Etude de quelques problèmes d'interpolation.

Charles-François Ducateau

n° d'ordre

T H E S E

présentée à

L'UNIVERSITE SCIENTIFIQUE ET MEDICALE DE GRENOBLE

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR ES SCIENCES

par

CHARLES-FRANCOIS DUCATEAU

:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:

ETUDE DE QUELQUES PROBLEMES D'INTERPOLATION

Thèse soutenue le 12 mars 1971, devant la commission d'examen :

MM.	*J. KUNTZMANN*	*Président*
	N. GASTINEL	
	J. CEA	*Examinateurs*
	P.J. LAURENT	

LISTE DES PROFESSEURS

Doyen Honoraire : Monsieur M. MORET
Doyen : Monsieur E. BONNIER

PROFESSEURS TITULAIRES

MM.	NEEL Louis	Physique Expérimentale
	KRAVTCHENKO Julien	Mécanique Rationnelle
	CHABAUTY Claude	Calcul différentiel et intégral
	BENOIT Jean	Radioélectricité
	CHENE Marcel	Chimie Papetière
	FELICI Noël	Electrostatique
	KUNTZMANN Jean	Mathématiques Appliquées
	BARBIER Reynold	Géologie Appliquée
	SANTON Lucien	Mécanique des Fluides
	OZENDA Paul	Botanique
	FALLOT Maurice	Physique Industrielle
	KOSZUL Jean-Louis	Mathématiques
	GALVANI Octave	Mathématiques
	MOUSSA André	Chimie Nucléaire
	TRAYNARD Philippe	Chimie Générale
	SOUTIF Michel	Physique Générale
	CRAYA Antoine	Hydrodynamique
	REULOS René	Théorie des Champs
	BESSON Jean	Chimie Minérale
	AYANT Yves	Physique Approfondie
	GALLISSOT François	Mathématiques
Mlle	LUTZ Elisabeth	Mathématiques
MM.	BLANBERT Maurice	Mathématiques
	BOUCHEZ Robert	Physique Nucléaire
	LLIBOUTRY	Géophysique
	MICHEL Robert	Minéralogie et pétrographie
	BONNIER Etienne	Electrochimie et Electrométallurgie
	DESSAUX Georges	Physiologie Animale
	PILLET Emile	Physique Industrielle-Electrotechnique
	YOCCOZ Jean	Physique Nucléaire théorique
	DEBELMAS Jacques	Géologie Générale
	BERBER Robert	Mathématiques
	PAUTENET René	Electrotechnique
	MALGRANGE Bernard	Mathématiques Pures
	VAUQUOIS Bernard	Calcul Electronique
	BARJON Robert	Physique Nucléaire
	BARBIER Jean-Claude	Physique
	SILBERT Robert	Mécanique des Fluides
	BUYLE-BODIN Maurice	Electronique
	DREYFUS Bernard	Termodynamique

MM.	KLEIN Joseph	Mathématiques
	VAILLANT François	Zoologie et Hydrobiologie
	ARNAUD Paul	Chimie
	SENGEL Philippe	Zoologie
	BARNOUD Fernand	Biosynthèse de la Cellulose
	BRISSONNEAU Pierre	Physique
	GAGNAIRE Didier	Chimie Physique
Mme	KOFLER Lucie	Botanique
MM.	DEGRANGE Charles	Zoologie
	PEBAY-PEROULA Jean Claude	Physique
	RASSAT André	Chimie Systématique
	DUCROS Pierre	Cristallographie Physique
	DODU Jacques	Mécanique Appliquée I.U.T.
	ANGLES D'AURIAC Paul	Mécanique des Fluides
	LACAZE Albert	Thermodynamique
	GASTINEL Noël	Analyse Numérique
	GIRAUD Pierre	Géologie
	PERRET René	Servo-mécanisme
	PAYAN Jean Jacques	Mathématiques Pures

PROFESSEURS SANS CHAIRE

MM.	GIDON Paul	Géologie
Mme	BARBIER Marie-Jeanne	Electrochimie
Mme	SOUTIF Jeanne	Physique
MM.	COHEN Joseph	Electrotechnique
	DEPASSEL R.	Mécanique des Fluides
	GLENAT René	Chimie
	BARRA Jean	Mathématiques Appliquées
	COUMES André	Electronique
	PERRIAUX Jacques	Géologie et Minéralogie
	ROBERT André	Chimie Papetière
	BIARREZ Jean	Mécanique Physique
	BONNET Georges	Electronique
	CAUQUIS Georges	Chimie Générale
	BONNETAIN Lucien	Chimie Minérale
	DEPOMMIER Pierre	Physique Nucléaire-Génie Atomique
	HACQUES Gérard	Calcul Numérique
	POLOUJADOFF Michel	Electrotechnique
Mme	KAHANE Josette	Physique
Mme	BONNIER Jane	Chimie
MM.	VALENTIN Jacques	Physique
	REBECQ Jacques	Biologie
	DEPORTES Charles	Chimie
	SARROT-REYNAULD Jean	Géologie
	BERTRANDIAS Jean Paul	Mathématiques
	AUBERT Guy	Physique

PROFESSEURS ASSOCIES

MM.	RODRIGUES Alexandre	Mathématiques Pures
	MORITA Susumu	Physique Nucléaire
	RADHAKRISHNA	Thermodynamique

MAITRES DE CONFERENCES

MM.	LANCIA Roland	Physique Atomique
Mme	BOUCHE Liane	Mathématiques
MM.	KAHANE André	Physique Générale
	DOLIQUE Jean Michel	Electronique
	BRIERE Georges	Physique
	DESRE Georges	Chimie
	LAJZEHOWICZ Joseph	Physique
	LAURENT Pierre	Mathématiques Appliquées
Mme	BERTRANDIAS Françoise	Mathématiques Pures
MM.	LONGEQUEUE Jean Pierre	Physique
	SOHM Jean Claude	Electrochimie
	ZADWORNY François	Electronique
	DURAND Françis	Chimie Physique
	CARLIER Georges	Biologie Végétale
	PFISTER Jean Claude	Physique
	CHIBON Pierre	Biologie Animale
	IDELMAN Simon	Physiologie animale
	BLOCH Daniel	Electrotechnique I.P.
	MARTIN-BOUYER Michel	Chimie (C.S.U. Chambéry)
	SIBILLE Robert	Construction mécanique (I.U.T.)
	BRUGEL Lucien	Energétique I.U.T.
	BOUVARD Maurice	Hydrologie
	RICHARD Lucien	Botanique
	PELMONT Jean	Physiologie Animale
	BOUSSARD Jean Claude	Mathématiques Appliquées (I.P.G.)
	MOREAU René	Hydraulique I.P.G.
	ARMAND Yves	Chimie I.U.T.
	BOLLIET Louis	Informatique I.U.T.
	KUHN Gérard	Energétique I.U.T.
	PEFFEN René	Chimie I.U.T.
	GERMAIN Jean Pierre	Mécanique
	JOLY Jean René	Mathématiques Pures
Melle	PIERY Yvette	Biologie Animale
	BERNARD Alain	Mathématiques Pures
	MOHSEN Tahsin	Biologie (C.S.U. Chambéry).
	CONTE René	Mesures Physiques I.U.T.
	LE JUNTER Noël	Génie Electrique Electronique I.U.T.
	LE ROY Philippe	Génie Mécanique I.U.T.
	ROMIER Guy	Technique Statistiques Quantitatives I.U.T.
	VIALON Pierre	Géologie
	BENZAKEN Claude	Mathématiques Appliquées
	MAYNARD Roger	Physique
	DUSSAUD René	Mathématiques (C.S.U. Chambéry)
	BELORIZKY Elie	Physique (C.S.U. Chambéry)
Mme	LAJZEROWICZ Jeannine	Physique (C.S.U. Chambéry)
M.	JULLIEN Pierre	Mathématiques Pures
Mme	RINAUDO Marguerite	Chimie
MM.	BLIMAN Samuel	E.I.E.
	BEGUIN Claude	Chimie Organique
	NEGRE Robert	I.U.T.

MAITRES DE CONFERENCES ASSOCIES

MM.	YAMADA Osamu	Physique du Solide
	NAGAO Makoto	Mathématiques Appliquées
	MAREZIO Massimo	Physique du Solide
	CHEECKE John	Thermodynamique
	BOUDOURIS Georges	Radioélectricité
	ROZMARIN Georges	Chimie Papetière

Ce travail a été effectué à l'Institut de Mathématiques Appliquées de Grenoble.

J'exprime ma gratitude et mes remerciements :

à Monsieur J. KUNTZMANN qui a créé et animé ce centre de recherches, qui m'a donné ainsi qu'à de nombreux autres chercheurs, la possibilité de mener leur recherche, entourés de compétence scientifique.

à Monsieur N. GASTINEL qui m'a accueilli dans l'équipe d'Analyse Numérique, qui a dirigé mes recherches et qui par sa grande disponibilité fut pour moi d'une aide précieuse.

à Monsieur P.J. LAURENT qui par de nombreuses discussions m'a conseillé utilement et fut pour moi un soutien pour la réalisation de cette thèse.

à Monsieur J. CEA qui s'est intéressé à mon travail et a accepté de participer au Jury de cette thèse.

à Monsieur J.L. LIONS qui assura mon parrainage au C.N.R.S.

à tous mes camarades de l'équipe d'Analyse Numérique : en particulier J.L. JOLY avec qui j'ai étudié une partie de cette thèse, et avec qui j'ai découvert l'efficacité du travail collectif,

à J. BARANGER, C. CARASSO, M. DUC-JACQUET, M. et Mme EBERHARD qui à diverses occasions m'ont apporté leur aide.

à Melle G. BICAÏS qui a su transformer un manuscrit difficilement lisible en cette présentation claire et agréable, et cela en un temps très bref. Elle a fait ainsi preuve de sa grande compétence dans la dactylographie des textes mathématiques.

TABLE DES MATIERES DETAILLEE

CHAPITRE - VI

INTRODUCTION

Nous étudions dans ce travail divers procédés d'interpolation. Nous donnons une définition axiomatique de la notion de procédé d'interpolation au début du chapitre I, et précisons certaines propriétés supplémentaires qui permettent de dissocier plusieurs types d'interpolation. Par exemple, le procédé d'interpolation par des polynômes ne vérifie pas les mêmes propriétés que le procédé d'interpolation par fonctions spline.

La théorie des fonctions convexes telle qu'elle est introduite par JJ. Moreau et RT Rockafellar, donne un langage agréable pour traiter les questions d'optimisation et d'approximation convexes. Nous utilisons cette théorie pour étudier les fonctions spline. Pour cela nous introduisons d'abord les fonctions hilbertiennes et semi-hilbertiennes. Nous obtenons deux types de caractérisation pour les fonctions suivant que nous considérons la caractérisation du minimum dans l'espace initial, ou dans l'espace dual par polarité.

Nous explicitons les propriétés du procédé d'interpolation par fonctions spline, en particulier le rôle joué par le sous-espace Ker h (ensemble des éléments où la fonction semi-hilbertienne h à minimiser est nulle) et la condition de Haar pour ce sous-espace lorsqu'il est de dimension finie. Nous donnons des exemples où cette propriété n'a pas lieu et les particularités qu'ils présentent. Nous nous posons aussi le problème inverse de savoir : si un procédé d'interpolation provient de la minimisation d'une fonction semi-hilbertienne ; nous donnons des conditions pour qu'il en soit ainsi, et une classe de procédé les vérifiant.

Cette théorie permet aussi de présenter et de retrouver d'une façon simple l'approximation optimale d'une forme linéaire continue de Sard [1963] et Schoenberg [1964] .

Nous traitons le cas du produit tensoriel de fonctions hilbertiennes et semi-hilbertiennes et indiquons le rapport avec les surfaces de Coons qui sont de plus en plus utilisées pour représenter des surfaces dans les applications pratiques.

Lorsque on a un nombre fini de conditions d'interpolation quel que soit les valeurs prises pour ces conditions, il y a existence d'une fonction spline ; par contre si nous avons une infinité de conditions, il n'y a pas toujours existence d'une telle fonction, nous donnons une condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi. Nous étudions l'extrapolation à la limite pour des fonctions spline et donnons deux algorithmes réalisant cette extrapolation à la limite et des applications numériques.

Nous introduisons ensuite un procédé d'interpolation par des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$. Tout d'abord nous étudions le cas du prolongement d'un champ de Taylor d'ordre k par des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$, qui peut être ainsi interprété comme un procédé d'interpolation de type Hermite. Nous définissons une notion de convergence sur les champs de Taylor et étudions la convergence des prolongements dans $\mathcal{C}^k$ lorsque nous avons convergencedes champs de Taylor. Lorsque nous avons une suite des champs de Taylor définis sur un nombre fini de points, alors pour certain type de prolongement nous avons des fonctions spline d'Hermite généralisées d'ordre k+1 et nous obtenons ainsi un résultat de convergence de ces fonctions "spline" dans $\mathcal{C}^k$ vers une fonction de $\mathcal{C}^k$ qui n'appartient pas nécessairement à $H^{k+1}[a,b]$.

Whitney donne une caractérisation des fonctions f définies sur un sous-ensemble F de $[a,b]$ et prolongeable en une fonction de classe $\mathcal{C}^k$; pour démontrer ce théorème Whitney introduit les Q-projections. A une telle fonction f on associe un champ de Taylor d'ordre k puis en utilisant les prolongements définis au chapitre V, nous construisons une interpolation par des fonctions de classe C^k. Nous pouvons utiliser les Q-projections pour construire un tel procédé. Ce procédé est numériquement simple, puisque pour déterminer les dérivées jusqu'à l'ordre k en un point d'interpolation nous avons seulement besoin des valeurs de la fonction en k points assez voisin de ce point. Par contre, si f est une fonction qui interpole selon ce procédé sur n points, alors la fonction interpolante selon ce procédé sur tout ensemble contenant ces n points n'est pas nécessairement f, contrairement à ce qui se passe pour les fonctions spline ou les polynômes. Nous définissons une notion de convergence pour ce type de fonction et donnons des résultats de convergence dans C^k.

CHAPITRE - I

PROCEDE GENERAL D'INTERPOLATION
RAPPELS SUR LES FONCTIONS CONVEXES
FONCTIONS HILBERTIENNES ET FONCTIONS SEMIHILBERTIENNES

Au début de ce chapitre, on définit la notion de procédé général d'interpolation, et différents axiomes qu'un tel procédé vérifie. Le choix des axiomes est motivé par ce qui se passe dans les procédés classiques et par certaines propriétés de procédés d'interpolation qui sont étudiées dans divers chapitres de ce travail. En particulier est mis en lumière une différence entre le procédé d'interpolation par polynôme et le procédé par fonction spline.

Nous utiliserons dans ce travail les propriétés de fonctions convexes et de diverses notions qui leur sont reliées. Cette théorie commence à être connue, le cours de Moreau [1966], le livre de Rockafellar [1970], un chapitre du livre à paraître de P.J. Laurent [1971] en donnent une synthèse. Le deuxième paragraphe de ce chapitre est consacré à un bref rappel des notions et des propriétés fondamentales de cette théorie.

L'application de la théorie des fonctions convexes pour présenter la théorie des sous-espaces hilbertiens a été faite par Mme S. Maury [1968]. J.L. Joly et l'Auteur ont repris ces travaux, introduit le vocable de fonctions hilbertiennes puis la notion de fonctions semi-hilbertiennes et de multinoyau associé, pour le cas où la forme quadratique n'est plus nécessairement définie positive. Les parties III et IV développent les propriétés des fonctions hilbertiennes et semi-hilbertiennes.

I - PROCEDE GENERAL D'INTERPOLATION

Soit X un ensemble, $\mathcal{F}(X)$ l'ensemble des fonctions à valeurs réelles définies sur X.

I.1 - *Définition*

Soit $\mathcal{P}$ un ensemble de parties de X, pour chaque $P \in \mathcal{P}$ soit F_P un sous-ensemble de $\mathcal{F}(X)$; un procédé général d'interpolation consiste en la donnée pour tout $P \in \mathcal{P}$ d'une multi-application π_P définie sur F_P à valeurs dans $\mathcal{F}(X)$, telle que pour tout $f \in F_P$, les restrictions à P de f et de tout élément de $\pi_P(f)$ coïncident.

Un cas particulier important correspond à $\mathcal{P}$ formé de parties finies, c'est le cas le plus courant d'interpolation, mais dans la suite nous aurons l'occasion de voir des interpolations sur un ensemble infini de points au chapitre II, n° 3 (Spline à deux variables minimisant un produit tensoriel de fonctions semi-hilbertiennes, et prenant des valeurs fixées sur les lignes d'un quadrillage) et au chapitre IV n° 3 (Spline ayant des valeurs données sur un ensemble infini de points d'un intervalle).

F_P sera dans de nombreux cas égal à $\mathcal{F}(X)$, mais dans le chapitre III, n° 3, nous prenons F_P indépendant de P mais égal à un sous-espace de $\mathcal{F}(X)$; dans le chapitre IV n° 3 nous avons F_P qui varie avec P.

Nous rencontrerons souvent dans la suite le cas où $\mathcal{P}$ est l'ensemble des parties finies de X, si en plus $F_P = \mathcal{F}(X)$. Nous dirons alors que nous avons un procédé d'interpolation en omettant l'adjectif "général".

I.2 - Nous remarquons que la multi-application π_P donne la même image pour deux éléments f et f' coïncidant sur P. Supposons que $F_P = \mathcal{F}(X)$ et que $\mathcal{P}$ est formé de parties finies, alors nous pouvons factoriser π_P en $\lambda_P . r_P$ où r_P est l'opération de restriction de $\mathcal{F}(X)$ à P et où λ_P est une multi-application définie sur $\mathbb{R}^n$ où $n = \text{card}(P)$. Ainsi π_P est définie par la donnée des λ_P.

I.3 - Définition

Soient deux procédés généraux d'interpolation π *et* π', *nous dirons que* π' *est un raffinement de* π, *si nous avons les conditions suivantes :*

- $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}'$

- *si pour tout* $P \in \mathcal{P}$ *alors* $F_P \subset F_{P'}$.

- *pour tout* $P \in \mathcal{P}$ *et tout* $f \in F_P$ *alors* $\pi'_P(f) \subset \pi_P(f)$.

Il est bien évident que si quel que soit P et f on a $\pi_p(f)$ unique (π_p est une véritable application), tout procédé π' raffinement de π coïncide avec π sur les ensembles de $\mathcal{P}$.

La relation "π' est un raffinement de π" est une relation d'ordre sur les procédés généraux d'interpolation.

Introduisons sur les procédés généraux d'interpolation l'axiome suivant qui correspond à une propriété de projection.

I.4 - Axiome

Si $P' \in \mathcal{P}$ *et si* $P' \subset P$ *alors*

$$\pi_{P'}(F_{P'} \cap F_P) \subset \pi_P(F).$$

Dans le cas où $F_P = \mathcal{F}(X)$ quel que soit P.
D'après la définition I.1 si $f \in \pi_{P'}(\mathcal{F}(X))$ on aura $f \in \pi_P(g)$ car $f \in \pi_P(\mathcal{F}(X))$, f coïncidera avec g sur P ainsi $f \in \pi_P(f)$.

Dans le chapitre VI le procédé d'interpolation basé sur les Q-projections, ne vérifie pas cet axiome, en effet, si f est une fonction interpolante sur P, il est possible que f ne soit pas une fonction interpolante sur $P' \subset P$. Ainsi l'axiome I.4 n'est pas une conséquence de la définition I.1.

I.5 - Définition

Un procédé général d'interpolation π est dit de type linéaire si pour chaque $P \in \mathcal{P}$, F_P est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(X)$ et π_P est une multiapplication linéaire de F_P dans $\mathcal{F}(X)$.

Rappelons qu'une multi-application T d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F est dite linéaire si pour tout $e \in E$, Te est une variété affine translatée de T(O). Ainsi si χ désigne la projection canonique de F sur F/T(O) alors $\chi \circ \pi$ est une application linéaire.

Dans une multi-application linéaire nous avons

$$T(e+e') = T(e)+T(e') \text{ et } T(\lambda e) = \lambda T(e).$$

La plupart des procédés d'interpolation habituellement utilisés sont des interpolations de type linéaire.

I.6 - Exemple - Interpolation par des polynômes sur un intervalle $[a,b]$.

On prend $\mathcal{P}$ = ensemble des parties finies de $[a,b]$ et $F_P = \mathcal{F}([a,b])$, soit $P = \{p_1,\ldots,p_n\}$ on prend $\pi_P(f)$ le polynôme de degré inférieur ou égal à n-1 qui coïncide en p_i $(1 \leq i \leq n)$ avec $f(p_i)$. Un tel polynôme est défini de façon unique, il ne dépend que des valeurs de f en p_i. La multi-application π_P est ici en réalité une application ; elle est linéaire. Ainsi le procédé est de type linéaire. L'interpolation d'un polynôme de degré inférieur à n-1 sur n points étant lui-même, l'axiome I.4 est vérifié.

I.7 - Exemple - Interpolation par combinaison linéaire de fonctions données

Considérons n fonctions $\varphi_1,\ldots,\varphi_n$ définies sur X. Elles vérifient la condition de Haar sur X si quel que soit $(p_1,\ldots,p_n)$ points distincts de X et quel que soit $f \in \mathcal{F}(X)$ il existe une combinaison linéaire de $\varphi_1,\ldots,\varphi_n$ qui coïncide avec f en chacun des points $p_1,\ldots,p_n$.

La condition de Haar équivaut à la propriété : le système de n équations à n inconnues :

$$\overset{n}{\underset{j=1}{\cdot}} \left| \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i(p_j) = f(p_j) \right.$$ admet une solution unique quels que

soient $p_1,\ldots,p_n$ et f. Ceci peut s'exprimer par : le déterminant de terme général $\varphi_i(p_j)$ est non nul.

Soit $\varphi_1,\ldots,\varphi_n,\ldots$ une suite infinie de fonctions définies sur X. Nous dirons que cette suite forme un système de Markov, si pour tout n les fonctions $\varphi_1,\ldots,\varphi_n$ vérifient la condition de Haar sur X.

Par exemple $(1,x,\ldots,x^n,\ldots)$ forment un système de Markov sur $[a,b]$.

Supposons donné un système de Markov sur X, nous lui associons un procédé d'interpolation en prenant pour $\mathcal{P}$ l'ensemble des parties finies de X, pour F_P l'espace $\mathcal{F}(X)$; alors $\pi_P(f)$ est l'application qui à f associe la combinaison linéaire de $\varphi_1,\ldots,\varphi_n$ qui coïncide avec f sur $p_1,\ldots,p_n$. Remarquons que si $f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\varphi_i$ et si nous prenons m points $p_1,\ldots,p_m$ avec $m > n$ alors l'interpolant de f est f lui-même ainsi l'axiome 1-4 est vérifié. Ce procédé est évidemment de type linéaire.

I.8 - Exemple - Procédé d'interpolation provenant de la minimisation d'une fonction semi-hilbertienne (fonction spline)

Dans la suite de ce chapitre nous définissons la notion de fonction semi-hilbertienne, puis au chapitre II nous définissons ce procédé d'interpolation et en étudions certaines des propriétés. Nous pouvons signaler dès maintenant que ce procédé est un procédé de type linéaire, qui vérifie l'axiome I.4.

La multi-application π_P n'est pas toujours une application si le nombre de points de P est trop petit. Il se peut que le procédé ne soit pas défini pour certain P fini, ou que le sous-espace $\pi_P(0)$ varie avec P et que $\pi_P(0)$ et $\pi_{P'}(0)$ n'aien pas la même dimension bien que Card(P) = card(P'). Ce dernier phénomène ne se produit pas si un certain sous-espace Kerh associé à h vérifie la condition de Haar

Ainsi la dernière constatation de ce dernier exemple nous conduit à introduir l'axiome :

I.9 - Axiome

Soit un procédé général d'interpolation π *de type linéaire. On suppose qu'il existe un nombre entier* n_o *tel que pour tout nombre* $n \geq n_o$, *pour tout ensemble* $P \in \mathcal{P}$ *comportant* n *éléments, l'ensemble* $\pi_P(0)$ *soit un espace vectoriel dont la dimension ne dépend que de* n.

Les procédés d'interpolation décrit en I.6 et I.7 vérifient l'axiome I.9 mais aussi la propriété suivante que nous posons comme axiome supplémentaire pour un procédé d'interpolation.

I.10 - Axiome

Un procédé d'interpolation π *vérifie l'axiome I.10, si pour tout* P *ayant le même nombre d'élément* n , *l'ensemble* $\pi_P(F) = V_n$ *est indépendant de* P *mais dépend uniquement de* n.

La plupart des procédés d'interpolation de I.8 vérifie l'axiome I.9, mais de tels procédés ne vérifient pas I.10. Cet axiome I.10 est une des différences essentielles entre l'interpolation par polynôme et l'interpolation par spline. Inversement les résultats qui vont suivre vont montrer que les procédés vérifiant I.10 et de type linéaire, sont à l'unicité près du type de l'exemple I.7.

I.11 - Soit un procédé d'interpolation π_P de type linéaire vérifiant l'axiome I.10. Si pour tout n, V_n est de dimension m, il existe m fonctions linéairement indépendantes telles que pour tout P formé de n éléments nous ayons :

$$\pi_P(f) = \{ \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \varphi_i \mid \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \varphi_i(p_j) = f(p_j) \qquad 1 \leq j \leq n \}.$$

Si dim P_n = n, nous avons le système $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ qui vérifie la condition de Haar et nous avons un procédé correspondant à l'exemple I.7.

Nous avons m = dim $P_n \geq n$, en effet, l'application restriction qui à un élément de P_n associe sa restriction à $P = (p_1, \ldots, p_n)$ est une application linéaire surjective sur $\mathbb{R}^n$. Considérons une base $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ de P_m, alors il existe une sous-matrice carrée d'ordre n de déterminant non nul de la matrice n × m $|\varphi_i(p_j)|$ $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$. Cette sous-matrice ne correspond pas toujours aux mêmes indices si les p_j varient. Par exemple si n = 1 il se peut que certains φ_j s'annulent en n sans que ce soit la même chose pour les autres points.

1.12 - <u>*Proposition*</u>

Si le procédé d'interpolation π *de type linéaire vérifie I.4 et I.10, avec quel que soit* n, P_n *de dimension finie, nous pouvons construire une suite de fonctions* $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \ldots$ *tel que pour chaque* P *ayant* n *éléments* π_P *admet pour base* $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ *et qu'il existe une sous-matrice carrée de* $(\varphi_i(p_j))$ $(1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n)$ *d'ordre* n *dont le déterminant est non nul.*

Il suffit pour P_1 de prendre une base $\varphi_1, \ldots, \varphi_{m(1)}$, puis comme $P_1 \subset P_2$ nous complétons la base de P_1 pour faire une base de P_2 et ainsi de suite. Nous avons la proposition en utilisant les remarques de I.11.

c.q.f.d.

I.13 - Définition

On dit qu'un procédé d'interpolation admet un seuil d'unisolvence n *si pour tout* P *avec* card(P) $\geq$ n *nous avons* π_P *qui est une application et si pour tout* Q *avec* card(Q) < n *alors* π_P *n'est pas univoque.*

Nous remarquons que les exemples I.6 et I.7 sont des procédés d'interpolation à seuil d'unisolvence 1. Nous verrons des exemples de type I.8 où nous avons un seuil d'unisolvence supérieur à 1.

I.14 - Formule de Newton

I.14 - Proposition

Soit π *un procédé d'interpolation de type linéaire à seuil d'unisolvence* , π *vérifiant l'axiome I.4.*
Soit $P_m = (p_1,\dots,p_m)$ *un ensemble de* m *points de* $[a,b]$ *distincts avec* $m > n$. *Pour chaque* i $(n < i \leq m)$ *il existe une forme linéaire unique* $\mu_i\ (p_1,\dots,p_i)$ *avec* $\mu_i(p_1,\dots,p_i) = \sum_{j=1}^{i} \alpha^i\ \delta_{p_j}$ *telle que pour tout* $f \in F(X)$ *nous ayons*

$$\pi_{P_m}(f) = \sum_{i=n+1}^{m} \mu_i(p_1,\dots,p_i)(f)v_j+\pi_{P_n}(f)$$

et

$$\mu_i(p_1,\dots,p_i)(v_j) = \delta_{ij} \qquad (i \leq j)$$

où v_j *est l'élément de* $\pi_{P_j}(F)$ $(j > n)$ *qui vérifie* $v_j(p_j) = 1$ *et si* $k < j$ $v_j(p_k) = 0$.

Démonstration

Nous allons raisonner par récurrence sur le nombre d'éléments de P. Supposons la propriété vraie pour i. $\pi_{P_i}(F(X))$ est un sous-espace de dimension i de $\pi_{P_{i+1}}(F(X))$ Considérons l'image v_{i+1} par $\pi_{P_{i+1}}$ d'une fonction nulle sur $p_1,\dots,p_i$ et valant 1 en p_{i+1}.

La fonction $\pi_{P_i}(f)+(f(p_{i+1})-\pi_{P_i}(f)(p_{i+1}))v_{i+1}$ coïncide avec f en chaque point p_j $1 \leq j \leq i+1$; ainsi elle est égale à $\pi_{P_{i+1}}(f)$.

Il reste à voir que $\mu_{i+1}(p_1,\ldots,p_{i+1})(f) = \sum_{j=1}^{i+1} \alpha_j^{i+1} <\delta_{p_i},f>$

Comme $\mu_{i+1}(f) = f(p_{i+1})-\pi_{P_i}(f)(p_{i+1})$, il suffit de voir que $\pi_{P_i}(f)(p_{i+1}) = \sum_{j=1}^{i+1} \beta_j f(p_j$

Considérons une base σ_j de $\pi_{P_i}(\mathcal{F}(X_i))$ vérifiant $\sigma_j(p_k) = \delta_{j.k}$ alors nous avons, comme π est un procédé de type linéaire, $\pi_{P_i}(f) = \sum_{j=1}^{i} f(p_j)\sigma_j$ ainsi

$$\pi_{P_i}(f)(p_{i+1}) = \sum_{j=1}^{i} f(p_j)\sigma_j(p_{i+1}) = \sum_{j=1}^{i} \sigma_j(p_{j+1})\ f(p_j).$$

c.q.f.d.

En considérant le choix de v_i de la démonstration, on remarque que le choix des β_i est indépendant de l'ordre des p_j $1 \leq j \leq i$ ainsi nous avons $\mu(p_1,\ldots,p_i,p_{i+1}) = \mu(p_{\lambda(1)},\ldots,p_{\lambda(i)},p_{i+1})$ où λ est une permutation de $1,\ldots,i$; la même propriété est aussi vraie pour v_{i+1}.

II - RAPPEL SUR LA THEORIE DES FONCTIONS CONVEXES

Les fonctions convexes au sens de Moreau sont des fonctions définies sur un espace vectoriel réel E à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$. Le plus souvent les fonctions convexes considérées ne prennent pas la valeur $-\infty$, cependant pour la cohérence de la théorie, il est nécessaire de garder la possibilité de la valeur $-\infty$, sans quoi certaines opérations telle que l'inf-convolution sortiraient du cadre imposé. Malgré ces inconvénients, nous développons ces rappels dans le cadre de fonctions à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$afin de ne pas trop les surcharger. Nous renvoyons les lecteurs qui voudraient une vision complète de cette théorie aux ouvrages de J. Moreau |1967|, Rockafellar |1970| et P.J. Laurent |1971|.

II.1 - Soit f une fonction définie sur E à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. On appelle domaine effectif le sous-ensemble de E dom $f = \{e \in E \mid f(e) < +\infty\}$.

f est dite convexe si pour tout x et y $\in$ E et $\theta \in]0,1[$ on a $f(\theta x+(1-\theta)y) \leq \theta f(x)+(1-\theta)f(y)$.

f est dite propre si elle ne prend pas identiquement la valeur $+\infty$.

II.2 - Exemple

Soit C un sous-ensemble de E. Considérons la fonction Ψ_C telle que $\Psi_C(e)$ = si $e \in C$ alors 0 sinon $+\infty$. Cette fonction est appelée fonction indicatrice de C.

II.3 - On appelle épigraphe de f noté epi(f) le sous-ensemble de $E \times \mathbb{R}$
$\text{epi}(f) = \{(x,\alpha) \in E \times \mathbb{R} \mid f(x) \leq \alpha\}$, épigraphe strict de f le sous-ensemble de $E \times$ noté $\widetilde{\text{epi}}(f)$.
$\widetilde{\text{epi}}(f) = \{(x,\alpha) \in E \times \mathbb{R} \mid f(x) < \alpha\}$.

Les fonctions convexes sont caractérisées par la propriété que leurs épigraphes (ou leurs épigraphes stricts) sont des parties convexes de $E \times \mathbb{R}$.

II.4 - On suppose que E est muni d'une topologie qui en fait un espace vectoriel topologique localement convexe séparé.

Une fonction f est semi-continue inférieurement en $x_o \in E$ si pour tout $\alpha < f(x_o)$ il existe un voisinage V de x_o tel que si $x \in V$ alors $f(x) > \alpha$.

Une fonction semi-continue inférieurement en tout point de E est dite fonction semi-continue (s.c.i.)

Les fonctions semi-continues inférieurement sont caractérisées par le fait que leur épigraphe est fermé dans $E \times \mathbb{R}$.

Rappelons ce résultat : Moreau [1967] et Laurent [1971]

Proposition

Soit f *une fonction convexe dans* E. *S'il existe un ouvert non vide de* E *sur lequel* f *est majorée, alors* f *est continue sur l'intérieur (évidemment non vide) de son domaine effectif.*

En particulier si f est continue en un point, elle est continue en tout point de l'intérieur de son domaine.

On désignera par $\Gamma_o(E)$ l'ensemble des fonctions convexes, sci et propres.

II.5 - Considérons un couple d'espace vectoriel E, E' en dualité séparante par la forme <e,e'>. Nous munirons E de topologies $\mathcal{T}$ compatibles avec la dualité.
Nous avons $\sigma(E,E') \prec \mathcal{T} \prec \tau(E,E')$ ($\sigma(E,E')$ topologie faible sur E, $\tau(E,E')$ topologie de Mackey).

A une fonction f définie à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ distincte de la fonction identique à $+\infty$, nous pouvons associer sa fonction polaire f^* sur E' par la formule $f^*(e') = \sup\limits_{e \in E} (\langle e,e'\rangle - f(e))$.

La fonction f^* est une fonction convexe comme enveloppe supérieure de fonctions affines sur E' ($\langle e,e'\rangle - f(0)$ est affine si $f(e) \neq +\infty$). Si $f \in \Gamma_o(E)$ on montre que f est enveloppe supérieure de fonctions affines continues sur E. Ainsi $f = f^{**}$, et l'opération de polarité est une bijection de $\Gamma_o(E)$ sur $\Gamma_o(E)$).

II-6 - Exemples

α) Soit Ψ_C la fonction indicatrice d'une partie convexe de E, alors $\Psi_C^*(e') = \sup\limits_{e \in C} (\langle e,e'\rangle)$. Cette fonction est dite fonction d'appui de l'ensemble C.

Si E est un espace normé et C = B(1) boule unité de E alors $\Psi^*_{B(1)}$ est la norme duale dans E'.

β) Soit V un sous-espace vectoriel de E, alors Ψ_V^* est la fonction indicatrice Ψ_{V^0} du polaire V^0 de V ($V^0 = \{e' \mid \langle e,e'\rangle = 0 \text{ si } e \in V\}$).

Soit V_e le sous-espace affine de E, translaté de V passant par e alors $\Psi^*_{V_e}(e') =$ si $e' \in V^0$ alors $\langle e,e'\rangle$ sinon $+\infty$.

γ) Soient E et F deux espaces vectoriels localement convexes en dualité avec E' et F'. A un opérateur linéaire continu de E sur F et $g \in \Gamma(F)$ on définit $f \in \Gamma(E)$ par $f(x) = g(A(x))$. Alors nous avons :
$f^*(e') =$ si $e' \in (\mathrm{Ker}\, A)^0$ alors $g^*({}^tA^{-1})(e'))$ sinon $+\infty$.

II-7 - Inf-convolution

Soient deux fonctions f et g définies sur E à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, on appelle <u>inf-convolution</u> de f, g la fonction $e \to f \nabla g(e) = \inf\limits_{u+v=e} (f(u)+g(v))$.

L'inf-convolution n'est pas nécessairement une fonction à valeur dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, la valeur $-\infty$ peut être prise même si f et g ne peuvent être égales à $-\infty$.

L'épigraphe strict de $f \nabla g$ est la somme des épigraphes stricts de f et de g.

Si f et g $\in \Gamma(E)$ et si $f \nabla g$ ne prend la valeur $-\infty$ alors $f \nabla g$ est une fonction convexe.

On dit que $f \in \Gamma(E)$ est <u>inf-compact</u> si pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ l'ensemble $S_\alpha = \{x \in E \mid f(e) \leq \alpha\}$ est compact.
Une fonction f inf-compact admet au moins un minimum.

Si f et g $\in \Gamma(E)$ f étant inf-compact et g bornée inférieurement, alors f+g est inf-compact et $f \nabla g$ est sci, bornée inférieurement et l'inf-convolution est <u>exacte</u> (la borne inférieure dans la définition de l'inf-convolution est atteinte).

Soient E, E' un système d'espaces vectoriels en dualité séparante, on vérifie immédiatement que $(f \nabla g)^* = f^* + g^*$ si f et g ne sont pas identiquement $+\infty$.

Si on applique cette formule à f^* et g^* on a $(f^* \nabla g^*)^* = f^{**} + g^{**}$.
Si on suppose f et g $\in \Gamma_o(E)$ alors $(f^* \nabla g^*)^* = f+g$ en considérant les polaires de cette égalité on déduit $(f^* \nabla g^*)^{**} = (f+g)^*$, mais nous ne savons pas si $(f^* \nabla g^*)^{**} = f^* \nabla g^*$ puisque l'inf-convolution de deux fonctions sci n'est pas nécessairement sci.

Mais nous savons le résultat suivant : Moreau [1967] :
Si f et g $\in \Gamma_o(E)$, f est finie en x_o, g finie et continue en x_o alors l'inf-convolution $f^* \nabla g^*$ est exacte et nous avons $(f+g)^* = f^* \nabla g^*$.

II.8 - <u>Sous gradient</u>

Soit une fonction f, $e' \in E'$ est un sous-gradient de f en x_o si f est finie en x_o et si pour tout $e \in E$ nous avons $f(e) \geq f(x_o) + \langle e', e - x_o \rangle$.

L'ensemble des sous-gradients de f en x_o est appelé <u>sous-différentiel</u> de f en x_o <u>et est noté $\partial f(x_o)$</u> .

Le sous-différentiel de f en x_o peut être éventuellement vide.

L'ensemble des points où une fonction <u>f atteint son minimum</u> est l'ensemble des x_o où $\partial f(x_o) \ni 0$:

Si $f \in \Gamma_o(E)$ cet ensemble des points où f est minimum le sous-différentiel $f^*(0)$ de f^* en $0 \in E'$.

Nous avons le résultat de Moreau : si f et $g \in \Gamma_o(E)$ sont finies en x_o et g est continue en x_o, pour tout $e \in E$ où $\partial f(e)$ et $\partial g(e)$ ne sont pas vides, alors $\partial f(e)+\partial g(e) = \partial(f+g)\ (e)$.

Pour l'inf-convolution, nous avons ce résultat : Joly [1970] :
<u>Si f et g $\in \Gamma_o(E)$ et si $\partial f(x) \cap \partial g(y) \neq 0$</u> alors on a :

i) <u>$f \nabla g(x+y) = \partial f(x) \cap \partial g(y)$</u>

ii) <u>pour tout couple x_1, y_1 tel que $x_1+y_1 = x+y$ alors l'ensemble $\partial f(x_1) \cap \partial g(y_1)$ est égal à : "si l'inf-convolution entre f et g est exacte en x_1+y_1 pour x_1 et y_1 alors $\partial f(x) \cap \partial g(y)$ sinon vide".</u>

II.9 - Une fonction f définie dans E est dite <u>inf-localement compacte</u> si pour tout $\alpha \in R$ l'ensemble $F_\alpha = \{e \in E \mid f(x) \leq \alpha\}$ est localement compact.

Une fonction est inf-localement compacte si et seulement si son épigraphe est dans $E \times R$ localement compact.

Un cas particulier de fonctions inf-localement compactes est celui des fonctions <u>inf-compactes pour une pente e'</u> (pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\{x \in E \mid f(x)-\langle e,e'\rangle \leq \alpha\}$ est compacte.)

Nous avons le résultat de Moreau [1964] :
Soit E,E' un couple d'espace vectoriel en dualité séparante, E muni de $\sigma(E,E')$ et E' de $\tau(E',E)$. Une fonction $f \in \Gamma_o(E)$ est inf-compacte pour la pente $e' \in E'$ si et seulement si f^* est finie et continue en e'.

Pour les fonctions inf-localement compactes nous avons le résultat Joly |1970| : si $f \in \Gamma_o(E)$ est inf-localement compact alors la variété affine V_{f^*} engendrée par $\mathrm{dom} f^*$ est de codimension finie et la restriction de f^* à V_{f^*} est continue pour la topologie induite par $\tau(E',E)$ en tout point appartenant à l'intérieur (relatif à V_{f^*}) du domaine de f^*.

Ainsi nous sommes amenés à la définition : soit E un espace vectoriel topologique, $f \in \Gamma(E)$ est dite <u>quasi-continue</u> en un point $x \in \mathrm{dom} f$, si la variété affine V_f engendrée par $\mathrm{dom} f$ est de codimension finie, et si la restriction de f à V_f est continue en x pour la topologie induite par celle de E.

On dit que deux fonctions f et $g \in \Gamma_o(E)$ forment un <u>couple uni</u> si tout hyperplan fermé qui sépare domf et domg les contient nécessairement.

On démontre Joly (1970) : soit E' muni de $\tau(E',E)$, soient f et g deux fonctions de $\Gamma_o(E)$, si f^* est quasi-continue et si le couple (f^*,g^*) est uni alors $f \nabla g$ est une fonction sci, l'inf-convolution est exacte et $f \nabla g \in \Gamma_o(E)$.

II.10 - Pour les sous-différentiels nous avons la propriété :

Avec les données précédentes <u>si f est quasi-continue et si le couple (f,g) est uni alors pour tout $x \in E$ on a</u> :

a) <u>$\partial(f+g)(x) = \partial f(x)+\partial g(x)$</u>

b) <u>l'inf-convolution de f^* et g^* est exacte en $z' = x'+y'$ pour x' et y' et $\partial(f^* \nabla g^*)(z') = \partial f^*(x') \cap \partial g^*(y')$.</u>

Nous en déduisons le résultat de caractérisation pour le minimum de la somme de deux fonctions convexes : sous les hypothèses précédentes <u>les x_o réalisant le minimum de $(f+g)(x)$ vérifient la multiéquation $\partial f(x_o)+\partial g(x_o) \ni 0$, et il existe x' tel que l'ensemble X_o de ces solutions soit égal à $\partial f^*(x') \cap \partial g^*(-x')$.</u>
<u>Pour tout $e' \in E'$ l'intersection $\partial f^*(e') \cap \partial g^*(-e')$ est soit vide soit égale à X_o.</u>

II-11 - Définition

Une fonction f *,définie dans un espace vectoriel* E*,est une fonction jauge si :*

α) f *prend ses valeurs dans* $[0,+\infty]$ *et* $f(0) = 0$

β) f *est positivement homogène (pour tout* $x \in F$ *et tout* $\lambda \in]0,+\infty[$ $f(\lambda x) = \lambda f(x)$).

γ) f *est convexe.*

L'ensemble des $e \in E$ tel que $f(x) \leq a$ $(a > 0)$ noté $f^{\leq a}$ est une partie convexe de E contenant l'origine. Réciproquement, considérons un convexe C de E contenant l'origine ; la fonction convexe $f(x) = \inf(\lambda \in [0,+\infty[\mid x \in \lambda C)$ est une fonction jauge (on pose $f(x) = \infty$ si quel que soit $\lambda \in [0,+\infty[$ $x \notin \lambda C$). C'est la seule fonction jauge f telle que $(f^{\leq 1}) = C$, cette fonction est dite fonction jauge de l'ensemble C.

Si le convexe C est équilibré et absorbant, la fonction jauge de C est alors une semi-norme. Ainsi une fonction jauge est une semi-norme si f est symétrique $f(x) = f(-x)$ et si $\mathrm{dom}(f) = E$.

Soit E, E' un couple d'espaces vectoriels en dualité séparante, soit M un sous-ensemble de E. Rappelons que le polaire M^0 de M est l'ensemble des $e' \in E'$ tel que $\langle e,e'\rangle \leq 1$ pour tout $e \in M$.

On vérifie facilement : que la fonction polaire d'une jauge est la fonction indicatrice de l'ensemble polaire de $(f^{\leq 1})$. Inversement la fonction polaire d'une fonction indicatrice d'un ensemble convexe contenant 0 est une fonction jauge.

Nous remarquons que si une jauge f est une norme, sa fonction polaire n'est pas la norme du dual fort de E mais est la fonction indicatrice de la boule unité du dual fort. Nous sommes ainsi amenés à introduire la notion de jauges conjuguées, ces jauges conjuguées ne sont pas fonctions polaires l'une de l'autre.

Définition

Soient E,E' *un couple d'espace en dualité, 2 jauges* p *et* q *dans* E *et* E' *sont dites conjuguées si les ensembles* $p^{\leq 1}$ *et* $q^{\leq 1}$ *sont fermés et polaires l'un de l'autre.*

II.11 - Proposition

L'inf-convolution $p \nabla q$ *de deux jauges* p *et* q *est une jauge.*

Démonstration

$p(e_1)$ et $q(e_2)$ étant positifs, il en est de même pour $p(e_1)+q(e_2)$ et ainsi pour $p \nabla q(e_1+e_2)$

$$p \nabla q(0) = \inf_{u+v=0} (p(u)+q(v)) = p(0)+q(0) = 0$$

si $\lambda > 0$

$$p(\lambda u)+q(\lambda u) = \lambda(p(u)+q(v))$$

donc

$$\inf_{u+v=e} \lambda(p(u)+q(v)) = \inf_{\lambda u+\lambda v=\lambda x} p(\lambda u)+q(\lambda v)$$

et

$$\lambda p \nabla q(e) = p \nabla q(\lambda e).$$

D'autre part l'inf-convolution conserve les fonctions convexes.

c.q. f.d.

Lemme

Soient A *et* B *deux cônes convexes ne contenant pas de droites, pour le cône* C *nous avons les propriétés équivalentes :*

α) C = A+B

β) C *est l'enveloppe convexe de* A *et* B

γ) *pour tout hyperplan fermé* P *tel que* A *et* B *soient dans un des demis espaces ouverts engendrés par le sous-espace vectoriel parallèle à* P, *et tel que* $P \cap A$ *et* $P \cap B$ *soient non vide, alors* C *est le cône engendré par l'enveloppe convexe de* $P \cap A$ *et* $P \cap B$.

$\alpha \Leftrightarrow \beta$ est connu, voir par exemple Bourbaki E.V.T.
Soient $a \in A$ et $b \in B$ et $C \in [a,b]$. Soit P un hyperplan vérifiant les hypothèses de γ alors Oa coupe P en a', Ob en b' et Oc en c' et $c' \in [a',b']$ donc $\beta \Rightarrow \gamma$. Inversement si $a' \in P \cap A$, $b' \in P \cap B$ et $c' \in [a',b']$ alors tout point c de la demi-droite Oc' peut s'écrire $c = a+b$ $a \in Oa'$ et $b \in Ob'$.

Proposition

La boule unité stricte de la jauge $p \nabla q$ *est l'enveloppe convexe des boules unités strictes des jauges* p *et* q.

Démonstration

L'épigraphe strict de $p \nabla q$ est la somme des épigraphes stricts de p et q c'est donc aussi l'enveloppe convexe de ces deux épigraphes. La boule unité stricte d'une jauge est l'intersection de l'hyperplan (E,1) dans $E \times \mathbb{R}$ avec l'épigraphe strict de cette jauge. Le plan (E,1) vérifiant les conditions γ du lemme ainsi $p \nabla q < 1$ est l'enveloppe convexe de $p < 1$ et $q < 1$.

c.q.f.d.

III - FONCTIONS HILBERTIENNES

III.1 - Fonctions quadratiques convexes

Soit E un espace vectoriel réel. Une forme quadratique sur E est une application de E dans $\mathbb{R}$ telle que $h(\lambda x) = \lambda^2 h(x)$ $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in E$, et l'application $x \to h(x+y)-h(x)-h(y)$ est une fonctionnelle linéaire quel que soit $y \in E$.

On associe à h la forme bilinéaire symétrique $\tilde{h}(x,y) = \frac{1}{2}(h(x+y)-h(x)-h(y))$. On a $h(x) = \tilde{h}(x,x)$.

La forme quadratique $x \to h(x)$ est convexe si et seulement si elle est positive (pour tout x, $h(x) \geq 0$).

Définition

On appelle fonction quadratique convexe une application h *de* E *dans* $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *dont le domaine est un sous-espace vectoriel de* E *et telle que sa restriction à ce domaine soit une forme quadratique positive.*

A une fonction quadratique convexe, on associe une forme bilinéaire $\tilde{h}$ définie pour x et $y \in \operatorname{dom} h$ par $\tilde{h}(x,y) = \frac{1}{2}(h(x+y)-h(x)-h(y))$.

On note Ker h l'ensemble $\{x \in E \mid h(x) = 0\}$, on a aussi $\operatorname{Ker} h = \{x \in \operatorname{dom} h \mid \tilde{h}(x,y) = 0 \text{ pour tout } y \in \operatorname{dom} h\}$.

III.2 - Fonction hilbertienne

Définition

Soit E *un espace localement convexe réel et séparé. On appelle fonction hilbertienne dans* E *une fonction quadratique, convexe et inf-faiblement compacte.*

On désigne par E' le dual de E, et par <e,e'> la forme bilinéaire mettant E et E' en dualité.

Pour une fonction hilbertienne l'ensemble Ker h qui est la tranche $h^{\leq 0}$, est faiblement compacte donc Kerh = 0, et la restriction de h à domh est une forme quadratique définie positive.

Nous remarquons qu'une fonction quadratique convexe est hilbertienne si et seulement si la tranche unité $h^{\leq 1} = \{x \in E \mid h(x) \leq 1\}$ est faiblement compacte.

Proposition

Le sous-espace de E, domh *muni de la forme hermitienne* $2\tilde{h}(x,y)$ *est un espace de Hilbert* $\mathcal{H}$ *et l'injection* j *de* $\mathcal{H}$ *dans* E *est continue.*

Démonstration :

Il suffit de voir que $\mathcal{H}$ est complet pour la norme $x \to h(x)$ (c'est une norme car Kerh = 0).

Montrons d'abord que j est continue, la boule unité de $\mathcal{H}$ est l'image d'elle même par j dans E, comme h est inf-faiblement compacte elle est faiblement compacte comme égale à $h^{\leq 1}$; ainsi elle est faiblement bornée dans E, donc bornée dans E, et l'injection j de $\mathcal{H}$ dans E est continue.

Soit x_n une suite de Cauchy de $\mathcal{H}$, comme l'injection est continue $j(x_n)$ est aussi une suite de Cauchy pour E muni de sa topologie ou de $\sigma(E,E')$. x_n est contenue dans $h^{\leq \alpha}$ donc comme cet ensemble est faiblement compact, elle admet une limite x qui appartient à $h^{\leq \alpha}$ donc à $\mathcal{H}$. x étant limite faible de x_n, sera aussi limite de x_n pour la topologie de $\mathcal{H}$

c.q.f.d.

III.3 - Sous-espace hilbertien

L. Schwartz [1964] définit un sous-espace hilbertien $\mathcal{H}$ de E comme un sous-espace vectoriel de E muni d'une structure hilbertienne tel que l'injection $j : \mathcal{H} \to E$ soit continue.

Proposition

L'application qui a une fonction hilbertienne h *associe le sous-espace hilbertien* $\mathcal{H} = (\mathrm{dom}h, \tilde{h})$ *de* E *est une bijection de l'ensemble* $\Gamma_{\mathrm{Hilb}}(E)$ *des fonctions hilbertiennes dans* E *, sur l'ensemble* Hilb(E) *des sous-espaces hilbertiens de* E.

La correspondance qui à une fonction hilbertienne h associe le sous-espace hilbertien de E, domh muni de la forme hermitienne $2\tilde{h}(x,y)$ est évidemment injective. Inversement soit $\mathcal{H}$ un sous-espace hilbertien de E, définissons la fonction quadratique convexe $h(e) =$ si $e \in \mathcal{H}$ alors $\frac{1}{2}\,\|e\|^2_{\mathcal{H}}$ sinon $+\infty$, $\|e\|^2_{\mathcal{H}}$ désigne la norme de $\mathcal{H}$. L'injection $j : \mathcal{H} \to E$ est une fonction continue de $\mathcal{H}$ dans E donc faiblement continue. Elle transforme la boule unité de $\mathcal{H}$ qui est faiblement compacte en la tranche unité de h ($h^{\leq 1}$), comme l'image d'un compact par une application continue est compacte, $h^{\leq 1}$ est compact dans E muni de $\sigma(E,E')$, ainsi h est hilbertienne.

c.q.f.d.

III.4 - Sous-différentiel d'une fonction hilbertienne

Proposition

Soit une fonction hilbertienne h *dont le domaine est* E *entier ; si on munit* E *de la topologie définie par* h, *alors* h *est sous-différentiable en chaque point* x *de* E *et le sous-différentiel est formé du seul élément* $e \to 2\tilde{h}(x,e)$.

La fonctionnelle liénaire $e \to \tilde{h}(x,e)$ dans $\mathcal{H}$ est continue pour tout $x \in E$, car $|\tilde{h}(x,e)| \leq \sqrt{h(x)h(e)}$.
On a $h(x+e) = \tilde{h}(x+e,x+e) = h(x)+h(e)+2\tilde{h}(x,e)$ et $h(e) \geq 0$ quel que soit $e \in \mathcal{H}$ donc $h(x+e) \geq h(x)+2\tilde{h}(x,e)$ et $e \to 2\tilde{h}(x,e)$ est un sous-gradient de h en x. Montrons que c'est le seul.

Supposons qu'il existe un autre sous-gradient e' en x de h.
S'il est distinct de $e \to \tilde{h}(x,e)$, il existe $y \in E$ $y \neq x$ tel que $\langle y,e'\rangle > 2\tilde{h}(x,y)$.
On a

$$h(x+\lambda y) = h(x)+h(\lambda y)+2\tilde{h}(x,\lambda y) \geq h(x)+\langle\lambda y,e'\rangle$$

d'où

$$h(\lambda y)+2\tilde{h}(x,\lambda y) \geq \langle\lambda y,e'\rangle$$

$$\lambda h(y)+2\tilde{h}(x,y) \geq \langle y,e'\rangle$$

Nous pouvons prendre λh aussi petit que l'on veut. Donc

$$2\tilde{h}(x,y) \geq \langle y,e'\rangle \text{ en contradiction avec } \langle y,e'\rangle > 2\tilde{h}(x,y).$$

c.q.f.d.

Proposition

Une fonction hilbertienne h *admet un sous-différentiel non vide en tout point* $x \in \text{dom}h$, *où la fonctionnelle* $e \to 2\tilde{h}(x,e)$ *sur* domh *est continue pour la topologie induite par* E. *Le sous-différentiel est formé des fonctionnelles continues qui prolongent* $e \to 2\tilde{h}(x,e)$ *à tout* E *entier.*

Si $e' \in \partial h(x)$, la restriction de e' à domh est continue pour la topologie de $\mathcal{H}$. Elle est un sous-différentiel pour h définie dans $\mathcal{H}$, donc cette restriction coïncide avec $e \to 2\tilde{h}(x,e)$. Inversement supposons que la forme linéaire sur domh $e \to 2\tilde{h}(x,e)$ soit continue pour la topologie induite par E, alors prolonge en une forme linéaire continue a E tout entier (corollaire de Hahn-Banach), qui est un sous-gradient en x de h définie dans E.

c.q.f.d.

Si h admet en x un sous-différentiel non vide, ce sous-différentiel est défini à un élément de $(\mathrm{domh})^0$ près ($(\mathrm{domh})^0$ étant le polaire de domh pour E). En particulier <u>si domh est dense dans E, le sous-différentiel de h est formé d'un seul élément</u> au plus.

Si h est <u>sous-différentiable en deux points distincts x et $y \in$ domh alors $\partial h(x)$ et $\partial h(y)$ sont disjoints.</u>
En effet, comme la restriction d'un élément de $\partial h(x)$ et de $\partial h(y)$ à domh est égale à $e \to 2\tilde{h}(x,e)$ et $e \to 2\tilde{h}(y,e)$, nous devrions avoir pour tout $e \in$ domh $\tilde{h}(x-y,e) = 0$, ce qui n'est possible que si $x = y$ puisque Kerh = 0.

III.6 - <u>Polaire d'une fonction hilbertienne</u>

L. Schwartz (1964) a introduit la notion de noyau associé à un sous-espace hilbertien $\mathcal{H}$ de E. Désignons par $\mathcal{H}'$ et E' les duaux de $\mathcal{H}$ et E. La transposée de l'injection j de $\mathcal{H}$ dans E est une application ${}^tj$ de E' dans $\mathcal{H}'$ d'image dense dans $\mathcal{H}'$. Désignons par Λ l'isomorphisme canonique de $\mathcal{H}'$ dans $\mathcal{H}$. Nous avons ainsi si $x \in \mathcal{H}$ et $x' \in \mathcal{H}$ $\tilde{h}(x,\Lambda x') = \langle x,x'\rangle_{\mathcal{H}}$ $[\langle,\rangle_{\mathcal{H}}$ désigne la dualité entre $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}']$. Considérons l'application $j_o\Lambda_o{}^tj$. C'est une application de E' dans E appelée <u>noyau</u> et désignée par $H = j_o\Lambda_o{}^tj$.

Le noyau H est caractérisé par la propriété: pour tout $x \in \mathcal{H}$ et pour tout $e' \in E'$ alors $2\tilde{h}(x,He') = \langle x,e'\rangle$.

Nous avons les propriétés suivantes :

- pour tout e' et $f' \in E'$ $\quad 2\tilde{h}(He',Hf') = \langle Hf',e'\rangle = \langle He',f'\rangle$
- pour tout $e' \in E'$ et $e' \neq 0$ $\quad h(He') = \frac{1}{2}\langle He',e'\rangle > 0$.
- $H(E')$ est dense dans $\mathcal{H}$.

<u>*Proposition*</u>

La fonction polaire d'une fonction hilbertienne h *est une fonction quadratique convexe* $h^*(e')$ *de domaine* E', $h^*(e') = \frac{1}{2}\langle e',He'\rangle$ *et* h^* *est continue pour* $\tau(E',E)$.

$$h^*(e') = \sup_{e\in E}(\langle e,e'\rangle - h(e)) = \sup_{x\in\mathcal{H}}(\langle x,e'\rangle - h(x))$$

Or nous avons $\langle x,e'\rangle = 2\tilde{h}(x,He')$

ainsi

$$h^*(e') = \sup_{x\in\mathcal{H}}(2\tilde{h}(x,He') - h(x))$$

$$= \sup_{x\in\mathcal{H}}(\tilde{h}(x,2He'-x))$$

Remarquons que si x et $y \in \mathcal{H}$ on a

$$\tilde{h}(x,2y-x) = h(y)-h(x-y)$$

en effet

$$h(x-y) = \tilde{h}(x-y,x-y) = h(x)-h(y)-2\tilde{h}(x,y)$$

$$= h(y)-\tilde{h}(x,2y-x).$$

Ainsi

$$h^*(e') = \sup_{x\in\mathcal{H}}(h(He')-h(He'-x)) = h(He')$$

car $h(He') \geq 0$, d'où $h^*(e') = \frac{1}{2}\langle He',e'\rangle$.

Ainsi $h^*(e')$ finie pour tout e', est bien une fonction quadratique convexe. La fonction h étant inf-faiblement compacte, h^* est $\tau(E',E)$, continue en 0, comme h^* est convexe elle est aussi $\tau(E',E)$ continue en tout point intérieur à son domaine qui est E.

c.q.f.d.

Proposition

Soit h *une fonction hilbertienne dans* E, h^* *sa fonction polaire alors* $\partial h^*(e') = \{H(e')\}$.

Le calcul mené à la proposition III.4, est encore valable pour la fonction quadratique convexe $h^*(e') = \frac{1}{2} \langle He',e' \rangle$ et son sous-différentiel sera en e' réduit à un seul élément, la forme linéaire sur E' $e' \to \langle He',e' \rangle$ ainsi $\partial h^*(e') = \{H(e')\}$.

c.q.f.d.

Ainsi cette proposition nous donne une nouvelle caractérisation du noyau H comme sous-différentiel de la fonction polaire de h.

III.7 - Isomorphisme entre noyaux positifs et fonctions hilbertiennes

Proposition

L'application $H : E' \to E$ *(noyau associé à une fonction hilbertienne* h*) est une application compacte de* E' *muni de* $\tau(E',E)$ *dans* E *muni de* $\sigma(E,E')$.

Il existe un voisinage V de 0 dans E' pour la topologie $\tau(E',E)$ sur lequel h^* est majoré par 1, car h^* est continue sur $\tau(E',E)$ en 0.

De l'inégalité de Schwartz :

$$|\langle He,f'\rangle| = \sqrt{\langle He',e'\rangle}\ \sqrt{\langle Hf',f'\rangle}$$, on déduit que si e' et f'

appartiennent à V alors $|\langle He',f'\rangle| \leq 1$; ainsi nous avons $H(V) \subset V^0$ polaire de V qui est un compact pour $\sigma(E,E')$.
Ainsi H est bien une application compacte. H(V) est ici relativement compacte.

c.q.f.d.

Ainsi H est τ-σ continue donc σ-σ continue.

Proposition

Soit H *une application de* E' *dans* E *linéaire symétrique positive et compacte pour* $\tau(E',E)$ *et* $\sigma(E,E')$. *On peut lui associer une fonction hilbertienne dans* E *dont elle soit le noyau.*

Nous lui associons la forme bilinéaire symétrique sur E', $(e',f') \to \langle He',f'\rangle$, positive. Montrons qu'elle est continue sur $E' \times E'$ muni de $\tau(E',E)$. Soit V tel que H(V) soit faiblement relativement compact, H(V) est ainsi inclus dans un ensemble S faiblement compact dans E.

S^0 est un voisinage de O pour $\tau(E',E)$; soit $W = V \cap S^0$ nous avons $|\langle He',f'\rangle| \leq 1$ si $e' \in W$ et $f' \in W$. Donc cette application est bornée sur $W \times W$, et ainsi est $\tau(E',E)$ continue. Donc $h' : e' \to \frac{1}{2}\langle He,e'\rangle$ est une fonction convexe quadratique, continue pour $\tau(E',E)$ définie sur tout E'.

Calculons la fonction polaire h'^* de h'. En $e = H(e')$, $h'^*(e) = h'^*(He') = \frac{1}{2}\langle He',e'\rangle$ (vérification analogue au calcul de la proposition III.6). Ainsi sur H(E) h'^* est quadratique convexe.

Si $e \notin (\mathrm{Ker}H)^0$ on a $h'^*(e') = +\infty$.

H est symétrique $\langle He',f'\rangle = \langle Hf',e'\rangle$ donc $H = {}^tH$ et nous avons $H(E')$ est faiblement dense dans $(\mathrm{Ker}H)^0$.
h'^* est sci comme duale de h' ainsi $e \in (\mathrm{Ker}H)^0$

$$h'^*(e) = \lim_{\substack{f\to e \\ f\in H(E')}} \inf(h'^*(f))$$

et h'^* est une fonction convexe quadratique. Elle est inf-faiblement compacte parce que h' est τ-continue ainsi h'^* est hilbertienne. Remarquons que $h'^*(e')$ peut être infini même si $e \in (\mathrm{Ker}H)$

c.q.f.d.

En résumant les résultats précédents : nous avons construit des bijections entre l'ensemble des sous-espaces hilbertiens Hilb(E), l'ensemble $\Gamma_{\mathrm{Hilb}}(E)$ des fonctions hilbertiennes dans E, l'ensemble des fonctions définies sur tout E' quadratiques convexes continues pour $\tau(E',E)$ et l'ensemble des noyaux de E (applications linéaires de E' dans E, symétriques positives et τ-σ compacte).

Ces bijections apparaissent comme des isomorphismes lorsqu'on munit ces ensembles des structures algébriques suivantes :

Sur Hilb(E) L. Schwartz (1964) définit l'opération $\oplus$
si $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2 \in$ Hilb(E), $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ est le sous-espace vectoriel $\mathcal{H}_1+\mathcal{H}_2$ de E dont la norme est donnée par

$$\|h\|^2_{\mathcal{H}_1+\mathcal{H}_2} = \inf_{h_1+h_2=h} (\|h_1\|^2_{\mathcal{H}_1} + \|h_2\|^2_{\mathcal{H}_2}).$$

Sur les fonctions hilbertiennes nous considérons l'inf-convolution.
Sur les fonctions quadratiques convexes définies sur E' et τ-continue nous considérons la somme habituelle.
Sur l'ensemble des noyaux nous considérons la somme habituelle des applications linéaires.
Si nous supposons que E est quasi-complet, les noyaux symétriques positifs sont en correspondance avec les fonctions hilbertiennes, car l'hypothèse de compacité est automatiquement vérifiée.

IV - FONCTIONS SEMI-HILBERTIENNES

IV.1 - Considérons une fonction h quadratique convexe telle que Kerh $\neq \{0\}$. Considérons le quotient de E par Kerh, nous avons $\hat{E}$ = E/Kerh, la fonction h(x) est constante sur toute classe de $\hat{E}$ ainsi nous pouvons passer au quotient par Kerh et nous définissons ainsi : $\dot{h}(\dot{x}) = h(x)$ où $\dot{x} \in E/\mathrm{kerh}$ et $x \in \dot{x}$. On vérifie immédiatement si $x \in \dot{x}$ et $y \in \dot{y}$ que $\tilde{\dot{h}}(\dot{x},\dot{y}) = \tilde{h}(x,y)$. Nous pouvons munir domh de la semi-norme $x \to \sqrt{2h(x)}$. Nous obtenons un espace préhilbertien non séparé.

Définition

Soit E *un espace localement convexe séparé. On dit qu'une fonction quadratique convexe* h *dans* E *est semi-hilbertienne si :*

i) Kerh *est fermé dans* E

ii) $\dot{h}$ *est une fonction hilbertienne dans* E/Kerh.

L'hypothèse Kerh fermée résulte de ce que l'on munit E/Kerh de la topologie quotient ainsi l'image réciproque de 0 doit être fermée.

A $\dot{h}$, on associe ainsi un sous-espace hilbertien $\dot{\mathcal{H}}$ de $\dot{E}$.

IV.2 - Sous-différentiel d'une fonction semi-hilbertienne

Nous avons le même résultat que pour les fonctions hilbertiennes :

Proposition

Une fonction semi-hilbertienne h *admet un sous-différentiel non vide, en tout point* $x \in$ domh *où la forme linéaire* $e \to 2\tilde{h}(x,e)$ *sur* domh *est continue pour la topologie induite par* E. *Le sous-différentiel est formé des formes linéaires continues prolongeant* $e \to 2\tilde{h}(x,e)$ *à tout* E .

Comme dans le cas hilbertien nous avons $\partial h(x)$ défini à un élément de $(\mathrm{dom}h)^0$ près, en particulier si domh est dense dans E, alors $\partial h(x)$ est réduit à un élément unique. Par contre, nous n'avons pas la même propriété du cas hilbertien où si $x \neq y$ $\partial h(x) \neq \partial h(y)$. Ici si deux éléments x et y sont tels que $x-y \in \mathrm{Ker}h$ alors $\partial h(x) = \partial h(y)$.

IV-3 - Polaire d'une fonction semi-hilbertienne

Soit φ l'application canonique de E sur $\dot{E} = E/\mathrm{Ker}h$; ${}^t\varphi$ est une injection de $(E/\mathrm{Ker}h)' = \dot{E}'$ et l'on a ${}^t\varphi(\dot{E}') = (\mathrm{Ker}h)^0$, cette injection est un isomorphisme de E' sur $(\mathrm{Ker}h)^0$ ainsi nous pouvons identifier $\dot{E}'$ à $(\mathrm{Ker}h)^0$ et ${}^t\varphi$ est alors l'injection de $(\mathrm{Ker}h)^0$ dans E'.

Proposition

La fonction polaire d'une fonction semi-hilbertienne est une fonction quadratique convexe $h^*(e')$ *dont le domaine est le sous-espace* $(\mathrm{Ker}h)^0$ *de* E', *elle coïncide sur ce domaine avec la polaire* $\dot{h}^*(e')$ *de* $\dot{h}$ *(fonction hilbertienne dans* E/Kerh*) et elle est continue pour la topologie* $\tau((\mathrm{Ker}h)^0, E/\mathrm{Ker}h)$.

En effet, $h = \dot{h} \circ \varphi$, il suffit d'appliquer le résultat II.6 donnant la polaire d'une fonction composée en posant $F = E/\mathrm{Ker}h$.

c.q.f.d.

Si $\dot{H}$ est le noyau de $\dot{h}$ alors $\dot{H}$ est une application de $(\mathrm{Ker}h)^0$ dans $\dot{E}$. Considérons la multiapplication $H = \varphi^{-1} \circ \dot{H}$ qui à $e' \in (\mathrm{Ker}h)^0$ associe l'ensemble des éléments de la classe $\dot{H}(e')$, nous avons une multiapplication de $(\mathrm{Ker}h)^0$ dans E définie à un élément de Kerh près. Si $\langle\langle , \rangle\rangle$ désigne la dualité entre $(\mathrm{Ker}h)^0$ et $\dot{E}$ nous avons

$<He',f'> = \ll \dot{H}e',f'\gg$ où e' et $f' \in (Kerh)^0$.

Nous avons si $e' \in (Kerh)^0$ alors $h^*(e') = \frac{1}{2} <He',e'>$.

H est dit le multinoyau de la fonction semi-hilbertienne h. De même que pour les fonctions hilbertiennes le multinoyau est caractérisé par la propriété que pout tout $x \in$ domh et $e' \in (Kerh)^0$ nous avons $2\tilde{h}(x,He') = <x,e'>$. Nous avons aussi les propriétés :

- pour tout e' et $f' \in (Kerh)^0$ $<Hf',e'> = <He',f'>$

- pour tout $e' \in E'$ et $e' \neq 0$ $h(He') = \frac{1}{2}<He',e'> > 0$

L'application $\dot{H} = \varphi \circ H$ de $(Kerh)^0$ dans E/Kerh est compacte pour $(Kerh)^0$ muni de $\tau((Kerh)^0,E/kerh)$ et E/Kerh muni de $\sigma(E/Kerh,(Kerh)^0)$.

La fonction h^* restreinte à $(Kerh)^0$ coïncide avec $\dot{h}^*$. Ainsi un élément $\partial h^*(e')$ sera un prolongement à E' d'un élément de $\partial\dot{h}^*(e')$. Or $\partial\dot{h}^*(e') = \dot{H}(e')$ et un élément de H(e') est bien un prolongement à E' d'un élément de $\dot{H}(e')$ et nous obtenons finalement :

Le sous-différentiel $\partial h^*(e')$ en un point $e' \in (Kerh)^0$ est l'ensemble des éléments de H(e').

En étendant les résultats de III.7 au cas des fonctions semi-hilbertiennes : la correspondance associant à une fonction semi-hilbertienne son multinoyau établit une bijection entre l'ensemble des fonctions semi-hilbertiennes dans E et l'ensemble des multinoyaux de E.

L'ensemble des multinoyaux est l'ensemble des multiapplications H linéaires définies sur un sous-espace V de E' à valeurs dans E' définies à un élément de V^0 près.

Elles possèdent en plus les propriétés :

- symétrie $\langle He',f'\rangle = \langle Hf',e'\rangle$ e' et $f' \in V$.

- positivité $\langle He',e'\rangle > 0$ si $e' \neq 0$ et $e' \in V$.

- $\chi \circ H$ est une application de V dans E/V^0 (χ étant la projection canonique de E sur E/V^0) compacte pour V muni de $\tau(V,E/V^0)$ et E/V^0 muni de $\sigma(E/V^0,V)$.

