frac{m\varepsilon}{\varepsilon + mL}$$

2) f' est lipschitzienne

Il s'agit de montrer que :

$$|f'(P_2) - f'(P_1)| \leq k \|P_1 P_2\| \quad P_1, P_2 \in G+\Gamma$$

Lorsque P_1 et P_2 sont sur une même ligne de force, ce résultat est immédiat car $f'(P)$ est dérivable le long des lignes de force et à dérivée continue et uniformément bornée.

Avant d'examiner le cas où P_1 et P_2 sont quelconques, rappelons que le potentiel V , ses dérivées partielles premières et secondes sont continues ; il s'ensuit que les lignes de forces constituent un réseau "continu" de courbes ; afin d'illustrer cette expression, considérons 2 points P_1 et P_2 distincts situés sur une même ligne de force C quelconque et 2 plans π_1 et π_2 respectivement orthogonaux à C en P_1 et P_2 et définissons l'application R suivante : $M_1 \in \pi_1$ étant donné, on construit la ligne de force passant par M_1 et coupant π_2 en M_2 :

$$R \\ M_1 \longrightarrow M_2$$

alors tout voisinage de P_2 dans π_2 a pour image inverse un voisinage de P_1 dans π_1 .

Nous allons maintenant établir une relation qui précise cette notion de continuité. Soient 2 lignes de force C_1 et C_2 coupant Γ_e en Q_1 et Q_2 ; en notant M_1 et M_2 les points courants, les équations définissant C_1 et C_2 sont :

$$\begin{aligned}\frac{d\overrightarrow{Q_1 M_1}}{ds} &= -\frac{1}{E} \text{grad } V(M_1) \\ \frac{d\overrightarrow{Q_2 M_2}}{ds} &= -\frac{1}{E} \text{grad } V(M_2)\end{aligned}$$

Supposons maintenant que M_1 et M_2 ont la même abscisse curviligne s ; en effectuant la différence on obtient :

$$\frac{d}{ds} (\overrightarrow{Q_1 M_1} - \overrightarrow{Q_2 M_2})(s) = \frac{d}{ds} \overrightarrow{M_2 M_1}(s) = \frac{1}{E} \text{grad } V(M_2) - \frac{1}{E} \text{grad } V(M_1)$$

qui donne en norme euclidienne :

$$\left| \frac{d}{ds} \|M_1 M_2\|(s) \right| \leq \ell \|M_1 M_2\|$$

ℓ étant lié aux constantes de Lipschitz des fonctions $\frac{1}{E} \frac{\partial V}{\partial x_i}$ ($i = 1, 2, 3$) ; on en déduit :

$$e^{-\ell s} \leq \|M_1 M_2\|(s) / \|Q_1 Q_2\| \leq e^{\ell s}$$

Si l'on considère 2 couples de points M_1, M_2 et N_1, N_2 d'abscisses curvilignes respectives s_1 et s_2 sur C_1 et C_2 , on a donc :

$$(10) \quad \|N_1 N_2\|(s_2) \leq \lambda \|M_1 M_2\|(s_1) \quad \forall s_1, s_2 \leq \min(L_1, L_2)$$

avec

$$\lambda \leq e^{2\ell L} \quad (L \text{ borne supérieure de } s).$$

La même propriété de continuité du réseau de lignes de force assure que pour 2 points P_1 et P_2 quelconques, d'abscisses curvilignes respectives s_1 et s_2 , on a la relation

$$(11) \quad |s_1 - s_2| \leq \mu \|P_1 P_2\| \quad \forall P_1, P_2 \in G + \Gamma$$

Soient P_1, P_2 , 2 points de $G + \Gamma$, C_1 et C_2 les 2 lignes de force passant par P_1 et P_2 ; on a :

$$P_1 \leftrightarrow (Q_1, s_1)$$

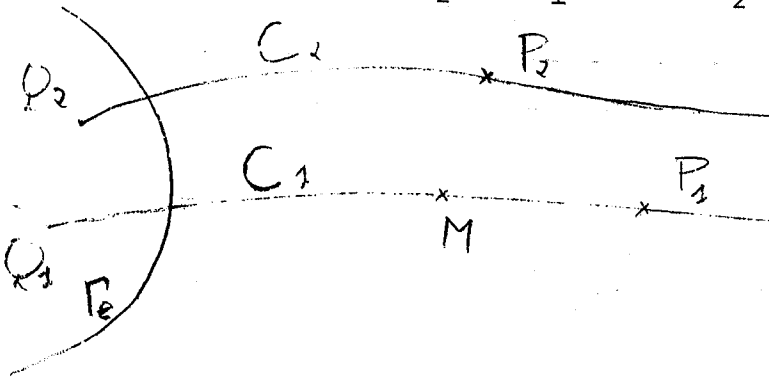
$$P_2 \leftrightarrow (Q_2, s_2).$$

Supposons $s_1 > s_2$. Soit alors M le point d'abscisse s_2 sur C_1 :

$$M \leftrightarrow (Q_1, s_2)$$

En décomposant :

$$|f'(P_2) - f'(P_1)| \leq |f'(P_2) - f'(M)| + |f'(M) - f'(P_1)|$$



Pour le terme $|f'(M) - f'(P_1)|$, en appliquant (7) il vient :

$$\frac{1}{f'(P_1)} - \frac{1}{f'(M)} = \int_{s_2}^{s_1} \frac{dt}{E(Q_1, t)} \leq \frac{1}{\epsilon} (s_1 - s_2)$$

D'où en appliquant (11) :

$$|f'(M) - f'(P_1)| \leq \frac{q_0^2}{\epsilon} \mu \|P_1 P_2\|$$

Pour l'autre terme $|f'(P_2) - f'(M)|$ effectuons la différence entre les relations définissant $f'(P_2)$ et $f'(M)$:

$$\frac{1}{f'(M)} - \frac{1}{f'(P_2)} = \frac{1}{g(Q_1)} - \frac{1}{g(Q_2)} + \int_0^{s_2} \frac{ds}{E(Q_1, s)} - \int_0^{s_2} \frac{ds}{E(Q_2, s)}$$

Les deux intégrales ordinaires ayant les mêmes bornes d'intégration, il vient :

$$\left| \int_0^{s_2} \frac{ds}{E(Q_1, s)} - \int_0^{s_2} \frac{ds}{E(Q_2, s)} \right| \leq \frac{1}{\epsilon^2} \int_0^{s_2} |E(Q_2, s) - E(Q_1, s)| ds$$

La fonction E est lipschitzienne ; soit K_1 la constante correspondante ; on a, en appliquant (10) :

$$|E(Q_2, s) - E(Q_1, s)| = |E(M_2) - E(M_1)| \leq K_1 \|M_1 M_2\|(s) \leq \lambda K_1 \|MP_2\|$$

pour $0 \leq s \leq s_2$

Après quelques calculs élémentaires on obtient :

$$|f'(P_2) - f'(M)| \leq K \lambda \|MP_2\| + \frac{q_0^2}{\epsilon^2} s_2 K_1 \lambda \|MP_2\|$$

L'inégalité triangulaire et l'application de (11) conduisent à :

$$\|MP_2\| \leq \|MP_1\| + \|P_1 P_2\| \leq |s_1 - s_2| + \|P_1 P_2\| \leq (\mu + 1) \|P_1 P_2\|$$

en regroupant les termes il vient finalement :

$$(12) \quad |f'(P_1) - f'(P_2)| \leq \left[\lambda(\mu + 1) \left(K + \frac{q_0^2}{\epsilon^2} s_2 K_1 \right) + \mu \frac{q_0^2}{\epsilon} \right] \|P_1 P_2\|$$

En prenant

$$k = \lambda(\mu+1) \left(K + \frac{q_0^2}{\varepsilon} LK_1 \right) + \mu \frac{q_0^2}{\varepsilon}$$

les conditions définissant S_ε sont satisfaites ; donc $f' \in S_\varepsilon$.
Ceci achève la démonstration du lemme II-3.

d) Lemme II-4

L'application T est continue sur S_ε .

Démonstration :

Dans le paragraphe suivant est établie la relation (15) du type :

$$\|T f_2 - T f_1\| \leq D \|f_2 - f_1\| \quad f_1, f_2 \in S_\varepsilon$$

avec D borné ; cette relation assure la continuité de T opérant sur S_ε .

Théorème II-1

L'application T admet au moins un point fixe dans le sous-ensemble S_ε défini par (9).

Démonstration :

Les 3 lemmes précédents prouvent que toutes les conditions d'application du théorème de Schauder sont satisfaites. Donc il existe un point fixe, c'est-à-dire un élément $q \in S_\varepsilon$ tel que : $q = T q$.

q et la fonction V correspondante satisfont au système constitué par (4) et (7), système qui a permis de définir T , mais qui n'est pas équivalent au système (3) du fait que nous avons fait l'hypothèse que la fonction g est seulement lipschitzienne. Si l'on suppose que g possède des dérivées partielles premières continues dans un voisinage de Γ_ε , la forme de (7) et les propriétés de E assurent alors que :

$$q \in C_1.$$

Donc avec cette hypothèse on a :

Théorème II-2

Il existe au moins une solution satisfaisant au système (3) dans le cas de faible densité.

On peut observer que les deux théorèmes ne sont pas équivalents. Le premier concerne T qui est définie sur C_0 ; il suffit alors que g soit lipschitzienne. Lorsque g est dérivable, q , point fixe de T opérant sur C_0 , appartient également à C_1 ; on obtient le théorème II-2.

V - UNICITE DE LA SOLUTION DU SYSTEME (3)

L'unicité de la solution n'a pas pu être établie de façon générale ; elle résulte ci-dessous du fait que l'application T est une contraction lorsque la fonction g prend des valeurs suffisamment faibles. Avant de montrer ce résultat, il est nécessaire de détailler certaines relations qui interviennent dans le calcul du module de continuité.

a) Comparaison des caractéristiques

Soient $f_1 \in S_\epsilon$, $f_2 \in S_\epsilon$ et V_1, V_2 les 2 potentiels correspondants, solution de (4) ; les 2 réseaux de lignes de force ne coïncident pas en général. La dépendance continue de V et de ses dérivées premières en fonction de f implique :

$$\begin{aligned}
 |V_2(P) - V_1(P)| &\leq \alpha \|f_2 - f_1\| \\
 \left| \frac{\partial V_2}{\partial x_i}(P) - \frac{\partial V_1}{\partial x_i}(P) \right| &\leq \beta_i \|f_2 - f_1\| \quad (i = 1, 2, 3) \\
 |E_2(P) - E_1(P)| &\leq \beta \|f_2 - f_1\|
 \end{aligned}$$

Considérons un point $P \in G$; soit C_1 et C_2 les lignes de force passant par P et définies par :

$$C_1 : \quad \frac{d\vec{PM}_1}{ds} = - \frac{1}{E_1} \overrightarrow{\text{grad } V_1}(M_1)$$

$$C_2 : \quad \frac{d\vec{PM}_2}{ds} = - \frac{1}{E_2} \overrightarrow{\text{grad } V_2}(M_2)$$

En prenant l'origine de l'abscisse curviligne s en P , on obtient, pour la distance des points M_1 et M_2 de même abscisse s : (*)

$$\left| \frac{d}{ds} \|M_1 M_2\|(s) \right| \leq k \|f_2 - f_1\| + \ell \|M_1 M_2\|$$

k étant ici tel que :

$$\left\| \frac{1}{E_1} \overrightarrow{\text{grad } V_1}(M) - \frac{1}{E_2} \overrightarrow{\text{grad } V_2}(M) \right\| \leq k \|f_2 - f_1\|$$

et ℓ étant lié aux constantes de Lipschitz des fonctions $\frac{1}{E} \frac{\partial V}{\partial x_i}$ ($i = 1, 2, 3$) V et E correspondant à $f \in S_\epsilon$. On obtient :

$$\|M_1 M_2\| \leq \|f_2 - f_1\| \frac{k}{\ell} (e^{\ell|s|} - 1)$$

Comme s est borné par $L \leq \frac{1}{\epsilon}$ on a finalement :

$$(13) \quad \|M_1 M_2\| \leq \gamma \|f_2 - f_1\|$$

(*) Dans ce paragraphe $\| \cdot \|$ dénote à la fois la norme euclidienne dans $\mathbb{R}_3$ et la norme du maximum dans C_0 ; la différence apparait sur les éléments dont on prend la norme.

Appelons Q_1 et Q_2 les points d'intersection de C_1 et C_2 avec Γ_e ; la notation du paragraphe précédent donne pour P :

système 1 : $P \leftrightarrow (Q_1, s_1)$

système 2 : $P \leftrightarrow (Q_2, s_2)$

La dépendance continue de V et E en fonction de f assure que :

$$(14) \quad |s_2 - s_1| \leq \delta \|f_2 - f_1\|$$

b) Calcul du module de continuité

Avec les notations précédentes, en appliquant (7) dans les 2 cas, on a :

$$\begin{cases} \frac{1}{Tf_1(P)} = \frac{1}{g(Q_1)} + \int_0^{s_1} \frac{dt}{E_1(Q_1, t)} \\ \frac{1}{Tf_2(P)} = \frac{1}{g(Q_2)} + \int_0^{s_2} \frac{dt}{E_2(Q_2, t)} \end{cases}$$

Supposons $s_2 > s_1$ (cela n'introduit aucune restriction dans la généralité du raisonnement). Posons $\sigma = s_2 - s_1$; en effectuant la différence des 2 relations et en prenant les modules :

$$|Tf_2(P) - Tf_1(P)| \leq \frac{Tf_2(P) \cdot Tf_1(P)}{g(Q_1)g(Q_2)} |g(Q_2) - g(Q_1)|$$

$$+ Tf_1(P)Tf_2(P) \int_0^{\sigma} \frac{dt}{E_2(Q_2, t)} +$$

$$Tf_1(P) \cdot Tf_2(P) \left| \int_0^{s_1} \left(\frac{1}{E_1(Q_1, t)} - \frac{1}{E_2(Q_2, t+\sigma)} \right) dt \right|$$

Pour le 1^{er} terme :

$$\frac{Tf_1(P)}{g(Q_1)} \leq 1$$

$$\frac{Tf_2(P)}{g(Q_2)} \leq 1$$

$$|g(Q_2) - g(Q_1)| \leq K \|Q_1 Q_2\|$$

et

$$\|Q_1 Q_2\| \leq \|Q_1 M_2\| + \|M_2 Q_2\|$$

Q_1 et M_2 ont la même abscisse curviligne lorsqu'on prend l'origine de s en P ; la longueur $\|M_2 Q_2\|$ est au plus égale à la longueur curviligne sur C_2 ; d'où, en appliquant (13) et (14)

$$\|Q_1 Q_2\| \leq (\gamma + \delta) \|f_2 - f_1\|$$

Pour le 2^{ème} terme :

$$Tf_1(P) Tf_2(P) \leq \left[\max_{Q \in \Gamma_e} g(Q) \right]^2 = g_m^2$$

$$\int_0^\sigma \frac{dt}{E_2(Q_2, t)} \leq \frac{\sigma}{\varepsilon} \leq \frac{\delta}{\varepsilon} \|f_2 - f_1\|$$

Pour le troisième terme, il faut remarquer que les points courants dans l'intégrale, sont les points M_1 et M_2 :

$$(Q_1, t) \leftrightarrow M_1$$

$$(Q_2, t + \sigma) \leftrightarrow M_2$$

Décomposons alors l'intégrale :

$$\left| \int_0^{s_1} \left(\frac{1}{E_1(M_1)} - \frac{1}{E_2(M_2)} \right) dt \right| \leq \int_0^{s_1} \frac{|E_2(M_2) - E_1(M_1)|}{E_1(M_1)E_2(M_2)} dt$$

$$\leq \frac{1}{\epsilon^2} \int_0^{s_2} |E_2(M_2) - E_1(M_1)| dt$$

Or :

$$|E_2(M_2) - E_1(M_1)| \leq |E_2(M_2) - E_2(M_1)| + |E_2(M_1) - E_1(M_1)|$$

$$" \leq v \|M_1 M_2\| + \beta \|f_2 - f_1\|$$

En appliquant (13)

$$|E_2(M_2) - E_1(M_1)| \leq (v\gamma + \beta) \|f_2 - f_1\|$$

(v : constante de Lipschitz de la fonction E_2)

En rassemblant ces termes, on obtient :

$$(15) \quad \|Tf_2 - Tf_1\| \leq \left[K(\gamma + \delta) + \frac{q_m^2}{\epsilon} \delta + L \frac{q_m^2}{\epsilon} (v\gamma + \beta) \right] \|f_2 - f_1\|$$

a) Théorème II-3

Si la fonction donnée sur Γ_e et sa constante de Lipschitz K prennent des valeurs suffisamment faibles, l'application T est une contraction et la solution du problème (3) est unique.

Démonstration :

Il suffit que q_m et K soient tels que :

$$(16) \quad K_0 = K(\gamma + \delta) + q_m^2 \frac{\delta\epsilon + (v\gamma + \beta)L}{\epsilon} < 1.$$

Cas particulier : lorsque $g(Q) = c^{te} = q_m$ le premier terme disparaît et la condition se reporte complètement sur q_m .

Remarque :

L'unicité de la solution n'est pas limitée au cas où T est contractante ; c'est la méthode de démonstration utilisée qui apporte des restrictions.

VI - CONCLUSION CONCERNANT LA FORMULATION DU PROBLEME (3)

a) Problème bien posé

Nous allons rappeler d'abord la notion de problème "bien posé" au sens de Hadamard (nous reprenons la présentation de LAVRENTIEV [38]).

Soient Φ et F 2 espaces métriques complets et soit A un opérateur défini sur Φ et prenant ses valeurs dans F ; considérons l'équation

$$(17) \quad A\varphi = f$$

f étant donné ; le problème consistant à résoudre (17) est dit "bien posé" si la solution de (17) :

- 1) existe $\forall f \in F$
- 2) est unique dans Φ
- 3) dépend continûment de f .

Examinons le problème étudié dans ce chapitre ; l'existence et l'unicité n'ayant pas été établies dans le cas général, on voit qu'on ne pourra pas conclure que le problème est bien posé au sens de Hadamard (à moins d'adapter la définition au cas particulier des faibles densités).

Il est possible de tourner cette difficulté en se référant à la définition beaucoup plus raffinée (*) exposée ci-dessous.

Soit un certain ensemble fermé $M \subset \Phi$. La résolution de (17) constitue un problème bien posé au sens de Tykhonov si les conditions suivantes sont satisfaites :

- 1) on sait que la solution φ existe pour une certaine classe de fonctions f et qu'elle appartient à M .
- 2) la solution est unique dans une classe de fonctions $\in M$.
- 3) des changements arbitrairement petits de la fonction f qui ne font pas sortir la solution φ de M correspondent à des changements arbitrairement petits dans la solution.

De plus, TYKHONOV a montré que, si l'ensemble fermé M est compact, la propriété de dépendance continue découle des propriétés 1 et 2 ([38] p. 4).

Or dans le problème qui nous intéresse, nous avons défini S_c partie compacte de C_0 ; l'existence et l'unicité permettent alors de conclure que la solution dépend continûment de g . Donc le problème est bien posé au sens de Tykhonov.

b) Démonstration directe de la propriété 3

L'origine physique du problème assure que les électrodes sont des équipotentielles pratiquement parfaites ; la seule fluctuation possible est celle du potentiel de l'une des électrodes. Puisque la différence de potentiel est ramenée à l'unité, une variation δV du potentiel est équivalente à une variation δg de la densité de charge sur Γ_e :

(*) Cette définition a été conçue dans le but d'étudier certains problèmes mal posés dans les espaces fonctionnels "ordinaires", comme, par exemple, le problème de Cauchy pour l'équation de Laplace.

$$\delta g(Q) = - \frac{\alpha}{1+\alpha} g(Q) \text{ avec } \alpha = \frac{\delta V}{V_1 - V_2}$$

Le seul cas qu'il faut étudier concerne donc la dépendance de la solution de $g(Q)$.

Soient g_1 et g_2 , 2 fonctions définies, continues et à dérivées premières continues dans un voisinage contenant Γ_e ; T dépend de g de sorte qu'il faut distinguer les 2 applications T_1 et T_2 ; soient q_1 et q_2 les points fixes de T_1 et T_2 :

$$\begin{cases} q_1 = T_1 q_1 & q_1 \in S_{1,\varepsilon} \\ q_2 = T_2 q_2 & q_2 \in S_{2,\varepsilon} \end{cases}$$

et plaçons-nous dans le cas où T_1 est une contraction, c'est-à-dire, où la fonction q_1 est telle que la condition (16) est satisfaite.

$$\|q_2 - q_1\| = \|T_2 q_2 - T_1 q_1\| \leq \|T_2 q_2 - T_1 q_2\| + \|T_1 q_2 - T_1 q_1\|$$

la relation (15) appliquée à T_1 donne :

$$\|T_1 q_2 - T_1 q_1\| \leq \lambda \|q_2 - q_1\|$$

avec $\lambda < 1$ (T_1 contractant) ; d'où :

$$(1-\lambda) \|q_2 - q_1\| \leq \|T_2 q_2 - T_1 q_2\|$$

D'après la définition de T et la relation (7) :

$$\left(\frac{1}{T_2 q_2} - \frac{1}{T_1 q_2} \right) (P) = \left(\frac{1}{g_2} - \frac{1}{g_1} \right) (Q)$$

(pour $T_1 q_2$ et $T_2 q_2$, on part de la même distribution q_2 , donc du même potentiel) ;

il vient :

$$\|T_2 q_2 - T_1 q_2\| < \|g_2 - g_1\|_0$$

D'où finalement :

$$(18) \quad \|q_2 - q_1\| < \frac{1}{1-\lambda} \|g_2 - g_1\|_0$$

($\|\cdot\|_0$ dénote la norme du maximum sur Γ_e).

Donc lorsque g est telle que l'application T est contractante, la solution unique du problème (3) dépend continûment de la fonction g donnée sur Γ_e selon la relation (18).

c) Conclusion

Dans le cas où la fonction g et ses dérivées premières prennent des valeurs suffisamment faibles, nous avons donc montré dans ce chapitre que la solution de (3) existe, qu'elle est unique et qu'elle dépend continûment des données au contour. Ces 3 critères assurent^{que} dans le cas des faibles densités le problème physique est alors mathématiquement bien posé.

CHAPITRE III

DETERMINATION NUMERIQUE - METHODE D'APPROXIMATIONS SUCCESSIVES DANS LE CAS DES FAIBLES DENSITES

I - GENERALITES

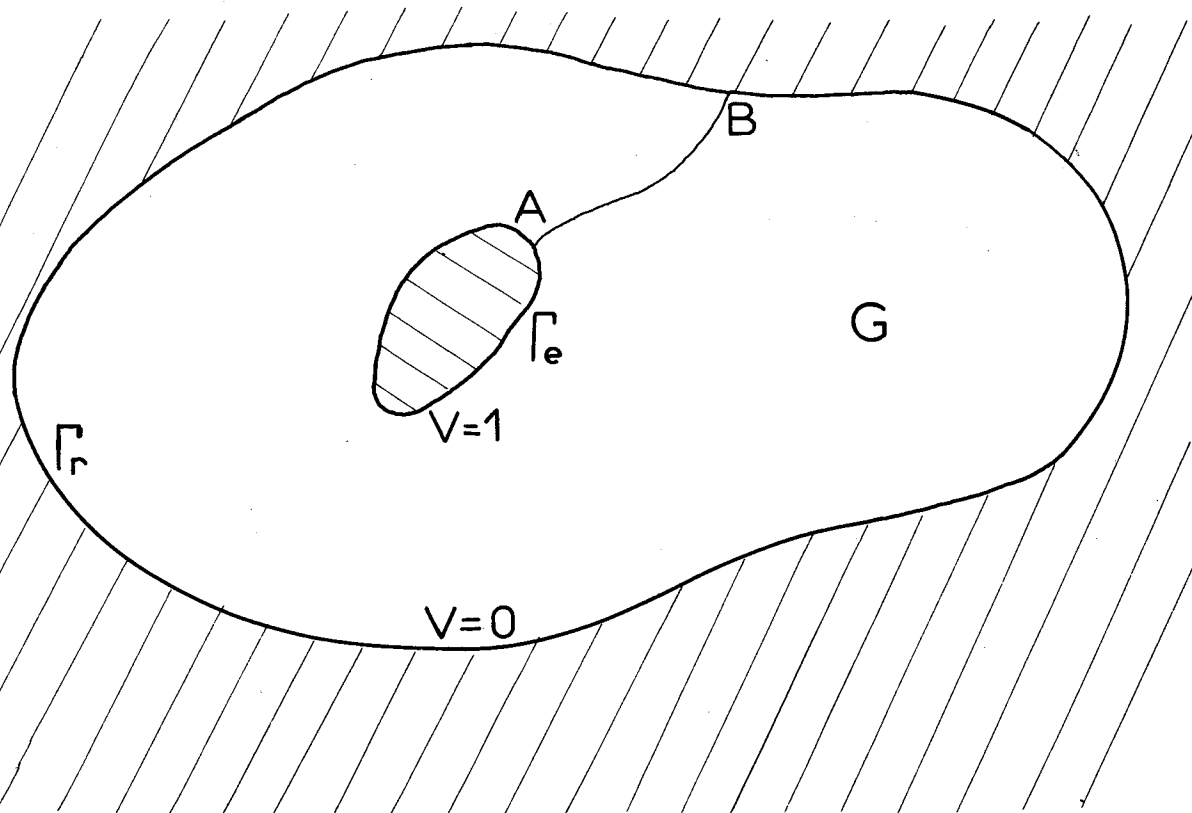
Dans ce chapitre, on examine la détermination effective des solutions par calcul numérique. Après la description de la méthode mise en oeuvre, nous allons établir des résultats concernant l'existence d'une solution du problème aux différences finies, la convergence du processus itératif et la relation entre la solution discrète et la solution du problème (II-3). Les méthodes employées dans ce chapitre étant analogues à celles de la partie précédente, nous pouvons d'ores et déjà remarquer que les résultats ne seront établis que dans le cas des faibles densités.

Les problèmes effectivement résolus par calcul numérique avec une précision suffisante l'ont été pour des configurations bi-dimensionnelles (problèmes plans et de révolution) ; un cas à 3 dimensions a été traité avec une précision plus grossière, pour limiter le temps de calcul.

L'utilisation des transformations conformes est très intéressante dans le cas des problèmes plans. Toute transformation $Z = f(z)$ fait correspondre à G et Γ dans le plan z , un nouveau domaine G' et son contour Γ' dans le plan Z . Par exemple si l'on prend pour $f(z)$ le potentiel complexe, solution du problème :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta V(P) = 0 \\ V(Q) = 1 \\ V(Q) = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} P \in G \\ Q \in \Gamma_e \\ Q \in \Gamma_r \end{array}$$

①



②

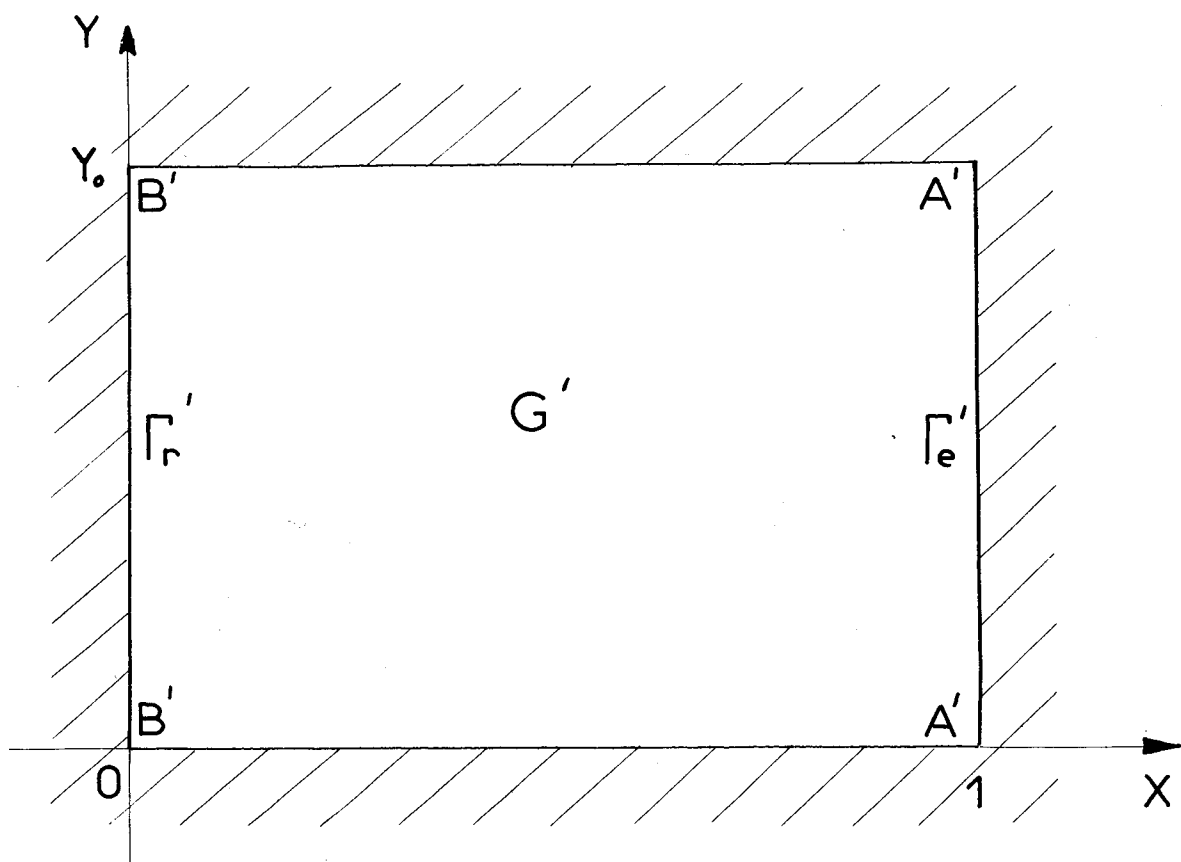


Figure 1 : Transformation conforme $Z = f(z)$, $f(z)$ étant le potentiel complexe dans G . ① plan z : domaine G ② Domaine G' transformé dans le plan Z .

le domaine G' correspondant dans le plan Z est un rectangle, Γ'_e et Γ'_r étant respectivement les segments d'abscisse 1 et 0 et de longueur $Y_0 =$ le flux total du champ harmonique dans G (fig. 1). Remarquons que si une telle transformation est intéressante (les lignes de force du champ affecté par une charge d'espace faisant en général un angle assez faible avec les droites $Y = C^{te}$, lignes de force du champ harmonique), d'autres transformations peuvent être envisagées.

Pour déterminer le système équivalent à (II-3) dans le plan $Z = X+iY$, utilisons les formules de changement de coordonnées curvilignes orthogonales :

$$d\ell^2 = dx^2 + dy^2 = |dz|^2 = \left| \frac{dz}{dZ} \right|^2 |dZ|^2 = \left| \frac{dz}{dZ} \right|^2 (dX^2 + dY^2)$$

d'où :

$$e_X = e_Y = A = \left| \frac{dz}{dZ} \right|$$

Soit une fonction $\psi(x,y)$ définie sur $G+\Gamma$; posons :

$$\psi(x,y) = \Psi(X,Y) \text{ avec } Z = f(z).$$

D'après les formules générales on obtient :

$$\text{grad } \psi \rightarrow \begin{cases} \frac{1}{e_X} \frac{\partial \psi}{\partial X} = \frac{1}{A} \frac{\partial \Psi}{\partial X} \\ \frac{1}{e_Y} \frac{\partial \psi}{\partial Y} = \frac{1}{A} \frac{\partial \Psi}{\partial Y} \end{cases}$$

$$\Delta \psi = \frac{1}{e_X e_Y} \left[\frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{e_Y}{e_X} \frac{\partial \psi}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{e_X}{e_Y} \frac{\partial \psi}{\partial Y} \right) \right] = \frac{1}{A^2} \left[\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2} \right]$$

En notant en indice le plan où grad et Δ opèrent :

$$\begin{cases} \text{grad}_Z \psi = \frac{1}{A} \text{grad}_Z \Psi \\ \Delta_Z \psi = \frac{1}{A^2} \Delta_Z \Psi \end{cases}$$

le système (II-2) prend la forme suivante dans le plan Z (les symboles désignant le potentiel et la densité de charge ne sont pas modifiés) :

$$\begin{cases} \Delta V = -A^2 q \\ \text{grad } V \cdot \text{grad } \frac{1}{q} = -A^2 \end{cases}$$

Les conditions aux limites sur V et q sont inchangées ; l'on suppose de plus que la transformation n'admet pas de point singulier c'est-à-dire que :

$$0 \leq a_1 < \left| \frac{dZ}{dz}(P) \right| \leq a_2 \quad P \in G + \Gamma$$

On obtient ainsi :

$$(1) \quad \begin{cases} \Delta V(P) = -A^2(P) q(P) & P \in G \\ V(Q) = 1 & Q \in \Gamma_e \\ V(Q) = 0 & Q \in \Gamma_r \\ \text{grad } V(P) \cdot \text{grad } \frac{1}{q}(P) = -A^2(P) & P \in G \\ q(Q) = g(Q) & Q \in \Gamma_e \end{cases}$$

Cette formulation est générale si l'on précise qu'après transformation conforme G et $\Gamma_e + \Gamma_r$ sont le domaine et sa frontière dans le plan Z . Si le domaine n'est pas transformé, $A(P) \equiv 1$ ($P \in G$).

D'autres systèmes de coordonnées particuliers ont été utilisés, mais il n'est pas nécessaire de reprendre à chaque fois les justifications mathématiques de ce chapitre.

II - PROBLEME AUX DIFFERENCES FINIES

Il s'agit de déterminer les approximations discrètes des opérateurs intervenant dans (1). Les raisonnements ultérieurs sont valables aussi bien dans R^2 que dans R^3 ; on note les coordonnées x_1, x_2, x_3 .

a) Domaine discret

Soient : $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3$ et $h = \max_{i=1,2,3} (\Delta x_i)$.

On suppose que $h \in]0, h_0[$ (h_0 fini).

Considérons les points P ayant pour coordonnées :

$$\begin{cases} j & \Delta x_1 \\ k & \Delta x_2 \\ l & \Delta x_3 \end{cases} \quad j, k, l \text{ étant des entiers}$$

Un point voisin de P est un point dont une seule des coordonnées diffère de celles de P d'une valeur $\pm \Delta x_p$; $N(P)$ est l'ensemble des points voisins de P .

Par définition, $G(h)$ est l'ensemble fini des points P tels que :

$$\{P\} \cup N(P) \subset G+\Gamma$$

et $\Gamma(h)$ est l'ensemble des points Q appartenant à $G+\Gamma$ et tels que :

$$N(Q) \not\subset G+\Gamma$$

Pour h suffisamment petit, $\Gamma(h)$ se décompose en deux sous-ensembles $\Gamma_e(h)$, et $\Gamma_r(h)$; $G(h)$ et $\Gamma(h)$ constituent le domaine discret et sa frontière discrète. Pratiquement, dans les cas traités, l'utilisation de transformations conformes et des symétries, a permis de ramener le domaine sur lequel on travaille à un rectangle ; on peut alors sans difficultés choisir les Δx_i , afin que les points de $\Gamma(h)$ appartiennent tous à Γ . En ordonnant les N points de $G(h)$, (N dépendant de h), les équations aux différences finies peuvent être condensées par l'écriture matricielle.

b) Problème de Poisson

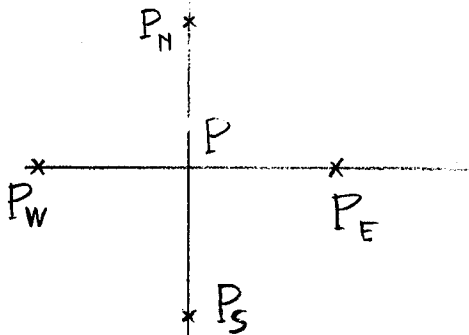
On suppose la distribution de densité donnée sur $G(h)$; la forme générale tirée de (1) donne :

$$\begin{cases} \Delta V(P) = -A^2(P) q(P) & P \in G \\ V(Q) = 1 & Q \in \Gamma_e \\ V(Q) = 0 & Q \in \Gamma_r \end{cases}$$

Après discrétisation, on obtient le système aux différences finies suivant :

$$(2) \quad \begin{cases} \Delta_h V(P) = -A^2(P) q(P) & P \in G(h) \\ V(Q) = 1 & Q \in \Gamma_e(h) \\ V(Q) = 0 & Q \in \Gamma_r(h) \end{cases}$$

L'expression de Δ_h dépend du problème considéré; par exemple, pour un problème plan, on a l'approximation discrète classique ($\Delta x_1 = \Delta x_2 = h$) ;



$$\Delta_h V(P) = h^{-2} [V(P_N) + V(P_S) + V(P_E) + V(P_W) - 4V(P)]$$

L'approximation discrète de l'opérateur laplacien peut être obtenue par différentes méthodes ; nous nous référons ici à la méthode d'intégration (voir [40] § VI-3) qui a l'avantage de donner des expressions symétriques. En regroupant toutes les relations, on obtient sous forme matricielle :

$$(3) \quad LV = Aq + K$$

V, q et K sont des vecteurs-colonne ayant pour éléments respectivement les $V(P)$, les $q(P)$ et des valeurs provenant des conditions au contour ; A est la matrice diagonale (N, N) ayant pour éléments les $A^2(P)$; L est une matrice (N, N) qui, si l'on ordonne convenablement les points $P \in G(h)$, possède des propriétés remarquables : comme on dérive l'approximation aux différences finies pour le système (2) par la méthode dite d'intégration, L est une matrice réelle, symétrique, définie positive, dont les éléments diagonaux sont positifs, les autres éléments étant ≤ 0 ; de plus $L^{-1} > 0$ (cf. [40], théorème p. 187). Le vecteur q étant donné, le système (3) est résolu par la technique de sur-relaxation par point.

c) Problème du 1^{er} ordre

Le potentiel V étant supposé connu il s'agit de discrétiser l'équation :

$$\text{grad } V(P) \cdot \text{grad } \frac{1}{q}(P) = -A^2(P) \quad P \in G$$

avec comme condition sur la frontière :

$$q(Q) = g(Q) \quad Q \in \Gamma_e$$

On suppose que $\text{grad } V$ ne s'annule en aucun point de $G \cup \Gamma$. Après discrétisation on obtient un système aux différences finies que l'on note :

$$(4) \quad \begin{cases} \text{grad}_h V(P) \cdot \text{grad}'_h \frac{1}{q}(P) = -A^2(P) & P \in G(h) \\ q(Q) = g(Q) & Q \in \Gamma_e(h) \end{cases}$$

Examinons l'expression des opérateurs notés grad_h et grad'_h .

L'approximation discrète du gradient opérant sur V se déduit aisément de l'approximation au second ordre en h des dérivées premières :

$$(5) \quad \delta_{hi} V(P) = [V(P(x_i + \Delta x_i)) - V(P(x_i - \Delta x_i))] / 2\Delta x_i \quad i = 1, 2, 3.$$

(les composantes du champ électrique sont alors les $a_i(P) = -\delta_{hi} V(P)$).

Il n'est pas possible d'approcher par une telle expression le gradient opérant sur u , le schéma étant alors instable. Pour obtenir une approximation discrète stable, nous avons repris la méthode de la caractéristique utilisée lors de la résolution du problème de Cauchy pour un système d'équations hyperboliques (cf. [39]).

Détaillons cette méthode sur un exemple.

L'équation du premier ordre en u ($= 1/q$) peut s'écrire dans R^2 :

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} \frac{\partial u}{\partial x_1}(P) + \frac{\partial V}{\partial x_2} \frac{\partial u}{\partial x_2}(P) = -A^2(P) \quad P \in G$$

Posons $e_1 = -\frac{\partial V}{\partial x_1}$, $e_2 = -\frac{\partial V}{\partial x_2}$ et supposons que :

$$|e_1| > |e_2| \quad ; \quad \text{soit } d(P) = \frac{e_2}{e_1}(P) \quad (|d(P)| < 1) ;$$

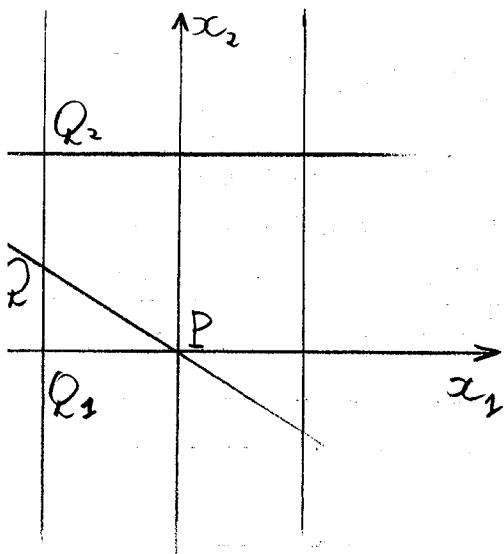
L'équation devient :

$$e_1(P) \left[\frac{\partial u}{\partial x_1}(P) + d(P) \frac{\partial u}{\partial x_2}(P) \right] = A^2(P) \quad P \in G(h)$$

L'expression entre crochets est proportionnelle à la dérivée de u dans la direction de la caractéristique (de paramètres directeurs e_1 et e_2). Soit Q le point d'intersection de la tangente à la caractéristique en P avec l'une des droites $x_1 = C^{te}$ ou $x_2 = C^{te}$ passant par les points de $G(h)$, et tel que :

$$V(Q) > V(P) \quad \text{et} \quad \|PQ\| \leq (\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2)^{1/2}$$

L'on sait alors que :



$$\frac{\partial u}{\partial x_1}(P) + d(P) \frac{\partial u}{\partial x_2}(P) = \frac{1}{\Delta x_1} [u(P) - u(Q)] + o(h)$$

(cf. [39]). Soient Q_1 et $Q_2 \in G(h)$ les extrémités du segment contenant Q (en général $Q \notin G(h)$) ; l'expression ci-dessus peut être remplacée au deuxième ordre près en h , par :

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}(P) + d(P) \frac{\partial u}{\partial x_2}(P) = \frac{u(P) - u(Q_1)}{\Delta x_1} + d(P) \frac{u(Q_2) - u(Q_1)}{\Delta x_1} + o(h)$$

(cf. démonstrations [39] p. 49-53).

Avec les hypothèses choisies, on obtient :

$$(6) \quad \text{grad}'_h u(P) \begin{cases} \delta'_{h1} u(P) = [u(P) - u(Q_1)] / \Delta x_1 \\ \delta'_{h2} u(P) = [u(Q_2) - u(Q_1)] / \Delta x_2 \end{cases}$$

Puisque l'on ne connaît que la restriction de V à $G(h)$, il faut employer les coefficients $a_i(P)$ au lieu des $e_i(P)$; on déduit alors la relation explicite donnant $u(P)$ ($P \in G(h)$) :

$$(7) \quad u(P) = (1+b(P)/\lambda) u(Q_1) - (b(P)/\lambda) u(Q_2) + \frac{A^2(P)\Delta x_1}{a_1(P)}$$

avec

$$\lambda = \Delta x_2 / \Delta x_1, \quad b(P) = (a_2/a_1)(P) \text{ et } |a_1| > |a_2|.$$

Cet exemple de dérivation de l'approximation discrète met en évidence le fait que l'expression de grad'_h dépend du point P considéré. En effet, c'est à partir de la direction caractéristique en P que l'on détermine les 2 points Q_1 et Q_2 (formant l'ensemble (*) $S(P) = \{Q_1, Q_2\}$) qui sont toujours tels que :

$$V(Q_2) \geq V(Q) \geq V(Q_1) > V(P)$$

l'expression de δ'_{h1} et δ'_{h2} dépend des valeurs de $a_1(P)$ et $a_2(P)$.

Remarquons de plus que, quelles que soient les valeurs respectives de a_1 et a_2 , on obtient $u(P)$ sous une forme explicite analogue à (7) et où le dernier terme est toujours positif. (On peut vérifier ce fait en changeant le signe de a_1 et a_2 dans le cas examiné, ce qui amène une permutation des points P et Q_1 dans l'expression de δ'_h (6)

(*) pour des configurations tridimensionnelles quelconques, cet ensemble $S(P)$ comprend 4 points.

Propriété de décroissance de q

Elle s'obtient aisément en examinant l'expression de $u(P)$ donnée par (7) ; on voit que $u(P)$ se compose d'un premier terme provenant de l'interpolation entre les valeurs de u prises aux différents points $Q_i \in S(P)$ et d'un second terme dont on a vu qu'il est toujours positif : $(A^2(P) \Delta x_i / |a_i(P)|)$; d'où :

$$u(P) > \min_{Q \in S(P)} (u(Q))$$

Soit l'ensemble $\{Q_0 = P, Q_1, Q_2, \dots, Q_r\}$ de points tels que :

- Q_{p+1} est le point $\in S(Q_p)$ où u est minimum.
- $Q_r \in \Gamma_e(h)$ ($\subset \Gamma_e$ par hypothèse).

Il est clair que :

$$u(P) > u(Q_1) > \dots > u(Q_{r-1}) > u(Q_r) > 0$$

or :

$$u(Q_r) \geq \min_{Q \in \Gamma_e(h)} \left(\frac{1}{g(Q)} \right) > 0$$

on en déduit la propriété :

$$0 < q(P) < q(Q_1) < q(Q_2) \dots < q(Q_r) \leq \max_{Q \in \Gamma_e(h)} g(Q)$$

ou

$$(8) \quad 0 < q(P) \leq \max_{Q \in \Gamma_e(h)} g(Q) \quad \forall P \in G(h) + \Gamma(h)$$

La relation (7) exprime $u(P)$ en fonction des divers $u(Q)$ ($Q \in S(P)$) ; en remplaçant les $u(Q)$ par leur expression en fonction des $u(Q')$ ($Q' \in S(Q)$) et en continuant on voit que l'on peut exprimer $u(P)$ et par conséquent $q(P)$, en fonction des valeurs de g sur $\Gamma_e(h)$ et des valeurs de V sur $G(h)$; on peut donc écrire, en considérant les valeurs de g comme des paramètres :

$$q(P) = f_P(V)$$

où V est le vecteur colonne déjà rencontré.

Sous forme matricielle :

$$(9) \quad q = F(V)$$

$F(V)$ est le vecteur-colonne ayant pour éléments les $f_P(V)$.

d) Application T_h

En regroupant les résultats précédents, le système aux différences finies déduit par discrétisation du système (1), s'écrit sous forme matricielle :

$$(10) \quad \begin{cases} LV = Aq + K \\ q = F(V). \end{cases}$$

Par analogie avec le problème différentiel, nous allons définir une application T_h associée à (10). Soit q_1 le vecteur-colonne d'une certaine répartition de densité de charge : en résolvant (3) on obtient le vecteur-colonne V_1 du potentiel correspondant à q_1 . Pour obtenir l'approximation discrète du problème du 1^{er} ordre en u , il a été implicitement admis que $\text{grad } V(P)$ et $\text{grad}_h V(P)$ ne s'annulent en aucun point ; cette condition est satisfaite, dans le problème examiné, lorsque V n'admet pas de maximum dans G .

Cette dernière hypothèse étant supposée satisfaite, on peut appliquer la méthode de la caractéristique et on détermine un nouveau vecteur :

$$q_2 = F(V_1).$$

Définition III-1

T_h est l'application faisant correspondre q_2 à q_1 :

$$q_2 = T_h q_1 \quad (q_1, q_2 \in \mathbb{R}^N)$$

Le système (10) n'étant pas linéaire, l'existence d'une solution n'est pas à priori assurée. Comme dans le chapitre précédent, ce problème peut être ramené à celui de l'existence d'un point fixe de l'application T_h . Avant de montrer qu'on peut appliquer le théorème de BROUWER nous allons examiner le domaine de définition de l'application T_h et en déduire une restriction sur la généralité du problème étudié.

III - RESTRICTIONS SUR LES VALEURS DE G.

a) Domaine de définition de T_h

Nous nous plaçons ici dans l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^N$ (N = nombre de points de $G(h)$) avec la norme du maximum (*).

$$\|f\|_h = \max_{P \in G(h)} |f(P)|$$

compatible avec la norme du maximum dans l'espace de Banach $C_0(G \cup \Gamma)$ (cf. [41]).

Le domaine de définition de T_h est restreint aux éléments q de $\mathbb{R}^N$ ayant toutes leurs composantes positives et bornées ; ce dernier point va être établi à partir du lemme suivant :

(*) La notation $\|\cdot\|_h$ a été choisie pour condenser la notation plus précise : $\|\cdot\|_\infty$; elle indique que cette norme diffère de la norme de C_0 notée sans $\mathbb{R}^N$ indice $\|\cdot\|$.

Lemme III-1

Soit $q \in \mathbb{R}^N$ ($q(P) > 0 \quad \forall P \in G(h) + \Gamma(h)$), et V la solution du système (3)

$$V = L^{-1} Aq + L^{-1} K$$

$\varepsilon > 0$ étant donné (ε indépendant de h), on peut trouver $q_0(h) > 0$ dépendant de ε et tel que :

$$\|q\|_h \leq q_0(h) \Rightarrow \|\text{grad}_h V(P)\| \geq \varepsilon \quad \forall P \in G(h) + \Gamma(h)$$

Démonstration

Soit $q_m = \|q\|_h$; en appelant H la solution du problème :

$$\begin{cases} \Delta_h V(P) = 0 & P \in G(h) \\ V(Q) = 1 & Q \in \Gamma_e(h) \\ V(Q) = 0 & Q \in \Gamma_r(h) \end{cases}$$

et en prenant comme approximation discrète du gradient l'expression (5), on obtient la relation suivante (entre normes euclidiennes) :

$$\|\text{grad}_h V\|(P) \geq \|\text{grad}_h H\|(P) - \|\text{grad}_h L^{-1} Aq\|(P) \quad P \in G(h) + \Gamma(h)$$

or

$$L^{-1} > 0, \quad A \geq 0 \quad (\Rightarrow L^{-1}A > 0) \quad \text{et} \quad q > 0 \quad (*) ; \text{ d'où}$$

$$\|\text{grad}_h (L^{-1}A)q\|(P) \leq q_m K_2 \quad \forall P \in G(h) + \Gamma(h)$$

avec $K_2 > 0$ borné.

(*) Par définition : $M \geq 0$ (ou > 0) lorsque toutes les composantes de la matrice ou du vecteur sont ≥ 0 (ou > 0).

On en déduit :

$$\|\text{grad}_h V\|(P) \geq \|\text{grad}_h H\|(P) - q_m K_2 \quad P \in G(h) + \Gamma(h)$$

On a d'autre part la propriété suivante :

$$\|\text{grad}_h H\|(P) \geq K_1 > 0 \quad \forall P \in G(h) + \Gamma(h)$$

conséquence de la propriété du maximum pour H.

$\varepsilon > 0$ étant donné ($\varepsilon < K_1$), on peut trouver $q_0(h) > 0$ tel que :

$$q_m \leq q_0(h) \Rightarrow \|\text{grad}_h V\|(P) \geq \varepsilon \quad \forall P \in G(h) + \Gamma(h)$$

il suffit de prendre $q_0(h) = (K_1 - \varepsilon)/K_2$.

Ce lemme permet de préciser le domaine de définition de T_h . Il est clair que pour $\|q\|_h \leq q_0(h)$ il n'existe pas de point $P \in G(h)$ où l'on ait :

$$V(P) > V(Q) \quad \forall Q \in N(P) \text{ (ensemble des points voisins).}$$

On peut alors calculer $q' = F(V)$.

