



**HAL**  
open science

# Contribution à l'étude des surtensions de manœuvre sur les lignes à très haute tension

Abdourahmane N'Dir

► **To cite this version:**

Abdourahmane N'Dir. Contribution à l'étude des surtensions de manœuvre sur les lignes à très haute tension. Modélisation et simulation. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1971. tel-00282781

**HAL Id: tel-00282781**

**<https://theses.hal.science/tel-00282781>**

Submitted on 28 May 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSES

*présentées*

A L'UNIVERSITÉ SCIENTIFIQUE ET MÉDICALE DE GRENOBLE

*pour obtenir*

LE GRADE DE DOCTEUR D'ÉTAT ÈS-SCIENCES APPLIQUÉES

PAR

**Abdourahmane N'DIR**

Ingénieur I.E.G.

---

**1<sup>re</sup> THÈSE**

Contribution à l'étude des surtensions de manœuvre  
sur les lignes à très haute tension.

---

**2<sup>e</sup> THÈSE**

Propositions données par la Faculté.

---

*Soutenues le 30 Juin 1971, devant la Commission d'Examen*

---

**JURY**

MM. L. NÉEL

*Président*

E. PILLET

M. POLOUJADOFF

N. GASTINEL

J. C. SABONNADIÈRE

M. POUARD

} *Examineurs*

*Invité*



# THÈSES

*présentées*

A L'UNIVERSITÉ SCIENTIFIQUE ET MÉDICALE DE GRENOBLE

*pour obtenir*

LE GRADE DE DOCTEUR D'ÉTAT ÈS-SCIENCES APPLIQUÉES

PAR

**Abdourahmane N'DIR**

Ingénieur I.E.G.

---

**1<sup>re</sup> THÈSE**

Contribution à l'étude des surtensions de manœuvre  
sur les lignes à très haute tension.

---

**2<sup>e</sup> THÈSE**

Propositions données par la Faculté.

---

*Soutenues le 30 Juin 1971, devant la Commission d'Examen*

---

**JURY**

MM. L. NÉEL

*Président*

E. PILLET

M. POLOUJADOFF

N. GASTINEL

J. C. SABONNADIÈRE

M. POUARD

} *Examineurs*

*Invité*



PROFESSEURS TITULAIRES

Président : Monsieur Michel SOUTIF  
Vice-Président : Monsieur Gabriel CAU

MM.	ANGLES D'AURIAC Paul	Mécanique des fluides
	ARNAUD Georges	Clinique des maladies infectieuses
	ARNAUD Paul	Chimie
	AYANT Yves	Physique approfondie
	BARBIER Jean-Claude	Physique expérimentale
	BARBIER Reynold	Géologie appliquée
	BARJON Robert	Physique nucléaire
	BARNOUD Fernand	Biosynthèse de la cellulose
	BARRIE Joseph	Clinique chirurgicale
	BENOIT Jean	Radioélectricité
	BESSON Jean	Electrochimie
	BEZES Henri	Chirurgie générale
	BIAMBERT Maurice	Mathématiques pures
	BOLLIET Louis	Informatique (IUT B)
	BONNET Georges	Electrotechnique
	BONNET Jean-Louis	Clinique ophtalmologique
	BONNET-EYMARD Joseph	Pathologie médicale
	BONNIER Etienne	Electrochimie Electrometallurgie
	BOUCHERLE André	Chimie et Toxicologie
	BOUCHEZ Robert	Physique nucléaire
	BRAVARD Yves	Géographie
	BRISSONNEAU Pierre	Physique du Solide
	BUYLE-BODIN Maurice	Electronique
	CASANAC Jean	Pathologie chirurgicale
	CABANEL Guy	Clinique rhumatologique et hydrologique
	CALAS François	Anatomie
	CARRAZ Gilbert	Biologie animale et pharmacodynamie
	CAU Gabriel	Médecine légale et Toxicologie
	CAUQUIS Georges	Chimie organique
	CHABAUTY Claude	Mathématiques pures
	CHATEAU Robert	Thérapeutique
	CHENE Marcel	Chimie papetière
	COEUR André	Pharmacie chimique
	CONTAMIN Robert	Clinique gynécologique
	COUDERC Pierre	Anatomie Pathologique
	CRAYA Antoine	Mécanique
Mme	DEBELMAS Anne-Marie	Matière médicale
MM.	DEBELMAS Jacques	Géologie générale
	DEGRANGE Charles	Zoologie
	DESSAUX Georges	Physiologie animale
	DODU Jacques	Mécanique appliquée
	DREYFUS Bernard	Thermodynamique
	DUCROS Pierre	Cristallographie
	DUGOIS Pierre	Clinique de Dermatologie et Syphiligraphie
	FAU René	Clinique neuro-psychiatrique
	FELICI Noël	Electrostatique
	GAGNAIRE Didier	Chimie physique
	GALLISSOT François	Mathématiques pures
	GALVANI Octave	Mathématiques pures
	GASTINEL Noël	Analyse numérique
	GERBER Robert	Mathématiques pures

MM.	GIRAUD Pierre	Céologie
	KLEIN Joseph	Mathématiques pures
Mme	KOFLER Lucie	Botanique et physiologie végétale
MM.	KOSZUL Jean-Louis	Mathématiques pures
	KRAVTCHENKO Julien	Mécanique
	KUNTZMANN Jean	Mathématiques appliquées
	LACAZE Albert	Thermodynamique
	LACHARME Jean	Biologie végétale
	LATURAZE Jean	Biochimie pharmaceutique
	LEDRU Jean	Clinique médicale B
	LLIBOUTRY Louis	Géophysique
	LOUP Jean	Géographie
Mlle	LUTZ Elisabeth	Mathématiques pures
	MALGRANGE Bernard	Mathématiques pures
	MALINAS Yves	Clinique obstétricale
	MARTIN-NOEL Pierre	Séméiologie médicale
	MASSEPORT Jean	Géographie
	MAZARE Yves	Clinique médicale A
	MICHEL Robert	Minéralogie et Pétrographie
	MOURIQUAND Claude	Histologie
	MOUSSA André	Chimie nucléaire
	NEEL Louis	Physique du Solide
	OZENDA Paul	Botanique
	PAUTHENET René	Electrotechnique
	PAYAN Jean-Jacques	Mathématiques pures
	PEBAY-PEYROULA Jean-Claude	Physique
	PERRET René	Servomécanismes
	PILLET Emile	Physique industrielle
	RASSAT André	Chimie systématique
	RENARD Michel	Thermodynamique
	REULOS René	Physique industrielle
	RINALDI Renaud	Physique
	ROGET Jean	Clinique de pédiatrie et de puériculture
	SANTON Lucien	Mécanique
	SEIGNEURIN Raymond	Microbiologie et Hygiène
	SENGEL Philippe	Zoologie
	SILBERT Robert	Mécanique des fluides
	SOUTIF Michel	Physique générale
	TANCHE Maurice	Physiologie
	TRAYNARD Philippe	Chimie générale
	VAILLAND François	Zoologie
	VAUQUOIS Bernard	Calcul électronique
Mme	VERAIN Alice	Pharmacie galénique
	VERAIN André	Physique
Mme	VEYRET Germaine	Géographie
MM.	VEYRET Paul	Géographie
	VIGNAIS Pierre	Biochimie médicale
	YOCOZ Jean	Physique nucléaire théorique

**PROFESSEURS ASSOCIES**

---

MM.	BULLEMER Bernhard	Physique
	RADHAKRISHNA Pidatala	Thermodynamique

PROFESSEURS SANS CHAIRE

MM.	AUBERT Guy	Physique
Mme	BARBIER Marie-Jeanne	Electrochimie
MM.	BARRA Jean	Mathématiques appliquées
	BEAUDOING André	Pédiatrie
	BERTRANDIAS Jean-Paul	Mathématiques appliquées
	BIAREZ Jean-Pierre	Mécanique
	BONNETAIN Lucien	Chimie minérale
Mme	BONNIER Jane	Chimie générale
MM.	CARLIER Georges	Biologie végétale
	COHEN Joseph	Electrotechnique
	COUMES André	Radioélectricité
	DEPASSEL Roger	Mécanique des Fluides
	DEPORTES Charles	Chimie minérale
	DESRE Pierre	Métallurgie
	DOLYQUE Jean-Michel	Physique des plasmas
	GAUTHIER Yves	Sciences biologiques
	GEINDRE Michel	Electroradiologie
	GIDON Paul	Géologie et Minéralogie
	GLENAT René	Chimie organique
	HACQUES Gérard	Calcul numérique
	JANIN Bernard	Géographie
Mme	KAHANE Josette	Physique
MM.	LATREILLE René	Chirurgie générale
	LAURENT Pierre	Mathématiques appliquées
	MULLER Jean-Michel	Thérapeutique
	PERRIAUX Jean-Jacques	Géologie et minéralogie
	POULOUJADOFF Michel	Electrotechnique
	REBECQ Jacques	Biologie (CUS)
	REVOL Michel	Urologie
	REYMOND Jean-Charles	Chirurgie générale
	ROBERT André	Chimie papetière
	SARRAZIN Roger	Anatomie et chirurgie
	SARROT-REYNAULD Jean	Géologie
	SIBILLE Robert	Construction Mécanique
	SIROT Louis	Chirurgie générale
Mme	SOUTIF Jeanne	Physique générale
M.	VALENTIN Jacques	Physique nucléaire

MAITRES DE CONFERENCES ET MAITRES DE CONFERENCES AGREGES

Mle	AGNIUS-DELORE Claudine	Physique pharmaceutique
	ALARY Josette	Chimie analytique
MM.	AMBLARD Pierre	Dermatologie
	AMBROISE-THOMAS Pierre	Parasitologie
	ARMAND Yves	Chimie
	BEGUIN Claude	Chimie organique
	BELORIZKY Elie	Physique
	BENZAKEN Claude	Mathématiques appliquées
	BERTRANDIAS Françoise	Mathématiques pures
	BLIMAN Samuel	Electronique (EIE)
	BLOCH Daniel	Electrotechnique
Mme	BOUCHE Liane	Mathématiques (CUS)
MM.	BOUCHET Yves	Anatomie
	BOUSSARD Jean-Claude	Mathématiques appliquées
	BOUVARD Maurice	Mécanique des Fluides
	BRIERE Georges	Physique expérimentale

	BRODEAU François	Mathématiques (IUT B)
	BRUGEL Lucien	Energétique
	BUISSON Roger	Physique
	BUTEL Jean	Orthopédie
	CHAMBAZ Edmond	Biochimie médicale
	CHAMPETIER Jean	Anatomie et organogénèse
	CHARACHON Robert	Oto-Rhino-Laryngologie
	CHIAVERINA Jean	Biologie appliquée (EFP)
	CHIBON Pierre	Biologie animale
	COHEN-ADDAD Jean-Pierre	Spectrométrie physique
	COLOMB Maurice	Biochimie médicale
	CONTE René	Physique
	CROUZET Guy	Radiologie
	DURAND Francis	Métallurgie
	DUSSAUD René	Mathématiques (CUS)
Mme	ETERRADOSSI Jacquelin	Physiologie
MM.	FAURE Jacques	Médecine légale
	GAVEND Michel	Pharmacologie
	GENSAC Pierre	Botanique
	GERMAIN Jean-Pierre	Mécanique
	GIDON Maurice	Géologie
	GRIFFITHS Michael	Mathématiques appliquées
	GROULADE Joseph	Biochimie médicale
	HOLLARD Daniel	Hématologie
	HUGONOT Robert	Hygiène et médecine préventive
	IDELMAN Simon	Physiologie animale
	IVANES Marcel	Electricité
	JALBERT Pierre	Histologie
	JOLY Jean-René	Mathématiques pures
	JOUBERT Jean-Claude	Physique du Solide
	JULLIEN Pierre	Mathématiques pures
	KAHANE André	Physique générale
	KUHN Gérard	Physique
Mme	LAJZEROWICZ Jeannine	Physique
MM.	LAJZEROWICZ Joseph	Physique
	LANCIA Roland	Physique atomique
	LE JENTER Noël	Electronique
	LEROY Philippe	Mathématiques
	LOISEAUX Jean-Marie	Physique nucléaire
	LONGQUEUE Jean-Pierre	Physique nucléaire
	LIU DUC Cuong	Chimie organique
	MACHE Régis	Physiologie végétale
	MAGNIN Robert	Hygiène et Médecine préventive
	MAECHAL Jean	Mécanique
	MARTIN-BOUYER Michel	Chimie (CUS)
	MAYNARD Roger	Physique du Solide
	MICOUD Max	Maladies infectieuses
	MOREAU René	Hydraulique (INP)
	NEGPE Robert	Mécanique
	PARAMELLE Bernard	Pneumologie
	PECCOUD François	Analyse (IUT B)
	PEFFEN René	Métallurgie
	PELMONT Jean	Physiologie animale
	PERRET Jean	Neurologie
	PERRIN Louis	Pathologie expérimentale
	PFISTER Jean-Claude	Physique du Solide
	PHELIP Xavier	Rhumatologie
Mlle	PIERY Yvette	Biologie animale

MM.	RACHAIL Michel	Médecine interne
	RACINET Claude	Gynécologie et obstétrique
	RICHARD Lucien	Botanique
Mme	RINAUDO Marguerite	Chimie macromoléculaire
MM.	ROMIER Guy	Mathématiques (IUT B)
	ROUGEMONT (DE) Jacques	Neuro-chirurgie
	STIEGLITZ Paul	Anesthésiologie
	STOENER Pierre	Anatomie pathologique
	VAN CUYSEM Bernard	Mathématiques appliquées
	VEILLON Gérard	Mathématiques appliquées (INP)
	VIALON Pierre	Géologie
	VOOG Robert	Médecine interne
	VIROUSSOS Constantin	Radiologie
	ZADWORNÝ François	Electronique

MAITRES DE CONFERENCES ASSOCIES

MM.	BOUDOURIS Georges	Radioélectricité
	CHEEKE John	Thermodynamique
	GOLDSCHMIDT Hubert	Mathématiques
	YACOUB Mahmoud	Médecine légale

CHARGES DE FONCTIONS DE MAITRES DE CONFERENCES

Mme	BERIEL Hélène	Physiologie
Mme	RENAUDET Jacqueline	Microbiologie

Fait le 9 avril 1971



Ce travail a été effectué dans les Laboratoires de l'Institut National Polytechnique de Grenoble grâce à l'agrément de son Président, Monsieur le Professeur NEEL, prix Nobel de physique, Membre de l'Institut. Je lui exprime ma profonde reconnaissance d'avoir bien voulu me faire l'honneur de présider ce jury.

Que Monsieur le Professeur FALLOT qui a bien voulu m'accueillir dans le Laboratoire de Physique Industrielle trouve ici l'assurance de ma reconnaissance respectueuse.

J'adresse mes remerciements les plus sincères à Monsieur le Professeur PILLET pour l'obligeance avec laquelle il s'est occupé de mon second sujet de Thèse et le soutien constant qu'il m'a apporté tout au long de mon travail.

Monsieur le Professeur POLOUJADOFF m'a proposé ce sujet passionnant. J'ai pu apprécier le grand intérêt qu'il a porté à mon travail. Qu'il trouve, ici, l'expression de ma profonde gratitude.

Je remercie Monsieur le Professeur GASTINEL et Monsieur POUARD de la direction des Etudes et Recherches de l'E. D. F., d'avoir bien voulu participer à ce jury.

Je remercie également Monsieur SABONNADIÈRE, Maître de Conférences, qui par son aide et ses conseils éclairés a contribué à l'avancement de ce travail.

J'adresse aussi mes remerciements à mes camarades Chercheurs et au Personnel du Laboratoire auprès de qui, j'ai trouvé une aide amicale ainsi qu'à Mademoiselle Sauve pour le soin particulier qu'elle a apporté à la frappe de ce texte.



# S O M M A I R E

=====

## INTRODUCTION

=====

PREMIERE PARTIE - Etude numérique des surtensions de manoeuvre sur les  
===== lignes de transport d'énergie.

CHAPITRE I - Introduction à la formulation du problème.

I - 1	Equation de la ligne.....	1
I - 2	Conditions initiales.....	2
I - 3	Conditions aux limites.....	2

CHAPITRE II - Forme caractéristique normale de la propagation sur les lignes de transport d'énergie.

II - 1	Existence de la transformation et composantes de mode.....	5
II - 2	Expression de la forme normale.....	9

CHAPITRE III - Méthode de résolution numérique..... 17

III - 1	Formulation nouvelle du problème par les composantes normales.....	17
III - 2	Problème aux différences finies équivalent.	23
III - 3	Méthode de double balayage.....	31
III - 4	Stabilité et Convergence.....	37

DEUXIEME PARTIE - Le Programme PEGASE

=====

CHAPITRE I - Méthode de détermination de  $A_M$ ,  $B_M$ ,  $E_G^{(n)}$ .

I - 1	Utilisation de l'équation à la limite côté générateur mise sous la première forme.....	65
I - 2	Utilisation de l'équation à la limite côté générateur mise sous la seconde forme.....	68

<u>CHAPITRE II</u>	-	Systématisation du Calcul de $A_M, B_M, E_G^{(n)}$ .	
II - 1		Introduction.....	80
II - 2		Recherche des différentes matrices du graphe du réseau constituant le générateur.....	81
II - 3		Détermination des matrices $A_M, B_M, E_G^{(n)}$ ...	90
<u>CHAPITRE III</u>	-	Le Programme PEGASE et son utilisation pratique.	
III - 1		Composantes du Programme.....	101
III - 2		Utilisation du Programme.....	104
 <u>TROISIEME PARTIE</u> - Exploitation de PEGASE. =====			
<u>CHAPITRE I</u>	-	Essais justificatifs.	
I - 1		Introduction.....	107
I - 2		Spécification du problème et comparaison des résultats.....	107
<u>CHAPITRE II</u>	-	Méthode d'étude statistique des surtensions d'enclenchement.	
II - 1		Introduction.....	112
II - 2		Définition de la ligne étudiée et des paramètres d'essais.....	113
II - 3		Etude de l'influence des paramètres d'enclenchement.....	115
II - 4		Méthodes d'essais et résultats.....	127
II - 5		Application à la détermination du couple de résistances optimum d'un disjoncteur équipé de deux résistances.....	139
 <u>CONCLUSION</u> ..... =====			
 <u>BIBLIOGRAPHIE</u> ..... =====			

## I N T R O D U C T I O N

=====

Dans un réseau donné, l'ouverture ou la fermeture d'un disjoncteur provoque l'apparition de phénomènes transitoires. Ils se superposent au régime établi et le perturbent pendant un temps plus ou moins long suivant les caractéristiques du réseau. Ce régime appelé transitoire est responsable de la création d'à coups de tensions (semblables aux coups de bélier en Hydraulique) dénommés surtensions de manoeuvre.

L'étude des régimes transitoires a été jusqu'à ces dernières années peu développée hormis dans des cas simples ou sous des hypothèses fortement restrictives.

Ces études dont les résultats concordaient plus ou moins bien avec la réalité suffisaient lorsqu'on considérait des lignes à moyenne et haute tension, le choix du niveau d'isolement n'influençant pas notablement les conditions économiques d'établissement de ces réseaux.

Les projets puis la réalisation de lignes à très haute tension (765 KV) et, dans un avenir proche, de systèmes à ultra haute tension (1 000 KV et plus) a sensiblement modifié cette situation.

En effet, quand on travaille à de telles tensions, l'isolement intervient de manière appréciable dans le coût de l'ensemble ; il convient donc de déterminer des conditions optimales d'isolement compatibles avec les contraintes techniques et économiques (25).

Dans ces conditions, les méthodes d'analyse employées jusqu'à présent, ne pouvaient assurer, en raison de la complexité du problème, une précision suffisante dans la détermination des surtensions. C'est pourquoi ces dernières années, cette question a été l'objet d'études intensives sur le plan international tant pour la connaissance des surtensions elles-mêmes, que pour les moyens de les combattre.

Les essais en lieu de service sont très difficiles à réaliser car ils mettent en oeuvre des moyens importants et entraînent des risques de destruction non négligeables. Il faut donc faire les études sur des modèles réduits (26).

Les méthodes analogiques sont des systèmes à constantes localisées qui, pour permettre une analyse fine des phénomènes, utilisent des cellules nombreuses et chères qu'on doit changer pour chaque cas particulier. Elles bénéficient cependant, après leur montage (difficile et lent), d'une certaine souplesse d'emploi.

Les méthodes mathématiques développées jusqu'à présent, ont été principalement des améliorations de la méthode de Bergeron et des adaptations de la transformation de Laplace ou de Fourier, ceci sans résultats très concluants. Les essais tentés précédemment à l'aide des méthodes discrètes (27), (28), ont été abandonnés, sans doute à cause des difficultés de stabilité.

Toutes ces méthodes ont eu pour but de résoudre dans un temps de calcul raisonnable un certain problème qui n'est autre qu'un problème d'évolution.

Afin de le traiter de manière plus générale, nous nous sommes attachés non seulement à la résolution des équations, mais à la formulation mathématique de l'étude des régimes transitoires sur les lignes.

Pour atteindre ce but, nous avons d'abord, dans la première partie de notre travail, exposé une nouvelle façon de concevoir les équations de propagation sur les lignes polyphasées. Nous proposons ensuite un schéma aux différences finies dont nous donnons les conditions nécessaires et suffisantes de stabilité.

La deuxième partie est consacrée à une étude originale aboutissant à la mise en équation automatique du générateur à partir du graphe de son réseau équivalent.

La troisième partie est d'abord une confrontation des résultats obtenus avec ceux de l'analyseur transitoire. Nous développons ensuite une nouvelle méthode d'étude statistique des surtensions et nous cherchons le couple de résistances optimum permettant de réduire les surtensions d'enclenchement.



P R E M I E R E   P A R T I E

=====

ETUDE NUMERIQUE DES SURTENSIONS DE MANOEUVRE  
SUR LES LIGNES DE TRANSPORT D'ENERGIE.



# CHAPITRE 1

=====

## INTRODUCTION A LA FORMULATION DU PROBLEME

-0-

Dans la mise en équations du problème posé par l'étude et la limitation des surtensions de manoeuvre sur une ligne de transport d'énergie, nous distinguerons trois parties : la ligne, son état initial, et la configuration du générateur.

La ligne est déterminée, mais son état initial est aléatoire. La configuration du générateur dépend des moyens qu'on met en oeuvre pour réduire les surtensions : résistances d'enclenchement, réactances shunt etc.

### I - 1 - EQUATIONS DE LA LIGNE

Considérons une ligne multifilaire de longueur  $\lambda$  composée de  $m$ , conducteurs en présence du sol, fig. I - 1.

Si  $V(x,t)$  et  $i(x,t)$  sont les vecteurs de dimension  $m$ , désignant respectivement les tensions simples et les courants dans les fils de ligne, les équations de la propagation s'écrivent :

$$I - 1 \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial V}{\partial x} = R i + L \frac{\partial i}{\partial t} \\ \frac{\partial i}{\partial x} = G v + C \frac{\partial v}{\partial t} \end{array} \right.$$

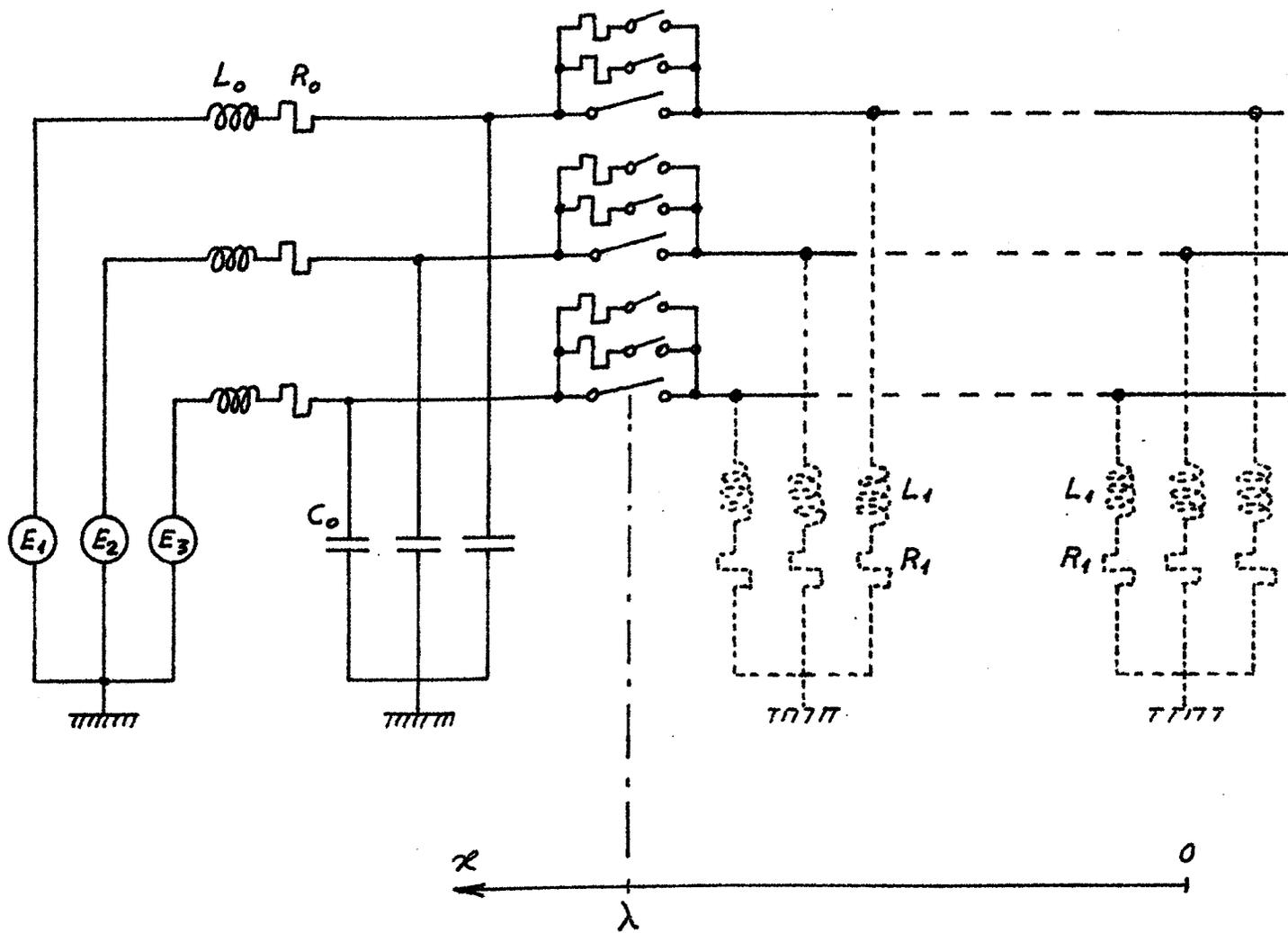


Fig. I-1

où  $R = (r_{ij})$ ,  $L = (l_{ij})$ ,  $G = (g_{ij})$ ,  $C = (c_{ij})$  sont des matrices  $(m, m)$  telles que :

$r_{ij}$  = résistance linéique

$c_{ij}$  = capacité linéique

$g_{ij}$  = conductance linéique

$l_{ij}$  = coefficient d'induction  $\left\{ \begin{array}{l} \text{mutuelle si } i \neq j \\ \text{propre si } i = j \end{array} \right.$

Pour la résolution numérique qui suivra, nous ferons l'hypothèse suivante : le système est un ensemble d'éléments passifs réciproques dont les valeurs sont constantes.

Les équations I - 1 - sont insuffisantes à définir le problème, nous devons y adjoindre les conditions initiales et aux limites.

### I - 2 - CONDITIONS INITIALES

Nous supposerons la ligne chargée et l'écoulement des charges devenu négligeable à l'instant de la manoeuvre. La présence d'une résistance de décharge à l'extrémité de la ligne (1) permet de réduire la charge initiale et rend le courant initial dans la ligne pratiquement nul.

$$\begin{array}{l} \text{I - 2} \quad v(x, 0) = Q \\ \quad \quad i(x, 0) = 0 \end{array} \quad \forall x$$

### I - 3 - CONDITIONS AUX LIMITES

#### I - 31 - Récepteur

Notre étude se limite à celle des lignes à vide

Cependant la méthode employée peut s'étendre à n'importe quel cas en particulier celui des lignes ayant des inductances de compensation à leurs extrémités. Il en sera fait mention plus loin, au moment de la détermination de  $F_0$  et  $E_0$ .

$$I - 31 \quad i(0, t) = 0 \quad \forall t \text{ (ligne à vide)}$$

I - 32 - Generateur

La condition à la limite côté générateur est définie par un système différentiel dont le rang dépend de la complexité du générateur.

Ce système peut s'utiliser sous deux formes ;

- La première, que nous emploierons pour la démonstration des conditions de stabilité, consiste en l'élimination de toutes les variables autre que  $v(\lambda, t)$  et  $i(\lambda, t)$ . Ainsi nous obtenons la relation différentielle

$$I - 321 \quad F(v(\lambda, t), \frac{\partial v(\lambda, t)}{\partial t}, \frac{\partial^2 v(\lambda, t)}{\partial t^2}, \dots, i(\lambda, t), \frac{\partial i(\lambda, t)}{\partial t}, \frac{\partial^2 i(\lambda, t)}{\partial t^2}, R_F(t)) = 0$$

Les conditions de la manoeuvre y sont caractérisées par la variation discrète du vecteur  $R_F$  des résistances d'enclenchement.

- La seconde forme, dans laquelle nous divisons les conditions aux limites en deux équations, nous permet de généraliser notre méthode. En effet elle est plus accessible au traitement numérique et la première équation de cette seconde forme peut s'obtenir à partir de la théorie des graphes. Cette équation est un système différentiel entre les variables d'état du réseau à constantes localisées définissant le générateur. Ce système

est invariable au cours de l'enclenchement. La seconde équation est une relation algébrique entre  $v(\lambda, t)$  et  $i(\lambda, t)$  dont les coefficients sont des matrices qui varient d'une manière discrète aux différents instants d'enclenchement.

La seconde forme s'écrit donc :

$$\frac{dX}{dt} = H_1 X + H \quad (\text{équation invariable})$$

I - 322

$$A_e V(\lambda, t) + B_e i(\lambda, t) = G(x) \quad (\text{équation liée à l'enclenchement}).$$

Dans la figure I - 2 -,  $X_i = V_{ci}$  pour  $i = 1, 2, 3$  et  $X_i = i_{Li}$  pour  $i = 4, 5, 6$ .

C'est la résolution du système obtenu en groupant les équations I - 1, I - 2, I - 31, I - 321 ou I - 322 qui nous fournit les surtensions en bout de ligne, objet de notre étude.



CHAPITRE II

=====

FORME CARACTERISTIQUE NORMALE DE LA  
PROPAGATION SUR LES LIGNES DE TRANSPORT D'ENERGIE

-0-

En vue de faciliter la résolution du système formé par les équations I - 1, I - 2, I - 31, I - 321 ou I - 322, nous leur appliquons une transformation linéaire afin de les mettre sous une forme plus adaptée au traitement numérique. Celle-ci appelée forme normale, diagonalise l'équation de la ligne et peut représenter une généralisation de l'équation du retard (2) qui serait écrite en valeur instantanée.

II - 1 - EXISTENCE DE LA TRANSFORMATION ET  
COMPOSANTES DE MODES

Reprenons l'équation d'une ligne multifilaire constituée de m conducteurs en présence du sol :

$$\text{I - 1} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = R i + L \frac{\partial i}{\partial t}$$

$$\frac{\partial i}{\partial x} = G v + C \frac{\partial v}{\partial t}$$

Ecrivons I - 1 sous la forme :

$$\text{II - 11} \quad I_{o2m} \frac{\partial u}{\partial x} + B \frac{\partial u}{\partial t} + D u = 0$$

avec  $I_{02m}$  matrice unité d'ordre  $2m$ ,

$$u = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \\ i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_m \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -L \\ -C & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & -R \\ -G & 0 \end{bmatrix}$$

B et D sont des matrices d'ordre  $(2m, 2m)$ .

Désignons par T la transformation linéaire qui permet de mettre le système II - 11 sous la forme normale.

Transformons II - 11 par T il vient :

$$\text{II - 12} \quad T \frac{\partial u}{\partial x} + T B \frac{\partial u}{\partial t} + T D u = 0$$

Faisons le changement de variable  $X = Tu$ .

L'équation II - 12 devient :

$$T T^{-1} \frac{\partial X}{\partial x} + T B T^{-1} \frac{\partial X}{\partial t} + T D T^{-1} X = 0$$

L'idée de la méthode consiste dans notre cas à choisir T pour que  $T B T^{-1}$  soit diagonale.

Nous définirons donc la transformation linéaire cherchée par  $T = (t_{ij})$  matrice d'ordre  $(2m, 2m)$  telle que : (3), (4)

$$\text{II - 13} \quad \begin{cases} \det T \neq 0 & (T \text{ est régulière}) \\ T = C_1 T B & \text{avec } C_1 = C_1^{ii} \text{ diagonale et} \\ & C_1^{ii} \neq 0 \quad \forall i \quad (i = 1, 2, \dots, 2m). \end{cases}$$

II - 11 - Détermination de  $C_1$

De la relation  $T = C_1 T B$  nous tirons  
 $C_1^{-1} = T B T^{-1}$  (car les  $C_1^{ii}$  sont différents de zéro par hypothèse). Nous pouvons donc conclure que les  $C_1^{ii}$  ( $i = 1, 2, \dots, 2m$ ) sont les inverses des valeurs propres de B.

Calcul des valeurs propres de B

Soit  $B = \begin{bmatrix} 0 & -L \\ -C & 0 \end{bmatrix}$ , nous savons que si  $\beta$

est valeur propre de B,  $\beta^2$  est valeur propre de  $B^2$ .

$B^2 = \begin{bmatrix} LC & 0 \\ 0 & CL \end{bmatrix}$  nous allons chercher les valeurs propres

de  $B^2$ . Ce sont les constantes  $\mu$  telles que :

$$\det ( B^2 - \mu I_{02m} ) = 0$$

Or

$$\det ( B^2 - \mu I_{02m} ) = \det ( LC - \mu I_{0m} ) \times \det ( CL - \mu I_{0m} )$$

Avec l'hypothèse, faite au paragraphe I - 1, que le système est un ensemble d'éléments passifs réciproques, nous avons :  $l_{ij} = l_{ji}$  et  $c_{ij} = c_{ji}$  soit

$${}^t L = L \text{ et } {}^t C = C.$$

Par conséquent  ${}^t (LC) = {}^t C {}^t L = CL$  ce qui entraîne  $\det (LC - \mu I_{0m}) = \det (CL - \mu I_{0m})$ .

Nous obtenons finalement :

$$\text{II - 111} \quad \det ( B^2 - \mu I_{02m} ) = ( \det ( LC - \mu I_{0m} ) )^2$$

La relation II - 114 signifie que si  $\mu$  est valeur propre de  $B^2$ , il est aussi valeur propre de LC et réciproquement. Nous remarquerons en plus que  $\mu$  est valeur propre double de  $B^2$ .

Conséquence pour les éléments de  $C_1$

Le calcul précédent montre que  $C_1^{ii} = \pm 1 / \sqrt{\mu_i}$  ; les  $\mu_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) étant les  $m$  valeurs propres de LC.

Nous pouvons ainsi constater que les  $m$  valeurs de  $|C_1^{ii}|$  représentent les vitesses de propagation des divers modes de la ligne sans perte.

II - 12 - Existence de T

La relation II - 13 donne  $T = C_1 T B$  soit

$$C_1^{-1} = T B T^{-1}.$$

Donc si B est diagonalisable par une matrice  $T'$ , nous aurons  $T = T'^{-1}$ .

Or nous savons que pour une ligne composée de  $m$  conducteurs en présence du sol, les ondes se propagent de  $m$  façons indépendantes ou modes.

Les lignes à très haute tension étant de plus en plus dissymétriques, nous pouvons dire que ses modes seront différents les uns des autres. Il en résulte qu'il existe  $m$  valeurs distinctes de  $|C_1^{ii}|$ . La matrice B est donc diagonalisable et la transformation T existe.

II - 2 - EXPRESSION DE LA FORME NORMALE

II - 21 - Définition

Reprenons l'équation  $T \frac{\partial u}{\partial x} + T B \frac{\partial u}{\partial t} + T D u = 0$

dans laquelle nous avons fait le changement de variable

$$X = T u$$

Cette équation devient :

$$T T^{-1} \frac{\partial X}{\partial x} + T B T^{-1} \frac{\partial X}{\partial t} + T D T^{-1} X = 0$$

soit :

$$\frac{\partial X}{\partial x} + C_1^{-1} \frac{\partial X}{\partial t} + T D T^{-1} X = 0$$

Multiplions par  $C_1$  à gauche, nous obtenons :

$$\text{II - 211} \quad \frac{\partial X}{\partial t} + C_1 \frac{\partial X}{\partial x} + C_1 T D T^{-1} X = 0$$

que nous pouvons écrire sous forme développée

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial t} \\ \vdots \\ \frac{\partial X_m}{\partial t} \\ \vdots \\ \frac{\partial X_{m+1}}{\partial t} \\ \vdots \\ \frac{\partial X_{2m}}{\partial t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/\sqrt{F_1} & 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1/\sqrt{F_m} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -1/\sqrt{F_{m+1}} & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -1/\sqrt{F_{2m}} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial x} \\ \vdots \\ \frac{\partial X_m}{\partial x} \\ \vdots \\ \frac{\partial X_{m+1}}{\partial x} \\ \vdots \\ \frac{\partial X_{2m}}{\partial x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & A_3 & \\ & & & A_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_m \\ \vdots \\ X_{m+1} \\ \vdots \\ X_{2m} \end{bmatrix} = 0$$

Nous partitionnerons II - 211 suivant deux équations en posant :

$$U = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_{m-1} \\ X_m \end{bmatrix}, \quad W = \begin{bmatrix} X_{m+1} \\ X_{m+2} \\ \vdots \\ X_{2m} \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{k_m} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{k_m} & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1/\sqrt{k_m} \end{bmatrix}$$

II - 211 s'écrit donc :

$$\text{II - 212} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial U}{\partial t} + P \frac{\partial U}{\partial x} + A_1 U + A_2 W = 0 \\ \frac{\partial W}{\partial t} - P \frac{\partial W}{\partial x} + A_3 U + A_4 W = 0 \end{array} \right.$$

Le système II - 212 sera par définition l'équation caractéristique normale de la ligne.

II - 22 - Calcul de T.

Nous procédons de la manière suivante :

Le système I - 1 - est transformé en ses composantes de mode. Chacune des équations de mode est ensuite mise sous la forme normale. Le regroupement des formes normales obtenues fournit alors la forme normale de la ligne et la matrice T.

Soient  $T_i$  et  $T_v$  les matrices des modes de courant et de tension (2) (5). La transformation II - 221,

$$\text{II - 221} \left\{ \begin{array}{l} v = T_v V \\ i = T_i I \end{array} \right. \quad (\text{où } V \text{ et } I \text{ sont les vecteurs tension et courant de mode}).$$

transforme le système I - 1 en ses composantes de mode :

$$\text{II - 222} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial V_1}{\partial x} = \mathcal{L}_1 \frac{\partial I_1}{\partial t} + \mathcal{R}_1 I_1 \\ \frac{\partial I_1}{\partial x} = \mathcal{C}_1 \frac{\partial V_1}{\partial t} + \mathcal{G}_1 V_1 \\ \cdot \\ \frac{\partial V_m}{\partial x} = \mathcal{L}_m \frac{\partial I_m}{\partial t} + \mathcal{R}_m I_m \\ \frac{\partial I_m}{\partial x} = \mathcal{C}_m \frac{\partial V_m}{\partial t} + \mathcal{G}_m V_m \end{array} \right.$$

Nous obtenons donc en appliquant II - 221 à I - 1 m systèmes de la forme :

$$\text{II - 222}' \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial V_k}{\partial x} = \mathcal{L}_k \frac{\partial I_k}{\partial t} + \mathcal{R}_k I_k \\ \frac{\partial I_k}{\partial x} = \mathcal{C}_k \frac{\partial V_k}{\partial t} + \mathcal{G}_k V_k \end{array} \right.$$

où  $\mathcal{L}_k, \mathcal{R}_k, \mathcal{C}_k$  et  $\mathcal{G}_k$  sont les constants linéiques du mode k ( K = 1, 2, ... m ).

II - 222' considérée isolément correspond à l'équation d'une ligne monophasée. Elle peut donc se mettre sous la forme normale.

Soit  $H_k$  la matrice qui met sous forme normale l'équation II - 222'. Multiplions cette équation par  $H_k$  et faisons le changement de variable.

$$\text{II - 223} \quad \begin{bmatrix} U_k \\ W_k \end{bmatrix} = H_k \begin{bmatrix} V_k \\ I_k \end{bmatrix}$$

II - 222' devient :

$$\text{II - 222''} \quad H_k H_k^{-1} \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} U_k \\ W_k \end{bmatrix} + H_k \begin{bmatrix} 0 & -d_k \\ -e_k & 0 \end{bmatrix} H_k^{-1} \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} U_k \\ W_k \end{bmatrix} + H_k \begin{bmatrix} 0 & -\beta_k \\ -\gamma_k & 0 \end{bmatrix} H_k^{-1} \begin{bmatrix} U_k \\ W_k \end{bmatrix} =$$

Cherchons  $H_k$  telle que :

$$C_K^{-1} = H_k \begin{bmatrix} 0 & -d_k \\ -e_k & 0 \end{bmatrix} H_k^{-1} \text{ soit diagonale : } \Rightarrow H_k = C_k H_k \begin{bmatrix} 0 & -d_k \\ -e_k & 0 \end{bmatrix}$$

Il nous faut d'abord déterminer  $C_k$ . Les éléments de  $C_k$  sont les inverses des valeurs propres

$$\text{de } \begin{bmatrix} 0 & -d_k \\ -e_k & 0 \end{bmatrix} ; \text{ d'où } C_k = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{d_k e_k} & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{d_k e_k} \end{bmatrix}$$

Le calcul de  $H_k$  se fait ensuite à partir du

$$\text{système } H_k - C_k H_k \begin{bmatrix} 0 & -d_k \\ -e_k & 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} H_k^{11} & H_k^{12} \\ H_k^{21} & H_k^{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1/\sqrt{d_k e_k} & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{d_k e_k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_k^{11} & H_k^{12} \\ H_k^{21} & H_k^{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -d_k \\ -e_k & 0 \end{bmatrix} = 0$$

Nous en tirons

$$H_k = \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{\frac{d_k}{e_k}} \\ 1 & \sqrt{\frac{d_k}{e_k}} \end{bmatrix}$$

soit en posant  $Z_{ok} = \sqrt{\frac{L_k}{C_k}}$

$$H_k = \begin{bmatrix} 1 & -Z_{ok} \\ 1 & Z_{ok} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad H_k^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{1}{Z_{ok}} & \frac{1}{Z_{ok}} \end{bmatrix}$$

En remplaçant dans II - 222"  $H_k$  par sa valeur, nous transformons finalement II - 222' en :

$$\text{II - 224} \quad \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} U_k \\ W_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{L_k C_k}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{L_k C_k}} \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} U_k \\ W_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{G_k}{2C_k} + \frac{R_k}{2L_k} & \frac{G_k}{2C_k} - \frac{R_k}{2L_k} \\ \frac{G_k}{2C_k} - \frac{R_k}{2L_k} & \frac{G_k}{2C_k} + \frac{R_k}{2L_k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_k \\ W_k \end{bmatrix} = 0$$

Ce qui correspond bien à l'équation caractéristique normale d'une ligne monophasée.

Appliquons  $m$  fois la transformation de matrice  $H_k$  et rangeons les  $U_k$  et  $W_k$  en deux blocs

$$X = \begin{bmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_m \\ W_1 \\ \vdots \\ W_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U \\ W \end{bmatrix}$$

Le système qui nous permet de passer des composantes de modes à  $X$  est définie par :

$$\left\{ \begin{array}{l} V_1 = (U_1 + W_1) / 2 \\ \vdots \\ V_m = (U_m + W_m) / 2 \\ I_1 = (1/Z_{o1})(-U_1 + W_1) / 2 \\ \vdots \\ I_m = (1/Z_{om})(-U_m + W_m) / 2 \end{array} \right.$$

soit en posant  $Y_c = \begin{bmatrix} 1/Z_{o1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ & & & 1/Z_{om} \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} V \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{om} & I_{om} \\ -Y_c & Y_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ W \end{bmatrix} \quad \text{II - 225}$$

II - 225 fait correspondre à II - 222 les équations :

$$\text{II - 226} \quad \begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} + P \frac{\partial U}{\partial x} + A_1 U + A_2 W = 0 \\ \frac{\partial W}{\partial t} - P \frac{\partial W}{\partial x} + A_2 U + A_1 W = 0 \end{cases}$$

où  $P$ ,  $A_1$  et  $A_2$  sont des matrices diagonales, d'ordre  $m$ ,  
telles que :  $P = \begin{bmatrix} p_k \end{bmatrix}$ ,  $A_1 = \begin{bmatrix} a_{1k} \end{bmatrix}$ ,  $A_2 = \begin{bmatrix} a_{2k} \end{bmatrix}$

avec pour  $k = 1, 2, \dots, m$  :

$$p_k = \frac{1}{\sqrt{L_k C_k}}, \quad a_{1k} = \frac{G_k}{2C_k} + \frac{R_k}{2L_k}, \quad a_{2k} = \frac{G_k}{2C_k} - \frac{R_k}{2L_k}$$

Ce système répond à la définition de la forme caractéristique normale donnée en II - 21.

La transformation  $T$  qui permet d'aboutir à II - 226 est telle que :

$$\begin{bmatrix} v \\ i \end{bmatrix} = T^{-1} \begin{bmatrix} U \\ W \end{bmatrix}$$

Son calcul s'effectue en partant des relations II - 221 et II - 225.

$$\begin{bmatrix} v \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_v & 0 \\ 0 & T_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_v & 0 \\ 0 & T_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{I_{om}}{2} & \frac{I_{om}}{2} \\ -\frac{Y_c}{2} & \frac{Y_c}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ W \end{bmatrix}$$

soit

$$\begin{bmatrix} v \\ i \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} T_v & T_v \\ -T_i Y_c & T_i Y_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ W \end{bmatrix}$$

\* T est définie par

$$T^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} T_v & T_v \\ -T_i Y_c & T_i Y_c \end{bmatrix}$$

\* T ne dépend que des caractéristiques de modes.

### II - 23 - Utilisation pratique

Dans la pratique, connaissant les matrices  $T_i$  et  $T_v$  qui transforment la ligne en ses composantes de mode, l'équation caractéristique normale est obtenue en posant :

$$v = T_v (U + W)/2$$

$$i = T_i Y_c (-U + W)/2$$

Nous nous apercevons alors que les variables  $U$  et  $W$  généralisent celles utilisées pour écrire les équations dites du retard.

Nous constatons en outre, que toutes les matrices intervenant dans II - 226 ne dépendent que des constantes de mode et sont diagonales d'où :

1°) La ligne étant donnée par ses constantes de mode, nous pouvons écrire directement son équation caractéristique normale.

2°) La résolution numérique du problème d'enclenchement des lignes faite à partir de II - 226 est simplifiée et la place nécessaire en mémoire est considérablement diminuée. Nous aurons donc la possibilité d'étendre le calcul à un réseau constitué par plusieurs lignes à des frais moindres.

CHAPITRE III

=====

METHODE DE RESOLUTION NUMERIQUE

-o-

La methode que nous allons développer et qui a pour but le calcul des surtensions de manoeuvre dans les lignes à très haute tension, est basée sur la résolution numérique des équations de propagation mises sous la forme normale.

Elle necessite la recherche d'un schéma aux différences finies stable et sa résolution pratique.

Cette dernière se fera par la Méthode de Double balayage car les conditions aux limites du problème s'y adaptent particulièrement bien.

III - 1 - FORMULATION NOUVELLE DU PROBLEME

PAR LES COMPOSANTES NORMALES

Afin de rendre l'exposé plus compréhensible, nous allons développer notre methode en nous appuyant sur un cas concret ce qui n'affecte en rien sa généralité ; divers exemples le confirmeront.

Nous considérerons donc une ligne triphasé supposée ouverte à son extrémité et raccordée de l'autre à un générateur à travers un réseau à constantes localisées comme l'indique la figure (III - 1). Cette ligne comportera une charge résiduelle et sera symétrique.

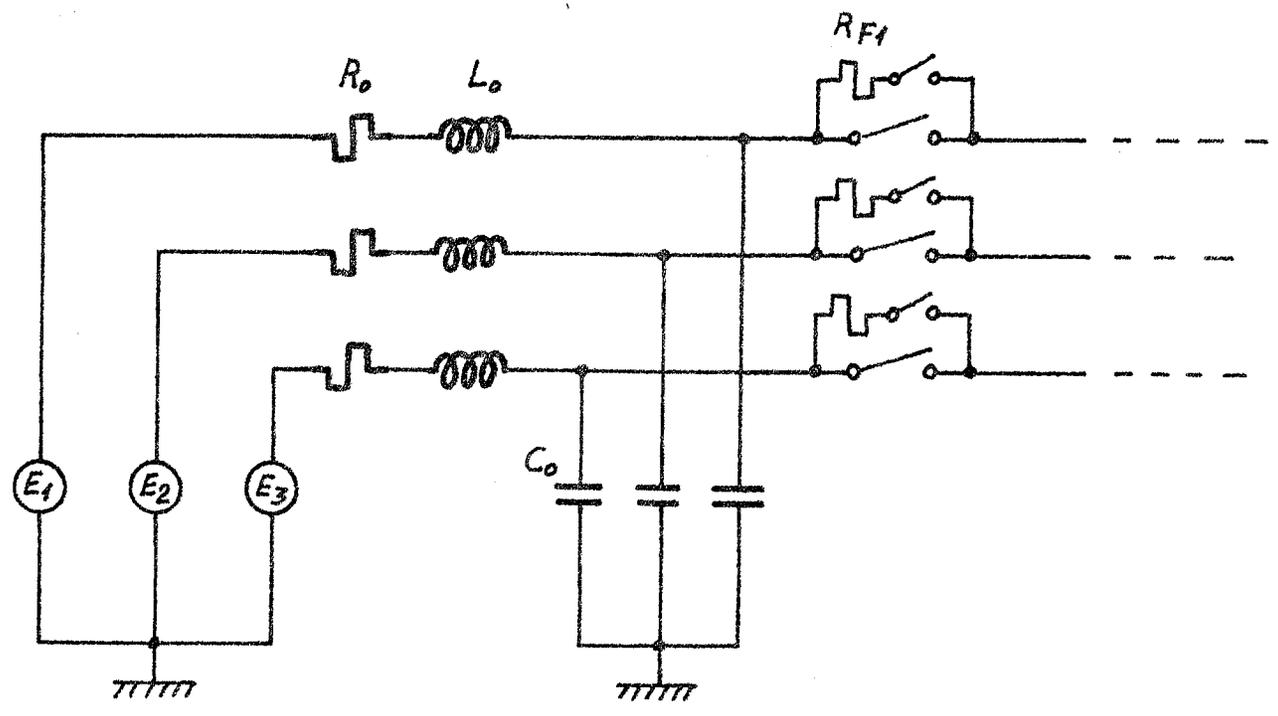


Fig. III-1

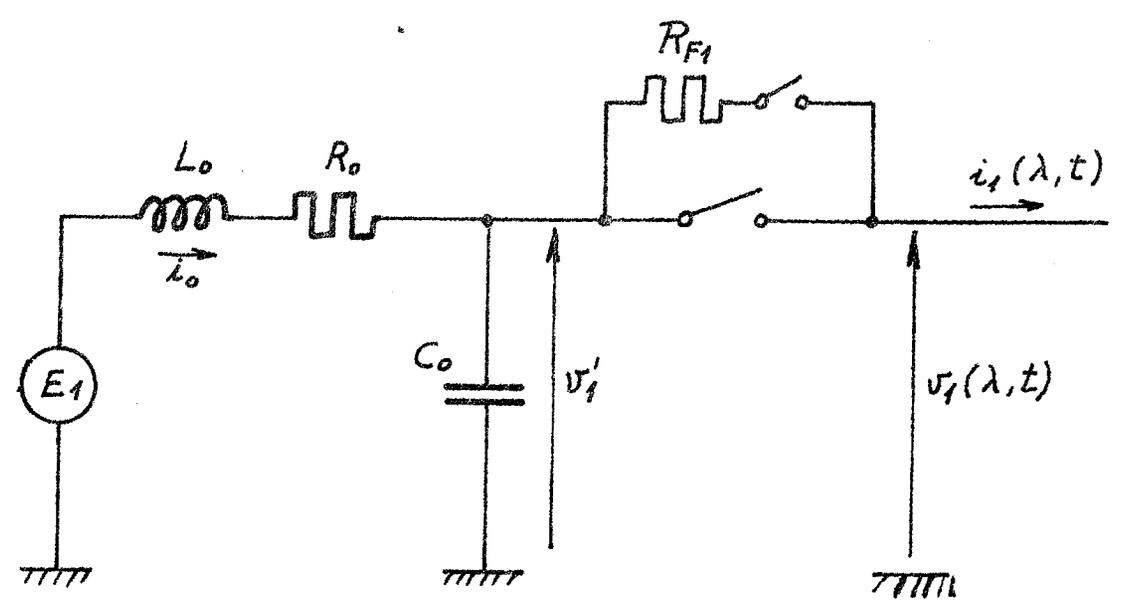


Fig. III-2

III - 11 - Equation de la ligne

L'équation de la ligne s'écrit :

$$\frac{\partial v}{\partial x} = L \frac{\partial i}{\partial t} + R i$$

III - 11

$$\frac{\partial i}{\partial x} = C \frac{\partial v}{\partial t} + G v$$

avec

$$L = \begin{bmatrix} L & M & M \\ M & L & M \\ M & M & L \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} R_1 + R & R_1 & R_1 \\ R_1 & R + R_1 & R_1 \\ R_1 & R_1 & R_1 + R \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} C & c & c \\ c & C & c \\ c & c & C \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} G & G' & G' \\ G' & G & G' \\ G' & G' & G \end{bmatrix}$$

III - 12 - Conditions initiales

$$\begin{aligned} \text{III - 12} \quad v(x, 0) &= Q & \forall x \in (0, \lambda) \\ i(x, 0) &= 0 \end{aligned}$$

III - 13 - Conditions aux limites

au récepteur

$$\text{III - 13} \quad i(0, t) = 0 \quad \forall t$$

au générateur

Nous considèrerons d'abord un enclenchement synchrone et nous montrerons ensuite comment s'en déduit une fermeture asynchrone.

Pendant l'enclenchement nous avons au générateur trois réseaux dont la forme est donnée (fig. III - 2).

