



HAL
open science

Méthodes de Runge-Kutta-Fehlberg

André Laplace

► **To cite this version:**

André Laplace. Méthodes de Runge-Kutta-Fehlberg. Modélisation et simulation. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1969. Français. NNT: . tel-00281625

HAL Id: tel-00281625

<https://theses.hal.science/tel-00281625>

Submitted on 23 May 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre

T H E S E

présentée à
LA FACULTE DES SCIENCES DE L'UNIVERSITE DE GRENOBLE

pour obtenir
LE GRADE DE DOCTEUR DE TROISIEME CYCLE
"Mathématiques Appliquées"

par

André LAPLACE

METHODES DE RUNGE-KUTTA, FEHLBERG

Thèse soutenue le 25 juin 1969, devant la Commission d'Examen :

Monsieur J. KUNTZMANN	Président
Messieurs G. HACQUES P.J. LAURENT	Examineurs

N° d'ordre

-T-H-E-S-E-

présentée à
LA FACULTE DES SCIENCES DE L'UNIVERSITE DE GRENOBLE

pour obtenir
LE GRADE DE DOCTEUR DE TROISIEME CYCLE
"Mathématiques Appliquées"

par

André LAPLACE

METHODES DE RUNGE-KUTTA, FEHLBERG

Thèse soutenue le 26 juin 1969, devant la Commission d'Examen :

Monsieur J. KUNTZMANN	Président
Messieurs G. HACQUES P.J. LAURENT	Examineurs

MAITRES DE CONFERENCES (suite)

Mme	BONNIER M.J.	Chimie
MM.	KAHANE A.	Physique Générale
	DOLIQUE J.M.	Electronique
	BRIERE G.	Physique M.P.C.
	DESRE G.	Chimie S.P.C.N.
	LAJZROWICZ J.	Physique M.P.C.
	VALENTIN P.	Physique M.P.C.
	BERTRANDIAS J.P.	Mathématiques Appliquées T.M.P.
	LAURENT P.J.	Mathématiques Appliquées T.M.P.
	CAUBET J.P.	Mathématiques Pures
	PAYAN J.J.	Mathématiques
Mme	BERTRANDIAS F.	Mathématiques Pures M.P.C.
	LONGEGUEUE J.P.	Physique
	NIVAT M.	Mathématiques Appliquées
	SOHM J.C.	Electrochimie
	ZADWORNY F.	Electronique
	DURAND F.	Chimie Physique
	CARLER G.	Biologie Végétale
	AUBERT G.	Physique M.P.C.
	DELPUECH J.J.	Chimie Organique
	PFISTER J.C.	Physique C.P.E.M.
	CHIBON P.	Biologie Animale
	IDELMAN S.	Physiologie Animale
	BOUVARD Maurice	Hydrologie
	RICHARD Lucien	Botanique
	PELMONT Jean	Physiologie Animale
	BLOCH D.	Electrotechnique I.P.
	BOUSSARD J. Claude	Mathématiques Appliquées I.P.
	MOREAU René	Hydraulique I.P.
	BRUGEL L.	Energétique I.U.T.
	SIBILLE R.	Construction Mécanique I.U.T.
	ARMAND Yves	Chimie I.U.T.
	BOLLIET Louis	Informatique I.U.T.
	KUHN Gérard	Energétique I.U.T.
	GERMAIN J.P.	Construction Mécanique I.U.T.
	CONTE René	Thermodynamique
	JOLY Jean René	Mathématiques Pures
Mme	PIERY Yvette	Biologie Animale
	BENZAKEN Claude	Mathématiques Appliquées

MAITRE DE CONFERENCES ASSOCIES

MM.	SAWCZUK A.	Mécanique des Fluides
	CHEEKE J.	Thermodynamique
	YAMADA O.	Physique du Solide
	NATR Lubomir	B.M.P.V.
	NAYLOR Arch	Physique Industrielle
	SILBER Léo	Radioélectricité
	NOZAKI Akihiro	Mathématiques Appliquées
	RUTLEDGE Joseph	Mathématiques Appliquées
	DONOHU Paul	Physique Générale
	EGGER Kurt	B.M.P.V.

PROFESSEURS TITULAIRES (suite)

MM.	KLEIN J.	Mathématiques
	VAILLANT F.	Zoologie et Hydrobiologie
	ARNAUD Paul	Chaire de Chimie
	SENGEL P.	Chaire de Zoologie
	BARNOUD F.	Chaire de Bioynthèse de la Cellulose
	BRISSONNEAU P.	Physique
	GAGNAIRE	Chaire de Chimie Physique
Mme	KOFLER L.	Botanique
	DEGRANGE Charles	Zoologie
	PEBAY-PEROULA J.C.	Physique
	RASSAT A.	Chaire de Chimie Systématique
	DUCCROS P.	Vhaire de Cristallographie Physique
	DODU Jacques	Chaire de Mécanique Appliquée I.U.T.
	ANGLES D'AURIAC P.	Mécanique des Fluides
	LACAZE A.	Thermodynamique

PROFESSEURS SANS CHAIRE

MM.	GIDON P.	Géologie et Mnéralogie
	GIRAUD P.	Géologie
	PERRET R.	Servomécanisme
Mme	BARBIER M. J.	Electrochimie
Mme	SOUTIF J.	Physique
	COHEN J.	Electrotechnique
	DEPASSEL R.	Mécanique des Fluides
	GASTINEL N.	Mathématiques Appliquées
	GLENAT R.	Chimie
	BARRA J. R.	Mathématiques Appliquées
	CÔUMES A.	Electronique
	PERRIAUX J.	Géologie et Minéralogie
	ROBERT A.	Chimie Papetière
	BIAREZ J. P.	Mécanique Physique
	BONNET G.	Electronique
	CAUQUIS G.	Chimie Générale
	BONNETAIN L.	Chimie Minérale
	DEPOMMIER P.	Etude Nucléaire et Génie Atomique
	HACQUES Gérard	Calcul Numérique
	POLOUJADOFF M.	Electrotechnique

PROFESSEURS ASSOCIES

MM.	NAPP-ZINN	Botanique
	RODRIGUES Alexandre	Mathématiques Pures
	STANDING Kenneth	Physique Nucléaire

MAITRES DE CONFERENCES

MM.	LANCIA Roland	Physique Atomique
Mme	KAHANE J.	Physique
	DEPORTES C.	Chimie
Mme	BOUCHE L.	Mathématiques
	SARROT-REYNAUD	Géologie Propédeutique

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance

à

Monsieur le Professeur J. KUNTZMANN, Directeur de l'Institut de Mathématiques Appliquées de l'Université de Grenoble, qui a bien voulu me faire l'honneur de présider le Jury.

Monsieur le Professeur G. HACQUES qui m'a proposé l'idée de ce travail et qui, tant par ses critiques et ses suggestions, en a dirigé l'élaboration. Qu'il en soit vivement remercié.

Monsieur P.J. LAURENT, Maître de Conférences qui a accepté de faire partie du Jury.

Je tiens aussi à remercier Melle BICAIS et Mme NEUMANN qui ont apporté le plus grand soin à la frappe de cette thèse, Monsieur MOUNET et le Service Tirages pour l'impression, ainsi que tous ceux qui m'ont aidé dans la réalisation de ce travail.

TABLE DES MATIERES

AVANT PROPOS.

PREMIERE PARTIE - EXPOSE GENERAL

CHAPITRE I - Methode de Fehlberg pour l'integration approchée d'un problème différentiel du 1° ordre avec condition initiale

I	Introduction	I-1
II	Transformation de Fehlberg. Equation différentielle transformée	I-2
III	Développement de Taylor de la solution de $y'=Y(x,y)$ Tableau TAB. A	I-5
IV	Intégration de l'équation différentielle transformée $y' = Y(x,y)$	I-8
V	Etude de l'erreur de méthode pour la résolution de $\bar{y}' = \bar{Y}(x,\bar{y})$	I-12
VI	Coût de la méthode de Fehlberg	I-14

DEUXIEME PARTIE - INTEGRATION D'UN PROBLEME DIFFERENTIEL DU PREMIER ORDRE AVEC CONDITION INITIALE

CHAPITRE II - Méthode de R-K.F_{2,m+3}

I	Introduction	II-1
II	Comparaison des développements de la solution exacte (Taylor) et approchée (R-K.F _{2,m+3}) de $y'=Y(x,y)$	II-3
III	Ordre de la méthode	II-4
IV	Etablissement des formules	II-5
V	Résultats numériques	II-6
VI	Etude de la stabilité	II-6

CHAPITRE III - Méthode de R-K.F_{3,m+4}

I	Introduction	III-1
II	Comparaison des développements de la solution exacte (Taylor) et approchée (R-K.F _{3,m+4}) de $y'=Y(x,y)$ Tableau TAB.III.m	III-2
III	Ordre de la méthode	III-6
IV	Etablissement des formules	III-8
V	Résultats numériques	III-13
VI	Etude de la stabilité	III-22

CHAPITRE IV - Méthode de R-K.F_{4,m+5}

I	Introduction	IV-1
II	Comparaison des développements de la solution exacte (Taylor) et approchée (R-K.F _{4,m+5}) de $y'=Y(x,y)$ Tableau TAB.IV.m	IV-3
III	Ordre de la méthode	IV-8
IV	Etablissement des formules	IV-10
V	Résultats numériques	IV-20
VI	Etude de la stabilité	IV-33

TROISIEME PARTIE - INTEGRATION D'UN PROBLEME DIFFERENTIEL D'ORDRE n
AVEC CONDITIONS INITIALES

CHAPITRE V - Méthode de R-K.F_{4,m+5}

I	Introduction	V-1
II	Transformation de Fehlberg. Equation différentielle transformée	V-1
III	Développement de Taylor de la solution de $y^{(n)} = Y(y^{(n-1)}, y, \dots, y, x)$	V-6
IV	Intégration de l'équation différentielle transformée $y^{(v)} = Y^{(n-1)}, \dots, y, x)$	V-12

V	Comparaison des développements de la solution exacte (TAYLOR) et approchée (R-K.F _{4,m+5}) de $y^{(n)} = Y(y^{(n-1)}, \dots, y, x)$ Tableau TAB.V.m.	V-12
VI	Ordre de la méthode	V-16
VII	Etablissement des formules	V-16
VIII	Résultats numériques	V-25

QUATRIEME PARTIE - INTEGRATION DE SYSTEMES DIFFERENTIELS AVEC CONDITIONS INITIALES

CHAPITRE VI - Méthode de R-K.F_{4,m+4} appliquée à l'intégration d'un système différentiel mis sous forme canonique, avec conditions initiales

I	Introduction	VI-1
II	Transformation de Fehlberg. Système différentiel transformé	VI-3
III	Développement de Taylor de la solution du système $y'=Y(x,y)$. Tableau E.	VI-4
IV	Intégration du système différentiel transformé $y'=Y(x,y)$	VI-6
V	Comparaison des développements de la solution exacte (Taylor) et approchée (R-K.F _{4,m+4}) du système $y'=Y(x,y)$ Tableau TAB.VI.m	VI-7
VI	Ordre de la méthode	VI-10
VII	Etablissement des formules	VI-11
VIII	Résultats numériques	VI-12

CHAPITRE - VII - Méthode de R-K.F_{4,m+4} appliquée à la résolution d'un système différentiel mis sous forme résolue, avec conditions initiales

I	Introduction	VII-1
II	Transformation de Fehlberg. Système différentiel transformé	VII-2
III	Développement de Taylor de la solution du système transformé. Tableau F	VII-3
IV	Intégration du système transformé $y^{(n)}=Y(y^{(n-1)}, \dots, y, x)$	VII-4
V	Comparaison des développements de la solution exacte (Taylor) et approchée (R-K.F _{4,m+4}) du système $y^{(n)}=Y(y^{(n-1)}, \dots, y, x)$	VII-5
	Tableau TAB.VII.m	
VI	Ordre de la méthode	VII-7
VII	Etablissement des formules	VII-7
VIII	Résultats numériques	VII-9

CONCLUSIONS

APPENDICE - Ecriture des sous-programme utilisés par la méthode de Fehlberg pour la résolution des équations différentielles et des systèmes différentiels d'ordre n.

BIBLIOGRAPHIE

AVANT - PROPOS

Nous nous proposons dans ce travail de développer une idée de Fehlberg sur l'intégration numérique de problèmes différentiels de conditions initiales, par une méthode à pas séparés du type Runge-Kutta.

Nous savons que les méthodes de Runge-Kutta, notées $R-K_{pq}$ (rang p , ordre q), sont, dans la pratique, telles que $p = q = 2, 3, 4$. La méthode $R-K_{44}$ étant la plus généralement utilisée, et l'on ne met pratiquement pas en oeuvre de méthode où q est supérieur à 4. (Références : [8], [9]). La méthode de Fehlberg permet d'obtenir des formules d'ordres plus élevés à partir d'algorithmes $R-K$ classiques de rang $q = 2, 3, 4$.

Dans une première partie nous exposerons l'idée de Fehlberg et son application à l'obtention de formules d'intégration notées $R-K.F_{pq}$, ainsi que l'étude de l'erreur de méthode pour l'intégration de problèmes différentiels du premier ordre. Dans la seconde partie nous développerons les méthodes $R-K.F$ de rang $p = 2, 3, 4$ et d'ordre q le plus élevé possible, appliquées à un problème différentiel du premier ordre. Nous en tirerons des conclusions tant du point de vue précision des résultats que du point de vue stabilité.

L'étude de la stabilité sera faite sur l'équation différentielle $\bar{y}' = -\bar{y}$, de condition initiale $\bar{y}(0) = 1$. (Références [5] page 265, [7], [10]).

La troisième partie est consacrée à l'intégration d'une équation différentielle d'ordre n , avec conditions initiales. Dans la quatrième partie nous envisagerons l'intégration d'un système différentiel de conditions initiales.

Nous donnerons en appendice les programmes concernant la méthode R-K-F.

Etant donnée la haute précision obtenue par ces méthodes R-K-F, nous avons été amenés à traiter nos exemples numériques en double précision. Les calculs ont été faits par l'ordinateur IBM-7044 du Laboratoire de Calcul de la Faculté des Sciences de Grenoble.

Nous devons signaler dès maintenant que les méthodes R-K-F sont coûteuses.

Les résultats numériques seront présentés sous forme de tableaux, ou figurent :

premièrement : en ordonnée l'ordre et la hauteur des formules, en abscisse l'erreur $\epsilon = | \text{valeur exacte} - \text{valeur approchée} |$ obtenue en fin d'intégration, les courbes erreurs étant tracées en fonction du pas. On a aussi indiqué les valeurs exactes obtenues en fin d'intégration.

deuxièmement : les temps d'intégration en millisecondes.

Ces tableaux peuvent être utilisés pour des comparaisons de méthodes à erreur globale constante.

Nous devons signaler que Fehlberg a traité de la résolution d'un problème différentiel du 1^o, 2^o et n^o ordre ainsi que de la résolution d'un système différentiel du 1^o et 2^o ordre, avec conditions initiales, en donnant des coefficients particuliers pour la résolution des problèmes différentiels. (Ref. [1], [2], [3]). Nous avons essayé de donner une formulation plus générale de ces coefficients, sans pour autant les donner tous.

Signalons dès maintenant que la méthode de Fehlberg est une méthode à dérivation préalable qui exige la connaissance formelle des $m+n$ premières dérivées du problème différentiel d'ordre n proposé. (En effet, comme nous le verrons plus loin, les valeurs des dérivées $\bar{y}', \dots, \bar{y}^{(m+n)}$ prises en $x = x_0$ interviennent dans la résolution de $\bar{y}^{(n)} = \bar{Y}(x, \bar{y}, \dots, \bar{y}^{(n-1)})$).

La connaissance préalable de ces dérivées, pourrait donc nous permettre d'écrire les développements de Taylor de $\bar{y}_1, \bar{y}'_1, \dots, \bar{y}_1^{(n-1)}$; ces développements étant respectivement d'ordre $m+n, m+n-1, \dots, m+1$. Mais comme nous le verrons dans les chapitres suivants, nous obtiendrons des formules d'ordre : $\max(m+n+2-\nu, m+5)$ pour $\nu = 0, \dots, n-3$; $m+5$ pour $\bar{y}^{(n-2)}$ et $\bar{y}^{(n-3)}$, avec la méthode de Fehlberg de rang 4. Il y a donc un gain notable en précision.

Prenons par exemple, le cas de la résolution d'une équation différentielle d'ordre 2 : $\bar{y}'' = \bar{Y}(x, \bar{y}, \bar{y}')$.

- avec Taylor, nous obtenons, connaissant $\bar{y}_0''', \dots, \bar{y}_0^{(m+2)}$:

\bar{y}_1'' avec l'ordre m ,

\bar{y}'_1 avec l'ordre $m+1$,

\bar{y}_1 avec l'ordre $m+2$.

- avec Fehlberg, (méthode de rang 4), nous obtenons :

\bar{y}'_1 et \bar{y}_1 avec l'ordre $m+5$

ce qui assure à $\bar{y}_1'' = \bar{Y}(x_1, \bar{y}_1, \bar{y}'_1)$ un ordre au moins égal à m .

L'inconvénient majeur de la méthode de Fehlberg (calcul préalable des dérivées successives de l'équation différentielle, ou du système différentiel), présente néanmoins un avantage par rapport au développement de Taylor :

obtention de développements d'ordre plus élevé, d'autant plus qu'à la limite, on peut utiliser cette méthode sans aucune dérivation préalable (ce qui, nous le verrons plus tard, correspond à une transformation de hauteur $m = 0$).

Signalons d'autre part, que cet inconvénient de dérivation préalable n'en est plus un de nos jours, puisqu'il est possible de faire calculer par l'ordinateur les dérivées d'une fonction quelconque et de les obtenir d'une façon formelle (langage de programmation FORMAC).

PREMIERE PARTIE

EXPOSE GENERAL

CHAPITRE - IMETHODE DE FEHLBERG POUR L'INTEGRATION APPROCHEE D'UN PROBLEMEDIFFERENTIEL DU 1° ORDRE AVEC CONDITIONS INITIALESI - INTRODUCTION

$$\text{Soit : } \begin{cases} \bar{y}' = \bar{Y}(x, \bar{y}) \\ \bar{y}(x_0) = \bar{y}_0 \end{cases}$$

Le problème différentiel de conditions initiales à résoudre. La méthode de Fehlberg consiste à faire un changement de fonction $y = f(\bar{y})$ de manière à obtenir une équation différentielle $y' = Y(x, y)$ particulière que l'on intégrera numériquement par une méthode à pas liés ou séparés. Nous adopterons l'algorithme de Runge-Kutta à pas séparés.

Nous allons voir que ce changement de fonction entraîne pour la nouvelle équation différentielle d'importantes simplifications dans l'écriture du schéma de Runge-Kutta. C'est ainsi qu'une coïncidence plus grande est obtenue lors de la comparaison des deux développements utilisés pour établir les formules R-K.

II - TRANSFORMATION DE FEHLBERG - EQUATION DIFFERENTIELLE TRANSFORMEE ([1])

Soit le problème différentiel du 1^o ordre :

$$\begin{cases} \bar{y}' = \bar{Y}(x, \bar{y}) \\ \bar{y}(x_0) = \bar{y}_0 \end{cases} \quad (1)$$

La transformation de Fehlberg est :

$$\bar{y} = y + \sum_{i=1}^{m+1} \frac{(x-x_0)^i}{i!} \bar{y}_0^{(i)} + (x-x_0)(y-y_0) \left(\frac{\partial \bar{Y}}{\partial \bar{y}} \right)_0 \quad (2)$$

Le paramètre m caractérise la "hauteur" de la transformation.

L'équation différentielle transformée s'écrit alors :

$$y' = Y(x, y) = \frac{1}{1+(x-x_0) \left(\frac{\partial \bar{Y}}{\partial \bar{y}} \right)_0} \left\{ \bar{Y}[x, \bar{y}(x, y)] - \sum_{i=0}^m \frac{(x-x_0)^i}{i!} \bar{y}_0^{(i+1)} - (y-y_0) \left(\frac{\partial \bar{Y}}{\partial \bar{y}} \right)_0 \right\} \quad (3)$$

Conséquences de cette transformation :

- 1) $y_0 = \bar{y}_0$
 - 2) $y_0' = \dots = y_0^{(m+1)} = 0$
 - 3) $\left(\frac{\partial Y}{\partial x} \right)_0 = \dots = \left(\frac{\partial^m Y}{\partial x^m} \right)_0 = 0$
 - 4) $\left(\frac{\partial Y}{\partial y} \right)_0 = 0$
- (4)

En effet :

- dérivons la relation (2), il vient :

$$\bar{y}' = y' + \sum_{i=0}^m \frac{(x-x_0)^i}{i!} \bar{y}_0^{(i+1)} + [(y-y_0) + y'(x-x_0)] \left(\frac{\partial \bar{Y}}{\partial \bar{y}}\right)_0 \quad (5)$$

Pour $x = x_0$, nous obtenons alors : $\bar{y}'_0 = y'_0 + \bar{y}'_0$, ce qui entraîne $y'_0 = 0$.

De même, après avoir dérivé la relation (2) $m+1$ fois, on obtient :

$$\bar{y}^{(m+1)} = y^{(m+1)} + \bar{y}_0^{(m+1)} + [(m+1)y^{(m)} + (x-x_0)y^{(m+1)}] \left(\frac{\partial \bar{Y}}{\partial \bar{y}}\right)_0$$

ce qui pour $x = x_0$ conduit à : $\bar{y}_0^{(m+1)} = y_0^{(m+1)} + \bar{y}_0^{(m+1)}$, d'où $y_0^{(m+1)} = 0$.

D'autre part, sachant que $y'' = \left(\frac{\partial}{\partial x} + y' \frac{\partial}{\partial y}\right)Y$, on obtient pour

$$x = x_0 : y''_0 = \left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)_0 + y'_0 \left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)_0, \text{ or } y'_0 = y''_0 = 0, \text{ d'où } \left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)_0 = 0$$

$$\text{On obtient de même : } y''' = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2Y \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + Y^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)Y + y'' \frac{\partial Y}{\partial y},$$

$$\text{qui pour } x = x_0, \text{ conduit à : } y'''_0 = \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}\right)_0 = 0, \text{ d'où } \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}\right)_0 = 0.$$

$$\text{Finalement, on obtient } y_0^{(m+1)} = \left(\frac{\partial^m Y}{\partial x^m}\right)_0 = 0.$$

Dérivons la relation (3) par rapport à y , il vient :

$$\frac{\partial Y}{\partial y} = \frac{1}{1+(x-x_0)\left(\frac{\partial \bar{Y}}{\partial \bar{y}}\right)_0} \left\{ \frac{\partial \bar{Y}}{\partial \bar{y}} \cdot \frac{\partial \bar{y}}{\partial y} - \left(\frac{\partial \bar{Y}}{\partial \bar{y}}\right)_0 \right\}$$

Or la relation (2) fournit $\frac{\partial \bar{y}}{\partial y} = 1 + (x-x_0)\left(\frac{\partial \bar{Y}}{\partial \bar{y}}\right)_0$, d'où :

$$\left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)_0 = \left(\frac{\partial \bar{Y}}{\partial \bar{y}}\right)_0 - \left(\frac{\partial \bar{Y}}{\partial \bar{y}}\right)_0 = 0$$

Signalons d'autre part les relations :

$$\bar{y}^{(m+i)} = y^{(m+i)} + [(m+i)y^{(m+i-1)} + (x-x_0)y^{(m+i)}] \left(\frac{\partial \bar{Y}}{\partial \bar{y}}\right)_0 \quad (i \geq 3)$$

qui pour $x = x_0$, conduisent à :

$$y_0^{(m+i)} = \bar{y}_0^{(m+i)} - (m+i)y_0^{(m+i-1)} \left(\frac{\partial \bar{Y}}{\partial \bar{y}}\right)_0 \quad (i \geq 3) \quad (6)$$

- Si nous appliquons la transformation à notre problème de départ, nous sommes ramenés au problème suivant :

$$\text{- Résoudre le problème différentiel du } 1^{\circ} \text{ ordre : } \begin{cases} y' = Y(x,y) \\ y(x_0) = y_0 = \bar{y}_0 \end{cases}$$

$$\text{- dont la solution vérifie : } y'_0 = \dots = y_0^{(m+1)} = 0 \quad (7)$$

- et l'équation différentielle étant telle que :

$$\left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)_0 = \dots = \left(\frac{\partial^m Y}{\partial x^m}\right)_0 = 0$$

$$\left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)_0 = 0$$

Ce qui peut s'écrire, en utilisant les notations classiques (Ref. [5] page 34).

$$\left\{ \begin{array}{l} y' = Y(x,y) \\ y(x_0) = y_0 = \bar{y}_0 \\ J = 0 ; c_1 = \dots c_m = 0 ; Y_0 = 0 \\ y''_0 = \dots = y_0^{(m+1)} = 0. \end{array} \right.$$

Remarques :

- Au début du pas, la transformation de Fehlberg exige la connaissance des m premières dérivées de l'équation différentielle $\bar{Y}(x, \bar{y})$, on peut donc dire que la méthode de Fehlberg est une méthode à dérivation préalable.

- On suppose que la transformation est toujours possible, c'est-à-dire que $(\frac{\partial \bar{Y}}{\partial \bar{y}})_0$ est fini (ce qui revient à dire que la condition de Lipschitz sur \bar{y} est vérifiée), ainsi que les dérivées $\bar{y}'_0, \dots, \bar{y}_0^{(m+i)}$ ce qui entraîne que $y_0^{(m+2)} \dots y_0^{(m+i)}$ sont aussi finies. (voir (6)).

III - DEVELOPPEMENT DE TAYLOR DE LA SOLUTION DE $y' = Y(x, y)$

Le développement de Taylor de la solution y de $y' = Y(x, y)$, au voisinage de x_0 , pour une hauteur m , s'écrit, compte tenu des conditions (7) :

$$y_1 = y_0 + \frac{h^{m+2}}{(m+2)!} y_0^{(m+2)} + \dots + \frac{h^{m+6}}{(m+6)!} y_0^{(m+6)} + \dots \quad (8a)$$

Exprimons ce développement au moyen des dérivées partielles successives de Y . Il vient : (Ref [5] page 33).

$$\begin{aligned} y'(x) = Y(x, y) = & \frac{h^{m+1}}{(m+1)!} C_{m+1} + \frac{h^{m+2}}{(m+2)!} C_{m+2} + \frac{h^{m+3}}{(m+3)!} [C_{m+3} + (m+3)K y_0^{(m+2)}] + \\ & \frac{h^{m+4}}{(m+4)!} [C_{m+4} + (m+4)K y_0^{(m+3)} + \frac{(m+3)(m+4)}{2} L y_0^{(m+2)}] + \\ & \frac{h^{m+5}}{(m+5)!} [C_{m+5} + (m+5)K y_0^{(m+4)} + \frac{(m+4)(m+5)}{2} L y_0^{(m+3)} + \\ & \frac{(m+3)(m+4)(m+5)}{3!} M y_0^{(m+2)}] + \dots \end{aligned}$$

$$+ \frac{h^{2m+4}}{2(m+2)!^2} R y_o^{(m+2)2} + \frac{h^{2m+5}}{(m+2)!(m+3)!} [R y_o^{(m+2)} y_o^{(m+3)} + \frac{(m+3)!}{2(m+2)!} S y_o^{(m+2)2}] + \dots \quad (8b)$$

D'autre part, nous avons, compte tenu de la relation (8a) :

$$y'(x) = Y(x,y) = \frac{h^{m+1}}{(m+1)!} y_o^{(m+2)} + \frac{h^{m+2}}{(m+2)!} y_o^{(m+3)} + \dots \quad (9)$$

En identifiant les relations (8b) et (9), nous obtenons le tableau A :

$y_o^{(m+2)} = C_{m+1}$
$y_o^{(m+3)} = C_{m+2}$
$y_o^{(m+4)} = C_{m+3} + (m+3) K C_{m+1}$
$y_o^{(m+5)} = C_{m+4} + (m+4) K C_{m+2} + \frac{(m+3)(m+4)}{2!} L C_{m+1}$
$y_o^{(m+6)} = C_{m+5} + (m+5) K C_{m+3} + \frac{(m+4)(m+5)}{2!} L C_{m+2} +$ $\frac{(m+3)(m+4)(m+5)}{3!} M C_{m+1} + (m+3)(m+5) K^2 C_{m+1}$

Tableau A Identification des termes du développement de Taylor de Y.

Cas particuliers

Nous remarquons que dans le cas de transformations de hauteur 0 ou 1, certains termes du développement (8b) n'apparaissent pas dans le tableau A (termes en h^{2m+4} et h^{2m+5}).

D'où les tableaux B et C, utilisables pour des transformations de hauteur 0 ou 1.

$$y''_0 = C_1$$

$$y'''_0 = C_2$$

$$y^{(4)}_0 = C_3 + 3KC_1$$

$$y^{(5)}_0 = C_4 + 4KC_2 + 6LC_1 + 3RC_1^2$$

$$y^{(6)}_0 = C_5 + 5KC_3 + 10LC_2 + 10MC_1 + 15K^2C_1 + 10RC_1C_2 + 15SC_1^2$$

Tableau B Identification dans le cas d'une transformation de hauteur 0.

$$y'''_0 = C_2$$

$$y^{(4)}_0 = C_3$$

$$y^{(5)}_0 = C_4 + 4KC_2$$

$$y^{(6)}_0 = C_5 + 5KC_3 + 10LC_2$$

$$y^{(7)}_0 = C_6 + 6KC_4 + 15LC_3 + 20MC_2 + 24K^2C_2 + 10RC_2^2$$

Tableau C Identification dans le cas d'une transformation de hauteur 1.

IV - INTEGRATION DE L'EQUATION DIFFERENTIELLE TRANSFORMEE $y' = Y(x,y)$

Comme nous l'avons indiqué dans l'Introduction, cette intégration se fera avec le procédé de Runge-Kutta à pas séparés.

IV-a - Rappel de la méthode de Runge-Kutta, dans le cas général (Ref. [5] p. 50)

Nous considérons l'équation différentielle, mise sous forme résolue équilibrée :

$$y^{(p)} = Y(y^{(p-1)}, \dots, y)$$

La variable indépendante étant absente. Comme nous travaillons uniquement sur un pas, nous pouvons supposer que celui-ci est compris entre les abscisses x_0 et x_1 , et nous avons comme conditions initiales au début de ce pas :

$$x_0 : y_0, y'_0, \dots, y_0^{(p-1)}$$

Notations

Nous considérons les valeurs :

$$x_{0,\alpha} = x_0 + \theta_\alpha h \text{ avec } \begin{cases} \alpha = 0, 1, \dots, q \\ \theta_0 = 0, \theta_q = 1 \\ x_{0,0} = x_0, x_{0,q} = x_1 \end{cases}$$

q est appelé rang de la méthode.

Rappelons que les valeurs approchées de $y, y', \dots, y^{(p-1)}$ aux abscisses $x_{0,\alpha}$ sont données par :

$$\begin{aligned}
y_{o,\alpha}^{(p-1)} &= y_o^{(p-1)} + h \sum_{\beta=0}^{\alpha-1} A_{\alpha\beta} Y_{o\beta} \\
\hline
y_{o,\alpha}^{(p-k)} &= y_o^{(p-k)} + \frac{h\theta}{1!} y_o^{(p-k+1)} + \dots + \frac{h^{k-1}\theta}{(k-1)!} y_o^{(p-1)} + \frac{h^k}{k!} \sum_{\beta=0}^{\alpha-1} K_{\alpha\beta} Y_{o\beta} \\
\hline
y_{o,\alpha} &= y_o + \frac{h\theta}{1!} y_o' + \dots + \frac{h^{p-1}\theta}{(p-1)!} y_o^{(p-1)} + \frac{h^p}{p!} \sum_{\beta=0}^{\alpha-1} L_{\alpha\beta} Y_{o\beta}
\end{aligned}$$

avec :

(10)

$$y_{o,q}^{(p-k)} = y_1^{(p-k)} \text{ pour } k = 1, 2, \dots, p$$

On a posé :

$$Y_{o\beta} = Y(y_{o,\beta}^{(p-1)}, \dots, y_{o,\beta}^{(p-k)}, \dots, y_{o,\beta})$$

Dans le cas d'une intégration par la méthode de Runge-Kutta, on est amené à vérifier certaines relations, qui permettent de déterminer les quantités dont on dispose, et pour ce faire, on est amené à transformer légèrement les relations précédentes, (10), en considérant des quantités $Y_{o\beta} - Y_o$.

Pour évaluer ces quantités, on considère des Y intermédiaires, d'où (Ref [5] page 53).

$$\begin{aligned}
Y_{o\beta} - Y_o &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{h^i \theta^i}{i!} C_i + (J_1 + \frac{h\theta}{1!} K_1 + \frac{h^2 \theta^2}{2!} L_1 + \dots) h \sum_{\gamma=1}^{\beta-1} A_{\beta\gamma} (Y_{o\gamma} - Y_o) + \\
&\quad (J_2 + \frac{h\theta}{1!} K_2 + \dots) \frac{h^2}{2!} \sum_{\gamma=1}^{\beta-1} B_{\beta\gamma} (Y_{o\gamma} - Y_o) + \dots + \\
&\quad \frac{h^2}{2!} (R + h\theta S + \dots) \sum_{\gamma=1}^{\beta-1} A_{\beta\gamma} (Y_{o\gamma} - Y_o) \sum_{\delta=1}^{\beta-1} A_{\beta\delta} (Y_{o\delta} - Y_o) + \dots
\end{aligned}$$

Il suffit ensuite de développer, d'ordonner par rapport à h , et de comparer avec la série de Taylor pour obtenir le tableau des conditions que doivent vérifier ces coefficients. (Ref. [5] pp. 51-56, [6]) [9].

IV-b - Méthode de Runge-Kutta appliquée à l'équation différentielle transformée
 $y' = Y(x,y)$

Dans le cas d'une équation différentielle du 1^o ordre, l'algorithme de Runge-Kutta de rang q devient, compte tenu de $Y_0 = 0$ (voir (7)) :

$$\left\{ \begin{array}{l} y_{0,1} = y_0 \\ y_{0,2} = y_0 + h A_{21} Y_{01} \\ \text{-----} \\ y_{0,q} = y_0 + h \sum_{\beta=1}^{q-1} A_{q\beta} Y_{0\beta} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} Y_{01} = Y(x_0 + \theta_1 h, y_0) \\ Y_{02} = Y(x_0 + \theta_2 h, y_{0,2}) \\ \text{-----} \end{array} \right.$$

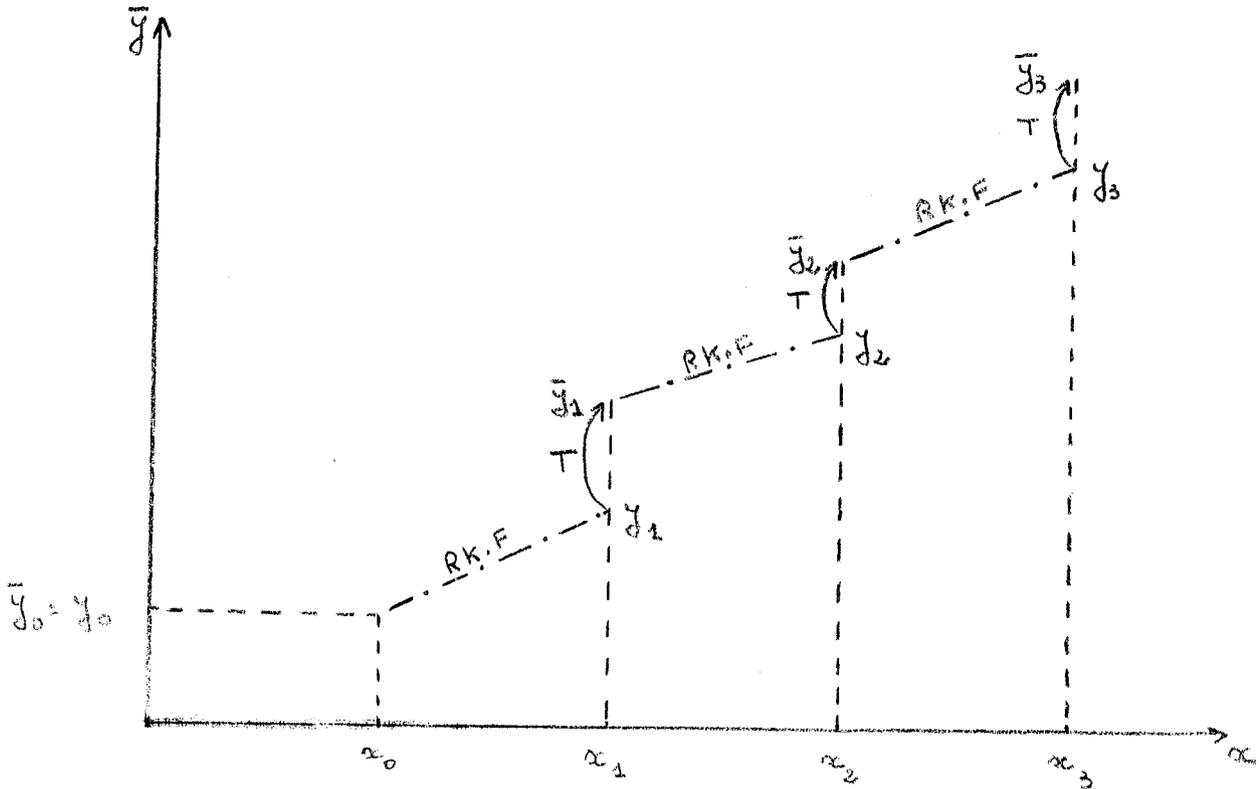
Nous remarquons que dans le cas d'une méthode de rang q l'algorithme R-K nécessite le calcul de q-1 Horner, alors que dans le cas classique il faut q Horner. De cette façon il y a moins de coefficients A_{ij} à calculer, en effet les coefficients $A_{\alpha,0}$, $\alpha = 1, \dots, q$ ne figurent plus dans l'algorithme du fait que $Y_0 = 0$ (voir (7)).

Il reste à calculer, ayant obtenu la valeur y_1, \bar{y}_1 en utilisant la transformation (2), ce qui du point de vue précision introduit des erreurs supplémentaires : erreurs d'intégration se propageant dans l'évaluation des $\bar{y}'_1, \dots, \bar{y}_1^{(m+1)}$ et erreurs d'arrondis.

Ayant obtenu la valeur \bar{y}_1 , on recommence le même travail sur le pas (x_1, x_2) et ainsi de suite jusqu'en x_n .

Graphiquement nous obtenons :

(les points indiqués sont ceux obtenus numériquement)



$\bar{y}_i \xrightarrow{\text{R.K.F.}} y_{i+1}$: on obtient y_{i+1} en partant de \bar{y}_i et en appliquant l'algorithme R.K.Fehlberg : résolution de $y' = Y(x,y)$.

\bar{y}_i \xrightarrow{T} y_i : \bar{y}_i solution numérique de $\bar{y}' = \bar{Y}(x,\bar{y})$ en x_i est obtenue en appliquant la transformation (2) à y_i .

Il faut bien noter que le point (x_i, \bar{y}_i) joue le rôle de point de départ pour la résolution numérique de $y' = Y(x,y)$ -équation différentielle transformée du problème posé $\bar{y}' = \bar{Y}(x,\bar{y})$ sur le pas (x_i, x_{i+1}) .

V - ETUDE DE L'ERREUR DE METHODE POUR LA RESOLUTION DE $\bar{y}' = \bar{Y}(x, \bar{y})$

Les résultats que nous obtiendrons dans ce paragraphe seront valables pour les méthodes décrites dans les chapitres II, III et IV.

Soit une méthode de Runge-Kutta-Fehlberg de rang q . Nous verrons, dans les 3 chapitres suivants, que dans ce cas les formules obtenues sont au maximum d'ordre $m+q+1$. pour une transformation de hauteur m .

Notations :

Soient :

- \bar{y}_i la solution numérique de $\bar{y}' = \bar{Y}(x, \bar{y})$ en x_i
- y_{i+1} la solution numérique de l'équation différentielle transformée en x_{i+1} , partant de \bar{y}_i
- y_{i+1}^* la solution exacte de l'équation différentielle transformée en x_{i+1} , partant de \bar{y}_i
- \bar{y}_{i+1} la solution numérique de $\bar{y}' = \bar{Y}(x, \bar{y})$ en x_{i+1} . C'est le transformé de y_{i+1}
- \bar{y}_{i+1}^* le transformé de y_{i+1}^* .

L'erreur de méthode sur y est :

$$\varepsilon = y_{i+1}^* - \bar{y}_{i+1} = \frac{h^{m+q+2}}{(m+q+2)!} [y_i^{\varepsilon(m+q+2)} - y_i^{(m+q+2)}] + \dots$$

ou $y_i^{\varepsilon(j)}$ représente la valeur prise en x_i par le $(j+1)^{\text{ème}}$ terme du développement de Taylor et $y_i^{(j)}$ la valeur prise en x_i par le $(j+1)^{\text{ème}}$ terme du développement de Fehlberg.

Il vient alors :

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon} &= \bar{y}_{i+1}^* - \bar{y}_{i+1} = y_{i+1}^* + h\bar{y}_i' + \dots + \frac{h^{m+1}}{(m+1)!} \bar{y}_i^{(m+1)} + h(y_{i+1}^* - \bar{y}_i) \left(\frac{\partial \bar{Y}}{\partial \bar{y}}\right)_i \\ &\quad - y_{i+1} - h\bar{y}_i' - \dots - \frac{h^{m+1}}{(m+1)!} \bar{y}_i^{(m+1)} - h(y_{i+1} - \bar{y}_i) \left(\frac{\partial \bar{Y}}{\partial \bar{y}}\right)_i \\ &= (y_{i+1}^* - y_{i+1}) \left[1 + h \left(\frac{\partial \bar{Y}}{\partial \bar{y}}\right)_i\right] \end{aligned}$$

Soit finalement $\bar{\varepsilon} = \varepsilon \left[1 + h \left(\frac{\partial \bar{Y}}{\partial \bar{y}}\right)_i\right]$

La méthode est donc aussi d'ordre $m+q+1$ en ce qui concerne la résolution de $\bar{y}' = \bar{Y}(x, \bar{y})$.

Signalons d'autre part ^{pour} que le problème $\bar{y}' = \bar{Y}(x, \bar{y})$, de condition initiale $\bar{y}(x_0) = \bar{y}_0$ et de solution $\bar{y}(x)$ la matrice de propagation est :

$$\lambda(x) = \exp\left(\int_{x_0}^x \bar{Y}'_{\bar{y}}[\bar{y}(u), u] du\right) \quad ; \quad \lambda(x_0) = 1$$

et que le paramètre de propagation est :

$$\lambda = \exp\left(\int_{x_0}^{x_n} \bar{Y}'_{\bar{y}}[\bar{y}(u), u] du\right)$$

(Ref. [5] page 272, [11]).

Ce paramètre λ a pour valeur au point x_n , le rapport des écarts, pour les abscisses x_n et x_0 de $\bar{y}(x)$ et d'une intégrale infiniment voisine. Il sert à indiquer le degré des difficultés qui peuvent venir de la propagation des erreurs. Nous verrons au chapitre IV les résultats expérimentaux obtenus pour ce paramètre de propagation.

VI - COUT DE LA METHODE DE FEHLBERG

Nous verrons, dans les chapitres suivants, que du point de vue coût, la méthode de Fehlberg nécessite par pas, le calcul de $m+q$ ⁺¹ Horners pour un algorithme du type Runge-Kutta de rang q et une transformation de hauteur m , ($q-1$ Horners pour l'algorithme R-K sur l'équation différentielle transformée Y , et m ^q Horners pour le calcul des dérivées $\bar{y}'_0, \dots, \bar{y}_0^{(m+1)}$ utilisées dans la transformation), l'ordre de la méthode étant $m+q+1$, alors que pour les formules du type Runge-Kutta classiques, le volume de calcul est de q Horners pour un ordre q .

DEUXIEME PARTIE

INTEGRATION D'UN PROBLEME DIFFERENTIEL
DU PREMIER ORDRE AVEC CONDITION INITIALE

CHAPITRE - II

METHODE DE R-K.F_{2,m+3}

I - INTRODUCTION

Nous nous proposons de résoudre l'équation différentielle $\bar{y}' = \bar{Y}(x, \bar{y})$, de condition initiale $\bar{y}(x_0) = \bar{y}_0$, par la méthode de Fehlberg, en utilisant un algorithme du type R-K de rang 2. Nous allons voir que cette méthode est d'ordre $m+3$ pour une transformation de hauteur m . Ceci explique la notation employée : R-K.F_{2,m+3}.

Dans le cas général, l'algorithme de Runge-Kutta de rang 2 s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} y_{i1} = y_i + h A_{10} Y_{i0} \\ y_{i+1} = y_i + h [A_{20} Y_{i0} + A_{21} Y_{i1}] \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} Y_{i0} = Y(x_i, y_i) \\ Y_{i1} = Y(x_i + \theta_1 h, y_{i1}) \end{array} \right.$$

Par une transformation de hauteur m :

$$\bar{y} = y + \sum_{i=1}^{m+1} \frac{(x-x_0)^i}{i!} \bar{y}_0^{(i)} + (x-x_0)(y-y_0) \left(\frac{\partial \bar{Y}}{\partial y} \right)_0 \quad (11)$$

Nous sommes ramenés à résoudre le problème différentiel

$$y' = Y(x,y) = \frac{1}{1+(x-x_0)\left(\frac{\partial Y}{\partial \bar{y}}\right)_0} \left[\bar{Y}\{x, \bar{y}(x,y)\} - \sum_{i=0}^m \frac{(x-x_0)^i}{i!} \bar{y}_0^{-(i+1)} - (y-y_0)\left(\frac{\partial \bar{Y}}{\partial \bar{y}}\right)_0 \right]$$

- de condition initiale :

$$y(x_0) = y_0 = \bar{y}_0$$

- et tel que :

$$y'_0 = \dots = y_0^{(m+1)} = 0$$

$$\left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)_0 = \dots = \left(\frac{\partial^m Y}{\partial x^m}\right)_0 = 0$$

$$\left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)_0 = 0.$$

Compte tenu des relations précédentes, l'algorithme général de Runge-Kutta devient, sur le pas (x_i, x_{i+1}) :

$$\begin{cases} y_{i1} = y_i \\ y_{i+1} = y_i + hA_{21} Y_{i1} \end{cases} \quad Y_{i1} = Y(x_i + \theta_1 h, y_i) \quad (12)$$

Remarque

Le volume de calcul, par pas, est de $m+3$ Horner : $m+2$ pour la transformation et 1 pour l'algorithme R-K.

II - COMPARAISON DES DEVELOPPEMENTS DE LA SOLUTION EXACTE (TAYLOR) ET APPROCHÉE (R-K.F._{2,m+3}) DE $y' = Y(x,y)$

Dans le cas d'une transformation de hauteur m, nous avons :

$$Y_{i1} = \sum_{\alpha=m+1}^{m+4} \frac{h^\alpha \theta_1^\alpha}{\alpha!} C_\alpha + \dots$$

puisque $C_1 = \dots = C_m = 0$ (voir §1 ci-dessus)

D'où :

$$y_{i+1} - y_i = h A_{21} \sum_{\alpha=m+1}^{m+4} \frac{h^\alpha \theta_1^\alpha}{\alpha!} C_\alpha + \dots, \text{ par l'algorithme R-K.}$$

et

$$y_{i+1} - y_i = \frac{h^{m+2}}{(m+2)!} C_{m+1} + \frac{h^{m+3}}{(m+3)!} C_{m+2} + \frac{h^{m+4}}{(m+4)!} [C_{m+3} + (m+3)KC_{m+1}] + \dots$$

par Taylor.

D'où le tableau de comparaison. TAB.II.M. obtenu en identifiant les deux développements précédents :

TERMES	TAYLOR	R-K.F
$\frac{h^{m+2}}{(m+1)!} C_{m+1}$	$\frac{1}{m+2}$	$A_{21} \theta_1^{m+1}$
$\frac{h^{m+3}}{(m+2)!} C_{m+2}$	$\frac{1}{m+3}$	$A_{21} \theta_1^{m+2}$
$\frac{h^{m+4}}{(m+3)!} C_{m+3}$	$\frac{1}{m+4}$	$A_{21} \theta_1^{m+3}$
$h^{m+4} KC_{m+1}$	$\frac{m+3}{m+4}$	0

TABLEAU TAB.II.M Identification des termes des développements de Taylor et de R-K.F.

III - ORDRE DE LA METHODE

En considérant le tableau TAB.II.m nous obtenons un système à 4 équations et 2 inconnues. Nous pouvons seulement obtenir concordance pour les deux premières, d'où :

$$\begin{cases} A_{21} \theta_1^{m+1} = 1/(m+2) \\ A_{21} \theta_1^{m+2} = 1/(m+3). \end{cases}$$

Nous obtenons donc des formules d'ordre $m+3$ et nous pouvons écrire, en utilisant les notations définies au §I-5 :

$$\varepsilon_{i+1} = y_{i+1}^* - y_{i+1} = \frac{h^{m+4}}{(m+4)!} [y_i^{\varepsilon(m+4)} - y_i^{(m+4)}] + \dots$$

les points y_{i+1} et y_{i+1}^* étant obtenus à partir de la valeur \bar{y}_i , solution numérique du problème $\bar{y}' = \bar{Y}(x, \bar{y})$, $\bar{y}(x_0) = \bar{y}_0$ en x_i , et représentant respectivement :

y_{i+1} valeur obtenue par l'algorithme de Runge-Kutta (12) en x_{i+1} , pour y , solution de $y' = Y(x, y)$, $y(x_i) = \bar{y}_i = y_{ii}$.

y_{i+1}^* solution exacte pour y en x_{i+1} , de $y' = Y(x, y)$, $y(x_i) = \bar{y}_i = y_{ii}$.

$y_i^{\varepsilon(j)}$ = (j+1)^{ème} terme du développement de Taylor de y_{i+1}^*

$y_i^{(j)}$ = (j+1)^{ème} terme du développement de Fehlberg de y_{i+1} .

Et en utilisant la transformation (11), on obtient :

$$\bar{\varepsilon}_{i+1} = \bar{y}_{i+1}^* - \bar{y}_{i+1} = \varepsilon_{i+1} \left[1 + h \left(\frac{\partial \bar{Y}}{\partial \bar{y}} \right)_i \right] + \dots$$

\bar{y}_{i+1}^* et \bar{y}_{i+1} étant les transformés de y_{i+1}^* et y_{i+1} .

Nous remarquons, sur cette dernière formule, que la méthode est d'ordre $m+3$ en ce qui concerne \bar{y} .

IV - ETABLISSEMENT DES FORMULES

Nous obtenons des formules d'ordre $m+3$, pour une transformation de hauteur m , en prenant comme coefficients :

$$\theta_1 = \frac{m+2}{m+3} \quad ; \quad A_{21} = \frac{(m+3)^{m+1}}{(m+2)^{m+2}}$$

Le tableau TAB.II.m nous donne le premier terme d'erreur sur y :

$$\frac{h^{m+4}}{(m+4)!} \left[\frac{1}{(m+3)^2} C_{m+3} + (m+3) K C_{m+1} \right]$$

Remarque :

Tous les coefficients des termes d'erreur suivants sont entièrement déterminés, puisque les coefficients des termes C_{m+i} ($i > 3$) sont égaux à :

$$\frac{1}{(m+i)!} \left[\frac{1}{(m+i+1)} - \frac{(m+2)^{i-2}}{(m+3)^{i-1}} \right],$$

et que les autres termes n'ont pour coefficients que ceux du développement de Taylor.

Citons, à titre d'exemple, quelques valeurs de θ_1 et A_{21} .

m	0	1	2	3	4	5	$\rightarrow \infty$
θ_1	0.666	0.750	0.800	0.833	0.857	0.875	$\rightarrow 1$
A_{21}	0.750	0.592	0.488	0.414	0.360	0.318	$\rightarrow 0$

V - RESULTATS NUMERIQUES

Nous comparerons la méthode R-K.F_{2,m+3}, de coefficients $\theta_1 = \frac{m+2}{m+3}$ et $A_{21} = \frac{(m+3)^{m+1}}{(m+2)^{m+2}}$, à la méthode R-K-HEUN_{2,2} de coefficients :

$$\theta_1 = 2/3$$

$$A_{10} = 2/3$$

$$A_{20} = 1/4 \quad , \quad A_{21} = 3/4$$

Nous avons indiqué -pour chaque pas- l'erreur obtenue par RK₃₃ (□) et RK₄₄. (●)

VI - ETUDE DE LA STABILITE

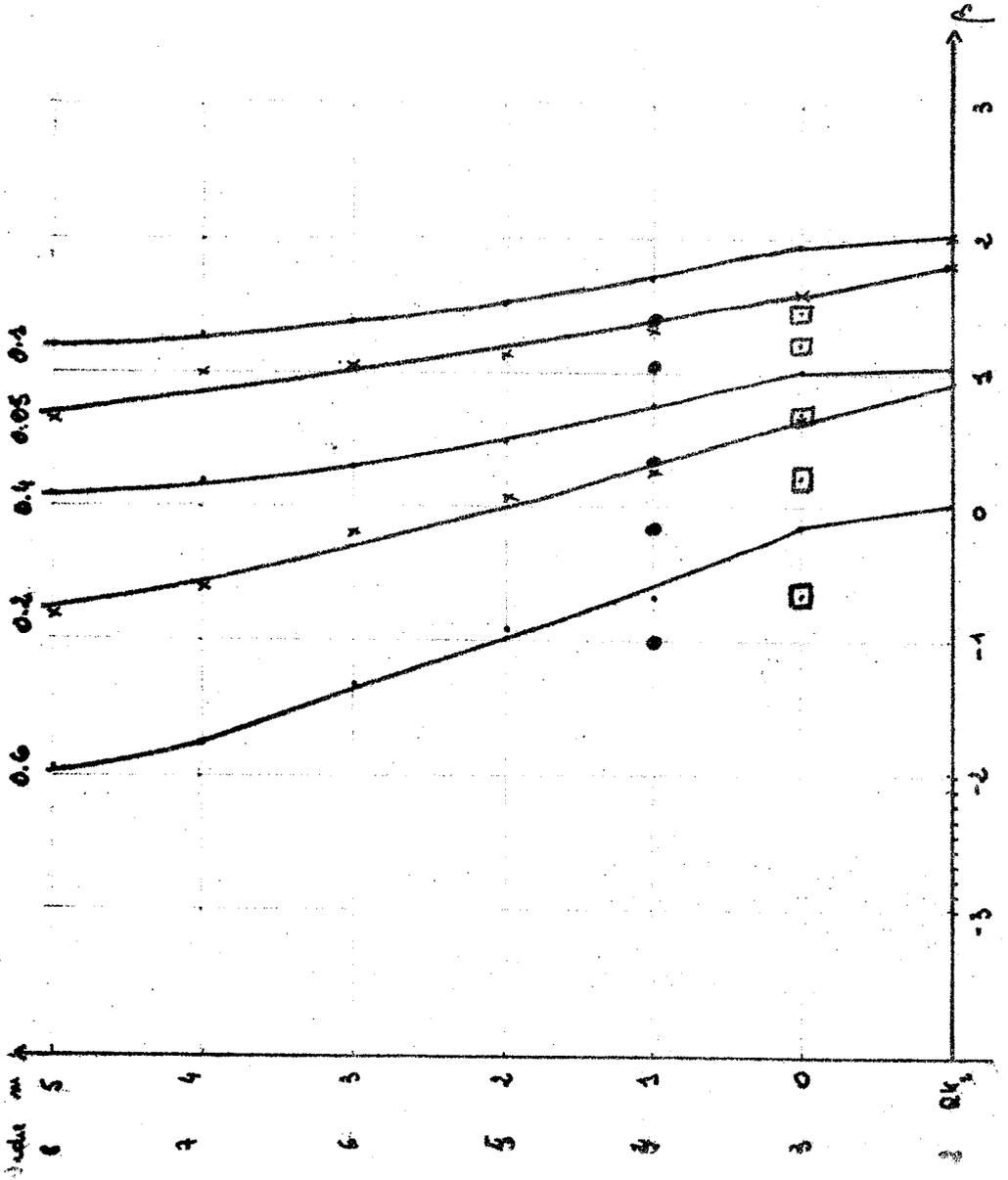
Nous prendrons, pour faire cette étude, l'équation différentielle linéaire $\bar{y}' = -\bar{y}$. (Ref : [10], [7]).

