



**HAL**  
open science

## Une famille de topologies et de convergences sur l'ensemble des fonctionnelles convexes

Jean-Luc Joly

► **To cite this version:**

Jean-Luc Joly. Une famille de topologies et de convergences sur l'ensemble des fonctionnelles convexes. Modélisation et simulation. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1970. tel-00282246

**HAL Id: tel-00282246**

**<https://theses.hal.science/tel-00282246>**

Submitted on 27 May 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

n° d'ordre

T H E S E

présentée à la

FACULTE DES SCIENCES DE GRENOBLE

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR ES SCIENCES

par

*JEAN LUC JOLY*

-----7:--

UNE FAMILLE DE TOPOLOGIES ET DE CONVERGENCES  
SUR L'ENSEMBLE DES FONCTIONNELLES CONVEXES

Thèse soutenue le 19 octobre 1970, devant la Commission d'Examen

*MM. J. KUNTZMANN      Président*

*N. GASTINEL*

*J.M. MOREAU*

*P.J. LAURENT*

*Examineurs*



n° d'ordre

T H E S E

présentée à la

FACULTE DES SCIENCES DE GRENOBLE

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR ES SCIENCES

par

*JEAN LUC JOLY*

-----

UNE FAMILLE DE TOPOLOGIES ET DE CONVERGENCES  
SUR L'ENSEMBLE DES FONCTIONNELLES CONVEXES

Thèse soutenue le 19 octobre 1970, devant la Commission d'Examen

*MM. J. KUNTZMANN      Président*

*N. GASTINEL  
M. MOREAU              Examineurs  
P.J. LAURENT*



## L I S T E   D E S   P R O F E S S E U R S

---

Doyen honoraire : Monsieur M. MORET  
Doyen : Monsieur E. BONNIER

### PROFESSEURS TITULAIRES

MM.	NEEL Louis	Physique Expérimentale
	KRAVTCHENKO Julien	Mécanique Rationnelle
	CHABAUTY Claude	Calcul différentiel et intégral
	BENOIT Jean	Radioélectricité
	CHENE Marcel	Chimie Papetière
	FELICI Noël	Electrostatique
	KUNTZMANN Jean	Mathématiques Appliquées
	BARBIER Reynold	Géologie Appliquée
	SANTON Lucien	Mécanique des Fluides
	OZENDA Paul	Botanique
	FALLOT Maurice	Physique Industrielle
	KOSZUL Jean-Louis	Mathématiques
	GALVANI Octave	Mathématiques
	MOUSSA André	Chimie Nucléaire
	TRAYNARD Philippe	Chimie Générale
	SOUTIF Michel	Physique Générale
	CRAYA Antoine	Hydrodynamique
	REULOS René	Théorie des Champs
	BESSON Jean	Chimie Minérale
	AYANT Yves	Physique Approfondie
	GALLISSOT François	Mathématiques
Melle.	LUTZ Elisabeth	Mathématiques
MM.	BLAMBERT Maurice	Mathématiques
	BOUCHEZ Robert	Physique Nucléaire
	LLIBOUTRY Louis	Géophysique
	MICHEL Robert	Minéralogie et pétrographie
	BONNIER Etienne	Electrochimie et Electrometallurgie
	DESSAUX Georges	Physiologie animale
	PILLET Emile	Physique Industrielle-Electrotechnique
	YOCCOZ Jean	Physique Nucléaire théorique
	DEBELMAS Jacques	Géologie Générale
	GERBER Robert	Mathématiques
	PAUTHENET René	Electrotechnique
	MALGRANGE Bernard	Mathématiques Pures
	VAUQUOIS Bernard	Calcul Electronique
	BARJON Robert	Physique Nucléaire

MM.	BARBIER Jean-Claude	Physique
	SILBER Robert	Mécanique des Fluides
	BUYLE-BODIN Maurice	Electronique
	DREYFUS Bernard	Thermodynamique
	KLEIN Joseph	Mathématiques
	VAILLANT François	Zoologie et Hydrobiologie
	ARNAUD Paul	Chimie
	SENGEL Philippe	Zoologie
	BARNOUD Fernand	Biosynthèse de la Cellulose
	BRISSONNEAU Pierre	Physique
	GAGNAIRE Didier	Chimie Physique
Mme.	KOFLER Lucie	Botanique
MM.	DEGRANGE Charles	Zoologie
	PEBAY-PEROULA Jean-Claude	Physique
	RASSAT André	Chimie Systématique
	DUCROS Pierre	Cristallographie Physique
	DODU Jacques	Mécanique Appliquée I. U. T.
	ANGLES D'AURIAC Paul	Mécanique des Fluides
	LACAZE Albert	Thermodynamique
	GASTINEL Noël	Analyse numérique
	GIRAUD Pierre	Géologie
	PERRET René	Servo-mécanisme
	PAYAN Jean-Jacques	Mathématiques Pures

#### PROFESSEURS SANS CHAIRE

MM.	GIDON Paul	Géologie
Mme.	BARBIER Marie-Jeanne	Electrochimie
Mme.	SOUTIF Jeanne	Physique
	COHEN Joseph	Electrotechnique
	DEPASSEL R.	Mécanique des Fluides
	GLENAT René	Chimie
	BARRA Jean	Mathématiques Appliquées
	COUMES André	Electronique
	PERRIAUX Jacques	Géologie et Minéralogie
	ROBERT André	Chimie Papetière
	BIARREZ Jean	Mécanique Physique
	BONNET Georges	Electronique
	CAUQUIS Georges	Chimie Générale
	BONNETAIN Lucien	Chimie Minérale
	DEPOMIER Pierre	Physique Nucléaire-Génie Atomique
	HACQUES Gérard	Calcul numérique
	POLOUJADOFF Michel	Electrotechnique
Mme.	KAHANE Josette	Physique
Mme.	BONNIER Jané	Chimie
MM.	VALENTIN Jacques	Physique
	REBECQ Jacques	Biologie
	DEPORTES Charles	Chimie
	SARROT-REYNAULD Jean	Géologie
	BERTRANDIAS Jean-Paul	Mathématiques Appliquées
	AUBERT Guy	Physique

PROFESSEURS ASSOCIES

---

MM.	RODRIGUES Alexandre	Mathématiques Pures
	MORITA Susumu	Physique Nucléaire
	RADHAKRISHNA	Thermodynamique

MAITRES DE CONFERENCES

---

MM.	LANCIA Roland	Physique Atomique
Mme.	BOUCHE Liane	Mathématiques
MM.	KAHANE André	Physique Générale
	DOLIQUE Jean Michel	Electronique
	BRIERE Georges	Physique
	DESRE Georges	Chimie
	LAJZEHOWICZ Joseph	Physique
	LAURENT Pierre	Mathématiques Appliquées
Mme.	BERTRANDIAS Françoise	Mathématiques Pures
MM.	LONGQUEUE Jean-Pierre	Physique
	SOHM Jean-Claude	Electrochimie
	ZADWORNY François	Electronique
	DURAND Francis	Chimie Physique
	CARLIER Georges	Biologie végétale
	PFISTER Jean-Claude	Physique
	CHIBON Pierre.	Biologie animale
	IDELMAN Simon	Physiologie animale
	BLOCH Daniel	Electrotechnique I. P.
	MARTIN-BOUYER Michel	Chimie (C. S. U. Chambéry)
	SIBILLE Robert	Construction mécanique (I. U. T.)
	BRUGEL Lucien	Energétique I. U. T.
	BOUVARD Maurice	Hydrologie
	RICHARD Lucien	Botanique
	PELMONT Jean	Physiologie animale
	BOUSSARD Jean-Claude	Mathématiques Appliquées (I. P. G.)
	MOREAU René	Hydraulique I. P. G.
	ARMAND Yves	Chimie I. U. T.
	BOLLIET Louis	Informatique I. U. T.
	KUHN Gérard	Energétique I. U. T.
	PEFFEN René	Chimie I. U. T.
	GERMAIN Jean-Pierre	Mécanique
	JOLY Jean-René	Mathématiques Pures
Melle.	PIERY Yvette	Biologie animale
	BERNARD Alain	Mathématiques Pures
	MOHSEN Tahsin	Biologie (C. S. U. Chambéry)
	CONTE René	Mesures Physiques I. U. T.
	LE JUNTER Noël	Génie Electrique Electronique I. U. T.
	LE ROY Philippe	Génie Mécanique I. U. T.
	ROMIER Guy	Techniques Statistiques quantitatives I. U. T.
	VIALON Pierre	Géologie
	BENZAKEN Claude	Mathématiques Appliquées
	MAYNARD Roger	Physique

MM.	DUSSAUD René	Mathématiques (C. S. U. Chambéry)
	BELORIZKY Elie	Physique (C. S. U. Chambéry)
Mme.	LAJZEROWICZ Jeannine	Physique (C. S. U. Chambéry)
M.	JULLIEN Pierre	Mathématiques Pures
Mme.	RINAUDO Marguerite	Chimie
MM.	BLIMAN Samuel	E. I. E.
	BEGUIN Claude	Chimie Organique
	NEGRE Robert	I. U. T.

MAITRES DE CONFERENCES ASSOCIES

MM.	YAMADA Osamu	Physique du Solide
	NAGAO Makoto	Mathématiques Appliquées
	MAREZIO Massimo	Physique du Solide
	CHEECKE John	Thermodynamique
	BOUDOURIS Georges	Radioélectricité
	ROZMARIN Georges	Chimie Papetière

*Cette thèse a été préparée à l'Institut de Mathématiques Appliquées de Grenoble.*

*Monsieur KUNTZMANN a bien voulu accepter de présider le Jury, je lui exprime ma respectueuse gratitude.*

*Ma reconnaissance va particulièrement à Monsieur GASTINEL qui a animé et guidé mon activité scientifique par ses conseils, ses critiques et sa coopération,*

*à Monsieur LAURENT à qui je dois l'appui incessant, l'aide, les conseils et les encouragements fraternels et nombreux d'un aîné.*

*Monsieur MOREAU me fait l'honneur de participer au Jury, Monsieur LIONS a bien voulu s'intéresser à ce travail. Outre qu'ils ont, à des titres divers, inspiré mon intérêt pour ce sujet, ils ont contribué à l'étayer par leurs suggestions efficaces. Je leur exprime ma reconnaissance.*

*Je tiens enfin à remercier Melle BICAIS de sa patience ; la présentation de ce travail a beaucoup profité de sa compétence.*



Soient  $E$  et  $E'$  deux espaces vectoriels réels en dualité séparante,  $\Gamma_0(E, E')$  et  $\Gamma_0(E', E)$  (Chapitre I), les ensembles de fonctionnelles convexes, semi-continues inférieurement (pour les topologies compatibles avec la dualité) et propres sur  $E$  et  $E'$  respectivement.

Nous définissons (chapitre II), sur  $\Gamma_0(E, E')$  et  $\Gamma_0(E', E)$  une famille de topologies compatibles avec la bijection naturelle entre ces deux ensembles que fournit la polarité.

Toute topologie de cette famille s'obtient comme la borne supérieure de deux topologies  $I$  (inférieure) et  $S$  (supérieure).

L'étude des suites convergentes pour la topologie  $I$  conduit à la notion de limite inférieure classique.

La même étude (chapitre III) pour la topologie  $S$  oblige à définir une notion de limite supérieure différente de celle qui est habituelle depuis Hahn, Kuratovski, etc...

Les liens qui unissent les topologies introduites au chapitre II et les convergences qu'on peut associer aux notions de limites inférieures et supérieures du chapitre III sont étroits.

Cependant, topologie et convergence ne se réduisent pas l'une à l'autre. A ce sujet, les simplifications qu'on peut observer lorsque certaines propriétés supplémentaires de métrisabilité par exemple sont vérifiées par  $(E, E')$ , sont dues principalement au fait que nous nous sommes restreints à la considération de suites dans  $\Gamma_0(E, E')$  et  $\Gamma_0(E', E)$ .

Les convergences ainsi définies présentant cet intérêt d'être assez "faibles" pour permettre, par exemple, de considérer  $E$  (séparable) comme la limite d'une suite de sous-espaces vectoriels de dimension finie.

Parallèlement, il faut donc s'attendre à ce que certaines applications ne soient pas "continues".

C'est le cas de deux opérations fondamentales : l'addition et l'inf-convolution, qui ne possèdent, lorsqu'elles sont définies, qu'une propriété de semi-continuité.

Les problèmes de stabilité qui en résultent sont examinés au chapitre IV.

Nous y définissons la notion de codistance, qui paraît sous ses diverses formes, donner des conditions suffisantes utilisables pratiquement.

Des exemples de problèmes auxquels on peut songer appliquer ce matériel forment la matière du chapitre V.

L'étude, lorsque  $E$  est supposé de dimension finie d'une convergence sur  $\Gamma_0(E, E')$  a été pour la première fois semble-t-il, entreprise par Wijsman en 1964. Mais on doit à U. Mosco (1967 etc...) cette idée d'introduire -lorsque  $E$  est un espace de Banach réflexif de dimension infinie- une convergence sur  $\Gamma_0(E, E')$  faisant intervenir à la fois la topologie forte et la topologie faible de  $E$ .

La convergence ainsi définie semble alors -par les applications qu'elle permet et qu'en donne Mosco- bien adaptée à l'étude de l'approximation ou de certaines perturbations des inéquations variationnelles dans ces espaces.

Or le fait que la théorie des fonctionnelles convexes permette souvent une approche intéressante d'un certain nombre de problèmes (en particulier d'optimisation avec contraintes, autres que ceux qui ont été mentionnés plus haut). Le fait aussi que le cadre naturel de cette théorie soit celui des espaces vectoriels en dualité, nous ont conduit à fournir, à partir du travail de Mosco, un effort de systématisation dont nous présentons ici les premiers résultats.

## CHAPITRE - I

### NOTIONS DE BASE CONCERNANT LES FONCTIONNELLES CONVEXES

#### I - INTRODUCTION

La théorie des fonctionnelles convexes s'est largement développée durant les dernières années et a maintes fois eu l'occasion de faire la preuve de son utilité : problème de normes équivalentes dans les espaces normés, Asplund (1968) ; équations différentielles multivoques, Castaing et Valadier (1969) ; théorie de la meilleure approximation, Laurent (1968) ; problèmes du calcul des variations, Rockafellar (1970), inéquations variationnelles (voir par exemple Lions (1969)).

Lui sont attachés les noms d'un grand nombre d'auteurs parmi lesquels Young, Fenchel, plus récemment Broendsted, Kachurovski, Moreau, Rockafellar etc... et la littérature sur le sujet est abondante.

Comme ouvrage de référence, on se reportera au livre de Rockafellar, Convex Analysis (1970), qui traite de façon exhaustive la question dans le cadre des espaces de dimension finie, et au texte de Moreau, Fonctionnelles convexes, Séminaire sur les équations aux dérivées partielles - Collège de France (1966).

L'objet de ce premier chapitre est de fixer, concernant les fonctionnelles convexes, les définitions et notations qui seront utilisées par la suite.

Les propriétés sont souvent données au début sans justification ; pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur aux ouvrages cités plus haut.

Ainsi les concepts de base ont pu être réunis dans deux courts paragraphes (2 et 3).

Les paragraphes 4 et 5 sont consacrés à un exposé plus détaillé des propriétés de continuité et de compacité des fonctionnelles convexes. Nous avons choisi d'introduire la notion de fonctionnelle inf-localement compacte (Joly (1969)) dans laquelle il faut voir le prolongement le plus immédiat de celle de fonctionnelle inf-compacte telle qu'on la trouve dans Moreau.

Son intérêt principal est, nous semble-t-il, de nous permettre de présenter au paragraphe 6 de façon unifiée et sous une forme peut être plus géométrique, sinon beaucoup plus générale, certains résultats de fermeture qui concernent l'opération d'inf-convolution.

Les applications habituelles à la sous-différentiabilité de la somme, de l'inf-convolution de deux fonctionnelles convexes sont ensuite données au paragraphe 7.

## 2 - FONCTIONNELLES CONVEXES

### 2.1 - SYSTEME DUAL

Un système dual consiste dans la donnée de deux espaces vectoriels  $E$  et  $E'$  et d'une forme bilinéaire dite de dualité sur le produit. On note  $\langle x, x' \rangle$  la valeur de la forme bilinéaire de dualité en  $(x, x') \in E \times E'$ .

On supposera toujours les espaces vectoriels réels. On fera aussi l'hypothèse que la dualité entre  $E$  et  $E'$  est séparante, c'est-à-dire que la forme bilinéaire de dualité est non dégénérée.

Soit  $E$  un espace localement convexe et séparé (e.l.c.s) et  $E'$  son dual. Lorsqu'il sera fait usage dans la suite d'une notion de dualité entre  $E$  et  $E'$ , il s'agira du système dual  $(E, E')$  canonique i.e. celui où la forme bilinéaire prend par définition au point  $(x, x') \in E \times E'$  la valeur de la fonctionnelle linéaire (continue)  $x'$  au point  $x \in E$ . Et cette dualité est, on le sait, séparante.

### 2.2 - FONCTIONNELLES A VALEURS DANS $\bar{\mathbb{R}}$ . FONCTIONNELLES CONVEXES

- a) On note  $\bar{\mathbb{R}}$  l'ensemble  $\mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$ . On étend à  $\bar{\mathbb{R}}$  l'addition de  $\mathbb{R}$ , en adoptant la convention

$$(-\infty) + (+\infty) = (+\infty) + (-\infty) = (+\infty)$$

Une étude détaillée des propriétés algébriques de  $\bar{\mathbb{R}}$  peut être trouvée dans Moreau (1963).

Il en résulte en particulier que  $\bar{\mathbb{R}}^E$ , l'ensemble des applications de l'ensemble  $E$  dans  $\bar{\mathbb{R}}$  est muni d'une structure de cône convexe.

- b) On appelle domaine effectif de  $f \in \bar{\mathbb{R}}^E$ , le sous-ensemble de  $E$  défini par :

$$\text{dom}(f) = \{x \in E ; f(x) < +\infty\}.$$

- c) Si  $Q$  est un sous-ensemble de  $E$  et si  $f \in \bar{\mathbb{R}}^Q$ , on associe à  $f$  son prolongement à  $E$ , soit  $\tilde{f} \in \bar{\mathbb{R}}^E$ , en posant :

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in Q \\ +\infty & \text{si } x \notin Q \end{cases}$$

Ceci permet, en particulier de plonger  $2^E$ , l'ensemble des parties de  $E$ , dans  $\bar{\mathbb{R}}^E$ , en faisant correspondre à  $Q \in 2^E$  l'élément  $q \in \bar{\mathbb{R}}^E$ , appelé la fonctionnelle indicatrice de  $Q$ , fonctionnelle qui prend la valeur 0 dans  $Q$  et  $+\infty$  en dehors.

- d) Dans le but de ne pas multiplier le nombre des notations, on fera quelquefois l'identification de  $Q \in 2^E$  avec son indicatrice  $q \in \bar{\mathbb{R}}^E$ , en utilisant la notation abusive  $Q \in \bar{\mathbb{R}}^E$ , où la lettre capitale rappelle que cet élément de  $\bar{\mathbb{R}}^E$  est l'indicatrice du sous-ensemble  $Q$  de  $E$ .
- e) Soit  $E$  un espace vectoriel. On dit que  $f \in \bar{\mathbb{R}}^E$  est une fonctionnelle convexe si pour tout  $x$  et  $y$  dans  $E$  et tout  $\alpha \in ]0,1[$ , on a :

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y)$$

On désigne par  $\text{Conv}(E)$  le sous-ensemble de  $\bar{\mathbb{R}}^E$  constitué par toutes les fonctionnelles convexes. C'est un cône convexe dans  $\bar{\mathbb{R}}^E$ . On remarquera que  $Q \in \text{Conv}(E)$  si et seulement si  $Q$  est un sous-ensemble convexe de  $E$ .

- f) On dira que  $f \in \text{Conv}(E)$  est propre si  $f$  ne prend pas identiquement la valeur  $+\infty$ , et en aucun point la valeur  $-\infty$ . ( $f$  est alors une fonction numérique convexe définie sur  $\text{dom}(f)$  qui n'est pas vide).

g) Un élément  $f$  de  $\text{Conv}(E)$  prenant en un point  $x_0$  la valeur  $-\infty$  est d'ailleurs assez particulier. En effet, sur toute demi-droite d'origine  $x_0$ , il existe au plus un point  $x_1$  où  $f$  prend une valeur finie, auquel cas  $f$  vaut  $-\infty$  entre  $x_0$  et  $x_1$ ,  $+\infty$  au delà de  $x_1$ .

h) Si toute partie de  $E$  peut être identifiée à un élément de  $\bar{\mathbb{R}}^E$ , réciproquement à tout  $f \in \bar{\mathbb{R}}^E$  on peut associer canoniquement deux sous-ensembles de  $E \times \mathbb{R}$  : l'épigraphe de  $f$ , noté  $\text{épi}(f)$  ou  $F$

$$F = \{(x, \alpha) \in E \times \mathbb{R} ; f(x) \leq \alpha\}$$

et l'épigraphe strict de  $f$ , noté  $\tilde{\text{épi}}(f)$  ou  $\tilde{F}$

$$\tilde{F} = \{(x, \alpha) \in E \times \mathbb{R} ; f(x) < \alpha\}$$

On vérifie que  $f \in \text{Conv}(E)$  si et seulement si  $F$  (resp.  $\tilde{F}$ ) est une partie convexe de  $E \times \mathbb{R}$ .

### 2.3 - LA POLARITE ; LES ENSEMBLES $\Gamma(E, E')$ et $\Gamma(E', E)$

a) Soit  $(E, E')$  un système dual. A tout  $f \in \bar{\mathbb{R}}^E$  on fait correspondre  $f^* \in \bar{\mathbb{R}}^{E'}$ , appelé polaire de  $f$ , par la formule

$$(1) \quad f^*(x') = \sup_{x \in E} (\langle x, x' \rangle - f(x)) \quad , \quad \forall x' \in E'.$$

On remarque que  $f^* \in \text{Conv}(E')$  puisque d'après (1)  $f^*$  est l'enveloppe supérieure d'une famille de fonctions affines sur  $E'$ . Ceci conduit à introduire la notation suivante :

b) On désigne par  $\Gamma(E, E')$ , [resp.  $\Gamma(E', E)$ ] l'ensemble des éléments de  $\bar{\mathbb{R}}^E$  [resp.  $\bar{\mathbb{R}}^{E'}$ ] qui sont enveloppes supérieures de familles de fonctions affines sur  $E$  [resp.  $E'$ ] à pente dans  $E'$  [resp.  $E$ ].

Lorsqu'aucune confusion n'est à craindre on peut utiliser la notation  $\Gamma(E)$  au lieu de  $\Gamma(E, E')$ . L'ensemble  $\Gamma(E)$  est un cône convexe dans  $\text{Conv}(E)$ .

- c) On remarquera que  $f \in \Gamma(E)$  ne prend en un point de  $E$  la valeur  $-\infty$  que lorsque  $f$  est identique à  $-\infty$  (enveloppe supérieure de la famille vide). On note  $\Gamma_0(E)$  le sous-ensemble de  $\Gamma(E)$  constitué des éléments propres. En vertu de ce qui précède  $\Gamma_0(E)$  ne diffère de  $\Gamma(E)$  que par les deux éléments respectivement identiques à  $+\infty$  et  $-\infty$ .
- d) Si  $f \in \bar{\mathbb{R}}^E$ , on désigne par  $f^\Gamma$  la  $\Gamma$ -régularisée de  $f$  c'est-à-dire la plus grande minorante de  $f$  qui appartienne à  $\Gamma(E)$ . Autrement dit  $f^\Gamma$  est l'enveloppe supérieure de la famille des minorantes affines de  $f$ , à pente dans  $E'$ .
- e) Le résultat important concernant la polarité est le suivant : la polarité  $f \rightarrow f^*$  définit une bijection de  $\Gamma(E)$  sur  $\Gamma(E')$ . L'application réciproque fait correspondre à  $f' \in \Gamma(E')$  sa polaire  $(f')^* \in \Gamma(E)$  (notation abusive). On a l'égalité  $f = f^{**}$  si et seulement si  $f \in \Gamma(E)$ .
- f) Si  $Q$  est une partie de  $E$ ,  $q \in \bar{\mathbb{R}}^E$  son indicatrice, le polaire  $q^* \in \Gamma(E')$  est ce qu'on appelle habituellement la fonction d'appui de  $Q$  et l'ensemble des points  $x' \in E'$  tels que  $q^*(x') \leq 1$  est l'ensemble polaire  $Q^\circ$  de l'ensemble  $Q$ .
- g) Soit  $f \in \text{Conv}(E)$  et  $x$  un point de  $E$ . On dit que  $x' \in E'$  est un sous-gradient de  $f$  au point  $x$  si  $x'$  est la pente d'une minorante affine de  $f$  prenant en  $x$  la même valeur que  $f$  ( $f$  est donc finie en  $x$ ). Autrement dit si  $x'$  est un sous-gradient de  $f$  en  $x$ , on a

$$f(y) \geq f(x) + \langle y-x, x' \rangle, \quad \forall y \in E.$$

L'ensemble des sous-gradients de  $f$  au point  $x$  est noté  $\partial f(x)$  et s'appelle le sous-différentiel de  $f$  en  $x$ .

On remarque que  $x' \in \partial f(x)$  si et seulement si

$$f(x) + f^*(x') = \langle x, x' \rangle$$

ce qui permet de voir en tenant compte de (1) que  $\partial f(x) \in \Gamma(E')$  (Convention 2.2 d)), ce qui signifie que le sous-différentiel est un ensemble convexe de  $E'$ , obtenu comme intersection d'une famille d'hyperplans de  $E'$  (à pente dans  $E$ ).

Terminons en notant que si  $x' \in \partial f(x)$ , alors  $x \in \partial f^*(x')$ . La réciproque est vraie si  $f \in \Gamma(E)$ , c'est-à-dire, en fait, si  $f$  appartient à  $\Gamma_0(E)$ .

### 3 - FONCTIONNELLES SEMI-CONTINUES INFÉRIEUREMENT

#### 3.1 - TOPOLOGIES COMPATIBLES AVEC UNE DUALITÉ

Soit  $(E, E')$  un système dual. Une topologie sur  $E$  [resp.  $E'$ ] est dite compatible avec la dualité entre  $E$  et  $E'$  si elle est localement convexe et si le dual de  $E$  [resp.  $E'$ ] pour cette topologie est identique à  $E'$  [resp.  $E$ ].

D'une telle topologie on dira de façon abrégée que c'est une topologie  $(E, E')$  [resp.  $(E', E)$ ].

Lorsque le système dual  $(E, E')$  est séparé, les topologies  $(E, E')$  et  $(E', E)$  sont séparées.

Avec les notations habituelles,  $\sigma(E, E')$  désigne la topologie faible sur  $E$  qui est la moins fine des topologies  $(E, E')$ .

La topologie de Mackey  $\tau(E, E')$  ou topologie de la convergence uniforme dans les ensembles convexes et faiblement compacts de  $E'$  est la plus fine des topologies  $(E, E')$ .

#### 3.2 - FONCTIONNELLES SEMI-CONTINUES INFÉRIEUREMENT

a) Soit  $E$  un espace topologique. Un élément  $f \in \mathbb{R}^{\bar{E}}$  est une fonctionnelle semi-continue inférieurement (s.c.i.), i.e. vérifie :

$$\liminf_{y \rightarrow x} f(y) = f(x) \quad , \quad \forall x \in E,$$

si et seulement si son épigraphe est une partie fermée de l'espace produit  $E \times \mathbb{R}$ . L'ensemble des fonctionnelles s.c.i. forme un cône convexe dans  $\mathbb{R}^{\bar{E}}$ .

b) Soit  $E$  un e.l.c.s. On note  $\overline{\text{Conv}}(E)$ , l'ensemble des fonctionnelles s.c.i. appartenant à  $\text{Conv}(E)$ . Tenant compte de 2.2.g) si  $f \in \text{Conv}(E)$  prend en un point la valeur  $-\infty$ , alors elle ne prend pas d'autres valeurs que  $-\infty$  et  $+\infty$ . En conséquence, si  $f \in \overline{\text{Conv}}(E)$  est finie en un point, elle est propre.

- c) La régularisée s.c.i.  $\bar{f}$  de  $f \in \bar{\mathbb{R}}^E$  est la plus grande minorante de  $f$  dans  $\bar{\mathbb{R}}^E$  qui soit s.c.i. :

$$\bar{f}(x) = \liminf_{y \rightarrow x} f(y) \quad , \quad \forall x \in E$$

ce qui se traduit sur les épigraphes par :

$$\text{epi}(\bar{f}) = \overline{\text{epi}(f)}.$$

- d) Soit  $E'$  le dual de  $E$ . L'ensemble  $\overline{\text{Conv}}(E)$  est le même pour toutes les topologies  $(E, E')$ . Il est clair que  $\Gamma(E) \subset \overline{\text{Conv}}(E)$ , et l'inclusion est stricte. On a une sorte de réciproque. Tout  $f \in \overline{\text{Conv}}(E)$  qui est propre appartient à  $\Gamma_o(E)$ . Donc si  $f \in \text{Conv}(E)$  alors  $\bar{f} = f^\Gamma$  si  $\bar{f}$  est finie en un point, ou encore si  $f$  admet une minorante affine à pente dans  $E'$ . En particulier  $Q \in \Gamma(E)$  et  $Q \in \overline{\text{Conv}}(E)$  ont la même signification :  $Q$  est un ensemble convexe et fermé dans  $E$ .

#### 4 - FONCTIONNELLES INF-LOCALEMENT COMPACTES

##### 4.1 - DEFINITION

Soit  $E$  un espace topologique séparé. Un élément  $f \in \bar{\mathbb{R}}^E$  est dit *inf-localement compact* si  $f$  est s.c.i. et si pour tout réel  $\rho$ , l'ensemble

$$F_\rho = \{x \in E ; f(x) \leq \rho\}$$

est localement compact.

##### 4.2 - EPIGRAPHE

###### PROPOSITION

Soit  $E$  un espace topologique séparé. L'élément  $f \in \bar{\mathbb{R}}^E$  est *inf-localement compact* si et seulement si son épigraphe est dans  $E \times \mathbb{R}$  localement compact.

###### Démonstration

Supposons que  $F$ , l'épigraphe de  $f$ , soit localement compact.

Pour tout  $\rho$ , l'intersection de  $F$  avec  $\{(x, \alpha) \in E \times \mathbb{R} ; \alpha = \rho\}$  est donc localement compact. Ce dernier ensemble n'est autre que  $F_\rho$  translaté ; d'où le résultat.

Réciproquement, supposons  $f$  inf-localement compact.

On aura montré que  $F$  est localement compact si son intersection avec tout ensemble  $\{(x, \alpha) \in E \times \mathbb{R} ; \alpha \leq \rho\}$  est localement compact, lorsque  $\rho$  varie.

Mais cette intersection, pour un  $\rho$  donné, est aussi l'intersection de  $F_\rho \times \mathbb{R}$  qui est localement compact ( $F_\rho$  l'est par hypothèse) avec  $F$  qui est fermé ; elle est donc localement compacte, ce qui achève la démonstration.

Pour les fonctionnelles convexes le résultat se simplifie.

COROLLAIRE

Soit  $E$  un e.l.c.s. Alors  $f \in \overline{\text{Conv}}(E)$ , non identique à  $+\infty$  est inf-localement compact si et seulement si il existe  $\rho > \inf_{x \in E} f(x)$ , tel que l'ensemble  $F_\rho$  soit localement compact.

Démonstration

La condition est clairement nécessaire en vertu de la proposition précédente. Pour établir la réciproque, on applique à l'épigraphe  $F$ , qui est un ensemble convexe et fermé dans  $E \times \mathbb{R}$ , la remarque suivante (cf. par exemple Bourbaki [ $\star$ ]) : pour qu'un ensemble convexe et fermé dans un e.l.c.s. soit localement compact il faut et il suffit qu'il existe un point de cet ensemble et un voisinage de ce point qui coupe l'ensemble convexe selon un compact.

Dans le cas qui nous occupe, le voisinage sera contenu dans  $\{(x, \alpha) \in E \times \mathbb{R} ; \alpha \leq \rho\}$  ce qui est rendu possible par le fait que  $\rho > \inf_{x \in E} f(x)$ .

4.3 - EXEMPLES

a) Moreau (1966). Soit  $E$  un e.l.c.s. et  $E'$  son dual et soit  $x' \in E'$ . On dit que  $f \in \overline{\text{Conv}}(E)$  est inf-compacte pour la pente  $x'$  si pour tout réel  $\rho$  l'ensemble

$$\{x \in E ; f(x) - \langle x, x' \rangle \leq \rho\}$$

est compact dans  $E$ , ou de façon équivalente lorsque  $f$  n'est pas identique à  $+\infty$  si l'ensemble précédent est compact pour un réel  $\rho$ , tel que

$$\rho > \inf_{x \in E} (f(x) - \langle x, x' \rangle).$$

Les fonctionnelles inf-compactes pour la pente 0, sont simplement appelées inf-compactes.

Les fonctionnelles inf-compactes pour au moins une pente sont un exemple de fonctionnelles inf-localement compactes. En effet, soit  $\rho > \inf_{x \in E} (f(x) - \langle x, x' \rangle)$  tel que l'ensemble

La fonctionnelle  $f$  admet une borne inférieure  $a \in \mathbb{R}$  dans l'ensemble  $F_\rho$  ( $f$  est s.c.i. et  $F_\rho$  compact).

Elle y est aussi bornée supérieurement pour un nombre  $b$  puisque dans  $F_\rho$ ,  $f(x) \leq \rho + \langle x, x' \rangle$ , et le deuxième nombre est borné dans  $F_\rho$ .

A cause du choix de  $\rho$ , il existe  $x_0 \in E$ , tel que  $f(x_0) - \langle x_0, x' \rangle < \rho$ .

Considérons le voisinage fermé  $W$  de  $(x_0, f(x_0))$  dans  $E \times \mathbb{R}$  défini par

$$W = \{(x, \alpha) \in E \times \mathbb{R} ; \alpha \leq \langle x, x' \rangle + \rho\}.$$

L'intersection  $W \cap A$  est fermée et contenue dans  $F_\rho \times [a, b]$  qui est un compact de  $E \times \mathbb{R}$ , ce qui prouve que  $F$  est localement compact et donc  $f$  inf-localement compacte.

- b) Toute fonctionnelle  $f \in \Gamma_0(E)$ , minorée par une fonctionnelle inf-localement compacte [resp. inf-compacte pour une pente] est inf-localement compacte [resp. inf-compacte pour la même pente].
- c) La somme d'une fonction affine et continue sur  $E$  et d'une fonctionnelle inf-localement compacte est une fonctionnelle inf-localement compacte.

#### 4.4 - FONCTIONNELLES INF-LOCALEMENT COMPACTES ET SAILLANTES

On sait -et nous le rappellerons plus loin- que le polaire d'une fonctionnelle inf-compacte pour au moins une pente est continue en au moins un point pour la topologie de Mackey.

Dans le but d'entreprendre la même étude pour les fonctionnelles inf-localement compactes, nous allons caractériser les fonctionnelles inf-compactes pour au moins une pente dans l'ensemble des fonctionnelles inf-localement compactes.

##### DEFINITION

Soit  $f \in \Gamma_0(E)$  et  $F$  son épigraphe. La fonctionnelle asymptote de  $f$ , notée  $f_\infty$ , est la fonctionnelle positivement homogène de  $\Gamma_0(E)$  définie par :

$$f_\infty(x) = \sup_{\lambda > 0} \left( \frac{f(x_0 + \lambda x) - f(x_0)}{\lambda} \right), \quad x_0 \in \text{dom}(f).$$

La cohérence de cette notation s'établit aisément en vérifiant que l'expression, dans le deuxième membre de la définition de la fonctionnelle asymptote, est indépendante du choix de  $x_0$  dans le domaine effectif de  $f \in \Gamma_0(E)$ .

L'épigraphe  $F_\infty$  de la fonctionnelle  $f_\infty$  est le cône asymptote du convexe  $F$  :

$$F_\infty = \bigcap_{\lambda > 0} \lambda(F - (x_0, \alpha_0)) \quad , \quad f(x_0) \leq \alpha_0.$$

Le plus grand sous-espace vectoriel de  $E \times \mathbb{R}$  contenu dans  $F_\infty$ , est noté  $V_f = F_\infty \cap (-F_\infty)$ .

On dit -terminologie employée par Lescarret (1966)- que la fonction  $f \in \Gamma_0(E)$  est saillante si son épigraphe ne contient pas de droite affine dans  $E \times \mathbb{R}$ , ou encore si  $V_f = \{0\}$ .

C'est la propriété d'être saillante qui caractérise les fonctionnelles inf-compactes parmi les fonctionnelles inf-localement compactes, ainsi que nous allons le voir.

#### 4.5 - LES FONCTIONNELLES INF-COMPACTES POUR AU MOINS UNE PENTE

##### LEMME

*Soit  $f \in \Gamma_0(E)$ , inf-localement compacte et saillante,  $f_\infty$  sa fonctionnelle asymptote. Alors  $f_\infty$  et  $f$  sont inf-compactes pour les mêmes pentes.*

##### Démonstration

Comme  $f \in \Gamma_0(E)$ , il existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  tel que  $f_\infty \geq f + \alpha$ . Si  $f$  est inf-compacte pour une certaine pente,  $f_\infty$  est inf-compacte pour la même pente.

Réciproquement supposons  $f_\infty$ , inf-compacte pour la pente  $x'$ . Comme  $f$  n'est pas identique à  $+\infty$ , il existe  $\rho \in \mathbb{R}$ , vérifiant  $\rho > \inf_{x \in E} (f(x) - \langle x, x' \rangle)$ .

Comme  $f$  est inf-localement compacte, l'ensemble

$$F_\rho = \{x \in E ; f(x) - \langle x, x' \rangle < \rho\}$$

est localement compact. Son cône asymptote est l'ensemble

$$\{x \in E ; f_{\infty}(x) - \langle x, x' \rangle \leq 0\}$$

qui se trouve être réduit à  $\{0\}$ , d'après le choix de la pente  $x'$ . Ceci entraîne (cf. par exemple Dieudonné 1966) que  $F_{\rho}$  est compact, donc  $f$  est inf-compacte pour la pente  $x'$ .

PROPOSITION

*Toute fonctionnelle  $f \in \Gamma_0(E)$  inf-localement compacte et saillante est inf-compacte pour au moins une pente et réciproquement.*

Démonstration

La réciproque est évidente ; supposons donc  $f$  inf-localement compacte et saillante. A cause du lemme on peut supposer  $f$  positivement homogène. Le résultat est alors une conséquence du fait que tout cône convexe localement compact et saillant dans un e.l.c.s. admet une semelle compacte (cf. Bourbaki [\*]) : la fonctionnelle  $f$  est inf-compacte pour la "pente" qui définit l'hyperplan contenant cette semelle compacte.

## 5 - CONTINUITÉ ET COMPACTITÉ

### 5.1 - CONTINUITÉ

On rappelle le théorème classique suivant (voir par exemple Bourbaki [★]). Soit  $E$  un espace vectoriel topologique et  $f \in \text{Conv}(E)$  ; pour que  $f$  soit continue en un point  $x \in \text{dom}(f)$  il faut et il suffit que  $f$  soit majorée dans un certain voisinage de  $x$ .

Dans ce cas,  $f$  est même continue en tous les points de l'intérieur (évidemment non vide) de son domaine effectif.

Ce résultat conduit à adopter la définition suivante :

#### DEFINITION

*Soit  $E$  un espace vectoriel topologique. On dit que  $f \in \text{Conv}(E)$  est continue si elle est continue en chaque point de l'intérieur non vide de son domaine effectif.*

En conséquence  $f \in \text{Conv}(E)$  est continue si et seulement si elle est continue en au moins un point de son domaine effectif.

### 5.2 - CONTINUITÉ ET COMPACTITÉ

Voici un résultat de dualité de Moreau (1964).

#### PROPOSITION

*Soit  $E$  un e.l.c.s.,  $E'$  son dual. On suppose  $E$  muni de  $\sigma(E, E')$  et  $E'$  de  $\tau(E', E)$ . Une fonctionnelle  $f \in \Gamma_0(E)$  est inf-compacte pour la pente  $x' \in E'$  si et seulement si sa polaire  $f^*$  est finie et continue au point  $x'$ .*

Les  $f \in \Gamma_0(E)$ , inf-compactes pour au moins une pente, correspondent donc par dualité aux  $f' \in \Gamma_0(E')$  qui sont continues.

Les pentes pour lesquelles  $f$  est inf-compacte correspondent aux points intérieurs de  $\text{dom}(f^*)$ .

### 5.3 - QUASI-CONTINUITÉ

#### DEFINITION

Soit  $E$  un espace vectoriel topologique. Une fonctionnelle  $f \in \text{Conv}(E)$  est dite quasi-continue en un point  $x \in \text{dom}(f)$ , si la variété affine  $L_f$  engendrée par  $\text{dom}(f)$  est de codimension finie et si la restriction de  $f$  à  $L_f$  est continue au point  $x$ .

#### DEFINITION

Soit  $E$  un espace vectoriel topologique. Une fonctionnelle  $f \in \text{Conv}(E)$  est dite quasi-continue si  $\text{dom}(f)$  engendre une variété affine  $L_f$  de codimension finie et si la restriction de  $f$  à  $L_f$  est continue.

### 5.4 - POLAIRE D'UNE FONCTIONNELLE INF-LOCALEMENT COMPACTE

#### PROPOSITION

Soit  $E$  un e.l.c.s.,  $E'$  son dual. On suppose  $E$  muni de  $\sigma(E, E')$  et  $E'$  muni de  $\tau(E', E)$ . Une fonctionnelle  $f \in \Gamma_0(E)$  est inf-localement compacte si et seulement si sa polaire  $f^*$  est quasi-continue.

#### Démonstration

Le plus grand sous-espace vectoriel  $V_f$  contenu dans  $F_\infty$ , l'épigraphe  $f_\infty$  (la fonctionnelle asymptote de  $f$  (cf. 4.4)) n'est pas "vertical", mais n'est pas en général contenu dans  $E \times \{0\}$ . En ajoutant à  $f$  une fonction linéaire et continue convenable on peut obtenir une nouvelle fonctionnelle telle que le sous-espace vectoriel en question soit cette fois contenu dans  $E \times \{0\}$ .

D'autre part, l'addition d'une fonction linéaire et continue à la fonctionnelle  $f$  revient par dualité à faire une translation sur le domaine de  $f^*$ . Ces deux opérations n'affectant pas les propriétés de compacité et de continuité qu'on considère. On suppose que  $V_f \subset E \times \{0\}$ .

Soit  $\varphi : E \rightarrow E/V_f$ , l'application qui à tout  $x \in E$  fait correspondre sa classe  $\dot{x}$  vers l'espace quotient.

On définit  $\dot{f}$  à domaine dans  $E/V_f$ , par :

$$f = \dot{f} \circ \varphi$$

ce qui est possible puisque  $f$  reste constante sur toute droite affine parallèle à  $V_f$ .

Soit  $V_f^\circ$  l'orthogonal de  $V_f$  ; la topologie quotient de  $E/V_f$  est la topologie faible  $\sigma(E/V_f, V_f^\circ)$  et la fonction  $\dot{f}$  appartient à  $\Gamma_0(E/V_f)$ . L'épigraphe  $F$  de  $f$  est saturé pour la relation d'équivalence définie par  $V_f$  : par définition de la topologie quotient l'épigraphe de  $\dot{F}$  est donc fermé.

De plus, la fonctionnelle  $\dot{f}$  est clairement saillante ; étant inf-localement compacte elle est donc inf-compacte pour au moins une pente (appartenant à  $V_f^\circ$ ), d'après la proposition 4.5.

La polaire  $(\dot{f})^*$  est donc continue pour la topologie  $\tau(V_f^\circ, E/V_f)$ , en vertu de la prop. 5.2. Il reste à montrer que  $\tau(V_f^\circ, E/V_f)$  est la restriction à  $V_f^\circ$  de la topologie  $\tau(E', E)$ . Pour cela, on sait qu'il suffit que tout ensemble convexe de  $E/V_f$ , compact pour  $\sigma(E/V_f, V_f^\circ)$ , soit l'image par  $\varphi$  d'une partie convexe de  $E$ , compacte pour  $\sigma(E, E')$ . Mais ceci résulte du fait que  $V_f$  est de dimension finie ( $f$  est inf-localement compacte) donc possède un supplémentaire topologique dans  $E$  ( $\varphi$  possède une inverse à droite, continue).

