



**HAL**  
open science

## Eléments aléatoires à valeurs convexes compactes

Bernard van Cutsem

► **To cite this version:**

Bernard van Cutsem. Eléments aléatoires à valeurs convexes compactes. Modélisation et simulation. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1971. tel-00282794

**HAL Id: tel-00282794**

**<https://theses.hal.science/tel-00282794>**

Submitted on 28 May 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre

T H E S E

présentée à

L'UNIVERSITE SCIENTIFIQUE ET MEDICALE DE GRENOBLE

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR ES SCIENCES

par

BERNARD VAN CUTSEM

ELEMENTS ALEATOIRES A VALEURS CONVEXES COMPACTES

-----

Thèse soutenue le 30 juin 1971, devant la Commission d'Examen :

MM. J. KUNTZMANN

*Président*

J.R. BARRA

P.J. LAURENT

*Examineurs*

R. PALLU DE LA BARRIERE

M. METIVIER



N° d'ordre

T H E S E

présentée à

L'UNIVERSITE SCIENTIFIQUE ET MEDICALE DE GRENOBLE

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR ES SCIENCES

par

BERNARD VAN CUTSEM

ELEMENTS ALEATOIRES A VALEURS CONVEXES COMPACTES

-----

Thèse soutenue le 30 juin 1971, devant la Commission d'Examen :

MM. J. KUNTZMANN

*Président*

J.R. BARRA

P.J. LAURENT

*Examineurs*

R. PALLU DE LA BARRIERE

M. METIVIER



Président : Monsieur Michel SOUTIF  
Vice-Président : Monsieur Gabriel CAU

PROFESSEURS TITULAIRES

MM.	ANGLES D'AURIAC Paul	Mécanique des fluides
	ARNAUD Georges	Clinique des maladies infectieuses
	ARNAUD Paul	Chimie
	AYANT Yves	Physique approfondie
	BARBIER Jean-Claude	Physique expérimentale
	BARBIER Reynold	Géologie appliquée
	BARJON Robert	Physique nucléaire
	BARNOUD Fernand	Biosynthèse de la cellulose
	BARRIE Joseph	Clinique chirurgicale
	BENOIT Jean	Radioélectricité
	BESSON Jean	Electrochimie
	BEZES Henri	Chirurgie générale
	BLAMBERT Maurice	Mathématiques pures
	BOLLIET Louis	Informatique (IUT B)
	BONNET Georges	Electrotechnique
	BONNET Jean-Louis	Clinique ophtalmologique
	BONNET-EYMARD Joseph	Pathologie médicale
	BONNIER Etienne	Electrochimie Electrometallurgie
	BOUCHERLE André	Chimie et Toxicologie
	BOUCHEZ Robert	Physique nucléaire
	BRAVARD Yves	Géographie
	BRISSONNEAU Pierre	Physique du Solide
	BUYLE-BODIN Maurice	Electronique
	CABANAC Jean	Pathologie chirurgicale
	CABANEL Guy	Clinique rhumatologique et hydrologique
	CALAS François	Anatomie
	CARRAZ Gilbert	Biologie animale et pharmacodynamie
	CAU Gabriel	Médecine légale et Toxicologie
	CAUQUIS Georges	Chimie organique
	CHABAUTY Claude	Mathématiques pures
	CHATEAU Robert	Thérapeutique
	CHENE Marcel	Chimie papetière
	COEUR André	Pharmacie chimique
	CONTAMIN Robert	Clinique gynécologique
	COUDERC Pierre	Anatomie Pathologique
	CRAYA Antoine	Mécanique
Mme	DEBELMAS Anne-Marie	Matière médicale
MM.	DEBELMAS Jacques	Géologie générale
	DEGRANGE Charles	Zoologie
	DESSAUX Georges	Physiologie animale
	DODU Jacques	Mécanique appliquée
	DREYFUS Bernard	Thermodynamique
	DUCROS Pierre	Cristallographie
	DUGOIS Pierre	Clinique de Dermatologie et Syphiligraphie

## PROFESSEURS ASSOCIES

MM.	BULLEMER Bernhard	Physique
	RADHAKRISHNA Pidatala	Thermodynamique

## PROFESSEURS SANS CHAIRE

MM.	AUBERT Guy	Physique
Mme	BARBIER Marie-Jeanne	Electrochimie
MM.	BARRA Jean	Mathématiques appliquées
	BEAUDOING André	Pédiatrie
	BERTRANDIAS Jean-Paul	Mathématiques appliquées
	BIAREZ Jean-Pierre	Mécanique
	BONNETAIN Lucien	Chimie minérale
Mme	BONNIER Jane	Chimie générale
MM.	CARLIER Georges	Biologie végétale
	COHEN Joseph	Electrotechnique
	COUMES André	Radioélectricité
	DEPASSEL Roger	Mécanique des Fluides
	DEPORTES Charles	Chimie minérale
	DESRE Pierre	Métallurgie
	DOLIQUE Jean-Michel	Physique des plasmas
	GAUTHIER Yves	Sciences biologiques
	GEINDRE Michel	Electroradiologie
	GIDON Paul	Géologie et Minéralogie
	GLENAT René	Chimie organique
	HACQUES Gérard	Calcul numérique
	JANIN Bernard	Géographie
Mme	KAHANE Josette	Physique
MM.	LATREILLE René	Chirurgie générale
	LAURENT Pierre	Mathématiques appliquées
	MULLER Jean-Michel	Thérapeutique
	PERRIAUX Jean-Jacques	Géologie et minéralogie
	POULOUJADOFF Michel	Electrotechnique
	REBECQ Jacques	Biologie (CUS)
	REVOL Michel	Urologie
	REYMOND Jean-Charles	Chirurgie générale
	ROBERT André	Chimie papetière
	SARRAZIN Roger	Anatomie et chirurgie
	SARROT-REYNAULD Jean	Géologie
	SIBILLE Robert	Construction Mécanique
	SIROT Louis	Chirurgie générale
Mme	SOUTIF Jeanne	Physique générale
M.	VALENTIN Jacques	Physique nucléaire

## MAITRES DE CONFERENCES ET MAITRES DE CONFERENCES AGREGES

Mle	AGNIUS-DELORD Claudine	Physique pharmaceutique
	ALARY Josette	Chimie analytique
MM.	AMBLARD Pierre	Dermatologie
	AMBROISE-THOMAS Pierre	Parasitologie
	ARMAND Yves	Chimie

FAU René	Clinique neuro-psychiatrique
FELICI Noël	Electrostatique
GAGNAIRE Didier	Chimie physique
GALLISSOT François	Mathématiques pures
GALVANI Octave	Mathématiques pures
GASTINEL Noël	Analyse numérique
GERBER Robert	Mathématiques pures
GIRAUD Pierre	Géologie
KLEIN Joseph	Mathématiques pures
Mme KOFLER Lucie	Botanique et physiologie végétale
MM. KOSZUL Jean-Louis	Mathématiques pures
KRAVTCHENKO Julien	Mécanique
KUNTZMANN Jean	Mathématiques appliquées
LACAZE Albert	Thermodynamique
LACHARME Jean	Biologie végétale
LATURAZE Jean	Biochimie pharmaceutique
LÉDRU Jean	Clinique médicale B
LLIBOUTRY Louis	Géophysique
LOUP Jean	Géographie
Mlle LUTZ Elisabeth	Mathématiques pures
MM. MALGRANGE Bernard	Mathématiques pures
MALINAS Yves	Clinique obstétricale
MARTIN-NOEL Pierre	Séméiologie médicale
MASSEPORT Jean	Géographie
MAZARE Yves	Clinique médicale A
MICHEL Robert	Minéralogie et Pétrographie
MOURIQUAND Claude	Histologie
MOUSSA André	Chimie nucléaire
NEEL Louis	Physique du Solide
OZENDA Paul	Botanique
PAUTHENET René	Electrotechnique
PAYAN Jean-Jacques	Mathématiques pures
PEBAY-PEYROULA Jean-Claude	Physique
PERRET René	Servomécanismes
PILLET Emile	Physique industrielle
RASSAT André	Chimie systématique
RENARD Michel	Thermodynamique
REULOS René	Physique industrielle
RINALDI Renaud	Physique
ROGET Jean	Clinique de pédiatrie et de puériculture
SANTON Lucien	Mécanique
SEIGNEURIN Raymond	Microbiologie et Hygiène
SENGEL Philippe	Zoologie
SILBERT Robert	Mécanique des fluides
SOUTIF Michel	Physique générale
TANCHE Maurice	Physiologie
TRAYNARD Philippe	Chimie générale
VAILLAND François	Zoologie
VAUQUOIS Bernard	Calcul électronique
Mme VERAIN Alice	Pharmacie galénique
VERAIN André	Physique
Mme VEYRET Germaine	Géographie
MM. VEYRET Paul	Géographie
VIGNAIS Pierre	Biochimie médicale
YOCCOZ Jean	Physique nucléaire théorique



BEGUIN Claude	Chimie organique
BELORIZKY Elie	Physique
BENZAKEN Claude	Mathématiques appliquées
Mme BERTRANDIAS Françoise	Mathématiques pures
MM. BLIMAN Samuel	Electronique (EIE)
BLOCH Daniel	Electrotechnique
Mme BOUCHE Liane	Mathématiques (CUS)
MM. BOUCHET Yves	Anatomie
BOUSSARD Jean-Claude	Mathématiques appliquées
BOUVARD Maurice	Mécanique des Fluides
BRIERE Georges	Physique expérimentale
BRODEAU François	Mathématiques (IUT B)
BRUGEL Lucien	Energétique
BUISSON Roger	Physique
BUTEL Jean	Orthopédie
CHAMBAZ Edmond	Biochimie médicale
CHAMPETIER Jean	Anatomie et organogénèse
CHARACHON Robert	Oto-Rhino-Laryngologie
CHIAVERINA Jean	Biologie appliquée (EFP)
CHIBON Pierre	Biologie animale
COHEN-ADDAD Jean-Pierre	Spectrométrie physique
COLOMB Maurice	Biochimie médicale
CONTE René	Physique
CROUZET Guy	Radiologie
DURAND Francis	Métallurgie
DUSSAUD René	Mathématiques (CUS)
Mme ETERRADOSSI Jacqueline	Physiologie
MM. FAURE Jacques	Médecine légale
GAVEND Michel	Pharmacologie
GENSAC Pierre	Botanique
GERMAIN Jean-Pierre	Mécanique
GIDON Maurice	Géologie
GRIFFITHS Michael	Mathématiques appliquées
GROULADE Joseph	Biochimie médicale
HOLLARD Daniel	Hématologie
HUGONOT Robert	Hygiène et médecine préventive
IDELMAN Simon	Physiologie animale
IVANES Marcel	Electricité
JALBERT Pierre	Histologie
JOLY Jean-René	Mathématiques pures
JOUBERT Jean-Claude	Physique du Solide
JULLIEN Pierre	Mathématiques pures
KAHANE André	Physique générale
KUHN Gérard	Physique
Mme LAJZEROWICZ Jeannine	Physique
MM. LAJZEROWICZ Joseph	Physique
LANCIA Roland	Physique atomique
LE JUNTER Noël	Electronique
LEROY Philippe	Mathématiques
LOISEAUX Jean-Marie	Physique nucléaire
LONGEQUEUE Jean-Pierre	Physique nucléaire
LIU DUC Cuong	Chimie organique
MACHE Régis	Physiologie végétale
MAGNIN Robert	Hygiène et Médecine préventive
MARECHAL Jean	Mécanique
MARTIN-BOUYER Michel	Chimie (CUS)
MAYNARD Roger	Physique du Solide
MICOUD Max	Maladies infectieuses
MOREAU René	Hydraulique (INP)

	NÈGRE Robert	Mécanique
	PARAMELLE Bernard	Pneumologie
	PECCOUD François	Analyse (IUT B)
	PEFFEN René	Métallurgie
	PELMONT Jean	Physiologie animale
	PERRET Jean	Neurologie
	PERRIN Louis	Pathologie expérimentale
	PFISTER Jean-Claude	Physique du Solide
	PHELIP Xavier	Rhumatologie
Mle	PIERY Yvette	Biologie animale
	RACHAIL Michel	Médecine interne
	RACINET Claude	Gynécologie et obstétrique
	RICHARD Lucien	Botanique
Mme	RINAUDO Marguerite	Chimie macromoléculaire
MM.	ROMIER Guy	Mathématiques (IUT B)
	ROUGEMONT (DE) Jacques	Neuro-chirurgie
	STIEGLITZ Paul	Anesthésiologie
	STOEBNER Pierre	Anatomie pathologique
	VAN CUTSEM Bernard	Mathématiques appliquées
	VEILLON Gérard	Mathématiques appliquées (INP)
	VIALON Pierre	Géologie
	VOOG Robert	Médecine interne
	VROUSSOS Constantin	Radiologie
	ZADWORNY François	Electronique

#### MAITRES DE CONFERENCES ASSOCIES

MM.	BOUDOURIS Georges	Radioélectricité
	CHEEKE John	Thermodynamique
	GOLDSCHMIDT Hubert	Mathématiques
	YACOUD Mahmoud	Médecine légale

#### CHARGES DE FONCTIONS DE MAITRES DE CONFERENCES

Mme	BERIEL Hélène	Physiologie
Mme	RENAUDET Jacqueline	Microbiologie



Je tiens à exprimer tous mes remerciements à Monsieur le Professeur J. KUNTZMANN pour l'honneur qu'il me fait en acceptant de présider ce jury.

Je voudrais dire tout ce que ce travail doit à Monsieur le Professeur R. FALLU DE LA BARRIERE qui n'a jamais cessé de me conseiller et de me guider tout au long de son élaboration, et dont l'amical soutien m'a toujours été précieux.

Messieurs les Professeurs J.R. BARRA, P.J. LAURENT et M. METIVIER ont accepté de faire partie de ce jury, je les en remercie tout particulièrement.

Il m'est aussi très agréable de pouvoir remercier M. VALADIER pour tous les échanges fructueux que nous avons eus et pour l'intérêt qu'il a toujours montré pour ce que je faisais.

Ce travail a été en grande partie réalisé dans le Département de Mathématiques de la Faculté des Sciences de CAEN et a été achevé cette année dans le Laboratoire de Mathématiques Appliquées de l'Université de GRENOBLE. De part et d'autre, j'ai toujours trouvé l'aide et l'appui indispensables à tout travail de recherche.

Enfin, je suis très reconnaissant à Melle BICAIS qui a assuré la dactylographie du manuscrit et au personnel du Service de Reproduction du Laboratoire qui en a réalisé le tirage avec infiniment de soin.

B. VAN CUTSEM



# TABLE DES MATIERES

## INTRODUCTION

### CHAPITRE - I

<u>CONVERGENCE DES SUITES DE CONVEXES COMPACTS NON VIDES DANS UN ESPACE DE BANACH DE DIMENSION FINIE</u> -----	1
1 - Différentes notions de convergence -----	1
2 - Convergence des extremums -----	10
3 - Propriété d'approximation dans $CK(E)$ -----	22
4 - Convergence des suites de polyèdres convexes compacts dans $\mathbb{R}^n$ -----	33

### CHAPITRE - II

<u>CONVERGENCE DES SUITES DE MULTIAPPLICATIONS MESURABLES A VALEURS CONVEXES COMPACTES NON VIDES DANS UN ESPACE DE BANACH DE DIMENSION FINIE</u> -----	41
1 - Propriétés de mesurabilité et d'intégrabilité -----	43
2 - Définitions de la convergence des suites de multiapplications -----	52
3 - Convergence des suites de multiapplications extremales -----	56
4 - Multiapplications à valeurs polyèdres convexes compacts dans $\mathbb{R}^n$ -----	68

### CHAPITRE - III

<u>ESPERANCE CONDITIONNELLE DES MULTIAPPLICATIONS A VALEURS CONVEXES FAIBLEMENT COMPACTES NON VIDES DANS UN ESPACE VECTORIEL TOPOLOGIQUE LOCALEMENT CONVEXE</u> -----	74
1 - Introduction -----	74
2 - Définitions et théorèmes d'existence -----	80
3 - Propriétés des espérances conditionnelles -----	97
4 - Espérance conditionnelle des multiapplications extrémales dans une direction -----	102

### CHAPITRE - IV

<u>MARTINGALES DE MULTIAPPLICATIONS A VALEURS CONVEXES FAIBLEMENT COMPACTES NON VIDES DANS UN ESPACE VECTORIEL TOPOLOGIQUE LOCALEMENT CONVEXE</u> -----	112
1 - Définitions -----	112
2 - Théorèmes de convergence -----	117
3 - Martingales sections extrémales dans une direction -----	133

## INTRODUCTION

Le but de ce travail est d'étudier plusieurs propriétés des multiapplications définies sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{G}, P)$  et à valeurs convexes compactes non vides dans un espace vectoriel topologique  $E$ . Nous nous sommes, en particulier, intéressé à deux aspects de cette théorie : le problème de la convergence des multiapplications et la théorie de l'espérance conditionnelle et des martingales.

L'étude des convergences des suites de multiapplications est traitée dans les deux premiers chapitres, bien qu'elle soit la partie la plus récente de ce travail. Nous nous sommes limités au cas des multiapplications à valeurs convexes compactes non vides dans un espace vectoriel normé complet de dimension finie  $E$ , et avons notamment envisagé, pour l'application aux problèmes de programmation linéaire stochastique, la convergence des multiapplications extrémales dans une direction pour une suite donnée de multiapplications.

Nous avons utilisé le terme "programme linéaire" pour désigner le problème suivant :

Etant donné  $K$  convexe compact non vide de  $E$  et  $x'$  un élément non nul du dual  $E'$  de  $E$ , résoudre

$$\begin{cases} x \in K \\ \max \langle x', x \rangle \end{cases}$$

L'ensemble  $K$  est le domaine admissible ; nous notons  $P(x', K)$  un tel programme linéaire.

Un cas fréquent, dans la pratique, est celui où  $K$  est un polyèdre convexe défini par un système d'inéquations linéaires :

$$\begin{cases} ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}^m \quad b \in \mathbb{R}^p \quad a \in M(p, m)$$



Les termes de la matrice  $a$ , les composantes du vecteur  $b$  et de la forme linéaire  $x'$  sont obtenus par estimation de coefficients techniques. Il est donc tout-à-fait naturel d'adopter le point de vue aléatoire :  $a, b, x'$  sont des valeurs prises par des estimateurs  $A, B, X'$  considérés comme éléments aléatoires sur un espace probabilisé.

La définition d'un programme linéaire stochastique serait alors la suivante :

Soit  $(\Omega, \mathcal{G}, P)$  un espace probabilisé complet et  $\Gamma$  une multiapplication définie sur  $(\Omega, \mathcal{G})$  et à valeurs dans l'ensemble  $CK(E)$  des convexes compacts non vides d'un espace de Banach  $E$  de dimension finie. La multiapplication  $\Gamma$  est supposée scalairement  $A$ -mesurable, c'est-à-dire que les applications

$$\omega \rightarrow \varphi(x', \Gamma(\omega)) = \sup\{\langle x', x \rangle \mid x \in \Gamma(\omega)\}$$

sont  $A$ -mesurables pour tout  $x' \in E'$ .

A tout  $\omega \in \Omega$  et à tout  $x' \in E'$ ,  $x' \neq 0$ , est ainsi associé un programme linéaire  $P(x', \Gamma(\omega))$ . Plus généralement, si  $X'$  est une variable aléatoire définie sur  $(\Omega, \mathcal{G})$  à valeurs dans  $E' \setminus \{0\}$ , à tout  $\omega \in \Omega$  est associé le programme linéaire  $P(X'(\omega), \Gamma(\omega))$ .

Nous désignons par programme linéaire stochastique, la famille de programmes linéaires  $\{P(X'(\omega), \Gamma(\omega))\}_{\omega \in \Omega}$  que nous noterons plus brièvement  $P(X', \Gamma)$ .

Nous avons surtout envisagé le cas où on dispose de suites convergentes d'estimateurs  $\{A_n\}$ ,  $\{B_n\}$ ,  $\{X'_n\}$  et nous avons étudié la convergence des optimums et des suites de solutions optimales, sous diverses hypothèses de convergence pour les domaines admissibles. Nous avons particulièrement étudié le cas des suites de programmes linéaires stochastiques  $P(X'_n, \Gamma_n)$  où l'utilisation d'une suite de multiapplications  $\{\Gamma_n\}$  permet de considérer le cas où le nombre des contraintes varie avec  $n$ .

Le chapitre I regroupe les résultats sur la convergence des suites de convexes compacts non vides de  $E$ . Le paragraphe 1 résume les définitions des diverses notions de convergences étudiées plus ou moins récemment par différents auteurs tels que Kuratowski, Hukuhara, Mosco, JL Joly, Wijsman, etc... et rappelle leur équivalence dans le cas des convexes compacts en dimension finie. Etant donné une suite convergente de convexes, on étudie au paragraphe 2, la convergence de la suite des faces de ces convexes correspondant à une suite convergente de directions. Nous montrons, en particulier, qu'une condition suffisante de convergence énoncée par JL Joly [1], est aussi une condition nécessaire (prop. 1.20) dans le cas des convexes compacts en dimension finie. Le paragraphe 3 présente une autre approche de l'étude de la convergence de la suite des faces. La méthode utilisée permet de majorer la distance de Hausdorff des faces correspondant à une direction de deux convexes compacts en fonction de leur distance de Hausdorff. Cette majoration sera utilisée au chapitre II pour l'étude de la convergence en probabilité et en moyenne des multiapplications. Le paragraphe 4 reprend l'étude de la convergence des suites de polyèdres convexes définis par des systèmes d'inéquations linéaires. Des résultats de Dantzig-Folkman-Shapiro y sont rappelés et quelques théorèmes de continuité en sont déduits.

Le chapitre II étudie la convergence des suites de multiapplications mesurables et intégrables à valeurs dans l'espace  $E$ , toujours supposé de dimension finie. Le paragraphe 1 rappelle et précise quelques résultats de mesurabilité et d'intégrabilité indispensables pour la suite. Le paragraphe 2 définit les diverses notions de convergence pour les suites de multiapplications et quelques propriétés élémentaires y sont démontrées. Le paragraphe 3 regroupe les résultats sur la convergence des multiapplications extrémales dans une direction donnée. Des conditions suffisantes de convergence sont données pour chaque type de convergence. Le paragraphe 4 est consacré aux suites de multiapplications à valeurs polyèdres convexes compacts définies par des suites de systèmes d'inégalités linéaires à coefficients aléatoires. Nous y étudions la convergence des suites de multiapplications en liaison avec la convergence des suites de coefficients aléatoires, en particulier pour la convergence en probabilité.

Les chapitres III et IV sont plus anciens et ont fait l'objet de deux notes à l'Académie des Sciences (Van Cutsem [2] et [3]) et d'une rédaction multigraphiée (Van Cutsem [1]). La présente rédaction ne diffère de l'ancienne que par l'adjonction de quelques corollaires et de légères modifications.

Après quelques rappels sur la mesurabilité et l'intégrabilité des multiapplications à valeurs convexes faiblement compactes non vides dans un espace vectoriel topologique localement convexe réel séparé  $E$ , nous définissons au paragraphe 2 les notions d'espérances conditionnelles faible et forte par rapport à une sous tribu pour les multiapplications scalairement mesurables et scalairement intégrables. Nous donnons ensuite sous diverses hypothèses des théorèmes d'existence des espérances conditionnelles faible et forte et quelques propriétés des sections des multiapplications considérées. Nous étendons, au paragraphe 3, certaines des propriétés classiques de l'espérance conditionnelle des variables aléatoires au cas des multiapplications. Enfin, nous montrons au paragraphe 4 que l'espérance conditionnelle de la multiapplication extrême dans une direction donnée d'une multiapplication  $\Gamma$  est égale presque sûrement à la multiapplication extrême dans la même direction de l'espérance conditionnelle de  $\Gamma$ .

La notion d'espérance conditionnelle ainsi étudiée permet, au chapitre IV, la définition et l'étude des principales propriétés des martingales multiapplications. Le cas des sur-martingales et des sous-martingales n'a pas été envisagé, mais ne présenterait pas beaucoup plus de difficulté. Nous avons surtout porté notre attention sur les théorèmes de convergences des martingales, et nous donnons quelques conditions suffisantes pour qu'il existe une martingale limite. Enfin, nous montrons que la suite des multiapplications extrêmes dans une direction associée à une martingale multiapplication est encore une martingale.

## CHAPITRE - I

### CONVERGENCE DES SUITES DE CONVEXES COMPACTS NON VIDES DANS UN ESPACE DE BANACH DE DIMENSION FINIE

Soit  $E$  un espace de Banach réel de dimension finie, dont nous noterons  $d$  la distance associée à la norme. Nous désignerons par  $E'$  le dual topologique de  $E$ , et par  $d'$  la distance associée à la norme sur  $E'$ . Il sera, en effet, souvent utile de distinguer  $E$  et  $E'$ , malgré les identifications possibles.

Soit  $K$  un convexe compact non vide de  $E$ . Sa fonction d'appui est définie sur  $E'$ , par

$$x' \rightarrow \varphi(x', K) = \sup\{\langle x', x \rangle \mid x \in K\}$$

Nous désignerons par  $CK(E)$  l'ensemble des convexes compacts non vides de  $E$ .

#### I - DIFFERENTES NOTIONS DE CONVERGENCES

##### I.1 - Définition

Soit  $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $CK(E)$  et  $K \in CK(E)$ . Nous dirons que  $\{K_n\}$  converge scalairement vers  $K$  et nous noterons  $K_n \xrightarrow{\text{scal}} K$ , si

$$\forall x' \in E', \quad \varphi(x', K_n) \rightarrow \varphi(x', K) \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty.$$

### I.2 - Définition

Soit  $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $CK(E)$  et  $K$  un élément de  $CK(E)$ . Nous dirons que  $\{K_n\}$  converge vers  $K$  au sens de Hausdorff si

$$\Delta(K_n, K) \rightarrow 0 \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty$$

où  $\Delta(K_n, K)$  est la distance de Hausdorff sur  $CK(E)$ .

Rappelons que :

$$\Delta(K_n, K) = \max\{e(K_n, K), e(K, K_n)\}$$

où

$$e(K_n, K) = \sup\{d(x, K) \mid x \in K_n\}$$

Par ailleurs

$$\Delta(K_n, K) \leq \varepsilon \Leftrightarrow \begin{cases} K \subset K_n + B_\varepsilon \\ K_n \subset K + B_\varepsilon \end{cases}$$

où

$$B_\varepsilon = \{x \in E \mid \|x\| \leq \varepsilon\}$$

### I.3 - Définition

Soit  $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $CK(E)$  et  $K$  un élément de  $CK(E)$ . Nous posons

$$d\text{-}\underline{\lim} K_n = \{x \mid \exists \{x_n\}, \forall n, x_n \in K_n, \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0\}$$

$$d\text{-}\overline{\lim} K_n = \{x \mid \exists \{x_n\}, \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0,$$

$$\exists \Psi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \text{ strict. croiss.}, \forall n, x_n \in K_{\Psi(n)}\}$$

Nous dirons que  $K$  est la d-limite de  $\{K_n\}$  si  $K = d\text{-}\underline{\lim} K_n = d\text{-}\overline{\lim} K_n$ .

Nous noterons alors  $K = d\text{-}\lim K_n$ .

On sait (Berge [1], Chapitre VI, § 5), qu'on a toujours  $d\text{-}\underline{\lim} K_n \subset d\text{-}\overline{\lim} K_n$ , que  $d\text{-}\underline{\lim} K_n$  et  $d\text{-}\overline{\lim} K_n$  sont fermés dans E (ceci est encore vrai si les  $K_n$  sont fermés dans E) et que

$$d\text{-}\overline{\lim} K_n = \bigcap_k \overline{\bigcup_{n>k} K_n}$$

Remarque : M. P.J. Laurent m'a fait remarquer que la notation  $d\text{-}\underline{\lim} K_n$  semblait indiquer que l'ensemble ainsi noté dépendait de la métrique choisie dans E alors que seule la topologie de E intervient. Il ne faut voir là en effet qu'une notation destinée à distinguer cette limite des autres que nous utilisons.

#### I-4 - Définition (Wijsman [1] et [2])

Soit  $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $CK(E)$  et  $K \in CK(E)$ . Nous dirons que  $\{K_n\}$  converge infinitésimalement vers K, et nous noterons  $K_n \xrightarrow{\text{inf}} K$ , si

$$\forall x' \in E', \lim_{\rho \rightarrow 0} \limsup_n \rho \varphi(x', K_n) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \liminf_n \rho \varphi(x', K_n)$$

où

$$\rho \varphi(x', K_n) = \inf\{\varphi(y', K_n) \mid d(x', y') < \rho\}.$$

Voici quelques propriétés élémentaires reliant les différentes notions de convergences précédentes.

#### 1.5 - Lemme

Soit  $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $CK(E)$ . Soit  $\{x'_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  un sous-ensemble dénombrable dense d'éléments de E'. Si les suites  $\{\varphi(x'_k, K_n)\}_{k \in \mathbb{N}}$  sont convergentes pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , alors  $\{\varphi(x', K_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge pour tout  $x' \in E'$ . De plus, il existe  $K \in CK(E)$  tel que

$$\forall x' \in E' \quad \varphi(x', K) = \lim_n \varphi(x', K_n).$$

Enfin la convergence de la suite  $\{\varphi(\cdot, K_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  vers  $\varphi(\cdot, K)$  est uniforme sur tout compact de  $E'$ .

Démonstration: les ensembles  $K_n$  étant compacts, les fonctions  $\varphi(\cdot, K_n)$  sont bornées. Il résulte alors du théorème 10.8 de Rockafellar [1] qu'il existe une fonction convexe finie  $f$  sur  $E'$  telle que

$$\forall x' \in E', \quad f(x') = \lim_n \varphi(x', K_n).$$

Il est facile de voir que, de plus,  $f$  est positivement homogène, et qu'il existe un compact convexe non vide  $K$  de  $E$  tel que

$$\forall x' \in E', \quad f(x') = \varphi(x', K).$$

La propriété d'uniforme convergence résulte du même théorème de Rockafellar.

#### I.6 - Lemme

S'il existe un élément  $Q \in CK(E)$  tel que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on ait  $K_n \subset Q$ , alors pour tout  $x' \in E'$ ,  $\{\varphi(x', K_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée et il existe une sous-suite  $\{K_{\psi(n)}\}_n$  qui converge scalairement vers un élément  $K$  de  $CK(E)$  et la convergence est uniforme sur tout compact de  $E'$ .

La démonstration est une simple application du théorème 10.9 de Rockafellar [1].

#### I.7 - Lemme

(Ghouila-Houri [1])

Soient  $K_1$  et  $K_2$  deux éléments de  $CK(E)$ . Alors

$$\Delta(K_1, K_2) = \sup_{\|x'\|=1} |\varphi(x', K_1) - \varphi(x', K_2)|$$

Nous renvoyons à Ghouila-Houri ou à Hörmander [1] pour la démonstration.

Remarque : Ce lemme prouve que dans  $CK(E)$ , la convergence au sens de Hausdorff est équivalente à la convergence scalaire, puisque d'après le lemme I.5 la convergence scalaire entraîne la convergence uniforme sur tout borné de  $E'$  (Valadier [1]. Lemmes I.24 et I.25).

Nous relierons maintenant les propriétés précédentes à la  $d$ -convergence, qui est dans la pratique la notion utilisée (pour les convexes fermés).

### I.8 - Lemme

Soit  $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $CK(E)$  et  $K \in CK(E)$ . Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

$$1) \quad \lim_n \Delta(K_n, K) = 0$$

$$2) \quad K = d\text{-}\lim K_n.$$

Démonstration : 1  $\Rightarrow$  2)

a) Soit  $x \in K$ . Montrons que  $K \subset d\text{-}\lim K_n$ .

L'hypothèse 1) entraîne que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n \geq N, \Delta(K_n, K) < \varepsilon$$

et en particulier

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n \geq N, \sup_{x \in K} d(x, K_n) < \varepsilon$$

c'est-à-dire

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n \geq N, \forall x \in K, d(x, K_n) < \varepsilon$$

Or  $K_n$  étant convexe compact, il existe, pour tout  $n$ , un élément  $x_n \in K_n$  tel que  $d(x, x_n) = d(x, K_n)$ . On a donc  $x \in d\text{-}\lim K_n$ .

b) Montrons maintenant que  $d\text{-}\lim K_n \subset K$ .

Soit  $x \in d\text{-}\lim K_n$ . Il existe donc une suite  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  et une sous-suite  $\{K_{\psi(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$  telles que  $d(x, x_n) \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow +\infty$  et  $x_n \in K_{\psi(n)}$  pour tout  $n$ .



Donc

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N, \quad \forall n \geq N, \quad x_n \in K+B_\varepsilon$$

Or  $K+B_\varepsilon$  est compact et  $x_n \rightarrow x$ , donc  $x \in K+B_\varepsilon$

Finalement

$$\forall \varepsilon > 0, \quad x \in K+B_\varepsilon$$

et par conséquent  $x \in K$  et  $d\text{-}\overline{\lim} K_n \subset K$ .

Il résulte alors de a) et b) que  $K = d\text{-}\lim K_n$ .

2)  $\Rightarrow$  1). Nous supposons maintenant que  $K$  est compact et  $K = d\text{-}\lim K_n$ .

c) Montrons que, pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $K \subset K_n+B_\varepsilon$ , pour  $n$  assez grand.

Soit  $B(x_i, \varepsilon)$  la boule ouverte de centre  $x_i$  et de rayon  $\varepsilon$ .

$K$  étant compact, il existe  $x_1, \dots, x_m$  dans  $K$  tels que

$$K \subset \bigcup_{i=1}^m B(x_i, \frac{\varepsilon}{2})$$

Alors, il existe  $N$  tel que, pour tout  $n \geq N$ ,  $d(x_i, K_n) < \frac{\varepsilon}{2}$  pour tout  $i \in \{1, \dots, m\}$ . On a donc  $B(x_i, \frac{\varepsilon}{2}) \subset K_n+B_\varepsilon$ , pour tout  $i \in \{1, \dots, m\}$ , et par conséquent  $K \subset K_n+B_\varepsilon$ .

d) Montrons maintenant que, pour  $n$  assez grand,  $K_n \subset K+B_\varepsilon$ .

Soit  $S$  une sphère fermée centrée à l'origine, de rayon suffisamment grand pour que  $K$  soit strictement contenu dans  $S$ . Posons  $K_n^R = K_n \cap S$ .  $K_n^R$  est convexe compact non vide.

S'il existe  $\varepsilon > 0$  et s'il existe  $\Psi$  application strictement croissante de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{N}$ , telle que  $\forall n \in \mathbb{N}, K_{\Psi(n)}^R \not\subset K+B_\varepsilon$ , alors il existe  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  telle que, pour tout  $n$ ,  $x_n \in K_{\Psi(n)}^R$  et  $x_n \notin K+B_\varepsilon$ .

La suite  $\{x_n\}$  étant incluse dans  $S$  qui est compact, il existe une suite extraite  $\{x_{\xi(n)}\}_n$  ( $\xi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , stric. crois.) qui converge vers un élément  $x$  de  $S$ . Puisque, pour tout  $n$ ,  $x_{\xi(n)} \notin K+B_\varepsilon$ , alors  $x \notin K$ .

Or, d'après l'hypothèse  $\{x_n\}$  convergeant vers  $x$ , on doit avoir  $x \in K$ , ce qui est contradictoire avec le résultat précédent.

On a donc, pour tout

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N, \quad \forall n \geq N \quad K_n^R \subset K+B_\varepsilon$$

Comme il existe  $\varepsilon_0 > 0$ , tel que  $K+B_{\varepsilon_0} \subset S$ , on a donc

$$\forall \varepsilon > \varepsilon_0, \quad \varepsilon > 0, \quad \exists N, \quad \forall n \geq N \quad K_n^R \subset K+B_\varepsilon \subset S$$

et par suite

$$K_n \subset K+B_\varepsilon .$$

En regroupant les résultats de c) et d), on voit que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta(K_n, K) = 0$ .

### I.9 - Lemme (Wijsman)

Soit  $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $CK(E)$  et  $K$  un élément de  $CK(E)$ .

Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

1)  $K = d\text{-}\lim K_n$

2)  $K_n \xrightarrow{\text{inf}} K$

Nous ne démontrerons pas ici cette proposition. Nous renvoyons, vu sa longueur, à la démonstration de Wijsman [2].

### I.10 - Nous avons ainsi :

#### Proposition

Soit  $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $CK(E)$  et  $K$  un élément de  $CK(E)$

Alors les quatre propositions suivantes sont équivalentes :

- 1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta(K_n, K) = 0$
- 2)  $K = d\text{-}\lim K_n$
- 3)  $K_n \xrightarrow{\text{scal}} K$  quand  $n \rightarrow \infty$ .
- 4)  $K_n \xrightarrow{\text{inf}} K$  quand  $n \rightarrow \infty$ .

Nous insistons sur le fait que ces équivalences ne sont vraies qu'en dimension finie et dans le cas de convexes compacts. Plusieurs implications demeurent vraies dans le cas de convexes fermés et aussi en dimension quelconque.

Ces quatre types de convergence étant équivalents pour les suites d'éléments de  $CK(E)$ , nous dirons par la suite, que  $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $K$  sans préciser autrement le mode de convergence.

Enfin, signalons une conséquence du lemme I.8 :

### I.11 - Corollaire

*Avec les notations du lemme I.8 les propositions suivantes sont équivalentes :*

- 1)  $K = d\text{-}\lim K_n$
  - 2)  $\forall x \in E, \quad d(x, K_n) \rightarrow d(x, K)$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .
  - 3)  $\forall x \in K, \quad d(x, K_n) \rightarrow 0$  "
- et
- $$\forall x \notin K, \quad \liminf d(x, K_n) > 0$$

Citons encore le résultat suivant qui nous sera utile par la suite :

I.12 - Lemme (Hukuhara [1] Prop. 3.3)

Soit  $Q \in CK(E)$  Alors

$$\{K \mid K \in CK(E), K \subset Q\}$$

est compact dans  $CK(E)$  quand on munit  $CK(E)$  de la topologie définie par la distance de Hausdorff.

(Ce lemme est démontré par Hukuhara par une autre méthode, pour un espace métrique quelconque).

Démonstration : Soit  $\{y'_k\}_{k \in \mathbb{N}} = F'$  une partie dénombrable dense de  $E'$ . Alors

$$\forall y'_k \in E' \quad \forall K \in CK(E), \quad K \subset Q$$

$$-\varphi(-y'_k, Q) \leq -\varphi(-y'_k, K) \leq \varphi(y'_k, K) \leq \varphi(y'_k, Q)$$

De la famille  $\{\varphi(y'_1, K)\}_K$ , on peut extraire une sous-suite  $\{\varphi(y'_1, K_{\Psi_1(n)})\}_{n \in \mathbb{N}}$  qui converge vers une limite  $h(y'_1)$ . Puis par extractions successives de sous suites, il existe pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , une application  $\Psi_k : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , strictement croissante, et un nombre  $h(y'_k)$ , tels que

$$\forall i \leq k \quad \varphi(y'_i, K_{\Psi_k(n)}) \rightarrow h(y'_i) \quad \text{quand } n \rightarrow \infty.$$

Posons alors  $\Psi(n) = \Psi_n(n)$ , nous aurons

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \varphi(y'_k, K_{\Psi(n)}) \rightarrow h(y'_k) \quad \text{quand } n \rightarrow \infty.$$

La suite  $\{K_{\Psi(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $CK(E)$  vérifie alors les hypothèses du lemme I.5 et il existe  $K_0 \in CK(E)$ ,  $K_0 \subset Q$  tel que  $K_{\Psi(n)}$  converge vers  $K_0$  et par conséquent tel que  $\Delta(K_{\Psi(n)}, K_0) \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$ .

Remarque : Ce lemme fournit une autre démonstration du lemme I.6.

## II - CONVERGENCE DES EXTREMUMS

Soit  $K \in CK(E)$ . On pose pour  $x' \in E'$  :

$$K'(x') = \{x \in K \mid \langle x', x \rangle = \varphi(x', K)\}$$

Nous savons que

$$\forall y' \in E', \quad \varphi(y', K'(x')) = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{\varphi(x' + \lambda y', K) - \varphi(x', K)}{\lambda}$$

et nous posons donc

$$\varphi(y', K'(x')) = \varphi'(x', y', K)$$

(Ces notations ont été introduites dans VAN CUTSEM [1]).

Nous utiliserons aussi la notation

$$\Pi(x') = \{x \in E \mid \langle x', x \rangle = \varphi(x', K)\}$$

pour désigner l'hyperplan d'appui du convexe compact non vide  $K$  dans la direction  $x'$ . Si une suite  $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $CK(E)$  intervient, nous utiliserons la notation  $\Pi_n(x')$  avec la signification évidente :

$$\Pi_n(x') = \{x \in E \mid \langle x', x \rangle = \varphi(x', K_n)\}$$

$\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  désignant une suite d'éléments de  $CK(E)$  convergeant vers  $K \in CK(E)$ ,  $\{x'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $E' \setminus \{0\}$  convergeant vers  $x' \in E' \setminus \{0\}$ , nous étudions dans ce paragraphe la convergence de la suite  $\{K'_n(x'_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ .

### I.13 - Proposition

Soit  $\{K_n\}$  une suite d'éléments de  $CK(E)$  convergeant vers  $K \in CK(E)$ , et  $\{x'_n\}$  une suite d'éléments de  $E'$  convergeant vers  $x' \in E'$ ,  $x' \neq 0$ . Alors la suite  $\varphi(x'_n, K_n)$  converge vers  $\varphi(x', K)$ .

