



**HAL**  
open science

# Etude et programmation de problèmes relatifs à la présentation d'un groupe

Ishac Betour-Zoghbi

► **To cite this version:**

Ishac Betour-Zoghbi. Etude et programmation de problèmes relatifs à la présentation d'un groupe. Modélisation et simulation. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1971. Français. NNT: . tel-00282880

**HAL Id: tel-00282880**

**<https://theses.hal.science/tel-00282880>**

Submitted on 28 May 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THESE

présentée à

L'UNIVERSITE SCIENTIFIQUE ET MEDICALE DE GRENOBLE

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR DE TROISIEME CYCLE

" INFORMATIQUE "

par

*Ishac* BETOUR - ZOGHBI

## ETUDE ET PROGRAMMATION DE PROBLEMES RELATIFS A LA PRESENTATION D'UN GROUPE

Thèse soutenue le 30 Juin 1971 devant la Commission d'Examen:

Monsieur J. KUNTZMANN Président

Messieurs C. BENZAKEN Examineurs

P. JULLIEN



Président : Monsieur Michel SOUTIF  
Vice-Président : Monsieur Gabriel CAU

PROFESSEURS TITULAIRES

MM.	ANGLES D'AURIAC Paul	Mécanique des fluides
	ARNAUD Georges	Clinique des maladies infectieuses
	ARNAUD Paul	Chimie
	AYANT Yves	Physique approfondie
	BARBIER Jean-Claude	Physique expérimentale
	BARBIER Reynold	Géologie appliquée
	BARJON Robert	Physique nucléaire
	BARNOUD Fernand	Biosynthèse de la cellulose
	BARRIE Joseph	Clinique chirurgicale
	BENOIT Jean	Radioélectricité
	BESSON Jean	Electrochimie
	BEZES Henri	Chirurgie générale
	BLAMBERT Maurice	Mathématiques pures
	BOLLIET Louis	Informatique (IUT B)
	BONNET Georges	Electrotechnique
	BONNET Jean-Louis	Clinique ophtalmologique
	BONNET-EYMARD Joseph	Pathologie médicale
	BONNIER Etienne	Electrochimie Electrometallurgie
	BOUCHERLE André	Chimie et Toxicologie
	BOUCHEZ Robert	Physique nucléaire
	BRAVARD Yves	Géographie
	BRISSONNEAU Pierre	Physique du Solide
	BUYLE-BODIN Maurice	Electronique
	CABANAC Jean	Pathologie chirurgicale
	CABANEL Guy	Clinique rhumatologique et hydrologique
	CALAS François	Anatomie
	CARRAZ Gilbert	Biologie animale et pharmacodynamie
	CAU Gabriel	Médecine légale et Toxicologie
	CAUQUIS Georges	Chimie organique
	CHABAUTY Claude	Mathématiques pures
	CHATEAU Robert	Thérapeutique
	CHENE Marcel	Chimie papetière
	COEUR André	Pharmacie chimique
	CONTAMIN Robert	Clinique gynécologique
	COUDERC Pierre	Anatomie Pathologique
	CRAYA Antoine	Mécanique
Mme	DEBELMAS Anne-Marie	Matière médicale
MM.	DEBELMAS Jacques	Géologie générale
	DEGRANGE Charles	Zoologie
	DESSAUX Georges	Physiologie animale
	DODU Jacques	Mécanique appliquée
	DREYFUS Bernard	Thermodynamique
	DUCROS Pierre	Cristallographie
	DUGOIS Pierre	Clinique de Dermatologie et Syphiligraphie



FAU René	Clinique neuro-psychiatrique
FELICI Noël	Electrostatique
GAGNAIRE Didier	Chimie physique
GALLISSOT François	Mathématiques pures
GALVANI Octave	Mathématiques pures
GASTINEL Noël	Analyse numérique
GERBER Robert	Mathématiques pures
GIRAUD Pierre	Géologie
KLEIN Joseph	Mathématiques pures
Mme KOFLER Lucie	Botanique et physiologie végétale
MM. KOSZUL Jean-Louis	Mathématiques pures
KRAVTCHENKO Julien	Mécanique
KUNTZMANN Jean	Mathématiques appliquées
LACAZE Albert	Thermodynamique
LACHARME Jean	Biologie végétale
LATURAZE Jean	Biochimie pharmaceutique
LEDRU Jean	Clinique médicale B
LLIBOUTRY Louis	Géophysique
LOUP Jean	Géographie
Mle LUTZ Elisabeth	Mathématiques pures
MM. MALGRANGE Bernard	Mathématiques pures
MALINAS Yves	Clinique obstétricale
MARTIN-NOEL Pierre	Séméiologie médicale
MASSEPORT Jean	Géographie
MAZARE Yves	Clinique médicale A
MICHEL Robert	Minéralogie et Pétrographie
MOURIQUAND Claude	Histologie
MOUSSA André	Chimie nucléaire
NEEL Louis	Physique du Solide
OZENDA Paul	Botanique
PAUTHENET René	Electrotechnique
PAYAN Jean-Jacques	Mathématiques pures
PEBAY-PEYROULA Jean-Claude	Physique
PERRET René	Servomécanismes
PILLET Emile	Physique industrielle
RASSAT André	Chimie systématique
RENARD Michel	Thermodynamique
REULOS René	Physique industrielle
RINALDI Renaud	Physique
ROGET Jean	Clinique de pédiatrie et de puériculture
SANTON Lucien	Mécanique
SEIGNEURIN Raymond	Microbiologie et Hygiène
SENGEL Philippe	Zoologie
SILBERT Robert	Mécanique des fluides
SOUTIF Michel	Physique générale
TANCHE Maurice	Physiologie
TRAYNARD Philippe	Chimie générale
VAILLAND François	Zoologie
VAUQUOIS Bernard	Calcul électronique
Mme VERAIN Alice	Pharmacie galénique
VERAIN André	Physique
Mme VEYRET Germaine	Géographie
MM. VEYRET Paul	Géographie
VIGNAIS Pierre	Biochimie médicale
YOCOZ Jean	Physique nucléaire théorique

	BEGUIN Claude	Chimie organique
	BELORIZKY Elie	Physique
	BENZAKEN Claude	Mathématiques appliquées
Mme	BERTRANDIAS Françoise	Mathématiques pures
MM.	BLIMAN Samuel	Electronique (EIE)
	BLOCH Daniel	Electrotechnique
Mme	BOUCHE Liane	Mathématiques (CUS)
MM.	BOUCHET Yves	Anatomie
	BOUSSARD Jean-Claude	Mathématiques appliquées
	BOUVARD Maurice	Mécanique des Fluides
	BRIERE Georges	Physique expérimentale
	BRODEAU François	Mathématiques (IUT B)
	BRUGEL Lucien	Energétique
	BUISSON Roger	Physique
	BUTEL Jean	Orthopédie
	CHAMBAZ Edmond	Biochimie médicale
	CHAMPETIER Jean	Anatomie et organogénèse
	CHARACHON Robert	Oto-Rhino-Laryngologie
	CHIAVERINA Jean	Biologie appliquée (EFP)
	CHIBON Pierre	Biologie animale
	COHEN-ADDAD Jean-Pierre	Spectrométrie physique
	COLOMB Maurice	Biochimie médicale
	CONTE René	Physique
	CROUZET Guy	Radiologie
	DURAND Francis	Métallurgie
	DUSSAUD René	Mathématiques (CUS)
Mme	ETERRADOSSI Jacqueline	Physiologie
MM.	FAURE Jacques	Médecine légale
	GAVEND Michel	Pharmacologie
	GENSAC Pierre	Botanique
	GERMAIN Jean-Pierre	Mécanique
	GIDON Maurice	Géologie
	GRIFFITHS Michael	Mathématiques appliquées
	GROULADE Joseph	Biochimie médicale
	HOLLARD Daniel	Hématologie
	HUGONOT Robert	Hygiène et médecine préventive
	IDELMAN Simon	Physiologie animale
	IVANES Marcel	Electricité
	JALBERT Pierre	Histologie
	JOLY Jean-René	Mathématiques pures
	JOUBERT Jean-Claude	Physique du Solide
	JULLIEN Pierre	Mathématiques pures
	KAHANE André	Physique générale
	KUHN Gérard	Physique
Mme	LAJZEROWICZ Jeannine	Physique
MM.	LAJZEROWICZ Joseph	Physique
	LANCIA Roland	Physique atomique
	LE JUNTER Noël	Electronique
	LEROY Philippe	Mathématiques
	LOISEAUX Jean-Marie	Physique nucléaire
	LONGEQUEUE Jean-Pierre	Physique nucléaire
	LUU DUC Cuong	Chimie organique
	MACHE Régis	Physiologie végétale
	MAGNIN Robert	Hygiène et Médecine préventive
	MARECHAL Jean	Mécanique
	MARTIN-BOUYER Michel	Chimie (CUS)
	MAYNARD Roger	Physique du Solide
	MICOUD Max	Maladies infectieuses
	MOREAU René	Hydraulique (INP)