L'équation de chacun de ces réseaux s'écrit :

$$\text{III - 14} \quad \left. \begin{aligned} E_1 &= v_1' + R_0 i_0 + L_0 \frac{d i_0}{dt} \\ v_1' &= v_1(\lambda, t) + R_{F1} i_1(\lambda, t) \\ i_0 - i_1(\lambda, t) &= C_0 \frac{d v_1'}{dt} \end{aligned} \right\} \text{(phase 1)}$$

Éliminons  $v_1'$  et  $i_0$  entre ces trois équations ; nous obtenons :

$$\begin{aligned} E_1(t) &= v_1(\lambda, t) + (R_{F1} + R_0) i_1(\lambda, t) + R_0 C_0 \frac{\partial v_1(\lambda, t)}{\partial t} \\ &+ (R_0 C_0 R_{F1} + L_0) \frac{\partial i_1(\lambda, t)}{\partial t} + L_0 C_0 \frac{\partial^2 v_1(\lambda, t)}{\partial t^2} + R_{F1} L_0 C_0 \frac{\partial^2 i_1(\lambda, t)}{\partial t^2} \end{aligned}$$

La condition aux limites au générateur mise sous la première forme s'écrira donc :

$$\begin{aligned} \text{III - 15} \quad E(t) &= v(\lambda, t) + (R_F + R_0) i(\lambda, t) + R_0 C_0 \frac{\partial v(\lambda, t)}{\partial t} \\ &+ (R_0 C_0 R_F + L_0) \frac{\partial i(\lambda, t)}{\partial t} + L_0 C_0 \frac{\partial^2 v(\lambda, t)}{\partial t^2} + R_F L_0 C_0 \frac{\partial^2 i(\lambda, t)}{\partial t^2} \end{aligned}$$

III - 14 - Equation normale de la ligne

La ligne étant symétrique les matrices  $T_v$  et  $T_i$  sont de la forme (6) :

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \alpha_1 & -\alpha_2 - \beta_2 & -\alpha_3 - \beta_3 \end{bmatrix}$$

Nous choisirons

$$T_v = T_i = T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1/2 & 1 \\ 1 & -1/2 & -1 \end{bmatrix} \implies T_1 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 3/2 & -3/2 \end{bmatrix}$$

Appliquons à III - 11 la transformation

$$\begin{aligned} \text{III - 16} \quad v &= T_1(U + W)/2 \\ i &= T_1 Y_c (-U + W)/2 \end{aligned}$$

$$\text{avec } Y_c = \begin{bmatrix} 1/Z_{01} & 0 & 0 \\ 0 & 1/Z_{02} & 0 \\ 0 & 0 & 1/Z_{03} \end{bmatrix}$$

$$\text{et } Z_{01} = \sqrt{(L + 2M)/(C + 2c)} \quad , \quad Z_{02} = Z_{03} = \sqrt{(L - M)/(C - c)}$$

Si nous supposons que  $G + 2G'$  et  $G - G'$  sont négligeables (air parfaitement isolant), l'équation normale de la ligne sera :

$$\text{III - 17} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial U_1}{\partial t} + p_1 \frac{\partial U_1}{\partial x} + \alpha_1 (U_1 - W_1) = 0 \\ \frac{\partial W_1}{\partial t} - p_1 \frac{\partial W_1}{\partial x} + \alpha_1 (-U_1 + W_1) = 0 \\ \frac{\partial U_2}{\partial t} + p_2 \frac{\partial U_2}{\partial x} + \alpha_2 (U_2 - W_2) = 0 \\ \frac{\partial W_2}{\partial t} - p_2 \frac{\partial W_2}{\partial x} + \alpha_2 (-U_2 + W_2) = 0 \\ \frac{\partial U_3}{\partial t} + p_3 \frac{\partial U_3}{\partial x} + \alpha_3 (U_3 - W_3) = 0 \\ \frac{\partial W_3}{\partial t} - p_3 \frac{\partial W_3}{\partial x} + \alpha_3 (-U_3 + W_3) = 0 \end{array} \right.$$

avec  $\alpha_1 = (R + 3R_1)/(2(L + 2M))$  ,  $\alpha_2 = \alpha_3 = R/(2(L - M))$  ,

$$p_1 = 1/\sqrt{(L + 2M)(C + 2c)} \quad , \quad p_2 = p_3 = 1/\sqrt{(L - M)(C - c)}$$

Plus généralement lorsqu'on considère une ligne triphasée définie par ses composantes linéiques directes inverses et homopolaires, comme cela se produit habituellement, nous aurons :

$$\alpha_1 = \frac{R_h}{2L_h} \quad , \quad \alpha_2 = \frac{R_d}{2L_d} \quad , \quad \alpha_3 = \frac{R_i}{2L_i}$$

$$\mu_1 = \frac{1}{\sqrt{L_h C_h}} \quad , \quad \mu_2 = \frac{1}{\sqrt{L_d C_d}} \quad , \quad \mu_3 = \frac{1}{\sqrt{L_i C_i}}$$

L'équation normale de la ligne triphasée s'écrira :

$$\text{III - 17} \quad \frac{\partial \bar{U}}{\partial t} + P \frac{\partial U}{\partial x} + \alpha (U - W) = 0$$

$$\frac{\partial \bar{W}}{\partial t} - P \frac{\partial W}{\partial x} + \alpha (-U + W) = 0$$

III - 15 - Equations normales des conditions initiales et aux limites.

Elles consistent en l'application de la transformation III - 16 aux équations III - 12, III - 13 et III - 15.

A) Conditions initiales

$$v(x,0) = Q \implies T_1 (U(x,0) + W(x,0)) / 2 = Q$$

$$i(x,0) = 0 \implies T_1 Y_c (-U(x,0) + W(x,0)) / 2 = 0$$

La dernière égalité entraîne  $U(x,0) = W(x,0)$ ,  
et la première

$$\text{III - 18} \quad U(x,0) = W(x,0) = T_1^{-1} Q$$

B) Conditions aux limites

a) au récepteur

$$i(0,t) = 0 \implies T_1 Y_c (-U(0,t) + W(0,t)) / 2 = 0$$

d'où :

$$\text{III - 19} \quad U(0,t) = W(0,t)$$

b) au générateur

L'équation III - 15 devient :

$$\begin{aligned}
 \text{III - 20} \left\{ \begin{aligned}
 2T_1^{-1}E(t) &= U(\lambda, t) + W(\lambda, t) + (R_0 + R_F)Y_c(-U(\lambda, t) + W(\lambda, t)) \\
 &+ (R_0 C_0 R_F + L_0)Y_c \frac{\partial}{\partial t} (-U(\lambda, t) + W(\lambda, t)) \\
 &+ R_0 C_0 \frac{\partial}{\partial t} (U(\lambda, t) + W(\lambda, t)) + L_0 C_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} (U(\lambda, t) + W(\lambda, t)) \\
 &+ R_F L_0 C_0 Y_c \frac{\partial^2}{\partial t^2} (-U(\lambda, t) + W(\lambda, t))
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

Dans la suite nous substituerons à l'équation III - 20 la notation :

$$l_2 X(\lambda, t) = 2 T_1^{-1} E(t)$$

Le nouveau problème que nous avons à résoudre est défini par le système suivant :

$$\begin{aligned}
 \text{III - 21} \left\{ \begin{aligned}
 \frac{\partial U(x, t)}{\partial t} + P \frac{\partial U(x, t)}{\partial x} + \alpha (U(x, t) - W(x, t)) &= 0 \\
 \frac{\partial W(x, t)}{\partial t} - P \frac{\partial W(x, t)}{\partial x} + \alpha (-U(x, t) + W(x, t)) &= 0 \\
 U(x, 0) = T_1^{-1} Q & \quad \forall x \quad (0, \lambda) \\
 W(x, 0) = T_1^{-1} Q & \\
 U(0, t) - W(0, t) = 0 & \\
 l_2 X(\lambda, t) = 2 T_1^{-1} E(t) & \quad \forall t \quad (0, \tau)
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

L'étude numérique que nous faisons consiste à remplacer III - 21 par un problème aux différences finies.

III - 2 - PROBLEME AUX DIFFERENCES FINIES EQUIVALENT

III - 21 - Schéma aux différences finies

Nous avons à chercher la fonction  $X$  définie sur  $\Omega + \Gamma$  ( $\Omega$  ouvert de  $\mathbb{R}^2$  de frontière  $\Gamma$ ) telle que :  
 (  $X \in C^m(\bar{\Omega})$  )

$L X = f$  équation aux dérivées partielles sur  $\Omega + \Gamma$

$l X = \varphi$  conditions initiales et aux limites sur  $\delta$

$L$  et  $l$  sont les opérateurs différentiels de III - 21

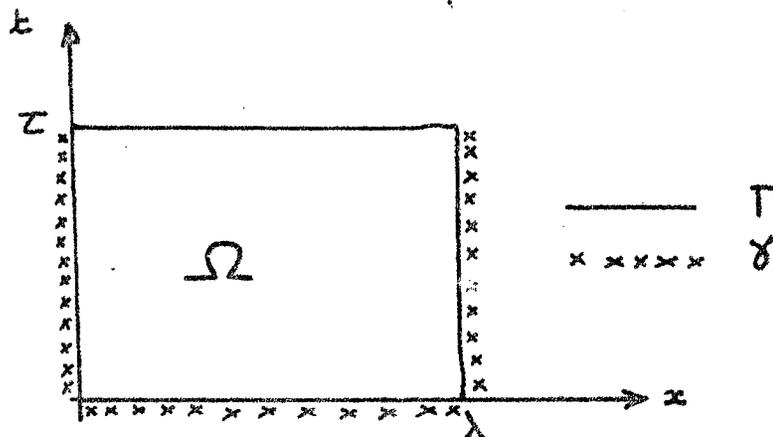


Figure III - 3

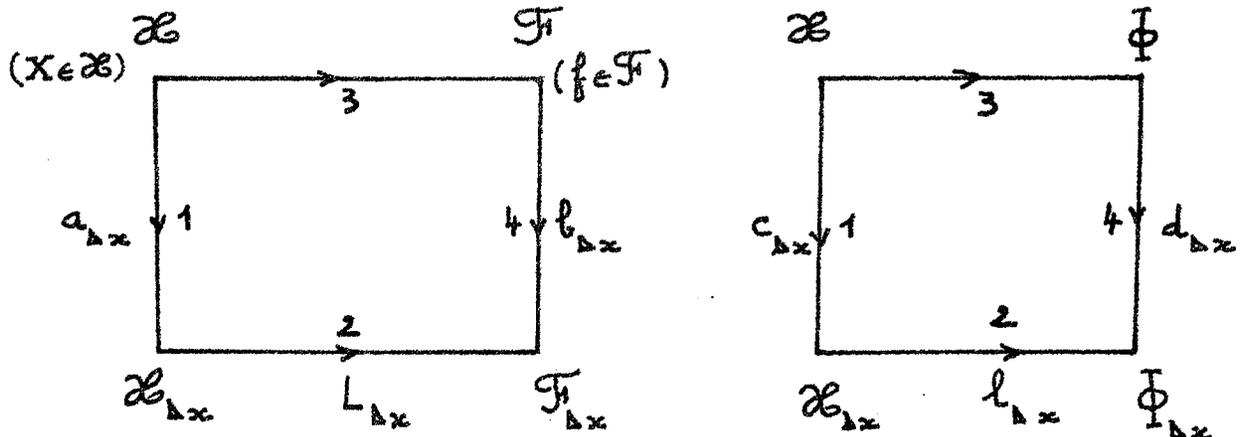
Pour nous ramener à un problème aux différences finies de la forme,

$$L_{\Delta x} X^{(\Delta x)} = f^{(\Delta x)}$$

$$l_{\Delta x} X^{(\Delta x)} = \varphi^{(\Delta x)}$$

il nous faut définir une grille  $\Omega_{\Delta x}$ , les correspondances

(figure III - 4) entre les fonctions  $X, f, \varphi$  des espaces respectifs  $\mathcal{E}, \mathcal{F}, \Phi$  et les fonctions grillés  $X^{(\Delta x)}, f^{(\Delta x)}, \varphi^{(\Delta x)}$  des espaces respectifs  $\mathcal{E}_{\Delta x}, \mathcal{F}_{\Delta x}, \Phi_{\Delta x}$ , ainsi que les opérateurs aux différences  $L_{\Delta x}, l_{\Delta x}$ .



\* Le choix de  $L_{\Delta x}$  et  $l_{\Delta x}$  est guidé par le désir d'obtenir deux fonctions identiques en parcourant  $1 \rightarrow 2$  et  $3 \rightarrow 4$ .

figure III - 4

Nous avons choisi une grille rectangulaire définie par :

$$\begin{array}{llll}
 x = k \cdot \Delta x & 0 \leq k \leq M_1 & \text{avec} & \lambda = M_1 \Delta x \\
 t = n \cdot \Delta t & 0 \leq n \leq N & \text{avec} & \tau = N \cdot \Delta t
 \end{array}$$

Les restrictions  $a_{\Delta x}, b_{\Delta x}, c_{\Delta x}$  et  $d_{\Delta x}$  sont telles que :

$$X \xrightarrow{a_{\Delta x}} a_{\Delta x} X \implies (a_{\Delta x} X)_k^n = X(k \Delta x, n \Delta t)$$

il en est de même pour  $c_{\Delta x}$

$$f \xrightarrow{b_{\Delta x}} b_{\Delta x} f \implies (b_{\Delta x} f)_k^n = f(k\Delta x, n\Delta t)$$

$$\varphi \xrightarrow{d_{\Delta x}} d_{\Delta x} \varphi \implies (d_{\Delta x} \varphi)_k^n = \varphi(k\Delta x, n\Delta t)$$

Nous choisirons par la suite

$$f^{(\Delta x)} = b_{\Delta x} f, \quad \varphi^{(\Delta x)} = d_{\Delta x} \varphi.$$

Nous avons défini les opérateurs  $L_{\Delta x}$  et  $l_{\Delta x}$

comme suit :

$$I-211 \quad L_{\Delta x} X^{(\Delta x)} \equiv \left\{ \begin{array}{l} \theta_1 (U_{k+1}^{n+1} - U_{k+1}^n) + (I_{O3} - \theta_1) (U_k^{n+1} - U_k^n) + r\theta_2 (U_{k+1}^{n+1} - U_k^{n+1}) \\ + r(I_{O3} - \theta_2) (U_{k+1}^n - U_k^n) + \alpha \frac{\Delta t}{2} (U_{k+1}^{n+1} + U_k^n - W_{k+1}^{n+1} - W_k^n) \\ \theta_1^i (W_{k+1}^{n+1} - W_{k+1}^n) + (I_{O3} - \theta_1^i) (W_k^{n+1} - W_k^n) - r\theta_2 (W_{k+1}^{n+1} - W_k^{n+1}) \\ - r(I_{O3} - \theta_2) (W_{k+1}^n - W_k^n) + \alpha \frac{\Delta t}{2} (-U_{k+1}^{n+1} - U_k^n + W_{k+1}^{n+1} + W_k^n) \end{array} \right.$$

$$I-212 \quad l_{\Delta x} X^{(\Delta x)} \equiv \left\{ \begin{array}{l} U_k^0 \\ W_k^0 \\ W_0^n - U_0^n \\ U_{M1}^n + W_{M1}^n + (R_F + R_O) Y_c (-U_{M1}^n + W_{M1}^n) + [R_O C_O (U_{M1}^{n+1} - U_{M1}^{n-1} + W_{M1}^{n+1} - W_{M1}^{n-1}) \\ + (R_F R_O C_O + L_O) Y_c (-U_{M1}^{n+1} + U_{M1}^{n-1} + W_{M1}^{n+1} - W_{M1}^{n-1})] / 2\Delta t \\ + [L_O C_O (U_{M1}^{n+1} + W_{M1}^{n+1} - 2(U_{M1}^n + W_{M1}^n) + W_{M1}^{n-1} + U_{M1}^{n-1}) + \\ + R_F L_O C_O Y_c (-U_{M1}^{n+1} + W_{M1}^{n+1} - 2(W_{M1}^n - U_{M1}^n) + W_{M1}^{n-1} - U_{M1}^{n-1})] / (\Delta t)^2 \end{array} \right.$$

L'opérateur  $L_{\Delta x}$  est du type utilisé par Cunge (7). Il est cependant plus général et l'introduction de nouveaux paramètres  $\theta_1$  et  $\theta'_1$  le rend plus souple à l'exploitation.

Dans l'ensemble de formules (III - 211, III - 212) les matrices  $\theta_1, \theta_2, \theta'_1$  sont diagonales et leurs éléments  $\theta_{1i}, \theta_{2i}, \theta'_{1i}$  sont des valeurs numériques comprises entre 0 et 1 qui caractérisent le schéma.

La matrice  $r$  est également diagonale et ses éléments  $r_j = p_j \frac{\Delta t}{\Delta x}$  ( $j = 1, 2, 3$ ) sont caractéristiques à la fois de la ligne et de la discrétisation utilisée.

Nous remplacerons dans ce qui suit la dernière équation de  $l_{\Delta x} X^{(\Delta x)}$  par  $l_1 X^{(\Delta x)}$ .

Les définitions de  $L_{\Delta x}$  et  $l_{\Delta x}$  étant posées, nous sommes amenés à résoudre le système aux différences finies suivant :

$$\text{III-213} \left\{ \begin{aligned} & \theta_1 (U_{k+1}^{n+1} - U_{k+1}^n) + (I_{03} - \theta_1) (U_k^{n+1} - U_k^n) + r\theta_2 (U_{k+1}^{n+1} - U_k^{n+1}) + \\ & + r(I_{03} - \theta_2) (U_{k+1}^n - U_k^n) + \alpha \frac{\Delta t}{2} (U_{k+1}^{n+1} + U_k^{n+1} - W_{k+1}^{n+1} - W_k^n) = 0 \\ & \theta'_1 (W_{k+1}^{n+1} - W_{k+1}^n) + (I_{03} - \theta'_1) (W_k^{n+1} - W_k^n) - r\theta_2 (W_{k+1}^{n+1} - W_k^{n+1}) - \\ & - r(I_{03} - \theta_2) (W_{k+1}^n - W_k^n) + \alpha \frac{\Delta t}{2} (W_{k+1}^{n+1} + W_k^n - U_{k+1}^n - U_k^n) = 0 \end{aligned} \right.$$

$$\text{III-214} \left\{ \begin{aligned} & U_k^0 = T_1^{-1} Q \\ & W_k^0 = T_1^{-1} Q \\ & W_0^n - U_0^n = 0 \\ & l_1 X^{(\Delta x)} = 2T_1^{-1} E(n, \Delta t) \end{aligned} \right.$$

Nous noterons

$$\mathcal{Y}_1 = \begin{bmatrix} T_1^{-1} Q \\ T_1^{-1} Q \end{bmatrix}, \quad \mathcal{Y}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 T_1^{-1} E(n\Delta t) \end{bmatrix}$$

$\mathcal{Y}_1$  et  $\mathcal{Y}_2$  étant des vecteurs à six dimensions.

### III - 22 - Degré de précision

Il nous est utile, dans la pratique de connaître la précision avec laquelle la solution de l'équation aux différences finies, quand elle converge, s'approche de la solution réelle.

Dans ce but nous définissons le degré d'approximation du système III - 21 par (III - 213, III - 214). Cette définition est basée sur la légende de la figure III - 4.

#### A) Définition (8)

Le système (III - 213, III - 214) est une approximation d'ordre  $p$  en  $\Delta x$  du système III - 21 si pour tout  $x \in \mathcal{X}$ ,  $f \in \mathcal{F}$ ,  $\varphi \in \mathcal{F}$  et pour tout  $\Delta x \in ]0, \Delta x_0[$  (pour un certain  $\Delta x_0$ ) il existe des constantes  $M_i$  (indépendantes de  $\Delta x$ ) telles que :

$$\text{III-221} \quad \| (L_{\Delta x} a_{\Delta x} - b_{\Delta x} L) X \|_{\mathcal{F}_{\Delta x}} \leq M_1 (\Delta x)^p, \quad \text{III-223} \quad \| f^{(\Delta x)} - b_{\Delta x} f \|_{\mathcal{F}_{\Delta x}} \leq M_2 (\Delta x)^p$$

$$\text{III-222} \quad \| (l_{\Delta x} c_{\Delta x} - d_{\Delta x}) X \|_{\mathcal{F}_{\Delta x}} \leq M_3 (\Delta x)^p, \quad \text{III-224} \quad \| \varphi^{(\Delta x)} - d_{\Delta x} \varphi \|_{\mathcal{F}_{\Delta x}} \leq M_4 (\Delta x)^p$$

Les normes employées étant les suivantes :

$$\| X^{(\Delta x)} \|_{\mathcal{X}_{\Delta x}} = \max_n \max_k \sum_{i=1}^3 ( |U_{i,k}^n| + |W_{i,k}^n| )$$

$$\| \varphi^{(\Delta x)} \|_{\mathcal{F}_{\Delta x}} = \max_k \sum_{i=1}^6 |\varphi_{1,i}| + \max_n \sum_{i=1}^6 \left| \frac{\varphi_{2,i}^{n+1} - \varphi_{2,i}^n}{\Delta t} \right|$$

$$\| f^{(x)} \|_{\mathcal{F}_{\Delta x}} = \max_n \max_k \sum_{i=1}^6 |f_{i,k}^n|$$

Elles sont respectivement compatibles avec les normes

$$\| X \|_{\mathcal{X}} = \max_t \max_x \sum_{i=1}^6 |X_i|$$

$$\| \varphi \|_{\mathcal{F}} = \max_x \sum_{i=1}^6 |\varphi_{1,i}| + \max_t \sum_{i=1}^6 \left| \frac{d\varphi_{2,i}}{dt} \right|$$

$$\| f \|_{\mathcal{F}} = \max_t \max_x \sum_{i=1}^6 |f_i|$$

Nous définirons par anticipation l'espace  $\mathcal{X}'_{\Delta x}$

des fonctions " grille monodimensionnelle " telles que :

$$X^n = \begin{bmatrix} X_0^n \\ X_1^n \\ \vdots \\ X_{M1}^n \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad X_k^n = \begin{bmatrix} U_{1,k}^n \\ U_{2,k}^n \\ U_{3,k}^n \\ W_{1,k}^n \\ W_{2,k}^n \\ W_{3,k}^n \end{bmatrix}$$

Le "vecteur"  $X^n$  est l'ensemble des valeurs de  $X^{(\Delta x)}$  pour  $n$  fixé, c'est-à-dire à un instant  $n \Delta t$  donné. La norme dans  $\mathcal{E}'_{\Delta x}$  compatible avec celle définie dans  $\mathcal{E}_{\Delta x}$  est :

$$\|X^n\|_{\mathcal{E}'_{\Delta x}} = \max_k \sum_{i=1}^3 ( |U_{i,k}^n| + |W_{i,k}^n| )$$

On voit immédiatement que

$$\|X^{(\Delta x)}\|_{\mathcal{E}_{\Delta x}} = \max_n \|X^n\|_{\mathcal{E}'_{\Delta x}}$$

\* Nous nous servons du vecteur  $X^n$  pour l'étude de la stabilité.

### B) Application

#### a) Etude de III - 221

Développons  $(L_{\Delta x} a_{\Delta x} X)_k^n$  en série de Taylor

$$(L_{\Delta x} a_{\Delta x} X)_k^n = \begin{cases} \left[ \frac{\partial U(x,t)}{\partial t} + P \frac{\partial U(x,t)}{\partial x} + \alpha (U(x,t) - W(x,t)) + A_1 \right]_{x=k \Delta x, t=n \Delta t} \\ \left[ \frac{\partial W(x,t)}{\partial t} - P \frac{\partial W(x,t)}{\partial x} + \alpha (-U(x,t) + W(x,t)) + A_2 \right]_{x=k \Delta x, t=n \Delta t} \end{cases}$$

$$(L_{\Delta x} a_{\Delta x} X)_k^n = (b_{\Delta x} L X)_k^n + \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}$$

avec

$$A_1 = \Delta x \left( \theta_1 - \frac{1}{2} I_{03} + r \left( \theta_2 - \frac{1}{2} I_{03} \right) \right) \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t \partial x} + O[(\Delta x)^2]$$

$$A_2 = \Delta x \left( \theta_1' - \frac{1}{2} I_{03} - r \left( \theta_2 - \frac{1}{2} I_{03} \right) \right) \frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial t \partial x} + O[(\Delta x)^2]$$

Introduisons les paramètres  $y_i$  et  $y'_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) tels que :

$$\theta_{1i} + r_i \theta_{2i} = \frac{1}{2} + r_i/2 + y_i$$

III - 225

$$\theta_{1i}' - r_i \theta_{2i} = \frac{1}{2} - r_i/2 - y_i'$$

L'approximation de III - 17 par III - 213 est d'ordre deux si  $y_i = y'_i = 0$  pour  $i = 1, 2, 3$ .

b) Etude de III - 223 et III - 224

Les inégalités III - 223 et III - 224 sont toujours vérifiées car nous avons choisi

$$f \stackrel{(\Delta x)}{\equiv} b_{\Delta x} f \quad \text{et} \quad \varphi \stackrel{(\Delta x)}{\equiv} d_{\Delta x} \varphi$$

III - 223 et III - 224 sont donc des égalités.

c) Etude de III - 222

A cause de la présence de termes de la forme  $\frac{U_{M1}^{n+1} - U_{M1}^{n-1}}{2 \Delta t}$

$$\left( \frac{U_{M1}^{n+1}}{\Delta t} - 2 \frac{U_{M1}^n}{\Delta t} + \frac{U_{M1}^{n-1}}{\Delta t} \right) / (\Delta t)^2$$

représentant la discrétisation de  $\frac{\partial U}{\partial t}$  et  $\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2}$  à l'ordre 2 ; III - 222 est d'ordre 2.

Conclusion : La précision de la solution est  
d'ordre 2 en  $\Delta x$  si  $\forall i \ y_i = y'_i = 0$ .

Nota : Dans la suite nous mettrons l'équation aux limites au générateur sous la deuxième forme ce qui nous permettra de la discrétiser par une méthode de Runge-Kutta d'ordre 4. Dans ce cas la précision de la solution sera d'ordre deux en  $\Delta x$  si  $y_i = y'_i = 0$  pour  $i = 1, 2, 3$ .

### III - 3 - METHODE DE DOUBLE BALAYAGE

#### III - 31 - Principe

Cette méthode qui nous permet de résoudre le système aux différences finies (III - 213, III - 214), repose sur l'existence quel que soit  $t$ , d'une relation linéaire entre les variables  $U$  et  $W$  en un point  $x_0$  de la ligne. Cette relation linéaire qui existe aux extrémités de la ligne est traduite en une autre entre les variables définies par :

$$\Delta U_k = U_k^{n+1} - U_k^n$$

III - 311

$$\Delta W_k = W_k^{n+1} - W_k^n$$

L'utilisation du schéma aux différences montre alors qu'elle peut s'étendre à tous les points  $x$  de la ligne. Ce qui nous permet par une méthode itérative, de connaître l'état de la ligne à tous les instants à partir de la connaissance de son état à l'instant  $t = 0$ . (9), (10)

Dans le schéma III - 213 introduisons les nouvelles variables  $\Delta U_k$  et  $\Delta W_k$ , il devient,

III-312

$$\left( \theta_1 + r\theta_2 + \alpha \frac{\Delta t}{2} \right) \Delta U_{k+1} - \alpha \frac{\Delta t}{2} \Delta W_{k+1} + (I_{03} - \theta_1 - r\theta_2) \Delta U_k +$$

$$+ (r + \alpha \frac{\Delta t}{2}) U_{k+1}^n + (-r + \alpha \frac{\Delta t}{2}) U_k^n - \alpha \frac{\Delta t}{2} (W_{k+1}^n + W_k^n) = 0$$

$$\left( \theta_1' - r\theta_2 + \alpha \frac{\Delta t}{2} \right) \Delta W_{k+1} - \alpha \frac{\Delta t}{2} \Delta U_{k+1} + (I_{03} - \theta_1' + r\theta_2) \Delta W_k +$$

$$+ (-r + \alpha \frac{\Delta t}{2}) W_{k+1}^n + (r + \alpha \frac{\Delta t}{2}) W_k^n - \alpha \frac{\Delta t}{2} (U_{k+1}^n + U_k^n) = 0$$

Ce système est de la forme

$$\Delta U_k = A_1 \Delta U_{k+1} + A_2 \Delta W_{k+1} + C_k^n$$

$$\Delta W_k = B_1 \Delta U_{k+1} + B_2 \Delta W_{k+1} + D_k^n$$

$A_1, A_2, B_1, B_2$  sont des matrices diagonales dont les termes sont :

III-313

$$A_1(i,i) = ( \theta_{1i} + r_i \theta_{2i} + \alpha_i \frac{\Delta t}{2} ) / ( r_i \theta_{2i} + \theta_{1i} - 1 )$$

$$A_2(i,i) = -\alpha_i \frac{\Delta t}{2} / ( r_i \theta_{2i} + \theta_{1i} - 1 )$$

$$B_1(i,i) = -\alpha_i \frac{\Delta t}{2} / ( \theta_{1i}' - r_i \theta_{2i} - 1 )$$

$$B_2(i,i) = ( \theta_{1i}' - r_i \theta_{2i} + \alpha_i \frac{\Delta t}{2} ) / ( \theta_{1i}' - r_i \theta_{2i} - 1 )$$

$C_k^n$  et  $D_k^n$  sont des vecteurs qui dépendent de l'état de la ligne à l'instant  $n$   $t$  ; leurs composantes sont :

$$(C_k^n)_i = \left[ \kappa_i (U_{i,k+1}^n - U_{i,k}^n) + \alpha_i \frac{\Delta t}{2} (U_{i,k+1}^n + U_{i,k}^n - W_{i,k+1}^n - W_{i,k}^n) \right] / [\kappa_i \theta_{2i} + \theta_{2i} - 1]$$

III-314

$$(D_k^n)_i = \left[ \kappa_i (W_{i,k}^n - W_{i,k+1}^n) + \alpha_i \frac{\Delta t}{2} (W_{i,k+1}^n + W_{i,k}^n - U_{i,k+1}^n - U_{i,k}^n) \right] / [\theta'_{1i} - \kappa_i \theta_{2i} - 1]$$

Démontrons que s'il existe une relation linéaire entre  $\Delta U_k$  et  $\Delta W_k$  en un point  $k_0$  de la grille alors il existe une relation linéaire entre  $\Delta U_k$  et  $\Delta W_k$  en tout point  $k$ . En effet soit :

$$\text{III - 315 } \Delta U_{k_0} = E_{k_0} \Delta W_{k_0} + F_{k_0} \quad \text{une telle relation}$$

Portons III - 315 dans III - 312'.

$$E_{k_0} \Delta W_{k_0} + F_{k_0} = A_1 \Delta U_{k_0+1} + A_2 \Delta W_{k_0+1} + C_{k_0}^n$$

$$A_1 \Delta U_{k_0+1} + A_2 \Delta W_{k_0+1} + C_{k_0}^n = E_{k_0} B_1 \Delta U_{k_0+1} + E_{k_0} B_2 \Delta W_{k_0+1} + E_{k_0} D_{k_0}^n + F_{k_0}$$

$$(A_1 - E_{k_0} B_1) \Delta U_{k_0+1} = (E_{k_0} B_2 - A_2) \Delta W_{k_0+1} + F_{k_0} + E_{k_0} D_{k_0}^n - C_{k_0}^n$$

Si  $\det (A_1 - E_{k_0} B_1) \neq 0$  nous obtenons finalement

$$\Delta U_{k_0+1} = (A_1 - E_{k_0} B_1)^{-1} \left[ (E_{k_0} B_2 - A_2) \Delta W_{k_0+1} + (F_{k_0} + E_{k_0} D_{k_0}^n - C_{k_0}^n) \right]$$

Il existe donc une relation linéaire entre  $\Delta U_{k_0 + 1}$  et  $\Delta W_{k_0 + 1}$ . De proche en proche nous montrons ainsi qu'il existera une relation de la forme III - 315 à tous les points  $k$  de la grille s'il en existe une en un point  $k_0$  quelconque.

Les relations de récurrence sur  $E_k$  et  $F_k$  sont les suivantes :

$$E_{k+1} = (A_1 - E_k B_1)^{-1} (E_k B_2 - A_2)$$

III-316

$$F_{k+1} = (A_1 - E_k B_1)^{-1} (F_k + E_k D_k^n - C_k^n)$$

Les systèmes III - 316 et III - 312 nous permettent théoriquement de résoudre le problème aux différences finies car ils nous fournissent  $\Delta U_k$  et  $\Delta W_k$  ; c'est-à-dire l'état de la ligne à l'instant  $(n + 1) \Delta t$  à partir de son état à  $n \Delta t$ .

La condition pour que cela soit possible soit possible est que la matrice  $A_1 - E_k B_1$  soit inversible quelque soit  $k = 0, 1, 2, \dots, M_1 - 1$ . Nous savons que  $A_1 - E_k B_1$  est diagonale, elle sera inversible si et seulement si  $A_{1i} - E_{ki} B_{1i} \neq 0$  pour  $i = 1, 2, 3$ .

Etude de  $A_{li} - E_{ki} B_{li}$

a) Ligne sans perte

$$B_{li} = 0, \quad A_{li} = (\theta_{li} + r_i \theta_{2i}) / (r_i \theta_{2i} + \theta_{li} - 1)$$

$$\implies A_{li} - E_{ki} B_{li} \neq 0 \quad \text{est toujours r\u00e9alis\u00e9e.}$$

b) Ligne avec perte

$$A_{li} - E_{ki} B_{li} \neq 0 \implies$$

$$E_{ki} \neq A_{li} / B_{li} = - \left[ (\theta_{li} + r_i \theta_{2i} + \frac{\alpha_i \Delta t}{2}) (\theta'_{li} - r_i \theta_{2i} - 1) \right] / \left[ \frac{\alpha_i \Delta t}{2} (r_i \theta_{2i} + \theta_{li} - 1) \right]$$

Avec les conditions de stabilit\u00e9 III - 441  $E_{ki}$  est toujours diff\u00e9rent de  $\frac{A_{li}}{B_{li}} \forall (k = 0, 1, \dots, M_1 - 1 \text{ et } i = 1, 2, 3)$ .

L'emploi de la relation de r\u00e9currence est donc justifi\u00e9.

III - 32 - Mise en oeuvre

L'existence d'une relation du type III - 315 peut \u00eatre mise en \u00e9vidence aux deux bouts de la ligne.

\* Dans le cas d'une mise sous tension \u00e0 vide nous avons au r\u00e9cepteur  $i (0, t) = 0 \implies U(0, t) = W(0, t)$  c'est-\u00e0-dire  $U_0^n = W_0^n \forall n$ . Consid\u00e9rant cette relation \u00e0  $n$  et  $n + 1$  nous en tirons :  $\Delta U_0 = \Delta W_0$  d'o\u00f9

$$\forall n \quad \left\{ \begin{array}{l} E_0 = I_{03} \\ F_0 = 0 \end{array} \right. \quad \text{III - 317}$$

Nota : Dans le cas où le récepteur est quelconque mais linéaire, il existe toujours une relation différentielle linéaire entre  $v(o, t)$  et  $i(o, t)$  qui discrétisée, nous fournit l'expression de  $E_o$  et  $F_o$ .

Nous pouvons envisager de traiter des cas non linéaires à condition de redéfinir  $E_o$  et  $F_o$  au voisinage du point de fonctionnement à chaque instant.

\* Au générateur la condition à la limite peut être mise sous la forme  $A_M \cdot \Delta U_{M_1} + B_M \cdot \Delta W_{M_1} = EG^{(n)}$ .

A cet effet remplaçons dans  $l_1^{(x)} U_{M_1}^{n+1}$  et  $W_{M_1}^{n+1}$  par  $\Delta U_{M_1} + U_{M_1}^n$  et  $\Delta W_{M_1} + W_{M_1}^n$ ; le calcul nous

donne :

III-318

$$\begin{aligned}
 A_M &= (R_o C_o - (R_F R_o C_o + L_o) Y_c) / 2 \Delta t + (L_o C_o - R_F L_o C_o Y_c) / (\Delta t)^2 \\
 B_M &= (R_o C_o + (R_F R_o C_o + L_o) Y_c) / 2 \Delta t + (L_o C_o + R_F L_o C_o Y_c) / (\Delta t)^2 \\
 EG^{(n)} &= 2T_1^{-1} E(n\Delta t) - \left\{ I_{o3} - (R_F + R_o) Y_c + \frac{-L_o C_o + R_F L_o C_o Y_c}{(\Delta t)^2} + R_o C_o / 2 \Delta t \right. \\
 &\quad \left. - (R_F R_o C_o + L_o) Y_c / 2 \Delta t \right\} U_{M_1}^n \\
 &\quad - \left\{ I_{o3} + (R_F + R_o) Y_c - \frac{L_o C_o + R_F L_o C_o Y_c}{(\Delta t)^2} + \frac{R_o C_o + (R_F R_o C_o + L_o) Y_c}{2 \Delta t} \right\} W_{M_1}^n \\
 &\quad - \left\{ ((R_F R_o C_o + L_o) Y_c - R_o C_o) / 2 \Delta t + (L_o C_o - R_F L_o C_o Y_c) / (\Delta t)^2 \right\} U_{M_1}^{n-1} \\
 &\quad - \left\{ -(R_o C_o + (R_F R_o C_o + L_o) Y_c) / 2 \Delta t + (L_o C_o + R_F L_o C_o Y_c) / (\Delta t)^2 \right\} W_{M_1}^{n-1}
 \end{aligned}$$

Le programme de calcul s'établit donc ainsi :  
 connaissant  $U_k^n$  et  $W_k^n$  à l'instant  $n \Delta t$  pour  $k = 0, 1, 2, M_1$   
 (c'est-à-dire l'état de la ligne à l'instant  $n \Delta t$ ) nous en déduisons  $C_k^n$ ,  $D_k^n$  et  $EG^{(n)}$ . La relation III - 317 permet

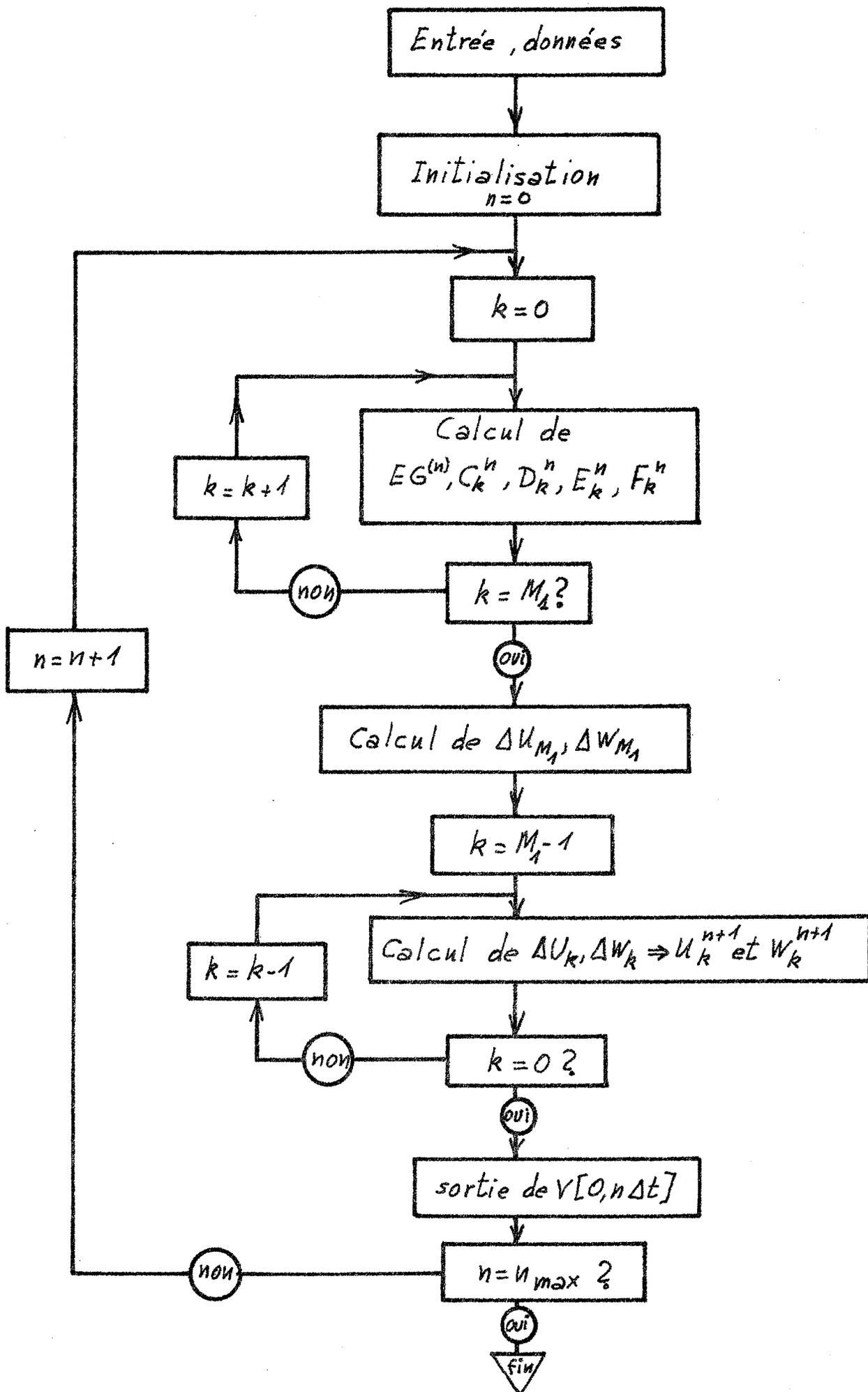


Fig. III-5

d'initialiser le calcul des  $E_k$  et  $F_k$  qui se fait à l'aide de la récurrence définie par III - 316.

De la connaissance de  $E_{M_1}$  et  $F_{M_1}$  nous tirons  $\Delta U_{M_1}$  et  $\Delta W_{M_1}$  par le système :

$$\text{III-319} \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta U_{M_1} = E_{M_1} \Delta W_{M_1} + F_{M_1} \\ A_M \Delta U_{M_1} + B_M \Delta W_{M_1} = EG^{(n)} \end{array} \right.$$

A partir de  $\Delta W_{M_1}$  et  $\Delta U_{M_1}$  nous calculons tous les  $\Delta U_k$  et  $\Delta W_k$  pour  $k = M_1 - 1, M_1 - 2, \dots, 1, 0$ , à l'aide des équations III - 312'. L'état de la ligne à l'instant  $(n + 1)\Delta t$  est ensuite obtenue en utilisant les égalités III - 311.

Etant au temps  $(n + 1)\Delta t$  et y connaissant tous les  $U_k^{n+1}$  et  $W_k^{n+1}$  nous recommençons le processus. L'organigramme est indiquée figure III - 5.

### III - 4 - STABILITE ET CONVERGENCE

Nous utiliserons pour cette étude les définitions de Godunov et Ryabenki (9) ainsi que les théorèmes qu'ils ont établis. Nous les reportons ci-dessous en les adaptant à notre problème.

#### Définition

Le système  $L_{\Delta x} X^{(\Delta x)} = 0$  avec les conditions initiales et aux limites  $l_{\Delta x} X^{(\Delta x)} = \varphi^{(\Delta x)}$  est stable si sa

solution  $X^{(\Delta x)}$  satisfait à l'inégalité

$$\| X^{(\Delta x)} \|_{\mathcal{E}_{\Delta x}} < N_1 \| \varphi^{(\Delta x)} \|_{\Phi_{\Delta x}} \quad \text{avec } N_1 \text{ indépendant de } \Delta x.$$

Théorème I

Si le système aux différences finies

$$\begin{aligned} L_{\Delta x} X^{(\Delta x)} &= 0 \\ l_{\Delta x} X^{(\Delta x)} &= \varphi^{(\Delta x)} \end{aligned}$$

est réduit à la forme  $X^{n+1} = R_{\Delta x} X^n + \Delta t \cdot H^n$ ,  $X^0$  étant donné, en satisfaisant aux conditions suivantes :

$$\begin{aligned} \| H^n \| &\leq K_1 \| \varphi^{(\Delta x)} \|_{\Phi_{\Delta x}} \quad \text{avec } K_1 \text{ et } K_2 \text{ indépendant de } \Delta x \\ \| X^0 \|_{\mathcal{E}'_{\Delta x}} &\leq K_2 \| \varphi^{(\Delta x)} \|_{\Phi_{\Delta x}} \end{aligned}$$

alors la condition  $\| R_{\Delta x}^n \| < K$  est suffisante à la stabilité.

Théorème II

Une condition nécessaire pour que  $\| R_{\Delta x}^n \| < K$  est que le spectre de la famille  $\{ R_{\Delta x} \}$  soit contenu dans le cercle unité.

De l'étude de  $R_{\Delta x}$  et  $H^n$ , nous allons déduire les conditions de stabilité et, tenant compte de l'étude faite sur la précision, montrer la convergence.

III - 41 - Détermination de  $R_{\Delta x}$  et  $H^n$

Pour déterminer  $R_{\Delta x}$  et  $H^n$ , nous allons réduire le système  $\{ \text{III 213, III 214} \}$  sous la forme

$$\text{III - 411} \quad X^{n+1} = R_{\Delta x} X^n + \Delta t \cdot H^n$$

$X^n$  représente l'ensemble des valeurs que prend  $X(\Delta x)$  pour  $n$  fixe.

Nous savons que la valeur de la solution du problème à l'instant  $(n + 1)\Delta t$  dépend de la valeur qu'elle prend à l'instant  $n\Delta t$  (Méthode de double balayage). Nous pouvons donc écrire :

$$X^{n+1} = S^{n+1} + \Delta t \cdot H^n \quad \forall n$$

$H^n$  est un "vecteur" qui ne dépend que des conditions aux limites ;  $S^{n+1}$  représente la contribution de  $X^n$  à l'obtention de la solution à l'instant  $(n + 1)\Delta t$ .

Nous pouvons écrire  $S^{n+1} = R_{\Delta x} X^n$ ,  $R_{\Delta x}$  étant un opérateur qui fait correspondre à un élément de l'espace  $\mathcal{L}'_{\Delta x}$  un élément de ce même espace.

$R_{\Delta x}$  sera défini si nous connaissons les relations qui lient les composantes de  $S^{n+1}$  à ceux de  $X^n$ .

Posons :

$$S_k^{n+1} = \begin{bmatrix} Y_k \\ Z_k \end{bmatrix}, \quad H_k^n = \begin{bmatrix} H_k^1 \\ H_k^2 \end{bmatrix}; \quad Y_k, Z_k, H_k^1, H_k^2$$

étant des vecteurs à trois dimensions dépendant de  $n$ .

De III - 411 nous tirons :

$$U_k^{n+1} = Y_k + \Delta t H_k^1$$

III-412

$$W_k^{n+1} = Z_k + \Delta t H_k^2$$

Reportons ces égalités dans le système III - 213. Nous considérerons uniquement la première équation de III - 213, la seconde se transformant d'une manière symétrique. Nous obtenons :

$$\begin{aligned} &\theta_1(Y_{k+1} + \Delta t H_{k+1}^1 - U_{k+1}^n) + (I_{03} - \theta_1)(Y_k + \Delta t H_k^1 - U_k^n) + r\theta_2(Y_{k+1} - Y_k + \Delta t(H_k^1 - H_k^2)) \\ &+ r(I_{03} - \theta_2)(U_{k+1}^n - U_k^n) + \alpha \frac{\Delta t}{2}(Y_{k+1} - Z_{k+1} + U_k^n - W_k^n + \Delta t(H_{k+1}^1 - H_{k+1}^2)) = 0 \end{aligned}$$

Ce qui nous permet de définir l'opérateur  $R_{\Delta x}$  par les équations implicites :

$$\begin{aligned} &(\theta_1 + r\theta_2 + \alpha \frac{\Delta t}{2})Y_{k+1} - \alpha \frac{\Delta t}{2}Z_{k+1} + (I_{03} - \theta_1 - r\theta_2)Y_k = (\theta_1 + r\theta_2 - r)U_{k+1}^n + \alpha \frac{\Delta t}{2}W_k^n \\ &+ (I_{03} + r - \theta_1 - r\theta_2 - \alpha \frac{\Delta t}{2})U_k^n \\ &(\theta_1' - r\theta_2 + \alpha \frac{\Delta t}{2})Z_{k+1} - \alpha \frac{\Delta t}{2}Y_{k+1} + (I_{03} - \theta_1' + r\theta_2)Z_k = (\theta_1' - r\theta_2 + r)W_{k+1}^n + \alpha \frac{\Delta t}{2}U_k^n \\ &+ (I_{03} - r - \theta_1' + r\theta_2 - \alpha \frac{\Delta t}{2})W_k^n \end{aligned}$$

pour  $k = 0, 1, 2, \dots, M_1 - 1$  ;

Le "vecteur"  $H^n$  sera défini par :

$$(\theta_1 + r\theta_2 + \frac{\alpha \Delta t}{2}) H_{k+1}^1 + (I_{03} - \theta_1 - r\theta_2) H_k^1 - \frac{\alpha \Delta t}{2} H_{k+1}^2 = 0$$

III-414

$$(\theta_1' - r\theta_2 + \frac{\alpha \Delta t}{2}) H_{k+1}^2 + (I_{03} - \theta_1' + r\theta_2) H_k^2 - \frac{\alpha \Delta t}{2} H_{k+1}^1 = 0$$

pour  $k = 0, 1, 2, \dots, M_1 - 1$  ;

Aux points limites les définitions  $R_{\Delta x}$  et  $H^n$  changent :

Nous y définirons  $R_{\Delta x}$  par :

$$S_0^{n+1} = \begin{bmatrix} U_0^n \\ W_0^n \end{bmatrix}, \quad S_{M_1}^{n+1} = \begin{bmatrix} U_{M_1}^n \\ W_{M_1}^n \end{bmatrix}$$

Ce choix facilite l'étude du spectre de  $R_{\Delta x}$  mais complique celui des conditions aux limites ; il nous impose

$$H_0^n = \begin{bmatrix} (U_0^{n+1} - U_0^n) / \Delta t \\ (W_0^{n+1} - W_0^n) / \Delta t \end{bmatrix}, \quad H_{M_1}^n = \begin{bmatrix} (U_{M_1}^{n+1} - U_{M_1}^n) / \Delta t \\ (W_{M_1}^{n+1} - W_{M_1}^n) / \Delta t \end{bmatrix}$$

$H_0^n$  et  $H_{M_1}^n$  ne dépendent que des conditions aux limites.

### III - 42 - Spectre de $\{R_{\Delta x}\}$

Notre étude est basée sur les résultats établis par Godunov et Ryabenki (11).

Le Spectre de  $\{R_{\Delta x}\}$  est la réunion des spectres des trois familles  $\{Y_{\Delta x}\}$ ,  $\{X_{\Delta x}\}$ ,  $\{Z_{\Delta x}\}$ ; que nous noterons respectivement  $S_Y$ ,  $S_X$ ,  $S_Z$ ; où :

$X_{\Delta x}$  est l'opérateur  $R_{\Delta x}$  attaché au problème à la limite gauche.

$Y_{\Delta x}$  est l'opérateur  $R_{\Delta x}$  attaché au problème de Cauchy équivalent.

$Z_{\Delta x}$  est l'opérateur  $R_{\Delta x}$  attaché au problème à la limite droite.

REMARQUE : Ses résultats sont à rapprocher de ceux démontrés par Heinz - Otto Kreiss (12) qui nous permettent de dire qu'ils sont applicables à notre problème.

A) ETUDE DU SPECTRE DE  $\{Y_{\Delta x}\}$

Développons les solutions en série de Fourier par rapport à la variable  $x = k\Delta x$  pour  $n$  fixé.

$$U_k^n = \sum_{-\infty}^{+\infty} \begin{bmatrix} \rho_1^n(m) \\ \rho_2^n(m) \\ \rho_3^n(m) \end{bmatrix} e^{im(k\Delta x)}, \quad W_k^n = \sum_{-\infty}^{+\infty} \begin{bmatrix} \mu_1^n(m) \\ \mu_2^n(m) \\ \mu_3^n(m) \end{bmatrix} e^{im(k\Delta x)}$$

Nous poserons

$$\rho^n = \begin{bmatrix} \rho_1^n(m) \\ \rho_2^n(m) \\ \rho_3^n(m) \end{bmatrix}, \quad \text{et} \quad \mu^n = \begin{bmatrix} \mu_1^n(m) \\ \mu_2^n(m) \\ \mu_3^n(m) \end{bmatrix}$$

Pour déterminer ces coefficients de Fourier nous remplaçons dans  $R_{\Delta x}$ ,  $Y_k$  et  $Z_k$  respectivement par  $\rho^{n+1} e^{ik\beta}$  et

$$\mu^{n+1} e^{ik\beta} \text{ avec } \beta = m\Delta x.$$

Les matrices qui interviennent dans la définition de  $R_{\Delta x}$  étant toutes diagonales  $\rho_j^n$  et  $\mu_j^n$  ( $j = 1, 2, 3$ ) sont liés par :

III-421

$$\left\{ \begin{aligned} & \left\{ (\theta_{1j} + r_j \theta_{2j} + \alpha_j \frac{\Delta t}{2}) e^{i(k+1)\beta} + (1 - \theta_{1j} - r_j \theta_{2j}) e^{ik\beta} \right\} \rho_j^{n+1} - \alpha_j \frac{\Delta t}{2} e^{i(k+1)\beta} \mu_j^{n+1} = \\ & \left\{ (\theta_{1j} + r_j \theta_{2j} - r_j) e^{i(k+1)\beta} + (1 + r_j - \theta_{1j} - r_j \theta_{2j} - \alpha_j \frac{\Delta t}{2}) e^{ik\beta} \right\} \rho_j^n + \alpha_j \frac{\Delta t}{2} e^{ik\beta} \mu_j^n \\ & \left\{ (\theta'_{1j} - r_j \theta_{2j} + \alpha_j \frac{\Delta t}{2}) e^{i(k+1)\beta} + (1 - \theta'_{1j} + r_j \theta_{2j}) e^{ik\beta} \right\} \mu_j^{n+1} - \alpha_j \frac{\Delta t}{2} e^{i(k+1)\beta} \rho_j^{n+1} = \\ & \left\{ (\theta'_{1j} - r_j \theta_{2j} + r_j) e^{i(k+1)\beta} + (1 - r_j - \theta'_{1j} + r_j \theta_{2j} - \alpha_j \frac{\Delta t}{2}) e^{ik\beta} \right\} \mu_j^n + \alpha_j \frac{\Delta t}{2} e^{ik\beta} \rho_j^n \end{aligned} \right.$$

Nous pouvons écrire III - 421 sous la forme matricielle

$$A_j \begin{bmatrix} \rho_j^{n+1} \\ \mu_j^{n+1} \end{bmatrix} = B_j \begin{bmatrix} \rho_j^n \\ \mu_j^n \end{bmatrix}$$

$A_j$  et  $B_j$  sont des matrices (2,2) telles que :

$$A_j = \begin{bmatrix} (\theta_{1j} + r_j \theta_{2j} + \alpha_j \frac{\Delta t}{2}) e^{i\beta} + (1 - \theta_{1j} - r_j \theta_{2j}) & -\alpha_j \frac{\Delta t}{2} e^{i\beta} \\ -\alpha_j \frac{\Delta t}{2} e^{i\beta} & (\theta'_{1j} - r_j \theta_{2j} + \alpha_j \frac{\Delta t}{2}) e^{i\beta} + (1 - \theta'_{1j} + r_j \theta_{2j}) \end{bmatrix}$$

$$B_j = \begin{bmatrix} (\theta_{1j} + r_j \theta_{2j} - r_j) e^{i\beta} + (1 + r_j - \theta_{1j} - r_j \theta_{2j} - \alpha_j \frac{\Delta t}{2}) & \alpha_j \frac{\Delta t}{2} \\ \alpha_j \frac{\Delta t}{2} & (\theta'_{1j} - r_j \theta_{2j} + r_j) e^{i\beta} + (1 - r_j - \theta'_{1j} + r_j \theta_{2j} - \alpha_j \frac{\Delta t}{2}) \end{bmatrix}$$

Soient  $(\lambda_{11}, \lambda_{21}) ; (\lambda_{12}, \lambda_{22}) ; (\lambda_{13}, \lambda_{23})$  les valeurs propres de  $A_j^{-1} B_j$  pour  $j = 1, 2, 3$ . Le spectre de la famille  $\{Y_{\Delta x}\}$  pour les  $r_j = p_j \frac{\Delta t}{\Delta x}$  ( $j = 1, 2, 3$ ) donnés est :

$$S_Y = \left\{ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\lambda_{1j}, \lambda_{2j}) \right\}_{j=1,2,3} = \left\{ \lambda_{1j}^Y, \lambda_{2j}^Y \right\}_{j=1,2,3}$$

( $\frac{\Delta t}{\Delta x}$  restant fixe)

En posant

$$\begin{aligned} \theta_{1j} + r_j \theta_{2j} &= \frac{1}{2} + \frac{r_j}{2} + y_j \\ \theta'_{1j} - r_j \theta'_{2j} &= \frac{1}{2} - \frac{r_j}{2} - y'_j \end{aligned} \quad j=1,2,3$$

le calcul nous donne

$$\lambda_{1j}^Y = \frac{1 + r_j - 2y_j + (1 - r_j + 2y_j) e^{i\beta}}{(1 + r_j + 2y_j) e^{i\beta} + 1 - r_j - 2y_j}$$

III-422

$$\lambda_{2j}^Y = \frac{1 - r_j + 2y'_j + (1 + r_j - 2y'_j) e^{i\beta}}{(1 - r_j - 2y'_j) e^{i\beta} + 1 + r_j + 2y'_j}$$

Il nous faut chercher à présent, la condition pour que ce spectre soit contenu dans le cercle unité

Calculons les modules de  $\lambda_{1j}^Y$  et  $\lambda_{2j}^Y$  ; pour le faire, écrivons  $\lambda_{1j}^Y$  comme suit :

$$\frac{- (r_j + 2y_j)(e^{i\beta} - 1) + 1 + e^{i\beta} + (r_j - 2y_j)(1 - e^{i\beta}) + (r_j + 2y_j)(e^{i\beta} - 1)}{1 + e^{i\beta} + (r_j + 2y_j)(e^{i\beta} - 1)} = \lambda_{1j}^Y$$

$$\lambda_{1j}^Y = 1 + \frac{2r_j (1 - e^{i\beta})}{1 + e^{i\beta} - (r_j + 2y_j)(1 - e^{i\beta})}$$

posons  $r_j + 2y_j = 2r_j \chi_j$

$$\implies \lambda_{1j}^Y = 1 - \frac{4r_j^2 \chi_j \operatorname{tg}^2 \beta/2}{1 + 4r_j^2 \chi_j \operatorname{tg}^2 \beta/2} - i \frac{2r_j \operatorname{tg} \beta/2}{1 + 4r_j^2 \chi_j \operatorname{tg}^2 \beta/2}$$

d'où

$$|\lambda_{1j}^Y| = \sqrt{1 + \frac{(1 - 2\chi_j)4r_j^2 \operatorname{tg}^2 \beta/2}{1 + 4r_j^2 \chi_j \operatorname{tg}^2 \beta/2}}$$

Soit en éliminant  $\chi_j$

$$|\lambda_{1j}^Y| = \sqrt{1 - 8y_j \frac{r_j \operatorname{tg}^2 \beta/2}{1 + (r_j + 2y_j)^2 \operatorname{tg}^2 \beta/2}}$$

De même :

$$|\lambda_{2j}^Y| = \sqrt{1 - 8y'_j \frac{r_j \operatorname{tg}^2 / 2}{1 + (r_j + 2y'_j)^2 \operatorname{tg}^2 / 2}}$$

Nous en concluons que le spectre de  $\{Y_{\Delta x}\}$  est dans le cercle unité si

$$\text{III - 423} \quad \begin{cases} y_j \geq 0 \\ y'_j \geq 0 \end{cases} \quad (j = 1, 2, 3)$$

B) ETUDE DES SPECTRES DE  $\{X_{\Delta x}\}$  et  $\{Z_{\Delta x}\}$

Tel que nous avons défini  $R_{\Delta x}$  pour  $x = 0$ , le spectre de  $\{X_{\Delta x}\}$  se compose de  $S_y$  + le point 1. Il en est de même de  $\{Z_{\Delta x}\}$ .