Rappelons que la transformation de hauteur m , s'écrit pour le $(i+1)^{\text{ème}}$ pas $[x_i, x_{i+1}]$:

$$\bar{y} = y + \sum_{j=1}^{m+1} \frac{(x-x_i)^j}{j!} \bar{y}_i^{(j)} + (x-x_i)(y-y_i) \left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial y} \right)_i$$

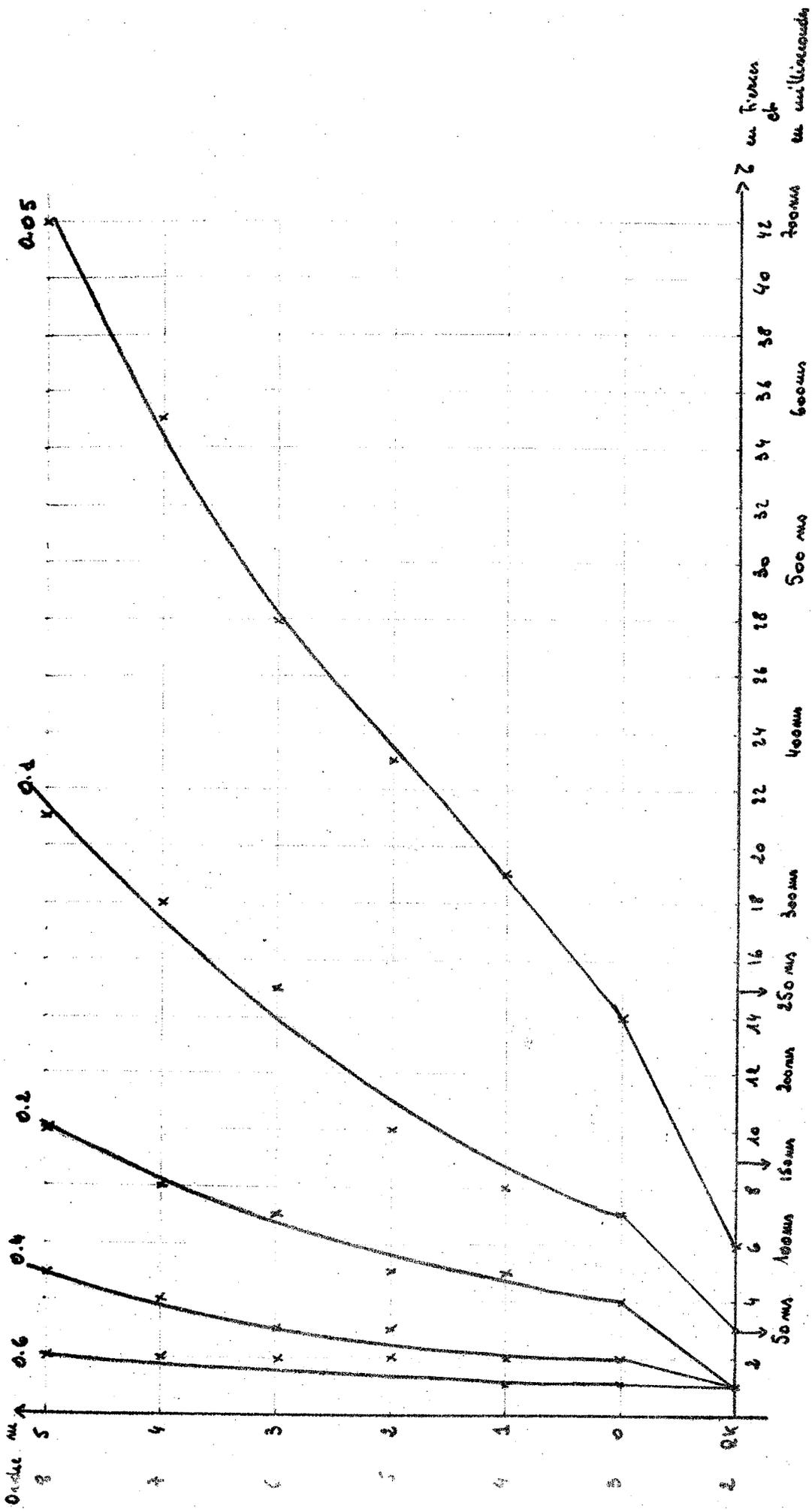
ce qui nous donne par l'équation différentielle $\bar{y}' = -\bar{y}$ envisagée :

$$\bar{y} = y [1 - (x-x_i)] + \bar{y}_i \sum_{j=2}^{m+1} (-1)^j \frac{(x-x_i)^j}{j!} \quad (13)$$



PAS R	0.05	0.1	0.2	0.4	0.6
Nombre de pas	34	17	8	4	2
N_N	2.7	2.7	2.6	2.6	2.2
\bar{R}_N	148.18	148.18	22.47	22.47	4.72

$\bar{R} = \bar{R}^2 / \alpha$	$\bar{R} = \frac{1}{1 - \ln(\alpha)}$
$\alpha_0 = 1$	$\bar{R}_0 = 1$
$\alpha_N = 2.7$	$\bar{R}_N = 148.18$

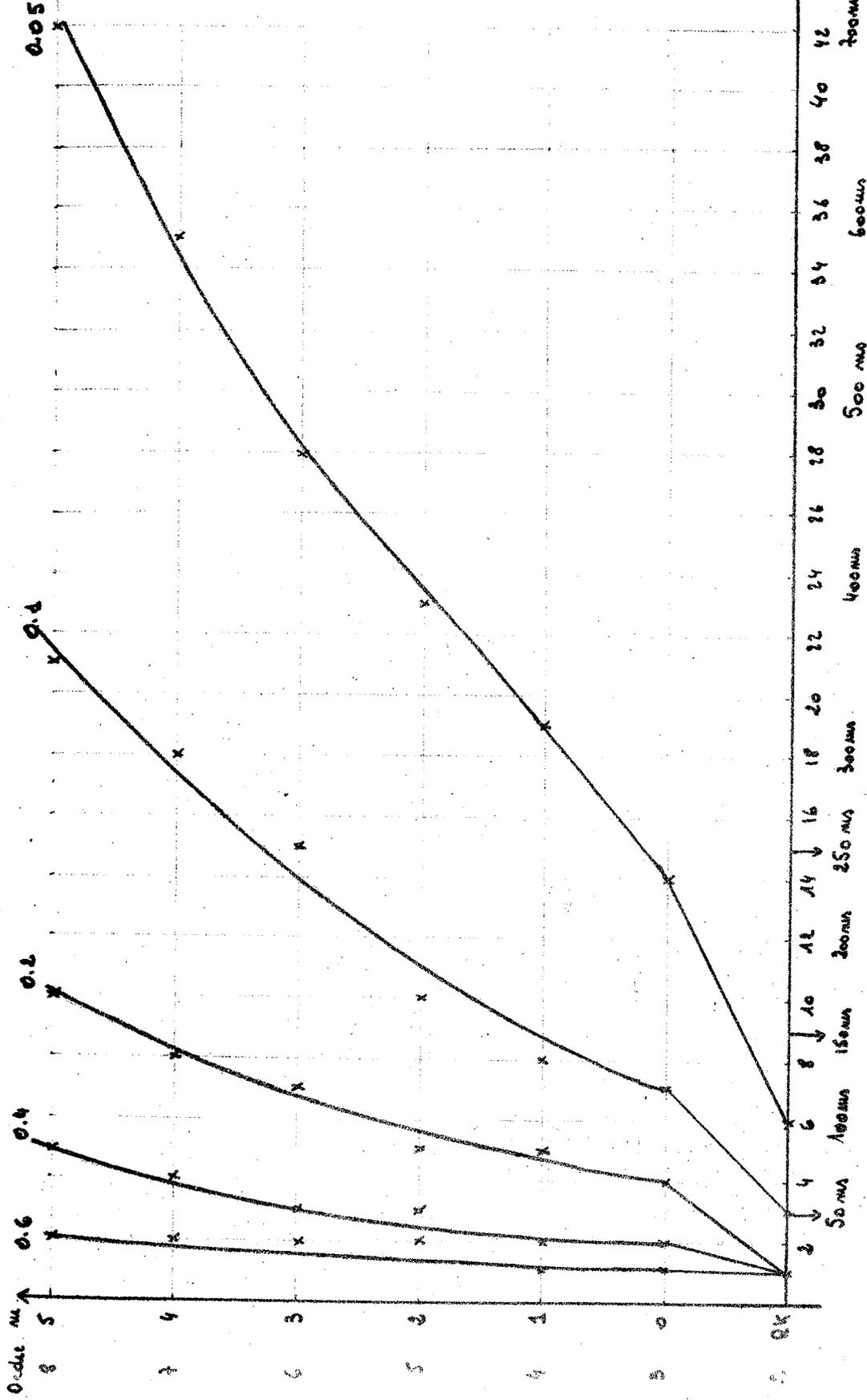


$$\bar{y} = \frac{\bar{y}^2}{1 - \ln(\alpha)}$$

$$m_0 = 1; m_N = 2.7$$

$$R = 0.05 - 0.1 - 0.2 - 0.4 - 0.6$$

Temp d'initiation

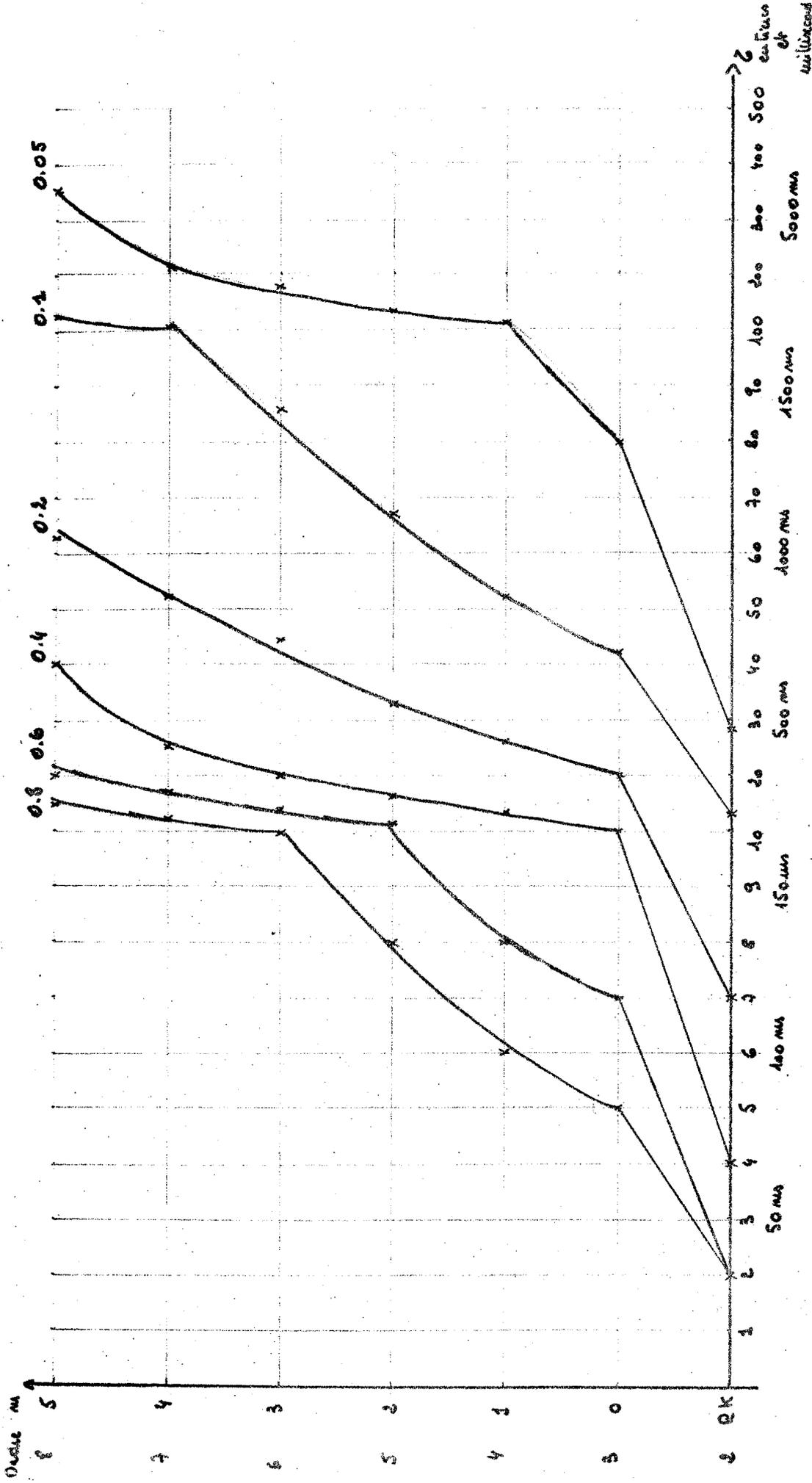


Temp d'intégration

$$\bar{y} = \frac{\bar{y}^2}{1 - \ln(x)}$$

$$x_0 = 1; \quad x_N = 2.7$$

$$h = 0.05 - 0.1 - 0.2 - 0.4 - 0.6$$

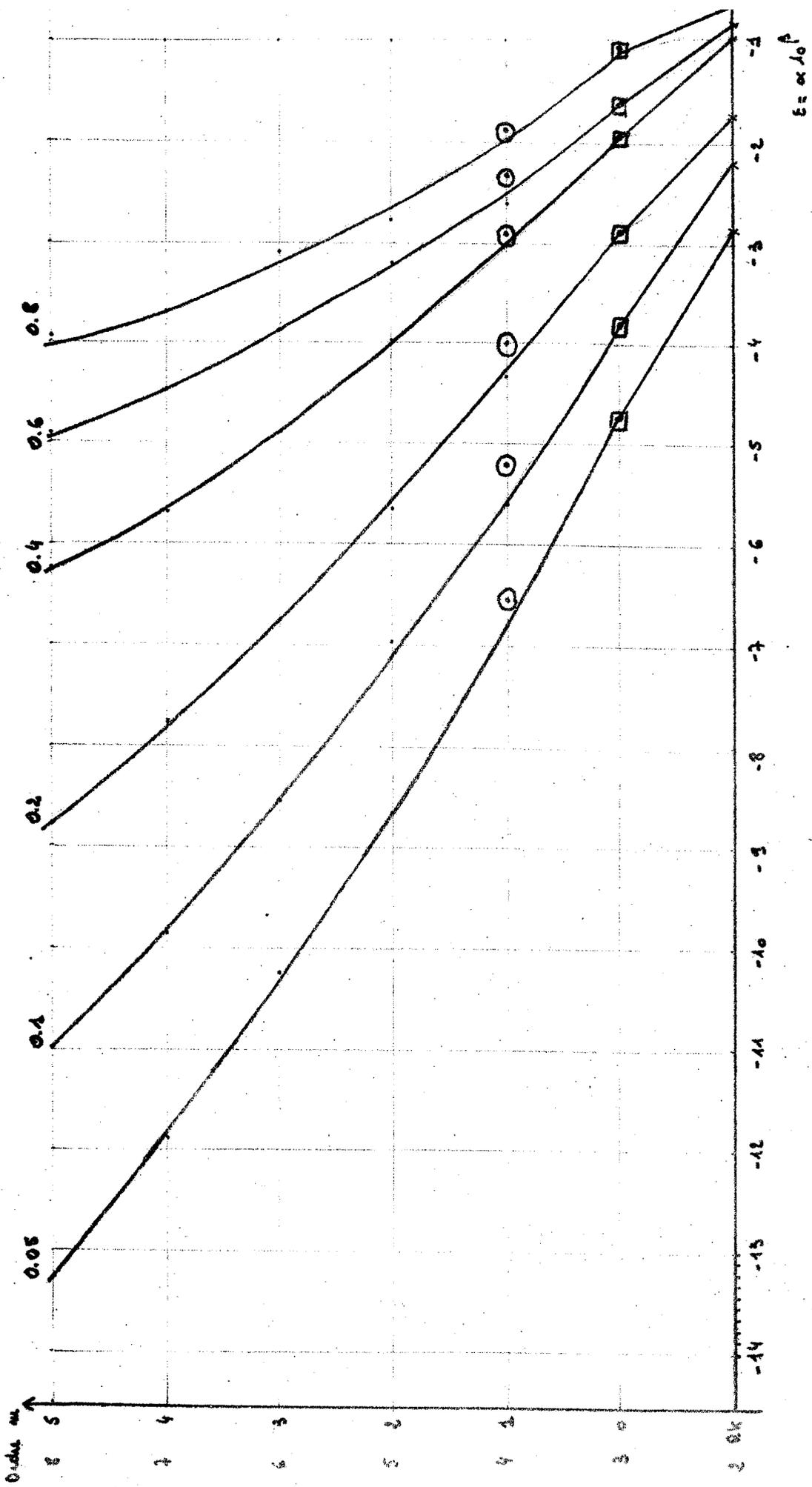


Temp d'initiation

$$\bar{Y} = \cos^2(\beta) \quad \bar{Y} = \text{Factg}(\alpha)$$

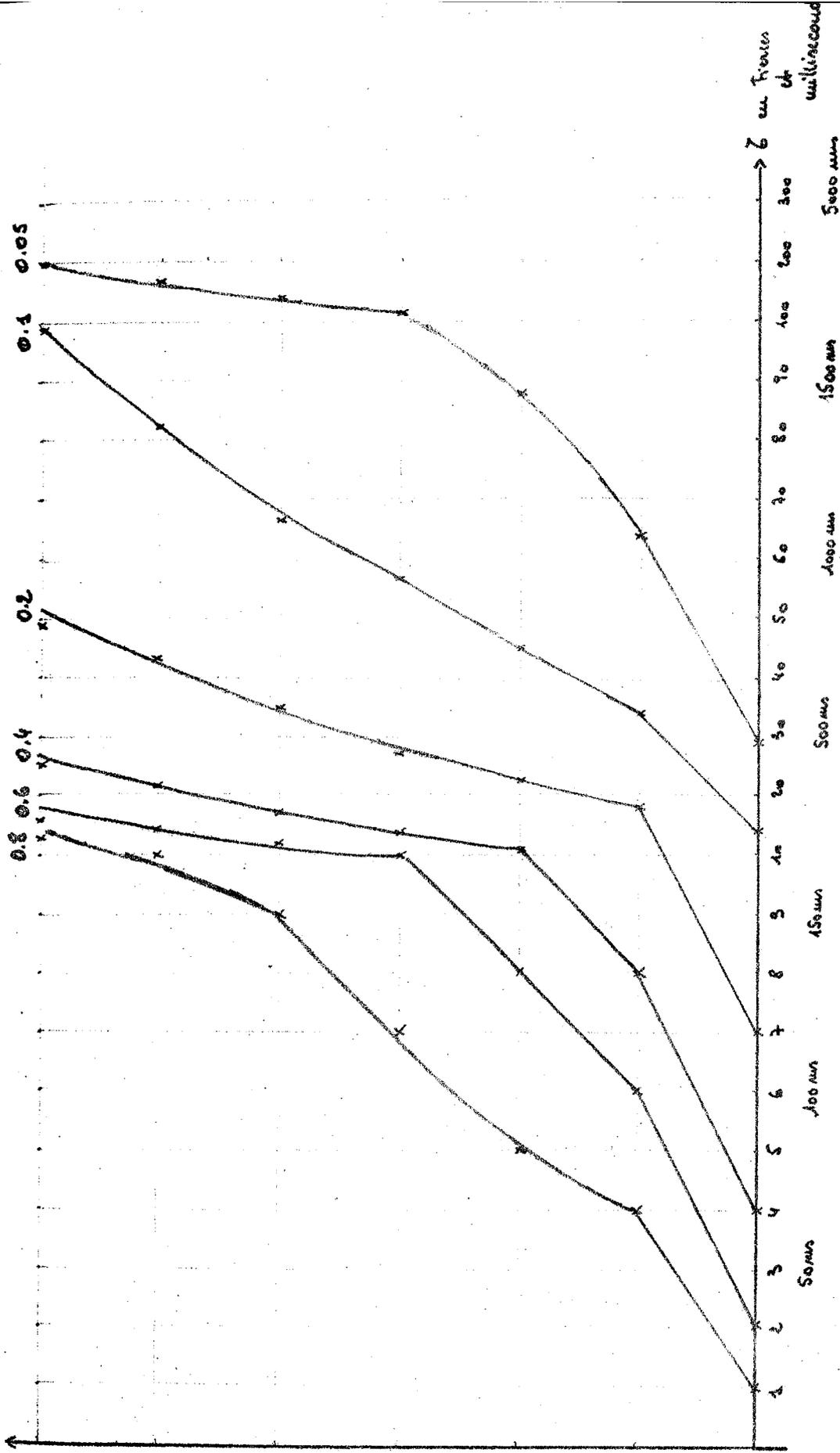
$$\sigma_0 = 0 ; \sigma_N = 5$$

$$R = 0.05 - 0.1 - 0.2 - 0.4 - 0.6 - 0.8$$



PAS R	0.05	0.1	0.2	0.4	0.6	0.8
Nombre de pas	160	80	45	22	15	11
n_N	10	10	10	9.8	10	9.8
\bar{P}_N^{**}	23.025	23.015	23.025	22.367	23.025	22.367

$\bar{P}' = 1 + \frac{\bar{P}}{n}$	$\bar{P} = n \cdot \ln(n)$
$n_N = 10$	$\bar{P}_N^{**} = 0$
$\bar{P}_N^{**} = 10$	$\bar{P}_N^{**} = 23.025$



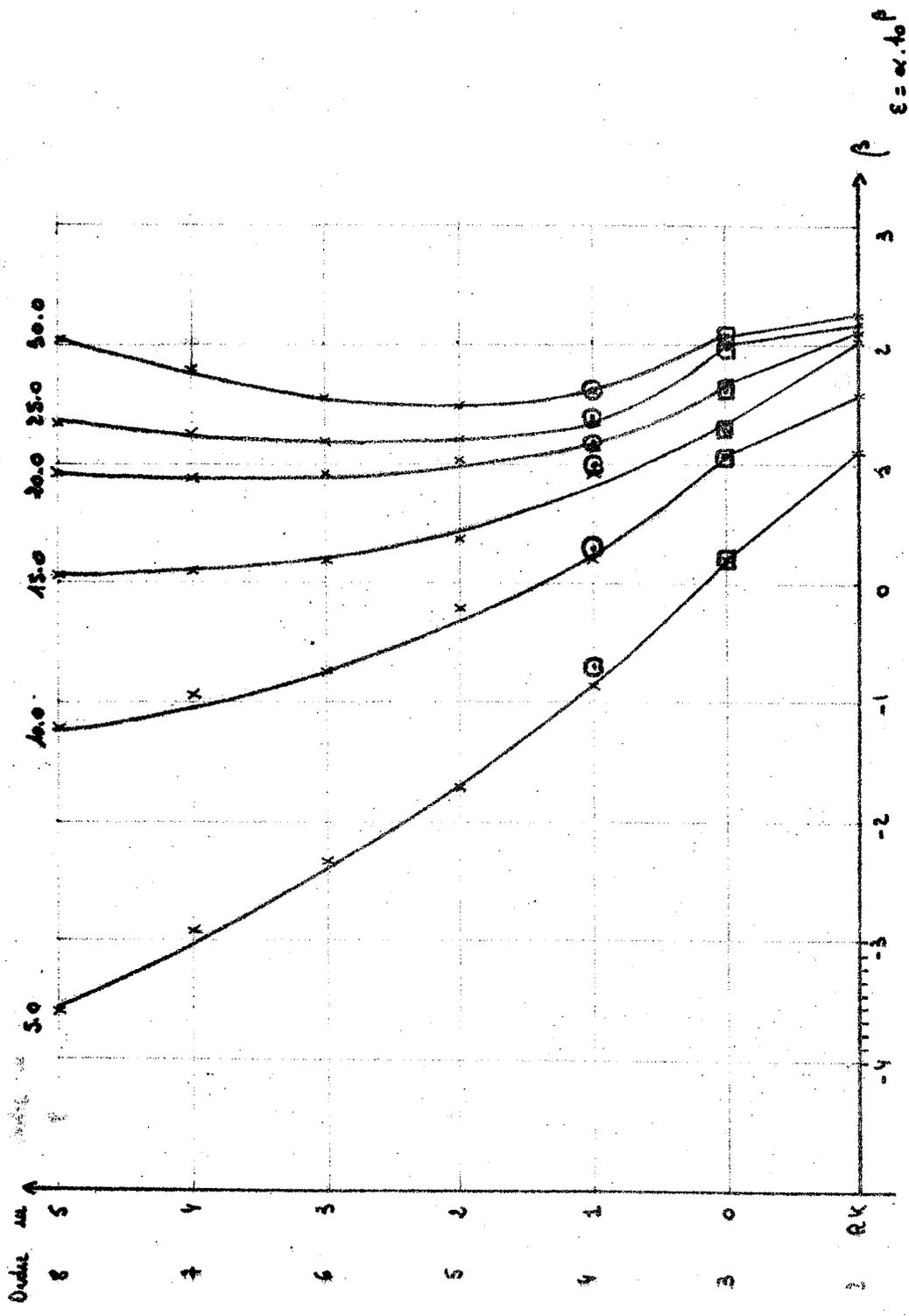
Temp d'initiation

$$\bar{y}' = 1 + \frac{\bar{y}}{\alpha}$$

$$\bar{y} = \alpha \cdot \ln(\alpha)$$

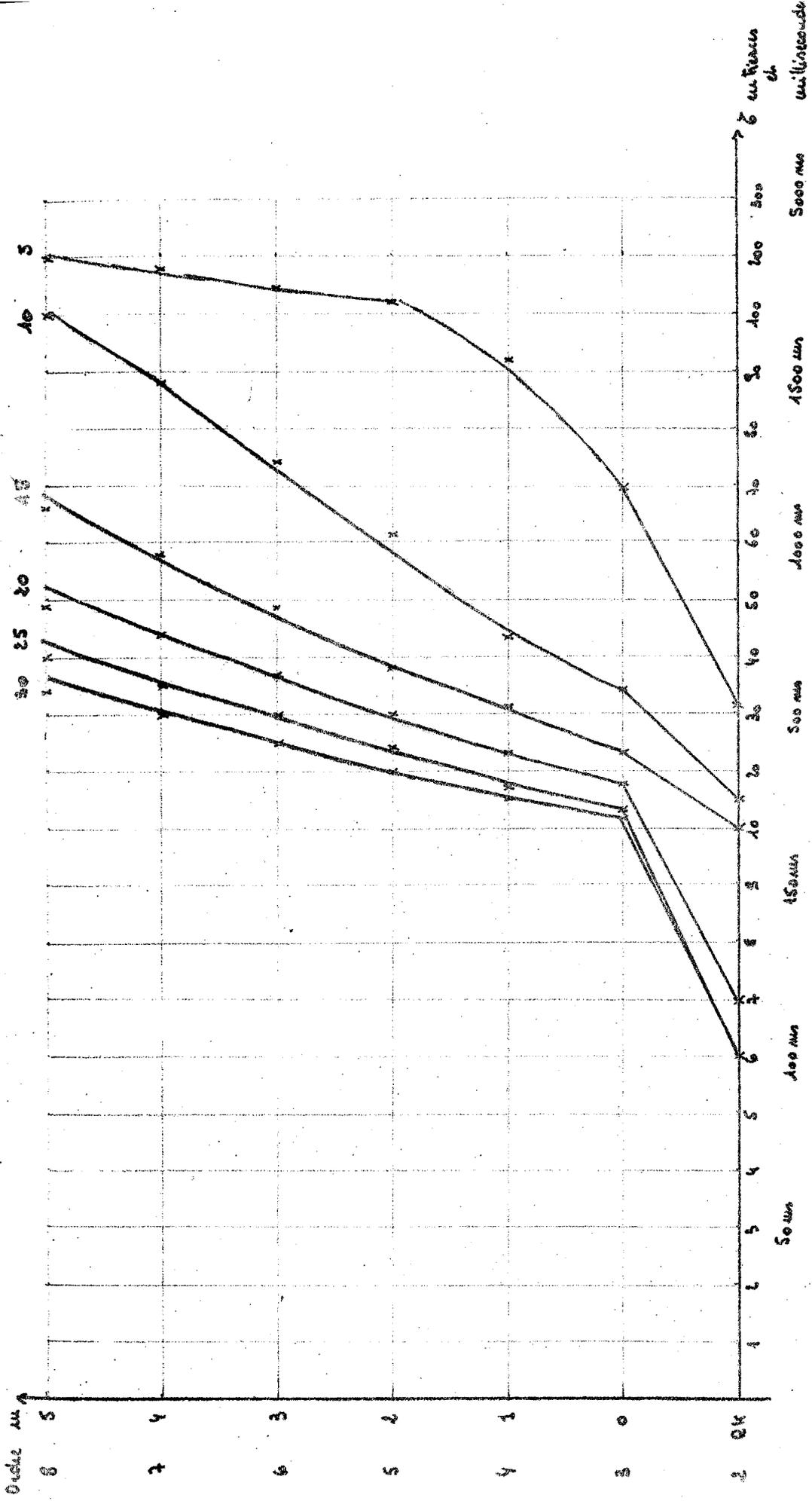
$$\alpha_0 = 1 ; \alpha_N = 10$$

$$R = 0.05 - 0.1 - 0.2 - 0.4 - 0.6 - 0.8$$



PAR	5	10	15	20	25	30
Nombre de foo	198	99	66	49	39	33
N	1000	1000	1000	990	985	1000
\bar{y}_N	6907.75	6907.75	6907.75	6828.72	6789.25	6907.75

$\bar{y}' = 1 + \frac{\bar{y}}{\alpha}$	$y = \alpha \cdot \ln(\alpha)$
$\alpha_0 = 10$	$\bar{y}_0 = 23.03$
$\alpha_N = 1000$	$\bar{y}_N = 6807.75$



Comp d'intégration

$$\bar{y} = 1 + \bar{y}/\alpha \quad \bar{y} = \alpha \cdot \ln(\alpha)$$

$$\alpha = 10 ; \alpha_N = 1000$$

$$P = 5 - 10 - 15 - 20 - 25 - 30$$

et l'équation différentielle transformée s'écrit :

$$y' = Y(x,y) = \frac{x-x_i}{1-(x-x_i)} \{y-\bar{y}_i + (-1)^m \frac{(x-x_i)^m}{(m+1)!} \bar{y}_i\} \quad (14)$$

Remarque :

pour $m = 0$, si l'on prend pour pas h la valeur 1, on obtient $\bar{y}_i = 0$ pour toutes les valeurs de x_i (voir (13)).

Pour pouvoir appliquer l'algorithme de Runge-Kutta, nous devons connaître Y_{i1} .

D'où en utilisant la formule (14), dans laquelle nous remplaçons x par $x_i + \theta_1 h$, il vient :

$$Y_{i1} = \frac{\theta_1 h}{1-h\theta_1} \{y_i - \bar{y}_i + (-1)^m \frac{h^m \theta_1^m}{(m+1)!} \bar{y}_i\} = \frac{(-1)^m}{(m+1)!} \frac{\theta_1^{m+1} h^{m+1}}{1-h\theta_1} \bar{y}_i$$

ce qui entraîne :

$$y_{i+1} = y_i + h A_{21} Y_{i1} = y_i \left[1 + \frac{(-1)^m}{(m+1)!} A_{21} \frac{h^{m+2} \theta_1^{m+1}}{1-h\theta_1} \right] \quad (15)$$

En appliquant la transformation (13) à la relation (15), il vient :

$$\bar{y}_{i+1} = \bar{y}_i \left[\sum_{j=0}^{m+1} (-1)^j \frac{h^j}{j!} + (-1)^m \frac{A_{21} h^{m+2} \theta_1^{m+1}}{(m+1)! (1-h\theta_1)} \right] \quad (16)$$

Compte tenu du fait que les formules sont d'ordre $m+3$ il vient en remplaçant dans les relations (15) et (16) θ_1 par $\frac{m+2}{m+3}$ et A_{21} par $\frac{(m+3)^{m+1}}{(m+2)^{m+2}}$:

$$y_{i+1} = y_i \left[1 + (-1)^m \frac{m+3}{(m+2)!} \frac{h^{m+2}}{(m+3)-h(m+2)} \right] \quad (17)$$

et

$$\bar{y}_{i+1} = \bar{y}_i \left[\sum_{j=0}^{m+1} (-1)^j \frac{h^j}{j!} + (-1)^m \frac{m+3}{(m+2)!} \frac{(1-h)h^{m+2}}{(m+3)-h(m+2)} \right] \quad (18)$$

La condition de stabilité pour les relations (17) et (18) s'écrit respectivement :

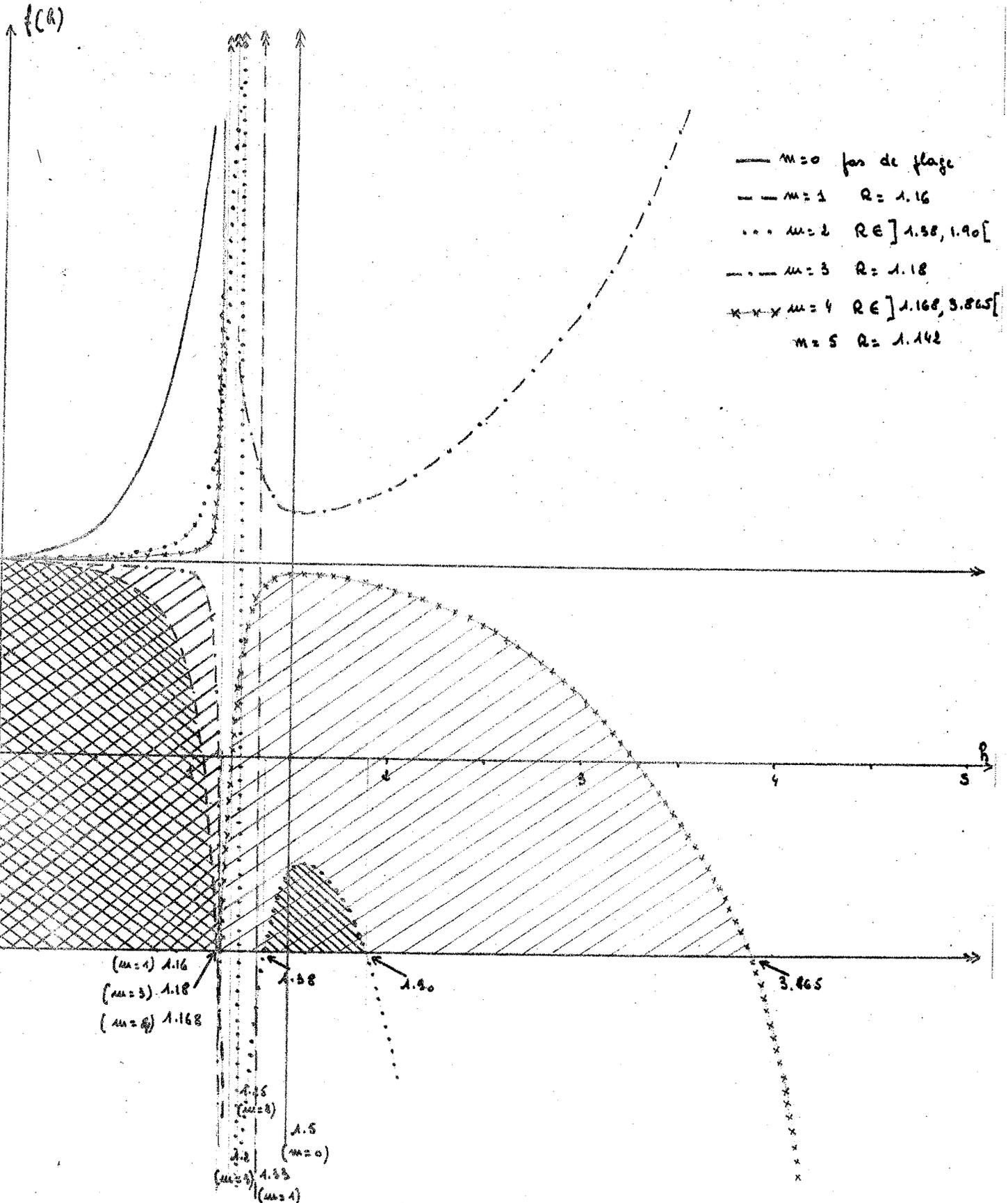
$$-1 < 1 + (-1)^m \frac{m+3}{(m+2)!} \frac{h^{m+2}}{(m+3)-h(m+2)} < 1 \quad (19)$$

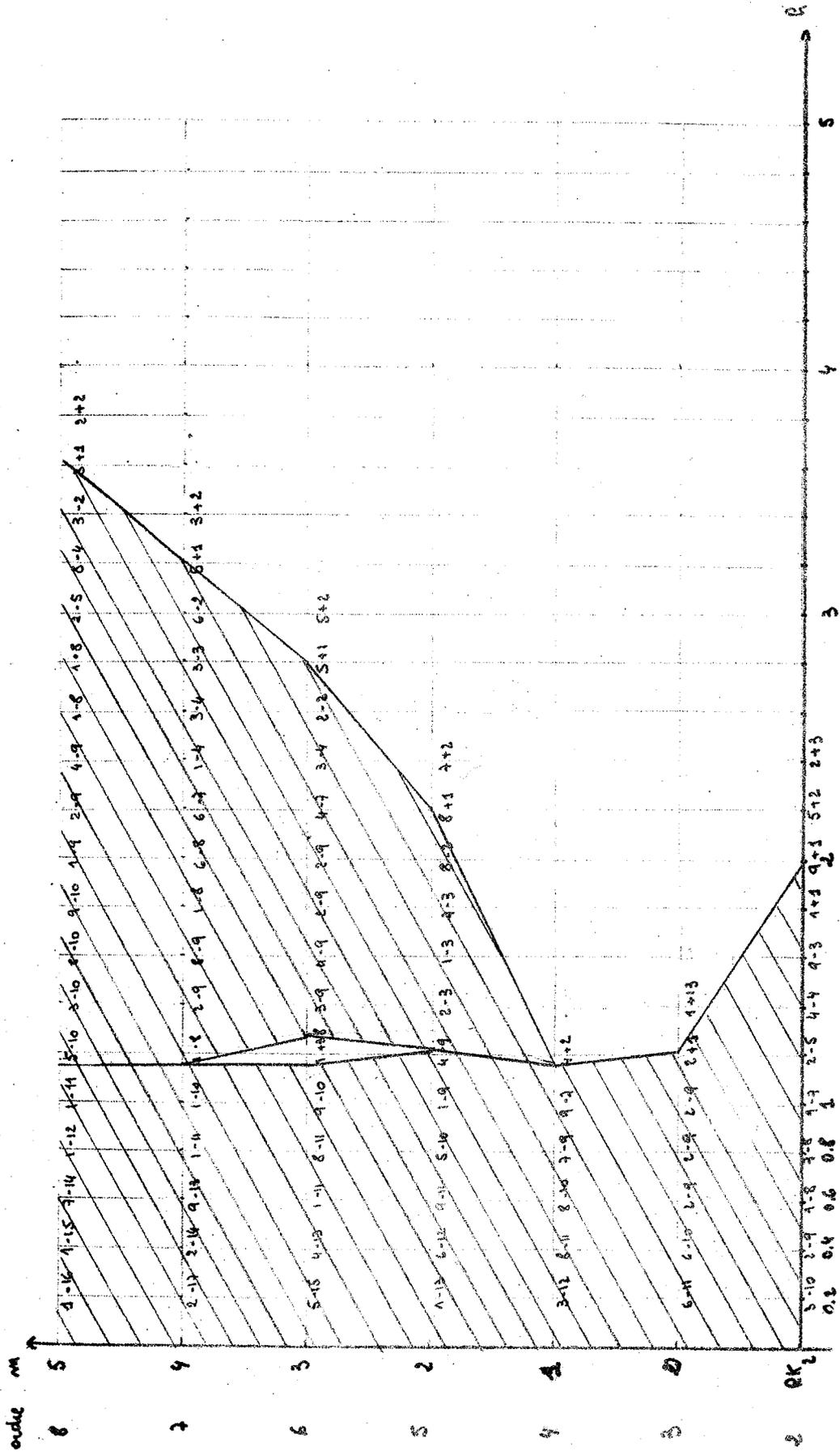
$$-1 < \sum_{j=0}^{m+1} (-1)^j \frac{h^j}{j!} + (-1)^m \frac{m+3}{(m+2)!} \frac{(1-h)h^{m+2}}{(m+3)-h(m+2)} < 1 \quad (20)$$

Nous avons fait une étude graphique de ces relations. Les plages de stabilité sont représentées par des zones hachurées.

Nous avons indiqué sur deux tableaux, d'une part les rayons et plages de stabilité obtenus par la relation (20) et d'autre part l'erreur ϵ obtenue en fin d'intégration, en fonction du pas h et de l'ordre. (intervalle d'intégration : $x_0 = 0$, $x_n = 20$).

Etude de la relation (19)





Rayons de stabilité et places de stabilité

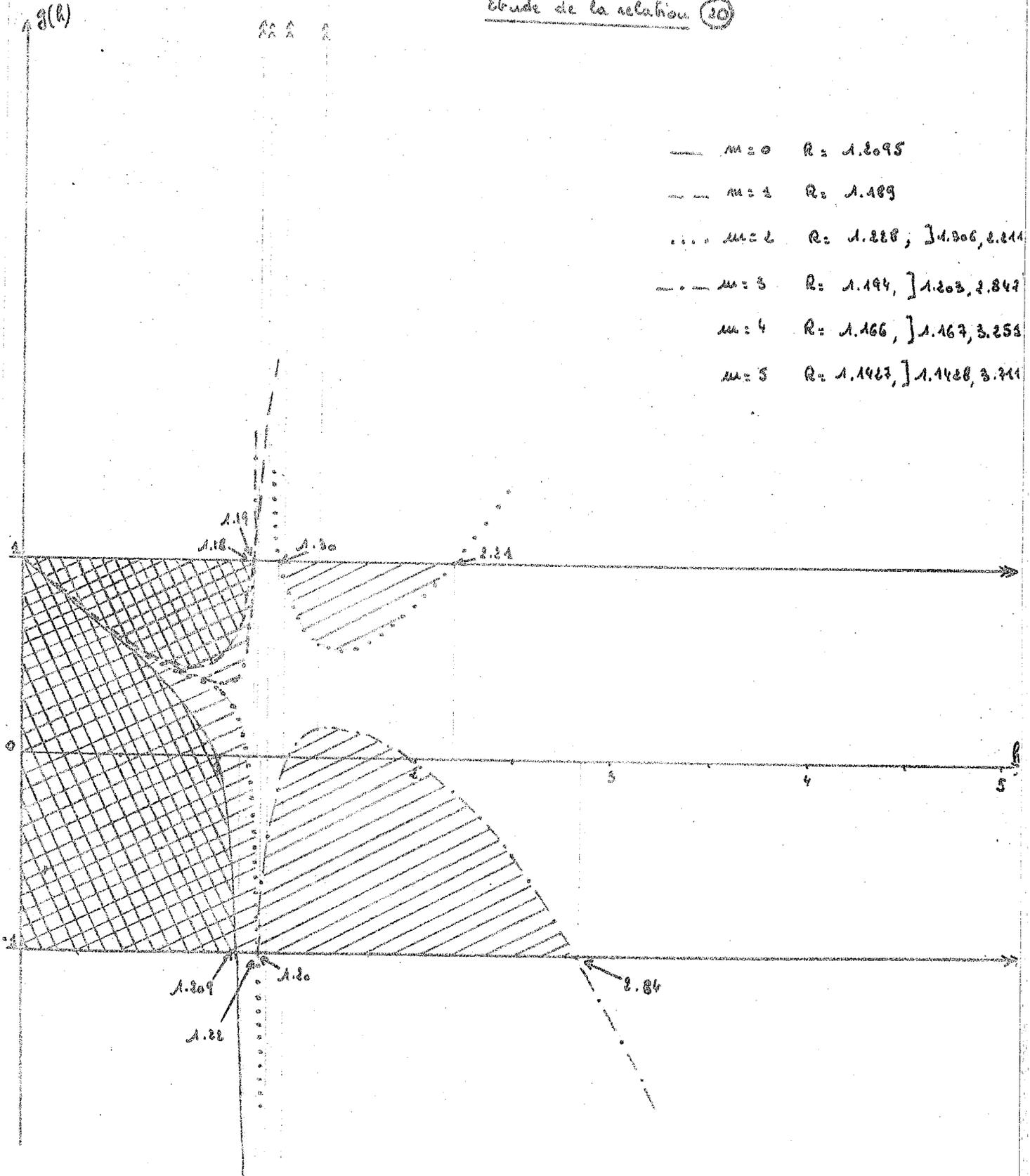
Etude pratique sur $\dot{y} = -y$

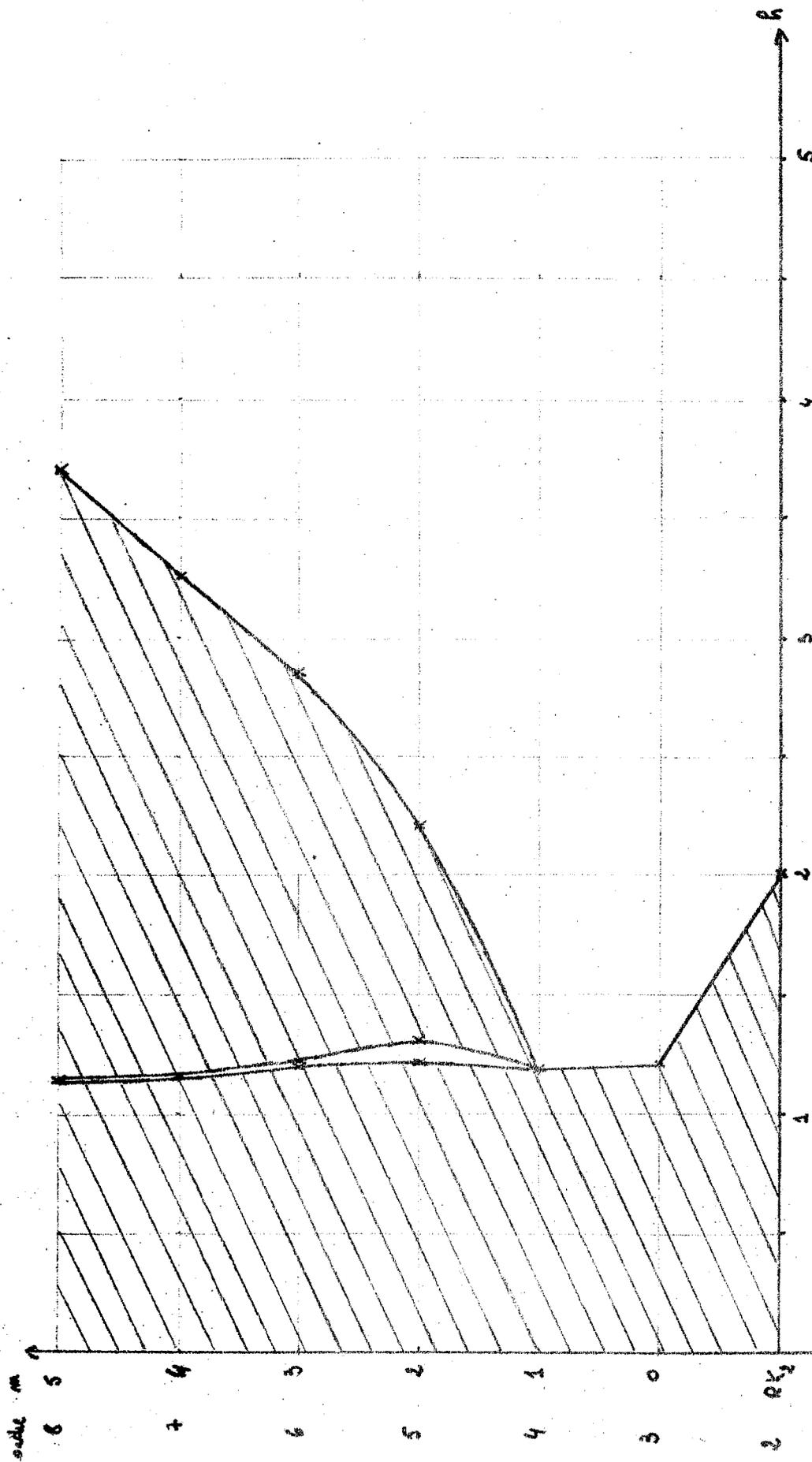
N.B: $\alpha - \beta \rightarrow \alpha \cdot 10^{-\beta}$
 $\alpha + \beta \rightarrow \alpha \cdot 10^{+\beta}$

erreur en fin d'intégration.

Etude de la relation (20)

—	$m = 0$	$R = 1.2095$
—	$m = 1$	$R = 1.189$
...	$m = 2$	$R = 1.228,]1.206, 2.211$
—	$m = 3$	$R = 1.194,]1.203, 2.847$
	$m = 4$	$R = 1.166,]1.167, 3.253$
	$m = 5$	$R = 1.1427,]1.1428, 3.711$





Rayons de stabilité et plages de stabilité

Etude théorique

Résultats obtenus à partir de la relation (2)

Remarques :

- Dans l'étude pratique de la stabilité nous avons tenu compte du nombre de changement de signe de l'écart entre la valeur exacte et la valeur calculée, ainsi que de la précision en fin d'intégration.

- Signalons qu'en fin d'intégration ($x_n = 20$) la valeur exacte varie, selon le pas, entre $1.2 \cdot 10^{-8}$ et $2.5 \cdot 10^{-9}$.

- Il est néanmoins assez difficile de définir expérimentalement une limite précise pour les zones de stabilité, car nous avons chaque fois, augmenté le pas de 0.2

Conclusions de l'étude de la stabilité

Pour la relation récurrente :

$$y_{i+1} = y_i \left[1 + (-1)^m \frac{m+3}{(m+2)!} \frac{h^{m+2}}{(m+3)-h(m+2)} \right]$$

qui représente la solution numérique de l'équation différentielle transformée, on s'aperçoit que pour $m = 0$, cette relation n'est pas stable ; et que pour $m = 2p+1$ on obtient un rayon de stabilité qui tend vers 1 par valeurs croissantes, lorsque m augmente, et que pour $m = 2p$ on obtient une plage $[\alpha, \beta]$ avec α tendant vers 1 par valeurs décroissantes et β augmentant avec m .

Pour la relation récurrente :

$$\bar{y}_{i+1} = \bar{y}_i \left[\sum_{j=0}^{m+1} (-1)^j \frac{h^j}{j!} + (-1)^m \frac{m+3}{(m+2)!} \frac{(1-h)h^{m+2}}{(m+3)-h(m+2)} \right]$$

solution numérique de l'équation différentielle $\bar{y}' = -\bar{y}$, on constate que pour $m = 0$ et $m = 1$ on obtient un rayon de stabilité bien défini (respectivement 1.209 et 1.189) alors que pour $m \geq 2$ on obtient un rayon α et une plage $[\beta, \gamma]$ avec α tendant vers 1 par valeurs décroissantes (légèrement inférieures à $\frac{m+3}{m+2}$), β tendant vers 1 par valeurs décroissantes (légèrement supérieures à $\frac{m+3}{m+2}$) et γ augmentant lorsque m croît.

Il semble, qu'à la limite, m augmentant indéfiniment, on puisse confondre les valeurs α et β : pour $m = 4$ on a $\beta - \alpha \approx 0.001$ et pour $m = 5$ on a $\beta - \alpha \approx 0.0001$.

Remarquons que la présence du petit couloir d'instabilité est mis en évidence expérimentalement avec le pas $h = 1.2$ et $m = 3$.

Nous constatons, que par rapport à la formule classique R-K₂₂, la méthode R-K.F_{2,m+3} offre des formules d'ordre plus élevé avec un rayon de stabilité plus grand, sauf pour les formules à transformation de hauteur 0 et 1 qui semblent peu intéressantes.

Signalons d'autre part, que l'on peut augmenter considérablement les rayons de stabilité, en utilisant des formules d'ordre $m+2$, comme le montre-rait une étude des relations (15) et (16), compte tenu de : $(m+2)A_{21} \theta_1^{m+1} = 1$.

CHAPITRE - III

METHODE DE R-K.F_{3,m+4}

I - INTRODUCTION

Nous nous proposons de résoudre le problème différentiel $\bar{y}' = \bar{Y}(x, \bar{y})$, de condition initiale $\bar{y}(x_0) = \bar{y}_0$ en utilisant l'algorithme R-K.F_{3,m+4}. Nous verrons en effet que cette méthode est d'ordre m+4 pour une transformation de hauteur m, et un algorithme du type R-K de rang 3.

Dans le cas général, l'algorithme de Runge-Kutta de rang 3 s'écrit :

$$(21) \quad \left\{ \begin{array}{l} y_{i1} = y_i + h A_{10} Y_{i0} \\ y_{i2} = y_i + h [A_{20} Y_{i0} + A_{21} Y_{i1}] \\ y_{i+1} = y_i + h [A_{30} Y_{i0} + A_{31} Y_{i1} + A_{32} Y_{i2}] \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} Y_{i0} = Y(x_i, y_i) \\ Y_{i1} = Y(x_i + \theta_1 h, y_{i1}) \\ Y_{i2} = Y(x_i + \theta_2 h, y_{i2}) \end{array} \right.$$

Par une transformation de hauteur m :

$$\bar{y} = y + \sum_{i=1}^{m+1} \frac{(x-x_0)^i}{i!} \bar{y}_0^{(i)} + (x-x_0)(y-y_0) \left(\frac{\partial \bar{Y}}{\partial y} \right)_0 \quad (22)$$

nous sommes ramenés à la résolution de l'équation différentielle :

$$(23) \quad y' = Y(x,y) = \frac{1}{1+(x-x_0)\left(\frac{\partial \bar{Y}}{\partial \bar{y}}\right)_0} \left\{ \bar{Y}[x, \bar{y}(x,y)] - \sum_{i=0}^m \frac{(x-x_0)^i}{i!} \bar{y}_0^{(i+1)} - (y-y_0)\left(\frac{\partial \bar{Y}}{\partial \bar{y}}\right)_0 \right\}$$

- de condition initiale : $y(x_0) = y_0 = \bar{y}_0$

- dont la solution vérifie : $y'_0 = \dots = y_0^{(m+1)} = 0$

$$\left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)_0 = \dots = \left(\frac{\partial^m Y}{\partial x^m}\right)_0 = 0$$

$$\left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)_0 = 0.$$

Compte tenu des relations précédentes, l'algorithme R-K₃ s'écrit, pour le pas (x_i, x_{i+1}) :

$$\left\{ \begin{array}{l} y_{i1} = y_i \\ y_{i2} = y_i + h A_{21} Y_{i1} \\ y_{i+1} = y_i + h [A_{31} Y_{i1} + A_{32} Y_{i2}] \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} Y_{i1} = Y(x_i + \theta_1 h, y_i) \\ Y_{i2} = Y(x_i + \theta_2 h, y_{i2}) \end{array} \right. \quad (24)$$

Remarque :

Le volume de calcul, par pas, est de $m+4$ Horner pour une transformation de hauteur m : $m+2$ pour la transformation et 2 pour l'algorithme R-K.

II - COMPARAISON DES DEVELOPPEMENTS DE LA SOLUTION EXACTE (TAYLOR) ET APPROCHEE (R-K.F_{3,m+4}) de $y' = Y(x,y)$

Dans le cas d'une transformation de hauteur m , nous avons :

$$Y_{i1} = \sum_{j=m+1}^{m+4} \frac{h^j \theta_1^j}{j!} C_j + \dots \quad (\text{en effet } C_1 = \dots = C_m = 0)$$

$$Y_{i2} = \frac{h^{m+1} \theta_2^{m+1}}{(m+1)!} C_{m+1} + \frac{h^{m+2} \theta_2^{m+2}}{(m+2)!} C_{m+2} +$$

$$\frac{h^{m+3}}{(m+3)!} \left[\theta_2^{m+3} C_{m+3} + (m+2)(m+3) A_{21} \theta_1^{m+1} \theta_2^{m+1} C_{m+1} \right] +$$

$$\frac{h^{m+4}}{(m+4)!} \left[\theta_2^{m+4} C_{m+4} + \frac{(m+2)(m+3)(m+4)}{2!} A_{21} \theta_1^{m+1} \theta_2^2 C_{m+1} +$$

$$(m+3)(m+4) A_{21} \theta_1^{m+2} \theta_2^{m+2} C_{m+2} \right] +$$

$$\frac{h^{2m+4}}{2!(m+1)!^2} A_{21}^2 \theta_1^{2m+2} R C_{m+1}^2 + \dots$$

(25)

d'où en remplaçant Y_{i1} et Y_{i2} dans la dernière ligne des relations (24) par les valeurs (25) il vient :

$$y_{i+1} - y_i = \frac{h^{m+2}}{(m+1)!} \left[(A_{31} \theta_1^{m+1} + A_{32} \theta_2^{m+1}) C_{m+1} \right] +$$

$$\frac{h^{m+3}}{(m+2)!} \left[(A_{31} \theta_1^{m+2} + A_{32} \theta_2^{m+2}) C_{m+2} \right] +$$

$$\frac{h^{m+4}}{(m+3)!} \left[(A_{31} \theta_1^{m+3} + A_{32} \theta_2^{m+3}) C_{m+3} + (m+2)(m+3) A_{32} A_{21} \theta_1^{m+1} \theta_2^{m+1} C_{m+1} \right] +$$

$$\frac{h^{m+5}}{(m+4)!} \left[(A_{31} \theta_1^{m+4} + A_{32} \theta_2^{m+4}) C_{m+4} + \frac{(m+4)!}{2!(m+1)!} A_{32} A_{21} \theta_1^{m+1} \theta_2^2 C_{m+1} +$$

$$(m+3)(m+4) A_{32} A_{21} \theta_1^{m+2} \theta_2^{m+2} C_{m+2} \right] +$$

$$\frac{h^{2m+5}}{2!(m+1)!^2} A_{32}^2 A_{21}^2 \theta_1^{2m+2} R C_{m+1}^2 + \dots$$

D'autre part, en considérant le développement de Taylor, nous avons :

$$\begin{aligned}
 y_{i+1} - y_i &= \frac{h^{m+2}}{(m+2)!} C_{m+1} + \frac{h^{m+3}}{(m+3)!} C_{m+2} + \\
 &\quad \frac{h^{m+4}}{(m+4)!} [C_{m+3} + (m+3)KC_{m+1}] + \\
 &\quad \frac{h^{m+5}}{(m+5)!} [C_{m+4} + \frac{(m+3)(m+4)}{2} LC_{m+1} + (m+4)KC_{m+2}] + \\
 &\quad \frac{h^{2m+5}}{2(m+2)!^2} RC_{m+1}^2 + \dots
 \end{aligned}$$

D'où le tableau de comparaison TAB.III.m, obtenu en identifiant les deux développements précédents :

TERMES	TAYLOR	R-K.F
$\frac{h^{m+2}}{(m+1)!} C_{m+1}$	$\frac{1}{m+2}$	$A_{31} \theta_1^{m+1} + A_{32} \theta_2^{m+1}$
$\frac{h^{m+3}}{(m+2)!} C_{m+2}$	$\frac{1}{m+3}$	$A_{31} \theta_1^{m+2} + A_{32} \theta_2^{m+2}$
$\frac{h^{m+4}}{(m+3)!} C_{m+3}$	$\frac{1}{m+4}$	$A_{31} \theta_1^{m+3} + A_{32} \theta_2^{m+3}$
KC_{m+1}	$\frac{m+3}{m+4}$	$(m+2)(m+3)A_{32}A_{21}\theta_1^{m+1}\theta_2$
$\frac{h^{m+5}}{(m+4)!} C_{m+4}$	$\frac{1}{m+5}$	$A_{31} \theta_1^{m+4} + A_{32} \theta_2^{m+4}$
LC_{m+1}	$\frac{(m+3)(m+4)}{2(m+5)}$	$\frac{(m+2)(m+3)(m+4)}{2} A_{32}A_{21}\theta_1^{m+1}\theta_2^2$
KC_{m+2}	$\frac{m+4}{m+5}$	$(m+3)(m+4)A_{32}A_{21}\theta_1^{m+2}\theta_2$

Tableau TAB.III.m. Identification des termes des développements de Taylor et de R-K.F.

Remarque

Dans le cas particulier $m = 0$, il faut ajouter un terme à ce tableau. (il provient du terme en h^{2m+5}).

TERMES	TAYLOR	R-K.F.
$\frac{h^5}{4!} RC_1^2$	$\frac{3}{5}$	$12 A_{32} A_{21}^2 \theta_1^2$

Tableau TAB.III.m = 0

III - ORDRE DE LA METHODE

En nous reportant au tableau TAB.III.m, nous pouvons obtenir des formules d'ordre $m+4$. En effet, à condition de choisir θ_1 et θ_2 tels que $\theta_1 \neq \theta_2$, $\theta_1 \neq 0$, $\theta_2 \neq 0$, les relations fournies par les coefficients des termes en C_{m+1} , C_{m+2} et C_{m+3} (3 relations à 4 inconnues : A_{31} , A_{32} , θ_1 , θ_2) sont compatibles à condition que le déterminant complet du système ainsi formé soit nul, ce qui nous conduit à la "relation de compatibilité" R.C. :

$\frac{\theta_1 \theta_2}{m+2} - \frac{\theta_1 + \theta_2}{m+3} + \frac{1}{m+4} = 0 \quad (\text{R.C.})$	(26)
---	------

Des 4 relations aux 5 inconnues ($A_{21}, A_{31}, A_{32}; \theta_1, \theta_2$) fournies par les coefficients des termes en h^{m+2} , h^{m+3} et h^{m+4} nous tirons :

$A_{21} = \frac{m+3}{m+4} \frac{\theta_2^m}{\theta_1^{m+1}} \frac{\theta_2 - \theta_1}{(m+2) - (m+3)\theta_1}$	(27)
$A_{31} = \frac{1}{(m+2)(m+3)} \frac{(m+3)\theta_2 - (m+2)}{\theta_1^{m+1}(\theta_2 - \theta_1)}$	
$A_{32} = \frac{1}{(m+2)(m+3)} \frac{(m+2) - (m+3)\theta_1}{\theta_2^{m+1}(\theta_2 - \theta_1)}$	

Constatons d'abord que la détermination complète des coefficients A_{21} , A_{31} et A_{32} dépend du choix des coefficients θ_1 et θ_2 qui tout en étant libres sont liés par la relation (26).

Enfin, il est impossible d'obtenir des formules d'ordre $m+5$. En effet, pour avoir compatibilité entre les relations obtenues en considérant les coefficients des termes en C_{m+2} , C_{m+3} et C_{m+4} , nous obtenons la relation :

$$\frac{\theta_1 \theta_2}{m+3} - \frac{\theta_1 + \theta_2}{m+4} + \frac{1}{m+5} = 0 \quad (28)$$

En tirant des relations (26) et (28) les valeurs de θ_1 et θ_2 nous aboutissons à une impossibilité en ce qui concerne les termes en LC_{m+1} et KC_{m+2} .

Nous sommes donc assurés que l'ordre maxima des formules est $m+4$ en ce qui concerne la résolution numérique de $y' = Y(x,y)$, équation différentielle transformée de l'équation différentielle proposée $\bar{y}' = \bar{Y}(x,\bar{y})$.

En ce qui concerne la résolution de $\bar{y}' = \bar{Y}(x,\bar{y})$, si nous posons $\epsilon_{i+1} = y_{i+1}^* - y_{i+1}$; valeurs obtenues en x_{i+1} pour $y(x)$, respectivement valeur exacte et valeur obtenue par l'algorithme R-K ; et si nous posons $\bar{\epsilon}_{i+1} = \bar{y}_{i+1}^* - \bar{y}_{i+1}$; valeurs obtenues en transformant respectivement y_{i+1}^* et y_{i+1} ; nous obtenons $\bar{\epsilon}_{i+1} = \epsilon_{i+1} \left[1 + h \left(\frac{\partial \bar{Y}}{\partial y} \right)_i \right]$ ce qui assure que les formules sont bien d'ordre $m+4$ pour la résolution de $\bar{y}' = \bar{Y}(x,\bar{y})$.

Remarque :

Nous venons de montrer que les formules R-K.F_{3,m+4} sont d'ordre $m+4$ en ce qui concerne \bar{y} , d'autre part ces formules nécessitent le calcul de $m+4$ Horner par pas ; or nous avons vu au chapitre précédent, que les formules R-K.F_{2,n+3} sont, pour une transformation de hauteur n , d'ordre $n+3$ avec un volume de calcul de $n+3$ Horner par pas. Par conséquent il est possible d'obtenir des formules de même ordre K , en employant soit les formules du type R-K.F_{2,K} de hauteur $K-3$ à K Horner, soit les formules du type R-K.F_{3,K} de hauteur $K-4$ à K Horner. On obtient le même ordre pour un volume de calcul identique par les deux types de formules.

En fait, du point de vue pratique, on s'aperçoit que les résultats obtenus par R-K.F_{3,K} sont légèrement meilleurs que ceux obtenus par R-K.F_{2,K}.

IV - ETABLISSEMENT DES FORMULES

Nous avons vu, que pour des formules d'ordre $m+4$, les coefficients A_{21} , A_{31} et A_{32} sont fonction de θ_1 et θ_2 arbitraires mais liés par la relation (26) ou (29).

$$\frac{\theta_1 \theta_2}{m+2} - \frac{\theta_1 + \theta_2}{m+3} + \frac{1}{m+4} = 0 \quad (\text{R.C}) \quad (29)$$

$$\begin{aligned} A_{21} &= \frac{m+3}{m+4} \frac{\theta_2^m}{\theta_1^{m+1}} \frac{\theta_2 - \theta_1}{(m+2) - (m+3)\theta_1} \\ A_{31} &= \frac{1}{(m+2)(m+3)} \frac{(m+3)\theta_2 - (m+2)}{\theta_1^{m+1}(\theta_2 - \theta_1)} \\ A_{32} &= \frac{1}{(m+2)(m+3)} \frac{(m+2) - (m+3)\theta_1}{\theta_2^{m+1}(\theta_2 - \theta_1)} \end{aligned} \quad (30)$$

Remarque :

Nous avons déjà signalé que les valeurs $\theta_1 = \theta_2$, $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = 0$ étaient à exclure. Nous devons en outre exclure les valeurs :

$$\theta_i = \frac{m+2}{m+3}, \quad \theta_j = \frac{m+3}{m+4}, \quad (i = 1, 2 ; j = 1, 2)$$

en effet la relation (29) peut encore se mettre sous la forme :

$$\theta_i \left| \frac{\theta_j}{m+2} - \frac{1}{m+3} \right| = \frac{\theta_j}{m+3} - \frac{1}{m+4} \quad (i, j = 1, 2) \\ i \neq j$$

Parmi les formules (30) nous choisirons des valeurs particulières de θ_1 et θ_2 qui nous permettent d'annuler certains termes d'erreur, en particulier les termes en h^{m+5} . Il est à noter qu'il est impossible d'annuler plus d'un terme en h^{m+5} à la fois.

