



HAL
open science

Sur la stabilité de la solution numérique pour un problème particulier d'équations aux dérivées partielles de type hyperbolique

Jean Cosnier

► **To cite this version:**

Jean Cosnier. Sur la stabilité de la solution numérique pour un problème particulier d'équations aux dérivées partielles de type hyperbolique. Modélisation et simulation. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1969. Français. NNT: . tel-00281646

HAL Id: tel-00281646

<https://theses.hal.science/tel-00281646>

Submitted on 23 May 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

T H E S E
-:-:-:-

présentée à
LA FACULTE DES SCIENCES DE L'UNIVERSITE DE GRENOBLE
pour obtenir
LE GRADE DE DOCTEUR DE SPECIALITE

par

Jean COSNIER
Licenciés es Sciences

SUR LA STABILITE DE LA SOLUTION NUMERIQUE POUR UN PROBLEME
PARTICULIER D'EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES DE TYPE
HYPERBOLIQUE

Thèse soutenue le 26 juin 1969 devant la Commission d'Examen

Monsieur J. KUNTZMANN	Président
Messieurs N. GASTINEL P.J. LAURENT J. BIAREZ	Examineurs

PROFESSEURS TITULAIRES (suite)

MM.	KLEIN J.	Mathématiques
	VAILLANT F.	Zoologie et Hydrobiologie
	ARNAUD Paul	Chaire de Chimie
	SENGEL P.	Chaire de Zoologie
	BARNOUD F.	Chaire de Bioynthèse de la Cellulose
	BRISSONNEAU P.	Physique
	GAGNAIRE	Chaire de Chimie Physique
Mme	KOFLER L.	Botanique
	DEGRANGE Charles	Zoologie
	PEBAY-PEROULA J.C.	Physique
	RASSAT A.	Chaire de Chimie Systématique
	DUCROS P.	Vhaire de Cristallographie Physique
	DODU Jacques	Chaire de Mécanique Appliquée I.U.T.
	ANGLES D'AURIAC P.	Mécanique des Fluides
	LACAZE A.	Thermodynamique

PROFESSEURS SANS CHAIRE

MM.	GIDON P.	Géologie et Mnéralogie
	GIRAUD P.	Géologie
	PERRET R.	Servomécanisme
Mme	BARBIER M.J.	Electrochimie
Mme	SOUTIF J.	Physique
	COHEN J.	Electrotechnique
	DEPASSEL R.	Mécanique des Fluides
	GASTINEL N.	Mathématiques Appliquées
	GLENAT R.	Chimie
	BARRA J.R.	Mathématiques Appliquées
	CÔUMES A.	Electronique
	PERRIAUX J.	Géologie et Minéralogie
	ROBERT A.	Chimie Papetière
	BIAREZ J.P.	Mécanique Physique
	BONNET G.	Electronique
	CAUQUIS G.	Chimie Générale
	BONNETAIN L.	Chimie Minérale
	DEPOMMIER P.	Etude Nucléaire et Génie Atomique
	HACQUES Gérard	Calcul Numérique
	POLOUJADOFF M.	Electrotechnique

PROFESSEURS ASSOCIES

MM.	NAPP-ZINN	Botanique
	RODRIGUES Alexandre	Mathématiques Pures
	STANDING Kenneth	Physique Nucléaire

MAITRES DE CONFERENCES

MM.	LANCIA Roland	Physique Atomique
Mme	KAHANE J.	Physique
	DEPORTES C.	Chimie
Mme	BOUCHE L.	Mathématiques
	SARRÔT-REYNAUD	Géologie Propédeutique

MAITRES DE CONFERENCES (suite)

Mme	BONNIER M.J.	Chimie
MM.	KAHANE A.	Physique Générale
	DOLIQUE J.M.	Electronique
	BRIERE G.	Physique M.P.C.
	DESRE G.	Chimie S.P.C.N.
	LAJZROWICZ J.	Physique M.P.C.
	VALENTIN P.	Physique M.P.C.
	BERTRANDIAS J.P.	Mathématiques Appliquées T.M.P.
	LAURENT P.J.	Mathématiques Appliquées T.M.P.
	CAUBET J.P.	Mathématiques Pures
	PAYAN J.J.	Mathématiques
Mme	BERTRANDIAS F.	Mathématiques Pures M.P.C.
	LONGEGUEUE J.P.	Physique
	NIVAT M.	Mathématiques Appliquées
	SOHM J.C.	Electrochimie
	ZADWORNY F.	Electronique
	DURAND F.	Chimie Physique
	CARLER G.	Biologie Végétale
	AUBERT G.	Physique M.P.C.
	DELPUECH J.J.	Chimie Organique
	PFISTER J.C.	Physique C.P.E.M.
	CHIBON P.	Biologie Animale
	IDELMAN S.	Physiologie Animale
	BOUVARD Maurice	Hydrologie
	RICHARD Lucien	Botanique
	PELMONT Jean	Physiologie Animale
	BLOCH D.	Electrotechnique I.P.
	BOUSSARD J.Claude	Mathématiques Appliquées I.P.
	MOREAU René	Hydraulique I.P.
	BRUGEL L.	Energétique I.U.T.
	SIBILLE R.	Construction Mécanique I.U.T.
	ARMAND Yves	Chimie I.U.T.
	BOLLINET Louis	Informatique I.U.T.
	KUHN Gérard	Energétique I.U.T.
	GERMAIN J.P.	Construction Mécanique I.U.T.
	CONTE René	Thermodynamique
	JOLY Jean René	Mathématiques Pures
Mme	PIERY Yvette	Biologie Animale
	BENZAKEN Claude	Mathématiques Appliquées

MAITRE DE CONFERENCES ASSOCIES

MM.	SAWCZUK A.	Mécanique des Fluides
	CHEEKE J.	Thermodynamique
	YAMADA O.	Physique du Solide
	NATR Lubomir	B.M.P.V.
	NAYLOR Arch	Physique Industrielle
	SILBER Léo	Radioélectricité
	NOZAKI Akihiro	Mathématiques Appliquées
	RUTLEDGE Joseph	Mathématiques Appliquées
	DONOHU Paul	Physique Générale
	EGGER Kurt	B.M.P.V.

Cette thèse a été préparée à l'Institut de Mathématiques Appliquées de Grenoble.

Monsieur le Professeur J. KUNTZMANN a bien voulu accepter de présider le Jury. Je lui exprime ma très respectueuse reconnaissance.

Monsieur le Professeur N. GASTINEL m'a proposé le sujet de cette étude ; ses idées, conseils, critiques et multiples encouragements ont permis l'élaboration de ce travail. Qu'il veuille bien trouver ici l'expression de ma déférente gratitude.

Je tiens également à exprimer ma reconnaissance à Monsieur le Professeur J. BIAREZ et Monsieur P.J. LAURENT, Maître de Conférences, qui m'ont fait l'honneur de faire partie du Jury.

Mes remerciements vont aussi à Messieurs NEGRE et AURIAULT, chercheurs du Laboratoire de Mécanique des Sols, dont les avis m'ont été très utiles, à Melle BICAIS qui a su apporter le plus grand soin à la réalisation pratique de cette thèse, à tous mes camarades de travail pour leurs conseils et à Monsieur MOUNET pour l'impression.

TABLE DES MATIERES

CHAPITRE I -

Introduction	I-1
I Equations de Sokolovsky	I-2
II Position du problème	I-5
III Conclusions	I-6

CHAPITRE II - EXISTENCE ET UNICITE DE LA SOLUTION DE SYSTEMES

D'EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES DE TYPE HYPERBOLIQUE

Introduction	II-1
I Condition de Lipschitz	II-2
II Théorie des caractéristiques	II-2
III Problème de Cauchy	II-5
IV Construction de la solution	II-7
V Théorème fondamental	II-11
VI Remarques de comparaison avec le problème posé ..	II-12

CHAPITRE III - EXEMPLES DE METHODES AUX DIFFERENCES FINIES

I Méthode de Massau	III-1
a) Méthode numérique	III-2
b) Transformation hodographe	III-4
c) Remarques	III-6
II Méthode de P.D. Lax-R. Courant-Isaacson et M. Rees	III-7
a) Cas d'une grille quelconque	III-7
b) Simplification de α	III-9
III Schéma "centré"	III-11

CHAPITRE IV - STABILITE ET CONVERGENCE DES APPROXIMATION AUX
DIFFERENCES FINIES

I	Introduction	IV-1
(A)		
	A-1 - Approximation d'opérateurs	IV-2
	A-2 - Problème	IV-4
	Approximation convergente	IV-4
	Théorème	IV-5
	A-3 - Cas d'un problème aux limites	IV-5
	a) Problème différentiel	IV-5
	b) Approximation	IV-6
	c) Stabilité	IV-7-b
	d) Convergence	IV-8-b
	e) Théorème	IV-8-b
	A-4 - Exemple d'approximation et étude de la stabilité	IV-8-b
	A-5 - Méthode des coefficients indéterminés ..	IV-12
(B)		
	B-1 - Forme réduite d'une approximation linéaire	IV-18
	B-2 - Une condition suffisante de stabilité ..	IV-21
(C)		
	C-1 - Critère de Von-Neumann	IV-22
	C-1-1 - Spectre d'un opérateur	IV-22
	C-1-2 - Une condition nécessaire de stabilité	IV-23
	C-1-3 - Contre-exemple	IV-23
	C-2 - Critère de Godunov et Ryaben'kii	IV-24
	C-2-1 - Spectre d'une famille d'opérateurs	IV-24
	C-2-2 - Théorème	IV-24

CHAPITRE V - ETUDE DE LA STABILITE DE LA METHODE DE MASSAU ET
APPLICATIONS AU PROBLEME POSE

	Introduction	V-1
A	Stabilité de la méthode de Massau	V-2
	A-1 - Problème de Cauchy	V-2
	A-2 - Approximation aux différences finies	V-4
	A-3 - Propositions préliminaires	V-6
	A-3-a - Proposition 1	V-6
	A-3-b - Proposition 2	V-7
	A-4 - Recherche d'une borne supérieure	V-8
	A-5 - Stabilité de l'approximation	V-12
B	Etude de problèmes particuliers	V-16
	B-1 - Problème P-1	V-16
	B-2 - Problème P-2	
C	Applications au problème posé	V-26
	C-1 - Rappels.....	V-26
	C-2 - Méthode numérique	V-28
	C-2-a - Une propriété remarquable de la trans- formation hodographe	V-29
	C-2-b - Calcul de \sum_1	V-30
	C-2-c - Calcul de \sum_2	V-31
	a) Condition de PRANDTL	V-31
	b) Méthode	V-32
	C-2-d - Calcul de \sum_3	V-34
	C-3 - Discussion de la stabilité	V-36
	C-3-a - Présentation différente de la méthode de calcul	V-36
	C-3-b - Exemple	V-39
	C-3-c - Cas d'instabilités	V-39
	C-3-d - Remarques	V-41

CHAPITRE VI - APPLICATIONS

	Introduction	VI-1
A	Changement d'axes	VI-2
B	Méthodes	VI-3
	B-1 - Méthode 1	VI-3
	B-2 - Méthode 2	VI-6
C	Applications au problème posé	VI-12
	C-1 - Condition aux limites	VI-12
	C-2	
	C-2-a - Caractéristiques OC et OD	VI-12
	C-2-b - Cas particulier $n = 1$	VI-14
	C-2-c - Points de la frontière OB	VI-15
	C-2-d - Points particuliers	VI-15
D	Résultats numériques	VI-16
	D-1 - Notations	VI-16
	D-2 - Premier exemple	VI-17
	D-3 - Deuxième exemple	VI-28
	D-4 - Troisième exemple	VI-40
	D-5 - Quatrième exemple	VI-44
	D-6 - Influence des conditions sur OA	VI-52
E	Programme ALGOL	VI-55
F	Conclusions	VI-61

CHAPITRE I

ENONCE DU PROBLEME - EQUATIONS DE SOKOLOVSKY

INTRODUCTION

Nous montrerons très brièvement l'origine des équations aux dérivées partielles du problème de base de la mécanique des sols, avec des conditions aux limites très particulières, discontinues à l'origine. Cette discontinuité rend très difficile le problème qui, sans une condition de "jonction" supplémentaire, admet mathématiquement une infinité de solutions. Nous utiliserons dans tout ce qui suit la condition de PRANDTL habituellement admise en mécanique des sols. Cette condition sera précisée ultérieurement.

Notons qu'on ne connaît pas, pour ce problème, de solutions exactes, sauf dans quelques cas très rares et très particuliers, d'où la nécessité d'utiliser des méthodes de calcul aux différences finies. Ce sont les applications de ces méthodes et l'étude de leur stabilité qui ont fait l'objet de nos recherches.

I - EQUATIONS DE SOKDOVSKY

Soit un massif limité par deux plans dont les traces sont OB et OA (figure I-1) ; nous admettrons que ce massif, à l'état d'équilibre limite, est homogène et isotrope et qu'il obéit à la loi de Coulomb.

On opère dans un système d'axes xoy.

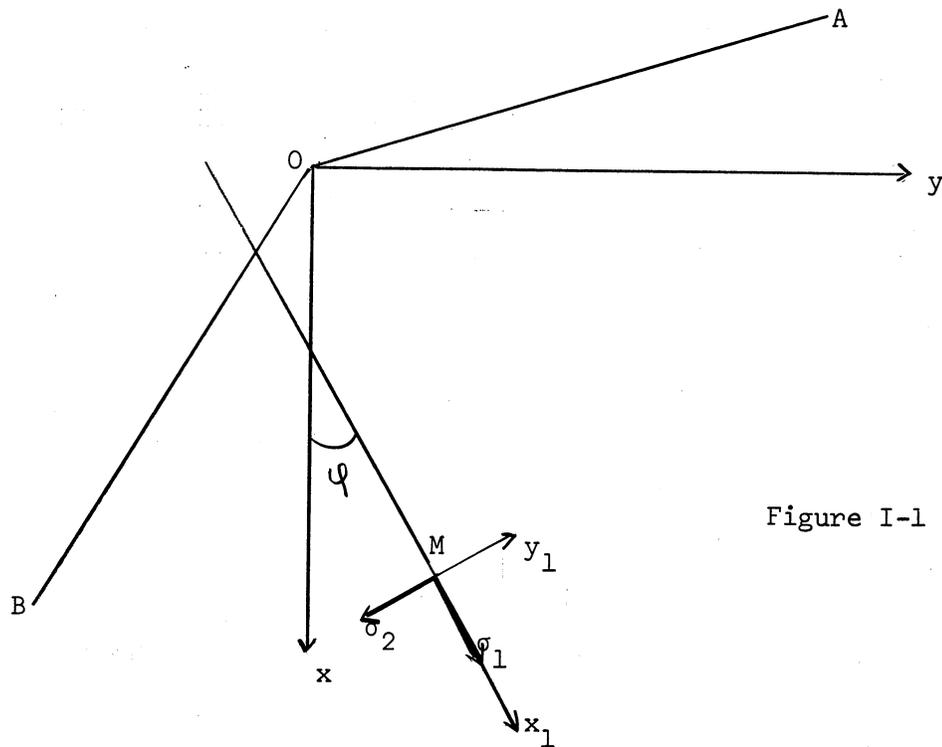


Figure I-1

En un point $M(x,y)$, l'état des contraintes est défini par σ_x , σ_y et τ_{xy} qui sont respectivement les efforts normaux et tangentiels aux éléments de surface en M, perpendiculaires à Ox et Oy . Mx_1 et My_1 sont les directions principales des contraintes suivant lesquelles on définit les contraintes principales σ_1 et σ_2 .

Dans le cas de ce problème plan, les équations de l'équilibre indéfini s'écrivent :

$$(I-1) \quad \begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = U(x,y) \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = V(x,y), \end{cases}$$

où $U(x,y)$ et $V(x,y)$ sont les forces de volume ; si on admet qu'elles ne sont dûes qu'à la pesanteur et si l'axe Ox est l'axe vertical, on a, en appelant γ le poids spécifique du matériau :

$$U(x,y) = \gamma \quad \text{et} \quad V(x,y) = 0.$$

D'autre part, en vertu de la loi de Coulomb :

$$(I-2) \quad (\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = \sin^2 \rho (\sigma_x + \sigma_y + 2H)^2$$

ou

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 = \sin^2 \rho (\sigma_1 + \sigma_2 + 2H)^2$$

avec

$$H = K \cotg \rho ;$$

K est la constante de cohésion ;

ρ est l'angle de frottement interne.

Sokdovsky a introduit les nouvelles fonctions inconnues :

$$(I-3) \quad \begin{cases} \varphi(x,y) = (O\vec{x}, M\vec{x}_1) \\ \sigma(x,y) = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + H. \end{cases}$$

Le système (I-1) avec (I-2) est alors équivalent [§1] au système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} (1 + \sin \rho \cos 2\varphi) \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \sin \rho \sin 2\varphi \frac{\partial \sigma}{\partial y} - 2\sigma \sin \rho \sin 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ + 2\sigma \sin \rho \cos 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \gamma \\ \sin \rho \sin 2\varphi \frac{\partial \sigma}{\partial x} + (1 - \sin \rho \cos 2\varphi) \frac{\partial \sigma}{\partial y} + 2\sigma \sin \rho \cos 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ + 2\sigma \sin \rho \sin 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0. \end{array} \right.$$

Sokolovsky a effectué un nouveau changement de fonctions inconnues :

$$(I-4) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{1}{2} \cot \rho \operatorname{Log} \frac{\sigma}{\sigma_0} \\ \xi = x + \varphi \\ \eta = x - \varphi \end{array} \right.$$

On obtient finalement le système fondamental :

$$(I-5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \operatorname{tg}(\varphi + \mu) \frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{-\gamma \sin(\varphi - \mu)}{2\sigma \cos 2\mu \cos(\varphi + \mu)} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} + \operatorname{tg}(\varphi - \mu) \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\gamma \sin(\varphi + \mu)}{2\sigma \cos 2\mu \cos(\varphi - \mu)} \end{array} \right.$$

avec :

$$(I-6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mu = \frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2} \\ \varphi = \frac{1}{2}(\xi - \eta) \\ \sigma = \exp [(\xi + \eta) \operatorname{tg} \rho] . \end{array} \right.$$

(Ici, nous avons pris $U = \gamma$ et $V = 0$).

Pour d'autres valeurs de U et V , seuls les membres de droite des équations (I-5) seraient modifiés.

II - POSITION DU PROBLEME

Les inconnues du problème sont maintenant les fonctions $\xi(x,y)$ et $\eta(x,y)$. Elles doivent obéir au système d'équations aux dérivées partielles (I-5). Ce système est quasilinéaire et de type hyperbolique.

α) - Les conditions "initiales" sont imposées sur OA par la connaissance de $\xi[x_1(y),y]$ et $\eta[x_1(y),y]$ où $x = x_1(y)$ est l'équation de OA dans les axes Oxy.

β) - Sur la frontière OB, on impose une relation entre les fonctions inconnues :

$$\xi(x,y) - \eta(x,y) = M$$

où M est une constante.

Cette relation exprime que le tenseur des contraintes a une direction (différente de celle imposée sur OA) bien déterminée et constante le long de OB. Soit φ_2 l'angle qui détermine cette direction. Cela donne :

$$\text{- sur OB : } \xi - \eta = 2\varphi_2$$

$$\text{- sur OA : } \xi - \eta = 2\varphi_1.$$

Il en résulte que la fonction $\varphi(x,y)$ subit une discontinuité de première espèce au point O. Il en est de même pour les autres fonctions inconnues $\sigma(x,y)$, $\xi(x,y)$ et $\eta(x,y)$.

Nous étudierons plus tard la condition de saut utilisée par Sokolovsky (condition de PRANDTL) ; elle n'entraînera jamais de discontinuité en même temps pour ξ et pour η .

γ) - Le problème de l'ingénieur est de calculer les valeurs de $\xi(x,y)$ et $\eta(x,y)$ sur la frontière OB. Il n'apparaît comme très urgent de les connaître avec beaucoup de précision dans tout le domaine OAB. Cependant, l'expérience semble montrer que le champ des caractéristiques doit avoir une certaine allure, et il en résulterait alors que les fonctions inconnues pourraient être continues partout sauf au point O, dans l'angle ouvert BOA.

δ) - La méthode numérique actuellement utilisée sera exposée aux chapitres III et V (Méthode de Massau).

III - CONCLUSIONS

En résumé, le problème est le suivant : deux fonctions inconnues $\xi(x,y)$ et $\eta(x,y)$ doivent vérifier dans un domaine (Σ) borné par OA et OB (figure I-2) le système de type hyperbolique et quasilinéaire, s'écrivant sous la forme matricielle :

$$(I-7) \quad U_x + D(U)U_y = B(U).$$

U étant la colonne inconnue de composantes $\xi(x,y)$ et $\eta(x,y)$;

D(U) une matrice diagonale dont les éléments diagonaux dépendent de U ;

F(U) une colonne dont les composantes dépendent également des fonctions inconnues.

On impose $U(x_1(y), y)$ sur OA.

On cherche ξ et η sur OB sachant que

$$\xi - \eta = 2\varphi_2 = \text{constante.}$$

Mais on doit avoir de plus :

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} U(x_1(y), y) \neq \lim_{y \rightarrow 0^-} U(x_2(y), y)$$

avec $x = x_1(y)$ et $x = x_2(y)$ équations de OA et OB respectivement, (x tendant vers 0 avec y).

On cherche autant que possible une solution continue partout dans l'ouvert AOB.

Remarquons, enfin que nous avons au point 0, une discontinuité de première espèce sur U et une discontinuité sur la frontière limitant le domaine (Σ) .

Toute la difficulté du problème provient naturellement de ces deux discontinuités localisées au point 0.

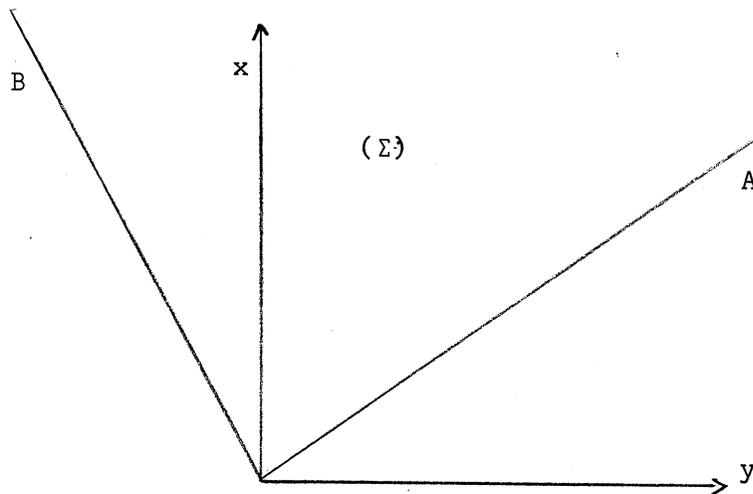


Figure I-2

CHAPITRE II

EXISTENCE ET UNICITE DE LA SOLUTION DES SYSTEMES D'EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES DE TYPE HYPERBOLIQUE

Pour le problème de Cauchy, l'existence et l'unicité de la solution des systèmes d'équations aux dérivées partielles du premier ordre quasi-linéaires et de type hyperbolique est une théorie bien connue et qui a été développée par divers auteurs [3], [4], [5].

Dans [5] R. Courant et P.D. Lax ont résolu ce problème en le ramenant à un système d'équations intégrales. Ici, nous nous bornerons à rappeler tout d'abord la théorie des caractéristiques, la réduction aux équations intégrales et le théorème fondamental d'existence et d'unicité.

Nous terminerons par quelques remarques de comparaison avec le problème posé.

I - CONDITION DE LIPSCHITZ

Soit une fonction $f(x,y)$ des deux variables indépendantes x,y , définie sur un domaine $\Omega \in \mathbb{R}^2$. On dit que $f(x,y)$ vérifie une condition de Lipschitz par rapport aux deux variables x et y si :

$$(II-1) \quad |f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| \leq M(|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|)$$

où x_1, y_1, x_2 et y_2 désigne des valeurs prises sur Ω par x et y , et M est une "constante de Lipschitz" indépendante de x et de y .

On sait de plus, que si la condition (II-1) est réalisée, la fonction $f(x,y)$ admet presque partout sur Ω des dérivées partielles du premier ordre par rapport à x et y .

II - THEORIE DES CARACTERISTIQUES

Considérons le système général de n équations à n inconnues $u^i(x,y)$:

$$(II-2) \quad \Lambda^i(u) = \sum_{j=1}^{j=n} (a_{ij} u_x^j + b_{ij} u_y^j) + d_i = 0$$

$$i = 1, 2, \dots, n.$$

Nous désignons par u le vecteur inconnu dont les composantes sont u^j : $u = [u^j]$.

Nous appellerons A et B les matrices

$$A = [a_{ij}], \quad B = [b_{ij}], \quad \text{et } d \text{ la colonne } d = [d_i]$$

$$i, j = 1, \dots, n.$$

(II-2) s'écrit alors sous la forme matricielle :

$$(II-3) \quad Au_x + Bu_y + d = 0.$$

Considérons une transformation linéaire $L = [l_{ij}(x,y,u)]$ telle que :

$$(II-4) \quad \begin{cases} \det(L) \neq 0 \\ LA = C L B \end{cases}$$

où C est une matrice diagonale.

Appliquons L au système (II-3), on obtient le système "équivalent" (au sens où toute solution de l'un est solution de l'autre et réciproquement) :

$$(II-5) \quad LAu_x + LBU_y + Ld = 0.$$

Posons :

$$LB = A^* = [a_{ij}^*]$$

$$Ld = d^* = [d_i^*]$$

(II-5) s'écrit alors :

$$(II-6) \quad CA^*u_x + A^*u_y + d^* = 0$$

et la $i^{\text{ème}}$ équation de (II-6) est :

$$(II-7) \quad \sum_{j=1}^{j=n} a_{ij}^* (u_y^j + c_{ii} u_x^j) + d_i^* = 0$$

si ξ et η sont les composantes d'un vecteur unitaire tel que $C_{ii} = \frac{\xi}{\eta}$ alors :

$$u_y^j + c_{ii} u_x^j = (u_y^j \eta + u_x^j \xi) / \eta$$

est proportionnel à la dérivée de u^j dans la direction définie par le vecteur (ξ, η) . Donc, chaque équation du système (II-6) renferme des dérivées de u dans une seule direction qui dépend de i, x, y et u .

D'après (II-4), on doit avoir pour la $i^{\text{ème}}$ ligne :

$$(II-8) \quad \sum_{k=1}^{k=n} \lambda_{ik} a_{kj} = \sum_{k=1}^{k=n} c_{ii} \lambda_{ik} b_{kj}$$

$$j = 1, 2, \dots, n.$$

Soit :

$$\sum_{k=1}^{k=n} \lambda_{ik} (a_{kj} - c_{ii} b_{kj}) = 0$$

pour

$$j = 1, \dots, n.$$

qui représente un système de n équations linéaires et homogènes dont les inconnues sont les λ_{ik} $k = 1, \dots, n$ on doit donc avoir :

$$(II-9) \quad \det(A - c_{ii} B) = 0.$$

HYPOTHESES :

- a_{ij}, b_{ij} et d_i $i, j = 1, 2, \dots, n$ sont des fonctions des $n+2$ variables x, y, u (définies dans un certain domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^2$), deux fois continuellement différentiables, à dérivées premières vérifiant une condition de Lipschitz du type (II-1) par rapport aux $n+2$ variables x, y, u^j .
- Toutes les racines c_{ii} $i = 1, 2, \dots, n$ (de (II-9)) sont réelles et distinctes pour tous les points du domaine Ω .
- c_{ii} , $\forall i = 1, 2, \dots, n$ est deux fois continûment différentiable à dérivées premières vérifiant une condition de Lipschitz par rapport aux $n+2$ variables x, y, u^j .

Si les hypothèses a, b et c sont satisfaites alors :

- α) - Le système (II-2) peut se mettre sous la forme (II-7) pour $i = 1, 2, \dots, n$ où a_{ij}^* , c_{ii} , d_i^* ont les propriétés a, b, c.
- β) - Si de plus, $\det(A^*) \neq 0$, alors le système (II-2) est un système quasilinéaire de type hyperbolique et il est possible de le mettre sous la forme "caractéristique normale" (II-6).
- γ) - La direction du vecteur de composantes (ξ, η) tel que $c_{ii} = \frac{\xi}{\eta}$ est appelée i^{ème} "direction caractéristique".

Remarque :

Le système (I-5) a l'avantage d'être mis directement sous la forme (II-7) avec $A^* = I$ (matrice unité) et les caractéristiques sont données par :

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}(\varphi + \mu) \\ \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}(\varphi - \mu). \end{cases}$$

III - PROBLEME DE CAUCHY

Soit un problème différentiel que nous supposerons ici de la forme (II-7) et quasilinéaire :

$$(II-10) \quad \sum_{j=1}^{j=n} a_{ij} (u_y^j + c_{ii} u_x^j) + d_i = 0$$

$$i = 1, 2, \dots, n.$$

Avec la condition "initiale" :

$$(II-11) \quad u^j(x, y_0) = \varphi^j(x) \text{ sur } (L) \text{ d'équation } y = y_0(x)$$

$$j = 1, 2, \dots, n.$$

On notera $\varphi(x)$ le vecteur de composantes $\varphi^j(x)$, $j = 1, 2, \dots, n$.

Si

- α) - a_{ij} , c_{ii} et d_i , $i, j = 1, 2, \dots, n$ vérifient les hypothèses de définition, continuité et dérivabilité a, b et c de la section 2 ;
- β) - $y = y_0(x)$ est définie, continue et dérivable sur un certain intervalle (a, b) ;
- γ) - $\varphi(x)$ est une fonction définie, continue et dérivable et dont les dérivées sont continues et vérifient une condition de Lipschitz par rapport à x sur (L) pour tout $x \in (a, b)$;
- δ) - Toute tangente à (L) ($a \leq x \leq b$) n'est parallèle à aucune "direction caractéristique", c'est-à-dire qu'en tout point $x, y_0 \in (L)$, avec $a \leq x \leq b$, on a :

$$c_{ii}(x, y_0, \varphi) \neq \frac{dy_0(x)}{dx}.$$

Alors, on dira que le problème (II-10), (II-11) est un problème de Cauchy, la condition (II-11) sera très souvent appelée condition de Cauchy.

IV - CONSTRUCTION DE LA SOLUTION DU PROBLEME DE CAUCHY

Reprenons le problème de Cauchy (II-10) - (II-11) et donc avec les hypothèses $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ de la section 3.

Afin d'illustrer les idées de P.D. Lax et R. Courant [§ 5], considérons le cas semi-linéaire, ou linéaire, c'est-à-dire le cas où les coefficients A, B et d et donc les $c_{ii} \forall i$, ne dépendent que de x et y , mais pas de $u(x,y)$.

On introduit les n nouvelles fonctions inconnues

$$(II-12) \quad v^i = \sum_{j=1}^{j=n} a_{ij} u^j \quad i=1, \dots, n.$$

Le système (II-10) s'écrit alors :

$$v^i_y + c_{ii} v^i_x + b_i = 0.$$

avec

$$(II-13) \quad b_i = d_i - \sum_{j=1}^{j=n} u^j \left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial y} + c_{ii} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x} \right)$$

b_i est donc une fonction connue de x et y , éventuellement des $v^i(x,y)$.
 $i = 1, 2, \dots, n.$

Soit $v(x,y)$ le vecteur de composantes $v^i(x,y) \quad i = 1, \dots, n.$

Puisque les c_{ii} ne dépendent pas de $v(x,y)$, les n équations différentielles

$$(II-14) \quad \frac{dx}{dy} = c_{ii}(x,y)$$

définissent n familles de courbes à un paramètre qui peuvent être connues à l'avance dans le plan (x,y) . Ces courbes sont les courbes "caractéristiques" que nous désignerons par C, C^i désignera la $i^{\text{ème}}$ famille.

Il est clair que si on introduit le paramètre s_i sur C^i , tel que $x = g(s_i)$, $y = f(s_i)$, alors chaque équation de (II-13) peut être interprétée comme une simple équation différentielle le long de chaque C^i :

$$(II-15) \quad \frac{dv^i}{ds_i} + b_i \frac{\partial y}{\partial s_i} = 0 \quad i = 1, \dots, n.$$

En particulier si $n = 2$, on pourra introduire facilement les nouvelles variables s_1 et s_2 comme variables indépendantes (appelées "variables caractéristiques") et intégrer (II-15) dans le plan (s_1, s_2) où les nouvelles lignes de coordonnées seront les deux familles de courbes caractéristiques.

Si maintenant, on prend $y = s_i$, de sorte que $x = g_i(y)$ le long de C^i , (II-15) s'écrit simplement :

$$(II-16) \quad \frac{dv^i}{dy} + b_i = 0 \quad i = 1, \dots, n.$$

Considérons les caractéristiques C^i et intégrons (II-16) sur C^i entre deux points P et Q ; on a :

$$(II-17) \quad v^i(P) - v^i(Q) = - \int_P^Q b_i dy.$$

Prenons l'axe des x pour (L) et considérons un point P de coordonnées (ξ, η) situé au voisinage de cet axe ($y > 0$).

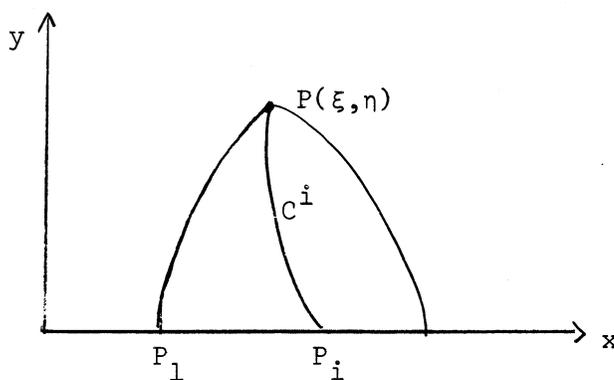


Figure II-1

Les n courbes caractéristiques passant par P ont pour équations :

(II-18) $x = g_i(y, \xi, \eta)$ (intégrales de (II-14)) et coupent l'axe des x en n points P_i d'abscisses $x_i = g_i(0 ; \xi, \eta)$, $i = 1, \dots, n$.

La condition (II-11) du problème de Cauchy entraîne

(II-19) $v^i(x, 0) = \psi^i(x)$ sur l'axe des x pour $a \leq x \leq b$
 $i = 1, \dots, n$.

Les $\psi^i(x)$ étant supposés satisfaire à l'hypothèse (γ) de la section 3.
 En intégrant le long de C^i on a maintenant :

(II-20) $v^i(\xi, \eta) = v^i(x_i, 0) - \int_0^\eta b_i dy$
 $v^i(\xi, \eta) = \psi^i(x_i) - \int_0^\eta b_i dy$
 $i = 1, \dots, n$.

Les n équations différentielles ont été remplacées par un système de n équations intégrales dont les inconnues sont les $v^i(x, y)$, $i = 1, \dots, n$. Une solution de (II-13) avec (II-19) est solution de (II-20) et réciproquement.

Considérons maintenant l'opérateur intégrale T qui transforme un système de fonctions v^i $i = 1, \dots, n$ en un système de fonctions w^i $i = 1, \dots, n$, et tel que :

(II-21) $T(v^i) = \psi^i(x_i) - \int_0^\eta b_i(v^i(x, y)) dy = w^i(\xi, \eta)$

étant entendu que :

$x = g_i(y ; \xi, \eta)$ $x_i = g_i(0 ; \xi, \eta)$

Partant de $v_0^i = \psi^i(x)$ on peut alors construire la suite $v_{k+1}^i = T(v_k^i)$. P.D. Lax et R. Courant [5] ont montré, sous certaines hypothèses, que la suite des v_k converge vers une solution v (en notation vectorielle) de (II-13) ayant des propriétés précises [théorème sect. V].

Ce qui précède peut être étendu au cas où les équations sont quasi-linéaires. Il apparait alors deux difficultés nouvelles :

- D'une part, les courbes caractéristiques ne sont plus connues à l'avance, c'est-à-dire que les c_{ii} dépendent cette fois de $u(x,y)$.
- D'autre part, il est délicat d'introduire les nouvelles fonctions inconnues $v^i(x,y)$ comme nous l'avons fait précédemment par (II-12) car b_i contiendrait cette fois des dérivées premières par rapport à x et par rapport à y de la fonction inconnue $u(x,y)$.

P.D. Lax et R. Courant ont pu cependant ramener ce problème au problème précédent (c'est-à-dire à des équations de la forme de (II-13)). Dans le souci de ne pas être trop long, nous ne développons pas ce point et engageons le lecteur à se reporter à la référence [5, sect. 4].

Toutefois, il est important de noter que la construction de la solution ne sera évidemment pas exactement la même que précédemment, les caractéristiques C^i n'étant pas connues à l'avance, elles devront cette fois être obtenues par un procédé d'itération identique à (II-21). Nous ne démontrerons pas ce théorème. Le lecteur pourra trouver tous les détails de la démonstration dans [5]. Mais le théorème qui va suivre est important puisqu'il renferme les hypothèses d'existence et d'unicité d'une solution sur lesquelles nous reviendrons très fréquemment dans la suite.

V - THEOREME FONDAMENTAL

Etant donné le système d'équations quasilineaires de type hyperbolique :

$$(S) \quad v_y^i + c_{ii} v_x^i + b_i = 0$$

$$i = 1, 2, \dots, n.$$

Avec :

$$(C) \quad v^i(x, 0) = \psi^i(x) \quad i = 1, 2, \dots, n \text{ sur } |x| \leq a$$

telles que aucune des caractéristiques ne soit tangente à l'axe des x .

Si : - les n fonctions $\psi^i(x)$ ont des dérivées premières continues telles que :

$$|\psi_x^i(x_2) - \psi_x^i(x_1)| \leq \lambda |x_2 - x_1| \quad |x_2| < a, \quad |x_1| < a$$

λ constante positive indépendante de x .

$$i = 1, \dots, n.$$

- les fonctions $c_{ii}(x, y, v)$ et $b_i(x, y, v)$ sont pourvues de dérivées premières continues par rapport aux $n+2$ variables $x, y, v^i \quad i=1, \dots, n$ et si ces dérivées vérifient une condition de Lipschitz par rapport à x, y, v^i .

alors :

Le système (S) avec (C) admet une solution unique dans une région R du $\frac{1}{2}$ plan supérieur à l'axe des x limité par $|x| < a$ et les caractéristiques issues des extrémités de cet intervalle.

De plus :

- $v(x,y)$ vérifie la condition initiale (C) et a ses dérivées premières continues qui vérifient une condition de Lipschitz partout dans R, ce qui entraîne que :

$$|v^i - \psi^i| < K^i \quad i = 1, \dots, n$$

où K^i est une constante positive pour tout i.

- $v(x,y)$ est unique pour des conditions initiales déterminées.

VI - REMARQUES DE COMPARAISON AVEC LE PROBLEME POSE

a) - Le système (I-5) de notre problème, obtenu au chapitre I, est de la forme du système (S). Généralement, les c_{ii} et les b_i , $i = 1, 2$, ne dépendront que de $v(x,y)$.

b) - Rappelons que nos fonctions inconnues, appelées $\xi(x,y)$ et $\eta(x,y)$ doivent vérifier le système :

$$(II-23) \quad \begin{cases} \xi_x + c_{11}(\xi, \eta) \xi_y = b_1(\xi, \eta) \\ \eta_x + c_{22}(\xi, \eta) \eta_y = b_2(\xi, \eta) \end{cases}$$

Prenons les ξ_i et η_i telles qu'elles sont données initialement sur OA.

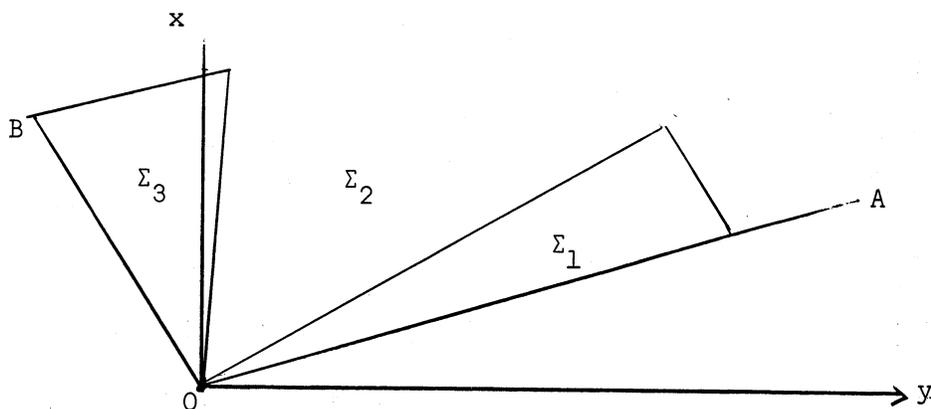


Figure II-2

Si

α.- OA n'est pas direction caractéristique

β.- Sur l'intervalle OA, les ξ_i et η_i ont des dérivées premières continues vérifiant une condition de Lipschitz :

$$|\xi_x(x_2, y_2) - \xi_x(x_1, y_1)| \leq \alpha_1 |x_2 - x_1| + \alpha_2 |y_2 - y_1|$$

$$|\eta_x(x_2, y_2) - \eta_x(x_1, y_1)| \leq \beta_1 |x_2 - x_1| + \beta_2 |y_2 - y_1|.$$

γ.- Les fonctions c_{11} , c_{22} , b_1 et b_2 sont pourvues de dérivées premières continues par rapport à ξ, η et si ces dérivées vérifient une condition de Lipschitz par rapport à ξ et η ,

alors :

en vertu du théorème d'existence et d'unicité, le système (II-23) admet une solution unique dans une région Σ_1 du $\frac{1}{2}$ plan supérieur à l'axe des y limitée de plus par les deux caractéristiques issues des extrémités de cet intervalle.

De plus, cette solution vérifie une condition de Lipschitz partout dans Σ_1 et elle est unique pour les ξ_i et η_i initiaux donnés sur OA.

Donc, si on ne tient pas compte de la discontinuité au point 0, les conditions ci-dessus seront en général obtenues et une telle solution pourra être construite dans la région Σ_1 .

D'autre part, il doit exister $\xi(x,y)$ et $\eta(x,y)$ sur OB, et on prévoit, physiquement que ξ et η doivent vérifier des hypothèses de "régularité" analogues à celles précédemment citées sur OA. Donc, toujours en vertu du théorème d'existence et d'unicité, on peut prévoir l'existence d'une solution unique dans une région Σ_3 bornée par OB et les caractéristiques issues de O et de B.

c) - Deux cas peuvent maintenant se présenter :

- 1) - Ou bien les régions Σ_1 et Σ_3 se superposent et on admet l'existence d'une ligne de discontinuité L (Figure II-3).

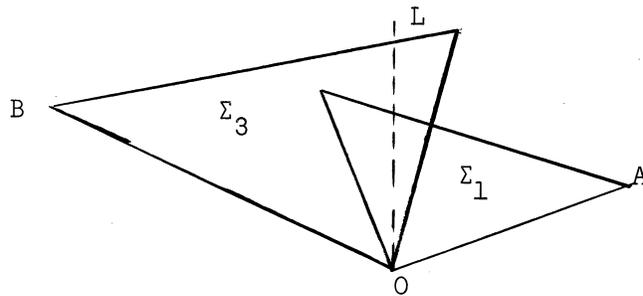


Figure II-3

On connaît alors des relations de "saut" pour ξ et η à travers cette ligne L.

- 2) - Ou bien, Σ_1 et Σ_3 sont disjointes (Figure II-2), et il existe une zone Σ_2 dans laquelle on ne peut mathématiquement rien conclure à moins de se donner une condition de jonction supplémentaire. C'est ce dernier cas que nous étudierons et pour lequel nous rencontrons de grosses difficultés.

CHAPITRE III

EXEMPLES DE METHODES AUX DIFFERENCES FINIES

I - METHODE DE MASSAU (Intégration approchée le long des caractéristiques).

