Contribution à l'étude des moteurs asynchrones linéaires

Jean-Claude Sabonnadière

▶ **To cite this version:**

Jean-Claude Sabonnadière. Contribution à l'étude des moteurs asynchrones linéaires. Modélisation et simulation. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1969. tel-00281659

HAL Id: tel-00281659

https://theses.hal.science/tel-00281659

Submitted on 23 May 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° C. N. R. S.

a Monsieur le Professeur Gastinel, avec toute une considération [illegible]

THÈSES

présentées

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR

Jean-Claude SABONNADIÈRE

Ingénieur I. E. G.
Licencié ès Sciences
Docteur de 3e cycle Mathématiques Appliquées

1re THÈSE

Contribution à l'étude des moteurs asynchrones linéaires

2e THÈSE

Propositions données par la Faculté

soutenues le 27 Février 1969, devant la Commission d'Examen

MM. L. NÉEL	*Président*
P. AIGRAIN J. KUNTZMANN M. POLOUJADOFF	*Examinateurs*

Ce travail a été effectué au Laboratoire d'Electrotechnique de l'Institut Polytechnique de Grenoble et à l'Institut de Mathématiques Appliquées de Grenoble, en collaboration avec les Etablissements Merlin et Gerin.

Nous assurons de nos remerciements sincères et respectueux

Monsieur le Professeur NEEL, Membre de l'Académie des Sciences, Directeur de l'Institut Polytechnique de Grenoble, qui a bien voulu nous faire l'honneur d'accepter la présidence du Jury.

Qu'il nous soit permis d'adresser nos remerciements à

Monsieur le Professeur AIGRAIN Délégué Général à la Recherche Scientifique et Technique qui a bien voulu honorer le Jury de sa présence.

Nous exprimons notre reconnaissance à

Monsieur le Professeur KUNTZMANN, Directeur de l'Institut de Mathématiques Appliquées de Grenoble qui nous a permis de réaliser notre travail dans son service, pour l'intérêt qu'il a porté à nos recherches.

Nous exprimons à notre plus profonde gratitude à

Monsieur le Professeur POLOUJADOFF pour les qualités scientifiques et humaines qu'il a toujours manifestées dans la direction de notre travail.

Que Monsieur le Professeur GASTINEL, qui a toujours suivi avec intérêt le déroulement de notre travail soit remercié pour tous les conseils dont il nous a fait bénéficier.

Nous remercions chaleureusement tous les Directeurs, Ingénieurs et Techniciens, des services Recherches Générales et Moteur linéaire, des Etablissements Merlin et Gerin pour toute l'aide technique qu'il nous ont apportée.

Enfin nous remercions tous nos amis Chercheurs et Techniciens des Laboratoires d'Electrotechnique et de Mathématiques Appliquées qui ont su créer une atmosphère favorable à la réalisation de ce travail.

de GRENOBLE — LISTE des PROFESSEURS

DOYEN HONORAIRE : Monsieur MORET

DOYEN : Monsieur BONNIER

PROFESSEURS TITULAIRES

MM.	NEEL Louis	Physique Expérimentale
	BEILMANN René	Chimie Organique
	KRAVTCHENKO Julien	Mécanique Rationnelle
	CHABAUTY Claude	Calcul différentiel et intégral
	BENOIT Jean	Radioélectricité
	CHENE Marcel	Chimie Papetière
	FELICI Noël	Electrostatique
	KUNTZMANN Jean	Mathématiques Appliquées
	BARBIER Reynold	Géologie Appliquée
	SANTON Lucien	Mécanique des Fluides
	OZENDA Paul	Botanique
	FALLOT Maurice	Physique Industrielle
	KOSZUL Jean-Louis	Mathématiques
	GALVANI O.	Mathématiques
	MOUSSA André	Chimie Nucléaire
	TRAYNARD Philippe	Chimie Générale
	SOUTIF Michel	Physique Générale
	CRAYA Antoine	Hydrodynamique
	REULOS René	Théorie des Champs
	BESSON Jean	Chimie Minérale
	AYANT Yves	Physique Approfondie
	GALLISSOT	Mathématiques
Melle	LUTZ Elisabeth	Mathématiques
	BLAMBERT Maurice	Mathématiques
	BOUCHEZ Robert	Physique Nucléaire
	LLIBOUTRY Louis	Géophysique
	MICHEL Robert	Minéralogie et Pétrographie
	BONNIER Etienne	Electrochimie et Electrométallurgie
	DESSAUX Georges	Physiologie Animale
	PILLET E.	Physique Industrielle & Electrotechnique
	YOCCOZ Jean	Physique Nucléaire Théorique
	DEBELMAS Jacques	Géologie Générale
	GERBER Robert	Mathématiques
	PAUTHENET R.	Electrotechnique
	VAUQUOIS Bernard	Calcul Electronique
	BARJON Robert	Physique Nucléaire
	BARBIER Jean-Claude	Physique
	SILBER R.	Mécanique des Fluides
	BUYLE-BODIN Maurice	Electronique
	DREYFUS Bernard	Thermodynamique
	KLEIN Joseph	Mathématiques
	VAILLANT François	Zoologie et Hydrobiologie
	ARNAUD Paul	Chimie
	SENGEL Philippe	Zoologie
	BARNOUD Fernand	Biosynthèse de la Cellulose
	BRISSONNEAU P.	Physique
	GAGNAIRE Didier	Chimie Physique
Mme	KOFLER Lucie	Botanique
	DEGRANGE Charles	Zoologie
	PEBAY-PEROULA Jean-Claude	Physique
	RASSAT André	Chimie Systématique
	DUCROS Pierre	Cristallographie Physique
	DODU Jacques	Mécanique Appliquée I.U.T.
	ANGLES D'AURIAC Paul	Mécanique des Fluides

PROFESSEURS SANS CHAIRE

MM.	GIDON P.	Géologie et Minéralogie
	GIRAUD P.	Géologie
	PERRET R.	Servomécanisme
Mme	BARBIER M.J.	Electrochimie
Mme	SOUTIF J.	Physique
	COHEN Joseph	Electrotechnique
	DEPASSEL R.	Mécanique des Fluides
	GASTINEL Noël	Mathématiques Appliquées
	GLENAT René	Chimie
	BARRA Jean	Mathématiques Appliquées
	COUMES André	Electronique
	PERRIAUX Jacques	Géologie et Minéralogie
	ROBERT André	Chimie Papetière
	BIAREZ Jean	Mécanique Physique
	BONNET Georges	Electronique
	CAUQUIS Georges	Chimie Générale
	BONNETAIN Lucien	Chimie Minérale
	DEPOMMIER Pierre	Physique Nucléaire et Génie Atomique
	HACQUES Gérard	Calcul Numérique
	POLOUJADOFF Michel	Electrotechnique
Mme	KAHANE Josette	Physique
Mme	BONNIER J.M.	Chimie
	VALENTIN Jacques	Physique
	PAYAN Jean-Jacques	Mathématiques

PROFESSEURS ASSOCIES

MM.	NAPP-ZINN	Botanique
	RODRIGUES Alexandre	Mathématiques Pures
	STANDING Kenneth	Physique Nucléaire

MAITRES DE CONFERENCES

MM.	LANCIA Roland	Physique Atomique
	DEPORTES C.	Chimie
Mme	BOUCHE Liane	Mathématiques
	SARROT-REYNAULD J.	Géologie Propédeutique
	KAHANE André	Physique Générale
	DOLIQUE Jean-Michel	Electronique
	BRIERE Georges	Physique
	DESRE Georges	Chimie
	LAJZEROWICZ	Physique
	BERTRANDIAS J.P.	Mathématiques Appliquées
	LAURENT P.	Mathématiques Appliquées
Mme	BERTRANDIAS Françoise	Mathématiques Pures
	LONGEQUEUE J.P.	Physique
	SOHM Jean-Claude	Electrochimie
	ZADWORNY François	Electronique
	DURAND F.	Chimie Physique
	CARLIER Georges	Biologie Végétale
	AUBERT Georges	Physique
	DELPUECH Jean-Jacques	Chimie Organique
	PFISTER Jean-Claude	Physique
	CHIBON P	Biologie Animale
	IDELMAN S.	Physiologie Animale
	BOUVARD Maurice	Hydrologie
	RICHARD Lucien	Botanique
	PELMONT Jean	Physiologie Animale
	BLOCH Daniel	Electrotechnique I.P.

MAITRES DE CONFERENCES (suite)

MM. BOUSSARD Jean-Claude	Mathématiques Appliquées I.P.
MOREAU René	Hydraulique I.P.
BRUGEL L.	Energétique I.U.T.
SIBILLE R.	Construction Mécanique I.U.T.
ARMAND Yves	Chimie I.U.T.
BOLLIET Louis	Informatique I.U.T.
KUHN Gérard	Energétique I.U.T.
GERMAIN Jean-Pierre	Construction Mécanique I.U.T.
CONTE René	Thermodynamique
JOLY Jean-René	Mathématiques Pures
Mlle PIERY Yvette	Biologie Animale
BERNARD Alain	Mathématiques Pures

MAITRES DE CONFERENCES ASSOCIES

MM. SAWCZUK A.	Mécanique des Fluides
CHEEKE John	Thermodynamique
YAMADA O.	Physique du Solide
NATR Lubomir	Biologie Végétale
NAYLOR Arch	Physique Industrielle
SILBER Léo	Radioélectricité
NOZAKI Akihiro	Mathématiques Appliquées
RUTLEDGE Joseph	Mathématiques Appliquées
DONOHO Paul	Physique Générale
EGGER Kurt	Biologie Végétale

INTRODUCTION

Le principe du moteur à induction et déplacement linéaire est connu depuis le début de notre siècle. Cependant les recherches en vue d'applications industrielles de ce principe ne commencèrent vraiment à se développer que dans la dernière décade.

Afin de situer notre travail dans le cadre chronologique de ces recherches, nous allons exposer le principe de fonctionnement du moteur linéaire et compléter cet exposé par un historique des recherches effectuées depuis son invention jusqu'à nos jours.

A) PRINCIPE DE FONCTIONNEMENT DU MOTEUR LINEAIRE

Soit une carcasse magnétique constituée par un assemblage de tôles magnétiques feuilletées et dans lesquelles sont aménagées des encoches. Disposons le long de cet inducteur des bobines décalées d'un pas constant (figure 1). Lorsque l'on met face à face deux inducteurs de ce type, alimentés par des courants triphasés, une onde mobile de champ magnétique est générée dans l'entrefer ainsi constitué. Si dans l'entrefer on place une plaque de matériau conducteur, en chaque point de la plaque, le champ magnétique est variable. Il y a donc création de courant induits à l'intérieur de la plaque. (figure 22).

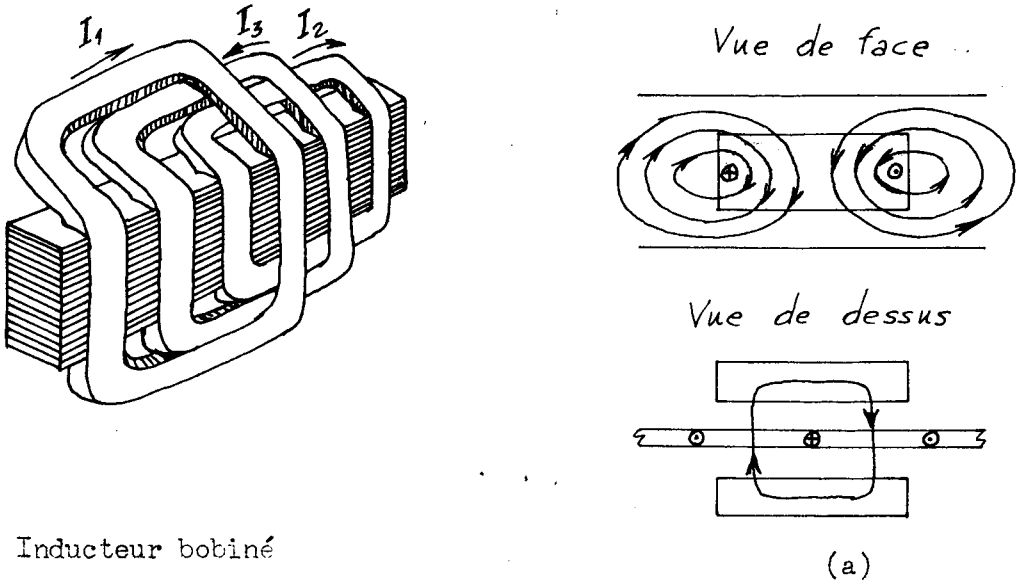
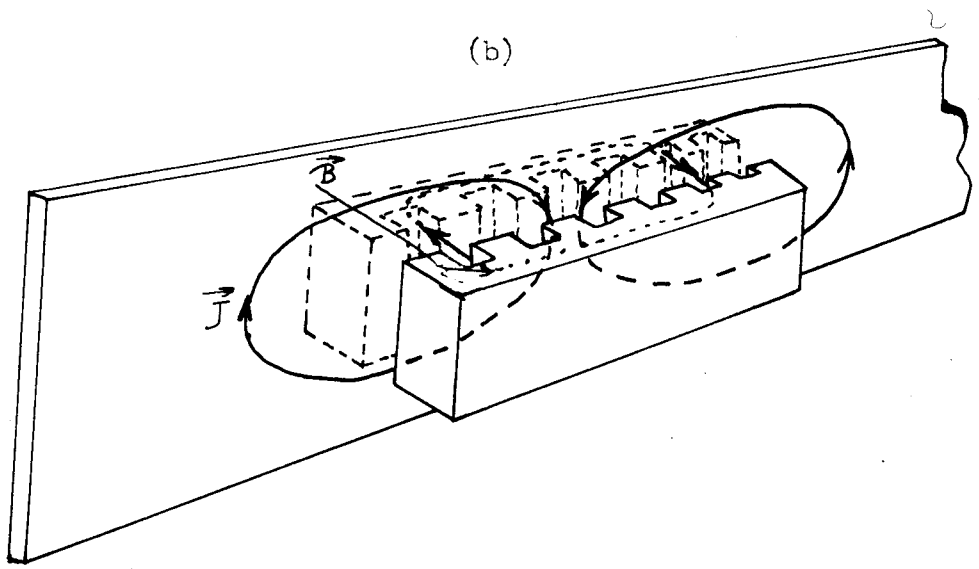


Figure I - Inducteur bobiné

Figure 2 - Moteur linéaire à inducteur double trajet des courants et flux



L'action de ces courants induits sur le champ magnétique inducteur créé une force de Laplace qui tends à entraîner la plaque dans le sens de déplacement du champ "glissant" inducteur.

On obtient ainsi un moteur à induction et à déplacement linéaire. Ce moteur est du type asynchrone, car un déplacement de la plaque à la vitesse du champ glissant empêcherait la naissance des courants induits, chaque élément de la plaque se trouvant alors placé dans un champ de valeur constante. La plaque ou élément secondaire se déplace de ce fait à une vitesse nominale V inférieure à la vitesse de synchronisme V_s, le rapport $g = (V_s - V)/v_s$ étant appelé glissement du moteur à la vitesse V.

On retrouve donc le principe des moteurs rotatifs classiques à induction. Analogues dans leur principe aux moteurs rotatifs, les moteurs linéaires en diffèrent dependant de par leur conception. En effet la présence de l'entrefer d'un induit en plaque et le mouvement de cet induit par rapport à l'inducteur contraignent les constructeurs à utiliser un grand entrefer. Cette contrainte conduit à choisir pour la valeur normale du glissement un rendement inférieur à celui des machines rotatives classiques, et impose un facteur de puissance plus faible. Néanmoins, la possibilité de placer deux inducteurs de part et d'autre de l'induit permet, à puissance égale d'obtenir les mêmes performances qu'un moteur rotatif classique avec un entrefer quatre fois plus grand. D'autre part, l'induit se déplaçant constamment par rapport à l'inducteur il peut supporter de fortes dépenses d'énergie sans se détériorer et crée au voisinage des bobinages inducteurs un gradient de température qui facilite leur refroidissement ; il est donc possible d'adopter de fortes densités de courants primaires et secondaires. Enfin, il est possible par utilisation d'un secondaire relativement résistif d'obtenir une très bonne poussée au démarrage et une courbe poussée-vitesse analogue à celle des moteurs de traction.

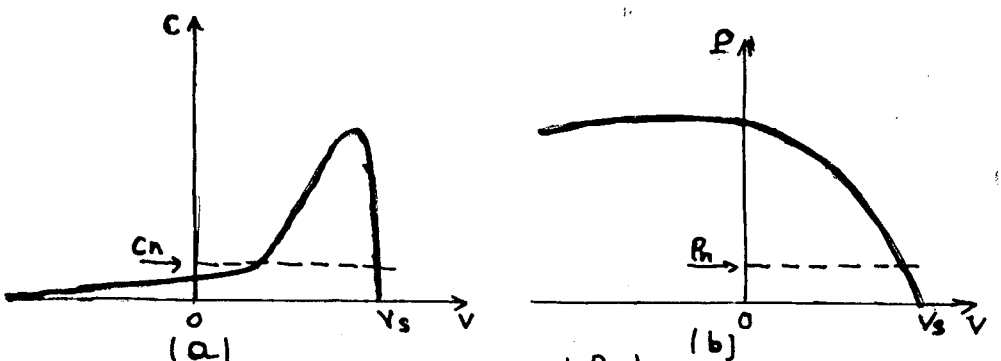


Fig 3 : (a) moteur asynchrone rotatif classique
(b) moteur linéaire de traction

Cet ensemble de faits montre que les avantages approtés par ce type de moteur semblent à l'heure acteulle pallier aux inconvénients provenant de sa conception ce qui explique son soudain développement après une longue période d'incubation.

B) HISTORIQUE

Les premiers brevets concernant le principe d'un moteur à champ glissant, ont été déposé respectivement en 1902 et 1905 par Henrrich Andrée et Alfred Zehden, et, nous trouvons à la même époque plusieurs articles de Dufait, Rosenfeld et Zetenay [1] concernant la traction tangentielle. Ces écrits sont suivis d'une longue période où si quelques tentatives sporadiques de construction et d'expérimentation ont été faites elles ne semblent pas avoir donné lieu à publications. Ce n'est qu'en 1946 que l'on peut voir la naissance du premier moteur linéaire,construit par la Société Westhinghouse et utilisé comme catapulte sur des porte-avions [2]. Des considérations économiques ayant fait abandonner ce projet, il faut attendre 1956 où le professeur E.R. LAITHWAITE publia les résultats de ses expérimentations [4] à [9], et, fit paraître en 1966 deux ouvrages complets sur le sujet.

Dans le même temps, des recherches étaient entreprises au M.I.T. et dans diverses industries américaines, ainsi que dans plusieurs laboratoires d'Union Soviétique [12], [13]. Des recherches entreprises au laboratoire d'Electrotechnique de l'Université de Grenoble conduisent en 1966 M. POLOUJADOFF et Ph. REYX à publier deux articles fondamentaux consacrés à une amélioration de la théorie de E.R. LAITHWAITE par introduction de la notion de "sections de retour".

Ces dernières recherches effectuées en collaboration avec l'industrie permirent aux établissements Merlin-Gérin d'entreprendre à Grenoble une réalisation industrielle de moteur linéaire. C'est alors que l'apparition des véhicules de transport terrestres sustentés par coussin d'air, où le moteur linéaire en produisant une force de propulsion sans contact mécanique semblait particulièrement adapté, a donné une très forte impulsion au développement de ce type de machine,

Puis les applications industrielles possibles sont devenues de jour en jour plus nombreuses, et, le nombre des études à réaliser augmentant sans cesse, une connaissance plus précise des phénomènes électromagnétiques concernant ce moteur devint nécessaire. C'est le but de notre travail.

La base même des théories précédemment citées était l'introduction d'une hypothèse restrictive sur la forme des filets de courant. Cette hypothèse présentait l'avantage de réduire l'étude mathématique des grandeurs physiques considérées, à un problème unidimensionnel. Cependant l'hypothèse formulée ne permettait de dégager l'étude de phénomènes plus complexes résultant de la répartition en nappe des courants dans le secondaire. Nous avons de ce fait abondonné cette hypothèse pour ne garder que celles classiques d'absence de saturation et d'orthogonalité des lignes de champ à l'entrefer.

Nous consacrons les premiers chapitre (I à II) de notre mémoire à la formulation de ces hypothèses et à la mise sous forme mathématique du problème physique obtenu à partir de ces dernières. Puis dans un premier temps (chap.III) nous supposons que l'inducteur est de longueur infinie, ce qui revient à négliger l'effet de bord longitudinal. La résolution analytique de ce problème nous conduit à l'établissement de formules donnant en fonction des caractéristiques de la machine, la poussée longitudinale, et, en cas de dissymétrie du primaire par rapport au secondaire, la poussée transversale dont valeur non négligeable doit pouvoir être évaluée.

Cependant lorsque la vitesse de déplacement du secondaire devient relativement élevée, il devient nécessaire de tenir compte de l'effet de bord longitudinal créé par la pénétration brusque de l'induit dans le champ magnétique inducteur.

Une résolution analytique du problème aux dérivées partielles obtenue devient alors inextricable en raison des discontinuités qui interviennent dans des conditions aux limites. Nous avons donc opté pour une résolution numérique pour constater que les méthodes à présent classique de discrétisation ne permettaient pas de résoudre correctement un tel problème.

Nous avons alors mis au point une méthode nouvelle (chap. IV), appellée méthode de partition [17] qui basée sur le principe de séparation du domaine en deux parties disjointes, permet dans notre cas particulier de nous ramener à la résolution d'un problème de Dirichlet classique. Cette méthode à en outre un champ d'applications beaucoup plus vaste que celui de notre problème et peut être appliquée à de nombreux problèmes d'Electromagnétisme et d'Hydrodynamique. Elle peut notamment s'appliquer à tous les problèmes d'étude de l'effet Kelvin pour des conducteurs dans un milieu non magnétique. Son utilisation pour ce type de problèmes permit à SILVESTER [43] spécialiste de l'effet Kelvin de résoudre de nombreux problèmes relatifs à des conducteurs de forme compliquée. Cependant le problème de Dirichlet obtenu à partir de la méthode de partition ne peut, en raison de son mauvais conditionnement, être résolu par les méthodes de relaxation classiques. Nous avons alors bâti un algorithme du type Gauss-Seidel par blocs, particulièrement adapté à la forme des équations de Maxwell et dont l'application nous a conduit au résultat [18]. Résultat dont la confrontation avec l'expérience nous a donné entière satisfaction (chap. VII).

L'étude des phénomènes précédents a été faite en supposant les enroulements alimentés par un système de courants triphasés équilibrés dont l'amplitude est connue en fonction de la vitesse.

Or, par application de la théorie des composantes symétriques [21], il est toujours possible, en l'absence de saturation, de se ramener par application du principe de superposition aux conditions précédentes, si l'on connait l'impédance de la machine.

C'est à la détermination de cette dernière qu'est consacrée la deuxième partie de notre mémoire. Nous réservons le premier chapitre à l'étude d'un modèle électrique dont l'originalité est l'introduction d'un élément à constantes réparties qui permet de tenir compte de la répartition en nappe des courants induits [29]. La détermination des inductances de fuite pour un type de bobinage et celle de l'impédance de fonctionnement de la machine complètent cette étude par le calcul de la matrice impédance triphasée en fonction du glissement donc de la vitesse de la machine. Les méthodes exposées dans cette deuxième partie, le schéma équivalent mis à part, présentent assurément moins de difficultés que celles établies au début, elles ont néanmoins nécessité un travail considérable que personne à notre connaissance n'avait entrepris ou mené à terme.

L'ensemble de ces deux parties permet donc dans le cadre des hypothèses formulées de déterminer toutes les grandeurs utiles de la machine. De plus, les hypothèses faites situent ce travail dans le cadre de l'hypothèse électrodynamique de la magnétohydrodynamique [23] à veine liquide, car nous ne supposons ni une conductivité isotrope, ni une identité de dimensions et conductivités entre les parties de la machine située à l'intérieur ou à l'extérieur de l'entrefer. Ce qui nous permet d'appliquer nos résultats à un nombre relativement général de machines linéaires et magnétohydrodynamiques.

PREMIERE PARTIE :

ETUDE DES PHENOMENES SECONDAIRES

CHAPITRE I

HYPOTHESES GENERALES

La complexité de l'analyse dûe au grand nombre de paramètres qui entrent en ligne de compte, nous a conduits à faire un certain nombre d'hypothèses simplificatrices.

H1- La machine n'est pas saturée.

H2- L'induction est nulle à l'extérieur de l'entrefer (les fuites aériennes étant négligées).

H3- L'entrefer est supposé lisse (nous tiendrons compte de la structure encochée du primaire par l'emploi d'un coefficient de Carter approprié [24] , [25]. D'autre part, l'induction est normale à cet entrefer lisse.

H4- Le secondaire a une résistivité isotrope. D'autre part, son épaisseur est suffisamment faible pour que l'effet de peau y soit négligeable. Le vecteur densité de courant sera donc dans le plan du secondaire.

H5- L'excitation primaire est assurée par une force magnétomotrice J_p placée le long de l'entrefer et dont la valeur sera calculée plus loin.

Par rapport aux précédentes études, nous nous affranchissons ainsi de deux hypothèses importantes sur le fonctionnement de la machine.

- l'hypothèse de E.R. LAITHWAITE [4] à [9] supposant la largeur du secondaire infiniment grande et rectifiant cette hypothèse par multiplication de la résistance secondaire par un facteur établi par RUSSEL et NORWORTHY qui, eux supposent la réaction d'induit négligeable, ce qui est à notre avis contraire au principe de toute machine asynchrone (en effet si la réaction d'induit est négligeable, la puissance transmise à travers l'entrefer l'est aussi.)

- l'hypothèse de M.POLOUJADOFF et P.REYX tenant compte de l'effet de bord transversal mais en supposant une distribution idéalisée des courants secondaires. [20]

Nous allons effectuer la mise en équations du problème avec des conditions aux limites différentes suivant que, l'on tienne compte ou non de l'effet d'extrêmité longitudinal.

C H A P I T R E II

MISE EN EQUATIONS

II-1 NOTATIONS ET EQUATIONS DANS UN REPERE MOBILE LIE A L'INDUIT.

Nous appelons :

-oyuz un repère orthonormé direct lié à l'induit qui se déplace à la vitesse V par rapport à l'inducteur fixe.

- $\vec{J} = \begin{vmatrix} j_y(y,u,t) \\ j_u(y,u,t) \\ 0 \end{vmatrix}$ le vecteur densité de courant qui d'après nos hypothèses est situé dans le plan you.

- $\vec{B} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -b(y,u,t) \end{vmatrix}$ le vecteur induction, perpendiculaire à l'entrefer (Hypothèse H3)

- $\vec{J}_p = \begin{vmatrix} 0 \\ J_p \\ 0 \end{vmatrix}$ le vecteur de force magnétomotrice primaire qui est dirigé le long de $\vec{ou}$

- c, l'épaisseur du secondaire et L sa largeur

- ℓ la largeur du primaire (ou longueur d'encoche)

  λ le double pas polaire (si le moteur ne comporte qu'une paire de poles λ est la longueur du primaire).

- e, la hauteur de l'entrefer.

Dans le repère mobile ainsi défini, le système doit satisfaire aux équations de MAXWELL:

Dans l'entrefer :

$u < \ell/2 \qquad 0 < x \leq \lambda$

$$\rho \, \mathrm{Rot} \, \vec{J} + \frac{\vec{dB}}{dt} = 0 \qquad (1)$$

$$\mathrm{Rot} \, \vec{H} = \vec{J} + \vec{J}_p \qquad (2)$$

$$\mathrm{div} \, \vec{J} = 0 \qquad (3)$$

$$\mathrm{div} \, \vec{B} = 0 \qquad (4)$$

En projetant sur les axes et en prenant pour (2) la forme intégrale, il vient

$$(1') \quad \rho \left(\frac{\partial j_u}{\partial y} - \frac{\partial j_y}{\partial u} \right) - \frac{db}{dt} = 0$$

$$(2') \quad \frac{e}{\mu o} \frac{\partial b}{\partial y} = c \, j_u + J_p$$

$$(3') \quad \frac{e}{\mu o} \frac{\partial b}{\partial u} = -c \, j_y$$

Il est à noter que :

- l'ensemble des deux dernières équations entraine $\frac{\partial J_u}{\partial u} + \frac{\partial J_y}{\partial y} = 0$

A l'extérieur de l'entrefer :

$$\ell/2 < u < \ell/2 \qquad x \notin [0, \lambda]$$

$$\mathrm{Rot} \, \vec{J} = 0$$

$$\mathrm{div} \, \vec{J} = 0$$

$\vec{B} \equiv 0$ (hypothèse H2)

soit :

$$(4) \quad \frac{\partial J_u}{\partial y} - \frac{\partial J_y}{\partial u} = 0$$

$$(5) \quad \frac{\partial J_u}{\partial u} + \frac{\partial J_y}{\partial y} = 0$$

$$(6) \quad b \equiv 0$$

II-2 CHANGEMENT DE REPERE- EQUATIONS DE REGIME PERMANENT.

La mise en équations est très simple à effectuer dans un repère lié à l'induit; Cependant pour le traitement des équations obtenues, nous préférons nous referer à un repère fixe lié à l'inducteur. Soit oxuz ce repère (fig(II 1)) tel que $y = x + vt$.

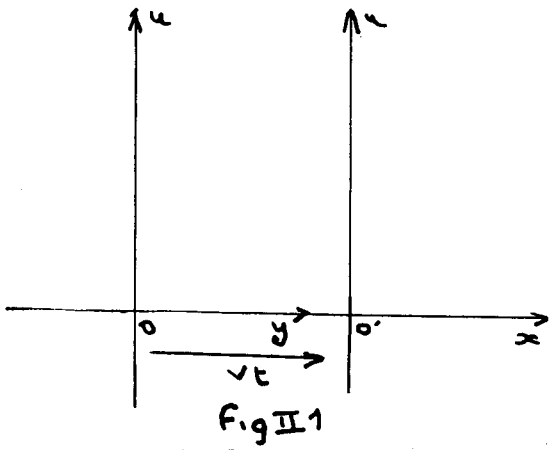


Fig II 1

Dans ce nouveau repère, la quantité

$$\frac{db}{dt} = \frac{\partial b}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial b}{ju}\frac{\partial u}{dt} + \frac{\partial b}{\partial t}$$

devient, compte tenu de la relation $x = y + vt$

$$\frac{db}{dt} = v\frac{\partial b}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial t}$$

les autres dérivées étant évidemment inchangées.

Nous venons ici d'établir les équations générales de fonctionnement, mais par la suite nous n'étudierons que le régime permanent du moteur, régime dans lequel toutes les grandeurs électromagnétiques sont des fonctions sinusoidales du temps de la forme $f = (x,u,t) = f_m(x,u)\cos(\omega t + \varphi(x,u))$.

L'étude de telles fonctions se fera à l'aide de la représentation complexe classique où la fonction f est remplacée par la fonction complexe que nous notons

$$\bar{F} = f_m(x,u)\, e^{\,j(\omega t + \varphi(x,u))}$$

ce qui permet d'éliminer le temps dans les équations (1) à (6) qui s'écrivent alors, compte tenu du changement de repère :

$$(7)\quad \sigma\left(\frac{\partial \bar{J}_u}{\partial x} - \frac{\partial \bar{J}_x}{\partial u}\right) - V\frac{\partial \bar{B}}{\partial x} - j\omega\bar{B} = 0$$

$$(8)\quad \frac{e}{\mu_o}\frac{\partial \bar{B}}{\partial x} = c\,\bar{J}_u + \bar{J}_p$$

$$(9)\quad \frac{e}{\mu_o}\frac{\partial \bar{B}}{\partial u} = -c\,\bar{J}_x$$

pour $u < \ell/2$ et $x \in [0, \lambda]$ et

$$(10) \qquad \frac{\partial \bar{J}_u}{\partial x} - \frac{\partial \bar{J}_x}{\partial u} = 0$$

$$(11) \qquad \frac{\partial \bar{J}_u}{\partial u} + \frac{\partial \bar{J}_x}{\partial x} = 0$$

$$(12) \qquad \bar{B} = 0$$

pour $\ell/2 < u < L/2$ et $x \notin [0, \lambda]$

C'est sous cette dernière forme que nous résoudrons les équations de fonctionnement. A ces équations la nature du problème nous conduits à imposer des conditions aux limites indispensables à la résolution mathématique

- L1 $u = \pm L/2$ à cette limite le courant circule parallèlement au bord du rail, c'est-à-dire

$$\bar{J}_u(x, L/2) = 0 \qquad \forall x$$

- L2 $u = \pm \ell/2$ l'épaisseur et la résistivité du rail étant constantes à ces limites, le vecteur densité de courant est continu.

- L3 $x = 0$, et $x = \lambda$. A ces limites les équations (7) et (10) sont toujours valables mais J_u et B présentent des discontinuités que nous appelons δJ_u et δB, et leurs dérivées par rapport à x sont alors infinies sur un intervalle de mesure nulle. Si on intègre ces équations sur cet intervalle il vient :

$$\rho \delta \bar{J}_u - V \delta B = 0 \qquad ((u) < \ell/2)$$

$$\delta \bar{J}_u = 0 \qquad L/2 > u > \ell/2$$

la fonction J_x étant continue sur cette limite, à cause de la conservatio de courant.

- L4 La conservation du flux dans l'entrefer implique que

$$\int_0^{\lambda} \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \bar{B}(x,u)\, dxdu = 0$$

- L5 Le problème étant symétrique, il pourra n'être étudié que sur la partie $u > 0$; la condition $\bar{J}_u(x,-L/2) = 0$ peut alors, grâce à la symétrie être remplacée par $\bar{J}_x(x,0) = 0 \quad \forall\, x$

- L6 Lorsque nous étudierons le problème en l'absence d'effet de bord longitudinal, nous considèrerons alors le fonctionnement d'un seul moteur en présence d'une infinité d'autres qui lui sont juxtaposées. Dans ce cas, les conditions de L3 devront être remplacées par des conditions de périodicité, soit

$$\bar{J}_u(x,u) = \bar{J}_u(x+\lambda,u)$$
$$\bar{J}_x(x,u) = \bar{J}_u(x+\lambda,u) \qquad \forall\, x,u$$
$$\bar{B}(x,u) = \bar{B}(x+\lambda,u)$$

Nous venons dans ce chapitre de décrire sous une forme mathématique, le fonctionnement du moteur linéaire à inducteur court.

La résolution mathématique de ce problème nous permettra de connaître les grandeurs J_x et J_u ainsi que b et de posséder dans le cadre de nos hypothèses tous les éléments nécessaires au calcul de la poussée du moteur en fonction de sa vitesse.

II-3 CALCUL DE LA FORCE MAGNETOMOTRICE PRIMAIRE

Considérons un moteur dont le primaire de longueur totale $\mathcal{L}$ comporte p paires de poles.
Soient λ le double pas polaire et N_e le nombre d'encoches par pole et par phase.
Nous supposerons que l'ouverture de l'encoche est faible par rapport à la distance entre deux encoches successives.
Le calcul de la force magnétomotrice sera fait en deux étapes; nous allons d'abord calculer la force magnétomotrice créée par l'enroulement de la première phase, et, ensuite, nous composerons les trois forces magnétomotrices correspondant à une alimentation triphasée.

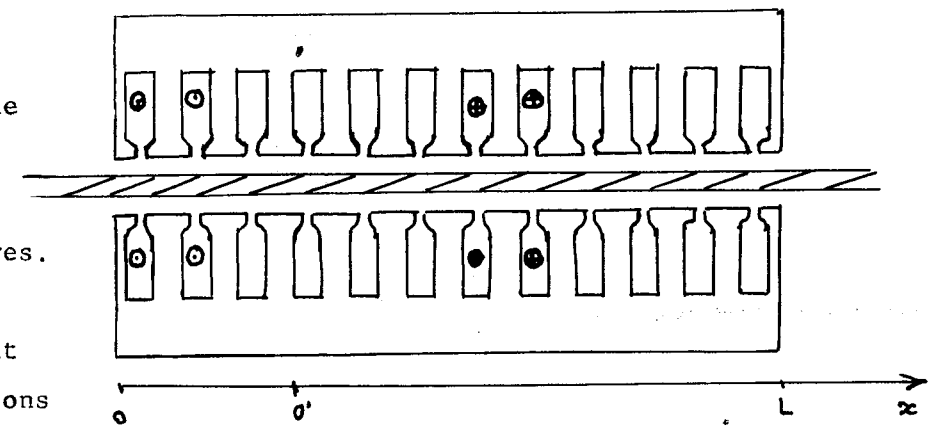


Fig III 1 - Moteur à deux encoches par pôle et phase

a) Calcul de la force magnétomotrice de la phase 1.

Nous prenons comme origine le milieu de l'enroulement de la phase 1 et nous appelons x'q l'abscisse dans ce système de la qième encoche à partir du bord le plus à gauche du primaire (fig III.1) .La force magnétomotrice J_1 est nulle partout sauf aux points $x' = \pm x'q$ où elle vaut I_1 sur un intervalle infiniment petit de part et d'autre de l'ouverture de l'encoche. On peut donc écrire

$$J_1 = I_1 \sum_{q=1}^{N_e} \left(\delta(x' - x'_q) - \delta(x' + x'q) \right)$$

où $\delta(x)$ représente la distribution de Dirac.

En vue d'un emploi ultérieur de cette expression dans un problème linéaire, nous préférons en chercher dès à présent un développement en série de Fourier. Nous écrivons alors :

$$(1)\quad J_i = \sum_{q=1}^{N_e} I_1(\delta(x' - x'q) - \delta(x' + x'q)) = \sum_{n=1}^{\infty} J_{1m,n} \sin n\nu x' \quad \text{où } \nu = 2\pi/\lambda$$

car avec notre choix de l'origine, J_1 est une fonction impaire de x.

$$(1) = J_{1m,n} = \frac{2I_1}{\lambda} \int_{-\lambda/3}^{2\lambda/3} \sum_{q=1} (\delta(x' - x'q) - \delta(x' + x'q)) \sin n\nu x' \, dx'$$

$$= \frac{4I_1}{\lambda} \sum_{q=1}^{N_c} \sin n\nu\lambda \left(\frac{2q-1}{12N_c} - \frac{1}{3} \right) \qquad \left(x'q = \frac{2q-1}{12}\lambda - 1/3\right)$$

$$J_{1mn} = -\frac{4I_1}{\lambda} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{\sin \frac{n\pi}{2N_e}} \sin \frac{n\pi}{6}$$

b) Calcul de la force magnétomotrice totale.

L'alimentation étant supposée triphasée équilibrée, les courants dans les trois phases ont pour intensité

$$I_1 = I_m \cos \omega t$$

$$I_2 = I_m \cos(\omega t - 2\pi/3)$$

$$I_3 = I_m \cos(\omega t - 4\pi/3)$$

D'autre part les axes des trois phases étant décalés, chacun de $\lambda/3$ par rapport au précédent, la force magnétomotrice totale est :

$$J_p = -\frac{4I_m}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\frac{n\pi}{2}\sin\frac{n\pi}{6}}{\sin\frac{n\pi}{}} [\cos \omega t \sin \nu x' + \cos(\omega t - \frac{2\pi}{3}) \sin \nu(x' - \lambda/3 + \cos('\omega t - \frac{4\pi}{3}) \sin(\nu x' - 2\lambda/3)]$$

soit $J_p = -\frac{4I_m}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} K_n \times S_n$ avec

$$S_n = \frac{1}{2} \times \left[\begin{array}{ll} \sin(\omega t + n\nu x') & - \sin(\omega t + n\nu x') \\ +\sin(\omega t + n\nu x' - \frac{2n\pi}{3} - \frac{2\pi}{3} & - \sin(\omega t - n\nu x' + \frac{2n\pi}{3} - \frac{2\pi}{3}) \\ + \sin(\omega t + n\nu x' - \frac{4n\pi}{3} - \frac{4\pi}{3}) & - \sin(\omega t - n\nu x' + \frac{4n\pi}{3} - \frac{4\pi}{3}) \end{array} \right]$$

suivant les valeurs de n S_n se simplifie car ses termes s'annulent comme somme de 3 sinus d'angles décalés de $2\pi/3$.

a) $n = 3q'$ = $S_n = 0$

b) $n = 3q' + 1$ = $S_n = -\frac{3}{2} \sin(\omega t - n\nu x')$

c) $n = 3q' + 2$ = $S_n = \frac{3}{2} \sin(\omega t + n\nu x')$

d'autre part lorsque $n = 2p$ $K_n = 0$ (termes en $\sin\frac{n\pi}{2}$)

il ne reste donc que des termes en 6q+1, lesquels seront suivant la terminologie habituelle appelés harmoniques directs ((6q+ 1) ou 6q-5)) et harmoniques inverses ((6q-1) ou (6q + 5)) d'où

$$J_p = \frac{6I_m}{\lambda} \sum_{1}^{\infty} (-1)^q \left[K_{6q-5} \sin(\omega t - (6q-5)\nu x' - K_{6q+1} \sin(\omega t + (6q-1)\nu x') \right]$$

Enfin en prenant comme origine le bord le plus à gauche du primaire (figure IIb), soit $x = x' + \lambda/3$, il vient après transformation du sinus en cosinus:

$$J_p = \frac{3I_m}{\lambda}\left[\frac{\sin(6q-5)\frac{\pi}{6}}{\sin(6q-5)\frac{\pi}{6N_e}}\cos(\omega t - (6q-5)\nu x + \frac{7\pi}{6}) - \frac{\sin(6q-1)\frac{\pi}{6}}{\sin(6q-1)\frac{\pi}{6N_e}} \times \cos(\omega t - (6q-1)\nu x - \frac{7\pi}{6})\right]$$

REMARQUES: 1) La force magnétomotrice représentera l'intensité d'excitation par unité de longueur le long de l'entrefer.

2) Lorsque les courants ne sont pas équilibrés, la force magnétomotrice est la somme d'une composante directe et d'une composante inverse. On se ramène alors facilement au cas précédent.

3) Nous verrons dans les chapitres suivants que les termes dûs aux harmoniques n'interviennent que très peu, ce qui fait que nous limiterons la valeur de la force magnétomotrice à celle de son terme fondamental en écrivant

$$J_p \simeq J_{pf} = \frac{3I_m}{\lambda \sin(\pi/6\ N_e)}\cos(\omega t - \nu x + \pi/6) \qquad (\nu = \frac{2\pi}{\lambda})$$

CHAPITRE III

ETUDE DE FONCTIONNEMENT EN L'ABSENCE d'EFFET D'EXTREMITE LONGITUDINAL

Négliger l'effet d'extrêmité longitudinal consiste pour nous à étudier le fonctionnement d'un moteur dont le primaire est extrait d'une infinité de primaires semblables juxtaposés, ce qui entraîne la périodicité dans le sens longitudinal des grandeurs électriques du secondaire.

Notre étude aboutira à des formules litterales exprimant les composantes de la densité de courant secondaire et l'induction dans l'entrefer à partir des paramètres de la machine.

En supposant dans un premier temps que les axes de symétrie du primaire et du secondaire coïncident nous calculerons la poussée en fonction de la vitesse. Etendant notre analyse au cas général nous calculerons les poussées longitudinales et surtout la poussée transversale qui dans diverses applications n'est pas négligeable.

III-1 EXPOSE DE LA METHODE D'ANALYSE

Reprenons les équations de fonctionnement du moteur établies au Chap. II.

A l'intérieur de l'entrefer :

$$\rho\left(\frac{\delta \overline{J}_u}{\delta x} - \frac{\delta \overline{J}_x}{\delta u}\right) - V \frac{\delta \overline{B}}{\delta x} - j\,\omega\,\overline{B} = 0 \qquad (13)$$

$$\frac{e}{u_o}\frac{\delta \overline{B}}{\delta x} = c\,\overline{J}_u + \overline{J}_{pm}\quad e(j(\omega t - n\,\nu x + \quad) \qquad (14)$$

$$\frac{\delta \overline{J}_u}{\delta u} + \frac{\delta \overline{J}_x}{\delta x} = 0 \qquad (15)$$

où n est le rang de l'harmonique de la f.e.m. pour laquelle les caractéristiques

sont étudiées. D'autre part, nous avons remplacé les équations (9) et (10) par les équations (14) et (15) qui leurs sont équivalentes.