La première partie de la démonstration s'achève maintenant en remarquant que

$$f^*(x') = (\dot{f})^*(x') \quad , \quad \forall x' \in V_f^\circ$$

et que

$$f^*(x') = +\infty \quad \text{si} \quad x' \notin V_f^\circ.$$

Réciproquement, supposons  $f^*$  quasi-continue. Soit  $W$  la variété affine engendrée par son domaine effectif. Quitte à faire une translation, on suppose que  $0 \in W$ . Le polaire de la fonctionnelle  $f^*$  considérée comme appartenant à  $\Gamma_0(W)$  est une fonctionnelle  $\dot{f} \in \Gamma_0(E/W^\circ)$ , inf-compacte pour au moins une pente. On vérifie que le polaire dans le système  $(E, E')$  de

$$f = \dot{f} \circ \varphi,$$

où  $\varphi$  est la surjection  $E \rightarrow E/W^\circ$ , est la fonctionnelle  $f^*$  et qu'elle est inf-localement compacte ( $W$  est de codimension finie par hypothèse).

## 6 - INF-CONVOLUTION

### 6.1 - DEFINITION

Soit  $E$  un espace vectoriel. On appelle inf-convolution la loi de composition qui a deux fonctionnelles  $f$  et  $g$  appartenant à  $\mathbb{R}^{\bar{E}}$  fait correspondre la fonctionnelle

$$z \rightarrow (f \nabla g)(z) = \inf_{x+y=z} (f(x)+g(y)).$$

A noter :

- Conventionnellement, l'addition dans le membre de droite a le même sens qu'en 2.2.
- Cette loi de composition est commutative et associative.
- L'inf-convolution s'interprète dans  $E \times \mathbb{R}$  comme la somme pour les épigraphes stricts : en particulier c'est une loi de composition interne pour  $\text{Conv}(E)$ .

### 6.2 - POLARITE ET INF-CONVOLUTION

Soit  $(E, E')$  un système dual,  $f$  et  $g$  deux éléments de  $\mathbb{R}^{\bar{E}}$ , non identiques à  $+\infty$ . On vérifie immédiatement la formule

$$(1) \quad (f \nabla g)^* = f^* + g^*$$

où dans le second membre aucune indétermination n'apparaît puisque  $f^*$  et  $g^*$  ne prennent en aucun point de  $E'$  la valeur  $-\infty$ . Pour le cas général, voir Moreau (1966).

Lorsque  $f$  et  $g$  sont convexes (et même lorsqu'elles appartiennent à  $\Gamma_0(E)$ ) on ne peut pas déduire de la formule (1) que  $f \nabla g$  est égal à  $(f^* + g^*)^*$ . En effet, de la même façon que la somme de deux ensembles convexes et fermés n'est pas nécessairement un ensemble fermé, l'inf-convolution de deux fonctionnelles appartenant à  $\Gamma_0(E)$  n'est pas en général une fonctionnelle s.c.i.

On admettra le fait suivant qui nous servira plus loin et qui est de vérification facile : si la somme F+G des épigraphes de deux fonctionnelles f et g appartenant à Conv(E) est fermée, alors c'est l'épigraphe de  $f \nabla g$  qui de ce fait est une fonctionnelle s.c.i. De plus, la borne inférieure qui définit la valeur de l'inf-convolution est atteinte en tout point où elle est finie : on dit que l'inf-convolution de f et g est exacte.

Ainsi tout résultat de fermeture pour la somme d'ensembles convexes et fermés peut, s'il est appliqué aux épigraphes de fonctionnelles convexes fournir un résultat de semi-continuité inférieure (voir Lescarret (1966)).

C'est la démarche que l'on suit dans les paragraphes suivants. Elle permet de présenter sous une forme nouvelle certains résultats de Moreau et de Rockafellar. Le théorème "géométrique" sur les ensembles convexes est du à Dieudonné (1966) ; voir aussi Klee (1955).

### 6.3 - UN RESULTAT DE FERMETURE

#### LEMME

Soient A et B deux ensembles convexes et fermés dans un espace vectoriel topologique séparé. On suppose que A est localement compact et que les cônes asymptotes  $A_\infty$  et  $B_\infty$  ont leur intersection réduite à  $\{0\}$  ; alors A-B est fermé dans E.

On pourra trouver la démonstration du lemme dans Dieudonné (1966) voir aussi Bourbaki [★], exercice 16, page 125.

#### Remarque

La fonction asymptotique du lemme peut s'élargir à :

$$A_\infty \cap B_\infty = -(A_\infty \cap B_\infty)$$

Il suffit, autrement dit, de supposer que l'intersection des deux cônes asymptotes est un sous-espace vectoriel de E.

En effet, soit  $W = A_\infty \cap B_\infty$ , le sous-espace vectoriel en question. Dans l'espace quotient  $E/W$ , les images par  $\varphi : E/W$  de  $A$  et  $B$  vérifient alors les hypothèses du lemme (seul point à vérifier :  $\varphi(A)$  est fermé, parce que selon un argument déjà utilisé on a :  $\varphi^{-1} \circ \varphi(A) = A$ , qui est fermé dans  $E$  ; de même  $\varphi(B)$ ).

Du lemme on déduit que  $\varphi(A-B)$  est fermé, et donc aussi  $A-B = \varphi^{-1} \cdot \varphi(A-B)$ .

#### 6.4 - DEFINITION

Soit  $E$  un e.l.c.s, on dit que  $f$  et  $g$  deux éléments de  $\Gamma_0(E)$  vérifient la condition (A.S) si

(A.S) : pour tout  $x \in E$  tel que  $f_\infty(x) + g_\infty(-x) \leq 0$  alors :  
 $f_\infty(x) = g_\infty(x) = -f_\infty(-x) = -g_\infty(-x)$ .

#### PROPOSITION

Soit  $E$  un e.l.c.s,  $f$  et  $g$  deux éléments de  $\Gamma_0(E)$ . On suppose que

- 1.a)  $f$  est inf-localement compacte
- 2.a)  $f$  et  $g$  vérifient la condition (A.S)

alors l'inf-convolution de  $f$  et  $g$  est exacte et la fonctionnelle  $f \nabla g$  est s.c.i.

#### Démonstration

On note  $F$  et  $G$  les épigraphes de  $f$  et  $g$  respectivement et on applique le lemme aux convexes  $F$  et  $-G$  de  $E \times \mathbb{R}$ . ( $-G$  est formé de l'ensemble des points de  $E \times \mathbb{R}$  situés en dessous du graphe de  $x \rightarrow -g(-x)$ ).

Ils vérifient les hypothèses du lemme et de la remarque qui le suit :

$F$  est localement compact d'après 4.2.

Si  $x \in E$  est tel que :  $f_\infty(x) \leq -g_\infty(-x)$ , d'après 2.a on a  $f_\infty(-x) \leq -g_\infty(x)$ , c'est-à-dire :  $F_\infty \cap (-G_\infty) = (-F_\infty) \cap G_\infty$ , qui réciproquement en utilisant la convexité de  $f_\infty$  et  $g_\infty$  entraîne 2.a.

En conséquence  $F+G$  est un (épigraphe) convexe fermé : c'est l'épigraphe de  $f \nabla g$ , cf. 6.2 ; le reste suit.

6.5 - COUPLE UNI

DEFINITION

On dit que deux fonctionnelles  $f$  et  $g$  appartenant à  $\Gamma_0(E)$  forment un couple uni, si leurs domaines effectifs ne sont que trivialement séparés, c'est-à-dire si tout hyperplan fermé qui sépare les deux domaines, les contient nécessairement tous les deux.

PROPOSITION

Soit  $E$  un e.l.c.s.,  $E'$  son dual. Deux éléments  $f$  et  $g$  de  $\Gamma_0(E)$  vérifient la condition (AS) si et seulement si le couple des éléments  $f^*$  et  $g^*$  de  $\Gamma_0(E')$  est uni.

Démonstration

Soit  $x_0 \in E$  tel que

$$(1) \quad f_\infty(x_0) + g_\infty(-x_0) \leq 0$$

donc en vertu de la condition (AS), nécessairement tel que

$$(2) \quad f_\infty(x_0) = -g_\infty(-x_0) = -f_\infty(-x_0) = g_\infty(x_0).$$

Sachant que  $f_\infty$  et  $g_\infty$  sont respectivement les fonctionnelles d'appui les domaines de  $f^*$  et  $g^*$  (Rockafellar (1966)) l'inégalité (1) équivaut à

$$(3) \quad \sup_{b \in \text{dom} f^*} \langle x_0, b \rangle \leq -\sup_{c \in \text{dom} g^*} \langle -x_0, c \rangle = \inf_{c \in \text{dom} g^*} \langle x_0, c \rangle$$

et l'égalité (2) à

$$(4) \quad \inf_{b \in \text{dom} f^*} \langle x_0, b \rangle = \sup_{b \in \text{dom} f^*} \langle x_0, b \rangle = \inf_{c \in \text{dom} g^*} \langle x_0, c \rangle = \sup_{c \in \text{dom} g^*} \langle x_0, c \rangle.$$

La condition (AS) équivaut donc au fait que pour tout  $x_0 \in E$  tel que (3) on a nécessairement (4) i.e, au fait que  $f^*$  et  $g^*$  forment un couple uni.

Ceci nous donne une interprétation duale de la proposition 6.4

COROLLAIRE

Soit  $E$  un e.l.c.s. et  $E'$  son dual muni de  $\tau(E',E)$  et soient  $f$  et  $g$  deux fonctions de  $\Gamma_0(E)$ .

Si :

1b  $f^*$  est quasi-continue

2b  $(f^*, g^*)$  est uni

alors  $f \nabla g$  est une fonction s.c.i et l'inf-convolution des deux fonctions est exacte.

Démonstration

D'après la proposition 5.4, 1b équivaut à 1a ( $E$  muni de  $\sigma(E,E')$ ), et d'après la proposition 6.5 2.a est équivalent à 2.b. Le résultat suit de 6.4.

6.6 - LEMME

Si  $A \in \overline{\mathbb{R}^E}$ ,  $i.r.(A)$  désigne l'intérieur de  $A$  relativement à la variété affine engendrée par  $A$  ; on dit que  $i.r.(A)$  est l'intérieur relatif de  $A$ .

Soit  $E$  un e.l.c.s.  $A$  et  $B$  deux éléments non vides de  $\text{Conv}(E)$ . Si  $A$  est quasi-continue et si  $A$  et  $B$  sont unies alors  $i.r(A) \cap B \neq \emptyset$ .

Démonstration

Le résultat est vrai dans le cas où  $E$  est de dimension finie (voir par exemple Rockafellar [ $\star$ ]) ; dans ce cas, d'ailleurs, l'hypothèse :  $A$  est quasi-continue, est automatiquement vérifiée.

La démonstration proposée consiste à se ramener au cas où  $E$  est de dimension finie.

Soit  $L_A$  la variété affine engendrée par  $A$ . Comme  $A$  est quasi-continue,  $L_A$  est de codimension finie et  $A$  d'intérieur non vide relativement à  $L_A$ .

Montrons que :

- a)  $L_A \cap B \neq \emptyset$ . Par l'absurde. On peut toujours supposer  $0 \in L_A$ . Soit alors  $\varphi$  l'application canonique de  $E$  sur  $E/L_A$ . Le convexe  $\varphi(B)$  ne contient pas  $0 \in E/L_A$ . On applique le résultat du lemme dans l'espace  $E/L_A$  qui est de dimension finie : il existe un hyperplan séparant  $0$  et  $\varphi(B)$ . Cette situation se relève dans  $E$  et conduit à une contradiction puisque  $A$  et  $B$  sont supposés unis.
- b) Donc  $L_A \cap B \neq \emptyset$  ; montrons que  $\text{ir}(A) \cap B$  ne peut être vide. Sinon : en vertu du théorème d'Hahn-Banach, il existe un hyperplan fermé  $H$  dans le sous-espace  $L_A$  qui sépare  $\text{ir}(A)$  et  $B \cap L_A \neq \emptyset$ . On suppose que  $0 \in H$ . Comme  $L_A$  est de codimension finie,  $E/H$  est de dimension finie. Dans l'espace quotient  $E/H$ , les images par l'application (ouverte)  $\varphi : E \rightarrow E/H$  de  $\text{ir}(A)$  et  $B$  sont, en vertu du lemme appliqué à  $E/H$ , non trivialement séparés. On aboutit à une contradiction, comme en a).

#### COROLLAIRE

*Sous les hypothèses équivalentes de la proposition 6.4. et du corollaire 6.5.,  $f \nabla g$  appartient à  $\Gamma_0(E)$ .*

#### Démonstration

En effet,  $f \nabla g$  étant déjà s.c.i. (prop. 6.4),  $f \nabla g$  appartiendra à  $\Gamma_0(E)$  si et seulement si cette fonctionnelle ne prend en aucun point la valeur  $-\infty$ , autrement dit si  $(f \nabla g)^{**}$  n'est pas identiquement égale à  $-\infty$ , ce qui équivaut au fait que  $f^* + g^*$  n'est pas identique à  $+\infty$ . Mais ceci résulte de la proposition précédente appliquée aux fonctionnelles  $f^*$  et  $g^*$  (au lieu de  $f$  et  $g$ ), qui assure que  $\text{dom} f^* \cap \text{dom} g^* \neq \emptyset$  en particulier.

#### 6.7 - CAS OU $f$ EST SAILLANTE ; CAS OU $E$ EST DE DIMENSION FINIE

Lorsqu'on suppose en plus que la fonctionnelle  $f$  est saillante, les énoncés de la prop. 6.4. et du corollaire 6.5. prennent la forme suivante (Moreau 1964)

COROLLAIRE

Soient  $f$  et  $g$  deux éléments de  $\Gamma_0(E)$ . Si de façons équivalentes

1a  $f$  est inf-compacte pour au moins une pente

2a Parmi les pentes pour lesquelles  $f$  est inf-compacte il en existe une  $x' \in E'$  telle que  $x \rightarrow g(x) - \langle x, x' \rangle$  est borné inférieurement.

ou

1b  $f^*$  est continue

2b Il existe un point commun au domaine effectif de  $g^*$  et à l'intérieur (non vide) du domaine effectif de  $g^*$

alors la fonctionnelle  $f \nabla g$  appartient à  $\Gamma_0(E)$  et l'inf-convolution est exacte.

Lorsque l'espace  $E$  est de dimension finie, toute fonctionnelle appartenant à  $\Gamma_0(E)$ , c'est-à-dire s.c.i. et propre est inf-localement compacte et quasi-continue.

On obtient donc le résultat voir par exemple Rockafellar (\*).

COROLLAIRE

Soient  $f$  et  $g$  deux éléments de  $\Gamma_0(E)$  où  $E$  est de dimension finie.

Si de façons équivalentes

1b  $f$  et  $g$  vérifient la condition

2b  $f^*$  et  $g^*$  sont unis

alors  $f \nabla g$  est s.c.i. et propre ; en outre cette inf-convolution est exacte.

Remarque

La proposition 6.5. aurait pu s'obtenir comme conséquence du corollaire 6.6. Voir Laurent-Joly (1970).

## 7 - SOUS DIFFERENTIABILITE

### 7.1 - SOUS DIFFERENTIABILITE D'UNE FONCTIONNELLE QUASI-CONTINUE

Soit  $E$  un e.l.c.s. et  $E'$  son dual. Une fonctionnelle  $f \in \text{Conv}(E)$  est sous-différentiable en  $x_0 \in E$  si  $\partial f(x_0) \neq \emptyset$ . La quasi-continuité, la continuité fournissent un critère usuel de sous-différentiabilité.

Supposons d'abord  $f$  finie et continue en  $x_0 \in E$  pour une topologie  $(E, E')$  (à fortiori pour la topologie de Mackey) ; alors elle est sous-différentiable en  $x_0$  ; en outre sa sous-différentielle  $\partial f(x_0)$  est un sous-ensemble convexe et faiblement compact de  $E'$ .

Si  $f$  est fermé et quasi-continue en  $x_0 \in E$ , pour une topologie  $(E, E')$ , l'ensemble  $\partial f(x_0)$  n'est pas vide : c'est la somme d'un ensemble convexe et faiblement compact dans  $E'$  et d'un sous-espace vectoriel de  $E'$  de dimension finie.

D'une façon générale, si  $f$  est continue pour  $\tau(E, E')$ , alors pour  $x_0 \in E$ , le sous-différentiel  $\partial f(x_0)$  est un ensemble (éventuellement vide) convexe localement compact de  $E'$  faible, ne contenant pas de droite. Si  $f$  est quasi-continue  $\partial f(x_0)$  est un ensemble convexe localement compact dans  $E'$  faible.

### 7.2 - SOUS-DIFFERENTIELLE DE $f \nabla g$

Soient  $f$  et  $g$  deux éléments de  $\text{Conv}(E)$ . On rappelle que l'inf-convolution de  $f$  et  $g$  est dite exacte en un point  $z \in E$  si  $[f \nabla g](z)$  est fini et s'il existe  $x$  et  $y$  dans  $E$  avec  $x+y = z$  tels que :  $[f \nabla g](z) = f(x)+g(y)$ .

LEMME 1

Soient  $f$  et  $g$  deux éléments de  $\text{Conv}(E)$ . Si l'inf-convolution de  $f$  et  $g$  est exacte en  $z \in E$  alors

$$\partial[(f \nabla g)](z) \subset \partial f(x) \cap \partial g(y)$$

Démonstration

Posons  $h = f \nabla g$ . Soit  $z' \in \partial h(z)$  donc tel que

$$h(z) + h^*(z') = \langle z, z' \rangle.$$

Comme  $z = x+y$  avec  $h(z) = f(x)+g(y)$ , il vient :

$$f(x)+g(y)+f^*(z')+g^*(z') = \langle x, z' \rangle + \langle y, z' \rangle$$

ce qui n'est rendu possible que si, à la fois :

$$f(x)+f^*(z') = \langle x, z' \rangle$$

$$g(y)+g^*(z') = \langle y, z' \rangle$$

donc si  $z \in \partial f(x) \cap \partial g(y)$ .

LEMME 2

Soient  $x$  et  $y$  dans  $E$  tels que :

$$\partial f(x) \cap \partial g(y) \neq \emptyset$$

alors l'inf-convolution de  $f$  et  $g$  est exacte en  $z = x+y$  et on a :

$$\partial f(x) \cap \partial g(y) \subset \partial[f \nabla g](z).$$

Démonstration

Posons  $h = f \vee g$  et soit  $z' \in \partial f(x) \cap \partial g(y)$ .

On a donc

$$f(x) + f^*(z') = \langle x, z' \rangle$$

$$g(y) + g^*(z') = \langle y, z' \rangle$$

et par suite

$$f(x) + g(y) + f^*(z') + g^*(z') = \langle z, z' \rangle.$$

Donc de l'inégalité

$$h(z) \leq f(x) + g(y)$$

il résulte que

$$h(z) + h^*(z') \leq \langle z, z' \rangle$$

ce qui entraîne à la fois  $z' \in \partial h(z)$  et  $h(z) = f(x) + g(y)$ .

PROPOSITION

Si  $\partial f(x) \cap \partial g(y) \neq \emptyset$  alors en posant  $z = x + y$ , et  $h = f \vee g$  on a

i)  $\partial h(z) = \partial f(x) \cap \partial g(y)$

ii) Les ensembles  $\partial f(x_1) \cap \partial g(y_1)$  avec  $x_1 + y_1 = z$  sont soit vides soit égaux à  $\partial h(z)$ .

iii) Si  $x_1 + y_1 = z$  alors  $\partial f(x_1) \cap \partial g(y_1) \neq \emptyset$  si et seulement si l'inf-convolution entre  $f$  et  $g$  est exacte en  $z = x_1 + y_1$  pour les points  $x_1$  et  $y_1$ .

7.3 - SOUS-DIFFERENTIABILITE DE f+g

PROPOSITION

Soit E un e.l.c.s. E' son dual. On suppose E muni de  $\tau(E, E')$  et E' de  $\sigma(E', E)$ . Soient f et g deux éléments de  $\Gamma_0(E)$ . Si l'une des deux conditions équivalentes suivantes est vérifiée :

i) f est quasi-continue et les fonctionnelles f et g sont unies,

ii)  $f^*$  est inf-localement compacte et  $f^*$  et  $g^*$  vérifient la condition (AS),

alors pour tout  $x \in E$  on a

a) 
$$\partial(f+g)(x) = \partial f(x) + \partial g(x)$$

b) 
$$\partial[f^* \nabla g^*](z') = \partial f^*(x') \cap \partial g^*(y').$$

si  $z' = x' + y'$  avec  $f^*(x') + g^*(y') = [f^* \nabla g^*](z')$ .

Démonstration

La partie b) de l'assertion résulte de la proposition 7.2 et des propositions 6.4. et cor. 6.5. où l'on a échangé les rôles de E et E', f et  $f^*$  etc...

En vertu de la prop. 6.6.,  $f^* \nabla g^* \in \Gamma_0(E')$  (changement de E en E' etc...). On a  $z' \in \partial[f+g](x)$  si et seulement si  $x \in \partial[(f+g)^*](z') = \partial f^*(x') \cap \partial g^*(y')$  avec  $x' + y' = z'$ , à cause de b). Autrement dit :  $z' \in \partial[f+g](x)$  si et seulement si on a  $x' \in \partial f(x)$ ,  $y' \in \partial g(x)$  avec  $x' + y' = z'$ , ce qui démontre a).

CHAPITRE - II

UNE FAMILLE DE TOPOLOGIES COMPATIBLES AVEC LA POLARITE

1 - INTRODUCTION

Soit  $(E, E')$  un système dual. Toute topologie  $T$  sur  $E$  (topologie qu'on supposera localement convexe et plus fine que  $\sigma(E, E')$ ) permet de définir sur l'ensemble des parties fermées non vides de  $E$  la topologie semi-finie inférieure de Vietoris (cf. Michael (1951)), et son extension, notée  $I(T)$ , à l'ensemble des fonctionnelles sur  $E$ , qui sont s.c.i et non partout égales à  $+\infty$ .

Maintenant, au lieu de considérer -ce qu'on fait habituellement- une topologie semi-finie supérieure, (loc.cit.), on introduit, dans le but d'avoir un outil mieux adapté à la convexité, la topologie  $S(T')$  qui est l'image réciproque par l'application de polarité de la topologie  $I(T')$  ( $T'$  est une topologie sur  $E'$  plus fine que  $\sigma(E', E)$ ) sur l'ensemble des fonctionnelles s.c.i sur  $E'$ , non identiques à  $+\infty$ .

Pour que la polarité soit bien définie ceci nous oblige à nous restreindre à l'ensemble des fonctionnelles définies sur  $E$  [resp.  $E'$ ], s.c.i pour  $T$  [resp.  $T'$ ], non partout égales à  $+\infty$  et possédant au moins une minorante affine à pente dans  $E'$  [resp.  $E$ ]. Cet ensemble que nous noterons  $P(E)$  [resp.  $P(E')$ ] contient  $\Gamma_0(E)$  [resp.  $\Gamma_0(E')$ ].

On désigne par  $[T, T'^*]$  et  $[T', T^*]$  les topologies bornes supérieures sur  $P(E)$  de  $I(T)$  et  $S(T')$  et sur  $P(E')$  de  $I(T')$  et  $S(T)$ .

Pour ces topologies la polarité devient alors une bijection bicontinue entre les sous-espaces  $\Gamma_0(E)$  et  $\Gamma_0(E')$ .

En revanche signalons que sur  $\Gamma_0(E)$  et  $\Gamma_0(E')$  ces topologies ne possèdent pas de bonnes propriétés de séparation : elles sont en général  $T_1$  (noté dans le texte  $S_1$  pour éviter des confusions) mais ne vérifient  $T_2$  (espace de Hausdorff) que lorsque la forme bilinéaire qui met  $E$  et  $E'$  en dualité est continue par rapport à l'ensemble des variables pour les topologies  $T$  et  $T'$ .

Nous aurons pourtant l'occasion de voir au chapitre 3 que les choses sont moins catastrophiques qu'il n'y paraît. Lorsqu'on se limite à la considération de suites de fonctionnelles : on aura des exemples de suites convergentes pourvues d'une limite unique quoique la topologie ne vérifie pas  $T_2$ . Enfin, signalons que la topologie la plus naturellement employée dans le cas où  $E$  est un espace de Banach reflexif et  $E'$  son dual est définie en prenant pour  $T$  et  $T'$  les topologies fortes sur  $E$  et  $E'$  respectivement, et qu'en conséquence, elle est de Hausdorff.

## 2 - LA TOPOLOGIE $I(T)$

Soit  $(E, E')$  un système dual et  $T$  une topologie localement convexe sur  $E$  plus fine que la topologie faible  $\sigma(E, E')$ . On note  $P(E)$  -pour être plus correct on devrait mettre  $P(E, T)$ - l'ensemble des fonctionnelles appartenant à  $\mathbb{R}^{-E}$  qui sont s.c.i, non partout égales à  $+\infty$ , et qui possèdent au moins une minorante affine à pente dans  $E'$ .

### 2.1 - DEFINITION D'UN SYSTEME FONDAMENTAL DE VOISINAGES D'UN POINT POUR $I(T)$

Soit  $f_0 \in P(E)$ ,  $I$  un ensemble fini d'indices. Pour tout  $i \in I$ , on se donne  $x_i \in E$ ,  $V_i$  un voisinage de  $x_i$  pour  $T$ ,  $\alpha_i \in \mathbb{R}$  tels que :

$$a) \quad x_i \in \text{dom}(f_0)$$

$$b) \quad f_0(x_i) < \alpha_i$$

et on pose

$$[f_0 ; I, x_i, V_i, \alpha_i] = \{f \in P(E) ; \forall i \in I, \exists y_i \in V_i, f(y_i) \leq \alpha_i\}$$

Lorsque  $I, x_i, V_i, \alpha_i$  varient soumis aux conditions a) et b), ces ensembles  $[f_0 ; I, x_i, V_i, \alpha_i]$  définissent une famille de parties de  $P(E)$ , notée  $V_{I(T)}(f_0)$ .

#### PROPOSITION

Il existe une topologie unique sur  $P(E)$ , qu'on désigne par  $I(T)$ , pour laquelle en tout point  $f_0 \in P(E)$  la famille  $V_{I(T)}(f_0)$  constitue un système fondamental de voisinages.

Démonstration

Il suffit de vérifier que  $V_{T(T)}(f_o)$  satisfait aux trois conditions suivantes :

- 1 -  $f_o$  appartient à tout  $V \in V_{T(T)}(f_o)$ .
- 2 - L'intersection de deux ensembles appartenant à  $V_{T(T)}(f_o)$  contient un élément de  $V_{T(T)}(f_o)$ .
- 3 - Tout  $V \in V_{T(T)}(f_o)$  contient un  $W \in V_{T(T)}(f_o)$  tel que si  $g_o \in W$ , il existe  $U \in V_{T(T)}(g_o)$  qui soit contenu dans  $V$ .

Vérifions 3) par exemple. Soit  $V = [f_o ; I, x_i, V_i, \alpha_i]$ . Posons  $[f_o ; I, x_i, W_i, \alpha_i]$  avec  $\alpha_i > \beta_i > f_o(x_i)$  pour tout  $i \in I$ ,  $W_i$  étant un voisinage de  $x_i$  tel qu'à tout  $y_i \in W_i$  on puisse associer un voisinage  $U_i$  de  $y_i$  qui soit inclus dans  $V_i$ . Soit alors  $g_o \in W$  : pour tout  $i \in I$ , il existe  $y_i \in W_i$  tel que  $g_o(y_i) \leq \beta_i$ . L'ensemble  $U = [g_o ; I, y_i, U_i, \alpha_i]$ , où  $U_i \subset V_i$  est le voisinage de  $y_i$  précédemment défini, appartient à  $V_{T(T)}(g_o)$  puisqu'on a  $g_o(y_i) \leq \beta_i < \alpha_i$  et il est clair en se reportant à la définition de  $V_{T(T)}(f_o)$  que  $U \subset V$ , ce qui prouve 3).

2.2 - PROPRIETES ET REMARQUES

- a) La topologie  $I(T)$  sur  $P(E)$  est admissible (cf. Michael (1951)) en ce sens que l'application qui à  $x \in E$  fait correspondre (son indicatrice)  $\{x\} \in P(E)$  muni de  $I(T)$  est en effet fermé dans  $E$  puisqu'on a supposé  $T$  plus fine que  $\sigma(E, E')$  est un isomorphisme de  $E$  dans  $P(E)$ .
- b) La trace de la topologie  $I(T)$  sur l'ensemble des indicatrices de parties fermées de  $E$  est la topologie semi-finie inférieure de Vietoris (Michael (1951)).
- c) L'application  $\gamma$  qui à  $f \in P(E)$  fait correspondre sa  $\Gamma$ -régularisée  $f^\Gamma$  (chap. 1 - 2.3 d)) envoie  $P(E)$  dans  $\Gamma_o(E)$  qui est un sous-espace de  $P(E)$ . On peut montrer sur un exemple simple que  $\gamma$  n'est pas continue.

- d) On dit qu'un espace topologique est un espace  $S_0$ , si étant donnés deux points distincts il existe toujours un voisinage de l'un de ces points qui ne contient pas l'autre.

PROPOSITION

$P(E)$  muni de  $I(T)$  est un espace  $S_0$ .

Démonstration

Soient  $f$  et  $g$  deux éléments distincts de  $P(E)$ . Il existe un point  $x \in E$  tel que  $f(x) \neq g(x)$ . On supposera  $f(x) < g(x)$ . Le point  $(x, f(x))$  appartient donc à l'ensemble ouvert dans  $E \times \mathbb{R}$  complémentaire de  $\text{épi}(g)$ . Il existe par suite un voisinage de  $(x, f(x))$  dans  $E \times \mathbb{R}$  disjoint de  $\text{épi}(g)$ , i.e. un voisinage  $V$  de  $x$  et un nombre  $\alpha$ ,  $\alpha > f(x)$  tels que  $g \notin [f ; x, V, \alpha]$ .

### 3 - LA TOPOLOGIE S(T')

Soit  $(E, E')$  un système dual,  $T$  et  $T'$  des topologies localement convexes sur  $E$  et  $E'$ , respectivement plus fines que  $\sigma(E, E')$  et  $\sigma(E', E)$ . Soient  $P(E)$  et  $P(E')$  les sous-ensembles de  $\bar{\mathbb{R}}^E$  et  $\bar{\mathbb{R}}^{E'}$  définis comme au paragraphe 2.

L'application de polarité  $\bar{\omega}$  qui à  $f \in \bar{\mathbb{R}}^E$  associe sa polaire  $f^*$  envoie  $P(E)$  dans  $P(E')$  (en fait,  $\Gamma_0(E')$ ) ; l'application  $\bar{\omega}'$  qui à  $f' \in \bar{\mathbb{R}}^{E'}$  associe  $f'^*$  envoie de même  $P(E')$  dans  $P(E)$  (en fait,  $\Gamma_0(E)$ ).

#### 3.1 - DEFINITION DE S(T')

La topologie  $S(T')$  sur  $P(E)$  est la topologie image réciproque par  $\bar{\omega}$  de la topologie  $I(T')$  sur  $P(E')$ .

#### PROPOSITION

Soit  $f_0 \in P(E)$ . Un système fondamental de voisinage de  $f_0$  pour la topologie  $S(T')$  peut être fourni par la famille  $V_{S(T')}(f_0)$  des ensembles

$$[f_0 ; I, x_i', V_i', \alpha_i']^* = \{f \in P(E) ; \forall i \in I, \exists y_i' \in V_i', \forall x \in E, f(x) \geq \langle x, y_i' \rangle - \alpha_i'\}$$

où  $I$  est un ensemble fini d'indices,  $(x_i')_{i \in I}$  une suite de points de  $E'$ ,  $V_i'$ , pour  $i \in I$ , un voisinage de  $x_i'$  dans  $E'$  pour la topologie  $T'$ ,  $(\alpha_i')_{i \in I}$  une suite de réels, vérifiant

a)  $x_i' \in \text{dom}(f_0^*)$

b)  $\alpha_i' > f_0^*(x_i')$ .

Démonstration

$[f_0 ; I, x_i^!, V_i^!, \alpha_i^!]^* = \{f \in P(E) ; \forall i \in I, \exists y_i^! \in V_i^!, f^*(y_i^!) \leq \alpha_i^!\}$ , où  $(x_i^!)$  et  $(\alpha_i^!)$  vérifient pour tout  $i \in I$  les conditions a) et b) ci-dessus. On a donc

$$[f_0 ; I, x_i^!, V_i^!, \alpha_i^!]^* = \bar{\omega}^{-1} ([f_0^* ; I, x_i^!, V_i^!, \alpha_i^!])$$

d'où le résultat en vertu de 2.1.

3.2 - PROPRIETES ELEMENTAIRES DE  $S(T')$ .

- a) L'application  $\gamma$  de  $\Gamma$ -régularisation dans  $P(E)$  (voir 2.2. c)) est continue.
- b) L'application de polarité  $\bar{\omega}'$  qui envoie  $P(E')$  dans  $P(E)$  n'est pas continue pour les topologies  $I(T')$  et  $S(T')$ . En effet, pour que  $\bar{\omega}'$  soit continue il faut et il suffit que  $\bar{\omega} \circ \bar{\omega}'$  soit une application continue de  $P(E')$  dans  $P(E)$  pour la topologie  $I(T')$ , et cette application, qui est la  $\Gamma$ -régularisation dans  $P(E')$ , est en vertu de 2.2.c) non continue. En revanche, la restriction de  $\bar{\omega} \circ \bar{\omega}'$  à  $\Gamma_0(E)$  étant l'application identité est continue et  $\bar{\omega}'$  est par suite continue de  $\Gamma_0(E')$  dans  $\Gamma_0(E)$  : ceci prouve que : la polarité est une bijection bicontinue entre  $\Gamma_0(E)$  muni de  $S(T')$  et  $\Gamma_0(E')$  muni de  $I(T')$ .
- c) La topologie  $S(T')$  ne fait pas de  $P(E)$  un espace  $S_0$  ; néanmoins, en vertu de ce qui précède le sous-espace  $\Gamma_0(E)$  vérifie l'axiome  $S_0$ .

#### 4 - LES TOPOLOGIES $[T, T'^*]$ ET $[T', T^*]$

On conserve les hypothèses et notations du paragraphe 3.

##### 4.1 - DEFINITION

On désigne par  $[T, T'^*]$  [resp.  $[T', T^*]$ ] la topologie sur  $P(E)$  [resp.  $P(E')$ ] qui est la borne supérieure des topologies  $I(T)$  et  $S(T')$  [resp.  $I(T')$  et  $S(T)$ ].

##### Remarques

- a) La trace de la topologie  $[T, T'^*]$  sur le sous-espace de  $P(E)$  constitué des indicatrices des parties réduites à un élément est en général strictement plus fine que la trace de la topologie  $I(T)$ , en sorte que  $[T, T'^*]$  n'est pas en général une topologie admissible (cf. 2.2.a)). Citons néanmoins un cas non trivial où  $[T, T'^*]$  est admissible (cf. Chapitre 3) :  $E$  est un espace de Banach,  $E'$  son dual,  $T$  la topologie forte sur  $E$  et  $T'$  la topologie de la convergence compacte.
- b) En vertu de 3.2. b), la polarité définit une bijection bicontinue entre  $\Gamma_0(E)$  et  $\Gamma_0(E')$  pour les topologies  $[T, T'^*]$  et  $[T', T^*]$ .

##### 4.2 - PROPRIETES DE SEPARATION DE $[T, T'^*]$

On est en droit d'attendre que, restreinte à  $\Gamma_0(E)$ , la topologie  $[T, T'^*]$  possède des propriétés de séparation plus forte que  $S_0$ .

On rappelle que :

Un espace topologique vérifie  $S_1$ , si étant donnés deux points distincts de cet espace il existe un voisinage pour chacun de ces deux points qui ne contienne pas l'autre.

Il vérifie  $S_2$  (espace de Hausdorff) si pour tout couple de points distincts dans cet espace, on peut trouver deux voisinages respectifs de ces points qui soient disjoints.

La propriété  $S_1$  entraîne que chaque point est un ensemble fermé et l'intersection de tous ses voisinages tandis que  $S_2$  n'est vérifiée que si tout filtre convergent n'admet qu'une seule limite.

PROPOSITION 1

$\Gamma_0(E)$  muni de  $[T, T'^*]$  est un espace  $S_1$ .

Démonstration

Soient  $f_0$  et  $g_0$  deux éléments distincts de  $\Gamma_0(E)$  et  $x_0 \in E$  tel que par exemple

$$(1) \quad f_0(x_0) = g_0(x_0) + \varepsilon$$

pour un certain  $\varepsilon > 0$ .

On en déduit que pour tout  $x' \in E'$  on a :

$$g_0^*(x') \leq \langle x_0, x' \rangle - g_0(x_0) = \langle x_0, x' \rangle - f_0(x_0) + \varepsilon.$$

Donc pour tout  $\eta > 0$ , il existe  $x'_0$  tel que

$$\langle x_0, x'_0 \rangle - f_0^*(x'_0) \geq f_0^{**}(x_0) - \eta.$$

Comme  $f_0 = f_0^{**}$ , ceci donne

$$\langle x_0, x'_0 \rangle - f_0(x_0) \geq f_0^*(x'_0) - \eta.$$

Il existe donc  $x'_0 \in E'$  et  $\varepsilon' > 0$  avec  $\varepsilon' < \varepsilon$  tels que

$$(2) \quad g_0^*(x'_0) = f_0^*(x'_0) + \varepsilon'$$

Au cause de (2), la prop. 2.2. d) appliquée dans  $E'$  à  $f_0^*$  et  $g_0^*$  indique alors qu'il existe  $V'$  et  $\alpha' > f_0^*(x'_0)$  tel que :

$$g_0^* \notin [f_0^* ; x'_0, V', \alpha']$$

donc que

$$g_0 \notin [f_0 ; x'_0, V', \alpha']^*.$$

Au cause de (1) et de la même proposition appliquée à  $f_0$  et  $g_0$  on sait qu'il existe  $V$  et  $\alpha > g_0(x_0)$  tel que

$$f_0 \notin [g_0 ; x_0, V, \alpha]$$

ce qui démontre notre assertion.

PROPOSITION 2

Une condition nécessaire et suffisante pour que  $\Gamma_0(E)$  muni de  $[T, T'^*]$  soit un espace de Hausdorff est que la forme bilinéaire qui met  $E$  et  $E'$  en dualité soit continue par rapport à l'ensemble des variables pour les topologies  $T$  et  $T'$ .

Démonstration

Soient  $f_0$  et  $g_0$  deux éléments distincts de  $\Gamma_0(E)$ , vérifiant comme dans la proposition précédente

$$(1) \quad f_0(x_0) = g_0(x_0) + \varepsilon, \quad \varepsilon > 0,$$

$$(2) \quad g_0^*(x'_0) = f_0^*(x'_0) + \varepsilon - \eta, \quad \eta > 0.$$

Si  $(x, x') \rightarrow \langle x, x' \rangle$  est continue pour le produit  $T \times T'$ , on peut, étant donné  $\varepsilon_1 > 0$ , trouver  $V$  et  $V'$  des voisinages de l'origine dans  $E$  et  $E'$  pour  $T$  et  $T'$  respectivement tels que :

$$|\langle x_0, x'_0 \rangle - \langle x, x' \rangle| \leq \varepsilon_1$$

dès que  $x - x_0 \in V$ ,  $x' - x'_0 \in V'$ .

Pour tout  $f \in [f_0 ; x'_0, V', \alpha']^*$  on a :

$$\inf_{x \in x_0 + V} f(x) \geq \inf_{\substack{x \in x_0 + V \\ x' \in x'_0 + V'}} (\langle x, x' \rangle - \alpha')$$

donc

$$\inf_{x \in x_0 + V} f(x) \geq \langle x_0, x'_0 \rangle - \varepsilon_1 - \alpha'$$

Posons  $\alpha' = f_0^*(x'_0) + \varepsilon_2$  ( $\varepsilon_2 > 0$ ). Au cause de la définition de  $\eta$  dans (2) et de (1) il vient

$$\inf_{x \in x_0 + V} f(x) \geq f_0(x_0) - \eta - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 = g_0(x_0) + \varepsilon - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \eta$$

Supposons  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  et  $\eta$  assez petits pour que  $\varepsilon - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \eta > 0$  et soit  $\alpha = g_0(x_0) + 1/2(\varepsilon - \eta - \varepsilon_1 - \varepsilon_2)$ , on en déduit que si  $f \in [f_0 ; x'_0, V', \alpha']^*$  alors  $f \notin [g_0 ; x_0, V, \alpha]$ , ce qui démontre la première partie de l'énoncé.

Réciproquement, supposons l'axiome  $S_2$  vérifié ; montrons qu'alors la forme bilinéaire de dualité est continue.

Soient  $f_0$  et  $g_0$  deux éléments distincts de  $\Gamma_0(E)$  ; on peut supposer que  $g_0$  est l'indicatrice d'un point  $x_0 \in E$ .

Un voisinage de  $g_0$  pour  $[T, T'^*]$  contient nécessairement un ensemble de la forme

$$U(g_0) = [g_0 ; x_0, V_0, \alpha_0] \cap [g_0 ; I, x'_1, V'_1, \alpha'_1]^*$$

et un voisinage de  $f_0$ , un ensemble de la forme

$$U(f_0) = [f_0 ; J, x_j, V_j, \alpha_j] \cap [f_0 ; K, x'_k, V'_k, \alpha'_k]^*$$

Supposons donc en vertu de l'hypothèse  $S_2$  que :

$$(3) \quad U(g_0) \cap U(f_0) = \emptyset.$$

Pour  $y'_\ell \in x'_\ell + V'_\ell$ ,  $\ell \in L = I \cup K$ , soit  $h$  l'enveloppe supérieure de la famille des fonctions affines :

$$x \rightarrow \langle x, y'_\ell \rangle - \alpha'_\ell$$

Les fonctionnelles  $h$  (indicées par  $y'_\ell \in x'_\ell + V'_\ell$ ,  $\ell \in L$ ) sont pour parler de façon imagée, les fonctionnelles les plus petites dans  $[f_0 ; K, x'_k, V'_k, \alpha'_k]^* \cap [g_0 ; I, x'_i, V'_i, \alpha'_i]^*$ .

Si l'on restreint les pentes  $y'_\ell$  à appartenir non plus à  $x'_\ell + V'_\ell$  mais à  $x'_\ell + V''_\ell$  avec

$$V''_\ell = V'_\ell \cap \{x' \in E' ; |\langle x_j, x' \rangle| < \alpha_j, j \in J\}$$

on obtient une nouvelle famille de fonctionnelles  $h$  mais qui appartiennent cette fois à

$$[g_0 ; I, x'_i, V'_i, \alpha'_i]^* \cap [f_0 ; J, x_j, V_j, \alpha_j] \cap [f_0 ; K ; x'_k, V'_k, \alpha'_k]^*$$

donc en vertu de (3), qui n'appartiennent pas à

$$[g_0 ; x_0, V_0, \alpha_0].$$

Ceci signifie qu'il existe un nombre  $k$  tel que

$$\inf_{x \in x_0 + V_0} \geq k.$$

Au cause de la définition des fonctionnelles  $h$ , on en déduit que tout point  $x \in V_0$  doit appartenir à la réunion d'ensembles de la forme

$$E_\ell = \{x \in E ; \inf_{y'_\ell \in V''_\ell} \langle x, y'_\ell \rangle \geq k_\ell\}$$

c'est-à-dire que

$$V_0 \subset \bigcup_{\lambda \in L} E_\lambda$$

Comme les  $E_\lambda$  sont des parties équicontinues du dual de  $E'$  obtenu lorsque  $E'$  est muni de  $T'$ , et que  $L$  est un ensemble fini d'indice, on en déduit que  $V_0$  est aussi une partie équicontinue ; mais cela revient à dire que  $(x, x') \rightarrow \langle x, x' \rangle$  est continue pour  $T \times T'$ ,  
c.q.f.d.



CHAPITRE - III

LIMITES INFERIEURES ET SUPERIEURES

1 - INTRODUCTION

1.1 - Soit  $(E, E')$  un système dual. Ce chapitre est consacré à l'étude de deux notions de limite pour les suites de fonctionnelles appartenant à  $\Gamma_0(E)$  ou  $\Gamma_0(E')$ .

Elles ont été introduites pour la première fois par U. Mosco (1967) (1968) (1969) dans les espaces de Banach reflexifs pour étudier l'approximation des solutions de certaines inéquations variationnelles. Leur définition se présentait sous une forme purement séquentielle non immédiatement généralisable au cas d'un système dual.