Reprenons le problème de Cauchy (II-10) - (II-11), nous noterons c_{ii} par c_i pour simplifier l'écriture.

$$(III-1) \quad \sum_{j=1}^{j=n} a_{ij} (u_y^j + c_i u_x^j) + d_i = 0$$
$$i = 1, 2, \dots, n.$$

Avec la condition de Cauchy :

$$(III-2) \quad u^j(x, y_0) = \varphi^j(x) \text{ sur } (L) \text{ d'équation } y = y_0(x)$$
$$j = 1, 2, \dots, n \quad a \leq x \leq b.$$

Pour simplifier, nous envisagerons le cas $n = 2$ et nous supposerons de plus que la matrice $A = (a_{ij})$ est la matrice unité, de sorte que (III-1) se réduit à un système de la forme (II-13) :

$$(III-3) \quad u_y^i + c_i u_x^i + d_i = 0$$
$$i = 1, 2.$$

Remarque :

Le système d'équations de Sokolovsky est de la forme (III-3).

Comme il a été indiqué au chapitre II, section 4, chaque équation de (III-3) peut être remplacé, le long de chaque caractéristique C^i , par une simple équation différentielle (à condition de paramétrer convenablement chaque équation de C^i) :

$$(III-4) \quad \frac{du^i}{dy} + d_i(u) = 0 \quad i = 1, 2.$$

D'autre part, les caractéristiques ont pour équations les intégrales $x(y)$ de :

$$(III-5) \quad \frac{dx}{dy} = c_i(u) \quad i = 1, 2.$$

Et la condition de Cauchy (III-2) s'écrit maintenant :

$$(III-6) \quad u^i(x, y_0) = \varphi^i(x) \text{ sur } (L) \text{ d'équation } y = y_0(x)$$

$$i = 1, 2. \quad a \leq x \leq b.$$

Nous savons, en vertu du théorème d'existence et d'unicité du chapitre II, que sous certaines hypothèses de continuité, dérivabilité et de Lipschitz pour $d_i(u)$, $c_i(u)$, $\varphi^i(x)$ et $y = y_0(x)$ le problème de Cauchy (III-4) - (III-5) avec (III-6) admet une solution $u(x, y)$ unique pour x, y appartenant à un certain domaine Ω au voisinage de (L) dans la direction des y positifs, Ω étant limité par (L) et les deux caractéristiques issues des extrémités de (L) , et que $u(x, y)$ est continue, dérivable et satisfait à une condition de Lipschitz par rapport à x et par rapport à $y \quad \forall x, y \in \Omega$.

a) - METHODE NUMERIQUE

Prenons sur (L) , deux points voisins P_1 et P_2 (Figure 1) et considérons les deux caractéristiques C^1 et C^2 issues respectivement de P_1 et de P_2 qui se coupent en Q^* au voisinage de (L) dans la direction des y positifs (deux autres caractéristiques se couperaient dans la direction des y négatifs).

On se propose d'associer aux 4 équations (III-4) - (III-5) avec la condition de Cauchy (III-6), dont la fonction inconnue est $u(x,y)$ pour $x,y \in \Omega$, 4 équations aux différences finies dont les inconnues seront appelées v^1, v^2, X, Y .

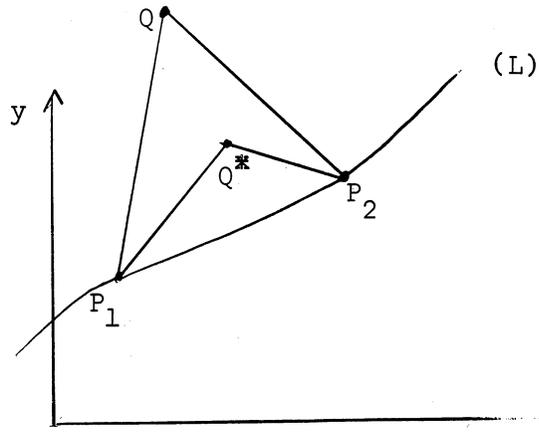


Figure III-1)

Pour cela, on considère les tangentes aux caractéristiques C^1 et C^2 dont les pentes sont calculées aux points P_1 et P_2 (Figure III-1), elles se coupent en un point Q (dans la direction des y positifs) où on se propose de calculer :

$$v^1(Q), v^2(Q), X(Q), Y(Q), \quad v^i(Q) \text{ étant mis pour } v^i(X(Q), Y(Q))$$

par :

$$(III-7) \quad \left\{ \begin{array}{l} X(P_i) - X(Q) = (Y(P_i) - Y(Q)) \times c_i(P_i, v(P_i)) \\ i = 1, 2 \\ v^i(Q) = v^i(P_i) - (Y(P_i) - Y(Q)) \times d_i(P_i, v(P_i)) \\ i = 1, 2 \end{array} \right.$$

$$c_i(P_i, v(P_i)) \text{ est mis pour } c_i(X(P_i), Y(P_i), v^1(P_i), v^2(P_i))$$

de même

$$d_i(P_i, v(P_i)) \text{ est mis pour } d_i(X(P_i), Y(P_i), v^1(P_i), v^2(P_i)).$$

b) - TRANSFORMATION HODOGRAPHE

Utilisation des variables caractéristiques [3], [6].

Considérons le système quasilinéaire, de type hyperbolique :

$$(III-8) \quad u_y^i + c_i u_x^i + d_i = 0 \quad i = 1, 2$$

où c_i et d_i sont des fonctions des u^i .

Et la condition de Cauchy :

$$(III-9) \quad u^i(x, y_0) = \varphi^i(x) \text{ sur une courbe (L) d'équation } y = y_0(x) ;$$

$$i = 2 ; \quad a \leq x \leq b.$$

En chaque point du domaine Ω , il passe deux caractéristiques distinctes appartenant à chaque famille. On se propose d'utiliser les caractéristiques comme nouvelles lignes de coordonnées. Il existe une infinité de transformations :

$$x = x(\alpha, \beta) ; \quad y = y(\alpha, \beta)$$

pour lesquelles α et β sont respectivement constants sur les courbes de chacune des 2 familles de caractéristiques ; si le jacobien $\frac{D(x, y)}{D(\alpha, \beta)} \neq 0$, alors le système (III-8) s'écrit sous la forme canonique :

$$(III-10) \quad \begin{cases} \frac{\partial x}{\partial \beta} = c_1 \frac{\partial y}{\partial \beta} & -\frac{\partial u^1}{\partial \beta} = d_1 \frac{\partial y}{\partial \beta} \\ \frac{\partial x}{\partial \alpha} = c_2 \frac{\partial y}{\partial \alpha} & -\frac{\partial u^2}{\partial \alpha} = d_2 \frac{\partial y}{\partial \alpha} \end{cases}$$

(III-9) est un système de 4 équations à 4 inconnues, x , y , u^1 et u^2 des deux nouvelles variables indépendantes α et β .

Pour rapporter la condition (III-9) au plan (α, β) , il faudrait trouver l'image de L . Il semble que ce problème soit insoluble puisque x et y sont des fonctions inconnues du problème. Toutefois, chaque caractéristique coupe (L) en un seul point (problème de Cauchy). Si on se donne (L) par 2 équations dépendant du paramètre t : $x = f(t)$; $y = g(t)$, on peut faire passer par le point $P_0 \in L$ de coordonnées $x_0 = f(t_0)$, $y_0 = g(t_0)$, les droites $\alpha = \text{cte}$, $\beta = \text{cte}$, ce qui fixe $\alpha = \beta = t_0$. Donc, dans le plan des "variables caractéristiques" (α, β) (L) devient la première bissectrice d'équation $\alpha - \beta = 0$.

Considérons l'ensemble simple suivant :

Supposons que $d_1 = d_2 = 0$, (système homogène)
(III-8) s'écrit alors :

$$u_y^i + c_i u_x^i = 0 \quad i = 1, 2$$

et (III-10) devient :

$$\begin{cases} x'_\beta = c_1 y'_\beta \\ x'_\alpha = c_2 y'_\alpha \\ u_\alpha'^2 = u_\beta'^1 = 0. \end{cases}$$

Les deux dernières équations expriment que u^1 et u^2 sont des constantes suivant les directions α et β . Supposons que sur (L) on ait une condition aux limites de la forme $u^1 - u^2 = \text{cte}$, u^1 et u^2 peuvent être choisies comme variables caractéristiques et dans le plan (u^1, u^2) (L) est une parallèle à la première bissectrice

Il reste finalement à résoudre un système de 2 équations à 2 inconnues de la forme :

$$(III-11) \quad \begin{cases} x'_{u2} = c_1 y'_{u2} \\ x'_{u1} = c_2 y'_{u1} \end{cases}$$

avec :

$$c_1 - c_2 \neq 0.$$

c) - REMARQUES

La convergence de la méthode numérique de Massau a fait l'objet d'une étude par Friedrich et Lewy [3] et qui est exposée également dans un livre de Sauer [6]. Nous y reviendrons au chapitre V.

Notons tout de suite que la méthode est d'ordre h et qu'il n'y aura pas de condition sur h pour assurer la stabilité et la convergence puisque la grille curviligne est construite par le calcul (ici h désigne l'ordre de grandeur des distances entre les points de la grille).

L'expérience a montré que les résultats numériques obtenus pouvaient être améliorés en utilisant une ou plusieurs fois les formules (III-7) à l'aide des valeurs moyennes :

$$\frac{1}{2}[X(P_i)+X(Q)], \quad \frac{1}{2}[Y(P_i)+Y(Q)] \text{ etc...}$$

Il semble cependant que ce procédé ne puisse pas augmenter l'ordre en h au sens où nous le définirons au Chapitre IV de la méthode, mais tout au plus diminuer un peu l'erreur de discrétisation.

II - METHODE DE P.D. LAX-R. COURANT-ISAACSON et M. REES

(voir [4], [13]).

α) - Pour exposer cette méthode, on peut sans trop compliquer les notations, reprendre le système (III-1) avec (III-2) :

$$(III-8) \quad \sum_{j=1}^{j=n} a_{ij} (u_{y_j}^j + c_i u_x^j) + d_i = 0$$

$$i = 1, 2, \dots, n.$$

Avec la condition de Cauchy :

$$(III-9) \quad u^j(x, y_0) = u^j(x) \text{ sur } (I_0) \text{ d'équation } y = y_0(x)$$

$$j = 1, 2, \dots, n \quad a < x < b.$$

Les coefficients a_{ij} , c_i et d_i dépendent de x , y et des n fonctions inconnues u^j . Pour simplifier nous écrirons par exemple $c_i(x, y, u)$ pour $c_i(x, y, u^1, u^2, \dots, u^n)$.

Les "directions caractéristiques" sont définies par $c_i = \frac{dx}{dy}$, $i = 1, 2$ et nous supposons toujours que pour $a \leq x \leq b$, les tangentes à (I_0) ne sont jamais parallèles aux directions caractéristiques.

Il est toujours possible de construire une famille F de courbes (I_m) d'équations $y_m = y(x, m)$ dépendant du paramètre m telle que $y_0 \in F$. Une telle famille peut être obtenue, par exemple, par translation de I_0 dans une direction fixe.

On se propose de choisir convenablement des points sur les (I_m) , l'ensemble de ces points constitue une "grille".

Soit Q un point de la grille, situé sur (I_m) et Q' et Q'' les deux points de la grille les plus près de Q (Figure 2) et de part et d'autre de Q .

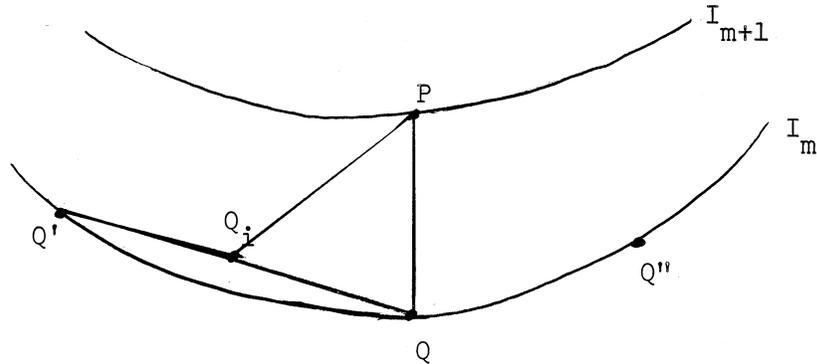


Figure (III-2)

Le maillage obtenu doit être tel que les droites passant par un point P situé sur I_{m+1} , (Figure III-2), et tangentes aux caractéristiques au point P , tombent entre les points Q' et Q'' . Nous verrons en effet que la convergence de la méthode dépend de cette condition [Ch. IV].

Nous allons associer au système (III-8) dont la solution exacte est le vecteur $u(x,y)$, un système d'équations aux différences finies dont nous désignerons la solution par v de composantes v^j $j = 1, 2, \dots, n$.

Soit $v^j(Q)$ une solution approchée de (III-8) calculée au point Q de la grille sur la courbe (I_m) et désignons par Q_i le point d'intersection de la corde QQ' (ou QQ'') avec la droite de pente $c_i(Q, v(Q))$ passant par P . Autrement dit, par le point P , on fait passer les droites tangentes aux caractéristiques dont les pentes sont calculées au point Q , et suivant la valeur de ces pentes, Q_i tombe soit entre Q et Q' , soit entre Q et Q'' .

Le système d'équations aux différences finies approchant le système (III-8) est le suivant :

$$(III-10) \quad \sum_{j=1}^{j=n} a_{ij}(Q, v(Q)) \times \left(\frac{v^j(P) - v^j(Q_i)}{\Delta y_i} \right) + d_i(Q, v(Q)) = 0$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

Δy_i désigne la différence entre les ordonnées des points P et Q_i .

Pour une certaine valeur de i , Q_i tombe entre Q et Q' (respectivement Q et Q'') et $v^j(Q_i)$ est obtenue par interpolation linéaire entre les points Q et Q' (respectivement Q et Q'') :

$$(III-11) \quad v^j(Q_i) = v^j(Q) + \lambda_i(Q, v(Q)) \times (v^j(Q') - v^j(Q)).$$

λ_i étant tel que, vectoriellement on ait :

$$(III-12) \quad Q_i = Q + \lambda_i(Q' - Q).$$

Il est clair que λ_i dépend de Q, $v^j(Q)$, $c_i(Q, v(Q))$ et de la géométrie des courbes (I_m).

(III-10) - (III-11) - (III-12) donnent les $v^i(P)$ $i = 1, 2, \dots, n$ explicitement en tous les points de la grille, en partant des $v^i(Q)$ $i = 1, 2, \dots, n$ sur (I_0), et pourvu que :

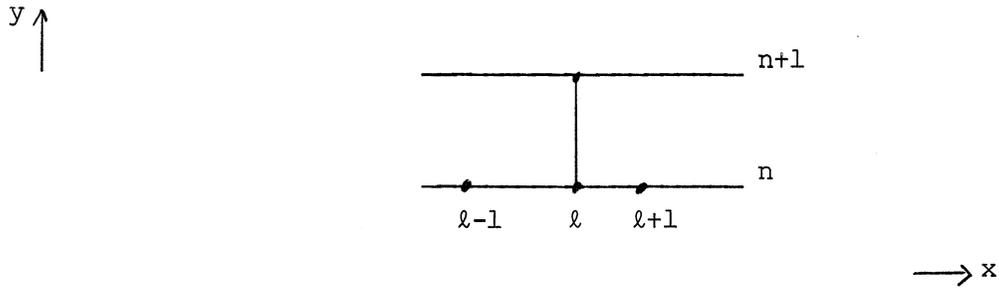
$$\underline{\det |a_{ij}| \neq 0}.$$

β) - Simplification de α .

La méthode suivante est une simplification de α dans le cas où il est possible d'utiliser une grille rectangulaire. C'est le cas, par exemple, si (I_0) est parallèle à l'axe des x. La grille est alors l'ensemble des points :

$$x_\ell = \ell h, \quad y_n = nk$$

où k et h sont les "pas" choisis respectivement suivant les directions Ox et Oy.



(III-8) peut alors être "approché" par le système d'équations aux différences finies suivant

$$(III-13) \quad \sum_{j=1}^{j=n} a_{ij}(\ell, n) \left[\frac{v_{n+1, \ell}^j - v_{n, \ell}^j}{k} + c_i(\ell, n) \frac{v_{n, \ell+1}^j - v_{n, \ell}^j}{h} \right] + d_i(\ell, n) = 0$$

$$i = 1, \dots, n$$

si $c_i(\ell, n) \leq 0$

si $c_i(\ell, n) \geq 0$ u_x^j est remplacé par $\frac{v_{n, \ell}^j - v_{n, \ell-1}^j}{h}$.

On note $a_{ij}(\ell, n)$, $c_i(\ell, n)$ et $d_i(\ell, n)$ pour indiquer que les a_{ij} , c_i , d_i sont calculées au point $x_\ell = \ell h$, $y_n = nk$.

Le fait de tenir compte du signe des c_i permet de préserver au mieux le domaine de dépendance.

L'ordre des approximations α et β sera précisé au chapitre IV.

Une étude rigoureuse de la convergence et de la stabilité pour les approximations α) et β) a été publiée par R. Courant et P.D. Lax [4], [13] dans le cas général, quasilinéaire, pour le problème de Cauchy.

L'étude est assez longue et nous engageons le lecteur à s'y référer.
 Nous avons préféré dans la suite faire l'étude de la stabilité dans le cas d'équations linéaires qui conduit "localement" à la même condition de stabilité [Chapitres IV et VI]. On montre que si, l'inégalité :

$$(III-14) \quad \max_i \left(\frac{k}{h} |c_i| \right) \leq 1 \quad i = 1, 2, \dots$$

est satisfaite, alors les approximations sont stables.

Notons que pour la méthode α , (III-14) revient à supposer que les points Q_i doivent nécessairement être pris entre Q' et Q'' (sect. 2- α).

III - SCHEMA "CENTRE" [8]

A la méthode β , on préfère parfois, utiliser un schéma "centré" en remplaçant $\frac{\partial u^j}{\partial x}$ par :

$$\frac{v_{n, \ell+1}^j - v_{n, \ell-1}^j}{2h}$$

qui est une approximation d'ordre h^2 pour la dérivée de u^j par rapport à x tandis que $\frac{1}{h}(v_{n, \ell+1}^j - v_{n, \ell}^j)$ est une approximation d'ordre h [Ch. IV, sect. A-5].

Les équations aux différences finies s'écrivent ici :

$$\sum_{j=1}^{j=n} \bar{a}_{ij}(\ell, n) \left[\frac{v_{n, \ell+1}^j - \bar{v}_{n, \ell}^j}{k} + \bar{c}_i(\ell, n) \cdot \frac{v_{n, \ell+1}^j - v_{n, \ell-1}^j}{2h} \right] + \bar{d}_i(\ell, n) = 0$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

Les quantités barrées signifient :

$$\bar{v}_{n, \ell}^j = \frac{1}{2} [v_{n, \ell+1}^j - v_{n, \ell-1}^j]$$

$$\bar{a}_{ij}(\ell, n) = a_{ij}(x_\ell, y_n, \bar{v}_{n, \ell}^j) \text{ etc...}$$

Il existe bien d'autres méthodes aux différences finies pour ce problème, nous ne pouvons pas les exposer toutes. La méthode des coefficients indéterminées exposée au chapitre IV en fera apparaître une autre que nous utiliserons en pratique.

C H A P I T R E - I V

STABILITE ET CONVERGENCE DES APPROXIMATIONS AUX

DIFFERENCES FINIES

INTRODUCTION

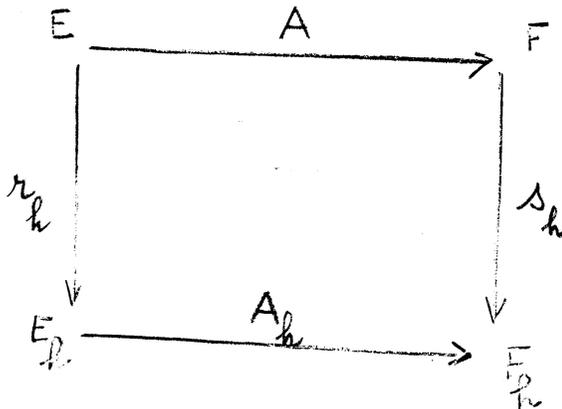
Ce chapitre est consacré à des notions importantes de stabilité et de convergence des approximations aux différences finies. Nous nous sommes référés de très près au livre de Godunov et Ryaben'kii [7] et à un cours de Monsieur le Professeur GASTINEL [10]. Nous rappellerons également quelques résultats de Von-Neumann dont les travaux développés ensuite par d'autres auteurs [11], [14] ont été importants et très utiles dans ce domaine.

Les exemples simples que nous traiterons ont été choisis de telle sorte qu'ils nous soient utiles dans la suite. Ce sont tous des cas d'approximations linéaires. En fait, on peut étendre les résultats obtenus aux cas non linéaires en cherchant des conditions de stabilité, locales (à supposer les coefficients constants) ; cette méthode, due à Von-Neumann, est empirique, mais l'expérience a montré qu'elle est valable.

A -

A-1 - APPROXIMATIONS D'OPERATEURSSoient :* E et F deux espaces de Banach munis des normes $\| \cdot \|_E$ et $\| \cdot \|_F$

* A un opérateur de E dans F.

* h un paramètre variable dans $]0, h_0[$ * E_h et F_h deux espaces de Banach de normes $\| \cdot \|_{E_h}$ et $\| \cdot \|_{F_h}$ * Deux applications linéaires, continues r_h et s_h appelées restrictions respectivement de E dans E_h et de F dans F_h .* A_h un opérateur de E_h dans F_h Définitions :(1) On dit que $\| \cdot \|_{E_h}$ (resp. $\| \cdot \|_{F_h}$) est compatible avec $\| \cdot \|_E$ (resp. $\| \cdot \|_F$)si $\lim_{h \rightarrow 0} \|r_h u\|_{E_h} = \|u\|_E \quad \forall u \in E.$ (respectivement $\lim_{h \rightarrow 0} \|s_h v\|_{F_h} = \|v\|_F \quad \forall v \in F).$

(2) a) Un opérateur A_h est dit consistant à l'opérateur A si, pour tout $u \in E$,

$$(IV-1) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \|A_h(r_h u) - s_h(Au)\|_{F_h} = 0$$

On dit encore que A_h est une approximation de A .

b) Un opérateur A_h sera une approximation de A à l'ordre p en h ,
si, pour tout $u \in E$,

$$(IV-2) \quad \|A_h(r_h u) - s_h(Au)\| \leq O(h^p)$$

($O(h^p)$) signifie qu'il existe une constante M positive et indépendante de h telle que $O(h^p) \leq M h^p$.

(3) Stabilité

a) - Une famille d'opérateurs linéaires A_h est stable, s'il existe une constante K indépendante de h telle que, pour tout $u_h \in E_h$,
 $h \in]0, h_0 [$:

$$(IV-3) \quad \|A_h u_h\|_{F_h} \leq K \|u_h\|_{E_h}$$

La stabilité est donc une propriété de continuité uniforme en h de la famille A_h .

b) - Si A_h est un opérateur non linéaire, de E_h dans F_h il est stable si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta(\varepsilon) > 0$, indépendant de h , tel que

$$(IV-4) \quad \|u_h - \tilde{u}_h\|_{E_h} < \delta(\varepsilon) \text{ entraîne } \|A_h u_h - A_h \tilde{u}_h\|_{F_h} < \varepsilon$$

pour tout $u_h, \tilde{u}_h \in E_h$.

Dans le cas d'un opérateur linéaire, les deux définitions sont évidemment équivalentes.

A-2 - PROBLEME

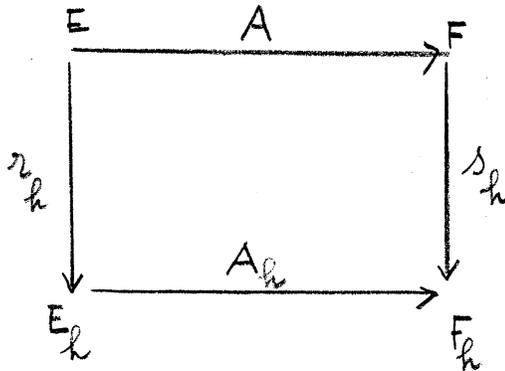
Etant donnés les espaces de Banach E et F, soit f donné dans F et cherchons $u \in E$ telle que

$$(IV-5) \quad Au = f$$

Nous supposons que A^{-1} existe.

On se propose "d'approcher" (IV-5) par :

$$(IV-6) \quad A_h u_h = f_h$$



Nous dirons que (IV-6) est une approximation d'ordre p en h pour le problème (IV-5) si, pour tout $u \in U$

$$(IV-7) \quad \|A_h r_h u - s_h Au\|_{F_h} \leq k_1 h^{p_1} \quad , \quad \|f_h - s_h f\|_{F_h} \leq k_2 h^{p_2} \quad p = \min(p_1, p_2)$$

(1) Approximation convergente

(IV-6) est une approximation convergente d'ordre p en h pour le problème (IV-1) s'il existe une constante M indépendante de h telle que :

$$(IV-8) \quad \|u_h - r_h u\|_{E_h} < M h^p$$

(u et u_h respectivement les solutions de IV-5 et IV-6).

(2) Théorème

Si l'opérateur A_h est consistant à A et si l'opérateur A_h^{-1} est stable, alors (IV-6) est une approximation convergente.

Démonstration :
.....

Hypothèses :

- A_h^{-1} existe et $u_h = A_h^{-1}f_h$; $Au = f$.
- $\lim_{h \rightarrow 0} \|A_h r_h u - s_h Au\|_{F_h} = 0$, $\lim_{h \rightarrow 0} \|f_h - s_h f\|_{F_h} = 0$
- Etant donné ε , il existe $\delta(\varepsilon)$ tel que

$$\|f_h - \tilde{f}_h\|_{F_h} < \delta(\varepsilon) \text{ entraîne } \|A_h^{-1}f_h - A_h^{-1}\tilde{f}_h\|_{E_h} < \varepsilon$$

donc :

$$u_h - r_h u = A_h^{-1}f_h - A_h^{-1}s_h f + A_h^{-1}s_h Au - A_h^{-1}(A_h r_h u)$$

$$\|u_h - r_h u\|_{E_h} \leq 2\varepsilon \text{ pour } h \text{ assez petit.}$$

c.q.f.d.

A-3 - CAS D'UN PROBLEME AUX LIMITESa) Problème différentiel

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n de frontière Γ
et soit Γ_i des parties quelconques de Γ .

Cherchons une fonction $u(x)$ définie sur $\Omega+\Gamma$ et telle que :

$$(IV-9) \quad \begin{cases} Du(x) = f & x \in \Omega \\ d_i u(x) = \varphi_i & x \in \Gamma_i \quad i = 1, 2, \dots, m \end{cases}$$

f et φ_i étant définis respectivement sur Ω et Γ_i ($i = 1, 2, \dots, m$) D et d_i ($i=1, 2, \dots$) sont, d'une manière générale, des opérateurs différentiels. $d_i u(x) = \varphi_i$ $i=1, 2, \dots$ exprime certaines "conditions aux limites"

b) Approximation

b.1) - Soit h un paramètre $\in]0, h_0[$ auquel nous ferons correspondre :

* un ensemble fini de points $\Omega_h \subset \Omega+\Gamma$ ("grille") de frontière Γ_h .

* une "fonction grille" notée u_h définie sur Ω_h .

b.2) - D_h est un opérateur qui à toute fonction grille u_h définie sur Ω_h fait correspondre une fonction grille $D_h u_h$ définie sur une partie Ω_h° de Ω_h . D_h sera un opérateur "aux différences finies".

b.3) - d_{ih} est un opérateur (aux différences finies) qui, à des fonctions grilles u_h définies sur Γ_{ih}° fait correspondre des fonctions $d_{ih} u_h$ définies sur Γ_{ih} , $i = 1, 2, \dots, m$.

b.4) - Remplaçons maintenant le problème (IV-9) par le problème aux différences finies :

$$(IV-10) \quad \begin{cases} D_h u_h = f_h \\ d_{ih} u_h = \varphi_{ih} \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, m$$

Désignons par :

- U et F les espaces normés des fonctions u et f définies dans $\Omega + \Gamma$ et Γ
- Φ_i les espaces normés de fonctions φ_i définies sur Γ_i ($i = 1, 2, \dots, m$)
- U_h et F_h les espaces normés des fonctions u_h et f_h définies sur Ω_h et Γ_h
- Φ_{ih} les espaces normés des fonctions φ_{ih} définies sur Γ_h° .

b.5) - Ceci posé, on admettra que les normes sur U_h , F_h , Φ_{ih} sont compatibles c'est-à-dire :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \| \cdot \|_{U_h} = \| \cdot \|_U \quad ; \quad \lim_{h \rightarrow 0} \| \cdot \|_{F_h} = \| \cdot \|_F \quad ;$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \| \cdot \|_{\Phi_{ih}} = \| \cdot \|_{\Phi_i} \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

b.6) - D'autre part, nous admettrons que des "conditions de compatibilité" sont satisfaites pour les fonctions φ_{ih} aux points de Γ_{ih}° où elles sont définies ($i = 1, 2, \dots, m$).

Les conditions de compatibilité sont les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il existe au moins une solution satisfaisant à $d_{ih} u_h = \varphi_{ih} \quad i = 1, 2, \dots, m.$

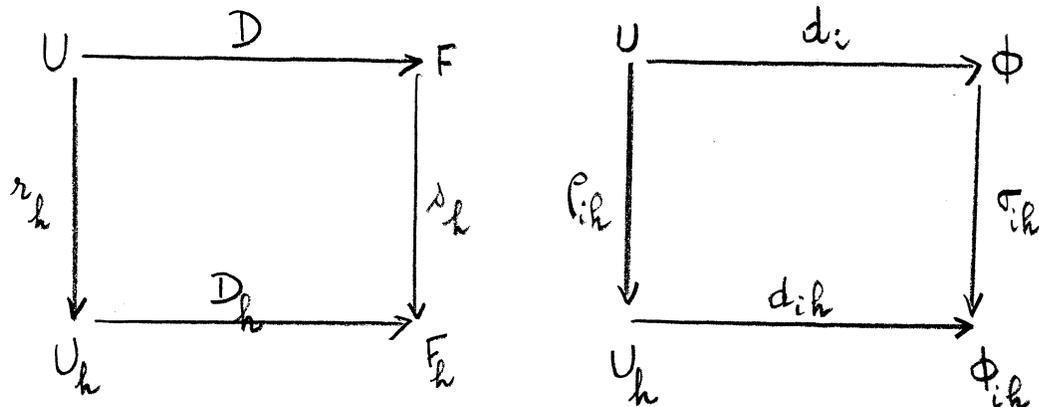
b.7) - Soient r_h , s_h , ρ_{ih} et σ_{ih} les restrictions :

$$u \in U \xrightarrow{r_h} r_h u \in U_h \text{ définies sur } \Omega_h$$

$$u \in U \xrightarrow{\rho_{ih}} \rho_{ih} u \in U_h \text{ définies sur } \Gamma_{ih}^{\circ} \quad (1 \leq i \leq m)$$

$$f \in F \xrightarrow{s_h} s_h f \in F_h \text{ définies sur } \Omega_h^{\circ}$$

$$\varphi_i \in \Phi_i \xrightarrow{\sigma_{ih}} \sigma_{ih} \varphi_i \in \Phi_{ih} \text{ définies sur } \Gamma_{ih} \quad (1 \leq i \leq m)$$



b.8) - (IV-10) est une approximation de (IV-9) d'ordre p en h (les hypothèses b.5 et b.6 étant satisfaites) s'il existe $2(m+1)$ constantes M, N, M_i, N_i ($i = 1, 2, \dots, m$) (positives et indépendantes de h) telles que pour tout $u \in U, f \in F$

$$\varphi_i \in \Phi_i \quad i = 1, 2, \dots, m \text{ et } h \in]0, h_0[:$$

$$(IV-11) \quad \begin{cases} \|(s_h D - D_h r_h)u\|_{F_h} \leq M h^{p_1} & , \quad \|f_h - s_h f\|_{F_h} \leq N h^{p_2} ; \\ \|(\sigma_{ih} d_i - d_{ih} \rho_{ih})u\|_{\Phi_{ih}} \leq M_i h^{p_3} & \|\varphi_{ih} - \sigma_{ih} \varphi_i\|_{\Phi_{ih}} \leq N_i h^{p_4} ; \end{cases}$$

$$i = 1, 2, \dots, m \quad p = \min(p_1, p_2, p_3, p_4)$$

c) Stabilité

Nous utiliserons les définitions de la section A-2 en notant que l'opérateur A_h est ici formé de l'opérateur D_h et des opérateurs d_{ih} $i = 1, 2, \dots, m$ [§ b.4] et nous nous intéressons à la stabilité de l'opérateur A_h^{-1} tel que $u_h = A_h^{-1} f_h$. Les définitions seront donc ici les suivantes :

c.1) - L'approximation (IV-10) est totale ment stable si pour tout $h \in]0, h_0[$ et tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta(\epsilon)$ tel que si :

$$\|f_h - \tilde{f}_h\|_{F_h} < \delta(\epsilon) \text{ et } \|\varphi_{ih} - \tilde{\varphi}_{ih}\|_{\Phi_{ih}} < \delta(\epsilon) \quad (i=1, 2, \dots, m)$$

$$\text{alors } \|u_h - \tilde{u}_h\|_{U_h} < \varepsilon$$

$$\text{pour tout } \tilde{u}_h \text{ tel que } D_h \tilde{u}_h = \tilde{f}_h \text{ et } d_{ih} \tilde{u}_h = \tilde{\varphi}_{ih} \quad i=1,2,\dots,m$$

Remarque : si D_h et d_{ih} $i = 1,2,\dots,m$ sont des opérateurs linéaires, la stabilité totale s'exprime simplement de la manière suivante : il existe $m+1$ constantes positives N et N_i , indépendantes de h telle que :

$$(IV-13) \quad \|u_h\|_{U_h} \leq N \|f_h\|_{F_h} + \sum_{i=1}^{i=m} N_i \|\varphi_{ih}\|_{\phi_{ih}}$$

c.2) -

c.2.a) - Stabilité par rapport aux conditions aux limites

L'approximation (IV-10) est stable par rapport aux q ($q \leq m$) conditions aux limites de $i = 1,2,\dots,q$ si pour tout $h \in]0, h_0[$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta(\varepsilon)$ tel que :

si

$$\|\varphi_{ih} - \tilde{\varphi}_{ih}\|_{\phi_{ih}} < \delta(\varepsilon) \quad i = 1,2,\dots,q$$

alors

$$\|u_h - \tilde{u}_h\|_{U_h} < \varepsilon$$

pour tout \tilde{u}_h tel que :

$$D_h \tilde{u}_h = \tilde{f}_h \quad ; \quad d_{ih} \tilde{u}_h = \tilde{\varphi}_{ih} \quad 1 \leq i \leq q \quad ; \quad d_{ih} u_h = \varphi_{ih} \quad q+1 \leq i \leq m.$$

c.2.b.) - Stabilité par rapport au membre de droite

L'approximation (IV-10) est stable par rapport au membre de droite si pour tout $h \in]0, h_0[$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tel que

$$\text{si} \quad \|f_h - \tilde{f}_h\|_{F_h} < \delta(\epsilon)$$

alors

$$\|u_h - \tilde{u}_h\|_{U_h} < \epsilon$$

$$\forall \tilde{u}_h : D_h \tilde{u}_h = \tilde{f}_h, \quad d_{ih} \tilde{u}_h = \varphi_{ih} \quad i = 1, 2, \dots, m$$

d) - Convergence

(IV-10) est une approximation convergente d'ordre p en h , s'il existe une constante M positive indépendante de h telle que :

$$(IV-14) \quad \|u_h - r_h u\|_{U_h} < Mh^p$$

e) - Théorème

Pour (IV-10), on peut énoncer le théorème de A-2 sect. 2 :

Si le problème (IV-9) admet une solution $u \in U$ et si l'approximation (IV-10) d'ordre p en h est stable, alors (IV-10) est aussi convergente à l'ordre p en h .

A-4 - EXEMPLE D'APPROXIMATION ET D'ETUDE DE LA STABILITE

Pour illustrer les notions précédentes, voici un exemple très simple.

A-4-1 - Considérons le problème différentiel :

$$(IV-15) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial y} + c \frac{\partial u}{\partial x} = f & (c = \text{constante}) \\ d(u(x)) \quad u(x, 0) = \varphi(x). \end{cases}$$

$u(x,y)$ est la fonction inconnue, supposée définie sur tout

$$\Omega + \Gamma \subset \mathbb{R}^2 = \{-\infty < x < +\infty, \quad 0 \leq y \leq Y\} \quad \text{et } \varphi(x) \text{ est définie sur}$$

$\Gamma = \{-\infty < x < +\infty, \quad y = 0\}$. Nous admettrons que $u(x,y) \in U$ espace des fonctions 2 fois continuellement différentiables.

Considérons la grille $\Omega_h = \{x_j = jh, y_n = nk \mid \begin{array}{l} j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ n = 0, 1, \dots, N \end{array}\}$

En général, on fait $k = \alpha h$ ($\alpha = \text{constante}$).

Soit :

$$(IV-16) \quad D_h u_h \equiv \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{k} + c \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} = f_j^n$$

$$j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$n \leq N-1.$$

Pour simplifier, nous admettrons que $f_h = s_h f$.

Remarques - Le système de Sokolovsky est constitué par deux équations quasi-linéaires (c dépend de u) du type (IV-15).

(IV-16) est la simplification β du chapitre III, Sect. 2.

Ici, $\varphi_h = u_h(x,0)$ est définie sur $\Gamma_h = \{jh, 0 \mid j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ $\Gamma_h^0 \equiv \Gamma_h$ et $\Omega_h^0 \equiv \Omega_h$.

Formons

$$\{D_h u_h\}_j^n = \frac{1}{k} [u(x_j, y_n + k) - u(x_j, y_n)] + \frac{c}{h} [u(x_j, y_n) - u(x_{j-1}, y_n)].$$

D'après l'hypothèse de régularité pour $u(x,y)$, on peut écrire :

$$u(x, y+k) = u(x, y) + ku'_y(x, y) + \frac{k^2}{2} u''_{yy}(x, y) + \frac{k^3}{3!} u^{(3)}_{yy}(x, y + \theta_1 k) \quad 0 \leq \theta_1 \leq 1$$

$$u(x-h, y) = u(x, y) - hu'_x(x, y) + \frac{h^2}{2} u''_{xx}(x, y) - \frac{h^3}{3!} u^{(3)}_{xx}(x - \theta_2 h, y) \quad 0 \leq \theta_2 \leq 1$$

Ce qui donne :

$$\{D_{h^r h}^n u\}_j^n = u'_y(x_j, y_n) + cu'_x(x_j, y_n) + \frac{k}{2} u''_{y^2} - \frac{c}{2} hu''_{x^2} + O(h^2, k^2)$$

$$\{D_{h^r h}^n u\}_j^n = \{s_h(Du)\}_j^n + \frac{k}{2} u''_{y^2}(x_j, y_n) - \frac{c}{2} hu''_{x^2}(x_j, y_n) + O(h^2, k^2)$$

si $k = rh$, on a finalement :

$$(IV-18) \quad \{D_{h^r h}^n u\}_j^n = \{s_h(Du)\}_j^n + O(h).$$

D'autre part :

- les conditions de compatibilité sont ici trivialement satisfaites.
- choisissons les normes :

$$\|u\|_U = \max_{x, y \in \Omega} |u| \quad ; \quad \|f\|_F = \max_{x, y \in \Omega} |f| \quad ; \quad \|\varphi(x)\|_{\Phi} = \max_{x \in \Gamma} |\varphi|$$

alors si :

$$\|u_h\|_{U_h} = \max_{j, n} |u_j^n| \quad ; \quad \|f_h\|_{F_h} = \max_{i, n} |f_i^n| \quad ; \quad \|\varphi_h\|_{\Phi_h} = \max_j |\varphi_j|$$

$$j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad n = 0, 1, \dots, N$$

On vérifie facilement que les normes sont compatibles.

D'après (IV-18), on a alors immédiatement :

$$\|D_{h^r h}^n u - s_h Lu\|_{F_h} \leq O(h)$$

D'autre part, on voit que :

$$\|d_h r_h u - \sigma_h du\|_{\phi_h} = 0$$

Donc, (IV-16) - (IV-17) est une approximation du premier ordre en h.

Stabilité :

Nous avons besoin de faire l'hypothèse supplémentaire : $c > 0$.

Posons $\frac{k}{h} c = r \geq 0$. On a la schéma explicite :

$$u_j^{n+1} = u_j^n (1-r) + r u_{j-1}^n + k f_j^n \quad \begin{cases} n \leq N-1 \\ j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases}$$

Supposons $r < 1$, alors :

$$|u_j^n (1-r) + r u_{j-1}^n| \leq \max_j (|u_j^n|, |u_{j-1}^n|) \leq \max_j |u_j^n|$$

d'où :

$$|u_j^{n+1}| \leq \max_j |u_j^n| + k |f_j^n| \quad \forall n, j \mid n \leq N-1, \quad -\infty < j < +\infty$$

donc

$$|u_j^{n+1}| \leq \max_j |u_j^n| + k \|f^{(h)}\|_{F_h}$$

et

$$\max_j |u_j^{n+1}| \leq \max_j |u_j^n| + k \|f^{(h)}\|_{F_h}$$

En ajoutant toutes les inégalités obtenues pour tout $n < N$:

$$\begin{aligned} \max_j |u_j^{n+1}| &\leq \max_j |u_j^0| + (n+1)k \|f^{(h)}\|_{F_h} \\ &\leq \|\varphi_h\|_{\phi_h} + Nk \|f^{(h)}\|_{F_h} \end{aligned}$$

ce qui prouve la stabilité totale pourvu que $\frac{k}{h} c \leq 1$.

On peut montrer de la même façon que le schéma

$$u_j^{n+1} = ru_{j+1}^n + (1-r)u_j^n + kf_j^n \quad \begin{array}{l} n \leq N-1 \\ -\infty \leq j < +\infty \end{array}$$

avec la même condition $u_j^0 = \varphi_j$ $-\infty < j < +\infty$

et avec $c < 0$, est stable totalement pourvu que $\frac{k}{h}|c| \leq 1$ (stabilité "conditionnelle").

A-5 - METHODE DES COEFFICIENTS INDETERMINEES [7]

A-5-1 - Cette méthode permet d'obtenir des formes plus générales d'approximation. Nous traitons le cas intéressant suivant :

Soit l'équation :

$$(IV-19) \quad \frac{\partial u}{\partial y} + c \frac{\partial u}{\partial x} = f(x,y).$$

On se propose de construire un schéma s'écrivant sous la forme générale :

$$D_h u_h \cong a^0 u_j^{n+1} + a_{-1} u_{j-1}^n + a_0 u_j^n + a_1 u_{j+1}^n = f_j^n$$

On peut montrer [7] que :

1) On peut trouver a^0 , a_{-1} , a_0 et a_1 tels que

$$\|D_h r_h u - s_h Du\|_{F_h} = O(h)$$

2) Il est impossible de trouver des coefficients tels que l'approximation soit d'ordre h^2 .

3) On peut trouver des coefficients tels que D_h approche à l'ordre h^2 l'opérateur D_h^* défini par :

$$D_h^* u = Du + \frac{1}{2} rh \left[\frac{\partial}{\partial y} (Du) + \frac{\partial}{\partial x} (Du) \right] = P_h(f) \text{ avec}$$

$$P_h = E * \frac{1}{2} rh \left[\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \right]$$

Une solution de $Du = f$ est aussi solution de $D_h^* u = P_h u$.

Les deux premières propositions s'obtiennent facilement. En supposant $u(x,y)$ assez régulière pour utiliser les développements en série de Taylor, on a : $\left(\frac{k}{h} |c| = r\right)$

$$\begin{aligned} (D_h^* u)_j^n &= (a^0 + a_0 + a_1 + a_{-1})u(jh, nk) + a^0 r h u_y(jh, nk) \\ &+ (a_1 - a_{-1})h u_x(jh, nk) + \frac{1}{2} a^0 r^2 h^2 u_{yy}(jh, nk) \\ &+ \frac{1}{2} (a_1 + a_{-1})h^2 u_{xx}(jh, nk) + O(a^0 r^3 h^3, a_1 h^3, a_{-1} h^3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (D_h r_h u)_j^n &= a^0 r h (Du)_j^n + (a^0 + a_0 + a_1 + a_{-1})u(jh, nk) \\ &+ (a^0 r + a_1 - a_{-1})h u_x(jh, nk) + \frac{1}{2} a^0 r^2 h^2 u_{yy}(jh, nk) \\ &+ \frac{1}{2} (a_1 + a_{-1})h^2 u_{xx}(jh, nk) + O(a^0 r^3 h^3, a_1 h^3, a_{-1} h^3). \end{aligned}$$

L'approximation sera d'ordre h si

$$a^0 r h = 1 \quad ; \quad a^0 r + a_1 - a_{-1} = 0 \quad ; \quad a^0 + a_0 + a_1 + a_{-1} = 0$$

Ce qui donne 2 solutions :

$$a^0 = \frac{1}{rh}, \quad a_{-1} = 0, \quad a_0 = \frac{r-1}{rh}, \quad a_1 = -\frac{1}{h}$$

et

$$a^0 = \frac{1}{rh}, \quad a_{-1} = \frac{1}{2h}, \quad a_0 = -\frac{1}{rh}, \quad a_1 = -\frac{1}{2h}.$$

La première correspond au schéma (IV-16) et la seconde donne le schéma :

$$\frac{1}{h}(u_j^{n+1} - u_j^n) - \frac{1}{2h}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) = f_j^n$$

(ceci est à peu de chose près le schéma γ du Chapitre III).