Démonstration : La suite  $\{\varphi(\cdot, K_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément sur tout compact vers  $\varphi(\cdot, K)$  (Lemme I.5). Donc, pour tout compact  $F' \subset E'$ ,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N_0, \quad \forall y' \in F', \quad |\varphi(y', K_n) - \varphi(y', K)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

En particulier, choisissons pour  $F'$  un voisinage compact de  $x'$ . Alors :

$$\exists N_1 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N_1, \quad \|x'_n - x'\|_{E'} \in F'.$$

Enfin  $\varphi(\cdot, K)$  étant continue sur  $E'$  :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N_2 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N_2, \quad |\varphi(x'_n, K) - \varphi(x', K)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

La proposition résulte alors de la majoration

$$|\varphi(x'_n, K_n) - \varphi(x', K)| \leq |\varphi(x'_n, K_n) - \varphi(x'_n, K)| + |\varphi(x'_n, K) - \varphi(x', K)|$$

$$\text{car } \forall \varepsilon > 0, \quad \exists N = \sup(N_0, N_1, N_2), \quad \forall n \geq N,$$

$$|\varphi(x'_n, K_n) - \varphi(x', K)| \leq \varepsilon.$$

#### I.14 - Proposition

Soit  $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $CK(E)$  convergeant vers  $K \in CK(E)$ . Soit  $\{x'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $E'$  convergeant vers  $x' \in E'$ ,  $x' \neq 0$ . Alors  $d\text{-}\overline{\lim} K'_n(x'_n) \subset K'(x')$ .

Démonstration : Soit  $x \in d\text{-}\overline{\lim} K'_n(x'_n)$ . Par conséquent, il existe  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  telle que  $x = \lim x_n$  et  $x_n \in K'_{\Psi(n)}(x'_{\Psi(n)})$  où  $\Psi$  est une application de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{N}$  strictement croissante. Or, pour tout  $n$  :

$$x_n \in K'_{\Psi(n)}(x'_{\Psi(n)}) \Leftrightarrow \langle x'_{\Psi(n)}, x_n \rangle = \varphi(x'_{\Psi(n)}, K_{\Psi(n)})$$

et, en passant à la limite,  $\langle x', x \rangle = \varphi(x', K)$  puisque

$$\langle x'_{\Psi(n)}, x_n \rangle \rightarrow \langle x', x \rangle \quad \text{quand } n \rightarrow \infty ;$$

d'après la proposition 1.13

$$\varphi(x'_{\Psi(n)}, K_{\Psi(n)}) \rightarrow \varphi(x', K), \quad \text{quand } n \rightarrow \infty,$$

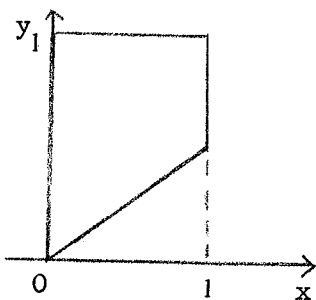
on a donc  $x' \in K'(x')$ .

Corollaire

Avec les hypothèses de la proposition I.14, on a :  $d\text{-}\lim_n K'_n(x'_n) \subset K'(x')$  ;  
 si  $\{K'_n(x'_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge alors  $d\text{-}\lim_n K'_n(x'_n) \subset K'(x')$ .

I.15 - Remarque\_1 : La proposition I.14 traduit le fait que pour  $x' \in E' \setminus \{0\}$ , l'application de  $CK(E)$  dans lui-même qui, à  $K$  associe  $K'(x')$ , est semi-continue supérieurement. Ce résultat est à rapprocher du principe du maximum (Berge [2] p. 122).

I.16 - Remarque\_2 : La convergence de la suite  $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  n'entraîne pas la convergence de la suite  $\{K'_n(x'_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  comme le montre l'exemple suivant :



$$\text{Soit } K_n = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, \alpha_n x \leq y \leq 1\}$$

où  $\alpha_n \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .

Il est évident que  $K_n$  converge vers  $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ .  
 Or si  $u' = (0,-1)$ , alors  $K'_n(u') = \{(0,0)\}$  et  $K'(u') = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1\}$ .

I.17 - Proposition

Soit  $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $CK(E)$  et  $Q \in CK(E)$  tels que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $K_n \subset Q$ . Soit  $\{x'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $E' \setminus \{0\}$  convergeant vers  $x' \in E' \setminus \{0\}$ . Alors il existe  $\Psi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  strictement croissante telle que  $\{K'_{\Psi(n)}(x'_{\Psi(n)})\}$  converge. De plus si  $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $K \in CK(E)$  alors la limite de  $\{K'_{\Psi(n)}(x'_{\Psi(n)})\}_{n \in \mathbb{N}}$  est contenue dans  $K'(x')$ .

Démonstration : L'existence de  $K'_0 \in CK(E)$  et d'une sous-suite

$\{K'_{\psi(n)}(x'_{\psi(n)})\}_{n \in \mathbb{N}}$  extraite de  $\{K'_n(x'_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  convergeant vers  $K'_0$  résulte immédiatement du lemme I.12. Si de plus  $K_n$  converge vers  $\tilde{K}$ , la proposition I.14 montre que  $K'_0 \in \tilde{K}(x')$ .

I.18 - Nous allons maintenant étudier des conditions plus précises assurant la convergence de la suite  $\{K'_n(x'_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ . Les trois propositions suivantes complètent certains résultats de J.L. Joly [1]. Nous y montrons qu'une condition suffisante de convergence de  $\{K'_n(x'_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  vers  $K'(x')$  introduite par J.L. Joly est aussi une condition nécessaire, dans le cas des suites d'éléments de  $CK(E)$ . (prop. I.20).

Proposition

Soit  $K \in CK(E)$ , et  $x' \in E' \setminus \{0\}$ .

Posons  $a = \sup\{d(x, K'(x')) \mid x \in K\}$  et supposons  $a > 0$ . Alors il existe une application  $\gamma : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}_+$ , continue, croissante, convexe, vérifiant  $\gamma(0) = 0$  et  $\forall u \in ]0, a]$ ,  $\gamma(u) \neq 0$  et telle que

$$\forall x \in K \quad \gamma[d(x, K'(x'))] \leq d(x, \Pi(x')).$$

Démonstration. L'hypothèse  $a > 0$  entraîne que  $K \neq K'(x')$ . Soit  $\rho \in [0, a]$ .

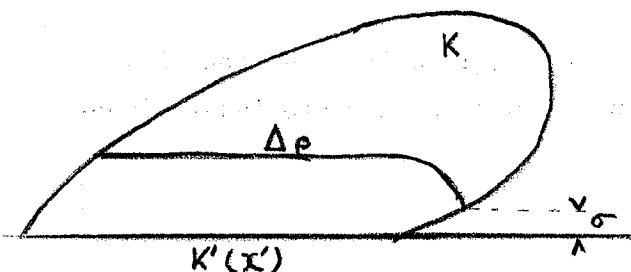
Posons

$$\Delta_\rho = \{x \mid x \in K, d(x, K'(x')) = \rho\}.$$

$\Delta_\rho$  est compact et non vide pour  $\rho \in [0, a]$ .

Soit alors

$$\sigma = \min \{d(x, \Pi(x')) \mid x \in \Delta_\rho\}$$



et désignons par  $g$  l'application de  $[0, a]$  dans  $\mathbb{R}_+$  définie par  $\sigma = g(\rho)$ . Montrons quelques propriétés de  $g$ .



1)  $\rho > 0 \Rightarrow g(\rho) > 0$  :

S'il existe  $\rho > 0$  tel que  $g(\rho) = 0$ , ceci signifie qu'il existe  $x \in \Delta_\rho$  tel que  $d(x, \Pi(x')) = 0$  et  $d(x, K'(x')) > 0$ , ce qui est impossible puisque  $\Pi(x') \cap K = K'(x')$ .

2)  $g$  est croissante

Soient  $\rho_1 \in [0, a]$  et  $\rho_2 \in [0, a]$  et supposons que  $\rho_1 < \rho_2$ . Alors

$$\exists x_1 \in \Delta_{\rho_1} \quad d(x_1, \Pi(x')) = \sigma_1 = g(\rho_1)$$

$$\exists x_2 \in \Delta_{\rho_2} \quad d(x_2, \Pi(x')) = \sigma_2 = g(\rho_2)$$

Supposons que  $\sigma_2 < \sigma_1$ .

Il existe  $y_2 \in K'(x')$  tel que  $d(x_2, y_2) = d(x_2, K'(x')) = \rho_2$ . Le segment  $[y_2, x_2]$  est contenu dans  $K$ . Il existe donc  $x \in [y_2, x_2]$  tel que  $d(x, K'(x')) = \rho_1$ , car il est facile de voir que pour tout  $x \in [y_2, x_2]$ ,  $d(x, K'(x')) = d(x, y_2)$ .

Nous avons donc  $x \in \Delta_{\rho_1}$ .

Si nous posons :  $x = (1-\lambda)x_2 + \lambda y_2$ , ( $\lambda \in [0, 1]$ ) nous aurons  $d(x, y_2) = \lambda \rho_2 = \rho_1$  et  $d(x, \Pi(x')) = \lambda \sigma_2$ , c'est-à-dire  $x \in \Delta_{\rho_1}$  et  $d(x, \Pi(x')) = \lambda \sigma_2 < \sigma_2 < \sigma_1$ , ce qui est contradictoire avec  $\sigma_1 = \min\{d(x, \Pi(x')) \mid x \in \Delta_{\rho_1}\}$ .

3)  $g$  est continue à gauche

Soit  $\rho_0 \in [0, a]$  et  $\sigma_0 = g(\rho_0)$ . Soit  $\{\rho_n\}$  une suite d'éléments de  $[0, a]$  convergeant vers  $\rho_0$  par valeurs inférieures.

Posons  $\sigma_n = g(\rho_n)$ .  $\{\sigma_n\}$  est une suite croissante majorée par  $\sigma_0$  ; elle est donc convergente. Soit  $\lambda$  sa limite. Supposons que  $\lambda = \sigma_0 - \varepsilon$  avec  $\varepsilon > 0$ . Pour tout  $n$ , il existe  $x_n \in \Delta_{\rho_n}$  tel que

$$\sigma_n = \min\{d(x, \Pi(x')) \mid x \in \Delta_{\rho_n}\} = d(x_n, \Pi(x')).$$

La suite  $\{x_n\}$ , étant extraite de  $K$  qui est compact, il existe une sous-suite  $\{x_{\psi(n)}\}$  et  $\tilde{x} \in K$  tels que  $x_{\psi(n)}$  converge vers  $\tilde{x}$  quand  $n$  augmente indéfiniment. Nous avons donc

$$d(x_{\Psi(n)}, K'(x')) = \rho_{\Psi(n)} \rightarrow \rho_0$$

et

$$d(x_{\Psi(n)}, \Pi(x')) = \sigma_{\Psi(n)} \rightarrow \lambda \text{ quand } n \rightarrow +\infty.$$

Comme

$$\forall n, \quad |d(x_{\Psi(n)}, K'(x')) - d(\tilde{x}, K'(x'))| \leq d(x_{\Psi(n)}, \tilde{x})$$

nous obtenons

$$d(\tilde{x}, K'(x')) = \rho_0.$$

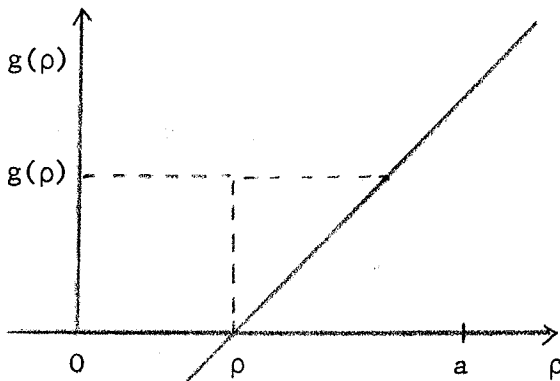
Le point  $\tilde{x}$  appartient donc à  $\Delta_{\rho_0}$  et par ailleurs

$$d(\tilde{x}, \Pi(x')) = \lim_n d(x_{\Psi(n)}, \Pi(x')) = \lambda < \sigma_0,$$

ce qui est contradictoire avec  $\sigma_0 = \min\{d(x, \Pi(x')) \mid x \in \Delta_{\rho_0}\}$ .

Nous aurons donc  $\lambda = \sigma_0$ .

4) Soit alors  $\gamma$  la régularisée de  $g$  (voir Moreau [1], § 6). Alors  $\gamma$  est convexe, semi-continue inférieurement, croissante et  $\gamma(0) = 0$ . (On pourra poser  $\gamma(t) = +\infty$ , si  $t > a$ ). La proposition sera démontrée si nous prouvons que  $\rho \neq 0 \Rightarrow \gamma(\rho) \neq 0$ .



Remarquons d'abord que si  $\rho \in ]0, a]$  et  $g(\rho) \neq 0$ , la forme affine sur  $\mathbb{R}$  définie par

$$X \rightarrow Y = \frac{g(\rho)}{a-\rho} (X-\rho)$$

minore  $g$  sur  $[0, a]$ .

Alors s'il existe  $\rho_0 \in ]0, a]$  tel que  $\gamma(\rho_0) = 0$ , nous aurons  $\gamma(\rho) = 0$  pour tout  $\rho \leq \rho_0$  et

$$\sup \{v(\rho_0) \mid v \text{ forme affine sur } \mathbb{R} \text{ minorant } g\} = 0$$

Or pour  $\rho_1 = \frac{\rho_0}{2}$ ,  $g$  est minoré

$$v(u) = \frac{g(\rho_1)}{a-\rho_1} (u-\rho_1)$$

avec

$$v(\rho_0) = \frac{g(\rho_1)}{a-\rho_1} \rho_1 > 0$$

Ce qui contredit  $\gamma(\rho_0) = 0$ . Nous avons donc

$$\rho_0 \in ]0, a] \Rightarrow \gamma(\rho_0) \neq 0.$$

Enfin,  $\gamma$  étant convexe sur  $\mathbb{R}_+$ ,  $\gamma$  est continue sur son domaine ( $\text{dom}\gamma = \{x \in \mathbb{R} \mid \gamma(x) < +\infty\}$ ) et la proposition est démontrée.

I.19 - Désignons par  $F_a$  l'ensemble des fonctions  $\gamma$  définies sur  $[0, a]$  à valeurs dans  $\mathbb{R}_+$ , continues, croissantes, convexes sur  $[0, a]$ , vérifiant  $\gamma(0) = 0$  et  $u > 0 \Rightarrow \gamma(u) > 0$ . (On pourra supposer en outre  $\gamma(u) = +\infty$  si  $u > a$ ).

La proposition suivante est un cas particulier de J.L. Joly ([1] pages 150 et suivantes). Nous en donnons une démonstration plus adaptée au cas des convexes compacts de E.

Proposition (J.L. Joly)

Soit  $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $CK(E)$  convergeant vers  $K \in CK(E)$ .

Soit  $\{x'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $E' \setminus \{0\}$  convergeant vers  $x' \in E' \setminus \{0\}$ .

Supposons qu'il existe un nombre  $a > 0$  et une application  $\gamma \in F_a$  telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x_n \in K_n : d(x_n, K'_n(x'_n)) \leq a$$

$$\gamma[d(x_n, K'_n(x'_n))] \leq d(x_n, \Pi_n(x'_n)).$$

Alors  $\{K'_n(x'_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $K'(x')$ .

Démonstration : Il est évident qu'on ne restreint pas le raisonnement en supposant  $\|x'_n\| = 1$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  ( $\{x'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  ayant une limite non nulle  $\{\|x'_n\|\}_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée inférieurement par un nombre strictement positif à partir d'un certain rang.)

Puisque  $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $K$ , on a  $d\text{-}\lim K_n = K$ , et il existe  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  telle que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $x_n \in K_n$  et  $\lim d(x_n, x) = 0$ . Soit alors, pour tout  $n$ ,  $y_n \in K'_n(x')$  tel que  $d(x_n, y_n) \stackrel{n \rightarrow \infty}{\approx} d(x_n, K'_n(x'))$ . Montrons que  $d(x, y_n) \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$ .

On a toujours  $d(x, y_n) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y_n)$ .

De plus  $\gamma[d(x_n, y_n)] \leq d(x_n, \Pi_n(x'))$  et, puisque  $\|x'_n\| = 1$

$$d(x_n, \Pi_n(x')) = \varphi(x'_n, K_n) \rightarrow \langle x', x'_n \rangle.$$

Par conséquent  $d(x_n, y_n) \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$ . Comme par ailleurs  $d(x, x_n) \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$ ,  $d(x, y_n) \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$ .

Nous avons donc  $x \in d\text{-}\lim K'_n(x')$  et

$$K'(x') \subset d\text{-}\lim K'_n(x').$$

Comme nous savons déjà que (proposition I.14)

$$d\text{-}\overline{\lim} K'_n(x') \subset K'(x')$$

nous avons finalement

$$K'(x') \subset d\text{-}\lim K'_n(x') \subset d\text{-}\overline{\lim} K'_n(x') \subset K'(x')$$

et

$$K'(x') = d\text{-}\lim K'_n(x').$$

### I.20 - Proposition

Soit  $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $CK(E)$  convergeant vers  $K \in CK(E)$  quand  $n \rightarrow \infty$ . Soit  $\{x'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $E' \setminus \{0\}$  convergeant vers  $x' \in E' \setminus \{0\}$ . On suppose que l'épaisseur  $\alpha$  de  $K$  dans la direction  $x'$  soit strictement positive et que  $\{K'_n(x'_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $K'(x')$  quand  $n \rightarrow \infty$ . Alors il existe  $a > 0$  et  $\gamma \in F_a$  tels que :

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N, \forall x \in K_n, d(x, K'_n(x')) \leq a$$

$$\gamma[d(x, K'_n(x'))] \leq d(x, \Pi_n(x')).$$

Démonstration : Ici encore, nous pouvons supposer que  $\|x'_n\| = 1$ , sans restreindre la généralité de la démonstration.

1) Posons, comme dans la démonstration de la proposition I.18

$$a_n = \sup\{d(x, K'_n(x')) \mid x \in K_n\}$$

et pour  $\rho \in [0, a_n]$

$$g_n(\rho) = \inf\{d(x, \Pi'_n(x')) \mid x \in K_n, d(x, K'_n(x')) = \rho\}$$

$$\gamma_n = g_n^{***}.$$

Posons encore

$$\alpha_n = |\varphi(x'_n, K_n) + \varphi(-x'_n, K_n)|$$

$$\alpha = |\varphi(x', K) + \varphi(-x', K)|$$

$\alpha$  est strictement positif et  $\lim \alpha_n = \alpha$ . Alors, pour  $n$  assez grand,  $\alpha_n > \frac{\alpha}{2}$  et à fortiori  $a_n > \frac{\alpha}{2}$ , puisque  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x'_n\| = 1$ . Il existe donc  $a > 0$  et  $N \in \mathbb{N}$  tels que pour tout  $n > N$ , on ait  $a_n > a$ .

2) Soit alors  $\rho \in [0, a]$ . Montrons que  $\liminf g_n(\rho) \neq 0$ .

Supposons que  $\liminf g_n(\rho) = 0$ . Alors il existe une sous-suite  $\{g_{\psi(n)}(\rho)\}_{n \in \mathbb{N}}$  extraite de  $\{g_n(\rho)\}_{n \in \mathbb{N}}$  telle que  $g_{\psi(n)}(\rho) \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .

Pour simplifier nous noterons encore  $g_n(\rho)$  cette sous-suite.

Pour tout  $n$ , il existe  $x_n \in \{x \mid d(x, K'_n(x')) = \rho\} = \Delta_\rho^n$  tel que

$$g_n(\rho) = \inf\{d(x, \Pi_n(x')) \mid x \in \Delta_\rho^n\} = d(x_n, \Pi_n(x')).$$

La suite  $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  étant convergente, est bornée. La suite  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  est donc contenue dans un compact, et on peut en extraire une sous-suite  $\{x_{\psi(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$  qui converge vers une limite  $\tilde{x}$ , quand  $n \rightarrow +\infty$ .

Or  $g_n(\rho) \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$ , et

$$g_n(\rho) = d(x_n, \Pi_n(x'))$$

entraînent  $d(x_{\psi(n)}, \Pi_{\psi(n)}(x')) \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$ .

Par ailleurs

$$d(x_{\psi(n)}, \tilde{x}) \rightarrow 0$$

et

$$\begin{aligned} d(x_{\psi(n)}, \Pi_{\psi(n)}(x')) &= |\varphi(x'_{\psi(n)}, K_{\psi(n)}) - \langle x'_{\psi(n)}, x_{\psi(n)} \rangle| \\ &\rightarrow |\varphi(x', K) - \langle x', \tilde{x} \rangle| = 0 \end{aligned}$$

d'après la proposition I.13 et parce que  $\|x'_{\psi(n)}\| = 1, \forall n \in \mathbb{N}$ .

Il en résulte alors  $d(\tilde{x}, \Pi(x')) = 0$ .

D'autre part, puisque  $K'_n(x') \rightarrow K'(x')$  scalairement nous avons

$$\forall x \in E \quad d(x, K'_n(x')) \rightarrow d(x, K'(x'))$$

Alors, quand  $n \rightarrow +\infty$ ,

$$d(\tilde{x}, K'_{\psi(n)}(x')) \rightarrow d(\tilde{x}, K'(x'))$$

$$d(\tilde{x}, x_{\psi(n)}) \rightarrow 0$$

et, de

$$|d(\tilde{x}, K_{\psi(n)}(x'_{\psi(n)}) - d(x_{\psi(n)}, K'_{\psi(n)}(x'_{\psi(n)}))| \leq d(\tilde{x}, x_{\psi(n)})$$

résulte

$$d(x_{\psi(n)}, K'_{\psi(n)}(x'_{\psi(n)})) \rightarrow d(\tilde{x}, K'(x'))$$

c'est-à-dire

$$d(\tilde{x}, K'(x')) = \rho.$$

Nous voyons donc que  $\tilde{x} \in \Pi(x')$ ,  $\tilde{x} \notin K'(x')$ , donc  $\tilde{x} \notin K$ . Or  $x_{\Psi(n)} \rightarrow \tilde{x}$  et pour tout  $n$ ,  $x_{\Psi(n)} \in K_{\Psi(n)}$  et par conséquent  $\tilde{x} \in d\text{-}\overline{\lim} K_n = K$ , ce qui contredit le fait que  $\tilde{x} \notin K$ . Par conséquent, nous avons donc

$$a \geq \rho > 0 = \liminf g_n(\rho) > 0.$$

- 3) Montrons maintenant que  $\inf g_n(\rho) > 0$  pour  $\rho \in ]0, a]$ . Ce résultat est facile à vérifier, car, pour tout  $\rho \in ]0, a]$ , il n'y a qu'un nombre fini de valeurs de  $g_n(\rho)$  qui soient inférieures à  $\frac{1}{2} \liminf g_n(\rho)$ . Comme par ailleurs  $g_n(\rho) \neq 0$ , on a bien

$$\rho \in ]0, a] \Rightarrow \inf g_n(\rho) > 0.$$

- 4) Posons alors

$$\gamma = (\inf g_n)^{**}$$

$\gamma$  est définie par  $[0, a]$ , continue, croissante, convexe sur  $[0, a]$  et vérifie  $\gamma(0) = 0$  et, par un raisonnement déjà utilisé au point 4 de la démonstration de la proposition I.18,  $\gamma$  vérifie aussi

$$\rho \in ]0, a] \Rightarrow \gamma(\rho) > 0.$$

Par ailleurs, on a toujours

$$\gamma = (\inf g_n)^{**} \leq \inf g_n^{**} = \inf \gamma_n$$

donc, à partir d'un certain rang, (à cause de la définition de  $a$ )

$$\forall x_n \in K_n, \gamma[d(x_n, K'_n(x'))] \leq \gamma_n [d(x_n, K'_n(x'))] \leq d(x_n, \Pi_n(x')).$$

Cette propriété étant vraie pour tout  $n$ , si  $K_n$  est d'épaisseur non nulle dans la direction  $x'_n$ ,  $\forall n$ .

I.21 - Exemples :

1) Soient  $E = \mathbb{R}^2$ ,  $0 < \alpha < \beta$

$$K_n = \{(x,y) \in E \mid 0 \leq x \leq \alpha, \frac{x}{n} \leq y \leq \beta\}$$

$$K = \{(x,y) \in E \mid 0 \leq x \leq \alpha, 0 \leq y \leq \beta\}$$

Il est facile de vérifier que  $K_n$  converge vers  $K$  quand  $n \rightarrow \infty$ .  
Posons  $x' = (0, -1) \in E'$ . Alors  $K'_n(x') = \{(0,0)\}$  ne converge pas vers  
 $K'(x') = [(0,0), (1,0)]$ .

Par ailleurs

$$\gamma_n(\rho) = g_n(\rho) = \begin{cases} \frac{\rho}{\sqrt{1+n^2}} & \text{si } 0 \leq \rho \leq \alpha \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} \\ \sqrt{\rho^2 - \alpha^2} & \text{si } \frac{\alpha}{n} \sqrt{1+n^2} \leq \rho \leq \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = a \end{cases}$$

et on voit que

$$\gamma(\rho) = \inf_n g_n(\rho) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq \rho \leq \alpha \\ \sqrt{\rho^2 - \alpha^2} & \text{si } \alpha \leq \rho \leq \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \end{cases}$$

2) Soient  $E = \mathbb{R}^2$ ,  $0 < \alpha < \beta$

$$K_n = \{(x,y) \in E \mid 0 \leq x \leq \alpha, x - \frac{n-1}{x} \leq y \leq \beta\}$$

$$K = \{(x,y) \in E \mid 0 \leq x \leq \alpha, 0 \leq y \leq \beta\}$$

On a encore  $K_n \rightarrow K$  quand  $n \rightarrow \infty$ .

Posons  $x' = (0, -1) \in E'$ . Alors  $K'_n(x')$  converge vers  $K'(x')$  et on peut vérifier que  
 $\inf \gamma_n(\rho) > 0$  quand  $\rho > 0$ , puisque

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in K_n, d(x, K'_n(x')) \leq \sqrt{2} d(x, \Pi_n(x')).$$



### III - PROPRIETE D'APPROXIMATION DANS $CK(E)$

La fonction  $\gamma$  des propositions I.18, I.19 et I.20 du paragraphe II ne se prête pas à une étude de l'approximation de  $K'(x')$  par les éléments de  $K'_n(x')$ . A cet effet, nous avons introduit une autre caractérisation de la forme géométrique d'un convexe compact, qui permet d'étudier  $\Delta(K'(x'), K'_n(x'))$  en fonction de  $\Delta(K, K_n)$ , pour  $x'$  fixé.

#### I.22 - Proposition

Soit  $K \in CK(E)$  et  $x' \in E \setminus \{0\}$ . On pose  $\Phi = K'(x')$ . Alors il existe  $h: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  croissante, continue, vérifiant  $h(0) = 0$  et  $h(\rho) \geq \rho$ , et telle que

$$\forall K_1 \in CK(E), \Delta(K, K_1) \leq \rho \Rightarrow \sup\{d(x, \Phi) \mid x \in \Phi_1\} \leq h(\rho)$$

où  $\Phi_1 = K'_1(x')$ .

Démonstration : La proposition est évidente si l'épaisseur de  $K$  dans la direction  $x'$  est nulle. Nous supposons donc cette quantité non nulle.

Désignons par  $\Pi$  l'hyperplan d'appui de  $K$  dans la direction  $x'$ . Posons, pour  $\rho \in \mathbb{R}_+$

$$B_\rho = \{x \in E \mid \|x\| \leq \rho\}$$

$$K+B_\rho = \{x \in E \mid d(x, K) \leq \rho\}$$

$$\Pi+B_\rho = \{x \in E \mid d(x, \Pi) \leq \rho\}$$

Alors  $K+B_\rho \in CK(E)$ , tandis que  $\Pi+B_\rho$  est convexe fermé non vide dans  $E$ .

Soit alors  $F_\rho = (K+B_\rho) \cap (\Pi+B_\rho)$ .  $F_\rho$  est un élément de  $CK(E)$ .

On remarque  $\Phi \subset F_\rho$  et que  $d\text{-}\lim_{\rho \rightarrow 0} F_\rho = \Phi$ .

Soit alors  $K_1 \in CK(E)$  tel que  $\Delta(K, K_1) \leq \rho$ .

Puisque

$$\Phi = \{x \in K \mid \varphi(x', k) = \langle x', x \rangle\}$$

$$\Phi = \{x \in K_1 \mid \varphi(x', K_1) = \langle x', x \rangle\}$$

et que  $\Delta(K, K_1) \leq \rho \Rightarrow \forall y' \in E'$  tel que  $\|y'\| = 1$ ,

$$|\varphi(y', K) - \varphi(y', K_1)| \leq \rho \text{ nous avons } \Phi_1 \subset F_\rho.$$

Posons alors

$$\lambda = \sup\{d(x, \Phi) \mid x \in \Phi_1\}$$

$$\sigma = \sup\{d(x, \Phi) \mid x \in F_\rho\}.$$

$\Phi_1$  et  $F_\rho$  étant compacts, et  $d(\cdot, \Phi)$  continue, ces bornes supérieures sont atteintes. On pose alors  $h(\rho) = \sigma$ , et il est évident que  $h(\rho) \geq \lambda$ . Il reste à étudier les propriétés de  $h$ .

- 1)  $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  est évident
- 2)  $h(0) = 0$  est évident
- 3)  $h(\rho) \geq \rho$  est évident
- 4)  $h$  est croissante  
Si  $\rho_1 < \rho_2$ , alors  $F_{\rho_1} \subset F_{\rho_2}$  et  $h(\rho_1) \leq h(\rho_2)$ .
- 5) Montrons que  $\forall \sigma \in \mathbb{R}_+$ ,  $\exists \rho \in \mathbb{R}_+$ , tel que  $h(\rho) = \sigma$ .  
Ceci est évident si  $\sigma = 0$ .

Supposons donc  $\sigma > 0$ .

Soit

$$S_\sigma = \{x \in E \mid d(x, \Phi) = \sigma\}$$

$S_\sigma$  est fermé, borné, non vide dans  $E$  et par conséquent compact. Considérons alors

$$A = \{\alpha \mid F_\alpha \cap S_\sigma \neq \emptyset\} \subset \mathbb{R}_+.$$

$A$  est non vide, car pour  $\alpha = \sigma$ ,  $F_\sigma \cap S_\sigma$  est évidemment non vide. Posons alors

$$a = \inf\{\alpha \mid \alpha \in A\}$$

Montrons que  $a \in A$ . Etudions pour cela  $F_a \cap S_\sigma$ , et montrons que  $F_a \cap S_\sigma \neq \emptyset$ . Nous savons que  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $F_{a+\varepsilon} \cap S_\sigma \neq \emptyset$ . Soit donc  $x_\varepsilon \in F_{a+\varepsilon} \cap S_\sigma$ . Nous devons avoir

$$d(x_\varepsilon, \Phi) = \sigma$$

$$d(x_\varepsilon, \Pi) \leq a + \varepsilon$$

$$d(x_\varepsilon, K) \leq a + \varepsilon$$

Considérons alors la suite  $\{\varepsilon_p\}$  où  $\varepsilon_p = \frac{1}{p}$ ,  $p \in \mathbb{N}$ .

Alors

$$\forall p \in \mathbb{N}, \exists x_p \in F_{a+1/p} \cap S_\sigma \text{ tel que } \begin{cases} d(x_p, \Phi) = \sigma \\ d(x_p, \Pi) \leq a + \frac{1}{p} \\ d(x_p, K) \leq a + \frac{1}{p} \end{cases}$$

Puisque  $S_\sigma$  est compact, il existe une sous-suite  $\{x_{\psi(p)}\}_{p \in \mathbb{N}}$  extraite de  $\{x_p\}$  qui converge vers  $x_0 \in S_\sigma$ , et

$$d(x_0, \Phi) = \sigma$$

$$d(x_0, \Pi) = \lim_{p \rightarrow \infty} d(x_{\psi(p)}, \Pi) \leq a$$

$$d(x_0, K) = \lim_{p \rightarrow \infty} d(x_{\psi(p)}, K) \leq a$$

et par conséquent  $x_0 \in F_a \cap S_\sigma$  et  $F_a \cap S_\sigma \neq \emptyset$ .

Calculons maintenant  $h(a)$  et montrons que  $h(a) = \sigma$ . Par définition

$$h(a) = \sup \{d(x, \Phi) \mid x \in F_a\}$$

Puisqu'il existe  $x_0 \in F_a \cap S_\sigma$ , nous avons immédiatement  $h(a) \geq \sigma$ . Montrons que  $h(a) > \sigma$  est impossible. Supposons qu'il existe  $x_1 \in F_a$  tel que  $d(x_1, \Phi) = \sigma_1 = h(a) > \sigma$

Soit  $z_1 \in \Phi$ , tel que  $d(x_1, z_1) = d(x_1, \Phi)$

Puisque  $d(x_1, \Phi) > \sigma$ , il existe

$x_2 \in [z_1, x_1]$  tel que  $d(x_2, \Phi) = \sigma$  et par conséquent  $x_2 \in S_\sigma$ .

Puisque  $z \in \Phi$ ,  $z$  appartient à l'intérieur relatif de  $\Pi + B_a$  et à l'intérieur relatif de  $K + B_a$ , et puisque  $x_1 \in F_a$ , et  $x_2 \in [z, x_1]$ ,  $x_2$  appartient à l'intérieur relatif de  $F_a$ , (puisque l'intérieur relatif de  $F_a$  est l'intersection des intérieurs relatifs de  $K + B_a$  et  $\Pi + B_a$  (voir Rockafellar [1] p. 47)).

On a donc :

$$d(x_2, \Phi) = \sigma$$

$$d(x_2, \Pi) < a$$

$$d(x_2, K) < a$$

et par conséquent  $a$  n'est pas le minimum de  $A$ , ce qui est contradictoire. Nous avons donc  $h(a) = \sigma$

6)  $h$  est continue

Ceci résulte du fait que  $h$  est croissante et que  $h(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}_+$  d'après le 5)

I.23 - Remarque

A tout élément  $K \in CK(E)$  et à tout  $x' \in E' \setminus \{0\}$ , est ainsi associé une application  $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  qui permet de majorer  $e(K'(x'), K_1'(x'))$  pour tout élément  $K_1$  de  $CK(E)$  tel que  $\Delta(K, K_1) \leq \rho$ . Nous aurons donc

$$\Delta(K, K_1) \leq \rho \Rightarrow K_1'(x') \subset K'(x') + B_{h(\rho)}$$

Il est par ailleurs facile de voir que  $h(\rho)$  est égal à

$$h(\rho) = \min\{\beta \in \mathbb{R}_+ \mid \Delta(K, K_1) \leq \rho, K_1'(x') \subset K'(x') + B_\beta\}$$

On peut en effet, pour toute valeur de  $\rho$ , définir un convexe  $K_1$ , tel que  $\Delta(K, K_1) \leq \rho$  et tel que  $K_1'(x')$  contienne un point  $x \in F_\rho$  en lequel  $d(x, K'(x'))$  prend sa valeur maximum  $h(\rho)$ .

I.24 - Exemples

- 1) Soit  $E = \mathbb{R}^2$  et  $x' = (0, -1) \in E'$  et  $K$  défini par

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - 2ay \leq 0\}$$

Alors  $h(\rho) = \sqrt{4a\rho + \rho^2}$ , pour les petites valeurs de  $\rho$ .

- 2) Soit  $E = \mathbb{R}^2$  et  $x' = (0, -1) \in E'$ . Soit  $K$  défini par

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq b, ax \leq y\}, \quad 0 < a < b$$

Alors  $h(\rho) = k\rho$  où  $k = \frac{1}{\sin \frac{\theta}{2}}$  avec  $a = \operatorname{tg} \theta$ ,  $0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$ , pour les petites valeurs de  $\rho$ .

- 3) Soit  $E = \mathbb{R}^m$  et  $x' \in E'$ . Soit  $A$  la matrice d'une application linéaire de  $\mathbb{R}^m$  dans  $\mathbb{R}^p$  et  $b$  un élément de  $\mathbb{R}^p$ . Soit  $K$  le sous-ensemble convexe fermé de  $E$  défini par

$$K = \{x \in E \mid x \geq 0, Ax \leq b\}.$$

$K$  est un polyèdre que nous supposons compact non vide ( $x \geq 0$  signifiant que toutes les composantes de  $x$  sont positives).

Il est alors facile de voir que la fonction  $h$  associée à  $K$  et à la direction  $x'$  est linéaire par morceaux, et que, son expression au voisinage de l'origine étant de la forme  $h(\rho) = \alpha\rho$ , la valeur de  $\alpha$  est liée à la valeur minimum des angles avec l'hyperplan  $\Pi(x')$  des arêtes (de dimension 2) issues des points extrêmes de  $K'(x')$ .

### I.25 - Proposition

Soit  $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $CK(E)$  convergeant vers un élément  $K$  de  $CK(E)$ . Soit  $x' \in E' \setminus \{0\}$ . On pose  $\Phi_n = K'_n(x')$  et  $\Phi = K'(x')$ . Soient  $h_n(\cdot)$  (resp.  $h(\cdot)$ ) les applications  $\mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  attachées aux  $K_n$  (resp.  $K$ ) et à la direction  $x'$  par la proposition 1.22. Supposons que  $\sup h_n(\cdot)$  soit continue à l'origine. Alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta(\Phi_n, \Phi) = 0.$$

Démonstration : Nous savons déjà que,  $h$  étant continue à l'origine

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \rho_1 > 0, \forall \rho \leq \rho_1, \Delta(K_n, K) < \rho \Rightarrow \Phi_n \subset \Phi + B_\varepsilon$$

Par ailleurs, puisque  $\sup h_n(\cdot)$  est continue à l'origine, et que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $h_n(0) = 0$ , nous avons

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \rho_2 > 0, \forall \rho \leq \rho_2, \sup h_n(\rho) < \varepsilon$$

ou encore

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \rho_2 > 0, \forall \rho \leq \rho_2, \forall n \in \mathbb{N} \quad h_n(\rho) < \varepsilon$$

Comme

$$\forall \rho > 0, \exists k \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq k, \quad \Delta(K_n, K) \leq \rho$$

nous avons

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \rho_2 > 0, \forall \rho \leq \rho_2, \forall k \in \mathbb{N}, \forall n \geq k$$

$$\Delta(K_n, K) \leq \rho \text{ et } h_n(\rho) < \varepsilon$$

Or  $\Delta(K_n, K) \leq \rho$  et  $h_n(\rho) < \varepsilon$  entraînent  $\Phi \subset \Phi_n + B_{h_n(\rho)} \subset \Phi_n + B_\varepsilon$

et finalement

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \rho_2 > 0, \forall \rho \leq \rho_2, \exists k \in \mathbb{N}, \forall n \geq k$$

$$\Delta(K_n, K) < \rho \text{ et } \Phi \subset \Phi_n + B_\varepsilon$$

En rassemblant ce résultat et celui du début de cette démonstration

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \rho_0 = \inf(\rho_1, \rho_2) > 0, \forall \rho < \rho_0, \exists k \in \mathbb{N}, \forall n \geq k$$

$$\Delta(K_n, K) < \rho, \Phi \subset \Phi_n + B_\varepsilon, \Phi_n \subset \Phi + B_\varepsilon$$

c'est-à-dire

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \rho_0 > 0, \forall \rho < \rho_0, \exists k \in \mathbb{N}, \forall n \geq k$$

$$\Delta(K_n, K) \leq \rho \text{ et } \Delta(\Phi_n, \Phi) \leq \varepsilon$$

En particulier

$$\forall \varepsilon > 0, \exists k \in \mathbb{N}, \forall n \geq k, \Delta(\Phi_n, \Phi) < \varepsilon$$

### I.25 - Remarque

Cette proposition montre que, pour la suite  $\{K_n\}$  de limite  $K$  dans  $CK(E)$  et telle que  $\limsup_{n \rightarrow \infty} h_n(\rho) = 0$ , à tout voisinage  $V_1$  de  $\Phi$ , on peut associer un voisinage  $V_2$  de  $K$  tels que

$$K_n \in V_2 \Rightarrow \Phi_n \in V_1.$$

I.26 - Proposition

Soit  $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $CK(E)$  convergeant vers un élément  $K$  de  $CK(E)$ . Soit  $x' \in E' \setminus \{0\}$ . On pose  $\Phi_n = K'_n(x')$  et  $\Phi = K'(x')$ . Soient  $h_n(\cdot)$  (resp.  $h(\cdot)$ ) les applications  $\mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  associées aux  $K_n$  (resp.  $K$ ) et à la direction  $x'$  par la proposition I.22. Supposons que  $\sup h_n(\cdot)$  ait une limite non nulle quand  $\rho$  tend vers 0. Alors  $d\text{-}\overline{\lim} \Phi_n$  est strictement inclus dans  $\Phi$ .

Démonstration

1) Nous avons les équivalences suivantes :

$$\sup h_n(\rho) > \varepsilon \iff \exists n \in \mathbb{N}, h_n(\rho) > \varepsilon$$

$$\iff \exists n \in \mathbb{N}, \sup\{d(x, \Phi_n) \mid x \in F_n(\rho)\} > \varepsilon$$

$$\iff \exists n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in F_n(\rho), d(x_n, \Phi_n) > \varepsilon$$

et celles-ci entraînent :

$$\sup h_n(\rho) \neq 0 \text{ quand } \rho \rightarrow 0$$

$$\iff \exists \varepsilon > 0, \forall k \in \mathbb{N}, \exists \rho < \frac{1}{k}, \sup h_n(\rho) > \varepsilon$$

$$\iff \exists \varepsilon > 0, \forall k \in \mathbb{N}, \exists \rho < \frac{1}{k}, \exists n_k \in \mathbb{N},$$

$$\exists x_{n_k} \in F_{n_k}(\rho), d(x_{n_k}, \Phi_{n_k}) > \varepsilon$$

$$\iff \exists \varepsilon > 0, \forall k \in \mathbb{N}, \exists n_k \in \mathbb{N}, \exists x_{n_k} \in F_{n_k}\left(\frac{1}{k}\right)$$

$$d(x_{n_k}, \Phi_{n_k}) > \varepsilon.$$

La suite  $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  définie ci-dessus ne peut être bornée. En effet, supposons  $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  bornée ; il existe alors une sous-suite extraite de  $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  qui est constante. Soit  $n_0$  la valeur prise par les termes de cette sous-suite.