CHAPITRE - II

APPLICATIONS DES FONCTIONS SEMI-HILBERTIENNES A L'ANALYSE NUMERIQUE

Les fonctions spline ont été introduites par Schoenberg [1946], de nombreux auteurs ont travaillé depuis cette question : Ahlberg - Nilson-Walsh, Atteia, Birkoff, de Boor, Carasso, Golomb, Joly, Laurent, Meier-Scharma, Schoenberg, Schumaker, Schultz-Varga,... Atteia [1966] a généralisé la notion de fonctions spline pour un opérateur T d'un espace de Hilbert X sur un espace de Hilbert Y, puis [1968] a utilisé la théorie des sous-espaces hilbertiens pour traiter les fonctions spline. Au § 1 nous donnons une présentation des fonctions spline en utilisant les fonctions convexes et les fonctions semi-hilbertiennes. Cette théorie permet d'obtenir naturellement les équations que vérifient les fonctions spline. Nous donnons divers exemples à une variable § 3 et à plusieurs variables § 5. Nous étudions au § 2 le procédé d'interpolation défini par les fonctions spline minimisant une fonction semi-hilbertienne h, en particulier le rôle joué par la condition de Haar sur Kerh. Nous donnons au § 4 des exemples de fonctions spline, lorsque la condition de Haar n'est pas vérifiée pour Kerh, ou lorsque KerH $\neq 0$ ($H = \partial h^*$) et montrons ainsi les cas "pathologiques" qu'ils peuvent présenter.

Nous consacrons le § 6 à l'étude de la théorie de Sard [1963] sur l'approximation optimale de formes linéaires. Par l'utilisation des fonctions semi-hilbertiennes et de leur dualité, nous retrouvons les résultats de Schoenberg [1964] et Golomb |1958|, où l'approximation optimale d'une forme linéaire exacte sur certaines fonctions, revient à appliquer la forme linéaire à des fonctions spline.

Ayant un procédé d'interpolation, nous nous posons ensuite la question de savoir s'il peut être interprété comme minimisation d'une certaine fonction semi-hilbertienne ? Nous donnons des conditions pour qu'il en soit ainsi et des exemples où nous avons ces conditions vérifiées.

I - UTILISATION DES FONCTIONS SEMI-HILBERTIENNES POUR L'ETUDE DE FONCTIONS SPLINE GENERALES

Soient E un espace vectoriel topologique, h une fonction semi-hilbertienne dans E et χ une fonction convexe dans E.

I.1 - Problème

On dit que σ *est une fonction spline si elle minimise la fonction convexe* $g(u) = h(u)+\chi(u) \quad (u \in E)$.

On retrouve le cas des fonctions spline formulé par Atteia |1966|. Soient X et Y 2 espaces de Hilbert, T une application linéaire continue de X sur Y, G un sous-ensemble convexe de X ; σ est l'élément de G, si il existe minimisant $\|Tx\|_Y$ pour x parcourant G. Prenons $X \subset E$ l'injection étant continue (sous-espace hilbertien de E) et posons pour $x \in E$: $h(x) =$ si $x \in X$ alors $\|Tx\|_Y$ sinon $+\infty$, h est une fonction semi-hilbertienne dans E ; posons $\chi = \Psi_G$ fonction indicatrice de l'ensemble G. Nous voyons que notre formulation du problème traduit en termes de fonction semi-hilbertienne le problème de fonctions spline formulé par Atteia.

D'après les propriétés de la dualité et des sous-différentiels, l'ensemble des solutions du problème I.1 est $\partial g^{*}(0)$, c'est aussi l'ensemble des solutions de la multi-équation $\partial g(\sigma) \quad 0$.

Utilisant les résultats du chapitre I.I.10 nous obtenons :

I.2 - *Proposition*

Soient h *et* $\chi \in \Gamma_0(E)$. *Supposons que l'une de ces 2 fonctions soit quasi-continue et que le couple* (h,Ψ) *soit uni. L'ensemble* Σ *des solutions du problème I.1 est égal à* $\partial h^{*}(s) \cap \partial^{*}(-s)$, *où* s *est un élément quelconque parmi* $u \in E'$ *et pour lesquels* $\partial h^{*}(u) \cap \partial\chi^{*}(-u) \neq \emptyset$.

Σ *est aussi l'ensemble des* $\sigma \in E$ *tel que* $\partial h(\sigma)+\partial\chi(\sigma)$ *contienne l'élément nul de* E'.

Remarquons que ∂h^* est le multinoyau H de la fonction semi-hilbertienne h. Ainsi toute solution du problème I.1 est un élément du multinoyau H pour un s bien choisi. Cet élément appartient aussi à $\partial\chi^*(-s)$; nous explicitons plus loin cet ensemble dans le cas de l'interpolation généralisée.

En général dans un problème de fonction spline, h est donné sur domh, mais nous avons le choix de E. Nous choisissons E, d'une part de façon à ce que les conditions de quasi-continuité et de couple uni soient vérifiées. D'autre part, nous remarquons que H est définie sur le polaire de Kerh dans E'. Nous avons donc intérêt à choisir E' le plus petit possible, car alors nous aurons à connaître H sur un ensemble plus petit.

I.3 - Fonction spline d'interpolation généralisée

Ce cas correspond à χ fonction indicatrice de l'ensemble f+A translaté du sous-espace vectoriel A de E avec $f \in E$. Cet ensemble sera noté aussi A_f et sa fonction indicatrice Ψ_{A_f}, Ψ_A est donc la fonction indicatrice de A.

Si Ψ_A est la fonction indicatrice du sous-espace vectoriel A, alors Ψ_A^* est la fonction indicatrice de $(A)^0$ (polaire dans E' de A), nous avons

$$\partial\Psi_A(u) = \text{si } u \in A \text{ alors } A^0 \text{ sinon } \emptyset$$

$$\partial\Psi_A^*(v) = \text{si } v \in A^0 \text{ alors } A \text{ sinon } \emptyset$$

Remarquons que $\Psi_{A_f}(u) = \Psi_A(u-f)$, alors $\Psi_{A_f}^*(v)$ est la fonction d'appui de l'ensemble A_f qui s'explicite

$$\Psi_{A_f}^*(v) = \text{si } v \in A^0 \text{ alors } \langle v,f\rangle \text{ sinon } +\infty$$

nous avons

$$\partial\Psi_{A_f}(u) = \text{si } u \in f+A \text{ alors } A^0 \text{ sinon } \emptyset$$

$$\partial\Psi_{A_f}^*(v) = \text{si } v \in A^0 \text{ alors } f+A \text{ sinon } \emptyset.$$

Appliquant la proposition 1.2 nous avons :

1.4 - *Proposition*

Dans le cas de $\chi = \Psi_{A_f}$ *, alors les solutions du problème I.1 sont les éléments de* $H(v)$*, où* v *parcourt le polaire* A^0 *de* A*, appartenant à* $f+A$. *Ce sont aussi les solutions appartenant à* $f+A$ *de l'équation* $\partial h(u) \ni b$ *où* b *parcourt le polaire* A^0 *de* A.

Voyons ce qu'il faut supposer pour que le couple de fonction h et $\Psi_{A,f}$ soit uni. En effet, domh et $\mathrm{dom}\Psi_{A_f} = f+A$ sont deux variétés affines. Si domh $\cap$ dom $\Psi_{A_f} = \emptyset$ alors la somme des deux fonctions est la fonction $+\infty$. Nous supposerons donc que domh $\cap$ dom $\Psi_{A,f} \neq \emptyset$. Soit x un élément de cet ensemble. Soit un hyperplan séparant domh de $\mathrm{dom}\Psi_{A,f}$, toute droite passant par x et située dans un demi-espace déterminé par cet hyperplan est complètement contenue dans cet hyperplan. Or tout point de domh et $\mathrm{dom}\Psi_{A,f}$ est situé sur une droite joignant x et situé dans ces domaines. Ainsi domh et $\mathrm{dom}\Psi_{A_f}$ sont dans cet hyperplan les séparant.

1.5 - Un cas intéressant correspond à A de codimension finie dans E, c'est-à-dire défini par un nombre fini de formes linéaires continues sur $\mathcal{H} = \mathrm{domh}$, $\ell_1,\dots,\ell_n$ avec

$$A = \{u \in \mathrm{domh} \mid \langle \ell_i, u\rangle = 0,\ 1 \leq i \leq n\}$$

alors

$$A_f = \{u \in \mathrm{domh} \mid \langle \ell_i, u\rangle = \langle \ell_i, f\rangle \quad 1 \leq i \leq n\}.$$

Nous choisissons l'espace vectoriel topologique E de façon à ce que les fonctionnelles linéaires ℓ_i puissent se prolonger en $\bar{\ell}_i$ à E, c'est-à-dire $\bar{\ell}_i \in E'$. Ceci impose une restriction sur E par exemple considérons domh $= H^k[a,b]$, $\ell_i = \delta'_{\alpha_i}$, $\alpha_i \in [a,b]$, nous ne pouvons pas choisir pour E l'espace de toutes les fonctions définies sur $[a,b]$, δ'_α n'étant prolongeable à cet espace.

Dans ce cas nous pouvons remplacer A par A'

$A' = \{u \in E \mid \langle \bar{\ell}_i, u\rangle = 0 \quad 1 \leq i \leq n\}.$

Il est évident que $A' \cap \mathrm{dom}h = A$ donc la minimisation de $g = h+\Psi_A$ où $g' = h+\Psi_{A'}$ est exactement le même problème. Le sous-espace A' est engendré par les n vecteurs $\bar{\ell}_1,\ldots,\bar{\ell}_n$ de E'.

A est de codimension finie dans E, donc Ψ_{A_f} est une fonction quasi continue et comme le couple (h,Ψ_{A_f}) est uni, en appliquant la proposition 1.3 nous obtenons :

<u>L'ensemble Σ des solutions du problème I.1, pour $h + \Psi_{A_f}$ est formé des éléments σ de $H(v)$ où v est une combinaison linéaire de $\bar{\ell}_1,\ldots,\bar{\ell}_n$, vérifiant $\langle \bar{\ell}_i,\sigma\rangle = \langle \ell_i, f\rangle \quad 1 \leq i \leq n$.</u>

<u>Σ est aussi l'ensemble des solutions σ des équations $\partial h(u) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \bar{\ell}_i$ (λ_i parcourant R) vérifiant $\langle \bar{\ell}_i,\sigma\rangle = \langle \ell_i,f\rangle \quad 1 \leq i \leq n$.</u>

Dans de nombreux cas d'utilisation, domh est dense dans E de sorte que si ℓ_i peut se prolonger en h_i alors $\bar{\ell}_i$ est unique, et souvent par abus de notation nous écrirons encore ℓ_i au lieu de $\bar{\ell}_i$.

I.6 - <u>Etude du cas $h(u) = \int_a^b (u^k(t))^2dt$.</u>

Considérons l'espace $H^k|a,b|$ et la fonction semi-hilbertienne $h(u) = \int_a^b (u^{(k)}(t))^2dt$ dont Kerh = ensemble des polynômes de degré k-1. Soient n formes linéaires $\ell_i \quad 1 \leq i \leq n$ continues sur $H^k|a,b|$, le problème de fonctions splines consiste à chercher une fonction minimisant h parmi les fonction u de $H^k|a,b|$ vérifiant $\langle \ell_i,u\rangle = \alpha_i \quad 1 \leq i \leq n$ (α_i n valeurs données).

Comme a priori nous ne restreignons pas le choix des ℓ_i, nous prenons $E = H^k|a,b| \quad E' = (H^k|a,b|)'$.

Pour appliquer les résultats I.4 et I.5, nous allons préciser ∂h et le multinoyau $H = \partial h^*$. Comme Kerh est l'ensemble des polynômes de degré $k-1$, h^* est définie sur l'ensemble des $\ell \in (H^k[a,b])'$ qui s'annulent sur les polynômes de degré $k-1$, et H définie sur domh^*, sera une multiapplication déterminée à un polynôme de degré $k-1$ près.

Calcul de $\partial h(u)$

$h(u)$ étant une fonction semi-hilbertienne

$$\partial h(u) = \{v \to 2\tilde{h}(u,v)\}$$

$$\partial h(u) = \{v \to 2 \int_a^b u^{(k)}(t)v^{(k)}(t)dt\}$$

Prenons $\varphi \in \mathcal{D}(]a,b[)$ (fonction indéfiniment dérivable à support compact) et calculons $\langle \partial h(u),\varphi\rangle$

$$\langle \partial h(u),\varphi\rangle = \langle u^{(k)},\varphi^{(k)}\rangle = (-1)^k \langle D^{2k}u,\varphi\rangle \ ,$$

$D^{2k}u$ indiquant la dérivée au sens des distributions sur $(]a,b[)$. Ainsi nous arrivons à exprimer la restriction de $\partial h(u)$ à $\mathcal{D}(]a,b[)$, mais nous n'obtenons pas les valeurs de $\partial h(u)$ sur $H^\alpha[a,b]$.

I.7 - Principe de la méthode de la caractérisation des fonctions spline

Grâce au calcul précédent nous exprimons que la fonction spline σ vérifie un système différentiel mais ce système n'est pas suffisant pour déterminer σ . Ensuite nous prouvons que toute solution de ce système vérifie certaines conditions de régularité si ℓ_i les vérifient. Ensuite nous pourrons ayant ces propriétés sur la fonction spline σ, donner une caractérisation.

Appliquant l'équation $\partial h(u) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\ell_i$ à $\varphi \in \mathcal{D}(]a,b[)$ nous obtenons :

I.8 - *Proposition*

Toute solution σ du problème de fonctions spline décrit en 1.6 vérifie le système

$$D^{2k}u + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \ell_i /]a,b[= 0$$

$$<u,\ell_i> = \alpha_i$$

l'équation différentielle étant prise au sens des distributions et $\ell_i/]a,b[$ indiquant la restriction de ℓ_i comme distribution sur $]a,b[$.

Comme $\mathcal{D}(]a,b[)$ n'est pas dense dans $H^k[a,b]$ il se peut que $f_i/]a,b[$ soit nulle sans que f_i le soit. Ce sera le cas en particulier si f_i a son support en a ou b par exemple δ_a^q avec $0 \leq q \leq k$. Le système 1.8 est ainsi une condition nécessaire mais non suffisante.

I.9 - *Proposition*

Si $\ell_i = n_i + m_{ia} + m_{ib}$ où n_i est une distribution sans masse en a ni b, m_{ia} et m_{ib} des distributions éventuellement nulles de support a et b et si les distributions n_i sont de classe C^p dans un voisinage de $x_o \in]a,b[$ alors la fonction σ est une fonction de classe C^{p+2k} sur un voisinage de x_o.

Démonstration

En utilisant la structure locale des distributions sur $]a,b[$ appliquée à un voisinage de x_o, on a $D^{2k}\sigma = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i n_i$ où n_i de classe C^p. En intégrant 2k fois nous obtenons une fonction de classe C^{p+2k}. Si x_o = a ou b, alors on a un voisinage $[a,\eta]$ où $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i n_i$ de classe C^k et σ est sur $]a,\eta[$ de classe C^{k+2p}. D'autre part comme $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i n_i$ admet des dérivées à droite jusqu'à l'ordre p, il est de même pour σ jusqu'à l'ordre 2k+p.

c.q.f.d.

Cas particulier :

Si les ℓ_i ont leur support contenu dans le complémentaire de $]\alpha,\beta[$ alors sur $[\alpha,\beta]$ ils sont nuls et σ solution du problème 1.6 est un polynôme de degré $2k-1$.

I.10 - *Proposition*

Si les ℓ_i sont des fonctions continues sur un voisinage V *(resp.* W *) de* a *(resp.* b*) alors la fonction spline σ solution du problème I.6 est solution du problème*

$$D^{2k}u + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \ell_i = 0$$

$$u^k(a) = \dots = u^{2k-1}(a) = 0$$

$$u^k(b) = \dots = u^{2k-1}(b) = 0$$

$$\langle u,\ell_i\rangle = \alpha_i \qquad 1 \le i \le n$$

Démonstration

D'après la proposition 1.9, $\Sigma\lambda_i\ell_i$ étant continue au voisinage de a et de b, σ est de classe C^{2k}, alors

$$\partial h(\sigma) : v \to 2\int_a^b \sigma^{(k)} v^{(k)} dt$$

Remarquons que l'ensemble des fonctions $\varphi + \sum_{i=0}^{k-1} \mu_i + \sum_{i=0}^{k-1} \nu_i$ est dense dans $H^k[a,b]$ où $\varphi \in \mathcal{D}(]a,b[)$ et μ_i et $\nu_i \in H^k[a,b]$ vérifiant

$$\langle \mu_i,\delta_a^j\rangle = \alpha_i\delta_{i,j} \text{ et } \langle \mu_i,\delta_b^j\rangle = 0 \qquad (\alpha_i \in R)$$

$$\langle \nu_i,\delta_a^j\rangle = 0 \qquad \text{et } \langle \nu_i,\delta_b^j\rangle = \beta_i\delta_{i,j} \quad (\beta_i \in R)$$

pour $0 \le i \le k-1$ et $0 \le j \le k-1$.

On peut choisir pour μ_i et ν_i des fonctions de classe C^∞. Ainsi $\partial h(\sigma)$ est déterminée dès que l'on connait cette fonctionnelle sur les v de ce type. Ici nous prenons des μ_i (resp. ν_i) de classe C^∞ à support dans V (resp. W) alors :

$$\int_a^b \sigma^{(k)}\varphi^{(k)}dt = (-1)^k \langle D^{2k}\sigma,\varphi\rangle$$

$$\int_a^b \sigma^{(k)}\mu_i^{(k)}dt = (-1)^k \left(\int_V \sigma^{(2k)}\mu_i dt+(-1)^{i+1}\sigma^{(2k-(i+1))}(a)\mu_i^{(i)}(a)\right)$$

$$\int_a^b \sigma^{(k)}\nu_i^{(k)}dt = (-1)^k \left(\int_W \sigma^{(2k)}\nu_i dt+(-1)^{i}\sigma^{(2k-(i+1))}(b)\nu_i^{(i)}(b)\right)$$

Les 2 dernières expressions sont obtenues par intégration par partie.

Nous devons avoir $\langle\partial h(\sigma)-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\ell_i,\ \varphi+\sum_{i=1}^{k}\mu_i+\sum_{i=1}^{k}\nu_i\rangle = 0$ comme les ℓ_i sont supposés ne pas avoir de masse en a et b nous aurons $u^{2k-i}(a) = 0 \quad 1 \le i \le k$ et $u^{2k-i}(b) = 0$.

c.q.f.d.

Corollaire

Si les $\ell_i = n_i+m_{ia}+m_{ib}$, *où* n_i *fonctions continues dans un voisinage de* a *et* b *et que* m_{ia} *et* m_{ib} *sont des distributions de support en* a *et* b $m_{ia} = \sum_{j=0}^{k-1} m_{ia}^j\delta_a^{(j)}$ *et* $m_{ib} = \sum_{j=0}^{k-1} m_{ib}^j\delta_b^{(j)}$, *alors* σ *est solution du problème*

$$D^{2k}u + \Sigma\lambda_i\ell_i = 0 \qquad \text{sur }]a,b[$$

$$u^{k+j}(a) = (-1)^j\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\, m_{ia}^{k+1-j}$$

$$u^{k+j}(b) = (-1)^j\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\, m_{ib}^{k+1-j}$$

$$\langle\ell_i,u\rangle = \alpha_i$$

I.11 - Si nous prenons $h(u) = \sum_{i,j=0}^{k} \int_a^b a_{ij}(t)u^i(t)u^j(t)dt.(a_{ij}(t) = a_{ji}(t))$.

Les a_{ij} étant choisis de manière à ce que $\Sigma\, a_{ij}(t)x_ix_j$ soit positive quel que soit t

$$\partial h(u) = \{v \to 2 \sum_{i,j=0}^{p} \int_a^b a_{ij}(t)u^i(t)v^j(t)dt\}$$

Nous pouvons mener un raisonnement analogue à ce que nous avons fait à partir de I.6. En réalité nous sommes amenés à écrire une formule de Green a une variable t. Ainsi $\partial h(u)$ apparaît comme un opérateur différentiel A(u) d'ordre 2k, avec des conditions aux bords, et la fonction spline σ minimisant h(u) sera la solution vérifiant les contraintes $<\ell_i,\sigma> = \alpha_i$, solution de $A(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\ell_i$, avec des conditions aux bords en a et b pour σ.

I.12 - <u>si h(u) est une fonction hilbertienne</u>, alors nous avons h qui est le noyau de Schwartz défini sur h dual $\mathcal{H}'$ de l'espace de hilbert $\mathcal{H}$ = (domh,h). Considérons le problème de fonctions spline avec un seul ℓ_i soit e et avec la contrainte $(\ell,\sigma) = 1$, alors $\sigma = H(\lambda\ell)$ donc σ est à un facteur près le noyau reproduisant de ℓ dans $\mathcal{H}$. Si h est de la forme 1.11, nous pouvons ainsi appliquer les résultats précédents pour avoir un système d'équation définissant le noyau reproduisant.

Exemple : $\mathcal{H} = H^1|a,b|$, $h(u) = \int_a^b u^2dt + \int_a^b u'^2dt$.

Considérons $\ell = \delta_x$ $x \in [a,b]$ alors $\sigma = H(\ell)$ associé est définie par $\sigma - \sigma'' = \lambda\delta_x$, avec $\sigma'(a) = \sigma'(b) = 0$ et $\sigma(x) = u$. Sur $[a,x]$ (resp. $[x,b]$) σ sera une combinaison linéaire de e^x et e^{-x}. Ecrivons

$$\sigma(t) = \alpha ch(t-a)+\alpha' sh(t-a) \quad a \le t \le x$$

$$\sigma(t) = \beta ch(t-b)+\beta' sh(t-b) \quad x \le t \le b$$

les conditions au bords entraînent $\alpha' = \beta' = 0$ et la condition de raccord en x donne $\alpha = ch(x-b)$ $\beta = ch(x-a)$ et on a $\sigma(x) = ch(x-a)ch(x-b)$.

Dans le cas présent les fonctions σ dépendent des valeurs de a et de b.

II - PROCEDE D'INTERPOLATION OBTENU PAR LA MINIMISATION D'UNE FONCTION SEMI-HILBERTIENNE (fonction spline).

II.1 - Soit $E = \mathcal{F}(X)$ l'ensemble des fonctions à valeurs réelles définies sur un ensemble X, muni de la topologie de la convergence simple. Son dual E' est l'espace des masses à support fini dans X, ($E' = \{\Sigma\mu_x\delta_x$ ou $\mu_x = 0$ sauf pour un nombre fini de points$\}$).

Soit h une fonction semi-hilbertienne dans E.

Soient $P = (p_1,\dots,p_n)$ un ensemble fini de $p_i \in X$, et f une fonction définie sur X ; appelons $C_{P,f} = \{\varphi \in \mathcal{F}(X) \mid \varphi(p_i) = f(p_i) \quad 1 \le i \le n\}$. La fonction $\Psi_{C_{P,f}}$ est la fonction indicatrice de $C_{P,f}$.

Le problème de fonction spline associé à h fonction semi-hilbertienne consiste à trouver $\Sigma_{P,f}$ ensemble des éléments de $\mathcal{F}(X)$ qui rendent minimum la fonction $h+\Psi_{P,f}$. Utilisant les remarques de I.4 et I.5 le couple $(h,\Psi_{P,f})$ est uni et $\Psi_{P,f}$ est quasi-continue ($C_{P,f}$ variété affine de codimension finie) ainsi nous pouvons utiliser la proposition 1.2, pour caractériser les solutions de ce problème, dès que nous savons que $\mathrm{dom}h \cap \mathrm{dom}\Psi_{C_{P,f}} \neq \emptyset$. Ainsi :

II.2 - L'ensemble $\Sigma_{P,f}$ est l'ensemble des éléments σ de $H(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\delta_{p_i})$ où les λ_i prennent toutes les valeurs telles que $\Sigma\lambda_i\delta_{p_i} \in (\mathrm{Ker}h)^0$ et vérifient les conditions d'interpolations $f(p_i) = \sigma(p_i)$ pour $1 \le i \le n$.

Nous nous limitons aux éléments $\Sigma\lambda_i\delta_{p_i} \in (\mathrm{Ker}h)^0$ car $H(v)$ est vide pour v en dehors de cet ensemble.

Il se pourrait que $\Sigma_{P,f}$ soit vide si nous prenons h trop arbitraire, ce sera le cas si $\mathrm{dom}h \cap \Psi_{C_{P,f}}$ est vide.

II.3 - *Proposition*

Si pour tout sous-ensemble P *fini de* X, $\Sigma_{P,f}$ *est non vide alors le sous-espace vectoriel* domh *est dense dans* $E = \mathcal{F}(X)$.

Démonstration

Pour la topologie de la convergence simple, nous avons une base de voisinage $V_{p,\varepsilon}$ où $P = (p_1,\dots,p_n)$ est un ensemble fini de points, $\varepsilon = (\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)$ avec $\varepsilon_i > 0$. Soit $f \in \mathcal{F}(X)$ alors l'hypothèse entraîne qu'il existe une fonction $\varphi \in$ domh avec $f(p_i) = \varphi(p_i)$ donc $f-\varphi \in V_{p,\varepsilon}$

c.q.f.d.

II.4 - Remarquons que $\Sigma_{P,f}$ dépend uniquement des valeurs de f en $p_1,\dots,p_n$. La condition de la proposition II.3 permet ainsi pour chaque $P = (p_1,\dots,p_n)$ et pour chaque $a = (a_1,\dots,a_n)$ d'associer un ensemble d'interpolants $\Sigma_{P,a}$. Nous désignerons dans la suite par $\Sigma_P(E)$ la réunion des $\Sigma_{P,a}$, lorsque a parcourt R^n. $\Sigma : f \to \Sigma_{P,f}$ est une multiapplication de $\mathcal{F}(X)$ dans lui-même et ainsi un procédé général d'interpolation, car elle vérifie :

II.4. i) Si $\sigma \in \Sigma_P(E)$ alors $\sigma \in \Sigma_{P,\sigma}$

II.4.ii) Si $P' \subset P$ alors $\Sigma_{P'}(E) \subset \Sigma_P(E)$

En effet, si $\sigma \in \Sigma_{P'}$ elle minimise h sur $C_{P',\sigma}$, elle minimisera encore h sur l'ensemble $C_{P,\sigma}$ qui est contenu dans $C_{P',\sigma}$.

II.5 - *Proposition*

La multiapplication $f \to \Sigma_{P,f}$ *est une multiapplication linéaire.*

Voyons d'abord que $\Sigma_{P,f}$ est défini à un élément de $\Sigma_{X,0}$ près. En effet soient σ_1 et $\sigma_2 \in \Sigma_{P,f}$ alors $\sigma_1-\sigma_2$ interpole 0 sur P. D'autre part, nous avons $\sigma_1 \in H(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^1 \delta_{p_i})$ $\sigma_2 \in H(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \delta_{p_i})$ donc $\sigma_1-\sigma_2 \in H(\Sigma(\lambda_i^1-\lambda_i^2)\delta_{p_i})$. D'après la caractérisation II.2 de $\Sigma_{P,0}$ nous avons $\sigma_1-\sigma_2 \in \Sigma_{P,0}$. Si $\sigma_1 \in \Sigma_{P,f_1}$ et $\sigma_2 \in \Sigma_{P,f_2}$, nous avons aussi $\sigma_1+\sigma_2 \in H(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^1+\lambda_i^2)\delta_{p_i})$ et interpolant f_1+f_2 en p_i, ainsi $\sigma_1+\sigma_2 \in \Sigma_{P,f_1+f_2}$.

c.q.f.d.

Ainsi nous avons un procédé général d'interpolation Σ de type linéaire vérifiant la condition de projection. Mais il se peut que Σ ne vérifie pas l'axiome I.10 du chapitre I, c'est-à-dire que l'ensemble $\Sigma_{P,0}$ ne soit pas toujours identique à lui-même lorsque P varie en gardant le même nombre d'éléments n. Nous verrons un tel cas avec $h(f) = f(\alpha)^2 + \int_a^b f''(\alpha)dt$ fonction semi-hilbertienne sur $[a,b]$ dans 4. Dans le cas où la dimension de Kerh est finie nous avons :

II.6 - *Proposition*

Si Kerh *vérifie la condition de Haar sur* X *(ch. I I.7), alors* $\Sigma_{P,f}$ *est réduit à un seul élément dès que* card(P) $\geq$ n.

En effet, nous avons $\Sigma_{P,f}$ déterminé à un élément près de $\Sigma_{P,0}$. La fonction 0 réalise le minimum de h(a) = 0. Donc pour tout élément σ de $\Sigma_{P,0}$, $h(\sigma) = 0$ ainsi $\sigma \in$ Kerh.

D'après l'hypothèse de Haar si Card(P) $\geq$ n, il n'y a qu'un seul élément de Kerh prenant une valeur donnée en n points distincts.

c.q.f.d.

Si Card(P) = m < n, nous n'avons plus nécessairement unicité. Les éléments de $\Sigma_{P,f}$ sont déterminés au sous-espace $\Sigma_{P,0}$ près, dont la dimension est n-m. Ce sous-espace dépend effectivement de P. Mais on remarque que l'ensemble des interpolants $\Sigma_P(E)$ = Kerh est indépendant de P. Le procédé d'interpolation Σ_P est un <u>procédé à seuil d'unisolvence</u> n.

La caractérisation de $\Sigma_{P,f}$ en II.2 permet de voir que $\Sigma_P \subset \bigcup_{\lambda \in A} H(\Sigma\lambda_i\delta_{p_i})$, A étant l'ensemble $\lambda \in R^n$ tels que $\Sigma\lambda_i\delta_{p_i} \in (\text{Kerh})^0$, inversement un élément de cette réunion est son propre interpolant et ainsi $\Sigma_P(E) = \bigcup_{\lambda \in A} H(\Sigma\lambda_i\delta_{p_i})$.

II.7 - *Proposition*

Si Kerh *est de dimension finie* n *et vérifie la condition de Haar, sur* X *alors* $\Sigma_P(E) = \Sigma_{P'}(E)+\Sigma_{P''}(E)$ *où* card P = m, $m \neq n+1$ *et* P' *et* P'' *2 sous-ensembles distincts de* P *avec* card P' = card P'' = n-1.

Si $\sigma \in \Sigma_P(E)$, $\sigma \in H(\Sigma\lambda_i\delta_{p_i})$ avec $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\delta_{p_i} \in (\mathrm{Kerh})^0$, supposons $P'=(p_1,\ldots p_{n-1})$, si $\sigma \notin \Sigma_{P'}(E)$ alors $\lambda_n \neq 0$ et si $\sigma \notin \Sigma_{P''}$ alors $\lambda_1 \neq 0$. Considérons un élément de $(\mathrm{Kerh})^0$ $\sum_{i=1}^{n-1}\lambda'_i\delta_{p_i}$, grâce à l'hypothèse de Haar on peut le choisir tel que $\lambda'_1 = \lambda_1$. Alors nous avons

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\delta_{p_i} - \sum_{i=1}^{n-1}\lambda'_i\delta_{p_i} = \sum_{i=2}^{n}\lambda''_i\delta_{p_i} \in (\mathrm{Kerh})^0$$

D'après la linéarité de la multiapplication H nous avons

$$H\Big(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\delta_{p_i}\Big) = H\Big(\sum_{i=1}^{n-1}\lambda'_i\delta_{p_i}\Big) + H\Big(\sum_{i=2}^{n}\lambda''_i\delta_{p_i}\Big)$$

comme

$$H\Big(\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i\delta_{p_i}\Big) \subset \Sigma_{P'}(E) \text{ et } H\Big(\sum_{i=2}^{n}\lambda''_i\delta_{p_i}\Big) \subset \Sigma_{P''}(E)$$

et que

$$\Sigma_P(E) = \bigcup_{\lambda\in A} H\Big(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\delta_{p_i}\Big) \text{ alors nous obtenons } \Sigma_P(E) = \Sigma_{P'}(E)+\Sigma_{P''}(E)$$

Ce raisonnement suppose implicitement que $m > n+1$; car si $m \leq n$ alors $\Sigma_P(E) = \Sigma_{P'}(E) = \Sigma_{P''}(E) = \mathrm{Kerh}$.

c.q.f.d.

KerH est l'ensemble des éléments de e' tels que $H(e') \ni 0$. On a $\mathrm{KerH} \subset (\mathrm{Kerh})^0$; d'après la caractérisation de H(e') nous avons pour tout $e \in \mathrm{domh}$, $\langle e',e\rangle = \tilde{h}(He',e')$ ainsi si $e' \in \mathrm{KerH}$ nous avons $He' \ni 0$ donc $\tilde{h}(He',e') = 0$ et $\langle e',e\rangle = 0$ d'où

$$\mathrm{KerH} = (\mathrm{domh})^0$$

De ce résultat et de la proposition.II.3 :

II.8 - *Proposition*

Si quel que soit P *fini et* $f \in F(X)$, $\Sigma_{P,f}$ *est non vide alors nous avons* KerH = 0.

Si le procédé d'interpolation, provenant de la minimisation d'une fonction semi-hilbertienne, est partout défini alors nous avons KerH = 0. Ce qui est le cas le plus intéressant.

II.9 - *Proposition*

Si P *et* P' *sont deux ensembles finis, si* KerH = 0 *alors*
$\Sigma_P(E) \cap \Sigma_{P'}(E) = \Sigma_{P \cap P'}(E)$.

En effet, si $\sigma \in \Sigma_P(E)$ alors il existe $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \delta_{p_i} \in (\mathrm{Kerh})^0$ tel que $H(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \delta_{p_i}) = \sigma$. De même si $\sigma \in \Sigma_{P'}$ on a $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i' \delta_{p_i'}$ et $\sigma \in H(\sum_{i=1}^{n'} \lambda_i' \delta_{p_i'})$. Ainsi $H(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \delta_{p_i} - \sum_{o=i}^{n'} \lambda_i' \delta_{p_i'}) = 0$ et comme KerH = 0 on a $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \delta_{p_i} = \sum_{i=1}^{n'} \lambda_i' \delta_{p_i'}$, et par conséquent λ_i et $\lambda_i' = 0$ si $p_i \notin P'$ ou si $p_i' \in P$ et λ_i peut être différent de 0 seulement pour les points de $P \cap P'$ ainsi $\sigma \in H(\sum_{i=1}^{n''} \lambda_i'' \delta_{p_i})$ avec $\Sigma \lambda_i'' \delta_{p_i''} \in (\mathrm{Kerh})^0$ et p_i'' près dans $P \cap P'$. Ainsi $\sigma \in \Sigma_{P \cap P'}(E)$.

c.q.f.d.

Supposons donné un procédé général d'interpolation Σ qui provienne de la minimisation d'une fonction semi-hilbertienne h et qui soit défini pour tout $f \in F(X)$ sur tout P fini nous avons alors KerH = 0 pour H associé à h. Nous allons essayer de caractériser Kerh et $(\mathrm{Kerh})^0$ à partir de Σ sans connaître h.

II.10 - *Proposition*

Si Σ *est un procédé d'interpolation admettant un seuil d'unisolvence* n, *alors* Kerh *est de dimension finie* n *et vérifie la condition de Haar.*

Si dim Kerh est supérieur à n alors il existe n+1 fonctions $\varphi_1,\dots,\varphi_{n+1}$ linéairement indépendantes dans Kerh donc un choix de points $p_1,\dots,p_{n+1}$ qui donne un déterminant nul $|\varphi_i(p_j)|$. En interpolant f sur les n premiers points nous obtenons un sous-espace de dimension au moins 1 dans Kerh, donc $\Sigma_P(f)$ n'est pas unique.

Si dim(Kerh) < n soient $\varphi_1,\dots,\varphi_n$, m fonctions linéairement indépendantes. On peut choisir m points p_i donnant un déterminant non nul et alors nous avons unicité d'où la contradiction et dim(Kerh) = n.

Si Kerh ne vérifie pas la condition de Haar et si $\varphi_1,\dots,\varphi_n$ est une base de Kerh, il existe une famille de points $p_1,\dots,p_n$, dont le déterminant $|\varphi_i(p_j)|$ soit nul, ainsi nous avons un choix d'ordonnée qui donne pour $\Sigma_P(f)$ plus d'un élément, donc Kerh vérifie la condition de Haar.

c.q.f.d.

Nous supposerons dans la suite que Σ est un procédé avec seuil d'unisolvence n. Ainsi P et P' sont tels que $P \cap P' = \emptyset$ alors l'ensemble $\Sigma_P(E) \cap \Sigma_{P'}(E)$=Kerh.

II.11 - *Proposition*

Si nous avons $\Sigma_P(E) = \Sigma_{P'}(E)$ *avec* $P \neq P'$ *alors* $\Sigma_P(E) = \Sigma_{P'}(E)$ *est l'ensemble* Kerh.

Soit $p_1 \in P$ et $p_1 \notin P'$. (quitte à changer le rôle de P et P' un tel p_1 existe toujours). Si m = card(P) > n, il existe $(\lambda_i)_{1\leq i\leq m}$ avec $\lambda_1 \neq 0$ et $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \delta_{p_i} \in (\text{Kerh})^0$, grâce à la condition de Haar vérifiée pour Kerh.

Soit $f \in H(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \delta_{p_i})$ on a $f \in \Sigma_{P'}$, donc $f \in H(\Sigma\lambda''_j\delta_{p_j})$ et $0 \in H(\Sigma\lambda_i\delta_{p_i} - \Sigma\lambda_j\delta_{p_j})$, nous avons alors $\Sigma\lambda_i\delta_{p_i} - \Sigma\lambda''_j\delta_{p_j} \in$ KerH, ce terme est non nul puisqu'il contient au moins $\lambda_1\delta_{p_1}$. Nous avons ainsi une contradiction et card(P) $\leq n$, donc $\Sigma_P(E) =$ Kerh.

c.q.f.d.

Corollaire

Si $P' \neq P$ *et* card(P) $> n$ *alors* $\Sigma_P(E) \neq \Sigma_{P'}(E)$.
En effet, $\Sigma_P(E) \neq$ Kerh *et dans la proposition précédente nous ne pouvons avoir* $\Sigma_P(E) = \Sigma_{P'}(E)$.

II.12 - *Proposition*

Soient $p_o,\ldots,p_n$, $n+1$ *points distincts de* X, *alors les éléments de* E' *appartenant à* (Kerh)o *et de la forme* $\sum_{i=o}^{n} \lambda_i\delta_{p_i}$ *forment un sous-espace de dimension 1, et ceux qui sont non nuls ont tous leurs coefficients* λ_i *(*$1 \leq i \leq n$*) différents de* 0.

Soient $\Sigma\lambda_i\delta_{p_i} \in (\mathrm{Kerh})^0$ et $\varphi_1,\ldots,\varphi_n$ une base de Kerh, considérons le système d'équations $\sum_{i=o}^{n} \lambda_i\varphi_j(p_i) = 0$ avec $0 \leq i \leq n$, les mineurs d'ordre n de ce système sont non nuls (condition de Haar), il n'y a alors qu'un seul $(\lambda_o,\ldots,\lambda_n) \in R^n$ solution définie à un facteur près.

Si nous avons m coefficients $\lambda_i = 0$ on pourrait alors considérer $\sum_{i=o}^{n-m+1} \lambda_i\delta_{p_i}$, les λ_i vérifient le système $\sum_{i=o}^{n-m+1} \lambda_i\varphi_j(p_i) = 0$, avec $1 \leq j \leq n$. Si $m \geq 1$ d'après la condition de Haar, ce système a une solution unique nulle, donc tous les λ_i seraient nulles. Ainsi si $\Sigma\lambda_i\delta_{p_i} \neq 0$ tous les λ_i sont différents de 0.

c.q.f.d.

Nous noterons dans la suite a_P un élément non nul de la forme $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \delta_{p_i}$ appartenant à $(\mathrm{Ker} h)^0$.

Nous allons maintenant donner deux propositions qui permettront de d'écrire $(\mathrm{Ker} h)^0$ dans E'.

II.13 - *Proposition*

$(\mathrm{Ker} h)^0 \subset E'$ *est engendré par les éléments* a_P *où* P *parcourt les sous-ensembles à* n+1 *éléments de* X.

Cette propriété signifie que tout élément $e' = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \delta_{p_i}$ de $(\mathrm{Ker} h)^0$ est combinaison linéaire de terme a_P. Nous allons raisonner par récurrence sur m ; c'est-à-dire supposons la propriété démontréepour m, soit $B = \sum_{j=1}^{m+1} \beta_j \delta_{p_j}$, $\beta_1 \neq 0$ et considérons $P = (p_1,\dots,p_{m+1})$ on peut choisir a_P tel que $a_P = \sum_{i=1}^{+1} \lambda_i \delta_{p_i} \in (\mathrm{Ker} h)^0$ et $\lambda_1 = \beta_1$. $A = B - a_P$ le premier terme s'annule et $A = \sum_{j=2}^{m+1} \alpha_j \delta_{p_j}$ comme B et a_P appartiennent à $(\mathrm{Ker} h)^0$ alors A aussi, qui par l'hypothèse de récurrence est combinaison linéaire de termes a_P avec card(P) = n+1.

c.q.f.d.

II.14 - *Proposition*

Soient $p_1,\dots,p_n$ n *points distincts et pour chaque* $x \in X$ *distincts de* $p_1,\dots,p_n$ *nous choisissons* a_x *avec* $a_x = \lambda^x \delta_x + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^x \delta_{p_i}$ *et* $a_x \in (\mathrm{Ker} h)^0$. *L'ensemble des* a_x *forment une base de* $(\mathrm{Ker} h)^0$.

Démonstration

Les différents a_x sont linéairement indépendants. En effet, dans toutes les combinaisons linéaires de tels termes, nous avons un seul δ_x, son coefficient devrait être nul si cette combinaison linéaire est nulle.

Utilisant la proposition 2.12, il suffit de démontrer que tout terme $\sum_{i=1}^{n+1} \beta_i \delta_{x_i} \in (\mathrm{Kerh})^0$ peut s'écrire comme combinaison linéaire des termes a_{x_i}.
Nous allons utiliser le lemme :

<u>Lemme</u>

Soit $A = \sum_{i=1}^{n+1} \gamma_i \delta_{y_i}$, $A \in (\mathrm{Kerh})^0$. *Soit* x *différent de* $y_1,\dots,y_{n+1}$, *alors nous pouvons écrire* $A = A'+A''$ *avec* A' *et* $A'' \in (\mathrm{Kerh})^0$ *et*
$A' = \sum_{i=2}^{n+1} \gamma'_i \delta_{y_i} + \gamma' \delta_x$, $A'' = \sum_{i=1}^{n} \gamma''_i \delta_{y_i} + \gamma'' \delta_x$.

Démonstration du lemme

A étant donné posons $\gamma'_{n+1} = \gamma_{n+1}$ alors la condition $A' \in (\mathrm{Kerh})^0$ détermine de façon unique γ' et γ'_i $0 \leq i \leq n+1$, de même posons $\gamma'' = -\gamma'$ alors γ''_i $1 \leq i \leq n$ sont déterminés de façon unique. Nous avons alors :

$$A'+A'' \in (\mathrm{Kerh})^0 \text{ et } A'+A'' = \gamma''_1 \delta_{y_1} + \sum_{i=1}^{n} (\gamma'_i+\gamma''_i)\delta_{y_i} + \gamma_{n+1}\delta_{y_{n+1}}$$

Comme dans A nous avons le même coefficient de $\delta_{y_{n+1}}$, A'+A" et A étant basé sur les mêmes n+1 points, sont égaux.

c.q.f.d.

Faisons l'hypothèse de récurrence : tout $B = \sum_{i=1}^{n+1} \beta_i \delta_{x_i}$ tel que au plus ℓ des x_i sont distincts de p_i, est combinaison linéaire de termes a_x. Posons $\Gamma = \sum_{i=1}^{\ell} \eta_i \delta_{x_i} + \sum_{i=\ell+1}^{n} \eta_i \delta_{p_i} + \eta_{n+1} \delta_{x_{n+1}}$, appliquons le lemme à ce terme, alors nous définissons A' et A" en prenant $x = p_\ell$, ces termes contiennent au plus ℓ termes x_i distincts de p_i et ainsi d'après l'hypothèse de récurrence sont combinaisons linéaires de a_x.

c.q.f.d.

II.15 - Noyaux et multinoyaux d'Aronszajn-Bergmann

Soit h une fonction hilbertienne dans $E = \mathcal{F}(X)$, $\mathcal{H}$ le sous-espace hilbertien de E et H le noyau associé. Posons $A(x,\xi) = \langle H(\delta_\xi),\delta_x\rangle$ pour ξ et $x \in X$, A défini ainsi une application de $X \times X$ dans R. A est dit le noyau reproduisant d'Aronszajn-Bergmann associé à $\mathcal{H}$.

A est symétrique $(A(x,\xi) = A(\xi,x))$, de type positif
$(\forall\mu = \sum_{i\in I} c_{x_i}\delta_{x_i}$ (I fini) on a $\sum_{i,j=1}^{n} c_i c_j A(x_i,x_j) \geq 0)$.

Inversement ayant une fonction de 2 variables $A(x,\xi)$ de $X \times X$ dans R, symétrique et de type positif. On peut lui associer une application H définie sur E' par $H(\sum_{i=1}^{n} c_{x_i}\delta_{x_i}) = \sum_{i=1}^{n} c_{x_i} A(x_i,x) \in \mathcal{F}(X)$. H est le noyau d'une fonction hilbertienne h dans $\mathcal{F}(X)$.

La correspondance définie ci-dessus entre A et h est un isomorphisme de l'ensemble des fonctions hilbertiennes $\Gamma_{Hilb(\mathcal{F}(X))}$ dans $\mathcal{F}(X)$, sur l'ensemble des fonction symétriques de type positif, l'addition dans ce dernier ensemble correspondant à l'inf-convolution dans $\Gamma_{Hilb}(\mathcal{F}(X))$.

Cas où h est une fonction semi-hilbertienne; si $Kerh \neq 0$ nous ne pouvons plus définir $A(x,\xi)$ puisque le multinoyau H n'est pas défini sur tout E' et de plus H n'est pas déterminée de façon unique mais a un élément de Kerh près. Nous allons définir une notion de multinoyau d'Aronszajn-Bergmann généralisant le cas hilbertien.

Supposons Kerh de dimension finie n et vérifiant la condition de Haar sur X. Pour un sous-ensemble à n+1 éléments de X $(P = p_o,\ldots,p_n)$, nous associons a_P comme dans II.11 et $H(a_P) \subset \mathcal{F}(X)$.

Comme Kerh est de dimension finie, il existe une fonction hilbertienne k dans $\mathcal{F}(X)$, telle que $k = \dot{h} \circ \varphi$ (φ injection canonique de $\mathcal{F}(X)$ sur $\mathcal{F}(X)/Kerh$, et $\dot{h}$ fonction hilbertienne quotient de h par Kerh). En effet, Kerh étant de dimension finie, il existe un supplémentaire topologique F de Kerh dans domh muni de la topologie induite par $\mathcal{F}(X)$, posons si $f \in F$ $k(f) = h(f)$ et si $f \notin F$ $k(f) = +\infty$ (domK = F). Alors Kerk = 0 et k est une fonction hilbertienne dans $\mathcal{F}(X)$ telle que $k = \dot{h} \circ \varphi$. Si $e' \in (\mathrm{Kerh})^0$ nous avons $H(e') = K(e')+\mathrm{Kerh}$ (K noyau associé à k).

Désignons par $B(x,\xi)$ le noyau d'Aronszajn-Bergmann associé à k. Alors si $a_P = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \delta_{p_i} \in (\mathrm{Kerh})^0$ alors $H(a_P) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i B(x,p_i)+\mathrm{Kerh}$.

La donnée de $H(a_P)$ suffit à déterminer H. Ainsi la connaissance de B détermine H. Remarquons que P et P' sont deux ensembles distincts de n+1 points de X a_P et $a_{P'}$ peuvent ne pas être indépendants. Il existe ainsi des relations entre les $H(a_P)$ et $H(a_{P'})$.

Ainsi l'application qui a a_P associe $A(x,a_P) = \Sigma\lambda_i B(x,p_i)$ apparait comme un multinoyau d'Aronszajn-Bergmann. A une fonction h semi-hilbertienne peut ainsi être associé plusieurs multinoyaux d'Aronszajn-Bergmann. Si A et A' sont de tels multinoyaux pour a_P fixé $A(x,a_P)-A'(x,a_P) \in \mathrm{Kerh}$.

III - EXEMPLES DE CARACTERISATION DE FONCTIONS SPLINE GENERALISEES

Nous allons ici utiliser la proposition 1.2 pour donner des caractérisation de fonctions spline. Dans les premiers exemples nous prenons $h(u) = \int_a^b u^{k2}\,dt$; nous utiliserons alors la proposition I.8.

III.1 - Spline d'interpolation

Nous prenons donc le cas traité dans II avec $h(u) = \int_a^b (u^k)^2 dt$. L'explicitation de $h(u)$ grâce à la proposition I.8, nous indique que la fonction spline d'interpolation σ est solution de

$$\sigma^{2k} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \delta_{x_i} \qquad \text{(au sens des distributions)}$$

$$\sigma^{k+j}(a) = \sigma^{k+j}(b) = 0 \qquad 0 \le j < k$$

$$\sigma(x_i) = \alpha_i$$

Si x_i est l'un des points a ou b nous avons la condition au bord $u^{2p-1}(a) = \lambda_i$ ou $u^{2p-1}(b) = \lambda_i$.

Une fonction dont la dérivée 2k est égale à la somme finie de masse de Dirac est formée sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ d'un polynôme de degré 2k-1 (car sur $[x_i, x_{i+1}]$ on a $\sigma^{2k} = 0$ d'après la structure locale des distributions) et en chaque point x_i les polynômes se raccordent jusqu'à l'ordre 2k-2. Si $a < x_1 < \ldots < x_n < b$ sur $[a, x_1]$ et $[x_a, b]$ alors σ est un polynôme de degré k-1. En effet, d'après $\sigma^{2k} = 0$ sur $[a, x_1]$ σ est un polynôme de degré 2k-1. Or nous avons la condition $u^{2k-1}(a) = 0$ donc le coefficient du terme de degré 2k-1 est nul, ainsi σ est de degré 2k-2 et comme $u^{2k-2}(a) = 0$ nous diminuons le degré de σ en 2k-3, et on raisonne ainsi jusqu'à σ de degré k-1.

Nous remarquons que $x_1, \ldots, x_n$ étant fixé si nous modifions a et b, le σ correspondant sera toujours égal à lui-même sur $[x_1, x_n]$ indépendamment de a et b.

III.2 - Spline d'Hermite

Nous considérons toujours $h(u) = \int_a^b (u^k)^2 dt$ mais $\ell_i = \delta_{x_i}^{j_i}$ avec $j_i < k$ $x_i \in]a,b[$, nous obtenons alors une équation pour

$$\sigma^{2k} = \sum_{i \in J} \lambda_i \delta_{x_i}^{j_i} \qquad x_i \in |a,b|$$

$$\sigma^{k+j}(a) = \sigma^{k+j}(b) = 0 \qquad 0 \leq j < k$$

$$\sigma^{j_i}(x_i) = \alpha_i$$

Sur un intervalle de 2 points consécutifs x_i, $x_{i'}$, la fonction σ si elle existe sera un polynôme de degré au plus 2k-1 et en un point x_i il y a raccord des dérivées d'ordre inférieur à 2k-1 où les indices e sont tels que $x_e = x_i$.

Nous avons le cas classique de la spline d'Hermite lorsque les ℓ_i sont les δ_{x_i} et $\delta^1_{x_i}$, et alors σ est formé de polynôme de degré 2k-1, se raccordant jusqu'à l'ordre 2k-3.

Si parmi les ℓ_i ne figure aucune masse de Dirac (c'est-à-dire si $j_i \geq 1$), alors nous n'avons plus unicité de la fonction σ, car si nous ajoutons une constante les conditions sont encore vérifiées :

Nous allons expliciter certains cas correspondant à ce phénomène. Soit k=3 et $a < 0 < b$ et supposons que nous ayons comme condition d'interpolation $f'(a)$, $f'(o)$ et $f'(b)$; σ sera sur chaque intervalle un polynôme de degré au plus 5, avec les conditions au bord $\sigma^3(a) = 0$, $\sigma^5(a) = 0$, $\sigma^3(b) = 0$, $\sigma^5(b) = 0$, et en 0 raccord des dérivées 0, 1, 2, 3, et 5. Comme $\sigma^5(a) = \sigma^5(b) = 0$ ces polynômes sont en réalité de degré 4.

$$\text{sur } |a,0| \quad \sigma(x) = a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_o$$

$$\text{sur } |0,b| \quad \sigma(x) = b_4x^4+b_3x^3+b_2x^2+b_1x+b_o.$$

Les conditions de raccord en 0 donnent $a_o = b_o$, $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$ et $a_3 = b_3$. $a_o = b_o$ peut être pris arbitraire puisqu'en ajoutant une constante à σ, $h(\sigma)$ ne change pas et les conditions d'interpolation sont encore vérifiées. Nous avons $a_1 = b_1 = f'(0)$.

$$\sigma^3(a) = 0 \quad \text{donne} \quad 24a_4a^3+6a_3a^2 = 0$$

$$\sigma^3(b) = 0 \quad \text{donne} \quad 24b_4b^3+6a_3b^2 = 0$$

d'où

$$a_4 = -\frac{a_3}{4a} \quad \text{et} \quad b_4 = -\frac{a_3}{4b} .$$

Finalement subsiste le système en a_4 et a_2 exprimant $\sigma'(a) = f'(a)$ et $\sigma'(b) = f'(b)$.

$$2a^2a_3+2a\ a_2 = f'(a)-f'(0)$$

$$2b^2a_3+2b\ a_2 = f'(b)-f'(0)$$

Ainsi ce système admettra une solution unique en a_3 et a_2 sauf si $b = -a$ dans ce cas pour qu'il y ait solution nous devons avoir $f'(b) = -f'(a)$.

Donc le problème admet en général une solution σ sauf si $a = -b$; cette solution est définie a une constante additive près, et en général nous avons $h(\sigma) \neq 0$. Géométriquement l'ensemble des interpolants est une variété affine de codimension 3, qui est parallèle à une droite de Kerh (sous-espace vectoriel de dimension 3).

Si $a = -b$, alors nous n'avons pas en général l'existence d'une solution au problème de minimisation, par contre si $f'(b) = -f'(a)$ alors nous avons des solutions qui sont déterminées à un sous-espace de dimension 2 près.

III.3 - Fonctions spline par moyenne pondérée

Considérons toujours $h(u) = \int_a^b (u^{(k)})^2 dt$, ℓ_i est défini par une fonction poids noté f_i de carré sommable et continue au voisinage de a et b. $\langle f_i, u\rangle = \int_a^b f_i u dt$. L'hypothèse de continuité pour f_i au voisinage de a et b permet d'appliquer I.10 et d'avoir les conditions aux limites en a et b.

La fonction σ est caractérisée par

$$\sigma^{(2k)} = \Sigma\lambda_i f_i$$

$$\sigma^{(k+j)}(a) = \sigma^{(k+j)}(b) = 0 \qquad\qquad 0 \leq j < k$$

$$\int_a^b \sigma f_i = \alpha_i.$$

Ce problème pourrait avoir plusieurs solutions si les f_i ne vérifiaient pas la condition d'unicité des fonctions spline.

Dans ce cadre entrent les fonctions spline définies par f_i fonction caractéristique de l'intervalle $[x_i, y_i]$. Alors $\Sigma\lambda_i f_i$ est une fonction constante par intervalle nous obtenons alors σ qui est formé sur chaque intervalle de polynôme de degré 2k (2k-1 si sur cet intervalle la fonction est nulle) et les dérivées sont continues en x_i et y_i jusqu'à l'ordre 2k-1 compris. En particulier, si les $[x_i, y_i]$ n'empiètent pas les uns sur les autres, alors sur $[x_i, y_i]$, σ est un polynôme de degré 2k et sur $[y_i, x_{i+1}]$ un polynôme de degré 2k-1.

Nous avons aussi dans ce cadre les spline de Fourier (cf. Laurent 1967). les f_i sont alors les polynômes de Legendre de degré inférieur à n, soit $P_o, \ldots P_{n-1}$ le second membre de l'équation est $\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i P_{i-1}$ un polynôme de degré n-1 ainsi la fonction spline de Fourier sera un polynôme de degré n+2k-1.

III.4 - Splines obtenues par condition sur la transformée de Fourier

Considérons l'espace $H^1(R)$, l'appartenance de u à $H^1(R)$ est équivalente au fait que sa transformée de Fourier $\hat{u}$ est une fonction de carré sommable pour la mesure $(1+x^2)dx$. Sur $H^1(R)$ la somme définie par $h(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} (1+x^2)\hat{u}^2 dx$ est équivalente à la norme de $H^1(R)$.

Considérons les fonctionnelles φ_i continues sur $H^1(R)$ définies par $u \to \int_{x_i}^{y_i} \hat{u}(x)dx$.

Nous désignerons par $C_{\varphi_i,\alpha_i} = \{u \in H^1(R) \mid \langle\varphi_i,u\rangle = \alpha_i \quad 1 \leq i \leq n\}$ et par $\Psi_{C_{\varphi_i,\alpha_i}}$ la fonction indicatrice de cet ensemble.

Nous cherchons la fonction spline σ qui minimise $g(u) = h(u)+\Psi_{C_{\varphi_i,\alpha_i}}(u)$
Nous pouvons appliquer la proposition I.2 puisque C_{φ_i,a_i} est une variété affine de codimension finie. Nous avons :

$$\partial h(u) = \{v \to 2\int_{-\infty}^{+\infty} (1+x^2)\hat{u}\hat{v}\, dx\}$$

l'équation $\partial h(\sigma)+\Sigma\lambda_i\varphi_i = 0$ définissant la spline σ s'écrit aussi :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (1+x^2)\hat{u}\hat{v}+ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \int_{x_i}^{y_i} \hat{v}\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty}((1+x^2)\hat{u}+\Sigma\lambda_i\chi_i)\hat{v}\, dx = 0$$

où χ_i est la fonction caractéristique de l'intervalle $[x_i,y_i]$. Nous avons ainsi l'équation :

$$(1+x^2)\hat{u} + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\chi_i = 0.$$

Par transformée de Fourier inverse nous obtenons ainsi l'équation

$$u-(\frac{1}{4}\pi)u'' = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{e^{2i\pi y_i t} - e^{2i\pi x_i t}}{2i\pi t}$$

La solution de l'équation sans second membre est une combinaison linéaire de $e^{2\pi t}$ et $e^{-2\pi t}$.

Ainsi σ apparait comme une combinaison linéaire de fonctions exponentielles.

IV - EXEMPLE DE CAS OU Kerh NE VERIFIE PAS LA CONDITION DE HAAR ET OU KerH $\neq 0$

IV.1 - Cas où $h(u) = \sum_{i\in I} \ell_i(u)^2 + \int_a^b (u^k)^2 dt$

Soit l'espace $H^k[a,b]$; nous choisissons $(\ell_i)_{i\in I}$ un ensemble fini de n formes linéaires continues sur $H^k[a,b]$. h est une fonction semi-hilbertienne définie sur $H^k[a,b]$. Kerh est l'ensemble des u tels que $\int_a^b (u)^2 dt = 0$. c'est-à-dire des polynômes de degré au plus k-1.

Considérons m points $x_1,\ldots,x_n$ de $]a,b[$ alors la spline d'interpolation minimisant h vérifie le système

$$u^{2k} + \sum_{i\in I}^{n} \ell_i(u)\ell_i = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \delta_{x_j}$$

$$u^k(a) = \ldots = u^{2k-1}(a) = u^k(b) = \ldots = u^{2k-1}(b) = 0$$

$$u(x_1) = \alpha_1 \ \ldots \ u(x_m) = \alpha_m.$$

Cette spline sera une primitive d'ordre 2k de combinaison des ℓ_i, avec des sauts de dérivées 2k-1 aux x_j.

IV.2 - Dans l'exemple précédent considérons $k = 2$ et un seul ℓ_i qui est δ_x, $x\in]a,b[$.

Alors ici Kerh est l'ensemble des fonctions linéaires sur $]a,b[$ qui s'annullent en x. L'équation donnant σ est

$$\sigma^{(4)} + \sigma(x)\delta_x = \sum \lambda_i \delta_{x_i}$$

$$\sigma''(a) = \sigma''(b) = \sigma'''(a) = \sigma'''(b) = 0.$$

Nous obtenons ainsi une fonction qui est formée sur les intervalles de polynômes de degré 3, mais par rapport aux splines ordinaires nous avons un saut de la dérivée 3ème au point x, ce saut est $\sigma(x)$ si x n'est pas un des points d'interpolat

Comme ce saut est égal à $\sigma(x)$, en général nous avons une solution unique. Si nous avons un seul point d'interpolation $x_1 \neq x$, alors σ est la fonction $\mu(t-x)$ avec $\mu = \alpha_1/(x_1-x)$, σ appartient à Kerh. Si le point d'interpolation est x alors nous avons pour interpolant une infinité de solution $\Sigma = \{\mu(t-x)+\alpha\}$, mais dans ce cas nous n'avons pas $\sigma \in$ Kerh, $h(\sigma) = \alpha^2$. Ainsi dans ce cas nous avons un contre exemple de II.6 puisqu'on a trouvé un $P = \{x\}$ avec card(P)=dim(Kerh), tel que sur P on n'a pas unicité de l'élément interpolant et minimisant h. Ici nous n'avons pas un seuil d'unisolvence.

Le sous-espace $(\mathrm{Kerh})^0$ est l'ensemble des éléments de E' nuls pour toute fonction $\mu(t-x)$. Si pour E nous avons pris les fonctions sur X ; alors E' masse à support fini, et $(\mathrm{Kerh})^0$ est engendré par δ_x, et les éléments $\frac{\delta_{x_1}}{x-x_1} - \frac{\delta_{x_2}}{x-x_2}$ avec x_1, x_2 parcourant $[a,b]$ sauf x. Nous avons ainsi un contre exemple de la proposition II.12. Si nous prenons P de la forme (x,x_i) les éléments $\lambda\delta_x+\lambda_1\delta_{x_1}$ appartenant à $(\mathrm{Kerh})^0$ sont de la forme $\lambda\delta_x$ ($\lambda_1 = 0$) nous avons ainsi un contre-exemple à II.11.

IV.3 - Exemple IV.1 avec $k = 3$ et $\ell_1 = \delta_x$, $\ell_2 = \delta_{x'}$.

x et $x' \in]a,b[$, Kerh est l'ensemble des polynômes du 2ème degré nuls en x et x', c'est un sous-espace vectoriel de dimension 1. Le système déterminant la spline d'interpolation σ est

$$\sigma^6+\sigma(x)\delta_x+\sigma(x')\delta_{x'} = \Sigma\lambda_i\delta_{x_i}$$

$$\sigma^3(a) = \sigma^4(a) = \sigma^5(a) = \sigma^3(b) = \sigma^4(b) = \sigma^5(b) = 0$$

$$\sigma(x_1) = \alpha_1, \ldots, \sigma(x_m) = \alpha_m.$$

Si nous avons un seul point $x_1 \neq x$ et x' alors σ est déterminé de façon unique. C'est le polynôme du 2ème degré nul en x, et x', vérifiant la condition d'interpolation et $h(\sigma) = 0$.

Si nous prenons $x_1 = x$ alors il y a une infinité de solutions polynômes du 2ème degré vérifiant en x la condition d'interpolation et nul en x'.

Prenons P = (x,x'), nous imposons deux conditions d'interpolations, les polynômes de degré 2 passant par ces points sont solutions, ainsi nous avons P avec card(P) > dim(Kerh) = 1 avec non unicité. $\Sigma_P(E)$ est l'ensemble des polynômes du 2ème degré.

Considérons P' = (x_1,x,x') tout interpolant minimisant h est un polynôme du second degré, et Σ_P est l'ensemble de ces polynômes. Ainsi nous avons pour $P \neq P'$ $\Sigma_P(E) = \Sigma_{P'}(E)$ sans que Kerh = $\Sigma_P(E)$ contre exemple au corollaire II.8.

Nous voyons aussi ici que $(\mathrm{Kerh})^0$ est engendré par δ_x, $\delta_{x'}$ et $\frac{\delta_{x_1}}{(x_1-x)(x_1-x')} - \frac{\delta_{x_2}}{(x_2-x)(x_2-x')}$ avec x_1 et x_2 distincts de x et x'.

IV.4 - Etude de h avec KerH = $\sum_{i\in I} \lambda_i \delta_{x_i}$ où $(x_i)_{i\in I}$ est une famille fini d'éléments de $[a,b]$. Nous pouvons par exemple construire un tel h à partir d'une fonction semi-hilbertienne h_1, en prenant pour domh l'ensemble des éléments u de domh_1 vérifiant pour tout $i \in I$ $<\delta_{x_i},u> = 0$, sur domh on pose h = h_1, et nous aurons $h(u) \neq \infty$ si $u \in$ domh. La proposition II.8 nous indique que toute fonction $f \in E = \mathcal{F}([a,b])$ ne peut pas être interpolée par un élément minimisant cette fonction h, c'est-à-dire, il existe $f \in \mathcal{F}([a,b])$ et P tels que toute fonction interpolant f sur P n'appartient pas à domh. Ce sera le cas pour les fonctions qui sont non nulles en x_i.

Considérons $h_1(u) = \int_a^b u'^2 dt$, fonction semi-hilbertienne dans $H^1[a,b]$. Calculons $\partial h(u)$. Si $u \notin$ domh alors $\partial h(u) = \emptyset$, si $u \in$ domh, alors nous avons $\partial h(u)$ qui est un ensemble non réduit à 0 mais déterminé à KerH près :

$$\partial h(u) = (v \to 2 \int_a^b u'v'dt) + \sum_{i\in I} \lambda_i \delta_{x_i} .$$

Nous avons Kerh = 0 les conditions de la proposition II.2 sont vérifiées pour le problème d'interpolation sur un nombre fini de points $p_1,\dots,p_n$. On obtient alors comme système pour déterminer σ

$$\sigma''+\Sigma\lambda_i\delta_{x_i} = \Sigma\mu_j\delta_{p_j}$$

$\sigma'(a) = \sigma'(b) = 0$ et pour tout $i \in I$ $\sigma(x_i) = 0$

$\sigma(p_j) = \alpha_j$ $1 \leq j \leq n.$

Nous avons l'interpolation linéaire sur l'ensemble des $p_1,\ldots,p_n$ et des $(x_i)_{i\in I}$ avec comme ordonné $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ et 0.

Si 2 points x_i, x_j sont consécutifs alors σ est nulle sur cet intervalle.

Si P et P' sont distincts nous avons $\Sigma_P(E) \cap \Sigma_{P'}(E) = \Sigma_{P\cap P'}(E)$ dans ce cas quoique KerH $\neq 0$. En effet, soit $\sigma \in \Sigma_P(E)$ et $\Sigma_{P'}(E)$ les combinaisons linéaires $\Sigma\lambda_i\delta_{p_i}$ et $\Sigma\lambda_i'\delta_{p_i'}$ on a $\Sigma\lambda_i\delta_{p_i}-\Sigma\lambda_i'\delta_{p_i'} \in$ KerH.
Si $p_i \in P$; $p_i \notin P'$ et $p_i \neq x_j$ alors $\lambda_i = 0$.
Si $p_i = x_j$ et $p_i \in P'$ nous avons les interpolants nuls en x_j et le terme $\lambda_i\delta_{p_i} \in$ KerH donc on peut écrire $\Sigma\lambda_i\delta_{p_i} = \Sigma\lambda_i''\delta_{p_i''}+\mu$ avec $p_i'' \in P'' = P \cap P'$.

Un cas particulier est celui où on a 2 points x_i qui sont a et b, h(u) est la norme de $H_o^1[a,b]$, les seules fonctions interpolables sont les fonctions nulles en a et b, nous avons alors comme spline l'interpolation linéaire prolongée aux extrémités aux valeurs 0, (la différence avec $H^1[a,b]$ est que dans ce cas on a aux extrémités des fonctions constantes).

IV.5 - Etude de KerH $= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\ell_i$ où ℓ_i sont des formes linéaires continues de E'. En prenant $E = \mathcal{F}(|a,b|)$ alors les ℓ_i sont des combinaisons linéaires finies de $\delta_{x_{i_1}},\ldots,\delta_{x_{i}}$. Nous ne pouvons interpoler que des fonctions appartenant à un sous-espace de ${}^qE$ dépendant de $\delta_{x_{i_1}},\ldots,\delta_{x_{iq}}$.

La fonction σ interpolant et réalisant le minimum pour cet h vérifie le système :

$$\sigma'' + \Sigma\ \lambda_i \ell_i = \Sigma \mu_j \delta_{p_j}$$

$$\sigma'(a) = \sigma''(b) = 0\ , \qquad <\ell_i,\sigma> = 0 \ \text{pour } i \in I$$

$$\sigma(p_j) = \alpha_j \qquad 1 \leq j \leq n.$$

IV.6 - Cas où $h_1(a) = \int_a^b (u')^2 dt$ et où $\ell = \delta_{x_1} + \delta_{x_2} + \delta_{x_3}$

avec $a < x_1 < x_2 < x_3 < b$, $h(u)$ est égale à $h_1(u)$ pour $u \in \mathrm{domh} = \{f \in H^1[a,b] \mid f(x_1)+f(x_2)+f(x_3) = 0\}$

$\mathrm{KerH} = \lambda(\delta_{x_1}+\delta_{x_2}+\delta_{x_3})$, $\mathrm{Kerh} = 0$. Nous avons

$$\partial h(u) = (v \to 2\int_a^b u'v'dt)+\lambda(\delta_{x_1}+\delta_{x_2}+\delta_{x_3}).$$

Ce qui nous donne pour le problème de spline le système d'équation

$$u'' = \Sigma\mu_i\delta_{p_i} + \lambda(\delta_{x_1}+\delta_{x_2}+\delta_{x_3})$$

$$u'(a) = u'(b) = 0 \qquad u(x_1)+u(x_2)+u(x_3) = 0$$

$$u(p_i) = \alpha_i .$$

La fonction σ interpolant (α_1,α_2) sur (x_1,x_2) est constante sur
$[a,x_1]$ égale à α_1 sur
$[x_3,b]$ égale à $-(\alpha_1+\alpha_2)$

sur $[x_1,x_2]$ interpole linéairement α_1,α_2
$[x_2,x_3]$ " " α_2, $-(\alpha_1+\alpha_2)$.

Prenant $P_2 = (x_1,x_3)$ nous obtenons une fonction du même type et comme deux des α_1,α_2 et α_3 peuvent être pris arbitraires nous avonc ici $\Sigma_{P_1}(E) = \Sigma_{P_2}(E)$ donc contre exemple à II.11.

$P_1 \cap P_2 = \{x_1\}$ nous avons pour déterminer σ interpolant α_1 en x_1 le système

$$\sigma'' = \mu_1 \delta_{x_1} + \lambda(\delta_{x_1} + \delta_{x_2} + \delta_{x_3})$$

$$u'(a) = u'(b) = 0 \quad u(x_1) = \alpha_1 \text{ et } \alpha_1 + u(x_2) + u(x_3) = 0.$$

La première équation prouve que nous aurons deux sauts de dérivées égaux en x_2 et x_3. Sur $[a, x_1]$ et $[x_3, b]$ nous avons une constante, et sur les 2 autres intervalles des fonctions linéaires. Ces conditions déterminent bien σ . La condition d'égalité des sauts de dérivées en x_1 et x_2 donne

$$\frac{\alpha_3-\alpha_2}{x_3-x_2} - \frac{\alpha_2-\alpha_1}{x_2-x_1} = 0 - \frac{\alpha_3-\alpha_2}{x_2-x_1}$$

Si on suppose $x_3-x_2 = x_2 = x_1 = 1$ pour simplifier, nous obtenons

$$\alpha_2 = -\frac{\alpha_1}{5} \qquad \alpha_3 = -\frac{4\alpha_1}{5}$$

Ainsi $\Sigma_{P_1 \cap P_2}(E)$ n'est pas tout $\Sigma_{P_1}(E)$ ou $\Sigma_{P_2}(E)$. Si $\sigma \in \Sigma_{P_1}(E)$ ne vérifie pas $\alpha_2 = \frac{-\alpha_1}{5}$ et $\alpha_3 = \frac{-4\alpha_1}{5}$ alors $\sigma \in \Sigma_{P_1 \cap P_2}(E)$.

Nous avons ainsi un exemple pour lequel $\Sigma_{P_1}(E) \cap \Sigma_{P_2}(E) \neq \Sigma_{P_1 \cap P_2}(E)$, donc un contre exemple à II.9.

V - UTILISATION DES FONCTIONS SEMI-HILBERTIENNES POUR DES FONCTIONS SPLINE A PLUSIEURS VARIABLES

Soit Ω un ouvert de R^n, $H^m(\Omega)$ (m entier), l'espace des distributions sur Ω appartenant à $L^2(\Omega)$, dont les dérivées partielles d'ordre $\leq$ m appartiennent à $L^2(\Omega)$ muni de la norme

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \Big(\sum_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|_{L^2(\Omega)}\Big)^{1/2}$$

Nous allons rappeler diverses notions introduites par Lions [1961]

V.1 - *Définition*

Ω est dit avoir la propriété de m-prolongement s'il existe une application linéaire continue $u \to P(u)$ de $H^r(\Omega)$ dans $H^r(R^n)$ pour r entier $0 \leq r \leq m$ telle que $Pu = u$ pp. sur Ω.