Soit  $(Q_n)$  une suite d'éléments de  $\Gamma_0(E)$ , où  $E$  est un espace de Banach reflexif ; On pose, avec Mosco :

$$(1) \quad s\text{-}\underline{\lim}(Q_n) = \{x \in E ; \exists(x_n), x_n \in Q_n, x_n \xrightarrow{s} x\}$$

$$(2) \quad w\text{-}\overline{\lim}(Q_n) = \{x \in E ; \exists(x_k), x_k \in Q_{n_k}, x_k \xrightarrow{w} x\}.$$

La première de ces notions, celle de limite inférieure (1) pour la topologie forte est classique depuis Hahn (1932), Kuratovski (1932) ; voir aussi Brissac (1947) et Choquet (1947-1948). Elle s'interprète immédiatement grâce à la topologie semi-finie inférieure. La notion de limite supérieure telle qu'elle est définie par (2), quoique portant le même nom, diffère (dans le cas des espaces de dimension infinie) de la notion habituelle qu'on trouve dans les travaux cités plus haut.

nous convervons (1) et

Dans le cas d'un système dual  $(E, E')$ , la forme que nous proposons pour étendre (2) diffère de la notion classique de limite supérieure par l'introduction d'une propriété de compacité (voir 2.5).

1.2 - On pourra peut être trouver une première justification à la modification que nous avons introduite dans le fait qu'une méthode fréquente pour établir les résultats de convergence des solutions approchées d'un problème linéaire ou non linéaire consiste à traduire un certain nombre d'estimations a priori en une propriété de compacité pour ces solutions approchées : dans cette optique, la propriété de compacité apparait à priori dans la notion de limite supérieure.

1.3 - Il y a une deuxième justification qui résulte de l'hypothèse de convexité à laquelle nous nous sommes tenus. En effet, dans ce cadre il est naturel d'exiger que dans  $\Gamma_0(E)$  et  $\Gamma_0(E')$  les notions de limites inférieure et supérieure se correspondent par polarité. Les définitions que nous proposons obéissent à cet impératif et la propriété de compacité introduite à priori dans la définition de la limite supérieure apparaît alors clairement dans les formules de polarité (voir paragraphes 3 et 7).

1.4 - Enfin dans le cas où  $E$  est un espace de Fréchet et  $E'$  son dual il est possible d'exhiber dans  $\Gamma_0(E)$  et  $\Gamma_0(E')$  des familles de suites -dites propres (elles possèdent une propriété de compacité du type 1.2)- pour lesquelles les notions de convergence pour les topologies étudiées au chapitre 2 et pour la notion de limite introduite dans ce chapitre 3 coïncident (et se correspondent par polarité).

Lorsque, en particulier  $E$  est un espace de Fréchet réflexif, l'exigence pour les suites d'être propres disparaissant (parce que cette propriété est automatiquement vérifiée par les suites convergentes dans un sens ou dans l'autre), l'énoncé de la situation prend une forme particulièrement simple.

1.5 - Dans le cas des espaces de dimension finie les deux notions de limites inférieure et supérieure coïncident avec les notions classiques dont nous avons fait mention en 1.1.

L'étude de la convergence qu'elles définissent sur  $\Gamma_0(E)$  et  $\Gamma_0(E')$  (et en particulier l'effet de la polarité) a été faite par Wijsman (1964). Cette convergence est utilisée aussi par G.B. Dantzig, J. Folkman et N. Shapiro (1967) et M. Hukuhara (1967).

1.6 - La première partie (paragraphe 2,3,4) du chapitre, est uniquement consacrée aux suites d'ensembles convexes contenant l'origine. Ceci d'une part à cause de leur importance pratique, d'autre part parce qu'alors les propriétés et leurs démonstrations se trouvent très simplifiées par le fait que ces suites sont propres, et possèdent une suite polaire propre. On trouvera ensuite quelques exemples au paragraphe 5. Dans les derniers paragraphes (6 et 7) nous reprenons l'étude pour les suites de fonctionnelles convexes.

## 2 - ENSEMBLES LIMITES ASSOCIES A UNE SUITE D'ENSEMBLES CONVEXES

On désigne par  $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ou  $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  étant l'ensemble des entiers naturels - une suite d'éléments de  $\overline{\mathbb{R}^E}$ ,  $\text{Conv}(E)$  ou  $\overline{\text{Conv}(E)}$ , avec la convention I,2.2,c).

### 2.1 - DEFINITION DE LA LIMITE INFÉRIEURE

Supposons  $E$  muni d'une topologie  $T$  et soit  $(Q_n)$  une suite d'éléments de  $\overline{\mathbb{R}^E}$ . Si  $V_T(0)$  désigne un système fondamental de voisinages de  $0$  dans  $E$ , on pose :

$$T\text{-}\underline{\lim}(Q_n) = \{x \in E ; \forall U \in V_T(0), \exists n_0, \forall n \geq n_0, (x+U) \cap Q_n \neq \emptyset\}$$

L'ensemble  $T\text{-}\underline{\lim}(Q_n)$  s'appelle la  $T$ -limite inférieure de la suite  $(Q_n)$ , pour la topologie  $T$ .

Il peut être vide.

### 2.2 - PROPOSITION

Soit  $(Q_n)$  une suite d'éléments de  $\overline{\mathbb{R}^E}$  [resp.  $\text{Conv}(E)$ ]. Alors l'ensemble  $T\text{-}\underline{\lim}(Q_n)$  est fermé et appartient à  $\overline{\mathbb{R}^E}$  [resp.  $\text{Conv}(E)$ ].

#### Démonstration

On écarte le cas trivial où  $T\text{-}\underline{\lim}(Q_n) = \emptyset$ . Soit alors  $x$  adhérent à  $T\text{-}\underline{\lim}(Q_n)$ . Montrons que pour tout  $U \in V_T(0)$   $x+U$  rencontre tous les  $Q_n$  à partir d'un certain rang. Soit  $V \in V_T(0)$  tel que  $V+V \subset U$  et  $y \in (x+V) \cap T\text{-}\underline{\lim}(Q_n)$ . Dès que  $x$  est assez grand  $(y+V) \cap Q_n$  n'est pas vide, a fortiori  $(x+U) \cap Q_n$ , ce qui démontre la première partie.

Supposons maintenant que tous les  $Q_n$  appartiennent à  $Conv(E)$ , et que  $T\text{-}\underline{\lim}(Q_n)$  contient au moins deux points distincts  $x_1$  et  $x_2$ . Soit  $x = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2$ , pour  $0 < \alpha < 1$ . Soit  $U \in V_T(0)$  et  $V \in V_T(0)$  tels que  $V+V \subset U$ . Pour  $n$  assez grand  $x_1 + \alpha^{-1}V$  et  $x_1 + (1-\alpha)^{-1}V$  rencontrent tous les  $Q_n$ ; de même,  $x+V+V$  puisque  $Q_n \in Conv(E)$   
c.q.f.d.

2.3 - ON DESIGNE PAR  $s(Q_n)$  L'ENSEMBLE DES SUITES DE POINTS DE E QUI VERIFIENT :  
 $x_n \in Q_n, \forall n \in \mathbb{N}$ .

Si la topologie  $T$  est métrisable alors on a la définition équivalente :

$$T\text{-}\underline{\lim}(Q_n) = \{x \in E ; \exists(x_n) \in s(Q_n), x_n \xrightarrow{T} x\}$$

où  $x_n \xrightarrow{T} x$  signifie que la suite  $x_n$  converge vers  $x$  dans  $E$  muni de  $T$ .

La démonstration, évidente, repose sur le fait qu'il existe pour  $T$  un système fondamental de voisinages de  $0$  dénombrable et décroissant.

2.4 - SIGNALONS une définition équivalente pour l'ensemble limite inférieure :

$$T\text{-}\underline{\lim}(Q_n) = \bigcap_{U \in V_T(0)} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{p \geq n} (Q_p + U)$$

2.5 - DEFINITION DE LA LIMITE SUPERIEURE

Supposons  $E$  muni d'une topologie  $t$ . Soit  $(Q_n)$  une suite d'éléments de  $\overline{\mathbb{R}^E}$ . On désigne par  $V_t(0)$  un système fondamental de voisinages de  $0$  dans  $E$  et par  $\mathcal{K}_t$  l'ensemble des parties compactes de  $E$  pour la topologie  $t$ .

On pose :

$$t\text{-}\overline{\lim}(Q_n) = \{x \in E ; \exists K \in \mathcal{K}_t, \forall U \in V_t(0), \forall n_0, \exists n \geq n_0,$$

$$(x+U) \cap (x+K) \cap Q_n \neq \emptyset\}.$$

L'ensemble  $t\text{-}\overline{\lim}(Q_n)$  s'appelle la limite supérieure de la suite  $(Q_n)$  (pour la topologie  $t$ ).

## 2.6 - REMARQUE

Cette définition n'est pas celle qu'utilisent Kuratovski (1932), Brissac (1947), Choquet (1947) ; qui donnerait ici

$$(1) \quad t\text{-}\underline{\lim}(Q_n) = \{x \in E ; \forall U \in V_T(0), \forall n_0, \exists n \geq n_0, (x+U) \cap Q_n \neq \emptyset\}.$$

Les raisons de notre choix apparaîtront mieux par la suite. Voici déjà sur un exemple simple une de ses conséquences

Soit  $(H_n)$  une suite d'hyperplans homogènes fermés d'un espace de Hilbert  $E$ .

$$H_n = \{x \in E ; \exists x'_n \in E', x'_n \neq 0, \langle x, x'_n \rangle = 0\}.$$

Supposons que la suite  $(x'_n)$  converge fortement dans  $E'$  vers un élément  $x' \neq 0$  et soit

$$H = \{x \in E ; \langle x, x' \rangle = 0\}.$$

Si  $t$  désigne la topologie forte de  $E'$ , on vérifie immédiatement que

$$t\text{-}\overline{\lim}(H_n) = H$$

que l'on choisisse la définition 2.5 ou 2.6.

Si  $t$  désigne la topologie faible  $\sigma(E', E)$  alors tandis que au sens de 2.5 on a :

$$t\text{-}\overline{\lim}(H_n) = H$$

En prenant la définition 2.6 il vient :

$$t\text{-}\overline{\lim}(H_n) = E$$

sauf si la suite  $(x'_n)$  est toute entière contenue dans un sous-espace vectoriel de  $E'$ , de dimension finie, auquel cas  $t\text{-}\overline{\lim}(H_n) = H$  (au sens de 2.6).

2.7 - SIGNALONS la définition équivalente à 2.6.

$$t\text{-}\overline{\lim}(Q_n) = \bigcup_{K \in \mathcal{K}_t} \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{\bigcup_{p \geq n} (Q_n \cap K)}$$

2.8 - Soit  $(Q_n)$  une suite d'éléments de  $\overline{\mathbb{R}^E}$ . Notons  $S(Q_n)$  l'ensemble des suites  $(x_k)$  de points de  $E$  auxquelles on peut associer une suite  $(Q_{n_k})$  extraite de la suite  $(Q_n)$  possédant la propriété  $x_k \in Q_{n_k}, \forall k \in \mathbb{N}$ .

En vertu de la compacité de la réunion d'une suite convergente et de sa limite, il vient :

$$(1) \quad \{x \in E ; \exists (x_k) \in S(Q_n), x_k \xrightarrow{t} x\} \subset t\text{-}\overline{\lim}(Q_n).$$

Si la topologie  $t$  est métrisable, l'inclusion inverse est aussi vérifiée. Plus généralement, on a le résultat suivant :

PROPOSITION

Supposons que  $E$ , muni d'une topologie  $t$ , vérifie la propriété :

(L) : tout point de  $E$  adhérent à un ensemble relativement compact dans  $E$  est limite d'une suite de point de cet ensemble. Alors pour toute suite  $(Q_n)$  d'éléments de  $\overline{\mathbb{R}^E}$  on a :

$$t\text{-}\overline{\lim}(Q_n) = \{x \in E ; \exists (x_k) \in S(Q_n), x_k \xrightarrow{t} x\}$$

si les ensembles  $Q_n$  sont fermés.

Démonstration

Du fait de l'inclusion (1), il nous suffit de montrer que tout  $x \in t\text{-}\overline{\lim}(Q_n)$  est limite d'une suite appartenant à  $S(Q_n)$ .

On écarte le cas évident où  $x$  est dans une infinité de  $Q_n$ , donc limite d'une suite stationnaire qui répond à la question.

Donc  $x \in t\text{-}\overline{\lim}(Q_n)$  n'appartient à aucun  $(Q_n)$  dès que  $n$  est par exemple, supérieur à  $n_0$ .

Soit  $K \in \mathcal{K}_t$ , le compact associé à  $x$ , par la définition 2.5.

L'ensemble  $H = \bigcup_{n \geq n_0} (x+K) \cap Q_n$  est relativement compact dans  $E$  et  $x$  est adhérent à  $H$ .

A cause de la propriété (L), il existe une suite  $(x_n)$  de points de  $H$  qui converge vers  $x$  pour la topologie  $t$ . Il suffit alors de montrer qu'on peut extraire de  $(x_n)$  une suite qui appartient à  $S(Q_n)$ . Pour cela il suffit de prouver que l'application  $p : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  définie par  $p(n) = \text{Inf}(m \in \mathbb{N} ; x_n \in Q_m)$  tend vers l'infini avec  $n$ .

Par l'absurde, la propriété :

$$\exists d \in \mathbb{N}, \forall n_1 \in \mathbb{N}, \exists n \geq n_1, p(n) \leq d$$

entraîne qu'il existe  $\ell \in \mathbb{N}$ ,  $n_0 \leq \ell \leq d$ , tel qu'une infinité de points de la suite  $(x_n)$  appartiennent à  $Q_\ell$ . Or, comme  $Q_\ell$  est fermé par hypothèse, on en déduit que  $x \in Q_\ell$ , ce qui est impossible.

COROLLAIRE

Soit  $(E, E')$  un système dual et  $(Q_n)$  une suite d'éléments de  $\overline{\mathbb{R}}^E$ , avec  $Q_n$  fermé pour  $\sigma(E, E')$ .

Si l'une des conditions suivante est vérifiée :

a)  $\tau(E, E')$  est métrisable

b) il existe dans  $E'$  un ensemble total dénombrable pour  $\sigma(E', E)$

alors

$$\sigma(E, E')\overline{\lim}(Q_n) = \sigma\text{-}\overline{\lim}(Q_n) = \{x \in E ; \exists(x_k) \in S(Q_n), x_k \xrightarrow{\sigma} x\}.$$

Démonstration

L'hypothèse a) fait que  $\sigma(E, E')$  possède la propriété (L) (voir, par exemple, Bourbaki [xx] page 83 ex. 14).

L'hypothèse b) entraîne que les ensembles dans E compacts pour  $\sigma(E, E')$  sont métrisables.

2.9 - REMARQUE

Soit E un e.l.c. métrisable, alors si  $\tau$  et  $\sigma$  désignent les topologies  $\tau(E, E')$  et  $\sigma(E, E')$  on a :

$$(1) \quad \tau\text{-}\underline{\lim}(Q_n) = \{x \in E ; \exists(x_k) \in s(Q_n), x_k \xrightarrow{\tau} x\}$$

$$(2) \quad \sigma\text{-}\overline{\lim}(Q_n) = \{x \in E ; \exists(x_k) \in S(Q_n), x_k \xrightarrow{\sigma} x\}.$$

Ce sont les définitions adoptées par Mosco (1968) etc... Mais sauf dans le cas où E est un espace de Banach réflexif, les formules (1) et (2) ne permettent pas d'entreprendre l'étude de la "continuité" de la polarité :  $Q \rightarrow Q^\circ$ .

2.10 - ENSEMBLES T-t-limite

Soit E sur lequel on considère deux topologies T et t, et  $(Q_n)$  une suite d'éléments de  $\overline{\mathbb{R}}^E$ . On dit que l'élément  $Q \in \overline{\mathbb{R}}^E$  (éventuellement vide) est une T-t-limite de  $(Q_n)$ , ou que  $(Q_n)$  est T-t convergente vers Q si

$$a) \quad T\text{-}\underline{\lim}(Q_n) \supset Q$$

$$b) \quad t\text{-}\overline{\lim}(Q_n) \subset Q.$$

Convention

Une suite  $(Q_n)$  peut avoir plusieurs limites. Même dans ce cas, si Q est une de ses limites, nous écrivons :  $T\text{-}t\text{-}\lim(Q_n) = Q$ .

### 3 - EFFET DE LA POLARITE

Soit  $(E, E')$  un système dual. Dans ce paragraphe et les suivants, on considèrera des suites  $(Q_n)$  de parties convexes fermées et non vides de  $E$  ou  $E'$ .

3.1 - ON A d'abord le résultat évident mais important suivant :

#### PROPOSITION

Soit  $T$  une topologie  $(E, E')$ . Soit  $(Q_n)$  une suite d'éléments de  $\Gamma_o(E)$ , et  $Q \in \Gamma_o(E)$ . Pour que la suite  $(Q_n)$  converge vers  $Q$  lorsque  $\Gamma_o(E)$  est muni de  $I(T)$  il faut et il suffit que

$$T\text{-}\underline{\lim}(Q_n) \supset Q.$$

3.2 - SOIT  $(E, E')$  un système dual ; on suppose  $E$  muni d'une topologie  $t$  plus fine que  $\sigma(E, E')$  et on considère sur  $E'$  la topologie  $T'$  de la convergence uniforme sur les ensembles convexes de  $E$ , compacts pour la topologie  $t$ . Comme  $t$  est plus fine que  $\sigma(E, E')$ ,  $T'$  est une topologie  $(E', E)$ .

#### PROPOSITION

Soit  $(Q_n)$ , une suite d'éléments de  $\Gamma_o(E)$  contenant tous l'origine. On a l'inclusion

$$(t\text{-}\overline{\lim}(Q_n))^{\circ} \subset T'\text{-}\underline{\lim}(Q_n^{\circ})$$

#### Démonstration

On écarte le cas évident où  $T'\text{-}\underline{\lim}(Q_n^{\circ}) = E'$  et on suppose donc qu'il existe dans  $E'$ ,  $x' \notin T'\text{-}\underline{\lim}(Q_n^{\circ})$ .

En se reportant à 2.1 ceci signifie qu'il existe  $U' \in V_{T^k}(0)$ , qu'on supposera convexe et équilibré tel que  $x'+U'$  soit disjoint d'une infinité de  $Q_n^\circ$ , notée  $Q_{n_k}^\circ$ .

En vertu du théorème d'Hahn-Banach, et parce que  $T'$  est une topologie  $(E',E)$ , il existe pour tout  $k$  un élément  $y_k \in E$  tel que :

$$(1) \quad 0 \leq \sup_{y' \in Q_n^\circ} \langle y_k, y' \rangle \leq 1 \leq \langle y_k, x' \rangle + \inf_{x' \in U'} \langle y_k, u' \rangle$$

Deux cas se présentent :

a) Il existe  $y_{k_\ell}$ , une sous-suite de  $y_k$  et un nombre  $M$  positif tel que pour tout  $\ell$ ,

$$|\langle y_{k_\ell}, u' \rangle| \leq M, \quad \forall u' \in U'.$$

Comme par définition de  $T'$ ,  $U'$  est le polaire d'un ensemble convexe équilibré et compact  $K$  de  $E$ , la suite  $(y_{k_\ell})$  vérifie :

$$(2) \quad y_{k_\ell} \in \frac{1}{M} K.$$

b) Dans l'autre cas, la suite  $(y_k)$  est telle que :

$$(3) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \sup_{u' \in U'} |\langle y_k, u' \rangle| \right) = +\infty$$

Définissons alors le réel  $\lambda_k$ , pour tout  $k$ , par :

$$\lambda_k \langle y_k, x' \rangle = 1.$$

A cause de (3), on a à partir d'un certain rang :  $\inf_{u' \in U'} \langle y_k, u' \rangle < -1$ , donc en vertu de (1),  $\langle x', y_k \rangle > 0$ , ce qui entraîne que  $\lambda_k > 0$ .

On vérifie aussi de la même façon qu'à cause de (3) la suite  $(\lambda_k)$  converge vers 0.

Multiplions (1) par  $2\lambda_k$  ; on obtient, en posant  $x_k = 2\lambda_k y_k$  les inégalités suivantes valables pour tout k :

$$(4) \quad \langle x_k, x' \rangle = 2$$

$$(5) \quad \langle x_k, y' \rangle \leq 2\lambda_k, \quad \forall y' \in Q_{n_k}^\circ$$

$$(6) \quad \langle x_k, u' \rangle \geq 2(\lambda_k - 1), \quad \forall u' \in U'$$

De (5) et (6) on déduit que, dès que k est assez grand pour que  $\lambda_k \leq 1/2$ , on a :

$$(7) \quad x_k \in Q_{n_k}^{\circ\circ} \cap K = Q_{n_k} \cap K.$$

On achève alors la démonstration en remarquant que dans le cas b), la suite  $(x_k)$  vérifiant (7) admet une valeur d'adhérence x, qui appartient à  $t\text{-}\overline{\lim}(Q_n)$  à cause de (7) et qui vérifie

$$\langle x, x' \rangle = 2$$

en vertu de (4), et parce que t est plus fine que  $\sigma(E, E')$  ce qui prouve que  $x' \notin (t\text{-}\overline{\lim}(Q_n))^\circ$ .

Dans le cas a), soit y la valeur d'adhérence de la suite  $(y_k)$  telle que :

$$\liminf_k \langle y_k, x' \rangle = \langle y, x' \rangle.$$

Comme  $\langle y_k, x' \rangle \geq 1$  en vertu de (1), on a  $y \neq 0$ . Donc :

$$\langle y, x' \rangle = \liminf_k \langle y_k, x' \rangle \geq 1 + \liminf_k \sup_{u' \in U'} \langle y_k, u' \rangle.$$

La fonction d'appui de  $U'$  est s.c.i pour toutes les topologies  $(E, E')$ , donc pour t ; on a donc :

$$\liminf_k \sup_{u' \in U'} \langle y_k, u' \rangle \geq \sup_{u' \in U'} \langle y, u' \rangle$$

où le second membre est strictement positif parce que  $y \neq 0$ .

On en conclut que :  $\langle y, x' \rangle > 1$ , donc que  $x' \notin (t\text{-}\overline{\lim}(Q_n^\circ))$ , ce qui achève la démonstration.

COROLLAIRE

La suite  $(Q_n)$ , d'éléments de  $\Gamma_0(E)$  contenant tous l'origine, converge dans  $\Gamma_0(E)$ , muni de  $S(T')$ , vers tout  $Q \in \Gamma_0(E)$  tel que :

$$t\text{-}\overline{\lim}(Q_n) \subset Q.$$

Démonstration

En effet, pour que  $(Q_n)$  converge vers  $Q$  pour la topologie  $S(T')$ , (il faut et) il suffit que  $(q_n^*)$ , la suite des fonctions d'appui des  $Q_n$ , converge pour  $I(T')$  vers  $q^*$  (chapitre II. 3.2.b)). On vérifie aisément que pour cela, il faut et il suffit que  $Q_n^\circ \in \Gamma_0(E')$  converge vers  $Q^\circ \in \Gamma_0(E')$  pour  $I(T')$ . Donc il suffit d'après la proposition 3.1 que

$$T'\text{-}\underline{\lim}(Q_n^\circ) \supset Q^\circ.$$

et d'après la proposition précédente que

$$(t\text{-}\overline{\lim}(Q_n))^\circ \supset Q^\circ.$$

ce qui donne le résultat par polarité.

3.3 - POUR DEMONTRER la réciproque du corollaire, on est amené à faire une hypothèse supplémentaire sur la topologie  $t$ .

DEFINITION

On dit que la topologie  $t$  sur  $E$  vérifie la propriété (E.C) si :

(E.C) Lorsque  $E$  est muni de  $t$  l'enveloppe convexe et fermée d'un ensemble compact dans  $E$  est compacte.

Lorsque  $t$  vérifie (E.C), la topologie  $T'$  sur  $E'$ , considérée en 3.2., de la convergence convexe compacte est identique à la topologie de la convergence compacte.

Avec les mêmes hypothèses et notations qu'en 3.2 on peut maintenant prouver :

PROPOSITION

Si la topologie  $t$  vérifie (E.C) alors pour toute suite  $(Q_n)$ , d'éléments de  $\Gamma_0(E)$  contenant tous l'origine, on a :

$$(t\text{-}\overline{\lim}(Q_n))^\circ \supset T'\text{-}\underline{\lim}(Q_n^\circ).$$

Démonstration

Il suffit de montrer que tout couple  $(x_0, x'_0)$  de  $t\text{-}\overline{\lim}(Q_n) \times T'\text{-}\underline{\lim}(Q_n^\circ)$  vérifie

$$\langle x_0, x'_0 \rangle \leq 1$$

En se reportant à la définition 2.5, il existe un ensemble  $K \subset E$  compact pour la topologie  $t$ , tel que pour tout  $V \in \mathcal{V}_t(0)$  on ait :

$$(1) \quad \forall n_0 \in \mathbb{N}, \exists n \geq n_0, (x_0 + V) \cap (x_0 + K) \cap Q_n \neq \emptyset$$

à cause de l'hypothèse (E.C), l'ensemble polaire  $K^\circ$  est un voisinage de 0 pour  $T'$  et aussi

$$U' = \frac{\varepsilon}{2} K^\circ, \quad \varepsilon > 0$$

D'autre part  $U = \{x \in E ; \langle x, x'_0 \rangle \leq \frac{\varepsilon}{2}\}$ ,  $\varepsilon > 0$  est un voisinage de 0 dans E pour  $\sigma(E, E')$  donc pour t.

Ces voisinages U et U' fixés on a alors pour tout  $x' \in x'_0 + U'$  et  $x \in (x_0 + U) \cap (x_0 + K)$

$$|\langle x_0, x'_0 \rangle - \langle x, x' \rangle| \leq |\langle x - x_0, x'_0 \rangle| + |\langle x, x' - x'_0 \rangle|$$

donc, à cause des définitions adoptées pour U et U',

$$(2) \quad |\langle x_0, x'_0 \rangle - \langle x, x' \rangle| \leq \varepsilon$$

Il existe un rang, par définition de  $x'_0$ , à partir duquel

$$(3) \quad (x'_0 + U') \cap Q_n \neq \emptyset.$$

En combinant (1) (2) et (3), on obtient :

$$\langle x_0, x'_0 \rangle \leq 1 + \varepsilon$$

Le réel  $\varepsilon > 0$  étant arbitrairement petit, ceci achève la démonstration.

Des résultats précédents on déduit un certain nombre de conséquences :

#### COROLLAIRE 1

Mêmes notations qu'en 3.2 ; on suppose que t vérifie (E.C) . Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite  $(Q_n)$ , d'éléments de  $\Gamma_0(E)$  contenant tous l'origine, converge vers  $Q \in \Gamma_0(E)$ , lorsque  $\Gamma_0(E)$  est muni de la topologie  $S(T')$ , est que

$$t\text{-}\overline{\lim}(Q_n) \subset Q.$$

COROLLAIRE 2

Mêmes hypothèses que pour le corollaire 1.

Soit d'autre part  $T$  une topologie  $(E, E')$ . Alors une condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite  $(Q_n)$  d'éléments de  $\Gamma_0(E)$  contenant tous l'origine, converge vers  $Q \in \Gamma_0(E)$ , lorsque  $\Gamma_0(E)$  est muni de la topologie  $[T, T'^*]$ , est que :

$$T\text{-}t\text{-}\lim(Q_n) = Q.$$

Enfin, on peut échanger les rôles de  $E$  et  $E'$  dans le corollaire 2, combiner les résultats, pour obtenir le :

COROLLAIRE 3

Soit  $(E, E')$  un système dual. Soit  $t$  [resp.  $t'$ ] une topologie sur  $E$  [resp.  $E'$ ] plus fine que  $\sigma(E, E')$  [resp.  $\sigma(E', E)$ ] et vérifiant E.C. Soit  $T'$  [resp.  $T$ ] la topologie de la convergence  $t$ -compacte [resp.  $t'$ -compacte]. Pour toute suite  $(Q_n)$  d'éléments de  $\Gamma_0(E)$  contenant tous l'origine, les propriétés suivantes sont équivalentes.

- a)  $T\text{-}t\text{-}\lim(Q_n) = Q$
- b)  $T'\text{-}t'\text{-}\lim(Q_n^\circ) = Q^\circ$
- c)  $(Q_n)$  converge vers  $Q$  dans  $\Gamma_0(E)$  muni de  $[T, T'^*]$
- d)  $(Q_n^\circ)$  converge vers  $Q$  dans  $\Gamma_0(E')$  muni de  $[T', T^*]$ .

### 3.4 - PROPRIÉTÉ (E.C)

Les énoncés précédents supposent la propriété (E.C) pour les topologies  $t$  et  $t'$ .

Voici, tirés de la littérature, des résultats dans ce sens (Bourbaki [ $\star\star$ ], Grothendieck [ $\star$ ]).

#### LEMME 1 (Krein)

*Soit  $A$  une partie compacte d'un e.l.c.s.  $E$  ; pour que son enveloppe convexe fermée soit compacte, il faut et il suffit qu'elle soit complète pour la topologie de Mackey  $\tau(E, E')$ .*

#### LEMME 2

*Soit  $E$  un e.l.c.s. Si  $E$  est quasi-complet pour  $\sigma(E, E')$ , il est quasi-complet pour la topologie initiale.*

#### LEMME 3

*Le dual  $E'$  d'un espace tonnelé séparé  $E$  est quasi-complet pour  $\sigma(E', E)$ .*

#### PROPOSITION

*Soit  $E$  un espace tonnelé séparé et quasi-complet et  $E'$  son dual. Si  $t$  et  $t'$  sont des topologies  $(E, E')$  et  $(E', E)$  respectivement, elles vérifient la propriété (E.C) et alors on peut appliquer les conclusions du corollaire 3 de 3.3.*

#### Démonstration

$E$  étant tonnelé, la topologie de Mackey  $\tau(E, E')$  est la topologie initiale pour laquelle  $E$  est quasi-complet. La topologie  $t$  vérifie donc (E.C) en vertu du lemme 1. D'après le lemme 3,  $E'$  est faiblement quasi-complet donc quasi-complet pour la topologie  $t'$  (lemme 2) ce qui entraîne que  $t'$  vérifie (E.C).

#### 4 - ESPACES DE FRECHET

En raison de leur importance, nous allons dans ce paragraphe énoncer à nouveau pour ces espaces les résultats obtenus précédemment, en les complétant par quelques propriétés spéciales.

##### 4.4 - $\tau.\tau$ . LIMITE ET $\tau.\sigma$ . LIMITE DANS UN ESPACE METRISABLE

Soit E un e.l.c. métrisable, E' son dual alors la topologie de Mackey  $\tau(E, E')$  est la topologie initiale de E. La notation  $\tau\text{-}\underline{\lim}$  désignera donc la limite inférieure prise pour cette topologie.

##### PROPOSITION

*Soit E un e.l.c. métrisable. Alors toute suite d'éléments de  $\Gamma_0(E)$ ,  $\tau.\tau$  convergente [resp.  $\tau.\sigma$  convergente] admet une seule limite.*

##### Démonstration

La suite  $(Q_n)$  est  $\tau.\tau$  convergente vers Q si par définition :

$$\tau\text{-}\underline{\lim}(Q_n) \supset Q$$

$$\tau\text{-}\overline{\lim}(Q_n) \subset Q$$

Comme la topologie  $\tau$  est métrisable, toute suite  $(Q_n)$  est telle que :

$$\tau\text{-}\underline{\lim}(Q_n) \subset \tau\text{-}\overline{\lim}(Q_n)$$

en vertu de 2.3 et 2.8, d'où l'unicité de la limite.

Le même résultat est valable pour les suites  $(Q_n)$   $\tau, \sigma$  convergentes ; comme dans le cas précédent on peut adopter pour les ensembles  $\tau\text{-}\underline{\text{lim}}$  et  $\sigma\text{-}\overline{\text{lim}}$  les définitions séquentielles (2.3 et corollaire 2.8 a)) ; d'où l'on déduit que

$$\tau\text{-}\underline{\text{lim}}(Q_n) \subset \sigma\text{-}\overline{\text{lim}}(Q_n)$$

ce qui achève la démonstration.

#### Remarque

Pour que  $\tau, \sigma \text{ lim}(Q_n) = Q$ , il faut et il suffit que a) tout point  $x \in Q$  soit limite pour  $\tau(E, E')$  d'une suite  $(x_n)$  avec  $x_n \in Q_n$  b) toute suite  $(x_k)$  avec  $x_k \in Q_{n_k}$ , qui est convergente pour  $\tau(E, E')$  admet pour limite un élément de  $Q$ .

Même chose pour que :  $\tau, \sigma \text{ lim}(Q_n) = Q$  où dans b) on a remplacé la topologie  $\tau(E, E')$  par la topologie  $\sigma(E, E')$ .

#### 4.2 - ESPACE DE FRECHET

Soit  $E$  un espace de Fréchet. Sur le dual  $E'$  de  $E$  on note  $T_c$  la topologie de la convergence compacte, (qui est une topologie  $(E', E)$ ).

De 3.3 Corollaire 3 et de la proposition 3.4. on tire :

#### PROPOSITION 1

*Soit  $E$  un espace de Fréchet. Pour toute suite  $(Q_n)$  d'éléments de  $\Gamma_0(E)$  contenant tous l'origine, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

a)  $\tau, \sigma \text{ lim}(Q_n) = Q$

b)  $\tau, \sigma \text{ lim}(Q_n^\circ) = Q^\circ$

c)  $Q_n$  converge vers  $Q$  lorsque  $\Gamma_0(E)$  est muni de  $[\tau(E, E'), \tau(E', E)]^*$

d)  $Q_n^\circ$  converge vers  $Q^\circ$  lorsque  $\Gamma_0(E')$  est muni de  $[\tau(E', E), \tau(E, E')]^*$ .

Démonstration

Elle résulte de la prop. 3.4, l'espace  $E$  étant tonnelé et quasi-complet.

De même :

PROPOSITION 2

Soit  $E$  un espace de Fréchet. Pour toute suite  $(Q_n)$  d'éléments de  $\Gamma_o(E)$  contenant tous l'origine, les propriétés suivantes sont équivalentes

a)  $\tau \cdot \tau \lim(Q_n) = Q$

b)  $T_c \cdot T_c \lim(Q_n^\circ) = Q^\circ$

c)  $Q_n$  converge vers  $Q$  lorsque  $\Gamma_o(E)$  est muni de  $[\tau(E, E'), T_c^*]$

d)  $Q_n^\circ$  converge vers  $Q^\circ$  lorsque  $\Gamma_o(E')$  est muni de  $[T_c, \tau(E, E')^*]$ .

Démonstration

La topologie  $\tau(E, E')$  est la topologie de la convergence compacte,  $E'$  étant muni de la topologie  $\sigma(E', E)$ . Comme dans  $E'$  les parties compactes pour  $T_c$  et  $\sigma(E', E)$  sont les mêmes (elles coïncident avec les parties équi continues faiblement fermées sur lesquelles  $T_c$  et  $\sigma$  induisent la même topologie),  $\tau(E, E')$  peut être considérée comme la topologie de la convergence compacte lorsque  $E'$  est muni de  $T_c$ .

Remarque

Sur  $\Gamma_o(E)$  les topologies  $[\tau(E, E'), \tau(E', E)^*]$  et  $[\tau(E, E'), T_c^*]$  ne sont pas séparées (Chap. II 4.2 prop. 2). Néanmoins, en vertu de la prop. 4, les suites convergentes d'éléments contenant tous l'origine ont une limite unique, de même dans  $\Gamma_o(E')$ , muni de  $[\tau(E', E), \tau(E, E')^*]$  ou de  $[T_c, \tau(E, E')^*]$  (prop 1 et 2, ci-dessus).

4.3 - REMARQUE.

Terminons par un exemple simple pour illustrer la prop. 4.2 précédente.

Soit  $C_0$ , l'espace de Banach des suites réelles qui convergent vers 0, avec la norme habituelle.

Soit  $\ell^1$ , son dual fort, l'espace des suites réelles sommables.

Pour tout entier  $n$ , on considère  $Q_n \subset C_0$ , la droite formée des suites dans  $C_0$  dont les  $n$  premiers termes sont égaux entre eux, les suivants étant tous nuls.

Si  $T$  et  $t$  sont toutes deux la topologie forte de  $C_0$ , on vérifie que :

$$\tau\text{-}\underline{\lim}(Q_n) \supset \{0\} \supset \tau\text{-}\overline{\lim}(Q_n)$$

c'est-à-dire que cette suite de droites  $Q_n$  est  $\tau.T$  convergente vers  $\{0\}$ .

A cause de la prop. 3.4 précédente, on en déduit que

$$T_c \underline{\lim}(Q_n^\circ) \supset \ell^1 \supset T_c \overline{\lim}(Q_n^\circ)$$

En revanche, la suite  $Q_n^\circ$  n'est pas  $\beta\text{-}\sigma$  convergente si  $\beta$  désigne la topologie forte de  $\ell^1$  puisque  $\sigma\text{-}\overline{\lim}(Q_n^\circ) = T_c \overline{\lim}(Q_n^\circ) = \ell^1$  tandis que

$$\beta\text{-}\underline{\lim}(Q_n^\circ) = \{(\lambda_i) \in \ell^1 ; \sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda_i = 0\}.$$

## 5 - QUELQUES EXEMPLES

### 5.1 - APPROXIMATION DE E PAR DES SOUS-ESPACES DE DIMENSION FINIE

C'est l'exemple le plus simple ; mais il est fondamental.

Soit  $E$  un e.l.c.s possédant une partie totale dénombrable  $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ . Si  $E_n$  désigne le sous-espace vectoriel de  $E$  engendré par les  $n$  premiers termes  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  et  $T$  désigne la topologie initiale de  $E$ , on a :

$$(1) \quad T\text{-}\underline{\lim}(E_n) \supset E$$

Si  $t$  désigne une autre topologie sur  $E$ , de

$$t\text{-}\overline{\lim}(E_n) \subset E$$

on déduit que

$$T\text{-}t \lim(E_n) = E.$$

Dans le cas où  $E$  est un espace normé, il est classique (voir par exemple R. Douady (1965) T. Kato [★]) d'introduire sur l'ensemble des sous-espaces vectoriels fermés de  $E$  une distance (dite distance de Hausdorff). Mais pour cette métrique il est impossible d'approcher l'espace  $E$ , s'il est de dimension infinie, par une suite de sous-espaces de dimension finie.

### 5.2 - SUITE D'HYPERPLANS

Encore un exemple simple pour fixer les idées.

Soit  $E$  un espace de Hilbert,  $E'$  son dual. Sur l'ensemble des parties convexes fermées non vides de  $E$  et  $E'$ , on considère la  $\sigma$  convergence (paragraphe 4).

Soit  $(H_n)$  une suite d'hyperplans homogènes et fermés dans  $E$ .

Il y a deux cas distincts de convergence pour la suite  $(H_n)$  donc pour la suite des droites orthogonales  $(H_n^\circ)$ .

- a) Il existe  $h \neq 0$  dans  $E'$  et  $h_n \in H_n^\circ$  tel que  $h_n$  converge fortement vers  $h$ . Dans ce cas  $\tau.\sigma \lim(H_n) = H$  si

$$H = \{x \in E ; \langle x, h \rangle = 0\},$$

i.e. la suite des hyperplans converge vers un hyperplan.

- b) Le seul point faiblement adhérent à toute suite bornée  $(h_n)$ , avec  $h_n \in H_n^\circ$ , est  $0 \in E'$  et alors  $\tau.\sigma \lim(H_n) = E$ .

En effet dans le cas a) il est clair que  $H_n^\circ$  est  $\tau.\sigma$  convergente vers  $H^\circ$  tandis que dans le cas b)  $\sigma\text{-}\overline{\lim} H_n^\circ \subset \{0\}$ , c'est-à-dire que  $H_n^\circ$  est  $\tau.\sigma$  convergente vers  $\{0\}$ .

### 5.3 - FONCTIONS CONTINUES NULLES SUR UN SOUS-ENSEMBLE

Soit  $\Omega$  un ensemble ouvert de  $\mathbb{R}^p$ .  $\mathcal{C}(\Omega)$  désigne par l'espace des fonctions continues à support compact dans  $\Omega$  muni de la topologie limite inductive habituelle ;  $\mathcal{C}(\Omega)$  est un espace tonnelé complet.

Son dual est l'espace des mesures  $\mathcal{M}_c(\Omega)$  sur  $\Omega$ . La topologie initiale de  $\mathcal{C}$  est la topologie de Mackey.

Soit  $S$  une partie fermée de  $\mathbb{R}^p$ , contenue dans  $\Omega$ . On note  $O(S)$ ,  $P(S)$ ,  $N(S)$  les cônes convexes dans  $\mathcal{C}(\Omega)$  constitués des fonctions nulles sur  $S$ , positives sur  $S$ , négatives sur  $S$ , respectivement. Ces ensembles sont évidemment fermés. Les cônes polaires de  $O(S)$ ,  $P(S)$  et  $N(S)$  sont l'ensemble des mesures à support dans  $S$ , respectivement de signe quelconque, négatif et positif, notés  $\Sigma(S)$ ,  $\Sigma_-(S)$ ,  $\Sigma_+(S)$  (avec la définition de la polarité que nous avons prise) ; on sait que (Bourbaki [\*\*\*])  $\Sigma(S)$ ,  $\Sigma_+(S)$  et  $\Sigma_-(S)$  sont fermés ( $S$  est fermé).

On dit que  $S_n$ , une suite de parties fermées dans  $\Omega$  converge vers  $S$  si

$$\underline{\lim}(S_n) \supset S \supset \overline{\lim}(S_n)$$

avec

$$\underline{\lim}(S_n) = \{s \in \mathbb{R}^n ; \liminf_n d(s, S_n) = 0\}$$

$$\overline{\lim}(S_n) = \{s \in \mathbb{R}^n ; \limsup_n d(s, S_n) = 0\}$$

On vérifiera aisément le fait suivant :

LEMME

Soit  $S$  un fermé ; pour toute suite  $(S_n)$  de parties fermées dans  $\Omega$ , on a  $\overline{\lim} S_n \subset S$  si et seulement si tout compact  $K$  disjoint de  $S$  ne rencontre plus les  $S_n$  à partir d'un certain rang.

PROPOSITION

Soit  $(S_n)$  une suite de fermés et  $S$  un ensemble fermé. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes.

- 1)  $S_n$  converge vers  $S$
- 2)  $\tau.\tau \lim(O(S_n)) = O(S)$
- 3)  $T_c.T_c \lim(\Sigma(S_n)) = \Sigma(S)$
- 4)  $\tau.\tau \lim(P(S_n)) = P(S)$
- 5)  $T_c.T_c \lim(\Sigma_-(S_n)) = \Sigma_-(S)$
- 6)  $\tau.\tau \lim(N(S_n)) = N(S)$
- 7)  $T_c.T_c \lim(\Sigma_+(S_n)) = \Sigma_+(S)$

Démonstration

On vérifie d'abord que si  $T$  et  $t$  désignent sur  $E = \mathcal{H}(\Omega)$  la topologie de Mackey, on peut prendre pour  $T'$  et  $t'$  sur  $E' = \mathcal{H}(\Omega)$  les topologies  $T_c$  et  $\sigma$  ou  $T_c$  et  $T_c$  et appliquer le résultat de la prop. 3.4., ce qui montre déjà les équivalences  $2 \Leftrightarrow 3$ ,  $4 \Leftrightarrow 5$ ,  $6 \Leftrightarrow 7$ .

Enfin il est clair que  $6 \Leftrightarrow 4$ , puisque les deux cônes sont opposés.

1) Equivalence  $1 \Leftrightarrow 2 \Leftrightarrow 3$ .

1<sub>a</sub>) Supposons que  $T_c\text{-}\overline{\lim}(\Sigma(S_n)) = \sigma\text{-}\overline{\lim}(\Sigma(S_n)) \subset \Sigma(S)$ .

Soit  $(s_k)$  avec  $s_k \in S_{n_k}$  une suite de points de  $\Omega$  qui converge vers  $s$ .

La suite des mesures  $\varepsilon_{s_k}$ , de masse +1 portée par  $s_k$ , converge vaguement vers  $\varepsilon_s$ , donc  $\varepsilon_s \in \Sigma(S)$ , i.e.  $s \in S$ . Ce qui prouve que  $\overline{\lim}(S_n) \subset S$ .

1<sub>b</sub>) Supposons que  $\overline{\lim}(S_n) \subset S$ . Soit alors  $f$  une fonction appartenant à  $\mathcal{H}(\Omega)$  dont le support est disjoint de  $S$ ; en vertu du lemme précédent, son support est aussi disjoint de tous les  $S_n$ , pour  $n$  assez grand et par suite cette fonction est dans tous les  $O(S_n)$  à partir d'un certain rang et donc appartient à  $\tau\text{-}\underline{\lim} O(S_n)$ . Or l'ensemble des fonctions  $f$  à support disjoint de  $S$  est dense dans l'ensemble des fonctions nulles sur  $S$ . Ceci prouve donc que :  $\tau\text{-}\underline{\lim} O(S_n) \supset O(S)$  (prop. 2.2).