Nous avons donc

$$\forall \varepsilon > 0, \forall k \in \mathbb{N}, \exists \rho < \frac{1}{k}, h_{n_0}(\rho) > \varepsilon$$

ce qui montre que  $h_{n_0}(\rho)$  ne tend pas vers 0 quand  $\rho$  tend vers 0, ce qui contredit la continuité<sup>0</sup> de  $h_{n_0}$  à l'origine. La suite  $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  n'est donc pas bornée et on peut en extraire une sous-suite croissante. Pour ne pas surcharger les notations, nous noterons encore  $n_k$  cette sous-suite croissante. Nous dirons donc

$$\forall \varepsilon > 0, \forall k \in \mathbb{N}, \exists \rho < \frac{1}{k}, \exists n_k > k, \exists x_{n_k} \in F_{n_k}(\rho), d(x_{n_k}, \Phi_{n_k}) > \varepsilon.$$

Par ailleurs, puisque  $\Delta(K_n, K) \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow +\infty$ ,

$$\forall p \in \mathbb{N}, \exists M_p \in \mathbb{N}, \forall m > M_p \quad \Delta(K_m, K) < \frac{1}{p}.$$

2) Posons alors

$$n_{i_1} = \inf\{n_k \mid n_k \geq M_1\}$$

$$n_{i_p} = \inf\{n_k \mid n_k \geq M_p, n_k > n_{i_{p-1}}, k > i_{p-1}\}$$

On construit ainsi deux suites  $\{i_p\}_{p \in \mathbb{N}}$  et  $\{n_{i_p}\}_{p \in \mathbb{N}}$  strictement croissantes, telles que

$$\forall \varepsilon > 0, \forall p \in \mathbb{N}, \exists i_p, \exists n_{i_p}, \exists x_{n_{i_p}} \in F_{n_{i_p}}\left(\frac{1}{i_p}\right),$$

$$d(x_{n_{i_p}}, \Phi_{n_{i_p}}) > \varepsilon \text{ et } \Delta(K_{n_{i_p}}, K) < \frac{1}{p}$$

Nous avons donc, pour tout  $p \in \mathbb{N}$  :

$$x_{n_{i_p}} \in (K_{n_{i_p}} + B_{\frac{1}{i_p}}) \cap (\Pi_{n_{i_p}} + B_{\frac{1}{i_p}})$$

et en particulier,

$$x_{n_i p} \in K_{n_i p} + B_{\frac{1}{i_p}}$$

Or

$$(K_{n_i p} + B_{\frac{1}{i_p}}) \subset K + B_{\frac{1}{i_p}} + \frac{1}{p}$$

puisque

$$\Delta(K_{n_i p}, K) < \frac{1}{p} \Leftrightarrow \begin{cases} K_{n_i p} \subset K + B_{\frac{1}{p}} \\ K \subset K_{n_i p} + B_{\frac{1}{p}} \end{cases}$$

et que

$$(K + B_{\frac{1}{p}}) + B_{\frac{1}{i_p}} = K + B_{\frac{1}{i_p}} + \frac{1}{p}$$

La suite  $\{\frac{1}{i_p} + \frac{1}{p}\}_{p \in \mathbb{N}}$  étant décroissante, nous avons

$$x_{n_i p} \in K + B_{\frac{1}{i_1} + 1}$$

et  $\{x_{n_i p}\}_{p \in \mathbb{N}}$  est contenue dans un compact. On peut donc en extraire une sous-suite, encore notée  $\{x_{n_i p}\}$  qui converge vers une limite  $\tilde{x} \in K + B_{\frac{1}{i_1} + 1}$ .

Montrons que  $\tilde{x} \in \Phi$ . De

$$\forall p \in \mathbb{N}, x_{n_i p} \in K + B_{\frac{1}{i_p}} + \frac{1}{p}$$

résulte  $d(x_{n_i p}, K) \leq \frac{1}{i_p} + \frac{1}{p}$ , et, quand  $p \rightarrow +\infty$   $d(x_{n_i p}, K) \rightarrow 0$ . Ceci prouve que  $\tilde{x} = \lim_p x_{n_i p} \in K$ .

On montrerait de même que  $\tilde{x} \in \Pi$ , en partant de

$$\forall p \in \mathbb{N}, x_{n_i p} \in \Pi + B_{\frac{1}{p} + \frac{1}{i_p}}$$

et par conséquent

$$\tilde{x} \in \Phi = K \cap \Pi.$$

3) Montrons maintenant que  $d(\tilde{x}, \overline{d\text{-}\lim} \Phi_{n_i}) \geq \varepsilon$ .

Soit  $z \in \overline{d\text{-}\lim} \Phi_{n_i}$ . Alors il existe  $\{z_p\}_{p \in \mathbb{N}}$  telle que  $d(z, z_p) \rightarrow 0$  quand  $p \rightarrow +\infty$ , et une sous-suite extraite de  $\{\Phi_{n_i}\}_{p \in \mathbb{N}}$  telle que  $z_p \in \Phi_{n_{i\Psi(p)}}$  ( $\Psi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  strictement croissante).

Alors, comme  $d(x_{n_{i\Psi(p)}} , z_p) \geq d(x_{n_{i\Psi(p)}} , \Phi_{n_{i\Psi(p)}}) > \varepsilon$ , nous aurons  $d(\tilde{x}, z) \geq \varepsilon$  et  $d(\tilde{x}, \overline{d\text{-}\lim} \Phi_{n_i}) \geq \varepsilon$ .

4) Il résulte alors du fait que  $x_{n_i p} \rightarrow \tilde{x}$  quand  $p \rightarrow +\infty$ , qu'il existe  $p_0 \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $p > p_0$ ,  $d(\tilde{x}, x_{n_i p}) < \frac{\varepsilon}{2}$ , et par conséquent que  $d(\tilde{x}, \Phi_{n_i p}) > \frac{\varepsilon}{2}$ .

Nous avons ainsi montré que

$$\exists \varepsilon > 0, \exists p_0 \in \mathbb{N}, \forall p \geq p_0, \exists n_i p > p, d(\tilde{x}, \Phi_{n_i p}) > \frac{\varepsilon}{2}$$

c'est-à-dire que

$$\exists \varepsilon > 0, \exists p_0 \in \mathbb{N}, \forall p \geq p_0, \exists n_i p > p, \Phi \not\subset \Phi_{n_i p} + B_{\frac{\varepsilon}{2}}$$

et par conséquent  $\Delta(\Phi_n, \Phi) \neq 0$  quand  $n \rightarrow \infty$ .

I.27 - Remarque

La condition  $\sup_n h_n(\rho) \rightarrow 0$  quand  $\rho \rightarrow 0$  est ainsi nécessaire et suffisante pour que  $\Phi_n \rightarrow \Phi$  quand  $n \rightarrow \infty$ .

IV - CONVERGENCE DES SUITES DE POLYEDRES CONVEXES COMPACTS DANS  $\mathbb{R}^n$

I.28 - Les résultats qui précèdent sont, bien entendu, valables pour les polyèdres convexes. Notre but est ici de préciser certains résultats dans ce cas particulier.

Désignons par  $\mathbb{M}$  le produit cartésien de l'ensemble  $M(p,m)$  des matrices réelles à  $p$  lignes et  $m$  colonnes et du cône positif  $\mathbb{R}_+^p$  de l'espace  $\mathbb{R}^p$ . Nous pouvons identifier  $\mathbb{M}$  à un sous-ensemble de l'espace euclidien  $\mathbb{R}^{mp+p}$  et munir  $\mathbb{M}$  de la topologie induite par celle de  $\mathbb{R}^{mp+p}$ .

A tout élément  $(A,b) \in \mathbb{M}$ , on peut associer un polyèdre convexe fermé de  $\mathbb{R}^m$  défini par

$$K = \{x \in \mathbb{R}^m \mid x \geq 0 \quad Ax \leq b\}$$

où  $x \geq 0$  signifie que toutes les composantes  $x^j$  de  $x$  sont positives. Nous désignons par  $\mathcal{C}$  l'application de  $\mathbb{M}$  dans  $CK(\mathbb{R}^m)$  ainsi définie.

Nous allons distinguer plusieurs sous-ensemble de  $\mathbb{M}$ .

$\mathbb{M}_0$  désignera un sous-ensemble de  $\mathbb{M}$ , constitué des couples  $(A,b)$  tels que  $\mathcal{C}(A,b)$  soit compact non vide.

$\mathbb{M}_1$  désignera un sous-ensemble de  $\mathbb{M}_0$  constitué des couples  $(A,b)$  tels que  $\mathcal{C}(A,b)$  soit compact d'intérieur topologique non vide.

$M_2(A,b)$  ( $A,b$ ) étant un élément de  $M$ ,  $M_2(A,b)$  désignera un sous-ensemble de  $M_0$  constitué des éléments  $(A',b')$  tels que

$$\text{rang } A'^I \leq \text{rang } A$$

où  $I$  est un sous-ensemble de  $\{1,2,\dots,p\}$  défini par

$$I = \{i \mid 1 \leq i \leq p \quad A^i x = b^i \quad \forall x \in \mathcal{K}(A,b)\}$$

$A^i$  et  $b^i$  étant les  $i$ èmes lignes de  $A$  et  $b$ ,  $A^I$  et  $A'^I$  désignant les sous-matrices respectives de  $A'$  et  $A$  constituées des lignes dont l'indice appartient à  $I$ .

Remarquons que  $I$  ne dépend que du couple  $(A,b)$  donné.

$\mathbb{B}(A)$   $A$  étant un élément de  $M(p,m)$   $\mathbb{B}(A)$  désignera un sous-ensemble de  $\mathbb{R}_+^p$  constitué des éléments  $b$  tels que  $\mathcal{K}(A,b)$  soit compact non vide.

I.29 - Soit maintenant  $\{(A_n, b_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $M$ , et pour tout  $n \in \mathbb{N}$   $K_n = \mathcal{K}(A_n, b_n)$ . Supposons que  $(A_n, b_n)$  converge vers  $(A,b) \in M$  quand  $n \rightarrow +\infty$ , c'est-à-dire

$$(A_n)_j^i \rightarrow A_j^i \quad \forall i \quad 1 \leq i \leq p$$

$$b_n^i \rightarrow b^i \quad \forall j \quad 1 \leq j \leq m$$

quand  $n \rightarrow \infty$ . Soit  $K = \mathcal{K}(A,b)$ .

A notre connaissance le problème de la convergence de  $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  vers  $K$ , n'a été étudié qu'assez récemment (voir DANTZIG, FOLKMAN, SHAPIRO [1]). Nous commençons par rappeler les principaux résultats de ces auteurs (propositions I.30 à I.34).

I.30 - Proposition

Soit  $\{(A_n, b_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $\mathbb{M}$  convergeant vers  $(A, b) \in \mathbb{M}$ .

Soit pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $K_n = \mathcal{J}\mathcal{C}(A_n, b_n)$  et  $K = \mathcal{J}\mathcal{C}(A, b)$ .

Soit  $C$  un convexe fermé d'intérieur non vide de  $\mathbb{R}^m$ . Alors

1) 
$$d\text{-}\overline{\lim} (K_n \cap C) \subset K \cap C$$

2) 
$$d\text{-}\underline{\lim} (K_n \cap C) \text{ est un sous-ensemble convexe fermé } K \cap C.$$

3) si  $K \cap C$  est d'intérieur non vide, alors

$$d\text{-}\lim (K_n \cap C) = K \cap C$$

4) si  $K \cap C$  est d'intérieur vide, ou si  $\exists i \in \{1, \dots, p\}$ ,  $\forall x \in K$ ,  $A^i x - b^i = 0$ , alors pour tout sous-ensemble convexe fermé  $Q$  de  $K \cap C$ , on peut choisir une suite  $\{(A_n, b_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  telle que

$$d\text{-}\underline{\lim} (K_n \cap C) = Q.$$

Il résulte en particulier

I.31 - Corollaire

Les notations étant les mêmes que précédemment, supposons  $K$  d'intérieur non vide. Alors la convergence de  $\{(A_n, b_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  vers  $(A, b)$  entraîne celle de  $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  vers  $K$ .

I.32 - Proposition

Soit  $\{(A_n, b_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $\mathbb{M}$  convergeant vers  $(A, b) \in \mathbb{M}$ .

Soit, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $K_n = \mathcal{J}\mathcal{C}(A_n, b_n)$  et  $K = \mathcal{J}\mathcal{C}(A, b)$ . Si

$$\limsup \text{rang } A_n^I \leq \text{rang } A^I$$

alors

soit 
$$d\text{-}\lim K_n = K$$

soit 
$$K_n \text{ est vide pour une infinité de valeurs de } n \text{ et } d\text{-}\underline{\lim} K_n = \emptyset.$$

I.33 - L'importance de l'hypothèse sur les rangs des matrices  $A_n^I$  est marquée par la proposition suivante :

Proposition

Soit  $\{(A_n, b_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $\mathbb{M}$  convergeant vers  $(A, b) \in \mathbb{M}$ .  
Soit, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $K_n = \mathcal{K}(A_n, b_n)$  et  $K = \mathcal{K}(A, b)$ . Supposons  $K$  non vide et

$$\limsup \text{rang } A_n^I > \text{rang } A^I.$$

Alors il existe une suite  $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $\mathbb{R}^P$  vérifiant  $c_n^i = 0$  pour  $i \notin I$  et  $c_n^i \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$  pour  $i \in I$ , et telle que  $d\text{-}\lim \mathcal{K}(A_n, b_n + c_n)$  soit un sous-ensemble propre non vide de  $K$ .

Citons encore

I.34 - Proposition

Soit  $(A, b) \in \mathbb{M}$  et  $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $\mathbb{R}^P$ , convergeant vers 0 quand  $n \rightarrow \infty$  et soit

$$K_n = \mathcal{K}(A, b + c_n)$$

$$K = \mathcal{K}(A, b)$$

Alors, soit  $K_n \rightarrow K$  quand  $n \rightarrow +\infty$   
soit  $K_n$  est vide pour une infinité de valeurs de  $n$ .

I.35 - Les résultats précédents entraînent quelques résultats de continuité, dont nous aurons besoin au chapitre II.

Proposition

Soit  $(A, b) \in \mathbb{M}_0$ . La restriction de l'application  $\mathcal{K}$  à l'ensemble  $M_2(A, b)$  est continue en  $(A, b)$ .

Démonstration : Quelle que soit la suite  $\{(A_n, b_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $M_2(A, b)$  convergeant vers  $(A, b)$ , il résulte de la proposition I.32 que  $\mathcal{J}\mathcal{C}(A_n, b_n) \rightarrow \mathcal{J}\mathcal{C}(A, b)$  dans  $CK(E)$ .  $M$  et  $CK(E)$  étant des espaces métriques,  $\mathcal{J}\mathcal{C}$  est bien continue en  $(A, b)$ .

### I.36 - Proposition

L'application  $\mathcal{J}\mathcal{C}$  est continue en tout point  $(A, b) \in M_1$ . De plus,  $\|(A, b) - (A', b')\|$  désignant une distance sur  $M$  induite par une distance sur  $\mathbb{R}^{mp+p}$  compatible avec la topologie de  $\mathbb{R}^{mp+p}$ , nous avons

$\forall (A, b) \in M_1, \exists \delta > 0, \forall (A', b') \in M$  tel que  $\|(A, b) - (A', b')\| < \delta$

alors  $(A', b') \in M_1$ .

Démonstration : Le corollaire I.31 montre que quelle que soit la suite  $\{(A_n, b_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  extraite de  $M$  convergeant vers  $(A, b) \in M_1$ , nous avons

$$d\text{-}\lim \mathcal{J}\mathcal{C}(A_n, b_n) = \mathcal{J}\mathcal{C}(A, b)$$

L'application  $\mathcal{J}\mathcal{C}$  est donc continue en tout point de  $M_1$  :

$\forall (A, b) \in M_1, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall (A', b') \in M, \|(A, b) - (A', b')\| < \delta$

$$\Rightarrow \Delta(\mathcal{J}\mathcal{C}(A', b'), \mathcal{J}\mathcal{C}(A, b)) < \varepsilon.$$

En particulier  $\forall (A, b) \in M_1, \exists \delta_1 > 0$  tel que  $\|(A', b') - (A, b)\| < \delta_1 \Rightarrow \mathcal{J}\mathcal{C}(A', b')$  est compact.

Montrons maintenant que  $\forall (A, b) \in M_1, \exists \delta_2 > 0$ , tel que  $\forall (A', b') \in M : \|(A', b') - (A, b)\| < \delta_2 \Rightarrow \mathring{\mathcal{J}\mathcal{C}(A', b')} \neq \emptyset$

Puisque  $(A, b) \in M_1, K = \mathcal{J}\mathcal{C}(A, b)$  a un intérieur non vide. Donc, il existe  $x_0 \in \mathring{K}$ . Il en résulte alors que  $\forall i \in \{1, \dots, p\} A^i_{x_0} < b^i$ . Soit alors  $(A', b') \in M_0$  et soit



$$\alpha = \max_{i,j} \{ |A_j^i - A_j^i|, |b^i - b^i| \}$$

(c'est-à-dire  $\| (A', b') - (A, b) \| < \alpha$  en utilisant la distance adhoc sur  $\mathbb{R}^{mp+p}$ ).

Nous avons par ailleurs,

$$\forall i \in \{1, \dots, p\}, A^i x_0 = \sum_{j=1}^m A_j^i x_0^j$$

et on en déduit facilement

$$|A^i x_0 - A^i x_0| \leq \alpha \sup_j |x_0^j|$$

Posons alors  $\varepsilon_i = -A^i x_0 + b^i$  et  $\varepsilon = \inf_i \varepsilon_i$ . Il est facile de voir que

$$\alpha \sup_j |x_0^j| < \frac{\varepsilon}{4}, \quad \alpha < \frac{\varepsilon}{4}$$

entraînent

$$\forall i \quad \frac{\varepsilon}{2} \leq b^i - A^i x_0 \leq \frac{3\varepsilon}{2}$$

et par conséquent que  $x_0 \in \overset{\circ}{\mathcal{J}}\mathcal{C}(A', b')$ . Il suffit alors de prendre  $\delta_2$  tel que  $\frac{\delta}{2} \leq \min(\alpha, \alpha \sup_j |x_0^j|)$ , et on a bien

$$\| (A, b) - (A', b') \| < \delta_2 \Rightarrow \overset{\circ}{\mathcal{J}}\mathcal{C}(A', b') \neq \emptyset.$$

I.37 - Remarque 1 : La dernière partie de la démonstration ne fait pas intervenir la compacité de  $\mathcal{J}\mathcal{C}(A, B)$ .

Remarque 2 : La dernière partie de la démonstration, permet, avec une légère modification, de montrer que si  $B(x_0, \varepsilon)$  est une boule ouverte de centre  $x_0$  et de rayon  $\varepsilon$  contenue dans  $\mathcal{J}\mathcal{C}(A, b)$  supposé d'intérieur non vide, il existe  $\delta > 0$  tel que

$$\forall (A', b') \in \mathbb{M}, \forall i \in \{1, \dots, p\} \|A'^i\| = 1, \|(A', b') - (A, b)\| \leq \delta$$

$$\Rightarrow \overset{\circ}{B}(x_0, \varepsilon) \subset \overset{\circ}{\mathcal{K}}(A', b').$$

Remarque 3 : Nous avons montré que  $\forall (A, b) \in \mathbb{M}_1$  il existe un voisinage ouvert de  $(A, b)$  dans  $\mathbb{M}$  contenu dans  $\mathbb{M}_1$ .  $\mathbb{M}_1$  est donc ouvert dans  $\mathbb{M}$ .

### I.38 - Proposition

Soit  $A \in M(p, m)$ .

La restriction à  $B(A)$  de l'application  $\mathcal{K}$ , est continue sur  $B(A)$ .

En outre  $B(A)$  est fermé dans  $\mathbb{R}_+^p$ .

Démonstration : La continuité découle immédiatement de la proposition I.34.

Montrons que  $B(A)$  est fermé dans  $\mathbb{R}_+^p$ . Soit  $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $B(A)$  convergeant vers  $b \in \mathbb{R}_+^p$  quand  $n \rightarrow +\infty$ . Montrons que  $b \in B(A)$ .

Posons  $K_n = \mathcal{K}(A, b_n)$  et  $K = \mathcal{K}(A, b)$ . Nous devons montrer que  $K$  est compact non vide. Puisque  $K$  est fermé, il reste à montrer qu'il est borné non vide.

La suite  $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente, donc bornée. Soit  $\beta \in \mathbb{R}_+$  tel que  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall i \in \{1, 2, \dots, p\}, b_n^i < \beta$ . Le convexe  $H = \mathcal{K}(A, \beta)$  est borné. En effet, si  $H$  n'est pas borné, il existe une suite  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $H$  telle que

$$\sup_{i \in \{1, 2, \dots, p\}} x_n^i \rightarrow +\infty \text{ quand } n \rightarrow +\infty$$

Il existe alors au moins un indice  $i \in \{1, \dots, p\}$  tel que  $A^i x_n \rightarrow +\infty$  quand  $n \rightarrow +\infty$ . En effet, si  $A^i x_n$  était borné pour tout  $i$  et tout  $n$ , il existerait un nombre  $\lambda > 0$  tel que la suite non bornée  $\{\frac{x_n}{\lambda}\}_{n \in \mathbb{N}}$  soit contenue dans l'un des  $K_n$ ; Or  $K_n$  est compact;  $H$  est donc borné, ainsi que  $K$ .

Il reste à montrer que  $K$  est non vide. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $K_n$  est non vide. Soit donc, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x_n \in K_n$ , et par conséquent  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $x_n \in H$ .  $H$  étant compact, il existe une sous-suite  $\{x_{\psi(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $\psi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  strictement croissante, qui converge vers  $x_0 \in H$ . Or

$$Ax_n \rightarrow Ax_0 \quad \text{quand } n \rightarrow \infty$$

et par conséquent,  $Ax_0 \leq b$  et  $x_0 \in K$  qui est donc non vide.

CHAPITRE - II

CONVERGENCE DES SUITES DE MULTIAPPLICATIONS MESURABLES A VALEURS  
CONVEXES COMPACTES NON VIDES DANS UN ESPACE DE BANACH DE DIMENSION  
FINIE

II.1 - Nous allons dans ce chapitre, définir pour les suites de multiapplications, diverses notions de convergence et étudier la convergence de la suite des faces.

Soit  $(\Omega, \mathcal{G}, P)$  un espace probabilisé complet,  $E$  un espace de Banach de dimension finie.  $CK(E)$  désignera comme précédemment l'ensemble des convexes compacts non vides de  $E$ .

Soit  $\Gamma$  une multiapplication définie sur  $\Omega$  à valeurs convexes compacts non vides dans  $E$  (nous dirons plus brièvement à valeurs dans  $CK(E)$ ). Rappelons que  $\Gamma$  est scalairement,  $\mathcal{G}$ -mesurable si, pour tout  $x' \in E'$  la fonction d'appui  $\varphi(x', \Gamma(\cdot))$  est  $\mathcal{G}$ -mesurable. L'espace  $E$  étant de dimension finie, la mesurabilité scalaire de  $\Gamma$  est équivalente à la mesurabilité de  $\Gamma$ . Plus précisément, les propriétés suivantes sont équivalentes :

1)  $\Gamma$  est scalairement  $\mathcal{G}$ -mesurable

2)  $\Gamma$  est  $\mathcal{G}$ -mesurable, i.e.

$$\forall F \text{ fermé dans } E, \Gamma^-(F) = \{\omega \mid \Gamma(\omega) \cap F \neq \emptyset\}$$

ou encore (voir Valadier [1], Prop. 0.5)

$$\forall U \text{ ouvert de } E, \Gamma^-(U) = \{\omega \mid \Gamma(\omega) \cap U \neq \emptyset\}$$

- 3)  $\Gamma$  admet une famille dénombrable de sections  $\mathcal{G}$ -mesurables  $\{f_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ , telle que pour tout  $\omega \in \Omega$ ,  $\{f_i(\omega)\}_{i \in \mathbb{N}}$  soit dense dans  $\Gamma(\omega)$ .
- 4)  $\forall x \in E$ ,  $d(x, \Gamma(\cdot))$  est  $\mathcal{G}$ -mesurable.

Nous désignerons par  $\mathcal{G}$  l'ensemble des multiapplications définies sur  $\Omega$  à valeurs dans  $CK(E)$ ,  $\mathcal{G}$ -mesurables.

Remarque : les propriétés 2) 3) 4), ci-dessus, sont encore équivalentes si  $\Gamma$  est à valeurs convexes fermés non vides dans  $E$ .

Toutes les propriétés résumées ici sont analysées dans le premier chapitre de Valadier [1]. Voir aussi Rockafellar [2].

Exemple : Soit  $(\Omega, \mathcal{G}, P)$  un espace probabilisé,  $A$  une matrice aléatoire définie sur  $(\Omega, \mathcal{G})$  à valeurs dans  $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ ,  $B$  un vecteur aléatoire défini sur  $(\Omega, \mathcal{G})$  à valeurs dans le cône positif de  $\mathbb{R}^p$ , tels que, pour tout  $\omega \in \Omega$

$$\Gamma(\omega) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A(\omega)x \leq B(\omega), x \geq 0\}$$

soit compact non vide. Alors  $\Gamma$  est une multiapplication définie sur  $\Omega$  à valeurs dans  $CK(\mathbb{R}^n)$  et  $\mathcal{G}$ -mesurable (Rockafellar [2] Théorème 4).

Nous allons donner d'abord quelques précisions sur la mesurabilité et l'intégrabilité de quelques applications.

## I - PROPRIETES DE MESURABILITE ET D'INTEGRABILITE

Soit  $P(X', \Gamma)$  un programme linéaire stochastique (voir introduction pour la définition). Nous dirons que  $P(X', \Gamma)$  est  $\mathcal{G}$ -mesurable si  $X'$  et  $\Gamma$  sont  $\mathcal{G}$ -mesurables.

Pour tout  $\omega \in \Omega$ , l'ensemble des solutions optimales de  $P(X'(\omega), \Gamma(\omega))$  est la face de  $\Gamma(\omega)$  dans la direction  $X'(\omega)$ . Conformément aux notations de Van Cutsem [1] nous le notons  $\Gamma'(X'(\omega), \omega)$ .

Par analogie avec le cas déterministe, nous poserons

$$\Gamma'(x', \omega) = \{x \in \Gamma(\omega) \mid \langle x', x \rangle = \varphi(x', \Gamma(\omega))\}$$

et

$$\forall y' \in E' : \varphi(y', \Gamma'(x', \omega)) = \varphi(x', y', \Gamma(\omega)).$$

Nous écrirons de façon analogue

$$\begin{aligned} \Gamma''(x', y', \omega) &= \{x \in \Gamma'(x', \omega) \mid \langle y', x \rangle = \varphi(y', \Gamma'(x', \omega))\} \\ &= \{x \in \Gamma'(x', \omega) \mid \langle y', x \rangle = \varphi(x', y', \Gamma(\omega))\} \end{aligned}$$

Il est évident que  $\Gamma'(x', \omega) = \Gamma''(x', y', \omega)$  si  $y' = \lambda x'$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ , et que, par contre, l'inclusion  $\Gamma''(x', y', \omega) \subset \Gamma'(x', \omega)$  peut être stricte si  $x'$  et  $y'$  sont linéairement indépendants.

Nous définirons ainsi par récurrence pour  $n \geq 2$

$$\begin{aligned} \Gamma^{(n)}(x'_1, x'_2, \dots, x'_n, \omega) &= \{x \in \Gamma^{(n-1)}(x'_1, \dots, x'_{n-1}, \omega) \mid \\ &\quad \langle x'_n, x \rangle = \varphi(x'_n, \Gamma^{(n-1)}(x'_1, \dots, x'_{n-1}, \omega))\} \end{aligned}$$

où

$$\varphi(x'_n, \Gamma^{(n-1)}(x'_1, \dots, x'_{n-1}, \omega)) = \varphi^{(n-1)}(x'_1, \dots, x'_n, \Gamma(\omega)).$$

Il est évident que pour tout  $\omega \in \Omega$  la suite  $\{\Gamma^{(n)}(x'_1, \dots, x'_n, \omega)\}_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante quand  $n$  croît.

### II.3 - Proposition

Soit  $P(X', \Gamma)$  un programme linéaire stochastique défini sur  $(\Omega, \mathcal{G})$  et  $\mathcal{G}$ -mesurable. Alors la multiapplication  $\Gamma'(X'(\omega), \Gamma(\omega))$  est  $\mathcal{G}$ -mesurable.

Démonstration : L'application  $\varphi : E' \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  est telle que

$$\forall x' \in E', \quad \varphi(x', \Gamma(\cdot)) \text{ est } \mathcal{G}\text{-mesurable}$$

$$\forall \omega \in \Omega, \quad \varphi(\cdot, \Gamma(\omega)) \text{ est convexe et continue sur } E'.$$

L'application  $X' : \Omega \rightarrow E'$  étant mesurable, il résulte de Castaing [1] (remarque page 10) que  $\varphi(X'(\cdot), \Gamma(\cdot))$  est  $\mathcal{G}$ -mesurable.

Puisque

$$\Gamma'(X'(\omega), \omega) = \{x \in \Gamma(\omega) \mid \langle X'(\omega), x \rangle = \varphi(X'(\omega), \Gamma(\omega))\}$$

la mesurabilité de la multiapplication  $\omega \rightarrow \Gamma'(X'(\omega), \omega)$  résulte de Valadier [1] (proposition I.9 page 26).

L'ensemble des solutions optimales de  $P(X', \Gamma)$  est donc une multiapplication  $\mathcal{G}$ -mesurable. Il en est de même des sections extrémales :

### II-4 - Proposition

Soient  $X'_1, \dots, X'_n$ ,  $n$  variables aléatoires sur  $(\Omega, \mathcal{G})$  à valeurs dans  $E' \setminus \{0\}$  telles que pour tout  $\omega \in \Omega$ , les éléments  $X'_1(\omega), \dots, X'_n(\omega)$  soient linéairement indépendants ( $n = \dim E$ ). Soit

$$\sigma(\omega) = \Gamma^{(n)}(X'_1(\omega), \dots, X'_n(\omega), \omega)$$

Le point extrême de  $\Gamma(\omega)$  pour l'ordre lexicographique dans  $E'$  défini par  $(X'_1(\omega), \dots, X'_n(\omega))$ . Alors l'application  $\sigma : \Omega \rightarrow E$  est  $\mathcal{G}$ -mesurable.

Démonstration : Il suffit d'appliquer n fois la proposition II.3

Remarque : Les propositions II.3 et II.4 sont vraies avec des hypothèses moins restrictives que les nôtres ( $E = \mathbb{R}^n$ ) (voir Valadier [1] ou Castaing [1], [2]).

### II.5 - Proposition

Soient A et B deux éléments de G.

Alors l'application de  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}_+$  définie par

$\omega \rightarrow \Delta(A(\omega), B(\omega))$   
est G-mesurable.

Démonstration :

1) B étant mesurable, on sait que  $\forall a \in E, \omega \rightarrow d(a, B(\omega))$  est G-mesurable.

2) Soit f une section G-mesurable de A. Alors  $\forall \omega \in \Omega, a \rightarrow d(a, B(\omega))$  est continue sur E, car  $\forall a \in E, \forall b \in E, \{d(a, B(\omega)) - d(b, B(\omega))\} \leq d(a, b)$

-  $\forall a \in E, \omega \rightarrow d(a, B(\omega))$  est G-mesurable

- L'application  $\omega \rightarrow f(\omega)$  étant G-mesurable, l'application  $\omega \rightarrow d(f(\omega), B(\omega))$  est G-mesurable, d'après Castaing [1] remarque page 10 .

3) A étant G-mesurable à valeurs dans  $CK(E)$ , où E est un espace métrisable séparable, A admet une famille dénombrable de sections mesurables denses  $\{f_i\}$ . Nous avons donc

$$\begin{aligned} \forall \omega \in \Omega \quad \sup\{d(f(\omega), B(\omega)) \mid f \text{ section G-mesurable de A}\} \\ = \sup_i \{d(f_i(\omega), B(\omega))\} \end{aligned}$$

et  $\omega \rightarrow \sup_i \{d(f_i(\omega), B(\omega))\}$  est G-mesurable puisque borne supérieure d'une famille dénombrable d'applications mesurables.



4) Enfin, puisque  $e(A(\omega), B(\omega)) = \sup_{a \in A(\omega)} \inf_{b \in B(\omega)} d(a, b)$  l'application

$\omega \rightarrow e(A(\omega), B(\omega))$  est  $G$ -mesurable d'après ce qui précède et

$$\omega \rightarrow \Delta(A(\omega), B(\omega)) = \max\{e(A(\omega), B(\omega)), e(B(\omega), A(\omega))\}$$

est  $G$ -mesurable, et la proposition est démontrée.

## II-6 - Proposition

Soit  $\Gamma$  un élément de  $G$ .

Soit  $x' \in E'$ . Soit pour tout  $\omega \in \Omega$ ,  $h(\omega, \cdot)$  la fonction associée au compact convexe non vide  $\Gamma(\omega)$  et à la direction  $x'$  par la proposition I.22.

Alors pour tout  $\rho \in \mathbb{R}_+$ ,  $h(\cdot, \rho)$  est  $G$ -mesurable.

Démonstration : Posons  $\Phi(\omega) = \Gamma'(x', \omega)$ .  $\Phi$  est  $G$ -mesurable, et  $h$  est définie sur  $\Omega \times \mathbb{R}_+$  par :

$$h(\omega, \rho) = \sup\{d(x, \Phi(\omega)) \mid x \in F_\rho(\omega)\}$$

où

$$F_\rho(\omega) = (\Gamma(\omega) + B_\rho) \cap (\Pi(\omega) + B_\rho)$$

avec

$$\Pi(\omega) = \{x \in E \mid \langle x', x \rangle = \varphi(x', \Gamma(\omega))\}$$

$$B_\rho = \{x \in E \mid \|x\| \leq \rho\}$$

La multiapplication  $\Gamma(\cdot) + B_\rho$  est scalairement mesurable puisque

$$\forall y' \in E', \|y'\| = 1, \varphi(y', \Gamma(\omega) + B_\rho) = \varphi(y', \Gamma(\omega)) + y'$$

et par conséquent  $G$ -mesurable.

Alors

$$F_\rho(\omega) = \{x \in \Gamma(\omega) + \rho \mid \langle x', x \rangle \geq \varphi(x', \Gamma(\omega)) - \rho\}$$

et  $F_\rho$  est scalairement  $G$ -mesurable d'après Valadier [1] . Proposition 1.9

Par ailleurs, pour tout  $x \in E$ ,  $\omega \rightarrow d(x, \Phi(\omega))$  est  $G$ -mesurable. Soit alors  $\{f_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  une famille dénombrable de sections de  $F_\rho$  telles que pour tout  $\omega \in \Omega$ ,  $\{f_i(\omega)\}$  soit dense dans  $F_\rho(\omega)$ . Alors

$$\forall \omega \in \Omega: \sup\{d(x, \Phi(\omega)) \mid x \in F_\rho(\omega)\} = \sup_i d(f_i(\omega), \Phi(\omega)).$$

Or, pour tout  $i \in \mathbb{N}$ ,  $\omega \rightarrow g_i(\omega) = d(f_i(\omega), \Phi(\omega))$  est  $G$ -mesurable, d'après un raisonnement déjà utilisé dans la démonstration de la proposition II.5. Alors  $\sup_i g_i$  est  $G$ -mesurable, et la proposition est démontrée. (La fin de cette démonstration correspond à la version "mesure abstraite" du théorème 4,5' de Castaing [1]).

II.7 - Rappelons qu'une multiapplication  $\Gamma \in G$  est dite *scalairement P-intégrable* si

$$\forall x' \in E' \quad \varphi(x', \Gamma(\cdot)) \in L^1(\Omega, G, P)$$

et est dite *P-intégrable* si

$$\forall f \in m_\Gamma, f(\cdot) \in L^1(\Omega, G, P)$$

où  $m_\Gamma$  désigne l'ensemble des sections  $G$ -mesurables de  $\Gamma$ .

On sait que

$$x' \rightarrow \int_\Omega \varphi(x', \Gamma) dP$$

est la fonction d'appui d'un convexe compact non vide de  $E$  et que l'on note  $\int_\Omega \Gamma dP$ , et que,  $E$  étant de dimension finie, on a

$$\int_\Omega \Gamma dP = \left\{ \int_\Omega f dP \mid f \in m_\Gamma \right\}$$

II-8 - Proposition

Soient  $\Gamma_1 \in G$  et  $\Gamma_2 \in G$  et  $P$ -intégrables.

Alors  $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$  est intégrable et  $\int_{\Omega} \Gamma_1 \cap \Gamma_2 \, dP \subset \int_{\Omega} \Gamma_1 \, dP \cap \int_{\Omega} \Gamma_2 \, dP$

Démonstration : On sait déjà que  $\omega \rightarrow \Gamma_1(\omega) \cap \Gamma_2(\omega)$  est  $G$ -mesurable.

Par ailleurs,  $\forall x' \in E', \forall \omega \in \Omega$

$$|\varphi(x', \Gamma_1(\omega) \cap \Gamma_2(\omega))| \leq \sup\{\varphi(x', \Gamma_1(\omega)), -\varphi(-x', \Gamma_1(\omega)), \varphi(x', \Gamma_2(\omega)), -\varphi(-x', \Gamma_2(\omega))\}$$

et par conséquent, pour tout  $x' \in E', \varphi(x', \Gamma_1(\cdot) \cap \Gamma_2(\cdot)) \in L^1(\Omega, G, P)$ .

Enfin, il est évident que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Gamma_1 \cap \Gamma_2 \, dP &= \left\{ \int_{\Omega} f \, dP \mid f \in m_{\Gamma_1 \cap \Gamma_2} \right\} \\ &= \left\{ \int_{\Omega} f \, dP \mid f \in m_{\Gamma_1} \cap m_{\Gamma_2} \right\} \\ &\subset \int_{\Omega} \Gamma_1 \, dP \cap \int_{\Omega} \Gamma_2 \, dP. \end{aligned}$$

II-9 - Proposition

Soit  $\Gamma \in G$  et  $P$ -intégrable.

Soit  $g \in L^1_E(\Omega, G, P)$ . Alors  $\omega \rightarrow d(g(\omega), \Gamma(\omega)) \in L^1(\Omega, G, P)$ .

Démonstration : Nous avons vu que  $d(g(\cdot), \Gamma(\cdot))$  est  $G$ -mesurable.

Posons, pour tout  $\omega \in \Omega, f(\omega) = \text{prox}_{\Gamma(\omega)} g(\omega)$  ;

$f$  est une section  $G$ -mesurable de  $\Gamma$  et par conséquent,  $f$  est intégrable.

Alors  $d(f(\omega), g(\omega)) = d(g(\omega), \Gamma(\omega))$  montre que  $d(g(\cdot), \Gamma(\cdot))$  est  $P$ -intégrable.

II.10 - Proposition

Soit  $\Gamma \in G$  et  $P$ -intégrable.

Soit  $g \in L^1_E(\Omega, G, P)$ . Alors

$$\omega \rightarrow \sup\{d(g(\omega), x) \mid x \in \Gamma(\omega)\} \in L^1(\Omega, G, P).$$

Démonstration : Nous savons déjà que

$$\omega \mapsto \sup\{d(g(\omega), x) \mid x \in \Gamma(\omega)\}$$

est  $\mathbb{G}$ -mesurable (voir proposition II.5).

Par ailleurs, il existe une suite  $\{f_n\}$  d'éléments de  $\mathfrak{M}_\Gamma$  telle que, pour tout  $\omega$ ,  $\{f_n(\omega)\}_n$  soit dense dans  $\Gamma(\omega)$ .

Alors

$$\forall \omega \in \Omega, \sup\{d(g(\omega), x) \mid x \in \Gamma(\omega)\} = \sup_n \{d(f_n(\omega), g(\omega))\}$$

Les fonctions  $f_n$  et  $g$  étant  $P$ -intégrables,  $d(f_n(\cdot), g(\cdot))$  est  $P$ -intégrable pour tout  $n$ .

La multiapplication  $\Gamma$  étant  $P$ -intégrable, il existe une fonction  $h: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$ ,  $P$ -intégrable telle que

$$\forall f \in \mathfrak{M}_\Gamma, \forall \omega \in \Omega, \|f(\omega)\| \leq h(\omega)$$

(voir Valadier [1], lemme I.15 et prop. I.18).

Par conséquent

$$\forall n, \forall \omega \in \Omega, d(f_n(\omega), g(\omega)) \leq \|f_n(\omega)\| + \|g(\omega)\|$$

$$\leq h(\omega) + \|g(\omega)\|$$

et

$$\forall \omega \in \Omega, \sup_n d(f_n(\omega), g(\omega)) \leq h(\omega) + \|g(\omega)\|$$

et

$d(f_n(\cdot), g(\cdot))$  est  $P$ -intégrable.

### II.11 - Proposition

Soient  $\Gamma_1 \in G$  et  $\Gamma_2 \in G$ , et P-intégrables.

Alors  $e(\Gamma_1(\cdot), \Gamma_2(\cdot))$  est P-intégrable. En particulier  $\Delta(\Gamma_1(\cdot), \Gamma_2(\cdot))$  est P-intégrable.

Démonstration : D'après la proposition II.9

$$\omega \rightarrow \inf\{d(x, y) \mid y \in \Gamma_2(\omega)\} = d(x, \Gamma_2(\omega))$$

est P-intégrable, et il existe  $g \in \mathcal{M}_{\Gamma_2}$ , P-intégrable, telle que

$$\forall \omega \in \Omega \quad d(x, \Gamma_2(\omega)) = d(x, g(\omega))$$

D'après la proposition II.10

$$\omega \rightarrow \sup\{d(g(\omega), x) \mid x \in \Gamma_1(\omega)\}$$

est P-intégrable.