	NEGRE Robert	Mécanique
	PARAMELLE Bernard	Pneumologie
	PECCOUD François	Analyse (IUT B)
	PEFFEN René	Métallurgie
	PELMONT Jean	Physiologie animale
	PERRET Jean	Neurologie
	PERRIN Louis	Pathologie expérimentale
	PFISTER Jean-Claude	Physique du Solide
	PHELIP Xavier	Rhumatologie
Mle	PIERY Yvette	Biologie animale
	RACHAIL Michel	Médecine interne
	RACINET Claude	Gynécologie et obstétrique
	RICHARD Lucien	Botanique
Mme	RINAUDO Marguerite	Chimie macromoléculaire
MM.	ROMIER Guy	Mathématiques (IUT B)
	ROUGEMONT (DE) Jacques	Neuro-chirurgie
	STIEGLITZ Paul	Anesthésiologie
	STOEBNER Pierre	Anatomie pathologique
	VAN CUTSEM Bernard	Mathématiques appliquées
	VEILLON Gérard	Mathématiques appliquées (INP)
	VIALON Pierre	Géologie
	VOOG Robert	Médecine interne
	VROUSSOS Constantin	Radiologie
	ZADWORNY François	Electronique

MAITRES DE CONFERENCES ASSOCIES

MM.	BOUDOURIS Georges	Radioélectricité
	CHEEKE John	Thermodynamique
	GOLDSCHMIDT Hubert	Mathématiques
	YACOUD Mahmoud	Médecine légale

CHARGES DE FONCTIONS DE MAITRES DE CONFERENCES

Mme	BERIEL Hélène	Physiologie
Mme	RENAUDET Jacqueline	Microbiologie





*Je tiens :*

*A remercier Monsieur le Professeur J. KUNTZMANN de m'avoir fait l'honneur de présider le Jury de cette thèse et de l'accueil qu'il m'a réservé lors de mon arrivée au Laboratoire de Calcul de Mathématiques Appliquées de Grenoble.*

*A exprimer ma profonde reconnaissance à Monsieur C. BENZAKEN pour la façon dont il a bien voulu diriger ce travail, de son aide efficace et de ses conseils fructueux.*

*A remercier Monsieur P. JULLIEN qui a bien voulu être membre du Jury de cette thèse.*

*A remercier le C.N.R.S. Libanais de son aide matérielle.*

*Je remercie les services de dactylographie et de tirage qui ont assuré la réalisation matérielle de cette thèse.*



# TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION .....	I
CHAPITRE I .....	1
1. Etude de la présentation d'un groupe .....	1
1.1. Présentation d'un groupe donné .....	1
1.2. Groupe associé à une présentation formelle $\langle M ; S \rangle$ .....	2
2. Les problèmes fondamentaux .....	5
2.1. Enoncé des trois problèmes fondamentaux .....	5
2.2. Rappels .....	7
2.3. Groupe libre à $n$ générateurs .....	8
3. Graphe d'un groupe finiment engendré .....	11
3.1. Définition .....	11
3.2. Caractérisation des graphes de groupe .....	12
3.3. Lien entre graphe et présentation d'un groupe fini .....	13
4. Présentation d'un sous-groupe $H$ d'index fini d'un groupe $G$ .....	15
4.1. Résultat de Reidemeister-Schreier .....	15
4.2. A propos de la détermination de l'index fini .....	18
CHAPITRE II - ETUDE DES GROUPES DONT LA PRESENTATION EST UN PRODUIT LIBRE OU UN PRODUIT LIBRE AMALGAME .....	22
1. Produit libre .....	22
1.1. Présentation qui est un produit libre .....	22
1.2. Manipulation explicite d'un produit libre de deux groupes .....	23
1.3. Problème du mot dans un produit libre $A * B$ .....	24
1.4. Produit libre de plusieurs groupes .....	26

2. Produit libre avec sous-groupes amalgamés .....	27
2.1. Produit libre amalgamé .....	27
2.2. Manipulation explicite du produit libre amalgamé .....	29
2.3. Aperçu du problème du mot dans un produit libre amalgamé.....	29
CHAPITRE III - GROUPES AVEC UNE SEULE RELATION DEFINIE .....	33
Lemme .....	33
Théorème d'indépendance .....	34
Application du théorème d'indépendance pour résoudre le problème du mot .....	44
L'extension du problème du mot .....	45
CHAPITRE IV - ALGORITHMES .....	46
1. Présentation d'un groupe fini .....	46
2. Résolution du problème du mot .....	49
2.1. Représentation utilisée .....	49
2.2. Présentation de l'algorithme pratique du problème du mot .....	49
3. Langage de Dyck .....	52
4. Organigrammes et programmes .....	a
APPENDICE .....	A1
BIBLIOGRAPHIE .....	A4

## I N T R O D U C T I O N

Les problèmes qui exigent une réponse par "oui" ou "non", "vrai" ou "faux" sont les problèmes fondamentaux de la logique. Ce genre de problèmes s'appelle "problème de décision". Un tel problème peut être résolu par l'introduction de la notion d'algorithme (ou de Machine de Turing).

L'algorithme est une suite de règles (ou d'instructions) calculables qui, par une simple manipulation mécanique de ses symboles sans se soucier de leur signification, résoud certains problèmes. Par exemple : chacun connaît un répertoire d'algorithmes pour les opérations arithmétiques usuelles dont l'exécution est réalisée par des machines simples ; la recherche d'un mot dans un dictionnaire est un autre exemple d'algorithme.

En fait, il est montré que l'existence d'un algorithme pour un "problème de décision" n'est pas toujours assuré, car tout problème de décision se ramène à celui de l'appartenance d'un entier à une partie donnée  $P$  de  $\mathbb{N}$  ; or, une condition nécessaire et suffisante pour que ce dernier problème de décision soit soluble est que  $P$  soit un ensemble récursif. Malheureusement, on montre l'existence d'ensembles récursivement énumérables non récursifs [24].

On rencontre de nombreux problèmes de décision dans la théorie des langages. Soit  $V$  un alphabet et soit  $V^*$  le monoïde libre engendré par  $V$  en lui adjoignant la chaîne vide. Soit  $x \in V^*$  et soit un langage  $L \subset V^*$  défini par un processus formatif (Grammaire, etc...) ; ( $x \in L$  ou non ?) est un "problème de décision" qui a pour certaines classes de langage une solution positive et pour d'autres une solution négative.

Nous nous sommes préoccupés dans notre travail d'un problème assez voisin qui est celui de l'équivalence des mots dans la présentation des groupes. Le Mathématicien Norvégien THUE a été le premier qui a posé ce problème fondamental.

Soit un alphabet A et soit un système de relations de THUE

$$\mathcal{R} = \{ R_1 \sim R'_1, \dots, R_m \sim R'_m ; R_i, R'_i \in A^* \forall i = 1, \dots, m \}.$$

On dit que deux mots U et U' sont contigus lorsqu'on peut écrire  $U = XR_iY$  et  $U' = XR'_iY$  ou  $U = XR'_iY$  et  $U' = XR_iY$ . La fermeture transitive de cette relation de contiguïté entre mots définit une équivalence dans  $A^*$ . Existe-t-il une méthode universelle propre à résoudre le problème de l'équivalence de deux mots appelé encore plus simplement "problème du mot" ?