1<sub>c</sub>) Supposons que  $\underline{\lim}(S_n) \supset S$ . Ceci signifie que toute mesure  $\varepsilon_s$ , de masse quelconque, portée par  $S$ ,  $s \in S$ , est limite vague d'une suite  $\varepsilon_{s_n}$ ,  $s_n \in S_n$ , donc aussi limite pour  $T_c$  de  $\varepsilon_{s_n}$ . Donc  $T_c\text{-}\underline{\lim}(\Sigma(S_n))$  contient l'ensemble des mesures  $(\varepsilon_s)_{s \in S}$ , qui est, rappelons le, vaguement dense dans  $\Sigma(S)$ ; ceci prouve que  $T_c\text{-}\underline{\lim} \Sigma(S_n) \supset \Sigma(S)$ .

1<sub>d</sub>) Supposons réciproquement que  $\tau\text{-}\overline{\lim} O(S_n) \subset O(S)$ , et soit  $s \notin \underline{\lim}(S_n)$ . Il existe un voisinage  $U$  de  $s$  et une sous-suite  $S_{n_k}$  tels que :

$$S_{n_k} \cap U = \emptyset \quad , \quad \text{pour tout } k$$

Si maintenant  $f$  est une fonction non nulle en  $s$  et dont le support est dans  $U$  (une telle fonction existe), il est clair que  $f$  appartient à  $\tau\text{-}\overline{\lim}(O(S_n))$  donc à  $O(S)$ ; ceci prouve que  $s \notin S$  donc que  $\underline{\lim}(S_n) \supset S$ .

2) Equivalence entre 1) et 4)

2<sub>a</sub>)  $\tau\text{-}\underline{\lim} O(S_n) \supset O(S)$  entraîne que  $\tau\text{-}\underline{\lim} P(S_n) \supset P(S)$ .

En effet, soit  $f \in P(S)$ . D'après le théorème d'Urisohn, il existe  $g \in \mathcal{K}(\Omega)$ , telle que  $g = f$  sur  $S$  et qui reste positive dans  $\Omega$ . Posons  $h = f - g \in O(S)$  ; par hypothèse il existe une suite d'éléments  $h_n \in O(S_n)$  qui converge vers  $h$  ; par conséquent la suite de terme général  $f_n = g + h_n$  appartient à  $P(S_n)$  et converge vers  $f$ , ce qui prouve notre assertion.

2<sub>b</sub>)  $\tau\text{-}\underline{\lim} P(S_n) \supset P(S)$  entraîne que  $\overline{\lim}(S_n) \subset S$ . On fait le même raisonnement qu'en 1<sub>a</sub>.

2<sub>c</sub>)  $\underline{\lim}(S_n) \supset S$  entraîne que  $T_c\text{-}\underline{\lim} \Sigma_-(S_n) \supset \Sigma_-(S)$ .

Même raisonnement qu'en 1<sub>c</sub>.

2<sub>d</sub>) Supposons enfin que  $\tau\text{-}\overline{\lim}(P(S_n)) \subset P(S)$ . Pour montrer que ceci entraîne que  $\underline{\lim}(S_n) \supset S$ , on raisonne comme en 1<sub>d</sub>, en utilisant le théorème d'Urisohn.

#### 5.4 - FONCTIONS DE $L^q$ , NULLES SUR UN SOUS-ENSEMBLE

Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^p$ ,  $L^q(\Omega)$  l'espace des (classes de) fonctions numériques de puissance  $q$ -ème intégrable dans  $\Omega$ , muni de la norme habituelle qui en fait un espace de Banach.

Si  $S$  est un sous-ensemble de  $\Omega$ , mesurable, on note  $O(S)$  le sous-espace vectoriel de  $L^q(\Omega)$ , formé des fonctions nulles sur  $S$  presque partout et  $P(S)$  le cône des fonctions positives sur  $S$ .

Le sous-espace vectoriel de  $L^{q'}(\Omega)$  ( $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$ ) orthogonal à  $O(S)$  est  $O(S')$  si  $S' = \Omega - S$ .

$P^\circ(S)$ , le cône polaire de  $P(S)$  est constitué des éléments de  $L^{q'}$  négatifs et à support dans  $S$ .

Si  $S$  et  $T$  sont deux sous-ensembles mesurables de  $\Omega$ , on pose  $\rho(S, T) = \text{mes}(S \Delta T)$  où  $S \Delta T = S \cup T - S \cap T$ , ce qui permet de munir l'ensemble de ces parties de  $\Omega$  d'une structure d'espace métrique (complet) (voir par exemple Dunford et Schwartz [★] p. 158).

Si  $\rho(S, T) = 0$  alors  $O(S) = O(T)$  etc...

PROPOSITION

Soit  $(S_n)$  une suite de parties mesurables de  $\Omega$ ,  $S$  un ensemble mesurable dans  $\Omega$ . On a les équivalences

- 1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(S_n, S) = 0$
- 2)  $\tau.\sigma \lim O(S_n) = O(S)$
- 3)  $\tau.\sigma \lim O(S'_n) = O(S')$
- 4)  $\tau.\sigma \lim P(S_n) = P(S)$
- 5)  $\tau.\sigma \lim P^\circ(S_n) = P^\circ(S)$ .

Démonstration

Équivalence entre 1, 2 et 3. En vertu de la prop. 3.4, 2 et 3 sont équivalentes chacune à  $\tau\text{-}\underline{\lim} O(S_n) \supset O(S)$  et  $\tau\text{-}\underline{\lim} O(S'_n) \supset O(S')$  dans  $L^q(\Omega)$  et  $L^{q'}(\Omega)$  respectivement.

Comme  $S \rightarrow S'$  est continue pour la métrique considérée sur l'ensemble des parties mesurables, les équivalences entre 1, 2 et 3 repose sur le lemme suivant :

LEMME

La suite  $(S_n)$  possède la propriété que  $\tau\text{-}\underline{\lim} O(S_n) \supset O(S)$  si et seulement si  $\text{mes}(S_n \cap S')$  tend vers 0 quand  $n$  augmente indéfiniment.

Démonstration

Supposons d'abord que  $\tau\text{-}\underline{\lim} O(S_n) \supset O(S)$ . Soit  $f \in L^q$  égale à 0 sur  $S$  et à 1 ailleurs. Il existe  $f_n \in O(S_n)$ , qui converge fortement vers  $f$ .

De l'inégalité

$$\int_{\Omega} |f_n - f|^p \geq \int_{S_n \cap T} |f_n - f|^p = \text{mes}(S_n \cap S')$$

suit que :

$$\text{mes}(S_n \cap S') \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Réciproquement, supposons que la mesure de  $S_n \cap S'$  tend vers 0. Si  $S'_n$  est le complémentaire de  $S_n$  dans  $\Omega$ , soit  $(g_n)$  une suite de fonctions de  $L^{q'}$  nulles sur  $S'_n$  et faiblement convergente vers  $g \in L^{q'}$ . Pour  $h \in O(S)$  on a :

$$\int_{\Omega} g_n h \rightarrow \int g h$$

Mais de l'inégalité

$$|\int_{\Omega} g_n h| \leq \frac{\text{mes}(S_n \cap T)}{\text{mes}(\Omega)} (\int |h|^q)^{1/q} (\int |g_n|^{q'})^{1/q'}$$

suit que  $\int_{\Omega} gh = 0$  pour tout  $h \in O(S)$ . Autrement dit que  $g \in O(S')$ , donc que  $\sigma\text{-}\overline{\lim} O(S'_n) \subset O(S')$ , donc (prop. 3.4) que  $\tau\text{-}\underline{\lim} O(S_n) \supset O(S)$  ; ce qui achève la démonstration du lemme.

En conséquence pour que  $\tau.\sigma \lim O(S'_n) = O(S)$  il faut et il suffit que les deux quantités  $\text{mes}(S_n \cap S')$  et  $\text{mes}(S'_n \cap S)$  tendent vers 0, ce qui n'est autre que la propriété 1.

Equivalence entre 1, 4 et 5.

On vérifie que  $\tau.\underline{\lim} P(S_n) \supset P(S)$  si et seulement si  $\text{mes}(S_n \cap S')$  tend vers 0 quand  $n$  tend vers l'infini. En effet, si  $f$  est la fonction qui vaut -1 sur  $S'$  et 0 sur  $S$ , alors dire que  $d(f, P(S_n)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  équivaut à  $\text{mes}(S_n \cap S') \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ .

Réciproquement, soit  $g_n \in P^\circ(S_n)$ , et qui converge faiblement vers  $g$  dans  $L^{q'}$ . Si  $h \in P(S)$  on a :  $\int_{\Omega} g_n h = \int_{S_n \cap T} g_n h + \int_{S_n \cap S} g_n h$ . Le premier terme du second membre tend vers 0 à cause de l'hypothèse sur les  $S_n$  et parce que  $(g_n)$  est bornée. Le second terme est négatif ou nul. D'où suit que  $\int gh \leq 0$ , pour tout  $h \in P(S)$  ; ce qui donne le résultat.

On procéderait de même pour démontrer l'équivalence de  $\tau\text{-}\lim P^\circ(S_n) \supset P^\circ(S)$  avec  $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{mes}(S_n' \cap S) = 0$ .

### 5.5 - FONCTIONS DE $H^m(\Omega)$ NULLES SUR UNE PARTIE DE $\Omega$ (Mosco (1968) )

Il serait utile d'obtenir un résultat du type précédent pour les espaces de Sobolev de distributions sur un ouvert  $\Omega$  borné dans  $R^p$ .

Soit

$$H^m(\Omega) = \{u \in D'(\Omega), \quad D^i u \in L^2(\Omega), \quad 0 \leq |i| \leq m\}$$

muni de la norme habituelle ;  $H_0^m(\Omega)$  désigne la fermeture de  $D(\Omega)$  dans  $H^m(\Omega)$  ;  $H_0^m(\Omega)$  est mis en dualité avec  $\bar{H}^m(\Omega) = \{T \in D'(\Omega), T = \sum D^i f_i, f_i \in L^2(\Omega), |i| \leq m\}$  par la forme bilinéaire  $\langle u, T \rangle = \sum_{|i| \leq m} \int_{\Omega} D^i u \cdot f_i$ .

On a les inclusions

$$H_0^m(\Omega) \subset \dots \subset H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$$

$$L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega) \dots \subset H^{-m}(\Omega)$$

On note  $O_\infty(E)$ , pour  $E$  compact inclus dans  $\Omega$  le sous-espace vectoriel de  $D(\Omega)$  constitué des fonctions nulles ainsi que toutes leurs dérivées dans  $E$ .

$O_m(E)$  désigne l'adhérence de  $O_\infty(E)$  dans  $H_0^m(\Omega)$ . On vérifie que le sous-espace orthogonal de  $O_m(E)$  est formé des distributions de  $H^{-m}$  dont le support est dans  $E$ , ensemble qui est noté  $S_m(E)$ .

On dit que E est m-polaire (Lions-Hörmander (1956), si de façons équivalentes

$$S_m(E) = \{0\} \quad \text{ou} \quad O_m(E) = H_0^m(\Omega).$$

PROPOSITION 1

Soit  $\gamma_m(E) = \text{Inf}(\|u\|_m ; u \in H_0^m(\Omega), u \equiv 1 \text{ sur } E)$

alors E est un m-polaire si et seulement si  $\gamma_m(E) = 0$ .

Démonstration

par deux ouverts  
Soit  $(\Omega_1, \Omega_2)$  un recouvrement de  $\Omega$ , tel que E soit inclus dans  $\Omega_1$  et que  $\Omega_2$  soit le complémentaire de E dans  $\Omega$ . Soit  $(\alpha_1, \alpha_2)$  une partition de l'unité dans  $D(\Omega)$ , subordonnée à  $(\Omega_1, \Omega_2)$ . Si  $\varphi \in D(\Omega)$  on a  $\varphi = \alpha_1 \varphi + \alpha_2 \varphi$  et donc

$$d(\varphi, O_m(E)) \leq \|\alpha_1 \varphi\|_m \leq k(\varphi) \|\alpha_1\|.$$

Or la fonction  $\alpha_1$  est identiquement égale à 1 sur E. Donc si  $\gamma_m(E) = 0$ , alors  $O_m(E) = H_0^m(\Omega)$  et E est m-polaire. Réciproquement si E est m-polaire, toute fonction  $\varphi \equiv 1$  sur E est à une distance nulle de  $O_m(E)$ , c'est-à-dire que pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe une fonction identique à 1 sur E dont la norme est inférieure à  $\varepsilon$ , ceci signifie que  $\gamma_m(E) = 0$ .

PROPOSITION 2

$O_m(E) = O_m(E')$  ou E' est le complémentaire du plus grand ouvert  $\theta$  tel que

$$\gamma_m(\theta \cap E) = 0.$$

Démonstration

Le support de toute distribution  $T \in H^{-m}$  telle que  $\text{supp} T \subset E$  est en fait inclus dans E'. En effet la restriction de T à  $\theta$  a son support contenu dans  $\theta \cap E$ , qui est un ensemble polaire ; elle est donc nulle dans  $\theta$ , donc  $S_m(E) = S_m(E')$ . D'où le résultat.

PROPOSITION 3

Soit  $(E_n)$  une suite de parties compactes incluses dans  $\Omega$  et  $E$  un compact dans  $\Omega$ , alors pour que  $\tau\text{-}\lim O_m(E_n) \supset O_m(E)$  il faut et il suffit que  $\gamma_m(E_n \cap K)$  tende vers 0 quand  $n$  augmente indéfiniment et ce pour tout compact  $K$  disjoint de  $E$ .

Démonstration

Condition suffisante

Soit  $\varphi \in D(\Omega)$ , dont le support  $K$  est disjoint de  $E$ . Il existe par hypothèse une suite  $(\alpha_n)$  de fonctions de  $D(\Omega)$ , identiques à 1 sur  $E_n \cap K$ , qui converge vers 0. La fonction  $\varphi_n = \varphi - \alpha_n \varphi$  est identique à 0 sur  $K \cap E_n$ ; son support étant dans  $K$  elle s'annule identiquement en dehors de  $K$ ; donc  $\varphi_n \in O(E_n)$ . D'autre part,  $\varphi - \varphi_n = \alpha_n \varphi$  tend vers 0 fortement quand  $n$  tend vers l'infini, donc  $\varphi \in \tau\text{-}\lim O(E_n)$ . Comme l'ensemble des fonctions à support dans le complémentaire de  $E$  est dense dans  $O(E)$  pour la norme de  $H_0^m(\Omega)$ , ceci prouve que  $\tau\text{-}\lim O(E_n) \supset O(E)$ .

Condition nécessaire

Soit  $\alpha \in D(\Omega)$  identique à 1 sur un compact  $K$  disjoint de  $E$  et identiquement nulle sur  $E$ . (On sait qu'une telle fonction existe). Elle est limite forte, par hypothèse d'une suite  $\alpha_n$  de fonctions de  $O_m(E_n)$ ; les fonctions  $\alpha - \alpha_n$  sont identiques à 1 sur  $K \cap E_n$ ; comme  $\gamma_m(K \cap E_n)$  est majorée par  $\|\alpha - \alpha_n\|$  qui tend vers 0, ceci achève la démonstration.

Remarque

Nous n'avons pas été capable de trouver une condition nécessaire et suffisante sur la suite  $(E_n)$  pour que, de façons équivalentes,  $\tau\text{-}\lim S_m(E_n) \supset S_m(E)$  ou  $\sigma\text{-}\lim O_m(E_n) \subset O_m(E)$ .

Evidemment, si  $E_n \supset E$  pour tout  $n$ , il est clair que  $\sigma\text{-}\lim O_m(E_n) \subset O_m(E)$ .

On obtient un résultat analogue dans le cas où  $m = 1$  pour des suites de fonctions positives sur des sous-ensembles compacts de  $\Omega$ .

Soit  $E$  une partie fermée de  $\Omega$ , on dit que  $u \in H_0^1(\Omega)$  est positive sur  $E$ , s'il existe une suite  $(\varphi_n)$  de fonctions de  $D(\Omega)$ , positives sur  $E$  et qui approchent  $u$  en norme de  $H_0^1(\Omega)$ , arbitrairement près.

L'ensemble des fonctions de  $H_0^1(\Omega)$ , positives sur  $E$  se note  $P(E)$ .

PROPOSITION 4

Soit  $(E_n)$  une suite de parties fermées incluses dans  $\Omega$ , et  $E$  une partie fermée dans  $\Omega$ . Alors une condition nécessaire et suffisante pour que  $\tau\text{-}\lim P(E_n) \supset P(E)$  est que, pour tout compact  $K$ ,  $K \subset \Omega$ , disjoint de  $E$  on ait  $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_1(E_n \cap K) = 0$ .

Démonstration

Supposons que  $\tau\text{-}\lim P(E_n) \supset P(E)$ . Soit  $K$  un compact disjoint de  $E$  et soit  $\alpha \in D(\Omega)$  telle que  $\alpha$  soit identique à  $-1$  sur  $K$  et à  $0$  sur  $E$ . (Une telle fonction existe). Par hypothèse, il existe pour tout  $n$ ,  $\alpha_n \in P(E_n)$ , tels que  $(\alpha_n)$  converge fortement vers  $\alpha$ . La fonction  $\alpha_n - \alpha$  est  $\geq 1$  sur  $E_n \cap K$ . Ceci entraîne que  $\gamma_1(E_n \cap K)$  tend vers zéro quand  $n$  augmente indéfiniment moyennant la remarque suivante :

$$\gamma_1(A) = \inf_{\left\{ \begin{array}{l} \alpha \in D(\Omega) \\ \alpha = 1 \text{ sur } A \end{array} \right.} \|\alpha\| = \inf_{\left\{ \begin{array}{l} \alpha \in D(\Omega) \\ \alpha \geq 1 \text{ sur } A \end{array} \right.} \|\alpha\|$$

si l'on a

$$\|\alpha\| = \left( \sum_{|i|=1} \int |D^i \alpha|^2 \right)^{1/2}$$

Réciproquement, soit  $\varphi \in D(\Omega)$  positive sur  $E$  et telle que

(1)  $K = \text{adh} \{s \in \Omega ; \varphi(s) < 0\}$  soit disjoint de  $E$ . L'hypothèse que  $\gamma_1(E_n \cap K) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ , entraîne qu'il existe  $\alpha_n \in D(\Omega)$ , pour tout  $n$ , vérifiant  $\alpha_n \geq 1$  sur  $E_n \cap K$  et telle que  $\|\alpha_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ .

Les fonctions  $\varphi_n = \sup(\varphi, \varphi - \alpha_n)$ , qui appartiennent à  $H_0^1(\Omega)$ , sont positives sur  $E_n$ . D'après la définition de  $\alpha_n$ ,  $(\varphi_n)$  converge fortement vers  $\varphi$ . La démonstration s'achève en remarquant que les fonctions  $\varphi \in D(\Omega)$  telles que (1) forment un ensemble dense dans  $P(E)$ .

## 6 - FONCTIONNELLES LIMITES ASSOCIEES A UNE SUITE DE FONCTIONNELLES CONVEXES

### 6.1 - LIMITE INFERIEURE

Si  $T$  est une topologie sur  $E$ , on note encore  $T$  la topologie produit sur  $E \times \mathbb{R}$  et en particulier  $T\text{-}\underline{\lim}(Q_n)$  la limite inférieure, pour cette topologie produit, d'une suite  $(Q_n)$  de parties de  $E \times \mathbb{R}$ .

#### DEFINITION

Soit  $(f_n)$  une suite d'éléments de  $\overline{\mathbb{R}}^E$  et  $(F_n)$  la suite des épigraphes correspondants. On appelle  $T$ -limite inférieure de la suite  $(f_n)$  l'élément de  $\overline{\mathbb{R}}^E$  noté  $T\text{-}\underline{\lim}(f_n)$  dont l'épigraphe est l'ensemble  $T\text{-}\underline{\lim}(F_n)$ .

#### Remarque 1

Cette définition ne se justifie que parce que l'ensemble  $T\text{-}\underline{\lim}(F_n)$  est bien l'épigraphe d'un élément de  $\overline{\mathbb{R}}^E$  (i.e.  $T\text{-}\underline{\lim}(F_n)$  n'est coupé par toute "verticale" dans  $E \times \mathbb{R}$  que selon des ensembles de la forme  $\emptyset, \mathbb{R}$  ou  $[\alpha, +[$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ ).

#### Remarque 2

En procédant comme dans la prop. 2.2. on montre immédiatement que  $T\text{-}\underline{\lim}(f_n)$  est une fonctionnelle s.c.i pour la topologie  $T$ . Si les fonctionnelles  $f_n$  appartiennent à  $\text{Conv}(E)$ , la fonctionnelle limite est aussi convexe. Néanmoins, dans le cas d'un système dual  $(E, E')$  la propriété pour les  $f_n$ , d'appartenir à  $\Gamma_o(E)$ , n'entraîne pas que  $T\text{-}\underline{\lim}(f_n) \in \Gamma_o(E)$  (même si  $T$  est une topologie  $(E, E')$ ).

### 6.2 - PROPOSITION

Soit  $(f_n)$  une suite d'éléments, de  $\bar{R}^E$ ,  $f$  un élément de  $\bar{R}^E$ . Alors  $f = T\text{-}\underline{\lim}(f_n)$  si et seulement si pour tout  $x \in E$ , on a :

$$\lim_{U \in \mathcal{V}_T(x)} \limsup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{y \in U} (f_n(y)) = f(x)$$

#### Démonstration

Notons  $F$  l'épigraphe de  $f$ . Alors  $f = T\text{-}\underline{\lim}(f_n)$  si et seulement si pour tout  $(x, \alpha) \in F$ , pour tout  $U \in \mathcal{V}_T(x)$  et tout  $\varepsilon > 0$ , on a pour  $n$  assez grand (cf. Définition 2.1) :

$$(U \times |\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon|) \cap F_n \neq \emptyset.$$

Mais ceci équivaut à

$$\inf_{y \in U} f_n(y) \leq \alpha + \varepsilon$$

autrement dit à

$$\lim_{U \in \mathcal{V}_T(x)} \limsup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{y \in U} (f_n(y)) \leq \alpha,$$

D'où le résultat.

### 6.3 - LIMITE SUPERIEURE

Supposons  $E$  muni d'une topologie  $t$ . Faisant la même convention qu'en 6.1 on écrit encore  $t\text{-}\overline{\lim}(Q_n)$  l'ensemble limite supérieure d'une suite  $(Q_n)$  de partie de l'espace produit  $E \times R$ .

DEFINITION

Soit  $(f_n)$  une suite d'éléments de  $\bar{\mathbb{R}}^E$ ,  $(F_n)$  la suite des épigraphes correspondants. On appelle  $t$ -limite supérieure de la suite  $(f_n)$  -notée  $t\text{-}\overline{\lim}(f_n)$ - le plus grand élément de  $\bar{\mathbb{R}}^E$  dont l'épigraphe contienne l'ensemble  $t\text{-}\overline{\lim}(F_n)$ .

Remarque

On vérifie que la fonctionnelle  $t\text{-}\overline{\lim}(f_n)$  est telle que son épigraphe contienne  $t\text{-}\overline{\lim}(F_n)$ , et que son épigraphe strict soit contenu dans  $t\text{-}\overline{\lim}(F_n)$ . La fonctionnelle  $t\text{-}\overline{\lim}(f_n)$  n'est pas s.c.i en général (ni convexe, lorsque les  $f_n$  sont convexes).

6.4 - On reprend les notations de 2.5.

PROPOSITION

Soit  $(f_n)$  une suite d'éléments de  $\bar{\mathbb{R}}^E$ , et  $f \in \bar{\mathbb{R}}^E$ . Alors  $f = t\text{-}\overline{\lim}(f_n)$  si et seulement si pour tout  $x \in E$ , on a

$$\inf_{K \in \mathcal{K}_t} \lim_{U \in V_t(x)} \liminf_{n \in \mathbb{N}} \inf_{y \in U \cap K} (f_n(y)) = f(x)$$

Démonstration

On a  $f = t\text{-}\overline{\lim}(f_n)$  si et seulement si pour tout  $(x, \alpha)$  avec  $f(x) \leq \alpha$ , il existe  $K \in \mathcal{K}_t$  tel que pour tout  $U \in V_t(x)$ , tout  $\varepsilon > 0$ , tout  $n_0 \in \mathbb{N}$ , il existe  $n \geq n_0$  vérifiant :

$$((U \cap K) \times [\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon]) \cap F_n \neq \emptyset$$

c'est-à-dire, si pour tout  $(x, \alpha)$ ,  $f(x) \leq \alpha$ , il existe  $K$  tel que

$$\lim_{U \in V_t(x)} \liminf_{n \in \mathbb{N}} \inf_{y \in U \cap K} f_n(y) \leq \alpha$$

D'où le résultat, en prenant la borne inférieure sur  $\mathcal{K}_t$ .

### 6.5 - T-t-limite D'UNE SUITE DE FONCTIONNELLES

On adopte la même définition qu'en 2.10.

#### DEFINITION

Soient  $T$  et  $t$  deux topologies sur  $E$  ; on dit qu'une suite  $(f_n)$  d'éléments de  $\bar{\mathbb{R}}^E$  est  $T$ - $t$  convergente vers  $f \in \bar{\mathbb{R}}^E$ , ce qu'on écrit  $f = T$ - $t$ - $\lim(f_n)$  si on a  $T$ - $t$ - $\lim(F_n) = F$  dans  $E \times \mathbb{R}$  pour la suite des épigraphes.

#### Remarque

Une suite  $T$ - $t$  convergente peut avoir plusieurs limites ; l'écriture  $f = T$ - $t$ - $\lim(f_n)$  doit se comprendre  $f \in T$ - $t$ - $\lim(f_n)$ .

## 7 - EFFET DE LA POLARITE

Soit  $(E, E')$  un système dual ; on considère dans ce paragraphe des suites d'éléments de  $\Gamma_0(E)$ , et on exprime avec les notions de fonctionnelles limites inférieure et supérieure les propriétés des suites convergentes pour les topologies introduites au chapitre 2.

### 7.1 - PROPOSITION

Soit  $T$  une topologie  $(E, E')$ . Soit  $(f_n)$  une suite d'éléments de  $\Gamma_0(E)$  et  $f \in \Gamma_0(E)$ . Pour que la suite  $(f_n)$  converge vers  $f$  lorsque  $\Gamma_0(E)$  est muni de la topologie  $I(T)$  il faut et il suffit que

$$T\text{-}\underline{\lim}(f_n) \leq f.$$

7.2 - ON suppose  $E$  muni d'une topologie  $t$  qui est  $(E, E')$  et qui vérifie (E.C) (voir 3.3). On note alors  $T'$ , la topologie sur  $E'$  de la convergence compacte,  $T'$  est une topologie  $(E', E)$ .

Ce qui va suivre conduit à distinguer une famille de suites particulières :

### DEFINITION

On dit qu'une suite  $(f_n)$  d'éléments de  $\Gamma_0(E)$  est t-propre s'il existe un compact  $K$  dans  $E$  pour la topologie  $t$  et un réel  $\alpha$  tel que  $\inf_{x \in K} f_n(x) \leq \alpha$  dès que  $n$  est assez grand.

### Remarque

La suite  $(f_n)$  est  $t$ -propre si et seulement si il existe un compact dans  $E \times \mathbb{R}$  coupant tous les épigraphes  $F_n$  à partir d'un certain rang.

Cette définition nous permettra d'établir une liaison entre la notion de  $t$ -limite supérieure et la notion de convergence dans l'espace  $\Gamma_o(E)$  muni de la topologie  $S(T')$ . Nous verrons qu'une suite propre  $(f_n)$  de  $\Gamma_o(E)$  converge (au sens de  $S(T')$ ) vers tout  $f \in \Gamma_o(E)$  qui vérifie l'inégalité

$$f \leq t\text{-}\overline{\lim}(f_n)$$

Cette propriété sera une conséquence de la proposition suivante :

PROPOSITION

Toute suite  $t$ -propre  $(f_n)$  d'éléments de  $\Gamma_o(E)$  vérifie :

$$(t\text{-}\overline{\lim}(f_n))^* \geq T'\text{-}\underline{\lim}(f_n^*).$$

Démonstration de la proposition

1) LEMME

L'inégalité à démontrer est déjà vraie si la suite  $(f_n)$  vérifie la propriété :

$$(1) \quad f_n(0) \leq 0.$$

Démonstration du lemme

Il est facile de voir qu'il suffit de vérifier que :

$$(2) \quad (t\text{-}\overline{\lim}(f_n))^*(0) \geq T'\text{-}\underline{\lim}(f_n^*)(0).$$

Le résultat en  $x'_0 \geq E'$ , s'obtient en faisant une translation dans  $E'$ ,

c'est-à-dire en ajoutant à  $f_n$  dans  $E$  la fonction affine de pente  $x'_0$ .

Posons donc  $T'\text{-}\underline{\lim} f_n^* = f'$  et supposons que  $f'(0) > -\infty$  (sinon l'inégalité est trivialement vérifiée).

Soit  $a \in \mathbb{R}$ , avec  $a < f'(0)$ . Par définition de  $a$ , il existe  $U' \in \mathcal{V}_{T'}(0)$ , convexe et équilibré,  $\varepsilon > 0$ , tels que :

$$a + \varepsilon \leq \inf_{y' \in U'} f_{n'}^*(y')$$

pour une certaine sous-suite  $(n')$  de  $(n)$ .

En vertu du théorème de Hahn-Banach, il existe alors  $(y_{n'})$  une suite de points de  $E$ , et  $(r_{n'})$  une suite réelle, telles que :

$$(3) \quad a + \varepsilon \leq \inf_{y' \in U'} \langle y_{n'}, y' \rangle - r_{n'}$$

$$(4) \quad \langle y_{n'}, x' \rangle - r_{n'} \leq f_{n'}^*(x') \quad , \quad \forall x' \in E'.$$

Deux cas se présentent :

a) il existe  $(y_{n''})$ , extraite de la précédente, vérifiant :

$$\langle y_{n''}, y' \rangle \leq M \quad , \quad \forall y' \in U' \quad , \quad \forall n'' \in \mathbb{N}$$

Les éléments de  $(y_{n''})$  sont donc tous dans  $\frac{1}{M} U'^{\circ}$  qui est un compact pour la topologie  $t$  (définition de  $T'$ ).

Il existe donc  $y \in E$ , une valeur d'adhérence de  $(y_{n''})$ , telle que :

$$[t\text{-}\overline{\lim}(f_n)](y) \leq \liminf(f_{n''}(y_{n''})).$$

Mais de (4) on déduit que  $f_{n''}(y_{n''}) \leq r_{n''}$  et faisant  $y' = 0$  dans (3) on obtient :

$$f_{n''}(y_{n''}) \leq -(a + \varepsilon)$$

ce qui conduit à :

$$[\overline{t\text{-}\lim}(f_n)](y) \leq -(a+\varepsilon)$$

donc (définition de la polarité) à :

$$[\overline{t\text{-}\lim}(f_n)]^*(0) \geq a+\varepsilon.$$

Ceci démontre l'inégalité,  $\varepsilon$  étant arbitrairement petit et  $a$  tout réel inférieur à  $f'(0)$ .

b) On a

$$(5) \quad \lim(\text{Inf}_{y' \in U'} \langle y_n, y' \rangle) = -\infty.$$

La suite  $(r_n)$  admet donc  $-\infty$  pour limite.

Pour tout  $M > 0$ , définissons  $\lambda_n$  par :

$$\lambda_n r_n = -M$$

Ces nombres sont positifs à partir d'un certain rang et tendent vers 0.

Donc, posant  $x_n = \lambda_n y_n$ , (3) devient :

$$\text{Inf}_{y' \in U'} \langle x_n, y' \rangle \geq -M + \lambda_n (a+\varepsilon)$$

ce qui prouve que  $(x_n)$  appartient à un ensemble compact de  $E$  pour la topologie  $t$ .

L'hypothèse (1) signifie en particulier, que toutes les fonctionnelles  $f_n^*$  sont positives.

Multipliant (4) par  $\lambda_n$ , il vient dès que les réels  $\lambda_n$  sont inférieurs à 1, ce qui a lieu à partir d'un certain rang ( $\lambda_n \rightarrow 0$ ) :

$$\langle x_n, x \rangle - \lambda_n r_n \leq \lambda_n f_n^*(x') \leq f_n^*(x') \quad , \quad \forall x' \in E'$$

d'où l'on déduit, parce que  $f_n \in \Gamma_o(E)$  :

$$f_{n''}(x_{n'}) \leq \lambda_{n'} r_{n'} = -M ;$$

Maintenant si  $x$  est une valeur d'adhérence de la suite  $(x_{n'})$ , on en déduit que :

$$[t\text{-}\overline{\lim} f_n](x) \leq -M$$

donc que :

$$[t\text{-}\overline{\lim}(f_n)]^*(0) \geq M.$$

Ce qui prouve l'inégalité,  $M$  étant arbitrairement grand.  
c.q.f.d.

Montrons que, grâce à l'hypothèse que  $(f_n)$  est  $t$ -propre, on peut se ramener à l'hypothèse du lemme.

- 2) Le fait que  $(f_n)$  soit  $t$ -propre signifie qu'il existe un compact  $K$  (qu'on peut toujours supposer convexe et équilibré puisque  $t$  vérifie (E.C)), tel que

$$\lim_n \sup_{x \in K} (\text{Inf}_{x \in K} f_n(x)) \leq \alpha.$$

Soit  $k$  l'indicatrice du compact  $K$ , on a :

$$[(f_n \nabla k) - \alpha](0) \leq 0$$

et on en déduit en vertu du lemme précédent que :

$$[t\text{-}\overline{\lim}((f_n \nabla k) - \alpha)]^* \geq T'\text{-}\underline{\lim}((f_n \nabla k) - \alpha)^*$$

donc que

$$(6) \quad (t\text{-}\overline{\lim}(f_n \nabla k))^* \geq T'\text{-}\underline{\lim}((f_n \nabla k)^*).$$

Le résultat découle alors de la propriété suivante :

3) LEMME

Avec les notations précédentes on a :

$$(7) \quad \overline{\lim} (f_n \nabla k) \geq \overline{\lim} (f_n) \nabla k.$$

$$(8) \quad T'\text{-}\underline{\lim} ((f_n \nabla k)^*) \geq T'\text{-}\underline{\lim} (f_n^*) + k^* \quad \text{et } \varepsilon > 0$$

Démonstration du lemme

Pour tout  $x \in E$ , il existe un compact  $L$  (contenant  $x$ ) et  $\varepsilon > 0$  tels que :

$$\liminf_{\substack{y \rightarrow x, n \rightarrow \infty \\ y \in L}} (f_n \nabla k)(y) \leq (f_n \nabla k)(x) + \varepsilon$$

Soit  $F$  la trace du filtre des voisinages de  $x$  sur  $L$  ; soit  $M \in F$  ; on pose  $Z(M) = \{z \in K ; \exists y \in M, f_n(y-z) = [f_n \nabla k](y)\}$ .

L'ensemble  $Z(M)$  n'est pas vide car l'inf-convolution de  $f_n$  et  $k$  est exacte (et même  $f_n \nabla k \in \Gamma_0(E)$ ), parce que  $k$  est inf-compacte pour toutes les pentes.

On vérifie que  $Z(M)$  est la base d'un filtre sur  $K$ , et donc que  $(M \times Z(M))_{M \in F}$  est la base d'un filtre  $Z$  sur  $L \times K$ .

On a :

$$\inf_{\substack{y \in M \\ z \in Z(M)}} f_n(y-z) = \inf_{y \in M} [f_n \nabla k](y).$$

Par suite :

$$\liminf_F (f_n \nabla k)(y) = \liminf_Z f_n(y-z)$$

Comme l'ensemble  $L \times K$  est compact, en revenant à la définition de la  $t$ -limite supérieure, on montre qu'il existe  $z_0 \in K$  tel que :

$$\liminf_F (f_n \nabla k)(y) \geq t\text{-}\overline{\lim} f_n(x-z_0)$$

donc tel que :

$$\liminf_F (f_n \nabla k)(y) \geq [(t\text{-}\overline{\lim}(f_n)) \nabla k](x),$$

ce qui, en revenant à la définition du premier membre de l'inégalité, donne le résultat.

La deuxième inégalité se vérifie immédiatement après avoir remarqué que  $(f_n \nabla k)^* = f_n^* + k^*$ .

Combinant les inégalités (6), (7) et (8) il vient donc :

$$(t\text{-}\overline{\lim}(f_n))^* + k^* \geq T'\text{-}\underline{\lim}(f_n^*) + k^*$$

(parce que  $k^*$  étant inf-compact pour toutes les pentes on a :  $(t\text{-}\overline{\lim}(f_n))^* + k^* = (t\text{-}\overline{\lim}(f_n) \nabla k)^*$ ). Comme  $k^*$  est partout finie sur  $E'$  il en résulte que :

$$(t\text{-}\overline{\lim}(f_n))^* \geq T'\text{-}\underline{\lim}(f_n^*)$$

ce qu'il fallait démontrer.

#### Remarque

Cette proposition s'est avérée plus longue à démontrer que la proposition analogue pour les indicatrices de convexes contenant l'origine. Ceci tient au fait que non seulement ces suites d'indicatrices étaient propres, mais encore que l'on se trouvait d'emblée avec les hypothèses du lemme 1).

#### COROLLAIRE

Soit  $(f_n)$  une suite  $t$ -propre d'éléments de  $\Gamma_0(E)$ . Alors lorsque  $\Gamma_0(E)$  est muni de la topologie  $S(T')$ , la suite  $(f_n)$  converge dans cet espace vers tout  $f \in \Gamma_0(E)$  qui vérifie

$$f \leq t\text{-}\overline{\lim}(f_n)$$

7.3 - On conserve les notations du 7.2 et on démontre la réciproque de la proposition 7.2.

PROPOSITION

$E$  muni de  $t$  vérifie (E.C). Alors toute suite  $(f_n)$  d'éléments de  $\Gamma_0(E)$  vérifie :

$$(\overline{t\text{-}\lim}(f_n))^* \leq T'\text{-}\underline{\lim}(f_n^*)$$

Démonstration

Nous allons démontrer l'inégalité en un point  $x'_0 \in E'$ .

Soit  $a > [T'\text{-}\underline{\lim}(f_n^*)](x'_0)$ . Pour tout  $x \in E$  et tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un compact  $K$  (qu'on suppose équilibré) pour la topologie  $t$  tel que :

$$\lim_{U \in \mathcal{V}_t(0)} \liminf_{n \in \mathbb{N}} (\text{Inf}_{y \in (x+U) \cap K} f_n(y)) \leq b$$

si  $b > [t\text{-}\overline{\lim}(f_n)](x)$ .

Posons  $U' = \varepsilon K^\circ$  qui est, par définition de  $T'$ , un voisinage de 0 dans  $E'$  pour cette topologie (propriété (E.C)).

Soit  $U$  le voisinage de 0 dans  $E$  pour  $t$  qui est défini par :

$$U = \{x \in E ; |\langle x, x'_0 \rangle| \leq \varepsilon\}$$

Tous  $y \in E$  et  $y' \in E'$  tels que  $y-x \in U \cap K$ ,  $y'-x'_0 \in U'$  vérifient

$$|\langle x, x'_0 \rangle - \langle y, y'_0 \rangle| \leq 2\varepsilon$$

Pour  $U'$  ainsi fixé il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \in \mathbb{N}$   $n \geq n_0$ , on puisse trouver  $y'_n \in x'_0 + U'$  vérifiant  $f_n(y'_n) \leq a$ .

De même pour  $U = \varepsilon K^\circ$  est pour tout  $n_0 \in \mathbb{N}$  on a :

$$\exists n \geq n_0 ; \exists y_n \in (x+U) \cap K , f_n(y_n) \leq b$$

Ainsi il existe un indice  $n$  (même une infinité tels que)

$$a \geq f_n^*(y'_n) \geq \langle y_n, y'_n \rangle - f_n(y_n) \geq \langle y_n, y'_n \rangle - b.$$

Comme d'après ce qui précède,  $\langle y_n, y'_n \rangle$  est voisin de  $\langle x, x'_0 \rangle$  il vient

$$a \geq \langle x, x'_0 \rangle - b - 2\varepsilon \geq \langle x, x'_0 \rangle - [t\text{-}\overline{\lim}(f_n)](x).$$

Cette inégalité est vraie pour tout  $x \in E$ ,  $\varepsilon > 0$ , donc

$$a \geq [t\text{-}\overline{\lim}(f_n)]^*(x'_0)$$

d'où le résultat.

#### COROLLAIRE

Soit  $(E, E')$  un système dual. Soit  $t$  une topologie  $(E, E')$  vérifiant (E.C) [resp.  $t'$ ,  $(E', E)$ ] et  $T'$  la topologie sur  $E'$  de la convergence  $t$ -compacte [resp.  $T$ ,  $E$ ,  $t'$ -compacte].

Soit  $(f_n)$  une suite d'éléments de  $\Gamma_0(E)$ . On suppose que  $(f_n)$  est  $t$ -propre et que  $(f_n^*)$  est  $t'$ -propre. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

- a)  $T\text{-}t\text{-}\lim(f_n) = f$
- b)  $T'\text{-}t'\text{-}\lim(f_n^*) = f^*$
- c)  $(f_n)$  converge vers  $f$  lorsque  $\Gamma_0(E)$  est muni de  $[T, T'^*]$
- d)  $(f_n^*)$  converge vers  $f^*$  lorsque  $\Gamma_0(E')$  est muni de  $[T', T^*]$ .

#### Démonstration

Elle résulte des propositions 7.2 et 7.3 si l'on montre que tout  $f$  (resp.  $f^*$ ) vérifiant a) (resp. b)) appartient nécessairement à  $\Gamma_0(E)$  [resp.  $\Gamma_0(E')$ ].

Pour cela on vérifie que comme  $(f_n)$  est  $t$ -propre  $T'\text{-}\overline{\lim}(f_n^*)$  ne prend en aucun point la valeur  $-\infty$  ; il est clair que  $t'\text{-}\overline{\lim}(f_n^*)$  n'est pas identique à  $+\infty$ , puisque  $f_n^*$  est  $t'$ -propre, d'où il résulte que  $f^* \in \Gamma_0(E')$ . Idem pour  $f$ .

#### 7.4 - CAS DES ESPACES DE FRECHET

Soit  $E$  un espace de Fréchet et  $E'$  son dual. On se place dans les deux cas particuliers déjà considérés au paragraphe 4, c'est-à-dire où les topologies  $T, T', t$  et  $t'$  sont :

$T$	$t$	$T'$	$t'$
$\tau(E, E')$	$\tau(E, E')$	$T_c$	$T_c$ ou $\sigma(E', E)$
$\tau(E, E')$	$\sigma(E, E')$	$\tau(E', E)$	$\sigma(E', E)$

On a alors le résultat :

#### PROPOSITION

*Dans les espaces topologiques  $\Gamma_0(E)$  et  $\Gamma_0(E')$  respectivement munis de  $[T, T'^*]$  et  $[T', T^*]$  les ensembles de suites convergentes coïncident avec les ensembles de suites qui sont propres, qui possèdent une suite polaire propre, et qui sont  $(T, t)$  convergentes et  $(T', t')$  convergentes respectivement.*

*Plus précisément il y a équivalence entre les propositions suivantes pour une suite  $(f_n)$  d'éléments de  $\Gamma_0(E)$ .*

- a)  $T\text{-}t\text{-}\lim(f_n) = f \in \Gamma_0(E)$
- b)  $T\text{-}t\text{-}\lim(f_n) = f \in \Gamma_0(E)$  et  $(f_n)$  est  $t$  propre.

- c)  $T'-t'-\lim(f_n^*) = f^* \in \Gamma_0(E')$  et  $f_n^*$  est  $t'$ -propre
- d)  $(f_n)$  converge vers  $f \in \Gamma_0(E)$  pour la topologie  $[T, T'^*]$
- e)  $(f_n^*)$  converge vers  $f^* \in \Gamma_0(E')$  pour la topologie  $[T', T'^*]$

Démonstration

Montrons d'abord que la propriété a) entraîne déjà que  $(f_n)$  est  $t$ -propre et  $(f_n^*)$ ,  $t'$ -propre.

Pour la suite  $(f_n)$ , cela résulte du fait que  $T-\underline{\lim}(f_n) \leq f \in \Gamma_0(E)$ , et de la remarque 4.1 appliquée aux épigraphes des fonctionnelles  $(f_n)$ .

Reste à prouver que  $(f_n^*)$  est  $t'$ -propre, c'est-à-dire qu'il existe un ensemble  $K' \subset E'$ , convexe équilibré et compact pour la topologie  $t'$  ( $t'$  vérifie (E.C)), et un réel  $\alpha'$  tels que :

$$(1) \quad \limsup_{n \in \mathbb{N}} \left( \inf_{x' \in K'} f_n^*(x') \right) \leq \alpha.$$

Soit  $k'$  l'indicatrice de  $K'$  ;  $k'$  est une fonctionnelle inf-compacte pour toutes les pentes et pour la topologie  $t'$ . En utilisant des arguments de polarité déjà employés plus haut, (1) équivaut à

$$(2) \quad \liminf_{n \in \mathbb{N}} \inf_{x \in E} (f_n(x) + k(x)) \geq -\alpha$$

où  $k$  est le polaire de  $k'$  donc une semi-norme sur  $E$  continue pour la topologie  $T$  (qui est rappelons le, la topologie initiale de l'espace de Fréchet  $E$ ).