A l'extérieur de l'entrefer

$$(16) \qquad \frac{\partial \bar{J}_u}{\partial u} - \frac{\partial \bar{J}_x}{\partial u} = 0$$

$$(17) \qquad \frac{\partial \bar{J}_u}{\partial u} + \frac{\partial \bar{J}_x}{\partial x} = 0$$

Préalablement à la résolution, nous allons effectuer quelques transformations sur les équations (13) à (17).

La dérivation de (13) par rapport à x, et de (15) par rapport à u, nous permet de remplacer

$$\frac{\partial \bar{J}_x}{\partial x \partial u} \quad \text{par} \quad - \frac{\partial \bar{J}_u}{\partial u^2}$$

soit

$$(13) \Rightarrow \rho\left(\frac{\partial^2 \bar{J}_u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{J}_u}{\partial u^2} \right) - V \frac{\partial^2 \bar{B}}{\partial x^2} - j\omega \frac{\partial \bar{B}}{\partial x} = 0$$

ou en remplaçant $\bar{B}$ par sa valeur tirée de (14)

$$\rho\left(\frac{\partial^2 \bar{J}_u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{J}_u}{\partial u^2} \right) - V \frac{\mu_{oc}}{e} \frac{\partial \bar{J}_u}{\partial x} - j\omega \frac{\mu_{oc}}{e} \bar{J}_u$$

$$= j \frac{\mu_{oc}}{e} J_{pm} e^{\delta(\omega t - n\nu x + \varphi)} \times (\omega - n\nu V)$$

l'introduction du glissement propre à l'harmonique n, $g_n = 1 - n(1-g)$ où g est le glissement fondamental soit $g = (\omega - \nu v)/\omega$, et de la grandeur

$$\sigma = \frac{\mu_{oc}}{\rho e}$$ nous permet d'écrire cette équation sous la forme :

$$\frac{\partial^2 \bar{J}_u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{J}_u}{\partial u^2} - V\sigma \frac{\partial \bar{J}_u}{\partial u} - j\omega\sigma \bar{J}_u = j\frac{g_n \omega\sigma}{c} J_{pm} e^{-j(\omega t - n\nu x + \varphi)} \qquad j = \sqrt{-1}$$

Un processus de calcul identique nous permet d'aboutir à une équation identique sur $\bar{J}_x$ mais homogène.

Finalement

$$(18)\quad \Delta\bar{J}_u - V\sigma \frac{\partial \bar{J}_u}{\partial x} - j\omega\sigma \bar{J}_u = j \frac{g_n \omega\alpha}{c} J_{pm} e^{j(\omega t - \nu x + \varphi)}$$

(13)à(15)

$$(19)\quad \Delta \bar{J}_x - V\sigma \frac{\partial \bar{J}_x}{\partial} - j\omega\sigma \bar{J}_x = 0$$

$$(20)\quad \frac{\partial \bar{J}_u}{\partial u} + \frac{\partial \bar{J}_x}{\partial x} = 0$$

En définitive le problème physique s'exprime sous la forme suivante (Figure III.1)

a) $0 \leq u < \ell/2 \qquad , 0 < x < \lambda$

$$\Delta\bar{J}_u - V\sigma \frac{\partial \bar{J}_u}{\partial x} - j\omega\sigma \bar{J}_u = j \frac{g_n \omega\alpha}{c} J_{pm} e^{j(\omega t - n\nu x + \varphi)}$$

$$\Delta\bar{J}_x - V\sigma \frac{\partial \bar{J}_x}{\partial x} - j\omega\sigma J_x = 0$$

$$\frac{\partial \bar{J}_u}{\partial u} + \frac{\partial \bar{J}_x}{\partial x} = 0$$

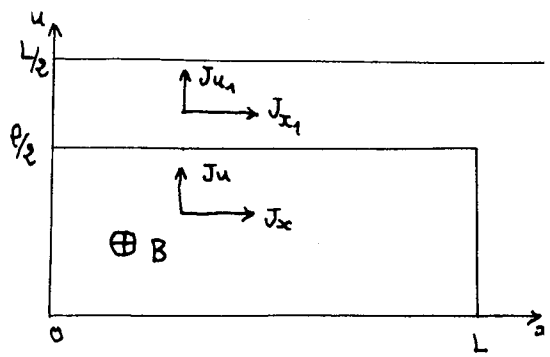


Figure 1

b) $\ell/2 < u < L/2 \qquad 0 < x < \lambda$

$$\frac{\partial \bar{J}_{u_1}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{J}_{x_1}}{\partial u} = 0$$

$$\frac{\partial \bar{J}_{u_1}}{\partial u} + \frac{\partial \bar{J}_{x_1}}{\partial x} = 0$$

Avec les conditions aux limites

$$\bar{J}_{u_1}(x, L/2) = 0 \qquad \bar{J}_{u_1}(x+\lambda \quad u) = J_{u_1}(x,u)$$

$$\bar{J}_x(x, 0\ ) = 0 \qquad \bar{J}_{x_1}(x+\lambda, u) = J_{u_1}(x,u)$$

$$\bar{J}_x(x, \ell/2) = \bar{J}_{x_1}(x, \ell/2) \qquad \bar{J}_u(x+\lambda, u) = J_{x_1}(x,u)$$

$$\bar{J}_u(x, \ell/2) = \bar{J}_{u_1}(x, \ell/2) \qquad \bar{J}_x(x+\lambda, u) = J_x(x,u)$$

Nous allons effectuer la résolution de ce problème en trois étapes où nous calculerons $\bar{J}_x$, $\bar{J}_u$ et $\bar{J}_{x_1}$, $\bar{J}_{u_1}$ en fonction de deux constantes qui seront calculées à partir des conditions pour $u = \ell/2$.

IV-1-1 Résolution des équations (18) à (20).

Les équations (18) et (19) ont même premier membre donc auront même solution générale, l'équation (18) étant la somme de cette dernière et d'une solution particulière satisfaisant aux conditions aux limites.

Nous cherchons cette solution particulière sous la forme :

$$\bar{J}_{u_o} = c_1 \, e^{-jn\nu x}$$

d'où

$$(-n^2\nu^2 - j\, n\nu\alpha\, \nu - j\omega\alpha)\, c_1\, e^{j(\omega t - n\nu x + \varphi)} = j\, \frac{g_n \omega\alpha}{c}\, J_{pm}\, e^{j(\omega t - n\nu x + \varphi)}$$

soit

$$[-n^2\nu^2 - j\alpha(\omega - n\nu v)]\, c_1 = j\, \frac{g_n \omega\alpha}{c}$$

ou

$$c_1 = j\, \frac{g_n \omega\alpha/c\ \ J_{pm}}{-n^2\nu^2 - j\, g_n \omega\alpha}\ e^{j(\omega t + \varphi)}$$

la solution étant $\bar{J}_{u_o} = j\, \frac{g_n \omega\alpha}{c}\, \frac{J_{pm}}{-\nu^2 - j\, g_n \omega\alpha}\, e^{j(\omega t - n\nu x + \varphi)}$

Nous allons maintenant rechercher la solution générale par la méthode de séparation des variables.

Nous cherchons $\bar{J}_u$ où $\bar{J}_x$ sous la forme $f(x) \times h(u)$ les premiers membres de (18) et (19) deviennent alors :

$$f''h + h''f - v\alpha\, f'h - j\omega\alpha\, fh = 0$$

soit

$$(21) \qquad \frac{f''}{f} - v\alpha\, \frac{f'}{f} - j\omega\alpha = -\frac{h''}{h} =$$

le premier membre de (21) étant une fonction de x et le second membre une fonction de u, l'égalité ne peut avoir lieu qu e si ces deux membres sont égaux à une constante que nous prenons égale à μ^2; l'équation (21) donne alors lieu à deux équations :

$$(22) \qquad h'' + \mu^2 h = 0$$

$$(23) \qquad f'' - V\alpha\, f' - (j\omega\alpha + \mu^2) f = 0$$

dont les solutions s'écrivent :

$$h(u) = A\, e^{j\mu u} + Be^{-j\mu u}$$

$$f(x) = C\ \ e^{r_1 x} + D\, e^{r_2 x}$$

où r_1 et r_2 sont les racines de l'équation caractéristique

$$r^2 - V\alpha\, r - (j\omega\alpha + u^2) = 0$$

soit
$$\begin{matrix} r_1 \\ r_2 \end{matrix} = -\frac{V\alpha}{2} \pm \sqrt{\frac{V^2\alpha^2}{4} + j\omega\alpha + \mu^2} = \frac{V\alpha}{2} \pm \delta$$

Nous pouvons écrire la solution générale de (18) et (19) :

$$\bar{J}_u = (K_1' e^{j\mu u} + K_2' e^{-j\mu u})(K_3' e^{r_1 x} + K_4' e^{r_2 x}) + \bar{J}_{u_o}$$

$$\bar{J}_x = (J_1' e^{j\mu u} + J_2' e^{-j\mu u})(J_3' e^{r_1 x} + J_4' e^{r_2 x})$$

Les fonctions $\bar{J}_x$ et $\bar{J}_u$ sont alors données en fonction de 9 constantes arbitraires que nous allons déterminer successivement.

-1) $\bar{J}_x(x,0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\partial \bar{J}_x}{\partial x}\right)_{u=o} = 0 \; , \; \left(\frac{\partial \bar{J}_u}{\partial u}\right)_{u=o} = 0$

soit :
$$\begin{aligned} \bar{J}_1 + \bar{J}_2 &= 0 \\ K_1 - K_2 &= 0 \end{aligned}$$

la redéfinition des constantes permet d'écrire :

$$\bar{J}_u = (K_3 e^{r_1 x} + K_4 e^{r_2 x}) \cos \mu u + \bar{J}_{u_o}$$

$$\bar{J}_x = (J_3 e^{r_1 x} + J_u e^{r_2 x}) \sin \mu u$$

-2) Les conditions de périodicité

$$K_3(e^{r_1 \lambda} - 1) + K_4(e^{r_2 \lambda} - 1) = 0$$

$$J_3(e^{r_1 \lambda} - 1) + J_4(e^{r_2 \lambda} - 1) = 0$$

dont la seule solution acceptable est $e^{r_1 \lambda} = e^{r_2 \lambda} = 1 = e^{\pm 2 j k\pi}$
avec $k \in N^+$ d'où

$$r_1\lambda = \pm 2jk\pi \quad = \quad r_1 = \pm jk \times \frac{2\pi}{\lambda} = \pm j\nu$$

$$r_2\lambda = \pm 2jk\pi \quad = \quad r_2 = \pm jk \times \frac{2\pi}{\lambda} = \pm j\nu$$

soit

$$-\frac{V\alpha}{2} \mp \delta = \pm jk\nu \quad = \quad \delta^2 = \left(\frac{V\alpha}{2}\right) \pm jk\nu)$$

d'où

$$\frac{V^2\alpha^2}{4} + \mu^2 + j\omega\alpha = \frac{V^2\alpha^2}{4} \pm jk\nu V\alpha - k^2\nu^2$$

et

$$\mu^2 = -k^2\nu^2 - j\alpha(\omega \pm k\nu V)$$

Nous obtenons pour μ une infinité de solutions possibles dont la superposition donnera la sdution générale. Cependant les solutions correspondan à $k \neq n$ conduiront lors de l'application des autres conditions aux limites à la résolution de systèmes homogènes à solution banale. Seule conduit à une solution n identiquement nulle la valeur de k correspondant au numéro de l'harmonique étudié. Physiquement ce fait étend aux machines à secondaire en nappe le théorème des moteu à cage d'écureuil qui exprime que les courants secondaires circulent avec la même polarité que la force magnétomorrice primaire. Nous ne retenons donc que la valeur de μ correspondant à

$$\mu^2 = -n^2\nu^2 - j\, g_n\, \omega\alpha$$

à laquelle nous associons : $r_1 = r_2 = -jn\nu$

et en posant : $K_3 + K_4 = A$, $J_3 + J_4 = B$ il vient

$$\bar{J}_u = A\, e^{-jn\nu x} \cos \mu u + J_{u_o}$$

$$\bar{J}_x = B\, e^{-jn\nu x} \sin \mu u.$$

-3) L'équation (20) nous permet enfin d'exprimer B en fonction de A :

$$\frac{\partial \bar{J}_u}{\partial u} + \frac{\partial \bar{J}_x}{\partial x} = -\mu\, A\, e^{-j\nu x} \sin \mu u - jn\nu\, B\, e^{-j\nu x} \sin \mu u = 0 \quad \forall (u,x)$$

$$B = j \frac{\mu}{n\nu} A$$

En définitive nous obtenons

$$\bar{J}_u = (c_1 + A \cos uu) e^{-jn\nu x}$$

$$J_x = j \frac{\mu}{n\nu} A \sin \mu u \; e \; e^{-jn\nu x}$$

pour $u < \ell/2$, $0 < x < \lambda$

IV-1-2 Solution des équations (16) et (17)

Reprenons à présent les équations (16) et (17)

$$\frac{\partial \bar{J}_{u_1}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{J}_{x_1}}{\partial u} = 0$$

$$\frac{\partial \bar{J}_{u_1}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{J}_{x_1}}{\partial x} = 0$$

La forme même de ces équations implique l'existence d'une fonction $\varphi(x,u)$ telle que $\bar{J}_{u_1}(x,u) = \frac{\partial \varphi}{\partial u}$ et $\bar{J}_{x_1}(x,u) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$. Cette fonction φ vérifie alors l'équation de LAPLACE :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0$$

dont la résolution par séparation des variables permet d'écrire la solution sous la forme :

$$\varphi = (A' e^{j\mu' x} + B' e^{-j\mu' x})(c' e^{\mu' u} + D' e^{-\mu' u}) .$$

L'application des condition aux limites permet de diminuer le nombre de constantes indéterminées.

-1) périodicité

$$\varphi(x + \lambda) \equiv \varphi(x) \quad = e^{+j\mu'\lambda} \quad = e^{\pm 2jk\pi} \quad = \mu' = \pm k \times \frac{2\pi}{\lambda}$$

soit

$$\mu' = \pm k\nu$$

pour les mêmes raisons que précédemment nous retenons la valeur $k = n = \mu' = n\nu$ d'où

$$\varphi \quad (x,u) = (A'e^{jn\nu x} + B'e^{-jn\nu x})(C'e^{n\nu u} + D'e^{-n\nu u})$$

-2)

$$u = L/2 \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial u} = 0 \qquad \text{soit}$$

$$c'e^{\frac{n\nu L}{}} - D'e^{\frac{-n\nu L}{2}} = 0$$

d'où

$$D' = c'e^{n\nu L}$$

ce qui entraîne

$$\varphi(x ,u) = (A'' e^{jn\nu x} + B''e^{-jn\nu x})\operatorname{ch} n\nu(u - L/2)$$

-3) L'application de l'identification pour $u = \ell/2$ avec $\bar{J}_x(x, \ell/2)$ entrainera la disparition du terme en $e^{+jn\nu x}$ soit

$$A'' = 0.$$

d'où

$$\varphi(x,u) = e^{-jn\nu x} \operatorname{ch} n\nu(u - L/2)$$

soit en à J_{u_1} et J_{u_1}

$$\bar{J}_{u_1} = A_1 \operatorname{sh} n\nu(u - L/2)e^{-jn\nu x}$$

$$\bar{J}_{x_1} = -j\, A_1 \operatorname{ch} n\nu(u - L/2)\, e^{-jn\nu x}$$

IV-1-3 Résolution finale et calcul de l'induction.

a) Les conditions aux limites sur la ligne $u = \ell/2$ permettent à présent d'écrire les deux équations qui permettront de déterminer les constantes A et A_1.

$$A_1 \quad \text{shn}\nu\left(\frac{\ell}{2} - \frac{L}{2}\right) e^{-jn\nu x} = \left(c_1 + A \cos \mu \frac{\ell}{2}\right) e^{-jn\nu x}$$

$$-j A_1 \text{ ch n } \nu\left(\frac{\ell}{2} - \frac{L}{2}\right) e^{-jn\nu x} = j \frac{\mu}{n\nu} A \sin \mu \frac{\ell}{2} e^{-jn\nu x}$$

soit

$$(22) \quad \left(A_1 \text{ sh } n\nu\left(\frac{\ell}{2} - \frac{L}{2}\right) - A \cos \frac{\mu\ell}{2}\right) e^{-jn\nu x} = c_1 e^{-jn\nu x}$$

$$(23) + \left(A_1 \text{ ch n } \nu\left(\frac{\ell}{2} - \frac{L}{2}\right) + \frac{\mu}{n\nu} A \sin \frac{\mu\ell}{2}\right) e^{-jn\nu x} = 0$$

ces égalités doivent être vérifiées pour toute valeur de x. On voit donc que si au premier membre on avait $k \neq n$ les équations du terme en $e^{-jk\nu x}$ seraient homogènes à déterminant non nul, ce qui entrainerait la solution banale. On tire des équation (22) et (23) :

$$- A \frac{\mu}{n\nu} \text{ thn}\nu\left(\frac{\ell}{2} - \frac{L}{2}\right) \sin \frac{\mu\ell}{2} = c_1 + A \cos \frac{\mu\ell}{2}$$

soit $$A\left(1 + \frac{\mu}{n\nu} \text{ thn}\nu\left(\frac{\ell}{2} - \frac{L}{2}\right) \text{tg} \frac{\mu\ell}{2}\right) = - c_1/\cos \frac{\mu\ell}{2}$$

posons pour simplifier $$\gamma = \frac{\mu}{n\nu} \text{ th n}\nu\left(\frac{\ell}{2} - \frac{L}{2}\right) \text{th} \frac{\mu\ell}{2}$$

$$A = - \frac{c_1}{(1+\gamma)\cos \frac{\mu\ell}{2}}$$

Il vient

$$A_1 = \frac{c_1 \text{ tg} \frac{\mu\ell}{2}}{(1+\gamma)\text{chn}\nu\left(\frac{\ell}{2} - \frac{L}{2}\right)}$$

soit pour $\bar{J}_x$ et $\bar{J}_u$

$$\bar{J}_u = c_1\left(1 - \frac{\cos\mu u}{(1+\gamma)\cos\frac{\mu\ell}{2}}\right) e^{-jn\nu x}$$

$$\bar{J}_x = -j\,\frac{\mu c_1}{n\nu}\,\frac{\sin\mu u}{(1+\gamma)\cos\frac{\mu e}{2}}$$

et

$$J_{u_1} = \frac{c_1\,\mathrm{tg}\,\frac{\mu\ell}{2}}{1+\gamma}\,\frac{\mathrm{sh}n\nu(u - L/2)}{\mathrm{ch}n\nu(\frac{\ell}{2} - \frac{L}{2})}$$

$$\bar{J}_{x_1} = -j\,\frac{c_1\,\mathrm{tg}\,\frac{\mu\ell}{2}}{1+\gamma}\,\frac{\mathrm{ch}n\nu(u - L/2)}{\mathrm{ch}n\nu(\ell - L/2)}$$

ce qui entraine

$$j_u(u,x,t) = \frac{g_n\,\omega_\alpha\,J_{pm}}{\sqrt{\nu^4 + (g_n\omega_\alpha)^2}}\left|1 - \frac{\cos\mu u}{(1+\gamma)\cos\frac{\mu\ell}{2}}\right| \cos(\omega t - n\nu x + \varphi_{ju}(u))$$

avec

$$\varphi_{ju}(u) = \mathrm{Arg}(1-\cos\mu u/(1+\gamma)\cos\mu\frac{\ell}{2}) + \frac{\pi}{2} - \mathrm{Arc\ tg}\,\frac{g_n\omega_\alpha}{n\nu^2}$$

$$j_x(u,x,t) = \frac{g_n\,\omega_\alpha}{\sqrt{\nu^4+(g_n\omega_\alpha)^2}} \times \frac{\sqrt[4]{\nu^4 + (g_n\,\omega_\alpha)^2}}{n\nu}\left|\frac{\sin\mu u}{(1+\gamma)\cos\mu\frac{\ell}{2}}\right| \cos(\omega t - n\nu x + \varphi_{jx}(u))$$

avec

$$\varphi_{jx}(u) = \mathrm{Arg}\left(\frac{\mathrm{tg}\,\frac{\mu\ell}{2}}{1+\gamma}\right) + \mathrm{Arctg}\left(\frac{g_n\omega_\alpha}{n^2\nu^2}\right)$$

$$j_{u_1}(u,x,t) = \left| \frac{c_1 \operatorname{tg} \mu \frac{\ell}{2}}{1+\gamma} \right| \frac{\operatorname{shn}\nu(u, \frac{L}{2}}{\operatorname{chn}\nu(\frac{\ell}{2} - \frac{L}{2})} \cos(\omega t - n\nu x + \varphi_{11})$$

$$J_{x_1}(u,x,t) = \left| \frac{c_1 \operatorname{tg} \mu \frac{\ell}{2}}{1+\gamma} \right| \frac{\operatorname{chn}\nu(u-L/2)}{\operatorname{chn}\nu(\frac{\ell}{2} - \frac{L}{2})} \cos(\omega t - n\nu x + \varphi_2)$$

Calcul de l'induction : Nous pouvons à partir de la connaissance de $\bar{J}_u(x,u)$ calculer l'induction à partir de la formule (14) :

$$\frac{e}{\mu o} \frac{\partial \bar{B}}{\partial x} = c \bar{J}_u + J_{pm} e^{j(\omega t - n\nu x + \varphi)}$$

d'où nous tirons :

$$\bar{B} = j \frac{\mu o}{n\nu} \left(1 - \frac{\cos \mu u}{(1+\nu)\cos\frac{\mu \ell}{2}} + \frac{jn^2\nu^2 - g_n \omega \alpha}{g_n \omega \alpha}\right) e^{-jn\nu x}$$

soit après réduction au même dénominateur

$$\bar{B} = \frac{\mu o n \nu}{g_n \omega} c_1 \left(-1 - j \frac{g_n \omega \alpha}{n^2\nu^2} \frac{\cos \mu u}{(1+\gamma)\cos \mu \frac{\ell}{2}}\right)$$

IV - 2 CALCUL DE LA POUSSEE.

Connaissant la densité de courant $\bar{J}_u$ dans le secondaire et l'induction $\bar{B}$ dans l'entrefer nous pouvons maintenant calculer la poussée développée par le moteur, à partir de la loi de Laplace :

$$F = \iiint_{\text{secondaire}} J_\Lambda B \, dv = -c \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \int_0^{\lambda} \bar{J}_u \bar{B} \, dx \, du$$

soit

$$F = -\frac{c\rho n\nu}{g_n \omega} c_1^2 \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \int_0^{\lambda} 1 - \frac{\cos\mu u}{(1+\gamma)\cos\mu\frac{\ell}{2}} \quad -1-j\frac{g_n \omega\alpha}{n^2\nu^2} \frac{\cos\mu u}{(1+\gamma)\cos\mu\frac{\ell}{2}} \times$$

$$\cos(\omega t - n\nu x + \varphi_{ju}) \times \cos(\omega t - n\nu x + \varphi_B)$$

$$= -\frac{\lambda e\rho n^2}{2g_n \omega} c_1^2 \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \underbrace{\left| 1 - \frac{\cos\mu u}{(1+\gamma)\cos\mu\frac{\ell}{2}} \right|}_{A} \underbrace{\left| -1-j\frac{g_n \omega\alpha}{n^2\nu^2} \frac{\cos\mu u}{(1+\gamma)\cos\mu\frac{\ell}{2}} \right|}_{B} \cos(\varphi_{ju} - \varphi_b) du$$

car le produit de cosinus est transformé en une somme dont l'un des termes en cos $(2\omega t - 2n\nu x + \varphi_b + \varphi_{ju})$ possède sur l'intervalle considéré une intégrale identiquement nulle . On peut écrire F sous la forme :

$$F = -\frac{\lambda e\rho n\nu}{2g_n \omega} c_1^2 \int_{-\ell/2}^{\ell/2} |A||B| \cos\varphi_{j_u} \cos\varphi_b + A\ B \sin\varphi_{j_u} \sin\varphi_b) du.$$

$$= -\frac{\lambda}{} \frac{c\rho n\nu}{g_n \omega} c_1^2 \int_{-\ell/2}^{\ell/2} (A\ B^*) + du$$

où Z^* représente le conjugué de Z et $R_e(Z)$ sa partie réelle.

$$F = \frac{\lambda}{2} \frac{c\rho n\nu}{g_n \omega} c_1^2 \left[\int_{-\ell/2}^{\ell/2} R_e\Big[\Big((1 - \frac{\cos\mu u}{(1+\nu)\cos\ u\frac{\ell}{2}}\Big)\Big(1+j\frac{g_n \omega\alpha}{n^2\nu^2} \quad \frac{\cos\ \mu u}{(1+\nu)\quad \mu\frac{\ell}{2}}\Big)^*\Big) du\right]$$

soit en posant

$$\frac{\cos\ \mu u}{(1+\nu)\cos\ u\frac{\ell}{2}} = R + j\ X$$

$$F = \frac{\lambda}{2} \frac{c\rho n\nu}{g_n \omega} c_1^2 \int_{-\ell/2}^{\ell/2} R_e\left[(1 - R - jx)\left(1 - x \frac{g_n \omega\alpha}{n^2\nu^2} - \frac{g_n \omega\alpha}{n^2\nu^2} R\right)\right] du$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\lambda}{n\nu} \frac{c\rho}{g_n \omega} c_1^2 \int_{-\ell/2}^{\ell/2} (n^2\nu^2 - n^2\nu^2 R - g_n \omega\alpha x) du$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\lambda}{n\nu} \frac{c\rho}{g_n \omega} c_1^2 \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \left[n^2\nu^2 + R_e\left((u^2)^* \frac{\cos uu}{(1+\gamma)\cos u \frac{\ell}{2}}\right)\right] du$$

$$= \frac{\lambda c\rho}{n\nu} \frac{c_1^2}{g_n \omega} \left[n^2\nu^2 \frac{\ell}{2} + R_e\left(\frac{(u^2)^* \sin u \ell/2}{u(1+\gamma)\cos u \frac{\ell}{2}}\right)\right]$$

$$= \frac{\lambda \rho_{cn\nu} c_1^2}{g_n \omega} \left[\ell/2 \frac{1}{n^2\nu^2 \text{thn}\nu\left(\frac{\ell}{2} - \frac{\ell}{2}\right)} R_e \left(\frac{(u^2)^*}{u^2} \frac{\gamma}{=1+\gamma}\right)\right]$$

d'où en remplaçant c_1^2 par sa valeur nous obtenons finalement :

$$F = \frac{nu_o\lambda\nu}{e} \frac{g_n \omega\alpha}{n^4\nu^4 + (g_n \omega\alpha)^2} J_{pm}^2 \left[\frac{\ell}{2} - \frac{1}{n^2\nu^2 \text{thn}\nu \left(\frac{L-\ell}{2}\right)} R_e \left[\frac{(\mu^2)^*}{\frac{2}{u}} \frac{\gamma}{1+\gamma}\right]\right]$$

La formule que nous venons d'établir appelle quelques remarques. Tout d'abord en nous rappelant que $g_n = 1-n(1-g)$, nous voyons facilement que la poussée décroit en fonction inverse du carré de n numéro de l'harmonique étudié, et que pour de faibles valeurs de g la poussée est toujours négative. Ce fait qui est déjà connu fait que nous pouvons sans grande erreur limiter le calcul de la poussée à celui de la poussée dûe au terme fondamental. D'autre part nous avons à titre de vérification calculé les pertes Joule dans le secondaire.

Ces pertes se décomposent en des pertes Joule dûes à $\bar{J}_u$ dont le calcul se fait en considérant un élément infinitésimal de dimensions

Sa résistance est $\rho \times \frac{du}{c dx}$ et les pertes Joule

qui y sont consommées $\rho \frac{du}{c dx} \times (cJudx)^2 =$

$= \rho c \bar{J}_u^2 \, dx \, du$, et les pertes dûes à J_x

sont $\propto c J_x^2 \, dx \, du$, les pertes totales

sont donc :

$$P_j = 2\rho c \int_{\ell/2}^{\ell/2} \left[\bar{J}_{u_1}^2 + \bar{J}_{x_1}^2 \right] dx du.$$

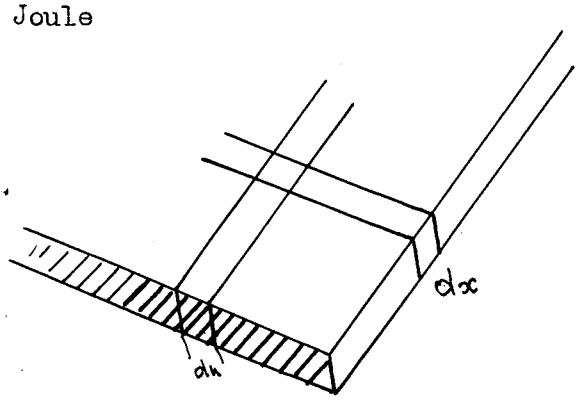


fig III 2

Un calcul conduit de la même manière que celui de la première poussée nous a conduits au calcul de ces pertes Joule P_j que nous avons vérifiées être égales à

$$P_j = F \times g \quad V_s \quad (V_s \text{ vitesse de synchronisme})$$

ce qui nous a permis de vérifier sur cette machine le théorème de la transmission d'énergie par liaison asynchrone. Enfin sur cette formule nous retrouvons le résultat de la poussée calculée en supposant la machine de longueur infinie auquel nous devons ajouter un terme correctif variable avec la vitesse ce qui n'était pas le cas dans les théories précédentes.

IV-III Extension à l'étude d'un système dissymétrique.

Dans certaines applications le primaire peut soit systématiquement, soit accidentellement ne plus être symétriquement disposé par rapport au rail. Dans ce cas évidemment (fig.IV 3) le calcul précédent n'est plus valable mais le principe exposé permet d'en faire facilement l'extension et de calculer la poussée qui s'exerce suivant l'axe $\vec{ox}$ ainsi que la poussée transversale qui s'exerce suivant l'axe $\vec{ou}$. Considérons le système et les grandeurs définies sur les figures IV 3 et IV 4 : les équations générales s'écrivent :

a) $u_2 < u < u_1$

$$\frac{\partial^2 \bar{J}_u}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \bar{J}_u}{\partial x^2} - Vx \frac{\partial \bar{J}_u}{\partial x} - j\omega\sigma \bar{J}_u = j \frac{g\omega\sigma}{c} \bar{J}_p$$

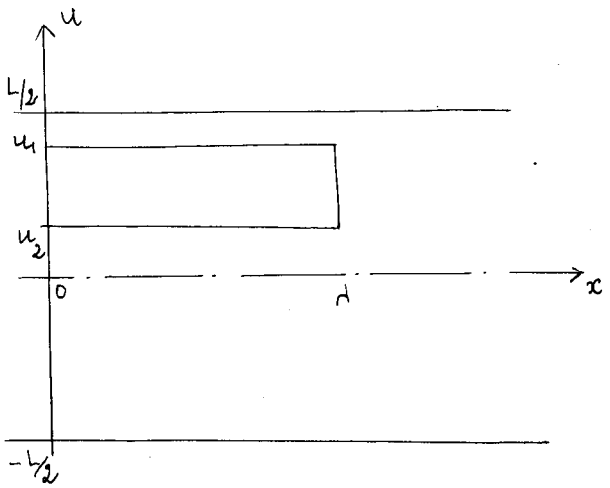
$$\frac{\partial^2 \bar{J}_u}{\partial u^2} + \frac{\partial \bar{J}_x}{\partial u^2} - V\alpha \frac{\partial \bar{J}_x}{\partial u} - j\omega\sigma \, Jx = 0$$

$$\frac{\partial \bar{J}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{J}_u}{\partial u} = 0$$

b) $-\frac{L}{2} < u < u_2$

$$\frac{\partial \bar{J}_{u_2}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{J}_{u_2}}{\partial u} = 0$$

$$\frac{\partial \bar{J}_{u_2}}{\partial u} + \frac{\partial \bar{J}_{u_2}}{\partial u} = 0$$



c) $u_1 < u < \frac{L}{2}$

$$\frac{\partial \bar{J}_{u_1}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{J}_{x_1}}{\partial u} = 0$$

$$\frac{\partial \bar{J}_{u_1}}{\partial u} + \frac{\partial \bar{J}_{x_1}}{\partial x} = 0$$

d) Conditions aux limites.

(α) $u = +L/2$ $\qquad \bar{J}_{u_1} = 0 \qquad \frac{\partial \bar{J}_u}{\partial u} = \frac{\partial \bar{J}_{x_1}}{\partial x} = 0$

(β) $u = u_1$ $\qquad c_1 \bar{J}_{u_1} = c\bar{J}_u \qquad , \rho_1 \bar{J}_{x_1} \equiv \rho \bar{J}_x$

(γ) $u = u_2$ $\qquad c_2 \bar{J}_{u_2} = c\bar{J}_u \qquad , \rho_2 J_{x_2} \equiv 0 \; \rho \bar{J}_x$

(δ) $u = -L/2$ $\qquad \bar{J}_{u_2} = 0 \qquad = \dfrac{\partial \bar{J}_{x_2}}{\partial x} = 0$

(ε) Les solutions sont périodiques en x, de période $\lambda = 2\pi/\nu$

IV-3-1 Résolution des équations.

Les solutions étant périodiques en x nous pouvons écrire

$$\frac{\partial \bar{j}_u}{\partial x} = -j\nu J_x \quad , \quad \frac{\partial^2 \bar{J}_u}{\partial x^2} = -\nu^2 \bar{j}_u$$ et la même chose pour j_x .

Nous posons

$$\bar{j}_u = f(u)e^{-j\nu x}$$

$$\bar{j}_x = g(u)e^{-j\nu x}$$

Les équations (4) et (5) s'écrivent :

$$e^{-j\nu x}(f'' - [\nu^2 + j\alpha(\omega - \nu v)]f) = + j\frac{g\omega\sigma}{e} e^{j(\omega t + \varphi)}e^{-j\nu x}$$

$$f'' + (-\nu^2 - jg\omega\sigma)f = -j\frac{g\omega\alpha}{e} e^{j\omega t + \varphi}$$

soit en posant

$$-\nu^2 - jg\omega\alpha = +\mu^2$$

les équations (4) et (5) deviennent

$$f'' + \mu^2 f = -j\frac{g\omega\sigma}{e} e^{j(\omega t+\varphi)}$$

$$g'' + \mu^2 g = 0$$

l'équation (6) est une équation différentielle linéaire à coefficients constants avec second membre. Sa solution générale sera la somme d'une solution particulière et de la solution générale sans second membre.

a) solution particulière : $f = c_1 e^{-j\nu x}$

$$f = \frac{j\frac{g\omega\alpha}{c}}{-\nu^2 - jg\omega\sigma} J_{pm} e^{j(\omega t - \nu x + u)}$$

b) solution générale

$$f = A \cos \mu u + B \sin \mu u$$

d'où les solutions générales en j_x et j_u

$$\bar{J}_u = (A \cos \mu u + B \sin \mu u + c_1)\, e^{-j\nu x}$$

$$\bar{J}_x = (C \cos \mu u + D \sin \mu u)\, e^{-j\nu x}$$

d'autre part l'équation (6) entraine

$$(-\mu A \sin \mu u + \mu B \cos \mu u)\, e^{-j\nu x} = (-j\nu x \cos \mu u - j\mu D \sin \mu u) e^{-j\nu x} \equiv 0$$

soit

$$-\mu A - j\nu D = 0 \qquad D = -\frac{\mu}{j\nu} A = j \frac{\mu}{\nu} A$$

$$\mu B - j\nu C = 0 \qquad C = \frac{\mu B}{j\gamma} = - j \frac{\mu}{\nu} B$$

d'où (11) $\underline{\bar{J}_u = (A \cos \mu u + B \sin \mu u + c_1)\, e^{-j\nu x}}$

(12) $\underline{\bar{J}_x = j \frac{\mu}{\nu} (-B \cos \mu u + A \sin \mu u) e^{-j\nu x}}$

à l'extérieur des pôles les équations (7) et (8) se transforment en :

$$(13)_a \quad \frac{\partial^2 \bar{J}_{u_1}}{\partial x^2} + \frac{\partial \bar{J}_{u_1}}{\partial u^2} = 0 \qquad (13)_b \quad \frac{\partial \bar{J}_{u_2}}{\partial x^2} + \frac{\partial \bar{J}_{u_2}}{\partial x^2} = 0$$

$(14)_a$ $u < u_1$

$$\frac{\partial^2 \bar{J}_{x_1}}{\partial x^2} + \frac{\partial \bar{J}_{x_1}}{\partial u^2} = 0$$

$(14)_b$ $u > u_2$

$$\frac{\partial \bar{J}_{x_2}}{\partial x^2} + \frac{\partial \bar{J}_{x_2}}{\partial u^2} = 0$$

$$(15)_a \quad \frac{\partial \bar{J}_{x_1}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{J}_{u_1}}{\partial u} = 0 \qquad (15)_b \quad \frac{\partial \bar{J}_{u_2}}{\partial u} + \frac{\partial \bar{J}_{x_2}}{\partial x} = 0$$

à ces équations nous cherchons des solutions périodiques soit de la forme :

$$j_{u_1} = f_1(u)\, e^{-j\nu x} \qquad j_{u_2} = f_2(u) e^{-j\nu x}$$

$$j_{x_1} = g_1(u)\, e^{-j\nu x} \qquad j_{x_2} = g_2(u)\, e^{-j\nu x}$$

ce qui entraine :

$$f_1'' - \nu^2 f_1 = 0 \qquad f_2'' - \nu^2 f_2 = 0$$

$$g_1'' - \nu^2 g_1 = 0 \qquad g_x'' - \nu^2 g_2 = 0$$

soit

$$J_{u_1} = (A_1\, e^{\nu u} + B_1\, e^{-\nu u}) e^{-j\nu x}$$

$$J_{x_1} = (C_1 e^{\nu u} + D_1\, e^{-\nu u}) e^{-j\nu x}$$

$$J_{u_2} = (A_2\, e^{\nu u} + B_2\, e^{-\nu u}) e^{-j\nu x}$$

$$J_{x_2} = (C_2\, e^{\nu u} + B_2\, e^{-\nu u})\, e^{-j\nu x}$$

les équations $(15)_a$ et $(15)_b$ entrainent

$$(\nu A_1\, e^{\nu u} - \nu B_1\, e^{-\nu u})\, e^{-j\nu x} - j\nu(C_1\, e^{\nu u} + D_1\, e^{-\nu u}) e^{-j\nu x} \equiv 0$$

$$(\nu A_2\, e^{\nu u} - \nu B_2\, e^{-\nu u}) e^{-j\nu x} - j\nu(C_1\, e^{\nu u} + D_1\, e^{-\nu u})\, e^{-j\nu x} \equiv 0$$

soit

$$C_1 = -jA_1 \qquad C_2 = -jA_2$$

$$D_1 = +jB_1 \qquad D_2 = +jB_2$$

l'application des conditions aux limites σ et δ entraine compte tenu des précédentes

$$A_1 e^{\nu L/2} + B_1 e^{\frac{-\nu L}{2}} = 0$$

$$A_2 e^{-\nu L/2} + B_2 e^{\frac{+\nu L}{2}} = 0$$

d'où par récapitulation

$$J_u = (A \cos \mu u + B \sin \mu u + C_1) e^{-j\nu x}$$

$$J_x = j \frac{\mu}{\nu} (-B \cos \mu u + A \sin \mu u) e^{-j\nu x}$$

$$J_{u_1} = (A_1 e^{\nu u} + B_1 e^{-\nu u}) e^{-j\nu x}$$

$$J_{x_1} = (A_1 e^{\nu u} + B_1 e^{-\nu u}) e^{-j\nu x}$$

$$J_{u_2} = (A_2 e^{\nu u} + B_2 e^{-\nu u}) e^{-j\nu x}$$

$$J_{x_2} = j(-A_2 e^{\nu u} + B_2 e^{-\nu u}) e^{-j\nu x}$$

avec

$$A_1 e^{\nu L/2} + B_1 e^{-\frac{\nu_L}{2}} = 0 \quad \Rightarrow \quad B_1 = -A_1 e^{\nu L}$$

$$A_2 e^{-\nu L/2} + B_2 e^{+\frac{\nu L}{2}} = 0 \quad \Rightarrow \quad B_2 = -A_2 e^{-\nu L}$$

et les conditions aux limites

$$J_u(u_1) = J_{u_1}(u_1)$$

$$\rho \quad J_x(u_1) = {}^{o}{}_1 \; J_{x_1}(u_1)$$

$$c \; J_u(u_2) = C_2 \; J_{u_2}(u_2)$$

$$o \; c \; J_x(u_2) = \rho_2 \; e_2 \; J_{x_2}(u_2)$$

Soient 6 équations pour déterminer 6 inconnues A, A_1, A_2

B, B_1, B_2

En remplaçant nous obtenons :

$$c(A \cos \mu u_1 + B \sin \mu u_1 + c_1) e^{-j\nu x} = c_1 (A_1 e^{\nu u_1} + B_1 e^{-\nu u_1}) e^{-j\nu x}$$

$$j\sigma \frac{\mu}{\nu} (-B \cos \mu u_1 + A \sin \mu u_1) e^{-j\nu x} = j\sigma_1 (-A_1 e^{\nu u} + B_1 e^{-\nu u_1}) e^{-j\nu x}$$

$$c(A \cos \mu u_2 + B \sin \mu u_2 + c_1) e^{-j\nu x} = c_1 (A_2 e^{\nu u_2} + B_2 e^{-\nu u_2}) e^{-j\nu x}$$

$$j\sigma \frac{\mu}{\nu} (-B \cos \mu u_2 + A \sin \mu u_2) e^{-j\nu x} = j\sigma_2 (-A_2 e^{\nu u_2} + B_2 e^{-\nu u_2}) e^{-j\nu x}$$

$$Ac \cos \mu u_1 + Bc \sin \mu u_1 + eC_1 = c_1 A_1 (e^{\nu u_1} - e^{\nu(L-u_1)}$$

$$Ac \cos \mu u_1 + Bc \sin \mu u_1 + cC_1 = -2c_1 A_1 e^{\nu L/2} \operatorname{sh} \nu(L/2 - u_1)$$

$$-B \frac{\sigma\mu}{\nu} \cos \mu u_1 + A\sigma \frac{c\mu}{\nu} \sin \mu u_1 = -2\sigma_1 e^{\frac{\nu L}{2}} A_1 \operatorname{ch}\nu(L/2 - u_1)$$

$$Ac \cos \mu u_2 + Bc \sin \mu u_2 + c_1 = 2c_1 A_2 e^{\frac{-\nu L}{2}} \operatorname{sh}\nu(L/2 + u_2)$$

$$-B \frac{\sigma\mu}{\nu} \cos \mu u_2 + A\sigma \frac{c\mu}{\nu} \sin \mu u_2 = -2\sigma_2 A_2 e^{\frac{-\nu L}{2}} \operatorname{ch} \nu (L/2 + u_2)$$

éliminons entre ces (4) équations A_1 et A_2

$$\frac{c A \cos \mu u_1 + cB \sin \mu u_1 + C_1}{\sigma \frac{\mu}{\nu} (-B \cos \mu u_1 + A \sin \mu u_1)} = + \frac{c_1}{\sigma_1} \operatorname{th} \nu(L/2 - u_1) = -\frac{c_1}{\sigma_1} \operatorname{th}$$

$$c_o \frac{\mu}{\nu} \frac{A \cos \mu u + B \sin \mu u + c_1}{(-B \cos \mu u_2 + A \sin \mu u_2} = -\frac{c_1}{\rho_2} \text{th } \nu(u_2 + L/2)$$

d'où

$$A \left[\cos \mu u_1 + \frac{c\mu}{c\nu} \frac{\rho}{\rho_1} \sin \mu u \text{ th } \nu(u_1 - L/2)\right] + B \left[\sin \mu u_1 - \frac{c\mu}{c\nu} \frac{\rho}{\rho_1} \text{th}\nu(u_1 L/2) \cos \mu u_1\right] =$$

$$A \left[\cos \mu u_2 + \frac{\rho}{\rho_1} \text{th}\nu(u_2 + L/2) \sin \mu u_2\right] + B \left[\sin \mu u_2 - \frac{\mu_e \rho}{\nu e \rho_1} \text{th}\nu(u_2 + L/2) \cos \mu u_2\right] = -C_1$$

Posons $\gamma_1 = \frac{c\mu}{c\nu} \frac{\rho}{\rho_1} \times \text{tg } \mu u_1 \times \text{th}\nu(u_1 - L/2)$

$$\gamma_2 = \frac{c\mu}{c\nu} \frac{\rho}{\rho_2} \text{ tg } \mu u_2 \text{ th}\nu(u_2 + L/2)$$

$$A(1+\gamma_1) + B(\text{tg } \mu u_1 - \gamma_1/\text{tg}^2 \mu u_1) = -C_1/\cos \mu u_1$$

$$A(1+\gamma_2) + B(\text{tg } \mu u_2 - \gamma_2/t_g^2 \mu u_2) = -c_1/\cos \mu u_2$$

$$A = -c_1 \frac{(\text{tg } \mu u_2 - \gamma_2/t_g^2 \mu u_2)/\cos \mu u_1 - (\text{tg } \mu u_1 - \gamma_1/t_g^2 \mu u_2)/\cos \mu u_2}{(1+\gamma_1)(\text{tg } \mu u_2 - \gamma_2/t\overline{g}^2 \mu u_2) - (1+\gamma_2)(\text{tg } \mu u_1 - \gamma_1/t\overline{g}^2 \mu u_1)}$$

$$B = -c_1 \frac{(1+\gamma_1)/\cos \mu u_2 - (1+\nu_2)/\cos \mu u_1}{(1+\gamma_1)(\text{tg } \mu u_2 - \gamma_2/t\overline{g}^2 \mu u_2) - (1+\gamma_2)(\text{tg } \mu u_1 - \gamma_1/\text{tg } \mu u_1)}$$

Soit $A = - C_1 \delta_1 / \delta$ $\qquad B = - C_1 \delta_2 / \delta$

d'où $\bar{Ju} = \left[- \frac{C_1}{\delta} (\delta_1 \cos \mu u + \delta_2 \sin \mu u) + C_1 \right] e^{- j\nu x}$

$Jx = - j \frac{\mu}{\nu} \frac{C_1}{\delta} (\delta_1 \sin \mu u - \delta_2 \cos \mu u)$

3°) Calcul de l'induction

De l'équation (2) il vient

$$\frac{\delta \bar{b}}{\delta x} = \frac{\mu}{e} (C Ju + Jpm\ e^{j(\omega t + \varphi)} e^{- j\nu x}$$

or $\quad Jpm\ e^{j(\omega t + \varphi)} = j C_1 \frac{C\mu^2}{g\omega\alpha} = - j \frac{C \mu^2}{g\omega\alpha} C_1 e$

d'où $\quad \frac{\delta \bar{b}}{\delta x} = \frac{\mu o}{e} (CC_1 (-\frac{1}{\delta} (\delta_1 \cos \mu u + \delta_2 \sin \mu u + 1) - j\frac{C\mu^2}{g\omega\alpha} C_1) e^{-j\nu x}$

$$= \frac{\mu o C}{e} C_1 \left[- \frac{1}{\delta} (\delta_1 \cos \mu u + \delta_2 \sin \mu u) + 1 - j \frac{\mu^2}{g\omega\alpha} \right] e^{- j\nu x}$$

soit par intégration

$$\bar{b} = j \frac{\mu o C}{\nu e} C_1 \left[- \frac{1}{\delta} (\delta_1 \cos \mu u + \delta_2 \sin \mu u) + \frac{g\omega\alpha - j(- \nu^2 - jg\omega\alpha}{g\omega\alpha} \right] e^{-j\nu}$$

$$= j \frac{\mu o C \rho}{\nu \rho e} C_1 \left[- \frac{1}{\delta} (\delta_1 \cos \mu u + \delta_2 \sin \mu u) - j \frac{\nu^2}{g\omega\alpha} \right] e^{- j\nu x}$$

$$\bar{b} = \frac{\rho C_1}{\delta \nu} \frac{1}{g\omega} \left[- j\, g\omega\alpha (\delta_1 \cos \mu u + \delta_2 \sin \mu u) + \gamma \nu^2 \right] e^{- j\nu x}$$

en définitive nous obtenons

$$Ju = \left| \frac{C_1}{\delta} \right| \left| \delta_1 \cos \mu u + \delta_2 \sin \mu u + \delta \right| \cos(\omega t - \nu x + \varphi + \varphi_{ju}(u))$$

$$Jx = \left| \frac{\mu}{\nu} \right| \left| \frac{C_1}{\delta} \right| \left| \delta_1 \sin \mu u - \delta_2 \cos \mu u \right| \cos(\omega t - \nu x + \varphi + \varphi_{jx}(u))$$

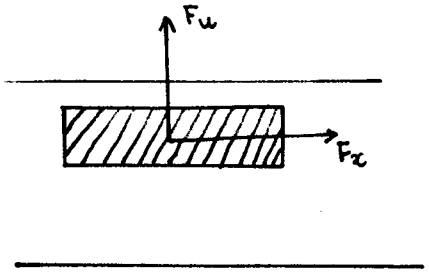
$$b = \frac{\rho}{\nu g \omega} |C_1| \left| + \nu^2 - j\frac{g\omega\alpha}{\delta} (\delta_1 \cos \mu u + \delta_2 \sin \mu u) \right| \cos(\omega t - \nu u + \varphi + \varphi_b(u))$$

où les angles φ_{ju}, φ_{jx} et φ_b sont définis de la même manière que précédemment comme les arguments des grandeurs complexes d'où ils sont issus.