De nombreux Mathématiciens ont étudié ce problème et la plupart du temps sont arrivés à des conclusions plutôt négatives ([8], [22], ...). Il nous a semblé pour cela intéressant étant donné qu'on se trouve à la frontière de l'"indécidable" d'étudier et programmer les algorithmes lorsqu'il a été prouvé que le problème du mot a une solution positive.

Notre travail a été donc :

- 1 De rappeler les points de vue généraux relatifs à la présentation des groupes, sous-groupes (groupes libres - graphes de groupes, etc...)  
C'est l'objet du chapitre I.
- 2 D'exposer l'essentiel de la démonstration du théorème de Magnus, justifiant que le problème du mot est résoluble dans le cas où l'on a une seule relation de Thue non triviale.  
C'est l'objet des chapitres II et III.
- 3 De bâtir et programmer des algorithmes.  
Nous avons choisi les deux thèmes suivants :
  - a) Présenter un groupe fini donné ;
  - b) Résoudre automatiquement le problème du mot pour une présentation donnée d'un groupe avec une seule relation.

CHAPITRE I

1. ETUDE DE LA PRESENTATION D'UN GROUPE.

1.1. Présentation d'un groupe donné.

Soit  $M = \{a, b, c, \dots\}$  une partie génératrice d'un groupe  $G$  ; il peut y avoir deux générations d'un même élément  $x$  de  $G$ ,

$$\begin{array}{l}
 x = a_1 a_2 \dots a_q \\
 x = b_1 b_2 \dots b_r
 \end{array}
 \left| \begin{array}{l} \Rightarrow \\ \Leftrightarrow \end{array} \right.
 a_1 a_2 \dots a_q = b_1 b_2 \dots b_r$$

$$a_1 a_2 \dots a_q b_r^{-1} b_{r-1}^{-1} \dots b_2^{-1} b_1^{-1} = 1.$$

Le premier membre de la dernière égalité s'appelle une relation satisfaite par le générateur  $M$ . C'est un produit dont les facteurs soit appartiennent à  $M$ , soit sont tels que leurs opposés appartiennent à  $M$ . En particulier

$$a a^{-1}, a^{-1} a, b^{-1} b, b b^{-1}, \dots$$

sont des relations satisfaites dans tout groupe. Elles sont dites pour cela triviales.

En résumé : on pourra définir  $G$  à partir de  $M$  et de l'ensemble de toutes les relations  $\mathcal{R}$  ce qu'on note par

$$G = \langle M ; \mathcal{R} \rangle$$

$\mathcal{R}$  est l'ensemble de toutes les relations satisfaites.  $\mathcal{R}$  en général est très redondant ; ainsi si  $\alpha \beta \in \mathcal{R}$  alors  $\beta \alpha \in \mathcal{R}$ .

Peut-on "axiomatiser"  $\mathcal{R}$ , c'est-à-dire définir un sous-ensemble  $S$  dont  $\mathcal{R}$  se "déduirait". Cet ensemble peut-il être "indépendant" ? Dans ce cas, on définira  $G$  par

$$\langle M ; S \rangle$$

Définition :

Soit  $S$  une partie de  $\mathcal{R}$ , on dit que  $S$  est complet si :



- a) S contient les relations triviales  
b) Si toute relation W de  $\mathcal{R}$ , en tant que mot, peut être transformée en un mot vide en un nombre fini d'étapes du type suivant :

- 1 - Insertion avant, entre ou après les symboles du mot W de relations de S ou de leurs inverses
- 2 - Suppression de facteurs consécutifs dans W quand ces facteurs consécutifs forment une relation de S ou son inverse.

Exemple :

Le groupe cyclique

$$G = (1, a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6 = 1, a^7 = a, \dots)$$

$$G = \langle a ; a^6, a^{12}, a^{18}, \dots \rangle$$

$$M = \{a\} \text{ et } \mathcal{R} = \{a^6, a^{12}, a^{18}, \dots\}$$

Dans ce cas S =  $\{a^6\}$  est complet entraîne

$$G = \langle a ; a^6 \rangle.$$

### 1.2. Groupe associé à une présentation formelle $\langle M ; S \rangle$ .

On va partir d'un ensemble  $A = \{a, b, \dots\}$ , fini ou non, qu'on appelle vocabulaire. On prend en correspondances bijectives

$$\bar{A} = \{\bar{a}, \bar{b}, \dots\}, (\bar{A} \cap A = \emptyset).$$

Soit le monoïde libre  $M = (A \cup \bar{A})^*$  où la concaténation est la loi de composition interne. On identifie A,  $\bar{A}$  à une partie de M. Soit  $\mu$  une partie de M. Un mot  $m \in M$  est une chaîne

$$m = x_1 x_2 \dots x_n \text{ avec } x_i \in A \cup \bar{A} \quad \forall i = 1, 2, \dots, n.$$

Le mot vide est représenté par 1. On définit le mot inverse  $\bar{m}$  d'un mot donné m par récurrence comme il suit :

$$\text{Si } m = 1, \bar{m} = 1$$

$$\text{Si } m = \mu a, \text{ où } \mu \in M \text{ et } a \in A, \bar{m} = \bar{a} \cdot \bar{\mu}$$

$$\text{Si } m = \mu \bar{a}, \text{ où } \mu \in M \text{ et } \bar{a} \in \bar{A}, \bar{m} = a \cdot \bar{\mu}$$

On peut facilement vérifier que si on a deux mots  $m$  et  $m' \in M$ , on a :

$$\overline{(m \cdot m')} = \bar{m}' \cdot \bar{m}.$$

Soit un groupe  $G$  et soit  $\varphi$  une application de  $A$  dans  $G$ ,

$$\varphi : A \longrightarrow G.$$

On peut prolonger  $\varphi$  en  $\tilde{\varphi} : M \longrightarrow G$

de telle manière que si  $m = x_1 x_2 \dots x_n$

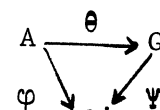
$$\tilde{\varphi}(m) = 1 \quad \text{si } m = 0 \quad \text{c'est-à-dire si } m = 1$$

$\tilde{\varphi}(m) = \tilde{\varphi}(x_1) \tilde{\varphi}(x_2) \dots \tilde{\varphi}(x_n)$  dans le cas contraire c'est-à-dire  $m \neq 1$  avec

$$\begin{cases} \tilde{\varphi}(a) = \varphi(a) & \text{si } a \in A \\ \tilde{\varphi}(a) = (\varphi(b))^{-1} & \text{si } a = \bar{b} \in \bar{A} \end{cases}$$

Théorème [ [19] pp. 13 ] :

Soit  $A$  un alphabet,  $\mathcal{S}$  une partie du monoïde  $M = (A \cup \bar{A})^*$ . Il existe un groupe  $G$  unique, à un isomorphisme près, et une application

$$\theta : A \longrightarrow G \quad \text{tels que :}$$


```

    A --theta--> G
     |           |
     phi        psi
     v           v
     G'         G
  
```

a)  $\theta(A)$  engendre  $G$

b)  $\tilde{\theta}(\mu) = 1$  si  $\mu \in \mathcal{S}$

c) pour tout groupe  $G'$  et toute application  $\varphi : A \longrightarrow G'$  vérifiant

$$\tilde{\varphi}(\mu) = 1 \quad \text{si } \mu \in \mathcal{S},$$

alors il existe un homomorphisme unique  $\psi : G \longrightarrow G'$  tel que

$$\psi \circ \theta = \varphi.$$

Le groupe  $G$  défini par ce théorème se notera

$$G = \langle A ; \mathcal{S} \rangle$$

et  $\langle A ; \mathcal{S} \rangle$  est une présentation de  $G$ . On dit qu'une présentation  $\langle A ; \mathcal{S} \rangle$  est finie si  $A$  est fini et  $\mathcal{S}$  est fini en tant que sous ensemble de mots.

