HAL
open science

Un exemple d'utilisation du calcul formel sur ordinateur : méthode générale de localisation des racines d'une équation algébrique à coefficients complexes

Evelyne Tournier

To cite this version:

Evelyne Tournier. Un exemple d'utilisation du calcul formel sur ordinateur : méthode générale de localisation des racines d'une équation algébrique à coefficients complexes. Modélisation et simulation. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1971. Français. NNT : . tel-00282851

HAL Id: tel-00282851

https://theses.hal.science/tel-00282851v1

Submitted on 28 May 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

TU 443

N° d'ordre

THESE

présentée à

L'UNIVERSITE SCIENTIFIQUE ET MEDICALE DE GRENOBLE

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR DE TROISIEME CYCLE

"Mathématiques Appliquées - Informatique"

par

Evelyne TOURNIER

UN EXEMPLE D'UTILISATION DU CALCUL FORMEL SUR ORDINATEUR

METHODE GENERALE DE LOCALISATION DES RACINES D'UNE EQUATION ALGEBRIQUE A COEFFICIENTS COMPLEXES

Thèse soutenue le 25 Septembre 1971 devant la commission d'examen :

Monsieur	N. GASTINEL	Président
Messieurs	P.J. LAURENT	Examinateur
	Y. SIRET	Examinateur

UNIVERSITE SCIENTIFIQUE
ET MEDICALE DE GRENOBLE

LISTE DES PROFESSEURS

Président : Monsieur Michel SOUTIF
Vice-Président : Monsieur Gabriel CAU

PROFESSEURS TITULAIRES

MM.	ANGLES D'AURIAC Paul	Mécanique des fluides
	ARNAUD Georges	Clinique des maladies infectieuses
	ARNAUD Paul	Chimie
	AYANT Yves	Physique approfondie
	BARBIER Jean-Claude	Physique expérimentale
	BARBIER Reynold	Géologie appliquée
	BARJON Robert	Physique nucléaire
	BARNOUD Fernand	Biosynthèse de la cellulose
	BARRIE Joseph	Clinique chirurgicale
	BENOIT Jean	Radioélectricité
	BESSON Jean	Electrochimie
	BEZES Henri	Chirurgie générale
	BLAMBERT Maurice	Mathématiques pures
	BOLLIET Louis	Informatique (IUT B)
	BONNET Georges	Electrotechnique
	BONNET Jean-Louis	Clinique ophtalmologique
	BONNET-EYMARD Joseph	Pathologie médicale
	BONNIER Etienne	Electrochimie Electrométallurgie
	BOUCHERLE André	Chimie et Toxicologie
	BOUCHEZ Robert	Physique nucléaire
	BRAVARD Yves	Géographie
	BRISSONNEAU Pierre	Physique du Solide
	BUYLE-BODIN Maurice	Electronique
	CABANAC Jean	Pathologie chirurgicale
	CABANEL Guy	Clinique rhumatologique et hydrologique
	CALAS François	Anatomie
	CARRAZ Gilbert	Biologie animale et pharmacodynamie
	CAU Gabriel	Médecine légale et Toxicologie
	CAUQUIS Georges	Chimie organique
	CHABAUTY Claude	Mathématiques pures
	CHATEAU Robert	Thérapeutique
	CHENE Marcel	Chimie papetière
	COEUR André	Pharmacie chimique
	CONTAMIN Robert	Clinique gynécologique
	COUDERC Pierre	Anatomie Pathologique
	CRAYA Antoine	Mécanique
Mme	DEBELMAS Anne-Marie	Matière médicale
MM.	DEBELMAS Jacques	Géologie générale
	DEGRANGE Charles	Zoologie
	DESSAUX Georges	Physiologie animale
	DODU Jacques	Mécanique appliquée
	DREYFUS Bernard	Thermodynamique
	DUCROS Pierre	Cristallographie
	DUGOIS Pierre	Clinique de Dermatologie et Syphiligraphie

	FAU René	Clinique neuro-psychiatrique
	FELICI Noël	Electrostatique
	GAGNAIRE Didier	Chimie physique
	GALLISSOT François	Mathématiques pures
	GALVANI Octave	Mathématiques pures
	GASTINEL Noël	Analyse numérique
	GERBER Robert	Mathématiques pures
	GIRAUD Pierre	Géologie
	KLEIN Joseph	Mathématiques pures
Mme	KOFLER Lucie	Botanique et physiologie végétale
MM.	KOSZUL Jean-Louis	Mathématiques pures
	KRAVTCHENKO Julien	Mécanique
	KUNTZMANN Jean	Mathématiques appliquées
	LACAZE Albert	Thermodynamique
	LACHARME Jean	Biologie végétale
	LATURAZE Jean	Biochimie pharmaceutique
	LEDRU Jean	Clinique médicale B
	LLIBOUTRY Louis	Géophysique
	LOUP Jean	Géographie
Mle	LUTZ Elisabeth	Mathématiques pures
MM.	MALGRANGE Bernard	Mathématiques pures
	MALINAS Yves	Clinique obstétricale
	MARTIN-NOEL Pierre	Séméiologie médicale
	MASSEPORT Jean	Géographie
	MAZARE Yves	Clinique médicale A
	MICHEL Robert	Minéralogie et Pétrographie
	MOURIQUAND Claude	Histologie
	MOUSSA André	Chimie nucléaire
	NEEL Louis	Physique du Solide
	OZENDA Paul	Botanique
	PAUTHENET René	Electrotechnique
	PAYAN Jean-Jacques	Mathématiques pures
	PEBAY-PEYROULA Jean-Claude	Physique
	PERRET René	Servomécanismes
	PILLET Emile	Physique industrielle
	RASSAT André	Chimie systématique
	RENARD Michel	Thermodynamique
	REULOS René	Physique industrielle
	RINALDI Renaud	Physique
	ROGET Jean	Clinique de pédiatrie et de puériculture
	SANTON Lucien	Mécanique
	SEIGNEURIN Raymond	Microbiologie et Hygiène
	SENGEL Philippe	Zoologie
	SILBERT Robert	Mécanique des fluides
	SOUTIF Michel	Physique générale
	TANCHE Maurice	Physiologie
	TRAYNARD Philippe	Chimie générale
	VAILLAND François	Zoologie
	VAUQUOIS Bernard	Calcul électronique
Mme	VERAIN Alice	Pharmacie galénique
	VERAIN André	Physique
Mme	VEYRET Germaine	Géographie
MM.	VEYRET Paul	Géographie
	VIGNAIS Pierre	Biochimie médicale
	YOCCOZ Jean	Physique nucléaire théorique

PROFESSEURS ASSOCIES

MM.	BULLEMER Bernhard	Physique
	RADHAKRISHNA Pidatala	Thermodynamique

PROFESSEURS SANS CHAIRE

MM.	AUBERT Guy	Physique
Mme	BARBIER Marie-Jeanne	Electrochimie
MM.	BARRA Jean	Mathématiques appliquées
	BEAUDOING André	Pédiatrie
	BERTRANDIAS Jean-Paul	Mathématiques appliquées
	BIAREZ Jean-Pierre	Mécanique
	BONNETAIN Lucien	Chimie minérale
Mme	BONNIER Jane	Chimie générale
MM.	CARLIER Georges	Biologie végétale
	COHEN Joseph	Electrotechnique
	COUMES André	Radioélectricité
	DEPASSEL Roger	Mécanique des Fluides
	DEPORTES Charles	Chimie minérale
	DESRE Pierre	Métallurgie
	DOLIQUE Jean-Michel	Physique des plasmas
	GAUTHIER Yves	Sciences biologiques
	GEINDRE Michel	Electroradiologie
	GIDON Paul	Géologie et Minéralogie
	GLENAT René	Chimie organique
	HACQUES Gérard	Calcul numérique
	JANIN Bernard	Géographie
Mme	KAHANE Josette	Physique
MM.	LATREILLE René	Chirurgie générale
	LAURENT Pierre	Mathématiques appliquées
	MULLER Jean-Michel	Thérapeutique
	PERRIAUX Jean-Jacques	Géologie et minéralogie
	POULOUJADOFF Michel	Electrotechnique
	REBECQ Jacques	Biologie (CUS)
	REVOL Michel	Urologie
	REYMOND Jean-Charles	Chirurgie générale
	ROBERT André	Chimie papetière
	SARRAZIN Roger	Anatomie et chirurgie
	SARROT-REYNAULD Jean	Géologie
	SIBILLE Robert	Construction Mécanique
	SIROT Louis	Chirurgie générale
Mme	SOUTIF Jeanne	Physique générale
M.	VALENTIN Jacques	Physique nucléaire

MAITRES DE CONFERENCES ET MAITRES DE CONFERENCES AGREGES

Mle	AGNIUS-DELORD Claudine	Physique pharmaceutique
	ALARY Josette	Chimie analytique
MM.	AMBLARD Pierre	Dermatologie
	AMBROISE-THOMAS Pierre	Parasitologie
	ARMAND Yves	Chimie

	BEGUIN Claude	Chimie organique
	BELORIZKY Elie	Physique
	BENZAKEN Claude	Mathématiques appliquées
Mme	BERTRANDIAS Françoise	Mathématiques pures
MM.	BLIMAN Samuel	Electronique (EIE)
	BLOCH Daniel	Electrotechnique
Mme	BOUCHE Liane	Mathématiques (CUS)
MM.	BOUCHET Yves	Anatomie
	BOUSSARD Jean-Claude	Mathématiques appliquées
	BOUVARD Maurice	Mécanique des Fluides
	BRIERE Georges	Physique expérimentale
	BRODEAU François	Mathématiques (IUT B)
	BRUGEL Lucien	Energétique
	BUISSON Roger	Physique
	BUTEL Jean	Orthopédie
	CHAMBAZ Edmond	Biochimie médicale
	CHAMPETIER Jean	Anatomie et organogénèse
	CHARACHON Robert	Oto-Rhino-Laryngologie
	CHIAVERINA Jean	Biologie appliquée (EFP)
	CHIBON Pierre	Biologie animale
	COHEN-ADDAD Jean-Pierre	Spectrométrie physique
	COLOMB Maurice	Biochimie médicale
	CONTE René	Physique
	CROUZET Guy	Radiologie
	DURAND Francis	Métallurgie
	DUSSAUD René	Mathématiques (CUS)
Mme	ETERRADOSSI Jacqueline	Physiologie
MM.	FAURE Jacques	Médecine légale
	GAVEND Michel	Pharmacologie
	GENSAC Pierre	Botanique
	GERMAIN Jean-Pierre	Mécanique
	GIDON Maurice	Géologie
	GRIFFITHS Michael	Mathématiques appliquées
	GROULADE Joseph	Biochimie médicale
	HOLLARD Daniel	Hématologie
	HUGONOT Robert	Hygiène et médecine préventive
	IDELMAN Simon	Physiologie animale
	IVANES Marcel	Electricité
	JALBERT Pierre	Histologie
	JOLY Jean-René	Mathématiques pures
	JOUBERT Jean-Claude	Physique du Solide
	JULLIEN Pierre	Mathématiques pures
	KAHANE André	Physique générale
	KUHN Gérard	Physique
Mme	LAJZEROWICZ Jeannine	Physique
MM.	LAJZEROWICZ Joseph	Physique
	LANCIA Roland	Physique atomique
	LE JUNTER Noël	Electronique
	LEROY Philippe	Mathématiques
	LOISEAUX Jean-Marie	Physique nucléaire
	LONGEQUEUE Jean-Pierre	Physique nucléaire
	LUU DUC Cuong	Chimie organique
	MACHE Régis	Physiologie végétale
	MAGNIN Robert	Hygiène et Médecine préventive
	MARECHAL Jean	Mécanique
	MARTIN-BOUYER Michel	Chimie (CUS)
	MAYNARD Roger	Physique du Solide
	MICOUD Max	Maladies infectieuses
	MOREAU René	Hydraulique (INP)

	NEGRE Robert	Mécanique
	PARAMELLE Bernard	Pneumologie
	PECCOUD François	Analyse (IUT B)
	PEFFEN René	Métallurgie
	PELMONT Jean	Physiologie animale
	PERRET Jean	Neurologie
	PERRIN Louis	Pathologie expérimentale
	PFISTER Jean-Claude	Physique du Solide
	PHELIP Xavier	Rhumatologie
Mle	PIERY Yvette	Biologie animale
	RACHAIL Michel	Médecine interne
	RACINET Claude	Gynécologie et obstétrique
	RICHARD Lucien	Botanique
Mme	RINAUDO Marguerite	Chimie macromoléculaire
MM.	ROMIER Guy	Mathématiques (IUT B)
	ROUGEMONT (DE) Jacques	Neuro-chirurgie
	STIEGLITZ Paul	Anesthésiologie
	STOEBNER Pierre	Anatomie pathologique
	VAN CUTSEM Bernard	Mathématiques appliquées
	VEILLON Gérard	Mathématiques appliquées (INP)
	VIALON Pierre	Géologie
	VOOG Robert	Médecine interne
	VROUSSOS Constantin	Radiologie
	ZADWORNY François	Electronique

MAITRES DE CONFERENCES ASSOCIES

MM.	BOUDOURIS Georges	Radioélectricité
	CHEEKE John	Thermodynamique
	GOLDSCHMIDT Hubert	Mathématiques
	YACOUD Mahmoud	Médecine légale

CHARGES DE FONCTIONS DE MAITRES DE CONFERENCES

Mme	BERIEL Hélène	Physiologie
Mme	RENAUDET Jacqueline	Microbiologie

A mes parents,

Je remercie Monsieur le Professeur N. GASTINEL, directeur du Laboratoire de Calcul, qui m'a fait l'honneur de présider le jury de thèse, je lui exprime toute ma reconnaissance pour la confiance qu'il m'a accordée et pour le vif intérêt avec lequel il a suivi et critiqué ma recherche.

Cette reconnaissance va aussi à Monsieur le Professeur P.J. LAURENT, qui a bien voulu me faire l'honneur de juger ce travail.

A Monsieur Y. SIRET, docteur ès-sciences, qui s'est intéressé avec sympathie à mes travaux et a aimablement accepté de faire partie du jury, j'exprime mes profonds remerciements.

Je souhaite également exprimer publiquement toute ma reconnaissance à Monsieur André LAPLACE, Maître assistant, qui ne m'a jamais ménagé ni son temps ni ses conseils dans sa brillante et très sympathique collaboration.

Je tiens à remercier aussi tous mes collègues de Laboratoire pour leur soutien chaleureux et la gentillesse qu'ils m'ont toujours témoignée.

Je remercie enfin les services de dactylographie, en particulier mademoiselle PAYERNE, et de tirage, à qui je dois la réalisation matérielle de cet ouvrage dans un temps très bref.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION.

CHAPITRE I : PRINCIPALES METHODES DE LOCALISATION DES RACINES D'UNE EQUATION ALGEBRIQUE DANS LE PLAN COMPLEXE.

-A- RAPPEL DES PRINCIPALES METHODES ..... p. I-1

I - Quelques règles générales ..... p. I-1

① Equation à coefficients réels ..... p. I-1

② Bornes des racines ..... p. I-1

③ Méthodes imparfaites de localisation et séparation des racines ..... p. I-3

II - Situation des racines sur l'axe réel.

① Le problème de Sturm ..... p. I-7

② Les suites de Sturm ..... p. I-8

③ Construction d'une suite de Sturm à l'aide de l'algorithme d'Euclide ..... p. I-10

④ Indice de Cauchy ..... p. I-12

⑤ Méthodes des formes quadratiques ..... p. I-17

III - Situation des racines par rapport à l'axe imaginaire.

① Algorithme de Routh ..... p. I-20

② Théorème de Routh-Hurwitz ..... p. I-24

③ Critère de stabilité de Lienard et Chipart ..... p. I-26

IV - Rapport avec la localisation des valeurs propres de matrices .. p. I-27

-B- METHODE GENERALE DE LOCALISATION ET SEPARATION DES RACINES ..... p. I-31

CHAPITRE II : THEORIE DES CARACTERISTIQUES DE KRONECKER..... p. II-0

-A- PRINCIPES DE LA THEORIE DES CARACTERISTIQUES..... p. II-1

I - Définitions et conventions préliminaires..... p. II-1

II - Caractéristique d'un système de trois fonctions..... p. II-4

III - Relation entre la caractéristique et les points d'intersection.. p. II-8

-B- APPLICATION DE LA THEORIE DES CARACTERISTIQUES A LA LOCALISATION DES RACINES COMPLEXES D'UNE EQUATION.

I - Exposé du problème..... p. II-12

II - Définition de la caractéristique dans le cas où les courbes φ et Ψ ne sont pas fermées..... p. II-13

III - Application du théorème de la caractéristique dans ce cas..... p. II-15

CHAPITRE III : EXPLOITATION DE LA METHODE DES CARACTERISTIQUES..... p. III-0

Préliminaires sur le langage PL/1 - FORMAC..... p. III-3

I - Présentation sommaire du langage..... p. III-5

II - Exécution d'un programme FORMAC..... p. III-9

-A- CHOIX DE LA COURBE f

I - Domaine de localisation..... p. III-14

II - f vérifie les conditions du théorème de la caractéristique..... p. III-15

III - Intérêt de ce choix..... p. III-15

-B- DESCRIPTION DE L'ALGORITHME DE DETERMINATION DE LA CARACTERISTIQUE... p. III-16

I - Exposé du problème..... p. III-16

II - Mise en oeuvre pratique..... p. III-18

1 Les différentes étapes de l'algorithme..... p. III-18

2 Etude descriptive de l'algorithme..... p. III-24

3 Présentation du programme principal..... p. III-30

4 Résultats..... p. III-34

CHAPITRE IV : AUTRES EXPLOITATIONS DE CARACT..... p. IV-0

-A- EXPLOITATION DE CARACT POUR LA DETERMINATION DES RACINES.

I - Remarques préliminaires..... p. IV-1

II - Exemple : Newton complexe..... p. IV-5

-B- OBTENTION D'UNE RACINE AVEC LE NOMBRE DE CHIFFRES SIGNIFICATIFS VOULUS..... p. IV-9

CHAPITRE V : CRITIQUES ET PERSPECTIVES..... p. V-0

- A -CRITIQUES : Quand et comment peut-on utiliser CARACT..... p. V-1

- B -PERSPECTIVES

I - Intérêt d'un tel travail dans un environnement conversationnel.. p. V-2

II - Intérêt d'une visualisation graphique..... p. V-2

APPENDICE Listing du programme.

BIBLIOGRAPHIE.

INTRODUCTION

INTRODUCTION

Il serait difficile de faire l'historique du problème de "la localisation et séparation des racines d'une équation algébrique", car c'est un problème qui sur le plan théorique est étudié depuis fort longtemps.

Quand on en regarde la bibliographie on remarque que cette étude s'oriente dans les sens suivants :

- dégager quelques règles ou remarques générales
- situer les racines sur l'axe réel
- situer les racines par rapport à l'axe imaginaire.

D'une part ces méthodes envisagent rarement les équations algébriques à coefficients complexes (c'est-à-dire le cas des racines complexes non conjuguées), d'autre part les exploitations faites de ces méthodes sont spécifiques à telle équation de tel degré et sur un certain domaine (qui sera souvent un demi-plan pour les méthodes les plus connues).

Or il serait intéressant d'avoir une méthode générale de localisation et séparation des racines d'une équation algébrique à coefficients réels ou complexes.

Notre but sera donc de construire formellement une telle méthode, et elle sera valable

- quels que soient les coefficients de l'équation
- quel que soit le degré de l'équation

et applicable dans n'importe quel domaine rectangulaire du plan complexe.

Cette méthode une fois programmée, les seules modifications à faire au niveau de l'utilisation seront les données, c'est-à-dire :

- l'équation à étudier
- les coordonnées du domaine d'étude.

Cette méthode sera fondée sur la théorie des caractéristiques de Kronecker.

La construction de son algorithme et son application ont pu être réalisées grâce à l'utilisation d'un langage formel (FORMAC).

En effet la programmation de cette méthode dans un langage évolué tel qu'Algol W, PL/1 ... aurait

- d'une part nécessité un travail préliminaire beaucoup trop long et fastidieux pour la construction formelle de l'algorithme
- d'autre part au niveau de l'activation numérique le travail en virgule flottante ne pouvait conduire à un résultat correct (par exemple toutes les opérations sur les polynômes : division, PGCD, construction des suites de Sturm, évaluations numériques ... sur lesquelles la propagation des erreurs d'arrondi et leurs cumuls deviennent rapidement trop importants).

Cette étude permettra donc de montrer comment utiliser les techniques de calcul formel sur ordinateur dans un problème classique d'analyse numérique (ses possibilités et avantages spécifiques, ses inconvénients aussi, et les perspectives que le développement de tels langages peut encore apporter).

En particulier la puissance du langage formel utilisé (FORMAC) provient essentiellement de son aptitude à traiter des processus non numériques tels que la simplification, la substitution, l'évaluation, la différentiation analytique d'expressions symboliques.

Ce travail se compose de deux parties :

- La première partie théorique comporte :

  . Chapitre I : un bref rappel des principales méthodes de localisation.

  . Chapitre II : l'exposé théorique de la méthode des caractéristiques de Kronecker.

- La seconde partie est une application du chapitre II et comporte :

  . Chapitre III : l'exploitation de la méthode des caractéristiques : exposé du programme CARACT .

  . Chapitre IV : les prolongements éventuels que l'on peut faire de ce programme CARACT pour la détermination d'une racine avec le nombre de chiffres significatifs voulu.

  . Chapitre V : intitulé "critiques et perspectives" qui nous permettra de conclure cette étude.

CHAPITRE I

CHAPITRE I

PRINCIPALES METHODES DE LOCALISATION DES RACINES D'UNE EQUATION ALGEBRIQUE DANS LE PLAN COMPLEXE.

- A - RAPPEL DES PRINCIPALES METHODES.

I - QUELQUES REGLES GENERALES.

1. Equation à coefficients réels.
2. Bornes des racines.
   - a - Majorant du module des racines.
   - b - Bornes des racines réelles d'après les sommes de Newton.
   - c - Bornes supérieures des racines réelles positives
     - Méthode de Lagrange
     - Méthode de Newton
     - Méthode de Laguerre
     - Méthode des groupements.
3. Méthodes imparfaites de localisation et séparation des racines.
   - a - Racines réelles.
     - Théorème de Rolle
     - Théorème de Descartes
     - Théorème de Budan-Fourier.
   - b - Quelques remarques sur les racines complexes
     - Règle de Sturm
     - Théorème des lacunes
     - Règle de Gua.

II - SITUATION DES RACINES SUR L'AXE REEL.

① Le problème de Sturm.

② Les suites de Sturm.

- Définition
- Propriétés
- Théorème.

③ Construction d'une suite de Sturm à l'aide de l'algorithme d'Euclide.

④ Indice de Cauchy.

- Définition
- Application
-- Méthode des formes quadratiques appliquée à la détermination du nombre de racines réelles distinctes d'un polynôme complexe.

III - SITUATION DES RACINES PAR RAPPORT A L'AXE IMAGINAIRE.

① Algorithme de Routh.

- a - Cas où $f(z)$ n'a pas de racines imaginaires pures.
- b - Cas où $f(z)$ a des racines imaginaires pures.

② Théorème de Routh - Hurwitz.

③ Critère de stabilité de Lienard et Chipart.

IV - RAPPORT AVEC LA LOCALISATION DES VALEURS PROPRES DE MATRICES.

① Théorème simple.

② Inégalité de Hadamard et disques de Gershgorin.

- B - METHODE GENERALE DE LOCALISATION ET SEPARATION DES RACINES.

- A - RAPPEL DES METHODES PRINCIPALES.

I - QUELQUES REGLES GENERALES.

① Equations à coefficients réels.

$$F(z) = \sum_{j=0}^{j=n} a_j z^j \qquad \text{avec} \qquad a_j \in R$$

Une telle équation, peut avoir des racines réelles et complexes conjuguées qui se présentent par paires avec la même multiplicité.

Remarques :

Sur le nombre des racines

- D'après le théorème de Gauss :

Une équation algébrique de degré n a n racines

- entre deux valeurs réelles $z = \alpha$ et $z = \beta$:
  - . si $F(\alpha).F(\beta) > 0$ il y a un nombre pair de racines entre α et β .
  - . si $F(\alpha).F(\beta) < 0$ il y a un nombre impair de racines entre α et β.

  En particulier si le degré n de l'équation est impair, elle a au moins une racine réelle car $F(\infty).F(-\infty) < 0$ et comme $F(0) = a_o$ alors :
  - . si $a_n a_o < 0$ cette racine est réelle positive.
  - . si $a_n a_o > 0$ cette racine est réelle négative.
- Si une équation algébrique ne contient que des puissances paires, son degré peut être abaissé de moitié.

② Bornes des racines.

La détemination des bornes des racines d'une équation algébrique ne doit être envisagée que comme la première démarche du problème plus général de la localisation et séparation des racines. Il ne s'agit donc que d'une opération peu précise, dont la qualité essentielle consiste à ne pas trop s'éloigner de la réalité, tout en n'exigeant qu 'un calcul fort simple.

Nous ne rappelons que les résultats des méthodes les plus usuelles :

- a - Majorants du module des racines.

. $|Z_M| < 1 + \sup_{i=0\ldots n} \left| \frac{a_i}{a_n} \right|$

. $|Z_M| < 2 * \max_{i=0\ldots n} \left(\left| \frac{a_i}{a_n} \right|^{1/i} \right)$

- b - bornes des racines réelles d'après les sommes de Newton.

. $|x_M| < \sqrt[2P]{S_{2P}}$ avec $S_{2p} = \sum_{i=1}^{i=n} x_i^{2p}$

. $|x_m| > \dfrac{1}{\sqrt[2P]{S_{-2P}}}$ avec $S_{-2p} = \sum_{i=1}^{i=n} \dfrac{1}{x_i^{2p}}$

Les x_i étant les racines réelles ou complexes, et les S_{2p} et S_{-2p} sont données par les relations de Newton ([XI] p. 122 → 125).

- c - Bornes supérieures des racines réelles positives.

Remarques : On supposera dans ce § que le premier coefficient a_n est positif).

L est une borne supérieure des racines positives de $F(x) = 0$ lorsque pour tout $x \geq L$ le premier membre de cette équation est positif.

Pour obtenir une borne inférieure des racines positives, on recherchera une borne supérieure des racines positives de $x^n \; F(\frac{1}{x}) = 0$.

Si l'on désire obtenir des bornes inférieure et supérieure des racines négatives de $F(x) = 0$, on recherchera une borne supérieure des racines positives respectivement de $F(-x) = 0$ et $x^n \; F(-\frac{1}{x}) = 0$.

- Méthode de Lagrange (Réf. II 1 p. 174).

Soient :

$N = \max_{a_i \in R^-} |a_i|$ c'est-à-dire le module maximum des coefficients négatifs.

a_p le premier coefficient négatif,

alors :

$L = 1 + \sqrt[p]{\frac{N}{a_n}}$ est une borne supérieure des racines positives de $F(x) = 0$ si $\frac{N}{a_n} \geq 1$.

$L = 1 + \frac{N}{a_n}$ est également une borne supérieure moins précise.

- Méthode de Newton (Réf. II 1 p. 174).

Soient λ et h deux nombres positifs.
On a l'identité :

$$F(\lambda+h) = F(\lambda) + \frac{h}{1!} F'(\lambda) + \dots \frac{h^n}{n!} F^{(n)}(\lambda) .$$

Pour que λ soit une borne supérieure des racines positives de $F(x) = 0$ il suffit donc que les nombres :

$F(\lambda)$, $F'(\lambda)$ ... $F^{(n)}(\lambda)$ soient tous positifs.

- Méthode de Laguerre.

Soient les fonctions :

$$F_n = a_n$$

$$F_{n-1} = a_n x + a_{n-1}$$

.....

$$F_1 = (a_n x + a_{n-1}) x + \dots + a_1$$

Conduisant à l'identité :

$$F(x) \equiv (x-\lambda) [x^{n-1} F_n(\lambda) + x^{n-2} F_{n-1}(\lambda) + \dots + F_1(\lambda)] + F(\lambda) .$$

Si les nombres : $F_n(\lambda)$, $F_{n-1}(\lambda)$ ... $F_1(\lambda)$, $F(\lambda)$ sont tous positifs, λ est évidemment une borne supérieure des racines positives de $F(x) = 0$.

- Méthode des groupements (Réf. II 1 p 175, 176).

Cette méthode est fondée sur la remarque suivante :

Si un polynôme ordonné suivant les puissances décroissantes de x est formé d'un groupe de termes tous positifs, suivi d'un groupe de termes tous négatifs, s'il est positif pour une valeur positive a de x, il est positif pour tout $x > a$.

On peut en effet écrire :

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_p x^p - (a_{p-1} x^{p-1} + \dots + a_o)$$

$$= x^p \left[a_n x^{n-p} + a_{n-1} x^{n-p-1} + \dots + a_n - \left(\frac{a_{p-1}}{x} + \dots \frac{a_o}{x^p}\right)\right]$$

Lorsque x croît, la première partie de l'expression entre crochets croît, tandis que la seconde décroît.

Si donc $P(a) > 0$ on a aussi $P(a+\lambda) > 0$ pour tout $\lambda > 0$.

Pour appliquer cette proposition, on décompose $F(x)$ en plusieurs groupements de termes analogues à $P(x)$ et on détermine pour chacun une valeur positive de x le rendant positif.

La plus grande de ces valeurs de x est la borne supérieure cherchée.

Remarques sur ces différentes méthodes :

La méthode de Lagrange est très rapide et automatique, mais elle donne souvent un résultat peu précis et elle est à déconseiller quand $\frac{N}{a_n}$ est grand.

Par contre la méthode des groupements, quand elle est bien maniée, est souvent la plus efficace tant en rapidité qu'en précision.

③ Méthodes imparfaites de localisation et séparation des racines.

- a - Racines réelles.

Préliminaires :

Séparer les racines réelles de l'équation $F(x) = 0$, c'est déterminer entre une borne inférieure ℓ et une borne supérieure L de ces racines supposées connues, des nombres croissants $s_1, s_2, \dots, s_{k-1}$ tels qu'entre

ℓ et s_1 , entre s_j et s_{j+1} (avec $j = 1, \ldots k-2$) et entre s_{k-1} et L on trouve une et une seule racine de $F(x) = 0$, k étant le nombre de racines réelles.

. Lorsqu'il n'y a que des racines de multiplicité impaire, les propriétés énoncées en ① permettent de résoudre entièrement ce problème, pourvu que l'on sache déterminer le nombre des racines comprises entre deux nombres donnés α et β .

. Lorsqu'il y a des racines de multiplicité paire, pour pouvoir appliquer la même méthode, on doit d'abord passer à l'équation aux racines simples ; mais on peut aussi observer que les racines de multiplicité paire sont des racines de multiplicité impaire de l'équation dérivée.

La question revient donc à déterminer le nombre de racines réelles de l'équation, comprises entre α et β .

Remarques du point de vue application.

Pour résoudre ce problème on dispose :

- de méthodes relativement rapides, quand elles sont bien maniées, mais imparfaites car elles ne conduisent pas toujours au but.
- de méthodes théoriquement parfaites mais plus lentes.

On rappellera brièvement quelques propositions relatives aux méthodes imparfaites dont un emploi judicieux conduit souvent à la séparation rapide des racines.

Dans le paragraphe suivant on exposera une méthode théoriquement parfaite due à Sturm (1829).

. Théorème de Rolle (Réf. II ① p. 177).

Entre deux racines consécutives a et b avec (a<b) de $F(x) = 0$, l'équation dérivée $F'(x) = 0$ admet un nombre impaire de racines.

Il en résulte qu'en deux racines réelles consécutives α et β de $F'(x) = 0$, se trouve une ou zéro racine de $F(x) = 0$ selon que $F(\alpha)$ et $F(\beta)$ sont de signes contraires ou de même signe ; et que $F(x) = 0$ compte au plus une racine supérieure et une racine inférieure à toutes les racines de $F'(x) = 0$.

La connaissance des racines réelles de $F'(x) = 0$ entraine donc la séparation des racines réelles de $F(x) = 0$.

En particulier, si toutes les racines de $F(x) = 0$ sont réelles, elles sont séparées par les racines de $F'(x) = 0$ qui sont aussi toutes réelles, mais la réciproque n'est généralement pas vraie.

. Théorème de Descartes (Réf. II ① p. 178-180)

Le nombre de racines réelles positives de $F(x) = 0$ est égal au nombre des variations de la suite formée par les coefficients de l'équation, éventuellement diminué d'un nombre pair.

On a une règle analogue pour les racines négatives après avoir changé x en $-x$ dans l'équation algèbrique .

. Théorème de Budan et Fourier (Réf. II ① p. 180-182).

Etant donnée l'équation $F(x) = 0$, de degré n ; et deux nombres réels α et β tels que $\alpha < \beta$, la suite :

$$F(\beta) \ , \ F'(\beta) \ \ldots \ , \ F^{(n)}(\beta)$$

ne peut présenter plus de variations que la suite :

$$F(\alpha) \ , \ F'(\alpha) \ \ldots \ F^{(n)}(\alpha) \ .$$

Le nombre de racines réelles de $F(x) = 0$ comprises entre α et β est égal à la différence des nombres de variations des deux suites, diminuée éventuellement d'un nombre pair.

- b - Quelques remarques sur les racines complexes.
(Réf. II ① p. 183, 184).

Les règles suivantes sont fondées sur certaines particularités, aussi ne permettent-elles pas d'obtenir exactement le nombre de racines complexes dans le cas général; cependant elles peuvent donner quelques indications sur la présence des racines complexes.

- Règle de Sturm.

Soit a un nombre réel positif. Si l'équation $(x-a)\ F(x) = 0$ présente $2k+1$ variations de plus que l'équation $F(x) = 0$, celle-ci à au moins $2k$ racines imaginaires.
(NB : Variation au sens de Descartes (Réf. II ① p. 178)).

- Théorème des lacunes.

S'il manque un terme entre deux termes de même signe, ou plusieurs termes entre deux termes quelconques, l'équation admet nécessairement des racines imaginaires.

- Règle de Gua.

Si le carré d'un coefficient intermédiaire d'une équation est inférieur ou égal au produit des coefficients voisins, cette équation admet des racines imaginaires.