C) CONDITIONS SUFFISANTES

L'étude du spectre de  $R_{\Delta x}$  nous permet de conclure que si  $y_j$  et  $y'_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) sont inférieurs à zéro le calcul est instable ; car la condition nécessaire pour que  $\|R_{\Delta x}^n\| < K$  n'est pas satisfaite. Nous allons montrer que  $\{y_j \geq 0 \text{ et } y'_j \geq 0\}$  est une condition suffisante pour que  $\|R_{\Delta x}^n\| < K$ .

Reprenons la matrice  $A_j^{-1} B_j$ . Posons pour simplifier les écritures

$$A_j^{-1} = \begin{bmatrix} a_j/\Delta_j & b_j/\Delta_j \\ b_j/\Delta_j & c_j/\Delta_j \end{bmatrix} \quad B_j = \begin{bmatrix} A'_j & B'_j \\ B'_j & C'_j \end{bmatrix}$$

nous avons :

$$a_j = (\theta_{1j} - r_j \theta_{2j} + \alpha_j \frac{\Delta t}{2}) e^{i\beta} + (1 - \theta_{1j} + r_j \theta_{2j})$$

$$c_j = (\theta_{1j} + r_j \theta_{2j} + \alpha_j \frac{\Delta t}{2}) e^{i\beta} + (1 - \theta_{1j} - r_j \theta_{2j})$$

$$b_j = \alpha_j \frac{\Delta t}{2} e^{i\beta}$$

$$\Delta_j = \text{d\u00e9terminant de } A_j = a_j c_j - b_j^2$$

La matrice  $B_j$  a d\u00e9j\u00e0 \u00e9t\u00e9 donn\u00e9e plus haut. Le calcul de  $A_j^{-1} B_j$  donne :

$$A_j^{-1} B_j = \begin{bmatrix} a_j A_j' / \Delta_j + b_j B_j' / \Delta_j & a_j B_j' / \Delta_j + b_j C_j' / \Delta_j \\ b_j A_j' / \Delta_j + c_j B_j' / \Delta_j & b_j B_j' / \Delta_j + c_j C_j' / \Delta_j \end{bmatrix}$$

c'est-\u00e0-dire que :

$$A_j^{-1} B_j = \begin{bmatrix} \gamma_{j1} & \gamma_{j2} \\ \gamma_{j3} & \gamma_{j4} \end{bmatrix}$$

avec la propri\u00e9t\u00e9

int\u00e9ressante

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_{j2} \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} 0 \\ \gamma_{j3} \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} 0 \end{array} \right.$$

pour  $\frac{\Delta t}{\Delta x}$  fix\u00e9.

L'opérateur  $Y_{\Delta x}$  peut se représenter par la matrice

$$G = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & 0 & 0 & \gamma_{12} & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_{21} & 0 & 0 & \gamma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_{31} & 0 & 0 & \gamma_{32} \\ \gamma_{13} & 0 & 0 & \gamma_{14} & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_{23} & 0 & 0 & \gamma_{24} & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_{33} & 0 & 0 & \gamma_{34} \end{bmatrix}$$

Pour  $\frac{\Delta t}{\Delta x}$  fixé,  $G$  est une fonction de  $\Delta t$  par les coefficients  $\alpha_j \Delta t$ .

Les  $\gamma_{j,i}$  étant des fonctions continues de  $\Delta t$  nous pouvons écrire  $G(\Delta t) = G(0) + \Delta t G'(0) + \varepsilon(\Delta t)$

\*  $G(0)$  s'écrit en utilisant la propriété de  $\gamma_{j2}$  et

$$G(0) = \begin{bmatrix} \gamma_{11}(0) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_{21}(0) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_{31}(0) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_{24} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_{34} \end{bmatrix}$$

Cela montre que les valeurs propres de  $G(0)$  sont égales à  $\lambda_{1j}^Y$  et  $\lambda_{2j}^Y$  ( $j = 1, 2, 3$ ). En effet les valeurs propres de  $G(\Delta t)$  sont données par :

$$(\gamma_{j1} - \lambda)(\gamma_{j4} - \lambda) - \gamma_{j3} \gamma_{j2} = 0 \quad (j = 1, 2, 3)$$

D'où,  $\frac{\Delta t}{\Delta x}$  étant fixé,  $\lambda \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} \begin{cases} \lambda_{1j}^Y = Y_{j1}(0) \\ \lambda_{2j}^Y = Y_{j4}(0) \end{cases}$

$G(0)$  est d'autre part diagonale  $\Rightarrow G^*(0) G(0) = G(0) G^*(0)$ .

Cette propriété de  $G(0)$  jointe à celle de ses valeurs propres montre que :  $\| G(0) \| \leq 1$  si  $y'_j \geq 0$  et  $y_j \geq 0$  pour  $j = 1, 2, 3$ .

\*  $\| G'(0) \|$  reste finie si les  $\Delta_j(0)$  qui y figurent en dénominateur ne s'annulent pas. Or

$$\Delta_j(0) = \left\{ (\theta_{1j} + r_j \theta_{2j}) e^{i\beta} + (1 - \theta_{1j} - r_j \theta_{2j}) \right\} \left\{ (\theta'_{1j} - r_j \theta'_{2j}) e^{i\beta} + 1 - \theta'_{1j} + r_j \theta'_{2j} \right\}$$

$\Delta_j(0)$  ne peut s'annuler que pour  $\beta = k\pi$

$$\beta = k\pi ; \quad \Delta_j(0) \neq 0 \iff \text{III - 424} \begin{cases} \theta_{1j} + r_j \theta_{2j} \neq \frac{1}{2} \\ \theta'_{1j} - r_j \theta'_{2j} \neq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Si les conditions III - 423 et III - 424 sont vérifiées, nous pouvons écrire que

$$\| G(\Delta t) \| \leq \| G(0) \| + \Delta t \| G'(0) \| + o(\Delta t)$$

entraîne  $\| G(\Delta t) \| \leq 1 + H \Delta t$  avec  $H$  indépendant de  $\Delta t$

$$\Rightarrow \| Y_{\Delta x}^n \| \leq \| G^n(\Delta t) \| \leq \| G(\Delta t) \|^n \leq (1 + H \Delta t)^n$$

Si  $\tau$  est le temps pendant lequel nous désirons étudier le phénomène  $n = \frac{\tau}{\Delta t}$

$$\| Y_{\Delta x}^n \| \leq (1 + H \Delta t)^{\tau/\Delta t}$$

or  $(1 + H \Delta t)^{\tau/\Delta t} \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} e^{\tau \cdot H}$

$$\Rightarrow \| Y_{\Delta x}^n \| \text{ reste finie.}$$

Nous pouvons conclure, vu les définitions de  $R_{\Delta x}$  que nous nous sommes fixés aux limites, que les conditions III - 423 et III - 424 sont des conditions nécessaires et suffisantes pour que  $\| R_{\Delta x}^n \| < K$ .

III - 43 - ETUDE DES CONDITIONS SUR  $X^0$  ET  $H^n$

A) CONDITION PORTANT SUR  $X^0$

Nous voulons savoir si

$$\| X^0 \| \mathcal{L}'_{\Delta x} \leq K_2 \| \varphi^{(\Delta x)} \| \Phi_{\Delta x} \text{ est réalisé.}$$

$$\| X^0 \| \mathcal{L}'_{\Delta x} = \max_k \sum_{i=1}^3 ( |U_{i,k}^0| + |W_{i,k}^0| )$$

$$\| \varphi^{(\Delta x)} \| \Phi_{\Delta x} = \max_k \sum_{i=1}^6 | \varphi_{1,i} | + \max_n \sum_{i=1}^6 \left| \frac{\varphi_{2,i}^{n+1} - \varphi_{2,i}^n}{\Delta t} \right|$$

or  $\varphi_1 = \begin{bmatrix} T_1^{-1} & Q \\ T_1^{-1} & Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_k^0 \\ W_k^0 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \| \varphi^{(\Delta x)} \| \Phi_{\Delta x} = \| X^0 \| \mathcal{L}'_{\Delta x} + \max_n \sum_{i=1}^6 \left| \frac{\varphi_{2,i}^{n+1} - \varphi_{2,i}^n}{\Delta t} \right|$$

par conséquent  $\|x^0\| < K_2 \|y^{(\Delta x)}\| \Phi_{\Delta x}$  avec  $K_2$

indépendant de  $\Delta x$  ;

B) CONDITION PORTANT SUR  $H^n$

1 - Etude de  $H^n$

Reprenons le système III - 414 définissant  $H^n$ .

$$(\theta_1 + r\theta_2 + \alpha \frac{\Delta t}{2}) H_{k+1}^1 + (I_{03} - \theta_1 - r\theta_2) H_k^1 - \alpha \frac{\Delta t}{2} H_{k+1}^2 = 0$$

III - 414

$$(\theta_1' - r\theta_2 + \alpha \frac{\Delta t}{2}) H_{k+1}^2 + (I_{03} - \theta_1' + r\theta_2) H_k^2 - \alpha \frac{\Delta t}{2} H_{k+1}^1 = 0$$

En y reportant III - 225 il devient

$$(I_{03} + r + 2y + \alpha \Delta t) H_{k+1}^1 + (I_{03} - r - 2y) H_k^1 - \alpha \Delta t H_{k+1}^2 = 0$$

III - 431

$$(I_{03} - r - 2y' + \alpha \Delta t) H_{k+1}^2 + (I_{03} + r + 2y') H_k^2 - \alpha \Delta t H_{k+1}^1 = 0$$

Soit  $\mathcal{L}_k$  l'opérateur tel que  $\mathcal{L}_k H_k = H_{k+1}$   
 et soit  $\mathcal{L}_I$  l'opérateur identité.

III - 431 peut s'écrire :

$$\{(I_{03} + r + 2y + \alpha \Delta t) \mathcal{L}_k + (I_{03} - r - 2y) \mathcal{L}_I\} H_k^1 - \mathcal{L}_k \alpha \Delta t H_k^2 = 0$$

$$\{(I_{03} - r - 2y' + \alpha \Delta t) \mathcal{L}_k + (I_{03} + r + 2y') \mathcal{L}_I\} H_k^2 - \alpha \Delta t \mathcal{L}_k H_k^1 = 0$$

Eliminons de ce système  $H_k^2$ ,

$$\left[ \{(I_{03} - r - 2y' + \alpha \Delta t)(I_{03} + r + 2y + \alpha \Delta t)\} \mathcal{L}_k^2 + \{(I_{03} - r - 2y' + \alpha \Delta t)(I_{03} - r - 2y) + \right.$$

$$\left. (I_{03} + r + 2y')(I_{03} + r + 2y + \alpha \Delta t)\} \mathcal{L}_k + \{(I_{03} + r + 2y')(I_{03} - r - 2y)\} \mathcal{L}_I - (\alpha \Delta t)^2 \mathcal{L}_k^2 \right] H_k^1 = 0$$

$H_k^1$  vérifie donc l'équation

$$\text{III-432} \left\{ \begin{aligned} & (I_{03} + r + 2y')(I_{03} - r - 2y) H_k^1 + \{(I_{03} - r - 2y' + \alpha \Delta t)(I_{03} - r - 2y) + \\ & \qquad \qquad \qquad + (I_{03} + r + 2y')(I_{03} + r + 2y + \alpha \Delta t)\} H_{k+1}^1 \\ & + \{(I_{03} - r - 2y' + \alpha \Delta t)(I_{03} + r + 2y + \alpha \Delta t) - (\alpha \Delta t)^2\} H_{k+2}^1 = 0 \end{aligned} \right.$$

Nous avons la même équation pour  $H_k^2$ .

Les matrices qui interviennent dans III - 432 étant diagonales,  $H_k^1$  est défini par des systèmes du type

$$a_{kj} H_{k,j}^1 - 2 b_{kj} H_{k+1,j}^1 + c_{kj} H_{k+2,j}^1 = 0$$

$$(j = 1, 2, 3)$$

Ces systèmes admettent une solution unique si

$$\text{III-433} \quad \left\{ \begin{array}{l} a_{kj} > 0 \\ c_{kj} > 0 \\ b_{kj} > \frac{1}{2} (a_{kj} + c_{kj}) + \delta \quad \text{avec } \delta > 0 \end{array} \right.$$

$$* a_{kj} > 0 \implies r_j + 2y_j > 1$$

$$* c_{kj} > 0 \implies r_j + 2y'_j > 1 + \alpha_j \Delta t - \frac{\alpha_j^2 (\Delta t)^2}{1 + r_j + 2y_j + \alpha_j \Delta t}$$

$$\implies r_j + 2y'_j > 1 + \alpha_j \Delta t \frac{1 + r_j + 2y_j}{1 + r_j + 2y_j + \alpha_j \Delta t}$$

$$\text{or } \frac{1 + r_j + 2y_j}{1 + r_j + 2y_j + \alpha_j \Delta t} < 1 \quad \text{car } \alpha_j \Delta t > 0$$

Constatant que  $\alpha_j \Delta t$  est petit nous dirons que

$$c_{kj} > 0 \implies r_j + 2y'_j > 1 + \alpha_j \Delta t$$

\*  $b_{kj} > \frac{1}{2} (a_{kj} + c_{kj}) + \delta$  est toujours réalisée si nous prenons  $0 < \delta < 2$ .

Les conditions III - 433 s'exprimeront en fonction des paramètres du schéma aux différences finies sous la forme :

$$\text{III - 433}' \quad \left\{ \begin{array}{l} r_j + 2y_j > 1 \\ r_j + 2y'_j > 1 + \alpha_j \Delta t \end{array} \right. \quad (j = 1, 2, 3)$$

Quand les inégalités III - 433' sont vérifiées nous avons en plus (9)

$$\max_k |H_{k,j}^1| \leq \max ( |H_{0,j}^1| , |H_{M1,j}^1| ) \quad ( j=1,2,3 )$$

$$\max_k |H_{k,j}^2| \leq \max ( |H_{0,j}^2| , |H_{M1,j}^2| )$$

$$\| H^n \| \leq \max_n ( \| H_0^1 \| + \| H_0^2 \| + \| H_{M1}^1 \| + \| H_{M1}^2 \| )$$

Nous allons montrer à partir de là que

$\| H^n \| < K_1 \| \varphi(\Delta x) \| \phi_{\Delta x}$ , pour cela, il nous faut étudier le comportement de  $E_{M1}$  et  $F_{M1}$  quand  $\Delta t$  tend vers zéro.

## 2 - Etude de $E_k$ et $F_k$

### a) Etude de $E_k$

$E_k$  est donné par la relation de récurrence

$$E_{k+1} = (A_1 - E_k B_1)^{-1} (E_k B_2 - A_2) \quad k = 0, 1, 2, \dots, M_1 - 1$$

\*  $A_1, B_1, A_2, B_2$  sont des matrices diagonales ;  
d'autre part si la ligne est à vide  $E_0 = I_{03}$ . Par suite tous les  $E_k$  sont des matrices diagonales et nous pouvons limiter notre étude à celle d'une composante de  $E_k$ .

Nous avons :

$$A_{1j} = (\theta_{1j} + r_j \theta_{2j} + \alpha_j \Delta t / 2) / (r_j \theta_{2j} + \theta_{1j} - 1)$$

$$B_{1j} = - (\alpha_j \Delta t / 2) / (\theta_{1j} - r_j \theta_{2j} - 1)$$

III-313

$$A_{2j} = - (\alpha_j \Delta t / 2) / (r_j \theta_{2j} + \theta_{1j} - 1)$$

$$B_{2j} = (\theta_{1j} - r_j \theta_{2j} + \alpha_j \Delta t / 2) / (\theta_{1j} - r_j \theta_{2j} - 1)$$

Les conditions III - 433' qui peuvent s'écrire  
 $r_j \theta_{2j} > \theta_{1j} + \alpha_j \frac{\Delta t}{2}$  ;  $r_j \theta_{2j} + \theta_{1j} > 1$  entraînent

$A_{1j} > 0$ ,  $B_{1j} > 0$ ,  $A_{2j} < 0$ ,  $B_{2j} > 0$ . Avec les valeurs  
 de  $\Delta t$  choisies  $B_{1j}$  et  $A_{2j}$  sont faibles par rapport à

$A_{1j}$  et  $B_{2j}$  et  $\lim_{t \rightarrow 0} B_{1j} = \lim_{t \rightarrow 0} A_{2j} = 0$ .

La courbe représentative de  $E_{j,k+1} = \frac{B_{2j} E_{j,k} - A_{2j}}{A_{1j} - E_{j,k} B_{1j}}$

figure III - 6 montre que  $E_{j,k}$  tend vers une limite finie  
 quand  $k \rightarrow +\infty$  si  $\frac{A_{1j}}{B_{1j}}$  étant supérieur à 1,  $E_{j,1}$  est  
 inférieur à 1.

Montrons qu'avec les conditions III - 433'  $\frac{A_{1j}}{B_{1j}}$   
 est supérieur à 1.

$$\frac{A_{1j}}{B_{1j}} = \frac{(\theta_{1j} + r_j \theta_{2j} + \alpha_j \Delta t / 2)(r_j \theta_{2j} + 1 - \theta_{1j})}{(\alpha_j \Delta t / 2)(r_j \theta_{2j} + \theta_{1j} - 1)}$$

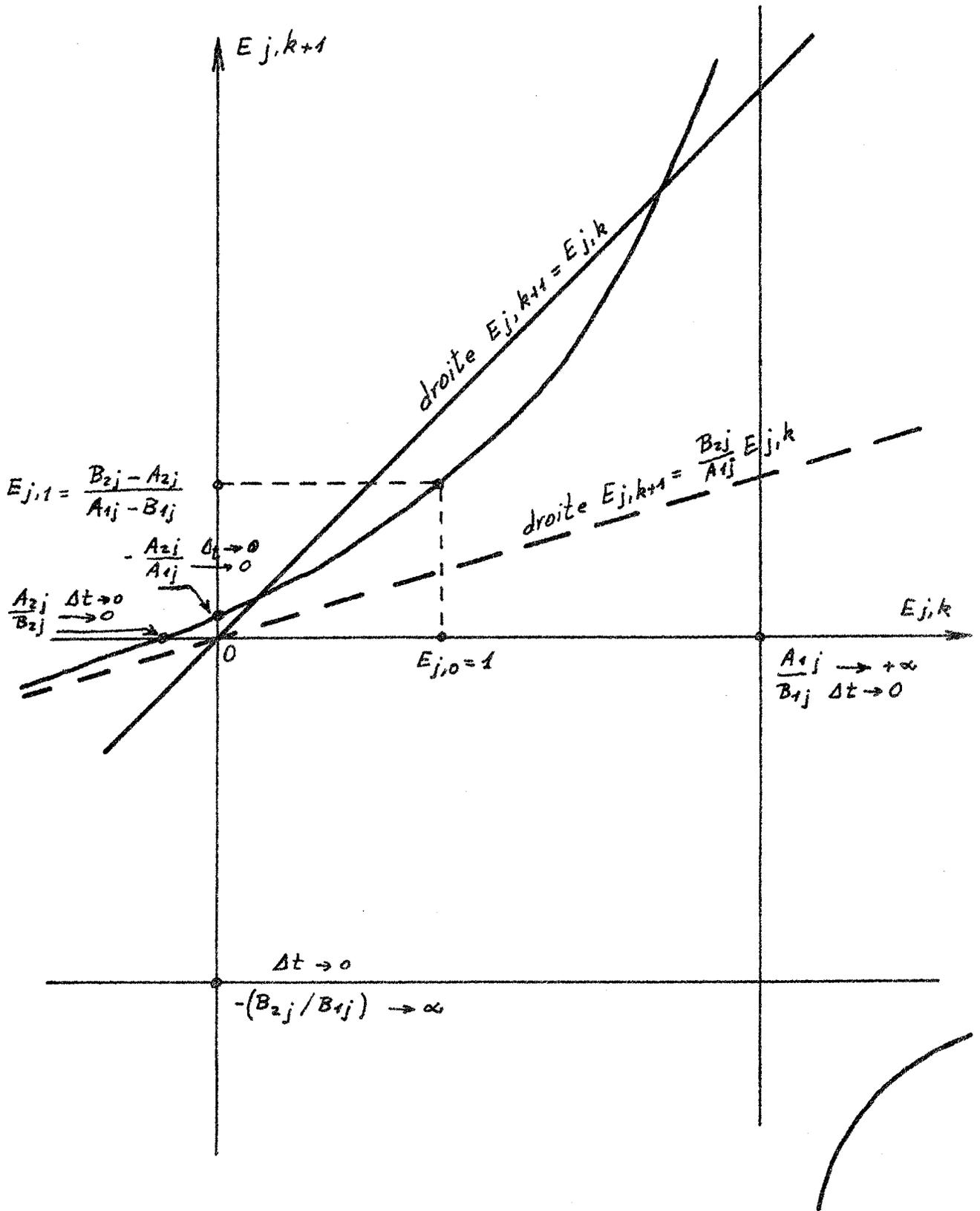


Fig. III-6 Courbe représentative de  $E_{j,k+1} = f(E_{j,k})$

$$r_j \theta_{2j} + \theta_{1j} - 1 > 0 \implies \theta_{1j} + r_j \theta_{2j} + \alpha_j \Delta t / 2 > \theta_{1j} + r_j \theta_{2j} - 1$$

$$r_j \theta_{2j} - \theta'_{1j} + 1 > \alpha_j \Delta t / 2 + 1 > \alpha_j \Delta t / 2$$

d'où  $\frac{A_{1j}}{B_{1j}} > 1$

\*  $E_{j,1} = \frac{B_{2j} - A_{2j}}{A_{1j} - B_{1j}}$ , pour que  $E_{j,1} < 1$  il faut et il

suffit que  $B_{2j} - A_{2j} - A_{1j} + B_{1j} < 0$

$$B_{2j} - A_{2j} - A_{1j} + B_{1j} = \frac{r_j \theta_{2j} - \theta'_{1j}}{r_j \theta_{2j} + 1 - \theta'_{1j}} - \frac{r_j \theta_{2j} + \theta_{1j}}{r_j \theta_{2j} + \theta_{1j} - 1}$$

or III - 433' entraîne

$$\frac{r_j \theta_{2j} - \theta'_{1j}}{r_j \theta_{2j} - \theta'_{1j} + 1} < 1 \quad \text{et} \quad \frac{r_j \theta_{2j} + \theta_{1j}}{r_j \theta_{2j} + \theta_{1j} - 1} > 1$$

donc  $B_{2j} - A_{2j} - A_{1j} + B_{1j}$  est inférieur à zéro d'où

$$E_{j,1} < 1.$$

CONCLUSION : Si les conditions III - 433' sont satisfaites la suite  $E_k$  est convergente.

Il est intéressant de constater que nous n'introduisons aucune autre condition sur les paramètres et sur  $\Delta t$ .

Quand  $\Delta t \rightarrow 0$

$$E_{j,M1} \approx \left\{ (r_j \theta_{2j} + \theta_{1j} - 1)(r_j \theta_{2j} - \theta_{1j}') / (r_j \theta_{2j} + \theta_{1j})(r_j \theta_{2j} - \theta_{1j}'+1) \right\}^{M1}$$

b) Etude de  $F_k$

L'étude de  $F_k$  se fait à partir de la formule de récurrence :

$$F_{k+1} = (A_1 - E_k B_k)^{-1} (F_k + E_k D_k^n - C_k^n)$$

Quand  $\Delta t \rightarrow 0$  l'étude de  $E_k$  montre que

$$F_{M1} \approx A_1^{-1} (F_{M1-1} + E_{M1-1} D_{M1-1}^n - C_{M1-1}^n)$$

Or quand  $\Delta t \rightarrow 0$

$$E_{j,M1-1} D_{j,M1-1}^n - C_{j,M1-1}^n \approx \frac{r_j (U_{j,M1-1}^n - U_{j,M1}^n) + \alpha_j \frac{\Delta t}{2} (W_{j,M1}^n + W_{j,M1-1}^n)}{(r_j \theta_{2j} + \theta_{1j} - 1)}$$

d'où

$$F_{j,M1} \approx \left\{ F_{j,M1-1} + \frac{r_j (U_{j,M1-1}^n - U_{j,M1}^n) + \alpha_j \frac{\Delta t}{2} (W_{j,M1}^n + W_{j,M1-1}^n)}{(r_j \theta_{2j} + \theta_{1j} - 1)} \right\} / A_{1j}$$

La présence des fonctions  $U_k^n$  et  $W_k^n$  dans  $F_{j,M1}$  ( $k=M1-1, M1$ ) entraîne une ambiguïté, toutefois comme nous cherchons des conditions de stabilité nous pouvons supposer que le terme les contenant, compte tenu de sa forme, tend vers zéro avec  $\Delta t$ . D'autre part la méthode de calcul utilisée suppose que les valeurs de  $U$  et  $W$  sont connues à  $n\Delta t$ .

La condition III-433' etant vérifiée  $A_{1j}$  est supérieur à 1 donc  $F_{j,M1}$  est au moins d'ordre  $\Delta t$ .

### 3 - Conséquences

Par définition de  $H^n$  aux points limites nous avons

$$H_{M1}^1 = \frac{\Delta U_{M1}}{\Delta t}, \quad H_{M1}^2 = \frac{\Delta W_{M1}}{\Delta t}$$

De III-318 et III-319 nous tirons

$$\left( (\beta_2 + \alpha_2 E_{j,M1} + \beta_1 \Delta t + \alpha_1 \Delta t E_{j,M1}) \left( \frac{\Delta W_{j,M1}}{\Delta t} \right)_{n+1} - (a_4 + a_3 \Delta t) \left( \frac{\Delta U_{j,M1}}{\Delta t} \right)_n - (a_6 + a_5 \Delta t) \left( \frac{\Delta W_{j,M1}}{\Delta t} \right)_n + (\alpha_2 + \alpha_1 \Delta t) \left( \frac{F_{j,M1}}{\Delta t} \right)_{n+1} = \Delta t \left\{ 2T_1^{-1} E[(n+1)\Delta t] + a_1 U_{M1}^n + a_2 W_{M1}^n \right\}_j - \Delta t \left\{ \dots \right\}_j$$

avec  $a_3 = -a_1 = ((R_{Fj} R_{O} C_{O} + L_{O}) Y_{cj} - R_{O} C_{O}) / 2$

$$a_4 = a_2 = L_{O} C_{O} - R_{Fj} L_{O} C_{O} Y_{cj}$$

$$a_6 = \beta_2 = L_{O} C_{O} + R_{Fj} L_{O} C_{O} Y_{cj}$$

$$\beta_1 = -a_5 = (R_{O} C_{O} + (R_{Fj} R_{O} C_{O} + L_{O}) Y_{cj}) / 2$$

$$a_1 = (R_{Fj} + R_{O}) Y_{cj} - 1$$

$$a_2 = - (R_{Fj} + R_{O}) Y_{cj} - 1$$

La relation III-434 jointe à  $\Delta U_{j,M1} = E_{j,M1} \Delta W_{j,M1} + F_{j,M1}$

nous donne :

$$(a_6 + a_4 E_{j,M1} + \beta_1 \Delta t + \alpha_1 \Delta t E_{j,M1}) \left( \frac{\Delta W_{j,M1}}{\Delta t} \right)_{n+1} - (2a_6 + 2a_4 E_{j,M1} + a_2 (\Delta t)^2 + a_1 (\Delta t)^2 E_{j,M1}) \left( \frac{\Delta W_{j,M1}}{\Delta t} \right)_n$$

$$+ (a_6 + a_5 \Delta t + a_4 E_{j,M1} + a_3 \Delta t E_{j,M1}) \left( \frac{\Delta W_{j,M1}}{\Delta t} \right)_{n-1} = -(a_4 - a_3 \Delta t) \left( \frac{F_{j,M1}}{\Delta t} \right)_{n+1}$$

$$+ (\Delta t)^2 \left\{ 2T_1^{-1} \frac{(E[(n+1)\Delta t] - E(n\Delta t))}{\Delta t} \right\}_j + (2a_4 + a_1 (\Delta t)^2) \left( \frac{F_{j,M1}}{\Delta t} \right)_n - (a_4 + a_3 \Delta t) \left( \frac{F_{j,M1}}{\Delta t} \right)_{n-1}$$

$$\left(\frac{\Delta W_{j,M1}}{\Delta t}\right)_{n+1} = \frac{(\Delta t)^2}{a_6} \left[ \sum_{l=1}^n \sum_{i=1}^l \left\{ 2T_1^{-1} \left( \frac{E((i+1)\Delta t) - E(i\Delta t)}{\Delta t} \right) \right\}_j + n \left\{ 2T_1^{-1} \left( \frac{E(\Delta t) - E(0)}{\Delta t} \right) \right\}_j \right] - \frac{a_4}{a_6} \left\{ \left( \frac{F_{j,M1}}{\Delta t} \right)_{n+1} - \left( \frac{F_{j,M1}}{\Delta t} \right)_0 \right\}$$

A l'instant  $t=0$  nous avons

$$\left(\frac{\Delta W_{j,M1}}{\Delta t}\right)_0 = \frac{\Delta t (2T_1^{-1} E(0) + a_1 U_{M1}^0 + a_2 W_{M1}^0)_j - (\alpha_2 + \alpha_1) \left(\frac{F_{j,M1}}{\Delta t}\right)_0}{(\alpha_2 + \alpha_1 \Delta t) E_{j,M1} + \beta_2 + \beta_1 \Delta t}$$

avec  $(F_{M1})_0 \neq W_{M1}^0 \cdot O(\Delta t)$

De plus  $U_{M1}^0 = W_{M1}^0 = T_1^{-1} Q$  donc :

III-435 
$$\left\{ \begin{aligned} \max_n \left[ \left\| \frac{\Delta W_{M1}}{\Delta t} \right\| + \left\| \frac{\Delta U_{M1}}{\Delta t} \right\| \right] &\leq K_1 (1 + \|E_{M1}\|) \tau^2 \max_n \left\| 2T_1^{-1} \left( \frac{E((n+1)\Delta t) - E(n\Delta t)}{\Delta t} \right) \right\| \\ &+ K_2 \|T_1^{-1} Q\| + K_3 \max_n \left\| \frac{F_{M1}}{\Delta t} \right\| \end{aligned} \right.$$

\*  $\frac{\Delta U_0}{\Delta t} = \frac{\Delta W_0}{\Delta t}$  étant obtenu à partir de  $\frac{\Delta U_{M1}}{\Delta t}$  et  $\frac{\Delta W_{M1}}{\Delta t}$  par

une récurrence linéaire (Méthode de double balayage) convergente, nous pouvons affirmer qu'ils sont bornés. En effet

$$\begin{aligned} \Delta W_k &= (B_1 E_{k+1} + B_2) \Delta W_{k+1} + B_1 F_{k+1} + D_k^n \\ \Delta U_k &= E_k \Delta W_k + F_k \end{aligned}$$

et les conditions III-433' étant vérifiées  $|B_{1j} E_{j,k} + B_{2j}| < 1 \forall k$  pour  $j = (1, 2, 3)$ .

D'où

$$\|H^n\| \leq \max_n ( \|H_0^1\| + \|H_0^2\| + \|H_{M1}^1\| + \|H_{M1}^2\| ) \leq K' \tau^2 \max_n \left\| 2T_1^{-1} \left( \frac{E((n+1)\Delta t) - E(n\Delta t)}{\Delta t} \right) \right\| + K'' \|T_1^{-1} Q\| + K'''$$

Nous savons d'autre part que :

$$\| \varphi^{(\Delta x)} \|_{\Phi_{\Delta x}} = \max_k \sum_{i=1}^6 |\varphi_{1,i}| + \max_n \sum_{i=1}^6 \left| \frac{\varphi_{2,i}^{n+1} - \varphi_{2,i}^n}{\Delta t} \right|$$

avec  $\varphi_1 = \begin{bmatrix} T_1^{-1} Q \\ T_1^{-1} Q \end{bmatrix}$        $\varphi_2^n = \begin{bmatrix} 0 \\ T_1^{-1} E(n\Delta t) \end{bmatrix}$

donc  $\| \bar{h}^n \| \leq K'_1 \| \varphi^{(\Delta x)} \| \phi_{\Delta x}$  avec  $K'_1$  indépendant de  $\Delta x$ .

III - 44 - CONDITIONS SUFFISANTES DE STABILITE

Le schéma aux différences finies utilisé est

stable si  $y_j \geq 0$       avec  $r_j \theta_{2j} \neq \frac{1}{2} - \theta_{1j}$   
 $y'_j \geq 0$        $r_j \theta_{2j} \neq \theta'_{1j} - \frac{1}{2}$

et  $r_j + 2y'_j > 1 + \alpha_j \Delta t$

$r_j + 2y_j > 1$

Ces conditions se traduisent en fonction des  $\theta$   
 par :

$$\left\{ \begin{array}{l} r_j \theta_{2j} + \theta_{1j} > 1 \\ r_j \theta_{2j} \neq \frac{1}{2} - \theta_{1j} \\ r_j \theta_{2j} \neq \theta'_{1j} - \frac{1}{2} \\ \theta_{1j} + r_j \theta_{2j} - \frac{1}{2} - r_j/2 \geq 0 \\ \theta'_{1j} - r_j \theta_{2j} - \frac{1}{2} + r_j/2 \leq 0 \\ r_j \theta_{2j} > \theta'_{1j} + \alpha_j \Delta t/2 \end{array} \right. \quad (j = 1, 2, 3)$$

III - 441

Nous avons montré que la condition nécessaire

pour que  $\|R_{\Delta x}^n\| < K$  est aussi une condition suffisante.

Nous avons trouvé ensuite les conditions pour que

$$\|H^n\| \leq K_1 \|\varphi^{(\Delta x)}\|_{\Phi_{\Delta x}} \quad \text{et} \quad \|X^0\|_{\mathcal{B}'_{\Delta x}} \leq K_2 \|\varphi^{(\Delta x)}\|_{\Phi_{\Delta x}}$$

L'ensemble de ces conditions nous a donné la condition III-441 qui est donc une condition suffisante de stabilité. Nous allons chercher si cette condition est nécessaire.

III - 45 - CONDITIONS NECESSAIRES DE STABILITE

Condition III ( 9 )

Définition :

Soit le système aux différences finies

$$L_{\Delta x} X(\Delta x) = f(\Delta x)$$

$$l_{\Delta x} X(\Delta x) = \varphi(\Delta x)$$

réduit à la forme  $X^{n+1} = R_{\Delta x} X^n + \Delta t \cdot H^n$  avec  $X^0$  donné.

Prenons une fonction  $\bar{X}^0$  dans  $\mathcal{B}'_{\Delta x}$  et construisons les fonctions grille  $\bar{X}^1, \bar{X}^2, \dots, \bar{X}^n, \dots$  suivant la formule de récurrence  $\bar{X}^{n+1} = R_{\Delta x} \bar{X}^n$ . L'ensemble des  $\{\bar{X}^n\}$  forme une certaine fonction  $\bar{X}^{(\Delta x)} \in \mathcal{B}_{\Delta x}$ .

Considérons par rapport à  $\bar{X}^{(\Delta x)}$  le système

$$L_{\Delta x} \bar{X}^{(\Delta x)} = \bar{f}^{(\Delta x)}, \quad l_{\Delta x} \bar{X}^{(\Delta x)} = \bar{\varphi}^{(\Delta x)}$$

Nous dirons que la condition III est satisfaite

si  $\|\bar{f}^{(\Delta x)}\|_{\mathcal{F}_{\Delta x}} + \|\bar{\varphi}^{(\Delta x)}\|_{\Phi_{\Delta x}} \leq K_5 \|\bar{X}^0\|$

avec  $K_5$  indépendant de  $\Delta x$  ou de  $\bar{X}^0 \in \mathcal{X}'_{\Delta x}$ .

Théorème

Si le système aux différences finies est réduit à la forme

$$X^{n+1} = R_{\Delta x} X^n + \Delta t \cdot H^n, \quad X^0 \text{ donné en}$$

satisfaisant à la condition III,  $\|R_{\Delta x}\| < K$  est une condition nécessaire à la stabilité.

Choisissons une fonction  $\bar{X}^0 \in \mathcal{X}'_{\Delta x}$  et cherchons  $\bar{\varphi}(\Delta x)$  et  $\bar{f}(\Delta x)$ . D'après la définition de  $R_{\Delta x}$  aux points  $k = 0$  et  $k = M_1$  nous avons :

$$\begin{aligned} \bar{S}_0^{n+1} = \begin{matrix} \bar{U}_0^n \\ \bar{W}_0^n \end{matrix} & \implies \begin{cases} \bar{U}_0^{n+1} = \bar{U}_0^n = \dots = \bar{U}_0^0 \\ \bar{W}_0^{n+1} = \bar{W}_0^n = \dots = \bar{W}_0^0 \end{cases} \\ \bar{S}_{M_1}^{n+1} = \begin{matrix} \bar{U}_{M_1}^n \\ \bar{W}_{M_1}^n \end{matrix} & \implies \begin{cases} \bar{U}_{M_1}^{n+1} = \bar{U}_{M_1}^n = \dots = \bar{U}_{M_1}^0 \\ \bar{W}_{M_1}^{n+1} = \bar{W}_{M_1}^n = \dots = \bar{W}_{M_1}^0 \end{cases} \end{aligned}$$

Reportons dans III - 214. Nous obtenons

$$\bar{\varphi}_1 = \begin{bmatrix} \bar{U}_k^0 \\ \bar{W}_k^0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \bar{\varphi}_2 = \begin{bmatrix} \bar{W}_0^0 - \bar{U}_0^0 \\ \bar{U}_{M_1}^0 + \bar{W}_{M_1}^0 + (R_F + R_0) Y_C (\bar{W}_{M_1}^0 - \bar{U}_{M_1}^0) \end{bmatrix}$$

Le terme  $\bar{\varphi}_2$  est indépendant de  $n$  d'où la norme de  $\bar{\varphi}(\Delta x)$  est :

$$\|\bar{\varphi}(\Delta x)\|_{\Phi_{\Delta x}} = \max_k \sum_{i=1}^6 |\bar{\varphi}_{1,i}| = \max_k \sum_{i=1}^3 (|\bar{U}_{i,k}^0| + |\bar{W}_{i,k}^0|)$$

$$\text{or } \|\bar{X}^0\|_{\mathcal{X}'_{\Delta x}} = \max_k \sum_{i=1}^3 (|\bar{U}_{i,k}^0| + |\bar{W}_{i,k}^0|)$$

Nous avons donc finalement :

$$\| \bar{\varphi}^{(\Delta x)} \|_{\phi_{\Delta x}} = \| \bar{X}^0 \|_{\mathcal{X}_{\Delta x}}$$

CONCLUSION : La condition III est réalisée pour le schéma aux différences étudié avec  $K_5 = 1$  ; les relations III - 441 sont par conséquent des conditions nécessaires et suffisantes de stabilité.

### III - 46 - CONVERGENCE

#### Théorème

La solution  $X^{(\Delta x)}$  de l'équation aux différences { III - 213, III - 214 } converge vers la solution  $X(x, t)$  de l'équation différentielle { III - 21 } si le schéma aux différences approche le système différentiel et est stable.

A partir de l'étude faite au paragraphe III - 2 et de celui sur la stabilité nous pouvons, en utilisant ce théorème, dire que notre approximation est convergente si les conditions III - 441 sont satisfaites.



D E U X I E M E   P A R T I E

=====

LE PROGRAMME P E G A S E

\_\_\_\_\_



C H A P I T R E I  
=====

METRODES DE DETERMINATION DE  $A_M$ ,  $B_M$ ,  $EG^{(n)}$ .

-o-

Deux problèmes d'enclenchement d'une ligne à vide ne se différencient que par l'évolution de la condition à la limite au générateur au cours de l'enclenchement et par la nature de ce générateur.

Un changement au générateur n'affecte, dans la méthode de calcul utilisée, que les valeurs de  $\Delta U_{M1}$  et  $\Delta W_{M1}$ . Par conséquent, l'organigramme de calcul de la figure III - 5, que nous avons établi à partir de l'étude détaillée d'un cas particulier d'enclenchement, reste valable dans tous les autres cas.

Nous constatons ainsi que le programme PEGASE reposera essentiellement sur la détermination des matrices  $A_M$ ,  $B_M$ ,  $EG^{(n)}$  qui permettent de calculer  $\Delta U_{M1}$  et  $\Delta W_{M1}$  et qui sont les seules matrices variables d'un enclenchement à l'autre. Nous établirons donc, avant d'explicitier en détail le programme PEGASE, des méthodes de détermination de  $A_M$ ,  $B_M$  et  $EG^{(n)}$  applicables à tous les problèmes de manoeuvre. Nous montrerons ensuite comment accéder à ces grandeurs à partir de la théorie des graphes.

I - 1 - UTILISATION DE L'EQUATION A LA LIMITE COTE

GENERATEUR MISE SOUS LA PREMIERE FORME.

Considérons la ligne triphasée décrite au paragraphe III - 1 de la première partie et représentée figure III - 1.

Reprenons le problème d'enclenchement de cette ligne et supposons qu'il soit à pôles asynchrones.

Les équations définissant le problème restent les mêmes que celles du système { III - 11, III - 12, III - 13 }, obtenu lors de l'étude de l'enclenchement synchrone, auxquelles nous ajoutons la nouvelle condition à la limite côté générateur qui s'écrit :

$$E(t) = v + R_0 i(\lambda, t) + \begin{vmatrix} R_{F1} & 0 & 0 \\ 0 & R_{F2} & 0 \\ 0 & 0 & R_{F3} \end{vmatrix} i(\lambda, t) + R_0 C_0 \frac{\partial}{\partial t} v(\lambda, t) +$$

I - 100

$$+ L_0 \frac{\partial}{\partial t} i(\lambda, t) + R_0 C_0 \begin{vmatrix} R_{F1} & 0 & 0 \\ 0 & R_{F2} & 0 \\ 0 & 0 & R_{F3} \end{vmatrix} \frac{\partial}{\partial t} i(\lambda, t) + L_0 C_0 \frac{\partial^2 v(\lambda, t)}{\partial t^2} +$$

$$+ L_0 C_0 \begin{vmatrix} R_{F1} & 0 & 0 \\ 0 & R_{F2} & 0 \\ 0 & 0 & R_{F3} \end{vmatrix} \frac{\partial^2 i(\lambda, t)}{\partial t^2}$$

Les résistances d'enclenchement  $R_{F_i}$  varient indépendamment et d'une manière discrète de  $+\infty$  à 0.

I - 11 - Calcul de  $A_M$ ,  $B_M$  et  $EG^{(n)}$

Appliquons à I - 100 la transformation normale

$v = T_1 \frac{(U + W)}{2}$      $i = T_1 Y_c (-U + W)/2$  et discrétisons dans le temps l'équation obtenue. La transformée de I - 100 s'écrit :

$$2T_1^{-1}E(t) = U + W + R_o Y_c (-U + W) + R_o C_o \frac{\partial}{\partial t} (U + W) +$$

$$+ L_o Y_c \frac{\partial}{\partial t} (-U + W) + L_o C_o \frac{\partial^2}{\partial t^2} (U + W) + Q(-U + W)$$

$$+ R_o C_o Q \frac{\partial}{\partial t} (-U + W) + L_o C_o Q \frac{\partial^2}{\partial t^2} (-U + W)$$

I - 111

avec

$$U = U(\lambda, t) ; \quad W = W(\lambda, t) ; \quad Q = T_1^{-1} \begin{bmatrix} R_{F1} & 0 & 0 \\ 0 & R_{F2} & 0 \\ 0 & 0 & R_{F3} \end{bmatrix} T_1 Y_c$$

La discrétisation de cette équation obtenue en remplaçant  $U(\lambda, t)$  par  $U_{M1}^n$ ,  $\frac{\partial U}{\partial t}(\lambda, t)$  par

$$(U_{M1}^{n+1} - U_{M1}^{n-1}) / 2\Delta t \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \quad \text{par}$$

$$(U_{M1}^{n+1} - 2U_{M1}^n + U_{M1}^{n-1}) / 2(\Delta t)^2 \quad \text{et de même pour } W(\lambda, t)$$

nous permet de la mettre sous la forme cherchée

$$A_M U_{M1} + B_M W_{M1} = EG^{(n)}$$

Nous trouvons :

$$A_M = (R_o C_o - L_o Y_c) / 2\Delta t + L_o C_o / (\Delta t)^2 - (R_o C_o / 2\Delta t + L_o C_o / (\Delta t)^2) Q$$

$$B_M = (R_o C_o + L_o Y_c) / 2\Delta t + L_o C_o / (\Delta t)^2 + (R_o C_o / 2\Delta t + L_o C_o / (\Delta t)^2) Q$$

$$EG^{(n)} = 2T_1^{-1} E(n\Delta t) - \left\{ I_{o3} - R_o Y_c - L_o C_o / (\Delta t)^2 + (R_o C_o - L_o Y_c) / 2\Delta t - \right. \\ \left. - (I_{o3} + R_o C_o / 2\Delta t - L_o C_o / (\Delta t)^2) Q \right\} U_{M1}^n$$

I-112

$$- \left\{ I_{o3} + R_o Y_c - L_o C_o / (\Delta t)^2 + (R_o C_o + L_o Y_c) / 2\Delta t + \right. \\ \left. + (I_{o3} + R_o C_o / 2\Delta t - L_o C_o / (\Delta t)^2) Q \right\} W_{M1}^n$$

$$- \left\{ (-R_o C_o + L_o Y_c) / 2\Delta t + L_o C_o / (\Delta t)^2 + \right. \\ \left. + (R_o C_o / 2\Delta t - L_o C_o / (\Delta t)^2) Q \right\} U_{M1}^{n-1}$$

$$- \left\{ (-R_o C_o - L_o Y_c) / 2\Delta t + L_o C_o / (\Delta t)^2 + \right. \\ \left. - (R_o C_o / 2\Delta t - L_o C_o / (\Delta t)^2) Q \right\} W_{M1}^{n-1}$$

La détermination de  $A_M$ ,  $B_M$ ,  $EG^{(n)}$  étant faite, le calcul du régime transitoire se poursuit en utilisant l'organigramme de la figure III - 5.

Nous remarquons deux choses.

1) -  $A_M$  et  $B_M$  ne sont plus diagonales comme elles l'étaient dans l'enclenchement synchrone. Le système

$$\Delta U_{M1} = E_{M1} \Delta W_{M1} + F_{M1}$$

III - 319

$$A_M \Delta U_{M1} + B_M \Delta W_{M1} = EG^n$$

est par conséquent plus difficile à résoudre et pose, des problèmes, que nous évoquerons plus loin, à cause de la présence possible d'un  $R_{F_i}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) infini dû à ce qu'une phase n'est pas encore fermée.

2) - La recherche de  $A_M, B_M, EG^{(n)}$  deviendrait vite pénible avec la croissance du degré de l'équation

$$I-321 \quad F \left\{ v(\lambda, t), \frac{\partial v}{\partial t}(\lambda, t), \dots, \frac{\partial^k v}{\partial t^k}(\lambda, t), i(\lambda, t), \frac{\partial i}{\partial t}(\lambda, t), \dots, \frac{\partial^l i}{\partial t^l}(\lambda, t), R_F(t) \right\} = 0$$

définissant la condition à la limite côté générateur. La discrétisation de I - 321 poserait par ailleurs des problèmes nouveaux. Par exemple, si nous ajoutons une inductance de compensation, cette équation est de degré trois. Il faudra par conséquent bien approximer

$$\frac{\partial^3}{\partial t^3} U(\lambda, t) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^3}{\partial t^3} W(\lambda, t) ; \text{ en outre, la présence}$$

de  $U_{M_1}^n - 2$  et  $W_{M_1}^n - 2$  dans cette approximation entraîne la nécessité de mettre en mémoire l'état du générateur à l'instant  $t - 2\Delta t$  en plus de ceux à  $t$  et  $t - \Delta t$ . De plus il faut faire une hypothèse sur les valeurs de

$U_{M_1}^n$  et  $W_{M_1}^n$  aux instants  $t = -\Delta t$  et  $t = -2\Delta t$ .

Ces difficultés nous ont amené à chercher une méthode d'étude plus générale.

## I - 2 - UTILISATION DE L'EQUATION A LA LIMITE COTE

### GENERATEUR MISE SOUS LA SECONDE FORME.

L'étude faite au paragraphe précédent nous montre que résoudre un problème d'enclenchement consiste principalement à calculer les matrices  $A_M, B_M, EG^{(n)}$ . Nous savons que ces matrices dépendent de la condition à la limite côté générateur. Leur détermination est facilitée en remarquant que cette condition à la limite peut se diviser dans la majorité des cas en une équation inva-

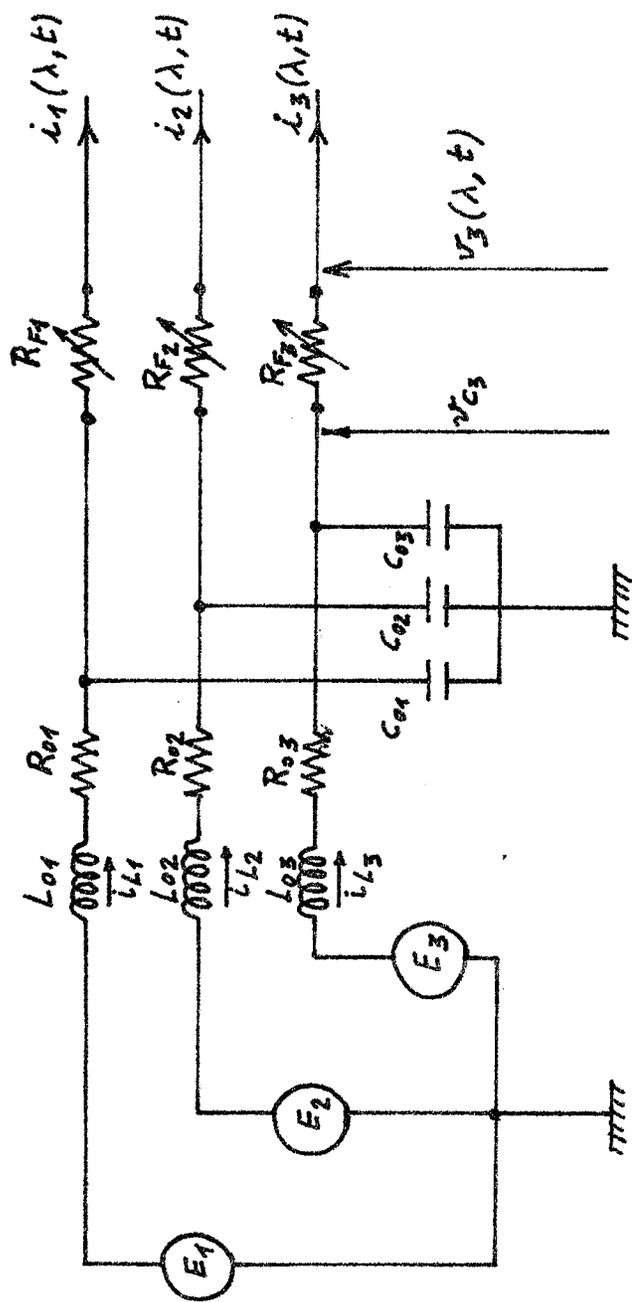


Fig I - 2

Schéma équivalent du générateur

riable définissant le fonctionnement du générateur et une équation liée à l'enclenchement .

I - 21 - Equations des conditions à la limite .

Nous exposerons la méthode de calcul dans le cas où le disjoncteur est muni d'un nombre quelconque de résistances de fermeture et où le générateur a la confi - guration représenté figure I - 1. La ligne est supposée non munie d'inductances de compensation . Toutefois cette méthode est applicable à tous les cas .

Considérons le système formant le générateur et le disjoncteur , son schéma est donné figure I - 2 . Les équations de ce réseau équivalent s'écrivent :

$$\frac{dv_{ck}}{dt} = \frac{1}{C_{ok}} i_{Lk} - \frac{1}{C_{ok}} i_k(\lambda, t)$$

$$\frac{di_{Lk}}{dt} = - \frac{1}{L_{ok}} v_{ck} - \frac{R_{ok}}{L_{ok}} i_{Lk} - \frac{E_k}{L_{ok}}$$

$$v_k(\lambda, t) + R_{Fk} i_k(\lambda, t) = v_{ck} \text{ pour } k = 1, 2, 3$$

Si nous posons :

$$Y = \begin{bmatrix} v_{c1} \\ v_{c2} \\ v_{c3} \\ i_{L1} \\ i_{L2} \\ i_{L3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} -i_1(\lambda, t)/C_{o1} \\ -i_2(\lambda, t)/C_{o2} \\ -i_3(\lambda, t)/C_{o3} \\ -E_1(t)/L_{o1} \\ -E_2(t)/L_{o2} \\ -E_3(t)/L_{o3} \end{bmatrix}, \quad R_F = \begin{bmatrix} R_{F1} & 0 & 0 \\ 0 & R_{F2} & 0 \\ 0 & 0 & R_{F3} \end{bmatrix}$$

$$H_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1/C_{o1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/C_{o2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/C_{o3} \\ -1/L_{o1} & 0 & 0 & -\frac{R_{o1}}{L_{o1}} & 0 & 0 \\ 0 & -1/L_{o2} & 0 & 0 & -\frac{R_{o2}}{L_{o2}} & 0 \\ 0 & 0 & -1/L_{o3} & 0 & 0 & -R_{o3}/L_{o3} \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{matrix} Y_1 = \begin{bmatrix} v_{c1} \\ v_{c2} \\ v_{c3} \end{bmatrix} \\ Y_2 = \begin{bmatrix} i_{L1} \\ i_{L2} \\ i_{L3} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

la condition à la limite côté générateur s'écrira :

$$I - 211 \quad \frac{dY}{dt} = H_1 Y + H$$

$$I - 212' \quad v(\lambda, t) + R_F i(\lambda, t) = Y_1$$

a) Etude des états intermédiaires

L'équation I - 212' appelle quelques commentaires. Elle suppose en effet que  $R_F$  reste finie pendant tout l'enclenchement, or il n'en est rien.

Supposons par exemple, que nous enclenchons d'abord la phase 1 les deux autres étant ouvertes ; l'équation I - 212' donnerait le système :

$$v_1(\lambda, t) + R_{F1} i_1(\lambda, t) = Y_{1,1}$$

$$v_2(\lambda, t) + R_{F2} i_2(\lambda, t) = Y_{1,2}$$

$$v_3(\lambda, t) + R_{F3} i_3(\lambda, t) = Y_{1,3}$$

dans lequel nous faisons  $R_{F2} = R_{F3} = \infty$

Il est évident que sur la calculatrice nous ne pouvons pas faire  $R_{F2} = R_{F3} = \infty$ , d'où il y a un risque d'introduire une erreur. L'expérience nous a montré que cette erreur est faible lorsque nous prenons  $R_{F2} = R_{F3} = 10^9 \Omega$ , mais il existe des risques de division par zéro dans la résolution du système III - 319 permettant de calculer  $\Delta U_{M1}$  et  $\Delta W_{M1}$ .