Si Ω a la propriété de m-prolongement, on a $H^m(\Omega) \subset C^k(\bar{\Omega})$ pour $k < m-n/2$, et l'injection est continue.

V.2 - *Définition*

Un ouvert Ω de R^n est dit m-régulier si

i) Ω a la propriété de m-prolongement

ii) Pour tout $v \in H^r(R^n)$ nulle (pp) sur Ω, il existe $w \in H^r_o(\bar{\Omega})$ avec $v(x) = w(x)$ pp sur $\bar{\Omega}$ pour $r \in m$.

L'application $v \to v_\Omega$ qui à v fait correspondre sa restriction v_Ω à Ω, est une application continue de $H^m(R^n)$ dans $H^m(\Omega)$. Si Ω est m-régulier, cette application est surjective et le noyau de cette application est formé des w tel que $w/\bar{\Omega} \in H^m_o(\bar{\Omega})$ et $w = 0$ ailleurs.

L'application transposée de $v \to v_\Omega$ est $f \to \pi f$; c'est un isomorphisme de $(H^m(\Omega))'$ sur l'orthogonal X dans $H^{-m}(R^n)$ du noyau de cette première application. On vérifie facilement que $X = H^{-m}_{\bar\Omega}(R^n)$ ensemble des distributions de $H^{-m}(R^n)$ à support dans $\bar\Omega$. Ainsi si Ω est m-régulier alors $H^m(\Omega)' \simeq H^{-m}_{\bar\Omega}(R^n)$ l'application d'isomorphisme étant π.

V.3 - Considérons la fonction semi-hilbertienne sur $H^m(\Omega)$

$$h(u) = \sum_{|\alpha|,|\beta|\leq m} \int_\Omega a_{\alpha\beta} D^\alpha u D^\beta u dx .$$

Ces coefficients $a_{\alpha\beta}$ ne sont pas quelconques mais tels que $h(u) \geq 0$.
La fonction semi-hilbertienne h(u) admet pour sous-différentiel l'application $v \to 2h(u,v).(\partial h(u) \in (H^m(\Omega))^0)$.
Si Ω est m-régulier nous avons $\pi\ \partial h(u) \in H^{-m}_{\bar\Omega}(R^n)$ avec si $w \in H^m(R^n)$
$\langle\pi\ \partial hu,w\rangle = \partial hu(w_\Omega)$.

Nous avons $H^{-m}(R^n) \subset \mathcal{D}'(R^n)$ et d'autre part $\mathcal{D}(R^n)$ dense dans $H^m(R^n)$ ainsi pour connaître un élément de $H^{-m}(R^n)$ il suffit d'avoir ses valeurs sur $\mathcal{D}(R^n)$.

Si $\varphi \in \mathcal{D}(R^n)$ alors $\langle\pi\partial hu,\varphi\rangle = 2 \sum_{|\alpha|,|\beta|\leq m} \int_\Omega a_{\alpha\beta} D^\alpha u D^\beta \varphi dx$.

Remarquons que $\Psi \to \int_\Omega D^\alpha u\ \ \Psi dx$ si $\Psi \in \mathcal{D}(R^n)$ est une distribution sur R^n dont le support est contenu dans $\bar\Omega$, désignons là par $\pi(D^\alpha u)$ nous avons alors :

$$\langle\pi(D^\alpha u),D^\beta\varphi\rangle = \langle(-1)^{|\beta|} D^\beta(\pi D^\alpha u),\varphi\rangle$$

où $D^\beta(\pi D^\alpha u)$ indique la dérivée au sens des distributions de R^n. On remarque que cette distribution à son support dans $\bar\Omega$.
Ainsi nous aurons :

$$\langle\pi\partial h(u),\varphi\rangle = \sum_{|\alpha|,|\beta|\leq m} \int_\Omega a_{\alpha\beta}(-1)^{|\beta|} D^\beta(\pi D^\alpha u) d\ .$$

V.4 - *Proposition*

La fonction semi-hilbertienne $h(u) = \sum_{|\alpha|,|\beta|\leq m} \int_\Omega a_{\alpha\beta} D^\alpha u D^\beta u dx$ *admet pour sous-différentielle* $\partial h(u) = A(u) = \sum_{|\alpha|,|\beta|\leq m} \int_\Omega a_{\alpha\beta}(-1)^{\beta} D^\beta(\pi D^\alpha u)dx.$

Nous remarquons que $A(u) \in H^{-m}(R^n)$ mais son support est dans $\bar{\Omega}$, ainsi $A(u) \in H^{-m}_{\bar{\Omega}}(R^n) = H^m(\Omega)'$.

Si $u \in C^{2m}(\Omega)$ nous avons $u \in H^m(\Omega)$ et sur Ω , $A(u)$ en tant que distribution est égale à $\sum_{|\alpha|,|\beta|\leq m} a_{\alpha\beta}(-1)^{\beta} D^{\alpha+\beta} u$. ($D^{\alpha+\beta}u$ dérivée partielle au sens des fonctions), mais sur R^n la distribution $A(u)$ est la somme de cette fonction sur Ω et de distribution dont le support est contenu dans $\partial\Omega$ (frontière de Ω).

V.5 - Exemple de fonctions spline à plusieurs variables (voir Atteia |1968|)

Soit Ω un ouvert de R^2, 2-régulier. Soit E l'espace des distributions définies sur Ω, dont les dérivées 1° et 2° sont des éléments de $L^2(\Omega)$.
(Ces distributions sont des fonctions continues sur Ω). Munissons E du produit scalaire $(u\ v) = \int_\Omega (uv+\Delta u.\Delta v)d\omega$ où

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad \text{(le Laplacien).}$$

Alors E est un espace de Hilbert pour ce produit scalaire.
Considérons la forme bilinéaire sur E $\tilde{h}(u,v) = \int_\Omega \Delta u \Delta v\, d\omega$. $h(u) = \tilde{h}(u,u)$ est une fonction semi-hilbertienne avec Kerh = ensemble des fonctions harmoniques sur Ω, définie sur E tout entier.
En effet, sur E/Kerh la forme quotient $\dot{h}$ est une fonction hilbertienne, E/Kerh étant complet pour la norme associée à $\dot{h}$.

Posons Ψ_G = la fonction indicatrice de l'ensemble G des $u \in E$ tels que $u = f$ sur $\partial\Omega$ et $\frac{\partial u}{\partial\nu} = h$ sur $\partial\Omega$ où $f \in H^{3/2}(\partial\Omega)$ et $h \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ et de plus, on suppose que la frontière de $\partial\Omega$ est suffisamment régulière pour que $\frac{\partial u}{\partial\nu}$ existe pour tout $u \in E$.

On remarque que cet ensemble se déduit par translation du sous-espace vectoriel $H_o^2(\Omega)$ fermeture dans Ω de $\mathcal{D}(\Omega)$.

Considérons le problème de fonctions spline associées à h(u) et à Ψ_G, c'est-à-dire minimiser la fonction semi-hilbertienne h(u) sur l'ensemble des $u \in G$.

Calcul de $\partial\Psi_G$

$$\partial\Psi_G(u) = \text{si } u \in G \text{ alors } (H_o^2(\Omega))^0 \quad \text{sinon } \emptyset.$$

$$\partial\Psi_G^*(T) = \text{si } T \in (H_o^2(\Omega))^0 \text{ alors } G \text{ sinon } \emptyset.$$

où $H_o^2(\Omega)^0$ est le polaire du sous-espace $H_o^2(\Omega)$ dans $H^2(\Omega)'$, on a ainsi $H_o^2(\Omega)^0$ qui est l'ensemble des $T \in H^2(\Omega)'$ nulle sur $\mathcal{D}(\Omega)$.

Calcul de ∂h

D'après ce qui précède nous avons : $\partial h(u) = \Delta(\pi\Delta u) \in H_{\bar{\Omega}}^{-2}(R^n)$ isomorphe à $H^2(\Omega)'$. $\partial h(u)$ restreint à $\mathcal{D}(\Omega)$ est ainsi $\Delta^2 u$, Δ^2 étant le carré du Laplacien pris au sens des distributions sur Ω.

V.6 - Caractérisation de la spline

L'équation $\partial h(\sigma)+\partial\Psi(\sigma) \ni 0$ est applicable. h(u) est continue sur E et il existe u où h(u) et $\Psi(u)$ sont finis.

$$\Delta(\pi\Delta\sigma) \in (H_o^2(\Omega))^0.$$

Si on décompose $\sigma = \sigma_N+\sigma_K$ (voir Atteia), $\sigma_N \in$ Kerh (σ_n est harmonique) et σ_K nulle sur $\partial\Omega$ alors $\sigma_n=f$ sur $\partial\Omega$ est comme $\sigma\Delta_N = 0$ on a $\Delta(\pi\Delta\sigma) = \Delta(\pi\Delta\sigma_K)$.

On obtient ainsi en appliquant la relation $\Delta(\pi\Delta\sigma_K) \in H_o^2(\Omega)$ à un élément $\Psi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$\Delta^2\sigma_K = 0 \text{ sur } \Omega \text{ avec } \sigma_K = 0 \text{ sur } \partial\Omega$$

$$\frac{\partial}{\partial\nu}(\sigma) = \frac{\partial}{\partial\nu}(\sigma_n) + \frac{\partial}{\partial\nu}(\sigma_K) = h \text{ sur } \partial\Omega$$

ainsi

$$\frac{\partial}{\partial\nu}(\sigma_k) = h - \frac{\partial}{\partial\nu}(\sigma_n).$$

Ainsi la spline σ est définie par $\sigma = \sigma_n + \sigma_k$ où σ_n solution de $\Delta\sigma_n = 0$ avec $\sigma_n = f$ sur $\partial\Omega$ et σ_k solution de

$$\Delta^2\sigma_k = 0 \text{ avec } \sigma_k = 0 \text{ et } \frac{\partial\sigma_k}{\partial\nu} = h - \frac{\partial\sigma_n}{\partial\nu} \text{ sur } \partial\Omega.$$

V.7 - Fonction spline définie par une relation d'égalité sur un sous-ensemble de Ω

Soit Ω un ouvert de R^n p-régulier. Considérons X un sous-ensemble de Ω fermé contenu dans le complémentaire d'un voisinage de la frontière de Ω.

Définition

On dit qu'une fonction $f \in H^p(\Omega)$ *est nulle sur* X, *si elle est dans l'adhérence pour* $H^p(\Omega)$ *de l'ensemble des fonctions continues définies sur* Ω *appartenant à* $H^p(\Omega)$ *et nulle sur* X. *Désignons par* N(X) *l'ensemble des fonctions nulles sur* X.

V.8 - *Définition*

On dit que u *et* v $\in H^p(\Omega)$ *sont égales sur* X, *si* $u-v \in N(X)$.

Nous posons le problème de fonctions spline avec u

$$h(u) = \sum_{|\alpha|,|\beta|\leq p} a_{\alpha\beta} \int_\Omega D^\alpha u D^\beta u \, d\omega.$$

$\Psi_{N(X)+f}$ = fonction indicatrice de l'ensemble des fonctions u égales à f sur X.

Calcul de $\partial\Psi_{N(X)+f}$

On prend $\Psi_{N(X)+f}$ comme fonction définie dans $H^p(\Omega)$.
Si f = 0 on a :

$$\partial\Psi_{N(X)} = \text{si } u \in N(X) \text{ alors } N(X)^0 \text{ sinon } \emptyset$$

on en déduit

$$\partial\Psi_{N(X)+f} = \text{si } u-f \in N(X) \text{ alors } N(X)^0 \text{ sinon } \emptyset.$$

$$\Psi^*_{N(X)} = \text{fonction indicatrice de } N(X)^0$$

$$\partial\Psi^*_{N(X)}(v) = \text{si } v \in N(X)^0 \text{ alors } N(X) \text{ sinon } \emptyset$$

et

$$\partial\Psi^*_{N(X)+f}(v) = \text{si } v \in N(X)^0 \text{ alors } N(X)+f \text{ sinon } \emptyset.$$

V.9 - *Proposition*

Si Ω est p-régulier, $N(X)^0$ est l'ensemble des éléments de $H^{-p}_{\bar{\Omega}}(R^n)$ dont le support est contenu dans X.

$H^{-p}_{\bar{\Omega}}(R^n)$ est le dual de $H^p(\Omega)$, soit $\varphi \in D(\complement X)$ on a alors si $T \in (N(X))^0$ $\langle T,\varphi\rangle = 0$ puisque φ nulle sur E, ainsi supp. $T \subset X$.

Inversement, si T tel que Supp $T \subset X$, alors $\varphi \in H^p(R^n)$ continue et nulle sur X, $\langle T,\varphi\rangle = 0$, d'après la propriété de p-prolongement tout $f \in H^p(\Omega)$ est la restriction d'un φ, et T étant égal pour ces 2 fonctions ainsi $T \in N(X)^0$.

c.q.f.d.

V.10 - *Proposition*

La fonction spline σ associée à h(u) et $\Psi_{N(X)+f}$ est solution de $A(\sigma) = T$ et $\sigma-f \in N(X)$ où T est une distribution de $H^{-p}(R^n)$ à support dans $\bar{\Omega}$ et A l'opérateur associé à h(u) comme à la proposition V.4

Si A est un opérateur pour lequel on connaisse des résultats de régularité du type : si $A\sigma = 0$ sur un voisinage W dans $\bar{\Omega}$ de $\partial\Omega$, alors σ est une fonction "régulière" sur W voisinage de $\partial\Omega$. $\pi(D^\alpha\sigma)$ sera une distribution sur Ω prolongée par la fonction 0, $D^\beta(\pi D^\alpha(u))$ sera sur Ω la distribution $D^{\alpha+\beta}u$ et une distribution à support $\partial\Omega$, cette dernière distribution apparaîtra comme une somme de dérivées normales, nous pourrions les expliciter en utilisant la formule de Green, par exemple chez Lions-Magenes [1969] et nous obtiendrons ainsi des conditions au bord nulles.

La caractérisation de la spline se ramène à résoudre $A(u) = T$ avec des conditions au bord du type $F_i(u) = 0$ sur $\partial\Omega$ avec $1 \leq i \leq p$.

VI - RECHERCHES DE FORMULES OPTIMALES D'APPROXIMATION DE FONCTIONNELLES LINEAIRES

Soit un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ son dual $\mathcal{H}'$ muni de la norme duale $\|\ell\|_{\mathcal{H}'} = \sup\limits_{h \in \mathcal{H}} \frac{|<\ell,h>|}{\|h\|_{\mathcal{H}}}$ est isométrique à $\mathcal{H}$. Soit $\ell \in \mathcal{H}'$ et V un sous-espace fermé de $\mathcal{H}'$. Appelons $\bar{\ell}$ l'élément de V à distance minimum de ℓ. Nous allons étudier certaines propriétés de cet élément. $\mathcal{H}$ peut être considéré comme l'espace de Hilbert associé à une fonction hilbertienne définie dans E espace vectoriel localement convexe séparé.

VI.1 - *Proposition*

Soit h *une fonction hilbertienne dans* E , $\mathcal{H}$ *son domaine,* h^* *sa fonction polaire pour la dualité entre* E *et* E' , j *l'injection de* dom $\mathcal{H}$ *dans* E, ${}^tj$ *sa transmosée de* E' *dans* $\mathcal{H}'$, *alors nous avons pour tout* e $\in$ E'
$h^*(e') = \frac{1}{2} \|{}^tj(e')\|_{\mathcal{H}'}$.

Soit θ le noyau reproduisant de $\mathcal{H}'$ dans $\mathcal{H}$, si $h \in \mathcal{H}'$
$\|\theta u\|_{\mathcal{H}} = \|u\|_{\mathcal{H}'}$. Or $h(j \circ \theta(u)) = \frac{1}{2} \|\theta(u)\|^2_{\mathcal{H}} = \frac{1}{2} \|u\|^2_{\mathcal{H}'}$.
Prenons $u = {}^tj(e')$ $e' \in E'$ on a ainsi

$$\frac{1}{2} \|{}^tj(e')\|^2_{\mathcal{H}'} = h(j \circ \theta \circ {}^tj(e')) = h(He') = \tilde{h}(He',He') = \frac{1}{2} <He',e'>$$

or

$$h^*(e') = \frac{1}{2} <He',e'>.$$

c.q.f.d.

Si $E = \mathcal{H}$ alors ${}^tj$ est l'identité de $\mathcal{H}' = E'$, nous avons alors $h^*(e') = \frac{1}{2}\|e'\|^2_{\mathcal{H}'}$. Le problème de minimisation de $\|\ell-\bar{\ell}\|_{\mathcal{H}'}$ s'interprète comme minimisation de $h^*(\ell- \bar{\ell})$. Nous pouvons ainsi étudier ce problème en tenant compte que h^* est la fonction polaire de la fonction hilbertienne h.

Nous pouvons prendre la fonction h comme fonction hilbertienne dans E (E espace vectoriel topologique contenant $\mathcal{H}$) si f et les éléments de V peuvent se prolonger en des formes linéaires continues sur E.

VI.2 - Cas où h est une fonction semi-hilbertienne

Supposons maintenant que h soit une fonction semi-hilbertienne dans E. Si nous prenons $\mathcal{H}$ et considérons $\mathcal{H}'$ l'ensemble des formes linéaires continues sur $\mathcal{H}$ nous pouvons munir $\mathcal{H}'$ de la norme définie pour $\ell \in \mathcal{H}'$ par $\|\ell\|_{\mathcal{H}'} = \sup\limits_{\substack{x\in\mathcal{H} \\ h(x)\neq 0}} \frac{<x,\ell>}{\|x\|_{\mathcal{H}}}$.
$\mathcal{H}'$ muni de cette norme apparait comme l'espace de Hilbert dual de $\mathcal{H}$/Kerh.

La dualité entre $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$ n'est pas séparante puisqu'il y a des éléments $\neq 0$ de $\mathcal{H}$ qui donnent pour image 0 pour tout élément de $\mathcal{H}'$. Supposons donc que h soit une fonction semi-hilbertienne dans E espace séparé, E' le dual de E. j est l'injection de domh dans E, ${}^tj$ sa transposée dans $\mathcal{H}'$ la proposition VI.1 est encore vraie, en remplaçant fonction hilbertienne par fonction semi-hilbertienne. Cela se vérifie en remarquant que $h^*(e') = \dot{h}^*(e')$ ($\dot{h}$ fonction hilbertienne associé à h par le quotient par Kerh).

Soit ℓ un élément de E', V un sous-espace vectoriel de E', on cherche un élément $\bar{\ell}$ de V tel que $h^*(\ell-\bar{\ell})$ soit minimum et fini. Un tel élément n'existe pas toujours ; pour qu'il existe, il faut que $\ell-\bar{\ell} \in (\text{Kerh})^0$; ainsi ℓ doit appartenir à $V+(\text{Kerh})^0$. L'approximation $\bar{\ell}$ de ℓ doit être exacte sur les éléments de Kerh, pour la recherche de $\bar{\ell}$ nous pouvons nous limiter aux éléments v de V tel que ℓ-v est nulle sur Kerh. Nous verrons un exemple un peu plus loin de tel cas.

Remarquons que l'ensemble des éléments e' de E' où $h^*(e') \leq 1$,est l'ensemble polaire des éléments de E où $h(e) \leq 1$.

VI.3 - Approximation optimale dans $\mathcal{H}'$

Le problème d'approximation optimale indiqué ci-dessus se formule :

VI.3 - Problème

Soit h *une fonction semi-hilbertienne,* V *un sous-espace de* E', $\ell \in$ E' *; on cherche un élément* $\bar{\ell} \in V$ *tel que* $h^*(e')+\Psi_{\ell+V}(e')$ *soit minimum avec* $e'=\ell-\bar{\ell}$ *et* $\Psi_{\ell'+V}(e')$ *fonction indicatrice de l'ensemble* $\ell+V$.

Nous sommes amenés à minimiser la fonction convexe $h^*(e')+\Psi_{\ell+V}(e')$. La condition de couple uni est vérifiée dès que $\text{dom}h^* \cap \ell+V$ est non vide puisque nous avons deux variétés affines. Nous supposons que $h^*(e')$ est quasi-continue. Ce sera le cas si Kerh est de dimension finie.

Pour déterminer l'ensemble Λ des meilleures approximations $\bar{\ell}$ nous avons l'équation $\partial h^*(\ell-\bar{\ell})+\partial\Psi^*_{\ell+V}(\ell-\bar{\ell}) \ni 0$, nous avons aussi $\ell-\Lambda = \partial h(s) \cap \partial\Psi^*_{\ell+V}(-s)$ (s étant tel que cette intersection soit non vide.)
Or

$$\partial\Psi_{\ell+V}(v) = \text{si } v \in \ell+V \text{ alors } V^0 \text{ sinon } \emptyset$$

$$\partial\Psi^*_{\ell+V}(u) = \text{si } u \in V^0 \text{ alors } \ell+V \text{ sinon } \emptyset$$

où V^0 est le polaire de V dans E.
En rappelant que $\partial h(u)$ restreint à domh est $v \to 2\tilde{h}(u,v)$ et que $\partial h^*(u) = \underset{\sim}{H}(u)$ (H multinoyau de Schwartz) nous avons :

L'<u>ensemble $\ell-\Lambda$ est formé des éléments de e' dont la restriction à domh est $v \to 2\tilde{h}(u,v)$ et qui sont contenus dans $\ell+V$. Les éléments de Λ vérifient $H(\ell-\bar{\ell}) \in V^0$</u>.

Si domh est dense dans E alors $\partial h(u)$ est unique et comme $\ell-\Lambda = \partial h(s) \cap \partial\Psi^*_{\ell}(-s)$, il y a alors unicité de la solution du problème.

VI.4 - Relation entre fonctions splines et approximation optimale

Considérons $V \subset E'$, $C_{V,f} = \{u \in E \mid \forall v \in V, \langle v,u-f\rangle = 0$ et le problème de fonction spline d'interpolation généralisée qui consiste à trouver les fonctions σ qui réalisent le minimum de $h(u) + \Psi_{C_{V,f}}(u)$.

VI.5 - *Proposition*

L'approximation $\bar{\ell}$ *de* ℓ *est exacte pour les fonctions spline associée à* V.

D'après la caractérisation des fonctions spline nous avons $\sigma = H(v)$ où $v \in V$; d'autre part d'après les résultats précédents $H(\ell-\bar{\ell}) \in V^0$. On a

$$\langle \ell-\bar{\ell},\sigma\rangle = \langle \ell-\bar{\ell},H(v)\rangle = \langle v,H(\ell-\bar{\ell})\rangle = 0$$

car nous avons $H(\ell-\bar{\ell}) \in V^0$.

c.q.f.d.

VI.6 - *Proposition*

Les approximants $\bar{\ell}$ *de* ℓ *sont tels que pour tout* $f \in E$ *on ait* $\bar{\ell}(f) = \ell(\sigma)$ *où* σ *est la spline associée à* V *et à* f.

Comme $\langle \ell-\bar{\ell},\sigma\rangle = 0$ $\langle \ell,\sigma\rangle = \langle \bar{\ell},\sigma\rangle$. Or $\bar{\ell} \in V$ et $f-\sigma$ est nulle sur V ; nous avons donc

$$\langle \bar{\ell},f-\sigma\rangle = 0 \text{ et } \langle \ell,\sigma\rangle = \langle \bar{\ell},\sigma\rangle = \langle \bar{\ell},f\rangle$$

c.q.f.d.

VI.7 - Exemple : h est une fonction hilbertienne et V de dimension finie

Dans ce cas H noyau de h est un isomorphisme de $\mathcal{H}'$ sur $\mathcal{H}$ et pour f donnée, la fonction spline σ est unique. Soit v_i $(1 \leq i \leq n)$ une base de V, $\bar{\ell} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$.
Comme les v_i sont indépendants il existe des éléments $f_i \in \mathcal{H}$ tel que $<v_j, f_i> = \delta_{i,j}$ $1 \leq j \leq n$, on désignera par σ_i la spline associée. Nous avons $<\ell, \sigma_i> = <\bar{\ell}, \sigma_i> = \Sigma \alpha_i \delta_{ij} = \alpha_i$.

Ainsi le meilleur approximant $\bar{\ell}$ de ℓ est donné par $\bar{\ell} = \sum_{i=1}^{n} <\ell, \sigma_i> v_i$ (σ_i sont les splines de base).

Explicitons l'équation $H(\ell - \bar{\ell}) \in V^0$ nous obtenons le système de n équations à n inconnues

$$<H(\ell) - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i H(v_i), v_j> = 0$$

qui permet de calculer les α_i par inversion d'un système linéaire symétrique sans avoir à calculer les σ_i.

Nous retrouvons ainsi des résultats qui sont utilisés dans l'approximation optimale ; voir par exemple Duc-Jacquet [1970].

VI.8 - Cas où h est la fonction semi-hilbertienne $\int_a^b (u^{(p)})^2 dt$.

Nous prendrons $E = H^p[a,b]$. Soit V un sous-espace vectoriel de dimension fini de $(H^p|a,b|)'$ par exemple V engendré par $\delta_{x_1}, \ldots, \delta_{x_n}$ avec $x_1, \ldots, x_n \in |a,b|$. Soit $\ell \in (H^p|a,b|)'$, le problème d'approximation optimale relative à $h^*(e')$ consiste à trouver $\bar{\ell} = \sum_{i=1}^{n} \bar{\alpha}_i \delta_{x_i}$ minimisant

$$\|\ell - \ell'\|_{\mathcal{H}'} = \sup_{\substack{u \in H|a,b| \\ u \notin \mathrm{Ker}\, h}} \frac{|<\ell - \ell', u>|}{\sqrt{h(u)}}$$

ℓ' parcourant l'ensemble des combinaisons linéaires $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i' \delta_{x_i}$ de $\delta_{x_1},\ldots,\delta_{x_n}$ vérifian $<\ell-\ell',\pi> = 0$ pour tout polynôme de degré au plus p-1.

Dans ce cas nous avons $\bar{\ell} = \sum_{i=1}^{n} <\ell,\sigma_i>\delta_{x_i}$, où σ_i est la spline d'interpolation entre les $x_1,\ldots,x_n$ vérifiant $\sigma_i(x_j) = \delta_{ij}$.

Nous retrouvons ainsi simplement les résultats de Schoenberg [1964].

Remarquons que V n'est pas contenue en entier dans $\mathcal{H}'$. Nous avons $V \cap \mathcal{H}'$ qui est engendré par Δ_j $1 \leq j \leq n-p$ où Δ_j est la différence divisée sur $x_j,\ldots,x_{j+p}$.

Observant que H est déterminée à un polynôme de degré p-1 près, l'équation $H(\ell-\bar{\ell}) \ni V^0$ nous donne ici $<H(\ell-\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\delta_{x_i}),\Delta_j> = 0$ formant un système de n-p équations indépendantes qui sera complété par p équations exprimant l'exactitude de l'approximation sur les polynômes de degré au plus p-1. Soit $\pi_o,\ldots,\pi_{p-1}$ une base de l'espace de ces polynômes.
On a ainsi le système

$$<H(\ell-\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\delta_{x_i},\Delta_j> = 0 \qquad 1 \leq j \leq n-p$$

$$<\ell-\sum_{i=1}^{n} \bar{\alpha}_i\delta_{x_i},\pi_k> = 0 \qquad 0 \leq k \leq p-1$$

On suppose désormais dans le problème VI.3 que V est un sous-espace de dimension finie engendré par v_i $1 \leq i \leq n$. On suppose en outre que les v_i dépendent de paramètres $t_i \in X_i$, et on fait varier les t_i dans ces ensembles X_i. Nous posons le problème :

VI.9 - Problème

Soit ℓ *une forme linéaire continue sur* E, $V(t_1,\ldots,t_n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i(t_i)$, *on désigne par* $\bar{\ell}$ *une solution du problème VI.3 relative à* $V(t_1,\ldots,t_n)$ *pour une fonction semi-hilbertienne* h, *on cherche à trouver les* $(\bar{t}_1,\ldots,\bar{t}_n)$ *qui rendent minimum* $h(\ell-\bar{\ell})$ *lorsque* t_i *parcourt* X_i *avec* $1 \leq i \leq n$.

Cette formulation englobe le problème étudié par Duc-Jacquet [1970] : pour ℓ = fonctionnelle intégration, pour $X_i = [a,b]$ $v_i(t) = \delta_t$ $t \in [a,b]$ et pour différentes fonctions hilbertiennes correspondant à des espaces de fonctions sur $[a,b]$.

En général le problème VI.8 n'est ni linéaire, ni convexe et il existe des cas de non existence et de non unicité :

Exemple de non unicité

Soit la fonction hilbertienne h définissant l'espace $H^k[a,b]$. Nous considérons $X_i = [a,b]$ et $v_i(t) = \delta_t$ $t \in [a,b]$, soient $x_1,\ldots,x_m$, m points distincts de $[a,b]$ $m > n$, σ désignera une fonction spline interpolant sur les m points $x_1,\ldots,x_m$, soit ℓ un élément $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \delta_{x_i}$ tel que $H(\ell) = \sigma$. Cet élément appartenant à V est lui-même solution du problème VI.3. Si on ajoute n-m points distincts à l'ensemble $\{x_1,\ldots,x_m\}$, le problème VI.3 pour le nouvel espace a encore ℓ comme solution, et ainsi nous pouvons trouver une infinité d'ensemble de n d'abscisses réalisant le minimum du problème VI.3.

VI.10 - Exemple de non existence dans le problème VI.9

Considérons l'espace $H^2[a,b]$ et la fonction semi-hilbertienne $h(u) = \int_a^b u''(t)^2 dt$. Nous allons considérer la fonctionnelle δ'_x que l'on veut approcher par une combinaison linéaire de deux fonctionnelles de Dirac au sens de la fonction duale de h.

VI.11 - *Proposition*

$x \in [a,b]$ *et* $\varepsilon > 0$ *donné il existe des couples de points* $\alpha,\beta \in [a,b]$ *tel que* $h^*(\delta'_x - \lambda\delta\alpha - \mu\delta\beta) < \varepsilon$.

Appliquons la formule de Taylor avec reste sous forme intégrale

$$f(x+k) = f(x)+kf'(x)+\int_x^{x+k} (x+k-t)\, f''(t)dt$$

Posons :

$$r_k(f) = f'(x) - \frac{f(x+k)-f(x)}{k} = \int_x^{x+k} (x+k-t)\; f''(t)dt$$

$$r_k \in (H^2[a,b])'$$

$$h^*(r_k) = \frac{1}{2} \sup \frac{r_k(f)^2}{\left|\int_b^a f''(t)^2 dt\right|}$$

le sup étant pris pour les f tel que f" non nulle pp.

$$r_k(f) = \int_x^{x+k} (x+k-t)\; f''(t)dt \leq \left|\int_x^{x+k} (x+k-t)^2\; dt\right|^{1/2} \left|\int_x^{x+k} f''(t)^2 dt\right|^{2}$$

ainsi

$$|h^*(r_k)| \leq \left|\int_x^{x+k} (x+k-t)^2 dt\right|$$

Ce second membre peut être rendu aussi petit que l'on veut. En prenant $\alpha = x$ $\beta = x+k$ et les coefficients $\lambda = -\mu = \frac{1}{k}$ alors $h^*(\delta u'-\lambda\delta_x-\mu\delta\beta) \leq \varepsilon$.

c.q.f.d.

Si nous considérons le problème VI.8 avec $\ell = \delta'_x$ les applications v_1 et v_2 définies sur $[a,b]$ et égales à δ_x $x \in [a,b]$. On peut trouver un espace V tel que $\inf\limits_{v \in V} h^*(\ell-v)$ soit plus petit qu'un nombre donné, ainsi si t varie la plus petite borne possible est 0. Mais il n'existe pas de combinaison linéaire de δ_α et δ_β qui soit égale à δ'_x, nous avons ici un cas de non existence.

VI.12 - Famille différentiable de fonctionnelle linéaire

On suppose que les X_i sont des intervalles de R, désignons par L l'application : $\prod\limits_{i=1}^{n} X_i \to (E')^n$ définie par $L(x_1,\dots,x_n) = (v_1(x_1),\dots,v_n(x_n))$.

On dit que L est <u>une famille différentiable</u>, si <u>l'application</u> L : $\prod_{i=1}^{n} (X_i) \to E'^n$ <u>est une application différentiable</u>. Cela revient à dire que chacune des composantes v_i est continuement dérivable par rapport à x_i. Soit v'_i la dérivée de v_i par rapport à x_i. Cela suppose qu'on ait muni E' d'une topologie $\mathcal{T}$.

Soit $k \in (\mathrm{Ker} h)^0 \subset E'$ alors si $v'_i \in (\mathrm{Ker} h)^0$, $\tilde{h}^*(\ell(x),k)$ est une fonction de x qui est continuement dérivable. Dans la suite nous supposerons que h est une fonction hilbertienne ainsi nous avons ℓ et v_i $1 \leq i \leq n$ qui sont dans $\mathrm{dom} h^* = E'$. Et nous supposons E' muni de la topologie définie par h^*.

$\tilde{h}^*(v_i,v_i)$ <u>admet pour dérivée</u> $2\tilde{h}^*(v'_i,v_i)$

En effet :

$$\tilde{h}^*(v_i(t_i+k),v_i(t+k))$$

$$= \tilde{h}^*(v_i(t+k)v_i(t+k))-\tilde{h}^*(v_i(t+k),v_i(t))+\tilde{h}^*(v_i(t+k),v_i(t))-\tilde{h}^*(v_i(t),v_i(t))$$

or

$v_i(t+k)-v_i(t) = k(v'_i(t)+\varepsilon(k))$ où $\varepsilon(k)$ est un élément de E' qui converge vers 0 si $k \to 0$.

$$\tilde{h}^*(v_i(t+k),v_i(t+k))-\tilde{h}^*(v_i(t+k),v_i(t)) = k\tilde{h}^*(v'_i(t),v_i(t+k)+k\tilde{h}^*(\varepsilon(k),v_i(t+k))$$

et

$$\tilde{h}^*(v_i(t+k),v_i(t))-\tilde{h}^*(v_i(t),v_i(t)) = k(\tilde{h}^*(v'_i(t),v_i(t))+\tilde{h}^*(\varepsilon(k),v_i(t)).$$

Ici $\tilde{h}^*$ est continue par rapport à chacune des variables dans $\tilde{h}^*(\varepsilon(k),v_i) \to 0$ si $k \to 0$ et nous avons ainsi la dérivée $\tilde{h}^*(v_i,v_i)$ qui est $2\tilde{h}^*(v'_i,v_i)$.

VI.13 - *Proposition*

Si la famille L *est différentiable, pour qu'un ensemble* $x_1,\dots,x_n$ *soit solution du problème VI.8 pour une fonctionnelle* ℓ *il faut que* $\tilde{h}^*(\ell,v_i(x_i)) = \tilde{h}^*(\bar{\ell},v_i(x_i))$ *et que soit* $\tilde{h}^*(\ell,v_i'(x_i)) = \tilde{h}^*(\bar{\ell},v_i'(x_i))$ *soit* $A_i = 0$ $(1\leq i \leq n)$, *où* $\bar{\ell}$ *est la solution du problème VI.3 relatif à* ℓ *et à l'espace engendré par* $v_i(x_i)$ $1 \leq i \leq n$, $\bar{\ell} = \sum_{i=1}^{n} A_i v_i$.

Démonstration

$$\text{Soit } M = h^*(\ell-\bar{\ell}) = h^*(\ell-\sum_{i=1}^{n} A_i v_i)$$

$$= \tilde{h}^*(\ell)-2\tilde{h}^*(\ell,\sum_{i=1}^{n} A_i v_i)+\sum_{i,j=1}^{n} A_i A_j\, h^*(v_i,v_j)$$

Pour que $x_1,\dots,x_n$ soit solution du problème VI.9 il faut que les dérivées de M par rapport aux A_i et x_i soient nulles, M étant dérivables par rapport à ces variables indépendantes.

$$\frac{\partial M}{\partial A_i} = -2\tilde{h}^*(\ell,v_i)+2\sum_{j=1}^{n} A_j\, \tilde{h}^*(v_i,v_j) = 2\tilde{h}^*(\bar{\ell}-\ell,v_i) = 0$$

donc

$$\tilde{h}^*(\ell,v_i) = \tilde{h}^*(\bar{\ell},v_i)$$

$$\frac{\partial M}{\partial x_i} = -2A_i\, \tilde{h}^*(\ell,v_i')+2A_i\sum_{j=1}^{n} A_j\, \tilde{h}^*(v_j,v_i')$$

$$= 2A_i\, \tilde{h}^*(\bar{\ell}-\ell,v_i') = 0$$

donc

$$\tilde{h}^*(\ell,v_i') = \tilde{h}^*(\bar{\ell},v_i') \text{ ou } A_i = 0.$$

c.q.f.d.

Considérons le problème VI.3 relatif à ℓ et à l'espace W de dimension 2n engendré par $v_1,\dots,v_n$, $v_1',\dots,v_n'$, si $\bar{\bar{\ell}}$ est une solution de ce problème alors elle est exacte sur les splines relatives aux fonctionnelles $v_1,\dots,v_n$, $v_1',\dots,v_n'$.

Ecrivons alors

$$\bar{\bar{\ell}} = \sum_{i=1}^{n} \bar{\bar{A}}_i v_i + \sum_{i=1}^{n} \bar{\bar{B}}_i v'_i$$

alors

$$\bar{\bar{A}}_i = \langle \ell, \sigma_i \rangle, \quad \langle \sigma_i, v_j \rangle = \delta_{ij}, \quad \langle \sigma_i, v'_j \rangle = 0 \qquad (\sigma_i \text{ fonction spline})$$

$$\bar{\bar{B}}_i = \langle \ell, \tau_i \rangle, \quad \langle \tau_i, v_j \rangle = 0 \ , \ \langle \tau_i, v'_j \rangle = \delta_{i,j} \qquad (\tau_i \text{ fonction spline}).$$

VI.14 - *Proposition*

Si une suite $x_1,\ldots,x_n$ *est solution du problème VI.9 avec* $\bar{\ell} = \sum_{i=1}^{n} A_i v_i(x_i)$ *alors les* A_i *sont tous distincts de 0,* $\bar{\ell}$ *est aussi meilleur approximant de* ℓ *dans* W ($B_i = 0$ *si* $1 \leq i \leq n$), *et si certains* A_i *sont égaux à 0 (supposons que ce soit les n-p derniers), alors* $x_1,\ldots,x_p,y_{p+1},\ldots,y_n$ *est aussi solution* $y_{p+1},\ldots,y_n$ *prenant des valeurs arbitraires dans* $X_{p+1},\ldots,X_n$ *et nous avons* $\bar{\ell}$ *meilleur approximant dans l'espace engendré par* $v_1,\ldots,v_p,v'_1,\ldots,v'_p$.

Démonstration

Soit $x_1,\ldots,x_n$ une solution du problème VI.3. Supposons A_i non nulles alors $\tilde{h}^*(\ell,v'_i) = \tilde{h}^*(\bar{\ell},v_i)$ et aussi $\tilde{h}^*(\ell,v_i) = \tilde{h}^*(\bar{\ell},v_i)$. Considérons la spline associée aux v_i et v'_i elle s'écrit $\sigma = H(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i + \sum_{i=1}^{n} \beta_i v'_i)$. On a

$$\langle \ell-\bar{\ell},\sigma \rangle = \tilde{h}^*(\ell-\bar{\ell}, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i + \sum_{i=1}^{n} \beta_i v'_i) = 0.$$

Donc $\ell-\bar{\ell}$ est exacte sur les splines, ainsi $\bar{\ell}$ coïncide avec $\bar{\bar{\ell}}$ et nous avons ainsi $B_i = 0$.

Si on a $A_{p+1} = \ldots = A_n = 0$, on fait le même raisonnement que précédemment mais en se limitant aux p premiers v_i, $y_{p+1},\ldots,y_n$ prenant des valeurs quelconques nous avons $\sum_{i=1}^{p} A_i v_i$ (qui est le meilleur approximant dans l'espace engendré par $v_1(x_1),\ldots,v_p(x_p),v_{p+1}(y_{p+1}),\ldots,v_n(y_n)$ car $\sum A_i v_i$ solution du problème VI.9

c.q.f.d.

VI.15 - Famille translatable

Nous supposons que E est un sous-espace vectoriel d'un espace $\mathcal{D}(]a,b[)$ de distribution sur $]a,b[$. Nous définissons la distribution translatée T_h de T par la formule $\langle T_h,\varphi\rangle = \langle T,\varphi(x-h)\rangle$. Pour que cette opération soit interne dans $]a,b[$, il faut que le support T translaté par h soit dans $]a,b[$ c'est-à-dire que Supp $T \subset]a+h,b[$.

VI.16 - *Définition*

Une famille de fonctionnelle $v(x)$ *définies sur* $X \subset]a,b[$ *est dite translatable, si pour chaque* x *et* $y \in X$ *on a* $v(x) = v(y)_{(x-y)}$.

VI.17 - *Proposition*

Si dans l'espace $\mathcal{H}$, *les translations sont continues et si la famille* v_i *est translatable, s'il existe un point* $x_1,\ldots,x_n$ *où la dérivée au sens des distributions appartient à* $\mathcal{H}$ *alors la famille* $(v_1,\ldots,v_n)$ *est différentiable.*

En effet $v_i(x+h) = v_i(x_o+h)_{(x-x_o)}$

$$\frac{v_i(x+h)-v_i(x)}{h} = \left(\frac{v_i(x_o+h)-v_i(x_o)}{h}\right)_{(x-x_o)}$$

la translation étant continue si $\dfrac{v_i(x_o+h)-v_i(x_o)}{h}$ a une limite il en est de même pour $\dfrac{v_i(x+h)-v_i(x)}{h}$.

c.q.f.d.

Remarque :Si le support de ℓ_{x_o} n'est pas réduit à x_o nous ne pouvons pas prendre X égal à $]a,b[$ d'une façon précise si Supp $v(x_o) \subset [x_o-\alpha,x_o+\beta]$ alors $X =]a+\alpha,B-\beta[$.

VI.18 - Exemples

i) Un exemple simple de famille translatable est le cas de $v : x \to \delta_x$ fonctionnelle point. Ce cas a été étudié par Duc-Jacquet |1970| qui a explicité des résultats pour divers types d'espaces.

ii) On peut considérer le cas où $v : x \to m_x$, m_x moyenne sur l'intervalle $|x-\varepsilon, x+\varepsilon|$ dans ce cas là $v'_x = \delta_{x-\varepsilon} - \delta_{x+\varepsilon}$, on voit ainsi que $v'_x \in H^1|a,b|$ on peut utiliser la proposition VI.15 pour trouver une condition nécessaire pour le problème VI.9.

iii) Cas où $v(x) = \rho_\varepsilon(x)$ où $\rho_\varepsilon(x)$ est la translatée de $\rho_\varepsilon(0)$ avec $\rho_\varepsilon(0) =$ si $|t| \leq \varepsilon$ alors $\exp(\frac{\varepsilon^2}{\mu^2-\varepsilon^2})$ sinon 0. Cette fonction approxime un multiple de δ_o lorsque $\varepsilon \to 0$. $\rho_\varepsilon(x)(t)$ est indéfiniment dérivable $\frac{d}{dx}(\rho_\varepsilon(x))$ sera dans un grand nombre d'espaces classique.

VII. - CONDITION POUR QU'UN PROCEDE D'INTERPOLATION PROVIENNE DE LA MINIMISATION D'UNE FONCTION SEMI-HILBERTIENNE

VII.1 - Nous avons vu que la minimisation d'une fonction semi-hilbertienne h sur l'ensemble des interpolants, sur un nombre fini de points d'une fonction f, donnait un procédé d'interpolation Σ_P de type linéaire vérifiant les axiomes I.4 (chap. I). Si de plus Kerh vérifie la condition de Haar sur X, alors l'axiome I.9 (ch. I) est vérifié. Aussi posons nous le problème de savoir si un procédé d'interpolation donné provient de la minimisation d'une fonction semi-hilbertienne.

VII.2 - Soit π_P un procédé d'interpolation de type linéaire vérifiant II.3, de seuil d'unicité n (elle vérifie aussi I-9), tel que pour tout P avec card(P) $\leq$ n on ait $\pi_P(F)$ = V espace vectoriel fixé. Nous supposons de plus que π_P vérifie :

VII.3 - Condition

Pour tout P *tel que* cardP > n+1 *nous avons*

$$\pi_P(F) = \pi_{P_{\hat{i}}}(F)+\pi_{P_{\hat{j}}}(F) \qquad (P_{\hat{i}} = P-\{p_i\}).$$

Cet axiome correspond à la proposition II.7. Il est indépendant des autres conditions comme nous le voyons avec l'exemple : soit V un sous-espace vectoriel de dimension n vérifiant la condition de Haar sur X et engendré par $\varphi_1,\dots,\varphi_n$. Nous choisissons une suite de fonctions $\varphi_{n+1},\dots,\varphi_m,\dots$ tel que nous ayons un système de Markov. Nous prenons comme interpolants une combinaison linéaire des m premiers φ_i si m > n, et si m < n les combinaisons linéaires des n premiers φ_i. Alors nous obtenons bien un procédé d'interpolation vérifiant toutes les conditions précédentes sauf la condition VII.3.

Si le procédé d'interpolation π_P provient de la minimisation de la fonction semi-hilbertienne h alors nous avons Kerh = V.

Nous allons construire une multi-application de V^0 dans $F(X)$, et exprimer les conditions pour qu'une telle multi-application puisse être un multi-noyau.

VII.4 - Soit V vérifiant la condition de Haar en utilisant la proposition II.11. Nous avons pour tout système de n+1 points $p_1,\ldots,p_{n+1}$ l'existence d'un élément $a_P = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \delta_{p_i}$ défini à un facteur multiplicatif et appartenant à V^0. La proposition II.13 nous indique que nous avons une base de V en prenant $p_1,\ldots,p_n$ points fixés et en choisissant pour chaque x distincts de $p_1,\ldots,p_n$,

$$a_x = \alpha^x \delta_x + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^x \delta_{x_i} \qquad a_x \in V^0.$$

Pour définir une multi-application sur V^0, il suffit pour chaque a_x (formant une base de V^0) de définir la multi-application sur les a_x puis de l'étendre par linéarité.

Soit $P_x = \{x,p_1,\ldots,p_n\}$

L'ensemble $\pi_{P_x}(\mathcal{F})$ est un espace vectoriel de dimension n+1 qui contient le sous-espace V de dimension n, le quotient de $\pi_{P_x}(\mathcal{F})$ par V est donc isomorphe à $\mathbb{R}$. Ainsi pour chaque a_x nous choisissons une des classes modulo V de $\pi_{P_x}(f)$, soit $K(a_x)$. Ce choix est possible à la multiplication d'un élément près de $\mathbb{R}$.

Si K est un multinoyau alors il possède la propriété de symétrie $\langle Ke',f'\rangle = \langle Kf',e'\rangle$ pour tout $e',f' \in V^0$. Faisons l'hypothèse VII.5 suivante :

VII.5 - Condition

Il existe au moins une multiapplication K *définie pour tout* a_x *dans l'ensemble des classes modulo* V *de* $\pi_{p_1,\ldots,p_n,x}(\mathcal{F})$ *telle que pour tout* x *et* $y \in X-\{p_1,\ldots,p_n\}$ *nous ayons :*

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^x K(a_y)(p_i)+\alpha^x K(a_y)(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^y K(a_x)(p_i)+\alpha^y K(a_x)(y).$$

Cette condition explicite $\langle K(a_x),a_y\rangle = \langle K(a_y),a_x\rangle$. Si un tel K existe, alors nous avons tout λK ($\lambda \in R$) qui vérifie la même condition. Nous étendons cette application K à l'espace V^0 tout entier par linéarité.

VII.6 - *Proposition*

Toute multiapplication K *vérifiant la condition VII.5 est telle que pour tout* e', f' $\in V^0$ *nous ayons* $<K(e'),f'> = <K(f'),e'>$.

En effet, nous avons $e' = \sum_{i\in I} \lambda_i a_{x_i}$, $f' = \sum_{j\in J} \mu_j a_{x_j}$.

Nous avons $<K(e'),f'> = \sum_{\substack{i\in I\\ j\in J}} \lambda_i \mu_j <K(a_{x_i}),a_{x_j}>$.

Comme $<K(a_{x_i}),a_{x_j}> = <K(a_{x_j}),a_{x_i}>$ on a donc $<Ke',f> = \Sigma\lambda_j\mu_j<K(a_{x_j}),a_{x_i}> = <Kf'e'>$.

c.q.f.d.

Si K est un multinoyau alors nous avons la condition de positivité pour tout $e' \in V^0$ nous avons $<K(e'),e'> \geq 0$.

VII.7 - Condition

Parmi les applications K *vérifiant VII.5, il existe au moins une application* K *telle que pour tout* $e' = \sum_{i\in I} \lambda_i a_{x_i}$ *nous ayons*

$$\sum_{\substack{i\in I\\ j\in J}} \lambda_i \lambda_j <H(a_{x_i}),a_{x_j}> > 0.$$

Soient n+1 points $x_1,\dots,x_{n+1}$, alors il existe un système de coefficients uniques à un facteur près $\lambda_1,\dots,\lambda_{n+1}$ tel que le terme $\sum_{i=1}^{n+1} \eta_i \delta_{x_i} \in V^0$ s'écrit $\sum_{i=1}^{n+1} \eta_i \delta_{x_i} = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i a_{x_i}$.

VII.8 - Condition

La multi-application défini sur V^0 *à valeurs dans les classes modulo* V *de* $\pi_p(F)$ *et le procédé* π *vérifie la condition III.8 si pour tout* n+1 *uples* $x_1,\dots,x_{n+1}$ *nous ayons* $\pi_{x_1,\dots,x_{n+1}}(F) = \bigcup_{\lambda\in R} \lambda(\Sigma\lambda_i\ K(a_{x_i}))$.

Cette condition est vide si $V = \{0\}$.

VII.9 - <u>*THEOREME*</u>

Si un procédé d'interpolation π_P *est de type linéaire, a un seuil d'unisolvence* n, *et est tel que pour tout* P *(*card(P) $\leq$ n*)* $\pi_P(F) = V$, *s'il vérifie la condition VII.3 et si il existe une multi-application* K *vérifiant VII.5, VII.7 et VII.8 alors le procédé d'interpolation provient de la minimisation d'une fonction semi-hilbertienne.*

Remarquons d'abord que VII.3 entraîne la propriété de projection.

Considérons la multi-application K. Les conditions VII.5 et VII.7 permettent de vérifier que K est un multinoyau (symétrie et positivité). D'après la bijection entre multinoyau et fonction semi-hilbertienne, nous pouvons aussi associer une fonction semi-hilbertienne k à K. Il nous reste à vérifier que π_P provient bien de la minimisation de cette fonction semi-hilbertienne. Nous avons Kerh = V de dimension n et vérifiant la condition de Haar. Désignons par Σ_P le procédé d'interpolation obtenu par minimisation de K, nous avons $\Sigma_P = \bigcup_{\delta_P \in X} H(\delta_P)$ où δ_P parcourt l'ensemble X des masses dont le support est contenu dans P et qui appartiennent à V^0. L'interpolant de f étant la fonction unique de Σ_P coïncidant sur P avec f dans le cas où card(P) > n. Appliquant la propriété de la condition VII.3 un certain nombre de fois. Nous pouvons écrire Σ_P (resp. π_P) comme somme d'éléments $\Sigma_{P'}$ (resp. $\pi_{P'}$) P' ayant n+1 éléments et les P' étant les mêmes pour Σ et π. Pour voir que Σ et π coïncident, il suffit de voir que $\Sigma_P = \pi_P$ pour les P ayant n+1 éléments. La condition VII.8 assure que

$$\pi_{(x_1,\ldots,x_{n+1})}(F) = \bigcup \lambda(\Sigma\lambda_i K(a_{x_i})) = \Sigma_{(x_1,\ldots,x_{n+1})}(F).$$

c.q.f.d.

VII.10 - Si un procédé d'interpolation vérifie les conditions du théorème VII.9, nous pouvons donc construire K un multinoyau. Ayant K nous déduisons le polaire de k pour $k^*(e')$ = si $e' \in V$ alors $\frac{1}{2} \langle K(e'),e'\rangle$ sinon $+\infty$.

Nous avons k par dualité

$$k(e) = \sup_{e' \in V^0} (\langle e',e\rangle - \frac{1}{2} \langle Ke',e'\rangle).$$

VII.11 - Soit f une fonction interpolante. Il existe $P = \{p_1, \ldots, p_n\}$ tel que $\pi_P(f) = f$, mais P n'est pas unique car tout ensemble P' contenant P donne $\pi_{P'}(f) = f$. Mais nous avons la propriété si P' et P" sont tels que $\pi_{P'}(f) = \pi_{P''}(f) = f$ alors $f \in \pi_{P' \cap P''}(f)$. En prenant l'intersection de tous les P vérifiant $\pi_P(f) = f$, nous obtenons un plus petit Q. Alors nous pouvons définir l'application Λ de $\pi_Q(f)$ dans l'ensemble des masses à support Q défini par $\Lambda(f) = K^{-1}(f)$ qui est défini puisque $\mathrm{Ker} K = \{0\}$.

VII.12 - Autre expression de k

Nous avons $k(e) = \tilde{k}(e,e)$. Si $e = K(e')$ nous pouvons écrire : $k(K(e')) = (K(e'),K(e')) = \langle K(e'),e'\rangle$ utilisant $\Lambda(f)$ pour $f \in \pi_Q(\mathcal{F})$. Nous obtenons :

$$k(f) = \langle f,\Lambda f\rangle = \Sigma\lambda_i\ f(Q_i)$$

D'autre part nous avons $K(V^0)$ qui est dense dans domk. Nous obtenons donc k définit dans domk qui est l'adhérence dans $\mathcal{F}(X)$ de $K(V^0)$.

VIII - EXEMPLES DE PROCEDE PROVENANT DE LA MINIMISATION DE FONCTION SEMI-HILBERTIENNE

VIII.1 - Exemple 1 - Description du procédé

On se donne une fonction φ_1 définie sur $[0,1]$ avec $\varphi_1(0) = 0$ et $\varphi_1(1) = 1$. Soit un intervalle $|a,b|$ $x_1,\dots,x_n$ une subdivision de $[a,b|$ nous considérons l'interpolation de f sur $[x_i x_{i+1}]$ la fonction

$$\Psi_i(t) = \alpha\varphi_1\left(\frac{t-x_i}{x_{i+1}-x_i}\right)+\beta$$

interpolant $f(x_i)$ et $f(x_{i+1})$. Il s'agit d'une transformée affine de Ψ_i.

Pour l'intervalle $[a,x_1|$ et $|x_2,b|$ considérons une fonction φ_2 définie sur $|a,b|$. Nous prolongeons alors sur $|a,x_1|$ par $\frac{f_2(x_1)}{\varphi_2(x_1)}\varphi_2(t)$ et sur $|x_n,b|$ par $\frac{f(x_n)}{\varphi_2(x_n)}\varphi_2(t)$.

Si nous n'avons qu'un seul point, alors l'interpolant est un multiple de $\varphi_2(t)$.

Propriété de ce procédé

Ce procédé est bien un procédé d'interpolation où l'interpolant est toujours unique. Il est de type linéaire puisque si $f = g+h$ $\Psi_{(x_1,\dots,x_n)}(f) = \Psi_{(x_1,\dots,x_n)}(g)+\Psi_{(x_1,\dots,x_n)}(h)$ (il procède par transformation affine dépendant linéairement des ordonnées). Il admet un seuil d'unisolvence $n = 1$.

Mais ce procédé n'est pas en général un projecteur, c'est-à-dire qu'il ne vérifie pas en général la condition I.4 (ch. I). S'il provient de la minimisation d'une fonction semi-hilbertienne, il devrait vérifier cette condition. Nous devrons avoir si $a = 0$, $b = 1$ et $0 < x < 1$ alors l'interpolant de φ sur les 3 points a,x,b coïncide avec φ_1 sur l'intervalle $[0,1|$, sur $|0,x|$ cet interpolant s'écrit $\varphi_1(x)\ \varphi_1(\frac{t}{x})$ on a ainsi $\varphi_1(x)\varphi_1(\frac{t}{x}) = \varphi_1(t)$. Nous obtenons ainsi $\varphi_1(t) = t$.

Nous obtenons ainsi un procédé qui coïncide sur $[x_i, x_{i+1}]$ avec une droite, cette question sera étudiée dans un cadre plus général dans l'exemple 2.

Nous obtenons ainsi le résultat :

Proposition

Le procédé d'interpolation décrit ci-dessus ne peut être un procédé de minimisation provenant de la minimisation d'une fonction semi-hilbertienne que si $\varphi_1(t) = t$.

VIII.2 - Exemple n° 2 - Description du procédé

Soit un intervalle $|a,b|$. 2 fonctions linéairement indépendantes φ_1 et φ_2 continues sur $|a,b|$. Soient $x_1,\dots,x_n$, n points de $|a,b|$, et une fonction f définie sur $|a,b|$. Sur l'intervalle $|x_i,x_{i+1}|$, on interpole f par la fonction $\Psi_i = a_i\varphi_1+b_i\varphi_2$ (a_i et b_i étant choisis de façon à ce que $\Psi_i(x_i) = f(x_i)$, $\Psi_i(x_{i+1}) = f(x_{i+1})$). Pour pouvoir faire un tel choix quel que soit x_i, x_{i+1}, nous devons supposer que φ_1 et φ_2 vérifient la condition de Haar. Sur $|a,x_1|$ et $|x_n,b|$ on pose $\Psi_o = a_o\varphi_1$ et $\Psi_n = a_n\varphi_1$ de façon à ce que $\Psi_o(x_1) = f(x_1)$ et $\Psi_n(x_n) = f(x_n)$. Pour faire un tel choix nous devons supposer que φ_o ne s'annule pas sur $|a,b|$.

Si nous avons qu'un seul point x_1 alors nous avons l'interpolation qui est $\dfrac{f(x_1)\varphi_1(t)}{\varphi_1(x_1)}$.

Propriétés du procédé

Ce procédé est bien un procédé d'interpolation où l'interpolant d'une fonction est toujours unique, il est de type linéaire puisque $\Psi_{(x_1,\dots,x_n)}(f+g) = \Psi_{(x_1,\dots,x_n)}(f)+\Psi_{(x_1,\dots,x_n)}(g)$ et admet comme seuil d'unisolvence $n = 1$.

L'axiome 1.4 (ch. I) est vérifié, car si $\varphi \in \pi_{P'}(F)$ si $P \supset P'$ l'interpolant de φ sur P est φ lui-même évidemment.

Si $n > 2$ soit un élément $\varphi \in \Psi_{(x_1,\ldots,x_n)}(F)$ nous pouvons décomposer $\Psi = \Psi_1+\Psi_2$ avec $\Psi_1 \in \Psi_{(x_1,\ldots,\hat{x}_i,\ldots,x_n)}(F)$ et $\Psi_2 \in \Psi_{(x_1,\ldots,\hat{x}_j,\ldots,x_n)}(F)$. En effet $\Psi_{(x_1,\ldots,\hat{x}_i,\ldots,x_n)}(F)$ est contenu dans $\Psi_{(x_1,\ldots,x_n)}(F)$ de dimension n-1, d'autre part il est différent de $\Psi_{(x_1,\ldots,\hat{x}_j,\ldots,x_n)}(F)$ de dimension n-1 et contenu dans $\Psi_{(x_1,\ldots,x_n)}(F)$. Leur somme est de dimension supérieure à n-1, donc ne peut que coïncider avec $\Psi_{(x_1,\ldots,x_n)}(F)$. D'autre part, nous avons $\Psi_{\{x\}} = \{\lambda\varphi_1\}$ donc indépendant de x ainsi la condition VII.3 est vérifiée.

Si le procédé provient de la minimisation d'une fonction semi-hilbertienne, comme Ψ est défini pour tout P alors KerH = 0. Nous pouvons alors utiliser la proposition II.11 qui nous donne $\mathrm{Kerh} = \{\lambda\varphi_1 \mid \lambda \in R\}$. Vu que φ_o ne s'annule pas sur $|a,b]$ nous avons donc la condition de Haar, et ainsi $(\mathrm{Kerh})^0$ est engendré par des éléments de la forme $\lambda\delta_x+\mu\delta_y$ tel que l'on a $\langle\varphi_1,\lambda\delta_x+\mu\delta_y\rangle = \lambda\varphi_1(x)+\mu\varphi_1(y)$. Nous pouvons prendre $\varphi_1(y)\delta_x-\varphi_1(x)\delta_y$.

En choisissant y fixé nous obtenons une base de $(\mathrm{Kerh})^0$ en faisant varier x dans $|a,b]-\{y\}$, et en prenant $a_x = \varphi_1(y)\delta_x-\varphi_1(x)\delta_y$. En particulier nous pouvons choisir $y = a$.

VIII.3 - Expression du multinoyau, s'il existe, de l'exemple 2

Les interpolants sur a_x sont de la forme

$$\varphi(t) = \text{si } t \in |a,b| \text{ alors } \alpha_x\varphi_1(t)+\beta_x\varphi_2(t) \text{ sinon } \mu_x\varphi_1(t)$$

avec la condition de raccord $\alpha_x\varphi_1(x)+\beta_x\varphi_2(x) = \mu_x\varphi_1(x)$ d'où

$$\mu_x = \alpha_x+\beta_x\frac{\varphi_2(x)}{\varphi_1(x)} .$$

Nous poserons ainsi

$$H(a_x) = \text{si } t \in |a,x| \text{ alors } \alpha_x\varphi_1(t)+\beta_x\varphi_2(t) \text{ sinon } (\alpha_x+\beta_x\frac{\varphi_2(x)}{\varphi_1(x)})\ \varphi_1(t).$$

Comme $H(a_x)$ est défini à un multiple de φ_1 nous pouvons ainsi laisser α libre dans R.

VIII.4 - Condition de symétrie

$<H(a_x),a_y> = <H(a_y),a_x>$. On peut supposer que $a < y < x$

$$<H(a_x),a_y> = <H(a_x),\varphi_1(a)\delta_y-\varphi_1(y)\delta_a>$$

$$= \beta_x(\varphi_1(a)\varphi_2(y)-\varphi_1(y)\varphi_2(a))$$

$$<H(a_y),a_x> = <H(a_y),\varphi_1(a)\delta_x-\varphi_1(y)\delta_a>$$

$$= \beta_y\varphi_1(x)\left[\frac{\varphi_1(a)\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)} - \varphi_2(a)\right]$$

$$= \beta_y \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_1(y)} (\varphi_1(a)\varphi_2(y)-\varphi_2(a)\varphi_1(y)).$$

En égalant les deux expressions, nous obtenons ainsi :

$$\beta_x\varphi_1(y) = \beta_y\varphi_1(x).$$

Si nous posons $\beta_x = \varphi_1(x)$ $\beta_y = \varphi_1(y)$, nous avons la relation de symétrie vérifiée, ainsi nous pouvons prendre :

$$H(a_x) = \text{si } t \in [a,x] \text{ alors } \alpha\varphi_1(t)+\varphi_1(x)\varphi_2(t)$$

$$\text{sinon } (\alpha+\varphi_1(x))\varphi_1(t)$$

VIII.5 - La condition VII.8 est vérifiée par H

Les termes de la forme $\lambda\delta_x+\mu\delta_y$ appartenant à $(\mathrm{Kerh})^0$ sont des multiples de $\varphi_1(y)\delta_x-\varphi_1(x)\delta_y = a_{xy}$.

Nous remarquons que $a_{xy} = \frac{\varphi_1(y)}{\varphi_1(a)} a_x - \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_1(a)} a_y$.

ainsi pour vérifier la condition VII.8, il suffit de vérifier que

$$H\left(\frac{\varphi_1(y)}{\varphi_1(a)}\, a_x - \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_1(a)}\, a_y\right) \subset \Psi_{(x,y)}(\mathcal{F})$$

et que

$$0 \notin H\left(\frac{\varphi_1(y)}{\varphi_1(a)}\, a_x - \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_1(a)}\, a_y\right).$$

Sur l'intervalle $[x,b]$ nous avons une combinaison linéaire de multiples de φ_1 donc nous avons un multiple de φ_1, sur $[y,x]$ nous avons une combinaison linéaire de $\mu_y\varphi_1$ avec $\alpha\varphi_1+\beta_x\varphi_2$ où $\beta_x \neq 0$ donc nous obtenons une combinaison linéaire de φ_1 et de φ_2 où le coefficient de φ_2, $\dfrac{\varphi_1(y)\varphi_1(x)}{\varphi_1(a)}$ est différent de 0, donc nous avons une fonction qui ne peut être nulle lorsque le coefficient de φ_1 varie dans $\mathbb{R}$.

Sur $[a,x]$ il suffit de voir que $H(a_{xy}) = \alpha\varphi_1(t)$

$$H\left(\frac{\varphi_1(y)}{\varphi_1(a)}\, a_x - \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_1(a)}\, a_y\right) = \alpha\varphi_1(t)+\left(\frac{\varphi_1(y)}{\varphi_1(x)}\,\beta_x - \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_1(a)}\,\beta_y\right)\varphi_2(t)$$

comme $\beta_x = \varphi_1(x)$ et $\beta_y = \varphi_1(y)$ alors nous avons bien $H(a_{xy}) = \alpha\varphi_1(t)$.

VIII.6 - Condition de positivité VII.7

$$\langle H(a_y),a_x\rangle = \varphi_1(x)(\varphi_1(a)\varphi_1(y)-\varphi_1(a)\varphi_1(y)) \text{ si } y < x.$$

La condition de positivité s'exprime par :

$$\sum_{i,j\in I} \lambda_i\lambda_j\langle H(a_{x_i}),x_j\rangle > 0$$

ce qui revient à dire que la matrice M de coefficient général $m_{ij} = \langle H(a_{x_i}),x_j\rangle$ est définie positive.

Supposons les x_i rangés dans l'ordre croissant $a \leq x_1 < x_2 <\ldots< x_n \leq b$, alors

$$m_{ij} = \varphi_1(x_{\sup(i,j)})(\varphi_1(a)\varphi_2(x_{\inf(i,j)})-\varphi_2(a)\varphi_1(x_{\inf(i,j)})).$$

posant

$$a_i = \varphi_1(x_i)$$

et

$$b_i = \varphi_2(x_i)\varphi_1(a)-\varphi_2(a)\varphi_1(x_i).$$

Nous obtenons la matrice M sous la forme particulière :

$$
M_n = \det \begin{vmatrix}
a_1b_1 & a_2b_1 & a_3b_1 & & a_ib_1 & \cdots & a_nb_1 \\
a_2b_1 & a_2b_2 & a_3b_2 & & a_ib_2 & & a_nb_2 \\
a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 \; - - & & & & \\
\text{-------} & \text{-------} & \text{-------} & & & \text{-------} & \text{-------} \\
 & & & & a_ib_{i-1} & & \\
a_ib_1 & a_ib_2 & & a_ib_{i-1} & a_ib_i & a_{i+1}b_i \; \cdots\cdots & a_nb_i \\
\text{-------} & \text{-------} & \text{-------} & \text{-------} & a_{i+1}b_i & & \\
\text{-------} & \text{-------} & \text{-------} & \text{-------} & \text{-------} & \text{-------} & \text{-------} \\
a_{n-1}b_1 & a_{n-1}b_2 & \text{-------} & \text{-------} & a_{n-1}b_i & & a_nb_{n-1} \\
a_nb_1 & a_nb_2 & & & a_nb_i & \cdots & a_nb_n
\end{vmatrix}
$$

L'indice de a est toujours supérieur ou égal à celui de b.

Développons M_n suivant la dernière colonne. Les mineurs correspondant au terme a_nb_i $i < n-1$ sont tels que les 2 dernières lignes sont proportionnelles.

Donc le mineur est nul.

Ainsi

$$
M_n = -a_nb_{n-1} \begin{vmatrix} a_1b_1 & \cdots & a_{n-1}b_1 \\ a_{n-2}b_1 & \cdots & a_{n-1}b_{n-2} \\ a_nb_1 & \cdots & a_nb_{n-1} \end{vmatrix} + a_nb_nM_{n-1}
$$

$$
\text{le terme} \quad \begin{vmatrix} a_1b_1 & \cdots & a_nb_1 \\ a_{n-2}b_1 & \cdots & a_{n-1}b_{n-1} \\ a_nb_1 & \cdots & a_nb_n \end{vmatrix} = \frac{a_n}{a_{n-1}} M_{n-1}
$$

ainsi

$$
M_n = a_nM_{n-1}\left(b_n - \frac{a_n}{a_{n-1}} b_{n-1}\right) = \frac{a_n}{a_{n-1}} (b_na_{n-1} - a_nb_{n-1})M_{n-1}.
$$

On obtient ainsi en utilisant cette relation

$$M_n = a_n b_1 \prod_{i=1}^{n-1} (b_{i+1} a_i - b_i a_{i+1}).$$

La matrice étant définie positive, il faut et il suffit que les mineurs principaux soient strictement positifs.
Ainsi nous devons avoir $M_n > 0$ quel que soit n > 0. Explicitons ces conditions en tenant compte des valeurs de a_i et b_i.

$$\begin{aligned} b_{i+1} a_i - a_{i+1} b_i &= \varphi_1(x_i)\varphi_1(a)\varphi_2(x_{i+1}) - \varphi_1(x_i)\varphi_1(x_{i+1})\varphi_2(a) \\ &\quad - \varphi_1(x_{i+1})\varphi_1(a)\varphi_2(x_i) + \varphi_1(x_{i+1})\varphi_1(x_i)\varphi_2(a) \\ &= (\varphi_1(x_i)\varphi_2(x_{i+1}) - \varphi_1(x_{i+1})\varphi_2(x_i))\varphi_1(a) \end{aligned}$$

$$M_n = \varphi_1^{n-1}(a)\varphi_1(x_n)(\varphi_1(a)\varphi_2(x_i) - \varphi_2(a)\varphi_1(x_i)) \prod_{i=1}^{n-1} (\varphi_1(x_i)\varphi_2(x_{i+1}) - \varphi_1(x_{i+1})\varphi_2(x_i)).$$

Remarquons que l'on peut supposer $\varphi_1 > 0$ car φ_1 ne s'annule pas sur $|a,b|$, donc garde un signe constant. Dans la forme M_n, ce signe est à la puissance 2n.

Nous devons avoir $M_n > 0$ quel que soit la suite $x_1 < x_i < \ldots < x_n$. Ceci équivaut à :

pour tout $0 \leq y < x \leq b$ nous avons $(\varphi_1(y)\varphi_2(x) - \varphi_1(x)\varphi_2(y)) > 0$.

VIII.7 - <u>*THEOREME*</u>

Pour que le procédé d'interpolation décrit en VIII.2 soit un procédé d'interpolation provenant de la minimisation d'une fonction semi-hilbertienne, il faut et il suffit que l'expression $\varphi_1(y)\varphi_2(x) - \varphi_1(x)\varphi_2(y)$ *garde un signe constant pour tout couple* y,x *avec* $a \leq y < x \leq b$.

Si le signe de l'expression considéré est négatif, alors cela signifie que nous ayons

$$<H(a_x),a_x> = \varphi_1(x)(\varphi_1(a)\varphi_2(x)-\varphi_1(x)\varphi_2(a)) \text{ est négatif.}$$

En changeant alors H en -H c'est-à-dire en posant

$$H(a_x) = \text{si } t \in [a,x] \text{ alors } \alpha\varphi_1(t)-\varphi_1(x)\varphi_2(t) \text{ sinon } (\alpha-\varphi_2(x))\varphi_1(t)$$

alors nous avons bien un noyau positif.

VIII.8 - Exemple

Considérons le cas où φ_1 est une fonction constante que l'on peut prendre égale à 1. La condition du théorème VIII.7 exprime que $\varphi_2(x)-\varphi_2(y)$ est de signe constant. D'où :

Si $\varphi_1 = 1$, pour que le procédé V-1 minimise une fonction semi-hilbertienne il faut et il suffit que φ_2 soit strictement monotone.

Nous retrouvons le cas de l'interpolation linéaire $\varphi_2 = x$.

VIII.9 - Calcul de h lorsque $\varphi_1 = 1$, $\varphi_2 = x$.

Rappelons que le multinoyau peut s'exprimer dans le cas où E' est un ensemble de masse à support fini, comme un multinoyau d'Aronzajn-Bergmann II.14. Ici $(\mathrm{Ker}h)^0$ est de codimension 1 et est engendré par des masses sur 2 points, ainsi le multinoyau sera à 2 variables pour E', on a ainsi $A(x,\xi,\zeta)$. Nous avons ici :

$$A(x,\xi,\zeta) = H(\delta\xi-\delta\zeta)(x) = |x-\zeta| - |x-\xi|.$$

D'après ce qui précède $A(x,\xi,\zeta)$ est symétrique positif.