Après ces quelques remarques générales on fera un rappel des études théoriques du problème de la localisation et séparation des racines, qui se regroupent essentiellement autour des deux orientations suivantes :

- situation des racines sur l'axe réel.
- situation des racines par rapport à l'axe imaginaire.

II- SITUATION DES RACINES SUR L'AXE REEL. (Réf. II (1) p. 186→202) (et IX p. 316→338).

1 Le problème de Sturm.

La détermination du nombre de racines réelles d'une équation n'est qu'un cas particulier d'un problème plus général : appelé "problème de Sturm".

La question à résoudre est la suivante :
Combien y a-t-il de racines réelles d'une équation numérique entre deux nombres donnés a et b ?

Ce problème résolu il s'agira de restreindre l'intervalle (a,b) de telle sorte que les nombres a et b puissent être considérés comme une valeur approchée de cette racine.

En supposant $a = -\infty$ et $b = +\infty$ c'est-à-dire a négatif, b positif et suffisamment grands en valeur absolue, pour qu'en dehors de l'intervalle

(a,b) il n'y ait plus de racines de l'équation, le problème revient à celui de la détermination du nombre de toutes les racines réelles d'une équation.

② Les suites de Sturm.

Soient : a et b $(a < b)$ deux nombres réels quelconques

$f(x)$ une fonction rationnelle de x .

On demande combien elle a de racines réelles dans l'intervalle Δ; $\Delta =]a,b[$.

Par hypothèse :

a et b ne sont pas des racines de $f(x)$,

de plus nous supposerons que $f(x)$ n'a pas de racines multiples dans l'intervalle Δ , par suite aucune valeur de cet intervalle n'annulera à la fois $f(x)$ et $f'(x)$.

Supposons que par un procédés quelconque nous ayons formé une suite de m fonctions continues.

$$f_1(x) = f(x), \quad f_2(x) \ , \ \ldots \ f_m(x) \qquad (K)$$

possèdant les propriétés suivantes :

-(1)- Deux fonctions consécutives ne s'annulent pas pour une même valeur de l'intervalle Δ .

-(2)- La fonction $f_m(x)$ ne s'annule pour aucune valeur de l'intervalle Δ , et conserve par suite un signe constant pour toutes les valeurs de l'intervalle.

-(3)- Pour tout x_o, $x_o \in \Delta$ si $f_\nu(x_o)$ avec $(\nu=2, \ldots m-1)$ s'annule, les fonctions adjacentes $f_{\nu-1}$ et $f_{\nu+1}$ sont $\neq 0$ et de signes opposés pour cette valeur de x_o .

-(4)- Lorsque $f(x)$ s'annule pour une valeur de l'intervalle, $f_2(x)$ est de même signe que $f'(x)$.

Une telle suite (K) est appelée <u>suite de Sturm simple</u> dans l'intervalle $]a,b[$.

<u>Définition de la fonction variation.</u>

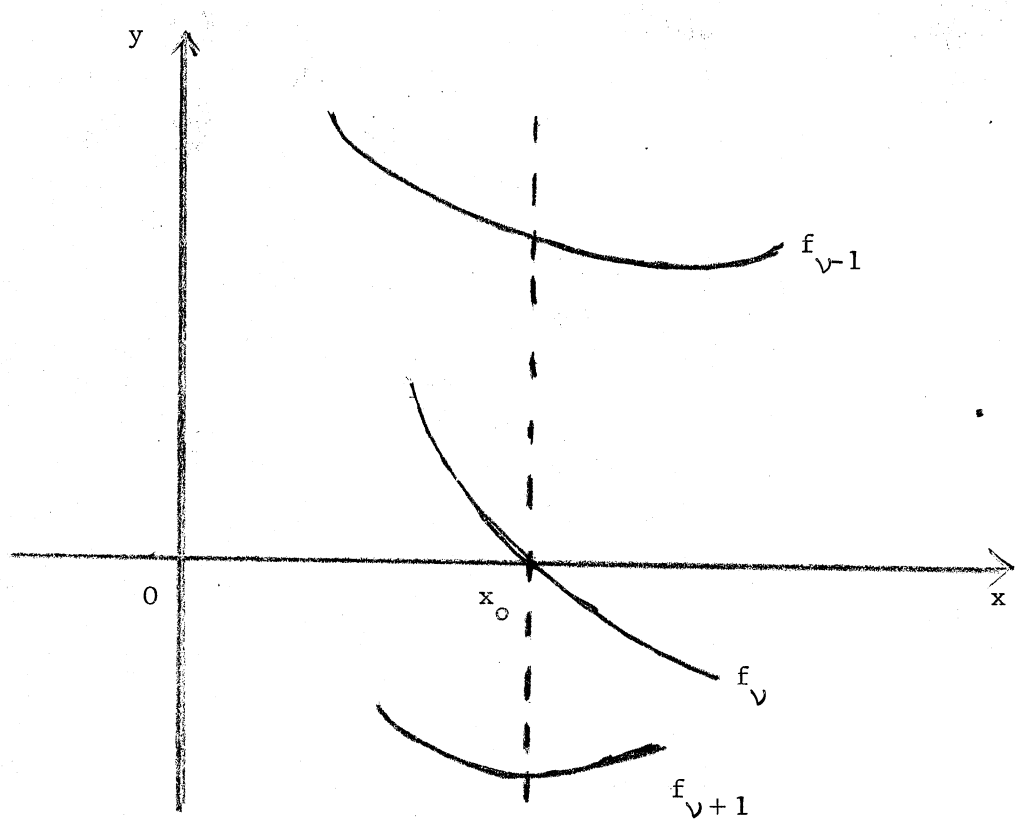
Notons $V(x)$ la fonction égale au nombre de variations de signes de la suite pour une valeur fixée de x.

<u>Remarques</u> :

Si a est fini, alors $V(a)$ doit être interprété comme $V(a+\varepsilon)$ où ε est un nombre positif assez petit pour que dans l'intervalle $]a, a+\varepsilon]$ demi-fermé, aucune des fonctions $f_i(x)$ ne s'annule.

Définition semblable pour $V(b)$.

La valeur de $V(x)$, quand x varie dans $]a,b[$ ne peut changer que lorsqu'une des fonctions intermédiaires de la suite s'annule. Mais d'après la propriété (3), quand une des fonctions $f_\nu(x)$ pour $(\nu = 2, \ldots m-1)$ passe par 0, la valeur de $V(x)$ ne change pas.



Donc :

<u>Seuls les passages de $f_1(x)$ par 0 font varier $V(x)$</u>

$V(x)$ augmente de 1 quand $\dfrac{f_2(x)}{f_1(x)}$ passe de $+\infty$ à $-\infty$.

$V(x)$ diminue de 1 quand $\dfrac{f_2(x)}{f_1(x)}$ passe de $-\infty$ à $+\infty$.

d'où :

<u>THEOREME de Sturm.</u>

Le nombre de racines de l'équation $f(x) = 0$ comprises entre a et b est égal à l'excès du nombre de variations que présente la suite pour $x = a$ sur le nombre de variations qu'elle présente pour $x = b$ soit :

$$V(a) - V(b).$$

<u>Remarque</u> :

Si on multiplie toutes les fonctions d'une suite de Sturm par un seul et même polynôme arbitraire $d(x)$, la suite ainsi obtenue est appelée <u>suite de Sturm généralisée</u> et le théorème de Sturm énoncé reste valable pour cette suite.

③ <u>Construction d'une suite de Sturm à l'aide de l'algorithme d'Euclide</u>.

Soient deux polynômes $f_1(x)$ et $f_2(x)$ tels que

degré de $f_1(x) \geq$ degré de $f_2(x)$.

Posons :

- $f_3(x)$ = reste de la division de $f_1(x)$ par $f_2(x)$
- $f_4(x)$ = reste de la division de $f_2(x)$ par $f_3(x)$

..... etc ...

Alors on a les relations suivantes :

$$f_1(x) = q_1(x)\ f_2(x) - f_3(x)$$
$$f_2(x) = q_2(x)\ f_3(x) - f_4(x)$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$f_{k-1}(x) = q_{k-1}(x)\ f_k(x) - f_{k+1}(x)$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$f_{m-2}(x) = q_{m-2}(x)\ f_{m-1}(x) - f_m(x)$$
$$f_{m-1}(x) = q_{m-1}(x)\ f_m(x) - f_{m+1}(x).$$

C'est l'algorithme d'Euclide qui s'arrête à la rencontre d'un reste ($f_{m+1}(x)$) identiquement nul.
$f(x)$ est le dernier reste non identiquement nul et c'est aussi le PGCD de tous les polynômes $f_1 \dots f_m$ de la suite ainsi construite.

Deux cas peuvent se présenter :

-(1)- $f_m(x)$ n'a pas de racines réelles dans $]a,b[$:

$f(x)$ étant le PGCD de tous les polynômes de la suite, ces derniers n'ont pas de racines réelles communes et

$$f_\nu(x) = 0 \Rightarrow f_{\nu-1}(x) = -f_{\nu+1}(x) \text{ avec } (\nu = 2, \dots, m-1)$$

ou bien

$$f_{\nu-1}(x).f_{\nu+1}(x) \lneq 0 .$$

Dans ce cas la suite $f_1, \dots, f_m$ est une <u>suite de Sturm simple</u>.

-(2)- $f_m(x)$ a des racines réelles dans $]a,b[$:
Si alors on divise tous les polynômes de la suite par $f_m(x)$ on obtient une <u>suite de Sturm généralisée</u>.

Dans tous les cas le théorème de Sturm s'applique à la suite construite à l'aide de l'algorithme d'Euclide.

Application immédiate.

En construisant une suite de Sturm à partir de :

$f_1(x) = f(x)$

$f_2(x) = f'(x)$

Cela nous donne donc le nombre de racines réelles distinctes : $V(a) - V(b)$ dans l'intervalle $]a,b[$.

④ Indice de Cauchy (Réf. III p. 169);

-a- Définition

L'indice de Cauchy d'une fonction rationnelle réelle $R(x)$ entre les limites a et b (notation : $I_a^b R(x)$; a et b sont des nombres réels ou $\pm\infty$) est la différence entre le nombre de sauts de $R(x)$ de $-\infty$ à $+\infty$ et le nombre de sauts de $+\infty$ à $-\infty$ lorsque l'argument varie de a à b (en comptant le nombre de sauts on ne tient pas compte des valeurs extrêmes $R(a)$ et $R(b)$; x varie dans l'intervalle $]a,b[$.

- b - Applications

Selon cette définition :

Premier cas :

$$\text{Si on a } R(x) = \sum_{i=1}^{p} \frac{A_i}{x-\alpha_i} + R_1(x)$$

où A_i et α_i $(i = 1, 2, \ldots p)$ sont des nombres réels et $R_1(x)$ une fraction rationnelle sans pôles réels ; on a alors :

$$I_{-\infty}^{+\infty} R(x) = \sum_{i=1}^{p} \text{signe } A_i$$

et plus généralement :

$$I_{-\infty}^{+\infty} R(x) = \sum_{a<\alpha_i<b}^{p} \text{signe } A_i \quad (\text{avec } a < b) .$$

Deuxième cas :

Si on a :

$$f(x) = a_n (x-\alpha_m)^{n_1} \dots (x-\alpha_m)^{n_m} \quad \text{polynôme réel}$$

et si parmi ses racines $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_m$ seulement les p premières sont réelles alors :

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \sum_{j=1}^{m} \frac{n_j}{x-\alpha_j} = \sum_{i=1}^{p} \frac{n_i}{x-\alpha_i} + R_1(x)$$

où $R_1(x)$ est une fraction rationnelle sans pôles réels.
Par suite

L'indice $I_a^b \dfrac{f'(x)}{f(x)}$ $(a < b)$ est égal au nombre de racines réelles distinctes de $f(x)$ dans l'intervalle $]a,b[$.

- c - Méthodes de calcul de l'indice de Cauchy d'une fraction rationnelle arbitraire.

(α) Par le théorème de Sturm.

L'une des méthodes de calcul de $I_a^b R(x)$ est basée sur le théorème classique de Sturm soit :

Si $f_1(x), f_2(x) \dots f_m(x)$ est une suite de Sturm dans $]a,b[$ et $V(x)$ le nombre de variations de signes dans la chaine alors :

$$I_a^b \frac{f_2(x)}{f_1(x)} = V(a) - V(b).$$

Remarques :

. Si $R(x) = Q(x) + \dfrac{g(x)}{f(x)}$ avec degré $g(x) \leq$ degré $f(x)$ d'après les propriétés précédemment rappelées des suites de Sturm généralisées on a :

$$I_a^b\, R(x) = I_a^b \frac{g(x)}{f(x)} = V(a) - V(b).$$

. En particulier, au moyen du théorème de Sturm nous pouvons déterminer le nombre de racines réelles distinctes d'un polynôme $f(x)$ dans l'intervalle $]a,b[$ puisque comme nous l'avons vu ce nombre est égal à

$$I_a^b \frac{f'(x)}{f(x)} .$$

(β) Par les coefficients du numérateur et dénominateur.

Supposons donnée une fraction rationnelle dont le développement en série de puissances décroissantes de x est :

$$R(x) = s_{-u-1}x^{-u} + \dots s_{-2}x + s_{-1} + \frac{s_o}{x} + \frac{s_1}{x^2} + \dots .$$

La suite des coefficients des puissances négatives de x :
s_o, s_1, s_2 ... définit une matrice de Hankel infinie :

$$S = \|s_{i+k}\|_0^\infty = \begin{pmatrix} s_o & s_1 & s_2 & \dots \\ s_1 & s_2 & s_3 & \dots \\ s_2 & s_3 & s_4 & \dots \\ \dots & & & \end{pmatrix}$$

les s_p étant les sommes de Newton.

Nous avons ainsi établi la correspondance :

$$R(x) \sim S$$

Il est évident que deux fonctions dont la différence est une fonction entière correspondant à une seule et même matrice S .

Toute matrice S correspond à une fonction rationnelle si et seulement si elle est de rang fini. Ce rang est égal au nombre de pôles de $R(x)$ (en tenant compte des multiplicités) c'est-à-dire au degré du dénominateur $f(x)$ de la fraction réduite :

$$R(x) = \frac{g(x)}{f(x)} .$$

<u>Propriétés de cette correspondance</u> :

. si $R_1(z) \sim S_1$, $R_2(z) \sim S_2$

$\forall$ c_1 et c_2 on a :

$$C_1 R_1(z) + C_2 R_2(z) \sim C_1 S_1 + C_2 S_2 .$$

. Si $R(z,\alpha) \sim S_\alpha \Rightarrow \dfrac{\partial R}{\partial \alpha} \sim \dfrac{\partial S}{\partial \alpha}$.

. <u>Formes associées</u>.

$$\Rightarrow \text{Si} \quad R(z) = Q(z) + \sum_{j=1}^{q} \left\{ \frac{A_1^{(j)}}{z-\alpha_j} + \dots \frac{A_{\nu_j}^{(j)}}{(z-\alpha_j)^{\nu_j}} \right\}$$

La forme associée à la matrice de Hankel

$S_\alpha = \|\alpha^{i+k}\|_0^\infty$ est :

$$S_n(x,x) = \sum_{i,k=0}^{n-1} s_{i+k}\, x_i\, x_k .$$

→ Si $R(z) = Q(z) + \sum_{j=1}^{q} \frac{A^{(j)}}{z-\alpha_j}$

la forme quadratique correspondante est :

$$S_n(x,x) = \sum_{j=1}^{q} A^{(j)} (x_o + \alpha_j x_1 + \dots \alpha_j^{n-1} x_{n-1})^2$$

Ce qui nous conduit au théorème fondamental suivant :

<u>THEOREME</u> :

Si $R(z) \sim S$
et si m est le rang de S , l'indice de Cauchy $I_{-\infty}^{+\infty} R(z)$ est égal à la signature de la forme $S_n(x,x)$ pour tout $n \geq m$:

$$I_{-\infty}^{+\infty} R(z) = \sigma\,[S_n(x,x)].$$

<u>Corollaire</u> :

L'indice d'une fonction rationnelle arbitraire $R(z)$ dont la matrice correspondante $S = \|s_{i+k}\|_0^\infty$ est de rang m , est déterminé par la formule :

$$I_{-\infty}^{+\infty} R(z) = m - 2V(1, D_1, D_2, \dots D_m)$$

où $D_f = |s_{i+k}|_0^{f-1} = \begin{vmatrix} s_o & s_1 & \dots & s_{f-1} \\ s_1 & s_2 & \dots & s_f \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{f-1} & s_f & \dots & s_{2f-2} \end{vmatrix}$ avec $f = 1, 2, \dots m$

Si parmi les $D_1, D_2, \ldots D_m$, il y a un groupe de déterminants qui s'annulent :

$$(D_h \neq 0)\ ,\ D_{h+1} = \ldots D_{n+p} = 0 \quad (D_{h+p+1} \neq 0)$$

alors dans le calcul de $V(D_h, D_{h+1} \ldots D_{h+p+1})$ nous pouvons prendre :

$$V(D_h, D_{h+1} \ldots, D_{h+p+1}) = \begin{cases} \dfrac{p+1}{2} & \text{pour } p \text{ impair} \\ \dfrac{p+1-\varepsilon}{2} & \text{pour } p \text{ pair} \end{cases}$$

$$\varepsilon = (-1)^{p/2} \text{ signe } \frac{D_{h+p+1}}{D_h}$$

⑤ <u>Méthode des formes quadratiques appliquée à la détermination du nombre de racines réelles distinctes d'un polynôme complexe</u>.

<u>Remarque préliminaire</u> :

Dans la résolution de ce problème, nous pouvons nous limiter au cas ou $f(z)$ est un polynôme réel.
En effet supposons que :

$f(z) = u(z) + i\ v(z)$ soit un polynôme complexe.

($u(z)$ et $v(z)$) étant des polynômes réels .

Toute racine réelle de $f(z)$ annule simultanément $u(z)$ et $v(z)$
Par suite le polynôme complexe $f(z)$ a les mêmes racines réelles que le polynôme réel $d(z)$ qui est le PGCD de $u(z)$ et $v(z)$.

Si donc $f(z)$ est un polynôme réel avec les racines distinctes $\alpha_1\ \alpha_2 \ldots \alpha_q$ de multiplicité respectives $n_1\ n_2 \ldots n_q$.

$$f(z) = a_n(z-\alpha_1)^{n_1}\ (z-\alpha_2)^{n_2} \ldots (z-\alpha_q)^{n_q}$$

avec $a_n \neq 0$, $\alpha_i \neq \alpha_k$ pour $i \neq k$ $(i, k=1, 2 \ldots q)$
Soient les sommes de Newton :

$$s_p = \sum_{j=1}^{q} n_j \alpha_j^p \qquad (p = 0, 1, 2 \ldots)$$

avec lesquelles nous formons les formes de Hankel :

$$S_n(x,x) = \sum_{i,k=0}^{n-1} s_{i+k} x_i x_k \quad \text{ou } n \text{ entier arbitraire} \geq q$$

Nous avons alors le théorème suivant :

<u>THEOREME</u> :

Le nombre de toutes les racines réelles distinctes de $f(z)$ et le nombre de toutes les racines distinctes sont respectivement égaux au rang et à la signature de la forme $S_n(x,x)$
Démonstration (Réf. III p. 199-200).

<u>Corollaire</u> :

Le nombre de racines réelles distinctes du polynôme réel $f(z)$ est égal à la $\neq$ entre le nombre de signes permanents et le nombre de signes modifiés dans la suite :

$$1, s_o, \begin{vmatrix} s_o & s_1 \\ s_1 & s_2 \end{vmatrix} \ldots \begin{vmatrix} s_o & s_1 & \ldots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & \ldots & s_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ s_{n-1} & s_n & \ldots & s_{2n-2} \end{vmatrix}$$

où les s_p $(p=0,1,2\ldots)$ sont les sommes de Newton pour $f(z)$ et où n est un entier qui n'est pas inférieur au nombre q de racines distinctes de $f(z)$.

Remarques :

. Cette règle est directement applicable pour la détermination du nombre de racines réelles distinctes seulement lorsque tous les nombres de la suite sont $\neq 0$.

. En particulier, si nous prenons pour n le degré de $f(z)$ alors d'après le corollaire, le nombre de racines réelles distinctes est égal à :

$$I_{-\infty}^{+\infty} \frac{f'(z)}{f(z)} = n - 2V\left(1, s_o, \begin{vmatrix} s_o & s_1 \\ s_1 & s_2 \end{vmatrix} \cdots \begin{vmatrix} s_o & s_1 & \cdots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_n \\ s_{n-1} & s_n & \cdots & s_{2n-2} \end{vmatrix}\right)$$

où $s_p = \sum_{j=1}^{q} n_j \alpha_j^p$, $(p = 0, 1, 2 \ldots)$.

Cette formule est semblable à celle définie au paragraphe 4(β) pour la détermination de l'indice d'une fraction rationnelle arbitraire dans laquelle nous avons utilise les matrices de Hankel infinies. (Réf. III p. 201→204).

III - SITUATION DES RACINES PAR RAPPORT A L'AXE IMAGINAIRE.

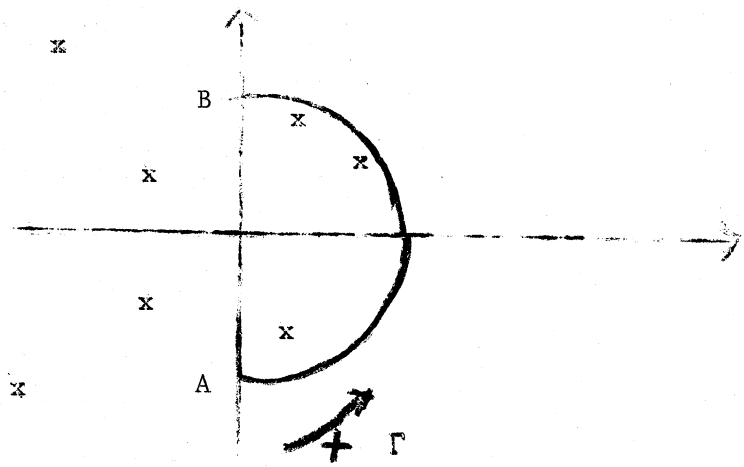
Réf. (II (1) p. 349-354 ; III p. 172 → 181).

(1) Algorithme de Routh.

Le problème de Routh consiste à déterminer le nombre k de racines d'un polynôme réel $f(x)$ dans le demi-plan droit $\Re e(z) > 0$.

Deux possibilités sont à envisager :

- a - Cas où $f(z)$ n'a pas de racines imaginaires pures.



Prenons R suffisamment grand pour que toutes les racines de f situées dans le demi-plan $\Re e(z) > 0$ se trouvent dans le demi-cercle de rayon R centré à l'origine.

Considérons le domaine limité par Γ = demi-cercle plus le segment de l'axe imaginaire AB :

$$f(z) = a_n \prod_{i=1}^{n} (z-z_i)$$

z décrivant le contour Γ une seule fois dans le sens positif on a :

$$\Delta \arg f(z) = \sum_{i=1}^{n} \Delta \arg (z-z_i) = 2k\pi$$

Car :

si z_i est à l'intérieur du domaine $\Delta \arg (z-z_i) = 2\pi$

si z_i est à l'extérieur du domaine $\Delta \arg (z-z_i) = 0$.

D'autre part, si on fait tendre R vers l'infini, z étant sur le demi-cercle , $f(z)$ se comporte comme $a_n z^n$ son monôme de plus haut degré. Donc z décrivant tout le demi-cercle on a :

$$\Delta \arg(f(z)) = \Delta \arg a_n z^n = n\pi.$$

D'où lorsque f n'a pas de racines imaginaires pures :

$$\Delta \arg(f(i\omega)) = (n-2k)\pi \ .$$

Posons :

$$f(z) = a_n z^n + b_n z^{n-1} + a_{n-1} z^{n-2} + b_{n-1} z^{n-3} + \dots \qquad (\text{avec } a_n \neq 0)$$

On a :

$$f(i\omega) = U(\omega) + i\,V(\omega)$$

avec :

pour n pair

$$U(\omega) = (-1)^{n/2} \left[a_n \omega^n - a_{n-1} \omega^{n-2} \dots\right]$$

$$V(\omega) = (-1)^{n/2-1} \left[b_n \omega^{n-1} - b_{n-1} \omega^{n-3} + \dots\right]$$

pour n impair

$$U(\omega) = (-1)^{(n-1)/2} \left[b_n \omega^{n-1} - b_{n-1} \omega^{n-3} + \dots\right]$$

$$V(\omega) = (-1)^{(n-1)/2} \left[a_n \omega^n - a_{n-1} \omega^{n-2} + \dots\right]$$

On a d'autre part :

$$\arg f(i\omega) = \text{arc tg} \frac{V(\omega)}{U(\omega)} \ .$$

Et on vérifie facilement que :

$$\frac{1}{\pi} \Delta_{-\infty}^{+\infty} \arg f(i\omega) = \begin{cases} + I_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{U(\omega)}{V(\omega)} & \text{pour } n \text{ impair} \\ - I_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{U(\omega)}{V(\omega)} & \text{pour } n \text{ pair.} \end{cases}$$

En combinant les trois formules précédentes, on obtient la formule suivante valable quelque soit n , pourvu que n n'ait pas de racines imaginaires pures.

$$(1) \qquad \boxed{I_{-\infty}^{+\infty} \frac{b_n \omega^{n-1} - b_{n-1} \omega^{n-3} + \dots}{a_n \omega^n - a_{n-1} \omega^{n-2} + \dots} = n-2k}$$

- b - <u>Cas où $f(z)$ a des racines imaginaires pures</u>.

Nous allons généraliser la formule (1).

Supposons que f ait : k racines dans le demi-plan $\Re e(z) > 0$; s racines imaginaires pures.

Posons :

$$f(z) = d(z).f^*(z)$$

où $d(z) = z^s + \dots$ a s racines imaginaires pures
$f^*(z)$ de degré $n^* = n-s$ n'en n'a pas.

$$f(i\omega) = U(\omega) + i\, V(\omega) = d(i\omega)\ (U^*(\omega) + i\, V^*(\omega))$$

Supposons que s soit pair (on ferait une étude semblable dans le cas s imp.
$d(z)$ est alors produit de facteurs de la forme :

$$(z-i\omega_1)\ (z+i\omega_2) \quad \text{où} \quad z^2 .$$

Donc $d(i\omega)$ prend des valeurs réelles.
Par suite :

$$U(\omega) = d(i\omega)\ U^*(\omega)$$
$$V(\omega) = d(i\omega)\ V^*(\omega)$$

$$\text{et} \quad \frac{U(\omega)}{V(\omega)} = \frac{U^*(\omega)}{V^*(\omega)} .$$

D'où en posant :

$$f_1(\omega) = a_n\omega^n - a_{n-1}\omega^{n-2} + a_{n-2}\omega^{n-4} \ldots$$

$$f_2(\omega) = b_n\omega^{n-1} - b_{n-1}\omega^{n-3} + b_{n-2}\omega^{n-5} \ldots$$

f_1 et f_2 étant respectivement les polynômes dénominateur et numérateur du premier nombre de la formule (1) pour f ; f_1^* et f_2^* étant ces mêmes polynômes pour f^*, et puisque n et n^* ont des parités égales on a :

$$\frac{f_2(\omega)}{f_1(\omega)} = \frac{f_2^*(\omega)}{f_1^*(\omega)} .$$

En appliquant la formule (1) à $f^*(z)$ qui n'a pas de racines imaginaires pures, il s'ensuit que :

$$I_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_2(\omega)}{f_1(\omega)} = I_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_2^*(\omega)}{f_1^*(\omega)} = n^* - 2k = n-s-2k .$$

Donc lorsque $f(z)$ a s racines imaginaires pures on a :

$$(2) \quad \boxed{I_{-\infty}^{+\infty} \frac{b_n\omega^{n-1} - b_{n-1}\omega^{n-3} + b_{n-2}\omega^{n-5} \ldots}{a_n\omega^n - a_{n-1}\omega^{n-2} + a_{n-2}\omega^{n-4} \ldots} = n-2k-s}$$

En utilisant le théorème de Sturm on forme le schéma de Routh voir (III p. 173 → 175).

Ce qui nous conduit aux théorème et critère suivants :

<u>THEOREME DE ROUTH.</u>

Le nombre de racines du polynôme réel $f(z)$ situées dans le demi-plan $\mathrm{Re}(z) > 0$ est égal au nombre de variations de signe dans la première colonne du schéma de Routh.

Critère de Routh.

Toutes les racines du polynôme réel $f(z)$ ont des parties réelles négatives si et seulement si dans la réalisation de l'algorithme de Routh , tous les éléments de la première colonne du schéma de Routh sont différents de zéro et de même signe.

Remarque :

Nous n'avons pas envisager certains cas particuliers que l'on trouvera traités dans (III p. 177 → 181).

② Théorème de Routh - Hurwitz.

Cette méthode pour déterminer le nombre k de racines dans le demi-plan droit d'un polynôme sera utilisée quand les coefficients de celui-ci dépendent de paramètres, et s'il faut déterminer pour quelles valeurs des paramètres le nombre k a une valeur ou une autre (en particulier la valeur 0 : domaine de stabilité).

Soit :

$$f(z) = a_o z^n + b_o z^{n-1} + a_1 z^{n-2} + b_1 z^{n-3} + \dots \qquad (a_o \neq 0)$$

On appellera :

- matrice de Hurwitz : la matrice carrée d'ordre n

$$H = \begin{Vmatrix} b_o & b_1 & b_2 & \dots & b_{n-1} \\ a_o & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ & b_o & b_1 & \dots & b_{n-2} \\ & a_o & a_1 & \dots & a_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{Vmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} a_k = 0 \text{ pour } k > [\frac{n}{2}] \\ \\ b_k = 0 \text{ pour } k > [\frac{n-1}{2}] \end{cases}$$

- <u>déterminants de Hurwitz</u> : ce sont les mineurs principaux de H que l'on désigne de la façon suivante :

$$\Delta_1 = H\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = b_o \qquad \Delta_2 = H\begin{pmatrix}1 & 2\\1 & 2\end{pmatrix} = \begin{vmatrix} b_o & b_1 \\ a_o & a_1 \end{vmatrix} \quad \ldots$$

$$\Delta_n = H\begin{pmatrix}1 & 2 & \ldots & n\\1 & 2 & \ldots & n\end{pmatrix} = \begin{vmatrix} b_o & b_1 & \ldots & b_{n-1} \\ a_o & a_1 & \ldots & a_{n-1} \\ & b_o & \ldots & b_{n-2} \\ & a_o & \ldots & a_{n-2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}$$

Avec ces définitions on peut énoncer le théorème et critère de Routh-Hurwitz. Pour les démonstrations et études de cas particuliers on pourra se référer à (III p. 187 → 182 et p. 213 → 217).

<u>THEOREME DE ROUTH- HURWITZ</u>.

Le nombre de racines réelles du polynôme $f(z) = a_o z^n + \ldots$ dans le demi-plan droit est déterminé par la formule :

$$k = V\left(a_o, \Delta_1, \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \frac{\Delta_3}{\Delta_2} \ldots \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}\right)$$

ou ce qui est la même chose par :

$$k = V(a_o, \Delta_1, \Delta_3 \ldots) + V(1, \Delta_2, \Delta_4 \ldots).$$

<u>Remarque</u> :

Ce théorème suppose que $\Delta_i \neq 0$ pour $i = 1, 2, \ldots n$.

Critère de Routh - Hurwitz.

Toutes les racines du polynôme réel

$$f(z) = a_o z^n + \ldots \qquad (\text{avec } a_o \neq 0)$$

ont des parties réelles négatives si , et seulement si les inégalités :

$$a_o\Delta_1 > 0 \ , \ \Delta_2 > 0 \ , \ a_o\Delta_3 > 0 \ , \ \Delta_4 > 0 \ \ldots \text{ avec } \begin{cases} a_o\Delta_n > 0 \text{ pour } n \text{ impa} \\ \Delta_n > 0 \text{ pour } n \text{ pai} \end{cases}$$

sont respectées.

③ Critère de stabilité de Lienard et Chipart.

Ce sont en fait des complèments au théorème classique de Routh-Hurwi que l'on peut énoncer sous la forme du théorème et corollaire suivants :

THEOREME : critère de stabilité de Lienard et Chipart.

Les conditions nécessaires et suffisantes pour que toutes les racines du polynôme réel :

$$f(z) = a_o z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n \qquad (\text{avec } a_o > 0)$$

aient des parties réelles négatives peuvent etre données sous l'une des quatre formes suivantes :

(1) $a_n > 0 \ , \ a_{n-2} > 0 \ \ldots \ ; \ \Delta_1 > 0 \ , \ \Delta_3 > 0 \ \ldots$

(2) $a_n > 0 \ , \ a_{n-2} > 0 \ \ldots \ ; \ \Delta_2 > 0 \ , \ \Delta_4 > 0 \ \ldots$

(3) $a_n > 0 \ ; \ a_{n-1} > 0 \ , \ a_{n-3} > 0 \ \ldots \ ; \ \Delta_1 > 0 \ , \ \Delta_3 > 0 \ \ldots$

(4) $a_n > 0 \ ; \ a_{n-1} > 0 \ , \ a_{n-3} > 0 \ \ldots \ ; \ \Delta_2 > 0 \ , \ \Delta_4 > 0 \ \ldots$

Ces différentes conditions ont un avantage certain sur les conditions de Hurwitz, car elles ne comprennent environ que la moitié des inégalités sur les déterminants.

Corollaire :

Si le polynôme réel

$$f(z) = a_o z^n + a_1 z^{n-1} + \dots \qquad (a_o > 0)$$

a des coefficients positifs :

$a_o > 0$, $a_1 > 0$, $a_2 > 0$ ... $a_n > 0$

et si $\Delta_n \neq 0$, le nombre k de ses racines dans le demi-plan $\Re e(z) > 0$ est déterminé par la formule :

$$k = 2V(1, \Delta_1, \Delta_3 \dots) = 2V(1, \Delta_2, \Delta_4 \dots) .$$

Remarque :

Pour les démonstrations et applications voir (III p. 217 → 223).

IV - RAPPORT AVEC LA LOCALISATION DES VALEURS PROPRES D'UNE MATRICE QUELCONQUE.