Nous avons donc été amenés à considérer le cas où un ou deux des  $R_{Fi}$ , devenaient infinies.

Soit par exemple l'ordre d'enclenchement suivant 1 → 2 → 3. L'équation I - 212' doit s'écrire

$$v_1(\lambda, t) + R_{F1} i_1(\lambda, t) = Y_{1,1}$$

$$i_2(\lambda, t) = 0$$

$$i_3(\lambda, t) = 0$$

quand la phase 1 est la seule enclenchée.

soit

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} v(\lambda, t) + \begin{bmatrix} R_{F1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} i(\lambda, t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} Y_1$$

Ensuite les phases 1 et 2 étant enclenchées et 3 ouverte, nous obtenons :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} v(\lambda, t) + \begin{bmatrix} R_{F1} & 0 & 0 \\ 0 & R_{F2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} i(\lambda, t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} Y_1$$

Enfin quand les 3 phases sont enclenchées nous avons

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} v(\lambda, t) + \begin{bmatrix} R_{F1} & 0 & 0 \\ 0 & R_{F2} & 0 \\ 0 & 0 & R_{F3} \end{bmatrix} i(\lambda, t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} Y_1$$

Nous sommes alors conduit à écrire l'équation I - 212' sous la forme plus générale

$$I - 212 \quad A_e v(\lambda, t) + B_e i(\lambda, t) = A_e Y_1$$

$A_e$  et  $B_e$  sont des matrices carrées diagonales dont la valeur des éléments dépend de la valeur des résistances de fermeture à l'instant  $t$ . Leur évolution définit le mode d'enclenchement. Les définitions de  $A_e$  et  $B_e$  sont les suivantes :

Quand la phase 1 ou 2 ou 3 est la seule fermée

$$A_e = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_e = \begin{bmatrix} R_{F1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & R_{F2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & R_{F3} \end{bmatrix}$$

Selon que les phases 1 et 2 ou 1 et 3 ou 2 et 3 sont

fermées la troisième étant ouverte

$$A_e = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_e = \begin{bmatrix} R_{F1} & 0 & 0 \\ 0 & R_{F2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} R_{F1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & R_{F3} \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & R_{F2} & 0 \\ 0 & 0 & R_{F3} \end{bmatrix}$$

Enfin, quand les trois phases sont fermées

$$A_e = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B_e = \begin{bmatrix} R_{F1} & 0 & 0 \\ 0 & R_{F2} & 0 \\ 0 & 0 & R_{F3} \end{bmatrix}$$

b) Conclusion.

L'étude précédente montre qu'au cours de l'enclenchement le système définissant les conditions à la limite est :

$$I - 211 \quad \frac{dY}{dt} = H_1 Y + H$$

$$I - 212 \quad A_e v(\lambda, t) + B_e i(\lambda, t) = A_e Y_1 = EGP(t, Y)$$

Quelle que soit la complexité du générateur, nous aboutirons toujours à des équations de ce type sauf dans des cas particuliers très simples où seule l'équation I - 211 subsiste.

II - 21 - Calcul de  $A_M, B_M, EG^{(n)}$ .

C'est la discrétisation de I - 211 combinée avec celle de I - 212 qui nous permet de déterminer  $A_M, B_M$  et  $EG^{(n)}$ .

Considérons I - 211, elle est de la forme

$$\frac{dY}{dt} = F(t; Y) \quad \text{avec} \quad F(t; Y) = H_1 Y + H$$

Nous allons la résoudre par une méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 (14). Si  $Y_n$  est l'approximation de  $Y$  à l'instant  $n \Delta t$ , cette méthode nous donne

$$I - 213 \quad Y_{n+1} = Y_n + \frac{\Delta t}{6} \sum_{j=1}^4 \gamma_j K_j$$

$$\text{avec } K_j = F(n\Delta t + \delta_j \Delta t; Y_n + \delta_j \Delta t K_{j-1}), \quad (\gamma_j) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (\delta_j) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Appliquée à l'équation I - 211, I - 213 devient tout calcul effectué.

$$Y_{n+1} = \left\{ I_{06} + \Delta t H_1 + \frac{(\Delta t)^2}{2!} H_1^2 + \frac{(\Delta t)^3}{3!} H_1^3 + \frac{(\Delta t)^4}{4!} H_1^4 \right\} Y_n + \frac{1}{6} \Delta t H_{(n+1)} +$$

$$\left\{ \frac{t}{6} I_{06} + \frac{(\Delta t)^2}{6} H_1 + \frac{(\Delta t)^3}{12} H_1^2 + \frac{(\Delta t)^4}{24} H_1^3 \right\} H_{(n)} + \left\{ \frac{2}{3} \Delta t I_{06} + \frac{(\Delta t)^2}{3} H_1 + \frac{(\Delta t)^3}{12} H_1^2 \right\} H_{(n+1/2)}$$

Dans  $H_{(n+1/2)}$  figure le vecteur  $i(\lambda, (n+1/2)\Delta t)$  ;

la méthode de double balayage ne nous permettant pas de connaître un vecteur à un instant fractionnaire en  $\Delta t$ , nous remplacerons  $i(\lambda, (n + 1/2) \Delta t)$  par

$\frac{1}{2} \{i(\lambda, (n + 1) \Delta t) + i(\lambda, n \Delta t)\}$ .  $H_{(n + 1/2)}$  devient :

$$H_{(n+1/2)} = \begin{bmatrix} -i_1(\lambda, n\Delta t)/2C_{01} \\ -i_2(\lambda, n\Delta t)/2C_{02} \\ -i_3(\lambda, n \Delta t)/2C_{03} \\ -E_1((n+1/2)\Delta t)/2L_{01} \\ -E_2((n+1/2)\Delta t)/2L_{02} \\ -E_3((n+1/2)\Delta t)/2L_{03} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -i_1(\lambda, (n+1)\Delta t)/2C_{01} \\ -i_2(\lambda, (n+1)\Delta t)/2C_{02} \\ -i_3(\lambda, (n+1)\Delta t)/2C_{03} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = JE_n + JS_{n+1}$$

Si nous posons

$$PA = I_{06} + \Delta t H_1 + \frac{(\Delta t)^2}{2!} H_1^2 + \frac{(\Delta t)^3}{3!} H_1^3 + \frac{(\Delta t)^4}{4!} H_1^4$$

I-214

$$PAO = \frac{1}{6} \Delta t I_{06} + \frac{1}{6} (\Delta t)^2 H_1 + \frac{1}{12} (\Delta t)^3 H_1^2 + \frac{1}{24} (\Delta t)^4 H_1^3$$

$$P = \frac{2}{3} \Delta t I_{06} + \frac{1}{3} (\Delta t)^2 H_1 + \frac{(\Delta t)^3}{12} H_1^2$$

nous obtenons pour la discretisation de I - 211 le schéma suivant :

I-215

$$Y_{n+1} = PA \cdot Y_n + PAO \cdot H_{(n)} + P \cdot JE_n + P \cdot JS_{n+1} + \frac{1}{6} \Delta t H_{(n+1)}$$

Considérons à présent l'équation I - 212 à

l'instant  $(n + 1)\Delta t$ , elle s'écrit :

$$I - 216 \quad A_e [v_\lambda]_{n+1} + B_e [i_\lambda]_{n+1} = A_e \cdot Y_{1, n+1}$$

Remplaçons dans cette équation  $Y_{1, n+1}$  par sa valeur tirée de I - 215.

Pour ce faire partitionnons I - 215

$$\begin{bmatrix} Y_{1, n+1} \\ Y_{2, n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} PA_1 \\ PA_2 \end{bmatrix} Y_n + \begin{bmatrix} PAO_1 \\ PAO_2 \end{bmatrix} H(n) + \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_3 & P_4 \end{bmatrix} JE_n + \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_3 & P_4 \end{bmatrix} JS_{n+1} + \frac{\Delta t}{6} H(n+1)$$

nous en tirons

$$Y_{1, n+1} = PA_1 Y_n + PAO_1 H(n) + [P_1 \ P_2] JE_n - \left\{ P_1 \cdot \text{diag}\left(\frac{1}{2C_{oi}}\right) + \text{diag}\left(\frac{\Delta t}{6C_{oi}}\right) \right\} [i_\lambda]_{n+1}$$

La notation  $\text{diag}(a_i)$  désigne la matrice diagonale dont les éléments sont  $a_1, a_2, a_3$ .

En portant cette équation dans I - 216, nous obtenons

$$A_e [v_\lambda]_{n+1} + B_e [i_\lambda]_{n+1} = A_e \left\{ PA_1 Y_n + PAO_1 H(n) + [P_1 \ P_2] JE_n - \left[ P_1 \text{diag}(1/2C_{oi}) + \text{diag}(\Delta t/6C_{oi}) \right] [i_\lambda]_{n+1} \right\}$$

soit

$$I - 217 \quad A_e [v_\lambda]_{n+1} + \left\{ B_e + A_e \left[ P_1 \text{diag}(1/2C_{oi}) + \text{diag}(\Delta t/6C_{oi}) \right] \right\} [i_\lambda]_{n+1} = A_e \left\{ PA_1 Y_n + PAO_1 H(n) + [P_1 \ P_2] JE_n \right\}$$

Nous pouvons calculer  $A_M, B_M$  et  $EG^{(n)}$  à partir de cette équation.

En effet, effectuons dans I - 217 la transformation  $v = T_1 (u + W)/2$ ,  $i = T_1 Y_c (-u + W)/2$ , elle devient

$$I-218 \left\{ \begin{aligned} & A_e T_1 (U_{M1}^{n+1} + W_{M1}^{n+1}) + \left\{ B_e + A_e (P_1 \text{diag}(\frac{1}{2C_{oi}}) + \text{diag}(\frac{\Delta t}{6C_{oi}})) \right\} T_1 Y_c (-U_{M1}^{n+1} + W_{M1}^{n+1}) = \\ & 2A_e (PA_1 Y_n + PAO_1 H(n) + [P_1 \ P_2] J E_n) \end{aligned} \right.$$

En remplaçant dans I - 218  $U_{M1}^{n+1}$  et  $W_{M1}^{n+1}$  par

$U_{M1}^n + \Delta U_{M1}$  et  $W_{M1}^n + \Delta W_{M1}$  nous aboutissons à l'équation cherchée, c'est-à-dire

$$A_M \Delta U_{M1} + B_M \Delta W_{M1} = EG^{(n)}$$

avec

$$I-219 \left\{ \begin{aligned} A_M &= A_e T_1 - \left\{ B_e + A_e (P_1 \text{diag}(1/2C_{oi}) + \text{diag}(\Delta t/6C_{oi})) \right\} T_1 Y_c \\ B_M &= A_e T_1 + \left\{ B_e + A_e (P_1 \text{diag}(1/2C_{oi}) + \text{diag}(\Delta t/6C_{oi})) \right\} T_1 Y_c \\ EG^{(n)} &= 2A_e \left\{ PA_1 Y_n + PAO_1 H(n) + [P_1 \ P_2] J E_n \right\} - A_M U_{M1}^n - B_M W_{M1}^n \end{aligned} \right.$$

Ces équations nous permettent, connaissant l'état de la ligne et du générateur ( $Y_n$ ) à l'instant  $n \Delta t$  de déterminer l'état de la ligne à l'instant  $(n+1) \Delta t$ . Ce qui, par la connaissance de  $(i_\lambda)_{n+1}$ , permet de calculer  $Y_{n+1}$  par I - 215, c'est-à-dire de connaître l'état du générateur à  $(n+1) \Delta t$  et de recommencer le cycle. Le processus de calcul se fait à l'aide de l'organigramme figure III - 5.

Remarque :

La difficulté d'application de cette méthode réside dans le fait qu'il faut connaître  $Y_0$ , c'est-à-dire le régime permanent du générateur avant l'enclenchement.

On peut toutefois trouver  $Y_0$  avec une bonne approximation en supposant que les courants dans les selfs sont nuls et que les tensions aux bornes des capacités sont égales à celles des sources.

Dans le cas étudié, la valeur de  $Y_0$  est :

$$Y_0 = \begin{bmatrix} A \sin(\varphi + \varphi') \\ A \sin(\varphi + \varphi' - 2\pi/3) \\ A \sin(\varphi + \varphi' + 2\pi/3) \\ A C_{01} \cos(\varphi + \varphi') \\ A C_{02} \cos(\varphi + \varphi' - 2\pi/3) \\ A C_{03} \cos(\varphi + \varphi' + 2\pi/3) \end{bmatrix} \quad \text{avec}$$

$$A = \frac{E_m}{\sqrt{(1 - L_0 C_0 \omega^2)^2 + R_0^2 C_0^2 \omega^2}}$$

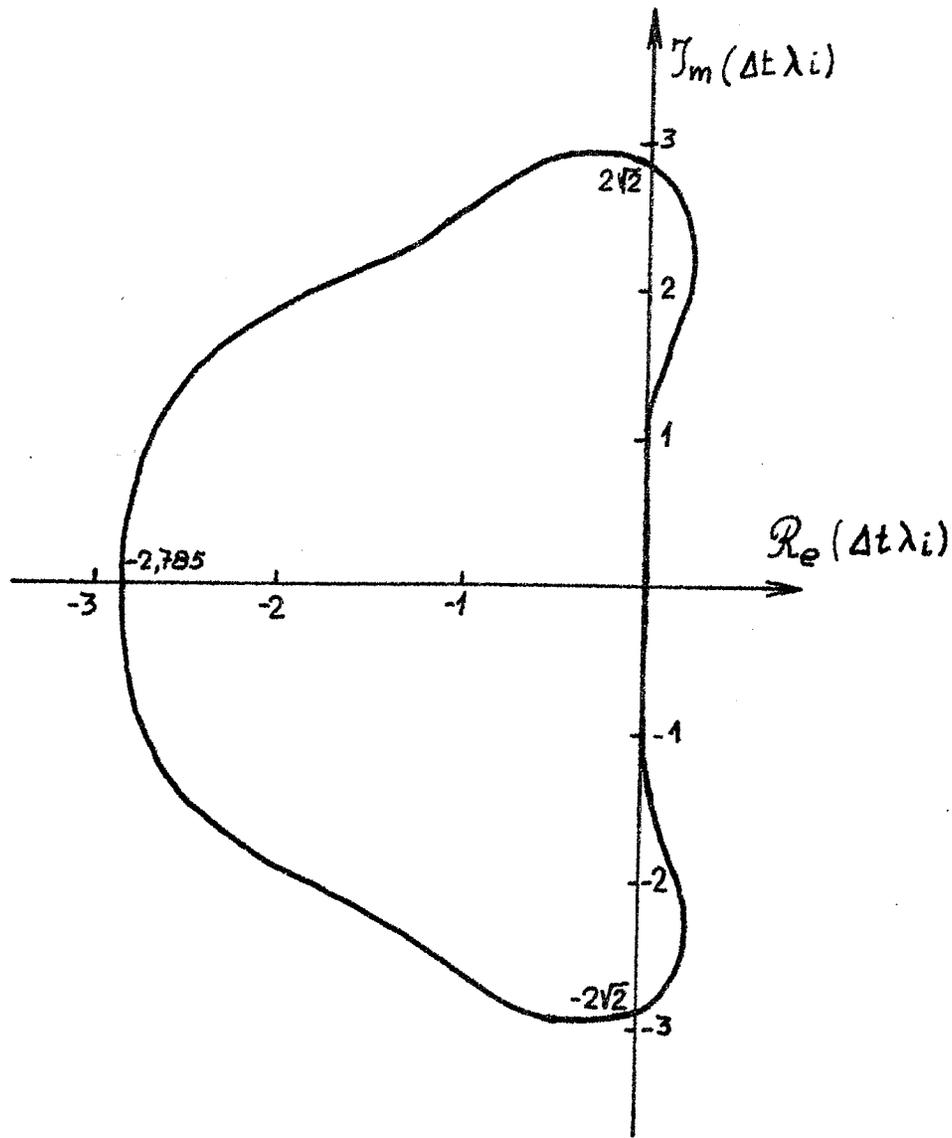
$$\varphi' = - \text{Arc tg} \frac{R_0 C_0 \omega}{1 - L_0 C_0 \omega^2}$$

$$\varphi = \omega t_0$$

$t_0$  est l'instant de fermeture repère à partir du précédent passage à zéro de la phase 1.

Stabilité.

Dans l'iteration qui nous permet de calculer l'état de la ligne, nous intégrons à chaque pas le schéma discret I - 215. Il faut donc ajouter à la



Echelle: abscisse 5cm=1  
ordonnée 4cm=1

Fig. I-1 Domaine de stabilité de la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4

condition de stabilité III - 441 celle de la méthode donnant I - 215. Dans notre cas il faut chercher la condition de stabilité de la méthode de Runge-Kutta associée à II - 211. Une telle étude est faite dans (15). Nous donnons, ci-dessous, les résultats auxquels elle conduit. Quand ces conditions de stabilité sont satisfaites la considération de l'équation I-219 montre que  $\frac{\Delta W_m}{\Delta t}$  est bornée .

Définition

Si  $\lambda_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) sont les valeurs propres de  $H_1$  ; la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 est

stable si 
$$\left| \sum_{k=1}^4 \frac{(\lambda_i \Delta t)^k}{k!} \right| < 1 \text{ pour } i = (1, 2, \dots, m)$$

Le domaine de stabilité correspondant est représenté figure I - 1.

Conclusion.

La Méthode que nous venons d'utiliser pour calculer  $A_M, B_M, EG^{(n)}$ , met en relief la nature de la condition de stabilité supplémentaire dont nous avons parlé et qui est liée à l'intégration de la condition à la limite côté générateur .

- Elle se généralise facilement aux cas où l'ordre de l'équation différentielle des conditions à la limite est supérieure à deux.

- Les conditions de stabilité supplémentaires introduites exigent généralement des pas  $\Delta t$  plus grands que ceux nécessaires pour les équations aux dérivées partielles donc ne constituent pas une gêne.

L'objet du chapitre II est la systématisation de cette méthode.

## C H A P I T R E    I I

=====

### SYSTEMATISATION DU CALCUL DE $A_M$ , $B_M$ ET $EG^{(n)}$ .

- 0 -

#### II - 1 - INTRODUCTION.

Une grande partie du programme PEGASE repose sur la détermination de  $A_M$ ,  $B_M$ ,  $EG^{(n)}$ . Il nous a semblé par conséquent utile de systématiser la mise en équation et la discrétisation du réseau constituant le générateur et, partant de là, d'automatiser la recherche de  $A_M$ ,  $B_M$ , et  $EG^{(n)}$ .

Nous entirons deux avantages non négligeables.

1°) Le programme devient plus général et s'adapte à la mise sous tension d'une ligne dont le générateur est relativement complexe.

2°) La recherche, toujours fastidieuse, de la condition à la limite côté générateur est supprimée ce qui facilite l'utilisation du programme.

Pour aboutir à ces résultats, nous avons utilisé la méthode des graphes. Nous savons, en effet,

que le générateur est complètement déterminé par un système de la forme

$$I - 1 \quad \frac{dY}{dt} = H_1 Y + H$$

$$I - 2 \quad A_e v(\lambda, t) + B_e i(\lambda, t) = EGP(t, Y)$$

Nous montrons, ci-après, comment à partir du graphe du générateur, nous pouvons accéder aux matrices  $H_1$ ,  $H$ ,  $A_e$ ,  $B_e$ ,  $EGP$ . Celles-ci connues, la détermination de  $A_M$ ,  $B_M$ ,  $EG^{(n)}$  se fera par une méthode décrite au chapitre précédent.

## II - 2 - RECHERCHE DES DIFFÉRENTES MATRICES DU GRAPHE

### DU RESEAU CONSTITUANT LE GENERATEUR.

Partant de la matrice d'incidence du réseau, nous déterminons, par un algorithme, un arbre du graphe. Nous utilisons ensuite cet arbre pour écrire la matrice des circuits fondamentaux à partir de laquelle est faite la mise en équation du réseau constituant le générateur.

#### II - 21 - Recherche d'un arbre du graphe.

Nous supposons pour l'instant que la matrice d'incidence  $A$  du réseau constituant le générateur est connue. Nous montrerons ensuite comment la former.  $A$  est une matrice  $(s, a)$ ,  $s$  nombre de sommets,  $a$  nombre d'arêtes du graphe.

Nous aurons besoin par la suite de numéroté les colonnes et les lignes de A. Aussi nous ajouterons à A une ligne supplémentaire, soit la première  $\{A(1,*)\}$  servant à la numérotation des colonnes. Nous représenterons le numéro des lignes par un vecteur colonne

$$NL = {}^t (NL(2), NL(3), \dots, NL(s+1)).$$

Ceci étant fait, nous déterminons un arbre en utilisant l'algorithme 1 de Wetch (16) que nous avons modifié pour l'adapter à un graphe orienté.

A) Description de l'algorithme.

1°) Pour chaque colonne j de A, choisir à partir d'une ligne non choisie, une ligne ayant un élément non nul en j<sup>ème</sup> colonne si c'est possible.

Si la i<sup>ème</sup> ligne est de ce fait choisie : numéroté i l'arête j et remplacer toute autre ligne ayant un élément non nul en j<sup>ème</sup> colonne par sa somme ou sa différence avec la i<sup>ème</sup> ligne suivant que le signe de l'élément non nul cité est différent ou non de celui de la i<sup>ème</sup> ligne.

2°) Quand 1°) est fini, nous obtenons l'arbre en prenant les arêtes qui ont des numéros différents de zéro.

A cet algorithme correspond l'organigramme de la figure II - 1.

Cet algorithme nous fournit un arbre quelconque. Or, il nous faut un arbre contenant au moins les forces



électromotrices et les capacités et un coarbre contenant les inductances et les sources de courant.

Si nous supposons qu'il n'existe pas de circuit uniquement capacitif et de coupure uniquement selfique (ce qui est une hypothèse généralement vérifiée par les circuits que nous aurons à étudier), nous obtiendrons le genre d'arbre que nous cherchons. Il suffit pour cela que les colonnes de A soient rangées dans l'ordre suivant : sources de tension, capacités, résistances, inductances, sources de courant.

B) Exemple d'application de l'algorithme.

Soit le graphe de la figure II - 2.

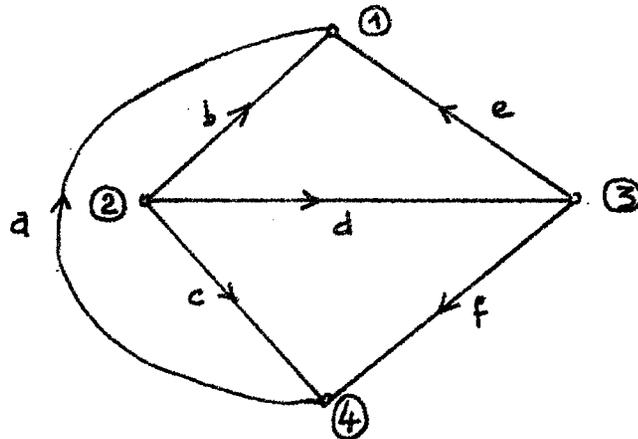


Figure II - 2.

Sa matrice d'incidence est :

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cccccc}
 & a & b & c & d & e & f \\
 1 & \left[ \begin{array}{cccccc}
 -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\
 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1
 \end{array} \right] \\
 2 \\
 3 \\
 4
 \end{array}
 \end{array}
 = A, \quad NL = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Après application de l'algorithme, NL devient  
 $NL = {}^t \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ * & ** & *** & \end{pmatrix}$ , ce qui veut dire que partant  
de la colonne 1 nous avons choisi la première ligne  
(choix  $\frac{1}{*}$ ) ensuite la deuxième puis la troisième ligne.  
Les opérations effectuées sont les suivantes :

choix  $\frac{1}{*}$                       ligne 4    devient    ligne 4 + ligne 1  
(colonne 1)

choix  $\frac{1}{**}$                        $\rightarrow$   $\left\{ \begin{array}{l} \text{ligne 1} \\ \text{ligne 4} \end{array} \right.$                       "                      ligne 1 + ligne 2  
(colonne 2)                      "                      ligne 4 + ligne 2

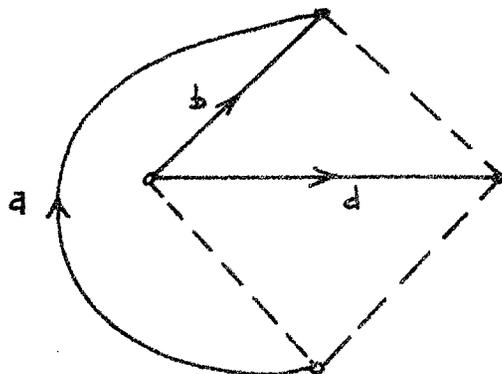
choix  $\frac{1}{***}$                        $\rightarrow$   $\left\{ \begin{array}{l} \text{ligne 1} \\ \text{ligne 2} \\ \text{ligne 4} \end{array} \right.$                       "                      ligne 1 + ligne 3  
(colonne 4)                      "                      ligne 2 + ligne 3  
"                      ligne 4 + ligne 3

Après ces opérations, la matrice A se transforme  
ainsi :

$$A \rightarrow \begin{matrix} & \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{0} & \boxed{3} & \boxed{0} & \boxed{0} \\ \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Les chiffres 1 , 2 , 3 , 0 encadrés désignent les numeros affectés aux colonnes. Nous constatons effectivement que les arêtes à numéro supérieur

à zéro (a, b, d) forment un arbre.



II - 22 - Recherche de la matrice des circuits fondamentaux.

Désignons par A' la matrice obtenue à partir de A en supprimant la ligne nulle.

Soit dans l'exemple  $A' = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Permutons les colonnes de A' de manière à séparer le coarbre de l'arbre, ce qui partitionne A' en deux sous-matrices distinctes. Nous rangerons l'arbre dans l'ordre de la numérotation affectée aux colonnes par l'application de l'algorithme, d'où A' devient

$A'' = \begin{bmatrix} \text{coarbre} & \text{arbre} \\ A''_{11} & A''_{12} \end{bmatrix}$ . La Matrice  $A''_{12}$  est diagonale : en effet, numéroté par k une branche de l'arbre dans A' revient à dire que la colonne de A' correspondant à cette branche ne contient qu'un seul élément non nul situé sur la k<sup>ème</sup> ligne. Ranger ensuite l'arbre de la façon indiquée, rend la matrice  $A''_{12}$  de dimension

(s - 1, s - 1) diagonale.

La détermination de la matrice des circuits fondamentaux se fait à partir de A" en s'appuyant sur le théorème suivant :

Théorème (17)

Chaque ligne d'une matrice F (s - 1, a) de rang s - 1 correspond à une coupure ou à une réunion de coupure à éléments disjoints si et seulement si  $F = D A_1$  avec D régulière et  $A_1$  matrice d'incidence.

Nous savons que la matrice  $A_1$  obtenue à partir de A en supprimant la dernière ligne (noeud de référence) est une matrice d'incidence.

A" dérive de  $A_1$  par une suite d'additions des lignes suivie d'une permutation des colonnes ; nous en déduisons que :  $A" = D A_1$ .

$A_1$  est de rang s - 1 car c'est une matrice d'incidence.  $A"_{12}$  étant diagonale et à éléments non nuls, la matrice A" est de rang s - 1.

La matrice D de dimension (s - 1, s - 1) est donc régulière. Le théorème énoncé permet alors de conclure que A" est une matrice de coupure du graphe.

$$\text{Nous savons que si } B_f = \begin{bmatrix} \text{coarbre} & \text{arbre} \\ B_{f11} & B_{f12} \end{bmatrix}$$

est la matrice des cycles fondamentaux correspondant à l'arbre et le coarbre utilisé, nous avons la relation

$$A" \text{ }^t B_f = 0. \text{ Ce qui entraîne } \text{}^t B_{f12} = - (A"_{12})^{-1} (A"_{11}).$$

Or nous nous sommes arrangés pour que  $A''_{12}$  soit diagonale donc  $(A''_{12})^{-1} = A''_{12}$  d'où :

$$\text{II - 221} \quad {}^t B_{f_{12}} = - A''_{12} A''_{11}$$

\*  ${}^t B_{f_{12}}$  est la matrice des circuits à partir de laquelle nous faisons la mise en équation du réseau.

Sur l'exemple choisi, nous avons :

$$A'' = \begin{matrix} & \begin{matrix} c & e & f & a & b & d \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{matrix} \end{matrix} \quad \text{d'où } A''_{12} A''_{11} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{D'autre part, } B_{f_{12}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et nous vérifions}$$

$$\text{aisément que } {}^t B_{f_{12}} = - A''_{12} A''_{11}.$$

Nota : Dans l'utilisation pratique de l'algorithme le noeud de référence doit porter de plus grand numéro.

II - 23 - Mise en mémoire de la matrice d'incidence.

Nous avons supposé jusqu'à présent que la matrice A était connue, nous montrons ci-dessous comment l'obtenir.

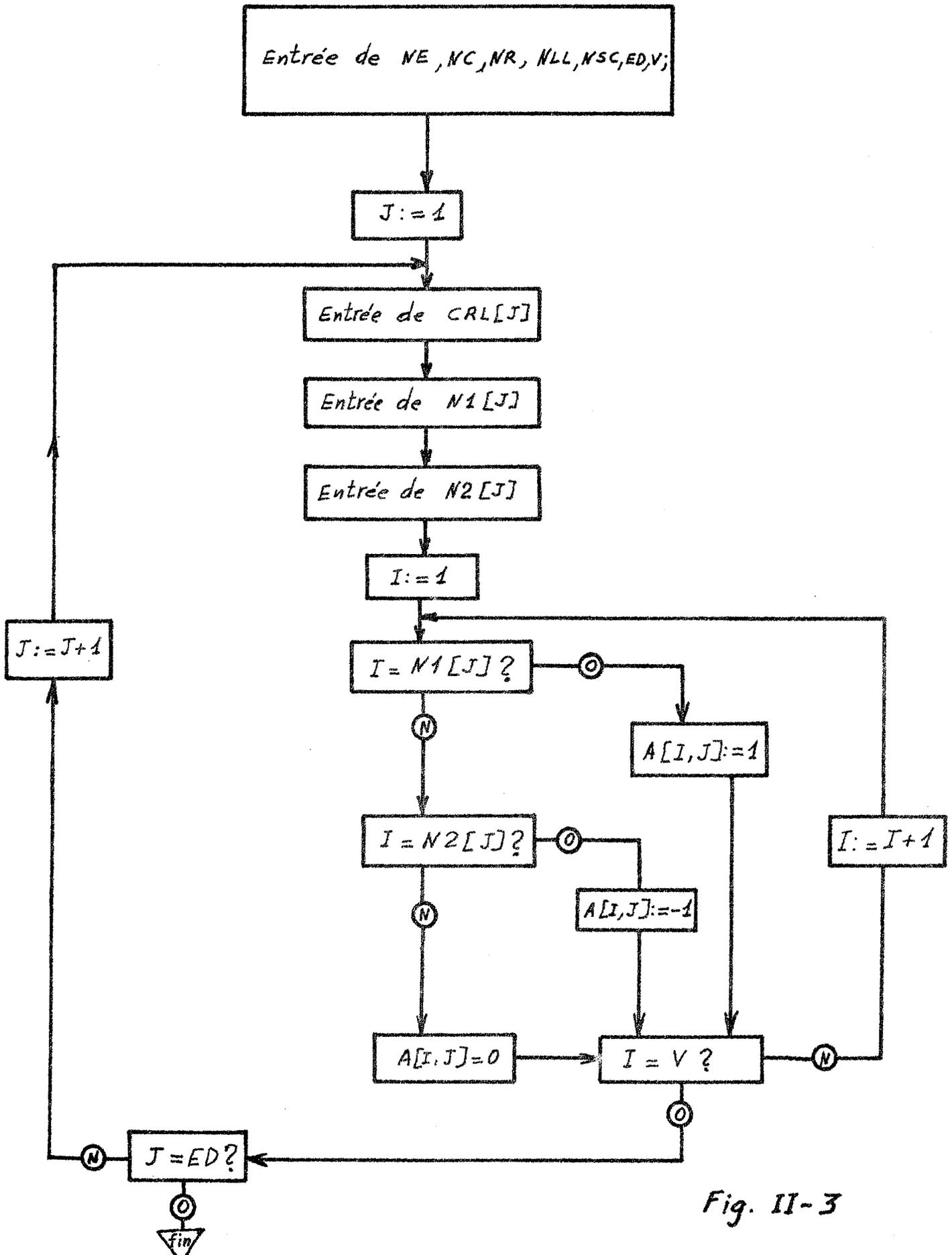


Fig. II-3

A) Organigramme.

L'organigramme de la figure II. 3. explique la méthode utilisée pour rentrer la matrice d'incidence à partir de la configuration du graphe.

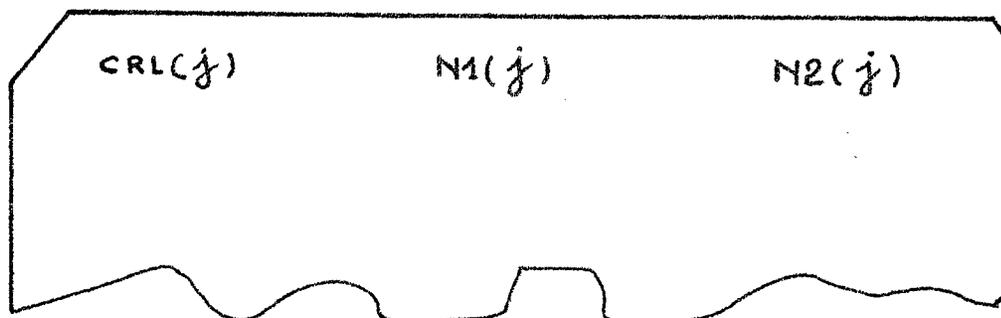
Notations.

NE est le nombre de sources de tension,  
NC le nombre de capacités,  
NR le nombre de résistances,  
NLL le nombre d'inductances,  
NSC le nombre de sources de courant,  
ED le nombre d'arêtes,  
V le nombre de noeuds,  
CRL Matrice des valeurs des éléments du réseau,  
N1 et N2 sont des matrices qui prennent des valeurs numériques attachées aux noeuds.

B) Organisation des données.

A chaque arête  $j$  correspond une carte contenant trois données. La valeur de  $j$  est déterminée par l'ordre d'entrée des cartes.

Exemple de carte



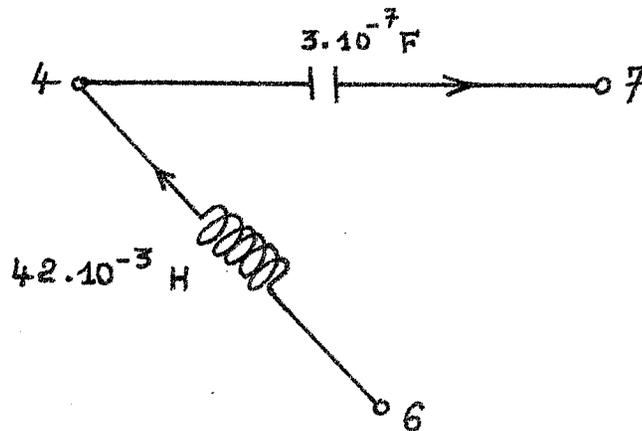
Cette carte traduit le fait que :

1°) L'arête  $j$  est constituée par un élément qui a une valeur CRL ( $j$ ).

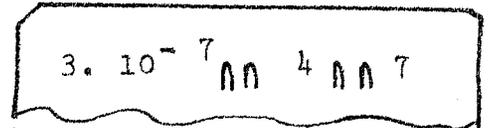
2°) Elle est incidente vers l'extérieur au noeud numéroté  $N1$  ( $j$ ).

3°) Elle est incidente vers l'intérieur au noeud numéroté  $N2$  ( $j$ ).

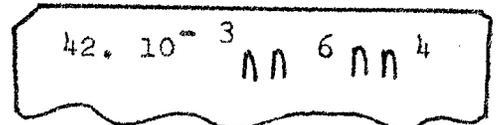
Exemple :



A la capacité correspond la carte



et à l'inductance, la carte



Nota : L'ordre d'entrée des cartes sera toujours le suivant : sources de tension, capacités, résistances, inductances, sources de courant.

II - 3 - DETERMINATION DES MATRICES  $A_M, B_M, EG^{(n)}$ .

Nous limiterons notre étude, très complexe dans le cas général, à une classe de réseaux répondant aux hypothèses que nous énumérons ci-dessous. Cette classe est cependant suffisamment large pour englober les cas pratiques que nous aurons à résoudre (ligne compensée ou non). Toutefois, avant d'employer la méthode proposée, il convient de vérifier que le réseau étudié appartient à la classe considérée.

II - 31 - Hypothèses.

- 1°) Il n'y a pas de coupure uniquement selfique,
- 2°) Il n'y a pas de circuit uniquement capacitif,
- 3°) Si on court-circuite toutes les capacités, il n'existera pas de circuit uniquement résistif.

II - 32 - Equations du réseau et calcul de  $H_1, H, A_e, B_e, EGP$ .

A) Equations du réseau.

Si la matrice  ${}^t B_{f_{12}}$  obtenue au paragraphe II - 22 - est rangée et partitionnée suivant la forme :

Source de tension		$\alpha$		$\beta$
Branches capacitives	$T_1$		$T_2$	
Branches résistives	$T_3$		$T_4$	$\gamma$
	cordes résistives		cordes inductives	sources de courant

Les équations du réseau s'écriront :

$$\text{II - 321} \left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} i_e \\ i_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ T & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_c \\ j \end{bmatrix} \quad \text{avec } T = \begin{bmatrix} T_1 & T_2 \\ T_3 & T_4 \end{bmatrix} \\ \\ \begin{bmatrix} v_c \\ v_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} - ({}^t\alpha) & - ({}^tT) \\ - ({}^t\beta) & - ({}^t\gamma) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ v_B \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

où :  $i_e, e$  = vecteurs respectifs de courant et tension des sources de tension.

$i_B, v_B$  = vecteurs des branches passives.

$i_c, v_c$  = vecteurs des cordes passives.

$j, v_j$  = vecteur des sources de courant.

Des équations II - 321, nous déduisons le système suivant :

$$\text{II - 322} \quad i_B = T i_c + \gamma j$$

$$\text{II - 323} \quad v_c = - {}^tT v_B - {}^t\alpha e$$

$$\text{II - 324} \quad v_j = - {}^t\beta e - {}^t\gamma v_B$$

Ce système permet de calculer les matrices cherchées.

#### B) Calcul de $H_1$ et $H_2$ .

Groupons les équations II - 322 et II - 323 après avoir partitionné les branches suivant les capacités et les résistances, les cordes suivant les résistances et

les inductances. Nous obtenons : (18)

$$\text{II-325} \quad \begin{bmatrix} i_B \text{ capa} \\ i_B \text{ rési} \\ v_c \text{ rési} \\ v_c \text{ induc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & T_1 & T_2 \\ 0 & 0 & T_3 & T_4 \\ -{}^tT_1 & -{}^tT_3 & 0 & 0 \\ -{}^tT_2 & -{}^tT_4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_B \text{ capa} \\ v_B \text{ rési} \\ i_c \text{ rési} \\ i_c \text{ induc} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} J \\ J_p \\ E_p \\ E \end{bmatrix}$$

$J, J_p, E_p, E$  résultent de la partition de  $\gamma \cdot j$  et  $-{}^t\alpha e$ .

Posons  $v_B \text{ capa} = v, i_c \text{ rési} = i_p, v_B \text{ rési} = v_p,$

$i_c \text{ induc} = i.$  Compte tenu de l'hypothèse 3 qui entraîne la nullité de  $T_3$ , le système II - 325 se développe sous la forme :

$$\begin{aligned} 1) \quad C \frac{dv}{dt} &= T_1 i_p + T_2 i + J \\ 2) \quad G v_p &= T_4 i + J_p \\ \text{II - 326} \quad 3) \quad R i_p &= -{}^tT_1 v + E_p \\ 4) \quad L \frac{di}{dt} &= -{}^tT_2 v - {}^tT_4 v_p + E \end{aligned}$$

Des équations 2) et 3) nous tirons :

$$\begin{aligned} v_p &= G^{-1} T_4 i + G^{-1} J_p \\ i_p &= R^{-1} {}^tT_1 v + R^{-1} E_p \end{aligned}$$

Reportons ces valeurs dans 1) et 4)

$$C \frac{dv}{dt} = - (T_1 R^{-1} {}^tT_1) v + T_2 i + T_1 R^{-1} E_p + J$$

$$L \frac{di}{dt} = - {}^tT_2 v - ({}^tT_4 G^{-1} T_4) i - {}^tT_4 G^{-1} J_p + E$$

ce qui s'écrit matriciellement :

$$\begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{dv}{dt} \\ \frac{di}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(T_1 R^{-1} {}^t T_1) & T_2 \\ -{}^t T_2 & -({}^t T_4 G^{-1} T_4) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_{ONC} & 0 & T_1 R^{-1} & 0 \\ 0 & -{}^t T_4 G^{-1} & 0 & I_{ONLL} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J \\ J_p \\ E_p \\ E \end{bmatrix}$$

Cette équation s'écrit sous la forme :

$$\text{II - 327} \left\{ \begin{array}{l} \frac{dY}{dt} = H_1 Y + H \quad \text{avec} \quad Y = \begin{bmatrix} v \\ i \end{bmatrix}, \\ H_1 = \begin{bmatrix} C^{-1} & 0 \\ 0 & L^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -(T_1 R^{-1} {}^t T_1) & T_2 \\ -{}^t T_2 & -({}^t T_4 G^{-1} T_4) \end{bmatrix}, \\ H = \begin{bmatrix} C^{-1} & 0 \\ 0 & L^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{ONC} & 0 & T_1 R^{-1} & 0 \\ 0 & -{}^t T_4 G^{-1} & 0 & I_{ONLL} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{.j} \\ -t_{\alpha.e} \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

et nous donne l'équation I-1 du réseau.

C) Calcul de  $A_{e2}$ ,  $B_{e2}$ , EGP.

Si dans le système II - 324 nous décomposons  $v_D$  suivant les branches capacitatives et résistives, nous obtenons

$$\text{II - 328} \quad v_j = -t_{\beta.e} - [{}^t \gamma_1 \quad {}^t \gamma_2] \begin{bmatrix} v \\ v_p \end{bmatrix} = -t_{\beta.e} - {}^t \gamma_1 v - {}^t \gamma_2 v_p$$

Nous savons que dans les réseaux étudiés  $v_j = v(\lambda, t)$   
et  $j = i(\lambda, t)$ .

D'autre part  $v_p = G^{-1} T_4 i + G^{-1} J_p$ , avec  $J_p = \gamma_2 \cdot j$ .

En reportant ces valeurs dans II - 328, nous aboutissons à la relation

$$\text{II-329} \quad v(\lambda, t) + ({}^t\gamma_2 G^{-1} \gamma_2) i(\lambda, t) = -{}^t\beta e^{-t\gamma_1 v} - ({}^t\gamma_2 G^{-1} T_4) i$$

C'est l'équation I-2 du réseau ; toutefois, elle ne tient pas compte des premiers instants de fermeture.

Pour faire intervenir les premiers instants d'enclenchement, l'expérience nous a montré qu'il suffisait de prendre  $RF_j$  grand quand la phase  $j$  est ouverte.

Pour obtenir, toutefois, une meilleure précision dans les premiers instants d'enclenchement, il faut introduire des changements dans II - 329.

Considérons, en effet II - 329 quand la phase 1 est fermée et les deux autres ouvertes.

En posant  $RF = {}^t\gamma_2 G^{-1} \gamma_2$ ,

$E_1 = -{}^t\beta e^{-t\gamma_1 v} - {}^t\gamma_2 G^{-1} T_4 i$ , l'équation II - 329 s'écrit :

$$1) \quad v_1(\lambda, t) + RF_{11} i_1(\lambda, t) + RF_{12} i_2(\lambda, t) + RF_{13} i_3(\lambda, t) = E_{1,1}$$

II-329'

$$2) \quad v_2(\lambda, t) + RF_{21} i_1(\lambda, t) + RF_{22} i_2(\lambda, t) + RF_{23} i_3(\lambda, t) = E_{1,2}$$

$$3) \quad v_3(\lambda, t) + RF_{31} i_1(\lambda, t) + RF_{32} i_2(\lambda, t) + RF_{33} i_3(\lambda, t) = E_{1,3}$$

II - 329' 2) et 3) sont des relations approchées et doivent être remplacées, dans le cas où il n'y a pas

d'inductances de compensation, par les équations réelles qui sont :

$$i_2 (\lambda, t) = 0$$

$$i_3 (\lambda, t) = 0$$

Pour mieux tenir compte de la réalité, nous avons donc introduit deux matrices  $A_c$  et  $B_c = I_{03} - A_c$  variables suivant l'ordre et les instants de fermeture. Elles sont telles que  $A_c v (\lambda, t) + (A_c R_F A_c + B_c) i (\lambda, t) = A_c E_1$  reste la condition exacte à la limite 1-2 même dans les premiers instants d'enclenchement.

Les différentes formes de  $A_c$  et  $B_c$  sont :

1) phase 1 fermée, phase 2 et 3 ouvertes

$$A_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2) phase 2 fermée, phase 1 et 3 ouvertes

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3) phase 3 fermée, phases 1 et 2 ouvertes

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4) phases 1 et 2 fermées, phase 3 ouverte

$$A_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5) phases 1 et 3 fermées, phase 2 ouverte

$$A_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

6) phases 2 et 3 fermées, phase 1 ouverte

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

7) phases 1, 2 et 3 fermées

$$A_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Les premiers instants de fermeture qui rendent certaines résistances d'enclenchement infinies peuvent donc nous amener, pour serrer la réalité de près, à remplacer l'équation II - 329 par :

$$A_e v(\lambda, t) + B_e i(\lambda, t) = EGP(t, Y)$$

II - 330 avec  $A_e = A_c$  ;  $B_e = A_c ({}^t\gamma_2 G^{-1} \gamma_2) A_c + B_c$  ;

$$EGP(t, Y) = A_c (-{}^t\beta e^{-t\gamma_1} v - {}^t\gamma_2 G^{-1} T_4 i)$$

Nota : Dans le cas où il y a des inductances de compensation, les premiers instants d'enclenchement font intervenir des changements dans II - 329 et dans  $H_1$ . Dans ce cas, il est plus judicieux de conserver les équations II - 327 et II - 329 et de prendre  $R_{Pj}$  suffisamment grand quand la phase j est ouverte.

II - 33 - Obtention de  $A_M, B_M, EG^{(n)}$ .

Nous avons montré que la condition à la limite côté générateur obtenue à partir de la théorie des graphes se décomposait en deux équations II - 327 et II - 330 (ou II - 329).

$$\frac{dY}{dt} = H_1 Y + H$$

$$A_e v(\lambda, t) + B_e i(\lambda, t) = EGP(t, Y)$$

Ces équations sont de la même forme que I - 211 et I - 212. Elles se discrétisent par la méthode indiquée au chapitre précédent ce qui nous donne  $A_M, B_M, EG^{(n)}$ .

La discrétisation de II - 327 par la méthode de Runge-Kutta donne :

$$\begin{aligned} \text{II - 331} \quad Y_{n+1} &= PA \cdot Y_n + PH_1 \cdot JE_n + PH_2 \cdot JE_n + 1/2 + \\ &+ \frac{1}{6} \Delta t \cdot PH \cdot JE_{n+1} \end{aligned}$$

$$\text{avec } JE = \begin{pmatrix} \gamma \cdot i(\lambda, t) \\ -t \alpha e(t) \end{pmatrix}, \quad PH = \begin{bmatrix} C^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & L^{-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{ONC} & 0 & T_1 & R^{-1} & 0 \\ 0 & -t T_4 & G^{-1} & 0 & I_{ONLL} \end{bmatrix}$$

$$PH_1 = PAO \cdot PH, \quad PH_2 = P \cdot PH$$

Les matrices PA, PAO et P sont définies par les relations I - 214.

L'équation II - 330 considérée à l'instant (n + 1) Δt donne

$$\text{II - 332} \quad A_e (v_\lambda)_{n+1} + B_e (i_\lambda)_{n+1} = - A_c \cdot t_\beta e_{n+1} - A_c \cdot t_\gamma Y_{1,n+1} - (A_c \cdot t_\gamma G^{-1} T_4) Y_{2,n+1}$$

Partitionnons II - 331 et reportons les valeurs de Y<sub>1, n + 1</sub> et Y<sub>2, n + 1</sub> dans II - 332.

$$\begin{bmatrix} Y_{1,n+1} \\ Y_{2,n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} PA1 \\ PA2 \end{bmatrix} Y_n + \begin{bmatrix} PH_{1,1} \\ PH_{1,2} \end{bmatrix} JE_n + \begin{bmatrix} PH_{2,1} & PH_{2,2} \\ PH_{2,3} & PH_{2,4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\gamma}{2}(i_\lambda)_n \\ -t_\alpha e_{n+1/2} \end{bmatrix} + PH_2 \begin{bmatrix} \frac{\gamma}{2}(i_\lambda)_{n+1} \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{\Delta t}{6} \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_3 & P_4 \end{bmatrix} JE_{n+1}$$

Nous en tirons :

$$Y_{1,n+1} = PA_1 \cdot Y_n + PH_{1,1} \cdot JE_n + \begin{bmatrix} PH_{2,1} & PH_{2,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\gamma}{2}(i_\lambda)_n \\ -t_\alpha e_{n+1/2} \end{bmatrix} + PH_{2,1} \cdot \frac{\gamma}{2}(i_\lambda)_{n+1} + \frac{\Delta t}{6} P_1 \gamma (i_\lambda)_{n+1} - \frac{\Delta t}{6} P_2 \cdot t_\alpha e_{n+1}$$

$$Y_{2,n+1} = PA_2 \cdot Y_n + PH_{1,2} \cdot JE_n + \begin{bmatrix} PH_{2,3} & PH_{2,4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\gamma}{2}(i_\lambda)_n \\ -t_\alpha e_{n+1/2} \end{bmatrix} + PH_{2,3} \cdot \frac{\gamma}{2}(i_\lambda)_{n+1} + \frac{\Delta t}{6} P_3 \gamma (i_\lambda)_{n+1} - \frac{\Delta t}{6} P_4 \cdot t_\alpha e_{n+1}$$

En portant dans II - 332, nous obtenons :

$$\text{II - 333} \quad A_e (v_\lambda)_{n+1} + A_v (i_\lambda)_{n+1} = B_v (n)$$

avec

$$\left. \begin{aligned} & A_v = B_e + A_c^t \gamma_1 (PH_{2,1} \frac{\gamma}{2} + \frac{At}{6} P_1 \gamma) + A_c^t \gamma_2 G^{-1} T_4 (PH_{2,3} \frac{\gamma}{2} + \frac{At}{6} P_3 \gamma) \\ & B_v(n) = -A_c^t \beta e_{n+1} - A_c^t \gamma_1 \left\{ PA_{2,1} Y_n + PH_{1,1} J E_n + [PH_{2,1} \quad PH_{2,2}] \begin{bmatrix} \frac{\gamma}{2} (i_\lambda)_n \\ -t e_{n+1/2} \end{bmatrix} - \frac{At}{6} P_1^t e_{n+1} \right\} \\ & -A_c^t \gamma_2 G^{-1} \gamma_2 \left\{ PA_{2,2} Y_n + PH_{1,2} J E_n + [PH_{2,3} \quad PH_{2,4}] \begin{bmatrix} \frac{\gamma}{2} (i_\lambda)_n \\ -t e_{n+1/2} \end{bmatrix} - \frac{At}{6} P_4^t e_{n+1} \right\} \end{aligned} \right\} \text{II-334}$$

En appliquant à II - 333 la transformation

$$v = T_1 (u + W)/2 \quad , \quad i = T_1 Y_c (-u + W)/2$$

nous trouvons les valeurs de  $A_M$ ,  $B_M$  et  $EG^{(n)}$  qui sont :

$$A_M = A_e T_1 - A_v T_1 Y_c$$

$$\text{II - 335} \quad B_M = A_e T_1 + A_v T_1 Y_c$$

$$EG^{(n)} = 2 B_v (n) - A_M U_{M_1}^n - B_M W_{M_1}^n$$

Conclusion :

Nous avons montré que pour des réseaux satisfaisant aux hypothèses du paragraphe II - 31, il est possible d'obtenir  $A_M$ ,  $B_M$ ,  $EG^{(n)}$  à partir du graphe du réseau. Ce fait rend le programme PEGASE très souple et très facile à utiliser.

Pour des réseaux ne satisfaisant pas à ces hypothèses, le calcul de  $A_M$ ,  $B_M$  et  $EG^{(n)}$  doit être fait en utilisant les résultats du chapitre I paragraphe I - 2.

Nous noterons que les résultats obtenus dans ce chapitre II peuvent être utilisés pour le calcul des régimes transitoires dans un réseau à constantes localisées.



C H A P I T R E    I I I  
=====

LE PROGRAMME PEGASE ET SON UTILISATION PRATIQUE.

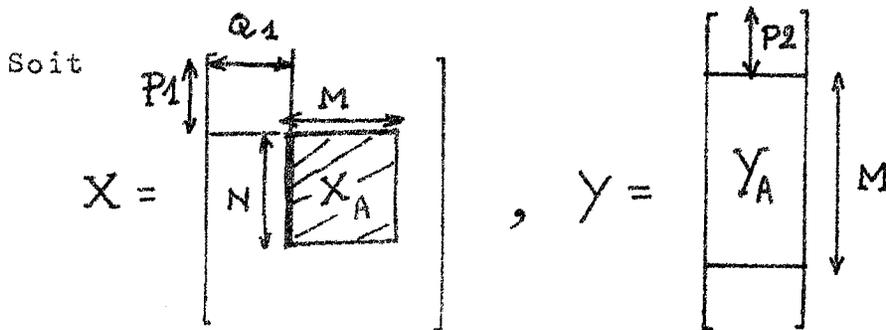
-0-

III - 1 - COMPOSANTES DU PROGRAMME.

III - 11 - Procédures utilitaires.

A) La procédure PRODM (X, Y, Z, P1, Q1, P2, N, M)

Cette procédure donne le produit Z d'un bloc (N, M) d'une matrice X à deux dimensions par un bloc (M) d'une matrice colonne Y.



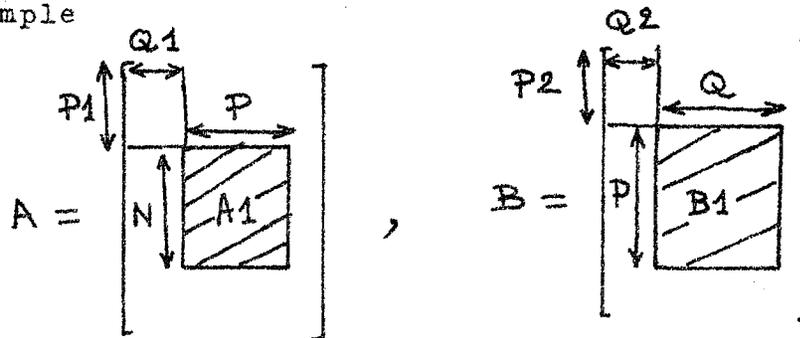
PRODM  $\implies$   $Z = X_A \cdot Y_A$

B) La procédure PRO (A, B, C, P1, Q1, P2, Q2, N, P, Q).

Cette procédure donne le produit C d'un bloc

d'une matrice A par un bloc d'une matrice B.

Exemple



$$\text{PRO} \implies C = A1 \cdot B1$$

C) La procédure PROD (X, Y, Z)

Elle fait le produit de deux matrices diagonales déclarées sous forme de vecteurs.

$$Z = X \cdot Y$$

D) La procédure SOM (X, Y, Z, N)

Elle fait la somme de deux vecteurs de dimension N.

$$Z = X + Y$$

E) La procédure INVERSION (A, B, N)

Elle donne l'inverse B de la matrice A de dimension (N, N).

III - 12 - Procédure RESEAU (CH, C, R, L, A, T, G, PA, PH1, PH2, PH, NG).

Cette procédure calcule les matrices PA, PH1,

PH2 et PH données par les relations I - 214 et II - 331. Ce calcul est fait à partir des matrices CH, A, T, obtenues dans le programme par l'étude du graphe du réseau définissant le générateur.