Donc T_h est définie sur l'hypercube de R^N construit sur les segments $[0, q_0(h)]$ de chaque axe (ce domaine de définition dépend de ε car $q_0(h)$ dépend de ε).

b) Cas des faibles densités

De façon tout-à-fait analogue à celle du § II-3-b, nous définissons le cas des faibles densités par la condition :

$$\|q\|_h \leq q_0(h)$$

q_0 dépendant, en plus de h , de ε et du domaine discret $G(h)$. Le système (2) constitue une approximation discrète cohérente (cf. [41]) du problème de Poisson, ce qui assure que pour une valeur donnée de ε , $q_0(h) \rightarrow q_0$ si $h \rightarrow 0$. La notion présente de faible densité est compatible avec celle définie dans le chapitre II.

La restriction affecte évidemment la fonction g donnée sur Γ_e ; la relation (8) montre que :

$$\|q\|_h \leq \max_{Q \in \Gamma_e(h)} g(Q).$$

Dans la suite du chapitre, nous n'allons examiner que le cas des faibles densités ; pratiquement, l'on prend la condition :

$$\max_{Q \in \Gamma_e} g(Q) \leq q_0(h).$$

Nous supposons de plus que la fonction g est strictement positive, d'où :

$$0 < a \leq g(Q) \leq q_0(h) \quad \forall Q \in \Gamma_e$$

IV - EXISTENCE D'UNE SOLUTION DANS LE CAS DE FAIBLE DENSITE

a) Nous allons établir l'existence d'une solution au système non linéaire (10) en montrant que l'application T_h admet un point fixe. Nous allons utiliser le théorème de BROUWER qui peut s'énoncer ainsi :

"Soit K un ensemble fermé, borné, convexe de R^n ; toute application continue de K dans K a un point fixe dans K ."

D'après l'étude du domaine de définition de T_h , nous sommes en mesure de définir l'ensemble $K_\varepsilon(h)$ que T_h applique dans lui-même.

Définition III-2

$K_\varepsilon(h)$ est l'hypercube de R^N construit sur les segments $[c, q_0(h)]$ de chaque axe. ($c > 0$).

Il est clair que $K_\varepsilon(h)$ est borné, fermé, convexe.

b) Lemme III-2

On peut choisir c de sorte que T_h applique $K_\varepsilon(h)$ dans lui-même.

Démonstration :

Soit $q_1 \in K_\varepsilon(h)$; d'après le lemme III-1, $q_2 = T_h q_1$ est défini. Montrons que $q_2 \in K_\varepsilon(h)$.

La relation (8) donne :

$$q_2(P) \leq \max_{Q \in \Gamma_\varepsilon(h)} g(Q) \leq q_0(h) \quad \forall P \in G(h) + \Gamma(h)$$

Reprenons les relations du type de (7).

Soit :

- Q_1 le point $\in S(P)$ où u est maximum
- Q_2 le point $\in S(Q_1)$ où u est maximum et d'une façon générale :
- Q_{p+1} le point $\in S(Q_p)$ où u est maximum.

Notons $L(P, h)$ l'ensemble de ces points :

$$L(P, h) = \{Q_0 = P, Q_1, Q_2, \dots, Q_{r-1}\}$$

avec $Q_r \in \Gamma_\varepsilon(h)$. En majorant successivement u en chaque point intermédiaire, on obtient :

$$u(P) < u(Q_r) + h \sum_{Q \in L(P, h)} \frac{A^2(Q)}{|a_i(Q)(Q)|}$$

ou encore, en tenant compte de la propriété $\|\text{grad } V\|(P) \geq \varepsilon$

$$u(P) < \frac{1}{\min_{Q \in \Gamma_e} g(Q)} + \frac{h\sqrt{3}}{\varepsilon} \sum_{Q \in L(P,h)} A^2(Q)$$

Or l'expression :

$$h \sum_{Q \in L(P,h)} A^2(Q)$$

est bornée, quel que soit h et uniformément sur $G(h)$ du fait que G a des dimensions bornées et que, par hypothèse faite sur $Z = f(z)$, $A(P)$ est bornée $\forall P \in G + \Gamma$.
Donc :

$$h \sum_{Q \in L(P,h)} A^2(Q) \leq M$$

$$\forall h, \forall P \in G(h) + \Gamma(h)$$

$$u(P) < \frac{1}{a} + \frac{M\sqrt{3}}{\varepsilon}$$

$$\forall P \in G(h)$$

$$q(P) > \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{M\sqrt{3}}{\varepsilon}}$$

$$\forall P \in G(h)$$

et l'on prend $c = \frac{a\varepsilon}{\varepsilon + aM\sqrt{3}}$

Donc q_2 appartient à $K_\varepsilon(h)$.

Ceci achève la démonstration du lemme.

c) Lemme III-3

T_h est une application continue de $K_\varepsilon(h)$ dans lui-même.

Démonstration

Soit $q_1 \in K_\varepsilon(h)$ et $q_2 = T_h q_1$ ($q_2 \in K_\varepsilon(h)$ d'après le lemme III-2).
 $V_1 = L^{-1} A q_1 + H$

V_1 dépend linéairement de q_1 ; or toute application linéaire de R^n dans R^m est continue ; donc V_1 dépend de façon continue de q_1 .

Pour déterminer $q_2 = F(V_1)$ à partir de V_1 , on a une suite d'opérations qui sont toutes continues. En effet, d'après (5), les composantes $a_i(P)$ dépendent continûment de V_1 ; en examinant (7) on voit que $b(P)$ et $1/a_1(P)$ dépendent continûment de V_1 (car $|a_{1(P)}(P)| \geq \varepsilon/\sqrt{3}$) ; on en déduit que la fonction $f_P(V_1)$ est composée de termes qui dépendent tous continûment de V_1 . q_2 est une fonction continue de V_1 , donc de q_1 et par conséquent T_h est continue.

Théorème III-1 :

L'application T_h admet au moins un point fixe dans $K_\varepsilon(h)$.

Démonstration

Les lemmes précédents montrent que toutes les conditions d'application du théorème de Brouwer sont satisfaites : T_h est une application continue de $K_\varepsilon(h)$ borné, fermé, convexe dans lui-même. Il existe donc un point fixe de T_h dans $K_\varepsilon(h)$, c'est-à-dire un élément q tel que :

$$q = T_h q$$

D'après la définition de T_h , q et le vecteur-colonne V correspondant satisfont au système (10) ; en d'autres termes, il existe une solution au système aux différences finies (10) déduit de (1) par discrétisation, dans le cas de faible densité.

V - CONVERGENCE DE LA METHODE D'APPROXIMATIONS SUCCESSIVES

Nous allons examiner maintenant la méthode d'approximations successives utilisée pour déterminer la solution dans le cas de faible densité.

Soit $q_0 \in K_\varepsilon(h)$; on construit la suite $\{q_p\}$ ainsi :

$$q_{p+1} = T_h q_p$$

Tout élément q_p de cette suite appartient à $K_\varepsilon(h)$; donc la suite admet au moins un point d'accumulation. Mais tout point d'accumulation n'est pas nécessairement un point fixe

$$q = T_h q$$

Afin d'étudier la convergence de cette suite, nous allons comparer T_h et T (cf. définition II-1). Pour mener cette étude à bien les 2 hypothèses restrictives suivantes concernant la régularité des fonctions et le domaine discret sont nécessaires :

- 1) on suppose que g et ses dérivées partielles premières et secondes sont continues et bornées dans un voisinage W contenant Γ_e : $g \in C_2(W(\Gamma_e))$.
- 2) les domaines discrets $G(h)$ approchant G sont tels que tous les points de $\Gamma(h)$ appartiennent également à Γ , ceci quel que soit h .

Notations :

C_m est l'espace des fonctions continues dont les dérivées partielles jusqu'à l'ordre m inclus sont continues sur $G+\Gamma$ avec la norme :

$$\|F\| = \max_{P \in G+\Gamma} |F(P)|$$

On note $[F]_h$ la restriction à $G(h)$ de la fonction $F \in C_m$ ($[F]_h \in R^N$).

a) Relation entre T et T_h

La similitude des définitions des deux opérateurs T et T_h suggère que T_h est une approximation discrète de T ; c'est ce que nous allons établir maintenant.

Théorème III-2

T_h est une approximation d'ordre un de l'application T lorsque $h \rightarrow 0$; c'est-à-dire $\forall \varphi \in S_\varepsilon \cap C_2$ l'on a :

$$(11) \quad \| [T\varphi]_h - T_h[\varphi]_h \|_h \leq \alpha h$$

α étant indépendant de h, mais dépendant de φ .

Démonstration :

Comparons d'abord $V \in C_4$ et $V_h \in R^N$ déduits respectivement de $\varphi \in C_2 \cap S_\varepsilon$ (*) et de $[\varphi]_h \in K_\varepsilon(h)$; en combinant les 2 systèmes définissant V et V_h :

$$\begin{cases} \Delta V(P) - \Delta_h V_h(P) = 0 & P \in G(h) \\ V(Q) - V_h(Q) = 0 & Q \in \Gamma(h) \end{cases}$$

L'hypothèse $\varphi \in C_2$ entraîne que $V \in C_4$; en appliquant la formule de Taylor on a :

(*) S_ε est le sous-ensemble de C_0 défini § II-4-a

$$(12) \quad \Delta_h V(P) = \Delta V(P) + h g_1(P, h) \quad P \in G(h)$$

$g_1(P, h)$ et ses dérivées partielles premières sont continues et bornées sur $G+\Gamma$ (car $\varphi \in S_\varepsilon$), ceci quel que soit h . Le système devient alors :

$$\begin{cases} \Delta_h (V_h - V)(P) = -h g_1(P, h) & P \in G(h) \\ (V_h - V)(Q) = 0 & Q \in \Gamma(h). \end{cases}$$

En introduisant le vecteur-colonne w de composantes $V_h - V$ aux points de $G(h)$:

$$Lw = -h G_1 \Rightarrow w = -h L^{-1} G_1$$

G_1 et par conséquent $L^{-1} G_1$ sont des vecteurs-colonnes bornés $\forall h \in]0, h_0[$; $w(P) = (V_h - V)(P)$ est de l'ordre de h . Comme $V \in C_4$, $g_1(P, h)$ admet des dérivées partielles premières uniformément continues sur $G+\Gamma$ donc bornées, ceci $\forall h \in]0, h_0[$; il est clair alors que $\text{grad}_h w$ a des composantes qui sont toutes de l'ordre de h .

Comparons maintenant $U=1/q$ ($U, q \in C_2$) et $U_h = 1/q_h$ ($U_h, q_h \in R^N$) ; en combinant les relations définissant U et U_h à partir de V et V_h , on obtient :

$$\begin{cases} \text{grad } V(P) \cdot \text{grad } U(P) - \text{grad}_h V_h(P) \cdot \text{grad}_h' U_h(P) = 0 & P \in G(h) \\ (U_h - U)(Q) = 0 & Q \in \Gamma(h) \end{cases}$$

L'opérateur grad_h' est primé pour rappeler que son expression dépend du point P . Soit $\varphi \in C_2$; en utilisant la formule de Taylor on a :

$$(13) \quad \text{grad}_h \varphi(P) = \text{grad } \varphi(P) + h \vec{\xi}(P, h) \quad P \in G(h)$$

Les diverses composantes de $\vec{\xi}(P,h)$ sont continues et bornées sur $G+\Gamma$, $\forall h$.

En appliquant (12), on obtient le système :

$$\begin{cases} \text{grad}_h V(P) \cdot \text{grad}_h' U(P) - \text{grad}_h V_h(P) \cdot \text{grad}_h' U_h(P) = -hg_2(P,h) & P \in G(h) \\ (U_h - U)(Q) = 0. & Q \in \Gamma(h) \end{cases}$$

En introduisant des termes intermédiaires et en posant :

$$s(P) = (U_h - U)(P)$$

il vient :

$$\begin{cases} \text{grad}_h w(P) \cdot \text{grad}_h' U(P) + \text{grad}_h V_h(P) \cdot \text{grad}_h' s(P) = hg_2(P,h) & P \in G(h) \\ s(Q) = 0 & Q \in \Gamma(h) \end{cases}$$

Le terme $\text{grad}_h w(P) \cdot \text{grad}_h' U(P)$ est de l'ordre de h :

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{grad}_h V_h(P) \cdot \text{grad}_h' s(P) = hg_3(P,h) & P \in G(h) \\ s(Q) = 0 & Q \in \Gamma(h) \end{cases}$$

Ce système aux différences finies est linéaire en s ; en considérant l'équation homogène, on trouve, par application de la méthode de la caractéristique

$$(\|\text{grad}_h V_h\|(P) \geq \varepsilon \quad \forall P \in G(h) + \Gamma(h))$$

$$s(P) = 0 \quad P \in G(h) + \Gamma(h)$$

L'équation avec second membre a donc une solution unique :

$$s = hF'(V_h, G_3)$$

Pour $q = T\varphi$ et $q_h = T_h[\varphi]_h$, on aboutit à :

$$r(P) = q_h(P) - q(P) = -q_h(P)q(P)s(P)$$

$$P \in G(h)$$

D'où :

$$\|r\|_h \leq q_m^2 \|s\|_h$$

Or

$$\|s\|_h \leq h \beta$$

$$\forall h \in]0, h_0[$$

β existe bien car $g_3(P, h)$ est borné sur $G + \Gamma$ ($\forall h$) et le vecteur-colonne $F'(V_h, G_3)$ a des composantes qui sont toutes bornées indépendamment de h . (β et par conséquent α , dépendent de la fonction $\varphi \in C_2 \cap S_\varepsilon$).

La condition de compatibilité des normes étant satisfaite et l'existence d'une solution du problème aux différences finies étant assurée, on voit que T_h constitue une approximation d'ordre 1 de T (cf. définition dans [41] p. 59).

Ceci achève la démonstration.

b) Etude de T_h

Pour h fixé, on a vu au § 4 que T_h est un opérateur continu sur $K_\varepsilon(h)$ ce qui se traduit par l'inégalité :

$$(14) \quad \|T_h q_2 - T_h q_1\|_h \leq K_h \|q_2 - q_1\|_h \quad \forall q_1, q_2 \in K_\varepsilon(h)$$

K_h ne dépend pas de q_1, q_2 tant que q_1, q_2 appartiennent à $K_\varepsilon(h)$. Les variations de K_h avec h sont précisées par le théorème suivant :

Théorème III-3

Soit $g \in C_2(W(\Gamma_e))$; le module de continuité K_h reste borné et a pour limite K_0 (module de continuité de T (formule II-16)) lorsque $h \rightarrow 0$. De plus, T_h est un opérateur contractant dans $K_\varepsilon(h)$ lorsque la fonction g et ses dérivées premières prennent des valeurs suffisamment faibles.

Démonstration

Pour h fini non nul, K_h est évidemment borné. Examinons le comportement lorsque $h \rightarrow 0$. Soient φ_1 et $\varphi_2 \in S_\varepsilon \cap C_2$ ($\|\varphi_2 - \varphi_1\| > 0$) et telles que $[\varphi_1]_h$ et $[\varphi_2]_h \in K_\varepsilon(h)$. Alors :

$$\|T_h[\varphi_2]_h - T_h[\varphi_1]_h\|_h \leq \|T_h[\varphi_2]_h - [T\varphi_2]_h\|_h + \|[T\varphi_2]_h - [T\varphi_1]_h\|_h + \|[T\varphi_1]_h - T_h[\varphi_1]_h\|_h$$

En appliquant (11), on obtient :

$$\|T_h[\varphi_2]_h - T_h[\varphi_1]_h\|_h \leq 2\alpha h + \|[T\varphi_2]_h - [T\varphi_1]_h\|_h \leq 2\alpha h + K_0 \|\varphi_2 - \varphi_1\|_h$$

avec $\alpha = \max(\alpha_1, \alpha_2)$, α_1 et α_2 correspondant respectivement à φ_1 et φ_2 ;

$$K_0 \|\varphi_2 - \varphi_1\|_h + 2\alpha h = \left[K_0 + \frac{2\alpha h}{\|\varphi_2 - \varphi_1\|_h} \right] \|\varphi_2 - \varphi_1\|_h.$$

D'après sa définition, K_h est un minorant de l'expression entre crochets ; lorsque $h \rightarrow 0$ la contribution du deuxième terme de ce crochet tend vers zéro ; on a ainsi prouvé la première partie du théorème.

Nous avons montré que la constante α de la relation (11) est de la forme $\alpha \leq q_m^2 \beta$; K_h a donc une structure identique à celle de K_0 (donné par (II-12)) et la même conclusion est applicable : pour q_m et K suffisamment faibles, $K_h < 1$ et T_h est une contraction (rappelons que contrairement à α , K_h ne dépend pas du choix de q_1 et $q_2 \in K_\varepsilon(h)$).

T_h étant contractant dans $K_\varepsilon(h)$, le point fixe de T_h est unique et la suite $\{q_n\}$ définie par :

$$q_{n+1} = T_h q_n \quad q_0 \in K_\varepsilon(h)$$

converge vers ce point fixe (noté Q_h) :

$$Q_h = T_h Q_h.$$

La méthode d'approximations successives permet donc d'obtenir dans ce cas la solution du système (10) (appelée solution discrète ou solution approchée).

VI - CONVERGENCE DES SOLUTIONS APPROCHEES

Nous avons montré (Chapitre II) que lorsque T est contractante, T a un point fixe unique dans S_ε : $q = Tq$; T_h étant une approximation de T il s'agit maintenant d'examiner la relation qui existe entre la solution q et la solution approchée Q_h . Comme nous n'avons pas montré que le schéma aux différences finies est cohérent (au sens défini par N. GASTINEL ([41] p. 65)) nous allons établir directement qu'il y a convergence.

Théorème III-4

Soit $g \in C_2(W(\Gamma_e))$ et telle que l'application T est contractante ; alors la solution approchée Q_h converge vers la solution q quand $h \rightarrow 0$.

Démonstration :

g admet des dérivées partielles premières et secondes continues et bornées dans le voisinage W de Γ_e ; alors en examinant les relations (II-4) et (II-7) on établit aisément que :

$$q = Tq \in C_2(G \cup \Gamma).$$

Soient q et Q_h les points fixes de T et T_h :

$$\begin{cases} q = Tq \\ Q_h = T_h Q_h \end{cases} \quad \begin{aligned} q &\in C_2 \cap S_\varepsilon \\ Q_h &\in K_\varepsilon(h). \end{aligned}$$

Prenons la restriction de q à $G(h)$ et retranchons ; on obtient (en norme de R^N) :

$$\|Q_h - [q]_h\|_h = \|T_h Q_h - [Tq]_h\|_h$$

En décomposant le second membre, il vient :

$$\|Q_h - [q]_h\|_h \leq \|T_h Q_h - T_h [q]_h\|_h + \|T_h [q]_h - [Tq]_h\|_h.$$

Appliquons (14) et le théorème III-2 ; il vient :

$$\|Q_h - [q]_h\|_h \leq K_h \|Q_h - [q]_h\|_h + \alpha h$$

(α correspondant à q). Puisque T est contractante, $K_0 < 1$; on peut trouver h' tel que :

$$h \leq h' \Rightarrow K_h \leq \lambda < 1 \quad (\text{théorème III-3}).$$

Alors :

$$\|Q_h - [q]_h\|_h \leq \frac{\alpha}{1-\lambda} h \quad (h \leq h')$$

et

$$\|Q_h - [q]_h\|_h \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } h \rightarrow 0.$$

$G(0)$ limite de $G(h)$ lorsque $h \rightarrow 0$ étant dense dans G , on a le théorème annoncé.

Remarque

Le théorème III-2 joue un rôle important dans l'établissement des théorèmes III-3 et III-4 ; or une des hypothèses faites consiste à supposer que $q \in C_2$ (condition qui est satisfaite dans ce problème lorsque $g \in C_2(W(\Gamma_e))$) ; on retrouve ici un phénomène très général en analyse numérique concernant la convergence des solutions approchées.

VII - UTILISATION PRATIQUE DE LA METHODE D'APPROXIMATIONS SUCCESSIVES

a) Remarque sur la notion de faible densité

L'intérêt de l'étude effectuée dans les chapitre II et III peut paraître assez limité en raison de la restriction apportée à la généralité du problème. Il convient donc de préciser les limites des "densités faibles" ; cette expression est vague, sinon ambiguë, parce que, dans la pratique, le cas des faibles densités ne se limite pas à celui des très faibles valeurs de la densité de charge d'espace ; l'opérateur T_h reste contractant pour des densités moyennes ou même fortes. L'équation (I-2) a été résolue pour plusieurs configurations géométriques par la méthode d'approximations successives avec des valeurs assez importantes de la fonction g et de la densité de charge d'espace ; ce fait est illustré par les 2 exemples ci-dessous.

b) Cas uni-dimensionnel du condensateur plan

En étudiant ce cas en grandeurs réduites, il est facile de montrer que S_e est appliqué dans lui-même si $q_0 < 2$; l'expression du potentiel en fonction de q est bien connue et l'on a :

$$E(x) = 1 - \int_0^1 (1-t) q(t) dt + \int_0^x q(t) dt$$

d'où :

$$\min_{x \in [0,1]} E(x) = E(0) = 1 - \int_0^1 (1-t) q(t) dt$$

$$E(0) \geq 1 - q_0 \int_0^1 (1-t) dt = 1 - q_0/2.$$

En effectuant une analyse un peu plus précise, on peut montrer que une autre partie compacte $S'_\varepsilon \supset S_\varepsilon$ est appliquée dans elle-même lorsque $q_0 < 3,90$ et l'opérateur T est alors contractant. Pour $q_0 = 3$, par exemple, au lieu du champ uniforme $E(x) = 1$ (cas harmonique), on obtient un champ de la forme $(ax+b)^{1/2}$ croissant de la valeur $E(0) = 0,32$ à la valeur $E(1) = 1,44$. On voit que la distortion est très importante : $\delta E = E(1) - E(0) = 1,12$ et de l'ordre de grandeur de la distortion limite $\delta E = 1,5$.

c) Configuration fil entre 2 plans parallèles (voir § VI-2)

Le domaine est limité de façon que la longueur soit beaucoup plus grande que l'écartement des plaques ramené à π en grandeurs a-dimensionnelles. Pour $q_0 \leq 3$ l'opérateur T_h est contractant (le processus itératif converge) et on obtient la solution (voir les figures chap. VI) ; celle-ci présente sur une grande partie de la longueur, la décroissance en $e^{-\lambda x}$: c'est la solution "saturée" définie par FELICI [6,7] ; elle est caractérisée, en particulier, par le décrement $\lambda = 0,674$ différent de $\lambda' = 1$ correspondant à la solution harmonique ; pour cette configuration, la solution diffère très nettement du potentiel harmonique et ne change pas fondamentalement de caractère lorsque q_0 croît (voir Fig 21 Chap. VI).

d) Conclusion

Compte tenu des observations précédentes on peut conclure que ce chapitre fournit la justification mathématique d'un grand nombre de calculs effectués. De plus, les principaux théorèmes établis paraissent tout-à-fait généraux et les limitations sur le choix de la fonction g semblent provenir de la méthode utilisée et non pas d'une caractéristique intrinsèque du problème.

On peut faire une dernière remarque concernant les méthodes utilisées jusqu'à présent. En raison de leur généralité et de leur puissance, ces méthodes mathématiques n'ont pas mis en évidence les propriétés particulières du problème. Ces propriétés et les méthodes générales de résolution qu'on peut alors construire vont être examinées dans le chapitre suivant.

CHAPITRE IV

DETERMINATION NUMERIQUE :

METHODES GENERALES

I - PREMIERE METHODE GENERALE DE RESOLUTION

Dans les chapitres précédents nous avons fait l'étude complète pour des configurations géométriques tout-à-fait générales (satisfaisant à certaines hypothèses de régularité) du champ électrique affecté par un flux permanent d'ions identiques, dans le cas des faibles densités. Il est naturel de chercher à se libérer de cette restriction qui apparaît dans le raisonnement mathématique mais n'a aucun fondement physique. Du double point de vue théorique (formulation correcte du problème) et pratique (détermination numérique des solutions), il est nécessaire d'obtenir une méthode différente n'introduisant plus de limitation sur les valeurs de la fonction g .

La méthode examinée jusqu'à présent est basée sur l'application T et son approximation T_h . Elle ne permet pas la détermination, par calcul numérique, de la solution lorsque la densité des charges émises devient très importante au voisinage de l'électrode émettrice.

Dérivée de la précédente, la première méthode générale qui permet de déterminer la solution dans tous les cas, consiste en la modification suivante de l'utilisation de T : q_1 étant donnée, au lieu de prendre pour q_2 la transformée de q_1 , on effectue une pondération :

$$q_2 = (1-\omega)q_1 + \omega T q_1 = T_\omega q_1 \qquad 0 < \omega \leq 1$$

Entre les opérateurs T et T_ω on a la relation :

$$(1) \quad T_{\omega} = (1-\omega)I + \omega T \quad 0 < \omega \leq 1$$

I étant l'opérateur identité ; entre opérateurs discrétisés, on obtient une relation identique :

$$(1') \quad T_{h\omega} = (1-\omega)I + \omega T_h \quad 0 < \omega \leq 1$$

On peut remarquer que le procédé itératif construit avec T_{ω} est un cas particulier de celui dû à ZARANTONELLO [42] pour résoudre

$$F(x) = 0$$

(F étant une application d'un espace de Banach X dans un espace de Banach Y) :

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + \alpha_k J.F(x_k) \\ \alpha_k = \zeta(x_k) \in \mathbb{C} \end{cases}$$

(J : application de Y dans X). Dans le cas présent la relation définissant T_{ω} peut s'écrire :

$$\begin{cases} q_2 = q_1 + \omega(Tq_1 - q_1) \\ \omega \in [0, 1] \end{cases}$$

et le procédé itératif correspondant se ramène au cas général lorsqu'on prend

$$\begin{cases} X = Y = C_0(G+\Gamma) \\ F(x) = Tx - x \end{cases}$$

Il n'est pas possible d'appliquer les résultats de la théorie générale (cf. [42]) parce qu'il ne nous a pas été possible de montrer que $F(x) = Tx - x$ satisfait à une condition de monotonie (même dans le cas particulier étudié dans ce chapitre). Nous allons donc faire l'étude directe de T et de l'itération.

Soit la suite $\{q_p\}$ intervenant dans la détermination de la solution par calcul numérique :

$$\begin{cases} q_0 \text{ donné (par exemple } q_0 = 0) \\ q_{p+1} = T_{h\omega} q_p \end{cases}$$

Pour ω convenablement choisi, chaque q_p est tel que le potentiel $V_p = L^{-1}Aq_p + H$ satisfait à la condition

$$\|\text{grad}_h V_p\|(P) \geq \varepsilon \quad \forall P \in G(h) + F(h)$$

et la suite converge rapidement. Ce résultat provient de propriétés remarquables de T_h qui vont être mises en évidence dans la suite. A la différence des deux chapitres précédents, l'étude n'a pas été faite pour des configurations géométriques quelconques mais dans un cas particulier permettant de pousser l'analyse très loin.

II - EXPLICITATION DU CAS PARTICULIER

a) Configuration géométrique

Le cas particulier choisi est le cas unidimensionnel du condensateur plan : 2 plans parallèles illimités l'un au potentiel 1, l'autre au potentiel 0, ont un écartement unité (en grandeur réduite) ; le système (II-3) devient un système différentiel ordinaire :

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \frac{d^2 V}{dx^2}(x) = -q(x) & x \in [0,1] \\ V(0) = 1 \quad V(1) = 0 \\ \frac{dV}{dx}(x) \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{q} \right)(x) = -1 & x \in [0,1] \\ q(0) = q_0 \end{array} \right.$$

On n'étudie pas ce système car on sait qu'il possède une solution unique. D'autre part, on peut remarquer que les raisonnements faits pour établir les théorèmes d'existence II-1 et III-1 sont tout-à-fait semblables et que la méthode utilisée pour étudier $T_{h\omega}$ se transpose aisément pour T_ω . Pour obtenir le système aux différences finies déduit de (2) par discrétisation, on procède de la façon déjà décrite dans le § III-2. L'intérêt du cas particulier étudié actuellement réside dans le fait qu'on peut expliciter facilement les relations (III-3) et (III-9).

b) Discrétisation

Divisons le segment $[0,1]$ en $N+1$ intervalles égaux de longueur $h = 1/(N+1)$; $G(h)$ est ici l'ensemble des points d'abscisse ih , i prenant les valeurs $1, 2, \dots, N$. Notons :

$$\left\{ \begin{array}{l} V(ih) = V_i \\ q(ih) = q_i \end{array} \right. \quad i \text{ de } 1 \text{ à } N$$

La relation (III-3) s'écrit ici :

$$LV = q + K \quad (A=I)$$

avec :

$$V = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_N \end{pmatrix} \quad q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_N \end{pmatrix} \quad K = \begin{pmatrix} 1/h^2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

L'opérateur laplacien discrétisé est :

$$\Delta_h V(x) = h^{-2} [V(x-h) - 2V(x) + V(x+h)]$$

La matrice L s'écrit donc :

$$L = h^{-2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ -1 & 2 & -1 & & & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & & & & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

L'expression de L^{-1} est : (cf. [40] p. 171)

$$L^{-1} = (\lambda_{ij}^{-1}) \quad \lambda_{ij}^{-1} = \lambda_{ji}^{-1} = h^2 \cdot i \frac{N+1-j}{N+1} \quad i \leq j$$

Sous forme explicite :

$$(3) \quad V = L^{-1} q + H$$

H est le vecteur colonne de la solution harmonique :

$$H = L^{-1}K = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_N \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad h_i = \frac{N+1-i}{N+1} = 1-ih$$

En discrétisant l'équation du 1^{er} ordre en $1/q$, on obtient :

$$\frac{V_i - V_{i-1}}{h} \cdot \frac{1/q_i - 1/q_{i-1}}{h} = -1$$

d'où :

$$(4) \quad 1/q_i = 1/q_{i-1} - h^2/(V_i - V_{i-1})$$

En notant $V_0 = V(0) = 1$, il vient, après éliminations successives :

$$(5) \quad q_i = f_i(V) = \frac{1}{\frac{1}{q_0} - h^2 \sum_{k=1}^i \frac{1}{V_k - V_{k-1}}}$$

Reprenons le système (III-10)

$$(6) \quad \begin{cases} V = L^{-1}q + H \\ q = F(V) \end{cases}$$

La définition III-1 reste valable pour définir T_h ; on a :

$$T_h q_1 = F(L^{-1}q_1 + H)$$

c) Domaine de définition de T_h

Par analogie avec la définition du champ électrique :

$$E = -\text{grad } V$$

on peut utiliser la notation suivante :

$$(7) \quad E = \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ E_N \end{pmatrix} \quad E_i = \frac{V_{i-1} - V_i}{h}$$

V étant fonction de q , E est fonction de q . Cependant, la forme matricielle n'est pas nécessaire car les E_j ont des propriétés simples ; quelques calculs conduisent aux relations :

$$(8) \quad \begin{cases} E_1 = 1-h^2 \sum_{k=1}^N (N+1-k) q_k \\ E_i = E_{i-1} + h \sum_{j=1}^{i-1} q_j \end{cases}$$

Ces relations nous permettent de préciser le domaine de définition de T_h dans R^N . On doit avoir, d'une part :

$$q_i > 0 \quad i = 1, 2, \dots, N$$

condition provenant de la définition du problème. D'autre part, l'approximation aux différences finies (4) n'a de sens que si $\min_i \|(\text{grad}_h V)_i\| \geq \varepsilon$; (8) montre que cette condition est satisfaite dès que :

$$E_1 \geq \varepsilon$$

Appelons J_ε le domaine de définition de T_h :

$$J_\varepsilon = \left\{ q \in \mathbb{R}^N \left| \begin{array}{l} * \quad q_i \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots, N \\ * \quad h^2 \sum_{j=1}^N (N+1-j) q_j \leq 1-\varepsilon \end{array} \right. \right\}$$

III - EXISTENCE D'UNE SOLUTION AU SYSTEME (6)

Comme dans le chapitre III, nous nous plaçons dans l'espace $\mathbb{R}^N$ muni de la norme du maximum (notée $\| \cdot \|_h$).

Le système (6) est un système non linéaire ; d'autre part, la valeur de q_0 étant quelconque, le théorème III-1 ne s'applique pas ; on ne sait donc rien a priori sur l'existence d'une solution au système (6). Comme précédemment, nous allons prouver cette existence en montrant que T_h a un point fixe $q \in J_\varepsilon$.

Lemme IV-1

Tout point fixe de T_h est point fixe de $T_{h\omega}$ et réciproquement.

Démonstration :

Soit q un point fixe de T_h :

$$q = T_h q = (1-\omega)q + \omega T_h q = [(1-\omega)I + \omega T_h]q = T_{h\omega} q$$

Définition IV-1

$q_0 > 0$ étant donné quelconque, K_ε (dépendant de ε) est le sous-ensemble de J_ε constitué par les vecteurs q dont les composantes satisfont aux conditions :

$$(9) \quad q_0 \geq q_1 \geq q_2 \geq \dots \geq q_N \geq a$$

(a dépend de ε).

K_ε est borné : d'après (9) on voit que

$$\|q\|_h \leq q_0 \quad \forall q \in K_\varepsilon$$

D'après sa définition, il est clair que K_ε est fermé. De même il est facile de voir que K_ε est convexe ; soient $q, r \in K_\varepsilon$ et $\lambda > 0, \mu > 0$ tels que $\lambda + \mu = 1$, alors $q' = \lambda q + \mu r$ satisfait à toutes les conditions définissant $K_\varepsilon \Rightarrow q' \in K_\varepsilon$.

Lemme IV-2

$q_0 \geq 2$ étant donné quelconque, on peut trouver ω d'une part, ε et a d'autre part, tels que $T_{h\omega}$ applique K_ε dans lui-même.

Démonstration

Nous allons procéder en plusieurs étapes.

a) Soit $q \in K_\varepsilon$, ω quelconque ($0 < \omega \leq 1$) et soit :

$$q' = T_{h\omega} q = (1-\omega)q + \omega r \quad r = T_h q$$

Avec la notation (7), (5) donne :

$$r_i = 1 / \left(\frac{1}{q_0} + h \sum_{k=1}^i \frac{1}{E_k} \right)$$

$$q \in K_\varepsilon \Rightarrow E_1 \geq \varepsilon \text{ et } E_i \geq \varepsilon \quad i = 2, 3, \dots, N.$$

On en déduit :

$$q_0 > r_1 > \dots > r_i > r_{i+1} > \dots > r_N > 1 / \left(\frac{1}{q_0} + \frac{1}{\varepsilon} \right)$$

En prenant $a = q_0 \varepsilon / (q_0 + \varepsilon)$, on voit que r , et par conséquent q' , satisfont aux relations (9).

Le point essentiel consiste à montrer que $q' \in J_\varepsilon$.

b) Supposons toujours que ϵ est fixé. Soit $S(q)$ le scalaire associé à q défini par :

$$S(q) = h^2 \sum_{k=1}^N (N+1-k) q_k$$

D'après la relation définissant q' , on a :

$$S(q') - S(q) = \omega [S(r) - S(q)]$$

Or, d'après (9) :

$$|r_k - q_k| \leq q_0 - a \quad k = 1, 2, \dots, N.$$

$$|S(q') - S(q)| \leq \omega (q_0 - a) h^2 \sum_{k=1}^N (N+1-k) < \frac{\omega (q_0 - a)}{2}$$

En prenant pour ω la valeur :

$$(10) \quad \omega = \frac{2\epsilon}{q_0 - a}$$

il est clair que

$$|S(q') - S(q)| < \epsilon$$

Alors tout $q \in K_\epsilon$ tel que $S(q) \leq 1 - 2\epsilon$ a pour transformé q' tel que :

$$S(q') < 1 - \epsilon$$

q' est alors un élément de K_ϵ .

c) Il reste à montrer que l'on peut choisir ε tel que tout $q \in K_\varepsilon$ et caractérisé par :

$$1-2\varepsilon < S(q) \leq 1-\varepsilon$$

a pour transformé $q' = T_{hw} q$ appartenant à K_ε .

Comme K_ε est convexe, il suffit de montrer que $r = T_h q \in K_\varepsilon$.
 $r = T_h q$ satisfait aux relations (9) ; on en déduit :

$$S(r) \leq h^2 r_1 \sum_{k=1}^N (N+1-k) < r_1/2$$

Or d'après (8) et l'expression de $S(q)$:

$$E_1 = 1-S(q)$$

la condition encadrant $S(q)$ donne :

$$\varepsilon \leq E_1 < 2\varepsilon$$

d'où :

$$r_1 \leq 1/(\frac{1}{q_0} + \frac{h}{2\varepsilon})$$

On peut, sans contrevenir au raisonnement précédent, supposer ε tel que :

$$\varepsilon \leq \varepsilon_0 < 1$$

Choisissons ε ainsi :

$$(11) \quad \begin{cases} \varepsilon \leq \frac{h}{(\frac{1}{1-\varepsilon_0} - \frac{2}{q_0})} \\ \varepsilon \leq \varepsilon_0 \end{cases} \quad (q_0 \geq 2)$$

il vient alors :

$$S(r) < \frac{r_1}{2} \leq 1-\varepsilon_0 \leq 1-\varepsilon$$

Donc $r \in K_\varepsilon \Rightarrow q' \in K_\varepsilon$.

Ceci achève la démonstration du lemme.

Lemme IV-3

Soient ε et ω satisfaisant les relations (10) et (11) ; alors $T_{h\omega}$ est une application continue sur K_ε .

Démonstration

Soit $q \in K_\varepsilon$ et $q' = T_{h\omega} q \in K_\varepsilon$; on a :

$$S(q) \leq 1-\varepsilon \Rightarrow E_i > E_1 \geq \varepsilon \quad i = 2, 3, \dots, N$$

D'après la relation (5), il est clair que les q'_i ($i = 1, 2, \dots, N$) sont des fonctions continues des V_k ; donc F est une fonction continue de V ; $V = L^{-1}q + H$ dépend linéairement donc continûment de q ; il en résulte que q' dépend continûment de q et $T_{h\omega}$ est une application continue.

THEOREME IV-1

Il existe au moins une solution au système (6).

Démonstration

Soient ε et ω satisfaisant les relations (10) et (11) ; les lemmes 2 et 3 montrent alors que $T_{h\omega}$, application continue, applique K_ε fermé, borné, convexe dans lui-même. Le théorème de Brouwer (énoncé au § III-4-a) assure que $T_{h\omega}$ a un point fixe dans K_ε :

$$q = T_{h\omega} q \quad q \in K_\varepsilon.$$

D'après le lemme IV-1, q est également point fixe de T ; étant donné la définition II-1, q et $V = L^{-1}q + H$ satisfont au système (6).

IV- UNICITE DE LA SOLUTION

L'unicité découle d'une propriété que l'on retrouvera lors de l'étude d'une autre méthode générale (cf. § 8-e).

Définition IV-2

Soient $q \in K_\varepsilon$ et $u \in \mathbb{R}^N$ tels que $q+u$, $T_h q$ et $T_h(q+u)$ appartiennent à K_ε . L'opérateur non linéaire W_h dépendant de q et de u est alors défini par :

$$(12) \quad W_h u = T_h(q+u) - T_h q$$

Nous n'étudierons pas le domaine de définition de W_h (application de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}^N$) dont on peut seulement voir de façon élémentaire, qu'il est contenu dans l'hypercube défini par :

$$\|u\|_h \leq q_0 - a$$

Etablissons maintenant le résultat suivant, suffisant pour prouver l'unicité.

THEOREME IV-2

W_h est un opérateur qui ne peut pas avoir de valeur propre réelle positive associée à un vecteur propre réel.

Démonstration

Supposons que l'on ait pour un certain vecteur q ($q \in K_\varepsilon$ tel que W_h est défini sur un certain domaine), la relation

$$W_h u = \lambda u$$

avec

$$\begin{cases} \lambda > 0 & (\lambda \text{ réel}) \\ u_i \text{ réel} & i = 1, 2, \dots, N. \end{cases}$$

Notons par $E(q)$ le vecteur E associé à q par l'intermédiaire des relations (8) ; il est clair que :

$$E(q+u) = E(q) + e$$

avec :

$$(13) \quad \begin{cases} e_1 = -h^2 \sum_{k=1}^N (N+1-k) u_k \\ e_i = e_1 + \sum_{k=1}^{i-1} u_k \end{cases}$$

En utilisant (12), on obtient pour les composantes de rang 1 de $q' = T_h q$ et $q' + \lambda u = T_h(q+u)$

$$(14) \quad q'_1 = \frac{1}{\frac{1}{q_0} + \frac{h}{E_1}}, \quad q'_1 + \lambda u_1 = \frac{1}{\frac{1}{q_0} + \frac{h}{E_1 + e_1}}$$

a) Supposons que $u_1 = 0$; d'après (14) $e_1 = 0$; soit u_{i_0} la première composante non nulle de u ; les relations (13) donnent :

$$e_j = 0 \quad j = 2, 3, \dots, i_0.$$

Pour les composantes de rang i_0 de q' et $q' + \lambda u$ on a (d'après (5)) :

$$q'_{i_0} = q'_{i_0} + \lambda u_{i_0} \quad \text{car} \quad e_j = 0 \text{ pour } j \leq i_0$$

D'où $u_{i_0} = 0$ ce qui est en contradiction avec l'hypothèse.

b) Supposons $u_1 > 0$ (cette hypothèse ne restreint pas la généralité du raisonnement car seuls les signes interviennent). D'après (14)

$$u_1 > 0 \Rightarrow e_1 > 0.$$

L'expression (13) de e_1 assure qu'il existe des u_k négatifs ; soit u_{i_0} la première composante négative :

$$u_k \geq 0 \text{ si } k < i_0 \quad u_{i_0} < 0$$

$$e_i = e_1 + \sum_{k=1}^{i-1} u_k > 0 \quad i = 1, 2, \dots, i_0.$$

On en déduit :

$$q'_{i_0} + \lambda u_{i_0} = \frac{1}{\frac{1}{q_0} + h \sum_{k=1}^{i_0} \frac{1}{E_k + e_k}} > \frac{1}{\frac{1}{q_0} + h \sum_{k=1}^{i_0} \frac{1}{E_k}} = q'_{i_0}$$

d'où : $u_{i_0} > 0$ en contradiction avec l'hypothèse ci-dessus. Le théorème se trouve ainsi démontré.

L'unicité se déduit aisément. Supposons qu'il y ait deux solutions q_1 et q_2 , points fixes de T_h (et de $T_{h\omega}$) :

$$q_1 = T_h q_1 \quad q_2 = T_h q_2$$

En posant $u = q_2 - q_1$ on obtient :

$$W_h u = u$$

Le théorème précédent assure que $u = 0$; d'où :

Corollaire
.....

Il existe au plus une solution au système (6).

V - CONVERGENCE DE L'ITERATION AU VOISINAGE DE LA SOLUTION

a) Problème

Reprenons la suite $\{q_p\}$ définie au § 1 :

$$q_0 \in K_\varepsilon \qquad q_{p+1} = T_{h\omega} q_p$$

Si cette suite est convergente dans K_ε elle admet comme limite la solution unique du système (6). Nous allons montrer que pour ω convenablement choisi, il y a convergence au voisinage de la solution.

Supposons que pour un rang n_0 , on ait :

$$\|q_{n_0} - q\|_h \leq \eta$$

η étant suffisamment petit, $q = T_h q$, et examinons le comportement de la suite pour $n > n_0$. Soit D_h et $D_{h\omega}$ les différentielles au sens de Fréchet de T_h et $T_{h\omega}$ (cf. la définition dans [41] p.) ; la relation (1') entre T_h et $T_{h\omega}$ conduit à :

$$(15) \qquad D_{h\omega} = (1-\omega)I + \omega D_h$$

Soit ε_n le vecteur erreur : $\varepsilon_n = q_n - q$; la suite $\{\varepsilon_n\}$ est telle que :

$$\varepsilon_{n+1} = q_{n+1} - q = T_{h\omega} q_n - T_{h\omega} q = D_{h\omega} \varepsilon_n + \zeta(q, \varepsilon_n)$$

Par définition de la différentielle au sens de Fréchet, l'on a :

$$\|\zeta(q, \varepsilon)\|_h / \|\varepsilon\|_h \rightarrow 0 \text{ lorsque } \|\varepsilon\|_h \rightarrow 0$$

Pour $\|\varepsilon\|_h$ suffisamment petit, le terme $\xi(q, \varepsilon_n)$ peut être négligé et le problème peut se ramener à l'étude de l'itération linéaire régie par :

$$(16) \quad \varepsilon_{n+1} = D_{h\omega} \varepsilon_n$$

Si le rayon spectral (*) $\rho(D_{h\omega})$ de la matrice $D_{h\omega}$ est inférieur à 1, alors $\varepsilon_n \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$ et $q_n \rightarrow q$: il y a convergence au voisinage de la solution.

Le problème consiste maintenant à montrer que le rayon spectral de $D_{h\omega}$ peut être rendu inférieur à 1 pour ω convenablement choisi.

b) Etude de D_h

D_h peut être obtenu de façon explicite ; en effet, en reprenant la définition de T_h :

$$q' = T_h q = F(V) \text{ avec } V = L^{-1} q + H$$

Soit $q' + u' = T_h(q + u)$; on obtient :

$$V + v = L^{-1}(q + u) + H \Rightarrow v = L^{-1} u$$

$$q + u' = F(V + v) = F(V) + Bv + \xi(V, v)$$

où B est la différentielle au sens de Fréchet de F ; B peut s'exprimer sous forme de la matrice (N, N) :

$$B = (b_{ij}) \quad b_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial V_j}$$

(*) Par définition le rayon spectral de la matrice M est : $\rho(M) = \max_i |\lambda_i|$
les λ_i étant les valeurs propres de M .

et

$$\|\xi(V, v)\|_h / \|v\|_h \rightarrow 0 \text{ lorsque } \|v\|_h \rightarrow 0$$

il vient :

$$u' = T_h(q+u) - T_h q = BL^{-1}u + \xi(V, L^{-1}u)$$

D_h étant par définition la différentielle au sens de Fréchet de T_h , on obtient :

$$(17) \quad D_h = BL^{-1}$$

On peut alors établir la propriété suivante :

THEOREME IV-3

La matrice $C = -D_h^{-1}$ est une M-matrice ; les valeurs propres de $-D_h$ sont contenues dans un disque ayant pour diamètre le segment $[a, b]$ de l'axe réel ($0 < a < b$).

Démonstration

Explicitons d'abord les matrices B , $A = -B^{-1}$ et C .

Soient $q \in K_\varepsilon$ et $q' = T_h q$ ($q' \in K_\varepsilon$). $B = (b_{ij})$ avec $b_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial v_j}$; en dérivant (5) et en utilisant la notation (7) (E correspondant à q) on obtient :

$$(18) \quad b_{ij} = \begin{cases} -q_i'^2 \left(\frac{1}{E_j^2} - \frac{1}{E_{j+1}^2} \right) & j < i \\ -\frac{q_i'^2}{E_i^2} & j = i \\ 0 & j > i \end{cases}$$

(8) montre que

$$E_{j+1} > E_j \quad j = 1, 2, 3, \dots, N-1$$

Donc $b_{ij} \leq 0$ et $-B$ est non-négative.

Pour déterminer $A = -B^{-1}$ observons que B^{-1} est la différentielle de Fréchet de F^{-1} .

Or la relation (5) :

$$q'_i = f_i(V) = 1 / \left(\frac{1}{q_0} + h^2 \sum_{k=1}^i \frac{1}{V_k - V_{k-1}} \right)$$

s'inverse aisément et l'on obtient :

$$V_i = f_i^{-1}(q') = 1 - h^2 \sum_{k=1}^i 1 / \left(\frac{1}{q'_k} - \frac{1}{q'_{k-1}} \right)$$

En effectuant les calculs il vient ($A = (a_{ij})$) :

$$(19) \quad a_{ij} = \begin{cases} \frac{E_j^2 - E_{j+1}^2}{q_j'^2} & j < i \\ \frac{E_j^2}{q_j'^2} & j = i \\ 0 & j > i \end{cases}$$

Déterminons la matrice C :

$$C = -D_h^{-1} = -LB^{-1} = LA$$

L'expression de L a été donnée au §2 ; en effectuant le produit LA on obtient ($C = (c_{ij})$) :

$$(20) \quad h^2 c_{ij} = \left\{ \begin{array}{ll} -E_j^2/q_j'^2 & j = i+1 \\ (E_j^2 + E_{j+1}^2)/q_j'^2 & j = i \\ -E_{j+1}^2/q_j'^2 & j = i-1 \end{array} \right\} \quad i \leq N-1$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} -(E_{j+1}^2 - E_j^2)/q_j'^2 & j \leq N-2 \\ -(2E_N^2 - E_{N-1}^2)/q_{N-1}'^2 & j = N-1 \\ 2E_N^2/q_N'^2 & j = N \end{array} \right\} \quad i = N$$

les autres composantes sont nulles ; en vertu de la propriété :

$E_{j+1} > E_j$ ($j = 1, 2, \dots, N-1$) il est clair que tous les termes non situés sur la diagonale principale sont ≤ 0 .

Rappelons la définition suivante (cf. [40] p. 85) :

$G = (g_{ij})$ matrice (N, N) réelle avec $g_{ij} \leq 0$ pour tout $i \neq j$ est une M-matrice si G est non singulière et $G^{-1} \geq 0$.

D'après (20) la matrice C est telle que $c_{ij} \leq 0$ pour $i \neq j$; $C^{-1} = (-B)L^{-1}$; $(-B) \geq 0$ et $L^{-1} > 0 \Rightarrow C^{-1} > 0$; de plus C étant le produit de 2 matrices non singulières est non singulière ; C est donc une M-matrice.

Nous allons maintenant pouvoir préciser la localisation, dans le plan complexe, des valeurs propres de C .

Soit $\alpha = \max_i c_{ii} = 2 E_N^2/q_N'^2$ (car les E_j croissent et les q_j' décroissent en fonction de l'indice j). Posons :

$$M = \alpha I - C \Rightarrow M \geq 0$$

$\alpha I - M = C$ est régulière et $(\alpha I - M)^{-1} = C^{-1} > 0$; on en déduit que $\rho(M) < \alpha$ (cf. [40] p. 83).

Les valeurs propres de M sont contenues dans un disque fermé de rayon $\beta < \alpha$; celles de C sont donc contenues dans le disque centré en $z = \alpha$ et de rayon β ; on en déduit que les valeurs propres de $C^{-1} = -D_h$ sont contenues dans le disque ayant pour diamètre le segment $[a, b]$ avec

$$a = 1/(\alpha + \beta) \qquad b = 1/(\alpha - \beta)$$

Ceci achève la démonstration du théorème.

Remarquons que le caractère de M -matrice de C est indépendant du vecteur $q \in K_\varepsilon$ choisi ; les valeurs de a et b par contre vont dépendre du choix de q . Dans la suite du chapitre, les évaluations des valeurs propres et de a et b seront faites pour des matrices correspondant au point fixe $q = T_h q$.

c) Etude de $D_{h\omega}$

Nous allons d'abord établir un théorème qui nous servira en plusieurs occasions.