Soit  $(k_p)_{p \in \mathbb{N}}$  la suite des semi-normes définissant la topologie  $T$  ; on suppose :  $k_{p+1} \geq k_p$  ( $T$  est métrisable).

Par l'absurde supposons que (2) ne soit pas réalisé : pour tout  $p \in \mathbb{N}$ , il existe  $n_p \in \mathbb{N}$  avec  $n_{p+1} \geq n_p$ , et  $x_p \in E$  tels que

$$(3) \quad f_{n_p}(x_p) \leq -p(1+k_p(x_p))$$

Remarquons d'abord que (4)  $\liminf_{p \in \mathbb{N}} k_p(x_p) > 0$ . En effet, sinon une sous-suite  $k_{p'}(x_{p'})$  tendrait vers 0 et la suite  $x_{p'}$ , correspondante serait telle que  $k_q(x'_p) \leq k_{p'}(x_{p'})$  à partir d'un certain rang, donc convergerait vers 0 pour la topologie T. Ceci entraînerait à cause de (3) que  $[\overline{t\text{-lim}}(f_n)](0) = -\infty$  ce qui est impossible puisque  $\overline{t\text{-lim}}(f_n) \geq f \in \Gamma_0(E)$ .

Comme la suite  $(f_n)$  est t-propre, il existe un ensemble compact, pour la topologie t,  $K \subset E$  et un réel  $\alpha$  tels que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe  $y_n \in K$  tel que

$$f_n(y_n) \leq \alpha \quad ,$$

Posons

$$z_p = (1-\rho_p)y_{n_p} + \rho_p x_p$$

$$\rho_p = \frac{1}{k_p(x_p)\sqrt{p}}$$

A cause de (4), la suite  $(\rho_p)$  converge vers 0. Il est clair aussi que  $k_p(\rho_p x_p)$  tend vers 0 quand p tend vers l'infini, donc -mêmes arguments que plus haut- que  $(\rho_p x_p)$  converge vers 0 pour la topologie T.

En conséquence la suite  $(z_p)$  est toute entière contenue dans un ensemble compact pour la topologie t (T est plus fine que t). D'autre part, comme  $f_{n_p}$  est une fonctionnelle convexe, on a :

$$f_{n_p}(z_p) \leq (1-\rho_p)\alpha + \rho_p f_{n_p}(x_p) \leq \alpha - \sqrt{p} \left( \frac{1+k_p(x_p)}{k_p(x_p)} \right)$$

Par suite :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_{n_p}(z_p) = -\infty.$$

Donc, si  $z$  est une valeur d'adhérence, (il en existe) de  $(z_p)$ , elle est telle que :

$$[t\text{-}\overline{\lim}(f_n)](z) = -\infty.$$

Ce qui est impossible.

En conclusion a) implique b), c), d) et e) en vertu du corollaire 7.3. Réciproquement, b), c), d) ou e) respectivement impliquent a). D'où le résultat.

Remarque

Dans  $E'$  le dual d'un espace de Fréchet, la propriété  $T'\text{-}t'\text{-}\lim(f'_n) = f' \in \Gamma_0(E')$  n'implique pas nécessairement que  $f'_n$  soit  $t'$ -propre.

Soit  $\ell^1$  le dual de  $C_0$ . On choisit pour  $(f'_n)$  la suite des indicatrices des ensembles

$$A_n = \overline{\text{Co}}(B_n)$$

$A_n^{\text{est}}$  l'enveloppe convexe et fermée pour  $\sigma(\ell^1, C_0)$  de l'ensemble  $B_n$  composé des suites  $(\lambda_i) \in \ell^1$  dont tous les termes sont nuls sauf  $n$  d'entre eux qui sont égaux à 1.

On vérifie que la norme de tous les éléments de  $A_n$  vaut exactement  $n$ .

En conséquence, aucun compact pour  $\sigma(\ell^1, C_0)$  ne peut couper tous les ensembles  $A_n$  : cette suite n'est pas  $\sigma(\ell^1, C_0)$  propre.

Soit  $T_c$  la topologie sur  $\ell^1$  de la convergence compacte, elle est aussi, d'après le théorème de Banach-Dieudonné, la topologie de la convergence uniforme sur les suite de  $C_0$  qui converge fortement vers 0.

Montrons que  $T_c\text{-}\underline{\lim}(A_n) \neq \emptyset$  ; plus précisément que 0 lui appartient.

Soit  $(x_i^p)$  une suite d'indice  $p$ , d'éléments de  $C_0$ , qui converge vers 0, elle définit dans  $\ell^1$  le voisinage :

$$V = \{(\lambda_i) \in \ell^1 ; \sum_{i=1}^p \lambda_i \leq 1, \quad \forall p \in \mathbb{N}\}.$$

(Tout voisinage de 0 dans  $\ell^1$  pour  $T_c$  peut être mis sous cette forme, pour une certaine suite  $(x_i^p)$  d'éléments de  $C_0$ ).

Montrons que  $V \cap A_n \neq \emptyset$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

A tout  $n \in \mathbb{N}$ , faisons correspondre l'indice  $p(n) \in \mathbb{N}$ , à partir duquel :

$$\max_i |x_i^p| \leq \frac{1}{n}, \quad \forall p \geq p(n).$$

Il existe d'autre part un rang  $i(n)$  tel que :

$$\max_{i \geq i(n)} |x_i^p| \leq \frac{1}{n} \quad \forall p \leq p(n).$$

Alors toute suite de  $\ell^1$  dont les  $i(n)$  premiers termes sont nuls, et dont tous les autres termes sont nuls sauf  $n$  d'entre eux égaux à 1, appartient à  $A_n \cap V$ . Ceci prouve que  $0 \in T_c\text{-}\underline{\lim}(A_n)$ , donc qu'il existe un convexe fermé non vide  $A$ , tel que :

$$T_c\text{-}\underline{\lim}(A_n) \supset A \supset \sigma\text{-}\overline{\lim}(A_n)$$

ce qui montre que  $(A_n)$  est  $T_c - \sigma$  convergente vers  $A \in \Gamma_0(\ell^1)$  sans être  $\sigma$ -propre.

#### COROLLAIRE

Soit  $E$  un espace de Fréchet réflexif et  $E'$  son dual. Soit  $(f_n)$  une suite d'éléments de  $\Gamma_0(E)$  et  $f \in \Gamma_0(E)$ . Alors les propriétés suivantes sont équivalentes.

a)  $\tau\text{-}\sigma \lim(f_n) = f$

b)  $\tau\text{-}\sigma \lim(f_n^*) = f^*$

c)  $(f_n)$  converge vers  $f$  dans  $\Gamma_o(E)$  muni de  $[\tau(E, E'), \tau(E', E)^*]$

d)  $(f_n^*)$  converge vers  $f^*$  dans  $\Gamma_o(E')$  muni de  $[\tau(E', E), \tau(E, E')^*]$ .

Remarque

Ce corollaire figure dans un travail à paraître qui m'a été communiqué son auteur U. Mosco (1970). La démonstration que nous donnons de la prop. 7.4 figure dans l'article de Mosco sous la forme de son lemme 1.2



CHAPITRE - IV

RESULTATS DE STABILITE POUR LA SOMME ET L'INF-CONVOLUTION

1 - ENONCE DU PROBLEME ET PLAN DU CHAPITRE

Soit  $(E, E')$  un système dual. On considère  $(f_n)$  et  $(g_n)$  deux suites d'éléments de  $\Gamma_0(E)$  telles que pour tout entier  $n$ , la somme  $f_n + g_n$  appartienne à  $\Gamma_0(E)$  et on s'intéressera aux fonctionnelles limites inférieures et supérieures respectives des suites  $(f_n)$ ,  $(g_n)$  et  $(f_n + g_n)$ .

Si  $t$  désigne une topologie  $(E, E')$ , on vérifie aisément que

$$t\text{-}\overline{\lim}(f_n + g_n) \geq t\text{-}\overline{\lim}(f_n) + t\text{-}\overline{\lim}(g_n)$$

ce qui peut s'interpréter comme une semi-continuité supérieure de l'opération d'addition.

En revanche, (si  $T$  désigne une topologie  $(E, E')$ ) l'inégalité de semi-continuité inférieure

$$(1) \quad T\text{-}\underline{\lim}(f_n + g_n) \leq T\text{-}\underline{\lim}(f_n) + T\text{-}\underline{\lim}(g_n)$$

ne peut s'obtenir que moyennant certaines hypothèses sur les suites  $(f_n)$  et  $(g_n)$ .

Une première condition de ce type est donnée au paragraphe 2. Par nature, elle ressemble au critère de Moreau (cf. Chapitre 1) pour que,  $f$  et  $g$  étant dans  $\Gamma_0(E)$ ,  $f^* \vee g^*$  appartienne à  $\Gamma_0(E')$ .

Cependant, cette condition ne suffit pas pour tous les cas pratiques.

Les paragraphes suivants sont donc consacrés à une autre condition suffisante.

Nous avons choisi de l'exposer d'abord, au paragraphe 3, dans son contexte le plus simple :  $T$  est une topologie d'espace normé,  $(f_n)$  et  $(g_n)$  deux suites d'indicatrices de parties convexes et fermées de  $E$ .

Le problème devient : trouver des hypothèses pour que l'intersection des limites inférieures (fortes) de deux suites données soit contenue dans la limite inférieure (forte) de la suite des intersections. Dans ce cadre, la condition suffisante proposée repose sur la notion de "codistance" de deux convexes. La codistance est pour les ensembles convexes l'extension naturelle de la notion de "minimum gap" (Kato [ $\star$ ]), pour les variétés linéaires, elle-même liée à celle de conorme (R. Douady (1965)) ou de (reduced) minimum modulus (Kato [ $\star$ ], Gindler-Taylor (1962)) pour des applications linéaires entre espaces normés.

Au paragraphe 4, nous avons cherché à exprimer la codistance en des termes utilisant la dualité ; en effet, celle-ci intervient naturellement soit lorsqu'on calcule la codistance de deux variétés linéaires, soit lorsqu'on cherche une minoration de la codistance de deux convexes (4.1 et 4.2).

D'où l'introduction d'une codistance duale (4.3), en général distincte de la codistance ; cependant, les deux notions coïncident sur les couples de convexes tels que l'inf-convolution de leurs fonctionnelles d'appui appartienne à  $\Gamma(E')$ .

Le résultat important de ce paragraphe est le suivant : si  $E$  est un espace de Banach alors pour tout couple  $A, B$  de convexes fermés (non disjoints) la codistance et la codistance duale ont la même valeur ; en outre pour que l'inf-convolution de leurs fonctionnelles d'appui soit dans  $\Gamma(E')$  il suffit que leur codistance soit strictement positive.

Ce résultat est à rapprocher de certaines propriétés analogues pour les conormes d'une application linéaire de son application transposée ; l'application étant un homomorphisme si (et seulement si) sa conorme est strictement positive.

A la fin du paragraphe 4, nous montrons sur un exemple simple comment il est possible en utilisant la notion de codistance, de retrouver sur un cas particulier le résultat du paragraphe 2.

Le cas des espaces localement convexes est ensuite examiné rapidement, au paragraphe 5 toujours pour des suites d'indicatrices, et au paragraphe 6 pour des suites de fonctionnelles convexes.

Dans ce dernier paragraphe, la propriété (COD) remplace celle de codistance uniformément minorée. Dualement elle donne la propriété (COD<sup>\*</sup>).

Nous avons attendu ce dernier paragraphe pour donner une interprétation de cette propriété (COD<sup>\*</sup>) (à transcrire en terme de codistance duale pour les paragraphes précédents) : elle donne une condition suffisante pour qu'on ait une inégalité de semi-continuité supérieure pour l'inf-convolution.

$$(2) \quad t'\text{-}\overline{\lim}(f_n^* \nabla g_n^*) \geq t'\text{-}\overline{\lim}(f_n^*) \nabla t'\text{-}\overline{\lim}(g_n^*).$$

Les résultats du chapitre 3 éclairent la notion de dualité qui existe entre ces deux conditions suffisantes pour que respectivement

$$T\text{-}\underline{\lim}(f_n + g_n) \leq T\text{-}\underline{\lim}(f_n) + T\text{-}\underline{\lim}(g_n)$$

$$t'\text{-}\overline{\lim}(f_n^* \nabla g_n^*) \geq t'\text{-}\overline{\lim}(f_n^*) \nabla t'\text{-}\overline{\lim}(g_n^*).$$

Signalons pour terminer une convention particulière à ce chapitre : comme sur  $E$  et  $E'$ , on ne considèrera respectivement qu'une seule topologie à la fois, les notions de limites inférieures et supérieures seront simplement notées lim et lim.

2 - UNE PREMIERE CONDITION SUFFISANTE

Les arguments utilisés dans la démonstration de la propriété suivante sont ceux qui sont classiquement utilisés (Bourbaki [★]) pour étudier les propriétés de continuité d'une fonctionnelle convexe ; ils résultent d'ailleurs immédiatement de la définition de la convexité.

PROPOSITION

Soit  $E$  un e.v.t. Soient  $(f_n)$  et  $(g_n)$  deux suites d'éléments de  $\text{Conv}(E)$ , et  $f$  et  $g$  leurs limites inférieures respectives. Si lorsque  $f+g$  n'est pas identiquement égal à  $+\infty$ , il existe un ensemble ouvert non vide dans  $E$ , contenant un point commun aux domaines effectifs de  $f$  et  $g$  et dans lequel les fonctionnelles  $f_n$  sont, à partir d'un certain rang, uniformément majorée alors

$$\underline{\lim}(f_n + g_n) \leq f + g.$$

Démonstration

L'inégalité est trivialement vérifiée si  $f+g$  est identiquement égal à  $+\infty$ . Supposons donc que ce n'est pas le cas. Quitte à faire une translation, on peut aussi supposer que le point commun à  $\text{dom}(f)$  et  $\text{dom}(g)$  envisagé dans l'énoncé, est l'origine. Soit alors  $V$  le voisinage ouvert qu'on peut supposer équilibré de  $0$  tel que  $f_n \leq a$  dans  $V$  dès que  $n$  est assez grand.

Nous allons d'abord montrer que pour tout  $x \in \overset{\cup}{\text{dom}}(f) \cap \text{dom}(g) (\neq \emptyset, \text{puisque il contient } 0)$ , on a

$$(1) \quad \left[ \underline{\lim}(f_n + g_n) \right](x) \leq [f+g](x).$$

a) Supposons d'abord  $x \in V$  ; l'inégalité est vérifiée en vertu de la propriété de majoration uniforme des  $f_n$  dans  $V$ . En effet, si  $f(x)$  ou  $g(x)$  vaut  $-\infty$ , les deux membres de (1) sont égaux à  $-\infty$ , comme on le vérifie facilement. Supposons donc  $f(x)$  et  $g(x)$  finis et par l'absurde qu'il existe  $\alpha > 0$  tel que

$$\begin{aligned} \sup_{U \in V(0)} \limsup_n \inf_{y \in x+U} [f_n + g_n](y) > \alpha + \sup_{U \in V(0)} \limsup_n \inf_{y \in x+U} (f_n(y)) \\ + \sup_{U \in V(0)} \limsup_n \inf_{y \in x+U} (g_n(y)) \end{aligned}$$

Parce que  $g(x)$  est fini, on en déduit que :

$$\inf_{U \in V(0)} \limsup_n \sup_{y \in x+U} (f_n(y)) > \alpha + \sup_{U \in V(0)} \limsup_n \inf_{y \in x+U} (f_n(y)) ,$$

donc que pour tout  $U \in V(0)$ , pour tout  $n_0 \in \mathbb{N}$ , il existe  $n \geq n_0$ ,  $y_n \in x+U$  et  $x_n \in x+U$  tels que

$$(2) \quad f_n(y_n) > \alpha + f_n(x_n)$$

avec

$$(3) \quad f_n(y_n) \geq f(x)$$

Pour  $\rho > 0$ , soit  $U \in V(0)$  tel que  $x+(\rho+1)(U+U) \subset V$  ( $V$  est ouvert). Posons  $z_n = (\rho+1)y_n - \rho x_n$ , et supposons  $U$  équilibré ; alors

$$z_n \in (\rho+1)(x+U) - \rho x + \rho U \subset x+(\rho+1)(U+U) \subset V.$$

Comme  $f_n \in \text{Conv}(E)$ , on a :

$$f_n(z_n) - f_n(y_n) \geq \rho(f_n(y_n) - f_n(x_n)).$$

donc en vertu de (2) et (3)

$$\alpha \leq \frac{1}{\rho} (f_n(z_n) - f_n(y_n)) \leq \frac{1}{\rho} a - \frac{1}{\rho} f(x).$$

Or  $\rho$  pouvant être choisi arbitrairement grand, ceci contredit le fait que  $\alpha$  est strictement positif.

- b) Supposons  $x \notin V$  ; on se ramène au cas précédent en montrant qu'il existe un voisinage ouvert  $W \in V(0)$  et un réel  $b$  tels que  $f_n \leq b$  dans  $x+W$ , à partir d'un certain rang.

Comme  $x \in \overset{\circ}{\text{dom}} f$ , il existe  $\lambda > 1$  tel que  $y = \frac{1}{\lambda} x \in \overset{\circ}{\text{dom}} f$ , donc un voisinage ouvert  $U \in V(0)$  et un réel  $C$  tels que  $f \leq C$  dans  $y+U$ . Montrons que si  $U$  est choisi équilibré et assez petit, i.e.  $U \subset (\lambda-1)W$  avec  $W+W \subset V$ , alors l'ouvert  $x + \frac{\lambda-1}{\lambda} W$  répond à la question pour les valeurs de  $n$  telles que  $\inf_{z \in y+U} f_n(z) \leq C$ , c'est-à-dire supérieure à un certain  $n_0$ .

En effet, soit  $y_n \in y+U$ ,  $f_n(y_n) \leq C$  et  $x_n = \frac{1}{\lambda} y_n \in \frac{1}{\lambda} (y+U) \subset x + \frac{1}{\lambda} U$ .

Comme les fonctionnelles  $f_n$  sont convexes on a :

$f_n \leq \frac{a+(\lambda-1)C}{\lambda}$  dans l'ouvert  $x_n + \frac{\lambda-1}{\lambda} V$ . Or l'ouvert  $x + \frac{\lambda-1}{\lambda} W$  est contenu dans l'ouvert  $x_n + \frac{\lambda-1}{\lambda} V$  puisque d'après le choix de  $U$  on a :

$$x - x_n + \frac{\lambda-1}{\lambda} W \subset \frac{1}{\lambda} U + \frac{\lambda-1}{\lambda} W \subset \frac{\lambda-1}{\lambda} (W+W) \subset \frac{\lambda-1}{\lambda} V$$

En conséquence, dès que  $n$  est assez grand, les fonctionnelles  $f_n$  sont majorées par  $\frac{a+(\lambda-1)C}{\lambda}$  dans l'ouvert  $x + \frac{\lambda-1}{\lambda} W$ . Ceci prouve donc, à cause de  $a$ , qu'en tout point de  $\overset{\circ}{\text{dom}}(f) \cap \overset{\circ}{\text{dom}}(g)$  l'inégalité (1) est vérifiée.

- c) Il reste à prouver, pour calculer la démonstration que (1) subsiste en tout point  $y \in \overset{\circ}{\text{dom}}(f) \cap \overset{\circ}{\text{dom}}(g)$ ,  $y \notin \overset{\circ}{\text{dom}}(f)$ . Par hypothèse  $0 \in \overset{\circ}{\text{dom}}(f) \cap \overset{\circ}{\text{dom}}(g)$ . Alors tout point du segment ouvert joignant  $y$  à  $0$  est dans  $\overset{\circ}{\text{dom}}(f) \cap \overset{\circ}{\text{dom}}(g)$ . (propriété de la convexité) où l'inégalité est, comme on l'a démontré, vérifiée. Comme  $\lim_{n \rightarrow \infty} (f_n + g_n)$  est s.c.i., l'inégalité se trouve aussi vérifiée au point  $y$  ;

c.q.f.d.

Remarque 1

La proposition précédente peut se formuler aussi de la façon équivalente suivante :

Soit E un e.v.t.,  $(f_n)$  et  $(g_n)$  deux suites d'éléments de  $\text{Conv}(E)$ , f et g leurs limites inférieures respectives. Si lorsque  $f+g$  n'est pas identique à  $+\infty$ , il existe un ensemble ouvert dans E dans lequel, à partir d'un certain rang, les fonctionnelles  $f_n$  sont uniformément majorées et si  $\widehat{\text{dom}}(f) \cap \text{dom } g \neq \emptyset$  alors

$$\underline{\lim}(f_n + g_n) \leq f + g.$$

COROLLAIRE

Soit E un e.v.t. et  $(f_n)$  une suite d'éléments de  $\text{Conv}(E)$  et f sa limite inférieure. S'il existe un ensemble ouvert sur lequel les fonctionnelles sont uniformément majorées (à partir d'un certain rang) alors pour tout  $x \in \widehat{\text{dom}}(f)$  on a :

$$f(x) = \limsup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)$$

Démonstration

On applique la proposition et la remarque précédentes en prenant pour suite  $(g_n)$  celle dont le terme général est l'indicatrice du point x.

Remarque 2

Soit p une semi-norme continue sur l'e.v.t. E. Si la limite inférieure f d'une suite  $(f_n)$  d'éléments de  $\text{Conv}(E)$  n'est pas identiquement égale à  $+\infty$ , la suite  $(p \vee f_n)$  est uniformément majorée sur un certain voisinage de l'origine

En effet, en vertu de l'hypothèse faite sur f, il existe  $x_0 \in E$ ,  $\alpha < +\infty$ , et U, un voisinage équilibré de 0, tels que

$$\limsup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{y \in x_0 + U} f_n(y) \leq \alpha$$

$$\sup_{x \in U} p(x) \leq 1$$

Pour tout  $z \in U$ , on a :

$$[p \nabla f_n](z) = \inf_{y \in E} (p(x_0 + y) + f_n(z + x_0 + y)) \leq \inf_{y \in U - z} (p(x_0 + y) + f_n(z + x_0 + y))$$

d'où l'on tire :

$$[p \nabla f_n](z) \leq \sup_{y \in U - z} p(x_0 + y) + \inf_{y \in U} f_n(x_0 + y).$$

Ainsi, pour tout  $z \in U$ , il vient

$$(1) \quad [p \nabla f_n](z) \leq p(x_0) + 2 + \alpha,$$

ce qui est la majoration cherchée.

Nous allons en déduire une propriété qui nous sera utile plus loin.

Comme on le vérifiera facilement on a d'abord :

$$(2) \quad \underline{\lim}(p \nabla f_n) \leq p \nabla f.$$

Donc comme le domaine effectif de  $f$  a été supposé non vide par hypothèse, on déduit de (2) que le domaine effectif de  $\underline{\lim}(p \nabla f_n)$ , qui contient celui de  $p \nabla f$ , est  $E$  tout entier. Appliquant alors le corollaire en tenant compte de (1), on obtient la formule :

$$(3) \quad \underline{\lim}[p \nabla f_n](x) = \limsup_{n \in \mathbb{N}} [p \nabla f_n](x).$$

### 3 - CODISTANCE DANS UN ESPACE NORME

#### 3.1 - DEFINITION DE LA CODISTANCE

Soient A et B deux ensembles convexes fermés et non vides dans un espace normé E.

Si A et B sont disjoints, on pose  $\theta(A,B) = 0$ .

Si A rencontre B on pose  $\theta(A,B) = 1$  si  $A \subset B$  et sinon

$$\theta(A,B) = \inf_{\substack{x \in A \\ x \notin B}} \frac{d(x,B)}{d(x,A \cap B)} .$$

$\theta(A,B)$  s'appelle la codistance de A à B.

#### 3.2 - PROPRIETES ELEMENTAIRES

a) La codistance  $\theta(A,B)$  est un nombre positif et plus petit que 1.

b) On remarquera qu'en général  $\theta(A,B) \neq \theta(B,A)$  . Néanmoins ces deux nombres vérifient l'inégalité

$$\left| \frac{1}{\theta(A,B)} - \frac{1}{\theta(B,A)} \right| \leq 1$$

ce qui entraîne en particulier que l'un ne peut être nul sans que l'autre le soit.

Pour vérifier cette inégalité, on écarte d'abord les cas triviaux où  $A \cap B = \emptyset$  et où  $\theta(A,B) = 1$ . Soit alors  $x_0 \in A$ ,  $x_0 \notin B$ , tel que  $d(x_0, B) < d(x_0, A \cap B)$  ; un tel point  $x_0$  existe puisque  $A \cap B = \emptyset$  et  $\theta(A,B) < 1$ . Pour tout  $\varepsilon > 0$ , assez petit, on peut trouver  $y_0 \in B$  vérifiant :

$$1 < \frac{d(x_0, A \cap B)}{d(x_0, B)} - \varepsilon < \frac{d(x_0, A \cap B)}{\|x_0 - y_0\|}$$

et il est clair que  $y_0 \notin A$ . Pour  $\varepsilon_1 > 0$ , soit alors  $z_0 \in A \cap B$  tel que  $d(y_0, A \cap B) \geq \|y_0 - z_0\| - \varepsilon_1$ . Comme  $d(x_0, A \cap B) \leq \|x_0 - z_0\|$ , on a :

$$\frac{d(x_0, A \cap B)}{\|x_0 - y_0\|} \leq 1 + \frac{\|y_0 - z_0\|}{\|y_0 - x_0\|}$$

Pour tout  $\varepsilon_2 > 0$ , on peut choisir  $\varepsilon_1 > 0$  assez petit pour que

$$\frac{\|y_0 - z_0\|}{\|y_0 - x_0\|} \leq \frac{d(y_0, A \cap B)}{d(y_0, A)} + \varepsilon_2$$

ce qui donne

$$\frac{d(x_0, A \cap B)}{\|x_0 - y_0\|} \leq 1 + \frac{d(y_0, A \cap B)}{d(y_0, A)} + \varepsilon_2 \leq 1 + \frac{1}{\theta(B, A)} + \varepsilon_2$$

donc finalement

$$\frac{1}{\theta(A, B)} \leq 1 + \frac{1}{\theta(B, A)}$$

qui donne l'inégalité cherchée.

c) Dans le cas particulier où A et B sont des sous-espaces vectoriels fermés de E, on considère l'application  $\Theta(A, B)$ , qui est la restriction à A de la surjection canonique de E sur E/B :

$$\Theta(A, B) : A \rightarrow E/B.$$

Il est classique de définir une distance sur l'ensemble des sous-espaces vectoriel de E à partir des normes de  $\Theta(A, B)$  et  $\Theta(B, A)$ .

La codistance  $\theta(A, B)$  que nous avons définie plus haut s'interprète alors comme la conorme (reduced minimum modulus) de l'application  $\Theta$ . Voir R. Douady (1965-1966) et aussi T. Kato (1966).

### 3.3 - SUITES D'INTERSECTIONS

Si  $A$  est une partie de l'espace normé  $E$ , on note  $A^\rho$  ( $\rho > 0$ ) l'intersection de  $A$  avec la boule fermée de centre  $0$  et de rayon  $\rho$ .

En utilisant la codistance on a alors la condition suffisante suivante, de semi-continuité inférieure pour les suites de parties convexes :

#### PROPOSITION

Soient  $(A_n)$  et  $(B_n)$  deux suites d'éléments de  $\Gamma_0(E)$ ,  $A$  et  $B$  leurs limites inférieures respectives. On suppose que  $0 \in A \cap B$ .

Alors si pour tout  $\rho > 0$ ,  $(A_n)$  et  $(B_n)$  sont telles que :

$$\liminf_n \theta(A_n^\rho, B_n^\rho) > 0$$

elles vérifient :

$$\underline{\lim}(A_n \cap B_n) \supseteq A \cap B.$$

#### Démonstration

Tout point  $z \in A \cap B$  est par hypothèse limite de deux suites  $(x_n) \in s(A_n)$  et  $(y_n) \in s(B_n)$  (notation de II,2.3). Comme  $\liminf_n \theta(A_n^{\|z\|+1}, B_n^{\|z\|+1}) > 0$ , les ensembles  $A_n^{\|z\|+1} \cap B_n^{\|z\|+1}$ , sont non vides à partir d'un certain rang.

Par suite, il existe  $u_n \in A_n^{\|z\|+1} \cap B_n^{\|z\|+1}$  tel que

$$\|x_n - u_n\| \leq 2 d(x_n, A_n^{\|z\|+1} \cap B_n^{\|z\|+1}).$$

L'hypothèse sur la codistance entraîne qu'il existe  $\eta > 0$  tel que, pour  $n$  assez grand :

$$\|x_n - y_n\| \geq \eta \cdot d(x_n, A_n^{\|z\|+1} \cap B_n^{\|z\|+1})$$

d'où l'on déduit que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - u_n\| = 0$$

ce qui montre que  $z \in \underline{\lim}(A_n \cap B_n)$ , d'où le résultat.

### Remarques

- 1) Quitte à faire une translation, ce résultat s'applique aux suites  $(A_n)$  et  $(B_n)$  telles que  $A \cap B \neq \emptyset$  (avec les notations précédentes).
- 2) L'hypothèse sur les codistances est suffisante mais nullement nécessaire. Ainsi dans  $\mathbb{R}^2$ , les deux suites définies par

$$A_n = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; y \geq 0, y \geq nx + \frac{1}{n}\}$$

$$B_n = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; y \geq 0, y \geq -nx + \frac{1}{n}\}$$

sont telles que  $\underline{\lim}(A_n \cap B_n) \supset A \cap B$  mais les codistances correspondantes ne vérifient pas la condition de l'énoncé.

- 3) Il est quelque fois suffisant de remplacer la condition

$$\liminf_n \theta(A_n^\rho, B_n^\rho) > 0, \quad \forall \rho > 0$$

par la condition

$$\liminf_n \theta(A_n, B_n) > 0.$$

### 3.4 - $\theta_\gamma$ ; UNE REMARQUE PRATIQUE

On s'aperçoit facilement que la conclusion de la proposition 3.3 subsiste si l'on y remplace  $\theta(A,B)$  par  $\theta_\gamma(A,B)$  défini de la façon suivante :

Si A et B sont disjoints alors :  $\theta_\gamma(A,B) = 0$ .

Si A rencontre B, alors :  $\theta_\gamma(A,B) = 1$  si  $A \subset B$ , et sinon

$$\theta_\gamma(A,B) = \inf_{\substack{x \in A \\ x \notin B}} \frac{d(x,B)}{\gamma(d(x,A \cap B))}$$

où  $\gamma : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  vérifie la propriété : pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe  $\eta > 0$  tel que si  $\gamma(t) \leq \eta$  alors  $0 \leq t \leq \varepsilon$ .

Lorsque  $\gamma$  est l'application  $t \rightarrow t$ ,  $\theta_\gamma$  est la codistance telle qu'elle a été définie en 3.1.

Exemple : Soit  $f$  une fonctionnelle convexe quadratique à domaine dans  $E$  semi-continue inférieurement. On munit  $E \times \mathbb{R}$  de la norme  $\nu : (x,\alpha) \rightarrow \text{Max}(\|x\|, |\alpha|)$  et on considère pour  $t \geq 0$ , l'application  $\gamma$  définie par :  $\gamma(t) = \frac{1}{2} t$  si  $t \leq 1$  et  $\gamma(t) = t - \frac{1}{2}$  sinon.

Soit  $V_f$  le sous-espace vectoriel de  $E$  défini par :

$$V_f = \{x \in E ; f(x) = 0\}.$$

A la fonction  $f$  correspond une fonction convexe  $\dot{f}$ , quadratique et non dégénérée à domaine effectif dans  $E/V_f$  :

$$\dot{f} \circ \varphi = f$$

si  $\varphi$  est l'application  $E \rightarrow E/V_f$ .

On vérifie que si  $F$  désigne l'épigraphe de  $f$ , on a l'égalité :

$$\theta_\gamma(F, E \times \{0\}) = \inf_{\substack{x \in E \\ x \notin V_f}} \frac{\|f(x)\|}{\|\varphi(x)\|}$$

alors tandis que  $\theta(F, E \times \{0\})$  est toujours nul, le nombre  $\theta_\gamma(F, E \times \{0\})$  est strictement positif si la forme quadratique définie par  $\dot{f}$  est coercive. La condition suffisante énoncée dans la proposition 3.3 supposerait donc ici une hypothèse de coercivité uniforme ; c'est celle que l'on fait habituellement lorsqu'on traite l'approximation des problèmes quadratiques (cf. Chapitre V).

#### 4 - EXPRESSION DUALE DE LA CODISTANCE

##### 4.1 - CODISTANCE DE DEUX DEMI-ESPACES FERMES

Nous commençons par le cas où A et B sont deux demi-espaces fermés de E, non disjoints.

Quitte à faire une translation -ce qui n'affecte pas la valeur de  $\theta(A,B)$ - nous pouvons supposer que A et B sont deux demi-espaces fermés homogènes :

$$A = \{x \in E ; \langle x, a \rangle \leq 0\}$$

$$B = \{x \in E ; \langle x, b \rangle \leq 0\}$$

où a et b sont deux éléments de E', distincts de 0.

Nous allons exprimer  $\theta(A,B)$  en fonction des éléments a et b de E'.

Soit  $x \in E$ ,  $x \notin B$ , on sait que :

$$d(x,B) = \frac{\langle x, b \rangle}{\|b\|}$$

et on vérifie aisément que :

$$d(x, A \cap B) = \underset{\substack{\lambda \geq 0 \\ \mu \geq 0}}{\text{Max}} \frac{\langle x, \lambda a + \mu b \rangle}{\|\lambda a + \mu b\|}$$

D'où l'expression :

$$\theta(A,B) = \underset{\substack{\langle x, a \rangle \leq 0 \\ \langle x, b \rangle \geq 0 \\ \lambda \geq 0, \mu \geq 0}}{\text{Inf}} \frac{\langle x, b \rangle}{\lambda \langle x, a \rangle + \mu \langle x, b \rangle} \frac{\|\lambda a + \mu b\|}{\|b\|}$$

On en déduit que :

$$\theta(A,B) = \inf_{\substack{\langle x,a \rangle = 0 \\ \langle x,b \rangle > 0 \\ \lambda \geq 0, \mu \geq 0}} \frac{\langle x,b \rangle}{\lambda \langle x,a \rangle + \mu \langle x,b \rangle} \frac{\|\lambda a + \mu b\|}{\|b\|}$$

c'est-à-dire que

$$\theta(A,B) = \inf_{\substack{\lambda \geq 0 \\ \mu \geq 0}} \frac{\|\lambda a + \mu b\|}{\|\mu b\|} = \frac{d(b, R^+ a)}{\|b\|}$$

#### Remarques

- 1) Si il existe  $\lambda > 0$  tel que  $a = -\lambda b$ , on vérifie que  $\theta(A,B) = 1$ .
- 2) Si les deux fonctionnelles  $a$  et  $b$  sont telles que  $b \perp a$  (Birkhoff (1935)), alors  $\theta(A,B) = 1$ . Ainsi, par exemple, dans l'espace de Banach  $C(X)$  des fonctions numériques continues sur le compact métrique  $X$ , si  $P_t$  ( $t \in X$ ) désigne l'ensemble des éléments de  $C(X)$ , positifs en  $t$  alors on vérifie que  $\theta(P_t, P_{t'}) = 1$ , pour tout  $t$  et  $t'$  dans  $X$ .

#### 4.2 - UNE MINORATION DANS LE CAS GENERAL

Lorsque  $A$  et  $B$  sont deux ensembles convexes (et fermés), on peut donner une minoration de la codistance  $\theta(A,B)$  faisant intervenir la codistance des demi-espaces fermés contenant respectivement  $A$  et  $B$ .

Faisons l'hypothèse que

$$(1) \quad \overset{\circ}{A} \cap B \neq \emptyset$$

et que

$$(2) \quad \theta(A,B) < 1$$

A cause de (2), il existe  $x_0 \in A$ ,  $x_0 \notin B$ , tel que :

$$d(x_0, A \cap B) > d(x_0, B) > 0.$$

Notons  $J$  la boule fermée de centre  $x_0$  et de rayon  $d(x_0, A \cap B)$ .

Il est clair que les trois ensembles convexes  $\overset{\circ}{A}$ ,  $\overset{\circ}{J}$  et  $B$  se rencontrent deux à deux, mais que l'intersection des trois est vide.

Du théorème de Hahn-Banach on déduit l'existence de trois demi-espaces ouverts  $\overset{\circ}{P}$ ,  $\overset{\circ}{Q}$ ,  $\overset{\circ}{R}$ , ( $P, Q, R$  désignent les demi-espaces fermés correspondant), déterminés par les hyperplans fermés  $P_0$ ,  $Q_0$ ,  $R_0$  qui contiennent respectivement  $\overset{\circ}{A}$ ,  $B$  et  $\overset{\circ}{J}$  et sont disjoints.

$$\overset{\circ}{P} \cap \overset{\circ}{Q} \cap \overset{\circ}{R} = \emptyset.$$

Comme  $P_0 \cap Q_0 \subset R_0$ , on a

$$(3) \quad d(x_0, \overset{\circ}{P} \cap \overset{\circ}{Q}) \leq d(x_0, A \cap B) = d(x_0, \overset{\circ}{R}) = d(x_0, R_0) \leq d(x_0, P_0 \cap Q_0).$$

En sorte que (3) est une suite d'égalités.

Enfin, comme  $d(x_0, Q) \leq d(x_0, B)$ , il vient :

$$(4) \quad \frac{d(x_0, B)}{d(x_0, A \cap B)} \geq \frac{d(x_0, Q)}{d(x_0, P \cap Q)} \geq \theta(P, Q)$$

L'inégalité (4) est vérifiée pour tous les couples  $(P, Q)$  qui sont déduits du théorème de Hahn-Banach ; si on désigne par  $\alpha(x_0)$  la borne supérieure des co-distances  $\theta(P, Q)$  correspondantes, on obtient la minoration

$$(5) \quad \theta(A, B) \geq \text{Inf}_{\substack{x_0 \in A \\ x_0 \notin B}} \alpha(x_0).$$

#### 4.3 - CODISTANCE DUALE : $\theta^*(A, B)$

Nous avons vu dans les deux exemples précédents, qu'il était possible d'exprimer ou de minorer  $\theta(A, B)$  au moyen d'éléments faisant intervenir l'espace dual  $E'$ .

En utilisant le matériel de la théorie des fonctionnelles convexes, cette étude peut être reprise d'une façon à la fois plus précise et plus automatique.

Soient A et B deux ensembles convexes fermés et non disjoints dans E. On note a et b leurs fonctionnelles indicatrices respectives, dont les polaires  $a^*$  et  $b^*$  sont les fonctions d'appui de A et B.

La fonctionnelle  $v : x \rightarrow \|x\|$  est convexe, finie et continue en tout point x de E. Sa polaire  $v^*$  est l'indicatrice de la boule unité fermée du dual fort E'.

Si  $\alpha$  est un réel positif, on désigne par  $\alpha v$  la fonctionnelle  $x \rightarrow \alpha \|x\|$ , dont la polaire est notée  $v^* \frac{1}{\alpha} : x' \rightarrow \alpha v^* \left(\frac{x'}{\alpha}\right) = v^* \left(\frac{x'}{\alpha}\right)$ , qui est l'indicatrice de la boule fermée de rayon  $\alpha$ .

LEMME

Soit  $\alpha \geq 0$  ; on considère les deux inégalités suivantes :

- 1)  $(v \nabla b) + a \geq \alpha v \nabla (a+b),$
- 2)  $(v^* + b^*) \nabla a^* \leq v^* \frac{1}{\alpha} + a^* \nabla b^*.$

Alors 1) implique 2) et si  $a^* \nabla b^* \in \Gamma(E')$  alors 2) implique 1).

Démonstration

La fonctionnelle  $v \nabla b$  est partout finie et continue, donc en vertu de I,6.7 :

$$((v \nabla b) + a)^* = (v \nabla b)^* \nabla a^*$$

qui s'écrit (I,6.2) :

$$((v \nabla b) + a)^* = (v^* + b^*) \nabla a^*.$$

On déduit donc 2) de 1), en prenant les polaires des deux membres de 1) et en remarquant que  $(a+b)^* \leq a^* \vee b^*$ .

Maintenant comme la fonctionnelle  $v$  est partout finie et continue, et que  $v^*$  et  $b^*$  appartiennent à  $\Gamma(E')$ , on obtient la formule de polarité (prop. 9.b de Moreau (1966)) :

$$(v^* + b^*)^* = v \vee b.$$

Si on suppose que  $a^* \vee b^* \in \Gamma(E')$ , alors toujours en vertu du même théorème de Moreau, on a :

$$(v^* \frac{1}{\alpha} + (a^* \vee b^*))^* = \alpha v \vee (a+b).$$

Prenant les polaires des deux membres de 2), on obtient alors 1).  
c.q.f.d.

Introduisons la codistance duale  $\theta^*(A,B)$  :

DEFINITION

Avec les notations précédentes, on pose :

$$\theta^*(A,B) = \sup \{ \alpha \in \mathbb{R}^+ ; (v^* + b^*) \vee a^* \leq v^* \frac{1}{\alpha} + a^* \vee b^* \}.$$

$\theta^*(A,B)$  s'appelle la codistance duale de A à B.

Le lemme précédent peut alors se mettre sous la forme suivante :

PROPOSITION

Si A et B sont deux ensembles convexes fermés et non disjoints de E, on a toujours l'inégalité :

$$\theta(A,B) \leq \theta^*(A,B)$$

En outre, si l'inf-convolution des fonctions d'appui de A et B appartient à  $\Gamma(E')$  l'inégalité devient une égalité :

$$\theta(A,B) = \theta^*(A,B).$$

Démonstration

Elle résulte immédiatement du lemme et de la définition de  $\theta(A,B)$ , mise sous la forme :

$$\theta(A,B) = \sup \{ \alpha \in \mathbb{R}^+ ; (\forall \nabla b) +a \geq \alpha \nabla (a+b) \}.$$

Remarques

- 1) Nous verrons au paragraphe 6, que la codistance duale  $\theta^*$ , peut servir à donner une condition suffisante, duale de celle qui est énoncée dans la prop. 4.3, portant sur la suite des inf-convolution des fonctionnelles d'appui de deux suites  $(A_n)$  et  $(B_n)$ .
- 2) L'inégalité entre la codistance et la codistance duale est à rapprocher de l'inégalité entre la conorme  $q(T)$  d'une application linéaire  $T : E \rightarrow F$  et la conorme de sa transposée, (E et F étant deux espaces normés) :

$$q(T) \leq q({}^t T)$$

Si E et F sont complets, alors on sait que cette inégalité devient une égalité (voir R. Douady et T. Kato loc.cit). La même propriété est vraie pour la codistance et la codistance duale, comme nous allons le voir maintenant.

4.4 - CAS DES ESPACES DE BANACH

Lorsque l'espace normé  $E$  est complet on a toujours  $\theta(A,B) = \theta^*(A,B)$ . La démonstration que nous proposons repose sur le théorème de Banach qui caractérise la topologie de la convergence compacte dans le dual d'un espace de Banach.

PROPOSITION

*Soient  $A$  et  $B$  deux sous-ensembles convexes fermés et non disjoints d'un espace de Banach  $E$ . Si  $\theta^*(A,B) > 0$  alors l'inf-convolution de leurs fonctions d'appui est exacte et appartient à  $\Gamma(E')$ .*

Démonstration

Soient  $a$  et  $b$  les indicatrices de  $A$  et  $B$  respectivement ; par hypothèse  $\theta^*(A,B) > 0$  ; il existe donc  $\alpha > 0$  tel que

$$(v^*_{+b^*}) \nabla a^* \leq v^* \frac{1}{\alpha} + a^* \nabla b^*$$

Pour tout  $\beta > 0$ , on a donc aussi

$$(1) \quad (v^* \frac{1}{\beta} + b^*) \nabla a^* \leq v^* \frac{1}{\alpha\beta} + a^* \nabla b^*$$

Ceci entraîne que l'inf-convolution de  $a^*$  et  $b^*$  est exacte. En effet, soit  $x'$  un point du domaine effectif de  $a^* \nabla b^*$ . Choisissons  $\beta > 0$  tel que  $\|x'\| \leq \alpha.\beta$ . Tenant compte de (1) on a :

$$(2) \quad [a^* \nabla b^*](x') = \text{Inf}_{\|y'\| \leq \beta} (a^*(x'-y') + b^*(y')).$$

Comme  $a^*$  et  $b^*$  sont faiblement s.c.i., et que la borne inférieure dans le second membre de (2) est prise dans un ensemble faiblement compact, cette borne inférieure est atteinte. Il reste donc à prouver que  $a^* \nabla b^* \in \Gamma(E')$  (en fait à  $\Gamma_0(E)$ ). Comme  $a^* \nabla b^*$  est finie en 0 (elle vaut 0), il suffit de montrer qu'elle est s.c.i. en tout point, en vertu de I,3.2,d).