Considérons le cas $m \neq 0$.

- Annulation du coefficient du terme en $h^{m+5} C_{m+4}$

Ceci conduit à :

$$\theta_1 = \frac{-(m+3) - \sqrt{\frac{m+3}{m+4}}}{m+5}$$

$$\theta_2 = \frac{-(m+3) + \sqrt{\frac{m+3}{m+4}}}{m+5}$$

(31)

Les premiers termes d'erreur restant sont :

$$\frac{h^{m+5}}{(m+5)!} \left[\frac{m+3}{2} (2m+7 - \sqrt{\frac{m+3}{m+4}}) LC_{m+1} + (2m^2 + 12m + 17 + \sqrt{\frac{m+3}{m+4}}) \frac{KC_{m+2}}{m+2} \right]$$

- Annulation du coefficient du terme en $h^{m+5} LC_{m+1}$

Cela conduit à :

$$\theta_1 = \frac{1}{2} \frac{m+2}{m+4}$$

$$\theta_2 = \frac{m+4}{m+5}$$

(32)

Les premiers termes d'erreur restant sont :

$$\frac{h^{m+5}}{(m+5)!} \left[\frac{m+2}{2(m+4)} C_{m+4} + \frac{m^2+8m+17}{2(m+4)} KC_{m+2} \right]$$

- Annulation du coefficient du terme en $h^{m+5} KC_{m+2}$

Cela conduit à :

$$\theta_1 = \frac{(m+2)(m+4)}{(m+3)(m+5)}$$

(33)

$$\theta_2 = \frac{m^2+7m+13}{(m+3)(m+4)}$$

Les premiers termes d'erreur restant sont :

$$\frac{h^{m+5}}{(m+5)!} \left[-\frac{2m^2+14m+25}{(m+3)^2(m+4)^2} C_{m+4} - \frac{m^2+8m+17}{2(m+4)} LC_{m+1} \right]$$

- Pour le cas particulier $m = 0$, il convient d'ajouter aux termes d'erreur précédents le terme

$$RC_1^2 \left[3 - \frac{15}{2} A_{21} \frac{\theta_1}{\theta_2} \right]$$

- Nous obtenons, d'autre part pour $m = 0$, une quatrième formule particulière en prenant :

$$\theta_1 = \frac{8-\sqrt{46}}{6} \# 0.202 \ 9$$

$$\theta_2 = \frac{64+\sqrt{46}}{90} \# 0.786 \ 4$$

(34)

valeurs qui annulent le coefficient du terme en $h^5 RC_1^2$.

- Nous pouvons aussi prendre les coefficients θ_1 et θ_2 de R-K_{3,3} classique, soit

$$\theta_1 = \frac{1}{2}, \theta_2 = 1 \quad (35)$$

ce qui donne :

$$A_{21} = \frac{2^{m+1}(m+3)}{(m+1)(m+4)}$$

$$A_{31} = \frac{2^{m+2}}{(m+2)(m+3)} \quad (36)$$

$$A_{32} = \frac{m+1}{(m+2)(m+3)}$$

les premiers termes d'erreur étant :

$$\frac{h^{m+5}}{(m+5)!} \left[-\frac{5m+1}{4(m+2)(m+3)} C_{m+4} - \frac{m+3}{2} LC_{m+1} + \frac{m^2+4m+1}{2(m+2)} KC_{m+2} \right]$$

Citons à titre d'exemple, les valeurs θ_1 et θ_2 prises dans les formules (31) à (35).

	m	θ_1	θ_2	$S = \theta_1 + \theta_2$	Rayon
(31)	0	-0.7732	0.4268	-0.3464	1.1745
	1	-0.8157	0.5176	-0.2981	1.1631
	2	-0.8446	0.5838	-0.2608	1.2048 ; 2
	3	-0.8657	0.6342	-0.2315	1.1768 ; 2.6
	4	-0.8817	0.6738	-0.2079	1.1442 ; 2.99
	5	-0.8942	0.7057	-0.1885	1.1337 ; 3.45
(32)	0	0.0225	0.80	1.05	1.05
	1	0.0330	0.8333	1.1333	1.1
	2	0.3333	0.8571	1.1904	1.20 ; 1.6
	3	0.3571	0.8750	1.2321	1.10 ; 2.2
	4	0.3750	0.8888	1.2638	1.10 ; 2.5
	5	0.3888	0.90	1.2888	1.10 ; 2.7
(33)	0	0.5333	1.0833	1.6166	0.8 ; 1.5
	1	0.6250	1.05	1.6750	0.9 ; 1.8
	2	0.6857	1.0333	1.7190	0.95 ; 2.0
	3	0.7291	1.0238	1.7529	0.95 ; 3.5
	4	0.7619	1.0178	1.7797	0.95 ; 3.6
	5	0.7875	1.0138	1.8013	0.95 ; 4.1
(34)	0	0.2029	0.7864	0.9893	1.1
(35)	0	0.5	1	1.5	1.0 ; 1.5
	1	0.5	1	1.5	1.05 ; 1.5
	2	0.5	1	1.5	1.05 ; 2.05
	3	0.5	1	1.5	1 ; 2.6
	4	0.5	1	1.5	1 ; 2.9
	5	0.5	1	1.5	1 ; 3.40

V - RESULTATS NUMERIQUES

Nous comparerons la méthode R-K.F_{3,m+4}, formule (32) en θ_1 et θ_2 , à la méthode R-K₃₃ classique de coefficients :

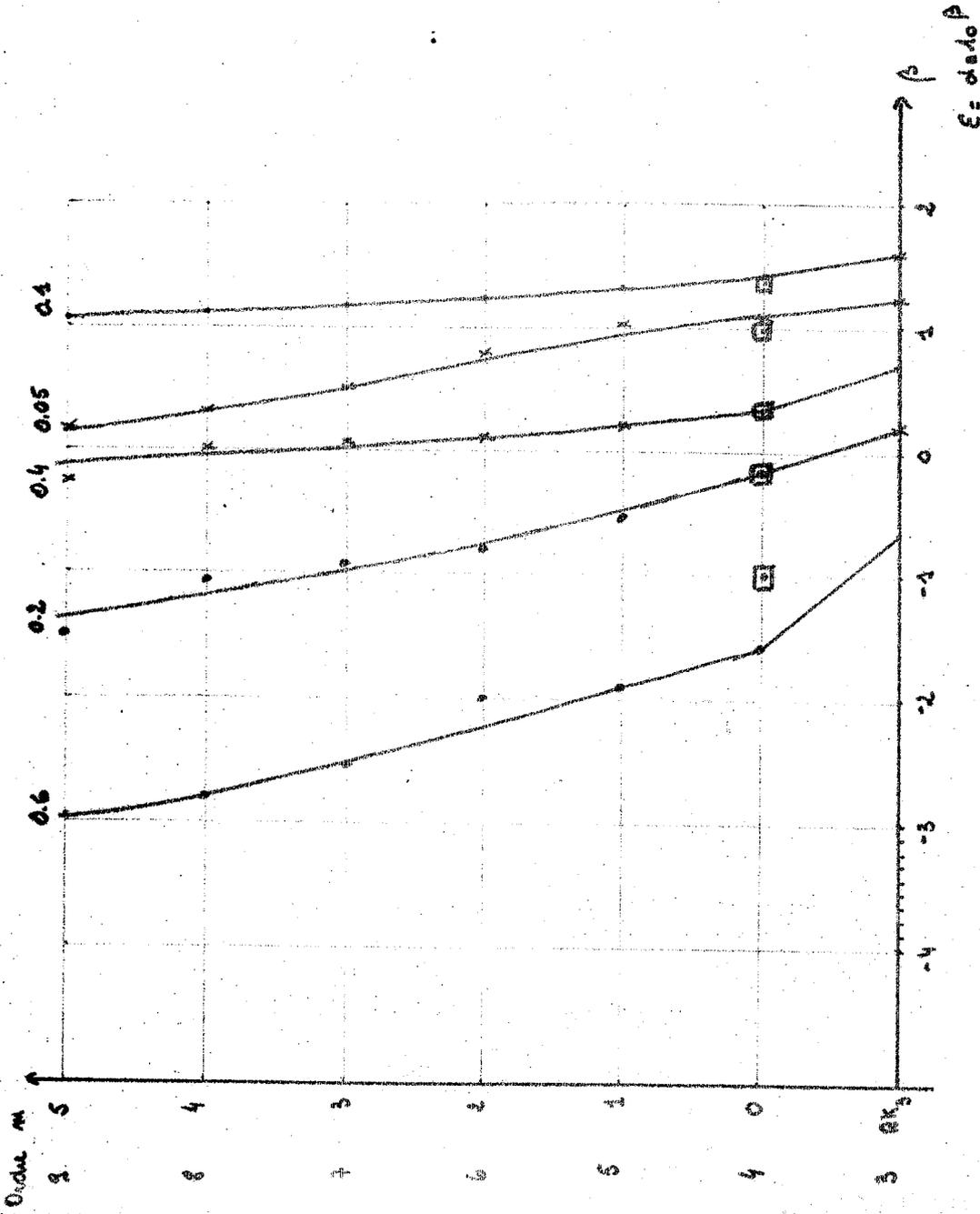
$$\theta_1 = 1/2 , \quad \theta_2 = 1$$

$$A_{10} = 1/2$$

$$A_{20} = -1, \quad A_{21} = 2$$

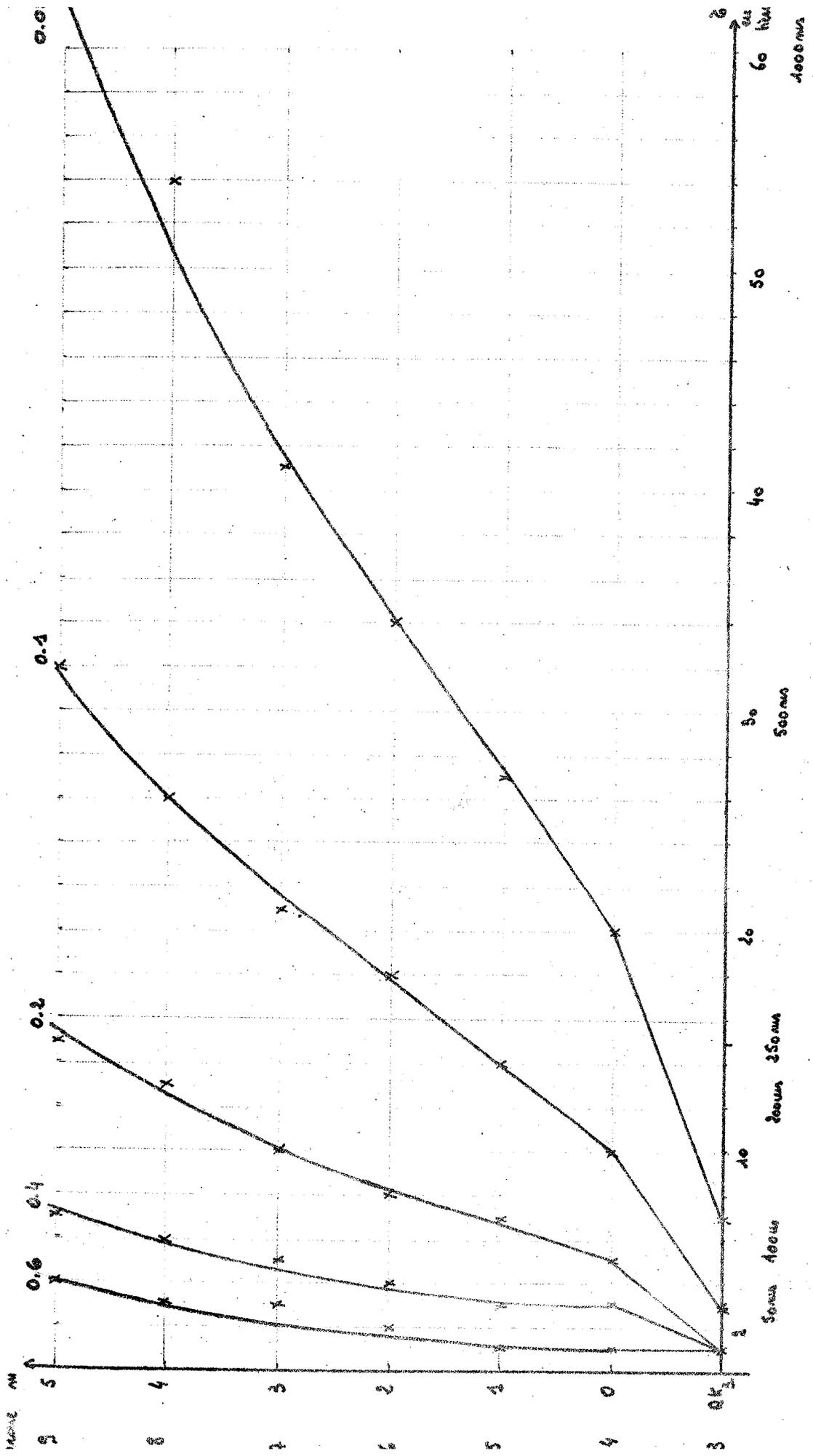
$$A_{30} = 1/6 , \quad A_{31} = 2/3 , \quad A_{32} = 1/6$$

Nous avons indiqué, pour chaque pas, l'erreur obtenue par R-K₄₄ (□)



PAS R	0.05	0.1	0.2	0.4	0.6
Nombre de pas	34	17	8	4	2
n_N	2.7	2.7	2.6	2.6	2.2
\bar{y}_N	116.18	116.18	22.47	22.47	4.28

$\bar{y}' = \bar{y}^2/n$	$\bar{y} = \frac{1}{1 - \cos(\alpha)}$
$n_0 = 1$	$\bar{y}_0 = 1$
$n_N = 1.7$	$\bar{y}_N = 116.18$

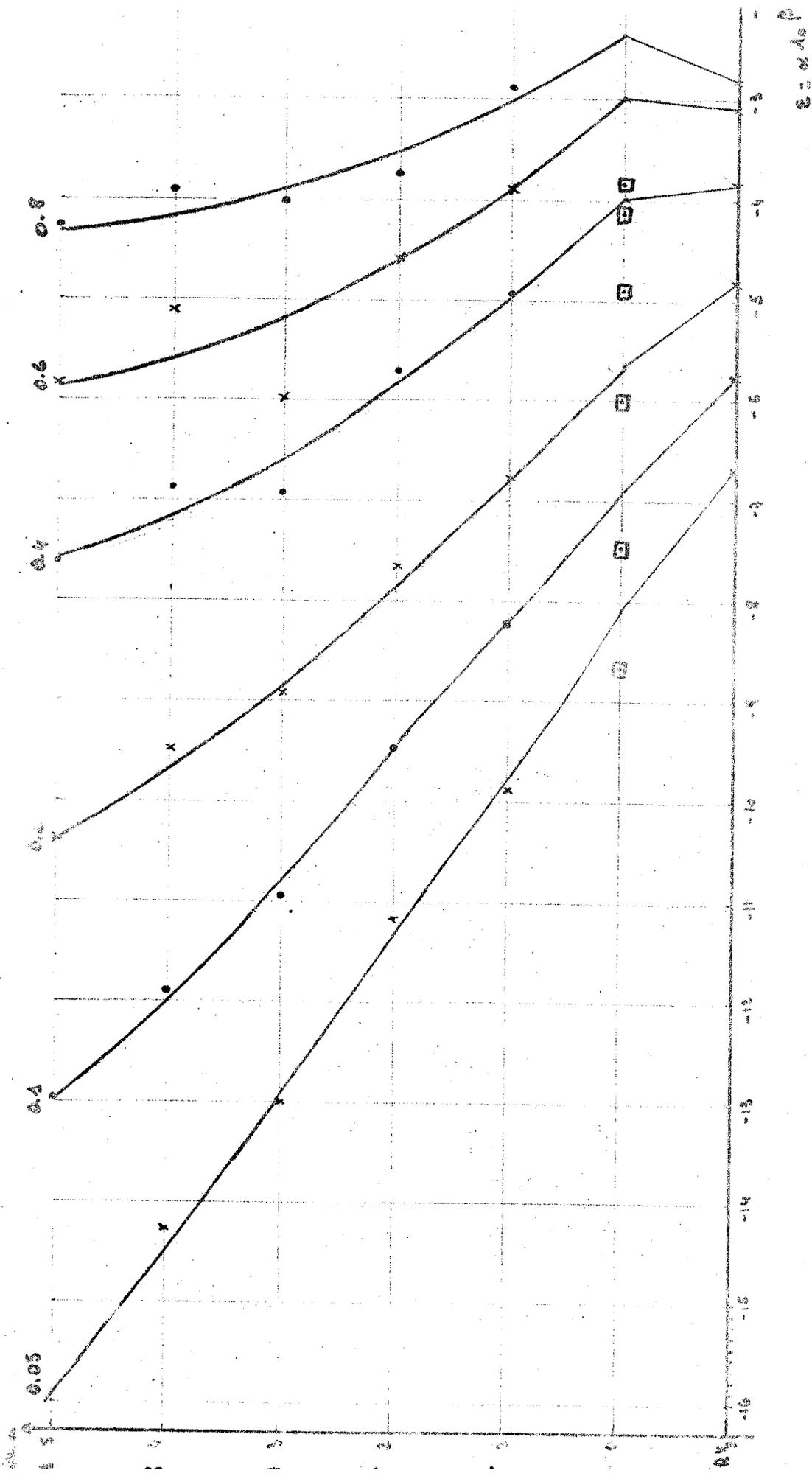


Temp d' integration

$$\bar{y} = \bar{y}^2 / \alpha \quad \bar{y} = \frac{1}{1 - \ln(\alpha)}$$

$$\alpha_0 = 1 ; \alpha_N = 2.7$$

$$h = 0.05 - 0.1 - 0.2 - 0.4 - 0.6$$



PAS h	0.05	0.4	0.2	0.4	0.6	0.8
Number	100	50	25	22	8	6
wt	5	5	5	4.8	4.8	4.8
\bar{P}^2	1.373	1.373	1.373	1.373	1.373	1.373

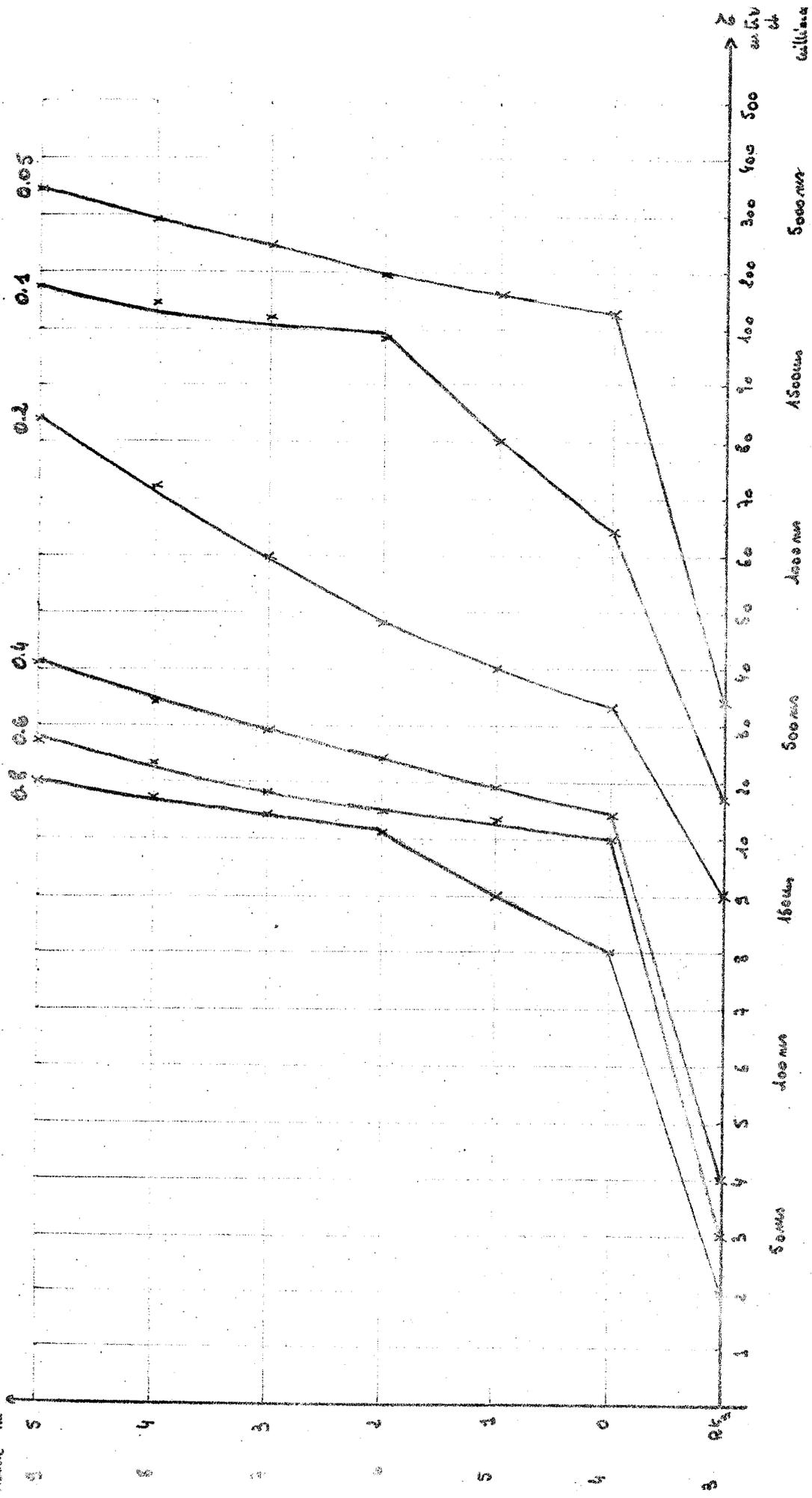
$$\bar{P}' = \cos^2(\frac{\pi}{2}) \quad \bar{P} = \text{Reactg}(\cos)$$

$$N_0 = 0 > \bar{P}^2 = 0$$

$$N_{00} = 0 > \bar{P}^2 = 0$$

$z = wt A_0 P$

Pressure (atm)

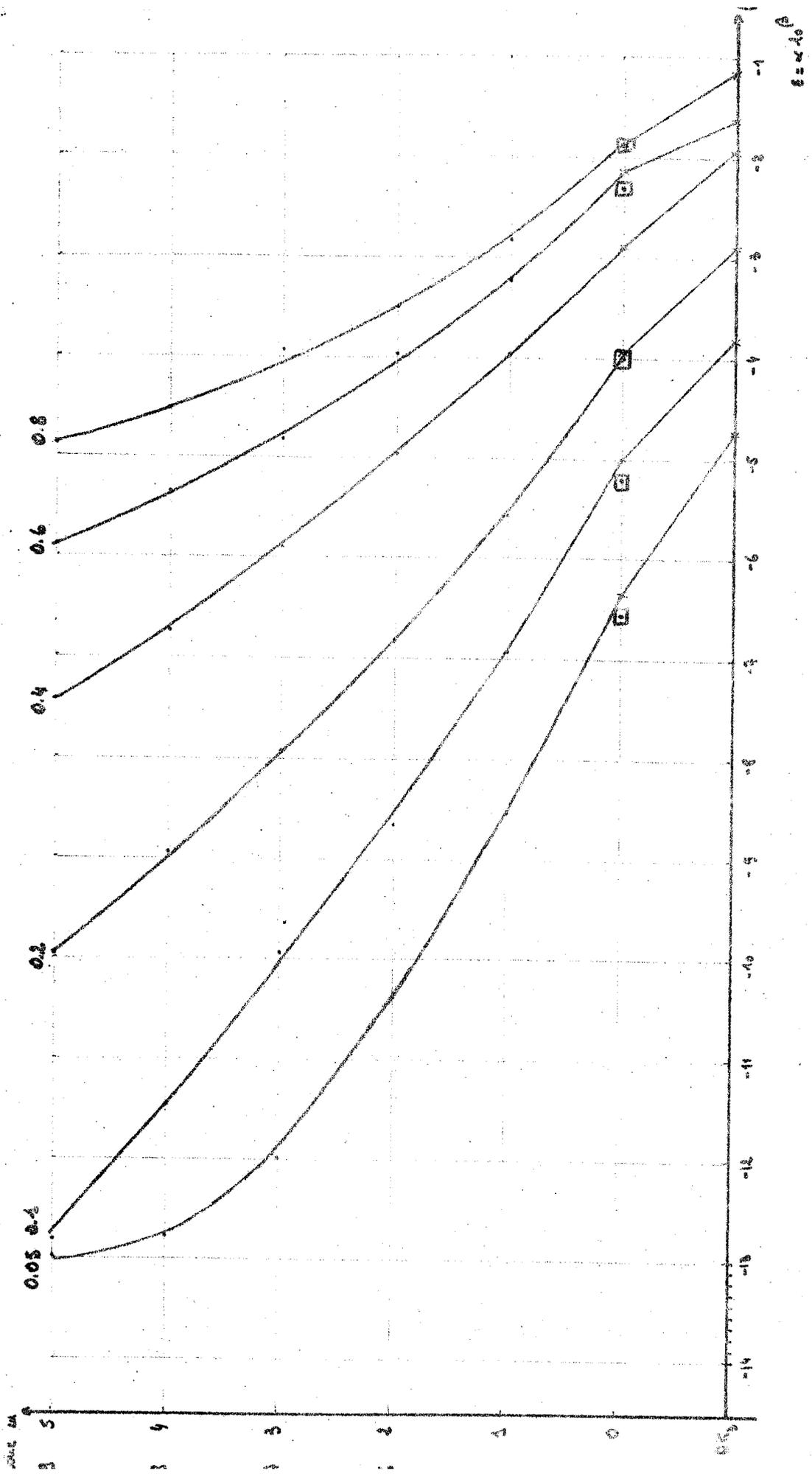


Group d' integration

$$\bar{y} = \cos^2(\bar{y}) \quad \bar{y} = R \cdot \text{outg}(\text{m})$$

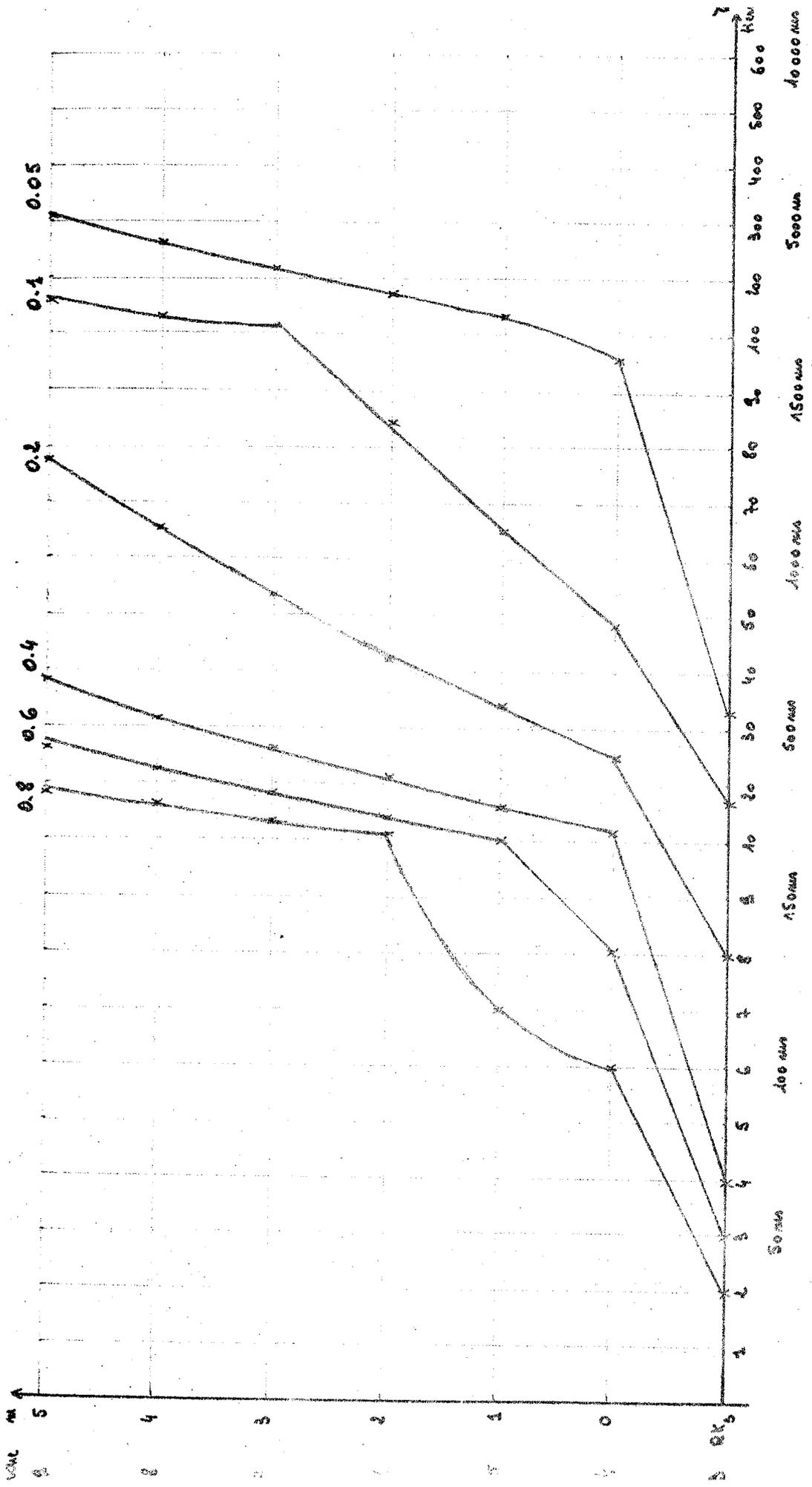
$$r_0 = 0 \quad ; \quad r_N = 5$$

$$h = 0.05 - 0.1 - 0.2 - 0.4 - 0.6 - 0.8$$



PRICE	0.05	0.1	0.2	0.4	0.6	0.8
Q	160	90	45	22	15	11
Q_M	10	10	10	9.8	10	9.8
\bar{Q}_M	23.025	23.025	23.025	22.367	23.025	22.367

$\bar{Q} = 1 + \bar{Q}/\alpha$	$\bar{Q} = \alpha \cdot Lu(\alpha)$
$\alpha_0 = 1$	$\bar{Q}_0 = 0$
$\alpha_M = 10$	$\bar{Q}_M = 20.025$

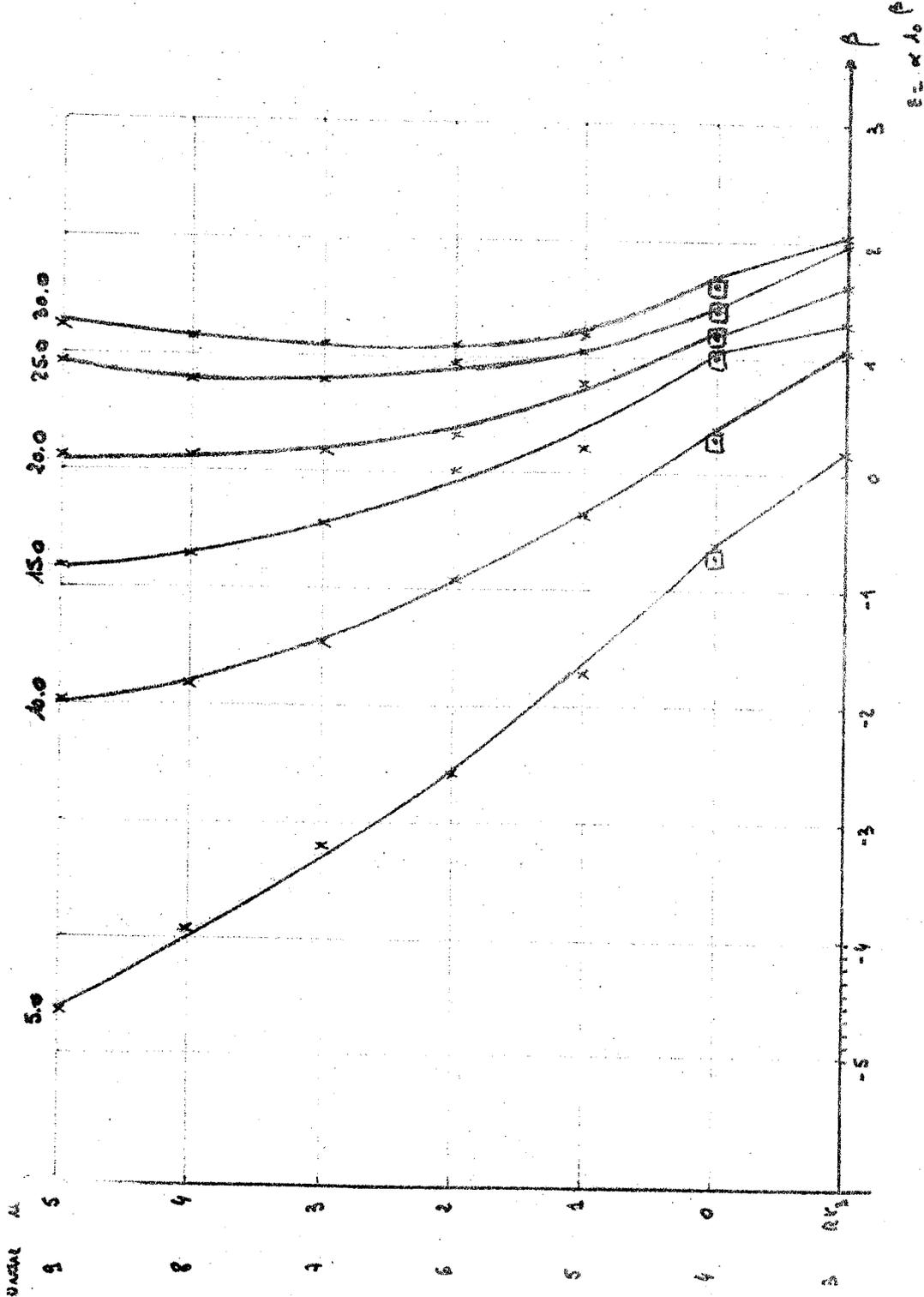


Temp of integration

$$\bar{P} = 1 + \bar{P}/m \quad \bar{y} = m \cdot \ln(m)$$

$$m_0 = 1, \quad m_N = 10$$

$$h = 0.05 - 0.1 - 0.2 - 0.4 - 0.6 - 0.8$$



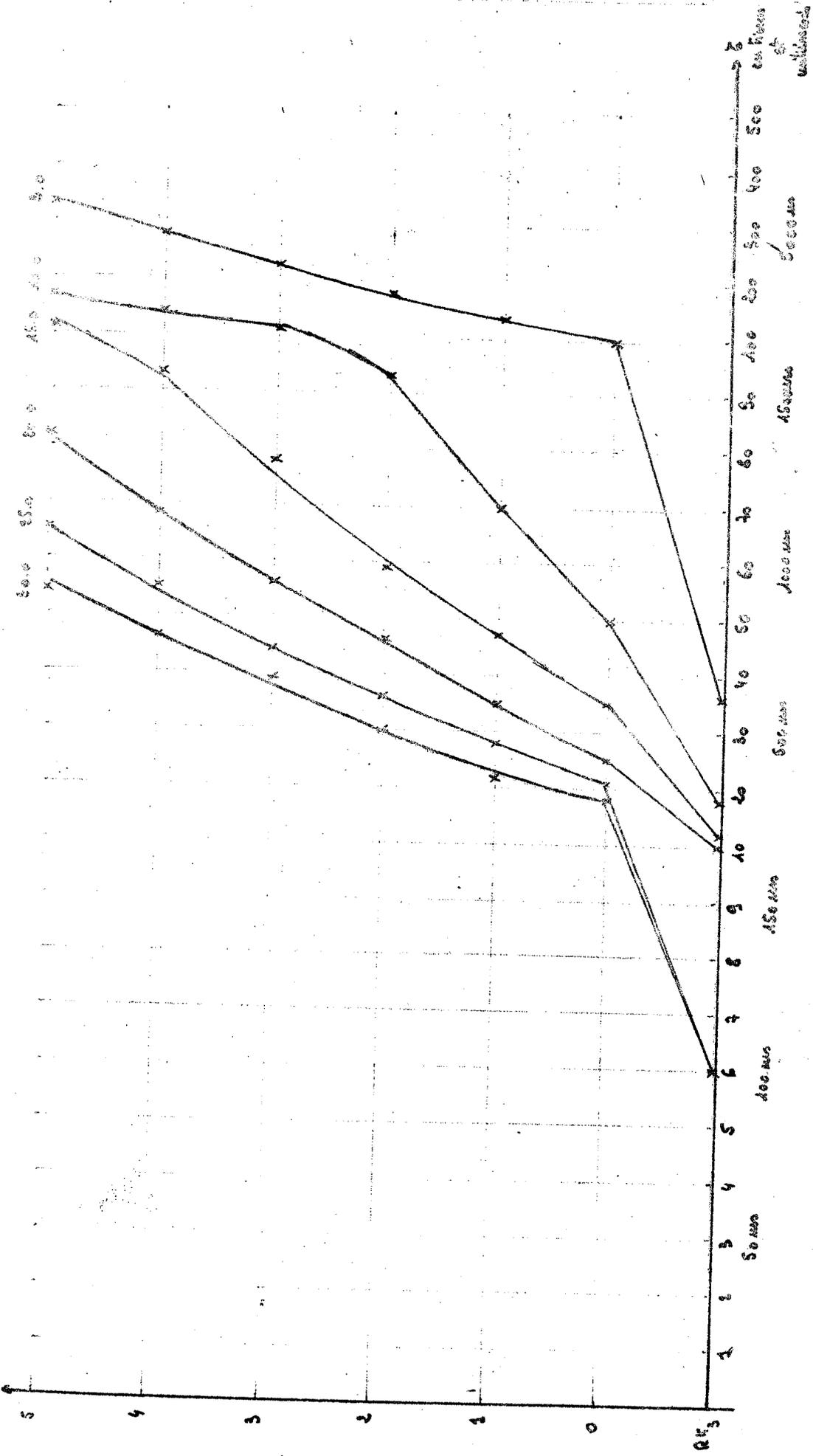
PAS R	5.0	10.0	15.0	20.0	25.0	30.0
Nombre de pas	198	39	66	49	39	33
α_N	1000	1000	1000	985	1000	1000
\bar{y}_N^{**}	6907.25	6907.25	6828.72	6780.25	6780.25	6707.25

$$\bar{y}' = 1 + \bar{y}/\alpha$$

$$\bar{y} = \alpha \cdot L_M(\alpha)$$

$$\alpha_0 = 100 ; \bar{y}_0^{**} = 23.015$$

$$\alpha_N = 1000 ; \bar{y}_N^{**} = 6907.25$$



Comp d' integration

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \cdot \Delta x$$

$$n = 10 ; n_N = 1000$$

$$h = 5.0 - 1.0 = 4.0 - 20.0 - 25.0 - 30.0$$

VI - ETUDE DE LA STABILITE

Rappelons que dans le cas de l'équation différentielle $\bar{y}' = -\bar{y}$, la transformation de hauteur m s'écrit :

$$\bar{y} = y \left[1 - (x - x_i) \right] + \bar{y}_i \sum_{j=2}^{m+1} (-1)^j \frac{(x - x_i)^j}{j!} \quad (37)$$

et l'équation différentielle transformée est :

$$y' = Y(x, y) = \frac{x - x_i}{1 - (x - x_i)} \left\{ y - \bar{y}_i + (1 - \frac{x - x_i}{1 - (x - x_i)})^m \bar{y}_i \frac{(x - x_i)^m}{(m+1)!} \right\} \quad (38)$$

Les valeurs Y_{i1} et Y_{i2} qui interviennent dans l'algorithme de Runge-Kytta (24) s'écrivent alors en remplaçant dans la formule (38) x respectivement par $x_i + \theta_1 h$ et $x_i + \theta_2 h$:

$$Y_{i1} = \frac{(-1)^m}{(m+1)!} \frac{h^{m+1} \theta_1^{m+1}}{1 - h\theta_1} \bar{y}_i$$

$$Y_{i2} = \frac{(-1)^m}{(m+1)!} \left[\frac{h^{m+1} \theta_2^{m+1}}{1 - h\theta_2} + A_{21} \frac{h^{m+3} \theta_1^{m+1} \theta_2}{(1 - h\theta_1)(1 - h\theta_2)} \right] \bar{y}_i$$

ce qui entraîne, en posant $\pi = (1 - h\theta_1)(1 - h\theta_2)$:

$$y_{i+1} = y_i \left[1 + \frac{(-1)^m h^{m+2}}{\pi (m+1)!} \left\{ (A_{31} \theta_1^{m+1} + A_{32} \theta_2^{m+1}) - h\theta_1 \theta_2 (A_{31} \theta_1^m + A_{32} \theta_2^m) + h^2 A_{32} A_{21} \theta_1^{m+1} \theta_2 \right\} \right] \quad (39).$$

et en tenant compte, des relations suivantes déduites des relations (29) et (30) :

$$A_{31}\theta_1^{m+1} + A_{32}\theta_2^{m+1} = \frac{1}{m+2}$$

$$\theta_1\theta_2(A_{31}\theta_1^m + A_{32}\theta_2^m) = \frac{S}{m+2} - \frac{1}{m+3} \quad (40)$$

$$A_{32}A_{21}\theta_1^{m+1}\theta_2 = \frac{1}{(m+2)(m+4)}$$

$$(S = \theta_1 + \theta_2)$$

nous pouvons écrire la relation (39) sous la forme :

$$y_{i+1} = y_i \left[1 + \frac{(-1)^m h^{m+2}}{\pi(m+1)!} \left\{ \frac{1}{m+2} - h \left(\frac{S}{m+2} - \frac{1}{m+3} \right) + h^2 \frac{1}{(m+2)(m+4)} \right\} \right] \quad (41)$$

et en appliquant la transformation (37) à la relation (41) il vient :

$$\bar{y}_{i+1} = \bar{y}_i \left[\sum_{j=0}^{m+1} (-1)^j \frac{h^j}{j!} + \frac{(-1)^m h^{m+2}}{\pi(m+1)!} \left\{ \frac{1}{m+2} - h \left(\frac{S}{m+2} + \frac{1}{(m+2)(m+3)} \right) + h^2 \left(\frac{S}{m+2} - \frac{m^2+5m+5}{(m+2)(m+3)(m+4)} \right) - h^3 \frac{1}{(m+2)(m+4)} \right\} \right] \quad (42)$$

Les conditions de stabilité pour les relations (41) et (42) s'écrivent respectivement :

$$-1 < 1 + \frac{(-1)^m h^{m+2}}{\pi(m+1)!} \left\{ \frac{1}{m+2} - h \left(\frac{S}{m+2} - \frac{1}{m+3} \right) + h^2 \frac{1}{(m+2)(m+4)} \right\} < 1 \quad (43)$$

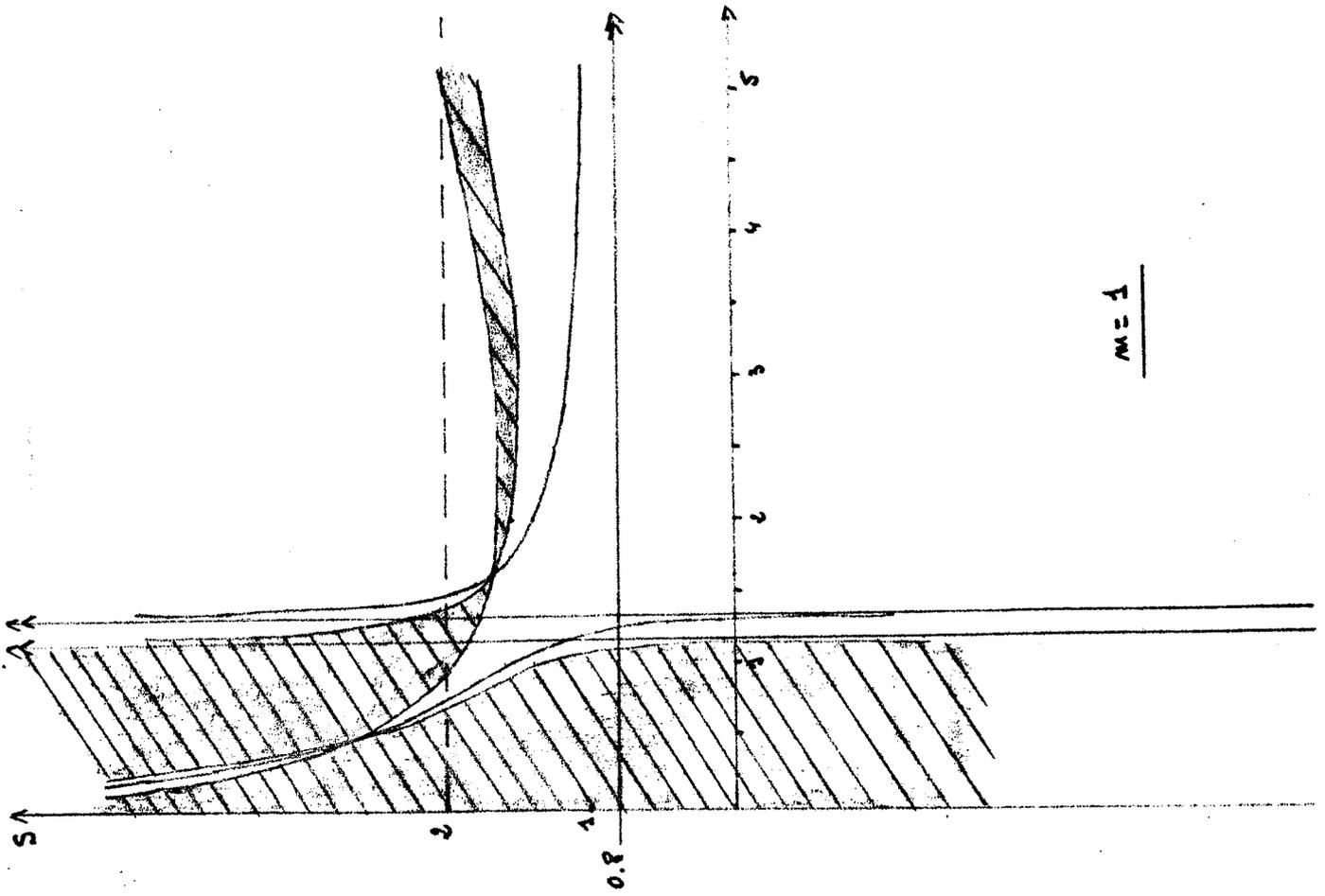
$$-1 < \sum_{j=0}^{m+1} (-1)^j \frac{h^j}{j!} + \frac{(-1)^m h^{m+2}}{\pi(m+1)!} \left\{ 1 - h \left(S + \frac{1}{m+3} \right) + h^2 \left(S - \frac{m^2+5m+5}{(m+3)(m+4)} \right) - h^3 \frac{1}{m+4} \right\} < 1 \quad (44)$$

Nous avons étudié les relations (43) et (44) sous forme graphique en traçant les courbes $S = \theta_1 + \theta_2 = f(h, m)$.

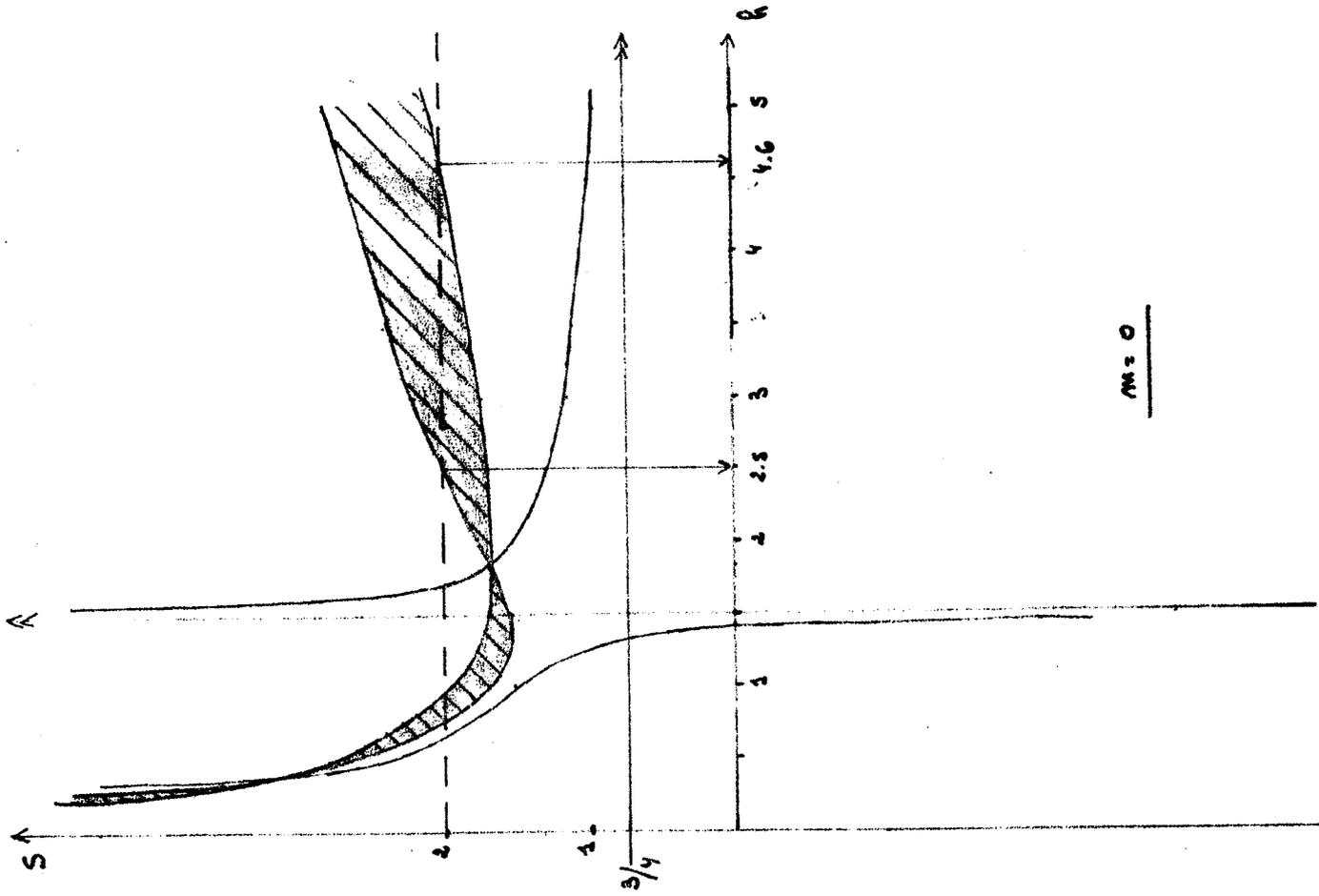
Nous avons représenté les plages de stabilité par des zones hachurées. De plus nous avons à chaque fois indiqué la valeur de $S = \theta_1 + \theta_2$ des formules (32), car nous avons utilisé ces formules pour obtenir les résultats numériques donnés au § III.5.

Signalons que nous avons indiqué dans la dernière colonne du tableau des valeurs numériques prises par θ_1 et θ_2 dans les formules (31) à (35), soit le rayon de stabilité seul, soit le rayon de stabilité et l'extrémité droite de la plage de stabilité.

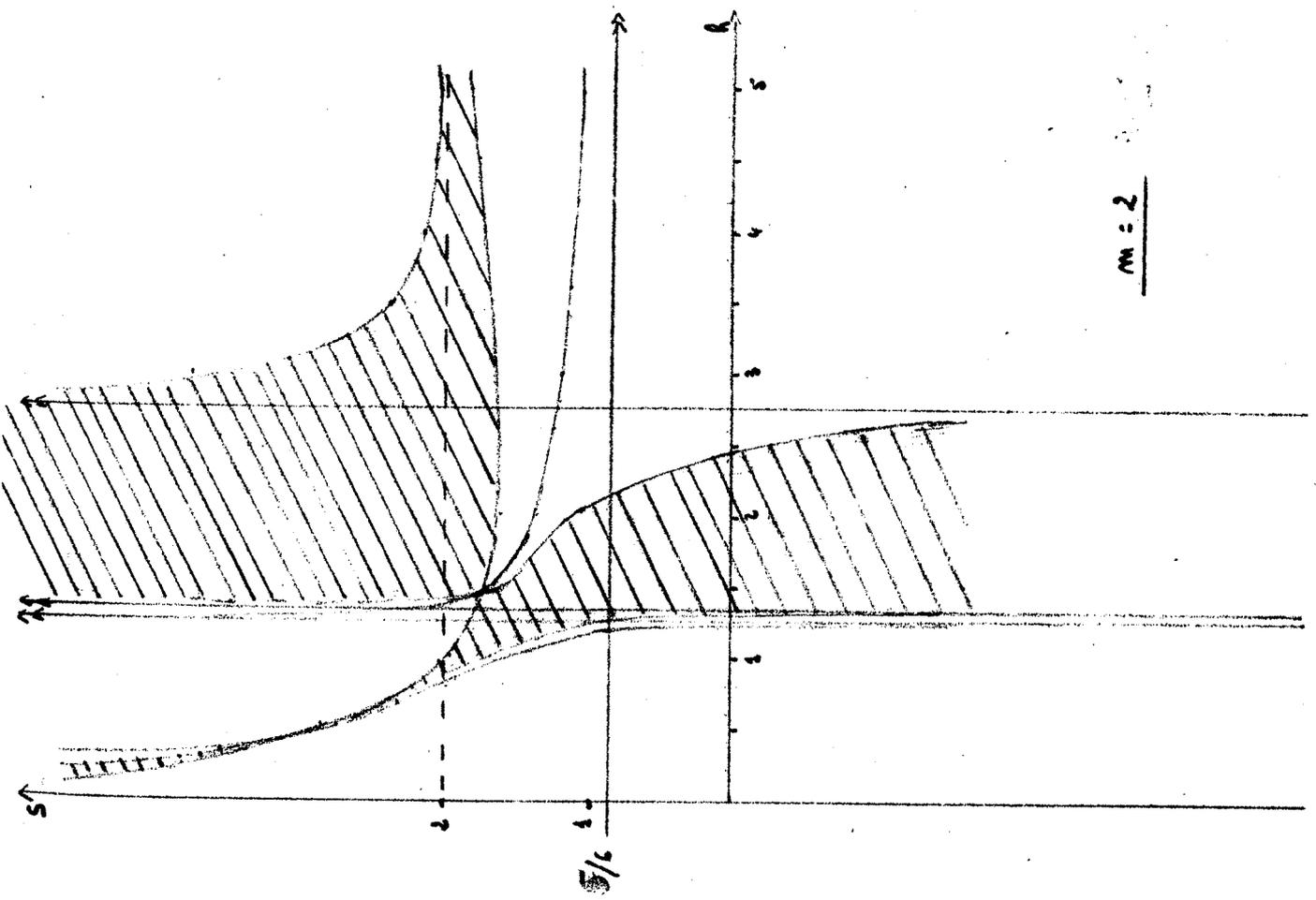
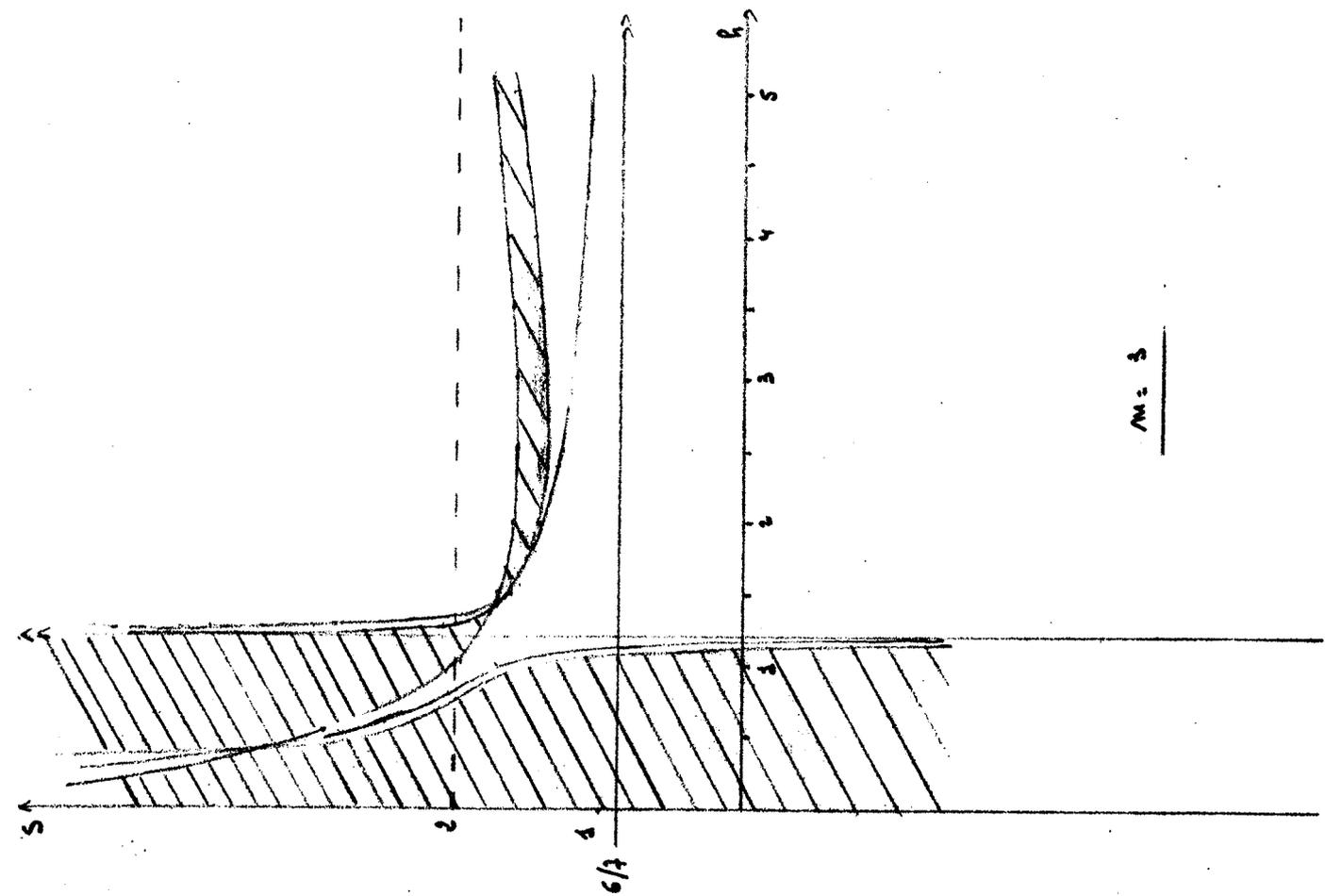
Nous donnons aussi un tableau comportant à la fois les résultats théoriques de l'étude de la relation (44) et les résultats numériques de l'étude pratique de la stabilité par intégration de $\bar{y}' = -\bar{y}$ de $x_0 = 0$ à $x_n = 20$. Chaque valeur indiquée représente l'erreur $\epsilon = |\text{valeur exacte} - \text{valeur numérique}|$ obtenue en fin d'intégration.