CH est un vecteur qui sert à numéroter les cordes,

A est la matrices d'incidence du graphe,

T est une sous-matrice de  ${}^t B_{f_{12}}$ , sa définition est donnée dans les équations II - 321.

Les matrices C, R, L, G, définies dans les équations II - 326, sont les constantes du réseau du générateur.

III - 13 - Procédure AMBM (XN, JE, JEL, EG, T, G, PA, PH1, PH2, PH, TAFE, AV, BV).

Cette procédure calcule, à partir de l'état du générateur à l'instant  $n$   $t$  et des matrices PA, PH1, PH2, PH, obtenues par la procédure RESEAU, les matrices  $A_V$  et  $B_V$  définies par les relations II - 334. Ce sont ces matrices qui permettent de calculer  $A_M$ ,  $B_M$  et  $EG^{(n)}$ .

III - 14 - Calcul des matrices du graphe.

Ce calcul est fait dans un bloc par les méthodes exposées au chapitre II. Il nous donne les matrices  ${}^t B_{f_{12}}$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , T, A et CH intervenant dans les procédures RESEAU et AMBM.

III - 2 - UTILISATION DU PROGRAMME.

III - 21 - Organisation.

Se reporter à l'organigramme de la figure III - 1 et au programme Algol situé dans les dernières pages.

III - 22 - Disposition des données.

Les cartes des données doivent être disposées dans l'ordre suivant :

- \* LD, LI, LH, CD, CI, CH $\phi$ , RD, RI, RH,  
qui sont les inductances, capacités,  
résistances directes inverses et homo-  
polaires de la ligne.
  
- \* DT, DX, FR (fréquence), FI (phase  $\phi$ )  
AMX (valeur maximale de la tension sinusoïdale  
du générateur).  
H11, H12, H21, H22 paramètres  $\theta$ .  
CH1, CH2, CH3 (charges de la ligne à l'instant  
initial exprimées en composantes normales).  
N1, M1 (  $N1 = \frac{Z}{\Delta t}$  ,  $M1 = \frac{\lambda}{\Delta x}$  )
  
- \* V nombre de sommets du graphe du générateur.  
ED nombre d'arêtes.  
NE nombre de sources de tension.  
NC nombre de capacités.  
NR nombre de résistances.  
NLL nombre d'inductances.  
NSC nombre de sources de courant.

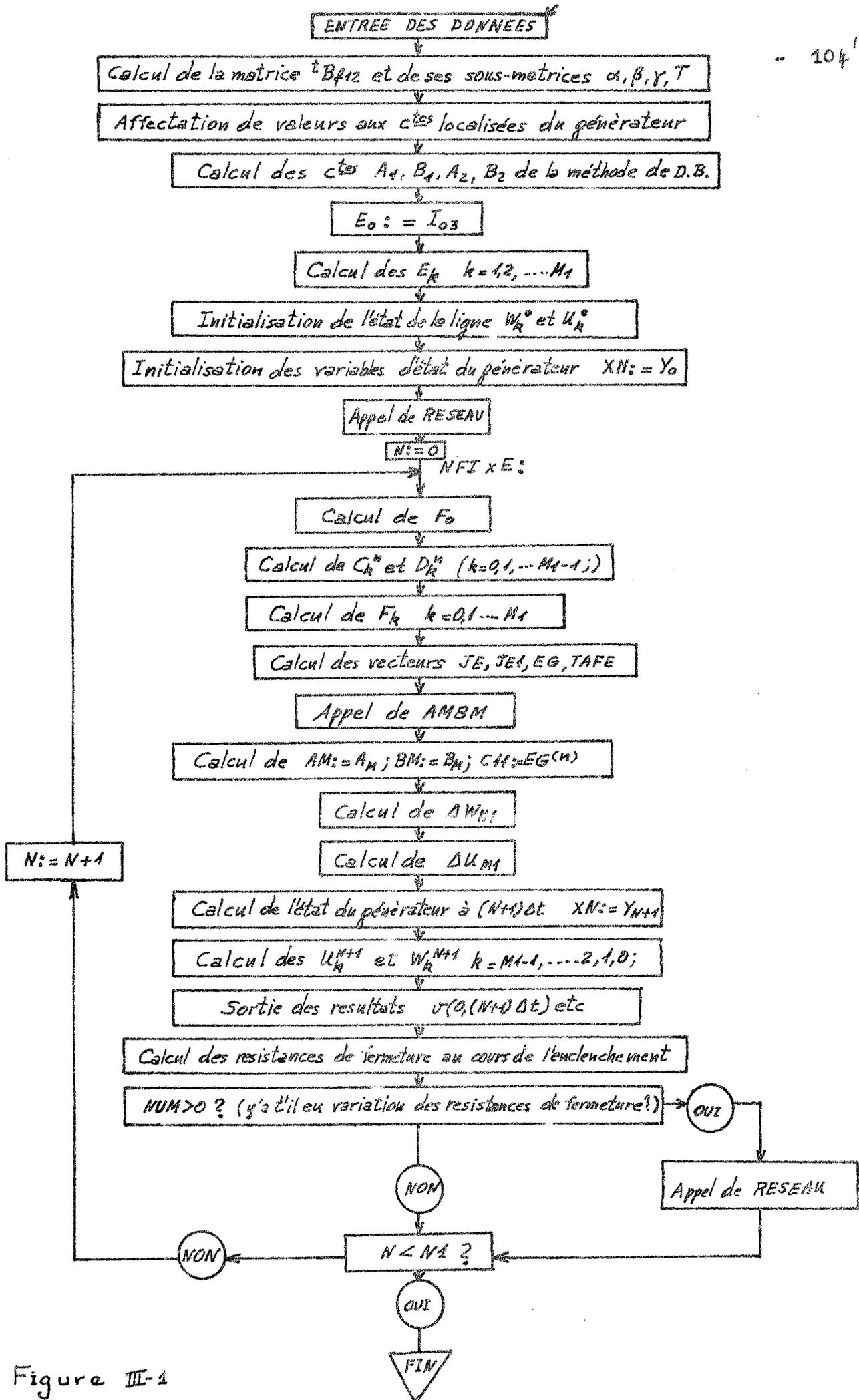


Figure III-1

- \* Entrée de la configuration du réseau du générateur

CRL (j)            N1 (j)            N2 (j)

cette procédure d'entrée est expliquée dans le chapitre II.

- \* ORD1, ORD2, ORD3 ordre de fermeture des premiers contacts de résistances.

INS2, INS3, instant de fermeture des deux derniers contacts de résistances, les phases correspondantes étant encore ouvertes.

- \* RF(I) valeurs des résistances de fermeture au cours de l'enclenchement.

- \* T (i, j) matrice  $T_1$ .

$T_1^{-1}$  (i, j) matrice  $T_1^{-1}$ .

- \*  $T_{11}$  (i, j) instants de fermeture de la phase numéro i exprimés en nombre entier de fois  $\Delta t$ .

Nota : La valeur de NC ne doit pas être nulle ; si cela devait être le cas, il faudrait ajouter dans le graphe, des capacités flottantes en parallèle avec des résistances.

L'utilisation de PEGASE suppose la connaissance de la matrice  $T_1$  des modes. Les méthodes de détermination de cette matrice sont cependant devenues classiques (5)

Conclusion :

L'analyse du programme PEGASE nous a montré que son maniement est facile et qu'il est adapté à l'étude d'une ligne dont le générateur est complexe.

Pour étudier une ligne quelconque, son utilisation ne nécessite qu'un changement de données. En outre, nous pouvons en diminuant les pas  $\Delta t$  et  $\Delta x$  analyser très finement les phénomènes transitoires qui se produisent sur la ligne. De ces points de vue, le programme PEGASE se révèle plus avantageux que l'analyseur transitoire.



TROISIEME PARTIE  
=====

EXPLOITATION DE PEGASE



# CHAPITRE I

=====

## ESSAIS JUSTIFICATIFS

-0-

### I - 1 - INTRODUCTION

Dans les parties précédentes, nous avons établi une méthode numérique d'étude des surtensions, stable et convergente. Mais à priori, ce n'est qu'une construction mathématique et son efficacité ne peut s'affirmer qu'à partir de la pratique. C'est pourquoi, nous allons étudier à partir de Pégase, le problème suivant, posé par l'industrie.

### II - 2 - SPECIFICATION DU PROBLEME

#### ET COMPARAISON DES RESULTATS

Les conditions à représenter pour le calcul des surtensions d'enclenchement étaient les suivantes :

#### LIGNE

Tension.....	500 KV
Longueur.....	290 Km
Impédance directe $Z_1$ (à 60 Hz).....	$0,0187 + j 0,366 \Omega/\text{Km}$

Capacité directe $C_1$ .....	11,7 nF/Km
Impédance homopolaire $Z_0$ (à 60 Hz).	0,198 + j 1,36 $\Omega$ /Km
Capacité homopolaire $C_0$ .....	6,7 nF/Km

GENERATEUR

Fréquence.....	60 Hz
Puissance de court-circuit.....	15 000 MVA (à 500 KV)
$X_0/X_1$ .....	1
Tension de service.....	500 KV
Fréquence naturelle.....	1 380 HZ

Le disjoncteur est muni de deux résistances d'enclenchement l'une de 500  $\Omega$  et l'autre de 300  $\Omega$ . Le schéma équivalent de l'ensemble est donné figure I - 1. La ligne possède avant l'enclenchement une charge initiale qui est, suivant l'ordre où le déclenchement est fait, de + 0,43 sur la première phase déclenchée et -0,36 et 0,47 respectivement sur les deux autres.

Les conditions des manoeuvres sont les suivantes

PHASES	$C_1$ (500 $\Omega$ )	$C_2$ (300 $\Omega$ )	$C_p$
Manoeuvre 33			
1	1,4	5,9	11,4
x 2	0,7	6,7	11,4
3	9,4*	5,5	10,5
Manoeuvre 34			
x 1	1,6*	5,6	11,1
2	2,6	7,8	12,0
3	1,7	6,7	12,0

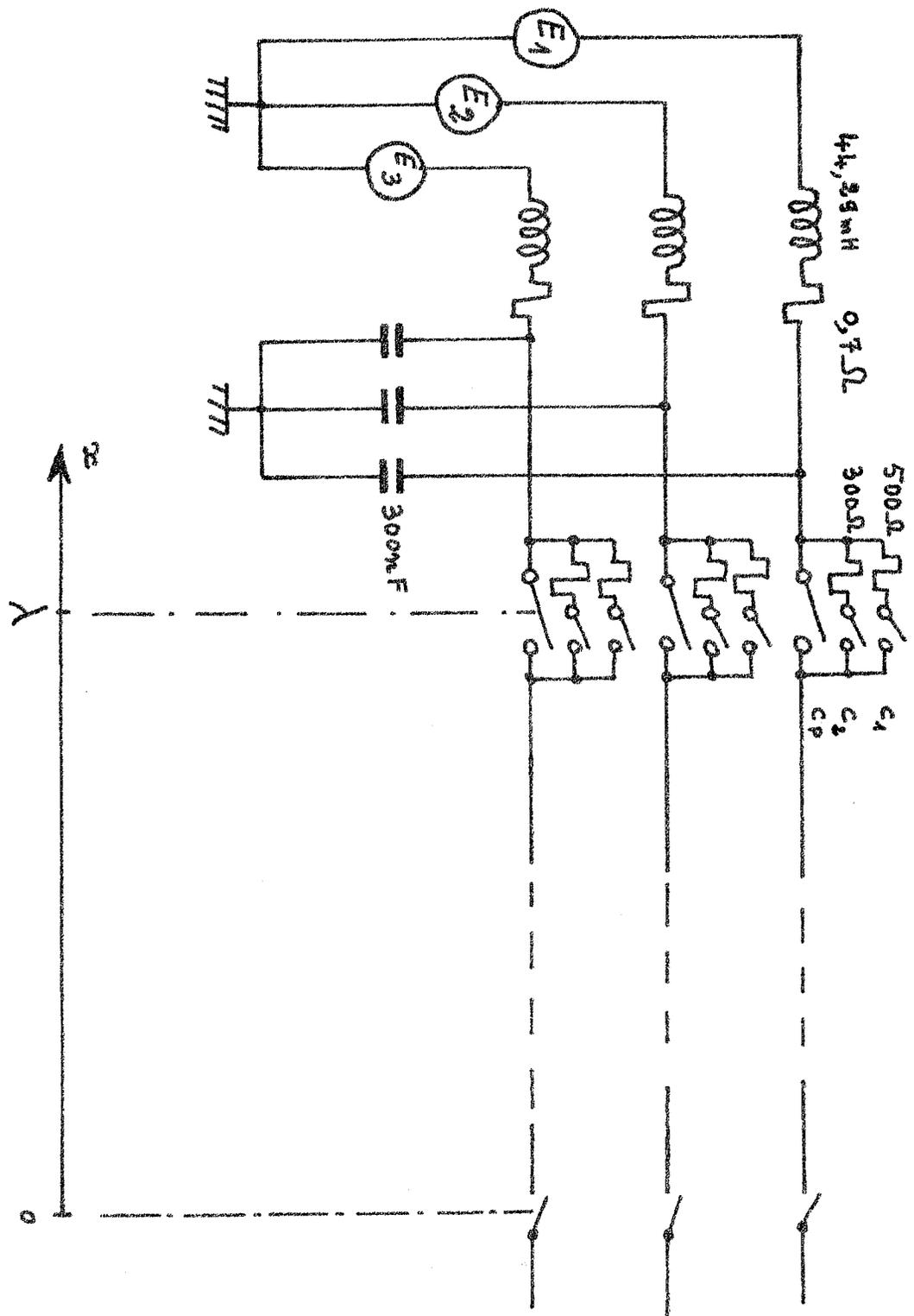


Fig. I-1

Manoeuvre 35

1	0,6	5,7	11,1
x 2	5,3 *	5,5	11,3
3	1,5	6,5	11,6

Manoeuvre 36

x 1	1,0	5,5	10,2
2	12,0 *	4,7	10,0
3	0,0	5,1	10,0

Manoeuvre 37

x 1	0,8	5,4	10,3
2	0,0	5,0	10,2
3	2,6 *	4,3	9,1

Manoeuvre 38

1	2,3	6,8	11,5
2	0,9	5,8	10,0
x 3	5,6 *	5,5	10,4

Manoeuvre 39

1	10,4 *	6,0	10,6
2	1,2	6,3	11,3
x 3	2,0	7,1	11,7

Manoeuvre 40

1	0,9	6,1	10,6
2	0,0	5,3	10,7
x 3	13,6 *	4,4	8,6

Nota : La phase marquée d'une croix est la première à avoir été déclenchée (  $\Rightarrow$  phase chargée à + 0,43 ).

Le chiffre suivi d'un astérisque indique, en millisecondes, la phase initiale de la tension correspondante à l'instant de la fermeture.

Les temps sont comptés en millisecondes à partir du temps marqué d'un astérisque.

Nous avons traité ces différents cas d'enclenchement à l'aide de Pégase, les paramètres choisis étant les suivants :

$$\Delta t = 10^{-4} \text{ s}, \quad \Delta x = 14,5 \text{ Km},$$

$$\theta_{11} = \theta_{12} = \theta_{13} = \theta'_{11} = \theta'_{12} = \theta'_{13} = 0,5$$

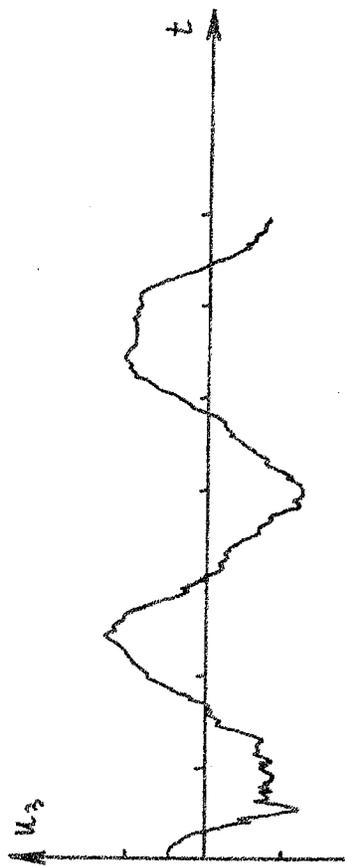
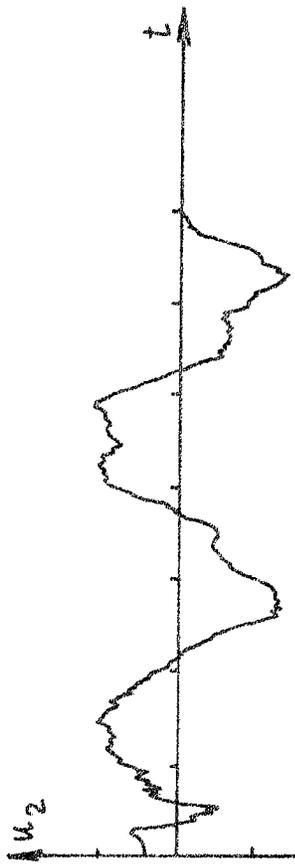
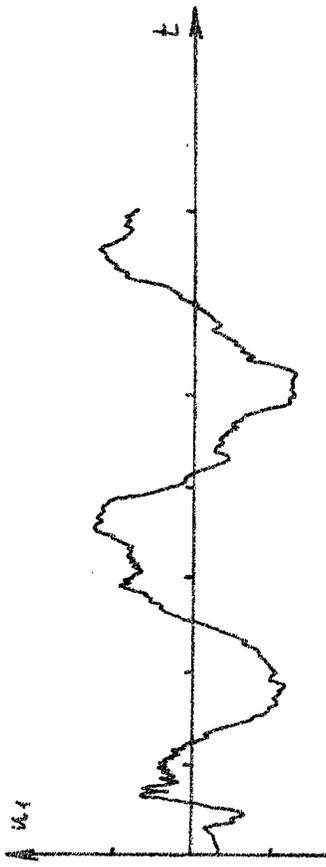
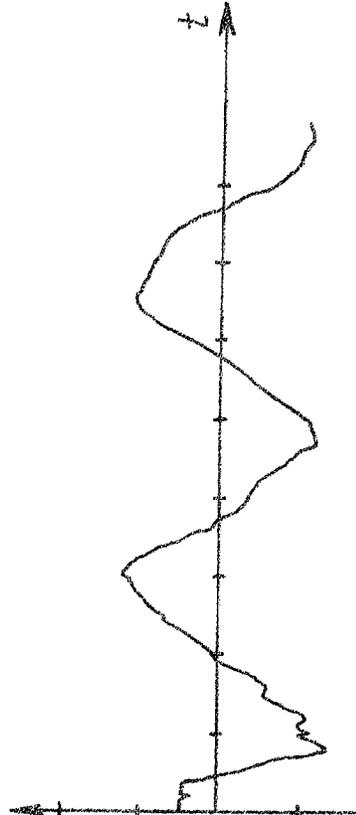
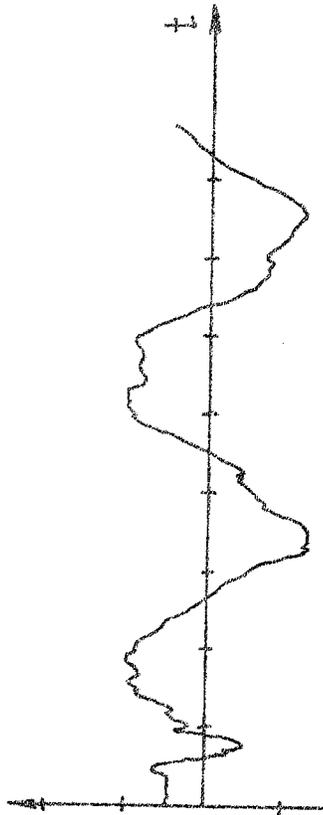
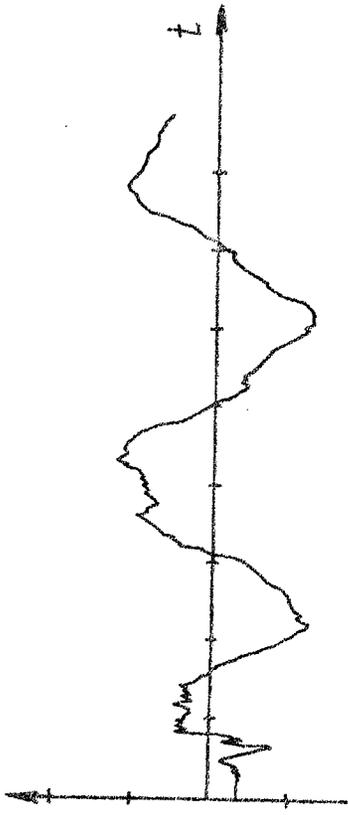
$$\theta_{21} = 0,501, \quad \theta_{22} = \theta_{23} = 0,5001.$$

Ce problème a été résolu séparément à l'aide de l'analyseur transitoire par les laboratoires de Merlin-Gerin.

Nous avons constaté que nos courbes coïncidaient avec les leurs, lors d'une comparaison officielle à Merlin-Gerin.

Nous donnons, ci-contre, les courbes obtenues à partir des deux méthodes.

La similitude des résultats prouve l'exactitude de la théorie utilisée. Elle pose en outre, le problème de la comparaison des deux méthodes.

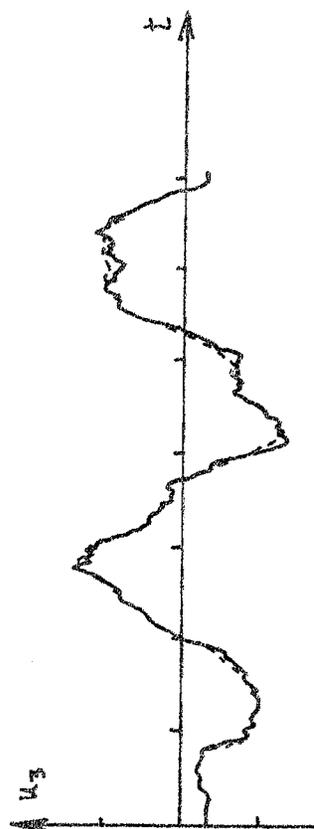
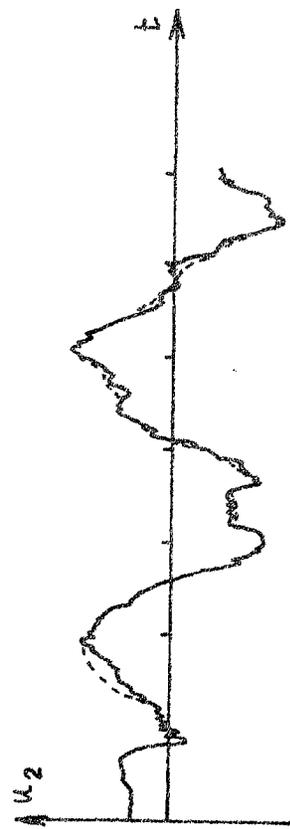
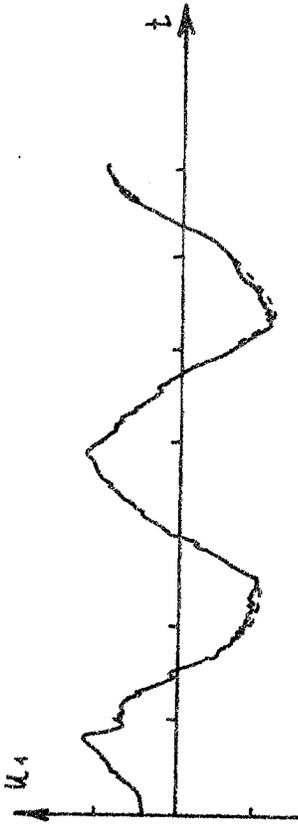


Manoeuvre 33

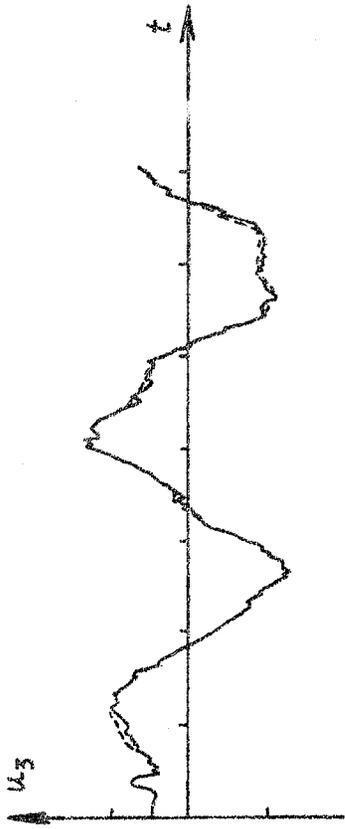
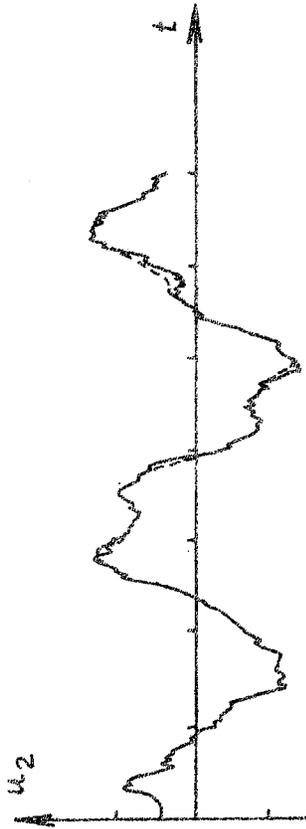
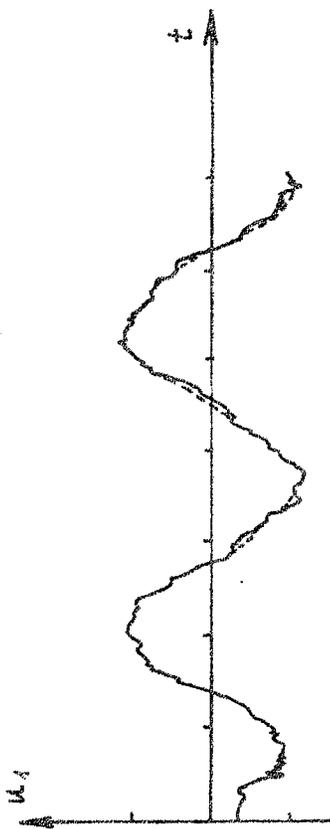
Analyseur transitoire

Programme Régase

M. 34

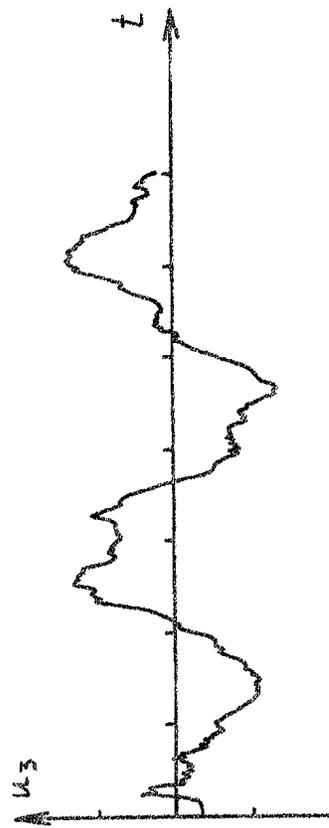
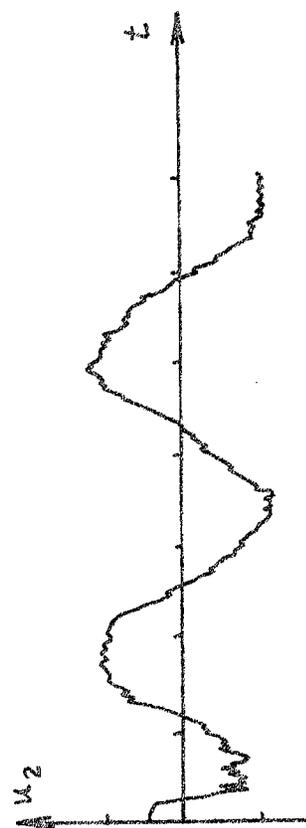
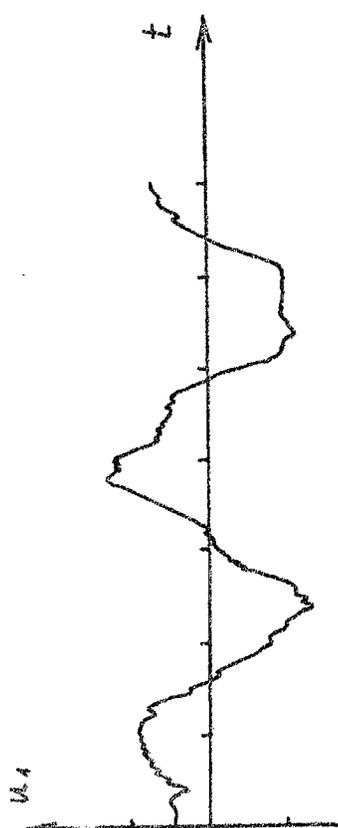
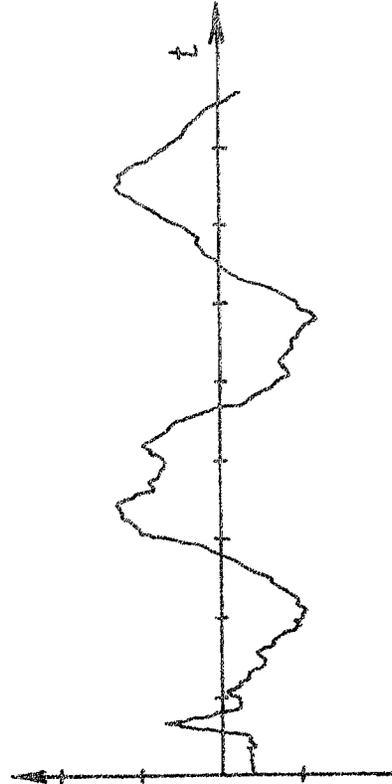
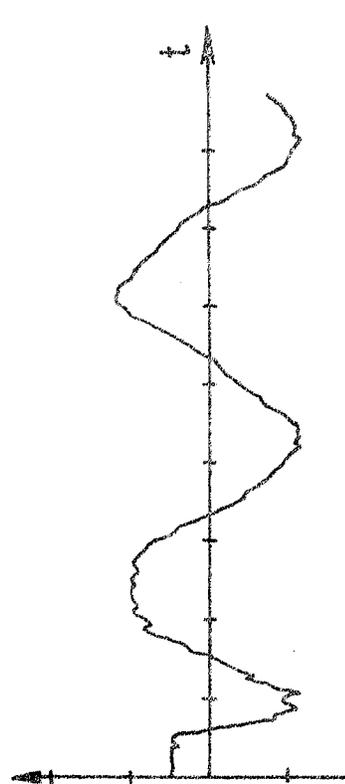
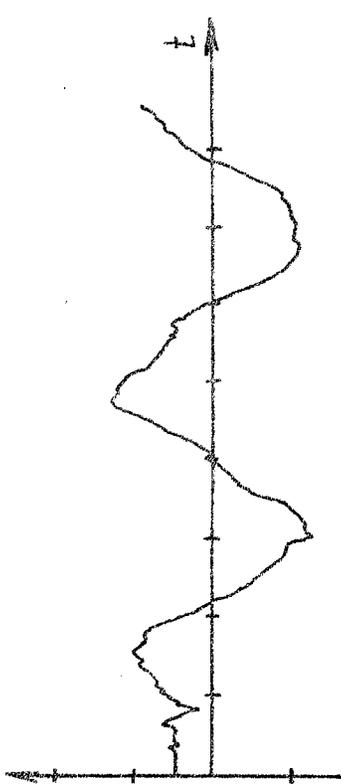


M. 35



Comparaison des manoeuvres 34 et 35

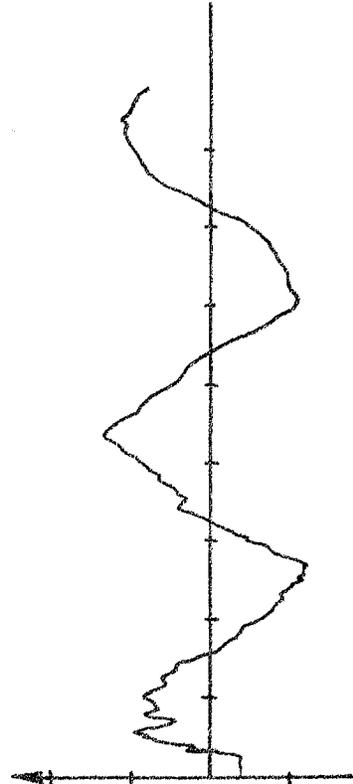
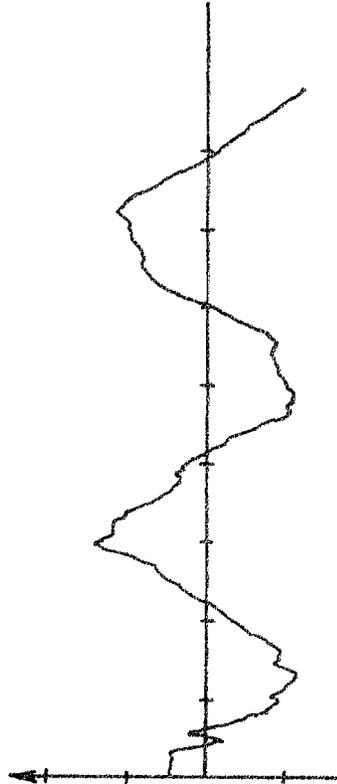
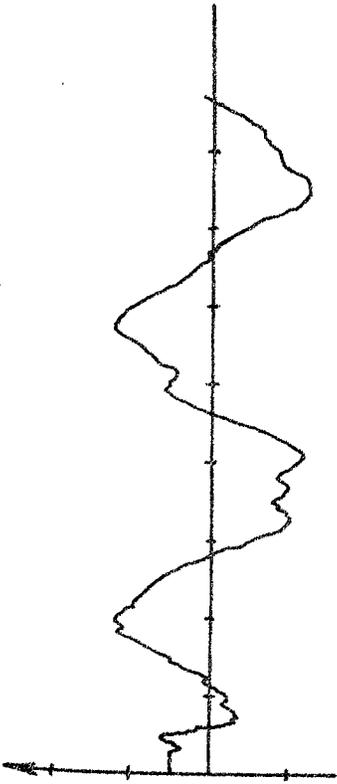
----- Analyseur Transitoire  
 \_\_\_\_\_ Programme Régase



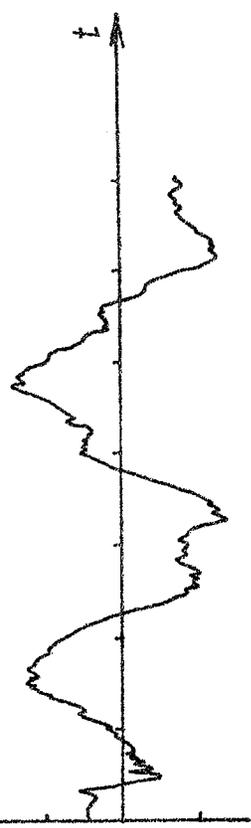
Manoeuvre 36

Analyseur transitoire

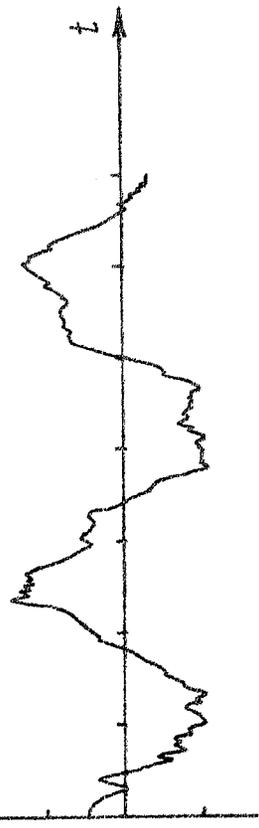
Programme Régase



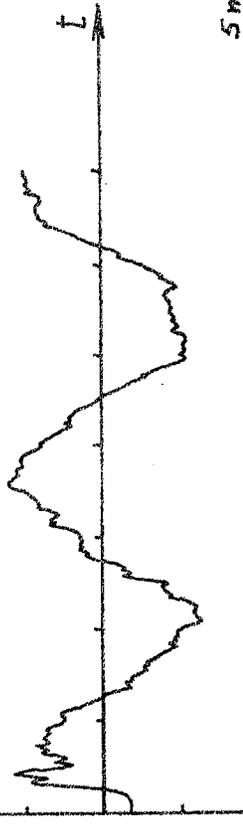
$U_1$



$U_2$



$U_3$

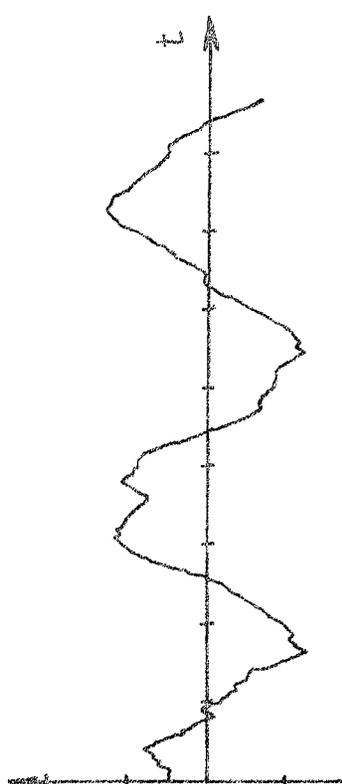
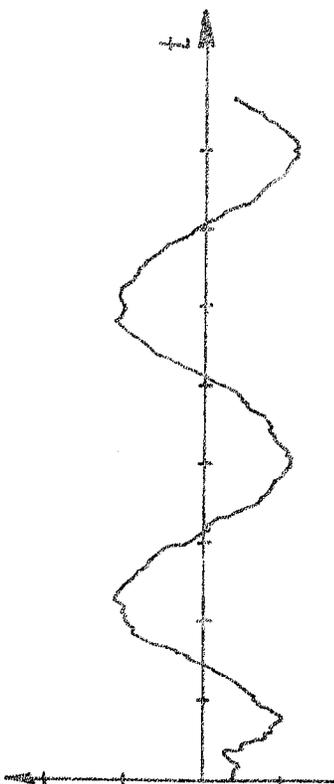
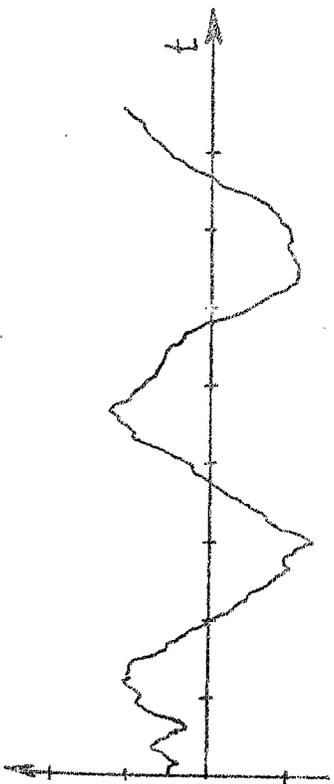


5ms

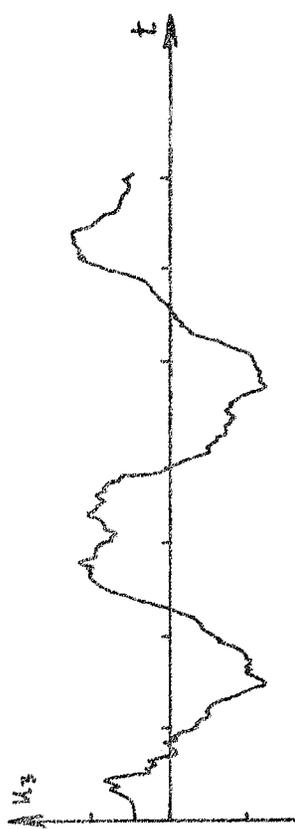
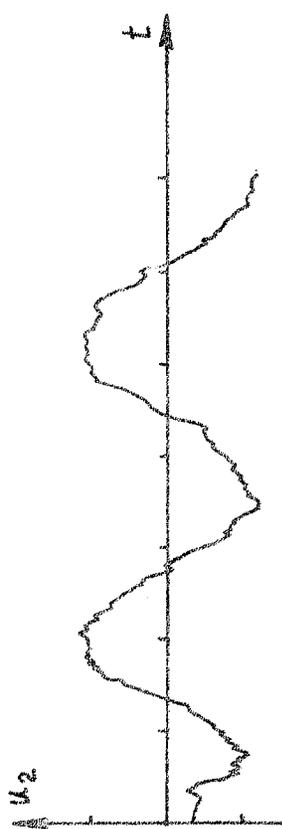
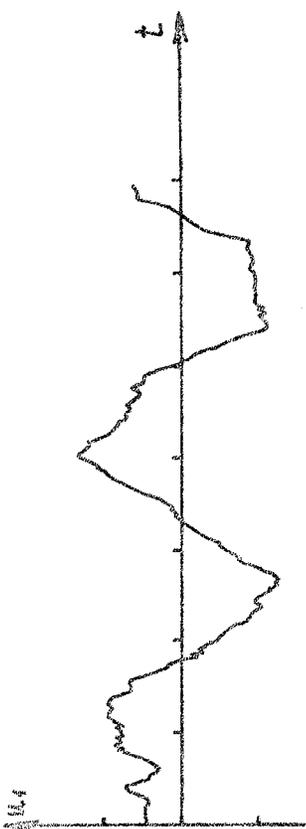
Мандура 37

Analyseur Transitoire

Programme Pégase

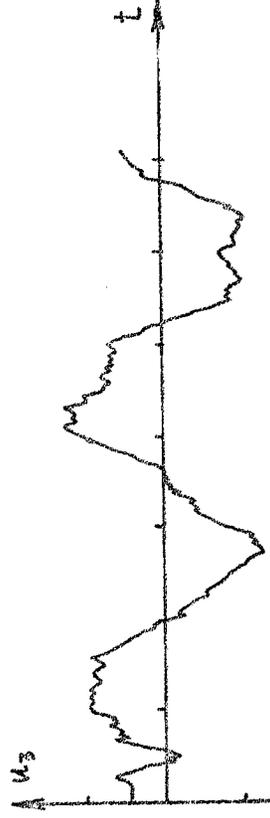
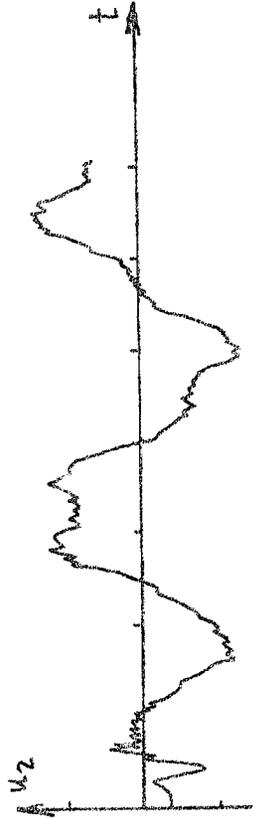
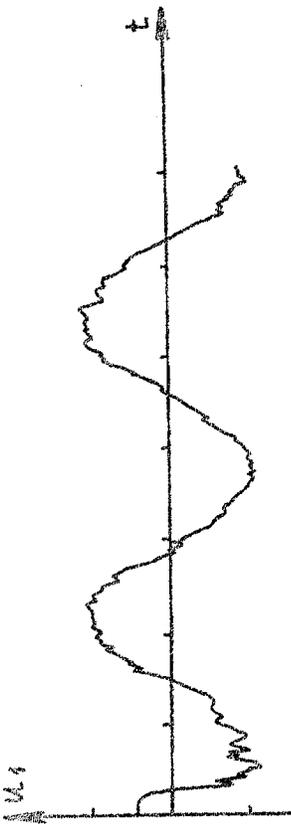
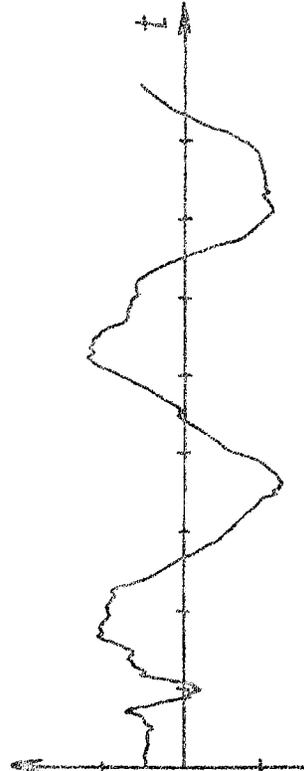
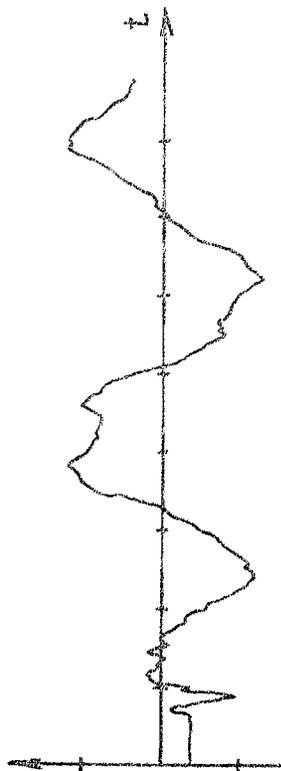
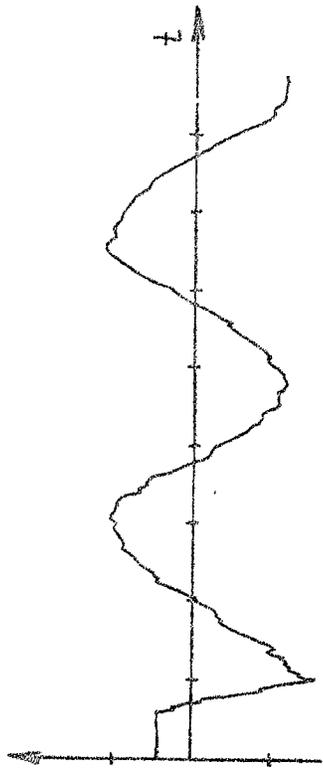


Analyseur Transitoire



Manoeuvre 38

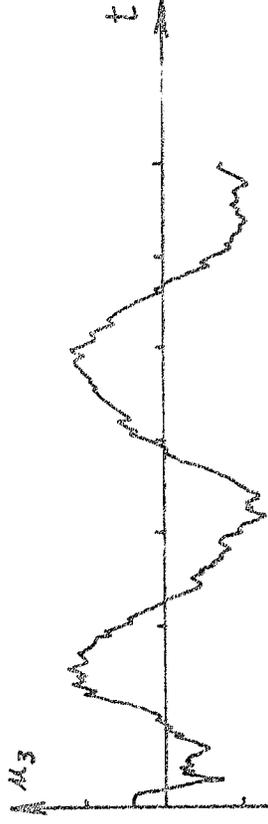
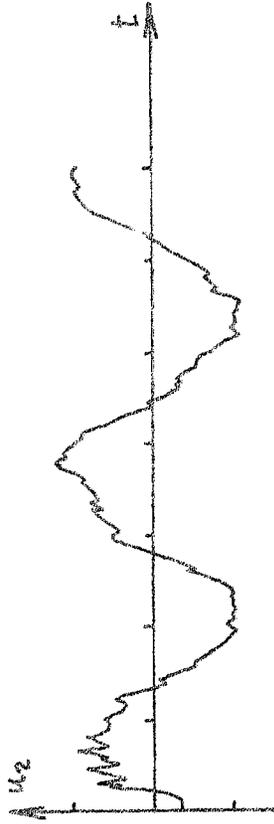
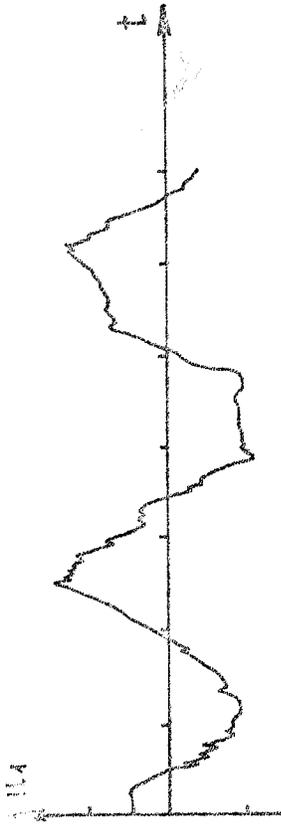
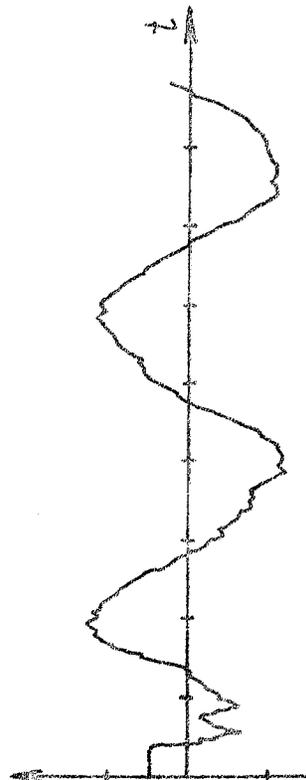
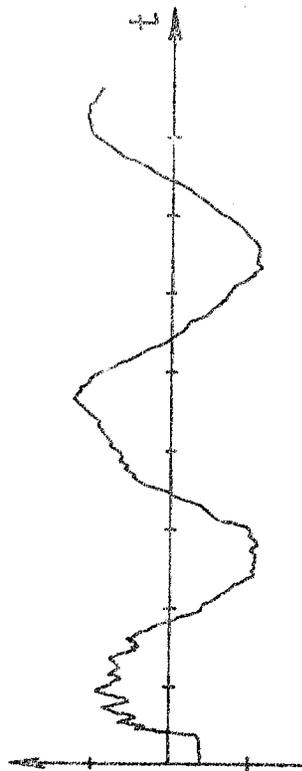
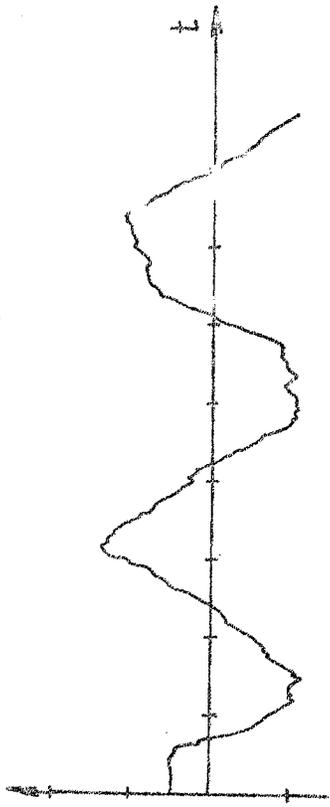
Programme Tégase



Manoeuvre 39

Analyseur transitoire

Programme Tégeste



Manœuvre 40

Analyseur transitoire

Programme Pégase

Pégase ne nécessite pas d'investissement de départ, il permet l'étude de n'importe quelle ligne et est généralisable à l'étude d'un réseau. Il permet d'autre part, d'analyser les phénomènes transitoires de très faible durée en faisant varier les pas  $\Delta t$  et  $\Delta x$ .

Nous pensons donc qu'une telle méthode numérique est plus appropriée et que son utilisation progressera avec le développement des ordinateurs et sera de moins en moins onéreuse.



## C H A P I T R E    I I

### METHODE D'ETUDE STATISTIQUE

### DES SURTENSIONS D'ENCLENCHEMENT

— 0 —

#### II - 1 - INTRODUCTION

Dans les réseaux à haute tension jusqu'à 380 kV, la foudre était considérée comme le principal danger et un réseau convenablement isolé pour celle-ci était pratiquement à l'abri des autres surtensions.

L'avènement des très hautes tensions et bientôt des Ultra-hautes tensions a montré que les surtensions de manoeuvre rendaient nécessaire un isolement supérieur à celui requis pour la protection contre les coups de foudre .

Il existe un très grand nombre de manoeuvres provoquant des surtensions et l'une des principales est l'enclenchement d'une ligne à vide qui est l'objet de notre étude.

Les phénomènes de surtension lors de l'enclenchement d'une ligne à vide dépendent d'une quantité considérable de paramètres : paramètres du réseau, paramètres du disjoncteur et paramètres du service. (1)

Il apparaît de plus en plus qu'une étude des surtensions ne peut se faire utilement que sur la base des statistiques. Nous faisons dans ce sens une étude qui tient compte de tous les paramètres du disjoncteur.

Nous savons, en effet, que sur une ligne à vide de longueur donnée, alimenté par un générateur déterminé, les surtensions d'enclenchement sont liées en plus de la résistance du disjoncteur à des grandeurs difficilement prévisibles telles que : la charge initiale de la ligne, la séquence de manoeuvre des trois pôles du disjoncteur et les instants de fermeture de ses différents contacts.

La surtension  $s$  au cours d'une manoeuvre d'enclenchement est de ce fait une grandeur aléatoire. Nous pouvons donc l'étudier efficacement en associant au phénomène d'enclenchement un modèle aléatoire. Les observations portant sur  $s$  seront alors considérées comme la réalisation d'un échantillon.

Après une étude préliminaire de l'influence des divers paramètres, nous exposons une méthode d'étude statistique des surtensions. Nous tirons ensuite un certain nombre de conclusions pratiques concernant l'enclenchement d'une ligne par un disjoncteur muni de deux résistances de fermeture.

## II - 2 - DEFINITION DE LA LIGNE ETUDIEE

### ET DES PARAMETRES D'ESSAIS

Ligne : tension 500 kV ; longueur 290 km

$$r_d = 0,0187 \Omega/\text{km} ; l_d = 9,708 \cdot 10^{-4} \text{ H/km} ; c_d = 11,7 \cdot 10^{-9} \text{ F/km}$$

$$r_o = 0,198 \Omega/\text{km} ; l_o = 36,075 \cdot 10^{-4} \text{ H/km} ; c_o = 6,7 \cdot 10^{-9} \text{ F/km}$$

Générateur : fréquence 60 Hz

puissance de court-circuit 15 000 MVA (à 500 kV)

$$X_o/X_d = 1$$

fréquence naturelle 1 380 Hz

Disjoncteur :  $R_p$  = résistance d'enclenchement

$\phi$  = instant moyen de fermeture des contacts de résistance ( $C_R$ ) compté à partir du précédent passage à zéro de la phase 1. ( $\phi$  est exprimé en radian ou degré).

$t'$  = ( $t'_1, t'_2, t'_3$ ) instants de fermeture des contacts ( $C_R$ ) comptés à partir de  $\phi$ .

$t$  = ( $t_1, t_2, t_3$ ) instants de fermeture des contacts principaux ( $C_p$ ) comptés à partir de  $\phi$ .

$\tau_i$  = temps d'insertion moyen des résistances  $R_p$ .

$s$  = surtension maximale sur les trois phases.

La figure II - 1 - donne une représentation de la ligne et du générateur ainsi que la définition de  $\phi$ .