Il est clair qu'on ne peut pas, (à moins de prendre un plus grand nombre de points de la grille) trouver une approximation d'ordre supérieur à h .

On vérifie en effet que :

$$\frac{1}{2} a^0 r^2 h^2 u_{yy} + \frac{1}{2} (a_1 + a_{-1}) h^2 u_{xx} + O(a^0 r^3 h^3, a_1 h^3, a_{-1} h^3) = O(h)$$

La 3ème proposition s'obtient de la manière suivante, on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} u &\equiv \frac{\partial}{\partial x} u + Du \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} u &\equiv \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x} u + Du \right) \equiv \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial y} u \right) + \frac{\partial}{\partial y} (Du) \\ &\equiv \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} u + Du \right) + \frac{\partial}{\partial y} (Du) \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} u + \frac{\partial}{\partial x} (Du) + \frac{\partial}{\partial y} (Du). \end{aligned}$$

D'où, en utilisant le résultat déjà trouvé pour $(D_{hh} r_h u)_j^n$:

$$\begin{aligned} (D_{hh} r_h u)_j^n &= a^0 r h (Du)_j^n + (a^0 + a_0 + a_1 + a_{-1}) u + (a^0 r + a_1 - a_{-1}) h u_x \\ &\quad + \frac{1}{2} a^0 r^2 h^2 \left[\frac{\partial}{\partial y} (Du) + \frac{\partial}{\partial x} (Du) \right]_j^n \\ &\quad + \frac{1}{2} (a^0 r^2 + a_1 + a_{-1}) h^2 u_{xx} + O(a^0 r^3 h^3, a_1 h^3, a_{-1} h^3) \end{aligned}$$

Cherchons a_0 , a_1 et a_{-1} tels que :

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_{-1} = 0 \\ (a_0 r + a_1 - a_{-1})h = 0 \\ (a_0 r^2 + a_1 + a_{-1})h^2 = 0 \\ a_0 r h = 1 \end{cases}$$

on trouve :

$$a_0 = \frac{1}{rh}, \quad a_1 = -\frac{1}{rh} + \frac{r}{h}, \quad a_{-1} = \frac{1-r}{2h}, \quad a_1 = -\frac{1+r}{2h}$$

avec :

$$(D_h r_h u)_j^n = (Du)_j^n + \frac{1}{2} rh \left[\frac{\partial}{\partial y} (Du) + \frac{\partial}{\partial x} (Du) \right]_j^n + O(a_0 r^3 h^3, a_1 h^3, a_{-1} h^3)$$

$$O(a_0 r^3 h^3, a_1 h^3, a_{-1} h^3) \leq O(h^2).$$

Donc

$$(D_h r_h u)_j^n = (D_h^* u)_j^n + O(h^2).$$

On a donc mis en évidence l'opérateur D_h^* approché à l'ordre h^2 par D_h :

$$\|D_h r_h u - s_h D_h^* u\| \leq O(h^2)$$

et défini par :

$$D_h^* u = Du + \frac{1}{2} rh \left[\frac{\partial}{\partial y} (Du) + \frac{\partial}{\partial x} (Du) \right] = P_h(Du)$$

$$P_h = E + \frac{1}{2} rh \left(\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \right).$$

L'opérateur L_h est alors donné par :

$$(IV-20) \quad (D_h u_h)_j^n = u_j^{n+1} = u_j^n + \frac{1}{2} r (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \frac{1}{2} \frac{k^2}{h^2} c^2 (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) + k f_j^n$$

A-5-2- Remarques

Si on procède comme dans A-4-1 pour l'approximation

$$D_h u_h \equiv \frac{1}{k} [u_j^{n+1} - \bar{u}_j^{-n}] - \frac{1}{2h} [u_{j+1}^n - u_{j-1}^n] = f_j^n$$

pour (IV-19) ($\bar{u}_j^{-n} = \frac{1}{2} [u_{j+1}^n + u_{j-1}^n]$) est d'ordre h si $k = rh$.
Par contre, si $k = rh^2$, on trouve :

$$(D_h u_h)_j^n = (Du)_j^n - \frac{1}{2r} u_{yy}''(x_j, y_n) + O(h^2)$$

Autrement dit, on a une approximation d'ordre h^2 .

pour

$$(IV-21) \quad \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{2r} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

La ressemblance avec (IV-20) est évidente. Notons que (IV-20) sera en pratique plus intéressante, pour un même pas h , si elle est stable pour $k = O(h)$.

A-5-3 - Etude de la stabilité de (IV-20) [7]

Reprenons le problème différentiel (IV-15). Soient U (resp. F) les espaces des fonctions (u est supposé 2 fois continuellement différentiable) $u(x,y) = u_y(x)$ (resp. $f(x,y) = f_y(x)$) telles que pour tout $y \in [0, Y]$, $u_y(x) \in L^2[-\infty, +\infty[$ (resp. $f_y(x) \in L^2[-\infty, +\infty[$) munis des normes :

$$\|u\|_U = \max_y \left(\int u^2(x,y) dx \right)^{1/2}, \quad \|f\|_F = \max_y \left(\int f^2(x,y) dx \right)^{1/2}$$

$$\|\varphi\|_\Phi = \left(\int_\Gamma \varphi^2(x) dx \right)^{1/2} \quad (\Phi \subset L^2[-\infty, +\infty[)$$

auxquelles on peut associer sur les espaces discrets correspondants U_h , F_h et Φ_h les normes compatibles :

$$\|u_h\|_{U_h} = \max_n \left(h \sum_j |u_j^n|^2 \right)^{1/2} ; \quad \|f_h\|_{F_h} = \max_n \left(h \sum_j |f_j^n|^2 \right)^{1/2} ;$$

$$\|\varphi_h\|_{\Phi_h} = \left(h \sum_j |\varphi_j|^2 \right)^{1/2}.$$

Posons :

$$\begin{aligned} V_j^n &= u_j^n + \frac{1}{2} r (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \frac{1}{2} r^2 (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) \\ &= \left(\frac{1}{2} r + \frac{1}{2} r^2 \right) u_{j+1}^n + (1-r^2) u_j^n + \left(\frac{1}{2} r^2 - \frac{1}{2} r \right) u_{j-1}^n \end{aligned}$$

et supposons que : $r = \frac{k}{h} \leq 1$, alors on a l'inégalité [7] :

$$\sum_j |V_j^n|^2 \leq \sum_j |u_j^n|^2$$

(souvent appelée "inégalité d'énergie" pour des raisons d'analogie avec des énergies mises en jeu en physique).

Donc :

$$\sqrt{h \sum_j |V_j^n|^2} \leq \sqrt{h \sum_j |u_j^n|^2}$$

Comme $u_j^{n+1} = V_j^n + k f_j^n$, on a :

$$\begin{aligned} \sqrt{h \sum_j |u_j^{n+1}|^2} &\leq \sqrt{h \sum_j |V_j^n|^2} + k \sqrt{h \sum_j |f_j^n|^2} \\ &\leq \sqrt{h \sum_j |u_j^n|^2} + k \|f_h\|_{F_h} \end{aligned}$$

En ajoutant toutes les inégalités obtenues pour $n = 0, 1, 2, \dots$, on obtient :

$$\sqrt{h \sum_j |u_j^{n+1}|^2} \leq \sqrt{h \sum_j |u_j^0|^2} + (n+1) k \|f_h\|_{F_h}$$

vrai $\forall n : (n+1)k \leq Y$, donc :

$$\|u_h\|_{U_h} \leq Y \|f_h\|_{F_h} + \|\varphi_h\|_{\Phi_h}$$

ce qui prouve bien la stabilité pourvu que $r \leq 1$.

* pour $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$; on note également pour simplifier l'écriture Σ à la place de Σ $-\infty < j < +\infty$

B-1 - FORME REDUITE D'UNE APPROXIMATION LINEAIRE

Nous traitons cette question à l'aide de l'exemple suivant :
repreons le problème différentiel :

$$(IV-21) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial y} + c \frac{\partial u}{\partial x} = f \quad \Omega = \{0 \leq x \leq X \quad 0 \leq y \leq Y\} \\ d_1(u) = u(x,0) = \varphi_1(x) \\ d_2(u) = u(X,y) = \psi(y). \end{array} \right.$$

approché par :

$$(IV-22) \left\{ \begin{array}{l} D_h u_h \quad u_j^{n+1} = u_j^n (1-r) + r u_{j+1}^n + k f_j^n \\ \text{sur } \Omega_h = \{x_j, y_n \mid j = 0, 1, 2, \dots, J-1, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1\} \\ (X = Jh, \quad Y = Nk) \\ d_1 u_h \equiv u_j^0 = \varphi_j \quad \text{sur } \Gamma_{1h}^0 \equiv \Gamma_{1h} = \{x_j, y = 0, \quad j = 0, 1, 2, \dots, J\} \\ d_2 u_h \equiv u_J^n = \psi^n \quad \text{sur } \Gamma_{2h}^0 \equiv \Gamma_{2h} = \{x = X, y_n = nk, \quad n=0, 1, 2, \dots, N\} \end{array} \right.$$

(cet exemple a été construit par Godunov (1954)).

D'après ce que nous avons vu (A-4-1), il est clair que (IV-32) est une approximation d'ordre h pour (IV-21).

B-1-1 -

* Considérons la nouvelle fonction grille "monodimensionnelle",

$$u^n = (u_0^n, u_1^n, \dots, u_J^n)$$

$$= (\psi^n, u_1^n, \dots, u_J^n)$$

$$u^0 = (\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_J)$$

* Considérons l'espace des u^n et introduisons la norme :

$$\|u^n\| = \max_{0 \leq j \leq J} |u_j^n|$$

Une fois normé, cet espace sera noté U'_h .

L'introduction d'une norme sur l'espace des u^n , définit une norme sur l'espace des u_h :

$$\max_n \|u^n\| = \max_n \max_j |u_j^n| = \|u_h\|_{U_h}$$

* Puisque le problème est linéaire, l'approximation sera stable si

$$\|u^n\|_{U'_h} \leq M \|\varphi_h\|_{\Phi_h} + \|f_h\|_{F_h}.$$

B-1-2 - Forme réduite

$$* \text{ Posons } \begin{cases} v_j^{n+1} = (1-r) u_j^n + r u_{j+1}^n \\ \rho_j^n = f_j^n \end{cases}$$

(IV-22) s'écrit :

$$u_j^{n+1} = v_j^{n+1} + k \rho_j^n$$

* Soit maintenant le nouvel opérateur R_h qui à la fonction grille $(a_0, a_1, \dots, a_J) \in U_h'$ fait correspondre une fonction grille $(b_0, b_1, \dots, b_J) \in U$ et telle que :

$$b_j = (1-r) a_j + r a_{j+1}$$

Il est clair que $v^{n+1} = R_h u^n$ ($n \leq N-1$).

En introduisant la fonction grille $\rho^n = (f_0^n, f_1^n, \dots)$ appartenant à l'espace F_h' normé par $\|\rho^n\| = \max_{1 \leq j \leq J} |f_j^n|$ on a finalement :

$$(IV-23) \quad u^{n+1} = R_h u^n + k \rho^n \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

$$u^0 = (\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_J) \text{ donné.}$$

Remarque :

Ici R_h est un opérateur de dimension finie, dont la dimension augmente si h diminue, et peut être représenté par la matrice :

$$M_h = \begin{vmatrix} 1-r & r & & & 0 \\ 0 & 1-r & r & & \\ & & & & \\ & 0 & & & \\ & & & 1-r & r \\ 0 & & & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

(IV-23) s'écrivant :

$$\begin{vmatrix} u_0^{n+1} \\ u_1^{n+1} \\ \\ \\ u_J^{n+1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-r & r & & & \\ & 1-r & r & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & 1-r & r \\ & & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} f_0^n \\ f_1^n \\ \\ \\ f_{J-1}^n \\ \psi^{n+1} \\ k \end{vmatrix}$$

B-2 - UNE CONDITION SUFFISANTE DE STABILITE [7]

Théorème :

Soit l'approximation linéaire $L_h u_h = f_h$ mise sous la forme réduite $u^{n+1} = R_h u^n + k \rho^n$.

si, pour tout $n \leq N$:

$$\|u^0\| \leq K_1 (\|f_h\|_{F_h} + \|\varphi_h\|_{\Phi_h})$$

$$\|\rho^n\| \leq K_2 (\|f_h\|_{F_h} + \|\varphi_h\|_{\Phi_h})$$

alors, pour $n \leq N$

$\|R_h^n\| \leq K$ est une condition suffisante de stabilité totale.

Démonstration :
.....

$u^n = R_h^n u^0 + k \rho^{n-1}$, de proche en proche on a

$$u^n = R_h^n u^0 + k(R_h^{n-1} \rho^0 + R_h^{n-2} \rho^1 + \dots + \rho^{n-1})$$

$$n = 0, 1, \dots, N$$

$$\begin{aligned} \|u^n\|_{U_h'} &\leq \|R_h^n u^0\| + k(\|R_h^{n-1} \rho^0\| + \dots + \|\rho^{n-1}\|) \\ &\leq K \|u^0\| + kK(\|\rho^0\| + \|\rho^1\| + \dots + \|\rho^{n-1}\|) \end{aligned}$$

$$\|u^n\|_{U_h'} \leq M(\|f_h\|_{F_h} + \|\varphi_h\|_{\Phi_h})$$

$$\text{avec } M = K(K_1 + Y K_2)$$

$$(Y = Nk).$$

Ce qui prouve la stabilité totale.

C-1 - CRITERE DE STABILITE DE VON-NEUMANN

C-1-1 - Spectre d'un opérateur

λ est un point du spectre de l'opérateur R_h , (ici, h fixé $\in]0, h_0[$), si, pour tout ε positif, il existe une fonction $u \in U_h'$ telle que :

$$\|R_h u - \lambda u\|_{U_h'} \leq \varepsilon \|u\|_{U_h'}$$

En général, si u est un vecteur de dimension finie, R_h est représenté par une matrice et on sait alors que le spectre est l'ensemble des valeurs propres de cette matrice.

C-1-2- Une condition nécessaire de stabilité

Théorème :

Une condition nécessaire pour que $\|R_h^n\| < K$ est que le spectre de R_h soit contenu dans le disque $|\lambda| \leq 1$. (h fixé $\in]0, h_0[$).

Ce résultat est connu sous le nom de "critère de Von-Neumann". Pour les détails élémentaires voir [11], une théorie plus approfondie est exposée dans [14].

Ce résultat est très important, mais sauf pour quelques cas particuliers (pour lesquelles la condition est également suffisante), on n'a qu'une condition nécessaire de stabilité).

C-1-3 - Contre-exemple (Godunov 1954)

Prenons le cas de la section A-6-1, l'opérateur R_h est représenté par la matrice :

$$M_h = \begin{vmatrix} 1-r & r & & & \\ & 1-r & r & & 0 \\ & & & & \\ & 0 & & & \\ & & & 1-r & r \\ 0 & & & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Nous savons que la stabilité ne peut être démontrée que si $r < 1$. Or le spectre de R_h est ici formé par les deux points

$$\lambda = 0 \quad , \quad \lambda = 1-r$$

Donc le théorème C-1-2 ne révèle l'instabilité que pour $r > 2$.

C-2 - CRITERE DE STABILITE DE GODUNOV ET RYABEN'KII

C-2-1 - Spectre d'une "famille" d'opérateurs

Nous considérons maintenant l'ensemble des opérateurs R_h pour toutes les valeurs de $h \in]0, h_0[$. Nous l'appellerons la famille des opérateurs R_h noté :

$$\{R_h\}.$$

Définition

λ est un point du spectre de la famille d'opérateurs $\{R_h\}$ si, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $h \in]0, h_0[$, il existe une fonction $u \in U'_k$ telle que

$$\|R_h u - \lambda u\| \leq \varepsilon \|u\|$$

C-2-2 - Théorème [7]

Une condition nécessaire pour que $\|R_h^n\| < K$ est que le spectre de $\{R_h\}$ soit contenu dans le disque $|\lambda| \leq 1$.

CHAPITRE V

ETUDE DE LA STABILITE DE LA METHODE DE MASSAU ET APPLICATIONS AU PROBLEME POSE

INTRODUCTION

La convergence de la méthode de Massau a été prouvée par Friedrich et Lewy [3], [6]. Mais la littérature ne renferme pas, à ma connaissance, d'étude détaillée de la stabilité de cette méthode au sens des notions exposées dans le chapitre précédent. Dans la partie A, nous essaierons donc de mettre au point cette question en utilisant d'une part quelques acquis de Friedrich et Lewy et d'autre part nos connaissances plus modernes sur les questions de stabilité.

Dans la partie B, nous appliquerons les résultats obtenus à deux problèmes aux limites particuliers.

Ces deux derniers problèmes réunis constituent le problème posé, comme nous le verrons dans la partie C dans laquelle nous espérons faire apparaître clairement les raisons des difficultés numériques qui seront rencontrées en pratique.

A - STABILITE DE LA METHODE DE MASSAUA-1 - PROBLEME DE CAUCHY

Nous nous intéresserons à un problème quasilinéaire dans le plan des "variables caractéristiques". (Chapitre III, sect. I-b) et, pour simplifier, nous considérons un système de deux équations à 2 fonctions inconnues $f(\lambda, \mu)$ et $g(\lambda, \mu)$:

$$(V-1) \quad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial \lambda} + \alpha_1(f, g) \frac{\partial g}{\partial \lambda} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial \mu} + \alpha_2(f, g) \frac{\partial g}{\partial \mu} = 0 \end{cases}$$

(λ et μ sont les variables caractéristiques indépendantes).

Des conditions de Cauchy sont imposées sur Γ (segment AB de la deuxième bissectrice) (figure V-1) du système d'axes (λ, μ) :

$$(V-2) \quad \begin{cases} f(\lambda, -\lambda) = \varphi_1(\lambda) \\ g(\lambda, -\lambda) = \varphi_2(\lambda) \end{cases} \quad \lambda_B \leq \lambda \leq \lambda_A.$$

On peut prouver (Chapitre II) l'existence et l'unicité des solutions f et g assez "régulières" pour le problème (V-1) et (V-2) dans le domaine Ω (triangle ABC de la figure (V-1)) si les hypothèses suivantes sont satisfaites :

sur tout le domaine Ω :

- i) $|\alpha_1(f, g)|$, $|\alpha_2(f, g)|$ et les dérivées premières de α_1 et de α_2 par rapport à f et g sont bornées et vérifient une condition de Lipschitz (Ch. II, sect. I) par rapport à f et g .

ii) $|\alpha_2(f,g) - \alpha_1(f,g)| > \delta$ (constante strictement positive).

iii) $|\varphi(\lambda_1) - \varphi(\lambda_2)| \leq k |\lambda_1 - \lambda_2|$

$$|\varphi'_\lambda(\lambda_1) - \varphi'_\lambda(\lambda_2)| \leq k' |\lambda_1 - \lambda_2|$$

$\varphi(\lambda)$ est ici le vecteur de composantes $\varphi_1(\lambda), \varphi_2(\lambda)$; k et k' sont deux constantes indépendantes de λ .

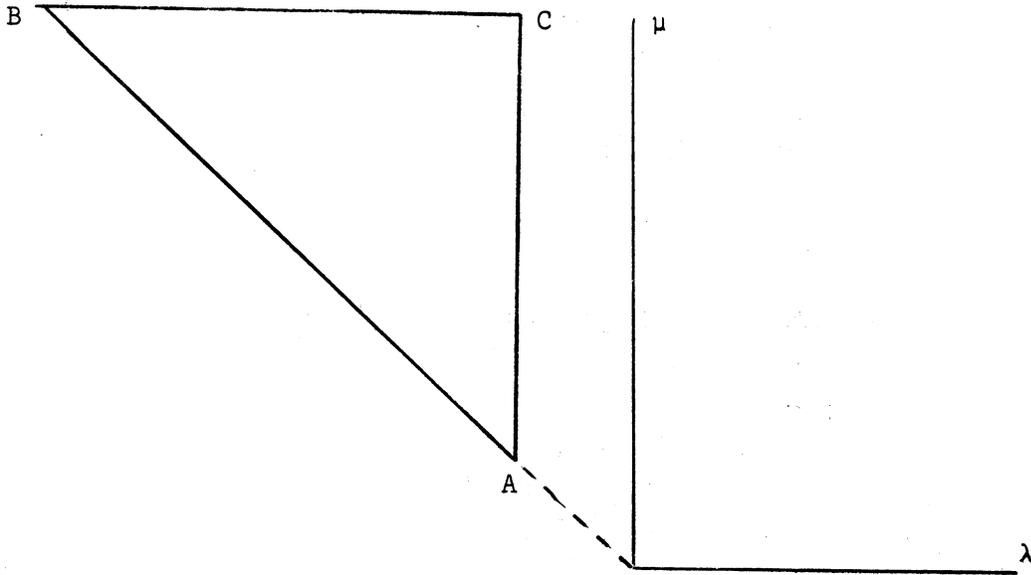


Figure V-1

A-2 - APPROXIMATION AUX DIFFERENCES FINIES DE MASSAU

On se propose maintenant de remplacer le problème (V-1) - (V-2) par un problème aux différences finies. Pour cela, on utilise la grille Ω_h représentée sur la figure (V-2) et définie par les points μ_i de la $n^{\text{ième}}$ parallèle à AB tel que :

$$\mu_i = \mu_B + (i-n)h \quad i=n, n+1, \dots, N$$

$$\mu_A = \mu_B + Nh.$$

Les équations aux différences finies sont :

$$(V-3) \quad \begin{cases} u_{i+1}^{n+1} - u_{i+1}^n + \alpha_1(u_{i+1}^n, v_{i+1}^n) \times [v_{i+1}^{n+1} - v_{i+1}^n] = 0 \\ u_{i+1}^{n+1} - u_i^n + \alpha_2(u_i^n, v_i^n) \times [v_{i+1}^{n+1} - v_i^n] = 0 \end{cases}$$

$$i = n, n+1, \dots, I-1$$

$$n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (\text{ici } I = N).$$

D'autre part on a la condition :

$$(V-4) \quad \begin{cases} f(-\mu_i, \mu_i) = u_i^0 = \varphi_{1i} \\ g(-\mu_i, \mu_i) = v_i^0 = \varphi_{2i} \end{cases}$$

sur

$$\Gamma_h = \{\lambda_i = -\mu_i \mid i = 0, 1, 2, \dots, I\}.$$

De la connaissance de φ_{1i} et φ_{2i} ($i = 0, 1, 2, \dots, I$) sur Γ_h , (V-3) permet le calcul explicite des u_i^n et v_i^n en tous les points de Ω_h .

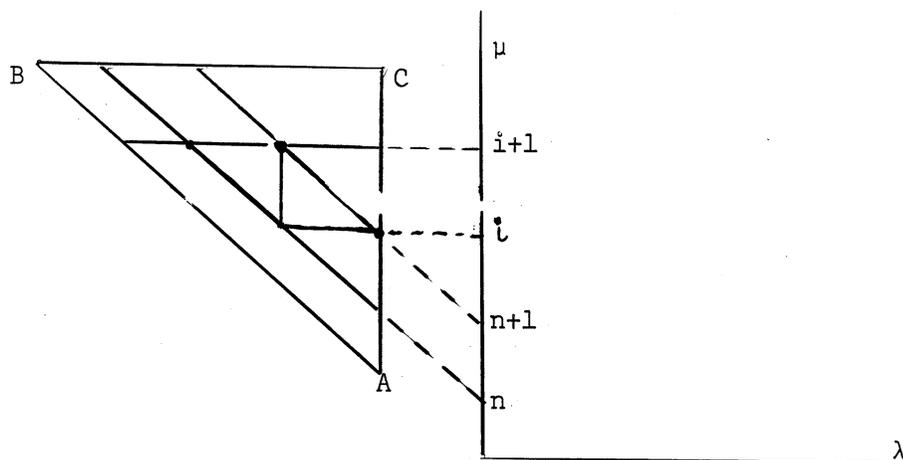


Figure V-2

Soient :

- W l'espace des fonctions w (de composantes f et g) définies sur $(\Omega + \Gamma)$.
- Φ l'espace des fonctions φ (de composantes φ_1 et φ_2) définies sur Γ .
- W_h l'espace des fonctions w_h (de composantes u et v) définies sur Ω_h .
- Φ_h l'espace des fonctions φ_h (de composantes $\varphi_{1h}, \varphi_{2h}$) définies sur Γ_h .

Nous prendrons pour normes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \|w\|_W = \max_{\lambda, \mu \in \Omega} |w(\lambda, \mu)| \\ \|\varphi\|_\Phi = \max_{\lambda \in \Gamma} |\varphi(\lambda)| + \max_{\lambda \in \Gamma} |\varphi'_\lambda(\lambda)| \end{array} \right.$$

respectivement compatibles avec :

$$(V-5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \|w_h\|_{W_h} = \max_n \max_i |w_i^n| \quad i = n, n+1, \dots, I; \quad 1 \leq n \leq N \\ \|\varphi_h\|_{\Phi_h} = \max_{0 \leq i \leq I} |\varphi_i| + \max_{0 \leq i \leq I-1} \left(\frac{1}{h} |\varphi_{i+1} - \varphi_i| \right) \end{array} \right.$$

Notre but est de montrer que :

$$(V-6) \quad \|w_h\|_{W_h} \leq \theta \|\varphi_h\|_{\Phi_h}$$

ce qui prouvera la stabilité totale de l'approximation (V-3)-(V-4) si θ est une constante, indépendante de h .

Remarque :

En toute rigueur, il faudrait prouver [Ch. IV, A-3-C] :

$$\forall \varepsilon, \exists \delta(\varepsilon) \text{ tel que si, } \forall h \in]0, h_0[,$$

$$\|\varphi_h - \tilde{\varphi}_h\|_{\Phi_h} < \delta(\varepsilon) \quad \text{alors} \quad \|u_h - \tilde{u}_h\|_{W_h} < \varepsilon.$$

Mais, en utilisant certains résultats de Friedrichs et Lewy, nous serons amenés à prouver (V-6).

A-3 - PROPOSITIONS PRELIMINAIRES

Pour simplifier l'écriture, notons :

$$\alpha_k(u_i^n, v_i^n) = \alpha_k^{i,n} \quad k = 1, 2$$

$$\Delta_i^n w = w_{i+1}^n - w_i^n$$

A-3-a - Première proposition :

$$\left[\begin{array}{l} \text{Si} \quad \max_i (|\Delta_i u^n|, |\Delta_i v^n|) \leq Nh \\ \text{alors} \quad \max_i (|u_{i+1}^{n+1} - u_{i+1}^n|, |v_{i+1}^{n+1} - v_{i+1}^n|) \leq pNh \end{array} \right.$$

où p et N sont des constantes indépendantes de h ; $n \geq 0$; $i = n, n+1, \dots, I-1$

En effet, le système (3) peut s'écrire :

$$(V-7) \quad \begin{cases} u_{i+1}^{n+1} - u_{i+1}^n + \alpha_1^{i+1,n}(v_{i+1}^{n+1} - v_{i+1}^n) = 0 \\ u_{i+1}^{n+1} - u_{i+1}^n + \alpha_2^{i,n}(v_{i+1}^{n+1} - v_{i+1}^n) = -\Delta_i u^n - \alpha_2^{i,n} \Delta_i v^n. \end{cases}$$

D'où :

$$(\alpha_1^{i+1,n} - \alpha_2^{i,n})(v_{i+1}^{n+1} - v_{i+1}^n) = \Delta_i u^n + \alpha_2^{i,n} \Delta_i v^n$$

et :

$$|v_{i+1}^{n+1} - v_{i+1}^n| \leq \frac{1}{|\alpha_1^{i+1,n} - \alpha_2^{i,n}|} |\Delta_i u^n| + \frac{|\alpha_2^{i,n}|}{|\alpha_1^{i+1,n} - \alpha_2^{i,n}|} \cdot |\Delta_i v^n|.$$

En admettant que les hypothèses i et ii soient satisfaites, on obtient :

$$\max_i |v_{i+1}^{n+1} - v_{i+1}^n| \leq \left(\frac{1}{\delta} + \frac{K}{\delta}\right) \max_i (|\Delta_i u^n|, |\Delta_i v^n|)$$

pour $i = n, n+1, \dots, I-1$

et K une constante telle que $\max_n \max_i (|\alpha_1^{n,i}|, |\alpha_2^{n,i}|) \leq K$.

D'où :

$$\max_i |v_{i+1}^{n+1} - v_{i+1}^n| \leq pNh \quad i = n, n+1, \dots, I-1.$$

On montrerait de même que :

$$\max_i |u_{i+1}^{n+1} - u_{i+1}^n| < p'Nh \quad i = n, n+1, \dots, I-1.$$

A-3-b - Deuxième proposition

Si, pour $n \geq 0$,

$$\max_i \{|\Delta_i u^n + \alpha_1^{i,n} \Delta_i v^n|, |\Delta_i u^n + \alpha_2^{i,n} \Delta_i v^n|\} = M_n h$$

$$i = n, n+1, \dots, I-1$$

alors

$$\max_i \{ |\Delta_i u^n|, |\Delta_i v^n| \} \leq q M_n h \quad i = n, n+1, \dots, I-1$$

où q et M_n sont des constantes indépendantes de h .

En effet, écrivons :

$$\Delta_i u^n + \alpha_1^{i,n} \Delta_i v^n = K_{i,n}$$

$$\Delta_i u^n + \alpha_2^{i,n} \Delta_i v^n = L_{i,n} \quad 0 \leq n \leq N ; i = n, n+1, \dots, I-1.$$

$$\Delta_i v^n (\alpha_1^{i,n} - \alpha_2^{i,n}) = K_{i,n} - L_{i,n}$$

et

$$|\Delta_i v^n| \leq \frac{1}{\delta} \max_{n \leq i \leq I-1} (|K_{i,n}|, |L_{i,n}|).$$

Finalement :

$$\max_i |\Delta_i v^n| \leq q M_n h \quad i = n, \dots, I-1 ; \quad 0 \leq n \leq N.$$

On montrerait de même que :

$$\max_i |\Delta_i u^n| \leq q' M_n h \quad i = n, \dots, I-1 ; \quad 0 \leq n \leq N.$$

A-4 - RECHERCHE D'UNE BORNE SUPERIEURE POUR M_n

En considérant la première équation du système (V-3), on peut écrire :

$$u_{i+1}^{n+1} - u_{i+1}^n + \alpha_1^{i+1,n} (v_{i+1}^{n+1} - v_{i+1}^n) = 0 \quad i = n, n+1, \dots, I-1$$

$$u_i^{n+1} - u_i^n + \alpha_1^{i,n} (v_i^{n+1} - v_i^n) = 0 \quad i = n+1, \dots, I-1.$$

En retranchant, on obtient :

$$\begin{aligned} & \Delta_i u^{n+1} - \Delta_i u^n + \alpha_1^{i,n} \Delta_i v^{n+1} - \alpha_1^{i,n} \Delta_i v^n \\ & + (\alpha_1^{i+1,n} - \alpha_1^{i,n}) (v_{i+1}^{n+1} - v_{i+1}^n) = 0. \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} \Delta_i u^{n+1} + \alpha_1^{i,n+1} \Delta_i v^{n+1} &= \Delta_i u^n + \alpha_1^{i,n} \Delta_i v^n \\ &+ (\alpha_1^{i,n+1} - \alpha_1^{i,n}) \Delta_i v^{n+1} + (\alpha_1^{i+1,n} - \alpha_1^{i,n}) (v_{i+1}^{n+1} - v_{i+1}^n). \end{aligned}$$

Ce qui donne finalement l'inégalité :

$$\begin{aligned} |\Delta_i u^{n+1} + \alpha_1^{i,n+1} \Delta_i v^{n+1}| &\leq |\Delta_i u^n + \alpha_1^{i,n} \Delta_i v^n| \\ &+ |\alpha_1^{i,n+1} - \alpha_1^{i,n}| |\Delta_i v^{n+1}| \\ &+ |\alpha_1^{i+1,n} - \alpha_1^{i,n}| |v_{i+1}^{n+1} - v_{i+1}^n|. \end{aligned}$$

On montrerait une inégalité analogue pour :

$$|\Delta_i u^n + \alpha_2^{i,n} \Delta_i v^n|.$$

Des propositions (A-3-a) et (A-3-b), on peut déduire que :

si

$$\max_{n \leq i \leq I-1} \{ |\Delta_i u^n + \alpha_1^{i,n} \Delta_i v^n|, |\Delta_i u^n + \alpha_2^{i,n} \Delta_i v^n| \} = M_n h$$

alors

$$\max_{n \leq i \leq I-1} \{ |\Delta_i u^n|, |\Delta_i v^n| \} \leq q M_n h \quad (\text{d'après A-3-b})$$

et

$$\max_{n \leq i \leq I-1} \{ |u_i^{n+1} - u_i^n|, |v_i^{n+1} - v_i^n| \} \leq p q M_n h$$

d'après (A-3-a)).

D'autre part, en utilisant la formule des accroissements finis, au premier ordre, on a :

$$\alpha_1^{i,n} - \alpha_1^{i+1,n} = \frac{\partial \alpha_1}{\partial u} (u_i^n - u_{i+1}^n) + \frac{\partial \alpha_1}{\partial v} (v_i^n - v_{i+1}^n)$$

où $\frac{\partial \alpha_1}{\partial u}$ est mis pour $\frac{\partial}{\partial u} \alpha_1(\tilde{u}_i^n, \tilde{v}_i^n)$, (de même pour $\frac{\partial \alpha_1}{\partial v}$)
avec

$$\tilde{u}_i^n = u_i^n + \theta(u_{i+1}^n - u_i^n)$$

$$\tilde{v}_i^n = v_i^n + \theta(v_{i+1}^n - v_i^n) \quad 0 < \theta < 1.$$

D'après i), on a donc :

$$|\alpha_1^{i,n} - \alpha_1^{i+1,n}| \leq K' \max_{n \leq i \leq I-1} \{|\Delta_i u^n|, |\Delta_i v^n|\} \leq K' q M_n h = \gamma_1 M_n h$$

où K' est une constante telle que :

$$\max_{n,i} \left(\left| \frac{\partial \alpha_1}{\partial u} \right|, \left| \frac{\partial \alpha_1}{\partial v} \right| \right) \leq K'.$$

On aurait de même :

$$|\alpha_1^{i,n+1} - \alpha_1^{i,n}| \leq \gamma_2 M_n h \quad \text{pour } i=n, \dots, I-1$$

(et des inégalités analogues avec α_2).

D'après (A-3-b), on a donc :

$$\begin{aligned} |\Delta_i u^{n+1} + \alpha_1^{i,n+1} - \Delta_i v^{n+1}| &\leq \max_{n \leq i \leq I-1} |\Delta_i u^n + \alpha_1^{i,n} - \Delta_i v^n| \\ &+ k_1 M_n^2 h^2 + k_2 M_n^2 h^2 \end{aligned}$$

avec :

$$\max_{n \leq i \leq I-1} \{ |\Delta_i u^n + \alpha_1^{i,n} \Delta_i v^n|, |\Delta_i u^n + \alpha_2^{i,n} \Delta_i v^n| \} = M_n h ;$$

$$k_1 = q\gamma_2 \quad ; \quad k_2 = pq\gamma_1 \quad , \text{ donc :}$$

$$\max_{n \leq i \leq I-1} |\Delta_i u^{n+1} + \alpha_1^{i,n+1} \Delta_i v^{n+1}| \leq M_n h + \gamma h^2 M_n^2.$$

Finalement, on a l'inégalité :

$$(V-8) \quad M_{n+1} \leq M_n + \gamma h M_n^2$$

où γ est une constante indépendante de h , et positive.

Pour chaque pas h , la solution de (V-8) est majorée par celle de l'équation différentielle $\frac{dM}{dt} = \gamma M^2$, qui est bornée par $M(0)$ d'où :

$$(V-9) \quad \max_n (M_n) = M.$$

D'autre part, d'après (V-8), on a :

$$M_n \leq M_{n-1} + \gamma h M_{n-1}^2$$

$$M_{n-1} \leq M_{n-2} + \gamma h M_{n-2}^2$$

$$\vdots$$

$$M_1 \leq M_0 + \gamma h M_0^2, \quad \text{donc en ajoutant et en simplifiant, il}$$

vient :

$$M_n \leq M_0 + \gamma h (M_{n-1}^2 + M_{n-2}^2 + \dots + M_1^2) + \gamma h M_0^2$$

$$\leq M_0 + \gamma h (n-1) \max_{i=1, \dots, n-1} (M_i^2) + \gamma h M_0^2$$

D'où :

$$M_n \leq M_0 + (n-1)\gamma h M^2 + \gamma h M_0^2$$

$$M_0 \leq M_0 - \gamma h M^2 + \gamma h M_0^2$$

M et M_0 étant positifs, on a donc $M \leq M_0$.

Et finalement :

$$(V-10) \quad \max_n (M_n) = M_0.$$

A-5 - STABILITE DE L'APPROXIMATION (V-3)-(V-4)

Nous sommes maintenant en mesure de montrer que l'approximation (V-3)-(V-4) est stable. Le système (V-3) s'écrit en effet :

$$(V-11) \quad \begin{cases} u_{i+1}^{n+1} - u_{i+1}^n + \alpha_1^{i+1,n} (v_{i+1}^{n+1} - v_{i+1}^n) = 0 \\ u_{i+1}^{n+1} - u_{i+1}^n + \alpha_2^{i,n} (v_{i+1}^{n+1} - v_{i+1}^n) = -\Delta_i u^n - \alpha_2^{i,n} \Delta_i v^n \end{cases}$$

$$i = n, n+1, \dots, I-1 \quad ; \quad 0 \leq n \leq N-1.$$

En retranchant, on a :

$$(\alpha_1^{i+1,n} - \alpha_2^{i,n}) v_{i+1}^{n+1} = \alpha_1^{i+1,n} v_{i+1}^n - \alpha_2^{i,n} v_{i+1}^n + \Delta_i u^n + \alpha_2^{i,n} \Delta_i v^n.$$

D'où :

$$|v_{i+1}^{n+1}| \leq |v_{i+1}^n| + \frac{1}{\delta} |\Delta_i u^n + \alpha_2^{i,n} \Delta_i v^n|$$

Car :

$$\delta < |\alpha_1^{i+1,n} - \alpha_2^{i+1,n}| \leq |\alpha_1^{i+1,n} - \alpha_2^{i,n}| + O(h) \left[\left| \frac{\partial \alpha_2}{\partial u} \right| + \left| \frac{\partial \alpha_2}{\partial v} \right| \right]$$

avec

$$\left| \frac{\partial \alpha_2}{\partial u} \right| = \left| \frac{\partial}{\partial u} \alpha_2(\tilde{u}_i^n, \tilde{v}_i^n) \right| \leq K',$$

(de même pour $\frac{\partial \alpha_2}{\partial v}$) et :

$$\tilde{u}_i^n = u_i^n + \theta(u_{i+1}^n - u_i^n), \quad \tilde{v}_i^n = v_i^n + \theta(v_{i+1}^n - v_i^n), \quad 0 < \theta < 1.$$

D'où $\delta < |\alpha_1^{i+1,n} - \alpha_2^{i,n}| + \text{terme qui tend vers zéro avec } h$.

Pour δ assez grand et h assez petit, on aura :

$$|\alpha_1^{i+1,n} - \alpha_2^{i,n}| > \delta$$

et

$$|v_{i+1}^{n+1}| \leq \max_{n-1 \leq i \leq I-1} |v_{i+1}^n| + \frac{1}{\delta} \max_{n \leq i \leq I-1} |\Delta_i u^n + \alpha_2^{i,n} \Delta_i v^n|$$

D'où :

$$\max_{n \leq i \leq I-1} |v_{i+1}^{n+1}| \leq \max_{n-1 \leq i \leq I-1} |v_{i+1}^n| + \frac{1}{\delta} M_n h$$

$$\max_{n \leq i \leq I-1} |v_{i+1}^{n+1}| \leq \max_{n-1 \leq i \leq I-1} |v_{i+1}^n| + \frac{1}{\delta} M_0 h$$

d'après V-10).

On a donc successivement :

$$\max_{n+1 \leq i \leq I} |v_i^{n+1}| \leq \max_{n \leq i \leq I} |v_i^n| + \frac{1}{\delta} M_0 h$$

$$\max_{n \leq i \leq I} |v_i^n| \leq \max_{n-1 \leq i \leq I} |v_i^{n-1}| + \frac{1}{\delta} M_0 h$$

⋮

$$\max_{1 \leq i \leq I} |v_i^1| \leq \max_{0 \leq i \leq I} |v_i^0| + \frac{1}{\delta} M_0 h.$$

En ajoutant et en simplifiant, on obtient :

$$\begin{aligned} \max_{n+1 \leq i \leq I} |v_i^{n+1}| &< \max_{0 \leq i \leq I} |v_i^0| + (n+1) \frac{h}{\delta} M_0 \\ \max_{n+1 < i < I} |v_i^{n+1}| &< \max_{0 < i < I} |v_i^0| + \frac{\Lambda}{\delta} M_0 \end{aligned}$$

pour tout $n \geq 0$, tel que $(n+1)h \leq \Lambda$.

D'autre part :

$$\begin{aligned} M_0 &= \frac{1}{h} \max_i \{ |\Delta_i u^0 + \alpha_1^{n,i} \Delta_i v^0|, |\Delta_i u^0 + \alpha_2^{n,i} \Delta_i v^0| \} \\ &\leq (1+K) \max_i \left(\frac{|\Delta_i u^0|}{h}, \frac{|\Delta_i v^0|}{h} \right) \quad (i = 0, 1, \dots, I-1) \end{aligned}$$

avec

$$\max_{n,i} (|\alpha_1^{n,i}|, |\alpha_2^{n,i}|) \leq K \quad \text{d'après } i.$$

Donc :

$$\max_{n+1 \leq i \leq I} |v_i^{n+1}| \leq \max_{0 \leq i \leq I} |v_i^0| + \frac{\Lambda}{\delta} (1+K) \max_{0 \leq i \leq I-1} \left(\frac{|\Delta_i u^0|}{h}, \frac{|\Delta_i v^0|}{h} \right).$$

Finalement :

$$\max_n \max_{n+1 \leq i \leq I} |v_i^{n+1}| \leq \theta_1 \left\{ \max_{0 \leq i \leq I} |v_i^0| + \max_{0 \leq i \leq I-1} \left(\frac{|\Delta_i u^0|}{h}, \frac{|\Delta_i v^0|}{h} \right) \right\}$$

avec

$$\theta_1 = \frac{\Lambda}{\delta} (1+K) \text{ constante positive indépendante de } h.$$

Naturellement, on montrerait de même que :

$$\max_n \max_{n+1 \leq i \leq I} |u_i^{n+1}| \leq \theta_2 \left\{ \max_{0 \leq i \leq I} |u_i^0| + \max_{0 \leq i \leq I-1} \left(\frac{|\Delta_i u^0|}{h}, \frac{|\Delta_i v^0|}{h} \right) \right\}$$

avec

$$\theta_2 = \frac{\Lambda}{\delta} K(K+1)$$

d'où la stabilité.

Remarques :

- Comme on pouvait le prévoir, il n'y a pas de condition sur h .

- Il est très important de se rappeler que tout au long de la démonstration, nous avons dû faire appel aux hypothèses i, ii et iii.