4°) Calcul des forces

$$Fx = c \int_{u_2}^{u_1} \int_0^{\lambda} b \, Ju \, dx \, du$$

$$Fu = c \int_{u_2}^{u_1} \int_0^{\lambda} b \, Jx \, dx \, du$$



il vient alors

$$Fx = \frac{\rho c}{\nu g \omega} \int_{u_2}^{u_1} du \int_0^{\lambda} \left| \frac{C_1^2}{\delta} \right| \left| \delta_1 \cos\mu u + \delta_2 \sin\mu u + \delta \right| \left| \nu^2 - j \frac{g\omega\alpha}{\delta} (\delta_1 \cos \mu u + \delta_2 \sin \mu u) \right| \cos(\omega t - \nu x + \varphi + \varphi_{ju}) \cos(\omega t - \nu x + \varphi + \varphi_{bx}) \, dx$$

or $\cos(\omega t - \nu x + \varphi + \varphi_{ju}) \cos(\omega t - \nu x + \varphi + \varphi_b) = \frac{1}{2} [\cos(2(\omega t - \nu x + \varphi) + \varphi_{ju} + \varphi_b) + \cos(\varphi_{ju} - \varphi_b$

l'intégrale de 0 à b du premier terme est nulle tandis que celle du second vaut $\frac{\lambda}{2} \cos(\varphi_{ju} - \varphi_b)$

d'où

$$Fx = \frac{1}{2} \frac{\rho c}{\nu g \omega} \left| \frac{C_1^2}{\delta} \right| \int_{u_2}^{u_1} \left| \delta_1 \cos \mu u + \delta_2 \sin \mu u + \delta \right| \left| \nu^2 - j \, g\omega\alpha \left(\frac{\delta_1}{\delta} \cos \mu u + \frac{\delta_2}{\delta} \sin \mu u \right) \right| x \cos(\varphi_b - \varphi_{ju}) \, du$$

Pour des raisons de commodité nous posons:

$$K = \frac{\rho C}{\nu_g \omega} C_1^2 \quad , \quad R + j X = - \frac{\delta_1}{\delta} \cos \mu u - \frac{\delta_2}{\delta} \sin \mu u$$

le développement du terme en cosinus de l'intégrale de F_x nous donne :

$$F_x = \frac{K}{4} \int_{u_2}^{u_1} (1 + R + jX)(\nu^2 - jg\omega\alpha(R + jX)^*) + (1 + R + jX)^* (\nu^2 - jg\omega\alpha(R + 1X) \quad du$$

$$= \frac{K}{2} \int_{u_2}^{u_1} (\nu^2 + \nu^2 R + g\omega\alpha X) du = \int_{u_2}^{u_1} \nu^2 - Re \quad (\mu^2)(R + jX) \quad du$$

soit :

$$F_x = K \left\{ \frac{\nu^2}{2} + Re \left[\frac{(\mu^2)}{\mu\delta} \sin \frac{\mu\rho}{2} \left(\delta_1 \cos \mu \left(\frac{u_1 + u_2}{2} \right) + \delta_2 \sin \mu \left(\frac{u_1 + u_2}{2} \right) \right) \right] \right\}$$

soit en posant : $u_1 - u_2 = \quad u_1 + u_2 = 2u_o$

$$F_x = K \left\{ \frac{\nu^2}{2} + Re \left[\frac{(\mu^2)}{\mu\delta} \sin \frac{\mu\rho}{2} (\delta_1 \cos \mu u_o + \delta_2 \sin \mu u_o) \right] \right\}$$

Lorsque $u_o = 0$, on se trouve dans le cas où le moteur est symétrique et l'on retrouve bien la formule précédemment établie.

Calcul de la force transversale

De la même manière nous calculons Fu

$$Fu = \frac{1}{2} \frac{C\rho}{g} \left| C_1^2 \right| \left| \frac{\mu}{\nu} \right| \int_{u_2}^{u_1} \left| \nu^2 - j \, g\omega\alpha \left(\frac{\delta_1}{\delta} \cos \mu u + \frac{\delta_2}{\delta} \sin \mu u \right) \right|$$

$$\left| \delta_1 \sin \mu u - \delta_2 \cos \mu u \right| \cos(\varphi_{jx} - \varphi_b) \, du$$

Comme dans le calcul précédent nous posons

$$K_1 = \frac{1}{2}\frac{C\rho}{\nu g\omega}\quad\frac{C_1^2\mu}{\nu}$$

$$\frac{\delta_1}{\delta}\cos\ u + \frac{\delta_2}{\delta}\sin\mu u = R + jX$$

$$\delta_1 \sin\mu u - \delta_2\cos\mu u = R_1 + jX_1$$

ce qui entraîne

$$Fu = \frac{K_1}{2}\int_{u_2}^{u_1} (-jR_1 + X_1)(\nu^2 - jg\omega\alpha(R + jX)^* + (-jR_1 + X_1)^* (\nu^2 - jg\omega\alpha\,(R + jX))\ du$$

$$= \frac{K_1}{2}\int_{u_2}^{u_1} [\,\nu^2 X_1 + g\omega\alpha\,(RR_1 + XX_1)]\ du$$

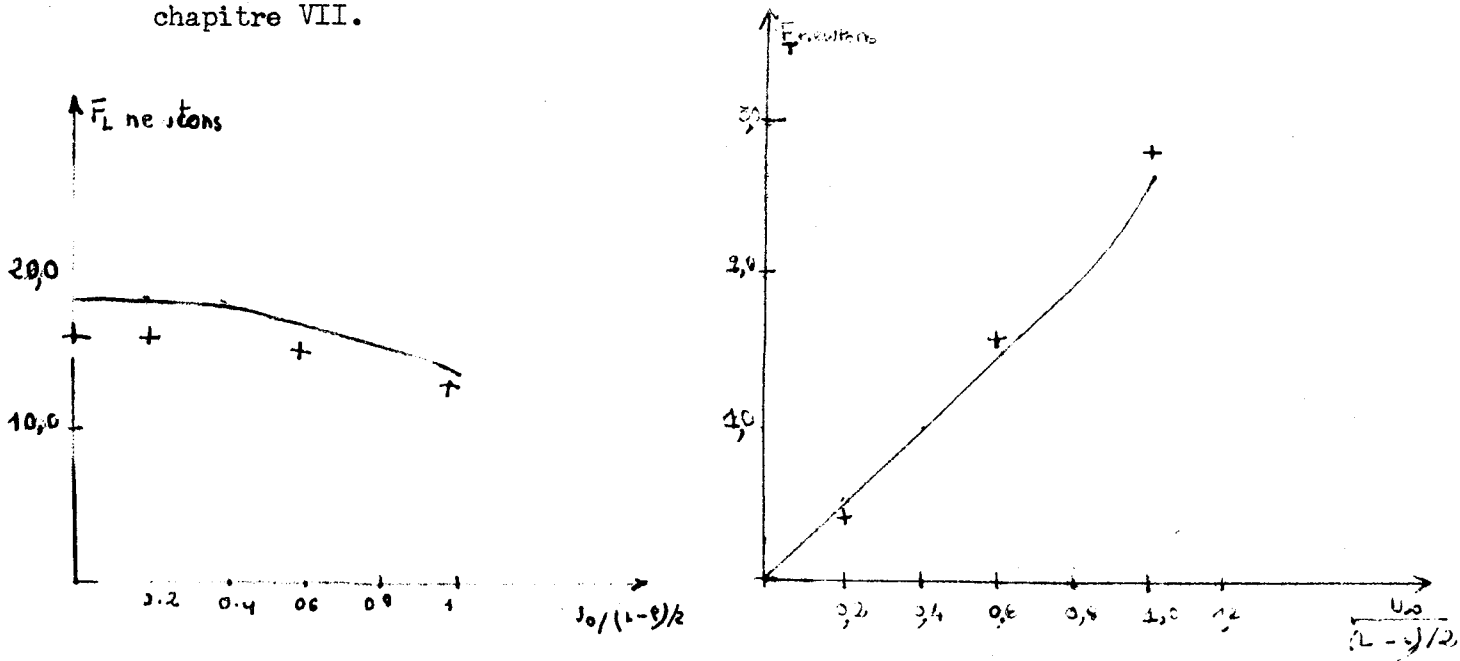
$$= \frac{K_1}{2}\int_{u_2}^{u_1} \nu^2\, I_m(R_1 + jX_1) + g\omega\alpha\, Re((R - jX)(R_1 + jX_1))\ du$$

ce qui tous calculs effectués, vaut :

$$Fu = K_1\Big\{\nu^2\,\mathrm{Re}\Big[\frac{1}{\mu}\sin\frac{\mu\ell}{2}\,(\delta_1\sin\mu u_o - \delta_2\cos\mu u_o)\Big] + \frac{g\omega\alpha}{4}\ \frac{1}{\delta^2}\ \frac{(|\delta_1|^2 + |\delta_2|^2)}{\mu r}\sin\mu r\ell\ \mathrm{sh}\ 2\mu_i u_o + \frac{(|\delta_1|^2 - |\delta_2|^2)}{\mu_i}\ \mathrm{sh}\ \mu_i\ell\ \mathrm{sh}\ 2\mu_i u_o\Big\}$$

où μ_r et μ_i sont les parties réelles et imaginaires de μ.

Nous avons appliqué les formules ainsi obtenues au calcul d'un moteur prototype et représenté sur la figure III.3 les résultats obtenus que nous confrontons avec les résultats expérimentaux dont l'analyse sera effectuée au chapitre VII.



(a) Poussée longitudinale (b) Poussée transversale

Figure III-3 : Poussées longitudinale et transversale au démarrage (g = 1) en fonction du décalage des axes de symétrie

——— courbe théorique

\+ points mesurés

C H A P I T R E I V

METHODE DE PARTITION

Lors de l'étude de l'effet de bord longitudinal dans le fonctionnement du moteur linéaire nous avons mis au point une méthode de partition [18] pour la résolution d'une certaine classe de problèmes aux dérivées partielles.

Cette méthode que nous avons étudiée dans ce cas particulier trouve en fait son champ d'application élargi par la résolution de nombreux problèmes d'Electromagnétisme. Nous lui avons de ce fait consacré un chapitre de notre mémoire, chapitre qui sera formé de l'exposé général de la méthode et de quelques applications spécifiques.

IV-1 LA METHODE DE PARTITION

Considérons un domaine non borné D (qui peut éventuellement être l'espace tout entier), formé de deux parties distinctes : une partie bornée D_1 et le complément non borné de D_1 dans D (figure IV-1). Nous supposons que l'opérateur A qui peut être très compliqué (voire non linéaire) dans D_1 est un opérateur linéaire simple dans D_2 (Laplacien par exemple). En outre si les conditions de transmission entre D_1 et D_2 peuvent être quelconques, nous imposerons des conditions à l'infini très simples (en général, annulation de la fonction inconnue).

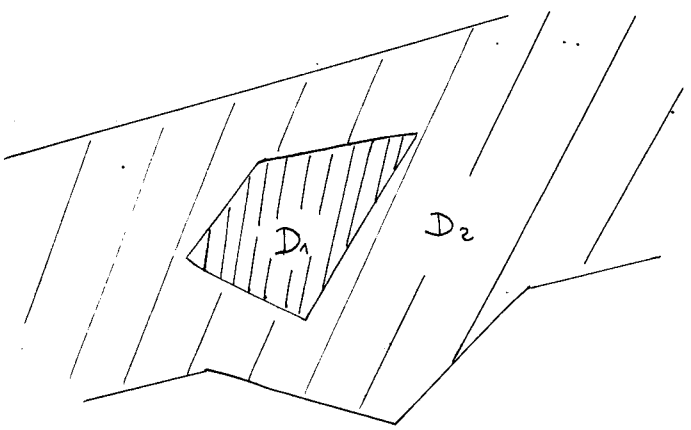
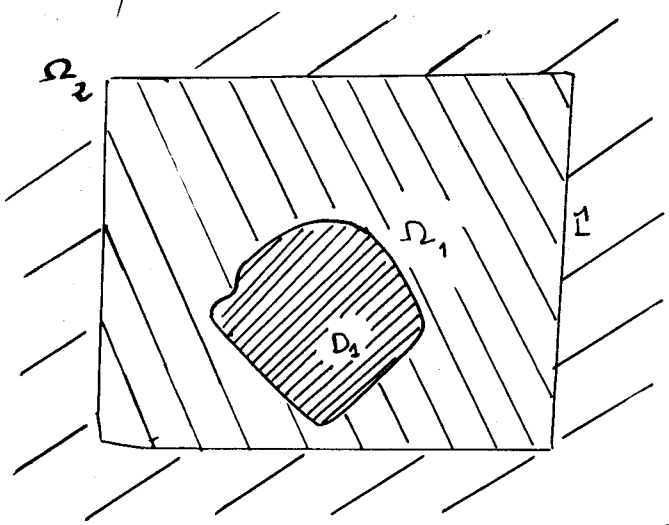


Fig IV 1

Ce type de problème fréquent en électromagnétisme est en général très difficile à résoudre car les méthodes discrètes s'appliquent mal à des domaines non bornés et la complexité de l'opérateur sur le domaine D_1, ou de la forme de ce domaine rendent les méthodes directes (séparation des variables, développement en série) inextricables.

Le principe de notre méthode est de partager le domaine D en deux régions à l'aide d'un contour Γ situé à l'extérieur de D_1. Le choix du contour Γ qui est la partie essentielle de la méthode est effectué de manière à ce que la résolution dans Ω_2 puisse être conduite par une méthode directe lorsque l'on suppose sur Γ la connaissance soit de la fonction inconnue soit de l'une de ses dérivées partielles.



a) Supposons que la donnée sur Γ de l'une de ses dérivées partielles de la fonction inconnue (condition de Neumann) permette de résoudre le problème sur Ω_2 à l'aide d'une méthode directe. Lorsque l'on effectue cette résolution on obtient les valeurs de la fonction inconnue et ses dérivées partielles sur tout le domaine, et en particulier sur Γ. Cette résolution nous permet donc d'établir sur Γ une relation linéaire entre les valeurs des dérivées partielles premières de la fonction V. Ces relations linéaires deviennent alors des conditions aux limites sur Ω_1 et le problème initial est alors remplacé par un problème équivalent, dans lequel les conditions à l'infini sont remplacées par des conditions de Neumann sur le contour fermé entourant le domaine borné Ω_1. La résolution de ce nouveau problème se fait par une méthode de discrétisation et permet de déterminer sur Γ la fonction inconnue V et ses dérivées partielles, ce qui permet dans nos hypothèses de résoudre ensuite le problème sur le domaine Ω_2 extérieur, donc en définitive sur tout le domaine D.

b) Supposons que le choix du contour Γ soit tel que la connaissance sur ce contour de la fonction V entraîne sa détermination sur tout le domaine extérieur Ω_2. Nous fixons, a priori sur Γ des valeurs de départ sur V, et nous résolvons alors le problème de Dirichlet ainsi obtenu sur Ω_1; les valeurs départ ainsi fixées ne satisfont en général pas sur Γ les conditions aux dérivées partielles imposées par l'opérateur, nous effectuons alors une relaxation sur ces

$$x < 0 ; \quad \bar{J}_x^- = \sum_{k=0}^{\infty} E_K^- \sin(2k+1)\frac{\pi u}{L}\, e^{-(2k+1)\frac{\pi u}{L}}$$

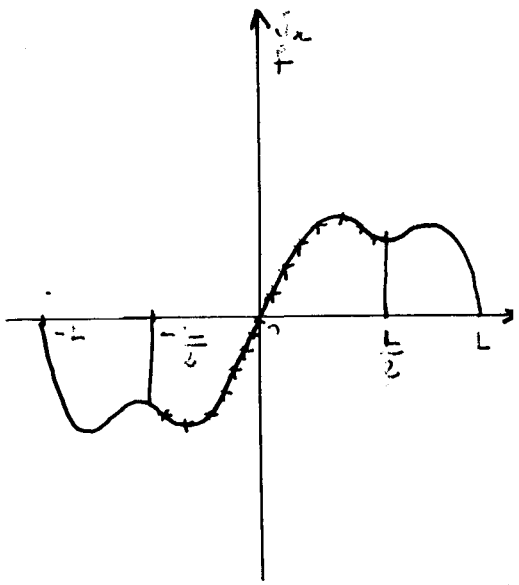
$$\bar{J}_u^- = \sum_{k=0}^{\infty} E_K^- \cos(2k+1)\frac{\pi u}{L}\, e^{-(2k+1)\frac{\pi x}{L}}$$

pour x=0 et x=λ les développements ( ) et ( ) doivent coïncider avec les fonctions $J_x(\lambda,u)$ et $J_x(0,u)$. De part leur forme nous les identifions aux développements en série de Fourier de fonctions périodiques de période 2L, impaires et symétriques par rapport à u = L/2 et qui sur l'intervalle 0,L/2 coincident respectivement avec $\bar{J}_x(0,u)$ et $\bar{J}_x(0,u)$.

Nous pouvons calculer les coefficients de ce développement à partir des conditions d'orthogonalité :

$$(+) \quad e^{-2k+1)\frac{u}{L}} E_K^+ = \frac{2}{L}\int_0^{L/2} \bar{J}_x(\lambda,u) \sin(2k+1)\frac{\pi u}{L}\, du.$$

$$(-) \quad E_K^- = \frac{2}{L}\int_0^{L/2} \bar{J}_x(o,u) \sin(2k+1)\frac{\pi u}{L}\, du$$



Cependant nous ne pourrons ultérieurement connaître $\bar{J}_x(\lambda,u)$ et $\bar{J}_u(o,u)$ autrement que ponctuellement en des points $u_i = \frac{i}{m}\ L/2$ (i = 1,m). Nous préférons de ce fait calculer les coefficients de manière discrète en imposant l'égalité aux points u_i aussi définis, en posant $F_K^+ = e^{-(2k+1)\frac{\pi\lambda}{L}}\ E_K^+$

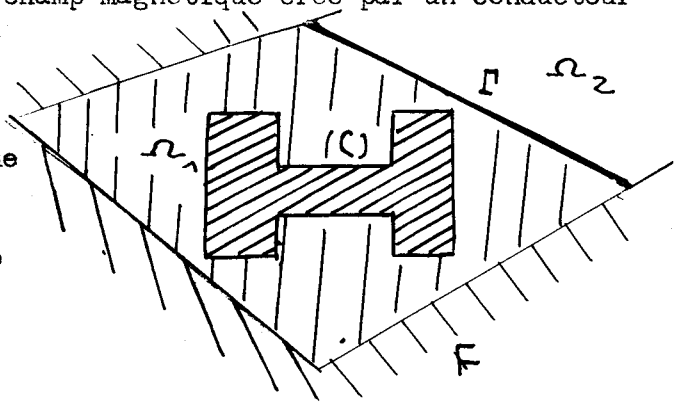
$$(\bar{J}) \quad \bar{J}_x(o,u_i) = \sum_{k=1}^{m} F_K^+ \sin(2k+1)\frac{\pi u i}{L}$$

valeurs, qui lorsqu'elle converge nous donne alors la solution du problème sur Ω_1, et par suite d'après nos hypothèses sur Ω_2.

Nous allons montrer, ci-dessous, la mise en oeuvre de cette méthode de partition sur deux problèmes d'Electromagnétisme, l'un traité par nous-mêmes et l'autre par CERMAK et SILVESTER

IV-2 APPLICATIONS DE LA METHODE DE PARTITION

a) Etude de la distribution du champ magnétique créé par un conducteur électrique massif



Soit un conducteur électrique massif (C) dont la perméabilité magnétique est égale à celle du vide μ_o, ce conducteur étant placé au voisinage d'une pièce magnétique F de perméabilité μ supposée infinie. Nous désirons connaître la valeur du champ magnétique dans l'espace extérieur à F et surtout à l'intérieur du conducteur (C). Ce type de problème dont la solution est nécessaire à la détermination de l'inductance de ce conducteur (C) est très fréquent dans l'étude des machines électriques.

Il est possible grâce à l'application de transformations conformes de déterminer le potentiel vecteur dV créé par un filet de courant infinitésimal placé en un point Po à l'intérieur du conducteur. Le potentiel vecteur total créé par (C) est calculé à l'aide de l'intégration sur (C) du potentiel vecteur élémentaire dV(Po)

Malheureusement la complexité de la fonction dV(Po), ou de la forme de (C) oblige fréquemment à employer un procédé d'intégration numérique. Or la fonction dV(Po) étant par essence singulière à l'intérieur de (C) l'intégration numérique est alors très difficile sinon imprécise. Pour surmonter cette difficulté nous choisissons à l'extérieur de (C) un contour simple Γ qui soit tel que l'intégration numérique sur ce contour où la fonction dV est régulière nous permet de déterminer la fonction V. Maintenant sur le domaine Ω_1 le potentiel vecteur est assujetti aux conditions suivantes :

$$\Delta V = \mu_o I \qquad P(x, y) \in (C)$$

$$\Delta V = 0 \qquad P(x, y) \in \Omega_1 - C$$

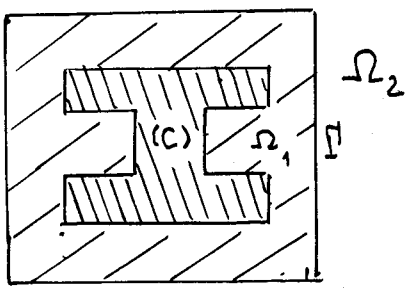
$$V = V(\Gamma) \qquad P \in \Gamma$$

$$\frac{\partial V}{\partial n} = 0 \qquad V \in \Gamma \cap \Omega_1$$

ce problème mixte est alors résolu par discrétisation et relaxation. A l'extérieur de Γ le potentiel vecteur peut alors être calculé à l'aide de la fonction de Green. Dans le problème que nous venons d'exposer l'opérateur sur (C) était simple néanmoins le principe reste applicable si cet opérateur est plus compliqué, ainsi que nous allons le montrer dans l'exemple qui suit.

b) Etude de l'effet Kelvin

Dans toutes les études concernant l'effet Kelvin nous avons toujours à étudier la distribution de la densité de courant et de l'induction à l'intérieur de conducteurs de forme compliquée, placés soit au voisinage des pièces magnétiques comme dans l'exemple précédent soit placés simplement dans l'air. Si nous appliquons J(p) la densité de courant à l'intérieur de (C) et B l'induction dans tout le domaine, les équations de maxwell entraînent :



$$(a) \quad -\Delta B + \frac{j \omega \mu}{\rho} B = 0 \qquad \text{si } P \in (C)$$

$$(b) \quad \mu J = \text{Rot } B$$

$$(c) \quad \Delta B = 0 \qquad P \in (C)$$

Après avoir choisi un contour Γ simple (figure IV-4), nous fixons une répartition approchée de la densité de courant à l'intérieur de (C) et nous calculons comme précédemment l'induction le long de Γ . Puis en résolvant par relaxation les équations (A) et (c) nous déterminons l'induction à l'intérieur de Ω_1 et en particulier de (C), l'équation (b) nous permettant alors

de déterminer une nouvelle valeur de la densité de courant. En répétant ce processus, nous déterminons ainsi par itération les valeurs de la densité de courant et de l'induction magnétique à l'intérieur de Ω_1, nous achevons la résolution en calculant l'induction à l'extérieur de Γ à l'aide de la fonction de Green.

Nous venons de montrer l'utilisation de la méthode de partition sur deux exemples dans lesquels la connaissance de la fonction sur Γ permettait d'effectuer la résolution, nous allons au chapitre suivant appliquer cette méthode à l'étude du moteur linéaire dans un cas où sur le contour Γ la connaissance de l'une des dérivées partielles entraîne la connaissance de l'autre et permet de résoudre le problème posé.

C H A P I T R E V

ETUDE DE L'EFFET DE BORD LONGITUDINAL

Le calcul de l'effet de bord longitudinal et de son incidence sur la répartition bidimensionnelle des courants induits constitue une des parties les plus difficiles de l'étude du fonctionnement des moteurs linéaires.

En effet ce calcul implique la recherche de la solution complète du système d'équations aux dérivées partielles qui régissent le fonctionnement du moteur en régime permanent, soit :

A) pour $u < \ell/2$ et $0 < x < \lambda$

$$\rho \left(\frac{\delta \overline{J}_u}{\delta x} - \frac{\delta \overline{J}_x}{\delta u} \right) - V \frac{\delta \overline{B}}{\delta x} - j\omega \overline{B} = 0$$

(1) $$\frac{e}{\mu_o} \frac{\delta \overline{B}}{\delta x} = c \, \overline{J_u} + \overline{J_p}$$

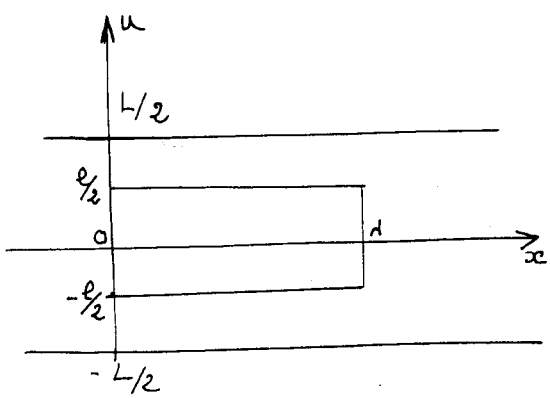
$$\frac{e}{\mu_o} \frac{\delta \overline{B}}{\delta u} = - C \, \overline{J_x}$$

B) pour $\ell/2 < u < L/2$ et $x < o$, $x > \lambda$

$$\frac{\delta \overline{Ju}}{\delta x} - \frac{\delta \overline{Jx}}{\delta u} = 0$$

(2) $$\frac{\delta J_u}{\delta u} + \frac{\delta J_x}{\delta x} = 0$$

$$\overline{B} = 0$$



avec les conditions aux limites suivantes :

(a) $J_u(x, \pm L/2) = 0$; (b) $\int_{0}^{\lambda} \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \overline{B}(x, u)\, dx\, du = 0$

(c)
$$\delta \overline{J_u}(0, u) = \frac{V}{\rho} \delta \overline{B}(0, u) \quad \text{pour } 0 < u < \ell/2$$
$$\delta \overline{J_u}(0, u) = 0 \quad \text{pour } \ell/2 < u < L/2$$

(d)
$$\delta \overline{J_u}(\lambda, u) = \frac{V}{\rho} \overline{B}(\lambda, u) \quad \text{pour } 0 < u < \ell/2$$
$$\delta \overline{J_u}(\lambda, u) = 0 \quad \text{pour } \ell/2 < u < L/2$$

ainsi que

La résolution analytique d'un tel problème, possible si l'on recherche des solutions particulières harmoniques (ainsi que nous l'avons fait précédemment) s'avère très difficile, voire impossible lorsque l'on étudie la solution générale. Par ailleurs une telle résolution nous conduirait à des formules très compliquées dont l'application numérique serait la seule exploitation possible. Il nous a semblé préférable dans ces conditions de rechercher directement une méthode et un algorithme conduisant à une résolution numérique.

Néanmoins la structure du domaine (bande infinie) et la forme des conditions aux limites (dont certaines présentent des discontinuités sur les fonctions inconnues) situent ce problème en dehors du champ d'application des méthodes numériques classiques [26], [27], [28].

Cet ensemble de faits nous a conduit à appliquer la méthode de partition à ce problème particulier.

La forme même des équations nous a incité à réaliser une partition au domaine (que nous appelerons Ω) en deux parties disjointes ainsi que le montre la figure V-2.

La région Ω_1 définie par $0 < x < \lambda$ et la partie Ω_2 (non connexe) définie par les inégalités $x < 0$ et $x > \lambda$; les segments AB, CD et A'B' C'D' de séparation entre ces parties étant infiniment voisines mais cependant distinctes.

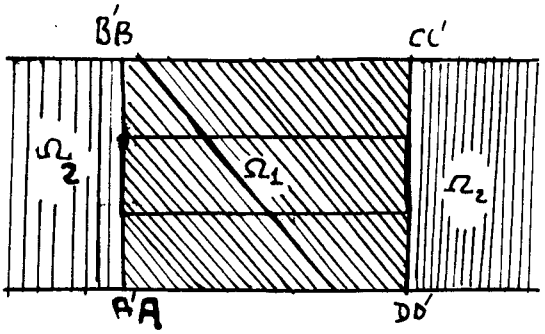


Fig V2

Sur le domaine Ω_2 les équations (2) impliquent l'existence d'une "fonction potentiel" (x, u) dont le vecteur de densité de courant est le gradient, soit $Ju = \frac{\delta \varphi}{\delta u}$, $Jx = \frac{\delta \varphi}{\delta x}$. Cette fonction doit alors vérifier l'équation de Laplace :

$$(3) \qquad \Delta = \frac{\delta^2 \varphi}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 \varphi}{\delta u^2} = 0$$

Si l'on suppose Jx connue sur les frontières A'B' et C'D' du domaine Ω_2 la solution du problème mixte (Neuman sur certaines frontières, Dirichlet homogène à l'infini) ainsi formulé peut être facilement déterminée par un calcul analytique simple (méthode de séparation des variables). De la connaissance de la fonction sur tout le domaine Ω_2 mais en déduisons alors celle de $Ju = \frac{\delta \varphi}{\delta u}$ sur tout ce domaine et en particulier sur les frontières A'B' et C'D'. Ce raisonnement permet de formuler deux conclusions importantes. La première est que si nous connaissons l'une des fonctions Jx ou Ju sur les frontières A'B' et C'D' nous pouvons facilement avoir la solution du problème sur Ω_2 ; la deuxième est que nous pouvons sur les frontières A'B' et C'D' calculer l'une des fonctions Jx et Ju en fonction de l'autre Ju ou Jx, nous établissons de ce fait deux relations (une sur chacune des frontières A'B', C'D') linéaires simples entre ces deux fonctions sur A'B' et C'D'.

Il est alors évident que le problème général peut être remplacé par un problème équivalent : résoudre les équations (1) sur Ω_1 avec comme conditions aux limites, les conditions (a) et (d) auxquelles viennent s'ajouter les deux relations établies qui ajoutées aux conditions (c) et (d) font de ce problème

un problème de Dirichlet classique sur un domaine borné dont la résolution peut se faire par les méthodes numériques classiques.

Nous verrons cependant que le mauvais conditionnement du problème obtenu nous a aussi obligé à rechercher un algorithme spécial [18], afin de pouvoir effectuer la résolution numérique.

V-1 DISCRETISATION ET METHODE DE PARTITION

Le domaine étant symétrique par rapport à ox nous n'étudierons que la partie $u > o$. Après avoir partagé le domaine en Ω_1 et Ω_2 nous effectuons sur Ω_1 une discrétisation en plaçant sur ce domaine une grille de points constituée par $n + 4$ points dans le sens ox et $n + 1$ points dans le sens ou (figure V-2).

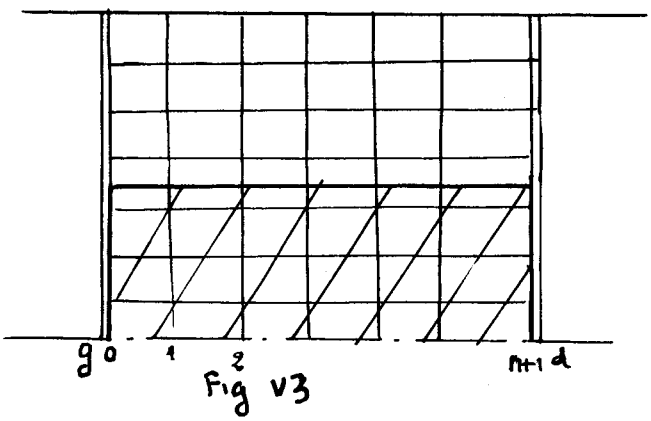


Fig V3

Les droites d et g appartenant à Ω_2 sont infiniment voisines des droites o et $n + 1$ de Ω_1 et n'ont été introduites que pour la commodité de l'exposé.

Entre les points de o et g ainsi que de $n + 1$ et d, les conditions de transmission imposent certaines relations entre les grandeurs Ju et Jx. L'élimination des points de g et d se fera en complétant ces relations par celles que nous allons obtenir par la méthode de partition. En effet dans Ω_2 les équations s'écrivent :

$$\frac{\partial \bar{J}_u}{\partial x} - \frac{\partial J_x}{\partial u} = 0$$

$$\frac{\partial J_u}{\partial u} + \frac{\partial J_x}{x} = 0$$

La forme même de ces équations implique l'éxistence d'une fonction "potentiel ψ " dont J_x et J_u sont les composantes du gradient. $J_x = \frac{\partial \psi}{\partial x}$, $J_u = \frac{\partial \psi}{\partial u}$. Nous allons donc rechercher une fonction Ω satisfaisant à

$$(\ )\qquad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} = 0 \qquad \text{avec}$$

$$\psi(,\pm\infty,u) = 0,\ \frac{\partial \psi}{\partial u}(x,L/2) = 0,\ \frac{\partial \psi}{\partial x}(x,0) = 0$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}(\lambda,u) = \bar{J}_x\ ,\ \frac{\partial \psi}{\partial x}(\lambda,u) = J_x^+$$

Le problème ainsi défini et mathematiquement bien posé peut être résolu par séparation des variables. Nous écrivons dans ce but $(x,u) = f(x)\times h(u)$, ( ) s'écrit

$$f''_x\, h + h''_x\, f = 0$$

ou $$(\ )\qquad \frac{f''}{f} = -\frac{h''}{h} = \text{ete} = p^2$$

car le premier membre étant une fonction de x et le second une fonction de u leur égalité ne peut avoir lieu si il sont tous les deux constants par rapport à x et à u.

Les équations (4) entrainnent alors

$$f'' - p^2 f = 0 \qquad f(x) = Ae^{px} + Be^{-px}$$

$$h'' + p^2 h = 0 \qquad h(u) = C \cos pu + D \sin pu.$$

et $\psi(x,u) = (Ae^{px}+Be^{-px})$ (C cos pu + D sin pu), les conditions aux limites nous permettant de déterminer les cinq constantes A,B,C,D,p. En effet :

a) $u = 0 \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = Cp(Ae^{px}-Be^{-px}) = 0 \quad \forall x \quad > c = 0$

b) $u = L/2 \quad \frac{\partial \psi}{\partial u} = D\,\lambda(Ae^{px}+Be^{-px}) \cos p\frac{L}{2} = 0 \quad \forall x \quad >$

$$\cos \frac{pL}{2} = 0 \quad > p = (2k+1)\frac{\pi}{L} \qquad K \qquad (N^+)$$

c) $x \to +\infty \quad \frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial u} \to 0 \quad \to A = 0$

d) $x \to -\infty \quad \frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial u} \to 0 \quad \to B = 0$

suivant le signe de x nous obtenons pour ψ deux valeurs distinctes :

$$x > 0 \qquad \psi^+(x,u) = BD \sin (2k+1)\frac{\pi u}{L} e^{-(2k+1)\frac{\pi x}{L}}$$

$$x < 0 \qquad \psi^-(x,u) = AD \sin (2k+1)\frac{\pi u}{L} e^{(2k+1)\frac{\pi x}{L}}$$

La superposition des solutions nous donne pour H J_x et J_u.

$$x > 0 : J_x^{-+}(x,u) = \sum_{k=0}^{\infty} E_K^+ \sin(2k+1)\frac{\pi u}{L} e^{-2k+1)\frac{\pi x}{L}}$$

(5)

$$J_u^{-+}(x,u) = \sum_{k=0}^{\infty} - E_K^+ \cos(2k+1)\frac{\pi u}{L} e^{-(2k+1)\frac{\pi x}{L}}$$

Ce qui nous fait un système de m équations à m inconnues les coefficients F_K^+. Nous résolvons ce système par multiplication des deux membres de (9) par $\sin (2j+1)\frac{\pi i}{2m}$ pour $j \neq k$ et $\frac{1}{2} \sin (2k+1)\frac{i}{2m}$ sinon. Il vient par sommation :

$$\sum_{i=o}^{m-1} \sum_{k=o}^{m-1} F_K^+ \sin(2k+1)\frac{\pi i}{2m} \sin(2j+1)\frac{\pi i}{2m} + \frac{1}{2} \sum_{k=o}^{m-1} F_K^+ \sin(2k+1)\frac{\pi}{2} \sin(2k+1)\frac{\pi}{2}.$$

$$= \sum_{i=o}^{m-1} \bar{J}_x(o,iL/2m)\sin(2j+1)\frac{\pi i}{2m} + \frac{1}{2} \bar{J}_x(o,L/2)\sin(2j+1)\frac{\pi}{2}$$

$(j = 1,....m-1)$. En échangeant les signes de sommation et en développant le produit de sinus en somme il vient

$$\sum_{o}^{m-1} \bar{J}_x(o,iL/2m)\sin(2j+1)\frac{\pi i}{2m} + \frac{1}{2}\bar{J}_x(o,L/2)\sin(2j+1)\frac{\pi}{2} = \sum_{k=o}^{m-1} \frac{E_K^+}{2} (\cos(k-j)\frac{\pi i}{m} - \cos(k+j+1)\frac{\pi}{m}$$

$$+(-1)^{k-j})$$

et en tenant compte du fait que $\sum_{o}^{m-1} \cos\alpha\, i = \cos\,(m-1)\alpha \frac{\sin\, n\, \alpha/2}{\sin\quad \alpha/2}$

Il vient :

$$F_j^+ = \frac{2}{m} \left(\sum_{o}^{m-1} \bar{J}_x(o,\frac{iL}{2m}) \sin(2j+1)\frac{i}{2m} + \frac{1}{2} J_x(O,L/2)\sin(2j+1)\frac{\pi}{2}\right)$$

on établirait une formule analogue pour F_j^-

REMARQUE : Nous aurions pu obtenir le même résultat en approchant les intégrales des relations d'orthogonalité par la formule des trapèze , mais en procédant ainsi nous sommes sûrs de l'identité de la fonction et du développement en tout point $u_i = \frac{i}{m} L/2$.