Soit $e' \in E'$ $\quad e'=\sum_i c_i\ (\delta\xi_i-\delta\zeta_i)$ on a $h^*(e') = \frac{1}{2} \langle H(e'),e'\rangle$ donc

$$h^*(\sum_i c_i(\delta\xi_i-\delta\zeta_i)) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} c_i c_j(|\xi_j-\zeta_i|+|\xi_i-\zeta_j|-|\xi_i-\xi_j|+|\zeta_i-\zeta_j|)$$

h étant la duale de h^* nous avons alors : $h(e) = \sup_{e'\in(\mathrm{Ker}h)^0}(\langle e,e'\rangle-h^*(e'))$

$H(e')$ admet une dérivée au sens des distributions qui est une fonction en escalier. En appliquant le lemme d'Aggeri Lescarret [1965] on a

$$h(e) = \sup_{e'}\ (\langle e,e'\rangle-h^*(e')) = \frac{1}{2} \sup_{e'} \frac{\langle e,e'\rangle^2}{h^*(e')^2}$$

en explicitant les expressions de $\langle e,e'\rangle$ et $h^*(e')$ on a

$$h(e) = \frac{1}{2} \sup \frac{\sum_i c_i(e(\xi_i)-e(\zeta_i))^2}{\sum_{i,j} c_i c_j(|\xi_i-\zeta_j|+|\xi_j-\zeta_i|-|\xi_i-\xi_j|-|\zeta_i-\zeta_j|)}$$

Remarquons que si nous posons $\varphi(x)= \sum_i c_i\chi_{\xi_i\zeta_i}(x)$ où χ_{ξ_i,ζ_i} est la fonction caractéristique de l'intervalle $[\xi_i,\zeta_i]$ alors :

$$\sum_{i,j} c_i c_j(|\xi_i-\zeta_j|+|\xi_i-\zeta_j|-|\xi_i-\xi_j|-|\zeta_i-\zeta_j|) = \int_a^b \varphi^2(x)dx$$

et

$$\sum_j c_i(e(\xi_i)-e(\zeta_i)) = \int_a^b e'\varphi\, dx \qquad \text{pour } e' \in L^2[a,b]$$

ainsi nous avons $h(e) = \sup_{\varphi\in\mathcal{E}} \dfrac{(\int_a^b e'\varphi\, dx)^2}{\int_a^b \varphi^2 dx}$

où $\mathcal{E}$ est l'ensemble des fonctions en escalier sur $[a,b]$.

$\mathcal{E}$ est dense dans $L^2|a,b|$ donc il existe une suite φ_n convergeant vers e', alors $\int_a^b \varphi_n^2 dx$ et $\int_a^b e'\varphi_n dx$ convergent vers $\int_a^b e'^2 dx$ ainsi $h(e) \geq \int_a^b (e')^2 dx$

D'autre part d'après l'inégalité de Schwartz

$$(\int_a^b e'\varphi dx)^2 \leq \int_a^b e'^2 dx \int_a^b \varphi^2 dx$$

et on a

$$h(e) = \sup_{\varphi\in\mathcal{E}} \frac{(\int e'\varphi dx)^2}{\int\varphi^2 dx} \leq \int_a^b (e')^2 dx.$$

En conclusion :

<u>La fonction semi-hilbertienne que minimise le procédé d'interpolation avec $\varphi_1 = 1$ et $\varphi_2 = x$ est $h(e) = \int_a^b e'^2 dx$ définie dans $\mathbb{R}[a,b]$ et de domaine $H^1[a,b]$, elle est associée au multinoyau $H(\Sigma c_i(\delta_{\xi_i} - \delta_{\zeta_i})) = \sum_i c_i(|x-\zeta_i| - |x-\xi_i|)$</u>

VIII.10 - Exemple 3 - Description du procédé

Nous prenons la même technique d'interpolation que pour l'exemple 2 avec cette différence que sur l'intervalle $[x_n, b]$ nous faisons l'extrapolation par une expression de la forme φ_2 au lieu de φ_1.

Nous avons ainsi toutes les propriétés : procédé d'interpolation de type linéaire, axiome VII.3, condition VII.5 et seuil d'unisolvence n=1. La différence est que Kerh = 0 car si $x \neq y$ nous avons alors $\Psi_{(x)} \neq \Psi_{(y)}$.

Le multinoyau sera ici un noyau et nous devons avoir

$$H(\delta_x) = \text{si } t \in [a,x] \text{ alors } \frac{\beta_x}{\varphi_1(x)} \varphi_1(t) \text{ sinon } \frac{\beta_x \varphi_2(t)}{\varphi_2(x)}$$

alors si $y < x$ $\quad \langle H(\delta_x), \delta_y \rangle = \dfrac{\beta_x \varphi_1(y)}{\varphi_1(x)}$

$$\langle H(\delta_y), \delta_x \rangle = \frac{\beta_y \varphi_2(x)}{\varphi_2(y)}$$

en prenant $\beta_x = \varphi_2(x)\varphi_1(x)$ et $\beta_y = \varphi_1(y)\varphi_2(y)$ nous obtenons ainsi $H(x) = \text{si } t \in [a,x]$ alors $\varphi_2(x)\varphi_1(t)$ sinon $\varphi_1(x)\varphi_2(t)$ vérifiant la condition de symétrie.

La condition VII.8 est automatiquement vérifiée puisque Kerh = 0. Nous avons $\langle H(\delta_x), \delta_y \rangle = \varphi_1(y)\varphi_2(x)$ si $y < x$.

La condition de positivité VII.7 s'écrira pour $a \leq x_1 < \ldots < x_n \leq b$

$$\Sigma \lambda_i \lambda_j < H(\delta_{x_i}), \delta_{y_j} > > 0.$$

La matrice $m_{ij} = < H(\delta_{x_i}), \delta_{x_j} >$ est de même type que dans VIII.6 c'est-à-dire $m_{ij} = a_{\sup(i,j)} b_{\inf(i,j)}$. On a

$$M_n = a_n b_1 \prod_{i=1}^{n-1} (b_{i+1} a_i - b_i a_{i+1})$$

$$M_n = \varphi_2(x_n) \varphi_1(x_n) \prod_{i=1}^{n-1} (\varphi_i(x_{i+1}) \varphi_2(x_i) - \varphi_i(x_i) \varphi_2(x_{i+1})) > 0.$$

Nous obtenons la condition pour tout couple $y < x$

$$\varphi_1(x)\varphi_2(y) - \varphi_1(y)\varphi_2(x) > 0.$$

Pour que le procédé puisse être défini, il faut que φ_1 et φ_2 vérifie la condition de Haar sur $[a,b]$ et que $\varphi_1(x) \neq 0$ et $\varphi_2(x) \neq 0$. Alors en supposant φ_1 et φ_2 continue ils sont aussi toujours d'un signe constant qu'on peut supposer positif. Ainsi nous avons :

$$\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_1(y)} > \frac{\varphi_2(x)}{\varphi_2(y)}$$

<u>Cas de sint et cost sur $[0, \frac{\pi}{2}]$</u>

Nous allons prendre $\varphi_1(t) = \sin t$, $\varphi_2(t) = \cos t$, φ_1 étant croissante et φ_2 décroissante.

La condition $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_1(y)} > \frac{\varphi_2(x)}{\varphi_2(y)}$ est automatiquement vérifiée. Nous avons ainsi un procédé d'interpolation qui provient de la minimisation d'une fonction hilbertienne h. Remarquons que $\sin 0 = 0$ et $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ ainsi les interpolants pour $0 < x_1 < \ldots < x_n < \frac{\pi}{2}$ seront nuls aux deux bords.

Nous avons $h(H(x)) = \langle H(x), \delta_x \rangle = \sin x \cos x > 0$. Voyons que $h(H(x)) = \int_0^{\pi/2} H'(x)^2(t)dt - \int_0^{\pi/2} H(x)^2(t)dt$.

Sur $[0,x]$ $H(x)(t) = \cos x \sin t$ $\qquad H'(x)(t) = \cos x \cos t$.

Sur $[x,\frac{\pi}{2}]$ $H(x)(t) = \sin x \cos t$ $\qquad H'(x)(t) = \sin x \sin t$

$$\int_0^{\pi/2} H(x)^2(t)dt = \int_0^x \cos^2 x \sin^2 t dt + \int_x^{\pi/2} \sin^2 x \cos^2 t dt$$

$$\int_0^{\pi/2} H'(x)^2(t)dt = \int_0^x \cos^2 x \cos^2 t dt + \int_0^{\pi/2} \sin^2 x \sin^2 t dt.$$

Faisons la différence de la 1ère à la seconde. Nous obtenons :

$$\cos^2 x \int_0^x (\cos^2 t - \sin^2 t)dt - \sin^2 x \int_0^{\pi/2} (\cos^2 t - \sin^2 t)dt$$

Nous avons

$$\int_0^x \cos^2 t - \sin^2 t = \left|\frac{\sin 2t}{2}\right|_0^x \text{ d'où finalement}$$

$$\cos^2 x \frac{\sin 2x}{2} + \sin^2 x \frac{\sin 2x}{2} = \sin x \cos x.$$

Ainsi pour toute combinaison linéaire $\mu = \Sigma \lambda_i H(x_i)$ nous avons :

$$h(u) = \int_0^{\pi/2} u'^2 dt - \int_0^{\pi/2} u^2 dt.$$

Ainsi h est égal à l'expression ci-dessus pour tous les u qui sont limite simple de combinaison linéaire de la forme : si $t \in [a,x]$ alors $\cos x \sin t$ sinon $\sin x \cos t$ où $x \in [a,b]$. Nous avons un espace de fonctions nulles au bord.

CHAPITRE - III

PRODUIT TENSORIEL DE FONCTIONS SEMI-HILBERTIENNE ET APPLICATIONS A L'INTERPOLATION A PLUSIEURS VARIABLES

Soient deux fonctions hilbertiennes p et q dans E et F et soient $\tilde{p}$ et $\tilde{q}$ les formes bilinéaires associées. On peut interpréter le produit tensoriel $\tilde{p} \otimes \tilde{q}$ comme une forme bilinéaire sur $E \otimes F$ et ainsi on associe une norme p sur le sous-espace domp $\otimes$ domq qui n'est pas, en général, complet. Aussi nous sommes amenés à compléter cet espace, mais cette complétion sort en général de $E \otimes F$, ainsi nous prennons un espace vectoriel topologique G dans lequel $E \otimes F$ est dense. Pour G nous ne pouvons pas en général prendre $E \otimes F$ car la topologie projective sur domp $\otimes$ domq est plus fine que celle induite par P. Nous introduisons ainsi une notion de produit tensoriel de fonctions hilbertiennes, puis on généralisera au cas semi-hilbertien.

Nous appliquons cette notion pour déterminer des fonctions interpolant sur les sommets d'un quadrillage ou sur les côtés d'un quadrillage une fonction donnée ; dans le premier cas nous n'avons pas unicité. Pour obtenir cette unicité nous introduisons une condition supplémentaire de minimisation au bord. Pour le second cas, nous avons une infinité de conditions d'interpolation mais Kerh se trouve soit nul, soit de dimension infinie, et nous démontrons l'unicité.

Nous abordons brièvement le cas de fonctions spline à valeurs vectorielles dans un espace de Hilbert F, où nous minimisons une fonction hilbertienne qui est le composé d'une application de domp dans F et du carré de la norme de F ; on montre que cette minimisation revient à minimiser chacune des variables pour une base orthonormale de F.

Nous décrivons les divers procédés de construction de surface de Coons, qui apparaissent pour le cas de seconde espèce, comme une fonction spline à valeurs vectorielles correspondant à un produit tensoriel de fonctions semi-hilbertiennes.

I - PRODUIT DE FORMES BILINEAIRES ET DE FONCTIONS SEMI-HILBERTIENNES

I.1 - Produit tensoriel de formes bilinéaires

Soient E et F 2 espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$, $\tilde{p}$ et $\tilde{q}$ 2 formes bilinéaires sur E et F ; l'application définie sur $E \times E \times F \times F$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ par $(e_1,e_2,f_1,f_2) \to p(e_1,e_2).q(f_1,f_2)$ est une application linéaire par rapport à chacune des variables, donc quadrilinéaire. Rappelons que $E \otimes E \otimes F \otimes F$ est canoniquement isomorphe à $(E \otimes F) \otimes (E \otimes F)$ ainsi à l'application définie ci-dessus, on associe d'une manière unique une forme bilinéaire $\tilde{p} \otimes \tilde{q}$ sur $(E \otimes F) \otimes (E \otimes F)$ elle est caractérisée par :

$$\tilde{p} \otimes \tilde{q}(e_1 \otimes f_1, e_2 \otimes f_2) = \tilde{p}(e_1,e_2)\cdot\tilde{q}(f_1,f_2).$$

I.2 - *Définition*

La forme bilinéaire sur $E \otimes F$, $\tilde{p} \otimes \tilde{q}$, *est appelée produit tensoriel des formes* $\tilde{p}$ et $\tilde{q}$.

Si les formes $\tilde{p}$ et $\tilde{q}$ sont symétriques on a alors :
$\tilde{p} \otimes \tilde{q}(e_1 \otimes f_1, e_2 \otimes f_2) = \tilde{p} \otimes \tilde{q}(e_2 \otimes f_2, e_1 \otimes f_1)$ et en étendant ce résultat par linéarité nous avons la forme $\tilde{p} \otimes \tilde{q}$ symétrique.

Rappelons qu'une telle forme est dite hermitienne. Elle est non dégénérée s'il n'y a pas d'autre élément x que 0 tel que quel que soit $g \in E \otimes F$ on ait $\tilde{p} \otimes \tilde{q}(x,g) = 0$.

I.3 - *Proposition*

Si les formes hermitiennes $\tilde{p}$ *et* $\tilde{q}$ *sont non dégénérées alors la forme hermitienne* $\tilde{p} \otimes \tilde{q}$ *est non dégénérée.*

Si elle était dégénérée, il existerait $x = \sum_{i \in I} e_i \otimes f_i$ tel que $\tilde{p} \otimes \tilde{q}(x,g) = 0$ pour tout $g \in E \otimes F$.
Appelons E_x et F_x les sous-espaces de E et F engendrés par les e_i et f_i, ce sont des sous-espaces de dimension finie: $E_x \otimes F_x$ est un sous-espace de dimension finie de $E \otimes F$. Si $h \in E_x \otimes F_x$ on peut écrire $h = \Sigma e_j \otimes f_j$ avec $e_j \in E_x$ et $f_j \in F_x$ on a ainsi

$$\tilde{p} \otimes \tilde{q}(h,h') = \sum_{j,j'} \tilde{p}(e_j,e'_{j'})\tilde{q}(f_j,f'_{j'})$$

La restriction de $\tilde{p} \otimes \tilde{q}$ à $E_x \otimes F_x$ est le produit tensoriel des restrictions de $\tilde{p}$ à E_x et $\tilde{q}$ à F_x. D'autre part on sait Bourbaki [Algèbre Ch. IX] que le produit tensoriel de formes non dégénérées, défini sur des espaces de dimension finie est non dégénéré. Donc $\tilde{p} \otimes \tilde{q}$ est non dégénéré sur $E_x \otimes F_x$; ainsi nous aurons $x = 0$.

c.q.f.d.

Désignons par Kerp l'ensemble des éléments x de E tel que $p(x,e) = 0$ quel que soit $e \in E$.

I.4 - *Proposition*

Soient 2 formes hermitiennes $\tilde{p}$ *et* $\tilde{q}$; *le sous-espace* $\mathrm{Ker}(\tilde{p} \otimes \tilde{q}) \subset E \otimes F$ *est égal à* $\Gamma(\mathrm{Kerp},\mathrm{Kerq})$ *sous-espace de* $E \otimes F$ *engendré par* $\mathrm{Kerp} \otimes F$ *et par* $E \otimes \mathrm{Kerq}$.

Démonstration

Soit $x \in \mathrm{Kerp} \otimes F$, $x = \Sigma e_i \otimes f_i$ où $e_i \in \mathrm{Kerp}$, $g = \Sigma e'_j \otimes f'_j$. On a $\tilde{p} \otimes \tilde{q}(x,g) = \sum_{i,j} \tilde{p}(e_i,e'_j) \otimes \tilde{q}(f_j,f'_j) = 0$ où $p(e_i,e'_j) = 0$
Donc $x \in \mathrm{Ker}\tilde{p} \otimes \tilde{q}$, de même si $x \in E \otimes \mathrm{Kerq}$; on a ainsi $\Gamma(\mathrm{Kerp},\mathrm{Kerq}) \subset \mathrm{Ker}(p \otimes q)$.

Inversement considérons $\dot{E} = E/\mathrm{Kerp}$, $\dot{F} = F/\mathrm{Kerq}$, $\dot{\tilde{p}}$(resp. $\dot{\tilde{q}}$) les quotients de $\tilde{p}$ (resp $\tilde{q}$) par Kerp (resp. Kerq) définissant sur $\dot{E}$ (resp. $\dot{F}$) des formes hermitiennes non dégénérées, ainsi la forme $\dot{\tilde{p}} \otimes \dot{\tilde{q}}$ est une forme hermitienne non dégénérée sur $\dot{E} \otimes \dot{F}$. Or nous avons $\dot{E} \otimes \dot{F} = E \otimes F/\Gamma(\mathrm{Kerp},\mathrm{Kerq})$; le quotient de $p \otimes q$ par $\Gamma(\mathrm{Kerp},\mathrm{Kerq})$ est possible et il coïncide avec $\dot{p} \otimes \dot{q}$. Comme $\dot{p} \otimes \dot{q}$ est non dégénéré cela indique que $\mathrm{Ker}(p \otimes q) \subset \Gamma(\mathrm{Kerp},\mathrm{Kerq})$.

c.q.f.d.

Soient 2 formes hermitiennes $\tilde{p}$ et $\tilde{q}$, $\tilde{p} \otimes \tilde{q}$ leur produit tensoriel. On peut considérer la forme quadratique $p \otimes q$ défini par $p \otimes q(x) = \tilde{p} \otimes \tilde{q}(x,x)$ $x \in E \otimes F$ Nous dirons que $p \otimes q$ est le produit tensoriel des formes quadratiques p et q.

I.5 - *Proposition*

Si les formes quadratiques p *et* q *sont positives alors leur produit tensoriel* $p \otimes q$ *est une forme quadratique positive.*

Soit $g = \sum_{i\in I} e_i \otimes f_i$. Les e_i étant en nombre fini, par un procédé d'orthogonalisation on peut trouver des e'_i telsque chaque e_i soit combinaison linéaire des e'_i, et que les e'_i soient orthogonaux entre eux pour $\tilde{p}$ $(\tilde{p}(e'_i,e'_j) = 0)$.
De même, on exprime f_i en fonction de f'_i orthogonaux pour q. En remplaçant e_i et f_i par leur expressions dans g nous obtenons $g = \Sigma\lambda_i\lambda_j\ e'_i \otimes f'_j$. Ainsi nous nous limitons au cas de la décomposition de $g = \Sigma\varepsilon_i \otimes \varphi_i$ où ε_i sont orthogonaux entre eux pour p, les φ_i pour q.

$$p \otimes q(g) = p \otimes q(\sum_i \varepsilon_i \otimes \varphi_i) = \sum_{i,j} \tilde{p} \otimes \tilde{q}(\varepsilon_i \otimes \varphi_i,\varepsilon_j \otimes \varphi_j)$$

$$= \sum_{i,j} \tilde{p}(\varepsilon_i,\varepsilon_j)\tilde{q}(\varphi_i,\varphi_j)$$

Si $i \neq j$ on a $\tilde{p}(\varepsilon_i,\varepsilon_j) = 0$ et $\tilde{q}(\varphi_i,\varphi_j) = 0$ donc finalement nous avons

$$p \otimes q(g) = \sum_i p(\varepsilon_i)q(\varphi_i) \geq 0$$

car

$$p(\varepsilon_i) \geq 0 \text{ et } q(\varphi_i) \geq 0.$$

c.q.f.d.

Ainsi la forme quadratique $p \otimes q$ définit sur $E \otimes F$ une structure préhilbertienne ; appelons ρ la semi-norme associée à cette structure semi-hilbertienne. Nous avons $\rho(g)^2 = \tilde{p} \otimes \tilde{q}(g,g)$. Nous appelerons Q la topologie associée à cette semi-norme.

Rappelons que si nous avons deux espaces semi-normés E et F par p' et q', on définit la topologie projective π sur $E \otimes F$ par la semi-norme produit tensoriel $p' \otimes q'(g) = \inf \sum_{i \in I} p(e_i)q(f_i)$ le inf étant pris pour toutes les décompositions de g en $\sum_{i \in I} e_i \otimes f_i$. Voir Trèves [1967]. Par contre pour la topologie Q la semi-norme $\rho(g)$, $\rho(g)^2 = \sum_{i,j} \tilde{p}(e_i,e_j)\tilde{q}(f_i,f_j)$, est indépendante de la décomposition de g. Nous avons le résultat :

I.6 - *Proposition*

La semi-norme ρ *est moins fine que la semi-norme* $p' \otimes q'$.
$(p'^2 = p,\ q'^2 = q)$.

D'après la proposition I.4 nous pouvons par quotient nous ramene au cas où p et q sont des normes. Pour les éléments décomposables $g = e \otimes f$ on a $\rho(e \otimes f)^2 = p \otimes q(e \otimes f) = (p'(e)q'(f))^2$. D'autre part on sait que la boule unité de $p \otimes q$ est l'enveloppe convexe du produit des boules unités de p et q, c'est-à-dire de l'ensemble des $e \otimes f$ où $p(e) \leq 1$ et $q(f) \leq 1$. La boule unité de ρ contient le produit des boules unités de p et q, d'autre part elle est convexe donc elle contient la boule unité de $p' \otimes q'$.

c.q.f.d.

I.7 - Produit tensoriel de fonctions hilbertiennes

Soit p (resp. q) une fonction hilbertienne dans E (resp. F). En particulier p (resp. q) est inf-faiblement compacte, domp (resp. domq) est complet et l'injection de domp (resp. domq) dans E (resp. F) est continue.

Le sous-espace de $E \otimes F$, domp $\otimes$ domq muni de la topologie Q n'est pas nécessairement complet. Ainsi la fonction quadratique $p \otimes q$ n'est pas nécessairement une fonction hilbertienne dans $E \otimes F$. Cependant nous pouvons prolonger par continuité $p \otimes q$ au complété domp $\hat{\otimes}_Q$ domq, mais ce dernier ensemble n'est plus nécessairement contenu dans $E \otimes F$.

Nous sommes amenés à considérer un espace topologique G vérifiant les conditions :

P1 : $E \otimes F$ est contenu dans G et y est dense

P2 : les éléments de $E' \otimes F'$ considérés comme forme linéaire sur $E \otimes F$ s'étendent par continuité à G.

P3 : l'adhérence de domp $\otimes$ domq dans G est un complété de domp $\otimes_Q$ domq.

La fonction r dans G égale sur domp $\hat{\otimes}_Q$ domq au prolongement de $p \otimes q$ et infinie ailleurs est hilbertienne et appelée produit tensoriel de p et q relativement à G.

En effet, domp $\hat{\otimes}_Q$ domq est complété de domp $\otimes$ domq pour la norme associée à r. C'est un sous-espace hilbertien de G, donc r est bien hilbertienne.

Si E = domp, F = domq, alors nous pouvons choisir G = domp $\hat{\otimes}_Q$ domq et nous obtenons ainsi une fonction hilbertienne finie sur tout G.

Le noyau de Schwartz R associé à la fonction hilbertienne r est défini sur G', à valeur dans domp $\hat{\otimes}_Q$ domq et son image est dense dans ce dernier espace. Nous pouvons préciser :

I-8 - *Proposition*

La restriction à $E' \otimes F'$ *du noyau* R *associé à* r *est égal au produit tensoriel des noyaux de* P *et* Q *associés à* p *et* q.

Soit $g' = \sum_i e'_i \otimes f'_i$ un élément de $E' \otimes F'$, comme domp $\otimes$ domq est dense dans domp $\hat{\otimes}_Q$ domq, $R(g')$ est déterminé par la propriété : pour tout $z = \sum_j x_j \otimes y_j \in$ domp $\otimes$ domq , $\langle g',z\rangle = \tilde{p} \otimes \tilde{q}\,(Rg',z)$.

Or

$$\langle g',z\rangle = \sum_{i,j} \langle e'_i \otimes f'_i, x_j \otimes y_j\rangle = \sum_{i,j} \langle e'_i,x_j\rangle\langle f'_i,y_j\rangle$$

$$= \sum_{i,j} \tilde{p}(Pe'_i,x_j)\tilde{q}(Qf'_i,y_j)$$

$$= \sum_{i,j} \tilde{p} \otimes \tilde{q}(Pe'_i \otimes Qf'_i, x_j \otimes y_j)$$

$$= \tilde{p} \otimes \tilde{q}(P \otimes Q(\sum_i e'_i \otimes f'_i), \sum_j (x_j \otimes y_j))$$

ainsi

$$P \otimes Q(\sum_i e'_i \otimes f'_i) = R(\sum_i e'_i \otimes f'_i).$$

c.q.f.d.

I-9 - Produit tensoriel de fonctions semi-hilbertiennes

Considérons maintenant le cas où p(resp. q) est une fonction semi-hilbertienne. Nous allons choisir un espace vectoriel topologique qui vérifie les conditions P1 et P2 du paragraphe I.7. Par contre la condition P3 n'a plus de sens, on la remplace par les conditions suivantes :

P'3 : Γ(Kerp,Kerq) est fermé dans G.

P"3 : $\dot{\text{domp}} \hat{\otimes}_Q \dot{\text{domq}}$ est contenu dans G/Γ(Kerp,Kerq) et l'injection est continue.

Rappelons que $\dot{p}$ (resp. $\dot{q}$) désigne la fonction hilbertienne définie dans E/Kerp (resp. F/Kerq) et $\dot{\text{domp}} \otimes \dot{\text{domq}}$ est isomorphe canoniquement à (domp $\otimes$ domq)/Γ(Kerp,Kerq).

Si χ désigne la projection canonique de G sur G/Γ(Kerp,Kerq) alors χ^{-1}(domp $\hat{\otimes}_Q$ domq) est un sous-espace de G et nous définissons $r = \dot{r} \circ \chi$ où $\dot{r}$ est le produit tensoriel des fonctions hilbertiennes $\dot{p}$ et $\dot{q}$.

<u>Cette fonction convexe r définie dans G est dite produit tensoriel des fonctions semi-hilbertiennes p et q.</u>

Si p et q sont hilbertiennes les deux définitions coïncident.

Si p et q sont définies sur tout E et F, nous prenons alors pour G $\Gamma(\mathrm{Kerp},\mathrm{Kerq}) \oplus (\mathrm{domp} \mathbin{\hat{\otimes}_Q} \mathrm{domq})$ muni de la topologie définie par la semi-norme du quotient sur le second sous-espace. En choisissant un supplémentaire de Kerp dans E (resp. Kerq dans F) nous pourrons définir une injection de $E \otimes F$ dans G.

I.10 - Produit tensoriel de multiapplications linéaires

Soient A et B deux espaces vectoriels, une multiapplication u telle que pour u(a) est un sous-espace affine parallèle à N: u est linéaire si l'application $\bar{u}$ de A dans B/N est linéaire, où $\bar{u}(a)$ est la classe de u(a).

<u>Soient 2 multi-applications linéaires $u : A \to B$ et $u' : A' \to B'$ déterminées à N et N' près. La multiapplication produit tensoriel de u et u' est la multiapplication de $A \otimes A'$ dans $B \otimes B'$ telle que $u \otimes u'(\alpha) = \chi^{-1}(\bar{u} \otimes \bar{u}'(\alpha))$ où $\alpha \in A \otimes A'$ et χ la projection de $B \otimes B'$ sur $B/N \otimes B'/N'$.</u>

Le produit tensoriel de 2 multiapplications linéaires est défini à $\Gamma(N,N')$ près.

I.11 - Multinoyau du produit tensoriel de 2 fonctions semi-hilbertiennes

Le multinoyau de p (resp. q) est défini sur Kerp (resp. Kerq) à valeurs dans domp (resp. domq). Le multinoyau du produit tensoriel r de p et de q sera défini sur $\Gamma(\mathrm{Kerp},\mathrm{Kerq})^0$.

I.11 - *Proposition*

$(\mathrm{Kerp})^0 \otimes (\mathrm{Kerq})^0 \subset \Gamma(\mathrm{Kerp},\mathrm{Kerq})^0$.

Les conditions P1 et P2 assurent que $E' \otimes F'$ est contenu dans G', donc $(\mathrm{Kerp})^0 \otimes (\mathrm{Kerq})^0 \subset G'$. Un élément de $(\mathrm{Kerp})^0 \otimes (\mathrm{Kerq})^0$ s'écrit $\sum_i u_i \otimes v_i$ ($u_i \in (\mathrm{Kerp})^0$, $v_i \in (\mathrm{Kerq})^0$) ; pour vérifier qu'il appartient à $^{i}\Gamma(\mathrm{Kerp},\mathrm{Kerq})^0$, il suffit de vérifier qu'il s'annule sur le système de générateurs de $\Gamma(\mathrm{Kerp},\mathrm{Kerq})$ formé de $(\mathrm{Kerp} \otimes \mathrm{domq})$ et $(\mathrm{dom} \otimes \mathrm{Kerq})$ On peut se limiter aux éléments décomposables $e \otimes f$, $e \in \mathrm{Kerp}$ et $f \in \mathrm{domq}$. On a alors $(\sum_i u_i \otimes v_i)(e \otimes f) = \sum_i u_i(e) \otimes v_i(f) = 0$, car $u_i(e) = 0$.

c.q.f.d.

I.12 - *Proposition*

La restriction à $(\mathrm{Kerp})^0 \otimes (\mathrm{Kerq})^0$ *du multinoyau* R *de* r *coïncide avec le produit tensoriel des multinoyaux* P *et* Q *de* p *et* q .

En effet nous avons $\dot{P}$ (resp. $\dot{Q}$) qui est défini sur $(E/\mathrm{Kerp})'$ (resp. $(F/\mathrm{Kerq})'$) isomorphe à $(\mathrm{Kerp})^0$ (resp. $(\mathrm{Kerq})^0$) ; alors R restreint à $(\mathrm{Kerp})^0 \otimes (\mathrm{Kerq})^0$ est égal à $\chi^{-1}.\dot{R}$, (χ projection de G sur $G/\Gamma(\mathrm{Kerp},\mathrm{Kerq})$) et $\dot{R}$ restreint à $(\mathrm{Kerp})^0 \otimes (\mathrm{Kerq})^0$ est égal à $\dot{P} \otimes \dot{Q}$ (Proposition I.8).

c.q.f.d.

Remarquons que $\chi^{-1}(\dot{P} \otimes \dot{Q}) = P \otimes Q$ par définition du produit tensoriel de multi-applications.

II - PRODUIT TENSORIEL DE FONCTIONS SPLINE

II.1 - Considérons le cas où p (resp. q) est la fonction semi-hilbertienne convexe définie sur $R^{[a,b]}$ (resp. $R^{[c,d]}$) par $u \to \int_a^b (u^{(k)}(x))^2 dx$ (resp. $v \to \int_c^d (v^{(k)}(y))^2 dy$) dont le domaine est $H^k[a,b]$ (resp. $H^k[c,d]$). On considère que $H^k[a,b]$ est un sous-ensemble de $R^{[a,b]}$ en choisissant pour chaque élément de $H^k[a,b]$ la fonction continue qui le définit (l'existence d'une telle fonction est assurée par le théorème de Sobolev pour $k \geq 1$).

La forme bilinéaire produit tensoriel $\tilde{p} \otimes \tilde{q}$ est définie pour les g appartenant à $H^k[a,b] \otimes H^k[c,d]$ et on a, si

$$g = \sum_i e_i \otimes f_i \quad \text{et} \quad g' = \sum_j e'_j \otimes f'_j ,$$

$$\tilde{p} \otimes \tilde{q}(g,g') = \sum_{i,j} \int_a^b e_i^{(k)}(x) e_j'^{(k)}(x) dx \int_c^d f_j^{(k)}(y) f_j'^{(k)}(y) dy$$

$$= \sum_{i,j} \iint_{[a,b]\times[c,d]} \frac{\partial^{2k}}{\partial x^k \partial y^k} (e_i \; f_i) \frac{\partial^{2k}}{\partial x^k \partial y^k} (e'_j \; f'_j) dx\, dy$$

Nous définissons le produit tensoriel p et q relativement à $G = R^{[a,b]\times[c,d]}$ muni de la topologie de la convergence simple. Le dual de G est G', espace des mesures à support fini dans $[a,b] \times [c,d]$. Remarquons qu'ici $E' \otimes F'$ = un élément de G' est le prolongement par continuité à f d'un élément de $E' \otimes F'$.

On vérifie aisément P1 c'est-à-dire $R^{[a,b]} \otimes R^{[c,d]}$ dense dans $R^{[a,b]\times[c,d]}$. P2 vient d'être vu.
Pour voir P'3 et P"3, remarquons que le complété de $H^k[a,b] \otimes H^k[c,d]$ est l'espace $H^{2k}_{x^k y^k}(\Delta)$ où $\Delta = [a,b]\times[c,d]$. Cet espace est l'ensemble des distributions f dans dont les dérivées d'ordre, en x et y, inférieur ou égal à k appartiennent à $L^2(\Delta)$, muni de la forme hermitienne :

$$(f,g) \to \sum_{\alpha,\beta \leq k} \iint_\Delta \frac{\partial^{\alpha+\beta}}{\partial x^\alpha \partial y^\beta} f \frac{\partial^{\alpha+\beta}}{\partial x^\alpha \partial y^\beta} g \, dx\, dy.$$

Nous avons ici le produit tensoriel h des fonctions semi-hilbertiennes p et q,

$$h(f) = \iint_\Delta \left(\frac{\partial^{2k}}{\partial x^k \partial y^k} f\right)^2 dx\, dy.$$

Alors $\mathrm{Ker}h = \{f \mid f(x,y) = \sum_{i=0}^{k-1} x^i \varphi_i(y) + \sum_{i=0}^{k-1} y^i \varphi_{i+k}(x)\}$

où les fonctions $\varphi_i, 0 \leq i \leq 2k-1$, sont des fonctions arbitraires. Le quotient de $H^{2k}_{x^k y^k}(\Delta)$ par Kerh peut être pris égal à $L^2(\Delta)$.

h est ainsi une fonction semi-hilbertienne dans R^Δ.

II.2 - Multinoyau de h

Les multinoyaux P (resp. Q) associés à p (resp. q) sont des multiapplications définies sur l'ensemble M (resp. N) des mesures sur $[a,b]$ (resp. $[c,d]$) combinaisons linéaires finies de différences d'ordre k de k+1 masses ponctuelles. Une telle différence sur $\xi_0,\ldots,\xi_k$ dans $[a,b]$ (resp. $[c,d]$) est

$$\delta_{\xi_0,\ldots,\xi_p} = \sum_{i=0} (-1)^i \binom{\cdot}{i} \delta_{\xi_i}$$

Nous avons $M \otimes N$ qui est l'ensemble des combinaisons linéaires finies d'éléments : $\delta_{\xi_0,\ldots,\xi_q} \otimes \delta_{\zeta_0,\ldots,\zeta_q}$

$$\delta_{\xi_0,\ldots,\xi_q} \otimes \delta_{\zeta_0,\ldots,\zeta_q} = \sum_{i,j=0}^{p} (-1)^{i+j} \binom{\cdot}{i} \binom{\cdot}{j} \delta_{\xi_i,\zeta_j}$$

où δ_{ξ_i,ζ_j} est la masse de Dirac au point (ξ_i,ζ_j).

Comme nous avons $G' = E' \otimes F'$ ici nous aurons ainsi $(\mathrm{Ker}h)^0 = (\mathrm{Ker}p)^0 \otimes (\mathrm{Ker}q)^0 = M \otimes N$.

En conclusion : <u>Le multinoyau H associé à h est le produit tensoriel des multinoyaux P et Q.</u>

II.3 - Problème de fonctions spline vérifiant un nombre fini de contraintes

Nous considérons le problème de fonctions spline : minimiser la fonction $h(u)+\Psi_{C_{\Xi,a}}(u)$ où $\Psi_{C_{\Xi,a}}(u)$ désigne la fonction indicatrice de l'ensemble $C_{\Xi,a}$ des $u \in R^{\Delta}$ tels que $u(\xi,\zeta) = a_{\xi,\zeta}$, $(\xi,\zeta) \in \Xi$ ensemble fini de R^{Δ} et $a_{\xi,\zeta}$ nombre donné à l'avance.

$$\partial\Psi_{C_{\Xi,a}}(u) = \text{ si } u \in C_{\Xi,a} \text{ alors } B \text{ sinon } \emptyset.$$

B est l'ensemble des combinaisons linéaires de masse à support fini dans Ξ.
$\Psi^{*}_{C_{\Xi,a}}$ est la fonction d'appui de $C_{\Xi,a}$
$\partial\Psi^{*}_{C_{\Xi,a}}$ = si $v \in B$ alors $C_{\Xi,a}$ sinon $\emptyset$.

La fonction $\Psi_{C_{\Xi,a}}$ est quasicontinue, h et $\Psi_{C_{\Xi,a}}$ forment un couple uni (car les domaines de $\bar{h}$, et $\Psi_{\Xi,a}$ sont des variétés affines). Ainsi l'ensemble des éléments minimisant $h(u)+\Psi_{C_{\Xi,a}}(u)$ est l'ensemble $\Sigma = H(e') \cap \partial\Psi^{*}(-e')$. Comme $\partial\Psi^{*}(-e')$ est constante sur B, vide en dehors, on a aussi $\Sigma \subset H(B \cap (M \otimes N))$.
Ainsi :

II.4 - *Proposition*

L'ensemble Σ *est l'ensemble des fonctions* $u = \Sigma e_i P(\delta_{\xi^i_o},\ldots,\xi^i_1) Q(\delta_{\zeta^i_o},\ldots,\zeta^i_1)$ *vérifiant les conditions d'interpolations* $u(\xi,\zeta) = a_{\xi,\zeta}$ *ou* (ξ,ζ) *parcourt* *et ou* $v \in \Gamma(\mathrm{Kerp},\mathrm{Kerq})$ *et* $(\xi^i_j,\zeta^i_j) \in \Xi$.

La formule de h est l'explicitation des $(B \cap (M \otimes N))$.

Nous remarquons ici qu'en général on ne peut pas faire un recouvrement de Ξ par des ensembles de la forme $(\xi^i_o,\ldots,\xi^i_1) \times (\zeta^i_o,\ldots,\zeta^i_1)$ (maillage), alors nous ne sommes plus assurés de l'existence d'une spline. Ce sera le cas en particulier pour k=1, Ξ est formé des sommets d'un rectangle de Δ et d'un autre point. Nous n'avons plus toujours existence d'une fonction spline d'interpolation.

Calcul de $\partial h(u)$

$\partial h(u)$ sera non vide au point où $v \to 2 \iint_\Delta \frac{\partial^{2k} u}{\partial x^k \partial y^k} \frac{\partial^{2k} v}{\partial x^k \partial y^k} dx\, dy$ est une forme linéaire continue pour la topologie induite par R^Δ sur $H^{2k}_{x^k y^k}(\Delta)$. Alors $\partial h(u)$ est égal au prolongement de cette forme linéaire à R^Δ par continuité.

Explicitons $\partial h(u)$ sur les éléments $\varphi \in \mathcal{D}(\mathring{\Delta})$ (fonction indéfiniment dérivable à support compact dans $[a,b] \times [c,d]$).

$\iint_\Delta \frac{\partial^{2k} u}{\partial x^k \partial y^k} \frac{\partial^{2k} \varphi}{\partial x^k \partial y^k} dx\, dy$ apparait comme une distribution sur $\mathcal{D}(\mathring{\Delta})$ égale, au sens des distributions, à $\frac{\partial^{4k}}{\partial x^{2k} \partial y^{2k}}(u)$.

Comme

$$\partial \Psi_{C_{\Xi,a}} = \Sigma \lambda_i \, \delta_{(\xi_i,\zeta_i)} \quad ; \quad \underline{\text{si } \sigma \in \Sigma \text{ alors}}$$

$$\underline{\frac{\partial^{4k}}{\partial x^{2k} \partial y^{2k}}(\sigma) = \Sigma \lambda_i \, \delta_{(\xi_i,\zeta_i)}} \qquad (\xi_i,\zeta_i) \in \Xi$$

II.5 - Cas où l'ensemble Ξ est un produit de maillages

Nous dirons que Ξ est un produit de maillages si il existe 2 ensembles $\xi_o,\ldots,\xi_m$ d'éléments de $[a,b]$, $\zeta_o,\ldots,\zeta_n$ dans $[c,d]$, tel que Ξ soit le produit cartésien de ces deux ensembles.

Ξ étant un produit de maillage donné, $a = (a_{ij})$ un ensemble de $(m+1)(n+1)$ nombres donnés, nous leur associons la fonction $\sigma_1(\Xi,a)$ définie sur Δ de la manière suivante : sur les droites $y = \zeta_j$, σ_1 sera égale à la fonction spline d'ordre k, interpolant entre les points ξ_j les nombres a_{ij}. On considère la droite $x = \alpha \in [a,b]$ alors sur cette droite σ_1 est la fonction spline interpolant entre les points ζ_j les fonctions que nous avons obtenues précédemment.

En permutant les rôles de x et y nous obtenons une fonction $\sigma_2(\Xi,a)$.

II.6 - *Proposition*

Si Ξ *est un produit de maillages, les fonctions* σ_1 *et* σ_2 *coïncident et minimisent* $h(u)+\Psi_{C_{\Xi,a}}(u)$.

Démonstration

Le processus de construction de σ_1 et σ_2 est additif par rapport aux a. (Si $a_{ij} = a'_{ij}+a''_{ij}$ alors $\sigma_1(\Xi,a) = \sigma_1(\Xi,a')+\sigma_1(\Xi,a'')$. Cela résulte de l'additivité des fonctions spline d'une variable).

Ainsi il suffit de démontrer que $\sigma_1 = \sigma_2$ pour les a tel que $a_{ij} = 0$ sauf un seul égal à 1 ($a_{\alpha\beta} = 1$) (un tel a sera désigné par θ). $\sigma_1(\Xi,\theta)$ est égal au produit des splines interpolant les ordonnées nulles sauf une en ξ_α et ζ_β.

$$\sigma_1(\Xi,\theta) = s_1(x)\ s_2(y) \text{ avec } s_1(x) \in P(\Sigma\ c_i\ \delta_{\xi_{i_o},\dots,\xi_{i_k}})$$

et

$$s_2(x) = Q(\sum_j\ d_j\ \delta_{\zeta_{j_o},\dots,\zeta_{j_k}})$$

ainsi nous avons

$$\sigma_1(\Xi,\theta) \in P \otimes Q(\sum_{i,j}\ c_i d_j \delta\mu)$$

($\delta\mu$ mesure à support dans le produit $(\xi_{i_o},\dots,\xi_{i_k}) \times (\zeta_{j_o},\dots,\zeta_{j_k})$ et appartenant à $(\mathrm{Ker}h)^0$).

Ainsi d'après la proposition précédente $\sigma_1(\Xi,\theta)$ minimise $h(u)+\Psi_{C_{\Xi,\theta}}(u)$

Par raison de symétrie, nous avons aussi $\sigma_2(\Xi,\theta) = s_1(x)s_2(y)$ donc nous avons $\sigma_1(\Xi,\theta) = \sigma_2(\Xi,\sigma)$ et, par linéarité, $\sigma_1(\Xi,a) = \sigma_2(\Xi,a)$ et la propriété de minimisation pour $\sigma_1 = \sigma_2$.

c.q.f.d.

Nous remarquons que l'ensemble $\Gamma(\mathrm{Kerp},\mathrm{Kerq})$ est formé d'une infinité d'éléments, aussi lorsque l'on définit une fonction comme $\sigma_1(\Xi,a)$ minimisant $h(u)+\Psi_{C_{\Xi,a}}(u)$, vérifiant un nombre fini de conditions d'interpolation. cette fonction n'est pas la seule réalisant cette propriété de minimisation ; en général il y a un ensemble infini.

II.7 - Spline avec une condition de minimisation sur le bord du maillage

Pour éviter que σ ne soit pas définie de façon unique, nous allons imposer une condition supplémentaire de minimisation sur le bord.

Nous posons $\gamma(u) = \int_\Gamma \left(\frac{\partial^k u}{\partial \ell^k}\right)^2 d\ell$ où Γ est le bord de $\Delta = [a,b] \times [c,d]$ et ℓ l'abscisse curviligne sur Γ. En explicitant nous avons :

$$\gamma(u) = \int_a^b \left(\frac{\partial^k}{\partial x^k} u(x,c)\right)^2 dx + \int_c^d \left(\frac{\partial^k}{\partial y^k} u(b,y)\right)^2 du + \int_b^a \left(\frac{\partial^k}{\partial x^k} u(x,d)\right)^2 dx$$

$$+ \int_d^c \frac{\partial^k}{\partial y^k} u(a,y)^2 dy.$$

$h(u)+\gamma(u)$ est une fonction semi-hilbertienne définie sur $H^{2k}_{x^k y^k}[\Delta]$, γ étant défini sur cet espace puisque un élément de cet espace est continue dès que $k \geq 1$.

Si nous prenons pour E l'espace $H^{2k}_{x^k y^k}[\Delta]$ sur lequel sont définies h et γ alors ces 2 fonctions sont continues sur cet espace; d'autre part les couples (h,Ψ) et (γ,Ψ) sont unis nous pouvons alors utiliser la propriété d'additivité des sous-différentiels. Ainsi la solution <u>σ minimisant $h(u)+\gamma(u)+\Psi_{\Xi,a}(u)$ vérifie l'équation</u> $\partial h(\sigma)+\partial\gamma(\sigma) \supset \Sigma\, \lambda_{ij}\delta_{(\xi_i,\, \zeta_j)}$.

Soit Σ l'ensemble de tels σ.

En tenant compte du fait que $\sigma \in C_{\Xi,a}$ alors $\partial\Psi_{C_{\Xi,a}} = \Sigma\lambda_{ij}\, \delta_{(\xi_i,\zeta_j)}$.

L'ensemble Σ est aussi égal au sous-ensemble des éléments vérifiant les conditions d'interpolation parmi les $H(e')+\Gamma(f')$ avec $e'+f' = \Sigma\lambda_{i,j}\delta_{(\xi_i,\zeta_j)}$ ($\Sigma = \{\sigma \mid \sigma \in H(e')+\Gamma(f'),\ e'+f' = \Sigma\lambda_{ij}\delta_{(\xi_i,\zeta_j)}$, et $\sigma(\xi_i,\zeta_j) = a_{i,j}\})$ où H et Γ sont les multinoyaux de h et γ.

L'ensemble Σ est indépendant du choix de e' et f' dès que l'ensemble choisi est non vide.

II.8 - *Proposition*

Si Ξ *est un produit de maillage contenant des points sur les droites* $x = a$, $x = b$, $y = c$ *et* $y = d$ *alors la fonction* σ_1 *construite dans II.5 minimise* $h(u)+\gamma(u)+\Psi_{C_{\Xi,a}}(u)$.

Remarquons sur $x = a$, σ_1 est la fonction spline d'interpolation donc elle minimise $\int_c^d (\frac{\partial^k u}{\partial y^k}(a,y))^2 dy$ parmi les fonctions interpolants les points sur $[a,b]$ $(u(a,\zeta_j) = a_{0,j})$. Nous avons la même propriété sur les 3 autres côtés du rectangle Δ. Ainsi σ_1 minimise à la fois $h(u)+\Psi_{C_{\Xi,a}}(u)$ et $\gamma(u)+\Psi_{C_{\Xi,a}}(u)$; elle minimisera donc $h(u)+\gamma(u)+\Psi_{C_{\Xi,a}}$ (car $\Psi_{C_{\Xi,a}}(u) = \lambda\Psi_{C_{\Xi,a}}(u)$).

c.q.f.d.

S'il existe des nombres a_i et a_j $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ avec $a_{ij} = a_i a_j$, la spline minimisant $h(u)+\gamma(u)+\Psi_{\Xi,a}(u)$ apparait comme le produit de 2 fonctions spline en x (resp. y) minimisant
$\int_a^b (\frac{\partial^k u}{\partial x^k}(x))^2 dx$ (resp. $\int_c^d (\frac{\partial^k v}{\partial x^k}(y))^2 dy$).

Cas particulier

p=1 Sur chaque droite x = constante (ou y = constante).
La fonction σ_1 est formée de droites par morceaux ; sur un carré élémentaire de coordonnées (ξ_i,ξ_{i+1}) et (ζ_j,ζ_{j+1}) nous obtenons un graphe de la fonction σ_1 qui est un paraboloïde hyperbolique. Ainsi σ_1 est formé de morceaux de P.H. se raccordant le long des droites $x = \xi_i$, $y = \zeta_j$.

p=2 Sur chaque droite x = constante (y = constante).
Nous obtenons des cubiques par morceaux et σ apparait comme formé de bicubiques sur les carrés élémentaires, se raccordant ainsi que les dérivées partielles en x et y le long des droites $x = \xi_i$ et $y = \zeta_j$.

III - FONCTIONS SPLINE INTERPOLANTS SUR LES COTES D'UN MAILLAGE

III.1 - Soit comme dans II.1 la fonction semi-hilbertienne $h(f) = \int_\Delta \left(\frac{\partial^{2k}}{\partial x^k \partial y^k}(f)\right)^2 dxdy$ définie sur $H^{2k}_{x^k y^k}|\Delta|$.

Considérons un maillage Θ dans Δ, donné par $x_i \in [a,b]$ avec $1 \leq i \leq m$, et par $y_j \in [a,b]$. Soit $f \in H^{2k}_{x^k y^k}|\Delta|$, on désigne par $C_{\Theta,f}$ l'ensemble des fonctions φ de $H^{2k}_{x^k y^k}|\Delta|$ quicoïncident avec f sur les divers côtés du maillage ; c'est-à-dire $\varphi(x_i,y) = f(x_i,y)$ $1 \leq i \leq m$, $\varphi(x,y_j) = f(x,y_j)$ $1 \leq j \leq n$. $\Psi_{C_{\Theta,f}}$ la fonction indicatrice de cet ensemble.

Le problème de fonction spline consiste à trouver les éléments minimisant $h(u)+\Psi_{C_{\Theta,f}}(u)$.

Ce problème ne rentre pas dans les cas classiques d'existence de fonctions spline, puisque $\Psi_{C_{\Theta,f}}$ est défini par une infinité de contraintes et que Kerh est de dimension infinie.

La fonction h(u) est continue sur tout $H^{2k}_{x^k y^k}(\Delta)$. D'autre part $\Psi_{C_{\Theta,f}}$ est finie en f, alors nous pouvons utiliser le critère de Moreau (Ch I, II.8) donnant l'additivité des sous-différentiels. Ainsi les solutions σ du problème de spline doivent vérifier l'équation $\partial h(\sigma)+\partial\Psi_{C_{\Theta,f}}(\sigma) \ni 0$.
Ici

$$\partial h(\sigma)(y) = 2 \int_\Delta \frac{\partial^{2k}\sigma}{\partial x^k \partial y^k} \frac{\partial^{2k} u}{\partial x^k \partial y^k} \, dx \, dy$$

$$\partial\Psi_{C_{\Theta,f}} = \text{si } x \notin C_{\Theta,f} \text{ alors } \emptyset \text{ sinon } (C_{\Theta,0})^{\circ} .$$

Or $(C_{\Theta,0})^{\circ}$ est l'ensemble des densités de masse réparties sur les divers côtés du maillage.

Si pour u nous prenons une fonction φ de $\mathcal{D}(\mathring{\Delta})$ alors nous pouvons effectuer la dérivation au sens des distributions et nous avons

$$\partial h(\sigma)(\varphi) = 2\langle D^{4k}_{x^{2k} y^{2k}}\sigma, \varphi \rangle.$$

Cherchons les solutions qui s'écrivent

III.2 $\sigma = \sum_{i=1}^{m} s_i(x)\pi_i(y) + \sum_{j=1}^{n} \rho_j(x)t_j(y)$

où

$s_i(x)$ $1 \leq i \leq m$ (resp. $t_j(y)$ $1 \leq i \leq n$) sont solutions de

$$D^{2k}s_i = \sum_{\ell=1}^{n} \lambda_\ell\, \delta_{x_\ell} \text{ avec } s_i(x_\ell) = \delta_{i\ell} \quad (\text{resp. } D^{2k}t_j = \sum_{\ell=1}^{m} \lambda_\ell \delta_{y_\ell} \text{ et } t_j(y_\ell) = \delta_{j\ell}).$$

s_i et t_j sont ainsi des splines de base à une variable.

Les $\pi_i(y)$ (resp. $\rho_j(x)$) sont des fonctions quelconques appartenant à $H^k[c,d]$ (resp. $H^k[a,b]$).

Nous remarquons que les expressions de σ de la forme III.2 sont solutions de l'équation $D^{4k}_{x^{2k}y^{2k}}\, \sigma = T$.

III.3 - *Proposition*

Les fonctions σ *de la forme III.2 qui vérifient pour* $i, 1 \leq i \leq m$, $\sigma(x_i,y) = f(x_i,y)$ *et pour* j, $1 \leq j \leq n$, $\sigma(x,y_j) = f(x,y_j)$ *s'écrivent*

$$\sigma_f(x,y) = \sum_{i=1}^{m} f(x_i,y)s_i(x) + \sum_{j=1}^{n} f(x,y_j)t_j(y) - \sum_{i,j=1}^{m,n} f(x_i,y_j)s_i(x)t_j(y)$$

Faisons $x = x_i$ on a en tenant compte de $s_\ell(x_i) = \delta_{i\ell}$

$$\pi_i(y) + \sum_{j=1}^{m} \rho_j(x_i)t_j(y) = f(x_i,y)$$

de même en faisant $y = y_j$

$$\rho_j(x) + \sum_{i=1}^{n} \pi_i(y_j)s_i(x) = f(x,y_j)$$

On en déduit ainsi des valeurs pour π_i et ρ_j. Reportons dans l'équation III.2.

Alors :

$$\sigma(x,y)=\sum_{i=1}^{m} f(x_i,y)s_i(x)+\sum_{j=1}^{n} f(x,y_j)s_j(y)-\sum_{i,j=1}^{m,n} (\rho_j(x_i)+\pi_i(y_j))s_i(x)t_j(y).$$

Calculant $\sigma(x_i,t_j) = f(x_i,y_j)$ nous obtenons $f(x_i,y_j)=f(x_i,y_j)+f(x_i,y_j)-(\rho_j(x_i)+\pi_i(y_j))$
Nous avons ainsi $\rho_j(x_i)+\pi_i(y_j) = f(x_i,y_j)$, et la formule désirée.

c.q.f.d.

III.4 - *Proposition*

La fonction σ_f *(définie dans III.3) vérifie* $\partial h(\sigma_f) \in C^o_{\Theta,f}$ *et ainsi minimise la fonction convexe* $h(u)+\Psi_{C_{\Theta,f}}(u)$.

Il s'agit de montrer que nous avons $\partial h(\sigma_f)(g) = 0$ pour les g qui s'annulent sur les côtés du quadrillage

$$\partial h(\sigma_f)(g) = \int_\Delta \frac{\partial^{2k}\sigma_f}{\partial x^k \partial y^k} \frac{\partial^{2k} g}{\partial x^k \partial y^k}\, dx\, dy = 0.$$

En utilisant les lemmes III.5 et III.6 ci-dessous nous montrons que

$$\int_\Delta \frac{\partial^{2k}\sigma}{\partial x^k \partial y^k} \frac{\partial^{2k} g}{\partial x^k \partial y^k}\, dx\, dy = \sum_{i=1}^{m} \int_c^d \lambda_i \frac{\partial^k f}{\partial y^k}(x_i,y) \frac{\partial^k g}{\partial y^k}(x_i,y)\, dy$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} \int_a^b \mu_j \frac{\partial^k f}{\partial y^k}(x,y_j) \frac{\partial^k g}{\partial y^k}(x,y_j)\, dx$$

$$- \sum_{i,j=1}^{m,n} \nu_{ij}\, f(x_i,y_j)g(x_i,y_j).$$

En remarquant que $g(x_i,y) = 0$ et $g(x,y_j) = 0$ $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, nous avons $\frac{\partial^k g}{\partial y^k}(x_i,y) = 0$ et $\frac{\partial^k g}{\partial x^k}(x,y_j) = 0$ donc l'expression ci-dessus est nulle et $\partial h(\sigma) \in (C_{\Theta,0})^0$.

c.q.f.d.

III.5 - *Lemme*

Il existe des nombres α_i, $1 \le i \le m$, *tels que*

$$\int_\Delta \frac{\partial^{2k}}{\partial x^k \partial y^k}(f(x_i,y)s_i(x)) \frac{\partial^{2k} g}{\partial x^k \partial y^k} \, dxdy = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \int_c^d \frac{\partial^k f}{\partial y^k}(x_i,y) \frac{\partial^k g}{\partial y^k}(x_i,y)dy$$

Les fonctions $\frac{\partial^{2k}}{\partial x^k \partial y^k}(f(x_i,y)s_i(x))$ et $\frac{\partial^{2k}}{\partial x^k \partial y^k}$ g sont L^2

en les variables x et y; on peut intégrer par partie pour la variable x en tenant compte que $s^{k+i}(a) = s^{k+i}(b) = 0$ pour $0 \le i < k-1$. Nous avons :

$$\int_\Delta \frac{\partial^{2k}}{\partial x^k \partial y^k}(f(x_i,y)s_i(x))\frac{\partial^{2k} g}{\partial x^k \partial y^k} \, dxdy = (-1)^{k-1}\int_c^d \frac{\partial^k}{\partial y^k} f(x_i,y)\int_a^b \frac{d^{2k-1} s_i(x)}{dx^{2k-1}} \frac{\partial^{k+1} g}{\partial x \, \partial y^k} \, dxdy$$

Or $\frac{d^{2k-1}}{dx^{2k-1}}(s_i(x))$ est une fonction constante sur chacun des intervalles $[x_i,x_{i+1}]$ d'après la caractérisation de la fonction spline. Ainsi nous obtenons :

$$\int_a^b \frac{d^{2k-1} s_i(x)}{dx^{2k-1}} \frac{\partial^{k+1} g}{\partial x \, \partial y^k} \, dx \, dy = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{\partial^k g}{\partial y^k}(x_i,y).$$

c.q.f.d.

III.6 - *Lemme*

Il existe des nombres β_{ij} *tels que*

$$\int_\Delta \frac{d^k}{dx^k} s_i(x) \frac{d^k}{dy^k} t_j(y) \frac{\partial^{2k} g}{\partial x^k \partial y^k} \, dx \, dy = \sum \beta_{ij} \, g(x_i,y_j).$$

Utilisant le lemme III.5 avec $f(x_i,y) = t_j(y)$ nous obtenons la valeur pour l'intégrale :

$$\Sigma\beta_i \int_c^d \frac{d^k t_j(y)}{dy^k} \frac{\partial^k}{\partial y^k} g(x_i,y)dy$$

en effectuant une intégration par partie répétée k-1 fois et en tenant compte que $\frac{d^{2k-1}t_j}{dy^{2k-1}}$ est constante sur chaque intervalle $[x_i,x_{i+1}]$ nous obtenons $\Sigma\beta_{ij}\ g(x_i,y_j)$.

c.q.f.d.

III.7 - *Proposition*

Dès que n *et* m > p *alors*

$\mathrm{Ker}h \cap C_{\Theta,0} = 0.$

Il s'agit de voir que tout élément f de Kerh qui vérifie $f(x_i,y) = 0$ et $f(x,y_j) = 0$ pour $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n$ est nul. Comme f vérifie $\frac{\partial^{2k}}{\partial x^k \partial y^k}(f) = 0$ nous avons f de la forme

$$f(x,y) = \sum_{\ell=1}^{k} x^{\ell-1}\Psi_\ell(y) + \sum_{\ell=1}^{k} \varphi_\ell(x)y^{\ell-1}$$

où Ψ_ℓ et φ_ℓ sont des fonctions arbitraires.
Nous obtenons les systèmes d'équations :

$$i=1 \text{ à } m \quad \sum_{\ell=1}^{k} x_i^{\ell-1}\Psi_\ell(y) + \sum_{\ell=1}^{k} \varphi_\ell(x_i)y^{\ell-1} = 0$$

$$j=1 \text{ à } n \quad \sum_{\ell=1}^{k} x^{\ell-1}\Psi_\ell(y_j) + \sum_{\ell=1}^{k} \varphi_\ell(x)y^{\ell-1} = 0.$$

Dans le premier groupe d'équations, considérons les φ_ℓ connus et les y fixés ; nous obtenons un système de n équations à k inconnues. :omme le second membre de ce système est formé de polynômes de degré au plus k-1 en y, la solution $\Psi_1(y),\dots,\Psi_k(y)$, si elle existe est formée de polynômes de degré au plus k=1 en y. Nous démontrons de même que les $\varphi_1(x),\dots,\varphi_k(x)$ sont des polynômes de degré au plus k-1 en x.

$f(x,y)$ est un polynôme de degré au plus k-1 en chacune des variables x et y, nous pouvons écrire

$$f(x,y) = \sum_{i,j=1}^{k} a_{ij} \prod_{\substack{\ell \neq i \\ \ell=1 \text{ à } k}} (x-x_i) \prod_{\substack{\ell \neq j \\ \ell=1 \text{ à } k}} (y-y_j)$$

en remarquant que $f(x_i,y_j) = 0$ nous obtenons ainsi $a_{ij} = 0$.

c.q.f.d.

En rassemblant les résultats des propositions III.4 et III.6 nous avons :

III.8 - *THEOREME*

f étant donné dans $H^{2k}_{x^k y^k}(\Delta)$ *, il existe une et une seule fonction minimisant* $\int_\Delta \left(\frac{\partial^{2k}}{\partial x^k \partial y^k}(\ )\right)^2 dx\,dy$ *parmi les fonctions* g *vérifiant* $g(x_i,y) = f(x_i,y)$ $1 \leq i \leq m$ *et* $g(x,y_j) = f(x,y_j)$ $1 \leq j \leq n$ *dès que* n *et* m > k *; cette fonction est donnée par la formule de III.3*

IV - FONCTIONS SPLINE A VALEURS VECTORIELLES

IV.1 - Soit F un espace de Hilbert, nous pouvons considérer les applications de l'intervalle $[a,b]$ à valeurs dans F. Nous savons définir les opérations de dérivations et nous introduisons les espaces de Sobolev $H_F^k[a,b]$ qui sont des ensembles de distributions à valeurs dans F dont les dérivées jusqu'à l'ordre k appartiennent à l'espace $L_F^2[a,b]$.

Désignons par $(,)_F$ la forme hermitienne définissant dans F la structure hilbertienne.

Nous munissons $H_F^k|a,b|$ de la forme hermitienne $\int_a^b \sum_{i=0}^{k} (\varphi^{(i)},\psi^{(i)})_F dx$ qui nous donne la norme de $H_F^k|a,b|$.

IV.2 - Soit $g \in H_F^k[a,b]$, considérons la fonction convexe $h_F(g) = \int_a^b \|\frac{d^k g}{dx^k}\|_F^2 dx$. Cette fonction est une fonction semi-hilbertienne dans $H_F^k[a,b]$. Nous avons Kerh qui est l'ensemble des polynômes de degré k-1 à valeurs dans F; c'est-à-dire des fonctions $P(x) = \sum_{i=0}^{p-1} x^i p_i$ où p_i est un vecteur de F. Nous remarquons que si F est un espace de dimension infinie alors si $k > 0$ le sous-espace Kerh de $H_F^k|a,b|$ est un sous-espace de dimension infinie.

Nous posons le problème de fonctions spline à valeurs vectorielles relatives à h_F. Soient L_j, $1 \leq j \leq n$, n applications linéaires continues de $H_F^k[a,b]$ dans F. Soit $\chi \in H_F^k|a,b|$. On considère $C_{L,\chi}$ l'ensemble des éléments $\varphi \in H_F^k[a,b]$ vérifiant $L_j(\varphi) = L_j(\chi)$, $1 \leq i \leq n$. On désignera par $\Psi_{C_{L,\chi}}$ la fonction indicatrice de l'ensemble $C_{L,\chi}$.

Nous cherchons les fonctions σ à valeurs dans F qui minimisent $h_F(\varphi)+\Psi_{C_{L,\chi}}(\varphi)$.

Considérons $(f_i)_{i\in I}$ une base orthonormée de F supposé séparable (I est fini ou dénombrable). $u \in F$ s'écrit $u = \sum_{i\in I} u_i f_i$. Les éléments $\varphi \in H_F^k[a,b]$ peuvent se décomposer en $\varphi = \sum_{i\in I} \varphi_i f_i$, où $\varphi_i \in H^k[a,b]$. Les applications L_j de $H_F^k[a,b]$ dans F peuvent s'écrire $L_j(\sum_{i\in I} \varphi_i f_i) = \sum_{i\in I} L_j^i(\varphi_i) f_i$ où L_j^i sont des formes linéaires continues (composantes de L_i) définies sur $H^k[a,b]$.

IV.3 - *Proposition*

La fonction σ *minimisant* $h_F(\varphi)+\Psi_{C_{L,\chi}}(\varphi)$ *s'écrit* $\sigma = \sum_{i\in I} \sigma_i f_i$ *où* σ_i *sont les fonctions à valeurs réelles minimisant* $h(\varphi_i)+\Psi_{C_{L_i,\chi_i}}(\varphi_i)$.

En effet $\|\varphi(t)\|_F^2 = \sum_{i\in I} \|\varphi_i(t)\|^2$,

$$h_F(\varphi) = \int_a^b \sum_{i\in I} \|\varphi_i^{(k)}(t)\|^2 dt = \sum_{i\in I} \int_a^b \|\varphi_i^{(k)}(t)\|^2 dt.$$

La permutation de la sommation et du signe d'intégration est possible, car nous avons une série de termes positifs.

Si $\varphi \in C_{L,\chi}$ alors nous avons $L_j^i(\varphi_i) = L_j^i(\chi_i)$. En considérant chacun des termes $\int_a^b \|\varphi_i^{(k)}\|^2 dt$ nous sommes amenés à minimiser $h(\varphi_i)+\Psi_{L_i,\chi_i}(\varphi_i)$; comme pour chaque i la minimisation est indépendante des autres termes de i, la minimisation de la somme est équivalente à minimiser chacun des termes.

c.q.f.d.

Remarque -

La proposition IV.3 indique que le problème de minimisation se ramène à minimiser chacune des composantes.

Ainsi nous nous ramenons à la minimisation d'une fonction convexe à valeur vectorielle, relative à l'ordre défini sur F par le cône des éléments dont toutes les composantes sont positives (pour ces notions de minimisation de fonctions à valeurs vectorielles voir Raffin [1970]). Mais cette interprétation n'est pas intrinsèque, puisque pour le problème IV.2, cette interprétation en termes de minimisation d'une fonction à valeurs vectorielles dépend du choix de la base orthonormée f_i de F.

V - SURFACES DE COONS

V.1 - Interpolation de courbe spatiale

Soit une courbe Γ dans l'espace $\mathbb{R}^3$ muni de la norme euclidienne. On suppose que cette courbe est paramétrable par un paramètre pris dans un intervalle $[a,b]$ de R; Γ est définie par x(t), y(t), z(t) coordonnées d'un point de R^3. Supposons donné un nombre fini de points M_i de cette courbe, correspondants aux paramètres t_i $(1 \leq i \leq n)$. Nous approchons la courbe Γ en réalisant une interpolation $\bar{\Gamma}$ sur chacune des coordonnées x,y,z.

En particulier si l'application $t \to M(t)$ définissant Γ est une application de $H^k_{\mathbb{R}^3}[a,b]$ (c'est-à-dire chacune des coordonnées est une fonction de $H^k[a,b]$). Nous pouvons prendre, comme procédé d'interpolation, la fonction spline à valeurs vectorielles minimisant la fonction semi-hilbertienne $h(M) = \int_a^b \|M^{(p)}(t)\|_3^2 \, dt$. Cette fonction d'interpolation sera définie de façon unique si nous avons $n > k$. Nous remarquons d'après les propriétés d'interpolation par des fonctions spline qu'en un point $M(t_i)$ les coordonnées x(t), y(t) et z(t) admettent des dérivées d'ordre 2k-2; ainsi si en ces points les dérivées de toutes les coordonnées ne sont pas simultanément nulles, nous obtenons la courbe $\bar{\Gamma}$ interpolée qui a des dérivées d'ordre 2k-2.

Mais cette interpolation n'est pas totalement intrinsèque puisqu'elle dépend du paramétrage choisi sur Γ, et en pratique une difficulté provient du fait que l'on connait les points M_i sans connaître le paramétrage t et les points t_i correspondants.

V.2 - Interpolation d'une courbe lorsque les t_i sont équidistants.

Nous allons construire un système d'interpolation de la façon suivante. Soient 2 fonctions $F_o(u)$ et $F_1(u)$ définies sur $[0,1]$ y vérifiant la condition de Haar; quitte à prendre une combinaison linéaire nous pouvons choisir $F_o(u)$ et $F_1(u)$ vérifiant les conditions $F_o(0) = 1$, $F_1(0) = 0$, $F_o(1) = 0$, $F_1(1) = 1$.

Supposons donné deux vecteurs OM_o et OM_1 représentant un point d'une courbe pour u = 0 et u = 1. Nous définissons une interpolation de Γ sur $[0,1]$ par $\gamma(u) = \vec{OM}_o\ F_o(u)+OM_1F_1(u)$.

Maintenant considérons la courbe entière et les points t_i équidistants. On peut, quitte à faire une homotéthie sur le paramètre t, supposer que les intervalles sont de longueur 1. Alors nous prenons l'interpolation précédente en posant sur $[t_i,t_{i+1}]$ $u = t-t_i$. On ainsi

$$\gamma_i(u) = \vec{OM}_i F_o(t-t_i)+\vec{OM}_{i+1} F_1(t-t_i)$$

A priori les tangentes à γ_{i-1} et γ_i en t_i, en général ne sont pas confondues. Essayons de déterminer une condition sur F_o et F_1 pour que cette propriété soit vérifiée indépendamment des valeurs de $\vec{OM}_{i+1}$ et $\vec{OM}_{i-1}$.

$$\gamma_i'(0) = \vec{OM}_i\ F_o'(0)+\vec{OM}_{i+1}\ F_1'(0)$$

$$\gamma_{i-1}'(1) = \vec{OM}_{i-1}F_o'(1)+\vec{OM}_iF_1'(1).$$

Nous devons prendre $F_1'(0) = F_o'(1) = 0$. Alors nous avons $\gamma_i'(0) = \vec{OM}_iF_o'(0)$, $\gamma_{i-1}'(1) = \vec{OM}_iF_o'(1)$ sont tous les deux proportionnels, donc il donne les mêmes tangentes à condition que $F_o'(0)$ et $F_1'(1) \neq 0$.

Nous pouvons imposer des raccords d'ordre plus élevés en prenant les conditions $F_o(1) = 0$, $F_o'(1) = 0,\dots,F_o^{(p)}(1) = 0$ et $F_1(0) = 0$, $F_1'(0) = 0,\dots,F_1^{(p)}(0) = 0$.

Si les fonctions F_o et F_1 vérifient une équation différentielle linéaire $DF_o = 0$ et $DF_1 = 0$ alors nous avons $D\gamma_i = \vec{OM}_i\ DF_o+\vec{OM}_{i+1}\ DF_1 = 0$, où $D\gamma_i$ désigne l'opérateur D sur chacune des composantes de γ_i. Ainsi les composantes de la courbe interpolant Γ vérifient la même équation que F_o et F_1, sauf peut être au point d'interpolation où des discontinuités peuvent s'introduire dans certaines des dérivées.

V.3 - Surface de Coons

Les surfaces de Coons utilisées pour la représentation des surfaces dans l'espace se déterminent de la façon suivante. Soit S la surface que l'on veut représenter ; on considère une représentation paramétrique de cette surface par une application définie sur $[a,b] \times [c,d]$ dans R^3. Soit $(u,v) \to S(u,v)$. On décompose le rectangle $[a,b] \times [c,d]$ en un quadrillage construit à partir des points $u_i \in [a,b]$ et $v_j \in [c,d]$. On suppose connu S sur (u_i,v) et (u,v_j). Quitte à faire un changement de variable, on peut supposer $u_{i+1}-u_i = 1$ et $v_{j+1}-v_j = 1$. La surface de Coons est construite sur le carré élémentaire $[u_i,u_{i+1}] \times [v_j,v_{j+1}]$ à partir des valeurs de S sur le côté et de fonctions à une variable. Nous allons dans la suite justifier la formule utilisée.