1 Théorème simple : Réf (IV et X).

THEOREME 1 :

$\forall \lambda$ valeur propre de A on a $|\lambda| \leq S_{\varphi\varphi}(A)$

Démonstration :

Soit $Ax = \lambda x \qquad x \neq 0$

$$\varphi(\lambda x) = |\lambda| \, \varphi(x) = \varphi(Ax) \leq S_{\varphi\varphi}(A) \, \varphi(x)$$

$x \neq 0 \Rightarrow \varphi(x) \neq 0 \Rightarrow |\lambda| \leq S_{\varphi\varphi}(A)$

En particulier :

$$\rho(A) = \max_{\substack{\lambda \text{ valeur} \\ \text{propre} \\ \text{de } A}} |\lambda| \leq S_{\varphi\varphi}(A)$$

Réciproque partielle (de Householder).

Pour toute matrice A, et pour tout $\mathcal{E} > 0$ il existe une norme φ (dépendant de A) telle que :

$$S_{\varphi\varphi}(A) \leq \rho(A) + \mathcal{E} .$$

2 Inégalité de Hadamard et disques de Gershgorin.

THEOREME 2 :

Chaque valeur propre de A se trouve dans l'un au moins des disques de Gershgorin.

$$\{z \; ; \; |z-a_{ii}| \leq \sum_{j\neq i} |a_{ij}|\} \qquad i = 1, \ldots n$$

Démonstration :

Ecrivons A sous la forme : $A = B + C$

et considérons :

$$\lambda I-A = \lambda I-B-C = (\lambda I-B)(I-(\lambda I-B)^{-1}C) .$$

Si $(\lambda I-B)^{-1}$, existe.

Alors $\lambda I-A$ ne peut être singulière si λ vérifie :

$$(1) \qquad \rho((\lambda I-B)^{-1}C) < 1 .$$

Mais si $\lambda I-B$ est singulière, $\rho((\lambda I-B)^{-1}C)$ est infini et (1) est une conditio suffisante de régularité pour $A-\lambda I$.

Or $\rho((\lambda I-B)^{-1}C) \leq \|(\lambda I-B)^{-1}C\| \leq \|\lambda I-B)^{-1}\| \times \|C\|$

ou $\|.\| = S_{\varphi\varphi}$ norme sous multiplicative.

A fortiori :

$\|(\lambda I-B)^{-1}\|.\|C\| < 1$ est une condition suffisante de régularité.

Appliquons ceci à la décomposition $A = D + \tilde{A}$ où D diagonale de A et $\tilde{A}$ la partie hors diagonale, avec la norme $S_{\varphi\varphi}$:

pour toute valeur propre λ de A

$$S_{\varphi_\infty \varphi_\infty}((\lambda I-D)^{-1}\tilde{A}) = \max_i \left(|\lambda-a_{ii}|^{-1} \sum_{j\neq i} |a_{ij}|\right) \geq 1$$

ou encore :

$$\forall\lambda\ \exists i \text{ tel que } |\lambda-a_{ii}| \leq \sum_{j\neq i} |a_{ij}|$$

<u>Corollaire 1</u> (ou inégalité de Hadamard)

Si une matrice A vérifie $|a_{ij}| > \sum_{j\neq i} |\lambda-a_{ij}|$ $\quad i = 1, \ldots n$

elle est régulière.

<u>Corollaire 2</u>

Si les n disques sont disjoints, chacun d'eux contient une et une seule valeur propre.

<u>Démonstration</u> :

Supposons les a_{ii} distincts et considérons :

$$A(\mathcal{E}) = D + \mathcal{E}\,\tilde{A} \qquad A(0) = D \text{ et } A(1) = A.$$

Pour $\mathcal{E} = 0$ les n disques sont réduits aux n points a_{ii}. Les valeurs propres de $A(\mathcal{E})$ dépendant continument de $\mathcal{E}$ (racines d'un polynôme de degré n). Lorsque $\mathcal{E}$ croît, les disques augmentent et tant qu'ils restent disjoints chacun d'eux contient une valeur propre.

3 Application à la matrice compagnon de $F(z)$.

Si on écrit l'équation algébrique sous la forme suivante :

$$F(z) = (-1)^n \left[z^n - p_1 z^{n-1} \ldots - p_n\right]$$

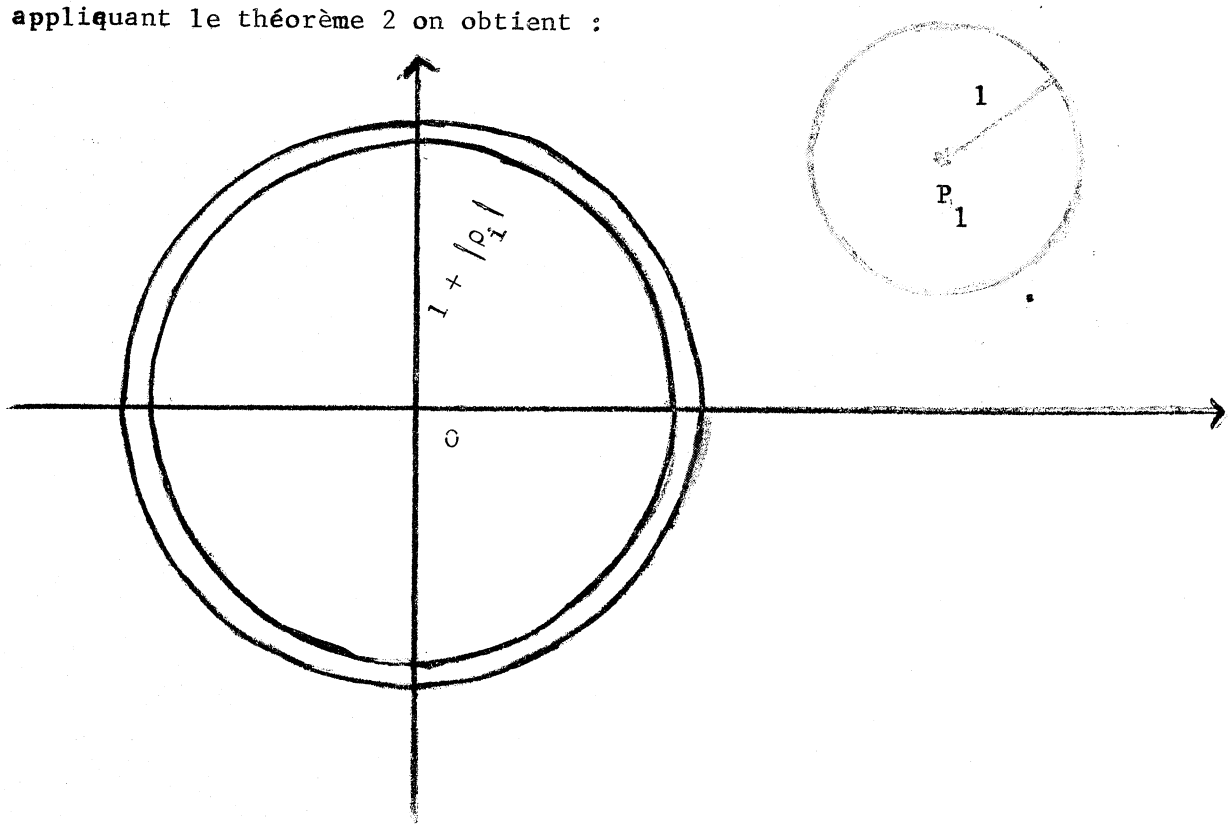
C'est l'équation caractéristique de la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & & & 0 & p_n \\ 1 & 0 & & & \\ & 1 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & 1 & p_1 \end{pmatrix}$$

On a donc :

$$F(z) = \text{dét} \begin{vmatrix} -z & & & & p_n \\ 1 & \ddots & & & \vdots \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & p_2 \\ & & & 1 \quad -z & +p_1 \end{vmatrix}$$

En appliquant le théorème 2 on obtient :



→ (n-1) cercles centrés en 0 de rayon $1+|P_i|$ avec $i \neq 1$

→ un cercle centré en P_1 de rayon 1 , ce cercle pouvant être disjoint, sécant ou inclus parmi les précédents.

Ceci donne évidemment une localisation approximative des racines, mais a pour avantage de fournir un domaine de localisation sans aucun calcul.

Remarques :

Il existe plusieurs raffinements de cette méthode et d'autres méthodes comme l'inégalité de Bauer-Fike qui localise les valeurs propres de A par rapport à une autre matrice diagonalisable, pour une étude plus approfondie on pourra se référer aux ouvrages cités dans l'annexe I.

Il serait évidemment intéressant de poursuivre plus longuement ce rapprochement, mais ce n'est pas directement notre problème, tout du moins nous ne l'avons pas envisagé ainsi (c'est-à-dire par exemple en exploitant ou développant les raffinements des méthodes de localisation de valeurs propres), mais d'une façon plus générale, comme on va le présenter au paragraphe suivant.

- B - METHODE GENERALE DE LOCALISATION ET SEPARATION DES RACINES.

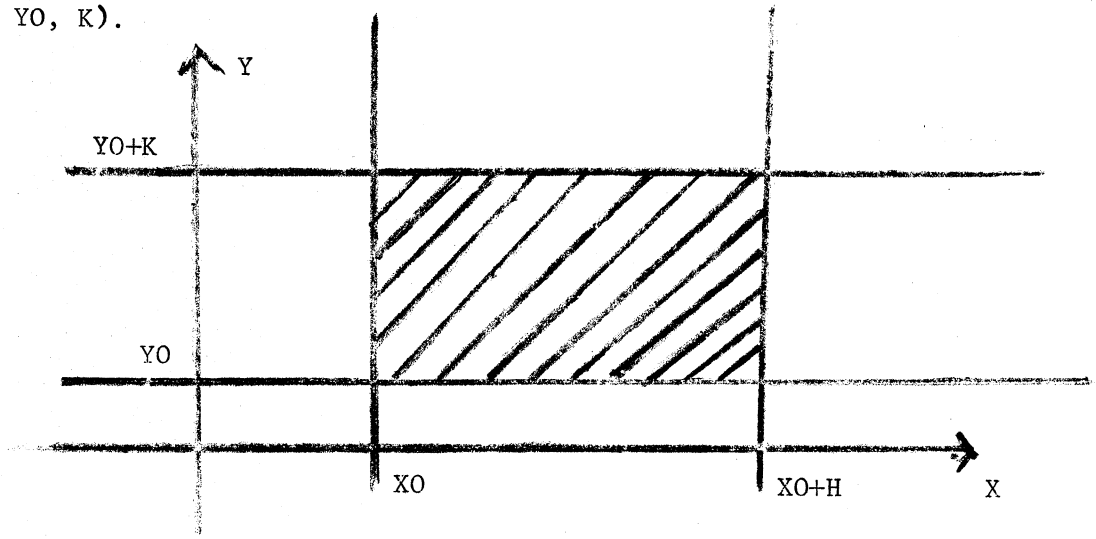
Les différentes méthodes les plus connues, que l'on vient de rappeler sont souvent satisfaisantes théoriquement, mais sont malheureusement trop souvent d'une application longue et fastidieuse .

La localisation se fait différemment pour les racines réelles et complexes, elle se fait donc :

- soit sur l'axe réel,
- soit par rapport à l'axe imaginaire.

D'autre part, on n'envisage pratiquement jamais le cas des équations algébriques à coefficients complexes, c'est-à-dire le cas des racines imaginaires quelconques.

Notre but sera donc de mettre en oeuvre une méthode générale qui localise et sépare les racines d'une équation algébrique à coefficients réels ou complexes, dans des rectangles dont les cotés sont parallèles aux axes et dont les coordonnées des sommets seront introduites de façon formelle : (XO, H, YO, K).



Cette méthode sera fondéesur la théorie des caractéristiques de Kronecker (que l'on exposera au chapitre suivant).

En ce qui concerne l'exploitation pratique, le problème sera entièrement construit formellement et l'activation numérique se fera en rationnels.

On peut déjà remarquer les avantages de la construction d'un tel programme en Formac (langage formel utilisé).

En effet, ce programme construit, il sera :

1 valable - quels que soient les coefficients de l'équation
- quelque soit son degré.

2 activable dans n'importe quelle région du plan.

A l'issue de ce programme on obtiendra :

- les coordonnées du domaine effectivement étudié.
- la caractéristique k :

$$k = \begin{cases} 0 & \text{si pas de racines} \\ 1 & \text{cas où il y a une racine complexe} \end{cases}$$

<u>Remarques</u> :

- Dans le cas où le rectangle se réduit à un segment de la droite réelle, on déterminera évidemment les racines réelles.
- Ce n'est pas une localisation grossière c'est-à-dire le dénombrement des racines dans une portion du plan, mais la possibilité de séparer chaque racine dans un domaine rectangulaire aussi petit que l'on veut.

CHAPITRE II

CHAPITRE II

THEORIE DES CARACTERISTIQUES DE KRONECKER

- A - PRINCIPES DE LA THEORIE DES CARACTERISTIQUES.

I - Définitions et conventions préliminaires.

1. Courbes.
2. Déterminant fonctionnel.
3. Cas de deux courbes.

   - a - Définition des points d'entrée et de sortie.
   - b - Définition d'un enclos.

II - Caractéristique d'un système de trois fonctions.

1. Définitions de points d'entrée et sortie pour trois fonctions.
2. Caractéristique d'un système de trois fonctions f, φ, Ψ .
   - a - Définition.
   - b - Propriétés.

III - Relation entre la caractéristique et les points d'intersection.

1. Différence entre point d'entrée ou sortie pour deux courbes ou trois courbes.
2. Autre définition de la caractéristique.

- B - APPLICATION DE LA THEORIE DES CARACTERISTIQUES A LA LOCALISATION DES RACINES COMPLEXES D'UNE EQUATION.

I - Exposé du problème.

II - Définition de la caractéristique dans le cas ou les courbes φ et Ψ ne sont pas fermées.

III - Application du théorème de la caractéristique dans ce cas.

- A - PRINCIPES DE LA THEORIE DES CARACTERISTIQUES.

La théorie des caractéristiques de Kronecker généralise d'une façon remarquable les propositions de Sturm ; elle se propose le même objet que le théorème de Sturm pour les systèmes d'équations à plusieurs inconnues.

Nous nous bornerons ici au cas le plus simple, il nous servira à la délimitation des racines complexes d'une équation.

Comme nous ferons usage des considérations géométriques et des notations du calcul différentiel nous donnerons tout de suite quelques définitions et conventions nécessaires.

I - DEFINITIONS ET CONVENTIONS PRELIMINAIRES.

① Courbes :

Soient $\varphi(x,y)$ et $\Psi(x,y)$ deux fonctions réelles de x et y. Les équations $\varphi(x,y) = 0$, $\Psi(x,y) = 0$ représentent deux courbes de R^2 que l'on notera φ et Ψ .

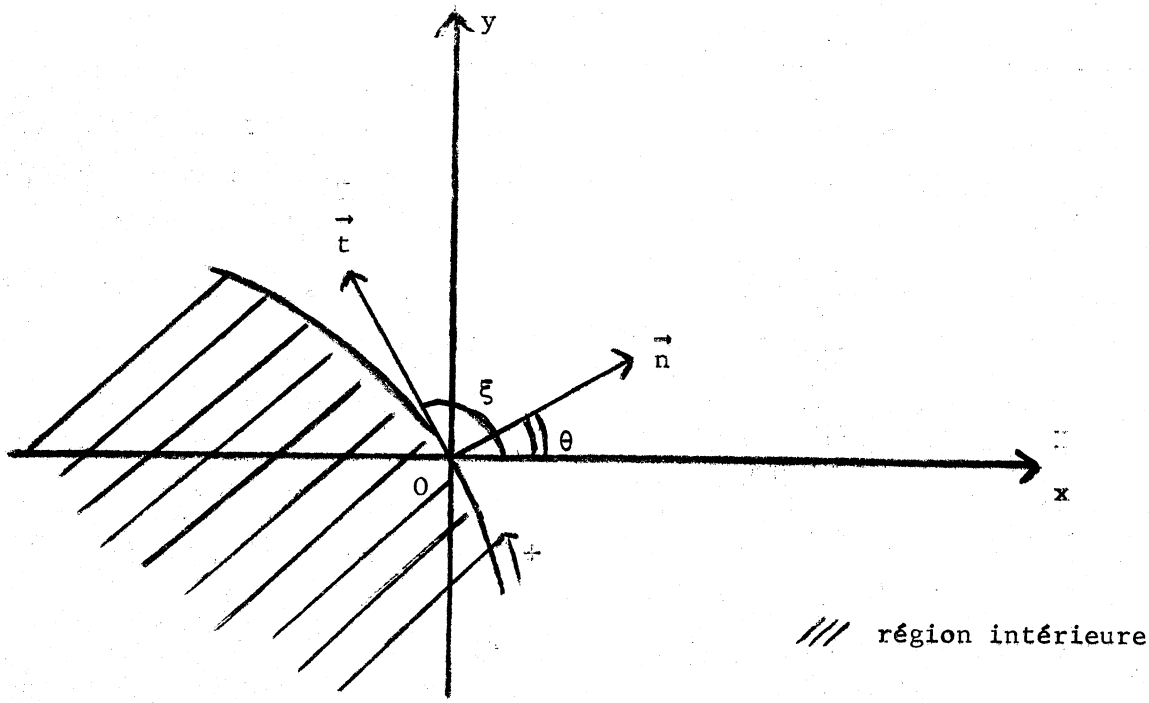
- Hypothèse :

Nous supposerons d'abord ces courbes fermées, sans branches infinies (on verra plus tard qu'on pourra toujours se ramener à ce cas hypothèse non restrictive).

- Orientation des courbes :

La région de R^2 telle que $\varphi(x,y) < 0$ est dite l'intérieure de φ .
Le sens positif des arcs sur φ est celui qui laisse la région intérieure à sa gauche.

2 <u>Déterminant fonctionnel</u> :



Soit θ l'angle de Ox avec la direction de la normale à φ dirigée vers la région extérieure.

Soient φ'_x et φ'_y les dérivées partielles de φ par rapport à x et y, en considérant le radical avec le signe $+$ on a :

$$\cos\theta = \frac{\varphi'_x}{\sqrt{(\varphi'_x)^2 + (\varphi'_y)^2}} \qquad \sin\theta = \frac{\varphi'_y}{\sqrt{(\varphi'_x)^2 + (\varphi'_y)^2}}$$

Soit ξ l'angle $(Ox,\vec{t})$ tel que $\vec{t}$ tangente dont la direction est telle que $(\vec{n},\vec{t})$ de même sens que (Ox,Oy), on a :

$$\cos\xi = \frac{-\varphi'_y}{\sqrt{(\varphi'_x)^2 + (\varphi'_y)^2}} \qquad \sin\xi = \frac{\varphi'_y}{\sqrt{(\varphi'_x)^2 + (\varphi'_y)^2}}$$

Soient :

de φ /

ds un élément d'arc de φ (on prendra la direction $\vec{t}$ comme sens so des arcs

dx, dy ses projections sur les axes de coordonnées qui seront proportionnelles à $-\varphi'_y$ et φ'_x et de même signe respectif.

Φ désignant une autre fonction quelconque.

Alors la quantité :

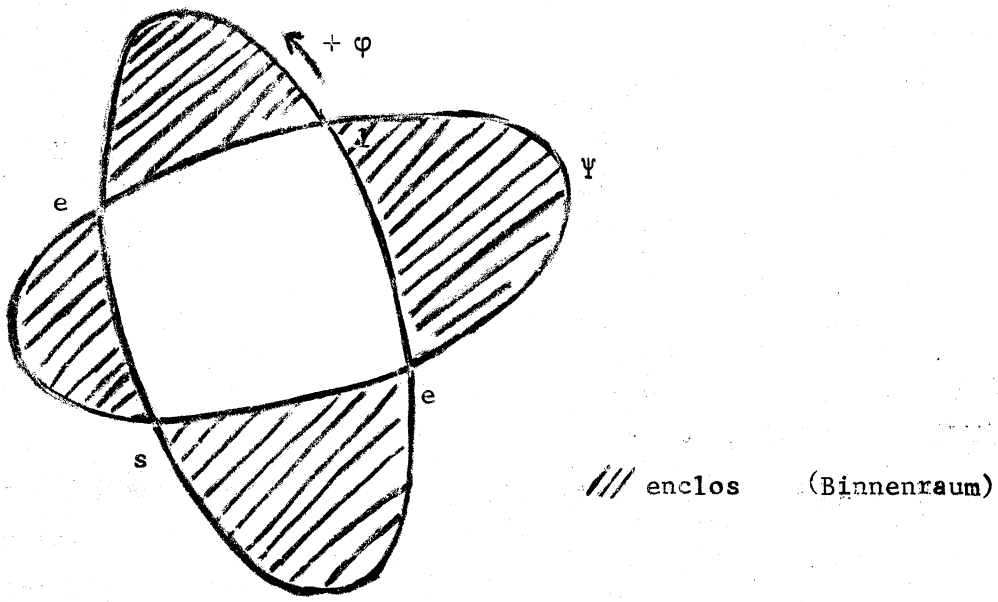
$$d\,\Phi = \Phi'_x\, dx + \Phi'_y\, d_y$$

a même signe que <u>le déterminant fonctionnel</u> : $[\varphi,\Phi]$

$$\boxed{[\varphi,\Phi] = \varphi'_x\,\Phi'_y - \varphi'_y\,\Phi'_x}$$

③ <u>Cas de deux courbes</u> :

- a - <u>Définition points d'entrée, points de sortie pour deux courbes</u> :



<u>Figure 1</u>.

Lorsqu'en parcourant φ dans le sens positif, on pénètre par un des points d'intersection de φ et Ψ dans l'intérieur de la courbe Ψ, la quantité $d\Psi$ est négative, par suite aussi le déterminant fonctionnel $[\varphi,\Psi]$; dans le cas contraire il est nécessairement positif.

Donc on appellera :

- <u>point d'entrée : $E(\varphi,\Psi)$</u> : si en ce point $[\varphi,\Psi] < 0$ ou si en parcourant φ dans le sens positif on pénètre à l'intérieur de Ψ .
- <u>point de sortie : $S(\varphi,\Psi)$</u> : cas contraire.

<u>Remarques</u> :

. Le nombre des points $S(\varphi,\Psi)$ est égal à celui des points $E(\varphi,\Psi)$.
On a aussi les relations :

$$S(\varphi,\Psi) = E(\Psi,\varphi)$$
$$E(\varphi,\Psi) = S(\Psi,\varphi).$$

- b - <u>Définition d'un enclos</u> (traduction de Binnenraum).

C'est la portion de plan où le produit $\varphi.\Psi$ est négatif.
(Exemple : figure 1 : c'est la région hachurée).

II - CARACTERISTIQUE D'UN SYSTEME DE TROIS FONCTIONS.

Aux courbes φ et Ψ on ajoute une troisième courbe f d'équation $f(x,y) = 0$ telle que :

- f soit fermée,
- tous les points de f sont à distance finie,
- f ne contient aucun des points d'intersection de φ et Ψ .

① <u>Définitions de points d'entrée et de sortie pour trois fonctions</u> :

Formons avec ces fonctions un cycle f, φ, Ψ de telle sorte que f vienne de nouveau après Ψ , et faisons correspondre à ce cycle un sens déterminé sur chacune des trois courbes, par exemple le sens positif, le sens négatif correspondra alors au cycle f, Ψ, φ .

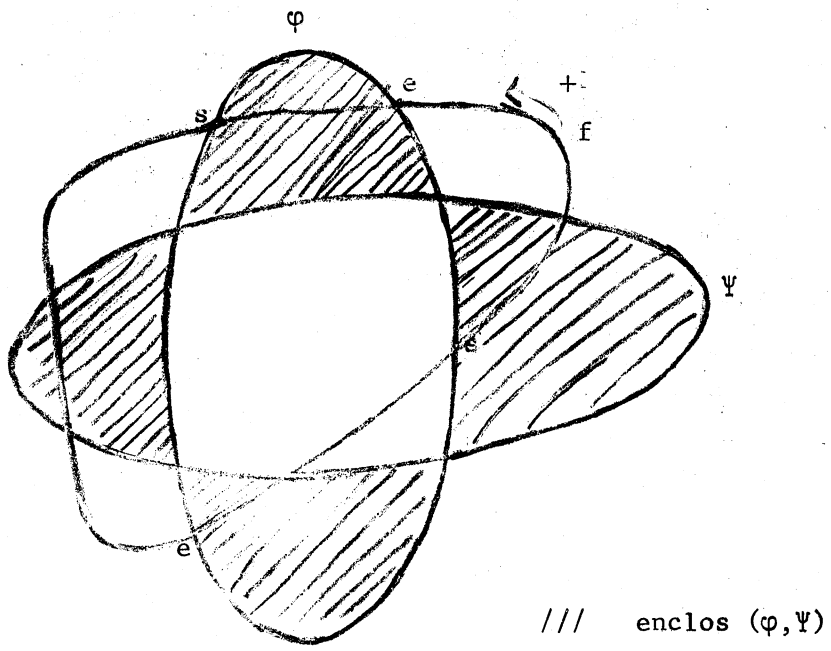


Figure 2.

Considérons le cycle f, φ, Ψ .

Décrivons la courbe f dans le sens positif et marquons ses points d'intersection avec la courbe φ , alors on appellera :

- point de sortie S[f; φ,Ψ] : si en ce point on passe de l'intérieur de l'enclos (φ,Ψ) vers l'extérieur.
- point d'entrée E[f; φ,Ψ] : Cas contraire.

Exemple :

Sur la figure 2 tous les points tels que e sont des points d'entrée, tous les points tels que s sont des points de sortie.

② Caractéristique du système des trois fonctions f, φ, Ψ :

- a - Définition :

Les courbes f et φ étant fermées le nombre total des points d'intersection est pair.

Si l'on désigne par :

$E(f;\ \varphi,\Psi)$ le nombre d'éléments de l'ensemble des points d'entrée

$S(f;\ \varphi,\Psi)$ le nombre d'éléments de l'ensemble des points de sortie

la différence de ces deux nombres est aussi un nombre pair.

D'après Kronecker la caractéristique k du système des trois fonctions f, φ, Ψ est égale à la moitié du nombre de points d'entrée moins le nombre de points de sortie, soit d'après les conventions :

$$\boxed{k = \frac{E(f;\ \varphi,\Psi) - S(f;\ \varphi,\Psi)}{2}}$$

<u>Exemple</u> :

Dans le cas de la figure 2 ce nombre vaut 1 .

- b - <u>Propriétés</u> :

En faisant la permutation circulaire des fonctions f, φ, Ψ on obtient trois valeurs pour la caractéristique. On en obtient trois autres en inversant le cycle et en remplaçant les directions positives par les directions négatives.

Avec la convention $S(f;\ \varphi,\Psi)$, $E(f;\ \varphi,\Psi)$ pour désigner le nombre de points d'entrée et de sortie, on obtient pour la caractéristique les valeurs suivantes :

(1) $\frac{1}{2}\,[E(f;\ \varphi,\Psi) - S(f;\ \varphi,\Psi)]$

(2) $\frac{1}{2}\,[E(\varphi;\ \Psi,f) - S(\varphi;\ \Psi,f)]$

(3) $\frac{1}{2}\,[E(\Psi;\ f,\varphi) - S(\Psi;\ f,\varphi)]$

(4) $\frac{1}{2}\,[E(f;\ \Psi,\varphi) - S(f;\ \Psi,\varphi)]$

(5) $\frac{1}{2}\,[E(\Psi;\ \varphi,f) - S(\Psi;\ \varphi,f)]$

(6) $\frac{1}{2}\,[E(\varphi;\ f,\Psi) - S(\varphi;\ f,\Psi)]$.

Les six valeurs ainsi obtenues sont égales.

Pour le démontrer nous emploierons deux modes de raisonnement.

Premier mode de raisonnement :

Décrivons la courbe f dans le sens positif et marquons tous ses points d'intersection avec φ et Ψ. La courbe entrera autant de fois dans l'enclos qu'elle en sortira puisqu'elle revient à son point de départ. L'entrée a lieu aux points tels que $E(f;\ \varphi,\Psi)$ ou $S(f;\ \Psi,\varphi)$, la sortie au contraire aux points tels que $S(f;\ \varphi,\Psi)$ ou $E(f;\ \Psi,\varphi)$.
Il en résulte que :

$$E(f;\ \varphi,\Psi) + S(f;\ \Psi,\varphi) = E(f;\ \Psi,\varphi) + S(f;\ \varphi,\Psi)\ .$$

Ce qui prouve l'identité des expressions (1) et (4).
On ferait de même pour les expressions (6) et (2), (5) et (3).

Deuxième mode de raisonnement :

Si on décrit φ dans le sens négatif, et si nous marquons ses points d'intersection avec f, il en résulte que chaque point tel que $E(f;\ \varphi,\Psi)$ est aussi un point $E(\varphi;\ f,\Psi)$; et que chaque point tel que $S(f;\ \varphi,\Psi)$ est aussi un point $S(\varphi;\ f,\Psi)$.
En effet :

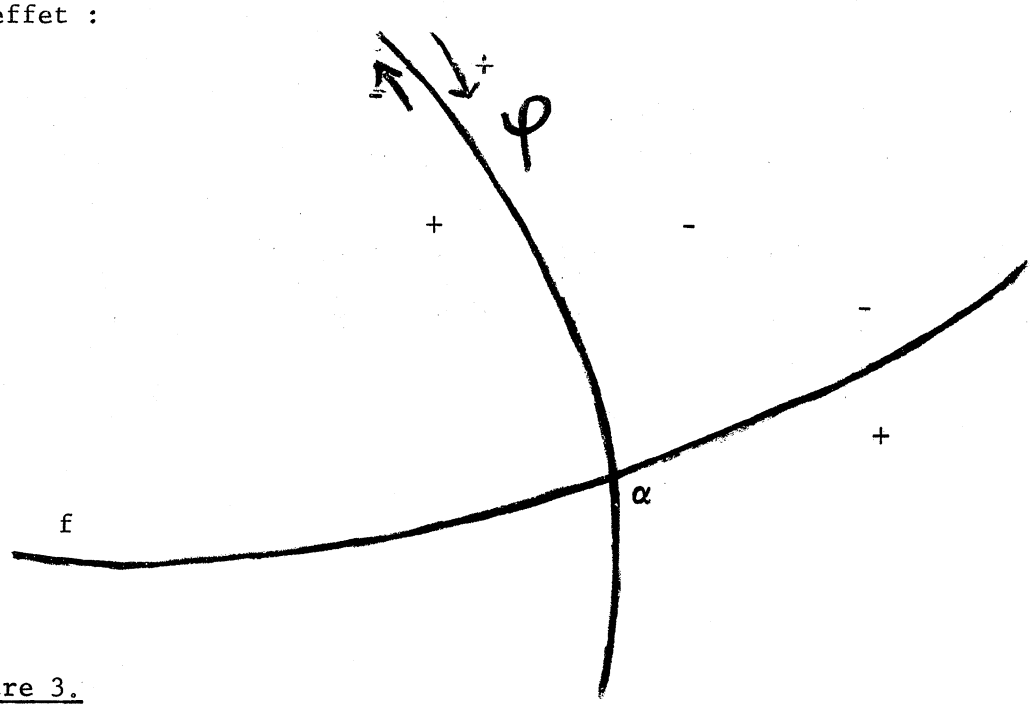


Figure 3.

α représente l'un quelconque des points d'intersection de f et de φ. Si en ce point Ψ est positif, on pourra l'appeler $E(f;\varphi,\Psi)$ ou $E(\varphi;f,\Psi)$, si au contraire Ψ est négatif en ce point on pourra l'appeler $S(f;\varphi,\Psi)$ ou $S(\varphi;f,\Psi)$.

Il en résulte l'égalité des expressions (1) et (6), on démontrerait de même celle de (2) et (5).

D'où les six expressions de la caractéristique ont bien des valeurs identiques.

III - RELATION ENTRE LA CARACTERISTIQUE ET LES POINTS D'INTERSECTION.

1 Différence entre point d'entrée ou sortie pour deux courbes ou trois courbes.

La désignation des points d'intersection comme point d'entrée ou de sortie du paragraphe I 3 est essentiellement différente de celle employée au paragraphe II 1.

Dans le premier cas, on envisageait les relations des points avec les deux courbes qui s'y coupaient ; dans le second cas intervenait une troisième courbe.

Cette différence est d'ailleurs exprimée très nettement dans les notations choisies :

$E(\varphi,\Psi)$ et $S(\varphi,\Psi)$ pour le premier cas.
$E[f;\varphi,\Psi)$ et $S[f;\varphi,\Psi]$ pour le second cas.

Voyons maintenant le rapport mutuel de ces notations :

Prenons pour cela une figure simple mais qui présentera tous les cas possibles :

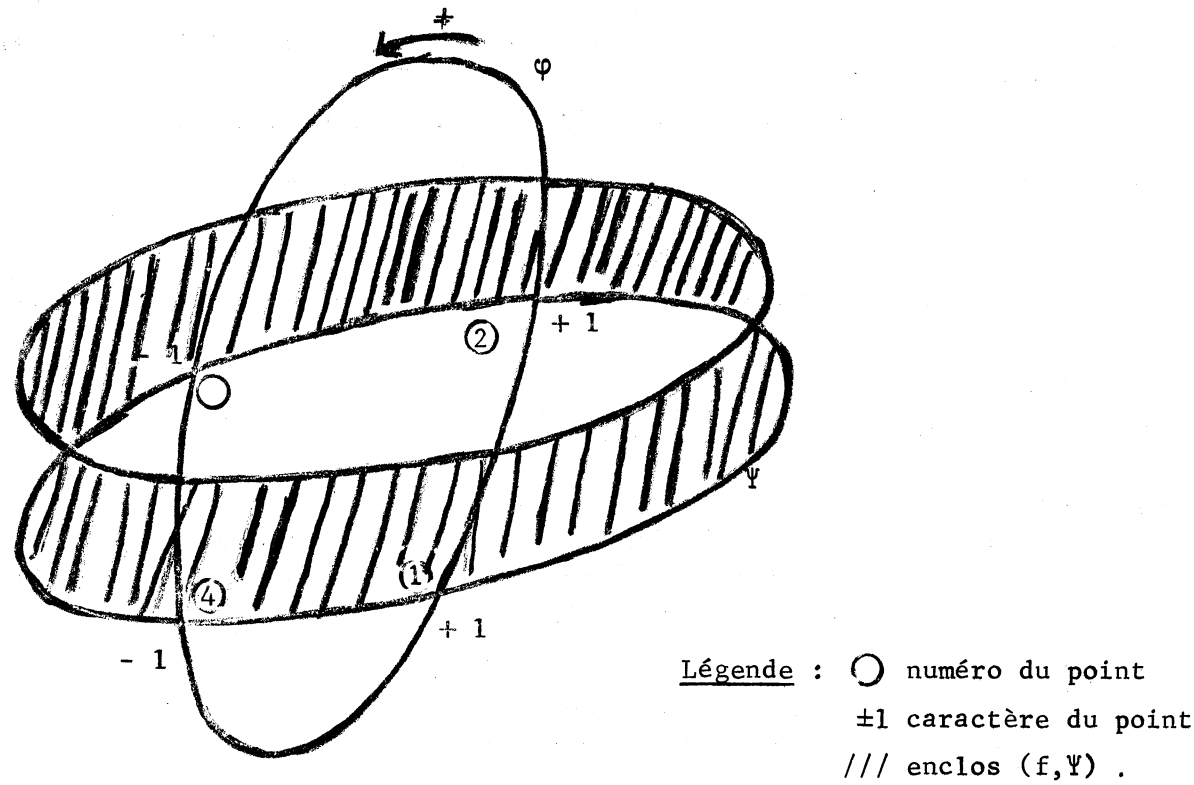


Figure 4.