Nous pouvons donc dès à présent déterminer J_x et J_u sur tout le do-

maine Ω_2 et en particulier nous pouvons déterminer J_u pour x=o ou x=λ par le développement ( ) :

$$\bar{J}_u(\lambda,ui) = -\frac{2}{m}\sum_{k=o}^{m-1}\left(\sum_{i=1}^{m}\bar{J}_x(\lambda,\frac{iL}{2m})\sin(2k+1)\frac{\pi i}{2m}+\frac{\bar{J}}{2}x(\lambda,L/2)\sin(2k+1)\frac{\pi}{2}\right)\cos(2k+1)\frac{\pi ij}{L}$$

$$= -\frac{2}{m}\left[\sum_{i=1}^{m}\bar{J}_x(\lambda,u_i)\sum_{k=o}^{m-1}\sin(2k+1\frac{\pi i}{2m}\cos(2k+1)\frac{\pi i}{2m}+\frac{1}{2}\bar{J}_x(\lambda,L/2)\sum_{k-o}^{m-1}\sin(2k+1)\frac{m}{2}\cos(2k+1)\frac{\pi j}{2m}\right.$$

d'où

$$\bar{J}(\lambda,uj) = -\frac{2}{m}\sum_{i=1}^{m}a_{ji}\,\bar{J}_x(\lambda,u_i)$$

avec

$$a_{ji} = \sum_{k=o}^{m-1}\sin(2k+1)\frac{\pi i}{2m}\cos(2k+1)\frac{\pi j}{2m}$$

$$a_{jm} = \frac{1}{2}\sum_{k-o}^{m-1}\sin(2k+1)\frac{\pi}{2}\cos(2k+1)\frac{\pi j}{2m}$$

Nous calculons les a_{ji} en développant la quantité sous le signe somme et il vient

$$a_{ji} = 0 \qquad \text{si } i+j = 2q \qquad \text{(pair)}$$

$$a_{ji} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2m}(i+j)} + \frac{1}{\sin\frac{\pi}{2m}(i-j)}\right) \qquad i+j = 2q+1$$

$$a_{jm} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\cos\frac{\pi j}{2m}}$$

Donc sur les droites g et d nous avons les relations

$$\bar{J}_u(\lambda_+,u_j) = -\frac{2}{m}\sum_{i=1}^{m} a_{ji}\,\bar{J}_x(\lambda,u_i)$$

$$\bar{J}_u(\underline{0},uj) = \frac{2}{m}\sum_{i=o}^{m} a_{ji}\,\bar{J}_x(\lambda,u_i)$$

et, en raison des conditions aux limites L_3 et de continuité de J_x à ces frontières :

$$\bar{J}_u(0_+,u_j) - \frac{2}{m}\sum_{i=o}^{m} a_{ji}\bar{J}_x(o,u_i) = -\frac{V}{\rho}\bar{B}(o,u_i)$$

$$\bar{J}_u(\lambda_-,u_j) + \frac{2}{m}\sum_{i=o}^{m} a_{ji}\bar{J}_x(o,u_i) = \frac{V}{\rho}\bar{B}(\lambda,u_i)$$

qui constitue un ensemble de condition qui, ajouté aux autres conditions aux limites, (L1), à (L6), définit parfaitement le problème à résoudre dans Ω_1.

V.2 - RESOLUTION DU SYSTEME DISCRETISE

Nous allons maintenant étudier les équations obtenues à partir de la discrétisation et de la partition. Ces équations seront de 4 types correspondant aux équations qui doivent être vérifiées dans Ω_1.

a) Loi d'Ohm

$$\left(\frac{\partial \bar{J}_u}{\partial x} - \frac{\partial \bar{J}_x}{\partial u}\right) - V\frac{\partial \bar{B}}{\partial x} - j\,\omega\,\bar{B} = 0 \qquad u < \ell/2$$

$$\frac{\partial \bar{J}_u}{\partial x} \qquad \frac{\partial \bar{J}_x}{\partial u} \qquad u \geq \ell/2$$

b) Conservation du courant

$$\frac{\partial \bar{J}_u}{\partial u} + \frac{\partial \bar{J}_x}{\partial x} = 0$$

c) Théorème d'Ampère suivant ox

$$\frac{\partial \bar{B}}{\partial x} \quad \frac{\mu o}{e} \quad (c\ \bar{J}u + \bar{J}p)$$

d) Théorème d'Ampère suivant ou

$$\frac{\partial B}{\partial x} = - \frac{\mu o}{e}\ c\ \bar{J}_u$$

Nous remarquons bien qu'en chaque point trois seulement de ces équations sont indépendantes. Les points de la grille étant numérotés nous posons :

$$\bar{J}_u(x_j,u_i) = K_{i,j}$$

$$\bar{J}_x(x_j,u_i) = J_{i,j}$$

$$\bar{B}\ (x_j,u_i) = B_{ij}$$

avec

$$x_j = \frac{j}{n+1}\lambda = i\ h$$

$$u_i = \frac{i}{m}\ \frac{L}{2} = i\ k.$$

et nous remplaçons les dérivée partielles par des schémas aux différences du type "BACKWARD" :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{xju_i} \# \# \; (f(x_j,u_i) - f(x_{j-1},u_i))/h$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x_j u_i} \# \# \; (f(x_j,u_i) - f(x_j,u_{i-1}))/k.$$

Nous appelons q un entier tel que $q \times \frac{1}{2m} \leq \ell/2$ et les équations discrétisées s'écrivent :

a) $((K_{i,j}-K_{i,j-1})/h-(J_{ij}-J_{i-1,j})/k) - \frac{V}{h}(B_{ij}-B_{ij-1})+f\omega B_{ij-o}$

pour $0 \leq i \leq q$ $\quad$ $j = 1, \ldots n+1.$

$$(K_{ij}-K_{ij-1})/h - (J_{ij}-J_{i-1,j})/k = 0$$

$q < i \leq m - 1$

b) $(K_{ij}-K_{i-1,j})/k+(J_{ij}-J_{ij-1})/h = 0$

$1 \leq i \leq m$

c) $\frac{e}{\mu_o}(B_{ij}-B_{i,j-1}) = c\, K_{ij} + \bar{J}_p(x_j)$

$0 \leq i \leq q$, $\quad j = 1,\ldots n+1$

d) $\frac{e}{\mu o}(B_{io}-B_{i-1,o}) = - c\, J_{ij}.$

$1 \leq i \leq q$

ce qui fait au total : (n+1) (2m+q+1)+q équations auxquelles nous ajoutons les

conditions aux limites.

1) Symétrie $\quad J_{oj} = o \qquad j = 0,1 \ldots n+1$

2) Bord $\quad K_{mj} = o \qquad j = 0,1 \ldots n+1$

3) Discontinuités ramenées.

$$K_{io} - \frac{2}{m} \sum_{1}^{m} a_{ij} J_{ip} = + \frac{V}{\rho} \mathcal{B}_{io} \qquad i \leq q$$

$$= 0 \qquad i \geq q$$

$$K_{in+1} + \frac{2}{m} \sum_{1}^{m} a_{ij} J_{in+1} = \frac{V}{\rho} \mathcal{B}_{io} \qquad i \leq q$$

$$= 0 \qquad i > q$$

4) Conservation du flux

$$\sum_{j=o}^{n+1} \sum_{i=o}^{q} \bar{\mathcal{B}}_{ij} = 0$$

soit 2(n+2)+2m+1 équations ce qui fait au total N=2(M+1)(n+2)+(q+1)(n+2) équations, à autant d'inconnues. La résolution de ce système linéaire par une méthode directe de résolution est impensable à cause de sa taille (si n=50, m=15 q=7 cela fait 2000 équations à autant d'inconnues non nulles). De ce fait seules les méthodes de relaxation peuvent être appliquées, malheureusement nous avons remarqué que les méthodes classiques (Southwell, Gauss-Seidel, Jacobi.) ne conver-

geant pas sur cet exemple (en raison de la distribution des valeurs propres). Ces difficultés nous conduisirent à chercher un algorithme approprié à ce problème (ou plutôt à ce type de problème).

Nous avons remarqué que les équations portant sur l'induction et celles portant sur la densité de courant sont en fait très peu liées, cette remarque nous a amenés à imagniner un calcul itératif du type relaxation par blocs, dont le principe peut être expliqué en écrivant la matrice du système par blocs ainsi que le second membre

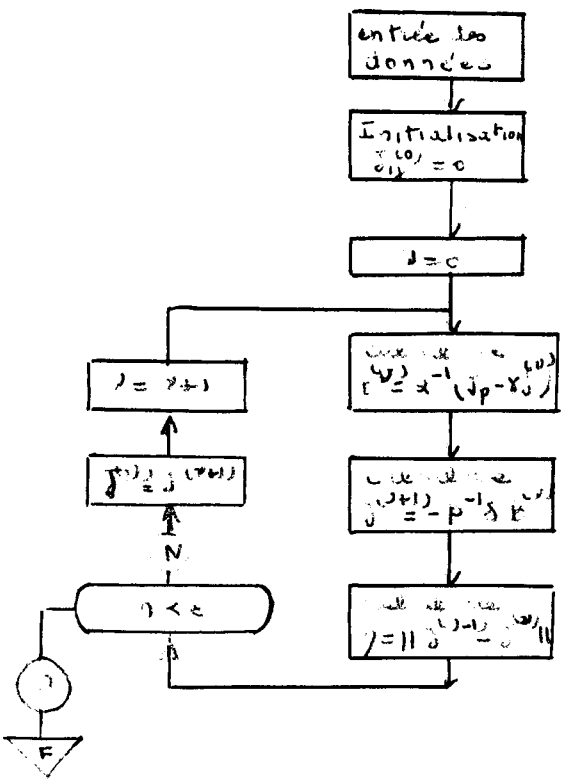
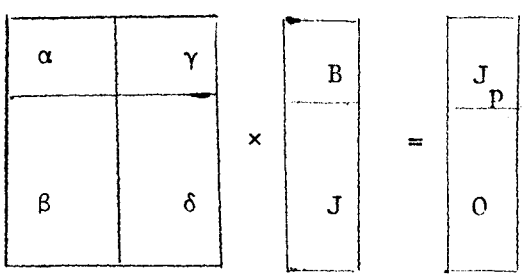


Figure V 3



les vecteurs B,J, et J_p étant des vecteurs dont les composants sont respectivement B_{ij}, K_{ij}, J_{ij} et $J_p(x_j)$. A partir d'un vecteur densité de courant $J^{(o)}$ de départ nous calculons :

$$B^{(o)} = \alpha^{-1}(J_p - \gamma J_o)$$

puis $J^{(1)} = -\delta^{-1}\beta B_o$ et à partir de J_1 nous calculons $B^{(1)}$ puis $J^{(2)}$...etc. ceci jusqu'à ce que la norme du vecteur

$$\begin{vmatrix} B^{(\nu)} - B^{(\nu-1)} \\ J^{(\nu)} - J^{(\nu-1)} \end{vmatrix}$$ soit inférieure.

à une quantité fixée ε. Cet algorithme dont le déroulement est indiqué par l'organigramme de la figure V 3, nous a permis de résoudre le problème en des "temps de calcul" raisonnables. Nous démontrerons plus loin que si ce calcul converge il le fait effectivement vers la solution, et nous étudierons les conditions de convergence. Nous allons maintenant exposer plus en détail les différentes étapes du calcul ou nous verrons que, grâce à quelques procédés de calcul matriciel, la résolution du système $\alpha B^{(\nu)} = (J_p - \gamma J^{(\nu-1)})$ peut être rendue évidente, et celle de l'autre système allegée.

§ V 2;1. RESOLUTION DU SYSTEME $\alpha B^{(\nu)} = J_p - \gamma J_p^{(\nu-1)}$

La matrice α , tirée des équations (c) et (d) et de la 4ième condition aux limites, peut s'écrire en rangeant les b_{ij} dans l'ordre $b_{oo}, b_{o1} \ldots b_{on+1}, b_{1,o} \ldots\ldots\ldots b_{q,n+1}$:

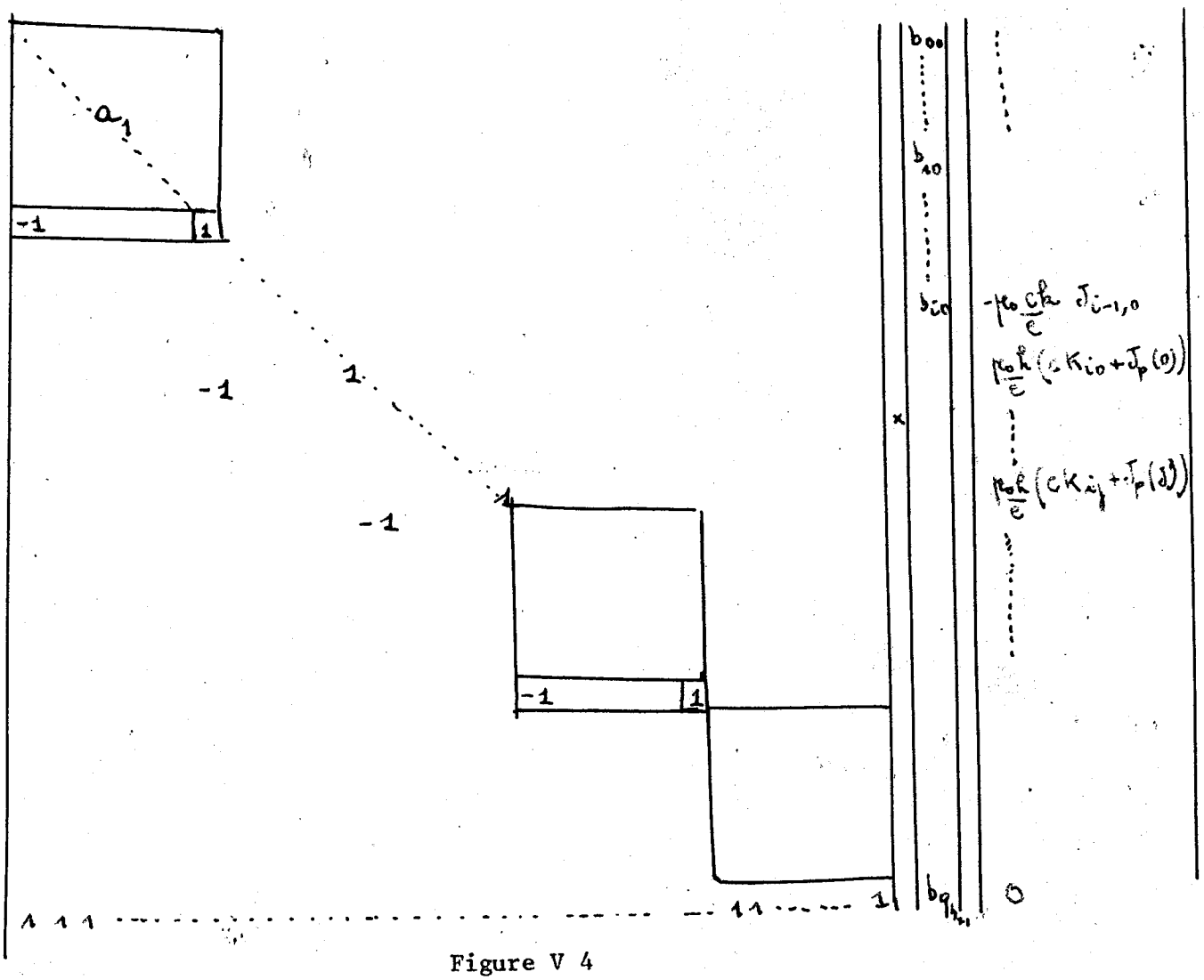


Figure V 4

où les blocs $a_1 \ldots . a_{q+1}$ sont des matrices rectangulaires (n+1)×(n+2) :
Une élimination simple de Gauss réduit ce système à être "triangulaire supérieur" soit à éléments nuls sous la diagonale principale. Soit :

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & & & \\ & -1 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & \\ & & & & -1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} b_{0m} \\ \vdots \\ b_{ij} \\ \vdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\mu_0 h}{c}(c K_{01} + J_p(0)) \\ \vdots \\ \frac{\mu_0}{h}\left(-ck J_{10} - h\sum_{l=1}^{m+1}(c K_{0l} + J_p(l))\right. \\ \vdots \\ \frac{\mu_0 h}{c}\, c K_{i0} + J_p(0) \\ \vdots \\ \frac{\mu_0}{c}\left(-ck J_{i0} - h\sum_{l=1}^{m+1}(c K_{i-1,l} + J_p(l))\right. \\ \vdots \\ \frac{1}{(q+1)(n+2)}\sum_{i=1}^{q}\left(h\sum_{j=1}^{m+1} c K_{ij} + J_p(j)\right) - \\ \sum_{i=1}^{i=q} -ck J_{i0} - h\sum_{1}^{n+1} c K_{i-1,l} + J_p(l) \end{vmatrix}$$

En appelant S le second membre et α_1 la matrice obtenue le système s'écrit α_1 B = S ou α_1 = -(I-H) où H est la matrice nulle portant sauf sur la codiagonale supérieure où tous les éléments sont égaux à l'unité. On démontre facilement que pour une matrice d'ordre n, H^n=0 d'où

$$(I-H) = (I+H+H^2.....H^{n-1}) = I-H^n = I$$

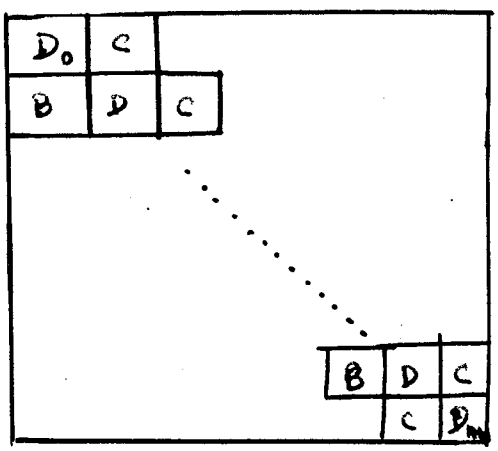
d'où $\alpha_1 = -(I-H)^{-1} = -(I+H.....+H^{n-1})$

la solution du système α_1 B = S est alors immédiate et se fait extremement rapidement par additions et multiplications.

V.2.2. RESOLUTION DU SYSTEME $SJ^{(\nu)} = -\beta B^{(\nu)}$

Dans l'étude de ce système la résolution sera facilité par une disposition judicieuse des inconnues constituant le vecteur $J^{(\nu)}$. En effet si nous groupons ensemble les inconnues intervenant, pour une valeur de j donnée sur toute une ligne dans l'ordre K_{ij}(i=o,m-1) puis J_{iJ}(i=1,m) nous obtenons en posant u=h/k une matrice ayant la forme tridiagonale par blocs. Les blocs étant des matrices carrées d'ordre 2m×2m. (Figure V 5).

Une méthode de Relaxation ne convergeant pas pour résoudre ce système nous allons employer une méthode d'élimination par blocs. Posons ce système δ J=T avec $T = -\beta B^{(\nu)}$. La matrice δ est représentée sur la figure V-5 de la page suivante peut s'écrire :



avec

$$D_0 = \begin{vmatrix} I & A \\ 0 & I \end{vmatrix}$$

$$B = \begin{vmatrix} -I & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$C = \begin{vmatrix} I & \\ & \ddots \\ 0 & I \end{vmatrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} I & \\ & \ddots \\ 0 & I \end{vmatrix}$$

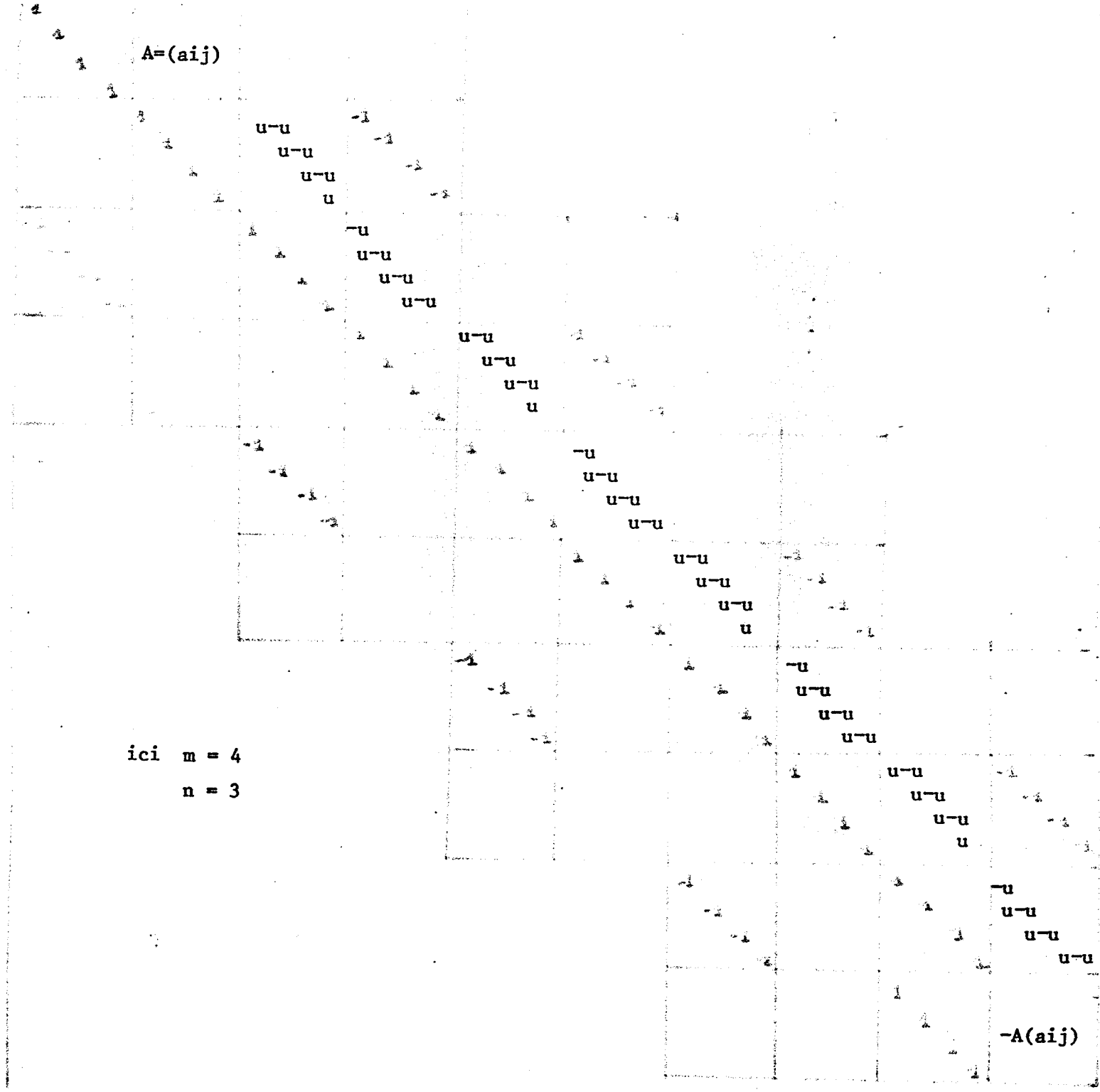


figure V 5

Nous allons rendre cette matrice triangulaire par blocs, en éliminant successivement les blocs B sous la diagonale suivant l'algorithme de Gauss. Pour cela nous appelons L_i la $i^{ème}$ ligne formée de B, D, C, T_i (i = 1, an). Pour éliminer le premier bloc il suffit de remplacer L_2 par $L_2^{(2)} = L_2 - BD_o^{-1} L_1$

où $D_o^{-1} = \begin{vmatrix} I & -A \\ 0 & I \end{vmatrix}$

ensuite nous effectuons une opération similaire sur L_3 .... etc .... et à la ligne i nous formons :

$$L_i^{(i)} = L_i - B_o D^{-1}(i) \; {}^{(i-1)}L_i - 1$$

et nous continuons le processus jusqu'à la ligne n + 1, pour obtenir une matrice triangulaire supérieure. La résolution est alors achevée par "retour arrière" où l'on calcule

$$J_i = (D^{(i)})^{-1} (T_i^{(i)} - C \times T_{i+1}^{(1+1)})$$

pour i = n + 1, n...1. l'organigramme de la figure V-6.

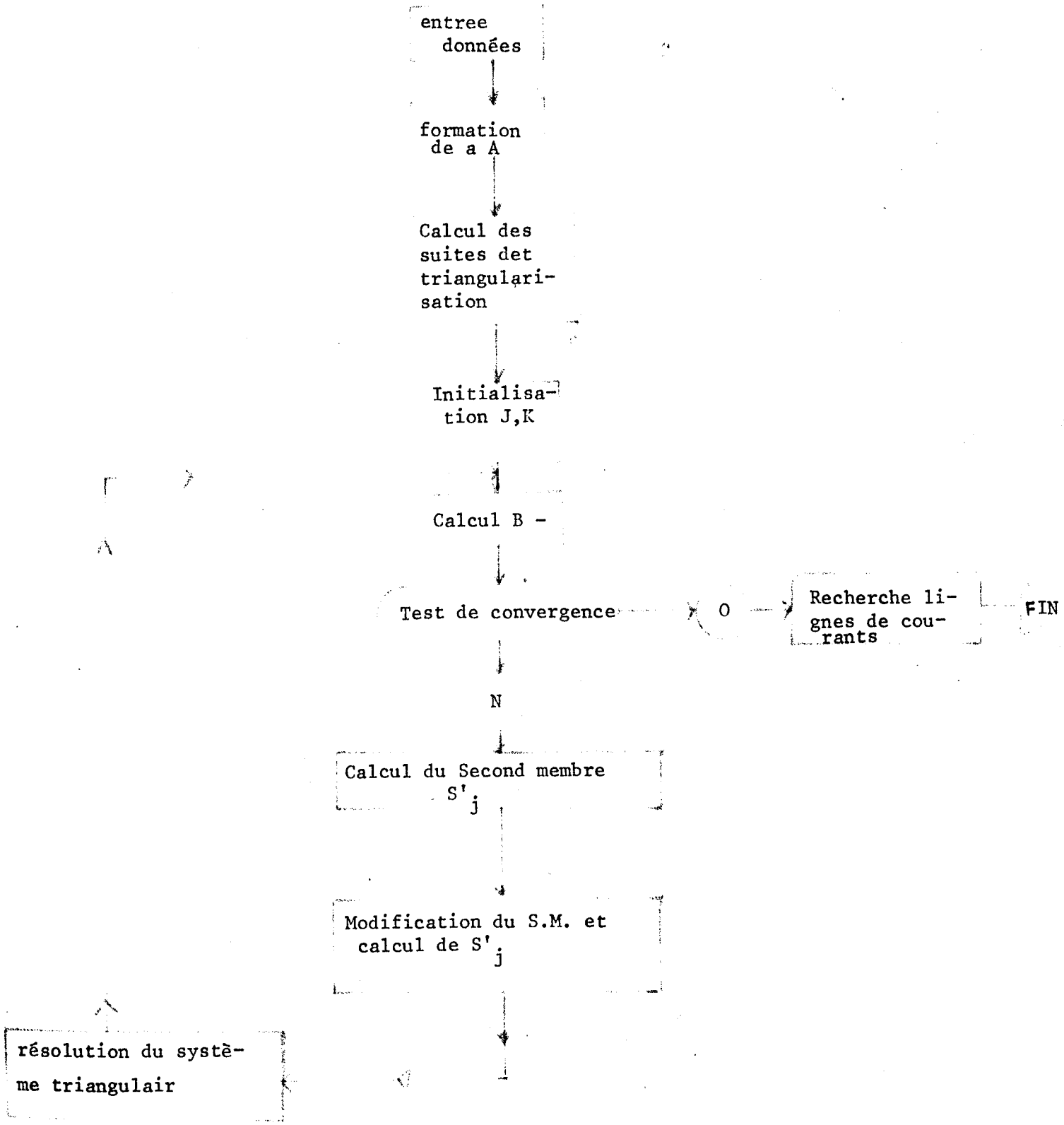

entree données
formation de a A
Calcul des suites det triangularisation
Initialisation J,K
Calcul B -
Test de convergence
O
Recherche lignes de courants
FIN
N
Calcul du Second membre S'j
Modification du S.M. et calcul de S'j
résolution du système triangulair

Fig V6

L'avantage de ce procédé schématisé par l'organigramme de la figure V6 est que la triangularisation comportant des inversions de matrices 2m×2m n'est faite qu'une seule fois au début du calcul. A chaque itération nous ne modifions que le second membre (ce qui est relativement peu couteux) et la résolution par retour arrière n'effectuant que des produits de matrice 2m×2m est très rapide elle aussi. L'inconvénient du procédé est de nous obliger à garder en mémoire n+1 blocs 2m 2m soit $4m^2(n+1)$ informations. Néanmoins, même lorsque nous ne pouvons garder tous ces blocs en mémoire, les temps de calculs ne sont pas prohibitif, d'autant plus que pour un moteur donné, nous pouvons étudier toutes les caractéristiques en n'effectuant le calcul des blocs diagonaux qu'une seule fois.

§ V.2.4: ETUDE DE LA CONVERGENCE

Reprenons le système tel qu'il a été écrit au § précédent :

$$\begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} B \\ J \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} J_p \\ 0 \end{vmatrix}$$

Notre algorithme consiste à former à partir d'un vecteur $J^{(o)}$ la double suite

$$B^{(o)} = \alpha^{-1}(J_p - \gamma J^{(o)})$$

$$J^{(1)} = -\delta^{-1}\ \beta\ B^{(o)}$$

$$\vdots$$

$$B^{(\nu-L)} = \alpha^{-1}(J_p - \gamma J^{(\nu-1)})$$

$$J^{(\nu)} = -\delta^{-1}\ B^{(\nu-1)}$$

$$B^{(\nu)} = \alpha^{-1}(J_p - \gamma J^{(\nu)}$$

Soit

$$B^{(\nu)} = \alpha^{-1}(J_p + \gamma\delta^{-1}\beta\ B^{(\nu-1)}$$

$$J^{(\nu)} = \delta^{-1}\beta\ \alpha^{-1}\gamma\ J^{(\nu)-1)} - \delta^{-1}\beta\ \alpha^{-1}\ J_p$$

Soit en définitive

(1)

$$B^{(\nu)} = \alpha^{-1}\gamma\ \delta^{-1}\beta\ \ ^{(\nu-1)} + \alpha^{-1}\ J_p$$

$$J^{(\nu)} = \delta^{-1}\beta\ \alpha^{-1}\gamma\ J^{(\nu-1)} - \delta^{-1}\beta\ \alpha^{-1}\ J_p$$

Supposons que lorsque n $\rightarrow \infty$ ces deux suite converge nt vers une solution $B^{(\infty)}$, $J^{(\infty)}$ il vient

$$B^{(\infty)} = \alpha^{-1}\gamma\ \delta^{-1}\beta\ B^{(\infty)} + \alpha^{-1}\ J_p$$

$$J^{(\infty)} = \delta^{-1}\beta\ \alpha^{-1}\gamma\ J^{(\infty)} = \delta^{-1}\beta\ \alpha^{-1} J_p$$

ou $$B^{(\infty)} = (I - \alpha^{-1}\gamma\delta^{-1}\beta)^{-1}\ \alpha^{-1}\ J_p$$

$$J^{(\infty)} = -(I - \delta^{-1}\beta\ \alpha^{-1}\gamma)^{-1}\ \delta^{-1}\beta\ \alpha^{-1}\ J_p$$

Or si nous resolvons le même système par partitionnement nous obtenons

$$\begin{cases} \alpha\ B + \gamma\ J = J_p \\ \beta\ B + \delta\ J = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} J = -\ \delta^{-1}\ \beta\ B \\ B\ (\alpha - \gamma\ \delta^{-1}\beta\gamma\ B) = J_p \end{cases}$$

d'où $$\begin{cases} B = (I - \alpha^{-1}\gamma\delta^{-1}\beta)^{-1}\ \alpha^{-1}\ J_p \\ J = -\ \delta^{-1}\beta\ (I - \alpha^{-1}\gamma\ \delta^{-1}\beta)^{-1}\ \alpha^{-1}\ J_p \end{cases}$$

soit $$\begin{cases} B = (I - \alpha^{-1}\gamma\delta^{-1}\beta)^{-1}\ \alpha^{-1}\ J_p \\ J = -\ (I - \delta^{-1}\beta\ \alpha^{-1}\gamma)^{-1}\ \delta^{-1}\beta\ \alpha^{-1}\ J_p \end{cases}$$

qui est la solution que trouve notre algorithme lorsqu'il converge. Pour étudier la convergence nous reprenons les équations (1)

$$\begin{cases} B^{(\nu)} = \alpha^{-1}\gamma\ \delta^{-1}\beta\ B^{(\nu-1)} + \alpha^{-1}\ J_p \\ J^{(\nu)} = \delta^{-1}\beta\ \alpha^{-1}\gamma\ J^{(\nu-1)} - \delta^{-1}\beta\ \alpha^{-1}\ J_p. \end{cases}$$

nous qavons ici une double suite linéaire de la forme $u_{n+1} = a\ u_{n+b}$, cette suite convergera si

(10) $$R(\delta^{-1}\beta\ \alpha^{-1}\gamma) < 1$$ ou R(A) représente le rayon spectral

de la matrice $\delta^{-1}\beta\alpha^{-1}\gamma$ nous préférons nous contenter de majorer une norme de cette matrice soit en définissant comme GASTINEL [29] la norme

$$S_{\infty\infty}(A) = \operatorname{Max}_i \sum_{j=1}^{j=n} |a_{ij}| \quad \text{nous allons remplacer l'inégalité (10)}$$

par

$$R(\delta^{-1}\beta\alpha^{-1}\gamma) \leq S_{\infty\infty}(\delta^{-1}\beta\alpha^{-1}\gamma) < 1$$

or d'après les propriétés des normes [29]

$$S_{\infty\infty}(\delta^{-1}\beta\alpha^{-1}\gamma) \leq S_{\infty\infty}(\delta^{-1}) \times S_{\infty\infty}(B) \times S_{\infty\infty}(\alpha^{-1}) \times S_{\infty\infty}(\gamma)$$

$$\text{or} \quad S_{\infty\infty}(\gamma) = \frac{1}{\rho}\sqrt{V^2+\omega^2h^2} = \frac{V}{\rho}\sqrt{1+\frac{\omega^2h^2}{V^2}} \qquad (\text{si } V \neq 0)$$

$$\text{d'ou} \quad \text{si } \operatorname{Max}(h,k)\ \frac{V\mu_0 c}{\rho e}\sqrt{1+\frac{\omega^2h^2}{V^2}} \times S_{\infty\infty}(d^{-1}) \times S_{\infty\infty}(S^{-1}) < 1$$

L'algorithme convergera. Nous remarquerons que les éléments des matrices α et δ sont indépendants des caractéristiques du moteur et ne dépendant que du rapport h/h. Donc si k/h est fixée nous pouvons écrire $S_{\infty\infty}(\alpha^{-1}) \times S_{\infty\infty}(\delta^{-1}) = \frac{1}{M}$ M étant une constante. La condition de convergence s'écrit alors.

$$\operatorname{Max}(h,k) < \frac{M}{V\frac{\mu_0 c}{\rho e}\sqrt{1+\omega^2\frac{h^2}{V^2}}}$$

soit

$$\operatorname{Max}(h,k) < \frac{M}{V\frac{\mu_0}{\rho}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\frac{\omega^2h^2}{V^2}}}$$

En général le terme $\omega^2 h^2/V^2$ étant faible devant l'unité excepté pour les très petites valeur de V la condition de convergence peut s'écrire

$$\text{Max } (h_1 k) < \frac{M}{V\alpha}$$

CHAPITRE VI

ETUDE DIMENSIONNELLE - REDUCTION DES VARIABLES

Le problème tel que nous l'avons défini au chapitre II est dimensionnellement homogène. Néanmoins la mise en équations et de ce fait l'algorithme sont directement liés aux dimensions de la machine.

Le souci de rendre notre calcul plus général et applicable à une série de machines semblables nous a conduit à effectuer une recherche systématique des produits sans dimensions caractéristiques du fonctionnement du moteur linéaire. Nous développons cette étude à partir du théorème π de Buckingham en appliquant direment au moteur linéaire, les principes généraux que les règles de l'algèbre linéaire nous permettent de déduire de ce théorème.

VI-1 PRINCIPES GENERAUX

Etant donné un ensemble de grandeurs physiques G_1, C_2, G_n, nous devons choisir un système de grandeurs fondamentales. La nature électromagnétique du problème, nous conduits à choisir le système L. T. I. V. où les grandeurs fondamentales sont : la longueur, le temps, l'intensité et le potentiel électrique. Nous supposons alors que l'équation aux dimensions d'une grandeur G_i peut s'écrire :

$$G_i = L^{\alpha 1i} \times T^{\alpha 2i} \times I^{\alpha 3i} \times V^{\alpha 4i}$$

et nous nous proposons de trouver un système de produits sans dimensions, π_1, ... π_p de la forme :

$$\pi_1 = G_1^{k_{11}} \times G_2^{k_{12}} + \ldots G_i^{k_{1i}} \ldots \times G_n^{k_{1n}}$$

$$\vdots$$

$$\pi_j = G_1^{k_{j1}} \times G_2^{k_{j2}} \times \ldots G_i^{k_{ji}} \times \ldots \quad G_n^{k_{jn}}$$

$$\vdots$$

$$\pi_p = G_1^{k_{p1}} \times G_2^{k_{p2}} \quad \ldots G_i^{k_{pi}} \times \ldots \quad G_n^{k_{pn}}$$

où les produits $\pi_1 \ldots \pi_p$ sont indépendants, c'est à dire qu'il ne puisse exister des constantes $h_1 \ldots h_p$ telles que.

$$\pi_1^{h_1} \pi_2^{h_2} \ldots \pi_p^{h_p} = [0]$$

Théorème π (Buckingham) Une condition nécessaire et suffisante d'indépendance des produits $\pi_1 \ldots \pi_p$ est l'indépendance linéaire des lignes de la matrice des exposants

$$A = \begin{vmatrix} k_{11} \ldots\ldots & k_{1n} \\ \vdots & \\ K_{j1} & k_{jn} \\ k_{p1} & k_{pn} \end{vmatrix}$$

De ce théorème nous ne donnerons pas de démonstration car cela a déjà été fait [37] mais nous déduirons le moyen de former les produits sans dimensions.

Soit π un produit sans dimension de la forme

$$\pi_j = G_1^{k_{j1}} \times \ldots\ldots G_n^{k_{jn}}$$

Il peut s'exprimer en fonction des variables fondamentales

$$(1) \qquad \pi = [L]^{\sum_{i=1}^{n} \alpha_{1i} k_{ji}} \times [T]^{\sum_{i=1}^{n} \alpha_{2i} k_{ji}} \times [I]^{\sum_{i=1}^{n} \alpha_{3i} k_{ji}} \times [V]^{\sum_{i=1}^{n} \alpha_{4i} k_{ji}} = [1]$$

Cette équation doit évidemment être une identité par rapport aux grandeurs [L], [T], [I], [V] d'où

$$(1) \Rightarrow (2) \qquad \begin{aligned} &\alpha_{11} k_{j1} + \ldots \alpha_{1i} k_{ji} + \ldots \alpha_{1n} k_{jn} = 0 \\ &\alpha_{21} k_{j1} + \ldots \alpha_{2i} k_{ji} + \ldots \alpha_{2n} k_{jn} = 0 \\ &\alpha_{31} k_{j1} + \ldots \alpha_{3i} k_{ji} + \ldots \alpha_{3n} k_{jn} = 0 \\ &\alpha_{41} k_{j1} + \ldots \alpha_{4i} k_{ji} + \ldots \alpha_{4n} k_{jn} = 0 \end{aligned}$$

L'équation (2) est un système linéaire homogène dont les nombres $k_{j1} \ldots\ldots k_{jn}$ sont les inconnues. Soit Ω la matrice de ce système :

$$\Omega_{4n} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} \ldots\ldots \alpha_{1i} \ldots\ldots \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} \ldots\ldots \alpha_{2i} \quad\quad \alpha_{2n} \\ \alpha_{31} \ldots\ldots \alpha_{3i} \quad\quad \alpha_{3n} \\ \alpha_{41} \ldots\ldots \alpha_{4i} \quad\quad \alpha_{4n} \end{vmatrix}$$

Soit r le rang de la matrice Ω. Le système (2) étant linéaire et homogène , admet outre la solution triviale que nous ne considérons pas, un système de n-r solutions distinctes linéairement indépendantes. Ce système est appelé le système fondamental de solutions de (2), et toute solution autre est une combinaison linéaire des solutions du sytème fondamental. En référence au théorème (1) nous pouvons affirmer alors que l'ensemble des grandeurs $G_1 \ldots . G_n$ admet n-r produits sans dimension . D'autre part, nous en déduisons que les coefficients des produits sans dimension sont les solutions fondamentales du système (2).

VI-2 APPLICATIONS AU MOTEUR LINEAIRE.

En vue d'appliquer les principes précédents au problème particulier du moteur linéaire, nous devons tout d'abord dresser une liste des grandeurs G_i qui interviennent dans ce problème. Ces grandeurs au nombre de 14 sont : J_u, J_x, $\bar{b}$, v, ϑ, t, ρ, λ, e, c, ℓ, L, μ_o et J_{pm} .

A partir de cette liste, nous pouvons maintenant établir la matrice Ω Nous le faisons au moyen du tableau suivant :

grandeur	J_u	J_x	b	v	L	ϑ	e	c	ℓ	T	λ	J_{pm}	ρ	μ_o
L	-2	-2	-2	1	1	0	1	1	1	0	1	-1	1	-1
T	0	0	1	-1	0	-1	1	1	1	1	0	0	0	1
I	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	-1
V	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1

La matrice Ω étant ainsi établie, il nous faut calculer son rang. Le déterminant le plus à droite vaut :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

donc il existe un déterminant d'ordre 4 non nul. Le rang de cette matrice sera

donc égal à 4 et il y aura

$$p = 14 - 4 = 10$$

produits sans dimensions dont les coefficients seront solution du système.

$$\mathbf{K} = 0 \qquad \text{où} \qquad K = \begin{vmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ k_{14} \end{vmatrix}$$

Pour résoudre ce système nous calculons K_{11} à K_{14} en fonction de k_1 à K_{10} soit

$$k_{11} - k_{12} - k_{13} - k_{14} = 2k_1 + 2k_2 + 2k_3 - k_4 - k_5 - k_7 - k_8 - k_9$$

$$k_{14} = -k_3 + K_4 + K_6 - K_{10}$$

$$k_{12} - k_{13} - k_{14} = -k_1 - k_2$$

$$k_{13} + K_{14} = -k_3$$

d'où

$$K_{11} = k_1 + k_2 + k_4 - k_5 + 2k_6 - k_7 - k_8 - k_9 - 2k_{10}$$

$$k_{12} = -k_1 - k_2 - k_3$$

$$k_{13} = -k_4 - k_6 + k_{10}$$

$$k_{14} = -k_3 + k_4 + k_5 - k_{10}$$

à partir de cette résolution, nous pouvons dresser le tableau donnant le système fondamental de solutions et par la même occasion les produits sans dimensions

G	J_u	J_x	b	v	L	ω	e	c	ℓ	t	λ	J_{pm}	ρ	μ_o
π	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6	k_7	k_8	k_9	k_{10}	k_{11}	k_{12}	k_{13}	k_{14}
π_1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	0
π_2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	0
π_3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0
π_4	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	-1	1
π_5	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	-1	0	0	0
π_6	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	2	0	-1	1
π_7	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	-1	0	0	0
π_8	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	-1	0	0	0
π_9	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	-1	0	0	0
π_{10}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-2	0	1	-1

Le système fondamental de produits sans dimensions s'écrit alors :

$$\pi_1 = \frac{\lambda J_u}{J_{pm}} \quad , \quad \pi_2 = \frac{\lambda J_x}{J_{pm}} \quad , \quad \pi_3 = \frac{b}{\mu_o J_{pm}} \quad , \quad \pi_4 = \frac{\lambda \mu_o}{\rho}$$

$$\pi_5 = L/\lambda \quad , \quad \pi_6 = \frac{\omega \lambda^2 \mu_o}{\rho} \quad , \quad \pi_8 = e/\lambda \quad , \quad \pi_g = e/\lambda \quad , \quad \pi_{10} = \frac{t\rho}{\mu_o \lambda^2}$$

Nous pouvons obtenir une autre série de nombre sans dimensions indépendan par combinaisons des nombres π_1 à π_6, nous retiendrons la série :

$$\frac{J_u \lambda}{J_{pm}} = i_x$$

intensités induites

$$\frac{J_x \lambda}{J_{pm}} = i_x$$

$$\frac{b}{\mu_o J_{pm}} = \beta$$

réaction d'induit

$$\frac{V \lambda \mu_o}{\rho} = R_m$$

nombre de REYNOLDS magnétique polaire

$\frac{L}{\lambda} = \mathcal{L}$ hauteur polaire du rail

$\frac{\omega - \frac{2\pi V}{\lambda}}{\omega\lambda} = g$ glissement

$\frac{e}{\lambda} = \varepsilon$ entrefer polaire

$\frac{c}{\lambda} = \gamma$ épaisseur polaire

$\frac{\ell}{\lambda} = \ell$ largeur polaire

$\frac{\omega t}{2\pi} = \tau$ temps réduit

à laquelle nous ajoutons les variables réduites $X = \frac{x}{\lambda}$, $Y = \frac{u}{\lambda}$

VI-3 REDUCTION DES EQUATIONS.