Surface de Coons de 1ère espèce construite à partir de deux fonctions F_o et F_1 d'une variable indépendante.

Supposons que F_o et F_1 vérifient l'équation $Df = 0$ où $D = \sum_{i=0}^{n} a_i(x) \frac{d^i}{dx_i}$ est un opérateur différentiel linéaire et vérifiant des conditions au bord $b_j = 0$.

Soient Ψ_o, Ψ_1, φ_o, φ_1 des fonctions arbitraires.

V.4 - L'expression $\lambda(u,v) = \Psi_o(v)F_o(u)+\Psi_1(v)F_1(u)+\varphi_o(u)F_o(v)+\varphi_1(u)F_o(v)$ vérifie l'équation $D_{u,v}\lambda = \sum_{i,j=0}^{n} a_i(u)a_j(v) \frac{\partial^{i+j}}{\partial u^i \partial v^j} = 0$, et des conditions aux bords $b_{j,j'} = b_j \otimes b_{j'} = 0$ car $b_{j,j}(\mu(u)\nu(v)) = b_j(\mu(u))b_{j'}(\nu(v))$.

Si les conditions aux bords sont indépendantes et en nombre n-2 alors F_o et F_1 sont une base des solutions, et la forme $\lambda(u,v)$ représente toutes les solutions possibles de l'équation $D_{u,v}\lambda = 0$ à laquelle on a ajouté les conditions au bord.

Nous supposons que $F_o(0) = 1$, $F_o(1) = 0$,

$F_1(0) = 0$ et $F_1(1) = 1$.

V.5 - *Proposition*

La surface de la forme V.4 qui coïncide avec une surface donnée sur les bords du carré $[0,1] \times [0,1]$ *s'écrit :*

$$\text{V.5}\quad \lambda(u,v) = S(0,v)F_o(u)+S(1,v)F_1(u)+S(u,0)F_o(v)+S(u,1)F_1(v)$$

$$-S(0,0)F_o(u)F_o(v)-S(0,1)F_o(u)F_1(v)-S(1,0)F_1(u)F_o(v)-S(1,1)F_1(u)F_1(v).$$

Exprimons que $\lambda(u,v)$ donnée par V.4 vérifie $\lambda(u,0) = S(u,0)$.

$$S(u,0) = \Psi_o(0)F_o(u)+\Psi_1(0)F_1(u)+\varphi_o(u).$$

Nous obtenons $\varphi_o(u) = S(u,0)-\Psi_o(0)F_o(u)-\Psi_1(0)F_1(u)$ et des formules analogues pour $\varphi_1(u),\Psi_o(v)$ et $\Psi_1(v)$ en remplaçant dans V.4 on obtient :

$$\lambda(u,v) = S(u,0)F_o(v)+S(u,1)F_1(v)+S(0,v)F_o(u)+S(1,v)F_1(u)$$

$$-(\Psi_o(0)+\varphi_o(0))F_o(u)F_o(v)-(\Psi_o(1)+\varphi_1(0))F_o(u)F_1(v)$$

$$-(\Psi_1(0)+\varphi_o(1))F_1(u)F_o(v)-(\Psi_1(1)+\varphi_1(1))F_1(u)F_1(v).$$

En posant les conditions $\lambda(0,0) = S(0,0)$, $\lambda(1,0) = S(1,0)$, $\lambda(0,1) = S(0,1)$ et $\lambda(1,1) = S(1,1)$ on obtient

$$\Psi_o(0)+\varphi_o(0) = S(0,0) \quad , \quad \Psi_o(1)+\varphi_1(0) = S(0,1)$$

$$\Psi_1(0)+\varphi_o(1) = S(1,0) \quad , \quad \Psi_1(1)+\varphi_1(1) = S(1,1)$$

et on obtient bien ainsi la formule V.5.

c.q.f.d.

La formule V.5 est la formule utilisée pour décrire les surfaces de Coons. Cependant si nous considérons deux carrés élémentaires ayant en commun un même côté, par exemple (u,0), le long de ce côté les deux surfaces élémentaires à droite et à gauche peuvent avoir des plans tangents distincts. Nous allons imposer des conditions supplémentaires sur F_o et F_1 pour que le plan tangent soit le même le long de ces côtés. Supposons S dérivable sur les côtés du carré. On a alors :

$$\frac{\partial}{\partial v}\lambda(u,0) = \frac{\partial}{\partial v} S(0,0)F_o(u) + \frac{\partial}{\partial v} S(1,0)F_1(u) + S(u,0)F_o'(0) + S(u,1)F_1'(0)$$

$$- S(0,0)F_o(u)F_o'(0) - S(0,1)F_o(u)F_1'(0) - S(1,0)F_1(u)F_o'(0)$$

$$- S(1,1)F_1(u)F_1'(0).$$

Si nous supposons $F_o'(0) = 0$, $F_1'(0) = 0$ nous avons

V.6 $$\frac{\partial\lambda}{\partial v}(u,0) = F_o(u)\frac{\partial S}{\partial v}(0,0) + F_1(u)\frac{\partial S}{\partial v}(1,0)$$

ainsi la dérivée transversale pour le côté v = 0 est définie par V.6, dépend uniquement de $\frac{\partial S}{\partial v}(0,0)$ et $\frac{\partial S}{\partial v}(0,1)$, dérivées transversales aux extrémités, et des fonctions F_o et F_1. On obtient une propriété analogue pour $\frac{\partial\lambda}{\partial v}(u,1)$; $\frac{\partial\lambda}{\partial u}(0,v)$ et $\frac{\partial\lambda}{\partial u}(1,v)$ si on a aussi $F_o'(1) = 0$ et $F_1'(1) = 0$.

Ainsi en prenant deux carrés élémentaires nous avons ainsi raccord des plans tangents le long des côtés (u,0).

Sur chacun des carrés élémentaires $|u_i,u_{i+1}| \times |v_j,v_{j+1}|$ nous construisons une surface par des formules V.5 en faisant le changement de variables $u-u_i$ et $v-v_j$. La formule V.6 permet de voir que la surface obtenue admet un plan tangent et qu'il n'y a pas d'arête vive si F_o et F_1 sont dérivables et vérifient

$$F_o'(0) = 0,\ F_o'(1) = 0,\ F_1'(0) = 0 \text{ et } F_1'(1) = 0.$$

Si nous voulions obtenir des raccords d'un ordre plus élevé en dérivant k fois et en prenant les relations $F_o^{(i)}(0) = F_o^{(i)}(1) = F_1^{(i)}(0) = F_1^{(i)}(1) = 0$ avec $1 \leq i \leq k$ on obtiendrait ce raccord d'ordre k.

Cas particulier-F_o et F_1 sont des polynômes

Comme nous avons 4 conditions sur F_o et F_1 alors les polynômes de plus bas degré vérifiant ces conditions sont de degré 3 et nous avons alors

$$F_o(u) = (1-u)^2(1-2u) \qquad F_1(u) = u^2(3-2u).$$

V.7 - Si nous prenons F_o et F_1 égaux à des polynômes de degré 1, nous ne pouvons pas réaliser les conditions sur F_o' et F_1', nous n'avons plus une surface qui admet un plan tangent le long des arêtes de raccordement des carrés élémentaires, mais nous avons les propriétés de minimisation suivantes :

On a $F_o(u) = 1-u \qquad F_1(u) = u$,
on a F_o et F_1 solution de $F_o''(u) = 0$. Considérons le problème de fonction spline décrit au § III avec $h(f) = \int_a^b (f'(u))^2\, du$, où $[a,b]$ est l'intervalle où sont pris les points u_i de la surface de Coons; de même considérons $k(g) = \int_d^c (g'(v))^2 dv$ où $[c,d]$ intervalle contenant les v_j. Considérons la surface dont les coordonnées minimisent $h \otimes k$ et dont on connaît les valeurs en (u_i,v) $1 \leq i \leq m$ et (u,v_j) $1 \leq j \leq n$; sur un carré élémentaire les coordonnées x,y,z de cette surface vérifient $\frac{\partial^4}{\partial u^4 \partial v^4} x = 0$ et les conditions au bord. Aussi nous obtenons la surface de Coons associée à $F_o(u) = 1-u$ et $F_1(u) = 0$. D'où le résultat :

La surface de Coons construite sur le rectangle de paramétrage $[a,b] \times [c,d]$ correspondant à $F_o(u) = 1-u$, $F_1(u) = u$, coïncide avec la surface obtenue en prenant pour chacune des coordonnées la fonction spline interpolant le quadrillage et minimisant $\int_{[a,b]\times[c,d]} \frac{\partial^4 S}{\partial u^2 \partial v^2}\, du\, dv$.

V.8 - Surface de Coons de second espèce

Nous considérons les mêmes données qu'en V.3, mais nous supposons sur chaque ligne du quadrillage la donnée, en plus de $S(u_i,v)$ (resp. $S(u,v_j)$, de la dérivée transverse $\frac{\partial S}{\partial u}(u_i,v)$ (resp. $\frac{\partial S}{\partial v}(u,v_j)$..

De même que précédemment nous considérons un carré élémentaire $[u_i,u_{i+1}]\times[v_j,v_{j+1}]$ par un changement de coordonnées $u-u_i$ et $v-v_j$ nous nous ramenons au cas de $[0,1]\times[0,1]$. A partir de la donnée de S et des dérivées transverses de S sur les côtés de ce carré, nous construisons d'une manière analogue à V.3 et V.4 une surface d'interpolation de Coons dite de seconde espèce à partir de la donnée de 4 fonctions d'une variable F_o^0, F_1^0, F_o^1, F_1^1.

Ces fonctions vérifient les conditions :

u	F(0)	F(1)	F'(0)	F'(1)
F_o^0	1	0	0	0
F_1^0	0	1	0	0
F_o^1	0	0	1	0
F_1^1	0	0	0	1

La surface de Coons est donnée par la formule :

$$\text{V.}\qquad \mu(u,v) = \sum_{i,j=0}^{1} \frac{\partial^i S}{\partial u^i}(j,v)\, F_j^i(u) + \sum_{i,j=0}^{1} \frac{\partial^i S(u,j)}{\partial v^i}\, F_j^i(v)$$

$$- \sum_{i,j,k,\ell=0}^{1} \frac{\partial^{i+j} S(k,\ell)}{\partial u^i\, \partial v^j}\, F_k^i(u)\, F_\ell^j(v)$$

Les conditions sur F_i^j permettent de vérifier que $S(k,\ell) = \mu(k,\ell)$ pour $k = 0$ ou 1, $\ell = 0$ ou 1, et que $\frac{\partial S}{\partial u}(k,v) = \frac{\partial \mu}{\partial u}(k,v)$ et $\frac{\partial S}{\partial v}(u,\ell) = \frac{\partial \mu}{\partial v}(u,\ell)$.
Ainsi le long des lignes du quadrillage la surface de Coons admet le plan tangent donné.
Mais nous remarquons que nous avons besoin pour définir μ des valeurs de $\frac{\partial^2 S}{\partial u \partial v}(0,0)$, $\frac{\partial^2 S}{\partial u \partial v}(0,1)$, $\frac{\partial^2 S}{\partial u \partial v}(1,0)$ et $\frac{\partial^2 S}{\partial u \partial v}(1,1)$. Nous devrons ainsi avoir les 4 valeurs pour pouvoir construire la surface de Coons de 2ème espace.

Si F_o^0, F_1^0, F_o^1, F_1^1 vérifie l'équation $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i(x) \frac{d^i}{dx^i} F = 0$ alors μ vérifie, si S est suffisamment dérivable :

$$\sum_{i,j=0}^{n} a_i(x)\ a_j(v)\ \frac{\partial^{i+j}\mu}{\partial u^i \partial v^j} = 0.$$

V.9 - Cas où F_o^0, F_1^0, F_o^1, F_1^1 sont des polynômes du 3ème degré

Alors nous avons :

$$F_o^0 = (1-u)^2(1-2u) \qquad F_1^0 = u^2(3-2u)$$

$$F_o^1 = (1-u)^2 u \qquad F_1^1 = u^2(u-1).$$

Ces fonctions sont linéairement indépendantes et forment une base de l'espace des polynômes de degré au plus 3.

F_j^i vérifie $\frac{\partial^4}{\partial u^4} F_j^i(u) = 0$, ainsi la surface de Coons μ vérifie l'équation $\frac{\partial^8}{\partial u^4 \partial v^4}\ \mu(u,v) = 0$.

Soit $[a,b] \times [c,d]$ le rectangle formé de l'ensemble des carrés élémentaires. Considérons la fonction semi-hilbertienne définie sur $H^4_{[a,b]\times[c,d]}$ par

$$h(g) = \int_{|a,b|\times|c,d|} \left(\frac{\partial^4 g}{\partial u^2 \partial v^2}\right)^2 du dv.$$

Cherchons les fonctions à valeurs vectorielles dans $\mathbb{R}^3$ dont les coordonnées minimisent h parmi les fonctions qui coïncident avec S sur les lignes du quadrillage (u_i,v) $1 \le i \le m$, et (u,v_j) $1 \le j \le n$, et dont les dérivées transverses de S coïncident aussi, ainsi que les dérivées secondes mixtes en (u_i,v_j) $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$. En explicitant $\partial h(u,v)$ sur un carré élémentaire $[u_i,u_{i+1}] \times [v_j,v_{j+1}]$ nous avons $\dfrac{\partial^8\sigma}{\partial u^4 \partial v^4} = 0$ et les conditions au bord.

Nous obtenons ainsi une fonction à valeurs vectorielles qui est exactement donnée par la formule V.8 des surfaces de Coons de seconde espèce.

Ainsi <u>dans ce cas la surface de Coons de seconde espèce apparaît comme une fonction spline d'interpolation de Hermite.</u>

V.10 - <u>Cas de surface de Coons de seconde espèce sans que l'on connaisse les dérivées transverses.</u>

Nous pouvons utiliser les surfaces de Coons dans ce cas. Considérons les fonctions spline du paragraphe 3 ; en supposant qu'elles sont à valeurs dans $\mathbb{R}^3$, c'est-à-dire que l'on prend les fonctions spline sur chacune des coordonnées, considérons k = 2 c'est-à-dire

$$h(g) = \int_{|a,b|\times|c,d|} \left(\frac{\partial^4 g}{\partial u^2 \partial v^2}\right)^2 du\, dv.$$

En réalité, la formule III.3 généralise la formule V.8 des surfaces de Coons. Dans ce cas nous obtenons sur un carré élémentaire $|u_i,u_{i+1}| \times |v_i,v_{i+1}|$ exactement la formule III.8, les expressions $\frac{\partial}{\partial u} S(u_i,v)$ et $\frac{\partial}{\partial v} S(u,v_j)$ $\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} S(u_i,v_j)$ étant déterminées par la propriété de minimisation, à partir des valeurs de $S(u_i,v)$ et $S(u,v_j)$ pour $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$.

V.11 - Interpolation d'une surface donnée par ses valeurs au sommet d'un quadrillage

Nous supposons connu $S(u_i, v_j)$, nous pouvons considérer les courbes gauches définies en V.1 et V.2 pour $u = u_i$ et v variant dans $[c,d]$, de même pour $v = v_j$, nous définissons alors une valeur interpolée pour la surface et la dérivée transverse sur les lignes du quadrillage. Ensuite nous pouvons interpoler S à partir de ces valeurs par le procédé de Coons de première ou de seconde espèce.

Si nous sommes dans le cas $k = 2$, les courbes gauches apparaissent sur $[v_j, v_{j+1}]$ comme des cubiques qui sont déterminées par les valeurs en v_j et v_{j+1} ainsi que les dérivées. Puis appliquant la surface de Coons de seconde espèce nous obtenons : une surface dans R^3 qui sur le carré élémentaire $[u_i, u_{i+1}] \times [v_j, v_{j+1}]$ est représentée par un polynôme en u et v à coefficients vectoriels de degré au plus 3 en chacune des variables. Ce polynôme dépend de 16 données, qui sont ici les valeurs de S, des dérivées partielles et de la dérivée seconde mixte en chacun des sommets.

En procédant comme dans V.10, nous pouvons en utilisant la spline construite dans II.5 pour chacune des coordonnées, déterminer $\frac{\partial S}{\partial u}(u_i, v_j)$, $\frac{\partial S}{\partial v}(u_i, v_j)$ et $\frac{\partial^2 S}{\partial u \partial v}(u_i, v_j)$ et ainsi construire une surface de Coons à partir de la donnée de S en (u_i, v_j) $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$. Nous avons ici un cas particulier de II.6.

CHAPITRE - IV

INTERPOLATION SUR UN NOMBRE INFINI DE POINTS ET EXTRAPOLATION A LA LIMITE PAR DES FONCTIONS SPLINE

J.P. Bertrandias, N. Gastinel [1966] ont donné des conditions pour qu'un élément f' d'un espace vectoriel appartienne à la fermeture de l'image où à l'image d'un convexe $K_H \subset E$ par une application linéaire de E dans F. Nous explicitons cette condition lorsque K_H est l'enveloppe convexe de la boule relative à des jauges ou lorsque K_H est une intersection de telles boules. Auparavant nous avons décrit les polaires d'ensemble convexe des types précédents et donné des conditions sur les semi-normes pour qu'une application linéaire entre espaces vectoriels localement convexes soit continue.

Nous donnons un critère pour l'existence d'une solution d'un système infini d'équations linéaires. Le critère appliqué au cas de fonctions spline nous donne une condition nécessaire et suffisante de l'existence d'une fonction spline vérifiant une infinité de conditions d'interpolation. Cette condition s'explicite simplement pour la fonction spline d'ordre 2 minimisant $\int_a^b u'(t)^2dt$. Nous décrivons ensuite deux algorithmes pour l'extrapolation à la limite par des fonctions spline.

I - POLAIRES D'ENSEMBLES CONVEXES DEFINIS PAR DES JAUGES ET EXPRESSION DE LA CONTINUITE D'UNE APPLICATION LINEAIRE

Soient E, F un système d'espace vectoriel en dualité séparante, $(p_i)_{i\in I}$ une famille de jauges, $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_i)_{i\in I}$ des familles de nombres réels positifs ou nuls. Nous désignerons par $M^i_{a_i} = \{e \mid p_i(e) \leq a_i\}$, q_i les jauges conjuguées de p_i et $N^i_{b_i} = \{e' \mid q_i(e') \leq b_i\}$.

I.1 - *Proposition*

Si le convexe M *est la réunion des* $M^i_{a_i}$ *, son polaire* M *est l'intersection des ensembles convexes* N^i_{1/a_i}. (Si $a_i \equiv 0$, $N^i_{1/0} = \{e' \mid q_i(e') < +\infty\}$).

Ce résultat provient du fait que si $M = \bigcup_{i\in I} M^i_{a_i}$ alors $M^0 = \bigcap_{i\in I} (M^i_{a_i})^0$, d'après la définition des jauges conjuguées $(M_1)^0 = N_1$ donc $N^i_{1/a_i} = (M^i_{a_i})^0$ (si $a_i = 0$ alors $N^i_{1/0} = (M^i_o)^0$).

c.q.f.d.

I.2 - *Proposition*

Si le convexe M *est l'intersection des* $M^i_{a_i}$ *son polaire est la fermeture pour toute topologie compatible avec la dualité de la réunion des* N_J *où* N_J *désigne la boule unité de la jauge* $a_{i_1} q_{i_1} \nabla \ldots \nabla a_{i_n} q_{i_n}$, $J = (i_1,\ldots,i_n)$ *étant un ensemble fini dans* I. ($a_i q_i$ *désigne la jauge définie par* $(a_i q_i)(e') = a_i q_i(e')$ $a_i(e') \neq \infty$).

En effet, si $M = \bigcap_{i\in I} M^i_{a_i}$ alors M^0 est la fermeture de l'enveloppe convexe des $(M^i_{a_i})^0 = N^i_{1/a_i}$. Considérons les jauges $a_i q_i$ et $q_j q_j$. La proposition Chapitre I, § II.11 indique : l'enveloppe convexe de leur boule unité est la boule unité de $a_i q_i \nabla a_j q_j$. Pour un élément e' de l'enveloppe convexe des $(M_{a_i})^0$ on peut trouver un nombre fini d'indices $i_1,\ldots,i_n$ tel que cet élément e' est combinaison convexe des e'_i, $e'_i \in (M^i_{a_i})^0$, et ainsi nous construisons la jauge inf-convolution des jauges $a_i q_i$ pour $i_1,\ldots,i_n$.

c.q.f.d.

I.3 - Si une jauge p est absorbante symétrique elle définit une semi-norme sur E, nous pouvons alors définir une topologie compatible avec la structure vectorielle qui ne sera séparée que s'il n'y a que l'élément 0 pour lequel $p(x) = 0$.

Par contre si p n'est pas absorbante nous ne pouvons plus définir une topologie sur E compatible avec la structure vectorielle par l'expression $d(x,y) = p(x,y)$. Il est possible par contre de considérer le sous-ensemble domp des e où p(e) est fini et de munir domp d'une structure d'espace vectoriel topologique.

Si nous avons deux espaces E_1 et E_2 semi-normés par p^1 et p^2 une application continue T est caractérisée par le fait qu'il existe M tel que $p^2(Te) \leq Mp^1(e)$. Nous allons étendre ce résultat au cas où E_1 et E_2 sont des espaces localement convexes, définis par des familles de semi-normes $(p_i^1)_{i \in I}$ et $(p_j^2)_{j \in J}$.

I.4 - <u>*Proposition*</u>

Soit E_1 *un espace semi-normé par* p^1, E_2 *un espace localement convexe défini par les semi-normes* $(p_i^2)_{i \in I}$ *pour qu'une application linéaire* T *de* E_1 *dans* E_2 *soit continue, il faut et il suffit qu'il existe des nombres* M_i *tel que quel que soit* $e \in E_1$ *on ait pour tout* $i \in I, p_i^2(Te) \leq M_i p^1(e)$.

En effet pour que T soit continue il faut et il suffit que T soit continue pour F muni de chacune de ces normes, ce qui s'exprime par les conditions $q_i(Te) \leq M_i p(e)$.

c.q.f.d.

I.5 - *Proposition*

Si E_1 *est un espace localement convexe défini par les semi-normes* $(p_i^1)_{i\in I}$ *et* E_2 *un espace normé par* p *pour qu'une application linéaire* T *de* E_1 *dans* E_2 *soit continue, il faut et il suffit qu'il existe un sous-ensemble fini* $J \subset I$ *et un nombre* M *tel que* $q(Te) \leq M \sup_{j\in J} p_j(e)$ *quel que soit* $e \in E_1$.

Si T est continue l'image inverse B de la boule unité de E_2 est un voisinage de 0 dans E_1, c'est-à-dire qu'il existe un ensemble fini J d'indice et des nombres $a_j > 0$ tels que $\bigcap_{j\in J} p^1_{ja_j} \subset B$ avec $p^1_{ja_j} = \{e \in E \mid p_j^1(e) \leq a_j\}$.On en déduit que :

$$q(\inf_{j\in J}(a_j)/\sup_{j\in J}(p_j(e))\ T(e') \leq 1$$

donc

$$q(Te) \leq \frac{1}{\inf_{j\in J}(a_j)} \sup_{j\in J} (p_j(e)).$$

Inversement si $p^2(Te) \leq M \sup p_j^1(e)$ on a pour tout $e \in \bigcap_{j\in J} p^1_{j,1/M}$, $p^2(Te) \leq 1$ donc l'image inverse de la boule unité est un voisinage de 0 dans E.

c.q.f.d.

En regroupant ces deux dernières proposition nous obtenons :

I.6 - *THEOREME*

Si E_1 *et* E_2 *sont deux espaces localement convexes définis par les familles de semi-normes* $(p_i^1)_{i\in I}$ *et* $(p_j^2)_{j\in J}$ *pour qu'une application linéaire de* E *dans* F *soit continue il faut et il suffit que pour tout* $j \in J$ *il existe un ensemble fini* $K_j \subset I$ *et un nombre* M_j *tel que* $p_j^2(Te) \leq M_j \sup_{i\in K_j} (p_i^1(e))$ *quel que soit* $e \in E$.

II - ETUDE DE L'IMAGE D'UN CONVEXE POUR UNE APPLICATION LINEAIRE

Soient (E,F) et (G,H) deux couples d'espaces vectoriels en dualité. Soient T une application linéaire continue de E dans G continue pour les topologies compatibles avec la dualité, $\mathcal{U}$ son application transposée. J.P. Bertrandias-N. Gastinel [1966] ont démontré ce résultat :

II.1 - *Proposition*

Pour que $f \in F$ *appartienne à la fermeture pour les topologies compatibles avec la dualité, de l'image par* $\mathcal{U}$ *du convexe équilibré* $K_H \subset H$ *il faut et il suffit que pour tout élément* $e \in E$ *tels que* $T(e) \in K_H^0$ *on ait* $|\langle f,e\rangle| \leq 1$.

En effet, $\overline{\mathcal{U}(K_H)} = \mathcal{U}(K_H)^{00}$, nous avons alors
$\mathcal{U}(K_H)^0 = \{e \in E \mid |\langle e,\mathcal{U}(h)\rangle| \leq 1$ où $h \in K_H\}$, par transposition $\langle e,\mathcal{U}(h)\rangle = \langle T(e),h\rangle$
Donc nous avons $\mathcal{U}(K_H)^0 = \{e \in E \mid Te \in K_H^0\}$ et on a

$$\overline{\mathcal{U}(K_H)} = \mathcal{U}(K_H)^{00} = \{f \mid f \in F,\ |\langle f,e\rangle| \leq 1 \text{ et } Te \in K_H^0\} .$$

c.q.f.d.

Nous allons préciser ces résultats lorsque K_H est défini par des familles de jauge. Soient $(p_i)_{i\in I}$ une famille de jauges dans G, $(q_i)_{i\in I}$ la famille des jauges conjuguées dans H. $\mathcal{C}_o(A)$ désigne l'enveloppe convexe de l'ensemble A.

II.2 - *Proposition*

Soit $K_H = \mathcal{C}_o(\bigcup_{i\in I} Q^i_{a_i})$ *avec* $Q^i_{a_i} = \{h \mid q_i(h) \leq a_i\}$ $(a_i)_{i\in I}$ *familles de nombres réels positifs. Pour que* $f \in \overline{\mathcal{U}(K_H)}$ *il faut et il suffit que pour tout* $e \in E$ *et pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe un indice* i *tel que* $|\langle f,e\rangle| \leq a_i\, p_i(Te)+\varepsilon$.

Nous avons $K_H^0 = \bigcap_{i\in I} P^i_{1/a_i}$ avec $P^i_{1/a_i} = \{g \mid p_i(g) \le 1/a_i\}$.

Soit $e \in E$, $T(e) \in G$ considérons $m_e = \inf \dfrac{1}{a_i p_i(Te)}$ nous avons $m_e T(e) \in K_H^0$ car

$$p_i(m_e T(e)) = m_e p_i(T(e)) \le \frac{p_i(Te)}{a_i p_i(Te)} \le 1/a_i$$

Soit $\varepsilon > 0$ il existe ℓ tel que $\dfrac{1}{a_\ell p_\ell(T(e))+\varepsilon} \le m_e$

d'après la définition de m_e comme borne inférieure des $\dfrac{1}{a_i p_i(Te)}$ ainsi $\dfrac{1}{a_\ell p_\ell(Te)+\varepsilon} T(e) \in K_H^0$ et en utilisant la proposition précédente

$$|\langle f, \frac{1}{a_\ell p_\ell(T(e))+\varepsilon} T(e)\rangle| \le 1 \text{ donc } |\langle f,e\rangle| \le a_\ell p_\ell(T(e))+\varepsilon.$$

Inversement, soit encore $T(e) \in K_H^0$. Nous avons pour tout $i \in I$ $p_i(T(e)) \le \dfrac{1}{a_i}$, ainsi pour tout $\varepsilon > 0$ il existe ℓ avec $\langle f,e\rangle \le a_\ell p_\ell(T(e))+\varepsilon$ et $p_\ell(T(e)) \le 1/a_\ell$ et $|\langle f,e\rangle| \le 1+\varepsilon$ donc $|\langle f,e\rangle| \le 1$.

c.q.f.d.

II.2.1 - <u>*Corollaire*</u>

Si les jauges p_i sont telles que quel que soit $g \in G$ il existe un indice j tel que $p_j(g) = \sup_{i\in I} p_i(g)$ alors la condition nécessaire et suffisante est que pour tout $e \in E$ il existe un indice i avec $|\langle f,e\rangle| \le a_i p_i(T(e))$.

Soit j l'indice tel que $p_j(Te) = \sup_{i\in I} p_i(g)$ la condition de la proposition II.2 est équivalente à $\langle f,e\rangle \le a_j p_j(T(e))+\varepsilon$ quel que soit $\varepsilon > 0$ donc $|\langle f,e\rangle| \le a_j\, p_j(T(e))$.

c.q.f.d.

Ce cas sera vérifié si l'ensemble d'indice I est un ensemble fini I. Si cet ensemble est réduit à un élément alors nous avons :

II.2.2 - *Corollaire*

Une condition nécessaire et suffisante pour que $f \in U(K_H)$ *où* $K_H = \{h \mid q(h) \leq a\}$ *est que pour tout* $e \in E$ *on ait* $|\langle f,e\rangle| \leq ap(T(e))$.

II.3 - *Proposition*

Supposons que $K_H = \bigcap_{i \in I} Q^i_{a_i}$ *et que pour tout* $e \in E$ *il existe un ensemble fini* $Ie \subset I$ $Ie = (i_1, \dots i_n)$, *tel que* $T(e)$ *soit contenu dans le sous-espace de* G *engendré par les boules unités de* p_i, $i \in Ie$. *Alors pour que* $f \in \overline{U(K_H)}$ *il faut et il suffit que pour tout* J *fini on ait*
$|\langle f,e\rangle| \leq (\nabla_{j \in J} a_j p_j)(T(e))$.

Démonstration

En effet K_H est la fermeture de la réunion des N_I où N_J est la boule unité de $\nabla_{j \in J} a_j p_j$ ainsi $T(E) \subset \bigcup_{J \subset I} N_J$ (J fini). Soit $e \in E$.
Posons $M = \sup_{i \in I} \left(\frac{1}{(\nabla_{j \in J} a_j p_j)T(e)}\right)$ (M peut être infini). Pour tout $\alpha < M$ $(\alpha > 0)$, $\alpha Te \in K_H^0$ car il existe ℓ tel que $\alpha \leq \frac{1}{a_\ell p_\ell(T(e))}$ donc $p_\ell(\alpha T(e)) \leq \frac{p_\ell(T(e))}{a_\ell p_\ell(T(e))} = \frac{1}{a_\ell}$
Sur la droite support de $T(e)$ l'intervalle ouvert $[-MT(e), MT(e)]$ appartient à K_H^0 fermé. L'intervalle fermé appartient aussi à K_H^0 et ainsi $MTe \in K_H^0$.
Si $f \in \overline{U(K_H)}$ alors $\langle f, MTe\rangle \leq 1$ donc quel que soit J
$|\langle f,Te\rangle| \leq \frac{1}{M} \leq \nabla_{j \in J} a_j p_j \; (T(e))$.
Inversement, soit $e \in E$ avec $Te \in K_H^0$, il existe J tel que $T(e) \in N_J$ et
$|\langle f,e\rangle| \leq (\nabla_{j \in J} a_j p_j)(T(e)) \leq 1$.

c.q.f.d.

Corollaire

Supposons que le polaire K_H^0 *de* K_H *puisse être défini par* $K_H^0 = \bigcup_{i \in I} P^i_{1/a_i}$
Pour que $f \in \overline{U(K_H)}$ *il faut et il suffit que pour tout* i *nous ayons*
$|\langle f,e\rangle| \leq a_i p_i(Te)$.

II.4 - Application à un procédé d'accélération de convergence linéaire

Dans cet exemple, nous considérons que E est l'espace vectoriel des suites, dont tous les termes sont réels sauf un nombre fini. F est l'ensemble de toutes les suites. E, F sont mis en dualité par

$$<f,e> = \sum_{i=1}^{\infty} e_i f_j \qquad \text{(cette somme est en réalité finie).}$$

$G = \ell_\infty$, $H = \ell_1$ où la dualité est $\sum_{i=1}^{\infty} g_i h_i$, comme g est borné et h sommable cette somme a un sens.

Soit U la transformation linéaire définie par une matrice triangulaire infinie inférieure.

$$U(h) = (f_n = \sum_{1 \leq i \leq n} \alpha_{in} h_i).$$

L'application T transposée s'écrit $Te = (g_i = \sum_{n \geq i} \alpha_{in} e_n)$.

Comme e a ses termes nuls, sauf un nombre fini, chacune des sommes ne porte que sur un nombre fini et si pour $n > M$ on a $e_n = 0$ alors $g_n = 0$ dès que $n > m$.

a) Soit q_i la semi-norme dans ℓ_1 qui à h associe $|h_i|$. La jauge conjuguée p_i de q_i est définie par $p_i(g) =$ si $(\forall j \neq i,\ g_j = 0)$ alors $|g_i|$ sinon ∞.

Prenons $Q_i(a_i) = \{h \in \ell_1 \mid |h_i| < a_i\}$ et considérons $K_H = \bigcap_{i=1}^{\infty} Q_i(a_i)$. A_i étant une suite de nombres.

$$P_i(a_i) = \{g \in \ell_\infty \mid |g_i| < 1/a_i \text{ et } \forall j \neq i\ g_j = 0\}.$$

K_H^0 est l'enveloppe convexe fermée de $\bigcup_{i=1}^{\infty} P_i(1/a_i)$.
Si I un ensemble fini d'indices on désigne par p_I la jauge inf-convolution des jauges p_i/a_i, i parcourant I. On a ici

$$p_I = \sum_{i \in I} a_i p_i.$$

Remarquons que quel que soit $e \in E$, il existe un ensemble I tel que Te soit contenu dans domaine de p_i. Nous pouvons ainsi appliquer la proposition II.3 et nous obtenons

Proposition

Pour que $f \in \overline{U(K_H)}$ *il faut et il suffit que quel que soit* e *nous ayons*

$$|\langle f,e\rangle| \leq \sum_{i=1}^{\infty} a_i |g_i| \quad (\text{où } g_i = \sum_{n\geq i} \alpha_{in} e_n)$$

Soit I l'ensemble des indices pour lesquels $g_i \neq 0$. Nous avons d'après la proposition II.3 $|\langle f,e\rangle| \leq p_I(T(e))$ qui est la condition $|\langle f,e\rangle| \leq \sum_{n\geq i} a_i g_i$. Si $I' \supset I$ nous avons $p_{I'}(T(e)) = p_I(T(e))$.

La condition s'écrit $|\langle f,e\rangle| \leq \sum_{n=i}^{\infty} a_n | \sum_{i\geq n} \alpha_{in} e_i|$

b) Considérons maintenant dans ℓ_1 les jauges q_i' définies par $q_i'(h)$ = si $(j\neq i,\ h_i=0)$ alors $|h_i|$ sinon ∞. La jauge conjuguée p_i' est $p_i'(g) = |g_i|$ qui est une semi-norme.

Posons $K_H' = \overline{C_o(\cup Q_i'\ a_i)}$ $\quad Q_i'(a_i) = \{h \in H \mid q_i'(h) \leq a_i\}$

K_H' est formé des suites h telles que $\sum_{i=1}^{\infty} |h_i/a_i| \leq 1$.

Nous sommes dans le cas de la proposition II.2 mais on remarque que pour chaque e, il n'y a pas qu'un nombre fini de composantes de T(e) différentes de 0. Il existe donc un indice j tel que $p_j(T(e)) = \sup_{i\in I} P_i(T(e))$.

Proposition

Pour que f *appartienne à* $\overline{U(K_H)}$ *il faut et il suffit que pour tout* $e \in E$ *il existe un indice* i *tel que* $\langle f,e\rangle \leq a_i\ p_i(Te)$.

Cette condition s'écrit pour tout $e \in E$

$$\langle f,e\rangle \leq \sup_i a_i \left|\sum_{n\geq i} \alpha_{ni} e_n\right|.$$

II.5 - Résolution exacte

Si $f \in \overline{U(K_H)}$ et $e \in \mathrm{KerT}$ alors $<f,e> = 0$. En effet, $Te \in K_H^0$ et $|<f,e>| \leq 1$ d'après la proposition II.1, mais $\lambda e \in \mathrm{KerT}$ quel que soit λ donc $|\lambda<f,e>| \leq 1$ et ainsi $<f,e> = 0$. Nous pouvons ainsi définir une application Φ de ImT dans $\mathbb{R}$ par : $g = T(e) \to <f,e> = \Phi(g)$ indépendante au choix de e tel que $Te = g$.

Si l'application Φ peut se prolonger en une forme linéaire φ continue sur G appartenant à K_H alors $f \in U(K_H)$. En effet, $\varphi \in H$ et nous avons $<\varphi,Te> = <U(\varphi),e>$ et $<\varphi,Te> = \Phi(Te) = <f,e>$. Nous pouvons donner la proposition :

Proposition

Si K_H *est faiblement compacte alors pour que* $f \in U(K_H)$ *il faut et il suffit que* $|<f,e>| \leq 1$ *pour les éléments de* E *tels que* $Te \in K_H^0$.

En effet K_H^0 est un voisinage pour la topologie de Mackey de G, pour tout $u = Te \in K_H^0$ $|\Phi(u)| \leq 1$, ainsi Φ est continue sur Im T muni de la topologie induite par la topologie de Mackey sur G. D'après le théorème de Hahn-Banach Φ se prolonge par continuité en une fonction φ continue sur G vérifiant $|\varphi(u)| \leq 1$ quel que soit $u \in K_H^0$.

c.q.f.d.

Ainsi si K_H est faiblement compacte alors les divers critères des propositions II.2 et II.3 ainsi que les corollaires donnent des conditions pour que $f \in U(K_H)$.

Proposition

Si G *est un espace normé,* $H = G'$ *dual de* G. *Pour que* f *appartienne à l'image par* U *de la boule de rayon* M *il faut et il suffit que pour tout* $e \in E$ $|<f,e>| \leq M\|Te\|$.

En effet la forme linéaire Φ définie sur Im T est continue car $|\Phi(Te)| = |<f,e>| \leq M\|Te\|$. Donc Φ peut se prolonger d'après le théorème de Hahn-Banach en une forme linéaire continue φ sur G, et $\varphi \in G' = H$ et l'on peut choisir φ tel que $\|\varphi\| \leq M$ puisque $\|\Phi\| \leq M$.

c.q.f.d.

II.6 - Critère de résolution d'un système infini d'équations

Soient (X,Y) un couple d'espace vectoriel en dualité. $(\ell_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de Y linéairement indépendants, L désigne l'espace vectoriel engendré par ces éléments, $(a_i)_{i\in I}$ une famille de nombres réels, et $\Phi_{a,I} = \{x \in X \mid \forall i \in I, <\ell_i,x> = a_i\}$, (I pourra être omis s'il n'y a pas d'ambiguité.)

Proposition

Supposons qu'il existe :

- *une semi-norme* p *sur* X *tel que* X/Kerp *muni de la norme quotient soit un espace de Banach reflexif,*
- *un ensemble fini d'indice* $i_1,\ldots,i_k$ *tel que* $L+(\text{Kerp})^0$ *soit la somme directe de* $(\text{Kerp})^0$ *et de l'espace vectoriel de dimension* k *engendré par* $\ell_{i_1},\ldots,\ell_{i_k}$.
- *un nombre* $M \geq 0$
- *pour chaque* J *(sous-ensemble fini de* I *) il existe un élément* $x_J \in X$ *avec* $x_J \in \Phi_{a,J}$

tels que quel que soit J *on ait* $p(x_J) \leq M$, *alors* Φ_a *est non vide et il existe* $x \in \Phi_a$ *avec* $p(x) \leq M$.

Démonstration

a) Supposons que pour tout $i \in I$ on ait $\ell_i \in (\text{Kerp})^0$. Posons H = X/Kerp, H étant un espace de Banach reflexif apparait ainsi comme le dual de $H' = G$.

Posons $F = R^I$ et $E = \bigoplus_{i \in I} R$ nous définissons la dualité entre E,F par $\langle f,e \rangle = \sum_{i \in I} e_i f_i$.
$e = \sum_{i \in I} e_i \in \bigoplus_{i \in I} \mathbb{R}$ (un nombre fini de e_i étant différents de 0) et $f = (f_i)_{i \in I} \in R^I$.

Considérons l'application U de H dans F qui a $\dot{x} \in H$ associe $U(\dot{x}) = (\langle \ell_i, x \rangle)_{i \in I} \in R^I = F$. Comme nous avons fait l'hypothèse que $\ell_i \in (\mathrm{Ker} p)^0$ alors $\langle \ell_i, \dot{x} \rangle$ ne dépend pas de x choisi dans une même classe module Kerp. On peut ainsi considérer que $\ell_i \in G$. U est la transposée de l'application $T : E \to G$ défini par $T(e) = \sum_{i \in I} e_i \ell_i$ (la somme est en réalité finie). La topologie faible sur F est définie à partir d'une famille de voisinages : $V_{e,\varepsilon} = \{f \in R^I \mid \sum_{i \in I} e_i f_i \leq \varepsilon\}$. En réalité nous avons une condition sur un nombre fini d'indice de f_i, les autres pouvant être pris quelconques dans R, soit J l'ensemble des indices pour lesquels $e_i \neq 0$. L'application qui à $\dot{x}$ associe $(\langle \ell_i, \dot{x} \rangle)_{i \in J}$ est continue dans R^J (ℓ_i étant continue sur G), et ainsi $U^{-1}(V_{e,\varepsilon})$ est un voisinage de 0 dans G muni d'une topologie compatible avec la dualité. Ainsi U est continue pour la topologie faible.

Dire que $\Phi_{a,I}$ est non vide revient à dire qu'il existe $h \in H$ tel que $U(h) = (a_i)_{i \in I} = a$, nous sommes dans le cas d'application de la deuxième proposition de II.4 on a alors la condition pour tout $e \in E$ $|\langle a,e \rangle| \leq \|T(e)\|_G$ or $|\langle a,e \rangle| = |\sum_{i \in I} a_i \ell_i|$ et $\|T(e)\| = \|\sum_{i \in I} e_i \ell_i\|_G$.

Utilisons l'hypothèse, pour tout J fini il existe $x_J \in \Phi_{a,J}$ avec $p(x_J) \leq M$ ainsi $\|\dot{x}\|_H \leq M$ et $\langle \ell_i, x_J \rangle = a_i$ si $i \in J$. Alors si nous prenons e on a $e_i = 0$ dès que $i \notin J$:

$$\langle a,e \rangle = \sum_{i \in I} a_i e_i = \sum_{i \in I} \langle \ell_i, x_J \rangle e_i = \sum_{i \in I} \langle e_i \ell_i, x_J \rangle = \langle T(e), x_J \rangle$$

or

$$\langle Te, \dot{x}_J \rangle \leq \|T(e)\|_G \|\dot{x}_J\|_H \leq M \|T(e)\|_G$$

et ainsi la condition du théorème 1 est bien vérifiée.

b) Cas où il y a des ℓ_i avec $\ell_i \notin (\mathrm{Ker}p)^0$.
D'après les hypothèses de la proposition on a alors l'existence des $i_1,\dots,i_k$ avec $L+(\mathrm{Ker}p)^0 = \ell_{i_1} \oplus\dots\oplus \ell_{i_k} \oplus (\mathrm{Ker}p)^0$. Nous pouvons alors décomposer ℓ_i en $\ell_i'+\ell_i''$ où $\ell_i' \in (\mathrm{Ker}p)^0$ et $\ell_i'' = \sum_{j=1}^{k} \alpha_{i,j}\ell_{i_j}$.

Posons alors $f_i = a_i - \sum_{j=1}^{k} \alpha_{i,j}a_{i_j}$, et soit J un sous-ensemble fini de I contenant $i_1,\dots,i_k$, on lui associe par hypothèse x_J avec $<\ell_i,x_J> = a_i$ si $i \in J$. On en déduit :

$$<\ell_i',x_J> = <\ell_i-\ell_i'',x_J> = <\ell_i,x_J> - \sum_{j=1}^{k} \alpha_{i,j}<\ell_{i_j},x_J>$$

donc on aura

$$<\ell_i',x_J> = f_i.$$

Avec les familles ℓ_i' et f_i nous sommes dans le cas a) avec cette différence que nous avons x_J uniquement si J contient $i_1,\dots,i_k$; en reprenant la fin de la démonstration du a) on remarque qu'il suffit de prendre pour chaque e un ensemble J contenant $i_1,\dots,i_k$ et les indices pour lesquels on a $e_i \neq 0$, et nous obtenons bien la condition $<a,e> \leq M\|Te\|_G$.

Ainsi nous obtenons $\dot{x} \in H$ avec $<\ell_i',\dot{x}> = f_i$ quel que soit i.

Les équations $<\ell_{i_j},k> = a_{i_j}$ sur le sous-espace Kerp admettent une solution. En effet les ℓ_{i_j} sont linéairement indépendants, $\ell_{i_j} \notin (\mathrm{Ker}p)^0$ et le sous-espace engendré par $\ell_{i_1},\dots,\ell_{i_k}$ coupe $(\mathrm{Ker}p)^0$ seulement en 0. En prenant un sous-espace de dimension k de Kerp alors les ℓ_{i_j} y définissent un système de Cramer (La dimension de Kerp est supérieure à k, en effet si dim Kerp est fini = m alors $(\mathrm{Ker}p)^0$ est de dimension m). Ainsi nous pouvons trouver $x \in X$ avec $<\ell_i',x> = a_i$ et $<\ell_{ij},x> = a_{ij}$, en remarquant que $\ell_i = \ell_i'+\Sigma\alpha_{ij}\ell_{ij}$ on a $<\ell_i,x> = f_i+\Sigma\alpha_{i,j}a_{ij} = a_i$ et nous obtenons ainsi $\Phi_{a,I} \neq \emptyset$.
On a $p(x) \leq M$ donc comme $p(x) = p(\dot{x})$ alors $p(x) \leq M$.

c.q.f.d.

III - CONDITION POUR L'INTERPOLATION SUR UN NOMBRE INFINI DE POINTS PAR DES FONCTIONS SPLINE

Considérons les mêmes données (X,Y) $(\ell_i)_{i\in I}$, $(a_i)_{i\in I}$ qu'en II.6 Soit V un sous-espace de X qui puisse être muni d'une structure de sous-espace hilbertien de X ; désignons par $C_{a,J} = \{x \in V \mid \forall j \in J, \langle \ell_j, x\rangle = a_j\}$ $(J \subset I)$.

Si $C_{a,I}$ est non vide, alors pour toute fonction semi-hilbertienne h dont le domaine est V,$m_I = \inf(h+\Psi_{C_{a,I}})$ est un nombre fini, considérons J sous-ensemble fini de I on a $m_J = \inf(h+\Psi_{C_{a,J}}) \leq m_I$, ainsi les m_J sont bornés. Inversement nous avons :

III.1 - *Proposition*

Si il existe une fonction semi-hilbertienne h *dont le domaine est* V, *et dont la dimension de* Kerh *est finie, et un nombre* M *tels que quel que soit* J *sous-ensemble fini de* I , $m_J = \inf(h+\Psi_{C_{a,J}}) \leq M$ *alors* $C_{a,I}$ *est non vide.*

Appliquons la proposition II.6, alors $\sqrt{h}$ est une semi-norme sur V et V/Kerh est un espace de Hilbert donc reflexif. Comme Kerh est de dimension finie, alors $L+(\mathrm{Kerh})^0$ est somme directe d'un sous-espace de dimension finie et de $(\mathrm{Kerh})^0$. Ainsi cette proposition nous indique que $C_{a,I}$ est non vide.

c.q.f.d.

Si nous avons $L+(\mathrm{Kerh})^0 = Y$ alors $L^0 \cap \mathrm{Kerh} = \{0\}$, pour chaque J fini nous sommes assurés (Atteia [1966]) de l'existence d'une fonction minimisant $h+\Psi_{C_{A,J}}$ qui est la fonction spline s_J. Ainsi :

Corollaire

Sous les conditions et notations précédentes pour que $C_{a,J}$ *soit non vide, il faut et il suffit qu'il existe* M *tel que quel que soit* J *fini dans* I, $h(s_J) \leq M$.

III.2 - Remarque

Si $L+(\mathrm{Kerh})^0 = Y$, on montre que $\chi(C_{a,I})$ est fermé dans V/Kerh (χ projection de V sur V/Kerh) et ainsi si $C_{a,I} \neq \emptyset$ il existe une fonction spline s_I minimisant $h+\Psi_{C_{a,I}}$. Ainsi le corollaire précédent nous donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une fonction spline vérifiant une infinité de conditions $<\ell_i,s> = a_i$ $(i \in I)$.

L'hypothèse $L+(\mathrm{Kerh})^0 = Y$ assure l'unicité des fonctions spline et en réalité χ est une bijection de $C_{0,Y}$ sur $\chi(C_{0,Y})$. Si nous munissons V d'une semi-norme ρ telle que χ soit une application continue de V_ρ sur V/Kerh muni de la structure hilbertienne associée à h, alors d'après le théorème de Banach χ est un homomorphisme donc un homéomorphisme et ainsi il existe un nombre $\alpha > 0$ tel que si φ et $\varphi' \in C_{a,I}$ on ait $\sqrt[2]{h(\varphi-\varphi')} \geq \alpha\, \rho(\varphi-\varphi')$.

III.3 - Supposons que nous ayons une suite $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et que nous soyons dans les conditions du corollaire III.1, désignons par s_n la spline associée aux n premières conditions $<\ell_1,s_n> = a_1,\ldots,<\ell_n,s_n> = a_n$. Remarquons que si J est fini,et si tout les éléments de J sont inférieurs à un certain N alors $h(s_J)\leq h(s_N)$ ainsi dans le corollaire III.1 nous pouvons nous limiter au J de la forme $1,\ldots,n$.

Proposition

Si $C_{a,\mathbb{N}} \neq \emptyset$ alors la suite s_n converge vers la fonction $s_{\mathbb{N}}$ dans V muni de ρ (ρ défini à la remarque III.2).

La suite $h(s_n)$ est une suite croissante, bornée, de nombres réels donc elle tend vers une limite M. Soit $p > n$, posons $\chi(s_p)-\chi(s_n) = u_{p,n}$. $\chi(s_n)$ est la projection orthogonale dans V/Kerh de 0 sur $\chi(C_{a,n})$, ainsi tout élément de cet ensemble est orthogonal à $\chi(s_n)$. Comme $p > n$ $\chi(C_{a,p}) \subset \chi(C_{a,n})$ et $u_{p,n} \in \chi(C_{a,n})$ est orthogonal à $\chi(s_n)$, ainsi $h(s_p) = h(s_n)+\bar{h}(u_{p,n})$.

Supposons n assez grand pour que $M-\sqrt{h}(s_n) \le \varepsilon$ pour $p > n$, $0 \le \sqrt{h}(s_p)-\sqrt{h}(s_n) \le \varepsilon$ ou encore

$$h(s_n) \le h(s_p) \le (\sqrt{h}(s_n)+\varepsilon)^2$$

$$\le h(s_n)+2\varepsilon\sqrt{h(s_n)}+\varepsilon^2$$

$$\le h(s_n)+\varepsilon(M+2\varepsilon).$$

$$\dot{h}(u_{p,n}) = h(s_p)-h(s_n) \le \varepsilon(M+2\varepsilon).$$

Ainsi $\chi(s_n)$ converge dans V/Kerh pour la norme $\sqrt{\dot{h}}$, sa limite est le point σ de $\chi(C_{a,N})$ à distance minimum de O. Or χ est un homéomorphisme de $C_{a,n}$ sur $\chi(C_{a,n})$, dès que $n > \dim(\mathrm{Kerh})$, on en conclut que s_n converge dans V vers une limite s qui réalise le minimum de $h(\varphi)+\Psi_{C_{a,N}}$.

c.q.f.d.

Si on connait ε tel que $M-\sqrt{h(s_n)} \le \varepsilon$, et α un nombre tel que si φ et $\varphi' \in C_{a,n}$ $2\sqrt{h(\varphi-\varphi')} \ge \alpha\, \rho(\varphi-\varphi')$ nous déduisons alors une borne pour l'erreur de $s-s_n$, $\rho(s-s_n) \le \frac{1}{\alpha}\, \varepsilon^{1/2}(2M+\varepsilon)^{1/2}$.

Golomb et Schoenberg [1968] ont donné indépendamment de nous le corollaire III.1 et la proposition III.3 pour le cas de spline d'interpolation sur une suite de points de [a,b].

III.4 - Nous allons exprimer d'une manière plus précise la condition du corollaire de la proposition III.2 en essayant de calculer $h(s_I)$.

Rappel d'une méthode de calcul des fonctions spline (Carasso (1967), Laurent (1968)).

Nous considérons n fonctionnelles linéaires continues $\ell_1,\ldots,\ell_n$ sur V, posons $W = V/\mathrm{Ker}h$, L le sous-espace de V' engendré par $\ell_1,\ldots,\ell_n$, $q = \dim(\mathrm{Ker}h)$.
Si $(\mathrm{Ker}h) \cap L^0 = \{0\}$ alors la spline existe et est unique.
Soit A l'application $v \to ((\ell_1,v),\ldots,(\ell_n,v))$ dans R^n.
$A(\mathrm{Ker}h)$ est de dimension q ; considérons R^n mis en dualité avec lui-même par exemple par la structure euclidienne ; $B = (A(\mathrm{Ker}h))^0$ est de dimension n-q, soit $b_1,\ldots,b_{n-q}$ une base de B. Considérons la transposée ${}^tA : R^n \to V'$.
Posons $O = {}^tA(B) = L \cap (\mathrm{Ker}h)^0$. Ce sous-espace est de dimension n-q, et admet comme base les vecteurs $o_1 = {}^tA(b_1),\ldots,o_{n-q} = {}^tA(b_{n-q})$.

A la projection canonique χ de V sur W, nous associons sa transposée ${}^t\chi$ qui est une application injective sur $(\mathrm{Ker}h)^0 \subset V'$ ainsi $F = {}^t\chi^{-1}(O)$ est un sous-espace de W' de dimension n-q et on a $\chi(L^0) = F^0$.

$f_1 = {}^t\chi^{-1}(o_1),\ldots,f_{n-q} = {}^t\chi^{-1}(o_{n-q})$ forment une base de F. W est un espace de Hilbert muni de $\tilde{h}$. Identifions W' avec W par l'isomorphisme canonique ainsi F peut être considéré comme un sous-espace de W. $\chi(s)$ est orthogonal à $\chi(C_a)$ lui-même translaté de $\chi(L^0)$ ainsi $\chi(s) \in F$ et $\chi(s) = \sum_{i=1}^{n-q}\lambda_i f_i$ où les λ_i sont solutions du système

$$\sum_{i=1}^{n-q} \lambda_i \, \tilde{h}(f_i,f_j) = (b_j,a)_{R^n} \qquad 1 \leq j \leq n-q$$

Par résolution de ce système on calcule $\lambda_1,\ldots,\lambda_{n-q}$. Si l'on connait des éléments g_i tels que $\chi(g_i) = f_i$ $\quad 1 \leq i \leq n-q$ alors on a $\quad s = \sum_{i=1}^{n-q}\lambda_i g_i + v$ avec $v \in \mathrm{Ker}h$
v est déterminé en choisissant q éléments parmi $\ell_1,\ldots\ell_n$

$$<s,\ell_i> = \left(\sum_{i=1}^{n-q} \lambda_i g_i + v, k_i\right) = a_i$$

on détermine d'une façon unique v.
Remarquons que $b_j \in L$ donc b_j s'exprime comme combinaison linéaire de $\ell_1,\ldots,\ell_n$ ainsi $d_j = (b_j,a)$ sera une combinaison linéaire des $a_1,\ldots,a_n$.

Expression de la condition $h(s_J) \leq M$

Nous prenons les mêmes familles que précédemment en ajoutant l'indice J pour indiquer que l'ensemble des indices i est J. J est pris suffisamment grand pour que $(L^J)^0 \cap \mathrm{Ker}h = \{0\}$.

On a

$$s_J = \sum_{i=1}^{n-q} \lambda_i^J g_i^J + v^J.$$

Ainsi

$$h(s_J) = \tilde{h}\left(\sum_{i\in J} \lambda_i^J g_i^J + v^J, \sum_{i\in J} \lambda_i^J g_i^J + v^J\right)$$

$$= \tilde{h}\left(\sum_{i\in J} \lambda_i^J f_i^J\right)$$

$$= \sum_{i,j\in J} \lambda_i^J \lambda_j^J \tilde{h}(f_i^J, f_j^J)$$

En posant Φ la matrice de terme général $\tilde{h}(f_i, f_j)$ et $\Lambda^J = (\lambda_1^J, \ldots, \lambda_{n-q}^J)$

$$h(s_J) = {}^t\Lambda^J \Phi^J \Lambda^J.$$

Or nous avons l'équation $\Phi\Lambda = D$ $\quad D = \begin{vmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_{n-q} \end{vmatrix}$ ainsi comme Φ est inversible

$$h(s_J) = {}^tD^J . \Phi^{-1} D^J.$$

Nous obtenons ainsi :

III.5 - Pour que $C_{a,I} \neq \emptyset$ il faut et il suffit qu'il existe M tel que tout J fini vérifiant $(L^J)^0 \cap (\mathrm{Ker}h) = \{0\}$ alors ${}^tD^J \Phi^{-1} D^J \leq M$.

III.6 - Etude du cas où $V = H^k[a,b]$ et $\ell_i = \delta_{x_i}$, où $(x_i)_{i\in I}$ est une famille de points de $[a,b]$.

Considérons la fonction semi-hilbertienne sur $H^k[a,b]$, $h(v) = \int_a^b (v^{(k)}(t))^2dt$. Kerh est formé des polynômes de degré au plus $k-1$. Soit J un ensemble fini d'indice. On suppose $x_1^J,\dots,x_n^J$ les éléments de $(x_i)_{i\in I}$ reclassés dans l'ordre croissant. Nous avons une base de B formée des différences divisées $[x_i^J,\dots,x_{i+k}^J](a)$ avec $1 \leq i \leq n-k$.

$W = V/\mathrm{Kerh}$ peut être pris égal à $L^2[a,b]$ et alors la projection canonique de $H^k[a,b]$ sur $L^2[a,b]$ est l'opérateur de dérivation $k^{\text{ème}}$, $\tilde{h}(w) = \int_a^b w^2dt$. Nous avons

$$f_i(t) = \frac{1}{(k-1)!}\,[x_i,\dots,x_{i+k}]((x-t)_+^{k-1})$$

et nous déduisons

$$\tilde{h}(f_i,f_j) = \frac{(-1)^k}{(2k-1)!}\,[x_i,\dots,x_{i+k}](\theta(j,x))$$

où

$$\theta(j,x) = [x_j,\dots,x_{j+k}]((t-x)_+^{2k-1})$$

(nous avons $\tilde{h}(f_i,f_j) = 0$ si $|i-j| \geq q$.

En conséquence

$$h(s_J) = \sum_{i,j=1}^{n-k} \lambda_i\lambda_j\ \tilde{h}(f_i,f_j).$$

Pour expliciter cette formule utilisons le lemme :

III.7 - *Lemme*

Si A est une matrice définie positive d'ordre n, $X \in \mathbb{R}^n$ *alors nous avons :*

$$\frac{1}{\rho(A)} \leq \frac{|X^tA^{-1}X|}{|{}^tX\ X|} \leq \rho(A^{-1})$$

$\rho(A)$ *désignant le rayon spectral de* A*(maximum des valeurs absolues des valeurs propres).*

A symétrique définie positive peut s'écrire $A = {}^tR\ R$ et $A^{-1} = R^{-1}\,{}^tR^{-1}$ ainsi

$$\frac{|{}^tXR^{-1}\,{}^tR^{-1}X|}{|{}^tX\ X|} = \frac{\|{}^tR^{-1}X\|_2^2}{\|X\|_2^2} \leq \|{}^tR^{-1}\|_2^2$$

Or

$$\|{}^tR^{-1}\|_2^2 = \rho(R^{-1}\,{}^tR^{-1}) = \rho(A^{-1}).$$

pour la minimisation on remarque

$$\frac{\|{}^tR^{-1}X\|_2}{\|X\|_2} = \frac{\|Y\|_2}{\|{}^tRY\|_2} \geq \frac{1}{\|{}^tR\|_2^2}$$

or $\|R^t\|_2 = \sqrt{\rho(R^tR)} = \sqrt{\rho(A)}$ donc nous avons l'inégalité

$$\frac{|{}^tXA^{-1}X|}{|{}^tXX|} \leq \frac{1}{\rho(A)}\ .$$

c.q.f.d.

De ce lemme nous déduisons :

Si A_J est une famille de matrices symétriques définies positives d'ordre m, si d_J une famille de vecteur dans R^j :

Si les valeurs propres de A_J sont bornées par $M_1>0$ alors si nous avons $|{}^td_JA_J^{-1}d_J| \leq M$, nous avons $\|d_J\|^2 \leq M/M_1$. Si les valeurs propres de A_J sont bornées inférieurement par $M_2>0$ alors si $\|d_J\|^2 \leq M$, nous avons $|{}^td_JAd_J| \leq M/M_2$.

III-8 - Explicitation pour k = 2

$$\tilde{h}(f_i, f_j) = 0 \qquad \text{si} \quad |i-j| > 1$$

$$\tilde{h}(f_i, f_i) = \frac{1}{3} \frac{1}{(x_{i+1}^J - x_i^J)}$$

$$\tilde{h}(f_i, f_{i+1}) = \frac{1}{6} \frac{(x_{i+2}^J - x_{i+1}^J)}{(x_{i+3}^J - x_{i+1}^J)(x_{i+2}^J - x_i^J)}$$

La matrice Φ_J est une matrice tridiagonale. Si certains des x_i sont tels que $x_i^J - x_{i+1}^J$ deviennent petit alors les éléments de la diagonale deviennent grands. Pour pallier à cet inconvénient, nous allons multiplier Φ à droite et à gauche par une matrice diagonale de façon à ce que la matrice obtenue soit formée uniquement de 1 sur la diagonale.

Soit Δ^J la matrice diagonale d'ordre m, de terme $\Delta_{i,i}^J = (x_{i+1}^J - x_i^J)^{1/2}$. Alors nous avons $A^J = \Delta^J \Phi^J \Delta^J$

$$A^J = \frac{1}{3} \left| \begin{array}{cccccc} 1 & \alpha_1 & 0 & \cdots\cdots & & 0 \\ \alpha_1 & 1 & \alpha_2 & \cdots\cdots & & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 1 & \cdots\cdots & & 0 \\ \hline & & & & & \\ \hline & & & & 1 & \alpha_{m-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha_{m-2} & 1 \end{array} \right|$$

où $\alpha_i = \frac{1}{2} \frac{(x^J_{i+2}-x^J_{i+1})}{(x^J_{i+3}-x^J_{i+1})^{1/2}(x^J_{i+2}-x^J_i)^{1/2}}$

$$= \frac{1}{2}\left(1+\frac{\beta^J_{i+2}}{\beta^J_{i+1}}\right)^{-1/2}\left(1+\frac{\beta^J_i}{\beta^J_{i+1}}\right)^{-1/2}$$

où

$$\beta^J_i = x^J_{i+1}-x^J_i.$$

Nous avons $|\alpha_i| < \frac{1}{2}$ et la somme des colonnes de A^J est inférieure à $\frac{2}{3}$ ainsi $\|A^J\|_{\infty\infty} \leq 2/3$ donc $\rho(A^J) \leq 2/3$ et les valeurs propres de A^J sont bornées supérieurement par 2/3.

Maintenant examinons le comportement des valeurs propres de A^{J-1}. Pour cela utilisons le lemme :

III.9 - *Lemme*

ν étant une norme sur R^n, $S_{\nu\nu}$ la norme associée pour les matrices carrées, et soit A une matrice n+n vérifiant $S_{\nu\nu}(A) < 1$ alors nous avons :

$$S_{\nu\nu}((I-A)^{-1}) \leq (1-S_{\nu\nu}(A))^{-1}.$$

$$(S_{\nu\nu}((I-A)^{-1}) = S_{\nu\nu}(\sum_{i=0}^{\infty} A^i) \leq \sum_{i=0}^{\infty} S_{\nu\nu}(A^i) \leq (1-S_{\nu\nu}(A))^{-1}).$$

Posons ici $3A^J = I-E^J$.

On a aussi $S_{\infty\infty}(E^J) = \sup_{i\in J}|\alpha_i|+|\alpha_{i+1}|$

$$S_{\infty\infty}(E^J) = \sup_{i\in I} \frac{1}{2}\left(\left(1+\frac{\beta_{i+2}}{\beta_{i+1}}\right)^{-1/2}\left(1+\frac{\beta_i}{\beta_{i+1}}\right)^{-1/2}+\left(1+\frac{\beta_{i+3}}{\beta_{i+2}}\right)^{-1/2}\left(1+\frac{\beta_{i+1}}{\beta_{i+2}}\right)^{-1/2}\right)$$

$$\leq \sup_i \frac{1}{2}\left(\left(1+\frac{\beta_{i+2}}{\beta_{i+1}}\right)^{-1/2}+\left(1+\frac{\beta_{i+1}}{\beta_{i+2}}\right)^{-1/2}\right)$$

$$\leq \sup_{a\geq o} \frac{1}{2}\left((1+t)^{-1/2}+(1+1/t)^{-1/2}\right) \qquad t = \frac{\beta_{i+1}}{\beta_{i+2}}$$

$$\leq \sup \frac{1}{2}\left((1+t^{1/2})(1+t)^{-1/2}\right).$$

Un simple calcul nous donne $\frac{1}{\sqrt{2}}$ comme maximum de cette fonction. Ainsi $\rho(E^J) \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ et on a $S_{\infty\infty}((I-E^J)^{-1}) \leq \frac{1}{1-1/\sqrt{2}} = \sqrt{2}(\sqrt{2}+1)$ ainsi $\rho(A^{J-1}) \leq 3\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)$.

En appliquant les remarques qui suivent le lemme III.7 nous obtenons finalement :

III.10 - *Proposition*

Soient une famille de points $(x_i)_{i\in I}$ $(x_i \in [a,b])$, $(a_i)_{i\in I}$ *une famille de nombres réels.*
Pour qu'il existe une fonction v *de* $H^2[a,b]$ *telle que* $v(x_i) = y_i$ $(i \in I)$ *il faut et il suffit que pour tout sous-ensemble* $J \subset I$ *fini de* m *points* $(m \geq 3)$ *les nombres*

$$\gamma^J = \sum_{i=1}^{m-2} (x^J_{i+2}-x^J_i) \quad [x^J_i,x^J_{i+1},x^J_{i+2}](a)^2$$

soient bornés.

III.11 - Cas où la famille $(x_i)_{i\in I}$ est formée d'une suite de points monotones

Nous écrivons cette suite $x_1,\dots,x_n,\dots$ elle est convergente puisque $[a,b]$ est compacte. Pour qu'il existe une fonction spline unique il suffit de prendre au moins 3 points. Dans les propositions précédentes nous n'avons plus à considérer tous les ensembles J fini, il nous suffit de considérer les ensembles $(x_1,\dots,x_n)$ où $n \geq 3$, l'ensemble $x_1,\dots,x_n$ se trouve automatiquement ordonné (on peut sans restriction supposer la suite croissante). Les γ^n correspondants aux n premières abscisses apparaissent comme la somme des n premiers termes d'une série positive et la condition $\gamma^n \leq M$, exprime que cette série est convergente. En regroupant les résultats précédents, nous obtenons :

Proposition

> *Soit* $x_1,\dots,x_n,\dots$ *une suite croissante dans* $[a,b]$, $a_1,\dots,a_n,\dots$ *une suite de nombres réels, pour qu'il existe une fonction* $v \in H^2[a,b]$ *vérifiant* $v(x_n) = a_n$ *quel que soit* n, *il faut et il suffit que la suite* $\delta = (\delta_1,\dots,\delta_n,\dots)$ *soit dans* ℓ^2 $(\delta_i = (x_{i+1}-x_i)^{1/2}[x_i,x_{i+1},x_{i+2}](a))$
> *Si cette condition est vérifiée la suite des fonctions splines* s_n *interpolant* (a) *sur les* n *premières abscisses, converge vers la fonction spline* s *interpolant* (a) *sur tous les* x_n.

Cas particulier suite géométrique

On suppose que $[a,b]$ soit un intervalle contenant $[0,1]$, et $x_n = 1-\alpha^n$ où $0 < \alpha < 1$, en explicitant $\delta_i = (x_{i+2}-x_i)^{1/2}[x_i,x_{i+1},x_{i+2}](a)$. Nous obtenons comme condition nécessaire et suffisante de l'existence d'une fonction de $H^2[a,b]$ interpolant entre ces points, la propriété : la série $\dfrac{(a_{i+1}-a_i)}{\alpha^{3i}}$ est convergente.

III.12 - Etude du cas k = 3.

La matrice Φ_J est alors une matrice pentadiagonale, les coefficients de cette matrice ne prennent plus des valeurs simples comme pour k = 2. La diagonale de cette matrice est formée de nombres qui pourraient devenir grand si les points x_i se rapprochent. On peut encore rendre les termes de la diagonale égaux à 1 en multipliant par une matrice diagonale appropriée. Mais les formules explicites deviennent compliquées, et les majorations données pour k = 2 des valeurs propres n'ont pu être trouvées pour le cas général.
Deffaud-Marcovici [1968] ont explicité certains exemples particuliers.

Suite géométrique $x_n = a-\alpha^n$ $0 < \alpha < 1$.

Ayant une suite croissante, les matrices Φ_n sont des tronquées d'une même matrice Φ infinie.
On a :

$$\varphi_{i,i} = \frac{1}{120} \frac{2(3\alpha^2+5\alpha+3)}{(1-\alpha)\quad(1+\alpha)^2} \frac{1}{\alpha^i}$$

$$\varphi_{i,i-1} = \frac{1}{120} \frac{4\alpha^2+5\alpha+4}{(1-\alpha)(1+\alpha)(1+\alpha+\alpha^2)^2} \frac{1}{\alpha^{i-1}}$$

$$\varphi_{i,i-2} = \frac{1}{120} \frac{1}{(1-\alpha)(1+\alpha)(1+\alpha+\alpha^2)^2} \frac{1}{\alpha^{i-3}}$$

On multiplie Φ par la matrice diagonale D de coefficients $\varphi_{i,i}$. Posons $A = D\Phi D$. A est une matrice pentadiagonale, dont la diagonale est formée de 1 et sur les parallèles à la diagonale les coefficients sont constants. Ainsi $S_{\infty\infty}(A_n)$ est bornée et aussi $\rho(A_n)$ (A_n troncquées d'ordre n de A).

On vérifie aussi que $S_{\infty\infty}(I-A_n) < 1$ on peut ainsi appliquer le lemme III.9. Les valeurs propres de A_n et A_n^{-1} sont bornées et nous obtenons un résultat analogue à III.11.

Pour qu'il existe $v \in H^3[a,b]$ *tel que nous ayons* $v(x_i)$ a_i *il faut et suffit que la série de terme général*

$$\frac{[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}](a)}{\sqrt{\varphi_{i,i}}}$$ *soit de carré sommable* ($x_i = a-\alpha^i$).

Si la suite x_n est une suite partout dense de la forme $\frac{i}{2^N}$ on arrive aussi à borner les valeurs propres de A_n et A_n^{-1}, mais ici A_n n'est plus tronc-quée d'une matrice. Nous avons une condition de type III.11.

IV - EXTRAPOLATION A LA LIMITE PAR DES FONCTIONS SPLINE

IV.1 - Soient une suite $(x_1,\dots,x_n)$ décroissante vers 0 et une suite $y_1,\dots,y_n$ de nombres réels. Un procédé d'extrapolation consiste à associer pour chaque n un nombre z_n qui dépend de $(x_1,\dots,x_n)$ et $(y_1,\dots,y_n)$. Ce nombre z_n devant être une approximation de la limite si elle existe, de la suite $y_1,\dots,y_n$.

Le procédé d'extrapolation à la limite de Richardson (Laurent [1964]) consiste à construire le polynôme p_n interpolant $(y_1,\dots,y_n)$ sur les abscisses $(x_1,\dots,x_n)$ et à prendre $z_n = p_n(0)$.

Nous proposons ici le procédé d'extrapolation à la limite par fonction spline d'ordre k. Considérons la fonction spline x_n interpolant $(y_1,\dots,y_n)$ sur les abscisses $(x_1,\dots,x_n)$ et minimisant $\int_a^b (u^{(k)})^2dt$, où $[a,b]$ est un intervalle contenant la suite $(x_1,\dots,x_n)$; nous posons $z_n = s_n(0)$. La valeur z_n ne dépend pas du choix de $[a,b]$, aussi on pourrait se limiter à intégrer de 0 à x_1.