B - ETUDES DE DEUX PROBLEMES PARTICULIERSB-1 - PROBLEME P1

On se propose de traiter maintenant le problème suivant :

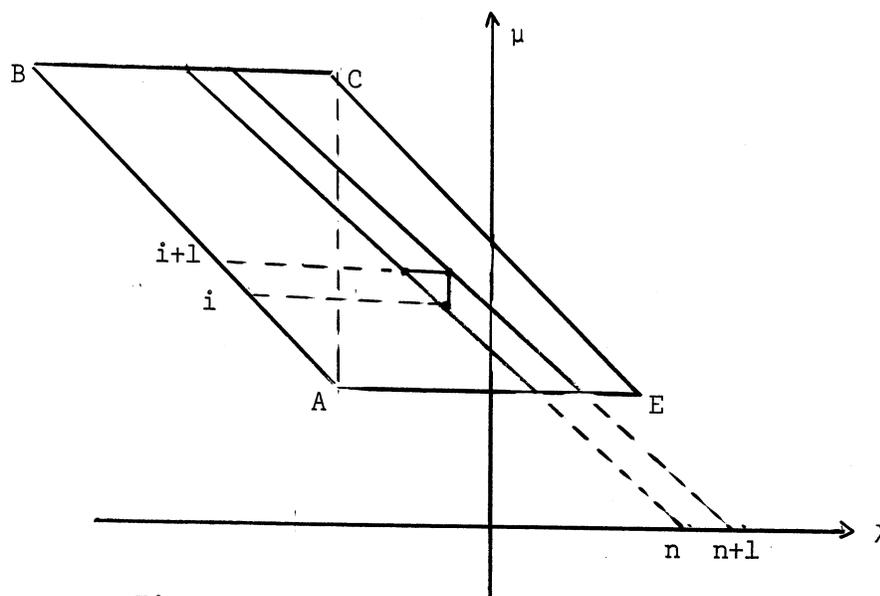


Figure V-3

(la grille étant définie, comme précédemment par le pas h (voir Fig. V-3)).

$$(V-12) \quad \begin{cases} u_{i+1}^{n+1} - u_{i+1}^n + \alpha_1^{i+1,n} (v_{i+1}^{n+1} - v_{i+1}^n) = 0 \\ u_{i+1}^{n+1} - u_{i+1}^n + \alpha_2^{i,n} (v_{i+1}^{n+1} - v_{i+1}^n) = -\Delta_i u_i^n - \alpha_2^{i,n} \Delta_i v_i^n \end{cases}$$

pour

$$i = 0, 1, 2, \dots, I-1 ;$$

$$n = 0, 1, 2, \dots, N-1.$$

et avec, cette fois, les conditions :

$$(V-13) \quad W_i^0 = \varphi_i \quad i = 0, 1, 2, \dots, I \quad ; \quad (\text{sur AB})$$

$$(V-14) \quad W_0^n = \psi^n \quad n = 0, 1, 2, \dots, N. \quad (\text{sur AE}).$$

On suppose, bien entendu, que :

$$W_0^0 = \psi^0 = \varphi_0$$

(ici, w_i^n désigne le vecteur de composantes u_i^n, v_i^n).

Il est clair que le schéma (V-12) avec (V-13) et (V-14) permet le calcul des u_i^n et des v_i^n en tous les points de la grille limitée par le parallélogramme ABCE.

D'après (V-14), on a :

$$v_0^{n+1} = \psi_2^n + h \frac{\psi_2^{n+1} - \psi_2^n}{h}.$$

D'autre part :

$$v_{i+1}^{n+1} = v_{i+1}^n + \frac{1}{\alpha_1^{i+1, n} - \alpha_2^{i, n}} (\Delta_i u^{n+1} + \alpha_2^{i, n} \Delta_i v^n)$$

$$i = 0, 1, 2, \dots, I-1.$$

Il est commode d'exprimer v_i^{n+1} sous la forme :

$$v_i^{n+1} = V_i^{n+1} + h\rho_i^n \quad i = 0, 1, 2, \dots, I, \text{ d'où}$$

$$V_{i+1}^{n+1} + h\rho_{i+1}^n = v_{i+1}^n + \frac{h}{\alpha_1^{i+1, n} - \alpha_2^{i, n}} \left(\frac{\Delta_i u^n}{h} + \alpha_2^{i, n} \frac{\Delta_i v^n}{h} \right)$$

$$i = 0, 1, 2, \dots, I-1.$$

Donc :

$$(V-15) \left\{ \begin{array}{l} v_{i+1}^{n+1} = v_{i+1}^n \\ v_0^{n+1} = v_0^n = \psi_2^n \\ \rho_{i+1}^n = \frac{1}{\alpha_1^{i+1,n} - \alpha_2^{i,n}} \left(\frac{\Delta_i u^n}{h} + \alpha_2^{i,n} \frac{\Delta_i v^n}{h} \right) \\ \rho_0^n = \frac{\psi_2^{n+1} - \psi_2^n}{h} \\ i = 0, 1, 2, \dots, I-1. \end{array} \right.$$

D'où :

$$|\rho_{i+1}^n| \leq \frac{1}{\delta h} |\Delta_i u^n + \alpha_2^{i,n} \Delta_i v^n| \leq \frac{1}{\delta h} \max_{0 \leq i \leq I-1} |\Delta_i u^n + \alpha_2^{i,n} \Delta_i v^n|$$

$$|\rho_{i+1}^n| \leq \frac{M_n}{\delta} \quad i = 0, 1, 2, \dots, I-1$$

et

$$\max_{0 \leq i \leq I} |\rho_i^n| \leq \max \left(\frac{M_n}{\delta}, \frac{|\psi_2^{n+1} - \psi_2^n|}{h} \right).$$

De plus, les deux premières égalités de (V-15) entraînent que :

$$\max_{0 \leq i \leq I-1} |v_{i+1}^{n+1}| \leq \max_{0 \leq i \leq I-1} |v_{i+1}^n|.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} |v_i^{n+1}| &\leq |v_i^{n+1}| + h \rho_i^n \leq \max_{0 \leq i \leq I} |v_i^{n+1}| + h \max_{0 \leq i \leq I} |\rho_i^n| \\ |v_i^{n+1}| &\leq \max_{0 \leq i \leq I} |v_i^n| + h \max \left\{ \frac{|\psi_2^{n+1} - \psi_2^n|}{h}, \frac{M_n}{\delta} \right\}. \end{aligned}$$

(une inégalité analogue serait obtenue pour u_i^{n+1}).

Si on choisit :

$$\|\varphi_h\|_{\Phi_h} = \max_{0 \leq i \leq I} \left| \frac{\varphi_{i+1} - \varphi_i}{h} \right| + \max_i |\varphi_i| + \max_{0 \leq n \leq N-1} \left| \frac{\psi^{n+1} - \psi^n}{h} \right|$$

alors :

$$\max_{0 \leq i \leq I} |v_i^{n+1}| \leq \max_{0 \leq i \leq I} |v_i^n| + \max\{h\|\varphi_h\|_{\Phi_h}, \frac{M_0 h}{\delta}\}$$

(V-16)

$$\leq \max_{0 \leq i \leq I} |v_i^n| + qh\|\varphi_h\|_{\Phi_h}$$

où q est une certaine constante indépendante de h .

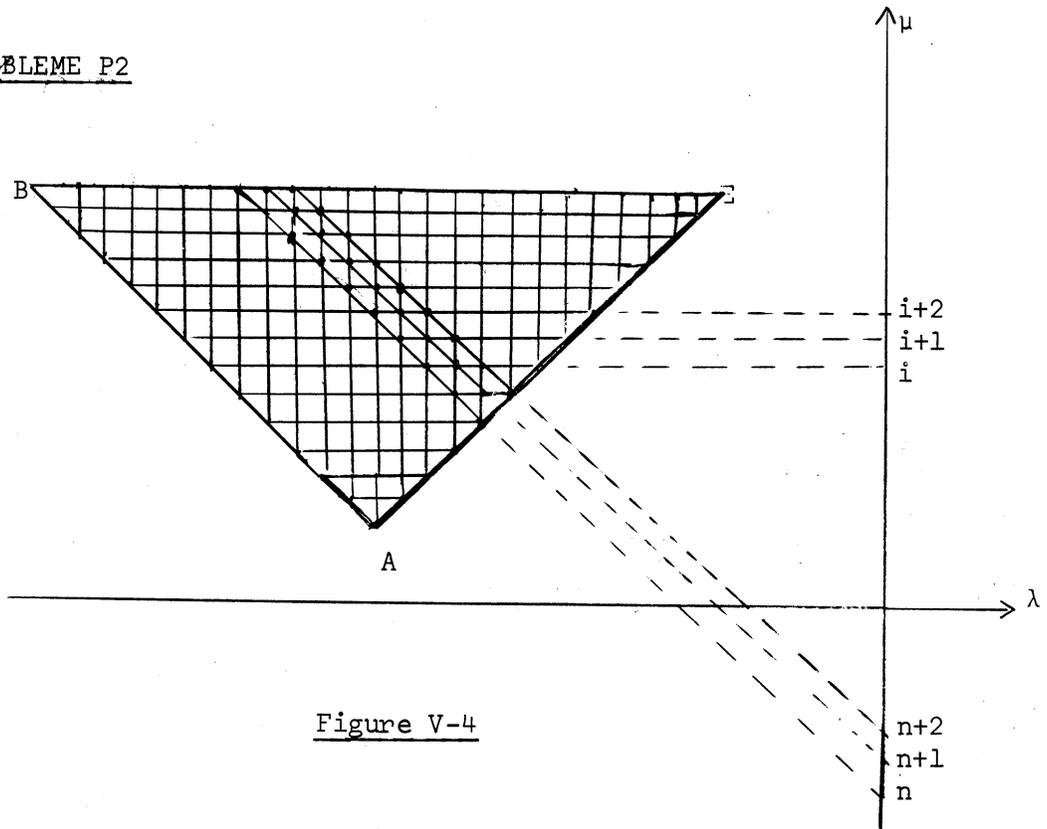
On a alors :

$$\max_{0 \leq i \leq I} |v_i^{n+1}| \leq \max_{0 \leq i \leq I} |v_i^0| + q(n+1)h\|\varphi_h\|_{\Phi_h}$$

$$(V-17) \quad \max_{0 \leq i \leq I} |v_i^{n+1}| \leq \max_{0 \leq i \leq I} |\varphi_i| + q\Lambda\|\varphi_h\|_{\Phi_h}$$

Λ étant une constante telle que $(n+1)h \leq \Lambda$.

(V-17) prouve la stabilité de l'approximation P_1 au sens des normes choisies pourvu que les hypothèses i, ii et iii soient satisfaites.

B-2 - PROBLEME P2Figure V-4

Le problème P2 se pose de la manière suivante :

$$(V-16) \quad \begin{cases} u_{i+1}^{n+1} - u_{i+1}^n + \alpha_1^{i+1,n} (v_{i+1}^{n+1} - v_{i+1}^n) = 0 \\ u_{i+1}^{n+1} - u_i^n + \alpha_2^{i,n} (v_{i+1}^{n+1} - v_i^n) = 0 \end{cases}$$

pour $i = \frac{n}{2}, \frac{n}{2} + 1, \dots$ si n est pair

$i = \frac{n+1}{2}, \frac{n+3}{2}, \dots$ si n est impair

(voir les figures V-4 et V-5).

Avec, cette fois, les conditions :

$$(V-17) \quad u_i^0 = \tilde{\varphi}_i \quad v_i^0 = \tilde{\psi}_i \quad i = 0, 1, 2, \dots, I \quad (\text{sur AB})$$

$$(V-18) \quad u_{\frac{n}{2}+1}^{n+2} + \gamma v_{\frac{n}{2}+1}^{n+2} = 0 \quad n = 0, 2, \dots, N-2 \quad (\gamma = \text{constante})$$

(sur AE).

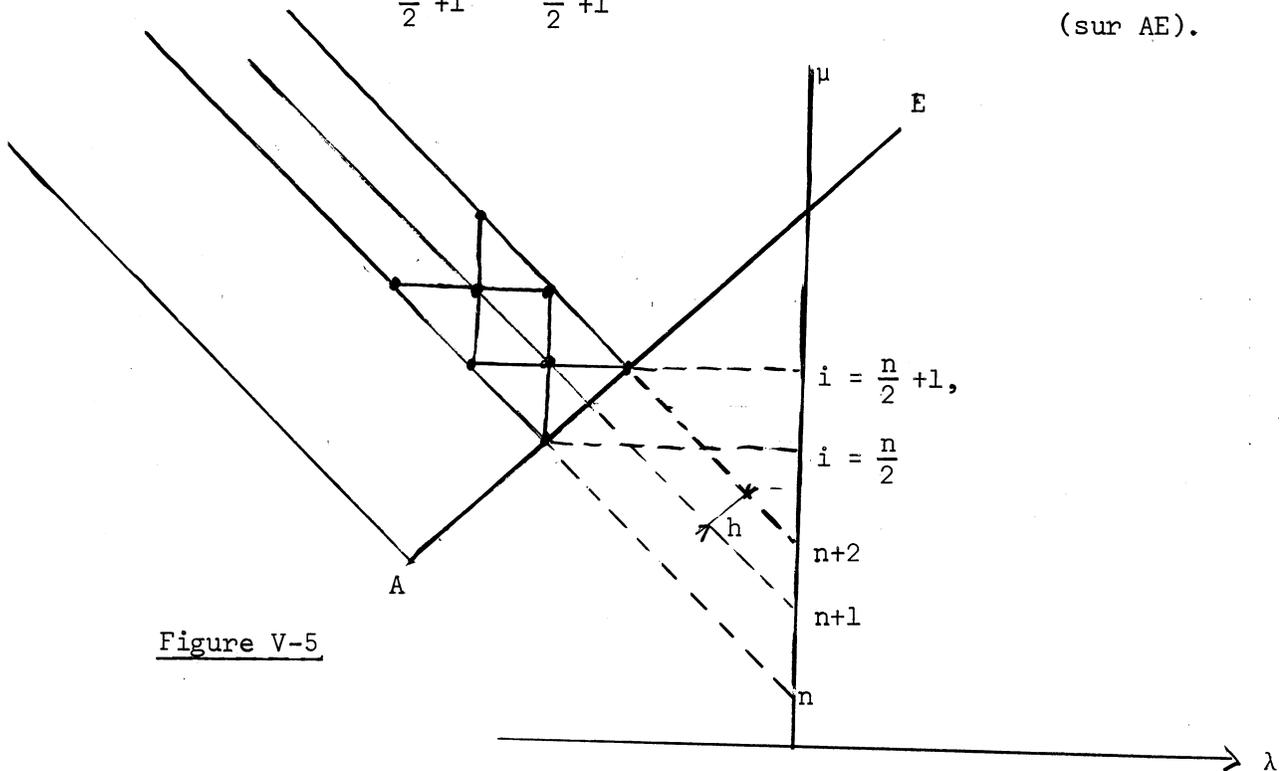


Figure V-5

Comme dans (V-18), nous supposerons dans toute la suite que n est un entier pair.

(V-16-17-18) ne suffisent plus pour déterminer les u_i^n et v_i^n en tous les points de la grille, il faut une équation supplémentaire, on la trouve aisément à l'aide de la première équation de (V-16) :

$$(V-19) \quad u_{\frac{n}{2}+1}^{n+2} - u_{\frac{n}{2}+1}^{n+1} + \alpha_1^{\frac{n}{2}+1, n+1} (v_{\frac{n}{2}+1}^{n+2} - v_{\frac{n}{2}+1}^{n+1}) = 0$$

ou encore :

$$u_{\frac{n}{2}+1}^{n+2} + \alpha_1^{\frac{n}{2}+1, n+1} v_{\frac{n}{2}+1}^{n+2} = u_{\frac{n}{2}+1}^{n+1} + \alpha_1^{\frac{n}{2}+1, n+1} v_{\frac{n}{2}+1}^{n+1}$$

Dans toute la suite nous supposons que les hypothèses i, ii et iii sont satisfaites.

D'autre part, nous avons besoin de faire l'hypothèse supplémentaire :

$$(V-20) \quad |\alpha_1^{\frac{n}{2}, n} - \gamma| > \delta' \quad \text{pour tout } n \leq N \quad (n \text{ pair}).$$

On a :

$$u_{\frac{n}{2}+1}^{n+1} = u_{\frac{n}{2}+1}^n + \frac{\alpha_1^{\frac{n}{2}, n}}{\alpha_2^{\frac{n}{2}, n} - \alpha_1^{\frac{n}{2}+1, n}} (\Delta_{\frac{n}{2}} u^n + \alpha_2^{\frac{n}{2}, n} \Delta_{\frac{n}{2}} v^n)$$

$$v_{\frac{n}{2}+1}^{n+1} = v_{\frac{n}{2}+1}^n + \frac{1}{\alpha_2^{\frac{n}{2}, n} - \alpha_1^{\frac{n}{2}+1, n}} (\Delta_{\frac{n}{2}} u^n + \alpha_2^{\frac{n}{2}, n} \Delta_{\frac{n}{2}} v^n).$$

Pour simplifier, posons

$$\Delta_{\frac{n}{2}}^{-n} = \Delta_{\frac{n}{2}} u^n + \alpha_2^{\frac{n}{2}, n} \Delta_{\frac{n}{2}} v^n.$$

D'après (V-19), on a donc :

$$(V-21) \quad u_{\frac{n}{2}+1}^{n+2} + \alpha_1^{\frac{n}{2}+1, n+1} v_{\frac{n}{2}+1}^{n+2} = u_{\frac{n}{2}+1}^n + \alpha_1^{\frac{n}{2}+1, n+1} v_{\frac{n}{2}+1}^n$$

$$+ \frac{\alpha_1^{\frac{n}{2}, n} + \alpha_1^{\frac{n}{2}+1, n+1}}{\alpha_2^{\frac{n}{2}, n} - \alpha_1^{\frac{n}{2}+1, n}} \cdot \Delta_{\frac{n}{2}}^{-n}$$

D'autre part,

$$(V-22) \quad u_{\frac{n}{2}+1}^{n+2} + \gamma v_{\frac{n}{2}+1}^{n+2} = u_{\frac{n}{2}+1}^{n+2} + \alpha_1^{\frac{n}{2}+1, n+1} v_{\frac{n}{2}+1}^{n+2} + (\gamma - \alpha_1^{\frac{n}{2}+1, n+1}) v_{\frac{n}{2}+1}^{n+2} = 0$$

A l'aide de (V-21) et de (V-22), on obtient alors :

$$(V-23) \quad u_{\frac{n}{2}+1}^n + \alpha_1^{\frac{n}{2}+1, n+1} v_{\frac{n}{2}+1}^n + \frac{\alpha_1^{\frac{n}{2}, n} + \alpha_1^{\frac{n}{2}+1, n+1}}{\alpha_2^{\frac{n}{2}, n} - \alpha_1^{\frac{n}{2}+1, n}} \cdot \Delta_{\frac{n}{2}}^{-n} + (\gamma - \alpha_1^{\frac{n}{2}+1, n+1}) v_{\frac{n}{2}+1}^{n+2} = 0.$$

En remarquant que :

$$u_{\frac{n}{2}}^n + \gamma v_{\frac{n}{2}}^n = 0 \text{ et en retranchant à (V-23), on a :}$$

$$\Delta_{\frac{n}{2}} u_{\frac{n}{2}+1}^n + (\alpha_1^{\frac{n}{2}+1, n+1} - \gamma) \Delta_{\frac{n}{2}} v_{\frac{n}{2}+1}^n + \frac{\alpha_1^{\frac{n}{2}, n} + \alpha_1^{\frac{n}{2}+1, n+1}}{\alpha_2^{\frac{n}{2}, n} - \alpha_1^{\frac{n}{2}+1, n}} \cdot \Delta_{\frac{n}{2}}^{-n} = (\alpha_1^{\frac{n}{2}+1, n+1} - \gamma) v_{\frac{n}{2}+1}^{n+2}.$$

En raison des hypothèses i, ii et (V-20), on a :

$$\left| v_{\frac{n}{2}+1}^{n+2} \right| \leq \left| \Delta_{\frac{n}{2}} v_{\frac{n}{2}+1}^n \right| + \frac{1}{\delta'} \left| \Delta_{\frac{n}{2}} u_{\frac{n}{2}+1}^n \right| + \frac{2K}{\delta \delta'} M_n h.$$

Si h est assez petit et δ et δ' assez grands, on aura :

$$\delta < \left| \alpha_2^{\frac{n}{2}, n} - \alpha_1^{\frac{n}{2}+1, n} \right| \leq \left| \alpha_2^{\frac{n}{2}, n} - \alpha_1^{\frac{n}{2}, n} \right| + O(h)$$

$$\delta' < \left| \alpha_1^{\frac{n}{2}, n} - \gamma \right| \leq \left| \alpha_1^{\frac{n}{2}+1, n+1} - \gamma \right| + O(h).$$

Donc, si $\max_i |\bar{\Delta}_i^n| = hM_n$:

$$\left| v_{\frac{n}{2}+1}^{n+2} \right| \leq \left| \Delta_{\frac{n}{2}} v^n \right| + \frac{1}{\delta} \left| \Delta_{\frac{n}{2}} u^n \right| + \frac{2K}{\delta\delta'} M_n h$$

Et d'après la proposition (A-3-b)

$$(V-24) \quad \left| v_{\frac{n}{2}+1}^{n+2} \right| \leq k_1 M_n h \text{ où } k_1 \text{ est une constante indépendante de } h.$$

D'autre part, on sait que [§ Sect. A] :

$$\max_{i \geq \frac{n}{2}+2} |v_i^{n+2}| \leq \max_{i \geq \frac{n}{2}} |v_i^n| + \frac{2}{\delta} M_n h, \quad \text{d'où :}$$

$$\max_{i \geq \frac{n}{2}+1} |v_i^{n+2}| \leq \max_{i \geq \frac{n}{2}+2} |v_i^{n+2}| + |v_{\frac{n}{2}+1}^{n+2}| \leq \max_{i \geq \frac{n}{2}} |v_i^n| + 2M_n h$$

$$(V-25) \quad \leq \max_{i \geq \frac{n}{2}} |v_i^n| + kM_0 h \leq \max_{i \geq \frac{n}{2}} |v_i^n| + kh \|\varphi_h\|_{\Phi_h}$$

en prenant par exemple :

$$(V-26) \quad \|\varphi_h\|_{\Phi_h} = \max_{i \geq 0} |\varphi_i| + \max_{i \geq 0} \frac{|\varphi_{i+1} - \varphi_i|}{h} + \max_n |\psi^n|$$

φ_i et ψ^n ($i = 0, 1, 2, \dots, I$, $n = 0, 2, \dots, N$) sont respectivement les vecteurs de composantes (u_i^0, v_i^0) et $(u_{\frac{n}{2}}^n, v_{\frac{n}{2}}^n)$

En écrivant (V-26) pour tout n pair positif ou nul et en additionnant, on obtient

$$\max_{i \geq \frac{n}{2}+1} |v_i^{n+2}| \leq \theta \|\varphi_h\|_{\Phi_h}$$

(avec bien entendu une inégalité analogue pour u_i^n).

Ceci prouve la stabilité de l'approximation P2 pourvu que les hypothèses i, ii, iii et (V-20) soient satisfaites.

C - APPLICATIONS AU PROBLEME POSEC-1 - Rappels

Rappelons (pour plus de détails, voir Chapitre I) que deux fonctions $\xi(x,y)$ et $\eta(x,y)$, où x et y sont deux variables indépendantes, doivent obéir à un système d'équations aux dérivées partielles quasilineaires, de type hyperbolique :

$$(V-27) \quad \begin{cases} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \operatorname{tg}(\varphi + \mu) \frac{\partial \xi}{\partial y} = a(\xi, \eta) \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} + \operatorname{tg}(\varphi - \mu) \frac{\partial \eta}{\partial y} = b(\xi, \eta) \end{cases}$$

avec $\varphi = \frac{1}{2} (\xi - \eta)$; a et b dépendent de ξ et de η [Chap. I]. Le problème est posé dans les axes O_{xy} de la figure (V-6) avec une condition de Cauchy :

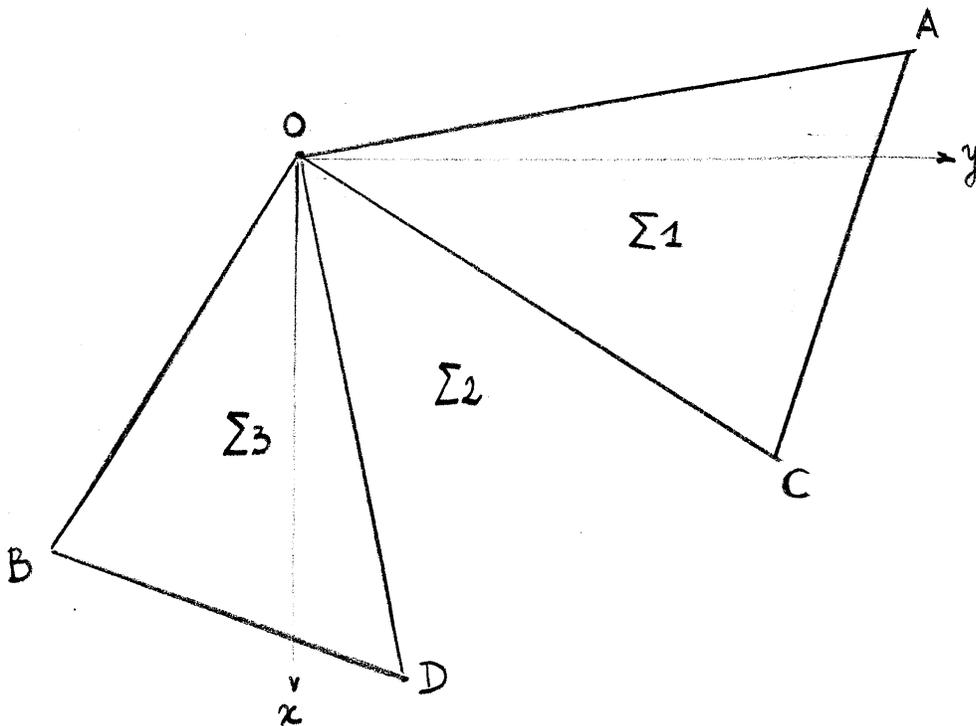


Fig. V-6

$$(V-28) \quad \begin{cases} \xi(y, x_0(y)) = \tilde{\varphi}_1(y) \\ \eta(y, x_0(y)) = \tilde{\varphi}_2(y) \end{cases} \quad \text{sur } \Gamma_1 = \{y, x_0(y) \mid y \in [0, y_A = a]\}$$

$(x=x_0(y))$ est l'équation de OA dans les axes de Oxy)
avec de plus $\tilde{\varphi}_1(y) - \tilde{\varphi}_2(y) = \text{constante}$.

Ceci posé, on sait que si les hypothèses du chapitre II sont satisfaites, alors, en vertu du théorème fondamental, une solution unique existe dans la région Σ_1 limitée par OA et les caractéristiques issues de 0 et de A (Figure V-6).

On impose de plus, sur $\Gamma_2 = \{y, x_1(y) \mid y \in]0, b]\}$ ($y_B = b$)

$$(V-29) \quad \xi(y, x_1(y)) - \eta(y, x_1(y)) = \text{constante}$$

Avec :

$$(V-30) \quad \lim_{y \rightarrow 0_+} \tilde{\varphi}_1(y) \neq \lim_{y \rightarrow 0_-} \xi(y, x_1(y))$$

Pour les mêmes raisons que précédemment, on peut prévoir qu'une solution unique existe dans une région Σ_2 limitée par OB et les deux caractéristiques issues de 0 et de B.

Nous nous intéresserons au cas où Σ_1 et Σ_3 sont disjointes. Dans la zone Σ_2 , on ne sait mathématiquement rien conclure quant à l'existence et l'unicité d'une solution si on ne se donne pas une condition de jonction supplémentaire. Au point 0, PRANDTL [1], [C-2-b- α] se donne une telle condition en admettant que ce point peut être considéré comme une caractéristique "dégénérée", il en résulte [1], [C-2-b- α] d'une part, que les fonctions inconnues ne sont jamais discontinues en même temps au point 0 (avec (V-30), $\xi(x, y)$ est discontinue) et d'autre part qu'une infinité de caractéristiques (de l'autre famille) sont issues de ce point.

C-2 - Méthode numérique

Il est plus commode de présenter la méthode en utilisant les variables caractéristiques λ et μ . On a alors un système de 4 équations à 4 inconnues $x(\lambda, \mu)$, $y(\lambda, \mu)$, $\xi(\lambda, \mu)$, $\eta(\lambda, \mu)$ [Chapitre III] :

$$(V-31) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial y}{\partial \lambda} = c_1(\xi, \eta) \frac{\partial x}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial y}{\partial \mu} = c_2(\xi, \eta) \frac{\partial x}{\partial \mu} \\ \frac{\partial \xi}{\partial \lambda} = d_1(\xi, \eta) \frac{\partial x}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial \eta}{\partial \mu} = d_2(\xi, \eta) \frac{\partial x}{\partial \mu} \end{array} \right.$$

Avec ici :

$$c_1 = \operatorname{tg}(\varphi + \mu) \quad ; \quad c_2 = \operatorname{tg}(\varphi - \mu) \quad ;$$

$$d_1 = a(\xi, \eta) \quad ; \quad d_2 = b(\xi, \eta) \quad ;$$

$$2\varphi = \xi - \eta.$$

Et :

$$(V-32) \quad \left\{ \begin{array}{l} x(\lambda, -\lambda) = \tilde{\varphi}_1(\lambda) \\ y(\lambda, -\lambda) = \tilde{\varphi}_2(\lambda) \\ \xi(\lambda, -\lambda) = \tilde{\varphi}_3(\lambda) \\ \eta(\lambda, -\lambda) = \tilde{\varphi}_4(\lambda) \end{array} \right.$$

$$\lambda \in [\lambda(O_1), \lambda(A')]]$$

sur une parallèle O_1A' à la deuxième bissectrice dans le système d'axes (λ, μ)

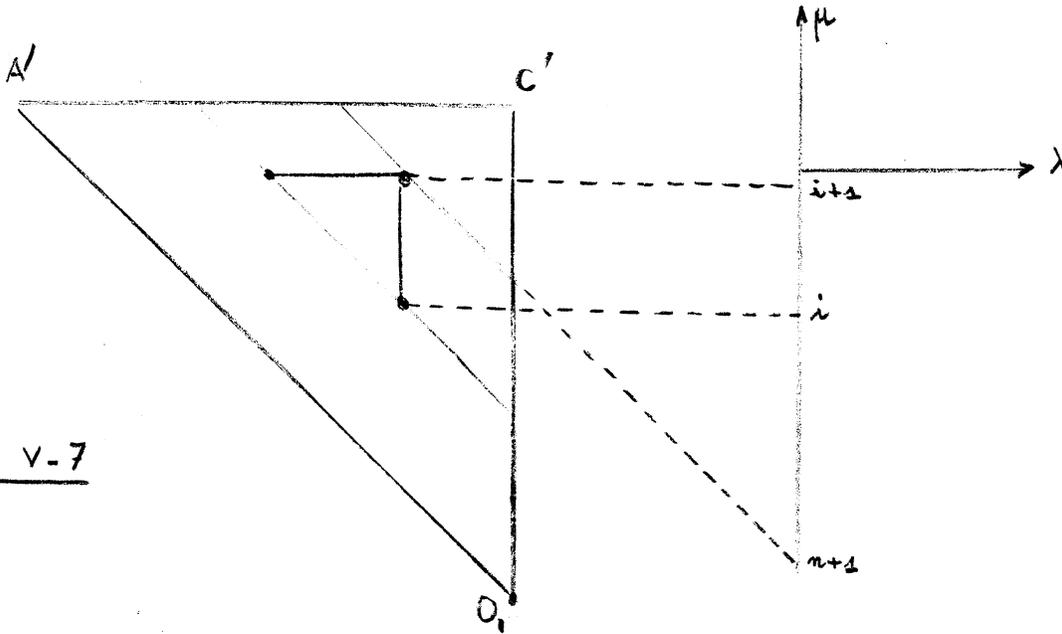


Fig. V-7

Dans les sections b-c-d, nous présenterons la méthode telle qu'elle est actuellement utilisée en pratique.

C-2-a - Une propriété remarquable de la transformation hodographe

Une propriété remarquable est la suivante :

Les nouvelles équations obtenues sont invariantes dans un changement de variables caractéristiques :

$$\begin{cases} \lambda = \lambda(\lambda^*) \\ \mu = \mu(\mu^*) \end{cases}$$

En effet, multiplions par exemple, les deux membres de

$$\frac{\partial y}{\partial \lambda} = c_1(\xi, \eta) \frac{\partial x}{\partial \lambda}$$

par

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \lambda^*},$$

on a :

$$\frac{\partial y}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial \lambda^*} = c_1(\xi, \eta) \frac{\partial x}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial \lambda^*}$$

c'est-à-dire :

$$\frac{\partial y}{\partial \lambda^*} = c_1(\xi, \eta) \frac{\partial x}{\partial \lambda^*}$$

Un arc \widehat{AB} dans les axes (λ, μ) peut donc être transformé en n'importe quel arc $\widehat{A^*B^*}$ dans les axes (λ^*, μ^*)

C-2-b - Calcul de la zone Σ_1

Dans le système d'axes (λ, μ) , le triangle $O_1 A' C'$ est l'image de la zone Σ_1 du plan des (x, y) par la transformation envisagée. La méthode de Massau O'y applique en écrivant ici 4 équations aux différences finies à 4 inconnues appelées \bar{x} , \bar{y} , $\bar{\xi}$ et $\bar{\eta}$:

$$(V-33) \quad \begin{cases} \bar{y}_{i+1}^{-n+1} - \bar{y}_{i+1}^{-n} - c_1^{n,i+1} \times [\bar{x}_{i+1}^{-n+1} - \bar{x}_{i+1}^{-n}] = 0 \\ \bar{y}_{i+1}^{-n+1} - \bar{y}_i^{-n} - c_2^{n,i} \times [\bar{x}_{i+1}^{-n+1} - \bar{x}_i^{-n}] = 0 \\ \bar{\xi}_{i+1}^{-n+1} - \bar{\xi}_{i+1}^{-n} - d_1^{n,i+1} \times [\bar{x}_{i+1}^{-n+1} - \bar{x}_{i+1}^{-n}] = 0 \\ \bar{\eta}_{i+1}^{-n+1} - \bar{\eta}_i^{-n} - d_2^{n,i} \times [\bar{x}_{i+1}^{-n+1} - \bar{x}_i^{-n}] = 0 \end{cases}$$

Conformément à la figure (V-7) et aux notations utilisées dans les parties A et B. $i = n, n+1, \dots, I$; $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$.

Avec :

$$(V-34) \quad \begin{cases} x(\lambda_i, -\lambda_i) = \bar{x}_i^0 = \tilde{\varphi}_{1i} \\ y(\lambda_i, -\lambda_i) = \bar{y}_i^0 = \tilde{\varphi}_{2i} \\ \xi(\lambda_i, -\lambda_i) = \bar{\xi}_i^0 = \tilde{\varphi}_{3i} \\ \eta(\lambda_i, -\lambda_i) = \bar{\eta}_i^0 = \tilde{\varphi}_{4i} \end{cases} \quad i = 0, 1, 2, \dots, I$$

(la grille étant définie comme à la section A-2).

Il est bien clair que si les hypothèses i, ii et iii sont satisfaites, (V-33)-(V-34) forment une approximation stable de (V-31)-(V-32), d'après ce qui a été établi à la section A.

C-2-c - Calcul de la zone Σ_2 a) Condition de PRANDTL [1]

En pratique, dans le plan (x, y) , on peut se donner :

$$(V-35) \quad \left[\begin{array}{l} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}}^+ \varphi(x_0(y), y) = \varphi_A \\ \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}}^+ \varphi(x_1(y), y) = \varphi_B \end{array} \right.$$

$x = x_0(y)$ et $x = x_1(y)$ étant les équations de OA et de OB (φ_A et φ_B sont des constantes sur OA et OB et partout ailleurs, on a : $2\varphi(x, y) = \xi(x, y) - \eta(x, y)$).

D'autre part, on se donne également

$$\left[\begin{array}{l} \sigma(y) = \sigma(x_0(y), y) \text{ et} \\ \lim_{y \rightarrow 0}^+ \sigma(y) = \sigma_1 \end{array} \right.$$

PRANDTL postule que le point 0 est une caractéristique "dégénérée", il en résulte [1], qu'en ce point, on a la relation :

$$(V-36) \quad d\sigma - 2\varepsilon \sigma \operatorname{tg} \rho \, d\varphi = 0$$

(avec $\varepsilon = \pm 1$ suivant les états d'équilibre imposés par rapport à OA et OB).

En intégrant (V-36), et en choisissant, par exemple $\varepsilon = \pm 1$, on obtient :

$$(V-37) \quad \operatorname{Log} \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = 2(\varphi_A - \varphi_B) \operatorname{tg} \rho$$

avec

$$\sigma_2 = \lim_{\substack{x \rightarrow 0_+ \\ y \rightarrow 0_-}} \sigma(x_1(y), y)$$

En écrivant que $\sigma = \exp [(\xi + \eta) \operatorname{tg} \rho]$ et $2\varphi = \xi - \eta$, on peut déduire immédiatement de (V-37) que η est constante au point 0 tandis que est discontinue, soit :

$$\left[\begin{array}{l} \lim_{\substack{x \rightarrow 0_+ \\ y \rightarrow 0_+}} \eta(x_0(y), y) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0_+ \\ y \rightarrow 0_-}} \eta(x_1(y), y) \\ \\ \lim_{\substack{x \rightarrow 0_+ \\ y \rightarrow 0_+}} \xi(x_0(y), y) \neq \lim_{\substack{x \rightarrow 0_+ \\ y \rightarrow 0_-}} \xi(x_1(y), y) \end{array} \right.$$

β) Dans le plan des variables caractéristiques et dans l'hypothèse de PRANDTL, le point 0 est donc une caractéristique $0_1 0_2$ et la zone Σ_2 a pour image le rectangle $0_1 C' D' 0_2$ (Figure V-8).

Pour prolonger le calcul dans la zone Σ_2 , on se donne arbitrairement (λ) sur $0_1 0_2$:

$$(V-38) \quad \varphi(\lambda) = \varphi_A + \frac{\lambda - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} (\varphi_B - \varphi_A)$$

Numériquement, on choisit un pas k sur $0_1 0_2$, soit M points tels que :

$$(V-39) \quad \begin{array}{l} \lambda_{0_2} = \lambda_{0_1} + Mk \qquad \lambda_m = \lambda_1 + mk \qquad (\lambda_0 = \lambda_{0_1}) \\ \varphi_m = \varphi_A + \frac{m}{M} (\varphi_B - \varphi_A) \end{array}$$

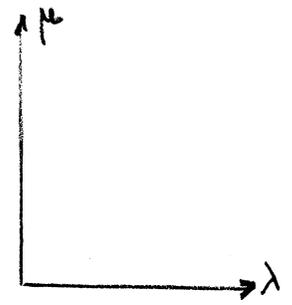
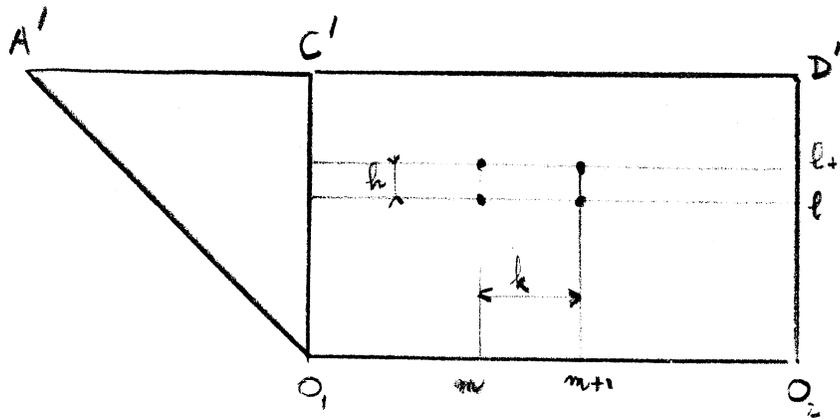


Fig. V-8

Il résulte de tout ce qui précède, que forcément on aura un faisceau de caractéristiques issues de 0.

Les équations aux différences finies de Massau sont alors les suivantes :

$$(V-40) \left\{ \begin{array}{l} \bar{y}_{m+1}^{-l+1} - \bar{y}_m^{-l+1} - c_1^{l+1,m} [\bar{x}_{m+1}^{l+1} - \bar{x}_m^{l+1}] = 0 \\ \bar{y}_{m+1}^{-l+1} - \bar{y}_{m+1}^{-l} - c_2^{l,m+1} [\bar{x}_{m+1}^{l+1} - \bar{x}_{m+1}^l] = 0 \\ \bar{\xi}_{m+1}^{-l+1} - \bar{\xi}_m^{-l+1} - d_1^{l+1,m} [\bar{x}_{m+1}^{l+1} - \bar{x}_m^{l+1}] = 0 \\ \bar{\eta}_{m+1}^{-l+1} - \bar{\eta}_{m+1}^{-l} - d_2^{l,m+1} [\bar{x}_{m+1}^{l+1} - \bar{x}_{m+1}^l] = 0 \end{array} \right.$$

$$l = 0, 1, 2, \dots, L-1, \quad m = 0, 1, 2, \dots, M-1$$

Avec :

$$\bar{x}_0^{-l+1} = \psi_1^{l+1}, \quad \bar{y}_0^{-l+1} = \psi_2^{l+1}, \quad \bar{\xi}_0^{-l+1} = \psi_3^{l+1}, \quad \bar{\eta}_0^{-l+1} = \psi_4^{l+1}$$

sur O_1C' , et déterminés au préalable par le calcul de la zone Σ_1 .

$$l = 0, 1, 2, \dots, L-1.$$

(V-41) sur O_1O_2 et pour $m = 0, 1, 2, \dots, M$:

$$\bar{\xi}_m = \bar{\xi}_{O_1} + \frac{m}{M} (\bar{\xi}_{O_2} - \bar{\xi}_{O_1})$$

$$\bar{\eta}_m^0 = \bar{\eta}_{O_1} = \bar{\eta}_{O_2}$$

$$\bar{x}_m^0 = \bar{y}_m^0 = 0$$

Il est clair que (V-40)-(V-41) permettent le calcul des fonctions inconnues \bar{x} , \bar{y} , $\bar{\xi}$ et $\bar{\eta}$ explicitement en tous les points de la grille du rectangle $O_1C'D'O_2$.

Remarques :

- a) (V-39) sélectionne une solution parmi beaucoup d'autres possibles.
- b) L'expérience montre que la méthode semble converger dès que $k < k_0(h)$. Plus précisément, il semble que le pas k doit être choisi tel que :

$$\frac{h}{\Delta\theta} > 1.2, \quad \Delta\theta = \frac{\theta}{M}, \quad \theta \text{ étant l'angle d'ouverture de la zone } \Sigma_2.$$

- c) Le problème (V-40)-(V-41) est parfois appelé problème de Goursat.

C-2-d - Calcul de la zone Σ_3

Dans le plan (λ, μ) , on peut s'arranger [C-2-a] pour que l'image de Σ_3 soit le triangle $O_2D'B'$ de la figure (V-9). (O_2B' étant une parallèle à la première bissectrice).