Nous ne démontrons pas ce théorème. Nous donnerons le moyen de définir  $G$ . On va rajouter à  $\mathcal{S}$  les mots triviaux  $a\bar{a}$ ,  $\bar{a}a$   $\forall a \in A$  s'ils n'existent pas déjà.

Définition :

Soient deux mots  $\mu$  et  $\nu$  de  $M$ .  $\mu$  et  $\nu$  sont dits équivalents si l'on obtient  $\nu$  à partir de  $\mu$  en un nombre fini d'étapes du type suivant :

- $\alpha$ ) Insertion de mots de  $\mathcal{S}$  ou de leurs inverses dans  $\mu$ .
- $\beta$ ) Suppression de lettres consécutives dans  $\mu$  quand le mot qu'elles forment ou son image appartient à  $\mathcal{S}$ .

Remarque :

Il est facile de vérifier que c'est une relation d'équivalence et on la note  $\mu \sim \nu$  (et quelquefois  $\mu = \nu$ ). C'est même une congruence dans  $M$ . Notons que si  $\mu \in \mathcal{S}$  alors  $\mu \sim 1$ . Le groupe  $G$  est alors défini comme le quotient de  $M$  par cette congruence.

Corollaire [ [19] pp. 15 ] :

Supposons que  $A$  étant donné,  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{S}'$  sont deux parties du monoïde  $M = (A \cup \bar{A})^*$  telles que  $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}'$  ; alors le groupe  $\langle A ; \mathcal{S}' \rangle$  est une image homomorphe du groupe  $\langle A ; \mathcal{S} \rangle$ .

Théorème [19] :

Soit  $G = \langle A ; \mathcal{R} \rangle$  et soit  $\mathcal{S}$  un ensemble de mots définissant un ensemble d'éléments de  $G$  et engendrant le sous-groupe normal  $N$  de  $G$ , alors le groupe quotient  $G/N$  a la présentation :

$$G/N = \langle A ; \mathcal{R} \cup \mathcal{S} \rangle .$$

D'après ce théorème, on peut considérer un groupe  $G = \langle A ; \mathcal{R} \rangle$  comme le quotient du groupe  $G' = \langle A ; \emptyset \rangle$  par le sous-groupe normal  $N$  de  $G'$  engendré par  $[\mathcal{R}]_{G'}$ .

$$G = \langle A ; \mathcal{R} \rangle = \langle A ; \emptyset \rangle / N .$$

Chaque mot  $W \in M$  est une relation si et seulement si  $W \sim_G 1$  ce qui est équivalent à dire  $[W]_G, \in N$ . On peut en déduire que chaque relation  $W$  est librement équivalente (voir 2.3.) au produit

$$T_1^{-1} R_{i_1}^{\epsilon_{i_1}} T_1 \cdot T_2^{-1} R_{i_2}^{\epsilon_{i_2}} T_2 \cdot \dots \cdot T_n^{-1} R_{i_n}^{\epsilon_{i_n}} T_n$$

$$(\epsilon_{i_j} = \pm 1 \quad \forall j = 1, 2, \dots, n) ;$$

où les  $T_j$  sont des mots quelconques par rapport aux  $a_i$  ( $T_j \in M$ ) et  $i_1, i_2, \dots, i_n \in \{1, 2, \dots, m\}$  ensemble d'indices de l'ensemble de relations définies  $\mathcal{R}$ .

## 2. LES PROBLEMES FONDAMENTAUX.

### 2.1. Enoncé des trois problèmes fondamentaux.

Dans un groupe présenté par un ensemble de générateurs  $A$  et un sous-ensemble  $\mathcal{S} \subseteq M = (A \cup \bar{A})^*$  on pose trois problèmes fondamentaux qui sont les suivants :

#### Problème I :

C'est le problème du mot. Etant donné deux mots  $\mu$  et  $\nu \in M$ , étudier si ces deux mots sont équivalents ou non (au sens de la relation  $\sim$ ). Pour ceci, tout revient à étudier si  $\mu \nu^{-1} \sim 1$ . Le problème du mot revient donc à étudier si un mot donné  $\gamma \in M$  est équivalent ou non à 1. C'est le problème fondamental qui permet de "manipuler" le groupe  $G$  comme quotient de  $M$  par  $\sim$ .

#### Problème II :

C'est le problème de conjugaison.  
 $\mu$  et  $\nu$  étant deux mots de  $M$  définissant par leur classe  $[\mu]$  et  $[\nu] \in G$ .  
 Étudier si  $[\mu]$  et  $[\nu]$  sont conjugués ou non. (on rappelle que dans un groupe  $G$ ,  $a, b \in G$  sont dits conjugués s'il existe un  $c \in G$  tel que  $b = c^{-1} a c$ ).

#### Problème III :

C'est le problème d'isomorphisme entre deux présentations. Soient deux présentations  $G = \langle A ; \mathcal{S} \rangle$  et  $G' = \langle A' ; \mathcal{S}' \rangle$ .  $G$  et  $G'$  sont-ils isomorphes ?

Il a été démontré [8] et [22] que le problème I est indécidable même si on se limite aux présentations finies. Par ailleurs, il est clair que le problème II [13] généralise le problème I. Concernant le problème III il est probable qu'en général le problème est indécidable. Nous citerons toujours un théorème (ne donnant toutefois pas d'algorithme "effectif") donnant une C.N.S. pour que deux présentations finies définissent un même groupe. On introduit les transformations de Tietze qui sont les suivantes :

- 1) T1 . Si  $\mu$  est dérivable de  $\mathcal{R}$ , on le rajoute à  $\mathcal{R}$ .
- 1)\* T1\* . Si dans  $\mathcal{R}$   $\mu$  est dérivable des autres, on l'enlève de  $\mathcal{R}$ .
- 2) T2 . Si  $\mu$  est un mot, auquel on attache une lettre  $x \notin A$ , on rajoute  $x$  à  $A$  et la relation  $x = \mu$  à  $\mathcal{R}$ .
- 2)\* T2\* . Si une relation de  $\mathcal{R}$  est résoluble par rapport à une lettre  $x$ , de la forme  $x = \mu$  où  $x$  ne figure plus dans  $\mu$ , on supprime  $x$  de  $A$  et  $x = \mu$  de  $\mathcal{R}$  et on remplace dans les autres relations de  $\mathcal{R}$   $x$  par  $\mu$  et  $\bar{x}$  par  $\bar{\mu}$ .

Ainsi à partir de ces 4 T on peut énoncer le théorème suivant :

Théorème [19] :

Une condition nécessaire et suffisante pour que deux présentations finies définissent un même groupe, à un isomorphisme près, est que l'on passe de l'une à l'autre par un nombre fini de transformations T1, T1\*, T2, T2\*.

Exemple :

Le groupe  $\langle a, b, c ; (ab)^2 ab^2 \rangle$  est un groupe isomorphe au groupe  $\langle c, y ; \emptyset \rangle$  car :

$$\begin{aligned} \langle a, b, c ; (ab)^2 ab^2 \rangle &\xrightarrow{i \quad T2} \langle a, b, c, y ; y = ab, (ab)^2 ab^2 \rangle \\ &= \langle a, b, c, y ; y = ab, y^3 b \rangle \xrightarrow{i \quad T2^*} \langle a, c, y ; y = ay^{-3} \rangle \\ &\xrightarrow{i \quad T2^*} \langle c, y ; \emptyset \rangle . \end{aligned}$$

Remarque :

$\mathcal{R}$  est un ensemble non vide contenant des relations non résolubles. Si quelques unes de ces relations peuvent être résolues (au sens de  $T2^*$ ) on obtient le groupe

$$G' = \langle A' ; \mathcal{R}' \rangle \xrightarrow{i} \langle A ; R \rangle$$

et tout revient à résoudre le problème du mot dans  $G'$ .

## 2.2. Rappels.

Nombreux sont ceux qui ont travaillé sur le problème du mot dans un groupe et surtout après avoir été formulé et décrit par DEHN en 1912 pour les divers groupes fondamentaux de dimension deux ; ceci en se basant sur le diagramme de Cayley associé à la présentation d'un groupe  $G$ .