Si $k > 1$ la proposition III.3 nous indique que s'il existe une fonction f de $H^k[0,x_1]$ interpolant $y_1,\dots,y_n,\dots$ sur $x_1,\dots,x_n,\dots$ alors la suite des z_n converge vers $f(0) = \lim_{n\to\infty} y_n$. (f étant continue). La condition III.5 donnant une condition pour que la fonction f existe.

Nous allons donner deux méthodes de calcul de cette extrapolation par spline.

IV.2 - Méthode de calcul d'une fonction spline par itération

Le procédé d'interpolation par fonction spline d'ordre k considéré est un procédé d'interpolation avec un seuil d'unisolvence k. Nous pouvons lui appliquer la formule de Newton généralisée. Proposition I.14 du chapitre I ; et écrire :

IV.2 $\quad s_{n+1} = s_n + \mu(x_1,\ldots,x_{n+1})(y)\; v_{n+1}$

où s_i désigne la fonction spline construite avec les i premières abscisses ($i \geq k$) ; v_{n+1} désigne la fonction spline vérifiant pour $1 \leq i \leq n$ $\quad v_{n+1}(x_i) = 0$, et $v_{n+1}(x_{n+1}) = \alpha$ (nombre différent de 0) et

$$\mu(x_1,\ldots,x_{n+1})(y) = \sum_{i=1}^{n} \mu_{n+1}^{i} y_i$$

(les coefficients μ_{n+1}^{i} ne dépendant que de $x_1,\ldots,x_{n+1}$).

Nous avons au III.4 rappelé une méthode de calcul d'une fonction spline. Nous indexerons par n en haut à droite, les notations des diverses notions introduites à cet endroit, lorsqu'elles sont relatives aux n premières abscisses. Par exemple Φ^n ou B^n.

A^n est une application de $H^k[0,x_1]$ dans $\mathbb{R}^n$. Rangeons $\mathbb{R}^1,\ldots,\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^{n+1},\ldots$ en une suite emboîtée de sous-espace ; $i_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ est l'injection qui consiste à conserver les n premières coordonnées et d'égaler à 0 la n+1. Soit p_n la projection de $\mathbb{R}^{n+1}$ sur $\mathbb{R}^n$ parallèlement au dernier axe de coordonnées. Si $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^{n+1}$ sont munis de la structure euclidienne, p_n apparait comme le transposé de i_n ($p_n = {}^t i_n$). Ainsi nous avons $A^n = p_n \circ A^{n+1}$ et ${}^tA^n = {}^tA^{n+1} \circ i_n$.

$\underline{i_n(B_n) \subset B_{n+1}}$

En effet si $b \in B_n$ $\quad (b,A_n(e)) = 0$ pour tout $e \in$ Kerh. On en conclut

$$(b,A_n(e)) = (b,p_nA^{n+1}(e)) = (i_n(b),A^{n+1}(e)) = 0 \text{ et}$$

$$i_n(b) \in B_{n+1}.$$

Nous pouvons choisir $b_{n+1-k} \in B_{n+1}$ tel que $b_1^n,\ldots,b_{n-k}^n$, et b_{n+1-k} forment une base de B_{n+1}. Ainsi nous pouvons construire une suite $b_1,\ldots,b_n,\ldots$, les n-k premiers éléments formant une base de B_n. Comme ${}^tA^n = {}^tA^{n+1}.i_n$ on peut choisir a_i et f_i indépendamment de n.

Les équations déterminant λ_i^n et λ_i^{n+1} seront

IV.3 $$\sum_{i=1}^{n-k} \lambda_i^n \tilde{h}(f_i,f_j) = (b_j,y)_{\mathbb{R}^n} \qquad 1 \leq j \leq n-k$$

et

IV.4 $$\sum_{i=1}^{n-k+1} \lambda_i^{n+1}\tilde{h}(f_i,f_j) = (b_j,y)_{\mathbb{R}^{n+1}} \qquad 1 \leq j \leq n-k+1.$$

On a

$$(b_j,y)_{R^n} = (b_j,y)_{R^{n+1}} \qquad \text{si } j \leq n-k.$$

Posons $\varphi_{i,j} = \tilde{h}(f_i,f_j)$ et la matrice infini de ces coefficients. Les matrices des systèmes IV.3 et IV.4 apparaissent comme des troncquées de la matrice Φ. Celle du système IV.4 est obtenue à partir de celle du système IV.3 en bordant cette dernière par une ligne et une colonne.

Nous allons maintenant calculer le coefficient μ de la formule IV.2

$$<s_{n+1},o_{n+1-k}> = <s_n+\mu v_{n+1},o_{n+1-s}> = <s_n,o_{n+1-k}>+\mu<v_{n+1},o_{n+1-k}>$$

Or

$$<v_{n+1},o_{n+1-k}> \neq 0$$

$$\mu = (<s_{n+1},o_{n+1-k}>-<s_n,o_{n+1-k}>)/<v_{n+1},o_{n+1-k}>$$

$$<s_{n+1},o_{n+1-k}> = (As_{n+1},{}^tA^{-1}o_{n+1-k})_{R^{n+1}} = (y,b_{n+1-k})_{R^{n+1}}$$

$$<s_n,o_{n+1-k}> = <\chi_{s_n},{}^t\chi^{-1}o_{n+1-k}> = <\chi_{s_n},o_{n+1-k}>$$

$$= \sum_{j=1}^{n-q} \lambda_j^n \tilde{h}(f_j,f_{n+1-k}) = \sum_{j=1}^{n-q} \lambda_j\varphi_{j,n+1-k}$$

$$<v_{n+1},o_{n+1-k}> = (Av_{n+1},b_{n+1-k})_{R^{n+1}} = (\varepsilon_{n+1},b_{n+1-k})$$

où

$$\varepsilon_{n+1} = (0,\ldots,0,1).$$

Ainsi

IV.5 $$\mu = ((y_n, b_{n+1-k})_{\mathbb{R}^{n+1}} - \sum_{i=1}^{n} \lambda_j^n \varphi_{j,n+1-k}) / (\varepsilon_n, b_{n+1-k})_{\mathbb{R}^{n+1}}$$

IV.6 - <u>Variante pour le calcul d'une fonction spline</u> s_n <u>en une abscisse x connaissant</u> χs_n

Supposons connu $\chi\, s = \sum_{i=1}^{n-k} \lambda_i f_i$. Définissons le vecteur de $b_i \in \mathbb{R}^{n+1}$ en ajoutant aux n formes liénaires $\delta_{x_1}, \dots, \delta_{x_n}$ la forme δ_x. Posons $o' = {}^tA_{n+1}(b')$ et $f' = {}^t\chi^{-1}(o')$

$$\langle s_n, o'\rangle = \langle \chi s_n, {}^t\chi^{-1} o'\rangle = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i\, \tilde{h}(f_i, f')$$

d'autre part :

$$\langle s_n, o'\rangle = \langle A_{n+1} s_n, {}^tA_{n+1}^{-1} o'\rangle$$

$$A_{n+1} s_n = (y_1, \dots, y_n, s_n(x))$$

et

$${}^tA_{n+1}^{-1} o' = b' = (b', \dots, b'^{n+1})$$

$$\langle s_n, o'\rangle = \sum_{i=1}^{n} y_i b'^i + b'^{n+1} s_n(x)$$

donc

IV.6 $$s_n(x) = \left(\sum_{i=1}^{n-k} \lambda_i \tilde{h}(f_i, f') - \sum_{i=1}^{n} y_i b'^i\right) / b'^{n+1}.$$

b'^{n+1} étant différent de 0.

IV.7 - Premier algorithme de calcul de l'extrapolé "EXTSPL"

α) Initialisation

On commence avec $n = k$, la fonction spline coïncide avec le polynôme de Lagrange. On calcule la valeur en 0 de ce polynôme.

β) Calcul de $v_{n+1}(0)$

Nous avons $\chi(v_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1-k} \nu_i^n f_i$. Les ν_i^n étant solution du système :

$$\sum_{i=1}^{n+1-k} \nu_i \varphi_{i,j} = 0 \qquad 1 \leq j \leq n-q$$

$$\sum_{i=1}^{n+1-k} \nu_i \varphi_{i,n+1-k} = [x_{n+1-k},\dots,x_{n+1}](0,\dots,0,\alpha).$$

Le nombre α étant choisit de façon à ce que le deuxième nombre de la dernière équation soit égal à 1.

Nous avons les formules explicites de $\varphi_{i,j}$ données en III.6. La matrice Φ_n est 2k-1 diagonale. Le vecteur $\nu_1,\dots,\nu_{n+1-k}$ est la dernière colonne de la matrice inverse Φ_{n+1}^{-1}. En IV.8 on décrit un algorithme du calcul de la dernière colonne de Φ_{n+1}^{-1} à partir des k-1 dernières colonnes de Φ_n^{-1}, ainsi pour pouvoir réitérer ce calcul nous devons calculer les k-1 dernières colonnes de Φ_{n+1}^{-1} qui s'expriment en fonction de k-1 dernières colonnes de Φ_n^{-1}. Si $n < 2k$ alors on inverse Φ_n par un procédé classique d'inversion de matrice.

Les ν_i étant calculés on utilise la variante proposée en IV.6 On prend $b' = [x_{n+2-k},\dots,x_{n+1},0]$ on a alors :

$$\tilde{h}(f_i,f') = \frac{(-1)^k}{(2k-1)!}[x_{n+1-k},\dots,x_{n+1},0]\,\theta(i,t)\ .$$

On a

$$v_{n+1}(0) = \Big(\sum_{i=1}^{n-k} \nu_i \tilde{h}(f_i,f') - \alpha b'^{\,n}\Big)/b'^{\,n+1}$$

$$b'^{n+1} = 1/\prod_{i=n+1-k}^{n+1} (x-x_i) \text{ et } \alpha b'^{n} = \frac{x_{n+1}-x_{n+1-k}}{x_{n+1}}$$

$$v_{n+1}(\rho) = \left(\sum_{i=1}^{n-k} \nu_i \tilde{h}(f_i,f') - \frac{x_{n+1}-x_{n+1-k}}{x_{n+1}}\right) \prod_{i=n+1-k}^{n+1} x_i .$$

γ) Calcul de μ .

Nous avons μ par la formule IV.5. On remarque que $(\varepsilon_{n+1}, b_{n+1-k})_{\mathbb{R}^{n+1}} = 1$ et que le calcul de μ nous demande la connaissance de λ_j^n avec $(j-(n+1-k)) < k$ car pour les autres j $\varphi_{i,j+1-k} = 0$.

δ) Calcul de λ_j^{n+1}

On a $\lambda_j^{n+1} = \lambda_j^n + \mu\nu_j$ pour $j < n-k$. λ_j^n ; ν_j et μ ayant été calculé précédemment.
Si $j = n+1-k$ alors $\lambda_{n+1-k}^{n+1} = \mu\nu_{n+1-k}$.

ε) On calcule $s_{n+1}(0) = s_n(0)+\mu v_{n+1}(\rho)$.

IV.8 - Résolution d'un problème linéaire de type particulier

Enoncé du problème :

On considère une matrice infinie symétrique A ; A_n désigne sa tronquée d'ordre n.

$$A = \left|\begin{array}{c|c} A_{n-1} & \begin{array}{c} a_{1,n} \\ \vdots \end{array} \\ \hline a_{n,1} \cdots\cdots & a_{n,n} \end{array}\right|$$

On veut trouver la suite des vecteurs $X^n \in R^n$ tel que $A_n X^n = e_n$, e_n désignant le vecteur $(0,\dots 0,1) \in R^n$ (dans la suite on désignera aussi par e_n le vecteur de $\mathbb{R}^m$

$m \geq n$ dont tous les coefficients sont 0 sauf le $n^{\text{ième}}$ égal à 1). On remarque que X^n est la dernière colonne de la matrice A_n^{-1} inverse de A_n.

<u>Utilisation de la décomposition en bloc pour la résolution du problème</u>

$$A_{n+1} = \left|\begin{array}{c|c} A_n & a_n \\ \hline a_n^T & \alpha_{n+1} \end{array}\right| \qquad A_n^{-1} = \left|\begin{array}{c|c} B_n & b_n \\ \hline b_n^T & \beta_{n+1} \end{array}\right|$$

En écrivant $A_{n+1} \circ A_{n+1}^{-1} = I$ on obtient les relations :

$$A_n B_n + a_n b_n^T = I_n$$
$$A_n b_n + \beta_{n+1} a_n = 0$$
$$a_n^T B_n + \alpha_{n+1} b_n = 0$$
$$a_n^T b_n + \alpha_{n+1} \beta_{n+1} = 1$$

On déduit $b_n = -\beta_{n+1} A_n^{-1} a_n$ et en reportant dans la dernière relation :

$$\text{(I)}\quad \begin{aligned} \beta_{n+1} &= 1/(\alpha_{n+1} - a_n^T A_n^{-1} a_n) \\ b_n &= -\beta_{n+1} A_n^{-1} a_n \\ B_n &= A_n^{-1} + \beta_{n+1} A_n^{-1} a_n a_n^T A_n^{-1}. \end{aligned}$$

Ces formules permettent le calcul de A_{n+1}^{-1} à partir de A_n^{-1}, de a_n et α_{n+1}.

<u>Cas où la matrice A est 2k-1 diagonale</u>

Nous supposons maintenant que A est une matrice 2k-1 diagonale.

<u>*Proposition*</u>

Les k-1 *dernières colonnes de* A_{n+1}^{-1} *s'expriment en fonction des* k-1 *dernières colonnes de* A_n^{-1} *, de* a_n *et de* α_{n+1}.

En effet le vecteur a_n s'écrit $a_n = \sum_{j=n+2-k}^{n} a_{j,n+1} e_j$. Ainsi nous avons :

$$\text{(II)} \qquad A_n^{-1} a_n = \sum_{j=n+2-k}^{n} a_{j,n} A_n^{-1} e_j$$

or $A_n^{-1} e_j$ est la $j^{\text{ème}}$ colonne de A_n^{-1}, ainsi $A_n^{-1} a_n$ apparaît comme une combinaison linéaire des k-1 dernières colonnes de A_n^{-1}.

$a_n^T A_n^{-1} a_n$ et $A_n^{-1} a_n a_n^T A_n^{-1} = A_n^{-1} a_n . (A_n^{-1} a_n)^T$ ont la même propriété. X_{n+1} apparait ainsi comme une fonction des k-1 dernières colonnes de A_n^{-1}. b_n et $B_n e_j$ $(n+3-k \leq j \leq n+1)$ ont la même propriété.

c.q.f.d.

De cette propriété nous déduisons que nous pouvons calculer X_{n+1} à partir des k-1 dernières colonnes de A_n^{-1}. Ainsi à chaque pas nous calculerons grâce aux formules I les k-1 dernières colonnes.

Algorithme de calcul

1) Temps initialisation

On pose n = k, on calcule la matrice A_k d'ordre k, on calcule la matrice inverse A_k^{-1} par un procédé classique d'inversion de matrice.

2) Temps itération de n à n+1 $(n \geq k)$

On a en mémoire les k-1 dernières colonnes de A_n^{-1}. On entre le vecteur a_n qui a seulement k-1 composantes différentes de 0, et le nombre α_{n+1}.
On calcule :

i) le vecteur $A_n^{-1} a_n = \sum_{j=n+2-k}^{n} a_{j,n+1} A_n^{-1} e_j$ ($A_n^{-1} a_n$ est un vecteur à n composantes $(A_n^{-1} a_n)_j$ $1 \leq j \leq n$).

ii) $\quad a_n^T A_n^{-1} a_n = \sum_{j=n+2-k}^{n} a_{j,n+1} (A_n^{-1} a_n)_j$

iii) $\quad \beta_{n+1} = 1/(a_{n+1,n+1} - a_n^T A_n^{-1} a_n)$

iv) $\quad a_n^T A_n^{-1} e_j = \sum_{i=n+2-k}^{n} a_{i,n+1} (A_n^{-1} e_j)_i \qquad (n+3-k \le j \le n+1)$

et $(A_n^{-1} e_j)_i$ étant la i composante de $A_n^{-1} e_j$

v) $\quad B_n e_j = A_n^{-1} e_j + \beta_{n+1} . (a_n^T A_n^{-1} e_j) A_n^{-1} a_n \qquad n+3-k \le j \le n+1$

vi) $\quad b_n = -\beta_{n+1} (A_n^{-1} a_n)$

et ainsi nous avons les k-1 dernières colonnes de A_{n+1}^{-1} .

$$A_{n+1}^{-1} e_j = (B_n e_j, (b_n)_j) \qquad n+3-k \le j \le n$$

$$(A_{n+1}^{-1} e_{n+1}) = (b_n, \beta_{n+1}).$$

L'utilisation de cette méthode dans l'algorithme EXTSPL permet de calculer la suite $z_k, z_{k+1}, \ldots, z_n$ en faisant un nombre d'opérations comparables au calcul direct de z_n. La connaissance de $z_k, \ldots, z_n$ permet en pratique de voir comment cette suite converge.

IV.9 - Deuxième méthode du calcul de l'extrapolation à la limite pour une méthode directe de résolution EXSPRE

Carasso et Laurent [1968] ont proposé une méthode de calcul de fonctions spline. Elle repose sur la caractérisation des fonctions spline d'ordre k. Sur chacun des intervalles $[x_i, x_{i+1}]$, s est un polynôme p_i de degré au plus 2k-1, avec raccord d'ordre 2k-2 en x_i (pour $0 \le j \le 2k-2$, $p^j_{i-1}(x_i) = p^j_i(x_i)$), aux extrémités x_1 et x_n, nous avons $p^j_1(x_1) = p^j_{n-1}(x_n) = 0$ si $k \le j \le 2k-2$. La méthode proposée consiste à décrire des systèmes linéaires donnant $p^j_i(x_i)$.

Nous ne décrirons pas la méthode complète, car ici le problème se simplifie et il nous suffit de connaître $p^j_{n-1}(x_n)$ $1 \le j \le k-1$ pour calculer la valeur de σ_n en 0 (la suite $(x_1,\dots,x_n)$ est décroissante).

Description

Supposons que le vecteur $P_i(x_i) = (p^j(x_i))$ $0 \le j \le 2k-1$ vérifie un système de k équations linéaires

$$M_i P_i(x_i) = S_i \qquad M = (M_{i,\ell}) \text{ avec } 0 \le j \le k-1 \text{ et } 1 \le \ell \le 2k,$$

S_i vecteur à k composantes S^j_i $0 \le j \le k-1$. Comme p_i est un polynôme de degré au plus 2k-1 nous pouvons exprimer $p^j_i(x_i)$ en fonction de $P_i(x_{i+1})$ par une formule de Taylor à l'ordre 2k-j.

$$p^j_i(x_i) = \sum_{\ell=0}^{2k-j+1} \frac{(x_i-x_{i+1})^\ell}{\ell!} p^{j+\ell}_i(x_{i+1})$$

En substituant nous obtenons alors le nouveau système $M^1_i P_i(x_{i+1}) = S_i$.

Dans ce système effectuons une combinaison linéaire des lignes j-1 et j de façon à faire disparaître la variable $P^{2k-1}_i(x_{i+1})$, nous obtenons ainsi k-1 équations que nous complétons par l'équation $P_i(x_{i+1}) = y_{i+1}$. Nous avons ainsi le système $M_{i+1}P_i(x_{i+1}) = S_{i+1}$ comme $P_i(x_{i+1})$ et $P_{i+1}(x_{i+1})$ ont les mêmes composantes sauf la dernière, nous obtenons le système de k équations $M_{i+1}P_{i+1}(x_{i+1}) = S_{i+1}$.

En itérant n-1 fois ce procédé à partir du système

$$p_1(x_1) = y_1$$

$$p^j_1(x_1) = 0 \qquad \text{pour } k \le j \le 2k-2.$$

nous obtenons un système de k équations

$$M_n P_n(x_n) = S_n$$

or $P_n^j(x_n) = 0$ si $k \leq j \leq 2k-2$ et l'une des équations est $P_n(x_n) = y_n$, ainsi nous avons un système de k-1 équations à k-1 inconnues qui résolu par une des méthodes classiques nous donne :

$$P_n^j(x_n) \text{ pour } 1 \leq j \leq k-1.$$

Nous obtenons

$$s_n(0) = \sum_{j=0}^{n} (-x_n)^j \frac{P_n^j(x_n)}{j!}$$

Dans l'écriture du programme nous avons en chaque i normalisé le système afin d'éviter des coefficients trop grands ou trop petits.

IV.10 - Résultats numériques

Les deux méthodes de calcul de l'extrapolé par fonctions spline EXTSPL et EXSPRE se sont révélées numériquement équivalentes.

D'une façon générale on observe que pour des valeurs petites de n la courbe d'erreur décroit puis à partir d'une certaine valeur critique l'erreur croît, allant jusqu'à prendre des valeurs très élevées. Cela s'explique par l'erreur de calcul commise, le calcul de l'extrapolation est entaché d'une erreur d'autant plus grande que le nombre de points est élevé.

En comparant la méthode de Richardson et celle des splines on remarque que Richardson atteint la valeur critique plus rapidement que pour les splines d'ordre assez peu élevé (q de 2 à 6). En effet, cela s'explique par le fait que lorsqu'on ajoute un point on est amené dans le cas de Richardson à calculer des différences divisées d'ordre le nombre de point, alors que dans le cas de la spline, les différences divisées ont le même ordre quel que soit le nombre de points. Ainsi l'extrapolation par les splines apparait comme beaucoup plus stable. En particulier si la suite est lentement convergente Richardson donne des résultats abérrants, alors que le procédé par spline donne une accélération satisfaisante.

Pour les valeurs de n assez peu élevé, Richardson apparaît le plus souvent comme beaucoup plus rapidement convergeant, mais la valeur à partir duquel les résultats deviennent franchement mauvais est souvent de l'ordre de n = 10 en simple précision.

Cas de la suite $x_n = 1/n$ et de la fonction exponentielle.

Méthode	n° point critique	Précision	Accélération	N1
Richardson	6	10^{-3} à 10^{-4}	10^{+2}	10
Spline 2	> 20	10^{-3}	40	>20
Spline 3	12	10^{-4}	10^{+3}	>20
Spline 4	6	10^{-4}	10^{+3}	>20
Spline 5	6	10^{-3}	10^{+2}	20
Spline 6	6	10^{-2}	10	15

Accélération : rapport de la différence de la valeur en x_n et de la valeur limite avec celle de la valeur extrapolée et de la valeur limite.

N1 : valeur de n à partir de laquelle le calcul devient abérrant erreur supérieure à 10^{-1} ou 10^{-2}.

Suite $x_n = 1/n$ fonction sinus

Simple précision

Méthode	n° point critique	Précision en N_o	Accélération	Précision pour N = 2
Richardson	6	10^{-6}	10^{5}	10^{+2}
Spline 2	>22	10^{-5}	10^{3}	10^{-5}
Spline 3	19	10^{-6}	10^{4}	10^{-5}
Spline 4	10	10^{-6}	10^{5}	10^{-4}
Spline 5	6	10^{-6}	10^{4}	10^{-3}
Spline 6	6	10^{-6}	10^{4}	10^{-2}

Double précision

Méthode	n° point critique	Précision en N_o	Accélération	Précision pour [illegible] = 21
Richardson	10	10^{-13}	10^{11}	10^{-8}
Spline 2	>22	10^{-5}	10^{3}	10^{-5}
Spline 3	>23	10^{-5}	10^{3}	10^{-5}
Spline 4	>24	10^{-9}	10^{7}	10^{-7}
Spline 5	>25	10^{-9}	10^{7}	10^{-9}
Spline 6	21	10^{-13}	10^{11}	10^{-12}

CHAPITRE - V

INTERPOLATION ET CONVERGENCE DE CHAMPS DE TAYLOR

I - NOTATIONS, DEFINITIONS ET RAPPELS SUR LES CHAMPS DE TAYLOR ET LE THEOREME DE WHITNEY

I.1 - Une fonction numérique $w(x)$ définie sur un intervalle $|o,d|$ $(d > 0)$ de la droite R sera appelée un module de continuité (Coatmelec |1966|) si elle est continue, nulle pour $x = 0$, croissante, nous ferons l'hypothèse supplémentaire, qui est courante, de la concavité du module de continuité $w(x)$.

Cette hypothèse de concavité n'est pas une restriction puisque pour tout module de continuité non concave on peut lui en associer,un concave le majorant. D'autre part, si f est une fonction continue sur un intervalle $|a,b|$,

$$w(f,\delta) = \sup_{\substack{x,x' \in [a,b] \\ |x-x'| \leq \delta}} |f(x)-f(x')|$$ est un module de continuité concave.

La concavité du module de continuité entraîne la sous-additivité $w(x+x') \leq w(x)+w(x')$.

Nous dirons qu'une fonction f continue sur $[a,b]$ admet w comme module de continuité si pour tout $x,x' \in [a,b]$ nous avons $|f(x)-f(x')| \leq w(|x-x'|)$.

I.2 - Soit F un sous-ensemble de $[a,b]$ une application T de F dans R^{k+1} $x \to T_x = (T_x^0,\dots,T_x^k)$ peut s'interpréter comme un champ de polynôme de degré k ; en effet pour tout x nous pouvons considérer le polynôme :

$$T_x(X) = \sum_{i=0}^{k} \frac{(x-x)^i}{i!} T_x^i.$$

Soit $f \in \mathcal{C}^k[a,b]$ en chaque point $x \in [a,b]$ nous pouvons associer le jet d'ordre k de f $J_x^k(f) = (f(x), f^{(1)}(x), \ldots, f^{(k)}(x))$ et le champ de polynôme $f_x^k(X) = \sum_{i=0}^{k} \frac{(X-x)^i}{i!} f^{(i)}(x)$. Ce polynôme est le polynôme de Taylor au point x de la fonction f.

Un champ de Taylor T d'ordre k sur un sous-ensemble F de $[a,b]$, est un champ de polynôme sur F qui coïncide sur F avec le champ des polynômes de Taylor à l'ordre k d'une fonction $f \in \mathcal{C}^k[a,b]$.

Whitney [1934] a donné une condition nécessaire et suffisante pour qu'un champ de polynôme défini sur un ensemble fermé de R^n soit un champ de Taylor d'ordre k. Glaeser [1958] et Coatmelec [1966] ont donné plusieurs formulations de cette condition. Nous n'énoncerons ce théorème que dans le cas d'un intervalle $[a,b]$.

I.3 - Théorème de Whitney

Soit F *un sous-ensemble fermé de* $[a,b]$, T *un champ de polynôme sur* F, *les 3 conditions suivantes sont équivalentes*

I. T *est un champ de Taylor d'ordre* k.

II. *Il existe un module de continuité* w *tel que pour tout* $x,x' \in F$ *et pour tout* i $(0 \le i \le k)$ *on ait :*

$$\left| \frac{d^{(i)}}{dX^i} (T_x - T_{x'})(x') \right| \le |x-x'|^{k-i} \, w(|x-x'|)$$

III. *Il existe un module de continuité* w *tel que pour tout* $y \in R$ *et pour tout* $x,x' \in F$ *on ait*

$$| T_x(y) - T_{x'}(y) | \le (|y-x| + |x-x'|)^k w(|x-x'|).$$

Le théorème de Whitney est en général énoncé dans le cas où F est un fermé. Nous remarquons que les diverses conditions I, II, III ont encore un sens si F n'est plus nécessairement fermée. Si T est un champ de Taylor d'ordre k sur un ensemble F quelconque de $[a,b]$, il provient d'une fonction f de classe $C^k[a,b]$, donc il peut être prolongé en un champ de Taylor $\bar{T}$ d'ordre k sur $\bar{F}$ et ce prolongement $\bar{T}$ est unique. Les conditions II et III sont vérifiées pour $\bar{T}$ sur $\bar{F}$ et les conditions II et III pour T sur F sont contenues dans les précédentes, donc vérifiées. Nous allons montrer qu'inversement les conditions II et III sur F s'étendent en des conditions analogues sur $\bar{F}$.

I.4 - *Proposition*

Soit un champ de polynôme T *de degré* k *vérifiant sur un ensemble* F *quelconque de* $[a,b]$ *, la condition I.3 II. La jème composante de* T $(0 \leq j < k)$ *admet un module de continuité* $M_j|x-x'|$ $(|T^j_x - T^j_{x'}| \leq M_j|x-x'|)$.

La condition II donne pour $j = k$ $|T^k_x - T^k_{x'}| \leq w(|x-x'|)$.
Supposons la propriété vraie pour i avec $j < i < k$ si x' et $x \in F$.
On a

$$\left|\frac{d^j}{dX^j} T_x(x') - \frac{d^j}{dX^j} T_{x'}(x')\right| = \left|T^j_x + \sum_{i=j+1}^{k} (x'-x)^{i-j} \frac{T^i_x}{(i-j)!} - T^j_{x'}\right|$$

or

$$\left|\frac{d^j}{dX^j} T_x(x') - \frac{d^j}{dX^j} T_{x'}(x')\right| \leq |x-x'|^{k-j} w(|x-x'|)$$

ainsi

$$|T^j_x - T^j_{x'}| \leq |x'-x| \sum_{i=j+1}^{k} \frac{|x'-x|^{i-j-1}|T^i_x|}{(i-j)!} + |x-x'|^{k-j} w(|x-x'|).$$

L'hypothèse de récurrence permet de dire que $|T^i_x - T^i_{x'}| \leq M_i|x-x'|$ comme x et $x' \in [a,b]$ $|x-x'|$ est borné et ainsi T^i_x est borné sur F.

En conséquence $\sum_{i=j+1}^{k} \frac{|x'-x|^{i-j-1}|T^i_x|}{(i-j)!}$ est borné. Il en est de même pour $|x-x'|^{k-j-1} w(|x-x'|)$ et ainsi $|T^j_x - T^j_{x'}| \leq M_j|x-x'|$.

c.q.f.d.

I.5 - *Proposition*

Le théorème de Whitney est aussi, vrai lorsque l'ensemble F *n'est plus nécessairement fermé.*

Nous venons de voir que la condition I entraîne les conditions II et III il nous suffit de voir la réciproque. Si II est vérifiée, la proposition I.4 permet de voir que $T^0,\dots,T^k$ vérifie une condition de continuité uniforme ainsi T_x^j se prolonge par continuité à $\bar{F}$ pour $0 \leq i \leq k$. $T_x(x')$ étant une combinaison linéaire de T_x^j dont les coefficients sont des puissances de x-x', les conditions II se prolongent aussi par continuité et ainsi elles sont vérifiées pour le prolongement $\bar{T}$ de T à F, qui par le théorème de Whitney est un champ de Taylor d'ordre k sur $\bar{F}$ donc aussi sur F.

Voyons que III entraîne II sur F, pour cela il suffit de considérer la démonstration de Glaeser [1958, page 18] . On remarque qu'il démontre en réalité si 2 points x et x' et T sont tels que $|T_x(y)-T_{x'}(y)| \leq (|y-x|+|x-x'|)^k w(|x-x'|)$ alors les conditions II sont vraies pour x, x', T avec un module de continuité $\frac{w}{\Gamma}$ (Γ nombre positif défini dans Glaeser [1958]).

c.q.f.d.

II - PROCEDE D'INTERPOLATION DE TYPE HERMITE

II.1 - Ici nous considérons des procédés d'interpolation sur un intervalle $[a,b]$, mais nous imposerons non seulement des conditions ponctuelles mais aussi des valeurs de dérivées. Nous nous intéresserons au cas où le procédé vérifie 2n conditions, en particulier lorsque ces conditions sont les valeurs en 2 points α et β d'une fonction et de ses dérivées jusqu'à l'ordre n-1.

II.2 - *Définition*

On appelle procédé d'interpolation d'Hermite d'ordre k, *la donnée pour chaque système* L *de* n *formes linéaires* ℓ_i , *qui sont des valeurs ponctuelles ou des dérivées d'ordre inférieur à* k, *d'une application* $\pi_L(C^k[a,b])$ *définie sur* $C^k[a,b]$ *à valeurs dans lui-même telle que* $\ell_i(\pi_L(f)) = \ell_i(f)$.

Soit L donné et soit $a_1,\dots,a_n$, n nombres réels, comme il existe une fonction f au moins de $C^k[a,b]$ vérifiant $\ell_i(f) = a_i$. L'application π_L se factorise en l'opération $f \to (\ell_i(f))$ $1 \le i \le n$ et en une application λ_L de $\mathbb{R}^n$ dans $C^k[a,b]$.

Comme pour tout i $(1 \le i \le n)$, $\ell_i(\pi_L(f)) = \ell_i(f)$, λ_L est une application injective et si $f \in \pi_L(C^k[a,b])$ alors $f = \pi_L(f)$.

Inversement, supposons la donnée pour $n > 0$ d'un ensemble Φ_n de fonctions de $C^k[a,b]$ nous dirons que Φ_n vérifie la condition de Haar-Hermite à l'ordre k sur $[a,b]$, si pour tout système $L = (\ell_i)_{1\le i\le n}$ où $\ell_i = \delta_{x_i}^{\nu_i}$ avec $\nu_i \le k$ et $x_i \in [a,b]$ ($\delta_{x_i}^{\nu_i}$ dérivée ν_i en x_i) et tout ensemble de n nombres $(a_i)_{1\le i\le n}$ il existe une fonction et une seule f de Φ_n vérifiant $\ell_i(f) = a_i$. Nous pouvons alors associer à Φ un procédé d'interpolation d'Hermite. Mais il existe d'autres procédés d'interpolation d'Hermite qui ne peuvent pas être obtenu de cette façon, lorsque $\pi_L(C^k[a,b])$ dépend effectivement de L. Ce sera le cas pour un procédé de spline provenant de la minimisation d'une fonction semi-hilbertienne.

Le cas le plus usuel de l'interpolation est celui de type linéaire lorsque Π est une application linéaire, mais il est utile aussi de considérer des interpolations qui ne sont pas de ce type, par exemple l'interpolation qui consiste à choisir si elle existe et si elle est unique, la fonction qui, parmi celle vérifiant les conditions d'interpolations $\ell_i(f) = a_i$, minimise une norme ou une semi-norme.

II.3 - Un procédé de prolongement de champ de Taylor d'ordre k sur $[a,b]$

est la donnée pour chaque champ de Taylor T, d'ordre k, défini sur $F \subset [a,b]$ d'une fonction $\pi(T) \in C^k[a,b]$ dont le champ des polynômes de Taylor d'ordre k sur F coïncide avec T.

Si l'ensemble F est fini et si nous avons un procédé d'interpolation Π d'Hermite à l'ordre k, en prenant pour forme linéaire L : $\delta_{x_i}, \delta^1_{x_i}, \ldots, \delta^k_{x_i}$ pour $x_i \in F$, L est alors un ensemble fini et le procédé Π nous donne un prolongement $\Pi(T)$ du champ de Taylor. En particulier cette méthode peut être utilisée pour l'interpolation par des polynômes, ou par des fonctions splines obtenu par minimisation dans un espace où $\delta^k_{(x)}$ sont des formes linéaires continues.

Par contre si F n'est pas finie nous ne pouvons plus employer cette méthode puisque Π n'est pas a priori défini si le nombre de conditions devient infini. Nous allons dans la suite donner une méthode donnant de tels prolongements. Cette méthode utilise un procédé d'interpolation d'Hermite sur 2 points.

II.4 - Un procédé d'interpolation d'Hermite sur 2 points ou 2-Hermite d'ordre k

C'est pour la donnée de 2 points α, β, une application Φ qui à toute fonction $f \in C^k[a,b]$ associe une fonction $\Phi(f)$ de $C^k[a,b]$ telle que

$$f^{(i)}(\alpha) = \Phi(f)^{(i)}(\alpha) \text{ et } f^{(i)}(\beta) = \Phi(f)^{i}(\beta) \quad \text{pour } 0 \leq i \leq k.$$

Si nous avons un procédé d'Hermite à l'ordre k nous pouvons lui associer un procédé de ce type en nous restreignant à 2 points et au forme linéaire $\delta_\alpha,\dots,\delta_\alpha^k$, $\delta_\beta,\dots,\delta_\beta^k$. Mais inversement ici nous nous intéressons qu'au cas de 2 points sans nous occuper d'un procédé général d'Hermite comme en II.2.

Glaeser [1966] pour définir un prolongement "extrémal d'un champ de Taylor" utilise un procédé d'interpolation 2-Hermite par spline parfaites (fonction qui interpolent f, $f^{(1)},\dots,f^{(k)}$ en α et β et minimisant $|f^{(m+1)}|$ sur l'intervalle $[\alpha,\beta]$) ce procédé n'est pas un procédé de type linéaire.

II.5 - Etude de procédé d'interpolation 2-Hermite de type linéaire

Alors comme pour tout $\alpha,\beta \in [a,b]$, $\Phi_{\alpha,\beta}$ est une application linéaire et nous avons $\Phi_{\alpha\beta}(C^k)$ est un espace de dimension 2k+2.

II.6 - *Proposition*

Soit $\varphi_1,\dots,\varphi_{2k+2}$,2k+2 *fonctions de* $\Phi_{\alpha,\beta}$ (C^k) *linéairement indépendante, alors les formes linéaires* $\delta_\alpha,\dots,\delta_\alpha^k$, $\delta_\beta,\dots,\delta_\beta^k$ *sont linéairement indépendante sur* $\Phi_{\alpha,\beta}(C^k)$ *et le déterminant*

$$\text{II.6} \qquad \begin{vmatrix} \varphi_1(\alpha) & \dots\dots & \varphi_{2k+2}(\alpha) \\ \varphi_1'(\alpha) & \dots\dots & \varphi_{2k+2}'(\alpha) \\ \hdashline \varphi_1^{(k)}(\alpha) & \dots\dots & \varphi_{2k+2}^{(k)}(\alpha) \\ \varphi_1(\beta) & \dots\dots & \varphi_{2k+1}(\beta) \\ \hdashline \varphi_1^{(k)}(\beta) & \dots\dots & \varphi_{2k+2}^{(k)}(\beta) \end{vmatrix} \neq 0$$

Inversement si $\varphi_1,\dots,\varphi_{2k+2}$ *sont* 2k+2 *fonctions vérifiant pour* α ,β *(II.6) et appartenant à* $\Phi_{\alpha,\beta}$ *alors* $\varphi_1,\dots,\varphi_{2k+2}$ *forment une base de* $\Phi_{\alpha,\beta}$.

Les fonctions de $\Phi_{\alpha,\beta}$ qui sont nulles ainsi que toutes leurs dérivées en α et β sauf une égale à 1 forment une base biorthonormale à $\delta_\alpha,\ldots,\delta_\alpha^k$, $\delta_\beta,\ldots,\delta_\beta^k$, donc ces formes sont linéairement indépendantes sur $\Phi_{\alpha,\beta}$.
Le système

$$\left|\begin{array}{ll} \sum_{i=1}^{2k+2} \lambda_i \varphi_i^{(j)}(\alpha) = f^{(j)}(\alpha) & 0 \le j \le k \\ \\ \sum_{i=1}^{2k+2} \lambda_i \varphi_i^{(j)}(\beta) = f^{j}(\beta) & 0 \le j \le k \end{array}\right.$$

aura une solution unique quel que soit f si et seulement si ce déterminant II.6 est non nul. Nous avons ainsi les 2 assertions de la proposition.

c.q.f.d.

Ainsi si nous avons $\varphi_1,\ldots,\varphi_{2k+2}$ vérifiant II.6, nous pouvons construire un procédé d'interpolation relatif aux 2 points (α,β). Tout procédé d'interpolation de 2-Hermite de type linéaire s'obtient pour α,β de cette façon. Mais lorsque α,β varie, l'ensemble $\Phi_{\alpha,\beta}$ peut varier et aussi les fonctions $\varphi_1,\ldots,\varphi_{2k+2}$ formant une base. Ce sera le cas si $\Phi_{\alpha,\beta}$ est décrit comme procédé d'interpolation minimisant une fonction semi-hilbertienne avec dim(Kerh) < k.

Il est possible que l'ensemble $\Phi_{\alpha,\beta}$ soit indépendant de α,β, ce sera le cas si $\Phi_{\alpha,\beta}$ = ensemble des polynômes de degré 2k+1. Alors Φ vérifie la condition ci-dessous :

II.7 - Condition de Haar - 2-Hermite d'ordre k.

Un sous-espace vectoriel Φ de dimension 2k+2 de $C^k[a,b]$ vérifie la condition de Haar-2-Hermite, si quel que soit $\alpha,\beta \in [a,b]$ il existe un interpolant 2-Hermite et un seul dans Φ.

Si la condition de Haar-2-Hermite est vraie alors pour toute base $\varphi_1,\ldots,\varphi_{2k+2}$ de Φ, et tout α,β le déterminant II.6 est non nul. Inversement dès qu'il existe un ensemble $\varphi_1,\ldots,\varphi_{2k+2}$ dont, pour tout α,β, le déterminant II.6 est nul, alors Φ vérifie la condition de Haar-2-Hermite.

II-8 - Condition de régularité sur un procédé 2-Hermite

Pour la suite il est important de connaître le comportement de la fonction interpolante (2-Hermite) en fonction des valeurs de $f,\ldots,f^k$ en α et β. Pour introduire cette condition de régularité, interprétons le problème de la façon suivante : considérons un champ de Taylor T d'ordre k défini sur 2 points $\alpha(T^0_\alpha,\ldots,T^k_\alpha)$ et $\beta(T^0_\beta,\ldots,T^k_\beta)$. Le procédé 2-Hermite Φ associera à T la fonction $\varphi(T)$ qui est telle que $\varphi^j(T)(\alpha) = T^j_\alpha$ et $\varphi^j(T)(\beta) = T^j_\beta$ $0 \le j \le k$.

Condition D1

Le procédé d'interpolation 2-Hermite Φ vérifie la condition D1 si pour tout $M_0 > 0,\ldots,M_k > 0$ et pour tout module de continuité w, on peut associer un module de continuité w', tel que pour tout champ de Taylor T d'ordre k sur deux points $\alpha,\beta \in [a,b]$ vérifiant $|T^j_\alpha| \le M_j$ et $|T^j_\beta| \le M_j$ et la formule II du théorème I.3 avec le module de continuité w, alors l'interpolation $\varphi(T)$ 2-Hermite sur $[\alpha,\beta]$ a une dérivée $k^{\text{ème}}$ qui admet w' comme module de continuité.

Utilisant la formule $\varphi^{k-1}(x)-\varphi^{k-1}(x') = (x-x')\varphi^k(\xi)$ avec $\xi \in |x,x'|$ et le fait que $\varphi^k(x)$ est borné sur α,β par N_k nous avons ainsi φ^{k-1} qui admet comme module de continuité $w_{k-1}(\varepsilon) = N_k\varepsilon$. De même pour toutes les autres dérivées, nous obtenons des modules de continuité $w_j(\varepsilon) = N_j\varepsilon$ où nous pouvons prendre $N_j = M_{j+1}w_{j+1}(|b-a|)$. Cette propriété met en lumière l'intérêt pour un procédé 2-Hermite de vérifier D1 car alors la fonction φ et les dérivées n'auront pas des variations trop importantes ; les diverses w_j ne dépendent pas du choix des points α et β.

II.9 - Conditions de continuité d'un procédé 2-Hermite lorsque T varie

Lorsque l'on modifie T'_α, où α varie, il est important de savoir comment se modifie l'interpolant 2-Hermite. Si aucune restriction n'est faite sur le procédé, on peut imaginer des procédés où la variation soit très importante, pour éviter de tels phénomènes introduisons les conditions :

Condition D2

Un procédé 2-Hermite sur $[a,b]$ *vérifie la condition D2, si pour tout* $\eta > 0$ *et* $\varepsilon > 0$ *il existe* $\xi_o > 0,\dots,\xi_k > 0$ *, tel que si* α *et* $\beta \in [a,b]$ *et* $|\beta - \alpha| > \eta$ *et si* T *et* $\tilde{T}$ *sont deux champs de taylor d'ordre* k *définis sur* α *et* β *et tels que* $|T^j_\alpha - \tilde{T}^j_\alpha| \leq \xi_j$, $|T^j_\beta - \tilde{T}^j_\beta| \leq \xi_j$ *pour* $0 \leq j \leq k$*, alors les fonctions interpolantes 2-Hermite* φ *et* $\tilde{\varphi}$ *de* T *et* $\tilde{T}$ *vérifie* $|\tilde{\varphi}^j(x) - \varphi^j(x)| \leq \varepsilon$ *pour* $x \in [a,b]$ $0 \leq j \leq k$.

Cette condition marque que l'on peut modifier un peu les composantes T^j_α et T^j_β, de façon à ce que sur $[\alpha,\beta]$ l'interpolant et ses dérivées par l'interpolation 2-Hermite ne soit pas modifié de plus de ε. Maintenant introduisons une condition qui tienne compte d'une modification éventuelle des points α et β.

Condition D3

Un procédé d'interpolation 2-Hermite vérifie la condition D3, si pour tout $M_o > 0,\dots M_k > 0$ *, pour tout* $\zeta > 0$ *, pour tout* $\varepsilon > 0$*, il existe* $\chi > 0$ *et* $\xi > 0$ *tels que pour tout couple de champ de Taylor d'ordre* k*,* T *et* $\tilde{T}$ *définis respectivement sur* α, β *et* $\tilde{\alpha}$ *,* $\tilde{\beta}$ *avec* $0 < \eta < \beta - \alpha < A$ *et* $0 < \eta < \tilde{\beta} - \tilde{\alpha} < A$ *et* $|\alpha - \tilde{\alpha}| \leq \chi$, $|\beta - \tilde{\beta}| < \chi$, $|T^j_\alpha - \tilde{T}^j_{\tilde{\alpha}}| < \xi$ et $|T^j_\beta - \tilde{T}^j_\beta| < \xi$ $|T^j_\alpha| < M_j$, $|T^j_\beta| < M_j$, $|\tilde{T}^j_{\tilde{\alpha}}| < M_j$ et $|\tilde{T}^j_{\tilde{\beta}}| \leq M_j$ *pour* $0 \leq j \leq k$ *, alors les fonctions* φ *et* $\tilde{\varphi}$ *associées par le procédé d'interpolation* Φ *à* T *et* $\tilde{T}$ *vérifient pour* $x \in [\alpha,\beta] \cap [\tilde{\alpha},\tilde{\beta}]$

$|\varphi^j(x) - \tilde{\varphi}^j(x)| \leq \varepsilon$ *si* $0 \leq j \leq k$.

Ces conditions D2 et D3 s'interprètent en terme de continuité. Soit $\Phi_{\alpha,\beta}$ l'application de R^{2k+2} dans C^k qui à $T^0_\alpha,\ldots,T^k_\alpha$, $T^0_\beta,\ldots,T^k_\beta$ associe la fonction φ interpolant suivant Φ, alors la condition D2 indique que la famille $\Phi_{\alpha,\beta}$ est équicontinue uniformément lorsque α et $\beta \in |a,b|$ et que $|\beta-\alpha| \geq \eta > 0$. $C^k[a,b|$ étant muni de sa topologie habituelle.

Considérons Φ_η l'application de $\Omega \times R^{2k+2}$ (où Ω est l'ensemble des couples α,β vérifiant α et $\beta \in [a,b]$ et $|\alpha-\beta| \geq \eta$) dans $C^k|a,b|$ qui a $\alpha,\beta,T^0_\alpha,\ldots,T^k_\alpha,T^0_\beta,\ldots,T^k_\beta$ associe la fonction φ interpolant ce champ suivant Φ. Alors la condition D3 indique que cette application Φ_η est uniformément continue.

II.10 - Procédé d'extrapolation sur un point 1-Hermite

Considérons le cas où l'ensemble L de II.2 est toujours l'ensemble des k+1 fonctionnelles δ_α, $\delta'_\alpha,\ldots,\delta^k_\alpha$, valeurs en α d'une fonction et des dérivées jusqu'à l'ordre k. Un procédé d'extrapolation Φ de 1-Hermite associe à des valeurs $\lambda_0,\ldots,\lambda_k$ une fonction $\varphi(t)$ définie sur $[a,b]$ tel que $\varphi^j(\alpha) = \lambda_j$ avec $0 \leq j \leq k$. Un tel procédé pourrait ne pas dépendre linéairement de la donnée de $\lambda_0,\ldots,\lambda_k$. Pour le cas d'un procédé de type linéaire où cette dépendance est linéaire, nous avons des résultats analogues à II.5 avec le déterminant

$$\begin{vmatrix} \varphi_0(\alpha)\ldots\ldots\varphi_k(\alpha) \\ \hline \varphi_0^{(k)}(\alpha)\ldots\varphi_k^{(k)}(\alpha) \end{vmatrix}$$

et une condition de Haar-1-Hermite: quel que soit α nous avons un et un seul extrapolant pour tout $\lambda_0,\ldots,\lambda_k$. Nous introduisons des conditions analogues à D1, D2, D3.

Condition E1

> *Le procédé d'extrapolation 1-Hermite vérifie E1 si pour tout* $M_0,\ldots,M_k$, *et pour tout* α *il existe un module de continuité* w, *tel que* *tout* φ *vérifiant* $\varphi(\alpha) < M_0,\ldots,\varphi^k(\alpha) \leq M_k$ *admet* w *comme module de continuité pour sa dérivée* kème *sur* $[a,b]$.

Nous déduisons de cette condition des modules de continuité w_j pour φ^j $0 \leq j \leq k$ de la forme $N_j \varepsilon$.

<u>*Condition E2*</u>

Un procédé d'extrapolation Ψ *sur* $[a,b]$ *de 1-Hermite vérifie la condition E2, si pour tout* $\varepsilon > 0$ *il existe* $\xi_o > 0, \ldots, \xi_k > 0$ *tel que si* $\alpha \in [a,b]$ *tout couple d'extrapolant selon* Ψ, ψ *et* $\tilde{\psi}$ *vérifiant* $|\psi^j(\alpha) - \tilde{\psi}^j(\alpha)| < \xi_j$ *pour* $0 \leq j \leq k$ *alors* $|\psi(x) - \tilde{\psi}(x)| \leq \varepsilon$ *si* $x \in [a,b]$.

<u>*Condition E3*</u>

Un procédé d'extrapolation Ψ *sur* $[a,b]$ *1-Hermite vérifie la condition E3 : si pour tout* $\varepsilon > 0$, *si pour tout* $M_o > 0, \ldots, M_k > 0$, *il existe* $\chi > 0$ *et* $\xi > 0$ *tel que si* α *et* $\tilde{\alpha} \in [a,b]$ *avec* $|\tilde{\alpha} - \alpha| \leq \chi$, *tout extrapolant* ψ *et* $\tilde{\psi}$ *vérifiant* $|\psi^j(\alpha) - \tilde{\psi}^j(\alpha)| \leq \xi$ *alors* $|\psi^j(x) - \tilde{\psi}^j(x)| < \varepsilon$ *si* $x \in [a,b]$ *et si* $0 \leq j \leq k$.

III - PROLONGEMENT D'UN CHAMP DE TAYLOR D'ORDRE k PAR UNE FONCTION k FOIS CONTINUEMENT DERIVABLE.

III.1 - Description du procédé

On suppose s'être donné un procédé d'interpolation Φ 2-Hermite, et un procédé d'extrapolation 1-Hermite Ψ.

Soit T un champ de Taylor d'ordre k défini sur un sous-ensemble F de $[a,b]$ en remarquant (proposition I.5) qu'un champ de Taylor sur F se prolonge par continuité en un champ de Taylor sur $\bar{F}$, nous pouvons supposer que F est fermé.

Nous définissons le Φ-Ψ prolongement de T désigné par $\varphi(T)$ de la manière suivante :

- si $x \in F$ $\varphi(T)(x) = Tx$
- si $x \notin F$ et si il existe x' et $x'' \in F$ tels que $[x',x''] \ni x$ et $]x'x''[\cap F = \emptyset$, sur l'intervalle $[x',x'']$, $\varphi(T)$ coïncide avec l'interpolation obtenue par le procédé 2-Hermite Φ et prenant en x' et x'' les valeurs $\varphi^{(j)}(x') = T^j_{x'}$, et $\varphi^j(x'') = T^j_{x''}$ où $0 \leq j \leq k$.
- si x ne vérifie pas les 2 cas précédents, alors x est extérieur au plus petit intervalle $[\alpha,\beta]$ contenant F (α et $\beta \in F$). Alors sur $[a,\alpha]$ et $[\beta,b]$ nous définissons φ comme l'extrapolé par le procédé Ψ vérifiant $\varphi^{(j)}(\alpha) = T^j_\alpha$ et $\varphi^{(j)}_\beta = T^j_\beta$ $0 \leq j \leq k$.

III.2 - Sur $[a,b]$ nous définissons les fonctions $\varphi_j(T)$: si $x \in F$ alors $\varphi_j(T)(x) = T^j_x$, si $x \notin F$ alors sur un voisinage de x $\varphi(T)$ coïncide avec une fonction obtenue par le procédé d'interpolation Φ,(ou Ψ) donc φ est k-fois dérivable en ce point et nous posons $\varphi_j(T)(x) = \varphi(T)^j(x)$.

Remarquons que si $x \in \dot{F}$ alors nous avons T^j qui est la jème dérivée de T, donc $\varphi_j(T)(x) = \varphi(T)^j(x)$. Ainsi en tout point $x \notin F / \dot{F}$ la fonction $\varphi(T)$ est k fois dérivable et admet $\varphi_j(T)$ comme dérivée jème. Par contre au point $x \in F / \dot{F}$ nous n'avons plus nécessairement la propriété de dérivabilité kème, si le procédé Φ est trop arbitraire

III.3 - *Proposition*

Si le procédé Φ d'interpolation vérifie la condition D1 alors la fonction $\varphi(T)$ *prolongeant le champ de Taylor* T *d'ordre* k *est une fonction* k *fois dérivable, et admet* $\varphi_j(T)$ *comme dérivée jème.*

Nous écrirons dans la suite φ pour $\varphi(T)$.

Nous n'avons plus qu'à voir cette propriété pour les $x \in F/\mathring{F}$. Nous allons faire un raisonnement par récurrence supposant que φ est dérivable à l'ordre j avec φ_j comme dérivée jème.

Soit $x' \in |a,b|$ nous allons estimer l'expression $\varphi_j(x)-\varphi_j(x')-(x-x')\varphi_{j+1}(x)$.

α) Si $x' \in F$ alors $\varphi^j(x') = T^j(x')$ et d'après la condition II du théorème de Whitney nous avons :

$$|T_x^j+(x'-x)T_x^{j+1} - T_{x'}^j| \leq |x-x'| \; w_{j+1}(|x-x'|)$$

où w_{j+1} est un module de continuité de T^{j+1} $(0 \leq j \leq k)$

β) Si $x' \notin F$ et $x' \in [\alpha,\beta]$ nous avons x'_1 et x'_2 les points de F qui sont les poi plus près de x' à droite et à gauche. De tels points existent car F est compact :

$$\begin{aligned}\varphi_j(x')-\varphi_j(x)+(x'-x)\varphi_{j+1}(x) &= \varphi_j(x')-\varphi_j(\alpha)+(x'-\mu)\varphi_{j+1}(\mu)\\ &+ \varphi_j(\mu)-\varphi_j(x)+(\mu-x)\varphi_{j+1}(x)\\ &+ (x'-\mu)(\varphi_{j+1}(x)-\varphi_{j+1}(\mu))\end{aligned}$$

où μ est celui des points x'_1 ou x'_2 compris entre x et x'.
Comme x et $\mu \in F$ alors $\varphi_j = T^j$ et nous avons
$|\varphi_j(x)-\varphi_j(\mu)+(\mu-x)\varphi_{j+1}(x)| \leq |x-\mu| w_{j+1}(|x-\mu|)$.

D'après la propriété D1 φ_k admet un module de continuité w'_k sur $[x'_1,x'_2]$ (w_k module de continuité dans condition II du théorème de Whitney), T^i_x est borné pour $x \in F$ comme champ de Taylor ainsi utilisant la remarque suivant la condition D1, nous avons sur $[x'_1,x'_2]$ φ_{j+1} qui a un module de continuité $\lambda_{j+1} = M_{j+1}|x-x'|$ si $j \leq k-2$ et $\lambda_k = w'_k$, M_{j+1} ne dépendant pas de l'intervalle $[x'_1,x'_2]$ mais de T et de w'_k. Ainsi nous avons :

$$|\varphi_j(x')-\varphi_j(\mu)+(x'-\mu)\varphi_{j+1}(\mu)| \leq |x'-\mu| \; \lambda_{j+1}(|x'-\mu|)$$

et

$$\begin{aligned}|\varphi_j(x')-\varphi_j(x)+(x'-x)\varphi_{j+1}(x)| &\leq |x-\mu|w_{j+1}(|x-\mu|)\\ &+|x'-\mu|w_{j+1}(|x-\mu|)+|x'-\mu|\lambda_{j+1}(|x'-\mu|)\\ &\leq |x'-x|(w_{j+1}(|x-x'|)+\lambda_{j+1}(|x'-x'|))\end{aligned}$$

ainsi $|\varphi_j(x')-\varphi_j(x)+(x'-x)\varphi_{j+1}(x)| \leq |x'-x|\varepsilon(|x'-x|)$

$\varepsilon(|x'-x|)$ convergeant vers 0 si $|x'-x| \to 0$ ainsi en x ($x \neq \alpha$ et β) φ_j est dérivable et admet $\varphi_{j+1}(x)$ comme dérivée.

γ) Si nous sommes en $x = \alpha$ (β), ce raisonnement montre que $\varphi_j(x)$ est dérivable à droite (resp. à gauche).

Nous avons le procédé Ψ qui donne des fonctions dérivables k-fois, donc nous avons une dérivée à droite en α et cette dérivée jème est justement $T^j(\alpha)$.

La fonction φ étant continue le raisonnement de récurrence peut donc commencer avec $j = 1$.

c.q.f.d.

III.4 - *Proposition*

Si Φ vérifie D1, φ_k admet w'_k comme module de continuité sur $[\alpha,\beta]$.

Comme $w'_k \geq w_k$, si x et x' $\in$ F alors nous avons $|T^k_x - T^k_{x'}| \leq w_k(|x-x'|) \leq w'_k(|x-x'|)$ si x et x' quelconque, je peux trouver μ et ν $\in$ F avec $x \leq \mu < \nu \leq x'$ avec μ point de F le plus près à droite de x, ν point de F le plus près à gauche de x' nous avons alors

$$\begin{aligned} |\varphi_k(x)-\varphi_k(x')| &\leq |\varphi_k(x)-\varphi_k(\mu)|+|\varphi_k(\mu)-\varphi_k(\nu)|+|\varphi_k(\nu)-\varphi_k(x')| \\ &\leq 3\, w'_k(|x-x'|) \end{aligned}$$

c.q.f.d.

Remarque : de cette propriété on peut déduire des modules de continuité pour tout φ_j, $0 \leq j < k$, de la forme $M_j|x-x'_j|$, mais les valeurs M_j vont dépendre du champ de Taylor T et même si w_k vérifie II, il est possible de trouver des champs où les M_j pourrait être aussi grand que l'on veut.
Par contre si on sait qu'en un point x $\in$ F, les T^j_x sont bornés lorsque T parcourt une famille de champ de Taylor alors on peut borner les M_j, c'est cette propriété qui sera utilisée plus loin dans le cas de la convergence de champ de Taylor.

IV - CONVERGENCE DE CHAMPS DE TAYLOR D'ORDRE k DEFINI SUR UN MEME ENSEMBLE $F \subset |a,b|$

IV.1 - Notion de convergence sur les champs de Taylor

On considère une suite T_n de champs de Taylor définis sur un même ensemble F appartenant à $|a,b|$. Chaque champ de Taylor T_n peut être interprété comme une application de F dans un espace de dimension fini k+1, l'ensemble des champs de Taylor d'ordre k sur F apparaît ainsi comme un espace de fonction, nous pouvons introduire diverses notions de convergence.

Convergence simple sur F.

Pour chaque x et pour chaque j ($0 \leq j \leq k$) nous avons convergence de la suite $T^j_{n,x}$ vers des nombres T^j_x.

Convergence uniforme sur F.

La convergence des suites $T^j_{n,x}$ vers T^j_x est uniforme par rapport à x.

Nous pourrions aussi considérer des convergences uniformes sur des parties de F, et aussi convergence pour des normes introduites sur les champs de Taylor par exemple liées à l'intégration de mesures définies sur F.

Une autre voie possible pour définir des convergences de champ de Taylor est de considérer pour chaque T l'ensemble $\pi(T)$ des fonctions de $\mathcal{C}^k|a,b|$ prolongeant T à $|a,b|$. Cet ensemble $\pi(T)$ est un ensemble convexe. Sur la suite $\pi(T_n)$ de convexe nous pouvons introduire les notions de convergence étudiée par J.L. JOLY |1970|.

IV.2 - Nous désirons avoir une notion de convergence sur les champs de Taylor et ajouter certaines conditions de façon qu'ayant une suite de champs de Taylor sur F, nous puissions conclure à la convergence de la suite des prolongements $\pi(T_n)$, vers une fonction prolongeant le champ de Taylor T, limite de la suite T_n, cette convergence se faisant au sens de $\mathcal{C}^k|a,b|$, c'est-à-dire nous avons convergence uniforme de $\pi(T_n)$ ainsi que pour les dérivées jusqu'à l'ordre k.

Si le procédé d'interpolation 2-Hermite Φ est trop arbitraire nous n'avons pas convergence des prolongements. C'est pour cela qu'on a introduit la condition D'2.

Remarquons que la convergence simple de T_n^j $0 \leq j \leq k$ ne saurait suffire, car nous pouvons en chaque x définir T_x^j comme limite des $T_{n,x}^j$ mais les $T_x = (T_x^0,\ldots,T_x^k)$ ne forment pas nécessairement un champ de Taylor d'ordre k.

IV.3 - Nous allons considérer le cas de la convergence uniforme et étudier ce qui se passe lorsqu'on prend pour Φ le procédé qui consiste à prendre le polynôme de degré 2k+1 dont la valeur et celle des dérivées d'ordre $\leq$ k est donnée en a et b.

Si k = 0 nous avons une suite de fonctions T_n définies sur F qui convergent uniformément sur F. Nous effectuons l'interpolation par linéarité (à l'extérieur de $[\alpha,\beta]$ on prolonge par des fonctions constantes), nous avons convergence de $\pi(T_n)$ uniformément vers $\pi(T)$ interpolation linéaire de la limite T des T_n sur F. En effet, 2 fonctions linéaires qui divergent de moins de ε aux extrémités de l'intervalle $[x',x'']$ divergent elle-même de moins de ε sur tout $[x',x'']$.

IV.4 - Contre exemple

Nous allons construire une suite T_n de champ de Taylor d'ordre 1 sur un ensemble F, qui converge uniformément sur F vers un champ de Taylor T, mais telle que la suite des prolongements $\pi(T_n)$, (pour le procédé Φ de polynôme de degré 3), ne converge pas au sens de C^1 vers le prolongement du champ limite T.

$$F = \{x_n = \frac{1}{2n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$$

$$T_n(x_m) = \text{si } m = n \text{ alors } 1/2^n \text{ sinon } 0$$

$$T_n^1(x_m) = \text{si } m = n \text{ alors } 1/2^n \text{ sinon } 0.$$

Les T_n forment évidemment sur F des champs de Taylor d'ordre 1. Nous avons $T_n(x_m) \to 0$ et $T'_n(x_m) \to 0$ la convergence étant uniforme par rapport à x_m.

Considérons le prolongement φ_n de T_n qui est formé sur $[x_{m+1}, x_m]$ du polynôme de degré 3 avec

$$\varphi_n(x_{m+1}) = T_n(x_{m+1}) \quad , \quad \varphi'_n(x_{m+1}) = T^1_n(x_{m+1})$$

$$\varphi_n(x_m) = T_n(x_m) \quad , \quad \varphi'_n(x_m) = T^1_n(x_m).$$

Nous avons φ_n qui est identique à 0 sauf sur $[x_{n+1}, x_{n-1}]$.
Rappelons que le polynôme P de degré 3 défini sur $[\alpha, \alpha+\varepsilon]$ et vérifiant $P(\alpha) = 0 \quad P'(\alpha) = 0 \quad P(\alpha+\varepsilon) = \zeta$ et $P'(\alpha+\varepsilon) = \eta$ s'écrit

$$P(x) = \left(\frac{\eta}{\varepsilon^2} - \frac{2\zeta}{\varepsilon^3}\right)(x-\alpha)^3 + \left(\frac{3\zeta}{\varepsilon^2} - \frac{\eta}{\varepsilon}\right)(x-\alpha)^2$$

Prenons ici $\alpha = \frac{1}{2^{n+1}}$, $\varepsilon = \frac{1}{2^{n+1}}$, $\zeta = \frac{1}{2^n}$, $\varepsilon = \frac{1}{2^n}$, et calculons φ'

en $\quad x = \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}}$

$$\varphi'_n\left(\frac{1}{2^{n+2}} + \frac{1}{2^{n+1}}\right) = 3\left(\frac{2^{2(n+1)}}{2^n} - \frac{2 \times 2^{3(n+1)}}{2^n}\right)\frac{1}{2^{2(n+2)}} + 2\left(\frac{3 \times 2^{2(n+1)}}{2^n} - \frac{2^{n+1}}{2^n}\right)\frac{1}{2^{n+2}}$$

$$= \frac{3}{2^{n+2}} - 3 + 6 - \frac{1}{2^n} = 3 - \frac{1}{2^{n+2}} .$$

Pour les points $\frac{3}{2^{n+2}}$, φ'_n est supérieur à 1 et nous n'avons pas convergence uniforme des dérivées φ'_n vers 0. Nous avons seulement une convergence simple de la dérivée φ'.

IV.5 - Contre-exemple

D'une suite de champ de Taylor d'ordre 1 qui converge uniformément sur F, mais dont le champ limite n'est pas un champ de Taylor.

$$F = \{x_n = \frac{1}{n} \mid n \in N\} \cup \{0\}$$

$$T_n(\frac{1}{m}) = \text{si } m \leq n \text{ alors } \frac{1}{m} \text{ sinon } 0$$

$$T_n^1(\frac{1}{m}) = 0.$$

T_n est bien un champ de Taylor. Nous avons convergence uniforme de T_n vers T ($T(\frac{1}{m}) = \frac{1}{m}$, $T(0) = 0$) et T'_n vers $T^1 = 0$.
Il suffit de voir que T, T^1 n'est pas un champ de Taylor. Nous pouvons par exemple utiliser la relation II du théorème I.3. Nous devrions avoir l'existence d'un module de continuité w tel que $|T_o+xT_o^1-T_x| \leq |x|w(x)$. Or $|T_o+xT_o^1-T_x| = x$ et il est impossible de trouver w tel que $x < x\ w(x)$ car si $x \to 0$ alors $w(x) \to 0$ donc $w(x)$ ne peut devenir supérieur à 1.

La condition de convergence uniforme apparait à travers les deux exemples précédents, comme insuffisante pour assurer la convergence des prolongements de type polynomial. Remarquons que dans ces deux exemples, il n'existe pas un module de continuité uniforme pour tous les T'_n. Introduisons la condition C.

Condition C - Un ensemble de champ de Taylor T_n d'ordre k vérifie la condition C, si il existe un module de continuité w_k, tel que pour chaque T_n la condition II du théorème de Whitney soit vérifiée avec $w = w_k$.

Nous allons voir que cette condition est nécessaire pour la convergence uniforme de prolongement de T_n lorsque T_n tend vers T. Démontrons d'abord :

IV.6 - *Proposition*

Soit un intervalle fermé $[a,b]$ *, une suite* u_n *de fonctions continues convergeant uniformément vers* u*, alors il existe un module de continuité pour* u *et tous les* u_n.

Posons $w(\varepsilon) = \sup\limits_{n,|x-x'|\leq \varepsilon} |u_n(x)-u_n(x')|$, ce sup est fini car u est borné et comme u_n converge uniformément vers u, il existe une borne uniforme pour les u_n.

Montrons que si $\varepsilon \to 0$ alors $w(\varepsilon) \to 0$.

Si cela n'était pas vrai alors il existerait $a > 0$ tel que pour tout n il existe $\varepsilon_n < \frac{1}{n}$ avec $w(\varepsilon) > a$. Pour chaque n associons x_n, x'_n, $i(n)$ avec $|u_{i(n)}(x_n)-u_{i(n)}(x'_n)| > a$ et $|x_n-x'_n| < \frac{1}{n}$. Les i(n) deviennent infiniment grand lorsque n tend vers l'infini, sinon on pourrait extraire des i(n) une suite strationnaire i_o, et des $x_{n'}$ et $x'_{n'}$ avec $x_{n'}-x'_{n'}$ convergeant vers 0 et $|u_{i_o}(x_{n'})-u_{i_o}(x'_{n'})| > a$, ce qui est en contradiction avec le fait que u_{i_o} est uniformément continue sur $[a,b]$. Donc on peut choisir une suite croissante de $u_{i(n)}$, des x_n et x'_n avec $|u_{j(n)}(x_n)-u_{j(n)}(x'_n)| > a$. Or la limite u a un module de continuité W et les u_n convergent uniformément, ainsi pour tout $\eta > 0$ il existe $N(\eta)$ tel que pour tout $x \in [a,b]$ et $n \geq N(\eta)$ $|u_n(x)-u(x)| \leq \eta$.
Or $|u_n(x)-u_n(x')| \leq |u_n(x)-u(x)|+|u(x)-u(x')|+|u(x')-u_n(x')|$

$$\leq 2\varepsilon+W(|x-x'|).$$

On peut choisir η et n tel que $2\varepsilon+w(\frac{1}{n}) < a$ alors on a $|x_n-x_n| < \frac{1}{n}$ donc $|u_{j(n)}(x_n)-u_{j(n)}(x'_n)| < a$. Ce qui donne une contradiction.

c.q.f.d.

IV.7 - Nous déduisons immédiatement si une suite de fonctions u_n converge dans $C^k[a,b]$ vers une fonction u alors nous avons des modules de continuité $w_o,\dots,x_k$ valables pour u et u_n, et pour leurs dérivées jusqu'à l'ordre k.

Soit u une fonction de $C^k[a,b]$, w_k un module de continuité de la dérivée kème, on vérifie en utilisant la formule de Taylor que le champ de Taylor d'ordre k associé à φ vérifie la condition II du théorème de Whitney avec le module de continuité w_k.

Soit u_n une suite de champ de Taylor T_n telle que pour chaque n on puisse trouver un prolongement φ_n, telle que la suite des φ_n converge dans $C^k[a,b]$ vers φ, alors d'après les remarques précédentes on déduit que T_n vérifie la condition C puisque T_n est la restriction à X du champ associé à φ_n.

Alors que la convergence uniforme de φ_n et des dérivées sur $[a,b]$ entraîne la condition C, la convergence uniforme de T_n vers T sur X non dense dans $[a,b]$ n'entraîne pas nécessairement la condition C, voir par exemple le contre-exemple IV.4.

IV.7 - *Proposition*

Si un ensemble (X_i,T_i) *de champ de Taylor d'ordre* k *vérifie la condition* C, *et s'il existe des nombres* B_j $0 \le j \le k$ *et des éléments* $x_i \in F$ *tel que* $|T^j_{i,x_i}| \le B_j$ *pour* $0 \le j \le k$ *alors il existe des nombres* M_j $0 \le j \le k$ *tel que* $|T^j_{i,y}-T^j_{i,y'}| \le M_j\,|y-y'|$ *indépendamment de* i.

Raisonnons par récurrence descendante et supposons la propriété vraie pour $\ell > j$. Reprenant la démonstration de la proposition I.4 nous avons

$$|T^j_{i,y}-T^j_{i,y'}| \le |y-y'| \sum_{\ell=j+1}^{k} \frac{|y'-y|^{\ell-j-1}}{(\ell-j)!}\,|T^\ell_{i,y}|+|y-y'|^{k-j} w_k(|y-y'|)$$

Comme $|y-y'| \leq |b-a|$, il suffit de voir que $T^{\ell}_{i,y}$ est borné pour $j < \ell \leq k$, cette propriété découle de l'hypothèse de récurrence $|T^{\ell}_{i,x}-T^{\ell}_{i,y}| < M_{\ell}|x-y|$ et de l'hypothèse qu'en x $|T^{\ell}_{i,x}| \leq B_{\ell}$ donc $|T^{\ell}_{i,y}| \leq M_{\ell}(b-a)+B_{\ell}$.
Pour $j = k$ nous avons $|T^{k}_{i,y}-T^{k}_{i,y'}| \leq w_k(|y-y'|)$ par la condition C.

c.q.f.d.