Enfin,

$$\Delta(\Gamma_1(\cdot), \Gamma_2(\cdot)) = \max\{e(\Gamma_1(\cdot), \Gamma_2(\cdot)), e(\Gamma_2(\cdot), \Gamma_1(\cdot))\}$$

est évidemment P-intégrable.

### II.12 - Proposition

Soit  $\Gamma \in G$  et P-intégrable.

Soit  $x' \in E'$ . On pose, pour tout  $\omega \in \Omega$

$$\Gamma(\omega) + B_\rho = \{x \mid d(x, \Gamma(\omega)) \leq \rho\}$$

$$\Pi(\omega) = \{x \mid \langle x', x \rangle = \varphi(x', \Gamma(\omega))\}$$

$$\Pi(\omega) + B_\rho = \{x \mid d(x, \Pi(\omega)) \leq \rho\}$$

$$F(\omega, \rho) = (\Pi(\omega) + B_\rho) \cap (\Gamma(\omega) + B_\rho)$$

$$\Phi(\omega) = \Gamma'(x', \omega)$$

$$h(\omega, \rho) = \sup\{d(x, \Phi(\omega)) \mid x \in F(\omega, \rho)\}$$

alors  $h(\cdot, \rho)$  est  $P$ -intégrable pour tout  $\rho > 0$ , et  $h(\cdot, \rho) \rightarrow 0$  dans  $L^1(\Omega, \mathcal{G}, P)$  quand  $\rho \rightarrow 0$ .

La mesurabilité de  $h(\cdot, \rho)$  est démontrée dans la proposition II.6.

La multiapplication  $F(\cdot, \rho)$  est évidemment scalairement  $P$ -intégrable, et par conséquent  $P$ -intégrable. La fonction  $h(\cdot, \rho)$  est donc  $P$ -intégrable d'après la proposition II.10.

Par ailleurs, pour  $\omega$  fixé,  $\rho \rightarrow h(\omega, \rho)$  est décroissante et  $h(\omega, \rho) \rightarrow 0$  quand  $\rho \rightarrow 0$ . Alors

$$0 < \rho \leq \rho_0 \Rightarrow \int_\Omega h(\omega, \rho) dP \leq \int_\Omega h(\omega, \rho_0) dP,$$

et d'après le théorème de convergence monotone

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_\Omega h(\cdot, \rho) dP = \int_\Omega \lim_{\rho \rightarrow 0} h(\cdot, \rho) dP = 0$$

On a donc bien  $h(\cdot, \rho) \rightarrow 0$  dans  $L^1(\Omega, \mathcal{G}, P)$  quand  $\rho \rightarrow 0$ .

## II - DEFINITIONS DE LA CONVERGENCE DES SUITES DE MULTIAPPLICATIONS

### II.13 - Définition

Soient  $\{\Gamma_n\}$  une suite d'éléments de  $G$  et  $\Gamma$  un élément de  $G$ . Nous dirons que  $\Gamma_n$  converge en probabilité vers  $\Gamma$  si

$$\forall \varepsilon > 0, P\{\omega \mid \Delta(\Gamma_n(\omega), \Gamma(\omega)) > \varepsilon\} \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow +\infty.$$

### II.14 - Définition

Soient  $\{\Gamma_n\}$  une suite d'éléments de  $G$  et  $\Gamma$  un élément de  $G$ . Nous dirons que  $\Gamma_n$  converge scalairement en probabilité vers  $\Gamma$  sur une partie  $F'$  de  $E'$  si

$$\forall x' \in F', \varphi(x', \Gamma_n(\cdot)) \xrightarrow{P} \varphi(x', \Gamma(\cdot)) \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

### II.15 - Définition

Soit  $\{\Gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $G$ ,  $P$ -intégrable. Soit  $\Gamma \in G$  et  $P$ -intégrable. On dit que  $\Gamma_n$  converge en moyenne vers  $\Gamma$  quand  $n \rightarrow \infty$ , si  $\Delta(\Gamma_n, \Gamma)$  converge en moyenne vers 0 quand  $n \rightarrow \infty$ .

### II.16 - Définition

Soit  $\{\Gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $G$  et  $\Gamma$  un élément de  $G$ . On dit que  $\{\Gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge scalairement en moyenne vers  $\Gamma$  sur une partie  $F'$  de  $E'$ , si pour tout  $x' \in F'$ ,  $\varphi(x', \Gamma_n(\cdot))$  converge en moyenne vers  $\varphi(x', \Gamma(\cdot))$  quand  $n \rightarrow \infty$ .

Remarque : La convergence en moyenne est ici la convergence forte dans  $L^1(\Omega, G, P)$ .

On pourrait aussi définir la convergence faible et la convergence scalaire faible des suites de multiapplications.

R. DATKO [1] étudie une notion de convergence en moyenne analogue à celle-ci.

II.17 - Définition

Soit  $\{\Gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $G$  et  $\Gamma$  un élément de  $G$ . Nous dirons que  $\{\Gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge scalairement presque sûrement vers  $\Gamma$  sur une partie  $F'$  de  $E'$  si pour tout  $x' \in F'$ ,  $\{\varphi(x', \Gamma_n(\cdot))\}_n$  converge presque sûrement vers  $\varphi(x', \Gamma(\cdot))$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .

II.18 - Définition

Soit  $\{\Gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $G$  et  $\Gamma$  un élément de  $G$ . Nous dirons que  $\{\Gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge presque sûrement vers  $\Gamma$ , si  $\Delta(\Gamma_n(\cdot), \Gamma(\cdot))$  converge presque sûrement vers 0 quand  $n \rightarrow +\infty$ .

II.19 - Proposition

Soit  $\{\Gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $G$  convergeant en probabilité vers  $\Gamma \in G$ . Alors  $\{\Gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge scalairement en probabilité vers  $\Gamma$ .

Démonstration : La proposition résulte immédiatement de

$$\forall A \in CK(E), \forall B \in CK(E)$$

$$\Delta(A, B) = \sup\{|\varphi(x', A) - \varphi(x', B)| \mid x' \in E', \|x'\| = 1\}.$$

II.20 - Proposition

Soit  $\{\Gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments  $P$ -intégrables de  $G$  et  $\Gamma$  un élément  $P$ -intégrable de  $G$ . Si  $\{\Gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge en moyenne vers  $\Gamma$ , alors  $\{\Gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge scalairement en moyenne vers  $\Gamma$ .

La démonstration résulte immédiatement de

$$\forall \omega \in \Omega, \forall n, \Delta(\Gamma_n(\omega), \Gamma(\omega)) = \sup\{|\varphi(x', \Gamma_n(\omega)) - \varphi(x', \Gamma(\omega))| \mid x' \in E', \|x'\| = 1\}.$$



II.21 - Proposition

Soit  $F' = \{x'_k\}$  une partie dénombrable dense dans  $E'$ . Soit  $\{\Gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $G$  telle que, pour tout  $x'_k \in F'$ ,  $\{\varphi(x'_k, \Gamma_n(\cdot))\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge presque sûrement. Alors il existe  $\Gamma \in G$  telle que  $\{\Gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge scalairement presque sûrement vers  $\Gamma$  sur  $E'$ .

De plus, il existe  $N \in \mathcal{G}$ ,  $P(N) = 0$  tel que

$$\forall \omega \in \Omega \setminus N \quad \forall x' \in E' \quad \varphi(x', \Gamma_n(\omega)) \rightarrow \varphi(x', \Gamma(\omega)) \text{ quand } n \rightarrow +\infty.$$

Démonstration : D'après l'hypothèse

$$\forall x'_k \in F', \exists N_k \in \mathcal{G}, P(N_k) = 0, \quad \forall \omega \in \Omega \setminus N_k, \exists \Psi_k(\omega),$$

$$\text{tels que } \varphi(x'_k, \Gamma_n(\omega)) \rightarrow \Psi_k(\omega) \text{ quand } n \rightarrow +\infty.$$

Soit alors  $N = \bigcup_k N_k$ . Nous avons  $P(N) = 0$  et  $\forall \omega \in \Omega \setminus N, \forall x'_k \in F', \exists \Psi_k(\omega)$  tels que

$$\varphi(x'_k, \Gamma_n(\omega)) \rightarrow \Psi_k(\omega) \text{ quand } n \rightarrow +\infty.$$

D'après le lemme I.5, nous avons

$$\forall \omega \in \Omega \setminus N, \exists K(\omega) \in CK(E), \forall x' \in E', \varphi(x', \Gamma_n(\omega)) \rightarrow \varphi(x', K(\omega)) \text{ quand } n \rightarrow +\infty.$$

Les applications  $\omega \rightarrow \varphi(x', \Gamma_n(\omega))$  étant  $\mathcal{G}$ -mesurables,  $\varphi(x', K(\cdot))$  est une application de  $\Omega \setminus N$  dans  $\mathbb{R}$ , mesurable pour la tribu trace de  $\mathcal{G}$  sur  $\Omega \setminus N$ .

En posant

$$\Gamma(\omega) = \begin{cases} K(\omega) & \text{si } \omega \in \Omega \setminus N \\ 0 & \text{si } \omega \in N \end{cases}$$

la multiapplication  $\Gamma$  est  $\mathcal{G}$ -mesurable et  $\exists N \in \mathcal{G}$ ,  $P(N) = 0$ ,  $\forall \omega \in \Omega \setminus N, \forall x' \in E'$ ,

$$\varphi(x', \Gamma_n(\omega)) \rightarrow \varphi(x', \Gamma(\omega)) \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

II.22 - Remarque - La proposition II.21 montre que si  $\{\Gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge scalairement presque sûrement vers  $\Gamma$  sur  $E'$ , on peut prendre le même ensemble d'exception  $N$  pour la convergence de toutes les suites  $\{\varphi(x', \Gamma_n(\cdot))\}_{n \in \mathbb{N}}$  et par conséquent, que la convergence scalaire presque sûre entraîne la convergence presque sûre.

II.23 - Proposition

Soit  $\{\Gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $G$  convergeant scalairement presque sûrement vers  $\Gamma \in G$ . Soit  $\{X'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de variables aléatoires définies sur  $(\Omega, \mathcal{G}, P)$  à valeurs dans  $E' \setminus \{0\}$  et convergeant presque sûrement vers  $X'$ , variable aléatoire définie sur  $(\Omega, \mathcal{G}, P)$  à valeurs dans  $E' \setminus \{0\}$ . Alors  $\{\varphi(X'_n(\cdot), \Gamma_n(\cdot))\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge presque sûrement vers  $\varphi(X'(\cdot), \Gamma(\cdot))$ .

Démonstration : Par hypothèse, il existe  $N_1 \in \mathcal{G}$ ,  $P(N_1) = 0$  tel que

$$\forall \omega \in \Omega \setminus N_1, X'_n(\omega) \rightarrow X'(\omega) \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

D'après la proposition II.21, il existe  $N_2 \in \mathcal{G}$ ,  $P(N_2) = 0$ , tel que

$$\forall \omega \in \Omega \setminus N_2, \forall x' \in E', \varphi(x', \Gamma_n(\omega)) \rightarrow \varphi(x', \Gamma(\omega)) \text{ quand } n \rightarrow +\infty.$$

Soit  $N = N_1 \cup N_2$ . Nous avons  $P(N) = 0$  et  $\forall \omega \in \Omega \setminus N, \forall x' \in E'$ ,  $\varphi(x', \Gamma_n(\omega)) \rightarrow \varphi(x', \Gamma(\omega))$  et  $X'_n(\omega) \rightarrow X'(\omega)$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .

La proposition I.13 montre alors que

$$\forall \omega \in \Omega \setminus N, \varphi(X'_n(\omega), \Gamma_n(\omega)) \rightarrow \varphi(X'(\omega), \Gamma(\omega)) \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

### III - CONVERGENCE DES SUITES DE MULTIAPPLICATIONS EXTREMALES

Nous étudions ici quelques propriétés de convergence des suites de multi-applications  $\Gamma'_n(x', \cdot)$  ou  $\Gamma'_n(X'_n(\cdot), \cdot)$  en liaison avec la convergence de  $\Gamma_n(\cdot)$ .

#### A) - Convergence en probabilité

##### II.24 - Proposition

Soient  $\{\Gamma_n\}$  une suite d'éléments de  $G$  et  $\Gamma$  un élément de  $G$ . Soit  $x' \in E'$  et posons  $\Phi_n(\cdot) = \Gamma'_n(x', \cdot)$   $\Phi(\cdot) = \Gamma'(x', \cdot)$ . Soit  $h(\omega, \cdot)$ , la fonction associée à  $\Gamma(\omega)$  et à la direction  $x'$  par la proposition I.22. Si  $\{\Gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge en probabilité vers  $\Gamma$  alors

$$\forall \delta > 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P(\Phi_n \notin \Phi + B_\delta) = 0$$

Démonstration : Nous savons d'après la proposition I.22 que  $\forall \omega \in \Omega$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\forall \rho \in \mathbb{R}_+$ ,

$$\Delta(\Gamma_n(\omega), \Gamma(\omega)) < \rho \Rightarrow \sup\{d(x, \Phi(\omega)) \mid x \in \Phi_n(\omega)\} \leq h(\omega, \rho)$$

Par ailleurs, puisque  $\forall \omega \in \Omega$ ,  $h(\omega, \rho) \rightarrow 0$  quand  $\rho \rightarrow 0$ , nous avons  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $P\{\omega \mid h(\omega, \rho) > \varepsilon\} \rightarrow 0$  quand  $\rho \rightarrow 0$ , c'est-à-dire

$$\forall \varepsilon > 0, \forall \varepsilon_0 \geq 0, \exists \rho_0 > 0, \forall \rho < \rho_0$$

$$P[\omega \mid h(\omega, \rho) > \varepsilon] \leq \varepsilon_0.$$

Soit  $\varepsilon > 0$  et  $\varepsilon_1 > 0$ . Il existe  $\rho_0 > 0$  tel que

$$P[\omega \mid h(\omega, \rho_0) > \varepsilon] \leq \frac{\varepsilon_1}{2}$$

et  $\exists k \in \mathbb{N}$ ,  $\forall n \geq k$ ,  $P\{\omega \mid \Delta(\Gamma_n(\omega), \Gamma(\omega)) > \rho_0\} \leq \frac{\varepsilon_1}{2}$ .

Alors  $\omega \in \{\omega \mid h(\omega, \rho_0) < \varepsilon\} \cap \{\omega \mid \Delta(\Gamma_n(\omega), \Gamma(\omega)) < \rho_0\}$  entraîne

$$\sup\{d(x, \Phi(\omega)) \mid x \in \Phi_n(\omega)\} \leq h(\omega, \rho_0) \leq \varepsilon$$

c'est-à-dire

$$\{\omega \mid h(\omega, \rho_0) < \varepsilon\} \cap \{\omega \mid \Delta(\Gamma_n(\omega), \Gamma(\omega)) < \rho_0\} \subset \{\omega \mid \Phi_n(\omega) \subset \Phi(\omega) + B_\varepsilon\}$$

ou encore, en passant aux complémentaires et en prenant les probabilités

$$\begin{aligned} P\{\omega \mid \Phi_n(\omega) \not\subset \Phi(\omega) + B_\varepsilon\} &\leq P\{\omega \mid h(\omega, \rho_0) > \varepsilon\} + P\{\omega \mid \Delta(\Gamma_n(\omega), \Gamma(\omega)) > \rho_0\} \\ &\leq \varepsilon_1 \end{aligned}$$

Nous avons bien montré que  $\forall \varepsilon > 0, \forall \varepsilon_1 > 0, \exists k \in \mathbb{N}, \forall n \geq k$

$$P\{\omega \mid \Phi_n(\omega) \not\subset \Phi(\omega) + B_\varepsilon\} \leq \varepsilon_1$$

II.25 - Remarque - Nous avons montré que la convergence en probabilité de  $\Gamma_n$  vers  $\Gamma$  entraîne que, en probabilité,  $d\text{-}\overline{\lim} \Phi_n$  est contenu dans  $\Phi$ , car

$$\forall \varepsilon, \exists k, \forall n \geq k, \Phi_n(\omega) \subset \Phi(\omega) + B_\varepsilon \Leftrightarrow d\text{-}\overline{\lim} \Phi_n(\omega) \subset \Phi(\omega),$$

c'est-à-dire que l'application de  $CK(E)$  dans  $CK(E)$ , qui à  $K$  associe  $K'(x') = \Phi$ , est semi-continue supérieurement en probabilité.

## II.26 - Proposition

Soit  $\{\Gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $G$  convergeant en probabilité vers  $\Gamma \in G$ . Soit  $x' \in E' \setminus \{0\}$ . On pose  $\Phi_n(\cdot) = \Gamma'_n(x', \cdot)$  et  $\Phi(\cdot) = \Gamma'(x', \cdot)$ . Soient  $h_n(\omega, \cdot)$  (resp.  $h(\omega, \cdot)$ ) les fonctions  $\mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  attachées aux  $\Gamma_n(\omega)$  (resp.  $\Gamma(\omega)$ ) et à la direction  $x'$  par la proposition I.22. Si pour tout  $\varepsilon > 0, P[h_n(\cdot, \rho) > \varepsilon] \rightarrow 0$  quand  $\rho \rightarrow 0$ , uniformément en  $n \in \mathbb{N}$  alors  $\Phi_n(\cdot)$  converge en probabilité vers  $\Phi(\cdot)$  quand  $n \rightarrow \infty$ .

Démonstration : L'hypothèse s'écrit

$$\forall \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists \rho_0 > 0, \forall \rho < \rho_0, \forall n \in \mathbb{N} \quad P\{\omega \mid h_n(\omega, \rho) \leq \varepsilon\} \geq 1 - \delta \quad (1).$$

Par ailleurs, d'après la proposition précédente

$$\forall \varepsilon > 0, \quad P\{\omega \mid \Phi_n(\omega) \subset \Phi(\omega) + B_\varepsilon\} \rightarrow 1 \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty$$

Posons alors

$$A_\varepsilon^n = \{\omega \mid \Phi_n(\omega) \subset \Phi(\omega) + B_\varepsilon\}$$

$$B_{\rho, \varepsilon}^n = \{\omega \mid h_n(\omega, \rho) \leq \varepsilon\}$$

$$C_\rho^n = \{\omega \mid \Delta(\Gamma_n(\omega), \Gamma(\omega)) \leq \rho\}$$

Nous avons ainsi :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \rho_1 > 0, \forall \rho \leq \rho_1, \exists k_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq k_0,$$

$$\omega \in A_\varepsilon^n \cap B_{\rho, \varepsilon}^n \cap C_\rho^n \Rightarrow \Delta(\Phi_n(\omega), \Phi(\omega)) \leq \varepsilon$$

et il en résulte

$$P(A_\varepsilon^n \cap B_{\rho, \varepsilon}^n \cap C_\rho^n) \leq P(\Delta(\Phi_n(\omega), \Phi(\omega)) \leq \varepsilon)$$

et en désignant par  $\overline{A_\varepsilon^n}$ ,  $\overline{B_{\rho, \varepsilon}^n}$ ,  $\overline{C_\rho^n}$  les complémentaires de  $A_\varepsilon^n$ ,  $B_{\rho, \varepsilon}^n$  et  $C_\rho^n$  :

$$P(\overline{A_\varepsilon^n}) + P(\overline{B_{\rho, \varepsilon}^n}) + P(\overline{C_\rho^n}) \geq P(\Delta(\Phi_n, \Phi) > \varepsilon).$$

Or

$$\forall \varepsilon_1 > 0, \forall \varepsilon > 0, \exists \rho_0 > 0 \quad \forall \rho < \rho_0, \forall n > N$$

$$P(\overline{B_{\rho, \varepsilon}^n}) \leq \frac{\varepsilon_1}{3} \quad \text{d'après (1)}$$

et  $\forall \rho > 0, \forall \varepsilon_1 > 0, \exists k_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq k_1$

$$P(\overline{C_\rho^n}) \leq \frac{\varepsilon_1}{3} \quad \text{puisque } \Gamma_n \text{ converge vers } \Gamma \text{ en probabilité}$$

et  $\forall \varepsilon > 0, \forall \varepsilon_1 \geq 0, \exists k_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geq k_2$

$$P(\overline{A_\varepsilon^n}) \leq \frac{\varepsilon_1}{3} \quad \text{d'après la proposition précédente.}$$

Finalement

$$\forall \varepsilon_1 > 0, \forall \varepsilon > 0, \exists \rho_2 = \inf(\rho_1, \rho_0), \forall \rho \leq \rho_2, \exists k_3 = \sup(k_0, k_1, k_2)$$

$$\forall n \geq k_3 \quad P(\Delta(\Phi_n, \Phi) > \varepsilon) \leq \varepsilon_1$$

$$(\text{et } P(\Delta(\Gamma_n, \Gamma) > \rho) \leq \frac{\varepsilon_1}{3})$$

c'est-à-dire

$$\forall \varepsilon > 0, \forall \varepsilon_2 > 0, \exists k_3 \in \mathbb{N}, \forall n \geq k_3$$

$$P(\Delta(\Phi_n, \Phi) > \varepsilon) \leq \varepsilon_1.$$

II.27 - Remarque - La condition  $\forall \varepsilon > 0, P[h_n(\cdot, \rho) > \varepsilon] \rightarrow 0$  quand  $\rho \rightarrow 0$ , uniformément en  $n$ , est ainsi suffisante pour que  $\Phi_n$  converge vers  $\Phi$  en probabilité quand  $n \rightarrow +\infty$ . Comme par ailleurs  $\varphi(x', \Gamma_n(\cdot))$  converge vers  $\varphi(x', \Gamma)$  en probabilité, il y a alors, pour toute suite de programmes linéaires stochastiques  $P(\Gamma_n(\cdot), x')$  telle que  $\Gamma_n \xrightarrow{P} \Gamma$  quand  $n \rightarrow +\infty$ , convergence en probabilité de l'optimum  $\varphi(x', \Gamma_n(\cdot))$  et de l'ensemble des solutions  $\Phi_n(\cdot)$  respectivement vers l'optimum  $\varphi(x', \Gamma(\cdot))$  et vers l'ensemble des solutions  $\Phi(\cdot)$  respectivement.

B) - Convergence en moyenne

II.28 - Proposition

Soit  $Q \in CK(E)$ . Soit  $\{\Gamma_n\}_n$  une suite d'éléments de  $G$ ,  $P$ -intégrables, et convergeant en moyenne vers  $\Gamma \in G$  et  $P$ -intégrable, telle que

$$\forall n, \forall \omega \in \Omega, \Gamma_n(\omega) \subset Q, \Gamma(\omega) \subset Q.$$

Soit  $x' \in E' \setminus \{0\}$  et posons  $\Phi_n(\cdot) = \Gamma'_n(x', \cdot)$  et  $\Phi(\cdot) = \Gamma'(x', \cdot)$ .  
Alors

$$\int_{\Omega} e(\Phi(\cdot), \Phi_n(\cdot)) dP \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

Démonstration : Nous savons que

$$\Delta(\Gamma(\omega), \Gamma_n(\omega)) \leq \rho \Rightarrow e(\Phi(\omega), \Phi_n(\omega)) \leq h(\omega, \rho)$$

Nous avons donc

$$\forall \omega \in \Omega, \forall n \in \mathbb{N}, e(\Phi(\omega), \Phi_n(\omega)) \leq h(\omega, \Delta(\Gamma(\omega), \Gamma_n(\omega))).$$

Or

$$\omega \rightarrow \Delta(\Gamma(\omega), \Gamma_n(\omega)) \quad \text{est } \mathcal{G}\text{-mesurable}$$

$$\forall \rho > 0, h(\cdot, \rho) \quad \text{est } \mathcal{G}\text{-mesurable}$$

$$\forall \omega \in \Omega, h(\omega, \cdot) \quad \text{est continue et croissante}$$

alors

$$\omega \rightarrow h(\omega, \Delta(\Gamma(\omega), \Gamma_n(\omega))) \quad \text{est } \mathcal{G}\text{-mesurable (Castaing, [1] remarque page 10.)}$$

De plus  $\Gamma_n(\omega) \subset Q$  et  $\Gamma(\omega) \subset Q$  entraînent

$$\Delta(\Gamma(\omega), \Gamma_n(\omega)) \leq \text{diam } Q = R$$

et

$$h(\omega, \Delta(\Gamma(\omega), \Gamma_n(\omega))) \leq h(\omega, R).$$

$h(\cdot, R)$  étant intégrable d'après la proposition II.12,  $h(\cdot, \Delta(\Gamma(\cdot), \Gamma_n(\cdot)))$  est donc  $P$ -intégrable, ainsi que  $e(\Phi(\cdot), \Phi_n(\cdot))$ .

Soit maintenant

$$A_n(a) = \{\omega \mid \Delta(\Gamma(\omega), \Gamma_n(\omega)) < a\}$$

Puisque  $\Delta(\Gamma(\cdot), \Gamma_n(\cdot)) \rightarrow 0$  dans  $L^1(\Omega, \mathcal{G}, P)$  quand  $n \rightarrow \infty$ , alors, pour tout  $a > 0$ ,  $P[A_n(a)] \rightarrow 1$  quand  $n \rightarrow \infty$ .

Par ailleurs, nous avons

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} e(\Phi, \Phi_n) dP &= \int_{A_n(a)} e(\Phi, \Phi_n) dP + \int_{A_n^c(a)} e(\Phi, \Phi_n) dP \\ &\leq \int_{A_n(a)} h(\omega, a) dP + \int_{A_n^c(a)} h(\omega, R) dP \\ &\leq \int_{\Omega} h(\omega, a) dP + \int_{A_n^c(a)} h(\omega, R) dP \end{aligned}$$

Comme d'après la proposition II.12

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall a < \alpha, \int_{\Omega} h(\omega, a) dP < \frac{\varepsilon}{2}$$

en choisissant  $a < \alpha$ , nous avons

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \int_{A_n^c(a)} h(\omega, R) dP < \frac{\varepsilon}{2}$$

puisque  $P[A_n(a)] \rightarrow 1$  quand  $n \rightarrow \infty$ , et puisque  $h(\cdot, R) \in L^1(\Omega, \mathcal{G}, P)$ .

On a donc bien

$$\int_{\Omega} e(\Phi, \Phi_n) dP \rightarrow 0.$$



II.29 - Remarque 1 - La démonstration de l'intégrabilité de  $e(\Phi, \Phi_n)$  peut encore se faire en remarquant que  $\Phi$  et  $\Phi_n$  sont scalairement P-intégrables et en appliquant la proposition II.11.

Remarque 2 - L'hypothèse  $\Gamma_n(\omega) \subset Q$  et  $\Gamma(\omega) \subset Q$  peut être remplacée par  $\Gamma_n(\omega) \subset \lambda(\omega)Q$  et  $\Gamma(\omega) \subset \lambda(\omega)Q$  où  $Q \in CK(E)$  et  $\lambda \in L^1(\Omega, \mathcal{G}, P)$  et telle que  $h(\cdot, \lambda(\cdot)) \in L^1(\Omega, \mathcal{G}, P)$ .

II.30 - Proposition

Soit  $Q \in CK(E)$ . Soit  $\{\Gamma_n\}_n$  une suite d'éléments de  $G$  P-intégrables et convergeant en moyenne vers  $\Gamma \in G$  et P-intégrable, telle que

$$\forall n, \forall \omega \in \Omega, \Gamma_n(\omega) \subset Q \text{ et } \Gamma(\omega) \subset Q$$

Soit  $x' \in E$  et posons  $\Phi_n(\cdot) = \Gamma'_n(x', \cdot)$  et  $\Phi(\cdot) = \Gamma'(x', \cdot)$   
Supposons que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall a < \alpha, \sup_n \int_{\Omega} h_n(\cdot, a) dP < \varepsilon.$$

Alors

$$\int_{\Omega} \Delta(\Phi, \Phi_n) dP \text{ quand } a \rightarrow 0.$$

Démonstration : Nous avons comme précédemment dans la proposition II.28 :

$$\forall n, \forall \omega \in \Omega, e(\Phi_n(\omega), \Phi(\omega)) \leq h_n(\omega, \Delta(\Gamma(\omega), \Gamma_n(\omega)))$$

et pour tout n,

$$h_n(\cdot, \Delta(\Gamma(\cdot), \Gamma_n(\cdot))) \in L^1(\Omega, \mathcal{G}, P)$$

Soit encore

$$A_n(a) = \{\omega \mid \Delta(\Gamma(\omega), \Gamma_n(\omega)) < a\}$$

et, pour tout  $a > 0$ ,  $P[A_n(a)] \rightarrow 1$  quand  $n \rightarrow \infty$ .

Ecrivons alors

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} e(\Phi_n, \Phi) dP &\leq \int_{A_n(a)} e(\Phi_n, \Phi) dP + \int_{\overline{A_n(a)}} e(\Phi_n, \Phi) dP \\ &\leq \int_{A_n(a)} h_n(\cdot, \Delta(\Gamma(\cdot), \Gamma_n(\cdot))) dP \\ &\quad + \int_{\overline{A_n(a)}} h_n(\cdot, \Delta(\Gamma(\cdot), \Gamma_n(\cdot))) dP \end{aligned}$$

Comme  $\Gamma_n(\omega) \subset Q$  et  $\Gamma(\omega) \subset Q$ ,  $h_n(\omega, \rho)$  est inférieur au diamètre  $R$  de  $Q$ , pour tout  $\omega$  et tout  $\rho > 0$ . Il en résulte

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} e(\Phi_n, \Phi) dP &\leq \int_{A_n(a)} h_n(\cdot, a) dP + \int_{\overline{A_n(a)}} R dP \\ &\leq \int_{\Omega} h_n(\cdot, a) dP + R P[\overline{A_n(a)}] \end{aligned}$$

Or, par hypothèse,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall a < \alpha, \forall n, \int_{\Omega} h_n(\cdot, a) dP \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

et, en choisissant  $a < \alpha$ ,

$$\exists N_1, \forall n \geq N_1, P[\overline{A_n(a)}] < \frac{\varepsilon}{2R}$$

c'est-à-dire

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_1, \forall n \geq N_1, \int_{\Omega} e(\Phi_n, \Phi) dP < \varepsilon.$$

Comme par ailleurs, d'après la proposition II.28

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_2, \forall n \geq N_2, \int_{\Omega} e(\Phi_n, \Phi) dP < \varepsilon$$

nous avons finalement

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N = \sup(N_1, N_2), \forall n \geq N, \int_{\Omega} \Delta(\Phi, \Phi_n) dP < \varepsilon$$

et la proposition est démontrée.

II.31 - Remarque - Les conditions  $\sup \int_{\Omega} h_n(\cdot, \rho) dP \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$  et  $\Gamma_n(\cdot) \subset Q$ ,  $\Gamma(\cdot) \subset Q$  sont ainsi suffisantes pour que la convergence en moyenne de  $\Gamma_n$  vers  $\Gamma$  entraîne la convergence en moyenne de  $\Phi_n$  vers  $\Phi$ . Comme de plus la convergence en moyenne de  $\Gamma_n$  vers  $\Gamma$ , entraîne la convergence en moyenne de  $\varphi(x', \Gamma_n(\cdot))$  vers  $\varphi(x', \Gamma(\cdot))$ , ces conditions sont suffisantes pour qu'il y ait convergence en moyenne de l'optimum du programme linéaire stochastique  $P(\Gamma_n(\cdot), x')$  et de l'ensemble de ses solutions respectivement vers l'optimum du programme linéaire stochastique limite  $P(\Gamma(\cdot), x')$  et l'ensemble  $\Phi$  des solutions.

### C) - Convergence presque sûre

Nous avons déjà montré à la proposition II.21 que la convergence scalaire presque sûre sur une partie dénombrable dense de  $E'$  entraînait la convergence presque sûre.

Nous donnons ici quelques résultats montrant l'existence de sous-suites convergeant presque sûrement, sous diverses hypothèses.

II.32 - Proposition

Soit  $F' = \{x'_k\}$  une partie dénombrable de  $E'$ . Soit  $\{\Gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $G$  convergeant scalairement en moyenne vers  $\Gamma \in G$  sur  $F'$ , alors il existe une sous-suite  $\{\Gamma_{\Psi(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$  extraite de  $\{\Gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  convergeant presque sûrement vers  $\Gamma$ .

Démonstration : Pour tout  $x'_k \in F'$

$$\int_{\Omega} |\varphi(x'_k, \Gamma_n(\cdot)) - \varphi(x'_k, \Gamma(\cdot))| dP \text{ quand } n \rightarrow +\infty.$$

Alors  $\mathbb{E}N_1 \in \mathbb{Q}$ ,  $P(N_1) = 0$ ,  $\mathbb{E}\Psi_1 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  strictement croissante tels que

$$\forall \omega \in \Omega \setminus N_1, \varphi(x'_k, \Gamma_{\Psi_1(n)}(\omega)) \rightarrow \varphi(x'_k, \Gamma(\omega)).$$

De même,  $\mathbb{E}N_2 \in \mathbb{Q}$ ,  $N_2 \subset \Omega \setminus N_1$ ,  $P(N_2) = 0$ ,  $\mathbb{E}\Psi_2 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  strictement croissante, vérifiant, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\Psi_1(n) < \Psi_2(n)$ , tels que

$$\forall \omega \in (\Omega \setminus N_1) \setminus N_2, \forall i \in \{1, 2\}, \varphi(x'_i, \Gamma_{\Psi_2(n)}(\omega)) \rightarrow \varphi(x'_i, \Gamma(\omega))$$

et ainsi de suite, en procédant par extractions successives de sous-suites. Soit alors  $\Psi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} : \Psi(n) = \Psi_n(n)$  et  $N = \bigcup_n N_n$ . Nous aurons donc  $P(N) = 0$  et

$$\forall \omega \in \Omega \setminus N, \forall x'_k \in F',$$

$$\varphi(x'_k, \Gamma_{\Psi(n)}(\omega)) \rightarrow \varphi(x'_k, \Gamma(\omega))$$

ce qui prouve que  $\{\Gamma_{\Psi(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge scalairement presque sûrement vers  $\Gamma$  sur  $E'$ .

II.33 - Proposition

Soit  $\{\Gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $G$  convergeant presque sûrement vers  $\Gamma \in G$ . Soit  $f$  une section  $G$ -mesurable de  $\Gamma$ . Alors il existe pour tout  $n$ , une section  $G$ -mesurable  $f_n$  de  $\Gamma_n$  telle que  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge presque sûrement vers  $f$ .

Démonstration : Posons  $f_n(\omega) = \text{prox}_{\Gamma_n(\omega)} f(\omega)$ . (Pour la définition de  $\text{prox}$ , voir Moreau [2] ou Castaing [3]).

L'application  $\omega \rightarrow f_n(\omega)$  est  $G$ -mesurable car :

$\forall a \in E, \omega \rightarrow \text{prox}_{\Gamma_n(\omega)} a$  est  $G$ -mesurable d'après Castaing [3] Th. 3.

$\forall \omega \in \Omega, a \rightarrow \text{prox}_{\Gamma_n(\omega)} a$  est continue sur  $E$  en vertu de l'inégalité :  
 $d(\text{prox}_{\Gamma_n(\omega)} a, \text{prox}_{\Gamma_n(\omega)} b) \leq d(a, b)$  (voir Moreau [2] p. 284).

Il résulte alors de la remarque, page 10, de Castaing [1] que,  $f$  étant  $G$ -mesurable,  $\omega \rightarrow \text{prox}_{\Gamma_n(\omega)} f(\omega)$  est  $G$ -mesurable.

Nous avons ainsi, pour tout  $n$ , une section  $f_n$  de  $\Gamma_n$  qui est  $G$ -mesurable.

Il existe  $N \in G, P(N) = 0$  tel que  $\forall \omega \in \Omega \setminus N, \Gamma_n(\omega)$  converge scalairement vers  $\Gamma(\omega)$ , c'est-à-dire  $\Gamma(\omega) = d\text{-lim } \Gamma_n(\omega)$ .

Alors pour tout  $\omega \in \Omega \setminus N$ , il existe, pour tout  $n, x_n(\omega) \in \Gamma_n(\omega)$  tel que  $d(x_n(\omega), f(\omega)) \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow +\infty$ . Comme on a alors  $d(x_n(\omega), f(\omega)) \geq d(f_n(\omega), f(\omega))$  il en résulte que  $d(f_n(\omega), f(\omega)) \rightarrow 0$  et on a bien  $f_n \rightarrow f$   $P$ -presque sûrement.

### II.34 - Proposition

*Soit  $\{\Gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $G$  convergeant scalairement en probabilité vers un élément  $\Gamma$  de  $G$ . Alors il existe une sous-suite  $\{\Gamma_{\psi(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$  extraite de  $\{\Gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  qui converge presque sûrement.*

Démonstration : Soit  $F' = \{x'_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  un sous-ensemble dénombrable dense de  $E'$ . Alors, pour tout  $x'_k \in F', \{\varphi(x'_k, \Gamma_n(\cdot))\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge en probabilité vers une limite  $\varphi(x'_k, \Gamma(\cdot))$ . Par extractions successives de sous-suites, on peut construire une sous-suite

$\{\Gamma_{\Psi(n)}(\cdot)\}_{n \in \mathbb{N}}$  extraite de  $\{\Gamma_n(\cdot)\}_{n \in \mathbb{N}}$  telle que

$$\forall x'_k \in F' \quad \varphi(x'_k, \Gamma_{\Psi(n)}) \rightarrow \varphi(x'_k, \Gamma(\cdot)) \text{ P.p.s. quand } n \rightarrow +\infty.$$

La proposition II.21 montre alors que  $\{\Gamma_{\Psi(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge presque sûrement vers  $\Gamma$ .

II.35 - Les propositions suivantes donnent des conditions suffisantes de convergence presque sûre des suites  $\{\Phi_n(\cdot)\}_{n \in \mathbb{N}}$ .

Proposition

Soit  $\{\Gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $G$  convergeant  $P$ -presque sûrement vers  $\Gamma \in G$ . Soit  $x' \in E' \setminus \{0\}$ . On pose  $\Phi_n(\cdot) = \Gamma'_n(x', \cdot)$  et  $\Phi(\cdot) = \Gamma'(x', \cdot)$ . Soit  $h_n(\omega, \cdot)$  (resp.  $h(\omega, \cdot)$ ) les fonctions  $\mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  attachées aux  $\Gamma_n(\omega)$  (resp.  $\Gamma(\omega)$ ), et à la direction  $x'$  par la proposition I.22. Si  $\sup h_n(\cdot, \rho) \rightarrow 0$  en probabilité quand  $\rho \rightarrow 0$ , alors  $\Phi_n(\cdot)$  converge presque sûrement vers  $\Phi(\cdot)$  quand  $n \rightarrow \infty$ .

Démonstration : L'hypothèse  $\sup h_n(\cdot, \rho) \rightarrow 0$  en probabilité quand  $\rho \rightarrow 0$ , entraîne que  $\sup h_n(\cdot, \rho) \rightarrow 0$   $P$ -presque sûrement, puisque  $\rho \rightarrow \sup h_n(\omega, \rho)$  est décroissante pour tout  $\omega \in \Omega$ . Il résulte alors que, sauf sur un ensemble  $N_1 \in \mathcal{G}$ , de probabilité nulle,

$$\Gamma_n(\omega) \rightarrow \Gamma(\omega)$$

et

$$\Gamma'_n(x', \omega) \rightarrow \Gamma'(x', \omega)$$

d'après la proposition I.25.

II.36 - Remarque - La convergence presque sûre de  $\{\Gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  vers  $\Gamma$  entraîne que presque sûrement  $d\text{-}\overline{\lim} \Phi_n \subset \Phi$ . Il suffit pour cela d'appliquer la proposition I.14 aux suites  $\{\Phi_n(\omega)\}_{n \in \mathbb{N}}$  pour  $\omega$  appartenant à l'ensemble de convergence de la suite  $\{\Gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ .

II.37 - Proposition

Soit  $\{\Gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $G$  convergeant  $P$ -presque sûrement vers  $\Gamma \in G$ . Soit  $\{X'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de vecteurs aléatoires à valeurs dans  $E' \setminus \{0\}$  et convergeant presque sûrement vers  $X'$ , variable aléatoire à valeurs dans  $E' \setminus \{0\}$ .

Supposons qu'il existe  $a > 0$  et  $F_a$  (voir I.19) tels que

$$\forall \omega \in \Omega, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x_n \in \Gamma_n(\omega),$$

$$\gamma[d(x_n, \Gamma_n(X'_n(\omega), \omega))] \leq d[x_n, \Pi_n(X'_n(\omega), \omega)]$$

Alors  $\{\Gamma'_n(X'_n(\cdot), \cdot)\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge presque sûrement vers  $\Gamma(X'(\cdot))$ .

La démonstration résulte immédiatement des propositions I.19 et II.23.

IV - MULTIAPPLICATIONS A VALEURS POLYEDRES CONVEXES COMPACTS DANS  $\mathbb{R}^n$

Les résultats de ce paragraphe sont étroitement liés à ceux du paragraphe IV du chapitre I, et concernent les suites de multiapplications à valeurs polyèdres convexes compacts.

Nous savons déjà que si  $A$  est une matrice aléatoire définie sur  $(\Omega, \mathcal{G}, P)$  et à valeurs dans  $M(p, m)$ , si  $b$  est un vecteur aléatoire défini sur  $(\Omega, \mathcal{G}, P)$  et à valeurs dans le cône positif  $\mathbb{R}_+^p$  de  $\mathbb{R}^p$ , la multiapplication  $\Gamma$  définie par

$$\omega \rightarrow \Gamma(\omega) = \{x \in \mathbb{R}^m \mid x \geq 0 \quad A(\omega)x \leq b(\omega)\}$$

est  $\mathcal{G}$ -mesurable (voir exemple II.1).