Pour cela, à cause du théorème de Banach (Bourbaki [\*\*], Grothendieck [\*]), il suffit de prouver que sa restriction à toute boule fermée de centre 0 est faiblement s.c.i., autrement dit que pour tout  $\beta > 0$ ,

$$(3) \quad v^* \frac{1}{\alpha\beta} + a^* \nabla b^*$$

est faiblement s.c.i.

Soit  $x'_0 \in E'$  ; montrons que (3) est s.c.i. en  $x'_0$ . Soit  $\beta \geq \frac{\|x'_0\|}{\alpha}$ . Notons  $F$  la trace sur la boule fermée de centre 0 et de rayon  $\alpha\beta$  du filtre des voisinages faibles de  $x'_0$ .

A l'ensemble  $M \in F$ , faisons correspondre  $Z(M)$  défini par

$$Z(M) = \{y' \in E' ; \|y'\| \leq \beta, \exists x' \in M, [a^* \nabla b^*](x') = a^*(x'-y') + b^*(y')\}.$$

En vertu de ce qui précède,  $Z(M)$  n'est pas vide ; en outre,  $(M \times Z(M))_M \in F$  est la base d'un filtre  $Z$  portée par le produit des boules fermées de centre 0, et de rayon  $\alpha\beta$  et  $\beta$  respectivement.

De la définition de  $Z(M)$  et de celle de l'inf-convolution, il résulte que

$$\inf_{x' \in M} [a^* \nabla b^*](x') = \inf_{\substack{x' \in M \\ y' \in Z(M)}} [a^*(x'-y') + b^*(y')]$$

Par suite

$$\liminf_{x', F} [a^* \nabla b^*](x') = \liminf_{x', y', Z} [a^*(x'-y') + b^*(y')].$$

Comme la fonctionnelle  $(x', y') \rightarrow a^*(x'-y') + b^*(y')$  est faiblement s.c.i, que  $Z$  est porté par un ensemble faiblement compact, il existe  $y'_0$  tel que :

$$(4) \quad \liminf_{x', F} [a^* \nabla b^*](x') \geq a^*(x'_0 - y'_0) + b^*(y'_0)$$

Le second membre de (4) étant supérieur ou égal à  $[a^* \nabla b^*](x'_0)$ , il vient finalement

$$\liminf_{x', F} [a^* \nabla b^*](x') \geq [a^* \nabla b^*](x'_0)$$

ce qui achève la démonstration.

COROLLAIRE 1

Soient A et B deux ensembles convexes fermés et non disjoints dans un espace de Banach. Alors :

$$\theta(A,B) = \theta^*(A,B).$$

Démonstration

Supposons  $\theta^*(A,B) > 0$  ; de la proposition précédente, résulte que  $a^* \nabla b^* \in \Gamma(E')$  ; l'égalité  $\theta^*(A,B) = \theta(A,B)$  découle alors de la proposition 4.3.

Si  $\theta^*(A,B) = 0$ , alors en vertu de l'inégalité  $\theta^*(A,B) \geq \theta(A,B)$  (prop. 4.3), il vient  $\theta(A,B) = \theta^*(A,B) = 0$ . D'où le résultat.

Remarque

La réciproque de la proposition 4.4 ci-dessus est fausse.

Dans  $\ell^2$ , soit A le cône de sommet 0 s'appuyant sur l'enveloppe convexe fermée de l'ensemble C des points

$$(1,2,0,0,\dots,0,\dots)$$

$$(1,0,3,0,\dots,0,\dots)$$

$$(1,0,0,\dots,n,0,\dots)$$

et soit B l'hyperplan formé des points dont la première coordonnée est égale à 1.

L'ensemble A est d'intérieur non vide et  $\overset{\circ}{A} \cap B = \emptyset$  ; donc l'inf-convolution de  $a^*$  et  $b^*$  est exacte et appartient à  $\Gamma_0(\ell^2)$  (Corollaire I,6.7).

Montrons que  $\theta^*(A,B) = 0$ , ou de façon équivalente (Corollaire 1, ci-dessus), que  $\theta(A,B) = 0$  puisque  $\ell^2$  est complet.

Soit  $x_n = (\lambda, 0, \dots, 0, \lambda n, 0, \dots)$ , avec  $\lambda > 1$ . Le point  $x_n$  appartient à A. La distance de  $x_n$  à B est égale à

$$d(x_n, B) = \lambda - 1$$

La distance de  $x_n$  à  $A \cap B$  c'est-à-dire de  $x_n$  à  $C$ , est on le vérifie aisément égale à

$$d(x_n, C) = (\lambda-1) \sqrt{1+n^2}$$

En conséquence, pour tout entier  $n$  :

$$\theta(A, B) \leq \frac{1}{\sqrt{1+n^2}}$$

donc

$$\theta(A, B) = \theta^*(A, B) = 0.$$

### COROLLAIRE 2

Soient  $A$  et  $B$  deux ensembles convexes fermés et non disjoints d'un espace normé  $E$  ;  $a$  et  $b$  leurs indicatrices respectives. Pour tout  $x' \in E'$ , dans le domaine effectif de  $a^* \nabla b^*$ , on pose

$$\alpha(x') = \text{Max} \left\{ \frac{\|x'\|}{\|y'\|} ; [a^* \nabla b^*](x') = a^*(x'-y') + b^*(y') \right\}$$

lorsque l'inf-convolution est exacte au point  $x'$ , et sinon

$$\alpha(x') = 0.$$

Alors si  $a^* \nabla b^* \in \Gamma(E')$  ou si  $E$  est complet, on a

$$\theta(A, B) = \theta^*(A, B) = \inf_{x' \in \text{dom}(a^* \nabla b^*)} \alpha(x').$$

Remarques

- 1) Soit  $x' \in E'$  tel que  $[a^* \vee b^*](x') = a^*(x'_a) + b^*(x'_b)$ , avec  $x' = x'_a + x'_b$ .  
L'inégalité évidente

$$\alpha(x') \geq \theta(P, Q)$$

où

$$P = \{x \in E ; \langle x, x'_a \rangle \leq a^*(x'_a)\}$$

$$Q = \{x \in E ; \langle x, x'_b \rangle \leq b^*(x'_b)\}$$

permet de retrouver la minoration proposée en 4.2.

- 2) Dans le cas particulier où  $A$  et  $B$  sont deux sous-espaces vectoriels fermés d'un espace de Banach, on vérifie immédiatement en utilisant le corollaire 2 que

$$\theta(A, B) = \theta(B^\circ, A^\circ)$$

Si  $\theta(A, B) > 0$  alors  $A^\circ + B^\circ$  est fermé dans  $E'$  (pour  $\sigma(E', E')$ ). En fait, la façon habituelle de démontrer ce résultat dans le cas linéaire n'est pas celle que nous venons de présenter.

On sait que (2.2, c))  $\theta(A, B)$  est la conorme de

$$\Theta(A, B) : A \rightarrow E/B$$

comme  $A$  et  $E/B$  sont complets, du théorème des homomorphismes on déduit que (R. Douady (1965-1966))

$$(1) \quad \theta(A, B) > 0 \Leftrightarrow \text{Im } \Theta(A, B) \text{ fermé} \Leftrightarrow A+B \text{ fermé}$$

où la seconde équivalence résulte de la définition de la topologie quotient.

Comme  $A$  et  $E/B$  sont complets, il est aussi possible (R. Douady (1965-1966), T. Kato (1966)) de montrer que  $q(\Theta)$ , la conorme de  $\Theta$  est égale à  $q({}^t\Theta)$ , la conorme de sa transposée.

$${}^t\Theta : (E/B) \overset{\sim}{\rightarrow} B^\circ \rightarrow A' \overset{\sim}{\rightarrow} E/A^\circ.$$

On obtient donc

$$(2) \quad \theta(A, B) = \theta(B^\circ, A^\circ)$$

d'où le résultat (il est même plus précis) dans le cas linéaire en combinant (1) et (2).

#### 4.5 - UNE REMARQUE CONCERNANT LE PARAGRAPHE 2

Il est possible de retrouver simplement, pour des suites d'indicatrices, le résultat du paragraphe 2, en utilisant les résultats des paragraphes 3 et 4.

#### PROPOSITION

*Soient  $(A_n)$  et  $(B_n)$  deux suites de parties convexes et fermées d'un espace normé ;  $A$  et  $B$  leurs limites inférieures respectives. S'il existe un point  $z \in \overset{\circ}{A} \cap B$ , centre d'une boule assez petite pour être contenue dans tous les  $A_n$  à partir d'un certain rang alors :*

$$\underline{\lim}(A_n \cap B_n) \supset A \cap B.$$

#### Démonstration

Par hypothèse  $z \in \overset{\circ}{A} \cap B$  est centre d'une boule de rayon  $\beta$  contenue dans tous les  $A_n$ , dès que  $n$  est assez grand. La codistance de deux demi-espaces fermés contenant  $A_n$  et  $B_n$  et dont l'intersection des frontières est à une distance moindre que  $\rho > 0$  du point  $z$  est pour tout  $\varepsilon > 0$  supérieure à  $\frac{\beta}{\rho - \varepsilon}$  à partir d'un certain rang.

Prenant  $z$  pour nouvelle origine, on en déduit que

$$\liminf_n \theta(A_n^\rho, B_n^\rho) \geq \frac{\beta}{\rho}$$

Le résultat découle alors de la proposition 3.3.

### Remarques

- 1) Si  $(A_n)$  est une suite stationnaire, alors l'hypothèse de la proposition se réduit à  $A \cap B \neq \emptyset$ .
- 2) Voici un exemple de suite  $(A_n)$ , composée d'éléments ayant tous un intérieur non vide, telle que  $A \cap B \neq \emptyset$ , et qui néanmoins ne possède pas la propriété requise dans l'énoncé de la proposition précédente.

Dans  $\ell^2$  soit

$$A_n = \{x = (x_i) \in \ell^2 \ ; \ \|x\| \leq 1, x_n \geq \frac{1}{n}\}$$

et soit  $y = (y_i) \in \ell^2$  tel que  $\|y\| \leq 1$ .

La distance de  $y$  à  $A_n$  est égale à

$$d(y, A_n) = \text{Max}\left(\frac{1}{n} - y_n, 0\right)$$

et tend donc vers 0 lorsque  $n$  augmente indéfiniment. La suite  $(A_n)$  admet donc la boule fermée de centre 0 et de rayon 1 pour limite inférieure.

Pourtant, si  $y \in \ell^2$  vérifie  $\|y\| < 1$ , la boule ouverte de centre  $y$  et de rayon  $\rho > 0$ , n'est contenue dans aucun  $A_n$  à partir d'un certain rang.

En effet, cette boule contient les éléments de la forme :

$$(y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, y_n - \rho, y_{n+1}, \dots)$$

qui n'appartiennent pas à  $A_n$  dès que  $n$  est assez grand.

3) De la proposition précédente, on déduit le résultat suivant.

Soit  $(f_n)$  une suite d'éléments de  $\Gamma_o(E)$ ,  $(\alpha_n)$  une suite réelle.

Soit  $f = \underline{\lim}(f_n)$  et  $\alpha = \liminf_n (\alpha_n)$ . Alors si  $A_n$  désigne

$$A_n = \{x \in E ; f_n(x) \leq \alpha_n\}$$

une condition suffisante pour que

$$\underline{\lim}(A_n) \supset A = \{x \in E ; f(x) \leq \alpha\}$$

est que

$$\inf_{x \in E} f(x) < \alpha.$$

5 - CAS D'UN ESPACE LOCALEMENT CONVEXE

Nous indiquons rapidement dans ce paragraphe comment on peut adapter la notion de codistance dans le cas où la topologie n'est plus définie par une norme mais par une famille de semi-normes.

5.1 -  $\theta_{pq}(A,B)$  ; DEFINITION ET PROPRIETES ELEMENTAIRES

Soit  $p$  une semi-norme sur  $E$ ,  $A$  une partie de  $E$  et  $x \in E$ . On note

$$d_p(x,A) = \inf_{y \in A} p(x-y)$$
$$p^{\leq}(\rho) = \{x \in E ; p(x) \leq \rho\}.$$

La définition suivante généralise celle de codistance.

DEFINITION

*Soient  $A$  et  $B$  deux parties convexes fermées et non vides d'un espace vectoriel  $E$ ,  $p$  et  $q$  deux semi-normes sur  $E$ .*

*Si  $A \cap B = \emptyset$ , on pose  $\theta_{pq}(A,B) = 0$  ;*

*Si  $A$  rencontre  $B$ , on pose*

$$\theta_{pq}(A,B) = \sup \{ \alpha \in \mathbb{R}^+ ; d_q(x,B) \geq \alpha d_p(x, A \cap B), \forall x \in A \}$$

Remarques

- 1) Si  $q \geq p$ ,  $\theta_{pq}(A,B)$  est un nombre positif et plus petit que 1.

- 2) Si  $q \geq p$ , on a une inégalité analogue à celle de 3.2, qui exprime l'écart de  $\theta_{pq}(A,B)$  à  $\theta_{pq}(B,A)$ .  
Plus précisément, on a :

$$\left| \frac{1}{\theta_{pq}(A,B)} - \frac{1}{\theta_{pq}(B,A)} \right| \leq 1.$$

## 5.2 - SUITES D'INTERSECTIONS

Une proposition analogue à la proposition 3.3 :

Soit E un e.l.c.s dont la topologie est définie par la famille de semi-normes  $(p_i)_{i \in I}$ . Soient  $(A_n)$  et  $(B_n)$  deux suites de parties convexes et fermées de E, telles que  $0 \in \underline{\lim}(A_n) \cap \underline{\lim}(B_n)$ .

Si pour tout  $i \in I$ , tout  $\rho > 0$ , on peut trouver  $j \in I$ , tels que

$$\liminf_n \theta_{p_i p_j}(A_n \cap p_i \leq (\rho), B_n \cap p_i \leq (\rho)) > 0$$

alors

$$\underline{\lim}(A_n \cap B_n) \supset \underline{\lim}(A_n) \cap \underline{\lim}(B_n).$$

## 5.3 - $\theta_{pq}^*(A,B)$ ; EXPRESSION DUALE

Si A et B sont deux ensembles convexes fermés non disjoints de E, a et b désignent leurs indicatrices respectives, p et q deux demi-normes continues sur E, on vérifie immédiatement que

$$(1) \quad \theta_{pq}^*(A,B) = \sup \{ \alpha \in \mathbb{R}^+ ; (q \nabla b) + a \geq \alpha p \nabla (a+b) \}$$

Comme en 4.3, on introduit la quantité duale

$$(2) \quad \theta_{pq}^*(A, B) = \text{Sup} \{ \alpha \in \mathbb{R}^+ ; (q^* + b^*) \nabla a^* \leq p^* \frac{1}{\alpha} + (a^* \nabla b^*) \}$$

Elle s'interprète de la façon suivante :

Soit  $p^*$  la polaire de la semi-norme  $p$  ;  $p^*$  est l'indicatrice d'un ensemble noté  $P^*$  qui est convexe, faiblement compact, et qui est le polaire de la boule  $p \leq (1)$ . De même,  $q^*$  est l'indicatrice d'un ensemble noté  $Q^*$ .

Soit  $x' \in P^*$ , on considère  $\alpha(x')$  qui est la borne supérieure de l'ensemble des réels  $\alpha$  tels que

$$\alpha y' \in Q^*$$

$$[a^* \nabla b^*](x') = a^*(x' - y') + b^*(y').$$

Lorsque l'inf-convolution de  $a^*$  et  $b^*$  est exacte en  $x'$ , et qui est nul sinon. Alors on a :

$$\theta_{pq}^*(A, B) = \text{Inf}_{x' \in P^*} \alpha(x').$$

#### 5.4 - PROPRIETES

a) De même qu'en 4.1, on vérifie l'inégalité

$$\theta_{pq}(A, B) \leq \theta_{pq}^*(A, B)$$

qui devient une égalité si  $a^* \nabla b^* \in \Gamma(E')$ .

b) Supposons que E est un espace de Frechet ; sa topologie est définie par la suite de semi-normes  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ; en utilisant le théorème de Banach-Dieudonné (cf. Bourbaki [\*\*], Grothendieck [\*]), on démontre que si à tout  $i \in \mathbb{N}$  correspond  $j \in \mathbb{N}$  tel que  $\theta_{p_i, p_j}^*(A, B) > 0$ , alors l'inf-convolution de  $a^*$  et  $b^*$  est exacte et  $a^* \vee b^* \in \mathcal{L}^1(E')$ .

## 6 - SUITE DE SOMMES DE FONCTIONNELLES CONVEXES

Dans cette dernière étape, nous allons introduire une notion qui généralise celle de codistance lorsqu'on considère non plus des parties convexes donc leur fonctionnelles indicatrices, mais des fonctionnelles convexes quelconques.

Evidemment, si l'une des deux fonctionnelles  $f$  ou  $g$  est une indicatrice, l'épigraphe de la somme  $f+g$  peut s'interpréter dans  $E \times R$  comme l'intersection du cylindre à génératrices verticales s'appuyant sur la partie convexe en question, et de l'épigraphe de l'autre fonctionnelle ; on peut donc songer dans ce cas, à appliquer les résultats des paragraphes précédents. Néanmoins, il semble plus commode de repartir des formules (1) et (2) de 5.3.

### 6.1 - DEFINITIONS

Soit  $E$  un e.l.c.s,  $f$  et  $g$  deux éléments de  $\Gamma_0(E)$ ,  $p$  et  $q$  deux semi-normes sur  $E$ .

On dit que  $f$  et  $g$  possèdent la propriété  $\text{Cod}(p,q)$  si  $f+g$  n'est pas identiquement égale à  $+\infty$  et si

$$\text{Cod}(p,q) : (q \nabla g) + f \geq p \nabla (f+g)$$

Comme en 4.3 et en 5.3, on introduit la propriété duale :

$f$  et  $g$  deux éléments de  $\Gamma_0(E)$ , vérifient la propriété  $\text{Cod}^*(p,q)$  si  $f^* \nabla g^*$  ne prend en aucun point de  $E'$  la valeur  $-\infty$  et s'ils vérifient l'inégalité

$$\text{Cod}^*(p,q) \quad (q^* + g^*) \nabla f^* \leq p^* + (f^* \nabla g^*).$$

## 6.2 - PROPRIETES (COD) et (COD<sup>\*</sup>)

Soient  $p$  et  $q$  deux semi-normes continues sur l'e.l.c.s.  $E$ . On montre facilement (cf. lemme 4.3) que si  $f$  et  $g$  possèdent la propriété  $\text{Cod}(p,q)$ , elles vérifient aussi  $\text{Cod}^*(p,q)$ . En outre la réciproque est vraie dès que  $f^* \vee g^* \in \Gamma(E')$ .

On dit que  $f$  et  $g \in \Gamma_0(E)$  possèdent la propriété (COD) [resp. (COD<sup>\*</sup>)] si pour toute semi-norme  $p$ , continue sur  $E$ , il existe une semi-norme  $q$ , continue sur  $E$ , telle que  $f$  et  $g$  vérifient la propriété  $\text{Cod}(p,q)$  [resp.  $\text{Cod}^*(p,q)$ ].

Donc si  $f$  et  $g$  sont deux éléments de  $\Gamma_0(E)$  possédant la propriété (COD), ils vérifient aussi (COD<sup>\*</sup>).

Dans le cas où  $E$  est un espace de Fréchet, la proposition 4.4 devient :

Si  $f$  et  $g$  vérifient la propriété (COD<sup>\*</sup>) alors  $f^* \vee g^* \in \Gamma(E')$  ; en sorte que  $f$  et  $g$  possèdent aussi la propriété (COD) : dans ce cas, une condition nécessaire et suffisante pour que  $f$  et  $g$  vérifient (COD) est qu'ils vérifient (COD<sup>\*</sup>).

## 6.3 - SUITES DE SOMMES

Introduisons d'abord une définition.

### DEFINITION

Soit  $E$  un e.l.c.s.,  $(f_n)$  une suite d'éléments de  $\Gamma_0(E)$ . On dit que  $(f_n)$  est une suite correcte (relativement à la topologie de  $E$ ) s'il existe une semi-norme  $p$  continue sur  $E$  telle que la limite inférieure en  $n$  de la suite  $[p \vee f_n](x)$  ne prenne, pour aucun point  $x$  de  $E$ , la valeur  $-\infty$ .

Remarques

- 1) Soit  $(E, E')$  un système dual. On suppose  $E'$  muni d'une topologie  $(E', E)$ , et  $E$  muni de la topologie de la convergence convexe compacte (ou de la convergence compacte si  $E'$  vérifie (E.C) (III, 3.3)).

On a l'interprétation suivante :

Soit  $(f_n)$ , une suite correcte d'éléments de  $\Gamma_0(E)$ . Alors  $(f_n^*)$ , la suite des polaires est propre.

La réciproque est vraie, si  $E'$  vérifie (E.C).

Supposons  $(f_n)$  correcte. Soit  $p$  la semi-norme continue sur  $E$ , telle que pour tout  $x \in E$

$$\liminf_n [(p \nabla f_n)](x) > -\infty.$$

En particulier

$$(1) \quad \liminf_n ([p \nabla f_n](0)) \geq \alpha > -\infty.$$

Grâce à un résultat de Moreau, déjà utilisé précédemment (4.3), sachant que  $p$  est partout finie et continue, on a :

$$p \nabla f_n = p^* + f_n^*$$

donc

$$(2) \quad [p \nabla f_n](0) = - \operatorname{Inf}_{x' \in E'} (p^*(x') + f_n^*(x'))$$

Combinant (1) et (2), il vient

$$\limsup_n ( \operatorname{Inf}_{p^*(x') < +\infty} f_n^*(x') ) \leq -\alpha < +\infty$$

d'où le résultat puisque  $p^*$  est l'indicatrice d'un ensemble compact dans  $E$  (puisque c'est l'ensemble polaire du convexe  $p \leq (1)$ ).

Réciproquement, supposons que  $(f_n^*)$  est propre ; il existe un ensemble  $P^*$  dans  $E'$ , compact et un nombre  $\alpha^* < +\infty$  tels que

$$\limsup_n \inf_{x' \in K'} f_n^*(x') \leq \alpha^*.$$

On peut supposer  $P^*$  convexe et équilibré puisque  $E'$  vérifie (E.C). Soit alors  $p^*$  l'indicatrice de  $P^*$  ; il vient

$$\limsup_n \inf_{x' \in E'} (f_n^*(x') + p^*(x')) \leq \alpha^*$$

où  $p^*$  est la polaire d'une semi-norme  $p$ , continue sur  $E$ .

On a donc pour  $x \in E$  :

$$\limsup_n [p \nabla f_n](x) = -\limsup_n \inf_{x' \in E'} (f_n^*(x') + f_n^*(x') - \langle x, x' \rangle) \geq \alpha(x)$$

avec  $\alpha(x) > -\infty$ , pour tout  $x \in E$ , d'où le résultat.

- 2) Si les deux suites  $(f_n)$  et  $(g_n)$  sont correctes, la suite  $(f_n + g_n)$  est aussi correcte.

En effet, pour tout  $n$ , on a l'inégalité

$$p \nabla (f_n + g_n) \geq (p \nabla f_n) + (p \nabla g_n).$$

Comme d'autre part, pour tout  $x \in E$ , on a

$$\liminf_n ([p \nabla f_n](x) + [p \nabla g_n](x)) \geq \liminf_n [p \nabla f_n](x) + \liminf_n [p \nabla g_n](x)$$

il en résulte que pour tout  $x \in E$

$$\liminf_n [p \nabla (f_n + g_n)](x) \geq \underline{\lim} [p \nabla f_n](x) + \underline{\lim} [p \nabla g_n](x)$$

d'où l'assertion.

Voici maintenant la condition suffisante faisant intervenir la propriété (COD).

PROPOSITION

Soient  $(f_n)$  et  $(g_n)$  deux suites d'éléments de  $\Gamma_0(E)$ . On suppose la suite  $(f_n + g_n)$  correcte et telle que sa limite inférieure ne soit pas identiquement égale à  $+\infty$ .

(COD) Si pour toute semi-norme  $p$  continue sur  $E$ , il existe une semi-norme  $q$  continue sur  $E$  telle qu'à partir d'un certain rang  $f_n$  et  $g_n$  vérifient la propriété  $\text{Cod}(p,q)$ , alors

$$\underline{\lim}(f_n + g_n) \leq \underline{\lim}(f_n) + \underline{\lim}(g_n).$$

Démonstration

Notons  $f$  et  $g$  les limites inférieures de  $(f_n)$  et  $(g_n)$  ;  
Pour  $p$  et  $q$  bien choisis, on a

$$\text{Cod}(p,q) : (q \nabla g_n) + f_n \geq p \nabla (f_n + g_n).$$

On vérifie facilement d'abord que

$$\underline{\lim}(q \nabla g_n) \leq q \nabla g.$$

De plus, comme  $g$  n'est pas identiquement égale à  $+\infty$  (sans quoi,  $\underline{\lim}(f_n + g_n)$  serait aussi identiquement égale à  $+\infty$ ), on peut appliquer les résultats du paragraphe 2 et il vient :

$$\underline{\lim}((q \nabla g_n) + f_n) \leq \underline{\lim}(q \nabla g_n) + f$$

L'inégalité  $\text{Cod}(p,q)$  donne donc :

$$\underline{\lim}(p \nabla (f_n + g_n)) \leq (q \nabla g) + f \leq f + g.$$

De la propriété (COD) de l'énoncé résulte ainsi : pour toute semi-norme  $p$  contenue sur  $E$ , il existe une semi-norme  $q$ , continue sur  $E$ , telle que l'inégalité suivante soit vérifiée, à partir d'un certain rang,

$$(1) \quad \underline{\lim}(p \nabla (f_n + g_n)) \leq f+g.$$

Montrons que ceci entraîne que

$$\underline{\lim}(f_n + g_n) \leq f+g.$$

Par l'absurde ; supposons qu'il existe  $x_0 \in E$ , dans le domaine effectif de  $f+g$ , tel que

$$(2) \quad [\underline{\lim}(f_n + g_n)](x_0) > f(x_0) + g(x_0) = \alpha$$

Parce que  $\underline{\lim}(f_n + g_n)$  n'est pas identiquement égale à  $+\infty$ , on sait qu'en vertu du paragraphe 2, on a :

$$(3) \quad \limsup_n [p \nabla (f_n + g_n)](x) = [\underline{\lim}(p \nabla (f_n + g_n))](x)$$

pour tout  $x \in E$ .

Combinant (1) et (3), il vient pour toute semi-norme  $p$  continue sur  $E$  :

$$(4) \quad \limsup_n [p \nabla (f_n + g_n)](x_0) \leq \alpha.$$

Montrons que (4) et (2) conjointement à l'hypothèse que la suite  $(f_n + g_n)$  est correcte, aboutissent à une contradiction.

L'inégalité (2) signifie qu'il existe un voisinage  $U$  de  $0$  dans  $E$ , tel que

$$(5) \quad \limsup_n \inf_{y \in x_0 + U} [f_n + g_n](y) > \alpha.$$

Comme  $(f_n + g_n)$  est une suite correcte, il existe une semi-norme continue  $p_0$ , telle que pour tout  $x \in E$ , on ait

$$\liminf_n [p_0 \nabla (f_n + g_n)](x) > -\infty$$

On peut supposer que

$$\sup_{x \in U} p_0(x) \leq 1.$$

Appliquée à la semi-norme  $p_0$ , l'inégalité (4) entraîne que pour tout réel  $k > 0$ , on a

$$(6) \quad \limsup_n \inf_{y \in E} (f_n(y) + g_n(y) + kp_0(y-x)) \leq \alpha.$$

A cause de (5), il existe une sous-suite  $(f_{n'} + g_{n'})$  de  $(f_n + g_n)$ , telle que la borne inférieure dans (6) peut être prise, non plus dans  $E$  tout entier, mais dans l'ensemble

$$(7) \quad \{y \in E ; p_0(y-x_0) > 1\}$$

Pour cette sous-suite  $(f_{n'} + g_{n'})$  -telle que  $\inf_{y \in x_0 + U} (f_{n'}(y) + g_{n'}(y)) > \alpha'$  - et pour tout  $y$  dans l'ensemble défini par (7), on a à cause de (6),

$$(8) \quad f_{n'}(y) + g_{n'}(y) \leq \alpha' - kp_0(y-x_0),$$

si  $\alpha' > \alpha$  et si  $n'$  est assez grand.

Il en résulte donc, en tenant compte de (8)

$$(9) \quad \liminf_n [p_0 \nabla (f_n + g_n)](x_0) \leq \inf_{p_0(y-x_0) > 1} (\alpha' - (k-1)p_0(y-x_0)).$$

L'inégalité (9), pour  $k > 1$  entraîne :

$$\liminf_n [p_0 \nabla (f_n + g_n)](x_0) = -\infty$$

ce qui est impossible, par définition de  $p_0$ .

D'où le résultat.

#### 6.4 - SUITES D'INF-CONVOLUTIONS

Nous donnons ici une interprétation de la propriété duale  $(\text{COD}^*)$  : elle conduit à une condition suffisante (duale de celle qui est énoncée dans la proposition 6.3) pour que soit vérifiée une inégalité de semi-continuité supérieure de l'inf-convolution.

Sa démonstration n'étant pas simplifiée dans le cas où  $(f_n)$  et  $(g_n)$  sont des suites d'indicatrices, nous l'avons placée dans ce dernier paragraphe.

##### PROPOSITION

*Soit  $(E, E')$  un système dual et soient  $(f_n)$  et  $(g_n)$  deux suites d'éléments de  $\Gamma_0(E)$ . On suppose  $E'$  muni d'une topologie  $(E', E)$  et  $E$  muni de la topologie de la convergence convexe compacte.*

*Si pour toute semi-norme  $p$  continue sur  $E$ , il existe une semi-norme  $q$  continue sur  $E$ , telles qu'à partir d'un certain rang  $f_n$  et  $g_n$  possèdent la propriété  $\text{Cod}^*(p, q)$  alors*

$$\overline{\lim}(f_n^* \nabla g_n^*) \geq \overline{\lim}(f_n^*) \nabla \overline{\lim}(g_n^*)$$

##### Démonstration

Par l'absurde supposons qu'il existe  $x'_0 \in E'$  tel que pour un certain  $\alpha \in \mathbb{R}$  on ait

$$[\overline{\lim}(f_n^* \nabla g_n^*)](x'_0) \leq \alpha < [\overline{\lim}(f_n^*) \nabla \overline{\lim}(g_n^*)](x'_0).$$

Ceci entraînerait alors qu'il existe un ensemble  $P^*$ , convexe compact et équilibrée dans  $E'$ , et un nombre  $\alpha'$  tels que si  $F$  désigne la trace du filtre des voisinages de  $x'_0$  sur  $P^*$  on ait

$$\lim_{n, F} \inf (f_n^* \nabla g_n^*) = \alpha'$$

avec

$$(1) \quad \alpha' < [\overline{\lim}(f_n^*) \vee \overline{\lim}(g_n^*)](x'_0).$$

Notons  $h_n$  la fonctionnelle définie dans  $E' \times E'$  qui au couple  $(x', y')$  fait correspondre la valeur  $f_n^*(x'-y') + g_n^*(y')$ .

A l'ensemble  $M \in F$ , associons  $N(n, M)$  défini par

$$N(n, M) = \{y' \in Q^*; \exists x' \in M, f_n^*(x'-y') + g_n^*(y') = [f_n^* \vee g_n^*](x')\}$$

où  $Q^*$  est l'ensemble convexe compact et équilibré de  $E'$ , associé à  $P^*$  par la propriété  $\text{Cod}^*(p, q)$  de la façon suivante : la fonctionnelle polaire  $p^*$  de  $p$  est l'indicatrice de  $P^*$  et de même  $q^*$  est l'indicatrice de  $Q^*$ .

A cause de la propriété  $\text{Cod}^*(p, q)$ , et parce que pour tout entier  $n$ ,  $f_n^*$  et  $g_n^*$  sont dans  $\Gamma_0(E)$ , il en résulte que  $N(n, M)$  n'est pas vide.

On vérifie alors que  $(M, N(M))_{M \in F}$ , ou  $N(M)$  est défini par

$$N(M) = \bigcup_n N(n, M)$$

est la base d'un filtre  $\mathcal{J}$  sur  $P^* \times Q^*$ .

Pour  $\mathcal{J}$  ainsi défini, on a :

$$\liminf_{n, \mathcal{J}} h_n(x', y') = \liminf_{n, F} (f_n^* \vee g_n^*)(x') = \alpha'$$

Il existe un filtre  $\Phi$ , plus fin que le produit du filtre de Frechet par  $\mathcal{J}$ , tel que

$$\lim_{\Phi} h_n(x', y') = \alpha'$$

Soit  $\mathcal{J}'$ , la projection de  $\Phi$  sur  $E' \times E'$  ;  $\mathcal{J}'$  possède un point adhérent (au moins) puisqu'il est porté par le compact produit  $P^* \times Q^*$  ; considérons alors  $\mathcal{J}'$  un filtre plus fin que  $\mathcal{J}$  et qui converge vers  $(x'_0, y'_0)$ , ou  $y'_0 \in Q^*$ .

Il est clair que pour  $\mathcal{J}_0'$  on a :

$$\liminf_{n, \mathcal{J}_0'} h_n(x', y') = \alpha'$$

ce qui s'écrit

$$\liminf_{\substack{n, x' \rightarrow x'_0, x' \in P^* \\ y' \rightarrow y'_0, y' \in Q^*}} (f_n^*(x' - y') + g_n^*(y')) = \alpha'$$

d'où il résulte que

$$\liminf_{\substack{n, x' \rightarrow x'_0, x' \in P^* \\ y' \rightarrow y'_0, y' \in Q^*}} f_n^*(x' - y') + \liminf_{n, y' \rightarrow y'_0, y' \in Q^*} g_n^*(y') \leq \alpha'$$

et par définition des limites supérieures que

$$[\overline{\lim}(f_n^*)](x'_0 - y'_0) + [\overline{\lim}(g_n^*)](y'_0) \leq \alpha'$$

La définition de l'inf-convolution entraîne alors que

$$[\overline{\lim}(f_n^*) \vee \overline{\lim}(g_n^*)](x'_0) \leq \alpha'$$

ce qui est en contradiction avec (1) ; d'où le résultat.

Remarque :

Soit  $(E, E')$  un système dual ;  $E'$  est muni d'une topologie  $(E, E')$  vérifiant (E.C) et  $E$  de la topologie de la convergence compacte.

Soient  $(f_n)$  et  $(g_n)$  deux suites d'éléments de  $\Gamma_0(E)$ ,  $f$  et  $g$  leurs limites inférieures qu'on suppose appartenir à  $\Gamma_0(E)$ . On suppose aussi les suites  $(f_n^*)$  et  $(g_n^*)$  propres (III, 7.2), en sorte que (III, 7.2 et 7.3) :

$$f = \underline{\lim}(f_n) = (\overline{\lim}(f_n^*))^* = f^{**}$$

$$g = \underline{\lim}(g_n) = (\overline{\lim}(g_n^*))^* = g^{**}$$

Si pour toute semi-norme  $p$ , continue sur  $E$ , il existe  $q$ , une semi-norme continue sur  $E$ , telle qu'à partir d'un certain rang  $f_n$  et  $g_n$  vérifient  $\text{Cod}(p, q)$  donc  $\text{Cod}^*(p, q)$  (cf. 6.2), alors parce que  $f_n^*$  et  $g_n^*$  sont dans  $\Gamma_0(E')$ , on vérifie immédiatement que  $\overline{\lim}(f_n^* \vee g_n^*)$  ne prend en aucun point la valeur  $-\infty$ .

Montrons qu'on peut déduire la proposition 6.3 de la proposition 6.4.  
D'après 6.4, on sait que

$$\overline{\lim}(f_n^* \vee g_n^*) \geq \overline{\lim}(f_n^*) \vee \overline{\lim}(g_n^*).$$

Comme  $(f_n^*)$  et  $(g_n^*)$  sont propres,  $f_n$  et  $g_n$  sont correctes (6.3, Remarque 1) donc aussi  $(f_n + g_n)$  (6.3, Remarque 2) ; d'autre part comme  $t\text{-}\overline{\lim} f_n^* \vee g_n^*$  ne prend nulle part la valeur  $-\infty$ , et comme, d'après 7.2,

$$\underline{\lim}(f_n + g_n) \leq (\overline{\lim}(f_n^* \vee g_n^*))^*,$$

parce que  $(f_n^* \vee g_n^*)$  est propre ( $f_n^*$  et  $g_n^*$  le sont), on en déduit que  $\underline{\lim}(f_n + g_n)$  n'est pas identiquement égale à  $+\infty$ . Les suites  $(f_n)$  et  $(g_n)$  remplissent donc les conditions d'application de la proposition 6.3.

Enfin, la conclusion de cette proposition 6.3 résulte par polarité du résultat de la proposition 6.4

$$\underline{\lim}(f_n + g_n) \leq \overline{\lim}(f_n^* \vee g_n^*) \leq [\overline{\lim}(f_n^*)]^* + [\overline{\lim}(g_n^*)]^*$$

où, à cause de 7.3, on a :

$$[\overline{\lim}(f_n^*)]^* \leq \underline{\lim}(f_n).$$

Réciproquement, on pourrait de même déduire la proposition 6.4 de la proposition 6.3.

CHAPITRE - V

I - RESULTATS DE CONVERGENCE POUR UNE SUITE DE PROBLEMES D'OPTIMISATION

I-1 - SOIT  $E$  un e.l.c.s,  $f$  et  $g$  deux éléments de  $\Gamma_o(E)$ . On suppose que la somme  $h = f+g$  n'est pas identiquement égale à  $+\infty$ , i.e. que  $h \in \Gamma_o(E)$ .

On pose

$$\alpha = \alpha(h) = \alpha(f,g) = \inf_{x \in E} (f(x)+g(x)) = \inf_{x \in E} (h(x))$$

$$S = S(h) = S(f,g) = \{x \in E ; f(x)+g(x) = \alpha(f,g)\} = \{x \in E ; h(x) = \alpha(h)\}$$

Comme on a supposé  $h \in \Gamma_o(E)$ ,  $\alpha(h)$  n'est pas égal à  $+\infty$ , mais peut être égal à  $-\infty$ . Notons cependant que si  $\alpha(h) = -\infty$ , alors nécessairement  $S(h) = \emptyset$ .

On note  $[f,g] = [h]$ , le problème d'optimisation qui consiste à déterminer la valeur  $\alpha$  de l'optimum et l'ensemble  $S$  des solutions.

On considère maintenant, pour tout entier  $n$ ,  $f_n$  et  $g_n$  dans  $\Gamma_o(E)$ , tels que  $h_n = f_n + g_n \in \Gamma_o(E)$  et  $\alpha_n = \alpha(h_n) = \alpha(f_n, g_n)$ ,  $S_n = S(h_n) = S(f_n, g_n)$ , les éléments solutions de  $[f_n, g_n]$ .

On suppose  $E$  et son dual  $E'$  munis de topologies  $t$  et  $t'$ , respectivement  $(E, E')$  et  $(E', E)$ , et vérifiant la propriété (E.C) ; on considère aussi  $T$  et  $T'$  les topologies de la convergence compacte (chap. III, 3-3) qui sont des topologies  $(E, E')$  et  $(E', E)$  respectivement.

On s'intéresse alors à la "continuité" de

$$[f, g] \mapsto (h, \alpha, S),$$

c'est-à-dire que, supposant

$$T\text{-t } \lim(f_n) = f$$

$$T\text{-t } \lim(g_n) = g,$$

on cherche sous quelles conditions sur  $(f_n)$  et  $(g_n)$  sont réalisées les propriétés suivantes :

$$(1) \quad T\text{-t } \lim (h_n) = h$$

$$(2) \quad \lim_n (\alpha_n) = \alpha$$

$$(3) \quad T\text{-t } \lim(S_n) = S.$$

### 1-2 - CONVERGENCE DE $h_n = f_n + g_n$

Dans la plupart des applications, les résultats énoncés au paragraphe 2 du Chap. IV suffisent ; ce qui peut s'exprimer de la façon suivante :

#### PROPOSITION

Soient  $f$  et  $g$  deux éléments de  $\Gamma_0(E)$ ,  $(f_n)$  et  $(g_n)$  deux suites d'éléments de  $\Gamma_0(E)$  telles que

$$T\text{-t } \lim(f_n) = f$$

$$T\text{-t } \lim(g_n) = g$$

Si, lorsque E est muni de la topologie T, les conditions suivantes sont réalisées :

(A1) le couple (f,g) est uni

(A2) il existe un ensemble ouvert dans lequel, à partir d'un certain rang les fonctionnelles sont uniformément majorées,

alors

$$T\text{-}\lim(h_n) = h.$$

Démonstration

Les deux suites  $(f_n)$  et  $(g_n)$  vérifient déjà l'inégalité de semi-continuité supérieure, valable sans hypothèse particulière :

$$(1) \quad t\text{-}\overline{\lim}(f_n + g_n) \geq t\text{-}\overline{\lim}(f_n) + t\text{-}\overline{\lim}(g_n).$$

En effet pour tout  $x \in E$ , tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $K \in \mathcal{K}_t$  (notations, III,2-5) tel que

$$\liminf_{\substack{n,y \xrightarrow{t} x \\ y \in K}} h_n(y) \leq [t\text{-}\overline{\lim}(f_n + g_n)](x) + \varepsilon$$

L'inégalité (1) résulte alors de la définition de la t-limite supérieure et de l'inégalité

$$\liminf_{\substack{n,y \xrightarrow{t} x \\ y \in K}} (f_n + g_n)(y) \geq \liminf_{\substack{n,y \xrightarrow{t} x \\ y \in K}} f_n(y) + \liminf_{\substack{n,y \xrightarrow{t} x \\ y \in K}} g_n(y).$$

De (1) résulte donc

$$t\text{-}\overline{\lim}(h_n) \geq h.$$

La démonstration s'achève en vérifiant que

$$T\text{-}\underline{\lim}(h_n) \leq h$$

qui découle de l'inégalité

$$T\text{-}\underline{\lim}(h_n) \leq T\text{-}\underline{\lim}(f_n) + T\text{-}\underline{\lim}(g_n)$$

qu'on déduit des hypothèses (A1) et (A2) de l'énoncé et de la proposition IV-2.

### 1-3 - CONVERGENCE DE $\alpha_n$

Supposons que

$$T\text{-}\underline{\lim}(h_n) \leq h.$$

Il en résulte (III,7-3) que

$$(t'\text{-}\overline{\lim}(h_n^*))^* \leq T\text{-}\underline{\lim}(h_n) \leq h$$

donc que

$$(1) \quad t'\text{-}\overline{\lim}(h_n^*) \geq h^*.$$

Comme

$$(2) \quad \alpha_n = -h_n^*(0)$$

en combinant (1) et (2), on obtient

$$(3) \quad \limsup_n (\alpha_n) \leq \alpha.$$

Nous allons donc chercher des conditions pour que

$$(4) \quad \liminf_n(\alpha_n) \geq \alpha.$$

La condition la plus naturelle qu'il est possible de déduire des résultats du chapitre IV est que la suite des solutions vérifie une propriété de compacité ; c'est la suivante :

PROPOSITION 1

Soient  $f$  et  $g$  deux éléments de  $\Gamma_o(E)$  tels que  $f+g \in \Gamma_o(E)$ ,  $(f_n)$  et  $(g_n)$  deux suites d'éléments de  $\Gamma_o(E)$  vérifiant

$$T\text{-}t\text{-}\lim(f_n) = f$$

$$T\text{-}t\text{-}\lim(g_n) = g$$

$$T\text{-}t\text{-}\lim(h_n) = h.$$

Alors si on suppose la suite  $(h_n)$   $t$ -propre, une condition suffisante pour que  $\lim_n(\alpha_n) = \alpha$  est que la suite  $(S_n)$  soit  $t$ -propre.

Démonstration

On sait déjà que puisque  $T\text{-}\lim(h_n) \leq h$ , (3) a lieu. Il reste donc à prouver que moyennant les hypothèses faites,  $\liminf_n(\alpha_n) \geq \alpha$ .