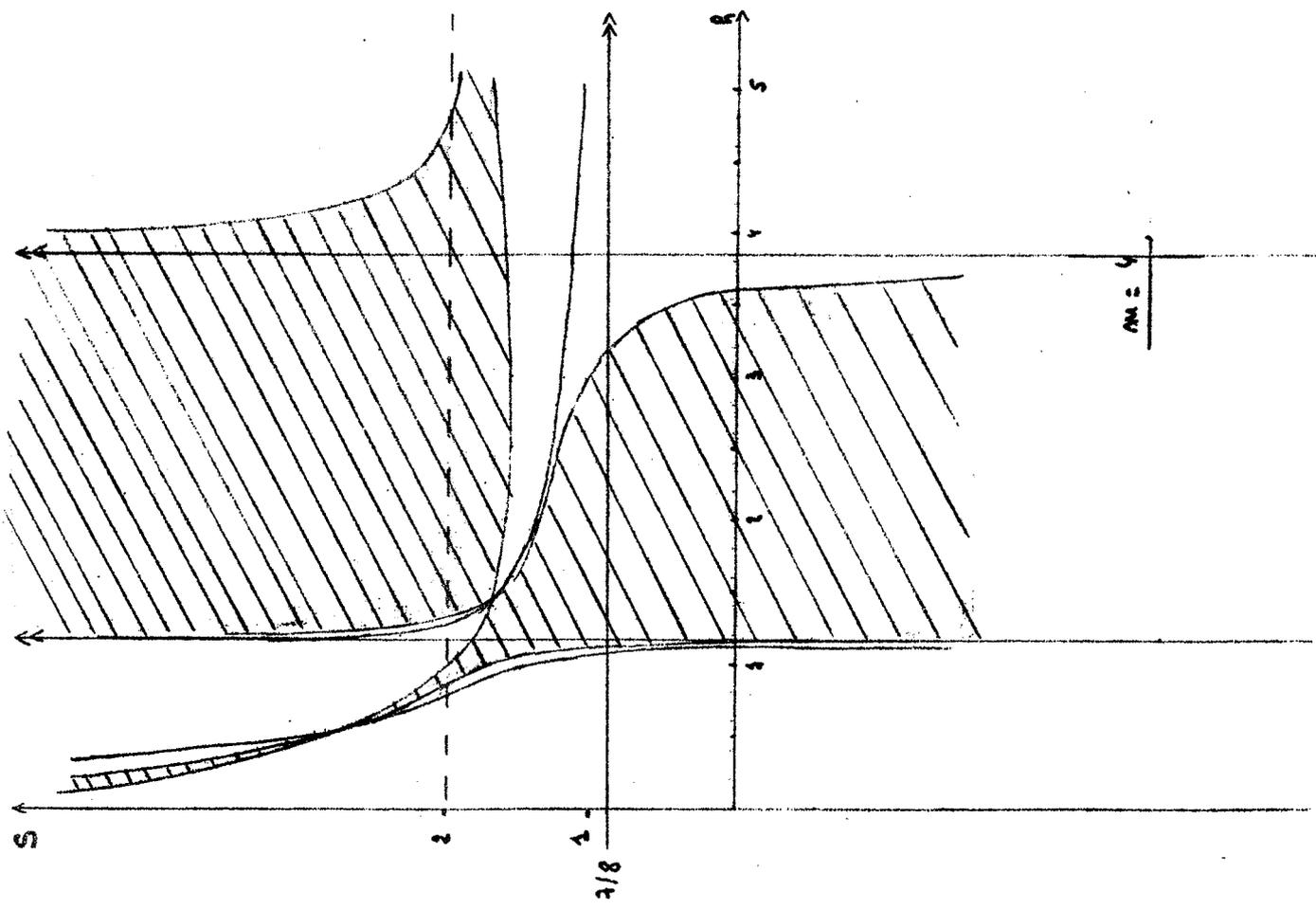
$m = 1$



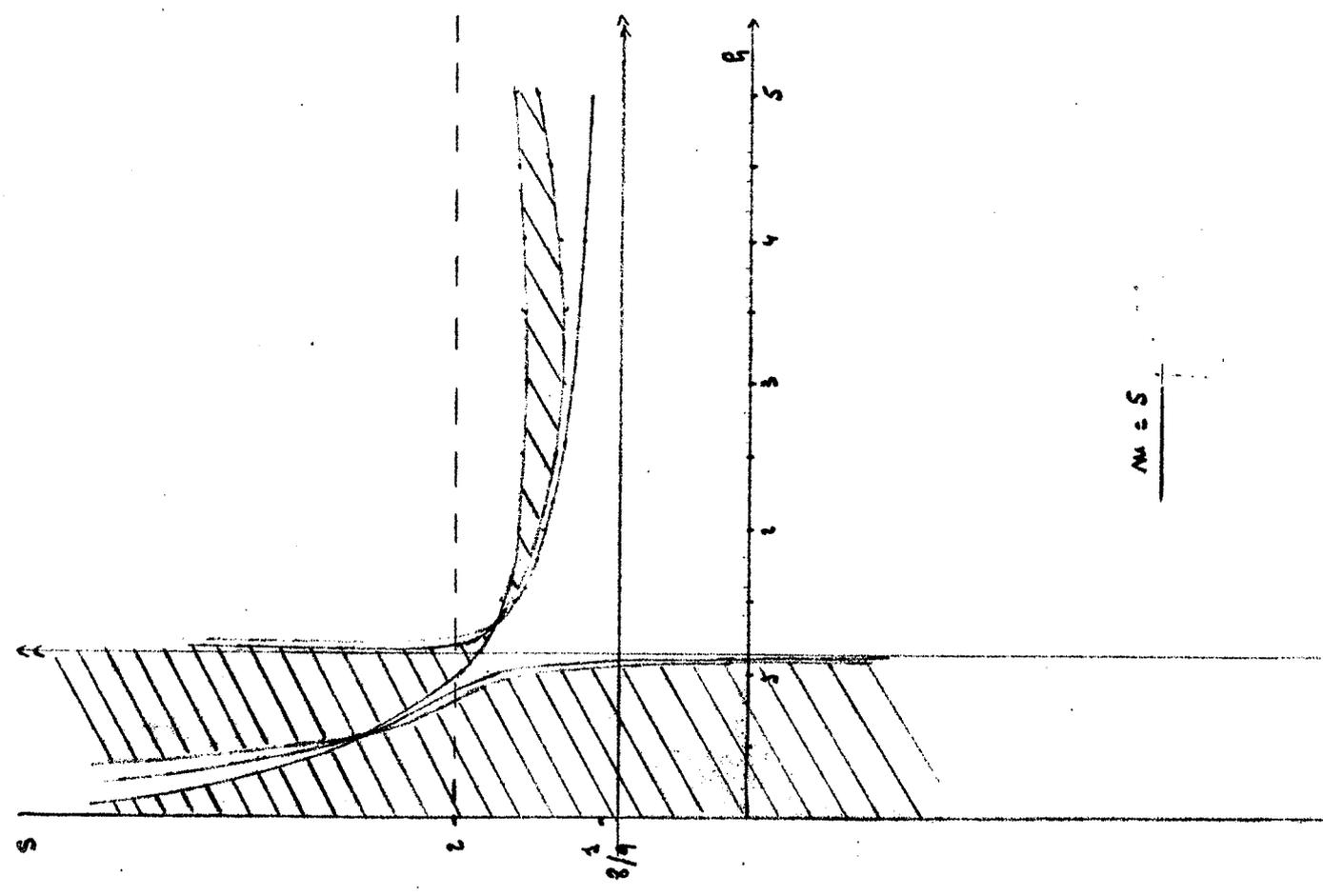
$m = 0$



Etude de la relation (43)

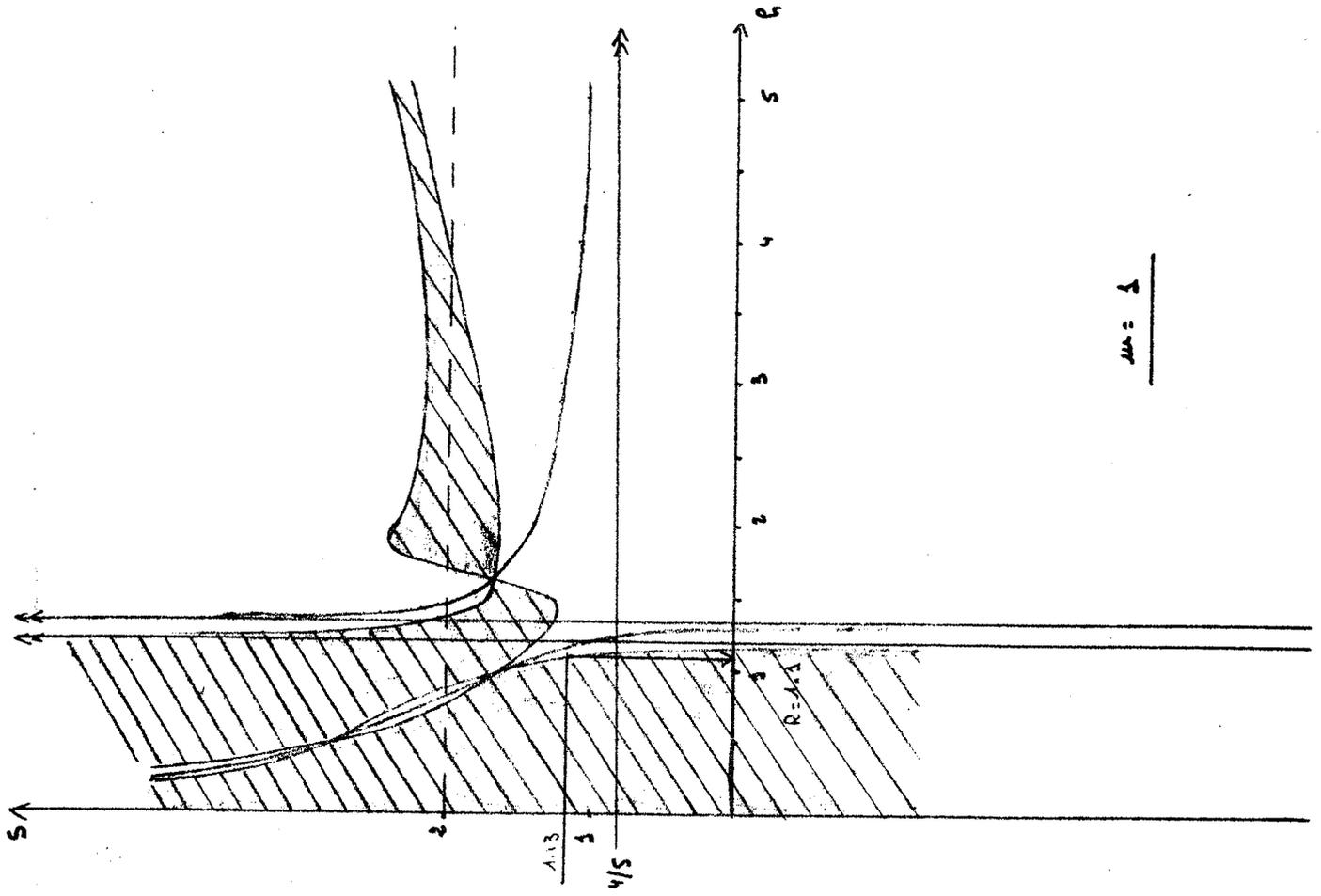


$$AM = \frac{1}{8}$$

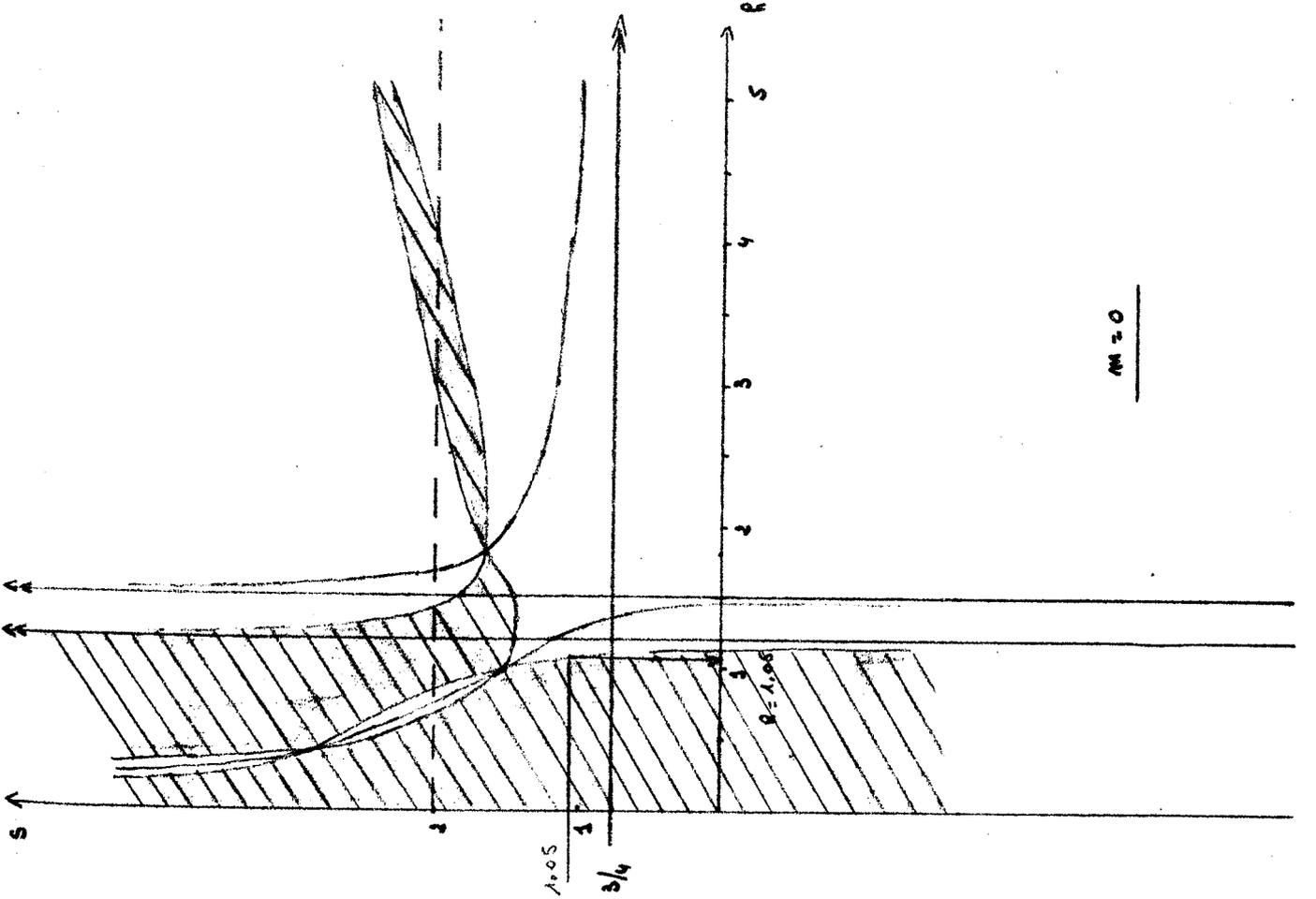


$$AM = \frac{1}{4}$$

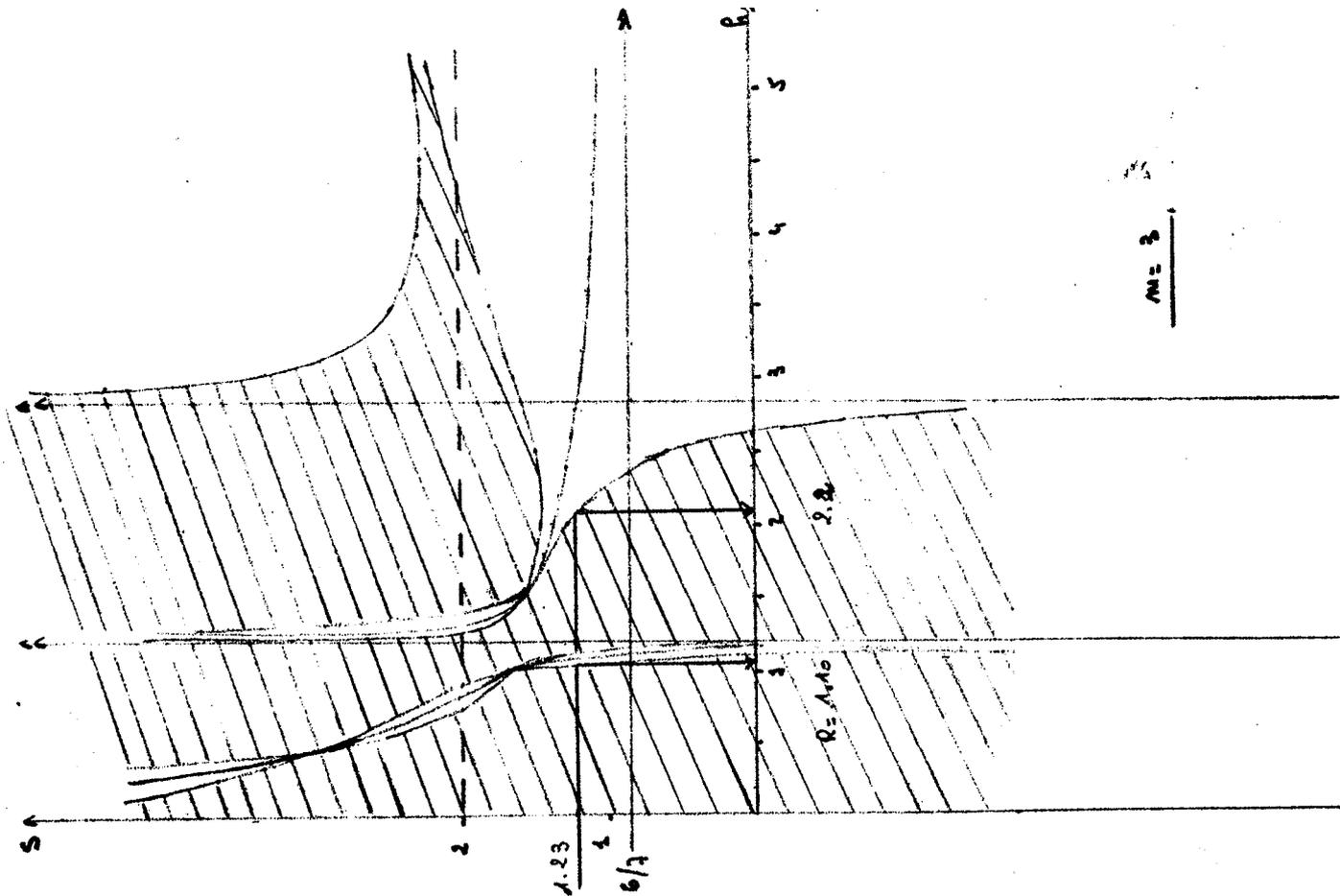
Etude de la relation (43)



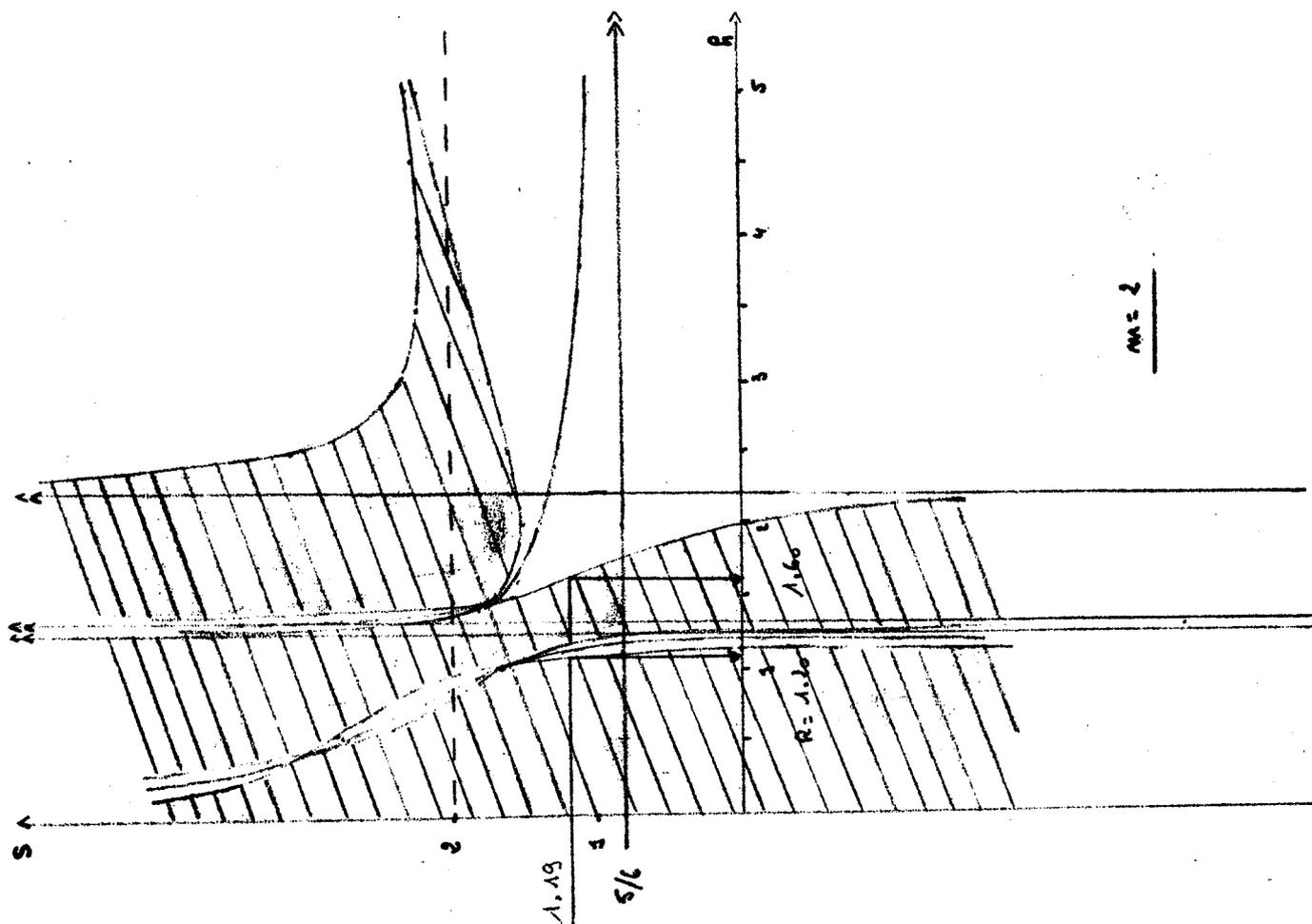
$$AM = \frac{1}{2}$$



$$AM = 0$$

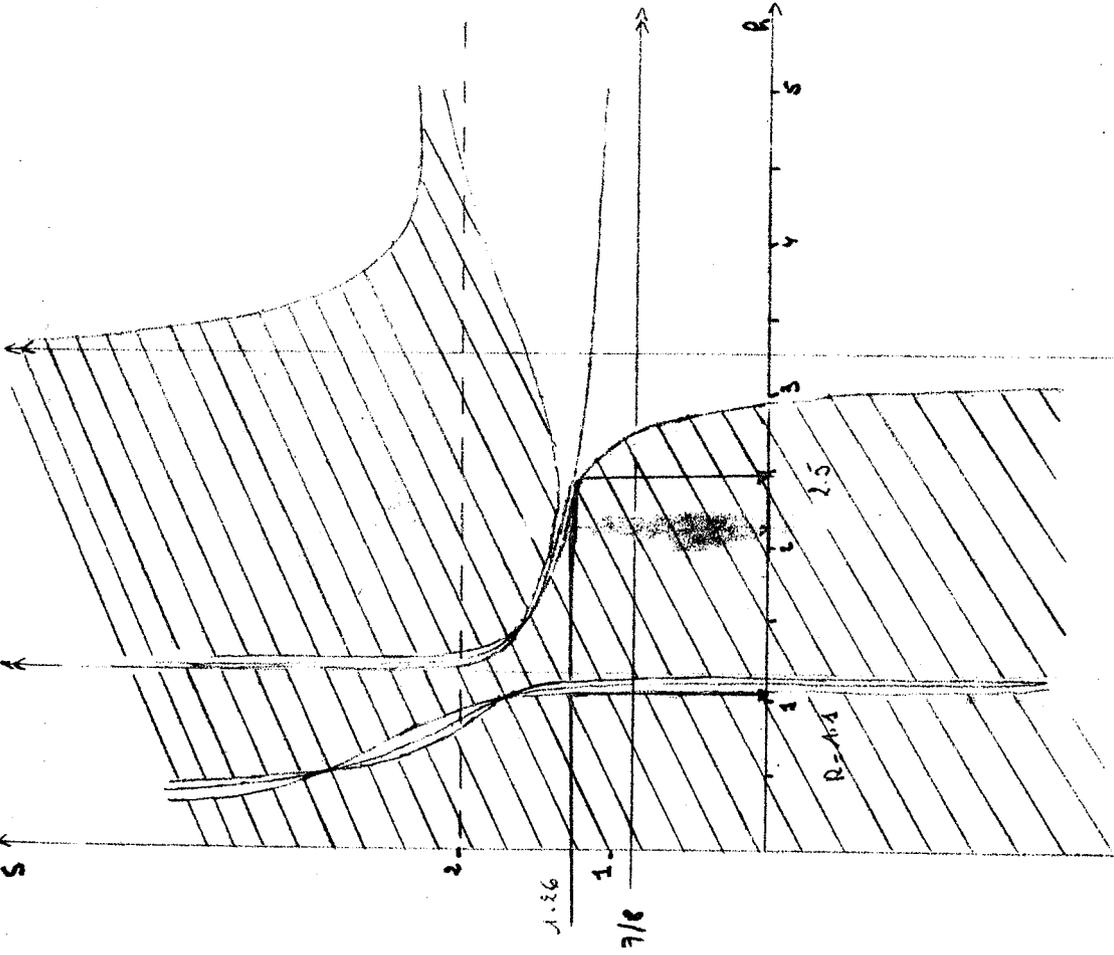
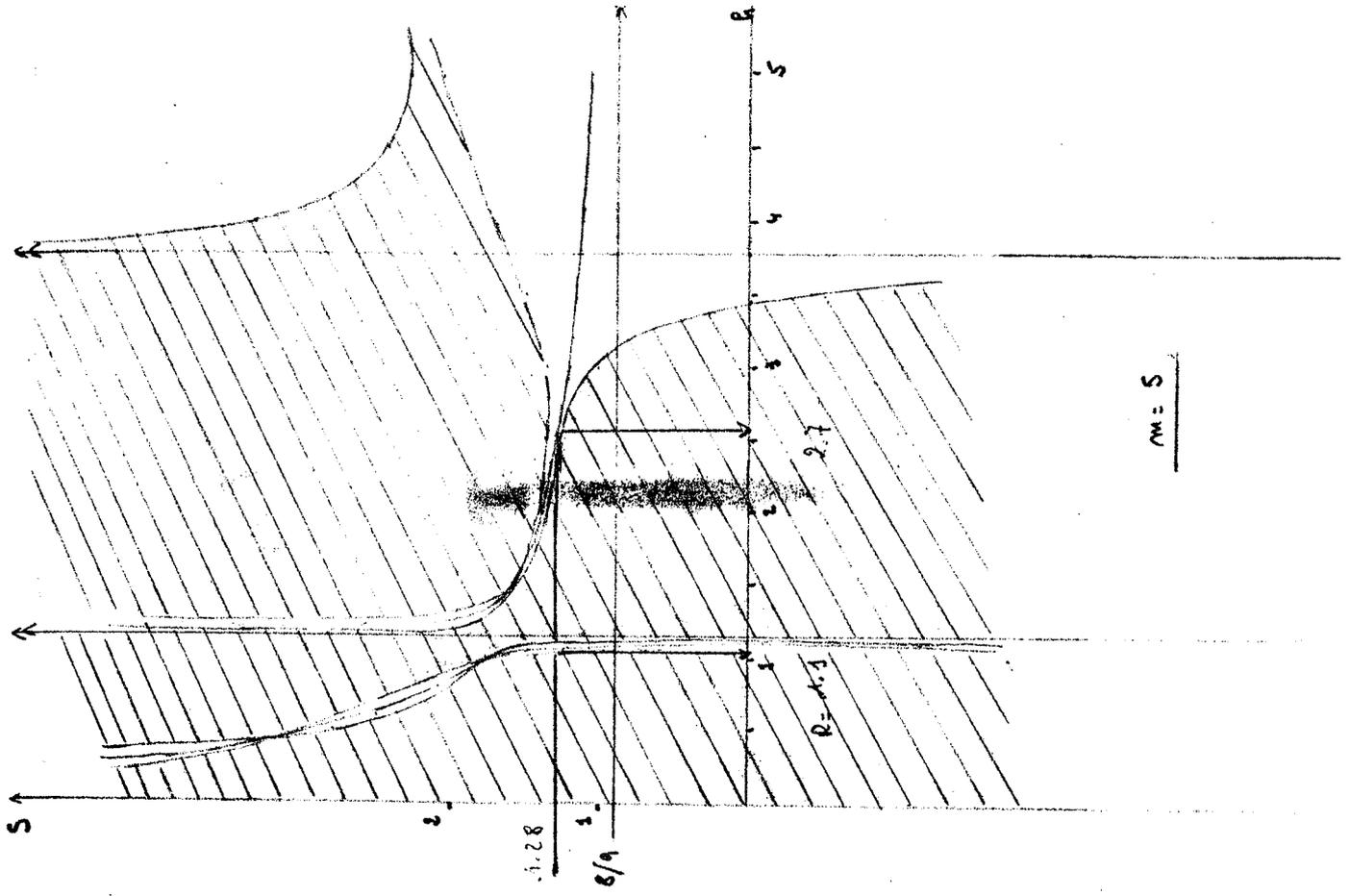


MAE 3

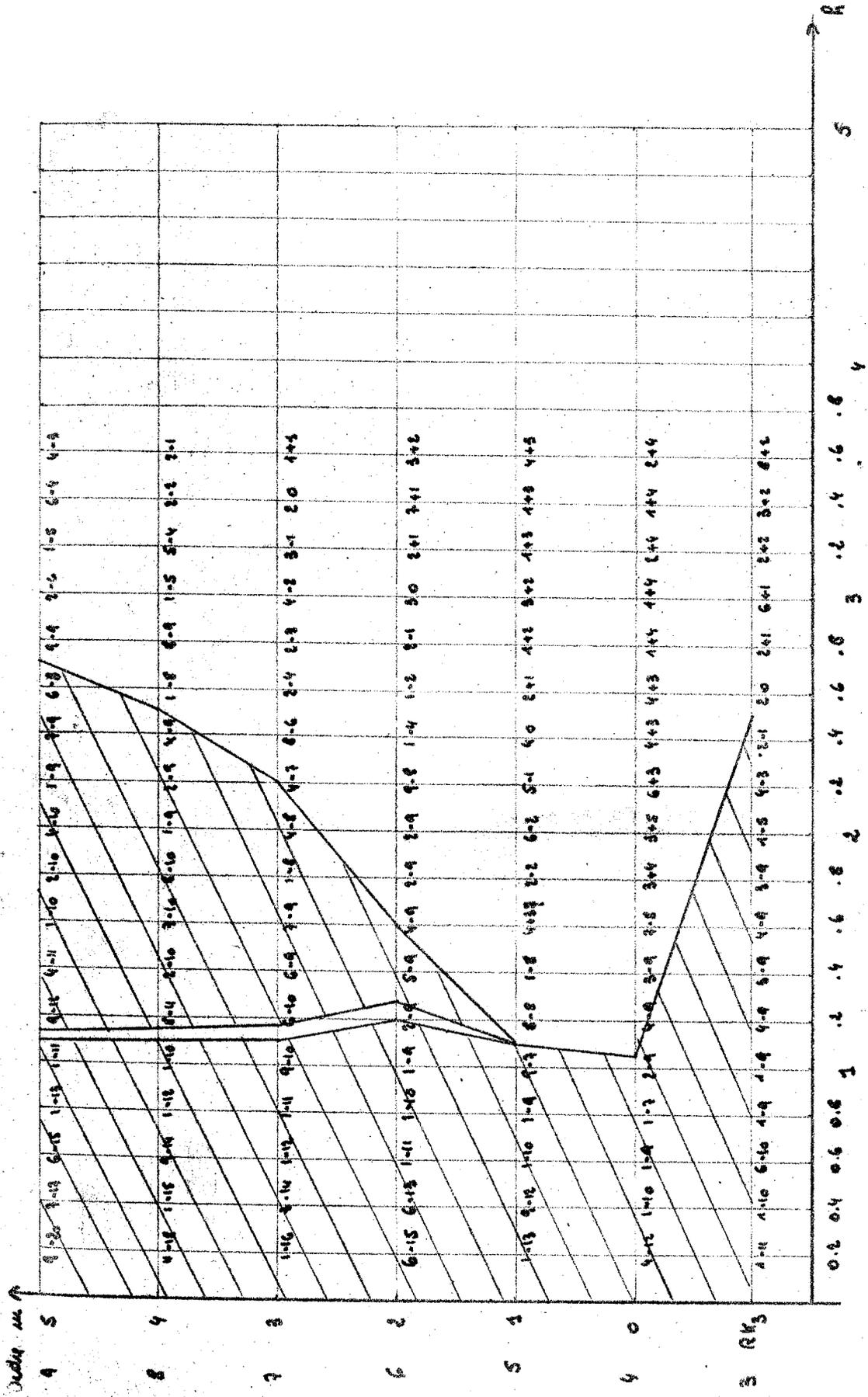


MAE 2

Etude de la relation (44)



Etude de la relation (4)



Rayons de stabilité et Plans de stabilité

Etude théorique (relation (44)) et Etude Statistique sur $\bar{y} = -\bar{y}$

$$\frac{\alpha \cdot \beta}{\alpha} \rightarrow \epsilon = \alpha \cdot 10^{-\beta}$$

$$\frac{\beta}{\beta} \rightarrow \epsilon = \alpha \cdot 10^{\beta}$$

Conclusions de l'étude de la stabilité

Pour la relation récurrente :

$$y_{i+1} = y_i \left[1 + \frac{(-1)^m h^{m+2}}{(1-h\theta_1)(1-h\theta_2)(m+1)!} \left\{ \frac{1}{m+2} - h \left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{m+2} - \frac{1}{m+3} \right) + h^2 \frac{1}{(m+2)(m+4)} \right\} \right]$$

qui représente la solution numérique de l'équation différentielle transformée on s'aperçoit que les zones de stabilité se partagent en deux familles selon la parité de m .

Pour la relation récurrente :

$$\bar{y}_{i+1} = \bar{y}_i \left[\sum_{j=0}^{m+1} (-1)^j \frac{h^j}{j!} + \frac{(-1)^m h^{m+2}}{(1-h\theta_1)(1-h\theta_2)(m+2)!} \left\{ 1 - h(\theta_1 + \theta_2 + \frac{1}{m+3}) + h^2(\theta_1 + \theta_2 - \frac{m^2 + 5m + 5}{(m+3)(m+4)}) - h^3 \frac{1}{m+4} \right\} \right]$$

solution numérique de l'équation différentielle $\bar{y}' = -\bar{y}$, on constate que pour la formule (32), utilisée pour nos essais numériques du § III-5, on obtient pour $m = 0$ et $m = 1$ un rayon de stabilité, légèrement supérieur à 1, et que pour $m \geq 2$ on obtient un rayon α et une plage de stabilité $[\beta, \gamma]$. La valeur α tendant vers 1 par valeurs décroissantes, ainsi que β , alors que γ augmente lorsque m croît, l'écart $\beta - \alpha$ devenant de plus en plus petit, on peut dire, à la limite, que l'on obtient un rayon de stabilité γ .

Le graphique récapitulatif des rayons et plages de stabilité théoriques obtenus pour la formule (32), et des valeurs des erreurs obtenues en fin d'intégration, sur l'équation différentielle $\bar{y}' = -\bar{y}$ de $x_0 = 0$ à $x_n = 20$, nous permet de faire deux remarques :

- d'une part, il est assez difficile de déterminer expérimentalement les rayons de stabilité, en particulier la zone instable $]\alpha, \beta[$, à moins d'augmenter h d'une quantité très inférieure à 0.2,

- d'autre part, la méthode R-K.F_{3,m+4} offre un rayon de stabilité plus grand que la méthode R-K₃₃ classique, à partir de $m = 4$.

Une étude théorique de la stabilité, pour des formules d'ordre $m+3$, nous montrerait que les rayons de stabilité obtenus sont plus grands que ceux obtenus pour des formules d'ordre $m+4$.

Remarque :

Nous avons indiqué dans la dernière colonne du tableau donnant les valeurs numériques de θ_1 et θ_2 pour les formules (31) à (35) du § III-4, les rayons et plages de stabilité obtenus pour ces formules.

CHAPITRE - IVMETHODE DE R-K.F_{4,m+5}I - INTRODUCTION

Nous nous proposons de résoudre le problème différentiel $\bar{y}' = \bar{Y}(x, \bar{y})$, de condition initiale $\bar{y}(x_0) = \bar{y}_0$, en utilisant l'algorithme R-K.F_{4,m+5}. Nous verrons en effet que cette méthode est d'ordre m+5 pour une transformation de hauteur m, et un algorithme du type R-K de rang 4.

Dans le cas général, l'algorithme de Runge-Kutta de rang 4 s'écrit :

$$(45) \quad \left\{ \begin{array}{l} y_{i1} = y_i + hA_{10}Y_{i0} \\ y_{i2} = y_i + h[A_{20}Y_{i0} + A_{21}Y_{i1}] \\ y_{i3} = y_i + h[A_{30}Y_{i0} + A_{31}Y_{i1} + A_{32}Y_{i2}] \\ y_{i+1} = y_i + h[A_{40}Y_{i0} + A_{41}Y_{i1} + A_{42}Y_{i2} + A_{43}Y_{i3}] \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} Y_{i0} = Y(x, y_i) \\ Y_{i1} = Y(x_i + \theta_1 h, y_{i1}) \\ Y_{i2} = Y(x_i + \theta_2 h, y_{i2}) \\ Y_{i3} = Y(x_i + \theta_3 h, y_{i3}) \end{array} \right.$$

Par une transformation de hauteur m :

$$\bar{y} = y + \sum_{i=1}^{m+1} \frac{(x-x_0)^i}{i!} \bar{y}_0^{(i)} + (x-x_0)(y-y_0) \left(\frac{\partial \bar{Y}}{\partial y} \right)_0 \quad (46)$$

nous sommes ramenés à la résolution de l'équation différentielle :

$$y' = Y(x,y) = \frac{1}{1+(x-x_0)\left(\frac{\partial \bar{Y}}{\partial \bar{y}}\right)_0} \left\{ \bar{Y}[x, \bar{y}(x,y)] - \sum_{i=0}^m \frac{(x-x_0)^i}{i!} \bar{y}_0^{-(i+1)} (y-y_0) \left(\frac{\partial \bar{Y}}{\partial \bar{y}}\right)_0 \right\} \quad (47)$$

- de condition initiale : $y(x_0) = y_0 = \bar{y}_0$

- dont la solution vérifiée : $y'_0 = \dots = y_0^{(m+1)} = 0$

$$\left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)_0 = \dots = \left(\frac{\partial^m Y}{\partial x^m}\right)_0 = 0$$

$$\left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)_0 = 0$$

Compte tenu des relations précédentes, l'algorithme R-K₄ s'écrit, pour le pas (x_i, x_{i+1}) :

$$(48) \quad \left\{ \begin{array}{l} y_{i1} = y_i \\ y_{i2} = y_i + h A_{21} Y_{i1} \\ y_{i3} = y_i + h [A_{31} Y_{i1} + A_{32} Y_{i2}] \\ y_{i+1} = y_i + h [A_{41} Y_{i1} + A_{42} Y_{i2} + A_{43} Y_{i3}] \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} Y_{i1} = Y(x_i + \theta_1 h, y_i) \\ Y_{i2} = Y(x_i + \theta_2 h, y_{i2}) \\ Y_{i3} = Y(x_i + \theta_3 h, y_{i3}) \end{array} \right.$$

Remarque :

Le volume de calcul, par pas, est de $m+5$ Horner pour une transformation de hauteur m : $m+2$ pour la transformation et 3 pour l'algorithme R-K.

II - COMPARAISON DES DEVELOPPEMENTS DE LA SOLUTION EXACTE (TAYLOR) ET APPROCHEE
(R-K.F_{4,m+5}) DE y' = Y(x,y)

Dans le cas d'une transformation de hauteur m, nous avons :

$$Y_{i1} = \sum_{j=1+1}^{m+5} \frac{h^j \theta_1^j}{j!} C_j + \dots \quad (\text{en effet } C_1 = \dots = C_m = 0)$$

$$Y_{i2} = \frac{h^{m+1} \theta_2^{m+1}}{(m+1)!} C_{m+1} + \frac{h^{m+2} \theta_2^{m+2}}{(m+2)!} C_{m+2} +$$

$$\frac{h^{m+3}}{(m+3)!} [\theta_2^{m+3} C_{m+3} + (m+2)(m+3) A_{21} \theta_1^{m+1} \theta_2^{m+1} {}^{KC}_{m+1}] +$$

$$\frac{h^{m+4}}{(m+4)!} [\theta_2^{m+4} C_{m+4} + \frac{(m+4)!}{2!(m+1)!} A_{21} \theta_1^{m+1} \theta_2^{m+2} {}^{LC}_{m+1} + \frac{(m+4)!}{(m+2)!} A_{21} \theta_1^{m+2} \theta_2^{m+2} {}^{KC}_{m+2}] +$$

$$\frac{h^{m+5}}{(m+5)!} [\theta_2^{m+5} C_{m+5} + \frac{(m+5)!}{3!(m+1)!} A_{21} \theta_1^{m+1} \theta_2^{m+3} {}^{MC}_{m+1} + \frac{(m+5)!}{2!(m+2)!} A_{21} \theta_1^{m+2} \theta_2^{m+2} {}^{LC}_{m+2} +$$

$$\frac{(m+5)!}{(m+3)!} A_{21} \theta_1^{m+3} \theta_2^{m+3} {}^{KC}_{m+3}] +$$

$$\frac{h^{2m+4}}{2(m+1)!^2} A_{21}^2 \theta_1^{2m+2} {}^{RC}_{m+1}^2 + \frac{h^{2m+5}}{2(m+1)!^2} [A_{21}^2 \theta_1^{2m+2} \theta_2 {}^{SC}_{m+1}^2 + \frac{2(m+1)!}{(m+2)!} A_{21}^2 \theta_1^{2m+3}$$

$${}^{RC}_{m+1} C_{m+2}] + \dots$$

$$Y_{i3} = \frac{h^{m+1} \theta_3^{m+1}}{(m+1)!} C_{m+1} + \frac{h^{m+2} \theta_3^{m+2}}{(m+2)!} C_{m+2} +$$

$$\frac{h^{m+3}}{(m+3)!} [\theta_3^{m+3} C_{m+3} + \frac{(m+3)!}{(m+1)!} (A_{31} \theta_1^{m+1} + A_{32} \theta_2^{m+1}) \theta_3 {}^{KC}_{m+1}] +$$

$$\frac{h^{m+4}}{(m+4)!} \left[\theta_3^{m+4} C_{m+4} + \frac{(m+4)!}{2(m+1)!} (A_{31} \theta_1^{m+1} + A_{32} \theta_2^{m+1}) \theta_3^2 LC_{m+1} + \right. \\ \left. \frac{(m+4)!}{(m+2)!} (A_{31} \theta_1^{m+2} + A_{32} \theta_2^{m+2}) \theta_3 KC_{m+2} \right] +$$

$$\frac{h^{m+5}}{(m+5)!} \left[\theta_3^{m+5} C_{m+5} + \frac{(m+5)!}{3!(m+1)!} (A_{31} \theta_1^{m+1} + A_{32} \theta_2^{m+1}) \theta_3^3 MC_{m+1} + \right.$$

$$\frac{(m+5)!}{2!(m+2)!} (A_{31} \theta_1^{m+2} + A_{32} \theta_2^{m+2}) \theta_3^2 LC_{m+2} + \frac{(m+5)!}{(m+3)!} (A_{31} \theta_1^{m+3} + A_{32} \theta_2^{m+3}) \theta_3 KC_{m+3} +$$

$$\left. \frac{(m+5)!}{(m+1)!} A_{32} A_{21} \theta_1^{m+1} \theta_2 \theta_3 K^2 C_{m+1} \right] +$$

$$\frac{h^{2m+4}}{2(m+1)!^2} \left[(A_{31} \theta_1^{m+1} + A_{32} \theta_2^{m+1})^2 RC_{m+1}^2 \right] +$$

$$\frac{h^{2m+5}}{2(m+1)!^2} \left[(A_{31} \theta_1^{m+1} + A_{32} \theta_2^{m+1})^2 \theta_3 SC_{m+1}^2 \right. +$$

$$\left. \frac{2(m+1)!}{(m+2)!} (A_{31} \theta_1^{m+1} + A_{32} \theta_2^{m+1}) (A_{31} \theta_1^{m+2} + A_{32} \theta_2^{m+2}) RC_{m+1} C_{m+2} \right] + \dots$$

d'où en remplaçant Y_{i1} , Y_{i2} et Y_{i3} dans la dernière ligne des relations (48) par les valeurs ci-dessus, il vient :

$$y_{i+1} - y_i = \frac{h^{m+2}}{(m+1)!} [(A_{41}\theta_1^{m+1} + A_{42}\theta_2^{m+1} + A_{43}\theta_3^{m+1})C_{m+1}] +$$

$$\frac{h^{m+3}}{(m+2)!} [(A_{41}\theta_1^{m+2} + A_{42}\theta_2^{m+2} + A_{43}\theta_3^{m+2})C_{m+2}] +$$

$$\frac{h^{m+4}}{(m+3)!} [(A_{41}\theta_1^{m+3} + A_{42}\theta_2^{m+3} + A_{43}\theta_3^{m+3})C_{m+3}] +$$

$$(m+2)(m+3)\{A_{42}A_{21}\theta_1^{m+1}\theta_2 + A_{43}(A_{31}\theta_1^{m+1} + A_{32}\theta_2^{m+1})\theta_3\}KC_{m+1}] +$$

$$\frac{h^{m+5}}{(m+4)!} [(A_{41}\theta_1^{m+4} + A_{42}\theta_2^{m+4} + A_{43}\theta_3^{m+4})C_{m+4}] +$$

$$\frac{(m+4)!}{2!(m+1)!} \{A_{42}A_{21}\theta_1^{m+1}\theta_2^2 + A_{43}(A_{31}\theta_1^{m+1} + A_{32}\theta_2^{m+1})\theta_3^2\}LC_{m+1} +$$

$$\frac{(m+4)!}{(m+2)!} \{A_{42}A_{21}\theta_1^{m+2}\theta_2 + A_{43}(A_{31}\theta_1^{m+2} + A_{32}\theta_2^{m+2})\theta_3\}KC_{m+2}] +$$

$$\frac{h^{m+6}}{(m+5)!} [(A_{41}\theta_1^{m+5} + A_{42}\theta_2^{m+5} + A_{43}\theta_3^{m+5})C_{m+5}] +$$

$$\frac{(m+5)!}{3!(m+1)!} \{A_{42}A_{21}\theta_1^{m+1}\theta_2^3 + A_{43}(A_{31}\theta_1^{m+1} + A_{32}\theta_2^{m+1})\theta_3^3\}MC_{m+1} +$$

$$\frac{(m+5)!}{2!(m+2)!} \{A_{42}A_{21}\theta_1^{m+2}\theta_2^2 + A_{43}(A_{31}\theta_1^{m+2} + A_{32}\theta_2^{m+2})\theta_3^2\}LC_{m+2} +$$

$$\frac{(m+5)!}{(m+3)!} \{A_{42}A_{21}\theta_1^{m+3}\theta_2 + A_{43}(A_{31}\theta_1^{m+3} + A_{32}\theta_2^{m+3})\theta_3\}KC_{m+3} +$$

$$\frac{(m+5)!}{(m+1)!} A_{43}A_{32}A_{21}\theta_1^{m+1}\theta_2\theta_3^2C_{m+1}] +$$

$$\frac{h^{2m+5}}{2(m+1)!} \left[\{A_{42} A_{21}^2 \theta_1^{2m+2} + A_{43} (A_{31} \theta_1^{m+1} + A_{32} \theta_2^{m+1})^2\} RC_{m+1}^2 \right] +$$

$$\frac{h^{2m+6}}{2(m+1)!} \left[\{A_{42} A_{21}^2 \theta_1^{2m+2} \theta_2 + A_{43} (A_{31} \theta_1^{m+1} + A_{32} \theta_2^{m+1})^2 \theta_3\} SC_{m+1}^2 \right] +$$

$$\frac{2}{m+2} \{A_{42} A_{21}^2 \theta_1^{2m+3} + A_{43} (A_{31} \theta_1^{m+1} + A_{32} \theta_2^{m+1}) (A_{31} \theta_1^{m+2} + A_{32} \theta_2^{m+2})\} RC_{m+1} C_{m+2} + \dots$$

D'autre part, en considérant le développement de Taylor, nous avons :

$$y_{i+1} - y_i = \frac{h^{m+2}}{(m+2)!} C_{m+1} + \frac{h^{m+3}}{(m+3)!} C_{m+2} + \frac{h^{m+4}}{(m+4)!} [C_{m+3} + (m+3)KC_{m+1}] +$$

$$\frac{h^{m+5}}{(m+5)!} [C_{m+4} + (m+4)KC_{m+2} + \frac{(m+3)(m+4)}{2} LC_{m+1}] +$$

$$\frac{h^{m+6}}{(m+6)!} [C_{m+5} + (m+5)KC_{m+3} + \frac{(m+4)(m+5)}{2} LC_{m+2} + \frac{(m+5)!}{3!(m+2)!} MC_{m+1} +$$

$$(m+3)(m+5)K^2 C_{m+1}] +$$

$$\frac{h^{2m+5}}{2(m+2)!} RC_{m+1}^2 + \frac{h^{2m+6}}{(m+2)!(m+3)!} [RC_{m+1} C_{m+2} + \frac{(m+3)!}{2(m+2)!} SC_{m+1}^2] + \dots$$

D'où le tableau de comparaison TAB.IV.m, obtenu en identifiant les deux développements précédents.

TERMES	TAYLOR	R-K.F
$\frac{h^{m+2}}{(m+1)!} C_{m+1}$	$\frac{1}{m+2}$	$A_{41}\theta_1^{m+1} + A_{42}\theta_2^{m+1} + A_{43}\theta_3^{m+1}$
$\frac{h^{m+3}}{(m+2)!} C_{m+2}$	$\frac{1}{m+3}$	$A_{41}\theta_1^{m+2} + A_{42}\theta_2^{m+2} + A_{43}\theta_3^{m+2}$
$\frac{h^{m+4}}{(m+3)!} C_{m+3}$	$\frac{1}{m+4}$	$A_{41}\theta_1^{m+3} + A_{42}\theta_2^{m+3} + A_{43}\theta_3^{m+3}$
KC_{m+1}	$\frac{m+3}{m+4}$	$(m+2)(m+3)\{A_{42}A_{21}\theta_1^{m+1}\theta_2 + A_{43}(A_{31}\theta_1^{m+1} + A_{32}\theta_2^{m+1})\theta_3\}$
$\frac{h^{m+5}}{(m+4)!} C_{m+4}$	$\frac{1}{m+5}$	$A_{41}\theta_1^{m+4} + A_{42}\theta_2^{m+4} + A_{43}\theta_3^{m+4}$
KC_{m+2}	$\frac{m+4}{m+5}$	$(m+3)(m+4)\{A_{42}A_{21}\theta_1^{m+2}\theta_2 + A_{43}(A_{31}\theta_1^{m+2} + A_{32}\theta_2^{m+2})\theta_3\}$
LC_{m+1}	$\frac{(m+3)(m+4)}{2(m+5)}$	$\frac{(m+4)!}{2(m+1)!} \{A_{42}A_{21}\theta_1^{m+1}\theta_2^2 + A_{43}(A_{31}\theta_1^{m+1} + A_{32}\theta_2^{m+1})\theta_3^2\}$
$\frac{h^{m+6}}{(m+5)!} C_{m+5}$	$\frac{1}{m+6}$	$A_{41}\theta_1^{m+5} + A_{42}\theta_2^{m+5} + A_{43}\theta_3^{m+5}$
KC_{m+3}	$\frac{m+5}{m+6}$	$\frac{(m+5)!}{(m+3)!} \{A_{42}A_{21}\theta_1^{m+3}\theta_2 + A_{43}(A_{31}\theta_1^{m+3} + A_{32}\theta_2^{m+3})\theta_3\}$
LC_{m+2}	$\frac{(m+4)(m+5)}{2(m+6)}$	$\frac{(m+5)!}{2(m+2)!} A_{42}A_{21}\theta_1^{m+2}\theta_2^2 + A_{43}(A_{31}\theta_1^{m+2} + A_{32}\theta_2^{m+2})\theta_3^2\}$
MC_{m+1}	$\frac{(m+3)(m+4)(m+5)}{3!(m+6)}$	$\frac{(m+5)!}{3!(m+1)!} \{A_{42}A_{21}\theta_1^{m+1}\theta_2^3 + A_{43}(A_{31}\theta_1^{m+1} + A_{32}\theta_2^{m+1})\theta_3^3\}$
K^2C_{m+1}	$\frac{(m+3)(m+5)}{m+6}$	$\frac{(m+5)!}{(m+1)!} A_{43}A_{32}A_{21}\theta_1^{m+1}\theta_2\theta_3$

Tableau TAB.IV.m Identification des termes des développements de Taylor et de R-K.F.

Remarques

Dans le cas particulier $m = 0$, il convient d'ajouter les termes suivants :

TERMES	TAYLOR	R.-K.F
$\frac{h^5}{4!} RC_1^2$	$\frac{3}{5}$	$12\{A_{42}A_{21}^2\theta_1^2 + A_{43}(A_{31}\theta_1 + A_{32}\theta_2)^2\}$
$\frac{h^6}{5!} RC_1 C_2$	$\frac{10}{6}$	$60\{A_{42}A_{21}^2\theta_1^3 + A_{43}(A_{31}\theta_1 + A_{32}\theta_2)(A_{31}\theta_1 + A_{32}\theta_2)\}$
SC_1^2	$\frac{15}{6}$	$60\{A_{42}\theta_1^2\theta_2^2 + A_{43}(A_{31}\theta_1 + A_{32}\theta_2)^2\theta_3\}$

Tableau TAB.IV. $m = 0$

et dans le cas particulier $m = 1$, il convient d'ajouter le terme suivant :

TERMES	TAYLOR	R.-K.F
$\frac{h^7}{6!} RC_2^2$	$\frac{10}{7}$	$90\{A_{42}A_{21}^2\theta_1^4 + A_{43}(A_{31}\theta_1^2 + A_{32}\theta_2^2)^2\}$

Tableau TAB IV. $m = 1$

III - ORDRE DE LA METHODE

En nous reportant au tableau TAB IV.m nous pouvons obtenir des formules d'ordre $m+5$. En effet, à condition de prendre $\theta_1 \neq \theta_2 \neq \theta_3$, $\theta_1 \neq 0$, $\theta_2 \neq 0$, $\theta_3 \neq 0$, les relations fournies par les coefficients des termes en C_{m+1} , C_{m+2} , C_{m+3} et C_{m+4} (4 relations à 6 inconnues : A_{41} , A_{42} , A_{43} , θ_1 , θ_2 et θ_3) sont compatibles à condition que le déterminant complet du système ainsi formé soit nul, ce qui conduit à la "relation de compatibilité" R.C :

$$\frac{\theta_1 \theta_2 \theta_3}{m+2} - \frac{\theta_1 \theta_2 + \theta_2 \theta_3 + \theta_3 \theta_1}{m+3} + \frac{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3}{m+4} - \frac{1}{m+5} = 0 \quad (\text{R.C.}) \quad (49)$$

Des trois relations en $h^{m+4} \text{KC}_{m+1}$, $h^{m+5} \text{KC}_{m+2}$ et $h^{m+5} \text{LC}_{m+1}$, on peut tirer les coefficients A_{21} , A_{31} et A_{32} en fonction de θ_1 , θ_2 et θ_3 .

Nous avons ainsi, pour déterminer les coefficients, 7 relations à 9 inconnues dans le cas général m , 8 relations à 9 inconnues pour les cas $m = 0$ et $m = 1$. Il y a donc toujours indétermination dans le choix des coefficients.

Il est impossible d'obtenir un ordre supérieur à $m+5$, car la relation de compatibilité obtenue dans ce cas, et la relation (49) conduisent à une impossibilité quant à l'annulation des coefficients de certains termes.

Nous sommes donc assurés que l'ordre maxima des formules est $m+5$ en ce qui concerne la résolution numérique de $y' = Y(x,y)$.

En ce qui concerne la résolution de $\bar{y}' = \bar{Y}(x,\bar{y})$, en posant $\epsilon_{i+1} = y_{i+1}^* - \bar{y}_{i+1}$, valeurs obtenues en $x = x_{i+1}$ pour y , respectivement la valeur exacte partant de y_i , et la valeur calculée, et en posant $\bar{\epsilon}_{i+1} = \bar{y}_{i+1}^* - \bar{y}_{i+1}$, valeurs obtenues en transformant les précédentes, nous obtenons

$\bar{\epsilon}_{i+1} = \epsilon_{i+1} \left[1 + h \left(\frac{\partial \bar{Y}}{\partial \bar{y}} \right)_i \right]$, ce qui nous assure que les formules sont bien d'ordre $m+5$ pour la résolution de $\bar{y}' = \bar{Y}(x,\bar{y})$.

Remarque :

Si on considère les trois types de formules décrites dans le chapitre II, III et IV, on constate que :

il est possible d'obtenir des formules d'ordre K, en employant soit les formules du type R-K.F_{2,K} de hauteur K-3 à K Horner, soit les formules du type R-K.F_{3,K} de hauteur K-4 à K Horner, soit les formules du type R-K.F_{4,K} de hauteur K-5 à K Horner.

Les trois types de formules offrent donc, avec un volume de calcul identique, le même ordre. La différence essentielle réside dans le fait que l'algorithme devient plus compliqué lorsque le rang augmente, mais que la transformation utilise moins de dérivées.

Toutefois, du point de vue pratique, il semble que les formules de rang élevé offrent une plus grande précision.

IV - ETABLISSEMENT DES FORMULES

Nous avons vu au § IV.3.a que nous obtenions des formules d'ordre m+5 en considérant les 7 premières relations du tableau TAB IV.m.

En écrivant que le système formé par les relations en C_{m+1}, C_{m+2}, C_{m+3} et C_{m+4} est comptable, nous étions arrivés à la "relation de compatibilité" (49).

$$\boxed{\frac{\theta_1 \theta_2 \theta_3}{m+2} - \frac{\theta_1 \theta_2 + \theta_2 \theta_3 + \theta_3 \theta_1}{m+3} + \frac{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3}{m+4} - \frac{1}{m+5} = 0} \quad (\text{R.C.})$$

avec $\theta_1 \neq \theta_2 \neq \theta_3$, $\theta_i \neq 0$ $i = 1, 2, 3$

$$\text{En posant } D = \begin{vmatrix} \theta_1^{m+1} & \theta_2^{m+1} & \theta_3^{m+1} \\ \theta_1^{m+2} & \theta_2^{m+2} & \theta_3^{m+2} \\ \theta_1^{m+3} & \theta_2^{m+3} & \theta_3^{m+3} \end{vmatrix} = \theta_1^{m+1} \theta_2^{m+2} \theta_3^{m+1} (\theta_1 - \theta_2)(\theta_2 - \theta_3)(\theta_3 - \theta_1)$$

et

$$D_{\nu} = \theta_{\nu+1}^{m+1} \theta_{\nu+2}^{m+1} (\theta_{\nu+2} - \theta_{\nu+1}) \left[-\frac{\theta_{\nu+1} \theta_{\nu+2}}{m+2} - \frac{\theta_{\nu+1} + \theta_{\nu+2}}{m+3} + \frac{1}{m+4} \right]$$

$$(\nu = 1, 2, 3 ; \theta_4 = \theta_1, \theta_5 = \theta_2).$$

Nous obtenons :

$A_{4\nu} = \frac{D_{\nu}}{D} \quad (\nu=1, 2, 3)$
$A_{21} = \frac{m+3}{m+5} \frac{\theta_2^m}{\theta_1^{m+1}} (\theta_1 - \theta_2) \frac{(m+5)\theta_3^{-(m+4)}}{(m+3)(m+4)\theta_1\theta_3^{-(m+2)}(m+4)(\theta_1+\theta_3)+(m+2)(m+3)}$
$A_{31} = \frac{1}{m+5} \frac{\theta_3^m}{\theta_1^{m+1}} \frac{\theta_1 - \theta_3}{\theta_2 - \theta_1} \frac{[(m+3)(m+5)\theta_1^{-(m+2)}(m+4)](\theta_2 - \theta_3) - [(m+3)(m+5)\theta_2^{-(m+3)}(m+4)](\theta_1 - \theta_2)}{(m+3)(m+4)\theta_1\theta_2^{-(m+2)}(m+4)(\theta_1+\theta_2)+(m+2)(m+3)}$
$A_{32} = \frac{1}{m+5} \frac{\theta_3^m}{\theta_2^{m+1}} \frac{(\theta_2 - \theta_3)(\theta_3 - \theta_1)}{\theta_2 - \theta_1} \frac{(m+3)(m+5)\theta_1^{-(m+2)}(m+4)}{(m+3)(m+4)\theta_1\theta_2^{-(m+2)}(m+4)(\theta_1+\theta_2)+(m+2)(m+3)}$

Comme il ne semble pas exister de valeurs entières pour θ_1 , θ_2 et θ_3 vérifiant la relation (49), nous avons exprimé cette relation sous la forme :

$$\theta_1 \left[\frac{\theta_2 \theta_3}{m+2} - \frac{\theta_2 + \theta_3}{m+3} + \frac{1}{m+4} \right] = \frac{\theta_2 \theta_3}{m+3} - \frac{\theta_2 + \theta_3}{m+4} + \frac{1}{m+5} \quad (51)$$

Une famille de solutions de la relation (51) est tirée de

$$\begin{cases} \frac{\theta_2 \theta_3}{m+2} - \frac{\theta_2 + \theta_3}{m+3} + \frac{1}{m+4} = 0 \\ \frac{\theta_2 \theta_3}{m+3} - \frac{\theta_2 + \theta_3}{m+4} + \frac{1}{m+5} = 0 \end{cases} \quad (51 \text{ bis})$$

soit :

θ_1 quelconque

$$\theta_2 = \frac{(m+3)(m+4) + \varepsilon \sqrt{2(m+3)(m+4)}}{(m+4)(m+5)} \quad (52)$$

$$\theta_3 = \frac{(m+3)(m+4) - \varepsilon \sqrt{2(m+3)(m+4)}}{(m+4)(m+5)} \quad (\varepsilon = \pm 1)$$

Les valeurs de θ_i données par les relations (52) conduisent à $A_{41} = 0$.
On peut ensuite choisir θ_1 selon le fait qu'un autre coefficient A_{ij} soit nul.

$$(53) \quad A_{31} = 0 \text{ conduit à prendre } \theta_1 = \frac{(m+3)(m+4)(m+7) - \varepsilon(3m+11)\sqrt{2(m+3)(m+4)}}{(m+3)(m+4)(m+5)}$$

$$(54) \quad A_{32} = 0 \text{ conduit à prendre } \theta_1 = \frac{(m+2)(m+4)}{(m+3)(m+5)}$$

$$\text{- on peut aussi prendre } \theta_1 = \frac{\theta_2 + \theta_3}{2} = \frac{m+3}{2(m+5)} \quad (55)$$

- on peut aussi choisir θ_1 de façon à annuler le coefficient d'un des premiers termes d'erreurs, ce qui conduit à :

- Annulation du coefficient du terme en h^{m+6}_{KC} _{m+3}

$$\theta_1 = \frac{(m+3)(m+4)(2m^2+18m+37) - (2m^2+16m+33)\varepsilon\sqrt{2(m+3)(m+4)}}{(m+5)(m+6)(2m^2+14m+25)} \quad (56)$$

- Annulation du coefficient du terme en $h^{m+6} LC_{m+2}$

$$\theta_1 = \frac{(m+4)[m^2+7m+8+\epsilon\sqrt{2(m+3)(m+4)}]}{(m+3)(m+5)(m+6)} \quad (57)$$

- Annulation du coefficient du terme en $h^{m+6} K^2 C_{m+1}$

$$\theta_1 = \frac{(m+2)[2m^3+28m^2+125m+180+\epsilon\sqrt{2(m+3)(m+4)}]}{2(2m^4+36m^3+237m^2+677m+710)} \quad (58)$$

- Annulation du coefficient du terme en $RC_{1-2} C$ (valable uniquement pour $m = 0$)

$$\theta_1 = \frac{4(4+\epsilon\sqrt{6})}{45}$$

En fait, si nous prenons comme critère $0 < \theta_1 < \theta_2 < \theta_3 < 1$ seule la formule (58) avec $\epsilon = -1$ convient. Les résultats numériques cités en exemple au § IV-5 seront obtenus à partir de cette formule.