Nous nous préoccuons ici de la convergence des suites de multiapplications  $\Gamma_n(\cdot)$  à valeurs dans  $CK(E)$  et définies à partir de suites d'éléments aléatoires  $(A_n(\cdot), b_n(\cdot))$  à valeurs dans  $\mathbb{M}$  par l'intermédiaire de l'application  $\mathcal{J}$  (voir I.28).

A) - Convergence en probabilité

II.38 - Proposition

Soit  $\{(A_n(\cdot), b_n(\cdot))\}_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments aléatoires définis sur  $(\Omega, \mathcal{G}, P)$  et à valeurs dans  $M_0$  convergeant en probabilité vers  $(A, b) \in M_0$ , quand  $n \rightarrow \infty$ . Soit  $\Gamma_n$  des multiapplications sur  $(\Omega, \mathcal{G}, P)$  définies par

$$\forall \omega \in \Omega, \Gamma_n(\omega) = \mathcal{J}\mathcal{C}(A_n(\omega), b(\omega))$$

et soit  $K = \mathcal{J}\mathcal{C}(A, b)$ .

Soit  $I = \{i \mid 1 \leq i \leq p, A^i_x = b^i\}$  et supposons que  $\forall \omega \in \Omega, \forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\text{rang } A_n^I(\omega) \leq \text{rang } A^I$  (voir I.28 pour les notations).

Alors  $\Gamma_n(\cdot)$  converge en probabilité vers  $K$  quand  $n \rightarrow \infty$ .

Démonstration : L'application  $\mathcal{J}\mathcal{C}$  restreinte à  $M_2(A, b)$  étant continue en  $(A, b)$  (voir I.35), nous avons

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall (\alpha, \beta) \in M_2(A, b) : \|(\alpha, \beta) - (A, b)\| < \delta \\ \rightarrow \Delta(\mathcal{J}\mathcal{C}(\alpha, \beta), \Gamma) < \varepsilon \end{aligned}$$

Soit alors

$$U_n = \{\omega \in \Omega \mid \|(A_n(\omega), b_n(\omega)) - (A, b)\| < \delta\}$$

$$V_n = \{\omega \in \Omega \mid \Delta(\Gamma_n(\omega), K) < \varepsilon\}$$

L'hypothèse de convergence en probabilité de  $(A_n(\cdot), b_n(\cdot))$  vers  $(A, b)$  entraîne que  $P(U_n) \rightarrow 1$  quand  $n \rightarrow \infty$ . La continuité de  $\mathcal{J}\mathcal{C}$  en  $(A, b)$  entraîne  $U_n \subset V_n$ . Il est alors évident que pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $P(V_n) \rightarrow 1$  quand  $n \rightarrow \infty$ . D'où la proposition.



II.39 - Proposition

Soit  $(A,b) \in \mathbb{M}_1$ . Soit  $\{(A_n(\cdot), b_n(\cdot))\}_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments aléatoires, définis sur  $(\Omega, \mathcal{G}, P)$  à valeurs dans  $\mathbb{M}$ , et convergeant en probabilité vers  $(A,b)$  quand  $n \rightarrow +\infty$ . Alors  $\Gamma_n(\cdot) = \mathcal{J}\mathcal{C}(A_n(\cdot), b_n(\cdot))$  converge en probabilité vers  $K = \mathcal{J}\mathcal{C}(A,b)$  quand  $n \rightarrow \infty$ .

Démonstration : Puisque  $(A,b) \in \mathbb{M}_1$ , nous savons que pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\delta > 0$  tel que

$$(\forall (A',b') \in \mathbb{M} \quad \|(A',b') - (A,b)\| < \delta) \Rightarrow$$

$$(A',b') \in \mathbb{M}_1 \text{ et } \Delta(\mathcal{J}\mathcal{C}(A',b'), \mathcal{J}\mathcal{C}(A,b)) < \varepsilon .$$

Choisissons  $\varepsilon > 0$  et  $\delta > 0$  vérifiant la relation précédente et posons

$$U_n = \{\omega \in \Omega \mid \|(A_n(\omega), b_n(\omega)) - (A,b)\| < \delta\}$$

$$V_n = \{\omega \in \Omega \mid \Delta(\Gamma_n(\omega), K) < \varepsilon\}$$

Alors  $\forall n, U_n \subset V_n$  et la convergence en probabilité de  $\Gamma_n(\cdot)$  vers  $K$  en résulte immédiatement.

II.40 - Proposition

Soit  $A \in M(p,m)$ . Soit  $b(\cdot)$  un vecteur aléatoire défini sur  $(\Omega, \mathcal{G}, P)$  à valeurs dans  $B(A)$ . Soit  $\{b_n(\cdot)\}_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de vecteurs aléatoires définis sur  $(\Omega, \mathcal{G}, P)$  à valeurs dans  $B(A)$  et convergeant en probabilité vers  $b(\cdot)$  quand  $n \rightarrow \infty$ .

Posons

$$\Gamma_n(\omega) = \mathcal{J}\mathcal{C}(A, b_n(\omega)) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall \omega \in \Omega$$

$$\Gamma(\omega) = \mathcal{J}\mathcal{C}(A, b(\omega)) \quad \forall \omega \in \Omega$$

Alors  $\Gamma_n$  converge en probabilité vers  $\Gamma$  quand  $n \rightarrow \infty$ .

Démonstration : Nous savons déjà (I.38) que  $b \rightarrow \mathcal{J}\mathcal{C}(A,b)$  est continue en tout  $b \in \mathcal{B}(A)$ , et que  $\mathcal{B}(A)$  est fermé dans  $\mathbb{R}_+^P$ . Alors la convergence en probabilité de  $b_n$  vers  $b$  entraîne celle  $\mathcal{J}\mathcal{C}(A,b_n)$  vers  $\mathcal{J}\mathcal{C}(A,b)$ . On peut le vérifier en utilisant, par exemple, la même démonstration que celle du théorème 4.1 page 27 de A. FLOCKS [1].

II.41 - Remarque - Il est essentiel pour la fin de cette démonstration d'utiliser le théorème de Heine. Son emploi est ici possible parce que  $\mathcal{B}(A)$  est fermé dans  $\mathbb{R}^P$ . Par contre  $\mathcal{M}_1$  n'est pas fermé dans  $\mathcal{M}_0$  (il est immédiat de fabriquer une suite de compacts d'intérieur non vide dont la limite est un compact d'intérieur vide) ce qui ne permet pas d'utiliser la continuité  $\mathcal{J}\mathcal{C}$  sur  $\mathcal{M}_1$  pour montrer la convergence en probabilité de  $\mathcal{J}\mathcal{C}(A_n, b_n)$  vers  $\mathcal{J}\mathcal{C}(A,b)$  quand  $A$  et  $b$  sont aussi des éléments aléatoires.

## B) - Intégrabilité et convergence en moyenne

II.42

L'intégrabilité des éléments aléatoires  $(A(\cdot), b(\cdot))$  à valeurs dans  $\mathcal{M}$  n'entraîne pas l'intégrabilité de la multiapplication  $\Gamma(\cdot) = \mathcal{J}\mathcal{C}(A(\cdot), b(\cdot))$  et réciproquement. L'exemple suivant illustre bien ce fait.

Soit  $A$  et  $b$  deux variables aléatoires réelles positives. La multiapplication  $\Gamma(\cdot) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0 \quad A(\cdot)x \leq b(\cdot)\}$  est intégrable si et seulement si  $\frac{b(\cdot)}{A(\cdot)} \in L^1(\Omega, \mathcal{G}, P)$ .

Seuls les critères généraux d'intégrabilité seront utilisables. Par exemple :

### Proposition

Soit  $(A(\cdot), b(\cdot))$  un élément aléatoire défini sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{G}, P)$  et à valeurs dans  $\mathcal{M}_0$ . La multiapplication  $\Gamma$  définie par

$$\Gamma(\omega) = \{x \in \mathbb{R}^m \mid 0 \leq x \quad A(\omega)x \leq B(\omega)\}$$

est intégrable si et seulement si il existe  $Q \in \mathcal{C}K(\mathbb{R}^m)$  et  $\lambda \in L^1(\Omega, \mathcal{G}, P)$

tels que

$$\forall \omega \in \Omega \quad \Gamma(\omega) \subset \lambda(\omega)Q.$$

II.43 - On peut donner des conditions suffisantes plus compliquées analogues à celles que nous utiliserons pour les espérances conditionnelles et les martingales dans les chapitres ultérieurs.

II.44 - Citons néanmoins les résultats suivants dont la démonstration est évidente.

Proposition

Soit  $b(\cdot)$  un vecteur aléatoire défini sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{G}, P)$  à valeurs dans  $\mathbb{R}_+^p$ , et  $P$ -intégrable. Soit  $A \in M(p, m)$ . Alors la multiapplication  $\Gamma$  définie par

$$\Gamma(\omega) = \{x \in \mathbb{R}^m \mid 0 \leq x, Ax \leq b(\omega)\}$$

est  $P$ -intégrable.

Proposition

Soit  $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de vecteurs aléatoires intégrables définis sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{G}, P)$  à valeurs dans  $\mathbb{R}_+^p$ , et convergeant en moyenne vers le vecteur aléatoire intégrable  $b$ . Alors la suite de multiapplications  $\Gamma_n$  définies par

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall \omega \in \Omega \quad \Gamma_n(\omega) = \{x \in \mathbb{R}^m \mid 0 \leq x, Ax \leq b_n(\omega)\}$$

convergent en moyenne vers la multiapplication  $\Gamma$  définie par

$$\forall \omega \in \Omega \quad \Gamma(\omega) = \{x \in \mathbb{R}^m \mid 0 \leq x, Ax \leq b(\omega)\}.$$

C) - Convergence presque sûre

Les théorèmes de convergence presque sûre découlent immédiatement des théorèmes de convergence non aléatoire.

Il en est ainsi en particulier des théorèmes d'extraction de sous suites convergeant presque sûrement à partir de suites convergeant en probabilité ou en moyenne.

Nous ne détaillerons pas ces énoncés faciles à écrire.



CHAPITRE - III

ESPERANCE CONDITIONNELLE DES MULTIAPPLICATIONS A VALEURS CONVEXES  
FAIBLEMENT COMPACTES NON VIDES DANS UN ESPACE VECTORIEL TOPOLOGIQUE  
LOCALEMENT CONVEXE

I - INTRODUCTION

III.1 - Soit  $E$  un espace vectoriel topologique localement convexe séparé réel (e.v.t.l.c.s.r),  $E'$  son dual. Nous utiliserons les notations  $E_\sigma$ ,  $E'_\sigma$ ,  $E_\tau$ ,  $E'_\tau$ ,  $E'_b$ ,  $E'^*$  pour désigner respectivement  $E$  muni de la topologie affaiblie  $\sigma(E,E)$ ,  $E'$  muni de la topologie faible  $\sigma(E',E)$ ,  $E$  muni de la topologie de Mackey  $\tau(E,E')$ ,  $E'$  muni de la topologie de Mackey  $\tau(E',E)$ , le dual fort de  $E$ , le dual algébrique de  $E'$ .

$E_t$  étant un espace vectoriel topologique muni d'une topologie  $t$ ,  $CK(E_t)$  désignera l'ensemble des convexes non vides de  $E_t$  compacts pour  $t$  ; de même  $CF(E_t)$  désignera l'ensemble des convexes non vides de  $E_t$  fermés pour  $t$ .

A tout  $K \in CK(E)$ , nous associons, comme précédemment,

$$\forall x' \in E' \quad \varphi(x',K) = \sup\{\langle x',x \rangle \mid x \in K\}$$

La fonction  $\varphi(.,K) : E' \rightarrow \mathbb{R}$  est la fonction d'appui de  $K$ . Les propriétés des fonctions d'appui ont été étudiées par L. Hörmander [1]. Nous indiquons ici celles que nous utiliserons le plus.

### III.2 - Lemme

Soit  $E$  un e.v.t.l.c.r.s.,  $E'$  son dual. Soit  $h$  une fonction numérique définie sur  $E'$ . Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

1)  $h$  possède les propriétés

$$a) \forall x' \in E', \quad \forall y' \in E', \quad h(x'+y') \leq h(x')+h(y')$$

$$b) \forall \lambda > 0, \quad \forall x' \in E', \quad h(\lambda x') = \lambda h(x')$$

$$c) \forall x' \in E', \quad -\infty < h(x') \leq +\infty$$

d)  $h$  est continue pour  $\tau(E', E)$

2)  $h$  est la fonction d'appui d'un convexe  $\Gamma$  non vide faiblement compact de  $E$ .

Signalons de plus que si on remplace d) par l'une des assertions

d<sub>1</sub>)  $h$  est semi continue inférieurement pour  $\sigma(E', E)$

d<sub>2</sub>)  $h$  est continue pour  $\sigma(E', E)$

d<sub>3</sub>)  $h$  est fortement continue

nous avons alors les équivalences (voir L. Hörmander [1])

a), b), c), d<sub>1</sub>)  $\Leftrightarrow \Gamma$  est convexe fermé non vide

a), b), c), d<sub>2</sub>)  $\Leftrightarrow \Gamma$  est convexe fermé, borné non vide et contenu dans un sous-espace de dimension finie.

a), b), c), d<sub>3</sub>)  $\Leftrightarrow \Gamma$  est convexe fermé, non vide et fortement borné.

Les propriétés de  $\varphi(\cdot, K)$  liées à la dualité ont été étudiées par J.J. Moreau [1].

III.3 - Soit  $(\Omega, \mathcal{G}, P)$  un espace probabilité complet. Nous nous intéresserons surtout, dans les chapitres III et IV, aux multiplications définies sur  $\Omega$  et à valeurs dans l'ensemble des convexes  $\sigma(E, E')$ -compacts non vides de  $E$ . Nous les désignerons par "multiplications définies sur  $\Omega$  et à valeurs dans  $CK(E_\sigma)$ " (ce qui est un abus de langage).

### Définition

Une multiapplication  $\Gamma$  définie sur  $(\Omega, \mathcal{G}, P)$  à valeurs dans  $CK(E_\sigma)$  est *scalairement  $\mathcal{G}$ -mesurable* (resp. *scalairement  $P$ -intégrable*) si

$$\forall x' \in E', \quad \omega \rightarrow \varphi(x', \Gamma(\omega)) \text{ est } \mathcal{G}\text{-mesurable (resp. } P\text{-intégrable).}$$

Deux multiapplications  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  définies sur  $(\Omega, \mathcal{G}, P)$  à valeurs dans  $CK(E_\sigma)$ , scalairement  $\mathcal{G}$ -mesurables seront dites

a) égales scalairement  $P$ -presque partout (ou scalairement  $P$ -presque sûrement) si

$$\forall x' \in E', \quad \exists N \in \mathcal{G} \quad P(N) = 0, \quad \forall \omega \in \Omega \setminus N$$

$$\varphi(x', \Gamma_1(\omega)) = \varphi(x', \Gamma_2(\omega))$$

b) égales à  $P$ -presque partout si

$$\exists N \in \mathcal{G} \quad P(N) = 0, \quad \forall \omega \in \Omega \setminus N$$

$$\Gamma_1(\omega) = \Gamma_2(\omega)$$

ou encore ce qui est équivalent (Hörmander [1] Th. 1)

$$\exists N \in \mathcal{G} \quad P(N) = 0, \quad \forall \omega \in \Omega \setminus N, \quad \forall x' \in E'$$

$$\varphi(x', \Gamma_1(\omega)) = \varphi(x', \Gamma_2(\omega))$$

Il est évident que l'égalité  $P$ -presque partout entraîne l'égalité scalairement  $P$ -presque partout. S'il existe un ensemble dénombrable dense dans  $E'$ , l'inverse sera vrai également.



III.4 - Nous noterons  $m_{\Gamma}^{\mathbb{Q}}$  l'ensemble des sections scalairement  $\mathbb{Q}$ -mesurables de la multiapplication  $\Gamma$  :

$$m_{\Gamma}^{\mathbb{Q}} = \{f \mid f \in L_E^{\infty}(\Omega, \mathbb{Q}), f(\omega) \in \Gamma(\omega) \text{ P.p.p.}\}$$

Rappelons, pour faciliter la lecture de ce texte, les deux résultats suivants sur l'intégration des multiapplications (voir Valadier [1] et Castaing-Valadier [1]).

### III.5 - Lemme

Soit  $E$  un espace vectoriel normé de dimension finie.  $\Gamma$  une multiapplication définie sur  $(\Omega, \mathbb{Q}, P)$ , scalairement  $\mathbb{Q}$ -mesurables et scalairement  $P$ -intégrable ; alors

a)  $\exists g \in L^1(\Omega, \mathbb{Q}, P)$  telle que  $\forall \omega \in \Omega, \forall u \in \Gamma(\omega)$

$$\|u\| \leq g(\omega)$$

b) l'image canonique de  $m_{\Gamma}^{\mathbb{Q}}$  dans  $L_E^1$  est  $\sigma(L_E^1, L_E^{\infty})$  compacte

c)  $\{\int_{\Omega} f \, dP \mid f \in m_{\Gamma}^{\mathbb{Q}}\} = \{\xi \in E \mid \langle x', \xi \rangle \leq \int_{\Omega} \varphi(x', \Gamma(\cdot)) \, dP, \forall x' \in E'\}$

### III.6 - Lemme

Soit  $E$  un e.v.t.l.c.r.s,  $\Gamma$  une multiapplication définie sur  $(\Omega, \mathbb{Q}, P)$  à valeurs dans  $CK(E_{\mathbb{Q}})$ , scalairement  $\mathbb{Q}$ -mesurable et scalairement  $P$ -intégrable.

a) Soit

$$K(\Omega) = \{\xi \in E'^{*} \mid \langle x', \xi \rangle \leq \int_{\Omega} \varphi(x', \Gamma(\cdot)) \, dP, \forall x' \in E'\}$$

Alors  $K(\Omega)$  est un ensemble convexe non vide  $\sigma(E'^{*}, E')$  compact. Tout  $f \in m_{\Gamma}^{\mathbb{Q}}$  est scalairement intégrable et  $\int f \, dP \in K(\Omega)$ .

b) S'il existe  $\{e'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  dans  $E'$  séparant les points de  $K(\Omega)$ ,  $E$  et de  $\Gamma(\omega)$ ,  $\forall \omega \in \Omega$ , et si  $\forall f \in \mathfrak{M}_\Gamma^G$ ,  $\int_\Omega f dP \in E$ , alors

$$K(\Omega) \cap E = \left\{ \int_\Omega f dP \mid f \in \mathfrak{M}_\Gamma^G \right\}$$

et

$$\max\{\langle x', x \rangle \mid x \in A \cap E\} = \int_\Omega \varphi(x', \Gamma(\cdot)) dP$$

c) Si de plus  $E$  est semi-réflexif,  $K(\Omega)$  est contenu dans  $E$ .

III.7 - Soit  $A \in \mathcal{G}$ . Introduisons les ensembles

$$K_\Gamma(A) = \{ \xi \in E'^* \mid \langle x', \xi \rangle \leq \int_A \varphi(x', \Gamma(\cdot)) dP, \quad \forall x' \in E' \}$$

$$H_\Gamma(A) = \left\{ \int_A f dP \mid f \in \mathfrak{M}_\Gamma^G \right\}$$

### Définition

Une multiapplication  $\Gamma$  définie sur  $(\Omega, \mathcal{G}, P)$ , à valeurs dans  $CK(E'_0)$  et scalairement  $\mathbb{G}$ -mesurable sera dite P-intégrable si

$$\forall A \in \mathcal{G} \quad K_\Gamma(A) = H_\Gamma(A) \subseteq E$$

on écrira alors

$$\int_A \Gamma dP = H_\Gamma(A)$$

Il est évident qu'on a alors

$$\forall x' \in E' \quad \max\{\langle x', x \rangle \mid x \in H_\Gamma(A)\} = \int_A \varphi(x', \Gamma(\cdot)) dP$$

c'est-à-dire

$$\varphi(x', \int_A \Gamma(\cdot) dP) = \int_A \varphi(x', \Gamma(\cdot)) dP.$$

III.8 - Remarque - Si  $\Gamma$  est P-intégrable, alors  $\Gamma$  est scalairement P-intégrable.

Le lemme III.6 donne des conditions pour que l'implication inverse soit vraie. Le lemme III.5 montre, que si E est un espace vectoriel réel normé de dimension finie, si  $\Gamma$  est scalairement P-intégrable, alors  $\Gamma$  est P-intégrable.

III.9 - Enfin, si  $(\Omega, \mathcal{G}, P)$  est un espace probabélisé,  $\mathcal{B}$  une sous tribu de  $\mathcal{G}$ , si E est un e.v.t.l.c.r.s., si f est scalairement  $\mathcal{G}$ -mesurable et scalairement P-intégrable, nous dirons que g est une version de l'espérance conditionnelle faible de f et nous noterons  $g \in E_P^{\mathcal{B}}[f]$  si g est une application de  $\Omega$  dans E, scalairement  $\mathcal{B}$ -mesurable et scalairement P-intégrable telle que

$$\forall B \in \mathcal{B}, \forall x' \in E', \int_B \langle x', g(\cdot) \rangle dP = \int_B \langle x', f(\cdot) \rangle dP$$

Nous définissons dans ce chapitre, les notions d'espérances conditionnelles faible et forte pour une multiapplication. Les théorèmes d'existence qui suivent sont adaptés des théorèmes de CASTAING et VALADIER sur les dérivées de RADON-NICODYM des multiapplications et nos démonstrations sont directement inspirées des leurs, ainsi que de celles de M. METIVIER ([1] et [2]) sur les martingales vectorielles. Nous étudions ensuite les propriétés des espérances conditionnelles et surtout les propriétés liées aux sections et aux faces.

## II - DEFINITIONS ET THEOREMES D'EXISTENCE

Nous donnerons d'abord un résultat en dimension finie.

### III.10 - Proposition

Soit  $(\Omega, \mathbb{G}, P)$  un espace probabilité complet,  $\mathbb{B}$  une sous tribu  $P$ -complète de  $\mathbb{G}$ ,  $E$  un espace vectoriel normé réel de dimension finie,  $E'$  son dual. Soit  $\Gamma$  une multiapplication définie sur  $(\Omega, \mathbb{G}, P)$  à valeurs dans  $CK(E)$ , scalairement  $\mathbb{G}$ -mesurable et  $P$ -intégrable.

Alors il existe une multiapplication  $\Delta$  définie sur  $(\Omega, \mathbb{B}, P)$  à valeurs dans  $CK(E)$ , scalairement  $\mathbb{B}$ -mesurable et  $P$ -intégrable telle que

$$\forall B \in \mathbb{B}, \int_B \Delta(\omega) dP(\omega) = \int_B \Gamma(\omega) dP(\omega).$$

De plus, pour tout  $f \in m_{\Gamma}^{\mathbb{G}}$  il existe  $g \in m_{\Delta}^{\mathbb{B}}$  telle que  $g \in \mathbb{E}_P^{\mathbb{B}}[f]$ .

Démonstration : Désignons par  $(e'_1, \dots, e'_n)$  une base du dual  $E'$ . A tout  $x' \in E'$ , associons  $\Psi(x') \in L^1(\Omega, \mathbb{B}, P)$  définie par

$$\Psi(x') = \mathbb{E}_P^{\mathbb{B}}[\varphi(x', \Gamma(\cdot))].$$

$\Psi(x')$  possède les propriétés

$$\forall x' \in E', \forall y' \in E', \Psi(x'+y') \leq \Psi(x') + \Psi(y')$$

$$\forall \lambda > 0, \forall x' \in E', \Psi(\lambda x') = \lambda \Psi(x')$$

Soit de plus  $\xi \in L^1(\Omega, \mathbb{G}, P)$  défini par :

$$\xi(\omega) = \sup\{|\varphi(e'_i, \Gamma(\omega))|, |\varphi(-e'_i, \Gamma(\omega))|\}; \quad i = 1, 2, \dots, n\}$$

( $\xi$  est la fonction  $g$  du lemme III.5).

Il en résulte qu'il existe une constante  $k$ , telle que :

$$\varphi(x', \Gamma(\omega)) \leq k \xi(\omega) \|x'\|$$

et par suite que :

$$|\Psi(x')| \leq k \mathbb{E}_P^{\mathbb{B}}(\xi) \|x'\|$$

où  $\|x'\|$  est une norme de  $x'$  sur  $E'$ .

Nous allons construire un relèvement  $\rho$  de  $L^\infty(\Omega, \mathbb{B}, P)$  dans  $\mathcal{L}^\infty(\Omega, \mathbb{B}, P)$  : le relèvement des  $\Psi(x')$  définira les fonctions d'appui de la multiapplication  $\Delta$  cherchée.

Soit  $\theta \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathbb{B}, P)$  un représentant de  $\mathbb{E}_P^{\mathbb{B}}(\xi)$ . Pour tout représentant  $\Psi(x', \cdot)$  de  $\Psi(x')$ , nous avons  $P$ -presque sûrement

$$|\Psi^\#(x', \cdot)| \leq k \theta(\cdot) \|x'\|.$$

Posons  $\Omega_n = \{\omega \mid n \leq \theta(\omega) < n+1\}$ . Sur chaque  $\Omega_n$  les  $\Psi(x')$  sont essentiellement bornés. Soit  $\rho$  un relèvement de  $L^\infty(\Omega, \mathbb{B}, P)$  dans  $\mathcal{L}^\infty(\Omega, \mathbb{B})$ . Nous définissons un relèvement de  $\Psi(x')$  en utilisant sur chaque  $\Omega_n$ , la restriction  $\rho_n$  du relèvement  $\rho$ .

Soit  $\tilde{\Psi}(x', \cdot) = \rho[\Psi(x')]$ . Nous avons

$$\tilde{\Psi}(x'+y', \omega) \leq \tilde{\Psi}(x', \omega) + \tilde{\Psi}(y', \omega) \quad \forall \omega \in \Omega$$

$$\tilde{\Psi}(\lambda x', \omega) = \lambda \tilde{\Psi}(x', \omega) \quad \forall \omega \in \Omega, \forall \lambda \geq 0$$

$$|\tilde{\Psi}(x', \omega)| \leq k \theta(\omega) \|x'\|$$

Pour tout  $\omega \in \Omega$ ,  $\tilde{\Psi}(\cdot, \omega)$  est donc la fonction d'appui d'un convexe compact non vide, puisque  $\tilde{\Psi}(\cdot, \omega)$  est sous linéaire positivement homogène et continue sur  $E'$ . Soit  $\Delta(\omega)$  le convexe compact de  $E$  défini par  $\varphi(x', \Delta(\omega)) = \tilde{\Psi}(x', \omega)$ .  $\forall x' \in E', \forall \omega \in \Omega$ .

Les fonctions  $\omega \rightarrow \varphi(x', \Delta(\omega))$  sont  $\mathcal{G}$ -mesurables et  $P$ -intégrables. La multiapplication  $\Delta$  est donc scalairement  $\mathcal{G}$ -mesurable et scalairement  $P$ -intégrable.

Soit maintenant  $f \in \mathfrak{M}_{\Gamma}^{\mathcal{G}}$  et  $g \in \mathfrak{E}_P^{\mathcal{G}}[f]$ .

Nous avons donc

$$\forall B \in \mathcal{G}, \int_B f \, dP = \int_B g \, dP$$

ou encore

$$\forall x' \in E', \quad \forall B \in \mathcal{G},$$

$$\int_B \langle x', f(\cdot) \rangle dP = \int_B \langle x', g(\cdot) \rangle dP.$$

De  $\langle x', f(\omega) \rangle \leq \varphi(x', \Gamma(\omega)) \quad \forall \omega \in \Omega$  (ou  $P$ -presque sûrement) résulte  $\langle x', g(\omega) \rangle \leq \varphi(x', \Delta(\omega))$   $P$ -presque sûrement et par conséquent  $g(\omega) \in \Delta(\omega)$ ,  $P$ -presque sûrement.

$\mathcal{G}$  étant  $P$ -complète, il existe une modification  $\tilde{g}$  de  $g$  telle que :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad \tilde{g}(\omega) \in \Delta(\omega) \text{ et } \tilde{g} \in \mathfrak{E}_P^{\mathcal{G}}[f].$$

Enfin, nous avons d'après le lemme III.5

$$\forall B \in \mathcal{G}, \quad \left\{ \int_B g \, dP \mid g \in \mathfrak{M}_{\Delta}^{\mathcal{G}} \right\} = \left\{ \int_B f \, dP \mid f \in \mathfrak{M}_{\Gamma}^{\mathcal{G}} \right\}.$$

III.11 - Remarque - Si  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  sont deux multiapplications vérifiant

$$\forall B \in \mathcal{G}, \quad \int_B \Delta_i \, dP = \int_B \Gamma \, dP, \quad i = 1, 2.$$

alors

$$\forall B \in \mathcal{G}, \quad \forall x' \in E',$$

$$\int_B \varphi(x', \Delta_1(\cdot)) dP = \int_B \varphi(x', \Delta_2(\cdot)) dP$$

et  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  sont scalairement égales P-presque partout ; E' étant de dimension finie,  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  sont égales P-presque partout.

### III.12 - Définition

Soit  $(\Omega, \mathcal{G}, P)$  un espace probabilité complet,  $\mathcal{B}$  une sous tribu complète de  $\mathcal{G}$ , E un espace vectoriel topologique localement convexe réel séparé,  $\Gamma$  une multi-application définie sur  $(\Omega, \mathcal{G}, P)$  à valeurs dans  $CK(E_{\mathcal{G}})$ , scalairement  $\mathcal{G}$ -mesurable et scalairement P-intégrable. Nous appellerons *version de l'espérance conditionnelle faible* de  $\Gamma$  par rapport à  $\mathcal{B}$ , toute multiapplication  $\Delta$ , définie sur  $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ , à valeurs dans  $CK(E_{\mathcal{G}})$  scalairement  $\mathcal{B}$ -mesurable et scalairement P-intégrable telle que

$$\forall x' \in E', \forall B \in \mathcal{B}, \int_B \varphi(x', \Delta(\cdot)) dP = \int_B \varphi(x', \Gamma(\cdot)) dP.$$

Nous noterons ce fait  $\Delta \in \mathbb{E}_P^{\mathcal{B}}(\Gamma) = \mathbb{E}_P(\Gamma | \mathcal{B})$ .

Si  $\Gamma$  est P-intégrable, et si  $\Delta$  est P-intégrable, nous écrivons

$$\forall B \in \mathcal{B}, \int_B \Delta dP = \int_B \Gamma dP$$

pour

$$\forall B \in \mathcal{B}, \left\{ \int_B g dP \mid g \in m_{\Delta}^{\mathcal{B}} \right\} = \left\{ \int_B f dP \mid f \in m_{\Gamma}^{\mathcal{G}} \right\}$$

et nous dirons que  $\Delta$  est une *version de l'espérance conditionnelle* de  $\Gamma$  par rapport à  $\mathcal{B}$ .

Nous allons maintenant établir plusieurs théorèmes d'existence d'espérance conditionnelle d'une multiapplication  $\Gamma$  sous diverses hypothèses.

### III.13 - Proposition

Soit  $(\Omega, \mathcal{G}, P)$  un espace probabilité complet,  $\mathcal{B}$  une sous tribu complète de  $\mathcal{G}$ , E un e.v.t.l.c.r.s., E' son dual. Soit Q un convexe équilibré non vide  $\sigma(E, E')$ -compact. Soit une multiapplication définie sur  $\Omega$  à valeurs dans  $CK(Q)$ , scalairement  $\mathcal{G}$ -mesurable.

Alors il existe une multiapplication  $\Delta$  définie sur  $\Omega$  à valeurs dans  $CK(Q)$  scalairement  $\mathcal{B}$ -mesurable telle que  $\Delta \in \mathbb{E}_P^{\mathcal{B}}(\Gamma)$ .

De plus, pour tout  $f \in \mathbb{M}_\Gamma^{\mathcal{Q}}$ , il existe  $g \in \mathbb{M}_\Delta^{\mathcal{B}}$  telle que  $g \in \mathbb{E}_P^{\mathcal{B}}(f)$ .

Enfin, s'il existe une suite  $\{e'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $E'$  qui sépare les points  $Q$ ,  $\Gamma$  et  $\Delta$  sont  $P$ -intégrables et on a

$$\forall B \in \mathcal{B}, \int_B \Delta dP = \int_B \Gamma dP.$$

Démonstration : Pour tout  $x' \in E'$ , posons

$$\Psi_{x'} = \mathbb{E}_P^{\mathcal{B}} \varphi(x', \Gamma(\cdot))$$

$\Psi_{x'} \in L^1(\Omega, \mathcal{B}, P)$ . Comme  $\forall x' \in E'$ ,  $\forall \omega \in \Omega$ ,  $\varphi(x', \Gamma(\omega)) \leq \varphi(x', Q)$ ,  $\Psi_{x'}$  est borné et  $\Psi_{x'} \in L^\infty(\Omega, \mathcal{B}, P)$ . L'application  $x' \rightarrow \Psi_{x'}$ , de  $E'$  dans  $L^\infty(\Omega, \mathcal{B}, P)$  ainsi définie vérifie les relations

$$\Psi_{x'+y'} \leq \Psi_{x'} + \Psi_{y'}$$

$$\Psi_{\lambda x'} = \lambda \Psi_{x'}, \quad \forall \lambda \geq 0$$

$$\|\Psi_{x'}\|_\infty \leq \varphi(x', Q).$$

Soit alors  $\rho$  un relèvement de  $L^\infty(\Omega, \mathcal{B}, P)$  dans  $L^\infty(\Omega, \mathcal{B}, P)$ . Posons  $\tilde{\Psi}_{x'}(\cdot) = \rho[\Psi_{x'}]$ . Des relations précédentes nous déduisons

$$\tilde{\Psi}_{x'+y'}(\omega) \leq \tilde{\Psi}_{x'}(\omega) + \tilde{\Psi}_{y'}(\omega) \quad \forall \omega \in \Omega$$

$$\tilde{\Psi}_{\lambda x'}(\omega) = \lambda \tilde{\Psi}_{x'}(\omega) \quad \forall \omega \in \Omega, \forall \lambda \geq 0$$

$$|\tilde{\Psi}_{x'}(\omega)| \leq \sup_{x \in Q} |\langle x', x \rangle| \quad \forall \omega \in \Omega.$$



L'application  $x' \rightarrow \tilde{\Psi}_{x'}(\omega)$  est donc, pour  $\omega$  fixé, la fonction d'appui d'un convexe fermé non vide  $\Delta(\omega) \subset Q$  [Voir Hörmander [1]], et par conséquent  $\sigma(E, E')$ -compact. La multiapplication  $\Delta$ , ainsi obtenue est scalairement  $\mathcal{B}$ -mesurable et scalairement  $P$ -intégrable. Nous écrirons  $\varphi(x', \Delta(\omega))$  au lieu de  $\tilde{\Psi}_{x'}(\omega)$ .

Soit maintenant  $f \in \mathbb{M}_P^{\mathcal{G}}$ , scalairement  $P$ -intégrable. Rappelons la définition de l'espérance conditionnelle faible de  $f$  et montrons qu'il en existe une version, section  $\mathcal{B}$ -mesurable de  $\Delta$ .

Posons  $g_{x'} = \mathbb{E}_P^{\mathcal{B}}[\langle x', f(\cdot) \rangle]$ . L'application  $x' \rightarrow g_{x'}$ , est une application linéaire de  $E'$  dans  $L^1(\Omega, \mathcal{B}, P)$ . Comme  $\forall x' \in E', \forall \omega \in \Omega, \langle x', f(\omega) \rangle \leq \varphi(x', Q)$ , nous avons en fait  $g_{x'} \in L^{\infty}(\Omega, \mathcal{B}, P)$ . Montrons que  $x' \rightarrow g_{x'}$ , est une application continue de  $E'_T$  dans  $L^{\infty}(\Omega, \mathcal{B}, P)$ . Un voisinage de 0 dans  $E'_T$  est donné par

$$V(K, \varepsilon) = \{x' \mid |\langle x', x \rangle| \leq \varepsilon, \quad \forall x \in K\}$$

où  $\varepsilon > 0$ , et  $K$  est un convexe équilibré  $\sigma(E, E')$ -compact de  $E$ . En particulier, si  $K = Q$

$$V(Q, \varepsilon) = \{x' \mid |\langle x', x \rangle| \leq \varepsilon, \quad \forall x \in Q\}$$

et il en résulte pour  $x' \in V(Q, \varepsilon)$

$$\forall \omega \in \Omega \quad |\langle x', f(\omega) \rangle| \leq \varepsilon$$

puisque  $\forall \omega \in \Omega, \Gamma(\omega) \subset Q$ . Par suite, quel que soit le représentant  $\hat{g}_{x'}(\cdot)$  de  $g_{x'}$ ,  $|\hat{g}_{x'}(\cdot)| \leq \varepsilon$   $P$ -presque sûrement et  $\|g_{x'}\|_{\infty} \leq \varepsilon$  ce qui prouve la continuité cherchée.

Désignons alors par  $\tilde{g}_{x'}(\cdot)$  l'image de  $g_{x'}$ , par le relèvement  $\rho$  déjà utilisé. L'application  $x' \rightarrow \tilde{g}_{x'}(\cdot)$  ainsi définie est donc une application linéaire et continue de  $E'_T$  dans  $\mathcal{L}^{\infty}(\Omega, \mathcal{B}, P)$ . En particulier,  $\forall \omega \in \Omega, x' \rightarrow g_{x'}(\omega)$  est une forme linéaire de  $E'$  continue pour  $\tau(E', E)$ . La topologie de Mackey étant compatible avec la dualité entre  $E$  et  $E'$ , il existe donc  $g(\omega) \in E$  tel que

$$\forall x' \in E', \quad g_{x'}(\omega) = \langle x', g(\omega) \rangle$$

et l'application  $g : \Omega \rightarrow E$  est scalairement  $\mathcal{B}$ -mesurable et scalairement  $P$ -intégrable.  $g$  est une version de l'espérance conditionnelle faible de  $f$ .

Il suffit de montrer maintenant que  $g(\omega) \in \Gamma(\omega)$ ,  $\forall \omega \in \Omega$ .

Ceci résulte immédiatement de :

$$\forall \omega \in \Omega \quad \langle x', f(\omega) \rangle \leq \varphi(x', \Gamma(\omega))$$

car alors

$$\mathbb{E}_P^{\mathcal{B}}[\langle x', f(\cdot) \rangle] \leq \mathbb{E}_P^{\mathcal{B}}[\varphi(x', \Gamma(\cdot))]$$

c'est-à-dire  $g_{x'} \leq \Psi_{x'}$ , dans  $L^\infty(\Omega, \mathcal{B}, P)$  et par conséquent  $\tilde{g}_{x'}(\omega) = \langle x', g(\omega) \rangle \leq \varphi(x', \Delta(\omega)) \quad \forall \omega \in \Omega$ .

Nous avons donc  $g(\omega) \in \Delta(\omega)$ .

$\Delta$  est ainsi une multiapplication définie sur  $\Omega$ , à valeurs dans  $CK(Q)$ , scalairement  $\mathcal{B}$ -mesurable et scalairement  $P$ -intégrable telle que

$$\forall x' \in E', \forall B \in \mathcal{B}, \int_B \varphi(x', \Delta(\cdot)) dP = \int_B \varphi(x', \Gamma(\cdot)) dP$$

c'est-à-dire  $\Delta \in \mathbb{E}_P^{\mathcal{B}}(\Gamma)$ .

L'existence de  $\{e'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  dans  $E'$ , séparant les points de  $Q$ , jointe à la propriété  $\Gamma(\omega) \subset Q$ ,  $\forall \omega \in \Omega$ , entraîne

$$\forall A \in \Omega, \forall f \in m_{\Gamma}^Q, \int_A f dP \in P(A) \cdot Q \subset E$$

ainsi que  $K_{\Gamma}(A) \subset Q \subset E$ . Il en résulte donc d'après le lemme III.6 b), que  $K_{\Gamma}(A) \cap E = K_{\Gamma}(A) = H_{\Gamma}(A)$ ,  $\forall A \in \Omega$ . Nous avons de même  $K_{\Delta}(B) = H_{\Delta}(B)$ ,  $\forall B \in \mathcal{B}$ . Les multiapplications  $\Gamma$  et  $\Delta$  sont donc  $P$ -intégrables.

Si de plus  $\Delta \in \mathbb{E}_P^{\mathcal{B}}(\Gamma)$ , alors  $K_{\Delta}(B) = K_{\Gamma}(B)$ , pour tout  $B \in \mathcal{B}$ . Il en résulte  $H_{\Delta}(B) = H_{\Gamma}(B)$ ,  $\forall B \in \mathcal{B}$ ; autrement dit :

$$\forall B \in \mathcal{B}, \int_B \Delta dP = \int_B \Gamma dP.$$

III.14 - Remarque 1

Deux relèvements différents fournissent deux versions différentes de l'espérance conditionnelle faible de la multiapplication  $\Gamma$ . Soit  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  deux versions distinctes : nous avons  $\forall x' \in E'$   
 $\varphi(x', \Delta_1(\cdot)) = \varphi(x', \Delta_2(\cdot))$  P-presque sûrement, mais ce n'est que s'il existe  $\{e'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  dans  $E'$ , séparant les points de  $E$  que nous aurons

$$\Delta_1(\cdot) = \Delta_2(\cdot) \text{ P-presque sûrement.}$$

Remarque 2

Ce n'est également que s'il existe  $\{e'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  séparant les points de  $E'$ , que l'on peut associer à toute fonction  $f$ , section  $\mathcal{G}$ -mesurable de  $\Gamma$ , une fonction  $g \in E_P^{\mathcal{B}}(f)$ , section de  $\Delta$ . On n'a en effet  
 $\langle x', g(\omega) \rangle \leq \varphi(x', \Delta(\omega))$  que presque sûrement et l'ensemble d'exception dépend de  $x'$ .