Nous allons reprendre les équations du chap.II et tacher de réécrire ces équations en fonction des variables réduites que nous venons de déterminer; pour cela il vient :

$$J_u = i_u \times \frac{J_{pm}}{\lambda} , \qquad J_x = i_x \frac{J_{pm}}{\lambda} , \qquad b = \beta \mu_o J_{pm}$$

d'où

$$\rho\left(\frac{J_{pm}}{\lambda^2} \frac{\partial i_u}{\partial(x/\lambda)} - \frac{J_{pm}}{\lambda^2} \frac{\partial i_u}{\partial(\frac{u}{\lambda})}\right) - \frac{\mu_o J_{pm}}{\lambda} \frac{\partial\beta}{\partial(x/\lambda)} - j\omega \mu_o J_{pm} \beta = 0$$

$$\frac{e}{\mu_o} \times \left(\frac{\mu_o J_{pm}}{\lambda} \frac{\partial\beta}{\partial(x/\lambda)}\right) = c \frac{J_{pm}}{\lambda} i_u + J_{pm} \cos(2\pi(\tau - x/\lambda)+\varphi)$$

$$\frac{e}{\mu_o} \times \left(\frac{\mu_o}{\lambda} \frac{\partial\beta}{\partial(u/\lambda)}\right) = -c \frac{J_{pm}}{\lambda} i_x$$

d'où en simplifiant

$$\frac{\partial i_u}{\partial X} - \frac{\partial i_x}{\partial Y} + R_m \frac{\partial \beta}{\partial x} + 2\pi j \frac{R_m}{(1-g)} \beta = 0$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial X} = \frac{\gamma}{\varepsilon} i_u + \frac{1}{\varepsilon} \cos(2\pi(\tau - X) + \varphi)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial Y} = - \frac{\gamma}{\varepsilon} i_u$$

avzc les conditions aux limites

$Y = \pm \ell/2$ $\qquad i_u = 0$

$Y =$

pour $X = 0$, $X = 1$ il vient

$$\frac{J_{pm}}{\lambda} \delta i_u = \frac{V}{\rho} \mu_o J_{pm} \delta\beta$$

d'où

$$\delta i_u = R_m \delta\beta$$

Le système total peut donc s'écrire :

à L'intérieur de l'entrefer

$$\frac{\partial i_u}{\partial X} - \frac{\partial i_x}{\partial Y} + R_m \frac{\partial \beta}{\partial X} + 2\pi j R_m \frac{1}{1-g} \beta = 0$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial X} = \frac{\gamma}{\varepsilon} i_u + \frac{1}{\varepsilon} \cos 2\pi(\tau - X)$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial Y} = - \frac{\gamma}{\varepsilon} i_x$$

à l'extérieur de l'entrefer.

$$\frac{\partial i_u}{\partial X} - \frac{\partial i_x}{\partial Y} = 0$$

$$\frac{\partial i_x}{\partial Y} + \frac{\partial i_x}{\partial X} = 0$$

$$\beta = 0$$

avec les conditions aux limites :

$$Y = \pm \ell/2 \quad : \quad i_u = 0 \qquad \frac{\partial i_x}{\partial Y} = 0$$

$$X = 0,\ 1 \quad \begin{cases} \delta i_u = R_{\beta m} \cdot \delta_\beta & Y < \frac{\ell}{2} \\ \delta i_u = 0 & Y > \ell/2 \end{cases}$$

$$X = \pm \ell/2 \quad \begin{cases} i_{u_1} = i_{u_2} \\ i_{x_1} = i_{x_2} \end{cases}$$

et enfin

$$\int_0^1 \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \beta(X,Y)\,dX,\ dY = 0$$

Si nous considérons le problème discrétisé, nous utiliserons les pas réduits h_r, k_r tels que $h_r = \frac{h}{\lambda}$, $k_r = \frac{k}{\lambda}$

Dans ce cas la condition de convergence

$$\mathrm{Max}(h,k) < \frac{M}{V\alpha \sqrt{1+\frac{\omega^2 h^2}{v^2}}}$$

devient

$$\lambda \, \mathrm{Max}(h_r, k_r) < \frac{M}{\frac{\sqrt{\mu_o}\, c/b}{\sigma\, e/\lambda} \sqrt{1 + h^2 \gamma \frac{4\pi^2}{(1-g)^2}}}$$

$$- \mathrm{Max}(h_r, k_r) < \frac{M\gamma}{R_m \sqrt{\frac{1+h_1^2 \times 4\pi^2}{(1-g)^2}}}$$

soit dans le cas où g est voisin de zéro

$$\mathrm{Max}(h_r, k_2) < \frac{M\gamma}{R_m}$$

où les pas h_r et k_2 caractérisent effectivement le nombre de points par lesquels nous discrétisons le problème.

Nous pouvons voir d'ailleurs sur cet exemple que la difficulté de résoluti sera d'autant plus grande que le nombre de REYNOLDS magnétique est grand, phénomène que l'on observe de manière analogue dans les problèmes d'Hydrodynamique avec le nombre de REYNOLDS.

C H A P I T R E VII

ANALYSE DES RESULTATS

Après avoir étudié théoriquement le fonctionnement du moteur nous avons vérifié expérimentalement le résultat de nos calculs. Cependant l'exactitude de nos résultats étant liée au bien fondé des hypothèses de départ, nous allons d'abord examiner le domaine de validité de nos hypothèses.

VII.1 EXAMEN DES HYPOTHESES.

1°) Saturation

Nous avons supposé l'absence de saturation dans la partie magnétique du moteur. Cette hypothèse est en général légitime, bien que l'on puisse observer une certaine saturation au niveau des dents du primaire.

2°) Direction de l'induction dans l'entrefer.

Notre seconde hypothèse est de considérer qu'en tout point de l'entrefer l'induction est orthogonale aux faces magnétiques du primaire. Cette hypothèse pouvant porter à discussion en raison de la présence du courant secondaire dans l'entrefer, nous avons effectué un tracé des lignes de champ en supposant le moteur, à entrefer lisse schématisé par deux demi -plans magnétiques ($\mu = \infty$) portant une répartition de courant sinusoidale et dans l'entrefer nous supposons une densité de courant déphasée de $\pi/2$ par rapport aux précédentes (fig. VII 1). Le champ magnétique est alors égal à :

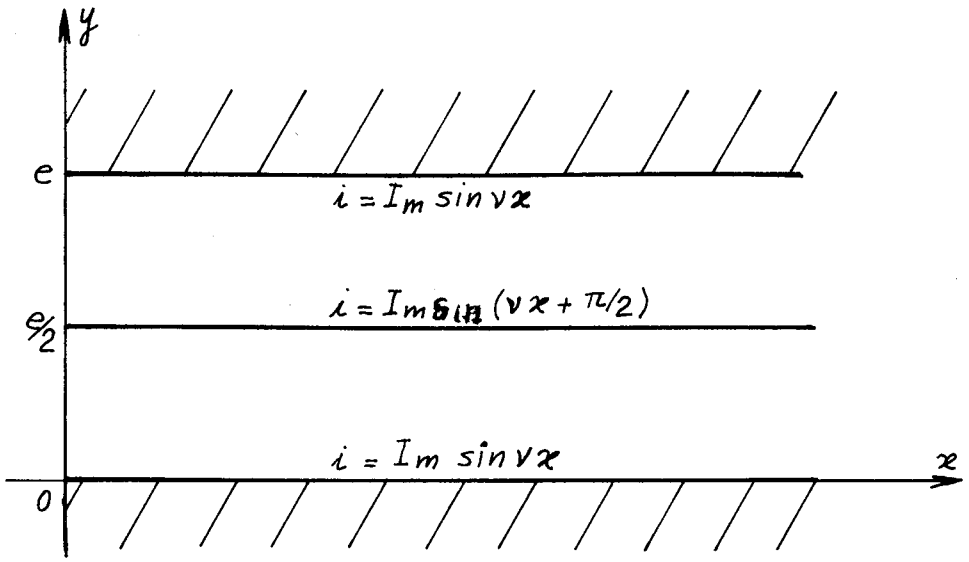


Figure VII-1

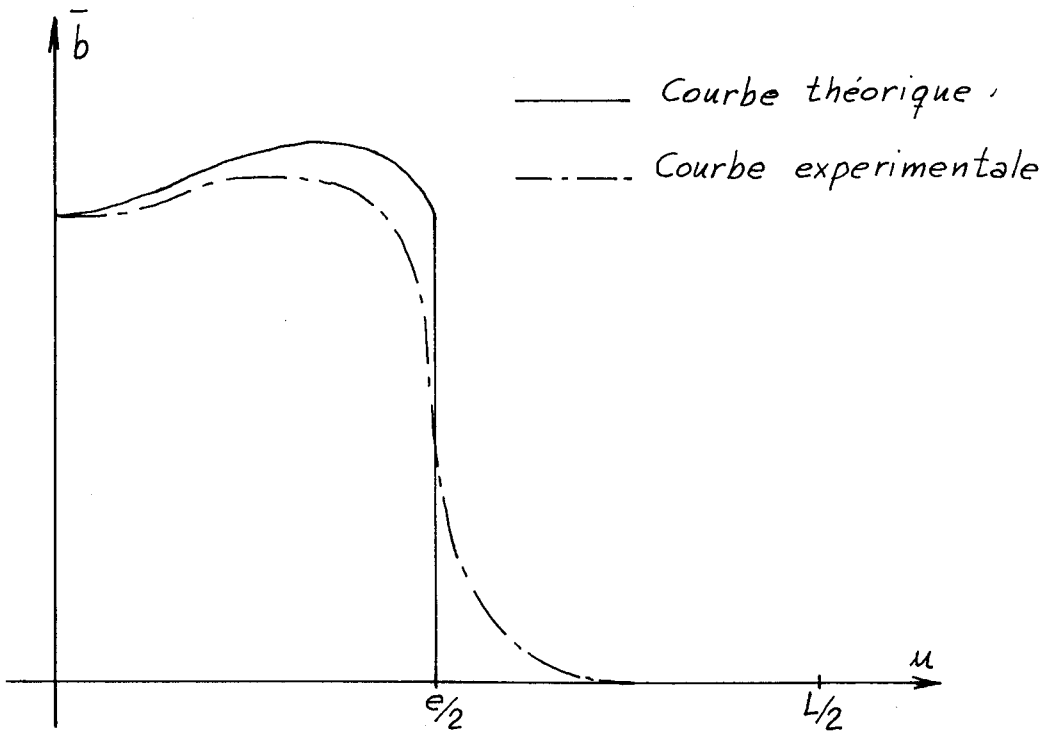


Figure VII-3 : Induction le long de l'axe où d'après notre hypothèse l'induction théorique est nulle à l'extérieur de l'entrefer

$$\P\ Hx = Im\ \frac{ch\nu e/2}{sh\nu e}\ 2 \sin \nu x\ sh(\nu(e/2 - y)) + \cos \nu x\ sh\nu\ y$$

$$Hy = Im\ \frac{ch\nu e/2}{sh\nu e}\ 2 \cos \nu x\ ch(\nu(e/2 - y)\ /\ \sin \nu x\ ch\ \nu y$$

Sur les figures VII-2a et VII-2b, nous avons représenté les lignes de champ pour deux valeurs de "l'entrefer polaire" e/λ et nous remarquons que dans les cas réalistes notre hypothèse est bien vérifiée (il est rare de trouver un moteur linéaire dont l'entrefer soit supérieur au polaire !). Si nous calculons la longueur des lignes de force, nous trouvons que pour tenir compte de ce phénomène, il faudrait remplacer l'entrefer mécanique par un entrefer apparent :

$ea = \frac{\lambda}{\pi}\ \frac{sh\ \pi e/\lambda}{ch\ \pi e/\lambda}$ ce qui lorsque $e/\lambda < 1/2$ apporte une correction de 2 à 3 %.

3° - Nullité de l'induction à l'extérieur de l'entrefer

Cette hypothèse n'est pas très bien vérifiée (figure VII-3) pour les bords latéraux et aux extrêmités. Elle l'est de moins en moins lorsque le rapport e/λ augmente. On peut, pour minimiser ces erreurs, introduire des dimensions fictives du primaires telles que le flux traversant l'entrefer soit le même dans la machine simplifiée et la machine réelle.

4° - Effet pelliculaire

Nous avons, au cours de notre étude, négligé l'effet de Peau dans le secondaire. Dans les machines que nous avons étudiées, cet effet était effectivement négligeable. De plus si cet effet est important on a alors intérêt à évider le conducteur pour obtenir une meilleure utilisation du matériau secondaire.

VII-2 ETUDE DES RESULTATS

1° - Absence d'effet d'extrêmité

La méthode d'etude au chapitre II nous a conduit à des formules littérale

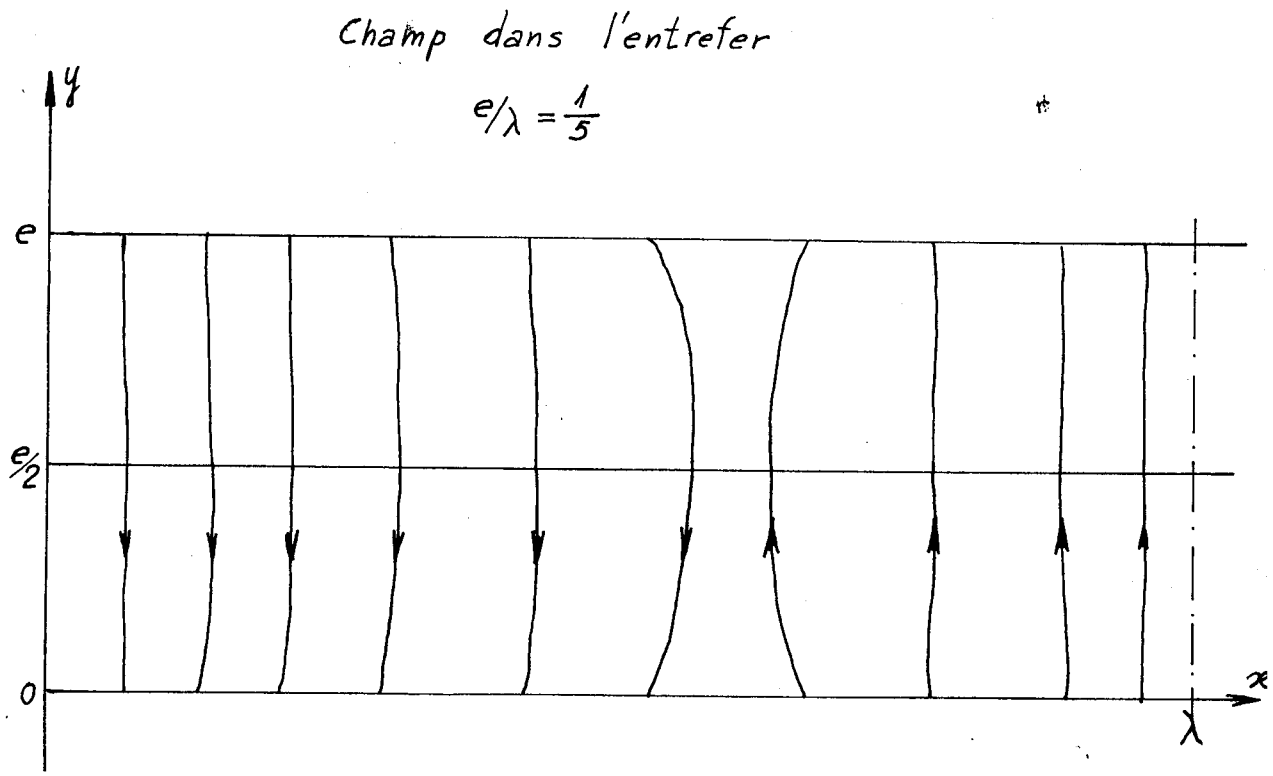


Figure VII-2 (a) : Lignes de champ dans l'entrefer, lorsque ce dernier est le 5ème du pas polaire

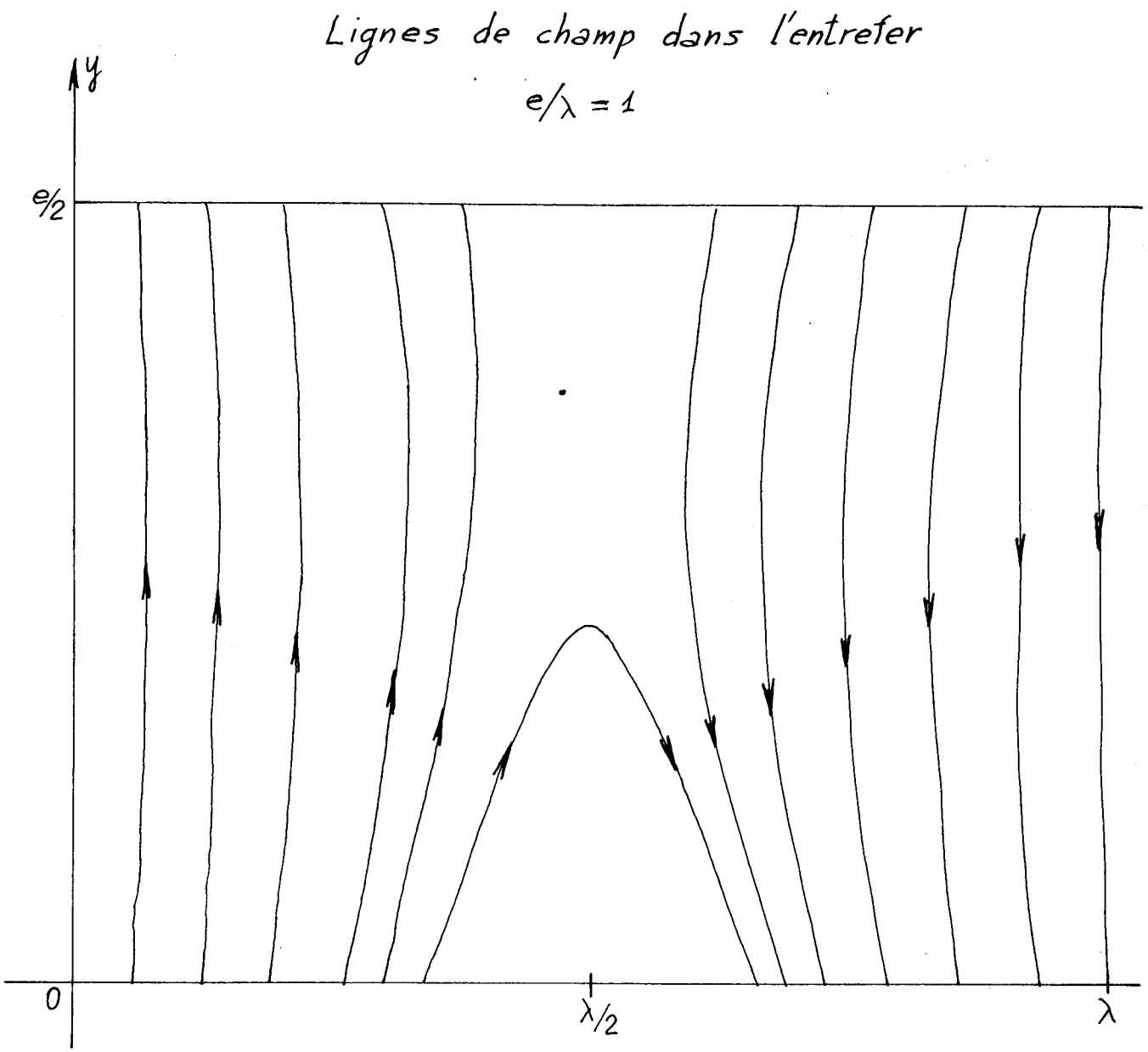


Figure VII-2 (b) : Lignes de champ magnétique dans l'entrefer, lorsque ce dernier est égal au pas polaire. (Nous n'avons représenté que la moitié de l'entrefer).

STATOR $\ell = 30$ mm RAIL $L = 63$ mm

(a) ——— Courbe donnée par théorie sans section de retour

— - — - — Courbe obtenue dans l'hypothèse de M. Poloujadoff

—•—•— Courbe obtenue par notre théorie

— — — Courbe experimentale

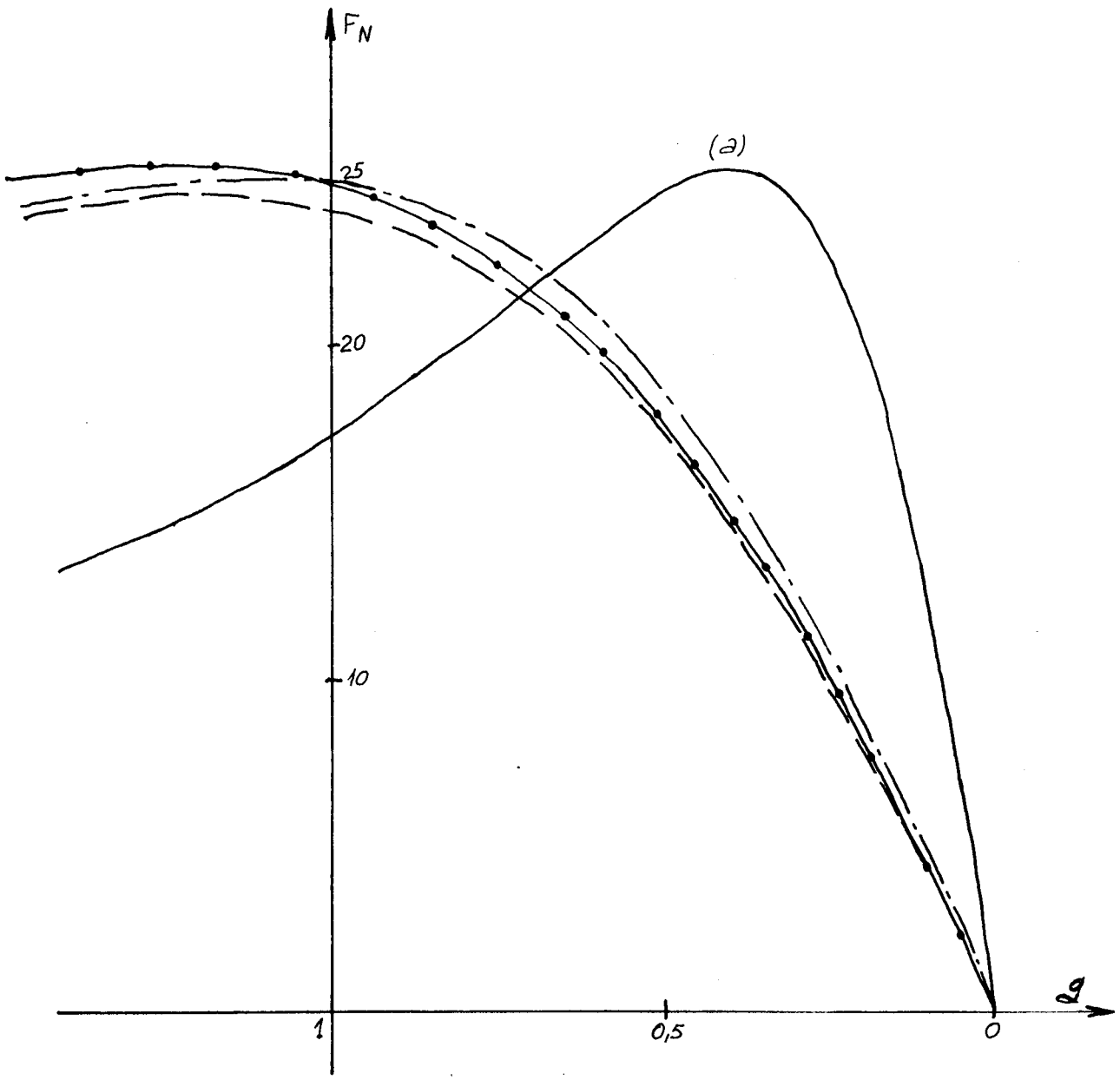


Figure VII-4 (a) : Comparaison des courbes poussée - vitesse obtenues d'après les différentes théories

STATOR $\ell = 30$ mm RAIL $L = 40$ mm

Courbe obtenue negligeant les sections de retour

Courbe obtenue d'après l'hypothèse de M. Poloujadoff

Courbe obtenue d'après nos hypothèses

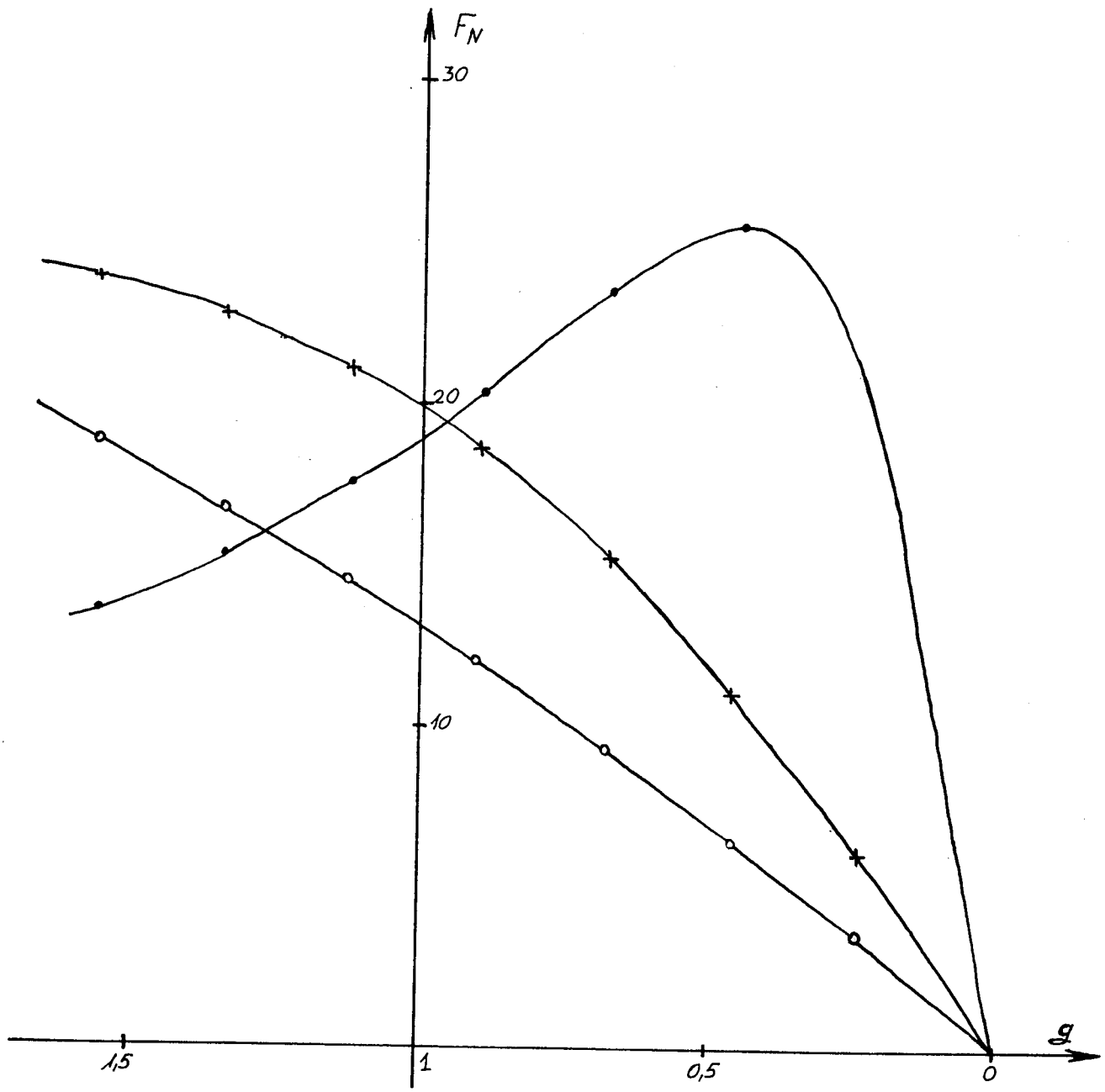


figure VII-4 (b) : Courbes poussée- vitesse obtenues d'après les différentes théories

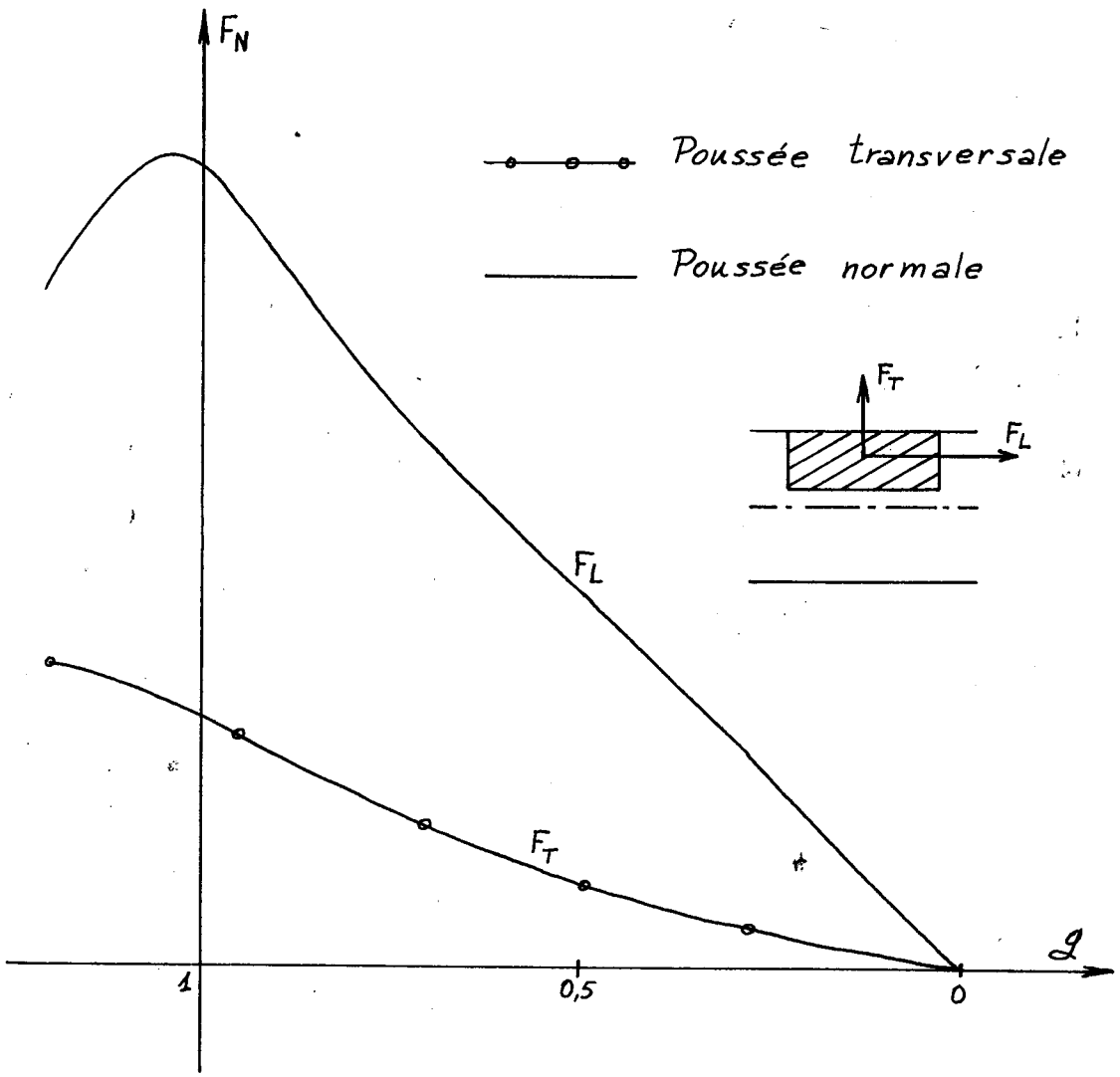


Figure VII-5 : Poussée transversale et poussée longitudinale

exprimant la poussée développée par le moteur en fonction du glissement (donc de la vitesse). Ces formules étant très compliquées nous avons eu recours à l'ordinateur pour en faire l'application numérique. Nous les avons programmées en langage FORTRAN et exploité le programme obtenu dans plusieurs cas. Nous avons alors observé que dans certains cas la correction apportée par M.POLOUJADOFF à la théorie des machines de longueur infinie permet d'obtenir d'excellents résultats. Cependant si les "sections de retour" sont pour diverses raisons relativement faibles,cette théorie s'éloigne alors de la notre, car les lignes de courant n'ont plus la forme rectangulaire supposée. (Figure VII.4)

Notre méthode d'analyse nous a permis par ailleurs, de mettre en évidence l'existence d'une poussée transversale non négligeable lorsque le secondaire n'est pas dans l'axe du primaire. Cette force, qui peut être utile dans certaines applications car elle s'oppose au poids du moteur, peut cependant dans d'autres cas, provoquer un phénomène d'instabilité. Il est donc important de pouvoir l'évaluer, en prévision d'un déplacement transversal accidentel du primaire par rapport au secondaire (fig.VII.5)

Le mesures correspondant à l'absence d'effet d'extrêmité ont été faits à l'arrêt, en tenant compte du fait que dans toutes les formules, le glissement g et l'épaisseur c du secondaire interviennent par leur produit gc. Nous simulons donc la variation de g à c constant par celle de c en gardant g constant.

2°) Etude de l'effet de bord longitudinal.

L'algorithme de la méthode exposée au chapitre V, exploité en langage ALG nous a permis de calculer, en tenant compte de l'effet de bord longitudinal, la répartition du vecteur densité de courant dans le secondaire. Nous avons effecuté la vérification expérimentale de nos calculs, le moteur étant à l'arrêt. Pour celà nous utilisons deux pointes conductrices très voisines entre lesquelles nous mesurons une différence de potentiel proportionnelle à la densité de courant au point considéré.

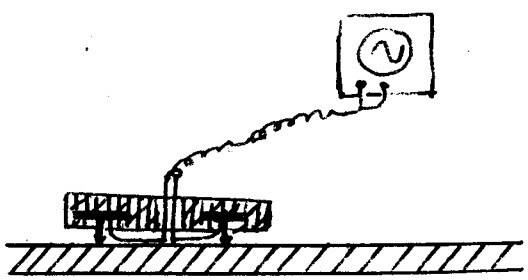
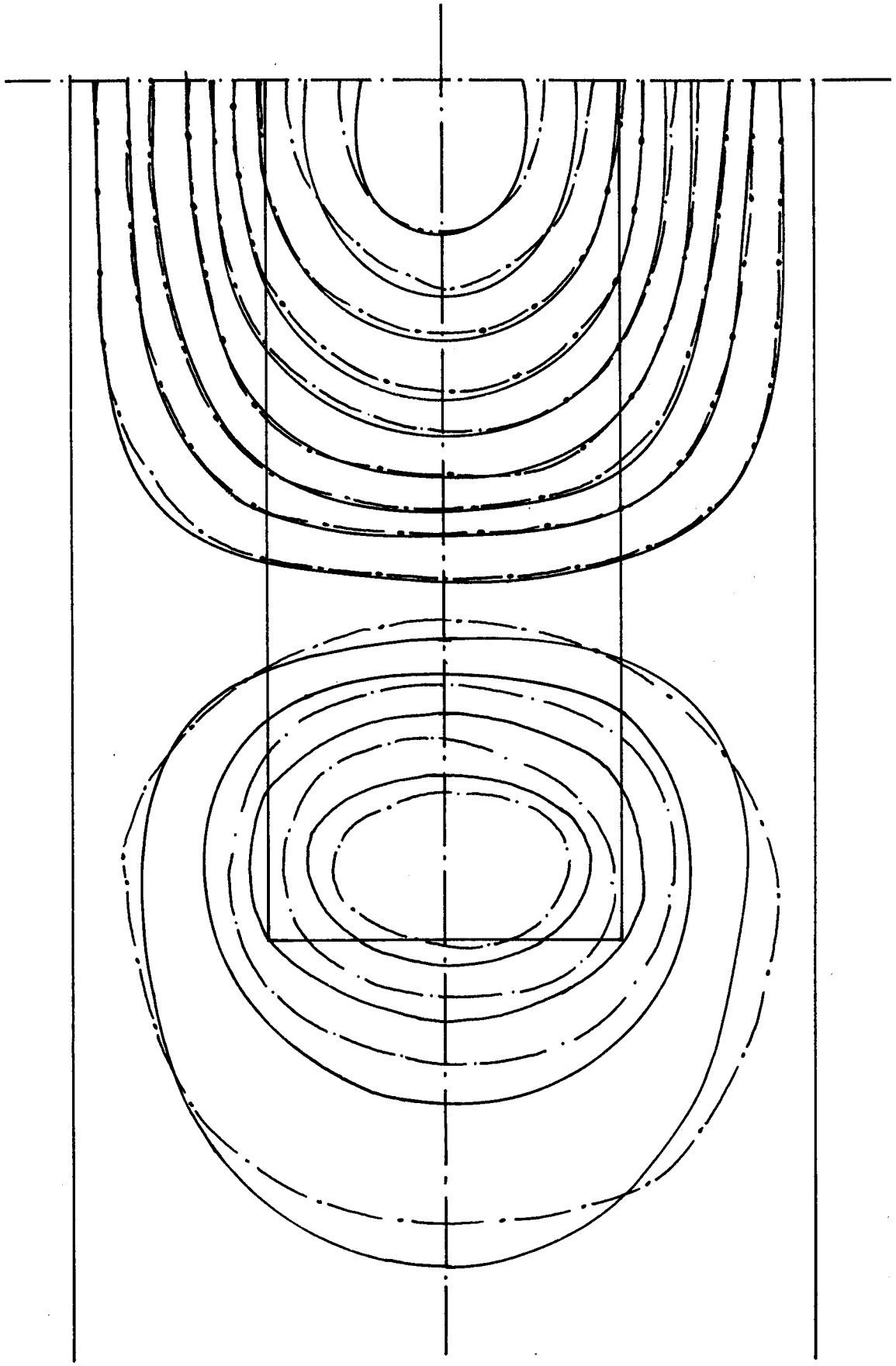
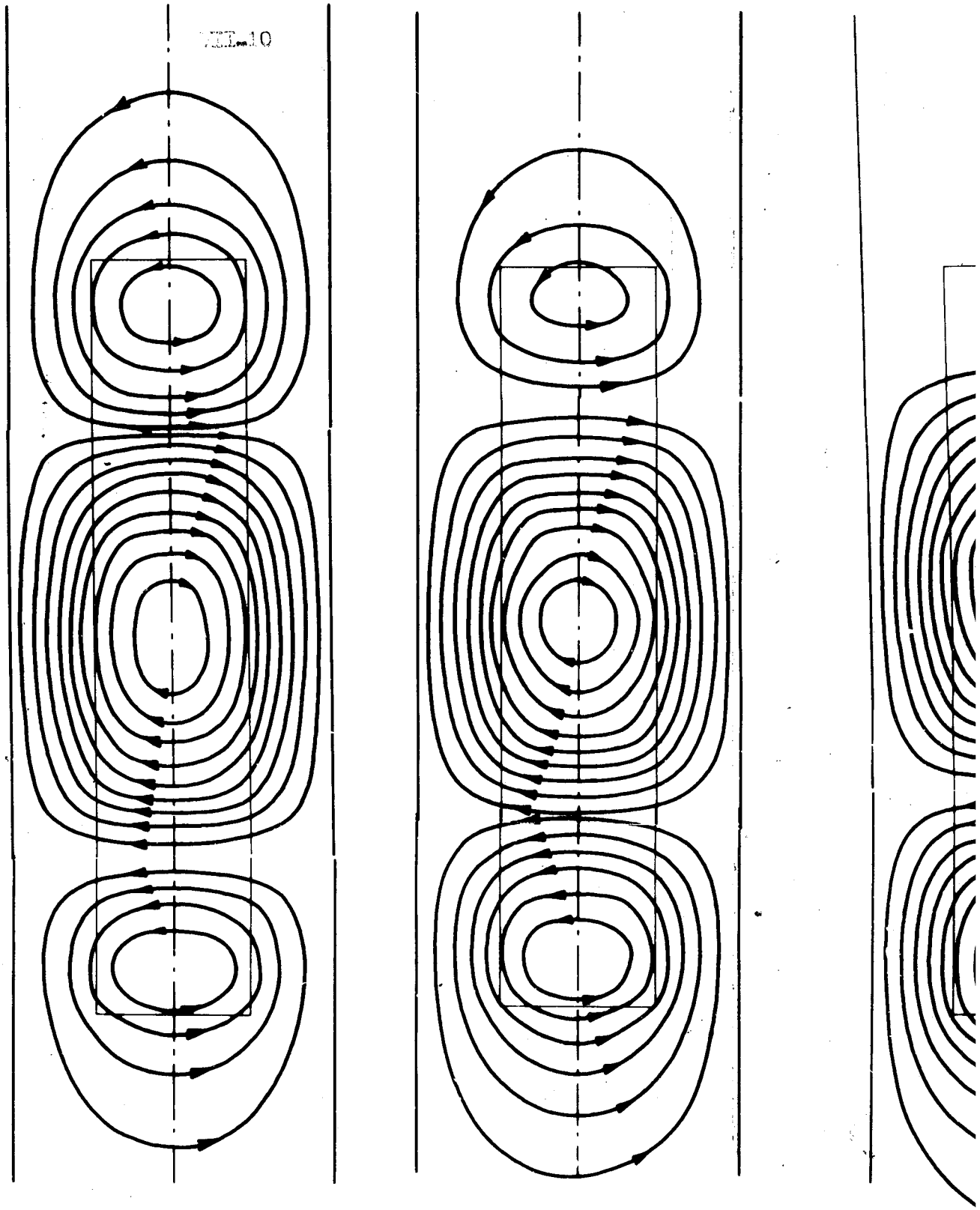
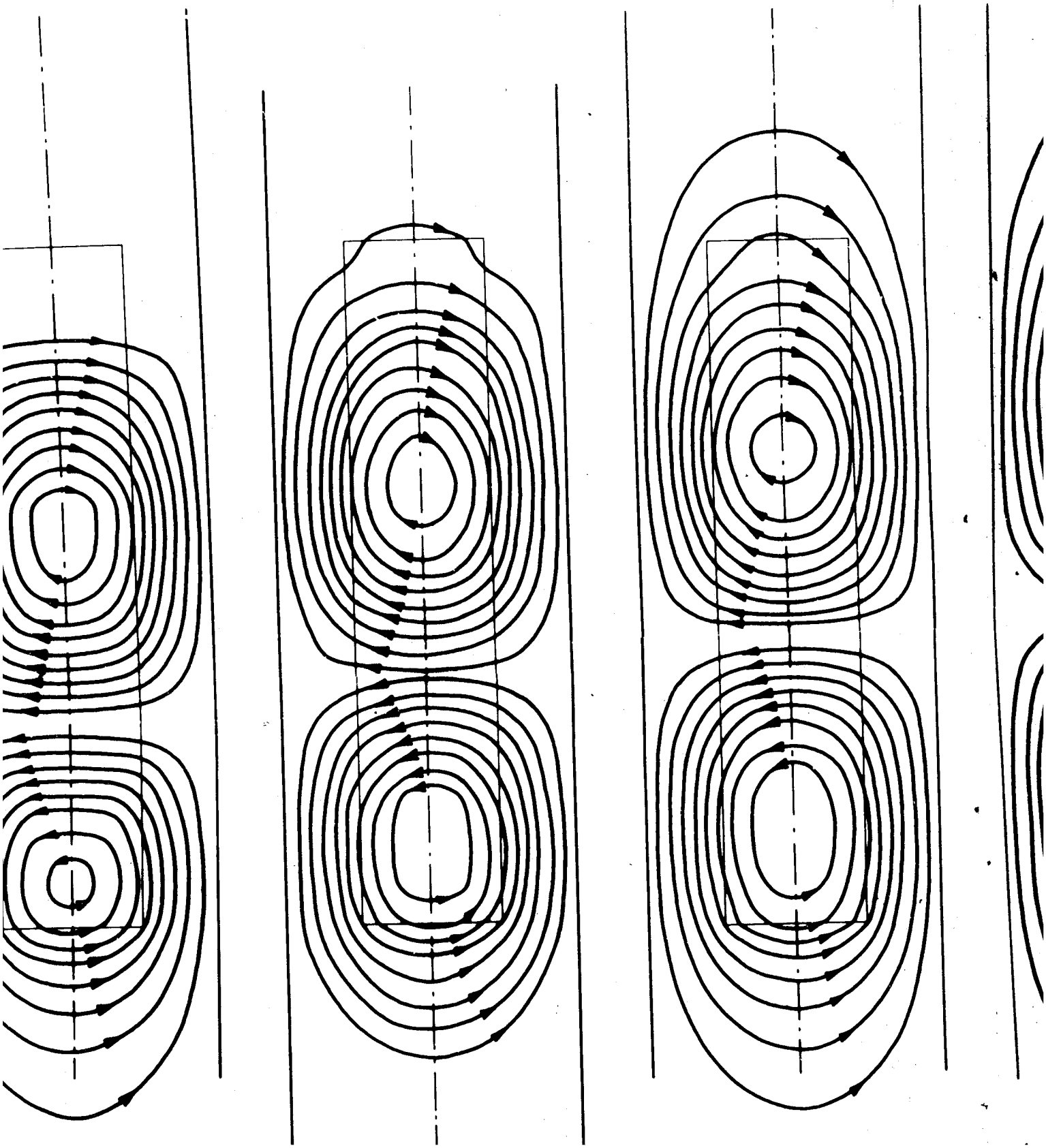
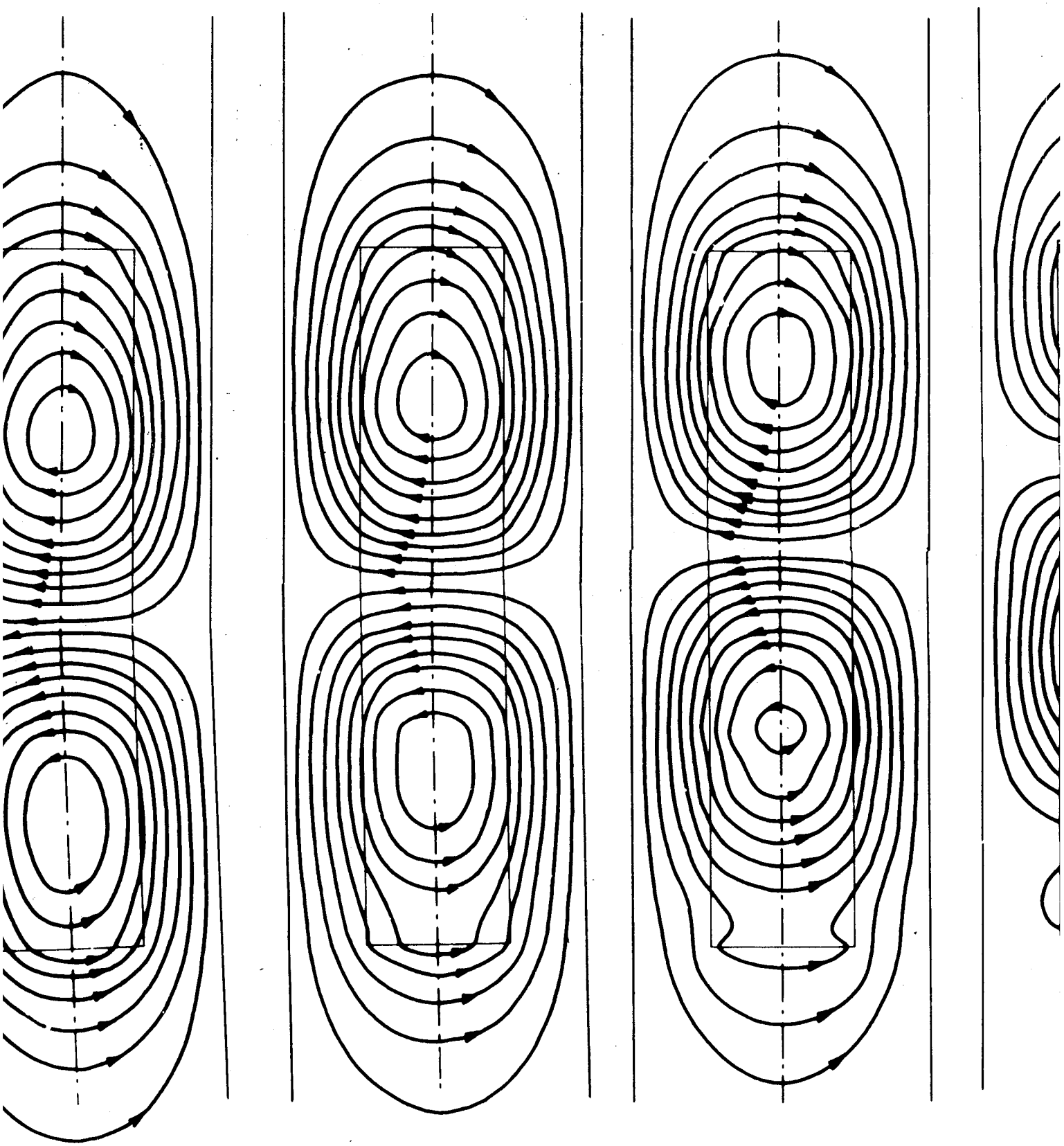