THEOREME IV-4

Soit D une matrice telle que ses valeurs propres sont contenues dans le disque fermé ayant pour diamètre le segment $[-b, -a]$ ($0 < a < b$) de l'axe réel, et $D_\omega = (1-\omega)I + \omega D$. Alors D_ω est contractante pour

$$(21) \qquad 0 \leq \omega \leq \omega_\ell < \frac{2}{1+b}$$

plus précisément, en définissant $\omega_{\text{opt}} = \frac{2}{2+a+b}$ on obtient les relations suivantes :

$$(22) \qquad \left\{ \begin{array}{l} 0 < \omega \leq \omega_{\text{opt}} \Rightarrow \rho(D) \leq 1 - (1+a)\omega \\ \omega_{\text{opt}} \leq \omega \leq \omega_\ell \Rightarrow \rho(D_\omega) \leq (1+b)\omega - 1 \end{array} \right.$$

Démonstration

La relation $D_\omega = (1-\omega)I + \omega D$ conduit à :

$$\lambda_i = 1 - \omega + \omega \mu_i \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

λ_i et μ_i étant respectivement les valeurs propres de D_ω et D ; on passe de μ_i à λ_i par le produit de 2 transformations dans le plan complexe :

1) l'homothétie de centre $z = 0$ et de rapport ω .

2) la translation de vecteur $1-\omega$.

Les valeurs propres λ_i de D_ω sont contenues dans le disque ayant pour diamètre le segment

$$[1-\omega(1+b), 1-\omega(1+a)]$$

de l'axe réel. Pour que ce disque soit contenu dans le disque unité, il faut que :

$$|1-\omega(1+b)| < 1 \Rightarrow 0 < \omega \leq \omega_\ell < \frac{2}{1+b}$$

ω_{opt} est la valeur de ω pour laquelle les 2 disques sont concentriques (lorsque $-a$ et $-b$ sont valeurs propres de D , $\rho(D_\omega)$ est alors minimum). Les relations (22) s'obtiennent immédiatement.

Les résultats du théorème IV-3 permettent d'appliquer le théorème IV-4 qui assure que pour

$$0 < \omega \leq \omega_\ell < \frac{2}{1+b}$$

la matrice $D_{h\omega}$ est telle que $\rho(D_{h\omega}) < 1$; $D_{h\omega}$ est contractante et la suite $\{\varepsilon_n\}$, avec

$$\varepsilon_{n+1} = D_{h\omega} \varepsilon_n$$

converge vers zéro ; il s'en suit que la suite $\{q_n\}$ ($q_{n+1} = T_{h\omega} q_n$) converge vers la solution q .

Il subsiste une imprécision en ce qui concerne la valeur de b . On a vu que : $-D_h > 0$; la matrice $-D_h$ admet alors une valeur réelle > 0 , égale au rayon spectral et telle que $\rho(D_h) \leq b$; l'égalité $\rho(D_h) = b$ demande des propriétés particulières de localisation des valeurs propres, propriétés que nous allons pouvoir déduire de l'expérimentation numérique.

Supposons que la valeur propre λ_1 de plus grand module de $D_{h\omega}$ soit simple et unique (elle est alors réelle) ; soit e_1 le vecteur propre correspondant :

$$D_{h\omega} e_1 = \lambda_1 e_1 \quad |\lambda_1| = \rho(D_{h\omega}) \text{ et } \|e_1\|_h = 1$$

Considérons la suite $\{\varepsilon_n\}$ (définie précédemment) :

$$\varepsilon_n / \|\varepsilon_n\|_h \rightarrow e_1 \text{ lorsque } n \rightarrow \infty$$

et

$$\varepsilon_{n+1} = D_{h\omega} \varepsilon_n \rightarrow \|\varepsilon_n\|_h \lambda_1 e_1$$

Posons :

$$(23) \quad k_n = \frac{\|\varepsilon_n\|_h}{\|\varepsilon_{n-1}\|_h}$$

on obtient :

$$k_n \rightarrow |\lambda_1| \quad \text{lorsque } n \rightarrow \infty.$$

On peut ainsi atteindre λ_1 et e_1 (relatifs à $D_{h\omega}$ correspondant au point fixe $q = T_h q$). La figure 2 montre les variations de $\rho(D_{h\omega})$ en fonction de ω et précise le signe de λ_1 ; les calculs ont été effectués en double précision pour la valeur $q_0 = 30$ avec $h = 0,01$.

Pour $0 < \omega \leq \omega_{\text{opt}}$ la suite $\{k_n\}$ converge assez lentement vers la limite ; les points obtenus sont alignés de façon satisfaisante ; la pente permet d'évaluer a d'après (22) :

$$a \approx 0,09$$

le vecteur e_1 est indépendant de ω ; on en conclut que $-a$ est valeur propre de D_h .

Pour

$$\omega_{\text{opt}} \leq \omega < \frac{2}{1+b},$$

la suite $\{k_n\}$ converge rapidement vers la limite obtenue à 10^{-5} près ; les points sont parfaitement alignés et la pente de la droite donne :

$$b = 3,319$$

Le vecteur e_1 a toutes ses composantes positives ; e_1 est également vecteur propre de D_h ; comme $-D_h$ est une matrice positive qui admet donc une valeur propre simple égale au rayon spectral et associée à un vecteur propre $e > 0$, (cf. [40]) il ressort que $-b$ est valeur propre de D_h et que :

$$b = \rho(D_h)$$

VI - CONVERGENCE DES SOLUTIONS APPROCHEES.

La question que nous allons examiner est analogue à celle étudiée au § III-6 ; il s'agit de déterminer la relation qui existe entre q et V solution du système (2) et q_h et V_h satisfaisant au système aux différences finies (6). Nous allons montrer directement qu'il y a convergence, c'est-à-dire que

$$\|q_h - [q]_h\|_h \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } h \rightarrow 0.$$

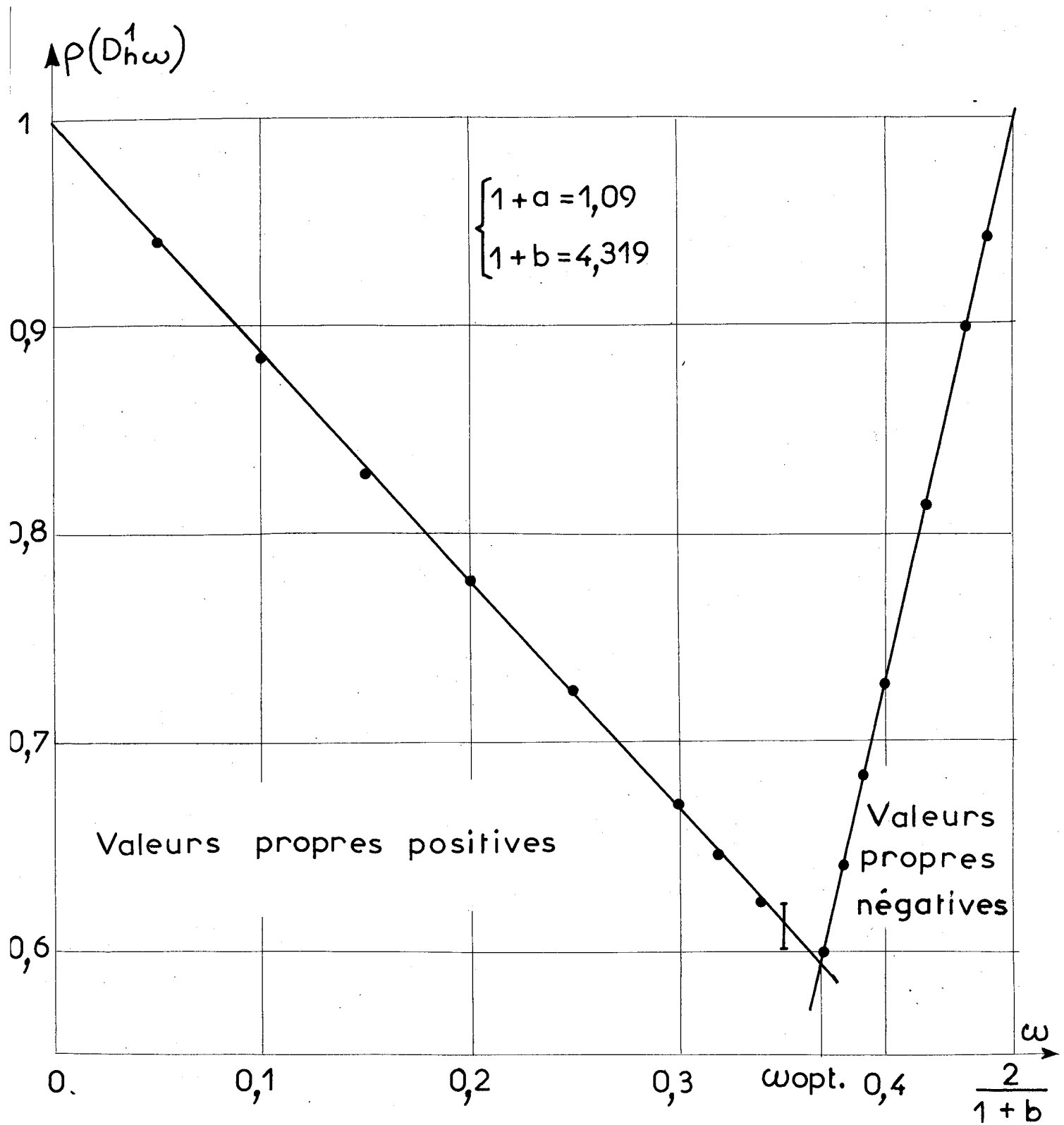


Figure 2 : Variations du rayon spectral de $D_{h\omega}^1$ en fonction de ω pour $q_0 = 30$ ($h = 0,01$).

L'utilisation du théorème IV-3 permet d'établir :

THEOREME IV-5.

La solution approchée q_h converge vers q solution du système différentiel (2) lorsque $h \rightarrow 0$.

Démonstration

Etablissons une première relation entre $[V]_h, V_h, [q]_h$ et q_h par l'intermédiaire du problème de Poisson :

$$(24) \quad \begin{cases} \Delta V(x) = -q(x) & x \in [0,1] \\ (\Delta_h V_h)_i = -q_{hi} & i = 1, 2, \dots, N \end{cases}$$

La relation (III-12) entre Δ_h et Δ est valable ici sans restriction ($V(x)$ indéfiniment dérivable) ; on a même :

$$(25) \quad \Delta_h V(x) = \Delta V(x) + h^2 g_1(x, h) \quad x \in [h, 1-h]$$

Prenons la restriction à $G(h)$ de la première relation de (24) et effectuons la différence avec la seconde ; l'utilisation de (25) et les notations :

w : vecteur-colonne des $w_i = V_{hi} - [V]_{hi}$

u : vecteur-colonne des $u_i = q_{hi} - [q]_{hi}$

conduisent à :

$$(26) \quad Lw = u + h^2 G_1(h)$$

$G_1(h)$ étant un vecteur borné en h .

On va obtenir une seconde relation entre w et u à partir des relations du 1^{er} ordre :

$$\begin{cases} \frac{dV}{dx} \cdot \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{q} \right) (x) = -1 & x \in [0,1] \\ (\delta_h V_h)_{i-\frac{1}{2}} \cdot (\delta_h \left(\frac{1}{q_h} \right))_{i-\frac{1}{2}} = -1 & i = 1, 2, \dots, N. \end{cases}$$

La relation (III-13) valable sans restriction ($V(x)$ et $q(x)$ indéfiniment dérivables) donne pour ce cas particulier :

$$(27) \quad \delta_h \Psi(x) = \frac{d\Psi}{dx}(x) + h^2 \xi(x, h) \quad x \in [h, 1-h]$$

avec

$$\delta_h \Psi(x) = \frac{1}{h} \left[\Psi\left(x + \frac{h}{2}\right) - \Psi\left(x - \frac{h}{2}\right) \right]$$

En combinant les 2 relations du 1^{er} ordre et en utilisant (27), on obtient :

$$\left[\delta_h \left(\frac{1}{q_h} \right) \cdot \delta_h w - \delta_h [V]_h \cdot \delta_h \left(\frac{u}{q_h [q]_h} \right) \right]_{i-\frac{1}{2}} = h^2 g_{2i}(h)$$

Notons :

$$\begin{cases} E_i = -(\delta_h [V]_h)_{i-\frac{1}{2}} \\ E_{hi} = -(\delta_h V_h)_{i-\frac{1}{2}} \end{cases}$$

Sous forme matricielle, il vient :

$$(28) \quad w = -A'u + h^2 G_3(h)$$

$G_3(h)$ est un vecteur borné en h ; l'expression de A' est analogue à celle de A (relation (19)) :

$$A' = (a'_{ij})$$

$$(29) \quad a'_{ij} = \begin{cases} \frac{E_{hj} E_j - E_{h,j+1} E_{j+1}}{q_{hj} q_j} & j < i \\ \frac{E_{hj} E_j}{q_{hj} q_j} & j = i \\ 0 & j > i \end{cases}$$

En éliminant w entre (26) et (28) :

$$u = -LA'u + h^2 G_4(h)$$

($G_4(h)$ vecteur borné en h) ; soit $C' = LA'$; en comparant (19) et (29), on voit que C' a une structure identique à celle de C ; la propriété :

$$E_i > E_{i-1} \quad i = 2, 3, \dots, N$$

assure que C' a des propriétés identiques à celles de C ; donc C' est une M -matrice ayant toutes ses valeurs propres dans le demi-plan complexe $R_e(z) > 0$ (théorème IV-3). $-C'$ n'ayant pas la valeur propre $+1$, le système :

$$u = -C'u$$

n'a que la solution triviale $u = 0$; $I+C'$ est régulière et l'on a :

$$u = h^2(I+C')^{-1}G_4(h) = h^2G_5(h)$$

$$u = q_h - [q]_h \rightarrow 0 \text{ lorsque } h \rightarrow 0$$

$G(0)$, limite de $G(h)$ lorsque $h \rightarrow 0$ étant dense dans l'intervalle $[0, 1]$, on a le théorème annoncé.

Avec ce théorème, s'achève l'étude de T_{hw} ; on a ainsi justifié les résultats numériques obtenus et, sur le cas particulier examiné, montré que le procédé itératif basé sur T_{hw} constitue une méthode générale de résolution.

Dans la suite, nous allons montrer qu'il existe d'autres méthodes générales basées sur le même principe.

VII - AUTRES METHODES GENERALES.

La première méthode générale est basée sur l'application T ; par conséquent elle est étroitement liée au système (II-2), équivalent à l'équation (I-2) et qui intervient dans la définition de T . Or il existe d'autres systèmes équivalents à (I-2) à partir desquels on peut construire des méthodes générales. Reprenons le système (II-2) :

$$(30) \quad \begin{cases} \Delta V = -q \\ q^2 - \text{grad } V \cdot \text{grad } q = 0 \end{cases}$$

En observant que $-q = \Delta V = \text{div}(\text{grad } V)$, on retrouve :

$$(31) \quad \text{div}(q \text{ grad } V) = 0$$

qui exprime la conservation du courant. En réécrivant (30) ($q > 0$)

$$(30') \quad \begin{cases} \frac{1}{q} \Delta V = -1 \\ \text{grad } V \cdot \text{grad } \frac{1}{q} = -1 \end{cases}$$

et en ajoutant membre à membre, on obtient :

$$(32) \quad \text{div} \left(\frac{1}{q} \text{ grad } V \right) = -2.$$

(31) et (32) forment un système équivalent à l'équation (I-2) ; en combinant les diverses relations (30), (31) et (32) on peut remarquer qu'on obtient 6 formulations équivalentes à (I-2) ; l'intérêt de ces formulations réside dans le fait qu'elles permettent de définir des méthodes différentes.

Adoptons la convention suivante : à chaque système i ci-après, on associe une application T^i (*) définie ainsi : la première équation du système i associée aux 2 conditions $V(0) = 1$ et $V(1) = 0$ permet de déterminer une distribution de potentiel V à partir de q_1 donnée; la deuxième équation associée à la condition $q(0) = q_0$ permet de calculer q_2 à partir de V (opérations supposées possibles) ; alors :

Définition IV-4.

T^i est l'application qui, par l'intermédiaire du système i fait correspondre q_2 à q_1 :

$$q_2 = T^i q_1$$

Cette définition constitue l'extension de la définition II-1 (§ II-2).

Des considérations assez élémentaires permettent d'éliminer certains systèmes et il reste 6 cas intéressants :

$$\begin{array}{l} 1 \\ 2 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \Delta V = -q \\ \text{grad } V \cdot \text{grad } \frac{1}{q} = -1 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta V = -q \\ \text{div}(\frac{1}{q} \text{ grad } V) = -2 \end{array} \right.$$

(*) Pour $T^i_{W,D}$, i n'est pas une puissance mais un indice qui permet d'indiquer le numéro du système équivalent à (I-2) et de l'application correspondante.

$$3 \quad \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}(q \operatorname{grad} V) = 0 \\ \operatorname{grad} V \cdot \operatorname{grad} \frac{1}{q} = -1 \end{array} \right.$$

$$4 \quad \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}(q \operatorname{grad} V) = 0 \\ \operatorname{div}\left(\frac{1}{q} \operatorname{grad} V\right) = -2 \end{array} \right.$$

$$5 \quad \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}\left(\frac{1}{q} \operatorname{grad} V\right) = -2 \\ \operatorname{grad} V \cdot \operatorname{grad} \frac{1}{q} = -1 \end{array} \right.$$

$$6 \quad \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}\left(\frac{1}{q} \operatorname{grad} V\right) = -2 \\ \operatorname{div}(q \operatorname{grad} V) = 0 \end{array} \right.$$

Le système 1 est celui qui a été étudié jusqu'à présent. Pour les autres systèmes, on étend les notations et définitions ; par exemple :

$$T_{\omega}^i = (1-\omega)I + \omega T^i$$

$$0 < \omega \leq 1$$

$$W^i u = T^i(q+u) - T^i q$$

D^i : différentielle au sens de Fréchet de T^i .

La méthode de résolution associée à chaque système i consiste à construire la suite $\{q_p\}$ définie par :

$$\left\{ \begin{array}{l} q_0 \text{ donné} \\ q_{p+1} = T_{\omega}^i q_p \end{array} \right.$$

Une étude systématique a été entreprise d'abord numériquement toujours sur le même cas particulier à une dimension. Un caractère commun très intéressant est que les diverses méthodes sont générales, c'est-à-dire que les suites $\{q_p\}$ sont convergentes pour ω convenablement choisi entre 0 et 1, quelle que soit la valeur de q_0 (densité sur l'électrode émettrice).

De plus, pour $i = 4, 5, 6$ les variations du rayon spectral des matrices $D_{h\omega}^i$ en fonction de ω sont analogues à celles de $\rho(D_{h\omega}^1)$ étudiées au § 5. Le théorème IV-4 étant général, ces variations de $\rho(D_{h\omega}^i)$ laissent pressentir une localisation très particulière des valeurs propres.

Ces observations vont être justifiées pour la méthode 4.

VIII - ETUDE DE L'APPLICATION T^4 .

En posant $E = -\text{grad } V$, le système 4 s'écrit pour le cas particulier étudié (une seule variable x) :

$$4 \quad \begin{cases} \frac{d}{dx} (qE) = 0 \\ \frac{d}{dx} \left(\frac{E}{q} \right) = 2 \end{cases}$$

Dans ce paragraphe l'indice 4 sera systématiquement omis pour T , W et D .

Une discrétisation sur cette forme et une série de calculs en simple précision a donné les résultats reportés sur la figure 3. Les points s'alignent sur 2 droites ; il existe un intervalle $[\omega_1, 1]$ pour lequel le rayon spectral est indépendant de la valeur de q_0 (considéré comme paramètre) ; la pente +2 indique que -1 est valeur propre de D . Lorsqu'on utilise T ($\omega=1$) on obtient très rapidement, pour tout q_0 , 2 fonctions q_1 et q_2 telles que :

$$q_2 = Tq_1 = T(Tq_2)$$

$$q_2 \neq q_1$$

Cette observation incite à admettre que -1 est également valeur propre de W . Examinons donc D et W .

a) Relations liant λ et u , valeur et vecteur propres.

La relation entre q_1 et q_2 s'explique dans ce cas par l'élimination de E ; la 1^{ère} équation et la condition sur le champ donnent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dx} (q_1 E) = 0 \\ \int_0^1 E(x) dx = 1 \end{array} \right. \Rightarrow E(x) = \frac{1}{q_1(x) \int_0^1 \frac{dt}{q_1(t)}}$$

Pour $q_2 = Tq_1$, on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dx} \left(\frac{E}{q_2} \right) = 2 \\ q_2(0) = q_0 \end{array} \right. \Rightarrow \frac{E(x)}{q_2(x)} = \frac{E(0)}{q_0} + 2x$$

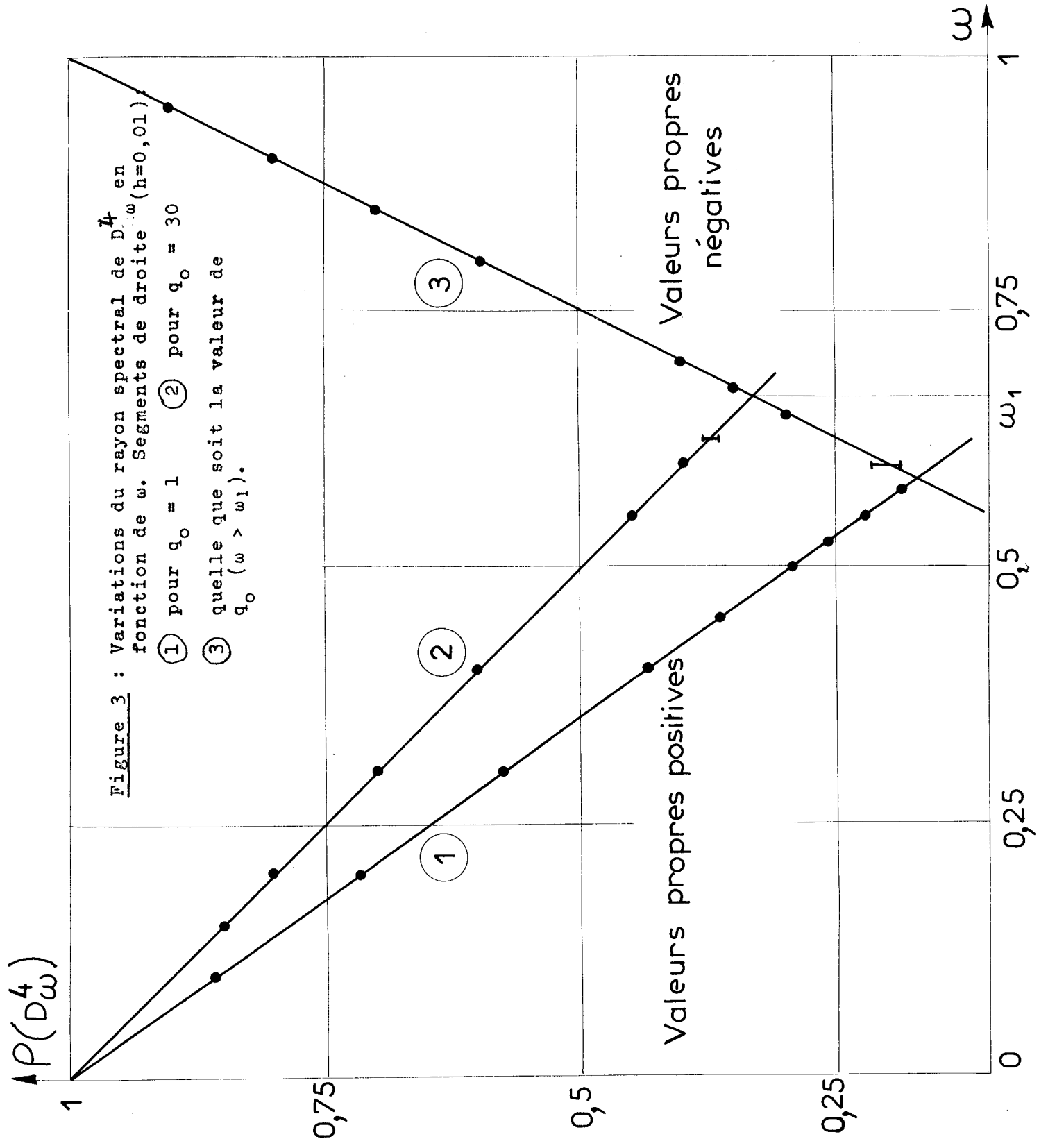
D'où :

$$(33) \quad \frac{1}{q_1 q_2}(x) = \frac{1}{q_0^2} + 2x \int_0^1 \frac{dt}{q_1(t)} = \frac{1}{q_0^2} + 2xA$$

Dans tout ce paragraphe, nous nous plaçons dans l'espace C_0 des fonctions continues définies sur $[0,1]$ avec la norme du max :

$$\|f\| = \max_{x \in [0,1]} |f(x)|$$

S est le sous-ensemble de C_0 tel que :



$$\begin{cases} f(0) = q_0 \\ 0 < f(x) \leq q_0 \end{cases} \quad \forall x \in [0,1]$$

Nous n'étudions pas les domaines de définition de T et de W. On supposera toujours que $q \in S$ et tel que T est défini; de même u (ou v) sera supposé tel que $\|u\| < q_0$ et que W soit défini.

Soit u une fonction propre de W (W correspondant à q_1) associée à la valeur propre λ (si u est infiniment petite, u et λ sont fonction et valeur propres de D):

$$Wu = \lambda u = T(q_1 + u) - Tq_1$$

$$\Rightarrow T(q_1 + u) = Tq_1 + \lambda u = q_2 + \lambda u$$

(33) s'écrit alors pour $(q_1 + u)$ et $T(q_1 + u)$ ($q_1 + u \in S$ et $T(q_1 + u) \in S$):

$$(33') \quad \frac{1}{(q_1 + u)(q_2 + \lambda u)}(x) = \frac{1}{q_0^2} + 2x \int_0^1 \frac{dt}{(q_1 + u)(t)} = \frac{1}{q_0^2} + 2x (A - \alpha)$$

avec :

$$\alpha = \int_0^1 \frac{u(t)}{q_1(q_1 + u)(t)} dt$$

En combinant (33) et (33') on obtient :

$$(34) \quad [(q_2 + \lambda q_1 + \lambda u) u](x) = 2\alpha x [q_1 q_2 (q_1 + u)(q_2 + \lambda u)](x)$$

b) Cas où $\alpha = 0$.

Si l'on écarte $u \equiv 0$, (34) donne :

$$q_2 + \lambda(q_1 + u) = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{q_2}{q_1 + u}(x)$$

λ est une constante ; or pour $x = 0$, le rapport $\frac{q_2}{q_1 + u}$ prend la valeur unité; on obtient donc :

$$\lambda = -1.$$

Les fonctions propres correspondant à cette valeur propre changent de signe au moins une fois sur $[0,1]$: la condition $\alpha = 0$ impose, d'après l'expression de α , que u soit positive sur un certain domaine $\subset [0,1]$ et négative sur le domaine complémentaire. (Ces deux domaines sont non vides).

1) Opérateur W

La fonction propre est finie.

$$u = q_2 - q_1$$

En remplaçant u par cette expression dans (33') et en comparant avec (33) il vient :

$$\int_0^1 \frac{dt}{q_1(t)} = \int_0^1 \frac{dt}{q_2(t)}$$

on retrouve bien : $\alpha = 0$; de plus on voit que q_1 et q_2 jouent un rôle symétrique, ce qui se traduit par :

$$q_2 = Tq_1 \text{ et } q_1 = Tq_2 \quad (q_1 \neq q_2)$$

et donne l'explication de la situation obtenue lorsqu'on itère avec l'opérateur T ($\omega = 1$).

2) Opérateur D

$\lambda = -1$ est également valeur propre de D ; la relation :

$$u = q_2 - q_1$$

subsiste, mais étant donné le caractère linéaire de D , u est un infiniment petit du premier ordre au moins et q_1 et q_2 diffèrent très peu de la solution q (elles sont dans un voisinage de q).

c) α quelconque $\neq 0$.

D'après la relation (34) :

$$\frac{u}{q_1(q_1+u)}(x) = 2\alpha x \frac{q_2(q_2+\lambda u)}{q_2+\lambda q_1+\lambda u}(x)$$

En intégrant de 0 à 1 et en éliminant α :

$$(35) \quad \int_0^1 t \frac{q_2(q_2+\lambda u)}{q_2+\lambda q_1+\lambda u}(t) dt = \frac{1}{2}$$

Cette relation ne permet pas de montrer de façon simple que W ne peut avoir que des valeurs propres réelles. Cette conclusion n'est obtenue que pour l'opérateur D pour lequel (35) se réduit à :

$$(36) \quad \int_0^1 t \frac{q_2^2}{q_2+\lambda q_1} dt = \frac{1}{2}$$

λ ne peut prendre alors que des valeurs réelles.

d) Etude de D

Lemme IV-4

L'équation (36) n'a qu'une seule racine λ pour $q_1 \in S$, $Tq_1 = q_2 \in S$:

$$-1 < \lambda < 0$$

Démonstration

Appelons $I(\lambda)$ le 1^{er} membre de (36) : $q_1(x)$ et $q_2(x)$ étant positives pour $x \in [0,1]$, $I(\lambda)$ est une fonction décroissante de λ .

1) Supposons $\lambda < -1$.

$$\text{pour } x = 0, (q_2+\lambda q_1)(0) = (1+\lambda)q_0 < 0$$

$$\text{si } q_2(t)+\lambda q_1(t) < 0$$

alors :

$$\forall t \in [0,1]$$

$$I(\lambda) < 0$$

si $q_2(t) + \lambda q_1(t)$ s'annule pour $t_0 \in [0,1]$ alors l'intégrale $I(\lambda)$ n'est pas définie ; (36) ne peut donc pas être satisfaite par $\lambda < -1$.

$$2) \text{ Soit : } \lambda_0 = \max_{t \in [0,1]} \left(- \frac{q_2(t)}{q_1(t)} \right)$$

Alors pour $\lambda > \lambda_0$, $I(\lambda)$ est définie ;
lorsque $\lambda \rightarrow \lambda_0$, $I(\lambda)$ croît.

3) $I(0) < \frac{1}{2}$; en effet, en prenant la 2ème équation déterminant q_2 à partir de E :

$$\frac{E}{q_2}(x) = \frac{E(0)}{q_0} + 2x$$

et en exprimant la condition sur le champ, on obtient : $(E(0) > 0)$

$$1 = \frac{E(0)}{q_0} \int_0^1 q_2(t) dt + 2 \int_0^1 t q_2(t) dt \Rightarrow 2I(0) < 1$$

Donc $I(\lambda)$, fonction décroissante de λ , prend la valeur $1/2$ pour λ compris entre λ_0 et 0.

En rassemblant les résultats, on a :

THEOREME IV-6 .

L'opérateur D^4 (défini pour $q_1 \in S$ quelconque), admet 2 valeurs propres λ_1 et λ_2 telles que :

$$-1 = \lambda_1 \leq \lambda_0 < \lambda_2 < 0.$$

Corollaire
.....

L'opérateur D_ω^4 est convergent quel que soit $\omega \in]0,1[$

Il suffit d'appliquer le théorème IV-4.

Etudions plus particulièrement le comportement au voisinage de la solution q ;
(36) donne :

$$2 \int_0^1 t q(t) dt = 1 + \lambda_2$$

La fonction $q(x)$ est connue :

$$\begin{cases} q(x) = \frac{q_0}{\sqrt{1+cx}} \\ q_0 = \frac{3c^2}{4[(1+c)^{3/2}-1]} \end{cases}$$

on en déduit :

$$\lambda_2 = - \frac{3}{c+2+\sqrt{c+1}}$$

Vérification numérique : pour $q_0 = 1$ ($c \approx 3.14$) on trouve :

$$\lambda_2 = -0.417$$

valeur en parfait accord avec celle déduite de la pente ($p = -1.42$)
de la portion de droite comprise entre $\omega = 0$ et $\omega = \omega_{opt}$ (Fig. 3).

e) Remarques concernant W.

Nous nous bornons, dans cet alinéa, au cas des valeurs propres et fonctions propres réelles de W , notées μ et v . Soit :

$$J(\mu, v) = \int_0^1 t \frac{q_2(q_2 + \mu v)}{q_2 + \mu q_1 + \mu v} (t) dt$$

(35) s'écrit :

$$J(\mu, v) = \frac{1}{2}$$

λ_2 est valeur propre de W , la fonction propre associée étant alors infiniment petite.

Précisons cette affirmation.

Soient, pour $q_1 \in S$ donné, μ et v tels que :

$$Wv = \mu v$$

alors :

$$J(\mu, v) = \frac{1}{2}$$

$$J(\mu, v) - I(\lambda_2) = 0 = \int_0^1 t \frac{q_2(q_2 + \mu v)}{q_2 + \mu q_1 + \mu v} (t) dt - \int_0^1 t \frac{q_2^2}{q_2 + \lambda_2 q_1} (t) dt$$

On en déduit : $(F = (q_2 + \lambda_2 q_1)(q_2 + \mu q_1 + \mu v))$

$$(38) \quad (\mu - \lambda_2) \int_0^1 t \frac{q_1 q_2^2}{F} dt = \lambda_2 \mu \int_0^1 t \frac{q_1 q_2 v}{F} dt$$

Reprenons la relation (34):

$$(q_2 + \mu q_1 + \mu v)v = 2\alpha x \quad q_1 q_2 (q_1 + v)(q_2 + \mu v)$$

$\alpha \neq 0$ est réel ; la relation (33') imposant que $q_1 + v$ et $q_2 + \mu v$ restent positifs, le 2ème membre ne change pas de signe sur $[0, 1]$; v reste borné et $q_2 + \mu q_1 + \mu v$ ne peut pas s'annuler.

Donc v est une fonction soit non-négative, soit non-positive sur $[0, 1]$; on peut remarquer que les fonctions propres associées à $\mu \neq -1$ ont une caractérisation différente de celles correspondant à $\mu = -1$ (§ 8-b).

En divisant (38) par $\lambda_2 \mu$ et en tenant compte du fait que v reste borné, on voit que :

$$\left| \frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\mu} \right|$$

reste borné ; donc zéro ne peut pas être valeur propre. La relation (38) montre alors que :

$$\mu > \lambda_2 \text{ pour } v \geq 0$$

$$\mu < \lambda_2 \text{ pour } v \leq 0$$

De plus :

$$|\mu - \lambda_2| \rightarrow 0 \text{ lorsque } \|v\| \rightarrow 0.$$

Cet ensemble de remarques suggère que les valeurs propres réelles de W ($\mu = -1$ excepté) forment un spectre continu tel que :

$$-1 \leq \mu_1 < \mu \leq \mu_2 < 0$$

les bornes μ_1 et μ_2 pouvant être atteintes (on a évidemment $\mu_1 < \lambda_2 < \mu_2$).

Il s'agit ici plus de remarques que de résultats rigoureux ; une étude complète de W opérant sur C_0 devrait préciser le domaine de définition de W ,

examiner la structure du spectre des valeurs propres, leur multiplicité et la structure de l'ensemble des fonctions propres (cf. KRASNOSELSKI'I [43] p.183)

Les remarques précédentes permettent néanmoins de comprendre l'aspect très particulier de D (opérant sur C_0), n'ayant que 2 valeurs propres distinctes. Enfin, il apparaît qu'une étude de W pourrait être nécessaire pour rendre compte de la convergence du processus itératif (convergence de la suite $\{q_p\}$).

f) Approximations discrètes : T_h, W_h, D_h .

L'analyse des opérateurs T_h, W_h, D_h , définis à partir d'une discrétisation de type général (c'est-à-dire transposable au cas de configurations bi-dimensionnelles) n'a pas été faite, les vecteurs des suites $\{V_{h,p}\}$ et $\{q_{h,p}\}$ intervenant de façon assez complexe. Cependant un calcul en double précision a permis d'atteindre le rayon spectral de D_{hw}^4 ; les résultats rassemblés fig. 4, ne sont pas significativement différents de ceux de la fig. 3 et indiquent expérimentalement que les propriétés de D^4 sont très peu altérées par la discrétisation.

IX - REMARQUES SUR LES AUTRES METHODES.

a) Opérateur T^2 .

La méthode basée sur T^2 est plus efficace que celle construite avec T^1 ; une première indication est fournie par le fait que T^2 transforme un certainsous-ensemble S_ε^2 en lui-même à condition que $q_0 < 8$; cette borne est nettement supérieure à celle obtenue pour T^1 : $q_0 < 3.90$.

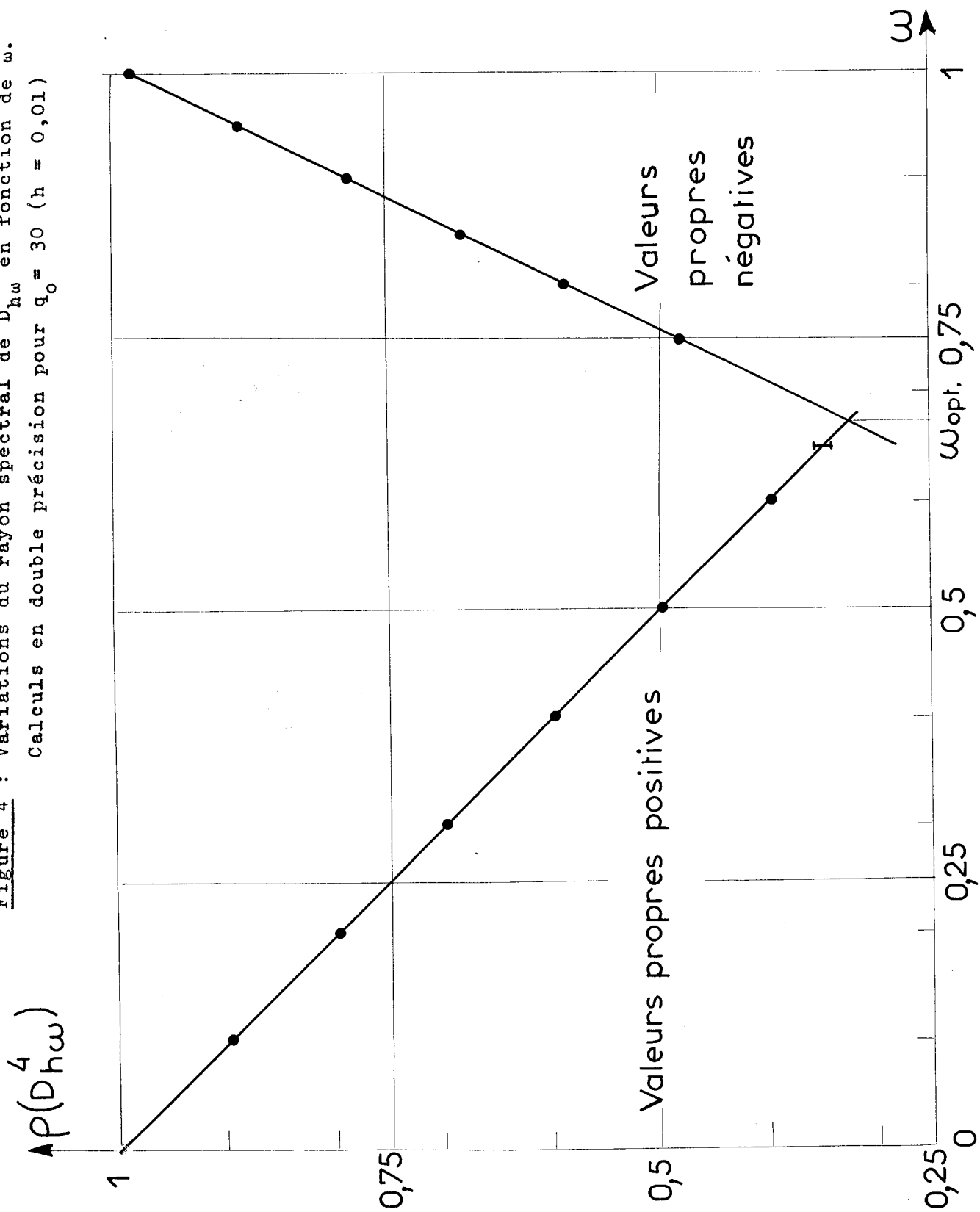
L'opérateur D^2 ne présente pas de propriétés simples quant à la localisation des valeurs propres ; l'explicitation de la matrice jacobienne de F^2 ($q_h = F^2(V_h)$) montre que D_h^2 ne présente pas la structure de M-matrice.

Au cours de l'itération, on observe des variations cycliques (en première approximation) d'ordre 4 du rapport :

$$k_n = \|\varepsilon_n\|_h / \|\varepsilon_{n-1}\|_h$$

ce qui indique que les valeurs propres de D^2 sont probablement complexes. Leur localisation, cependant doit être du même type car l'itération converge pour un domaine important de ω . Soit α le taux moyen de décroissance de l'erreur (on se limite pratiquement à n tel que $\|\varepsilon_n\|_h \gg$ erreur de calcul) :

Figure 4 : Variations du rayon spectral de D_{hw}^4 en fonction de ω .
 Calculs en double précision pour $q_0 = 30$ ($h = 0,01$)



$$\alpha^P = \|\varepsilon_{p+1}\|_h / \|\varepsilon_1\|_h$$

La figure 5 montre les variations de α en fonction de ω ; cette courbe traduit un comportement du type rencontré pour T^1 et T^4 .

b) Opérateur T^3

T^3 semble être un opérateur contractant quelle que soit la valeur de q_0 . En effet, la suite $\{q_{h,p}\}$ définie par :

$$\begin{cases} q_{h,0} = q_0 I_c \\ q_{h,p+1} = T_{h\omega}^3 q_{h,p} \end{cases} \quad \begin{array}{l} I_c : \text{vecteur-colonne unité} \\ T_{h\omega}^3 : \text{matrice d'opérateur } T^3 \end{array}$$

converge quel que soit q_0 pour $\omega \in]0,1]$

On observe des variations assez erratiques de k_n en fonction de n ; seuls des calculs en double précision permettent de cerner le rayon spectral. La fig. 6 montre, pour le même cas particulier, les variations de ρ et de α ; le taux moyen de convergence est très élevé et la comparaison des différentes courbes obtenues amène la conclusion que la méthode générale basée sur $T_{h\omega}^3$ est la plus efficace.

Bien qu'elle ait des propriétés très intéressantes concernant les valeurs propres et la convergence, cette méthode n'est pas utilisable pratiquement à cause d'une erreur de troncature beaucoup plus importante que pour les systèmes 1, 2 et 4. Par exemple en définissant ainsi :

$$v = \frac{|q_h(1) - q(1)|}{q(1)}$$

on a, en fonction de N , nombre d'intervalles :

N	25	50	100	200
v	0.28	0.07	0.018	0.006

Bien que v soit proportionnel à h^2 , l'erreur est très importante pour une valeur raisonnable de h .

c) Opérateurs T^5 et T^6 .

L'étude de T^6 est analogue à celle de T^4 ; on montre facilement que D^6 est l'inverse de D^4 et qu'il a comme valeurs propres :

$$\begin{cases} \lambda'_1 = \lambda_1 = -1 \\ \lambda'_2 = 1/\lambda_2 \end{cases}$$

La grande valeur de λ'_2 (≈ -550 pour $q_0 = 30$) enlève à la méthode basée sur T^6 tout intérêt pratique (taux de convergence très faible).

La même conclusion est obtenue pour T^5 ; les variations de $\rho(D_h^5)$ en fonction de ω sont semblables à celles de $\rho(D_{h\omega}^1)$ (Fig. 2). Seules diffèrent les valeurs de b (le rayon spectral de D_h^5 est beaucoup plus grand) et de ω_{opt} .

X - UTILISATION DANS LE CAS GENERAL.

a) Efficacité des méthodes.

L'étude systématique du cas particulier permet de tirer la conclusion suivante : après élimination des méthodes basées sur T^5 et T^6 (taux de convergence très faible) et sur T^3 (erreur de discrétisation trop importante) il reste 3 méthodes générales qu'on peut classer par ordre décroissant d'efficacité (mesurée par le taux de convergence de l'itération) ; ce sont :

$$T^4, T^2 \text{ et } T^1.$$

En appliquant le théorème IV-4 à D^4 , on voit que :

$$\omega_{\text{opt}} = \frac{2}{2+1+|\lambda_2|} \leq \frac{2}{3} = \omega_0$$

on en déduit :

$$\rho(D_{\omega_{\text{opt}}}^4) \leq \frac{1}{3}$$

Si l'on choisit $\omega = \omega_0$ quel que soit q_0 , on obtient donc un taux très important de décroissance de l'erreur ε_n ; par exemple, pour $q_0 = 30$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho(D_{h\omega_0}^4) \approx \frac{1}{3} = 0,333 \\ \alpha(D_{h\omega_{\text{opt}}}^2) \approx 0,35 \\ \rho(D_{h\omega_{\text{opt}}}^1) \approx 0,6 \end{array} \right.$$

b) Résolution d'un cas général par la méthode 4.

La méthode basée sur $T_{h\omega}^4$ a été mise en oeuvre pour la configuration fil émetteur entre 2 plaques parallèles ; (ce cas ne nécessite aucune transformation géométrique). Avec une discrétisation de type général et un domaine discret comprenant environ 1200 points, on a obtenu les résultats suivants : $(k = \lim_{n \rightarrow \infty} k_n)$

$$q_0 = 1, \quad \omega = 1 \quad ; \quad k \approx 0,6$$

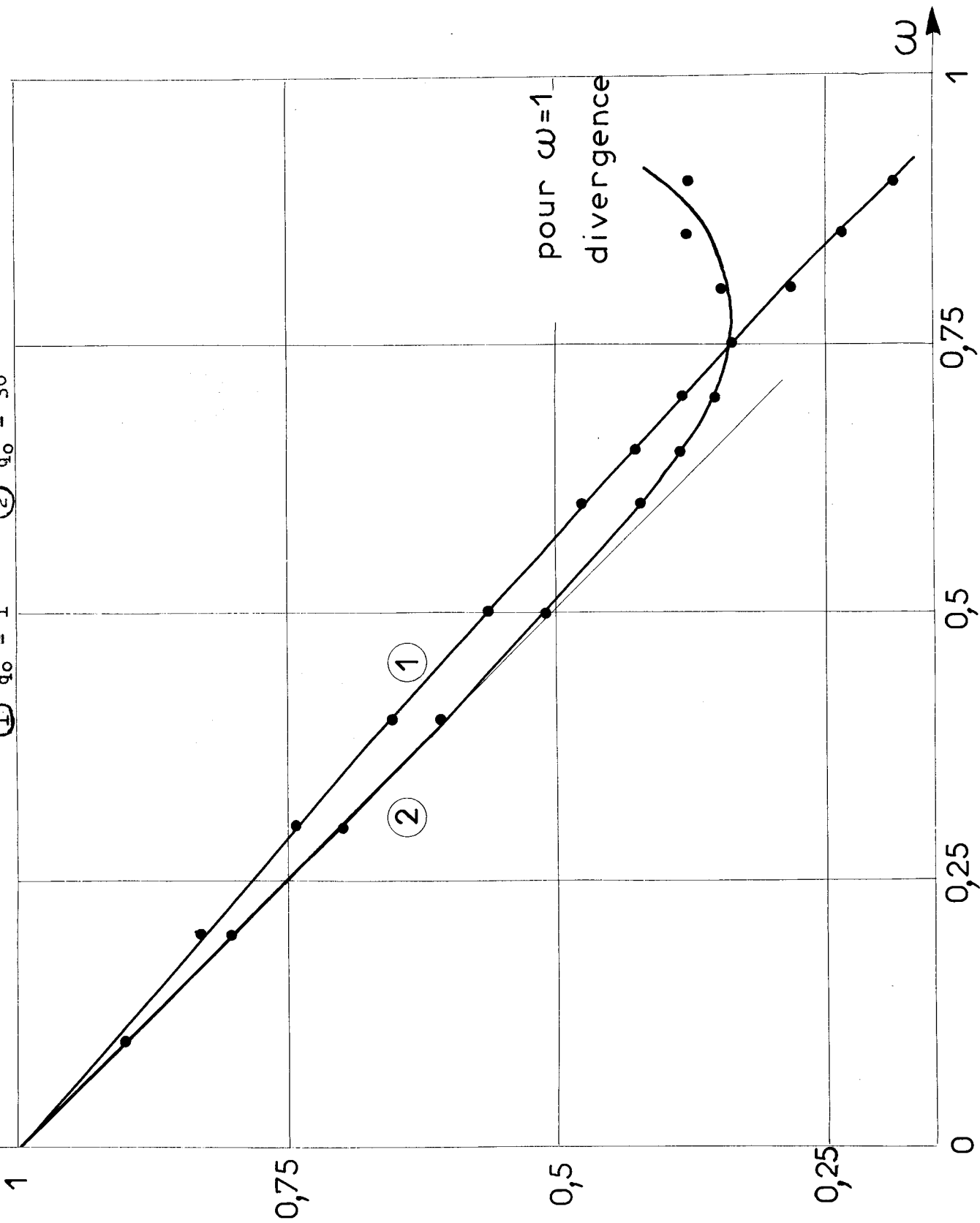
$$q_0 = 1, \quad \omega = 0,65 \quad ; \quad k \approx 0,22$$

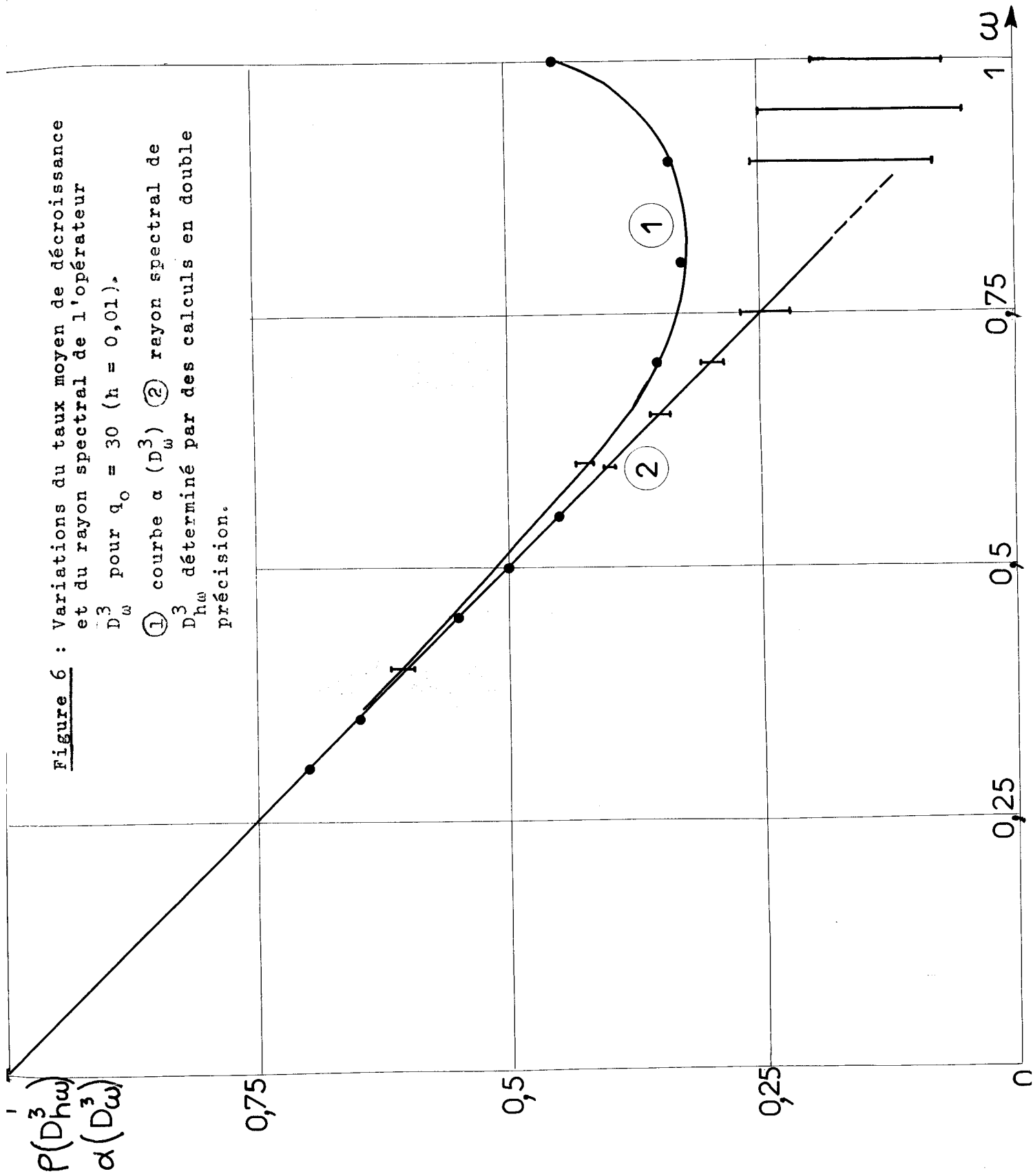
$$q_0 = 3, \quad \omega = 0,65 \quad ; \quad k \approx 0,30$$

$A \propto (D_h^2 \omega)$

Figure 5 : Variations du taux moyen de décroissance de l'erreur
en fonction de ω pour la méthode 2 ($h=0,01$)

① $q_0 = 1$ ② $q_0 = 30$





Il s'agit ci-dessus d'indications approximatives car à chaque tour d'itération, V n'est pas déterminé de façon exacte, la surrelaxation par points étant arrêtée après 25 ou 30 tours. En 9 à 12 tours d'itération, le problème aux différences finies est résolu avec une précision de l'ordre de 10^{-5} à 10^{-6} .

c) Remarque concernant T^4 .