Greendlinger [12] a décrit une méthode plus algébrique :

Soit le groupe  $G = \langle A ; \mathcal{R} \rangle$ . On peut supposer que  $\mathcal{R}$  est un ensemble symétrisé, c'est-à-dire à chaque élément  $R \in \mathcal{R}$  on peut trouver  $R^{-1}$  et toutes les permutations circulaires de  $R$  et  $R^{-1}$ , sinon on peut ajouter ceux qui manquent et ceci ne change rien à la généralité du problème.

Le résultat principal de Greendlinger est le suivant :

Soit  $G$  un groupe présenté par  $G = \langle A ; \mathcal{R} \rangle$  où  $\mathcal{R}$  est un ensemble symétrisé. Supposons que la fraction  $\lambda$ , d'un  $R_i$  quelconque de  $\mathcal{R}$ , qui peut réagir librement avec un  $R_j$  quelconque de  $\mathcal{R}$  est  $< 1/6$ , à moins que  $R_i$  et  $R_j$  sont inverses l'un de l'autre. Soit  $W$  un mot librement réduit tel que  $W = 1$  dans  $G$  ; dans ce cas  $W$  contiendra plus que la moitié d'une des relations  $R_i$ .

Conséquence :

D'après cette propriété, on peut résoudre le problème du mot dans un cas particulier qui est difficile à être réalisé, et ceci en réduisant chaque fois la longueur du mot  $W$  comme il suit :

Si  $W$  contient une séquence  $\alpha$  des  $a_i$  qui figure dans un  $R_i = \alpha \beta$  tel que  $l(\alpha) > \frac{1}{2} l(R_i)$  c'est-à-dire  $l(\alpha) > l(\beta)$ , (longueur signifie nombre de générateurs qui figure dans une séquence). On remplace  $\alpha$  dans  $W$  par  $\beta^{-1}$  puis on réduit librement et on obtient le mot  $W'$  ( $l(W') < l(W)$ ) puis on recommence de la même manière avec le mot  $W'$ .

Si on arrive à un mot  $W''$  tel que  $W''$  est non vide et ne contient pas plus que la moitié d'une des  $R_i \in \mathcal{R}$  ; on peut conclure directement que le mot  $W'' \neq 1$  ainsi  $W \neq 1$  car  $W \sim W' \sim W'' \sim \dots$ . Par contre, si on arrive à un certain  $W^{(n)}$  vide, on peut conclure que le mot  $W \sim 1$ .

La théorie combinatoire de Greendlinger [12],[13] a été précédée par une profonde étude faite par Tartakovskû en 1949 qui a résolu le problème du mot pour des diverses classes de groupes. Britton [3], ..., [6] est arrivé aux mêmes résultats que Tartakovskû par une autre méthode.

### 2.3. Groupe libre à n générateurs.

Soit  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  ; le groupe libre engendré par A est le groupe

$$G = \langle A ; \emptyset \rangle.$$

#### Définition :

Un mot  $\mu \in M$  est dit réduit (ou librement réduit) si deux symboles consécutifs ne sont jamais inverses l'un de l'autre. Le même mot est dit cycliquement réduit s'il est réduit et si la première lettre de  $\mu$  (notée  $[\mu]$ ) et la dernière lettre (notée  $]\mu]$ ) sont tels que  $]\mu] \neq [\mu$ . Pour trouver la réduction libre d'un mot  $\mu \in M$ , on définit récursivement une fonction

$$\rho : M \longrightarrow M$$

de la façon suivante :

$$\rho(1) = 1$$
$$\rho(\mu.x) = \begin{cases} \rho(\mu).x, & (\text{avec } \mu \in M \text{ et } x \in A \cup \bar{A}), \text{ si } \rho(\mu) \neq \bar{x} \\ \nu & \text{si } \rho(\mu) = \nu \bar{x} \text{ où } \nu \in M. \end{cases}$$

La fonction  $\rho$  a les propriétés suivantes démontrées dans [19] :

- 1)  $\rho(\mu)$  est un mot réduit
- 2)  $\rho(\mu) \approx \mu$  ( $\approx$  signifie réduction libre)
- 3) si  $\mu$  est réduit, alors  $\rho(\mu) = \mu$
- 4)  $\rho(\mu.\nu) = \rho(\rho(\mu).\nu)$

$$5) \rho(\mu x \bar{x}) = \rho(\mu)$$

$$6) \rho(\mu x \bar{x} \nu) = \rho(\mu \nu)$$

Il en résulte que

$$\underline{\mu \approx \nu \Leftrightarrow \rho(\mu) = \rho(\nu)}$$

En effet :

\* Soient deux mots  $\mu$  et  $\nu \in M$  tels que  $\mu \approx \nu$ .

$\mathcal{R} = \emptyset$  entraîne  $\mu = \mu_0 \rightarrow \mu_1 \rightarrow \mu_2 \rightarrow \dots \rightarrow \mu_m = \nu$  en un nombre fini d'étapes en insérant ou en supprimant chaque fois une relation triviale ( $a_i \bar{a}_i$  ou  $\bar{a}_i a_i$  avec  $a_i \in A$ ). D'après la 6ème propriété de  $\rho$  on peut écrire :

$$\rho(\mu) = \rho(\mu_0) = \rho(\mu_1) = \dots = \rho(\mu_m) = \rho(\nu) \implies \rho(\mu) = \rho(\nu).$$

Donc  $\mu \approx \nu \implies \rho(\mu) = \rho(\nu)$ .

\* Réciproquement : Soient  $\mu$  et  $\nu$  deux mots de  $M$  tels que  $\rho(\mu) = \rho(\nu)$ .

D'après la 2ème propriété de  $\rho$

$$\rho(\mu) \approx \mu$$

$$\text{et } \rho(\nu) \approx \nu$$

plus l'hypothèse  $\rho(\mu) = \rho(\nu)$  on aura :  $\mu \approx \nu$ .

$\rho$  étant une fonction récursive  $\implies$  le problème du mot est résoluble dans le cas où  $\mathcal{R}$  est vide. L'ensemble des mots réduits constitue un système de représentants de  $G$ .

Exemple :  $G = \langle a, b, c, d, e ; \emptyset \rangle$  est un groupe libre à cinq générateurs.

Le problème du mot dans le groupe libre est équivalent à l'analyse syntaxique d'un langage C.F.



\* Soit S l'axiome

\* La grammaire est définie par  $V_T = A \cup \bar{A}$ ,  $V_N = S$  et les règles de production

$$\begin{array}{l}
 S \longrightarrow SS \\
 S \longrightarrow a_i S \bar{a}_i \\
 S \longrightarrow \bar{a}_i S a_i \\
 S \longrightarrow a_i \bar{a}_i \\
 S \longrightarrow \bar{a}_i a_i
 \end{array}
 \quad \Bigg| \quad (1 \leq i \leq n)$$

Cette grammaire définit l'ensemble des mots équivalents à un dans le groupe libre. On peut en déduire que cet ensemble de mots forme un langage C.F. (appelé langage de Dyck à n générateurs). On peut trouver une grammaire C.F. non ambiguë d'après [ [11] pp. 145 ].

De la même manière, pour trouver le mot réduit cycliquement, on peut définir une fonction

$$\sigma : \{ \text{des mots réduits} \} \longrightarrow \{ \text{des mots réduits} \}$$

d'une manière récursive, de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
 \sigma(1) &= 1 \\
 \sigma(x) &= x \quad \text{où } x \in A \cup \bar{A} \\
 \sigma(x \mu y) &= \begin{cases} x \mu y & \text{si } x \neq \bar{y} \\ \sigma(\mu) & \text{si } x = \bar{y} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Aussi la fonction  $\sigma$  a les propriétés suivantes démontrées dans [19] :

- 1)  $\sigma(\mu)$  est un mot cycliquement réduit
- 2)  $\sigma(\mu)$  est conjugué de  $\mu$
- 3) si  $\mu$  est cycliquement réduit,  $\sigma(\mu) = \mu$ .