Comme  $t\text{-}\overline{\lim}(h_n) \geq h$  et que par hypothèse  $(h_n)$  est  $t$ -propre, on a (III,7-2)

$$(t\text{-}\overline{\lim}(h_n))^* \geq T'\text{-}\underline{\lim}(h_n^*)$$

et il vient

$$T'\text{-}\underline{\lim}(h_n^*) \leq h^*.$$

En vertu de (2), on aura démontré (4) si

$$(5) \quad T'\text{-}\underline{\lim}(h_n^* + \Psi_0) \leq T'\text{-}\underline{\lim}(h_n) + \Psi_0$$

où  $\Psi_0$  est l'indicatrice de l'origine.

Puisque la suite  $(S_n)$  est supposé t-propre, il existe un ensemble  $Q_0$ , compact et qu'on peut supposer équilibré et convexe (propriété (E.C)), tel qu'à partir d'un certain rang

$$(6) \quad S_n \cap Q_0 \neq \emptyset.$$

Soit  $q'_0 \in \Gamma_0(E')$  la semi-norme continue sur  $E'$  telle que  $q'^*$  soit l'indicatrice de  $Q_0$ . Pour toute semi-norme  $p'$  continue sur  $E'$ , on a en posant  $q'^* = p'^* \vee q'_0^*$  ( $q'^*$  est l'indicatrice d'un compact) et en tenant compte de (6)

$$(7) \quad q'^* \vee h_n \leq p'^* + \alpha_n.$$

On remarque que (7) n'est autre que la propriété  $\text{Cod}^*(p', q')$  pour les fonctionnelles  $h_n^*$  et  $\Psi_0$  (IV,6.2).

Comme  $h_n \vee \Psi_E$ , qui est le polaire de  $h_n^* + \Psi_0$ , appartient à  $\Gamma(E)$ , on en déduit que  $h^*$  et  $\Psi_0$  vérifient la propriété  $\text{Cod}(p', q')$ .

D'autre part, la suite  $(h_n^* + \Psi_0)$  est T'-correcte : ceci résulte (remarques 1 et 2, IV,6-3) du fait que  $(h_n)$  est t-propre et que  $(\Psi_0)^n$  est évidemment une suite T'-correcte.

Enfin,  $T'\text{-}\underline{\lim}(h_n^* + \Psi_0)$  n'est pas identiquement égale à  $+\infty$ , c'est-à-dire que  $\liminf(\alpha_n) > -\infty$ , parce que compte-tenu du fait que  $(S_n)^n$  est t-propre ceci contredirait l'hypothèse  $t\text{-}\overline{\lim}(h_n) \geq h$  et  $h \in \Gamma_0(E)$ .

D'où (5) et le résultat, en appliquant la proposition IV,6-3.

Remarques

- 1) Signalons que dans le théorème A, partie b) de Mosco (1969), l'hypothèse que  $(S_n)$  est  $\sigma$ -propre apparaît explicitement.
- 2) L'hypothèse que  $(S_n)$  est  $t$ -propre suffit bien sûr à assurer que  $(h_n)$  est  $t$ -propre.
- 3) L'hypothèse que  $(S_n)$  est  $t$ -propre entraîne en particulier que  $t\text{-}\lim(S_n) \neq \emptyset$ . Nous verrons en 1.4 que ceci assure que  $S(f,g) = S(h) \neq 0$ .

Voici maintenant une condition suffisante pour que la suite  $(S_n)$  soit  $t$ -propre.

PROPOSITION 2

Soient  $(f_n)$  et  $(g_n)$  deux suites d'éléments de  $\Gamma_0(E)$ ,  $f$  et  $g$  dans  $\Gamma_0(E)$  tels que

$$t\text{-}\overline{\lim}(f_n) \geq f$$

$$t\text{-}\overline{\lim}(g_n) \geq g$$

On suppose que  $(E)$  étant muni de la topologie  $t$  :

(P1) : la suite  $(f_n)$  est uniformément inf-localement compacte, i.e. il existe un réel  $\rho$ , un ensemble  $U$  ouvert dans  $E$ , un ensemble  $K$  compact dans  $E$  tels qu'à partir d'un certain rang,  $f_n$  vérifie

$$- \text{il existe } \rho_1 < \rho \text{ tel que } f_n \leq (\rho_1) \cap U \neq \emptyset$$

$$- f_n \leq (\rho) \cap U \subset K.$$

(P2) : la suite  $(g_n)$  est  $t$ -propre

$$(P3) : - \limsup_n (\alpha_n) < +\infty.$$

(P4) : les fonctionnelles asymptotes de  $f$  et  $g$  vérifient  $f_\infty(x) + g_\infty(x) > 0, \forall x \in E, x \neq 0$ .

alors la suite  $S_n = S(f_n, g_n)$  est  $t$ -propre.

Démonstration

Remarquons que (P1) implique en particulier que  $f_n$  est t-propre.  
Soit pour tout entier  $n$  ( $n$  assez grand peut être),  $z_n \in U$  tel que

$$f_n(z_n) = \rho_n \leq \rho_1 < \rho.$$

Au cause de l'hypothèse de compacité faite sur  $K$ , il existe un voisinage ouvert  $U_0$  de  $0$ , tel que

$$z_n + U_0 \subset U.$$

En sorte que (P1) implique qu'on peut trouver  $z_n \in K$  et  $U_0 \in V_t(0)$  tels que

$$(1) \quad (f_n \leq (\rho) - z_n) \cap U_0 \subset K - K = K_1$$

Posons  $B_n = h_n \leq (\beta_n)$ , où  $\beta_n \geq \alpha_n$  pour tout  $n$  et  $\liminf_n(\beta_n) = \liminf_n(\alpha_n)$ .

Soit alors en supposant  $B_n \neq \emptyset$  (ce qui a lieu en particulier si  $\beta_n > \alpha_n$ ),

$$\mu_n = \left\{ \frac{1}{n} + \text{Inf } \mu ; \mu \geq \rho, B_n \cap f_n \leq (\mu) \neq \emptyset \right\} ;$$

Lorsque  $B_n \neq \emptyset$ , le  $\mu_n$  ainsi défini est fixé.

En conservant les notations précédentes, nous allons mettre la partie centrale de la démonstration sous la forme d'un lemme que nous aurons l'occasion d'utiliser deux fois.

LEMME

Soient  $(f_n)$  et  $(g_n)$  vérifiant (P1), (P2) et (P3). On suppose  $B_n \neq \emptyset$  (à partir d'un certain rang). Alors si  $(B_n)$  n'est pas t-propre  $f$  et  $g$  ne vérifient pas (P4).

Démonstration du lemme

Posons  $A_n = f_n^{\leq}(\mu_n)$ . La suite  $(A_n)$  vérifie :

$$(2) \quad A_n - z_n \subset \frac{1}{\lambda_n} (f_n^{\leq}(\rho) - z_n),$$

où  $\lambda_n$  est défini par

$$(3) \quad \rho = \lambda_n \mu_n + (1 - \lambda_n) \rho_n.$$

En effet, c'est déjà vrai si  $\mu_n = \rho$ . Lorsque  $\mu_n > \rho$ , tout  $x \in A_n$  vérifie l'inégalité de convexité

$$f_n(\lambda_n x + (1 - \lambda_n) z_n) \leq \lambda_n \mu_n + (1 - \lambda_n) \rho_n = \rho.$$

Donc

$$\lambda_n A_n + (1 - \lambda_n) z_n \subset f_n^{\leq}(\rho)$$

et par suite

$$\lambda_n (A_n - z_n) \subset f_n^{\leq}(\rho) - z_n$$

d'où l'inclusion (2).

De (2), il résulte que

$$(A_n - z_n) \cap \frac{1}{\lambda_n} U_0 \subset \frac{1}{\lambda_n} [(f_n^{\leq}(\rho) - z_n) \cap U_0]$$

donc, compte tenu de (1),

$$(A_n - z_n) \cap \frac{1}{\lambda_n} U_0 \subset \frac{1}{\lambda_n} K_1.$$

Deux cas à examiner selon que  $\liminf(\lambda_n)$  est nul ou pas, c'est-à-dire à cause de (3) et du fait que  $\rho_n \leq \rho_1 < \rho_n^n$ , selon que  $\limsup(\mu_n)$  est infini ou fini.

lère étape

On suppose  $\limsup_n (\mu_n) < +\infty$ .

A partir d'un certain rang, on a donc

$$(A_n - z_n) \cap \frac{1}{\lambda} U_0 \subset \frac{1}{\lambda} K_1$$

pour un quelconque des  $\lambda$  tels que

$$0 < \lambda < \liminf_n (\lambda_n).$$

$(B_n)$  n'étant pas  $t$ -propre, pour tout entier  $k$ , il existe  $n_k$  tel que

$$(4) \quad (B_{n_k} - z_{n_k}) \cap \frac{k}{\lambda} K_1 = \emptyset.$$

Soit  $K_0$  le complémentaire dans  $K_1$  de l'intérieur de  $\frac{1}{2\lambda} U_0$ ;  $K_0$  est un ensemble compact qui ne contient pas 0. Nous allons montrer qu'il existe un point de  $K_0$  où la somme  $f_\infty + g_\infty$  prend la valeur 0.

Toute demi-droite issue de 0 et contenant un point de  $(A_{n_k} \cap B_{n_k}) - z_{n_k} = C_k$

( $C_k$  est évidemment pas vide) coupe  $K$ .

A tout  $x \in C_k$  on associe le réel  $\xi_k(x)$  défini par

$$\xi_k(x) = \max_{\xi, x \in K} \{\xi\};$$

soit alors  $y = \xi_k(x) \cdot x \in K$ ; on pose

$$v_k(y) = \inf_{\substack{x \in C_k \\ y = \xi_k(x) \cdot x}} \left( \frac{1}{\xi_k(x)} \right).$$

On note  $\mathcal{Y}$  le filtre sur  $K_0$  dont une base est constituée par des ensembles

$$\bigcup_{\ell > k} \bigcup_{x \in C_\ell} \xi(x) \cdot x.$$

Soit  $Z$  le filtre élémentaire sur  $K$  associé à  $(z_{n_k})$  ; enfin, comme  $(g_n)$  est  $t$ -propre, il existe un compact.  $K'$  est un réel  $\rho^k$  tel que pour tout  $n$  assez grand, il existe  $z'_n \in K'$  tel que

$$g_n(z'_n) \leq \rho^k.$$

Soit alors  $Z'$  le filtre élémentaire sur  $K'$  associé à  $(z'_{n_k})$ .

On pose

$$(5) \quad a = \liminf_{k, Y, Z, Z'} \left( \frac{f_{n_k}(z + v_k(y)) - f_{n_k}(z)}{v_k(y)} + \frac{g_{n_k}(z' + v_k(y)(y + \frac{z-z'}{v_k(y)})) - g_{n_k}(z')}{v_k(y)} \right)$$

On a, tenant compte de (4) :

$$a \leq \liminf_k \left( \frac{\beta_{n_k} - \rho'' - \rho'''}{k} \right)$$

si

$$\rho'' = \inf_{x \in K} f(x) \quad , \quad \rho''' = \inf_{x \in K'} g(x)$$

et donc, à cause de (P3)

$$(6) \quad a \leq 0.$$

On peut donc trouver  $y \in K_0$ ,  $z \in K$  et  $z' \in K'$  et  $Y_1, Z_1$  et  $Z'_1$  des filtres sur  $K_0, K$  et  $K'$  respectivement plus fins que  $Y, Z$  et  $Z'$  et qui convergent vers  $y, z$  et  $z'$ , tels que (5) ait lieu, où  $Y_1, Z_1$  et  $Z'_1$  ont remplacé  $Y, Z$  et  $Z'$ .

Revenant à la définition (I,4.4) de la fonctionnelle asymptote, on vérifie que ceci entraîne que

$$f_\infty(y) + g_\infty(y) \leq a \leq 0.$$

donc que  $f$  et  $g$  ne vérifient pas (P4).

2ème étape.

Supposons que  $\limsup_n (\mu_n) = +\infty$ . Soit  $(\mu_{n_k})$  une sous-suite telle que

$$\lim_k (\mu_{n_k}) = +\infty.$$

Il n'existe aucun compact coupant une infinité de  $B_{n_k}$ , non pas parce que  $B_n$  n'est pas t-propre, mais parce que sinon on aboutirait à contredire le fait que  $g \in \Gamma_0(E)$  (en effet, il existe un point de  $C_{n_k}$  où  $g_{n_k}$  prend une valeur inférieure à  $\beta_{n_k} - \mu_{n_k} + \frac{1}{n_k}$ , or on a  $\limsup_k (\beta_{n_k} - \mu_{n_k}) = -\infty$ ).

M étant un réel quelconque, et  $x_{n_k}$  un point de  $C_k$  tel que

$$g_{n_k}(x_{n_k}) \leq \beta_{n_k} - \mu_{n_k} + \frac{1}{n_k}$$

on pose

$$(7) \quad y_{n_k} = \left(1 - \frac{M}{\mu_{n_k}}\right) z_{n_k} + \frac{M}{\mu_{n_k}} x_{n_k}$$

$$(8) \quad y'_{n_k} = \left(1 - \frac{M}{\mu_{n_k}}\right) z'_{n_k} + \frac{M}{\mu_{n_k}} x_{n_k}.$$

Il est clair que

$$(9) \quad f_{n_k}(y_{n_k}) \leq \rho + M$$

$$(10) \quad g_{n_k}(y'_{n_k}) \leq \rho' + M \cdot \frac{\beta_{n_k} - \mu_{n_k} + \frac{1}{n_k}}{\mu_{n_k}}.$$

De (9) il résulte que  $y_{n_k} - z_{n_k}$  est contenu dans un ensemble compact (homothétique de  $K_1$ ).

S'il existe une valeur d'adhérence de  $(y_{n_k} - z_{n_k})$  qui est différente de 0 alors comme dans la 1ère étape on montre qu'on aboutit à la contradiction de (P4).

Si, dans l'autre cas,  $(y_{n_k} - z_{n_k})$  converge vers 0, alors compte tenu de (7) et (8),  $(y'_{n_k} - z'_{n_k})$  converge aussi vers 0, parce que  $\lim_k (\mu_{n_k}) = +\infty$ .

Il existe donc un point  $z' \in K'$  tel que

$$g(z') \leq \rho' - M.$$

M pouvant être choisi arbitrairement grand, ceci est en contradiction avec le fait que  $g \in \Gamma_0(E)$ .

D'où le lemme.

Fin de la démonstration de la proposition

### 3ème étape

A partir d'un certain rang, les ensembles  $S_n$  ne sont pas vides.

Pour n fixé, posons  $B_m = \{x \in E ; f_n(x) + g_n(x) \leq \beta_m\}$  où  $(\beta_m)$  est une suite décroissante convergeant vers  $\alpha_n$ .

Si n est choisi assez grand,  $f_n$  et  $g_n$  vérifient les hypothèses du lemme. Du lemme (la 1ère étape suffit) appliqué aux suites stationnaires de terme général  $f_{nm} = f_n$  et  $g_{nm} = g_n$  on déduit qu'il existe  $y_n \in K_0$  tel que

$$(11) \quad (f_n)_\infty(y_n) + (g_n)_\infty(y_n) = 0.$$

Donc supposer qu'il existe une infinité d'indices  $n_k$ , tels que  $S_{n_k} = \emptyset$ , revient à supposer que

$$(f_{n_k})_\infty(y_{n_k}) + (g_{n_k})_\infty(y_{n_k}) = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

d'où résulte, comme on le vérifie facilement, qu'il existe  $y \in K_0$ , donc  $y \neq 0$ , tel que

$$f_\infty(y) + g_\infty(y) = 0,$$

ce qui est impossible en vertu de (P4).

4ème étape

Ayant ainsi montré que  $S_n \neq \emptyset$  dès que  $n$  est assez grand, on applique le lemme aux deux suites  $(f_n)$  et  $(g_n)$  en choisissant pour  $(B_n)$  les ensembles  $S_n$  dont on vient de montrer qu'ils ne sont pas vides à partir d'un certain rang.

D'où le résultat.

Remarque :

La démonstration précédente ressemble à celle qu'on trouve dans Dieudonné (1966), avec quelques difficultés techniques supplémentaires dues au fait qu'ici on considère des suites  $(f_n)$  et  $(g_n)$ .

1-4 - CONVERGENCE DE LA SUITE  $(S_n)$

Les hypothèses

$$(1) \quad t\text{-}\overline{\lim}(f_n) \geq f$$

$$(2) \quad t\text{-}\overline{\lim}(g_n) \geq g$$

$$(3) \quad \limsup_n(\alpha_n) \leq \alpha$$

entraînent que

$$(4) \quad t\text{-}\overline{\lim}(S_n) \subset S.$$

En effet de (1) et (2) suit déjà que

$$(5) \quad t\text{-}\overline{\lim}(h_n) \geq h.$$

L'inclusion (4) résulte de (3) et (5) en comparant  $S_n$  à l'intersection dans  $E \times \mathbb{R}$  de l'épigraphe de  $h_n$  avec

$$\{(x, \rho) \in E \times \mathbb{R} ; \rho \leq \alpha_n\}.$$

Compte tenu de (4), pour que  $T\text{-}\lim(S_n) = S$  il faut et il suffit que

$$(6) \quad T\text{-}\lim(S_n) \supset S.$$

C'est l'inclusion (6) que nous allons examiner dans ce paragraphe.

D'abord, de la remarque que

$$S_n = \partial h_n^*(0)$$

résulte que (6) est un cas particulier de

$$T\text{-}\lim \partial h_n^*(x'_n) \supset \partial h^*(x').$$

L'ensemble  $\partial h_n^*(x'_n)$  a le "même comportement" que l'intersection dans  $E \times \mathbb{R}$  de l'épigraphe de  $h_n$  avec l'ensemble des points de  $E \times \mathbb{R}$  situés au dessous du graphe de  $x \mapsto \langle x, x'_n \rangle - h_n^*(x'_n)$ . Le problème est donc du domaine du chapitre IV.

Ces deux ensembles convexes sont les termes généraux de deux suites qui ne vérifient évidemment pas les conditions d'application de IV-2. Nous allons donc utiliser IV-6.

Rappelons d'abord quelques définitions.

Si  $\Gamma$  désigne l'ensemble des fonctionnelles à domaine dans  $[0, +\infty[$  à valeurs dans  $[0, +\infty]$ , convexes s.c.i et nulles en 0, on pose

$$\Gamma_U = \{\varphi \in \Gamma ; \varphi(t) > 0, \quad \forall t > 0\}.$$

$$\Gamma_L = \{\varphi \in \Gamma ; \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(t)}{t} = 0\}.$$

L'involution sur  $\Gamma$  définie par

$$\varphi \mapsto (\varphi^* : x \in [0, +\infty[ \mapsto \sup_{t \geq 0} (x \cdot t - \varphi(t)))$$

envoie  $\Gamma_U$  sur  $\Gamma_L$ .

PROPOSITION

Soit  $(h_n)$  une suite d'éléments de  $\Gamma_0(E)$ ,  $h \in \Gamma_0(E)$  tels que

$$T\text{-}\underline{\lim}(h_n) \leq h$$

Soit d'autre part  $(x'_n)$  une suite de points de  $E'$  et  $(a_n = a(x'_n; \cdot))$  la suite de fonctions affines continues sur  $E$  définies par

$$a_n(x) = a(x'_n; x) = \langle x, x'_n \rangle - h_n^*(x'_n).$$

On suppose que

$$(1) \quad t'\text{-}\overline{\lim}(\{x'_n\}) \neq \emptyset$$

et que

$$(2) \quad [T\text{-}\underline{\lim}(-a_n)](x) = \sup_{x' \in t'\text{-}\overline{\lim}(\{x'_n\})} -a(x'; x)$$

Alors si toute semi-norme  $p$ , continue sur  $E$ , il existe  $\gamma \in \Gamma_U$  telle qu'à partir d'un certain rang

$$(3) \quad h_n - a_n \geq (\gamma \circ p) \nabla \Psi_{\partial h_n^*(x'_n)}$$

on a :

$$(4) \quad T\text{-}\underline{\lim} \partial h_n^*(x'_n) \supset \bigcap_{x' \in t'\text{-}\overline{\lim}(\{x'_n\})} \partial h^*(x').$$

Démonstration

On écarte d'abord le cas évident où  $\bigcap_{x' \in t'-\overline{\lim}(\{x'_n\})} \partial h^*(x') = \emptyset$ , c'est-à-dire qu'on suppose qu'il existe  $y \in E$  tel que  $t'-\overline{\lim}(\{x'_n\}) \subset \partial h(y)$ .  
 Les deux suites  $(h_n)$  et  $(-a_n)$  vérifient les conditions d'application de la proposition IV-2 ; on a donc pour tout  $x \in E$

$$h(x) + \sup_{x' \in t'-\overline{\lim}(\{x'_n\})} (-a(x'; x)) \geq [T'-\underline{\lim}((\gamma \circ p) \nabla \Psi_{\partial h_n^*(x'_n)})](x).$$

Si  $x \in \bigcap_{x' \in t'-\overline{\lim}(\{x'_n\})} \partial h^*(x')$ , i.e. si

$$h(x) - \langle x, x' \rangle + h^*(x') = 0, \quad \forall x' \in t'-\overline{\lim}(\{x'_n\})$$

il vient

$$0 \geq [T'-\underline{\lim}((\gamma \circ p) \nabla \Psi_{\partial h_n^*(x'_n)})](x) ;$$

ce qui signifie que pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $n(\varepsilon)$  tel que pour  $n \geq n(\varepsilon)$

$$(5) \quad d_p(x, \partial h_n^*(x'_n)) \leq \varepsilon.$$

(5) étant vérifié pour toute semi-norme  $p$ , (4) en résulte.

COROLLAIRE 1

Soit  $(h_n)$  une suite d'éléments de  $\Gamma_0(E)$  et  $h \in \Gamma_0(E)$  tels que

$$T-\underline{\lim}(h_n) \leq h$$

On suppose que

$$\lim_n(\alpha_n) = \alpha.$$

et que pour toute semi-norme  $p$  continue sur  $E$ , il existe  $\gamma \in \Gamma_U$  telle que

$$(S_1) \quad h_n(x) - \alpha_n \geq \gamma d_p(x, S_n).$$

Alors

$$T\text{-}\underline{\lim}(S_n) \supset S.$$

Démonstration

On applique la proposition précédente, avec  $x'_n = 0$  pour tout  $n$  ; l'hypothèse (1) est donc vérifiée. D'autre part :

$$T\text{-}\underline{\lim}(-\alpha_n) = \limsup_n(-\alpha_n) = -\liminf_n(\alpha_n) = -\alpha$$

ce qui assure (2).

Enfin les propriétés (3) et  $(S_1)$  se correspondent, en vertu de la remarque que :

$$S_n = \partial h_n^*(0)$$

$$S = \partial h^*(0).$$

d'où le résultat.

COROLLAIRE 2

Soient  $(f_n)$  et  $(g_n)$  deux suites d'éléments de  $\Gamma_0(E)$ ,  $f$  et  $g \in \Gamma_0(E)$  tels que

$$T\text{-}\underline{\lim} f_n \leq f$$

$$T\text{-}\underline{\lim} g_n \leq g$$

On suppose que pour tout  $n$  (assez grand), il existe  $x'_n \in E'$  tel que

$$f_n^*(x'_n) + g_n^*(-x'_n) = -\alpha_n,$$

que la suite  $(\{x'_n\})$  est  $t'$ -propre et que

$$(S'_2) \left\{ \begin{array}{l} \text{pour toute semi-norme } p \text{ continue sur } E, \text{ il existe } \gamma \in \Gamma_U \text{ tel que} \\ f_n(x) - \langle x, x'_n \rangle + f_n^*(x'_n) \geq \gamma \circ d_p(x, \partial f_n^*(x'_n)), \quad \forall x \in E \end{array} \right.$$

$$(S''_2) \left\{ \begin{array}{l} \text{pour toute semi-norme } p \text{ continue sur } E, \text{ il existe } \gamma \in \Gamma_U \text{ tel que} \\ g_n(x) - \langle x, -x'_n \rangle + g_n^*(-x'_n) \geq \gamma \circ d_p(x, \partial g_n^*(-x'_n)), \quad \forall x \in E. \end{array} \right.$$

Alors

$$T\text{-}\underline{\lim} \partial f_n^*(x'_n) \supset S$$

$$T\text{-}\underline{\lim} \partial g_n^*(-x'_n) \supset S.$$

Démonstration

On applique la proposition précédente aux deux suites  $(f_n)$  et  $(g_n)$ . Le seul point à vérifier est (2).

Les  $x'_n$  sont, pour tout  $n$ , contenu par hypothèse dans un ensemble compact  $K$ .

Soit  $x' \in t'\text{-}\overline{\lim}(\{x'_n\})$ ,  $\mathcal{F}$  un filtre sur  $K$  convergeant vers  $x'$ .

$$\liminf_{n, \mathcal{F}} (f_n^*) = t'\text{-}\overline{\lim}(\Psi_{x'_n, f_n^*(x'_n)})(x') = a.$$

On a

$$a = \sup_{M \in \mathcal{F}} \inf_{x'_n \in M} f_n^*(x'_n).$$

On en déduit que

$$b = \alpha - a = \inf_{M \in \mathcal{F}} \sup_{x'_n \in M} g_n^*(-x'_n).$$

Des inégalités (définition de  $t'\text{-}\overline{\lim}(f_n^*)$  et  $t'\text{-}\overline{\lim}(g_n^*)$ ) :

$$a \geq f^*(x')$$

$$b \geq g^*(-x'),$$

valables puisque (III,7-3)

$$t'\text{-}\overline{\lim}(f_n^*) \geq f^*$$

$$t'\text{-}\overline{\lim}(g_n^*) \geq g^*,$$

suit qu' en réalité :

$$a = f^*(x'), \quad b = g^*(-x').$$

Donc pour tout  $F$  sur  $K$  convergeant vers  $x' \in t'\text{-}\overline{\lim}(\{x'_n\})$  on a :

$$f^*(x') = \sup_{M \in F} \inf_{x'_n \in M} f_n^*(x'_n) = \inf_{M \in F} \sup_{x'_n \in M} f_n^*(x'_n).$$

$$g^*(-x') = \sup_{M \in F} \inf_{x'_n \in M} g_n^*(-x'_n) = \inf_{M \in F} \sup_{x'_n \in M} g_n^*(-x'_n).$$

Il en résulte que

$$[t'\text{-}\overline{\lim}(\Psi_{-x'_n}, -f_n^*(x'_n))](x') = -f^*(x')$$

$$[t'\text{-}\overline{\lim}(\Psi_{+x'_n}, -g_n^*(-x'_n))](x') = -g^*(-x').$$

Maintenant, par polarité,  $\{x'_n\}$  étant  $t$ -propre (III,7.2) il vient :

$$[T\text{-}\underline{\lim}(\langle -, -x'_n \rangle + f_n^*(x'_n))](x) = \sup_{x' \in t'\text{-}\overline{\lim}(\{x'_n\})} (-\langle x, x' \rangle + f_n^*(x')).$$

Même chose pour la suite  $(g_n^*)$ .

Le résultat vient maintenant du fait que :

$$\partial f^*(x') \supset S, \quad \forall x' \in t'\text{-}\overline{\lim}(\{x'_n\})$$

puisque un tel  $x'$  est tel que (cf. I, 7.2)

$$f^*(x') + g^*(-x') = -\alpha.$$

COROLLAIRE 3

Soient  $(f_n)$  et  $(g_n)$  deux suites d'éléments de  $\Gamma_0(E)$ ,  $f$  et  $g \in \Gamma_0(E)$ , tels que

$$T\text{-}\underline{\lim}(f_n) \leq f$$

$$T\text{-}\overline{\lim}(g_n) \leq g$$

On suppose que pour tout  $n$  à partir d'un certain rang, il existe  $x'_n \in E'$  tel que

$$f_n^*(x'_n) + g_n^*(-x'_n) = -\alpha_n$$

et que la suite  $(x'_n)$  est  $t'$ -propre.

Alors toutes les suites  $(A_n)$  et  $(B_n)$  de parties convexes et fermées vérifiant

$$A_n \supset \partial f_n^*(x'_n)$$

$$B_n \supset \partial g_n^*(-x'_n)$$

et vérifiant

pour toute semi-norme  $p$  continue sur  $E$ , il existe  $\gamma \in \Gamma_U$  telle que

(S'<sub>3</sub>)

$$f_n(x) - \langle x, x'_n \rangle + f_n^*(x'_n) \geq \gamma \circ d_p(x, A_n), \quad \forall x \in \text{dom}(f_n + g_n).$$

pour toute semi-norme  $p$  continue sur  $E$ , il existe  $\gamma \in \Gamma_U$ , telle que

(S''<sub>3</sub>)

$$g_n(x) - \langle x, -x'_n \rangle + g_n^*(-x'_n) \geq \gamma \circ d_p(x, B_n), \quad \forall x \in \text{dom}(f_n + g_n).$$

sont telles que

$$T\text{-}\underline{\lim}(A_n) \supset S$$

$$T\text{-}\underline{\lim}(B_n) \supset S.$$

1-5 - EN RESUME

PROPOSITION

Soit  $h \in \Gamma_o(E)$ . S'il existe  $f$  et  $g$  dans  $\Gamma_o(E)$ ,  $(f_n)$  et  $(g_n)$  deux suites d'éléments de  $\Gamma_o(E)$  vérifiant

$$h = f+g$$

$$T\text{-}t \lim(f_n) = f$$

$$T\text{-}t \lim(g_n) = g$$

et tels que les suites  $(f_n)$ ,  $(g_n)$  et  $(h_n)$  soient  $t$ -propres et que les suites  $(f_n^*)$  et  $(g_n^*)$  soient  $t'$ -propres, et si

(A1) Le couple  $(f, g)$  est uni.

(A2) Il existe un ensemble ouvert dans  $E$  (muni de  $T$ ) dans lequel à partir d'un certain rang les  $f_n$  sont uniformément majorés (ou les  $g_n$ ).

(P1) La suite  $(f_n)$  (ou la suite  $(g_n)$ ) est uniformément inf-localement compacte ( $E$  muni de  $t$ ).

(P2)  $f_\infty(x) + g_\infty(x) > 0$  si  $x \in E$ ,  $x \neq 0$ .

enfin si l'une des conditions suivantes est vérifiée

(S) la suite de terme général  $h_n = f_n + g_n$  vérifie l'hypothèse (S<sub>1</sub>) du corollaire 1.

(S', S'') il existe (A<sub>n</sub>) et (B<sub>n</sub>) telles que  $A_n \supset \partial f_n^*(x'_n)$ ,  $B_n \supset \partial g_n^*(-x'_n)$   
 $A_n \cap B_n = \partial f_n^*(x'_n) \cap \partial g_n^*(-x'_n)$  vérifiant les hypothèses S'<sub>3</sub> et S''<sub>3</sub>  
 du corollaire 3 et la propriété

$T\text{-}\lim(A_n \cap B_n) \supset T\text{-}\lim(A_n) \cap T\text{-}\lim(B_n)$  pour une certaine suite  
 $(x'_n)$  t'-propre telle que  $f_n^*(x'_n) + g_n^*(-x'_n) = -\alpha_n$ ,

alors

$$T\text{-}t \lim(h_n) = h$$

$$\lim(\alpha_n) = \alpha$$

$$T\text{-}t \lim(S_n) = S.$$

### Démonstration

Elle résulte des paragraphes 1.2, 1.3 et 1.4. Il faut cependant montrer qu'il existe une suite  $(x'_n)$  telle que

$$f_n^*(x'_n) + g_n^*(x'_n) = -\alpha_n$$

qui soit t'-propre.

Ceci découle de la proposition 2 du paragraphe 1.3 appliquée aux suites de terme général  $f_n^*$  et  $x' \mapsto g_n^*(-x')$ .

Des propriétés (A1) et (A2), on déduit en effet par polarité qu'elles vérifient les conditions d'application de cette proposition.

## 2 - APPROXIMATION D'UN PROBLEME PAR DES PROBLEMES EN DIMENSION FINIE

Nous allons exposer rapidement en quoi consiste l'idée de ces méthodes du type Ritz-Galerkin ou approximation discrète. Pour plus de détail voir par exemple Aubin (1967) et aussi Mosco (1969).

Nous supposons que  $E$  est un espace de Banach réflexif,  $E'$  son dual, que sur  $E$  les topologies  $T$  et  $t$  sont la forte et la faible respectivement.

L'espace  $E$  étant séparable, on suppose qu'on a  $(E_n)$  une suite de sous-espaces vectoriels de  $E$  de dimension finie tels que

$$\tau\text{-}\underline{\lim}(E_n) \supset E$$

donc évidemment telle que

$$\tau.\sigma\text{-}\underline{\lim}(E_n) = E.$$

Soit d'autre part pour tout  $n$ ,  $F_n$  un sous-espace de  $E$ , supplémentaire topologique de  $E_n$

$$E = E_n \oplus F_n.$$

On suppose que  $\sigma\text{-}\overline{\lim}(F_n) \subset \{0\}$ .

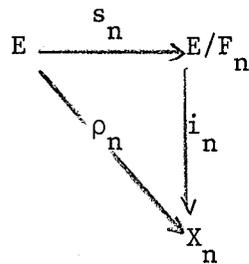
On considère aussi  $X_n$  un espace normé isomorphe à  $E/F_n$  (donc à  $E_n$ ).

Si maintenant  $[f, g]$  est un problème dans  $E$ , on lui associe  $[\varphi_n, \chi_n]$  un problème dans  $X_n$ , dit problème approché.

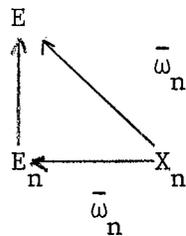
Pour comparer  $[f, g]$  et  $[\varphi_n, \chi_n]$  et leurs éléments solutions, il faut pouvoir comparer  $E$  et  $X_n$  d'une part, puis  $\Gamma_0(E)$  et  $\Gamma_0(X_n)$  d'autre part.

Soit  $s_n : E \rightarrow E/F_n$  la surjection canonique ; on identifie les éléments de  $E/F_n$  et  $X_n$  et on pose

$$\rho_n = i_n \circ s_n.$$



Pour remonter de  $X_n$  dans  $E$ , on se donne une application  $\bar{\omega}_n$  de  $X_n$  dans  $E$ , plus précisément de  $X_n$  dans  $E_n$  :



La comparaison de  $\Gamma_o(E)$  et  $\Gamma_o(X_n)$  peut maintenant se faire de façon assez naturelle.

D'abord une restriction  $R_n$  envoyant  $\Gamma_o(E)$  dans  $\Gamma_o(X_n)$ , définie de la façon suivante : Pour  $f \in \Gamma_o(E)$ , on pose

$$\varphi = R_n(f)$$

si

$$\varphi \circ \rho_n = (f \nabla \Psi_{F_n})^\Gamma$$

où le second membre est la  $\Gamma$ -régularisée (I,2.3 d)) de  $f \nabla \Psi_{F_n}$ .

Ensuite un prolongement  $P_n : \Gamma_o(X_n) \rightarrow \Gamma_o(E)$  qui à  $\varphi$  fait correspondre  $f \in \Gamma_o(E)$  telle que

$$f \circ \bar{\omega}_n = \varphi$$

avec la condition supplémentaire

$$\text{dom}(f) \subset E_n.$$

Ainsi au problème  $[\varphi_n, \chi_n]$  nous pouvons associer le problème  $[P_n(\varphi_n), P_n(\chi_n)]$ , la comparaison de  $[f, g]$  et  $[\varphi_n, \chi_n]$  se faisant au moyen de ce prolongement.

Notons  $p_n : E \rightarrow E_n$  la projection de  $E$  sur  $E_n$  parallèlement à  $F_n$ .  
On considère les hypothèses

$$(H1) \quad \bar{\omega}_n \circ \rho_n - p_n \text{ converge simplement vers } 0 \text{ (E fort)}$$

$$(H2) \quad {}^t(\omega_n \circ \rho_n) - {}^t p_n \text{ converge simplement vers } 0 \text{ (E' fort).}$$

PROPOSITION

Si  $\liminf_n \theta(E_n, F_n) > 0$ , les propriétés suivantes sont vérifiées :

a)  $(p_n)$  et, si (H1) a lieu,  $(\bar{\omega}_n \circ \rho_n)$ , convergent simplement vers l'identité sur  $E$ .

b) tout  $f \in \Gamma_o(E)$ , telle que

$$f \nabla \Psi_{F_n} \in \Gamma_o(E) \text{ et } \sigma\text{-}\overline{\lim}(f \nabla \Psi_{F_n}) \geq f$$

vérifie, moyennant (H1) :

$$\tau\text{-}\underline{\lim}(P_n \circ R_n(f)) \leq f$$

c) De (H2) résulte

$$\sigma\text{-}\overline{\lim}(P_n \circ R_n(f)) \geq f.$$

Démonstration

$\theta(E_n, F_n)$  est la conorme (IV,4.4, remarque 2 du corollaire 2) de

$\theta_n : E_n \rightarrow E/F_n$  ; on vérifie que

$$\|p_n\| = \frac{1}{\theta(E_n, F_n)}$$

Comme  $\tau\text{-}\underline{\text{lim}}(E_n) \supset E$ , si  $x \in E$ , on sait qu'il existe pour tout  $n$ ,  $x_n \in E_n$ , tels que  $x_n \xrightarrow{\tau} x$ . Alors de  $p_n(x_n) = x_n$ , et de l'inégalité

$$\|p_n(x) - p_n(x_n)\| \leq \|p_n\| \|x - x_n\|$$

résulte que

$$p_n(x) \xrightarrow{\tau} x$$

d'où (a).

Soit  $f_n = P_n \circ R_n(f)$  ; on a :

$$f_n \circ \bar{\omega}_n \circ \rho_n = f \nabla \Psi_{F_n}, \quad \text{dom } f_n \subset E_n.$$

Par polarité ceci devient

$$(1) \quad f_n^* = (f \nabla \Psi_{F_n}) \circ {}^t(\bar{\omega}_n \circ \rho_n)$$

Le noyau de  ${}^t(\bar{\omega}_n \circ \rho_n)$  étant  $E_n^\circ$  et son image  $F_n^\circ$ .

Par hypothèse  $\tau\text{-}\sigma\text{-}\underline{\text{lim}}(F_n) = \{0\}$ , donc de l'inégalité

$$\sigma\text{-}\overline{\text{lim}}(f \nabla \Psi_{F_n}) \geq f \nabla \sigma\text{-}\overline{\text{lim}}(\Psi_{F_n})$$

résulte

$$\sigma\text{-}\overline{\text{lim}}(f \nabla \Psi_{F_n}) \geq f.$$

D'autre part de a), on déduit que  $\tau(\bar{\omega}_n \circ \rho_n)$  converge faiblement uniformément sur tout borné fermé (compact faible) de  $E'$  ; donc de (1) résulte

$$(2) \quad \sigma\text{-}\overline{\lim} f_n^* \geq f^*,$$

c'est-à-dire (III,7.4, corollaire)

$$\tau\text{-}\underline{\lim} f_n \leq f.$$

L'inégalité

$$\sigma\text{-}\overline{\lim} (f_n) \geq f,$$

résulte de l'hypothèse (H2) selon laquelle  $\bar{\omega}_n \circ \rho_n$  converge faiblement uniformément sur tout compact faible.

COROLLAIRE 1 (Méthode de Ritz)

Soit  $E$  un espace de Hilbert ;  $E_n$  une suite de sous-espace vectoriel (de dimension finie) telle que

$$\tau\text{-}\sigma\text{-}\lim(E_n) = E.$$

On identifie  $X_n$  à  $E/E_n^\perp$  et à  $E_n$  (en sorte que  $\bar{\omega}_n \circ \rho_n$  s'identifie à  $p_n$ ). Alors pour tout  $f \in \Gamma_0(E)$  tel que :

$$f \vee \Psi_{E_n^\perp} \in \Gamma_0(E) \quad , \quad \sigma\text{-}\overline{\lim}(f \vee \Psi_{E_n^\perp}) \geq f$$

on a

$$\tau\text{-}\sigma \lim P_n \circ R_n(f) = f.$$

Démonstration

En effet, on a (III,3,3)  $\tau\text{-}\sigma \lim(E_n^\perp) = \{0\}$ , et les hypothèses (H1) et (H2) sont vérifiées.

COROLLAIRE 2

Dans le cas général, on suppose que  $\sigma\text{-}\overline{\lim}(F_n) \subset \{0\}$ , que (H1) est vérifiée et que  $\liminf_n \theta(E_n, F_n) > 0$ .

Alors toute suite  $(\varphi_n)$  d'éléments de  $\Gamma_0(X_n)$  qui vérifie

$$P_n(\varphi_n) \geq f \text{ ou } \sigma\text{-}\overline{\lim}(P_n(\varphi_n)) \geq f$$

est telle que

$$\tau\text{-}\sigma \lim P_n(\varphi_n) = f.$$

Soit maintenant  $f \in \Gamma_0(E)$  ; on suppose  $f$  continue dans  $E$  fort, inf-localement compact dans  $E$  faible.

Soit  $g \in \Gamma_0(E)$  telle que

$$\overset{\circ}{\text{dom}} f \cap \text{dom } g \neq \emptyset$$

$$f_\infty(x) + g_\infty(x) > 0 \quad \text{si } x \in E, x \neq 0.$$

Soient d'autre part  $(E_n)$  et  $(F_n)$ ,  $(\bar{\omega}_n)$  et  $(\rho_n)$  vérifiant les hypothèses du corollaire 2.

On considère  $\varphi_n$  et  $\chi_n$  dans  $\Gamma_0(X_n)$  telles que

$$P_n(\varphi_n) = f + \Psi_{E_n}$$

$$\sigma\text{-}\overline{\lim} P_n(\chi_n) \geq g.$$

PROPOSITION

*Si en plus des hypothèses précédentes, les prolongements  $\bar{\omega}_n$  sont stables, i.e. uniformément bornés et si  $(\varphi_n)$  et  $(\chi_n)$  vérifient les conditions de la proposition 1.5, alors*

$$\lim_n (\alpha(\varphi_n, \chi_n)) = \alpha(f, g)$$

$$\tau\text{-}\sigma(\bar{\omega}_n(S(\varphi_n, \chi_n))) = S(f, g).$$

3 - PERTURBATIONS DE CERTAINES INEQUATIONS VARIATIONNELLES SIMPLES

Soit E un espace de Hilbert.

Nous donnons ici un exemple d'un cas important où dans le problème [f.g] la fonctionnelle f est une forme quadratique continue et coercive et g l'indicatrice d'une partie convexe Q. Dans ce cas, on le vérifiera aisément, on a le résultat très simple suivant :

Si  $\tau\text{-}\sigma\text{-}\lim(Q_n) = Q$ , alors  $\lim(\alpha(f, Q_n)) = \alpha(f, Q)$  et  $\tau\text{-}\sigma\text{-}\lim(S(f, Q_n)) = S(f, Q)$ .

---

Des exemples sont donnés dans Mosco (1968). Celui que nous présentons ici est tiré de Lions (\*) ; il concerne un problème de contrôle optimal, avec contrôle sur la frontière.

Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^p$ , de frontière  $\Gamma$ , variété indéfiniment différentiable, de dimension  $p-1$ ,  $\Omega$  étant localement d'un seul côté de  $\Gamma$ . On suppose que l'ensemble des contrôles est donné sur  $\Gamma$ , et appartient à  $L^2(\Gamma)$ . Au contrôle  $u \in L^2(\Gamma)$ , correspond l'état  $y \in H^1(\Omega)$  défini par

$$\forall y \in H^1(\Omega), \int_{\Omega} a_{ij} \frac{\partial y}{\partial t_i} \frac{\partial x}{\partial t_j} dt + a_0 \int_{\Omega} yx dt = \int_{\Omega} fy dt + \int_{\Gamma} uy d\Gamma, \forall y \in H^1(\Omega).$$

si  $a_{ij} = a_{ji}$ ,  $a_{ij} \in C^1(\bar{\Omega})$ ,  $a_0 \in C(\bar{\Omega})$ ,  $\min_{t \in \bar{\Omega}} a_0(t) > 0$

et  $\sum a_{ij}(t) \cdot \xi_i \xi_j \geq k(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_p^2)$ ,  $k > 0$  ;

Cet état étant dans  $H^1(\Omega)$ , on peut l'observer sur une partie  $\Gamma_1$  de  $\Gamma$ , et considérer un coût de la forme :

$$J(u) = \int_{\Gamma_1} |y(u) - z_d|^2 d\Gamma + \varepsilon \int_{\Gamma} |u|^2 d\Gamma, \quad \varepsilon > 0, z_d \in L^2(\Omega).$$

en sorte que la fonctionnelle  $J$  est, sur l'espace des contrôles, la somme d'une forme quadratique et d'une fonction affine continue, la forme quadratique étant continue et coercive.

Choisissons pour ensemble des contrôles admissibles

$$Q = \{u \in L^2(\Gamma) ; \text{supp}(u) \subset \Gamma_0 ; \xi_0 \leq u \leq \xi_1\}$$

avec  $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \emptyset$ ,  $\xi_i \in L^\infty(\Gamma)$ ,  $\Gamma_0$  et  $\Gamma_1$  mesurables et de capacité strictement positive.