On obtient dans le cas général, une relation semblable à (33). Soit q_1 une fonction donnée, positive, dérivable dans $G \cup \Gamma$ et telle que $q_2 = T^4 q_1$ existe ; de façon tout-à-fait analogue à (33) on établit :

$$(39) \quad \frac{1}{q_1(P)q_2(P)} = \frac{1}{g^2(Q)} + 2 \int_0^L \frac{dt}{K(t)q_1(t)} \cdot \int_0^s K(u) du$$

où L est la longueur curviligne de la ligne de force le long de laquelle sont effectuées les sommations, s est l'abscisse curviligne ($P \leftrightarrow (Q, s)$) et $K(t)$ désigne le rapport des sections orthogonales du tube de force infiniment fin respectivement en $s = t$ et $s=0$.

L'analogie avec le cas particulier (formule 33) ne peut pas être poussée plus loin car le réseau de lignes de force varie avec chaque fonction q ; la recherche des valeurs propres est donc beaucoup plus complexe.

XI - CONCLUSION.

a) Dans le § 5, c'est la structure de M -matrice de C qui permet de justifier la convergence du processus itératif au voisinage de la solution. Mais la propriété essentielle est celle concernant la localisation des valeurs propres de D^1 . Ceci est confirmé par le fait que, pour des configurations bi-dimensionnelles, C ne présente plus la structure de M -matrice, sans cesser toutefois d'avoir des valeurs propres localisées de façon remarquable.

- b) L'étude de l'application T^4 a permis de justifier la localisation des valeurs propres de D^4 dans le cas particulier uni-dimensionnel : la similitude de (33) et (39) incite à penser que cette propriété est générale. En plus l'étude de W^4 se révèle intéressante sinon nécessaire en vue d'établir des résultats généraux concernant l'existence et l'unicité de la solution ainsi que la convergence des suites $\{q_{h,p}\}$ et $\{q_p\}$.
- c) L'étude systématique des 6 méthodes générales sur le cas particulier et la mise en oeuvre des méthodes 1 et 4 pour des configurations géométriques bi-et même tri-dimensionnelles ne laissent aucun doute sur la généralité des propriétés des différents opérateurs.

La localisation des valeurs propres de W^i et D^i apparaît donc comme une particularité intrinsèque de l'équation (I-2) plutôt que de tel ou tel système équivalent. Il est probable que cette caractéristique peut s'exprimer de façon plus générale en terme de propriétés des applications T^i . En particulier, d'après les remarques faites au début de ce chapitre, il est probable que l'application $F(x) = x - Tx$ satisfait à une condition de monotonie du type de Zarantonello (cf. [42]).

- d) Dans le cas général, il semble que les efforts doivent se porter sur l'établissement de telles propriétés de monotonie plutôt que sur l'investigation des valeurs propres des opérateurs D^i et W^i ; mais c'est là un problème complexe dont la résolution nécessite probablement des méthodes et des outils mathématiques plus raffinés que ceux employés dans ce travail.

Cette étude, dont l'intérêt a perdu de son acuité en ce qui concerne le problème physique (formulation et méthode de résolution), semble digne d'attention pour qui s'intéresse aux équations non linéaires du point de vue mathématique et du point de vue de leur résolution numérique.

CHAPITRE - V

ELEMENTS D'UNE THEORIE DE SONDE

I - GENERALITES

a) Grandeurs à comparer

Les méthodes générales de résolution permettent d'obtenir la solution pour un grand nombre de configurations géométriques. Avant de confronter les prévisions théoriques aux résultats expérimentaux, il est nécessaire de préciser quelles sont les grandeurs sur lesquelles doit porter la comparaison.

Traditionnellement, la concordance des caractéristiques courant-tension (dans le cas d'une décharge produite par effet couronne) était retenue comme critère permettant de juger de la validité d'une méthode de calcul (voir par exemple [25, 19, 11, 44]).

Or dans le chapitre I, nous avons vu que la comparaison des caractéristiques courant-tension (expérimentale et théorique) ne constitue pas une méthode valable, car le courant total résulte d'une sommation (§ I-3). Rappelons l'étude effectuée par PROKOPOVITCH [14] : en examinant la méthode de DEUTSCH qui donne des valeurs du courant total satisfaisantes, cet auteur met en évidence une discordance complète entre les valeurs théoriques et expérimentales de la densité de courant sur le plan récepteur (configuration pointe-plan).

L'examen de la densité de courant sur l'électrode réceptrice constitue un moyen plus apte à tester la validité de telle ou telle méthode de calcul.

C'est d'ailleurs ce moyen que FELICI a utilisé pour comparer les solutions qu'il a obtenues aux distributions expérimentales [8]. On peut cependant formuler deux remarques qui restreignent la validité de cette méthode. D'abord, bien que j soit proportionnelle au produit qE , l'accord entre les valeurs de j mesurées et calculées n'implique pas que la concordance s'étende aux grandeurs q et E ; il peut exister des distorsions importantes qui se compensent lorsqu'on effectue le produit qE . L'autre observation résulte du fait que la densité de courant n'est déterminée que sur l'électrode réceptrice et cette zone de concordance éventuelle apparaît limitée.

La comparaison des répartitions calculées et mesurées de la densité de courant sur l'électrode réceptrice ne constitue pas une méthode entièrement satisfaisante parce que la concordance des distributions de densité de courant n'implique pas, en toute rigueur, l'accord entre valeurs théoriques et expérimentales des diverses grandeurs dans le domaine G . Il apparaît donc nécessaire de comparer les distributions théoriques et expérimentales du potentiel, du champ électrique et de la densité de charge dans tout le domaine G .

b) Méthode expérimentale.

Si les mesures de potentiel sont relativement faciles, par contre la détermination du champ et de la densité de charge par des méthodes indépendantes se heurtent à des difficultés énormes. Pourtant la détermination expérimentale de l'une des deux grandeurs, champ ou densité de charge, apparaît nécessaire si l'on veut pouvoir comparer valablement solutions théoriques et distributions réelles ; la seule concordance des potentiels ne permet guère de se prononcer quant aux répartitions de densité de charge (proportionnelle au laplacien de V).

En ce qui concerne la mesure du champ électrique, il y a une méthode très attrayante a priori, qui consiste à mettre en oeuvre l'effet électro-optique de KERR, très marqué dans le cas de certains liquides comme le nitrobenzène [45, 46] ; on obtient alors aisément la répartition du carré du champ électrique.

Cependant, même lorsqu'on réalise une injection unipolaire pure [33], des phénomènes hydrodynamiques complexes [47, 48, 49] viennent s'ajouter et l'état stationnaire de conduction n'est plus régi par l'équation (I-2), le mouvement du fluide ne pouvant plus être négligé. Ce phénomène nous oblige donc à écarter les liquides en tant que milieu expérimental pour vérifier nos résultats qui supposent évidemment l'immobilité du milieu.

Dans le cas des gaz, la faiblesse de la constante de KERR ne permet pas d'envisager pratiquement la détermination du champ par cette méthode optique.

L'autre grandeur qu'il est difficile d'atteindre directement est la densité de charge ; il n'est pas possible d'utiliser ici les techniques micro-ondes couramment employées pour mesurer la densité des particules ionisées dans les plasmas ; en effet dans le cas d'une charge d'espace due à des ions d'un seul signe, la densité (~ 1 à 5.10^7 ions/cm³) est beaucoup trop faible pour avoir une influence quelconque sur un faisceau de micro-ondes. Ainsi BERSEILLE [22] n'a observé aucune interaction entre un faisceau de 8mm de longueur d'onde et les ions du domaine étudié ; auparavant LOOMS [50] avait montré expérimentalement que même la gaine, siège de l'effet couronne, est indétectable avec un faisceau d'ondes de 3 cm.

L'éventail des moyens d'investigations dont on dispose est donc limité à l'utilisation de différentes sortes de sondes que l'on insère dans le domaine à explorer ; ces méthodes ne permettent en général que la détermination du potentiel d'espace. Mentionnons pour mémoire la sonde incandescente [51], la sonde de GOSHO [52], la sonde modifiée par PENNEY et MATICK [53], et la technique de la bille tombant le long d'une équipotentielle [22, 53].

La technique la plus intéressante est incontestablement celle de la sonde froide car elle permet de déterminer à la fois le potentiel et la densité de charge. C'est cette technique qui a été mise en oeuvre pour déterminer les valeurs expérimentales de V et q .

c) Technique de la sonde froide.

Un fil cylindrique métallique est introduit en un point précis du domaine (problème plan) ; en faisant varier son potentiel et en mesurant le courant capté correspondant, on obtient une courbe courant-tension ou caractéristique de sonde, d'où l'on tire V et q .

L'analyse du fonctionnement de la sonde et l'explicitation de la relation existant entre le potentiel d'espace et la densité de charge d'une part, la caractéristique de sonde d'autre part, constituent la théorie de sonde. La théorie effectuée par DUPUY [11] doit être complétée lorsque la charge d'espace devient importante. Cette extension est étudiée dans la suite du présent chapitre.

II - THEORIE SIMPLIFIEE.

a) Rappel.

DUPUY [11] a montré que l'utilisation de la sonde froide donne des renseignements non seulement sur le potentiel, mais également sur la densité de charge existant en un point d'un domaine affecté par une charge d'espace unipolaire. Il fait les trois hypothèses suivantes :

- α) la faible divergence du champ existant avant l'introduction de la sonde permet de l'approcher par un champ uniforme.
- β) la présence de la sonde à un potentiel variable ne perturbe pas la décharge couronne principale.
- γ) Malgré la présence des ions, les lignes de force autour de la sonde restent identiques à celles du champ électrostatique.

Deux autres approximations sont faites dans le courant du calcul :

- 1) la densité de charge est supposée constante dans un domaine entourant la sonde ;
- 2) entre Q charge de la sonde et son potentiel, on a la relation :

$$Q = C(V - V_{\text{esp}})$$

où C représente la capacité électrostatique et V_{esp} le potentiel existant au point où se trouve la sonde, avant son introduction.

Traitant la sonde cylindrique, DUPUY introduit alors le potentiel complexe :

$$\zeta = \Psi + i\psi = -E_0 \left(z - \frac{a^2}{z} \right) - \frac{Q}{2\pi\epsilon} \log z$$

avec :

- E_0 : valeur du champ uniforme préexistant
- a : rayon de la sonde
- Q : charge de la sonde en Cb/m

Les calculs permettent de dégager les relations suivantes :

Soit $Q_0 = 4\pi\epsilon a E_0$; le courant I capté par la sonde s'exprime en fonction de Q :

$$|Q| < |Q_0| \Rightarrow$$

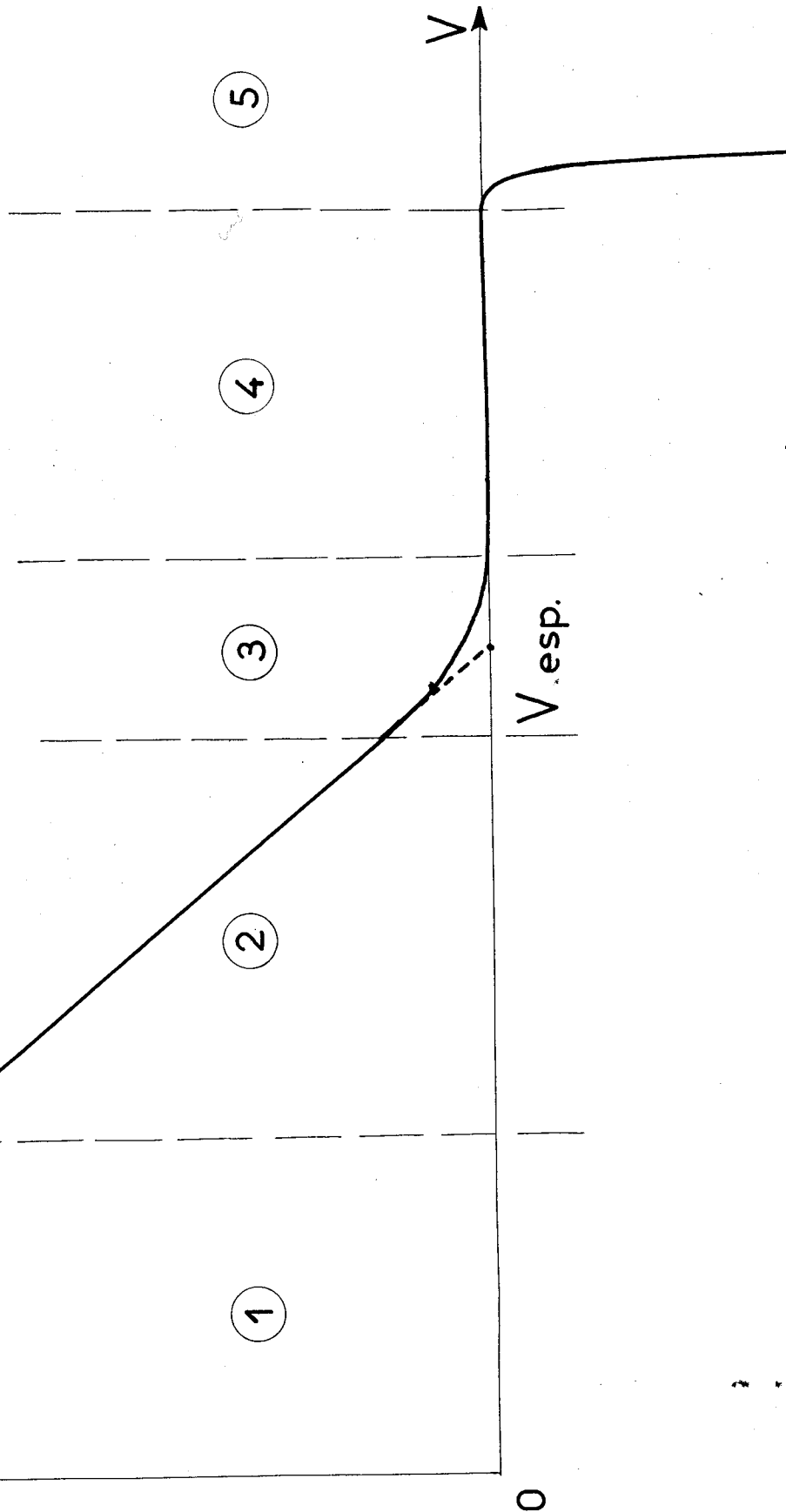
$$(1) \quad I = - \frac{Kq}{\pi\epsilon} \left[Q \operatorname{Arccos} \frac{Q}{Q_0} - \sqrt{(Q_0^2 - Q^2)} \right]$$

$$|Q| > |Q_0|$$

$$(2) \quad I = - \frac{Kq}{\epsilon} Q$$

I

Figure 7 : Caractéristique de sonde d'après la théorie de DUPUY. (1) Superposition d'une décharge couronne sur la sonde. (2) Partie linéaire où s'applique la relation (2). (3) Partie intermédiaire (relation (1)). (4) Zone où la sonde repousse tous les ions. (5) Superposition d'une décharge couronne.



En reliant la charge au potentiel de la sonde, on obtient :

$$(2') \quad I = - \frac{KqC}{\epsilon} (V - V_{\text{esp}})$$

Pratiquement, les résultats importants sont les suivants :

- a) la prolongation de la partie rectiligne de la caractéristique de la sonde donne le potentiel d'espace V_{esp} (Fig. 7).
- b) la pente est proportionnelle au produit Kq .
- c) la sonde isolée prend le potentiel :

$$V = V_{\text{esp}} + \frac{4\pi\epsilon a E_0}{C}$$

b) Discussion.

Les hypothèses α et β , bien qu'elles soient raisonnables, constituent des approximations. Pour l'hypothèse γ , la critique générale faite au chapitre I s'applique : la présence de la charge d'espace introduit une distorsion des lignes de force qu'il n'est pas légitime de négliger pour de fortes densités. De plus, l'hypothèse concernant la constance de la densité de charge n'est pas soutenable car l'on sait que q décroît le long de chaque ligne de force parcourue dans le sens émetteur vers récepteur.

La validité du calcul fait par DUPUY est restreinte au cas des densités très faibles pour lesquelles l'effet de la répulsion coulombienne (proportionnelle à q^2) peut être négligé devant l'action directe du champ (proportionnelle à qE), c'est-à-dire pour les cas où le problème est linéarisé (du point de vue mathématique, les problèmes de (II-3) se séparent ; l'on a : $q = q_0$ et $\Delta V = -q_0$).

Lorsque la densité de charge devient importante, il est nécessaire de tenir compte de l'effet de la charge d'espace. La théorie ne peut plus alors être faite de façon simple mais nécessite la résolution du problème par une des méthodes numériques générales.

On peut faire une observation de caractère général. Dans un plasma caractérisé par une quasi-neutralité, l'action de la sonde peut être considérée comme localisée dans un domaine ; au voisinage de la sonde existe une charge d'espace importante due à la différenciation des distributions de particules positives et négatives. Pour analyser le fonctionnement, on isole la sonde en admettant que sa présence ne perturbe pas le reste du plasma.

Dans le présent problème (charge d'espace unipolaire), ceci n'est plus possible (sauf dans le cas linéarisé). La sonde a une action de portée plus longue que dans un plasma et modifie le réseau de lignes de forces dans tout le domaine ; elle influence également le fonctionnement de la décharge couronne comme en témoignent les variations du courant total lorsqu'on fait varier le potentiel de sonde. Il apparaît donc qu'on peut difficilement élaborer une théorie générale indépendamment de la configuration explorée et même de la position de la sonde.

III - ESQUISSE D'UNE THEORIE GENERALE.

La nécessité de tenir compte de la configuration et de la position de la sonde nous amène à examiner d'abord quelques aspects qualitatifs généraux.

a) Notion de capacité.

La charge d'espace modifie le champ et par conséquent la densité de charge superficielle sur les diverses électrodes ; on ne peut donc plus conserver la définition électrostatique de la capacité.

Examinons par exemple, le condensateur plan avec une injection de valeur q'_0 .
Le champ est de la forme :

$$E(x) = r \frac{V}{L} \left(1+b \frac{x}{L}\right)^{1/2}$$

$$\text{en } x = 0 \quad E = r \frac{V}{L} \Rightarrow \sigma = r \epsilon \frac{V}{L}$$

$$\text{en } x = L \quad E = \frac{V}{L} r(1+b)^{1/2} \Rightarrow \sigma = r(1+b)^{1/2} \epsilon \frac{V}{L}$$

Les coefficients r et b sont fonctions de q'_0 avec :

$$0 \leq r \leq 1$$

$$1 \leq r(1+b)^{1/2} = s \leq 3/2$$

La charge portée par chaque électrode est différente :

$$Q_e = r \frac{\epsilon S}{L} V = r C_o V$$

$$Q_r = s \frac{\epsilon S}{L} V = s C_o V$$

De plus, si q'_0 (densité volumique de charge sur Γ_e) reste constante, lorsque V varie les coefficients r et s varient, ce qui fait qu'il n'y a plus proportionnalité entre Q_e ou Q_r et V . Si l'on pose :

$$C_e = Q_e/V = r C_o$$

$$C_r = Q_r/V = s C_o$$

on voit que ces "capacités" n'ont plus les propriétés simples des capacités électrostatiques.

D'une façon générale, il faut définir C comme étant le rapport entre la charge d'un conducteur et son potentiel (ramené à une origine convenable) ; cette capacité caractérise un seul conducteur et dépend de la répartition de la charge d'espace.

Examinons maintenant la sonde cylindrique placée le long d'une équipotentielle ; on a :

$$(4) \quad C = \left| \frac{Q}{V - V_{\text{esp}}} \right|$$

la densité de charge superficielle est :

$$\sigma = \pm D = \pm \epsilon E$$

et la charge Q par unité de longueur s'exprime par (*) :

$$(5) \quad Q = \int_{\Gamma_s} \sigma \, ds = a \int_0^{2\pi} \sigma(\theta) \, d\theta = \epsilon a \int_0^{2\pi} E(\theta) \, d\theta$$

Cette relation permet d'évaluer Q et d'étudier les variations de C.

b) Variations de la densité de charge au voisinage de la sonde.

Dans son calcul DUPUY admet que la densité de charge est constante dans un domaine entourant la sonde ; or lorsque q n'est pas très faible, cette hypothèse n'est pas valable. On peut d'abord remarquer que la densité de charge décroît le long de chaque ligne de force décrite dans le sens émetteur vers récepteur selon la relation :

(*) Γ_s représente la frontière correspondant à la sonde.

$$(6) \quad \frac{1}{q(P)} = \frac{1}{g(P_e)} + \int_0^S \frac{V dt}{E(P_e, t)} \quad P \leftrightarrow (P_e, s)$$

De plus, lorsque la sonde capte les ions du milieu (zone (2) de la caractéristique idéale, Fig. 7), la relation (6) permet d'expliquer la non-linéarité des caractéristiques réelles ; en effet, quand $|V - V_{\text{esp}}|$ augmente, c'est-à-dire quand le potentiel de sonde se rapproche du potentiel zéro, le champ en tout point de chaque ligne de force reliant Γ_e à Γ_s (sonde) augmente ; la relation (6) montre alors que $q(P)$ augmente ; en particulier la densité de charge au voisinage immédiat de la sonde augmente et le courant capté :

$$I = Ka \int_0^{2\pi} q(\theta) E(\theta) d\theta$$

a une croissance plus rapide que la croissance linéaire due au seul terme du champ.

c) Modification de la zone de captation.

La zone de captation est la portion du domaine dont les ions sont captés par la sonde ; elle est limitée par les lignes de force singulières séparant les lignes de force aboutissant sur la sonde de celles aboutissant sur l'électrode réceptrice.

La présence de la charge d'espace modifie le potentiel et le réseau de lignes de force et l'influence de la sonde s'exerce donc de façon différente ; par rapport au cas harmonique, il est probable qu'il y a un élargissement de la zone de captation ce qui se traduit par une majoration de la pente de la caractéristique ; de plus, il est possible que l'augmentation de la densité de charge d'espace dans cette zone lorsque $|V - V_{\text{esp}}|$ croît provoque un élargissement accentué et intervienne dans la courbure de la caractéristique.

Il faut cependant bien préciser que cette notion d'élargissement de la zone de captation n'est pas aussi solidement fondée que les 2 effets des alinéas précédents et ceci pour deux raisons :

- α) Il y a quelques difficultés à comparer le résultat concernant une configuration précise à celui trouvé par DUPUY raisonnant dans un cas "idéal".
- β) Le facteur attribuable à l'élargissement de la zone de captation sera déterminé indirectement, en faisant le bilan ; on peut alors y intégrer un effet différent dû à ce que sur Γ_s :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} q(\theta) E(\theta) d\theta > \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} q(\theta) d\theta \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} E(\theta) d\theta$$

$$= q_m E_m$$

d) Conclusion.

D'après l'examen qualitatif précédent, la caractéristique de sonde présente deux propriétés générales d'autant plus marquées que la densité de charge est plus importante :

- i) les variations du courant de sonde ne sont pas linéaires en fonction du potentiel.
- ii) dans le cas où la courbure de la caractéristique est peu marquée, la pente moyenne de la portion quasi-linéaire est supérieure à celle indiquée par (2).

Le problème pratique qu'il reste à résoudre concerne la détermination du potentiel et de la densité de charge à partir de la caractéristique de sonde ; il faut alors faire une analyse précise pour des configurations bien déterminées.

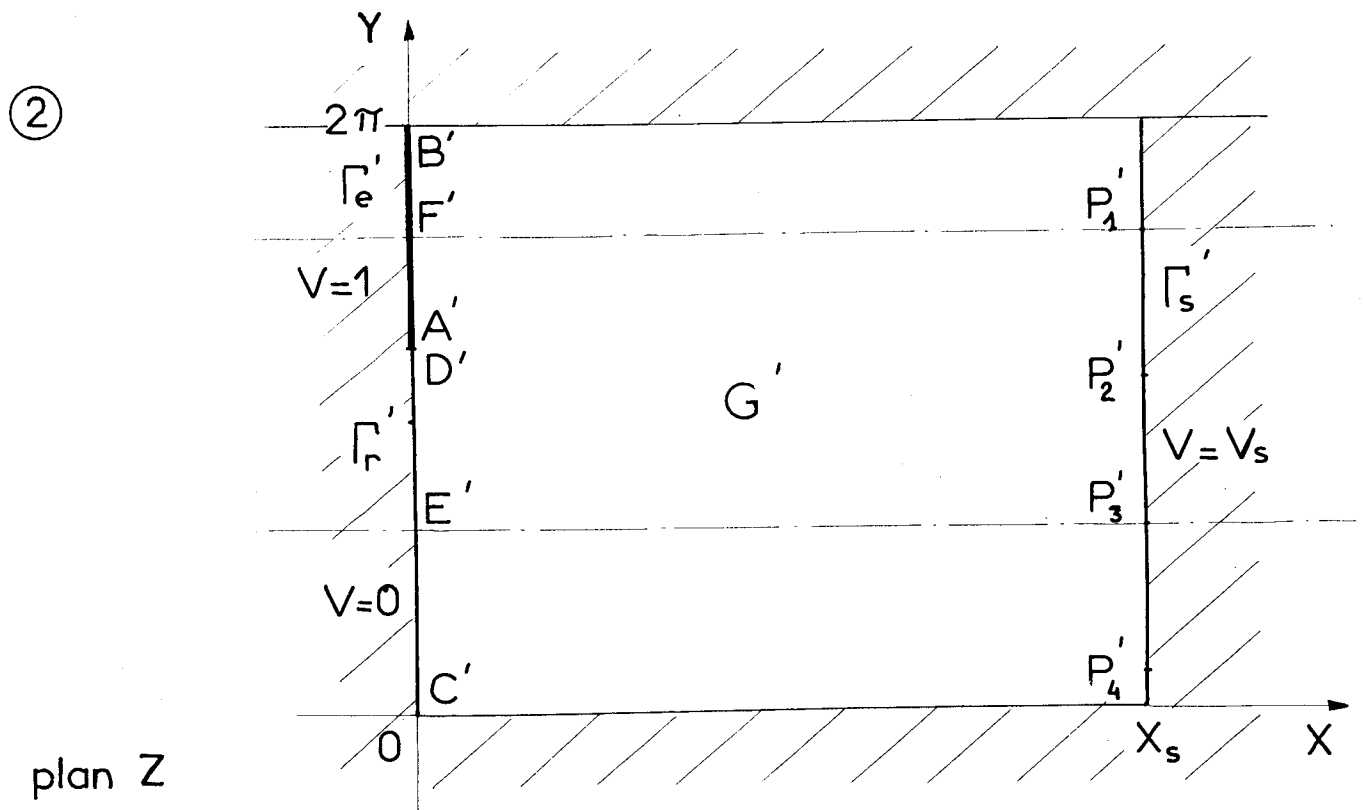
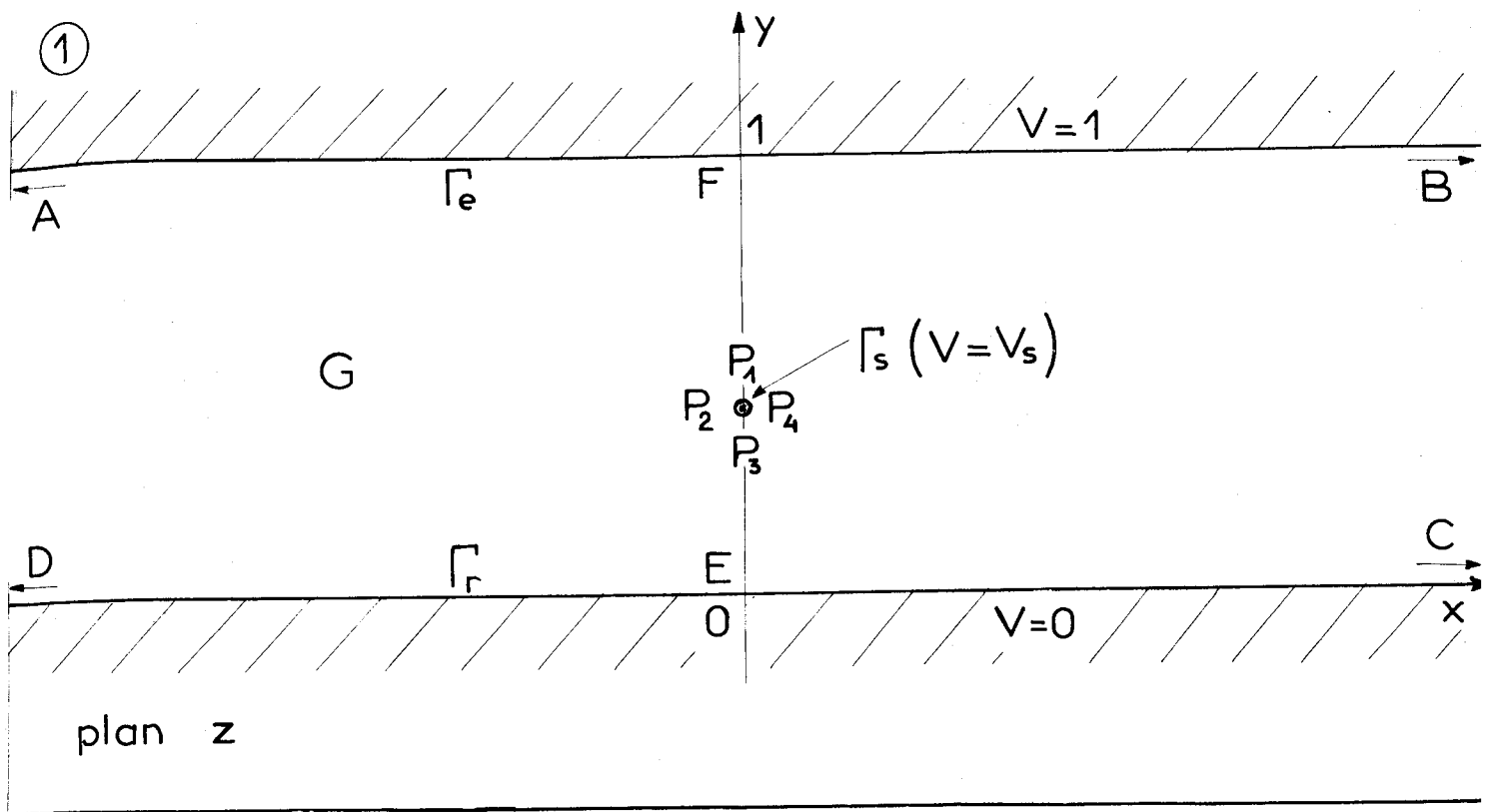


Figure 8 : Transformation du domaine G dans le plan z (partie ①) en G' dans le plan Z (partie ②) par la correspondance définie § V-4

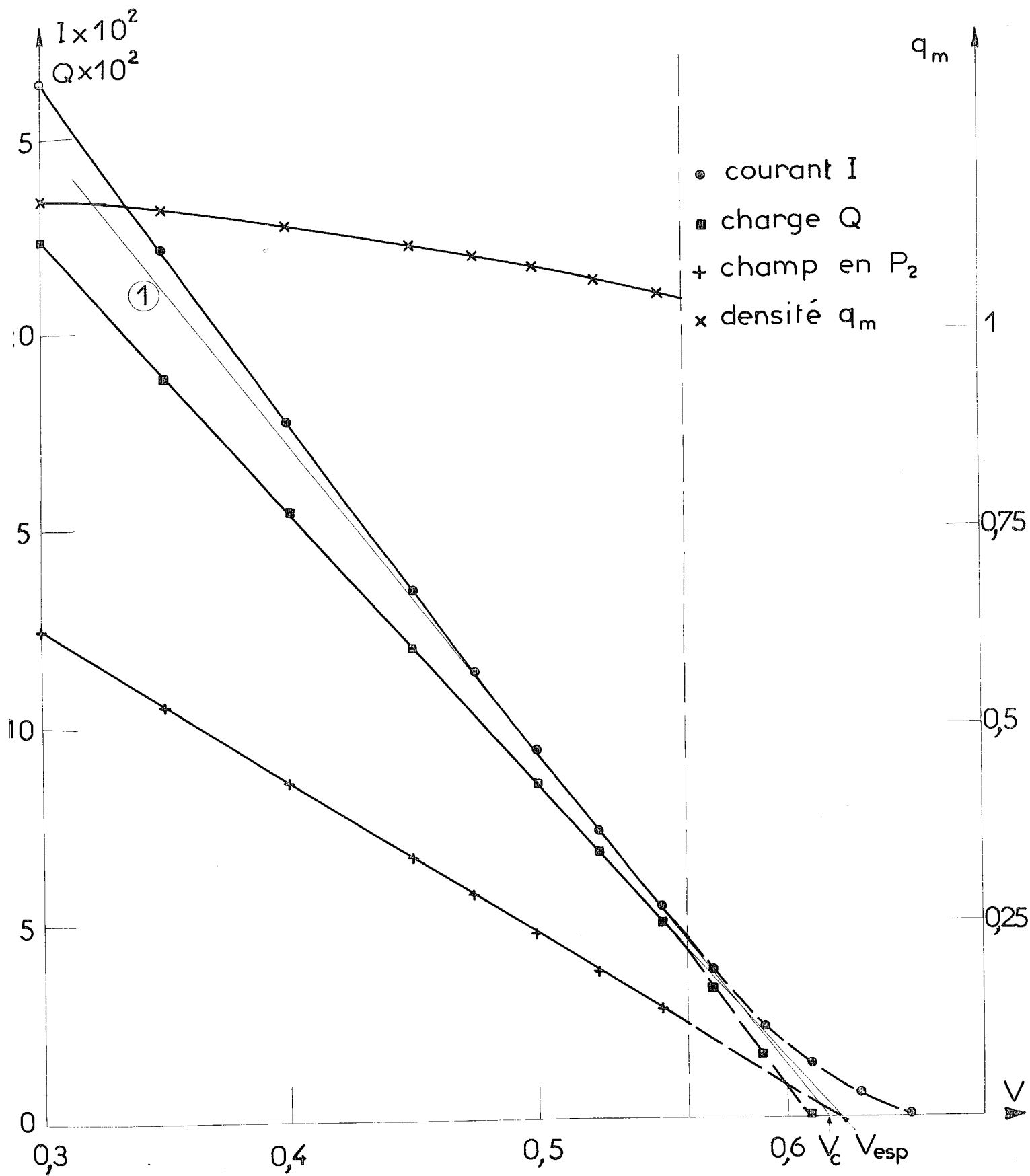


Figure 9 : Variations de I , Q , q_m et du champ en P_2^* en fonction du potentiel de la sonde; $q_0 = 3$ ($h = 0,157$); rayon de la sonde $a = 0,018$.

(1) droite tangente à la caractéristique au point $V = 0,52$.

IV- SONDE CYLINDRIQUE DANS UN CONDENSATEUR PLAN.

Bien que l'injection homogène sur l'une des électrodes d'un condensateur plan soit difficile à réaliser lorsque le diélectrique est un gaz et que cette configuration ne puisse donc pas se prêter pratiquement à une vérification expérimentale, nous examinons d'abord ce cas en raison de sa simplicité et de l'absence des difficultés qui surgissent pour les autres configurations.

a) Obtention de la caractéristique.

Continuant à travailler avec les grandeurs réduites, on effectue la transformation conforme :

$$Z = \log \frac{\exp(\pi z) - \exp(i\pi y_0)}{\exp(\pi z) - \exp(i\pi y_0)}$$

qui fait correspondre un rectangle (domaine G') dans le plan Z à G , domaine compris entre les électrodes et la sonde, dans le plan z (Fig. 8). Si la sonde centrée en $z = iy_0$ est de rayon a suffisamment petit, Γ'_s est le segment d'abscisse :

$$X_s = \log \frac{2}{a}$$

la symétrie permet de réduire le domaine de moitié (sur la Fig. 8, rectangle $E' P'_3 P'_1 F'$).

V_s , le potentiel de sonde étant fixé sur Γ'_s , on résoud le problème par la méthode générale 1, appliquée au système (III-1). En faisant ensuite varier V_s , on obtient un certain nombre de points qui définissent la caractéristique de sonde.

Etant donnée la grande masse de calculs nécessaires pour obtenir une seule caractéristique, nous nous sommes limités au cas où la sonde est à égale distance des deux électrodes. Une analyse détaillée a été faite dans le cas suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} q_0 = 3 \\ h = \pi/20 = 0,157 \\ \text{rectangle : hauteur } \pi, \text{ longueur } 3\pi/2 \end{array} \right.$$

Pour chaque valeur du potentiel de sonde, on peut déterminer toutes les grandeurs désirées : charge de la sonde, courant recueilli, densité de charge moyenne, champ en tout point de la sonde, etc... Nous avons vérifié que les valeurs déduites des caractéristiques sont indépendantes de la précision du calcul ($h \leq h_0 \approx \pi/16$) et du rayon de la sonde ($a \leq a_0 \approx 0,03$).

b) Capacité.

Les variations de Q (calculé à l'aide de (5)) en fonction de V_s sont représentées sur la Fig. 9. Pour $V_s \leq 0,55$ on a une dépendance linéaire à 1 % près ; ceci peut s'expliquer par le fait que la charge d'espace n'est pas très importante au voisinage de la sonde et également par la croissance de cette charge d'espace lorsque V_s décroît (ce qui atténue alors la diminution de l'influence de q relativement à $V - V_{\text{esp}}$).

La valeur qu'on déduit pour C , d'après la pente de cette droite, diffère assez peu de la capacité électrostatique (potentiel harmonique) :

$$C/C_{\text{harm}} = 1,041$$

c) Potentiel d'espace.

En prolongeant la partie linéaire de la courbe $Q = Q(V_s)$, on obtient pour le potentiel d'espace la valeur :

$$V_1 = 0,623$$

Cette même valeur V_1 est obtenue à partir des variations du champ régnant au point P'_2 sur la sonde (Fig. 8). Cette valeur diffère très peu de la valeur réelle $V_{\text{esp}} = 0,626$.

Par contre, en examinant la caractéristique, on décèle facilement la courbure qui introduit une imprécision ; en prolongeant la partie inférieure, on trouve :

$$V_c = 0,6185$$

L'erreur d'environ 1,2 % peut provenir d'un déplacement de la partie quasi-linéaire de la caractéristique par rapport à la position définie par la théorie linéaire ; elle peut provenir également de la courbure et de l'augmentation de la pente.

La détermination pratique de V_{esp} (approché par la valeur V_c) semble donc être entachée d'une erreur systématique qui donne V_{esp} par défaut ; en extrapolant cette conclusion au cas d'une configuration quelconque, on pourrait expliquer en partie un résultat de BERSEILLE [22] qui a constaté, dans divers cas, que la sonde froide donne une valeur du potentiel d'espace systématiquement inférieure à celle déterminée par la sonde incandescente.

d) Etude de la partie quasi-linéaire

En examinant les variations de la densité moyenne de charge sur la sonde :

$$q_m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} q(\theta) d\theta$$

on obtient une illustration du fait général indiqué au paragraphe 3 : la densité de charge au voisinage immédiat de la sonde augmente lorsque V_s diminue (Fig. 9). C'est le facteur le plus important contribuant à la courbure de la caractéristique.

Ce facteur influe également sur la pente de la partie quasi-linéaire car q_m reste nettement supérieur à la valeur réelle $q_{esp} = 0,941$.

La majoration de la pente de la partie quasi-linéaire est due à l'augmentation de la densité de charge q et à l'élargissement de la zone de captation. Afin d'évaluer la contribution respective de ces deux effets, déterminons q'_C d'après la relation (2') (adaptée au système adimensionnel) :

$$I = -q'_C C(V-V_C)$$

En se limitant à l'intervalle $[0,5, 0,55]$ on obtient, avec $C = 1,041 C_{harm}$:

$$q'_C = 1,14 \quad q'_C/q_{esp} = 1,21$$

Sur le même intervalle, la moyenne de q_m est :

$$\overline{q_m} = 1,065$$

Donc, par rapport à la formule (2') où l'on prend la capacité modifiée par la charge d'espace, la pente de la caractéristique est majorée de 21 % qui se répartissent ainsi :

- 13 % dus à l'augmentation de la densité des charges captées par la sonde ($\overline{q_m} = 1,065$)
- 8 % attribuables à l'élargissement de la zone de captation (notion définie et discutée au § 3).

Enfin, dans ce bilan, il ne faut pas oublier que la présence de la charge d'espace provoque une augmentation de 4 % environ de la capacité.

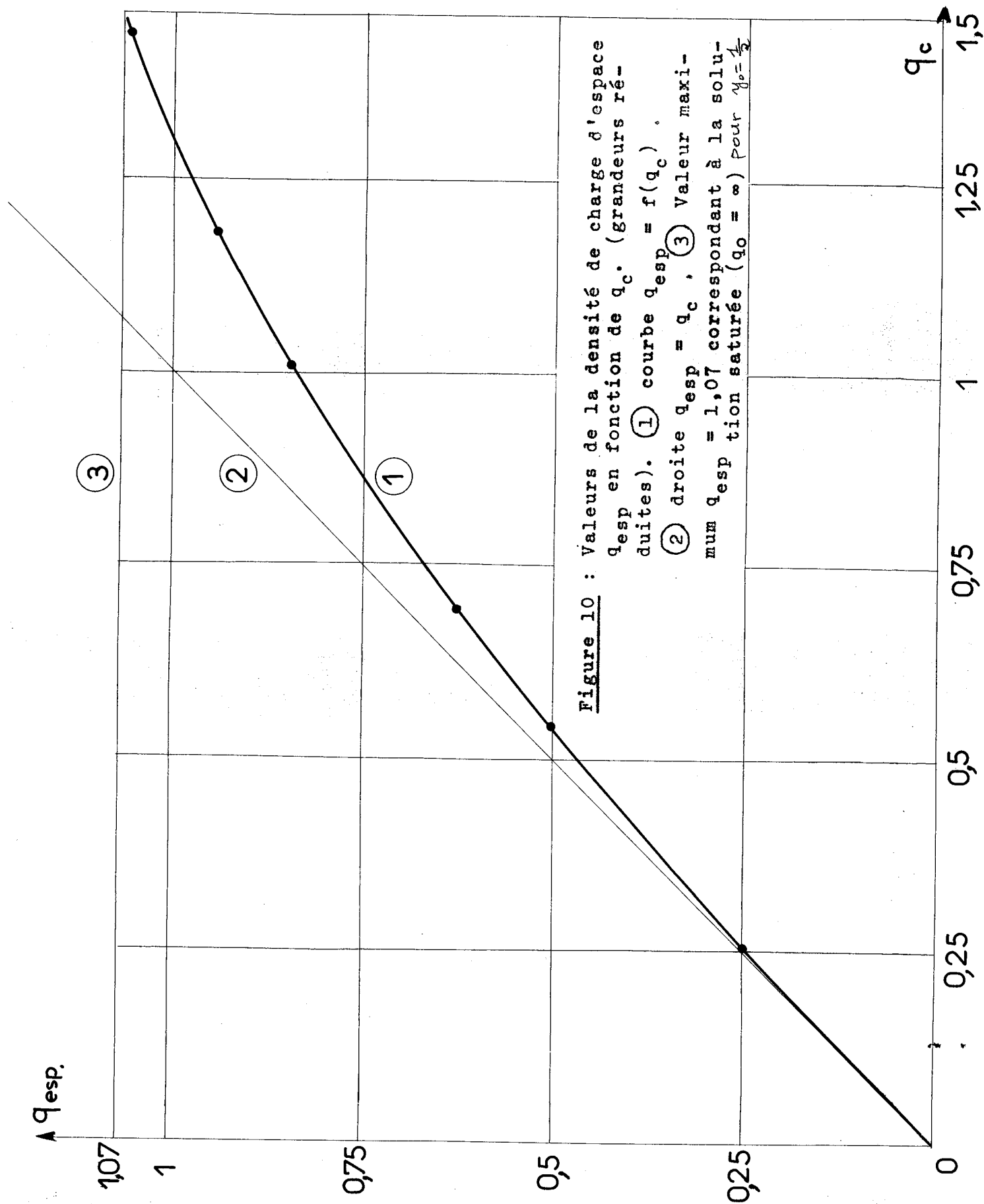


Figure 10 : Valeurs de la densité de charge d'espace q_{esp} en fonction de q_c . (grandeurs réduites). (1) courbe $q_{esp} = f(q_c)$. (2) droite $q_{esp} = q_c$, (3) Valeur maximum $q_{esp} = 1,07$ correspondant à la solution saturée ($q_0 = \infty$) pour $\gamma_0 = \frac{1}{2}$

e) Obtention de la charge d'espace.

L'analyse précédente a été effectuée grâce à la connaissance de toutes les grandeurs désirées. Le problème pratique qu'il reste à résoudre est celui-ci : étant donnée une caractéristique de sonde, comment peut-on en déduire la valeur de q_{esp} ?

Dans la pratique, il est impossible de séparer les différents effets étudiés ; il faut donc considérer l'influence globale de la charge d'espace et déterminer q_c d'après (2') en prenant pour C la capacité électrostatique ; dans le cas particulier examiné on obtient :

$$q_c = 1,185$$

Il faut ensuite connaître la relation théorique donnant q_{esp} en fonction de q_c ; cette relation a été déterminée numériquement ; ainsi pour le cas étudié ci-dessus, on a obtenu :

$$q_c = 1,185 \text{ et } q_{\text{esp}} = 0,941 \quad q_c/q_{\text{esp}} = 1,26$$

la valeur de q_c est supérieure de 26 % à la valeur de la densité de charge q_{esp} . La figure 10 montre que l'effet global de la charge d'espace s'accroît avec celle-ci. Les valeurs de q_c sont limitées à environ 1,5 car la caractéristique courant-tension présente alors une courbure importante qui rend délicate son exploitation.

On pourrait de même tracer la courbe donnant V_{esp} en fonction de V_c , mais l'erreur obtenue lorsqu'on assimile V_c à V_{esp} n'excède pas la précision avec laquelle on peut déterminer V_c ; toute correction est donc illusoire.

V - SONDE CYLINDRIQUE INSEREE DANS LA CONFIGURATION FIL-CYLINDRE COAXIAUX.

a) Détermination des caractéristiques.

Comme dans le cas précédent, les calculs ne sont pas effectués directement dans le domaine G (Figure 11), mais dans G' transformé de G par la transformation conforme :

$$Z = \log \frac{z+d+2c}{z+d}$$

(voir Fig. 11) (d : étant la distance fil émetteur-sonde et $c = (1-d^2)/2d$).

La caractéristique est obtenue comme précédemment : pour une valeur fixée du potentiel de sonde, le système (III-1) est résolu et toutes les grandeurs voulues sont calculées ; en faisant varier V_s on obtient la caractéristique.

L'étude de l'influence de h fait apparaître une difficulté qui n'existait pas pour la configuration précédente : la solution est déterminée avec une précision très médiocre qui se répercute évidemment sur la caractéristique. Le tableau ci-dessous donne 3 évaluations du potentiel d'espace V_c (déterminé à partir de la caractéristique) pour 3 valeurs différentes de h :

h	$\pi/10$	$\pi/15$	$\pi/30$
V_c	0,206	0,182	0,152

la valeur réelle est $V_{esp} \approx 0,095$.

La densité de charge étant très faible ($q_0 = 0,01$), la grande dépendance observée provient de la résolution du problème de Poisson. En examinant les 2 domaines G et G' (Fig. 11), on remarque que $|\frac{dz}{dZ}|$ est très grand au voisinage de l'électrode émettrice Γ_e ; pour obtenir une approximation satisfaisante dans ce voisinage, il faudrait utiliser un maillage très fin autour de Γ_e , ce qui entraînerait des difficultés de programmation et surtout des temps de calculs excessifs.