On peut remarquer que c'est une propriété de fermeture. Dans le groupe libre, le problème II peut être résolu par le théorème suivant :

Théorème [19] :

Deux mots  $\mu$  et  $\nu$  (supposés réduits) sont conjugués dans le groupe libre si et seulement si  $\sigma(\mu)$  et  $\sigma(\nu)$  sont dans la même classe de permutation circulaire.

Le problème III est trivial dans le cas particulier suivant :

$\langle A ; \emptyset \rangle$  est isomorphe à  $\langle B ; \emptyset \rangle$  si et seulement si

$$\text{card } A = \text{card } B$$

N.B. Quelquefois on note  $\mathcal{A}$  par  $\mathcal{R}$ .

3. GRAPHE D'UN GROUPE FINIMENT ENGENDRE.

3.1. Définition.

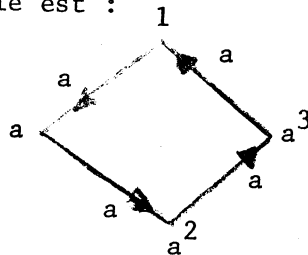
A un groupe  $G$  finiment engendré de générateurs  $a_1, a_2, \dots, a_n$  on associe un graphe orienté dont les sommets sont les éléments de  $G$  ; l'on joint un sommet  $s$  à un sommet  $s'$  par une arête d'étiquette  $a_i$  si  $s' = s a_i$ .

Remarque :

Si l'on change de système de générateurs du même groupe  $G$ , le graphe associé change en général.

Exemples :

1) Soit le groupe  $G = \langle a ; a^4 \rangle = \{1, a, a^2, a^3\}$  groupe cyclique d'ordre 4.  $A = \{a\}$  et le graphe associé est :



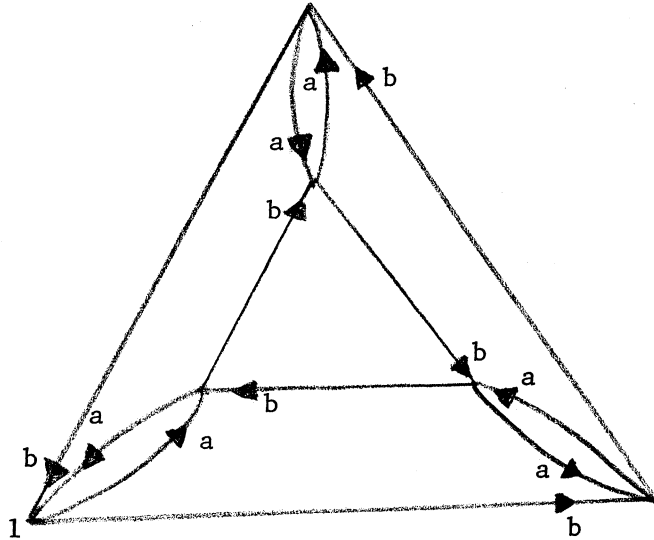
où chaque arête est étiquetée  $a$ .

2) Voici un exemple qui est plus complexe.

Le groupe symétrique de  $\{1, 2, 3\}$  a la présentation

$$G = \langle a, b ; a^2, b^3, (ab)^2 \rangle$$

Le graphe du groupe sera représenté comme suit :



Le graphe obtenu n'est pas quelconque ; il est caractérisé par le théorème suivant :

### 3.2. Caractérisation des graphes de groupe.

Théorème [19] :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un graphe  $(S, A)$  puisse être le graphe associé à un groupe engendré par  $n$  éléments, il faut que :

- 1) Ce graphe soit connexe homogène de degré  $n$  (en degré intérieur comme extérieur)
- 2) Qu'il existe une application

$$\varphi : A \longrightarrow L,$$

où  $L$  est un ensemble à  $n$  éléments, telle que :

- a) pour chaque sommet  $s$  de  $S$  la restriction de  $\varphi$  sur les arêtes d'origine  $s$  soit surjective ainsi que la restriction sur les arêtes d'extrémité  $s$ .
- b) désignant par  $\tilde{L}$  l'ensemble des éléments de  $L$  muni d'un signe ( $L^+$ ,  $L^-$ ), par  $m$  l'application de  $B \stackrel{\text{déf}}{=} (A \cup \bar{A})^*$  dans  $\tilde{L}$

$$m : B \longrightarrow \tilde{L}$$

définie par :

- $m(a) = \varphi(a)^+$  si  $a \in A$  et  $m(\bar{a}) = \varphi(a)^-$  si  $\bar{a} \in \bar{A}$   
que l'on étend aux chaînes
- $m(b_1 b_2 \dots b_n) = m(b_1) m(b_2) \dots m(b_n) \in \tilde{L}^*$ .

Si  $\pi$  et  $\pi' \in B$  vérifient  $m(\pi) = m(\pi')$  alors  $\pi$  est un cycle  
 $\Leftrightarrow \pi'$  est un cycle.

### 3.3. Lien entre graphe et présentation d'un groupe fini.

Soit un groupe  $G = \langle A ; \mathcal{R} \rangle$ . Si, dans le graphe du groupe  $G$ ,  $s_0$  est le sommet correspondant à l'élément identité  $1$  de  $G$ , alors tout mot  $W$  est uniquement représenté par un chemin issu de  $s_0$ . A un chemin correspond un mot et inversement à un mot correspond un chemin. Les relations satisfaites par la  $\langle A ; \mathcal{R} \rangle$  définissent des chemins qui sont des cycles du graphe et inversement à un chemin fermé du graphe associé correspond une relation satisfaite.

Ainsi le problème de la construction du graphe d'une présentation finie  $G = \langle A ; \mathcal{R} \rangle$  est évidemment équivalent au problème du mot pour la présentation.

Théorème :

Soit  $G$  un groupe fini donné et soit

$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  un système générateur de  $G$ . Soient  $\Gamma$  le graphe étiqueté associé à  $G$ ,  $A$  et  $\Gamma^0$  le graphe symétrique qu'il engendre. Soit  $C$  l'espace vectoriel des cycles de  $\Gamma^0$ .

- 1) A toute base des cycles de  $\Gamma^0$  on peut définir un système complet de relations [voir [19] pp. 56-67].
- 2) Il existe au moins une base de cycles telle que le système soit indépendant.

On va démontrer 2) :

Soit  $G$  un groupe fini engendré par  $A$  ayant une présentation  $\langle A ; R_1, R_2, \dots, R_q \rangle$  où le système  $R_1, \dots, R_q$  est irrédondant. Prenons tous les cycles du graphe dont le mot associé est (à une permutation circulaire près)  $R_1, R_2, \dots, R_q$ .

Ces cycles engendrent l'espace des cycles. En effet, soit  $C$  un cycle quelconque non trivial c'est-à-dire il n'y a pas une arête qui soit parcourue deux fois, et soit  $R$  la relation associée.

- ou bien  $R$  est l'un des  $R_i$ , rien à démontrer
- ou bien  $R$  est différent de tous les  $R_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, q$ .

Dans ce cas,  $R$  est déduit des  $R_i$  et on a :

$$R = T_1 R_{i_1}^{\epsilon_{i_1}} T_1^{-1} \cdot T_2 R_{i_2}^{\epsilon_{i_2}} T_2^{-1} \cdot \dots \cdot T_p R_{i_p}^{\epsilon_{i_p}} T_p^{-1} \text{ où } \epsilon_{i_j} = \pm 1.$$

Tous les  $T_j$  sont vides,  $j = 1, \dots, p$ , car on a exclu les cycles triviaux. Ainsi,

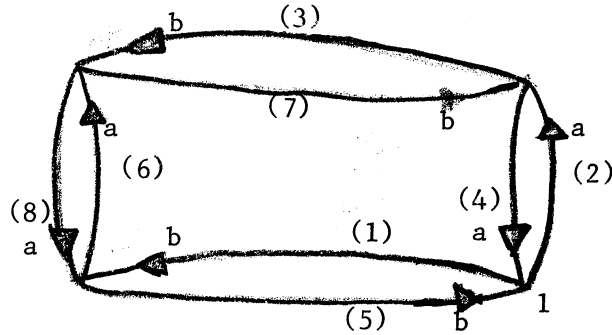
$$R = R_{i_1}^{\epsilon_{i_1}} \cdot R_{i_2}^{\epsilon_{i_2}} \cdot \dots \cdot R_{i_p}^{\epsilon_{i_p}}$$

donc  $C = C_{i_1} \oplus C_{i_2} \oplus \dots \oplus C_{i_q}$ .

où les  $C_{i_j}$  sont les cycles associés.