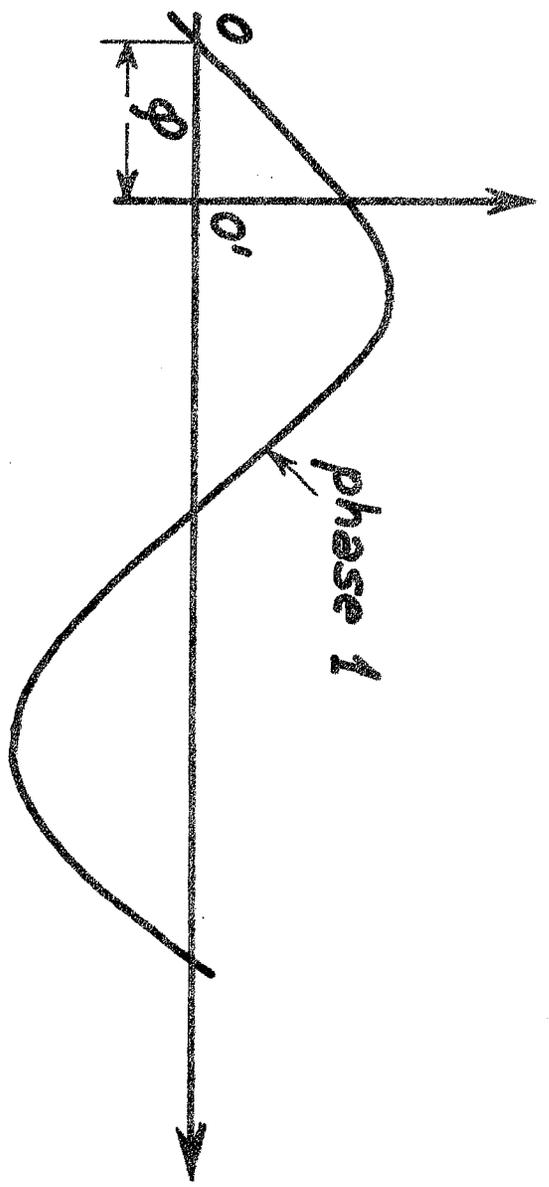
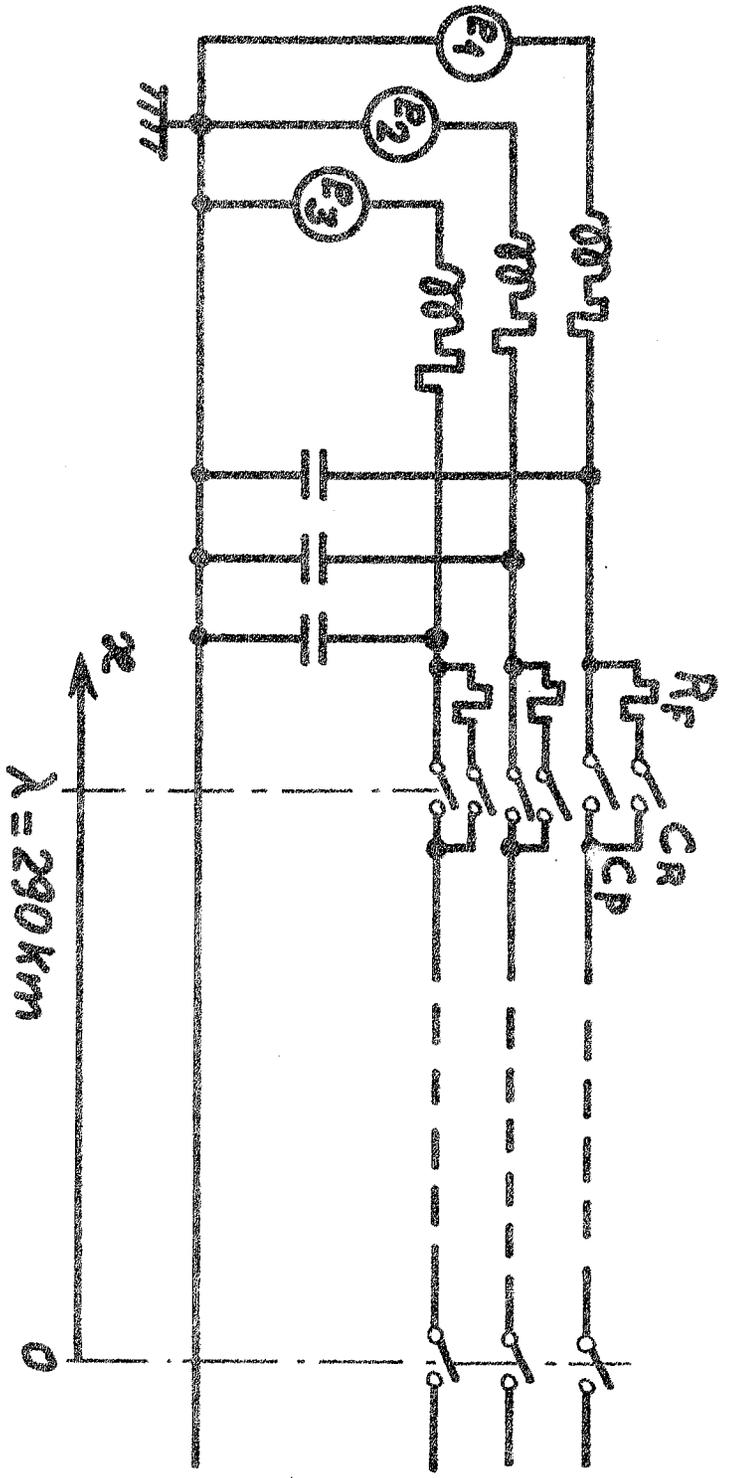


Fig. II-1

II - 3 - ETUDE DE L'INFLUENCE DES  
PARAMETRES D'ENCLENCHEMENT

Dans un premier paragraphe, nous examinons par une étude théorique comment choisir  $\tau_i$  et le rôle de la charge résiduelle  $Q$ . Ensuite, utilisant Pégase, nous déterminons l'influence du désynchronisme des contacts du disjoncteur.

II - 31 - Etude Théorique et Expérimentale  
de l'influence de  $\tau_i$  et  $Q$ .

Cette étude nous permet de comprendre l'influence de la charge résiduelle sur la surtension. Elle nous guide dans le choix du temps d'insertion  $\tau_i$  et nous montrons que ce choix réduit considérablement l'influence de  $Q$ .

A) Calcul de la tension à l'extrémité libre  
de la ligne.

Soit un réseau de puissance infinie alimentant une ligne triphasée à vide, dont nous supposons qu'elle satisfait à la condition d'Heaveside, fig. II - 2. L'équation normale de cette ligne est :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + p \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha u &= 0 \\ \frac{\partial W}{\partial t} - p \frac{\partial W}{\partial x} + \alpha W &= 0 \end{aligned}$$

avec  $\alpha_i = R_i / L_i$  ;  $R_i$  et  $L_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) étant les résistances et inductances de modes.

Effectuons la mise sous tension de la ligne par les contacts  $C_3$  et cherchons la tension en bout de ligne.

L'enclenchement est supposé synchrone et la ligne initialement chargée.

Les équations des conditions initiales et aux limites sont :

$$\text{II - 312} \begin{cases} v(\lambda, t) + R_F i(\lambda, t) = e(t) \\ i(0, t) = 0 \end{cases} \quad (\text{conditions aux limites})$$

$$\text{II - 313} \begin{cases} v(x, 0) = Q \\ i(x, 0) = 0 \end{cases} \quad (\text{conditions initiales})$$

En utilisant les composantes normales définies par

$$v = T_1 (u + W)/2, \quad i = T_1 Y_C (-u + W)/2$$

II - 312 et II - 313 deviennent :

$$\text{II - 312}' \begin{cases} (I_{03} - R_F Y_C) u(\lambda, t) + (I_{03} + R_F Y_C) W(\lambda, t) = 2 T_1^{-1} e(t) \\ u(0, t) = W(0, t) \end{cases}$$

$$\text{II - 313}' \begin{cases} u(x, 0) = T_1^{-1} Q \\ W(x, 0) = T_1^{-1} Q \end{cases}$$

Appliquons aux systèmes II - 311 et II - 312' la transformation de Laplace en tenant compte de II - 313'.

$$\text{II - 314} \begin{cases} (s + \alpha) U(x, s) + p \frac{d}{dx} U(x, s) = T_1^{-1} Q \\ (s + \alpha) W(x, s) - p \frac{d}{dx} W(x, s) = T_1^{-1} Q \end{cases}$$

$$\text{II-315} \quad (I_{03} - R_F Y_C) U(\lambda, s) + (I_{03} + R_F Y_C) W(\lambda, s) = 2 T_1^{-1} E(s)$$

$$\text{II-316} \quad U(0, s) = W(0, s)$$

La résolution du système II - 314 donne :

$$\text{II-317} \quad \begin{cases} U_i(x, s) - \frac{(T_1^{-1} Q)_i}{s + \alpha_i} = \left[ U_i(0, s) - \frac{(T_1^{-1} Q)_i}{s + \alpha_i} \right] e^{-\frac{1}{p_i}(s + \alpha_i)x} \\ W_i(x, s) - \frac{(T_1^{-1} Q)_i}{s + \alpha_i} = \left[ W_i(0, s) - \frac{(T_1^{-1} Q)_i}{s + \alpha_i} \right] e^{\frac{1}{p_i}(s + \alpha_i)x} \end{cases}$$

pour  $i = 1, 2, 3$ .

$$\text{En posant } U_i^!(x, s) = U_i(x, s) - \frac{(T_1^{-1} Q)_i}{s + \alpha_i} ;$$

$$W_i^!(x, s) = W_i(x, s) - \frac{(T_1^{-1} Q)_i}{s + \alpha_i}$$

$$e^{-\alpha_i \frac{\lambda}{p_i}} = e^{-\alpha_i \theta_i} = \mu_i \quad ; \quad e^{-s \frac{\lambda}{p_i}} = e^{-s \theta_i} = \rho_i ;$$

le système II - 317 et les équations II - 315 et II - 316 deviennent

$$\text{II-317}' \quad \begin{cases} U_i^!(\lambda, s) = \mu_i \nu_i U_i^!(0, s) \\ W_i^!(0, s) = \mu_i \nu_i W_i^!(\lambda, s) \end{cases}$$

$$\text{II-315}' \quad \begin{cases} (1 - R_F Y_{ci}) U_i^!(\lambda, s) + (1 + R_F Y_{ci}) W_i^!(\lambda, s) = 2 \left[ (T_1^{-1} E(s))_i - \frac{(T_1^{-1} Q)_i}{s + \alpha_i} \right] \\ \hspace{15em} = 2E'(s) \\ W_i^!(0, s) = U_i^!(0, s) \end{cases}$$

Le calcul de  $W'_i(0, s)$  à partir de II - 317' et II - 315' donne

$$W'_i(0, s) = \frac{2\mu_i \nu_i E'(s)}{(1 + R_F Y_{ci})(1 + \frac{2}{i} \frac{2}{i} (1 - R_F Y_{ci}) / (1 + R_F Y_{ci}))}$$

or  $W'_i(0, s) = W_i(0, s) - (T_1^{-1} Q)_i / (s + \alpha_i)$  soit en posant  $(1 - R_F Y_{ci}) / (1 + R_F Y_{ci}) = \beta_i$  et en développant en série.

$$\text{II-318 } W_i(0, s) = \frac{(T_1^{-1} Q)_i}{s + \alpha_i} + \frac{2\mu_i}{1 + R_F Y_{ci}} + \left( \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \beta_i^n \mu_i^{2n} \nu_i^{2n+1} \right) E'_i(s)$$

En passant à la transformée inverse nous obtenons

$$W_i(0, t) = (T_1^{-1} Q)_i e^{-\alpha_i t} + \frac{2\mu_i}{1 + R_F Y_{ci}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \beta_i^n \mu_i^{2n} \nu_i^{2n+1} e^{-(2n+1)\theta_i} \mathcal{U}(t - (2n+1)\theta_i)$$

Posons

$$\begin{bmatrix} \mathcal{U}(t - (2n+1)\theta_1) & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{U}(t - (2n+1)\theta_2) & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{U}(t - (2n+1)\theta_3) \end{bmatrix} = \mathcal{U}(t - (2n+1)\theta)$$

et notons

$$\begin{bmatrix} X_1(t - (2n+1)\theta_1) \\ X_2(t - (2n+1)\theta_2) \\ X_3(t - (2n+1)\theta_3) \end{bmatrix} = \mathcal{U}(t - (2n+1)\theta) \cdot X(t - (2n+1)\theta) ,$$

nous en déduisons la tension en bout de ligne  $v(o, t) = T_1 W(o, t)$  qui s'écrit

$$v(o, t) = T_1 e^{-\alpha t} T_1^{-1} Q + 2T_1 \mu (I_{03} + R_F Y_C)^{-1} \left( \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \beta_i^n \mu_i^{2n} \left\{ e(t-(2n+1)\theta) - T_1 e^{-\alpha(t-(2n+1)\theta)} T_1^{-1} Q \right\} \right)$$

La forme de cette tension nous permet de choisir le temps d'insertion  $\tau_i$  des résistances de fermeture et de conclure quant au rôle de la charge résiduelle.

B) Choix de  $\tau_i$

Les résistances  $R_F$  servent à amortir le premier régime transitoire d'enclenchement dont la forme est donnée par II - 319. Le choix de  $\tau_i$  devra donc tenir compte de ce fait. Le facteur  $2 (I_{03} + R_F Y_C)^{-1}$  nous montre que nous avons intérêt, étant donné que l'impédance caractéristique homopolaire est supérieure aux impédances directe et inverse, à choisir  $R_F \gg Z_{01}$  pour bien amortir le régime transitoire dû aux trois composantes de mode quand le générateur est déséquilibré, sinon nous prendrons  $R_F \gg Z_{02}$ . Les termes transitoires deviennent négligeables quand  $|\beta_i|^n \mu_i^{2n}$  devient petit. Ceci nous permet de déterminer le temps d'insertion suffisant des résistances.

Nous devons avoir  $|\beta_i|^K \mu_i^{2K} = a$ , avec  $a$  faible, c'est-à-dire  $2K = \sup \left\{ (\text{Log } a) / (1/2 \text{ Log } |\beta_i| - \alpha_i \theta_i) \right\}$ . Nous en déduisons  $\tau_i = (2K + 1) \theta_i$  (puisque  $\theta_1$  est supérieur à  $\theta_2$  et  $\theta_3$ )

II-320  $\tau_i = \theta_i \cdot 1 + \sup_{i=1,2,3} (\text{Log } a) / (\frac{1}{2} \text{ Log } |\beta_i| - \alpha_i \theta_i)$

Si nous prenons par exemple  $R_F = Z_{01} = 2Z_{02} = 2Z_{03}$  et une valeur de  $a$  de 4 %, nous trouvons  $K \approx 3$  ; c'est-à-dire un temps d'insertion de 7  $\theta_1$ .  $\theta_1$  est le temps de parcours de l'onde homopolaire. Nous retrouvons donc par la théorie, les valeurs de  $\tau_i$  préconisés expérimentalement.

C) Influence de la charge résiduelle Q

L'effet de surtension attribué à la charge initiale de la ligne ne se manifeste qu'à partir de  $t \geq \theta_1$ . La relation II - 319 nous montre que cette surtension découle alors du terme  $-T_1 \beta e^{-\alpha t} T_1^{-1} Q$  quand le générateur est en opposition avec la charge sur une ou plusieurs phases.

Une valeur de  $R_F$  telle que  $\beta$  soit faible rend ce phénomène négligeable. Le terme apériodique  $T_1 e^{-\alpha t} T_1^{-1} Q$  de II - 319 semble en outre indiquer que la charge ne disparaît qu'avec une constante de temps  $1/\alpha_2$  (ou  $1/\alpha_3$ ), c'est-à-dire de l'ordre d'une période. Toutefois, si dans l'expression de  $v(o, t)$  nous groupons les termes dépendant de  $Q$ , nous pouvons montrer qu'il n'en est rien. En effet, les termes qui dépendent de  $Q$  dans  $v(o, t)$  sont :

$$D(Q) = T_1 e^{-\alpha t} T_1^{-1} Q - 2T_1 \mu (I_{03} + R_F Y_c)^{-1} \left( \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \beta^n \mu^{2n} \mathcal{U}(t - (2n+1)\theta) \left[ e^{-\alpha(t - (2n+1)\theta)} T_1^{-1} Q \right] \right)$$

Pour  $t \geq \tau_i$ , tous les termes tels que  $n > K$  sont négligeables, et  $\mathcal{U}(t - (2n+1)\theta) = I_{03}$  pour  $n \leq K$ . Nous avons donc :

$$D(Q) = T_1 e^{-\alpha t} T_1^{-1} Q - 2T_1 \mu (I_{03} + R_F Y_c)^{-1} \sum_{n=0}^K (-1)^n \beta^n \mu^{2n} e^{-\alpha(t - (2n+1)\theta)} T_1^{-1} Q$$

$$\implies D(Q) = \frac{T_1}{4} \left[ I_{03} - 2(I_{03} + R_F Y_c)^{-1} \sum_{n=0}^K (-1)^n \beta^n \mu^{2n} \right] e^{-\alpha t} T_1^{-1} Q$$

Etant donné que  $\mu_i \neq 1$ , pour  $(i = 1, 2, 3)$ ,

nous pouvons écrire pour  $t > \tau_i$   $\sum_{n=0}^K (-1)^n \beta^n \neq (I_{03} + \beta)^{-1}$  ;

or  $I_{03} + \beta = 2 (I_{03} + R_F Y_C)$

donc :

$$D(Q) \neq T_1 \left\{ I_{03}^{-2} (I_{03} + R_F Y_C)^{-1} [2(I_{03} + R_F Y_C)]^{-1} \right\} e^{-\alpha t} T_1^{-1} Q=0$$

Nous pouvons en conclure que l'influence de  $Q$ , dans le premier régime transitoire d'enclenchement, disparaît au bout d'un temps supérieur ou égal à la valeur de  $\tau_i$  donnée par II - 320. D'autre part,  $Q$  n'introduit pas de surtension pendant ce régime transitoire si  $\beta$  est faible.

\* Pour étudier l'influence de la charge résiduelle sur le second régime transitoire dû à la fermeture des contacts principaux  $C_p$ , nous allons calculer la tension aux bornes de  $R_F$ . Nous savons, en effet, que c'est la valeur de cette tension qui conditionne l'importance du second régime transitoire.

Soit  $v_{cr}(t)$  le vecteur tension aux bornes de  $R_F$  ; nous avons  $v_{cr}(t) = e(t) - v(\lambda, t)$  avec

$$v(\lambda, t) = T_1 ( U(\lambda, t) + W(\lambda, t) ) \quad 9/2$$

De II-317' nous tirons :

$$U_i(\lambda, s) - \frac{(T_1^{-1}Q)_i}{s + \alpha_i} = \mu_i e^{-s\theta_i} U_i(0, s) - \mu_i e^{-s\theta_i} \frac{(T_1^{-1}Q)_i}{s + \alpha_i}$$

$$W_i(\lambda, s) - \frac{(T_1^{-1}Q)_i}{s + \alpha_i} = \mu_i^{-1} e^{s\theta_i} W_i(0, s) - \mu_i^{-1} e^{s\theta_i} \frac{(T_1^{-1}Q)_i}{s + \alpha_i}$$

Pour  $t > \theta_i$ , la première équation donne

$$U_i(\lambda, t) = u_i U_i(o, t - \theta_i) \mathcal{U}(t - \theta_i)$$

soit :

$$U_i(\lambda, t) = (T_1^{-1}Q)_i e^{-\alpha_i t} + \frac{2\mu_i^2}{1 + R_F Y_{ci}} \left( \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \beta_i^n \mu_i^{2n} \mathcal{U}(t - (2n+2)\theta_i) \left\{ e_i(t - (2n+2)\theta_i) \right\} \right)$$

De même, nous aurons  $W_i(\lambda, t) = u_i^{-1} W_i(o, t + \theta_i)$  ;

soit :

$$W_i(\lambda, t) = (T_1^{-1}Q)_i e^{-\alpha_i t} + \frac{2}{1 + R_F Y_{ci}} \left( \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \beta_i^n \mu_i^{2n} \mathcal{U}(t - 2n\theta_i) e_i(t - 2n\theta_i) \right)$$

Nous déduisons de ces valeurs que pour  $t > \sup_{i=1,2,3} (\theta_i) = \theta_1$

$$v_{cr}(t) = (e(t) - T_1 e^{-\alpha t} T_1^{-1} Q) - T_1 \mu^2 (I_{o3} + R_F Y_c)^{-1} \left( \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \beta \mu^{2n} \mathcal{U}(t - (2n+2)\theta) T_1^{-1} \left\{ e(t - (2n+2)\theta) - T_1 e^{-(t - (2n+2)\theta)} T_1^{-1} Q \right\} \right) - T_1 (I_{o3} + R_F Y_c)^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \beta \mu^{2n} \mathcal{U}(t - 2n\theta) T_1^{-1} \left\{ e(t - 2n\theta) - T_1 e^{-\alpha(t - 2n\theta)} T_1^{-1} Q \right\}$$

L'examen de  $v_{cr}(t)$  montre que du point de vue de la surtension produite lorsque nous court-circuitons les résistances  $R_F$  ; la charge initiale joue un rôle tel qu'elle substitue au générateur de f. e. m.  $e(t)$  un

générateur de f. e. m.  $E(t) = e(t) - T_1 e^{-\alpha t} T_1^{-1} Q$ .

Cependant, la composante apériodique de cette nouvelle f. e. m. s'amortit très rapidement. En effet, pour  $t \gg \tau_i$  les termes dépendant de  $Q$  s'écrivent

$$D'(Q) = T_1 \left( -I_{O3} + 2(I_{O3} + R_F Y_C)^{-1} \sum_{n=0}^K (-1)^n \beta^n \right) e^{-\alpha t} T_1^{-1} Q = -D(Q)$$

=====>  $D'(Q) \neq 0$

Nous en concluons que la charge résiduelle aura une influence très faible sur le second régime transitoire dû à la fermeture des contacts principaux, si cette fermeture a lieu pour  $t \gg \tau_i$ .

#### D) Vérification expérimentale

Nous avons poursuivi notre étude en utilisant Pégase afin de tenir compte du désynchronisme des contacts du disjoncteur.

Les tableaux I et II comparent les surtensions obtenues en enclenchant une ligne déchargée et une ligne chargée à + 0,47 ; - 0,36 ; + 0,43. Dans les deux cas, l'enclenchement est fait en insérant pendant 10 ms une résistance de 500  $\Omega$ . Les tensions en bout de ligne sont observées pendant 40 ms. La similitude des deux tableaux prouvent que les résultats établis à l'aide de considérations théoriques restrictives, ont une portée générale et sont conformes à la réalité.

L'étude de l'influence d'une variation de  $\tau_i$  est faite en nous limitant à des valeurs supérieures à la valeur de  $\tau_i$  donnée par II - 320. Cette étude n'a toutefois de sens que si elle est faite d'un point de vue statistique. En effet, pour un même  $\phi$ , un même ordre de fermeture des phases et une même dispersion des contacts du disjoncteur ; deux valeurs de  $\tau_i$  différentes entraînent forcément deux surtensions différentes.





Le tableau III montre les surtensions obtenues pour  $\tau_i = 10$  ms et  $\tau_i = 8$  ms avec  $\phi = 1,256133$  rad et  $R_F = 500 \Omega$ . L'observation des surtensions porte sur 40 ms. Sur la figure II-3 nous remarquons que les droits de Henry de la loi conditionnelle pour  $\phi$  fixée sont pratiquement les mêmes ; ce qui signifie que la répartition statistique des surtensions est la même pour  $\tau_i = 8$  ms et  $\tau_i = 10$  ms.

### CONCLUSION

Les résultats que nous venons d'établir nous montrent que, dans notre étude statistique des surtensions, nous pouvons faire abstraction du paramètre  $\tau_i$  en le choisissant tel que nous l'indiquons. Nous pouvons par ailleurs, si  $\tau_i$  est choisi suffisamment grand, ne pas tenir compte de la charge résiduelle tant que la surtension n'a pas lieu pendant le premier régime transitoire ; c'est-à-dire tant que l'enclenchement a lieu sur des résistances supérieures à la résistance caractéristique directe si le générateur est équilibré et à l'homopolaire autrement. Nous pouvons aussi négliger le rôle de la charge résiduelle quand  $R_F \ll Z_0$  pourvu que  $\beta$  soit faible.

### II - 32 - Influence du désynchronisme

des contacts  $C_R$  et  $C_P$  du disjoncteur

Nous savons que les surtensions dépendent de la valeur de  $R_F$ . L'expérience montre que si  $R_F \ll Z_{02}$  les surtensions ont lieu pendant le premier régime transitoire et pour  $R_F > Z_{02}$  elles ont lieu dans le second régime transitoire. Ceci nous amène à penser que le désynchronisme des contacts  $C_P$  et  $C_R$  n'affecte pas de la

même manière les surtensions suivant que  $R_F > Z_{02}$  ou  $R_F < Z_{02}$ .

Nous avons fait des essais pour mettre en évidence ce phénomène. La nature et les résultats de ces essais sont consignés dans les tableaux IV, V et VI à partir desquels nous avons tracé les courbes statistiques données par les figures II-4 et II-5. Nous constatons ainsi deux choses.

A) \* Pour  $R_F < Z_{02}$ , la surtension maximale  $s$  reste pratiquement la même pour un non synchronisme des contacts principaux, les contacts de résistance  $C_R$  gardant une valeur fixe figure II-4. Ce phénomène s'accroît quand  $R_F$  devient très inférieure à  $Z_{02}$ .

\* Pour  $R_F > Z_{02}$  nous observons une grande variation de  $s$  (voir tableau I).

B) Pour deux valeurs données des instants de fermeture des contacts  $C_R$ , nous montrons que :

1°) Pour  $R_F > Z_{02}$  il n'y a pas de changement notable dans les valeurs de  $s$ . Donc le désynchronisme des contacts de résistance ne joue pas de rôle dans la détermination de  $S$ .

2°) Pour  $R_F < Z_{02}$  il y a un changement radical.

Les conclusions A et B sont très importantes dans la mesure où elles nous permettent de diminuer considérablement le nombre d'essais à effectuer dans l'étude statistique des surtensions. En effet, pour  $R_F > Z_{02}$ , nous ne regarderons que les surtensions dues au désynchronisme des contacts principaux, les contacts  $C_R$  étant supposés synchrones et fermés à un instant caracté-

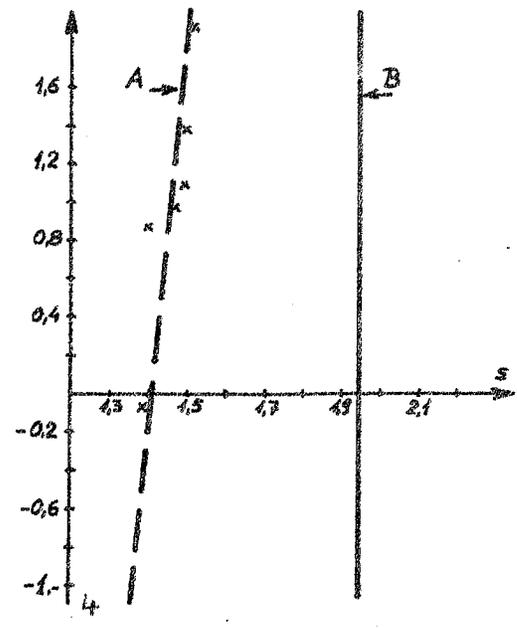
Tableau IV

surtensions  
 $R_F = 200\Omega$      $R_F = 50\Omega$   
 $\tau_i = 10ms$   
 $q = 5,589722 \text{ rad.}$

$T_1$	$T_2$	$T_3$			$P$
10	10	13,464	1,516562	1,940960	$\frac{1}{18}$
10	10	8,536	1,496948	1,940960	$\frac{1}{18}$
10	13,464	10	1,383073	1,940960	$\frac{1}{18}$
10	8,536	10	1,383073	1,940960	$\frac{1}{18}$
10	10	10	1,359359	1,940960	$\frac{1}{3}$
13,464	10	10	1,383073	1,940960	$\frac{1}{18}$
8,536	10	10	1,383073	1,940960	$\frac{1}{18}$
11,549	11,549	10	1,383073	1,940960	$\frac{1}{36}$
11,549	8,450	10	1,465171	1,940960	$\frac{1}{36}$
11,549	10	11,549	1,383073	1,940960	$\frac{1}{36}$
11,549	10	8,450	1,383073	1,940960	$\frac{1}{36}$
8,450	11,549	10	1,383073	1,940960	$\frac{1}{36}$
8,450	8,450	10	1,383073	1,940960	$\frac{1}{36}$
8,450	10	11,549	1,383073	1,940960	$\frac{1}{36}$
8,450	10	8,450	1,383073	1,940960	$\frac{1}{36}$
10	11,549	11,549	1,383073	1,940960	$\frac{1}{36}$
10	11,549	8,450	1,383073	1,940960	$\frac{1}{36}$
10	8,450	11,549	1,490345	1,940960	$\frac{1}{36}$
10	8,450	8,450	1,535563	1,940960	$\frac{1}{36}$

Droites de Henry de la loi conditionnelle pour  $q = 5,589722 \text{ rad.}$   $T'_1 = T'_2 = T'_3 = 0$

Fig. II-4



A  $\begin{cases} R_F = 200\Omega \\ \tau_i = 10ms \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{S}_F = 1,411731 \\ \sigma = 0,046 \end{cases}$

B  $\begin{cases} R_F = 50\Omega \\ \tau_i = 10ms \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{S}_F = 1,940960 \\ \sigma = 0 \end{cases}$

Influence du désynchronisme des contacts principaux pour  $R_F < Z_{02}$

Tableau V

T <sub>1</sub>	T <sub>2</sub>	T <sub>3</sub>	surtensions			P
			T <sub>1</sub> '=T <sub>2</sub> '=T <sub>3</sub> '=0	T <sub>1</sub> '=0 T <sub>2</sub> '=1ms	T <sub>1</sub> '=0 T <sub>2</sub> '=2ms	
10	10	13,66	1,375124	1,578824	1/18	
10	10	6,536	1,375124	1,578824	1/18	
10	13,66	10	1,375124	1,578824	1/18	
10	6,536	10	1,375124	1,578824	1/18	
10	10	10	1,418187	1,578824	1/3	
13,66	10	10	1,533377	1,578824	1/18	
6,536	10	10	1,504204	1,578824	1/18	
13,66	13,66	10	1,403070	1,578824	1/36	
13,66	6,536	10	1,375124	1,578824	1/36	
13,66	10	13,66	1,375124	1,578824	1/36	
13,66	10	6,536	1,375124	1,578824	1/36	
13,66	10	8,450	1,486257	1,578824	1/36	
8,450	13,66	10	1,409956	1,578824	1/36	
8,450	8,450	10	1,375124	1,578824	1/36	
8,450	10	13,66	1,375124	1,578824	1/36	
8,450	10	6,536	1,375124	1,578824	1/36	
10	13,66	13,66	1,375124	1,578824	1/36	
10	13,66	8,450	1,470963	1,578824	1/36	
10	8,450	13,66	1,375124	1,578824	1/36	
10	8,450	8,450	1,375124	1,578824	1/36	

Tableau VI

T <sub>1</sub>	T <sub>2</sub>	T <sub>3</sub>	surtensions			P
			T <sub>1</sub> '=T <sub>2</sub> '=T <sub>3</sub> '=0	T <sub>1</sub> '=0 T <sub>2</sub> '=1ms	T <sub>1</sub> '=0 T <sub>2</sub> '=2ms	
10	10	13,66	1,471037	1,673827	1/18	
10	10	6,536	1,598958	1,601566	1/18	
10	13,66	10	1,746073	1,744584	1/18	
10	6,536	10	1,586098	1,546837	1/18	
10	10	10	1,840661	1,838089	1/3	
13,66	10	10	1,395978	1,392267	1/18	
6,536	10	10	2,010163	1,964355	1/18	
13,66	13,66	10	1,384681	1,381821	1/36	
13,66	6,536	10	1,709807	1,705916	1/36	
13,66	10	13,66	1,610506	1,509845	1/36	
13,66	10	6,536	1,900244	1,889903	1/36	
8,450	13,66	10	1,3445275	1,341733	1/36	
8,450	8,450	10	1,650156	1,646089	1/36	
8,450	10	13,66	1,5344415	1,528576	1/36	
8,450	10	6,536	1,934888	1,929713	1/36	
10	13,66	13,66	1,692426	1,693083	1/36	
10	13,66	8,450	1,869095	1,863780	1/36	
10	8,450	13,66	1,408797	1,402446	1/36	
10	8,450	8,450	1,756692	1,747817	1/36	

Influence du désynchronisme des contacts de résistance CR pour

$R_F = 200 \Omega < Z_{02}$

$R_F = 500 \Omega > Z_{02}$

$\tau_i = 10 \text{ ms}$      $\varphi = 4,256133 \text{ rad.}$

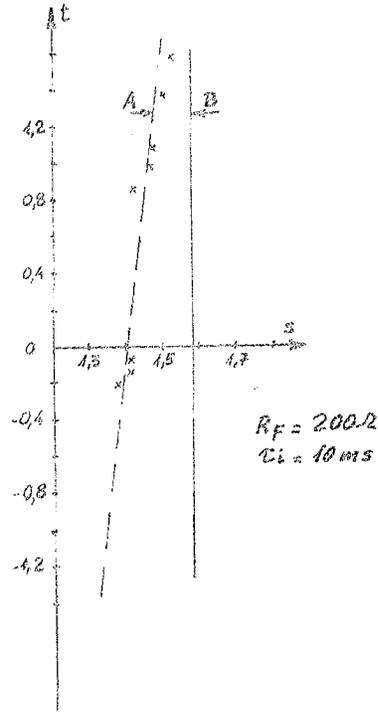
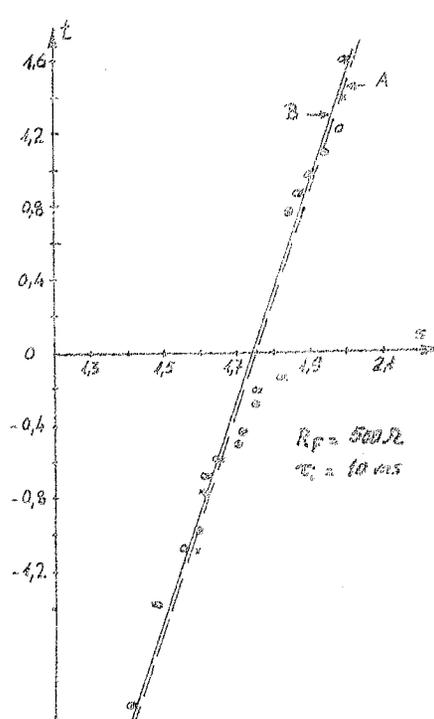


Fig. II-5 Influence du désynchronisme des contacts de résistance Droites de Henry de la loi conditionnelle lorsque  $\varphi = 4,256133 \text{ rad.}$

x --- A pour T<sub>1</sub>' = T<sub>2</sub>' = T<sub>3</sub>' = 0  
 o --- B " T<sub>1</sub>' = 0 T<sub>2</sub>' = 1ms T<sub>3</sub>' = 2ms

térisé par  $\phi$  ; et pour  $R_F < Z_{02}$ , en prenant des valeurs de  $R_F$  pas très proches de  $Z_{02}$ , nous regarderons uniquement l'effet dû au désynchronisme des contacts de résistance.

Nous pouvons dès à présent noter que pour un disjoncteur muni de deux résistances de fermeture, l'une supérieure à  $Z_{02}$ , l'autre inférieure à  $Z_{02}$ , le désynchronisme de la deuxième fermeture peut jouer un rôle plus important que celui de la dernière ; le désynchronisme des premiers contacts ne joue aucun rôle.

## II - 33 - CONCLUSION

Dans les paragraphes précédents, nous avons montré, dans l'optique d'une étude statistique des surtensions, le rôle des paramètres y intervenant.

En nous plaçant dans le cadre des études actuelles où  $R_F$  est systématiquement supérieure à  $Z_{02}$ , nous constatons que le paramètre  $\tau_1$  peut être judicieusement choisi afin d'éliminer le paramètre aléatoire que constitue la charge initiale. Cette méthode peut également être employée quand  $R_F$  est inférieure à  $Z_{02}$  si  $\beta$  reste faible devant 1.

Nous constatons aussi que suivant la valeur des résistances d'enclenchement, le rôle de la variable aléatoire  $M$  ou celui de  $M'$  est négligeable.

Nous concluons donc qu'il est possible de faire une étude statistique complète des surtensions tenant compte de tous les paramètres du disjoncteur et de la charge initiale en n'étudiant que certains paramètres essentiels.

II - 4 - METHODES D'ESSAIS ET RESULTATS

II - 41 - Méthode de simulation de l'enclenchement.

Nous supposerons dans ce qui suit que la ligne est déchargée avant l'enclenchement par une méthode appropriée : par exemple introduction d'une résistance de décharge shuntant la ligne après sa coupure. D'autre part, la ligne ayant une impédance caractéristique directe et homopolaire de ~~288~~  $315 \Omega$  respectivement, le temps d'insertion sera fixé à 10 ms.

Dans ces conditions, la résistance  $R_F$  étant fixée à 500  $\Omega$  par exemple, la surtension maximale  $s$  et sa fréquence d'apparition dépendront de la loi de probabilité du triplet  $(T_1, T_2, T_3)$  et de celle de  $\Phi$ . Nous avons montré que pour  $R_F > Z_{02}$  il n'est pas nécessaire de tenir compte du triplet  $(T'_1, T'_2, T'_3)$ .

A priori, si la fermeture n'est pas contrôlée, nous pouvons dire que  $\Phi$  est distribuée uniformément sur  $(0, 2\pi)$ .

Si  $f(t_1, t_2, t_3)$  représente la densité de probabilité de la fermeture, une méthode d'essai pourrait consister à échantillonner correctement  $\Phi$  par une table de nombre au hasard et de chercher la loi conditionnelle de  $S$  pour  $M = (t_1, t_2, t_3)$  fixé.

Les essais figure II - 6 ont montré que cette loi est normale.

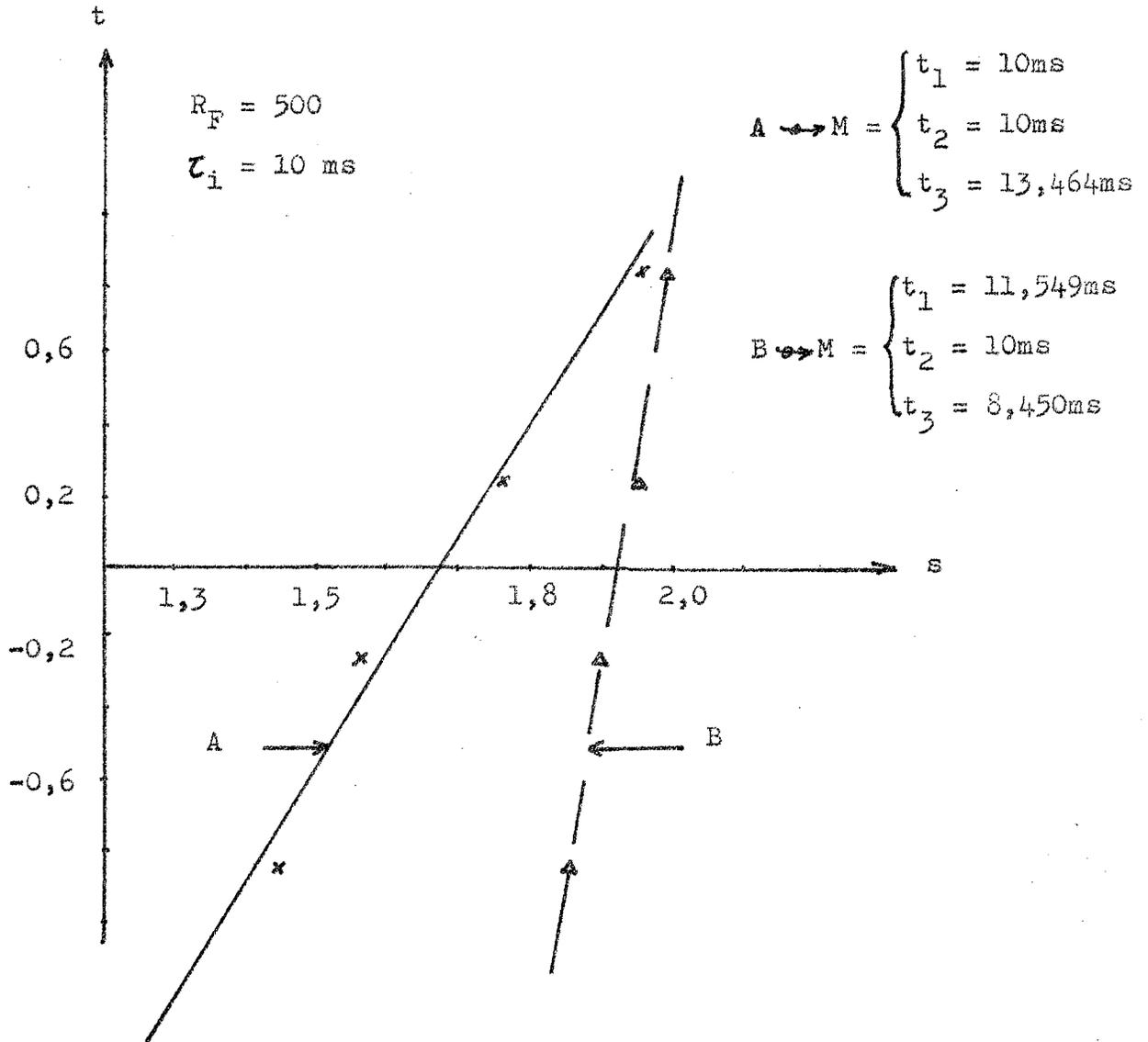


Figure II - 6

Droites de Henry de la loi conditionnelle  
lorsque M est fixé

Sa densité de probabilité s'écrira :

$$g_M(s) = \frac{1}{\sigma(M) \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\{s - \mu(M)\}^2}{2\sigma^2(M)}}$$

Nous en déduisons la densité de probabilité de S.

$$\text{II - 412} \quad k(s) = \int_{\mathbb{R}^3} f(t_1, t_2, t_3) g_M(s) dt_1 dt_2 dt_3$$

Il est évident que cette formule est inutilisable étant donné que  $\sigma(M)$  et  $\mu(M)$  ne sont pas des constantes et que nous ne savons pas tracer leur courbe représentative. Cependant II - 412 montre que la loi des surtensions dépend étroitement de celle de la fermeture des contacts du disjoncteur et qu'il n'est pas possible, quand on travaille sur un modèle de ligne analogique ou mathématique d'adopter des instants de fermeture quelconques.

Nous avons fait les essais en prenant un disjoncteur dont la loi de fermeture est normale avec une dispersion  $\sigma$  de 2 ms pour les contacts principaux et de 1 ms pour les contacts de résistance. La loi du disjoncteur étant fixé nous avons alors échantillonné M et M' afin de rendre les instants de fermeture et par la même occasion les résultats des essais représentatifs de la réalité.

#### A) Echantillonnage de $\Phi$ .

Nous avons admis que  $\Phi$  est distribué uniformément sur  $(0, 2\pi)$ . Nous l'avons échantillonné par une table de nombres au hasard en nous limitant à 5 valeurs.

Les résultats sont indiqués dans le tableau VII.

B) Echantillonnage de M'

Les contacts de Résistance se ferment autour de leur valeur moyenne  $\phi$  suivant une loi de Gauss dont la dispersion  $\sigma$  est égale à 1 ms. Leur échantillonnage nous est utile dans le cas où nous étudions les surtensions avec des résistances de fermeture inférieures à  $\tau_{02}$ . Dans de pareils cas, nous supposons que les contacts principaux sont synchrones, ce qui ne change, comme nous l'avons montré, que très peu les résultats.

L'échantillonnage de M' est fait en utilisant une méthode décrite par J. Altaber (19). Il consiste à remplacer la fonction de répartition F du vecteur aléatoire  $X = (X^1, \dots, X^n)$  par une répartition discrète  $F_N$  de N points  $X_i$  de  $R^n$  pondérés par les masses  $p_i$ , les moments jusqu'à l'ordre q de la nouvelle répartition devant coïncider avec ceux de la variable à représenter. Nous avons ainsi à résoudre en  $p_i$  et  $X_i = \{x_i^1, \dots, x_i^n\}$  le système d'équations,

$$\sum_{i=1}^N p_i (x_i^1)^{k_1} \dots (x_i^n)^{k_n} = M_{k_1 k_2 \dots k_n}$$

pour tout ensemble de n nombres  $k_i$  tel que  $\sum_{i=1}^n k_i \leq q$ .

En utilisant cette méthode, nous avons réalisé pour M' un échantillonnage donnant une égalité des moments jusqu'à l'ordre trois.

Les temps étant comptés à partir de  $\phi$ , nous obtenons ainsi pour chaque valeur  $\phi_i$  de cette variable six points  $M'_i$  situés sur les axes à  $\pm \sqrt{3} e_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) et pondérés à 1/6 ; d'où le tableau VIII. Les valeurs de M correspondantes sont, pour  $\tau_i = 10$  ms,

Tableau VII

$T_1$	$T_2$	$T_3$	$P$
10	10	13,464	1/18
10	10	6,536	1/18
10	13,464	10	1/18
10	6,536	10	1/18
13,464	10	10	1/18
6,536	10	10	1/18
10	10	10	1/3
11,549	11,549	10	1/36
11,549	8,450	10	1/36
11,549	10	11,549	1/36
11,549	10	8,450	1/36
8,450	11,549	10	1/36
8,450	8,450	10	1/36
8,450	10	11,549	1/36
8,450	10	8,450	1/36
10	11,549	11,549	1/36
10	11,549	8,450	1/36
10	8,450	11,549	1/36
10	8,450	8,450	1/36

Echantillonnage de M

Tableau VIII

$\Phi_{rad.}$	$T_1'$	$T_2'$	$T_3'$	$P$
1,356133	0	0	1,732	1/6
	0	0	-1,732	1/6
	0	1,732	0	1/6
	0	-1,732	0	1/6
	1,732	0	0	1/6
1,884198	-1,732	0	0	1/6
	0	0	1,732	1/6
	0	0	-1,732	1/6
	0	1,732	0	1/6
	0	-1,732	0	1/6
2,198346	1,732	0	0	1/6
	-1,732	0	0	1/6
	0	0	1,732	1/6
	0	0	-1,732	1/6
	0	1,732	0	1/6
4,582078	0	-1,732	0	1/6
	0	1,732	0	1/6
	1,732	0	0	1/6
	-1,732	0	0	1/6
	0	0	1,732	1/6
5,589792	0	0	-1,732	1/6
	0	1,732	0	1/6
	0	-1,732	0	1/6
	1,732	0	0	1/6
	-1,732	0	0	1/6

Echantillonnage de  $M'$

$\Phi_{rad.}$	$\Phi$ degrés
1,356133	71°, 37
1,884198	107°, 35
2,198346	125°, 35
4,582078	259°, 09
5,589792	320°, 25

Echantillonnage de  $\Phi$

$$T_1 = T_2 = T_3 = 10 \text{ ms.}$$

C) Echantillonnage de M.

Cet échantillonnage est utilisé quand  $R_F > Z_{02}$  ; il est fait par la même méthode que celui de  $M'$ .

Nous construisons un échantillon plus précis en imposant l'égalité des moments jusqu'à l'ordre 5. Les valeurs obtenues, comptées à partir de  $\phi$ , sont données par le tableau VII. Les contacts de résistance sont supposés synchrones et  $T'_1 = T'_2 = T'_3 = 0$ .

Tous les essais qui précèdent ont été faits avec les valeurs du tableau VII.

II - 42 - Loi de S (20) (21)

Nous avons déterminé la loi de probabilité de la surtension maximale dans le cas où  $R_F = 500 \Omega$  en utilisant les résultats établis sur le rôle des paramètres. Les surtensions obtenues lors des essais faits à partir de l'échantillonnage de  $M$  sont groupées dans le tableau I. A partir des essais, nous avons testé plusieurs lois telles que la loi  $\gamma$  et la loi  $\beta$ , nous n'indiquerons ici que les lois qui nous ont semblé représenter celle de  $S$  : la loi normale et la loi de Gram - Charlier.

A) Estimation des paramètres (22) (23)

L'estimation de la moyenne et de la variance est basée sur la théorie suivante.

Soit  $E_s = \{S < s\}$  ; la probabilité pour que

la surtension soit inférieure à  $s$  est, si nous supposons  $M$  échantillonné :

$$\text{II - 421} \quad P(E_s) = \sum_{i=1}^K P(E_s/M = M_i) \cdot P(M_i)$$

Si  $F(s)$  et  $F_i(s)$  sont les fonctions de répartition de  $S$  et de la loi de  $S$  lorsque  $M = M_i$  est fixé ; II - 421 nous donne

$$\text{II - 422} \quad F(s) = \sum_{i=1}^K p_i F_i(s)$$

Nous déduisons de II - 422 la moyenne  $m$  et la variance  $\sigma^2$ .

$$* \quad m = E(S) = \int_{-\infty}^{+\infty} s f(s) ds = \int_{-\infty}^{+\infty} s \sum_{i=1}^K p_i f_i(s) ds = \sum_{i=1}^K p_i E_i(S)$$

$$\implies \text{II-423} \quad m = \sum_{i=1}^K p_i m_i$$

$$* \quad \sigma^2 = E((S - m)^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} (s - m)^2 f(s) ds = \sum_{i=1}^K p_i \int_{-\infty}^{+\infty} (s - m)^2 f_i(s) ds$$

$$= \sum_{i=1}^K p_i E_i((S - m)^2) = \sum_{i=1}^K p_i E_i(S^2) - 2m \sum_{i=1}^K p_i E_i(S) + \sum_{i=1}^K p_i E_i(m^2)$$

$$\implies \text{II-424} \quad \sigma^2 = \sum_{i=1}^K p_i E_i(S^2) - m^2$$

D'où la méthode d'estimation : nous estimons les  $m_i$  et  $E_i(S^2)$  avec les surtensions obtenues quand  $M = M_i$ , soient  $\underline{m}_i$  et  $\underline{E}_i(S^2)$  ces estimateurs, nous en déduisons les estimations de  $m$  et  $\sigma^2$  par les formules II - 423 et II - 424

$$\bar{S} = \sum_{i=1}^K p_i \underline{m}_i \quad ; \quad \sigma_s^2 = \sum_{i=1}^K p_i \underline{E}_i(S^2) - (\bar{S})^2$$

Nous obtenons par cette méthode

$$\bar{S} = 1,766505 \quad \text{et} \quad \sigma_s^2 = 2,5950 \times 10^{-2} \quad \text{soit} \quad \sigma = 0,1611$$

nous avons aussi estimé  $-\frac{k_3}{3! \sigma_s^3}$  dans le cas où nous

cherchions à appliquer la loi de Gram - Charlier.

$$-\frac{k_3}{3! \sigma_s^3} = 0,092.$$

Nota : Les estimations de  $m_i$  et  $E_i(S^2)$  sont faites en utilisant le résultat établi dans le paragraphe II - 42 à savoir que la loi conditionnelle de S lorsque  $M = M_i$  est normale

$$\underline{m}_i = \frac{1}{5} \sum_{l=1}^5 s_{il} \quad \underline{E}_i(S^2) = \frac{1}{5} \sum_{l=1}^5 s_{il}^2$$

$\underline{m}_i$  et  $\underline{E}_i(S^2)$  sont des estimateurs sans biais.

#### B) Méthode de Test des lois

Nous utilisons à cet effet une méthode de graphique basée sur le théorème suivant :

Théorème : soit S une variable aléatoire réelle dont la fonction de répartition est continue et strictement croissante. Alors la variable aléatoire  $Y = F(s)$  suit une loi de probabilité uniforme dans (0, 1).

Supposons que nous cherchons à ajuster la loi de S à une loi de fonction de répartition F (s).

Si  $s_i$  est une réalisation de  $S$  donnée par le tableau I, il lui correspond une fréquence cumulée  $f_c$ .  $f_c$  est calculable à partir de la dernière colonne du tableau I qui représente la fréquence d'apparition des surtensions qui sont sur la même ligne.

A partir de  $s_i$  nous calculons  $F(s_i) =$   
$$F(t_i) = \int_{-\infty}^{t_i} f(t) dt$$
 où  $f(t)$  est la densité de probabilité correspondant à la loi centrée réduite et  
$$t_i = \frac{s_i - \bar{S}}{\sigma_s}$$

Si la loi de fonction de répartition  $F(S)$  est la loi de  $S$ , la courbe  $F(s_i)$  en fonction de  $f_c$  est confondue avec la première bissectrice.

En utilisant cette méthode d'ajustement, nous avons essayé la loi de Gauss et celle de Gram - Charlier dont nous rappelons la définition.

D'une nature analogue à la loi de Gauss, la loi de Gram - Charlier permet en outre de tenir compte de la dissymétrie d'une distribution.

Si nous posons  $t = \frac{s - m}{\sigma}$  sa densité de probabilité est donnée par :

$$\text{II-425 } f(s) ds = \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \left[ 1 + \frac{k_3}{3! \sigma^3} H_3(t) + \frac{k_4}{4! \sigma^4} H_4(t) + \dots \right] dt$$

$$\text{avec } k_3 = E((S - m)^3) \quad , \quad k_4 = E((S - m)^4) - 3[E((S - m)^2)]^2$$

Les  $H_r(t)$  sont les polynomes d'Hermite définis par

$$\text{II - 426} \quad e^{-t^2/2} H_r(t) = (-1)^r \frac{d^r}{dt^r} (e^{-t^2/2})$$

En portant cette relation dans II - 425, nous obtenons

$$f(s) ds = \left[ y(t) - \frac{k_3}{3! \sigma^3} y'''(t) + \frac{k_4}{4! \sigma^4} y^{(4)}(t) + \dots \right] dt$$

$y(t)$  étant la fonction  $\frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$ .

Pour le calcul d'ajustement nous avons besoin de  $F(t)$ .

$$F(t) = \int_{-\infty}^t f(s) ds = \Pi(t) - \frac{k_3}{3! \sigma^3} y''(t) + \frac{k_4}{4! \sigma^4} y'''(t) + \dots$$

Dans la pratique on se limite généralement aux deux premiers termes du développement ; c'est ce que nous avons fait. Le calcul de  $F(t)$  se fait à partir d'une table qui donne l'intégrale de la loi normale centrée et ses dérivées (24) .-

Les résultats des ajustements sont représentés figure II - 7 pour la loi de Gauss et figure II - 8 pour la loi de Gram - Charlier.

Nous constatons que ces deux lois peuvent nous servir pour définir la probabilité d'apparition d'une surtension  $s$  ; cependant la loi de Gram - Charlier est plus représentative, surtout pour les valeurs de  $S$  en-dessous de la moyenne.