En un point $E(\varphi,\Psi)$, la courbe φ entre dans la courbe Ψ ; Ψ passe donc du positif au négatif.

Si pour ce même point, f est positif, ce point devra s'appeler $E[\varphi;\ \Psi,f]$, en effet on entre dans l'enclos des fonctions φ et Ψ , c'est le cas du point 1 de la figure 4 ; si au contraire f est négatif ce point devra s'appeler $S[\varphi;\ \Psi,f]$ tel le point 3.

Nous aurons donc les résultats suivants :

→ Un point $E(\varphi,\Psi)$ s'appellera :

$E[\varphi;\ \Psi,f]$ si $f > 0$ (cas du point 1 figure 4).

$S[\varphi;\ \Psi,f]$ si $f < 0$ (cas du point 3 figure 4).

→ Un point $S(\varphi,\Psi)$ s'appellera :

. $E[\varphi;\ \Psi,f]$ si $f < 0$ (cas du point 2 figure 4).

. $S[\varphi;\ \Psi,f]$ si $f > 0$ (cas du point 4 figure 4).

Comme nous l'avons vu au paragraphe I 3 :

En un point $E(\varphi,\Psi)$ le déterminant fonctionnel $[\varphi,\Psi]$ est négatif.
En un point $S(\varphi,\Psi)$ le déterminant fonctionnel $[\varphi,\Psi]$ est positif.

On peut donc résumer ainsi les constatations faites :

$E(\varphi;\ \Psi,f)$ est le nombre des points d'intersection de φ et Ψ en lesquels $[\varphi,\Psi]f$ est négatif.

$S(\varphi;\ \Psi,f)$ est le nombre des points d'intersection de φ et Ψ en lesquels $[\varphi,\Psi]f$ est positif.

D'où l'énoncé du théorème :

THEOREME 1 :

La caractéristique k est donc égale à la moitié de l'éxcès du premier nombre sur le second soit :

$$k = \frac{E(\varphi;\ \Psi,f) - S(\varphi;\ \Psi,f)}{2}$$

② Autre définition de la caractéristique fondée sur la définition du caractère d'un point :

Autre énoncé de ce théorème :

On peut donner à ce théorème une autre forme dans laquelle il semble complètement indépendant de l'idée de grandeur, et ne paraître dépendre que de la position mutuelle des courbes et de leurs points d'intersection.

Pour cela nous allons introduire la définition du caractère d'un point (Référence VI ①).

Distinguons les points d'intersection de φ et Ψ par les indices α ou $\mathcal{E}$ selon que ce sont des points $S(\varphi,\Psi)$ ou $E(\varphi,\Psi)$; donnons leur de même les indices α ou $\mathcal{E}$ suivant qu'ils sont extérieurs ou intérieurs à la courbe f .

Définition du caractère d'un point :

- Un point aura le caractère +1 quand il possède les indices α et $\mathcal{E}$ ou $\mathcal{E}$ ou α .
- Un point aura le caractère -1 quand il possède les indices α et α ou $\mathcal{E}$ ou $\mathcal{E}$.

THEOREME 2 :

La caractéristique du système des fonctions f, φ, Ψ est égale à la demi-somme des caractères des différents points d'intersection de φ et Ψ .

Remarques :

- Les propositions et définitions que nous venons de donner restent valables même lorsque les courbes considérées sont composées de plusieurs courbes fermées, ces courbes pouvant même avoir des points doubles. Il suffit que chaque portion de ces courbes limite des régions de plan dans lesquelles les fonctions ont des signes opposés. Il faut seulement exclure les cas où une des courbes passent par un même point, car alors la désignation du point en point d'entrée ou sortie pourrait devenir incertaine.
- Dans le cas où les courbes considérées ont des branches infinies, les théorèmes sont applicables qu'après avoir au préalable limité ces branches par des portions de courbes arbitraires, comme on va le voir au paragraphe suivant.

- B - APPLICATION DE LA THEORIE DES CARACTERISTIQUES A LA LOCALISATION DES RACINES COMPLEXES D'UNE EQUATION.

Remarque :

En parlant de localisation de racines complexes on introduit le cas des racines complexes conjuguées, complexes quelconques et évidemment des racines réelles (qui peuvent être considérées comme un cas particulier des précédentes).

I - EXPOSE DU PROBLEME.

Soient :

$z = x + iy$ une variable complexe.

(1) $F(z) = \varphi(x,y) + i\Psi(x,y)$ une fonction rationnelle et entière de z à coefficients réels ou non.

$\varphi(x,y)$ et $\Psi(x,y)$ étant des fonctions réelles de variables réelles x et y.

Nous supposons que $F(z)$ et $F'(z)$ ne s'annulent pas simultanément. $F(z)$ ne s'annulent que pour des valeurs de z qui correspondent à des points d'intersection des deux courbes $\varphi(x,y)$ et $\Psi(x,y)$.
$F(z)$ étant une fonction analytique on a l'expression de sa dérivée sous l'une des formes suivantes :

$$F'(z) = \varphi'_x + i\Psi'_x = -i\,\varphi'_y + \Psi'_y .$$

Les conditions d'analycité étant vérifiées c'est-à-dire :

(2) $\varphi'_x = \Psi'_y$ et $\varphi'_y = -\Psi'_x$

ce qui entraîne :

$$[\varphi,\Psi] = \varphi'_x\,\Psi'_y - \varphi'_y\,\Psi'_x = (\varphi'_x)^2 + (\varphi'_y)^2 = (\Psi'_x)^2 + (\Psi'_y)^2$$

Le déterminant fonctionnel $[\varphi,\Psi]$ n'est donc jamais négatif ; il ne s'annule que lorsque φ'_x et φ'_y et par suite aussi Ψ'_x et Ψ'_y deviennent nulles simultanément.

Mais ce fait ne se présente jamais en un point d'intersection de φ et Ψ , sinon $F(z)$ et $F'(z)$ seraient nulles simultanément.

Le sens positif sur les courbes φ et Ψ est entièrement déterminé par le signe de la fonction dans les portions de plan voisines ; il n'y a donc pas lieu de faire d'exception pour les points doubles en lesquels φ , φ'_x , φ'_y s'annulent à la fois.

Le déterminant fonctionnel $[\varphi,\Psi]$ étant positif entre les points d'intersection des courbes φ et Ψ , tous ces points sont des points de sortie $S(\varphi,\Psi)$; il en résulte que les courbes φ et Ψ ne peuvent être fermées, et admettent des branches infinies (sans quoi un point de sortie serait nécessairement suivi d'un point d'entrée).

D'ailleurs les courbes φ et Ψ déterminent un enclos dans lequel le produit $\varphi.\Psi$ est négatif.

II - DEFINITION DE LA CARACTERISTIQUE DANS LE CAS OU LES COURBES φ ET Ψ NE SONT PAS FERMEES.

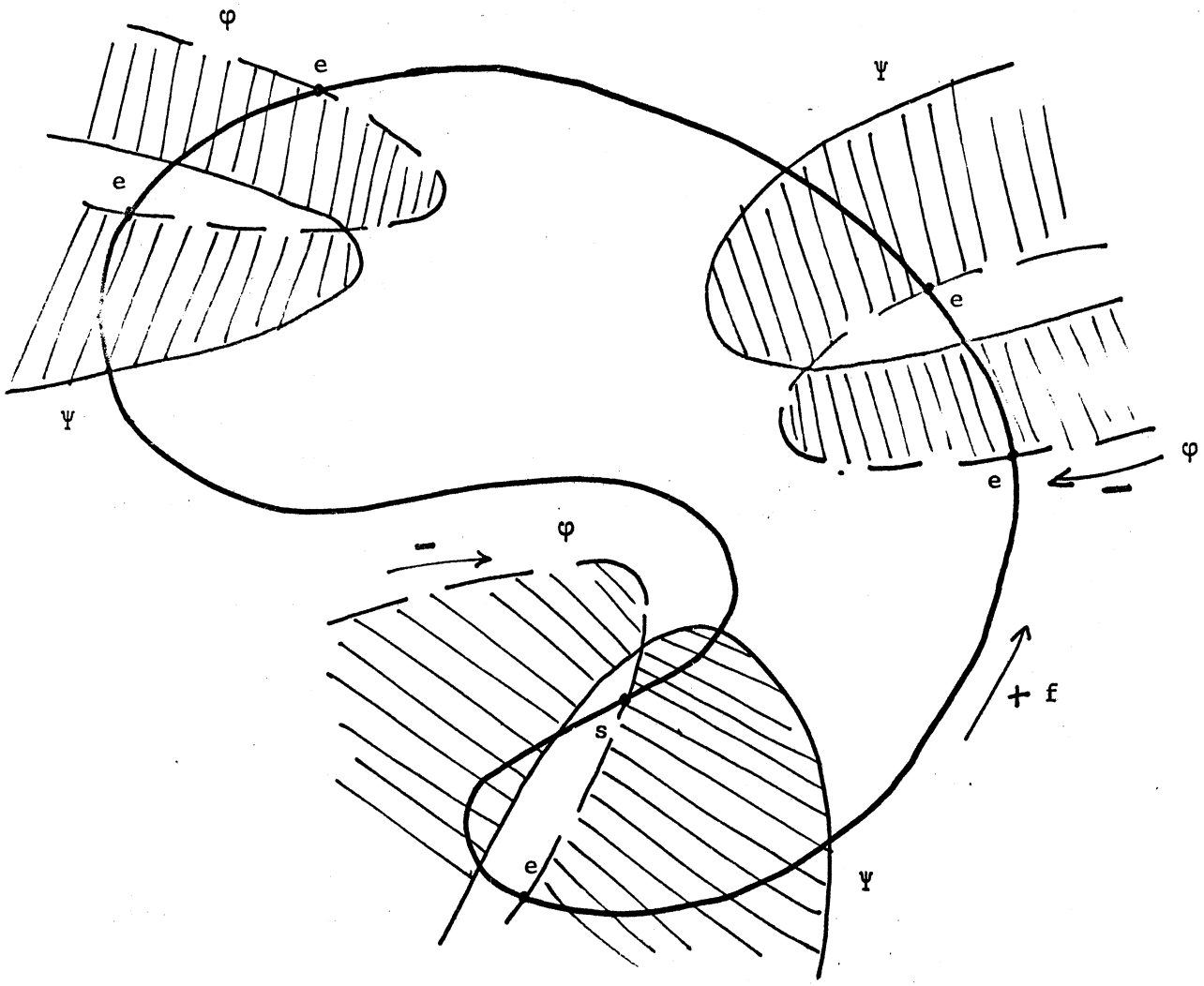
Aux courbes φ et Ψ non fermées, on adjoint une troisième fonction $f(x,y)$ qui égalée à zéro représente une courbe fermée.

Déterminons la caractéristique du système des trois fonctions, comme au paragraphe A II en parcourant la courbe f .

$$(4) \qquad k = \frac{E(f;\,\varphi,\Psi) - S(f;\,\varphi,\Psi)}{2} = \frac{E(f;\,\Psi,\varphi) - S(f;\,\Psi,\varphi)}{2}$$

<u>Remarque</u> :

Les courbes φ et Ψ ont même rôle.



Légende :

/// Enclos des fonctions φ,Ψ .

e Point d'entrée E[f; φ,Ψ]

s Point de sortie S[f; φ,Ψ] .

Figure 5.

<u>Exemple</u> :

En prenant la définition (4) de la caractéristique établie pour un système de trois fonctions φ , Ψ , f fermées, on obtient figure 5 :

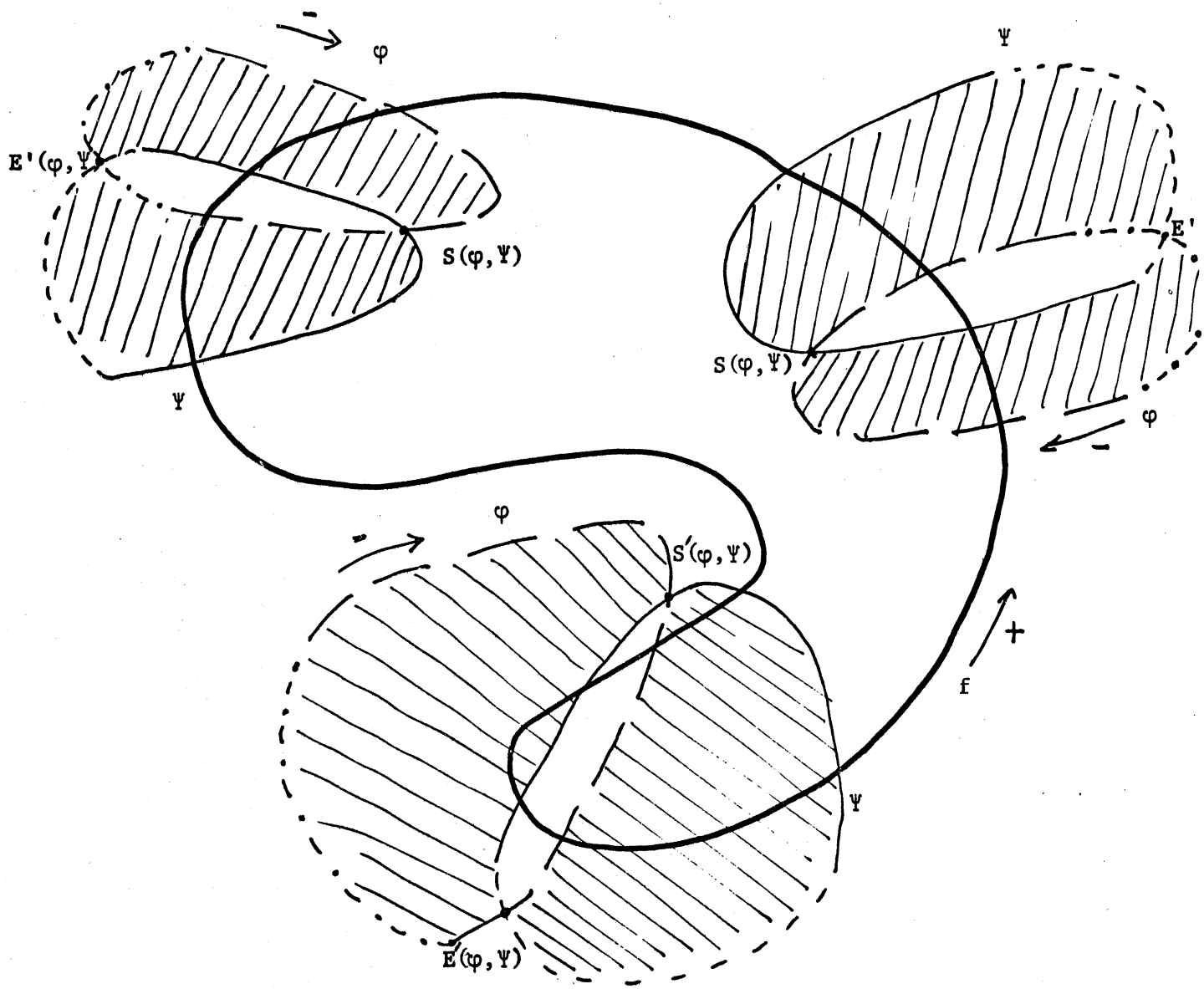
$k = 2$.

Mais pour appliquer ces théorèmes, il faut transformer les courbes φ et Ψ en courbes fermées en les reliant par d'autres portions de courbes, lesquelles sont toutes supposées extérieures à f .

Nous allons démontrer que la caractéristique de ce nouveau système est encore déterminée par la formule (4) du théorème 1 ou la formule analogue du théorème 2 et quelle en est son application.

III - APPLICATION DU THEOREME DE LA CARACTERISTIQUE DANS CE CAS.

En effet, transformons la figure 5 en fermant les courbes φ et Ψ de la façon énoncée :



Légende

/// Enclos des fonctions φ,Ψ .

Figure 6 :

Les points d'intersection supplémentaires ainsi introduits peuvent être soit des points de sortie $S(\varphi,\Psi)$ soit des points d'entrée $E(\varphi,\Psi)$.

Conventions de notation :

. $S'(\varphi,\Psi)$ et $E'(\varphi,\Psi)$ représentent le nombre de points d'intersection supplémentaires introduit en fermant les branches infinies des courbes φ et Ψ à l'extérieur de la courbe fermée f .

. $S(\varphi,\Psi)$ et $E(\varphi,\Psi)$ représente le nombre de points d'intersection primitifs des courbes φ et Ψ .

Or d'après la remarque faite dans le paragraphe B I , le déterminant fonctionnel $[\varphi,\Psi]$ étant toujours positif dans ce cas, tous les points d'intersection de φ et Ψ sont des points de sortie $\Rightarrow$ $E(\varphi,\Psi) = 0$.

Après la fermeture des branches infinies des courbes φ et Ψ on a donc autant de points d'entrée que de points de sortie c'est-à-dire la relation suivante :

$$(5) \qquad S(\varphi,\Psi) + S'(\varphi,\Psi) = E'(\varphi,\Psi) .$$

En utilisant la définition du caractère d'un point donné au paragraphe A III 2 avec les indices suivants :

On donnera l'indice σ si le point est de sortie $\mathcal{E}$ sinon

σ si le point est à l'extérieur de f, $\mathcal{E}$ sinon.

Donc les points initiaux $S(\varphi,\Psi)$ se divisent en deux groupes (c'est-à-dire ceux à l'intérieur de f et ceux à l'extérieur) par contre les points $S'(\varphi,\Psi)$ et $E'(\varphi,\Psi)$ sont tous à l'extérieur de f .

On les notera :

$S_{\sigma}(\varphi,\Psi)$ de caractère -1 (car indices σ,σ)

$S_{\sigma}(\varphi,\Psi)$ de caractère $+1$ (car indices $\mathcal{E},\sigma$)

$S'(\varphi,\Psi)$ de caractère -1 (car indices σ,σ)

$E'(\varphi,\Psi)$ de caractère $+1$ (car indices $\mathcal{E}\,\sigma$) .

En prenant comme définition de la caractéristique celle donnée par le théorème 2 c'est-à-dire :

La caractéristique du système des fonctions f, φ, Ψ est égale à la demi-somme des caractères des différents points d'intersection de φ et Ψ on a la relation suivante :

$$(6) \qquad - S_{\sigma}(\varphi,\Psi) + S_{\mathcal{E}}(\varphi,\Psi) - S'(\varphi,\Psi) + E'(\varphi,\Psi) = 2\,k\ .$$

En ajoutant membre à membre avec la relation (5) qui s'écrit alors :

$$+ S_{\sigma}(\varphi,\Psi) + S_{\mathcal{E}}(\varphi,\Psi) + S'(\varphi,\Psi) - E'(\varphi,\Psi) = 0\ .$$

On obtient :

$$(7) \qquad k = S_{\mathcal{E}}(\varphi,\Psi)\ .$$

$\mathcal{E}$ étant l'indice des points d'intersection situés à l'intérieur de la courbe f, on a le théorème fondamental suivant :

<u>THEOREME FONDAMENTAL</u> :

La caractéristique est égale au nombre de points d'intersection des courbes φ et Ψ situés à l'intérieur de la courbe f.

Ainsi la caractéristique permet de déterminer le nombre de racines de l'équation $F(z) = 0$ dont les affixes sont situés à l'intérieur d'une courbe arbitraire $f(x,y) = 0$.

<u>Remarque</u> :

Dans cette détermination les portions de courbes arbitraires ne jouent aucun rôle et peuvent donc être supprimées.

Dans les chapitres suivants on va montrer comment on peut faire une application pratique de ce théorème, jusqu'où peut conduire une telle application et dans quels cas surtout elle peut être utile et intéressante.

CHAPITRE III

CHAPITRE III

EXPLOITATION DE LA METHODE DES CARACTERISTIQUES.

Préliminaires sur le langage PL/1 - FORMAC.

I - Présentation sommaire de PL/1 - FORMAC.

1. Instructions d'affectation.
2. Les variables.
3. Les constantes.
4. Les fonctions.
5. Les instructions.

II - Exécution d'un programme FORMAC.

1. Les différentes phases.
2. Conséquences de l'interaction PL/1 et FORMAC sur l'exécution d'un programme.

- A - CHOIX DE LA COURBE f .

I - Domaine de localisation.

II - f vérifie les conditions du théorème de la caractéristique.

III - Intérêt de ce choix.

1. Validité.
2. Possibilité de construction de l'algorithme.

- B - DESCRIPTION DE L'ALGORITHME DE DETERMINATION DE LA CARACTERISTIQUE.

I - Exposé du problème.

1. Les données.
2. Le but.

II - Mise en oeuvre pratique.

1 Les différentes étapes de l'algorithme :

- a - Recherche des points d'intersection de φ et Ψ

  α Nombre de points d'intersection de f et φ .

  β Caractérisation de ces points.

- b - Difficultés au niveau de la caractérisation.

2 Etude descriptive de l'algorithme.

- a - Description du processus automatique de dichotomie du domaine de localisation.

- b - Illustration graphique pour expliciter l'ordre de déroulement du programme principal.

  α Exemple 1.

  β Exemple 2.

3 Présentation du programme principal.

- a - Les procédures.

- b - Organigramme du programme principal.

- c - Listing du programme principal.

4 Résultats.

L'objet de ce chapitre constitue en fait la partie fondamentale du travail proposé :

> "Déterminer une méthode générale de localisation et séparation des racines d'une équation algébrique à coefficients complexes ".

Il s'agit donc essentiellement d'un travail de programmation qui va utiliser le plus possible les techniques de calcul formel sur ordinateur.

Nous avons été conduits à adopter un langage formel (FORMAC) pour les raisons suivantes :

→ la résolution du problème, fondée sur la méthode des caractéristiques de Kronecker fait appel essentiellement à des manipulations d'expressions mathématiques très classiques, en particulier des polynômes (division, PGCD, construction des suites de Sturm ...) dont les coefficients sont des paramètres qui dépendent du domaine de localisation,

→ la généralisation cherchée nous incitait aussi à introduire formellement le domaine de localisation.

Un choix approprié de la courbe f : un rectangle de coordonnées formelles, dont l'intérieur sera le domaine de localisation, a rendu possible la construction d'un algorithme et son application.

On voit ce que la programmation d'un tel algorithme dans un langage (tel que PL/1 , algol W ...) eut nécessité comme travail préliminaire long et fastidieux pour sa construction formelle d'une part ; et d'autre part, au niveau de l'activation numérique, le travail en virgule flottante ne pouvait permettre une interprétation correcte des résultats (en particulier à cause de la trop grande propagation et du cumul des erreurs d'arrondi sur les évaluations polynomiales).

Notre choix s'est porté sur le langage PL/1 - FORMAC , bien que tout autre langage formel (LISP, ...) eut pu convenir, vu la forme des éléments à traiter. Mais FORMAC se trouve particulièrement adapté aux manipulations des expressions symboliques et assez simple au niveau de l'utilisation.

PRELIMINAIRES SUR LE LANGAGE PL/1 - FORMAC

PL/1 - FORMAC n'est pas un langage en soi [XII] .

On peut le considérer comme une extension de PL/1 . Cette extension permettant des manipulations formelles d'expressions mathématiques, tout en conservant l'ensemble des possibilités du langage PL/1 en ce qui concerne les traitements purement numériques.

Historiquement FORMAC a été implanté sur la série IBM 7090 avec comme langage hote Fortran IV.

Depuis la série IBM 360, FORMAC peut être exploité avec comme langage hote soit Fortran soit PL/1 , c'est cette dernière version qui est utilisée au Laboratoire de Calcul de GRENOBLE.

Un programme PL/1 - FORMAC se distingue d'un programme purement PL/1 par la présence de certains mots clés qui indiquent les instructions FORMAC.

Les avantages que possède ce langage tels que :

division formelle, dérivation formelle,
recherche du coefficient d'un exposant,
différentiation analytique d'expressions
symboliques .... ,

sont contrebalancés par quelques inconvénients inhérents à tout langage formel : nécessité d'avoir une mémoire et un temps d'exploitation machine souvent importants.

Nous allons donner un rapide aperçu des éléments du langage PL/1 - FORMAC .

I - PRESENTATION SOMMAIRE DE PL/1 - FORMAC [XII et XIII] .

① Instruction d'affectation.

L'instruction d'affectation FORMAC : "FORMAC variable = FORMAC EXPRESSION" consiste en l'affectation de l'expression évaluée du membre de droite à la variable du membre de gauche.

La valeur de l'expression du membre de droite (qui, en général, est une nouvelle expression FORMAC) est la valeur courante de la variable FORMAC du membre de droite.

Les instructions d'affectation FORMAC se distinguent des instructions d'affectation PL/1 par la présence du mot-clé "LET" .

Exemples :

```
LET(A=B**2+C) ;        instruction FORMAC
A=B**2+C ;             instruction PL/1 .
```

Ces deux instructions sont complètement indépendantes.

② Les variables.

Les variables apparaissant dans des instructions FORMAC sont des variables FORMAC.

Leur nom suit les mêmes règles que celui des variables PL/1 sauf que :

. il ne doit pas exéder huit caractères, ni contenir le caractère d'espacement.

DENxxxx est un nom réservé aux sous-programmes FORMAC.

. Certains noms sont réservés (EVAL, DERIV, COEFF, SIN, COS ...)

. Les variables FORMAC n'ont pas de base, échelle, ou précision et <u>ne sont pas déclarées</u>.

<u>Remarques</u> : <u>Conséquences et propriétés</u> :

- Les variables FORMAC et les variables PL/1 sont distinctes les unes des autres, si bien qu'une variable FORMAC et une variable PL/1 peuvent avoir le même nom.

  <u>Exemple</u> :

  A=5 ; LET(A=25); B=A;
  les variables PL/1, A et B ont pour valeur 5
  la variable FORMAC A a pour valeur 25.

- L'utilisateur s'il le désire peut inclure des variables PL/1 dans des expressions FORMAC au moyen du symbole " " .

  <u>Exemple</u> :

  A=5 ; LET(B="A");
  alors A←5 et B←5 .

- Les variables FORMAC peuvent être indicées. Un indice peut être un entier FORMAC ou une expression prenant des valeurs entières.
  Comme les autres variables FORMAC elles ne sont pas déclarées, en particulier aucune information de "dimension" n'est exigée.

- Les variables FORMAC sont soit <u>atomiques</u> soit <u>affectées</u>

  . une <u>variable atomique</u> n'a pas de valeur (elle n'est pas apparue en partie gauche d'une instruction d'affectation FORMAC)
  . une variable <u>assignée</u> possède une valeur. Elle représente une expression (sa valeur courante).

Explicitons ceci sur les instructions (α) et (β) suivantes :

(α) A = B + C de type PL/1

provoquera lors de l'exécution, l'évaluation numérique de la partie droite du signe = , (les identificateurs B et C devant contenir des valeurs numériques), avec affectation de la valeur résultat à l'identificateur A.

(β) LET(A=B+C) de type FORMAC

provoquera lors de l'exécution, l'évaluation, qui pourra être numérique de la partie droite du signe = .

Si les identificateurs B et C n'ont pas reçu d'affectation auparavant, ils se représenteront eux-mêmes (ce seront alors des atomes) de sorte que l'identificateur A "contiendra" l'expression B+C.

<u>Exemples</u> :

```
LET(B=COS(X)-1 ; C=X**2) ;
LET(A=B+C) ;
```

Premier cas :

Si X est un atome la variable A a pour valeur l'expression symbolique :

X**2 + COS(X) -1

Deuxième cas :

Si X a été affectée auparavant, par exemple LET(X=0), alors A prend la valeur 0 .

③ Les constantes.

Elles peuvent être des nombres entiers, flottants ou rationnels (ces derniers permettant de mener à bien des calculs arithmétiques avec une grande précision puisqu'ils peuvent comporter jusqu'à et au maximum 2295 chiffres décimaux, tant au numérateur qu'au dénominateur.

④ Les fonctions.

Les fonctions peuvent être définies par le programmeur (instruction de fonctions ou fonctions de procédure), ou bien appartenir à la bibliothèque des fonctions FORMAC ; ces dernières sont :

- des fonctions mathématiques usuelles
  Exemples : (SIN, COS, LOG ...)
- des fonctions permettant des manipulations non numériques
  Exemples : (DERIV, HIGHPOW, COEFF ...).

⑤ Les instructions.

En plus de l'instruction LET , le langage FORMAC contient des instructions :

- a - réalisant un interface entre PL/1 et FORMAC :
  passage de PL/1 à FORMAC et vice versa.

- b - controlant l'évaluation des expressions et le déroulement du simplificateur automatique du système FORMAC.

II - EXECUTION D'UN PROGRAMME FORMAC [XIII] .

① Les différentes phases.

Dans le système d'exploitation OS/360, un programme FORMAC s'exécute en quatre phases.

Première phase : "préprocesseur".

- Le langage FORMAC est traduit en des instructions PL/1 . Puis il y a :
- analyse syntaxique et sémantique avec détection d'erreurs.

Exemples :

LET(A=B)	est traduit en	CALL DENFMC1 ('A= B')
PRINT-OUT(A)	est traduit en	CALL DENFMC2('A')
K=LOP(PD)	est traduit en	K=DENFMCB('PD')

Deuxième phase :

Appel du compilateur PL/1

Troisième phase :

Edition des liens avec la bibliothèque classique PL/1 plus la bibliothèque des sous-programmes d'exécution FORMAC.

Quatrième phase :

Exécution du programme.

A chaque phase le temps CPU et l'encombrement en mémoire centrale sont donnés (d'où / possibilités de controle et d'optimisation).

② <u>Conséquences de l'interaction PL/1 et FORMAC sur l'exécution d'un programme.</u> [XIII].

Le fait que le langage PL/1 - FORMAC contienne deux entités différentes à d'importantes conséquences en ce qui concerne la compilation et l'exécution d'un programme.

- Les instructions PL/1 sont traduites par le compilateur PL/1 en "code machine".
- Par contre les instructions FORMAC ne sont pas affectées par le compilateur. Elles demeurent sous forme de chaînes de caractères et sont interprétées pendant la phase d'exécution.

Précisons ceci sur un exemple.

Soit l'instruction FORMAC :

```
LET(A=B**2+C**2+D*E) ;
```

Cette instruction FORMAC est d'abord traduite par le "préprocesseur" en une instruction légale de PL/1 soit :

```
CALL DENFMC1('A=B**2+C**2+D*E');
```

Cette instruction PL/1 est ensuite traitée par le compilateur PL/1.

Pendant la phase d'exécution le sous-programme DENFMC1 se chargera :

- de construire l'arbre correspondant à cette expression (avec éventuellement des substitutions et des simplifications)
- d'ajouter à la liste des objets (si cela n'est déjà fait) l'identificateur A.

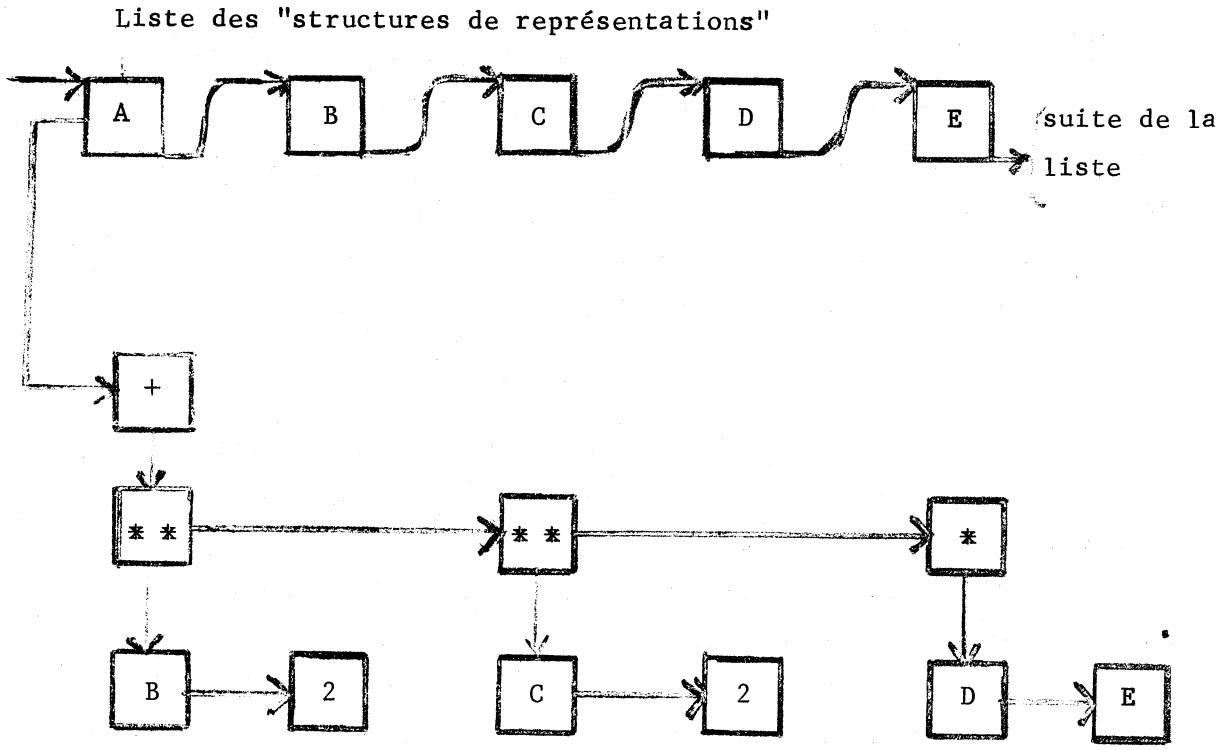
L'arbre obtenu représentera l'expression mathématique que l'on avait au départ.