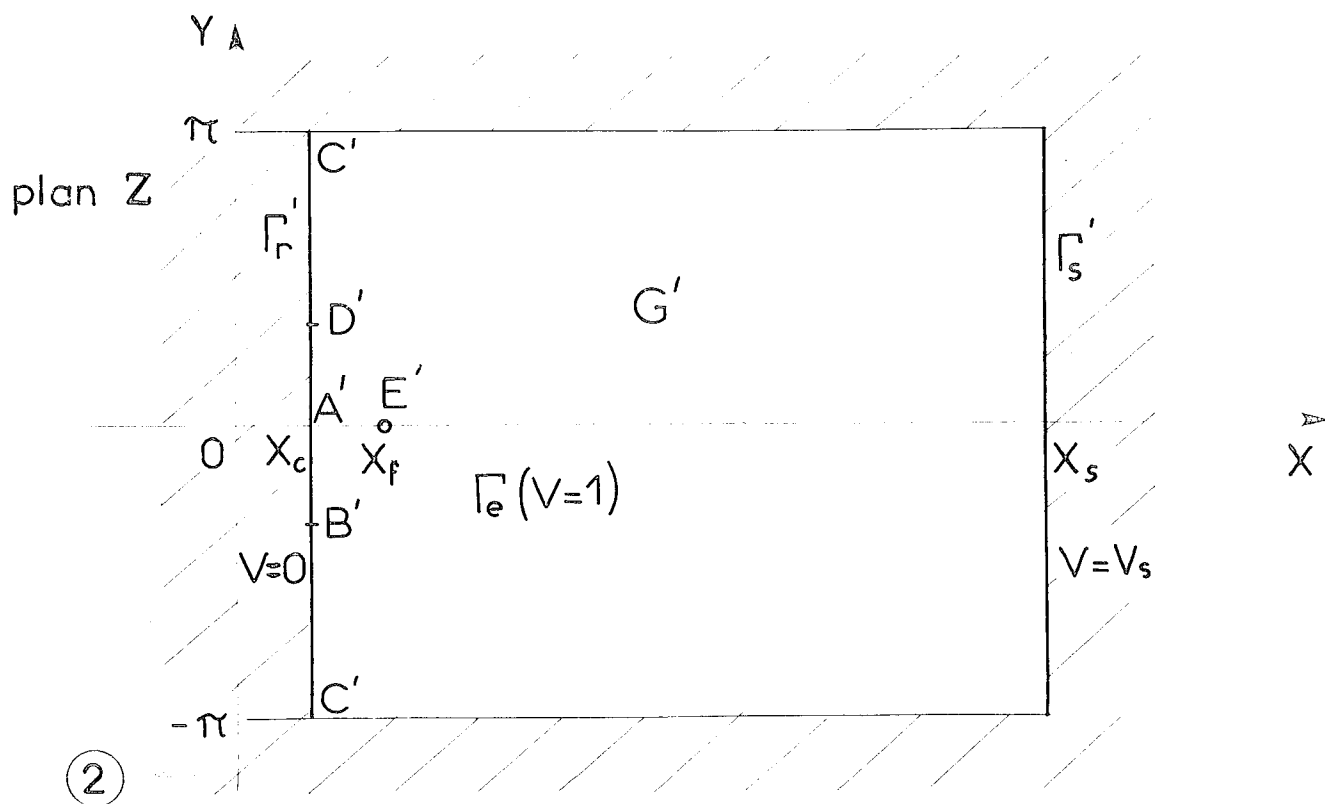
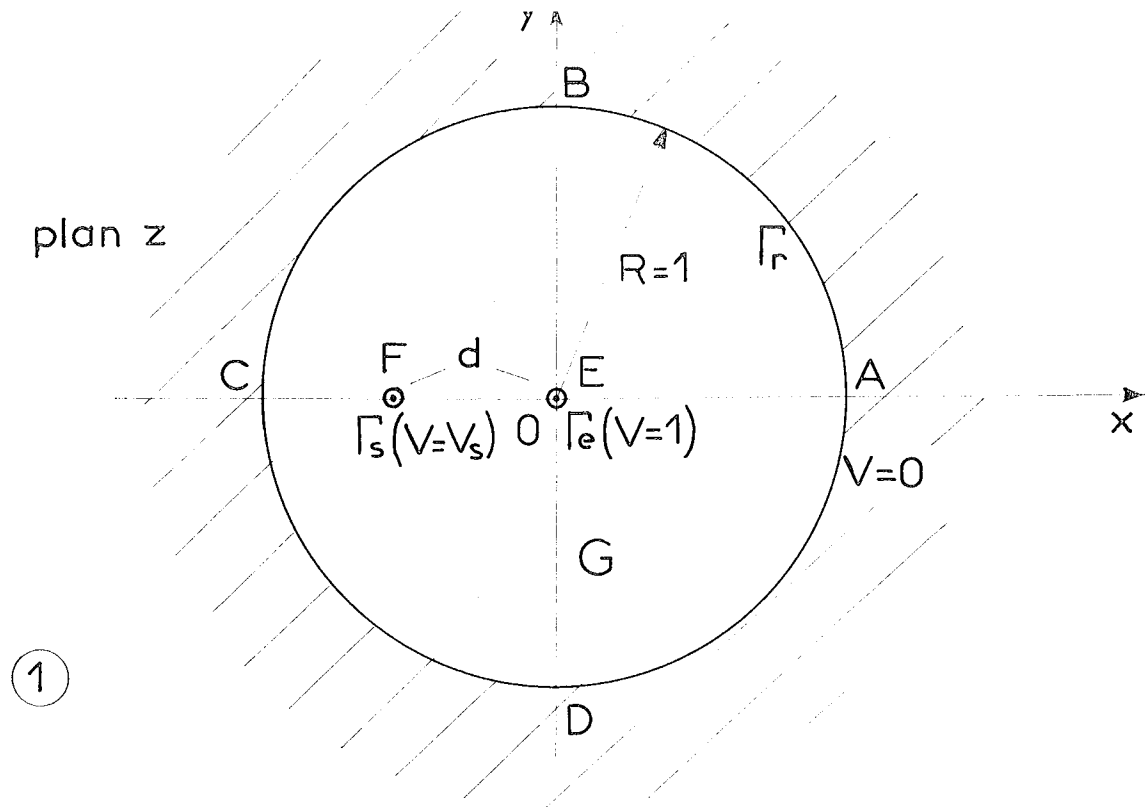


Figure 11 : Transformation du domaine G dans le plan z (partie ①) en G' dans le plan Z (partie ②) par la correspondance définie § V-5.

Nous avons préféré procéder autrement. La solution du problème fil-cylindre coaxiaux s'exprime en fonction de U tension totale et q_0 densité de charge sur le fil émetteur (voir § I-2). On peut donc déterminer les valeurs de V et q en tout point du domaine G' , en particulier pour les points (appartenant à un maillage carré régulier) voisins de Γ'_e . Ceci revient à remplacer Γ_e par une autre surface Σ_h . Nous avons alors vérifié, dans les mêmes conditions que précédemment ($q_0 = 10^{-2}$), que la valeur V_c est égale au potentiel d'espace à 1 % près, quel que soit h .

Il faut remarquer que cette modification introduit une certaine approximation car on admet que la présence de la sonde ne modifie pas la décharge dans la zone comprise entre Γ_e et la surface fictive Σ_h .

Tous les calculs examinés ci-après ont été effectués pour une valeur de h de l'ordre de $\pi/20$; par rapport au cas du condensateur plan, un paramètre supplémentaire a été étudié : la position de la sonde.

b) Analyse des caractéristiques.

Pour chacune des 3 positions examinées, ($d = 0,351, 0,533, 0,741$) la valeur de la capacité électrostatique a été déterminée à l'aide de la caractéristique calculée dans le cas d'une densité faible ($q_0 \sim 10^{-3}$) ; en même temps on a vérifié la validité de la relation (2') pour ces valeurs de la densité.

On a trouvé les mêmes facteurs contribuant à l'augmentation de la pente de la caractéristique. Examinons un cas précis :

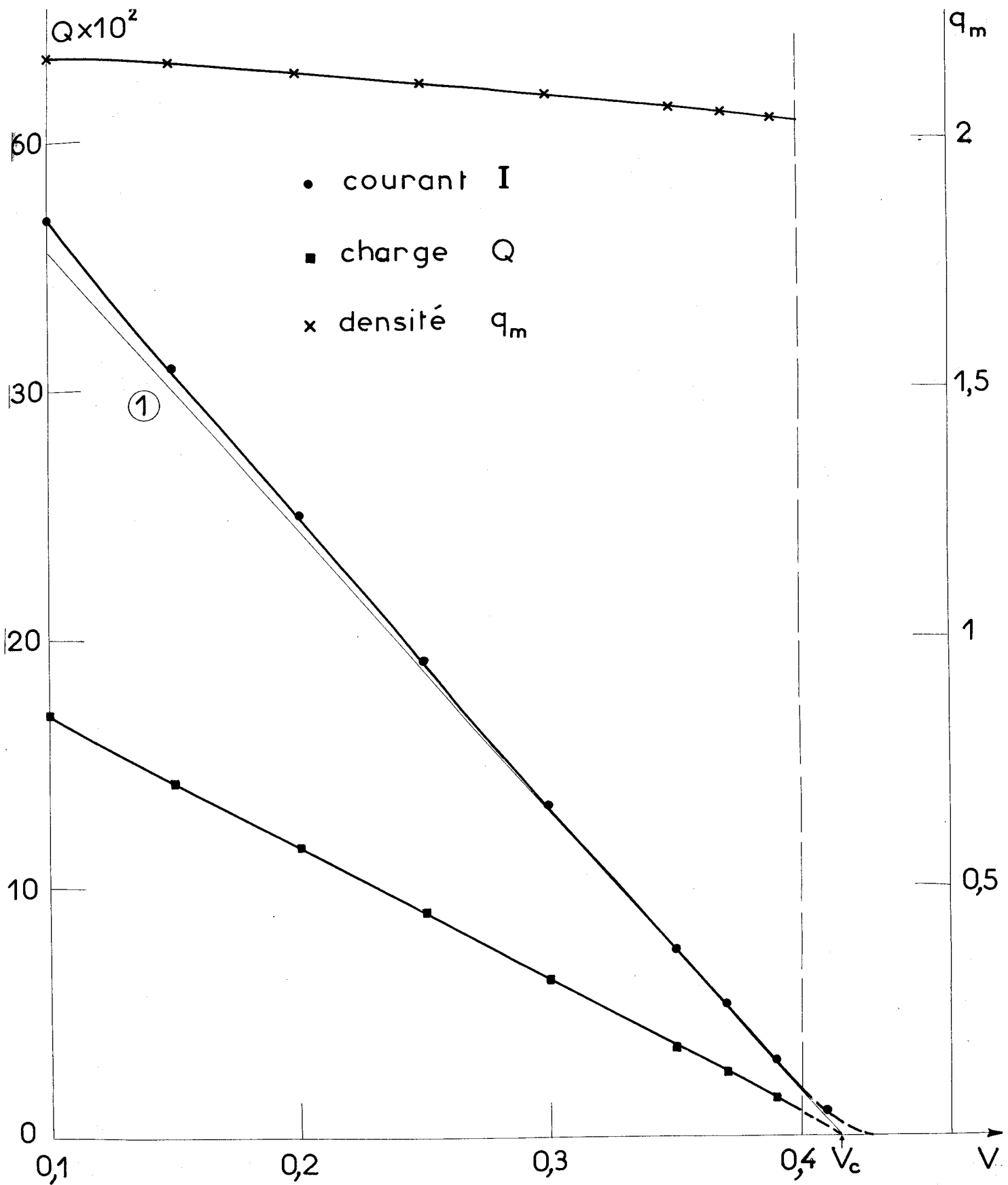


Figure 12 : Variations de I , Q et q_m en fonction du potentiel de la sonde. Cas de la configuration fil-cylindre. $d = 0,533$
 $q_0 = 22,25$, $a = 1,33 \cdot 10^{-3}$. ① droite tangente à la caractéristique au point $V \approx 0,35$.

$$\left\{ \begin{array}{l} h = \pi/20 \\ q_0 = 22,25 \\ d = 0,533 \\ a = 1,33 \cdot 10^{-3} \end{array} \right.$$

Les variations de I courant de sonde, Q charge par unité de longueur et de q_m en fonction de V_s sont représentées sur la Fig. 12.

La capacité C (déduite de la courbe Q (V_s)) est telle que :

$$C/C_{\text{harm}} = 1,03$$

Le potentiel d'espace V_{esp} est déterminé avec une erreur inférieure à 1 % en prolongeant la partie inférieure de la portion quasi-linéaire de la courbe $I(V_s)$: $V_c \neq V_{\text{esp}} = 0,416$

Les valeurs de q_m sont nettement supérieures à q_{esp} et dans la partie qui définit V_c :

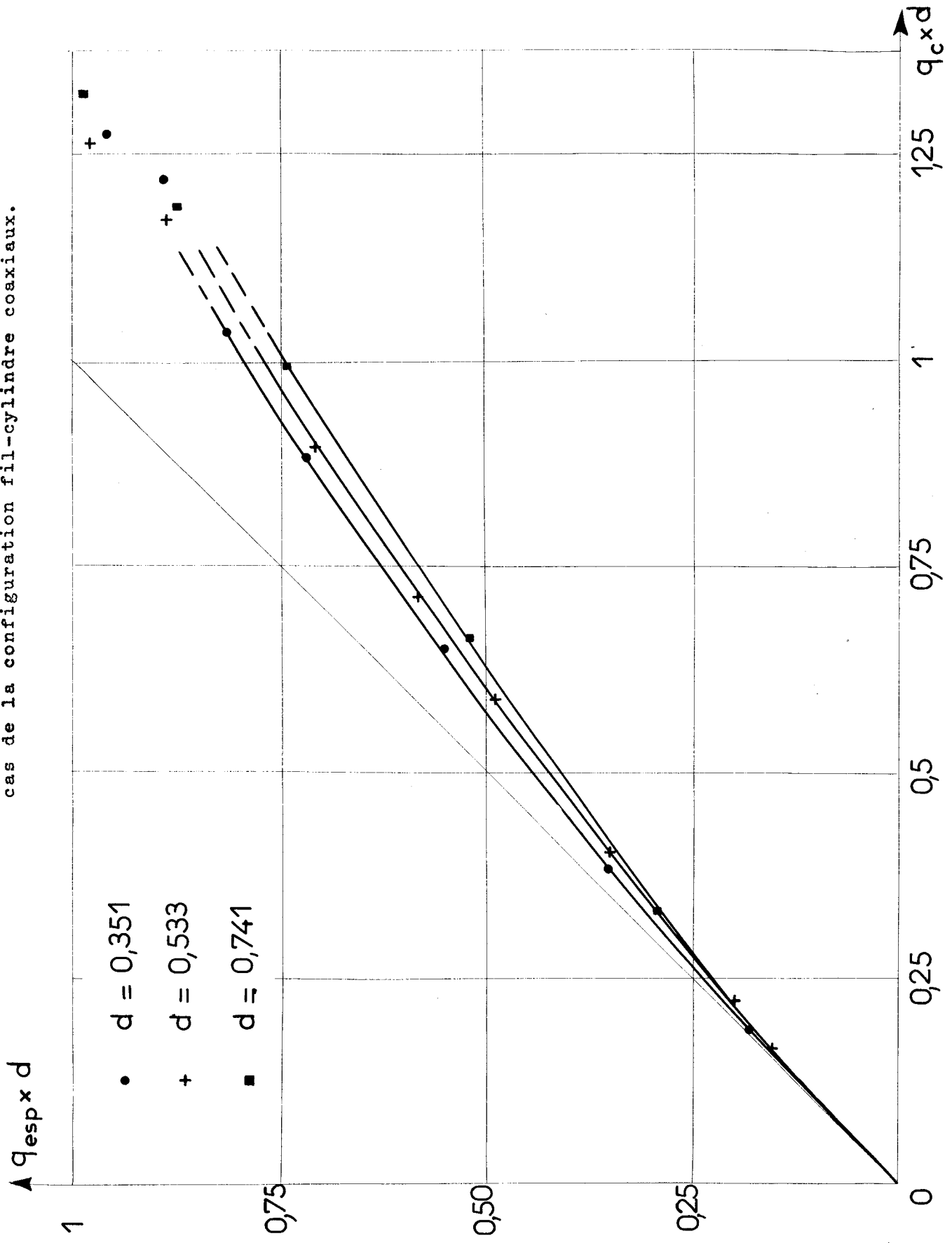
$$\overline{q_m} = 2,065 \quad \overline{q_m}/q_{\text{esp}} = 1,24$$

Avec la valeur de C on détermine q'_c :

$$q'_c = 2,12 \quad q'_c/q_{\text{esp}} = 1,27$$

L'augmentation de 27 % de la pente de la caractéristique est due principalement à l'effet direct de la charge d'espace (24 %). La contribution de l'élargissement de la zone de captation apparaît très faible (3 %). Ceci peut provenir de la configuration géométrique et de la forme des lignes de force (radiales).

Figure 14 : Variations du produit $q_{esp} \times d$ en fonction de $q_c \times d$ dans le cas de la configuration fil-cylindre coaxiaux.



Il semble néanmoins nécessaire de tenir compte de l'approximation faite dans le calcul numérique ; en fixant les valeurs du potentiel et de la densité de charge sur un contour Σ_h englobant Γ_e , on soustrait le domaine compris entre Σ_h et Γ_e à l'influence de la sonde. Cette influence se traduit dans cette zone par un renforcement du champ donc une augmentation de la densité de charge sur Σ_h et par conséquent de q_m ; elle se traduit également par une modification du réseau de lignes de force ; il est donc probable que l'effet d'élargissement de la zone de captation est sous-estimé ; de même, il apparaît que nous avons déterminé une valeur inférieure de q_m , de I et de q_c .

Nous avons de plus observé que pour des densités de charge d'espace assez fortes, V_c est une approximation par excès de V_{esp} , cette particularité étant d'autant plus marquée que la densité q_0 est plus forte. Cet effet semble également imputable à l'approximation faite en introduisant Σ_h .

c) Influence de la position de la sonde.

Bien que l'évaluation de l'erreur commise en remplaçant Γ_e par Σ_h soit délicate, il semble que cette erreur n'excède pas quelques centièmes. La détermination de la relation :

$$q_{esp} = f(q_c)$$

même avec une faible erreur, garde tout son intérêt. La figure 13 montre les variations de q_{esp} en fonction de q_c pour 3 positions différentes de la sonde. et met en évidence l'influence d'un facteur non étudié jusqu'à présent, la distance séparant la sonde de l'émetteur.

La figure 14 montre que les différences sont peu marquées lorsqu'on examine les produits $q_{esp} \times d$ et $q_c \times d$; si l'on se borne à la région

$$q_c \times d \leq 1$$

on peut dire que l'influence de la charge d'espace augmente avec la distance d ; cependant l'imprécision des points dans la zone $q_c \times d \geq 1$ rend impossible toute conclusion définitive.

Pour les fortes densités, la précision avec laquelle on obtient la solution approchée diminue notablement, ce qui peut expliquer en partie la dispersion des points de la figure 14.

Il apparaît assez nettement, que pour $q_c \times d > 1$, q_c est déterminé par défaut ; cet effet provient de l'approximation faite (introduction de Σ_h) et sera de nouveau discuté lors de l'interprétation des résultats expérimentaux.

VI - SONDE CYLINDRIQUE ENTRE PLAQUES PARALLELES.

De façon simultanée avec le cas précédent, un calcul a été engagé pour une sonde placée dans le plan de symétrie de la configuration fil entre plans parallèles à la masse (voir § VI-2).

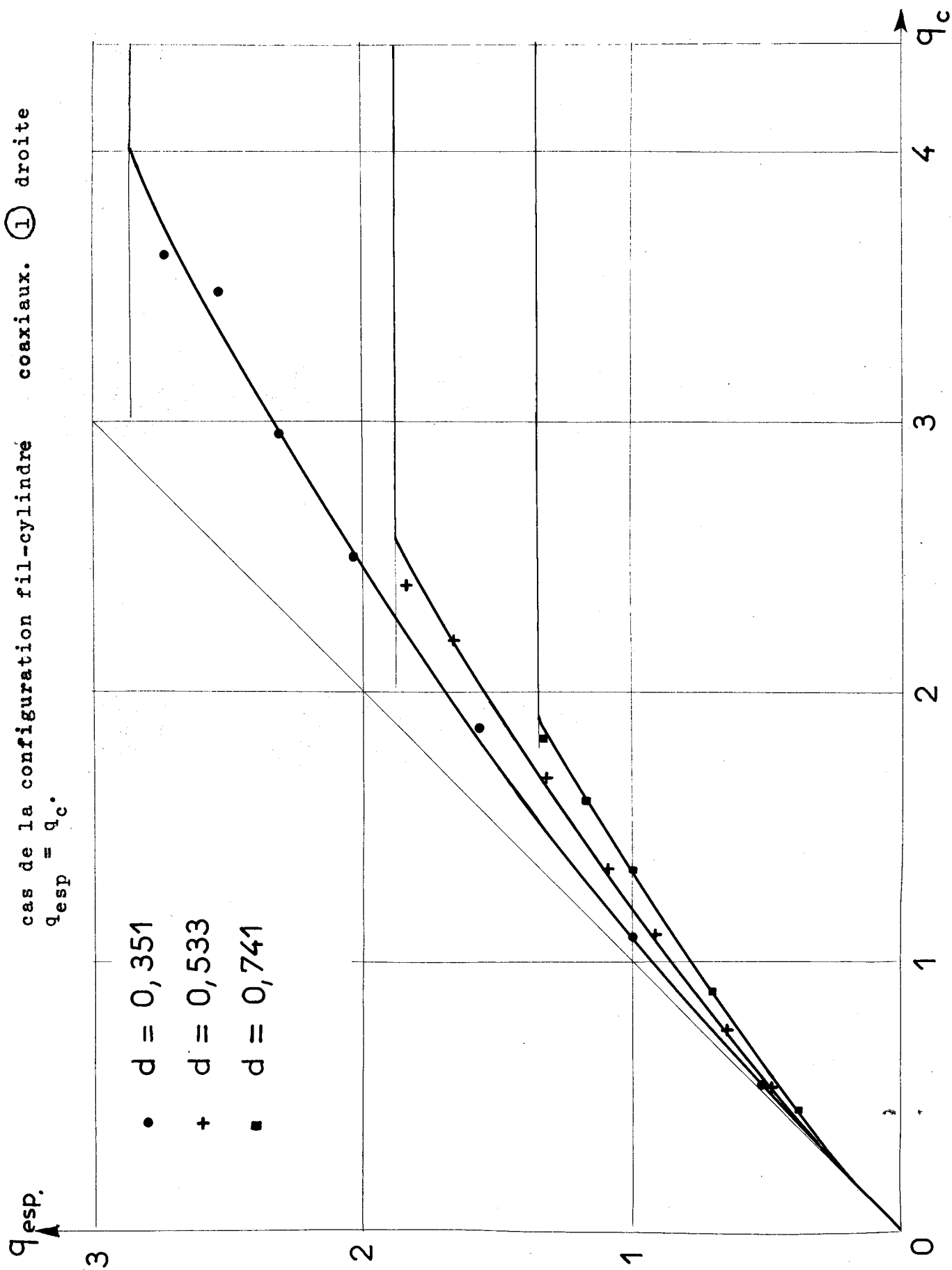
Le principe du calcul reste le même : utilisation de la transformation conforme

$$Z = \log \frac{\exp(z)+i}{\exp(z)-i}$$

et résolution du problème par la méthode générale 1.

On rencontre ici la même difficulté que dans le cas précédent : les résultats sont très sensibles à la valeur de h et ce phénomène est dû au fait que $\left| \frac{dz}{dZ} \right|$ prend des valeurs très importantes au voisinage de Γ_e ; dans cette zone le maillage carré du plan Z correspond à un maillage irrégulier très lâche dans le plan z .

Figure 13 : Valeurs de la densité de charge q_{esp} en fonction de q_c dans le cas de la configuration fil-cylindre coaxiaux. (1) droite $q_{\text{esp}} = q_c$.



Il est possible de remédier à cette difficulté en résolvant d'abord le problème dans le plan z (en l'absence de la sonde) puis en affectant les valeurs alors connues de V et de q aux points voisins du fil émetteur dans le plan Z (surface fictive Σ_h). Ce procédé conduirait à des calculs très longs et il n'est pas apparu indispensable de faire l'étude précise, les quelques résultats indiqués ci-dessous permettant d'interpréter les observations expérimentales.

Un calcul a été effectué dans les conditions suivantes :

$$\left| \begin{array}{l} q_0 = 1 \\ \text{distance fil émetteur-sonde} = \pi = \text{écartement des plaques.} \end{array} \right.$$

Le dépouillement des caractéristiques a donné les résultats suivants :

h	V_c	$q_c \times 10^2$	V_c/q_c
$\pi/10$	0,116	5,80	2,00
$\pi/15$	0,122	7,11	1,72
$\pi/20$	0,127	7,59	1,675
$\pi/30$	0,132	7,86	1,68

Au point où est placée la sonde on a :

$$V_{\text{esp}} = 0,1038 \quad q_{\text{esp}} = 4,97 \cdot 10^{-2}$$

L'extrapolation des courbes $V_c(h)$ et $q_c(h)$ est pratiquement impossible. Par contre le rapport V_c/q_c semble se stabiliser vers la valeur 1,68. En comparant à $V_{esp}/q_{esp} = 2,09$ et en remarquant que $V_c \neq V_{esp}$ (établi dans les § 4 et 5) on peut déduire :

$$\frac{q_c}{q_{esp}} \approx 1,24$$

On obtient ainsi une indication sur l'effet global de la charge d'espace ; cet effet est comparable à celui qui existe pour les 2 configurations examinées pour $q_c \sim 0,7$ à $0,8$ (pour effectuer la comparaison il faut ramener l'écartement à l'unité $\Rightarrow q$ multiplié par π^2).

CHAPITRE - VI

ETUDE EXPERIMENTALE

I - ETUDE EXPERIMENTALE DE LA METHODE DE SONDE FROIDE.

Avant de songer à comparer les résultats expérimentaux aux prévisions théoriques, il convient de faire l'étude critique de la méthode de mesure ; nous avons choisi la configuration fil-cylindre coaxiaux dont la solution est bien connue et qui est très souvent utilisée à cette fin.

a) Dispositif expérimental.

Le flux d'ions unipolaires affectant le champ électrique est engendré par une décharge couronne sur un fil fin tendu le long de l'axe du cylindre ; le cylindre conducteur est fermé par deux plaques isolantes. La haute tension est fournie par un générateur électrostatique stabilisé (Fig. 15).

Pour réaliser la sonde nous avons d'abord pris un fil de tungstène parallèle au fil émetteur central. Ce fil était porté à un potentiel variable par l'intermédiaire d'un montage de résistances permettant de mesurer le courant de sonde indirectement ; l'utilisation d'un enregistreur X-Y (galvanométrique ou potentiométrique) permettait de tracer très rapidement la caractéristique courant-tension de la sonde.

Cependant, nous avons constaté que malgré l'importance du rapport longueur/diamètre (5 pour le cylindre utilisé), les effets d'extrémité introduisent une erreur systématique importante dans la détermination du potentiel et surtout de la densité de charge. Nous avons par la suite utilisé un dispositif plus complexe schématisé sur la Fig. 15 et permettant d'isoler le courant capté par la sonde dans la portion centrale où l'influence des plaques isolantes peut raisonnablement être négligée.

Nous avons constaté expérimentalement qu'il faut attendre au moins une heure pour que la décharge soit stabilisée avant d'entreprendre les mesures. Ensuite, pendant une période assez courte (environ une heure), les résultats sont reproductibles. Par contre, les variations de température, de pression et d'humidité de l'atmosphère ambiante influent sur le régime de la décharge et par conséquent sur les résultats qui diffèrent d'un jour à l'autre.

Les caractéristiques de la figure 16 mettent en évidence l'existence d'une faible courbure qui dans la pratique gêne pas leur exploitation (prolongation de la partie quasi-linéaire pour obtenir le potentiel d'espace, mesure de la pente).

b) Mesure expérimentale du potentiel.

Les valeurs obtenues du potentiel d'espace ont été reportées sur la figure 17. On voit que sur la majeure partie de l'intervalle, ce potentiel varie de façon linéaire. L'étude du chapitre V a montré que l'erreur dans la détermination du potentiel d'espace à partir de la caractéristique de sonde n'excède pas 1 à 2 % ; nous n'avons pas fait de correction car cette erreur est de l'ordre de grandeur de celle due aux mesures.

Le fait d'obtenir des distributions linéaires du potentiel est en accord avec la théorie (pratiquement le champ est constant à une distance suffisamment grande de la gaine ionisée). Ces résultats recourent d'autre part de nombreuses observations analogues (cf. [11, 22, 53, 55]).

Le champ électrique peut être déterminé avec une précision satisfaisante à partir des courbes de la figure 17 ; les valeurs obtenues ainsi que leur précision sont indiquées dans le tableau I pour les quatre cas examinés dans ce paragraphe.

Détail du dispositif de sonde

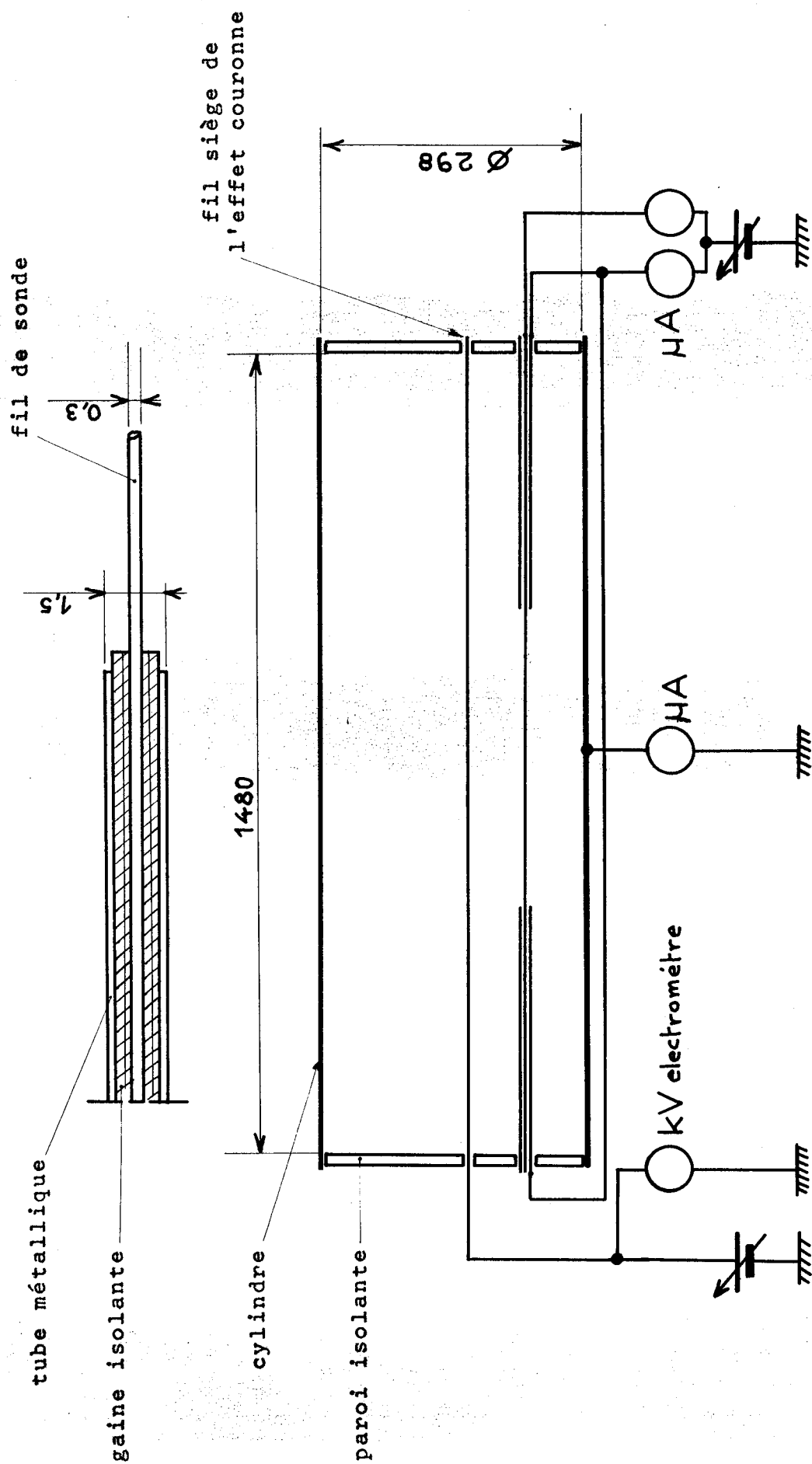
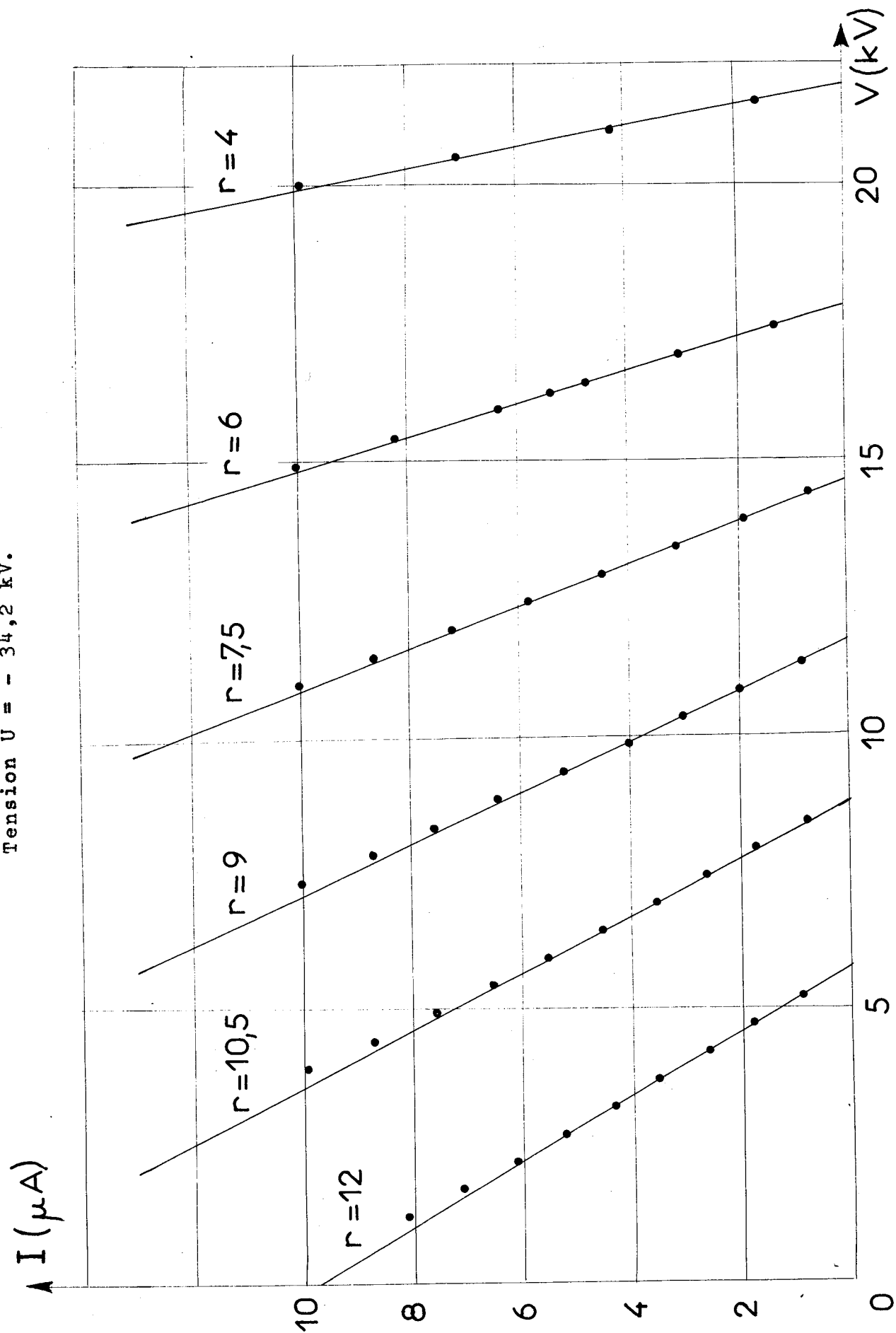


Figure 15 : Schéma du dispositif expérimental
Système fil-cylindre coaxiaux.

fil-cylindre coaxiaux. Polarité négative.
Tension $U = -34,2$ kV.



Considérons comme acquise la concordance entre valeurs théoriques et expérimentales du potentiel (cette concordance n'a pas été étudiée directement car nous ne pouvons pas calculer la distribution théorique du potentiel lorsqu'on porte le fil "émetteur" à une tension U , étant donné que nous ne savons pas relier q_0 à U). Nous pouvons alors déterminer la mobilité moyenne des ions et la répartition de la densité de charge.

Le calcul de la mobilité se fait à partir de la relation exprimant le champ constant :

$$(1) \quad E' = \left(\frac{I/\ell}{2\pi\epsilon_0 K} \right)^{1/2} \quad K = \frac{I/\ell}{2\pi\epsilon_0 E'^2}$$

Les valeurs de K obtenues (tableau I) sont tout à fait concordantes avec celles données par différents auteurs [11, 55, 60, 61].

Pour déterminer la densité de charge q , écrivons l'équation de Poisson :

$$\frac{q}{\epsilon} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rE) = \frac{E}{r} + \frac{dE}{dr}$$

En supposant le champ constant :

$$\frac{q}{\epsilon} = \frac{E}{r}$$

Un calcul plus précis montre que le terme négligé $\frac{dE}{dr}$ apporte une contribution de 0,5 % à 2 % lorsque le champ moyen (en grandeur adimensionnelle) varie de 0,95 à 0,85. C'est à ces valeurs précises de q que seront comparées les valeurs expérimentales q_{exp} .

c) Détermination de q_{exp}

Il suffit de reprendre brièvement la théorie de sonde ; la relation (V-2') donne, en posant $\sigma = \left| \frac{I}{V - V_{\text{esp}}} \right|$

$$(2) \quad \sigma = \frac{Kq'C}{\epsilon}$$

Pour la partie linéaire (en première approximation) de la caractéristique de sonde, σ est constante ; sa mesure permet de calculer :

$$(3) \quad q'_C = - \frac{\epsilon \sigma}{KC}$$

La notation q'_C rappelle d'une part que q'_C est une grandeur dimensionnelle (cf. § II-1-c) et d'autre part qu'elle est déterminée à partir de la caractéristique de sonde. Pour obtenir la densité existante, il faut effectuer la correction correspondant à l'effet de charge d'espace, ce qui nécessite que l'on travaille en grandeurs sans dimension. On calcule donc :

$$(4) \quad q_C = q'_C \times \frac{L^2}{\epsilon U} = \frac{\sigma}{KC} \frac{L^2}{U}$$

où L est ici le rayon du cylindre et U la tension appliquée au fil siège de l'effet couronne. Les courbes des figures 13 et 14 permettent alors de déterminer q_{exp} à partir de q_C (q_{exp} est la valeur obtenue par la mesure de la sonde).

Nous avons vu ci-dessus comment on détermine la valeur de la mobilité relative à chaque expérience. La capacité C qu'il faut utiliser dans (3) et (4) est la capacité propre de la sonde en présence du fil émetteur et du cylindre au potentiel zéro. En effet, la charge Q de la sonde est, de façon générale :

$$Q_1 = C_{11}V_1 + C_{12}V_2 + C_{13}V_3$$

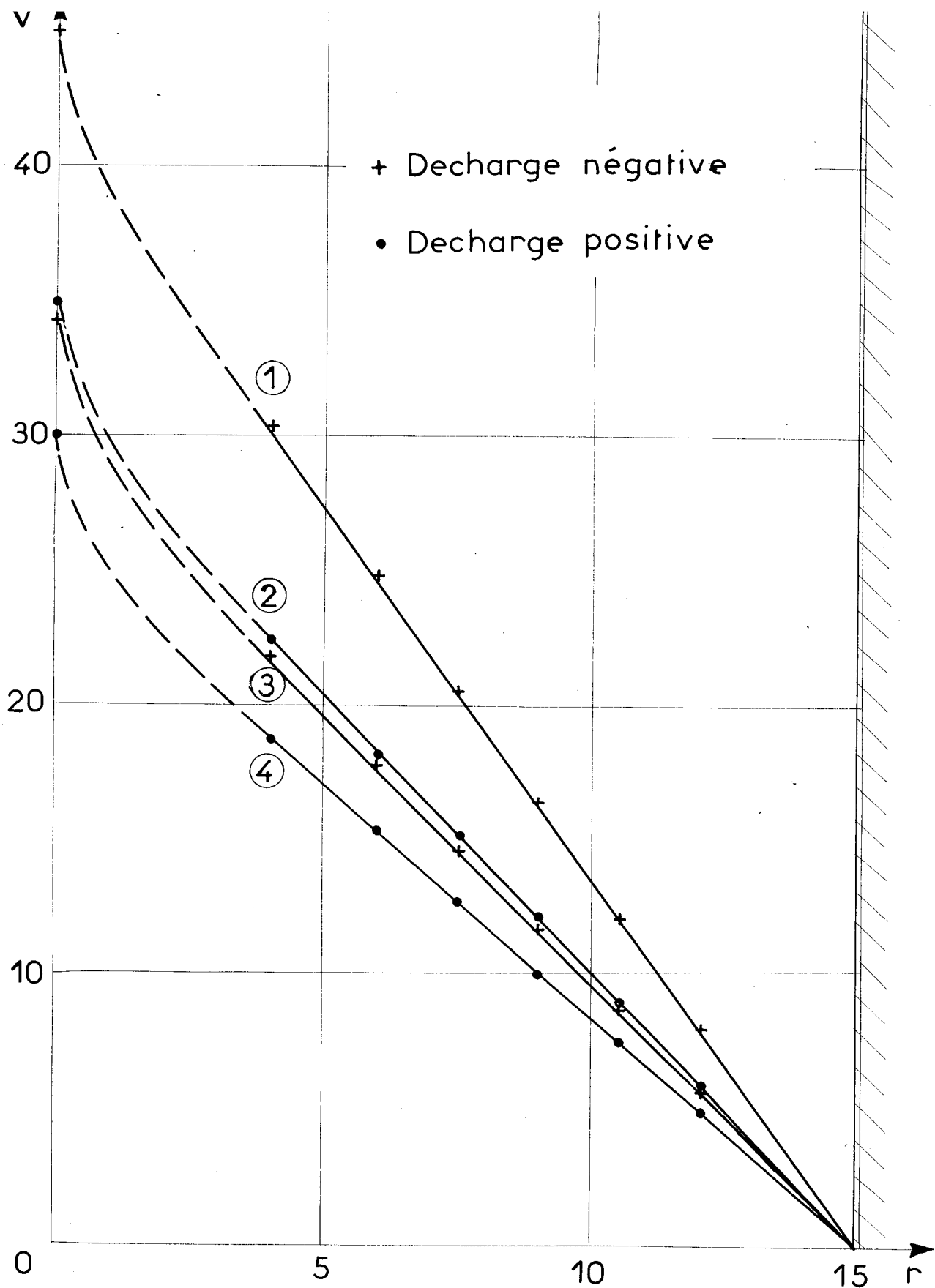


Figure 17 : Variations du potentiel déterminé par la mesure de sonde en fonction de r , dans le cas fil-cylindre coaxiaux.

Tension de décharge ① $U = -45$ kV ② $U = +35$ kV
 ③ $U = -34,2$ kV ④ $U = +30$ kV.

T A B L E A U I

Valeurs de quelques grandeurs pour les quatre expériences examinées (fig. 17, 18, 19) ; U : potentiel du fil émetteur, le cylindre étant à la masse ; $|E'|$: champ électrique ; $|\delta E'/E'|$: précision de la mesure de la pente ; E_0 : champ en grandeur non dimensionnelle ; I : courant moyen de décharge ; K : mobilité des ions.

U (kV)	- 34,2	- 45	+ 30	+ 35
$ E' $ kV/cm	1,97	2,78	1,73	2,04
$ \frac{\delta E'}{E'} $	$\sim 0,01$	$\sim 0,008$	$\sim 0,015$	$\sim 0,012$
E_0	0,86	0,92	0,86	0,87
I (μ A/m)	385	770	232	366
K ($\text{cm}^2/\text{V.s}$)	1,78	1,79	1,40	1,58

les indices 1, 2, 3 se rapportant respectivement au fil de sonde, au fil émetteur et au cylindre récepteur. Lorsque le potentiel de la sonde varie, seul le premier terme apporte une contribution à la variation de Q_1 .

Pour déterminer $C = C_{11}$, on utilise le développement de la fonction de Green relative au domaine annulaire compris entre deux cylindres coaxiaux de rayon a et b ($a < b$). Ce développement donné par DURAND [54] permet de calculer l'influence exercée par une ligne de densité linéique λ placée au point P_0 ($r = r_0$, $\theta = 0$) ; on a, en P (de coordonnées r et θ) :

$$G(r, \theta) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left[\log \frac{1}{P_0 P} + A_0 + B_0 \log r - \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n r^n + \frac{B_n}{r^n} \right) \cos n \theta \right]$$

Avec les conditions $G = 0$ pour $r = a$ et $r = b$, on détermine les coefficients A_n et B_n :

$$A_0 = \frac{\log(r_0/a)}{\log(b/a)} \log b \qquad B_0 = \frac{\log(b/r_0)}{\log(b/a)}$$

$$(a^{2n} - b^{2n}) A_n = \frac{1}{n} \left(\frac{a^{2n}}{r_0^n} - r_0^n \right)$$

$$\left(\frac{1}{a^{2n}} - \frac{1}{b^{2n}} \right) B_n = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{r_0^n} - \frac{r_0^n}{b^{2n}} \right)$$

Il est nécessaire de tenir compte des ordres de grandeur de a , b et r_0 . Le cylindre a un rayon de 14,9 cm ; le fil siège de l'effet couronne a un diamètre de 0,2 mm. Donc :

$$a/b = 6,71 \cdot 10^{-4}$$

T A B L E A U II

Détail de la détermination de q_{exp} et comparaison avec q_r
pour $U = - 34,2$ kV.

$r(cm)$	4	6	7,5	9	10,5	12
$d = \frac{r}{L}$	0,268	0,403	0,503	0,604	0,705	0,805
$\sigma \times 10^{10}$ en mhos	52,95	34,1	26,75	21,75	19,35	17,4
$\frac{q'_c}{\epsilon} = \frac{\sigma}{K.C_o}$	664	429	332	265	228	193
$q_c = \frac{q'_c}{\epsilon} \frac{L^2}{U}$	4,30	2,78	2,15	1,72	1,48	1,25
$q_{exp} = f(q_c)$	3,22	2,11	1,65	1,32	1,14	0,96
q_r	3,16	2,10	1,68	1,40	1,19	1,04
$\tau = \frac{q_{exp}}{q_r}$	1,02	~ 1	0,98	0,94	0,96	0,92

Tant que r_o reste supérieur à 1 cm :

$$a/r_o < 10^{-2}$$

On peut donc négliger a^2 devant b^2 et r_o^2 dans les expressions donnant A_n et B_n ; d'où :

$$A_n \approx \frac{1}{n} \left(\frac{r_o}{b^2} \right)^n$$

$$B_n \approx \frac{a^{2n}}{n} \left(\frac{1}{r_o^n} - \frac{r_o^n}{b^{2n}} \right)$$

Soit c le rayon du fil de la sonde centré en P_o ; en négligeant c devant r_o (c est de l'ordre de grandeur de a), on obtient le potentiel de la sonde (calculé au point : $r = r_o - c$, $\theta = 0$) :

$$V_s = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_o} \left[\log \frac{1}{c} + A_o + B_o \log r_o - \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n r_o^n + \frac{B_n}{r_o^n} \right) \right]$$

La première série donne :

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n r_o^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{r_o^2}{b^2} \right)^n = - \log \left(1 - \frac{r_o^2}{b^2} \right)$$

La 2ème série :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{r_o^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{2n}}{n} \left(\frac{1}{r_o^{2n}} - \frac{1}{b^{2n}} \right) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{a^2}{r_o^2} \right) < 10^{-5}$$

est entièrement négligeable.

Compte tenu des approximations faites, en regroupant les termes l'expression de la capacité est donc :

$$(5) \quad C = \frac{2\pi\epsilon_0}{\log(b/c) - \log^2(b/r_0)/\log(b/a) + \log(1 - \frac{r_0^2}{b^2})}$$

d) Résultats.

Les résultats obtenus sont portés sur les figures 18 et 19 ; le cas $U = 34,2$ kV en tension négative est détaillé dans le tableau II. Il apparaît qu'en première approximation les valeurs expérimentales q_{exp} sont en accord avec les prévisions q_r . Cependant, il existe un écart entre q_{exp} et q_r qui peut atteindre le dixième de la valeur de q_r malgré des mesures soignées :

$$0,90 \leq \tau = q_{\text{exp}}/q_r \leq 1,05$$

Comme la correction apportée à q_c est d'environ 30 % de la valeur de q_r et comme nous nous proposons de vérifier la théorie de sonde, il est important d'examiner de façon précise si cet écart de 10 % entre q_{exp} et q_r est imputable ou non aux erreurs de mesure.

Les deux grandeurs à comparer sont $q_{\text{exp}} = f(q_c)$ et q_r avec :

$$(6) \quad q_c = \frac{\sigma}{KC} \frac{L^2}{U} \quad \text{et} \quad q_r = \frac{E'}{r} \frac{L}{U}$$

d'où :

$$(7) \quad \left| \frac{\Delta q_c}{q_c} \right| \leq \left| \frac{\Delta \sigma}{\sigma} \right| + 2 \left| \frac{\Delta L}{L} \right| + \left| \frac{\Delta K}{K} \right| + \left| \frac{\Delta C}{C} \right| + \left| \frac{\Delta U}{U} \right|$$

$$\left| \frac{\Delta q_r}{q_r} \right| \leq \left| \frac{\Delta E'}{E'} \right| + \left| \frac{\Delta r}{r} \right| + \left| \frac{\Delta L}{L} \right| + \left| \frac{\Delta U}{U} \right|$$

Examinons les différents termes :

- $\left| \frac{\Delta L}{L} \right| \sim 0,001$ est insignifiante
- $\left| \frac{\Delta U}{U} \right|$ est assez faible et peut être négligée car U joue un rôle analogue dans la détermination de q_r et q_c .
- $\left| \frac{\Delta C}{C} \right|$ la validité de la formule (5) n'est pas en doute ; par contre, la longueur de la partie active de la sonde n'est pas très bien déterminée car dans le montage utilisé, elle peut varier avec la tension mécanique exercée sur le fil fin ($\Rightarrow \frac{\Delta l}{l} \leq \frac{2}{530} \sim 0,004$). De plus, aux extrémités de cette partie active, la présence de l'isolant dépassant de 0,5 mm environ la gaine extérieure peut perturber le champ et modifier, pendant le fonctionnement, la longueur "utile" de la sonde.

Ces deux effets ne semblent pas devoir introduire une erreur excédant 1% environ.

La mesure de la mobilité, par contre, est très imprécise. D'après (1) :

$$\left| \frac{\Delta K}{K} \right| \leq \left| \frac{\Delta I}{I} \right| + 2 \left| \frac{\Delta E'}{E'} \right|$$

La mesure de I est assez imprécise ; il y a d'une part les fluctuations lentes du courant de décharge pouvant atteindre 5 à 10 μA (I est compris entre 200 et 800 μA) et d'autre part, l'imprécision due aux microampéremètres et qui peut atteindre 2 à 3 % ; d'où : $\left| \frac{\Delta I}{I} \right| \leq 0,04$. L'erreur sur la détermination de E' provient de trois origines différentes : i) l'imprécision due à la mesure de la pente de la droite $V_{esp}(r)$ (Fig. 17) évaluée à environ 1 % (voir tableau I) ; ii) l'erreur due à la mesure du potentiel d'espace à l'aide d'un électromètre, $\leq 0,01$; iii) la différence entre les valeurs expérimentales et théoriques du potentiel introduite par la méthode de sonde. Il est plausible de prendre :

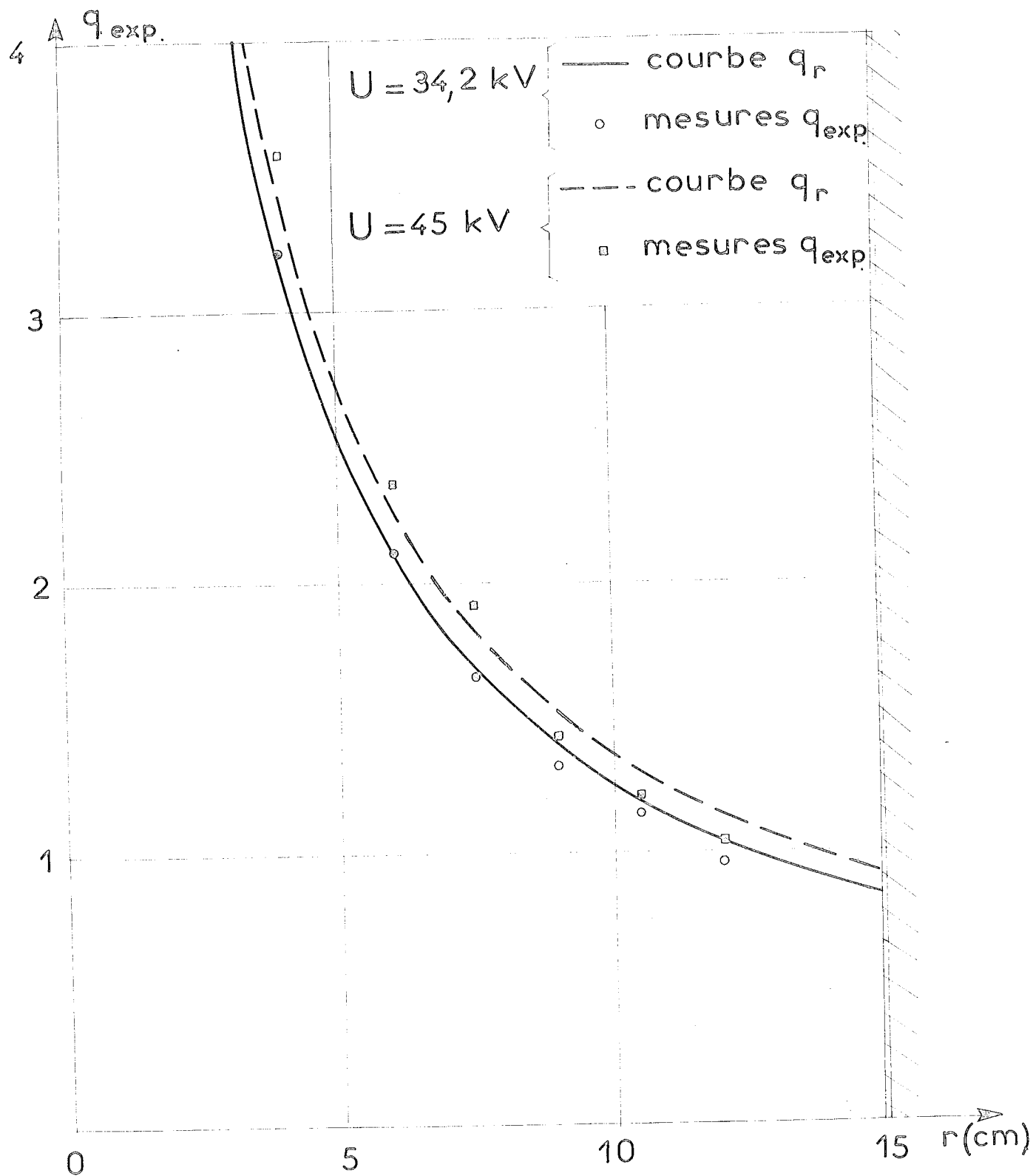


Figure 18 : Variations de q_{exp} et q_r (valeurs réduites) en fonction de la distance r pour la configuration fil-cylindre coaxiaux en polarité négative.