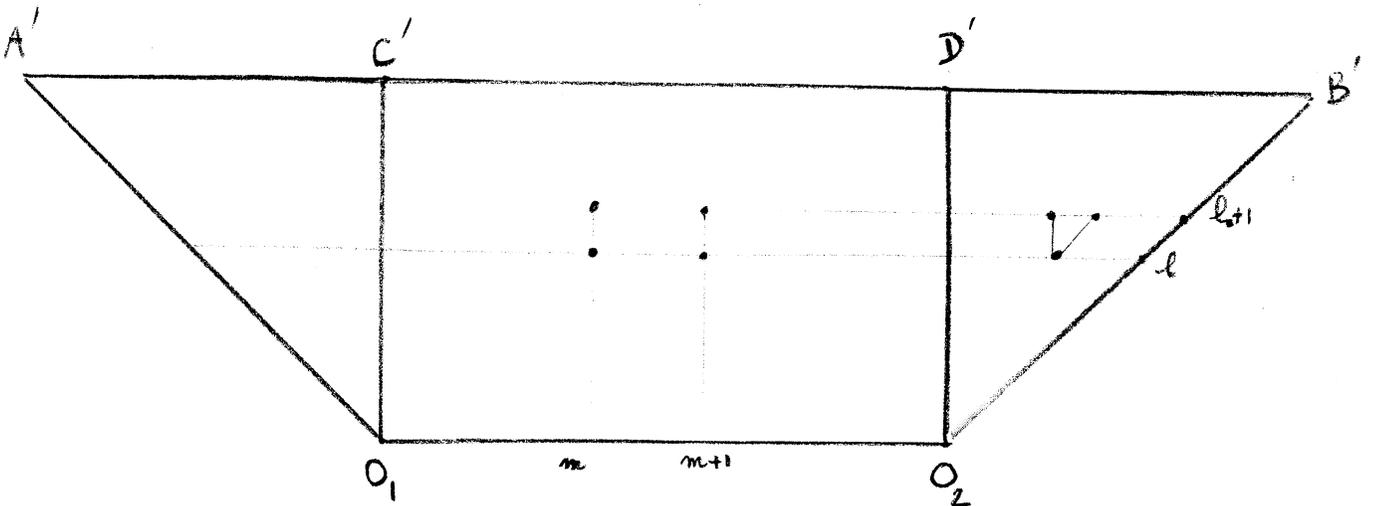


Fig. V-9

Pour les points "intérieurs" (strictement), le schéma utilisé est le suivant :
(h = k).

$$(V-42) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{y}_{m+1}^{-\ell+1} - \bar{y}_m^{-\ell+1} - c_1^{\ell+1,m} [\bar{x}_{m+1}^{\ell+1} - \bar{x}_m^{\ell+1}] = 0 \\ \bar{\xi}_{m+1}^{-\ell+1} - \bar{\xi}_m^{-\ell+1} - d_1^{\ell+1,m} [\bar{x}_{m+1}^{\ell+1} - \bar{x}_m^{\ell+1}] = 0 \\ \ell = 0, 1, 2, \dots, L-1 ; \quad \underline{m = 0, 1, 2, \dots, \ell} . \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{y}_{m+1}^{-\ell+1} - \bar{y}_{m+1}^{-\ell} - c_2^{\ell,m+1} [\bar{x}_{m+1}^{-\ell+1} - \bar{x}_{m+1}^{-\ell}] = 0 \\ \bar{\eta}_{m+1}^{-\ell+1} - \bar{\eta}_{m+1}^{-\ell} - d_2^{\ell,m+1} [\bar{x}_{m+1}^{-\ell+1} - \bar{x}_{m+1}^{-\ell}] = 0 \\ \ell = 0, 1, 2, \dots, L-1 ; \quad \underline{m = 0, 1, 2, \dots, \ell-1} . \end{array} \right.$$

Et :

Sur O_2D' :

$$\bar{x}_0^{-\ell+1} = \tilde{\psi}_1^{\ell+1} , \quad \bar{y}_0^{-\ell+1} = \tilde{\psi}_2^{\ell+1}$$

$$\bar{\psi}_0^{\ell+1} = \tilde{\psi}_3^{\ell+1} , \quad \bar{\eta}_0^{-\ell+1} = \tilde{\psi}_4^{\ell+1}$$

$$\ell = 0, 1, 2, \dots, L-1$$

(déterminés préalablement par le calcul de Σ_2).

(V-43)

Sur O_2B' :

$$\bar{y}_{\ell+1}^{-\ell+1} = \alpha \bar{x}_{\ell+1}^{-\ell+1} \quad (\text{on suppose ici que } OB \text{ est une droite de pente } \alpha)$$

$$\bar{\xi}_{\ell+1}^{-\ell+1} = \bar{\eta}_{\ell+1}^{-\ell+1} + 2\psi_B \quad \ell = 0, 1, 2, \dots, L-1.$$

D'une manière évidente, (V-42)-(V-43) permettent le calcul explicite des quatre inconnues en tous les points de la grille du triangle $O_2D'B'$, y compris entre O_2B' .

C-3 - Discussion de la stabilité

C-3-2 - Présentons d'abord la méthode précédente d'une manière un peu différente. Choisissons d'abord un pas h tel que

$$\lambda_{O_2} = \lambda_{O_1} + Nh$$

Et considérons la même grille Ω_h partout sur le domaine où l'on désire calculer les solutions de notre problème [Figure V-10].

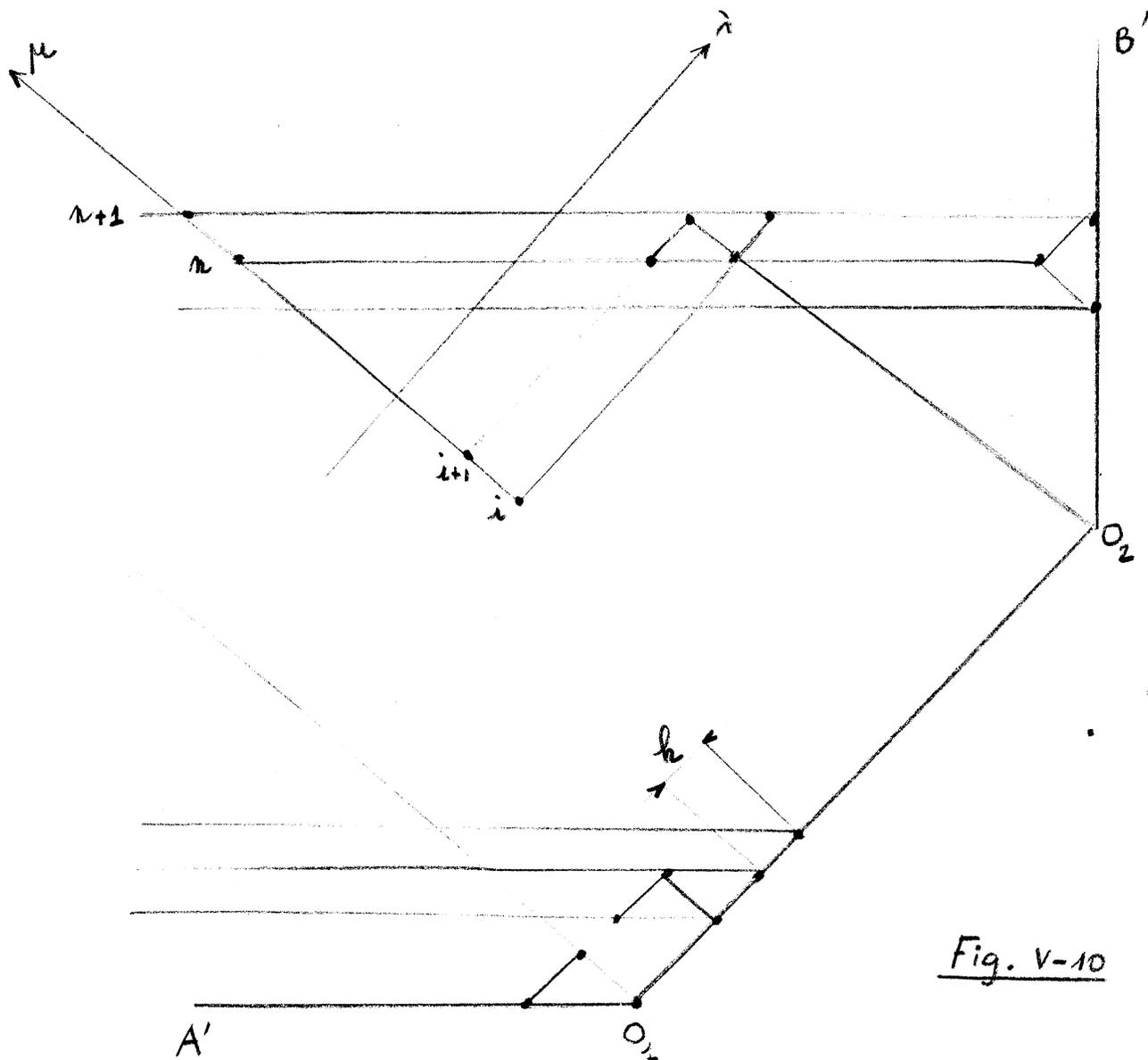


Fig. V-10

soit maintenant le problème aux différences finies :

$$(V-44) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{y}_{i+1}^{-n+1} - \bar{y}_{i+1}^{-n} - c_1^{n,i+1} [\bar{x}_{i+1}^{-n+1} - \bar{x}_{i+1}^{-n}] = 0 \\ \bar{y}_{i+1}^{-n+1} - \bar{y}_i^{-n} - c_2^{n,i} [\bar{x}_{i+1}^{-n+1} - \bar{x}_i^{-n}] = 0 \\ \bar{\xi}_{i+1}^{-n+1} - \bar{\xi}_{i+1}^{-n} - d_1^{n,i+1} [\bar{x}_{i+1}^{-n+1} - \bar{x}_{i+1}^{-n}] = 0 \\ \bar{\eta}_{i+1}^{-n+1} - \bar{\eta}_i^{-n} - d_2^{n,i} [\bar{x}_{i+1}^{-n+1} - \bar{x}_i^{-n}] = 0 \end{array} \right.$$

Avec :

a) si $n \leq N$ $i = 0, 1, 2, 3, \dots$

b) si $n = N+p$, p entier positif

$$i = \frac{p}{2}, \quad \frac{p}{2} + 1, \dots \quad p = 0, 2, 4, \dots$$

$$i = \frac{p+1}{2}, \quad \frac{p+3}{2}, \dots \quad p = 1, 3, 5, \dots$$

Et les conditions aux limites.

c) sur $\Gamma_{1h} = \{\lambda_i, -\mu_i \mid i = 0, 1, 2, \dots\}$:

$$\bar{x}_i^0 = \tilde{\varphi}_{1i} \quad \bar{\xi}_i^0 = \tilde{\varphi}_{3i}$$

$$\bar{y}_i^0 = \tilde{\varphi}_{2i} \quad \bar{\eta}_i^0 = \tilde{\varphi}_{4i}$$

d) sur $\Gamma_{2h} = \{\mu_0, \lambda_n \mid n = 0, 1, 2, \dots, N\}$:

$$\bar{x}_0^n = \bar{y}_0^n = 0$$

$$\bar{\eta}_0^n = \bar{\eta}_0^0$$

$$\bar{\xi}_0^n = \bar{\xi}_0^0 + \frac{n}{N} (\bar{\xi}_0^0 - \bar{\xi}_0^N)$$

$$\bar{\xi}_0^N = \bar{\eta}_0^0 + 2\varphi_B.$$

e) Sur $\Gamma_{3h} = \{\lambda_p, \mu_p \mid p = 0, 2, 4, \dots\}$:

$$\bar{y}_{\frac{p}{2}}^{-N+p} = \alpha \bar{x}_{\frac{p}{2}}^{-N+p} \quad (\alpha \text{ est la pente de OB dans les axes } x, y)$$

$$\bar{\xi}_{\frac{p}{2}}^{-N+p} = \bar{\eta}_{\frac{p}{2}}^{-N+p} + 2\varphi_B$$

Ceci posé, il est clair que

- la donnée du pas h entraîne celle d'un pas $h\sqrt{2}$ sur O_1A' et donc (par transformation inverse) un certain pas h sur OA dans les axes x, y .
- (V-44) avec a, c et d donnent le problème P1.
- (V-44) avec b et e donnent le problème P2.
- Pour chacun de ces deux problèmes, nous avons montré la stabilité [section B] pourvu que les hypothèses suivantes soient satisfaites :

α) i, ii et iii

β) (V-20) [sect. B-2].

Dans le cas général, les hypothèses ii) et iii) sont satisfaites. Mais l'hypothèse i) ne l'est pas le plus souvent dans la zone Σ_2 .

l'hypothèse (V-20) donne ici :

$$(V-45) \quad |c^{N+p, p/2} - \alpha| > \delta' \quad \forall p = 0, 2, 4, \dots$$

(c désigne le vecteur de composantes c_1 et c_2).

Cela signifie que les caractéristiques ne doivent pas être tangentes à la droite OB (de pente α dans les axes $x-y$).

C-3-b - A titre d'exemple, considérons le cas simple où $a(\xi, \eta) = b(\xi, \eta) = 0$ (V-44) devient alors :

$$(V-46) \quad \begin{cases} \bar{y}_{i+1}^{-n+1} - \bar{y}_{i+1}^{-n} + c_1^{n, i+1} [\bar{x}_{i+1}^{-n+1} - \bar{x}_{i+1}^{-n}] = 0 \\ \bar{y}_{i+1}^{-n+1} - \bar{y}_i^{-n} + c_2^{n, i} [\bar{x}_{i+1}^{-n+1} - \bar{x}_i^{-n}] = 0 \end{cases}$$

$$(\bar{\xi}_{i+1}^{-n+1} = \bar{\xi}_{i+1}^{-n} \quad ; \quad \bar{\eta}_{i+1}^{-n+1} = \bar{\eta}_i^{-n})$$

ξ et η sont ici, les nouvelles variables indépendantes.
 y et x sont les seules inconnues du problème.

Avec :

$$- \text{Sur } \Gamma_{1h} : \bar{x}_i^{-b} = \bar{\varphi}_{1i}^b \quad \bar{y}_i^{-o} = \bar{\varphi}_{2i}^o \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

$$- \text{Sur } \Gamma_{2h} : \bar{x}_0^{-n} = \bar{y}_0^{-n} = 0 \quad n = 0, 1, 2, \dots, N$$

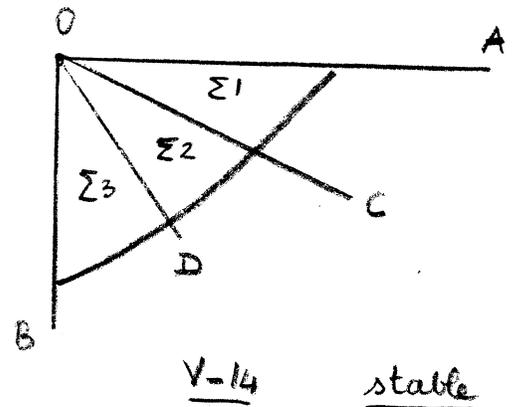
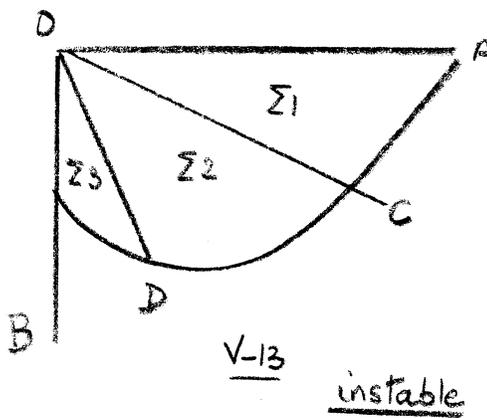
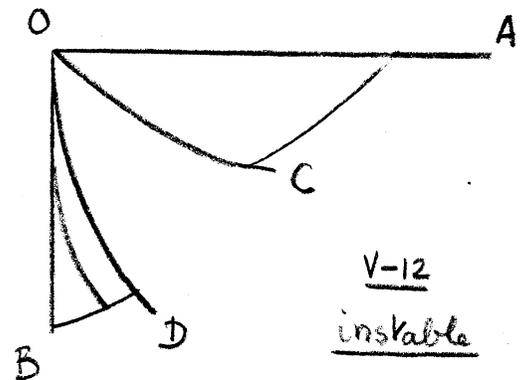
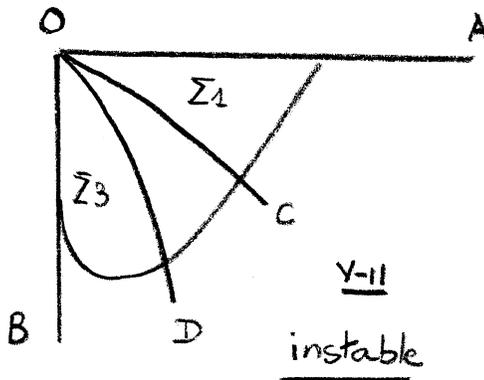
$$- \text{Sur } \Gamma_{3h} : \bar{y}_{\frac{p}{2}}^{-N+p} = \alpha \bar{x}_{\frac{p}{2}}^{-N+p} \quad p = 0, 2, 4, \dots$$

Dans ce cas simple, les équations (V-46) sont linéaires.

C-3-c - Cas d'instabilités

D'après (V-45), les figures (V-11) et (V-12) représentent des cas d'instabilité théorique.

On voit que l'hypothèse i) n'est pas satisfaite partout ($|c_1|$ non borné) sur la figure (V-13). Il en est presque toujours ainsi. Il s'agirait donc d'un cas théoriquement instable. La figure (V-14) montre un cas théoriquement stable.



C-3-d - Remarques

Dans le chapitre suivant, nous verrons quelques exemples numériques. Il peut arriver que les calculs "explosent", mais en général, l'instabilité de la méthode ne se manifeste pas aussi clairement, car il est difficile de comparer des résultats numériques sur une grille qui est, elle même, calculée. Généralement, on se contente d'observer grossièrement les trois zones Σ_1 , Σ_2 et Σ_3 en repérant les caractéristiques OC et OD et on se limite surtout aux résultats obtenus sur OB. La précision exigée en mécanique des sols par les ingénieurs n'est pas très grande et on considère souvent les résultats comme satisfaisants. Au chapitre suivant, il sera frappant de constater que seulement dans le cas de la figure (V-14), les résultats obtenus par cette méthode sont comparables dans la zone Σ_2 avec ceux donnés par une autre méthode numérique également aux différences finies.

Enfin, certaines hypothèses faites peuvent être sujettes à discussion :

$$- J = \frac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)} = 0 \text{ à l'origine.}$$

La condition de PRANDTL

- sélectionne une solution continue parmi une infinité d'autres possibles.

CHAPITRE VIAPPLICATIONSINTRODUCTION

Nous exposerons d'abord deux méthodes aux différences finies et l'étude de leur stabilité. Ces méthodes seront appliquées au problème posé.

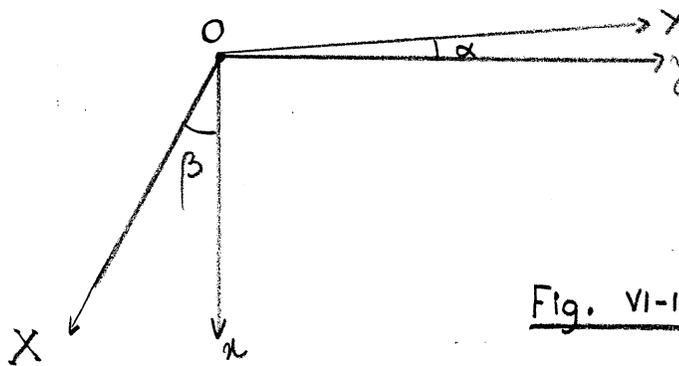
Nous présentons ensuite des résultats numériques obtenus sur quatre exemples choisis de manière quelconque. Le premier de ces exemples est traité dans [1]. L'ingénieur est surtout intéressé par les résultats obtenus sur la frontière OB. L'expérience a montré que la méthode de Massau donne en général des résultats avec une très faible précision (de l'ordre de 10 %). Nous verrons que d'autres méthodes peuvent conduire à des résultats beaucoup plus précis (d'ordre h), au moins dans un voisinage de 0.

D'autre part, il n'est tout de même pas sans intérêt de chercher à comparer les résultats à l'intérieur du domaine AOB. La méthode de Massau n'utilise pas un maillage fixe et les comparaisons expérimentales seront très limitées, mais suffisantes pour constater que dans la majorité des cas où la méthode de Massau est théoriquement instable, les résultats diffèrent de ceux obtenus par les autres méthodes qui, au moins expérimentalement, semblent satisfaisantes.

A - CHANGEMENT D'AXES

Il est en général commode d'opérer dans les axes OXY de la figure (VI-1).
Les équations de Sokolovsky s'écrivent alors :

$$(VI-1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \xi}{\partial X} + \frac{\cos(\varphi+\mu-\beta)}{\cos(\varphi-\mu-\alpha)} \frac{\partial \xi}{\partial Y} = \frac{\sin(\varphi-\mu)\sin(\alpha-\beta)}{2\sigma\cos 2\mu \cos(\varphi+\mu-\alpha)} \\ \frac{\partial \eta}{\partial X} + \frac{\cos(\varphi-\mu-\beta)}{\cos(\varphi-\mu-\alpha)} \frac{\partial \eta}{\partial Y} = - \frac{\sin(\varphi+\mu)\sin(\alpha-\beta)}{2\sigma\cos 2\mu \cos(\varphi-\mu-\alpha)} \end{array} \right.$$

Remarque :

La forme des équations est inchangée. Dans toute la suite, nous utiliserons les notations suivantes :

$$c_1(\xi, \eta) = \frac{\cos(\varphi+\mu-\beta)}{\cos(\varphi-\mu-\alpha)} \quad ; \quad c_2(\xi, \eta) = \frac{\cos(\varphi-\mu-\beta)}{\cos(\varphi-\mu-\alpha)} \quad ;$$

$$f_1(\xi, \eta) = \frac{\sin(\varphi-\mu)\sin(\alpha-\beta)}{2\sigma\cos 2\mu \cos(\varphi+\mu-\alpha)} \quad ; \quad f_2(\xi, \eta) = - \frac{\sin(\varphi+\mu)\sin(\alpha-\beta)}{2\sigma\cos 2\mu \cos(\varphi-\mu-\alpha)} .$$

B - METHODES

Outre la méthode de Massau (§ Ch. V), nous essaierons d'utiliser les méthodes aux différences finies suivantes :

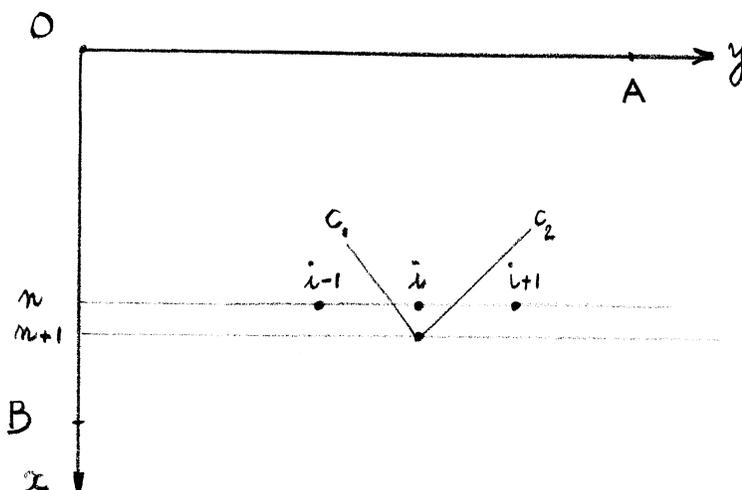
B-1 - Méthode 1

Nous appellerons ainsi le schéma α du chapitre III ou, plus souvent la simplification β .

Les équations (VI-1) sont alors remplacées par :

$$(VI-2) \quad \begin{cases} u_i^{n+1} = u_i^n + \frac{k}{h} c_1^{n,i} (u_{i-1}^n - u_i^n) + k f_1^{n,i} \\ v_i^{n+1} = v_i^n + \frac{k}{h} c_2^{n,i} (v_i^n - v_{i+1}^n) + k f_2^{n,i} \end{cases}$$

$$i = 1, 2, 3, \dots \quad ; \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1 ;$$



Nous supposons ici que c_1 et c_2 sont de signes contraires $c_1^{n,i}$ est mis pour $c_1(u_i^n, v_i^n)$ (de même pour $c_2^{n,i}$, $f_1^{n,i}$, $f_2^{n,i}$).

Avec les conditions :

$$(VI-3) \left\{ \begin{array}{l} \text{(a)} \quad u_i^0 = \varphi_i \\ \text{(b)} \quad v_0^{n+1} = v_0^n + \frac{k}{h} c_2^{n,0} (v_0^n - v_1^n) + k f_2^{n,0} \\ \text{(c)} \quad u_0^{n+1} - v_0^{n+1} = \text{constante.} \end{array} \right.$$

Pour simplifier, on peut faire une étude locale de la stabilité (en supposant les coefficients constants). Les deux équations de (VI-2) peuvent alors être considérées comme indépendantes. La deuxième équation associée aux conditions (VI-3)-a et b est une approximation stable d'ordre h, ceci a été démontré au chapitre IV, sect. 4 (en remplaçant partout $-\infty \leq i \leq +\infty$ par $0 \leq i \leq \infty$) pourvu que $\frac{k}{h} |c_2| < 1$. Il reste donc à étudier un problème du type suivant :

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \frac{k}{h} c_1 (u_{i-1}^n - u_i^n) + k f_i^n$$

$$i = 1, 2, 3, \dots$$

avec :

$$\left[\begin{array}{l} u_i^0 = \varphi_i \quad i = 0, 1, 2, \dots \\ u_0^{n+1} = \psi^{n+1} = \psi^n + k \frac{\psi^{n+1} - \psi^n}{k} \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \end{array} \right.$$

Posons : $\frac{k}{h} |c_1| = r$ et supposons $r < 1$,

on a :

$$u_i^{n+1} = u_i^n (1-r) + r u_{i-1}^n + k f_i^n$$

Cherchons une solution de la forme :

$$u_i^{n+1} = v_i^{n+1} + k \rho_i^n \quad (i \geq 0), \text{ il vient :}$$

$$v_i^{n+1} = (1-r)u_i^n + r u_{i-1}^n \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

$$v_0^{n+1} = \psi^n$$

$$\rho_i^n = f_i^n \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

$$\rho_0^n = \frac{\psi^{n+1} - \psi^n}{k}$$

D'où il résulte que :

$$|V_i^{n+1}| \leq \max_{i \geq 0} |u_i^n|$$

$$|\rho_i^n| \leq \max(\max_i |f_i^n|, \left| \frac{\psi^{n+1} - \psi^n}{k} \right|)$$

donc :

$$\begin{aligned} \max_{i \geq 0} |u_i^{n+1}| &\leq \max_i |V_i^{n+1}| + k \max_i |\rho_i^n| \\ &\leq \max_{i \geq 0} |u_i^n| + k \max(\max_i |f_i^n|, \left| \frac{\psi^{n+1} - \psi^n}{k} \right|) \end{aligned}$$

et si :

$$\|\varphi_h\|_{\Phi_h} = \max_{i \geq 0} |\varphi_i| + \max_n \left| \frac{\psi^{n+1} - \psi^n}{k} \right|$$

alors :

$$\max_{i \geq 0} |u_i^{n+1}| \leq \max_{i \geq 0} |u_i^n| + k [\|\varphi_h\|_{\Phi_h} + \|f_h\|_{F_h}]$$

ce qui s'écrit facilement :

$$\max_{n,i} |u_i^{n+1}| \leq \max_{i \geq 0} |\varphi_i| + (n+1)k [\|\varphi_h\|_{\Phi_h} + \|f_h\|_{F_h}]$$

Prenant $\|u_h\|_{U_h} = \max_{n,i} |u_i^n| \quad i = 0, 1, 2, \dots ; \quad n = 0, 1, 2, \dots, N$

On a donc prouvé la stabilité :

$$\|u_h\|_{U_h} \leq (1+X)\|\varphi_h\|_{\Phi_h} + X\|f_h\|_{F_h}$$

(X étant une constante indépendante de k telle que $(n+1)k \leq X$).

Remarques :

Dans le cas du problème particulier on a

$$\lim_{h \rightarrow 0} v(0, ih) = \lim_{k \rightarrow 0} v(nk, 0)$$

tandis que :

$$\lim_{h \rightarrow 0} u(0, ih) \neq \lim_{k \rightarrow 0} u(nk, 0).$$

Or, une étude locale de la stabilité présuppose que les coefficients ne doivent pas varier beaucoup d'une "couche" à la suivante, il est évident qu'en raison de la remarque précédente, il n'en sera pas ainsi.

L'étude rigoureuse de la convergence de la méthode 1 a été faite par P.D. Lax. et R. Courant [4], [13] dans le cas quasilinéaire. Elle conduit à la même condition locale de stabilité pourvu que certaines hypothèses (qui sont d'ailleurs les hypothèses d'existence et d'unicité du problème de Cauchy [Chapitre II] soient satisfaites.

Il faudra donc s'attendre à quelques divergences entre la théorie et l'expérience dans le cas du problème posé.

B-2 - Méthode 2

Nous appellerons ainsi le schéma (V-20) du chapitre IV, sect. 5.
Les équations aux différences finies s'écrivent :

$$\begin{cases} u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{1}{2} \frac{k}{h} c_1^{n,i} [u_{i+1}^n - u_{i-1}^n] + \frac{1}{2} \left(\frac{k}{h} c_1^{n,i} \right)^2 [u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n] + kf_1^{n,i} \\ v_i^{n+1} = v_i^n - \frac{1}{2} \frac{k}{h} c_2^{n,i} [v_{i+1}^n - v_{i-1}^n] + \frac{1}{2} \left(\frac{k}{h} c_2^{n,i} \right)^2 [v_{i+1}^n - 2v_i^n + v_{i-1}^n] + kf_2^{n,i} \end{cases}$$

$$i = 1, 2, 3, \dots \quad ; \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1.$$

Le problème à étudier est du type suivant :

$$(VI-4) \quad \begin{aligned} W_i^{n+1} &= M_{-1} W_{i-1}^n + M_0 W_i^n + M_1 W_{i+1}^n + k f_i^n \\ i &= 1, 2, 3, \dots \\ n &= 0, 1, 2, \dots, N-1 \\ W &= (u, v) \quad f = (f_1, f_2) \\ M_{-1}, M_0 \text{ et } M_1 &\text{ sont des matrices diagonales} \end{aligned}$$

Avec :

$$(VI-5) \quad \left\{ \begin{aligned} W_i^0 &= \varphi_i \quad \text{sur } \Gamma_{Ah} = \{x = 0, y = y_i = ih \mid i = 0, 1, 2, \dots\} \\ W_0^{n+1} &= A W_0^n + B W_1^n + k f^n \\ \text{sur } \Gamma_{Bh} &= \{x = nk, 0 \mid n = 0, 1, 2, \dots, N-1\} \end{aligned} \right.$$

ici

$$A = \begin{vmatrix} 1-r_1 & 0 \\ 0 & 1-r_2 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 0 & r_1 \\ 0 & r_2 \end{vmatrix}$$

$$r_1 = \frac{k}{h} |c_1| \quad , \quad r_2 = \frac{k}{h} |c_2|.$$

L'ordre en h et la stabilité de l'approximation (VI-4) avec $W_i^0 = \varphi_i$ pour $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ont été étudiés au chapitre IV. Le cas qui se présente ici est plus difficile à traiter.

a) Ordre de l'approximation (VI-4-5)

Soient les normes :

$$(VI-6) \quad \begin{aligned} \|W_h\|_{W_h} &= \max_n (h \sum_i |W_i^n|^2)^{1/2} \\ \|\varphi_h\|_{\Phi_h} &= h \max_n |f_0^n| + h \max_n \left| \frac{f_0^{n+1} - f_0^n}{k} \right| + (h \sum_{i \geq 0} |\varphi_i|^2)^{1/2} \\ \|f_h\|_{F_h} &= \max_n \max_{i \geq 1} |f_i^n| \end{aligned}$$

Ces normes furent introduites par Godunov et Ryaben'kii [7, Ch. V sect.3]

$$d_{h^2} w_h = \begin{cases} w_i^0 & \text{sur } \Gamma_{Ah} \\ w_0^{n+1} - AW_0^n - BW_1^n & \text{sur } \Gamma_{Bh} \end{cases}$$

$$\varphi_h = \begin{cases} \varphi_i & \text{sur } \Gamma_{Ah} \\ f_0^n = f(nk, 0) & \text{sur } \Gamma_{Bh} \end{cases}$$

En raison de la norme $\|\varphi_h\|_{\Phi_h}$ choisie, $d_{h^2} w_h = \varphi_h$ est une approximation d'ordre h^2 [7], et il en est donc ainsi pour l'approximation (VI-4)-(VI-5). (Si on avait pris par exemple

$$(VI-7) \quad \|\varphi_h\|_{\Phi_h} = \max_n |f_0^n| + \max_n \left| \frac{f_0^{n+1} - f_0^n}{k} \right| + (h \sum_{i>0} |\varphi_i|^2)^{1/2},$$

$d_{h^2} w_h = \varphi_h$ serait seulement d'ordre h .)

β) Stabilité - A l'aide des notations du chapitre IV, sect. B :

soit :

$$w^n = (w_0^n, w_1^n, w_2^n, \dots)$$

avec

$$\|w^n\|_{W_h} = \left(\frac{1}{2} h |w_0^n|^2 + h \sum_{i>1} |w_i^n|^2 \right)^{1/2}$$

(cette norme fut introduite par Godunov et Ryaben'kii [7, Ch. V, sect. 3]).
et soit R_h l'opérateur qui à $w^n \in W_h$ associe $z^{n+1} \in W_h$ tel que $z^{n+1} = R_h w^n$.

L'approximation (VI-4-5) s'écrit alors sous la forme réduite :

$$W^{n+1} = R_h W^n + k \rho^n$$

avec ici :

$$\begin{cases} z_0^{n+1} = Aw_0^n + Bw_1^n \\ z_i^{n+1} = M_{-1}w_{i-1}^n + M_0w_i^n + M_1w_{i+1}^n \end{cases}$$

$$\rho^n = (f_0^n, f_1^n, f_2^n, \dots)$$

Dans [7, Ch. V sect. 3], il est prouvé que :

$$\frac{1}{2}|z_0^n|^2 + \sum_{i \geq 1} |z_i^n|^2 \leq \frac{1}{2}|w_0^n|^2 + \sum_{i \geq 1} |w_i^n|^2.$$

Cette inégalité ressemble à celle obtenue au chapitre IV, elle tient compte de la condition à gauche. Il en résulte que

$$\|z\| \leq \|w\|$$

donc

$$\|R_h\| \leq 1 \quad \text{et} \quad \|R_h^n\| \leq 1.$$

La stabilité sera prouvée si les conditions du théorème B-2 (Ch. IV) sont satisfaites. Or la première de ces conditions ne l'est pas, en effet, si par exemple :

$$f_h \equiv 0 \quad , \quad \varphi_h = (0,1), \text{ alors}$$

$$\rho^n = (1,0,0,\dots) \quad \|\rho^n\| = \sqrt{\frac{h}{2}} \quad , \quad \|f_h\| = 0 \quad ,$$

$$\|\varphi_h\|_{\phi_h} = h.$$

Avec (VI-7), la condition serait satisfaite, mais l'approximation serait d'ordre h et cela n'est pas ce que nous recherchons.

Théorème (démonstration [7]) :

La deuxième condition du théorème B-2 (Ch. IV) peut être remplacée par :

Il existe une fonction $\delta_h \in W'_h$ telle que :

$$(VI-8) \quad \|\delta^n\| \leq A_1 \|f_h\|_{F_h} + A_2 \|\varphi_h\|_{\Phi_h}$$

$$(VI-9) \quad \left\| \rho^n - \frac{1}{k}(\delta^{n+1} - R_h \delta^n) \right\| \leq A_3 \|f_h\|_{F_h} + A_4 \|\varphi_h\|_{\Phi_h}$$

On peut en effet trouver une fonction δ_h de la manière suivante :

Cherchons une solution stationnaire de (VI-4)-(VI-5) avec $f_h = 0$, de la forme (à une constante près) :

$$\delta_i^n = h \frac{1+r}{2} f_0^n \left(\frac{r-1}{r+1}\right)^i.$$

Cette fonction satisfait à l'inégalité (VI-8), en effet :

$$|\delta_i^n| \leq h |f_0^n| \quad (\text{puisque } r \leq 1)$$

et par suite :

$$\|\delta^n\| \leq h \max_n |f_0^n| \leq \|\varphi_h\|_{\Phi_h}$$

D'autre part, par définition de δ^n on a :

$$\delta^n = R_h \delta^n + k(f_0^n, 0, 0, \dots)$$

Soit

$$\tilde{\rho}^n = \rho^n - \frac{1}{k}(\delta^{n+1} - R_h \delta^n) = \rho^n - \frac{1}{k}(\delta^{n+1} - \delta^n),$$

on a :

$$= \rho^n - \frac{1}{k}[\delta^{n+1} - \delta^n + k(f_0^n, 0, \dots)]$$

D'où :

$$\begin{aligned}\bar{\rho}_0^n &= -h \frac{1+r}{2} \cdot \frac{f_0^{n+1} - f_0^n}{k} \cdot \left(\frac{r-1}{r+1}\right)^i \\ \bar{\rho}_i^n &= f_i^n - h \frac{1+r}{2} \cdot \frac{f_0^{n+1} - f_0^n}{k} \cdot \left(\frac{r-1}{r+1}\right)^i \quad i \geq 1\end{aligned}$$

et :

$$\|\bar{\rho}^n\| \leq \|f_h\|_{F_h} + \|\varphi_h\|_{\Phi_h}.$$

La condition (VI-9) est satisfaite, d'où la stabilité.

On peut faire au moins les deux remarques suivantes :

- En pratique, la condition

$$w_0^{n+1} = Aw_0^n + Bw_1^n + kf^n \quad n = 0, 1, 2, \dots, N$$

n'est pas toujours utilisable, pour qu'elle le soit, il est nécessaire que l'une au moins des deux caractéristiques issues d'un point quelconque de OB tombe à l'extérieur du domaine OAB.

S'il n'en est pas ainsi, il faut utiliser une autre condition aux limites pour laquelle l'étude de la stabilité semble compliquée.

- Il est évident qu'une étude locale de la stabilité ne peut être réellement valable que si les coefficients sont assez "réguliers". Seule l'expérience peut effectivement permettre de juger une méthode aux différences finies pour un problème non linéaire comme c'est le cas ici.

C - APPLICATION AU PROBLEME POSE

Les applications des deux méthodes précédentes posent quelques problèmes pratiques dont voici les principaux :

C-1 - Conditions aux limites

$$\text{- Sur } \Gamma_{Ah} = \{x = 0, y = ih \mid i = 0, 1, 2, \dots\}$$

$$u_i^0 = \xi(0, ih) \quad v_i^0 = \eta(0, ih)$$

(VI-8)

$$\text{- Sur } \Gamma_{Bh} = \{x = nk, y = 0 \mid n = 0, 1, 2, \dots, N\}$$

$$u_0^n - v_0^n = 2\varphi_B = \text{constante.}$$

Avec :

$$\lim_{h \rightarrow 0} u(0, ih) \neq \lim_{x \rightarrow 0} u(x, 0)$$

(VI-9)

$$\lim_{h \rightarrow 0} v(0, ih) = \lim_{x \rightarrow 0} v(x, 0)$$

(on supposera toujours que $\xi(x, y)$ est discontinue au point 0).

C-2 -

C-2-a - Caractéristiques OC et OD

En raison de (VI-9), on constate la présence de trois zones Σ_1 , Σ_2 et Σ_3 . (§ Figure VI-3), séparées par les caractéristiques OC et OD.

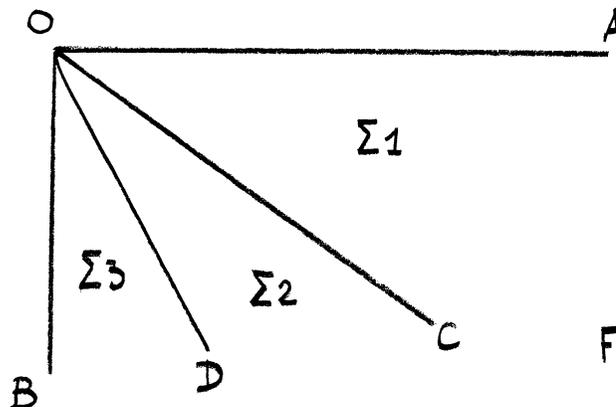


Fig. VI-3

L'expérience montre que dans la zone Σ_2 , l'une au moins des deux fonctions inconnues varie très rapidement. Il paraît donc naturel d'éviter le plus possible l'utilisation des points de Σ_{2h} pour les calculs de Σ_{1h} et de Σ_{3h} . Pour cela, on choisit d'abord un pas k et un pas h , variable, et tels qu'en tous les points du maillage, soit satisfaite l'inégalité locale de stabilité :

$$(VI-10) \quad \max\left(\frac{k}{h}|c_1|, \frac{k}{h}|c_2|\right) \leq 1.$$

Aux voisinages de OC et OD, on peut opérer de la manière suivante (§ Figure VI-4). Supposons que tout ait été calculé au niveau n .

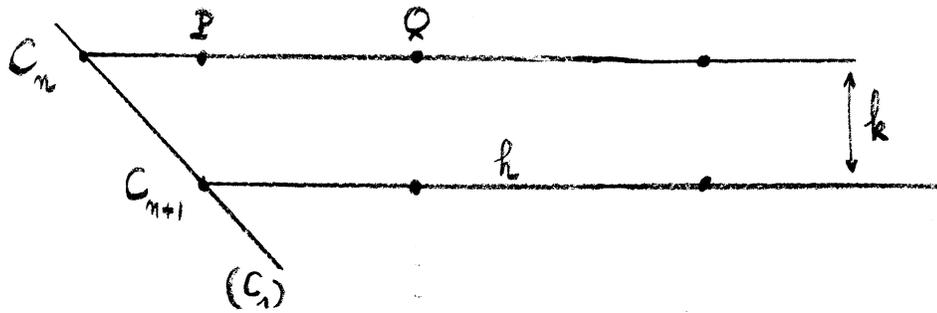


Fig. VI-4

Soit C_{n+1} le point d'intersection de la droite $x = x_{n+1} = (n+1)k$ avec la tangente au point C_n à la caractéristique (c_1) de la première famille, et P la projection de C_{n+1} sur la droite $x = x_n$. Désignons par

$$h_1 = y(P) - y(C_n) = k c_1(C_n)$$

$$h_2 = y(Q) - y(P)$$

$u(P)$ et $v(P)$ peuvent être calculés par interpolation linéaire :

$$u(P) = u(C_n) + \frac{h_1}{h_1+h_2} [u(Q) - u(C_n)]$$

(et une relation analogue pour $v(P)$).

La connaissance de $u(C_n)$, $v(C_n)$, $u(P)$, $v(P)$, $u(Q)$, $v(Q)$ permet le calcul de $u(C_{n+1})$ et $v(C_{n+1})$ par la méthode 1 ou la méthode 2. (après modification adéquate puisque $h_1 \neq h_2$) (si on utilise la méthode 2, on peut en toute rigueur, utiliser une interpolation d'ordre 2 à la place d'une interpolation linéaire). Cette méthode n'est pas la seule possible : on peut aussi utiliser des extrapolations.

Un procédé analogue est utilisé pour OD pour éviter tout empiètement de Σ_{2h} sur Σ_{3h} .

C-2-b - Cas particulier $n = 1$ (Figure VI-5)

Pour $n = 1$, on connaît seulement $\lim_{x \rightarrow 0} u(x,0)$ et v_0^0 .
Nous supposons que k est assez petit pour avoir :

$$v(D_1) = v(C_1).$$

Ici, il faut exceptionnellement appliquer la méthode de Massau :

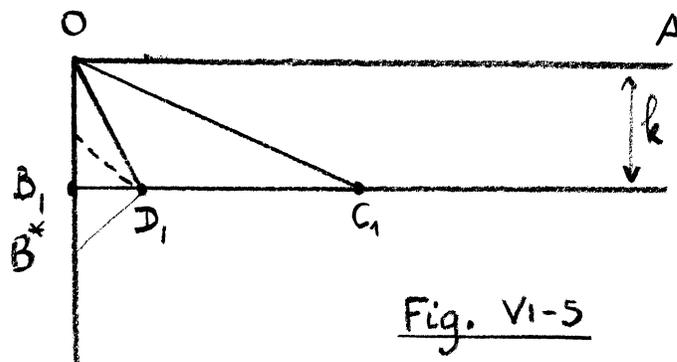
$$y(D_1) = k c_1(0)$$

$$u(D_1) = \lim_{x \rightarrow 0} u(x,0) + k f_1(0).$$

Ou bien, on peut encore supposer k assez petit pour que :

$$u(D_1) - v(D_1) = \lim_{x \rightarrow 0} u(x,0) - v_0^0.$$

Cas particulier : $n = 1$



C-2-c - Pour les points $B_n \in \Gamma_{Bh} = \{y = 0, x = nk \mid n = 0, 1, 2, \dots\}$ On peut appliquer la condition (VI-3-b-c) pourvu que l'une au moins des caractéristiques issues d'un point B_n ($\forall n$) tombe à l'extérieur de OAB, sinon, le plus simple est le procédé d'extrapolation linéaire.