Nous avons établi d'autres formules qui semblent être plus intéressantes. En effet en prenant $\theta_3 = 1$, il est possible d'annuler, en même temps, 2 coefficients du terme d'erreur en h^{m+6} , par un choix judicieux de θ_1 et θ_2 .

- Annulation du coefficient des termes en $h^{m+6} C_{m+5}$ et $h^{m+6} KC_{m+3}$

$$\theta_1 = \frac{m+3}{m+6} \left[1 + \epsilon \sqrt{\frac{3}{(m+3)(m+5)}} \right]$$

$$\theta_2 = \frac{m+3}{m+6} \left[1 - \epsilon \sqrt{\frac{3}{(m+3)(m+5)}} \right]$$

$$\theta_3 = 1.$$

(60)

- Annulation du coefficient des termes en $h^{m+6}{}_{MC}{}_{m+1}$ et $h^{m+6}{}_{K^2C}{}_{m+1}$

$$\begin{aligned}\theta_1 &= \frac{m+2}{2(m+5)} \\ \theta_2 &= \frac{m+4}{m+6} \\ \theta_3 &= 1\end{aligned}\tag{61}$$

- Annulation du coefficient du terme en $h^{m+6}{}_{LC}{}_{m+2}$

$$\begin{aligned}\theta_1 &= \frac{(m+2)(m+4)}{(m+3)(m+6)} \\ \theta_2 &= \frac{m^2+7m+14}{(m+2)(m+5)} \\ \theta_3 &= 1.\end{aligned}\tag{62}$$

Remarque :

Les formules (60) (61) et (62) ne sont valables que pour $m > 0$.

En effet pour $m = 0$, elles n'annulent pas le coefficient du terme en $h^5{}_{RC}{}^2_1$.

- Il est impossible d'annuler, en même temps, plus de 2 termes d'erreur.

En effet, pour annuler les termes suivants, nous avons à vérifier, en plus de la relation de compatibilité (48), les relations suivantes :

- Annulation du coefficient du terme en $h^{m+6}{}_{C}{}_{m+5}$

$$\frac{\theta_1\theta_2\theta_3}{m+3} - \frac{\theta_1\theta_2+\theta_2\theta_3+\theta_3\theta_1}{m+4} + \frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3}{m+5} - \frac{1}{m+6} = 0$$

- Annulation du coefficient du terme en h^{m+6}_{KC} _{m+3}

$$\frac{\theta_1 \theta_2}{(m+2)(m+4)} - \frac{\theta_1 + \theta_2}{(m+3)(m+5)} + \frac{1}{(m+4)(m+6)} = 0$$

- Annulation du coefficient du terme en h^{m+6}_{LC} _{m+2}

$$\frac{\theta_1 \theta_3}{(m+2)(m+4)} - \frac{\theta_3}{(m+3)(m+5)} - \frac{\theta_1}{(m+2)(m+5)} + \frac{1}{(m+3)(m+6)} = 0$$

- Annulation du coefficient du terme en h^{m+6}_{MC} _{m+1}

$$\frac{\theta_2 \theta_3}{m+4} - \frac{\theta_2 + \theta_3}{m+5} + \frac{1}{m+6} = 0$$

- Annulation du coefficient du terme en $h^{m+6}_{K^2C}$ _{m+1}

$$2(m+3)(m+5)^2 \theta_1 \theta_3 - 2(m+4)^2 (m+5) \theta_1 - (m+2)(m+4)(m+5) \theta_3 + (m+2)(m^2 + 9m + 21) = 0$$

et ces relations prises 3 à 3, unies à la relation (49) sont incompatibles avec un choix à priori des valeurs de θ_1 , θ_2 et θ_3 , à savoir $0 < \theta_1, \theta_2, \theta_3 < 1$.

Remarques :

1) Si nous exprimons la relation de compatibilité (49) sous la forme :

$$\theta_2 \left[\frac{\theta_1 \theta_3}{m+2} - \frac{\theta_1 + \theta_3}{m+3} + \frac{1}{m+4} \right] = \frac{\theta_1 \theta_3}{m+3} - \frac{\theta_1 + \theta_3}{m+4} + \frac{1}{m+5}$$

et si on prend comme solution :

$$\theta_1 = \frac{(m+3)(m+4) + \varepsilon \sqrt{2(m+3)(m+4)}}{(m+3)(m+5)}$$

θ_2 quelconque

$$\theta_3 = \frac{(m+3)(m+4) - \varepsilon \sqrt{2(m+3)(m+4)}}{(m+3)(m+5)} \quad (\varepsilon = \pm 1)$$

il vient :

A_{41} et A_{43} déterminés

$$A_{41} = 0$$

Les 3 autres relations (voir tableau TAB. IV.m) fournissent :

$$\begin{pmatrix} A_{43} \theta_1^{m+1} \theta_3 & A_{43} \theta_2^{m+1} \theta_3 \\ A_{43} \theta_1^{m+2} \theta_3 & A_{43} \theta_2^{m+2} \theta_3 \\ A_{43} \theta_1^{m+1} \theta_3^2 & A_{43} \theta_2^{m+1} \theta_3^2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A_{31} \\ A_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{(m+2)(m+4)} \\ \frac{1}{(m+3)(m+5)} \\ \frac{1}{(m+2)(m+5)} \end{pmatrix}$$

système dont le déterminant complet est :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{(m+2)(m+4)} \\ \theta_1 & \theta_2 & \frac{1}{(m+3)(m+5)} \\ \theta_3 & \theta_3 & \frac{1}{(m+2)(m+5)} \end{vmatrix}$$

soit encore : $A_{43}^2 \theta_1^{m+1} \theta_2^{m+1} \theta_3^2 \frac{\theta_1 - \theta_2}{m+2} \left[\frac{\theta_3}{m+4} - \frac{1}{m+5} \right]$

Pour que le système soit compatible, il faut que son déterminant complet soit nul, ce qui conduit à :

$$\begin{cases} \theta_1 = \theta_2 \\ \text{ou} \\ \theta_2 = 0 \end{cases}$$

ce qui est impossible.

2) De même, si on exprime la relation (49) sous la forme

$$\theta_3 \left[\frac{\theta_1 \theta_2}{m+2} - \frac{\theta_1 + \theta_2}{m+3} + \frac{1}{m+4} \right] = \frac{\theta_1 \theta_2}{m+3} - \frac{\theta_1 + \theta_2}{m+4} + \frac{1}{m+5}$$

et que l'on prenne comme solution :

$$\theta_1 = \frac{(m+3)(m+4) + \varepsilon \sqrt{2(m+3)(m+4)}}{(m+3)(m+5)}$$

$$\theta_2 = \frac{(m+3)(m+4) - \varepsilon \sqrt{2(m+3)(m+4)}}{(m+3)(m+5)}$$

θ_3 quelconque.

On obtient ainsi : A_{41} et A_{42} déterminés

$$A_{43} = 0.$$

Les trois autres relations fournissent :

$$A_{42} A_{21} \theta_1^{m+1} \theta_2 = \frac{1}{(m+2)(m+4)}$$

$$A_{42} A_{21} \theta_1^{m+2} \theta_2 = \frac{1}{(m+3)(m+5)}$$

$$A_{42} A_{21} \theta_1^{m+1} \theta_2^2 = \frac{1}{(m+2)(m+5)}$$

ce qui conduit à une impossibilité pour l'ordre $m+5$.

3) Dans le cas $m = 0$, nous avons une relation de plus à vérifier, à savoir :

$$A_{42} A_{21}^2 \theta_1^2 + A_{43} (A_{31} \theta_1 + A_{32} \theta_2)^2 = \frac{1}{20} \quad (\text{terme en } h^5 RC_1^2)$$

En portant dans cette relation les valeurs obtenues en (50), on obtient alors :

$$\begin{aligned}
& \theta_1^2 [20\theta_2\theta_3 - 15(\theta_2 + \theta_3) + 12] + \\
& \theta_1 \{ (\theta_2 + \theta_3) [20\theta_2\theta_3 - 15(\theta_2 + \theta_3) + 12] - [20\theta_2\theta_3 - 15(\theta_2 + \theta_3) + 12] + 4\theta_2\theta_3 [4\theta_2\theta_3 - (\theta_2 + \theta_3)] \} + \\
& [20\theta_2\theta_3 - 15(\theta_2 + \theta_3) + 12] \left\{ \frac{20}{25} - \frac{16}{5} \theta_2\theta_3 \right\} = 0 \quad (63)
\end{aligned}$$

Or, en écrivant la relation de compatibilité (49) sous la forme (51) et en prenant les relations (51 bis) pour déterminer θ_2 et θ_3 , la relation (63) est vérifiée.

4) Il y a tout un jeu de formules dites "dégénérées" (d'ordre $m+4$ ou moins) obtenues à partir des valeurs θ_2 et θ_3 , relations (52). Avec un certain choix de θ_1 , on peut ainsi obtenir des formules d'ordre $m+4$ qui seraient "optimales" par rapport à celles de R-K.F_{3,m+4} (annulation du coefficient A_{21} par exemple).

5) Monsieur Fehlberg cite les coefficients suivants, dans le cas d'une transformation de hauteur $m = 0$. (Ref. [3]).

$$\theta_1 = \frac{1}{3} \quad \theta_2 = \frac{4}{5} \quad \theta_3 = 1$$

$$A_{21} = \frac{63}{50}$$

$$A_{31} = -\frac{27}{7} \quad A_{32} = \frac{45}{28}$$

$$A_{41} = \frac{27}{56} \quad A_{42} = \frac{125}{336} \quad A_{43} = \frac{1}{24}$$

or le premier terme d'erreur est : $-\frac{h^5}{128} RC_1^2$. La formule n'est donc pas d'ordre 5.

6) Si nous choisissons les formules (52), nous pouvons donner à titre indicatif la valeur des coefficients des termes d'erreur en h^{m+6} .

- terme en C_{m+5} :

$$\frac{4}{(m+4)^2(m+5)^2(m+6)!}$$

- terme en KC_{m+3} :

$$\frac{(m+4)+\epsilon(m+3)\sqrt{2(m+3)(m+4)}}{(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)!} (\theta_1 - \alpha)$$

avec pour α la valeur donnée en (56)

- terme en LC_{m+2} :

$$\frac{(m+3) [(m+4)+\epsilon\sqrt{2(m+3)(m+4)}]}{2(m+2)(m+4)(m+5)!} (\alpha - \theta_1)$$

avec pour α la valeur donnée en (57)

- terme en MC_{m+1} :

$$\frac{2(m+3)}{3(m+4)(m+5)(m+6)!}$$

- terme en K^2C_{m+1} :

$$\frac{m+3}{A} \{ (m+2) [(m+4)(m+9)+\epsilon(m^2+10m+23)\sqrt{2(m+3)(m+4)}] - 2(m+5) [m^2+11m+26+\epsilon(m+3)(m+6)\sqrt{2(m+3)(m+4)}] \alpha \}$$

avec

$$A = (m+4)(m+5)\theta_1 - (m+3)(m+4) - \epsilon\sqrt{2(m+3)(m+4)}$$

- Cas particulier m = 0 :

$$\text{- terme en } RC_{1-2} : \frac{2+\epsilon\sqrt{6}}{320} \left[\frac{4(4+\epsilon\sqrt{6})}{45} - \theta_1 \right]$$

$$\text{- terme en } SC_1^2 : \frac{1}{4800}$$

- Cas particulier m = 1 :

$$\text{- terme en } RC_2^2 : \frac{193}{16200}$$

V - RESULTATS NUMERIQUES

Nous comparerons la méthode R-K.F_{4,m+5}, formules (58) avec $\epsilon = -1$ et (60) avec $\epsilon = -1$, à la méthode R-K_{4,4} classique de coefficients :

$$\theta_1 = 1/2 \quad \theta_2 = 1/2 \quad \theta_3 = 1$$

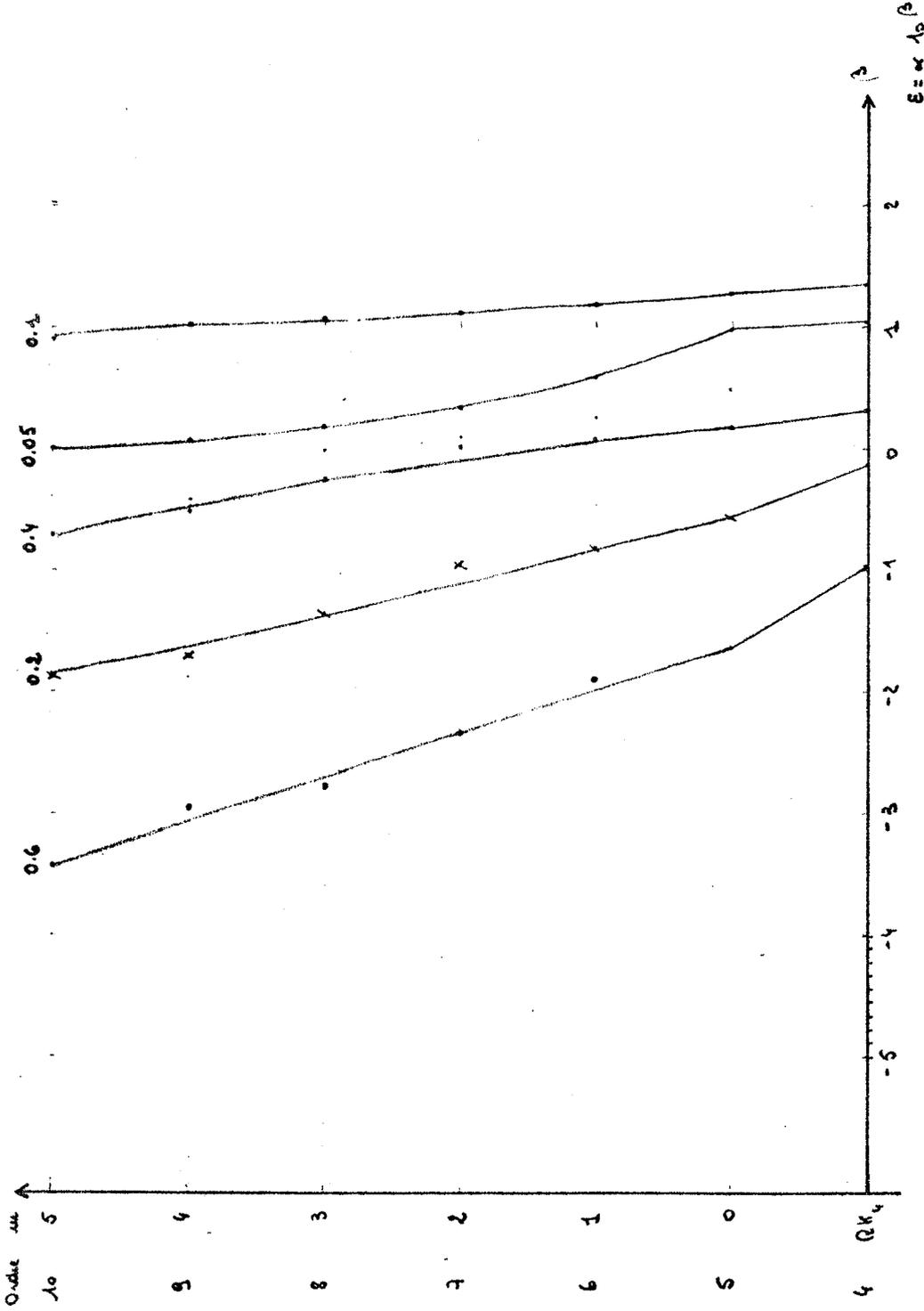
$$A_{10} = 1/2$$

$$A_{20} = 0 \quad A_{21} = 1/2$$

$$A_{30} = 0 \quad A_{31} = 0 \quad A_{32} = 1$$

$$A_{40} = 1/6 \quad A_{41} = 1/3 \quad A_{42} = 1/3 \quad A_{43} = 1/6$$

FORMULE 58



PAS R	0.05	0.1	0.2	0.4	0.6
Nombre de pas	34	17	8	4	2
CV	2.7	2.7	2.6	2.6	2.2
Σ P	148.18	148.18	22.47	22.47	4.72

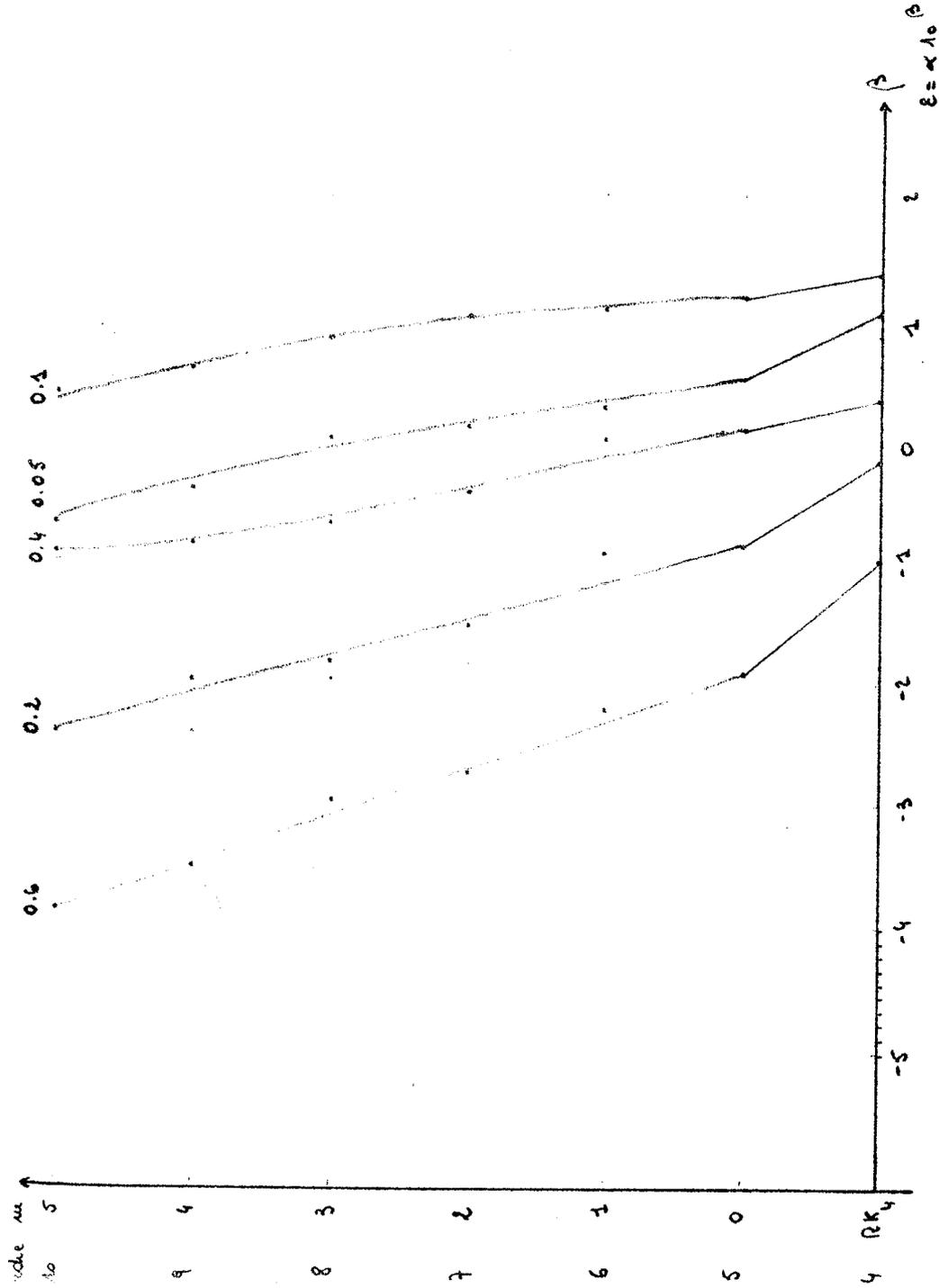
$$\bar{y}' = \bar{y}^2 / \alpha$$

$$\bar{y} = \frac{1}{1 - \ln(\alpha)}$$

$$\alpha_0 = 1, \quad \bar{y}^{**} = 1$$

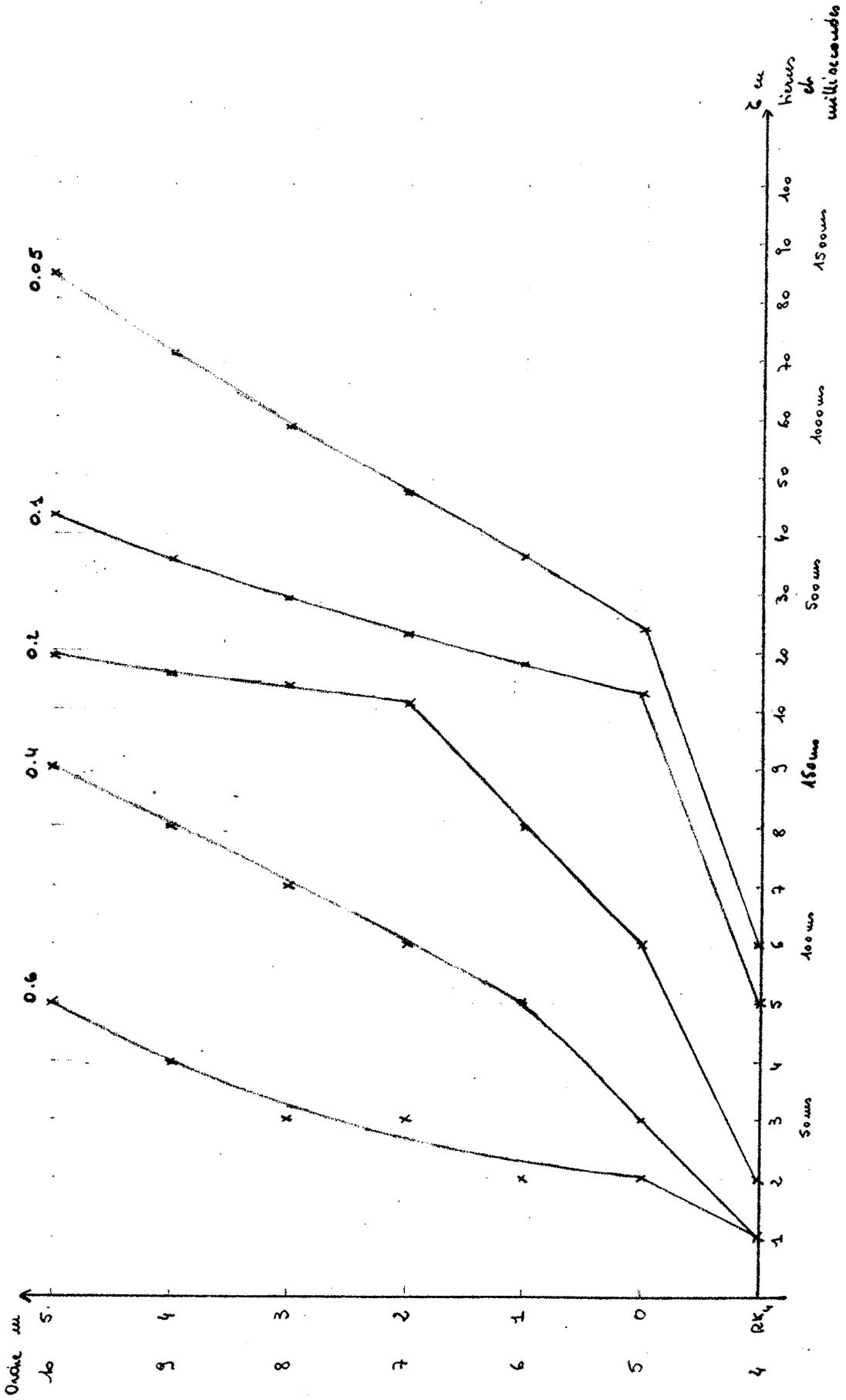
$$\alpha_N = 2.7, \quad \bar{y}^{**} = \sqrt{48.18}$$

FORMULE 69



PAS h	0.05	0.1	0.2	0.4	0.6
Nombre de pas	34	17	8	4	2
σ_N	2.7	2.7	2.6	2.6	2.2
\bar{y}_N^{**}	148.18	148.18	22.47	22.47	4.72

$\bar{y}' = \bar{y}^2 / \sigma$	$\bar{y} = \frac{1}{1 - \ln(\sigma)}$
$\sigma_0 = 1$	$\bar{y}_0^{**} = 1$
$\sigma_N = 2.7$	$\bar{y}_N^{**} = 148.18$



Zemp d'itigation

$$\bar{y} = \frac{y}{1 - \ln(\alpha)}$$

$$\alpha = 1, \quad \alpha_N = 2.7$$

$$y = 0.05 - 0.1 - 0.2 - 0.4 - 0.6$$

10 5

8 4

6 3

4 2

2 1

0 0

0.05

0.1

0.2

0.4

0.6

0.8

0.4

1

2

3

4

5

6

7

8

9

10

20

30

40

50

60

70

80

90

100

200

300

400

500

600

700

800

50000

100000

150000

200000

300000

400000

500000

600000

700000

800000

900000

1000000

Comp d' integration

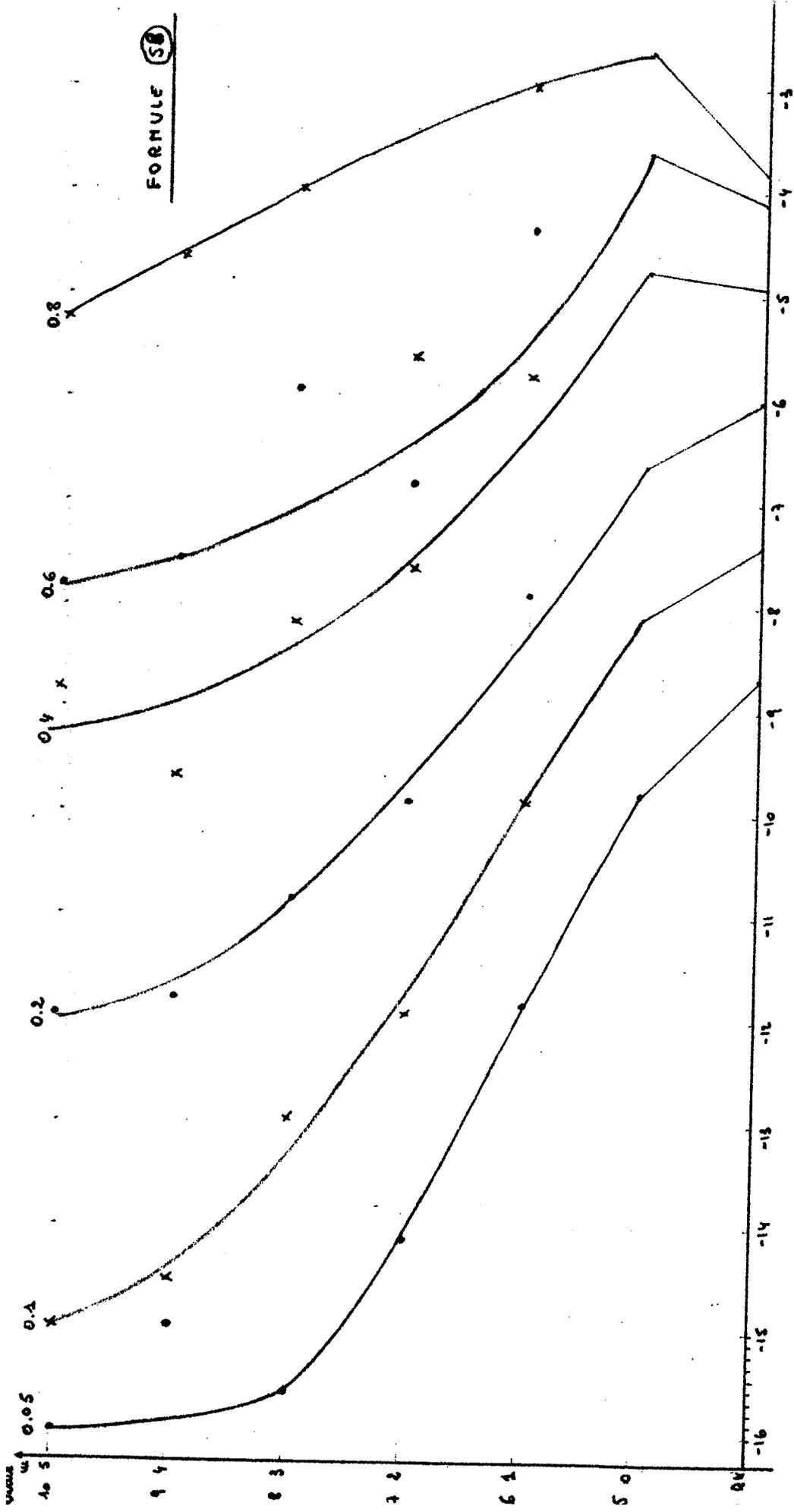
$$y' = \cos^2(y) \quad y = \text{Arctg}(x)$$

$$x_0 = 0, \quad x_N = 5$$

$$h = 0.05 - 0.1 - 0.2 - 0.4 - 0.6 - 0.8$$

2 eu
> titre
et
unite.

FORMULE (58)

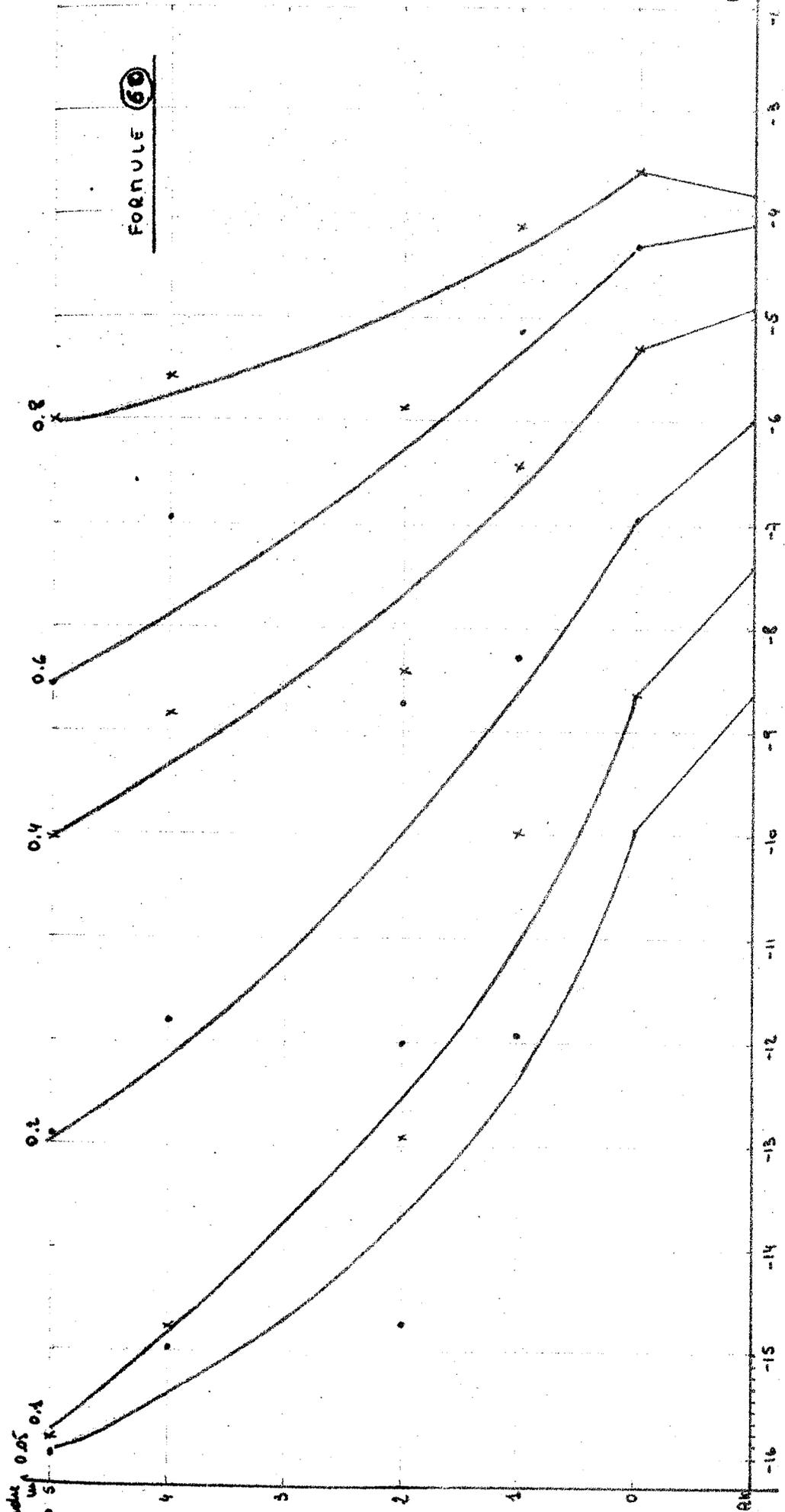


8:24

PAS h	0.05	0.1	0.2	0.4	0.6	0.8
Nombre de pas	100	50	25	12	8	6
α_N	5	5	5	4.8	4.8	4.8
\bar{P}_N^{max}	1.373	1.373	1.373	1.365	1.365	1.365

$\bar{P}' = \cos^2(\beta)$	$\bar{P} = \text{Anctg}(\alpha)$
$\alpha_0 = 0$	$\bar{P}_0^{max} = 0$
$\alpha_N = 5$	$\bar{P}_N^{max} = 1.373$

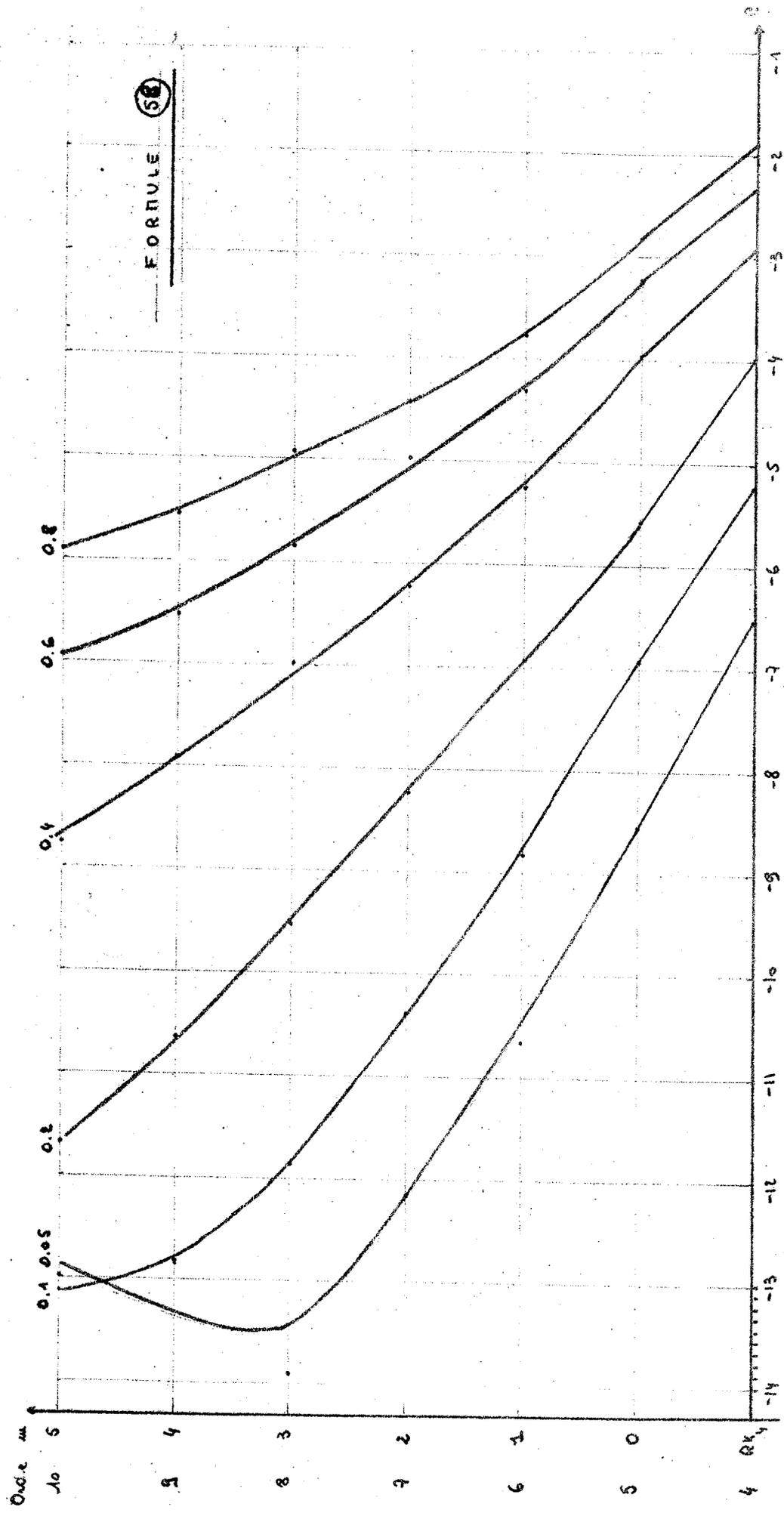
FORMULE (50)



PAS R	0.05	0.1	0.2	0.4	0.6	0.8
Nombre de pas	100	50	25	12	8	6
α_N	5	5	5	4.8	4.8	4.8
\bar{R}_N	1.373	1.373	1.373	1.365	1.365	1.365

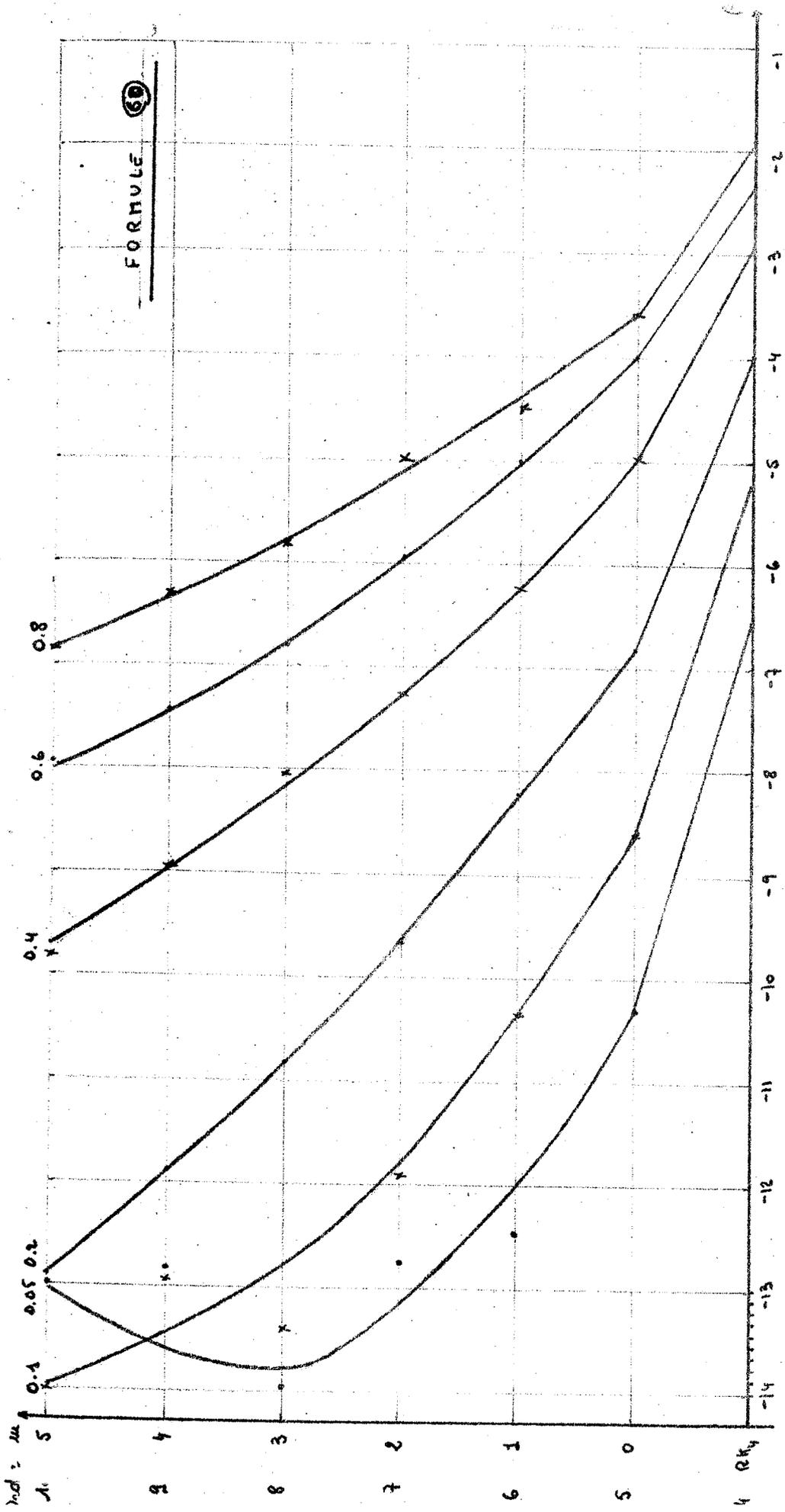
$\bar{R}' = \cos^2(\beta)$	$\bar{g} = \text{Arctg}(\alpha)$
$\alpha_0 = 0$	$\bar{R}_0 = 0$
$\alpha_N = 5$	$\bar{R}_N = 1.373$

FORMULE (58)



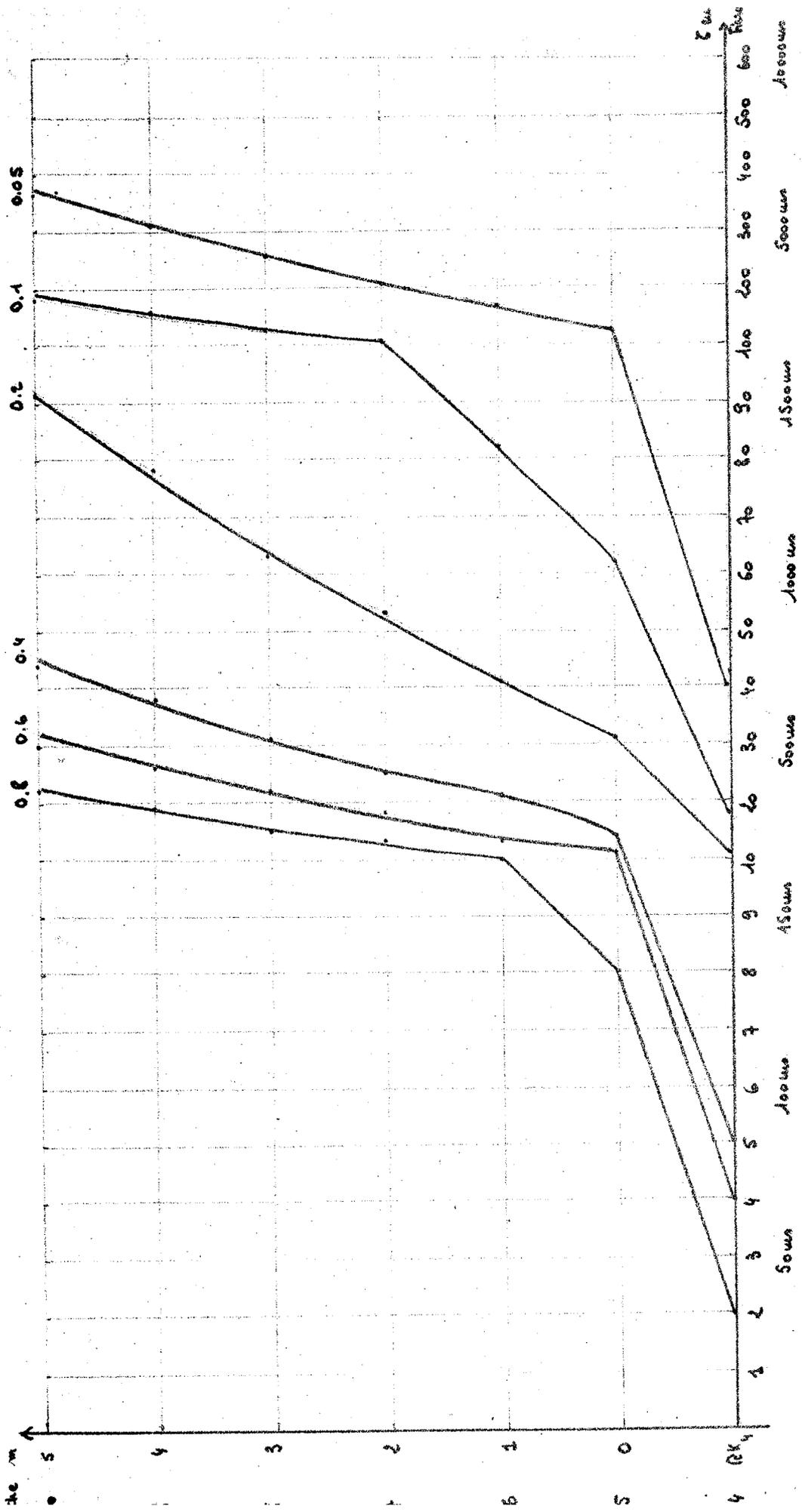
PASR	0.05	0.1	0.2	0.4	0.6	0.8
Nombre de pas	180	90	45	22	15	11
α_N	10	10	10	9.8	10	9.8
\bar{F}_N^{**}	23.025	23.025	23.025	22.367	23.025	22.367

$\bar{F}' = 1 + \bar{F}/\alpha$	$\bar{F} = \alpha \cdot \ln(\alpha)$
$\alpha_0 = 1$	$\bar{F}_0^{**} = 0$
$\alpha_N = 10$	$\bar{F}_N^{**} = 23.025$



PROB R	0.05	0.1	0.2	0.4	0.6	0.8
Nombre de fan	180	90	45	22	11	11
α_N	10	10	10	9.8	10	9.8
\bar{R}_N^{PR}	23.025	23.025	23.025	22.367	23.025	22.367

$\bar{R}' = 1 + \bar{R}/\alpha$	$\bar{R} = \alpha \cdot \ln(\alpha)$
$\alpha_0 = 1$	$\bar{R}_0^{PR} = 0$
$\alpha_N = 10$	$\bar{R}_N^{PR} = 23.025$

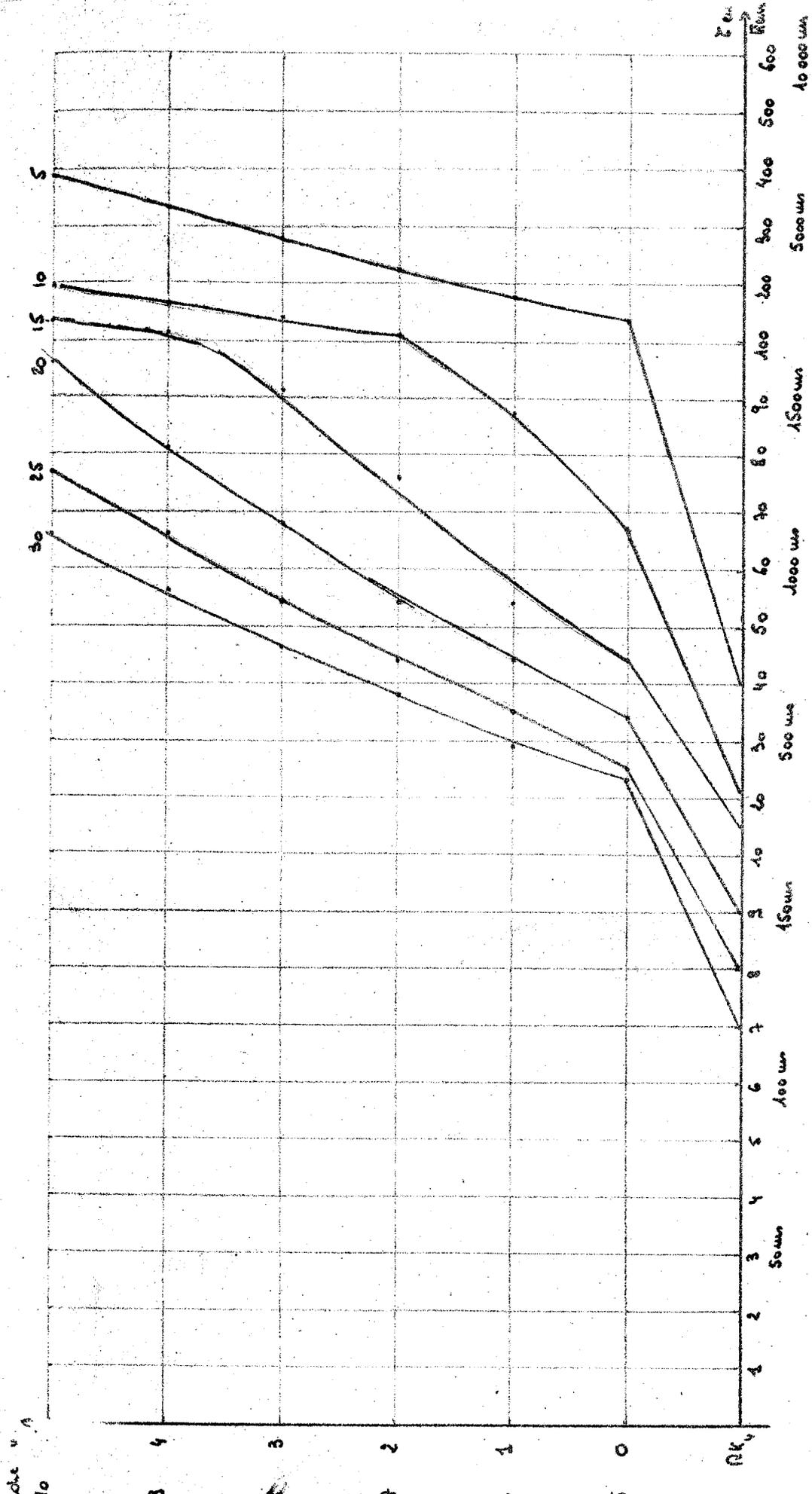


$$\bar{P}' = \bar{P} + \bar{P}/m \quad \bar{P} = m \cdot \ln(m)$$

$$m_0 = 1 ; m_N = 10$$

$$\bar{P} = 0.05 - 0.1 - 0.2 - 0.4 - 0.6 - 0.8$$

Temp d'infirpation

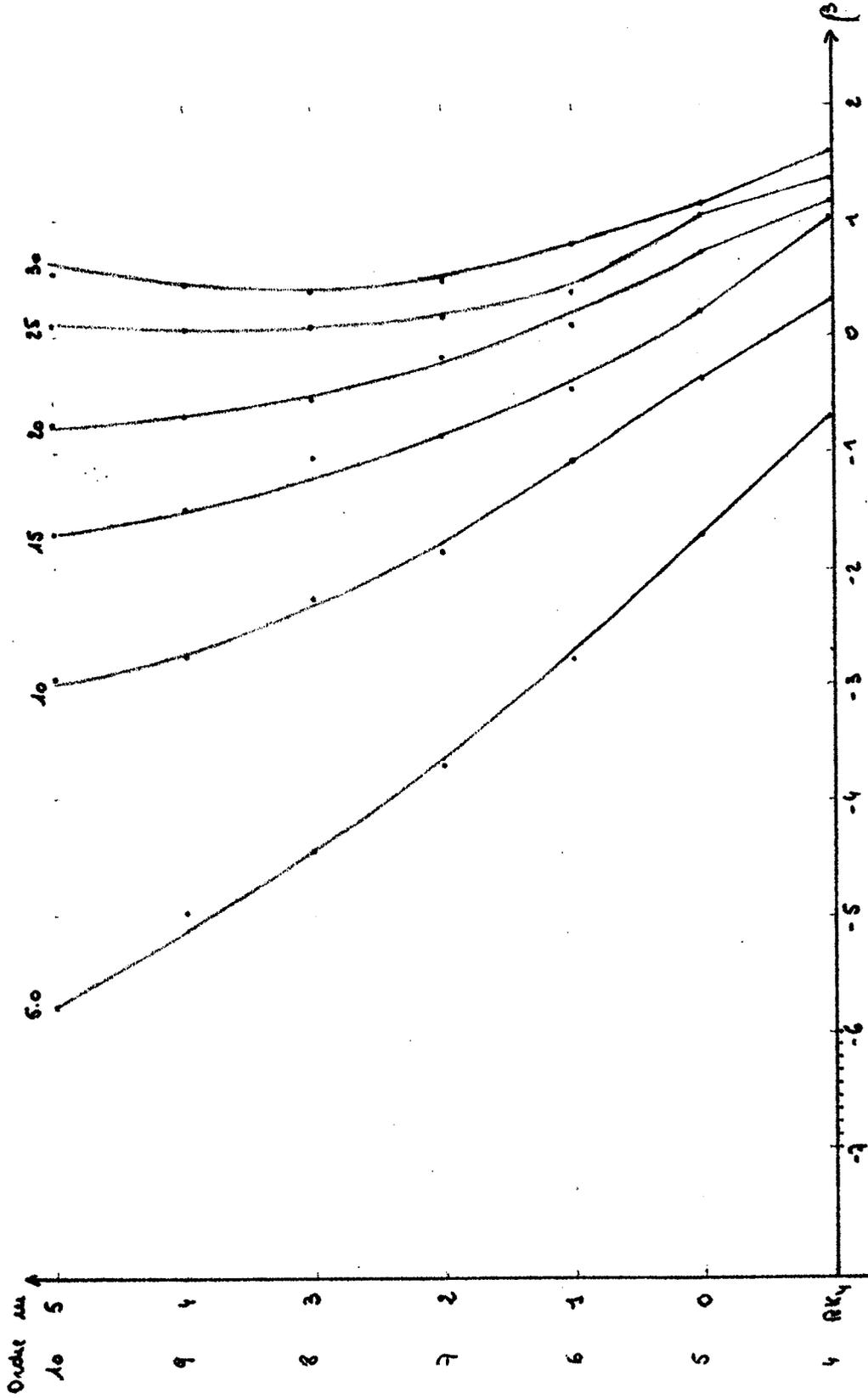


Temp d'interpolation

$$\bar{K}' = 1 + \frac{\bar{K}}{\alpha} \quad \bar{P} = \alpha \cdot \ln(\alpha)$$

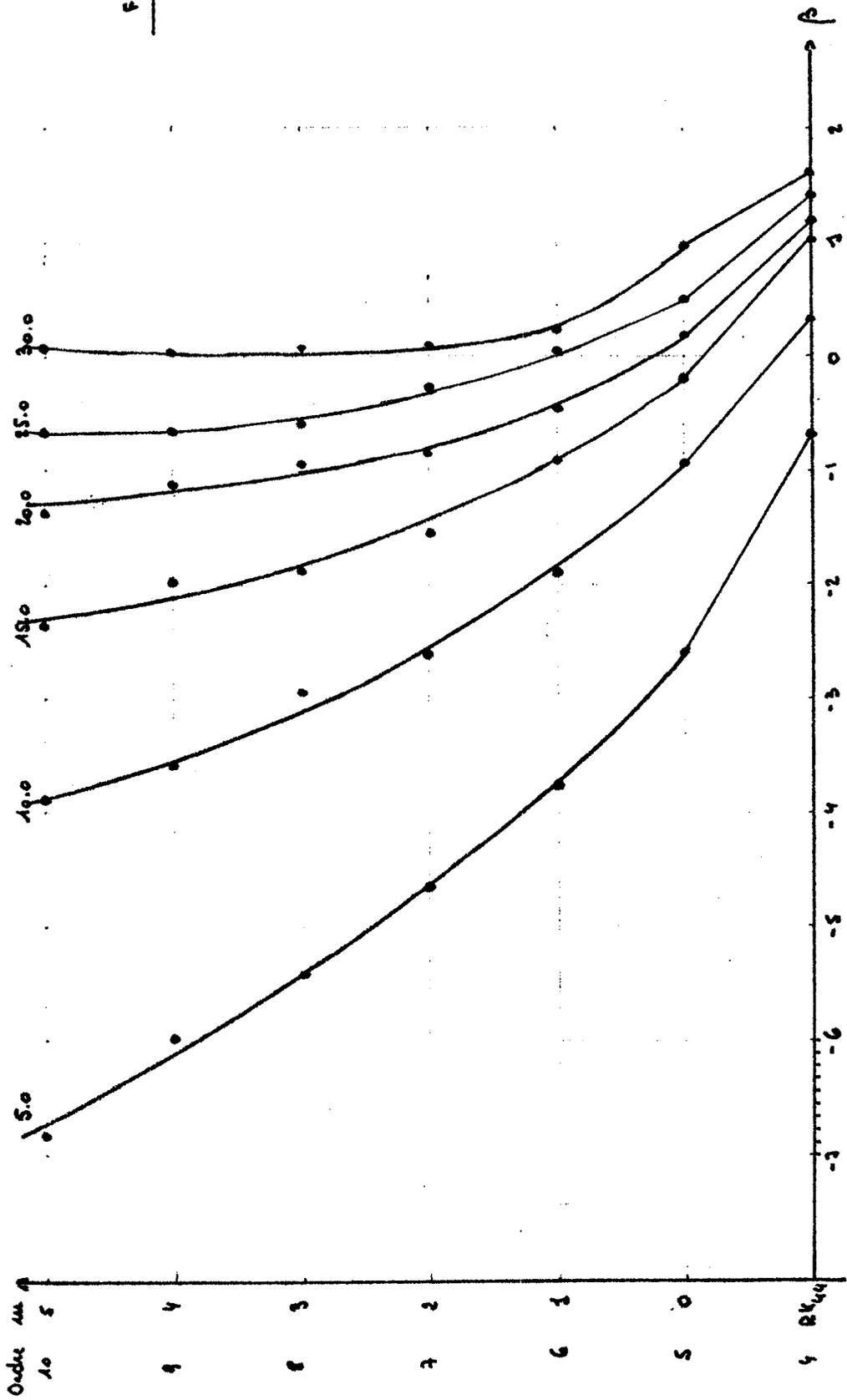
$$\alpha_2 = 10; \quad \alpha_N = 1000$$

$$h = 5 - 10 - 15 - 20 - 25 - 30$$



PAS h	5	10	15	20	25	30
Nombre de pas	198	99	66	49	39	33
n_N	1000	1000	1000	990	985	1000
\bar{N}_N	6907.75	6907.75	6907.75	6828.72	6789.25	6907.75

$\bar{Y} = 1 + \sqrt{B/n}$	$\bar{Y} = n \cdot \ln(n)$
$n_0 = 10$	$\bar{Y}_0 = 23.025$
$n_N = 1000$	$\bar{Y}_N = 6907.75$



PAS R	5	10	15	20	25	30
Nombre de jon	118	99	66	49	39	33
n_u	1000	1000	1000	990	985	1000
\bar{P}_u^{nu}	6907.75	6907.75	6907.75	6828.72	6789.5	6907.75

$\bar{P} = 1 + \bar{P}/n$ $\bar{P} = n \cdot \ln(n)$
 $n_0 = 10$; $\bar{P}_0^{nu} = 23.025$
 $n_u = 1000$; $\bar{P}_u^{nu} = 6907.75$

VI - ETUDE DE LA STABILITE

Nous étudierons la stabilité pour des formules d'ordre $m+5$, avec comme équation différentielle : $\bar{y}' = -\bar{y}$, de condition initiale $\bar{y}(x_0) = \bar{y}_0$.