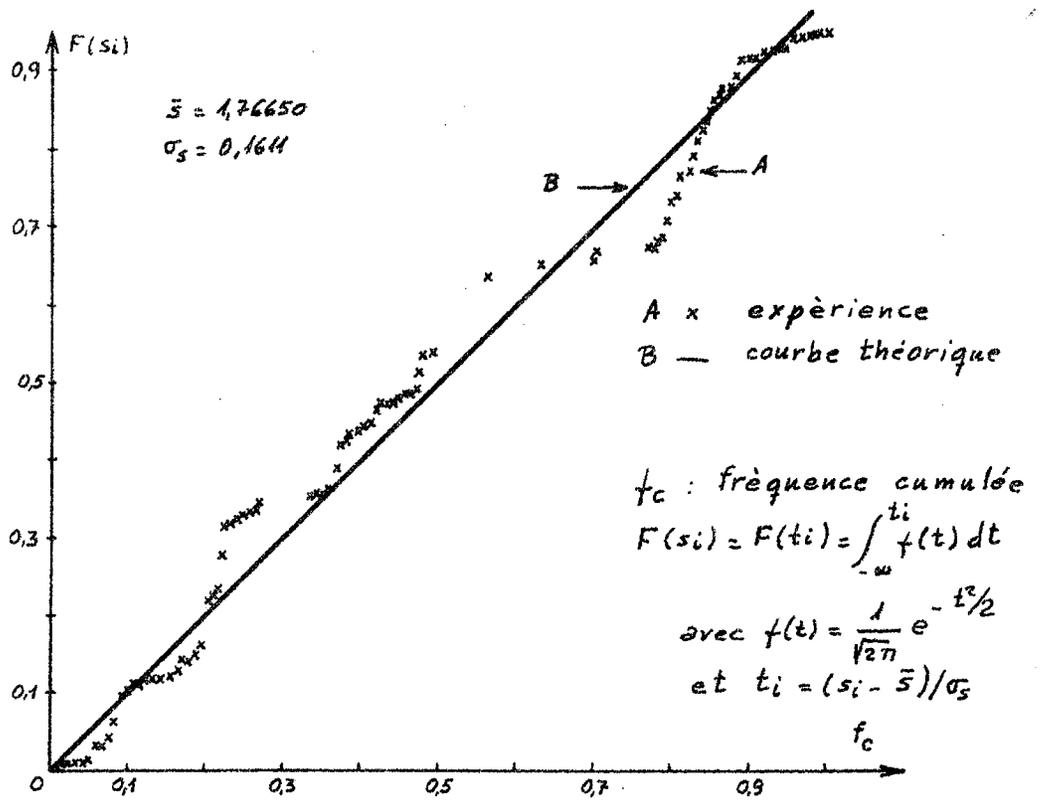


Fig. II-7 Essai de la loi normale  $R_F = 500 \Omega$   $\tau_i = 10 \text{ ms}$

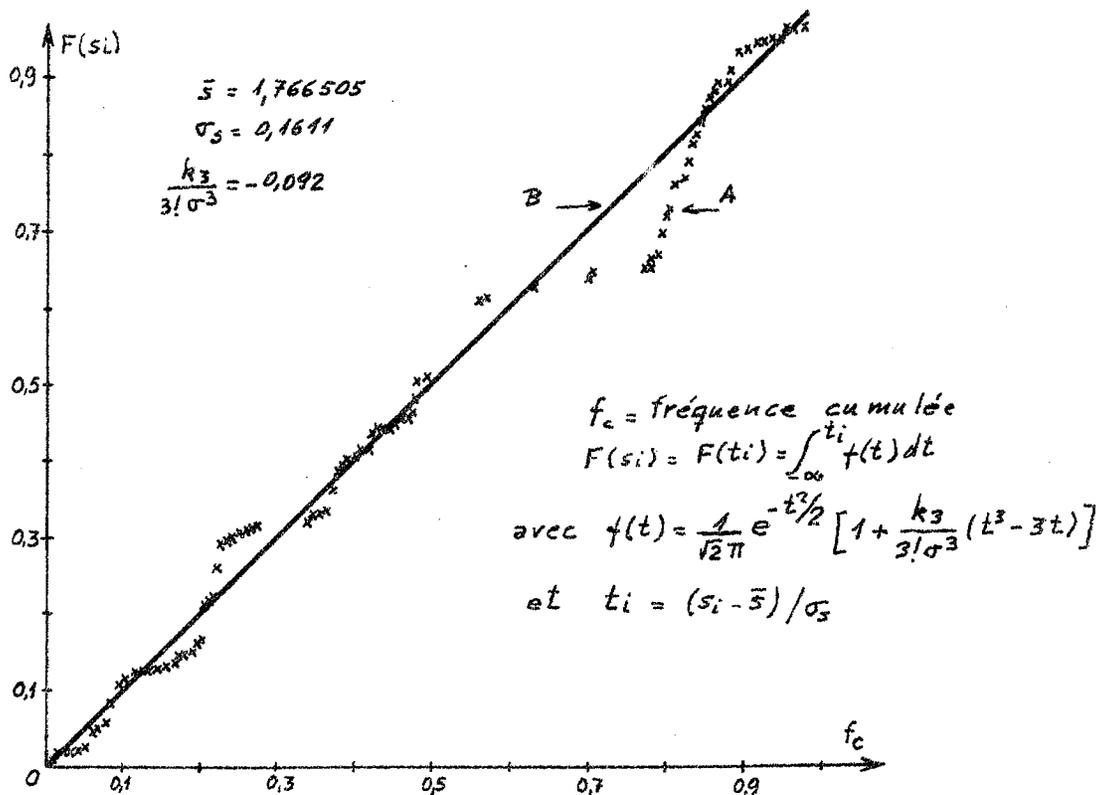


Fig II-8 Essai de la loi de Gram-Charlier limitée au 3<sup>ème</sup> terme  $R_F = 500 \Omega$   $\tau_i = 10 \text{ ms}$

C) Variation de la moyenne et de la dispersion  
en fonction de la résistance d'enclenchement

Afin de trouver la résistance optimum donnant les surtensions les plus basses, nous avons fait des essais statistiques pour  $R_F = 50 \Omega$ ,  $200 \Omega$ ,  $300 \Omega$  et  $800 \Omega$  dont les résultats sont groupés dans les tableaux IX, X, XI et XII.

Ces essais nous permettent de déterminer complètement la loi statistique de  $S$  en fonction de la résistance d'enclenchement. Nous avons tracé les courbes  $\bar{S} (R_F/Z_{02})$  et  $\sigma_S (R_F/Z_{02})$  figures II - 9 et II - 10. Ces courbes permettent, pour  $R_F > Z_{02}$ , de prédire, en utilisant la loi normale, la probabilité d'apparition de n'importe quelle surtension quand on enclenche le disjoncteur :

$$P (S < s_a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_S (R_F/Z_{02})} \int_{-\infty}^{s_a} e^{-\frac{(\beta - \bar{S}(R_F/Z_{02}))^2}{2\sigma^2(R_F/Z_{02})}} d\beta$$

En posant  $\alpha = R_F/Z_{02}$  nous montrons d'autre part, que ses courbes présentent un minimum pour  $\alpha = 0,8$  ; la surtension moyenne et la dispersion correspondantes étant respectivement 1,465 et 0,11. Nous pouvons en conclure qu'avec une résistance  $R_F = 0,8 Z_{02}$  il est possible de réduire les surtensions maximales à une valeur moyenne de 1,465, la probabilité d'apparition de surtensions plus élevées étant distribuée suivant la loi de  $S$  qui possède la plus faible dispersion ( $\sigma_S = 0,11$ ).

Pour cette valeur de  $R_F$ , en utilisant la loi normale, nous pouvons dire que la probabilité pour que  $S$  dépasse  $1,465 + 2 \times 0,11 = 1,685$  est de 2 %

surtections

T <sub>1</sub>	T <sub>2</sub>	T <sub>3</sub>	P	q=1256	4894	2198	4522	5589	f <sub>c</sub>
10	10	13484	1/8	4,321830	1,5889682	1,1938674	1,3746179	1,7144655	0,0041
10	10	6536	1/8	4,418572	1,7422145	1,6954232	1,5284524	1,6393336	0,0011
10	13484	10	1/8	4,492297	1,2043333	1,3075827	1,4517208	1,3833093	0,0041
10	6536	10	1/8	4,418572	1,2650754	1,3800040	1,3986908	1,539467	0,0011
10	10	10	1/3	4,572225	1,4992886	1,5722669	1,5624437	1,557482	0,0066
13484	10	10	1/8	4,4722807	1,5636764	1,5724070	1,7175780	1,4468527	0,0011
6536	10	10	1/8	4,5703002	1,423804	1,418862	1,7022065	1,3393357	0,0041
4589	13484	10	1/8	4,527320	1,5515077	1,499308	1,5200827	1,472888	0,0055
4589	8450	10	1/8	4,488247	1,56488	1,5794452	1,471406	1,844758	0,0055
4589	10	13484	1/8	4,401562	1,650322	1,596497	1,497677	1,572422	0,0055
4589	10	8450	1/8	4,481913	1,698099	1,648277	1,673286	1,517468	0,0055
8450	13484	10	1/8	4,502405	1,3396885	1,282248	1,520165	1,48821	0,0055
8450	8450	10	1/8	4,451793	1,356609	1,480249	1,44272	1,515492	0,0055
8450	10	4589	1/8	4,376090	1,448057	1,485875	1,447747	1,46315	0,0055
8450	10	8450	1/8	4,713816	1,594577	1,442248	1,4827695	1,433372	0,0055
10	4589	4589	1/8	4,48203	1,451483	1,359551	1,468458	1,574169	0,0055
10	4589	8450	1/8	4,610033	1,538881	1,406052	1,645299	1,42878	0,0055
10	8450	4589	1/8	4,219769	1,404833	1,601596	1,467908	1,676000	0,0055
10	8450	8450	1/8	4,496727	1,594594	1,684200	1,514153	1,723559	0,0055

Tableau XI  
Rf=300Ω

Surtections déclenchements

T<sub>1</sub> = 10ms  
T<sub>1</sub>' = T<sub>2</sub>' = T<sub>3</sub>' = 0

surtections

T <sub>1</sub>	T <sub>2</sub>	T <sub>3</sub>	P	q=1256	4894	2198	4522	5589	f <sub>c</sub>
10	10	13484	1/8	4,620598	1,949100	2,405309	1,697510	2,231336	0,0011
10	10	6536	1/8	4,704482	2,27022	2,335572	1,829797	2,323332	0,0011
10	13484	10	1/8	4,971459	1,674782	1,584682	1,958025	1,972413	0,0011
10	6536	10	1/8	4,981968	1,713751	1,605945	1,757702	1,882918	0,0011
10	10	10	1/3	2,069488	1,899588	2,03079	2,086448	2,086450	0,0066
13484	10	10	1/8	2,474998	2,194964	1,989361	2,226457	1,952722	0,0011
6536	10	10	1/8	2,306113	2,451161	1,786822	2,307255	1,748318	0,0011
4589	13484	10	1/8	2,474675	1,969288	1,922435	2,081375	1,947455	0,0055
4589	8450	10	1/8	1,988907	1,944092	2,077823	1,982787	2,203495	0,0055
4589	10	13484	1/8	1,818084	2,270326	2,223099	1,895352	2,063821	0,0055
4589	10	8450	1/8	2,084238	2,273104	2,322600	2,467407	2,221031	0,0055
8450	13484	10	1/8	2,226770	1,725265	1,739770	2,234558	1,705740	0,0055
8450	8450	10	1/8	1,919097	1,804264	1,864007	1,833597	2,015829	0,0055
8450	10	4589	1/8	1,838342	1,989378	2,028867	1,926837	1,908985	0,0055
8450	10	8450	1/8	2,482885	2,251010	2,024539	2,224892	1,893268	0,0055
10	4589	4589	1/8	1,925864	1,944153	1,728749	1,947029	1,920222	0,0055
10	4589	8450	1/8	2,140038	2,226550	1,973735	2,187262	1,785853	0,0055
10	8450	4589	1/8	1,734565	1,64984	1,934978	1,7141024	2,17948	0,0055
10	8450	8450	1/8	2,000903	2,025353	2,088288	2,016815	2,275214	0,0055

Tableau XII  
Rf=800Ω

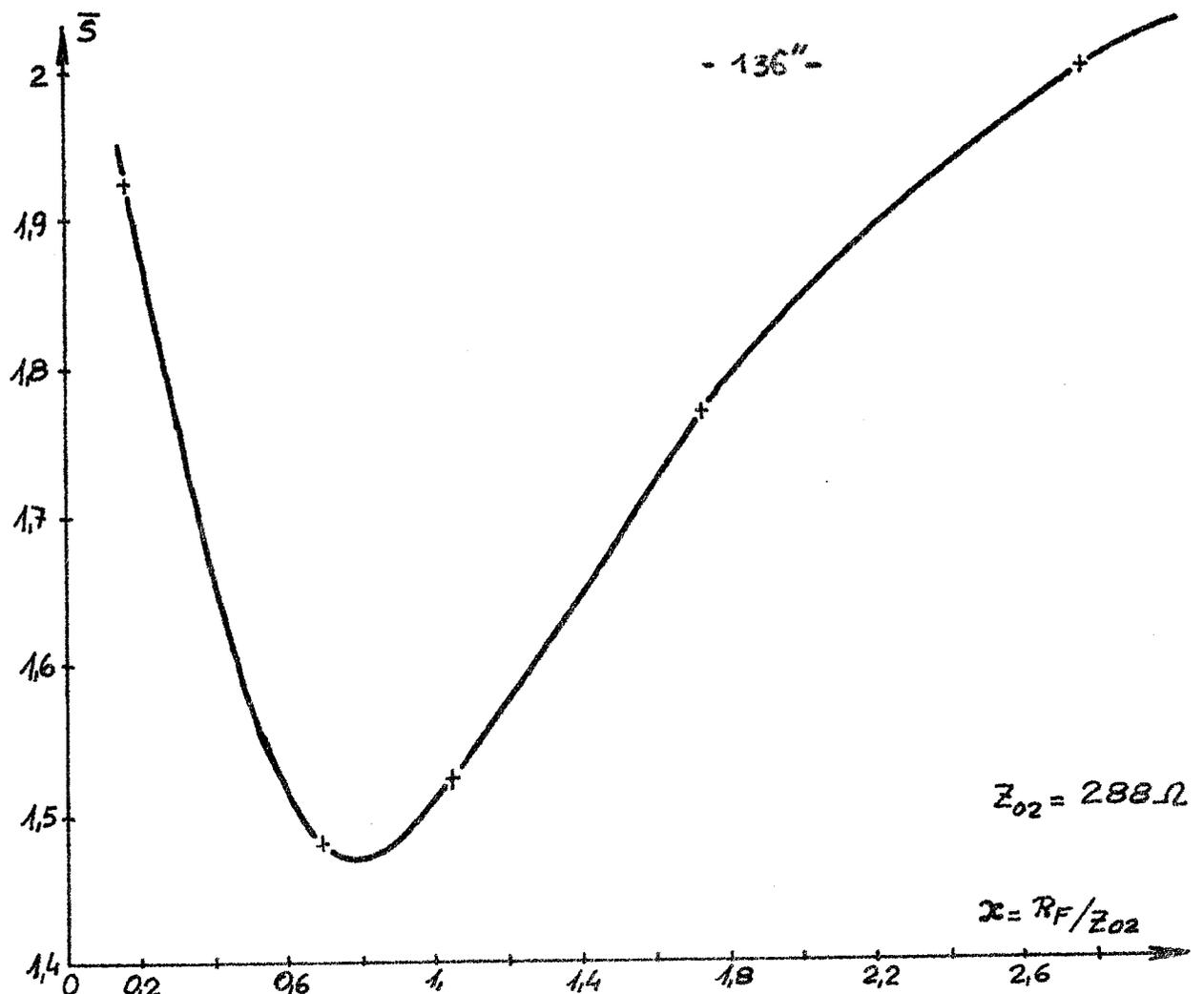


Fig. II-9 Variation de  $\bar{S}$  en fonction de  $R_F$

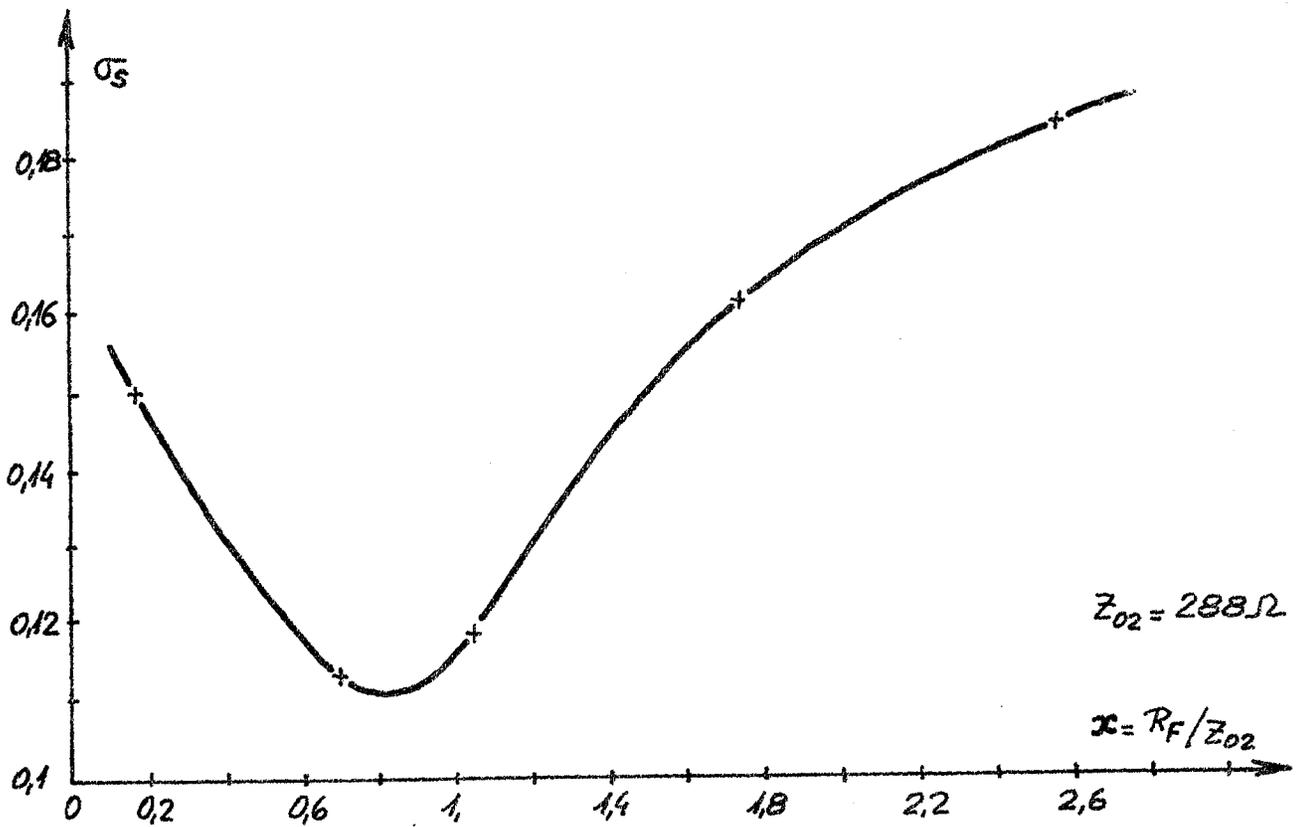


Fig. II-10 Variation de  $\sigma_S$  en fonction de  $R_F$

autrement dit que la surtension quand on manoeuvre le disjoncteur est presque sûrement inférieur à 1,7 . Nous avons pour cette valeur de  $R_F$  ,  $\beta_2 = 1/9$  ce qui permet à postériori de négliger l'influence d'une charge initiale quelconque .

## II - 43 - CONCLUSIONS

L'étude statistique que nous venons de faire nous a permis de définir complètement la loi de probabilité de  $S$  directement utilisable dans la détermination du niveau d'isolement de la ligne équipée d'un disjoncteur à une résistance. Elle permet de chiffrer le risque couru quand nous manoeuvrons le disjoncteur . Ce risque étant minimum quand la résistance est voisine de  $Z_{02}$  .

Cette étude nous permet par ailleurs de tirer des conclusions sur la réduction des surtensions à l'aide du contrôle de  $\varphi$  ou d'un disjoncteur équipé de deux résistances .

### A) Contrôle de $\varphi$

Dans le cadre de l'enclenchement sur une seule résistance , nous avons pensé que le contrôle de  $\varphi$  (instant moyen de fermeture des contacts de résistances) pouvait réduire d'avantage les surtensions . Les courbes de la moyenne des surtensions quand  $\varphi$  est fixé pour  $R_F = 300\Omega$ ,  $500\Omega$  et  $800\Omega$  présentent en effet un minimum vers  $80^\circ$  . Toutefois, ce minimum n'est pas étalé et la variation de  $\bar{S}_\varphi$  n'est que de 2% autour de la valeur moyenne des courbes obtenues . Le contrôle de  $\varphi$  n'apporte donc pas de gain sur la surtension

### B) Enclenchement sur deux résistances

Dans le cas où nous cherchons à réduire les surtensions à l'aide de deux résistances de fermeture , la figure II-9 peut nous aider à choisir ces résistances . Soit  $\bar{S}_1$  la surtension moyenne produite quand on enclenche avec un disjoncteur muni d'une seule résistance  $R_{F1}$  . Considérons un disjoncteur muni de deux résistances et désignons par  $R_{F1}$  la première résistance à insérer et par  $R_{F2}$  la seconde. Les temps d'insertion des résistances seront choisis suffisamment grand.

surtensions

$\varphi = 1,256$	1,884	2,198	4,522	5,589	$T_1'$	$T_2'$	$T_3'$ (ms)
1,872198	1,762369	1,843057	1,822975	1,946537	0	0	1,732
1,908294	1,781573	2,127862	1,880102	2,272256	0	0	-1,732
1,867433	1,824623	1,891453	1,862990	1,812091	0	1,732	0
1,882560	1,799494	1,907230	1,769379	1,872750	0	-1,732	0
1,856337	2,015242	1,867234	1,932221	1,867209	1,732	0	0
2,213755	2,204891	1,955685	2,229962	1,748188	-1,732	0	0

Tableau IX  $R_F = 50 \Omega$   $\tau_L = 10 \text{ ms}$   $T_1 = T_2 = T_3 = 10 \text{ ms}$

surtensions

$\varphi = 1,256$	1,884	2,198	4,522	5,589	$T_1'$	$T_2'$	$T_3'$
1,451186	1,442224	1,532423	1,423547	1,514575	0	0	1,732
1,425830	1,418162	1,824246	1,410447	1,754907	0	0	-1,732
1,370786	1,391672	1,457137	1,382130	1,416909	0	1,732	0
1,426684	1,412415	1,421697	1,370955	1,405791	0	-1,732	0
1,536593	1,514719	1,363110	1,519659	1,383338	1,732	0	0
1,692432	1,695753	1,482595	1,748232	1,365574	-1,732	0	0

Tableau X  $R_F = 200 \Omega$   $\tau_L = 10 \text{ ms}$   $T_1 = T_2 = T_3 = 10 \text{ ms}$

Surtensions d'enclenchement

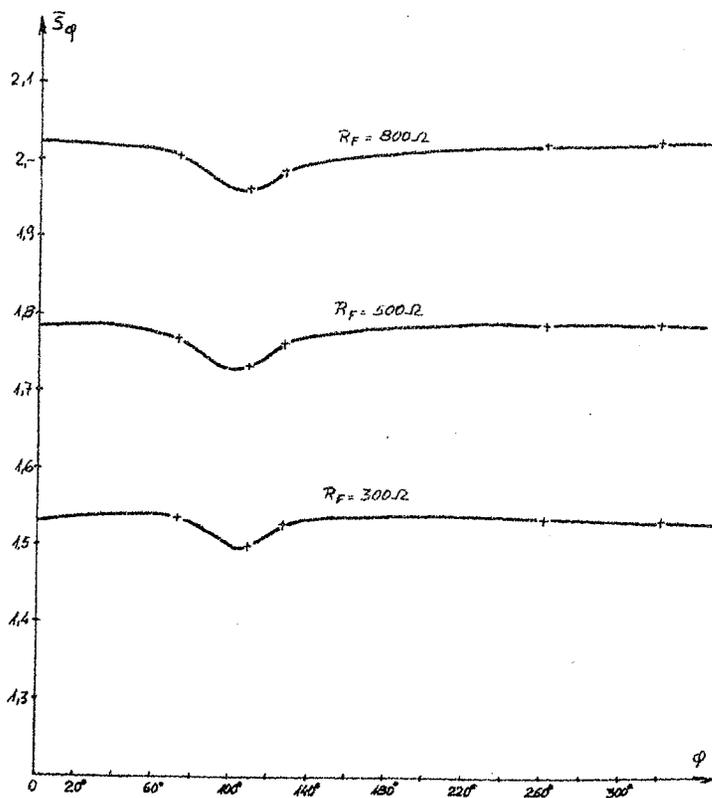


Fig. II-11 Moyenne de la surtension quand  $\varphi$  est fixée en fonction de  $\varphi$

Si  $R_{F1}$  est supérieure à  $Z_{02}$ , ce n'est qu'en enclenchant  $R_{F2}$  que nous produisons une première surtension. Celle-ci en moyenne ne peut être supérieure à  $\bar{s}_1$  et, pour  $R_{F2}$  fixée elle est minimum quand  $R_{F1}$  est voisine de  $Z_{02}$ .

D'autre part, quand nous court-circuitons  $R_{F1}$  sur  $R_{F2}$ , nous envoyons un échelon  $(R_{F1} - R_{F2}) i(\lambda, t)$  au lieu de  $R_{F1} i(\lambda, t)$  si  $R_{F1}$  était seule. La surtension additionnelle occasionnée par cette manoeuvre passe donc de  $\bar{s}_1' \propto R_{F1} i(\lambda, t)$  à  $\bar{s}_2' \propto (R_{F1} - R_{F2}) i(\lambda, t)$

$$\text{=====> } \bar{s}_2' = k \bar{s}_1' \left( 1 - \frac{R_{F2}}{R_{F1}} \right)$$

( avec  $k < 1$  et inversement proportionnel à  $R_{F2}$  )

Pour les valeurs de  $R_{F1} > Z_{02}$ ,  $\bar{s}_1'$  est d'autant plus grand que  $R_{F1}$  est grand. En effet, la surtension produite par l'enclenchement de  $R_{F1}$  décroît quand  $R_{F1}$  croît et la surtension totale  $\bar{s}_1$  croît avec  $R_{F1}$ . Donc pour  $R_{F2}$  fixée  $\bar{s}_2'$  est minimum quand  $R_{F1} = Z_{02}$  ( figure II - 9 ) .

De plus pour  $R_{F1}$  fixée :

- 1)  $\bar{s}_2'$  est d'autant plus faible que  $R_{F2}$  est proche de  $R_{F1}$  .
- 2) Le court-circuit de  $R_{F2}$  donne une surtension d'autant plus faible que  $R_{F2}$  est petit .

Il existe donc une valeur optimale de  $R_{F2}$  pour  $R_{F1}$  donnée .

Cette étude nous montre ainsi que contrairement au choix proposé habituellement,  $R_{F1}$  doit être voisine de  $Z_{02}$  la recherche de  $R_{F2}$  optimale se fait ensuite vers les valeurs inférieures à  $Z_{02}$  .

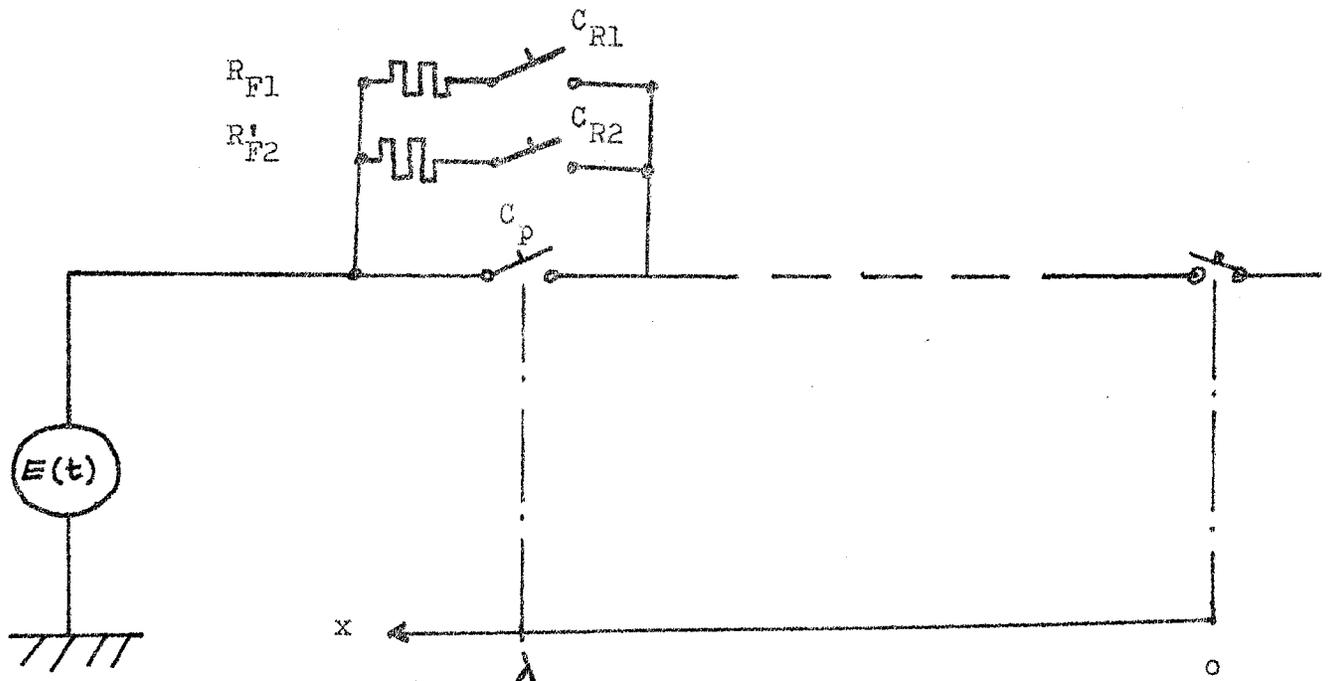
Nous allons , dans les chapitres suivants , montrer comment déterminer la valeur optimale de  $R_{F2}$  .

II-5 APPLICATION A LA DETERMINATION DU COUPLE DE RESISTANCE OPTIMUM D'UN DISJONCTEUR EQUIPE DE DEUX RESISTANCES .

II-51 ETUDE THEORIQUE.

La réduction des surtensions de manoeuvre à l'aide d'un disjoncteur muni de deux résistances est à l'heure actuelle la méthode la plus préconisée . Cependant le choix des résistances  $R_{F1}$  et  $R_{F2}$  est encore assez arbitraire . Après avoir indiqué qu'il était préférable de choisir  $R_{F1}$  voisine de  $Z_{02}$  et démontré l'existence d'une résistance  $R_{F2}$  optimale, nous montrons ci-dessous qu'il est possible de localiser  $R_{F2}$  optimale en utilisant la courbe  $\bar{S}( R_F/Z_{02} )$  et la surtension permanente quand  $R_{F1}$  est enclenchée . La méthode est basée sur le calcul, à partir de ces informations, de la surtension additionnelle obtenue quand nous enclenchons la deuxième résistance du disjoncteur .

Considérons l'enclenchement d'une ligne monophasée munie d'un disjoncteur à deux résistances; le générateur est supposé de puissance infinie .



$$R_{F1} > Z_{02}$$

$$( R_{F1} // R_{F2} ) = R_{F2} < Z_{02}$$

Quand  $C_{R1}$  est enclenchée, les équations définissant le système sont :

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial x} = r i + l \frac{\partial i}{\partial t} \\ \frac{\partial i}{\partial x} = g v + c \frac{\partial v}{\partial t} \end{cases}$$

II-511

$$\begin{cases} E(t) = R_{F1} i(\lambda, t) + v(\lambda, t) \\ i(0, t) = 0 \end{cases} \quad \forall t$$

$$\begin{cases} i(x, 0) = 0 \\ v(x, 0) = Q \end{cases} \quad \forall x$$

Nous avons déjà calculé la solution de ce système et montré qu'à partir d'un temps d'insertion  $\tau_{i1}$  le régime permanent est atteint. Soient  $i_{F1}$  et  $v_{F1}$  les solutions en régime permanent.

\* A l'instant  $\tau_{i1}$  choisi comme nouvelle origine, enclenchons  $C_{R2}$ . Nous pouvons chercher la nouvelle solution  $(v, i)$  comme la somme de l'état permanent précédent et d'un état transitoire  $(v_n, i_n)$  introduit par la perturbation créée en enclenchant  $C_{R2}$ .  $v_n$  et  $i_n$  doivent vérifier le système.

$$\begin{cases} \frac{\partial v_{F1}}{\partial x} + \frac{\partial v_n}{\partial x} = r i_{F1} + l \frac{\partial i_{F1}}{\partial t} + r i_n + l \frac{\partial i_n}{\partial t} \\ \frac{\partial i_{F1}}{\partial x} + \frac{\partial i_n}{\partial x} = g v_{F1} + c \frac{\partial v_{F1}}{\partial t} + g v_n + c \frac{\partial v_n}{\partial t} \end{cases}$$

II-511'

$$\begin{cases} E(t) = R_{F2} i_{F1}(\lambda, t) + v_{F1}(\lambda, t) + v_n(\lambda, t) + R_{F2} i_n(\lambda, t) \\ i_n(0, t) + i_{F1}(0, t) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} i_n(x, 0) + i_{F1}(x, 0) = i_{F1}(x, 0) \\ v_n(x, 0) + v_{F1}(x, 0) = v_{F1}(x, 0) \end{cases} \quad \forall x$$

$v_{F1}$  et  $i_{F1}$  étant solutions du système II-511, en écrivant d'autre part, que  $E(t) - v_{F1}(x, t) = R_{F1} i_{F1}(x, t)$  le système II-511' devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v_n}{\partial x} = r i_n + l \frac{\partial i_n}{\partial t} \\ \frac{\partial i_n}{\partial x} = g v_n + c \frac{\partial v_n}{\partial t} \end{array} \right.$$

II-512

$$\left\{ \begin{array}{l} (R_{F1} - R_{F2}) i_{F1}(\lambda, t) = R_{F2} i_n(\lambda, t) + v_n(\lambda, t) \\ i_n(0, t) = 0 \end{array} \right. \quad \forall t$$

$$\left\{ \begin{array}{l} i_n(x, 0) = 0 \\ v_n(x, 0) = 0 \end{array} \right. \quad \forall x$$

La surtension additionnelle produite dans ce second régime transitoire est donc due au pseudo-enclenchement de la ligne déchargée à travers une résistance  $R_{F2}$ , la tension au générateur étant

$$(R_{F1} - R_{F2}) i_{F1}(\lambda, t).$$

Le courant  $i_{F1}(\lambda, t)$  caractérisant un régime permanent est sinusoïdal ; il nous suffira donc de connaître sa valeur maximale pour pouvoir statuer sur la grandeur de la surtension additionnelle précédente.

En régime permanent, nous obtenons avec des notations évidentes

$$\begin{aligned} E - R_{F1} (I_{F1})_{\lambda} &= (V_{F1})_0 \operatorname{ch} n\lambda \\ (I_{F1})_{\lambda} &= \frac{(V_{F1})_0}{Z_c} \operatorname{sh} n\lambda \end{aligned}$$

d'où nous tirons :

$$\text{II-513} \quad |(V_{F1})_0| = \frac{|E|}{|\operatorname{ch} n\lambda + (R_{F1}/Z_c) \operatorname{sh} n\lambda|}$$

$$\text{II-514} \quad |(I_{F1})_\lambda| = \frac{|E|}{|Z_c| |\operatorname{ch} n\lambda + (R_{F1}/Z_c) \operatorname{sh} n\lambda|} |\operatorname{sh} n\lambda|$$

L'égalité II-513 nous donne la surtension due au régime permanent consécutif à l'enclenchement de  $R_{F1}$ , la figure II - 9 nous permet de connaître la surtension produite pendant le second régime transitoire quand  $R_{F2} = 0$  et, à partir de là, la surtension quand  $R_{F2}$  est quelconque mais inférieure à  $Z_{02}$ .

En effet, si pour simplifier les calculs, nous prenons l'exemple d'une ligne sans perte ; pour  $R_{F1} = Z_{02}$  et  $R_{F2} = 0$ ,  $|(V_{F1})_0| = |E|$  et la surtension moyenne produite par  $Z_{02}$   $i_{Z_{02}}(\lambda, t)$  sera donc égale à la surtension totale donnée par la courbe  $\bar{s}(R_F/Z_{02})$  moins un. Nous noterons cette valeur  $\bar{s}'_0$ .

Nota : Dans le cas envisagé  $Z_{02} | (I_{Z_{02}}) | = |E| \sin q\lambda$  et comme nous enclenchons sur une résistance nulle la valeur maximum de  $\bar{s}'_0$  est telle que :

$$\bar{s}'_0 \max |E| = 2 |E| \sin q\lambda \implies \bar{s}'_0 \max = 2 \sin q\lambda$$

Connaissant  $\bar{s}'_0$  nous pouvons déterminer la surtension moyenne  $\bar{s}'_1$  produite par le pseudo-enclenchement de  $R_{F1} i_{F1}(\lambda, t)$  sur une résistance nulle.

$$\bar{s}'_1 = \frac{R_{F1} Y_c}{\sqrt{\cos^2 q\lambda + (R_{F1} Y_c)^2 \sin^2 q\lambda}} \bar{s}'_0$$

Les courants  $i_{F1}(\lambda, t)$  ont en effet la même forme et ne diffèrent que par leur valeur maximum.

Lors du pseudo-enclenchement de  $(R_{F1} - R_{F2}) i_{F1}(\lambda, t)$  sur  $R_{F2}$  la surtension moyenne produite sera donc, puisque  $R_{F2} < Z_{02}$  :

$$\bar{s}'_2 = \frac{1}{(1 + R_{F2} Y_c)} \frac{(R_{F1} - R_{F2}) Y_c}{\sqrt{\cos^2 q\lambda + (R_{F1} Y_c)^2 \sin^2 q\lambda}} \bar{s}'_0$$

\* A l'instant  $\tau_{i2}$  suffisant pour que le régime permanent soit établi après le deuxième enclenchement, fermons le contact principal  $C_p$ . La surtension additionnelle produite par cette manoeuvre est celle d'un pseudo-enclenchement de  $R_{F2} i_{F2}(\lambda, t)$  sur une résistance nulle. Le même raisonnement que précédemment donne sa valeur moyenne.

$$\bar{s}'_3 = \frac{R_{F2} Y_c}{\sqrt{\cos^2 q\lambda + (R_{F2} Y_c)^2 \sin^2 q\lambda}} \bar{s}'_0$$

La surtension totale  $\bar{s}_t$  consécutive à la manoeuvre complète du disjoncteur sera due soit à la surtension correspondant au régime permanent de l'enclenchement de  $R_{F1}$  augmentée de  $\bar{s}'_2$  soit à la surtension correspondant au régime permanent de l'enclen-

chement de  $R_{F2}$  augmentée de  $\bar{s}'_3$ .

$$\bar{s}_t = \begin{cases} \bar{s}'_t = \bar{s}'_2 + \frac{1}{\sqrt{\cos^2 q \lambda + (R_{F1} Y_c)^2 \sin^2 q \lambda}} \\ \text{ou} \\ \bar{s}''_t = \bar{s}'_3 + \frac{1}{\sqrt{\cos^2 q \lambda + (R_{F2} Y_c)^2 \sin^2 q \lambda}} \end{cases}$$

$\bar{s}'_t$  croît quand  $R_{F2}$  décroît, d'autre part, avec une ligne longue d'environ 300 Km  $q\lambda \neq \pi/10 \Rightarrow \sin^2 q\lambda \neq 0,1$  :

donc  $R_{F2} < \bar{z}_{02}$  entraîne  $\bar{s}''_t \neq \frac{1}{\cos q\lambda} + \frac{\bar{s}'_0 R_{F2} Y_c}{\cos q\lambda}$  d'où

$\bar{s}''_t$  croît quand  $R_{F2}$  croît. Il existe donc une valeur optimale de  $R_{F2}$  pour  $R_{F1}$  fixée et elle correspond à  $\bar{s}''_t = \bar{s}'_t$ .

$$\frac{1}{\cos q\lambda} + \frac{\bar{s}'_0 R_{F2} Y_c}{\cos q\lambda} = \left( 1 + \frac{\bar{s}'_0 (R_{F1} - R_{F2}) Y_c}{(1 + R_{F2} Y_c)} \right) \frac{1}{\sqrt{\cos^2 q\lambda + (R_{F1} Y_c)^2 \sin^2 q\lambda}}$$

Si nous choisissons  $R_{F1} = \bar{z}_{02}$  comme nous l'indiquons et posons  $x = R_{F2} Y_c$  nous avons à résoudre :

$$\frac{1}{\cos q\lambda} + \frac{\bar{s}'_0 x}{\cos q\lambda} = 1 + \bar{s}'_0 \frac{(1-x)}{(1+x)}$$

$$1 + \bar{s}'_0 x = \cos q\lambda + \bar{s}'_0 \frac{(1-x)}{(1+x)} \cos q\lambda$$

Pour une ligne de 300 Km  $\cos q\lambda \neq 1$  et la résolution graphique donne  $x_0 \neq \sqrt{2} - 1 = 0,414$ .

II - 52 - Etude expérimentale.

Nous avons analysé théoriquement comment se produisent les surtensions lors de l'enclenchement d'une ligne monophasée à travers un disjoncteur muni de deux résistances. Avec une ligne triphasée le processus de créations des surtensions demeure le même malgré le désynchronisme des contacts du disjoncteur. La surtension est due soit à la fermeture des contacts  $C_{R2}$  après un régime quasi permanent pendant lequel  $R_{F1}$  est enclenchée, soit à la fermeture des contacts principaux après un régime quasi permanent pendant lequel  $R_{F2}$  est enclenchée. La quasi permanence des régimes cités est liée au temps d'insertion que nous supposons choisi selon la méthode déjà indiquée.

La localisation de  $R_{F2}$  optimale est donc possible en utilisant le raisonnement déjà décrit.

Pratiquement cette localisation peut se faire à partir d'essais sur la ligne avec un disjoncteur équipé d'une résistance.

Ces essais consistent, en posant  $x=R_F/Z_0$ , à :

1°) Tracer, en fonction de  $x$  pour  $x > 1$ , la courbe  $\bar{S}_p(x)$  des surtensions maximales en régime permanent lorsque la résistance  $R_F$  du disjoncteur est enclenchée. Ces surtensions indépendantes du désynchronisme des contacts du disjoncteur ne nécessitent que le relevé d'une courbe pour chaque  $R_F$ . Dans nos essais nous avons relevé les fluctuations du minimum à partir de 5 ms jusqu'à 40 ms.

2°) Tracer, en fonction de  $x$  pour  $x < 1$ , la courbe  $S_{F2}(x)$  des surtensions moyennes consécutives au court-circuit de la résistance  $R_F$  du disjoncteur après un temps

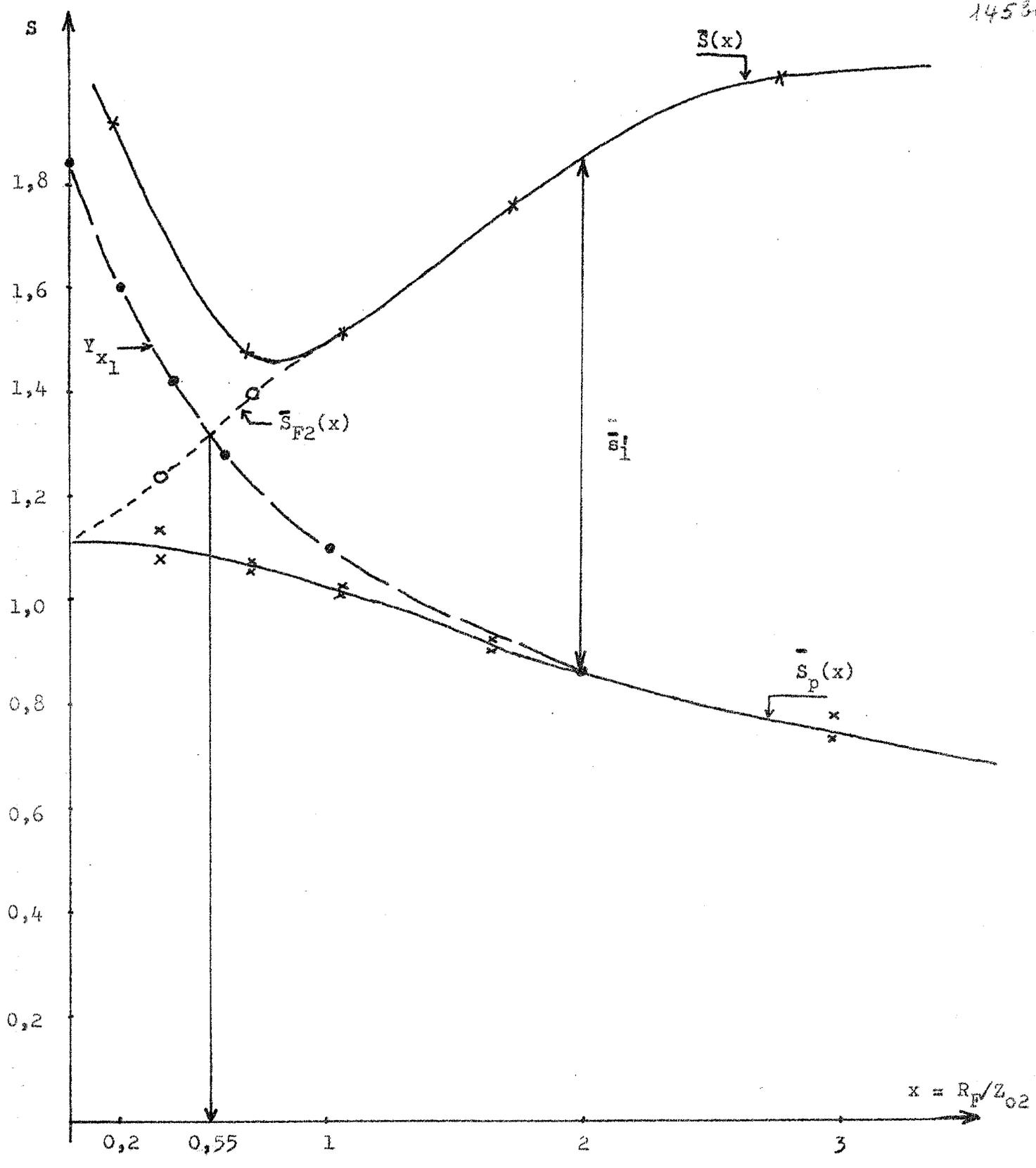


Figure II - 13

determination de la resistance  $R_{F2}$  optimale

d'insertion très grand. Cette étude est faite statistiquement en tenant compte du désynchronisme des contacts principaux.

3°) Tracer la courbe  $\bar{S}(x)$  pour  $x > 1$  c'est l'étude statistique que nous avons faite dans le paragraphe précédent.

Nous avons tracé ces différentes courbes sur la figure II - 13. En posant  $x_2 = R_{F2}/Z_{02}$  et  $x_1 = R_{F1}/Z_{02}$ , nous avons tracé sur la même figure la courbe  $Y_{x1} = \bar{S}'_1 \frac{1 - x_2/x_1}{1 + x_2} + \bar{S}_p(x_1)$  pour  $x_1 = 2$  dont l'intersection avec la courbe  $\bar{S}_{F2}(x)$  donne la résistance  $R_{F2}$  optimale et la surtension correspondant à la valeur de  $R_{F1} = 2Z_{02} = 576 \Omega$ . Nous trouvons  $R_{F2 op} = 0,55 Z_{02} = 158 \Omega$ . Il est donc possible à partir de la même construction de tracer  $R_{F2}$  optimale en fonction de  $R_{F1}$  et de choisir le couple qui donne la surtension la plus faible.

\* Nous remarquerons que  $\bar{S}_{F2}(x)$  est une continuation de la courbe  $\bar{S}(x)$  obtenue avec  $x > 1$ , ce qui confirme la justesse de notre analyse sur le processus de production des surtensions. Cette remarque peut, d'autre part, à la limite, permettre d'obtenir  $\bar{S}_{F2}(x)$  sans faire d'essais spécifiques.

### Conclusion.

La méthode que nous venons de développer permet de résoudre tous les problèmes relatifs à la limitation des surtensions par un disjoncteur équipé de deux résistances. Le nombre d'essais très réduit qu'elle nécessite par rapport à ceux que nous ferions sur un disjoncteur à deux résistances rend cette méthode très peu onéreuse. D'autre part, elle introduit dans le choix du couple  $(R_{F1}, R_{F2})$  une très grande liberté, ce qui peut être avantageux si nous voulons tenir compte des contraintes thermiques.

LEVEL 1 JUL 67

OS ALGOL F

DATE FE

## SOURCE PROGRAM

SC SOURCE STATEMENT

```

0000  'BEGIN' 'REAL' LD, LI, LH, CD, CI, CHC, RD, RI, RH, DT, DX, Z01, Z02, P1, P2, FIP,
0000  H11, H12, H21, H22, FR, FI, AMX, CH1, CH2, CH3, EPS ;
0001  'INTEGER' N1, N1, NF, NC, NR, ALL, NSC, V, FD, I, J, K, L, NC, NUM, EN1, EN2, EN3;
0002  'PROCEDURE' PROD(X3, Y3, Z3, P1, Q1, P2, N, M);
0003  'ARRAY' X3, Y3, Z3; 'INTEGER' N, M, P1, Q1, P2;
0005  'BEGIN' 'INTEGER' I1, J1; 'REAL' S2;
0007  'FOR' I1:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'
0008  'BEGIN' S2:=0;
0009  'FOR' J1:=1 'STEP' 1 'UNTIL' M 'DO'
0010  S2:=S2+X3(/I1+P1, J1+Q1/)*Y3(/J1+P2/);
0011  Z3(/I1/):=S2; 'END';
0012  'PROCEDURE' P30(A, B, C, P1, Q1, P2, Q2, N, P, Q);
0013  'ARRAY' A, B, C; 'INTEGER' P1, Q1, P2, Q2, N, P, Q;
0015  'BEGIN'
0016  'INTEGER' I, J, K;
0017  'REAL' S;
0018  'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'
0019  'FOR' J:=1 'STEP' 1 'UNTIL' Q 'DO'
0020  'BEGIN'
0021  S:=0;
0022  'FOR' K:=1 'STEP' 1 'UNTIL' P 'DO'
0023  S:=S+A(/I+P1, K+Q1/)*B(/K+P2, J+Q2/);
0024  C(/I, J/):=S;
0025  'END';
0026  'END';
0027  'PROCEDURE' PROD(X, AY, Z) ;
0028  'ARRAY' X, AY, Z ;
0029  'BEGIN' 'INTEGER' S ;
0030  'FOR' S:=1 'STEP' 1 'UNTIL' 3 'DO'
0031  Z(/S/) :=X(/S/)*AY(/S/);
0032  'END' ;
0033  'PROCEDURE' SOM(X4, Y4, Z4, N);
0034  'ARRAY' X4, Y4, Z4 ; 'INTEGER' N;
0035  'BEGIN' 'INTEGER' S1 ;
0036  'FOR' S1:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'
0037  Z4(/S1/):=X4(/S1/)+Y4(/S1/);
0038  'END' ;
0039  'PROCEDURE' INVERSION(A, B, N, IMPOS);
0040  'REAL' 'ARRAY' A, B; 'INTEGER' N; 'LABEL' IMPOS ;
0041  'CHANGE' 'BEGIN' 'REAL' 'ARRAY' A1(/1:N, 1:2*N/);
0042  'INTEGER' I, J, K; 'REAL' R, TR;
0043  'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'
0044  'FOR' J:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'
0045  'BEGIN' A1(/I, J/):=A(/I, J/); A1(/I, N+J/):=0.0; 'END';
0046  'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'

```

## SOURCE PROGRAM

```

SC      SOURCE STATEMENT
00043      A1(/I,N+I/):=1.0 ;
00044      TRIANGU:
00044      'FOR' K:=1          'STEP' 1          'UNTIL' N-1          'DO'
00044      'BEGIN'NORMAL: 'BEGIN' 'IF' (A1(/K,K/)<EPS) 'THEN' 'GOTO'ECHANGE;
00045      'FOR' I:=K+1        'STEP' 1          'UNTIL' N          'DO'
00045      'BEGIN'R:=A1(/I,K/)/A1(/K,K/);
00046      'FOR' J:=K+1        'STEP' 1          'UNTIL' N+K          'DO'
00046      A1(/I,J/):=A1(/I,J/)-R*A1(/K,J/); 'END'; 'END';
00049      'GOTO' RETOUR ;
00050      ECHANGE: 'BEGIN' 'INTEGER' L,M; M:=K+1 ;
00052      'FOR' L:=M 'WHILE' (A1(/L,K/)<EPS)&(LK=N) 'DO' M:=M+1 ;
00053      'IF' (M=N+1) 'THEN' 'GOTO' IMPDS ;
00054      'FOR' J:= K          'STEP' 1          'UNTIL' N+K          'DO'
00054      'BEGIN' R:=A1(/K,J/); A1(/K,J/):=A1(/M,J/); A1(/M,J/):=R ;
00057      'END'; 'GOTO' NORMAL ; 'END' ;
00060      RETOUR: 'END' ;
00061      RESOL:
00061      'BEGIN' 'INTEGER' I,J,K; 'IF' (A1(/N,N/)<EPS) 'THEN' 'GOTO' IMPDS;
00063      'FOR' J:= N          'STEP' -1          'UNTIL' 1          'DO'
00063      'FOR' I:= N          'STEP' -1          'UNTIL' 1          'DO'
00063      'BEGIN' TB:=0.0 ;
00064      'FOR' K:= N          'STEP' -1          'UNTIL' I+1          'DO'
00064      TB:=TB-B(/K,J/)*A1(/I,J/);
00065      B(/I,J/):=(TB+A1(/I,N+J/))/A1(/I,I/); 'END';
00067      'END';
00068      'END';
00069      SYSACT(1,12,0); SYSACT(1,6,132); SYSACT(1,8,55);
00072      SYSACT(1,12,1); SYSACT(1,15,1);
00074      INREAL(0,LD); INREAL(0,LI); INREAL(0,LH);
00077      INREAL(0,C); INREAL(0,C1); INREAL(0,CH0);
00080      INREAL(0,CD); INREAL(0,PI); INREAL(0,RH);
00083      INREAL(0,DT); INREAL(0,DX); INREAL(0,FR);
00086      INREAL(0,FI); INREAL(0,AMX);
00088      INREAL(0,H11); INREAL(0,H12);
00090      INREAL(0,H21); INREAL(0,H22);
00092      INREAL(0,CH1); INREAL(0,CH2); INREAL(0,CH3);
00095      ININTEGER(0,M1); ININTEGER(0,M1);
00097      INREAL(0,EPS);
00099      ININTEGER(0,V);
00099      ININTEGER(0,ED);
00100      ININTEGER(0,NE);
00101      ININTEGER(0,NO);
00102      ININTEGER(0,NR);
00103      ININTEGER(0,NLL);
00104      ININTEGER(0,NSC);
00105      'BEGIN'
00105      'PROCEDURE' DESEAU(CH,C,R,LL,A,T,G,PA,PH1,PH2,PH,NG);
00106      'REAL' 'ARRAY' C,R,IL,PA,PH1,PH2,PH,G,T ;

```

## SOURCE PROGRAM

```

50 SOURCE STATEMENT
00107      'INTEGER' 'ARRAY' A ,CH      ;
00108      'INTEGER' NG      ;
00109      'BEGIN'
00109      'ARRAY' PA1 (/1:4, 1:NC+NLL, 1:NC+NLL/), PA2 (/1:NC+NLL, 1:NC+NLL/),
00109      LLP (/1:NLL, 1:NLL/), PPA1, PPA2 (/1:NLL, 1:NC+NLL/),
00109      PPH (/1:NLL, 1:NC+NLL+NR/);
00110      'INTEGER' P, I, J, K, L      ;
00111      'IF' NR/=0 'THEN' 'BEGIN'
00111          L:=0 ;
00112          'FOR' I:=NE+NC+1 'STEP' 1 'UNTIL' NE+NC+NS 'DO'
00112          'FOR' K:=1 'STEP' 1 'UNTIL' V-1 'DO'
00112          'IF' A (/1, I/) = K 'THEN'
00112          'BEGIN'
00112              L:=L+1 ; NS:=L ;
00114              C (/L/) := B (/I-NE-NC/) ;
00115          'END' ;
00116          'IF' NR-NC /= 0 'THEN'
00116          'BEGIN'
00116              'FOR' L:=1 'STEP' 1 'UNTIL' NR-NC 'DO'
00116              'FOR' J:=NE+NC+1 'STEP' 1 'UNTIL' NE+NC+NR 'DO'
00116              'IF' CH (/L/) = J 'THEN' R (/L/) := 1/P (/J-NE-NC/) ;
00117          'END' ;
00118          'END' ;
00119          'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' NC 'DO'
00119          'FOR' J:=1 'STEP' 1 'UNTIL' NLL 'DO'
00119          'BEGIN'
00119              PA1 (/1, I, NC+J/) := T (/I, J+NR-NG/) ;
00120              PH (/NC+J, I/) := PH (/I, NC+NS+J/) := 0 ;
00121              PA1 (/1, J+NC, I/) := -T (/I, J+NR-NC/) ;
00122          'END' ;
00123          'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' NC 'DO'
00123          'FOR' J:=1 'STEP' 1 'UNTIL' NC 'DO'
00123          'IF' I=J 'THEN' PH (/I, J/) := 1 'ELSE' PH (/I, J/) := 0 ;
00124          'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' NLL 'DO'
00124          'FOR' J:=1 'STEP' 1 'UNTIL' NLL 'DO'
00124          'IF' I=J 'THEN' PH (/I+NC, J+NC+NR/) := 1 'ELSE'
00124              PH (/I+NC, J+NC+NR/) := 0 ;
00125          'IF' NR=0 'THEN'
00125          'BEGIN'
00125              'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' NC 'DO'
00125              'FOR' J:=1 'STEP' 1 'UNTIL' NC 'DO'
00125              PA1 (/1, I, J/) := 0 ;
00126              'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' NLL 'DO'
00126              'FOR' J:=1 'STEP' 1 'UNTIL' NLL 'DO'
00126              PA1 (/1, NC+I, NC+J/) := 0 ;
00127          'END' 'ELSE'
00127          'BEGIN'
00127          'IF' NG=0 'THEN'