C-3-d - Il y a encore un point délicat à soulever : nous avons vu au chapitre V, que la caractéristique de la famille (C_2) peut dans certains cas présenter une allure analogue à celle de la figure (VI-6). Au point R, la pente devient infinie et si on veut que l'inégalité (VI-10) soit satisfaite, il devient nécessaire de prendre un pas k d'autant plus petit que l'on se trouve plus près du point R et même nul à la limite. Il devient très rapidement impossible de poursuivre le calcul si on n'utilise pas un procédé particulier au voisinage de ce point. Nous avons opéré de la manière suivante :

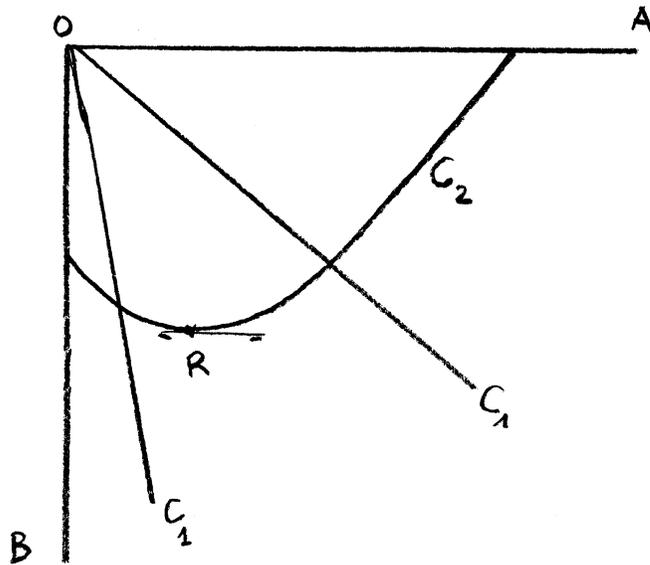
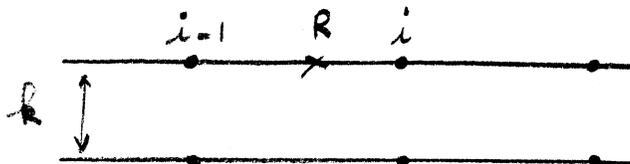


Fig. VI-6

Choisissons k toujours supérieur ou égal à un certain k_0 fixé à l'avance et assez grand pour que les calculs ne soient pas trop longs.



Si $\frac{k}{h} |c_2^{n,i}| > 1$, on ne calcule pas v_i^n par la méthode aux différences finies utilisées et on passe au point suivant, connaissant v_{i+1}^{n+1} et v_{i-1}^{n+1} , on peut utiliser une interpolation linéaire pour obtenir v_i^n .

Remarque : Un autre procédé pourrait être de choisir un pas assez grand au voisinage de R pour que l'inégalité $\frac{k}{h} |c_2^{n,i}| < 1$ soit satisfaite en pratique, mais l'expérience montre que cela est assez mal commode. Les résultats obtenus pour la solution v^n montreront qu'il est raisonnable d'envisager une interpolation linéaire portant uniquement sur v au voisinage de R .

D - EXEMPLES ET RESULTATS NUMERIQUES

D-1 - Notations

Dans tous les exemples traités dans la suite, les conditions aux limites seront données de la manière suivante :

- Sur OA :

$$\varphi_A = \alpha + \frac{\delta_1}{2} + \frac{1}{2} \varepsilon \operatorname{Arctg} \left(\frac{\sin \delta_1}{\sin \rho} \right) - (\varepsilon - 1) \frac{\pi}{4}$$

$$\sigma_A(x, y) = \frac{p + c \cotg \rho}{1 + \sin \rho \cos [2(\varphi_A - \alpha)]} + \frac{qy + sy^2}{1 + \sin \rho \cos [2(\varphi_A - \alpha)]}$$

- Sur OB :

$$\varphi_B = \frac{\delta_2}{2} - \frac{1}{2} \varepsilon \text{Arc sin} \left(\frac{\sin \delta_2}{\sin \rho} \right) + (1-\varepsilon) \frac{\pi}{4} + \beta$$

$$\bar{\sigma}_B(0,0) = \sigma_A(0,0) \exp [2\varepsilon \text{tg} \rho (\varphi_B - \varphi_A)]$$

$\delta_1, \delta_2, p, q, s, \rho, c, \alpha$ et β sont des constantes bien connues à l'avance pour chaque problème particulier.

Par exemple, γ est l'angle de frottement interne etc... $\varepsilon = \pm 1$ suivant les états d'équilibre de poussée ou de butée par rapport à OB.

Les relations (I-6) (Ch. I, sect. 1) permettent le passage des fonctions $\varphi(x,y)$ et $\sigma(x,y)$ aux fonctions $\xi(x,y)$ et $\eta(x,y)$.

D-2 - Premier exemple

Données :

$$\varepsilon = \pm 1 ; \alpha = 0 ; \beta = -20' ; \delta_1 = 0 ; \delta_2 = 20' ;$$

$$\rho = 30' ; c = 1 ; p = 10 ; q = 5 ; s = 0 ;$$

$$U = 1 ; V = 0 ;$$

Ceci donne $\varphi_A = 0 ; \varphi_B = -0.551 ;$

Au point 0, ξ est discontinue :

$$\lim_{y \rightarrow 0} \xi(0,y) = 1.781 ; \lim_{x \rightarrow 0} \xi(x,0) = 0.679.$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \eta(0,y) = \lim_{x \rightarrow 0} \eta(x,0) = 1.781.$$

La figure (VI-7) indique l'allure des caractéristiques et les trois zones Σ_1, Σ_2 et Σ_3 obtenues par la méthode de Massau.

La table I donne $\sigma(x,y)$ sur OB pour $h = 0.1, N = 2, 5, 10, 20$.

(N = nombre d'intervalles sur $O_1 O_2$, h est le pas choisi sur OA). A cette table correspondent les courbes de la figure (VI-8).

Un autre calcul, pour $h = 0.2$, $N = 10$, donne des résultats à peu près identiques aux précédents. Ici, la méthode de Massau semble fournir des résultats acceptables pour la précision désirée.

Les méthodes 1 et 2 donnent dans ce cas des résultats très comparables. (voir Figures (VI-9) et (VI-10) et la table II). En désignant par h_1 , h_2 et h_3 les pas pris respectivement dans les zones Σ_1 , Σ_2 et Σ_3 les calculs ont été faits ici avec

$$h_1 = 0.2, \quad h_2 \sim 0.1 \text{ et } h_3 \sim 0.05.$$

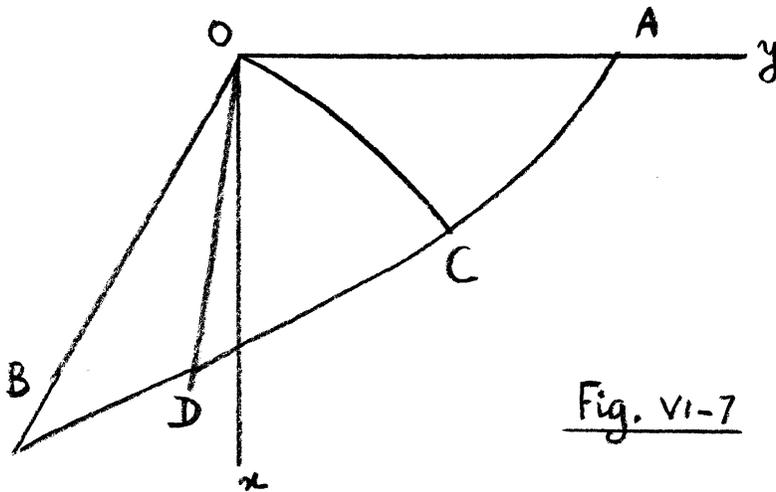
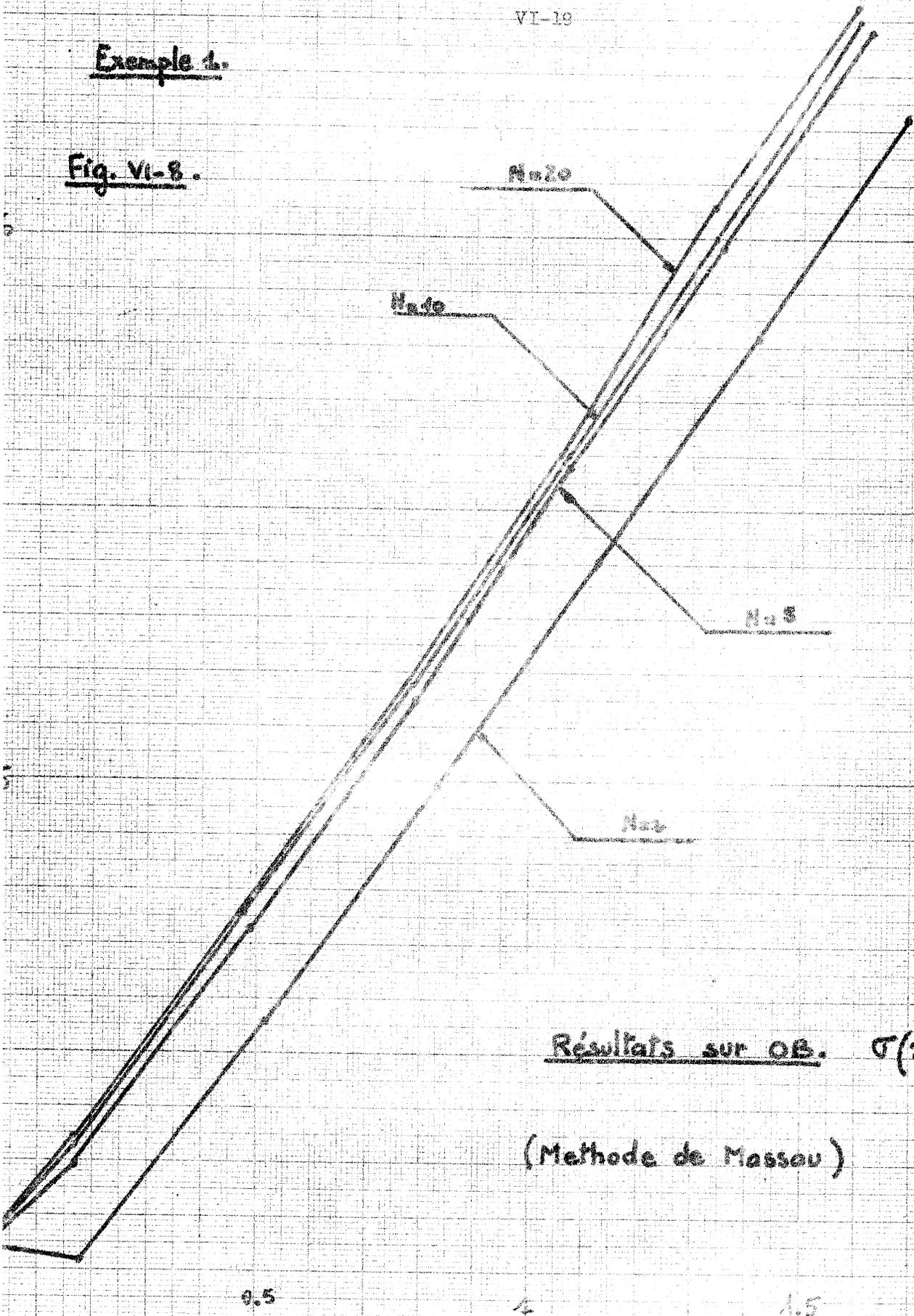


Fig. VI-7

sur la figure (VI-11), on compare $\varphi(y)$ ($x = 1.12$) pour $h_2 \sim 0.1$ et $h_2 \sim 0.05$. La méthode 1 était utilisée. Les écarts entre les deux courbes obtenues sont d'ordre h . On distingue bien les trois zones Σ_1, Σ_2 et Σ_3 , $\varphi(y)$ varie rapidement dans la zone Σ_2 , mais est bien continue partout (sauf pour $n = 0$). Les mêmes remarques peuvent être faites sur la figure (VI-12) obtenue par la méthode 2.

Exemple 1.

Fig. VI-8.



Résultats sur OB. $\sigma(x)$

(Méthode de Massou)

TABLE I(Résultats sur OB par la méthode de Massau)

x	σ	x	σ
N = 2		N = 5	
0	4.14	0	4.14
0.18	4.12	0.17	4.30
0.52	4.56	0.49	4.73
0.83	4.99	0.79	5.15
1.13	5.41	1.07	5.57
1.42	5.82	1.35	5.98
1.69	6.23	1.62	6.38
N = 10		N = 20	
0	4.14	0	4.14
0.17	4.33	0.17	4.34
0.48	4.76	0.48	4.77
0.78	5.18	0.78	5.19
1.07	5.59	1.06	5.6
1.34	6.	1.34	6.06
1.6	6.41	1.6	6.42

1^{er} exemple.

$f = f(x)$ sur la frontière OB.

f

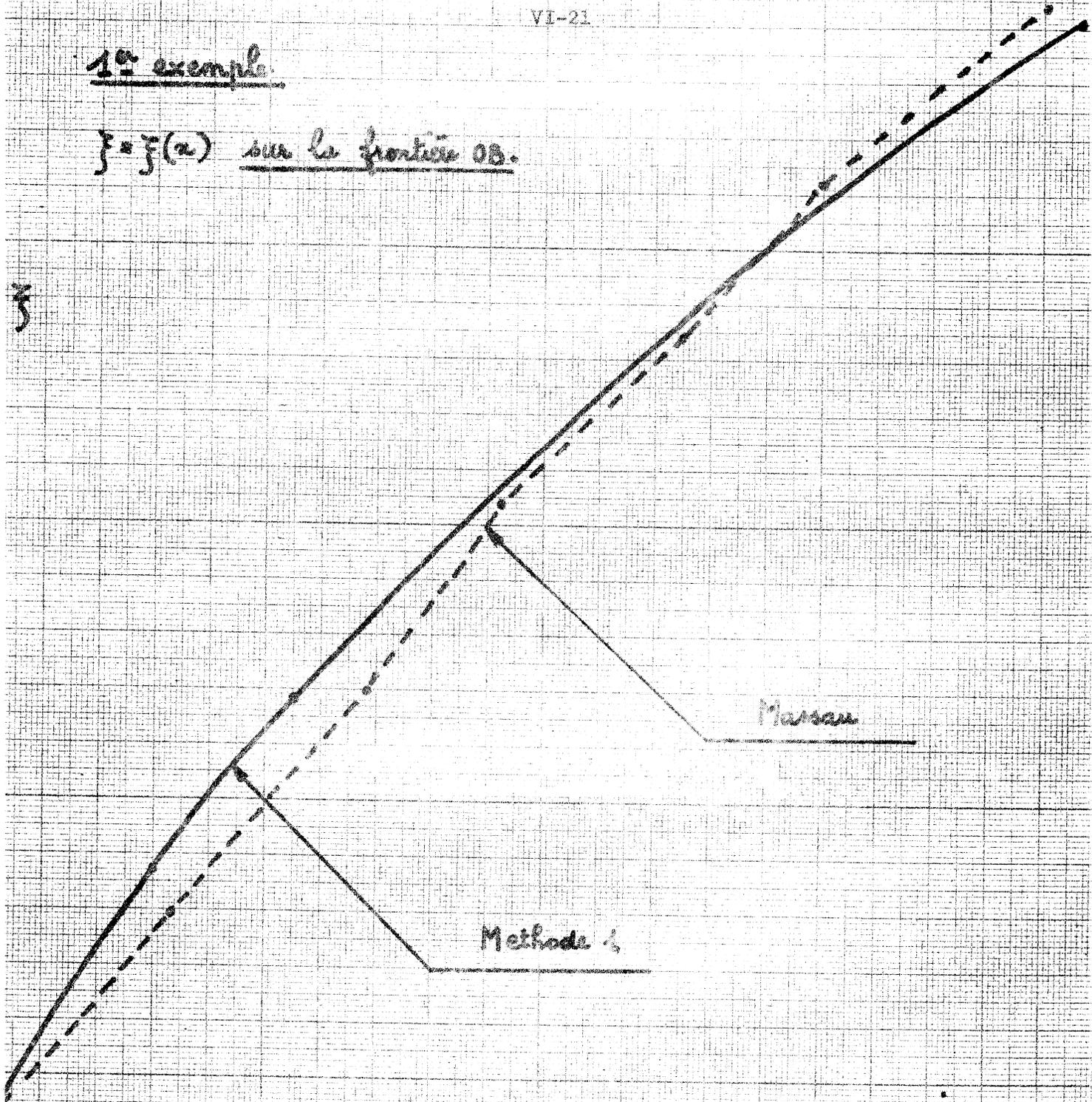
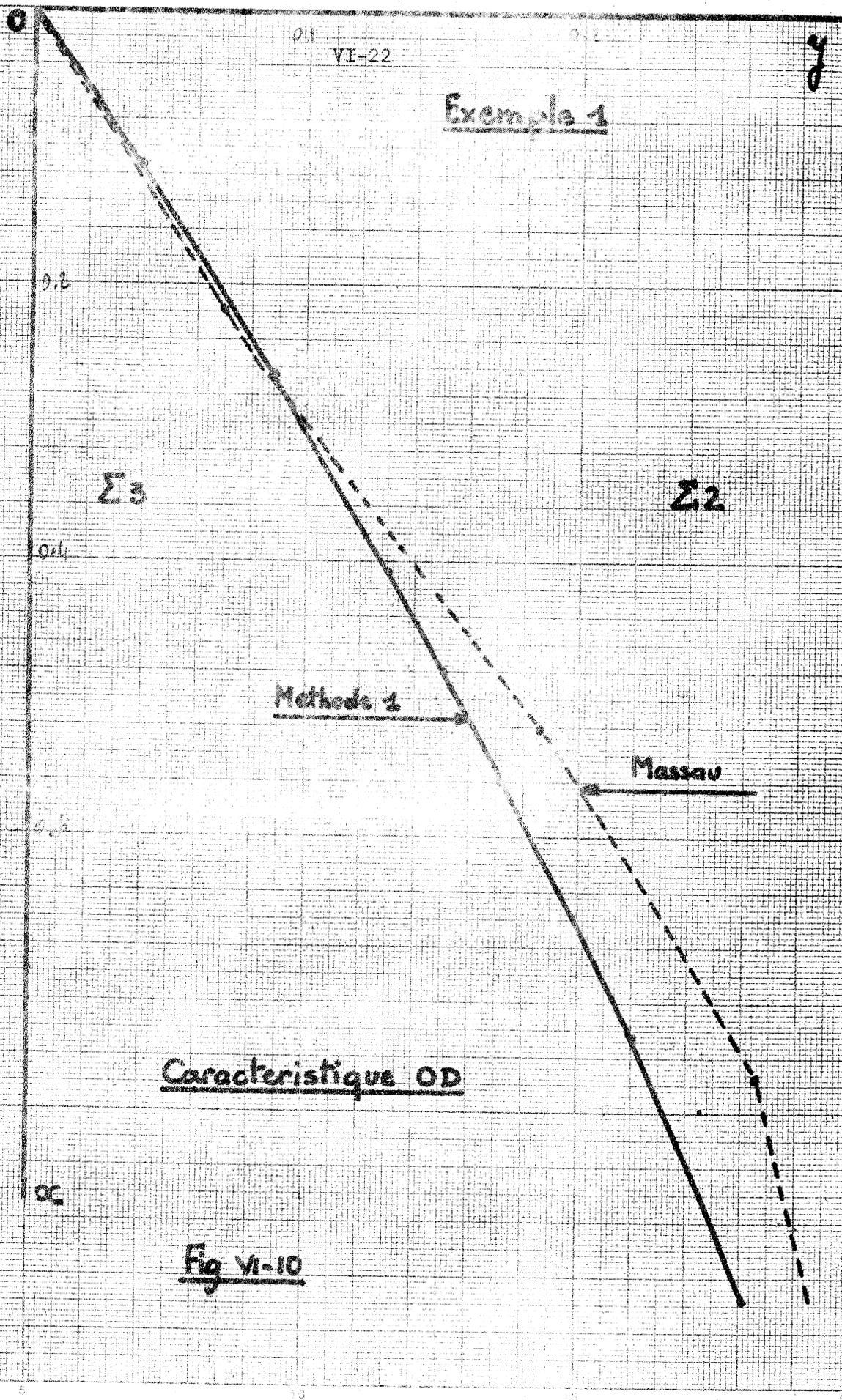


Fig. VI-9

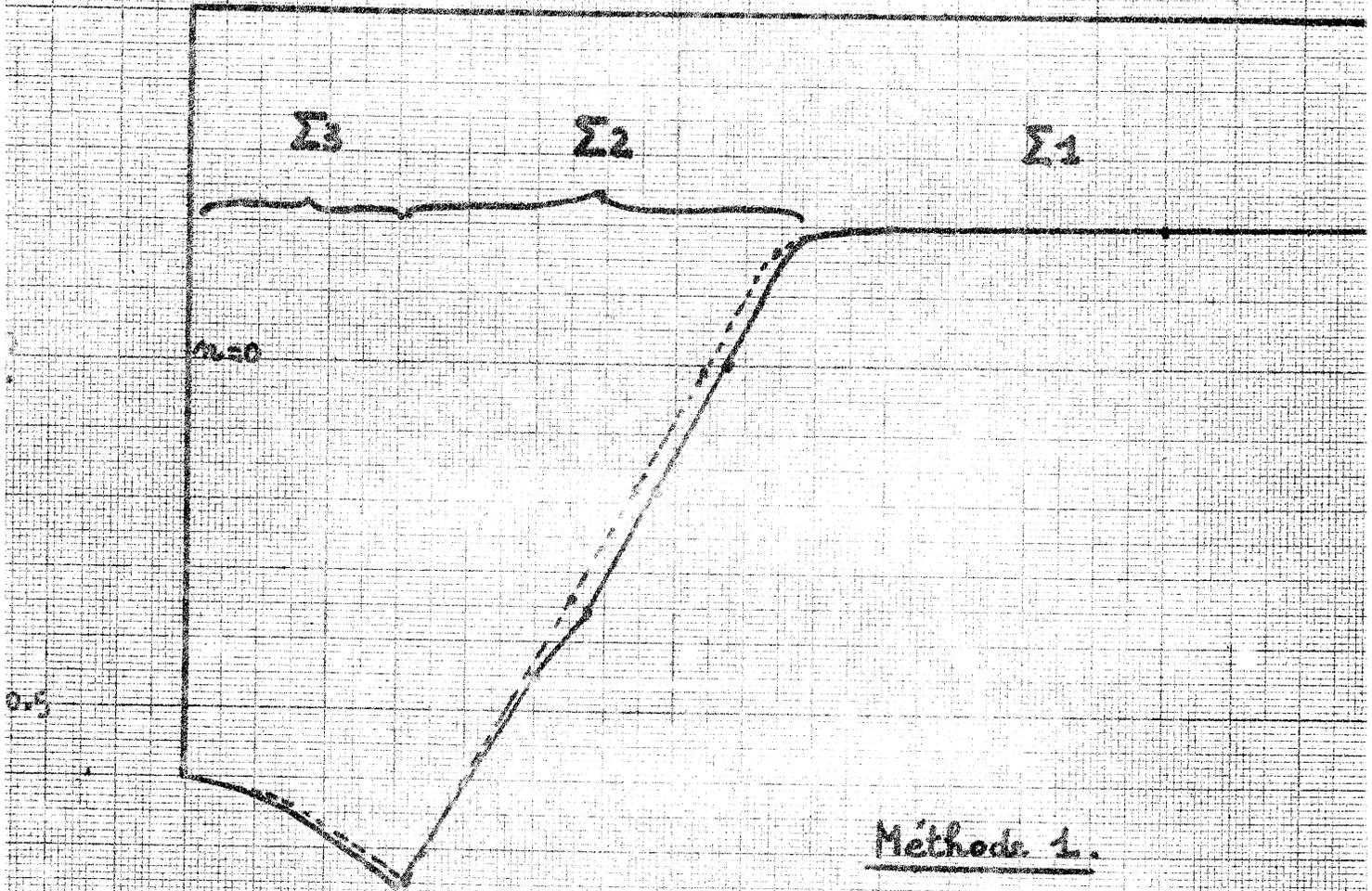
Exemple 1



Caractéristique OD

Fig VI-10

Exemple 1



Méthode 1.

$\varphi = \varphi(y)$

— $\alpha = 1.12$ $m = 20$ h_{max}
 - - - $\alpha = 1.12$ $m = 43$ h_{max}^2

Fig. VI-11.

Les pas utilisés sont plus grands : pour des pas inférieurs il n'aurait pas été commode de distinguer les deux courbes.

La figure (VI-13) montre les variations de ψ et σ en fonction de y pour différentes valeurs de $n = 0, 20, 40, 60, 80, 100$.

TABLE II

(Méthode 1 - Caractéristique OD et résultats sur OB)

n	$y(D_n)$	$\psi \times 10^3$	x	$\xi \times 10^3$	$\sigma \times 10^3$
0	0	- 551	0	679	4139
2	0.04	- 565	0.11	723	4358
15	0.07	- 572	0.21	744	4463
40	0.13	- 586	0.41	789	4702
50	0.15	- 591	0.48	805	4786
60	0.17	- 596	0.56	821	4877
81	0.22	- 599	0.72	854	5066
100	0.26	- 604	0.87	878	5208

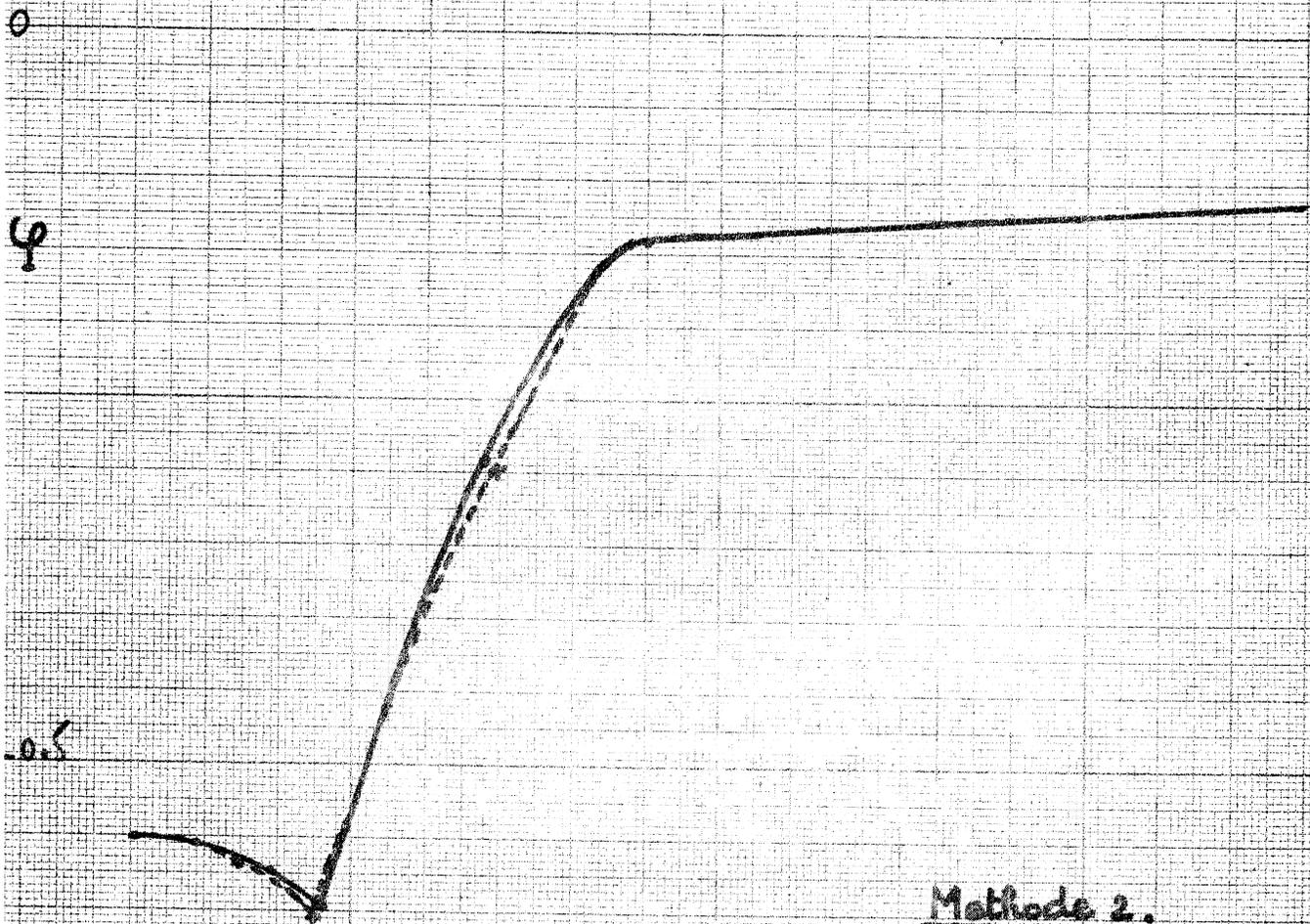
OD
OB

N.B. Pour les méthodes 1 et 2, nous avons fait en sorte que l'inégalité

$$\frac{k}{h} \max(|c_1|, |c_2|) \leq 1$$

soit satisfaite localement en tous les points de la grille.

Example 1.



Method 2.

$\varphi = \varphi(y)$

- $\alpha = 0.83$ $h_2 \approx 0.07$
- $\alpha = 0.83$ $h_2 \approx 0.14$

Fig. VI-12.

0

0.5

y

Nous avons fait d'autres calculs pour des pas différents. Voir la table II-bis pour apprécier la précision des résultats obtenus sur OB pour $\xi(x)$

Table II-bis

x	$h_3 \sim 0.07$	$h_3 \sim 0.03$
0.26	0.770	0.751
0.51	0.813	0.803
0.84	0.884	0.864
0.93	0.899	0.878

En conclusion, pour cet exemple, bien qu'il ne soit pratiquement pas possible d'effectuer des comparaisons pour la plupart des points situés à l'intérieur du domaine d'intégration, on voit bien que les résultats obtenus par des méthodes différentes sont comparables.

Donc :

- L'utilisation des méthodes 1 ou 2 apparaît possible : par un seul calcul, on obtient des résultats avec une précision d'ordre h .
- L'expérience semble bien confirmer la stabilité théorique de la méthode de Massau dans ce cas.
- Les méthodes à pas fixe apparaissent comme beaucoup plus commodes pour apprécier la précision des calculs.

Example 1.

$$\sigma^2 = \sigma^2(y)$$

$$\varphi = \varphi(y)$$

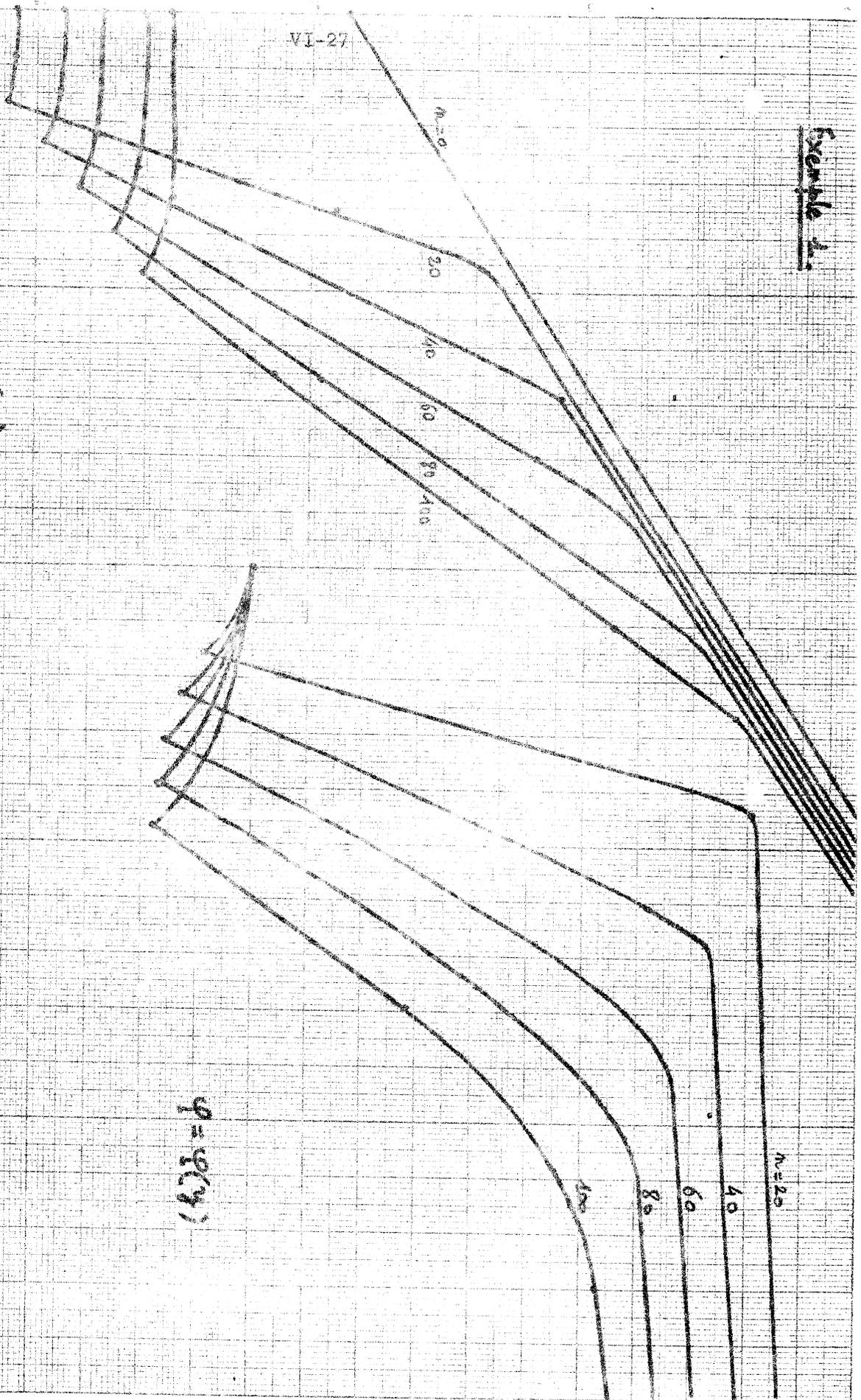


Fig. VI-13

D-3 - Deuxième exempleDonnées :

$$\left[\begin{array}{l} \varepsilon = -1 ; \alpha = 0 ; \beta = -60^\circ ; \delta_1 = 0 ; \delta_2 = -20^\circ ; \\ \rho = 30^\circ ; c = 1 ; p = 5 ; q = 1 ; s = 0 ; \\ U = 1 ; V = 0 ; \end{array} \right.$$

Ce qui donne :

$$\varphi_A = \frac{\pi}{2} ; \varphi_B = -0.028 ;$$

 η est discontinue au point 0 :

$$\lim_{y \rightarrow 0} \eta(0,y) = 0.68 ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \eta(x,0) = 3.88 ;$$

tandis que

$$\lim_{y \rightarrow 0} \xi(0,y) = \lim_{x \rightarrow 0} \xi(x,0) = 3.82.$$

La figure (VI-14) montre l'allure des caractéristiques et les trois zones Σ_1 , Σ_2 et Σ_3 .

Les courbes en pointillés sur la figure (VI-15) représentent $\sigma(x,0)$ sur OB pour différentes valeurs de N pour $h = 0.2$, la courbe en trait plein représente $\sigma(x,0)$ obtenu par la méthode 1. Pour N assez grand, les résultats sont comparables, au moins au voisinage de 0. De même pour OD (voir figure VI-16). Les courbes deviennent plus "serrées" pour $N > 50$, mais on ne le constate pas aussi clairement que sur l'exemple précédent.

Exemple 2 (metodo 2).

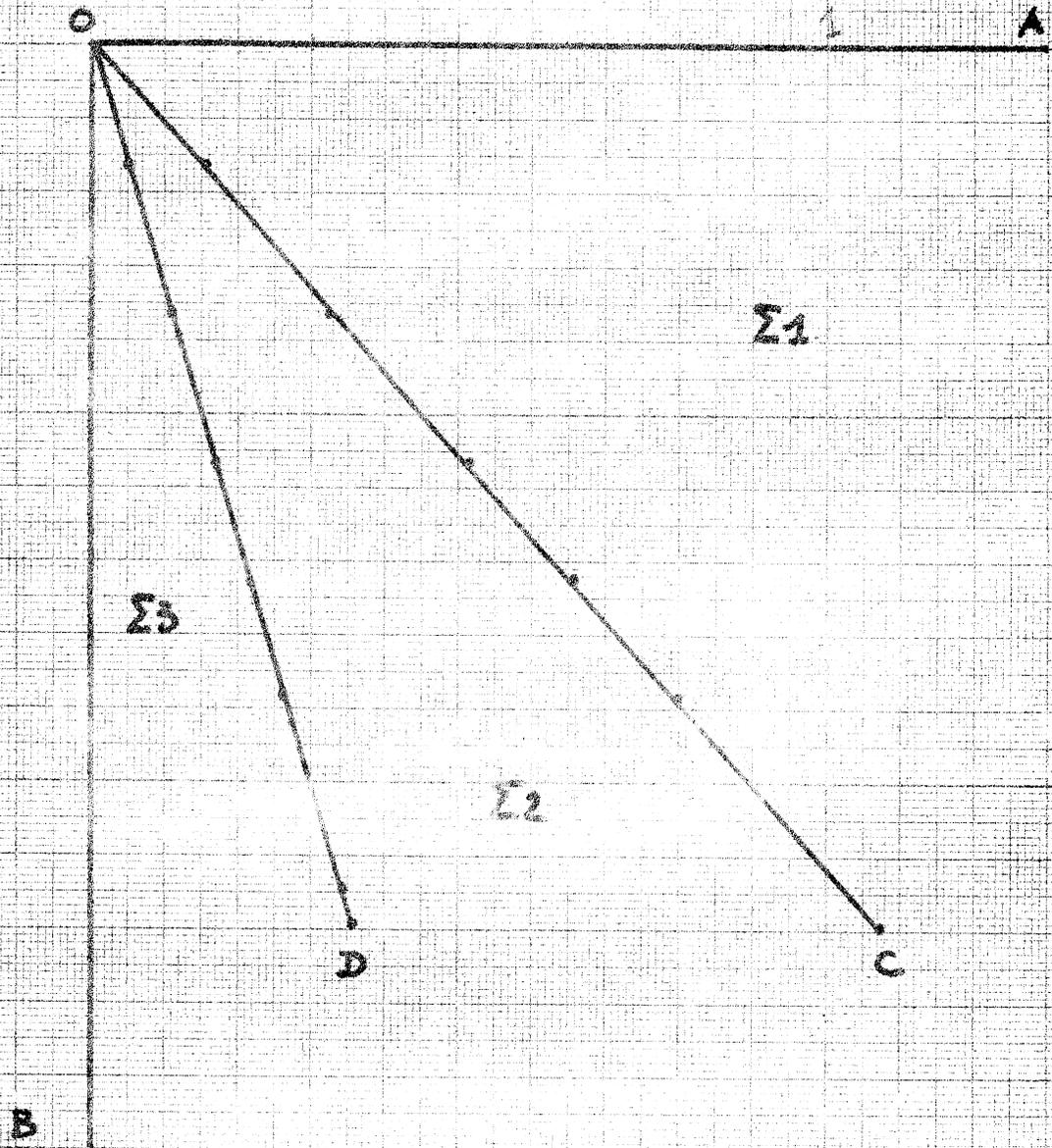


Fig. VI-14

Exemple 2 Resultats sur 08

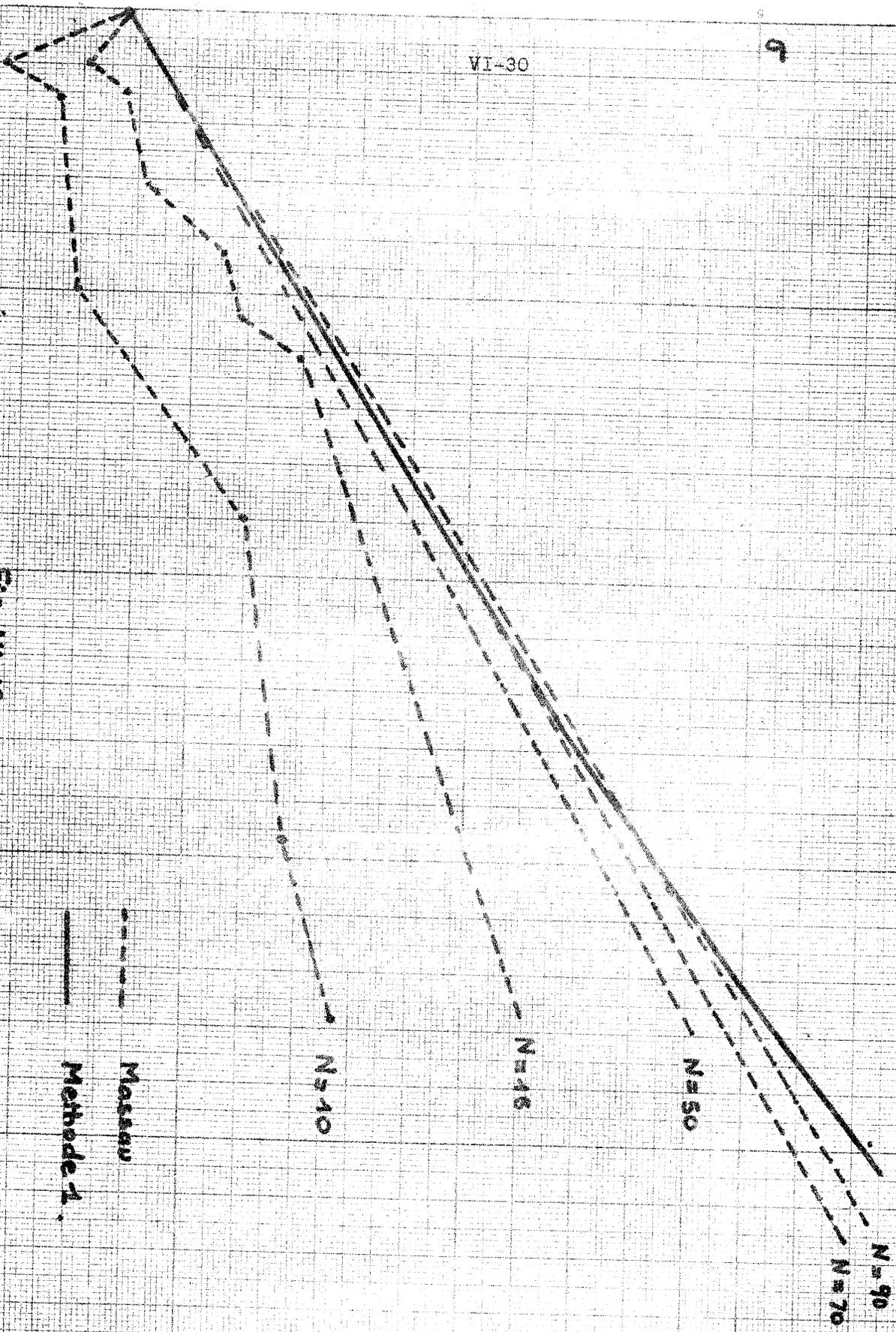


Fig. VI-15.