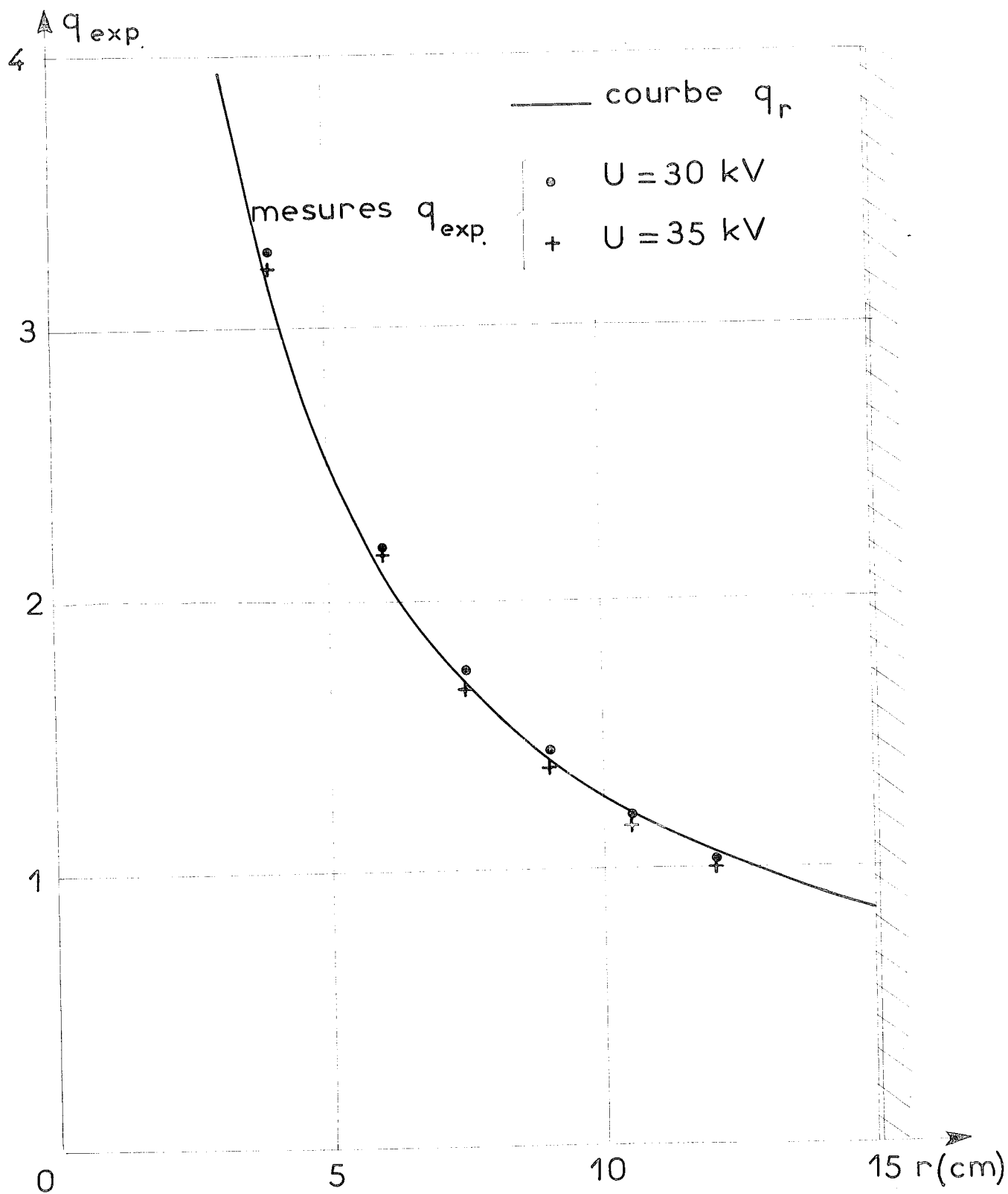


Figure 19 : Variations de q_{exp} et q_r (valeurs réduites) en fonction de r pour la configuration fil-cylindre coaxiaux en polarité positive.

$$\left| \frac{\Delta E'}{E'} \right| \leq 0,03 \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{\Delta K}{K} \right| \leq 0,10$$

Observons que l'erreur due à E' fait varier q_c donc q_{exp} et q_r dans le même sens et qu'il faudra tenir compte de ce fait ultérieurement.

- $\left| \frac{\Delta \sigma}{\sigma} \right|$: σ est proportionnel à la pente des parties quasi-linéaires des caractéristiques relevées par points ; la détermination des pentes est soumise à une imprécision que l'on peut estimer, d'après la Fig. 16, à 3 % environ. Il faut tenir compte en plus des erreurs dues à la mesure indépendante du courant et du potentiel. Ceci donne :

$$\left| \frac{\Delta \sigma}{\sigma} \right| \leq 0,05.$$

- $\frac{\Delta r}{r}$: r , position de la sonde, est repérée à 0,3 mm près $\Rightarrow$

$$\left| \frac{\Delta r}{r} \right| \leq 0,01$$

En rassemblant, on obtient :

$$\left| \frac{\Delta q_c}{q_c} \right| \leq 0,16 \quad \left| \frac{\Delta q_r}{q_r} \right| \leq 0,04$$

Pour évaluer la borne de $\left| \frac{\Delta q_{exp}}{q_{exp}} \right|$, on peut assimiler la fonction $f(q_{exp}) = f(q_c)$ à une droite exp de pente $\sim 0,77$ dans la zone correspondant aux mesures ; d'où :

$$\left| \frac{\Delta q_{exp}}{q_{exp}} \right| \leq 0,125$$

Puisque $\frac{\Delta E'}{E'}$ joue un rôle semblable dans les deux grandeurs, on voit que si l'on prend par exemple $\frac{\Delta E'}{E'} > 0$, on aura :

$$\Delta\tau \leq \left| \frac{\Delta q_{\text{exp}}}{q_{\text{exp}}} \right| + \left| \frac{\Delta r}{r} \right| - \frac{\Delta E'}{E'} \leq 0,105$$

Ainsi les diverses erreurs peuvent se répercuter sur la valeur de q_{exp} par une indétermination de 10 %.

On peut donc conclure qu'en première approximation, les expériences confirment la validité de la théorie de sonde ; la correction due à l'effet de la charge d'espace est nettement supérieure à l'écart observé entre q_{exp} et q_r . Remarquons que l'on peut obtenir une confirmation de nos observations dans le travail de BERSEILLE [22]. Cet auteur n'a pas évalué l'effet de la charge d'espace mais a reporté l'effet global sur la majoration de la capacité ; en reprenant (2), on obtient :

$$C = \frac{\sigma \epsilon}{K q_r'}$$

Notons C_o la capacité déterminée par (5) ; il est clair que :

$$\frac{C}{C_o} = \frac{q_c'}{q_r'}$$

Dans le cas où se place BERSEILLE on a :

$$\begin{array}{ll} r_o = 6 \text{ cm} & C_o = 7,90 \text{ pF/m} \\ r_o = 9 \text{ cm} & C_o = 8,13 \text{ pF/m} \end{array}$$

Les valeurs de capacité qu'il trouve sont comprises entre 10.8 pF/m et 11.9 pF/m ce qui donne :

$$\frac{C}{C_o} = 1,33 \text{ à } 1,50 \text{ environ}$$

c'est-à-dire un rapport en moyenne légèrement supérieur à $\frac{q_c}{q_{\text{esp}}} \approx 1,30 \text{ à } 1,40$ que nous obtenons pour les cas analysés.

Bien que l'écart entre les valeurs de q_{exp} et q_r soit compatible avec l'imprécision des mesures, les résultats obtenus ne nous ont pas paru pleinement satisfaisants.

Il existe 2 effets systématiques :

- 1) la plupart des valeurs de q_{exp} sont inférieures à q_r
- 2) le rapport $\tau = q_{\text{exp}}/q_r$ semble diminuer lorsqu'on s'éloigne du fil émetteur (voir tableau II).

e) Discussion.

Le premier point à envisager est celui de la précision des résultats obtenus par calcul numérique. Nous avons vu (§ V-5) que la résolution numérique du problème de sonde n'était possible qu'en effectuant une approximation supplémentaire : lorsque la densité de charge q_0 devient très importante, cette approximation peut être abolie sans que la précision sur la valeur de V_{exp} obtenue soit notablement affectée ; par contre, la pente de la caractéristique de sonde varie de façon assez sensible ; ainsi pour le cas suivant :

$$\frac{r_0}{b} = 0,741 \quad q_0 = 96 \quad \frac{a}{b} = 2 \cdot 10^{-3}$$

le rapport q_c/q_{esp} passe de 1,34 à 1,38.

De plus le pas h utilisé n'est pas très petit et la résolution par voie numérique de ce problème complexe introduit une erreur $\epsilon(h)$ qui tend vers zéro lorsque $h \rightarrow 0$, mais qui peut être non négligeable pour $h \approx \pi/20$.

Enfin, la simple observation de la figure 14 met en évidence le fait que pour les fortes densités de charge, les résultats présentent une certaine dispersion. Il est donc probable que les courbes des fig. 13 et 14 ne sont pas tout-à-fait exactes et que la détermination de q_{exp} en est directement affectée.

Le second point à discuter concerne la notion de mobilité. Il est bien connu que la mobilité des ions dans l'air est mal déterminée et dépend de nombreux facteurs. La valeur de la mobilité a été déterminée pour chaque expérience, avec il est vrai une imprécision notable. Une surestimation de la valeur de la mobilité peut expliquer le fait que les valeurs de q_{exp} soient en général un peu faibles.

Tous les calculs ont été menés à partir de l'équation (I-2) ; ceci suppose que la mobilité K est constante dans tout le milieu. Or cette hypothèse n'est pas exacte ; dans le cas d'un effet couronne sur un conducteur porté à une tension négative, il existe une conduction électronique au voisinage de ce conducteur. LYAPIN [59] et COCHET [10] ont étudié les variations de la mobilité moyenne des ions positifs et négatifs et ont montré que cette mobilité décroissait légèrement en fonction de leur temps de vie.

L'influence de ce facteur est négligeable dans nos expériences car une variation notable de la mobilité se traduirait par une variation de la densité de charge et cet effet serait alors détecté sur la courbe donnant le potentiel. D'autre part, la relation (2) montre que σ est proportionnel au produit Kq ; la sonde capte un courant et non pas seulement un flux d'ions ; la mesure de sonde ne peut donc pas mettre en évidence une variation de la mobilité, ni en être affectée.

Le troisième point à envisager a trait aux propriétés de la décharge par effet couronne. La gaine, c'est-à-dire la zone bi-ionisée entourant le fil axial n'est pas très bien délimitée ; il s'y produit une chute de tension difficile à évaluer et dont nous n'avons pas tenu compte pour déterminer la valeur de U .

P L A N C H E I

Emission hétérogène sur le fil (système fil cylindre coaxiaux)

U = 30 kV

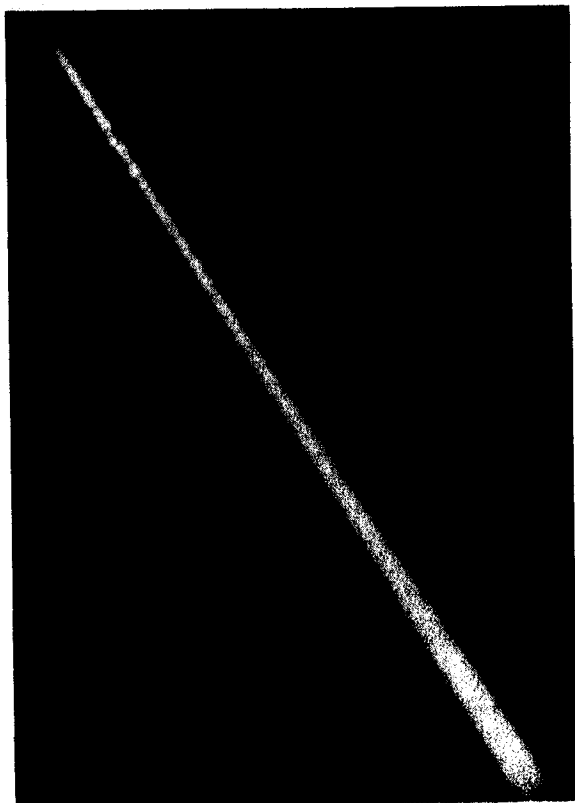


U = 40 kV

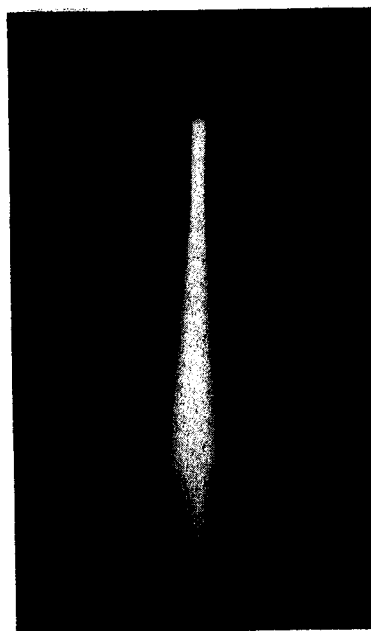


Vibration parasite du fil émetteur

U = 50 kV



U = 60 kV



Dans la gamme de tensions utilisées, la gaine lumineuse n'est pas uniforme et l'ionisation a seulement lieu en certaines régions de volume très restreint (cf. planche I) ; il se produit ainsi une hétérogénéité qui se retrouve probablement dans tout l'espace comme l'indique l'étude du § 4. A cette hétérogénéité dans l'espace s'ajoutent des variations dans le temps ; les avalanches débutent au voisinage du fil et se développent tant que la charge d'espace qu'elles créent n'a pas suffisamment abaissé le champ ; la superposition de ces nombreuses avalanches donne un phénomène globalement stationnaire mais avec des fluctuations assez importantes.

Un effet parasite supplémentaire apparaît lorsque la tension du fil axial est supérieure à 40 kV environ ; il s'agit d'une vibration dont l'amplitude du ventre peut atteindre 1 cm. Une augmentation de la tension mécanique du fil a permis d'augmenter la fréquence de vibration et de diminuer l'amplitude sans toutefois la supprimer (voir planche I).

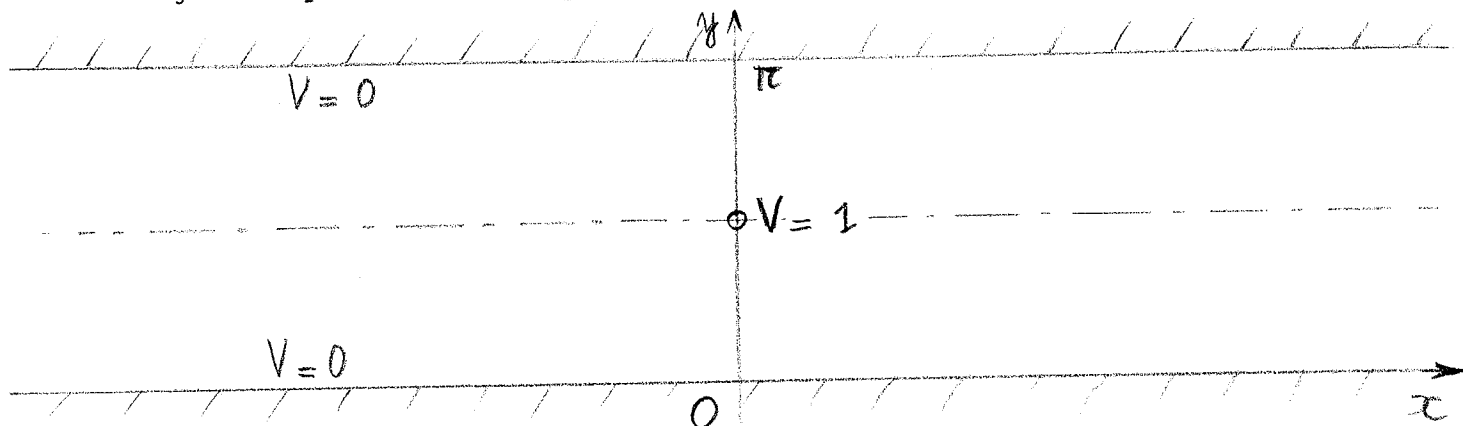
Ces trois facteurs, hétérogénéité spatiale de la charge d'espace, phénomène non-stationnaire et vibration parasite peuvent avoir des effets qu'il est difficile d'estimer ; en particulier des non-linéarités peuvent jouer et modifier légèrement le courant moyen capté par la sonde.

En conclusion, l'imprécision de la détermination de la mobilité, les limites pratiques des calculs numériques concernant la théorie de sonde et les particularités de la décharge couronne semblent des facteurs suffisants pour rendre compte de la dispersion des résultats obtenus.

Avec les réserves dues à l'imprécision des mesures et à l'intervention d'effets supplémentaires dont on n'a pas tenu compte dans la théorie, on peut conclure que la théorie du chapitre V est en accord satisfaisant avec l'expérience. La sonde froide apparaît apte à déterminer avec une assez bonne précision la densité de charge spatiale.

II - CONFIGURATION FIL ENTRE DEUX PLANS PARALLELES.

On considère le domaine (schématisé ci-dessous) compris entre deux plans parallèles indéfinis, conducteurs ($V=0$) et un fil tendu dans le plan médian (plan de symétrie parallèle aux 2 plans récepteurs).



a) Détermination numérique de la solution.

Une difficulté pour résoudre ce problème plan provient du fait que le domaine a une extension indéfinie dans la direction de l'axe Ox . Grâce à la transformation conforme déjà rencontrée au § V-6 :

$$Z = \log \frac{\exp(z)+i}{\exp(z)-i}$$

on peut obtenir un domaine G' de dimensions finies (voir Fig. 8).

Cependant, l'intérêt du calcul effectué dans ce domaine transformé est fort limité car, si la solution est déterminée avec une bonne précision autour du fil émetteur, aucune indication valable n'est fournie concernant sa décroissance loin du fil.

Nous avons résolu le problème directement, c'est-à-dire sans utiliser de transformation géométrique ; on limite le domaine par un segment d'abscisse $x = x_0$ suffisamment grande. Les valeurs du potentiel sur ce nouvel élément de la frontière ont été fixées de deux manières différentes, soit en prenant $V=0$, soit en déterminant à chaque tour d'itération des valeurs par extrapolation de

l'approximation dans la zone où celle-ci présente une décroissance exponentielle bien définie ; la solution obtenue peut alors être prolongée ($x > x_0$) sans difficulté.

Nous avons mis en oeuvre les méthodes 1 et 4 (associées aux systèmes 1 et 4 du § IV-7). La comparaison de ces méthodes du point de vue de l'efficacité a été faite dans le chapitre IV. Rappelons que la méthode 4 est la plus efficace et permet d'obtenir la solution avec une précision de l'ordre de 10^{-4} en 9 à 10 tours d'itération.

On peut aussi comparer les 2 méthodes en examinant le degré d'approximation de la solution obtenue ; étant donné que la solution tend assez rapidement (pour $x > 2\pi$) vers la solution saturée (cf. FELICI [5,7]) décroissant exponentiellement, l'étude du décrement λ permet l'évaluation du degré d'approximation :

Méthode 1

h	$\pi/12$	$\pi/14$	$\pi/18$	$\pi/30$	0
λ	0.677	0.6759	0.6757	0.6748	0.6738

Méthode 4

h	$\pi/14$	$\pi/22$	0
λ	0.666	0.670	0.6738

La comparaison de ces deux tableaux met en évidence le fait que la méthode 1 donne des résultats plus précis que la méthode 4 ; donc pour obtenir une même précision, il est nécessaire d'employer un maillage plus fin avec la méthode 4 qu'avec la méthode 1 qui, par conséquent, demande des temps de calcul moins longs.

C'est cette méthode que nous avons utilisée dans la pratique.

Sur les figures 20, 21, 22 sont reportés des résultats obtenus par résolution numérique.

b) Etude expérimentale.

Une étude a déjà été effectuée par FELICI qui a vérifié que la densité de courant sur les plans récepteurs décroissait exponentiellement selon un taux en accord avec la loi théorique [8]. Nous avons repris l'étude dans le but de déterminer le potentiel et la densité de charge dans le volume en utilisant une sonde. La mise en oeuvre se fait comme dans le cas précédent : on place une sonde (voir Fig. 15) dans le plan médian, parallèlement au fil siège de l'effet couronne. Le relevé des caractéristiques et leur exploitation n'offrent pas de difficulté particulière.

1) Détermination du décrement à partir des mesures de potentiel.

$\log V_{\text{esp}}$ varie linéairement en fonction de l'abscisse x (pour $x > L$ = écartement des plans parallèles). Les figures 23 et 24 représentent les potentiels mesurés pour 2 valeurs de la tension U . L'évaluation de la pente permet de déterminer $\lambda(*)$:

$$\lambda_{\text{exp}} = \frac{L}{\pi} |P| \quad (P : \text{pente})$$

on obtient ainsi :

$$\begin{array}{ll} U = 40 \text{ kV} & \lambda_1 \approx 0.645 \\ U = 50 \text{ kV} & \lambda_2 \approx 0.66 \end{array}$$

(*) λ est le rapport des décrets logarithmiques correspondant respectivement à la solution saturée et à la solution harmonique (obtenue par séparation de variables) ; on a ici $V_{\text{harm}}(x,y) = f_0(y) e^{-x}$.

Figure 21 : Configuration fil entre
deux plans parallèles.

Variations du potentiel dans le plan
de symétrie en fonction de x .

- ① $q_o = 0,01$ ② $q_o = 0,1$
 ③ $q_o = 1$ ④ $q_o = 10$
 ⑤ Solution harmonique
 ($q_o = 0$)

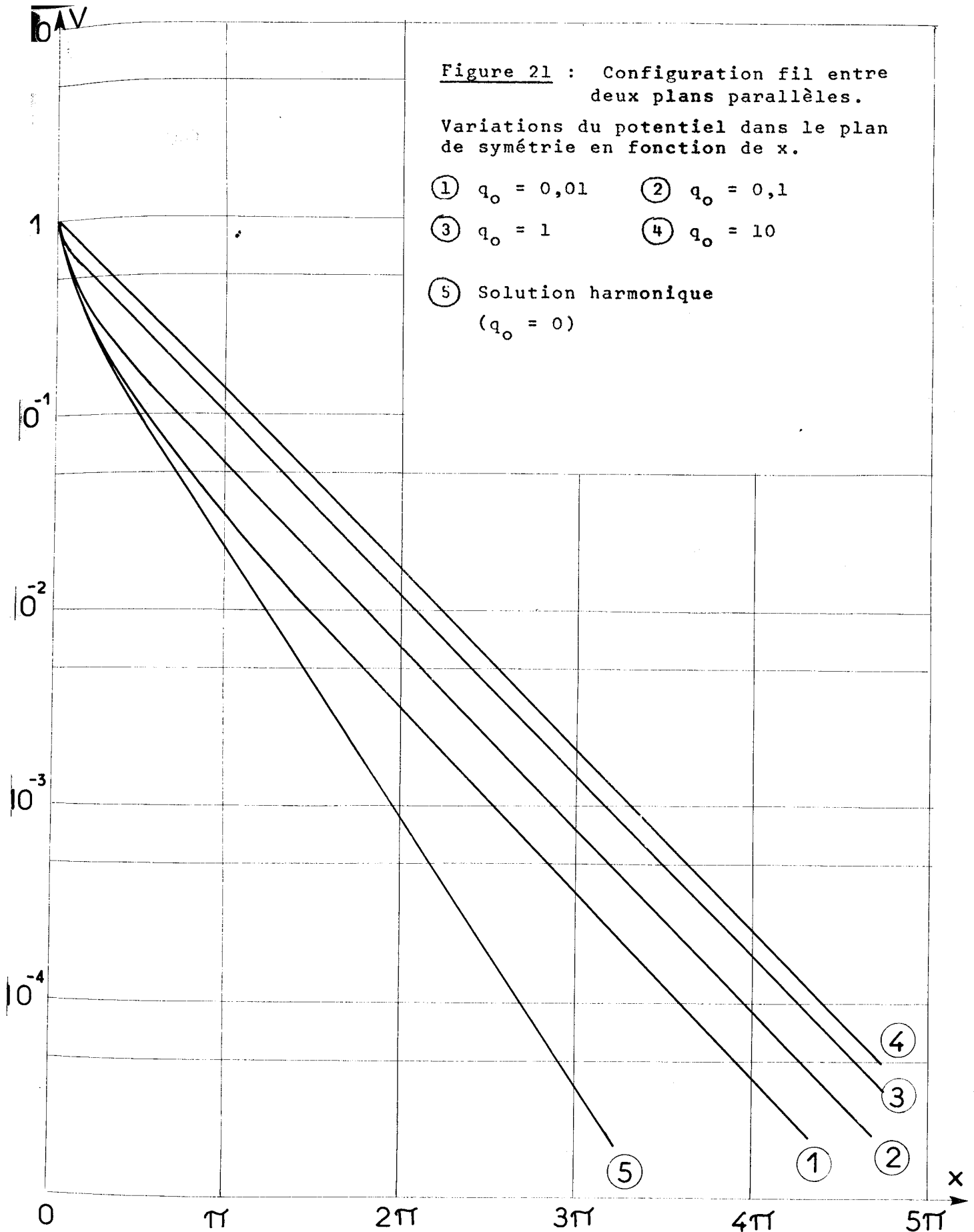
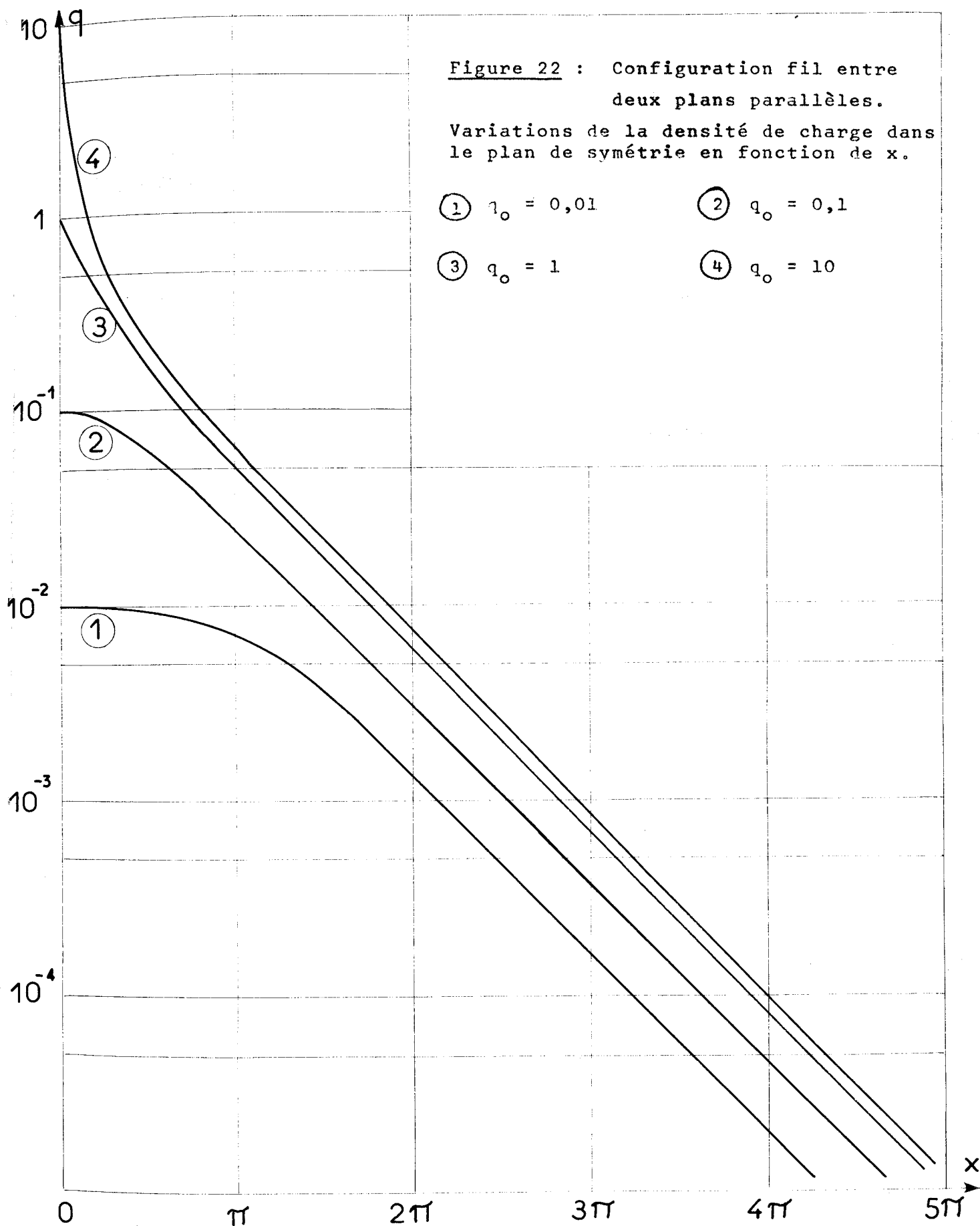


Figure 22 : Configuration fil entre
deux plans parallèles.

Variations de la densité de charge dans
le plan de symétrie en fonction de x .



Les valeurs expérimentales déterminées avec diverses tensions et dans des conditions d'humidité variables se répartissent ainsi :

$$0,64 \leq \lambda_{\text{exp}} \leq 0,69$$

La précision avec laquelle la pente est déterminée, est assez médiocre; on peut l'estimer à 3 % ou 4 %. En ajoutant l'erreur due à la mesure et celle provenant de la détermination du potentiel d'espace, l'imprécision peut raisonnablement être évaluée à 5 %, ce qui donne avec $\lambda_{\text{th}} = 0,6738$ les bornes 0,640 et 0,708.

Si l'on rappelle en outre que le courant de décharge fluctue, que la distribution de charge spatiale présente des hétérogénéités et que les parois isolantes qui ferment l'enceinte exercent une influence probablement plus importante que dans le cas du cylindre, il semble raisonnable de conclure que la distribution mesurée du potentiel dans le plan médian est en accord satisfaisant avec la solution théorique (Fig. 21).

2) Interprétation des résultats concernant le densité de charge.

Nous avons également représenté sur les figures 23 et 24 les variations de σ_c (qui mesure la pente de la caractéristique de sonde). L'obtention de la densité de charge q' à partir de σ_c se heurte à 2 difficultés : on ne connaît ni la valeur de la mobilité ni la relation théorique entre q_c et q_{esp} (*). Nous avons procédé autrement pour interpréter les courbes $\sigma_c = f(x)$.

Supposons la mobilité constante. La capacité C de la sonde par rapport aux autres électrodes ne dépend que de façon tout-à-fait insignifiante de x pour $x \geq L$; alors, d'après la relation

$$q'_c = \frac{\epsilon \sigma_c}{KC}$$

(*) Nous reprenons les notations des paragraphes précédents.

q'_c est proportionnel à σ_c ; admettons que la densité réelle q' suit la loi théorique (proportionnelle à $e^{-\lambda \frac{\pi x}{L}}$ dans la zone explorée) et traçons sur les figures 23 et 24 les droites de même pente que les courbes : $\log V_{\text{esp}} = px$ et passant par les points σ_c correspondant aux fortes valeurs de x (q' est alors très faible et l'influence de la charge spatiale est négligeable).

On constate que $\sigma_c \geq \sigma$; le rapport

$$\frac{\sigma_c}{\sigma} = \frac{q'_c}{q'}$$

augmente lorsque x diminue ; pour $x = 27$ cm, on obtient (Fig. 23, 24) :

$$\frac{\sigma_c}{\sigma} \approx 1,2$$

En rapprochant ces observations des résultats de l'étude du chapitre V, il apparaît clairement que la théorie de sonde permet de rendre compte de la différence existant entre l'allure des variations de σ_c et de σ . On peut donc dire que les résultats expérimentaux concernant la répartition de la densité de charge sont en concordance avec les prévisions (décroissance en $e^{-\lambda x}$).

3) Détermination de la mobilité

Un autre résultat qui renforce la valeur des conclusions précédentes concerne la détermination de la mobilité à partir des mesures de sonde. Dans la zone où la solution décroît exponentiellement en x (solution saturée), le rapport V/q est constant dans tout plan $y = C^{\text{te}}$; en effet :

$$\left. \begin{aligned} V(x,y) &= V_0 f(y) e^{-\lambda x} \\ q &= -\Delta V = -V_0 (\lambda^2 f(y) + f''(y)) e^{-\lambda x} \end{aligned} \right\} x \geq 2\pi$$

Figure 23 : Variations de V et σ_c en fonction de x dans le plan de symétrie
 (Configuration fil entre deux plans : $L = 0,3 \text{ m}$)
 ① Potentiel ② Pente σ_c des caractéristiques de sonde (droite
 parallèle à ①).

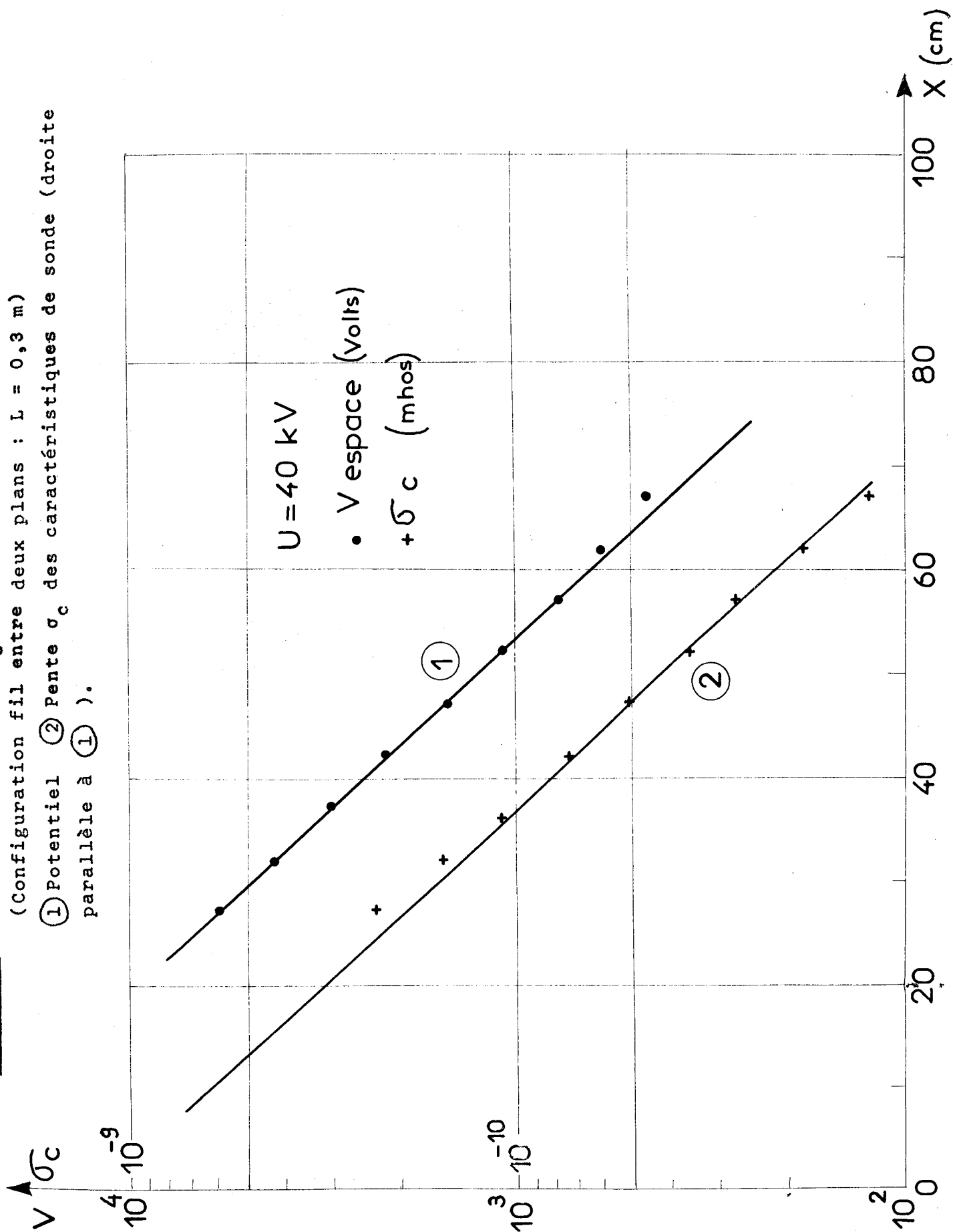
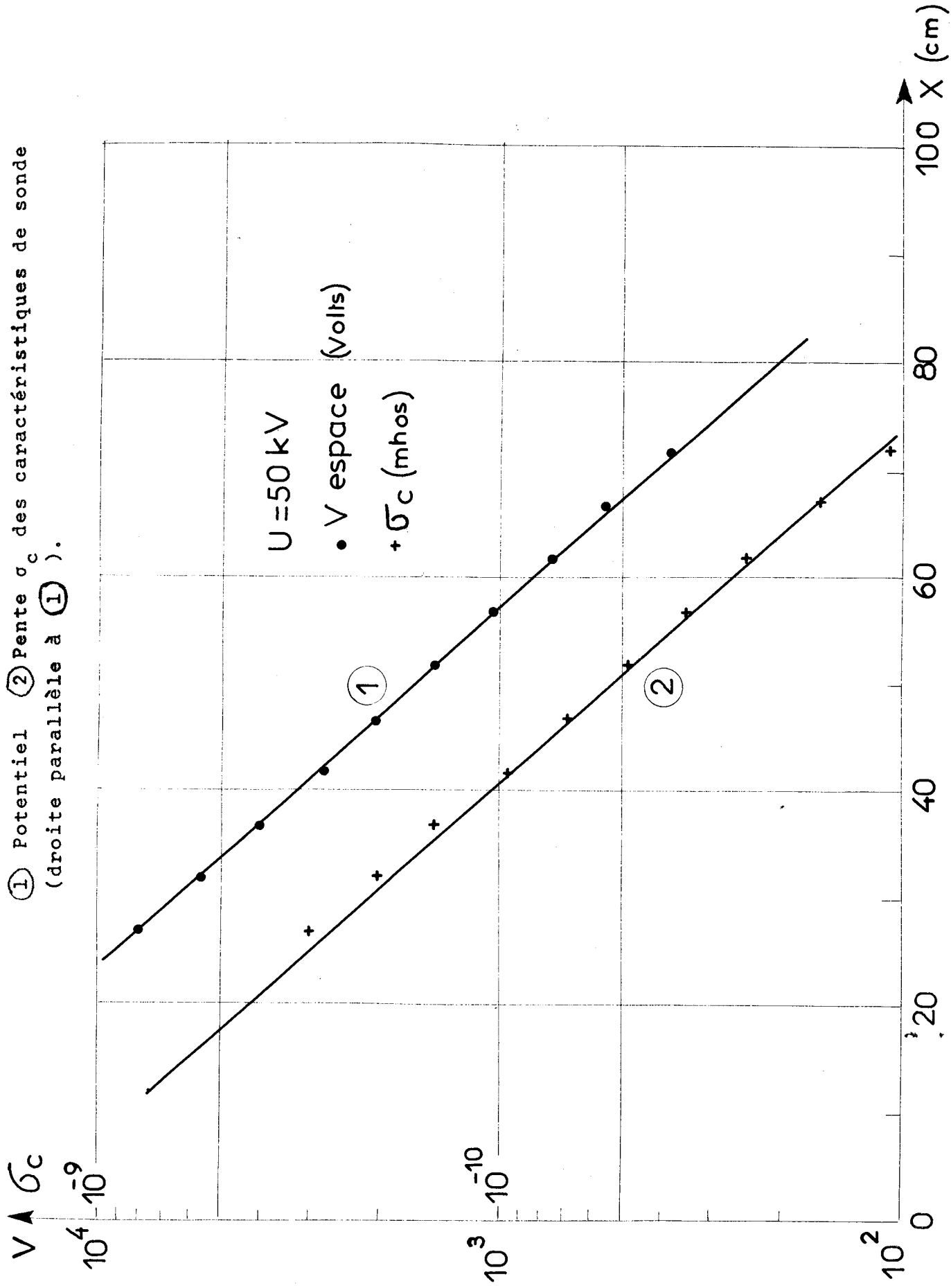


Figure 24 : Variations de V et σ_c en fonction de x dans le plan de symétrie

(Configuration fil entre deux plans : $L = 0,3 \text{ m}$).

① Potentiel ② Pente σ_c des caractéristiques de sonde
(droite parallèle à ①).



En effectuant le développement en série de $f(y)$ au voisinage de $y = \frac{\pi}{2}$, on obtient

$$f''(\frac{\pi}{2}) = -2\lambda^2 |f(\frac{\pi}{2})|$$

D'où :

$$\frac{V}{q} (x, \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{\lambda^2} = 2,20 \quad (x \geq 2\pi)$$

La définition des grandeurs sans dimension et la relation (2) conduisent à :

$$2,20 = \frac{V}{q} = \frac{KC\pi^2}{L^2} \frac{V'}{\sigma}$$

On peut ainsi déterminer K :

$$K = 2,2 \frac{L^2}{\pi^2 C} \frac{\sigma}{V'} \quad (V' : \text{potentiel en volts})$$

C est aisément calculable :

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 \ell}{\log \frac{2L}{\pi a}}$$

ℓ étant la longueur de la sonde et a son rayon.

Numériquement avec :

$$L = 0,3 \text{ m} \quad \ell = 0,368 \text{ m} \quad a = 1,5 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

$$K = 6,52 \cdot 10^9 \frac{\sigma}{V'}$$

Les résultats reportés Fig. 23, 24 donnent :

$$\begin{array}{ll} U = 40 \text{ kV} & K = 1,95 \text{ cm}^2/\text{V}.\text{sec.} \\ U = 50 \text{ kV} & K = 1,90 \text{ cm}^2/\text{V}.\text{sec.} \end{array}$$

Les mesures effectuées à diverses reprises ont donné pour les ions négatifs des valeurs de mobilité qui s'échelonnent entre 1,5 et 2,1 $\text{cm}^2/\text{V}.\text{sec}$. Malgré la précision moyenne de cette mesure, l'accord est suffisamment probant pour que l'on puisse conclure que les résultats expérimentaux confirment les prévisions dans la zone où la solution décroît en $e^{-\lambda x}$.

On peut ajouter une dernière remarque concernant la mobilité ; d'après les valeurs obtenues il est clair que la mobilité varie peu dans la zone explorée alors que l'âge des ions augmente considérablement ; par exemple pour $U = 40 \text{ kV}$:

en $x = 30 \text{ cm}$ $t \approx 5 \cdot 10^{-2} \text{ sec.}$

en $x = 70 \text{ cm}$ $t \approx 3,7 \text{ sec.}$

Alors que la mobilité des ions diminue rapidement pendant les premières millisecondes de leur vie (cf. [59, 10]) le vieillissement après 50 msec. semble très peu affecter la mobilité. Donc s'il existe un gradient de mobilité, sa valeur est très faible et ne peut apporter qu'une modification insignifiante à la solution et en particulier à la valeur de λ ; c'est pourquoi nous n'avons pas tenu compte d'un tel effet dans l'interprétation des mesures de σ_c .

Précisons qu'au delà de $x = 70 \text{ cm}$, les mesures sont délicates car les courants deviennent très faibles ; de plus l'influence des parois isolantes à la surface desquelles le potentiel est très mal défini, ne peut plus être négligée.

L'effet du phénomène de l'entraînement de l'air sera discuté au § 5.

III - AUTRES CONFIGURATIONS.

Nous allons nous borner dans ce paragraphe à des indications sommaires. Les configurations envisagées ci-dessous ainsi que d'autres en cours d'étude (par exemple nappe de fils entre 2 plans) seront examinées plus en détail dans une publication ultérieure.

a) Configuration fil-cylindre excentrés.

En utilisant la transformation conforme (voir § V-5)

$$Z = \log \frac{z+d+2c}{z+d}$$

on se ramène à un domaine G' rectangulaire (voir Fig. 11). La solution a été déterminée pour plusieurs valeurs du paramètre d (d : distance axe du cylindre-fil émetteur) et de q_0 . Pour $d \leq 0,6$ on n'observe que des déformations très légères des équipotentielles, qui restent pratiquement des cercles.

Une étude expérimentale a été entreprise à l'aide de la sonde froide. On rencontre une difficulté pour interpréter les résultats expérimentaux car on ne connaît pas de façon précise la relation entre q_c et q_{esp} . On peut néanmoins faire une approximation qui s'appuie sur les résultats de l'étude du § V-5. On suppose que, quelle que soit la position de la sonde, l'influence de la charge spatiale, pour une valeur donnée de q_0 sur le fil émetteur, se traduit par un rapport constant entre q'_c et q' . Après une évaluation de la capacité, nous avons choisi :

$$\begin{cases} K = 1,8 \text{ cm}^2/\text{V.sec} & (\text{ions négatifs}) \\ q'_c/q' = 1,30 & (\text{d'après les résultats du § 1}). \end{cases}$$

La méthode employée pour effectuer la comparaison est celle qui a servi pour tester la théorie de sonde (§ 1) : on détermine q_0 de façon à faire concorder les valeurs expérimentales et théoriques du potentiel et on compare ensuite les valeurs de la densité de charge. Nous avons ainsi constaté que les valeurs réduites de la densité de charge q_{exp} concordent de façon tout-à-fait satisfaisante avec les valeurs déterminées par voie numérique (Fig. 25, 26, 27).

b) Problème des dièdres.

Cette configuration a été étudiée par FELICI qui a déterminé la solution saturée. Soit un dièdre d'angle $\theta = \pi/n$; en introduisant la surface $r = 1$ sur laquelle on se donne des distributions de V et de q convenables, on peut distinguer un problème "intérieur" ($0 \leq r \leq 1$) et un problème "extérieur" ($r \geq 1$).

Un calcul effectué en utilisant les coordonnées polaires permet d'obtenir la solution du problème intérieur. Pour le problème extérieur, on est obligé de borner le domaine ($1 \leq r \leq R$) ; on peut également obtenir la solution dans le cas où l'émetteur est un fil tendu parallèlement à l'arête du dièdre.

Ce choix de coordonnées ne permet pas de mettre en évidence le comportement asymptotique de la solution pour $r \rightarrow 0$ ou pour $r \rightarrow \infty$. Afin de retrouver les résultats obtenus par FELICI [6,7], il est nécessaire d'utiliser la transformation conforme.

$$Z = \log z^n$$

Le domaine G' est celui de la configuration "fil entre 2 plans parallèles". La solution saturée présente des variations du type $r^{\lambda n}$ dans G ($n > 0$ pour le problème intérieur et $n < 0$ pour le problème extérieur) alors que les solutions harmoniques varient comme r^n .