III.15 - Proposition

*Soit  $(\Omega, \mathcal{G}, P)$  un espace probabilité complet,  $\mathcal{B}$  une sous tribu complète de  $\mathcal{G}$ ,  $E$  un e.v.t.l.c.r.s.,  $E'$  son dual. Soit  $\Gamma$  une multiapplication définie sur  $\Omega$  à valeurs dans  $CK(E_{\mathcal{G}})$ , scalairement  $\mathcal{G}$ -mesurable et scalairement P-intégrable, possédant la propriété suivante :*

*$\forall \varepsilon > 0$ ,  $\Omega_{\varepsilon} \in \mathcal{B}$  et  $Q_{\varepsilon}$  sous-ensemble convexe non vide équilibré,  $\sigma(E, E')$  compact de  $E$  tels que*

$$P(\Omega \setminus \Omega_{\varepsilon}) \leq \varepsilon \text{ et } \forall \omega \in \Omega_{\varepsilon}, \quad \Gamma(\omega) \subset Q_{\varepsilon}$$

Alors il existe une multiapplication  $\Delta$  définie sur  $(\Omega, \mathcal{G}, P)$  à valeurs dans  $CK(E_\sigma)$ , scalairement  $\mathcal{B}$ -mesurable et scalairement  $P$ -intégrable telle que  $\Delta \in \mathbb{E}_P^{\mathcal{B}}(\Gamma)$ .

De plus, pour tout  $f \in \mathcal{M}_\Gamma^{\mathcal{G}}$ , scalairement  $P$ -intégrable\* il existe  $g \in \mathcal{M}_\Delta^{\mathcal{B}}$ , scalairement  $P$ -intégrable telle que  $g \in \mathbb{E}_P^{\mathcal{B}}(f)$ .

Enfin, si  $E$  est séquentielle faiblement complet si  $\Gamma$  est  $P$ -intégrable et s'il existe une suite  $\{e'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $E'$  qui sépare les points de  $E$ , alors  $\Delta$  est  $P$ -intégrable et

$$\forall B \in \mathcal{B}, \int_B \Delta \, dP = \int_B \Gamma \, dP.$$

Démonstration : Construisons pour commencer une partition  $\{\Omega_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de  $\Omega$  particulière.

$\forall n, \exists Q'_n \in \mathcal{B}$  et  $Q'_n$  vérifiant les conditions de l'énoncé :  $P(\Omega \setminus Q'_n) \leq \frac{1}{n}$ ,  $Q'_n$  convexe, équilibré,  $\sigma(E, E')$ -compact.

Posons :

$$\Omega''_n = \bigcup_1^n Q'_n.$$

$\{\Omega''_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  est donc une suite croissante de sous-ensembles de  $\Omega$  telle que

$$P(\Omega \setminus \Omega''_n) \leq \frac{1}{n}$$

et

$$P(\Omega \setminus \bigcup_1^\infty \Omega''_n) = 0$$

Soit alors  $\{\Omega_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  la partition de  $\Omega$ , définie par

$$\Omega_1 = \Omega''_1, \quad \Omega_n = \Omega''_n \setminus \Omega_{n-1}, \quad n \geq 2$$

\* Remarque

L'hypothèse :  $f \in \mathcal{M}_\Gamma^{\mathcal{G}}$  est scalairement  $P$ -intégrable ; est superflue si  $E$  est séquentiellement faiblement complet. (voir Castaing-Valadier [1]).

et soit

$$N = \Omega \setminus \bigcup_1^{\infty} \Omega_n$$

Cette partition est constituée d'ensembles deux à deux disjoints et vérifiant

$$P(\Omega \setminus \bigcup_1^n \Omega_m) \leq \frac{1}{n}$$

$$P(\Omega \setminus \bigcup_1^{\infty} \Omega_n) = 0$$

Désignons par  $Q_n$ , l'enveloppe convexe équilibrée  $\sigma(E, E')$ -compact de  $\bigcup_1^n Q'_m$ .

Pour tout  $x' \in E'$  nous avons alors

$$\forall \omega \in \Omega \setminus N, \quad \varphi(x', \Gamma(\omega)) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(x', \Gamma(\omega)) \chi_n(\omega)$$

où  $\chi_n(\cdot)$  désigne la fonction caractéristique de  $\Omega_n$ .

$$\text{Posons } Y_k(\cdot) = \varphi(x', \Gamma(\cdot)) \chi_k(\cdot), \quad Z_n = \sum_1^n Y_k, \quad Z(\cdot) = \varphi(x', \Gamma(\cdot)).$$

Nous avons donc, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $|Z_n| \leq |Z|$ , et  $Z$  étant intégrable par hypothèse,  $\{Z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  est équi-intégrable. Comme par ailleurs  $\{Z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge  $P$ -presque sûrement vers  $Z$ ,  $\{Z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge en probabilité vers  $Z$ . Il en résulte que  $\{Z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge fortement vers  $Z$  dans  $L^1(\Omega, \mathcal{G}, P)$  (Neveu [1], Prop. II. 5-4, p. 50). Par conséquent,  $\forall A \in \mathcal{G}$ ,  $\forall x' \in E'$ , uniformément par rapport à  $A$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A \sum_1^n \varphi(x', \Gamma(\cdot)) \chi_k(\cdot) dP = \int_A \varphi(x', \Gamma(\cdot)) dP$$

Posons maintenant  $\psi_x^n = \mathbb{E}_P^{\mathcal{B}}[\varphi(x', \Gamma(\cdot)) \chi_n(\cdot)]$  ou encore puisque  $\Omega_n \in \mathcal{B}$  :

$$\psi_x^n = \chi_n(\cdot) \mathbb{E}_P^{\mathcal{B}}[\varphi(x', \Gamma(\cdot))].$$

Il résulte alors de la proposition III.13 que  $\psi_x^n$ , admet un représentant  $\tilde{\psi}_x^n(\cdot)$  tel que l'application  $x' \rightarrow \tilde{\psi}_x^n(\omega)$  soit la fonction d'appui d'un convexe non vide  $\sigma(E, E')$ -compact  $\Delta_n(\omega)$ , qui vérifie  $\Delta_n(\omega) \subset Q_n$ ,  $\forall \omega \in \Omega_n$ . En outre  $\Delta_n(\cdot)$  est scalairement  $\mathcal{B}$ -mesurable et scalairement  $P$ -intégrable.

Posons

$$\Delta(\omega) = \begin{cases} \Delta_n(\omega) & \text{si } \omega \in \Omega_n \\ \{0\} & \text{si } \omega \in N \end{cases}$$

avec

$$\varphi(x', \Delta_n(\omega)) = \tilde{\psi}_{x'}^n(\omega) \quad \text{si } \omega \in \Omega_n$$

Nous avons donc

$$\forall \omega \in \Omega \setminus N, \forall x' \in E', \quad \varphi(x', \Delta(\omega)) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(x', \Delta_n(\omega))$$

$\Delta$  est donc scalairement  $\mathcal{B}$ -mesurable. Montrons que  $\Delta$  est scalairement P-intégrable. Nous avons toujours

$$\forall x' \in E', \quad \forall B \in \mathcal{B},$$

$$\int_B \sum_1^n \varphi(x', \Delta_k(\cdot)) dP = \int_B \sum_1^n \varphi(x', \Gamma(\cdot)) \chi_k(\cdot) dP$$

Or, nous avons vu que :  $\forall \varepsilon > 0, \forall x' \in E', \exists M \in \mathbb{N}, \forall B \in \mathcal{B}, \forall n \geq M,$

$$\left| \int_B \varphi(x', \Gamma(\cdot)) dP - \int_B \sum_1^n \varphi(x', \Gamma(\cdot)) \chi_k(\cdot) dP \right| \leq \varepsilon$$

et par conséquent

$$\left| \int_B \varphi(x', \Gamma(\cdot)) dP - \int_B \sum_1^n \varphi(x', \Delta_k(\cdot)) dP \right| \leq \varepsilon.$$

$\sum_1^n \varphi(x', \Delta_k(\cdot))$  converge donc dans  $L^1(\Omega, \mathcal{G}, P)$  pour la topologie  $\sigma(L^1, L^\infty)$ , vers  $\mathbb{E}_P^{\mathcal{B}}[\varphi(x', \Gamma(\cdot))]$  quand  $n \rightarrow +\infty$ . Comme par ailleurs  $\sum_1^n \varphi(x', \Delta_k(\cdot))$  converge presque sûrement vers  $\varphi(x', \Delta(\cdot))$ ,  $\sum_1^n \varphi(x', \Delta_k(\cdot))$  converge fortement vers  $\mathbb{E}_P^{\mathcal{B}}[\varphi(x', \Gamma(\cdot))]$  et par conséquent  $\varphi(x', \Delta(\cdot))$  est P-intégrable et  $\varphi(x', \Delta(\cdot)) \in \mathbb{E}_P^{\mathcal{B}}[\varphi(x', \Gamma(\cdot))]$ .

Montrons maintenant que l'espérance conditionnelle faible d'une section de  $\Gamma$  admet une version qui est une section de  $\Delta$ .

Soit  $f \in \mathbb{M}_T^G$  scalairement P-intégrable. Nous avons donc

$$\forall \omega \in \Omega \setminus N, \forall x' \in E', \langle x', f(\omega) \rangle = \sum_1^{\infty} \langle x', f(\omega) \rangle \chi_n(\omega)$$

et  $\forall A \in \mathcal{G}, \forall n \in \mathbb{N}$ ,

$$\int_A f(\cdot) \chi_n(\cdot) dP \in P(A), Q_n \subset E.$$

Il existe donc, d'après la proposition III.13,  $g^n : \Omega_n \rightarrow E$  scalairement  $\mathcal{B}$ -mesurable et scalairement P-intégrable telle que  $\forall x' \in E', \forall B \in \mathcal{B}$ ,

$$\int_B \langle x', f(\cdot) \rangle \chi_n(\cdot) dP = \int_B \langle x', g^n(\cdot) \rangle dP$$

et

$$g^n(\omega) \in \Delta_n(\omega), \quad \forall \omega \in \Omega_n.$$

Posons :

$$g(\omega) = \begin{cases} g^n(\omega) & \text{si } \omega \in \Omega_n \\ 0 & \text{si } \omega \in N \end{cases}$$

$g$  est scalairement  $\mathcal{B}$ -mesurable. Montrons que  $g$  est scalairement P-intégrable.

Puisque  $g^n(\omega) \in \Delta_n(\omega) \subset Q_n$  pour  $\omega \in \Omega_n$  :

$\forall x' \in E', -\varphi(-x', \Delta_n(\omega)) \leq \langle x', g^n(\omega) \rangle \leq \varphi(x', \Delta_n(\omega))$  et

$$\forall B \in \mathcal{B}, \forall x' \in E', -\int_B \varphi(-x', \sum_n^m \Delta_k(\cdot)) dP \leq \int_B \sum_n^m \langle x', g^k(\cdot) \rangle dP \leq \int_B \varphi(x', \sum_n^m \Delta_k(\cdot)) dP$$

les termes qui minore et majore  $\int_B \sum_n^m \langle x', g^k(\cdot) \rangle dP$  tendent vers zéro, quand  $n$  et  $m \rightarrow +\infty$ , et par conséquent la suite  $\{\int_B \langle x', \sum_1^n g^k(\cdot) \rangle dP\}$  est une suite de Cauchy, qui admet une limite dans l'intervalle  $[-\int_B \varphi(-x', \Delta(\cdot)) dP, \int_B \varphi(x', \Delta(\cdot)) dP]$ .

La suite  $\{\langle x', \sum_1^n g^k(\cdot) \rangle\}_{n \in \mathbb{N}}$  est donc équi-intégrable et converge faiblement dans  $L^1(\Omega, \mathcal{B}, P)$ . Comme cette suite converge P-presque sûrement vers  $\langle x', g(\cdot) \rangle$ , elle converge aussi fortement dans  $L^1(\Omega, \mathcal{B}, P)$  vers  $\langle x', g(\cdot) \rangle$  et

$$\forall B \in \mathcal{B}, \int_B \langle x', g(\cdot) \rangle dP = \int_B \langle x', f(\cdot) \rangle dP.$$

Ainsi  $g(\cdot)$  est scalairement P-intégrable et  $g \in \mathbb{E}_P^{\mathbb{B}}(f)$ . De plus,  $g$  est évidemment une section de  $\Delta$ .

$\Delta$  est donc une multiapplication définie sur  $\Omega$  à valeurs dans  $CK(E)$ , scalairement  $\mathbb{B}$ -mesurable et scalairement P-intégrable telle que

$$\forall x' \in E', \quad \forall B \in \mathbb{B}, \quad \int_B \varphi(x', \Delta(\cdot)) dP = \int_B \varphi(x', \Gamma(\cdot)) dP.$$

Examinons maintenant le cas où  $\Gamma$  est P-intégrable.

Alors,  $\forall A \in \mathbb{G}$ ,  $K_\Gamma(A) = H_\Gamma(A) \subset E$ . Si  $\Delta \in \mathbb{E}_P^{\mathbb{B}}(\Gamma)$ , alors  $\forall B \in \mathbb{B}$ ,  $K_\Delta(B) = K_\Delta(B)$ . Montrons que  $\Delta$  est P-intégrable.

Soit  $g \in \mathbb{M}_\Delta^{\mathbb{B}}$ ;  $g$  est scalairement P-intégrable puisque  $\Delta$  est scalairement P-intégrable (le raisonnement est le même que celui fait plus haut). Il en résulte alors, si  $E$  est séquentiellement complet, que  $\forall B \in \mathbb{B}$ ,  $\int_B g dP \in E$  [voir Castaing et Valadier [1], Th. 1]. Ce résultat, joint à l'hypothèse de l'existence de  $\{e'_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset E'$  séparant les points de  $E$ , entraîne que

$$\forall B \in \mathbb{B}, \quad H_\Delta(B) = K_\Delta(B) \cap E, \text{ et par conséquent que}$$

$$\begin{aligned} \forall B \in \mathbb{B}, \quad H_\Delta(B) &= K_\Delta(B) \cap E \\ &= K_\Gamma(B) \cap E \\ &= K_\Gamma(B) \\ &= K_\Delta(B) \end{aligned}$$

$\Delta$  donc est P-intégrable et, en outre, puisque  $\forall B \in \mathbb{B}$ ,  $H_\Delta(B) = K_\Gamma(B) = H_\Gamma(B)$ ,

nous avons

$$\forall B \in \mathbb{B}, \quad \int_B \Delta dP = \int_B \Gamma dP.$$



Remarque

Ici encore, deux versions distinctes,  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  de l'espérance conditionnelle faible de  $\Gamma$ , seront égales scalairement P-presque partout. Elles ne seront égales P-presque partout que s'il existe  $\{e'_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset E'$  séparant les points de E.

III.16 - Proposition

Soit  $(\Omega, \mathcal{G}, P)$  un espace probabilité complet,  $\mathcal{B}$  une sous tribu complète de  $\mathcal{G}$ , E un e.v.t.l.c.r.s., E' son dual.

Soit  $\Gamma$  une multiapplication définie sur  $\Omega$  à valeurs dans  $CK(E'_\sigma)$ , scalairement  $\mathcal{G}$ -mesurable. Nous supposons qu'il existe  $\lambda \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{G}, P)$  et Q convexe équilibré non vide  $\sigma(E, E')$ -compact dans E tel que

$$\forall \omega \in \Omega, \Gamma(\omega) \subset \lambda(\omega)Q.$$

Alors il existe une multiapplication  $\Delta$  définie sur  $\Omega$  à valeurs dans  $CK(E'_\sigma)$  scalairement  $\mathcal{B}$ -mesurable et scalairement P-intégrable telle que  $\Delta \in \mathbb{E}_P^{\mathcal{B}}(\Gamma)$ .

De plus, pour tout  $f \in m_{\Gamma}^{\mathcal{G}}$ , il existe  $g \in m_{\Delta}^{\mathcal{B}}$  telle que  $g \in \mathbb{E}_P^{\mathcal{B}}(f)$ .

Si, en outre,  $\Gamma$  est P-intégrable, et s'il existe une suite  $\{e'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de E' qui sépare les points de E, alors  $\Delta$  est P-intégrable,

$$\forall B \in \mathcal{B}, \int_B \Delta dP = \int_B \Gamma dP,$$

et  $\Delta$  vérifie P-presque sûrement  $\Delta(\omega) \in \mu(\omega)Q$  où  $\mu(\cdot) \in \mathbb{E}_P^{\mathcal{B}}(\lambda)$ .

Démonstration : Il résulte de  $\Gamma(\omega) \subset \lambda(\omega)Q$ ,  $\forall \omega \in \Omega$ , que  $\forall x' \in E'$ ,  $\forall \omega \in \Omega$ ,

$$-|\lambda(\omega)|\varphi(-x', Q) \leq \varphi(x', \Gamma(\omega)) \leq |\lambda(\omega)|\varphi(x', Q)$$

d'où

$$-\mathbb{E}_P^{\mathcal{B}}[|\lambda(\cdot)|] \varphi(-x', Q) \leq \mathbb{E}_P^{\mathcal{B}}[\varphi(x', \Gamma(\cdot))] \leq \mathbb{E}_P^{\mathcal{B}}[|\lambda(\cdot)|] \varphi(x', Q).$$

Choisissons  $\mu(\cdot) \in L^1(\Omega, \mathcal{B}, P)$  telle que  $\mu(\cdot) \in \mathbb{E}_P^{\mathcal{B}}[|\lambda(\cdot)|]$  et  $\mu(\omega) \geq 0$ ,  
 $\forall \omega \in \Omega$ .

Alors dans  $L^1(\Omega, \mathcal{B}, P)$

$$-\tilde{\mu} \varphi(-x', Q) \leq \mathbb{E}_P^{\mathcal{B}}[\varphi(x', \Gamma(\cdot))] \leq \tilde{\mu} \varphi(x', Q)$$

où  $\tilde{\mu}$  désigne l'image canonique de  $\mu$  dans  $L^1(\Omega, \mathcal{B}, P)$ .

Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\alpha_\varepsilon > 0$  tel que

$$P\{\omega \mid \mu(\omega) \geq \alpha_\varepsilon\} \leq \varepsilon$$

Soit  $\Omega'_\varepsilon = \{\omega \mid \mu(\omega) \leq \alpha_\varepsilon\}$  et  $Q'_\varepsilon = \alpha_\varepsilon Q$ . Nous avons  $\Omega'_\varepsilon \in \mathcal{B}$ .

La proposition III.15 montre alors l'existence d'une multiapplication  $\Delta$ ,  
 scalairement  $\mathcal{B}$ -mesurable et scalairement  $P$ -intégrable telle que  
 $\Delta \in \mathbb{E}_P^{\mathcal{B}}[\Gamma]$ , et vérifiant en outre

$$\forall x' \in E', \quad \varphi(x', \Delta(\omega)) \leq \mu(\omega) \cdot \varphi(x', Q) \quad P.p.q.$$

Il en résulte de même que si  $f \in \mathbb{M}_T^{\mathcal{G}}$ , il existe  $g \in \mathbb{M}_\Delta^{\mathcal{B}}$  telle que  
 $g \in \mathbb{E}_P^{\mathcal{B}}[f]$ .

Enfin, s'il existe  $\{e'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  séparant les points de  $E$ , alors

$$\forall f \in \mathbb{M}_T^{\mathcal{G}}, \forall A \in \mathcal{G}, \quad \int_A f \, dP \in \int_A \lambda(\cdot) \, dP \quad Q \subset E \text{ et de même}$$

$$\forall g \in \mathbb{M}_\Delta^{\mathcal{B}}, \forall B \in \mathcal{B}, \quad \int_B g \, dP \in \int_B \mu(\cdot) \, dP \quad Q \subset E.$$

Nous avons donc

$$\forall A \in \mathcal{G} \quad : \quad H_T(A) = K_T(A) \cap E$$

$$\forall B \in \mathcal{B} \quad : \quad H_\Delta(B) = K_\Delta(B) \cap E$$

Si de plus  $\Gamma$  est  $P$ -intégrable,  $\forall A \in \mathcal{G}$ ,  $H_{\Gamma}(A) = K_{\Gamma}(A)$ . Alors, si  $\Delta \in \mathbb{E}_P^{\mathcal{G}}(\Gamma)$ ,  $\Delta$  est  $P$ -intégrable et on a

$$\forall B \in \mathcal{G}, \int_B \Delta \, dP = \int_B \Gamma \, dP.$$

### III - PROPRIETES DES ESPERANCES CONDITIONNELLES

La plupart des propriétés des espérances conditionnelles des variables aléatoires restent vraies -mutatis mutandis- pour les espérances conditionnelles des multiapplications. Citons en quelques unes.

#### III.17 - Proposition

Soit  $(\Omega, \mathcal{G}, P)$  un espace probabilité complet,  $\mathcal{B}$  une sous tribu complète de  $\mathcal{G}$ ,  $E$  un e.v.t.l.c.r.s.,  $E'$  son dual.

Soient  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  deux multiapplications définies sur  $\Omega$ , à valeurs dans  $CK(E'_\sigma)$ , scalairement  $\mathcal{G}$ -mesurables et scalairement  $P$ -intégrables et telles que  $\forall \omega \in \Omega, \Gamma_1(\omega) \subset \Gamma_2(\omega)$ .

On suppose qu'il existe une suite  $\{e'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $E'$  qui sépare les points de  $E$ .

Soient  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  deux versions des espérances conditionnelles faibles par rapport à  $\mathcal{B}$  respectivement de  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  :  $\Delta_1 \in \mathbb{E}_P^{\mathcal{B}}(\Gamma_1)$ ,  $\Delta_2 \in \mathbb{E}_P^{\mathcal{B}}(\Gamma_2)$ .  
Alors

$$\Delta_1(\omega) \subset \Delta_2(\omega) \quad P\text{-presque sûrement.}$$

La démonstration résulte immédiatement de l'équivalence

$$\{\forall \omega \in \Omega, \Gamma_1(\omega) \subset \Gamma_2(\omega)\} \Leftrightarrow \{\forall x' \in E', \forall \omega \in \Omega, \varphi(x', \Gamma_1(\omega)) \leq \varphi(x', \Gamma_2(\omega))\}$$

(Hörmander [1] Th. 2), et de l'hypothèse de l'existence de la suite  $\{e'_n\}$  dans  $E'$ , qui sépare les points de  $E$ , qui permet de passer de l'égalité scalairement  $P$ -presque sûre des multiapplications à leur égalité  $P$ -presque sûre.

III.18 - Proposition

Soit  $(\Omega, \mathcal{G}, P)$  un espace probabilité complet,  $\mathcal{B}$  une sous tribu complète de  $\mathcal{G}$ ,  $E$  un e.v.t.l.c.r.s.,  $E'$  son dual.

Soit  $\{\Gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  une famille de multiapplications définies sur  $\Omega$ , à valeurs dans  $CK(E'_0)$ , scalairement  $\mathcal{G}$ -mesurables et scalairement  $P$ -intégrables et telles que :  $\forall \omega \in \Omega$ ,  $\{\Gamma_n(\omega)\}_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite décroissante vers  $\Gamma(\omega) \neq \emptyset$ .

Nous supposons qu'il existe une suite  $\{e'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $E'$  qui sépare les points de  $E$ .

Pour tout  $n$ , soit  $\Delta_n$  une version de l'espérance conditionnelle faible de  $\Gamma_n$ . Alors la suite de multiapplications  $\{\Delta_n\}$  est  $P$ -presque sûrement décroissante,  $\omega \rightarrow \Delta(\omega) = \bigcap_n \Delta_n(\omega)$  est une multiapplication définie sur  $\Omega$ , à valeurs dans  $CK(E'_0)$ , scalairement  $\mathcal{B}$ -mesurable et scalairement  $P$ -intégrable. De plus,  $\Delta \in E'_P(\Gamma)$ .

Si en outre, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\Gamma_n$  et  $P$ -intégrable, alors  $\Gamma$  est  $P$ -intégrable, ainsi que  $\Delta$ .

Démonstration : Puisque  $\{\Gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante :

$\forall x' \in E'$ ,  $\{\varphi(x', \Gamma_n(\cdot))\}_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite décroissante de fonctions  $\mathcal{G}$ -mesurables. Il en est donc de même de la suite  $\{\varphi(x', \Delta_n(\cdot))\}_{n \in \mathbb{N}}$  et de la suite  $\{\Delta_n(\cdot)\}_{n \in \mathbb{N}}$  d'après la proposition précédente.

Par ailleurs, nous savons que  $\omega \rightarrow \Gamma(\omega) = \bigcap_n \Gamma_n(\omega)$  est une multiapplication scalairement  $\mathcal{G}$ -mesurable et que  $\forall x' \in E'$ ,  $\varphi(x', \Gamma(\cdot)) = \inf_n \varphi(x', \Gamma_n(\cdot))$ . Il en est de même pour  $\Delta$  :  $\forall x' \in E'$ ,  $\varphi(x', \Delta(\cdot)) = \inf_n \varphi(x', \Delta_n(\cdot))$  et  $\Delta$  est scalairement  $\mathcal{B}$ -mesurable. Il est de plus facile de voir que  $\Gamma$  et  $\Delta$  sont scalairement  $P$ -intégrables.

L'espérance conditionnelle d'une section de  $\Gamma$  (qui est une section de tous les  $\Gamma_n$ ) est une section de  $\Delta$ ,  $\Delta(\omega)$  est donc non vide  $\forall \omega \in \Omega$ .

De plus, nous avons bien  $\Delta \in \mathbb{E}_P^{\mathbb{B}}(\Gamma)$  puisque  $\forall x' \in E'$   
 $\varphi(x', \Delta) \in \mathbb{E}_P^{\mathbb{B}}[\varphi(x', \Gamma(\cdot))]$ .

Enfin, si pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\Gamma_n$  est P-intégrable, nous avons  
 $\forall A \in \mathcal{G}$ ,  $H_{\Gamma_n}(A) = K_{\Gamma_n}(A)$ , d'une part et  $H_{\Gamma}(A) = K_{\Gamma}(A) \cap E$ ,  
 $K_{\Gamma}(A) = \bigcap_n K_{\Gamma_n}(A)$  d'autre part. Il en résulte donc  $H_{\Gamma}(A) = K_{\Gamma}(A)$ .  
 $\Gamma$  et  $\Delta$  sont donc P-intégrables.

### III.19 - Proposition

Soit  $(\Omega, \mathcal{G}, P)$  un espace probabilité complet,  $\mathbb{B}$  une sous tribu complète de  $\mathcal{G}$ ,  $E$  un e.v.t.l.c.r.s.,  $E'$  son dual.

Soit  $\{\Gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  une famille de multiapplications définies sur  $\Omega$ , à valeurs dans  $CK(E'_0)$ , scalairement  $\mathcal{G}$ -mesurables et scalairement P-intégrables et telles que

$\forall \omega \in \Omega$ ,  $\{\Gamma_n(\omega)\}_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite croissante vers  $\Gamma(\omega) \in CK(E'_0)$   
 où  $\Gamma$  est une multiapplication scalairement P-intégrable.

Nous supposons qu'il existe une suite  $\{e'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $E'$  qui sépare les points de  $E$ .

Soit pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , une version  $\Delta_n$  de l'espérance conditionnelle faible de  $\Gamma_n$ . Alors la suite de multiapplications  $\{\Delta_n(\cdot)\}_{n \in \mathbb{N}}$  est P-presque sûrement croissante,  $\omega \rightarrow \Delta(\omega) = \bigcup_n \Delta(\omega)$  est une multiapplication définie sur  $\Omega$ , à valeurs dans  $CK(E'_0)$ , scalairement  $\mathbb{B}$ -mesurable et scalairement P-intégrable. De plus  $\Delta \in \mathbb{E}_P^{\mathbb{B}}[\Gamma]$ .

Si en outre  $\Gamma$  est P-intégrable, alors  $\Delta$  est P-intégrable.

La démonstration est analogue à la précédente.

III.20 - Proposition

Soit  $(\Omega, \mathcal{G}, P)$  un espace probabilisé complet,  $\mathcal{B}$  une sous tribu complète de  $\mathcal{G}$ ,  $E$  un e.v.t.l.c.r.s.,  $E'$  son dual.

Soient  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  deux multiapplications définies sur  $\Omega$ , à valeurs dans  $CK(E_0)$ , scalairement  $\mathcal{G}$ -mesurables et scalairement  $P$ -intégrables ; soit  $c_1, c_2$  deux nombres réels. Soient  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  deux versions des espérances conditionnelles faibles par rapport à  $\mathcal{B}$  respectivement de  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  :

$$\Delta_1 \in \mathbb{E}_P^{\mathcal{B}}(\Gamma_1), \quad \Delta_2 \in \mathbb{E}_P^{\mathcal{B}}(\Gamma_2).$$

Posons  $\Gamma = c_1\Gamma_1 + c_2\Gamma_2$  et  $\Delta = c_1\Delta_1 + c_2\Delta_2$ .

Alors  $\Gamma$  et  $\Delta$  sont scalairement mesurables, scalairement  $P$ -intégrables et  $\Delta \in \mathbb{E}_P^{\mathcal{B}}(\Gamma)$ .

La démonstration est évidente, compte tenu de la relation

$$\forall x' \in E', \quad \varphi(x', \Gamma(\omega)) = c_1 \varphi(x', \Gamma_1(\omega)) + c_2 \varphi(x', \Gamma_2(\omega))$$

(Hörmander [1]).

Remarque - On ne peut rien dire ici des espérances conditionnelles car  $m_{\Gamma}^{\mathcal{G}}$ , et  $c_1 m_{\Gamma_1}^{\mathcal{G}} + c_2 m_{\Gamma_2}^{\mathcal{G}}$  peuvent être différents. On n'a seulement que l'inclusion

$$c_1 m_{\Gamma_1}^{\mathcal{G}} + c_2 m_{\Gamma_2}^{\mathcal{G}} \subset m_{\Gamma}^{\mathcal{G}}.$$

III.21 - Proposition

Soit  $(\Omega, \mathcal{G}, P)$  un espace probabilisé complet,  $\mathcal{B}$  une sous tribu complète de  $\mathcal{G}$ . Soit  $E$  un espace vectoriel euclidien de dimension finie,  $E'$  son dual. Soit  $\{\Gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $\Gamma$  et  $Q$  des multiapplications définies sur  $\Omega$ , à valeurs dans  $CK(E)$ ,  $\mathcal{G}$ -mesurables et  $P$ -intégrables telles que  $\{\Gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge  $P$ -presque sûrement vers  $\Gamma$ , et  $\forall \omega \in \Omega$ ,  $\Gamma(\omega) \subset Q(\omega)$ .

Soit pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , une version  $\Delta_n$  de l'espérance conditionnelle de  $\Gamma_n$ . Alors,  $\{\Delta_n\}$  converge  $P$ -presque sûrement vers  $\Delta$ , version de l'espérance conditionnelle de  $\Gamma$ .

Démonstration : Pour tout  $x' \in E'$ , nous avons

$$\varphi(x', \Gamma_n(\cdot)) \rightarrow \varphi(x', \Gamma(\cdot)) \quad \text{P.p.s.}$$

$$\varphi(x', \Gamma(\cdot)) \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{G}, P)$$

$$|\varphi(x', \Gamma(\cdot))| \leq \max\{|\varphi(x', Q(\cdot))|, |\varphi(-x', Q(\cdot))|\}$$

$$\varphi(x', \Delta_n(\cdot)) \in \mathbb{E}_P^{\mathcal{B}}[\varphi(x', \Gamma_n(\cdot))]$$

Il en résulte que  $\varphi(x', \Delta_n(\cdot))$  converge P-presque sûrement vers une limite  $\Psi(x', \cdot)$  qui vérifie

$$\Psi(x', \cdot) \in \mathbb{E}_P^{\mathcal{B}}(\varphi(x', \Gamma(\cdot)))$$

Il est alors facile d'en déduire, d'après la proposition II.21, l'existence de  $\Delta$  telle que  $\{\Delta_n\}$  converge P-presque sûrement vers  $\Delta$  et vérifiant  $\Delta \in \mathbb{E}_P^{\mathcal{B}}(\Gamma)$ .

III.22 - Signalons enfin, sans donner de démonstration, les deux propriétés élémentaires suivantes :

1) Si  $\Gamma$  est scalairement  $\mathcal{B}$ -mesurable,  $\Gamma \in \mathbb{E}_P^{\mathcal{B}}(\Gamma)$ .

2) Si  $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_2$ , sont deux sous-tribus P-complètes de  $\mathcal{B}$ ,  
 $\mathbb{E}^{\mathcal{B}_1} \mathbb{E}^{\mathcal{B}_2}(\Gamma) = \mathbb{E}^{\mathcal{B}_1}(\Gamma) = \mathbb{E}^{\mathcal{B}_2} \mathbb{E}^{\mathcal{B}_1}(\Gamma)$ .



IV - ESPERANCE CONDITIONNELLE DES MULTIAPPLICATIONS EXTREMALES DANS UNE DIRECTION

III.23 - Nous étudions dans ce paragraphe, comment se conservent ou se transforment par espérance conditionnelle diverses propriétés des facettes ou des sections extrémales des multiapplications.

Rappelons les formules suivantes, citées dans le cas où E est de dimension finie, qui sont encore vraies en dimension quelconque :

$$\forall x' \in E', \forall \omega \in \Omega, \Gamma'(x', \omega) = \{x \in \Gamma(\omega) \mid \langle x', x \rangle = \varphi(x', \Gamma(\omega))\}$$

et

$$\begin{aligned} \forall y' \in E', \varphi(y', \Gamma'(x', \omega)) &= \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{\varphi(x' + \lambda y', \Gamma(\omega)) - \varphi(x', \Gamma(\omega))}{\lambda} \\ &= \varphi'(x', y', \Gamma(\omega)). \end{aligned}$$

Il en résulte en particulier que si  $\Gamma(\cdot)$  est scalairement  $\mathbb{G}$ -mesurable, il en est de même de  $\Gamma'(x', \cdot)$ . De plus l'application

$$\lambda \rightarrow \frac{\varphi(x' + \lambda y', \Gamma(\omega)) - \varphi(x', \Gamma(\omega))}{\lambda}$$

étant croissante, pour tout  $\omega \in \Omega$ , l'intégralité scalaire de  $\Gamma(\cdot)$  entraîne celle de  $\Gamma'(x', \cdot)$ .

III.24 - Proposition

Soit  $(\Omega, \mathbb{G}, P)$  un espace probabilisé complet,  $\mathbb{B}$  une sous-tribu P-complète de  $\mathbb{G}$ , E un e.v.t.l.c.r.s., E' son dual.

Soit  $\Gamma$  une multiapplication définie sur  $\Omega$  à valeurs dans  $CK(E'_\sigma)$ , scalairement  $\mathbb{G}$ -mesurable et scalairement P-intégrable. Soit  $\Delta \in \mathbb{E}_P^{\mathbb{B}}(\Gamma)$ .

Alors  $\forall x' \in E' \Delta'(x') \in \mathbb{E}_P^{\mathbb{B}}(\Gamma'(x'))$ .

En outre, s'il existe  $\{e'_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset E'$  séparant les points de E, si  $\Gamma$  est P-intégrable, alors  $\Gamma'(x', \cdot)$  est P-intégrable.

Si  $\Gamma$  et  $\Delta \in \mathbb{E}_P^{\mathbb{B}}(\Gamma)$  sont P-intégrables, alors

$$\forall B \in \mathbb{B} \int_B \Delta'(x', \cdot) dP = \int_B \Gamma'(x', \cdot) dP.$$

Nous avons ainsi montré que

$$\forall y' \in E' \quad \varphi(y', \Delta'(x', \cdot)) \in \mathbb{E}_P^{\mathbb{B}}(y', \Gamma'(x', \cdot))$$

c'est-à-dire

$$\forall x' \in E' \quad \Delta'(x', \cdot) \in \mathbb{E}_P^{\mathbb{B}}[\Gamma'(x', \cdot)].$$

Si maintenant  $\Gamma$  est  $P$ -intégrable, et s'il existe  $\{e'_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset E'$ , séparant les points de  $E$ ,  $\Gamma'(x', \cdot)$  est  $P$ -intégrable. En effet,  $\forall A \in \mathcal{G}$  nous avons (en omettant d'écrire  $x'$  pour simplifier) :

$$H_{\Gamma'}(A) \subset H_{\Gamma}(A)$$

$$K_{\Gamma'}(A) \subset K_{\Gamma}(A) \subset E$$

comme par ailleurs

$$H_{\Gamma'}(A) = K_{\Gamma'}(A) \cap E$$

nous avons donc

$$H_{\Gamma'}(A) = K_{\Gamma'}(A).$$

Si  $\Gamma$  et  $\Delta$  sont  $P$ -intégrables et si  $\Delta \in \mathbb{E}_P^{\mathbb{B}}(\Gamma)$ , des égalités

$$\forall B \in \mathbb{B} : \quad H_{\Gamma'}(B) = K_{\Gamma'}(B)$$

$$H_{\Delta'}(B) = K_{\Delta'}(B)$$

$$K_{\Gamma'}(B) = K_{\Delta'}(B)$$

résulte  $H_{\Delta'}(B) = K_{\Delta'}(B)$ , c'est-à-dire

$$\forall B \in \mathbb{B}, \quad \int_B \Delta'(x', \cdot) dP = \int_B \Gamma'(x', \cdot) dP.$$

Les notations étant celles de II.2, nous avons immédiatement :

III.25 - Corollaire

Soit  $(\Omega, \mathcal{G}, P)$  un espace probabilisé complet,  $\mathcal{B}$  une sous tribu complète de  $\mathcal{G}$ ,  $E$  un e.v.t.l.c.r.s.,  $E'$  son dual.

Nous supposons qu'il existe une suite  $\{e'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $E'$  séparant les points de  $E$ . Soit  $\Gamma$  et  $\Delta$  deux multiapplications définies sur  $\Omega$  à valeurs dans  $CK(E'_\sigma)$ , scalairement  $\mathcal{G}$ -mesurables et scalairement  $P$ -intégrables, telles que  $\Delta \in \mathbb{E}_P(\Gamma)$ .

Alors  $\forall x'_1, \dots, x'_n \in E'$

$$\Delta^{(n)}(x'_1, \dots, x'_n, \cdot) \in \mathbb{E}_P^{\mathcal{B}}[\Gamma^{(n)}(x'_1, \dots, x'_n, \cdot)].$$

En outre, si  $\Gamma$  et  $\Delta$  sont  $P$ -intégrables, alors  $\Delta^{(n)}(x'_1, \dots, x'_n, \cdot)$  et  $\Gamma^{(n)}(x'_1, \dots, x'_n, \cdot)$  sont  $P$ -intégrables, et

$$\forall B \in \mathcal{B}, \int_B \Delta^{(n)}(x'_1, \dots, x'_n, \cdot) dP = \int_B \Gamma^{(n)}(x'_1, \dots, x'_n, \cdot) dP.$$

La démonstration est immédiate.

III.26 - Proposition

Soit  $(\Omega, \mathcal{G}, P)$  un espace probabilisé complet,  $\mathcal{B}$  une sous tribu  $P$ -complète de  $\mathcal{G}$ ,  $E$  un e.v.t.l.c.r.s.,  $E'$  son dual. Nous supposons qu'il existe dans  $E'$  une suite  $\{e'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  qui sépare les points de  $E$ . Soit  $\Gamma$  et  $\Delta$  deux multiapplications définies sur  $\Omega$ , à valeurs dans  $CK(E'_\sigma)$  respectivement scalairement  $\mathcal{G}$ -mesurables et scalairement  $\mathcal{B}$ -mesurables, toutes deux scalairement  $P$ -intégrables telles que  $\Delta \in \mathbb{E}_P^{\mathcal{B}}(\Gamma)$ . Soit  $x' \in E'$  et  $f(x', \cdot) : \Omega \rightarrow E$ , scalairement  $\mathcal{G}$ -mesurable et scalairement  $P$ -intégrable telle que  $\forall \omega \in \Omega, f(x', \omega) \in \ddot{\Gamma}(\omega)$  et  $f(x', \omega) \in \Gamma'(x', \omega)$ , où  $\Gamma(\omega)$  désigne le profil de  $\Gamma(\omega)$  [Valadier [1]].

Alors il existe  $g(x', \cdot) : \Omega \rightarrow E$  scalairement  $\mathcal{B}$ -mesurable et scalairement  $P$ -intégrable telle que  $\forall \omega \in \Omega, g(x', \omega) \in \Delta'(x', \omega)$  et  $g(x', \omega) \in \Delta(\omega)$  et telle que  $g(x', \cdot) \in \mathbb{E}_P^{\mathcal{B}}[f(x', \cdot)]$ .