— Methode 1.
- - - Marsau

Exemple 2

Caracteristiques OD

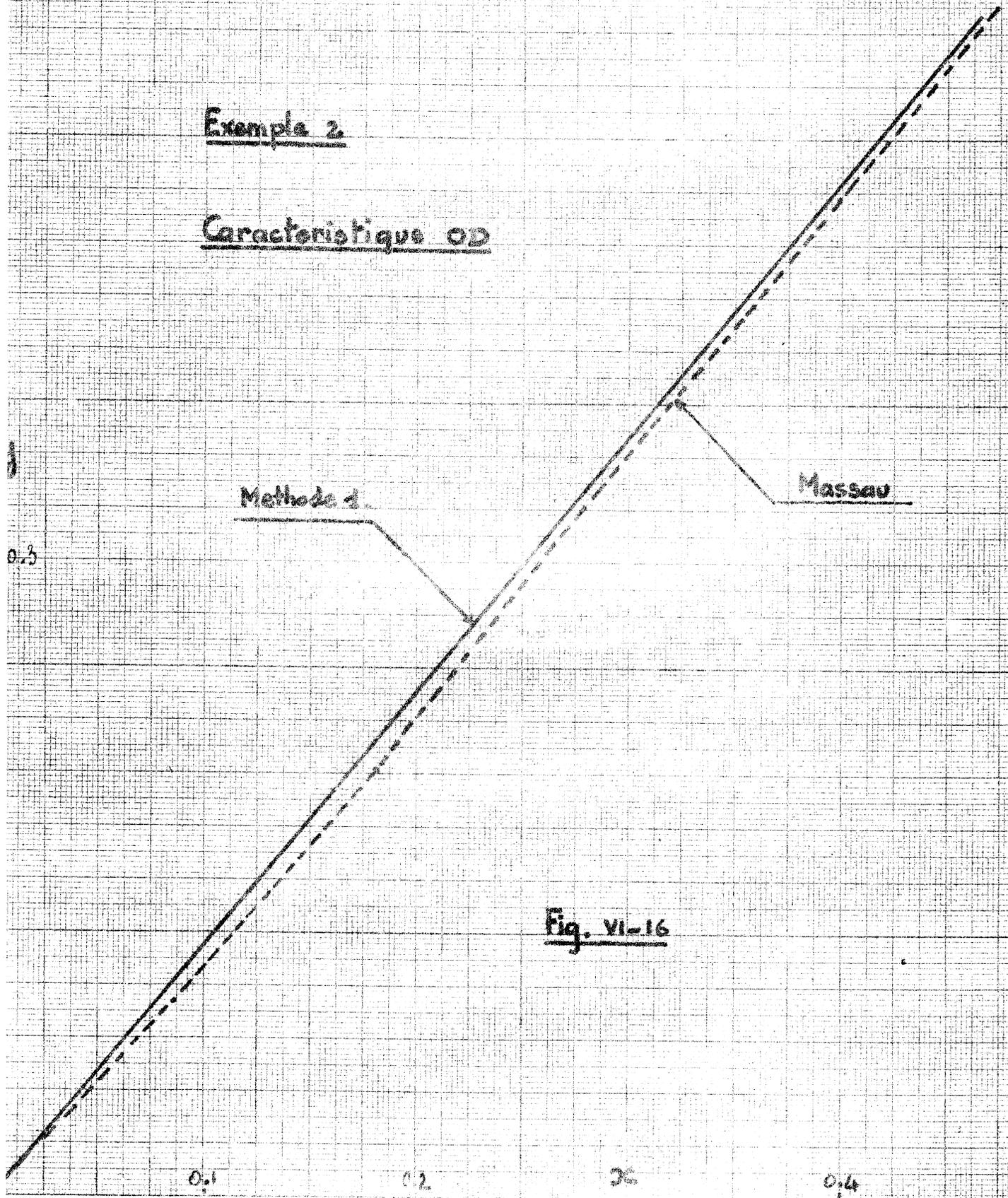


Fig. VI-16

Exemple 2.

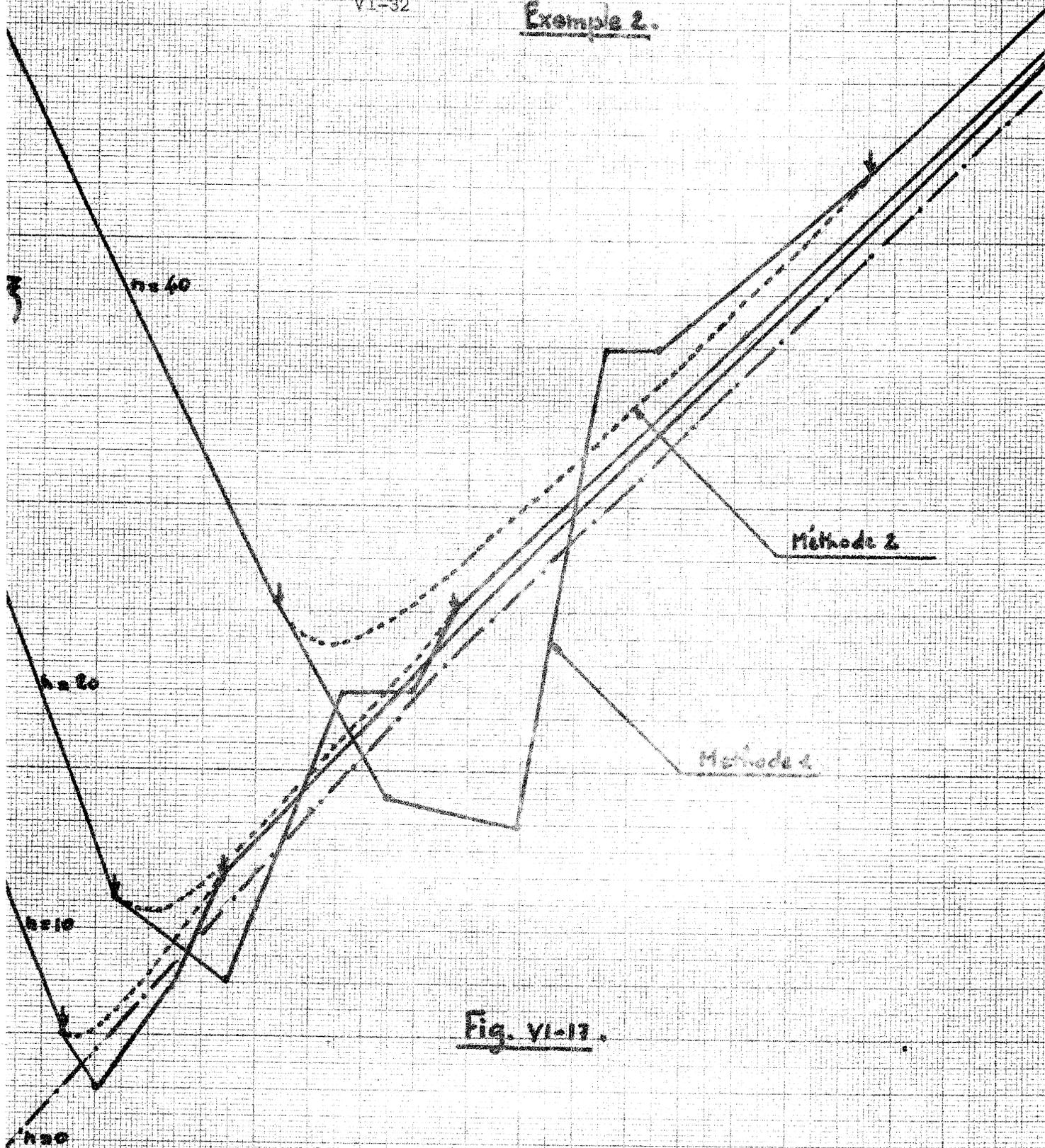


Fig. VI-17.

3

L'expérience montre l'instabilité de la méthode 1 pour la zone Σ_2 (Figure VI-17). On peut faire disparaître les oscillations à condition de prendre $\frac{k}{h} \max |c_1|$ très petit mais les calculs deviennent alors très longs et de plus on ne connaît pas à l'avance la condition de stabilité. Il apparaît donc utile dans ce cas d'utiliser la méthode 2 qui donne de très bons résultats. Des différences très sensibles apparaissent aussi pour η : (Figure VI-18)

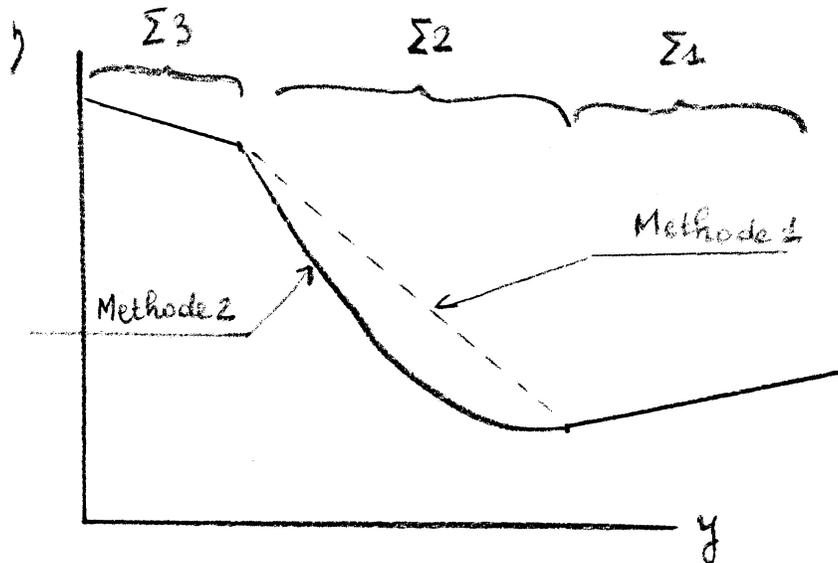


Fig. VI-18 $n=100$ $h_2 \approx 0.07$

Du point de vue quantitatif, les oscillations observées sur la figure (VI-17) ne sont pas en fait très graves, mais elles sont liées en plus à la courbe en pointillés de la figure (VI-18) qui a tendance à prendre l'allure de la courbe en trait plein (méthode 2, Fig. VI-18) si on diminue le pas k , ce qui confirme l'instabilité de la méthode 1 pour la zone Σ_2 .

L'expérience montre la stabilité de la méthode 2 (Fig. VI-19). La précision est d'ordre h bien que pour la plupart des points, la méthode utilisée soit d'ordre h^2 .

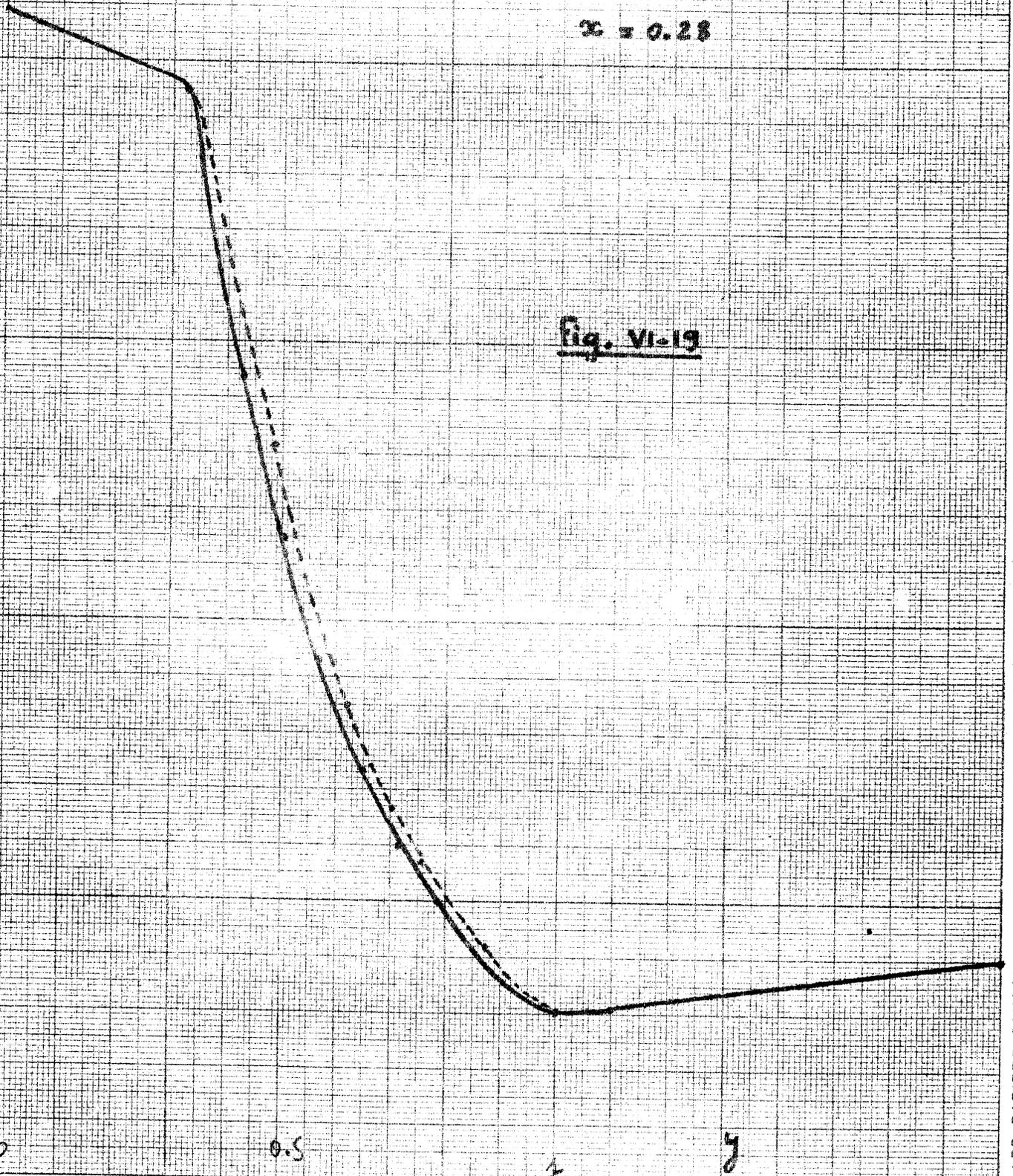
Example 2.

$h_2 = 0.14$ -----

$h_1 = 0.08$ -----

$\alpha = 0.28$

Fig. VI-19



1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20

TABLE III

(Méthode 2)

i	y	$\xi \times 10^3$	$\eta \times 10^3$	$\varphi \times 10^3$	$\sigma \times 10$
30	3.7	4217	1019	1599	206
22	2.1	4075	867	1604	173
14	0.67	3925	706	1620	145
13	0.65	3924	739	1592	148
12	0.57	3919	936	1491	165
11	0.5	3917	1202	1358	192
10	0.42	3915	1626	1145	245
9	0.34	3918	2374	772	378
8	0.27	3922	3133	394	587
7	0.22	3929	3882	23	909
6	0.21	3933	3890	21	915
5	0.17	3950	3923	13	942
4	0.14	3966	3954	6	968
3	0.1	3984	3991	-3	999
2	0.07	4001	4023	-11	1028
1	0.03	4017	4056	-19	1058
0	0	4033	4088	-28	1087

$\bar{x} = 0.38$ $n = 60$

TABLE IV

(Méthode 2)

i	y	$\xi \times 10^3$	$\eta \times 10^3$	$\psi \times 10^3$	$\sigma \times 10$
34	3.7	4223	999	1612	204
27	1.3	4101	863	1619	176
20	1.	3970	717	1627	150
19	0.98	3969	711	1629	149
18	0.92	3965	803	1581	157
17	0.85	3962	874	1542	164
16	0.78	3958	1008	1475	176
15	0.71	3957	1212	1372	198
14	0.65	3956	1461	1247	228
13	0.57	3958	1869	1044	289
12	0.5	3959	2315	822	374
11	0.43	3964	2888	538	522
10	0.32	3977	3884	47	935
9	0.31	3983	3894	44	945
8	0.28	4000	3926	37	971
7	0.24	4015	3956	30	997
6	0.21	4031	3987	22	1024
5	0.17	4048	4021	14	1055
4	0.14	4064	4052	6	1084
3	0.1	4083	4089	-3	1119
2	0.04	4099	4122	-11	1151
1	0.03	4115	4155	-20	1185
0	0	4131	4186	-28	1217

$\bar{x} = 0.56$ $n = 93$

Exemple 2

Method 2.

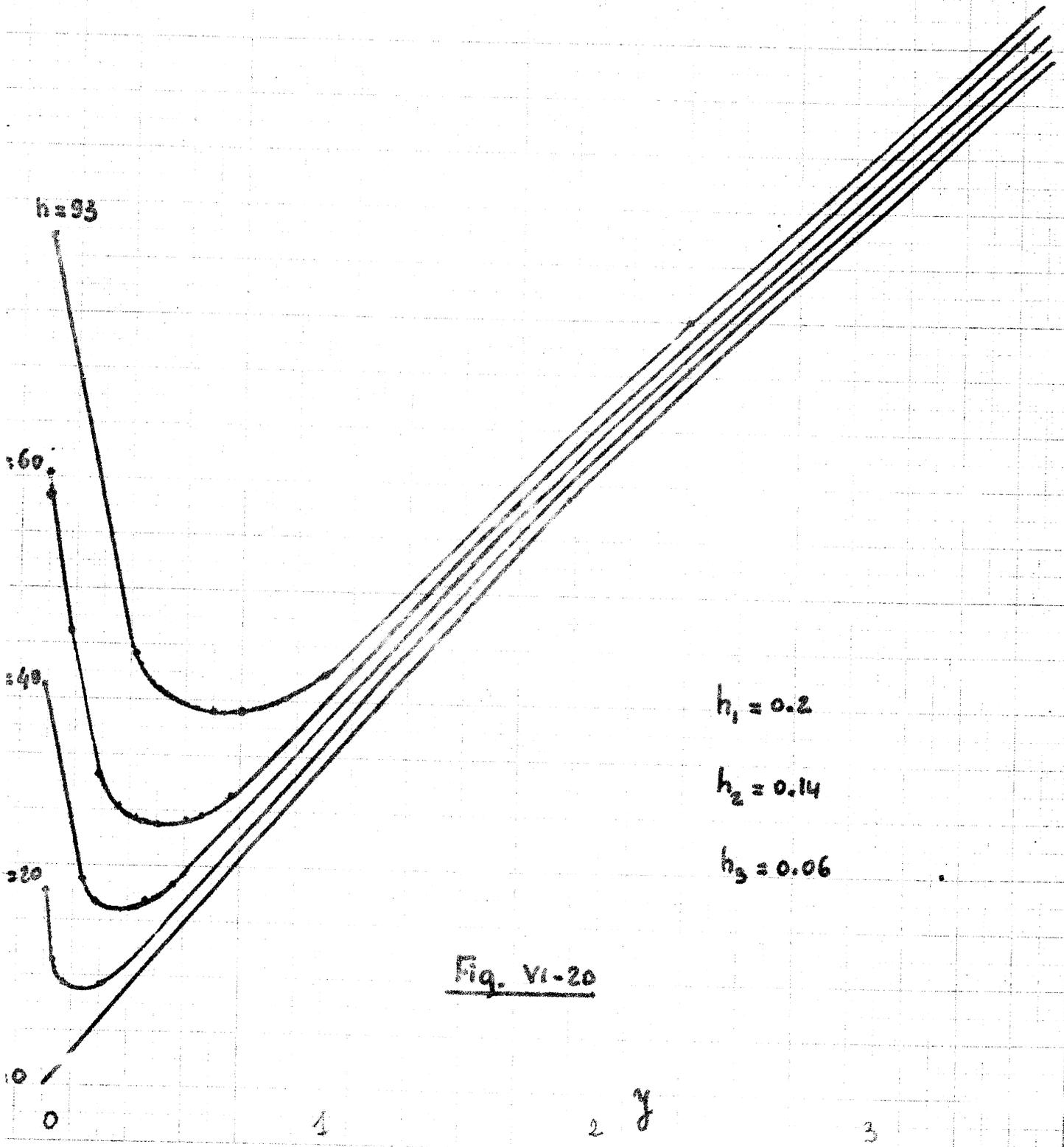


Fig. VI-20

On constate sur la figure VI-21, que les courbes s'arrondissent au voisinage du point C_n ; les variations sont beaucoup plus rapides au voisinage du point D_n .

L'expérience confirme bien les théories faites à propos de la stabilité ; nous avons supposé les coefficients constants et bornés. Cette hypothèse pouvait au besoin s'admettre pour l'exemple 1 alors qu'il n'en est pas du tout de même pour l'exemple 2.

Les tables III et IV permettent au lecteur d'avoir une idée des ordres de grandeur. Les fonctions inconnues ξ, η et ζ ont été multipliés à 10^3 et tronqués à cet ordre, cette précision est amplement suffisante dans la pratique.

Pour cet exemple, les calculs ont été faits pour

$$\frac{k}{h} \max |C| \leq 0.8.$$

Voici pour des pas différents quelques résultats sur OB :

$x = 0.38$	$h_3 = 0.07$	$\eta = 4.083$
	$h_3 = 0.14$	$\eta = 4.080$
$x = 0.54$	$h_3 = 0.07$	$\eta = 4.171$
	$h_3 = 0.14$	$\eta = 4.165$

Example 2

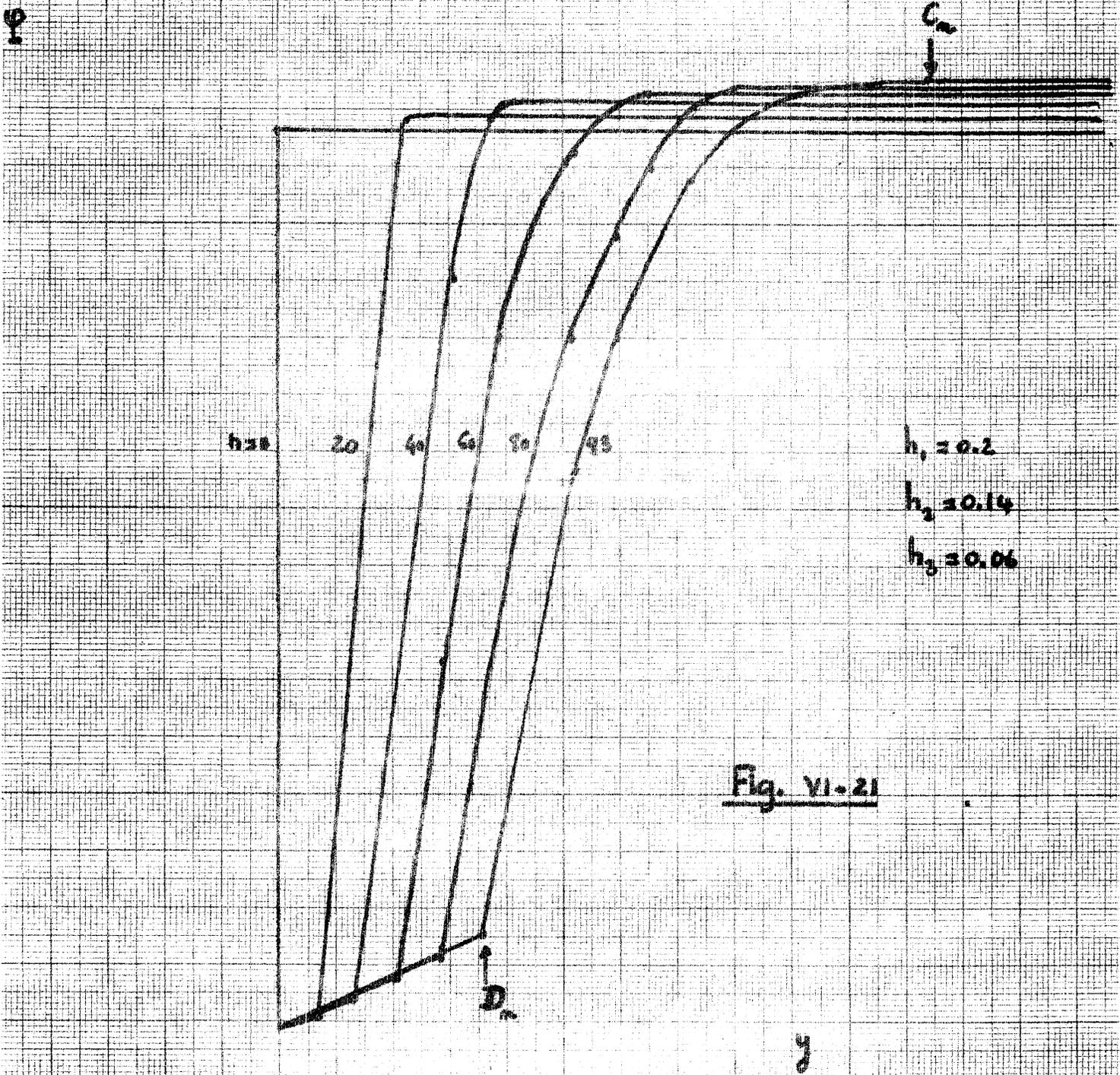


Fig. VI-21

D-4 - Exemple n° 3Données :

$$\left[\begin{array}{l} \varepsilon = -1 ; \alpha = 0 ; \beta = -60^\circ ; \delta_1 = 0 ; \delta_2 = -20^\circ ; \\ \rho = 30 ; c = 0 ; p = 10 ; q = 0 ; s = 0 ; \\ U = V = 0 ; \end{array} \right.$$

On a :

$$\varphi_A = \frac{\pi}{2} , \quad \varphi_B = -0.028$$

Ce cas est particulier, en effet, les solutions sont stationnaires dans Σ_1 et Σ_3 , les caractéristiques sont des droites, OC et OD sont donc connues à l'avance exactement, ainsi que les fonctions inconnues sur OB. Nous nous intéresserons donc uniquement à la zone Σ_2 .

Les résultats sont spectaculaires comme le montre la figure (VI-22) accompagnée de la table V.

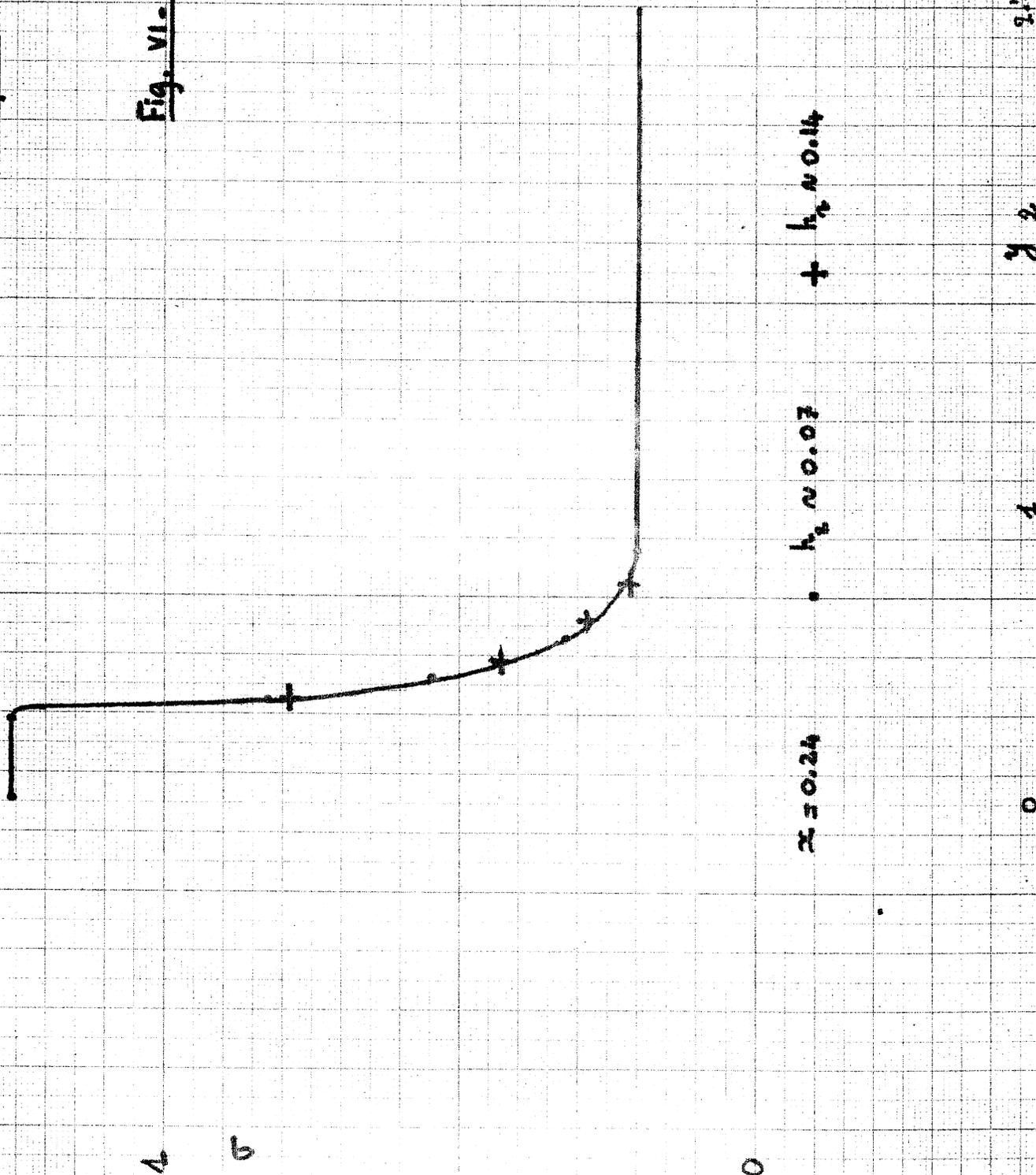
La figure (VI-23) montre l'allure des courbes de σ en fonction de y pour différentes valeurs de n . On constate bien l'élargissement progressif de la zone Σ_2 , des variations rapides au voisinage du point D_n tandis que les courbes s'arrondissent au voisinage du point C_n .

TABLE V

j	y	n	ψ	σ	j	y	n	ψ	σ
20	2.7	1.024	1.571	20	17	2.7	1.024	1.571	20
15	1.7	1.024	1.571	20	12	1.8	1.024	1.571	20
10	0.80	1.024	1.571	20	7	0.81	1.024	1.571	20
9	0.73	1.132	1.517	21.29	6	0.71	1.148	1.508	21.49
8	0.69	1.294	1.435	23.38					
7	0.63	1.517	1.324	26.59	5	0.61	1.648	1.258	28.69
6	0.55	1.875	1.145	32.69					
5	0.49	2.261	0.952	40.87	4	0.48	2.348	0.908	42.97
4	0.42	2.767	0.699	54.73					
3	0.34	3.486	0.339	82.9	3	0.35	3.405	0.379	79.10
2	0.27	4.220	-0.028	126.6	2	0.28	4.220	-0.028	126.6
1	0.14	4.220	-0.028	126.6	1	0.14	4.220	-0.028	126.6
0	0.	4.220	-0.028	126.6	0	0	4.220	-0.028	126.6
n = 100 ; $h_2 \sim 0.0$; x = 0.24					n=41 ; $h_2 \sim 0.14$; x = 0.24				

Example 3

Fig. VI-22



Example 3

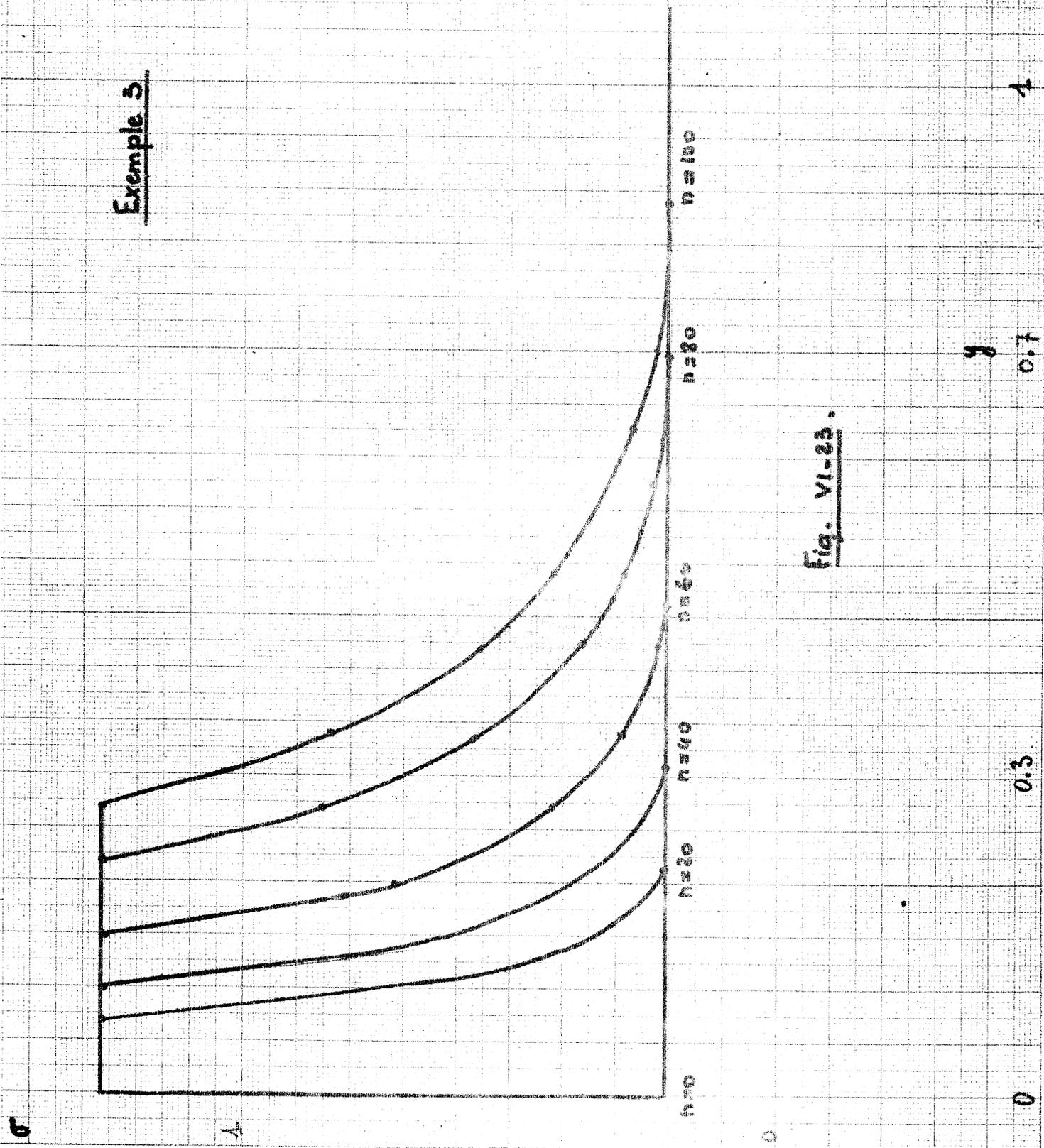


Fig. VI-23.

8

0.7

0.3

0

1

D-5 Exemple 4Données :

$$\left[\begin{array}{l} \varepsilon = -1 ; \alpha = 0 ; \beta = -75^\circ ; \delta_1 = 0 ; \delta_2 = -20^\circ ; \\ \rho = 30^\circ ; c = 1 ; p = 5 ; q = 1 ; s = 0 ; \\ U = V = 0 \end{array} \right.$$

On a :

$$\varphi_A = \frac{\pi}{2} ; \varphi_B = -0.28$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \eta(0, y) = 0.68 ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \eta(x, 0) = 4.4$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \xi(0, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \xi(x, 0) = 3.82$$

La figure (VI-24) indique l'allure des caractéristiques et les trois zones Σ_1 , Σ_2 et Σ_3 par la méthode de Massau.

La figure (V-25) montre les écarts (d'ordre h) entre les résultats obtenus pour des pas différents, par la méthode 2.

Les courbes (VI-28) représentent la caractéristique OD obtenue par la méthode à pas fixe et la méthode de Massau ; les courbes (VI-29) comparent $\sigma(x, 0)$ sur OB par les deux méthodes. Les calculs ont été faits dans les conditions suivantes :

- pour la méthode de Massau : $h = 0.2$ $N = 100$

- pour la méthode n° 2 : $h_1 = 0.4$, $h_2 \sim 0.2$, $h_3 \sim 0.1$

Exemple 4

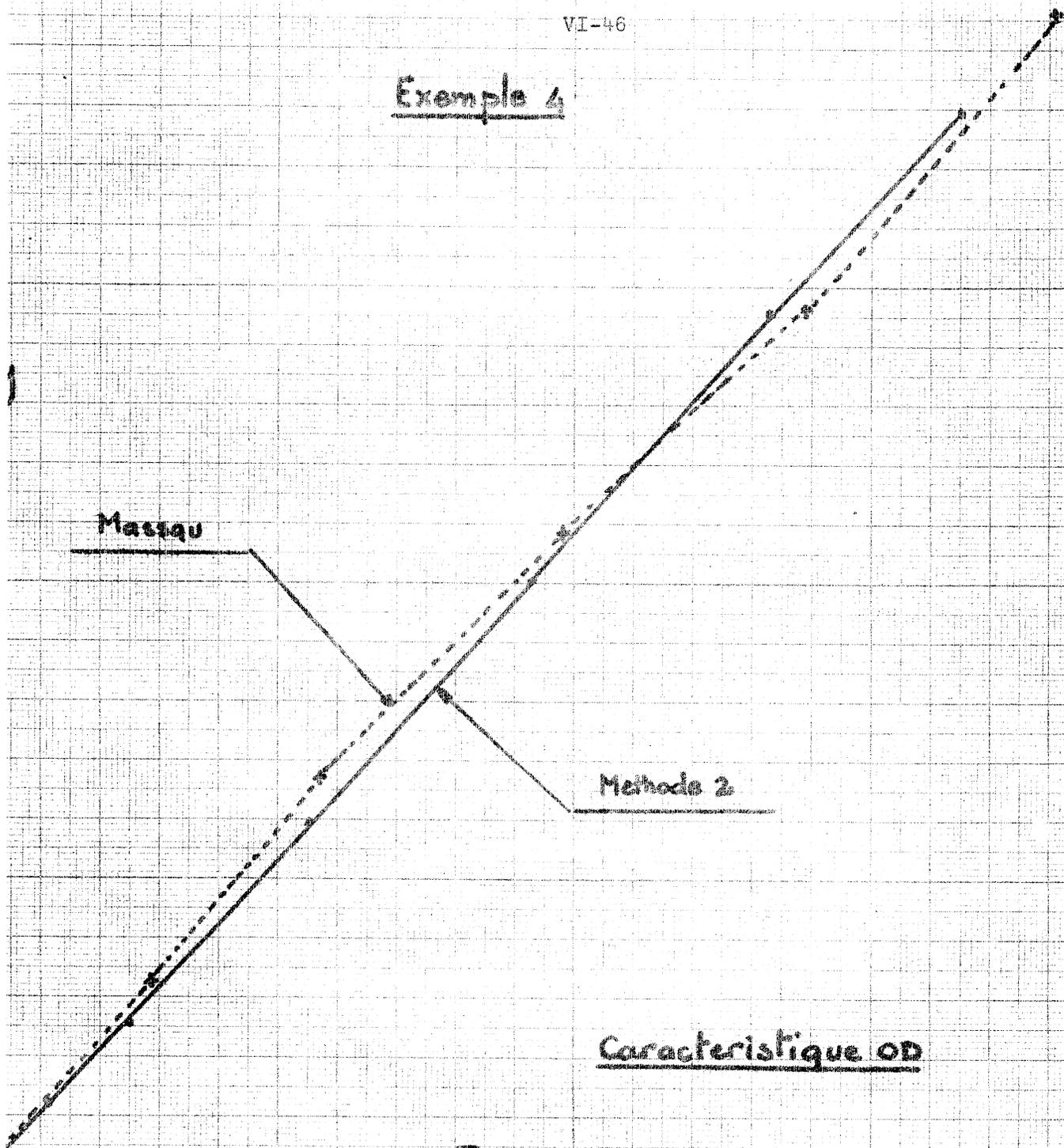


Fig. VI-25.

Example 4.

Resultats sur 08.

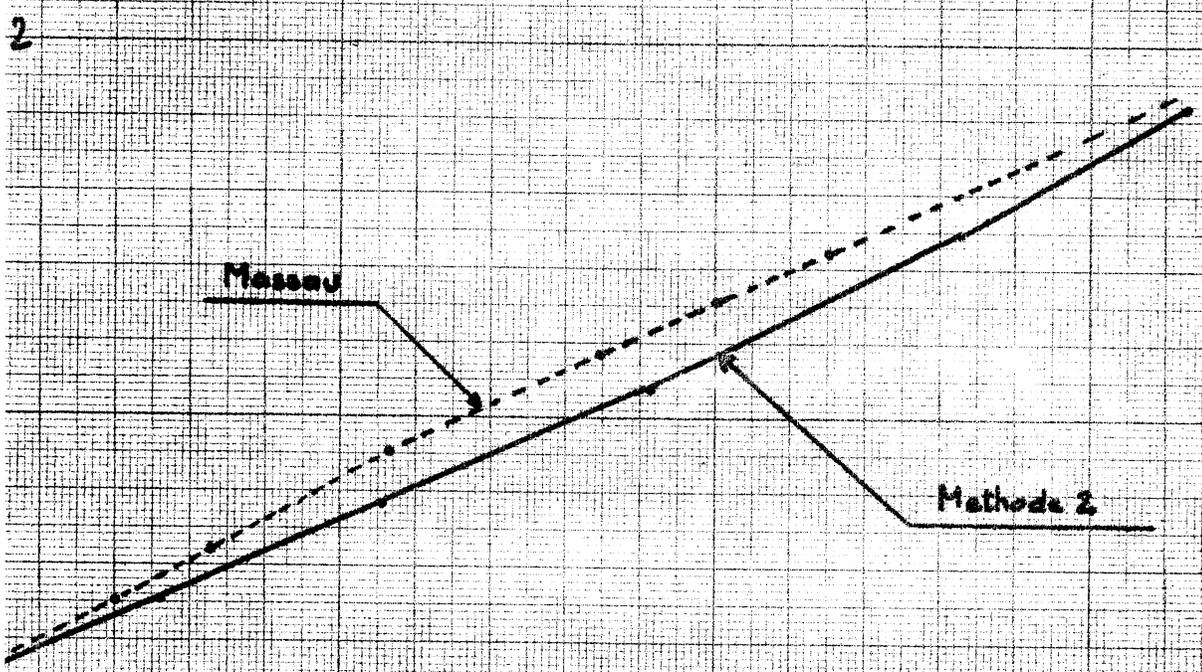


Fig. VI-26

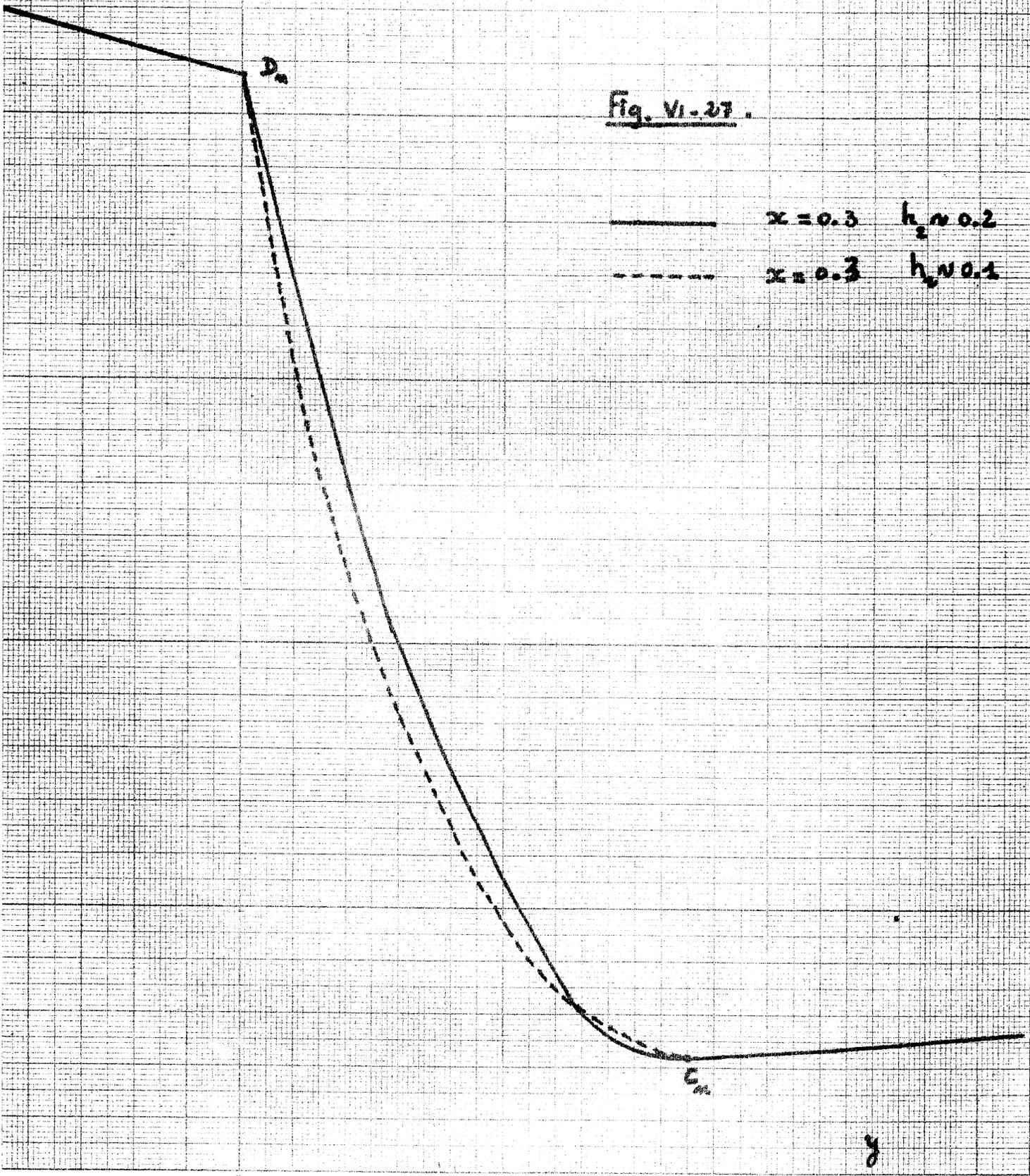
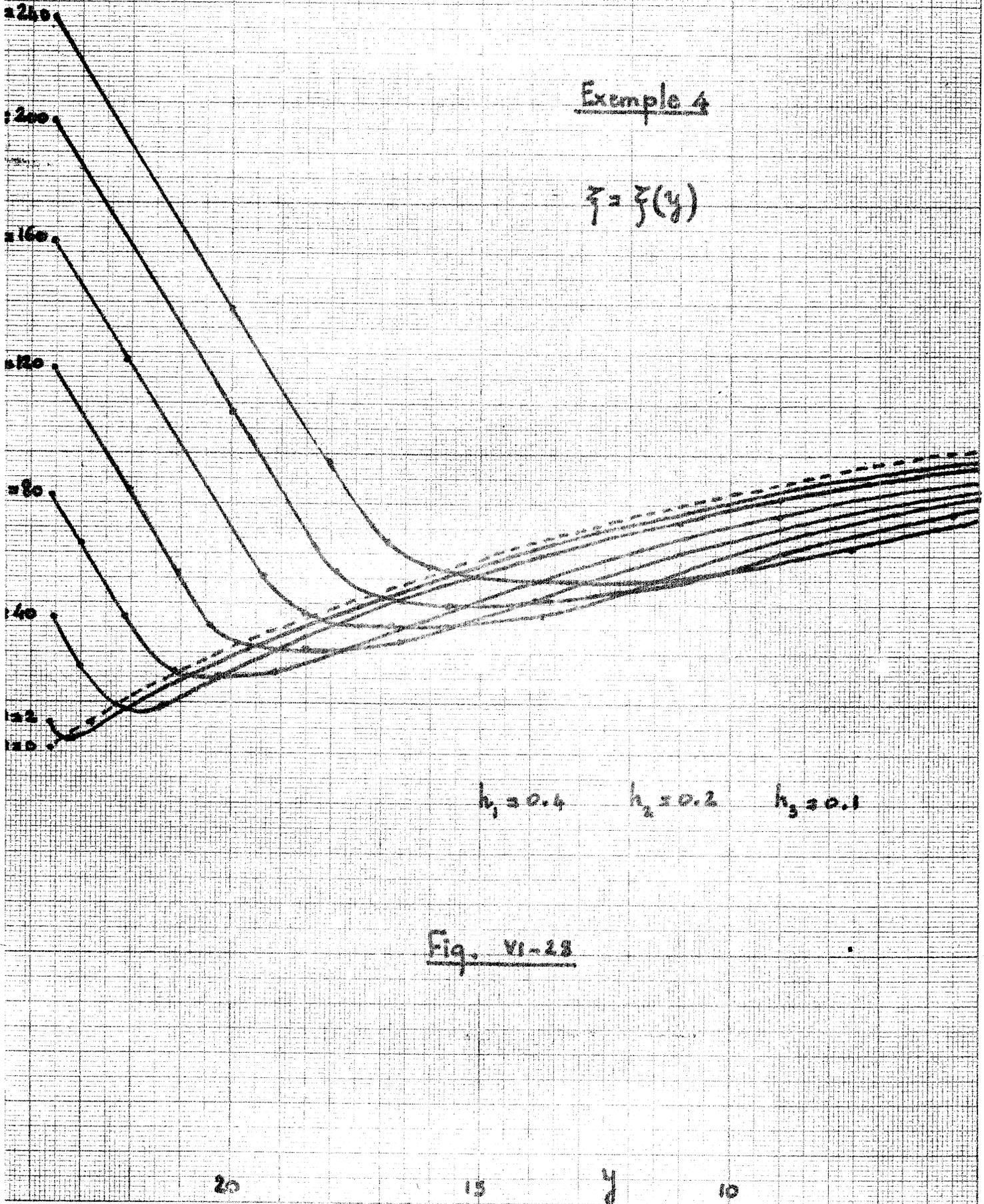


Fig. VI-27.