IV.8 - <u>*Proposition*</u>

Soit $(X_i,T_i)_{i\in I}$ *une famille de champ de Taylor, tel que pour chaque* j *il existe* a_j *tel que pour tout* i *il existe* $x_{i,j}$ *avec* $|T^{j}_{x_{i,j}}| \leq a_j$ *, si le procédé* Φ *(resp.* Ψ*) vérifie D1 (resp. E1) et si la famille* X_i, T_i *vérifie la condition C ; alors il existe des modules de continuités* w_j *(si* $0 \leq j < k$ $w_j(\eta) = M_j\eta$*) pour les dérivées* j *des prolongements* φ_i *des champs* X_i,T_i *selon le procédé* Φ,Ψ.

En effet, d'après D1 et E1 pour le prolongement φ_i nous avons un module de continuité w'_k de la dérivée kème de φ_i. Nous allons raisonner par récurrence descendante. Supposons la propriété vraie pour $\ell > j$ montrons là pour j.

Remarquons que $|\varphi^{j+1}_i(x)| \leq |T^{j+1}_{x_{i,j+1}}| + \sup\limits_{x\in[a,b]} w_{j+1}(|x-x_{i,j+1}|)$

$$\leq a_{j+1}+w_{j+1}(|b-a|)$$

ainsi $\varphi^{j+1}_i(x)$ est borné sur $|a,b|$.

$$\varphi^{(j)}_i(x)-\varphi^{(j)}_i(x') = (x-x')\varphi^{j+1}_i(x)$$

donc

$$|\varphi^{j}_i(x)-\varphi^{j}_i(x')| \leq |x-x'|(a_{j+1}+w_{j+1}|b-a|)$$

qui donne un module de continuité de la forme $M_j\varepsilon$.

c.q.f.d.

IV.9 - *Proposition*

Si une suite de champs de Taylor T_n *d'ordre* k *définis sur* F *converge simplement vers un champ* T *et que cette suite vérifie la condition C alors la convergence des champs* T_n *est uniforme vers* T *et* T *est un champ de Taylor vérifiant la condition II avec le module de continuité* w_k *de la condition C.*

Nous allons d'abord démontrer que la limite simple T des T_n est un champ de Taylor. Soient x et x' deux points distincts de F, comme nous avons la convergence simple de $T^j_{n,x}$ vers T^j_x $0 \leq j \leq k$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N_o tel que si $n > N_o$ nous avons :

$$\left|\frac{d^j}{dx_j}(T_x)(x') - \frac{d^j}{dx_j}(T_{n,x})(x')\right| \leq \varepsilon \qquad 0 \leq j \leq k$$

Il existe N_1 tel que si $n > N_1$ nous avons $|T^j_{x'}-T^j_{n,x'}| \leq \varepsilon$ avec $0 \leq j \leq k$. Nous poserons $N = \sup(N_o,N_1)$.

D'après la condition C nous avons pour $n \in N$

$$\left|\frac{d^j}{dx^j} T_{,x}(x')-T^j_{x'}\right| \leq |x-x'|^{k-i} w_k(|x-x'|).$$

En prenant $n > N$ et en ajoutant les 3 inégalités précédentes, nous obtenons :

$$\left|\frac{d^j}{dx^j} T_x(x')-T^j_{x'}\right| \leq |x-x'|^{k-i} w_k(|x-x'|)+2\varepsilon.$$

Comme ε peut être pris aussi petit que l'on veut, on obtient finalement

$$\left|\frac{d^j}{dx^j} T_x(x')-T^j_{x'}\right| \leq |x-x'|^{k-i} w_k(|x-x'|)$$

ce qui est la condition II du théorème de Whitney avec le module de continuité w_k, et ainsi T est un champ de Taylor d'ordre k.

Montrons maintenant la convergence uniforme des diverses composantes T_n^j. Soit x au point quelconque de F. On va estimer $|T_x^j - T_{n,x}^j|$ prenant un point $y \in F$ fixé

$$T_x^j - T_{n,x}^j = T_x^j - T_y^j + T_y^j - T_{n,y}^j + T_{n,y}^j - T_{n,x}^j .$$

Remarquons d'abord que les $|T_{n,x}^j| \leq B^j$ car nous avons convergence en x de ces nombres, aussi la proposition IV.6 précédente est applicable, et en posant $M_j |x-y| = w_j(|x-y|)$, nous avons

$$|T_x^j - T_y^j| \leq w_j(|x-y|), \quad |T_{n,x}^j - T_{n,y}^j| \leq w_j(|x-y|)$$

Si ε est donné > 0, à y on peut associer N_y tel que $|T_y^j - T_{n,y}^j| \leq \varepsilon$ $0 \leq j \leq k$ et $n > N_y$, si on choisit x tel que $w_j(|x-y|) < \varepsilon$ pour $0 \leq j \leq k$ alors si $n > N_y$ $|T_x^j - T_{n,x}^j| \leq 3\varepsilon$.

Ainsi pour chaque y on associe à ε un voisinage de y $[y-\eta, y+\eta]$ tel que si $x \in [y-\eta, y+\eta]$ et $n > N_y$ alors $|T_x^j - T_{n,x}^j| \leq 3\varepsilon$. F borné et fermé dans $\mathbb{R}$ est compact, et ainsi nous pouvons recouvrir F par une famille finie d'intervalle $|y-\eta, y+\eta|$. En prenant pour N le maximum de ces N_y, dès que $n > N$ nous avons quel que soit $x \in F$ $|T_x^j - T_{n,x}^j| \leq 3\varepsilon$.

c.q.f.d.

IV.10 - THEOREME

Si la suite des champs de Taylor T_n d'ordre k converge simplement vers un champ limite T, si la suite T_n vérifie la condition C.
Si le procédé d'interpolation 2-Hermite Φ vérifie les conditions D1 et D2.
Si le procédé d'extrapolation vérifie E1 et E2.
La suite des prolongements φ_n sur $[a,b|$ selon Φ-Ψ des champs T_n (resp. la suite des dérivées φ_n^j 0 $j \leq k$) convergent uniformément sur $|a,b|$ vers le prolongement φ selon Φ-Ψ de T (resp. vers φ^j).

Fixons nous $\varepsilon > 0$ nous allons associer $\eta > 0$ vérifiant des conditions qui seront exprimées plus bas.

i) Si $x \in F$ alors nous avons convergence uniforme d'après la proposition IV.7 dès que $n > N$ alors $|\varphi^j(x)-\varphi_n^j(x)| \leq \varepsilon$.

ii) Si $x \notin [\alpha,\beta]$ alors nous avons $\varphi_n(x)$ par le procédé d'extrapolation Ψ, nous prenons $n \geq N_1$ pour que $|T^j-T_n^j| < \eta_j$ selon les notations de la condition E2, alors nous en déduisons que $|\varphi^j(x)-\varphi_n^j(x)| \leq \varepsilon$.

iii) Si $x \in [x',x'']$ avec $x',x'' \in F$ et $]x',x''[\cap F = \emptyset$, avec de plus $|x'-x''| \leq \eta$ nous avons :

$$|\varphi_n^j(x)-\varphi^j(x)| \leq |\varphi_n^j(x')-\varphi_n^j(x)| + |\varphi_n^j(x')-\varphi^j(x')| + |\varphi^j(x')-\varphi^j(x)|$$

Utilisant la proposition IV.6 nous avons les T_n^j et T borné sur F, les conditions C et D1 donnent un module de continuité w_k' pour la dérivée kème de φ_n et de φ, utilisant le fait que $\varphi_n^j(x')$ et $\varphi^j(x')$ sont bornées, nous avons des modules de continuité $w_j = M_j|x|$ pour φ_n^j et φ^j sur $[x',x'']$ ainsi nous avons :

$$|\varphi_n^j(x')-\varphi_n^j(x)| \leq w_j(|x-x'|)$$

$$|\varphi^j(x')-\varphi^j(x)| \leq w_j(|x-x'|)$$

si $n > N$ alors $|\varphi_n^j(x')-\varphi^j(x')| \leq \varepsilon$.
Si nous choisissions $\eta > 0$ tel que $w_j(\eta) \leq \varepsilon$ alors nous avons $|\varphi_n^j(x)-\varphi^j(x)| \leq \varepsilon$.

iv) Considérons le cas où $x \in [x',x'']$ avec $x',x'' \in F$ et $]x',x''[\cap F = \emptyset$ mais où $|x'-x''| > \eta$. Nous allons utiliser l'axiome D2 sur le procédé Φ , nous prenons N tel que si $n > N$ on ait pour tout j $|T^j_{x'}-T^j_{n,x'}| \leq \xi_j$. Ce choix est possible indépendamment de x'. Nous déduisons ainsi par D2 :

pour tout $x \in [x',x'']$ $|\varphi^j_n(x)-\varphi^j(x)| \leq \varepsilon$, pour $0 \leq j \leq k$.

Nous obtenons ainsi la convergence uniforme de φ_n vers la fonction φ qui prolonge T par le procédé Φ-Ψ.

IV.11 - Interpolation d'un champ de Taylor d'ordre k

Soit T un champ de Taylor d'ordre k défini sur $F \subset [a,b]$. Nous allons définir un procédé d'interpolation de ce champ T en un point $x \in F$ à partir de la connaissance de T sur un nombre fini de points de F, et on étudiera la convergence de cette interpolation lorsque le nombre de points devient infini et dense dans F.

Définition des fonctions χ_n

Donnons nous une suite $x_1,\ldots,x_n$ de points de F dense dans F. Considérons pour chaque n la suite finie $x_1,\ldots,x_n$. Nous définissons χ_n par le prolongement selon Φ-Ψ du champ de Taylor d'ordre k restreint au fermé $\{x_1,\ldots,x_n\}$. Remarquons si l'on passe de n à n+1, χ_n est modifié en au plus 2 intervalles dont l'une des extrémités est x_{n+1}.

IV.12 - *Proposition*

Si Φ vérifie la condition D1, Ψ la condition E1, alors nous avons convergence uniforme des champs de Taylor, d'ordre k, χ_n *restreint à* F *vers le champ de Taylor* T.

Soit w_k un module de continuité vérifiant la condition II pour le champ de Taylor k. Les fonctions $\chi_n^{(k)}$ admettrons w_k' comme module de continuité grâce aux conditions D1 et E1, comme $\chi_n(x_i) = T_{x_i}$ quel que soit $n \geq i$ nous avons des modules de continuité w_i' pour $\chi_n^{(j)}$ et donc T_n^j pour $0 \leq j \leq k$ $(w_j(\varepsilon) = M_j\varepsilon)$.

$\varepsilon > 0$ étant donné, choisissons $\eta > 0$ tel que $w_j'(\eta) < \varepsilon$ avec $0 \leq j \leq k$. Choisissons N tel que les intervalles $[x_i-\eta, x_i+\eta]$ avec $i \leq N$ forment un recouvrement de F, il est possible de trouver un tel N car F est compact. Soit $x \in F$ on peut lui associer $i \leq N$ avec $x \in [x_i-\eta, x_i+\eta]$ on a pour $n \geq N$ $\chi_n^j(x_i) = T_{x_i}^j$. Ainsi :

$$|\chi_n^j(x) - T_x^j| \leq |T_x^j - T_{x_i}^j| + |\chi_n^j(x) - \chi_n^j(x_i)|$$

comme $|x-x_i| \leq \eta$ on déduit $|\chi_n^j(x) - T_x^j| \leq 2\varepsilon$, on a ainsi la convergence uniforme vers T des champs de Taylor obtenu par restriction de χ_n à F.

c.q.f.d.

IV.13 - *Corollaire*

Si Φ vérifie D1 et D2, si Ψ vérifie E1 et E2, alors la suite des fonctions χ_n d'interpolations (resp. les dérivées jusqu'à l'ordre k) converge uniformément sur $[a,b]$ vers la fonction φ (resp. vers φ^j $0 \leq j \leq k$) prolongeant selon Φ, Ψ le champ de Taylor T.

En effet d'après la proposition IV.10, les champs χ_n/F restriction de χ_n à F vérifient la condition de convergence uniforme donc la convergence simple. L'axiome C est lui aussi vérifié en utilisant le module de continuité w_k'. Le prolongement de χ_n/T par Φ-Ψ est évidemment χ_n lui-même. En utilisant le théorème IV.8 nous avons bien la convergence uniforme sur $[a,b]$ de φ_n et des φ_n^j vers φ et φ^j.

c.q.f.d.

V - NOTION DE CONVERGENCE SUR DES CHAMPS DE TAYLOR NON NECESSAIREMENT DEFINI SUR UN MEME ENSEMBLE, ET LIMITE DE Φ - Ψ PROLONGEMENTS ASSOCIES

Dans le paragraphe précédent nous avons étudié la convergence d'une suite de champ de Taylor lorsqu'ils étaient définis sur un même ensemble F. Cette notion ne recouvre pas le cas où l'on considère pour chaque n la donnée d'un ensemble fini X_n et sur chaque x_n la valeur d'une fonction et de k de ses dérivées en ces points, l'ensemble des X_n devenant par exemple dense dans $[a,b]$. Pour recouvrir ce cas nous introduisons une notion de convergence de champ de Taylor.

V.1 - *Définition*

Soit une suite T_n *de champ de Taylor d'ordre* k *définie sur* $X_n \subset [a,b]$ *nous dirons que cette suite converge vers un champ* T *défini sur* X*, si :*

1) pour tout $\varepsilon > 0$ *il existe* N *tel que si* $n \geq N$ *on ait :*

α) pour tout $x \in X$ *il existe* $x_n \in X_n$ *avec* $|x-x_n| \leq \varepsilon$

β) pour tout $x_n \in X_n$ *il existe* $x \in X$ *avec* $|x-x_n| \leq \varepsilon$

2) pour tout $\varepsilon > 0$ *il existe* $\eta > 0$ *et* N *tel que si* $n \geq N$ *on ait pour tout* $x \in X$ *et pour tout élément* $y \in X_n \cap [x-\eta, x+\eta]$ $|T^j_{n,y} - T^j_x| \leq \varepsilon$ avec $0 \leq j \leq k$.

La condition V.1, 1°) exprime une convergence sur les ensembles X_n vers X, en réalité ces conditions sont équivalentes à la convergence au sens de Kuratowski. Soit X_n une suite de sous-ensembles de $\mathbb{R}$, on pose :

$$\underline{\lim}\, X_n = \{x \mid \lim_{n\to\infty} \sup\, d(x,X_n) = 0\}$$

$$\overline{\lim}\, X_n = \{x \mid \lim_{n\to\infty} \inf\, d(x,X_n) = 0\}$$

où $d(x,X_n)$ indique la distance de x à l'ensemble X_n dans $\mathbb{R}$.

On dit que X est <u>limite au sens de Kuratowski</u> de la suite X_n si $\overline{\lim}(X_n) \subset X \subset \underline{\lim}\, X_n$.

V.2 - *Proposition*

Pour une suite de partie X_n *d'un intervalle* $[a,b]$ *la condition 1°)* α *et* β *de la définition V.1 est équivalente à la convergence au sens de Kuratowski des ensembles* X_n.

1°) Supposons les conditions $1.\alpha$ et $1.\beta$ vérifiées.
Soient $\varepsilon > 0$ et $x \in X$, pour $n \geq N$. On peut associer $x_n \in X_n$ tel que $|x-x_n| \leq \varepsilon$ ainsi $d(x,X_n) \leq \varepsilon$ et $\sup\limits_{n \geq N} d(x,X_n) \leq \varepsilon$ donc $X \subset \underline{\lim}(X_n)$.

Montrons que $\overline{\lim}\, X_n \subset X$. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe $y \in \overline{\lim}\, X_n$ et $y \notin X$, alors il existe $\varepsilon > 0$ avec $d(y,X) \geq 2\varepsilon$, en utilisant $1.\beta$ si $n > N$ alors $d(y,X_n) \geq \varepsilon$ donc $\liminf d(y,X_n) \geq \varepsilon > 0$ en conséquence $y \notin \overline{\lim}\, X_n$ et nous avons ainsi montrer que $\overline{\lim}\, X_n \subset X \subset \underline{\lim}\, X_n$ donc X est limite de X_n au sens de Kuratowski.

2°) Supposons maintenant que X_n est limite de X au sens de Kuratowski.
Pour tout $x \in X$, x appartient à $\underline{\lim}\, X_n$, c'est-à-dire pour tout $\varepsilon > 0$ il existe N_x tel que si $n \geq N_x$ alors $d(x,X_n) \leq \varepsilon$ donc il existe $x_n \in X_n$ avec $|x-x_n| < \varepsilon$. X est un sous-ensemble de $[a,b]$, donc on peut trouver un nombre fini de y tel que $[y-\varepsilon, y+\varepsilon]$ recouvre X, considérons $N = \sup N_y$ (y parcourant ce nombre fini de points), ainsi pour tout $n > N$ et pour tout $x \in X$ on peut trouver x_n avec $|x-x_n| \leq 2\varepsilon$. On ainsi la condition $1.\alpha$.

Supposons que $1.\ \beta$ ne soit pas vérifiée, alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout N il existe n et $x_N \in X_n$ avec $d(x_n,X) \geq \varepsilon$. L'ensemble des $y \in [a,b]$ vérifiant $d(y,X) \geq \varepsilon$ est un compact, donc à la suite x_N on peut associer un point adhérent z et nous avons $\liminf d(z,X_n) = 0$ donc $z \in \overline{\lim}\, X_n$ ainsi $z \in X$ ce qui est en contradiction avec $d(z,X) \geq \varepsilon$. Donc la condition $1.\beta$ est vérifiée.

c.q.f.d.

V.3 - Remarque

Soit $x \in X$, considérons dans $[a,b] \times \mathbf{N}$ le filtre F dont une base est formée des ensembles $F_{\eta,N}$, $F_{\eta,N} = \{(y,n) \mid n \geq N \text{ et } y \in X_n \cap |x-\eta,x+\eta|\}$, et l'application $\mathcal{T} : (y,n) \to T_{n,y} \in R^{n+1}$. Alors la condition 2 permet de vérifier que T_x est limite de la fonction $\mathcal{T}$ suivant le filtre F ; cette convergence est d'ailleurs uniforme par rapport à $x \in X$.

V.4 - *Proposition*

Si pour tout n *nous avons* $X_n = X$. *Pour une suite de champ de Taylor* T_n *d'ordre* k *sur* $X_n = X$, *la convergence au sens de V.1 est équivalente à la convergence uniforme des* $T_x^0,\ldots,T_x^k$ *sur* X *(IV.1).*

Si V.1 est vraie il est évident que nous avons convergence uniforme sur X au sens de IV.1 Inversement, supposons que nous ayons cette propriété. La condition 1 de V.1 est bien vraie, il nous reste à démontrer la condition 2 de V.1
Soit $\varepsilon > 0$ nous allons chercher des nombres η et N. Ayant convergence uniforme, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe N tel que si $n \geq N$ on ait $|T_n^j(x)-T_x^j| \leq \varepsilon$. Considérons T_N nous avons des modules de continuité w_j pour T_N^j. Posons $\eta > 0$ tel que $w_j(\eta) \leq \varepsilon$ $0 \leq j \leq k$, alors pour tout y avec $|x-y| \leq \eta$ alors $|T_{N,y}^j-T_{N,x}^j| \leq \varepsilon$ $0 \leq j \leq k$.
Nous avons

$$|T_x^j-T_{n,y}^j| \leq |T_x^j-T_{N,x}^j| + |T_{N,x}^j-T_{N,y}^j| + |T_{N,y}^j-T_{n,y}^j|,$$

si $n \geq N_1$ alors chacun de ces termes est inférieur à ε et nous avons pour tout $y \in X$ avec $|x-y| \leq \eta$ et $n \geq N_1$ $|T_x^j-T_{n,y}^j| \leq \varepsilon$ ce qui prouve bien la condition 2 de V.1.

V.5 - Remarque

Cette proposition associée au contre-exemple IV.5 permet de voir que la définition V.1 n'est pas suffisante pour assurer que le champ limite T est un champ de Taylor. Pour avoir une limite qui soit un champ de Taylor d'ordre k, nous ferons l'hypothèse de la condition C du IV.5

Si (X_n, T_n) converge au sens de V.1 alors pour chaque j on peut trouver M_j tel que $|T^j_{n,x_{j,n}}| < M_j$, il suffit de prendre les $x_{j,n}$ assez près de x, alors si $n \geq N$ les $T^j_{n,x_{j,n}}$ seront assez voisin de T^j_x, les autres étant en nombre fini on a bien la propriété de majoration. Si la condition C est vérifiée, alors nous pouvons appliquer les propositions IV.7 et IV.8. Ainsi nous obtenons des modules de continuité pour les composantes jème de la suite des champs de Taylor et pour les Φ-Ψ prolongements de (X_n, T_n) et les dérivées jusqu'à k, qui sont ainsi bornées sur $[a,b]$.

V.6 - Dans la condition 2 du V.1 au lieu de supposer que η et N sont indépendants de x, nous aurions pu les considérer comme dépendants de x. Alors le filtre $\mathcal{F}_{\eta,N}$ aurait convergé simplement au lieu d'uniformément pour x. En ajoutant la condition C à cette condition de convergence simple nous pouvons adapter les démonstrations de la proposition IV. Nous obtenons ainsi que le champ limite est un champ de Taylor qui vérifie la condition II avec un module de continuité w_k, et nous vérifions aussi que la condition 1 du V.1 est vérifiée.

Ainsi la convergence simple dans 2 du V.1 et la condition C sont équivalentes à la convergence V.1 et la condition C. Affaiblir la condition V.1 dans le cas que l'on considère ne nous donne pas de nouvelles suites de champ de Taylor vérifiant C.

V.7 - *THEOREME*

Soit (X_n,T_n) *une suite de champ de Taylor d'ordre* k *convergeant au sens de V.1 vers un champ* (X,T), *nous supposons que la suite* (X_n,T_n) *vérifie la condition C.*

Soit φ_n *les prolongements de* (X_n,T_n) *à* $[a,b]$ *suivant le procédé* Φ,Ψ *Nous supposons que* Φ *vérifie les conditions D1, D3 et que* Ψ *vérifie E1, E3 alors* φ_n *(resp.* φ_n^j $0 \leq j \leq k$*) convergent uniformément sur* $[a,b]$ *vers* φ *(resp.* φ^j $0 \leq j \leq k$*)* φ *étant le* Φ-Ψ *prolongement de* (X,T).

Démonstration

Soit η un nombre donné > 0, le choix de η sera précisé au cours de la démonstration.

i) Soit x tel que $d(x,X) \leq \eta$. x' l'un des points de X réalisant la distance. Nous désirons majorer $|\varphi_n^{(j)}(x)-\varphi^{(j)}(x)|$, nous le ferons en introduisant pour chaque n assez grand, un point $n_x \in X_n$ avec $|x'-n_x| < \eta$.
Nous avons :

$$|\varphi_n^j(x)-\varphi^j(x)| \leq |\varphi_n^j(x)-\varphi_n^j(n_x)| + |\varphi_n^j(n_x)-\varphi^{(j)}(x')| + |\varphi^j(x')-\varphi^{(j)}(x)|$$

Nous avons grâce à la proposition IV.8 et comme

$|x-n_x| \leq \eta$ et $|x-x'| \leq \eta$ alors $|\varphi_n^j(x)-\varphi_n^j(n_x)| \leq w_j(\eta)$
et
$|\varphi^j(x)-\varphi^j(x')| \leq w_j(\eta)$.

$\varphi_n^j(n_x) = T^j_{n,n_x}$, $\varphi^j(x') = T^j_{x'}$. Nous allons utiliser la condition 2 de V.1.
Soit $\varepsilon > 0$ donné, cette condition nous donne l'existence de η_1 et N_1 tel que pour tout $n \geq N_1$ on a pour tout $y \in X_n \cap \{x'-\eta_1, x'+\eta_1\}$, $|T^j_{n,y}-T^j_{n,x'}| < \varepsilon$ avec $0 \leq j \leq k$.

Si η_1 est tel que $w_j(\eta_1) \leq \varepsilon$ pour $0 \leq j \leq k$, nous posons $\eta = \eta_1$ et pour chaque $n \geq N_1$ nous pouvons choisir un $n_x \in X_n$ avec $|x'-n_x| \leq \eta$ alors $|\varphi_n^j(n_x)-\varphi^j(x')| \leq \varepsilon$.

Si $w_j(\eta_1) > \varepsilon$ nous pouvons trouver $\eta < \eta_1$ avec $w_j(\eta) \leq \varepsilon$ pour $0 \leq j \leq k$. Considérons la condition 1 de V.1, nous pouvons trouver N_2 tel que pour tout $y \in X$ $\exists n_y \in X_n$ avec $|y-n_y| \leq \eta$. Prenons $N = \max(N_1,N_2)$ alors nous pouvons choisir n_x avec $|x'-n_x| \leq \eta$ pour $n \geq N$ et $|T^j_{n,n_x} - T^j_{x'}| \leq \varepsilon$ donc $|\varphi_n^j(n_x)-\varphi^j(x')| \leq \varepsilon$.
Et ainsi si $n > N$ on a uniformément par rapport à x $|\varphi^j(x)-\varphi_n^j(x)| \leq 3\varepsilon$.

Ce cas englobe évidemment le cas où $x \in X$, mais dans la décomposition de $|\varphi_n^j(x)-\varphi^j(x)|$ on est dispensé du choix de x'.

ii) Cas où $d(x,X) > \eta$ (η choisi dans le paragraphe ci-dessus). Nous allons ici pouvoir utiliser l'hypothèse D3 pour le procédé 2-Hermite Φ . Supposons $x \in [x',x'']$ avec x' et $x'' \in X$ et $]x',x''[\cap X = \emptyset$. Nous avons alors $|x'-x''| > 2\eta$. Appliquons D3 avec $\zeta = 2\eta$ nous associons χ et ξ.

Par la condition 1 du V.1, nous pouvons choisir N_1 tel que si $n \geq N_1$ on a $X_n \subset [X+\chi]$ ($[X+\chi]$ ensemble des points qui sont à moins de χ d'un point de X). Puis appliquons la condition 2 du V.1 avec $\varepsilon = \xi$, nous avons ainsi η_2 et N_2, posons $\eta_1 = \min(\chi,\eta_2)$ et $N = \max(N_1,N_2)$. Pour tout $n \geq N$ alors $x \in [x'_n,x''_n]$ avec $[x'_n,x''_n] \cap X_n = \emptyset$ et $|x'-x'_n| < \eta_1$ et $|x''-x''_n| < \eta_1$ (η_1 étant pris aussi inférieur à η ce qui est possible par la condition 1 de V.1) alors la condition D3 nous donne $|\varphi_n^j(x)-\varphi^j(x)| \leq \varepsilon$ pour $n > N'$.

Si $x \notin [\alpha,\beta]$ (soit $x \leq \alpha - \eta$), la condition E3 nous permet de choisir χ et ξ. Utilisant les conditions 1 et 2 du V.1, nous pouvons associer comme ci-dessus η_1 et N tel qu'il existe α_n $\alpha_n \in X_n$, $|\alpha-\alpha_n| \leq \eta$, et ainsi $x < \alpha_n$ et d'après E3 $|\varphi_n^j(x)-\varphi^j(x)| \leq \varepsilon$.

c.q.f.d.

V.8 - Applications à l'interpolation de champ de Taylor

Supposons donné un champ de Taylor T d'ordre k sur X contenu dans $[a,b]$. Considérons $X_n = \{x_1^n,\dots,x_p^n\}$ où les $x_i^n \in X$, nous supposons de plus que pour chaque ε $\exists N$ tel que si $n \geq N$ alors nous avons pour tout x un élément x_i^n de X_n avec $|x_i^n - x| \leq \varepsilon$, nous avons la condition 1 de V.1 est vérifiée car $x_i^n \in X$.

Considérons sur X_n le champ de Taylor T_n d'ordre k restriction de T. Nous avons ainsi convergence au sens de V.1 du champ de Taylor (X_n, T_n) vers le champ de Taylor (X,T) La suite des champs (X_n,T_n) vérifie la condition C en prenant pour w_k le module de continuité du champ de Taylor T sur X dans la condition II.

Si Φ et Ψ vérifie D1, D3 et E1, E3 nous avons alors pour chaque n le Φ,Ψ prolongement φ_n de (X_n,T_n). La suite des $\varphi_n^{(j)}$ $0 \leq j \leq k$ convergent uniformément sur $[a,b]$ vers $\varphi^{(j)}$ où φ est le Φ-Ψ prolongement de T sur X.

Ce dernier résultat généralise IV.12 dans le cas de tableaux triangulaires d'abscisses X_n (le nombre d'éléments de X est égal à n).

VI - ETUDE ET UTILISATION DU CAS OU LE PROCEDE Φ (Interpolation) ET Ψ (extrapolation) SONT DONNES PAR DES POLYNOMES

VI.1 - Procédé Ψ d'extrapolation par polynôme

Ayant un point $\alpha \in [a,b]$, des valeurs $T_\alpha^0,\ldots,T_\alpha^k$ (on a ainsi un champ de Taylor d'ordre k sur un seul point α), le procédé Ψ consiste à associer à α et T_α le polynôme de degré k $\Psi = \sum_{i=0}^{k} \frac{(x-\alpha)^i}{i!} T_\alpha^i$ (polynôme de Taylor $T_\alpha(x)$).

La dérivée kème de Ψ étant une constante, la condition E1 est vérifiée. La condition E2 est aussi vérifiée ; en effet,

$$\Psi(x)-\tilde{\Psi}(x) = \sum_{i=0}^{k} \frac{(x-\alpha)^i}{i!} (T_\alpha^i-\tilde{T}_\alpha^i), \text{ or } \frac{(x-\alpha)^i}{i!} \leq M_i \text{ sur } [a,b] \text{ donc}$$

si $|T_\alpha^i-\tilde{T}_\alpha^i| \leq \varepsilon/(k+1)M_i$, alors nous avons $|\Psi(x)-\tilde{\Psi}(x)| \leq \varepsilon$ et d'une façon analogue on a $|\Psi^j(x)-\tilde{\Psi}^{(j)}(x)| \leq \varepsilon$.

Pour la condition E3, nous écrivons :

$$\Psi(x)-\tilde{\Psi}(x) = \sum_{i=0}^{k} \left|\frac{(x-\alpha)^i-(x-\tilde{\alpha})^i}{i!} T_\alpha^i + \frac{(x-\tilde{\alpha})^i}{i!} (T_\alpha^i-\tilde{T}_\alpha^i)\right|$$

$$|(x-\alpha)^i-(x-\tilde{\alpha})^i| = |i(\alpha-\tilde{\alpha})(x-\theta)^{i-1}| \leq i|\alpha-\tilde{\alpha}|\,|a-b|^{i-1}$$

en prenant $|\alpha-\tilde{\alpha}| \leq \chi$ on peut rendre, en tenant compte que les T_α^i sont bornés $\left|\sum \frac{(x-\alpha)^i-(x-\tilde{\alpha})^i}{i!} T_\alpha^i\right| \leq \varepsilon/2$ et si $|T_\alpha^i-\tilde{T}_\alpha^i| \leq \xi$ alors $\left|\sum \frac{(x-\alpha)^i}{i!} (T_\alpha^i-\tilde{T}_\alpha^i)\right| \leq \varepsilon/2$

donc E3 est vérifiée.

VI.2 - Procédé d'interpolation Φ 2-Hermite par polynôme de degré 2k+1

Considérons le cas où l'interpolation est définie par le polynôme de degré 2k+1. P(x) qui est telle que $P^{(i)}(\alpha) = f^{(i)}(\alpha)$ et $P^{(i)}(\beta) = f^{(i)}(\beta)$.
Ce procédé vérifie la condition de Haar-Hermite sur $[a,b]$, donc nous avons toujours unicité du polynôme P.

Rappel sur les différences divisées à arguments répétés

Rappelons que la différence divisée pème construite sur p+1 points $\{x_o,\ldots,x_p\}$ d'une fonction f est égale au coefficient du terme de plus haut degré du polynôme de Lagrange prenant aux différents points $x_o,\ldots,x_p$ les valeurs $f(x_o),\ldots,f(x_p)$.

Si aux points x_i on se donne en plus de la valeur $f(x_i)$ les valeurs de k_i des dérivées $f'(x_i),\ldots,f^{k_i}(x_i)$, nous pouvons considérer le polynôme de Lagrange Hermite qui en x_i prend les valeurs $f(x_i)$ et dont les dérivées jusqu'à l'ordre p_i sont égales à $f'(x_i),\ldots,f^{(pi)}(x_i)$. Nous appelons différences divisées de la fonction f à arguments répétés x_i k_i-fois, et nous noterons $[x_o\ ;\ k_o,\ldots,x_p\ :\ k_p](f)$ le coefficient du terme de degré le plus élevé de ce polynôme. (cf. Golomb (1962) ou Kuntzmann (1959).)

Les formules habituelles des différences divisées se généralisent aux différences divisées à arguments répétés. Ainsi nous avons la formule de récurrence qui permet le calcul de différences divisées d'ordre k en fonction de celles d'ordre k=1

$$\text{VI.2} \qquad [x_o:k_o,\ldots,x_p:k_p](f) = \frac{[x_o:k_o,\ldots,x_p:k_p-1](f)-[x_o:k_o-1,\ldots,x_p:k_p](f)}{(x_o-x_p)}$$

Cette formule utilisée plusieurs fois permet de mettre $[x_o:k_o,\ldots,x_p:k_p](f)$ sous la forme d'une combinaison linéaire des $[x_i:k_i] = f^{k_i-1}(x_i)/(k_i-1)!$

La formule de Newton donnant le polynôme de Lagrange qui aux points $x_o,\dots,x_k$ prend les valeurs $y_o,\dots,y_k$

$$P(x) = y_o+(x-x_o)[x_o,x_1](y)+\dots+(x-x_o)\dots(x-x_{k-1})[x_o,\dots,x_k](y)$$

se généralise pour le polynôme de Lagrange-Hermite :

VI.3 $$P(x) = f_o+(x-x_o)[x_o:2](f)+\dots+(x-x_o)^{k_o}[x_o:p_o,x_1:1](f)$$
$$+(x-x_o)^{k_o}(x-x_1)[x_o:k_o,x_1:2](f)+\dots$$
$$\dots+(x-x_o)^{k_o}(x-x_1)^{k_1}\dots(x-x_p)^{k_p-1}[x_o:k_o,\dots,x_p:k_p](f).$$

VI.4 - *Proposition*

Si f *de classe* C^k *sur* $[a,b]$ *, pour toute différence divisée d'ordre* k-1 *de la fonction* f *construite sur les abscisses* $x_o,\dots,x_p$ *de* $[a,b]$ *il existe* $\xi \in [a,b]$ *tel que*

$$[x_o:k_o,x_1:k_1,\dots,x_p:k_p](f) = f^{(k)}(\xi)/k!$$

$k_o+k_1+\dots+k_p = k+1.$

Démonstration

Soit P(x) le polynôme de degré k prenant en $x_o,\dots,x_k$ les valeurs $f(x_o)$ et dont les dérivées jusqu'à p_i sont en x_i égales à $f^j(x_i)$. Posons $\varphi(x) = f(x)-P(x)$, $\varphi(x)$ possède k+1 zéros dont k_i confondus en x_i. Si on dérive en x, $\varphi'(x)$ à k zéros, et ainsi de suite jusqu'à $\varphi^{(k)}(x)$ qui a un seul zéro, il existe donc ξ tel que $\varphi^j(\xi) = 0$ donc $f^k(\xi) = P^k(\xi)$. Or d'après la formule de Newton :

$$P^k(\xi) = [x_o:k_o,\dots,x_p;k_p]/(k)!$$

ξ étant contenu dansle plus petit intervalle contenant $x_o,\dots,x_p$.

c.q.f.d.

Corollaire

Supposons $x_o,\ldots,x_i$ *fixés nous avons*

$$\lim_{\substack{x_{i+1}\to\alpha \\ \text{------} \\ x_k\to\alpha}} [x_o:k_o,\ldots,x_p:k_p](f) = [x_o:k_o,\ldots,x_i:k_i,\alpha:k_{i+1}+\ldots+k_p](f)$$

On raisonne par récurrence sur $k = k_o+\ldots+k_p$. Ecrivons :

$$[x_o:k_o,\ldots,x_p:k_p] = \frac{[x_o:k_o,\ldots,x_p:k_p-1]-[x_o:k_o-1,\ldots,x_p:k_p]}{x_o - x_p}$$

Si $x_o \neq \alpha$ on a $\lim\limits_{x_p\to\alpha} x_o-x_p \neq 0$, utilisant l'hypothèse de récurrence pour les limites de $[x_o:k_o,\ldots,x_p:k_p-1]$ et de $[x_o:k_o-1,\ldots,x_p:k_p]$ nous obtenons

$$\lim_{\substack{x_{i+1}\to\alpha \\ \text{------} \\ x_p\to\alpha}} [x_o:k_o,\ldots,x_p:k_p] = [x_o:k_o,\ldots,x_i:k_i,\alpha:k_{i+1}+\ldots+k_p].$$

Si $x_o = \alpha$ nous utilisons la proposition précédente alors $[x_o:k_o,\ldots,x_p:k_p]=f^{(k)}(\xi)/(k)$ et nous avons $\lim\xi = \alpha$ comme $f^k(\xi)$ est continue nous avons à la limite $f^{(k)}(\alpha)/(k)!$

c.q.f.d.

VI.5 - Etude des différences divisées à arguments répétés construites sur 2 abscisses a et b quelconques de $\mathbb{R}$.

On va utiliser la formule de récurrence VI.3 pour exprimer une différence divisée du type $[a:p,b:q]$ en fonction des différences divisées d'ordre inférieure. Itérons j fois la formule VI.3 et désignons par $\binom{j}{i}$ les coefficients de la formule du binôme : nous obtenons la formule pour $j < \inf(p,q)$

VI.5 $\quad [a:p,b:q](f) = \sum_{i=0}^{j} (-1)^i \binom{j}{i} [a:p-i,b:q-j+i](f)/(b-a)^j$

Donnons nous en a (resp. b) k+1 nombres $T_a^0, T_a^1, \ldots, T_a^k$ (resp. $T_b^0, T_b^1, \ldots, T_b^k$) on associe le polynôme

$$\overset{k}{T}_a(X) = T_a^0 + (X-a)T_a + \frac{(X-a)^2}{2!} T_a^2 + \ldots + \frac{(X-a)^k}{k!} T_a^k.$$

VI.6 - *Proposition*

Soient 2 points a, b *et* $[a:k+1-q,b:q]$ *les différences divisées à arguments répétés de* T_a^i *et* T_b^i *construites sur* a *et* b *avec* $1 \leq q \leq k+1$, *nous avons la relation :*

$$\text{VI.6} \quad [a:k+1-q,b:q] = [a:k+1] + \sum_{i=1}^{q} \alpha_{k,q}^i \left([b:i] - \frac{1}{(i-1)!} \frac{d^{i-1}}{dX^{i-1}} \overset{k}{T}_a(b)\right)/(b-a)^{k+1-i}$$

Les coefficients $\alpha_{k,q}^i$ *sont définis par les relations de récurrence*

$$\alpha_{k,q}^q = \alpha_{k-1,q}^q = \ldots = \alpha_{q,q}^q = 1$$

$$\alpha_{q,q+1}^i = 0 \text{ si } i < q \qquad q > 1$$

$$\alpha_{p,q}^i = \alpha_{p-1,q}^i - \alpha_{p-1,q-1}^i \qquad i < q \text{ et } q > 1$$

Si q = k+1 la formule VI.6 nous donnerait

$$[b:k+1] = [a:k+1] + \sum_{i=1}^{k+1} \alpha_{k,k+1}^i \left([b:i] - \frac{1}{(i-1)!} \frac{d^{i-1}}{dX^{i-1}} \overset{k}{T}_a(b)\right)/(b-a)^{k+1-i}$$

si

$$i = k+1, \quad \frac{1}{k!} \frac{d^k}{dX^k} \overset{k}{T}(b) = \frac{T_a^k}{k!} = [a:k+1]$$

ainsi si nous prenons $\alpha_{k,k+1}^i = 0$ pour $1 \leq i \leq k$

$$\alpha_{k,k+1}^{k+1} = 1.$$

On a bien la formule vérifiée

$$[b:k+1] = |a:k+1| + |b:k+1] - |a:k+1|.$$

Nous allons faire un raisonnement par récurrence sur k.
Admettons les formules démontrées pour $k < p$ avec les relations de récurrence :
$q \leq k+1$

$$\alpha^q_{k,q} = \alpha^q_{k-1,q} = \ldots = \alpha^q_{q-1,q} = 1$$

$$\alpha^i_{k,q} = \alpha^i_{k-1,q} - \alpha^i_{k-1,q-1} \qquad 1 \leq i < q \text{ et } q > 1$$

$$\sum_{i=j}^{q} \alpha^i_{k,q} \binom{k-j+1}{i-j} = 1 \qquad 1 \leq j \leq q.$$

Nous allons maintenant montrer que ces formules sont vraies pour p.

$$[a:p-q,b:q] = [a:p] + \sum_{i=1}^{q} \alpha^i_{p-1,q}([b:i] - \frac{1}{(i-1)!} \frac{d^{i-1}}{dX^{i-1}} (p_{T_a}^{-1})(b))/(b-a)^{p-i}$$

$$[a:p+1-q,b:q-1] = [a:p] + \sum_{i=1}^{q-1} \alpha^i_{p-1,q-1}([b:i] - \frac{1}{(i-1)!} \frac{d^{i-1}}{dX^{i-1}} (p_{T_a}^{-1})(b))/(b-a)^{p-i}$$

comme

$$[a:p+1-q,b:q] = \frac{[a:p-q,b:q] - [a:p+1-q,b:q-1]}{(b-a)}$$

on obtient par différence et division par (b-a)

$$[a;p+1-q,b:q] = \sum_{i=1}^{q-1} (\alpha^i_{p-1,q} - \alpha^i_{p-1,q-1})([b:i] - \frac{1}{(i-1)!} \frac{d^{i-1}}{dX^{i-1}} (p_{T_a}^{-1})(b))/(b-a)^{p+1-i}$$

$$+\alpha^q_{p-1,q}([b:q] - \frac{1}{(q-1)!} \frac{d^{q-1}}{dX^{q-1}} (p_{T_a}^{-1})(b))/(b-a)^{p+1-q}$$

Remarquons que

$$\overset{p}{T}_a(b) = {}^{(p-1)}\overset{}{T}_a(b)+[a:p+1](b-a)^p \text{ et par dérivation}$$

$$\frac{d^{i-1}}{dX^{i-1}}\overset{p}{T}_a(b) = \frac{d^{i-1}}{dX^{i}}\,{}^{(p-1)}T_a+p(p-1)\dots(p-i+2)[a:p+1](b-a)^{p-i+1}$$

en reportant ces deux formules dans la formule précédente nous avons

$$[a:p+1-q,b:q]=\sum_{i=1}^{q-1}(\alpha^i_{p-1,q}-\alpha^i_{p-1,q-1})([b:i]-\frac{1}{(i-1)!}\frac{d^{i-1}}{dX^{i-1}}\overset{p}{T}_a(b))/(b-a)^{p+1-i}$$

$$+\alpha^q_{p-1,q}([b:q]-\frac{1}{(q-1)!}\frac{d^{q-1}}{dX^{q-1}}\overset{p}{T}_a(b))/(b-a)^{p+1-q}$$

$$+(\sum_{i=1}^{q-1}(\alpha^i_{p-1,q}-\alpha^i_{p-1,q-1})\binom{p}{i-1}+\alpha^q_{p-1,q}\binom{p}{q-1})[a:p+1]$$

Ainsi nous sommes amenés à poser $\alpha^i_{p-1,q}-\alpha^i_{p-1,q-1} = \alpha^i_{p,q}$

$\alpha^q_{p,q} = \alpha^q_{p-1,q} = 1$ et si nous montrons que

$$\Sigma(\alpha^i_{p-1,q}-\alpha^i_{p-1,q-1})\binom{p}{i-1}+\alpha^q_{p-1,q}\binom{p}{q-1} = 1$$

nous avons montré la formule désirée.

Cette relation s'écrit encore :

$$\sum_{i=1}^{p}\alpha^i_{p,q}\binom{p}{i=1} = 1 \quad \text{nous avons fait l'hypothèse de récurrence } k = p-1$$

$$\sum_{i=j}^{q}\alpha^i_{p-1,q}\binom{p-j}{i-j} = 1 \text{ et } \sum_{i=j}^{q-1}\alpha^i_{p-1,q-1}\binom{p-j}{i-j} = 1$$

soustrayons ces 2 relations et faisons j = 1 nous avons :

$$\sum_{i=1}^{q-1} (\alpha^i_{p-1,q} - \alpha^i_{p-1,q-1}) \binom{p-1}{i-1} + \alpha^q_{p-1,q} \binom{p-1}{i-1} = 0$$

or

$$\binom{p}{i-1} = \binom{p-1}{i-1} + \binom{p-1}{i-2} \text{ et } \binom{p}{o} = \binom{p-1}{o} = 1$$

$$\sum_{i=1}^{q-1} (\alpha^i_{p-1,q} - \alpha^i_{p-1,q-1}) \binom{p}{i-1} + \alpha^q_{p-1,q} \binom{p}{i-1} = \sum_{i=2}^{q-1} (\alpha^i_{p-1,q} - \alpha^i_{p-1,q-1}) \binom{p-1}{i-2} + \alpha^q_{p-1,q} \binom{p-1}{i-2}$$

ainsi

$$\sum_{i=1}^{q} \alpha^i_{p,q} \binom{p}{i-1} = \sum_{i=2}^{q} \alpha^i_{p,q} \binom{p-1}{i-2}$$

en recommençant ce raisonnement avec j nous obtenons

$$\sum_{i=1}^{q} \alpha^i_{p,q} \binom{p}{i-1} = \sum_{i=j}^{q} \alpha^i_{p,q} \binom{p-j+1}{i-j} \qquad \text{pour } i \leq j \leq q$$

si

$$j = q \quad \sum_{i=1}^{q} \alpha^i_{p,q} \binom{p}{i-1} = \alpha^q_{p,q} \binom{p-q}{0} \qquad \text{or } \alpha^q_{p,q} = 1$$

et on a bien

$$\sum_{i=j}^{q} \alpha^i_{p,q} \binom{p-j+1}{i-j} = 1.$$

Il nous reste à voir que la récurrence commence bien pour k = 1, on a :

$$\lfloor a:1,b:1 \rfloor = \frac{\lfloor b:1 \rceil - \lfloor a:1 \rceil}{b-a}$$

$$= \lceil a:2 \rceil + \frac{\lfloor b:1 \rfloor - \lfloor a:1 \rfloor - (b-a) \lfloor a:2 \rfloor}{b-a}$$

$$= \lfloor a:2 \rceil + (\lceil b:1 \rfloor - \overset{1}{T}_a(b))/(b-a)$$

c.q.f.d.

<u>Remarque</u> : on peut trouver les coefficients $\alpha^i_{k,q}$ grâce au triangle de Pascal alterné. Le terme $\alpha^1_{k,q}$ sera le qème terme de la k+1ème ligne et les $\alpha^i_{k,q}$ seront obtenus en remontant la diagonale de ce terme.

1							
1	0						
1	-1	0					
1	-2	-1	0				
1	-3	+3	-1	0			
1	-4	6	-4	1	0		
1	-5	10	-10	5	-1	0	
1	-6	15	-20	15	-6	1	0

par exemple $\alpha^1_{7,3} = 15$ $\quad \alpha^2_{7,3} = -5$ $\quad \alpha^3_{7,3} = 1$

$$|a:5,b:3| = |a:8| + 15(|b:1| - \overset{7}{T}_a(b))/(b-a)^7 - 5(|b:2| - \frac{d}{dX}\overset{7}{T}_a(b))/(b-a)^6$$

$$+ (|b:3| - \frac{d^2}{dX^2}\overset{7}{T}_a(b))/(b-a)^5.$$

VI.7 - <u>Etude du polynôme qui en 2 points a,b prend des valeurs données ainsi que k de ses dérivées</u>

Soient les 2 points a,b et en a et b la donnée de $T_a = (T^0_a, \ldots, T^k_a)$ et de $T_b = (T^0_b, \ldots, T^k_b)$. Il existe un polynôme unique $Q_{a,b,T}$ de degré 2k+2 tel que

$$\frac{d^i}{dX^i} Q(a) = T^i_a \text{ et } \frac{d^i}{dX^i} Q(b) = T^i_b \qquad 0 \le i \le k.$$

La formule de Newton permet d'écrire

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{k+1} [a:i](T)(x-a)^{i-1} + \sum_{i=1}^{k+1} [a:k+1,b:i](T)(x-a)^{k+1}(x-b)^{i-1}$$

Posons $P(x) = \sum_{i=1}^{k+1} [a:i](T)(x-a)^{i-1}$

$$R(x) = \left(\sum_{i=1}^{k+1} [a:k+1,b:i](x-b)^{i-1}\right)(x-a)^{k+1}$$

remarquons que P est le polynôme de Taylor à l'ordre k en a.

En utilisant les relations VI.5 on peut exprimer R(x) en fonction uniquement des différences divisées à arguments répétés a et b d'ordre k.

VI.7 $$R(x) = \sum_{i=0}^{k} \frac{(x-a)^{k+1}(x-b)^{i}}{(b-a)^{i+1}} \sum_{j=0}^{i+1} (-1)^{j} \binom{i+1}{j} [a:k+1-j,b:j](T)$$

En utilisant les formules VI.6 et en tenant compte du fait que $\sum_{j=0}^{i+1} (-1)^{j} \binom{i+1}{j} = 0$ si $i \geq 0$. Nous avons :

VI.7.1 $$R(x) = \sum_{i=0}^{k} \frac{(x-a)^{k+1}(x-b)^{i}}{(b-a)^{k+1}} \sum_{j=0}^{i+1} (-1)^{j} \binom{i+1}{j} \sum_{\ell=1}^{j} \alpha_{k,j}^{\ell} \left([b:\ell] - \frac{1}{(\ell-1)!} \frac{d^{\ell-1}}{dx^{\ell-1}} T_a^k(b)\right)/(b-a)^{k+1-\ell}$$

Nous voulons aussi estimer les dérivées de Q(x). Nous avons $P^{h}(x) = \sum_{i=h+1}^{k+1} (i-1)\ldots(i-h)[a:i](T)(x-a)^{i-1-h}$ pour le calcul de $R^{h}(x)$ remarquons que nous devons calculer $\frac{d^h}{dx^h}((x-a)^{k+1}(x-b)^{i})$. En utilisant la formule de Leibnitz et les dérivées successives de $(x-a)^{k+1}$ et $(x-b)^{i}$ nous obtenons :

$$\frac{d^h}{dx^h}((x-a)^{k+1}(x-b)^{i}) = \sum_{\ell=0}^{\inf(i,h)} \beta_{i,h,\ell}(x-a)^{k+1+\ell-h}(x-b)^{i-\ell}$$

où $\beta_{i,h,\ell}$ sont des nombres entiers, dont on pourrait donner l'expression exacte.

En dérivant h fois R(x) et en reportant cette dernière expression dans ces dérivées nous avons :

VI.8 $$R^h(x) = \sum_{i=0}^{k} [a:k+1,b:i+1](T) \sum_{\ell=0}^{\inf(i,h)} \beta_{i,h,\ell}(x-a)^{k+1+\ell-h}(x-b)^{i-\ell}$$

En dérivant la formume VI.7.1 et en permutant les sommations de j et de ℓ, nous obtenons

VI.8.1 $$R^h(x)= \sum_{i=0}^{k} \Big(\sum_{\ell=0}^{\inf(i,h)} \beta_{i,h,\ell} \frac{(x-a)^{k+1+\ell-h}(x-b)^{i-\ell}}{(b-a)^{i+1}}\Big) \times$$

$$\Big(\sum_{\ell=1}^{i+1} \Big(\sum_{j=\ell}^{i+1} (-1)^j \binom{i+1}{j} \alpha^{\ell}_{k,j}\Big)\Big([b:\ell] - \frac{1}{(\ell-1)!} \frac{d^{\ell-1}}{dx^{\ell-1}} \overset{k}{T}_a(b)\Big)/(b-a)^{k+1-\ell}\Big)$$

VI.9 - *Proposition*

Soient en deux points a *et* b *la donnée de* $\overset{k}{T}_a$ *et* $\overset{k}{T}_b$. *On suppose de plus que* w *est un module de continuité tel que l'on ait la propriété II du théorème de Whitney pour le champ de Taylor* T *d'ordre* k *défini sur les deux points* a *et* b, *alors il existe une constante* M *ne dépendant que de* k *telle que le polynôme* $Q_{a,b,T}$ *admette* Mw *comme module de continuité de la dérivée kème sur l'intervalle* $[a,b]$.

Notons Q pour $Q_{a,b,T}$. Sur l'intervalle $[a,b]$ nous avons $Q^k(x')-Q^k(x) = (x-x')Q^{k+1}(\xi)$ avec $a \leq x \leq \xi \leq x' \leq b$. Utilisant la formule VI.8.1, nous avons

$$R^{k+1}(x) = \sum_{i=0}^{k} \Big(\sum_{\ell=0}^{i} \beta_{i,k+1,\ell} \frac{(x-a)^{\ell}(x-b)^{i-\ell}}{(b-a)^{i+1}}\Big) \times$$

$$\Big(\sum_{\ell=1}^{i+1} \Big(\sum_{j=\ell}^{i+1} (-1)^j \binom{i+1}{j} \alpha^{\ell}_{k,j}\Big)\Big([b:\ell] - \frac{1}{(\ell-1)!} \overset{k}{T}_a(b)\Big)/(b-a)^{k+1-\ell}\Big)$$

et ici $Q^{k+1}(x) = R^{k+1}(x)$.

Nous avons si $x \in [a,b]$ $\left|\frac{(x-a)^{\ell}(x-b)^{i-\ell}}{(b-a)^{i+1}}\right| \leq \frac{1}{(b-a)}$

d'après la condition II sur $\overset{k}{T}$:

$$\left|[b:\ell] - \frac{1}{(\ell-1)!}\frac{d^{\ell-1}}{dx^{\ell-1}}\overset{k}{T}_a(b)\right| \leq (b-a)^{k-\ell+1} w(|b-a|)$$

En conséquence :

$$|Q^{k+1}(x)| \leq \sum_{i=0}^{k}\left(\sum_{\ell=0}^{i}\beta_{i,k+1,\ell}\right)\left(\sum_{\ell=1}^{i+1}\left|\sum_{j=\ell}^{i+1}(-1)^j\binom{i+1}{j}\alpha^{\ell}_{k,j}\right|\right)\frac{w(|b-a|)}{|b-a|}$$

d'où

$$|Q^{k+1}(x)| \leq M\,\frac{w(|b-a|)}{|b-a|}$$

où M dépend de k mais pas de $[a,b]$

$$|Q^{k}(x')-Q^{k}(x)| \leq M\,\frac{|x-x'|\,w(|b-a|)}{|b-a|}$$

Or w est concave et nous avons $\frac{w(|b-a|)}{|b-a|} \leq \frac{w(|x-x'|)}{|x-x'|}$ si $|x-x'| \leq |b-a|$ d'où le résultat

$$|Q^{k}(x')-Q^{k}(x)| \leq Mw(|x-x'|)$$

c.q.f.d.

VI.10 - *Proposition*

$\eta > 0$ *et* $A > 0$ *avec* $\eta > A$ *alors pour tout* $\varepsilon_o > 0,\dots,\varepsilon_k > 0$ *, il existe* $\xi_o > 0,\dots,\xi_k > 0$ *tel que si* $\overset{k}{T}_a$ *et* $\overset{k}{T}_b$ *sont données en 2 points* a *et* b *avec* $|b-a| < A$ *et* $|T^j_a| \leq \xi_j$, $|T^j_b| \leq \xi_j$ *pour* $0 \leq j \leq k$ *alors*
$\sup_{x\in[a,b]} |Q^j_{a,b,T}(x)| \leq \varepsilon_j \quad 0 \leq j \leq k.$

Posons $Q^{(j)}_{a,b,T} = P^j(x)+R^j(x)$.

Nous avons $\quad P^j(x) = \sum_{i=j}^{k} i(i-1)\dots(i-j+1)[a:i+1](x-a)^{i-j}$

donc

$$|P^j(x)| \le \sum_{i=j}^{k} i(i-1)\dots(i-j+1)|a:i+1|A^{i-j}$$

si

$$[a:i+1] \le \varepsilon^j/(2(k-j+1)i\dots(i-j+1) \text{ alors } |P^j(x)| \le \varepsilon/2$$

Comme $[a:i+1] = \frac{T_a^i}{i!}$ alors nous avons une première série de valeur pour $\xi_o,\dots,\xi_k$.

Pour $R^j(x)$ nous avons la formule VI.8.1

$$\left|\sum_{\ell=0}^{\inf(i,j)} \beta_{i,j,\ell} \frac{(x-a)^{k+1+\ell-j}(x-b)^{i-\ell}}{(b-a)^{i+1}}\right| \le M_{i,j,k}(b-a)^{k-j} \le M_{i,j,k}A^{k-j}$$

$M_{i,j,k}$ ne dépendant que de i,j,k.

$([b:\ell]-\frac{1}{(\ell-1)!}\frac{d^{\ell-1}}{dx^{\ell-1}}T_a^k(b))$ s'exprime comme combinaison linéaire de T_b de $T_a^{k-\ell+1},\dots,T_a^k)$ en prenant ces termes assez petits on peut donc rendre l'expression aussi petite que l'on veut, soit μ_ℓ ; ainsi

$$|R^j(x)| \le \sum_{i=0}^{k} M_{i,j,k}A^{k-j}\sum_{\ell=1}^{i+1}|\Sigma(-1)^j\binom{i+1}{j}\alpha^\ell_{k,j}|\mu_\ell/\eta^{k+1-\ell}$$

On peut choisir μ_ℓ assez petit pour que $|R^j(x)| \le \varepsilon^j/2$. De là on déduit un choix de $\xi_o,\dots,\xi_k$. En prenant le plus petit des choix de $\xi_o,\dots,\xi_k$ on obtient :

$$|P^j(x)| \le \varepsilon^j/2 \text{ et } |R^j(x)| \le \varepsilon^j/2 \quad \text{donc} \quad |Q^j(x)| \le \varepsilon^j.$$

c.q.f.d.

VI.11 - La proposition VI.9 indique que le procédé d'interpolation 2-Hermite par polynôme de degré 2k+1 vérifie la condition D1.

La proposition VI.10, associée à la linéarité de ce procédé d'interpolation par rapport à T, permet en retranchant $Q_{\alpha,\beta,T}$ de se ramener au cas où l'on considère une famille de champs qui en a et b sont voisins du champ zéro et de vérifier ainsi la condition D2.

VI.12 - *Proposition*

Le procédé d'interpolation 2-Hermite par polynôme de degré 2k+1 *vérifie la condition D3.*

$Q_{a,b,T}(x) = P_{a,b,T}(x)+R_{a,b,T}(x)$. Remarquons que $P_{a,b,T}(x)$ est l'extrapolant selon Ψ du champ a, T_a. Nous avons ainsi la condition E3 qui est vérifiée, alors si $R_{a,b,T}$ vérifie D3 on aura aussi $Q_{a,b,T}$ qui vérifie D3.

D'après la formule VI.8.1 nous avons

$$R^h(x) = \sum_{i=0}^{k} u_i(x,a,b)v_i(a,b,T).$$

Si nous montrons la continuité uniforme de l'application $a,b,T \to R^h(x) \in \mathcal{C}|a,b|$ pour $0 \le h \le k$, alors nous avons la continuité uniforme pour $R(x) \in \mathcal{C}^k$. Donc la condition D3

$$R^h(x)-\tilde{R}^h(x) = \sum_{i=0}^{k} (u_i(x,a,b)v_i(a,b,T))-(u_i(x,\tilde{a},\tilde{b})v_i(\tilde{a},\tilde{b},\tilde{T}))$$

$$= \sum_{i=0}^{k} (u_i(x,a,b)-u_i(x,\tilde{a},\tilde{b}))v_i(a,b,T)$$

$$+ \sum_{i=0}^{k} u_i(x,\tilde{a},\tilde{b})(v_i(a,b,T)-v_i(\tilde{a},\tilde{b},\tilde{T}))$$

Pour montrer que $a,b,T \to R^h(x)$ est uniformément continue, il nous suffit de montrer que u_i et v_i sont bornés si $x \in |-A,+A|$ et que u_i et v_i sont uniformément continues lorsque $\eta \le |a-b| \le A$.

$$u_i = \sum_{\ell=0}^{i} \beta_{i,k+1,\ell} \frac{(x-a)^{\ell}(x-b)^{i-\ell}}{(b-a)^{i+1}}$$

comme (x-a) et (x-b) sont bornés et que $|b-a| \ge \eta > 0$ alors u_i est bien borné, v_i est combinaison linéaire de terme

$$\left([b:\ell] - \frac{1}{(\ell-1)!}\overset{k}{T}_a(b)\right)/(b-a)^{k+1-\ell}$$

comme T_a^j et T_b^j sont bornés (hypothèse de D3) et $|b-a| \geq \eta$ alors cette expression est bornée et par conséquent v_i.

Nous avons l'application $(a,b) \rightarrow \dfrac{(x-a)^\ell (x-b)^{i-\ell}}{(b-a)^{i+1}}$ qui est bien uniformément continue dans $C^k[-A,+A]$ si $|b-a| \geq \eta$. Il en est donc de même pour u_i combinaison linéaire de terme de ce type.

L'application $(a,b,T_a,T_b) \rightarrow \left([b:\ell] - \frac{1}{(\ell-1)!} T_a^k(b)\right)/(b-a)^{k+1-\ell} \in \mathbb{R}$ est uniformément continue puisque $(b-a) \geq \eta$ et que le numérateur est combinaison linéaire de T_a et T_b, les coefficients étant du type $(b-a)^i$. Ainsi $a,b,T_a,T_b \rightarrow v_i \in C^k[-A,A]$ est uniformément continue.

La condition D3 est ainsi vérifiée.

c.q.f.d.

VI.13 - Application aux prolongements de champ de Taylor

Les procédés d'extrapolation Ψ et d'interpolation Φ basés sur des polynômes vérifie les propriétés E1, E2, E3, D1, D2, D3. Nous pouvons donc considérer ayant un champ de Taylor T,le Φ-Ψ prolongement défini dans 3, φ sera ainsi un polynôme de degré au plus 2k+1 sur les intervalles composant $\complement F_{]a,b[}$. D'après la proposition III.3 nous avons $\varphi \in C^k[a,b]$. Nous pouvons aussi appliquer les paragraphes IV et V et nous avons ainsi les résultats de ces paragraphes valables en particulier : si T_n est une suite de champ convergeant vers T au sens de VI.1 et vérifiant le condition C, alors nous avons la suite des prolongements par le procédé Φ-Ψ (polynômes par morceaux où T_n n'est pas défini) convergeant dans $C^k[a,b]$ vers le prolongement suivant Φ-Ψ de T.

Remarquons que si α,β,T_α, T_β sont donnés, le polynôme de degré 2k+1 interpolant sur $[\alpha,\beta]$ T_α, T_β minimise la fonction semi-hilbertienne $h(u) = \int_a^b (u^{k+1})^2 dt$; et apparait ainsi comme une fonction spline d'Hermite.
Si X_n est formé d'un nombre fini de points alors φ_n est la fonction spline d'Hermite minimisant h(u). Si le champ T est la restriction à X d'une fonction de H^{k+1}, alors nous avons ainsi une convergence des fonctions spline φ_n vers la fonction spline φ prolongeant T au sens de $C^k[a,b]$. Par contre si le champ (X,T) ne provient pas d'une fonction appartenant à $H^{k+1}[a,b]$, alors l'ensemble des interpolants de X,T n'appartient plus à domh et le prolongement φ n'apparait plus comme minimisant h(u), cependant sur chaque intervalle n'appartenant pas à F, φ est encore un polynôme de degré au plus 2k+1. Si nous approchons alors X,T par des champs X_n,T_n qui proviennent de la restriction d'une fonction de H^k, alors le prolongement φ_n est une fonction spline d'Hermite, et le théorème V.6 nous donne la convergence d'une suite de fonctions spline d'Hermite dans $H^{k+1}[a,b]$ la fonction limite n'appartenant pas à $H^{k+1}[a,b]$. Cependant ce résultat peut être intéressant pour l'interpolation de fonction de $C^k|a,b|$ par des fonctions splines d'Hermite. Ce sera le cas si X_n est formé d'un nombre fini de points et T_n la restriction de T à X_n, nous avons alors l'interpolation sur un nombre fini de points d'un champ de Taylor, et le résultat précédent nous donne la convergence dans $C^k|a,b|$ de ces interpolants.

CHAPITRE VI

PROCEDE D'INTERPOLATION PAR UNE FONCTION DE CLASSE C^k

Whitney [1934] a donné une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction f définie sur un fermé $F \subset [a,b]$ soit prolongeable en une fonction de classe C^k. Pour démontrer ce théorème il introduit les Q-projections qui associe un champ de Taylor d'ordre k sur F. Au § 2, nous montrons que l'hypothèse F n'est pas nécessaire pour le théorème de Whitney.

Nous définissons la notion de procédé associant à une fonction f définie sur F un champ de Taylor, puis en effectuant un Φ-Ψ prolongement comme au chapitre V, nous obtenons un procédé d'interpolation de f par une fonction de classe C^k. Ce cadre contient le cas des Q-projections.

Nous définissons une notion de convergence sur l'ensemble des fonctions définie sur des sous-ensembles de $[a,b]$. Puis dans le cas associé au Q-projections nous obtenons ainsi des résultats de convergence dans $C^k[a,b]$ de la suite des interpolar lorsque la suite (f_n,F_n) converge. Ces résultats de convergence dans $C^k[a,b]$ permettent de voir que ce procédé d'interpolation donnera des résultats satisfaisants pou l'estimation de dérivées jusqu'à l'ordre k à partir de la donnée de la fonction sur certains points.

I - NOTATIONS ET CONDITIONS SUR UNE FONCTION DEFINIE SUR UN SOUS-ENSEMBLE D'UN INTERVALLE $[a,b]$.

I.1 - Soit k un entier positif, $[a,b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$. Posons $A = \{a_o,\dots,a_k\}$, $B = \{b_o,\dots,b_k\}$ où $a_o,\dots,a_k$, $b_o,\dots,b_k$ sont des éléments de $[a,b]$.

Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur un sous-ensemble F de $[a,b]$. Supposons $A \subset F$, alors nous pouvons considérer la différence divisée kème de f sur les points de A soit $|A|(f) = [a_o,\dots,a_k](f)$, dans la suite, s'il n'y a pas d'ambiguité sur la fonction f nous noterons $|A|$ pour $|A|(f)$.

Si A contient les éléments répétés plusieurs fois ($a_i = a_j = \dots$) alors nous ne pouvons plus définir $|A|(f)$. Nous pouvons généraliser par des différences divisées à arguments répétés, que nous pourrons définir, si au point a_i répété p_i fois nous avons p_i fonctions $f(a_i)$, $f_1(a_i),\dots,f_{p_i-1}(a_i)$. Ainsi si nous avons sur un sous-ensemble $F \subset [a,b]$ en chaque point a, p_a nombres $f(a),\dots,f_{p-1}(a)$, cette donnée étant notée $\bar{f}$, nous définissons $|A|(f)$ comme une différence divisée à arguments répétés a_i au plus p_{a_i} fois.

1.2 - Distance sur les sous-ensembles à k+1 éléments de $[a,b]$

A et B étant de tels ensembles, posons $d(A,B) = \inf\limits_{\sigma\in S} \sum\limits_{i=0}^{k} |a_i - b_{\sigma(i)}|$, où S désigne l'ensemble des permutations de $0,\dots,k$.
Alors $d(A,B)$ définit une distance sur l'ensemble des sous-ensembles de k+1 éléments de $[a,b]$. Si $a'_o,\dots,a'_k$ (resp. $b'_o,\dots,b'_k$) désignent les points de A (resp. B) rangés dans l'ordre croissant nous avons $d(A,B) = \sum\limits_{i=0}^{k} a'_i - b'_i$. Cette notion de distance est aussi défini si dans A et B certains éléments sont répétés.

Si $A \subset [a,b]$, posons $\delta(A) = \sup\limits_{\alpha,\beta\subset A} |\alpha-\beta|$ c'est le diamètre de A.
Nous avons l'inégalité $d(A,B) \leq k+1\ \delta(A \cup B)$.

On dit que A_n converge vers A , si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe N, tel que si $n \geq N$ alors $|a_i^n - a_i| \leq \varepsilon$. Soient A_n et B_n deux suites convergeant vers A et B alors nous avons $\lim d(A_n, B_n) = d(A,B)$. En effet $d(A_n, B_n) = \inf \sum_{i=1}^{n} |a_i^n - b_i^n|$ or si $n > N$ $\Sigma |a_i^n - b_i^n| \leq \Sigma |a_i - b_i| + 2(k+1)\varepsilon$ car $|a_i^n - b_i^n| \leq |a-b| + 2\varepsilon$.

1.3 - Condition I_k et W_k

Soit f une fonction définie sur $F \subset [a,b]$ nous allons énoncer différentes conditions sur f et étudier les relations entre elles.

Condition I_k

On dit qu'une fonction f *vérifie* I_k *sur* F *si pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* $\delta > 0$ *tel que pour tout couple d'ensemble* A,B *de* k+1 *éléments de* $[a,b]$ *vérifiant* $\delta(A \cup B) \leq \delta$ *on ait* $|[A](f) - [B](f)| \leq \varepsilon$.

Nous pouvons exprimer I_k en disant qu'il existe un module de continuité w tel que

$$|[A](f) - [B](f)| \leq w(d(\delta(A \cup B)).$$

Condition W_k

On dit qu'une fonction f *vérifie les conditions* W_k *sur* F *si pour tout* $\varepsilon > 0$ *il existe* $\gamma > 0$ *tel que pour tout couple d'ensembles* (A,B) *de* k+1 *éléments de* F *vérifiant* $d(A,B) \leq \gamma$ *on ait* $|[A](f) - [B](f)| \leq \varepsilon$.

De même on peut exprimer W_k par l'existence d'un mod le de continuité w tel que $||A|(f) - |B|(f)| \leq w(d(A,B))$.

Pour k = 0 nous avons $d(a_o, b_o) = \delta(\{a_o\} \cup \{b_o\}) = |b_o - a_o|$, les conditions I_o et W_o coïncident et indiquent que si $|a_o - b_o| \leq \delta$ alors $|f(a_o) - f(b_o)| \leq \varepsilon$ pour a_o et b_o dans domf, il s'agit de la condition de Tietze Uriysohn nécessaire et suffisante pour le prolongement de f par une fonction continue.

Comme $d(A,B) \leq (k+1)\delta(A \cup B)$ en prenant $\delta = \gamma/(k+1)$ on s'assure que si la condition W_k est vérifiée pour f alors la condition I_k est aussi vérifiée pour f. Par contre $d(A,B)$ peut devenir infiniment petit sans que $\delta(A \cup B)$ le devienne.

I.4 - Forme affaiblie des conditions I_k et W_k

Nous dirons que f vérifie W'_k (resp. I'_k) si dans la définition de W^k (resp. I_k), on ne considère que les couples (A,B) où A et B ont k éléments en commun et $d(A,B) \leq \gamma$ (resp. $\delta(A \cup B) \leq \delta$).

Comme on diminue l'ensemble pour lequel on doit avoir $|[A](f)-[B](f)| \leq \varepsilon$, les conditions W'_k (resp. I'_k) sont plus faibles que les conditions W_k (resp. I_k).

Inversement, voyons que W'_k (resp. I'_k) entraînent W_k (resp. I_k). En effet :

$$[a_o,\ldots,a_k]-[b_o,\ldots,b_k]=\sum_{i=0}^{k}[b_o,\ldots,b_{i-1},a_i,\ldots,a_k]-[b_o,\ldots,b_i,a_{i+1},\ldots,a_k]$$

Soit $\varepsilon/(k+1)$ on associe par W'_k, γ supposons $d(A,B) \leq \gamma$ alors $|a_i-b_i| \leq \gamma$ et ainsi $|[b_o,\ldots,b_{i-1},a_i,\ldots,a_k]-[b_o,\ldots,b_i,a_{i+1},\ldots,a_k]| \leq \varepsilon/(k+1)$, donc $|[a_o,\ldots,a_k]-[b_o,\ldots,b_k]| \leq \varepsilon$ et W_k est vraie (de même pour I_k). Ainsi les conditions W'_k (resp. I'_k) sont équivalentes aux conditions W_k (resp. I_k).

I.5 - *Proposition*

Si une fonction f *définie sur* F *vérifie la condition* W_k *(resp.* I_k *) alors elle vérifie aussi les conditions* W_p *(resp.* I_p *) pour* $0 \leq p \leq k$.

Nous ne ferons la démonstration que pour W_k, pour I_k la démonstration étant analogue.