<u>Exemple</u> :

Reprenons l'exemple précédent et supposons pour simplifier :

- D'une part que les identificateurs B, C, D et E soient des atomes.
- D'autre part que l'identificateur A apparaisse pour la première fois.

Il y aura création de quatre "structures de représentation" contenant divers renseignements exploitables par les sous-programmes d'exécution de FORMAC, en particulier l'identificateur lui-même.



CONCLUSION.

En numérique :

Il est souvent nécessaire de minimiser le nombre d'opérations (outre question gain de temps ...) pour obtenir une précision convenable sur le résultat.

En formel :

Le problème ne se pose pas de la même façon, en particulier si on fait une évaluation numérique en entiers ou en rationnels d'une expression finie la solution est exacte.

En revanche, on s'efforcera dans la suite des calculs de garder les expressions formelles et de faire les évaluations numériques le plus tard possible.

Donc un utilisateur d'un langage formel doit se débarrasser au plus vite des réflexes qu'il a acquis en programmant des langages numériques.

En particulier les notions de temps machine, encombrement mémoire, ne sont pas les mêmes, d'où une toute autre façon d'analyser le compromis : temps - encombrement.

Et un algorithme qui ne présente aucun intérêt en numérique peut être fondamental en calcul formel et inversement.

A titre d'exemple on peut citer :

- Méthode de Sauriau pour inverser formellement les matrices [XVII].
- Un programme d'intégration formel qui traite :
  la méthode d'interprétation par parties ,
  l'intégration des fractions rationnelles ... [XVIII].

On se propose maintenant de présenter l'algorithme CARACT que l'on a jugé aussi nécessaire et intéressant de programmer dans un langage formel.

Mais avant de décrire l'algorithme de la caractéristique, on va présenter le domaine de localisation, c'est-à-dire la courbe fermée f (introduite au chapitre II , paragraphe A II).

- A - CHOIX DE LA COURBE f .

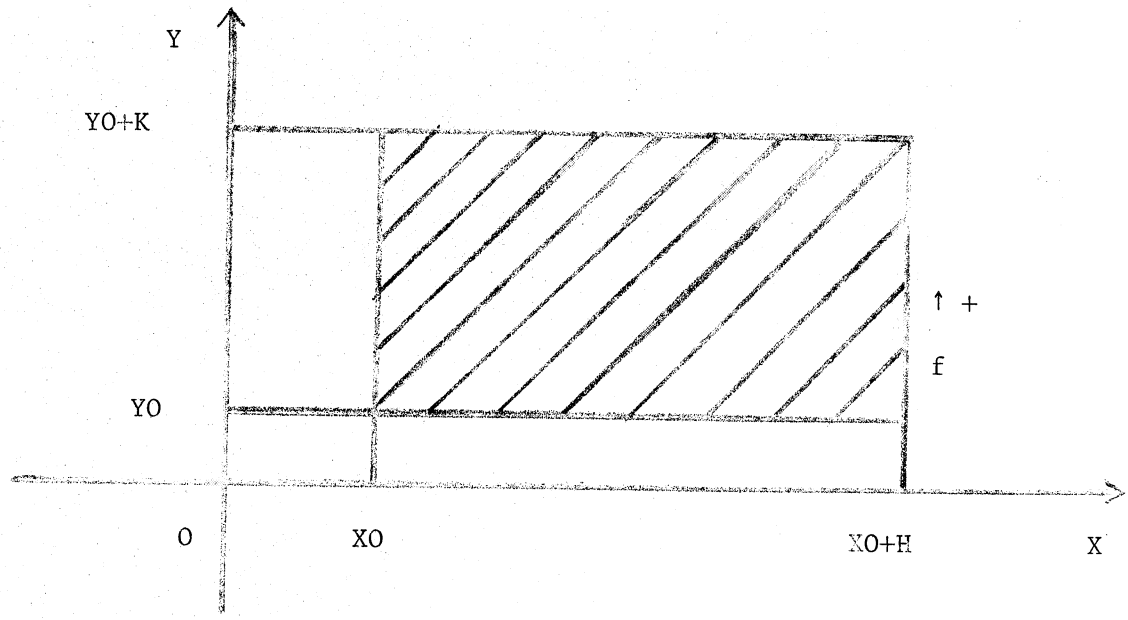
I - DOMAINE DE LOCALISATION.

$f(x,y) = 0$ l'équation d'une courbe fermée (notée f) dans R^2, à l'intérieur de laquelle on va déterminer s'il y a une ou pas de racine.

Cette courbe est définie par l'application suivante :

$$\begin{cases} f(x,y) = -(x-x_o)(x-x_o-h)(y-y_o)(y-y_o-k) \\ x_o \leq x \leq x_o + h \qquad y_o \leq y \leq y_o + h \end{cases}$$

et son intérieur sera le domaine hachuré suivant :



Notre but étant de généraliser autant que possible le problème, les coordonnées du rectangle (XO,H,YO,K) seront introduites de façon formelle.

Montrons que f respecte les conditions du théorème de la caractéristique (chapitre II p. 18) et voyons l'intérêt de ce choix.

II - f VERIFIE LES CONDITIONS DU THEOREME DE LA CARACTERISTIQUE.

→ f est une courbe fermée.

→ tous les points de f sont à distance finie

→ f est orientée de telle sorte qu'en la parcourant dans le sens positif l'intérieur est sur la gauche.

III - INTERET DE CE CHOIX.

① Validité :

XO,H,YO,K et l'équation seront introduits formellement. Le problème sera traité formellement, et l'activation numérique finale pourra se faire soit en rationnels soit en virgule flottante.

On peut déjà remarquer les avantages de la construction d'un tel programme.

Il sera :

- valable . quels que soient les coefficients de l'équation
  . quel que soit son degré.
- activable dans n'importe quelle région de plan (et éventuellement même il peut permettre une localisation de toutes les racines par un balayage systématique de tout le plan).

② Possibilité de construction de l'algorithme.

Le choix de f a rendu possible l'algorithme de construction de la caractéristique en déterminant le caractère des points d'intersection de φ et f (ou Ψ et f) en point d'entrée ou de sortie ; on va ainsi ramener tout le problème à des constructions de suites de Sturm pour des polynômes à coefficients réels et à des déterminations du nombre de racines réelles entre deux valeurs données.

- B - DESCRIPTION DE L'ALGORITHME DE DETERMINATION DE LA CARACTERISTIQUE.

I - EXPOSE DU PROBLEME.

Soit l'équation :

$$(1) \quad \begin{cases} E(z) = \sum_{j=0}^{j=N} (a_j + ib_j) z^j \quad \text{avec} \quad a_j, b_j \in \mathbb{R} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad z \in \mathbb{C} \\ = PE1(z) + i\, PE2(z) \text{ avec} \begin{cases} PE1(z) = \sum_{j=0}^{j=N} a_j z^j \\ PE2(z) = \sum_{j=0}^{j=N} b_j z^j \end{cases} \end{cases}$$

Remarques préliminaires :

$E(z)$ est un polynôme à coefficients complexes, $PE1(z)$ et $PE2(z)$ étant des polynômes à coefficients réels, toutes les racines réelles et complexes conjuguées de $E(z)$ annulent simultanément $PE1(z)$ et $PE2(z)$.

Par suite le polynôme complexe $E(z)$ a les mêmes racines réelles et complexes conjuguées que le polynôme réel $PE(z)$ qui est le PGCD de $PE1(z)$ et $PE2(z)$.

(1) s'écrit alors :

$$(2) \quad E(z) = \underbrace{PE(z)}_{\substack{\text{polynôme} \\ \text{à coeffi-} \\ \text{cients réels.}}} \underbrace{[F1(z) + i\, F2(z)]}_{\substack{F(z) \text{ polynôme à coefficients} \\ \text{complexes.}}}$$

Cette factorisation exatte (car FORMAC permet la division formelle de polynômes, et l'activation numérique en rationnels) va nous permettre :

- de distinguer la localisation des racines réelles, complexes conjuguées et complexes quelconques
- de travailler sur des polynômes de degré $\leq N$.

① Les données.

Ce sont :

- les polynômes PE1(z) et PE2(z) dont les coefficients sont mis sous forme rationnelle et introduits dans des chaînes PL/1.
- XO,H,YO,K un domaine de localisation introduit sous forme de chaîne PL/1. (Ce seront en fait des nombres rationnels).
  On peut évidemment introduire plusieurs domaines de localisation.

② But.

Le programme formel étant construit, l'activation numérique en rationnels se fait pour l'équation et le domaine introduit.
A l'issue de ce programme on obtiendra :

- la caractéristique $k = \begin{cases} 0 & \text{si pas de racine} \\ 1 & \text{cas où il y a une racine complexe} \end{cases}$

- Les coordonnées du domaine effectivement étudié :
  En effet ce programme est activé numériquement dans un domaine connu puisque XO,H,YO, et K font partie des données, mais dans la mesure où ce domaine ne convient pas, le programme se poursuit pour d'autres domaines obtenus par des dichotomies automatiques, soit sur H , soit sur K.
  Il est donc nécessaire de connaître à chaque phase le domaine sur lequel on travaille :

. d'une part pour les résultats intermédiaires qui peuvent être intéressants pour une nouvelle localisation (par exemple dans le choix du nouveau domaine, dans la suppression de certaines étapes d'une phase ...)

. d'autre part cela donne évidemment le domaine final sur lequel l'étude de la localisation a été faite.

II - MISE EN OEUVRE PRATIQUE.

1 Les différentes étapes de l'algorithme.

- a - Recherche des points d'intersection de φ et Ψ .

En effet d'après le théorème fondamental établi au chapitre II (p. - II-18) , le nombre de racines de l'équation algébrique sera donné par le nombre de points d'intersection des courbes φ et Ψ à l'intérieur de la courbe f , c'est-à-dire la caractéristique k des trois fonctions f , φ , Ψ :

$$k = \frac{E(f;\ \varphi,\Psi) - S(f;\ \varphi,\Psi)}{2}$$

ou l'une des formes équivalentes donnée au paragraphe AII 2 b du chapitre II.

Or d'après les définitions données au chapitre précédent, chercher les points d'entrée ou de sortie pour un système de trois fonctions f, φ , Ψ cela revient à :

- chercher le nombre de points d'intersection de f et φ (ou f et Ψ) , φ et Ψ ayant même rôle,
- caractériser ces points en points d'entrée ou de sortie.

ⓐ Nombre de points d'intersection de f et φ :

D'après le choix de f, la détermination de ce nombre nous amène à résoudre les quatre systèmes suivants :

$$\begin{cases} \varphi(x,y) = 0 \\ y = y_o \end{cases} \Rightarrow \quad P(x) = 0$$

$$\begin{cases} \varphi(x,y) \\ y = y_o + k \end{cases} \Rightarrow \quad Q(x) = 0$$

$$\begin{cases} \varphi(x,y) = 0 \\ x = x_o \end{cases} \Rightarrow \quad R(y) = 0$$

$$\begin{cases} \varphi(x,y) = 0 \\ x = x_o + h \end{cases} \Rightarrow \quad S(y) = 0$$

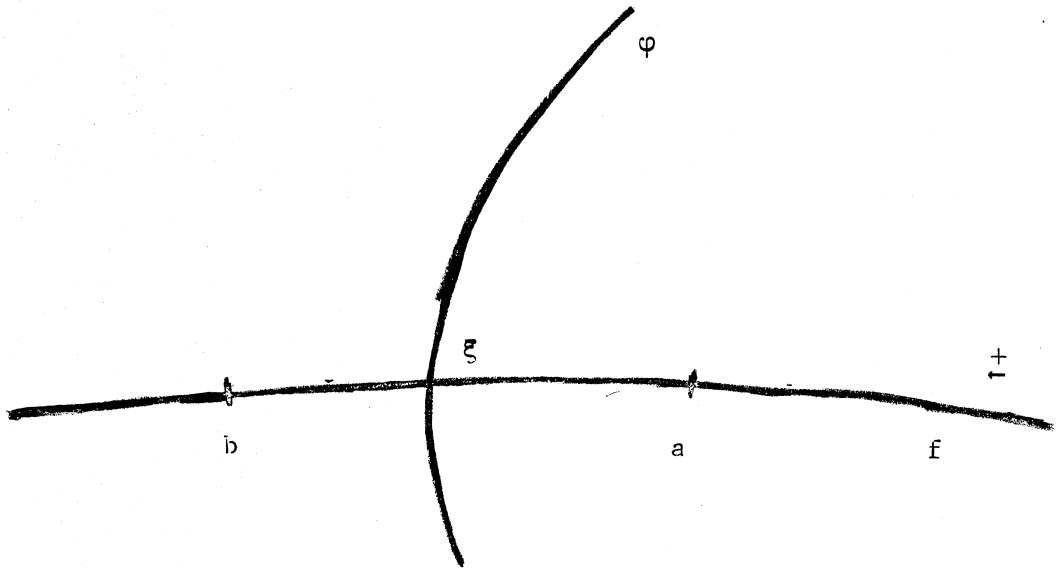
C'est-à-dire:on est ramené à déterminer le nombre de racines réelles de quatre polynômes entre deux valeurs données.
Pour cela on utilise le théorème de Sturm.

Pour chaque polynôme P, Q, R et S dont les coefficients dépendent des variables formelles XO, H, YO, K , on va construire formellement les suites de Sturm.

Puis on passe à l'activation numérique en donnant à XO, H, YO et K des valeurs rationnelles et l'on détermine les nombres NP, NQ, NR et NS qui représentent le nombre de variations des suites sur les différents côtés du rectangle qui est maintenant précisé.

Ⓑ <u>Caractérisation de ces points</u>.

Du point de vue pratique et d'après les définitions données par Kronecker, on divise la courbe f en arcs tels que chacun d'eux ne contienne qu'un seul point d'intersection avec φ (ou Ψ) .



Soit $\widehat{ab}$ un de ces arcs, et ξ le point d'intersection de φ avec f , alors ξ sera :

- point d'entrée $E[f;\varphi,\Psi]$ si $\varphi.\Psi > 0$ au point a
- point de sortie $S[f;\varphi,\Psi]$ si $\varphi.\Psi < 0$ au point a .

<u>Remarques importantes</u> :

- Par le choix fait pour la courbe f , il parait pratique de la diviser en arcs tels que chacun d'eux soit un des côtés du rectangle, on prendra donc pour point a les différents sommets du rectangle.
- Alors ceci implique les conséquences suivantes :
  . que φ n'ait pas plus d'un point d'intersection avec chaque côté du rectangle,
  . que le produit $\varphi.\Psi$ soit constant sur $\widehat{a\xi}$.

Voyons plus en détail ces difficultés et les contraintes que cela a introduit au niveau de l'algorithme.

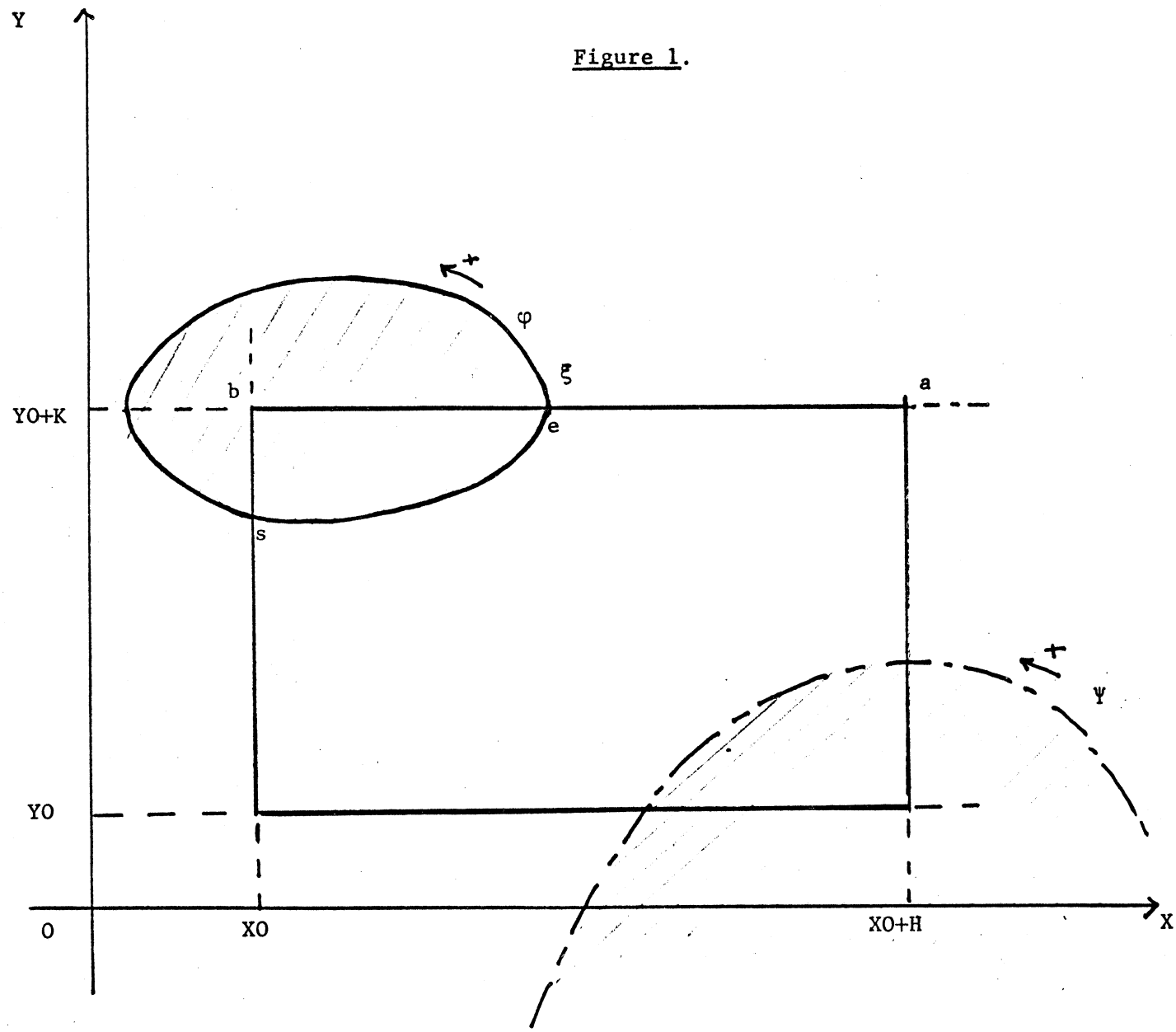


Figure 1.

Cas où il n'y a pas de dichotomie

Légende :

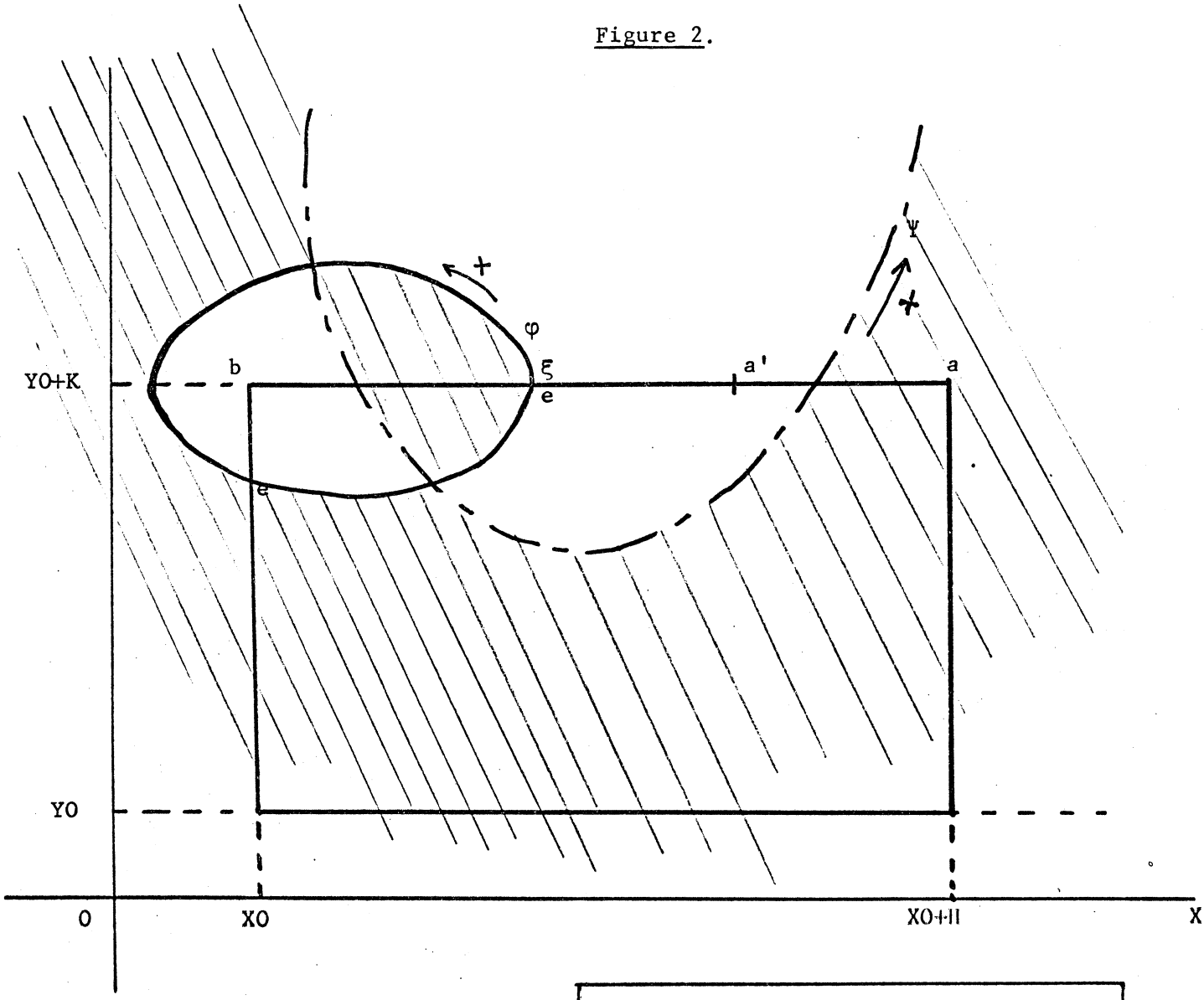
/////	enclos (région ou $\varphi.\Psi < 0$)
e	point d'entrée $E[f;\ \varphi,\Psi]$
s	point de sortie $E[f;\ \varphi,\Psi]$

Commentaire :

- le signe du produit $\varphi.\Psi$ en a = signe du produit $\varphi.\Psi$ juste avant la traversée de φ au point ξ .
- Ψ ne coupe pas f sur ab $\Rightarrow$ 1 seul changement de signe de $\varphi.\Psi$

$\Rightarrow$ pas de dichotomie.

Figure 2.



Cas où la dichotomie est nécessaire

Légende :

//// enclos (région ou $\varphi.\Psi < 0$)

s point de sortie : $S[f; \varphi, \Psi]$.

Commentaire :

- le signe du produit $\varphi.\Psi$ en a $\neq$ signe de $\varphi.\Psi$ en a' avant la traversée de φ au point ξ .

- Ψ coupe f sur ab $\Rightarrow$ plusieurs changements de signe de $\varphi.\Psi$ sur ab.

$\Rightarrow$ dichotomie nécessaire.

- b - Difficultés au niveau de la caractérisation :

- Le fait de choisir comme arc $\overset{\frown}{ab}$ les côtés du rectangle, implique que les nombres NP, NQ, NR et NS doivent être ≤ 1 .
  (Quand ceci ne sera pas réalisé on effectuera une dichotomie sur le domaine, soit sur H , soit sur K).

- En ce qui concerne le signe du produit $\varphi.\Psi$, cela nous a mis devant l'alternative suivante :
  - Soit on étudie la fonction $\varphi.\Psi$, c'est-à-dire ses points d'intersection avec f , puis on isole ceux de φ et f tels qu'ils soient ≤ 1 sur chaque côté du rectangle (mais cette méthode présente d'énormes inconvénients sur le plan de la programmation, en particulier l'encombrement en mémoire, car on travaille toujours sur $\varphi.\Psi$, qui est souvent de degré 2N).
  - Soit on recherche les points d'intersection de φ et f, et seulement dans le cas où il en existe, on passe à l'étude de $\varphi.\Psi$ pour la caractéristique (c'est cette solution que nous avons programmée).

Donc, l'existence d'un point d'intersection de φ avec un arc de f étant connue, avant de déterminer le caractère de ce point, on regardera si Ψ coupe f sur cet arc, car il faut que le signe de $\varphi.\Psi$ soit constant sur $\overset{\frown}{a\xi}$ au moins.

On peut avoir les différents cas :
(figures 1, 2, 3)

Premier cas : Figure 1.

La courbe Ψ ne coupe pas $\overset{\frown}{ab}$, le signe du produit $\varphi.\Psi$ est constant sur $a\xi$ et on passe directement à l'étude du caractère de ce point.

Deuxième cas : Figure 2.

La courbe Ψ coupe $\overset{\frown}{ab}$ en plusieurs points tels que le signe du produit $\varphi\Psi$ en a soit différent du signe du produit $\varphi\Psi$ en a' (point situé avant la traversée de la courbe φ au point ξ) d'où dichotomie de l'arc $\overset{\frown}{ab}$, c'est-à-dire de H .

Troisième cas : Figure 3.

La courbe Ψ coupe $\overrightarrow{ab}$ mais le signe de $\varphi\Psi$ est constant sur l'arc $\overrightarrow{a\xi}$, cependant on effectuera une dichotomie qui n'est pas nécessaire (pour éviter ceci il faudrait déterminer exactement la position des points d'intersection de φ et f par rapport à ceux de Ψ et f , ce qui représenterait un travail beaucoup plus considérable).

Pour étudier le nombre de points d'intersection de Ψ avec f cela nous amène à résoudre les quatre systèmes suivants :

$$\begin{cases} \Psi(x,y) = 0 \\ y = y_o \end{cases} \Rightarrow \quad T(x) = 0$$

$$\begin{cases} \Psi(x,y) = 0 \\ y = y_o + k \end{cases} \Rightarrow \quad U(x) = 0$$

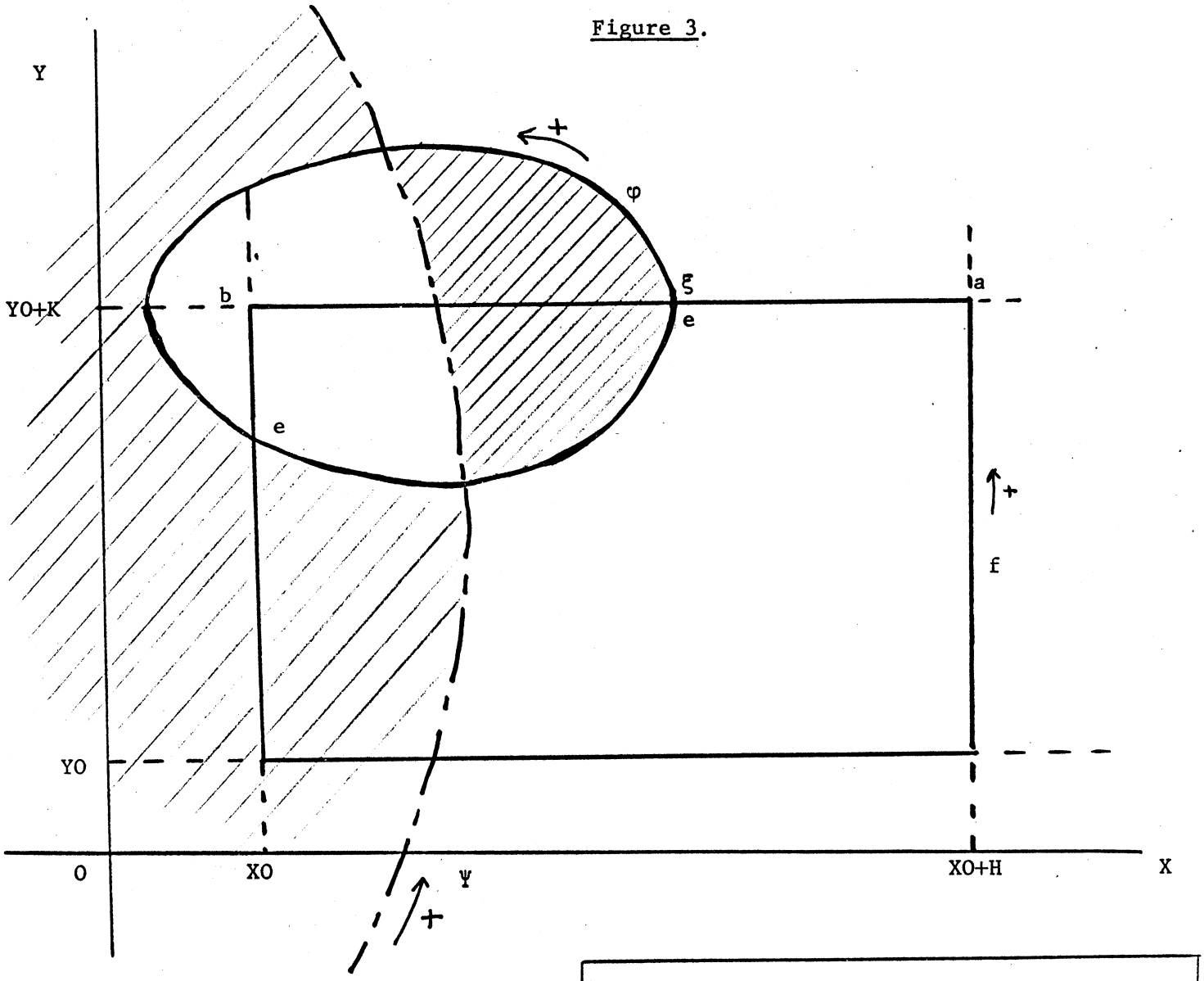
$$\begin{cases} \Psi(x,y) = 0 \\ x = x_o \end{cases} \Rightarrow \quad V(y) = 0$$

$$\begin{cases} \Psi(x,y) = 0 \\ x = x_o + h \end{cases} \Rightarrow \quad W(y) = 0$$

C'est-à-dire on est encore ramené à déterminer le nombre de racines réelles de quatre polynômes entre deux valeurs données (d'une façon identique aux polynômes P, Q, R et S).

Ceci nous permettra donc de déterminer les nombres NPT, NQU, NRV, NSW qui représentent le nombres de points d'intersection de Ψ avec les arcs de f .

Figure 3.



Dichotomie automatique mais non nécessaire

Légende :

//// enclos (région où $\varphi.\Psi < 0$)

e point d'entrée : $E[f;\ \varphi,\Psi]$.

Commentaire :

- le signe de $\varphi.\Psi$ en a = signe de $\varphi.\Psi$ juste avant la traversée de φ au point ξ .
- mais Ψ coupe ab $\Rightarrow$ il y aura dichotomie pour isoler ξ sur un arc de f tel qu'il n'y aie plus de point d'intersection avec Ψ.

$\Rightarrow$ dichotomie non nécessaire, mais donnera une localisation plus fine.

Remarques :

- Quand ces nombres sont nuls : pas dichotomie .
- Quand ces nombres sont différents de zéros et si sur l'arc correspondant il y a un point d'intersection de φ avec f alors il y aura une dichotomie sur cet arc .

CONCLUSION :

Cette méthode (bien qu'elle puisse entraîner certaines dichotomies non nécessaires, mais pas totalement inutiles sur le plan des informations recueillies) a de nets avantages, en effet elle permet :

- de ne pas travailler systématiquement sur le polynôme $\varphi.\Psi$ (souvent de degré voisin de 2N) ,
- de ne pas étudier les points d'intersection de Ψ et f quand il n'y a pas de points d'intersection de φ et f ,
- d'évaluer les nombres NPT, NQU, NRV, NSW que dans le cas où cela est nécessaire.

② Etude descriptive de l'algorithme.

- a - Description du processus automatique de dichotomie du domaine de localisation.

Comme nous venons de le voir, le but de notre programme principal est de déterminer la caractéristique, celle-ci étant obtenue à partir de la valeur des nombres NP, NQ, NR et NS.

La détermination de la valeur de ces quatres nombres se fait dans l'ordre suivant : NP et NQ , puis sous certaines conditions ,NR et NS. Ce sont les conditions ① et ② suivantes :

① NP et NQ ≤ 1

② NPT et NQU ≤ 1

Si ces conditions ne sont pas vérifiées, alors il y a une dichotomie sur H et on redétermine ces quatre nombres sur le nouveau domaine.
Si ces conditions sont vérifiées, on détermine les valeurs de NR et NS .