Le contrôle optimal  $u^*$  est par définition la solution unique de

$$\inf_{u \in Q} J(u).$$

Soit  $Q_n = \{u \in L^2(\Gamma) ; \text{supp}(u) \subset \Gamma_0^n ; \xi_0^n \leq u \leq \xi_1^n\}$ .  
 $\Gamma_0^n$ ,  $\xi_i^n$  vérifiant les mêmes hypothèses que  $\xi_i$  et  $\Gamma_0$ . On suppose

$$\lim_n \int |\xi_i^n - \xi_i|^2 d\Gamma = 0 \quad , \quad i = 0, 1$$

$$\lim_n (\text{mes}(\Gamma_0^n \Delta \Gamma_0)) = 0.$$

Alors  $u_n^*$  la solution de

$$\inf_{u \in Q_n} J(u) ,$$

converge dans  $L^2(\Gamma)$  vers  $u^*$ .

De même, les états  $y(u_n^*)$ , correspondants aux contrôles optimaux  $u_n^*$ , convergent dans  $H^1(\Omega)$  vers l'état  $y(u^*)$ .

En effet, pour la première partie, il suffit de vérifier que les  $(Q_n)$  vérifient  $\tau\text{-}\sigma \lim(Q_n) = Q$  ; mais ceci résulte de III,5.4.

La deuxième partie vient de ce que  $y(u_n^*)$  est solution de

$$\inf_{y \in H^1(\Omega)} (\pi(y)) - 2L_n(y)$$

où  $\pi(u)$  est continue et coercive, et  $L_n$  définie par

$$L_n(y) = \int_{\Omega} u f \cdot dt + \int_{\Gamma} y \cdot u_n^* d\Gamma.$$

Comme en vertu de ce qui précède,  $(u_n^*)$  converge vers  $u^*$  dans  $L^2(\Gamma)$  donc dans  $H^{-1/2}(\Gamma)$ , la suite des formes linéaires  $L_n \in \Gamma'_o(H^1(\Omega))$  vérifie :

$$\tau\text{-}\sigma \lim L_n = L$$

où

$$L(y) = \int_{\Omega} y f dt + \int_{\Gamma} y u^* dt.$$

Le résultat en découle immédiatement.

4 - CONVERGENCE DE FONCTIONS-SPLINE DEFINIES DANS UNE SUITE DE CONVEXES

Le problème type est le suivant :

Soit  $\xi_0$  et  $\xi_1$  deux fonctions continues sur  $[0,1]$ , telles que

$$\xi_0 < \xi_1.$$

On considère la solution, notée  $s$ , du problème

$$\text{Inf}_{x \in H^2(0,1)} \left\{ \int_{[0,1]} |x''|^2 dt ; \xi_0(t) \leq x(t) \leq \xi_1(t), \forall t \in [0,1] \right\}$$

qui s'appelle le fonction spline relative à l'opérateur de dérivation seconde et au convexe formé des fonctions vérifiant les contraintes définies par  $\xi_0$  et  $\xi_1$ .

Soit maintenant  $M_n = (t_1^n, t_2^n, \dots, t_m^n)$ , un sous-ensemble fini de  $[0,1]$  ; on considère le problème

$$\text{Inf} \left\{ \int_{M_n} |x''|^2 dt ; \xi_0(t) \leq x(t) \leq \xi_1(t), \forall t \in M_n \right\}$$

dont la solution est notée  $s_n$ .

Alors on a le résultat : si, au sens de III,5.3,

$$\underline{\lim} (M_n) = [0,1]$$

alors  $(s_n)$  converge fortement dans  $H^2(0,1)$  vers  $s$ .

Ce problème consiste donc à minimiser une forme quadratique continue sur un sous-ensemble convexe et fermé. Mais l'étude de ce problème de convergence n'est pas aussi simple que dans le paragraphe précédent, parce que la forme quadratique est cette fois-ci dégénérée.

Nous allons poser ce problème dans son contexte abstrait tel qu'on peut le trouver dans Atteia (1968), Laurent (1969), Morin-Catz (1970).

Les résultats intermédiaires sur lesquels repose le résultat de convergence que nous allons donner sont dus à Morin-Catz, auxquels nous avons aussi emprunté les notations.

$E$  et  $F$  sont deux espaces de Hilbert et  $T : E \rightarrow F$  une application linéaire continue et surjective, dont le noyau  $\text{Ker}(T)$  est supposé de dimension finie  $q$ .

Une partie  $L$  de  $E$ , et  $t : L \rightarrow \mathbb{R}$  définissent

$$C_\ell = \{x \in E ; (\ell | x) \leq t(\ell)\}$$

$$C = \bigcap_{\ell \in L} C_\ell.$$

On suppose que

$$(K1) \quad \text{Ker}(T) \cap C_\infty = \{0\}$$

en sorte que le problème (Atteia (1968)), qu'on peut noter  $[T, C]$ , ou  $[f, c]$  :

$$\inf_{x \in C} \left( \frac{1}{2} \|T(x)\|^2 \right) = \inf_{x \in C} (f(x))$$

admet une solution au moins en vertu de I, 6.4. ( $x \rightarrow \frac{1}{2} \|T(x)\|^2$  est inf-localement compacte dans  $E$  faible parce que  $\text{Ker}(T)$  est de dimension finie et  $T$  surjective).

On suppose que

(K2)  $L$  est compact et  $t$  continue ; tout sous-ensemble fini de  $L$  ne contenant aucun couple d'éléments opposés est formé d'éléments linéairement indépendants

(K3)  $C \cap \text{Ker}(T) = \emptyset$

(K4)  $\{x \in E ; (\lambda|x) < t(\lambda), \forall \lambda \in L\} \neq \emptyset$

Ceci permet d'obtenir la caractérisation suivante pour les solutions du problème (prop. I,7.3 et un théorème de Valadier (1968)).

Une condition nécessaire et suffisante pour que  $s \in E$  soit une solution de  $[T,C]$  est que (Atteia, Laurent)

$${}^t_{TT(s)+\partial\Psi_C(s)} \ni 0.$$

$$\partial\Psi_C(s) = \overline{\text{Co}} \left( \bigcup_{(\lambda|s)=t(\lambda)} R^+\lambda \right)$$

On fait l'hypothèse supplémentaire

(K5) Pour tout sous-ensemble de  $(\lambda_1, \dots, \lambda_q)$  de  $q$  éléments de  $L$ , ne contenant pas d'éléments opposés, alors  $(\lambda_i|x) = 0, 1 \leq i \leq q$  entraîne que  $x \notin \text{Ker}(T)$ .

Elle entraîne en particulier que la solution de  $[T,C]$  est unique.

Soit pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $L_n$  un sous-ensemble fini de  $L$ , et

$$C_n = \bigcap_{\lambda \in L_n} C_\lambda.$$

On suppose que

$$(K6) \quad \sigma\text{-}\overline{\lim}(C_n) \subset C$$

ce qui entraîne que

$$\tau\text{-}\sigma\lim(C_n) = C.$$

Dès que  $L_n$  contient plus de  $q+1$  éléments (ce qui a lieu à partir d'un certain rang) alors (K1), ..., (K5) sont vérifiées par  $[T, C_n]$  et il existe donc une solution  $s_n$  unique à ces problèmes  $[T, C_n]$ .

Les deux premières étapes de l'étude de la convergence de  $[T, C_n]$  vers  $[T, C]$  sont immédiates : on a, si on pose  $f(x) = \frac{1}{2} \|T(x)\|^2$ ,

$$\tau\text{-}\sigma\lim (f + \Psi_{C_n}) = f + \Psi_C$$

$$\lim_n (\alpha(T, C_n)) = \alpha(T, C).$$

De  $\sigma\text{-}\overline{\lim}(\{s_n\}) \subset \{s\}$ , on déduit donc que la suite  $(s_n)$  converge faiblement vers  $s$ , parce que  $s$  est unique.

Il nous reste à montrer qu'en fait la suite  $(s_n)$  converge fortement vers  $s$ .

Notons (Morin-Catz)  $Q$  l'ensemble des  $q+1$ -uples  $L^q = (\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_{q+1})$  sur  $L$  tels que  $\ell_i \neq \ell_j$  si  $i \neq j$  et tels qu'il existe une combinaison convexe des  $\ell_i \in L^q$  s'annulant sur  $\text{Ker}(T)$  :

$$\sum \lambda_i \ell_i \in (\text{Ker } T)^o, \quad \lambda_i \geq 0, \quad \sum \lambda_i = 1.$$

On peut montrer que  $Q \neq \emptyset$  et que le  $q+1$ -uple de  $(\lambda_i)$  associé à  $L_q$  est unique, enfin que  $\lambda_i > 0$ , si l'on fait l'hypothèse supplémentaire

$$(K7) \quad \text{Il existe } L_0 \subset L, \text{ fini, tel que } \text{Ker}(T) \cap \bigcap_{\ell \in L_0} C_\ell = \emptyset.$$

LEMME 1

Soit  $s_n$  la solution de  $(T, C_n)$ , donc vérifiant :

$${}^t T \circ T(s_n) = \sum_{i=1, \dots, \nu} \mu_i^n \lambda_i^n, \quad \mu_i^n \leq 0, \quad q+1 \leq \nu \leq n.$$

Alors dans l'ensemble  $\bigcup_{1 \leq i \leq \nu} \lambda_i^n$ , il existe  $\lambda_{i_1}^n, \lambda_{i_2}^n, \dots, \lambda_{i_{q+1}}^n$  tels que :

$$L_n^q = (\lambda_{i_1}^n, \dots, \lambda_{i_{q+1}}^n) \in Q$$

La démonstration résulte en particulier du théorème de caractérisation de  $T(C_n)$  donné dans Morin-Catz.

LEMME 2

Il existe  $\eta > 0$ , tel que pour tout  $n$  à partir d'un certain rang,  $L_n^q$  vérifie :

$$\min_{\substack{i \neq j \\ \lambda_i^n, \lambda_j^n \in L_n^q}} (\|\lambda_i^n - \lambda_j^n\|, \|\lambda_i^n + \lambda_j^n\|) \geq \eta$$

Nous renvoyons à Morin-Catz pour la démonstration. Signalons cependant que celle-ci utilise entre autre (K4), le fait que  $\limsup_n(\alpha_n) \leq \alpha$  et le fait que

$$\inf_{\substack{x \in \bigcap_{\lambda \in L_n^q} C_\lambda}} f(x) \leq \inf_{\substack{x \in \bigcap_{\lambda \in L_n} C_\lambda}} f(x).$$

Ceci permet maintenant de démontrer que  $(s_n)$  converge fortement vers  $s$ .

LEMME 3

Dès que  $n$  est assez grand, on a

$$(S) \quad f(x) - \alpha_n \geq a \|x - s_n\|^2, \quad \forall x \in C_n.$$

Démonstration

$s_n$  étant la solution de  $[T, C_n]$ , vérifie  $(T(x) | T(x - s_n)) \geq 0, \forall x \in C_n$ .  
Par suite,  $f(x) - \alpha_n = \frac{1}{2} \|T(x)\|^2 - \frac{1}{2} \|T(s_n)\|^2 \geq \frac{1}{2} \|T(x - s_n)\|^2$ .

On aura prouvé (S) s'il existe  $a > 0$  tel que

$$(1) \quad \inf_{x \in C_n} \frac{\|T(x - s_n)\|}{\|x - s_n\|} \geq a.$$

On considère :

$$D_n^q = \{x \in E ; (\ell | x) \leq 0, \forall \ell \in L_n^q\}.$$

Alors (1) est impliqué par (2) (lemme 1) :

$$(2) \quad \inf_{x \in D_n^q} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} \geq a$$

qui équivaut à (T est surjectif) et  $\text{Ker}(T) \cap D_n^q = \{0\}$

$$(3) \quad \inf_{x \in D_n^q} \frac{d(x, \text{Ker}(T))}{d(x, \text{Ker}(T) \cap D_n^q)} \geq a.$$

Donc, avec les notations du chapitre IV, on aura prouvé (S) si l'on montre que

$$\liminf_n \theta(D_n^q, \text{Ker}(T)) > 0.$$

Or,  $D_n^q$  est l'intersection de  $q+1$  demi-espaces fermés ; notons  $H_n^{q,j}$  ( $i = 1, \dots, q+1$ ) ses faces de codimension  $q$  :

$$H_n^{q,j} = \{x \in E ; (\ell_{ij_1}^n | x) = (\ell_{ij_2}^n | x) = \dots = (\ell_{ij_q}^n | x) = 0, \ell_{ij_k}^n \in L_n^q\}$$

Montrons que

$$\theta(D_n^q, \text{Ker}(T)) = \min_{i \leq j \leq q+1} \theta(H_n^{q,j}, \text{Ker}(T)) ;$$

autrement dit que dans le calcul de

$$\inf_{x \in D_n^q} \frac{d(x, \text{Ker}(T))}{\|x\|} = \frac{1}{\sup_{\substack{d(x, \text{Ker}(T))=1 \\ x \in D_n^q}} \|x\|} ,$$

on peut supposer que  $x$  parcourt l'ensemble des faces de  $D_n^q$  qui sont de codimension  $q$ .

En effet, soit  $x \in F$  une face de  $D_n^q$  de codimension  $< q$  ;  $F$  contient une variété linéaire  $V$  contenant strictement  $x$  et parallèle à  $\text{Ker}(T)$ .

Si  $y \in V$  on a  $d(y, \text{Ker}(T)) = d(x, \text{Ker}(T))$  ; pour calculer  $\sup_{y \in V} \|y\|$ , on peut supprimer les points de l'intérieur relatif à  $V \cap F$  ; ce qui conduit à augmenter la codimension de la face  $F$  ... ; on s'arrête lorsque avec  $x$ ,  $F$  ne peut contenir une telle variété, c'est-à-dire lorsque  $\text{codim}(F) = q$  ; d'où le résultat.

L'inégalité (S) résulte alors du lemme 2, comme on le vérifiera facilement.

## 5 - PROBLEMES DE MEILLEURE APPROXIMATION

Dans cet exemple, on s'intéresse à un problème de meilleure approximation dans un espace normé  $E$ .

Ce problème est noté  $[f, V]$  où  $V$  est un sous-espace vectoriel de dimension finie de  $E$  et  $f \in \Gamma_0(E)$  en général la somme d'une fonctionnelle qui "ressemble" à la norme sur  $E$  et de la fonctionnelle indicatrice d'une partie convexe de  $E$ .

Dans les exemples pratiques,  $E$  est un espace de fonctions continues ou à dérivée première continue, muni d'une norme du max. On doit donc s'attendre à ce que la fonctionnelle  $f$  (même en l'absence de contraintes) soit non différentiable.

Le théorème de caractérisation de ces problèmes fait jouer un rôle important aux points extrémaux de  $\text{epi}(f^*)$ , qui sont en général connus (Singer et Laurent).

Le paragraphe 1 est un rappel rapide du résultat le plus général dans ce sens, qu'on trouvera dans Laurent - Pham-Dinh (1970).

### 5-1 - CARACTERISATION

Soit  $E$  un e.l.c.s,  $E'$  son dual muni de  $\sigma(E', E)$ .

On veut caractériser les solutions du problème  $[f, V]$  où  $f \in \Gamma_0(E)$  est supposée continue (au sens de I,5.1) et  $V$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  de dimension finie.

On fait l'hypothèse que

$$\begin{array}{c} \circ \\ \text{dom } f \cap V \neq \emptyset, \end{array}$$

en sorte que  $s \in E$  est une solution de  $[f, V] : s \in S(f, V)$ , si et seulement si

$$(1) \quad \partial f(s) \cap V^\circ \neq \emptyset.$$

Le fait que  $f$  est continue, entraîne que  $\partial f(x)$ , pour tout  $x \in E$ , est un ensemble convexe fermé localement compact et ne contenant pas de droite dans  $E'$  (cf. I,7). Il en est de même de l'ensemble  $\partial f(s) \cap V^\circ$  ; donc (1) équivaut, en vertu d'un corollaire de théorème de Krein-Milman (cf. Bourbaki (\*), ex 22, p. 156) à

$$(2) \quad \mathcal{E}(\partial f(s) \cap V^\circ) \neq \emptyset,$$

( $\mathcal{E}(A)$  désigne l'ensemble des points extrémaux de  $A$ ).

Nous allons exprimer  $\mathcal{E}(\partial f(x) \cap V^\circ)$  en fonction de  $\mathcal{E}(\partial f(s))$  en utilisant l'hypothèse que  $V^\circ$  est de codimension finie.

Rappelons la définition d'une facette (Bourbaki (\*) p. 152).

Soit  $A$  un ensemble convexe et fermé dans  $E$  et soit  $x \in A$ .

La facette  $F(x, A)$  de  $x$  dans  $A$  est le plus petit sous-ensemble extrémal de  $A$  contenant  $x$ . (Un sous-ensemble de  $A$  est dit extrémal si son complémentaire dans  $A$  est convexe).

La facette  $F(x, A)$  est aussi le plus grand sous-ensemble convexe de  $A$  dont  $x$  soit un point interne relatif.

En particulier, un point extrémal est une facette (de dimension 0), un rayon extrémal, une demi-droite extrémale.

On a les propriétés suivantes

- a)  $F(x, F(x, A)) = F(x, A)$
- b) Si B est un ensemble convexe et fermé et  $x \in A \cap B$   
 $F(x, A \cap B) = F(x, A) \cap F(x, B)$ .
- c) Si B contient une variété linéaire de codimension r la facette de tout point extrémal de  $A \cap B$  dans A est de dimension  $\leq r$ .
- d) Si A est localement compact, fermé et ne contient pas de droite, A est l'enveloppe convexe fermée de la réunion de ses points extrémaux et de ses rayons extrémaux.
- e) Si E est de dimension finie, d) subsiste en remplaçant "enveloppe convexe fermée" par "enveloppe convexe".

PROPOSITION (Laurent, Pham-Dinh (1970)).

On suppose que  $\inf_{x \in E} f(x) < \inf_{x \in V} f(x)$ . Alors pour que  $s \in S(f, V)$  il faut et il suffit qu'on puisse trouver k ( $\geq 1$ ) points de  $E'$  :  $x'_1, x'_2, \dots, x'_k$ , projections sur E de points extrémaux de  $\text{épi}(f^*)$ ,

l ( $\geq 0$ ) point de  $E'$  :  $y'_1, y'_2, \dots, y'_l$ , projections sur E de direction de rayons extrémaux de  $\text{épi}(f^*)$ ,

k+l nombres strictement positifs,  $\lambda_1, \dots, \lambda_k, \mu_1, \dots, \mu_l$   
tels que :

i)  $k+l \leq r+1$

ii)  $\sum \lambda_i x'_i + \sum \mu_i y'_i \in V^\circ$

iii)  $f(s) + f^*(x'_i + \rho y'_j) = \langle s, x'_i \rangle + \rho \langle s_0, y'_j \rangle, \quad \forall \rho \geq 0 \quad \begin{matrix} 1 \leq i \leq k \\ 1 \leq j \leq l \end{matrix}$

Démonstration

Ainsi qu'on l'a vu, pour que  $s$  soit solution, il faut et il suffit que (2) ait lieu.

Soit  $x' \in \mathcal{E}(\partial f(s) \cap V^0)$ . La facette de  $x'$  dans  $\partial f(s)$  est un ensemble convexe fermé ne contenant pas de droites dans un espace de dimension au plus égale à  $r$ . Dans cet espace,  $x'$  est intérieur à cette facette.

Notons  $E_0$  l'ensemble des points extrémaux de cette facette,  $E_1$  la réunion des rayons extrémaux de la facette,  $E'_1$  la réunion des demi-droites issues de l'origine parallèles à un des rayons appartenant à  $E_1$ .

Le corollaire e) du théorème de Krein-Milman, cité plus haut, assure que

$$x' \in \text{Co}(E_0 \cup E_1).$$

Mais  $\text{Co}(E_0 \cup E'_1)$  contient l'intérieur de  $\text{Co}(E_0 \cup E_1 \cup \{0\})$  qui contient l'intérieur de  $\text{Co}(E_0 \cup E_1)$  qui contient  $x'$ .

Donc :

$$x' \in \text{Co}(E_0 \cup E'_1).$$

En vertu du théorème de Caratheodory,  $x'$  s'exprime donc comme une combinaison convexe d'au plus  $r+1$  points appartenant à  $E_0 \cup E'_1$  et l'un de ces points est nécessairement dans  $E_0$  (sinon nécessairement  $0 \in \text{Co}(E_0 \cup E_1)$  donc  $0 \in \partial f(s)$ , ce qui est impossible en vertu de l'hypothèse faite sur  $[f, V]$ ).

Le résultat vient alors du fait que les points et rayons extrémaux de  $\partial f(s)$  sont les projections verticales des points et rayons extrémaux de l'intersection  $M^*$  de  $\text{épi}(f^*)$  avec le graphe de la fonction affine définie sur  $E'$  par

$$y' \rightarrow \langle s, y' \rangle - f(s).$$

Mais  $M^*$  étant une facette de  $\text{épi}(f^*)$ , ses points et ses rayons extrémaux sont aussi des points et des rayons extrémaux de  $\text{épi}(f^*)$ .

D'où i) et ii), la propriété iii) exprimant que les éléments extrémaux  $x'_i$  et  $y'_j$  appartiennent à  $\partial f(s)$ .

En particulier, on retrouve le résultat suivant (Singer (1956), Laurent (1968), Laurent-Pham-Dinh (1970)).

COROLLAIRE

En plus des hypothèses faites plus haut sur  $f$  et  $V$ , supposons que  $\text{dom}(f) = E$ . Alors une condition nécessaire et suffisante pour que  $s \in S(f, V)$  est qu'il existe :

$k$  éléments de  $E'$  :  $x'_1, x'_2, \dots, x'_k$  projections de points extrémaux de  $\text{épi}(f^*)$  et  $k$  scalaires strictement positifs  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  tels que :

i)  $1 \leq k \leq r+1$

ii)  $\sum \lambda_i x'_i \in V^\circ$

iii)  $f(s) + f^*(x'_1) = \langle s, x'_1 \rangle$ .

Exemple (Laurent - Pham-Dinh (1970))

Soit  $K$  une partie convexe équilibrée, compacte de  $E'$ ,  $H$  une partie convexe et compacte de  $E'$ ,  $W : H \rightarrow \mathbb{R}$  une application continue ( $H$  muni de la topologie induite), concave et  $V$  un sous-espace vectoriel de  $E$  de dimension  $r$  (indicatrice  $v$ ).

On pose, si  $x_0 \in E$  :

$$d(x) = \max_{x' \in K} \langle x - x_0, x' \rangle$$

$$C = \{x \in E ; \langle x, x' \rangle - w(x') \leq 0, \forall x' \in H\}$$

$$f = d + c \quad , \quad c \text{ est l'indicatrice de } C.$$

On suppose qu'il existe  $x_1 \in V$  tel que

$$\langle x_1, x' \rangle - w(x') < 0, \quad \forall x' \in H$$

alors  $s$  est solution de  $[f, V]$  si et seulement si il existe

$$x'_1, x'_2, \dots, x'_k \in \mathcal{E}(K) \quad \text{avec} \quad k \geq 1$$

$$y'_1, y'_2, \dots, y'_\ell \in \mathcal{E}(H) \quad \ell \geq 0$$

$$\lambda_1, \dots, \lambda_k, \mu_1, \dots, \mu_\ell > 0$$

tels que

$$- \quad k + \ell \leq r + 1$$

$$- \quad \langle s - x_0, x'_i \rangle = d(s) \quad 1 \leq i \leq k$$

$$- \quad \langle s, y'_i \rangle = w(y'_i) \quad 1 \leq i \leq \ell$$

$$- \quad \sum_{1 \leq i \leq k} \lambda_i x'_i + \sum_{1 \leq j \leq \ell} \mu_j y'_j \in V^\circ$$

## 5.2 - PERTURBATION D'UN PROBLEME DE MEILLEURE APPROXIMATION

$E$  est l'espace des fonctions continues sur  $[0, 1]$ , soit  $\mathcal{C}[0, 1]$ ,  $E'$  celui des mesures de Radon sur  $[0, 1]$ .

Soient  $T$  et  $U$  deux parties fermées de  $[0, 1]$ .

On pose :

$$d(x) = \max_{t \in T} |x(t) - x_0(t)|$$

$$C = \{x \in \mathcal{C}[0, 1] ; x(t) \leq x_0(t), \forall t \in U\}.$$

$$V(x) = \max_{t \in [0, 1]} |x(t)|$$

$$V = \{\text{restriction à } [0, 1] \text{ des polynômes de degré inférieur ou égal à } r+1\}.$$

Et on considère le problème  $[f, V]$  où  $f = d + c$  ( $c$  est l'indicatrice de l'ensemble  $C$ ).

Soient, pour tout entier  $n$ ,  $T_n$  et  $U_n$  deux parties fermées de  $[01]$ , auxquelles correspondent comme précédemment les fonctionnelles  $d_n$  et  $c_n$ .

On sait que (III,5.3) pour que  $\tau\text{-}\sigma.\lim(d_n) = d$  et  $\tau\text{-}\sigma.\lim(c_n) = c$  il faut et il suffit que :

$$\lim(T_n) = T$$

$$\lim(U_n) = U$$

au sens de III,5.3. En effet, c'est évident pour  $(c_n)$  ; quand à  $(d_n)$  sa convergence vers  $d$  équivaut à celle de la suite des mesures de Radon à support dans  $T_n$  vers l'ensemble des mesures de Radon à support dans  $T$ .

Faisons les hypothèses

- $T$  contient au moins  $r+1$  points distincts de  $[01]$
- $x_0$  n'est pas dans  $V$ .

Les problèmes  $[f_n, V]$  sont équivalents aux problèmes  $[g_n, c_n]$  où  $g_n = d_n + v$  et on vérifie que

$$\tau\text{-}\tau \lim g_n = g.$$

De plus

- $g$  et  $c$  vérifient (A1)
- $(c_n)$  vérifie (A2),
- $(g_n)$  vérifie (P1),
- $g$  et  $c$  vérifient (P2) (hypothèse sur  $T$  et propriété de Haar).

Donc, en particulier, si  $\alpha_n = \inf_{x \in V} f_n(x)$  et  $\alpha = \inf_{x \in V} f(x)$ , on a

$$\lim_n(\alpha_n) = \alpha.$$

Montrons maintenant que  $s_n = S(f_n, V) = S(g_n, c_n)$  converge fortement vers  
 $s = S(f, V) = S(g, c)$ .

Pour tout  $n$ , on peut montrer qu'une solution  $s_n$  au problème  $[f_n, V]$  existe et est unique. On a aussi la caractérisation suivante (5.1) :

Une condition nécessaire et suffisante pour que  $s_n$  soit une solution de  $[f_n, V]$  est qu'il existe :

$k(n)$  éléments de  $(C[0,1])'$   $x_1^n, \dots, x_k^n$   
 $l(n)$  éléments de  $(C[0,1])'$   $y_1^n, \dots, y_l^n$   
 $\lambda_1^n, \lambda_2^n, \dots, \lambda_k^n, \mu_1^n, \mu_2^n, \dots, \mu_l^n$  des scalaires strictement positifs, tels que

- $k(n) \geq 1$  ,  $k(n) + l(n) = r+1$
- les  $x_i^n$  sont de la forme :  $x \rightarrow \pm x(t_i^n)$  ,  $t_i^n \in T_n$
- les  $y_i^n$  sont de la forme :  $x \rightarrow \pm x(t_i^n)$  ,  $t_i^n \in U_n$
- $\sum \lambda_i^n x_i^n + \sum \mu_i^n y_i^n \in V^\circ$
- $\langle s_n - x_0, x_i^n \rangle = d(s_n)$  ,  $1 \leq i \leq k(n)$
- $\langle s_n, y_i^n \rangle = \langle x_0, y_i^n \rangle$   $1 \leq i \leq l(n)$ .

Posons  $g_n = d_n + v$ . En vertu de 1.4 et 1.5, une condition suffisante pour  $s_n$  converge vers  $s$  est qu'il existe  $a$  et  $b$  deux nombres strictement positifs tels que pour tout  $x \in C[0,1]$  et tout  $n$  à partir d'un certain rang, on ait :

$$(1) \quad g_n(x) - \langle x, -\xi_n \rangle + g_n^*(-\xi_n) \geq a(v \nabla \Psi_{\partial g_n^*(-\xi_n)})(x)$$

$$(2) \quad c_n(x) - \langle x, \xi_n \rangle + c_n^*(\xi_n) \geq b(v \nabla \Psi_{\partial c_n^*(\xi_n)})(x)$$

où

$$(3) \quad \xi_n = \sum_{1 \leq i \leq l} \mu_i^n y_i^n, \quad \sum \lambda_i^n + \sum \mu_i^n = 1.$$

et que

$$\tau\text{-}\lim(\partial g_n^*(-\xi_n) \cap \partial c_n^*(\xi_n)) \supset \tau\text{-}\lim \partial g^*(-\xi) \cap \tau\text{-}\lim \partial c^*(\xi)$$

Par polarité (1) et (2) équivalent à

$$(4) \quad g_n^*(x' - \xi_n) - g_n^*(-\xi_n) \leq v^* \left( \frac{1}{a} x' \right) + \psi_n^* \partial g_n^*(-\xi_n), \quad \forall x' \in (C[0, 1])'$$

$$(5) \quad c_n^*(x' + \xi_n) - c_n^*(\xi_n) \leq v^* \left( \frac{1}{b} x' \right) + \psi_n^* \partial c_n^*(\xi_n), \quad \forall x' \in (C[0, 1])'$$

Etude de (4)

Le second membre de (4) est l'indicatrice de l'intersection de deux ensembles convexes de  $E'$  : la boule duale de centre 0 et de rayon a et un cône convexe qui contient  $V^c$ .

D'autre part, cette même indicatrice est la régularisée s.c.i de sa restriction à l'ensemble des points extrémaux du convexe (compact) qu'elle définit (Théorème de Krein-Milman).

Il suffit donc pour vérifier (4) de se restreindre aux  $x' \in E'$  qui sont combinaison convexe d'un nombre fini de tels points extrémaux.

En vertu de 5.1 c), il suffit donc de vérifier (4) sur l'ensemble des combinaisons linéaires finies de points extrémaux de la boule unité de  $(C[0, 1])'$  qui sont de la forme :

$$\varepsilon(t_i): x \rightarrow x(t_i) \quad , \quad t_i \in [0, 1].$$

Posons donc

$$(6) \quad x' = \sum_i \beta_i \varepsilon_i.$$

Pour que  $x'$  de la forme (6) appartienne à  $\partial g_n^*(-\xi_n)$ , il faut et il suffit que

$$x' = - \sum_{1 \leq i \leq k(n)} \gamma_i x_i'^n + \sum_j \beta_j \varepsilon(t_j)$$

avec

$$\gamma_i > 0, \quad \beta_j \text{ et } t_j \text{ quelconques.}$$

On vérifie alors en utilisant le fait que

$$\sum_{1 \leq i \leq k(n)} \lambda_i^n x_i'^n + \xi_n \in V^o$$

que (4) est vérifié pour tout  $x'$  tel que

$$\|x'\| = \sum_j |\beta_j| + \sum_{1 \leq i \leq k(n)} \gamma_i \leq \text{Min}_{1 \leq i \leq k(n)} (\lambda_i^n)$$

c'est-à-dire que (t) a lieu si a peut être choisi tel que

$$a \leq \text{Min}_{1 \leq i \leq k(n)} (\lambda_i^n).$$

### Etude de (5)

On a

$$\partial c_n^*(\xi_n) = \{x \in E ; \langle x, y_i'^n \rangle = \langle x_0, y_i'^n \rangle \quad 1 \leq i \leq \ell(n)\}$$

donc

$$\psi_{\partial c_n^*(\xi_n)}^*(x') = \begin{cases} \langle x_0, \sum \beta_i y_i'^n \rangle & \text{si } x' = \sum_{1 \leq i \leq \ell(n)} \beta_i y_i'^n \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

D'où l'on tire immédiatement que (5) est vérifié en choisissant

$$b \leq \text{Min}_{1 \leq i \leq \ell(n)} (\mu_i^n).$$

En raisonnant comme dans Laurent (1967), on montre qu'il existe  $\eta > 0$  tel que

$$\text{Min}_{n, 1 \leq i \leq \ell(n)} (\mu_i^n) \geq \eta$$

$$\text{Min}_{n, 1 \leq i \leq k(n)} (\lambda_i^n) \geq \eta$$

on en déduit que  $\tau\text{-}\underline{\lim} \partial g_n^*(-\xi_n) \supset s$  et  $\tau\text{-}\underline{\lim} \partial c_n^*(\xi_n) \supset s$ , et que  $(s_n)$  converge fortement vers  $s$ .

### 5.3 - UN EXEMPLE DANS $C^1[0,1]$ (Laurent)

Soit  $E = C^1[0,1]$ , muni de la norme

$$v(x) = v_1(x) + v_2(x) \quad , \quad M \geq 0$$

$$v_1(x) = \text{Max}_{t \in [0,1]} |x(t)|$$

$$v_2(x) = \text{Max}_{t \in [0,1]} |x^{(1)}(t)|.$$

Soit  $x_0 : (t \rightarrow e^t, t \in [0,1])$  et  $V$  l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 1.

Soit  $f_n = v_1 + \varepsilon_n v_2$ .  $\varepsilon_n \geq 0$ . On considère la suite des problèmes  $[f_n, V]$ .

Lorsque  $\lim(\varepsilon_n) = \varepsilon$  on peut montrer que les  $\alpha_n = \alpha(f_n, V)$  converge toujours vers  $\alpha(f, V)$ .

Mais la condition suffisante pour que  $s_n$  converge vers  $s$  (correspondant à la formule (1)) du paragraphe précédent n'est vérifiée que si  $\varepsilon \neq \frac{\log(e-1)}{2}$ .

On vérifie d'ailleurs que si  $\varepsilon = \lim(\varepsilon_n) = \frac{\log(e-1)}{2}$ , on a les situations suivantes :

- à partir d'un certain rang dont les  $\varepsilon_n$  sont inférieurs à  $\varepsilon$  alors les solutions uniques  $s_n$  convergent vers une des solutions  $s_1$  extrémité du segment S des solutions  $[f_\varepsilon, V]$ .
- à partir d'un certain rang  $\varepsilon_n \geq \varepsilon$  ; les  $s_n$  (uniques) converge vers l'autre extrémité  $s_2$  du segment  $S(f_\varepsilon, V)$ .
- il y a une infinité de  $\varepsilon_n$  au dessus et en dessous de  $\varepsilon$ . Alors la suite  $(s_n)$  ne converge pas :

$$\tau\text{-}\underline{\lim}(\{s_n\}) = \emptyset$$

$$\tau\text{-}\overline{\lim}(\{s_n\}) = s_1 \cup s_2 \subset S(f, V).$$

BIBLIOGRAPHIE

E. ASPLUND

- (1967) Averaged norms.  
Israel J. of Math. 5, 227-233.
- (1968) Frechet differentiability of convex functions.  
Acta Math. 121, 31-47.

E. ASPLUND & R.T. ROCKAFELLAR

- (1969) Gradients of convex functions.  
Trans. Amer. Math. Soc. 139, 443-467.

M. ATTEIA

- (1966) Thèse - Grenoble.
- (1967) Fonctions-spline avec contraintes linéaires du type inégalité.  
Congrès AFIRO, Nancy, 1, 42, 1,54.
- (1968) Fonctions-spline définies sur un ensemble convexe.  
Num. Math. 12, 192-210.

J.P. AUBIN

- (1967) Approximation des espaces de distributions et des opérateurs différentiels.  
Bull. Soc. Math. France, Mémoire 12.

G. BIRKHOFF

- (1935) Orthogonality in linear metric spaces.  
Duke Math. J, 1, 169-172.

R. BRISSAC

- (1947) Sur les fonctions multiformes.  
C.R.A.S., Paris, Vol. 224, 92-94.

C. CASTAING & M. VALADIER

- (1969) Equations différentielles multivoques dans les espaces localement convexes.  
R.I.R.O. R1, 16, 3-16.

C. CASTAING

- (1970) Applications du théorème de Banach-Dieudonné à l'intégration. Séminaire sur la convexité et ses applications. Université de Montréal.

J. CEA

- (1964) Approximation variationnelle des problèmes aux limites. Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 14, 2, 345-444.

G. CHOQUET

- (1947-48) Convergences.  
Ann. de l'Université de Grenoble. 23, 55-112.

J.W. DANIEL

- (1969) Convergence of a discretization for constrained spline function problems.  
Tech. Report 76.

G.B. DANTZID, J. FOLKMAN, N. SHAPIRO

- (1967) On the continuity of the minimum sets of a continuous function. J. of Math. Anal & Appl. 17, 519-548.

J. DIEUDONNE

- (1966) Sur la séparation des ensembles convexes. Math. Annalen, 163- 1-3.

R. DOUADY

- (1965-66) Séminaire - Nice.

H. HAHN

- (1932) Reele Functionen  
Akademische Verlags Gesellschaft, Leipzig.

HORMANDER & J.L. LIONS

- (1956) Sur la complétion par rapport à une intégrale de Dirichlet. Math. Scand, 4, 259-270.

M. HUKUHARA

- (1967) Sur l'application semi-continue dont la valeur est un compact convexe.  
Funkcialaj Ekvacioj, 10, 43-66.

J.L. JOLY

- (1967) Convergences de fonctions spline  
C.R.A.S. PARIS, 264, 126-128.
- (1968), (1969), (1970) - Séminaire d'Analyse Numérique  
Grenoble.
- (1970) Séminaire sur la convexité et ses applications  
Université de Montréal.

V.L. KLEE

- (1955) Séparation properties of convex cones.  
Proc. Amer. Math. Soc. 6, 313.

C. KURATOVSKI

- (1932) Sur les fonctions continues dans l'espace des ensembles fermés.  
Fund. Math, 18, 148-160.

P.J. LAURENT

- (1967) Approximation uniforme de fonctions continues sur un compact avec contraintes de type inégalité.  
R.I.R.O. 5, 81-95.
- (1967) Théorèmes de caractérisation d'une meilleure approximation dans un espace normé et généralisation de l'algorithme de Rémès.  
Num. Math, 10, 190-208.
- (1968) Cônes de déplacements admissibles, sous-gradients, et approximation convexe dans un espace vectoriel normé.  
Proc. NATO Summer School, Venice, 265-274.
- (1969) Construction of spline functions in a convex set.  
Colloque Analyse Numérique, Madison, Université du Wisconsin.

P.J. LAURENT et PHAM-DINH-TUAN

- (1970) Global approximation of a compact set by elements of a convex set in a normed linear space.  
Num. Math. 15, 137-150.

P.J. LAURENT et J.L. JOLY

- (1970) Stability and duality in convex minimization problems.  
A paraître.

LESCARRET

- (1966) Sur la sous-différentiabilité d'une somme de fonctionnelles convexes semi-continues inférieurement.  
C.R.A.S. PARIS, 262, 443-446.

E. MICHAEL

- (1951) Topologies on spaces of subsets  
Trans. Amer. Math. Soc. 71, 152-182.

J.J. MOREAU

- (1963) Inf-convolution des fonctions numériques sur un espace vectoriel.  
C.R.A.S. PARIS, 156, 5047-5049.
- (1963) Remarques sur les fonctions à valeurs dans  $[-\infty, +\infty]$  définies sur un demi-groupe.  
C.R.A.S. PARIS, 257, 3107-3109.
- (1964) Sur la fonction polaire d'une fonction semi-continue supérieurement.  
C.R.A.S. PARIS, 258, 1128-1131.
- (1966-67) Fonctionnelles convexes.  
Séminaire sur les équations aux dérivées partielles.  
Collège de France.

M. MORIN & F. CATZ

- (1970) Méthodes duales pour le calcul des fonctions spline dans un convexe.  
Colloque d'Analyse Numérique de Super-Besse, juin 1970.

U. MOSCO

- (1967) Approximation of the solutions of some variational inequalities. Ann. Scuola Normale Sup. Pisa. XXI, 373-394, 765.
- (1968) Convergence of solutions of variational inequalities. Proc. NATO Summer School, Venice, 231-247.
- (1969) Convergence of convex sets and of solutions of variational inequalities. Adv. in Math, 3, Fas. 4, 510-585.
- (1970) On the continuity of the Young-Fenchel transform. A paraître.

R.T. ROCKAFELLAR

- (1966) An extension of Fenchel's duality theorem for convex functions. Duke Math. J, 33, 81-90.
- (1966) Level sets and continuity of conjugate convex functions. Trans. Amer. Math. Soc, 123, 46-63.
- (1970) Conjugate convex functions in optimal control and the calculus of variation. Séminaire sur la convexité et ses applications, Université de Montréal

M. VALADIER

- (1968) Quelques propriétés de sous-gradient. Rapports de l'I.R.I.A., Septembre 1968.
- (1970) Contribution à l'analyse convexe. Thèse à paraître.
- (1970) Intégration de convexes fermés, notamment d'épigraphe. Inf-convolution continue. Rapports de l'I.R.I.A, Mars 1970.

WETS and WALKUP

- (1967) Continuité of some convex-cone-valued mappings. Proc. Amer. Math. Soc, 18, 229-253.

R.A. WIJSMAN

- (1964) Convergence of sequences of convex sets, cones and functions.  
Part I, Bull., Amer. Math. Soc. 70, 186-188.
- (1966) Idem, Part II, Trans. Amer. Math. Soc. 32-45.

-----

BOURBAKI (\*) Espaces vectoriels topologiques.  
Chap. 1 et 2, Hermann PARIS 1966.

BOURBAKI (\*\*) Espaces vectoriels topologiques.  
Chap. 3, 4 et 5, Hermann, PARIS 1964.

BOURBAKI (\*\*\*) Intégration.  
Chap. 1,2,3 et 4, Hermann PARIS 1966.

DUNFORD & SCHWARTZ (\*) Linear operators.  
Part 1 - Intersciences Publi. Inc., N.Y. (1966).

A. GROTHENDIECK (\*) Espaces vectoriels topologiques.  
Cours 3ème Edition, Sao-Paulo (1964).

T. KATO (\*) Perturbation theory for linear operators.  
Springer-Verlag (1966).

J.L. LIONS (\*) Contrôle optimal des systèmes gouvernés par des équations aux  
dérivées partielles.  
Dunod-Gauthier-Villars (1968).

(\*\*) Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non  
linéaires.  
Dunod-Gauthier-Villars (1969).

R.T. ROCKAFELLAR (\*) Convex Analysis.  
Princeton Univ. Press. Princeton, N.Y. (1970).

TABLE DES MATIERES

CHAPITRE - I - NOTIONS DE BASE CONCERNANT LES FONCTIONNELLES CONVEXES

1) Introduction -----	1
2) Fonctionnelles convexes -----	3
3) Fonctionnelles semi-continues inférieurement -----	7
4) Fonctionnelles inf-localement compactes -----	9
5) Continuité et compacité -----	14
6) Inf-convolution -----	18
7) Sous-différentiabilité -----	25

CHAPITRE - II - UNE FAMILLE DE TOPOLOGIES COMPATIBLES AVEC LA POLARITE

1) Introduction -----	29
2) La topologie $I(T)$ -----	31
3) La topologie $S(T')$ -----	34
4) Les topologies $[T, T'^*]$ et $[T', T^*]$ -----	36

CHAPITRE - III - LIMITES INFERIEURES ET SUPERIEURES

1) Introduction -----	42
2) Ensembles limites associés à une suite d'ensembles convexes -----	45
3) Effet de la polarité -----	51
4) Espaces de Fréchet -----	59
5) Quelques exemples -----	63
6) Fonctionnelles limites associées à une suite de fonctionnelles convexes -----	74
7) Effet de la polarité -----	78

CHAPITRE - IV - RESULTATS DE STABILITE POUR LA SOMME ET L'INF-CONVOLUTION

1)	Enoncé du problème et plan du chapitre -----	93
2)	Une première condition suffisante -----	96
3)	Codistance dans un espace normé -----	101
4)	Expression duale de la codistance -----	106
5)	Cas d'un espace localement convexe -----	120
6)	Suite de somme de fonctionnelles convexes -----	124

CHAPITRE - V - QUELQUES EXEMPLES D'APPLICATION

1)	Résultats de convergence pour une suite de problèmes d'optimisation -----	135
2)	Approximation d'un problème par des problèmes en dimension finie -----	158
3)	Perturbations de certaines inéquations variationnelles simples -----	165
4)	Convergence de fonctions-spline définies dans un convexe -----	168
5)	Problèmes de meilleure approximation -----	175

VU

*Grenoble, le*

*Le Président de la Thèse*

VU

*Grenoble, le*

*Le Doyen de la Faculté des Sciences*

*VU, et permis d'imprimer*

*Le Recteur de l'Académie de GRENOBLE*