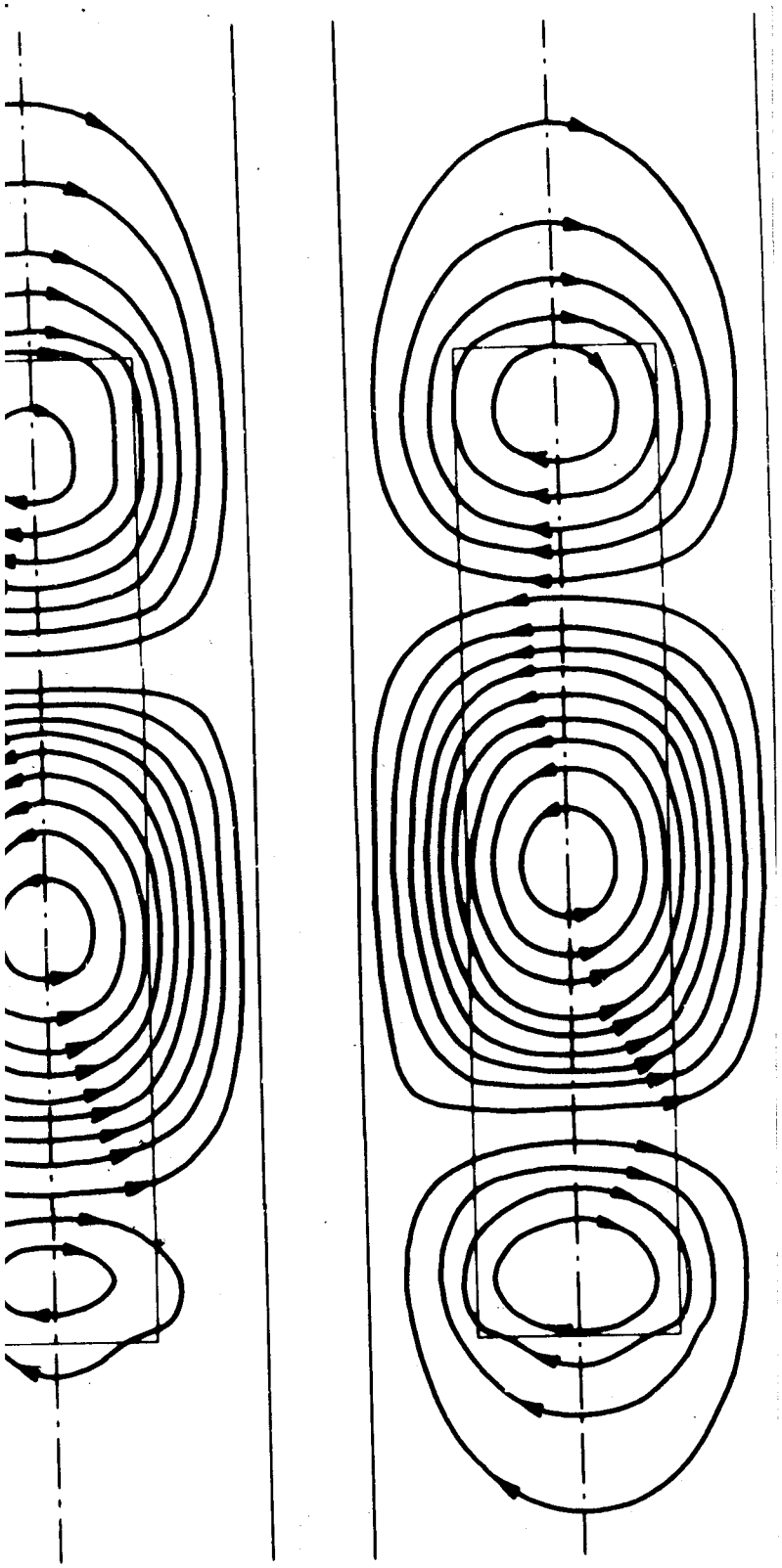
Figure VII.6











Les différences de potentiel parasites introduites par la présence de l'induction au voisinage du rail ont été réduites au maximum, par diminution de la spire formée par le rail, les pointes et les conducteurs de mesure. Les mesures étant alors reproductibles nous avons mesuré la densité de courant en un grand nombre de points, et effectué un tracé de courbes isodensités de courant que nous avons comparées à celles données par le calcul. (figure VII.7). Nous constatons que les résultats sont satisfaisants, sauf à l'extrémité du stator où les flux de fuites ont quelque peu perturbé nos mesures.

Nous avons alors exploité notre programme de manière systématique et étudié la répartition de la densité de courant à des vitesses différentes du moteur

La figure VII..8 représente les lignes d'égale densité de courant dans le secondaire, à des instants décalés de $\tau = \frac{\pi}{10\omega}$ sur une demi période pour un moteur fonctionnant à $g = 0,8$

Sur cette figure la distorsion des lignes de courant par l'effet de bord longitudinal est mis en évidence ainsi que le déplacement des tourbillons de courant qui pendant la demi période parcourent une longueur égale au pas polaire ($\lambda/2$).

La concordance satisfaisante de nos calculs théoriques avec les résultats expérimentaux obtenus nous permet de considérer notre algorithme et notre programme comme un outil intéressant d'investigation des phénomènes existants en présence de l'effet de bord longitudinal.

DEUXIEME PARTIE :

ETUDE DE L'IMPEDANCE DU MOTEUR ET DU DESEQUILIBRE DES PHASES

C H A P I T R E I

ETUDE DU MODELE ELECTRIQUE DU MOTEUR LINEAIRE

Il est possible, à partir de la connaissance de l'induction dans l'entrefer et de la densité de courant secondaire, de déterminer l'impédance du moteur en fonction de sa vitesse, donc de son glissement. Cependant, les formules obtenues sont d'une complexité telle qu'il n'est pas possible d'en tirer des renseignements pratiques par l'étude des divers paramètres qui les constituent. Dans ces conditions, il est utile à l'ingénieur électricien de posséder un schéma équivalent où l'influence des divers paramètres apparaît plus clairement.

Lors de l'étude des moteurs linéaires ou des dispositifs magnétohydrodynamiques à veine liquide et champ glissant, de nombreux auteurs [9], [44], [45] ont proposé des "schémas équivalents". Ces schémas équivalents plus ou moins compliqués étaient analogues à celui de la figure I-1 et faisaient intervenir des éléments à constantes localisées. Or POLOUJADOFF et IVANES ont démontré que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une machine absorbe le même courant qu'un tel schéma, est que son impédance soit une fonction homographique de son glissement. Cette condition était effectivement remplie dans les études précédemment citées où les auteurs supposaient une distribution

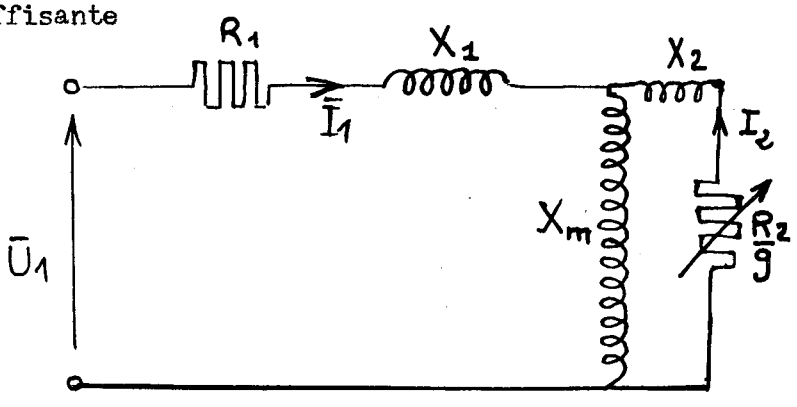


Fig I-1

idéalisée de la densité de courant secondaire. Si l'on tient compte de la répartition en nappe de la densité de courant secondaire cette condition n'est pas vérifiée et il n'est plus possible de représenter la machine par un tel schéma.

Dans ce chapitre nous allons montrer qu'il est cependant encore possible d'obtenir un schéma équivalent mais ce schéma comportera un élément à constantes réparties. Cet élément pourra d'ailleurs être remplacé dans une réalisation pratique par un ensemble de cellules à constantes localisées, analogues à celui de la représentation quadripolaire des lignes de transport d'énergie.

Afin de conserver le maximum de généralités à notre étude en vue de son application aux dispositifs magnétohydrodynamiques à veine liquide et champ glissant, nous considérerons une machine générale analogue à celle représentée sur la figure II.2. Nous supposons que la partie centrale située dans l'entrefer, d'épaisseur c est définie entre les ordonnées ℓ_1 et ℓ_2. Elle sera constituée d'un matériau homogène dont la résistivité est ρ_x dans le sens $\vec{ox}$ et ρ_u dans le sens $\vec{ou}$ (nous considérons en fait une résistivité tensorielle du secondaire). Les sections de retour ont une épaisseur c_i ($i = 1,2$) et une résistivité tensorielle (ρ_{xi}, ρ_{ui}) différentes de celles de la partie centrale. Nous supposons en outre que le secondaire est défini entre les ordonnées $u \pm L/2$ et nous notons λ la longueur du double pas polaire.

Enfin nous négligeons l'effet de bord longitudinal ce qui est possible si la machine à un pas polaire suffisamment long ou si elle est constituée de plusieurs pas polaires juxtaposés.

I.1 ETUDE DES EQUATIONS SECONDAIRES

Sans ces conditions en utilisant les hypothèses de la première partie sur l'induction et les notations définies sur la figure I.2, les équations de Maxwell s'écrivent en régime permanent :

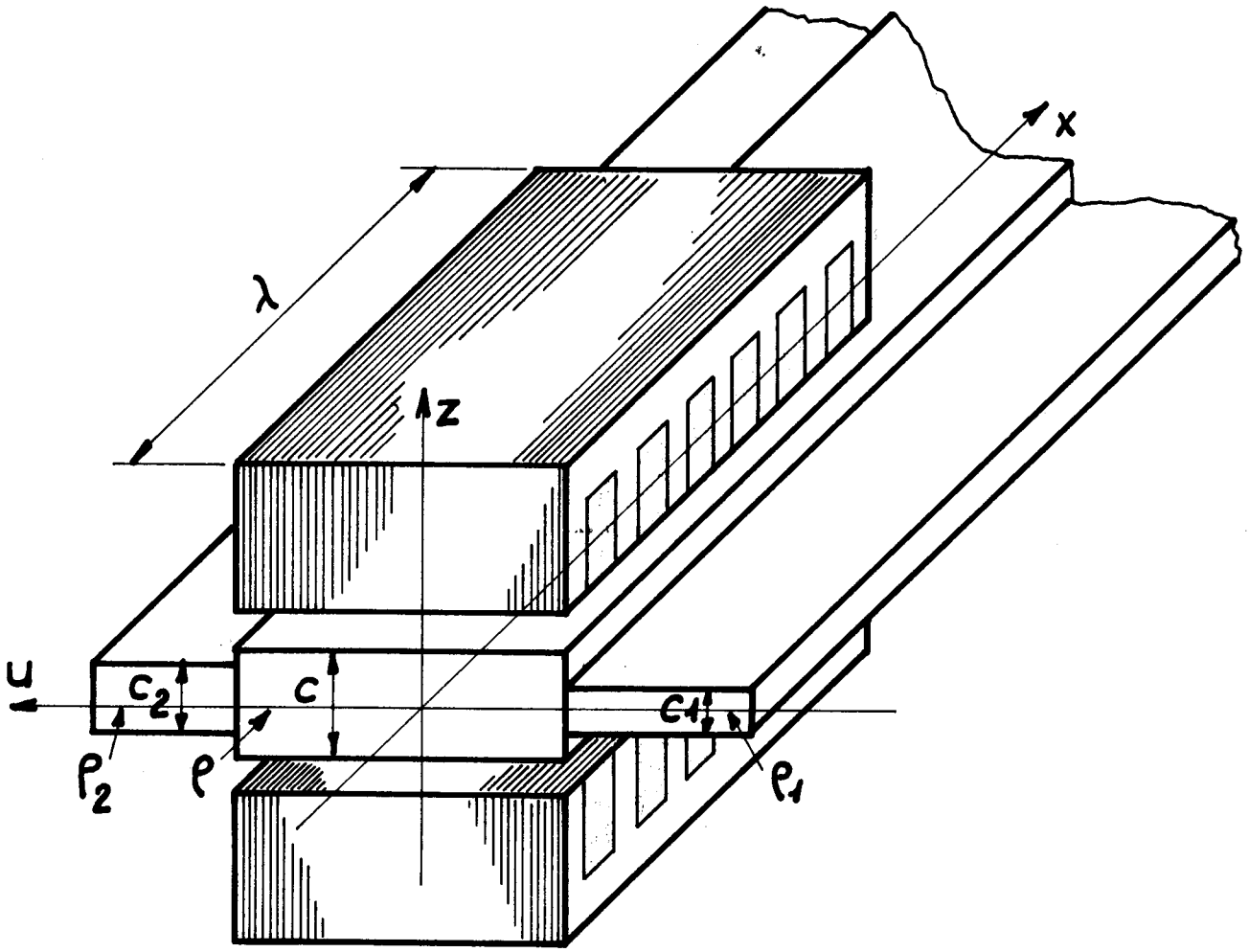


Fig I-2 - Machine Générale

à l'intérieur de l'entrefer

$$\rho_u \frac{\delta \overline{J}_u}{\delta x} - \rho_x \frac{\delta \overline{J}_x}{\delta u} - v \frac{\delta \overline{b}}{\delta x} - j\omega \overline{b}$$

$$\frac{e}{\mu_o} \frac{\delta \overline{b}}{\delta x} = c \overline{J}_u + \overline{J}_p$$

$$\frac{\delta J_u}{\delta u} + \frac{\delta J_x}{\delta x} = 0$$

à l'extérieur de l'entrefer

$$\rho_{u_1} \frac{\delta J_{u_1}}{\delta x} - \rho_{x_1} \frac{\delta J_{x_1}}{\delta u} = 0$$

pour $-\frac{L}{2} < u < \ell_1$

α)

$$\frac{\delta J_{u_1}}{\delta u} + \frac{\delta J_{u_1}}{\delta x} = 0$$

$$\rho_{u_2} \frac{\delta J_{u_2}}{\delta x} - \rho_{x_2} \frac{\delta J_{x_2}}{\delta u} = 0$$

β)

pour $\ell/2 < u < L/2$

$$\frac{\delta J_{u_2}}{\delta u} + \frac{\delta J_{x_2}}{\delta u} = 0$$

avec les conditions de transmission : (i = 1,2)

$$c\, J_u(\ell_i,x) = c_i\, J_{u_i}(\ell_i,x)$$

$$\rho\, J_x(\ell_i,x) = \rho_{x_i}\, J_{u_i}(\ell_i,x)$$

Après transformation par dérivation et élimination, ces équations deviennent en tenant compte de $\frac{\partial}{\partial x} = -j\nu$

$$\rho_u\left(\frac{\partial^2 \bar{J}_u}{\partial x^2} + \frac{\rho_x}{\rho_u}\,\frac{\partial^2 \bar{J}_u}{\partial u^2}\right) - j\,\frac{g\omega\mu_o}{e}\,(c\,\bar{J}_u + \bar{J}_p) = 0$$

$$\bar{b} = \frac{\mu_o}{\nu e}\,(c\,\bar{J}_u\,(u,x+\lambda/4) + \bar{J}_p(x+\lambda/4))$$

$$\frac{\partial^2 J_{u_1}}{\partial x_2} + \frac{\rho_{x_1}}{\rho_{u_1}}\,\frac{\partial^2 J_{u_1}}{\partial u^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 J_{u_2}}{\partial x^2} + \frac{\rho_{x_2}}{\rho_{u_2}}\,\frac{\partial J_{u_2}}{\partial u_2} = 0$$

La forme de ces équations nous conduit [ ] à poser par changement de variable :

$$y = \sqrt{\frac{\rho_u}{\rho_x}}\,u = \alpha u, \quad y_1 = \sqrt{\frac{\rho_{u_1}}{\rho_{x_1}}}\,u = \alpha_1 u, \quad y_2 = \sqrt{\frac{\rho_{u_2}}{\rho_{x_2}}}\,u = \alpha_2 u$$

et nous obtenons :

$$(I1) \qquad \rho_u\left(\frac{\partial^2 \bar{J}_u}{\partial y^2} - \nu^2 \bar{J}_u\right) - j\,\frac{g\omega\mu_o}{e}\,(c\,\bar{J}_u + \bar{J}_p) = 0$$

$$(I2) \qquad \bar{b} = \frac{\mu_o}{\nu e}\,(c\,\bar{J}_u(y/\alpha,\ x + \lambda/4) + \bar{J}_p(x + \lambda/4))$$

$$(I3) \qquad \frac{\partial^2 J_{u_1}}{\partial y_1^2} - \nu^2 \bar{J}_{u_1} = 0$$

$$(I4) \qquad \frac{\partial^2 \bar{J}_{u_2}}{\partial y_2^2} - \nu^2 \bar{J}_{u_2} = 0$$

$$(I5) \qquad c\, \bar{J}_u (\sigma_i \ell_i, x) = c_i \bar{J}_u (\sigma_i \ell_i, x)$$

$$(I6) \qquad \rho_x \bar{J}_x (\sigma_i \ell_i, x) = \rho_{x_i} \bar{J}_x (\alpha_i \ell_i, r)$$

Notre but n'est pas ici de résoudre ces équations mais de les relier aux grandeurs caractéristiques de l'alimentation primaire.

§II.2 CALCUL DE LA TENSION AU X BORNES DE L ENROULEMENT PRIMAIRE.

L'enroulement de la phase 1 du primaire parcouru par un courant d'intensité $i_1 = i_m \cos \omega t$ crée dans l'entrefer une induction :

$$b_1 = \frac{k\mu_o}{e} i_m \cos \omega t \cos(\nu x - 2\pi/3)$$

de même les enroulements des phases 2 et 3 créent les inducteurs

$$b_2 = \frac{k\mu_o}{e} i_m \cos(\omega t - \frac{2\pi}{3}) \cos(\nu x - 4\pi/3)$$

$$b_3 = \frac{h\mu_o}{e} i_m \cos(\omega t + 2\pi/3) \cos \nu x$$

l'ensemble de l'enroulement primaire crée donc une induction

$$b_p = \frac{3}{2} \frac{k\mu_o}{e} i_m \cos(\omega t - \nu x + 2\pi/3)$$

à laquelle correspond la force magnétomotrice primaire

$$J_p = \frac{3}{2} \frac{k\nu}{e} i_m \cos(\omega t - \nu x + 7\pi/c)$$

Le flux total ϕ_1 traversant l'enroulement de la phase 1 du primaire peut être calculé par l'énergie de couplage $\phi_1 i_1 = \frac{1}{\mu_o} \iiint b_1 \times b$ l'intégrale étant étendue au volume total de l'entrefer soit

$$\phi_1 i_1 = \frac{e}{\mu_o} \times \frac{k\mu_o}{e} i_m \cos \omega t \int_{\ell_1}^{\ell_2} du \int_0^{\lambda} \cos(\nu x - 2\pi/3) \times b \, dx$$

Or l'induction totale dans l'entrefer est $b = b_m(u) \cos(\omega t - \nu x + \varphi(u))$

d'où

$$\phi_1 = k \int_{\ell_1}^{\ell_2} du \int_0^{\lambda} \cos(\nu x - 2\pi/3) \cos(\omega t - \nu x + \varphi(u)) du$$

Le produit de cosinus décomposé en somme produit un terme en cos $2\nu x$ dont l'intégrale est nulle et un terme indépendant de x, d'où

$$\phi_1 = \frac{k\lambda}{2} \int_{\ell_1}^{\ell_2} b_m(u) \cos(\omega t - 2\pi/3 + \varphi(u) du$$

soit

$$\phi_1 = \frac{k\lambda}{2} \int_{\ell_1}^{\ell_2} b(u, \lambda/3, t) du$$

La tension aux bornes de la phase 1 s'écrit alors

(I7) $$U_1 = R_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + \frac{d\phi_1}{dt}$$, où R_1 est la résistance de l'enroulement et L_1 son inductance propre. En régime permanent l'équation s'écrit :

$$\bar{U}_1 = (R_1 + j\omega L_1) I_1 + j\omega \phi_1 \quad \text{soit}$$

$$\bar{U}_1 = (R_1 + j\omega L_1) \bar{I}_1 + j \frac{\omega k \lambda}{2} \int_{\ell_1}^{\ell_2} \bar{b}(u, \lambda/3) du$$

ou

$$\bar{U}_1 = (R_1 + j\omega L_1) \bar{I}_1 + j \frac{\omega k \lambda}{2\sigma} \int_{\ell_1 \sigma}^{\ell_2 \sigma} \bar{b}(y/\sigma, \lambda/3) dy$$

soit en tenant compte de (I2)

(I8) $$U_1 = (R_1 + j\omega L_1) I_1 + j\omega \frac{k\lambda\mu_o}{2\sigma e} \int_{\ell_1}^{\ell_2} \left(\frac{c}{\nu} \bar{J}_u(y/\sigma, 7\lambda/12) + \frac{\bar{J}_p}{\nu}(7\lambda/12) \right) du$$

§I-3 EQUATIONS DU SCHEMA EQUIVALENT

Reprenons l'équation (I1) divisée par g(supposé non nul); elle devient:

$$(I9)\qquad \frac{\rho_u}{g}\left(\frac{\partial^2 \bar{J}_u}{\partial y^2} - \nu^2 \bar{J}_u\right) - j\omega\frac{\mu_o}{e}\left(c\,\bar{J}_u + \bar{J}_p\right)$$

Cette équation entraine (la réciproque n'est pas vraie mais nous n'en avons pas besoin) :

$$\frac{k\lambda\rho_u}{2gc\alpha}\int_{\ell_1\alpha}^{\ell_2\alpha}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{c}{\nu}\bar{J}_u\right) - \nu^2\left(\frac{c}{\nu}\bar{J}_u\right)\right)du - j\omega\frac{k\lambda\mu_o}{2\alpha e}\int_{\ell_1\alpha}^{\ell_2\alpha}\left(\frac{c}{\nu}\bar{J}_u + \frac{1}{\nu}\bar{J}_p\right)du$$

de même les équations (I3) et (I4) entrainent

$$\frac{k\lambda\rho_{u_1}}{2\alpha_1 gc_1}\int_{-\frac{L_1}{2}}^{\ell_1\alpha}\left(\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}\left(\frac{c_1}{\nu}\bar{J}_{u_1}\right) - \nu^2\left(\frac{c_1}{\nu}\bar{J}_{u_1}\right)\right)du = 0$$

$$\frac{k\lambda\rho_{u_2}}{2\alpha_2 gc_2}\int_{\ell_2}^{\frac{L_2}{2}\alpha}\left(\frac{\partial^2}{\partial y_2^2}\left(\frac{c^2}{\nu}\bar{J}_{u_2}\right) - \nu^2\left(\frac{c^2}{\nu}\bar{J}_{u_2}\right)\right)du = 0$$

et la somme de ces trois dernières équations s'écrit :

$$(I10)\qquad \frac{k\lambda\rho_u}{2\alpha gc_1}\int_{-\frac{\ell}{2}\alpha}^{\ell_2\alpha}\left(\frac{\partial^2}{\partial y_2}\left(\frac{c_1}{\nu}\bar{J}_{u_1}\right) - \nu^2\left(\frac{c_1}{\nu}\bar{J}_{u_1}\right)\right)dy_1 - \frac{k\lambda\rho_u}{2\nu gc}\int_{\ell_1\alpha}^{\ell_2\alpha}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{c}{\nu}\bar{J}_u\right)\right.$$

$$\left.-\nu^2\left(\frac{c}{\nu}\bar{J}_u\right)\right)dy - \frac{k\lambda\rho_{u_2}}{2\alpha gc_2}\int_{\ell_2\alpha}^{\frac{L_2}{2}\alpha}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{c_2}{\nu}\bar{J}_{u_2}\right) - \nu^2\left(\frac{c_2}{\nu}\bar{J}_{u_2}\right)\right)du$$

$$+j\omega\frac{k\lambda\mu_o}{2\alpha e}\int_{\ell_1\alpha}^{\ell_2\alpha}\left(\frac{c}{\nu}\bar{J}_u + \frac{\bar{J}_p}{\nu}\right)dy. = 0$$

Cette équation vérifiée quel que soit x, l'est en particulier pour $x = 7\lambda/12$ et le quatrième terme de I10 est identique au second terme de I8.

Or

$$\frac{J_p}{\nu}(7\lambda/12) = \frac{3}{2} k \quad i_m \cos \omega t = \frac{3}{2} k i_1 \quad , \text{ d'où}$$

$$\frac{1}{\nu} \bar{J}_p(7\lambda/12) = \frac{3}{2} k \bar{I}_1 \text{ et nous posons :}$$

$$\frac{3}{2} k\bar{I}_2 \qquad \begin{cases} \dfrac{c_1}{\nu} \bar{J}_{u_1}(y/\alpha, 7\lambda/12) \text{ pour } -\dfrac{L\alpha}{2} < y < \ell_2\alpha \\ \dfrac{c}{\nu} \bar{J}_u(y/\alpha, \dfrac{7\lambda}{12}) \text{ pour } \ell_1\alpha < y < \ell_2\alpha \\ \dfrac{c_2}{\nu} \bar{J}_u(y/\alpha, \dfrac{7\lambda}{12}) \text{ pour } \ell_2\alpha < y < \dfrac{L\alpha}{2} \end{cases}$$

Ce qui, d'après les conditions (I5) et (I6) de transmission permet de définir une fonction $\bar{I}_2(y)$ continue pour tout y de $-L\alpha/2$ à $L\alpha/2$. Les équations (I8) et (I10) s'écrivent alors

$$(I8) \qquad U_1 = (R_1 + j\omega L_1)\bar{I}_1 + j\omega \frac{3}{4} \frac{k^2\lambda\mu_o}{\alpha e} \int_{\ell_1\alpha}^{\ell_2\alpha} (\bar{I}_1 + \bar{I}_2)du$$

$$(I11) \qquad 0 = -\frac{3}{4} \frac{k^2\lambda\rho_{u_1}}{\alpha_1 g c_1} \int_{-\frac{L\alpha}{2}}^{\ell_1\alpha} (\frac{d^2 I_2}{a y_2^2} - \nu^2 \bar{I}_2)dy_2 - \frac{3}{4} \frac{k^2\lambda\rho_u}{\alpha g c} \int_{\ell_1\alpha}^{\ell_2\alpha} (\frac{d\bar{I}_2}{dy^2} - \nu^2 \bar{I}_2)dy$$

$$- \frac{3}{4} \frac{k^2\lambda\rho_{u_2}}{\alpha_2 g c_2} \int_{\ell_2\alpha}^{\frac{L}{2}\alpha} (\frac{d^2\bar{I}_2}{a y_2^2} - \nu^2 \bar{I}_2)dy + j\omega \frac{3}{4} \frac{k^2\lambda\mu_o}{\alpha e} \int_{\ell_1\alpha}^{\ell_2\alpha} (\bar{I}_1 + \bar{I}_2)du$$

§I.4 INTERPRETATION DES EQUATIONS.

L'ensemble des équations (I8) et (I11) est susceptible d'une interprétation physique.

a) $(R_1 + j\omega L_1)I_1$ est la chute de tension ohmique et inductive dûe à l'enroulement primaire de la phase 1.

b) $j\omega \frac{3}{4} \frac{k^2\lambda\mu_o}{\alpha e} \int_{\ell_1\alpha}^{\ell_2\alpha} (\bar{I}_1 + \bar{I}_2)dy$ représente une chute inductive de tension provoquée par une inductance répartie de $\ell_1\alpha$ à $\ell_2\alpha$ et égale à

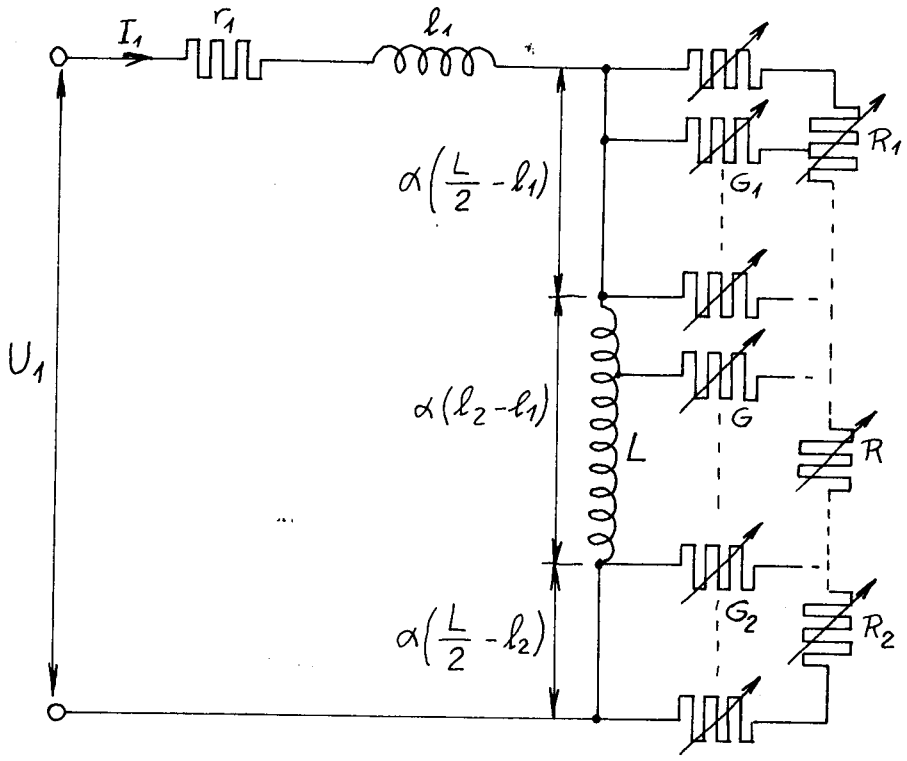
$\frac{3}{4} \frac{k^2\lambda\mu_o}{\alpha e} = \frac{3}{4} \frac{\rho_u}{\rho_x} \frac{k^2\lambda\mu_o}{e}$ HENRYS par unité de longueur.

c) $\frac{3}{4} \frac{k^2\lambda\rho_u\nu^2}{\alpha gc} \int_{\ell_1\alpha}^{\ell_2\alpha} \bar{I}_2\, dy$ représente la chute ohmique totale dûe à une résistance répartie de $\ell_1\alpha$ à $\ell_2\alpha$ de valeur $\frac{3}{4} \frac{k^2\lambda\rho_u\nu^2}{\alpha gc} = \frac{3}{4} \rho_x \rho_u \frac{h^2\lambda\nu^2}{gc}$ ohms par unité de longueur.

d) $\frac{3}{4} \frac{k^2\lambda\rho_u}{\alpha gc} \int_{\ell_1\alpha}^{\ell_2\alpha} \frac{d}{dy} \left(\frac{dI_2}{dy} \right) dy$ représente la chute ohmique totale dûe à des densités de courant transversales d'intensité $-\frac{dI_2}{dy}$, circulant entre les points d'abscisses y et y+dy dans une conductance répartie de $\ell_1\alpha$ à $\ell_2\alpha$ et de valeur $\frac{4}{3} \frac{\alpha gc}{k^2\lambda\rho_u} = \frac{4}{3} \frac{gc}{k^2\lambda \rho_x \rho_u}$ SIEMMENS par unité de longueur.

e) Les termes en c_1, c_2, ρ_{u_1}, ρ_{u_2} trouvent une interprétation identique à celle donnée en b et c avec évidemment des valeurs différentes pour les constantes.

Ces considérations nous conduisent naturellement à construire le schéma équivalent équivalent de la figure (I2); ce schéma équivalent très général et applicable, sous certaines conditions, à un dispositif magnétohydrodynamique ,



$$R_1 = \frac{3}{4}\,\frac{K^2 \lambda\, \rho_1\, \nu^2}{g c_1} \qquad R_2 = \frac{3}{4}\,\frac{K^2 \lambda\, \rho_2\, \nu^2}{g c_2}$$

$$G_1 = \frac{4}{3}\,\frac{g c_1}{K^2 \lambda\, \rho_1} \qquad G_2 = \frac{4}{3}\,\frac{g c_2}{K^2 \lambda\, \rho_2}$$

$$R = \frac{3}{4}\,\frac{K^2 \lambda\, \rho\, \nu^2}{g c} \qquad L = \frac{3}{4}\,\frac{K^2 \lambda\, \mu_0}{\ell}$$

$$G = \frac{4}{3}\,\frac{g c}{K^2 \lambda\, \rho}$$

Figure I-3 : Schéma équivalent général

peut se simplifier lorsque l'on introduit diverses hypothèses sur les sections de retour. Lorsque les sections de retour sont des parois isolantes, celà entraine $\rho_{u_1} = \rho_{u_2} = \infty$ et l'on obtient le schéma de la figure I3. Lorsque la résistivité est isotrope il vient $\rho_x = \rho_u = \rho$ et les valeurs des constantes sont alors simplifiées.

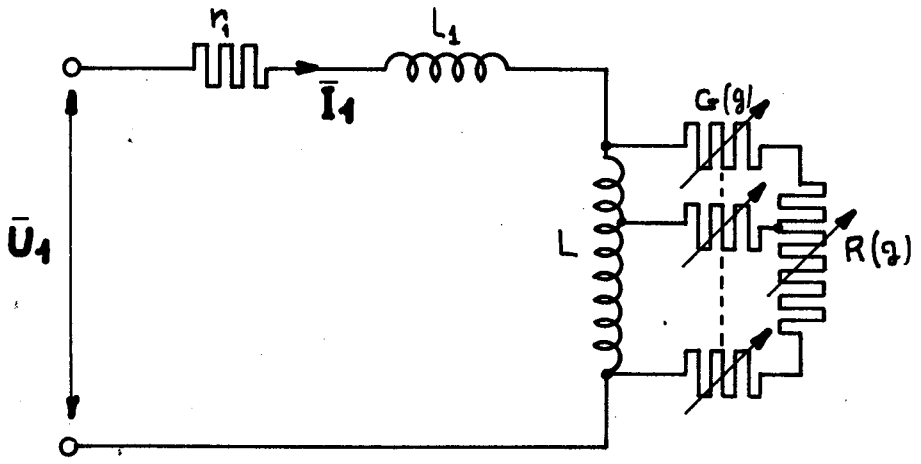


Figure I-4 : Section de retour non conductrice

Nous pensons avoir ainsi procuré, avec ce schéma équivalent à constantes réparties [48], un outil d'études et de travail utile aux ingénieurs électriciens intéressés par l'étude des moteurs linéaires et magnétohydrodynamiques à champ glissant. Néanmoins nous n'avons pas donné le moyen de calculer l'inductance L_1 qui figure dans l'équation I11, qui est l'objet des chapitres suivants.

C H A P I T R E II

DESEQUILIBRE DES COURANTS PRIMAIRES

Dans une machine rotative, les enroulements des trois phases sont symétriques. Dans un moteur linéaire le primaire est de longueur finie et l'un des phases est alors obligatoirement différentes des deux autres. Cette dissymétrie crée une différence entre les inductances propres et mutuelles des enroulements des trois phases, et un déséquilibre de l'intensité des courants d'alimentation. Ce déséquilibre est la source d'une composante fondamentalement inverse de la force magnétomotrice, composante qui crée une force de freinage préjudiciable au fonctionnement du moteur. Nous nous proposons dans ce chapitre d'établir la matrice des impédances du moteur pour chaque point de fonctionnement, ce qui nous permettra par utilisation de la théorie des composantes symétriques [21] de calculer les composantes directes et inverses de la force magnétomotrice

La matrice des impédances est déterminée par celle des inductances, les résistances étant faciles à calculer. Nous considèrerons des inductances liées à des flux de trois types différents :

a) le flux primaire à travers l'entrefer

b) le flux dû à la réaction d'induit dans l'entrefer

c) le flux de fuite sur les parties externes du primaire (la méthode d'évaluation de ce dernier flux étant distinct des autres fera l'objet du chapitre suivant).

La dissymétrie entre les enroulements des trois phases est dûe au flux de fuites des extrémités du primaire (figure II.1). Nous supposerons que l'existence de ce flux de fuite est équivalente à une augmentation de la longueur du primaire telle, que le flux ainsi obtenu soit égal au flux de fuite. Nous caractériserons cette augmentation par une longueur $k\lambda$.