```

SC	SOURCE STATEMENT	SOURCE PROGRAM
00127	'BEGIN'	
00127	'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' NC 'DO'	
00127	'FOR' K:=1 'STEP' 1 'UNTIL' NC 'DO'	
00127	'BEGIN'	
00127	PA1(/1,I,K/):=0 ;	
00128	'FOR' L:=1 'STEP' 1 'UNTIL' NR 'DO'	
00128	PA1(/1,I,K/):=PA1(/1,I,K/)-T(/I,L/)*R(/L/)*T(/K,L/);	
00128	'END' ;	
00130	'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' NLL 'DO'	
00130	'FOR' J:=1 'STEP' 1 'UNTIL' NLL 'DO'	
00130	PA1(/1,NC+I,NC+J/):=0 ;	
00131	'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' NC+NLL 'DO'	
00131	'FOR' J:=1 'STEP' 1 'UNTIL' NR 'DO'	
00131	'IF' I > NC 'THEN' PH(/I,J+NC/):=0 'ELSE'	
00131	PH(/I,J+NC/):=T(/I,J/)*R(/J/);	
00132	'END' 'ELSE' 'IF' NC=NR 'THEN'	
00132	'BEGIN'	
00132	'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' NC 'DO'	
00132	'BEGIN' 'FOR' J:=1 'STEP' 1 'UNTIL' NC 'DO' PA1(/1,I,J/):=0;	
00133	'FOR' K:=1 'STEP' 1 'UNTIL' NR 'DO' PH(/I,K+NC/):=0 ;	
00134	'END' ;	
00135	'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' NLL 'DO'	
00135	'FOR' K:=1 'STEP' 1 'UNTIL' NLL 'DO'	
00135	'BEGIN' PA1(/1,I+NC,K+NC/):=0 ;	
00136	'FOR' J:=1 'STEP' 1 'UNTIL' NG 'DO'	
00136	PA1(/1,I+NC,K+NC/):=PA1(/1,I+NC,K+NC/)-T(/J+NC,I/)	
00136	*C(/J/)*T(/J+NC,K/);	
00137	'END' ;	
00138	'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' NLL 'DO'	
00138	'FOR' J:=1 'STEP' 1 'UNTIL' NC 'DO'	
00138	PH(/I+NC,J+NC/):=-T(/J+NC,I/)*G(/J/);	
00139	'END' 'ELSE'	
00139	'BEGIN'	
00139	'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' NC 'DO'	
00139	'FOR' K:=1 'STEP' 1 'UNTIL' NC 'DO'	
00139	'BEGIN'	
00139	PA1(/1,I,K/):=0 ;	
00140	'FOR' L:=1 'STEP' 1 'UNTIL' NR-NC 'DO'	
00140	PA1(/1,I,K/):=PA1(/1,I,K/)-T(/I,L/)*R(/L/)*T(/K,L/);	
00141	'END' ;	
00142	'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' NLL 'DO'	
00142	'FOR' K:=1 'STEP' 1 'UNTIL' NLL 'DO'	
00142	'BEGIN'	
00142	PA1(/1,I+NC,K+NC/):=0 ;	
00143	'FOR' J:=1 'STEP' 1 'UNTIL' NC 'DO'	
00143	PA1(/1,I+NC,K+NC/):=PA1(/1,I+NC,K+NC/)-T(/J+NC,I+NR-NG/)	
00143	*C(/J/)*T(/J+NC,K+NR-NG/);	
00144	'END' ;	

## SOURCE PROGRAM

```

SC      SOURCE STATEMENT

00145      'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' NC+NLL 'DO'
00145      'FOR' J:=1 'STEP' 1 'UNTIL' NR-NC 'DO'
00145      'IF' I > NC 'THEN' PH(/I,J+NC+NC/):=0 'ELSE'
00145      PH(/I,J+NC+NG/):=T(/I,J/)*P(/J/);
00146      'FOR' J:=1 'STEP' 1 'UNTIL' NG 'DO'
00146      'BEGIN'
00146      'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' NC 'DO' PH(/I,J+NC/):=0;
00147      'FOR' K:=1 'STEP' 1 'UNTIL' NLL 'DO'
00147      PH(/I+K,NC+J/):=-T(/J+NC,K+NR-NC/);
00148      'END';
00149      'END';
00150      'END';
00151      'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' NC 'DO'
00151      'BEGIN'
00151      'FOR' J:=1 'STEP' 1 'UNTIL' NC+NLL 'DO'
00151      PA1(/I,I,J/):=PA1(/I,I,J/)*OT/C(/I/);
00152      'FOR' J:=1 'STEP' 1 'UNTIL' NC+NLL+NR 'DO'
00152      PH(/I,J/):=PH(/I,J/)/C(/I/);
00153      'END';
00154      INVERSION(LL,LLP,NLL,IMPCS);
00155      PRO(LLP,PH,PPH,0,0,NC,C,ALL,NLL,NLL+NC+NR);
00156      'FOR' I:=NC+1 'STEP' 1 'UNTIL' NC+NLL 'DO'
00156      'BEGIN'
00156      'FOR' J:=1 'STEP' 1 'UNTIL' NC+NLL+NR 'DO'
00156      PH(/I,J/):=PPH(/I-NC,J/);
00157      'FOR' J:=1 'STEP' 1 'UNTIL' NC+NLL 'DO'
00157      PPA1(/I-NC,J/):=PA1(/I,I,J/);
00158      'END';
00159      PRO(LLP,PPA1,PPA2,0,0,0,0,NLL,ALL,NC+NLL);
00160      'FOR' I:=NC+1 'STEP' 1 'UNTIL' NC+NLL 'DO'
00160      'FOR' J:=1 'STEP' 1 'UNTIL' NC+NLL 'DO'
00160      PA1(/I,I,J/):=PPA2(/I-NC,J/)*DT;
00161      'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' NLL+NC 'DO'
00161      'FOR' J:=1 'STEP' 1 'UNTIL' NLL+NC 'DO'
00161      'IF' J=I 'THEN' PAQ(/I,J/):=1 'ELSE' PAQ(/I,J/):=0;
00162      'FOR' P:=1 'STEP' 1 'UNTIL' 3 'DO'
00162      'BEGIN'
00162      'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' NC+NLL 'DO'
00162      'FOR' J:=1 'STEP' 1 'UNTIL' NC+NLL 'DO'
00162      'BEGIN' PA1(/P+1,I,J/):=0;
00163      'FOR' K:=1 'STEP' 1 'UNTIL' NC+NLL 'DO'
00163      PA1(/P+1,I,J/):=PA1(/P+1,I,J/)+PA1(/P,I,K/)*PA1(/I,K,J/);
00164      PA1(/P+1,I,J/):=PA1(/P+1,I,J/)/(P+1); 'END';
00166      'END';
00167      'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' NC+NLL 'DO'
00167      'FOR' J:=1 'STEP' 1 'UNTIL' NC+NLL 'DO'
00167      'BEGIN' PA(/I,J/):=PAQ(/I,J/);
00168      'FOR' P:=1 'STEP' 1 'UNTIL' 4 'DO'

```

## SOURCE PROGRAM

```

SC SOURCE STATEMENT
00168 PA(/I,J/):=PA(/I,J/)+PA1(/P,I,J/);
00169 PA2(/I,J/):=PAQ(/I,J/)*2*DT/3+PA1(/I,I,J/)*DT/3+PA1(/2,I,J/)*DT/6;
00170 PAQ(/I,J/):=PAQ(/I,J/)*DT/6+PA1(/I,I,J/)*DT/6+PA1(/2,I,J/)*DT/6
00170 +PA1(/3,I,J/)*DT/4 ;
00171 'END' ;
00172 PRG(PA0,PH,PH1,0,0,0,0,NC+NLL,NC+NLL,NC+NLL+NR) ;
00173 PRG(PA2,PH,PH2,0,0,0,0,NC+NLL,NC+NLL,NC+NLL+NR) ;
00174 'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' NC+NLL 'DO'
00174 'FOR' J:=1 'STEP' 1 'UNTIL' NC+NLL+NR 'DO'
00174 PH(/I,J/):=PH(/I,J/)*DT/3 ;
00175 'END' RESEARCH ;
00176 'ARRAY' CRL(/I:ED/),GAM(/I:V-1-NE,1:NSC/),
00176 TR(/I:V-1-NE,1:ED-V+1-NSC/) ;
00177 'INTEGER' 'ARRAY' AA(/I:V,1:ED/),N11,N2(/I:ED/),CH(/I:ED-V+1/),
00177 AA11,ALL(/I:V-1,1:ED-V+1/),A12(/I:V-1,1:V-1/),
00177 A(/I:V+1,1:ED/),NL(/2:V+1/),RTA(/I:NE,1:NSC/),
00177 ALF(/I:NE,1:ED-V+1-NSC/) ;
00178 'FOR' J:=1 'STEP' 1 'UNTIL' ED 'DO'
00178 'BEGIN'
00178 INREAL(0,CRL(/J/));
00179 ININTEGER(0,N11(/J/));
00180 ININTEGER(0,N2(/J/));
00181 'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' V 'DO'
00181 'IF' I=N11(/J/) 'THEN' AA(/I,J/):=1
00181 'ELSE' 'IF' I=N2(/J/) 'THEN' AA(/I,J/):=-1 'ELSE' AA(/I,J/):=0;
00182 'END';
00183 'FOR' L:=1 'STEP' 1 'UNTIL' ED 'DO'
00183 A(/I,L/):=0 ;
00184 'FOR' I:=2 'STEP' 1 'UNTIL' V+1 'DO'
00184 NL(/I/):=0 ;
00185 'FOR' J:=1 'STEP' 1 'UNTIL' ED 'DO'
00185 'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' V 'DO'
00185 A(/I+1,J/):=AA(/I,J/);
00186 'FOR' J:=1 'STEP' 1 'UNTIL' ED 'DO'
00186 'BEGIN'
00186 I:=? ;
00187 IF 'XF:
00187 'IF' (A(/I,J/) /= 0) & (NL(/I/)=0) 'THEN'
00187 'BEGIN'
00187 NL(/I/):=1 ;
00188 A(/I,J/):=I-1;
00188 K:=2 ;
00189 KFIXE:
00189 'IF' (K /= 1) & (A(/K,J/) /= 0) 'THEN'
00189 'BEGIN'
00189 'IF' A(/K,J/) /= A(/I,J/) 'THEN'
00189 'BEGIN'
00189 'FOR' L:=1 'STEP' 1 'UNTIL' ED 'DO'

```

SOURCE PROGRAM

```

00190      A(/K,L/):=A(/I,L/)+A(/K,L/)'END' 'ELSE'
00190      'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' ED 'DO'
00190      A(/K,L/):=A(/K,L/)-A(/I,L/);
00191      'IF' K < V+1 'THEN' 'BEGIN'
00191      K:=K+1 ;
00192      'GOTO' KFIXE ;
00193      'END' ;
00194      'END'
00194      'ELSE' 'IF' ((K /= I) & (A(/K,J/)=0) | (K=I)) & (K < V+1)
00194      'THEN' 'BEGIN' K:=K+1 ;
00195      'GOTO' KFIXE ;
00196      'END' ;
00197      'END' 'ELSE'
00197      'IF' ((A(/I,J/) /= 0) & (NL(/I/) /= 0) | (A(/I,J/)=0))
00197      & (I < V+1) 'THEN' 'BEGIN'
00197      I:=I+1 ;
00198      'GOTO' IFIXE ;
00199      'END' ;
00200      'END' ;
00201      L:=0;
00202      'FOR' J:=1 'STEP' 1 'UNTIL' ED 'DO'
00202      'BEGIN'
00202      'FOR' K:=1 'STEP' 1 'UNTIL' V-1 'DO'
00202      'IF' A(/I,J/)=K 'THEN'
00202      'BEGIN'
00202      'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' V-1 'DO'
00202      A12(/I,K/):=A(/I+1,J/);
00203      'END';
00204      'IF' A(/I,J/)=0 'THEN'
00204      'BEGIN'
00204      L:=L+I; CH(/L/):=J;
00206      'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' V-1 'DO'
00206      A11(/I,L/):=A(/I+1,J/);
00207      'END';
00208      'END';
00209      'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' V-1 'DO'
00209      'FOR' J:=1 'STEP' 1 'UNTIL' ED-V+1 'DO'
00209      A11(/I,J/):=-A12(/I,I/)*A11(/I,J/);
00210      'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' NE+NC 'DO'
00210      'FOR' K:=1 'STEP' 1 'UNTIL' V-1 'DO'
00210      'IF' A(/I,I/)=K 'THEN'
00210      'FOR' J:=1 'STEP' 1 'UNTIL' ED-V+1 'DO'
00210      AA11(/I,J/):=A11(/K,J/);
00211      'IF' NR /= 0 'THEN' 'BEGIN'
00211      L:=0 ;
00212      'FOR' I:=NE+NC+1 'STEP' 1 'UNTIL' NE+NC+NR 'DO'
00212      'FOR' K:=1 'STEP' 1 'UNTIL' V-1 'DO'
00212      'IF' A(/I,I/)=K 'THEN'

```

SOURCE PROGRAM

```

SC      SOURCE STATEMENT
00212      'BEGIN'
00212      L:=L+1 ; NG:=L ;
00214      'FOR' J:=1 'STEP' 1 'UNTIL' ED-V+1 'DO'
00214      AA11(/NE+NC+L,J/):=A11(/K,J/) ;
00215      'END' ;
00216      'END' ;
00217      'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' NE 'DO'
00217      'BEGIN'
00217      'FOR' J:=1 'STEP' 1 'UNTIL' ED-V+1-NSC 'DO'
00217      AL(/I,J/):=AA11(/I,J/) ;
00218      'FOR' K:=1 'STEP' 1 'UNTIL' NSC 'DO'
00218      BTA(/I,K/):=AA11(/I,K+ED-V+1-NSC/) ;
00219      'END' ;
00220      'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' V-1-NE 'DO'
00220      'BEGIN'
00220      'FOR' J:=1 'STEP' 1 'UNTIL' ED-V+1-NSC 'DO'
00220      TF(/I,J/):=AA11(/NE+I,J/) ;
00221      'FOR' K:=1 'STEP' 1 'UNTIL' NSC 'DO'
00221      GAM(/I,K/):=AA11(/NE+I,K+ED-V+1-NSC/) ;
00222      'END' ;
00223      'BEGIN'
00223      'PROCEDURE' 'AMBW'(XN,JE,JE1,EG,T,G,PA,PH1,PH2,PH,TAF,AV,BV,AC);
00224      'ASKAY' XN,JE,JE1,EG,T,G,PA,PH,PH1,PH2,AV,BV,TAF,AC ;
00225      'BEGIN'
00225      'ARRAY' GAM1(/I: NSC,1: NC/),GAM2,GAM3(/I: NSC,1: NG/), RF11,BC, ID,
00225      RF1(/I: NSC,1: NSC/),PF22,RF2(/I: NSC,1: NLL/),C1(/I: NC,1: NSC/),
00225      B1(/I: NLL,1: NSC/),IT1,IT2(/I: NC/),IT3,IT4(/I: NLL/),BV1(/I: NSC/);
00226      'INTEGER' I,J,K ;
00227      'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' 3 'DO'
00227      'FOR' J:=1 'STEP' 1 'UNTIL' 3 'DO'
00227      'BEGIN' AC(/I,J/):=0 ;
00228      'IF' J = I 'THEN' ID(/I,J/):=0 'ELSE' ID(/I,J/):=1 ;
00229      'END' ;
00230      'IF' N < INS2 'THEN'
00230      AC(/ORD1,ORD1/):=1 'ELSE' 'BEGIN'
00230      'IF' NKINS3 'THEN' AC(/ORD1,ORD1/):=AC(/ORD2,ORD2/):=1 'ELSE'
00230      AC(/ORD1,ORD1/):=AC(/ORD2,ORD2/):=AC(/ORD3,ORD3/):=1 ;
00231      'END' ;
00232      'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' 3 'DO'
00232      'FOR' J:=1 'STEP' 1 'UNTIL' 3 'DO'
00232      EC(/I,J/):=ID(/I,J/)-AC(/I,J/) ;
00233      'FOR' J:=1 'STEP' 1 'UNTIL' NSC 'DO'
00233      'BEGIN'
00233      'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' NC 'DO'
00233      GAM1(/J,I/):=GAM(/I,J/) ;
00234      'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' NC 'DO'
00234      GAM2(/I,I/):=GAM(/I+NC,J/) ;
00235      'END' ;

```

## SOURCE PROGRAM

```

SC      SOURCE STATEMENT

00236      'FOR'   I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' NSC 'DO'
00236      'FOR'   J:=1 'STEP' 1 'UNTIL' NG  'DO'
00236      GAM3(/I,J/):=GAM2(/I,J/)*G(/J/) ;
00237      PRD(GAM3,GAM,RF11,0,0,NC,0,NSC,NG,NSC) ;
00238      PRD(RF11,AC,RF1,0,0,0,0,3,3,3) ;
00239      PRD(GAM3,T,RF2,0,0,NC,NR-NG,NSC,NG,NLL) ;
00240      PRD(PH2,GAM,C1,0,0,0,0,NC,NC+NG,NSC) ;
00241      PRD(CAM1,C1,AV,0,0,0,0,NSC,NC,NSC) ;
00242      PRD(PH,GAM,C1,0,0,0,0,NC,NC+NG,NSC);
00243      'FOR'   I:=1 'STEP' 1 'UNTIL'   NSC 'DO'
00243      'FOR'   J:=1 'STEP' 1 'UNTIL'   NSC 'DO'
00243      RF1(/I,J/):=RF1(/I,J/)+AV(/I,J/)/2 ;
00244      PRD(CAM1,C1,AV,0,0,0,0,NSC,NC,NSC) ;
00245      'FOR'   I:=1 'STEP' 1 'UNTIL'   NSC 'DO'
00245      'FOR'   J:=1 'STEP' 1 'UNTIL'   NSC 'DO'
00245      RF1(/I,J/):=RF1(/I,J/)+AV(/I,J/)/2 ;
00246      PRD(PH2,GAM,D1,NC,0,0,0,NLL,NC+NG,NSC) ;
00247      PRD(RF2,D1,AV,0,0,0,0,NSC,NLL,NSC) ;
00248      PRD(PH,GAM,D1,AC,0,0,0,NLL,NC+NG,NSC) ;
00249      'FOR'   I:=1 'STEP' 1 'UNTIL'   NSC 'DO'
00249      'FOR'   J:=1 'STEP' 1 'UNTIL'   NSC 'DO'
00249      RF1(/I,J/):=RF1(/I,J/)+AV(/I,J/)/2 ;
00250      PRD(RF2,D1,AV,0,0,0,0,NSC,NLL,NSC) ;
00251      'FOR'   I:=1 'STEP' 1 'UNTIL'   NSC 'DO'
00251      'FOR'   J:=1 'STEP' 1 'UNTIL'   NSC 'DO'
00251      RF1(/I,J/):=RF1(/I,J/)+AV(/I,J/)/2 ;
00252      PRD(AC,RF1,AV,0,0,0,0,3,3,3) ;
00253      'FOR'   I:=1 'STEP' 1 'UNTIL'   NSC 'DO'
00253      'FOR'   J:=1 'STEP' 1 'UNTIL'   NSC 'DO'
00253      AV(/I,J/):=AV(/I,J/)+BC(/I,J/) ;
00254      'FOR'   I:=1 'STEP' 1 'UNTIL'   NSC 'DO'
00254      'BEGIN'
00254      BV(/I/):=0;
00255      'FOR'   J:=1 'STEP' 1 'UNTIL'   NE  'DO'
00255      BV(/I/):=BV(/I/)-BTA(/J,I/)*EG(/J/) ;
00256      'END' ;
00257      PRDDM(PA,XN,IT1,0,0,0,NC,NC+NLL) ;
00258      PRDDM(PH1,JF,IT2,0,0,0,NC,NC+NLL+NR) ;
00259      'FOR'   I:=1 'STEP' 1 'UNTIL'   NC  'DO'
00259      IT1(/I/):=IT1(/I/)+IT2(/I/) ;
00260      PRDDM(PH2,JF1,IT2,0,0,0,NC,NC+NLL+NR);
00261      'FOR'   I:=1 'STEP' 1 'UNTIL'   NC  'DO'
00261      IT1(/I/):=IT1(/I/)+IT2(/I/) ;
00262      PRDDM(PH,TAFF,IT2,0,NC+NC,0,NC,NR+NLL-NG) ;
00263      'FOR'   I:=1 'STEP' 1 'UNTIL'   NC  'DO'
00263      IT1(/I/):=IT1(/I/)+IT2(/I/)/2 ;
00264      PRDDM(CAM1,IT1,BV1,0,0,0,NSC,NC);
00265      'FOR'   I:=1 'STEP' 1 'UNTIL'   NSC 'DO'

```

## SOURCE PROGRAM

```

SC      SOURCE STATEMENT
00265      BV(/I/):=BV(/I/)-BV1(/I/) ;
00266      PRODM(PA,XN,IT3,NC,0,0,NLL,NLL+NC);
00267      PRODM(PH1,JF,IT4,NC,0,0,NLL,NLL+NC+NR);
00268      'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' NLL 'DO'
00268      IT3(/I/):=IT3(/I/)+IT4(/I/);
00269      PRODM(PH2,JE1,IT4,NC,0,0,NLL,NLL+NC+NR);
00270      'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' NLL 'DO'
00270      IT3(/I/):=IT3(/I/)+IT4(/I/);
00271      PRODM(PH,TAFE,IT4,NC,NC+NC,0,NLL,NLL+NR-NG);
00272      'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' NLL 'DO'
00272      IT3(/I/):=IT3(/I/)+IT4(/I/)/2;
00273      PRODM(RF2,IT3,BV1,0,0,0,NSC,NLL) ;
00274      'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' NSC 'DO'
00274      BV1(/I/):=BV(/I/)-BV1(/I/);
00275      PRODM(AC,BV1,BV,0,0,0,NSC,NSC) ;
00276      'END' ANBN ;
00277      'ARRAY' U,W,CN,DN,E,F,DW,DU(/I:3,0:M1/),PA(/I:NLL+NC,1:NLL+NC/),
00277      JS,PSA,XN,XN1,XN2(/I:NLL+NC/),CO(/I:NC/),G,PO(/0:NR/),
00277      LO(/I:NLL,1:NLL/),
00277      H1,H2,DUK,DKW,Y,DUK1,DKW1,CNK,DNK,A1,A2,B1,B2,EG,EGP,R,AF,
00277      C11,D11,F11,DWN(/I:3/),AC,02,T,T1,0,AM,BM,Q1,AV(/I:3,1:3/),JE2,JE3,
00277      JF,JE1(/I:NC+NLL+NR/),PH,PH1,PH2(/I:NC+NLL,1:NC+NLL+NR/),
00277      TAFE(/I:NLL+NR-NG/),BV(/I:NSC/),RF(/I:6/);
00278      'INTEGER' 'ARRAY' T11(/I:3,1:3/);
00279      'REAL' OM,PI,TEM,DD;
00280      'INTEGER' N,P,INS2,INS3,CRD1,CRD2,CRD3 ;
00281      PI:=3.14159 ; OM:=2*PI*FR ;
00283      FI:= OM*FI ;
00284      'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' ALL 'DO'
00284      'FOR' J:=1 'STEP' 1 'UNTIL' NLL 'DO' INREAL(0,LO(/I,J/)) ;
00285      ININTEGER(0,CRD1); ININTEGER(0,CRD2); ININTEGER(0,CRD3) ;
00288      ININTEGER(0,INS2); ININTEGER(0,INS3);
00290      'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' 6 'DO'
00290      INREAL(0,RF(/I/));
00291      'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' NC 'DO' CO(/I/):=CPL(/I+NE/);
00292      'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' NR 'DO' CO(/I/):=CPL(/I+NE+NC/);
00293      'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' 3 'DO'
00293      'FOR' J:=1 'STEP' 1 'UNTIL' 3 'DO' INREAL(0,T(/I,J/)) ;
00294      'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' 3 'DO'
00294      'FOR' J:=1 'STEP' 1 'UNTIL' 3 'DO' INREAL(0,T1(/I,J/)) ;
00295      'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' 3 'DO'
00295      'FOR' J:=1 'STEP' 1 'UNTIL' 3 'DO' ININTEGER(0,T11(/I,J/));
00296      ZD1:=(LH/CHQ)**0.5 ;
00297      ZD2:=(LD/CD)**0.5;
00298      AF(/1/):=RH/LH/2;
00299      AF(/2/):=RD/LD/2;
00300      AF(/3/):=RI/LI/2;
00301      P1:=(LH*CHQ)**(-0.5) ;

```

## SOURCE PROGRAM

```

SC      SOURCE STATEMENT
00302      P2:=(1D*CD)**(-0.5);
00303      R(/1/):=P1*DT/DX;
00304      R(/2/):=R(/3/):=P2*DT/DX;
00305      Y(/1/):=1/Z01 ; Y(/2/):=Y(/3/):=1/Z02 ;
00307      H1(/1/):=H11;          H1(/2/):=H1(/3/):=H12;
00309      H2(/1/):=H21;          H2(/2/):=H2(/3/):=H22;
00311      RFSEAU(CH,CO,PO,LC,A,TR,G,PA,PH1,PH2,PH,NG) ;
00312      'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' 3 'DO'
00313      'BEGIN'
00314      E(/I,0/):=1 ;
00315      A1(/I/):=(H1(/I/)+R(/I/)*H2(/I/)+AF(/I/)*DT/2)/
00316      (P(/I/)*H2(/I/)+H1(/I/)-1);
00317      A2(/I/):=- (AF(/I/)*DT/2)/
00318      (R(/I/)*H2(/I/)+H1(/I/)-1);
00319      B1(/I/):=- (AF(/I/)*DT/2)/
00320      (H1(/I/)-P(/I/)*H2(/I/)-1);
00321      B2(/I/):=(H1(/I/)-P(/I/)*H2(/I/)+AF(/I/)*DT/2)/
00322      (H1(/I/)-R(/I/)*H2(/I/)-1);
00323      'END' ;
00324      'FOR' K:=0 'STEP' 1 'UNTIL' M1-1 'DO'
00325      'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' 3 'DO'
00326      E(/I,K+1/):=(E(/I,K/)*B2(/I/)-A2(/I/))/
00327      (A1(/I/)-E(/I,K/)*P1(/I/)) ;
00328      'FOR' K:=0 'STEP' 1 'UNTIL' M1 'DO'
00329      'BEGIN'
00330      W(/1,K/):=U(/1,K/):=CH1 ;
00331      W(/2,K/):=U(/2,K/):=CH2 ;
00332      W(/3,K/):=U(/3,K/):=CH3 ;
00333      'END' ;
00334      SYSACT(1,2,3) ;
00335      OUTSTRING(1,('U UN')) ;
00336      SYSACT(1,1,P) ; SYSACT(1,2,P+20) ;
00337      OUTSTRING(1,('U DE')) ;
00338      SYSACT(1,1,P) ; SYSACT(1,2,P+20) ;
00339      OUTSTRING(1,('U TR')) ;
00340      SYSACT(1,1,P) ; SYSACT(1,2,P+20) ;
00341      OUTSTRING(1,('U TEM')) ;
00342      SYSACT(1,14,3) ;
00343      FIP:=-ARCTAN(C1*RC(/1/)*CO(/1/)/(1-L0(/1,1/)*CO(/1/)*OM*OM));
00344      FI:=-FIP ;
00345      'FOR' J:=1 'STEP' 1 'UNTIL' NC 'DO'
00346      XN(/J/):=AMX*((1-L0(/J,J/)*CO(/J/)*OM*OM)**2+(1M*RC(/J/)*CO(/J/))
00347      **2)**(-0.5);
00348      'FOR' J:=1 'STEP' 1 'UNTIL' NLL-3 'DO'
00349      XN(/J+NC/):=XN(/J/)*CO(/J/)*OM;
00350      XN(/1/):=XN(/1/)*SIN(FI+FIP);
00351      XN(/2/):=XN(/2/)*SIN(FI+FIP-2*PI/3);
00352      XN(/3/):=XN(/3/)*SIN(FI+FIP+2*PI/3);

```

## SOURCE PROGRAM

```

SC      SOURCE STATEMENT

00342      XN(/4/) :=XN(/4/) *COS(FI+FI*P);
00343      XN(/5/) :=XN(/5/) *COS(FI+FI*P-2*PI/3);
00344      XN(/6/) :=XN(/6/) *COS(FI+FI*P+2*PI/3);
00345      XN(/7/) :=0.0 ;
00346      XN(/8/) :=0.0 ;
00347      XN(/9/) :=0.0 ;
00348      N:=0 ;
00349      EN1:=0;   EN2:=0 ;   EN3:=0 ;
00352      NFIXE:
00352      'FOR' J:=1 'STEP' 1 'UNTIL' 3 'DO'
00352      F(/J,0/):=0 ;
00353      'FOR' K:=0 'STEP' 1 'UNTIL' M1-1 'DO'
00353      'BEGIN' 'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' 3 'DO' 'BEGIN'
00353      CN(/I,K/):=(R(/I/)*(U(/I,K+1/)-U(/I,K/))+
00353      (AF(/I/)*DT/2)*(U(/I,K+1/)-W(/I,K+1/)+U(/I,K/)-W(/I,K/)))/
00353      (R(/I/)*H2(/I/)+H1(/I/)-1);
00354      DN(/I,K/):=(C(/I/)*(W(/I,K/)-W(/I,K+1/))-
00354      (AF(/I/)*DT/2)*(U(/I,K+1/)-W(/I,K+1/)+U(/I,K/)-W(/I,K/)))/
00354      (H1(/I/)-P(/I/)*H2(/I/)-1);
00355      'END' ;
00356      'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' 3 'DO'
00356      F(/I,K+1/):=(F(/I,K/)+E(/I,K/)*DN(/I,K/)-CN(/I,K/))/
00356      (A1(/I/)-E(/I,K/)*B1(/I/)) ;
00357      'END' ;
00358      EG(/1/):=-AMX*SIN(OM*(N+1)*DT+FI);
00359      EG(/2/):=-AMX*SIN(OM*(N+1)*DT+FI-2*PI/3) ;
00360      EG(/3/):=-AMX*SIN(OM*(N+1)*DT+FI+2*PI/3) ;
00361      'FOR' J:=1 'STEP' 1 'UNTIL' 3 'DO'
00361      C11(/I/):=Y(/I/)*(-U(/I,M1/)+W(/I,M1/))/2 ;
00362      PRODM(T,C11,D11,0,0,0,3,3) ;
00363      PRODM(CAM,D11,JE,0,0,0,V-1-NE,NSC) ;
00364      EG2(/1/):=-AMX*SIN(OM*N*DT+FI);
00365      EG2(/2/):=-AMX*SIN(OM*N*DT+FI-2*PI/3);
00366      EG2(/3/):=-AMX*SIN(OM*N*DT+FI+2*PI/3);
00367      'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' ED-V+1-NSC 'DO'
00367      'BEGIN'
00367      JE(/I+V-1-NE/):=0 ;
00368      TAPE(/I/):=0.0 ;
00369      'FOR' J:=1 'STEP' 1 'UNTIL' NE 'DO'
00369      'BEGIN'
00369      JE(/I+V-1-NE/):=JE(/I+V-1-NE/)-ALF(/J,I/)*EG2(/J/) ;
00370      TAPE(/I/):=TAPE(/I/)-ALF(/J,I/)*EG(/J/) ;
00371      'END' ;
00372      'END' ;
00373      'FOR' J:=1 'STEP' 1 'UNTIL' NC+NC 'DO'
00373      JF1(/J/):=JE(/J/)/2 ;
00374      EGP(/1/):=-AMX*SIN(OM*(N+1/2)*DT+FI) ;
00375      EGP(/2/):=-AMX*SIN(OM*(N+1/2)*DT+FI-2*PI/3) ;

```

## SOURCE PROGRAM

```

SC      SOURCE STATEMENT
00342      XN(/4/) := XN(/4/) * COS(FI+FI*PI);
00343      XN(/5/) := XN(/5/) * COS(FI+FI*PI-2*PI/3);
00344      XN(/6/) := XN(/6/) * COS(FI+FI*PI+2*PI/3);
00345      XN(/7/) := 0.0 ;
00346      XN(/8/) := 0.0 ;
00347      XN(/9/) := 0.0 ;
00348      N := 0 ;
00349      EN1 := 0 ; EN2 := 0 ; EN3 := 0 ;
00352      NFIXE :
00352      'FOR' J := 1 'STEP' 1 'UNTIL' 3 'DO'
00352      F(/J,0/) := 0 ;
00353      'FOR' K := 0 'STEP' 1 'UNTIL' M1-1 'DO'
00353      'BEGIN' 'FOR' I := 1 'STEP' 1 'UNTIL' 3 'DO' 'BEGIN'
00353      CN(/I,K/) := (P(/I/) * (U(/I,K+1/) - U(/I,K/)) +
00353      (AF(/I/) * DT/2) * (U(/I,K+1/) - W(/I,K+1/) + U(/I,K/) - W(/I,K/))) /
00353      (R(/I/) * H2(/I/) + H1(/I/) - 1) ;
00354      DN(/I,K/) := (P(/I/) * (W(/I,K/) - W(/I,K+1/)) -
00354      (AF(/I/) * DT/2) * (U(/I,K+1/) - W(/I,K+1/) + U(/I,K/) - W(/I,K/))) /
00354      (H1(/I/) - P(/I/) * H2(/I/) - 1) ;
00355      'END' ;
00356      'FOR' I := 1 'STEP' 1 'UNTIL' 3 'DO'
00356      F(/I,K+1/) := (F(/I,K/) + E(/I,K/) * DN(/I,K/) - CN(/I,K/)) /
00356      (A1(/I/) - E(/I,K/) * B1(/I/)) ;
00357      'END' ;
00358      EG(/1/) := -AMX * SIN(OM * (N+1) * DT + FI) ;
00359      EG(/2/) := -AMX * SIN(OM * (N+1) * DT + FI - 2*PI/3) ;
00360      EG(/3/) := -AMX * SIN(OM * (N+1) * DT + FI + 2*PI/3) ;
00361      'FOR' J := 1 'STEP' 1 'UNTIL' 3 'DO'
00361      C11(/I/) := Y(/I/) * (-U(/I,M1/) + W(/I,M1/)) / 2 ;
00362      PRDDM(T,C11,D11,0,0,0,3,3) ;
00363      PRDDN(CAM,D11,JE,0,0,0,V-1-NE,NSC) ;
00364      EGP(/1/) := -AMX * SIN(OM * N * DT + FI) ;
00365      EGP(/2/) := -AMX * SIN(OM * N * DT + FI - 2*PI/3) ;
00366      EGP(/3/) := -AMX * SIN(OM * N * DT + FI + 2*PI/3) ;
00367      'FOR' I := 1 'STEP' 1 'UNTIL' ED-V+1-NSC 'DO'
00367      'BEGIN'
00367      JE(/I+V-1-NE/) := 0 ;
00368      TAFE(/I/) := 0.0 ;
00369      'FOR' J := 1 'STEP' 1 'UNTIL' NE 'DO'
00369      'BEGIN'
00369      JE(/I+V-1-NE/) := JE(/I+V-1-NE/) - ALF(/J,I/) * EGP(/J/) ;
00370      TAFE(/I/) := TAFE(/I/) - ALF(/J,I/) * EG(/J/) ;
00371      'END' ;
00372      'END' ;
00373      'FOR' J := 1 'STEP' 1 'UNTIL' NC+NS 'DO'
00373      JF1(/J/) := JE(/J/) / 2 ;
00374      EGP(/1/) := -AMX * SIN(OM * (N+1/2) * DT + FI) ;
00375      EGP(/2/) := -AMX * SIN(OM * (N+1/2) * DT + FI - 2*PI/3) ;

```

## SOURCE PROGRAM

```

SC SOURCE STATEMENT
00376 EGP(/3/) := -AMX*SIN(OM*(N+1/2)*DT+PI+2*PI/3) ;
00377 'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' ED-V+1-NSC 'DO'
00377 'BEGIN'
00377 JF1(/I+V-1-NE/) := 0 ;
00378 'FOR' J:=1 'STEP' 1 'UNTIL' NE 'DO'
00378 JE1(/I+V-1-NE/) := JF1(/I+V-1-NE/) - ALF(/J,I/)*EGP(/J/) ;
00379 'END' ;
00380 AMON(XN,JE,JE1,EG,TP,C,PA,PH1,PH2,PH,TAFE,AV,BV,AC);
00381 PRO(AC,T,02,0,0,0,0,3,3,3) ;
00382 PPO(AV,T,0,0,0,0,0,3,3,3) ;
00383 'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' 3 'DO'
00383 'FOR' J:=1 'STEP' 1 'UNTIL' 3 'DO'
00383 'BEGIN' Q(/I,J/) := Q(/I,J/)*Y(/J/) ;
00384 AM(/I,J/) := Q2(/I,J/)-Q(/I,J/) ;
00385 BM(/I,J/) := Q2(/I,J/)+Q(/I,J/) ;
00386 'END' ;
00387 'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' 3 'DO'
00387 C11(/I/) := 2*BM(/I/)-AM(/I,1/)*U(/I,M1/)
00387 -AM(/I,2/)*U(/2,M1/)-AM(/I,3/)*U(/3,M1/)
00387 -BM(/I,1/)*W(/1,M1/)-BM(/I,2/)*W(/2,M1/)-BM(/I,3/)*W(/3,M1/) ;
00388 'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' 3 'DO'
00388 'FOR' J:=1 'STEP' 1 'UNTIL' 3 'DO'
00388 Q1(/I,J/) := AM(/I,J/)*E(/J,M1/)+BM(/I,J/) ;
00388 QD := (Q1(/1,1/)*Q1(/2,2/)-Q1(/2,1/)*Q1(/1,2/))*Q1(/3,3/)
00388 +(Q1(/2,1/)*Q1(/3,2/)-Q1(/3,1/)*Q1(/2,2/))*Q1(/1,3/)
00388 +(Q1(/3,1/)*Q1(/1,2/)-Q1(/1,1/)*Q1(/3,2/))*Q1(/2,3/) ;
00389 Q2(/1,1/) := (Q1(/2,2/)*Q1(/3,3/)-Q1(/2,3/)*Q1(/3,2/))/DD ;
00389 Q2(/1,2/) := (Q1(/1,3/)*Q1(/3,2/)-Q1(/1,2/)*Q1(/3,3/))/DD ;
00389 Q2(/1,3/) := (Q1(/1,2/)*Q1(/2,3/)-Q1(/1,3/)*Q1(/2,2/))/DD ;
00389 Q2(/2,1/) := (Q1(/2,3/)*Q1(/3,1/)-Q1(/2,1/)*Q1(/3,3/))/DD ;
00389 Q2(/2,2/) := (Q1(/1,1/)*Q1(/3,3/)-Q1(/1,3/)*Q1(/3,1/))/DD ;
00389 Q2(/2,3/) := (Q1(/1,3/)*Q1(/2,1/)-Q1(/1,1/)*Q1(/2,3/))/DD ;
00389 Q2(/3,1/) := (Q1(/2,1/)*Q1(/2,2/)-Q1(/2,2/)*Q1(/3,1/))/DD ;
00389 Q2(/3,2/) := (Q1(/1,2/)*Q1(/3,1/)-Q1(/1,1/)*Q1(/3,2/))/DD ;
00389 Q2(/3,3/) := (Q1(/1,1/)*Q1(/2,2/)-Q1(/1,2/)*Q1(/2,1/))/DD ;
00389 'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' 3 'DO'
00389 D11(/I/) := -F(/I,M1/) ;
00400 PRODN(AM,D11,E11,0,0,0,3,3) ; SOM(C11,E11,D11,3) ;
00402 PPODM(Q2,Q11,E11,0,0,0,3,3) ;
00403 'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' 3 'DO'
00403 'BEGIN'
00403 DW(/I,M1/) := E11(/I/) ;
00404 DU(/I,M1/) :=
00404 F(/I,M1/)*DW(/I,M1/)+F(/I,M1/);
00405 W(/I,M1/) := W(/I,M1/)+DW(/I,M1/);
00406 U(/I,M1/) := U(/I,M1/)+DU(/I,M1/);
00407 D11(/I/) := Y(/I/)*(-U(/I,M1/)+W(/I,M1/))/4 ;
00408 'END' ;

```

## SOURCE PROGRAM

```

SC      SOURCE STATEMENT
00400      PRODM(T,D11,C11,0,0,0,3,3) ;
00410      PRODM(GAM,C11,JE2,0,0,0,V-1-NE,NSC) ;
00411      'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' NLL+NR-NS 'DO'
00411      JE2(/I+NC+NC/):=0,0 ;
00412      SOM(JF1,JE2,JE3,NC+NLL+NR) ;
00413      PRODM(PA,XN,JS,0,0,0,NC+NLL,NC+NLL) ;
00414      PRODM(PH1,JE,PSA,0,0,0,NC+NLL,NC+NLL+NR) ;
00415      SOM(JS,PSA,XN1,NC+NLL) ;
00416      PRODM(PH2,JE3,JS,0,0,0,NC+NLL,NC+NLL+NR) ;
00417      'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' NLL+NR-NG 'DO'
00417      JE2(/I+NC+NC/):=TAFE(/I/)/2 ;
00418      PRODM(PH,JE2,PSA,0,0,0,NC+NLL,NC+NLL+NR) ;
00419      SOM(JS,PSA,XN2,NC+NLL) ;
00420      SOM(XN1,XN2,XN,NC+NLL) ;
00421      'FOR' K:=N1-1 'STEP' -1 'UNTIL' 0 'DO'
00421      'BEGIN' 'FOR' J:=1 'STEP' 1 'UNTIL' 3 'DO'
00421      'BEGIN' DUK1(/J/):=DU(/J,K+1/) ;
00422      DWK1(/J/):=DW(/J,K+1/) ;
00423      DNK(/J/):=DN(/J,K/) ;
00424      DNK(/J/):=DN(/J,K/) ;
00425      FGP(/J/):=F(/J,K/) ;
00426      EG(/J/):=E(/J,K/) ;
00427      'END' ;
00428      PROD(B1,DUK1,C11) ;
00429      PROD(B2,DWK1,D11) ; SOM(C11,D11,E11,3) ; SOM(E11,DNK,DWK,3) ;
00432      PROD(EG,DWK,C11) ;
00433      SOM(C11,EGP,DUK,3) ;
00434      'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' 3 'DO'
00434      'BEGIN' DU(/I,K/):=DUK(/I/) ; DW(/I,K/):=DWK(/I/) ;
00436      U(/I,K/):=U(/I,K/)+DU(/I,K/) ;
00437      W(/I,K/):=W(/I,K/)+DW(/I,K/) ;
00438      'END' ;
00439      'END' ;
00440      TEM:=(N+1)*DT ;
00441      'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' 3 'DO'
00441      C11(/I/):=(U(/I,0/)+W(/I,0/))/2 ;
00442      PRODM(T,C11,D11,0,0,0,3,3) ;
00443      SYSACT(1,2,2) ; OUTREAL(1,D11(/1/)) ;
00445      SYSACT(1,1,P) ; SYSACT(1,2,P+1) ;
00447      OUTREAL(1,D11(/2/)) ;
00448      SYSACT(1,1,P) ; SYSACT(1,2,P+1) ;
00450      OUTREAL(1,D11(/3/)) ;
00451      SYSACT(1,1,P) ; SYSACT(1,2,P+1) ;
00453      OUTREAL(1,TEM) ;
00454      SYSACT(1,1,P) ; SYSACT(1,2,P+1) ;
00456      'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' 3 'DO'
00456      'BEGIN' C11(/I/):=(U(/I,M1/)+W(/I,M1/))/2 ;
00457      PRODM(T,C11,D11,0,0,0,3,3) ;

```

SOURCE PROGRAM

```

SC SOURCE STATEMENT
00453 'END';
00459 'IF' EN1=0 'THEN' 'BEGIN'
00459 'IF' ABS(XN(/1/)-D11(/1/))<5*10**(-2) 'THEN'
00459 'BEGIN' T11(/1,1/):=N ; T11(/1,2/):=N ; T11(/1,3/):=N ;
00462 EN1:=4 ;
00463 'END' ;
00464 'END' ;
00465 'IF' EN2=0 'THEN' 'BEGIN'
00465 'IF' (ABS(D11(/2/)-XN(/2/))<5*10**(-2)) & (T11(/1,1/)-N<0) 'THEN'
00465 'BEGIN' T11(/2,1/):=N ; T11(/2,2/):=N ;T11(/2,3/):=N ;
00468 INS2:=N+1 ;
00469 EN2:=4 ;
00470 'END';
00471 'END' ;
00472 'IF' EN3=0 'THEN' 'BEGIN'
00472 'IF' (ABS(D11(/3/)-XN(/3/))<5*10**(-2)) & (T11(/2,1/)-N<0) 'THEN'
00472 'BEGIN' T11(/3,1/):=N ; T11(/3,2/):=N ;T11(/3,3/):=N ;
00475 INS3:=N+1 ;
00476 EN3:=4 ;
00477 'END' ;
00478 'END';
00479 OUTREAL(1,D11(/1/)) ;
00480 SYSACT(1,1,P) ; SYSACT(1,2,P+1) ;
00482 OUTREAL(1,D11(/2/)) ;
00483 SYSACT(1,1,P) ; SYSACT(1,2,P+1) ;
00485 OUTREAL(1,D11(/3/)) ;
00486 SYSACT(1,1,P) ; SYSACT(1,2,P+1) ;
00488 'IF' N<T11(/1,1/) 'THEN'
00488 'BEGIN' OUTREAL(1,XN(/1/));
00489 SYSACT(1,1,P);SYSACT(1,2,P+2);
00491 OUTREAL(1,XN(/2/));
00492 SYSACT(1,1,P);SYSACT(1,2,P+2);
00494 OUTREAL(1,XN(/3/));
00495 SYSACT(1,1,P);SYSACT(1,2,P+2);
00497 'END'
00497 'ELSE' 'BEGIN' OUTSTRING(1,('*')) ;
00498 'IF' N<T11(/2,1/) 'THEN'
00498 'BEGIN' OUTREAL(1,XN(/2/));
00499 SYSACT(1,1,P);SYSACT(1,2,P+2);
00501 OUTREAL(1,XN(/3/));
00502 SYSACT(1,1,P);SYSACT(1,2,P+2);
00504 'END'
00504 'ELSE' 'BEGIN' OUTSTRING(1,('*')) ;
00505 OUTREAL(1,XN(/3/));
00506 'END'
00506 'END';
00507 SYSACT(1,14,2) ;
00508 NUM:=0 ;

```

```

                                SOURCE PROGRAM
SC      SOURCE STATEMENT
00509      'IF' N=T11(/1,1/) 'THEN' 'BEGIN'
00509      RF(/1/):=RF(/4/) ; NUM:=NUM+1 ;
00511      'END' ;
00512      'IF' N=T11(/1,2/) 'THEN' 'BEGIN'
00512      RF(/1/):=RF(/5/) ; NUM:=NUM+1 ;
00514      'END' ;
00515      'IF' N=T11(/1,3/) 'THEN'
00515      'BEGIN'
00515      RF(/1/):=RF(/6/) ; NUM:=NUM+1 ;
00517      'END' ;
00518      'IF' N=T11(/2,1/) 'THEN'
00518      'BEGIN'
00518      RF(/2/):=RF(/4/) ; NUM:=NUM+1 ;
00520      'END' ;
00521      'IF' N=T11(/2,2/) 'THEN'
00521      'BEGIN'
00521      RF(/2/):=RF(/5/) ; NUM:=NUM+1 ;
00523      'END' ;
00524      'IF' N=T11(/2,3/) 'THEN'
00524      'BEGIN'
00524      RF(/2/):=RF(/6/) ; NUM:=NUM+1 ;
00526      'END' ;
00527      'IF' N=T11(/3,1/) 'THEN'
00527      'BEGIN'
00527      RF(/3/):=RF(/4/) ; NUM:=NUM+1 ;
00529      'END' ;
00530      'IF' N=T11(/3,2/) 'THEN'
00530      'BEGIN'
00530      RF(/3/):=RF(/5/) ; NUM:=NUM+1 ;
00532      'END' ;
00533      'IF' N=T11(/3,3/) 'THEN'
00533      'BEGIN'
00533      RF(/3/):=RF(/6/) ; NUM:=NUM+1 ;
00535      'END' ;
00536      'IF' (NUM > 0) 'THEN' 'BEGIN'
00536      'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' NR-3 'DO' RD(/I/):=CRL(/I+NR+NC/);
00537      RF(/NR-2/):=RF(/1/) ; RD(/NR-1/):=RF(/2/) ; RD(/NR/):=RF(/3/) ;
00540      RESEAU(C4,C0,R0,LD,A,TR,G,PA,PH1,PH2,PH,NG) ;
00541      'END' ;
00542      'IF' N < N1 'THEN'
00542      'BEGIN' N:=N+1 ;
00543      'OPTO' APTXE ;
00544      'END' ;
00545      SYSACT(1,14,3); OUTINTEGER(1,T11(/1,1/));OUTINTEGER(1,T11(/2,1/));
00548      OUTINTEGER(1,T11(/3,1/));
00549      'END' ;
00550      'END' ;
00551      IMPOS:
'END' ;

```



## C O N C L U S I O N

=====

L'étude des surtensions dans les réseaux à très haute tension et des moyens de les réduire est un problème complexe tant par la diversité des moyens d'analyse utilisés jusqu'à ce jour, que par le nombre considérable de paramètres qui le caractérise.

C'est ce problème que nous nous sommes efforcés de résoudre dans ce travail au cours duquel nous avons réussi à dégager certains points.

Au niveau de la formulation du problème, nous avons mis en évidence l'existence de nouvelles coordonnées, différentes des composantes de mode, que nous avons appelé composantes normales. Ces variables permettent de diagonaliser complètement les équations aux dérivées partielles définissant le fonctionnement de la ligne, et à partir de là, en facilitent le traitement sur ordinateur.

Nous avons ensuite mis au point une méthode numérique d'étude des surtensions de manoeuvre en utilisant la technique des équations aux différences finies. Il existe dans ce cadre une infinité de schémas qui permettrait de résoudre le problème. Nous en avons proposé un qui, sans prétendre être le meilleur, offre des avantages indéniables. D'une part, ce schéma aux différences finies est très adapté à la méthode de double balayage qui en permet une résolution efficace ; d'autre part, nous avons établi pour ce schéma les conditions nécessaires et suffisantes de stabilité sans lesquelles l'utilisation d'une méthode aux différences finies reste soumise aux plus grands aléas.

De plus, nous avons assoupli l'emploi de la méthode numérique en faisant une étude originale sur la mise en équation d'un réseau à constantes localisées à partir de son graphe. Ce procédé permet d'introduire d'une manière très simple les conditions aux limites qui posent



## B I B L I O G R A P H I E

=====

- (1) - P. BALTENSPERGER et E. RUOSS - Surtensions de manoeuvre dans les réseaux à haute et très haute tension - C. I. G. R. E., 1970.
- (2) - Ph. ESCLANGON - Equations de propagation sur les lignes polyphasées, Application - E. D. F., Bulletin de la direction des études et recherches, Série B, N° 1, 1968.
- (3) - R. COURANT and D. HILBERT - Methods of mathematical physics - New York, Intersciences publishers, 1962-1966.
- (4) - FORSYTHE et WASOW - Finite difference methods for partial differential equations - John Wiley and Son's, New York, 1964.
- (5) - C. GARY et G. GERVAIS - Calcul de la réponse transitoire d'une ligne triphasée à un échelon unité de tension - E. D. F., Bulletin de la direction des études et recherches, Série B, N° 2, 1968.
- (6) - J. C. SABONNADIÈRE et M. POLOUJADOFF - Multiple eigenvalues and corresponding eigenvectors in the study of symmetrical and related components.
- (7) - J. A. CUNGE - Etude d'un schéma aux différences finies appliqué à l'intégration numérique d'un certain type d'équations hyperboliques d'écoulement - Thèse présentée à la Faculté des Sciences de Grenoble, Mai 1966.
- (8) - N. GASTINEL - Itérations, Méthodes discrètes - (C<sub>3</sub> Maîtrise d'informatique), Grenoble, Faculté des Sciences, 1968-1969.
- (9) - GODUNOV et RYABENKII - The theory of difference schemes - North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1964.
- (10) - J. C. SABONNADIÈRE et J. P. BOURRET - IIe Conférence des électriciens Bucarest, 1969, Section IV.
- (11) - GODUNOV and RYABENKII - Spectral criteria for the stability of boundary problems for non self adjoint difference equations (voir The Theory of difference schemes).
- (12) - HEINZ - OTTO - Difference approximation for the initial boundary value problem for Hyperbolic differential equation - Publication N° 17 of the Mathematics Research Center U. S. Army, University of Wisconsin, Mai 1968.
- (13) - L. LIONS - Cours d'Analyse numérique de l'Ecole Polytechnique.
- (14) - P. HENRICI - Discrete variable methods in ordinary differential equations - New York, London, J. Wiley and Son's, 1962.

un problème non négligeable dans ce genre de résolution.

Nous espérons donc, dans le domaine de l'analyse des surtensions, avoir créé par notre méthode un outil stable, précis, et d'une grande maniabilité.

En ce qui concerne les problèmes de réduction des surtensions, nous avons surtout insisté sur la nécessité d'une étude probabiliste. Nous avons introduit dans ce sens une nouvelle méthode d'étude statistique des surtensions. Nous aplanissons les difficultés liées à toute étude statistique en diminuant le nombre de paramètres à l'aide de considérations sur l'importance relative de certains d'entre eux. En particulier, nous montrons que la charge initiale et les contacts non principaux du disjoncteur jouent un rôle négligeable si les résistances sont bien choisies et convenablement insérées.

La puissance de l'étude statistique nous a permis de montrer la loi de production des surtensions et de mettre au point, une méthode originale de calcul du couple optimum de résistances, permettant de réduire les surtensions à l'aide d'un disjoncteur équipé de deux résistances. A notre connaissance, ce dernier point n'a jamais été traité.

En définitive, notre travail nous aura donc permis de montrer l'efficacité de l'emploi de l'ordinateur dans ce type de problème, à condition qu'il soit mathématiquement bien posé. Il nous aura aussi montré l'importance de l'étude statistique quant aux conclusions pratiques qu'on pouvait en tirer.

L'utilisation des méthodes développées permettrait sans doute dans un avenir proche, nous le souhaitons, de déterminer le réseau à constantes localisées linéaires ou non dont il faudrait munir le disjoncteur pour réduire les surtensions à leurs plus basses valeurs.

Nous espérons que ce travail contribuera à ouvrir une ère nouvelle dans l'étude des surtensions de manoeuvre, ce serait notre plus grande récompense.

- (15) - ABBAS I. ABDEL KARIM - Communications of the A. C. M. Vol. 9/N° 2/  
Février 1966 - The stability of the fourth order Runge-Kutta  
method for the solution of system of differential equations.
- (16) - J. T. WELCH - A mechanical analysis of the cyclic structure of  
undirected linear graphs - Journal of the association for  
Computing Machinery - Vol. 13/N° 2/ 4/1966.
- (17) - SESHU et REED - Linear graphs and electrical networks - London,  
Addison - Wesley Publishing Company, 1961.
- (18) - A. G. J. MAC FARLANE - Notes on the use of matrix theory in the  
analysis of linear feedback circuits. Proceedings I. E. E.,  
Vol. 110/N° 1/ January 1963.
- (19) - J. ALTABER - Représentations arithmétiques de grandeurs aléatoires -  
Thèse de Docteur-Ingénieur, Clermont-Ferrand, octobre 1966.
- (20) - C. FOURGEAUD, A. FUCHS - Statistique - Dunod.
- (21) - E. MORICE et CHARTIER (F) - Methode statistique, Paris, Imprimerie  
Nationale, 1954 (I. N. S. E. E.).
- (22) - D. DUMAS De RAULY - L'Estimation statistique - Gauthier - Villars,  
Paris, 1966.
- (23) - E. L. LEHMAN - Testing statical hypothesis - New York, London,  
J. Wiley and Son's, 1959.
- (24) - Tables of the error functions and of its first twenty derivatives -  
The staff of the computation laboratory - Cambridge,  
Massachussets, Harward University Press, 1952.
- (25) - L. PARIS - Considérations sur les lignes à très haute tension de  
l'avenir - R. G. E. Mars 1970.
- (26) - M. J. BATTISSON, J. P. BIKFORD, J. C. W. CORCORAN, R. L. JACKSON,  
M. SCOTT et R. J. S. WARD - Recherches effectuées en  
Grande-Bretagne sur les opérations de manoeuvre des longues li-  
gnes de transport d'énergie à T. H. T. - C. I. G. R. E., 1970.
- (27) - E. M. STAFFORD, D. J. EVANS, N. G. HINGORANI - Calculation of tra-  
velling waves on transmission systems by finite differences -  
Proc, I. E. E., Vol. 112/N° 5/ May 1965.
- (28) - J. P. BOURRET - Methodes de Calcul de certains écoulements - Thèse  
présentée à la Faculté des Sciences de Grenoble, Juillet 1968.

Vu  
Grenoble le  
Le Président de la thèse

Vu  
Grenoble, le  
Le Doyen de la Faculté des Sciences

Vu et permis d'imprimer  
Le Recteur de l'Académie de Grenoble