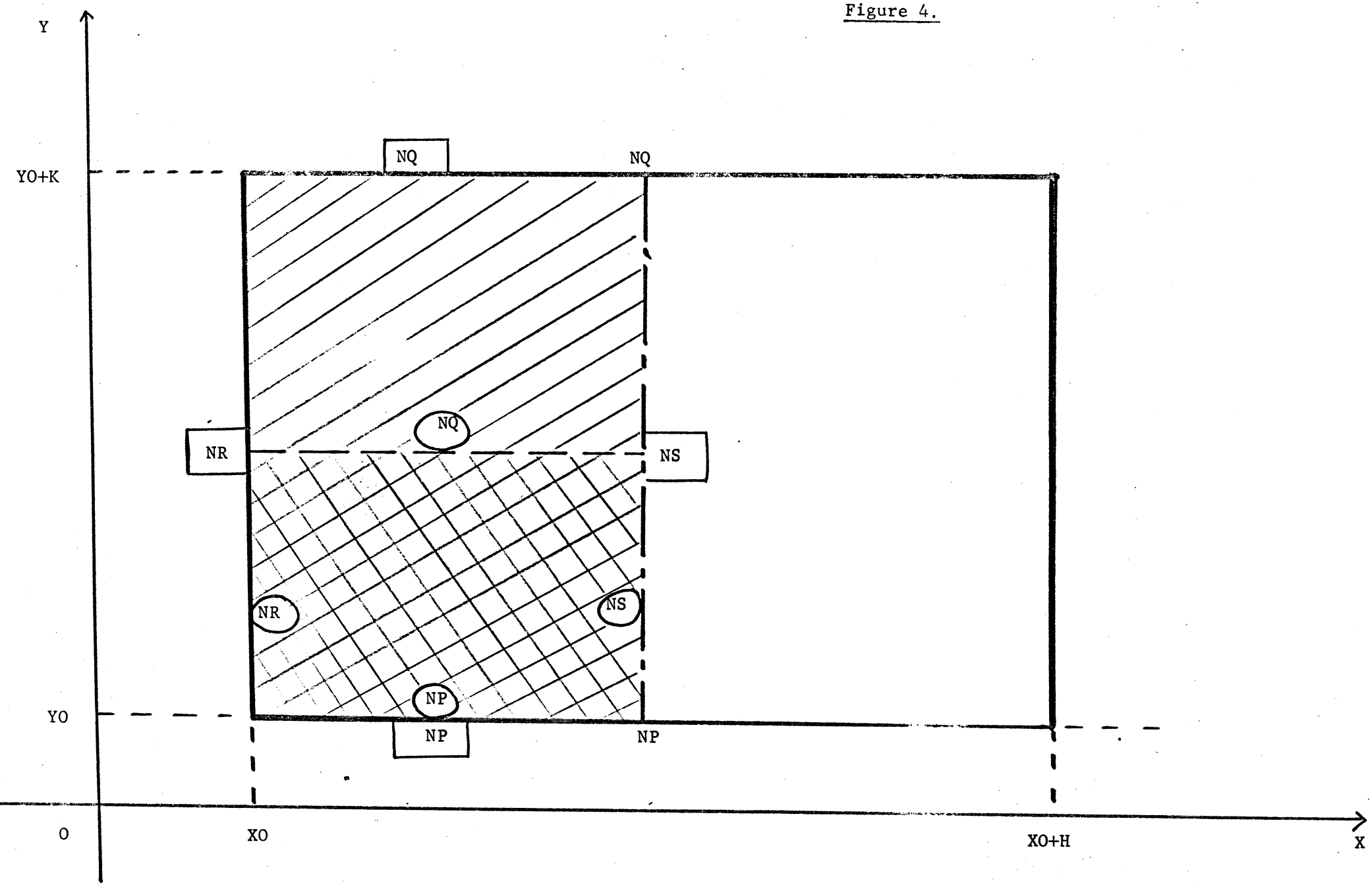
On fait alors un test sur les conditions ③ et ④ suivantes :

③ NR et NS ≤ 1

④ NRV et NSW ≤ 1

Alors si ces deux dernières conditions sont vérifiées on détermine la valeur de la caractéristique, sinon il y a une dichotomie sur K et on redétermine ces quatre nombres sur le nouveau domaine.

Figure 4.



Remarques :

- 1 - Il est nécessaire de préciser l'ordre dans lequel sont déterminés ces nombres, car si l'on est obligé d'effectuer une dichotomie, cela modifie non seulement le nombre qui implique cette dichotomie, mais aussi les précédents.

Explicitons ceci sur la figure 4 .

Ainsi, une dichotomie sur H à l'issue de l'étude de NQ conduit à réétudier les valeurs de NP et NQ soient $\boxed{NP}$ et $\boxed{NQ}$ dans le domaine hachuré de la façon suivante : ////.

De même une dichotomie sur K à l'issue de l'étude de NR conduit à réétudier NP , NQ puis NR et NS sur le domaine hachuré de la façon suivante XXXX .

- 2 - Il serait éventuellement possible d'éviter de recalculer NP dans le cas où l'on n'effectue que des dichotomies sur K , mais le test de restriction dû à ce cas est souvent plus long que la simple répétition du calcul d'une part, et d'autre part, rompt toute l'harmonie et l'automatisme du processus de dichotomie ; c'est pourquoi nous n'avons pas introduit ce test supplémentaire.

- b - Illustration graphique pour expliciter l'ordre de déroulement du programme principal.

Voyons sur quelques exemples graphiques comment s'opèrent le processus de recherche de la caractéristique k , et les dichotomies du domaine de localisation.

Définition :

On appellera phase l'étude faite sur un domaine.

Il y aura donc passage d'une phase à une autre quand le domaine change, c'est-à-dire s'il y a une dichotomie.

La phase finale devant obligatoirement comprendre la détermination de quatre nombres NP, NQ, NR et NS et évidemment de la caractéristique k .

ⓐ Exemple 1 (voir figure 5)

Première phase :

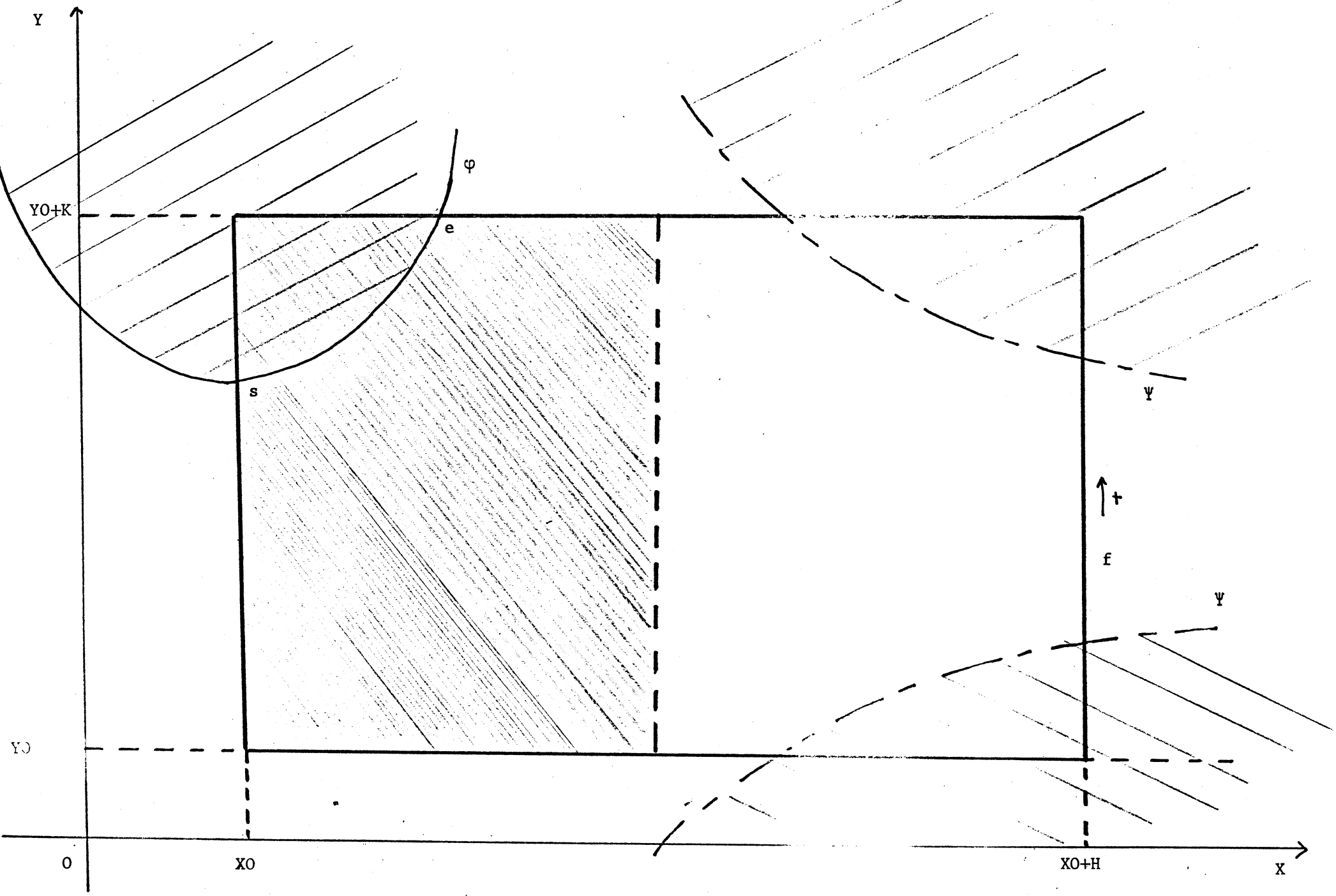
Domaine XO H YO K

NP = 0

NQ = 1

Alors on effectue un test sur $\varphi.\Psi$ qui conduit à NQU = 2 , ce qui implique une dichotomie sur H , et un redémarrage automatique de la localisation sur un nouveau domaine.

Figure 5.



<u>Deuxième phase</u> :

Domaine XO H/2 YO K

NP = 0

NQ = 1

On effectue le test sur $\varphi.\Psi$ dont le résultat est NQU = 1.
On peut alors déterminer le caractère de NQ soit : NQ = + 1 .

NR = 1

On effectue le test sur $\varphi.\Psi$ dont le résultat est NRV = 1.
On détermine ensuite le caractère de NR soit : NR = - 1.

NS = 0.

Cette phase est donc la phase finale. La caractéristique vaut

$$\frac{NP + NQ + NR + NS}{2} \quad , \quad \text{soit} \quad \frac{0 + 1 - 1 + 0}{2} \quad .$$

Le résultat du programme est donc CARACTERISTIQUE = 0 sur le domaine XO, H/2, YO, K .

On vient de décrire assez longuement l'exemple 1, aussi se permettra-t-on de faire une description plus schématique pour l'exemple 2, beaucoup plus long.

Ⓑ <u>Exemple 2</u> (voir figure 6).

<u>Remarques préliminaires</u> :

Notons qu'il y a passage automatique d'une phase à la suivante quand il y a une dichotomie sur H ou K . Et l'étude de la localisation est reprise sur le nouveau domaine.

<u>Première phase</u> :

Domaine XO H YO K

NP = 0

NQ = 2 ⇒ dichotomie sur H .

<u>Deuxième phase</u> :

Domaine XO H/2 YO K

NP = 0

NQ = 1 ⇒ test sur $\varphi.\Psi$ soit : NQU = 2, d'où dichotomie sur H .

<u>Troisième phase</u> :

Domaine XO H/4 YO K

NP = 0

NQ = 0

NR = 1 ⇒ étude de $\varphi.\Psi$: NRV = 2, d'où dichotomie sur K .

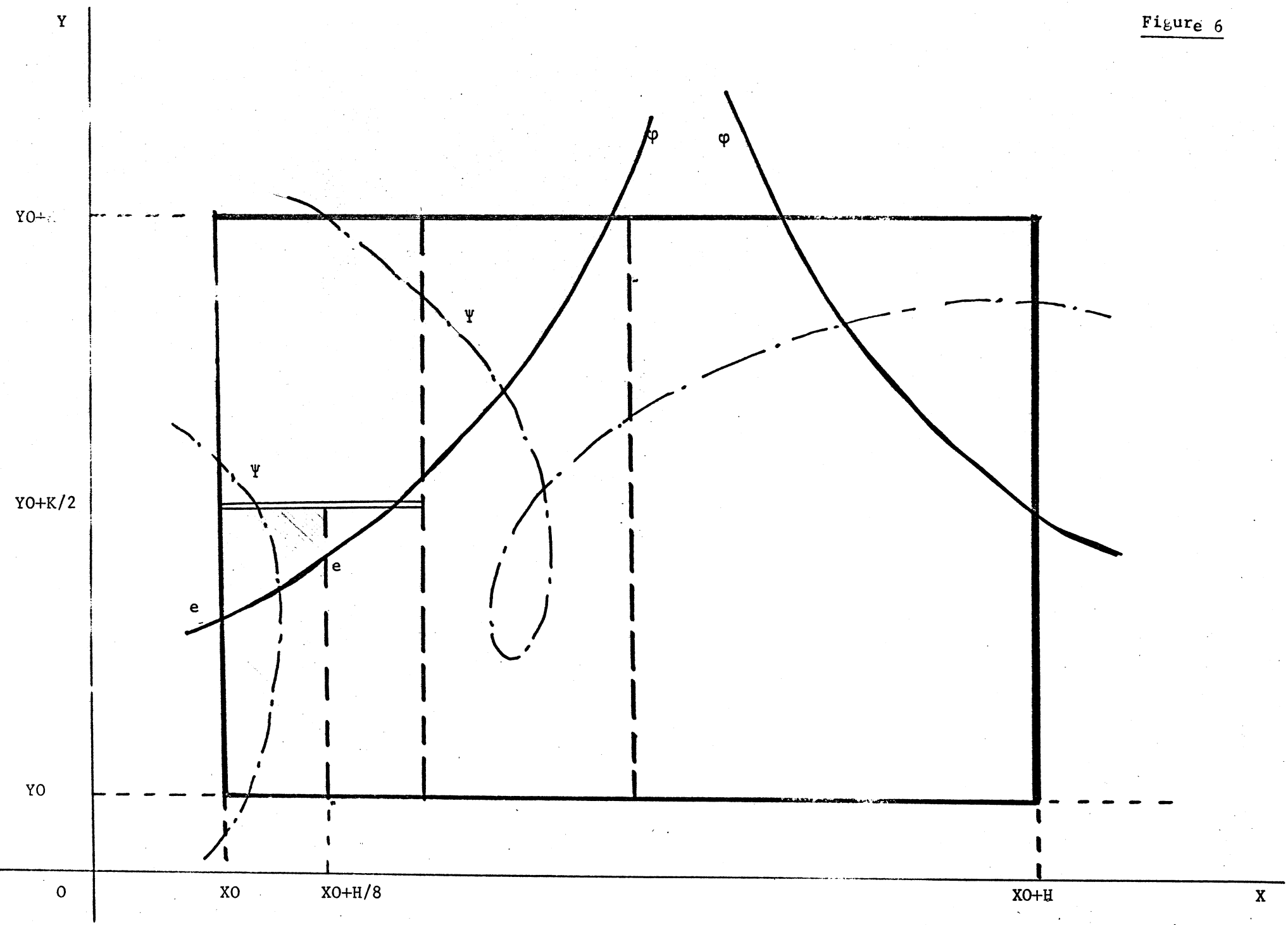
<u>Quatrième phase</u> :

Domaine XO H/4 YO K/2

NP = 0

NQ = 1 ⇒ étude de $\varphi.\Psi$: NQU = 2 d'où dichotomie sur H.

Figure 6



<u>Cinquième phase</u> :

Domaine XO H/8 YO K/2

NP = 0

NQ = 0

NR = 1 ⇒ test sur $\varphi.\Psi$: NRV = 1 d'où caractére de NR :
NR = + 1 .

NS = 1 ⇒ test sur $\varphi.\Psi$: NSW = 1 d'où caractère de NS :
NS = + 1 .

C'est donc la phase finale, il y a détermination de la caractéristique qui vaut :

$$\frac{NP + NQ + NR + NS}{2} \quad \text{soit} \quad \frac{0 + 0 + 1 + 1}{2}$$

$$\boxed{\text{CARACTERISTIQUE} = 1}$$

③ Présentation du programme principal.

- a - Les procédures.

CARACT, le programme principal, utilise les procédures suivantes :

. PGCD :

Comme son nom l'indique, cette procédure calcule formellement le PGCD de deux polynômes quelconques GD(X) et PD(X) .
Dans le cas ou celui-ci existe il est rangé dans la variable FORMAC appelée PGCD sinon on lui affecte la valeur 1 ; cette procédure donne aussi le quotient PD(X) / PGCD(X) qui est rangé dans la variable FORMAC appelée R .

C'est une procédure sans paramètres, les deux polynômes GD et PD sont des variables FORMAC qui devront être chargées avant l'appel de la procédure.
(Exemple dans le programme : LET(GD="PE1";PD="PE2");).

NB : On trouvera une description détaillée de cet algorithme dans [XV] volume 2 p. 367.

. STURM(M) :

C'est la procédure qui construit formellement les suites de Sturm d'un polynôme GD(X) de degré M .

Elle permet d'obtenir les (M+1) éléments de la suite qui sont des polynômes de degré décroissant, rangés dans les éléments d'un tableau FORMAC G1(I) avec I=0,1...M tel que G1(0) = GD(X).

Cette construction est formelle et le polynôme de départ est représenté par l'identificateur FORMAC GD qui devra être chargé avant l'appel de la procédure.

Par contre M , paramètre de cette procédure, est une variable PL/1 qui prend une valeur à la sortie de la procédure.

. NBVAR :

Cette procédure calcule le nombre de variations de la suite de Sturm construite à partir d'un polynôme GD(X) de degré M entre deux valeurs réelles XO et XO+H.
Les paramètres d'entrée de cette procédure sont donc :

- un polynôme GD(X) de degré M et plus exactement: si M > 2 , alors il y a appel de STURM(M), ce qui entraine la construction formelle de la suite, rangée dans G1(I) avec I=0,1,...M , les éléments de cette suite étant des polynômes en X dont les coefficients dépendent des paramètres formels XO et H (ou des polynômes en Y dont les coefficients dépendent des paramètres formels YO et K)

- l'intervalle d'étude des variations :
  par exemple (XO, XO+H) pour les polynomes en X , et plus exactement les variables FORMAC # XO et # H chargées avec des valeurs rationnelles avant l'appel de la procédure.

<u>Remarques</u> :

sur l'ambiguïté des différents emplois de XO, H, # XO, # H (resp. Y et K).

. XO et H sont les coordonnées formelles du domaine, déclarées en chaines PL/1.

. XO et H interviennent formellement dans les coefficients des suites de Sturm, ce sont alors des variables FORMAC atomiques.

. ## XO et ## H sont des variables FORMAC affectées :

Par exemple avant le premier appel de NBVAR pour un polynôme en X dont les coefficients dépendent formellement de YO et K on a l'instruction :

LET(##XO="XO"; ##H="H");

Alors les évaluations numériques des polynômes se feront pour les valeurs rationnelles contenues dans les chaines PL/1 : XO et H.

NB : On ne peut pas avoir l'instruction LET(XO="XO"; H="H"); car par la suite XO et H ayant été affectées ne pourraient plus être considérées comme atomes; d'où l'obligation d'introduire les variables FORMAC (##XO, ##H ...).

. SIGNE :

Cette procédure calcule le signe du produit des fonctions PHI(X,Y).PSI(X,Y) en un point (XO,YO) du plan.

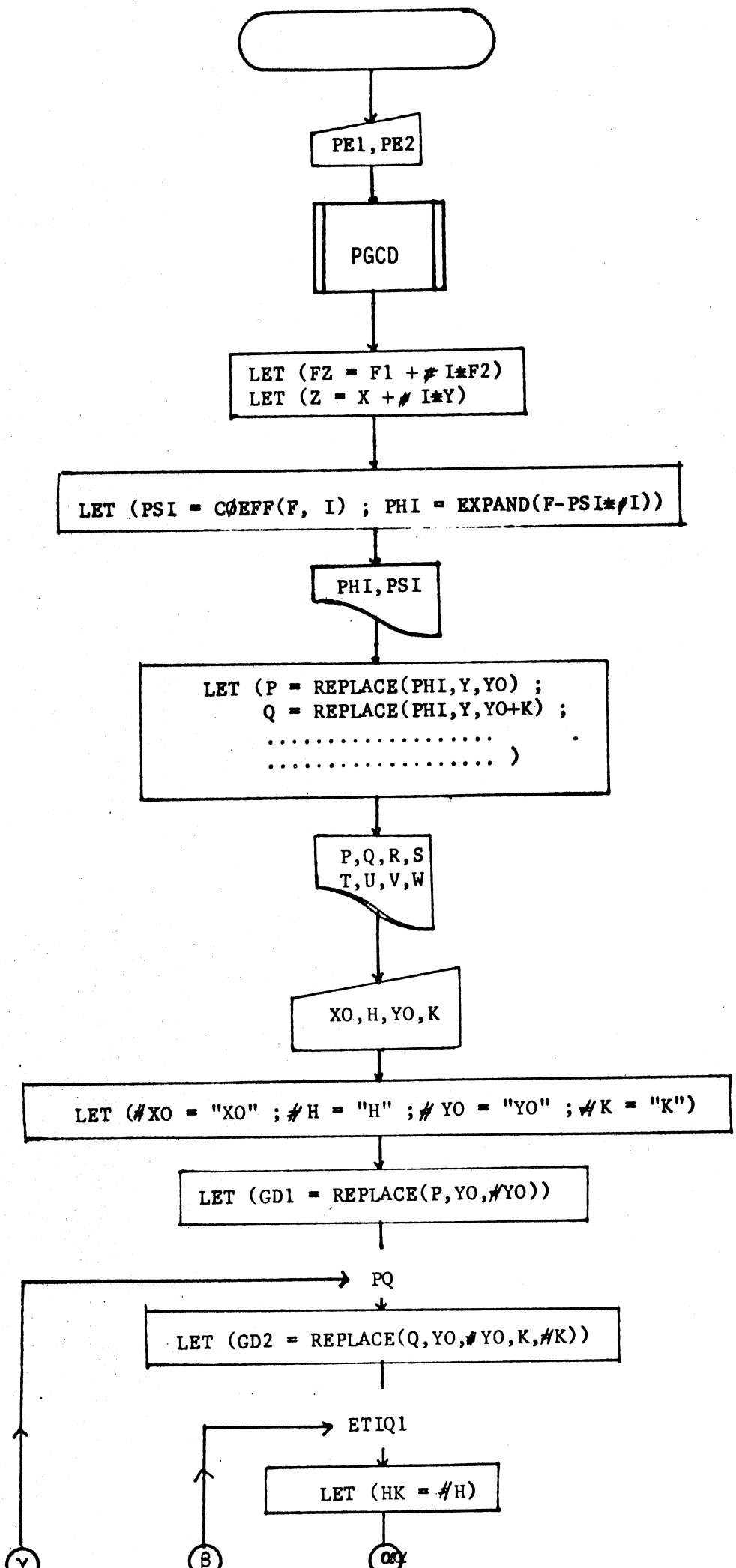
Remarque :

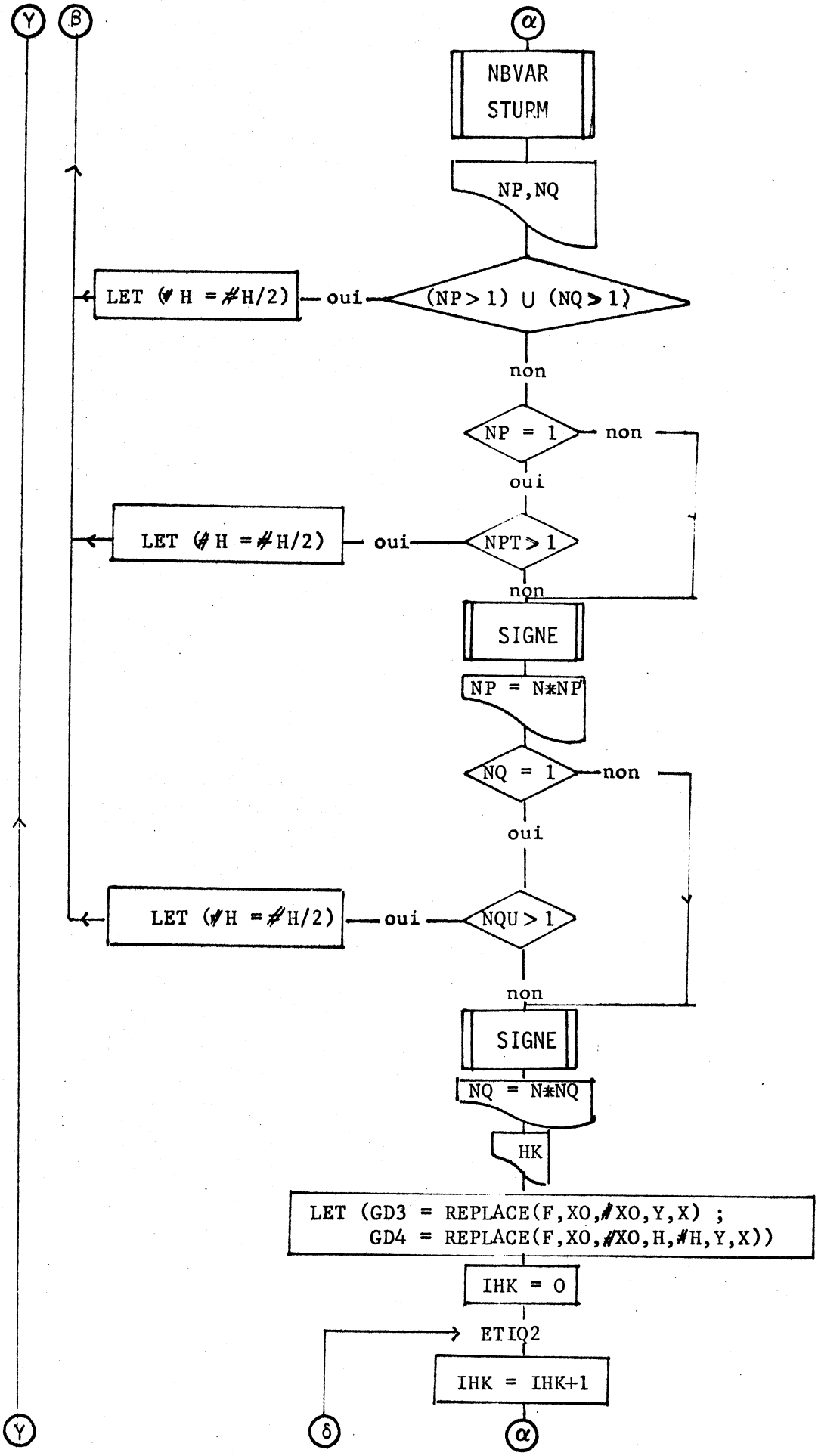
C'est la même que pour la procédure précécente, XO et YO sont des variables FORMAC atomiques qui devront être affectées avant l'appel de SIGNE (d'où l'utilisation d'autres variables FORMAC).

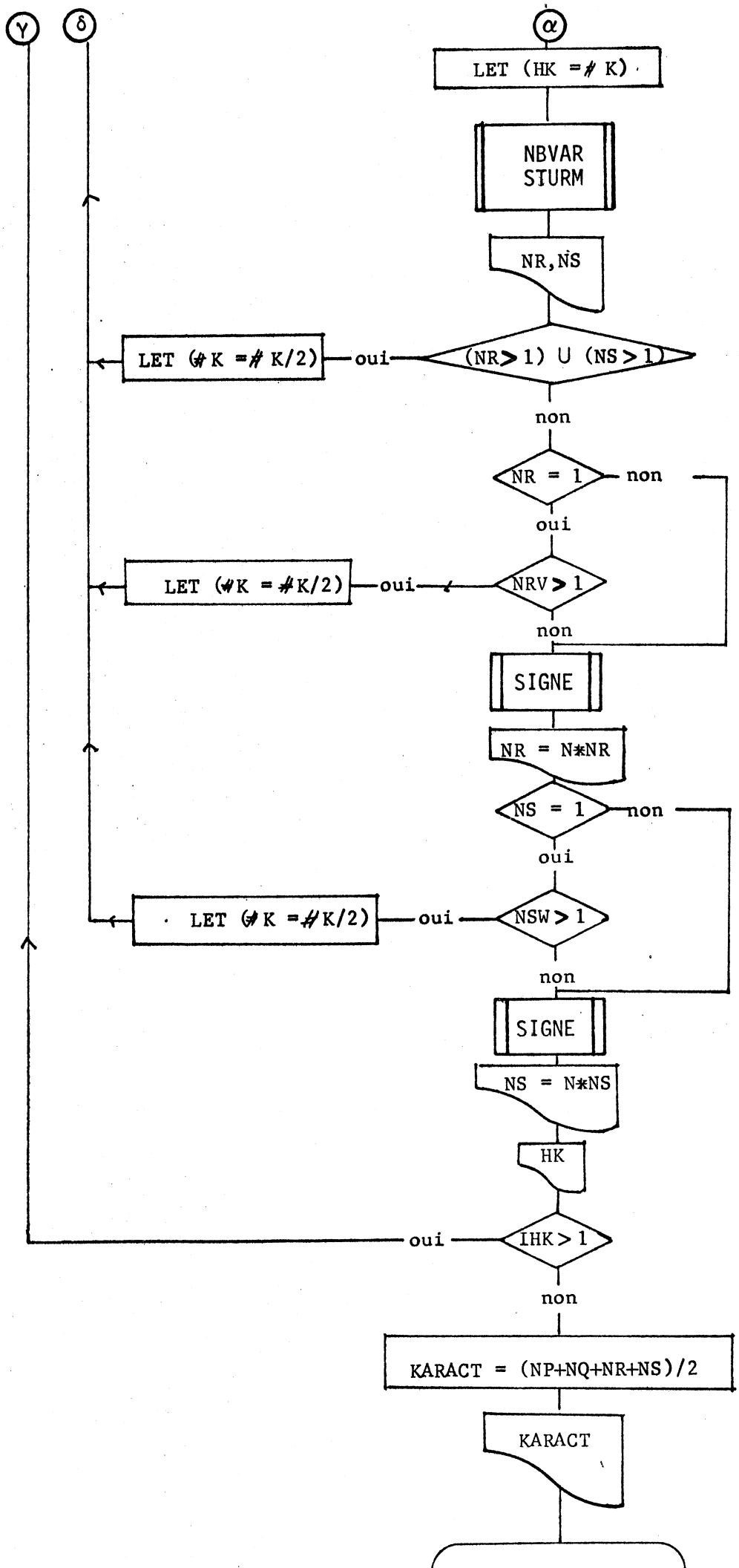
- b - Organigramme du programme principal.

Dans cet organigramme de CARACT, il n'y a pas les organigrammes des procédures, elles n'y figurent que par leur ordre d'appel , c'est ce qui explique l'apparence d'une certaine simplicité et linéarité.

Cependant, il peut être intéressant pour d'éventuels utilisateurs de CARACT qui n'ont pas l'intention d'étudier en détail le programme.


PE1, PE2
PGCD
LET (FZ = F1 +# I*F2)
LET (Z = X +# I*Y)
LET (PSI = CØEFF(F, I) ; PHI = EXPAND(F-PSI*#I))
PHI, PSI
LET (P = REPLACE(PHI,Y,YO) ;
Q = REPLACE(PHI,Y,YO+K) ;
..... .
.....)
P,Q,R,S
T,U,V,W
XO,H,YO,K
LET (#XO = "XO" ; #H = "H" ; # YO = "YO" ; #K = "K")
LET (GD1 = REPLACE(P,YO,#YO))
PQ
LET (GD2 = REPLACE(Q,YO,# YO,K,#K))
ETIQ1
LET (HK = #H)
γ
β
αγ


γ
β
α
NBVAR
STURM
NP,NQ
LET (#H = #H/2)
oui
(NP > 1) ∪ (NQ > 1)
non
NP = 1
non
oui
LET (#H = #H/2)
oui
NPT > 1
non
SIGNE
NP = N*NP
NQ = 1
non
oui
LET (#H = #H/2)
oui
NQU > 1
non
SIGNE
NQ = N*NQ
HK
LET (GD3 = REPLACE(F,XO,#XO,Y,X) ;
GD4 = REPLACE(F,XO,#XO,H,#H,Y,X))
IHK = 0
ETIQ2
IHK = IHK+1
γ
δ
α


γ
δ
α
LET (HK =# K)
NBVAR STURM
NR,NS
(NR > 1) ∪ (NS > 1)
oui
LET (# K =# K/2)
non
NR = 1
non
oui
NRV > 1
oui
LET (# K =# K/2)
non
SIGNE
NR = N*NR
NS = 1
non
oui
NSW > 1
oui
LET (# K =# K/2)
non
SIGNE
NS = N*NS
HK
IHK > 1
oui
non
KARACT = (NP+NQ+NR+NS)/2
KARACT

En effet cet organigramme permet de préciser :

ce que l'utilisateur aura à modifier c'est-à-dire :

- les données (PE1, PE2, XO, H, YO, K) ...

ce qu'il obtiendra, c'est-à-dire :

- $k = \begin{cases} 0 \\ \text{ou} \\ 1 \end{cases}$
- le domaine effectif de localisation.

D'autre part, il permet de préciser aussi :

- la phase d'initialisation du problème :
  (obtention formelle de φ, Ψ, des polynômes P, Q ...W)
- l'ordre de recherche des points d'intersections, où apparaissent les dichotomies et leurs conséquences $\begin{cases} \cdot \text{ sur le domaine de localisation} \\ \cdot \text{ sur le passage des différentes phases.} \end{cases}$

- c - <u>Listing du programme principal</u>.

(Cf. Appendice).

④ Résultats.

- a - Exemples :

On donnera les résultats de deux exemples, dans lesquels on verra nettement les deux parties (ou étapes) du programme c'est-à-dire :

- 1 - La construction formelle qui comporte :

. l'impression des données PE1 et PE2

. PE le PGCD de PE1 et PE2

. l'expression de F qui sera l'équation dont on localisera les racines. (NB : cela pourra être soit le facteur qui a des racines réelles et complexes conjuguées, soit le facteur qui n'a que des racines complexes quelconques, s'il existe).

. l'impression de PHI et PSI c'est-à-dire les équations $\varphi(x,y) = 0$ et $\Psi(x,y) = 0$.

. les expressions des polynômes :

P,Q,T,U polynômes en X dont les coefficients sont fonctions de YO et K

R,S,V,W polynômes en Y dont les coefficients dépendent de XO et H .

- 2 - Activation numérique :

. impression d'un (ou plusieurs) domaines de départ de la localisation.

. les différentes phases de la recherche de la caractéristique.

. le résultat final, c'est-à-dire l'impression du domaine sur lequel on a fait effectivement la localisation et la valeur de la caractéristique.

Premier exemple :

On choisira une équation algébrique à coefficients complexes et de degré peu élevé pour donner plus aisément les résultats intermédiaires qui permettront de mieux suivre l'algorithme.