Démonstration : Soit  $x' \in E'$ . Soit  $f(x', \cdot)$  une section de  $\Gamma$  vérifiant

$$\forall \omega \in \Omega, \langle x', f(x', \omega) \rangle = \varphi(x', \Gamma(\omega))$$

et

$$f(x', \omega) \in \ddot{\Gamma}(\omega)$$

où  $\ddot{\Gamma}(\omega)$  désigne le profil de  $\Gamma(\omega)$ , c'est-à-dire l'ensemble des points extrémaux de  $\Gamma(\omega)$ . L'existence de la section  $f(x', \omega)$  a été démontrée par M. Valadier [1]. Cette section  $f(x', \omega)$  est définie par

$$\{f(x', \omega)\} = \bigcap_n \Gamma^{(n)}(x', e'_1, e'_2, \dots, e'_{n-1}, \omega).$$

Posons alors

$$\{g(x', \omega)\} = \bigcap_n \Delta^{(n)}(x', e'_1, e'_2, \dots, e'_{n-1}, \omega).$$

Ceci est possible car  $\bigcap_n \Delta^{(n)}(x', e'_1, e'_2, \dots, e'_{n-1}, \cdot)$  est réduit à un point. Comme par ailleurs

$$\Delta^{(n)}(x', e'_1, e'_2, \dots, e'_{n-1}, \cdot) \in \mathbb{E}_P^{\mathbb{B}}[\Gamma^{(n)}(x', e'_1, \dots, e'_{n-1}, \cdot)]$$

il en résulte

$$g(x', \cdot) \in \mathbb{E}_P^{\mathbb{B}}[f(x', \cdot)].$$

Enfin  $g(x', \omega)$  est un point extrémal de  $\Delta(\omega)$ , car pour presque tout  $\omega$  :

$$\langle x', g(x', \omega) \rangle = \varphi(x', \Delta(\omega))$$

$$\langle e'_1, g(x', \omega) \rangle = \varphi(e'_1, \Delta'(x', \omega))$$

$$= \varphi'(x', e'_1, \Delta(\omega))$$

et

$$\forall n \geq 1, \langle e'_n, g(x', \omega) \rangle = \varphi(e'_n, \Delta^{(n-1)}(x', e'_1, \dots, e'_{n-1}, \omega))$$

$$= \varphi^{(n)}(x', e'_1, \dots, e'_n, \Delta(\omega)).$$

Supposons qu'il existe  $x_1$  et  $x_2 \in \Delta(\omega)$  avec  $x_1 \neq x_2$  et  $g(x', \omega) = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ . Alors il existerait  $e'_{n_0}$  tel que

$$\langle e'_{n_0}, x_1 \rangle \neq \langle e'_{n_0}, x_2 \rangle$$

puisque  $\{e'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  sépare les points de  $E$ . Mais ceci entraînerait que  $\langle e'_{n_0}, g(x', \omega) \rangle$  n'est pas le maximum de  $\{\langle e'_{n_0}, x \rangle \mid x \in \Delta^{(n-1)}(x', e'_1, \dots, e'_{n_0-1}, \omega)\}$  ce qui est absurde.

Nous avons donc  $g(x', \omega) \in \Delta(\omega)$  presque sûrement.

L'argument de cette démonstration a été utilisé par M. Valadier dans la démonstration du lemme 4 de [2].

Remarque - Nous avons ainsi montré que l'espérance mathématique d'un maximum lexicographique de  $\Gamma$  est un maximum lexicographique de  $\Delta$ . (\*)

III.27 - Les propositions précédentes permettent de montrer une propriété de conservation par espérance conditionnelle des familles de sections telles que, pour tout  $\omega \in \Omega$ ,  $\{f_i(\omega)\}_{i \in I}$  soit dense dans  $\Gamma(\omega)$ .

(\*) Soit  $G$  et  $G'$  deux espaces vectoriels en dualité. On appelle ordre lexicographique sur  $G$ , tout ordre  $R$  défini de la façon suivante :  $I$  étant un ensemble bien ordonné  $(e'_i)_{i \in I}$  une famille d'éléments de  $G'$  séparant les points de  $G$ ,  $R$  est l'image réciproque de l'ordre lexicographique sur  $R^I$  par  $x \mapsto \{\langle e'_i, x \rangle\}_{i \in I}$ .

Proposition

Soit  $(\Omega, \mathbb{G}, P)$  un espace probabilisé complet,  $\mathbb{B}$  une sous tribu  $P$ -complète de  $\mathbb{G}$ ,  $E$  un e.v.t.l.c.r.s.,  $E'$  son dual. Nous supposons qu'il existe une suite  $\{e'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $E'$  qui sépare les points de  $E$ . Soit  $\Gamma$  une multiapplication définie sur  $\Omega$  à valeurs dans  $CK(E_\sigma)$  scalairement  $\mathbb{G}$ -mesurable et scalairement  $P$ -intégrable, et soit  $\Delta \in \mathbb{E}_P^\mathbb{B}(\Gamma)$ . Soit  $\{f_i\}_{i \in I}$  une famille dénombrable d'éléments de  $\mathbb{M}_\Gamma^\mathbb{G}$  telle que pour tout  $\omega \in \Omega$ ,  $\{f_i(\omega)\}_{i \in I}$  soit dense dans  $\Gamma(\omega)$  pour  $\sigma(E, E')$ . Alors il existe une famille dénombrable  $\{g_i\}_{i \in I}$  d'éléments de  $\mathbb{M}_\Delta^\mathbb{B}$  telle que  $\forall \omega \in \Omega$ ,  $\{g_i(\omega)\}_{i \in I}$  soit dense dans  $\Delta(\omega)$  pour  $\sigma(E, E')$  et que pour tout  $i \in I$ ,  $g_i(\cdot) \in \mathbb{E}_P^\mathbb{B}[f_i(\cdot)]$ .

Démonstration : L'existence de la famille  $\{f_i\}_{i \in I}$  possédant les propriétés citées dans l'énoncé, est démontrée dans Valadier [1]. Rappelons simplement la construction de  $\{f_i\}$ . Soit  $D$  l'ensemble dénombrable des combinaisons linéaires à coefficients rationnels des  $\{e'_n\}$ . La fermeture de  $D$  pour  $\tau(E', E)$  est égale à  $E'$ . A tout  $x' \in D$ , on associe  $f(x', \cdot) \in \mathbb{M}_\Gamma^\mathbb{G}$  (voir proposition III.26), vérifiant

$$\langle x', f(x', \cdot) \rangle = \varphi(x', \Gamma(\cdot))$$

$$f(x', \omega) \in \Gamma(\omega) \quad \forall \omega \in \Omega$$

Soit  $\{f_i\}_{i \in I}$  la famille dénombrable des barycentres à coefficients rationnels des  $\{f(x', \cdot)\}_{x' \in D}$ . Alors  $\{f_i(\omega)\}_{i \in I}$  est dense dans  $\Gamma(\omega)$  pour la topologie  $\sigma(E, E')$ .

Soit alors pour tout  $i \in I$ ,  $g_i \in \mathbb{E}_P^\mathbb{B}(f_i)$ .  $f_i$  étant barycentre des  $\{f(x', \cdot)\}_{x' \in D}$ ,  $g_i$  est un barycentre à coefficients rationnels des  $\{g(x', \cdot)\}_{x' \in D}$ . Or, nous avons vu que les  $g(x', \cdot)$  vérifient

$$\langle x', g(x', \cdot) \rangle = \varphi(x', \Delta(\cdot))$$

$$g(x', \omega) \in \Delta(\omega) \quad \forall \omega \in \Omega$$

La famille des  $\{g_i\}_{i \in I}$  est donc définie à partir de  $\Delta$  exactement comme les  $\{f_i\}_{i \in I}$  sont définis à partir de  $\Gamma$ . Nous aurons donc  $\forall \omega \in \Omega$  :  $\{g_i(\omega)\}_{i \in I}$  est dense dans  $\Delta(\omega)$  pour la topologie  $\sigma(E, E')$ .

V - CONTINUITÉ DE L'ESPÉRANCE CONDITIONNELLE

III.28 - Nous avons vu que si  $\Delta \in \mathbb{E}_P^{\mathcal{B}}(\Gamma)$ , alors l'espérance conditionnelle d'une section de  $\Gamma$  sous certaines hypothèses, possède une version qui est une section de  $\Delta$ .

Désignons par  $M_{\Gamma}^{\mathcal{G}}$ , l'ensemble des classes d'équivalence -pour l'égalité scalairement P-presque partout- des sections de  $\Gamma$  scalairement  $\mathcal{G}$ -mesurables. Il est facile de voir que s'il existe une suite  $\{e'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $E'$  qui sépare les points de  $E$ , l'égalité scalairement presque partout étant équivalente à l'égalité presque partout l'espérance conditionnelle est alors une application de  $M_{\Gamma}^{\mathcal{G}}$  dans  $M_{\Delta}^{\mathcal{B}}$ .

Par ailleurs, si les  $\varphi(x', \Gamma(\cdot))$  sont P-intégrables pour tout  $x' \in E'$ , si  $\forall A \in \mathcal{G}, \int_A f dP \subset E$ , s'il existe  $\{e'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  dans  $E'$  séparant les points de  $E$ , alors  $M_{\Gamma}^{\mathcal{G}}$  est compact pour la topologie de la convergence simple sur l'espace  $\mathcal{E}_E$ , des fonctions  $\Omega \rightarrow E'$ , étagées  $\mathcal{G}$ -mesurables prenant un nombre fini de valeurs (voir Castaing-Valadier [1]).

Nous allons montrer que l'espérance conditionnelle  $\mathbb{E}_P^{\mathcal{B}}$  est une application continue de  $M_{\Gamma}^{\mathcal{G}}$  dans  $M_{\Delta}^{\mathcal{B}}$  quand on munit ces deux ensembles de la topologie considérée.

III.29 - Proposition

*Soit  $(\Omega, \mathcal{G}, P)$  un espace probabilisé complet,  $\mathcal{B}$  une sous-tribu P-complète de  $\mathcal{G}$ ,  $E$  un e.v.t.l.c.r.s.,  $E'$  son dual. On suppose qu'il existe une suite  $\{e'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $E'$  qui sépare les points de  $E$ . Soit  $\Gamma$  une multiapplication définie sur  $\Omega$ , à valeurs dans  $CK(E_{\mathcal{G}})$  scalairement  $\mathcal{G}$ -mesurable et scalairement P-intégrable. On suppose que  $\forall A \in \mathcal{G}, \int_A f dP \in E$  pour tout  $f \in M_{\Gamma}^{\mathcal{G}}$ . Soit  $\Delta \in \mathbb{E}_P^{\mathcal{B}}(\Gamma)$ . Alors l'espérance conditionnelle est une application continue de  $M_{\Gamma}^{\mathcal{G}}$  dans  $M_{\Delta}^{\mathcal{B}}$  quand on munit ces deux ensembles de la topologie de la convergence simple sur  $\mathcal{E}_{E'}$ .*

Démonstration : Soit  $g_0 \in M_{\Delta}^{\mathbb{B}}$ . Un voisinage de  $g_0$  pour la topologie considérée est donné par

$$V(g_0, \varepsilon, x'_1, \dots, x'_n, B_1, \dots, B_n) = \{g \mid g \in M_{\Delta}^{\mathbb{B}}, |\langle x'_p, \int_{B_p} (g_0 - g) dP \rangle| \leq \varepsilon\}$$

où  $\varepsilon > 0$ ,  $x'_p \in E'$ ,  $B_p \in \mathbb{B}$ ,  $p \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Il est alors évident que si  $g_0 = E_P^{\mathbb{B}}(f_0)$ , tout  $f \in V(f_0, \varepsilon, x'_1, \dots, x'_n, B_1, \dots, B_n)$  a une espérance conditionnelle  $g = E_P^{\mathbb{B}}(f)$  qui appartient à  $V(g_0, \varepsilon, x'_1, \dots, x'_n, B_1, \dots, B_n)$ .

III.30 - La proposition suivante est analogue à la précédente mais utilise d'autres topologies sur  $M_{\Gamma}^{\mathbb{G}}$  et  $M_{\Delta}^{\mathbb{B}}$ , à savoir :

Si  $\Gamma$  est scalairement  $\mathbb{G}$ -mesurable et scalairement  $P$ -intégrable, si  $\forall \omega \in \Omega$ ,  $\Gamma(\omega) \subset \lambda(\omega)Q$  où  $\lambda \in \mathcal{L}_+^1(\Omega, \mathbb{G}, P)$  et  $Q$  est convexe, équilibré faiblement complet, s'il existe  $\{e'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  dans  $E'$ , séparant les points de  $Q$ , alors  $M_{\Gamma}^{\mathbb{G}}$  est compact pour la topologie de la convergence simple sur  $L_{\mathbb{R}}^{\infty} \otimes E'$ . (Castaing-Valadier [1]).

### Proposition

Soit  $(\Omega, \mathbb{G}, P)$  un espace probabilisé complet,  $\mathbb{B}$  une sous tribu  $P$ -complète de  $\mathbb{G}$ ,  $E$  un e.v.t.l.c.r.s.,  $E'$  son dual.

On suppose qu'il existe une suite  $\{e'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $E'$  qui sépare les points de  $E$ . Soit  $\Gamma$  une multiapplication définie sur  $\Omega$  à valeurs dans  $CK(E_0)$  et vérifiant  $\forall \omega \in \Omega$ ,  $\Gamma(\omega) \subset \lambda(\omega)Q$  où  $\lambda \in \mathcal{L}_+^1(\Omega, \mathbb{G}, P)$  et  $Q$  est convexe équilibré faiblement complet.

Soit  $\Delta \in E_P^{\mathbb{B}}(\Gamma)$ . Nous savons que  $\Delta(\omega) \in \mu(\omega) \cdot Q$  où  $\mu \in E_P^{\mathbb{B}}(\lambda)$ .

Alors l'application  $f \rightarrow E_P^{\mathbb{B}}(f)$  de  $M_{\Gamma}^{\mathbb{G}}$  dans  $M_{\Delta}^{\mathbb{B}}$  est continue quand on munit ces ensembles de la topologie de la convergence simple sur  $L_{\mathbb{R}}^{\infty} \otimes E'$ .



Démonstration : Soit  $\varepsilon > 0$  un voisinage de zéro dans  $M_{\Gamma}^G$  pour la topologie envisagée déterminé par la donnée de  $x'_1, \dots, x'_n \in E'$  et de  $h_1, \dots, h_n \in L_R^{\infty}(\Omega, G, P)$  :

$$V_0(\varepsilon, x'_1, \dots, x'_n ; h_1, \dots, h_n) = \{f \mid f \in M_{\Gamma}^G \mid \left| \int_{\Omega} \langle x'_i, f \rangle h_i \, dP \right| \leq \varepsilon\}$$

et de même

$$V_0(\varepsilon, x'_1, \dots, x'_n ; k_1, \dots, k_n) = \{g \mid g \in M_{\Delta}^{\mathcal{B}} \mid \left| \int_{\Omega} \langle x'_i, g \rangle k_i \, dP \right| \leq \varepsilon\}$$

est un voisinage de zéro dans  $M_P^{\mathcal{B}}$  ( $k_i \in L_R^{\infty}(\Omega, \mathcal{B}, P)$ ).

Comme  $\forall k \in L_R^{\infty}(\Omega, \mathcal{B}, P)$ ,  $\forall x' \in E'$ ,  $g \in \mathbb{E}_P^{\mathcal{B}}(f)$  entraîne

$$\int_{\Omega} \langle x', g \rangle k \, dP = \int_{\Omega} \langle x', f \rangle k \, dP$$

par suite  $f \in V_0(\varepsilon, x'_1, \dots, x'_n ; k_1, \dots, k_n) = g \in V_0(\varepsilon, x'_1, \dots, x'_n, k_1, \dots, k_n)$

(avec  $k_i \in L_R^{\infty}(\Omega, \mathcal{B}, P)$ ). Ce qui prouve la continuité de l'application  $f \rightarrow \mathbb{E}_P^{\mathcal{B}}(f)$ .

CHAPITRE - IV

MARTINGALES DE MULTIAPPLICATIONS A VALEURS CONVEXES FAIBLEMENT COMPACTES  
NON VIDES DANS UN ESPACE VECTORIEL TOPOLOGIQUE LOCALEMENT CONVEXE

Le but de ce chapitre est de prolonger les résultats obtenus au chapitre III sur les espérances conditionnelles au cas des martingales. Nous montrerons quelques théorèmes de convergence et d'existence d'une limite, puis quelques applications aux sections et aux multiapplications extrémales dans une direction.

Les méthodes de démonstration des théorèmes de convergence ont été inspirées par les résultats de M. METIVIER [1] et [2].

Nous utiliserons le théorème de HELMS [1] sur les martingales réelles que nous rappelons.

IV-1 - Proposition (HELMS)

Soit  $(\Omega, \mathcal{G}, P)$  un espace probabilisé,  $I$  un ensemble d'indices filtrant à droite,  $\{\mathcal{G}_i\}_{i \in I}$  une famille de sous tribus de  $\mathcal{G}$  indexée par  $I$ , telle que

$$i < j \Rightarrow \mathcal{G}_i \subset \mathcal{G}_j.$$

Soit  $\mathcal{G}_\infty$  la tribu engendrée par  $\bigcup_I \mathcal{G}_i$ .

Soit  $\{X_i\}_{i \in I}$  une martingale sur  $(\Omega, \{\mathcal{G}_i\}_{i \in I}, P)$ , c'est-à-dire une famille de fonctions à valeurs réelles définies sur  $\Omega$  telle que

-  $\forall i \in I, X_i$  est  $G_i$ -mesurable et  $P$ -intégrable

-  $\forall i \in I, \forall j, i \leq j \quad X_i \in E_P^i(X_j)$ .

Alors les quatre propositions suivantes sont équivalentes

1)  $\{X_i\}_{i \in I}$  est terminalement équi-intégrable (\*)

2)  $\{X_i\}_{i \in I}$  est faiblement convergent dans  $L^1(\Omega, G_\infty, P)$

3) Si  $\hat{I}$  désigne l'ensemble préordonné obtenu par adjonction d'un plus grand ensemble à  $I$ , noté  $\infty$ , il existe  $X_\infty \in L^1(\Omega, G_\infty, P)$  tel que  $\{X_i\}_{i \in I}$  soit une martingale sur  $(\Omega, \{G_i\}_{i \in \hat{I}}, P)$ . (Nous dirons que  $\{X_i\}_{i \in I}$  est une martingale prolongeable).

4)  $\{X_i\}_{i \in I}$  converge fortement dans  $L^1(\Omega, G_\infty, P)$ .

#### IV.2 - Définitions

Soit  $(\Omega, G, P)$  un espace probabilisé complet,  $\{G_i\}_{i \in I}$  une famille de sous-tribus  $P$ -complètes de  $G$ , indexée par un ensemble  $I$  d'indices filtrant à droite tel que

$$i \leq j \Rightarrow G_i \subset G_j$$

---

(\*) Un sous ensemble  $J$  de  $I$  est dit *terminal* dans  $I$  si

$$\exists i_0 \in I, (\forall i \in I, i_0 \leq i) \Rightarrow i \in J$$

$\{X_i\}_{i \in I}$  est terminalement équi-intégrable s'il existe un sous ensemble  $J$  terminal dans  $I$ , tel que  $\{X_i\}_{i \in J}$  soit équi-intégrable.

On dit aussi que  $\{X_i\}_{i \in I}$  est équi-intégrable à l'infini.

Dans tout ce chapitre, nous désignerons par famille croissante de sous-tribus, une telle famille.

Nous appellerons  $G_\infty$  la tribu P-complète engendrée par  $\bigcup_{i \in I} G_i$  et nous désignerons par  $\hat{I}$ , l'ensemble filtrant obtenu en ajoutant un plus grand élément à I.

Soit E un e.v.t.l.c.r.s., E', son dual.

Soit  $\{\Gamma_i\}_{i \in I}$  une famille de multiapplications à valeurs dans  $CK(E_\sigma)$ .

#### IV.3 - Définition

Nous dirons que la famille  $\{\Gamma_i\}_{i \in I}$  de multiapplications définies sur  $\Omega$ , à valeurs dans  $CK(E_\sigma)$  est *adaptée* à la famille croissante de sous tribus P-complètes  $\{G_i\}_{i \in I}$  si,  $\forall i \in I$ ,  $\Gamma_i$  est scalairement  $G_i$ -mesurable.

#### IV.4 - Définition

Nous dirons que la famille de multiapplications  $\{\Gamma_i\}_{i \in I}$  définies sur  $\Omega$ , à valeurs dans  $CK(E_\sigma)$ , adaptée à  $\{G_i\}_{i \in I}$  scalairement P-intégrables est une *martingale faible* définie sur  $(\Omega, \{G_i\}_{i \in I}, P)$  si

$$\forall i \in I, \forall j \in I, \quad i < j \Rightarrow \Gamma_i \in \mathbb{E}_P^i(\Gamma_j).$$

#### IV.5 - Définition

Nous dirons que la famille de multiapplications  $\{\Gamma_i\}_{i \in I}$  définies sur  $\Omega$ , à valeurs dans  $CK(E_\sigma)$ , adaptée à  $\{G_i\}_{i \in I}$  P-intégrables est une *martingale* définie sur  $(\Omega, \{G_i\}_{i \in I}, P)$  si

$$\forall i \in I, \forall j \in I, \quad i \leq j \Rightarrow \forall A_i \in G_i, \int_{A_i} \Gamma_i dP = \int_{A_i} \Gamma_j dP$$

#### IV.6 - Définition

La famille de multiapplications  $\{\Gamma_i\}_{i \in I}$  définies sur  $\Omega$ , à valeurs dans  $CK(E_\sigma)$ , adaptée à  $\{Q_i\}_{i \in I}$  scalairement P-intégrables est dite *scalairement équi-intégrable* si

$$\forall x' \in E', \quad \forall \varepsilon > 0, \exists c > 0, \forall i \in I$$

$$\int_{\{|\varphi(x', \Gamma_i)| > c\}} |\varphi(x', \Gamma_i)| dP \leq \varepsilon$$

#### IV.7 - Définition

La famille de multiapplications  $\{\Gamma_i\}_{i \in I}$ , définies sur  $\Omega$ , à valeurs dans  $CK(E_\sigma)$ , adaptée à  $\{Q_i\}_{i \in I}$ , scalairement P-intégrables est dite *uniformément scalairement intégrable* si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists c > 0, \forall i \in I, \forall x' \in E',$$

$$\int_{\{|\varphi(x', \Gamma_i)| > c\}} |\varphi(x', \Gamma_i)| dP \leq \varepsilon$$

#### IV.8 - Définition

La famille de multiapplications  $\{\Gamma_i\}_{i \in I}$ , définies sur  $\Omega$ , à valeurs dans  $CK(E_\sigma)$ , adaptée à  $\{Q_i\}_{i \in I}$  scalairement P-intégrables est dite *scalairement terminalement équi-intégrable* si

$$\forall x' \in E', \quad \forall \varepsilon > 0, \exists I_\varepsilon \subset I, I_\varepsilon \text{ terminal dans } I, \exists c > 0, \forall i \in I,$$

$$\int_{\{|\varphi(x', \Gamma_i)| > c\}} |\varphi(x', \Gamma_i)| dP \leq \varepsilon$$

IV.9 - Définition

La famille de multiapplications  $\{\Gamma_i\}_{i \in I}$  définies sur  $\Omega$ , à valeurs dans  $CK(E_\sigma)$ , adaptée à  $\{G_i\}_{i \in I}$  scalairement P-intégrables est dite *uniformément scalairement terminalement équi-intégrable* si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists I_\varepsilon \subset I, I_\varepsilon \text{ terminal dans } I, \exists c > 0, \forall i \in I_\varepsilon, \forall x' \in E',$$

$$\int_{\{|\varphi(x', \Gamma_i)| > c\}} |\varphi(x', \Gamma_i)| dP \leq \varepsilon$$

IV.10 - Rappelons encore qu'une famille  $\{f_i\}_{i \in I}$  d'applications de  $\Omega$  dans E, est une *martingale vectorielle faible* sur  $(\Omega, \{G_i\}_{i \in I}, P)$  si

$$\forall i \in I, f_i \text{ est scalairement } G_i\text{-mesurable} \\ \text{et scalairement P-intégrable}$$

$$\forall i \in I, \forall j \in I, i \leq j, \forall x' \in E'$$

$$\langle x', f_i(\cdot) \rangle \in \mathbb{E}_P^{G_i}[\langle x', f_j(\cdot) \rangle]$$

IV.11 - Nous utiliserons pour les martingales vectorielles le même langage que pour les multiapplications ; par exemple

-  $\{f_i\}_{i \in I}$  sera dite *adaptée* à  $\{G_i\}_{i \in I}$  si  $\forall i \in I, \forall x' \in E', \langle x', f_i(\cdot) \rangle$  est  $G_i$ -mesurable.

-  $\{f_i\}_{i \in I}$ , adaptée à  $G_i$ , scalairement P-intégrables, sera dite *scalairement terminalement équi-intégrable* si

$$\forall x' \in E', \forall \varepsilon > 0, \exists I_\varepsilon \subset I, I_\varepsilon \text{ terminal dans } I, \exists c > 0, \forall i \in I_\varepsilon,$$

$$\int_{\{|\langle x', f_i(\cdot) \rangle| > c\}} |\langle x', f_i(\cdot) \rangle| dP \leq \varepsilon$$

Enfin, nous dirons que  $\{f_i\}_{i \in I}$  est une *section* de  $\{\Gamma_i\}_{i \in I}$  si  $\forall i \in I, f_i \in \mathbb{M}_T^{G_i}$ .

## II - THEOREMES DE CONVERGENCE

Nous donnons dans ce paragraphe, diverses conditions suffisantes d'existence d'une multiapplication limite d'une martingale multiapplication. Nous commençons par un théorème en dimension finie.

### IV.12 - Proposition

Soit  $(\Omega, \mathcal{G}, P)$  un espace probabilisé complet,  $\{\mathcal{G}_i\}_{i \in I}$  une famille de sous tribus  $P$ -complètes de  $\mathcal{G}$ , indexée par un ensemble  $I$  d'indices filtrant à droite tel que

$$i \leq j \Rightarrow \mathcal{G}_i \subset \mathcal{G}_j$$

Soit  $\mathcal{G}_\infty$  la tribu  $P$ -complète engendrée par  $\bigcup_I \mathcal{G}_i$

Soit  $E$  un espace de Banach de dimension finie,  $E'$  son dual.

Soit  $\{\Gamma_i\}_{i \in I}$  une famille de multiapplications définies sur  $\Omega$ , à valeurs dans  $CK(E)$ , adaptée à  $\{\mathcal{G}_i\}_{i \in I}$ , formant une martingale sur  $(\Omega, \{\mathcal{G}_i\}, P)$  scalairement terminalement équi-intégrable.

Alors il existe une multiapplication  $\Gamma_\infty$  définie sur  $\Omega$  à valeurs dans  $CK(E)$  scalairement  $\mathcal{G}_\infty$ -mesurable,  $P$ -intégrable telle que

$$\forall i \in I, \forall A_i \in \mathcal{G}_i,$$

$$\int_{A_i} \Gamma_i dP = \int_{A_i} \Gamma_\infty dP$$

De plus, il existe pour tout  $i \in I$ , une section  $f_i \in \mathcal{M}_{\Gamma_i}^{\mathcal{G}_i}$  telle que  $\{f_i\}_{i \in I}$  soit une martingale vectorielle scalairement terminalement équi-intégrable.

Démonstration :  $\{\Gamma_i\}_{i \in I}$  étant scalairement terminalement équi-intégrable,  $\forall x' \in E'$ ,  $\{\varphi(x', \Gamma_i(\cdot))\}_{i \in I}$  est une martingale terminalement équi-intégrable. Il résulte du théorème de Helms (voir proposition IV-1) que  $\forall x' \in E'$ ,  $\{\varphi(x', \Gamma_i(\cdot))\}_{i \in I}$  converge faiblement dans  $L^1(\Omega, \mathcal{G}_\infty, P)$  et fortement dans  $L^1(\Omega, \mathcal{G}_\infty, P)$  suivant le filtre des sections de  $I$ , et est une martingale prolongeable.

Soit  $\Psi(x') \in L^1(\Omega, \mathcal{G}_\infty, P)$  la limite forte de  $\{\varphi(x', \Gamma_i)\}_{i \in I}$ , et posons  $\xi = \sup\{|\Psi(e'_k)|, |\Psi(-e'_k)|\}$ ,  $\{e'_k\}_{k=1, \dots, n}$  désignant une base de  $E'$ . Les  $\Psi(x')^k$  vérifient les relations suivantes, qui se déduisent par passage à la limite des relations analogues vérifiées par les  $\varphi(x', \Gamma_i)$  :

$$\Psi(x'+y') \leq \Psi(x') + \Psi(y')$$

$$\Psi(\lambda x') = \lambda \Psi(x') \quad \lambda \geq 0$$

$$|\Psi(x')| \leq k \|x'\| \xi$$

où  $\|x'\|$  désigne une norme de  $x'$  dans  $E'$ .

Nous allons maintenant construire un relèvement des  $\Psi(x')$ . Soit  $\xi$  un représentant de  $\xi$  dans  $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{G}_\infty, P)$  et soit pour tout  $n \geq 0$ ,  $\Omega_n = \{\omega \mid n \leq \xi(\omega) < n+1\}$  ;  $\Omega_n \in \mathcal{G}_\infty$  et  $\Psi(x')$  est essentiellement borné sur  $\Omega_n$ . Soit  $\rho_n$  un relèvement de  $L^\infty(\Omega_n, \mathcal{G}_\infty, P)$  dans  $\mathcal{L}^\infty(\Omega_n, \mathcal{G}_\infty)$  et soit  $\Psi_n(x', \cdot)$  l'image de  $\Psi(x') \chi_n$  par  $\rho_n$ ,  $\chi_n$  désignant la fonction caractéristique de  $\Omega_n$ . La fonction  $\Psi_n(x', \cdot)$  est  $\mathcal{G}_\infty$ -mesurable et  $P$ -intégrable. De plus :

$$\forall \omega \in \Omega_n, \quad \Psi_n(x'+y', \omega) \leq \Psi_n(x', \omega) + \Psi_n(y', \omega)$$

$$\Psi_n(\lambda x', \omega) = \lambda \Psi_n(x', \omega)$$

$$|\Psi_n(x', \omega)| \leq k \|x'\| \rho[\chi_n \cdot \xi] \cdot (\omega)$$

Il existe donc un compact convexe non vide  $\Gamma_n(\omega)$  tel que  $\varphi(x', \Gamma_n(\omega)) = \Psi_n(x', \omega)$ ,  $\forall \omega \in \Omega_n$ .



Posons alors

$$\Gamma_{\infty}(\omega) = \begin{cases} \Gamma_n(\omega) & \text{si } \omega \in \Omega_n \\ \{0\} & \text{si } \omega \in \Omega \setminus \bigcup_n \Omega_n \end{cases}$$

$$\Psi(x', \omega) = \begin{cases} \Psi_n(x', \omega) & \text{si } \omega \in \Omega_n \\ 0 & \text{si } \omega \in \Omega \setminus \bigcup_n \Omega_n \end{cases}$$

$\Psi(x', \cdot)$  est  $\mathcal{G}_{\infty}$ -mesurable. Montrons que  $\Psi(x', \cdot)$  est P-intégrable. En effet,

$$\Psi(x', \cdot) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{p=0}^n \Psi_p(x', \cdot) \quad \text{P-presque sûrement}$$

et

$$\left| \sum_0^n \Psi_p(x', \cdot) \right| \leq k \|x'\| \sum_0^n \rho[\chi_p, \xi] (\cdot)$$

$$\leq k \|x'\| \sum_0^{\infty} \rho[\chi_p, \xi] (\cdot)$$

$\Psi(x', \cdot)$  est donc P-intégrable d'après le théorème de Lebesgue.

[Il est d'ailleurs facile de voir que  $\Psi(x', \cdot)$  est un représentant de  $\Psi(x')$ ].

$\Psi(x', \omega)$  étant la fonction d'appui de  $\Gamma_{\infty}(\omega)$ ,  $\Gamma_{\infty}(\cdot)$  est donc une multiapplication définie sur  $\Omega$  à valeurs dans les convexes compacts de E, scalairement  $\mathcal{G}_{\infty}$ -mesurable et scalairement P-intégrable, donc P-intégrable puisque E est de dimension finie. Nous écrirons donc  $\varphi(x', \Gamma_{\infty}(\omega))$  au lieu de  $\varphi(x', \omega)$ .

De plus

$$\forall i \in I, \forall A_i \in \mathcal{G}_i,$$

$$\int_{A_i} \varphi(x', \Gamma_i(\cdot)) dP = \int_{A_i} \varphi(x', \Gamma_{\infty}(\cdot)) dP$$

c'est-à-dire  $\Gamma_i \in E_P^i(\Gamma_{\infty})$ .

De plus, soit  $g \in \mathcal{M}_{\Gamma_\infty}^{G_\infty}$ . La fonction  $g$  est  $P$ -intégrable. Soit, pour tout  $i$ ,  $f_i \in \mathcal{M}_{\Gamma_i}^{G_i}$  tel que  $f_i \in \mathbb{E}_P^i(g)$ . Alors  $\{f_i\}_{i \in I}$  est une martingale vectorielle formée de sections de  $\{\Gamma_i\}_{i \in I}$ .

Enfin, il résulte de la proposition III-10 que  $\forall i \in I, \forall A_i \in \mathcal{G}_i$

$$\left\{ \int_{A_i} f_i dP \mid f_i \in \mathcal{M}_{\Gamma_i}^{G_i} \right\} = \left\{ \int_{A_i} f dP \mid f \in \mathcal{M}_{\Gamma_\infty}^{G_\infty} \right\}$$

#### IV.13 - Corollaire

*Les notations et hypothèses sont celles de la proposition IV.12.*

*Il existe une sous-suite  $\{\Gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  extraite de  $\{\Gamma_i\}_{i \in I}$  qui converge presque sûrement vers  $\Gamma_\infty$ .*

Démonstration : D'après le théorème de Helms, pour tout  $x' \in E'$ ,

$\{\varphi(x', \Gamma_i(\cdot))\}_{i \in I}$  converge vers  $\varphi(x', \Gamma_\infty(\cdot))$  dans  $L^1(\Omega, \mathcal{G}_\infty, P)$ .

Alors, si  $\{x'_k\}_{k \in \mathbb{N}} = F'$  désigne une famille dénombrable dense dans  $E'$ ,

alors  $\{\Gamma_i(\cdot)\}_{i \in I}$  converge scalairement en moyenne vers  $\Gamma_\infty(\cdot)$  sur  $F'$ .

En utilisant le même procédé que dans la démonstration de la proposition II.32, on montre facilement le corollaire.

Remarque - Si  $I$  est un ensemble dénombrable, alors  $\{\Gamma_i\}_{i \in I}$  converge  $P$ -presque sûrement vers  $\Gamma_\infty$ .

#### IV.14 - Proposition

*Soit  $(\Omega, \mathcal{G}, P)$  un espace probabilisé complet,  $\{\mathcal{G}_i\}_{i \in I}$  une famille de sous-tribus  $P$ -complètes de  $\mathcal{G}$ , indexée par un ensemble d'indices filtrant à droite tel que*

$$i \leq j \Rightarrow \mathcal{G}_i \subset \mathcal{G}_j$$

Soit  $G_\infty$  la tribu  $P$ -complète engendrée par  $\bigcup_I G_i$ .

Soit  $E$  un e.v.t.l.c.r.s.,  $E'$  son dual

Soit  $\{\Gamma_i\}_{i \in I}$  une famille de multiapplications définies sur  $\Omega$ , à valeurs dans  $CK(E'_\sigma)$ , adaptée à  $\{G_i\}_{i \in I}$  formant une martingale faible sur  $(\Omega, \{G_i\}_{i \in I}, P)$ . On suppose qu'il existe un convexe  $Q$ , équilibré  $\sigma(E, E')$ -compact de  $E$  et un ensemble  $J$  terminal dans  $I$  tels que

$$\forall i \in J, \forall \omega \in \Omega, \Gamma_i(\omega) \subset Q$$

Alors il existe une multiapplication  $\Gamma_\infty$  définie sur  $\Omega$ , à valeurs dans  $CK(Q)$ , scalairement  $G_\infty$ -mesurable et telle que

$$\forall i \in I, \Gamma_i \in \mathbb{E}_P^i(\Gamma_\infty)$$

De plus, s'il existe une suite  $\{e'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $E'$  séparant les points de  $E$ , pour tout  $f_\infty \in \mathcal{M}_{\Gamma_\infty}^{G_\infty}$  il existe une martingale vectorielle faible  $\{f_i\}_{i \in I}$  section de  $\{\Gamma_i\}_{i \in I}$  telle que

$$\forall i \in I, f_i \in \mathbb{E}_P^i[f_\infty]$$

Enfin, s'il existe une suite  $\{e'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $E'$  qui sépare les points de  $Q$ , alors  $\Gamma_i$  est  $P$ -intégrable pour tout  $i \in \hat{J}$ ,  $\{\Gamma_i\}_{i \in \hat{J}}$  est une martingale sur  $(\Omega, \{G_i\}_{i \in I}, P)$  c'est-à-dire :

$$\forall i \in I, \forall A_i \in G_i, \left\{ \int_{A_i} f_i dP \mid f_i \in \mathcal{M}_{\Gamma_i}^{G_i} \right\} = \left\{ \int_{A_i} f_\infty dP \mid f_\infty \in \mathcal{M}_{\Gamma_\infty}^{G_\infty} \right\}$$

Démonstration : Pour tout  $x' \in E'$ ,  $\{\varphi(x', \Gamma_i(\cdot))\}_{i \in J}$  est une partie de  $\mathcal{L}^\infty(\Omega, G_\infty, P)$  majorée par  $\max\{\varphi(x', Q) - \varphi(-x', Q)\}$  qui est intégrable. La martingale  $\{\varphi(x', \Gamma_i(\cdot))\}_{i \in I}$  est donc terminalement équi-intégrable. Il résulte donc du théorème de Helms que cette martingale converge fortement et faiblement dans  $L^1(\Omega, G_\infty, P)$  suivant le filtre des sections de  $I$ , et qu'elle est prolongeable. Soit  $\Psi(x')$  sa limite.

Il est évident que  $\Psi$  possède les propriétés suivantes, déduites des propriétés analogues vérifiées par  $\varphi(\cdot, T_1(\cdot))$  par passage à la limite :

$$\Psi(x'+y') \leq \Psi(x') + \Psi(y')$$

$$\Psi(\lambda x') = \lambda \Psi(x') \quad \forall \lambda \geq 0$$

$$|\Psi(x')| \leq \max\{|\varphi(x', Q)|, |\varphi(-x', Q)|\}$$

$\Psi(x')$  est donc essentiellement bornée.

Soit alors  $\rho$  un relèvement de  $L^\infty(\Omega, \mathcal{G}_\infty, P)$  dans  $L^\infty(\Omega, \mathcal{G}_\infty)$ .  
Posons  $\Psi(x', \omega) = \rho[\Psi(x')]$ . Nous avons alors, pour tout  $\omega \in \Omega$

$$\Psi(x'+y', \omega) \leq \Psi(x', \omega) + \Psi(y', \omega)$$

$$\Psi(\lambda x', \omega) = \lambda \Psi(x', \omega) \quad \forall \lambda \geq 0$$

$$|\Psi(x', \omega)| \leq \max\{|\varphi(x', Q)|, |\varphi(-x', Q)|\}$$

$\Psi(\cdot, \omega)$  est donc sous additive et positivement homogène. Montrons que  $\Psi(\cdot, \omega)$  est  $\tau(E', E)$ -continue. Il suffit de montrer la continuité à l'origine. Soit  $V(K, \varepsilon)$  un voisinage de zéro dans  $E'_T$  :  $K$  est un convexe, équilibré,  $\sigma(E, E')$ -compact de  $E$  et  $\varepsilon > 0$ .

$$V(K, \varepsilon) = \{x' \mid |\langle x', x \rangle| \leq \varepsilon, \quad \forall x \in K\}$$

En particulier, si  $K = Q$

$$V(Q, \varepsilon) = \{x' \mid |\langle x', x \rangle| \leq \varepsilon, \quad \forall x \in Q\}$$

Ainsi  $x' \in V(Q, \varepsilon) \Rightarrow |\varphi(x', Q)| \leq \varepsilon$  et  $|\varphi(-x', Q)| \leq \varepsilon$ , et par suite  $|\Psi(x', \omega)| \leq \varepsilon$ ,  $\forall \omega \in \Omega$ .  $\Psi(\cdot, \omega)$  est donc continue à l'origine dans  $E'_T$ .

$\Psi(.,\omega)$  est donc la fonction d'appui d'un convexe  $\Gamma_\infty(\omega)$ , non vide,  $\sigma(E,E')$ -compact et contenu dans  $Q$ . Nous écrirons donc  $\varphi(x',\Gamma_\infty(\omega))$  au lieu de  $\Psi(x',\omega)$ .

$\Gamma_\infty$  est ainsi une multiapplication qui est scalairement  $G_\infty$ -mesurable et scalairement  $P$ -intégrable. Enfin, nous avons

$$\forall x' \in E', \forall i \in I, \forall A_i \in G_i, \int_{A_i} \varphi(x', \Gamma_i(\cdot)) dP = \int_{A_i} \varphi(x', \Gamma_\infty(\cdot)) dP$$

c'est-à-dire  $\Gamma_i \in \mathbb{E}_P^i(\Gamma_\infty)$ .

Soit maintenant  $f_\infty \in \mathcal{M}_{\Gamma_\infty}^{G_\infty}$ . Nous savons que (III.13 proposition et remarque 2)) que, compte tenu de l'existence d'une suite  $\{e'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $E'$  séparant les points de  $E$

$$\forall i \in I, \exists f_i \in \mathcal{M}_{\Gamma_i}^{G_i} \text{ tel que } f_i \in \mathbb{E}_P^{G_i}(f_\infty)$$

$\{f_i\}_{i \in \hat{I}}$  est alors une martingale vectorielle faible, section de  $\{\Gamma_i\}_{i \in \hat{I}}$ , ( $\hat{I} = I \cup \{\infty\}$ ).

Remarquons inversement que si  $\{f_i\}_{i \in \hat{I}}$  est une martingale vectorielle section de  $\{\Gamma_i\}_{i \in \hat{I}}$ , il existe, d'après Métivier [1] p. 84, une application  $f_\infty : \Omega \rightarrow E$  telle que  $\{f_i\}_{i \in \hat{I}}$  soit une martingale. Alors  $f_\infty$  est une section de  $\Gamma_\infty$ , compte tenu de l'existence d'une suite  $\{e'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $E'$  séparant les points de  $E$ .

Supposons maintenant qu'il existe dans  $E'$ , une suite  $\{e'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  qui sépare les points de  $Q$ . Puisque pour tout  $i \in \hat{J}$  ( $\hat{J} = J \cup \{+\infty\}$ ),  $\Gamma_i \subset Q$ , nous avons

$$\forall i \in \hat{J}, \forall A_i \in G_i, \forall f_i \in \mathcal{M}_{\Gamma_i}^{G_i}$$

d'une part

$$\int_{A_i} f_i dP \subset P(A_i). Q \in E$$

et d'autre part

$$K_{\Gamma_i}(A_i) \subset Q \subset E.$$

Nous avons donc

$$\forall i \in \hat{J}, \forall A_i \in \mathcal{G}_i, H_{\Gamma_i}(A_i) = K_{\Gamma_i}(A_i) \cap E = K_{\Gamma_i}(A_i)$$

$\forall i \in \hat{J}, \Gamma_i$  est P-intégrable.