Rappelons que dans ce cas, la transformation de hauteur m s'écrit :

$$\bar{y} = y [1 - (x - x_i)] + \bar{y}_i \sum_{j=2}^{m+1} (-1)^j \frac{(x - x_i)^j}{j!} \quad (64)$$

et l'équation différentielle transformée est :

$$Y(x, y) = \frac{x - x_i}{1 - (x - x_i)} \left[y - \bar{y}_i + (-1)^m \bar{y}_i \frac{(x - x_i)^m}{(m+1)!} \right]$$

Les valeurs Y_{i1} , Y_{i2} et Y_{i3} , qui interviennent dans l'algorithme de R-K (voir § IV.1. relation (45)), s'écrivent alors, en remplaçant x_{iK} par $x_i + \theta_K h$, $K = 1, 2, 3$:

$$Y_{i1} = \frac{(-1)^m}{(m+1)!} \frac{h^{m+1} \theta_1^{m+1}}{1 - h\theta_1} \bar{y}_i$$

$$Y_{i2} = \frac{(-1)^m}{(m+1)!} \left[\frac{h^{m+1} \theta_2^{m+1}}{1 - h\theta_2} + A_{21} \frac{h^{m+3} \theta_1^{m+1} \theta_2}{(1 - h\theta_1)(1 - h\theta_2)} \right] \bar{y}_i$$

$$Y_{i3} = \frac{1}{(m+1)!} \left[\frac{h^{m+1} \theta_3^{m+1}}{1 - h\theta_3} + A_{31} \frac{h^{m+3} \theta_1^{m+1} \theta_3}{(1 - h\theta_1)(1 - h\theta_3)} + A_{32} \frac{h^{m+3} \theta_2^{m+1} \theta_3}{(1 - h\theta_2)(1 - h\theta_3)} \right]$$

$$+ A_{32} A_{21} \frac{h^{m+5} \theta_1^{m+1} \theta_2 \theta_3}{(1 - h\theta_1)(1 - h\theta_2)(1 - h\theta_3)} \bar{y}_i$$

D'où :

$$\begin{aligned}
y_{i+1} - y_i = & \frac{(-1)^m}{(m+1)!} \frac{y_i}{(1-h\theta_1)(1-h\theta_2)(1-h\theta_3)} \left[(A_{41}\theta_1^{m+1} + A_{42}\theta_2^{m+1} + A_{43}\theta_3^{m+1})h^{m+2} - \right. \\
& (A_{41}\theta_1^{m+1}\{\theta_2+\theta_3\} + A_{42}\theta_2^{m+1}\{\theta_3+\theta_1\} + A_{43}\theta_3^{m+1}\{\theta_1+\theta_2\})h^{m+3} + \\
& (A_{41}\theta_1^m + A_{42}\theta_2^m + A_{43}\theta_3^m)\theta_1\theta_2\theta_3 h^{m+4} + \\
& (A_{42}A_{21}\theta_1^{m+1}\theta_2 + A_{43}A_{31}\theta_1^{m+1}\theta_3 + A_{43}A_{32}\theta_2^{m+1}\theta_3)h^{m+4} - \\
& \left. (A_{42}A_{21}\theta_1^m + A_{43}A_{31}\theta_1^m + A_{43}A_{32}\theta_2^m)\theta_1\theta_2\theta_3 h^{m+5} + A_{43}A_{32}A_{21}\theta_1^{m+1}\theta_2\theta_3 h^{m+6} \right] \quad (65)
\end{aligned}$$

En posant :

$$S_1 = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3$$

$$S_2 = \theta_1\theta_2 + \theta_2\theta_3 + \theta_3\theta_1$$

$$S_3 = \theta_1\theta_2\theta_3$$

$$\pi = (1-h\theta_1)(1-h\theta_2)(1-h\theta_3)$$

et en tenant compte du fait que la méthode est de rang $m+5$, soit en utilisant les valeurs des coefficients A_{ij} écrits en (50), nous avons les relations suivantes :

$$\theta_1\theta_2\theta_3 \sum_{i=1}^3 A_{4i}\theta_i^m = \frac{S_2}{m+2} - \frac{S_1}{m+3} + \frac{1}{m+4}$$

$$\theta_1\theta_2\theta_3 (A_{42}A_{21}\theta_1^m + A_{43}A_{31}\theta_1^m + A_{43}A_{32}\theta_2^m) = \frac{S_1}{(m+2)(m+4)} - \frac{2m+5}{(m+2)(m+3)(m+5)}$$

la relation (65) s'écrit, compte tenu des constatations précédentes :

$$\begin{aligned}
y_{i+1} = & y_i \left\{ 1 + \frac{(-1)^m}{\pi(m+1)!} \left[\frac{h^{m+2}}{m+2} - h^{m+3} \left(\frac{S_1}{m+2} - \frac{1}{m+3} \right) + h^{m+4} \left(\frac{S_2}{m+2} - \frac{S_1}{m+3} + \frac{m+3}{(m+2)(m+4)} \right) \right. \right. \\
& \left. \left. - h^{m+5} \left(\frac{S_1}{(m+2)(m+5)} - \frac{2m+5}{(m+2)(m+3)(m+5)} \right) + A_{43}A_{32}A_{21}\theta_1^m S_3 h^{m+6} \right] \right\} \quad (66)
\end{aligned}$$

et en appliquant la transformation (64) à la relation (66) il vient :

$$\begin{aligned} \bar{y}_{i+1} = \bar{y}_i \{ & \sum_{j=0}^{m+1} (-1)^j \frac{h^j}{j!} + \frac{(-1)^m h^{m+2}}{(m+1)! \pi} \left[\frac{1}{m+2} - \frac{h}{m+2} \left(S_1 + \frac{1}{m+3} \right) + \right. \\ & \frac{h^2}{m+2} \left(S_2 + \frac{S_1}{m+3} + \frac{1}{(m+3)(m+4)} \right) - \frac{h^3}{m+2} \left(S_2 - S_1 \frac{m^2+5m+5}{(m+3)(m+4)} + \frac{m^3 9m^2+26m+25}{(m+3)(m+4)(m+5)} \right) \\ & \left. + \frac{h^4}{m+2} \left(S_1 - \frac{2m+5}{(m+3)(m+5)} \right) + A_{43} A_{32} A_{21} \theta_1^m S_3 h^4 (1-h) \right] \} \end{aligned} \quad (67)$$

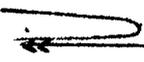
Les relations de stabilité, pour les relations (66) et (67) s'écrivent alors :
 $-1 < \frac{y_{i+1}}{y_i} < 1$ et $-1 < \frac{\bar{y}_{i+1}}{\bar{y}_i} < 1$. Or les relations (66) et (67) dépendent des 3 paramètres θ_1 , θ_2 et θ_3 , qui ne sont encore pas fixés lorsqu'on considère les valeurs des coefficients A_{ij} donnés par (50), on ne peut raisonnablement entamer une discussion sur ces relations en ayant 3 inconnues. Nous avons préféré étudier la stabilité des 2 formules qui nous ont servi pour les essais numériques, à savoir les formules (58) et (60).

On trouvera donc ci-après les graphiques obtenus en posant :
 $\bar{y}_{i+1} = f(h,m)\bar{y}_i$, et en étudiant la relation $-1 < f(h,m) < 1$.

Nous remarquerons que du fait du dénominateur π nous obtiendrons 3 asymptotes verticales et que le rayon de stabilité R sera voisin de 1 d'une part et que d'autre part la zone instable séparant les plages de stabilité ne sera plus aussi finie, comme dans les chapitres précédents, pour des valeurs $m < 5$. Il semble qu'à partir de $m = 5$ on puisse considérer cette zone d'instabilité comme suffisamment fine pour pouvoir la négliger ($m = 5$, "épaisseur" de la zone instable ~ 0.03).

Nous donnerons aussi deux tableaux (se rapportant l'un à la formule (58) l'autre à la formule (60)) comportant les résultats obtenus d'une part, par l'étude théorique de la stabilité, et d'autre part les erreurs obtenues en fin d'intégration sur l'équation différentielle $\bar{y}' = -\bar{y}$ de $x_0 = 0$ à $x_N = 20$.

FORMULE 58

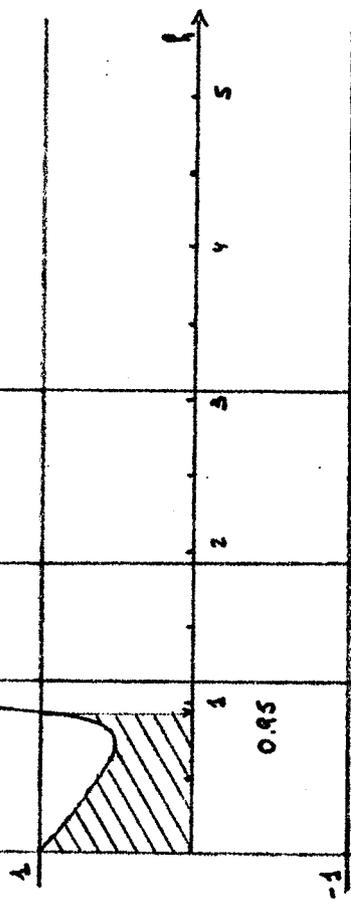


$f(x,2)$

x

x

$f(x,2)$

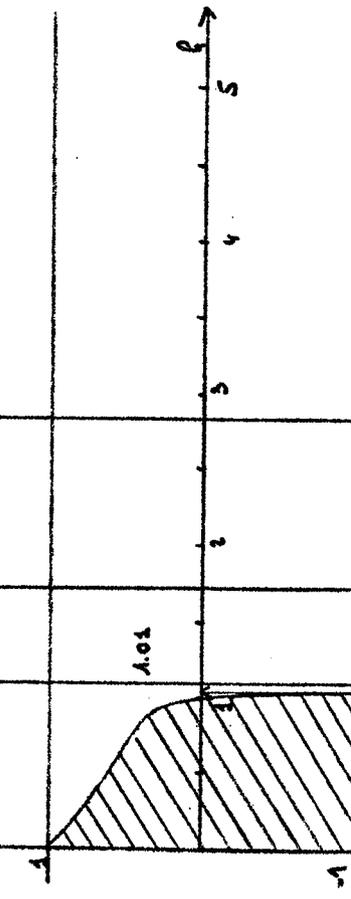


$n=2$

$\theta_1 = 0.539 \quad 284 \ 533, \quad 1/\theta_1 = 1.112$

$\theta_2 = 0.529 \quad 857 \ 955, \quad 1/\theta_2 = 1.887$

$\theta_3 = 0.898 \quad 713 \ 492, \quad 1/\theta_3 = 3.027$



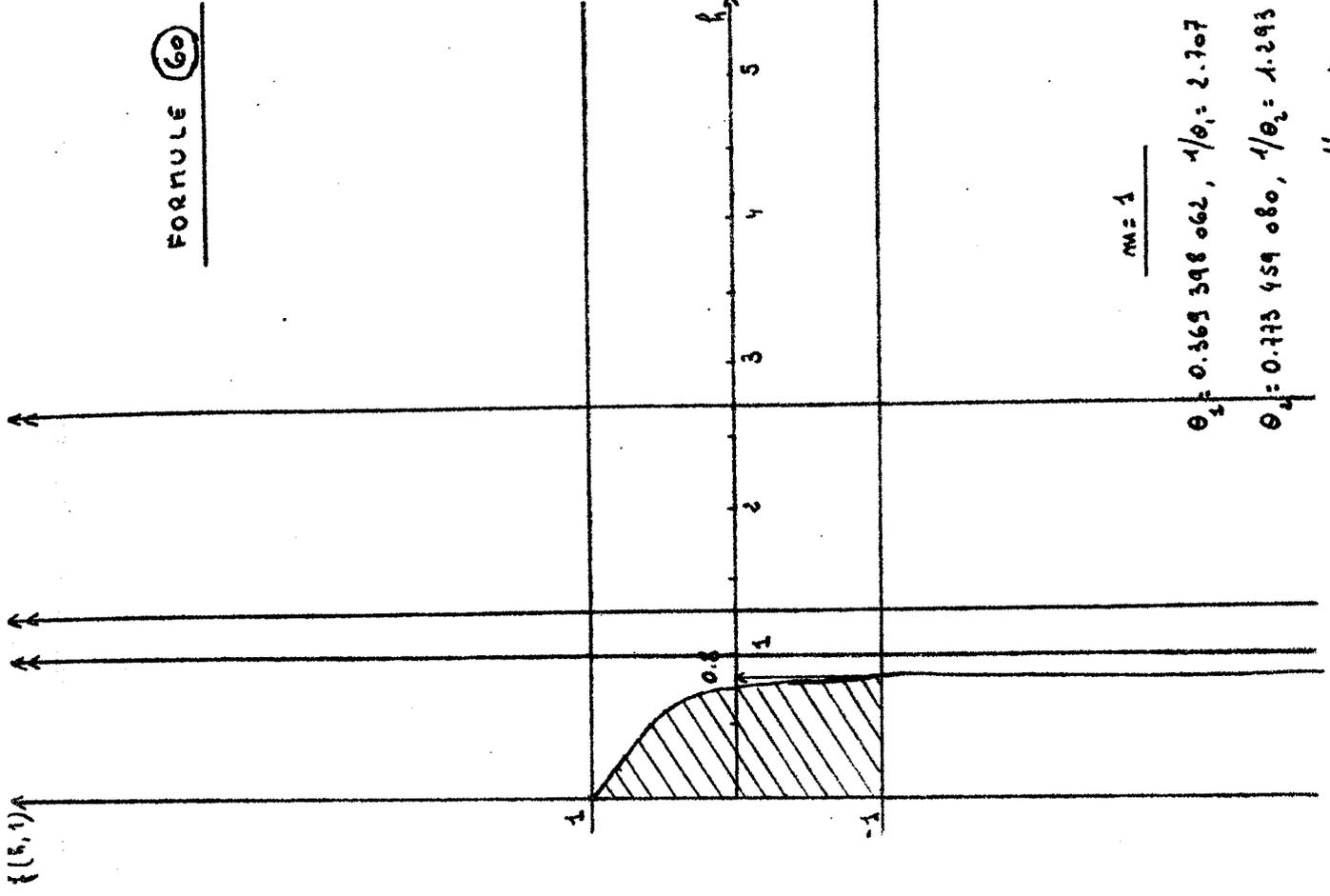
$n=3$

$\theta_1 = 0.354 \ 458 \ 575, \quad 1/\theta_1 = 1.094$

$\theta_2 = 0.586 \ 336 \ 582, \quad 1/\theta_2 = 1.705$

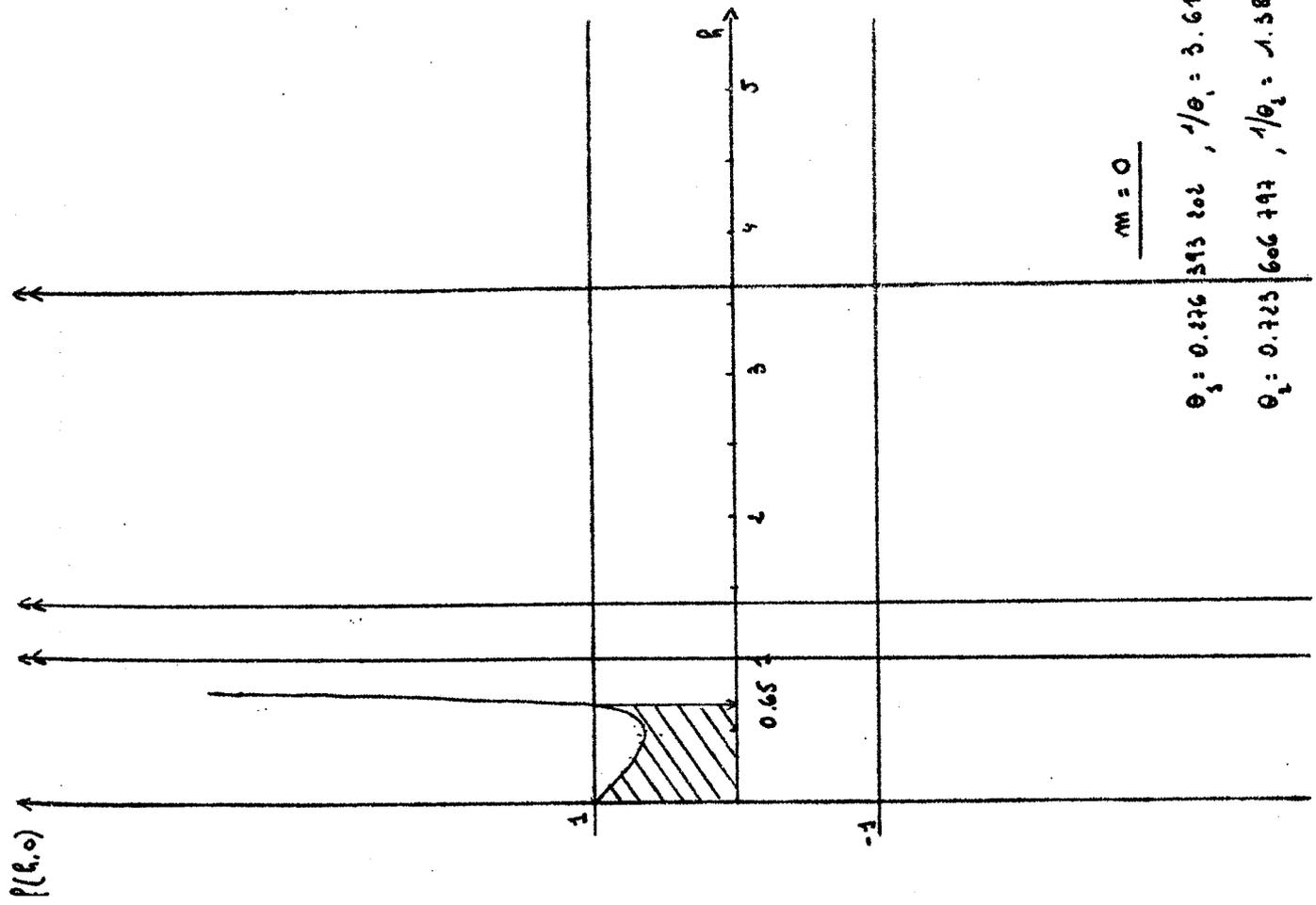
$\theta_3 = 0.913 \ 663 \ 417, \quad 1/\theta_3 = 2.821$

FORMULE (60)



$m = 1$

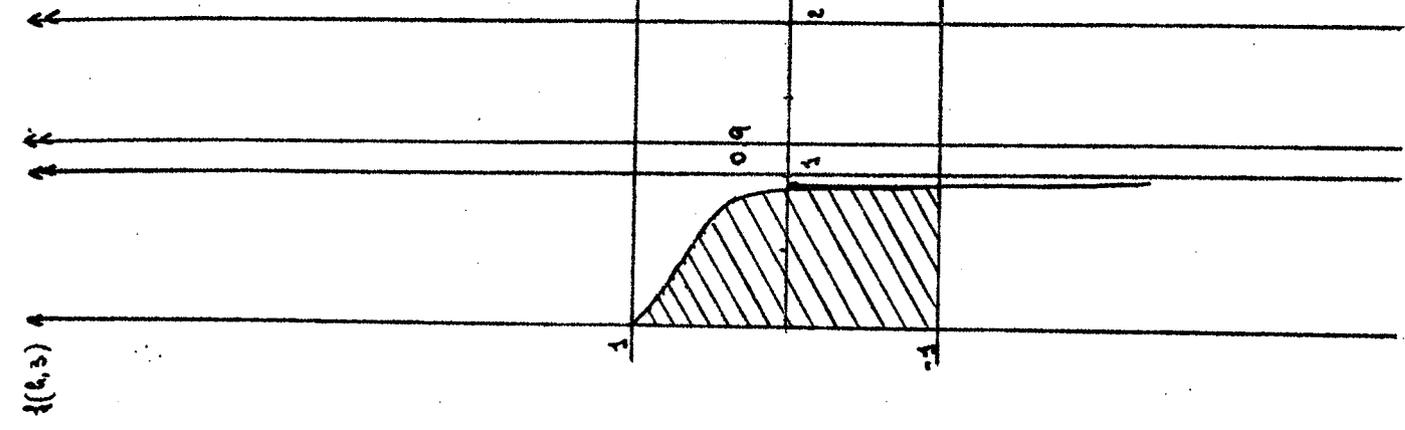
$\theta_1 = 0.369\ 398\ 062, \quad 1/\theta_1 = 2.707$
 $\theta_2 = 0.773\ 459\ 080, \quad 1/\theta_2 = 1.293$
 $\theta_3 = 1.0, \quad 1/\theta_3 = 1.0$



$m = 0$

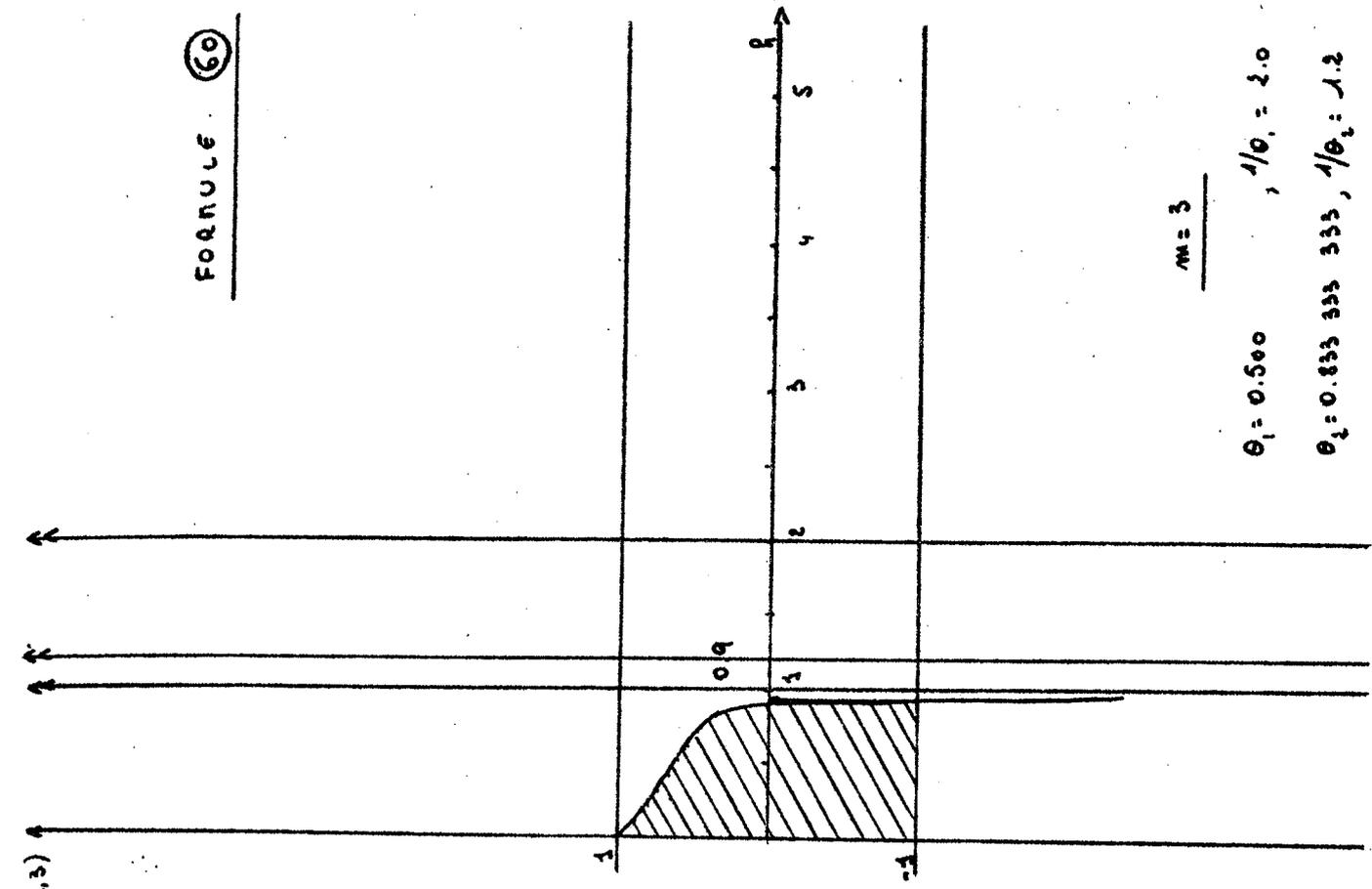
$\theta_1 = 0.276\ 393\ 202, \quad 1/\theta_1 = 3.618$
 $\theta_2 = 0.723\ 606\ 797, \quad 1/\theta_2 = 1.382$
 $\theta_3 = 1.0, \quad 1/\theta_3 = 1.0$

FORMULE (60)



n = 2

- $\theta_1 = 0.442018736, 1/\theta_1 = 2.262$
- $\theta_2 = 0.807981265, 1/\theta_2 = 1.237$
- $\theta_3 = 1.0, 1/\theta_3 = 1.0$



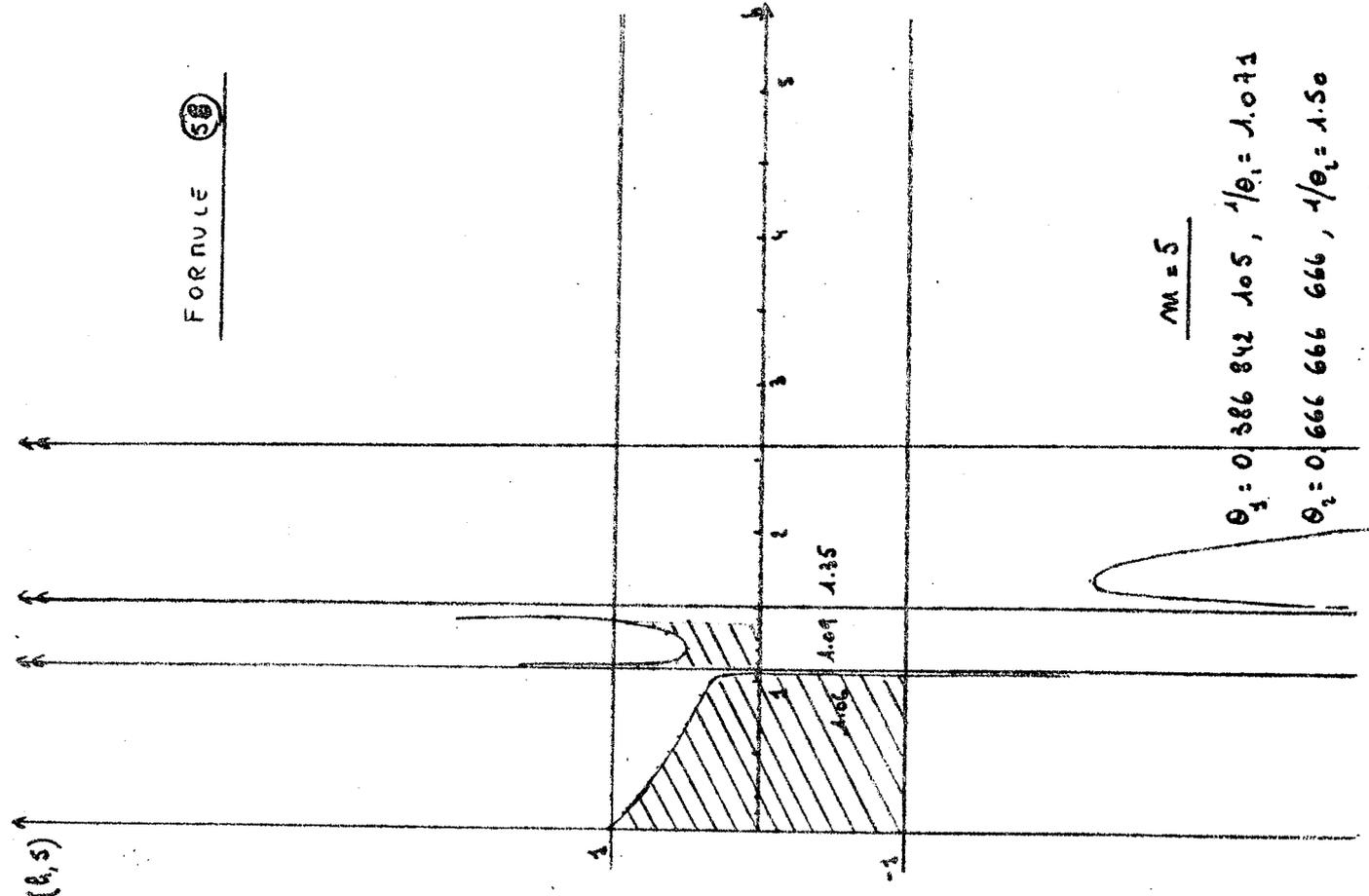
n = 3

- $\theta_1 = 0.500, 1/\theta_1 = 2.0$
- $\theta_2 = 0.833333333, 1/\theta_2 = 1.2$
- $\theta_3 = 1.0, 1/\theta_3 = 1.0$

FORMULE 58

$f(t, s)$

$f(t, s)$



$N=5$

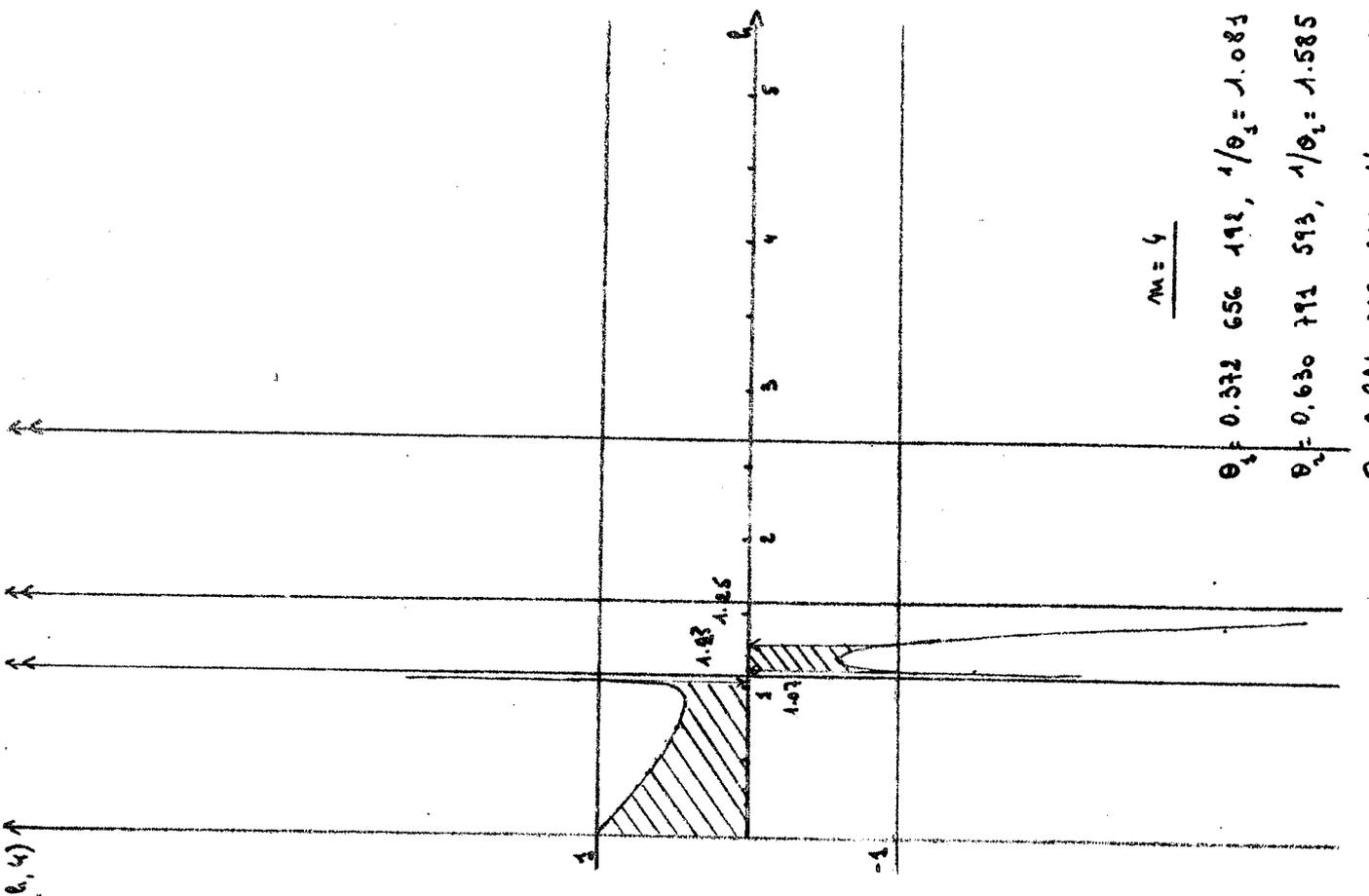
$$\theta_1 = 0.386 \ 842 \ 105, \quad 1/\theta_1 = 1.071$$

$$\theta_2 = 0.666 \ 666 \ 666, \quad 1/\theta_2 = 1.50$$

$$\theta_3 = 0.953 \ 333 \ 333, \quad 1/\theta_3 = 2.585$$

$f(t, s)$

$f(t, s)$



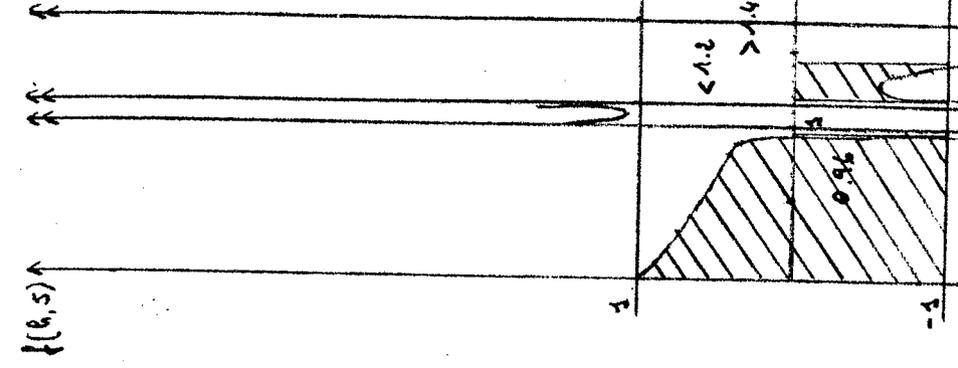
$N=4$

$$\theta_1 = 0.372 \ 656 \ 191, \quad 1/\theta_1 = 1.083$$

$$\theta_2 = 0.630 \ 791 \ 593, \quad 1/\theta_2 = 1.585$$

$$\theta_3 = 0.924 \ 763 \ 361, \quad 1/\theta_3 = 2.683$$

FORMULE (60)

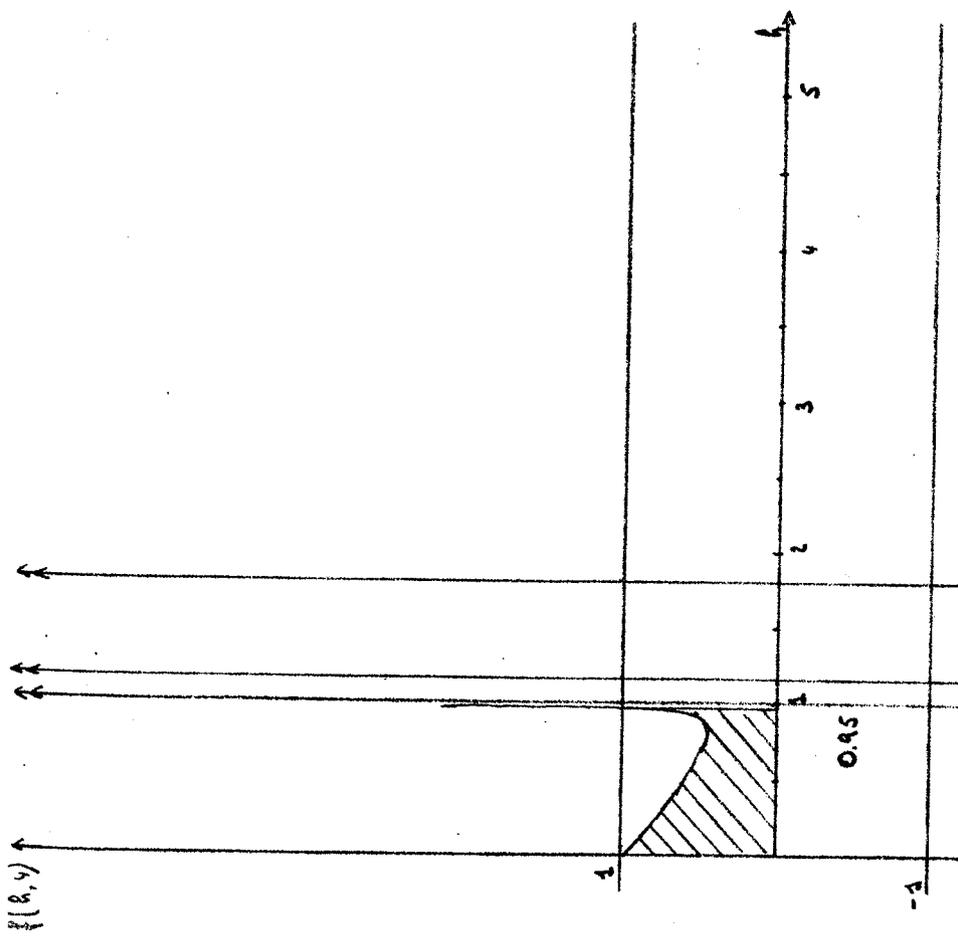


m = 5

$\theta_1 = 0.586 \quad 436 \quad 569, \quad 1/\theta_1 = 1.705$

$\theta_2 = 0.868 \quad 108 \quad 465, \quad 1/\theta_2 = 1.151$

$\theta_3 = 1.0, \quad 1/\theta_3 = 1.0$



m = 4

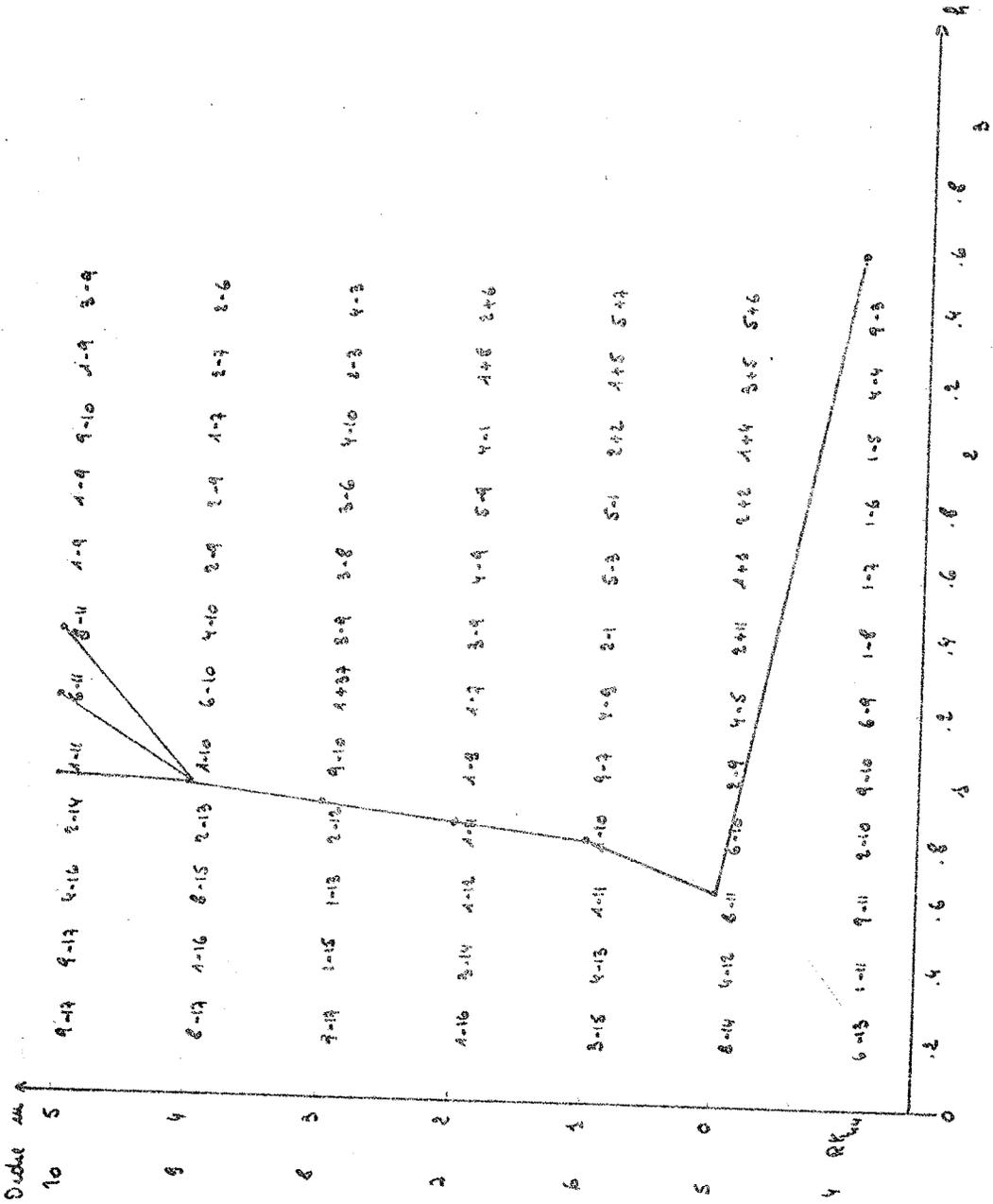
$\theta_1 = 0.547 \quad 247 \quad 476, \quad 1/\theta_1 = 1.827$

$\theta_2 = 0.652 \quad 752 \quad 525, \quad 1/\theta_2 = 1.472$

$\theta_3 = 1.0, \quad 1/\theta_3 = 1.0$

Etude de la relation (67)

FORMULE (60)

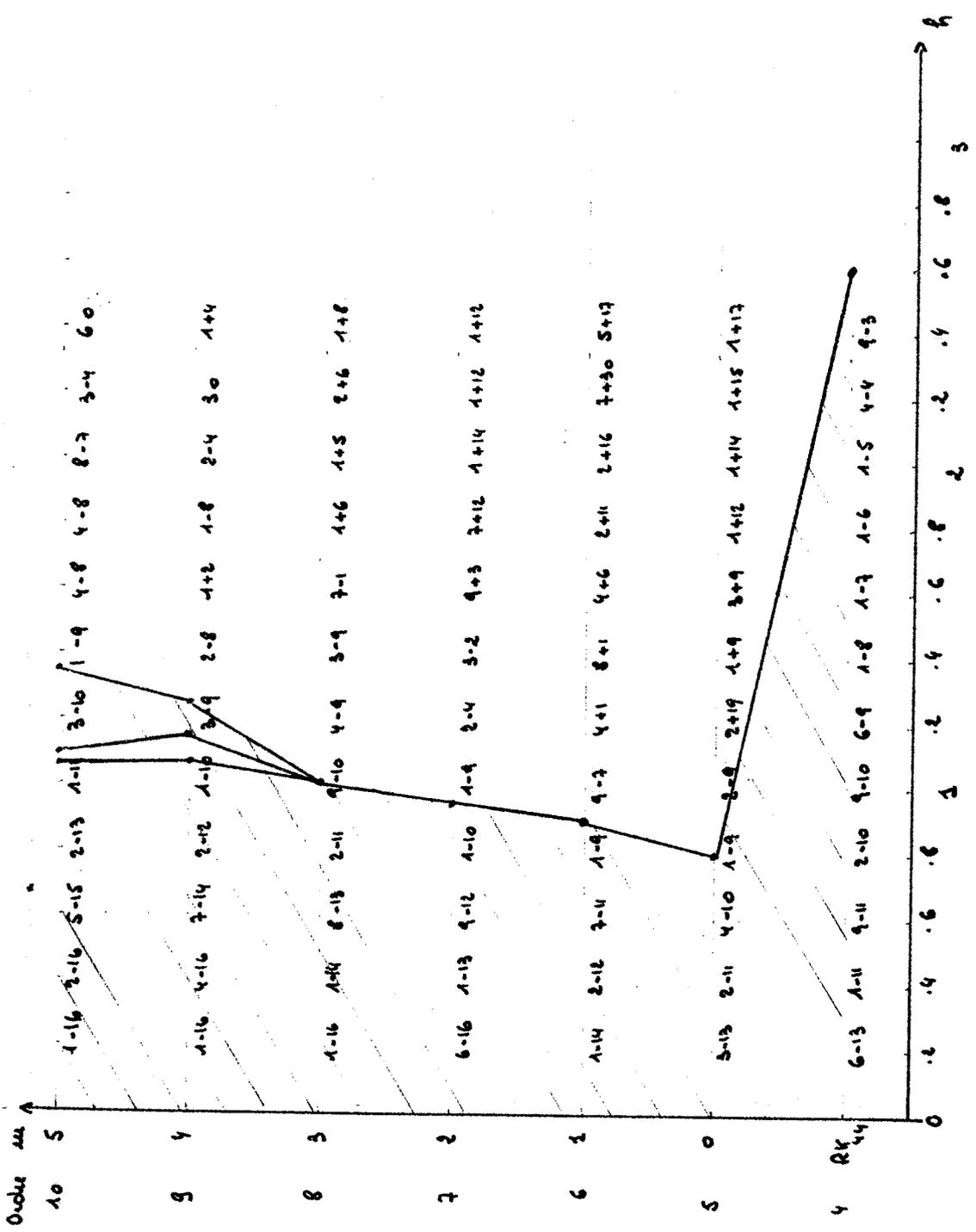


Rayons de stabilité et Rayons de stabilité.

Etude théorique (relation (67)) et étude numérique sur $\gamma = -\gamma$

N.B. $\alpha - \beta \rightarrow E = \alpha \cdot 10^{-\beta}$

- - - - -



Rayons de stabilité et plages de stabilité.

N.B. $\alpha - \beta \rightarrow \lambda = \alpha \cdot 10^{\beta}$ Etude Théorique (67) et Etude Pratique sur $\bar{y} = \bar{y}$

Conclusions de l'étude de la stabilité

Une étude complète de la relation récurrente :

$$\begin{aligned} \bar{y}_{i+1} = \bar{y}_i & \left[\sum_{j=0}^{m+1} (-1)^j \frac{h^j}{j!} + \frac{(-1)^m h^{m+2}}{(m+2)! \pi} \left\{ 1 - h \left(S_1 + \frac{1}{m+3} \right) + h^2 \left(S_2 + \frac{S_1}{m+3} + \frac{1}{(m+3)(m+4)} \right) \right. \right. \\ & - h^3 \left(S_2 - S_1 \frac{m^2 + 5m + 5}{(m+3)(m+4)} + \frac{m^3 + 9m^2 + 26m + 25}{(m+3)(m+4)(m+5)} \right) + h^4 \left(S_1 - \frac{2m+5}{(m+3)(m+5)} \right) \\ & \left. \left. + A_{43} A_{32} A_{21} \theta_1^m S_3 h^4 (m+2)(1-h) \right\} \right] \end{aligned}$$

avec

$$\pi = (1-h\theta_1)(1-h\theta_2)(1-h\theta_3)$$

$$S_1 = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3$$

$$S_2 = \theta_1\theta_2 + \theta_2\theta_3 + \theta_3\theta_1$$

$$S_3 = \theta_1\theta_2\theta_3$$

qui représente la solution numérique de l'équation différentielle $\bar{y}' = -\bar{y}$, et qui dépend de 5 paramètres : h, m, θ_1, θ_2 et θ_3 ne peut raisonnablement être entreprise dans le cas général. A la limite on pourrait concevoir une étude dans un espace à 3 dimensions : h, θ_1, θ_2 , pour chaque m ($\theta_3 = f(\theta_1, \theta_2)$ par (49)). Nous avons préféré à cette étude générale, étudier la stabilité dans deux cas particuliers de formules (celles qui nous ont servi aux résultats numériques).

Nous pouvons alors constater que, si la précision augmente, le rayon de stabilité est très inférieur à celle de RK_{44} , même pour une transformation de hauteur 5. Il semble, malgré tout que la zone d'instabilité comprise entre les 2 groupes de stabilité, va aller en s'amincissant, et que pour des valeurs très grandes de m , on obtienne un rayon supérieur à 2.6.

Nous pouvons d'autre part remarquer que plus le rang de la méthode est élevé, plus m doit l'être aussi pour que le rayon de la méthode $R-K.F_{p,m+p+1}$ devienne plus grand que celui de la méthode $R-K_{p,p}$ classique.

Etude expérimentale du paramètre de propagation (voir § I.5)

Résultats obtenus expérimentalement par la résolution de $\bar{y}' = \bar{y}^{-2}/x$ ($x_0 = 1$) avec $\Delta\bar{y}_0 = 10^{-7}$.

Les paramètres de propagation théoriques sont respectivement : $\lambda(2.6) \# 505$, $\lambda(2,2) \# 22.34$, $\lambda(2) \# 10.55$,

$$\lambda(t) = \frac{1}{[1-\ln(t)]^2}$$

m \ PAS	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2
0	484	391	21.9	210	10.1	18
1	495	430	22.1	270	10.3	20
2	499	453	22.25	310	10.49	21
3	502	470	22.31	350	10.50	21.6
4	503	481	22.33	380	10.59	21.9
5	504	489	22.34	410	10.61	22.0

$\lambda(t)$ théorique	505	505	22.34	505	10.55	22.34
---------------------------	-----	-----	-------	-----	-------	-------

Résultats obtenus expérimentalement par la résolution de $\bar{y}' = 1 + \bar{y}/x$ ($x_0 = 1$), avec $\Delta\bar{y}_0 = 10^{-7}$ (ligne supérieure) et $\Delta\bar{y}_0 = 10^{-14}$ (ligne inférieure).

Les paramètres de propagation théoriques sont respectivement $\lambda(10) = 10$, $\lambda(9.8) = 9.8$, $\lambda(9.4) = 9.4$

$$\lambda(t) = t$$

m \ PAS	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2
	0	10	9.8	10	9.8	10
	10	9.4	10.1	9.4	9.77	9.6
1	10	9.8	10	9.8	10	9.4
	11.2	9.95	9.77	9.6	10.12	9.3
2	9.99	9.8	10	9.8	10	9.4
	10.31	9.95	9.95	9.77	9.6	9.4
3	10	9.8	10	9.8	10	9.4
	9.59	9.59	10.3	9.59	9.95	9.59
4	9.999	9.8	10	9.8	10	9.4
	9.77	9.95	10.13	9.59	10.30	9.41
5	10	9.8	10	9.8	10	9.4
	9.94	9.77	9.77	9.59	9.95	9.41
$\lambda(t)$ théorique	10	9.8	10	9.8	10	9.4

Résultats obtenus expérimentalement par la résolution de $\bar{y}' = -\bar{y}$ ($x_0 = 0$) avec $\Delta\bar{y}_0 = 10^{-7}$ (ligne supérieure) et $\Delta\bar{y}_0 = 10^{-14}$ (ligne inférieure).

Les paramètres de propagation théoriques sont respectivement :

$$\lambda(20) = 2.06 \cdot 10^{-9}, \quad \lambda(19.8) = 2.52 \cdot 10^{-9}, \quad \lambda(19.2) = 4.59 \cdot 10^{-9}$$

$$\lambda(t) = e^{-t}$$

m \ PAS	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2
0	2.06	2.06	2.60	/	/	/
	2.06	2.18	2.73	/	/	/
1	2.06	2.06	2.51	1.95	INSTABILITE	/
	1.94	2.11	2.34	2.07		/
2	2.06	2.06	2.52	2.08		/
	2.17	1.96	2.32	2.17		/
3	2.06	2.06	2.52	2.06		/
	1.92	1.79	2.77	2.29		/
4	2.06	2.06	2.52	2.06	/	
	2.06	2.17	2.52	2.09	/	
5	2.06	2.06	2.52	2.06	/	4.65
	2.31	2.34	2.60	2.01	/	4.79
$\lambda(t)$ théorique	2.06	2.06	2.52	2.06	/	4.59

TROISIEME PARTIE



INTEGRATION D'UN PROBLEME DIFFERENTIEL D'ORDRE n

AVEC CONDITIONS INITIALES

CHAPITRE - VMETHODE DE R-K.F_{4,m+5}I - INTRODUCTION

Nous nous proposons de résoudre le problème différentiel :

$$\bar{y}^{(n)} = \bar{Y}(x, \bar{y}, \bar{y}', \dots, \bar{y}^{(n-1)}),$$

de conditions initiales :

$$\bar{y}(x_0) = \bar{y}_0, \quad \bar{y}'(x_0) = \bar{y}'_0, \dots, \bar{y}^{(n-1)}(x_0) = \bar{y}_0^{(n-1)}$$

en utilisant l'algorithme R-K.F_{4,m+5}, c'est-à-dire en transformant l'équation différentielle proposée et en l'intégrant par un algorithme du type Runge-Kutta de rang 4. Nous verrons que la méthode est d'ordre m+5, pour une transformation de hauteur m, pour $y, y', \dots, y^{(n-1)}$ et donc pour $\bar{y}, \bar{y}', \dots, \bar{y}^{(n-1)}$. (Ref. [2], [3]).

II - TRANSFORMATION DE FEHLBERG. EQUATION DIFFERENTIELLE TRANSFORMEE

La méthode de Fehlberg, appliquée à l'équation différentielle :

$$\bar{y}^{(n)} = \bar{Y}(x, \bar{y}, \bar{y}', \dots, \bar{y}^{(n-1)})$$

de conditions initiales :

(68)

$$\bar{y}(x_0) = \bar{y}_0, \quad \bar{y}'(x_0) = \bar{y}'_0, \dots, \bar{y}^{(n-1)}(x_0) = \bar{y}_0^{(n-1)}$$

consiste en :

- une transformation de hauteur m :

$$\bar{y} = y + \sum_{i=1}^{m+n} \frac{(x-x_0)^i}{i!} y_0^{(i)} + \frac{1}{n} (x-x_0) (y-y_0) \left(\frac{\partial \bar{Y}}{\partial \bar{y}^{(n-1)}} \right)_0 \quad (69)$$

- et la résolution de l'équation différentielle transformée :

$$y^{(n)} = Y(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) =$$

$$\frac{1}{1 + \frac{x-x_0}{n} \left(\frac{\partial \bar{Y}}{\partial \bar{y}^{(n-1)}} \right)_0} \left\{ \bar{Y} - \sum_{i=0}^m \frac{(x-x_0)^i}{i!} \bar{y}_0^{(i+n)} - y^{(n-1)} \left(\frac{\partial \bar{Y}}{\partial \bar{y}^{(n-1)}} \right)_0 \right\} \quad (70)$$

(il est bien entendu que l'on remplace dans \bar{Y} , chaque variable $\bar{y}, \dots, \bar{y}^{(n-1)}$ par son transformé).

Les conséquences de cette transformation sont :

- 1) $y(x_0) = y_0 = \bar{y}_0$
 - 2) $y'_0 = \dots = y_0^{(m+n)} = 0$
 - 3) $\left(\frac{\partial Y}{\partial x} \right)_0 = \dots = \left(\frac{\partial^m Y}{\partial x^m} \right)_0 = 0$
 - 4) $\left(\frac{\partial Y}{\partial y^{(n-1)}} \right)_0 = 0$
- (71)

En effet :

- dérivons la relation (69), il vient :

$$\bar{y}' = y' + \sum_{i=0}^{m+n-1} \frac{(x-x_0)^i}{i!} y_0^{(i+1)} + \frac{1}{n} [(y-y_0) + y'(x-x_0)] \left(\frac{\partial \bar{Y}}{\partial \bar{y}^{(n-1)}} \right)_0$$

Pour $x = x_0$, nous obtenons :

$$\bar{y}' = y'_0 + \bar{y}'_0, \text{ ce qui entraîne } y'_0 = 0$$

- Après $m+n$ dérivations, nous obtenons :

$$\bar{y}^{-(m+n)} = y^{(m+n)} + \bar{y}_0^{-(m+n)} + \frac{1}{n} [(m+n)y^{(m+n-1)} + (x-x_0)y^{(m+n)}] \left(\frac{\partial \bar{Y}}{\partial y^{-(n-1)}} \right)_0 \quad (72)$$

et pour $x = x_0$, nous obtenons :

$$\bar{y}_0^{-(m+n)} = y_0^{(m+n)} + \bar{y}_0^{-(m+n)} + \frac{m+n}{n} y_0^{(m+n-1)} \left(\frac{\partial \bar{Y}}{\partial y^{-(n-1)}} \right)_0, \quad \text{or } y_0^{(m+n-1)} = 0,$$

$$\text{d'où } y_0^{(m+n)} = 0$$

- D'autre part, nous avons :

$$y^{(n+1)} = \left(\frac{\partial}{\partial x} + y' \frac{\partial}{\partial y} + y'' \frac{\partial}{\partial y'} + \dots + y^{(n)} \frac{\partial}{\partial y^{(n-1)}} \right) Y,$$

et pour $x = x_0$ nous obtenons :

$$y_0^{(n+1)} = \left(\frac{\partial Y}{\partial x} \right)_0 = 0 \quad (\text{en effet : } y'_0 = y''_0 = \dots = y_0^{(n)} = \dots = y_0^{(m+n)} = 0)$$

On obtiendrait de même :

$$\left(\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \right)_0 = \dots = \left(\frac{\partial^m Y}{\partial x^m} \right)_0 = 0.$$

En effet pour $y^{(m+n)}$ on obtient :

$$y^{(m+n)} = \frac{\partial^m Y}{\partial x^m} + \text{des termes comprenant } y', \dots, y^{(m+n-1)} \text{ et des dérivées partielles}$$

de Y par rapport à $x, y, \dots, y^{(n-1)}$.

(Ces dérivées partielles étant facteurs des premiers termes indiqués).

d'où pour $x = x_0$:

$$y_0^{(m+n)} = \left(\frac{\partial^m Y}{\partial x^m} \right)_0 + 0 \text{ d'où, comme } y_0^{(m+n)} = 0 : \left(\frac{\partial^m Y}{\partial x^m} \right)_0 = 0$$

- Enfin nous avons :

$$\frac{\partial Y}{\partial y^{(n-1)}} = \frac{1}{1 + \frac{x-x_0}{n} \left(\frac{\partial \bar{Y}}{\partial \bar{y}^{(n-1)}} \right)_0} \left[\frac{\partial \bar{Y}}{\partial \bar{y}^{(n-1)}} \cdot \frac{\partial \bar{y}^{(n-1)}}{\partial y^{(n-1)}} - \left(\frac{\partial \bar{Y}}{\partial \bar{y}^{(n-1)}} \right)_0 \right]$$

soit pour $x = x_0$:

$$\left(\frac{\partial Y}{\partial y^{(n-1)}} \right)_0 = \left(\frac{\partial \bar{Y}}{\partial \bar{y}^{(n-1)}} \right)_0 \left\{ \left(\frac{\partial \bar{y}^{(n-1)}}{\partial y^{(n-1)}} \right)_0 - 1 \right\}$$

or

$$\frac{\partial \bar{y}^{(n-1)}}{\partial y^{(n-1)}} = 1 + \frac{x-x_0}{n} \left(\frac{\partial \bar{Y}}{\partial \bar{y}^{(n-1)}} \right)_0 \quad (\text{voir (72)})$$

ce qui donne pour $x = x_0$:

$$\left(\frac{\partial \bar{y}^{(n-1)}}{\partial y^{(n-1)}} \right)_0 = 1$$

d'où

$$\left(\frac{\partial Y}{\partial y^{(n-1)}} \right)_0 = 0$$

Nous sommes donc ramenés au problème suivant :

- Résoudre le problème différentiel du $n^{\text{ième}}$ ordre :

$$\left\{ \begin{array}{l} y^{(n)} = Y(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \\ y(x_0) = y_0 = \bar{y}_0 \\ y'(x_0) = y'_0 = 0 \\ \dots\dots\dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} = 0 \end{array} \right.$$

- dont la solution vérifie en outre : $y_0^{(n)} = \dots = y_0^{(m+n)} = 0$

- et l'équation différentielle étant telle que :

$$\left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)_0 = \dots = \left(\frac{\partial^m Y}{\partial x^m}\right)_0 = 0$$

$$\left(\frac{\partial Y}{\partial y^{(n-1)}}\right)_0 = 0$$

Il reste ensuite à transformer les valeurs obtenues pour $y, y', \dots, y^{(n-1)}$ en x_1 , pour avoir celle de $\bar{y}, \bar{y}', \dots, \bar{y}^{(n-1)}$ en x_1 .

Remarques

Comme pour la résolution de $\bar{y}' = \bar{Y}(x, \bar{y})$, traitée dans les chapitres précédents, la transformation exige la connaissance des m premières dérivées de l'équation différentielle proposée : $\bar{y}^{(n)} = Y(x, \bar{y}, \dots, \bar{y}^{(n-1)})$

- On suppose de même que la transformation est toujours possible, c'est-à-dire que $\left(\frac{\partial \bar{Y}}{\partial \bar{y}^{(n-1)}}\right)_0$ soit fini.