— $x=0.3$ $h_v=0.2$
- - - $x=0.3$ $h_v=0.1$

Example 4

$$\zeta = \zeta(y)$$



Example 4

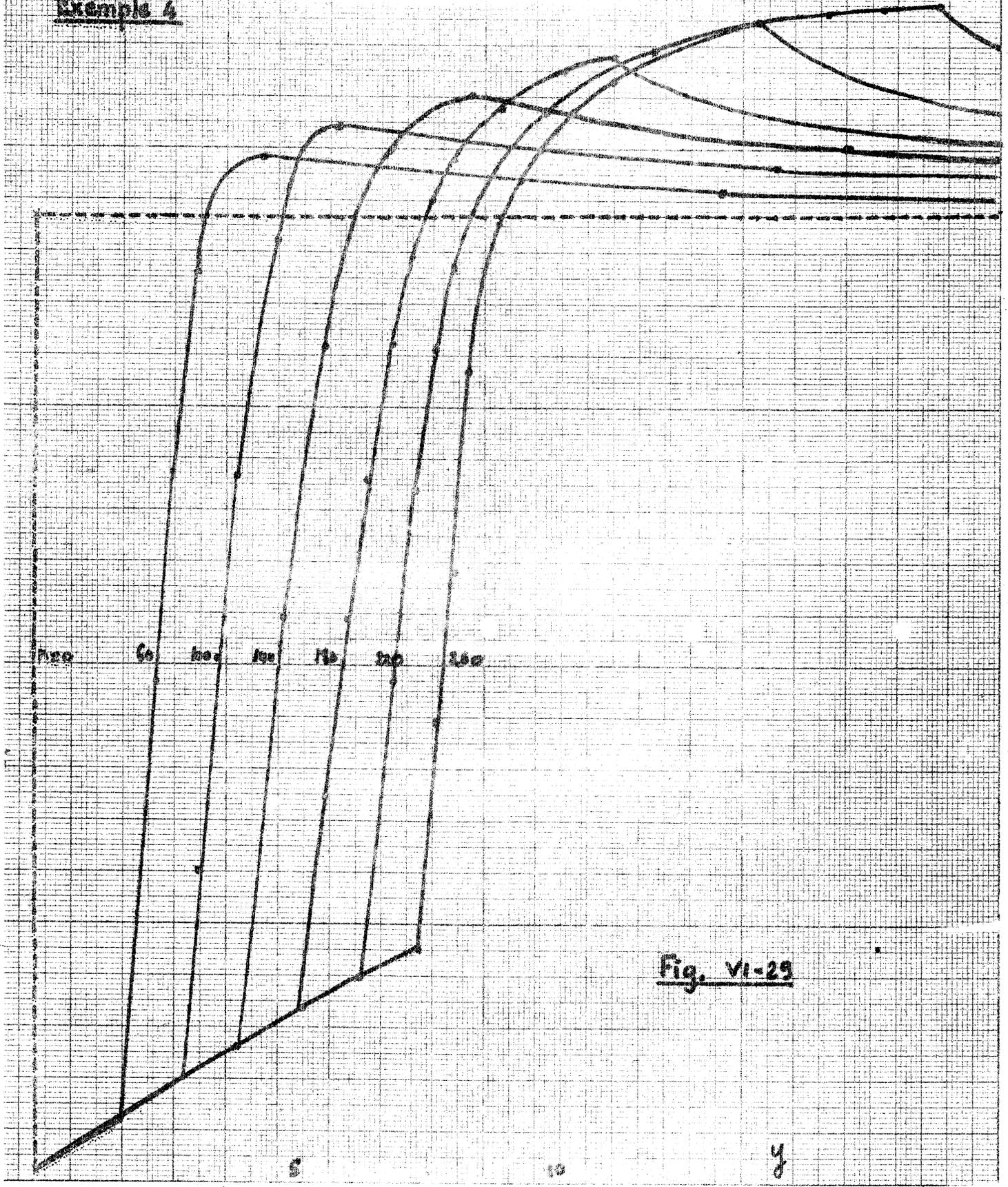
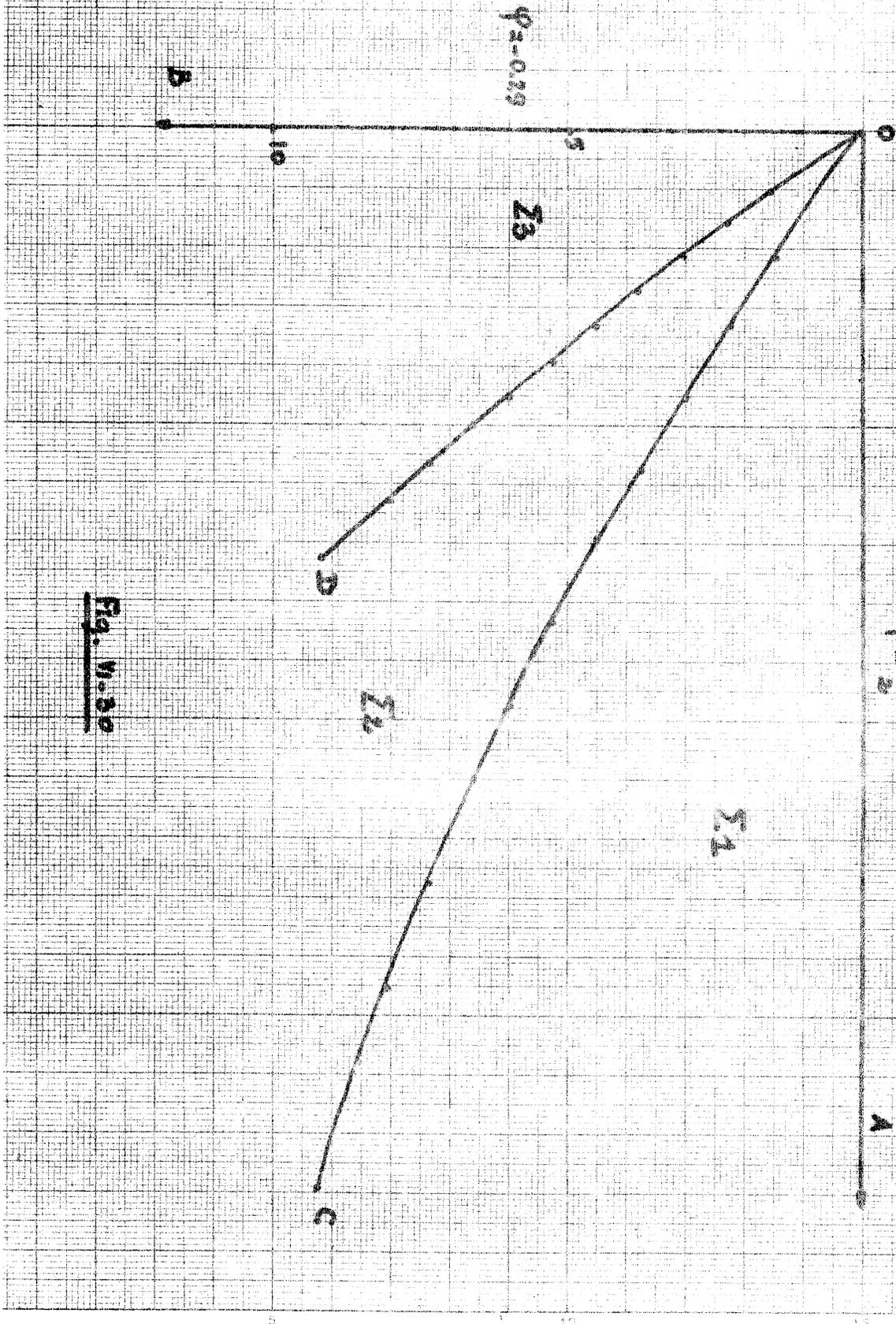


Fig. VI-29

E
C
A
E
N
C
A
C
C
E
P
T
E
S



Example 4.

Fig. VI-20

D-6 - Influence des conditions sur OA

Pour être plus complet, on peut chercher à vérifier l'influence des conditions sur OA en comparant les résultats obtenus sur OB par les deux méthodes (Massau et méthode à pas fixe). Pour cela, nous avons repris l'exemple n° 2 modifié de la façon suivante :

$$U = V = 0 \quad , \quad p = 10 \text{ et}$$

- α) $q = 0$
- β) $q = 1$
- γ) $q = 2$
- δ) $q = 3$.

Pour $q = 0$, on obtient une droite horizontale (solution stationnaire).

Pour la méthode de Massau, on a pris $k = 0.4$ ($k = \text{pas sur OA}$) ; pour $q = 1$ $N = 100$; pour $q = 2$, $N = 75$ et pour $q = 3$, $N = 50$.

Les figures VI-30, VI-31 et VI-32 montrent qu'au voisinage de 0, les résultats obtenus sur OB sont pratiquement identiques pour les deux méthodes. On peut remarquer cependant que dès que x est assez grand, les courbes ont tendance à s'écarter d'autant plus vite que q est choisi plus grand.

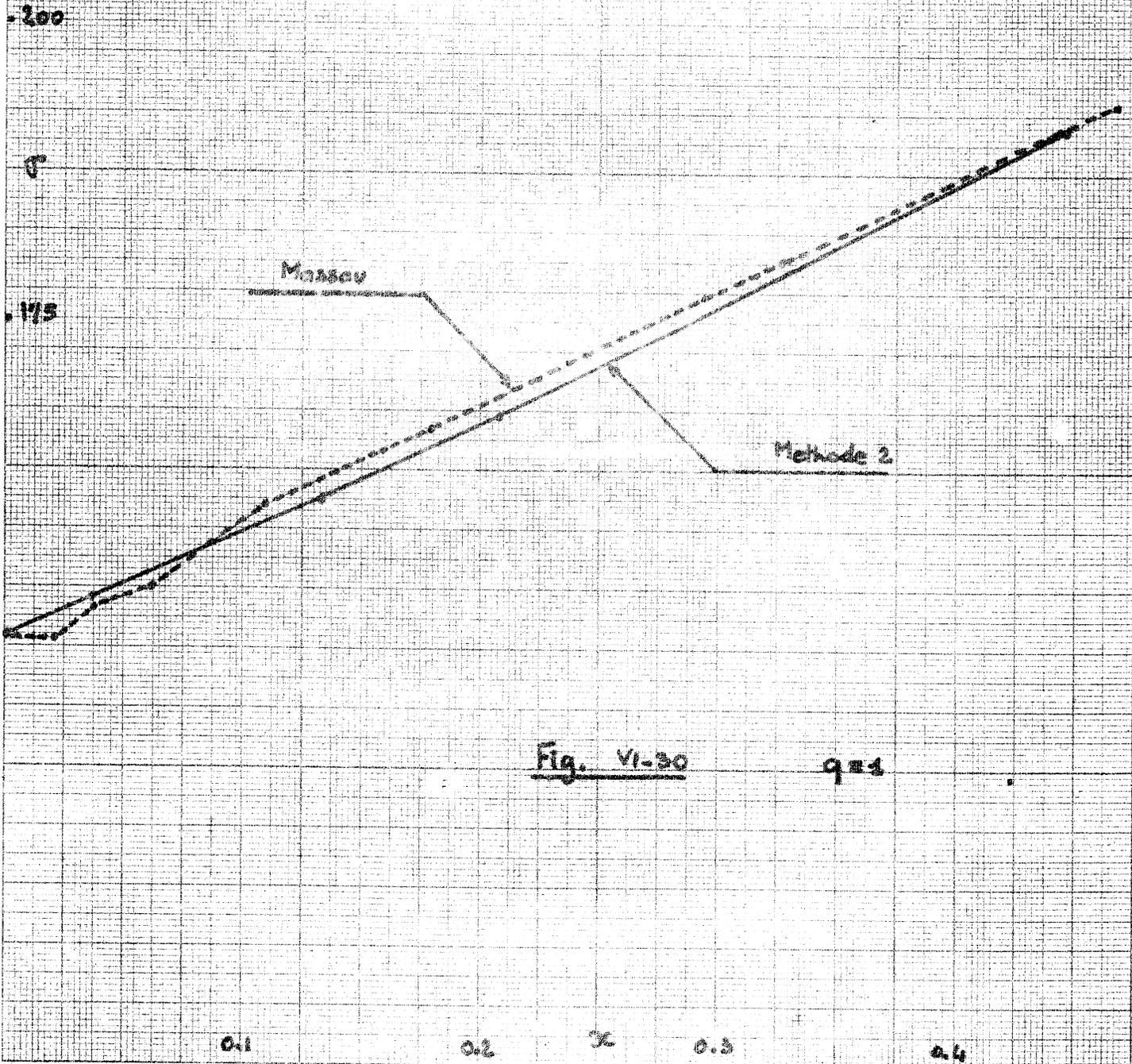


Fig. VI-30

981

Fig. VI-31

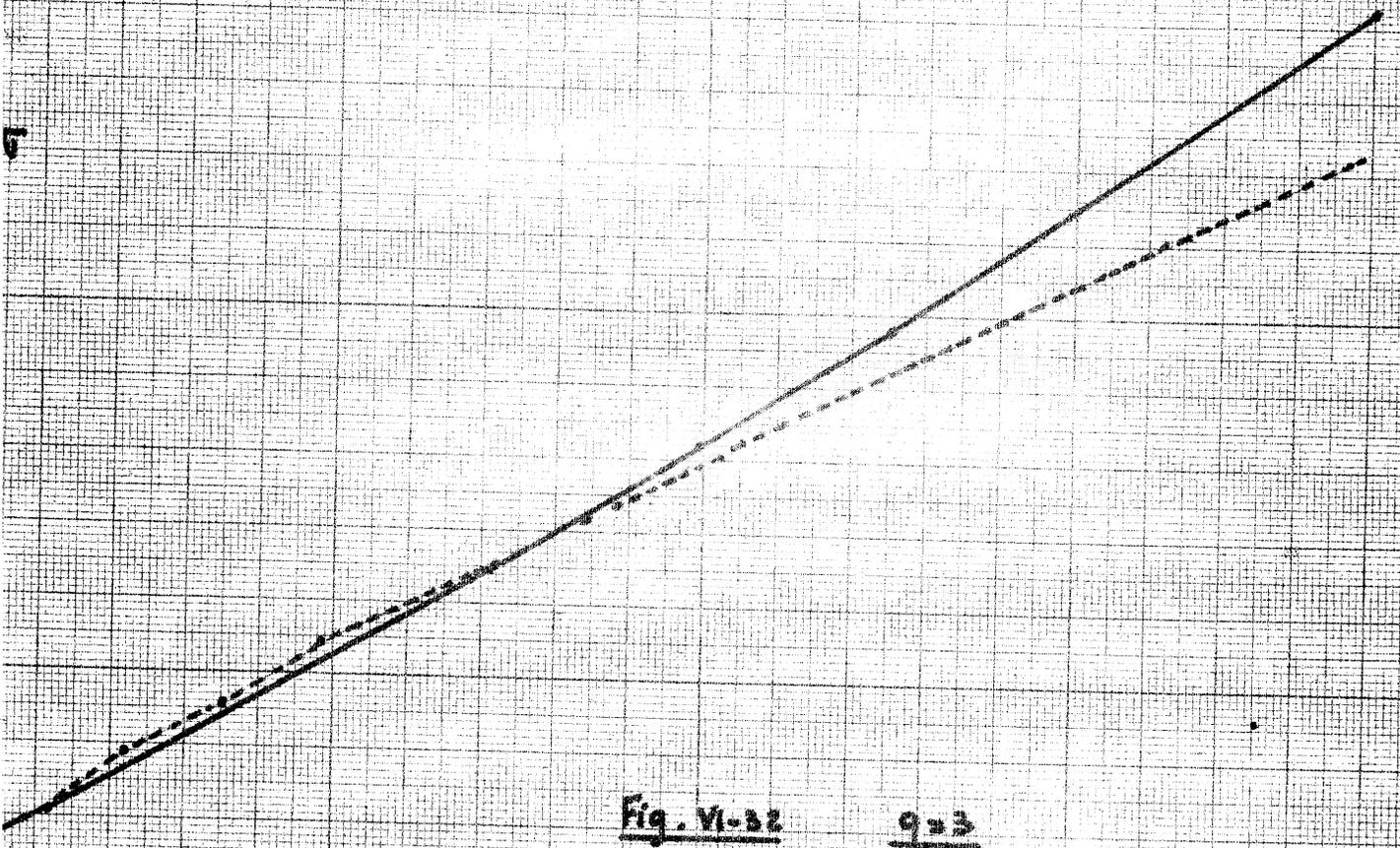
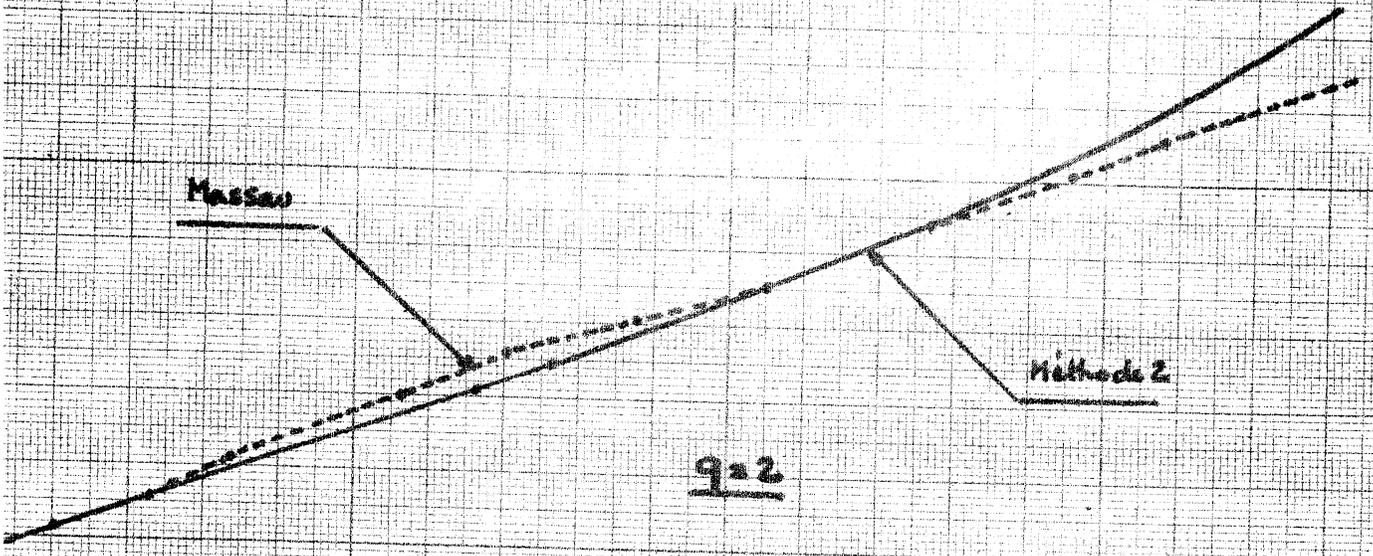


Fig. VI-32

q=3

x

5

10

15

20

E - PROGRAMME ALGOL

Ce programme concerne les méthodes 1 ou 2. Pour la méthode de Massau, nous avons utilisé un programme écrit en ALGOL et mis au point par le Laboratoire de Mécanique des Sols.

```

début reel X,Y,KE,D1,D2,A,B,RØ,MU,P,Q,SS,W,U,V,PHI1,PHI2,PI,HX,RES,YF,HO,HC,HD,YZ3 ;
entier I,J,L,M,N,N1,N2,N3,NA,IO,IC,ID,IS,I3,NS,IT ;
reel tableau S,TB[1:2, 1:100],SB,SD [1:2, 0:150],HY,HH,YD,YO,YC [0:150],
Z[1:2],G[1:2, 1:3];
booléen SØRT,INT,BC,BD1,BD2,CHRIS,LECT,BAL, VV) ;
reel procedure T(X) ; reel X ; T := SIN(X)/CØS(X) ;
reel
procedure F(X,M) ; reel X,M ; F := M ;
reel procedure D(I,Z) ; valeur I ; entier I ; reel tableau Z ;
debut aiguillage AIG := E1,E2 ; allera AIG[I];
E1:      D := -CØS((Z[1]-Z[2])/2+MU-B)/CØS((Z[1]-Z[2])/2+MU-A) ;
allera FIN ;
E2:      D := -CØS((Z[1]-Z[2])/2-MU-B)/CØS((Z[1]-Z[2])/2-MU-A) ;
FIN: fin D ;
reel procedure C(I,Z) ; valeur I ; entier I ; reel tableau Z ;
debut aiguillage AIG := E1,E2 ; allera AIG[I];
E1:      C := SIN((Z[1]-Z[2])/2-MU)×SIN(A-B)/(2×CØS(2×MU)
EXP((Z[1]+Z[2])/T(2×MU))×CØS((Z[1]-Z[2])/2+MU-A))×U ;
allera FIN ;
E2:      C := -SIN((Z[1]-Z[2])/2+MU)×SIN(A-B)/(2×CØS(2×MU)
EXP((Z[1]+Z[2])/T(2×MU))×CØS((Z[1]-Z[2])/2-MU-A))×U ;
FIN: fin C ;
reel procedure SIG(Y) ; valeur Y ; reel Y ;
SIG := (P+W/T(RØ)+Q×Y+SS×Y+2)/(1+SIN(RØ)×CØS(2×(PHI1-A)));

```

```

procedure CALCUL(I,J,Y,DY,DM,M,F,D,C,SØL,RES,BØØ,V) ; valeur M,DM,I,J ;
entier I,J ; reel Y,M,DM,RES ; reel tableau DY, SØL ; reel procedure
D,C,F ; booleen BØØ,Y ;
debut reel YI,H,X1,X2,X3,P,S ; entier K ;
  BØØ := vrai ; Z[1] := SØL[1,J] ; Z[2] := SØL[2,J] ;
  P := D(I,Z) ; S := SIGNE(P) ;
  H := si S > 0 alors DY[J-1] sinon DY[J] ;
  X1 := F(Y-S×H,M) ; X2 := F(Y,M) ; X3 := F(Y,M+DM) ;
  YI := (S×(S3-Y/P)×H+X2×(Y-S×H)-Y×X1)/(X2-X1-S×H/P) ;
  Si S > 0 et YI < Y-H ou S < 0 et YI > Y+H alors allera SØRTIE ;
  RES := SØL[I,J]×(YI-Y)×(si P > 0 alors SØL[I,J]-SØL[I,J-1])/H
  sinon (SØL[I,J+1]-SØL[I,J])/H)+(F(YI,M+DM)-F(Y,M))×C(I,Z) ; allera TERM
SORTIE :      BØØ := faux ;
TERM :      fin CALCUL ;

```

```

LECTURE : LIRE(NA,KE,HY[1]) ; LIRE(A,B,D1,D2,RØ,W,P,Q,SS,W) ;
  LIRE(U,V) ; LIRE(LECT) ; BAL := vrai ; PI := 3.14159265/180.0 ;
  A := A×PI ; B := B×PI ; D1 := D1×PI ; D2 := D2×PI ; RØ := RØ×PI ;
  PI := PI×180.0 ; MU := PI/4.0-RØ/2.0 ;
  PHI1 := A+D1/2.0-0.5×KE×ARCSIN(SIN(D1)/SIN(RØ))-(KE-1)×PI/4 ;
  PHI2 := D2/2.0-0.5×KE×ARCSIN(SIN(2)/SIN(RØ))+(1-KE)×PI/4-PI/2+B ; Y := HY[1] ;
  pour I:=2 pas 1 jusqua NA-2 faire
  debut Y := Y+HY[I] ; S[1,I] := 0.5/T(RØ)×LN(SIG(Y))+PHI1 ;
    S[2,I] := S[1,I]-2×PHI1
  fin ; pour J:=1,2 faire SB[J,0] := SD[J,0] := S[J,NA] ;
  N := N2 := N3 := ID = 0 ; N1 := NA-2 ; IC := ID := NA ; IO := 1 ;
  HY[ID] := 0.0 ; YO[0] := 0.0 ; YC[0] := YD[0] := YF ;
  Y := YO[0]+HY[1] ; L := si KE = 1 alors 1 sinon 2 ;
  IS := si L=1 alors 1000 sinon NA-1 ; M := ENTIER (L+KE) ;

```

BALAYAGE : si BAL alors debut N:=N+1; si N=1 ou N=2 alors
debut Z[1]:=S[1,NA-1]; Z[2]:=S[2,NA-1];
HX:=(si N=1 alors -1 sinon KE)×HY[NA-1]/D(si N=1 alors L sinon M,Z fin sin
debut Z[1]:=S[1,NA]; Z[2]:=S[2,NA]; HX:=HY[NA-1]/D(M,Z) fin ;
INT:=BC:=BD1:=BD2:=CHRIS:=BAL:=faux ;
NS:=0
fin ;

Commentaire : CALCUL DE LA ZONE [1]; Z[1]:=S[1,IO]; Z[2]:=S[2,IO];
YO[N]:=YO[N-1]+HX×D(M,Z);
si YO[N]<YO[N-1] alors YO[N]:=YO[N-1];
Y:=YO[N-1]+HY[IO]; si Y<YO[N] alors
debut Y:=YO[N-1]+HY[IO]+HY[IO+1]; HO:=Y-YO[N];
N1:=N1-1; IO:=IO+1
fin sinon HO:=HY[IO]+YO[N-1]-YO[N];
pour J:=1,2 faire Z[J]:=S[J, si N=1 alors IC-1 sinon IC]; YC[N]:=YC[N-1]+
HX×D(L,Z);
si N=1 alors allera CALCUL1; si YC[N]<YC[N-1]-HY[IC-1]
alors debut N1 :=N1-1; HC:=HY[IC-1]+HY[IC-2]+YC[N]-YC[N-1];
IC:=IC-1; BC:=vrai
fin sinon debut IS:=IS+1; HC:=HY[IC-1]
-YC[N-1]+YC[N] fin ;
.CUL1: si N=1 alors S[L,IC]:=S[M,IC]+2×KE×PHI1;
pour I:=IO+1 pas 1 jusqua IC-1 faire
debut pour J:=1,2 faire debut
CALCUL(J,I,Y,HY,HX,X,F,D,C,S,RES,SØRT,YV) ;
si SØRT alors allera NØNSØRT sinon TB[J,I]:=RES
fin ; Y:=Y+HY[I] fin ; pour J:=1,2 faire
debut TB[J,IO]:=TB[J,IO+1]+HO×(TB[J,IO+1]-TB[J,IO+2])/HY[IO+1];
si N noneg 1 alors TB[J,IC]:=TB[J,IC-1]+HC×(TB[J,IC-1]-TB[J,IC-2])/HY[IC-2] fin ;

Commentaire CALCUL DE LA ZONE 2 ; $Z[1] := SD[1, N-1]$;
 $Z[2] := SD[2, N-1]$; $YD[N] := YD[N-1] \cdot HX \cdot D(L, Z)$;
Si $N=1$ alors allera CALCUL 2 ; Si $YD[N] < YD[N-1] - YD[ID-1]$ alors debut
 $HD := HY[ID-1] + YD[N] - YD[N-1] + HY[ID-2]$; $ID := ID-1$; $BD1 := \text{vrai}$ fin
sinon debut $N2 := N2+1$; $HD := HY[ID-1] + YD[N] - YD[N-1]$ fin ; si $\neg BC$ alors $ID := ID+1$

CALCUL2

$Y := YC[N-1]$; pour $I := IC+1$ pas 1 jusqua $ID-1$ faire
debut pour $J := 1, 2$ faire debut
CALCUL($J, \text{si } BC \text{ alors } I \text{ sinon } I-1, Y, HY, YX, X, F, D, C, S, RES, SØRT, VV$) ;
si $\neg SØRT$ et $IC := IC+1$ et $N > 2$ alors $CHIRS := \text{vrai}$ sinon si $\neg SØRT$ et $I := IS$
ou $I := IS+1$ alors debut si INT alors allera $NØNSØRT$;
 $IT := I$; $INT := \text{vrai}$ fin sinon $TB[J, I] := RES$
fin ; $Y := Y + HY[\text{si } BC \text{ alors } I \text{ sinon } I-1]$ fin ;
 $SD[L, N] := TB[L, ID] := SD[L, N-1] + HX \cdot C(L, Z)$;
Si $N=1$ alors allera PREMIV ;

Commentaire CALCUL DE LA ZONE 3 ; Si $IS < ID$ et $SD[1, N-1] - SD[2, N-1] > 1.9$
et $L=2$ alors $IS := ID+1$;
Si $YZ3 - YD[N-1] > HY[NA-1]$ alors
debut $BD2 := \text{vrai}$; $Y := YD[N-1]$; si $IS < ID$ alors
 $IS := IS+1$; $N3 := N3+1$ fin sinon $Y := YZ3$;
Si BC et $BD1$ et $\neg BD2$ alors allera TERM ;
 $NA := N1 + N2 + N3 + IO + 1$;
 $I3 := \text{si}(BC \text{ et non } BD1 \text{ et non } BD2) \text{ ou } (\text{non } BC \text{ et non } BD2 \text{ et } BD1)$
ou $(BC \text{ et } BD1 \text{ et } BD2)$ alors 0 sinon si non BC et non $BD1$ et non $BD2$
alors 2 sinon 1 ;
pour $I := ID+1$ pas 1 jusqua $NA-1$ faire
debut si $I := ID+1$ et $L=2$ alors debut $Z[1] := S[1, I-I3]$;
 $Z[2] := S[2, I-I3]$ fin ; pour $J := 1, 2$ faire
debut CALCUL($J, I-I3, Y, HY, HX, X, F, D, C, S, RES, SØRT, VV$) ;
si $SØRT$ et $I=IS$ alors debut $IT=I$, $INT := \text{vrai}$ fin sinon si
non $SØRT$ et $I \text{ noneg } IS$ alors allera $NØNSØRT$
sinon $TB[J, I] := RES$
fin ; $Y := Y + HY[I-I3]$
fin ;

```

Si BD2 alors YZ3:=YD [N-1];HH [IO]:=H0;
pour I:=IO+1 pas 1 jusqua IC-2 faire HH [I]:=HY [I];
HH [IC-1]:=HC; pour I:=ID-(si BC alors 2 sinon 3)
pas -1 jusqua IC+(si BC alors 1 sinon 0) faire HH [I+ (si BC alors 0
sinon 1)]:=HY [I]; HH [IC]:=YC [N-1]-YC [N]; HH [ID-1]:=HD; HH [ID]:=YZ3-YD [N];
pour I:=NA-1 pas -1 jusqua ID+1 faire
HH [I]:=HY [I-I3]; pour I:=IO pas -1 jusqua NA-1 faire HY [I]:=HH [I];
si N<2 et non CHRIS et HY [IC+1]<HY [NA-1]*2.0 alors CHRIS:=vrai ; Si CHRIS
alors debut HY [IC]:=HY [IC+1]+HY [IC]; N2:=N2-1 ;
      ID:=ID-1; NA :=NA-1; IS:=IS-1; IT:=IT-1;
      I3:=I3-1; pour I:=IC+1 pas 1 jusqua NA-1 faire
      debut HY [I]:=HY [I+1]; pour J:=1,2 faire
      TB [J,I]:=TB [J,I+1]
      fin ; si L=1 alors TB M,NA :=TB [M,NA+1]
      fin ;
SB [M,N]:=TB [M,NA]:=SB [M,N-1]+TB [M,NA-1]-S [M,NA-1-I3];
SB [L,N]:=TB [L,NA]:=SB [M,N]+2*KE*PHI2; SD [M,N]:=TB [M,ID]:=TB [ID+1]+
HY [ID]*(TB [M,ID+1]-TB [M,ID+2])/HY [ID+1];
Si INT alors TB [M,IT]:=TB [M,IT-1]+HY [IT-1]
(TB [M,IT+1]-TB [M,IT-1])/(HY [IT]+HY [IT-1]);
Y:=YO [N]; pour I:=IO pas 1 jusqua NA faire
debut pour J:=1,2 faire S [J,I]:=TB [J,I];
      ECRIRE(I,Y,S [1,I],S [2,I]); Y:=Y+HY [I];
fin ; si HD<HY [NA-1]alors
debut ID:=ID-1; HY [ID-1]:=HH [ID-1]:=
      HY [ID-1]+HD; pour I:=ID+1 pas 1 jusqua NA-1 faire debut
      HY [I-1]:=HY [I];
      S [1,I-1]:=S [1,I]; S [2,I-1]:=S [2,I] fin ;
      S [1,NA-1]:=S [1,NA]; S [2,NA-1]:=S [2,NA];
      N2:=N2-1; NA:=NA-1
fin ; si L=2 alors
debut IS:=IC; TESTIS: si (S [1,IS+1]-S [2,IS+1])
      super PI-2*MU alors debut IS:=IS+1;
      allera TESTIS fin
fin; si N<IO+2 alors allera TERM sinon debut
X:=X+HX; BAL:=vrai; allera BALAYAGE fin ;

```

```

PREMNIV : HD :=HY [IC-1] :=YD [1]-YC [1]; HY [IC]=YD [N-1]-YD [N];
SD [M,N] :=TB [M,ID] :=TB [M,IC-1]; N1:=N1+1;
NA:=NA+1; HY [IO] :=HO; X:=X+HX; YZ3:=YF;
Z [1] :=TB [L,IO]; Z [2] :=TB [2,IO];
TB [M,NA] :=TB [M,ID]+HY [IC]×C(M,Z)/D(M,Z);
TB [M,NA] :=SB [M,N] :=TB [M,NA]-HY [IC]
(TB [M,NA]-SB [M,O])/(HX×D(M,Z)+HY [IC]);
SB [L,N] :=TB [L,NA] :=SB [M,N]+2×KE×PHI2;
IC:=IC-1; Y:=YO [1]; BAL:=vrai; allera BALAYAGE;

```

```

NØNSØRT: ECRIRE('NØN SØRT');

```

```

fin;

```

F - Conclusion

Notre étude a porté sur la résolution numérique du problème posé, en admettant la condition de PRANDTL par des méthodes aux différences finies pour lesquelles on ne peut s'assurer théoriquement de la stabilité que dans une zone de Cauchy.

En particulier, l'étude de la stabilité de la méthode de Massau [Ch. V] montre que celle-ci ne peut être stable que si des hypothèses très précises sont satisfaites, ce qui n'est presque jamais le cas. Cette méthode apparaît d'autre part mal commode en pratique pour l'expérimentateur désireux de se rendre compte de la précision de ses résultats numériques. Le degré de liberté N (nombre d'intervalles pris sur O_1O_2) entraîne la nécessité de faire plusieurs calculs pour un même pas h pris sur OA .

La méthode 1 ne donne pas en général de bons résultats dans la zone Σ_2 .

La méthode 2 d'ordre h^2 est un cas particulier des équations de LAX-WENDROFF [1], [2], [3]. Ce type est très utilisé actuellement pour les problèmes où apparaissent des discontinuités. Le terme $\frac{1}{2} \lambda^2 c^2 (u_{i+1}^n + u_{i-1}^n - 2u_i^n)$ est un terme de correction dit de "pseudo-viscosité" pour des schémas un peu différents de celui que nous avons utilisé. Nous avons bien remarqué, au moins expérimentalement que les résultats obtenus dans la zone Σ_2 sont bien meilleurs et mêmes précis en comparaison de ceux obtenus par les méthodes d'ordre h , qui sont d'ailleurs instables, et compte tenue de la précision désirée par les ingénieurs.

L'utilisation de grilles fixes permet d'avoir une bonne idée d'une part de l'allure des solutions obtenues et de la précision des calculs.

Enfin, nous avons supprimé le degré de liberté N d'où une économie de calculs assez importantes.

Coût : pour l'exemple n° 3, la méthode à pas fixe coûte 94 secondes au bout de $n = 100$ pour $h_2 \sim 0.07$. La méthode de Massau coûte 59 secondes pour un pas sur OA de 0.2 et pour une seule valeur de N. Pour $h_2 \sim 0.14$ la méthode 2 ne coûte plus que 56 secondes.

Bien entendu, les temps de calcul dépendent des pas choisis et les méthodes sont tellement différentes qu'il est difficile de faire des comparaisons très précises.

Bien que l'utilisation de méthodes à pas fixes paraissent souhaitables, il convient de rester prudent pour ce problème encore mal posé.

Nous souhaitons seulement avoir apporter une contribution originale quant à sa résolution numérique d'une part par la méthode utilisée au Laboratoire de Mécanique des Sols (Méthode de Massau) en étudiant sa stabilité et d'autre part par des essais d'utilisation de méthodes à pas fixes plus récentes pour lesquelles l'expérience paraît conduire à des résultats convenables dans de nombreux cas.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] SOKOLOVSKI
 Statics of soil media
 London-Butterworths scientific publications 1960.
- [2] KRAVTCHENKO
 Cours de mécanique des sols.
 Université de Grenoble.
- [3] K. FRIEDRICHS und H. LEWY
 Das Anfangswertprobleme einer beliebigen nichtlinearen
 hyperbolischen Differentialgleichung beliebiger Ordnung in
 Zwei Variablen. Existenz, Eindeutigkeit und Abhängigkeitsbereich
 der Lösung.
 Math. Ann. 99, 200-221 - 1928.
- [4] R. COURANT, E. ISAACSON and M. REES
 On the solution of linear hyperbolic differential equations by
 finite differences.
 Comm. Pure and Applied Math, 5, pp. 243-255. 1952.
- [5] R. COURANT and P.D. LAX
 On non linear partial differential equations with two independant
 variables.
 Comm. Pure and Applied Math, Vol. 2, pp. 255-273, 1949.
- [6] SAUER Robert
 Anfangswertprobleme bei partiellen Differentialgleichungen.
 Springer-Verlag. Berlin Göttingen - Heidelberg 1958.
- [7] S.K. GODUNOV and V.S. RYABENKI
 Theory of difference schemes. An introduction
 North-Holland publishing company - Amsterdam 1964.
- [8] P.D. LAX and J. B. KELLER
 The initial and mixed initial and boundary value problems for
 hyperbolic systems.
 Los Alamos scientific Laboratory of the University of California.
 LAMS, 1205, 1951.

- [9] B. WENDROFF
On centered difference equation for hyperbolic systems.
J.Soc. Indust. Appl. Math. Vol 8, n° 3, 1960.
- [10] N. GASTINEL
Itérations. Méthodes discrètes. Cours d'Analyse Numérique.
Université de Grenoble; 1968-1969.
- [11] G.O'BRIEN, MORTON A. HYMAN and S. KAPLAN
A study of the numerical solution of partial differential equations.
J. Math. Physics, Vol. 29, 1951, pp. 223-251.
- [12] LAX P.D.
Hyperbolic system of conservation Laws II.
Comm. Pure and Applied Math, Vol. 10. pp. 537-566 (1957).
- [13] FORSYTHE and WASON
Finite difference methods for partial differential equations.
J. Wiley and Sons Inc. 1960.
- [14] LAX P.D. and RICHTMYER, R.D.
Survey of stability of linear finite difference equations
Comm. Pure and Appl. Math, Vol 9, 1956, pp. 267-293.
- [15] P.D. LAX
Weak solutions of non linear hyperbolic equations and their numerical computation.
Comm. Pure and Appl. Math., Vol 7 pp. 159-193 1954.

VU

Grenoble, le

Le Président de la Thèse

VU

Grenoble, le

Le Doyen de la Faculté des Sciences

Vu, et permis d'imprimer,

Le Recteur de l'Académie de GRENOBLE