Exemple :

Soit le groupe fini  $G = \langle a, b ; a^2, b^2, (ab)^2 \rangle$ .  $a^2, b^2, (ab)^2$  est un système irrédondant. Le graphe associé est :



Les cycles du graphe, dont le mot associé est  $a^2, b^2, (ab)^2$  à une permutation circulaire près, sont :

(2).(4) , (6).(8) , (3).(7) , (1).(5) , (2).(3).(8).(5) et (1).(6).(7).(4).  
Ces cycles forment une base de cycles telle que le système associé soit indépendant.

4. PRESENTATION D'UN SOUS-GROUPE H D'INDEX FINI D'UN GROUPE G.

4.1. Résultat de Reidemeister-Schreier.

Soit un groupe de présentation finie

$$G = \langle a_1, a_2, \dots, a_n ; R_1, R_2, \dots, R_q, \dots, R_m \rangle$$

et soit H un sous-groupe de G d'index fini et engendré par  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k$ .  
La question qui se pose est la suivante :

Peut-on avoir une présentation de H ?

A chaque  $\mu_i$  on définit une lettre  $s_i$ . Soient

$$S = \{s_1, s_2, \dots, s_k\} \text{ et } G = (A \cup \bar{A})^* \text{ et soit } B \subseteq G$$

l'ensemble des mots dont l'élément associé dans G appartient à H et

$$U = (S \cup \bar{S})^* . \text{ Le sous-groupe H sera présenté par}$$

$$H = \langle s_1, s_2, \dots, s_k ; \sigma_1, \sigma_2, \dots \rangle$$

Le problème est de trouver les  $\sigma_i$  .

Définition :

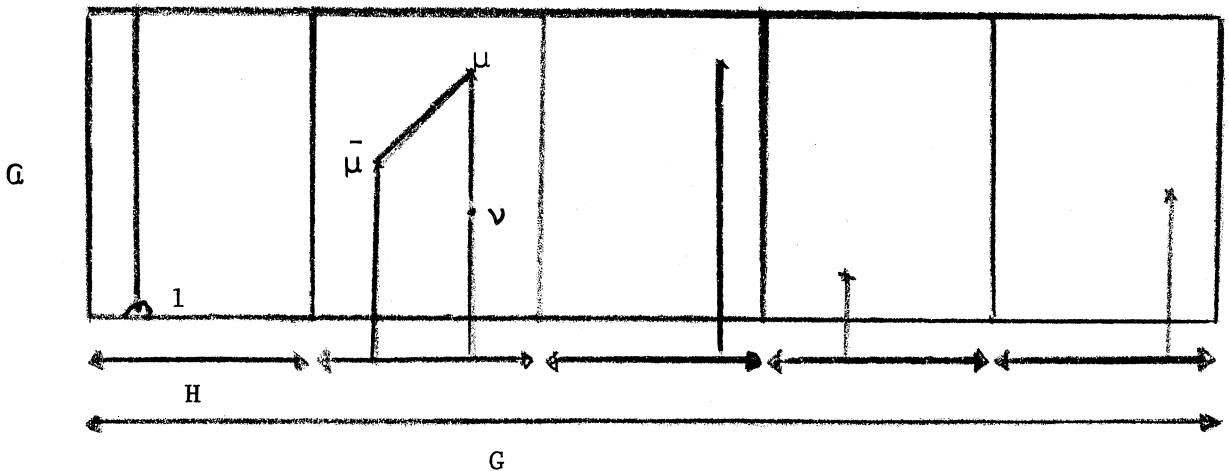
On appelle codage de H par S une application

$$\begin{aligned} \tau : \mathfrak{B} &\longrightarrow \mathfrak{L} \\ \text{où } v \in \mathfrak{B} &\longrightarrow \tau v (s_1, \dots, s_k) \end{aligned}$$

telle que  $\tau v (\mu_1, \dots, \mu_k) \approx v$ .

Supposons que H soit d'index fini dans G, ce qui veut dire que l'ensemble  $\{Hx ; x \in G\}$  des classes à droite est fini. Dans chaque classe à droite, on définit un représentant par un mot de G (ce mot étant le mot vide 1 pour la classe H). Soit T l'ensemble des mots ainsi choisis. On définit ainsi une fonction représentative de G dans T

$$\begin{aligned} G &\longrightarrow T \\ \mu &\longrightarrow \bar{\mu} \text{ avec } H\bar{\mu} = H\mu. \end{aligned}$$



Le grand rectangle représente G et chacun des petits rectangles représente les mots associés d'une classe à droite Hx. Le grand segment représente G et un petit segment représente un Hx. Les mots situés sur une même hauteur sont équivalents.

Théorème [ [19] pp. 91 ] :

Le sous-groupe H est engendré par les mots

$$\xi a_i \cdot ((\bar{\xi} a_i))^{-1} \text{ où } \xi \in T \text{ et les } a_i \in A.$$

Avec ce théorème, on peut dire qu'il existe un système de codage  $\tau$ .  $\xi a_i$  est un mot  $\mu$ .  $(\overline{\xi a_i}) = \bar{\mu} \in T$ .  $\mu$  et  $\bar{\mu}$  définissent la même classe à droite  $\rightarrow \mu \bar{\mu}^{-1} \in H$ . On représente

$$\mu_i = \xi a_i \cdot ((\overline{\xi a_i}))^{-1} \text{ par } s_{\xi, a_i} \text{ et } \nu_i = \xi a_i^{-1} \cdot ((\overline{\xi a_i^{-1}}))^{-1}$$

par  $s_{\xi a_i^{-1}, a_i}^{-1}$  car  $\mu a (\overline{\mu a})^{-1}$ , avec  $\mu = (\overline{\xi a^{-1}})$ , a pour inverse

$$\xi a^{-1} (\overline{\xi a^{-1}})^{-1}$$

D'où le codage  $\tau : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{U}$

$$\text{Soit } u = G_{i_1}^{\epsilon_1} G_{i_2}^{\epsilon_2} \dots G_{i_r}^{\epsilon_r} \in \mathcal{B} ; \tau(u) = s_{k_1, a_{i_1}}^{\epsilon_1} s_{k_2, a_{i_2}}^{\epsilon_2} \dots s_{k_r, a_{i_r}}^{\epsilon_r}$$

quand  $k_j$  est le représentant du segment initial de  $u$  précédant  $a_{i_j}$  si

$\epsilon_j = +1$  et  $k_j$  est le représentant du segment initial de  $u$  et  $a_{i_j}^{-1}$  inclu

si  $\epsilon_j = -1$ . Alors  $\tau$  est un procédé de réécriture pour  $H$ .

$$\text{d'où } H = \langle s_{\xi, a} / \xi \in T, a \in A ; \Sigma \rangle$$

$$\text{avec } \Sigma = \begin{cases} (1) : s_{\xi, a} \approx \tau [\xi a (\overline{\xi a})^{-1}] \\ (2) : \tau(\xi R \xi^{-1}) \approx 1 \text{ seulement pour } \xi \in T \text{ et } R \in \mathcal{R}. \end{cases}$$

C'est le théorème de Reidemeister.

Le système représentatif  $T$  est dit système de Schreier, si toute section commençante d'un  $\xi \in T$  est élément de  $T$  ; dans ce cas, on peut remplacer (1) dans  $\Sigma$  (ci-dessus) par

$$(1)' : s_{\xi, a}$$

quand  $\xi$  est un élément représentatif de Schreier arbitraire et  $a \in A$  ; ce qui revient à prendre moins de générateur.