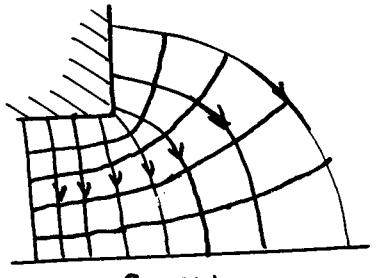


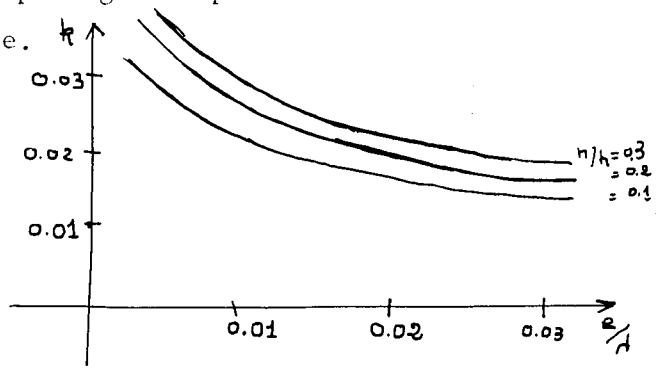
fig II 1

Cette longueur $k\lambda$ peut être déterminée de manière simple par une hypothèse sur la forme des lignes de force à l'extérieur de l'entrefer [ ] , qui nous conduits, si l'entrefer n'est pas trop large à exprimer k en fonction de la hauteur h du primaire et de l'entrefer e.

$$k\lambda = \frac{2e}{\pi} \text{ Log } \frac{\pi h + e}{e}$$

soit

$$k = \frac{2e}{\pi\lambda} \text{ Log } \frac{\pi h/\lambda + e/\lambda}{e/\lambda}$$



en utilisant les longueurs ramenées au double pas polaire. Nous avons sur la figure II2 porté les valeurs de k en fonction de e/λ pour diverses valeurs de h/λ.

Dans cette hypothèse nous allons maintenant évaluer les inductances relatives à l'induction qui règne dans l'entrefer.

II.1 CALCUL DES INDUCTANCES PRIMAIRES.

Dans les conditions ainsi définies l'induction créée par la phase 1 de l'enroulement primaire est de la forme :

$$b_1 = \frac{\gamma\mu_o}{e} i_{1m} \cos(\omega t + \varphi_1)[\cos(\nu x - 2\pi/3 + \vartheta_1]$$

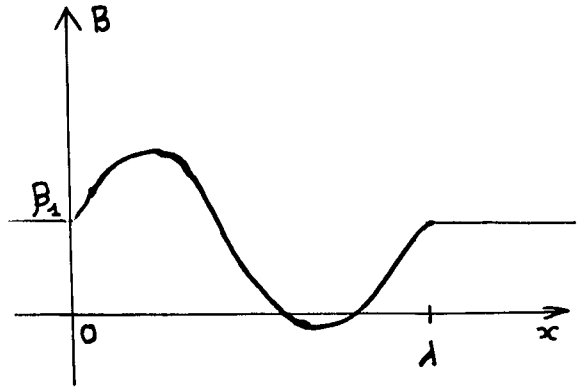


Fig II 3

le terme ϑ_1 étant introduit par la conservation du flux dans l'entrefer soit (fig.II3)

$$\int_o^\lambda b_1(x)dx + k\lambda\, b_1(\lambda) = 0$$

soit

$$\vartheta_1 = \frac{1}{2} \frac{k}{k+1}$$

Un calcul analogue pour les phases 2 et 3 permet d'écrire des inductions fondamentales créées par les trois phases du primaire

$$b_1 = \frac{\gamma\mu_o}{2e}\, i_{1m} \cos(\omega t + \varphi_1)\left[2\cos(\nu x - 2\pi/3) + \frac{k}{k+1}\right]$$

$$b_2 = \frac{\gamma\mu_o}{2e}\, i_{2m} \cos(\omega t + \varphi_2)\left[2\cos(\nu x + 2\pi/3) + \frac{k}{k+1}\right]$$

$$b_3 = \frac{\gamma\mu_o}{2e}\, i_{3m} \cos(\omega t + \varphi_3)\left[2\cos \nu x - \frac{2k}{k+1}\right]$$

REMARQUE : Lorsque les trois courants i_1, i_2, i_3 forment un système triphasé équilibré l'induction totale dans l'entrefer est :

$$b_p = b_1 + b_2 + b_3 = \frac{3}{2}\,\frac{\gamma\mu_o}{e}\, i_m\left[\cos(\omega t - \nu x + 2\pi/3) - \frac{k}{k+1}\left(\cos \omega t + \frac{2\pi}{3}\right)\right]$$

et peut se représenter sur un diagramme de FRESNEL (figure II4)

Dans ce cas il est facile de noter que $b_p(\lambda/2) / b_p(0) = \frac{2k+1}{k+1}$,

ce qui pourrait donner un moyen expérimental simple de détermination de k. Cependant la distorsion de l'induction due aux harmoniques de denture et de répartition rend cette méthode très imprécise.

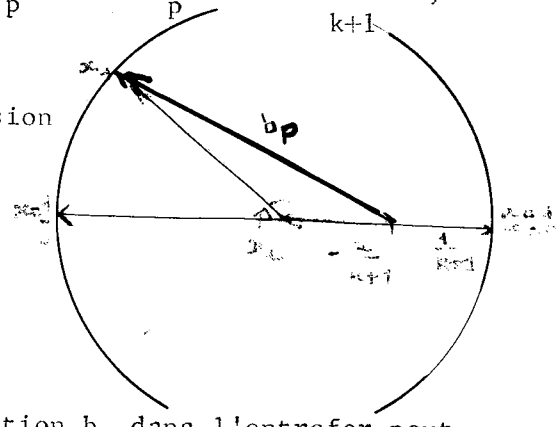


Figure II-4

L'inductance propre due au flux de l'induction b_1 dans l'entrefer peut être déterminée par l'énergie de couplage :

$$W_{11} = \frac{1}{2}\, L_1\, i_1^2 = \frac{1}{2\mu_o} \iiint_{\text{entrefer}} b_1^2\, dv$$

$$= \frac{e\ell}{2\mu_o}\left[\int_o^\lambda b_1^2\, dx + k\lambda\, b_1^2(\lambda)\right]$$

$$= \frac{e\ell}{\mu_o}\,\frac{\gamma^2\mu_o^2}{4e^2}\, i_{1m}^2 \cos^2(\omega t + \varphi_1)\left[\int_o^\lambda \left[2\cos(\nu x - \frac{2\pi}{3}) + \frac{k}{k+1}\right]^2 d\lambda + \frac{k\lambda}{(k+1)^2}\right.$$

d'où

$$L_1 = \mu_o \frac{\gamma^2}{4} \frac{\lambda \ell}{e} \frac{3k+2}{k+1}$$

L'inductance de la phase 2 et par raison de symétrie égale à L1, et L3 est déterminé de la même manière.

$$\frac{1}{2} L_3 i_3^2 = \frac{e\ell}{2\mu_o} \frac{\gamma^2 \mu_o^2}{4e^2} i_3^2 m \cos^2(\omega t + 2\pi/3 + \varphi_3) \left[\int_o^{\lambda} \left[2\cos \nu x - \frac{2k}{k+1} \right]^2 d\lambda + \frac{4k\lambda}{(k+1)^2} \right]$$

d'où

$$L_3 = \mu_o \frac{\gamma^2}{4} \frac{\lambda \ell}{e} \frac{6k+2}{k+1}$$

Lorsque k = 0 nous avons $L_1 = L_2 = L_3 = \frac{\mu_o \gamma^2}{2} \frac{\lambda \ell}{2}$

Le calcul des inductances mutuelles est effectué de la même manière

$$W_{12} = \frac{1}{2} \mu_{12} i_1 i_2 = \frac{1}{2\mu_o} \iiint_{\text{entrefer}} b_1 b_2 \, du$$

$$W_{13} = \frac{1}{2} \mu_{13} i_1 i_3 = \frac{1}{2\mu_o} \iiint b_1 b_3 \, du$$

et par intégration nous obtenons :

$$\mu_{13} = \mu_{23} = - \mu_o \frac{\gamma^2}{4} \frac{\lambda \ell}{e} \frac{3k+1}{k+1}$$

$$\mu_{12} = - \mu_o \frac{\gamma^2}{4} \frac{\lambda \ell}{e} \frac{1}{k+1}$$

et lorsque h = 0 il vient $M_{12} = M_{23} = M_{13} = - \frac{\mu_o \gamma^2}{4} \frac{\lambda \ell}{e}$

Nous pouvons alors écrire la matrice des inductances primaires à travers l'entrefer :

$$L_0 = \frac{\mu_o \gamma^2}{4} \quad \frac{\lambda \ell}{e} \begin{vmatrix} \frac{3k+2}{k+1}, & \frac{1}{k+1}, & -\frac{3k+1}{k+1} \\ -\frac{1}{k+1}, & \frac{3k+2}{k+1}, & -\frac{3k+1}{k+1} \\ -\frac{3k+1}{k+1}, & -\frac{3k+1}{k+1}, & \frac{6k+2}{k+1} \end{vmatrix}$$

II.2 CALCUL DES INDUCTANCES DUES A L'INDUCTION SECONDAIRE.

Le calcul de ces inductances nécessite la connaissance de la réaction d'induit secondaire. Ce calcul pourrait être fait avec des hypothèses du chapitre IV de la première partie mais serait alors très complexe.

Nous avons préféré le faire dans l'hypothèse de POUJADOFF [19] , et supposer que la densité de courant est transversale dans l'entrfer et longitudinale dans les sections de retour (figure II.5)

Dans ces conditions nous allons calculer chacune des inductions secondaires relatives aux trois phases. L'induction primaire étant de la forme

$$b = \frac{\gamma \mu_o}{2e} i_m \left[2 \cos(\omega t + \varphi)\cos(\nu x - X) - K \cos(\omega t + \varphi)\right]$$

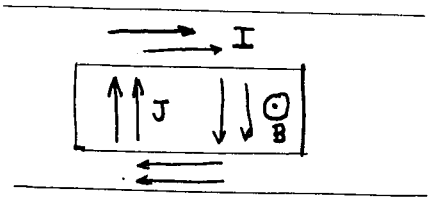


Fig II.5

Nous appelons J la densité de courant secondaire transversale

I l'intensité dans les sections de retour

B l'induction secondaire(fig.II.5)

Les équations de fonctionnement sont alors :

(1) $\frac{\partial B}{\partial x} = \frac{\mu_o}{e} c J$ (Ampère)

(2) $\frac{\partial I}{\partial x} = - c J$ (conservation)

(3) $\frac{2}{\sigma \ell} I + \frac{\partial I}{\partial x} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{dx}(b+B) + \frac{\partial}{\partial t}(b+B) \right.$ (loi d'Ohm)

Ces équations deviennent après transformation en posant $\alpha = \frac{\mu_o c}{\rho_e}$

$$\frac{\partial^3 B}{\partial x^3} - \alpha \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} - \left(\frac{2c}{\sigma \ell} \frac{\partial B}{\partial x} + \alpha \frac{\partial^2 B}{\partial x \partial t} \right) = \alpha \frac{\partial^2 b}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial^2 B}{\partial x \partial t}$$

$$\frac{\partial I}{\partial x} = -c\ J$$

$$\frac{\partial B}{\partial x} = \frac{\mu_o}{e} c\ J$$

Nous ne considérons que des solutions de régime permanent d'où en posant

$$\bar{B} = B_m\ e^{j(\omega t + \varphi)}$$

il vient

$$\frac{\partial^3 \bar{B}}{\partial x^3} - \alpha \frac{\partial^2 \bar{B}}{\partial x^2} - \left(\frac{2c}{\sigma \ell} + j\omega\alpha \right) \frac{\partial \bar{B}}{\partial x} = \alpha \frac{\partial^2 \bar{b}}{\partial x^2} + j\omega\alpha \frac{\partial \bar{b}}{\partial x}$$

avec $b = \frac{\gamma \mu_o}{2e} i_m \left[\cos(\omega t + \nu x + \varphi X) + \cos(\omega t - \nu x + \varphi + X) - K\cos(\omega t + \varphi) \right]$

somme de trois champs glissants de pulsation ν, $-\nu$, et 0

L'équation étant linéaire à coefficients constants, nous calculerons une solution particulière de la forme

$$\bar{B} = \bar{B}_+ + \bar{B}_- + \bar{B}_o$$

que nous ajouterons à la solution générale de l'équation sans second membre. L'équation caractéristique associée à l'équation sans second membre est :

$$r^3 - \alpha r^2 - \left(\frac{2c}{\sigma \ell} + j\omega\alpha \right) r = 0$$

dont les solutions sont :

$$r = 0$$

$$r = \frac{\alpha}{2} \mp \left(\frac{\nu^2 \alpha^2}{4} + \frac{2c}{\sigma \ell} + j\omega\alpha \right)^{1/2}$$

Si nous appelons D l'opérateur

$$D = \frac{\partial^3}{\partial x^3} - \alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \left(\frac{2c}{\tau \ell} + j\omega\gamma\right) \frac{\gamma}{\partial x}$$

nous avons à résoudre l'équation

$$D\, b = f(b_+) + f(b_-) + f(b_o)$$

l'opération étant linéaire, nous résoudrons

$$D\,(\bar{B}_+) = f(\bar{b}_+)$$

$$D(\bar{B}_-) = f(\bar{b}_-)$$

$$D(\bar{B}_o) = f(\bar{b}_o)$$

et la solution sera obtenue par superposition. Les solutions de l'équation sans second membre sont

$$\bar{B}_+ = \bar{B}_{+1}\, e^{r_1 x} + \bar{B}_{+2}\, e^{r_2 x} + \bar{B}_{+3}$$

$$\bar{B}_- = \bar{B}_{-1}\, e^{r_1 x} + \bar{B}_{-2}\, e^{r_2 x} + \bar{B}_{-3}$$

$$\bar{B}_o = \bar{B}_{o1}\, e^{r_1 x} + \bar{B}_{o2}\, e^{r_2 x} + \bar{B}_{o3}$$

Les solutions particulières sont cherchées sous la forme sinusoidale , soit en notation complexe habituelle :

$$L(B_{+p}) = \left[(j\nu)^3 + \alpha\nu^2 - j\nu\left(\frac{2c}{\tau\ell} + j\omega\gamma\right)\right] B_+ = -\nu(\omega + \nu V) b^+$$

$$L(B_{-p}) = \left[(-j\nu)^3 + \alpha\nu^2 + j\nu\left(\frac{2c}{\tau\ell} + j\omega\gamma\right)\right] B_- = \nu(\omega - \nu V)\, b^-$$

$$L(B_{op}) = 0$$

d'où

$$\bar{B}_{+p} = -j\, \frac{\omega + \nu V}{\left(\nu^2 + \frac{2c}{\tau\ell}\right) + j(\omega + \nu V)\alpha}\, \bar{b}_+$$

$$B_{-p} = -j\, \frac{(\omega - \nu V)\bar{b}}{\left(\nu^2 + \frac{2c}{\tau\ell}\right) + j(\omega + \nu V)\alpha}$$

$$B_{op} = A_o$$

La solution générale est donc :

$$\bar{B} = (\bar{B}_{+1} + \bar{B}_{-1} + \bar{B}_{o1})e^{r_1 x} + (\bar{B}_{+2} + \bar{B}_{-2} + \bar{B}_{o2})e^{r_2 x} + \bar{B}_{+3} + \bar{B}_{-3} + \bar{B}_{o3} + \bar{B}_{+p} + \bar{B}_{-p} + \bar{B}_{op}$$

soit

$$B = \bar{B}_1' \; e^{r_1 x} + B_2' \; e^{r_2 x} + \bar{B}_3' + \bar{B}_{+p} + \bar{B}_{-p} + \bar{A}$$

Les constantes $\bar{B}_1'$, $\bar{B}_2'$, $\bar{B}_3'$ et $\bar{A}_4$ sont à déterminer par les conditions aux limites :

$$\left(\frac{1}{\lambda_o^2} = \frac{2c}{\sigma \ell} = \frac{4}{(L-\ell)\ell}\right)$$

$$(1)\quad \bar{J}(o) + \frac{I(o)}{e\lambda_o} = \frac{v}{o}\left(\bar{b}(b(o)\lambda) + \bar{B}(B(o)1+k)\lambda\right)$$

$$J(1+k\lambda)+I(1+k\lambda)/c\lambda_o = \frac{V}{o}\left(\bar{b}(1+k\lambda)+\bar{B}(1+k\lambda)\right.$$

$$\int_o^{\lambda} \left[\bar{b}(x) + \bar{B}(x)dx + k\lambda\left[\bar{b}(\lambda) + \bar{B}(\lambda)\right] = 0\right.$$

Dans un but de simplification nous ne considèrerons que les solutions périodiques en négligeant les termes introduits par l'ffet de bord. Nous écrirons donc l'induction sous la forme $\bar{B} = \bar{B}_{+p} + \bar{B}_{-p} + A$, en lui imposant d'être à flux conservatif dans l'entrefer, ce qui nous permettra de déterminer A. Dans un calcul complet B_1', B_2', B_3' seraient déterminées par les conditions aux limites (1) appliquées à l'induction totale.

De ce fait nous pouvons écrire :

$$B_{+p} = \frac{\mu_o \; \gamma I_m}{2e} A_+ \cos(\omega t + \nu x + X_+ + \varphi_+)$$

$$B_{-p} = \frac{\mu_o \; \gamma i_m}{2e} A_- \cos(\omega t - \nu x + X_- + \varphi_-)$$

$$\bar{B}_o = b_m A$$

en posant :

$$A_+ = \frac{\alpha(\omega + \nu V)}{(\nu^2 + \frac{2c}{e})^2 + \alpha^2(\omega+\nu v)^2} \quad , \varphi_+ = -\frac{\pi}{2} - \mathrm{Artg}(\alpha \frac{\omega+\nu V}{\nu^2 + \frac{2c}{\ell}})$$

$$A_- = \frac{\alpha(\omega - \nu V)}{(\nu^2 + \frac{2c}{\ell})^2 + \alpha^2(\omega - \nu V)} \quad , \varphi_- = -\frac{\pi}{2} - \mathrm{Artg}(\frac{\omega - \nu V}{\nu^2 + \frac{2c}{\ell}})$$

$$X_+ = \mathrm{Arg}(\bar{b}_+) \ , \qquad X = \mathrm{Arg}\ \bar{b}_-$$

A l'aide de ces notations, nous allons écrire le théorème de conservation du flux, aux inductions créées par les trois phases l'induction secondaire relative à la phase 1 s'écrit avec

$$X_+ = \varphi_1 - 2\pi/3 \quad , \qquad X_- = \varphi_1 + 2\pi/3 :$$

$$\bar{B}_1 = \frac{\mu_o \gamma}{2e} \ i_{1m} \left[A_+ \cos(\omega t + \nu x + \varphi_1 - 2\pi/3 + \varphi_+) + A_- \cos(\omega t - \nu x + \varphi_1 + 2\pi/3 + \varphi_-) + A_{o1}\right]$$

$$\int_o^\lambda B_1(x)dx + k\lambda\ B_1(\lambda) = 0 \qquad A_{o1} = \frac{k}{k+1} \left[A_+ \cos(\omega t + \varphi_1 - 2\pi/3 + \varphi_+)\right.$$

$$\left. + A_- \cos(\omega t + \varphi_1 - 2\pi/3 + \varphi_-)\right.$$

soit $A_{o1} = -\frac{k}{k+1} A_1 \cos(\omega t + \Psi_1)$, un calcul nanalogue pour B_2 et B_3 nous permet d'écrire :

$$B_1 = \frac{\gamma\mu_o}{2e} i_{1m} \left[A_+ \cos(\omega t + \nu x + \varphi_1 - 2\pi/3 + \varphi_+) + A \cos(\omega t - \nu x + \varphi_1 + \frac{2\pi}{3} + \varphi_-)\right.$$

$$\left. - \frac{k}{k+1} A_1 \cos(\omega t + \Psi_1)\right]$$

$$B_2 = \frac{\gamma\mu_o}{2e}\, i_{2m} \left[A_+ \cos(\omega t + \nu x + \varphi_2 + \varphi_+) + A_- \cos(\omega t - \nu x + \varphi_2 + \frac{2\pi}{3} + \varphi) - \frac{k}{k+1} A_2 \cos(\omega t + \Psi_2)\right]$$

$$B_3 = \frac{\gamma\mu_o}{2e}\, i_{3m} \left[A_+ \cos(\omega t + \nu x + \varphi_3 + \frac{2\pi}{3} + \varphi_+) + A_- \cos(\omega t - \nu x + \varphi_3 + \frac{2\pi}{3} + \varphi_-) - \frac{k}{k+1} A_3 \cos(\omega t + \Psi_3)\right]$$

Les constantes A_1, A_2, A_3, Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3 peuvent facilement être déterminée mais n'interviendront pas dans le résultat final.

Nous appelons maintenant ϕ_{ij} le flux envoyé par la phase j du secondaire à travers l'enroulement de la phase i du primaire; ce flux peut être calculé par l'énergie de couplage : $\phi_{ij}\, i_i = \iiint b_i B_j dv$. Le moteur étant triphasé nous aurons 9 flux à déterminer.

a) Flux traversant la phase 1 du primaire

1) Flux créé par la phase 1 du secondaire

$$\phi_{11}\, i_1 = e\ell/\mu_o \left[\int_o^\lambda b_1 b_1'\, dx + k\lambda\, b_1(\lambda) \times b_1'(\lambda)\right.$$

$$= \frac{e\ell}{\mu_o} \frac{j^2}{4}\, i_{1m}^2 \left[\int_0^\lambda \left[\cos(\omega t + \nu x + \varphi_1 - 2\pi/3) + \cos(\omega t - \nu x + \varphi_1 + 2\pi/3) + \frac{k}{k+1}\cos(\omega t + \varphi_1)\right]\right.$$

$$\left[A_+ \cos(\omega t + \nu x + \varphi_1 - 2\pi/3 + \varphi_+) + A_- \cos(\omega t - \nu x + \varphi_1 + 2\pi/3 + \varphi_-) + \frac{A_1 k}{k+1}\cos(\omega t + \right.$$

$$dx + k\lambda \left[\cos(\omega t + \varphi_1 - 2\pi/3) + \cos(\omega t + \varphi_1 + 2\pi/3) + \frac{k}{k+1}\cos(\omega t + \varphi_1)\right]$$

$$\left.\left[A_+ \cos(\omega t + \varphi_1 - 2\pi/3 + \varphi_+) + A_- \cos(\omega t + \varphi_1 + 2\pi/3 + \varphi_-) + \frac{k}{k+1} A_1 \cos(\omega t + \Psi_1)\right]\right.$$

Les termes à l'intérieur de l'intégrale sont de deux types, des termes en $\pm \nu x$ et $\pm 2\nu x$ dont l'intégrale est nulle et des termes constants par rapport à x. Il vient alors

$$\phi_{11} i_1 = \frac{u_o^2 e \ell}{e \nu_4 u_o} \gamma^2 i_{1m}^2 \left[\int_0^{\lambda} \left[\frac{A_+}{2} \left[\cos \varphi_+ + \cos(2\omega t + 2\varphi_1 + \varphi_+) \right] + \frac{A_-}{2} \left[2\cos(\omega t + 2\varphi_1 + \varphi_-) + \cos \varphi_- \right] \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{k^2}{(k+1)^2} A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \right] dx - \frac{k\lambda}{k+1} \left[\cos(\omega t + \varphi_1) \right] \left[A_+ \cos(\omega t + \varphi_1 - 2\pi/3 + \varphi_+) \right.\right.$$

$$\left.\left. + A_- \cos(\omega t + \varphi_1 + 2\pi/3 + \varphi_-) + \frac{k}{k+1} A_1 \cos(\omega t + \Psi_1) \right] \right]$$

soit

$$\phi_{11} i_1 = \frac{u_o \ell \lambda}{4e} \gamma^2 i_{1m}^2 \left[A_+ \cos(\omega t + \varphi_1) \cos(\omega t + \varphi_1 + \varphi_+) + A_- \cos(\omega t + \varphi_1) \cos(\omega t + \varphi_1 + \varphi_-) \right.$$

$$\left. - \frac{k}{k+1} \cos(\omega t + \varphi_1) \left[A_+ \cos(\omega t + \varphi_1 - \frac{2\pi}{3} + \varphi_+) + A_- \cos(\omega t + \varphi_1 + \frac{2\pi}{3} + \varphi_-) \right] \right]$$

et en regroupant avec $i_1 = i_{1m} \cos(\omega t + \varphi_1)$

$$\phi_{11} = \frac{u_o \ell \lambda}{4e} \gamma^2 i_{1m} \left[A_+ \cos(\omega t + \varphi_1 + \varphi_+) + A_- \cos(\omega t + \varphi_1 + \varphi_-) \right.$$

$$\left. - \frac{k}{(k+1)} \left(A_+ \cos(\omega t + \varphi_1 + \varphi_+ - 2\pi/3) + A_- \cos(\omega t + \varphi_1 + \varphi_- + 2\pi/3) \right) \right]$$

2) Flux créé par la phase 2 du secondaire

$$\phi_{12} i_1 = \frac{e \ell}{2 u_o} \left[\int_o^{\lambda} b_1 b_2' \, dx + k\lambda \; b_1(\lambda) \; b_2'(\lambda) \right.$$

Un calcul analogue au précédent nous donne

$$\phi_{12} = \frac{\mu_o \ell \lambda \gamma^2}{4e} \; i_{2m}\left[A_+ \cos(\omega t+\varphi_2+\varphi_+ +\frac{2\pi}{3}) + A_- \cos(\omega t+\varphi_2+\varphi_-)\right.$$

$$\left. -\frac{k}{k+1}(A_+ \cos(\omega t + \varphi_2 + \varphi_+) + A_- \cos(\omega t + \varphi_2 + \varphi_- + 2\pi/3))\right]$$

3) Flux créé par la phase 3 du secondaire.

$$\phi_{13}\; i_1 = \frac{e\ell}{2\mu_o} \cdot \left[\int_o^{\lambda} b_1\, b_3'\, dx + k\lambda\, b_1(\lambda)\, b'(\lambda)\right]$$

soit après calcul

$$\phi_{13} = \frac{\mu_o \ell\lambda}{4e} \gamma^2 i_{3m}\left[A_+\cos(\omega t + \varphi_3 + \varphi_+ - 2\pi/3) + A_-\cos(\omega t + \varphi_3 + \varphi_-)\right.$$

$$\left. -\frac{k}{k+1}(A_+ \cos(\omega t + \varphi_3 + \varphi_4 + 2\pi/3) + A_-\cos(\omega t + \varphi_3 + \varphi_- + \frac{2\pi}{3}))\right.$$

Ces trois flux sont des grandeurs sinusoidales et nous appelons

$$\bar{I}_1 = I_{1m} \angle \varphi_1$$

$$\bar{I}_2 = I_{2m} \angle \varphi_2$$

$$\bar{I}_3 = i_{3m} \angle \varphi_3$$

les fonctions complexes correspondant aux intensités i_1, I_2, I_3 en posant

$a = e^{j2\pi/3}$, $a^2 = e^{j4\pi/3} = e^{-j2\pi/3}$ il vient

$$\bar{\phi}_{11} = \frac{\mu_o \ell\lambda}{4\mu_o} \gamma^2\left[A_+ I_1\, e^{j\varphi_+} + A_-\, I_1\, e^{j\varphi_-} - \frac{k}{k+1}(a^2\, A_+ e^{j\varphi_+}\, I_1 + aA_-\, e^{j\varphi_-} I_1)\right]$$

$$\phi_{12} = \frac{\mu_o \ell\lambda}{4\mu_o} \gamma^2\left[a^2 A_+ I_2\, e^{j\varphi_+} + aA_-\, I_2\, e^{j\varphi_-} - \frac{k}{k+1}(a\, A_+\, e^{j\varphi_+}\, I_2 + a^2\, A_-\, e^{j\varphi_-} I_2)\right]$$

$$\phi_{13} = \frac{\mu_o \ell\lambda}{4e} \gamma^2 \left[a A_+ I_3 e^{j\varphi_+} + a^2 A_- I_3 e^{j\varphi_-} - \frac{h}{k+1} (A_+ I_3 e^{j\varphi_+} + A_- I_3 e^{j\varphi_-}) \right]$$

d'où le flux envoyé par le secondaire à travers la phase 1 du primaire

$$\bar{\phi}_1 = \bar{\phi}_{11} + \bar{\phi}_{12} + \bar{\phi}_{13} = \frac{\mu_o \ell\lambda}{4e} \gamma^2 \left[A_+ e^{j\varphi_+} (\bar{I}_1 + a^2 \bar{I}_2 + a\bar{I}_3) + A_- e^{j\varphi_-} (\bar{I}_1 + a\bar{I}_2 + a^2 \bar{I}_3) \right.$$

$$\left. - \frac{k}{k+1} \left[A_+ e^{j\varphi_+} (a^2 \bar{I}_1 + a\bar{I}_2 + \bar{I}_3) + A_- e^{j\varphi_-} (a\bar{I}_1 + a'\bar{I}_2 + \bar{I}_3) \right] \right]$$

b) Calcul des flux traversant les phases 2 et 3

Le calcul de ces flux est conduit de manière analogue

$$\bar{\phi}_2 = \frac{\mu_o \ell\lambda \gamma^2}{4e} \left[A_+ e^{j\varphi_+} (a\bar{I}_1 + \bar{I}_2 + a^2 \bar{I}_3) + A_- e^{j\varphi_-} (a^2 I_1 + I_2 + aI_3) \right.$$

$$\left. - \frac{k}{k+1} (A_+ e^{j\varphi_+} (a^2 \bar{I}_1 + a\bar{I}_2 + \bar{I}_3) + A_- e^{j\varphi_-} (a\bar{I}_1 + a^2 \bar{I}_2 + \bar{I}_3)) \right]$$

$$\bar{\phi}_3 = \frac{\mu_o \ell\lambda}{4e} \gamma^2 \left[A_+ e^{j\varphi_+} (a^2 \bar{I}_1 + a\bar{I}_2 + \bar{I}_3) + A_- e^{j\varphi_-} (a\bar{I}_1 + a^2 \bar{I}_2 + \bar{I}_3) \right.$$

$$\left. + \frac{2k}{k+1} (A_+ e^{j\varphi_+} (a^2 \bar{I}_1 + a\bar{I}_2 + \bar{I}_3) + A_- e^{j\varphi_-} (a\bar{I}_1 + a^2 \bar{I}_2 + \bar{I}_3)) \right]$$

Les tensions complexes aux bornes des trois phases de moteur s'écrivent alors :

$$\bar{U}_1 = r_1 \bar{I}_1 + j\omega \left[L_1 \bar{I}_1 + M_{12} \bar{I}_2 + M_{13} \bar{I}_3 + \bar{\phi}_1 \right]$$

$$\bar{U}_2 = r_2 \bar{I}_2 + j\omega \left[L_2 \bar{I}_2 + M_{12} \bar{I}_1 + M_{23} \bar{I}_3 + \bar{\phi}_2 \right]$$

$$\bar{U}_3 = r_3 \bar{I}_3 + j\omega \left[L_3 \bar{I}_3 + M_{13} \bar{I}_1 + M_{23} \bar{I}_2 + \bar{\phi}_3 \right]$$

Nous posons $\frac{\mu_o \lambda \ell}{4e} \gamma^2 = \mathcal{L}$, d'autre part les résistances des trois phases sont égales, d'où en appelant $I_{3,3}$ la matrice unité d'ordre 3 nous appellerons $Z_o = rII_{3,3} + j\omega(L_o + L_f)$ la matrice impédance en abscence de rail. L_o étant la matrice des inductances d'entrefer, et L_f la matrice des inductances de fuites.

Nous allons maintenant définir la matrice des impédances en charge, soit :

$$Z = \begin{vmatrix} z_{11} & z_{12} & z_{13} \\ z_{21} & z_{22} & z_{23} \\ z_{31} & z_{32} & z_{33} \end{vmatrix} \quad \text{avec}$$

$$Z_{11} = L[A_+ e^{j\varphi_+} + A_- e^{j\varphi_-} - \frac{k}{k+1}(a^2 A_+ e^{j\varphi_+} + a A_- e^{j\varphi_-})]$$

$$Z_{12} = L[a_2 A_+ e^{j\varphi_+} + aA_- e^{j\varphi_-} - \frac{k}{k+1}(aA_+ \cdot e^{j\varphi_+} + a^2 A_- e^{j\varphi_-})]$$

$$Z_{13} = L[a A_+ e^{j\varphi_+} + a^2 A_- e^{j\varphi_-} - \frac{k}{k+1}(A_+ e^{j\varphi_+} + A_- e^{j\varphi_-})]$$

$$Z_{21} = L[aA_+ e^{j\varphi_+} + a^2 A_- e^{j\varphi_-} - \frac{k}{k+1}(a^2 A_+ e^{j\varphi_+} + a A_- e^{j\varphi_-})]$$

$$Z_{22} = L[A_+ e^{j\varphi_+} + A_- e^{j\varphi_-} - \frac{k}{k+1}(aA_+ e^{j\varphi_+} + a^2 A_- e^{j\varphi_-})]$$

$$Z_{23} = L[a^2 A_+ e^{j\varphi_+} + aA_- e^{j\varphi_-} - \frac{k}{k+1}(A_+ e^{j\varphi_+} + A_- e^{j\varphi_-})]$$

$$Z_{31} = L[a^2 A_+ \cdot e^{j\varphi_+} + aA_- \cdot e^{j\varphi_-} + \frac{2k}{k+1}(a^2 A_+ \cdot e^{j\varphi_+} + aA_- \cdot e^{j\varphi_-})]$$

$$Z_{32} = L[a A_+ \cdot e^{j\varphi_+} + a^2 A_- \cdot e^{j\varphi_-} + \frac{2k}{k+1}(aA_+ \cdot e^{j\varphi_+} + a^2 A_- \cdot e^{j\varphi_-})]$$

$$Z_{33} = L[aA_+ \cdot e^{j\varphi_+} + A_- \cdot e^{j\varphi_-} + \frac{2k}{k+1}(A_+ \cdot e^{j\varphi_+} + A_- \cdot e^{j\varphi_-})]$$

II-3 CALCUL DE LA MATRICE IMPEDANCE - APPLICATION DES COMPOSANTES SYMETRIQUES.

La forme des éléments de cette machine nous suggère de poser

$$Z_h = L(A + e^{j\varphi_+} + A - e^{j\varphi_-})$$

$$Z_d = L(a^2A = e^{j\varphi_+} + a^2A - e^{j\varphi_-})$$

$$Z_i = L(a^2 A + e^{j\varphi_+} + a^2 A - e^{j\varphi_-})$$

et dedéfinir aussi 3 nouvelles impédances "symétriques" telles que

$$Z_h + Z_d + Z_i = 0$$

$$Z_h + aZ_d + a^2Z_i = L A + e^{j\varphi_-}$$

$$Z_h + a^2Z_d + aZ_i = LA + e^{j\varphi_+}$$

Avec cette définition Z devient :

$$Z = \begin{vmatrix} Z_h & Z_i & Z_d \\ Z_d & Z_h & Z_i \\ Z_i & Z_d & Z_h \end{vmatrix} - \frac{k}{k+1} \begin{vmatrix} Z_i & Z_d & Z_h \\ Z_i & Z_d & Z_h \\ -2 & Z_i - 2Z_d & -2Z_h \end{vmatrix} = A_1 + Z_2$$

Le système linéaire donnant les valeurs des tensions aux bornes des trois phases e, fonction des courants absorbés s'écrit :

$$\begin{vmatrix} \bar{U}_1 \\ \bar{U}_2 \\ \bar{U}_3 \end{vmatrix} = (Z_o + Z) \begin{vmatrix} \bar{I}_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{vmatrix} \quad \text{soit} \quad \bar{U} = (Z_o + Z)\bar{I}$$

Nous allons étudier ce système à l'aide de la théorie des composantes symétriques et le changement de base de FORTESCUE [19] s'impose ici en raison de la symétrie cyclique du problème, soit :

$$F = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{vmatrix} \qquad \text{et} \quad F^{-1} = \frac{F^*}{3} = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{vmatrix}$$

Nous effectuons le changement

$$V = FU = F \begin{vmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{vmatrix} \qquad , \; J = FI = F \begin{vmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{vmatrix}$$

la relation $U = (Z_o + Z)I$ s'écrit dans cette nouvelle base

$$F^{-1}V = (Z_o + Z)\, F^{-1}J \quad \text{soit}$$

$$V = F(Z_o + Z)\, F^{-1}J \qquad \text{ou en développant}$$

$$U = (FZ_o\, F^{-1} + FZF^{-1})J$$

Nous allons étudier maintenant ces deux matrices

a) Calcul de $FZF^{-1} = FZ_1F^{-1} + FZ_2F^{-1}$

$$FZ_1F^{-1} = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} Z_h & Z_i & Z_d \\ Z_d & Z_h & Z_i \\ Z_i & Z_a & Z_h \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{vmatrix} = \mathcal{L} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_- e^{j\omega} & 0 \\ 0 & 0 & A_+ e^{j\omega} \end{vmatrix}$$

$$FZ_2F^{-1} = -\frac{1}{3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{vmatrix} \begin{vmatrix} Z_i & Z_d & Z_h \\ Z_i & Z_d & Z_h \\ -2Z_i & -2Z_d & -2Z_h \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & 1 \\ 1 & a & a^2 \end{vmatrix} = -\frac{\mathcal{L}k}{k+1} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_- e^{j\omega} & aA_+ e^{j\omega} \\ 0 & a^2 A_- e^{j\omega} & -A_+ e^{j\omega} \end{vmatrix}$$

d'où

$$FZ\ F^{-1} = \frac{\mathcal{L}}{k+1} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_- e^{j\varphi_-} & -ak\,\lambda_+ e^{j\varphi_+} \\ 0 & -a^2 k\lambda_- e^{j\varphi_-} & \lambda_+ e^{j\varphi_+} \end{vmatrix}$$

b) Calcul de $FZ_o\ F^{-1} = F(rI_{33} + j\omega\ L_o + j\omega\ L_f)F^{-1}$

Ne connaissant pas L_f nous allons appliquer la transformation à $rI_{33} + j\omega L_o$, . Or L_o n'est pas quelconque car nous avons $L_1 = L_2 = \mathcal{L}$ et $\mathcal{L} - M_{13} = M_{23} = \mathcal{M}$

Nous posons en outre $L_3 = \mathcal{L}_s$, $M_{12} = \mathcal{M}_s$ d'où

$$F(rI_{33} + j\omega L_o) = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{vmatrix} \begin{vmatrix} r+j\omega\mathcal{L} & j\omega\mathcal{M}_s & j\omega\mathcal{M} \\ j\omega\mathcal{M}_s & r+j\omega\mathcal{L} & j\omega\mathcal{M} \\ j\omega\mathcal{M} & j\omega\mathcal{M} & r+j\omega\mathcal{L}_s \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 3r+j\omega(2\mathcal{L} + \mathcal{L}_s+2(2\mathcal{M} + \mathcal{M}_s), -aj\omega(r-\mathcal{L}_s-(\mathcal{M}-\mathcal{M}_s)), -a^2 j\omega(\mathcal{L}-\mathcal{L}_s)-(\mathcal{M}-\mathcal{M}_s)) \\ -a^2 j\omega((\mathcal{L}-\mathcal{L}_s)-(\mathcal{M}-\mathcal{M}_s),\ 3+j\omega(2\mathcal{L}+\mathcal{L}_s-(2\mathcal{M}+\mathcal{M}_s))-aj\omega((\mathcal{L}-\mathcal{L}_s)+(2(\mathcal{M}-\mathcal{M}_s)) \\ -aj\omega((r-\mathcal{L}_s)-(\mathcal{M}-\mathcal{M}_s)) - a^2 j\omega(\mathcal{L}-\mathcal{L}_s-2(\mathcal{M}-\mathcal{M}_s))3r + j\omega(2r+\mathcal{L}_s-(2m+\mathcal{M}_s)) \end{vmatrix}$$

or $\mathcal{L} = \frac{3k+2}{k+1} L$, $\mathcal{L}_s = \frac{6k+2}{k+1} L$, $\mathcal{M} = -\frac{3k+1}{k+1} L$, $\mathcal{M}_s = -\frac{1}{k+1} L$

d'où $2r+\mathcal{L}_s = 6L\frac{2k+1}{k+1}$ $\qquad 2\mathcal{M} + \mathcal{M}_s = -3L\frac{2k+1}{k+1}$

$r - \mathcal{L}_s = -3L\frac{k}{k+1}$ $\qquad \mathcal{M} - \mathcal{M}_s = -3L\frac{k}{k+1}$

la matrice obtenue est alors

$$F(rI_{33}+j\omega L_o)F^{-1}= \begin{vmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & r+6j\omega L\,\frac{2k+1}{k+1} & \frac{3kLa}{k+1} \\ 0 & \frac{3kL_a 2}{k+1} & r+6j\omega L \times \frac{2k+1}{k+1} \end{vmatrix}$$

Le s ystème total transformé s'écrit finalement

$$\begin{vmatrix} U_h \\ U_d \\ U_i \end{vmatrix} = \left[j\omega F\, L_f F^{-1} + \begin{vmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & r+j\omega\left(\frac{12k+6+A_- e^{j\varphi_-}}{k+1}\right) & \frac{j\omega akL}{k+1}\,(3-A_+ e^{j\varphi_+}) \\ 0 & \frac{j\omega a^2 kL}{k+1}\,(3-A_- e^{j\varphi_-}) & r+\frac{j\omega L}{k+1}\,(12k+6+A_+ e^{j\varphi_+}) \end{vmatrix} \right] \begin{vmatrix} I_h \\ I_d \\ I_i \end{vmatrix}$$

Ce résultat montre que lorsque le moteur est alimenté par de tensions la composante homopolaire de courants d'alimentation est seulement fonction des inductances de fuite et est donc constante quelle que soit la vitesse du moteur. D'autre part les termes en $A_+ e^{j\varphi_+}$ et $A_- e^{j\varphi_-}$ font intervenir par leur partie réelle la résistance secondaire, l'expression de l'impédance étant une fonction homographique du glissement ce qui conduirait à un schéma équivalent simplifié.

REMAROUE : Nous avons supposé ici l'inductance primaire sinusoidale réduite au terme fondamental de son développement en série de Fourier. Si nous considérons maintenant la forme réelle de cette induction telle qu'elle est donnée par le théorème d'ampère fig. II6 la matrice d'inductance a dans le système de composantes symétriques la forme ci-après

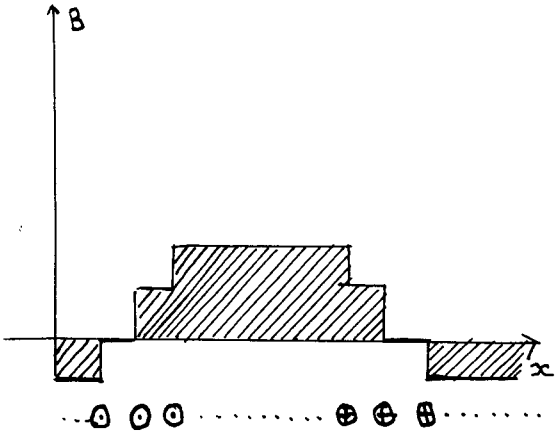


Figure II-6

$$FZ_oF^{-1} = j\omega F\, L_f F^{-1} + \frac{1}{3}\begin{vmatrix} 3R+\frac{j\omega\ell}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 3R+\frac{j\omega\ell}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 3R+\frac{j\omega\ell}{3} \end{vmatrix} + j\frac{\omega}{3}\,\frac{m^2}{k+1}\begin{vmatrix} 4k+1 & -6ka & -6ka^2 \\ -6ka^2 & 10k+5 & 12ka \\ -6ka & 12ka^2 & 10k+5 \end{vmatrix}$$

C H A P I T R E III

INDUCTANCES DE FUITES

La connaissance des inductances dûes au flux créé par les enroulements à l'extérieur de l'entrefer est nécessaire au calcul du déséquilibre des phases, ou à la construction du schéma équivalent. Lorsque le bobinage est du type imbriqué, des études ayant été faites par ailleurs [30] à [34], nous étudierons ici le bobinage en anneau de GRAMME Nous verrons que les formules établies sont transposables à l'étude des flux de fuites dans d'autres machines que le moteur linéaire.