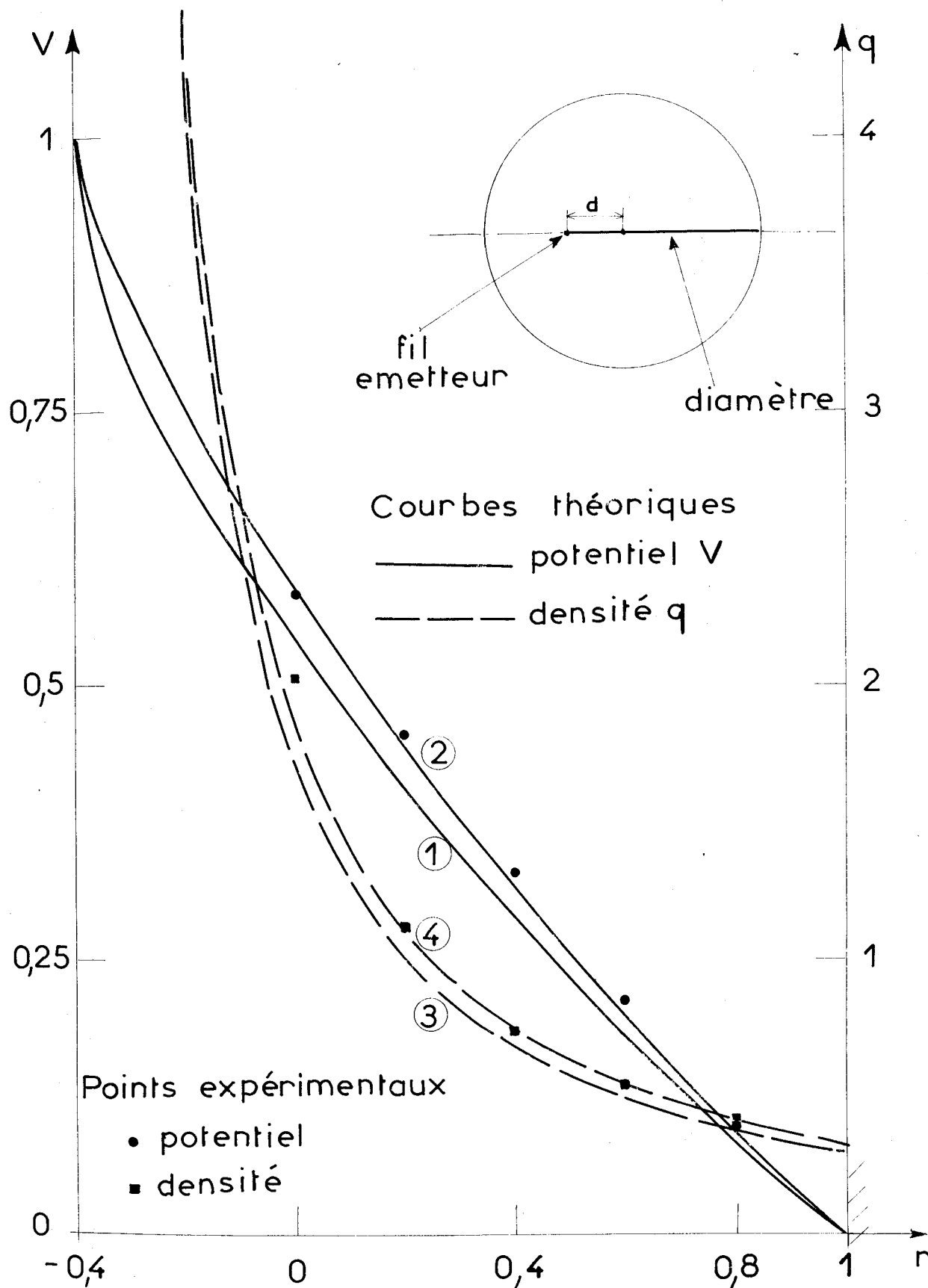


Figure 25 : Variations de V et q (valeurs réduites) le long du diamètre pour la configuration fil-cylindre excentrés. $d = 0,4$; $a = 1,3 \cdot 10^{-3}$

Potential : (1) $q_0 = 45$ (2) $q_0 = 200$

densité de charge : (3) $q_0 = 45$ (4) $q_0 = 200$

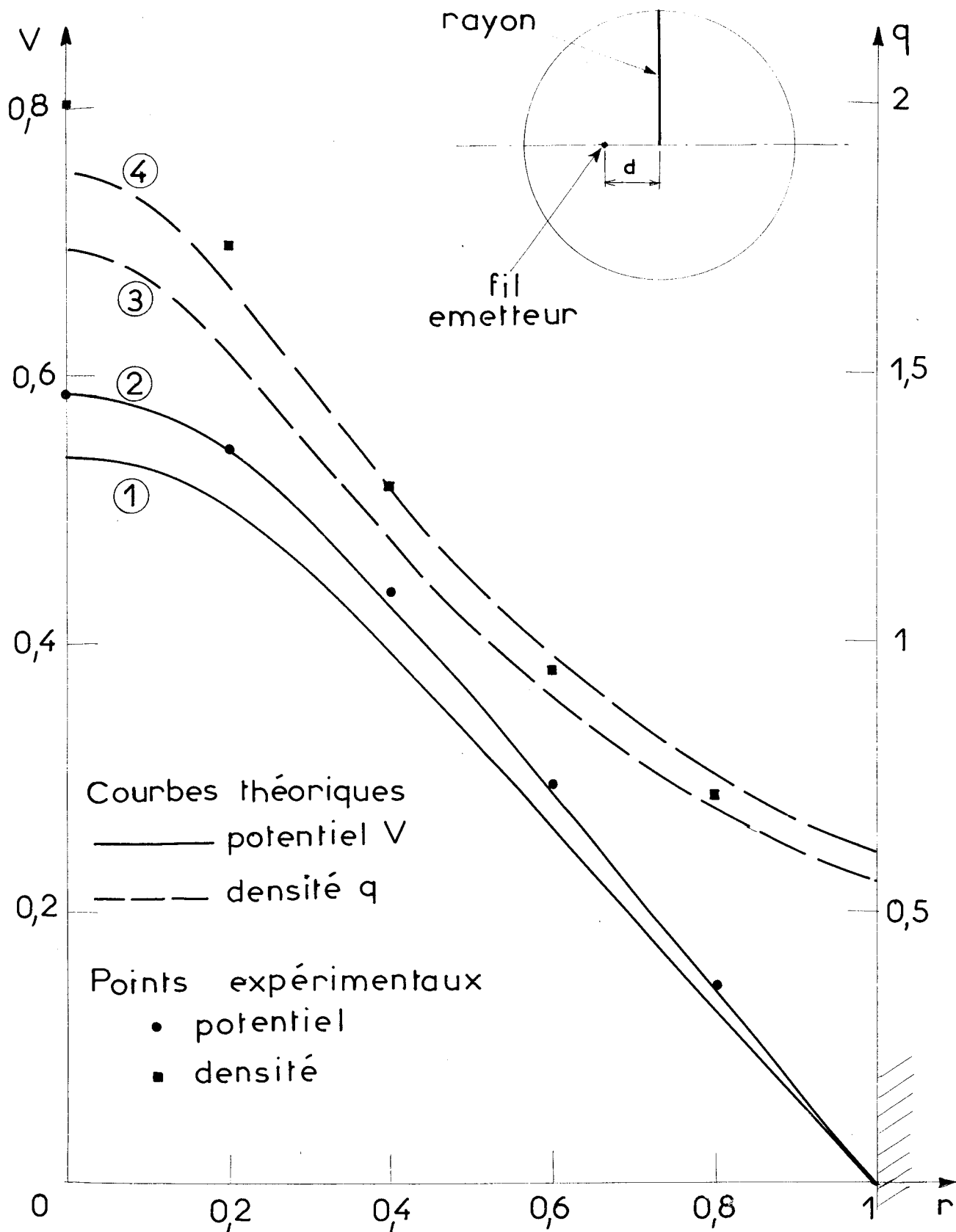


Figure 26 : Variations de V et q (en valeurs réduites) le long du rayon pour la configuration fil-cylindre excentrés.
 $d = 0,4$; rayon du fil $a = 1,3 \cdot 10^{-3}$; Courbes théoriques
 Potentiel: ① $q_0 = 45$ ② $q_0 = 200$
 Densité de charge : ③ $q_0 = 45$ ④ $q_0 = 200$

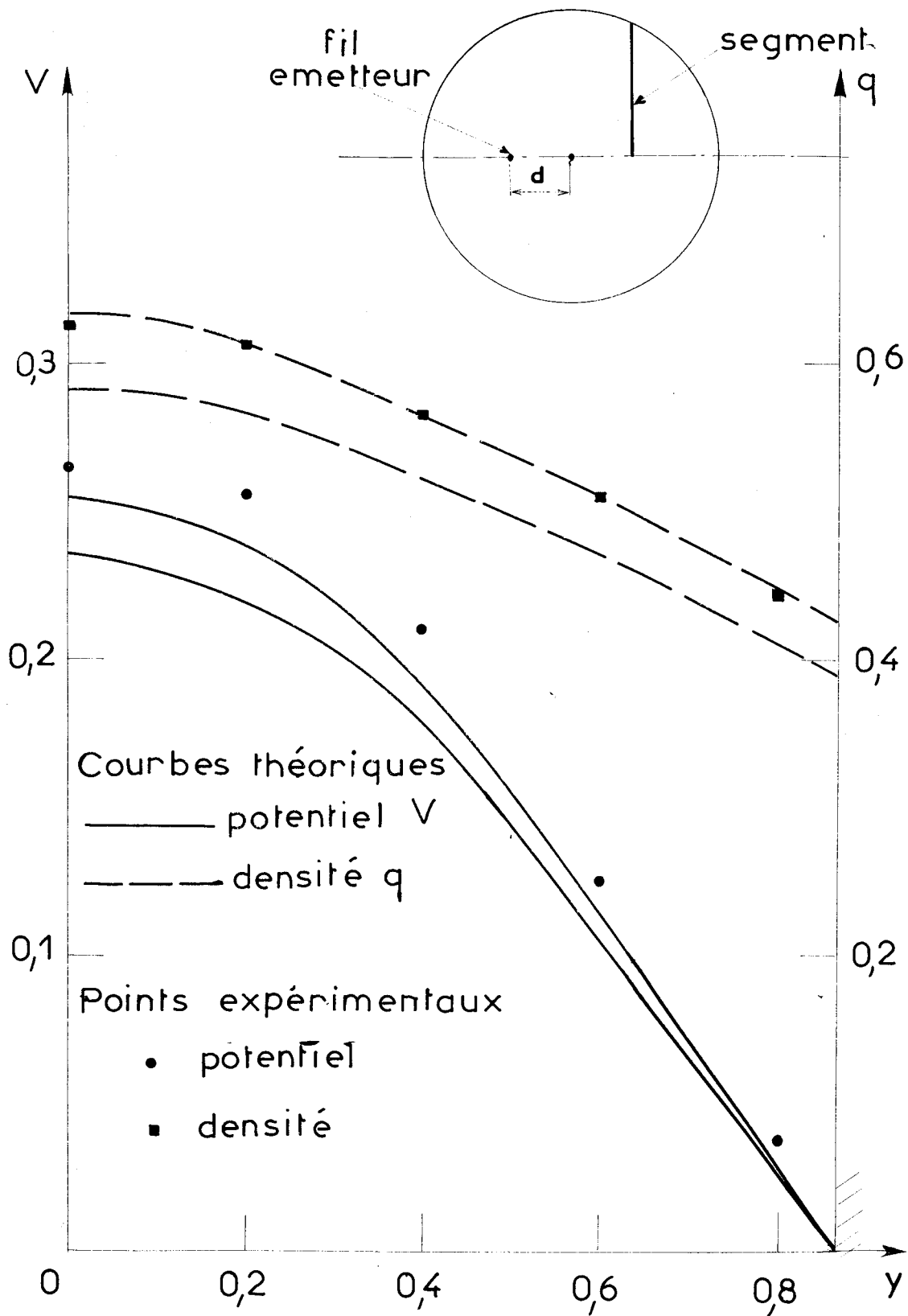


Figure 27 : Variations de V et q (en valeurs réduites) le long du segment pour la configuration fil-cylindre excentrés.
 $d = 0,4$; rayon du fil $a = 1,3 \cdot 10^{-3}$; Courbes théorique
 potentiel: ① $q_0 = 45$ ② $q_0 = 200$
 densité de charge: ③ $q_0 = 45$ ④ $q_0 = 200$

T A B L E A U I I I

Valeurs de λ (solution saturée variant en $r^{\lambda n}$) en fonction du pas h du maillage carré.

$\begin{array}{c} h \\ \backslash \\ n \end{array}$	$\pi/6$	$\pi/14$	$\pi/30$	$\pi/46$		0
3	0,867	0,872	0,875	0,876		0,8777
4	0,813	0,816	0,818	0,820		0,8217
5	0,784	0,785	0,788	0,7887		0,7899
6	0,765	0,765	0,767			0,7692
10	0,731	0,728	0,729	0,7296		0,7296
∞		0,677	0,6748			0,6738
- 4	0,599	0,571	0,662	0,559		0,5535
- 3	0,576	0,542	0,530	0,526		0,519

$\begin{array}{c} h \\ \backslash \\ n \end{array}$	$\pi/14$	$\pi/20$	$\pi/30$	$\pi/40$		0
- 2	0,491		0,475			0,458
- 1	0,386	0,369	0,355	0,347		0,327

Les résultats numériques sont rassemblés dans le tableau III. On voit qu'il existe une différence très marquée entre les problèmes intérieur et extérieur : alors que pour $n > 2$ la solution est obtenue avec une bonne précision, dans le cas du problème extérieur la détermination de λ_n est entachée d'une erreur très importante. Cette différence peut se comprendre en remarquant que l'on a :

$$\left| \frac{dz}{dZ} \right| = \frac{1}{n} e^{-X/n} \quad 0 \leq X \leq X_0$$

A un segment de longueur h dans le plan Z correspondent des segments de longueur décroissante lorsque X croît, pour $n > 2$ et croissante pour $n < 0$.

Nous sommes parvenus à améliorer la précision en utilisant un maillage rectangulaire ($h = \Delta X < \Delta Y = k$) mais il subsiste néanmoins une erreur qu'il semble difficile de réduire complètement.

c) Configuration fil-plan.

Elle est obtenue en tissant un fil indéfini parallèlement à un plan supposé lui aussi indéfini.

On sait que à une grande distance du fil, la solution tend asymptotiquement vers la solution saturée du problème du dièdre d'ouverture π , solution décroissant en $1/r^\lambda$ avec $\lambda = 0,327$ [6] ; d'après les résultats discutés ci-dessus, on voit qu'il est inutile de chercher à résoudre ce problème dans le domaine G' transformé de G par

$$Z = \log \frac{1}{z}$$

Pratiquement, comme c'est dans la zone voisine du fil émetteur qu'il est intéressant de connaître la solution avec précision, il est commode d'utiliser la transformation conforme :

$$Z = \log \frac{z+1}{z-1}$$

la distance fil-plan étant ramenée à l'unité.

En examinant la carte de potentiel (Fig. 28) nous voyons que les équipotentiellles sont nettement déformées et semblent très proches de celles déterminées expérimentalement par DUPUY [11] et BERSEILLE [22].

Les variations du champ E, de la densité de charge q et de la densité de courant j sur le plan sont représentées sur la figure 29. On voit que la répartition de j, pour une charge spatiale importante, diffère nettement de celle donnée par une méthode approchée postulant la conservation du réseau d'équipotentiellles (cf. [11]).

d) Configuration pointe-plan.

Le domaine G, qui présente une symétrie de révolution se prête assez malaisément à une résolution directe. Afin de travailler avec un domaine G' rectangulaire et d'obtenir une bonne approximation dans le voisinage de la pointe, nous avons fait un changement de coordonnées. En assimilant la surface de la pointe à l'une des nappes d'un hyperboloïde de révolution, on peut utiliser les coordonnées de l'ellipsoïde allongé de révolution (cf. DURAND [54]) ; la distance pointe-plan étant ramenée à l'unité :

$$\left\{ \begin{array}{l} x = [(\mu^2 - 1)(1 - \nu^2)]^{1/2} \cos \varphi \\ y = [(\mu^2 - 1)(1 - \nu^2)]^{1/2} \sin \varphi \\ z = \mu \nu \end{array} \right.$$

Les opérateurs gradient et laplacien sont exprimés en fonction de ces nouvelles coordonnées. Le domaine G' est un rectangle dans le plan ν - μ dont l'abscisse ν_e d'un des côtés est liée à la forme géométrique de la pointe.

Figure 28 : Réseau théorique d'équipotentielles pour la configuration fil-plan.

Rayon du fil émetteur $a = 3 \cdot 10^{-3}$. $q_0 = 50$

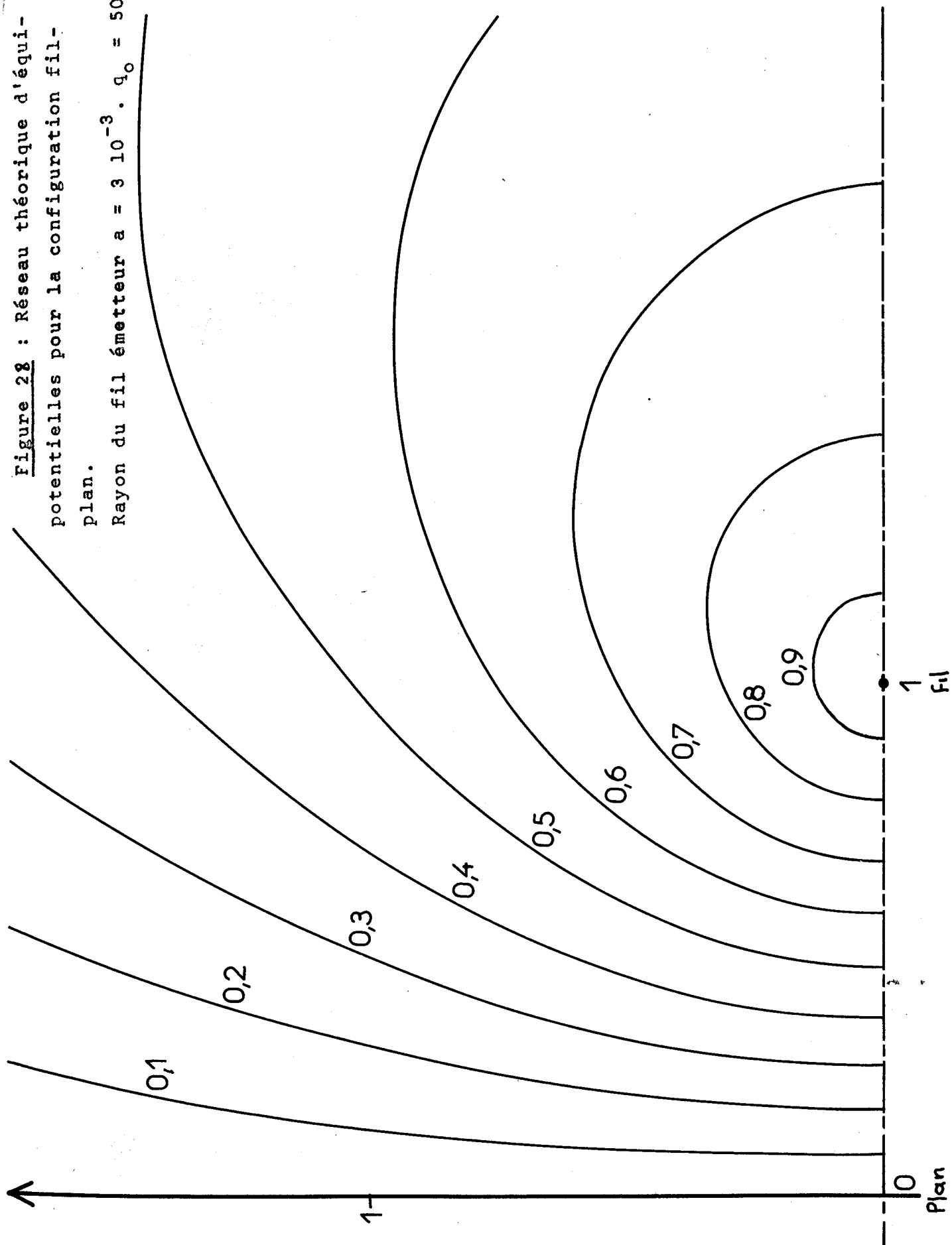
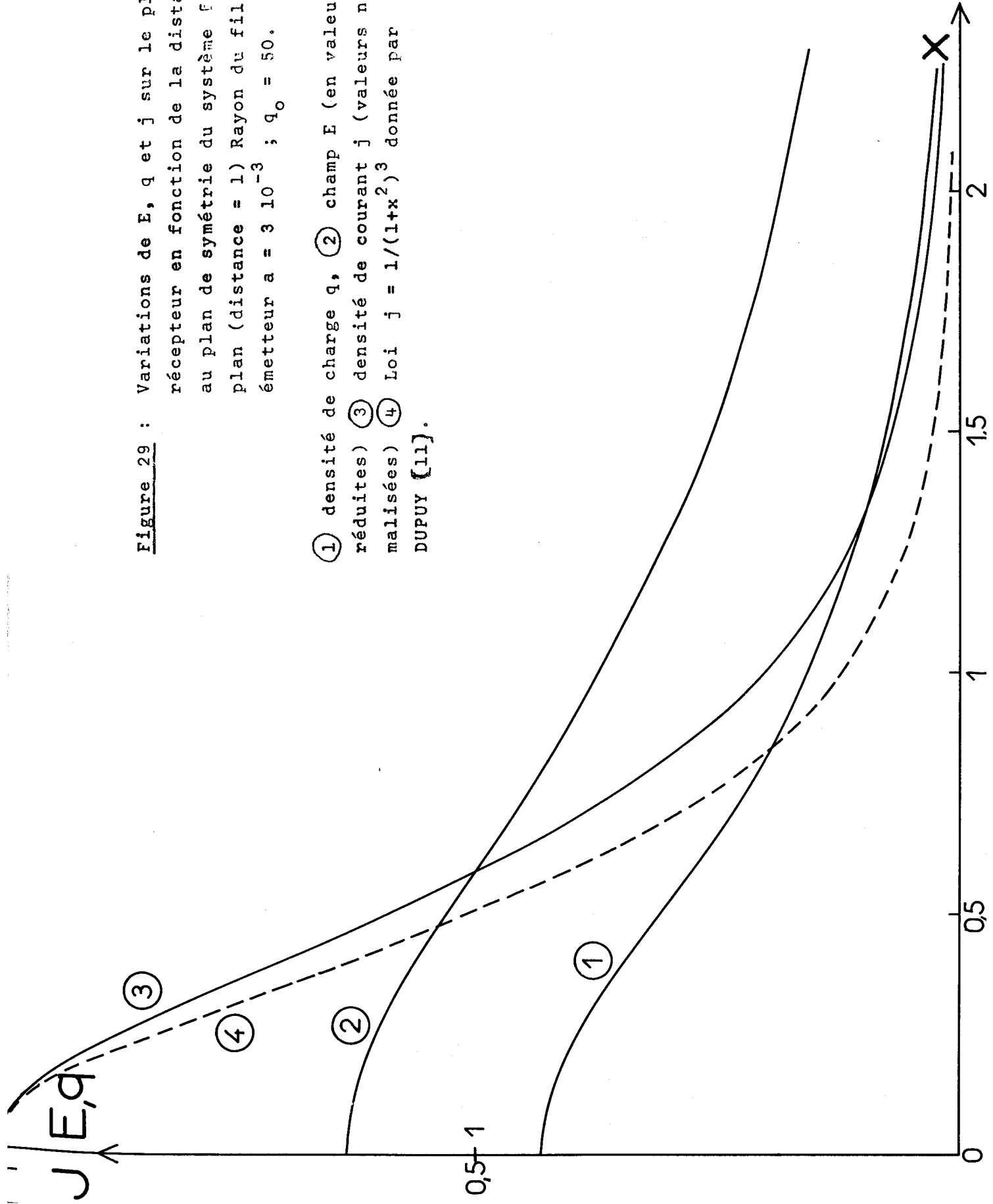
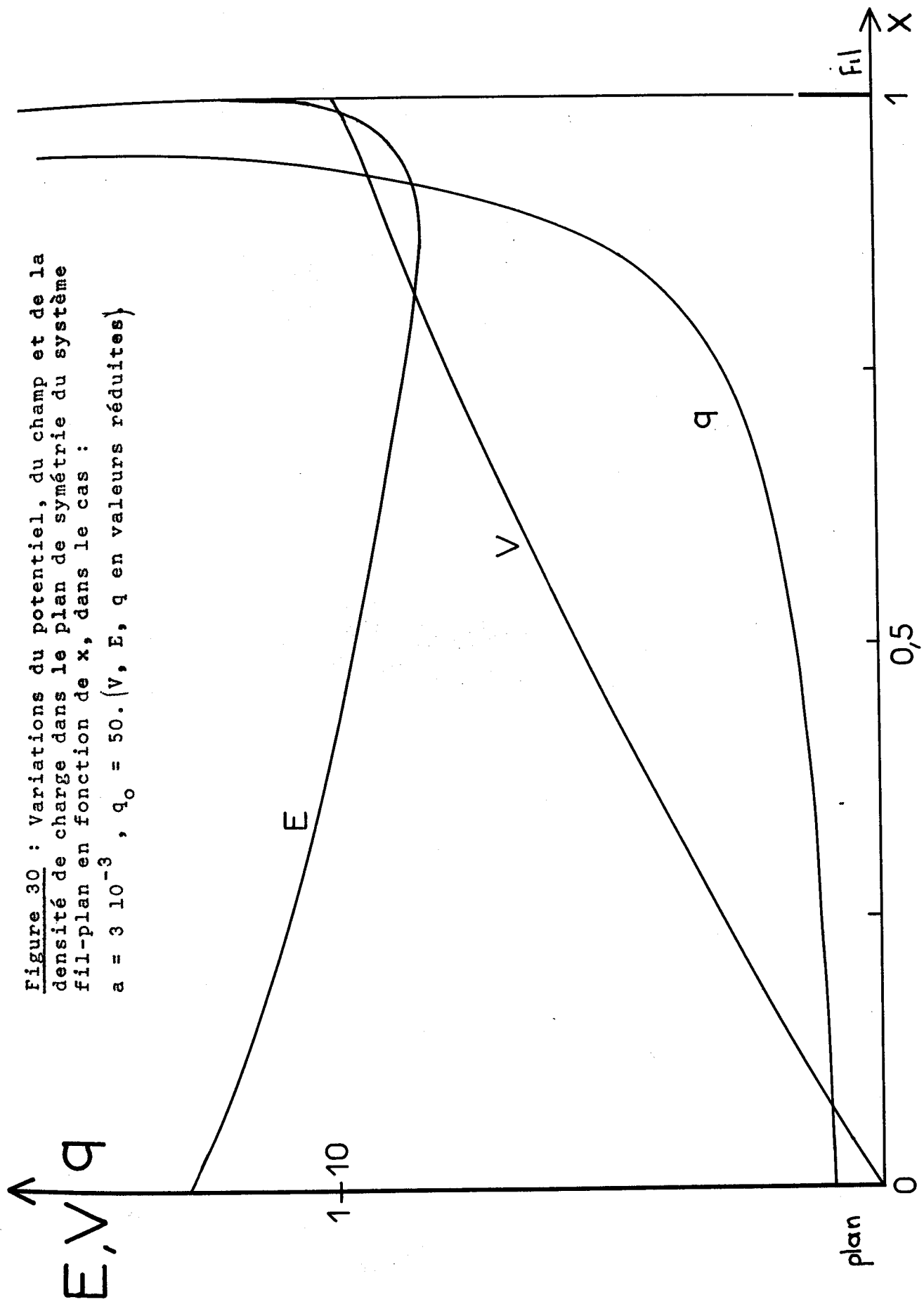


Figure 29 : Variations de E , q et j sur le plan récepteur en fonction de la distance au plan de symétrie du système fil-plan (distance = 1) Rayon du fil émetteur $a = 3 \cdot 10^{-3}$; $q_0 = 50$.

- ① densité de charge q , ② champ E (en valeurs réduites) ③ densité de courant j (valeurs normalisées) ④ Loi $j = 1/(1+x^2)^3$ donnée par DUPUY [11].





Avec ce problème, on rencontre une difficulté qui ne s'est pas présentée jusqu'à présent. Il n'est plus possible, d'un point de vue physique, de se fixer $q = q_0$ sur toute la surface de l'électrode émettrice car le champ varie considérablement en fonction du point considéré et par conséquent l'ionisation ne se produit qu'à l'extrémité de la pointe. Nous avons indiqué (§ I-5) que ce problème pourrait être résolu par l'analyse du fonctionnement de la gaine qui serait susceptible de fournir une relation de la forme :

$$q(Q) = g(Q, E) \quad Q \in \Gamma_e$$

En l'absence d'une telle relation nous nous sommes donnés une répartition qui semble acceptable d'un point de vue physique :

$$q(Q) = q(v_e, \mu) = q_0 \exp\left(-\frac{(\mu-1)^2}{\beta^2}\right)$$

β est un paramètre $\approx 0,3$. Quelques solutions ont été déterminées numériquement. La convergence de l'itération est aussi rapide que pour les autres configurations. On peut voir (Fig. 32) que la forme de la gaussienne ($\beta = 0,4$) se retrouve sur le plan à une distance $r \approx 2,4$ de l'axe de révolution ; pour $r \leq 2$ la forme des distributions obtenues dépendent assez peu de la valeur de β (q_0 fixe).

Signalons que nous avons tenté de déterminer les répartitions de potentiel et de densité de charge en utilisant une sonde torique (adaptation au cas d'une symétrie de révolution du schéma de la sonde cylindrique valable pour les problèmes plans) ; mais les caractéristiques obtenues ne présentent pas de partie quasi-linéaire et leur interprétation n'est donc pas possible.

e) Configuration cylindrique à section carrée.

On considère un cylindre de base carrée (de côté π) ayant pour axe Oz ; on suppose qu'il y a émission sur une pointe placée à l'origine et on limite le domaine à une longueur $z_0 = 6\pi$ (on affecte la valeur $V = 0$).

L'intérêt de ce cas réside dans le fait que le domaine G est tri-dimensionnel. Avec une discrétisation de type général (voir § III-2), l'itération (méthode 1) converge rapidement (~ 12 tours). Ceci a permis de vérifier que la méthode 1 est valable sans modification pour des configurations tridimensionnelles.

Bien que les calculs aient été effectués avec une précision grossière ($h = \pi/12$) pour en limiter la durée, une indication intéressante a pu être dégagée. La solution décroît de façon exponentielle pour $2\pi < z < 5\pi$ avec un coefficient :

$$\alpha \approx 0,936$$

Or la solution harmonique qui décroît le moins rapidement est de la forme :

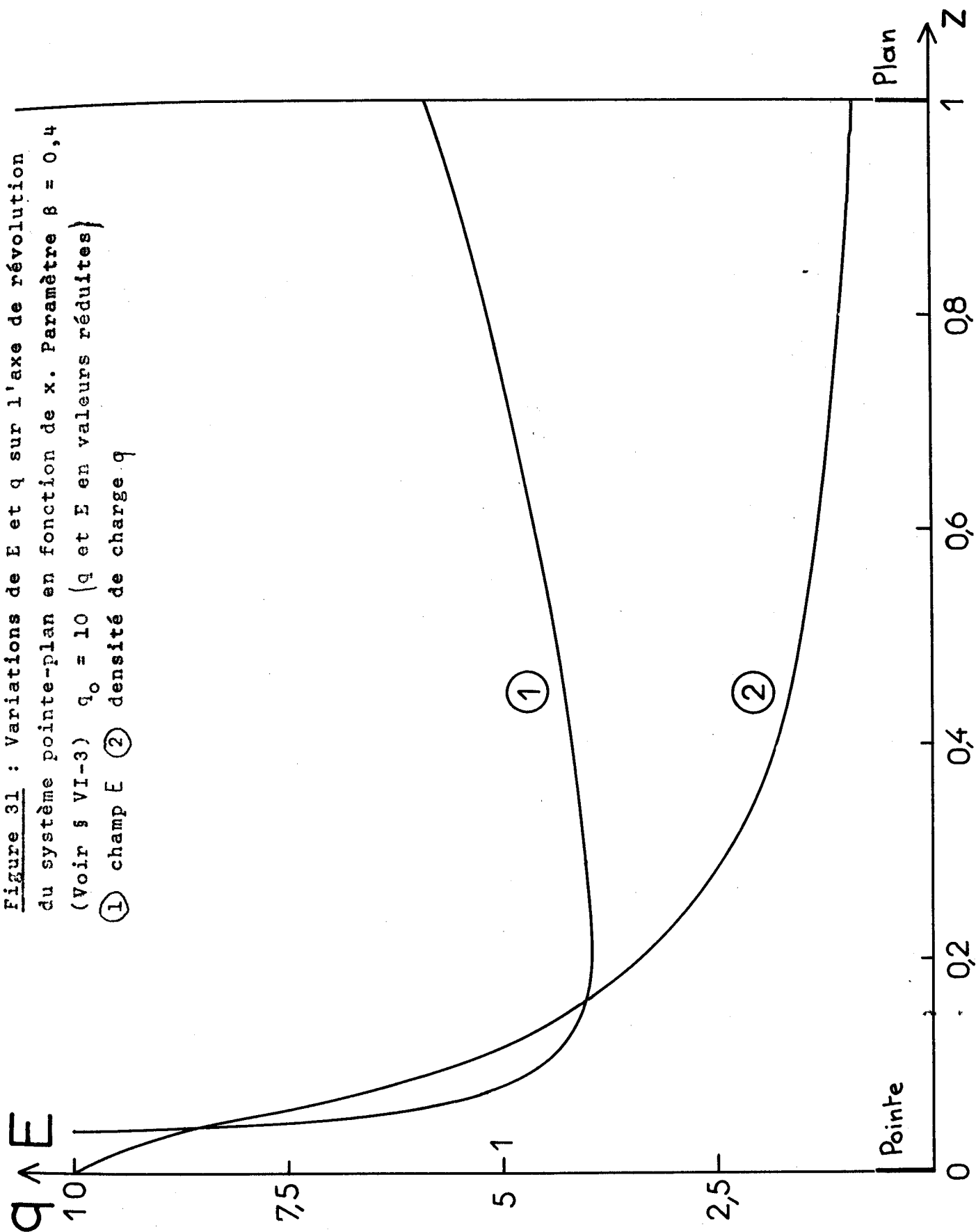
$$V(x,y,z) = V_0 \cos x \cos y e^{-\beta z}$$

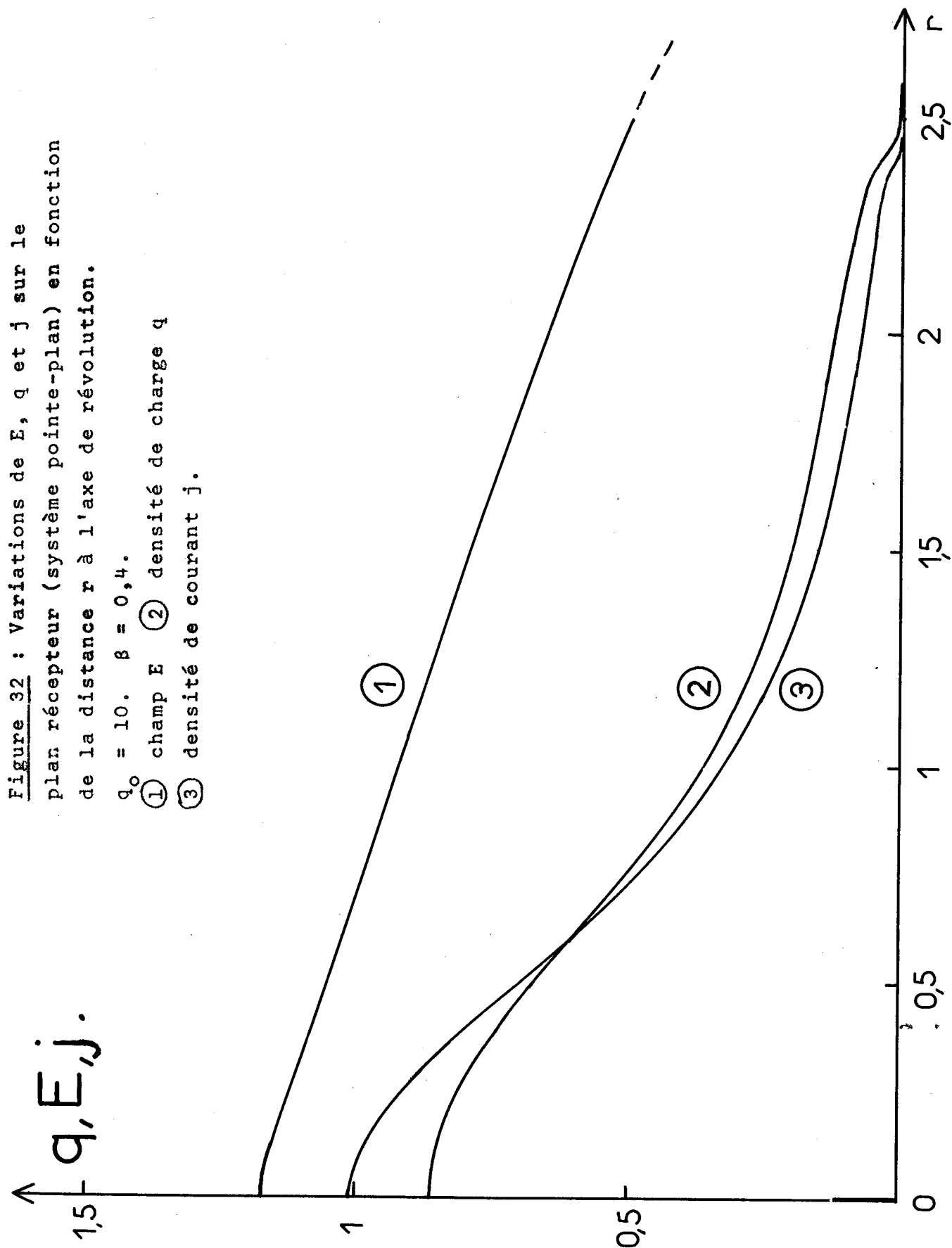
avec $\beta = \sqrt{2}$; on en déduit :

$$\lambda_0 = \alpha/\beta = 0,662.$$

valeur comprise entre $\lambda_1 = 0,6738$ (cas des plans parallèles et $\lambda_2 = 0,6532$ (cas du cylindre à base circulaire - voir § I-2). Ceci confirme le fait que dans les configurations géométriques où la solution harmonique varie en $\exp(-\beta z)$, la modification du coefficient β due à l'influence de la charge d'espace dépend peu de la section dans un plan $z = c^{te}$.

Figure 31 : Variations de E et q sur l'axe de révolution
 du système pointe-plan en fonction de x . Paramètre $\beta = 0,4$
 (Voir § VI-3) $q_0 = 10$ (q et E en valeurs réduites)
 ① champ E ② densité de charge q





IV - ETUDE DU SYSTEME : POINTE ENTRE DEUX PLANS .

a) Intérêt physique .

L'effet couronne proprement dit n'est observé sur un fil que pour une tension U_1 et un courant suffisamment importants. Pour des tensions comprises entre U_0 (potentiel disruptif) et U_1 , on n'obtient pas à proprement parler de couronne ; l'ionisation est localisée sur des sites d'aire très restreinte à la surface du fil, le nombre de sites augmentant avec le courant.

Dans certaines conditions on observe sur l'électrode réceptrice des zones à peu près circulaires, nettement délimitées. Une hypothèse avancée par Monsieur FELICI au cours de discussions se rapportant aux observations ci-dessus, consistait à attribuer ces zones à l'existence de faisceaux bien individualisés ayant pour origine certains sites d'émission sur le fil.

Le problème qui se pose est celui de savoir si une forte hétérogénéité de l'émission sur le fil produit ou non une hétérogénéité de la distribution des charges dans l'espace entre les électrodes.

b) Etude mathématique .

FELICI [56] a établi qu'un tel faisceau a nécessairement pour origine un site d'aire finie ; si l'émission avait lieu en un point (aire nulle) le courant émis serait un infiniment petit et le faisceau dégènererait en la ligne de force issue de ce point. On peut tirer de cette étude la conclusion que la fonction g (densité de charge sur l'électrode émettrice) ne peut pas être une distribution (*) mais sera, par exemple, une fonction continue par morceaux.

(*) au sens mathématique du terme : exemple distribution de Dirac.

Une étude a été entreprise d'abord sur un modèle simplifié basé sur les hypothèses ci-dessous. L'émission de charge ne se produit que dans une zone délimitée par un cercle centré en 0 de l'électrode plane émettrice $x = 0$; l'électrode réceptrice est le plan $x = 1$. La portion chargée de l'espace est limitée par une surface de révolution d'axe Ox dont la méridienne est la courbe :

$$y = R(x)$$

On suppose que dans la zone chargée la densité q et la composante E_x du champ ne dépendent que de l'abscisse x . Les fonctions V , E_x , q et R sont reliées entre elles par quatre relations :

$$(10) \quad E_x = - \frac{\partial V}{\partial x}$$

$$(11) \quad \frac{1}{q(x)} = \frac{1}{q_0} + \int_0^x \frac{dt}{E(t)} \quad (\text{relation II-7})$$

$$(12) \quad R(x) q(x) E_x(x) = C^{te} = R(0) q_0 E_x(0)$$

(conservation du courant).

La 4ème relation est celle donnant le potentiel sur l'axe Ox en fonction de la densité de charge dans la zone chargée.

On obtient après quelques calculs intermédiaires :

$$(13) \quad V(x) = 1-x + \int_0^x t q(t) dt + x \int_x^1 q(t) dt + \int_0^1 [F(x,t) + f(x,t)] q(t) dt$$

avec

$$f(x,t) = \frac{1}{2} \{ [(t-x)^2 + R^2(t)]^{1/2} - [(t+x)^2 + R^2(t)]^{1/2} \}$$

$$F(x,t) = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \{ [(2p+x-t)^2 + R^2(t)]^{1/2} + [(2p-x+t)^2 + R^2(t)]^{1/2} - [(2p+x+t)^2 + R^2(t)]^{1/2} - [(2p-x-t)^2 + R^2(t)]^{1/2} \}$$

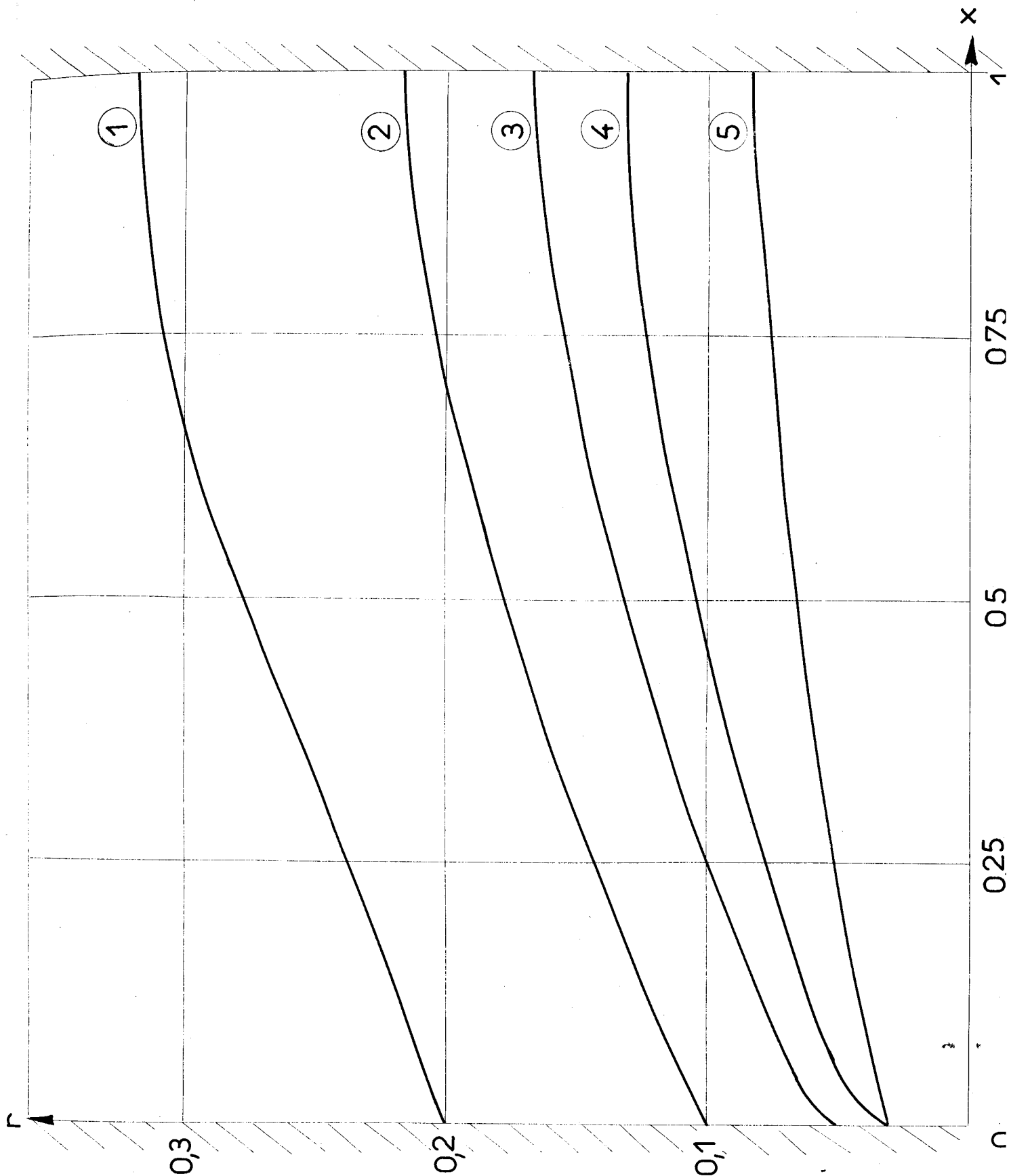


Figure 33 : Forme des faisceaux entre 2 plans (itération triple). (Grandeur réduites). Dilatation de l'axe des r . ① $R_o = 0,2$; $q_o = 5$. ② $R_o = 0,1$; $q_o = 10$. ③ $R_o = 0,05$; $q_o = 30$. ④ $R_o = 0,03$; $q_o = 50$. ⑤ $R_o = 0,03$; $q_o = 10$.

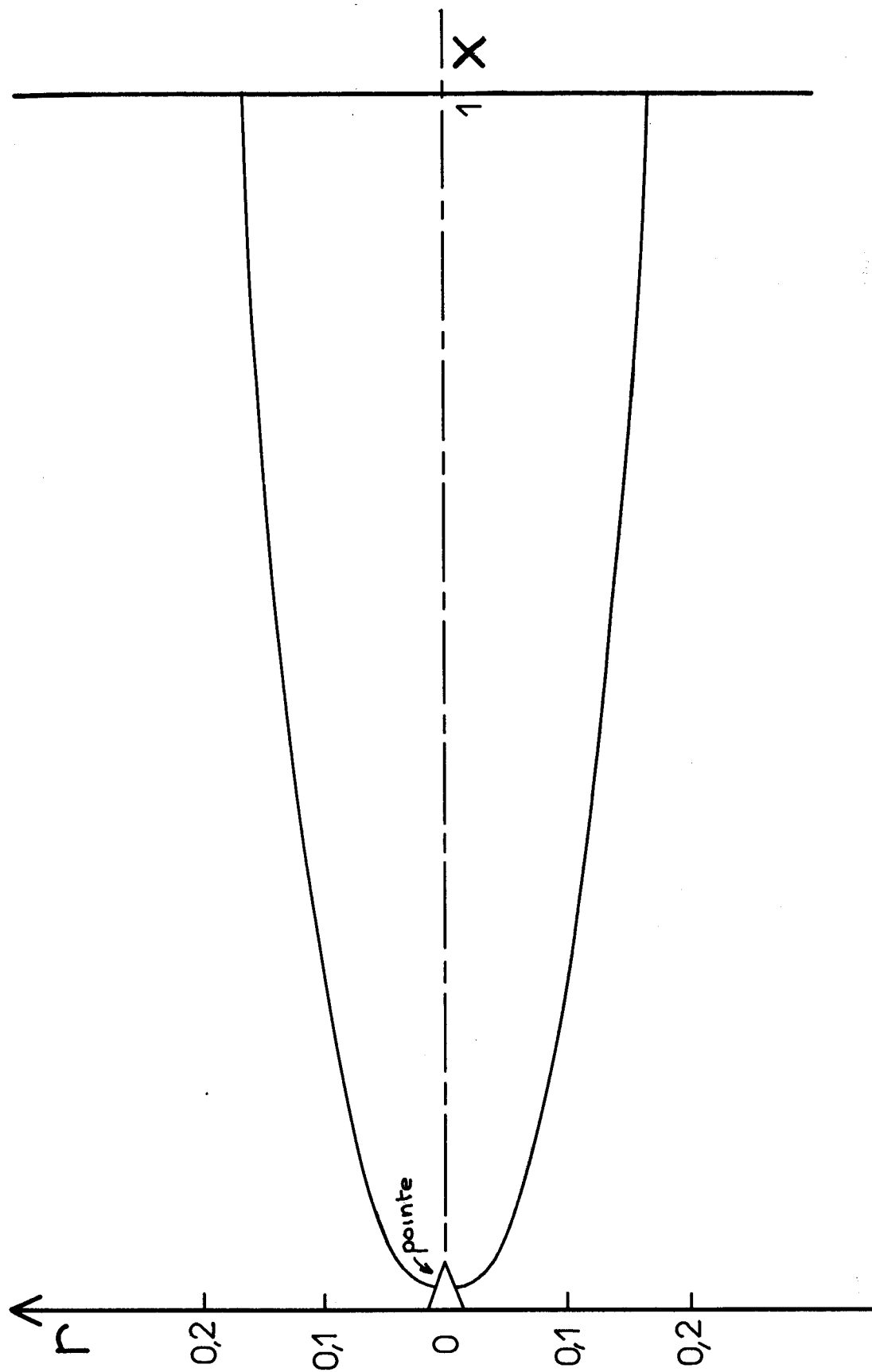


Figure 34 : Forme du faisceau obtenue en résolvant le problème par la
méthode générale ($h = 0,02$). Pointe conique de longueur = 0,04
et de demi-angle = $\text{Arctg } \frac{1}{3}$. $q_0 = 1000$.

Le système (10 à 13) a été résolu dans un certain nombre de cas par une méthode d'itération dont voici le principe : $q_1(x)$ et $R_1(x)$ étant donnés, on détermine le potentiel $V_2(x)$ par (13) puis $E_{x2}(x)$ par (10), $q_2(x)$ par (11) et $R_2(x)$ par (12) ; cette méthode converge pour une large gamme de valeurs de $R(0)$ et q_0 donnés sur l'électrode émettrice (calculs numériques). On a reporté sur la figure 33, les résultats obtenus concernant la forme du faisceau.

Une résolution plus précise a été entreprise ; la méthode générale 1 a été mise en oeuvre avec quelques légères modifications, tenant compte de la discontinuité de la distribution de la densité de charge. Les résultats montrent que la forme du faisceau n'est pas très différente de celle obtenue par l'étude expérimentale (Fig. 34). Ces calculs montrent en outre que la densité de charge est pratiquement constante dans un plan d'abscisse x ($r < R(x)$) et que la densité de courant recueillie par l'électrode réceptrice varie assez lentement en fonction de r .

c) Application d'une relation générale.

Nous allons d'abord reprendre la relation (II-7) qui donne, avec des grandeurs dimensionnelles :

$$\frac{1}{q(s)} = \frac{1}{q_0} + \frac{1}{\epsilon} \int_0^s \frac{dt}{E(t)}$$

On peut obtenir une première interprétation physique de cette relation en remarquant que l'intégrale est proportionnelle à un temps ; avec la mobilité K :

$$dt = \frac{ds}{v} \text{ et } v = KE \Rightarrow dt = \frac{1}{K} \frac{ds}{E}$$

on obtient :

$$(14) \quad \frac{1}{q(s_2)} - \frac{1}{q(s_1)} = \frac{K}{\epsilon} [t(s_2) - t(s_1)]$$

On voit que l'accroissement de $\frac{1}{q}$ entre les deux points P_1 et P_2 d'abscisses curvilignes s_1 et s_2 est proportionnel au temps de vol des ions entre P_1 et P_2 .

Cette interprétation de la relation (II-7) permet de retrouver aisément l'effet d'augmentation de la charge q_m captée par la sonde ; lorsque le potentiel de sonde diminue, le champ augmente en tout point des lignes de force atteignant la sonde, et le temps de parcours entre l'émetteur et la sonde diminue ce qui se traduit par une augmentation de la densité de charge.

Cette relation suggère d'autre part le principe d'une autre méthode de mesure de la densité de charge ; celle-ci consiste à déterminer le temps de vol des ions entre deux points et à relier ainsi entre elles les valeurs de la densité de charge.

On peut donner une autre interprétation physique de la relation précédente d'après la définition de la densité de charge, on a :

$$q = \lim_{\Omega \rightarrow 0} \frac{eN}{\Omega}$$

Ω : volume contenant N ions de charge e .

Soit un volume Ω_0 contenant N_0 ions ; au bout d'un temps t , ces ions ont migré et occupent un volume Ω ; on obtient, d'après (14) :

$$(15) \quad \Omega = \Omega_0 + \frac{K e N_0}{\epsilon} t$$

Le volume occupé par un ensemble de N_0 ions croît linéairement en fonction du temps (effet de la répulsion coulombienne). Cette interprétation physique va être utilisée pour faire une étude approximative de la forme de faisceau.