III - DEVELOPPEMENT DE TAYLOR DE LA SOLUTION DE $y^{(n)} = Y(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$

Le développement de Taylor, pour l'équation différentielle transformée, au voisinage de $x = x_0$, pour une transformation de hauteur m , s'écrit, compte tenu des conditions (71) :

$$y^{(n)} = y_0^{(m+n+1)} \frac{h^{m+1}}{(m+1)!} + y_0^{(m+n+2)} \frac{h^{m+2}}{(m+2)!} + \dots + y_0^{(m+n+5)} \frac{h^{m+5}}{(m+5)!} + \dots \quad (73)$$

ce qui conduit après $(n-v)$ intégrations à :

$$y^{(\nu)} - y_0^{(\nu)} = \frac{h^{m+n+1-\nu}}{(m+n+1-\nu)!} y_0^{(m+n+1)} + \frac{h^{m+n+2-\nu}}{(m+n+2-\nu)!} y_0^{(m+n+2)} + \dots + \frac{h^{m+5}}{(m+5)!} y_0^{(m+5+\nu)} + \dots \quad (73b).$$

Ecrivons le développement de Taylor de $y^{(n)}$, au voisinage de x_0 , en utilisant les dérivées partielles successives de Y .

$$y^{(n)} = \frac{h^{m+1}}{(m+1)!} \left(\frac{\partial^{m+1} Y}{\partial x^{m+1}} \right)_0 + \frac{h^{m+2}}{(m+2)!} \left(\frac{\partial^{m+2} Y}{\partial x^{m+2}} \right)_0 + \frac{h^{m+3}}{(m+3)!} \left(\frac{\partial^{m+3} Y}{\partial x^{m+3}} \right)_0 + \frac{h^{m+4}}{(m+4)!} \left(\frac{\partial^{m+4} Y}{\partial x^{m+4}} \right)_0 +$$

$$\frac{h^{m+5}}{(m+5)!} \left(\frac{\partial^{m+5} Y}{\partial x^{m+5}} \right)_0 + \dots +$$

$$\left[h \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial x \partial y} \right)_{(n-1)} + \frac{h^2}{2!} \left(\frac{\partial^3 Y}{\partial x^2 \partial y} \right)_{(n-1)} + \dots \right] \left[\frac{h^{m+2}}{(m+2)!} y_0^{(m+n+1)} + \frac{h^{m+3}}{(m+4)!} y_0^{(m+n+2)} + \dots \right]$$

$$+ \left[\left(\frac{\partial Y}{\partial y} \right)_{(n-2)} + h \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial x \partial y} \right)_{(n-2)} + \dots \right] \left[\frac{h^{m+3}}{(m+3)!} y_0^{(m+n+1)} + \frac{h^{m+4}}{(m+4)!} y_0^{(m+n+2)} + \dots \right]$$

$$+ \left[\left(\frac{\partial Y}{\partial y} \right)_{(n-3)} + h \left(\frac{\partial Y}{\partial x \partial y} \right)_{(n-3)} + \dots \right] \left[\frac{h^{m+4}}{(m+4)!} y_0^{(m+n+1)} + \frac{h^{m+5}}{(m+5)!} y_0^{(m+n+2)} + \dots \right]$$

$$+ \left[\left(\frac{\partial Y}{\partial y} \right)_{(n-4)} + \dots \right] \left[\frac{h^{m+5}}{(m+5)!} y_0^{(m+n+1)} + \dots \right] + \dots$$

$$+ \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial^2 Y}{(\partial y)^2} \right)_{(n-1)} + h \left(\frac{\partial^3 Y}{\partial x (\partial y)^2} \right)_{(n-1)} + \dots \right] \left[\frac{h^{m+2}}{(m+2)!} y_0^{(m+n+1)} + \dots \right]^2 + \dots$$

Soit en développant et en ordonnant selon les puissances de h :

$$\begin{aligned}
Y = y^{(n)} &= \frac{h^{m+1}}{(m+1)!} C_{m+1} + \frac{h^{m+2}}{(m+2)!} C_{m+2} + \frac{h^{m+3}}{(m+3)!} [C_{m+3} + (m+3)K_{n-1}y_0^{(m+n+1)} + J_{n-2}y_0^{(m+n+1)}] \\
&+ \frac{h^{m+4}}{(m+4)!} [C_{m+4} + (m+4)K_{n-1}y_0^{(m+n+2)} + \frac{(m+3)(m+4)}{2} L_{n-1}y_0^{(m+n+1)} + \\
&\quad (m+4)K_{n-2}y_0^{(m+n+1)} + J_{n-2}y_0^{(m+n+2)} + J_{n-3}y_0^{(m+n+1)}] \\
(74) \quad &+ \frac{h^{m+5}}{(m+5)!} [C_{m+5} + (m+5)K_{n-1}y_0^{(m+n+3)} + \frac{(m+4)(m+5)}{2} L_{n-1}y_0^{(m+n+2)} + \\
&\quad \frac{(m+5)!}{3!(m+2)!} M_{n-1}y_0^{(m+n+1)} + \frac{(m+5)!}{2!(m+3)!} L_{n-2}y_0^{(m+n+1)} + \\
&\quad (m+5)K_{n-2}y_0^{(m+n+2)} + J_{n-2}y_0^{(m+n+3)} + (m+5)K_{n-3}y_0^{(m+n+1)} + \\
&\quad J_{n-3}y_0^{(m+n+2)} + J_{n-4}y_0^{(m+n+1)}] + \dots \\
&+ \frac{h^{2m+4}}{2(m+2)!} R_{n-1, n-1}y_0^{(m+n+1)^2} + \frac{h^{2m+5}}{(m+2)!(m+3)!} R_{n-1, n-2}y_0^{(m+n+1)^2} + \\
&\quad \frac{h^{2m+5}}{(m+2)!(m+3)!} R_{n-1, n-1}y_0^{(m+n+1)}y_0^{(m+n+2)} + \frac{h^{2m+5}}{2(m+2)!^2} S_{n-1, n-1}y_0^{(m+n+1)^2} + \dots
\end{aligned}$$

Remarques :

Nous avons posé :

$$\left(\frac{\partial^{m+i} Y}{\partial x^{m+i}}\right)_0 = C_{m+i}$$

$$Y_{y(n-1)} = h\left(\frac{\partial^2 Y}{\partial x \partial y(n-1)}\right)_0 + \dots = hK_{n-1} + \frac{h^2}{2!} L_{n-1} + \dots$$

$$Y_{y(n-i)} = \left(\frac{\partial Y}{\partial y(n-i)}\right)_0 + h\left(\frac{\partial^2 Y}{\partial x \partial y(n-i)}\right)_0 + \dots = J_{n-i} + hK_{n-i} + \frac{h^2}{2!} L_{n-i} + \dots$$

$$(i = 1, 2, \dots, n ; J_{n-1} = \left(\frac{\partial Y}{\partial y(n-1)}\right)_0 = 0)$$

$$Y_{y(n-i)y(n-k)} = \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial y(n-i) \partial y(n-k)}\right)_0 + h\left(\frac{\partial^3 Y}{\partial x \partial y(n-i) \partial y(n-k)}\right)_0 + \dots$$

$$= R_{n-i, n-k} + hS_{n-i, n-k} + \dots$$

$$(i = 1, 2, \dots, n ; k = 1, 2, \dots, n).$$

En identifiant les développements (73) et (74), nous obtenons le tableau D :

$y_o^{(m+n+1)} = C_{m+1}$
$y_o^{(m+n+2)} = C_{m+2}$
$y_o^{(m+n+3)} = C_{m+3} + (m+3)K_{n-1} C_{m+1} + J_{n-2} C_{m+1}$
$y_o^{(m+n+4)} = C_{m+4} + (m+4)K_{n-1} C_{m+2} + \frac{(m+3)(m+4)}{2} L_{n-1} C_{m+1} +$ $(m+4)K_{n-2} C_{m+1} + J_{n-2} C_{m+2} + J_{n-3} C_{m+1}$
$y_o^{(m+n+5)} = C_{m+5} + (m+5)K_{n-1} C_{m+3} + \frac{(m+4)(m+5)}{2} L_{n-1} C_{m+2} +$ $\frac{(m+3)(m+4)(m+5)}{3!} M_{n-1} C_{m+1} + \frac{(m+4)(m+5)}{2} L_{n-2} C_{m+1} +$ $(m+5)K_{n-2} C_{m+2} + J_{n-2} C_{m+3} + (m+5)K_{n-3} C_{m+1} +$ $J_{n-3} C_{m+2} + J_{n-4} C_{m+1} + (m+3)(m+5)K_{n-1}^2 C_{m+1} +$ $(m+5)K_{n-1} J_{n-2} C_{m+1} + (m+3)J_{n-2} K_{n-1} C_{m+1} + J_{n-2}^2 C_{m+1}$
<p>Remarque : il y a égalité entre $K_{n-1} J_{n-2} C_{m+1}$ et $J_{n-2} K_{n-1} C_{m+1}$ du fait qu'il n'y a qu'une fonction inconnue (Ref : [5] CH II, § 16.1 page 36).</p>

Tableau D Identification des termes du développement de Taylor de Y

Cas particuliers

Nous remarquons que, dans le cas d'une transformation de hauteur 0 ou 1, certains termes du développement (74) n'apparaissent pas dans le tableau D. (termes en h^{2m+4} et h^{2m+5}).

D'où les tableaux E et F utilisables dans le cas de transformation de hauteur 0 ou 1.

$y_o^{(n+1)} = C_1$
$y_o^{(n+2)} = C_2$
$y_o^{(n+1)} = C_3 + 3K_{n-1}C_1 + J_{n-2}C_1$
$y_o^{(n+4)} = C_4 + 4K_{n-1}C_2 + 6L_{n-1}C_1 + 4K_{n-2}C_1 + J_{n-2}C_2 + J_{n-3}C_1 + 3R_{n-1,n-1}C_1^2$
$y_o^{(n+5)} = C_5 + 5K_{n-1}C_3 + 10L_{n-1}C_2 + 10M_{n-1} + J_{n-2}C_3 + 5K_{n-2}C_2 +$ $10L_{n-2}C_1 + J_{n-3}C_2 + 5K_{n-3}C_1 + J_{n-4}C_1 + 15K_{n-1}^2C_1 + J_{n-2}^2C_1 +$ $8K_{n-1}J_{n-2}C_1 + 10R_{n-1,n-2}C_1^2 + 10R_{n-1,n-1}C_1C_2 + 15S_{n-1,n-1}C_1^2$

Tableau E - Identification des termes du développement de Taylor de Y dans le cas d'une transformation de hauteur 0

$y_o^{(n+2)} = C_2$
$y_o^{(n+3)} = C_3$
$y_o^{(n+4)} = C_4 + 4K_{n-1}C_2 + J_{n-2}C_2$
$y_o^{(n+5)} = C_5 + 5K_{n-1}C_3 + 10L_{n-1}C_2 + 5K_{n-2}C_2 + J_{n-2}C_3 + J_{n-3}C_2$
$y_o^{(n+6)} = C_6 + 6K_{n-1}C_4 + 15L_{n-1}C_3 + 20M_{n-1}C_2 + 15L_{n-2}C_2 + 6K_{n-2}C_3 + J_{n-2}C_4 +$ $6K_{n-3}C_2 + J_{n-3}C_3 + J_{n-4}C_2 + 24K_{n-1}^2C_2 + 10K_{n-1}J_{n-2}C_2 +$ $J_{n-2}^2C_2 + 10R_{n-1,n-1}C_2^2$

Tableau F Identification des termes du développement de Taylor de Y dans le cas d'une transformation de hauteur 1.

IV - INTEGRATION DE L'EQUATION DIFFERENTIELLE TRANSFORMEE $y^{(n)} = Y(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$

Nous adopterons l'algorithme classique de Runge-Kutta de rang 4.

Nous avons alors :

$$k_1 = Y(x_0 + \theta_1 h, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}) \cdot \frac{h^n}{n!}$$

$$k_2 = Y(x_0 + \theta_2 h, y_0 + \beta_0 k_1, y_0' + \beta_1 \frac{k_1}{h}, \dots, y_0^{(n-1)} + \beta_{n-1} \frac{k_1}{h^{n-1}}) \cdot \frac{h^n}{n!}$$

$$k_3 = Y(x_0 + \theta_3 h, y_0 + \gamma_0 k_1 + \delta_0 k_2, y_0' + \gamma_1 \frac{k_1}{h} + \delta_1 \frac{k_2}{h}, \dots, y_0^{(n-1)} + \gamma_{n-1} \frac{k_1}{h^{n-1}} + \delta_{n-1} \frac{k_2}{h^{n-1}}) \cdot \frac{h^n}{n!}$$

$$k^{(v)} = y^{(v)} - y_0^{(v)} = \frac{1}{h^v} (C_1^v k_1 + C_2^v k_2 + C_3^v k_3)$$

avec :

$$\begin{cases} v = 0, 1, \dots, n-1 \\ y_0' = y_0'' = \dots = y_0^{(n-1)} = 0. \end{cases}$$

Remarque :

Le volume de calcul, par pas, est de $m+5$ Horner : $m+2$ pour la transformation et 3 pour l'algorithme R-K.

V - COMPARAISON DES DEVELOPPEMENTS DE LA SOLUTION EXACTE (TAYLOR) ET APPROCHEE (R-K.F_{4, m+5}) DE $y^{(n)} = Y(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$.

Dans le cas d'une transformation de hauteur m , nous avons :

$$k_1 = \frac{h^n}{n!} \left[\frac{h^{m+1} \theta_1^{m+1}}{(m+1)!} C_{m+1} + \frac{h^{m+2} \theta_1^{m+2}}{(m+2)!} C_{m+2} + \frac{h^{m+3} \theta_1^{m+3}}{(m+3)!} C_{m+3} + \frac{h^{m+4} \theta_1^{m+4}}{(m+4)!} C_{m+4} + \frac{h^{m+5} \theta_1^{m+5}}{(m+5)!} C_{m+5} + \dots \right]$$

$$k_2 = \frac{h^n}{n!} \left[\frac{h^{m+1} \theta_2^{m+1}}{(m+1)!} C_{m+1} + \frac{h^{m+2} \theta_2^{m+2}}{(m+2)!} C_{m+2} + \frac{h^{m+3} \theta_2^{m+3}}{(m+3)!} C_{m+3} + \frac{h^{m+4} \theta_2^{m+4}}{(m+4)!} C_{m+4} + \right. \\ \left. \frac{h^{m+5} \theta_2^{m+5}}{(m+5)!} C_{m+5} + \dots \right]$$

$$+ \frac{1}{n!} \frac{1}{(m+1)!} C_{m+1} \sum_{\mu=0}^{n-2} \{ \beta_{\mu}^J \theta_1^{m+1} h^{m+n+1-\mu} \}$$

$$+ \frac{1}{n!} \frac{1}{(m+2)!} C_{m+2} \sum_{\mu=0}^{n-2} \{ \beta_{\mu}^J \theta_1^{m+2} h^{m+n+2-\mu} \}$$

$$+ \frac{1}{n!} \frac{1}{(m+1)!} \theta_2 C_{m+1} \sum_{\mu=0}^{n-1} \{ \beta_{\mu}^K \theta_1^{m+1} h^{m+n+2-\mu} \}$$

$$+ \frac{1}{n!} \frac{1}{(m+2)!} \theta_2 C_{m+2} \sum_{\mu=0}^{n-1} \{ \beta_{\mu}^K \theta_1^{m+2} h^{m+n+3-\mu} \}$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{1}{n!} \frac{1}{(m+1)!} \theta_2^2 C_{m+1} \sum_{\mu=0}^{n-1} \{ \beta_{\mu}^L \theta_1^{m+1} h^{m+n+3-\mu} \}$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{1}{n!^2} \frac{1}{(m+1)!^2} C_{m+1}^2 \beta_{n-1}^2 R_{n-1, n-1} \theta_1^{2m+2} h^{2m+4}$$

$$+ \frac{1}{n!^2} \frac{1}{(m+1)!^2} C_{m+1}^2 \beta_{n-1} \beta_{n-2} R_{n-1, n-2} \theta_1^{2m+2} h^{2m+5}$$

$$+ \frac{1}{n!^2} \frac{1}{(m+1)!} \frac{1}{(m+2)!} C_{m+1} C_{m+2} \beta_{n-1}^2 R_{n-1, n-1} \theta_1^{2m+3} h^{2m+5}$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{1}{n!^2} \frac{1}{(m+1)!^2} C_{m+1}^2 \beta_{n-1}^2 S_{n-1, n-1} \theta_1^{2m+2} h^{2m+5} + \dots]$$

Remarque :

Les termes entourés par des tirets, ne sont utilisables que dans le cas de transformation de hauteur 0 ou 1.

Pour obtenir le développement de k_3 , il suffit de remplacer dans celui de k_2 les termes θ_2 et θ_1^k , respectivement par θ_3 et $\theta_1^k \gamma_\mu + \theta_2^k \delta_\mu$.

A partir des relations (75) nous formons le terme $k^{(v)}$, et en comparant le développement ainsi obtenu au tableau D, nous pouvons écrire le tableau de comparaison TAB. V.m.

TERMES	TAYLOR	R-K.F	
$h^{m+1+1-v} C_{m+1}$	$1/(m+n+1-v)!$	$\frac{1}{n!(m+1)!} \{C_1^v \theta_1^{m+1} + C_2^v \theta_2^{m+1} + C_3^v \theta_3^{m+1}\}$	(76)
$h^{m+n+2-v} C_{m+2}$	$1/-(m+n+2-v)!$	$\frac{1}{n!(m+2)!} \{C_1^v \theta_1^{m+2} + C_2^v \theta_2^{m+2} + C_3^v \theta_3^{m+2}\}$	
$h^{m+n+3-v} C_{m+3}$	$1/(m+n+3-v)!$	$\frac{1}{n!(m+3)!} \{C_1^v \theta_1^{m+3} + C_2^v \theta_2^{m+3} + C_3^v \theta_3^{m+3}\}$	
$h^{m+n+4-v} C_{m+4}$	$1/(m+n+4-v)!$	$\frac{1}{n!(m+4)!} \{C_1^v \theta_1^{m+4} + C_2^v \theta_2^{m+4} + C_3^v \theta_3^{m+4}\}$	
$h^{m+n+5-v} C_{m+5}$	$1/(m+n+5-v)!$	$\frac{1}{n!(m+5)!} \{C_1^v \theta_1^{m+5} + C_2^v \theta_2^{m+5} + C_3^v \theta_3^{m+5}\}$	(77)
$h^{m+n+3-v} K_{n-1} C_{m+1}$	$\frac{(m+3)}{(m+n+3-v)!}$	$\frac{1}{n!^2(m+1)!} \{C_2^v \beta_{n-1} \theta_1^{m+1} \theta_2 + C_3^v \theta_3 (\theta_1^{m+1} \gamma_{n-1} + \theta_2^{m+1} \delta_{n-1})\}$	(78)
$h^{m+n+4-v} L_{n-1} C_{m+1}$	$\frac{(m+3)(m+4)}{2 \cdot (m+n+4-v)!}$	$\frac{1}{2n!^2(m+1)!} \{C_2^v \beta_{n-1} \theta_1^{m+1} \theta_2^v + C_3^v \theta_3^2 (\theta_1^{m+1} \gamma_{n-1} + \theta_2^{m+1} \delta_{n-1})\}$	
$h^{m+n+4-v} K_{n-1} C_{m+2}$	$\frac{(m+4)}{(m+n+4-v)!}$	$\frac{1}{n!^2(m+2)!} \{C_2^v \beta_{n-1} \theta_1^{m+2} \theta_2 + C_3^v \theta_3 (\theta_1^{m+2} \gamma_{n-1} + \theta_2^{m+2} \delta_{n-1})\}$	
$h^{m+n+3-v} J_{n-2} C_{m+1}$	$1/(m+n+3-v)!$	$\frac{1}{n!^2(m+1)!} \{C_2^v \beta_{n-2} \theta_1^{m+1} + C_3^v (\theta_1^{m+1} \gamma_{n-1} + \theta_2^{m+1} \delta_{n-2})\}$	(79)
$h^{m+n+4-v} K_{n-2} C_{m+1}$	$\frac{(m+4)}{(m+n+4-v)!}$	$\frac{1}{n!^2(m+1)!} \{C_2^v \beta_{n-2} \theta_1^{m+1} \theta_2 + C_3^v \theta_3 (\theta_1^{m+1} \gamma_{n-2} + \theta_2^{m+1} \delta_{n-2})\}$	
$h^{m+n+4-v} J_{n-2} C_{m+2}$	$1/(m+n+4-v)!$	$\frac{1}{n!^2(m+2)!} \{C_2^v \beta_{n-2} \theta_1^{m+2} + C_3^v (\theta_1^{m+2} \gamma_{n-2} + \theta_2^{m+2} \delta_{n-2})\}$	
$h^{m+n+4-v} J_{n-3} C_{m+1}$	$1/(m+n+4-v)!$	$\frac{1}{n!^2(m+1)!} \{C_2^v \beta_{n-3} \theta_1^{m+1} + C_3^v (\theta_1^{m+1} \gamma_{n-3} + \theta_2^{m+1} \delta_{n-3})\}$	
			(80)

Tableau TAB.V.m. Identification des termes des développements de Taylor et de R-K.F.

Remarque :

Dans le cas particulier $m = 0$, il convient d'ajouter le terme suivant :

TERMES	TAYLOR	R-K.F
$h^5 R_{n-1,n-1} C_1^2$	$\frac{3}{5!}$	$\frac{1}{2 \cdot n!^3} \{C_2^v \beta_{n-1}^2 \theta_1^2 + C_3^v (\theta_1 \gamma_{n-1} + \theta_2 \delta_{n-1})^2\}$

Tableau TAB.V.m=0

VI - ORDRE DE LA METHODE

En nous reportant au tableau TAB.V.m du § V-5. nous constatons que nous pouvons obtenir des formules d'ordre $m+5$ en ce qui concerne $y, y', \dots, y^{(n-1)}$.

En effet, en rendant le système (76) compatible pour $\nu = n-1$, nous assurerons l'ordre $m+5$ pour $y^{(n-1)}$, ce qui l'assure pour $y^{(n-2)}, \dots, y$ par intégration successive.

Nous avons donc :

$$\varepsilon_{j+1}^{(K)} = y_{j+1}^{*(K)} - y_{j+1}^{(K)} = \sum_{i=m+6}^{\infty} \frac{h^i}{i!} [y_{jj}^{\varepsilon(i+K)} - y_{jj}^{(i+K)}]$$

$$K = 0, 1, \dots, n-1$$

et en appliquant la transformation (69) à cette relation, nous obtenons :

$$\bar{\varepsilon}_{j+1}^{(K)} = \bar{y}_{j+1}^{*(K)} - \bar{y}_{j+1}^{(K)} = \varepsilon_{j+1}^{(K)} \left\{ 1 + \frac{h}{n} \left(\frac{\partial \bar{Y}}{\partial \bar{y}^{(n-1)}} \right)_j \right\} + \frac{k}{n} \varepsilon_{j+1}^{(K-1)} \left(\frac{\partial \bar{Y}}{\partial \bar{y}^{(n-1)}} \right)_j, \quad K=0, \dots, n-1$$

$$\left(\left(\frac{\partial \bar{Y}}{\partial \bar{y}^{(n-1)}} \right)_j = \frac{\partial \bar{Y}}{\partial \bar{y}^{(n-1)}} \text{ pour } (x_j = x_j, \bar{y} = \bar{y}_j, \bar{y}' = \bar{y}'_j, \dots, \bar{y}_j^{(n-1)}) \right)$$

La relation $\bar{\varepsilon}_{j+1}^{(K)}$ nous assure l'ordre $m+5$ pour $\bar{y}^{(K)}$ avec $K = 0, 1, \dots, n-1$.

VII - ETABLISSEMENT DES FORMULES

Reportons nous au tableau TAB.V.m. du § V.5.

Rendre compatible le système formé par les relations (76), revient à annuler le déterminant complet du système. Ceci s'écrit :

$$(81) \quad \frac{\theta_1 \theta_2 \theta_3 (m+1)!}{(m+n+1-\nu)!} - \frac{(\theta_1 \theta_2 + \theta_2 \theta_3 + \theta_3 \theta_1) (m+2)!}{(m+n+2-\nu)!} + \frac{(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) (m+3)!}{(m+n+3-\nu)!} - \frac{(m+4)!}{(m+n+4-\nu)!} = 0$$

Il est évident que l'on choisira les θ_i , $i = 1, 2, 3$, différents les uns des autres et non nuls.

Examinons comment se répartissent les termes du développement de $y^{(\nu)}$, $\nu = n-1, \dots, 0$ obtenus à partir du tableau D §V.3.

$y^{(n-1)}$: 1 terme en h^{m+2} , 1 terme en h^{m+3} , 3 termes en h^{m+4} , 6 termes en h^{m+5} , ...

$y^{(n-2)}$: 1 terme en h^{m+3} , 1 terme en h^{m+4} , 3 termes en h^{m+5} , ...

$y^{(n-3)}$: 1 terme en h^{m+4} , 1 terme en h^{m+5} , ...

 $y^{(n-k)}$: 1 terme en h^{m+k+1} , 1 terme en h^{m+k+2} , ...

 y : 1 terme en h^{m+n+1} , 1 terme en h^{m+n+2} , ...

Nous ne pouvons, d'une part obtenir un ordre supérieur à $m+5$, ainsi que nous l'avons vu au chapitre V, et d'autre part rendre le système (76) compatible pour tout ν , $\nu = 0, 1, \dots, n-1$.

Nous allons le faire pour $\nu = n-1$. La relation (81) devient alors :

$$\frac{\theta_1 \theta_2 \theta_3}{m+2} - \frac{\theta_1 \theta_2 + \theta_2 \theta_3 + \theta_3 \theta_1}{m+3} + \frac{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3}{m+4} - \frac{1}{m+5} = 0 \quad (82)$$

Par analogie avec les chapitres précédents, nous appellerons cette relation la "relation de compatibilité".

Posons alors :

$$D = \begin{matrix} \theta_1^{m+1} & \theta_2^{m+1} & \theta_3^{m+1} \\ \theta_1^2 & \theta_2^2 & \theta_3^2 \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 \\ \theta_1^2 & \theta_2^2 & \theta_3^2 \end{vmatrix} = \theta_1^{m+1} \theta_2^{m+1} \theta_3^{m+1} (\theta_1 - \theta_2)(\theta_2 - \theta_3)(\theta_3 - \theta_1)$$

et

$$D_\alpha^\nu = \frac{n!(m+1)!}{(m+n+1-\nu)!} \theta_{\alpha+1}^{m+1} \theta_{\alpha+2}^{m+1} (\theta_{\alpha+2} - \theta_{\alpha+1}) \left[\theta_{\alpha+1} \theta_{\alpha+2} - \frac{m+2}{m+n+2-\nu} (\theta_{\alpha+1} + \theta_{\alpha+2}) + \frac{(m+2)(m+3)}{(m+n+2-\nu)(m+n+3-\nu)} \right]$$

avec $\alpha = 1, 2, 3$; $\theta_4 = \theta_1$, $\theta_5 = \theta_2$; $\nu = n-1, n-2$

$$\text{Nous obtenons alors : } C_\alpha^\nu = D_\alpha^\nu / D \quad (\alpha = 1, 2, 3 ; \nu = n-1, n-2) \quad (83)$$

Nous avons ainsi utilisé le système (76) avec $\nu = n-1$ et $n-2$, ce qui nous assure une partie des coefficients du développement jusqu'à l'ordre $m+5$ pour $y^{(n-1)}$ et $y^{(n-2)}$.

Pour obtenir les coefficients C_α^ν ; $\alpha = 1, 2, 3$; $\nu = n-3, \dots, 0$; nous utiliserons les 2 premières relations du système (76) et ainsi nous assurerons, au moins, l'ordre $m+5$ pour $y^{(n-3)}, \dots, y', y$. En fait, on voit immédiatement sur le tableau TAB.V.m, et sur l'illustration de la répartition des termes du développement de $y^{(\nu)}$ décrite précédemment, que l'on assure en fait l'ordre $m+n+2-\nu$ pour $y^{(\nu)}$ avec $\nu = n-3, \dots, 0$ ce qui entraîne donc que les deux premiers termes du développement de $y^{(\nu)}$ pour $\nu = n-3, \dots, 0$ sont exacts.

Rendons ensuite compatible le système de relations suivantes :

- les relations (78) avec $\nu = n-1$
- la relation en $h^{m+n+3-\nu}$ de (78) avec $\nu = n-2$.

Nous obtiendrons ainsi un deuxième terme en h^{m+4} pour $y^{(n-1)}$, 2 autres termes en h^{m+5} pour $y^{(n-1)}$, et un deuxième terme en h^{m+5} pour $y^{(n-2)}$ (voir illustration de la répartition des termes).

Pour rendre compatible, le système ainsi formé, nous obtenons :

$$(84) \quad \begin{vmatrix} C_2^{n-2} \theta_1^{m+1} \theta_2 & C_3^{n-2} \theta_1^{m+1} \theta_3 & C_3^{n-2} \theta_2^{m+1} \theta_3 & n!^2 (m+1)! (m+3) / (m+5)! \\ C_2^{n-1} \theta_1^{m+1} \theta_2 & C_3^{n-1} \theta_1^{m+1} \theta_3 & C_3^{n-1} \theta_2^{m+1} \theta_3 & n!^2 (m+1)! (m+3) / (m+4)! \\ C_2^{n-1} \theta_1^{m+1} \theta_2^2 & C_3^{n-1} \theta_1^{m+1} \theta_3^2 & C_3^{n-1} \theta_2^{m+1} \theta_3^2 & n!^2 (m+1)! (m+3) (m+4) / (m+5)! \\ C_2^{n-1} \theta_1^{m+2} \theta_2 & C_3^{n-1} \theta_1^{m+1} \theta_3 & C_3^{n-1} \theta_2^{m+2} \theta_3 & n!^2 (m+2)! (m+4) / (m+5)! \end{vmatrix} = 0$$

ce qui conduit à :

$$D_2^{n-1} D_3^{n-1} (\theta_3 - \theta_2) - D_2^{n-2} D_3^{n-1} [(m+5)\theta_3 - (m+4)] + D_2^{n-1} D_3^{n-2} [(m+5)\theta_2 - (m+4)] = 0 \quad (85)$$

Soit en développant et en simplifiant par $(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)(\theta_3 - \theta_2)$:

$$[(m+2) - 2(m+4)\theta_1] \left\{ \frac{\theta_1 \theta_2 \theta_3}{m+2} - \frac{\theta_1 \theta_2 + \theta_2 \theta_3 + \theta_3 \theta_1}{m+3} + \frac{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3}{m+4} - \frac{1}{m+5} \right\} = 0 \quad (86)$$

Or le terme entre accolades n'est autre que la relation de compatibilité (82), la relation (86) est donc vérifiée du moment que la relation (82) l'est.

Le système que nous avons formé est donc compatible.

Nous allons maintenant rendre compatible le système suivant :

- les relations (79) pour $v = n-1$,
- la relation en h^{m+n+3} de (79) pour $v = n-2$.

Nous obtiendrons ainsi le dernier terme en h^{m+4} pour $y^{(n-1)}$, deux autres termes en h^{m+5} pour $y^{(n-1)}$ et le dernier terme en h^{m+5} pour $y^{(n-2)}$.

Nous obtenons :

$$\begin{vmatrix} C_2^{n-2} \theta_1^{m+1} & C_3^{n-2} \theta_1^{m+1} & C_3^{n-2} \theta_2^{m+1} & n!^2 (m+1)! / (m+5)! \\ C_2^{n-1} \theta_1^{m+1} & C_3^{n-1} \theta_1^{m+1} & C_3^{n-1} \theta_2^{m+1} & n!^2 (m+1)! / (m+4)! \\ C_2^{n-1} \theta_1^{m+1} \theta_2 & C_3^{n-1} \theta_1^{m+1} \theta_3 & C_3^{n-1} \theta_2^{m+1} \theta_3 & n!^2 (m+1)! (m+4) / (m+5) \\ C_2^{n-1} \theta_1^{m+2} & C_3^{n-1} \theta_1^{m+2} & C_3^{n-1} \theta_2^{m+2} & n!^2 (m+2)! / (m+5)! \end{vmatrix} = 0$$

ce qui conduit à :

$$D_2^{n-1} D_3^{n-1} (\theta_3 - \theta_2) - D_2^{n-2} D_3^{n-1} [(m+5)\theta_3 - (m+4)] + D_2^{n-1} D_3^{n-2} [(m+5)\theta_2 - (m+4)] = 0 \quad (87)$$

On obtient donc la même relation qu'en (85) et nous savons que (85), donc que (87) est vérifiée, si la relation de compatibilité l'est.

Nous pouvons donc tirer les coefficients $\beta_v, \gamma_v, \delta_v$; $v = n-1, n-2$ des systèmes formés par les relations (78) et (79). Il reste la relation (80) qui nous fournit les coefficients $\beta_v, \gamma_v, \delta_v$; $v = n-3$. Cette relation, lorsqu'elle est vérifiée nous donne le dernier terme en h^{m+5} pour $y^{(n-1)}$.

Nous avons donc les termes du développement de $y^{(v)}$, $v = n-1, \dots, 0$ jusqu'à l'ordre $m+5$.

En conclusion de cette étude nous pouvons dire :

- 1°) Résolution du problème différentiel $y^{(n)} = Y(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$, de conditions initiales : $y(x_0) = y_0 = \bar{y}_0$, $y'_0 = \dots = y_0^{(m+n)} = 0$ par la méthode R-K de rang 4 en posant :

$$k_1 = Y(x_0 + \theta_1 h, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}) \cdot \frac{h^n}{n!}$$

$$k_2 = Y(x_0 + \theta_2 h, y_0 + \beta_0 k_1, \dots, y_0^{(n-1)} + \beta_{n-1} \frac{k_1}{h^{n-1}}) \cdot \frac{h^n}{n!}$$

$$k_3 = Y(x_0 + \theta_3 h, y_0 + \gamma_0 k_1 + \delta_0 k_2, \dots, y_0^{(n-1)} + \gamma_{n-1} \frac{k_1}{h^{n-1}} + \delta_{n-1} \frac{k_2}{h^{n-1}}) \cdot \frac{h^n}{n!}$$

$$k^{(v)} = y^{(v)} - y_0^{(v)} = \frac{1}{k} (C_1^v k_1 + C_2^v k_2 + C_3^v k_3)$$

avec $v = n-1, \dots, 0$; $y'_0 = \dots = y_0^{(n-1)} = 0$.

- 2°) La considération du tableau TAB.V.m nous conduit à la "relation de compatibilité".

$$\frac{\theta_1 \theta_2 \theta_3}{m+2} - \frac{\theta_1 \theta_2 + \theta_2 \theta_3 + \theta_3 \theta_1}{m+3} + \frac{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3}{m+4} - \frac{1}{m+5} = 0$$

avec θ_i , $i = 1, 2, 3$ différents les uns des autres et non nuls.

- 3°) $C_\alpha^v = D_\alpha^v / D$; $\alpha = 1, 2, 3$; $v = n-1, n-2$ (voir (83))

- 4°) C_α^v ; $\alpha = 1, 2, 3$; $v = n-3, \dots, 0$ tirés de :

$$\begin{cases} C_1^v \theta_1^{m+1} + C_2^v \theta_2^{m+1} + C_3^v \theta_3^{m+1} = n!(m+1)! / (m+n+1-v)! \\ C_1^v \theta_1^{m+2} + C_2^v \theta_2^{m+2} + C_3^v \theta_3^{m+2} = n!(m+2)! / (m+n+2-v)! \end{cases}$$

Le plus simple étant d'annuler un coefficient C_i^v , $i = 1, 2, 3$.

Nous obtenons alors :

$$C_1^v = 0 \quad C_2^v = \frac{n!(m+1)!}{(m+n+1-v)!} \left[\theta_3 - \frac{m+2}{m+n+2-v} \right] / \theta_2^{m+1} (\theta_3 - \theta_2)$$

$$C_3^v = \frac{n!(m+1)!}{(m+n+1-v)!} \left[\frac{m+2}{m+n+2-v} - \theta_2 \right] / \theta_3^{m+1} (\theta_3 - \theta_2)$$

$$C_2^v = 0 \quad C_1^v = \text{changer dans } C_2^v \text{ (2) en (1)} \quad (88)$$

$$C_3^v = \text{changer dans } C_3^v \text{ (2) en (1)}$$

$$C_3^v = \quad C_1^v = \text{changer dans } C_2^v \text{ (2) en (1), (3) en (2)}$$

$$C_2^v = \text{changer dans } C_3^v \text{ (2) en (1), (3) en (2).}$$

5°) Les coefficients $\beta_v, \gamma_v, \delta_v$; $v = n-1$ et $n-2$; tirés de (78) et (79) sont :

$$\beta_{n-1} = n! \frac{m+3}{m+5} \frac{\theta_1 - \theta_2}{\theta_2} \frac{\theta_2^{m+1}}{\theta_1^{m+1}} \frac{[(m+5)\theta_3 - (m+4)]}{[(m+3)(m+4)\theta_1\theta_3 - (m+2)(m+4)(\theta_1 + \theta_3) + (m+2)(m+3)]}$$

$$(89) \quad \gamma_{n-1} = \frac{n!}{m+5} \frac{\theta_3 - \theta_1}{\theta_2 - \theta_1} \frac{\theta_3^m}{\theta_1^{m+1}} \frac{[(m+3)(m+5)\theta_1 - (m+2)(m+4)](\theta_3 - \theta_2) - [(m+3)(m+5)\theta_2 - (m+3)(m+4)](\theta_2 - \theta_1)}{[(m+3)(m+4)\theta_1\theta_2 - (m+2)(m+4)(\theta_1 + \theta_2) + (m+2)(m+3)]}$$

$$\delta_{n-1} = \frac{n!}{m+5} \frac{(\theta_2 - \theta_3)(\theta_3 - \theta_1)}{\theta_2 - \theta_1} \frac{\theta_3^m}{\theta_2^{m+1}} \frac{[(m+3)(m+5)\theta_1 - (m+2)(m+4)]}{[(m+3)(m+4)\theta_1\theta_2 - (m+2)(m+4)(\theta_1 + \theta_2) + (m+2)(m+3)]}$$

(90)

et :

$$\begin{aligned}
 \beta_{n-2} &= \frac{n!}{m+5} (\theta_1 - \theta_2) \frac{\theta_2^{m+1}}{\theta_1^{m+1}} \frac{(m+5)\theta_3^{-(m+4)}}{[(m+3)(m+4)\theta_1\theta_3^{-(m+2)}(m+4)(\theta_1+\theta_3)^{m+2} + (m+2)(m+3)]} \\
 \gamma_{n-2} &= \frac{n!}{m+5} \frac{\theta_3 - \theta_1}{\theta_2 - \theta_1} \frac{\theta_3^{m+1}}{\theta_1^{m+1}} \frac{[(m+5)\theta_1^{-(m+2)}](\theta_3 - \theta_2) - [(m+5)\theta_2^{-(m+4)}](\theta_2 - \theta_1)}{[(m+3)(m+4)\theta_1\theta_2^{-(m+2)}(m+4)(\theta_1+\theta_2)^{m+2} + (m+2)(m+3)]} \\
 \delta_{n-2} &= \frac{n!}{m+5} \frac{(\theta_2 - \theta_3)(\theta_3 - \theta_1)}{\theta_2 - \theta_1} \frac{\theta_3^{m+1}}{\theta_2^{m+1}} \frac{(m+5)\theta_1^{-(m+2)}}{[(m+3)(m+4)\theta_1\theta_2^{-(m+2)}(m+4)(\theta_1+\theta_2)^{m+2} + (m+2)(m+3)]}
 \end{aligned}
 \tag{90}$$

6°) Pour déterminer β_{n-3} , γ_{n-3} et δ_{n-3} nous ne disposons que de la relation (80) :

$$(91) \quad C_2^{n-1} \beta_{n-3} \theta_1^{m+1} + C_3^{n-1} (\gamma_{n-3} \theta_1^{m+1} + \delta_{n-3} \theta_2^{m+1}) = n!^2 (m+1)! / (m+5)!$$

on peut donc annuler 2 coefficients et déterminer le troisième.

7°) Pour déterminer les valeurs $\beta_v, \gamma_v, \delta_v$ pour $v = n-4, \dots, 0$ comme nous ne disposons pas de relations les contenant, le plus simple est de les annuler :

$$(92) \quad \beta_v = \gamma_v = \delta_v = 0 ; \quad v = n-4, \dots, 0.$$

Remarque : Les relations (89) sont identiques à celles trouvées en (49) pour $\bar{y}' = \bar{Y}(x, \bar{y})$. § IV.4.

Tout comme lors de la résolution de $\bar{y}' = \bar{Y}(x, \bar{y})$, nous remarquerons que la "condition de compatibilité" nous offre une double infinité de solution en θ_1 , θ_2 et θ_3 .

Nous nous contenterons de donner quelques valeurs de θ_i qui nous semblent évidentes.

θ_1 : indéterminé

$$\theta_2 : \frac{(m+3)(m+4) - \sqrt{2(m+3)(m+4)}}{(m+4)(m+5)} \quad (93)$$

$$\theta_3 : \frac{(m+3)(m+4) + \sqrt{2(m+3)(m+4)}}{(m+4)(m+5)}$$

d'ordre $m+5$ pour tout m en particulier $m = 0$

d'où : $C_1^{n-1} = 0$

voir § IV-4. Remarques 3.

ensuite nous pourrions choisir θ_1 tel que :

$$\theta_1 = \frac{(m+2)(m+4)}{(m+3)(m+5)}, \text{ ce qui entraîne } \delta_{n-1} = 0 \quad (931)$$

$$\theta_1 = \frac{m+2}{m+5}, \text{ ce qui entraîne } \delta_{n-2} = 0 \quad (932)$$

On pourra aussi prendre :

$$\theta_1 = \frac{(m+2)(m+4)}{(m+3)(m+5)}$$

$$\theta_2 = \frac{m+4}{m+5} \quad (94)$$

$$\theta_3 = \frac{(m+2)(m+4)}{m^2 + 8m + 17}$$

(n'est pas d'ordre $m+5$ pour $m=0$ car ne vérifie pas la relation du tableau TAB.V.m=0.

ce qui entraîne : $\gamma_{n-1} = \delta_{n-1} = 0$

$$- \theta_1 = \frac{m+2}{m+5}$$

$$\theta_2 = \frac{m+4}{m+5}$$

$$\theta_3 = \frac{m+2}{m+3}$$

(95) (n'est pas d'ordre m+5 pour m=0)

ce qui entraîne $\gamma_{n-2} = \delta_{n-2} = 0$

$$- \theta_1 = \frac{m+2}{m+5}$$

$$\theta_2 = \frac{m+2}{m+5}$$

$$\theta_3 = \frac{m+4}{m+5}$$

(96) (n'est pas d'ordre m+5 pour m=0).

ce qui entraîne $\delta_{n-2} = \beta_{n-2} = \beta_{n-1} = 0$

$$- \theta_1 = \frac{m+2}{m+6}$$

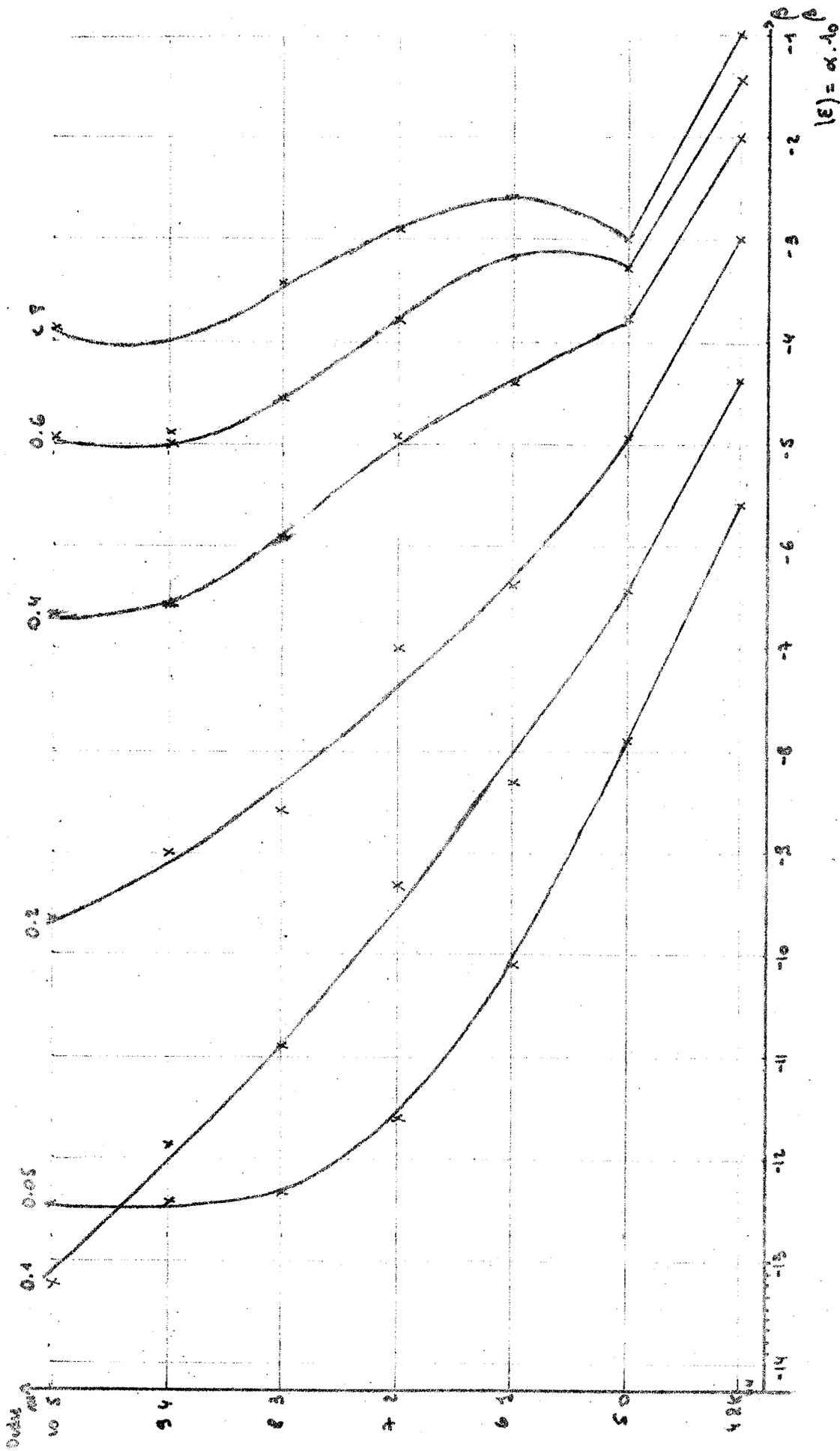
$$\theta_2 = \frac{m+4}{m+5}$$

$$\theta_3 = 1$$

(87) (n'est pas d'ordre m+5 pour m=0).

VIII - RESULTATS NUMERIQUES

Nous comparerons la méthode R-K, $F_{4,m+5}$, formule (95), d'ordre m+5 pour $\bar{y}, \bar{y}', \dots, \bar{y}^{(n-1)}$ à la méthode R-K $_{4,4}$ classique d'ordre 4,4,...,n+2. (Ref. [5]. Ch. III § VII. pages 76-78-85)



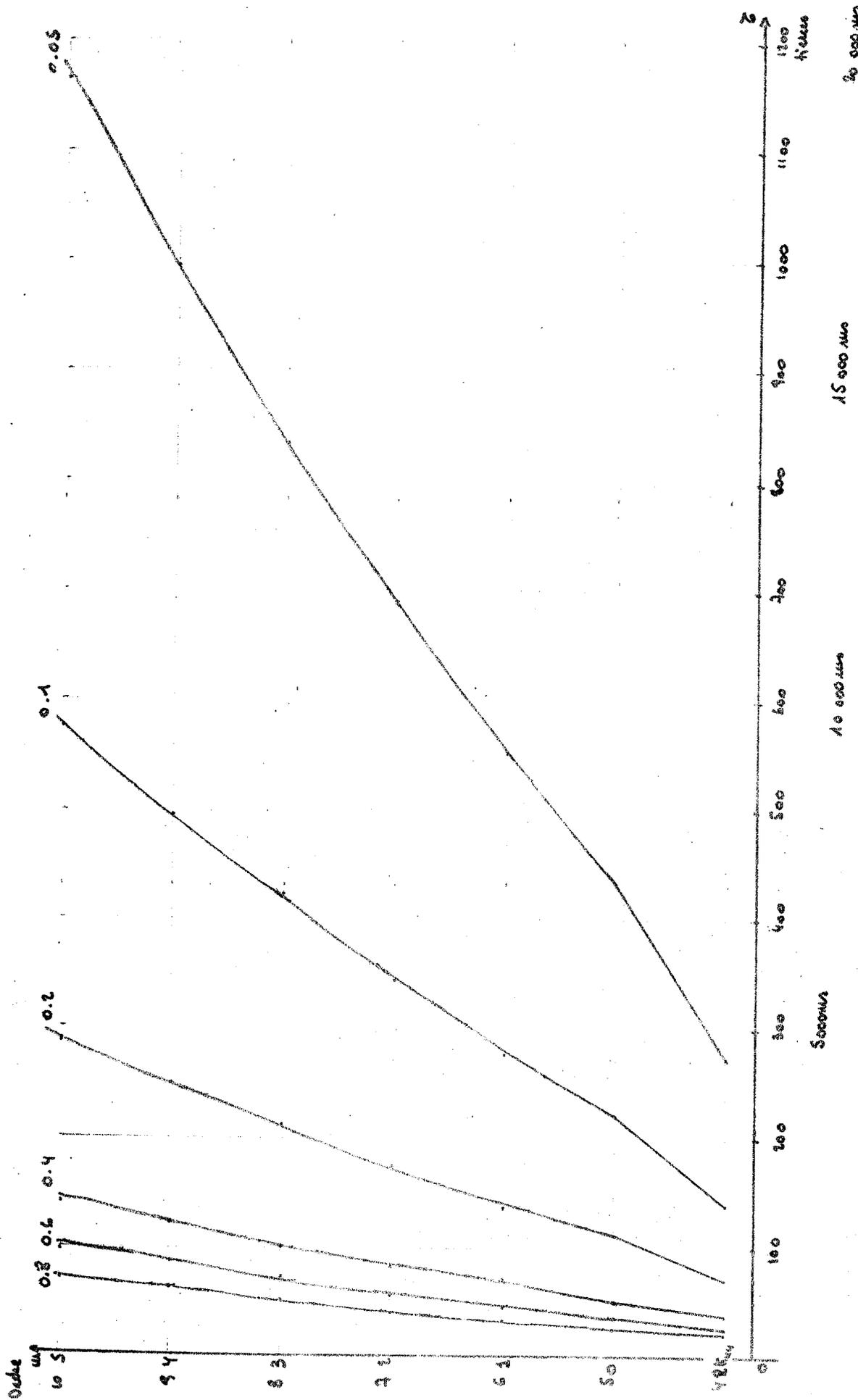
$$|E| = \alpha \cdot 10^{\beta}$$

PAR R	0.05	0.1	0.2	0.4	0.6	0.8
Nombre de foo	180	90	45	22	11	11
mm	10	10	10	8.8	10	9.8
\bar{y}^m	23.025	23.067	23.012	22.967	23.022	23.027

$$\bar{y}^m = \bar{y}''/\alpha - 2\bar{y}'/\alpha^2 + 2\bar{y}/\alpha^3 \quad \bar{y} = \alpha \cdot \text{Ln}(m)$$

$$\alpha_0 = 1 \quad ; \quad \bar{y}_0 = 0$$

$$\alpha_1 = 0 \quad ; \quad \bar{y}_1 = 23.025$$

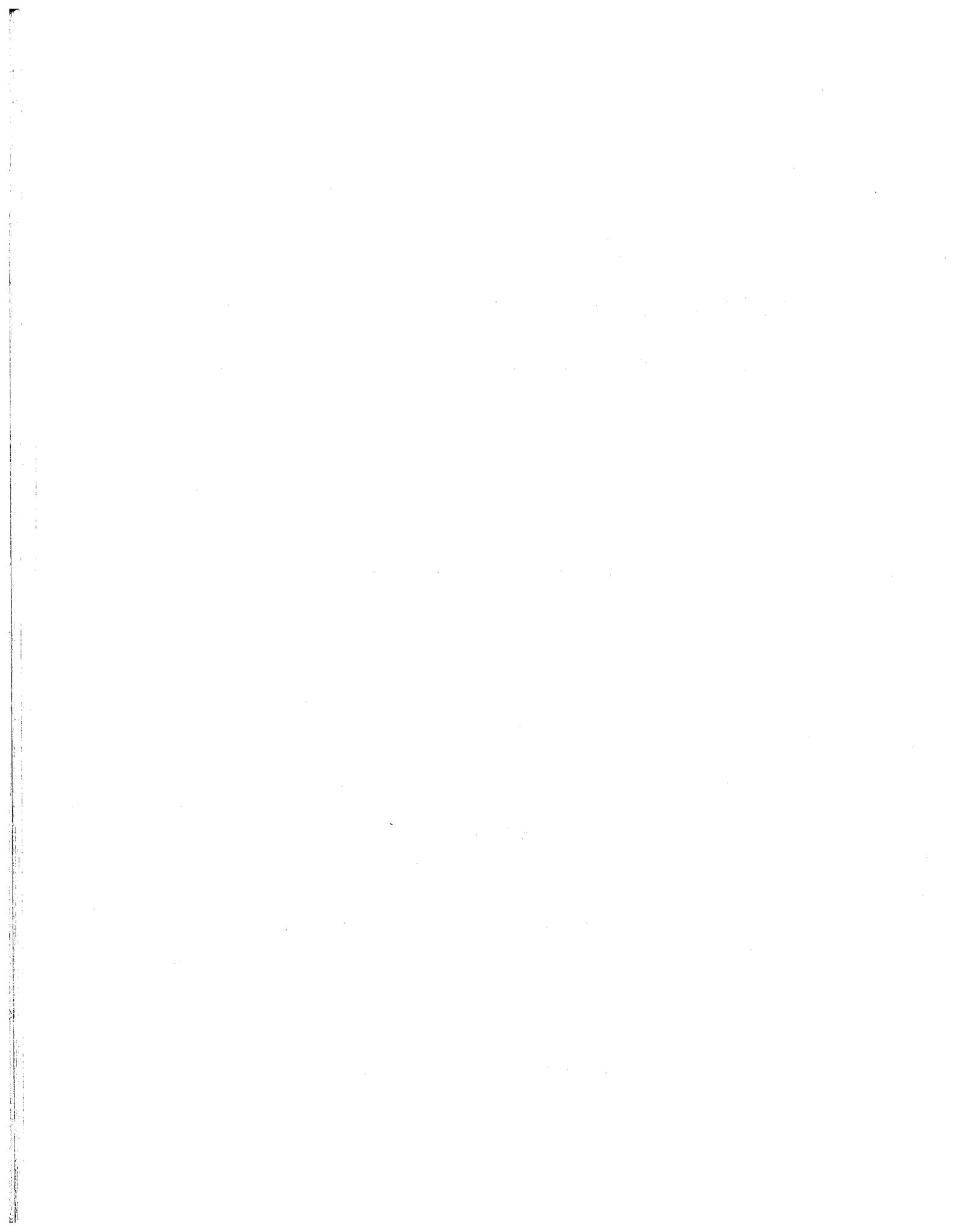


Comp d' integration

$$\bar{y}''' = \bar{y}''/\alpha - 2\bar{y}'/\alpha^2 + 2\bar{y}/\alpha^3 \quad \bar{y} = \alpha \cdot u(\alpha)$$

$$\alpha_0 = 1; \quad \alpha_N = 10$$

$$h = 0.05 - 0.1 - 0.2 - 0.4 - 0.6 - 0.8$$



CHAPITRE - VIMETHODE DE R-K.F_{4,m+4}APPLIQUEE A L'INTEGRATION D'UN SYSTEME DIFFERENTIEL MIS SOUS FORME CANONIQUEAVEC CONDITIONS INITIALESI - INTRODUCTION

Nous nous proposons de résoudre le système d'équations différentielles, mis sous forme canonique :

$$\bar{y}' = \bar{Y}(x, \bar{y})$$

à n inconnues, de conditions initiales :

$$\bar{y}(x_0) = \bar{y}_0$$

en utilisant l'algorithme R-K.F_{4,m+4}, c'est-à-dire en transformant le système proposé et en l'intégrant par un algorithme du type Runge-Kutta de rang 4.

Nous verrons que la méthode est d'ordre m+4 pour une transformation de hauteur m (Ref. [4]).

Remarque :

Il est possible d'obtenir l'ordre m+5, mais cela oblige de prendre un algorithme du type R-K de rang 6.

II - TRANSFORMATION DE FEHLBERG. SYSTEME DIFFERENTIEL TRANSFORME

La méthode de Fehlberg appliquée à un système mis sous forme canonique consiste en :

- une transformation de hauteur m appliquée à chacune des fonctions inconnues :

$$\bar{y} = y + \sum_{i=1}^{m+1} \bar{y}_o^{(i)} \frac{(x-x_o)^i}{i!} \quad (98)$$

- la résolution du système transformé, mis sous forme canonique :

$$Y = \bar{Y} - \sum_{i=0}^m \bar{y}_o^{(i+1)} \frac{(x-x_o)^i}{i!} \quad (99)$$

Les conséquences de cette transformation sont :

$$1^\circ) \quad y(x_o) = y_o = \bar{y}_o$$

$$2^\circ) \quad y'_o = \dots = y_o^{(m+1)} = 0 \quad (100)$$

$$3^\circ) \quad \left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)_o = \dots = \left(\frac{\partial^m Y}{\partial x^m}\right)_o = 0$$

La démonstration de ces relations est identique à celle faite au §. I.2.

Remarque :

On pourrait, au lieu de la transformation (98) prendre la suivante, par analogie avec celle utilisée dans les chapitres précédents :

$$\bar{y} = y + \sum_{i=1}^{m+1} \frac{(x-x_0)^i}{i!} \bar{y}_0^{(i)} + (x-x_0) (y-y_0) \left(\frac{\partial \bar{Y}}{\partial \bar{y}}\right)_0 \quad (101)$$

d'où le système transformé :

$$Y = \frac{1}{1+(x-x_0)\left(\frac{\partial \bar{Y}}{\partial \bar{y}}\right)_0} \left\{ \bar{Y} - \sum_{i=0}^m \frac{(x-x_0)^i}{i!} \bar{y}_0^{(i+1)} - (y-y_0) \left(\frac{\partial \bar{Y}}{\partial \bar{y}}\right)_0 \right\} \quad (102)$$

En fait on alourdit de cette façon la transformation pour une seule conséquence supplémentaire : $\left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)_0 = 0$.

Nous sommes donc ramenés au problème suivant :

- résoudre le système transformé, mis sous forme canonique :

$$y' = Y(x, y)$$

avec

$$y(x_0) = y_0 = \bar{y}_0$$

- dont la solution vérifie en outre : $y'_0 = \dots = y_0^{(m+1)} = 0$

- et le système étant tel que : $\left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)_0 = \dots = \left(\frac{\partial^m Y}{\partial x^m}\right)_0 = 0$

III - DEVELOPPEMENT DE TAYLOR DE LA SOLUTION DE $y' = Y(x, y)$

Le développement de Taylor pour le système transformé, s'écrit, compte tenu de (100) :

$$y' = \frac{h^{m+1}}{(m+1)!} y_0^{(m+2)} + \frac{h^{m+2}}{(m+2)!} y_0^{(m+3)} + \dots \quad (103)$$

Le développement peut encore s'écrire en utilisant les dérivées partielles successives de Y :

$$\begin{aligned}
 Y = & \frac{h^{m+1}}{(m+1)!} C_{m+1} + \frac{h^{m+2}}{(m+2)!} [C_{m+2} + J y_o^{(m+2)}] \\
 & + \frac{h^{m+3}}{(m+3)!} [C_{m+3} + J y_o^{(m+3)} + (m+3)Ky_o^{(m+2)}] \\
 & + \frac{h^{m+4}}{(m+4)!} [C_{m+4} + J y_o^{(m+4)} + (m+4)Ky_o^{(m+3)} + \frac{(m+3)(m+4)}{2} Ly_o^{(m+2)}] \\
 & + \frac{h^{m+5}}{(m+5)!} [C_{m+5} + J y_o^{(m+5)} + (m+5)Ky_o^{(m+4)} + \frac{(m+4)(m+5)}{2} Ly_o^{(m+3)} \\
 & \quad + \frac{(m+3)(m+4)(m+5)}{3!} My_o^{(m+2)}] + \dots \\
 & + \frac{h^{2m+4}}{2(m+2)!^2} Ry_o^{(m+2)^2} + \dots \tag{104}
 \end{aligned}$$

En identifiant les développements (103) et (104), nous obtenons le tableau E :

$y_o^{(m+2)} = C_{m+1}$
$y_o^{(m+3)} = C_{m+2} + JC_{m+1}$
$y_o^{(m+4)} = C_{m+3} + JC_{m+2} + J^2 C_{m+3} + (m+3)KC_{m+1}$
$y_o^{(m+5)} = C_{m+4} + JC_{m+3} + J^2 C_{m+2} + J^3 C_{m+1} + (m+3)JKC_{m+1} +$ $(m+4)KC_{m+2} + (m+4)KJC_{m+1} + \frac{(m+3)(m+4)}{2} LC_{m+1} +$ <div style="border: 1px dashed black; padding: 2px; display: inline-block; margin: 5px;"> $3RC_1^2$ </div>

Tableau E - Identification des termes du développement de Taylor de Y.

Remarques

- 1°) Le terme entouré est à ajouter dans le cas d'une transformation de hauteur 0.
- 2°) Les termes JKC_{m+1} et JKC_{m+1} ne sont pas identiques.

IV - INTEGRATION DU SYSTEME TRANSFORME $y' = Y(x,y)$

Nous adopterons l'algorithme classique de Runge-Kutta de rang 4.
 Nous avons alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} Y_{i1} = Y(x_0 + \theta_1 h, y_0) \\ Y_{i2} = Y(x_0 + \theta_2 h, y_0 + hA_{21} Y_{i1}) \\ Y_{i3} = Y(x_0 + \theta_3 h, y_0 + hA_{31} Y_{i1} + hA_{32} Y_{i2}) \end{array} \right.$$

$$y_{i+1} = y_i + h(A_{41} Y_{i1} + A_{42} Y_{i2} + A_{43} Y_{i3})$$

Remarque :

Le volume de calcul par pas, est de $m+4$ Horner : $m+1$ pour la transformation et 3 pour l'algorithme R-K.