Le primaire d'un moteur linéaire dont le bobinage est du type GRAMME peut être représenté en vue de face par la figure III.1. Nous allons étudier le flux produit par les conducteurs externes et les inductances de chaque phase. Le flux créé par les conducteurs centraux peut être évalué en supposant le primaire infiniment long [35] cependant celui dû aux conducteurs voisins de l'un ou l'autre bord doit être calculé directement.

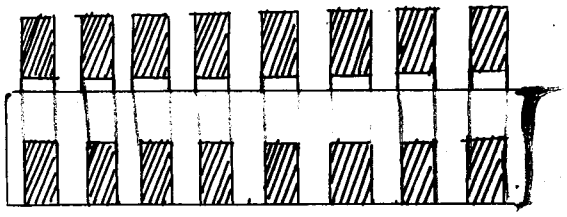


Fig III 1

Nous allons conduire cette étude en calculant le potentiel vecteur créé par l'enroulement d'une phase, et par une intégration sur le domaine défini par les conducteurs de cette phase, nous en déduirons l'inductance propre de cet enroulement, relative au flux de fuite, puis de la même manière nous calculerons les mutuelles entres phases.

III.1 CALCUL DU POTENTIEL VECTEUR CREE PAR UN CONDUCTEUR FILIFORME.

Considérons le système défini par la figure III.2 et calculons le potentiel vecteur créé au point P(x,y) par un conducteur infiniment mince placé au point $P_0(x_0,y_0)$ et parcouru par une densité de courant i.

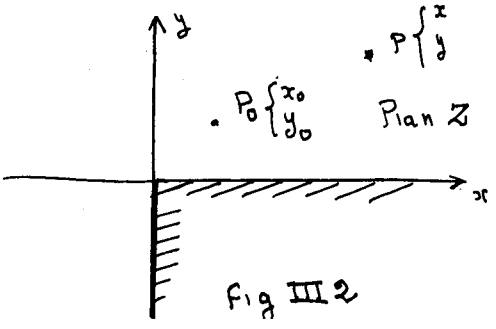


Fig III 2

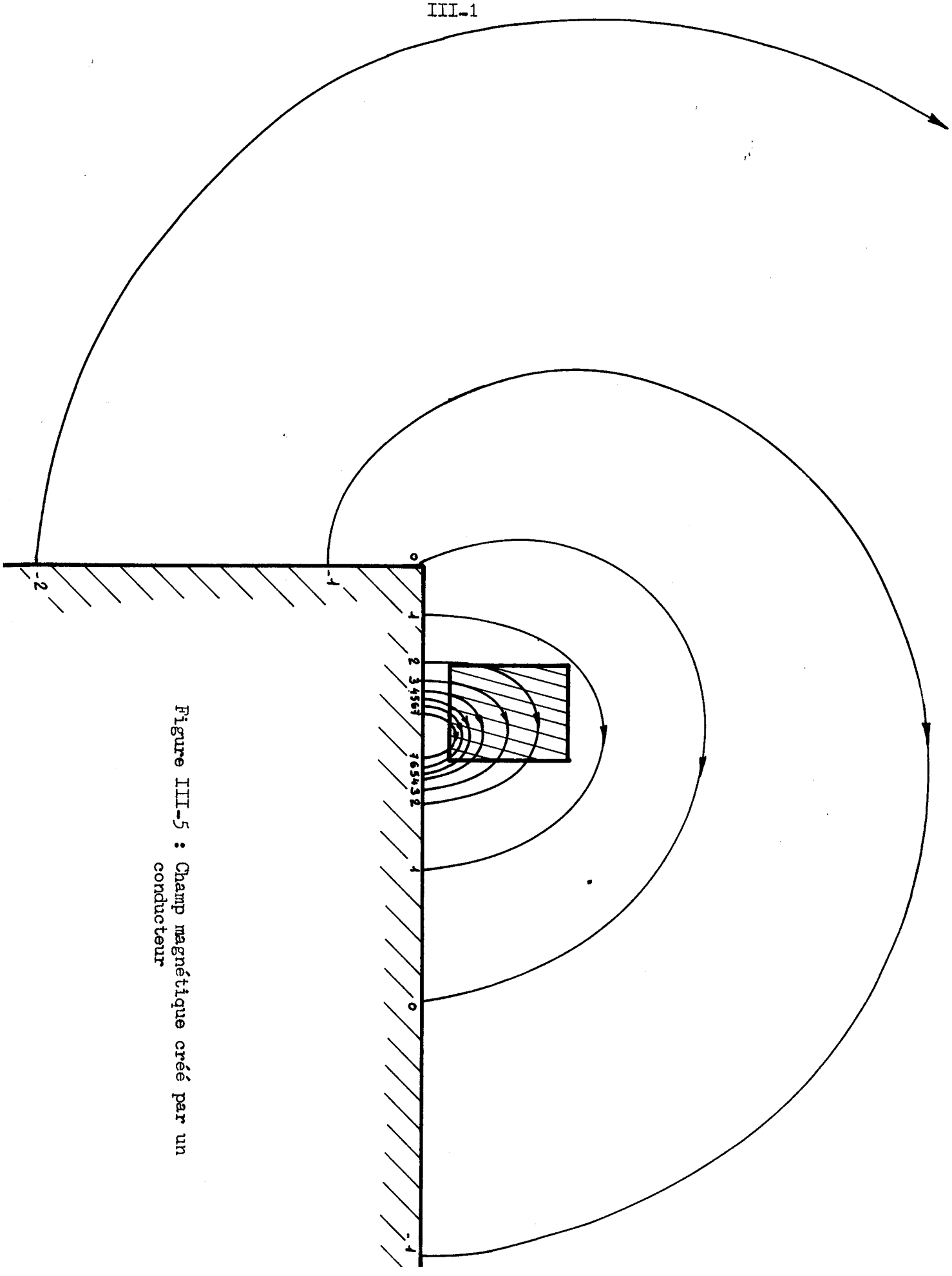


Figure III-5 : Champ magnétique créé par un conducteur

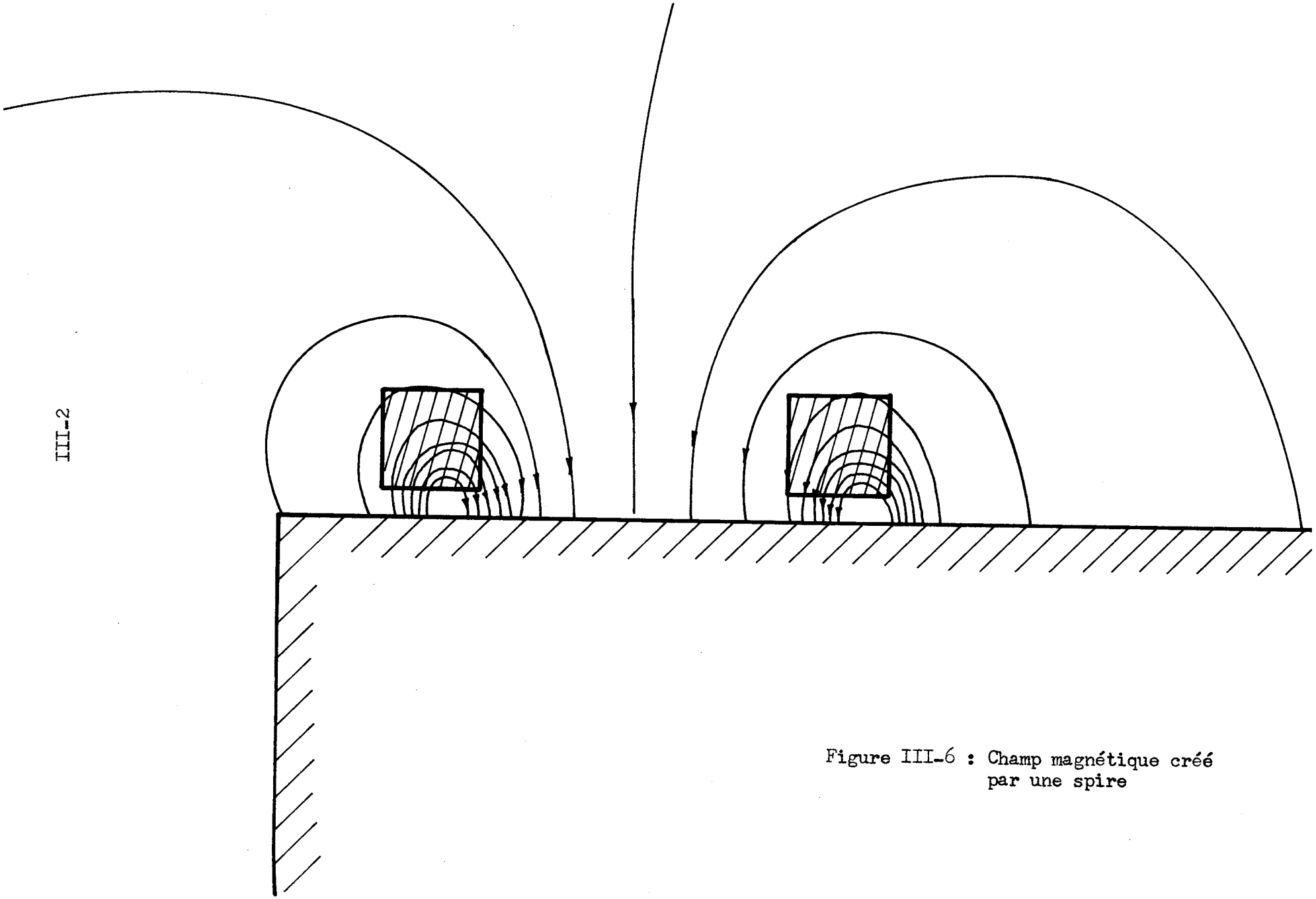


Figure III-6 : Champ magnétique créé par une spire

Le potentiel vecteur sera la partie réelle du potentiel complexe W que nous allons calculer à l'aide de la transformation de SCHARWZ-CRISTOFFEL. La transformation qui fait passer du demi-plan supérieur $t = \eta + j\xi$ (figure III) au plan $Z = x + jy$ de la figure III.2 est donnée par

$$Z = St^{3/2} + \beta$$

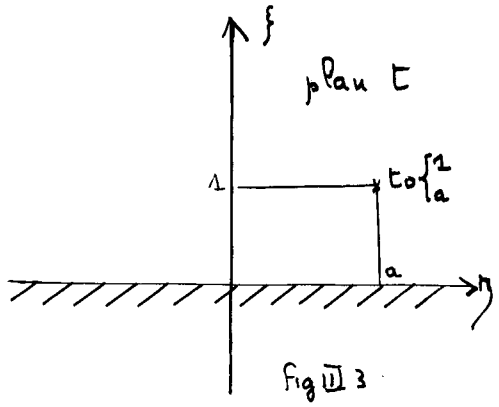


fig III 3

Si les origines des deux plans coincident $\beta = 0$, S étant une constante réelle déterminant l'"échelle" de la transformation. Considérons le point $t_0 = a+j$ du plan t; nous désirons lui faire correspondre le point x_0, y_0 du plan Z, ce qui nous donne deux équations nécessaires à la détermination des constantes S et a :

$$x_0 = jy_0 = S(a+j)^{3/2}$$

ce qui entraine en posant : $\rho_o = (x_o^2 + y_o^2)^{1/2}$, $\theta_o = \text{Arctg } y_o/x_o$

$$a = \text{cotg } 2\theta_o/3$$

$$S = \rho_o \sin^{3/2} \frac{2\theta_o}{3}$$

d où

$$Z = \rho_o \sin^{3/2} \frac{2\theta_o}{3}\, t^{3/2}$$

soit

$$t = \left(\frac{Z}{\rho_o}\right)^{2/3} \frac{1}{\sin^{3/2} \frac{2\theta_o}{3}}$$

D'autre part le potentiel complexe créé au point t par un conducteur infiniment mince placé au point $t_o = a+j$ est égal à

$W = \frac{i}{2\pi} \text{Log}((t-a)^2+1)$, par transformation conforme , nous en déduisons le potentiel complexe créé au point Z par un conducteur placé en Z_o :

$$W(z,z_o) = \frac{i}{2\pi}\left[\text{Log}(Z^{4/3} - 2Z^{2/3}\rho_o^{2/3}\cos 2\theta_o/3 + \rho_o^{4/3}) - \text{Log}\,\rho_o^{4/3}\sin^2\frac{2\theta_o}{3}\right]$$

Le potentiel vecteur, partie réelle de W est défini à une constante ce qui nous conduit à supprimer le deuxième terme, il vient alors :

$$dA(x,y,x_o,y_o) = \frac{i}{2\pi} \text{Log}\left(Z^{4/3} - 2 Z^{2/3} \rho_o \cos\frac{2\alpha_o}{3} + \rho_o^{4/3} \right)$$

$$= \frac{i}{2\pi} \text{Log}\left(Z^{2/3} - Z_o^{2/3} \right) + \text{Log}\left(Z^{2/3} - Z_o^{*2/3} \right)$$

où Z^* représente le conjugué de Z.

Soit en écrivant $|Z| = (ZZ^*)^{1/2}$

$$dA(x_o,y_o,x_o,y_o) = \frac{i}{4\pi} [\text{Log}(x+jy)^{2/3} - (x_o+jy_o)^{2/3}) + \text{Log}(x+jy)^{2/3} - (x_o-jy_o)^{2/3})$$

$$+ \text{Log}\left((x-jy)^{2/3} - (x_o-jy_o)^{2/3} + \text{Log}((x_o-jy)^{2/3} - (x_o-jy_o)^{2/3})\right]$$

III.2 CALCUL DU POTENTIEL VECTEUR CREE PAR UN CONDUCTEUR MASSIF

Soit un conducteur massif rectangulaire repéré par les coordonnées (a,b,c,d). lorsqu'il est parcouru par un courant il crée un potentiel vecteur, qui au point P(x,y) est défini par :

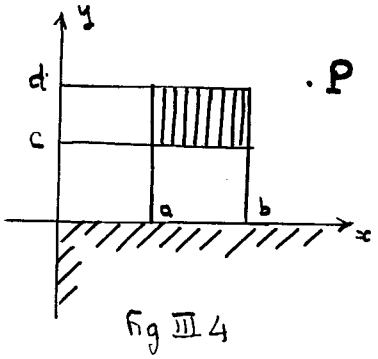


fig III 4

$$A(x,y) = \frac{I}{(d-c)(b-a)} \int_c^d \int_a^b dA(x,y,x_o,y_o)\, dx_o\, dy_o$$

Le calcul de cette intégrale double peut se faire à l'aide de fonctions élémentaires. A(x,y) étant la somme de quatre termes nous indiquons le principe de calcul de l'intégrale

$$A_1 = \int_c^d \int_a^b \text{Log}((x + jy)^{2/3} - (x_o + jy_o)^{2/3})\, dx_o\, dy_o$$

Pour des raisons de commodité et de calcul nous posons

$v = (x+jy)^{1/3}$, $u = (x_o + jy_o)^{1/3}$ et il vient

$$A_1 = 3 \int_c^d dy_o \int_{(a+jy_o)^{1/3}}^{(b+jy_o)^{1/3}} [u^2 \text{Log}(v+u) + u^2 \text{Log}(v-u)]\, du$$

qui en vertu de l'identité $\int x^m \text{Log } x\, dx = x^{m+1}\left[\frac{\text{Log } x}{n+1} - \frac{1}{(m+1)^2}\right]$ vaut

$$A_1 = 3\int_c^d \left[J\left((a+jy_o)^{1/3}\right) - J\left((b+jy_o)^{1/3}\right)\right] dy_o \quad \text{avec}$$

$$J(u) = \frac{1}{3}\left[(u^3+v^3)\,\text{Log}(v+u) + (u^3-v^3)\,\text{Log}(v-u)\right] - 2\left[\frac{u^3}{9} + \frac{uv^2}{3}\right]$$

En posant successivement $(a+jy_o)^{1/3} = u$, $(b+jy_o)^{1/3} = u$ le même principe de calcul que précédemment nous permet d'obtenir

$$A_1(x,y) = I(v,(b+jd)^{1/3}) - I(v,(b+jc)^{1/3}) - I(v,(a+jd)^{1/3}) + I(v,(a+jd)^{1/3})$$

avec

$$I(v,u) = j\left\{-\frac{1}{2}\left[(u^3+v^3)^2\text{Log}(v+u) + (u^3-v^3)^2\text{Log}(v-u)\right] + \left[\frac{u^6}{2} + \frac{7u^4v^2}{4} - \frac{u^2v^4}{2} + \frac{73v^6}{60}\right]\right\}$$

Le calcul du terme en $\text{Log}(x+jy)^{2/3} - (x_o-jy_o)^{2/3}$, nous permet d'obtenir la quantité conjuguée de A et la somme des deux intégrales sera égale au double de la partie imaginaire de A_1. Les deux derniers termes étant identiques, au premier mai contenant v^* au lieu de v, il vient en posant : $u_1 = (b+jd)^{1/3}$, $u_2 = (b+jc)^{1/3}$ $u_3 = (a+jd)^{1/3}$, $u_4 = (a+jc)^{1/3}$:

$$A = \frac{I}{2\pi} \times \frac{1}{(d-c)(b-a)}\left[I_m\left(I(v,u_1) - I(v,u_2) - I(v,u_3) + I(v,u_u)\right.\right.$$

$$\left.\left. + I(v^*,u_1) - I(v^*,u_2) - I(v^*,u_3) + I(u^*,u_u)\right]\right.$$

En remplaçant u et v par leur valeur, il est possible d'obtenir ainsi les lignes équiflux pour différentes positions du ou des conducteurs. Nous avons représenté la carte du champ sur les figures III5 dans le cas d'un conducteur unique et sur la figure III6 dans le cas d'une Spire ; Ces résultats sont en accord avec un relevé effectué à l'aide d'une bobine et d'un voltmètre électronique.

III.3 CALCUL DES INDUCTANCES

La connaissance du potentiel vecteur nous permet de déterminer l'inductance d'un circuit. En effet, considérons un conducteur parcouru par un courant I, soit J la densité de courant à l'intérieur du conducteur.(Fig.III.6) et A le potentiel vecteur dans l'espace où se trouve le potentiel vecteur. L'énergie électromagnétique emmagasinée dans le conducteur et

$$W = \frac{1}{2}\iint \phi \, dI = \frac{1}{2} LI^2 \text{ si}$$

L est l'inductance propre. Or l'induction s'écrit $B = \mu_o$ Rot A le flux $\phi = \iint \mu_o$ Rot A.nds , où n est la normale unitaire du conducteur. Le théorème de STOKES permet d écrire le flux

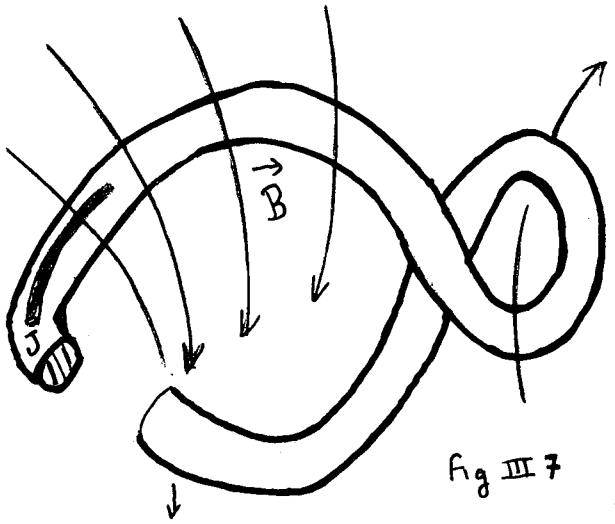


Fig III 7

$$\phi = \oint \mu_o \vec{A} \, d\vec{\ell}$$

suivant un circuit fermé qui coïncide avec le courant. L'énergie s'écrit alors :

$$W = \frac{1}{2}\iint \phi \, dI = \frac{1}{2}\iint \left[\oint \mu_o \vec{A} \, d\vec{\ell} \right] \vec{J} \, \vec{n} \, ds.$$ A l intérieur du conducteur A, $d\ell$, J, n, sont parallèles et $nd\ell ds$ constitue l'élément de volume du conducteur d'où

$$W = \frac{1}{2}\iiint \mu_o AJ \, dv$$

et

$$L = \frac{1}{I^2}\iiint \mu_o A J \, dv,$$ de manière similaire la mutuelle inductance

est $M_{12} = \frac{1}{I_1 I_2}\iiint A_2 J_1 \, dv_1$ où A_2 est la contribution du courant I_2 au potentiel vecteur lotal.

Dans notre cas particulier où le conducteur est infiniment long et la densité de courant est supposée uniforme J = I/S , nous calculons les inductances par unité de longueur, soit

$$L = \frac{\mu_o}{SI} \iint_{(S)} A \, ds \qquad \text{et}$$

$$M_{12} = \frac{\mu_o}{S_1 I_2} \iint_{(S_1)} A_2 \, ds_1$$

Afin de pouvoir évaluer les inductances propres et mutuelles, nous allons calculer

$$\iint_{(\delta_2)} A_1 \, ds_2 = \int_g^h dy \int_e^f A_1(x,y)dx$$

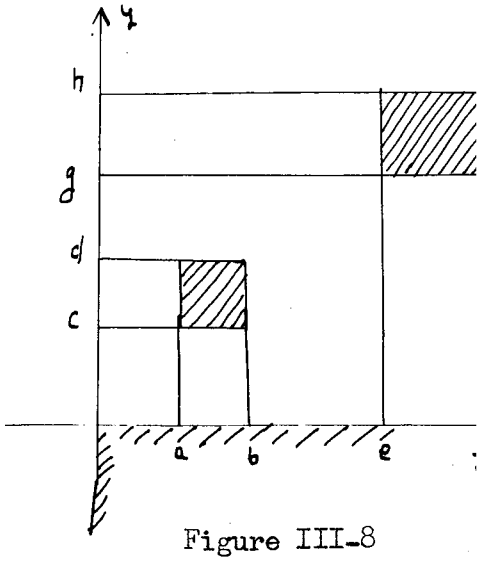


Figure III-8

où A_1 est le potentiel vecteur créé par un conducteur rectangulaire infiniment c_1 défini par a,b,c,d, et c_2 un autre conducteur défini par e,f,g,h. Le potentie vecteur A_1 a été calculé en III2 et est égal à la somme de huit termes, nous allons donc évaluer

$$K = \int_g^h dy \int_e^f I(v,u)dx \quad \text{où } v = (x + jy)^{1/3}$$

et

$$I(v,u) = j\{- \frac{1}{2}[(v^3+u^3)^2 \text{Log}(v+u)+(v^3-u^3)^2 \text{Log}\,(v-u)] + \frac{u^6}{2} + \frac{7u^4v^2}{2} + \frac{73v^6}{60}\}$$

Au cours de l'intégration de cette expression nous obtiendrons toujours deux termes, un terme contenant un logarithme et un terme polynomial. Nous ne calculerons pas le terme polynomial car nous verrons qu'il est nul. Le changement de variable $v = (x+jy)^{1/3}$ nous conduit à calculer

$$K = 3 \int_g^h dy \int_{(e+jy)^{1/3}}^{(f+jy)^{1/3}} I(v,u)v^2 \, dv.$$

En appliquant les mêmes principes que précédemment, nous trouvons

$$K_1 = \int I(v,u)v^2 dv = -j \frac{1}{18}[(v^3+u^3)^3 \text{Log}(v+u) + (v^3-u^3)^3 \text{Log}(v-u)] - P_9(v,u)]$$

où $P_9(v,u)$ est un polynôme homogène de degré 9, impair par rapport à la variable v

Posant successivement $(e+jy)^{1/3} = u$, $(f+jy)^{1/3} = u$ nous calculons

$$K = -9j \left\{ \int_{e+jh}^{f+jh} K_1(v,u)v^2 dv - \int_{e+jg}^{e+jh} K_1(v,u)v^2 dv \right\}$$

une intégration identique à la précédente nous conduit à

$$K = K_2(v_1,u) - K_2(v_2,u) - K_2(v_3,u) + K_2(v_u,u)$$

où

$$v_1 = (f+jh)^{1/3}, \quad v_2 = (f+jg)^{1/3}, \quad v_3 = (e+jh)^{1/3}, \quad v_4 = (e+jg)^{1/3}, \text{ et,}$$

$$K_2(v,u) = -\frac{1}{24}\left[(v^3+u^3)^4 \operatorname{Log}(v+u) + (v^3-u^3)^4 \operatorname{Log}(v-u)\right] + P_{12}(v,u) \text{ où } P_{12}(v,u)$$

est un polynôme homogène de degré 12 pair par rapport à la variable v. L'intégration du terme en v^* nous donnera une expression identique, en v^*, mais de signe opposé (à cause du deuxième changement de variable). L'inductance elle-même sera la partie réelle de l'expression ainsi obtenue; Or, le polynôme $P_{12}(v,u)$ est pair par rapport à v, donc la partie réelle de $P_{12}(v,u) - P_{12}(v^*,u)$ est identiquement nulle donc l'expression définitive qui nous permettra de calculer l'inductance sera

$$K_{12} = \iint A_1 \, ds_2 = \frac{1}{4\pi(b-a)(d-c)} R_e\Big[K_3(v_1,u_1) - K_3(v_1,u_2) - K_3(v_1,u_3) + K_3(v_1,u_4)$$

$$- K_3(v_2,u) + K_3(v_2,u_2) + K_3(v_2,u_3) - K_3(v_2,u_4)$$

$$- K_3(v_3,u_1) + K_3(v_3,u_2) + K_3(v_3,u_3) - K_3(v_3,u_4)$$

$$+ K_3(v_4,u_1) - K_3(v_4,u_2) - K_3(v_4,u_3) + K_3(v_4,u_4)$$

$$- K_3(v_1^*,u_1 + K_3(v_1^*,u_2) + K_3(v_1^*,u_3) - K_3(v_1^*,u_4)$$

$$+ K_3(v_2^*,u_1) - K_3(v_2^* u_2) - K_3(v_2^*,u_3) + K_3(v_2^*,u_4)$$

$$+ K_3(v_3^*,u_1) - K_3(v_3^*,u_2) - K_3(v_3^*,u_3) + K_3(v_3^*,u_4)$$

$$- K_3(v_3^*,u_1) + K_3(v_4^{**},u_2) + K_3(v_4^*,u_3) - K_3(v_4^*,u_4)\Big]$$

où

$$K_3(v,u) = -\frac{1}{24}\left[(v^3+u^3)^4 \mathrm{Log}(v+u)+(v^3-u^3)^4 \mathrm{Log}(v-u)\right], \text{ où } v=(x+jy)^{1/3}$$

$$u=(x_o+jy_o)^{1/3}$$

L'inductance d'un conducteur sera alors déterminée par :

$$L_1(C_1,C_2) = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{1}{(h-g)(f-e)} K_{12}$$

où C_1 représente le conducteur qui a créé le potentiel vecteur et C_2 celui où le potentiel vecteur agit sur le courant.

Si nous étudions maintenant le circuit formé par une phase d'un moteur à m encoches par pole et phase , phases formées par les conducteurs "Aller" C_j et le conducteur retour D_k, ces conducteurs étant divisés en N spires , l'inductance propre de la phase est donnée par

$$L = N^2 \times \ell \times \left[\sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} \left\{\left[L_1(C_j,D_k)+L_1(D_j,C_k)\right] - \left[L_1(C_j,C_k)+L_1(D_j+D_k)\right]\right\}\right.$$

où ℓ est la longueur des conducteurs extérieurs à l'encoche. De même la mutuelle entre les phases i et ℓ sera donnée par :

$$M_{i\ell} = N^2 \times \ell \times \left(\sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} \left[L_1(D_{\ell j}, C_{ik}) + L_1(C_{jj}, D_{iK}) - L_1(C_{\ell j}, C_{ik}) - L_1(D_{\ell j}, D_{ik})\right]\right.$$

Nous avons effectué ce calcul en double précision car les nombres u_1 $u_2 u_3$ sont très voisins et leur différence très petite, de même que les nombres v_1, v_2, v_3, et un calcul en simple précision entraine des erreurs grossières. Nous avons pris un noyau magnétique feuilleté de longueur suffisante et nous avons mis des bobines dans diverses positions autour du moyau et mesuré au pont de MAXWELL les inductanc obtenues pour chaque position des bobines (figure III.6). Pour différentes valeurs de x_1 et x_2 ainsi que pour différentes valeurs de la section droite S nous avons tracé les courbes de mesure et celles données par le calcul (fig. III.6) Si nous tenons compte d'un coefficient de foisonnement des conducteurs dans les bobines, nous constatons que les résultats

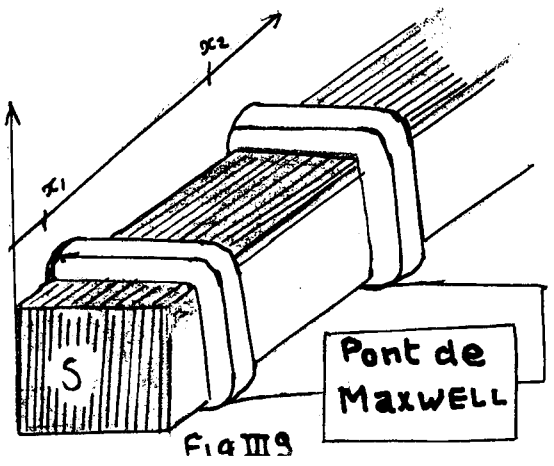
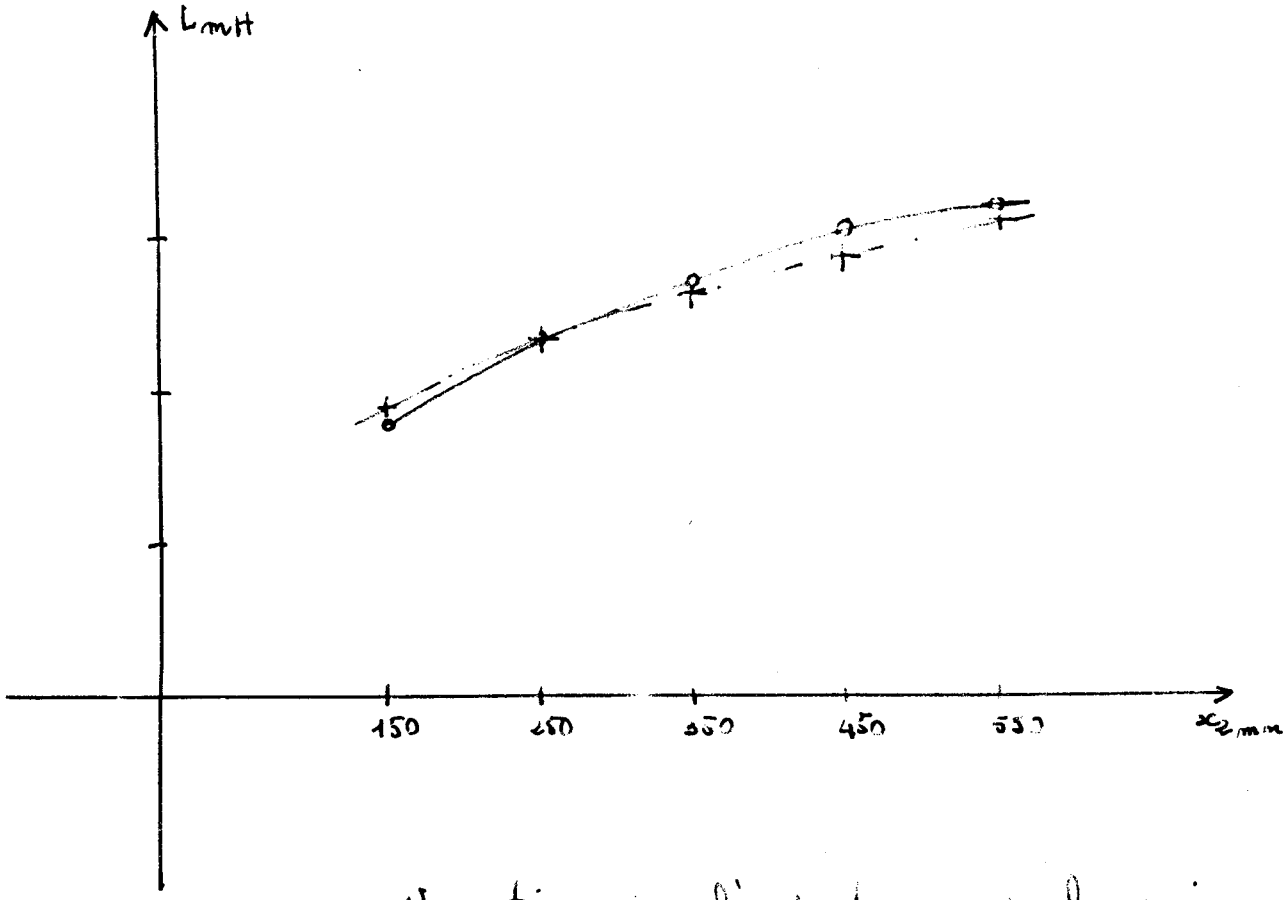


Fig III 9



Variation de l'inductance de la spire
x_1 = 30 mm
+ points calculés
○ points mesurés

Fig. III.10

CONCLUSION

Les méthodes d'analyse présentées en première partie tiennent compte de la répartition bidimensionnelle des courants secondaires, tandis que le calcul du déséquilibre des phases a été effectué dans l'hypothèse d'une répartition idéalisée de la densité de courant. Il n'y a cependant pas de contradiction entre ces deux études car la première partie étant consacrée à l'étude des phénomènes secondaires il était normal de faire le minimum d'hypothèses simplificatrices sur les courants induits ; tandis que dans la deuxième partie c'est l'influence du secondaire sur l'impédance de la machine qui est recherchée et dans cette étude l'hypothèse de MM. POLOUJADOFF et REYX est suffisamment proche de la réalité pour servir de point de départ à l'analyse.

Il aurait été néanmoins possible de traiter le déséquilibre des phases par les méthodes du chapitre III de la première partie car nous avons dans ce chapitre donné une détermination de l'induction secondaire. Mais il en aurait résulté une augmentation de la longueur et de la complexité des calculs considérable par rapport à l'amélioration obtenue sur les résultats acquis dans le cadre de l'hypothèse simplificatrice.

Par contre dans la première partie et dans la détermination du schéma équivalent nous avons traité le problème avec un souci de généralisation qui nous a conduit dans un cas comme dans l'autre à supposer que l'épaisseur et la résistivité des sections de retour pouvaient être différentes de celle de la partie centrale.

La résistivité en particulier est supposée homogène mais non isotrope, le cas d'une résistivité tensorielle étant explicitement exposé dans l'étude du schéma équivalent et ne présentant aucune difficulté à être traité par les méthodes de la première partie.

Ce souci de généralités a rendu de ce faite notre étude applicable au calcul des dispositifs magnétohydrodynamiques à veine liquide et champ glissant où l'hypothèse électrodynamique est souvent employée. [23]

Nous espérons ainsi, à travers l'étude du moteur linéaire, avoir contribué aux recherches dans d'autres domaines d'application de l'électricité, ainsi qu'à la résolution par la méthode de partition de certains problèmes mathématiques issus de la mise en équation de phénomènes de l'Electromagnétisme (et peut être d'autres domaine de la physique).

au moteur linéaire l'ensemble des deux parties que nous venons d'exposer permet d'étudier entièrement le fonctionnement d'une machine construite et pourra donc aider efficacement à la prédétermination des dimensions d'un moteur en fonction des performances qui lui seront demandées.

La précision de cette prédétermination devient fondamentale lorsqu'une machine franchit le stade du laboratoire pour pénétrer dans le monde industriel, où les considérations économiques jouent un rôle prépondérant.

Or à l'heure actuelle, le moteur linéaire semble engagé dans des perspectives d'avenir industriel très favorables. En effet diverses applications à la traction des véhicules de transport terrestre sont en cours de réalisation et la découverte récente d'applications dans le domaine de la manutention et du convoyage élargissent sans cesse le domaine d'emploi de ce type de machine.

Nous espérons avoir ainsi apporté une contribution effective au développement de l'Electrotechnique, en étudiant une machine dont l'avenir semble riche de réalisations industrielles.

BIBLIOGRAPHIE

1 DUFAIT, ROSENFELD, ZEENAY : La traction tangentielle Electricité et Hydraulique

2 M.F. JONES : Launching Aircraft electrically.Aviation, Octobre 1946

3 F.C. WILLAMS, E.R. LAITHWAITE, L.S. PIGGOT : Brushlss variable speed induction motors. P. I.E.E. paper n° 2097 V, June 1956 (104 A, p 102)

4 E.R. LAITHWAITE : Linear induction motors - P. I.E.E. paper 2433 V, December 1967 (104 A, p 461)

5 E.R. LAITHWAITE, D. TIPPING, D.E. HESMONDALGH : The application of linear induction motor to conveyors - P. I.E.E. paper n° 3225 V, June 1960, p 284

6 E.R. LAITHWAITE : The linear motor, Discovery, November 1962

7 E.R. LAITHWAITE et BARWELL : Linear induction motor for high speed Railways, Electronics and Power, April 1964

8 E.R. LAITHWAITE : Propulsion without wheels (The English Universities Press, 1966

9 E.R. LAITHWAITE : Induction machines for special purposes (George Newnes, London 1966)

10 K.M. CHIRGWIN : Study of linear induction motor and its feasibility for high speed ground transportation - Garret Company - Report Number 67 - 1948, June 1967

11 D.C. WHITE, R.D. THORNTON, C. KINGSLEY Jr, D.H. NAVON : Some problems related to electric propulsion, paper PB 173 639 - Massachussetts Institute of Technolc

12 J. VALDAMIS, J. LIELPETERS, J. MIKELSONS : Influence of higher space harmonics of the fields on electrodynamic forces and the Joule losses in conducting layer moving in a travelling magnetic field - Academie des Sciences de la R.S.S. de Lettonie - Série Sciences Physiques et Techniques - 6 - (1965) 27

13 J. MIKELSON, G. SERMAS : Influence of toothed surface of inductor on electro-magnetic field distribution in a conducting slab (Ibid 10 (1965) 26)

14 G.I. SHTURMAN : An induction motor with open magnetic circuit - Electrichestvo n° 10, p 43 - 1946

15 G.I. SHTURMAN et ARANOV : Edge effect in induction motors with open magnetic field : Ibid 1951 n° 1

16 G.I. SHTURMAN : Open squirrel cages in short circuited motors with open magnetic field (Ibid 1951)

17 M. POLOUJADOFF et J.C. SABONNADIERE : Utilisation d'une méthode de partition dans la résolution de certaines équations aux dérivées partielles dont le domaine comporte une bande infinie - C.R. Acad. Sc. Paris, t 266, p 230-233 (22 janvier 1968)

18 M. POLOUJADOFF et J.C. SABONNADIERE : Etude des courants induits dans le secondaire d'un moteur linéaire à inducteur court alimenté par un système de courants triphasés équilibrés - C.R. Acad. Sc. Paris, t 266, p 272-275 (29 janvier 1968)

19 M. POLOUJADOFF : Perfectionnement à la théorie des moteurs d'induction linéaires destinés à la traction - C.R. Acad. Sc. Paris, t 263, p 605-607 (Août 1966)

20 M. POLOUJADOFF et PH. REYX : Etude théorique et expérimentale des sections de retour sur le fonctionnement des moteurs d'induction linéaires à inducteur court - C.R. Acad. Sc. Paris, t 263, p 799-802 (Octobre 1966)

21 J.C. SABONNADIERE et M. POLOUJADOFF : Multiple eigenvalues and corresponding eigen vectors in the theory of symmetrical and related component, The Matrix and Tensor Quaterly - December 1967

22 R.L. RUSSEL and K.H. NORSWORTHY : Eddy currents and wall losses in screened rotor induction motors - P I.E.E., paper n° 2525 V (April 1958)

23 Y.Y. LIELPETERS : Applicabilité de l'approximation électrodynamique dans la théorie des convertisseurs MHD à induction utilisant des métaux liquide. Académie des Sciences de la R.S.S. de Lettonie - Section Sciences Physiques et Techniques (7) 1966

24 CARTER : The magnetic field of the dynamo electric machine - J. Instn Elec. Eng. n° 359, 1115, 39 (1926)

25 M. IVANES : Thèse - Grenoble 1967

26 J.L. LIONS : Methodes d'approximation numérique des problèmes aux limites de la physique mathématique. Institut Blaise Pascal - Publication n° 14 111 A - Février 1962

27 FORSYTHE et WASOW : Finite difference methods for Partial differential equations (John Wiley and Sons - New York 1964)

28 M. IVANES et J.C. SABONNADIERE : Calcul du champ d'induction magnétique dans un angle de transformateur compte tenu de la saturation - R.G.E. 1967, t 76 n°

29 N. GASTINEL : Analyse numérique linéaire (Herman)

30 A.R. STEVENSON, H. PARK : Graphical determination of magnetic fields - T. AIEE 1927, t 46, p 112

31 C.J. CARPENTER : The application of the method of images to machine and winding fields - P I.E.E.E., Vol 107 (1960)

32 P.I. LAWRENSON : The magnetic field of the end winding of turbo generator P. I.E.E., Vol 108 (1961)

33 G. DARRIEUS : Determination et tracé des champs à trois dimensions. Application aux tôles de bobines, notamment des turbo-alternateurs - R.G.E. Mars 1967

34 K.J. BINNS - P.J. LAWRENSON : Analysis and computation of electric and magnetic fields problems (Mac Millan, New York 1963)

35 B. HAGUE : The principles of electromagnetism applied to electrical machines (Dover, New York)

36 W.E. ROGERS : Introduction to electric fields (Mac Graw Hill 1954)

37 H.L. LANGHAAR : Analyse dimensionnelle et théorie des maquettes (DUNOD 1956)

38 E.R. LAITHWAITE : Some aspect of Electrical machine with open magnetic circuits P. I.E.E., Vol 115 n° 9, september 1968

39 E. CAMPANARI : Motore asincroni rettilinei - Electtrotecnica, Sept. 1967 p 716, 727

40 Y. PELENC, E. PILLET, M. POLOUJADOFF, E. REMY, Ph. REYX : Influence de l'entrefer sur les caractéristiques des moteurs asynchrones polyphasés linéaire R.G.E. Novembre 1966, t 75, n° 11

41 E. ELLIOT, D.J. CERVIN, L.G. HAVS, E. WEINBERG : Theorical and experimental investigation of liquid metal M.H.D. power Generators - International Symposium on MHD electrical Power Generation - Salzburg 1966, paper SM - 74/77

42 G.W. SUTTON : Direct energy conversion (Mac Graw Hill)

43 CERMAK et SILVESTER : Solution of two dimensional field problems by boundary relaxation - P I.E.E., vol 115, n° 9 (Sept. 1968) p 1341-1348

44 QUICHAUD et LEFRERE : Etude expérimentale du transfert de puissance entre une veine de sodium et une armature à champ glissant (R.G.E. Juin 1966

45 KANT et ROBERT : Etude préliminaire d'un générateur M.H.D. à veine liquide et champ glissant (Ibid)

46 M. POLOUJADOFF et M. IVANES : Comparaison des schémas équivalents au moteur asynchrone triphasé - R.G.E. janvier 1967, t 76 n° 1

47 D.W. PEACEMAN : Numerical solution of alleptic and parabolic partial differential équations - N.S.F. Conference on electromagnetic fields in electrical Device University of Colorado, Boulder, Colorado, July 17, August 6, 1966

48 M. POLOUJADOFF et J.C. SABONNADIERE : Etude d'un modèle électrique des machines linéaires et magnétohydrodynamiques à veine liquide - C.R. Acad. Sc. Paris (sous presse)

49 High speed Ground Transportation department : A preliminary study of the linear induction motor for high speed ground transportation - Contract n° 353-66 NEG January 1968

50 A. CERMAK : A relaxation method for open boundary field problems - Thesis Mc Gill University - Montreal - Québec

Vu
Grenoble le
Le Président de la thèse

Vu
Grenoble, le
Le Doyen de la Faculté des Sciences

Vu et permis d'imprimer
Le Recteur de l'Académie de Grenoble