Les données sont :

- E(X) = PE1(X) + iPE2(X)
- (XO,H,YO,K) coordonnées des domaines de localisation

soient :

$$PE1 = x^3 - 3x^2 + 2$$
$$PE2 = -3x^3 + 5x - 2$$

	XO	H	YO	K
premier domaine :	1	3/2	1/2	5/2
deuxième domaine :	19/10	3/10	19/10	3/10

Donnons quelques commentaires sur les résultats :

- Pour le premier domaine il y a une dichotomie sur K à l'issue de l'étude de NS , la localisation effective a donc lieu sur le domaine (1, 3/2, 1/2, 5/4), et le résultat est k = 0 , soit CARACTERISTIQUE = 0 sur le listing.
- Pour le deuxième domaine, il n'y a pas de dichotomie et l'impression du résultat est CARACTERISTIQUE = 1 .

EXPRESSIONS DE PE1 ET PE2

$$PE1 = -3X^2 + X^3 + 2$$

$$PE2 = 5X - 3X^2 - 2$$

PGCD DE PE1 ET PE2 :

$$PE = -X + 1$$

EXPRESSION DE F1

$$F1 = 2X - X^2 + 2$$

EXPRESSION DE F2

$$F2 = 3X - 2$$

EXPRESSION DE L EQUATION ALGEBRIQUE F(Z) DONT ON CHERCHE LES RACINES

$$F2 = 2X + \#I\,(3X - 2) - X^2 + 2$$

EXPRESSION DE CETTE FONCTION SOUS LA FORME F(X,Y)

$$F = -3Y + 2X - 2\#I\,XY + 2\#I\,Y + 3\#I\,X + Y^2 - X^2 - 2\#I + 2$$

EXPRESSIONS DE PHI(X,Y) ET PSI(X,Y)

$$PHI = -3Y + 2X + Y^2 - X^2 + 2$$

$$PSI = 2Y + 3X - 2XY - 2$$

EXPRESSIONS DES POLYNOMES P Q R S

$$P = -3YC + 2X + YC^2 - X^2 + 2$$

$$Q = 2X - 3(YC + K) - X^2 + (YC + K)^2 + 2$$

$$R = -3Y + 2XC + Y^2 - XC^2 + 2$$

$$S = -3Y + 2(XC + H) + Y^2 - (XC + H)^2 + 2$$

EXPRESSIONS DES POLYNOMES T U V W

$T = 2\,Y0 + 3\,X - 2\,X\,YC - 2$

$U = 3\,X + 2\,(YC + K) - 2\,(Y0 + K)\,X - 2$

$V = 2\,Y + 3\,XC - 2\,XC\,Y - 2$

$W = 2\,Y + 3\,(XC + H) - 2\,(X0 + H)\,Y - 2$

PREMIER DOMAINE DE LOCALISATION

XC= 1 YO= 1/2

VALEUR DE DEPART DE H= 3/2 VALEUR DE DEPART DE K= 5/2

ETUDE DE P(X)...SUITES DE STURM...NB DE VARIATIONS

$G1(0) = 2\,X - X^2 + 3/4$

$G1(1) = -2\,X + 2$

$G1(2) = -7/4$

NOMBRE DE VARIATIONS SUR Y=YC :NP= 1

ETUDE DE Q(X)...SUITES DE STURM...NB DE VARIATIONS

$G1(0) = 2\,X - X^2 + 2$

$G1(1) = -2\,X + 2$

$G1(2) = -3$

NOMBRE DE VARIATIONS SUR Y=YC+K : NG= 0

TEST SUR NP ET NG

$G1(0) = -1/2\,X + 5\,X^2 - 2\,X^3 - 3/4$

$G1(1) = 10\,X - 6\,X^2 - 1/2$

$G1(2) = -22/9\,X + 8/9$

$G1(3) = -567/242$

NB DE VARIATIONS DE PHI*PSI SUR Y=YO

NPT= 1;

VALEUR DE NP SUR Y=YC APRES DETERMINATION EN POINT D ENTREE OU DE SORTIE NP=

VALEUR DE H CONSIDERE
HK = 3/2

3

ETUDE DE R(X)...SUITES DE STURM...NB DE VARIATIONS

$G1(0) = -3X + X^2 + 3$

$G1(1) = 2X - 3$

$G1(2) = -3/4$

NOMBRE DE VARIATIONS SUR X=>C : NR= 0

ETUDE DE S(X)...SUITES DE STURM...NB DE VARIATIONS

$G1(0) = -3X + X^2 + 3/4$

$G1(1) = 2X - 3$

$G1(2) = 3/2$

NOMBRE DE VARIATIONS SUR X=>C+H : NS= 1

TEST SUR NR ET NS

VALEUR DE NR APRES DETERMINATION EN POINT D ENTREE OU SORTIE NR= 0

$G1(0) = -75/4 X + 25/2 X^2 - 3X^3 + 33/8$

$G1(1) = 25X - 9X^2 - 75/4$

$G1(2) = -83/27 X + 107/18$

$G1(3) = -50625/13778$

NB DE VARIATION DE PHI*PSI SUR X=>C+H
NSW= 2;

ETUDE DE R(X)...SUITES DE STURM...NB DE VARIATIONS

$G1(0) = -3X + X^2 + 3$

$G1(1) = 2X - 3$

$G1(2) = -3/4$

NOMBRE DE VARIATIONS SUR X=XC : NR= 0

4

ETUDE DE S(X)...SUITES DE STURM...NB DE VARIATIONS

$G1(0) = -3X + X^2 + 3/4$

$G1(1) = 2X - 3$

$G1(2) = 3/2$

NOMBRE DE VARIATIONS SUR X=XC+H : NS= 0

TEST SUR NR ET NS

VALEUR DE NR APRES DETERMINATION EN POINT D ENTREE OU SORTIE NR= 0

VALEUR DE NS APRES DETERMINATION EN POINT D ENTREE OU DE SORTIE NS= 0

VALEUR DE K CONSIDEREE
FK = 5/4

REEVALUATION DE NP,NQ ET NR,NS AVEC LA NOUVELLE VALEURDE K

ETUDE DE P(X)...SUITES DE STURM...NB DE VARIATIONS

$G1(0) = 2X - X^2 + 3/4$

$G1(1) = -2X + 2$

$G1(2) = -7/4$

NOMBRE DE VARIATIONS SUR X=XC :NP= 1

ETUDE DE Q(X)...SUITES DE STURM...NB DE VARIATIONS

$G1(0) = 2X - X^2 - 3/16$

$G1(1) = -2X + 2$

$G1(2) = -13/16$

NOMBRE DE VARIATIONS SUR Y=YC+K : NG= 1

TEST SUR NP ET NG

$G1(0) = -1/2\,X + 5X^2 - 2X^3 - 3/4$

$G1(1) = 10X - 6X^2 - 1/2$

$G1(2) = -22/9\,X + 8/9$

$G1(3) = -567/242$

NB DE VARIATIONS DE PHI*PSI SUR Y=Y0
NPT= 1;

VALEUR DE NP SUR Y=YC APRES DETERMINATION EN POINT D ENTREE OU DE SORTIE N

$G1(0) = 99/32\,X - 5/2\,X^2 + 1/2\,X^3 - 9/32$

$G1(1) = -5X + 3/2\,X^2 + 99/32$

$G1(2) = 103/144\,X - 23/16$

$G1(3) = 304317/339488$

NB DE VAR DE PHI*PSI SUR Y=YC+K
NGL= 1;

VALEUR DE NG SUR Y=YC+K APRES DETERMINATION EN POINT D ENTREE OU SORTIE NG

VALEUR DE H CONSIDERE
HK = 3/2

ETUDE DE R(X)...SUITES DE STURM...NB DE VARIATIONS

$G1(0) = -3X + X^2 + 3$

$G1(1) = 2X - 3$

NOMBRE DE VARIATIONS SUR X=XC : NR= 0

6

ETUDE DE S(X)...SUITES DE STURM...NB DE VARIATIONS

G1(0) = - 3 X + X^2 + 3/4

G1(1) = 2 X - 3

G1(2) = 3/2

NOMBRE DE VARIATIONS SUR X=XC+H : NS= 0

TEST SUR NR ET NS

VALEUR DE NR APRES DETERMINATION EN POINT D ENTREE OU SORTIE NR= 0

VALEUR DE NS APRES DETERMINATION EN POINT D ENTREE OU DE SORTIE NS= 0

VALEUR DE K CONSIDEREE
FK = 5/4

CARACTERISTIQUE= 0

DEUXIEME DOMAINE DE LOCALISATION

XO= 19/10
VALEUR DE DEPART DE H= 3/10

YO= 19/
VALEUR DE DEPART DE K= 3/1

ETUDE DE P(X)...SUITES DE STURM...NB DE VARIATIONS

$G1(0) = 2X - X^2 - 9/100$

$G1(1) = -2X + 2$

$G1(2) = -91/100$

NOMBRE DE VARIATIONS SUR Y=YO :NP= 1

ETUDE DE Q(X)...SUITES DE STURM...NB DE VARIATIONS

$G1(0) = 2X - X^2 + 6/25$

$G1(1) = -2X + 2$

$G1(2) = -31/25$

NOMBRE DE VARIATIONS SUR Y=YO+H : NQ= 1

TEST SUR NP ET NQ

$G1(0) = 459/125\ X - 17/5\ X^2 + 4/5\ X^3 - 81/500$

$G1(1) = -34/5\ X + 12/5\ X^2 + 459/125$

$G1(2) = 1717/2250\ X - 393/250$

$G1(3) = 55791099/368511125$

NB DE VARIATIONS DE FFI+PSI SUR Y=YO

NPT= 1;

VALEUR DE NP SUR Y=YO APRES DETERMINATION EN POINT D ENTREE OU DE SORTIE NP

$G1(0) = 558/125\ X - 26/5\ X^2 + 7/5\ X^3 + 72/125$

$G1(1) = -52/5\ X + 21/5\ X^2 + 558/125$

$G1(2) = 10364/7875\ X - 2116/875$

B DE VAR DE PHI*PSI SUR Y=YC+K

CL= 1;

ALEUR DE NC SUR Y=YC+K APRES DETERMINATION EN POINT D ENTREE OU SORTIE NC= 1

ALEUR DE H CONSIDERE
K = 3/10

ODE DE R(X)...SUITES DE STURM...NB DE VARIATIONS

$I(0) = -3X + X^2 + 219/100$

I(1) = 2 X - 3

I(2) = 3/50

OMBRE DE VARIATIONS SUR X=XC : NR= 0

ODE DE S(X)...SUITES DE STURM...NB DE VARIATIONS

$I(0) = -3X + X^2 + 39/25$

I(1) = 2 X - 3

I(2) = 69/100

OMBRE DE VARIATIONS SUR X=XC+H : NS= 0

TEST SUR NR ET NS

ALEUR DE NR APRES DETERMINATION EN POINT D ENTREE OU SORTIE NR= 0

ALEUR DE NS APRES DETERMINATION EN POINT D ENTREE OU DE SORTIE NS= 0

ALEUR DE K CONSIDEREE
K = 3/10

CARACTERISTIQUE= 1

Deuxième exemple :

On prendra une équation algébrique à coefficients complexes et de degré élevé soit 14 .

Puis on s'intéresse à la localisation de ses racines complexes quelconques.

La possibilité de faire une factorisation exacte quand on travaille en rationnels, présente ici un avantage très net, en effet la localisation s'effectuera sur une équation algébrique F de degré 4 .

On ne donnera pour cet exemple, que la première partie c'est-à-dire la construction formelle, et le résultat final obtenu, c'est-à-dire les domaines sur lesquels on a localisé l'existence d'une racine.

Avant de faire une critique de ce programme et d'en tirer les conclusions, vu l'obtention de certains résultats que peut donner CARACT dans le plan complexe, on peut éventuellement envisager un prolongement de son exploitation (par exemple pour la détermination d'une racine, son obtention sous forme flottante avec le nombre de chiffres significatifs désiré...)

C'est ce que nous allons développer au chapitre suivant.

EXPRESSIONS DE PE1 ET PE2

$$PE1 = 1872\,X^{2} + 1764\,X^{3} + 1160\,X^{4} - 1436\,X^{6} - 1327\,X^{7} - 220\,X^{8} - 444\,X^{10} - 438\,X^{11} - 140\,X^{12} + 8\,X^{14} + X^{15} - 800$$

$$PE2 = -2480\,X - 1672\,X^{2} + 1160\,X^{4} + 2100\,X^{5} + 1435\,X^{6} - 220\,X^{8} + 440\,X^{9} + 444\,X^{10} - 140\,X^{12} - 60\,X^{13} - 8\,X^{14} - 800$$

PGCD DE PE1 ET PE2 :

$$PE = -52\,X - 24\,X^{2} - 4\,X^{3} + 30\,X^{4} + 39\,X^{5} + 18\,X^{6} + 3\,X^{7} + 10\,X^{8} + 13\,X^{9} + 6\,X^{10} + X^{11} - 40$$

EXPRESSION DE F1

$$F1 = -26\,X - 25\,X^{2} + 2\,X^{3} + X^{4} + 20$$

EXPRESSION DE F2

$$F2 = 36\,X - 12\,X^{2} - 8\,X^{3} + 20$$

EXPRESSION DE CETTE FONCTION SOUS LA FORME F(X,Y)

$$F = -36\,Y - 26\,X - 50\,\#I\,X\,Y + 24\,X\,Y + 6\,\#I\,X^{2}\,Y + 24\,X^{2}\,Y + 4\,\#I\,X^{3}\,Y - 26\,\#I\,Y + 36\,\#I\,X + 24\,\#I\,X\,Y^{2} - 6\,X\,Y^{2} - 6\,X^{2}\,Y^{2} + 12\,\#I\,Y^{2} - 4\,\#I\,X\,Y^{3} - 2\,\#I\,Y^{3} - 12\,\#I\,X^{2} - 8\,\#I\,X^{3} + 25\,Y^{2} - 8\,Y^{3} + Y^{4} - 25\,X^{2} + 2\,X^{3} + X^{4} + 20\,\#I + 20$$

EXPRESSION DE PHI(X,Y) ET PSI(X,Y)

$$PHI = -36\,Y - 26\,X + 24\,X\,Y + 24\,X^{2}\,Y - 6\,X\,Y^{2} - 6\,X^{2}\,Y^{2} + 25\,Y^{2} - 8\,Y^{3} + Y^{4} - 25\,X^{2} + 2\,X^{3} + X^{4} + 20$$

$$PSI = -26\,Y + 36\,X - 50\,X\,Y + 6\,X^{2}\,Y + 4\,X^{3}\,Y + 24\,X\,Y^{2} - 4\,X\,Y^{3} + 12\,Y^{2} - 2\,Y^{3} - 12\,X^{2} - 8\,X^{3} + 20$$

EXPRESSION DES POLYNOMES P Q R S

$$P = -36\,YO - 26\,X + 24\,X\,YO + 24\,X^2\,YO - 6\,X\,YO^2 - 6\,X^2\,YO^2 + 25\,YO^2 - 8\,YO^3 + YO^4 - 25\,X^2 + 2\,X^3 + X^4 + 20$$

$$Q = -26\,X - 36\,(YO + K) + 24\,(YO + K)\,X - 6\,(YO + K)^2\,X + 24\,(YO + K)\,X^2 - 6\,(YO + K)^2\,X^2 - 25\,X^2 + 2\,X^3 + X^4 + 25\,(YO + K)^2 - 8\,(YO + K)^3 + (YO + K)^4 + 20$$

$$R = -36\,Y - 26\,XO + 24\,XO\,Y + 24\,XO^2\,Y - 6\,XO\,Y^2 - 6\,XO^2\,Y^2 + 25\,Y^2 - 8\,Y^3 + Y^4 - 25\,XO^2 + 2\,XO^3 + XO^4 + 20$$

$$S = -36\,Y - 26\,(H + XO) + 24\,(H + XO)\,Y + 24\,(H + XO)^2\,Y - 6\,(H + XO)\,Y^2 - 6\,(H + XO)^2\,Y^2 + 25\,Y^2 - 8\,Y^3 + Y^4 - 25\,(H + XO)^2 + 2\,(H + XO)^3 + (H + XO)^4 + 20$$

EXPRESSIONS DES POLYNOMES T U V W

$$T = -26\,YO + 36\,X - 50\,X\,YO + 6\,X^2\,YO + 4\,X^3\,YO + 24\,X\,YO^2 - 4\,X\,YO^3 + 12\,YO^2 - 2\,YO^3 - 12\,X^2 - 8\,X^3 + 20$$

$$U = 36\,X - 26\,(YO + K) - 50\,(YO + K)\,X + 24\,(YO + K)^2\,X - 4\,(YO + K)^3\,X + 6\,(YO + K)\,X^2 + 4\,(YO + K)\,X^3 - 12\,X^2 - 8\,X^3 + 12\,(YO + K)^2 - 2\,(YO + K)^3 + 20$$

$$V = -26\,Y + 36\,XO - 50\,XO\,Y + 6\,XO^2\,Y + 4\,XO^3\,Y + 24\,XO\,Y^2 - 4\,XO\,Y^3 + 12\,Y^2 - 2\,Y^3 - 12\,XO^2 - 8\,XO^3 + 20$$

$$W = -26\,Y + 36\,(H + XO) - 50\,(H + XO)\,Y + 6\,(H + XO)^2\,Y + 4\,(H + XO)^3\,Y + 24\,(H + XO)\,Y^2 - 4\,(H + XO)\,Y^3 + 12\,Y^2 - 2\,Y^3 - 12\,(H + XO)^2 - 8\,(H + XO)^3 + 20$$

CARACTERISTIQUE = 1

sur les domaines suivants :

PREMIERE LOCALISATION :

XO = - 5/2 H = 3/4
YO = 19/10 K = 1/5

DEUXIEME LOCALISATION :

XO = - 3/2 H = 3/4
YO = 19/10 K = 1/5

TROISIEME LOCALISATION :

XO = - 1/100 H = 3/100
YO = 199/100 K = 3/100

QUATRIEME LOCALISATION :

XO = 9/10 H = 1/5
YO = 19/10 K = 1/5

CHAPITRE IV

CHAPITRE IV

AUTRES EXPLOITATIONS DE CARACT

- A - EXPLOITATION DE CARACT POUR LA DETERMINATION DES RACINES.

I Remarques préliminaires.

II Exemple : Newton complexe.

1 Conditions d'application.

2 Inconvénients.

3 Exemple.

Conclusion.

- B - OBTENTION D'UNE RACINE AVEC LE NOMBRE DE CHIFFRES SIGNIFICATIFS VOULUS.

- A - EXPLOITATION DE CARACT POUR LA DETERMINATION DES RACINES.

I - REMARQUES PRELIMINAIRES.

Il n'est pas question d'envisager ici l'étude de la résolution des équations algébriques.

On possède à l'heure actuelle toute une variété de méthodes de résolution, dont on ne connait pas toujours le fonctionnement théorique.

En particulier pour les méthodes itératives, on ne peut pas prévoir pour des valeurs initiales quelconques, si la méthode diverge ou converge.

Sur le plan expérimental, ce problème a fait l'objet de différentes études (voir en particulier à la référence [XVI]).

Parmi les méthodes itératives, la méthode de Newton est l'une des plus utilisées, parce qu'elle est relativement simple et d'une convergence rapide dans la plupart des cas. (voir [XI] p. 51, 52, 237 → 247, 260 → 266).

Problème :

Il faut toutefois que la valeur de départ soit assez proche de la racine, pour que la dérivée F' ne change pas de signe entre la valeur de départ et la racine.

Pour simplifier, prenons le cas d'une racine réelle et explicitons graphiquement les principales causes de divergence.

① Si F' s'annule sans que F s'annule aussi, tout près de ce point les tangentes coupent l'axe des x à des distances considérables, et l'on risque d'osciller indéfiniment, c'est le cas de la figure 1 .

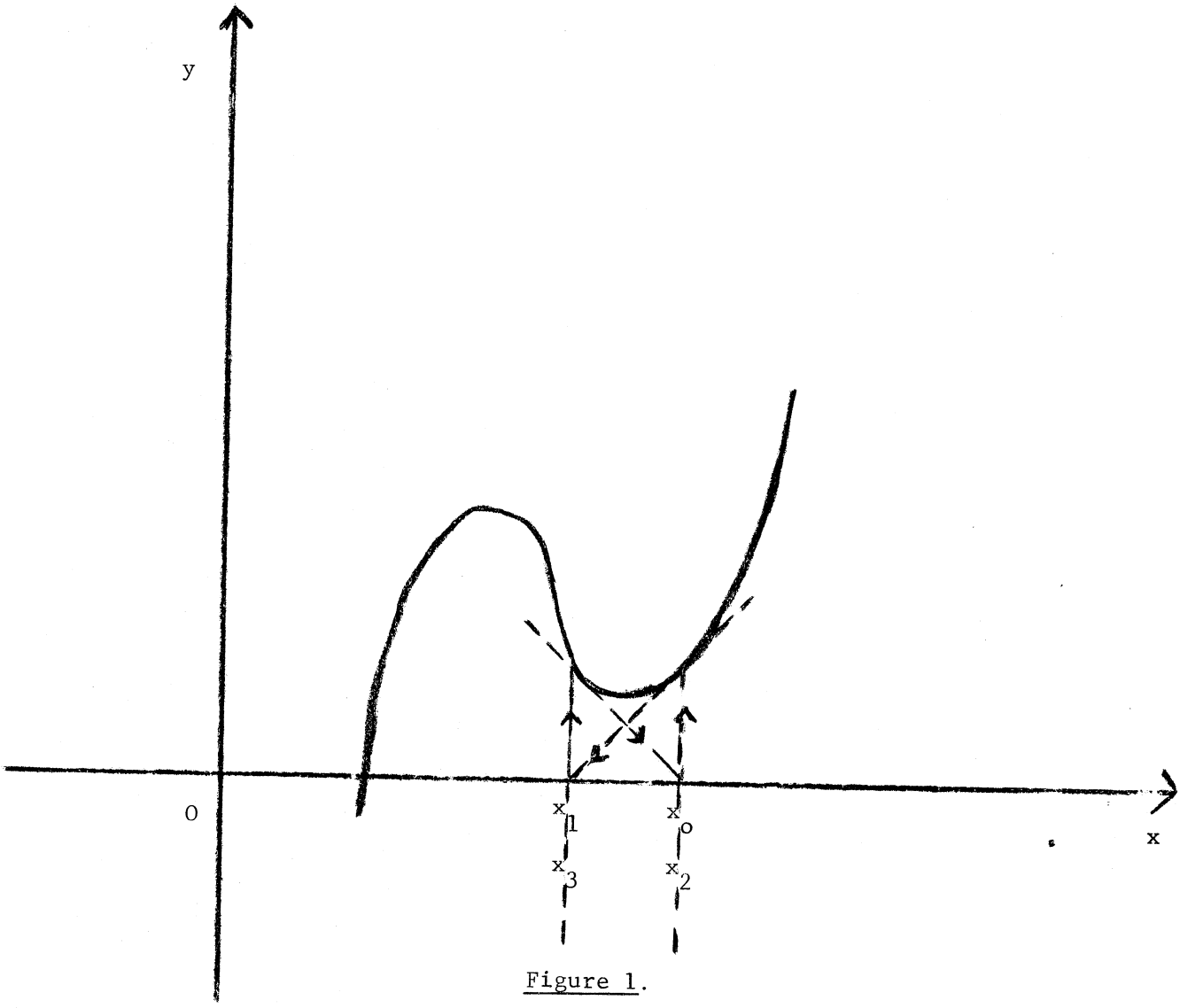


Figure 1.

② Si la courbe est symétrique par rapport au point X , on risque de tourner en rond autour de la racine, c'est le cas de la figure 2 .

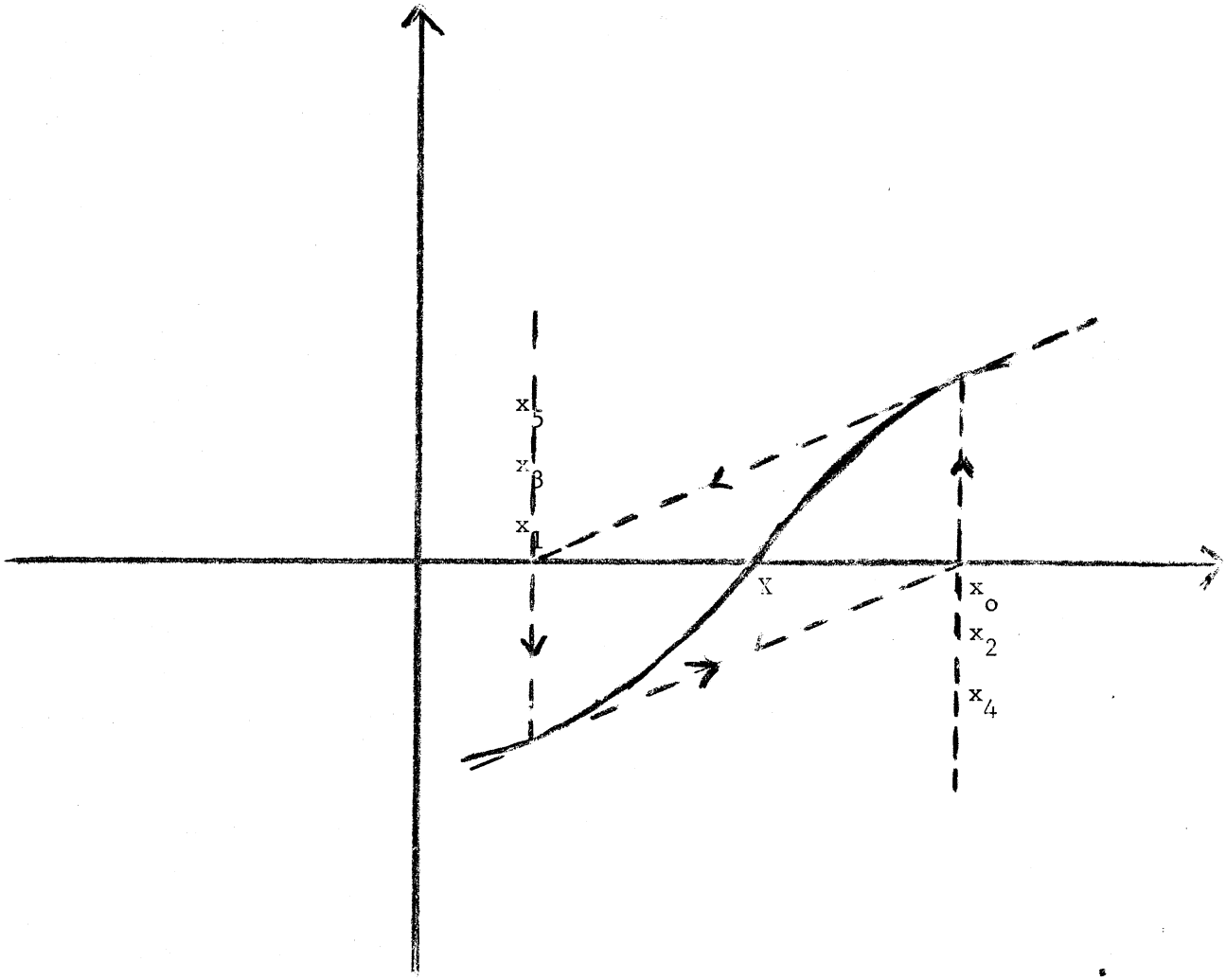


Figure 2.

II - EXEMPLE : NEWTON COMPLEXE.

① Conditions d'application.

Après une activation satisfaisante de CARACT , on peut obtenir une localisation très fine dans un domaine rectangulaire du plan complexe.

Dans ce domaine, on est donc sûr qu'il y a une racine, alors en appliquant la méthode de Newton complexe avec la formule :

$$z_{n+1} = z_n - \frac{F(z_n)}{F'(z_n)}$$

. au point de départ ZD = XD + i YD , centre du rectangle, c'est-à-dire XD = XO + H/2, YD = YO + K/2

. et avec comme test d'arrêt

$$\frac{|z_{n+1} - z_n|}{|z_n|} < \text{EPS}$$

On est pratiquement sûr de la convergence, et de l'obtention de la racine en un nombre limité d'itérations.

② Inconvénients.

La programmation de cette méthode en FORMAC et son activation numérique en rationnels qui permet une très grande précision et l'obtention de la racine en quelques itérations (après une localisation fine), peut exiger un temps machine considérable.

$$FZ = -31250\,Z - 1250\,Z^2 - 1250\,Z^3 + 50\,Z^5 + 2\,Z^6 + 2\,Z^7 + Z^8 - 390625$$

FORMULE ITERATIVE DE NEWTON.

$$ZK = Z - \left(-31250\,Z - 1250\,Z^2 - 1250\,Z^3 + 50\,Z^5 + 2\,Z^6 + 2\,Z^7 + Z^8 - 390625 \right) / \left(-2500\,Z - 3750\,Z^2 + 250\,Z^4 + 12\,Z^5 + 14\,Z^6 + 8\,Z^7 - 31250 \right)$$

VALEUR DU POINT DE DEPART: XD=XO+H/2 YD=Y/+K/2

XO= -21/5 H= 3/5

XC = - 39/10

YO= 14/5 K= 3/5

YC = 31/10

VALEUR DU POINT ITERE

XK = - 1272676448204640001705 3/3190858751845509007730

YK = 1909363633369561365837 9/6381717503691018015460

XK = - 4301273433007586040780910440334117347495547213237898577726027412074160604805763919257506506028371727024 6
3533027878090516271238396490355175475142971059254903826167131256679543148089780157459743037107528221426131077203435
9098052004496426999064092910761536108079830569654427290501557698422700739767299914368066996287229721833934708655160 75
1351701650365734503913846199429390471080264169530627 20

YK = 3225898933792777529683591942497797504430381128974391955933989172882922126892444921588476541928298356302027133007 31
1252244486813951849756672167630549530151565035867189787862528925975431958776183371075282214261310772034359098052 00
4496426999064092910761536108079830569654427290501557698422700739767299914368066996287229721833934708655160751351701 65
0365734503913846199429330471080264169530627 20

En effet, partant d'un couple rationnel (XD,YD), le nombre d'opérations effectuées en appliquant NEWTON est considérable, surtout si le degré de F est élevé.

C'est pourquoi, souvent dès la première ou deuxième itération le nombre de chiffres que l'on obtient au numérateur comme au dénominateur pour le couple itéré (XK,YK) peut être très important et difficilement prévisible.

Il dépend évidemment du degré du polynôme, et de la valeur rationnelle du point de départ.

A titre d'exemple, on peut voir ce qui se passe pour un polynôme de degré 8 , qui a fait l'objet d'une étude expérimentale quant aux conditions de convergence (Cf. [XVI]), et auquel on a appliqué CARACT.

Commentaire :

Dès la deuxième itération on obtient environ 200 chiffres au numérateur et dénominateur avec au départ des rationnels à deux chiffres.

Alors il est évident que les itérations suivantes nécessitent un temps de calcul de plus en plus long.

Comment remédier à cet inconvénient ?

Première solution :

- On fait abstraction du temps machine à l'éxécution, et on conduit tous les calculs en rationnels (la seule limitation sera alors le nombre maximum de chiffres c'est-à-dire 2295 au numérateur comme au dénominateur).

Deuxième solution :

- On choisit de ne pas garder la totalité des chiffres pour passer d'une itération à la suivante.
  Mais cela nécessiterait :

- soit de trouver une loi qui approche un rationnel donné, par un autre, avec un minimum de chiffres.
- soit de diviser arbitrairement le nombre de chiffres du numérateur et dénominateur par 2, 3 ... ou $n \in N^*$.

En définitive, cette deuxième solution, qu'elle soit arbitraire ou déduite d'une loi à définir, deviendrait certainement aussi couteuse que la première.

Troisième solution :

Enfin, pour gagner du temps sans perdre cependant en précision, on travaillera en deux phases :

première phase :

On applique NEWTONC en conduisant les calculs en flottants jusqu'à la précision EPS donnée. L'activation numérique sera alors beaucoup plus rapide et le gain de temps et de place est alors appréciable.

Deuxième phase :

On applique de nouveau NEWTONC au point de départ (XD,YD) obtenu en transformant en rationnel, le point itéré final flottant atteint à l'issue de la première phase.

Alors, en une ou deux itérations on est sûr de dépasser la précision demandée.

On peut aussi envisager de poursuivre les calculs en rationnels dans un contexte où ils sont alors bien plus efficaces et plus rentables.

Pour cette troisième solution il suffira de rajouter le sous-programme NBRATIO qui permet de passer d'un nombre flottant au nombre rationnel correspondant ; et on l'appellera avant de passer à la deuxième phase.

EXPRESSION DE LA FONCTION

$$FZ = (36 \#I - 26) Z - (12 \#I + 25) Z^2 + (- 8 \#I + 2) Z^3 + Z^4 + 20 \#I + 20$$

FORMULE ITERATIVE DE NEWTON

$$ZK = Z - ((36 \#I - 26) Z - (12 \#I + 25) Z^2 + (- 8 \#I + 2) Z^3 + Z^4 + 20 \#I + 20) / (- 50 Z - 24 \#I Z - 24 \#I Z^2 + 6 Z^3 + 4 Z^3 + 36 \#I - 26)$$

VALEUR DU POINT DE DEPART: XD=XO+H/2 YD=Y/+K/2

XO= -1/100 H= 3/100

XD = 1/200

YO= 199/100 K= 3/100

YD = 401/200

VALEUR DU POINT ITERE

XK = 1000130803/1616079236240800

YK = 3232197864592503/1616079236240800

XK = - 7395744359792294352515184154279135284163872049513/739568633341333954936711389277288065213893

YK = 12326173471154941672031191335754050786719671899431/6163071944511116291139261577310733876782444134080

XK = - 1272228554268883443743751668883062974312384727633315175986/1362091478178329380932688210146376666007342216

212911676562859682705286343

YK = 1213311069455248631432211125479139678452111054897564440057676122357942/606655534727624310933007219956552977632105

531111002587762166610122305

③ Exemple :

A titre d'exemple, on donnera les résultats obtenus en appliquant NEWTONC en prenant comme équation, celle auquelle on a appliqué CARACT et donné les résultats dans l'exemple 2 du chapitre III.

On choisira la troisième localisation c'est-à-dire sur le domaine :

XO = -1/100 YO = 199/100

H = 3/100 K = 3/100

et pour valeur de EPS : 10^{-15} .