V - COMPARAISON DES DEVELOPPEMENTS DE LA SOLUTION EXACTE (TAYLOR) ET APPROCHEE (R-K.F_{4,m+4}) DE $y' = Y(x,y)$

Dans le cas d'une transformation de hauteur m , nous avons :

$$Y_{i1} = \sum_{i=m+1}^{m+4} \frac{h^i \theta_1^i}{i!} C_i + \dots$$

$$Y_{i2} = \frac{h^{m+1} \theta_2^{m+1}}{(m+1)!} C_{m+1} + \frac{h^{m+2}}{(m+2)!} [C_{m+2} + A_{21} \theta_1^{m+1} J C_{m+1}] +$$

$$\frac{h^{m+3}}{(m+3)!} [C_{m+3} + A_{21} \theta_1^{m+2} J C_{m+2} + (m+2) A_{21} \theta_1^{m+1} \theta_2 K C_{m+1}] +$$

$$\frac{h^{m+4}}{(m+4)!} [C_{m+4} + A_{21} \theta_1^{m+3} J C_{m+3} + (m+3) A_{21} \theta_1^{m+2} \theta_2 K C_{m+2} +$$

$$\frac{(m+2)(m+3)}{2} A_{21} \theta_1^{m+1} \theta_2^2 L C_{m+1}] + \dots$$

(105)

$$\begin{aligned}
& \frac{h^{2m+4}}{2(m+1)!} A_{21}^2 \theta_1^{2m+2} RC_{m+1}^2 + \dots \\
Y_{i3} = & \frac{h^{m+1} \theta_3^{m+1}}{(m+1)!} C_{m+1} + \frac{h^{m+2}}{(m+2)!} [C_{m+2} + (A_{31} \theta_1^{m+1} + A_{32} \theta_2^{m+1}) JC_{m+1}] \\
& + \frac{h^{m+3}}{(m+3)!} [C_{m+3} + (A_{31} \theta_1^{m+2} + A_{32} \theta_2^{m+2}) JC_{m+2} + (m+2)(A_{31} \theta_1^{m+1} A_{32} \theta_2^{m+1}) \theta_3 KC_{m+1} \\
& \quad + (m+2) A_{32} A_{21} \theta_1^{m+1} J^2 C_{m+1}] + \\
& \frac{h^{m+4}}{(m+4)!} [C_{m+4} + (A_{31} \theta_1^{m+3} + A_{32} \theta_2^{m+3}) JC_{m+3} + (m+3)(A_{31} \theta_1^{m+2} + A_{32} \theta_2^{m+2}) \theta_3 KC_{m+2} \\
& \quad + \frac{(m+2)(m+3)}{2} (A_{31} \theta_1^{m+1} + A_{32} \theta_2^{m+1}) \theta_3^2 LC_{m+1} + \\
& \quad (m+3) A_{32} A_{21} \theta_1^{m+2} J^2 C_{m+2} + (m+2)(m+3) A_{32} A_{21} \theta_1^{m+1} \theta_2 JKC_{m+1} \\
& \quad + (m+2)(m+3) A_{32} A_{21} \theta_1^{m+1} \theta_3 KJC_{m+1}] + \dots \\
& + \frac{h^{2m+4}}{2(m+1)!^2} (A_{31} \theta_1^{m+1} + A_{32} \theta_2^{m+1})^2 RC_{m+1}^2 + \dots
\end{aligned}$$

A partir des relations (105) nous formerons le terme $y_{i+1} - y_i$, et en comparant le développement ainsi obtenu au tableau E, nous pouvons établir le tableau de comparaison TAB. VI.m.

TERMES	TAYLOR	R-K.F	
$\frac{h^{m+2}}{(m+1)!} C_{m+1}$	$\frac{1}{m+2}$	$A_{41}\theta_1^{m+1} + A_{42}\theta_2^{m+1} + A_{43}\theta_3^{m+1}$	(106)
$\frac{h^{m+3}}{(m+2)!} C_{m+2}$	$\frac{1}{m+3}$	$A_{41}\theta_1^{m+2} + A_{42}\theta_2^{m+2} + A_{43}\theta_3^{m+2}$	
$\frac{h^{m+4}}{(m+3)!} C_{m+3}$	$\frac{1}{m+4}$	$A_{41}\theta_1^{m+3} + A_{42}\theta_2^{m+3} + A_{43}\theta_3^{m+3}$	
$\frac{h^{m+5}}{(m+4)!} C_{m+4}$	$\frac{1}{m+5}$	$A_{41}\theta_1^{m+4} + A_{42}\theta_2^{m+4} + A_{43}\theta_3^{m+4}$	(107)
$\frac{h^{m+3}}{(m+2)!} J C_{m+1}$	$\frac{1}{m+3}$	$(m+2) [A_{42}A_{21}\theta_1^{m+1} + A_{43}A_{31}\theta_1^{m+1} + A_{43}A_{32}\theta_2^{m+1}]$	(108)
$\frac{h^{m+4}}{(m+3)!} J C_{m+2}$	$\frac{1}{m+4}$	$(m+3) [A_{42}A_{21}\theta_1^{m+2} + A_{43}A_{31}\theta_1^{m+2} + A_{43}A_{32}\theta_2^{m+2}]$	
$K C_{m+1}$	$\frac{m+3}{m+4}$	$(m+2)(m+3) [A_{42}A_{21}\theta_1^{m+1}\theta_2 + A_{43}A_{31}\theta_1^{m+1}\theta_3 + A_{43}A_{32}\theta_2^{m+1}\theta_3]$	(109)
$\frac{h^{m+4}}{(m+3)!} J^2 C_{m+1}$	$\frac{1}{m+4}$	$(m+2)(m+3)A_{43}A_{32}A_{21}\theta_1^{m+1}$	(109)
$\frac{h^{m+5}}{(m+4)!} J C_{m+3}$	$\frac{1}{m+5}$	$(m+4) [A_{42}A_{21}\theta_1^{m+3} + A_{43}A_{31}\theta_1^{m+3} + A_{43}A_{32}\theta_2^{m+3}]$	(110)
$K C_{m+2}$	$\frac{m+4}{m+5}$	$(m+3)(m+4) [A_{42}A_{21}\theta_1^{m+2}\theta_2 + A_{43}A_{31}\theta_1^{m+2}\theta_3 + A_{43}A_{32}\theta_2^{m+2}\theta_3]$	
$L C_{m+1}$	$\frac{(m+3)(m+4)}{2(m+5)}$	$\frac{(m+2)(m+3)(m+4)}{2} [A_{42}A_{21}\theta_1^{m+1}\theta_2^2 + A_{43}(A_{31}\theta_1^{m+1} + A_{32}\theta_2^{m+1})\theta_3^2]$	
$J^2 C_{m+2}$	$\frac{1}{m+5}$	$(m+3)(m+4)A_{43}A_{32}A_{21}\theta_1^{m+2}$	
$J^3 C_{m+3}$	$\frac{1}{m+5}$	0	
$J K C_{m+1}$	$\frac{m+3}{m+5}$	$(m+2)(m+3)(m+4)A_{43}A_{32}A_{21}\theta_1^{m+1}\theta_2$	
$K J C_{m+1}$	$\frac{m+4}{m+5}$	$(m+2)(m+3)(m+4)A_{43}A_{32}A_{21}\theta_1^{m+1}\theta_3$	

Tableau TAB.VI.m Identification des termes des développements de Taylor et de R-K.F

Remarque :

Dans le cas particulier d'une transformation de hauteur $m=0$, il convient d'ajouter le terme suivant :

TERME	TAYLOR	R-K.F
$\frac{h^5}{4!} RC_1^2$	$\frac{3}{5}$	$12 [A_{42} A_{21}^2 \theta_1^2 + A_{43} (A_{31} \theta_1 + A_{32} \theta_2)^2]$

Tableau TAB. VI.m=0

VI - ORDRE DE LA METHODE

En se reportant au tableau TAB.VI.m on constate immédiatement que l'on ne pourra pas obtenir l'ordre $m+5$.

Il reste 7 relations pour 9 coefficients.

L'ordre de la méthode est donc $m+4$ en ce qui concerne y .

Soit :

$$\epsilon_{i+1} = \sum_{j=m+5}^{\infty} \frac{h^j}{j!} [y_i^{(j)} - y_i^{(j)}], \text{ l'erreur de méthode sur } y, \text{ en appliquant}$$

la transformation (98) on obtient :

$$\bar{\epsilon}_{i+1} = \bar{y}_{i+1}^* - \bar{y}_{i+1} = y_{i+1}^* + \sum_{j=1}^{m+1} \frac{h^j}{j!} \bar{y}_i^{-(j)} - y_{i+1} - \sum_{j=1}^{m+1} \frac{h^j}{j!} \bar{y}_i^{(j)} = \epsilon_{i+1}$$

La méthode est donc d'ordre $m+4$ en ce qui concerne \bar{y} .

VII - ETABLISSEMENT DES FORMULES

Le système de relations (106), nous fournit les coefficients A_{4i} , $i = 1, 2, 3$.
Nous supposons les θ_i différents les uns des autres et non nuls.

Posons :

$$D_v = \theta_{v+1}^{m+1} \theta_{v+2}^{m+1} (\theta_{v+2} - \theta_{v+1}) \left[\frac{\theta_{v+1} \theta_{v+2}}{m+2} - \frac{\theta_{v+1} + \theta_{v+2}}{m+3} + \frac{1}{m+4} \right]$$

avec $v = 1, 2, 3$; $\theta_4 = \theta_1$, $\theta_5 = \theta_2$

et

$$D = \theta_1^{m+1} \theta_2^{m+1} \theta_3^{m+1} (\theta_1 - \theta_2)(\theta_2 - \theta_3)(\theta_3 - \theta_1)$$

il vient alors :

$$A_{4v} = D_v / D, \quad v = 1, 2, 3 \quad (111)$$

Les relations (108) fournissent :

$$\begin{aligned} A_{42} A_{21} &= \frac{(m+4)\theta_3 - (m+3)}{(m+2)(m+3)(m+4)\theta_1^{m+1}(\theta_3 - \theta_2)} \\ A_{43} A_{31} &= \frac{[(m+4)\theta_2 - (m+3)](\theta_2 - \theta_1) - [(m+4)\theta_1 - (m+2)](\theta_3 - \theta_2)}{(m+2)(m+3)(m+4)\theta_1^{m+1}(\theta_1 - \theta_2)(\theta_3 - \theta_2)} \\ A_{43} A_{32} &= \frac{(m+4)\theta_1 - (m+2)}{(m+2)(m+3)(m+4)\theta_1^{m+1}(\theta_1 - \theta_2)} \end{aligned} \quad (112)$$

En tirant A_{21} de la relation (109), en remplaçant $A_{43} A_{32}$ par la valeur ci-dessus, il vient :

$$A_{21} = \frac{(\theta_1 - \theta_2)\theta_2^{m+1}}{[(m+4)\theta_1 - (m+2)]\theta_1^{m+1}} \quad (113)$$

En multipliant cette valeur de A_{21} par A_{42} et en comparant le résultat à la valeur de $A_{42}A_{21}$ de (112), on en déduit :

$$\theta_3 = 1.$$

Nous avons finalement pris comme coefficients θ_i :

$$\theta_1 = 1, \quad \theta_2 = \frac{m+2}{m+4}, \quad \theta_3 = 1 \quad (114)$$

ce qui nous conduit à :

$A_{21} = \frac{1}{m+4} \left(\frac{m+2}{m+4}\right)^{m+1}$		
$A_{31} = -\frac{1}{m+2}$	$A_{32} = \frac{2}{m+2} \left(\frac{m+4}{m+2}\right)^{m+1}$	
$A_{41} = 0$	$A_{42} = \frac{1}{2} \frac{m+4}{(m+2)(m+3)} \left(\frac{m+4}{m+2}\right)^{m+1}$	$A_{43} = \frac{1}{2} \frac{1}{m+3}$

VIII - RESULTATS NUMERIQUES

Nous comparerons la méthode de R-K, $F_{4,m+4}$, avec les coefficients (114) et (115) à la méthode de Runge-Kutta classique, de rang 4 et de coefficients :

$$\theta_1 = 1/2, \quad \theta_2 = 1/2, \quad \theta_3 = 1$$

1/2			
0	1/2		
0	0	1	
1/6	1/3	1/3	1/6

A

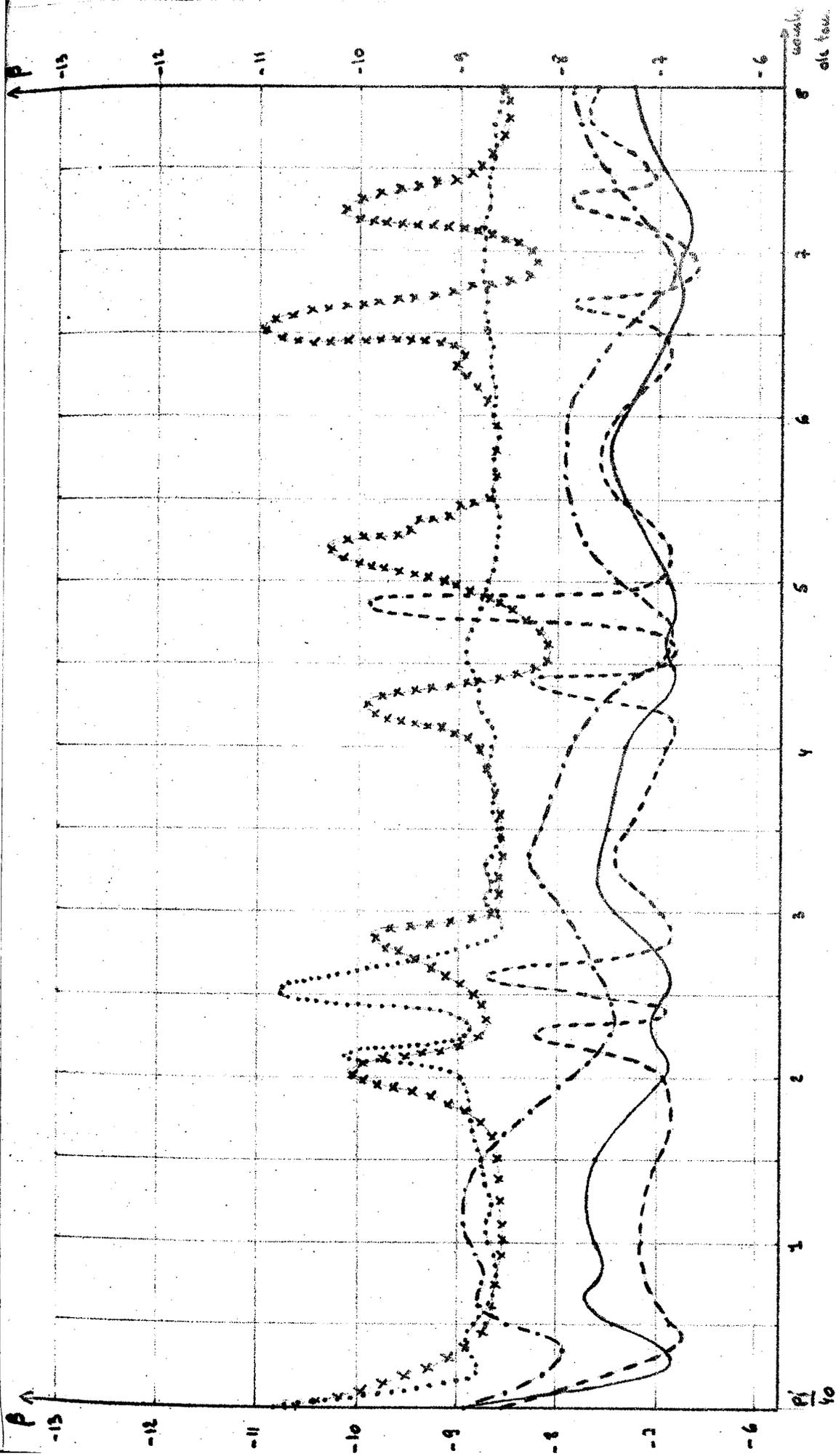
1/4			
1/4	0		
0	0	1	
1/3	1/3	1/3	0

B

$(1/2)^k$			
$(1/2)^k$	0		
0	0	1	
$\frac{k^2}{(k+1)(k+2)}$	$\frac{2k}{(k+1)(k+2)}$	$\frac{2k}{(k+1)(k+2)}$	$\frac{2-k}{(k+1)(k+2)}$

K

(Ref. [5] pages : 79 et 85)



$$|E| = \alpha \cdot 10^{\beta}$$

Supplément du 1^o Dictionnaire

(R = 1)

Méthode	$R K_{44}$	$\mu = 0$	$\mu = 1$	$\mu = 2$	$\mu = 3$	$\mu = 4$	$\mu = 5$
temp d'installation en recherche	10,15	18,43	25,33	26,81	32,27	36,71	44,75
traité de la courbe encre	—	----	-----	XXXXX		

CHAPITRE - VIIMETHODE DE R-K.F_{4,m+4}APPLIQUEE A LA RESOLUTION D'UN SYSTEME DIFFERENTIEL MIS SOUS FORME
RESOLUE AVEC CONDITIONS INITIALESI - INTRODUCTION

Nous nous proposons de résoudre un système d'équations différentielles, mis sous forme résolue :

$$\bar{y}^{(n)} = \bar{Y}(\bar{y}^{(n-1)}, \dots, \bar{y}^{(n-k)}, \dots, \bar{y}', \bar{y}, x)$$

à p inconnues, de conditions initiales :

$$\bar{y}^{(i)}(x_0) = \bar{y}_0^{(i)}, \quad i = 0, 1, \dots, n-1$$

en utilisant l'algorithme R-K.F_{4,m+4}, c'est-à-dire en transformant le système proposé et en l'intégrant par un algorithme du type Runge-Kutta de rang 4.

Nous verrons que la méthode est d'ordre m+4 pour une transformation de hauteur m (Ref. [4]).

Remarque :

Il est possible d'obtenir l'ordre m+5, mais cela oblige à prendre un algorithme du type R-K de rang 6.

II - TRANSFORMATION DE FEHLBERG. SYSTEME DIFFERENTIEL TRANSFORME

La méthode de Fehlberg appliquée au système \bar{Y} , de conditions initiales : $\bar{y}^{(i)}(x_0) = \bar{y}_0^{(i)}$, $i = 0, \dots, n-1$; consiste en :

- une transformation de hauteur m :

$$\bar{y} = y + \sum_{i=1}^{m+n} \frac{(x-x_0)^i}{i!} \bar{y}_0^{(i)} \quad (116)$$

- la résolution du système transformé, mis sous forme résolue :

$$y^{(n)} = Y = \bar{Y} - \sum_{i=0}^m \frac{(x-x_0)^i}{i!} \bar{y}_0^{(i+n)} \quad (117)$$

Les conséquences de cette transformation sont :

$$\begin{aligned} 1^\circ) \quad & y(x_0) = y_0 = \bar{y}_0 \\ 2^\circ) \quad & y_0' = \dots = y_0^{(m+n)} = 0 \\ 3^\circ) \quad & \left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)_0 = \dots = \left(\frac{\partial^m Y}{\partial x^m}\right)_0 = 0 \end{aligned} \quad (118)$$

Pour la démonstration de ces conséquences, on se reportera au § IV.2.

Nous sommes donc ramenés au problème suivant :

- Résoudre le système transformé, mis sous forme résolue :

$$y^{(n)} = Y(y^{(n-1)}, \dots, y^{(n-k)}, \dots, y', y, x)$$

- de conditions initiales : $y(x_0) = y_0 = \bar{y}_0$

$$y^{(i)}(x_0) = 0, \quad i = 1, \dots, m+n$$

- le système étant tel que :

$$\left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)_0 = \dots = \left(\frac{\partial^m Y}{\partial x^m}\right)_0 = 0$$

III - DEVELOPPEMENT DE TAYLOR DE LA SOLUTION DU SYSTEME TRANSFORME

Le développement de Taylor pour le système transformé s'écrit, compte tenu de (118) :

$$y^{(n)} = \frac{h^{m+1}}{(m+1)!} y_0^{(m+n+1)} + \frac{h^{m+2}}{(m+2)!} y_0^{(m+n+2)} + \dots \quad (119)$$

ce qui, après (n-v) intégration conduit à :

$$y^{(v)} - y_0^{(v)} = \frac{h^{m+n+1-v}}{(m+n+1-v)!} y_0^{(m+n+1)} + \frac{h^{m+n+2-v}}{(m+n+2-v)!} y_0^{(m+n+2)} + \dots + \frac{h^{m+4}}{(m+4)!} y_0^{(m+4+v)} + \dots \quad (120)$$

En nous reportant au travail effectué au § VI. et au § V nous pouvons donner immédiatement le tableau F :

$y_0^{(m+n+1)} = C_{m+1}$
$y_0^{(m+n+2)} = C_{m+2} + J_{n-1} C_{m+1}$
$y_0^{(m+n+3)} = C_{m+3} + J_{n-1} C_{m+2} + J_{n-1}^2 C_{m+1} + (m+3)K_{n-1} C_{m+1} + J_{n-2} C_{m+1}$
$y_0^{(m+n+4)} = C_{m+4} + J_{n-1} C_{m+3} + J_{n-1}^2 C_{m+2} + J_{n-1}^3 C_{m+1} + (m+3)J_{n-1} K_{n-1} C_{m+1} +$ $J_{n-1} J_{n-2} C_{m+1} + (m+4)K_{n-1} C_{m+2} + (m+4)K_{n-1} J_{n-1} C_{m+1} +$ $\frac{(m+3)(m+4)}{2} L_{n-1} C_{m+1} + (m+4)K_{n-2} C_{m+1}$ <div style="border: 1px dashed black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 5px auto;">$+ \frac{3}{8} R_{n-1} C_1^2$</div>

Tableau F. Identification des termes du développement de Taylor de Y.

Remarques :

- 1°) Le terme entouré est à ajouter dans le cas d'une transformation de hauteur 0.
- 2°) Les termes $J_{n-1}^{J} K_{n-1}^{K} C_{m+1}^{C}$ et $K_{n-1}^{K} J_{n-1}^{J} C_{m+1}^{C}$ ne sont pas identiques.
- 3°) Du point de vue notation les termes A_i se rapportent à des dérivées partielles de Y par rapport à $y^{(i)}$. ($A = J, K, L$)

IV - INTEGRATION DU SYSTEME TRANSFORME $y^{(n)} = Y(y^{(n-1)}, \dots, y, x)$

Nous adopterons l'algorithme classique de Runge-Kutta de rang 4.
Nous avons alors :

$$Y_{i1} = Y(x_0 + \theta_1 h, y_0^{(n-1)}, \dots, y_0) \cdot h^n$$

$$Y_{i2} = Y(x_0 + \theta_2 h, y_0^{(n-1)} + \beta_{n-1} \frac{Y_{i1}}{h^{n-1}}, \dots, y_0 + \beta_0 Y_{i1}) \cdot h^n$$

$$Y_{i3} = Y(x_0 + \theta_3 h, y_0^{(n-1)} + \gamma_{n-1} \frac{Y_{i1}}{h^{n-1}} + \beta_{n-1} \frac{Y_{i2}}{h^{n-1}}, \dots, y_0 + \gamma_0 Y_{i1} + \delta_0 Y_{i2}) \cdot h^n$$

$$Y^{(v)} = y^{(v)} - y_0^{(v)} = \frac{1}{y^{(v)}} [A_{41}^v Y_{i1} + A_{42}^v Y_{i2} + A_{43}^v Y_{i3}]$$

avec :

$$\begin{cases} v = 0, 1, \dots, n-1 \\ y_0' = \dots = y_0^{(n-1)} = 0 \end{cases}$$

Remarque :

Le volume de calcul, par pas, est de $m+4$ Horner ; $m+1$ pour la transformation et 3 pour l'algorithme R-K.

V - COMPARAISON DES DEVELOPPEMENTS DE LA SOLUTION EXACTE (TAYLOR) ET APPROCHEE
(R-K.F_{4,m+4}) de $y^{(n)} = Y(y^{(n-1)}, \dots, y, x)$

Dans le cas d'une transformation de hauteur m, nous avons :

$$Y_{i1} = h^n \left[\frac{h^{m+1}}{(m+1)!} \theta_1^{m+1} C_{m+1} + \frac{h^{m+2}}{(m+2)!} \theta_1^{m+2} C_{m+2} + \frac{h^{m+3}}{(m+3)!} \theta_1^{m+3} C_{m+3} + \right. \\ \left. \frac{h^{m+4}}{(m+4)!} \theta_1^{m+4} C_{m+4} + \dots \right]$$

$$Y_{i2} = h^n \left[\frac{h^{m+1}}{(m+1)!} \theta_2^{m+1} C_{m+1} + \frac{h^{m+2}}{(m+2)!} \theta_2^{m+2} C_{m+2} + \frac{h^{m+3}}{(m+3)!} \theta_2^{m+3} C_{m+3} + \right.$$

$$\left. \frac{h^{m+4}}{(m+4)!} \theta_2^{m+4} C_{m+4} + \dots \right]$$

$$+ \frac{1}{(m+1)!} \theta_1^{m+1} \sum_{\mu=0}^{n-1} \{ \beta_{\mu}^J C_{m+1} h^{m+n+1-\mu} \}$$

$$+ \frac{1}{(m+2)!} \theta_1^{m+2} \sum_{\mu=0}^{n-1} \{ \beta_{\mu}^J C_{m+2} h^{m+n+2-\mu} \}$$

$$+ \frac{1}{(m+1)!} \theta_1^{m+1} \theta_2 \sum_{\mu=0}^{n-1} \{ \beta_{\mu}^K C_{m+1} h^{m+n+2-\mu} \} + \dots$$

(121)

$$Y_{3i} = h^n \left[\frac{h^{m+1}}{(m+1)!} \theta_3^{m+1} C_{m+1} + \frac{h^{m+2}}{(m+2)!} \theta_3^{m+2} C_{m+2} + \frac{h^{m+3}}{(m+3)!} \theta_3^{m+3} C_{m+3} + \right.$$

$$\left. \frac{h^{m+4}}{(m+4)!} \theta_3^{m+4} C_{m+4} + \dots \right]$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{(m+1)!} \sum_{\mu=0}^{n-1} \{ (\gamma_{\mu} \theta_1^{m+1} + \delta_{\mu} \theta_2^{m+1}) J_{\mu} C_{m+1} h^{m+n+1-\mu} \} \\
 & + \frac{1}{(m+2)!} \sum_{\mu=0}^{n-1} \{ (\gamma_{\mu} \theta_1^{m+2} + \delta_{\mu} \theta_2^{m+2}) J_{\mu} C_{m+2} h^{m+n+2-\mu} \} \\
 & + \frac{1}{(m+1)!} \theta_3 \sum_{\mu=0}^{n-1} \{ (\gamma_{\mu} \theta_1^{m+1} + \delta_{\mu} \theta_2^{m+1}) K_{\mu} C_{m+1} h^{m+n+2-\mu} \} \\
 & + \frac{1}{(m+1)!} \sum_{\mu=0}^{n-1} \{ \gamma_{\mu} \beta_{\mu} \theta_1^{m+1} J_{\mu}^2 C_{m+1} h^{m+n+2-\mu} \} + \dots
 \end{aligned}$$

En combinant Y_{i1} , Y_{i2} et Y_{i3} pour obtenir $Y^{(v)}$, et en comparant le résultat ainsi obtenu, nous pouvons établir le tableau de comparaison TAB.VII.m.

TERMES	TAYLOR	R-K.F	
$h^{m+n+1-v} C_{m+1}$	$\frac{1}{(m+n+1-v)!}$	$A_{41}^v \theta_1^{m+1} + A_{42}^v \theta_2^{m+1} + A_{43}^v \theta_3^{m+1}$	(122)
$h^{m+n+2-v} C_{m+2}$	$\frac{1}{(m+n+2-v)!}$	$A_{41}^v \theta_1^{m+2} + A_{42}^v \theta_2^{m+2} + A_{43}^v \theta_3^{m+2}$	
$h^{m+n+3-v} C_{m+3}$	$\frac{1}{(m+n+3-v)!}$	$A_{41}^v \theta_1^{m+3} + A_{42}^v \theta_2^{m+3} + A_{43}^v \theta_3^{m+3}$	
$h^{m+n+2-v} J_{n-1} C_{m+1}$	$\frac{1}{(m+n+2-v)!}$	$\frac{1}{(m+1)!} [A_{42}^v \beta_{n-1} \theta_1^{m+1} + A_{43}^v (\gamma_{n-1} \theta_1^{m+1} + \delta_{n-1} \theta_2^{m+1})]$	(123)
$h^{m+n+3-v} J_{n-2} C_{m+1}$	$\frac{1}{(m+n+3-v)!}$	$\frac{1}{(m+1)!} [A_{42}^v \beta_{n-2} \theta_1^{m+1} + A_{43}^v (\gamma_{n-2} \theta_1^{m+1} + \delta_{n-2} \theta_2^{m+1})]$	
$h^{m+n+3-v} J_{n-1} C_{m+2}$	$\frac{1}{(m+n+3-v)!}$	$\frac{1}{(m+2)!} [A_{42}^v \beta_{n-1} \theta_1^{m+2} + A_{43}^v (\gamma_{n-1} \theta_1^{m+2} + \delta_{n-1} \theta_2^{m+2})]$	
$h^{m+n+3-v} K_{n-1} C_{m+1}$	$\frac{m+3}{(m+n+3-v)!}$	$\frac{1}{(m+1)!} [A_{42}^v \beta_{n-1} \theta_1^{m+1} \theta_2 + A_{43}^v \theta_3 (\gamma_{n-1} \theta_1^{m+1} + \delta_{n-1} \theta_2^{m+1})]$	
$h^{m+n+3-v} J_{n-1}^2 C_{m+1}$	$\frac{1}{(m+n+3-v)!}$	$\frac{1}{(m+1)!} A_{43}^v \beta_{n-1} \delta_{n-1} \theta_1^{m+1}$	

Tableau TAB. VII.m. Identification des termes des développements de Taylor et de R-K.F.

VI - ORDRE DE LA METHODE

Nous avons vu au § VI.5 qu'un terme du développement de la solution approchée avait comme coefficient zéro, nous le retrouvons aussi ici (nous n'avons pas fait apparaître dans le tableau TAB.VII.m les termes en $h^{m+n+4-\nu}$). Nous obtenons donc 8 relations à 9 inconnues pour un développement d'ordre $m+4$ pour $y^{(n-1)}$, 3 relations pour un développement d'ordre $m+4$ pour $y^{(n-2)}$, 1 relation pour un développement d'ordre $(m+n+1-\nu)$, $\nu = 0, \dots, n-3$, pour $y^{(\nu)}$.

Il est donc possible d'obtenir l'ordre $m+4$ pour $y^{(\nu)}$, $\nu = 0, \dots, n-1$. (En fait on obtient l'ordre $m+n+1-\nu$ pour $y^{(\nu)}$, $\nu = 0, \dots, n-3$).

Comme la transformation (116), fournit $\bar{y}^{(\nu)}$ en fonction de $y^{(\nu)}$; $\nu = 0, \dots, n-1$; et de $\bar{y}_0^{(\nu)}$; $\nu = 1, \dots, m+n$; nous en déduisons que nous obtenons le même ordre pour $\bar{y}^{(\nu)}$, $\nu = 0, \dots, n-1$.

La méthode est donc d'ordre $m+4$ en ce qui concerne $\bar{y}^{(\nu)}$, $\nu = 0, \dots, n-1$.

VII - ETABLISSEMENT DES FORMULES

Nous avons choisi, parmi l'infinité de formules possibles, celle déjà choisie au § VI.7, à savoir :

$$\theta_1 = 1, \quad \theta_2 = \frac{m+2}{m+4}, \quad \theta_3 = 1 \quad (124)$$

Dans ces conditions nous obtenons les coefficients A_{4i}^{ν} , $\nu = 0, \dots, n-1$; $i = 1, 2, 3$; les coefficients $\beta_{\nu}, \gamma_{\nu}$ et δ_{ν} pour $\nu = n-1, n-2$. Comme nous n'avons aucune relation pour déterminer les coefficients $\beta_{\nu}, \gamma_{\nu}$ et δ_{ν} pour $\nu = n-3, \dots, 0$; le plus simple est de les annuler.

D'où :

$$\begin{cases} A_{41}^v = 0 \\ A_{42}^v = \frac{(m+1)!(n-v)(m+4)}{2(m+n+2-v)!} \left(\frac{m+4}{m+2}\right)^{m+1} \\ A_{43}^v = -\frac{(m+2)!(n-v-2)}{2(m+n+2-v)!} \end{cases} \quad (125)$$

avec $v = 0, 1, \dots, n-1$

$$\begin{cases} \beta_{n-1} = \frac{1}{m+4} \left(\frac{m+2}{m+4}\right)^{m+1} \\ \gamma_{n-1} = -\frac{1}{m+2} \\ \delta_{n-1} = \frac{2}{m+2} \left(\frac{m+4}{m+2}\right)^{m+1} \end{cases} \quad (126)$$

$$\begin{cases} \beta_{n-2} = \beta_{n-1}/(m+4) \\ \gamma_{n-2} = \gamma_{n-1}/(m+4) \\ \delta_{n-2} = \delta_{n-1}/(m+4) \end{cases} \quad (127)$$

Remarque : On peut aussi prendre :

$$\beta_{n-2} = 2\beta_{n-1}/(m+4)$$

$$\gamma_{n-2} = \delta_{n-2} = 0$$

$$\beta_v = \gamma_v = \delta_v = 0, \quad v = n-3, \dots, 0 \quad (128)$$

De cette façon les formules du § VI.7 sont un cas particulier de ces dernières.

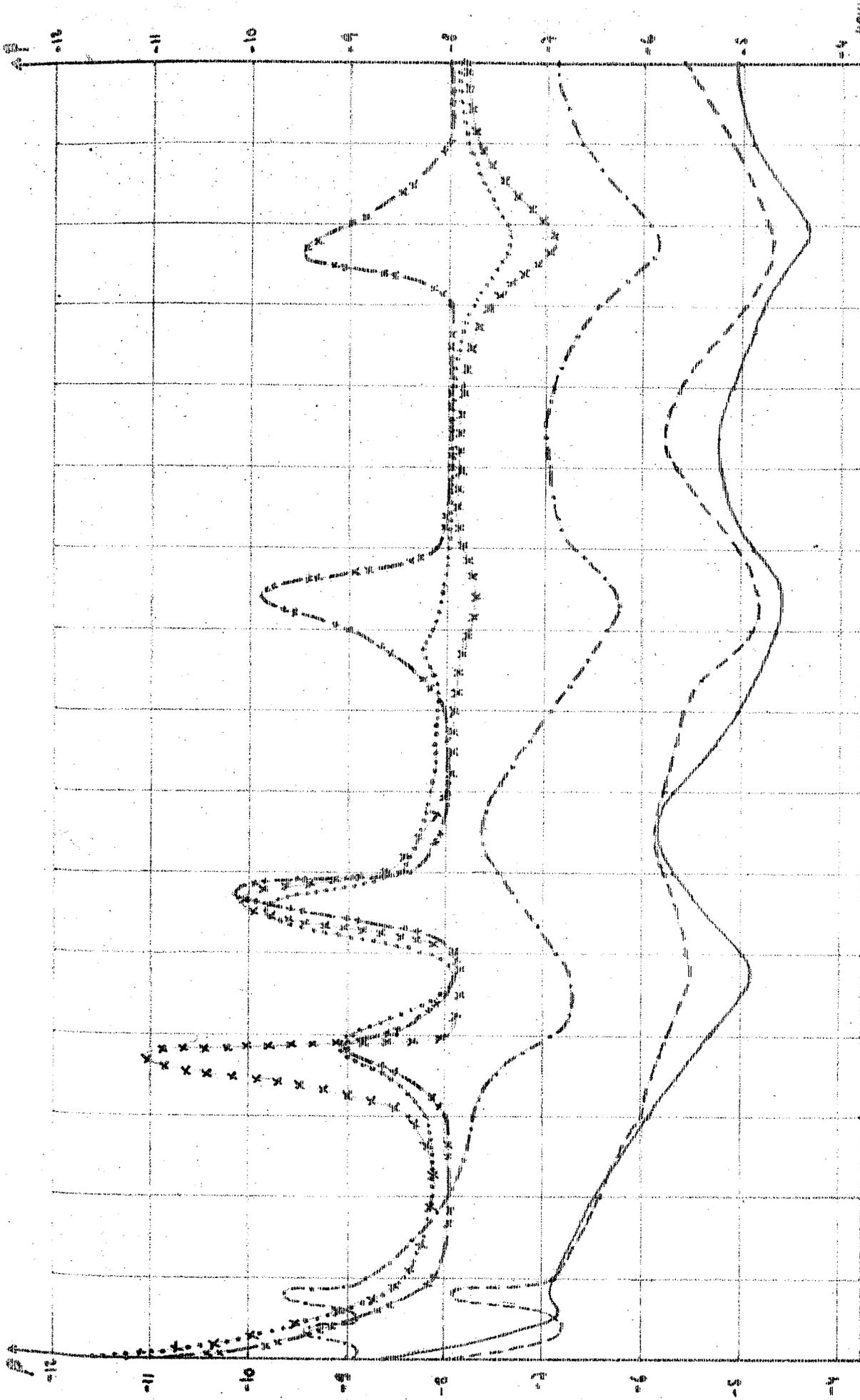
VIII - RESULTATS NUMERIQUES

Nous comparerons la méthode R-K.F_{4,m+4}, avec les coefficients (124) à (128) à la méthode de Runge-Kutta classique, de rang 4, dont nous avons donné les coefficients au § VI.8.

Nous avons intégré le système différentiel :

$$\left\{ \begin{array}{l} x'' = \{-(x \sin t + x') [x \sin t - y \cos t] + (\cos t - x) [(x - y') \cos t + (x' + y) \sin t]\} / \ell^2 \\ y'' = \{(\cos t - y') [x \sin t - y \cos t] + (\sin t - y) [(x - y') \cos t + (x' + y) \sin t]\} / \ell^2 \end{array} \right.$$

avec les mêmes conditions qu'au § VI.8.



10
 9
 8
 7
 6
 5
 4
 3
 2
 1
 0
 -1
 -2
 -3
 -4
 -5
 -6
 -7
 -8
 -9
 -10
 -11
 -12

10
 9
 8
 7
 6
 5
 4
 3
 2
 1
 0
 -1
 -2
 -3
 -4
 -5
 -6
 -7
 -8
 -9
 -10
 -11
 -12

Spline de 1^{er} ordre

Méthode	RK 4	h = 0.1	h = 0.2	h = 0.4	h = 0.8	h = 1.6	h = 3.2	h = 6.4	h = 12.8
Monté à l'aide de la	24,24	28,09	35	42	50,24	58,40	67,47		
compte tenu de la	—	—	—	X X X	X X X	X X X	X X X	X X X

CONCLUSIONS

Une première conclusion s'impose. Les différents exemples traités nous ont montré que la méthode Runge-Kutta-Fehlberg pouvait donner d'excellents résultats, bien que n'utilisant que des rangs peu élevés (2-3 ou 4). Pour obtenir des ordres similaires par les méthodes classiques de Runge-Kutta, il nous faudrait employer des rangs bien plus élevés, ce qui nous entrainerait à un calcul de coefficients particulièrement long. (Référence [8][9]).

Il est certain que la précision obtenue par la méthode R-K-F coûte cher, comme nous l'ont prouvé les tableaux indiquant les temps d'intégration.

Nous avons d'autre part remarqué, en ce qui concerne la résolution de Problèmes Différentiels du premier ordre, que nous pouvions obtenir des formules de même ordre en utilisant des méthodes de rang 2 - 3 ou 4. En fait, il semble expérimentalement que l'on ait tout de même intérêt à utiliser des méthodes de rang élevé.

Les résultats obtenus par des formules $R-K_{p,p}$ sont en général du même ordre de précision, expérimentale, que ceux obtenus par les formules $R-K-F_{p-1,p}$ ($m=0$).

Nous avons aussi remarqué, sur certains exemples, qu'à partir d'une certaine valeur du pas, la précision augmentait avec m , pour décroître ensuite.

En ce qui concerne la résolution des systèmes différentiels, il semble, d'après les exemples traités, que le gain en précision n'augmente plus aussi vite que lors de la résolution des équations différentielles. Cela doit être en partie lié à la propagation des erreurs et principalement aux erreurs d'arrondis.

Signalons qu'il serait possible d'obtenir, comme pour n'importe quelle méthode numérique, un ordre de grandeur de l'erreur commise, en utilisant, soit la méthode dite du doublement du pas (coût pour une méthode $R-D-F_{p,m+p+1}$, dans le cas de la résolution des équations différentielles d'ordre $n : 2m+3p+1$), soit deux méthodes différant de 1 au point de vue ordre (coût pour une méthode $R-K-F_{p,m+p+1}$ et une méthode $R-K-F_{p+1,m+p+2}$, dans le cas de la réalisation des équations différentielles d'ordre $n : m+2p+1$).

On pourrait avantageusement utiliser la deuxième méthode en vue d'une intégration avec variation automatique du pas.

Du point de vue stabilité, nous avons vu que les formules $R-K-F_{p,m+p+1}$ n'avaient un rayon de stabilité supérieur à celui des formules $R-K-F_{p,p}$ que pour des hauteurs m élevées, et que plus p augmente, plus m doit être élevé.

En conclusion, nous pouvons dire que ces méthodes apportent à leur utilisateur une bonne précision quant aux résultats, pour un coût assez élevé et un fastidieux travail de dérivation préalable du problème proposé. Cette difficulté pouvant cependant être tournée par l'utilisation du langage de programmation FORMAC ("Formula Manipulation Compiler") qui permet, entre autre, d'obtenir formellement, les dérivées de n'importe quelle fonction, et jusqu'à n'importe quel ordre. Nous pouvons signaler à ce sujet, que la résolution de problèmes différentiels, à l'aide de la méthode de Fehlberg, par l'utilisation du FORMAC, est pratiquement réalisée à ce jour.

Nous donnons ci-après un exemple obtenu formellement à l'aide de FORMAC, sur une équation du 1er ordre, pour une transformation de

hauteur $m = 5$.

YT représente \bar{y} obtenu par la transformation de Fehlberg

YBO(i) représente $\bar{y}_o^{(i)}$

DYO représente $\frac{\partial \bar{y}}{\partial y}_o$

YB représente \bar{y}

ED.(X,YB) représente $\bar{Y}(x,\bar{y})$

NWQDIF représente la nouvelle équation différentielle $Y(x,y)$ que l'on obtient à partir de $\bar{Y}(x,\bar{y})$ en appliquant la transformation de Fehlberg et que l'on résoud ensuite par RK . . .

EQUATION DIFFERENTIELLE D'ORDRE 1

$$\text{EQO} = \text{ED.}(X, YB)$$

TRANSFORMATION DE FEHLBERG DE HAUTEUR M = 5

$$\begin{aligned} Y_T = Y + & 1/2 (X - X_0)^2 YB_0(2) + 1/6 (X - X_0)^3 YB_0(3) \\ & + 1/24 (X - X_0)^4 YB_0(4) + 1/120 (X - X_0)^5 YB_0(5) + 1/ \\ & 720 (X - X_0)^6 YB_0(6) + (X - X_0) (Y - Y_0) DY_0 + (X - \\ & X_0) YB_0(1) \end{aligned}$$

NOUVELLE EQUATION DIFFERENTIELLE

$$\begin{aligned} \text{NWQDIF} = & (- YB_0(1) + \text{ED.}(X, Y + 1/2 (X - X_0)^2 YB_0(2) \\ & + 1/6 (X - X_0)^3 YB_0(3) + 1/24 (X - X_0)^4 YB_0(4) + 1/ \\ & 120 (X - X_0)^5 YB_0(5) + 1/720 (X - X_0)^6 YB_0(6) + (X - \\ & X_0) (Y - Y_0) DY_0 + (X - X_0) YB_0(1)) - (X - X_0) YB_0(2) \\ & - 1/2 (X - X_0)^2 YB_0(3) - 1/6 (X - X_0)^3 YB_0(4) - 1/24 \\ & (X - X_0)^4 YB_0(5) - 1/120 (X - X_0)^5 YB_0(6) - (Y - Y_0 \\ &) DY_0) / ((X - X_0) DY_0 + 1) \end{aligned}$$

APPENDICE

Nous donnons ici, les sous-programmes, écrits en ALGOL, utilisés pour l'exploitation de la méthode de Fehlberg.

Remarque : les exemples traités dans cet ouvrage, l'ont été à partir de programmes écrits en Fortran.

1° - EQUATIONS DIFFERENTIELLES D'ORDRE n- Transformation

```

PROCEDURE TRANSF (A,B,C,D,E,F,G,H) ;
REAL A, B, C ; REAL ARRAY D, E, F ; INTEGER G, H ;
COMMENT CETTE PROCEDURE EFFECTUE LA TRANSFORMATION DE FEHLBERG AVEC
A = XO, B = YO, C = X,
D = TABLEAU CONTENANT Y, ....., Y(N-1) EN X, CONNU,
E = TABLEAU CONTENANT YB, ....., YB(N-1) EN X, A REMPLIR,
F = TABLEAU CONTENANT YB, ....., YB(M+N) EN XO, CONNU,
G = ORDRE DE L'EQUATION DIFFERENTIELLE,
H = ORDRE + HAUTEUR + 1,
DFDY = DERIVEE PARTIELLE DE L'EQUATION DIFFERENTIELLE PROPOSEE PAR RAPPORT
A YB(N-1) EN XO ;
BEGIN REAL SØM, FAC, DER ; INTEGER i, j ;
    DER := DFDY(A,F,G) ;
    FAC := 1.0 ;
    SØM := D [1] * (1.0+DER*(C-A)/G) - B * (C-A) * DER/G ;
    FOR i := 1 STEP 1 UNTIL H - 1 DO
    BEGIN FAC := FAC * i ;
        SØM := SØM + F [i+1] * (C-A) * * i/FAC

```

```

END ;
E[1] := SØM ;
IF G < 2 THEN GOTO E2 ;
FOR i := 2 STEP 1 UNTIL G DØ
BEGIN SØM := D[i] * (1.0+DER*(C-A)/G) ;
  IF i = 2 THEN GØTØ E4 ;
  SØM := SØM + (i-1) * D[i-1] * DER/G ;
  GØTØ E5 ;
E4 : SØM := SØM + DER * (D[1]-B)/G ;
E5 : FAC := 1.0 ;
  FOR j := 1 STEP 1 UNTIL H-i DØ
  BEGIN FAC := FAC * j ;
    SØM := SØM + F[i+j] * (C-A) * * j/FAC
  END ;
  E[i] := SØM + F[i]
END ;
E2 :
END TRANSF ;

```

b - Equation différentielle transformée

```

REAL PROCEDURE NWQDIF(A, B, C, D, E, F, G, H) ;
REAL A, B, C ; REAL ARRAY D, E, F ; INTEGER G, H ;
COMMENT CETTE PROCEDURE CALCULE L'EQUATION DIFFERENTIELLE TRANSFORMEE, AVEC
A = XO, B = YO, C = X ;
D = TABLEAU CONTENANT Y, ... , Y(N-1) EN X, CONNU ;
E = TABLEAU CONTENANT YB, ... , YB(N-1) EN X, QUE L'ON REMPLIT ;
F = TABLEAU CONTENANT YB, ... , YB(M+N) EN XO, CONNU ;
G = ORDRE DE L'EQUATION DIFFERENTIELLE ;
H = ORDRE + HAUTEUR + 1 ;

```

```

BEGIN REAL DER, FAC, SØM ; INTEGER i., M ;
  M := H - G - 1 ;
  DER := DFDY(A,F,G) ;
  TRANSF(A,B,C,D,E,F,G,H) ;
  FAC := 1.0 ;
  SØM := ØDQDIF(C,E,G) - F[G+1] - DER * D[G] ;
  IF G > 1 THEN GØTØ E2 ;
  SØM := SØM + B * DER ;
E1 : IF M = 0 THEN GØTØ E2 ;
      FØR i := 1 STEP 1 UNTIL M DØ
      BEGIN FAC := FAC * i ;
           SØM := SØM - F[i+G+1] * (C-A) * * i/FAC
      END ;
E2 : NWQDIF := SØM/(1.0+(C-A) * DER/G
END NWQDIF ;

```

c - Intégration numérique - Méthode de R-K-F_{4,m+5}

```

REAL PROCEDURE RKF(A,B,C,D,E,F,G,H,i,j,M) ;
REAL A, B, H ; REAL ARRAY C, E, F, G, M ; INTEGER i, j ;
COMMENT CETTE PROCEDURE MET EN ØUVRE L'ALGORITHME R-K-F DE RANG 4, AVEC
A = XO, B = YO,
C = TABLEAU DES CØEFFICIENTS A4i, NU, LE PREMIER INDICE DU TABLEAU SE REFERE
A Y D'ORDRE i, i VARIANT DE 0A N-1,
D = TABLEAU DES BETA,
E = TABLEAU DES GAMMA,
F = TABLEAU DES DELTA,
G = TABLEAU DES TETA,
H = PAS D'INTEGRATIØN, i = ORDRE DE L'EQUATION DIFFERENTIELLE,
J = ORDRE + HAUTEUR + 1,
M = TABLEAU CONTENANT YB, ... , YB(M+N)EN 0, CONNU,
K, KK, L TABLEAUX AUXILIAIRES ;

```

```

BEGIN REAL DY1, DY2, DY3, FAC ; INTEGER ii ;
      REAL ARRAY K, KK, L[1:i] ;
      TABDER (A,M,i,j) ;
      IF i = 1 THEN GOTO E10 ;
      FOR ii := 2 STEP 1 UNTIL i DO
        K[ii] := 0.0 ;
E10 : K[1] := M[1] ;
      FAC := 1.0 ;
      FOR ii := 1 STEP 1 UNTIL i DO
        FAC := FAC * ii ;
        FAC := H * * i/FAC ;
        DY1 := NWQDIF(A,B,A+G[1]*H,K,L,M,i,j) * FAC ;
        KK[1] := K[1] + D[1] * DY1 ;
        IF i = 1 THEN GOTO E1 ;
        FOR ii := 2 STEP 1 UNTIL i DO
          KK[ii] := D[ii] * DY1/H * * (ii-1) ;
E1 : DY2 := NWQDIF(A,B,A+G[2]*H,KK,L,M,i,j) * FAC ;
        KK[1] := K[1] + E[1] * DY1 + F[1] * DY2 ;
        IF i = 1 THEN GOTO E3 ;
        FOR ii := 2 STEP 1 UNTIL i DO
          KK[ii] := (E[ii]*DY1+F[ii]*DY2)/H * * (ii-1) ;
E3 : DY3 := NWQDIF(A,B,A+G[3]*H,KK,L,M,i,j) * FAC ;
        KK[1] := K[1] + C[1,1] * DY1 + C[1,2] * DY2 + C[1,3] * DY3 ;
        IF i = 1 THEN GOTO E5 ;
        FOR ii := 2 STEP 1 UNTIL i DO
          KK[ii] := (C[ii,1]*DY1+C[ii,2]*DY2+C[ii,3]*DY3)/H * * (ii-1) ;
E5 : TRANSF(A,B,A+H,KK,L,M,i,j) ;
      FOR ii := 1 STEP 1 UNTIL i DO
        M[ii] := L[ii] ;
        A := A + H ;
        RKF := B := L[1]

```

END RKF ;

Remarques :

- 1) la REAL PROCEDURE DFDY(A,B,C) ;
REAL A ; REAL ARRAY B ; INTEGER G ;

calcule $\frac{DY}{Dy}^{-(n-1)}$, c'est à dire en A, à partir du tableau B qui contient $\bar{y}_0, \dots, \bar{y}_0^{(n-1)}$.

- 2) la PROCEDURE TABDER(A,B,C,D) ;
REAL A ; REAL ARRAY B ; INTEGER C, D ;

remplit le tableau B[1 : M+N+1], M = hauteur de la transformation, N = ordre de l'équation différentielle, qui contient $\bar{y}_0, \dots, \bar{y}_0^{(m+n)}$ à partir de $\bar{y}_0, \bar{y}'_0, \dots, \bar{y}_0^{(n-1)}$ qui sont en principe connu.

- 3) la REAL PROCEDURE ØDQDIF(A,B,C) ;
REAL C ; REAL ARRAY B ; INTEGER C ;

calcule la valeur de l'équation différentielle proposée

$\bar{y}^{(n)} = \bar{Y}(x, \dots, \bar{y}^{(n-1)})$ en $A = x_0$, à partir du tableau B qui contient $\bar{y}_0, \bar{y}'_0, \dots, \bar{y}_0^{(n-1)}$.

4) Les coefficients A4i, BETA, GAMMA, DELTA, TETA sont calculés dans des sous-programmes particuliers, ou fixés à la demande de l'utilisateur.

2° - SYSTEMES DIFFERENTIELS DU NIEME ORDREa - Transformation

```

PROCEDURE TRANSF(A,B,C,D,E,F,G,H) ;
REAL A, B ; REAL ARRAY C, D, H ; INTEGER E, F, G ;
COMMENT A = X0, B = Xi,
C = MATRICE A P LIGNES ET N COLONNES : Y ..... Y(N-1)
                                     .....
                                     T ..... T(N-1)

      VALEURS PRISES EN Xi,
D = MATRICE A P LIGNES ET M + N COLONNES : YB(1) ..... YB(M+N)
                                     .....
                                     TB(1) ..... TB(M+N)

      VALEURS PRISES EN X0,
E = P, NOMBRE DE FONCTIONS INCONNUES,
F = N, ØRDRE DU SYSTEME
G = HAUTEUR M + ORDRE N,
H = MATRICE A P LIGNES ET N COLONNES YB ..... YB(N-1)
                                     .....
                                     TB ..... TB(N-1)

      RESULTAT DE LA TRANSFORMATION EN Xi ;

BEGIN REAL SOM, FAC ; INTEGER i, j, K, M ;
FOR i : = 1 STEP 1 UNTIL E DØ
FOR j : = 1 STEP 1 UNTIL F DØ
BEGIN FAC : = 1.0 ;
      IF j = 1 THEN GØTØ E3 ;
      SØM : = C[i,j] + D[i,j-1] ;
      GØTØ E4 ;
E3 : SØM : = C[i,j] ;
E4 : M : = G - j + 1 ;

```

```

FØR K : = 1 STEP 1 UNTIL M DØ
BEGIN FAC : = FAC * K ;
      SØM : = SØM + D[i,K+j-1] * (B-A) ** K/FAC
END ;
H[i,j] : = SØM

```

END

END TRANSF

b - Système différentiel transformé

```

PROCEDURE NWSYS(A,B,C,D,E,F,G,K,L) ;
REAL A, B ; REAL ARRAY C, D, K ; INTEGER E, F, G, L ;
COMMENT A = XO, B = Xi,
C = MATRICE A P LIGNES ET N COLONNES Y ..... Y(N-1) EN Xi,
D = MATRICE A P LIGNES ET M + N COLONNES YB ..... YB(M+N) EN XO,
E = P, NOMBRE DE FONCTIONS INCONNUES,
F = N, ORDRE DU SYSTEME,
G = HAUTEUR M + ORDRE N,
K = MATRICE A P LIGNES ET 3 COLONNES Yi1, Yi2, Yi3,
L = NUMERO DU POINT INTERMEDIAIRE Xi1, Xi2, Xi3 ;

```

```

BEGIN REAL FAC, SØM ; INTEGER i, j, im ;
      REAL ARRAY H[1:E,1:F] ;
      TRANSF(A,B,C,D,E,F,G,H) ;
      FØR i : = 1 STEP 1 UNTIL E DØ
      BEGIN FAC : = 1.0 ;
        SØM : = D[i,F] ;
        IF G = F THEN GØTØ E1 ;

```

```

IM := G - F ;
FOR j := 1 STEP 1 UNTIL IM DO
  BEGIN FAC := FAC * j ;
        SOM := SOM + D[i,j+F] * (B-A) ** j/FAC
  END ;

```

```

E1 : K[i,L] := OLDSYS(B,H,i,E,F) - SOM

```

```

END

```

```

END NWSYS

```

c - Intégration numérique - Méthode de R-K-F_{4,m+4}

```

PROCEDURE RKF(A,B,C,D,E,F,G,H,K,L,P) ;
REAL A, P ; REAL ARRAY B, C, D, E, F, G ; INTEGER H, K, L ;
COMMENT A = XO A L'ENTREE ET X1 = XO + H A LA SORTIE,
B = MATRICE A P LIGNES ET M + N COLONNES YB, ....., YB(N-1)
      VALEURS PRISES EN XO A L'ENTREE ET EN X1 A LA SORTIE,
C = MATRICE A4i A N LIGNES ET 3 COLONNES,
D = MATRICE DES N BETA,
E = MATRICE DES N GAMMA,
F = MATRICE DES N DELTA,
G = COLONNE DES 3 TETA,
H = P, NOMBRE DE FONCTIONS INCONNUES,
K = N, ORDRE DU SYSTEME,
L = HAUTEUR M + ORDRE N,
P = PAS D'INTEGRATION,
D1, D1, B1, Y1 MATRICES AUXILIAIRES ;

```

```

BEGIN REAL ARRAY D1, Di 1:H,1:K , Yi 1:H,1:3 , B1 1:H ;
  INTEGER i, j ;
  TABDER(A,B1,B,H,K,L) ;
  FOR i := 1 STEP 1 UNTIL H DO
  BEGIN D1 i,1 := B1 i ;
    IF K = 1 THEN GOTO E1 ;
    FOR j := 2 STEP 1 UNTIL K DO
      D1 i,j := 0.0

  END ;

  NWSYS(A,A+P*G 1 ,D1,B,H,K,L,Yi,1) ;
  FOR i := 1 STEP 1 UNTIL H DO
  FOR j := 1 STEP 1 UNTIL K DO
    Di i,j := D1 i,j + D j * Yi i,1 * P ** (K-j+1) ;
  NWSYS(A,A+P*G 2 ,Di,B,H,K,L,Yi,2) ;
  FOR i := 1 STEP 1 UNTIL H DO
  FOR j := 1 STEP 1 UNTIL K DO
    Di i,j := D1 i,j + (E j *Yi i,1 +F j *Yi i,2 ) * P ** (K-j+1) ;
  NWSYS(A,A+P*G 3 ,Di,B,H,K,L,Yi,3) ;
  FOR i := 1 STEP 1 UNTIL H DO
  FOR j := 1 STEP 1 UNTIL K DO
    Di i,j := D1 i,j + (C j,1 *Yi i,1 +C j,2 *Yi i,2 +
      C j,3 *Yi i,3 ) * P ** (K-j+1) ;
  TRANSF(A,A+P,Di,B,H,K,L,D1) ;
  FOR i := 1 STEP 1 UNTIL H DO
  FOR j := 1 STEP 1 UNTIL K DO
    B [i,j] := D1 [i,j] ;
  A := A + P

END RKF ;

```

Remarques

- 1 - La REAL PROCEDURE OLDSYS(A,B,C,D,E) ;
REAL A ; INTEGER C, D, E ; REAL ARRAY B ;

calcule la valeur du système différentiel proposé en $A = X$, en fonction du tableau B qui contient $\bar{y}, \dots, \bar{y}^{(n-1)}$ valeurs prises en X. En fait, on calcule équation par équation la valeur du système, en choisissant la C^{ième} ligne du système.

- 2 - La PROCEDURE TABDER(A,B,C,D,E,F) ;
REAL A ; REAL ARRAY B, C ; INTEGER D, E, F ;

range dans la colonne B, la 1ère colonne du tableau C qui contient à l'entrée les valeurs de $\bar{y}, \dots, \bar{y}^{(n-1)}$ en x_0 et à la sortie $\bar{y}', \dots, \bar{y}^{(m+n)}$ prises en x_0 .

- 3 - Les coefficients A4i, BETA, GAMMA, DELTA et TETA sont soit calculés dans un sous-programme à part, soit directement chargés par la valeur désirée par l'utilisateur.

Remarques générales

Nous avons donné les sous-programmes de la méthode de rang 4, il est très facile de les transformer pour les adapter à une méthode de rang inférieur ou supérieur.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Erwin FEHLBERG
Eine Methode zur Fehlerverkleinerung beim Runge Kutta Verfahren
ZAMM. 38. 1958.
- [2] Erwin FEHLBERG
Neue genauere Runge Kutta Formeln für Differentialgleichungen
zweiter Ordnung.
ZAMM. 40. 1960. pages 252-259.
- [3] Erwin FEHLBERG
Neue genauere Runge Kutta Formeln für Differentialgleichungen
n-ter Ordnung.
ZAMM. 40. 1960. pages 449-455.
- [4] Erwin FEHLBERG
New high order Runge Kutta formulas with step size control for
systems of first and second order differential equations.
GAMM. 1964.
- [5] CESCHINO et KUNTZMANN
Problèmes différentiels de conditions initiales.
1963.
- [6] BARD - CESCHINO - KUNTZMANN - LAURENT
Formules de base de la méthode de Runge Kutta
CHIFFRES. 1. 1961.
- [7] Claude METZGER
Méthodes de Runge Kutta de rang supérieur à l'ordre.
Thèse 3ème cycle - Grenoble - 1967.

[8] HUTTA

Contribution à la formule de 6ème ordre dans la méthode de Runge Kutta Nyström.

Acta Fac. Nat. Univ. Comenion. Math 2 (1957).

[9] G. MARTINET et Y. SIRET

Computers in mathematical Recherche - Obtention automatique des équations de Runge Kutta.

Faculté des Sciences de Grenoble. 1968.

[10] François FRABOUL

Contribution à l'étude de la stabilité numérique des Méthodes d'intégration des systèmes différentiels.

Thèse - Nantes.

[11] Peter HENRICI

Discrete Variable Methods in Ordinary Differential Equations.
1962.

VU

Grenoble, le

Le Président de la Thèse

VU

Grenoble, le

Le Doyen de la Faculté des Sciences

Vu, et permis d'imprimer,

Le Recteur de l'Académie de GRENOBLE