Par récurrence descendante il suffit de montrer que W_p entraîne W_{p-1}. Nous raisonnons par l'absurde en montrant que (non W'_{p-1}) entraîne (non W'_p). (non W'_{p-1}) signifie qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\eta > 0$ il existe $a_o < a_1 <\ldots< a_{p-1}$

et b_i $(a_{i-1} < b_i < a_{i+1})$ avec $|[a_o,\dots,a_{p-1}]-[a_o,\dots,a_{i-1},b_i,a_{i+1},\dots,a_{p-1}]| > \varepsilon$, et $d(\{a_o,\dots,a_{p-1}\},\{a_o,\dots,b_i,\dots,a_{p-1}\}) \leq \eta$ (c'est-à-dire $|a_i-b_i| \leq \eta$).

Considérons une suite η_n convergeant en décroissant vers 0. On peut lui associer p+1 suites $a_o^n,\dots,a_{p-1}^n,b_{i(n)}^n$. Remarquons que dans la suite $b_{i(n)}^n$, l'indice i peut varier avec n. En extrayant une sous-suite de $b_{i(n)}^n$ et en renumérotant les éléments selon N, nous pouvons supposer que l'on a les suites $a_o^n,\dots,a_{p-1}^n,b_i^n$ (i ne dépend pas de n). Les suites $a_o^n,\dots,a_{p-1}^n,b_i^n$ étant dans $[a,b]$ elles admettent des points d'accumulation. Comme le nombre de ces suites est fini, on peut extraire une sous-suite j(n) de N de façon que les suites $a_o^{j(n)},\dots,a_{p-1}^{j(n)}$, $b_i^{j(n)}$ convergent vers des limites $a_o,\dots,a_{p-1},b_i$. Comme $a_o^n <\dots< a_{p-1}^n$ et $a_{i-1}^n < b_i^n < a_{i+1}^n$ nous avons $a_o \leq\dots\leq a_{p-1}$ et $a_{i-1} \leq b_i \leq a_{i+1}$. De $d(A^n,B^n) \leq \eta_n$, η_n convergeant vers 0 avec n vers l'infini, nous déduisons que $d(A,B) = \lim d(A^n,B^n) = 0$, donc nous aurons $a_i = b_i$ comme $B = \{a_o,\dots,a_{i-1},b_i,a_{i+1},\dots,a_p\}$.

Soit $\eta > 0$ nous pouvons choisir n tel que $|a_i^n-b_i^n| \leq \eta$ et $||a_o^n,\dots,a_{p-1}^n]-[a_o^n,\dots,b_i^n,\dots,a_{p-1}^n|| > \varepsilon$ Or $[a_o^n,\dots,a_{p-1}^n,b_i^n] = ([a_o^n,\dots,a_{p-1}^n]-[a_o^n,\dots,b_i^n,\dots,a_{p-1}^n])/(a_i^n-b_i^n)$ et ainsi $[a_o^n,\dots,a_{p-1}^n,b_i^n] > \varepsilon/\eta$.

Choisissons $\xi > 0$ tel que $[a_o^n,\dots,a_{p-1}^n,b_i^n] < \varepsilon/\xi-\varepsilon$; à ξ associons m tel que $|a_i^m-b_i^m| < \xi$, nous obtenons ainsi $|[a_o^m,\dots,a_{p-1}^m,b_i^m]| > \varepsilon/\xi$ et $|[a_o^m,\dots,a_{p-1}^m,b_i^m]-[a_o^n,\dots,a_{p-1}^n,b_i^n]| > \varepsilon$.

Si dans les choix précédents nous imposons ce qui est possible, que quel que soit j $(0 \leq j \leq p-1)$ on ait

$$|a_j^n-a_j| \leq \eta/2(p+1) \quad \text{et} \quad |a_j^m-a_j| \leq \eta/2(p+1)$$

$$|b_i^n-b_i| \leq \eta/2(p+1) \quad \text{et} \quad |b_i^m-b_i| \leq \eta/2(p+1)$$

alors en prenant $A = \{a_o^n,\dots,a_{p-1}^n,b_i^n\}$ et $B = \{a_o^m,\dots,a_{p-1}^m,b_i^m\}$ nous avons $d(A,B) \leq \eta$ et $|[A]-[B]| > \varepsilon$ ce qui prouve que W'_p n'est pas vérifiée.

c.q.f.d.

I.6 - *Proposition*

Si une fonction f *vérifie sur* F *la condition I.1 alors elle vérifie la condition W1 sur* F.

I.1 étant vérifiée nous montrons W1, c'est-à-dire que $\varepsilon > 0$ étant donnée nous associons $\gamma > 0$ tel que si A,B vérifient $d(A,B) < \gamma$ on a $|[A](f)-[B](f)| \leq \varepsilon$. Ici $A = \{a_o,a_1\}$, $B = \{b_o,b_1\}$, $[A](f) = (f(a_o)-f(a_1))/(a_o-a_1)$ et $[B](f) = (f(b_o)-f(b_1))/(b_o-b_1)$.

$\varepsilon > 0$ étant donné, par la condition I1 on associe δ, nous avons à choisir γ, imposons d'abord $\gamma \leq \delta/4$. Alors si $|a_o-a_1| \leq 3\delta/4$ et si $d(A,B) \leq \gamma \leq \delta/4$ on a $\delta(A \cup B) \leq \delta$ et ainsi $|[A]-[B]| \leq \varepsilon$.

Maintenant considérons le cas $|a_o-a_1| \geq 3\delta/4$ alors nous avons si $d(A,B) \leq \gamma$ $|b_o-b_1| \geq \delta/2$. Supposons $a_o < a$, $b_o < b_1$ et posons $c_o = a_o-b_o$, $c_1 = a_1-b_1$, $g_o = f(a_o)-f(b_o)$, $g_1 = f(a_1)-f(b_1)$

$$|[\ ](f)-[\ ](f)| = \left|\frac{(b_o-b_1)(f(a_o)-f(a_1))-(a_o-a_1)(f(b_o)-f(b_1))}{(a_o-a_1)(b_o-b_1)}\right|$$

$$= \left|\frac{(c_1-c_o)(f(a_o)-f(a_1))-(a_o-a_1)(g_o-g_1)}{(a_o-a_1)(b_o-b_1)}\right|$$

On sait que f est borné sur F, en effet, I1 entraîne I.0 donc f se prolonge par continuité sur $[a,b]$ compact et ainsi $|f(a_o)-f(a_1)| \leq 2M$.
On a $|a_o-a_1||b_o-b_1| \geq 3\delta^2/8$ et si on prend

$$|c_o| \text{ et } |c_1| \leq \frac{3\delta^2\varepsilon}{32M} \text{ alors } \left|\frac{(c_1-c_o)(f(a_o)-f(a_1))}{(a_o-a_1)(b_o-b_1)}\right| \leq \varepsilon/2$$

Le choix de $\gamma \leq \frac{3\delta^2\varepsilon}{32M}$ entraîne $|c_1|$ et $|c_o| \leq \frac{3\delta^2\varepsilon}{32M}$.
A $\varepsilon' = \frac{\delta\varepsilon}{8}$ on associe $\delta' > 0$ par $\delta' > 0$ ainsi si $|a_o-b_o| \leq \delta'$ et $|a_1-b_1| \leq \delta'$ alors g_o et $g_1 \leq \frac{\delta\varepsilon}{8}$

et $\quad \left| \dfrac{(g_1-g_o)(a_1-a_o)}{(b_1-b_o)(a_1-a_o)} \right| = \left| \dfrac{g_1-g_o}{b_1-b_o} \right| \leq \varepsilon/2.$

Ainsi si à $\varepsilon > 0$ on associe $\gamma = \inf(\frac{3\delta^2\varepsilon}{32M}, \delta', \delta/4)$ nous avons si $d(A,B) \leq \gamma$, $|[A](f)-[B](f)| \leq \varepsilon$.

c.q.f.d.

Cette démonstration ne se généralise pas lorsque l'on remplace 1 par un entier quelconque k, car on peut avoir $\sup\limits_{0\leq i\leq j\leq p} |a_i-a_j| < \delta$ et avoir certains $|a_i-a_j|$ aussi petit que l'on veut, les majorations des dénominateurs ne seraient plus valables dans le cas où $\delta(A \cup B) \geq 3\delta/4$.

Nous allons dans les deux propositions suivantes donner des résultats lorsqu'une suite A_n d'ensemble de k+1 points converge, au sens de $d(A,B)$, vers un ensemble A pouvant avoir des points répétés.

1.7 - *Proposition*

Soit un point $x \in X$ *qui soit un point d'accumulation de* X, *alors si* f *vérifie la condition* W_k *ou* I_k *sur* f, *soit* A_n^j *une suite de partie de* j+1 *points de* X *tel que les points de* A_n *convergent vers* x, *alors* $[A_n^j](f)$ *converge vers un nombre noté* f_x^j.

Soit $\varepsilon > 0$ et choisissons m et $n \geq N$ alors nous avons $|x-x_i^n|$ et $|x-x_i^m| \leq \varepsilon$ donc $d(A_n^j, A_m^j) \leq 2(k+1)\varepsilon$ et $\delta(A_n^j \cup A_m^j) \leq 2\varepsilon$, comme nous avons W^j on a I^j vérifiée alors $|[A_n^j](f)-[A_m^j](f)| \leq w(\varepsilon)$ et ainsi $[A_n](f)$ est une suite de Cauchy. Elle admet une limite f_x^j.

c.q.f.d.

I.8 - *Proposition*

Soit $[A] = [a_o,\ldots,a_p,x,\ldots,x]$ *le point* x *étant un point d'accumulation de* X *répété* k+1 *fois. Soit* A_n *une suite d'ensemble de* k+1 *points distincts, avec* $\lim\limits_{n\to\infty} d(A_n,A) = 0$ *, alors* $[A](f) = \lim\limits_{n\to\infty}[A_n](f)$.
($[A](f)$ *désigne la différence divisée à arguments répétés construit avec* f *et* f_x^j*).*

Si A est formé uniquement de x alors $[A](f) = f_x^j$ et nous avons la proposition précédente qui donne le résultat. Raisonnons par récurrence sur j, nous avons

$$[A](f) = ([a_o,\ldots,a_p,x,\ldots,x](f)-[a_1,\ldots,a_p,x,\ldots,x](f))/(x-a_o)$$

les deux différences divisées étant d'ordre j-1, nous avons la convergence de $[a_o^n,\ldots,a_p^n,\ldots,a_{j-1}^n](f)$ et $[a_1^n,\ldots,a_p^n,\ldots,a_j^n](f)$ vers elles et comme $(x-a_o)$ est différent de zéro nous avons aussi la convergence de $[A_n](f)$ vers $[A](f)$.

1.9 - *Corollaire*

Dans les énoncés des conditions I_k *et* W_k *on peut prendre les ensembles* A *et* B *ayant un point répété plusieurs fois, si c'est un point d'accumulation de* X. *On a les mêmes inégalités avec le module de continuité* w.

Démontrons ce corollaire pour W_k (pour I_k la démonstration serait analogue.) Si A et B ont des arguments répetés $\eta > 0$ étant donné, on peut choisir A_n et B_n avec A_n et B_n éléments distincts tels que $d(A,A_n) \leq \eta$, $d(B,B_n) \leq \eta$. ε étant donné on pourra choisir, grâce à la proposition précédente, η tel que

$$|[A](f)-[A_n](f)| \leq \varepsilon \text{ et } |[B](f)-[B_n](f)| \leq \varepsilon.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}|[A](f)-[B](f)| &\leq |[A](f)-[A_n](f)|+|[B](f)-[B_n](f)+|[A_n](f)-[B_n](f)| \\ &\leq 2\varepsilon+w(d(A_n,B_n)) \\ &\leq 2\varepsilon+w(d(A,B))+w(d(A,A_n)+w(d(B,B_n).\end{aligned}$$

Cette inégalité étant valable quel que soit ε, et $d(A,A_n)$ et $d(B,B_n)$ on a ainsi $|[A](f)-[B](f)| \leq w(d(A,B))$.

c.q.f.d.

II - THEOREME DE WHITNEY INDIQUANT UNE CONDITION POUR QU'UNE FONCTION f DEFINIE SUR UN SOUS ENSEMBLE DE $[a,b]$ SOIT PROLONGEABLE PAR UNE FONCTION $C^k[a,b]$

II.1 - *Théorème de Whitney*

Soit F *un fermé de l'intervalle* $[a,b]$ f *une fonction définie sur* F *une condition nécessaire et suffisante pour que* f *puisse être prolongée en une fonction de classe* $C^k[a,b]$ *est qu'il existe un module de continuité* w *tel que pour tout couple A, B de* k+1 *points de* F *on ait*
$|[A](f)-[B](f)| \leq w(d(A,B))$.

La condition ci-dessus est la condition W_k exprimée en terme de modules de continuité. Ce théorème a été démontré par Whitney [1934], Merrien [1966] en a donné une présentation plus claire.

La condition nécessaire ne pose pas de difficultés particulières, voir Merrien (1966), prop. 2.1 et lemme 3.1. Nous allons rappeler le schéma de la démonstration de la condition suffisante.

II.2 - Construction d'un champ de Taylor T associé à f sur F.

i) Si x est un point d'accumulation de F, on définit T_i

$$T_i = \lim_{\substack{x_1 \to x \\ \cdots \\ x_n \to x}} [x,x_1,\ldots,x_i](f) \quad \text{et } x_1,\ldots,x_i \in F.$$

La condition W_k entraînant la condition W_i pour $i \leq k$, alors on vérifie aisément que cette limite existe.

ii) Construction des Q-projections de Whitney, dans le cas où x n'est pas un point d'accumulation de F. On associe à x un ensemble Q(x) de k+1 points $Q(x) = \{x,x_1,\ldots,x_k\}$, cet ensemble se définit par récurrence. Supposons connu $x,x_1,\ldots,x_\ell$ ces points sont dans un intervalle $[x',x'']$ où l'une des 2 extrémités est x_ℓ et l'autre x_i ; on choisit pour $x_{\ell+1}$ le point le plus proche de x' ou x" parmi les points de F non déjà pris, si x_ℓ est un point d'accumulation on choisit $x_{\ell+1} = x_\ell$, s'il y avait deux points à égale distance respectivement de x' et x'' on choisirait l'un de ces deux points, par exemple celui le plus à gauche.

Sur $Q(x)$ on construit le polynôme P de Lagrange de degré k interpolant f (si $Q(x)$ contient un point x répété plusieurs fois, celui-ci est un point d'accumulation de F et on peut y définir $T_i(x)$ par limite de différence divisée d'ordre i, et on construit P comme un polynôme de Lagrange Hermite). On définit T en un point x comme le jet d'ordre k de la fonction P.

On montre ensuite que ce champ de polynôme T est un champ de Taylor d'ordre k, en utilisant la propriété III du théorème I.3 du chapitre V que l'on vérifie grâce à l'inégalité : $d(Q(x),Q(y)) \leq (2k+1)(k+1)|y-x|$ et la propriété $\delta(Q(x)) > k|y-x| \Rightarrow (Q(x) = Q(y))$

Pour la suite il nous est utile de connaître une relation liant un module de continuité Ω vérifiant la condition II du théorème I.3 du chapitre V, au module de continuité w du théorème II.2. Démontrons la proposition suivante :

II.3 - *Proposition*

Le champ de Taylor T *construit précédemment associe à* f, *vérifie la condition* $|{}^k T^j_x(y) - {}^k T^j_y(y)| \leq |y-x|^{k-j}\, K w(|y-x|)$ *pour* $x, y \in F$. w *étant un module de continuité vérifiant le théorème II.1 pour* f, *et* K *étant une constante indépendante de* f.

Le polynôme de Taylor ${}^k T_x$ en x est le polynôme de Lagrange $P_{Q(x)}$ construit sur $Q(x) = \{x, x_1, \ldots, x_k\}$ en conséquence les inégalités cherchées sont :

$$|P^j_{Q(x)}(y) - P^j_{Q(y)}(y)| \leq |y-x|^{k-j}\, K\, w(|y-x|).$$

Rappelons que si $A = \{x_o,x_1,\dots,x_k\}$, $B = \{x_o,\dots,x_{k-1},x_k'\}$

$$P_A-P_B = ([x_o,\dots,x_k]-[x_o,\dots,x_{k-1},x_k'])\prod_{i=0}^{k-1}(X-x_i)$$

et par dérivation

$$\text{(II.3)}\quad P_A^j-P_B^j = ([x_o,\dots,x_k]-[x_o,\dots,x_{k-1},x_k'])\sum_{\ell\in C_{k+1}^{k-j}}\prod_{i=0}^{k-j}(X-x_{\ell(i)})$$

où ℓ parcourt les combinaisons de $k-j$ éléments pris parmi $k+1$.

Posons $Q(x) = \{x_o,\dots,x_k\}$ et $Q_y = \{y_o,\dots,y_k\}$ où $x_o \le\dots\le x_k$ et $y_o \le\dots\le y_k$ alors $d(Q(x),Q(y)) = \sum_{i=0}^{k}|x_i-y_i|$.

Posons $A_j = \{x_o,\dots,x_{i-1},y_j,\dots,y_k\}$ alors $A_o = Q(y)$, $A_{\ell+1} = Q(x)$.

$$P_{Q(x)}-P_{Q(y)} = P_{A_{k+1}}-P_{A_o} = \sum_{\ell=1}^{k+1}(P_{A_\ell}-P_{A_{\ell-1}})$$

et

$$P^j_{Q(x)}-P^j_{Q(y)} = \sum_{\ell=1}^{k+1}P^j_{A_\ell}-P^j_{A_{\ell-1}}$$

Nous allons majorer $|P^j_{Q(x)}-P^j_{Q(y)}|$ en utilisant les majorations de $|P^j_{A_\ell}-P^j_{A_{\ell-1}}|$

D'après II.3

$$|P_{A_\ell}(X)-P_{A_{\ell-1}}(X)| \le w(|x_{\ell-1}-y_{\ell-1}|)\prod_{i=0}^{\ell-2}|X-x_i|\times\prod_{i=\ell}^{k}(X-y_i)$$

car

$$|[x_o,\dots,x_{\ell-1},y_\ell,\dots,y_k]-[x_o,\dots,x_{\ell-2},y_{\ell-1},\dots,y_k]| \le w(d(A_{\ell-1},A_\ell))$$

et

$$d(A_{\ell-1},A_\ell) = |x_{\ell-1}-y_{\ell-1}|.$$

De plus on a $|x-x_i| \le \delta(Q(x))$, $|y-y_i| \le \delta(Q(y))$

$$|y-x_i| \le |y-x|+|x-x_i| \le |y-x|+\delta(Q(x)).$$

D'après les propriétés de $Q(x)$ on a si $Q(x) \ne Q(y)$

$$\delta(Q(x)) \text{ et } \delta(Q(y)) \le k|x-y|$$

ainsi nous aurons

$$|y-x_i| \leq (k+1)|y-x| \quad \text{et} \quad |x-y_i| \leq (k+1)|y-x|$$

en conséquence

$$\left|\prod_{i=0}^{\ell-2} (y-x_i) \prod_{i=\ell}^{k} (y-y_i)\right| \leq (k+1)^k |y-x|^k$$

et

$$|(P_{A_\ell}-P_{A_{\ell-1}})(y)| \leq (k+1)^k w(|x_{\ell-1}-y_{\ell-1}|)|y-x|^k$$

or

$$|x_{\ell-1}-y_{\ell-1}| \leq d(Q(x),Q(y)) \leq (k+1)(2k+1)|x-y|$$

d'où

$$|(P_{A_\ell}-P_{A_{\ell-1}})(y)| \leq (k+1)^k \, w((k+1)(2k+1)|y-x|)|x-y|^k.$$

w étant concave $w(\lambda x) \leq |\lambda| w(x)$ si $|\lambda| \geq 1$.

Ainsi

$$|(P_{A_\ell}-P_{A_{\ell-1}})(y)| \leq (k+1)^{k+1}(2k+1)w(|x-y|)$$

comme

$$|P_{A_{k+1}}-P_{A_o}| \leq \sum_{\ell=1}^{k+1} |P_{A_\ell}-P_{A_{\ell-1}}|$$

on a

$$|P_{Q(x)}(y)-P_{Q(y)}(y)| \leq K_o w(|x-y|)|y-x|^k$$

La constante K_o ne dépendant que de k.

Un calcul analogue nous donne

$$|P^j_{Q(x)}(y)-P^j_{Q(y)}(y)| \leq K_j \, w(|x-y|)|y-x|^{k-j}$$

On peut prendre un K unique comme le sup des K_j.

Cas où certaines des abscisses sont répétées, on se ramène au cas précédent en remarquant que le polynôme de Lagrange Hermite construit sur $(a_o,\ldots a_p,x,\ldots,x)$ est la limite du polynôme de Lagrange construit sur $(a_o,\ldots,a_p,a^n_{p+1},\ldots,a^n_k)$ où $a^n_{p+1},\ldots,a^n_k$ converge vers x. Comme le point répété est point d'accumulation on peut approcher n par des éléments $a^n_{p+1},\ldots a^n_k$.

c.q.f.d.

Le théorème de Whitney est en général énoncé lorsque l'ensemble F est fermé. Montrons qu'il est vrai pour tout sous-ensemble A de l'intervalle $[a,b]$.

II.4 - *Proposition*

Si une fonction f *vérifie la condition* W_k *sur un sous-ensemble* A *de* $[a,b]$ *alors* f *est prolongeable par continuité sur* $\bar{A}$ *et on a* $\bar{f}$ *qui vérifie la condition* W_k *sur* $\bar{A}$.

On sait par la proposition I.5 que W_j est aussi vérifiée dès que $j \leq k$. En utilisant W_o, on a la condition de Tietsz-Urysohn, on peut prolonger f par continuité à $\bar{A}$ en $\bar{f}$.

Soient deux ensembles A et B de k+1 éléments de $\bar{A}$, pour tout $\mu > 0$, on peut trouver A_μ et B_μ formés de k+1 éléments de A tels que $d(A,A_\mu) \leq \mu$ et $d(B,B_\mu) \leq \mu$. On va utiliser le lemme suivant :

<u>Lemme</u> $\lim\limits_{\mu\to 0} [A_\mu](f) = [A](f)$.

On a $[A_\mu](f) = \sum\limits_{i=0}^{k} \dfrac{f(a_i^\mu)}{\prod\limits_{0\neq i} (a_i^\mu - a_j^\mu)}$. Les points de A sont distincts, on peut choisir les a_i^μ dans des petits intervalles contenant a_i, et n'empiètant pas les uns sur les autres lorsque i varie. Par conséquent, on peut borner inférieurement les dénominateurs. (D'autre part si $\mu \to 0$ $a_i^\mu \to a_i$ et $f(a_i^\mu) \to f(a_i)$.

D'après les propriétés des sommes et des divisions par des termes $\neq 0$ d'un nombre fini de limite on a ainsi $\lim\limits_{\mu\to 0} [A_\mu](f) = [A](f)$.

Alors pour tout $\varepsilon > 0$ on peut choisir μ tel que $|[A_\mu](f)-[A](\bar{f})| \leq \varepsilon$
On a alors

$$|[A](\bar{f})-[B](\bar{f})| \leq |[A](\bar{f})-[A_\mu](f)|+|[A_\mu](f)-[B_\mu](f)|+|[B_\mu](f)-[B](\bar{f})|$$

on a ainsi

$$|[A](\bar{f})-[B](\bar{f})| \leq 2\varepsilon+w(d(A_\mu,B_\mu))$$

Or

$$d(A_\mu,B_\mu) \leq d(A,B)+d(A,B_\mu)+d(B,B_\mu)$$

$$\leq d(A,B)+2\mu$$

d'où

$$|[A](\bar{f})-[B](\bar{f})| \leq w(d(A,B))+2\varepsilon+w(2\mu).$$

Comme ε et μ peuvent être aussi petit qu'on veut, on a bien la condition W_k
$|[A](\bar{f})-[B](\bar{f})| \leq w(d(A,B))$.

c.q.f.d.

II.5 - *Corollaire*

Le théorème de Whitney II.1 est aussi vrai lorsqu'on considère une fonction f *vérifiant* W_k *sur un ensemble* A *non nécessairement fermé.*

II.6 - *Proposition*

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction f *définie sur* $[a,b]$ *soit* k *-fois continuement dérivable est que* f *vérifie sur* $[a,b]$ *la condition* I_k.

Nous allons démontrer par récurrence que f est k-fois dérivable. Supposons que f admette une dérivée ième $i < k$. Soit $\alpha \in [a,b]$ pour tout $\varepsilon_1 > 0$ il existe $\alpha_1,\ldots,\alpha_i$ tel que $\delta(\{\alpha,\ldots,\alpha_i\}) \leq \eta_1$ et $\left|\frac{f^i(\alpha)}{i!} - [\alpha,\ldots,\alpha_i](f)\right| \leq \varepsilon_1$

de même pour $x' \in [a,b]$ on peut lui associer $x_1,\ldots,x_i$ avec $d(\{x,x_1,\ldots,x_i\}) \leq \eta_1$ et $\left|\frac{f^i(x)}{i!} - [x,x_1,\ldots,x_i](f)\right| \leq \varepsilon_1$

$$\left|\frac{f^i(x)-f^i(\alpha)-i!([x,x_1,\ldots,x_i]-[\alpha,\alpha_1,\ldots,\alpha_i])}{x-\alpha}\right| \leq \frac{2(k-1)!\varepsilon_1}{x-\alpha}$$

En prenant $\varepsilon_1 \leq (x-\alpha)^2$ on obtient un majorant : $2(k-1)!(x-\alpha)$.

$$A = \frac{[x,x_1,\ldots,x_i]-[\alpha,\ldots,\alpha_i]}{(x-\alpha)} = \sum_{\ell=0}^{i} \frac{[\alpha,\ldots,\alpha_{\ell-1},x_\ell,\ldots,x_i]-[\alpha,\ldots,\alpha_\ell,x_{\ell+1},\ldots x_i]}{(x-\alpha)}$$

$$= \sum_{\ell=0}^{i} \frac{(x_\ell-\alpha_\ell)[\alpha,\ldots\alpha_\ell,x_\ell,\ldots,x_i]}{x-\alpha}$$

Si on choisit $\eta_1 < (x-\alpha)^2$ alors on a

$$1-2|x-\alpha| \leq \frac{|x_i-\alpha_i|}{|x-\alpha|} \leq 1+2|x-\alpha|$$

Soit $\ell_{i+1}(\alpha) = \lim\limits_{\alpha_1,\ldots,\alpha_{i+1}\to\alpha} [\alpha,\alpha_1,\ldots,\alpha_{i+1}]$ (cette limite existe puisque f vérifie I_{i+1} (comme vérifiant I_k).

Si x tend vers α alors nous avons $\alpha_1,\ldots,\alpha_i,x_1,\ldots,x_i$ qui convergent vers α

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{x_i-\alpha_i}{x-\alpha} [\alpha,\alpha_1,\ldots,\alpha_\ell,x_1,\ldots,x_i] = \ell_{i+1}(\alpha)$$

ainsi nous avons $\lim\limits_{x\to\alpha} A = (i+1)\ell_{i+1}(\alpha)$.

Ainsi $\left|\frac{f^i(x)-f^i(\alpha)-(i+1)!\ell_{i+1}(\alpha)}{x-\alpha}\right|$ peut être rendu aussi petit que l'on veut. Ceci nous prouve que f^i est dérivable en $\alpha \in [a,b]$. La condition I_{i+1} permet de vérifier la continuité de $f^{i+1}(\alpha) = (i+1)!\ell_{i+1}(\alpha)$.

c.q.f.d.

II.7 - *Proposition*

Soit f *une fonction définie sur un sous-ensemble* X *de* $[a,b]$ *partout dense dans* $[a,b]$ *une condition nécessaire et suffisante pour que* f *soit prolongeable par une fonction* k-*fois continuement dérivable est que* f *vérifie la condition* I_k *sur* X.

Il ne nous reste qu'à vérifier la condition suffisante. Sur X, I_o est vérifié donc f se prolonge en une fonction $\bar{f}$ sur $[a,b] = \bar{X}$. Utilisant la proposition II.6 il nous suffit de voir que I_k est vérifiée pour $\bar{f}$ sur $[a,b]$. Soit $z_o,\dots,z_k \in [a,b]$ on a $[z_o,\dots,z_k] = \lim\limits_{\substack{x_o \to z_o \\ \cdots \\ x_k \to z_k}} [x_o,\dots,x_k]$.

En effet, on suppose $x_o,\dots,x_k$ dans de petits intervalles voisinage de $z_o,\dots,z_k$ de façon telle que le dénominateur soit borné par un nombre positif, le numérateur apparaît comme une forme linéaire de $f(x_o),\dots,f(x_k)$, dont les coefficients sont des polynômes de $(x_1,\dots,x_k)$. Comme $f(z_i) = \lim\limits_{x_i \to z_i} f(x_i)$ alors nous avons $[z_o,\dots,z_k] = \lim [x_o,\dots,x_k]$.

La condition I_k vrai sur X passe à la limite par un argument analogue à celui de la démonstration de II-4 pour W_k.

c.q.f.d.

II.8 - Cette proposition permet de voir que si X est partout dense dans $[a,b]$ alors les conditions I_k et W_k sont équivalentes.

III - PROCEDE GENERAL ASSOCIANT UN CHAMP DE TAYLOR A UNE FONCTION f DEFINIE SUR F PROLONGEABLE EN UNE FONCTION $C^k[a,b]$.

Si à une fonction f vérifiant la condition W_k sur F, on sait associer un champ de Taylor T sur F, alors en appliquant un Φ-Ψ prolongement à T comme au chapitre V §3, nous avons un prolongement de f par une fonction de classe C^k.

III.1 - *Définition*

On appelle $\mathcal{T}$ procédé général associant un champ de Taylor d'ordre k *à une fonction, la donnée pour chaque ensemble* $F \subset [a,b]$ *d'une application* T_F *de l'ensemble des fonctions définies sur* F *vérifiant* W_k *dans l'ensemble des champs de Taylor d'ordre* k *sur* F*, tel que* $T_F(f)^0 = f(x)$.

Soit x point d'accumulation de F, d'après les propositions I.7 et II.4, on définit par passage à la limite de différences divisées d'ordre j les valeurs $\bar{f}^j_x$, si $x \in F$ alors $\bar{f}^j_x = T^j_x$, et si $x = \lim\limits_n x^n$ $x^n \in F$ alors on a $f^j_x = \lim\limits_{n\to\infty} T^j_{x^n}$. Ainsi T est parfaitement déterminée aux points d'accumulation de F.

Un cas important correspond à la propriété où T_F est une application linéaire quel que soit F. Nous dirons alors que $\mathcal{T}$ est un procédé de type linéaire.

Nous développerons dans le IV un exemple de tels procédés basés sur les Q-projections de Whitney.

III.2 - Convergence de fonctions prolongeables en une fonction $C^k[a,b]$ définies sur même ensemble F.

Ayant des fonctions définies sur un ensemble X nous pouvons définir plusieurs notions de convergences tels que la convergence simple ou la convergence uniforme. Mais ayant une suite de fonctions vérifiant sur F la condition W_k, il est raisonnable de demander que la limite vérifie la condition W_k. La convergence simple et la convergence uniforme n'assure pas cette propriété puisqu'une limite simple ou une limite uniforme de fonctions de classe C^k peut ne pas être une fonction de classe C^k.

III.3 - Rappelons, chapitre V.4.6, que si φ_n est une suite convergeant vers une limite φ dans $C^k[a,b]$ alors il existe un module de continuité f valable pour φ_n^k et φ^k quel que soit n. Nous avons (voir Merrien (1966) p. 296) si φ^k admet un module de continuité w, $|([A]-[B])(\varphi)| \leq \frac{2}{k!} w(d(A,B))$. Cette relation exprime la condition W_k pour φ sur $[a,b]$, si nous nous limitons à un sous-ensemble F de $[a,b]$ cette condition est vraie pour la restriction de φ.

Ainsi si f_n est une suite de fonction définie sur X, convergeant uniformément sur X vers une fonction f, telle qu'il existe des prolongements à $[a,b]$, φ_n de f_n qui convergent vers un prolongement φ de f dans $C^k[a,b]$, f_n et f vérifie la condition CC ci-dessous :

<u>*Condition CC*</u>

> *Soit* $(f_i)_{i\in I}$ *une famille de fonctions définies respectivement sur* X_i *nous dirons qu'elle vérifie la condition CC s'il existe un module de continuité* w *tel que pour tout* $i \in I$ *et tout couple* (A,B) *d'ensemble de* k+1 *points de* X_i *nous ayons* $|([A]-[B])(f_i)| \leq w(d(A,B))$.

III.4 - <u>*Définition*</u>

> *Le procédé général* T *associant un champ de Taylor à une fonction* f *sera dit* <u>*régulier*</u> *:*
> *si pour toute suite de fonction* f_n *convergeant uniformément sur un sous-ensemble* X *vers une fonction* f *et vérifiant la condition CC, alors les champs de Taylor d'ordre* k *,* Tf_n *convergent uniformément sur* X *et vérifient la condition C.*

Utilisant les résultats du chapitre V, si T est un procédé régulier et si nous désignons par φ_n un Φ-Ψ prolongement de Tf_n, et si le procédé d'interpolation Φ (resp. d'extrapolation Ψ) vérifie les conditions D1 et D2 (resp. E1 et E2) alors les fonctions φ_n convergent dans $C^k[a,b]$ vers le prolongement φ de f (φ étant le Φ-Ψ prolongement de Tf).

III.5 - *Lemme*

Soit X *un sous-ensemble de* $[a,b]$ $\tilde{X}$ *l'ensemble de ces points d'accumulation. Pour tout* $\eta > 0$ *il existe un sous-ensemble fini* X' *de* X, *tel que si* $x \in X$ *et* $d(x,\tilde{X}) \geq \eta$ *alors* $x \in X'$ *et tel que pour chaque* $x \in \tilde{X}$ *il existe* k+1 *points distincts* $x_o,\ldots,x_k \in I$ *avec* $|x-x_j| \leq \eta$ *pour* $0 \leq j \leq k$.

L'ensemble des points y de $[a,b]$ tels que $d(y,\tilde{X}) \geq \eta$ est un compact ; aussi il n'y a dans cet ensemble qu'un nombre fini de points de X, sinon il y aurait un point d'accumulation $\alpha \in \tilde{X}$ dans cet ensemble, ce qui est exclu.

Effectuons un recouvrement de $\tilde{X}$ par des ouverts de diamètre inférieur à $\eta/(k+1)$ on en extrait un recouvrement fini et dans chacun de ces ouverts on choisit un élément $x' \in X$; ainsi à chaque $x \in \tilde{X}$ on pourra associer k+1 éléments distincts de moins de η de x et appartenant à X'.

c.q.f.d.

III.6 - *Proposition*

La convergence uniforme sur X *des* f_n *et la propriété CC vérifiée par les* f_n *et* f *entraîne que pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* N *tel que pour tout* $A = \{a_o,\ldots,a_k$ $a_o,\ldots,a_k \in \tilde{X}$, *on ait si* $n \geq N$ $|[A](f-f_n)| \leq \varepsilon$.

Démonstration

Considérons X l'ensemble des points d'accumulation de X et $\eta > 0$ on peut trouver un nombre fini X' de points de X, tel que si $x \in X$ et $x \notin [\tilde{X}+\eta] = \bigcup_{x \in \tilde{X}} [x-\eta,x+\eta]$ alors $x \in X'$ et tel que pour tout $x \in \tilde{X}$ il existe k+1 points de X distincts à moins de η(lemme III.5).

Ainsi à chaque A nous pouvons associer A_i où tous les éléments de A_i sont dans X' et tel que $d(A,A_i) \leq 2(k+1)\eta$. (certains éléments de A peuvent être éventuellement répétés s'ils appartiennent à $\tilde{X}$). En effet, pour chaque a_j on prend a_j^i avec $|a_j-a_j^i| \leq 2\eta$.

D'après W_k $([A](f)-[A_i](f)) \leq w(2(k+1)\eta)$

de même $([A](f_n)-[A_i](f_n)) \leq w(2(k+1)\eta)$

Comme les points de A_i sont distincts et appartiennent à un ensemble fini nous ne pouvons former qu'un nombre fini de A_i. Pour chacun des A_i, $[A_i](f_n)$ est combinaison linéaire des $f_n(a_j^i)$ donc nous avons $[A_i](f_n)$ qui converge vers $[A_i](f)$, cette convergence est uniforme puisque le nombre des A_i est fini, ainsi si $\varepsilon > 0$ est don on peut rendre si $n \geq N$ $|[A_i](f)-[A_i](f_n)| \leq \varepsilon$ donc

$$|[A](f)-[A](f_n)| \leq \varepsilon+2w(2(k+1)\eta).$$

c.q.f.d.

Au point d'accumulation de X, le champ associé à f par un procédé T est défini par limite de points voisins, donc sans ambiguité. Il coïncidera ainsi avec le champ construit par les Q-projections de Whitney. D'après la proposition II.4 on vérifie que les $T(f_n)$ vérifient sur $\tilde{X}$ la condition C du chapitre V.

III.7 - Convergence de fonctions prolongeables en une fonction $C^k|a,b|$ et non nécessairement définie sur un même ensemble.

Considérons une suite de fonctions f_n définies sur X_n et vérifiant la conditi W_k. Comme au chapitre V définition V.1, introduisons les conditions sur la suite (f_n,X_n) et la fonction (f,X) :

III.7.1. - *Pour tout* $\varepsilon > 0$ *il existe* N *tel que si* $n \geq N$ *on a*

α) *pour tout* $x \in X$ *il existe* $x_n \in X_n$ *avec* $|x-x_n| \leq \varepsilon$

β) *pour tout* $x_n \in X_n$ *il existe* $x \in X$ *avec* $|x-x_n| \leq \varepsilon$

III.7.2. - *Pour tout* $\varepsilon > 0$ *il existe* $\eta > 0$ *et* N *tel que si* $n \geq N$ *on ait pou tout* $x \in X$ *pour tout élément* y, $y \in X_n \cap \{x-\eta,x+\eta\}$

$$|f_n(y)-f(x)| \leq \varepsilon.$$

Ces conditions ne sont pas suffisantes pour assurer la convergence de prolongement de classe $C^k[a,b]$ de f_n vers un prolongement de f, puisque dans III.5.1 et III.5.2 n'apparaissent pas des conditions sur des différences d'ordre k. De la même façon qu'en III.3, si des prolongements φ_n de f_n convergent vers un prolongement φ de f_n, nous avons f_n qui vérifie la condition CC.

Soit un procédé général T associant un champ de Taylor à une fonction f définie sur X, tel que pour une suite (f_n,X_n) vérifiant III.5.1 et III.5.2 et la condition CC alors les champs Tf_n vérifie les conditions de la définition V.1 et la condition C du chapitre V. Alors si nous avons Ψ_n qui désignent le Φ-Ψ prolongement de Tf_n où Φ (resp. Ψ) vérifie les conditions D1 et D3 (resp. E1 et E3) alors nous avons Ψ_n qui converge dans $C^k[a,b]$ vers le prolongement Ψ de Tf, qui est un prolongement $C^k[a,b]$ de la fonction f.

Dans la partie IV de ce chapitre, nous verrons un exemple de procédé T qui vérifie ces conditions sauf dans quelques cas particulier de suite (f_n,X_n).

Considérons le cas où X_n est un ensemble fini, la donnée d'un procédé T et de procédé Φ et Ψ permet de définir un procédé d'interpolation de f par des fonctions de classe C^k sur $[a,b]$. On peut de cette façon approximer les dérivées de f à partir des valeurs de la fonction, et nous pourrons avoir certains théorèmes de convergence. Nous expliciterons un cas particulier dans IV.

III.8 - *Proposition*

Soient (f_n,X_n) *une suite convergeant vers* (f,X) *au sens de III.7.1. et III.7.2 et vérifiant la condition CC. Pour tout* $\varepsilon > 0$ *il existe* N *et* $\eta \geq 0$ *tel que si* $n \geq N$, $A \subset X$ *et* $A_n \subset X_n$, *vérifiant* $d(A,A_n) \leq \eta$ *alors* $|[A](f)-[A_n](f_n)| \leq \varepsilon$.

Soit $\tilde{X}$ l'ensemble des points d'accumulation de X. Nous appliquons le lemme III.4 avec $\eta = \xi > 0$, et obtenons ainsi un sous-ensemble X' fini de X. Soit $A \subset X$ donné d'après les conditions précédentes sur X' on peut choisir (k+1) points $A_i = \{a_o^i,\dots,a_k^j\}$ tels que $d(A,A_i) \leq 2(k+1)\zeta$.

Les A_i sont formés de points distincts. X' étant fini posons $\rho = \inf_{y,z \in X'} |y-z|$, $\rho > 0$. Soit θ ($0 < \theta < \rho/2$).

Il existe N tel que si $n \geq N$, pour tout $y \in X'$ il existe $x_n \in X_n$ avec $|x_n - y| \leq \theta$. Soit $A_i^n = \{a_o^{in}, \ldots, a_k^{in}\}$ tel que $|a_j^{in} - a_j^i| \leq \theta$ pour $0 \leq j \leq k$ et avec $a_j^{in} \in X_i$. Comme $|a_j^i - a_j| \leq 2\zeta$. Alors si nous avons $d(A, A_n) \leq \theta$ ($\theta > 0$ fini) nous aurons $|a_j^n - a_j| \leq \theta$ et $|a_j^n - a_j^{in}| \leq 2(\zeta+\theta)$ et $d(A^n, A_i^n) \leq 2(k+1)(\zeta+\theta)$ en choisissant $\zeta = \theta$

$$|[A](f) - [A_i](f)| \leq w(4(k+1)\theta)$$

$$|[A^n](f_n) - [A_i^n](f_n)| \leq w(4(k+1)\theta).$$

Majorons $[A_i](f) - [A_i^n](f_n) = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j\, f(a_j^i) - \sum_{j=0}^{k} \alpha_j^n\, f(a_j^{in})$.

Les coefficients α_j et α_j^n sont bornés supérieurement car la distance de deux abscisses est bornée inférieurement par ρ. f et f_n sont bornés sur X_n à cause de W_o.

Si on a $\varepsilon > 0$ on peut trouver ξ tel que si $|a_j^i - a_j^{in}| \leq \xi$ $(0 \leq j \leq k)$ alors on a $|\alpha_j - \alpha_j^n| \leq \varepsilon$ (continuité des coefficients des différences divisées par rapport aux abscisses).

Pour III.7.2 si $\varepsilon'' > 0$ on a $\eta > 0$ et N_1 avec si $n > N_1$ et $|a_j^i - a_j^{in}| \leq \eta$ alors $|f(a_j^i) - f_n(a_j^{in})| \leq \varepsilon''$.

Aussi en choisissant N assez grand on a si $n > N$

$$|[A_i](f) - [A_i^n](f)| \leq \varepsilon$$

d'où

$$|[A](f) - [A^n](f_n)| \leq 2w(4(k+1)\theta) + \varepsilon.$$

c.q.f.d.

IV - PROCEDE BASE SUR LES Q-PROJECTIONS POUR CONSTRUIRE UN PROLONGEMENT DE f QUI APPARTIENNE A $C^k[a,b]$

IV.1 - Description du procédé

La méthode décrite en II.2

Soit f une fonction définie sur X et Y vérifiant W_k, on construit Q(x), puis en x on définit T_x comme le jet correspondant au polynôme de Lagrange construit sur Q. Nous avons ainsi un procédé général T associant à f un champ de Taylor T(f). En considérant un Φ-Ψ prolongement de T(f), nous obtenons ainsi une fonction de classe $C^k[a,b]$. Un cas particulier intéressant sera celui où Φ et Ψ sont les procédés d'interpolation par des polynômes de degré 2k+1 et d'extrapolation par polynôme de degré. Un autre cas correspond à Φ procédé d'interpolation définit sur l'intervalle $[\alpha,\beta]$ par la fonction réalisant le minimum de la norme du max sur $[\alpha,\beta]$ de la dérivée k+1, parmi les fonctions ayant en α et β des dérivées données jusqu'à l'ordre k, ce cas a été étudié par Coatmelec [1968].

IV.2 - *Proposition*

Le procédé T basé sur les Q-projections est régulier.

L'ensemble X étant dans $[a,b]$ est relativement compact, pour tout $\eta > 0$, on peut extraire un nombre fini de points $(x_i)_{i\in I}$ tel que pour chaque $x \in X$ il existe x_i avec $|x-x_i| \le \eta$. Soit x_i on a $Q(x_i)$ associée, on a $T(f)(x_i)$, jet du polynôme interpolant f sur $Q(x_i)$. T(f) dépend continuement de f puisque les points de $Q(x_i)$ sont fixés, ainsi nous avons si $n > N_i$ $|T(f)^j(x_i)-T(f_n)^j(x_i)| \le \varepsilon$ N dépendant de ε. Comme les x_i sont en nombre fini nous prenons le plus grand des N_i. Si dans $Q(x_i)$ il y a des points répétés plusieurs fois le raisonnement est encore valable grâce à la proposition III.6.

La proposition II.3 et la condition CC permettent de voir que les champs T_n^j vérifient la condition C et la condition II du théorème de Whitney de V avec le module de continuité Kw, on déduira comme au chapitre V que les T_n^j admettent les mêmes modules de continuité w_j, ainsi nous aurons : $|T_{n,x}^j - T_{n,x_i}^j| < w_j(|x-x_i|)$

$$|T_x^j - T_{n,x}^j| \leq |T_x^j - T_{x_i}^j| + |T_{x_i}^j - T_{n,x_i}^j| + |T_{n,x_i}^j - T_{n,x}^j|$$

$$\leq 2w(|x-x_i|) + |T_{n,x_i}^j - T_{x_i}^j|$$

En prenant $n > N$ on a $|T_{n,x_i}^j - T_{x_i}^j| \leq \varepsilon$ et si $|x-x_i| \leq \eta$ avec $2w(\eta) \leq \varepsilon$ on a finalement $|T_x^j - T_{n,x}^j| \leq 2\varepsilon$. Ainsi les champs de Taylor T_n convergent uniformément vers T.

c.q.f.d.

IV.3 - Considérons maintenant le cas d'une suite de fonctions f_n définies sur X_n (les X_n pouvant être distincts et vérifiant les conditions de convergence vers f,X III.7.1. et III.7.2 ainsi que la condition CC. Pour chaque x considérons le champ de Taylor d'ordre k, T_n définie sur X_n par le moyen des Q-projections. Nous désirerions démontrer que cette suite de champ de Taylor converge au sens du chapitre V n° V, pour cela il faut démontrer que les $Q_n(x_n)$-projections de X_n convergent vers les Q(x) projections de X, lorsque x_n converge vers X. Ce résultat n'est pas vrai dans sa généralité : si Q(x) n'est pas définie d'une façon unique, c'est-à-dire lorsqu'on a un choix du à 2 points à égale distance de x', x", alors il peut se produire que nous n'ayons pas convergence des $Q_n(x_n)$ comme nous le voyons dans le contre exemple ci-dessous.

IV.4 - Contre exemple

Soit X l'ensemble $\{1,0,1\}$. On considère les Q-projections d'ordre 1, en choisissant en cas d'égalité le point à gauche. Nous avons $Q(-1) = Q(0) = \{-1,0\}$, $Q(1) = \{0,1\}$.

Soit $X_n = \{-1 , (-1)^n \times \frac{1}{n}, 1\}$ alors si $n \geq 2$ on a si n pair = 2p
$Q(-1) = \{-1, \frac{1}{2p}\}$ $Q(\frac{1}{2p}) = Q(1) = \{\frac{1}{2p}, 1\}$. Si n impair = 2p+1
$Q(-1) = Q(\frac{-1}{2p+1}) = \{-1, \frac{-1}{2p+1}\}$, $Q(1) = \{\frac{-1}{2p+1}, 1\}$.
Nous avons $\frac{(-1)^n}{n}$ qui converge vers 0, et $Q(\frac{(-1)^n}{n})$ ne converge pas au sens de la distance $d(A,B)$ vers une limite puisque dans certains il vaut -1 et dans d'autres 1.

Un autre cas de non convergence sur Q est celui dans lequel on pourrait avoir plusieurs points de X_n convergeant vers un seul point de X. Par exemple $X = \{-1,0,2\}$ et $X_n = \{-1, \frac{-1}{n}, \frac{1}{n}, 2\}$ alors $Q(0) = \{1,0\}$ et
$Q_n(-\frac{1}{n}) = Q_n(\frac{1}{n}) = \{-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\}$ pour les Q-projections d'ordre 1.

Formalisons bien la définition de la convergence des Q-projections.

IV.5 - *Définition*

On dira pour une suite X_n de partie de $[a,b]$ vérifiant avec X, chap. V. 5.3.1, que la suite des Q projections converge si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ et N tel que pour tout $x \in X$ et $x_n \in X_n$ avec $n > N$ et $|x-x_n| \leq \eta$ alors $d(Q(x), Q_n(x_n)) \leq \varepsilon$.

IV.6 - *Proposition*

Soit une suite de fonctions f_n sur X_n convergeant au sens de III.7, vérifiant la condition CC, telle que les Q-projections convergent, alors les champs de Taylor $T_n(f_n)$ convergent vers T au sens du chap. V. 5.3 et vérifient la condition C.

Grâce à la propsoition II.3 la condition CC entraîne la condition C. Utilisant la formule de Newton sur l'ensemble des k+1 points $Q(x) = \{x, x^1, \ldots, x^k\}$

$$T_x^j = [x, x^1, \ldots, x^j]\, j! + \sum_{\ell=j+1}^{k} [x, \ldots, x^\ell]\, \Pi(j, \ell, k, Q(x)).$$

$$T^j_{n,x_n} = [x_n, x^1_n, \ldots, x^j_n] + \sum_{\ell=j+1}^{k} [x_n, \ldots, x^k_n] \Pi(j,\ell,k,Q(x_n)).$$

Il s'agit de démontrer $\forall\varepsilon$, $\exists N$ et η tel que si $n > N$ et $|x-x_n| \leq \eta$ alors $|T^j_x - T^j_{n,x_n}| \leq \varepsilon$. Comme nous avons fait l'hypothèse que les Q-projections convergent si $n > N^n$ et $|x-x_n| \leq \eta'$ alors $d(Q(x),Q_n(x_n)) \leq \varepsilon'$, utilisant la proposition III.8 avec condition W_j $0 \leq j \leq k$ nous avons

$$|[x_n, \ldots, x^\ell_n](f_n) - [x, \ldots, x^\ell](f)| \leq \varepsilon''.$$

$\Pi(j,\ell,k,Q(x))$ est une combinaison linéaire de produits de $(x-x^i)$, $\Pi(j,\ell,k,Q_n(x_n))$ est combinaison linéaire des produits de $(x-x^i_n)$, comme $d(Q(x),Q_n(x_n)) \leq \varepsilon'$ alors $x^i-x^i_n$ est inférieur à ε' ; ainsi en prenant ε' assez petit on pourra rendre :

$$|\Pi(j,\ell,k,Q(x_i)) - \Pi(j,\ell,k,Q(x))| \leq \varepsilon''.$$

Comme l'intervalle $[a,b]$ est bornée, comme la condition W_k est vérifiée et les $[x_1, \ldots, x^k_n]$ et $[x_n, \ldots, x^k_n]$ sont bornés, $\Pi(j,\ell,k,Q(x_n))$ et $\Pi(j,\ell,k,Q(x))$ sont bornés T^j et T^j_n sont de la forme $\lambda + \Sigma\mu_i\nu_i$ avec les λ, μ_i, ν_i bornés et $\lambda_n \to \lambda$, $\mu^n_i \to \mu^n$, $\nu^n_i \to \nu_i$ uniformément par rapport à x donc on peut choisir η et N tel que $|T^j_x - T^j_{n,x_n}| \leq \varepsilon$ dès que $n > N$ et $|x-x_n| < \eta$.

c.q.f.d.

IV.7 - Si X_n et f_n vérifie les conditions de la proposition IV. 6 et si Φ (resp.Ψ) vérifie D1 et D3 (resp. E1 et E3) nous aurons alors la convergence dans $C^k[a,b]$ des Φ-Ψ prolongements des champs T_n associés à f_n par Q-projections. Nous avons ainsi construit un procédé d'interpolation de f_n, des fonctions de $C^k[a,b]$ et qui convergent lorsque f_n, X_n converge en vérifiant la condition CC.

Si X_n est une suite de sous-ensembles qui converge vers $[a,b]$ au sens de Kuratowski (ces sous-ensembles peuvent être finis) alors $Q(x)$ est un ensemble de $(k+1)$ points égaux à x. Si n est assez grand alors on voit que $\delta(Q_n(x_n)) \leq \varepsilon$ de là on déduit que x_n tend vers $Q(x)$ et on a ainsi convergence dans le cas des Q-projections.

IV.8 - Cas où X_n est l'ensemble des n premiers termes d'une suite $(x_1,\dots,x_n,\dots)$

X est l'ensemble des points adhérents à cette suite, $\tilde{X}$ l'ensemble des points d'accumulation de $(x_1,\dots,x_n,\dots)$. Cet ensemble est non vide puisque $[a,b]$ est compact.

Lemme

Soit $\eta > 0$, *il existe* N
tel que tout point de X, *à une distance supérieure ou égale à* η *de* $\tilde{X}$,
soit un x_i *avec* $i \leq N$ *et*
tels que pour tout $x \in X$ *ne vérifiant pas cette propriété il existe* $(k+1)$
points $x_{i_o},\dots,x_{i_k}$ *avec* $i_o,\dots,i_k \leq N$ *et* $|x-x_{i_j}| \leq \eta \quad 0 \leq j \leq k$.

Soit $\tilde{X}_\eta$ l'ensemble des points de $[a,b]$, dont la distance à $\tilde{X}$ est strictement inférieure à η alors $\tilde{X}_\eta$ est un compact ne contenant pas de point d'accumulation de X. Ainsi nous avons seulement un nombre fini de points de X dans cet ensemble, ces points sont des points de la suite soit N' le plus grand des indices de ces points.

On effectue un recouvrement de $\tilde{X}$ par des intervalles de longueur $\eta/k+1$. Ce recouvrement peut être fini et dans chacun des intervalles on peut choisir des x_i et N" = sup des indices. Ainsi pour tout $x \in \tilde{X}_{\eta/k+1}$ il y a $(k+1)x_i$ avec $i \leq N''$ et $|x-x_i| \leq \eta$. Remarquons qu'il n'y a qu'un nombre fini de points de X contenu dans $\tilde{X}$ et non contenu dans $\tilde{X}_{\eta/k+1}$, pour chacun de ces points x soit α un point d'accumulation à moins de η, on choisit $(k+1)x_i$ voisin de α tel que $|x-x_i| \leq \eta$, comme les x sont en nombre fini ces x_i sont en nombre fini et nous avons N''' le plus grand de ces indices. En prenant $N = \sup(N',N'',N''')$ nous obtenons la propriété demandée.

c.q.f.d.

IV.9 - *Proposition*

Si X_n *est l'ensemble des* n *premiers termes d'une suite, alors les Q-projections pour* n *convergent vers les Q-projections de l'ensemble des points adhérents de la suite.*

Utilisons le lemme avec $\eta > 0$. Soit x, plusieurs cas vont se produire pour la position de Q(x)

i) $Q(x) \cap \tilde{X}_\eta = \emptyset$ alors dès que $n \geq N$ nous avons $Q_n(x) = Q(x)$ puisque Q(x) est formé de x_i avec $i \leq N$.

ii) $Q(x) \subset \tilde{X}_\eta$, alors $\delta(Q(x)) \leq \eta$. Il existe 2k+1 points x_i $i \leq N$ à moins de η de x, soit x_j avec $|x-x_j| \leq \eta$ et $x_j \in \tilde{X}_\eta$. On peut choisir x_i vérifiant $\delta(Q_n(x_i)) \leq \eta$ $(n \geq N > i)$. On en déduit $d(Q(x),Q_n(x_i)) \leq 2(k+1)\eta$.

iii) Cas où $Q(x) \cap \tilde{X}_\eta \neq \emptyset$ et Q(x) non contenu dans $\tilde{X}_\eta$ si la distance de x à $\tilde{X}$ est inférieure à η alors nous avons $\delta(Q(x)) \leq k\eta$ et $\delta(Q_n(x_i)) \leq 2k\eta$ pour les x_i avec $|x-x_i| \leq \eta$ et $i \leq N$. Nous en déduisons ainsi $\delta(Q(x) \cup Q_n(x_i)) \leq 3k\eta$ et $d(Q(x),Q_n(x_i)) \leq 3k(k+1)\eta$.

Si $x \notin \tilde{X}_\eta$ alors il y a un nombre fini de tel x. Prenons l'ensemble des x_j appartenant à ces divers Q(x) et pour N' le plus grand des indices. Alors en prenant $n > \sup(N',N)$ si $x \notin \tilde{X}_\eta$ on a soit $Q_n(x) = Q(x)$, soit Q(x) contient un point d'accumulation dans le voisinage de ce point α, on peut choisir des points assez près x_i, pour que $Q_n(x)$ coïncide avec Q(x) pour les points différents α, et pour α on aura ces x_i. On sera peut être obligé de prendre un N" > N et N', mais comme il n'y a qu'un nombre fini de tels x, N" restera borné.

c.q.f.d.

IV.10 - Cette dernière proposition permet de voir que si <u>les X_n sont les n premiers éléments d'une suite de $[a,b]$</u>, <u>alors nous avons convergence des Φ-Ψ prolongements Π_n du champ T_n associé à f_n</u>.

Un cas intéressant correspond à $f_n = f$ nous avons ainsi un procédé d'interpolation et la convergence de ce procédé d'interpolation lorsqu'on prend les n premiers termes d'une suite.

V - ESSAIS NUMERIQUES D'UN PROCEDE D'INTERPOLATION BASE SUR LES Q-PROJECTIONS

V.1 - Rappel du procédé

Soit $X = \{x_1,\ldots,x_n\}$ n points de $[a,b]$ f une fonction définie sur $[a,b]$, comme le nombre de points est fini, f sur $(x_1,\ldots,x_n)$ vérifie la condition W_k. On construit les Q-projections associées à $x_1,\ldots,x_n$ puis le champ de Taylor $T_n(f)$ associé et on effectue un prolongement $\chi_n(f)$ en utilisant pour Φ le procédé d'interpolation 2-Hermite par des polynômes de degré 2k+1, et pour Ψ l'extrapolation par polynôme de degré k.

Considérons le procédé d'interpolation χ qui à f associe $\chi_X(f)$ interpolant de f sur X. Nous avons bien un procédé général d'interpolation qui est de type linéaire (voir chapitre I).

Il ne vérifie pas l'axiome de projection I.4 chapitre I. En effet soit φ une fonction interpolant f sur $(x_1,\ldots,x_n)$. Si nous ajoutons un point x_{n+1} certaines des Q-projections sont modifiées et alors le champ de Taylor associé aussi et ainsi φ n'est pas un interpolant de f sur $\{x_1,\ldots,x_n,x_{n+1}\}$.

Si l'ensemble des points $x_1,\ldots,x_n$ varie tout en gardant le même nombre d'éléments l'ensemble des interpolants $\chi_{x_1,\ldots,x_n}(\mathcal{F})$ ($\mathcal{F}$ ensemble de fonctions sur $[a,b]$) va dépendre des points $x_1,\ldots,x_n$ ainsi l'axiome I.10 (Chap. I) est non vérifié.

L'axiome de projection étant non vérifié ce procédé d'interpolation ne provient pas de la minimisation d'une fonction semi-hilbertienne. Il ne vérifie pas I.10 est il n'est donc pas du type de polynôme généralisé. Ce procédé possède des propriétés de convergences.

V.2 - Propriété de convergence

α) Soit une suite $x_1,\ldots,x_n,\ldots$ et $X_n = \{x_1,\ldots,x_n\}$. D'après les propriétés de la proposition IV.9 les Q-projections convergent et comme le procédé Φ (resp. Ψ) vérifie D1 et D3 (resp. E1 et E3) les interpolants χ_n convergent au sens de C^k vers f sur l'ensemble X des points adhérents de $x_1,\ldots,x_n,\ldots$ Nous avons ainsi la convergence uniforme de χ_n, mais aussi des dérivées jusqu'à l'ordre k. Ce procédé sera donc satisfaisant pour l'approximation des dérivées, à partir de la donnée des valeurs de la fonction.

β) Soit $X_n = \{x_1^n,\ldots,x_p^n\}$, supposons que les X_n convergent au sens de Kuratowski vers $[a,b]$ (pour tout $\varepsilon > 0$ il existe N et $\eta > 0$ tel que si $n > N$ il existe pour tout $x \in [a,b]$ un x_i^n avec $|x_i^n-x| < \eta$).

Dans ce cas là les Q_n-projections convergent aussi et nous avons convergence dans $C^k[a,b]$ des fonctions χ_n. Ce procédé nous donne aussi l'approximation des dérivées.

V.3 - *Proposition*

Le procédé d'interpolation décrit ici est un procédé exact sur les polynômes de degré au plus k.

Soit f un polynôme sur $[a,b]$, de degré k. Sur Q(x) le polynôme de Lagrange coïncide avec f, donc en x le champ T est justement le champ des dérivées en x du polynôme f. D'autre part par le procédé Φ sur x, x' nous obtenons le polynôme f sur x, x' comme interpolant de ses dérivées jusqu'à l'ordre k.

c.q.f.d.

V.4 - Résultats numériques

Carbonnel [1969] a effectué son projet de 3ème année de l'Institut Polytechnique de Grenoble sur le procédé décrit en V.1. Il a écrit un programme Algol, calculant la valeur de l'interpolant ainsi que les valeurs des dérivées, lorsque X est formé d'un nombre fini de points.

Nous donnons ci-dessus des tableaux de résultats. Chaque tableau est relatif à une fonction donnée. La colonne N correspond au nombre de points utilisés. La colonne K à l'ordre du procédé proposé, les autres colonnes aux erreurs sur la fonction et les dérivées en un point déterminé.

Nous remarquons qu'en général, l'approximation est acceptable jusqu'à la dérivée de l'ordre K du procédé. L'erreur augmentant lorsque l'ordre de la dérivée augmente.

Fonction sin(x) sur $[0,\pi]$

		Erreur sur			
N	K	fonction	dérivée	dérivée seconde	dérivée troisième
5	1	0,003	0,02	-	-
5	2	0,0004	0,007	0,2	
5	2	0,00009	0,0005	0,009	0,01
10	1	0,0002	0,01		
10	2	0,00007	0,002	0,01	
10	3	0,000005	0,0006	0,005	0,01
20	1	0,0001	0,006		
20	2	0,000006	0,0005	0,05	
20	3	0,00008	0,0006	0,002	0,03

Les abscisses d'interpolation sont régulièrement réparties.

On prend les valeurs pour $x = \frac{\pi}{3}$.

Fonction e^x sur $[0,1]$

Les abscisses d'interpolation sont irrégulièrement espacées de la forme $X(I) = \sin(\frac{I}{N}\frac{\pi}{2})$ $(I = 0,\dots,N)$.
On prend les valeurs pour x = 0.5

		Erreur			
N	K	fonction	dérivée	dérivée seconde	dérivée troisième
5	1	0,005	0,06		
5	2	0,002	0,007	0,6	
5	3	0,0003	0,0002	0,1	0,2
10	1	0,001	0,04		
10	2	0,0001	0,007	0,2	
10	3	0,00004	0,005	0,002	2
20	1	0,0003	0,02		
20	2	0,0004	0,001	0,02	
20	3	0,001	0,03	0,3	2
30	1	0,000006	0,04		
30	2	0,00008	0,002	0,07	
30	3	0,0002	0,0003	0,0003	0,06

Fonction ch(x) sur [0,2]

Les abscisses d'interpolation sont régulièrement réparties.
Pour chaque N et K on donne sur la première ligne l'erreur pour x = 0,35, sur la seconde l'erreur pour x = 0.87.

		Erreur			
N	K	fonction	dérivée	dérivée seconde	dérivée troisième
5	2	0,0005	0,01	0,03	
		0,001	0,006	0,4	
5	3	0,0003	0,007	0,001	0,3
		0,0001	0,005	0,1	1,6
10	2	0,0001	0,0003	0,06	
		0,00004	0,004	0,1	
10	3	0,00003	0,0004	0,007	0,05
		0,003	0,004	0,05	0,4
20	2	0,000003	0,0005	0,002	
		0,0001	0,001	0,08	
20	3	0,00002	0,0002	0,0001	
		0,001	0,04	0,02	0,4

BIBLIOGRAPHIE

J.C. AGGERI - C. LESCARRET

[1965] *Fonctions convexes duales associées à un couple d'ensembles mutuellement polaires.*
C.R.A.S. t. 260 n° 6011-6014.

J.H. AHLBERG - E.N. NILSON - J.L. WALSH

[1967] *The theroy of spline and this applications.*
Academic Press.

D.V. AHYA - S.A. COONS

[1968] *Geometry for construction and display.*
I.B.M. Systems Journal 71 n° 3-4 p. 188-205.

M. ATTEIA

[1966] *Etude de certains noyaux et théorie des fonctions spline en analyse numérique.*
Thèse Grenoble

[1968] *Fonctions spline et noyaux reproduisants d'Aronszajn - Bergmann.*
Publications Faculté des Sciences de Toulouse.

J. BARANGER

[1970] *Un théorème de caractérisation de certains sous-espaces hilbertiens de* l_1.
R.I.R.O. R3 4ème Année

J.P. BERTRANDIAS - N. GASTINEL

[1966] *Solutions exactes et approchées de problèmes linéaires.*
Publications Faculté des Sciences de Grenoble.

G. BIRKOFF - C. de BOER

[1964] *Error bounds for spline interpolation.*
J. of Maths and Mechanics. Vol. 13 n° 5 p. 827-835.

G. BIRKOFF - H.L. GARABEDIAN

[1960] *Smooth surface Interpolation.*
J. Math and Physics 39 - 353-368.

G. BIRKOFF - M.H. SCHULTZ - R.S. VARGA

[1968] *PiccewiseHermite interpolation... with applications to partial differential equations.*
Num. Math. 11 p. 232-256.

N. BOURBAKI

Algèbre Chapitre III - Algèbre multilinéaire

Algèbre Chapitre IV - Formes sesquilinéaires et formes quadratique
Espaces vectoriels topologiques Chapitres I à V.

S. CARBONNEL

[1969] *Procédé d'interpolation d'une fonction de classe C^k.*
Projet I.P.G. Grenoble.

C. CARASSO

[1967] *Méthodes numériques de construction de fonctions spline en analyse numérique.*
Thèse 3ème Cycle - Grenoble

C. CARASSO - P.J. LAURENT

[1968] *On the numerical construction and the pratical use of interpolating spline functions.*
I.F.I.P. Congress - Edimburgh.

C. COATMELEC

[1966] *Approximation et interpolation de fonctions différentiables de plusieurs variables.*
Thèse Annal. de l'E.N.S. 3ème Série n° 83.

[1969] *Prolongement d'une fonction en une fonction différentiable.*
Diverses majorations sur le prolongement.
Colloque de Madison Ed. Schoenberg.

S.A. COONS

[1964] *Surface for the computer aided design of spaces forms.*
Project M.A.C. M.I.T. 1964

D.J. DAVIS

[1963] *Interpolation and approximations.*
Blaisdell Publishing Compagny

E. DEFFAUD - P.J. MARCOVICI

[1968] *Interpolation sur un nombre infini de points par une fonction de H^k[a.*
Projet Institut Polytechnique Grenoble.

DIEUDONNE J.

[1963] *Sur la séparation des ensembles convexes*
Math. Ann. 163-1 3

C.F. DUCATEAU

[1968] *Conditions pour l'interpolation par des fonctions de* $H^k[a,b]$ *sur un nombre infini de points.*
C.R.A.S. t. 217 p. 309-312.

[1970] *Interpolation par des fonctions de* $C^k[a,b]$.
R.I.R.O. 4ème année R3.

[1971] *Condition pour qu'un procédé d'interpolation provienne de la minimisation d'une fonction semi-hilbertienne.*
C.R.A.S. t. 272 p. 266-269.

[1971] *Convergence de prolongements de champs de Taylor.*
C.R.A.S. t. 272.

[1971] *Description et propriétés de convergence d'un procédé d'interpolation par des fonctions de classe* C^k *sur un intervalle* $[a,b]$.
A paraître au C.R.A.S.

[1967] à [1971] *Exposés au Séminaire d'Analyse Numérique de la Faculté des Sciences de Grenoble.*

M. DUC-JACQUET

[1970] *Meilleures formules d'intégration dans certains espaces de Hilbert de fonctions.*
C.R.A.S. t. 271 p. 795-797.

[1971] *Sur l'approximation d'une fonctionnelle par des fonctionnelles dépendant d'un paramètre, dans des espaces de Hilbert.*
C.R.A.S. à paraître

GLAESER

[1958] *Etude de quelques algèbres tayloriennes.*
Journal d'Analyse Math. Jérusalem t. 6

|1967| *Prolongement extrémal de fonctions différentiables, dans prolongateur de Whitney.*
Rennes.

M. GOLOMB

|1962| *Lecture on theory of approximations.*
Arg. National Laboratory. App. Math. Division.

M. GOLOMB - H. WEINBERGER

[1959] *Optimal approximation and error bounds.*
R.E. Langer(Ed) Madison p. 117-190.

W.J. GORDON

[1969] *Spline blended surface interpolation through curve networks.*
J. of Math and Mech. Vol. 18 931-959.

T.N.E. GREVILLE

[1964] *Interpolation by generalized spline functions.*
SIAM Reviews 6. p. 483.

[1969] *Theory and applications of spline functions.*
Academic Press.

J.W. JEROME - L. SCHUMACKER

[1969] *On Lg-spline*
Journal of Approximation T.2. p. 29-49.

J.L. JOLY

[1967] *Theorème de convergence de fonctions spline.*
C.R.A.S. t. 264 p. 126-128.

[1970] *Une famille de topologies et de convergences sur l'ensemble des fonctionnelles convexes.*
Thèse Grenoble.

J. KUNTZMANN

[1959] *Méthodes numériques.*
Dunod.

KURATOWSKI

[1932] *Sur les fonctions continues dans l'espace des ensembles fermés.*
Fund. Math. 19 148-160.

P.J. LAURENT

[1964] *Etude de procédés d'extrapolation en analyse numérique.*
Thèse Faculté des Sciences de Grenoble.

[1967] *A general method for the construction of interpolation of smoothing spline functions.*

J.L. LIONS

[1961] *Equations différentielles opérationnelles.*
Springer Verlag.

J.L. LIONS - E. MAYENES

[1969] *Problèmes aux limites homogènes et applications. Dunod.*

S. MAURY

[1968] *Dualité des fonctions quadratiques positives. Séminaire d'Analyse Un. Faculté des Sciences Montpellier.*

[1969] *Sous-espace hilbertiens d'un espace vectoriel topologique. Séminaire d'Analyse Un. Faculté des Sciences Montpellier.*

MERRIEN

[1966] *Prolongateur de fonctions différentiables. Journal de Math. pures et appliquées.*

J.J. MOREAU

[1967] *Fonctionnelles convexes sur les équations aux dérivées partielles. (Leray) Collège de France.*

T.S. MOTZKIN

[1963] *Topics in the theory of interpolation and approximation. Ecole d'état d'Analyse Numérique. E.D.F. C.E.A.*

C. RAFFIN

[1970] *Sur les programmes convexes définis dans des espaces vectoriels topologiques. An. Inst. Fourier. Grenoble 20 p. 457-491.*

R.T. ROCKAFELLAR

[1970] *Convex Analysis. Princeton University Press.*

A. SARD

[1963] *Linear Approximation.*

[1967] *Optimal Approximation. J. of Functional Analysis. I. p. 222-241.*

I.J. SCHOENBERG

[1946] *Contribution to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions. Quat. Appl. Math. p. 45-99.*

[1958] *Spline function, convex curves, and mechanical quadrature. Bull. Amer. Math. Soc. 64 p. 352-357.*

I.J. SCHOENBERG

|1964| *On best approximation of linear operators.*
K. Nederlands. Akad-Von Wekenschaffer. Proc. Ser. A p. 155-163.

|1969| *Colloque de Madison. Approximation with special emphasis in spline functions.*

M.H. SCHULTZ - R.S. VARGA

|1967| *L. Spline.*
Num. Math. 10 p. 345-369.

L. SCHWARTZ

|1964| *Sous-espaces hilbertiens d'espaces vectoriels topologiques et noyaux associés.*
J. d'Analyse Math. Jérusalem.

F. TREVES

|1967| *Topological vector spaces distributions and kermels.*
Academic Press.

WHITNEY

|1934| *Analytic extensions of differential functions defined in closed sets.*
Trans. Amer. Math. Soc. Vol. 36-1

|1934| *Differential functions defined in closed sets.*
Trans. Amer. Math. Soc. Vol. 36-2.

VU

Grenoble, le

Le Président de la Thèse

VU

Grenoble, le

Le Doyen de la Faculté des Sciences

VU, et permis d'imprimer

Le Recteur de l'Académie de GRENOBLE