Si de plus  $\{\Gamma_i\}_{i \in \hat{I}}$  est une martingale faible alors

$$\forall i \in I, \forall A_i \in \mathcal{G}_i, K_{\Gamma_i}(A_i) = K_{\Gamma_\infty}(A_i)$$

et il en résulte donc

$$\forall i \in \hat{J}, \forall A_i \in \mathcal{G}_i, H_{\Gamma_i}(A_i) = H_{\Gamma_\infty}(A_i)$$

et  $\{\Gamma_i\}_{i \in \hat{J}}$  est une martingale sur  $\{\Omega, \{\mathcal{G}_i\}_{i \in \hat{J}}, P\}$ .

Remarque - On peut ici encore montrer qu'il existe une sous-suite extraite de  $\{\Gamma_i\}_{i \in I}$  qui converge scalairement presque sûrement vers  $\Gamma_\infty(\cdot)$ .  
Mais nous ne pouvons ici affirmer la convergence presque sûre.

La proposition suivante est une version un peu plus faible de la précédente et doit se rapprocher de la proposition III.15.

#### IV.15 - Proposition

Soit  $(\Omega, \mathcal{G}, P)$  un espace probabilisé complet,  $\{\mathcal{G}_i\}_{i \in I}$  une famille de sous-tribus P-complètes de  $\mathcal{G}$ , indexée par un ensemble d'indices filtrant à droite tel que

$$i \leq j \Rightarrow \mathcal{G}_i \subset \mathcal{G}_j$$

Soit  $\mathcal{G}_\infty$  la tribu P-complète engendrée par  $\bigcup_I \mathcal{G}_i$ .

Soit E un e.v.t.l.c.r.s., E'son dual.

Soit  $\{\Gamma_i\}_{i \in I}$  une famille de multiapplications définies sur  $\Omega$ , à valeurs dans  $CK(E_\sigma)$ , adaptée à  $\{Q_i\}_{i \in I}$  formant une martingale faible scalairement terminalement équi-intégrable sur  $\{\Omega, \{Q_i\}_{i \in I}, P\}$  et vérifiant

$$\forall \varepsilon > 0, \exists J_\varepsilon \text{ terminal dans } I, \exists \Omega_\varepsilon \in G_\infty$$

$\mathbb{H}_{Q_\varepsilon} \subset E$ , convexe, équilibré,  $\sigma(E, E')$ -compact tel que

$$P(\Omega \setminus \Omega_\varepsilon) \leq \varepsilon \text{ et } \forall \omega \in \Omega_\varepsilon, \forall i \in J_\varepsilon, \Gamma_i(\omega) \subset Q_\varepsilon$$

Alors il existe une multiapplication  $\Gamma_\infty$ , définie sur  $\Omega$  et à valeurs dans  $CK(E_\sigma)$ , scalairement  $G_\infty$ -mesurable et scalairement  $P$ -intégrable telle que  $\{\Gamma_i\}_{i \in \hat{I}}$  soit une martingale faible sur  $(\Omega, \{Q_i\}_{i \in \hat{I}}, P)$  ( $\hat{I} = I \cup \{\infty\}$ ).

S'il existe une suite  $\{e'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $E'$  séparant les points de  $E$  et s'il existe  $i_0 \in I$ , tel que pour tout  $\varepsilon > 0$ , les ensembles  $\Omega_\varepsilon \in G_{i_0}$  et si on pose  $J_0 = \{i \mid i \in I, i_0 \leq i\}$ , alors pour tout  $f_\infty \in M_{\Gamma_\infty}^{G_\infty}$  scalairement  $P$ -intégrable, il existe une famille  $\{f_i\}_{i \in J_0}$  de fonctions vectorielles définies sur  $\Omega$  à valeurs dans  $E$ , adaptée à  $\{Q_i\}_{i \in J_0}$  telle que  $\{f_i\}_{i \in \hat{J}_0}$  soit une martingale vectorielle faible section de

$$\{\Gamma_i\}_{i \in \hat{J}_0} \quad (\hat{J}_0 = J \cup \{\infty\})$$

Enfin, si  $\{\Gamma_i\}_{i \in \hat{J}_0}$  est une martingale sur  $(\Omega, \{Q_i\}_{i \in \hat{J}_0}, P)$ , s'il existe une suite  $\{e'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $E'$  séparant les points de  $E$ , si  $E$  est faiblement séquentiellement complet, alors

$$\forall i \in \hat{J}_0, \quad \forall A_i \in Q_i, \quad \int_{A_i} f_i \, dP \in E$$

et

$$\forall i \in J_0, \quad \forall A_i \in Q_i$$

$$\left\{ \int_{A_i} f_i \, dP \mid f_i \in M_{\Gamma_i}^{G_i} \right\} = \left\{ \int_{A_i} f_\infty \, dP \mid f_\infty \in M_{\Gamma_\infty}^{G_\infty} \right\}.$$

Démonstration : Pour tout  $x' \in E'$ ,  $\{\varphi(x', \Gamma_i(\cdot))\}_{i \in I}$  est une martingale terminalement équi-intégrable. Il existe donc, d'après le théorème de Helms,  $\Psi(x') \in L^1(\Omega, \mathcal{G}_\infty, P)$ , tel que  $\{\varphi(x', \Gamma_i(\cdot))\}_{i \in I}$  converge fortement et faiblement dans  $L^1(\Omega, \mathcal{G}_\infty, P)$  vers  $\Psi(x')$  suivant le filtre des sections de  $I$  tel que

$$\forall i \in I, \varphi(x', \Gamma_i(\cdot)) \in \mathbb{E}_P^{G_i}[\Psi(x')]$$

Soit alors  $\{\Omega_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $\mathcal{G}_\infty$  disjoints deux à deux et vérifiant (voir proposition II.15)

$$P(\Omega \setminus \bigcup_1^n \Omega_k) \leq \frac{1}{n}$$

$$P(\Omega \setminus \bigcup_1^\infty \Omega_k) = 0.$$

Il existe alors pour tout  $n$ , un ensemble  $J_n$  terminal dans  $I$  et un sous ensemble  $Q_n$  de  $E$ , convexe équilibré,  $\sigma(E, E')$ -compact tels que

$$\forall \omega \in \Omega_n, \forall i \in J_n, \Gamma_i(\omega) \subset Q_n$$

Soit  $\chi_n$  la fonction caractéristique de  $\Omega_n$  et  $N = \bigcup_1^\infty \Omega_n$ .

Nous avons donc  $\chi_n(\cdot) \varphi(x', \Gamma_i(\cdot)) \rightarrow \chi_n \Psi(x')$  fortement et faiblement dans  $L^1(\Omega, \mathcal{G}_\infty, P)$  suivant le filtre des sections de  $I$ .

(Remarquons que  $\{\chi_n(\cdot) \varphi(x', \Gamma_i(\cdot))\}_{i \in I}$  n'est plus une martingale).

Sur  $\Omega_n$ ,  $\{\chi_n \varphi(x', \Gamma_i(\cdot))\}_{i \in I}$  est majoré par  $\max\{|\varphi(x', Q_n)|, |\varphi(-x', Q_n)|\}$ . Nous savons donc qu'il existe une multiapplication  $\Gamma_\infty^n$  définie sur  $\Omega$  à valeurs dans  $CK(E_\sigma)$  scalairement  $\mathcal{G}_\infty^n$ -mesurable ( $\mathcal{G}_\infty^n = \{A \cap \Omega_n \mid A \in \mathcal{G}_\infty\}$ ) scalairement  $P$ -intégrable telle que

$$\varphi(x', \Gamma_\infty^n(\cdot)) \in \chi_n \Psi(x')$$

[Le fait que  $\{\chi_n(\cdot) \varphi(x', \Gamma_i(\cdot))\}_{i \in I}$  ne soit pas une martingale n'intervient pas pour démontrer cette existence, la limite  $\chi_n \Psi(x')$  étant déjà connue : voir démonstration de la proposition IV.14.]



Posons alors

$$\Gamma_{\infty}(\omega) = \begin{cases} \Gamma_{\infty}^n(\omega) & \text{si } \omega \in \Omega_n \\ \{0\} & \text{si } \omega \in N \end{cases}$$

Nous avons évidemment

$$\forall x' \in E', \quad \forall \omega \in \Omega \setminus N, \quad \varphi(x', \Gamma_{\infty}(\omega)) = \sum_n \varphi(x', \Gamma_{\infty}^n(\omega))$$

$\varphi(x', \Gamma_{\infty}(\cdot))$  est donc  $G_{\infty}$ -mesurable et puisque  $\varphi(x', \Gamma_{\infty}^n(\cdot)) \in \chi_n \Psi(x')$  pour tout  $n$ ,  $\varphi(x', \Gamma_{\infty}(\cdot)) \in \Psi(x')$ .  $\varphi(x', \Gamma_{\infty}(\cdot))$  est donc  $P$ -intégrable pour tout  $x' \in E'$ . La multiapplication  $\Gamma_{\infty}(\cdot)$  est donc scalairement  $G_{\infty}$ -mesurable et scalairement  $P$ -intégrable et à valeurs dans  $CK(E_{\sigma})$ . Comme, il est de plus évident que

$$\forall x' \in E', \quad \forall i \in I, \quad \varphi(x', \Gamma_i(\cdot)) \in E_P^{G_i}[\varphi(x', \Gamma_{\infty}(\cdot))]$$

$\{\Gamma_i\}_{i \in I}$  est une martingale faible.

Remarquons que si  $\{f_i\}_{i \in I}$  est une martingale vectorielle faible section de  $\{\Gamma_i\}_{i \in I}$ , cette martingale converge, d'après M. Métivier ([2], TH. 1), vers une fonction  $f_{\infty} : \Omega \rightarrow E$ , et il est facile de voir que, compte tenu de l'existence d'une suite  $\{e'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $E'$  séparant les points de  $E$ ,  $f_{\infty} \in M_{\Gamma_{\infty}}^{G_{\infty}}$ .

Inversement, supposons qu'il existe  $i_0 \in I$  tel que

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \Omega_{\varepsilon} \in G_{i_0}, \quad \text{Soit } J_0 = \{i \mid i \in I, i_0 \leq i\}.$$

Soit  $f_{\infty} \in M_{\Gamma_{\infty}}^{G_{\infty}}$ , scalairement  $P$ -intégrable. Nous savons alors [Prop.III.15] que  $\forall i \in J_0$ , il existe  $f_i(\cdot) \in M_{\Gamma_i}^{G_i}$  telle que

$$\forall x' \in E', \quad \langle x', f_i(\cdot) \rangle \in E_P^{G_i}[\langle x', f_{\infty}(\cdot) \rangle]$$

La famille de fonctions  $\{f_i(\cdot)\}_{i \in \hat{J}_0}$  est donc une martingale vectorielle faible section de  $\{\Gamma_i\}_{i \in \hat{J}_0}$ .

Supposons enfin que  $\{\Gamma_i\}_{i \in J}$  soit une martingale sur  $(\Omega, \{G_i\}_{i \in J}, P)$ , qu'il existe  $\{e'_n\}$  dans  $E'$  séparant les points de  $E$ , et supposons que  $E$  soit faiblement séquentiellement complet. Alors

$$\forall i \in \hat{I} \quad \forall A_i \in G_i, \quad \forall f_i \in m_{\Gamma_i}^{G_i}, \quad \int_{A_i} f_i dP \in E$$

Par ailleurs,

$$\forall i \in J_0 \quad \forall A_i \in G_i, \quad K_{\Gamma_i}(A_i) = K_{\Gamma_\infty}(A_i)$$

et

$$\forall i \in J_0 \quad \forall A_i \in G_i, \quad K_{\Gamma_i}(A_i) = H_{\Gamma_i}(A_i) \subset E$$

Enfin

$$\forall i \in J_0, \quad \forall A_i \in G_i, \quad H_{\Gamma_\infty}(A_i) = K_{\Gamma_\infty}(A_i) \cap E$$

Il en résulte alors :

$$\begin{aligned} H_{\Gamma_\infty}(A_i) &= K_{\Gamma_\infty}(A_i) \cap E \\ &= K_{\Gamma_i}(A_i) \cap E \\ &= K_{\Gamma_i}(A_i) \\ &= K_{\Gamma_\infty}(A_i) \\ &= H_{\Gamma_i}(A_i). \end{aligned}$$

#### IV.16 - Proposition

Soit  $(\Omega, G, P)$  un espace probabilisé complet,  $\{G_i\}_{i \in I}$  une famille de sous-tribus  $P$ -complètes de  $G$  indexées par un ensemble d'indices  $I$  filtrant à droite tel que

$$i \leq j \Rightarrow G_i \subset G_j$$

Soit  $G_\infty$  la tribu  $P$ -complète engendrée par  $\bigcup_I G_i$

Soit  $E$  un e.v.t.l.c.r.s.,  $E'$  son dual.

Soit  $\{\Gamma_i\}_{i \in I}$  une famille de multiapplications définies sur  $\Omega$ , à valeurs dans  $CK(E_0)$ , adaptée à  $\{G_i\}_{i \in I}$  formant une martingale faible sur  $(\Omega, \{G_i\}_{i \in I}, P)$  scalairement terminalement équi-intégrable et vérifiant

$$\forall i \in I, \quad \forall \omega \in \Omega, \quad \Gamma_i(\omega) \subset \lambda_i(\omega)Q$$

où  $Q$  est un convexe équilibré  $\sigma(E, E')$ -compact de  $E$  et  $\{\lambda_i(\cdot)\}_{i \in I}$  une martingale terminalement équi-intégrable d'applications définies sur  $\Omega$  et à valeurs réelles.

Alors il existe une multiapplication  $\Gamma_\infty$  définie sur  $\Omega$  scalairement  $G_\infty$ -mesurable à valeurs dans  $CK(E_0)$  telle que  $\{\Gamma_i\}_{i \in I}$  soit une martingale faible sur  $(\Omega, \{G_i\}_{i \in \hat{I}}, P)$ .

De plus, s'il existe une suite  $\{e'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $E'$  qui sépare les points de  $E$ , pour tout  $f_\infty \in \mathbb{M}_{\Gamma_\infty}^{G_\infty}$  il existe une martingale vectorielle faible  $\{f_i\}_{i \in I}$  section de  $\{\Gamma_i\}_{i \in I}$ , telle que

$$\forall i \in I, \quad f_i = \mathbb{E}_P^{G_i}[f_\infty]$$

Enfin, s'il existe une suite  $\{e'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $E'$  qui sépare les points de  $Q$ , alors  $\Gamma_i$  est  $P$ -intégrable pour tout  $i \in \hat{I}$  et  $\{\Gamma_i\}_{i \in \hat{I}}$  est une martingale sur  $(\Omega, \{G_i\}_{i \in \hat{I}}, P)$ .

Démonstration : Des hypothèses faites sur  $\{\lambda_i(\cdot)\}_{i \in I}$ , résulte qu'il existe  $\lambda_\infty \in L^1(\Omega, G_\infty, P)$  telle que  $\{\lambda_i\}$  converge faiblement et fortement vers  $\lambda_\infty$  dans  $L^1(\Omega, G_\infty, P)$  et telle que  $\forall i \in I, \lambda_i(\cdot) \in \mathbb{E}_P^{G_i}[\lambda_\infty]$ .  
Alors des inégalités

$$\forall i \in I, \quad \forall x' \in E' ; \quad P\text{-presque sûrement} :$$

$$|\lambda_i(\cdot)| \varphi(-x', Q) \leq \varphi(x', \Gamma_i(\cdot)) \leq |\lambda_i(\cdot)| \varphi(x', Q)$$

résulte que

$$|\varphi(x', \Gamma_i(\cdot))| \leq |\lambda_i(\cdot)| \max\{|\varphi(-x', Q)|, |\varphi(x', Q)|\},$$

et par conséquent que  $\{\varphi(x', \Gamma_i(\cdot))\}$  est terminalement équi-intégrable et par conséquent converge fortement et faiblement vers  $\Psi(x')$  dans  $L^1(\Omega, \mathcal{G}_\infty, P)$  et que

$$\forall i \in I, \quad \varphi(x', \Gamma_i(\cdot)) \in \mathbb{E}_P^{\mathcal{G}_i}[\varphi(x')].$$

Soit  $\lambda_\infty(\cdot)$  un représentant de  $\lambda_\infty$ , et soit  $\Omega_n = \{\omega \mid n-1 \leq |\lambda_\infty(\omega)| < n\} \in \mathcal{G}_\infty$ . La restriction à  $\Omega_n$  de  $\Gamma_i(\cdot)$  vérifie  $\forall \omega \in \Omega_n : \Gamma_i(\omega) \subset nQ$ , et par conséquent, il existe une multiapplication  $\Gamma_\infty^n$ , à valeurs dans  $CK(E_Q)$  scalairement  $\mathcal{G}_\infty$ -mesurable et scalairement  $P$ -intégrable telle que

$$\forall x' \in E', \quad \varphi(x', \Gamma_\infty^n(\cdot)) \in \chi_n \Psi(x')$$

Posons

$$\Gamma_\infty(\omega) = \begin{cases} \Gamma_\infty^n(\omega) & \text{si } \omega \in \Omega_n \\ \{0\} & \text{si } \omega \in N = \Omega \setminus \bigcup_1^\infty \Omega_n \end{cases}$$

$\Gamma_\infty$  est ainsi une multiapplication définie sur  $\Omega$  à valeurs dans  $CK(E_Q)$  scalairement  $\mathcal{G}_\infty$ -mesurable et scalairement  $P$ -intégrable, vérifiant, pour tout  $i$ ,  $\Gamma_i \in \mathbb{E}_P^{\mathcal{G}_i}[\Gamma_\infty]$ .

Soit maintenant  $f_\infty \in \mathbb{M}_{\Gamma_\infty}^{\mathcal{G}_\infty}$ . La fonction  $f_\infty$  est scalairement  $P$ -intégrable car

$$\forall x' \in E', \quad \langle x', f_\infty(\omega) \rangle \leq |\lambda_\infty(\omega)| \max\{|\varphi(x', Q)|, |\varphi(-x', Q)|\}$$

Si on suppose l'existence d'une suite  $\{e'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $E'$  séparant les points de  $E$ , il existe pour tout  $i \in I$ ,  $f_i \in \mathbb{M}_{\Gamma_i}^{\mathcal{G}_i}$  telle que

$$\forall x' \in E' \quad \langle x', f_i(\cdot) \rangle \in \mathbb{E}_P^{\mathcal{G}_i}[\langle x', f_\infty(\cdot) \rangle]$$

$\{f_i\}_{i \in I}$  est donc une martingale vectorielle faible section de  $\{\Gamma_i\}_{i \in I}$ .

Inversement si  $\{f_i\}_{i \in I}$  est une martingale vectorielle faible section de  $\{\Gamma_i\}_{i \in I}$ , nous savons (voir M. Métivier [2] Th. 1, p. 180) que l'hypothèse

$$\forall i \in I, \quad \forall \omega \in \Omega, \quad f_i(\omega) \subset \lambda_i(\omega) \cdot Q$$

entraîne l'existence de  $f_\infty : \Omega \rightarrow E$  scalairement  $\mathcal{G}_\infty$ -mesurable et scalairement P-intégrable telle que  $\{f_i\}_{i \in \hat{I}}$  soit une martingale. Alors compte tenu de l'existence d'une suite  $\{e'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de E' séparant les points de E,  $f_\infty \in m_{\Gamma_\infty}^{\mathcal{G}_\infty}$

Enfin, supposons qu'il existe  $\{e'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  dans E' séparant les points de E alors,

$$\forall i \in \hat{I}, \quad \forall f_i \in m_{\Gamma_i}^{\mathcal{G}_i}, \quad \forall A_i \in \mathcal{G}_i,$$

$$\int_{A_i} f_i dP \in \int_{A_i} \lambda_i(\cdot) dP.Q \subset E$$

et de plus  $K_{\Gamma_i}(A_i) \subset E$ ;  $\Gamma_i$  est donc P-intégrable pour tout  $i \in \hat{I}$ , et la martingale faible  $\{\Gamma_i\}_{i \in \hat{I}}$  est donc une martingale sur  $(\Omega, \{\mathcal{G}_i\}_{i \in \hat{I}}, P)$  :

$$\forall i \in I, \quad \forall A_i \in \mathcal{G}_i \quad H_{\Gamma_i}(A_i) = H_{\Gamma_\infty}(A_i).$$

#### IV.17 - Corollaire

Soit  $(\Omega, \mathcal{G}, P)$  un espace probabilisé complet,  $\{\mathcal{G}_i\}_{i \in I}$  une famille de sous-tribus P-complètes de  $\mathcal{G}$ , indexée par un ensemble d'indices filtrant à droite tel que

$$i \leq j \Rightarrow \mathcal{G}_i \subset \mathcal{G}_j.$$

Soit  $\mathcal{G}_\infty$  la tribu P-complète engendrée par  $\bigcup_I \mathcal{G}_i$ .

Soit E un e.v.t.l.c.r.s., E' son dual.

Soit  $\{\Gamma_i\}_{i \in I}$  une famille de multiapplications définies sur  $\Omega$ , à valeurs dans  $CK(E'_0)$ , adaptée à  $\{\mathcal{G}_i\}_{i \in I}$  et formant une martingale faible scalairement terminalement équi-intégrable sur  $(\Omega, \{\mathcal{G}_i\}_{i \in I}, P)$ , et vérifiant :

$$\forall i \in I, \quad \forall \omega \in \Omega, \quad \Gamma_i(\omega) \subset \lambda(\omega).Q$$

où Q est un convexe, équilibré  $\sigma(E, E')$ -compact de E, et  $\lambda$  une application définie sur  $\Omega$  à valeurs réelles,  $\mathcal{G}_\infty$ -mesurable et P-intégrable.

Alors il existe une multiapplication  $\Gamma_\infty$ , définie sur  $\Omega$  et à valeurs dans  $CK(E_0)$ , scalairement  $G_\infty$ -mesurable, scalairement  $P$ -intégrable telle que  $\{\Gamma_i\}_{i \in I}$  soit une martingale faible sur  $(\Omega, \{G_i\}_{i \in I}, P)$ .

De plus, s'il existe une suite  $\{e'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $E'$  séparant les points de  $E$ , pour tout  $f_\infty \in M_{\Gamma_\infty}^{G_\infty}$ , il existe une martingale vectorielle faible  $\{f_i\}_{i \in I}$ , section de  $\{\Gamma_i\}_{i \in I}$  telle que

$$\forall i \in I, \quad f_i \in E_P^{G_i}[f_\infty].$$

Enfin, s'il existe une suite  $\{e'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $E'$  qui sépare les points de  $Q$ , pour tout  $i \in I$ ,  $\Gamma_i$  est  $P$ -intégrable, et  $\{\Gamma_i\}_{i \in I}$  est une martingale sur  $(\Omega, \{G_i\}_{i \in I}, P)$ .

La démonstration est évidente. Il suffit de poser :  $\lambda_i = \lambda$ ,  $\forall i \in I$ .  
Une démonstration directe est donnée par VAN CUTSEM [1].

### III - MARTINGALES SECTIONS EXTREMALES DANS UNE DIRECTION

Les résultats suivant sont les prolongements au cas des martingales des résultats du paragraphe III.3 sur l'espérance conditionnelle des sections extrémales.

#### IV.18 - Proposition

Soit  $(\mathfrak{A}, \mathcal{G}, P)$  un espace probabilisé complet,  $\{\mathcal{G}_i\}_{i \in I}$  une famille de sous-tribus  $P$ -complète de  $\mathcal{G}$ , indexée par un ensemble  $I$  d'indices filtrant à droite

$$i \leq j \Rightarrow \mathcal{G}_i \subset \mathcal{G}_j$$

Soit  $E$  un e.v.t.l.c.r.s.,  $E'$  son dual.

Soit  $\{\Gamma_i\}$  une famille de multiapplications définies sur  $\Omega$ , à valeurs dans  $CK(E'_0)$ , adaptée à  $\{\mathcal{G}_i\}_{i \in I}$ .

Soit  $x' \in E'$ . Si  $\{\Gamma_i(\cdot)\}_{i \in I}$  est une martingale faible sur  $(\Omega, \{\mathcal{G}_i\}_{i \in I}, P)$ , alors  $\{\Gamma'_i(x', \cdot)\}_{i \in I}$  est une martingale faible sur  $(\Omega, \{\mathcal{G}_i\}_{i \in I}, P)$

Si  $\{\Gamma_i(\cdot)\}_{i \in I}$  est scalairement terminalement équi-intégrable, alors  $\{\Gamma'_i(x', \cdot)\}_{i \in I}$  est scalairement terminalement équi-intégrable.

S'il existe une suite  $\{e'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $E'$  séparant les points de  $E$  et si  $\{\Gamma_i(\cdot)\}_{i \in I}$  est une martingale sur  $(\Omega, \{\mathcal{G}_i\}_{i \in I}, P)$  alors  $\{\Gamma'_i(x', \cdot)\}_{i \in I}$  est une martingale sur  $(\Omega, \{\mathcal{G}_i\}_{i \in I}, P)$ .

Démonstration : Le fait que  $\{\Gamma'_i(x', \cdot)\}_{i \in I}$  soit une martingale faible résulte immédiatement de la proposition III.24.

Supposons que  $\{\Gamma_i(\cdot)\}_{i \in I}$  soit scalairement terminalement équi-intégrale. Alors (cf. IV.8)

$$\forall y' \in E', \forall \varepsilon > 0, \exists I_\varepsilon \subset I, I_\varepsilon \text{ terminal dans } I, \exists c > 0, \forall i \in I_\varepsilon.$$

$$\int \{ |\varphi(y', \Gamma_i)| > c \} |\varphi(y', \Gamma_i)| dP < \varepsilon$$

L'inégalité

$$\forall y' \in E', \forall \omega \in \Omega, |\varphi(y', \Gamma'(x', \omega))| \leq \max\{ |\varphi(y', \Gamma(\omega))|, |\varphi(-y', \Gamma(\omega))| \}$$

entraîne alors

$$\begin{aligned} & \int \{ |\varphi(y', \Gamma'(x', \cdot))| > c \} |\varphi(y', \Gamma'(x', \cdot))| dP \\ & \leq \int \{ \max\{ |\varphi(y', \Gamma(\cdot))|, |\varphi(-y', \Gamma(\cdot))| \} > c \} \max\{ |\varphi(y', \Gamma(\cdot))|, |\varphi(-y', \Gamma(\cdot))| \} dP \\ & \leq \int \{ |\varphi(y', \Gamma)| > c \} |\varphi(y', \Gamma)| dP + \int \{ |\varphi(-y', \Gamma)| > c \} |\varphi(-y', \Gamma)| dP \end{aligned}$$

(Voir Neveu [1]. ex : II.5.1). Il est alors facile de déduire que  $\{\Gamma_i'(x', \cdot)\}_{i \in I}$  est scalairement terminalement équi-intégrable.

La fin de la proposition résulte également de la proposition III.24.

#### IV.19 - Proposition

Soit  $\{\Gamma_i\}_{i \in I}$  une famille de multiapplications vérifiant les hypothèses de la proposition IV.18. Supposons de plus qu'il existe  $\{e'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  dans  $E'$  séparant les points de  $E$ .

Soit  $x'_1, \dots, x'_n$  des éléments de  $E'$ .

Si  $\{\Gamma_i(\cdot)\}_{i \in I}$  est une martingale faible sur  $(\Omega, \{G_i\}_{i \in I}, P)$ , alors  $\{\Gamma_i^{(n)}(x'_1, \dots, x'_n, \cdot)\}_{i \in I}$  est une martingale faible sur  $(\Omega, \{G_i\}_{i \in I}, P)$

Si  $\{\Gamma_i\}_{i \in I}$  est scalairement terminalement équi-intégrable alors  $\{\Gamma_i^{(n)}(x'_1, \dots, x'_n, \cdot)\}_{i \in I}$  est scalairement terminalement équi-intégrable.

Si  $\{\Gamma_i(\cdot)\}_{i \in I}$  est une martingale sur  $(\Omega, \{G_i\}_{i \in I}, P)$  alors  $\{\Gamma_i^{(n)}(x'_1, \dots, x'_n, \cdot)\}_{i \in I}$  est une martingale sur  $(\Omega, \{G_i\}_{i \in I}, P)$ .



IV.20 - Corollaire

Soit  $\{\Gamma_i\}_{i \in I}$  une famille de multiapplications vérifiant les hypothèses de la proposition IV.18. Supposons qu'il existe  $\{e'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  dans  $E'$  séparant les points de  $E$ , et que  $\{\Gamma_i\}_{i \in I}$  soit une martingale faible sur  $(\Omega, \{G_i\}_{i \in I}, P)$ .

Alors, pour tout  $x' \in E'$ , il existe une martingale vectorielle faible  $\{f_i(x', \cdot)\}_{i \in I}$  section de  $\{\Gamma_i\}_{i \in I}$  telle que

$$\forall i \in I, \quad \forall \omega \in \Omega \quad f(x', \omega) \in \Gamma'(x', \omega)$$

et

$$f(x', \omega) \in \overset{''}{\Gamma}(\omega).$$

Démonstration : Nous savons que (Prop. III.26)

$\forall i \in I, \quad \forall x' \in E', f_i(x', \omega)$  est défini, pour presque tout  $\omega \in \Omega$ , par

$$\{f_i(x', \omega)\} = \bigcap_n \Gamma_i^{(n)}(x', e'_1, \dots, e'_{n-1}, \omega)$$

et que si  $i \leq j$

$$f_i(x', \cdot) \in E_P^{G_i}[f_j(x', \cdot)].$$

Remarque : Nous avons ainsi montré que pour une martingale faible de multiapplications  $\{\Gamma_i(\cdot)\}_{i \in I}$ , l'ensemble des maximum lexicographiques des  $\Gamma_i(\omega)$  pour un ordre lexicographique donné sur  $E$ , définit une martingale vectorielle faible section extrême de  $\{\Gamma_i\}_{i \in I}$ .

IV.21 - Corollaire

Soit  $(\Omega, \mathcal{G}, P)$  un espace probabilisé complet,  $\{G_i\}_{i \in I}$  une famille de sous-tribus  $P$ -complètes de  $\mathcal{G}$ , indexée par un ensemble  $I$  d'indices filtrant à droite, telle que

$$i \leq j \Rightarrow G_i \subset G_j$$

Soit  $\mathcal{G}_\infty$  la tribu  $P$ -complète engendrée par  $\bigcup_I \mathcal{G}_i$ .

Soit  $E$  un e.v.t.l.c.r.s.,  $E'$  son dual.

Soit  $\{\Gamma_i(\cdot)\}_{i \in I}$  une famille de multiapplications définies sur  $\Omega$ , à valeurs dans  $CK(E'_\sigma)$ , adaptées à  $\{\mathcal{G}_i\}_{i \in I}$ .

Soit  $x' \in E'$ .

Si  $\{\Gamma_i\}_{i \in I}$  est une martingale faible  $(\Omega, \{\mathcal{G}_i\}_{i \in I}, P)$  et s'il existe  $\Gamma_\infty$  telle que  $\{\Gamma_i\}_{i \in \hat{I}}$  soit une martingale faible sur  $(\Omega, \{\mathcal{G}_i\}_{i \in \hat{I}}, P)$  alors  $\{\Gamma'_i(x', \cdot)\}_{i \in \hat{I}}$  est une martingale faible sur  $(\Omega, \{\mathcal{G}_i\}_{i \in \hat{I}}, P)$ .

S'il existe  $\{e'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  dans  $E'$  séparant les points de  $E$ , si  $\{\Gamma_i\}_{i \in I}$  est une martingale sur  $(\Omega, \{\mathcal{G}_i\}_{i \in I}, P)$  et s'il existe  $\Gamma_\infty$  telle que  $\{\Gamma_i\}_{i \in \hat{I}}$  soit une martingale sur  $(\Omega, \{\mathcal{G}_i\}_{i \in \hat{I}}, P)$ , alors  $\{\Gamma'_i(x', \cdot)\}_{i \in \hat{I}}$  est une martingale sur  $(\Omega, \{\mathcal{G}_i\}_{i \in \hat{I}}, P)$ .

La démonstration est immédiate.

#### IV.22 - Corollaire

Soit  $(\Omega, \mathcal{G}, P)$  un espace probabilisé complet,  $\{\mathcal{G}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  une suite croissante de sous-tribus  $P$ -complètes de  $\mathcal{G}$ , et soit  $\mathcal{G}_\infty$  la tribu engendrée par  $\bigcup_n \mathcal{G}_n$ .

Soit  $E$  un espace vectoriel normé complet de dimension finie,  $E'$  son dual.

Soit  $\{\Gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de multiapplications définies sur  $\Omega$ , à valeurs dans  $CK(E)$ , adaptée à  $\{\mathcal{G}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  formant une martingale sur  $(\Omega, \{\mathcal{G}_n\}_{n \in \mathbb{N}}, P)$ .

Soit  $x' \in E'$ .

Alors  $\{\Gamma'_n(x', \cdot)\}_{n \in \mathbb{N}}$  est une martingale sur  $(\Omega, \{\mathcal{G}_n\}_{n \in \mathbb{N}}, P)$  qui converge  $P$ -presque sûrement vers  $\Gamma'_\infty(x', \cdot)$ .

Démonstration : La proposition IV.21 montre que  $\{\Gamma'_n(x', \cdot)\}_{n \in \mathbb{N}}$  est une martingale sur  $(\Omega, \{\mathbb{G}_n\}_{n \in \mathbb{N}}, P)$ . Il est facile de voir que  $\{\Gamma'_n(x', \cdot)\}_{n \in \mathbb{N}}$  est scalairement terminalement équi-intégrable. Soit  $\tilde{\Gamma}_\infty$  sa limite. Il reste à montrer que  $\tilde{\Gamma}_\infty = \Gamma'_\infty(x', \cdot)$  P-presque sûrement. Puisque  $\{\Gamma'_n(x', \cdot)\}$  converge presque sûrement vers  $\tilde{\Gamma}_\infty(\cdot)$  nous savons déjà que P-presque sûrement  $\tilde{\Gamma}_\infty(\cdot) \subset \Gamma'_\infty(x', \cdot)$ .

Soit alors  $f \in \mathcal{M}_{\Gamma'_\infty(x', \cdot)}^{\mathbb{G}_\infty}$ . Il existe donc  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  suite de fonctions, adaptée à  $\{\mathbb{G}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, f_n = \mathbb{E}_P^n[f]$$

$$f_n \in \mathcal{M}_{\Gamma'_n(x', \cdot)}^{\mathbb{G}_n}$$

$\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  est donc une martingale de sections de  $\Gamma'_n(x', \cdot)$ . Cette martingale converge fortement dans  $L^1(\Omega, \mathbb{G}_\infty, P)$  vers une limite  $f_\infty$ , section de  $\tilde{\Gamma}_\infty$  et presque partout égale à  $f$ . Ainsi, toute section  $\mathbb{G}_\infty$ -mesurable de  $\Gamma'_\infty(x', \cdot)$  est P-presque sûrement une section de  $\tilde{\Gamma}_\infty$ . Il est alors facile de montrer que P-presque sûrement  $\Gamma'_\infty(x', \cdot) \subset \tilde{\Gamma}_\infty$ ; par conséquent  $\tilde{\Gamma}_\infty = \Gamma'_\infty(x', \cdot)$  P-presque sûrement.

#### IV.23 - Proposition

Soit  $(\Omega, \mathbb{G}, P)$  un espace probabilisé complet,  $\{\mathbb{G}_i\}_{i \in I}$  une famille de sous-tribus P-complètes de  $\mathbb{G}$ , indexée par un ensemble I d'indices filtrant à droite, telle que

$$i \leq j \Rightarrow \mathbb{G}_i \subset \mathbb{G}_j$$

Soit E un e.v.t.l.c.r.s., E' son dual.

Nous supposons qu'il existe  $\{e'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  dans E' séparant les points de E.

Soit  $\{\Gamma_i\}_{i \in I}$ , une famille de multiapplications définies sur  $\Omega$ , à valeurs dans  $CK(E'_0)$ , adaptée à  $\{\mathbb{G}_i\}_{i \in I}$  formant une martingale faible sur  $(\Omega, \{\mathbb{G}_i\}_{i \in I}, P)$ .

Alors, il existe une famille dénombrable  $(\{f_i^n(\cdot)\}_{i \in I})_{n \in \mathbb{N}}$  de martingales vectorielles faibles sections de  $\{\Gamma_i\}_{i \in I}$  telle que

$$\forall i \in I, \quad \forall \omega \in \Omega, \quad \{f_i^n(\omega)\}_{n \in \mathbb{N}}$$

soit dense dans  $\Gamma_i(\omega)$  pour  $\sigma(E, E')$ .

Démonstration : Nous savons que pour  $i$  fixé, la famille  $\{f_i^n(\cdot)\}_{n \in \mathbb{N}}$  de sections de  $\Gamma_i$ , est construite en prenant la famille dénombrable  $E_i$  des sections extrémales  $\{f_i(e'_n, \cdot)\}_{n \in \mathbb{N}}$  et en constituant la famille  $D_i$  des barycentres des éléments de  $E_i$  à coefficients rationnels. Nous avons déjà montré que l'image par espérance conditionnelle d'une telle famille est encore une famille de sections possédant la même propriété pour la multiapplication espérance conditionnelle. (Prop. III.27). Il est facile de vérifier que, pour  $n$  fixé,  $\{f_i^n(\cdot)\}_{i \in I}$  est une martingale vectorielle faible section de  $\{\Gamma_i\}_{i \in I}$ .



## BIBLIOGRAPHIE

- C. BERGE [1] *Espaces topologiques. Fonctions multivoques.*  
Dunod 1959.
- C. CASTAING [1] *Sur les multiapplications mesurables.*  
R.I.R.O. n° 1 1967.
- [2] *Sur la mesurabilité d'un profil d'un ensemble convexe compact variant de façon mesurable.*  
Publication du CSU de Perpignan - 3 mai 1968.
- [3] *Application prox et mesurabilité.*  
Montpellier 1967 (multigraphié).
- C. CASTAING - M. VALADIER [1] *Equations différentielles multivoques dans les espaces vectoriels localement convexes.*  
Revue Inf. Rech. Op. Vol. 16 (1969). p. 3-16.
- DANTZIG - FOLKMAN - SHAPIRO [1] *On the continuity of the minimum set of a continuous function.*  
Journal of Mathematical Analysis and Applications. Vol. 17 (1967) p. 519-546.
- R. DATKO [1] *Measurability properties of set valued mappings in Banach spaces.*  
SIAM J. Control. Vol. 8, n° 2, 1970, p. 226-238.
- L. FOURGEAUD - A. FUCHS [1] *Statistique.*  
Dunod 1967.
- A. GHOUILA-HOURI [1] *Cônes de Banach - Applications aux problèmes de contrôle.*  
Caen 1966 (multigraphié).
- L.L. NELMS [1] *Mean convergence of martingales.*  
Trans. Am. Math. Soc. Vol. 87 (1958) p. 439-445.
- L. HÖRMANDER [1] *Sur la fonction d'appui des ensembles convexes dans un espace localement convexe.*  
Arkiv för Matematik vol. 3, n°12 (1954) p. 181-186.
- M. HUKUHARA [1] *Sur l'application semi continue dont la valeur est un convexe compact.*  
Funkcialoj Ekvacioj vol. 10 1967. p. 43-66.

B. VAN CUTSEM

- [1] *Espérance conditionnelle des multiapplications à valeurs convexes compactes. Martingales multiapplications. Caen 1969 (multigraphié)*
- [2] *Espérance conditionnelle d'une multiapplication à valeurs convexes compactes*  
*C.R.A.S. Vol. 269. p. 212-214.*
- [3] *Martingales de multiapplications à valeurs convexes compactes.*  
*C.R.A.S. Vol. 269 p. 429-432.*

R.A. WIJSMAN

- [1] *Convergence of sequences of sets, cones and functions I.*  
*Bull. Am. Math. Soc. 70 (1964) p. 186-188.*
- [2] *idem II. Trans. AMS Vol. 123 (1966) p. 32-45.*

J.L. JOLY

- [1] *Une famille de topologies et de convergences sur l'ensemble des fonctionnelles convexes.*  
Thèse Grenoble 1970.

M. METIVIER

- [1] *Limites projectives de mesures - Martingales - Applications.*  
Thèse 1963.  
*Annali di Mathematica pura ed applicata (IV) vol. LXIII,*  
(1963) pp. 225-352.
- [2] *Martingales à valeurs vectorielles - Application à la dérivation des mesures vectorielles.*  
*Annales de l'Institut Fourier Vol. 17 n° 2, 1967*

J.J. MOREAU

- [1] *Fonctionnelles convexes.*  
Collège de France 1966-1967.
- [2] *Proximité et dualité dans un espace hilbertien.*  
*Bull. Soc. Math. de France 1965 - Vol. 93 pp. 273-299.*

U. MOSCO

- [1] *Convergence of convex sets and of solutions of variational inequalities.*  
*Adv. in Math. 3, Fasc. 4 p. 510-585.*

J. NEVEU

- [1] *Bases mathématiques du calcul des probabilités.*  
Masson 1964.

T. ROCKAFELLAR

- [1] *Convex Analysis*  
Princeton 1970
- [2] *Measurable dependance of convex sets and functions on parameters.*  
*Journal of Math. Anal. and Appl. 1969. Vol. 28 n° 1 p. 4-25.*

M. VALADIER

- [1] *Contribution à l'analyse convexe.*  
Thèse Paris 1970.
- [2] *Sur l'intégration d'ensembles convexes compacts en dimension infinie.*  
*C.R.A.S. Vol. 266 (1968) p. 14-16.*