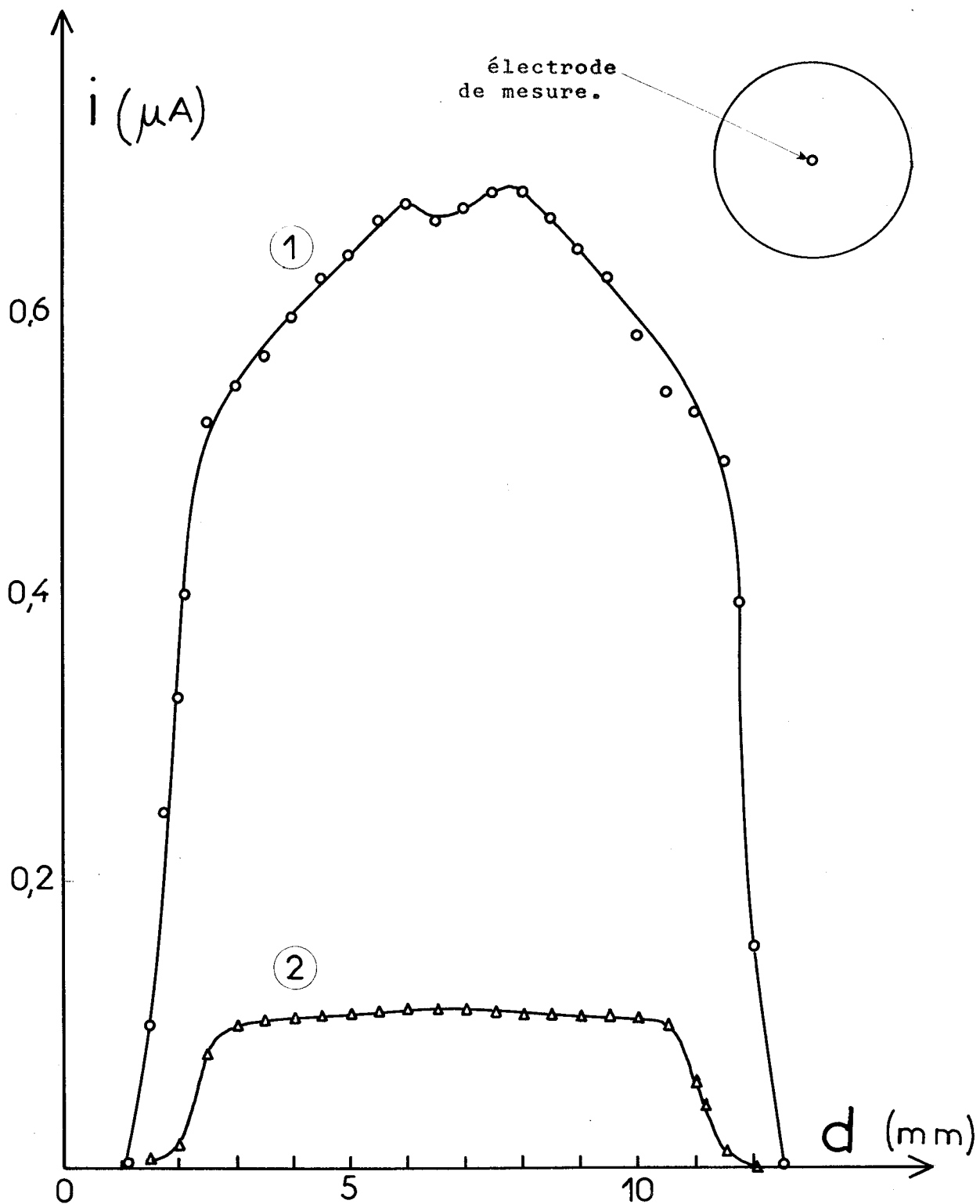


Figure 35 : Courant recueilli par une électrode de 0,7 mm de diamètre. Variations sur le diamètre du faisceau

① Tension $U = 20 \text{ kV}$; écartement : 15 mm

② Tension $U = 30 \text{ kV}$; écartement : 20 mm.

T A B L E A U IV

Détermination de r d'après la relation (18) et comparaison avec les valeurs du diamètre des tâches.

Mobilité $K = 3 \text{ cm}^2/\text{V.s}$

$L(\text{mm})$	$U(\text{kV})$	$\bar{E}(\text{kV/cm})$	$I(\mu\text{A})$	$r(\text{mm})$	ϕ tache (mm)	$\tau = \frac{2r}{\phi}$
9	14	15,6	60	5,15	9,5	1,08
14	21	15	44	5,73	11	1,04
19	28	14,75	41	6,55	12	1,09
19,3	29	15	24	4,96	9,5	1,04
24	35	14,6	38	7,15	12,5	1,14
24,3	38	15,6	29	5,90	11,5	1,03
29	42	14,5	37	7,82	14	1,12
29,3	45	15,4	28	6,45	12,5	1,03
34,3	49	14,3	19	6,18	12,5	0,99

Mobilité $K = 4 \text{ cm}^2/\text{V.s}$

19	34	17,9	100	7,3	14	1,04
24	42,5	17,7	80	7,42	15,5	0,96

Soit sur l'électrode émettrice une zone d'émission d'aire dS_0 et prenons le volume $\Omega_0 = dS_0 \times d\ell_0$, de la tranche d'épaisseur $d\ell_0$; on a :

$$N_0 = \frac{q_0 \Omega_0}{e}$$

Faisons l'approximation suivante : $H(x) = C^{te}$ dans le faisceau situé entre les deux électrodes planes et parallèles ; on obtient :

$$\begin{aligned} t &= \frac{x}{KE} \quad , \quad d\ell(x) = d\ell_0 \\ \Omega &= \Omega_0 + \frac{q_0 \Omega_0 x}{\epsilon E} \\ (16) \quad dS &= dS_0 + \frac{q_0 dS_0}{\epsilon E} x \end{aligned}$$

Nous allons faire une seconde approximation, d'autant moins valable que dS_0 est plus petit : on suppose que le volume d'épaisseur $d\ell_0$ se déforme assez peu au cours du déplacement des N_0 ions et reste compris entre 2 plans. Pour un faisceau de révolution on obtient :

$$(17) \quad r = (r_0^2 + \frac{q_0 r_0^2}{\epsilon E} x)^{1/2}$$

On peut donner une autre expression, en introduisant le courant total ; d'après les approximations faites :

$$\begin{aligned} I &= K q_0 E \pi r_0^2 \\ \text{d'où :} \\ (18) \quad r &= (r_0^2 + \frac{I}{\pi \epsilon K E} x)^{1/2} \end{aligned}$$

Cette relation donne la forme générale du faisceau.

d) Résultats expérimentaux

Le dispositif utilisé est constitué de deux électrodes planes et parallèles distantes de 1 à 3 cm environ ; une pointe aiguisée dépasse la surface de l'électrode négative de 0.5 à 1 mm. Dans une gamme de tension convenablement choisie, la décharge par effet couronne apparaît sur la pointe seule sans qu'il y ait claquage. Une expérience préliminaire a mis en évidence l'apparition, sur l'électrode réceptrice en laiton, d'une tache brunâtre circulaire très nettement délimitée (cf. Planche II).

L'insertion dans cette électrode de sondes circulaires de faible diamètre a permis de mesurer la répartition de densité de courant grâce à l'utilisation d'un déplacement latéral ne perturbant pas la décharge. Les résultats des mesures (Fig. 35) montrent que la densité de courant est presque constante dans la "tache" et qu'elle diminue brutalement d'au moins deux ordres de grandeur lorsqu'on sort du faisceau. Ceci démontre expérimentalement l'existence du faisceau délimité de façon très nette et transportant pratiquement tout le courant.

Cette conclusion est confirmée par la visualisation du faisceau. En effet, le champ moyen entre les électrodes étant au moins de 15 kV/cm, il se produit des phénomènes d'ionisation par choc et de recombinaison qui engendrent un faible rayonnement non seulement au voisinage de la pointe mais également dans presque tout le faisceau ce qui le rend aisément visible (voir les photos des planches II et III). La forme précise des faisceaux ainsi visualisés est en accord qualitatif avec la relation (18). De plus, cette relation permet d'obtenir une bonne estimation de la valeur du diamètre de la tache comme on peut le voir sur le tableau IV.

Une autre caractéristique intéressante de ce faisceau est sa très grande stabilité. Le courant de décharge est très stable dans le temps ; il n'y a pas de fluctuations à très basse fréquence et les pulsations de Trichel sont assez peu marquées (voir planche IV).

P L A N C H E III

Vues du faisceau ($U = 30 \text{ kV}$, $D = 20 \text{ mm}$)

T : Temps de pause

T = 1 min.



T = 3 min.



Vue de la tache. Après un temps de décharge ~ 2 minutes (tache 1), on a déplacé l'électrode dans son plan jusqu'à ce que le courant recueilli s'annule de nouveau (tache 2)

1

2

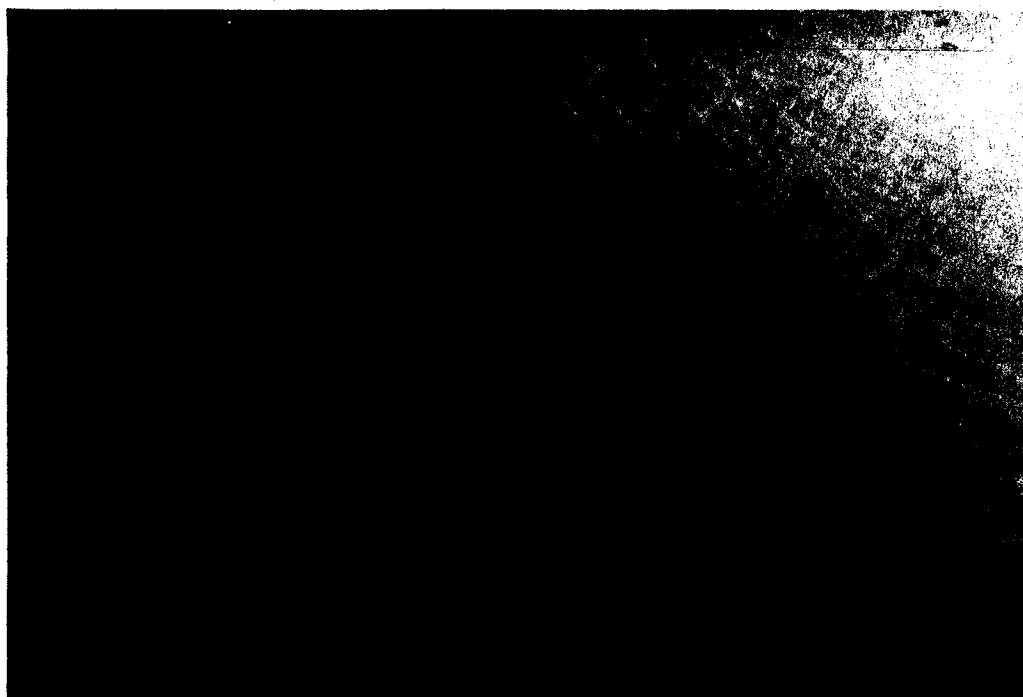
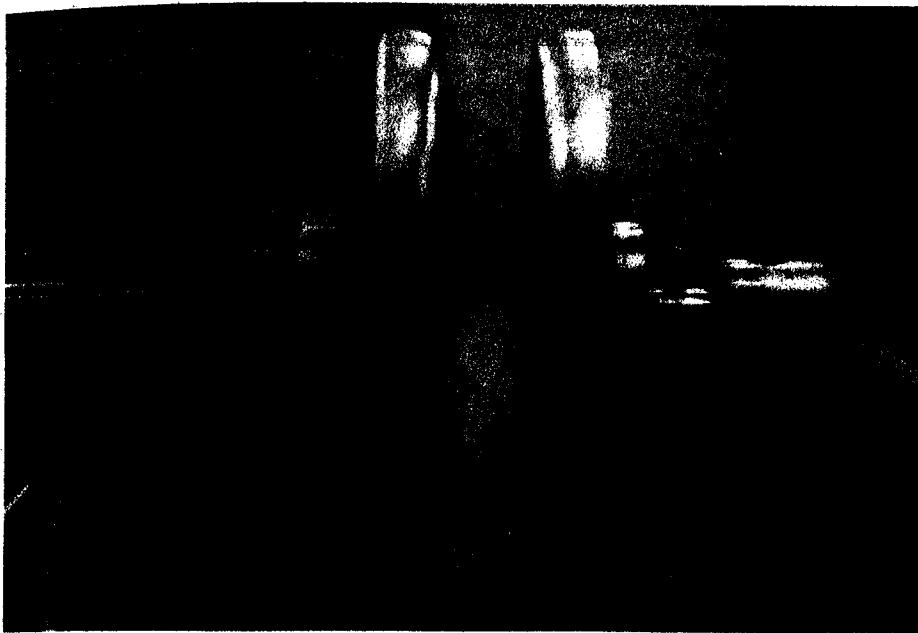
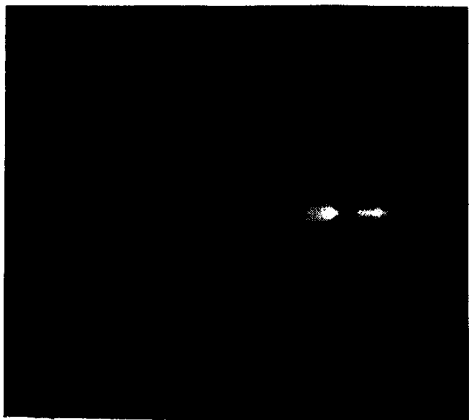


PLANCHE II



Dispositif
expérimental

Vues du faisceau et de la tache sur l'électrode réceptrice ($U = 20$ kV,
 $D = 15,5$ mm)

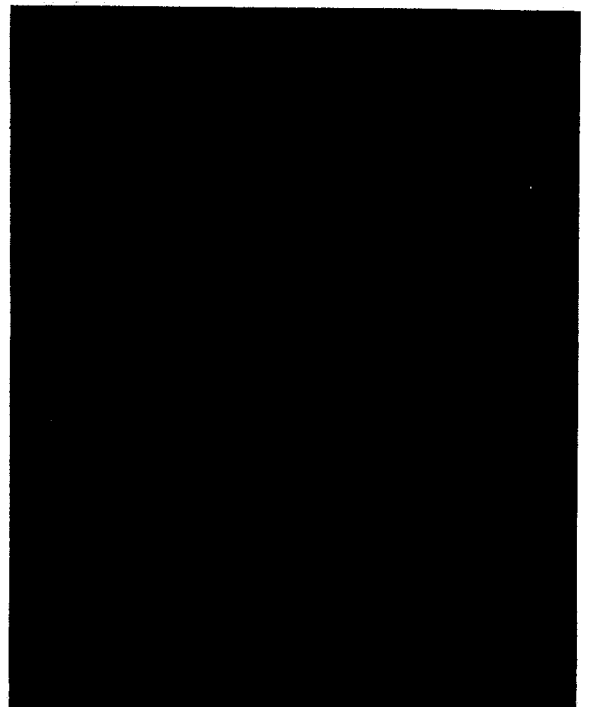


$T =$ Temps
de pause

$T = 30$ sec.

$T = 3$ min.

Tache



Nous avons étudié la stabilité de la forme du faisceau en plaçant une sonde de l'électrode réceptrice sur la frontière du faisceau ; un déplacement latéral provoque de fortes variations du courant reçu. Par contre pour une position donnée, les fluctuations dans le temps sont très faibles, quelle que soit la fréquence envisagée ($\leq 10^6$ Hertz). On peut déduire des oscillogrammes de la planche (IV) ainsi que des photographies du faisceau que les fluctuations de la forme et des dimensions des faisceaux sont très faibles ; ainsi $\Delta R(1)/R(1) \leq 0,01$.

Cette expérience met en évidence l'existence de faisceaux parfaitement individualisés et apparemment très peu perturbés par le mouvement de l'air. Bien que cette étude soit très succincte et qu'en particulier nous n'ayons pas examiné le problème de la stabilité aérodynamique, il semble que les résultats amènent une conception plus nette en ce qui concerne la structure de la décharge couronne dans un cylindre par exemple. On peut concevoir un ensemble de faisceaux ayant leur origine en des sites d'aire très faible sur le fil émetteur, très étroits dans la direction parallèle à l'axe, mais très ouverts dans un plan perpendiculaire (ouverture en θ importante). Les dimensions de ces faisceaux pourraient varier dans le temps, en fonction de la quantité d'ions émis localement ; le mouvement de l'air est susceptible d'apporter des modifications mais celles-ci nous semblent peu importantes pour des tensions moyennes (voir § 5).

Remarque : Cette expérience montre de façon très nette que l'on peut négliger la diffusion pour des distributions discontinues de la densité de charge ; l'erreur introduite est tout-à-fait négligeable.

e) Interprétation.

Une des caractéristiques de ce faisceau consiste en ce que la charge d'espace est localisée de façon très nette ce qui suppose que la zone de création de charges est elle-même très bien délimitée. Nous avons d'ailleurs fait cette hypothèse dans les calculs dont les résultats sont reportés sur les figures 33 et 34.

Cette hypothèse constitue une bonne approximation de la réalité physique. En effet, l'examen de la figure 34, où la pointe a été schématisée, montre que le champ électrique diminue de façon très rapide lorsqu'on passe de l'extrémité de la pointe où le rayon de courbure est très faible, au plan $x = 0$. (la présence de la charge d'espace n'apporte qu'un changement minime à l'allure des variations de E). D'autre part, nous avons vu (chapitre I) que l'analyse du fonctionnement de la gaine bi-ionisée devrait conduire à la relation approchée (I-12):

$$q = f(Q, E) \qquad Q \in \Gamma_e$$

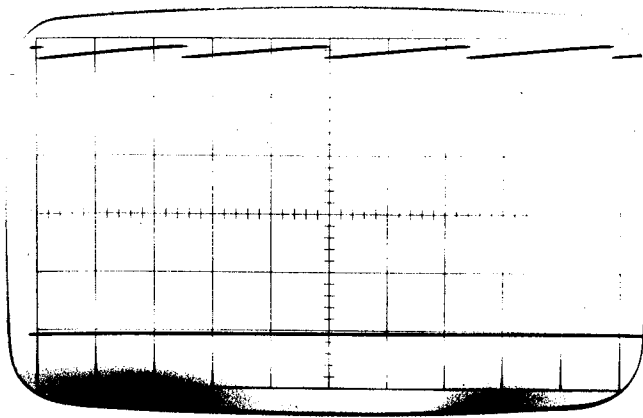
avec $\frac{\partial f}{\partial E}$ très grand pour des valeurs de E voisines du champ disruptif. La variation rapide de E le long de la pointe entraîne une variation encore plus rapide de la densité des charges "émises".

Il est alors possible d'interpréter les résultats de la mesure de la densité de courant sur le plan récepteur (Fig. 35). En déduisant la contribution due au diamètre de l'électrode de mesure ($\emptyset = 0,7$ mm) on peut estimer à 0,5 mm environ la distance sur laquelle la densité de charge passe de $q \approx q_{\max}$ à $q \leq q_{\max}/100$. Cette couronne étroite sur le plan récepteur peut être considérée comme l'image de la zone de transition qui limite latéralement la gaine bi-ionisée au voisinage de la pointe.

On peut remarquer que l'on obtient une transition beaucoup moins nette dans la configuration pointe-plan ; le champ électrique le long de la pointe décroît moins rapidement et la forme des lignes de force provoque un élargissement beaucoup plus prononcé ; ainsi, sur la Fig. 32, le "faisceau" atteint un rayon $\approx 2,4$ sur le plan récepteur, pour $\beta = 0,4$.

PLANCHE IV

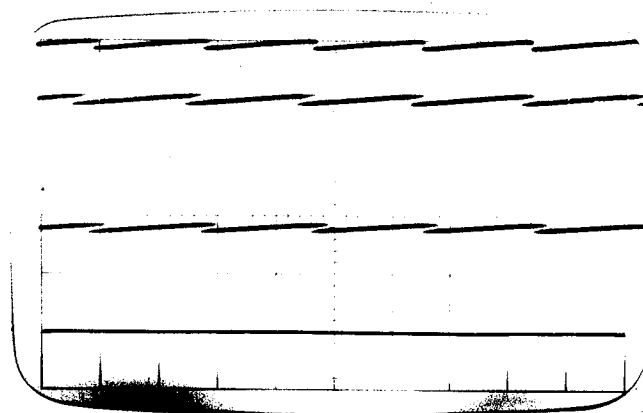
Courant recueilli par l'électrode de mesure ($\phi=0,7\text{mm}$)



Sur l'axe de révolution

En dehors du faisceau

$X=2\ \mu\text{s/cm}$ $Y=0,1\ \mu\text{A/cm}$



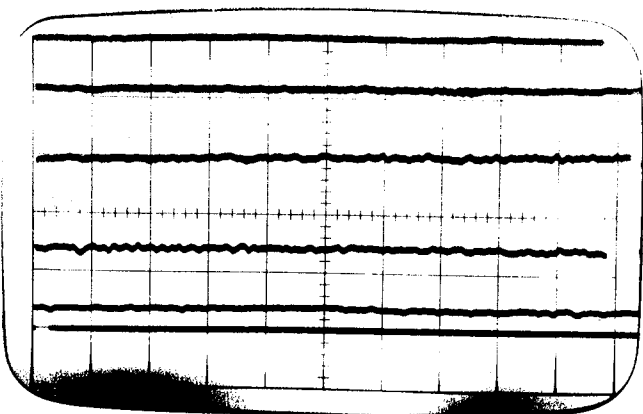
$x = 2\text{ mm}$

$x = 1\text{ mm}$

$x = 0,5\text{ mm}$

En dehors du faisceau $x=0$

$X=2\ \mu\text{s/cm}$ $Y=0,1\ \mu\text{A/cm}$



$x = 1,25\text{ mm}$

$x = 1\text{ mm}$

$x = 0,75\text{ mm}$

$x = 0,5\text{ mm}$

$x = 0,25\text{ mm}$

En dehors du faisceau $x=0$

$X=0,5\ \mu\text{s/cm}$ $Y=0,1\ \mu\text{A/cm}$

Tension $U = 19\text{ kV}$

Distance $L = 15\text{ mm}$

V - REMARQUES CONCERNANT LE MOUVEMENT DE L'AIR.

a) Problème.

Dans tout ce travail, une des hypothèses fondamentales concerne la mobilité des ions qui est supposée constante ; on admet alors implicitement que le milieu dans lequel les ions migrent est au repos. Or le champ exerce une force qE ; dès que cette force a un rotationnel non nul, un gradient de pression ne suffit plus à l'équilibrer et un mouvement apparaît (par exemple le vent électrique).

Des expériences récentes [47, 48, 49] ont mis en évidence le comportement des liquides soumis à une injection unipolaire et ont montré que le mouvement du liquide apporte une contribution essentielle à la conduction ; on peut parler d'une mobilité "hydrodynamique" des charges très supérieure à la mobilité vraie déterminée par voie électrochimique. FELICI [57] a montré que cette mobilité, de la forme :

$$(19) \quad K_H = \gamma(\epsilon/\rho)^{1/2} \quad \gamma : \text{constante}$$

est très faible dans le cas des gaz, en comparaison des mobilités ioniques normales ; ce fait peut alors expliquer le peu d'influence qu'a le mouvement d'un gaz sur les ions qui le traversent.

Nous nous proposons d'examiner si nos expériences peuvent apporter une contribution au problème de l'entraînement des ions par un gaz, et si le fait de négliger le mouvement de l'air constitue une approximation valable.

b) Configuration fil entre plans parallèles.

Dans l'examen du § 2 nous n'avons pas étudié le problème de l'influence du mouvement de l'air.

Soit $\vec{v}$ la vitesse du fluide ; la densité de courant s'écrit :

$$(20) \quad j = q(K_E + \vec{v})$$

Pour des vitesses relativement faibles, le gaz peut être considéré comme incompressible ; donc $\text{div } \mathcal{V} = 0$. La conservation du courant conduit à l'équation :

$$(21) \quad q^2/\epsilon + (E + \frac{\mathcal{V}}{K}) \cdot \text{grad } q = 0$$

On peut remarquer que l'effet d'un entraînement des ions par le gaz, dans le sens de la force qE , se traduit par une atténuation de la décroissance de la densité de charge ; dans le cas de la décroissance exponentielle en $e^{-\lambda x}$, λ prend des valeurs plus faibles.

Admettons que l'on puisse parler d'une mobilité "aérodynamique", c'est-à-dire que le mouvement de l'air ait une structure telle que la contribution qu'il apporte à la convection résultante des charges soit proportionnelle au champ E :

$$\bar{\mathcal{V}} = K_A E$$

En remplaçant $\mathcal{V}$ par cette valeur dans l'équation, on obtient :

$$(22) \quad (\Delta V)^2 + \alpha \text{ grad } V \cdot \text{grad } \Delta V = 0$$

avec $\alpha = 1 + \frac{K_A}{K}$; observons que cette équation n'est pas rigoureuse car on a remplacé $\mathcal{V}$ avec $\text{div } \mathcal{V} = 0$ par une expression n'ayant pas cette propriété. Néanmoins (22) doit nous fournir une approximation permettant d'évaluer l'ordre de grandeur de l'influence de la mobilité aérodynamique K_A . L'équation (22) a été résolue par la même méthode que l'équation (I-2) ($\alpha = 1$) pour cette configuration. On obtient des résultats analogues : pour $x > \pi$, la solution tend vers une solution saturée décroissant de façon exponentielle ; le décrement varie sensiblement avec α (calculs effectués avec $h = \pi/12$) :

α	1	1,10	1,15	1,20	1,25
λ	0,677	0,659	0,650	0,642	0,634

Les valeurs de λ déduites de l'étude expérimentale de la configuration fil entre 2 plans parallèles, sont comprises entre 0,64 et 0,69 (voir § 2). Une estimation de la moyenne de ces valeurs conduit à :

$$\bar{\lambda}_{\text{exp}} \geq 0,655 \quad \frac{\lambda - \bar{\lambda}_{\text{exp}}}{\lambda} \leq 0,03$$

ce qui donne une indication sur le peu d'importance qu'a l'entraînement des charges par l'air dont le mouvement est induit par la force qE . Si l'on admet que la différence entre $\bar{\lambda}_{\text{exp}}$ et la valeur précise $\lambda = 0,6738$ est due entièrement à l'entraînement de l'air, on obtient :

$$(23) \quad K_A \leq K/10 \approx 0,18 \text{ cm}^2/\text{V}.\text{sec}.$$

Cette borne de K_A est supérieure à celle obtenue par FELICI [57] :

$$(24) \quad K_A \leq 0,07 \text{ cm}^2/\text{V}.\text{sec}.$$

Ceci n'a rien de surprenant car nous avons minoré $\bar{\lambda}_{\text{exp}}$ assez grossièrement.

Compte tenu des différentes causes d'erreurs possibles (discutées § 2), il apparaît que les résultats de l'étude expérimentale dans la configuration fil entre deux plans parallèles confirment le fait que l'entraînement résultant du mouvement de l'air est faible. De plus, l'évaluation de la borne de K_A (23) donne une valeur du même ordre de grandeur que celle de la relation (24) et apporte une confirmation des conceptions de FELICI concernant l'importance de la notion de mobilité hydrodynamique pour comprendre la différence de comportement des diélectriques gazeux et liquides lorsqu'il existe une charge d'espace [57].

On peut encore faire une remarque. En reprenant l'inégalité (24), l'évaluation de la borne inférieure de λ' donne :

$$(25) \quad 0,667 < \lambda' < 0,6738$$

on a alors $(\lambda - \lambda')/\lambda \leq 0,01$; on peut donc estimer théoriquement à 1 % environ l'erreur sur le décrément λ' lorsqu'on assimile la solution de (I-2) à la solution tenant compte de l'entraînement de l'air. On voit d'autre part que le système fil entre 2 plans permettrait, en théorie, de mettre en évidence l'effet d'entraînement de l'air et d'évaluer K_A ; il faudrait alors être capable de mesurer λ' avec une très grande précision (de l'ordre de 10^{-3}) ce qui apparaît impossible tant qu'on utilise la décharge couronne comme moyen de création des charges.

c) Système pointe entre deux plans.

Dans l'étude du paragraphe 4, nous avons vu que l'on peut obtenir une décharge sous la forme d'un faisceau très stable. Dans ce cas, il est évident que l'air ne peut pas rester immobile ; mais il n'est pas facile de savoir a priori si l'écoulement gazeux est laminaire ou turbulent. Les observations que nous avons faites concernant la grande stabilité du faisceau peuvent être interprétées de 2 façons différentes.

En supposant d'abord que l'écoulement gazeux est laminaire, dans les conditions de l'étude expérimentale, cet écoulement serait stable. Ceci n'apparaît pas invraisemblable ; en effet, l'examen de la stabilité hydrodynamique d'un fluide isolant soumis à une injection unipolaire donne, dans l'hypothèse d'une injection très forte, le critère (cf. [58]) :

$$(26) \quad U_c = 161 \frac{K\eta}{\epsilon}$$

U_c étant la tension critique et η la viscosité.

Si pour les liquides on obtient des tensions critiques très faibles (par exemple $U_c \approx 20$ Volts. pour le nitrobenzène, $U_c \approx 200$ à 300 Volts pour les liquides isolants non polaires), dans le cas des gaz comme l'air, on a :

$$U_c \approx 60 \text{ kV.}$$

Lorsque la densité de charge n'est plus très forte, cette tension critique peut facilement doubler ou tripler.

Ce résultat montre que les gaz sont beaucoup plus stables (pour ce problème particulier) que les liquides ; on peut traduire ce fait différemment en disant que l'interaction entre les charges et le milieu fluide est beaucoup plus faible dans un gaz que dans un liquide.

En revenant au problème de la stabilité du faisceau, on voit qu'il est concevable que celle-ci résulte de l'existence d'un écoulement laminaire stable de l'air (si le milieu fluide était un liquide, ceci ne serait pas possible).

Examinons maintenant l'autre hypothèse, celle d'un écoulement turbulent et remarquons d'abord, que dans la zone qui limite le faisceau, la densité de charge décroît rapidement de sorte que le rotationnel de la force

$$\text{rot } F = \text{rot}(qE) = E \wedge \text{grad } q$$

prend des valeurs très importantes (E et $\text{grad } q$ sont sensiblement orthogonaux). Ce fait apparaît propice à la création d'un écoulement turbulent du gaz.

Pour interpréter dans ce cas l'observation d'un faisceau bien stable, il faut admettre que l'air, dans son mouvement, n'entraîne pratiquement pas les charges, que ce soit dans les directions parallèle ou perpendiculaire au champ E . Comme l'influence de la turbulence devrait se traduire par une "diffusion" et, par conséquent, un élargissement de la zone de transition entre l'intérieur ($q \approx q_{\text{max}}$) et l'extérieur ($q \approx 0$) du faisceau et comme l'épaisseur de cette zone semble suffisamment faible pour pouvoir s'expliquer par les caractéristiques de la répartition $g(Q)$ sur la pointe (voir § 4-e), l'existence de la turbulence ne peut se concevoir que si les vitesses de l'air sont bien plus faibles que la vitesse des ions ($v_{\text{ions}} \geq 300 \text{ m/s}$ pour $E = 15 \text{ kV/cm}$).

Il faudrait une étude plus poussée pour déterminer quelle est la structure de l'écoulement de l'air. Il n'est cependant pas nécessaire d'attendre une telle étude pour dégager la propriété principale (quelle que soit la nature de l'écoulement gazeux) : l'entraînement de l'air exerce une influence minime.

d) Conclusion

Les remarques de ce paragraphe montrent que le mouvement du milieu gazeux joue un rôle tout-à-fait mineur et qu'il peut être négligé dans le problème du champ électrique affecté par un flux permanent d'ions identiques.

Alors que dans l'étude du système fil entre 2 plans, on n'a fait intervenir que la mobilité aérodynamique, il est probable qu'il faille tenir compte d'autres facteurs pour expliquer la "stabilité" du faisceau. En particulier d'après (26) la viscosité du gaz doit jouer un rôle.

CONCLUSION

Au cours de ce travail, nous avons obtenu des résultats qui nous donnent une connaissance très précise des solutions de l'équation du champ électrique affecté par un flux permanent d'ions identiques.

L'étude mathématique a permis de montrer l'existence et l'unicité de la solution de l'équation régissant le problème dans le cas des faibles densités et d'établir que, dans ce cas, le problème est correctement posé. Ce résultat confirme la justesse des vues de FELICI concernant la nécessité de substituer, à une condition relative au champ, la donnée de la densité volumique de charges sur l'électrode émettrice. Compte tenu des résultats du chapitre IV, il apparaît improbable que, dans le cas général, lorsque les valeurs de la densité de charge ne sont plus limitées, l'étude amène une remise en cause de nos conclusions concernant la formulation du problème.

Un autre résultat d'une grande importance consiste en la mise au point de méthodes générales de résolution. Bien que la justification mathématique n'ait pu être fournie que pour une configuration particulière, il est probable que les propriétés dégagées au chapitre IV sont générales et caractéristiques du problème. La méthode utilisée pour obtenir la solution approchée par voie numérique n'a jamais été mise en défaut, même pour des problèmes complexes, comme ceux faisant intervenir une sonde, et a permis de résoudre le problème dans des configurations pour lesquelles seules des approximations grossières étaient proposées.

Le troisième point important concerne la méthode expérimentale de sonde. L'étude théorique a permis de montrer de quelle façon la présence de la charge d'espace modifie le fonctionnement de la sonde tel qu'il est décrit par la théorie de DUPUY [11]. L'étude expérimentale ayant confirmé les prévisions,

on dispose ainsi d'un moyen d'investigation permettant de déterminer non seulement le potentiel d'espace mais aussi la densité de charge d'espace avec une précision d'au moins 10 %. Ce résultat est intéressant car la détermination de cette dernière grandeur a très rarement été tentée dans les problèmes de décharges couronne.

Enfin, la discussion du problème du mouvement de l'air a permis de confirmer une observation générale n'attribuant qu'une très faible influence à l'entraînement de l'air. L'hypothèse consistant à négliger le mouvement du milieu gazeux apparaît ainsi légitime.

A la suite de notre travail, on dispose d'une méthode de résolution numérique et d'une technique de mesure donnant une connaissance précise des distributions du potentiel, du champ et de la densité de charge. En dehors de l'application à des configurations diverses (par exemple problèmes d'effet couronne dans les gaz ou d'injection dans un semi-conducteur), il existe deux domaines dans lesquels nos résultats sont susceptibles d'apporter des développements.

Le premier domaine regroupe tous les problèmes concernant les diélectriques où l'on crée une charge d'espace. Rappelons le travail déjà cité [33] où la notion de formulation correcte a permis d'étendre un calcul de MANY et RAKAVY [62], ce qui s'est révélé fructueux dans le développement de la connaissance des propriétés des liquides. Mentionnons également l'étude de la stabilité hydrodynamique d'un fluide diélectrique isolant soumis à une injection unipolaire [58], étude au cours de laquelle la méthode de résolution générale a été utilisée.

Ces deux exemples montrent que les problèmes dans lesquels les résultats mathématiques peuvent intervenir sont multiples et sont susceptibles de se rapporter à des chapitres variés de la physique. On peut donner quelques indications concernant les problèmes d'injection ambipolaire avec éventuellement

une recombinaison et même une dissociation. D'après quelques calculs préliminaires, il semble que la méthode de résolution soit transposable à ces problèmes et permette d'envisager l'étude précise de systèmes bi-ionisés (comme par exemple une ligne de transport d'énergie en courant continu).

Le second domaine concerne l'étude du mouvement de l'air en liaison avec la connaissance précise de la répartition des charges. La première expérience intéressante consisterait à observer la stabilité totale, c'est-à-dire l'immobilité de l'air compris entre les deux plans ; il faut pour cela qu'une électrode assure une émission homogène et non localisée en plusieurs points (cas d'un plan muni de nombreuses pointes), ce qui conduirait alors à des faisceaux bien individualités provoquant un mouvement de l'air. On peut envisager d'autres expériences faisant intervenir une circulation forcée d'air pour examiner de façon plus précise certaines caractéristiques du mouvement.

Indiquons pour terminer qu'il est probable que la détermination de solutions par nos méthodes permettra d'aborder certains problèmes d'électro-aérodynamique et d'électrohydrodynamique.

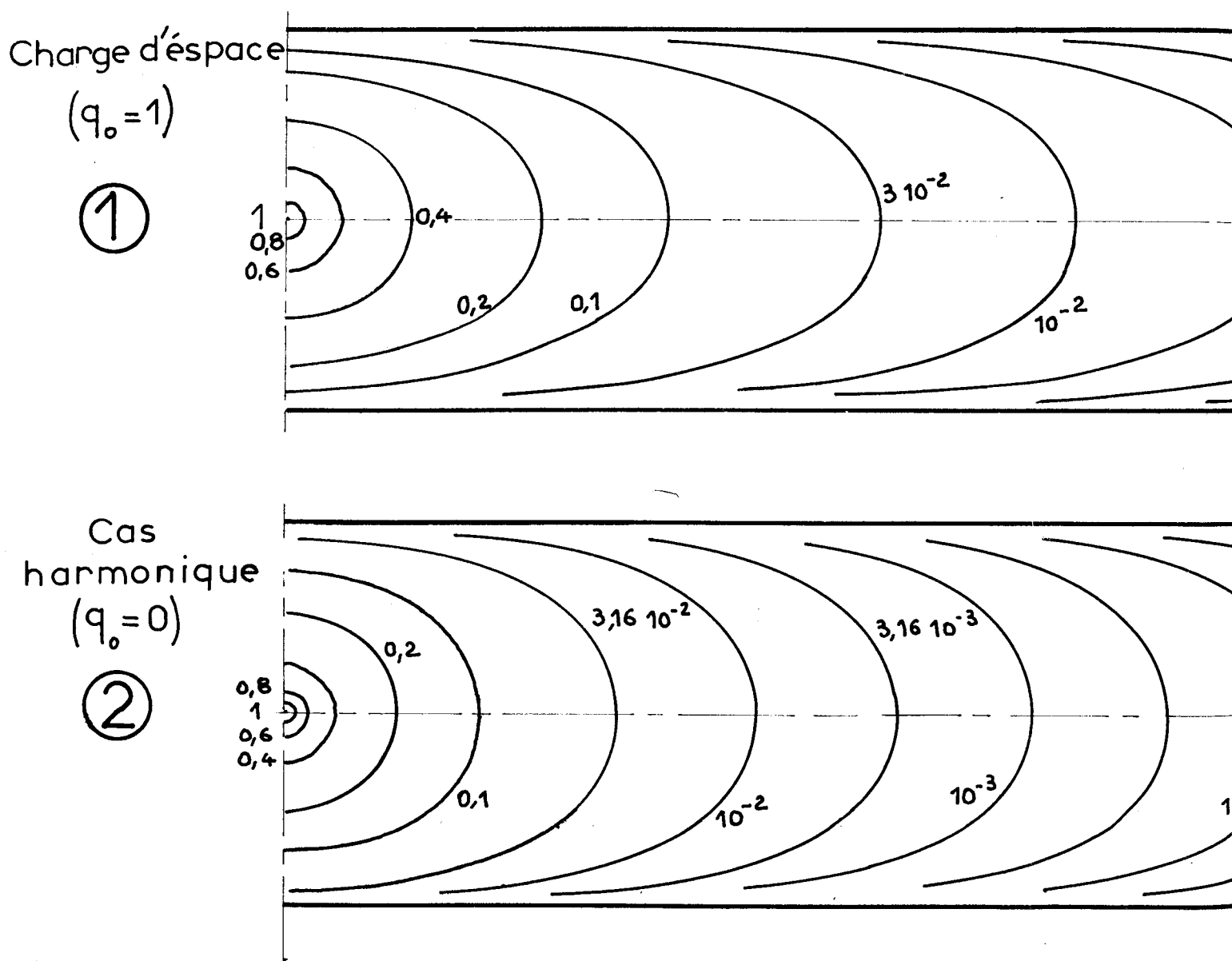
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] RAETHER Electron avalanches and breakdown in gases. Butterworths (1964).
- [2] R.B. SCHILLING, H. SCHACHTER - J. Appl. Phys. 38, 841 (1967).
- [3] N. FELICI C.R. Acad. Sci. 255, 1703 (1962)
- [4] N. FELICI C.R. Acad. Sci. 255, 3377 (1962)
- [5] N. FELICI C.R. Acad. Sci. 256, 3254 (1963).
- [6] N. FELICI C.R. Acad. Sci. 259, 2967 (1964).
- [7] N. FELICI Dir. Cur. 9, 252 (1963).
- [8] N. FELICI Dir. Cur. 10, 278 (1963).
- [9] J.S. TOWNSEND - Phil. Mag. 28, 83, (1914).
- [10] R. COCHET C.R. Acad. Sci. 240, 2387 (1955).
- [11] J. DUPUY R.G.E. 67, 85, (1958).
- [12] O. MAYR Arch. Elektr. 18, 270, (1927).
- [13] W. DEUTSCH Ann. Phys. 16, 588 (1933).
- [14] L.I. PROKOPOVICH - Zh. Tekh. Fiz. 36, 2118 (1966).
- [15] V.I. POPKOV - Elektrichestvo 1, 33, (1949).
- [16] J. DUPUY C.R. Acad. Sci. 244, 1737 (1957).
- [17] J. DUPUY C.R. Acad. Sci. 242, 2309 (1956).
- [18] W. DEUTSCH Phys. Z. 34, 448 (1933).
- [19] A.V. VOROBEEV - N.N. TIKHODEEV - Zh. Tekh. Fiz. 26, 759 (1956).
- [20] A.V. VOROBEEV - N.N. TIKHODEEV - Zh. Tekh. Fiz. 26, 767 (1956).
- [21] L.V. EGOROVA - N.N. TIKHODEEV - Zh. Tekh. Fiz. 28, 886 (1958).

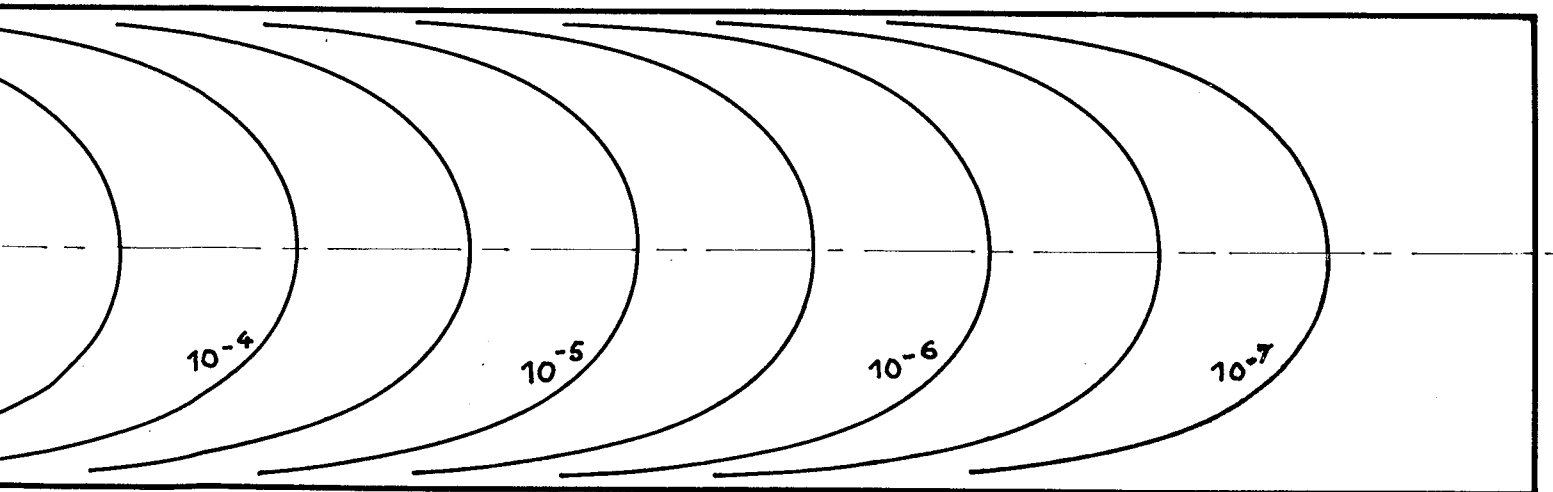
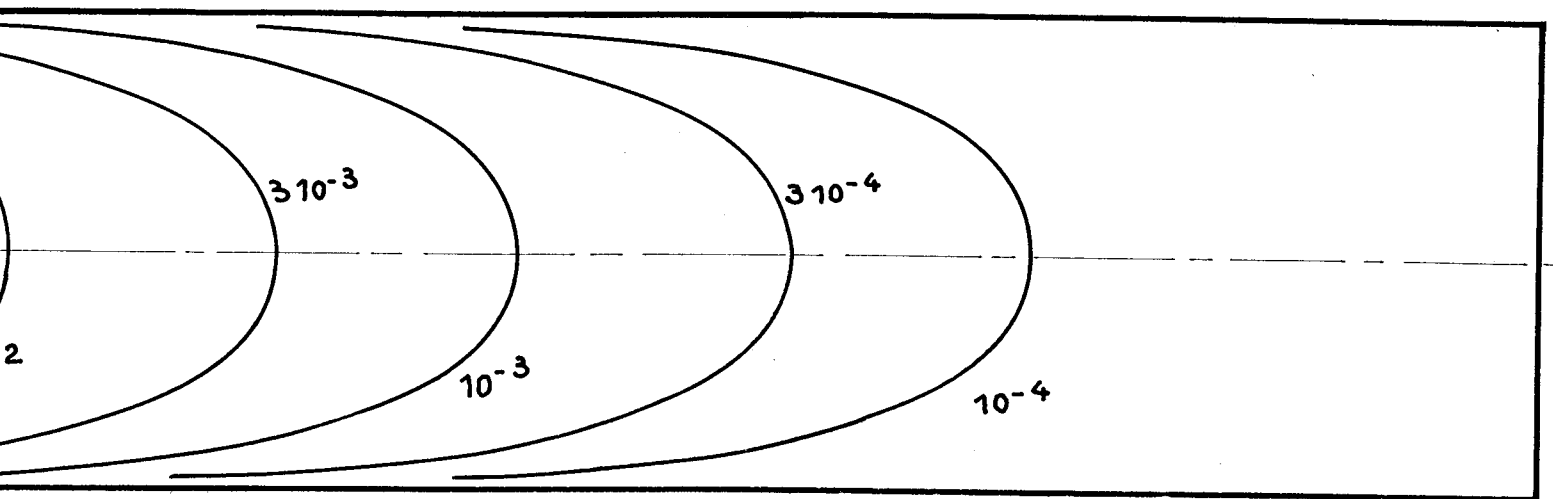
- [22] J. BERSEILLE Diplôme Ingénieur C.N.A.M. Pau, Janvier 1969.
- [23] N.N. TIKHODEEV Zh. Tekh. Fiz. 26, 2518 (1956).
- [24] L.E. CYRLIN Zh. Tekh. Fiz. 27, 1587 (1957).
- [25] L.E. CYRLIN Zh. Tekh. Fiz. 26, 2524 (1956).
- [26] L.E. CYRLIN Zh. Tekh. Fiz. 29, 563, (1959).
- [27] P. COOPERMAN I.E.E.E. Trans. N° 3, 47, (1960).
- [28] R. COURANT, D. HILBERT Methods of Mathematical Physics.
Vol. II Interscience Publishers (1962).
- [29] C.W. RICE Phys. Rev. 70, 228, (1946).
- [30] M. SILVER, D.G. ONN, P. SMEJTEK, K. MASUDA
Phys. Rev. Letters 19, 626 (1967).
- [31] G. BRIERE, J.P. GOSSE, J. Chim. Phys. 65, 725, (1968).
- [32] A. MANY, S.Z. WEISZ, M. SIMHONY - Phys. Rev. 126, 1989 (1962).
- [33] P. ATTEN, J.P. GOSSE J. Chem. Phys. (à paraître).
- [34] M.N. GUSHCHIN Radiotekh. i Elektron. S.S.S.R. 11, 2024 (1966).
- [35] G.N. ALEKSANDROV, N.N. TIKHODEEV - Zh. Tekh. Fiz. 27, 410, (1957).
- [36] V.I. POPKOV Zh. Tekh. Fiz. 27, 413 (1957).
- [37] L.E. CYRLIN Zh. Tekh. Fiz. 27, 417 (1957).
- [38] M.M. LAURENTIEFF Some improperly posed problems of Mathematical
Physics.
Springer-Verlag N. York (1967).
- [39] G.E. FORSYTHE, W.R. WASOW - Finite difference methods for partial differen-
tial equations.
J. Wiley & Sons, Inc. N.York(1960).
- [40] R.S. VARGA Matrix Iterative Analysis.
Prentice Hall, Inc. (1962).
- [41] N. GASTINEL Iterations, Méthodes discrètes. Fac. Sci. Grenoble (1966)
- [42] E.H. ZARANTONELLO Solving functional equations by contractive averaging.
Math. Research. Center. Univ. of Wisconsin. Madison
T.S. Rep. n° 160 June (1960).

- [43] M.A. KRASNOSELSKII Topological methods in the theory of non linear integral equations.
Pergamon Press. Oxford (1964).
- [44] W. JANISCHEWSKY, M.P. SARMA - I.E.E.E. Trans. Power Apparatus and Systems. 88, 718, (1969).
- [45] Z. CROITORU Bull. S.F.E. 1, 362, (1960).
- [46] G. BRIERE, J.P. GOSSE J. Chim. Phys. 65, 1341 (1968).
- [47] J.P. GOSSE Thèse de Doctorat - Grenoble (1969).
- [48] J.C. FILIPPINI, J.P. GOSSE, J.C. LACROIX, R. TOBOZEON
C.R. Acad. Sci. 269 B, 167. (1969).
- [49] J.C. FILIPPINI, J.P. GOSSE, J.C. LACROIX, R. TOBOZEON
C.R. Acad. Sci. 269B, Oct. (1969)
- [50] J.S.T. LOOMS Proc. 4th Intern. Conf. I.P.G. 333, (1959).
- [51] N. SEMENOFF, A. WALTER Zeit.Phys. 1, 67 (1923).
- [52] Y. GOSHO Sci. Papers I.P.C.R. 61, 7, (1967).
- [53] G.W. PENNEY, R.E. MATICK - I.E.E.E. Trans. 91, (1960).
- [54] E. DURAND Electrostatique, tome II, Masson et Cie PARIS (1964).
- [55] R. CHALLANDE Thèse de Doctorat, Paris (1955).
- [56] N. FELICI Communication personnelle.
- [57] N. FELICI R.G.E. 78, 717 (1969).
- [58] P. ATTEN, R. MOREAU C.R. Acad. Sci. (à paraître).
- [59] A.G. LYAPIN Zh. Tekh. Fiz. 33, 576 (1963).
- [60] R. COCHET, R. REFFAY C.R. Acad. Sci. 240, 1516 (1955).
- [61] I.I. BALOG, Kh. A. DZHERPETOV - Zh. Tekh. Fiz. 28, 1263 (1958).
- [62] A. MANY, G. RAKAVY Phys. Rev. 126, 1981 (1962).

Figure 20. Réseaux d'équipotentiels pour la configu



a configuration fil entre 2 plans parallèles



N° d'ordre

THESE

présentée

A LA FACULTE DES SCIENCES DE L'UNIVERSITE DE GRENOBLE

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR ES SCIENCES PHYSIQUES

par

Pierre ATTEN

////////////////

DEUXIEME THESE

Les forces en électrohydrodynamique

////////////////

soutenue le 12 novembre 1969. devant la Commission d'examen

MM. L. NEEL

Président

N. FELICI

Examinateur

N. GASTINEL

Examinateur

VU

Grenoble, le

Le Président de la Thèse

VU

Grenoble, le

Le Doyen de la Faculté des Sciences

Vu, et permis d'imprimer,

Le Recteur de l'Académie de GRENOBLE

•