On appelle (XK,YK) les valeurs itérées.
Au bout de trois itérations on a atteint la précision demandée pour le test d'arrêt.

CONCLUSION :

Il est évident que dans tous les cas dits "bien conditionnés" où la méthode de Newton du premier ou deuxième ordre en numérique est d'une convergence rapide et où les résultats sont en général suffisants, ce programme FORMAC : NEWTONC, ne présente aucun intérêt.

Par contre, il peut en présenter dans la mesure où on l'applique après CARACT :

- Soit dans un cas mal conditionné, car alors le point de départ est au centre d'un domaine dont on connait les coordonnées ; domaine qui peut être aussi petit que l'on veut, et où l'on est sûr qu'il y a une racine dont on connait la distance maximum au point de départ.
- Soit quand on veut obtenir une racine avec une grande précision et un certain nombre de chiffres significatifs.

- B - OBTENTION D'UNE RACINE AVEC LE NOMBRE DE CHIFFRES SIGNIFICATIFS VOULUS.

Appliquant Newton complexe avec le test d'arrêt suivant :

$$\frac{|ZK-ZD|}{|ZD|} < EPS$$

EPS pouvant être aussi petit que l'on veut rationnel ou flottant selon l'activation numérique.

Quelle que soit la forme de NEWTONC choisie, on obtiendra la racine :

ZK=XK+iYK avec XK et YK sous forme rationnelle.

Si on le désire on pourra alors obtenir XK et YK sous forme flottante avec un nombre N de chiffres significatifs (N pouvant être quelconque et en particulier très supérieur à 16 le nombre maximum obtenu en double précision dans un langage numérique sur IBM 360).

Le programme NBFLOAT permet de passer d'un nombre rationnel écrit sous la forme :

$$\underbrace{\pm S \,.\, \underbrace{x\,x\,\ldots\ldots\,x}_{N}\; E \pm \underbrace{x\,x\,x\,x}_{4}}_{M}$$

Ce programme permet de choisir :

M : largeur du champ d'écriture

N : nombre de chiffres significatifs.

Exemple :

Pour illustrer ceci, prenons les valeurs de XK et YK obtenus par l'application de NEWTONC (exemple précédent) avec EPS = 10^{-15} .
Puis donnons à M et N différentes valeurs.

Remarques :

Ces deux programmes, et en particulier NEWTONC, bien que totalement compatibles avec CARACT n'ont pas été introduits en procédure dans ce programme principal.

En effet, il n'y a aucune raison de les appeler systématiquement à chaque localisation, cette localisation pouvant être suffisante pour certaines racines, alors que pour d'autres on veut leur obtention avec telle précision et leur écriture sous forme flottante avec N chiffres significatifs.

```
LARGEUR DU CHAMP D ECRITURE  :  M      NOMBRE DE CHIFFRES SIGNIFICATIFS  :  N

M=     25                  N=     15;


XX =  - 1272228554268883443743751668803062974312384027633215170986/1362091478178329380932688210146326666007342216
-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------
2129116765628559682705288343
---------------------------


ECRITURE DU NOMBRE EN FLOTANT

-0.6832255929303198-0015


YX = 1213311069455248631482211125479135678452111054897564440057676122357942/6166555347276243179330072199565529776321 05
-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------
5311110025877621666101223 05
---------------------------


ECRITURE DU NOMBRE EN FLOTANT

+0.2000000000000000E+0001
```

LARGEUR DU CHAMP D ECRITURE : M NOMBRE DE CHIFFRES SIGNIFICATIFS : N

M= 30 N= 20;

XK = - 127222855426888344374[illegible]1668803062974312384127633215171986/1362091478178329380932688210146326666007342216
21291167656285968270528634[illegible]

ECRITURE DU NOMBRE EN FLOTANT

-0.6832255929303191014 9E-0015

YK = 12133110694552486314922111254[illegible]913967845211105489756444005767612235794276066555347276243109330072199565529776321 05
531111002587762166610122305

ECRITURE DU NOMBRE EN FLOTANT

+0.2000000000000000015 8E+0001

LARGEUR DU CHAMP D ECRITURE : M NOMBRE DE CHIFFRES SIGNIFICATIFS : N

M= 80 N= 50;

XX = - 1272228554268883443743751668803862974312384027633215170986713620914731783293809326882101463266660073422 16

21291167656285968270528634 3

ECRITURE DU NOMBRE EN FLOTANT

-0.68322559293031910149750388623738384032450580422756E-0015

YX = 1213311069455248631482211125479135678452111054857564440057676122357942/60665553472762431093300721995655297763210 5

531111002587762166610122305

ECRITURE DU NOMBRE EN FLOTANT

+0.20000000000000000015851164516093149270900555933073 3E+0001

CHAPITRE V

CHAPITRE V

CRITIQUES ET PERSPECTIVES

- A - CRITIQUES

Quand et comment peut-on utiliser CARACT ?

- B - PERSPECTIVES

I - Intérêt d'un tel travail dans un environnement conversationnel.

II - Intérêt d'une visualisation graphique.

- A - CRITIQUES :

Quand et comment peut-on utiliser CARACT ?

Après la présentation d'une "exploitation pratique" d'une méthode, il est habituel de faire le bilan de son efficacité, sa rentabilité, ses performances (temps,encombrement,machine)...

Mais nous sommes ici dans un cas particulier ou le bilan quantitatif n'a guère de signification :

- d'une part il ne peut être donné que pour tel ou tel exemple, et il dépend essentiellement :
  - . du polynôme de son degré, de ses coefficients, sur lesquels il n'y a pas de limites dans la mesure où l'on dispose d'un temps d'exécution et d'une mémoire centrale suffisants ; par contre ce sont des facteurs de limitation dans des langages numériques car leur augmentataion fait croître rapidement la propagation et le cumul des erreurs d'arrondi.
  - . du domaine de départ choisi pour la localisation.

- d'autre part faire une comparaison sur un certain nombre d'exemples avec des méthodes numériques spécifiques à ces cas ne signifie rien ; car il s'agit d'une méthode générale, et cela n'a un sens que si on la compare à une autre méthode générale du même genre.

Le bilan serait plutôt d'ordre "qualitatif" . Plus exactement il s'agit de voir "Quand et comment utiliser CARACT ? ".

Son caractère général et formel ne met évidemment aucune restriction à son emploi.

- Mais il serait fort peu judicieux et rentable de l'utiliser quelles que soient les conditions.

Ainsi, bien que ce soit possible, il serait maladroit d'utiliser CARACT comme méthode systèmatique de localisation et séparation des racines d'une équation algébrique, quelle que soit l'équation, alors qu'il existe de nombreuses méthodes numériques beaucoup plus rapides et moins coûteuses qui peuvent être satisfaisantes.

- Par contre CARACT peut présenter un certain intérêt là où les méthodes numériques sont difficilement applicables, par exemple, pour le cas des racines comples quelconques; ou bien dans le cas où les racines sont très concentrées.

- B - PERSPECTIVES.

I - INTERET D'UN TEL TRAVAIL DANS UN ENVIRONNEMENT CONVERSATIONNEL.

Cette méthode trouverait évidemment une utilisation plus intéressante et plus efficace dans un système conversationnel.

En effet, dès la première localisation grossière, la possibilité de faire des réactivations immédiates avec de meilleures valeurs de (XO, H, YO, K) permettrait d'obtenir rapidement la localisation d'une ou plusieurs racines avec la précision voulue.

II - INTERET D'UNE VISUALISATION GRAPHIQUE.

D'après l'exposé de cette méthode de localisation il est évident que si l'on pouvait utiliser un terminal graphique pour visualiser les courbes φ et Ψ dans le plan complexe, on connaitrait immédiatement avec une certaine précision leurs différents points d'intersection, alors :

- soit on pourra se contenter de cette localisation
- soit on pourra activer le programme CARACT dans des domaines dont les coordonnées de départ seront données avec une certaine précision et où il y aura sûrement une racine.

CONCLUSION.

Cette tentative de généralisation d'un problème algébrique fondamental étudié depuis "fort longtemps", qui sur le plan théorique a atteint une certaine perfection et dont les nombreuses exploitations numériques actuelles sont souvent satisfaisantes et très performantes, peut paraître un peu audacieuse.

Mais, outre la satisfaction de l'obtention d'une "méthode générale", l'automatisme de certains processus de calcul algébrique permet à la fois un gain de temps et évite un travail très fastidieux.

Ceci a été possible grâce à l'existence du calcul formel en machine.

Que le programme exposé soit considéré comme un essai !

Il peut certainement être amélioré tant dans son algorithme que par l'optimisation de certaines interprétations, par d'éventuels utilisateurs.

Mais cette amélioration est peut-être plus liée encore aux progrès et développements que connaitront les langages formels, par leur simplicité de plus en plus grande au niveau de l'utilisation, et aussi par l'expansion de leurs possibilités.

APPENDICE

```
CARACT: PROCEDURE OPTIONS(MAIN) ;
   FORMAC_OPTIONS ;
   ON CONDITION(DENERR) GOTO FIN ;
   ON ENDFILE(SYSIN) GOTO FIN ;
   DCL (PE1,PE2) CHAR(4700)VARYING ,
      (N1,N2,M,N,NP,NQ,NR,NS,NPT,NQL,NRV,NSW,IHK,KARACT)
        FIXED BINARY(31),
      (X0,H,Y0,K) CHAR(80)VARYING ,
      VAR(*,*) FIXED BINARY(1,0) CONTROLLED ,
       STURM ENTRY(FIXED BINARY(31)) ;
   LET(FNC(ABS)=-$(1)*STEP($(1),$(1),0)+$(1)*STEP(),0,$(1))) ;

 PGCD:PROCEDURE ;
   /* PGCD DE GD(X) ET PD(X) */
   DCL K FIXED BINARY(31,0) ;
  E2: LET(B=HIGHPOW(PD,X) ;
          B0=COEFF(PD,X**B)) ;
      LET(R=0) ;
      LET(A=HIGHPOW(GD,X)) ;
  E1: LET(A0=COEFF(GD,X**A)) ;
      LET(Q=A0/B0*X**(A-B)) ;
      LET(R=R+Q) ;
      LET(PGCD=GD) ;
      LET(GD=GD-EXPAND(Q*PD)) ;
      LET(A=HIGHPOW(GD,X)) ;
   IF INTEGER(A)>=INTEGER(B) THEN GOTO E1 ;
   LET(Q=GD;GD=PD;PGCD=GD;PD=Q) ;
   K=LOP(PD) ;
   IF K=36 THEN GOTO FINI ;
   IF K=32|K=33|K=35|K=37|K=38|K=40 THEN GOTO FIN1 ;
   GOTO E2 ;
  FINI:
   /* LA VALEUR DU QUOTIENT PD/PGCD EST DANS R */
   LET(C1=HIGHPOW(PGCD,X)) ;
   LET(C=COEFF(PGCD,X**C1)) ;
   /* VALEUR DU PGCD */
   LET(PGCD=EXPAND(PGCD/ABS(C))) ;
   GOTO FIN ;
 FIN1:
   /* CAS OU IL N Y A PAS DE PGCD : ALORS PGCD=1 */
   LET(PGCD=1) ;
  FIN:
   ATOMIZE(A ; A0 ; B ; B0 ; C ; C1 ; Q) ;
END PGCD ;

STURM: PROCEDURE(A) ;
   DCL (A,I) FIXED BINARY(31) ;
   LET (PD=DERIV(GD,X) ; G1(1)=PD ;
        D1=HIGHPOW(GD,X) ; D2=D1-1) ;
   PRINT_OUT(G1(1)) ;
   I=1 ; FIXEDA(I=I) ;
   IF INTEGER(D2)=0 THEN
   DO ;
   A=1 ;
     RETURN ;
   END ;
 DIV1:
   LET(C2=COEFF(PD,X**D2)) ;
 DIV0:
   LET(C1=COEFF(GD,X**D1) ;
      GD=GD-EXPAND(PD*X**(D1-D2)*C1/C2) ;
       D3=HIGHPOW(GD,X)) ;
```

```
          IF INTEGER(D3) < INTEGER(D2) THEN
          DO ;
          I=I+1 ; FIXED(I=I) ;
            PRINT_OUT(G1(I)=EXPAND(-GD)) ;
            LET(GD=G1(I-1)) ; PD=G1(I) ;
                D1=HIGHPOW(GD,X) ; D2=HIGHPOW(PD,X)) ;
            IF INTEGER(D2)=0 THEN
            DO ;
          A=1 ;
              A=INTEGER(1) ;
              RETURN ;
            END ;
            GOTO DIV1 ;
          END ;
          LET (D1=D3) ;
          GOTO DIV0 ;
          END STURM ;

      NEVAR: PROCEDURE ;
          /* CALCUL DU NOMBRE DE VARIATIONS POUR UN POLYNOME : GD(X)
             SUR (X0,X0+H) EN UTILISANT LES SUITES DE STURM */
          DCL (K,L,J) FIXED BINARY(31) ;
          PRINT_OUT(G1(0)=GD) ;
          LET(DEG=HIGHPOW(GD,X)) ;
          K=INTEGER(DEG)+1 ;
          ALLOCATE VAR(K,2) ;
          IF K>1 THEN CALL STURM(M) ;
            ELSE DO ;
                    N1=0 ;
                    GOTO NBVAR ;
                  END ;
          PUT SKIP(3);
          /*REMPLISSAGE DU TABLEAU VAR : 0 SI L EVALUATION EST NEGATIV
                                       1 SINON */
          DO J=0 TO M ;
          FIXED(J=J) ;
             PRINT_OUT(A=EVAL(G1(J),X,X0) ;
                       B=EVAL(G1(J),X,X0+H)) ;
             K=LOG(A) ;
             L=J+1 ;
             IF K=32|K=33|K=34|K=35 THEN VAR(L,1)=0B ;
               ELSE VAR(L,1)=1B ;
          FIXED(L=L ; VAR(L,1)=VAR(L,1)) ;
             PRINT_OUT (VAR(L,1)) ;
             K=LOG(B) ;
             IF K=32|K=33|K=34|K=35 THEN VAR(L,2)=0B ;
               ELSE VAR(L,2)=1B ;
          FIXED(VAR(L,2)=VAR(L,2)) ;
             PRINT_OUT (VAR(L,2)) ;
          END ;
          /* CALCUL DU NOMBRE DE VARIATIONS */
          N1,N2=0 ;
          DO J=1 TO M ;
             IF VAR(J,1)-=VAR(J+1,1) THEN N1=N1+1 ;
             IF VAR(J,2)-=VAR(J+1,2) THEN N2=N2+1 ;
          END ;
          N1=ABS(N2-N1) ;
        NBVAR:
          ATOMIZE(D1 ; D2 ; D3 ; C1 ; C2 ; DEG ; A ; B) ;
          END NBVAR ;

      SIGNE: PROCEDURE ;
          /* N=SIGNE DE PHI(X,Y)*PSI(X,Y) AU POINT (X0,Y0) */
          DCL K FIXED BINARY(31,0) ;
```

```
            PSI1=EVAL(PSI,X,XC,Y,YC)) ;
        PRINT_OUT(PHI1 ; PSI1 ) ;
        LET(PROD=EXPAND(PHI1*PSI1)) ;
        PRINT_OUT(PROD) ;
        N=SIGN(ARITH(PROD)) ;
        ATOMIZE(PHI1 ; PSI1 ; PROD) ;
        END SIGNE ;

        GET LIST(PE1,PE2) ; LET(PE1='PE1" ; PE2="PE2") ;
        PUT FILE(SYSPRINT) LIST
           ('EXPRESSIONS DE  PE1  ET  PE2')SKIP(3) ;
        PUT SKIP(2) ;
        PRINT_OUT(PE1 ; PE2) ;
        LET(GD=PE1 ; FD=PE2) ;
        PUT FILE(SYSPRINT) LIST
           ('PGCD DE PE1 ET PE2 :')SKIP(2) ;
        CALL PGCD ;
        LET(PE=PGCD);
        PUT SKIP(2) ;
        PRINT_OUT(PE) ;

        KK=LOP(PE) ;
        IF KK=38|KK=40 THEN DO ;
                            LET(F1=PE1 ; F2=PE2) ;
                            PUT FILE(SYSPRINT) LIST
                            ('EXPRESSION DE F1')SKIP(4) ;
                            PRINT_OUT(F1) ;
                            PUT FILE(SYSPRINT) LIST
                            ('EXPRESSION DE PE2') ;
                            PRINT_OUT(F2) ; PUT SKIP(4) ;
                            GOTO ETIQ ;
                            END ;
                              ELSE DO ;
        LET(GD=PE1 ; FD=PE) ;
        PUT FILE(SYSPRINT) LIST ('EXPRESSION DE F1')SKIP(4) ;
        CALL PGCD ;
        LET (F1=R) ;
        PRINT_OUT(F1) ;
        LET(GD=PE2 ; FD=PE) ;
        PUT FILE(SYSPRINT) LIST ('EXPRESSION DE F2') ;
        CALL PGCD ;
        LET (F2=R) ;
        PRINT_OUT(F2) ; PUT SKIP(4) ;
                                END ;
    ETIQ:
        LET (FZ=F1+#I*F2) ;
        PUT FILE(SYSPRINT) EDIT('EXPRESSION DE L EQUATION ALGEBRIQUE F(Z
            ' DONT ON CHERCHE LES RACINES')(SKIP(4),A,A) ;
        PRINT_OUT(FZ) ;
        LET (Z=X+#I*Y ; F=REPLACE(FZ,X,Z)) ;
        LET (F=EXPAND(F)) ;
        PUT FILE(SYSPRINT) EDIT('EXPRESSION DE CETTE FONCTION SOUS LA ',
                                'FORME F(X,Y)')(SKIP,A,A) ;
        PRINT_OUT(F) ;
        PUT FILE(SYSPRINT) LIST
           ('EXPRESSIONS DE PHI(X,Y) ET PSI(X,Y)')SKIP(2) ;
        LET(PSI=COEFF(F,#I) ; PHI=EXPAND(F-PSI*#I)) ;
        PRINT_OUT(PHI ; PSI) ;
        PUT FILE(SYSPRINT) LIST
           ('EXPRESSIONS DES POLYNOMES  P  Q  R  S')SKIP(4) ;
        LET(P=REPLACE(PHI,Y,YC)) ; PRINT_OUT(P) ;
        LET(Q=REPLACE(PHI,Y,YO+K)) ; PRINT_OUT(Q) ;
        LET(R=REPLACE(PHI,X,XC)) ; PRINT_OUT(R) ;
        LET(S=REPLACE(PHI,X,XO+H)) ; PRINT_OUT(S) ;
```

```
193            ('EXPRESSIONS DES POLYNOMES  T  U  V  W')SKIP(4) ;
194         LET(T=REPLACE(PSI,Y,YC)) ; PRINT_OUT(T) ;
195         LET(U=REPLACE(PSI,Y,YO+K)) ; PRINT_OUT(U) ;
196         LET(V=REPLACE(PSI,X,XO)) ; PRINT_OUT(V) ;
197         LET(W=REPLACE(PSI,X,XO+H)) ; PRINT_OUT(W) ;
198
199      LECT:
200         GET LIST(XC,H,YC,K) ;
201         PUT FILE(SYSPRINT) LIST('XC=',XO,'YO=',YO)SKIP(4) ;
202         PUT FILE(SYSPRINT) LIST('VALEUR DE DEPART DE H=',H,
203                                 'VALEUR DE DEPART DE K=',K)SKIP ;
204         LET(#XO="XO" ; #H="H" ; #YC="YC" ; #K="K") ;
205         LET(CD1=REPLACE(P,YC,#YC)) ;
206
207      FC:
208         LET(CD2=REPLACE(G,YC,#YC,K,#K)) ;
209
210       ETIQ1:
211         LET(HK=#H) ;
212         LET(CD=CD1);
213         PUT FILE(SYSPRINT) LIST
214            ('ETUDE DE F(X)...SUITES DE STURM...NB DE VARIATIONS')SKIP
215         CALL NEWAR ;
216         NP=N1 ;
217         PUT FILE(SYSPRINT) EDIT
218            ('NOMBRE DE VARIATIONS SUR Y=YC :NP=',NP)(SKIP(2),A,F(5,0))
219         LET(CD=CD2) ;
220         PUT FILE(SYSPRINT) LIST
221            ('ETUDE DE G(X)...SUITES DE STURM...NB DE VARIATIONS')SKIP(
222         CALL NEWAR ;
223         NG=N1 ;
224         PUT FILE(SYSPRINT) EDIT
225            ('NOMBRE DE VARIATIONS SUR Y=YC+K : NG=',NG)
226            (SKIP(2),A,F(5,0)) ;
227         /* TEST DE DETERMINATION DU CARACTERE DE NP ET NG */
228         PUT FILE(SYSPRINT) EDIT
229            ('TEST SUR NP ET NG')(SKIP(4),X(10),A) ;
230         IF (NP>1 | NG>1) THEN
231         DO ;
232            LET(#H=#H/2) ; GOTO ETIQ1 ;
233         END ;
234           ELSE
235           DO ;
236              IF NP=1 THEN
237              DO ;
238                /*CALCUL DU NOMBRE DE VARIATIONS DE PHI(X,Y)*PSI(X,Y)
239                  SUR Y=YC  SOIT : NPT */
240                LET(CDP=REPLACE(P,YC,#YC) ;
241                    CDT=REPLACE(T,YC,#YC)) ;
242                LET(CD=EXPAND(CDP*CDT)) ;
243                ATOMIZE((CDP ; CDT) ;
244                CALL NEWAR ;
245                NPT=N1 ;
246                PUT FILE(SYSPRINT) LIST
247                    ('NB DE VARIATIONS DE PHI*PSI SUR Y=YJ')SKIP(2) ;
248                PUT SKIP ; PUT DATA(NPT) ; PUT SKIP(2) ;
249                /*TEST SUR NPT : SI NPT>1 DICHOTOMIE SUR H
250                                 SINON SIGNE DE PHI*PSI EN (XO,YC)*/
251                IF NPT>1 THEN
252                DO ;
253                  LET(#H=#H/2) ; GOTO ETIQ1 ;
254                END ;
255                  ELSE DO ;
256                    LET(XC1=XC ; YC1=YC) ;
257                    LET(XC=#XC ; YC=#YC) ;
```

```
                    CALL SIGNE ;
                    NP=N*NP ;
                    LET(X0=X01 ; Y0=Y01) ;
                    ATOMIZE(X01 ; Y01) ;
                  END ;
            END ;
            PUT FILE(SYSPRINT) EDIT
                ('VALEUR DE NP SUR Y=Y0 APRES DETERMINATION EN POINT ',
                 'D ENTREE DU DE SORTIE  NP=',NP)(SKIP(3),A,A,F(5,0)) ;
            IF NG=1 THEN
            DO ;
              /*CALCUL DU NOMBRE DE VARIATIONS DE PHI(X,Y)*PSI(X,Y)
                SUR Y=Y0+K SOIT : NGU */
              LET(GDG=REPLACE(G,Y0,#Y0,K,#K) ;
                  GDU=REPLACE(U,Y0,#Y0,K,#K)) ;
              LET(GD=EXPAND(GDG*GDU)) ;
              ATOMIZE(GD ; GDU) ;
              CALL NEVAR ;
              NGU=N1 ;
              PUT FILE(SYSPRINT) LIST
                  ('NB DE VAR DE PHI*PSI SUR Y=Y0+K')SKIP(2) ;
              PUT SKIP ; PUT DATA(NGU) ; PUT SKIP(2) ;
              /*TEST SUR NGU : SI NGU>1 DICHOTOMIE SUR H
                                SINON SIGNE DE PHI*PSI EN (X0+H,Y0+K)*/
              IF NGU>1 THEN
              DO ;
                LET(DH=#H/2) ; GOTO ETIG1 ;
              END ;
                ELSE DO ;
                LET(X01=X0 ; Y01=Y0) ;
                LET(X0=DX0+#H , Y0=DY0+#K) ;
                CALL SIGNE ;
                NG=NG*NP ;
                LET(X0=X01 ; Y0=Y01) ;
                ATOMIZE(X01 ; Y01) ;
                END ;
            END ;
            PUT FILE(SYSPRINT) EDIT
                ('VALEUR DE NG SUR Y=Y0+K APRES DETERMINATION EN POINT '
                 'D ENTREE DU SORTIE  NG=',NG)(SKIP(2),A,A,F(5,0)) ;
        END ;
        PUT FILE(SYSPRINT) LIST
            ('VALEUR DE H CONSIDERE')SKIP(2) ;
        PRINT_OUT(HK) ;
        LET(GD3=REPLACE(R,X0,#X0,Y,X)) ;
    RS:
        LET(GD4=REPLACE(S,X0,#X0,H,#H,Y,X)) ;
        IHK=0 ;

    ETIG2:
        IHK=IHK+1 ;
        LET(HK=#K) ;
        LET(GD=GD3) ;
        PUT FILE(SYSPRINT) LIST
            ('ETUDE DE R(X)...SUITES DE STURM...NB DE VARIATIONS')SKIP(6)
        CALL NBVAR ;
        NR=N1 ;
        PUT FILE(SYSPRINT) EDIT
            ('NOMBRE DE VARIATIONS SUR X=X0 : NR=',NR)(SKIP(2),A,F(5,0))
        LET(GD=GD4) ;
        PUT FILE(SYSPRINT) LIST
            ('ETUDE DE S(X)...SUITES DE STURM...NB DE VARIATIONS')SKIP(6)
        CALL NBVAR ;
        NS=N1 ;
        PUT FILE(SYSPRINT) EDIT
```

```
323            ('NOMBRE DE VARIATIONS SUR X=XO+H : NS=',NS)(SKIP(2),A,F(5
324         /*TEST DE DETERMINATION DU CARACTERE DE NR ET NS */
325         PUT FILE(SYSPRINT) EDIT
326            ('TEST SUR  NR  ET  NS')(SKIP(4),X(10),A) ;
327         IF (NR>1 | NS>1) THEN
328         DO ;
329            LET(#K=#K/2) ; GOTO ETIQ2 ;
330         END ;
331           ELSE
332           DO ;
333             IF NR=1 THEN
334             DO ;
335               /*CALCUL DU NOMBRE DE VARIATIONS DE PHI(X,Y)*PSI(X,Y)
336                 SUR X=>0  SOIT : NRV */
337               LET(GDR=REPLACE(F,>0,#)(,Y,>)) ;
338                   GDV=REPLACE(V,>0,#>0,Y,X)) ;
339               LET(GD=EXPAND(GDR*GDV)) ;
340               ATOMIZE((DR ; GDV) ;
341               CALL NBVAR ;
342               NRV=N1 ;
343               PUT FILE(SYSPRINT) LIST
344                  ('NB DE VARIATIONS DE PHI*PSI SUR X=XO')SKIP(2) ;
345               PUT SKIP ; PUT DATA(NRV) ; PUT SKIP(2) ;
346               /* TEST SUR NRV : SI NRV>1 DICHOTOMIE SUR K
347                                 SINON SIGNE DE PHI*PSI EN (XO,YO+K)*/
348               IF NRV>1 THEN
349               DO ;
350                 LET(#K=#K/2) ; GOTO ETIQ2 ;
351               END ;
352                 ELSE DO ;
353                   LET(>O1=>O ; YO1=YO) ;
354                   LET(>O=#>O ; YO=#YO+#K) ;
355                   CALL SIGNE ;
356                   NR=N*NR ;
357                   LET(>O=>O1 ; YO=YO1) ;
358                   ATOMIZE(>O1 ; YO1) ;
359                 END ;
360             END ;
361             PUT FILE(SYSPRINT) EDIT
362                ('VALEUR DE NR APRES DETERMINATION EN POINT ',
363                 'D ENTREE DU SORTIE  NR=',NR)(SKIP(3),A,A,F(5,0)) ;
364             IF NS=1 THEN
365             DO ;
366               /*CALCUL DU NOMBRE DE VARIATIONS DE PHI(X,Y)*PSI(X,Y)
367                 SUR X=>O+H  SOIT : NSW */
368               LET(GDS=REPLACE(S,>0,#>O,H,#H,Y,>)) ;
369                   GDW=REPLACE(W,>0,#>O,H,#H,Y,X)) ;
370               LET(GD=EXPAND(GDS*GDW)) ;
371               ATOMIZE((DS ; GDW) ;
372               CALL NBVAR ;
373               NSW=N1 ;
374               PUT FILE(SYSPRINT) LIST
375                  ('NB DE VARIATION DE PHI*PSI SUR X=X)+H')SKIP(2) ;
376               PUT SKIP ; PUT DATA(NSW) ; PUT SKIP(2) ;
377               /*TEST SUR NSW : SI NSW>1 DICHOTOMIE SUR K
378                                SINON SIGNE DE PHI*PSI EN (XO+H,YO)*/
379               IF NSW>1 THEN
380               DO ;
381                  LET(#K=#K/2) ; GOTO ETIQ2 ;
382               END ;
383                 ELSE DO ;
384                   LET(>O1=>O ; YO1=YO) ;
385                   LET(>O=#>O+#H ; YO=#YO) ;
386                   CALL SIGNE ;
```

```
                LET(XC=XC) ; YC=YC)) ;
                ATOMIZE(XC) ; YC)) ;
              END ;
          END ;
          PUT FILE(SYSPRINT) EDIT
             ('VALEUR DE NS APRES DETERMINATION EN POINT ',
              'D ENTREE OU DE SORTIE  NS=',NS)(SKIP(3),A,A,F(5,0)) ;
       END ;
       PUT FILE(SYSPRINT) LIST
          ('VALEUR DE K CONSIDEREE')SKIP(4) ;
       PRINT_OUT(HK) ;

       /* TEST SUR LE NOMBRE DE DICHOTOMIE SUR  K  */
       IF IHK>1 THEN
       DO ;
          PUT FILE(SYSPRINT) EDIT
              ('REEVALUATION DE NP,NG ET NR,NS AVEC LA NOUVELLE VALEUR',
              'DE K')(SKIP(8),A,A) ;
          PUT SKIP(3) ;
          GOTO PG ;
       END ;

       /* VALEUR DE LA CARACTERISTIQUE */
       KARACT=(NP+NG+NF+NS)/2 ;
       PUT FILE(SYSPRINT) EDIT
          ('CARACTERISTIQUE=',KARACT)(SKIP(4),X(30),A,F(5,0)) ;
       PUT SKIP(10) ;
       GOTO LECT ;
    FIN:
    END CARACT ;
```

BIBLIOGRAPHIE

BIBLIOGRAPHIE

[I] BURNSIDE - PANTON "The theory of equations" (vol. 1,2).
Dover publication, inc, New-York (1967).

[II] L. DERWIDE
① "Introduction à l'algèbre supérieure et au calcul numérique".
Masson et Compagnie, Paris (1957).
② "Une méthode de séparation pour le calcul des racines complexes d'une équation algébrique".
Mathesis 66, 354, 9 (1957).

[III] F.R. GANTMACHER "Theory of matrices". Tome II.
Chelsea Pub, Co, New-York (1960).

[IV] N. GASTINEL "Analyse numérique linéaire".
Hermann (1966).

[V] ALSTON - S. HOUSEHOLDER
"The theory of matrices in numerical analysis".
Blaisdell Publishing Company (1964).

[VI] Hr. KRONECKER Monatsbericht der Koniglich Preussischen.
Akademie der Wissenschaften Zu Berlin.
① 4 Mars 1869
② 5 Août 1869
③ 11 Février 1873
④ 21 Février 1878.

[VII] A. OSTROWSKI "Solution of equation and systems of equations".
Academic Press, New-York, (1960).

[VIII] J.A. SERRET "Algèbre Supérieure" { ① Tome I chapitre VI
② Tome II chapitre V
Gauthier-Villard, Paris 1928.

[IX] H. WEBER "Traité d'algèbre supérieure"
Gauthier-Villard, Paris (1898).

[X] F. CHATELIN "Calcul des valeurs propres".
Cours DEA, Grenoble (1970).

[XI] E. DURAND "Solutions numériques des équations algébriques".
Tome I, Masson (1960).

[XII] R. TOBEY "PL/1 - FORMAC interpreter, User's reference manuel",
IBM Contributed program library 360 D 03.3.004,
Hawthorne, New-York (1967).

[XIII] A. LAPLACE "OS/360 PL/1 - FORMAC preprocessor".
Institut de Mathématiques Appliquées de Grenoble (1971)
(à paraitre).

[XIV] Y. SIRET - A. LAPLACE
"FORDECAL".
Proceeding of the congress SEAS Symbolic Mathematical
Computation project meeting-Pisa (Septembre 1971).

[XV] D.E. KNUTH "The art of computer programming"
Addison Wesley reading Massachusetts (1968/69).
Volume II p. 367.

[XVI] M. LASSERT - J. PAQUET
"Résolution d'équations algébriques à coefficients réels
Projet de troisième année Mathématiques Appliquées.
Grenoble (1964).

[XVII] J. APPEL "Résolution de systèmes linéaires formels au moyen de PL/1 - FORMAC".
Projet de troisième année Mathématiques Appliquées.
Grenoble, (1969).

[XVIII] S. DRUON "Intégration symbolique en PL/1 - FORMAC".
Projet de troisième année Mathématiques Appliquées.
Grenoble, (1969).

[XIX] E. TOURNIER "Une méthode générale de localisation et séparation des racines d'une équation à coefficients complexes".
Communication SEAS Symbolic Mathematical Computation Projett meeting, Avril 1971.

BIBLIOGRAPHIE ANNEXE

(Cette bibliographie indique des ouvrages intéressants, mais non fondamentaux dans notre recherche).

ANNEXE I

WILKINSON "The algebraic eigenvalue problem".
Oxford Press, 1965.

KATO
1. "Perturbation theory for linear operators".
Pergamon Press, 1964.
2. "On the upper and lower bounds of eigen values".
J. Phys. Soc. , Japan 4, 198 - 228.

M. PARODI "La localisation des valeurs caractéristiques des matrices et ses applications".
Gauthier-Villars, Paris 1959.

ANNEXE II

J.F. TRAUB - M.A. JENKINS
"An algorithm for an automatic general polynomial solver'
Technical report NO CS 71 (Juillet 1967).

L. FOX "Polynomial factorization and the Q.D. algorithm
Lin. Alg. Appl. 1, 445, 63 (1968).

P. HENRICI "Finding zero of a polynomial by the Q.D. algorithm"
Communication ACM8 (1965) p. 572 - 573.