Exemple :

Soit le groupe  $G = \langle x, y ; y x y x^{-1} \rangle$  et soit  $N$  le sous-groupe normal de  $G$  engendré par  $y$ . Comme un système  $T$  représentant les classes à droite de  $G$  (modulo  $N$ ), on choisit les  $x^k$ , où  $k$  est un entier quelconque. Un mot  $W(x,y)$  a pour représentant  $\bar{W} = x^k$  où  $k$  est la somme des puissances de  $x$  dans  $W$ . Ainsi  $N$  est engendré par les  $y_k$  définis par

$$y_k = x^k y x^{-k} = x^k \cdot \overline{x^{-k}} y^{-1} = s_x^k, y.$$

Soit un mot  $W(x,y) = x^2 y x^{3-1} y^{-1} x^4$  alors  $\bar{W} = x^5$ .

En outre, soit  $u = x y x^{2-1} y^{-2} x^{2-1} y$  un mot de  $\mathcal{B}$  (le  $\mathcal{B}$  relatif à  $N$ ) alors  $\tau(u) = s_{1,x} \cdot s_{x,y} \cdot s_{x,x} \cdot s_{x^2,x} \cdot s_{x^3,y^{-1}} \cdot s_{x,y} \cdot s_{x,y} \cdot s_{1,x} \cdot s_{1,y}$

en appliquant la définition de  $y_k$ , on trouve

$$\tau(u) = y_1 y_3^{-1} y_1^2 y_0.$$

#### 4.2. A propos de la détermination de l'index fini.

Todd et Coxeter ont décrit une méthode systématique pour déterminer l'index de  $H$  dans  $G$ , en énumérant les classes de  $G$  (modulo  $H$ ). Mais cette méthode n'était pas suffisante pour l'utilisation par l'ordinateur ; c'est grâce à de nombreuses recherches effectuées par Mendelsohn [20] et d'autres que la méthode est devenue exécutable et dont voici une notion générale de cet algorithme que nous exposerons sur un exemple.

Soit une présentation finie d'un groupe  $G$

$$G = \langle a_1, \dots, a_n ; R_1, R_2, \dots, R_m \rangle$$

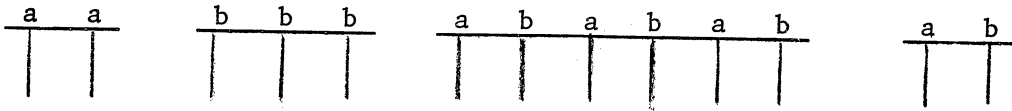
et soit  $H$  un sous-groupe de  $G$  engendré par les mots  $W_1, \dots, W_k$ .

On commence à écrire les relations  $R_i$  et les mots  $W_j$ , côte à côte respectivement, à la tête des tables (une table pour chaque  $R_i$  ou  $W_j$ ) dont chacune a  $l_{i+1}$  colonnes avec  $l_i =$  longueur de  $R_i$  ou longueur de  $W_j$  et tel que chaque générateur  $a_i$  ou  $\bar{a}_i$ , dans  $R_i$  ou  $W_j$  se trouve au sommet d'une colonne.

Par exemple : soit le groupe

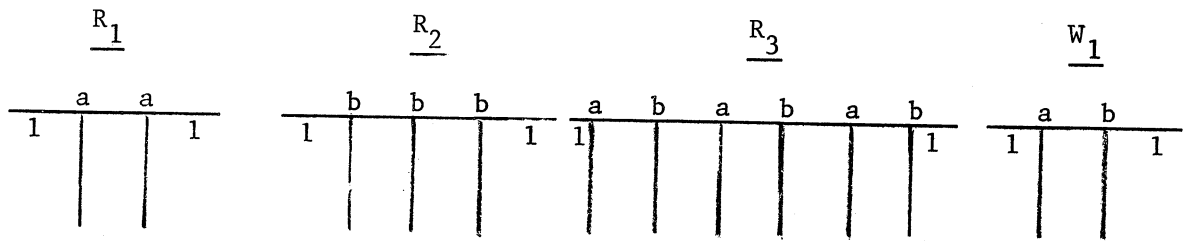
$$\langle a, b ; a^2, b^3, (ab)^3 \rangle$$

et soit H le sous-groupe de G engendré par le mot  $W_1 = ab$ . On écrit :



On remplit ces tables de la manière suivante :

- Le premier et le dernier élément de chaque  $k^{\text{ème}}$  ligne est l'entier k.
- Chaque table  $W_j$  est formée d'une seule ligne qui débute et se termine par l'entier 1
- On désigne chaque classe  $H_{g_i}$  par un entier k tel que l désigne la classe H
- Si j et k sont des entiers désignant respectivement les classes  $H_{g_j}$  et  $H_{g_k}$  et si  $a_i$  est un générateur, on fait rentrer les relations de la forme  $j a_i = k$  ou  $j \bar{a}_i = k$  dans la table en écrivant j et k côte à côte dans une paire de colonnes séparées au sommet par  $a_i$  ou  $\bar{a}_i$ .



D'où le procédé d'énumération :

Si un mot  $W_j$  est formé d'un seul générateur  $a_i$ , alors sa table représentera l'équation  $1 a_i = 1 \frac{a_i}{1|1}$ . Si ce chiffre 1 se trouve à droite ou à gauche de  $a_i$  ou  $\bar{a}_i$  dans les autres tables, un chiffre 1 sera placé de l'autre côté de  $a_i$  dans la même ligne de telle manière que les relations  $1 a_i = 1$  et  $1 \bar{a}_i = 1$  soient toujours vérifiées. Quand toutes ces possibilités ont fini, le chiffre 2 est placé dans le premier espace vide en partant de la gauche vers la droite et en parcourant toute la ligne pour toutes les tables afin de définir une relation de la forme  $1 a_\ell = 2$  ou  $2 \bar{a}_\ell = 1$  où  $a_\ell$  est un générateur se trouvant juste au sommet de la colonne de cet espace.

a a			b b b			a b a b a b						a b				
1	2	1	1		2	1	1	2	1	2	1	2	1	1	2	1
2	1	2	2	1		2	2	1					2			

Ainsi, on fait rentrer le chiffre 2 partout où c'est possible, de la même manière que tout à l'heure, et on continuera le procédé. Une nouvelle relation  $j a_i = k$  ou  $j \bar{a}_i = k$  peut être induite pour un  $a_i$ , quand une ligne sera complète, puis on introduira cette information pour définir une nouvelle classe.

a a			b b b			a b a b a b						a b					
1	2	1	1	3	2	1	1	2	1	2	1	2	1	1	2	1	
2	1	2	2	1	3	2	2	1	3				3	2			
3		3	3	2	1	3	3			3	2	1	3				

Le procédé s'arrête quand toutes les tables seront complètement remplies.

Ainsi, on a :

a a			b b b			a b a b a b						a b				
1	2	1	1	3	2	1	1	2	1	2	1	2	1	1	2	1
2	1	2	2	1	3	2	2	1	3	4	4	3	2			
3	4	3	3	2	1	3	3	4	4	3	2	1	3			
4	3	4	4	4	4	4	4	3	2	1	3	4	4			

Il arrive quelquefois de trouver deux entiers différents qui désignent une même classe (c'est-à-dire  $j a_i = k$  et  $l a_i = k$ ), dans ce cas, toutes les occurrences du plus grand entier doivent être remplacées par le plus petit entier. C'est le phénomène de redondance.

Puisque pour chaque classe  $j$ , il existe un générateur  $a_i$  tel que ou bien  $j a_i = k$ , ou bien  $j \bar{a}_i = k$  implique  $j > k$ , il est facile de lire les éléments représentant  $h_i$  des classes et on a :

$$G = H h_1 \cup H h_2 \cup \dots \cup H h_r$$

où  $r$  est l'index de  $H$  dans  $G$ .

Dans le cas de notre exemple  $r = 4$  et on a :

$h_1 = 1, h_2 = a, h_3 = b$  et  $h_4 = b a$ , alors

$$G = H \cup Ha \cup Hb \cup Hba$$

$H = \{ 1, ab, (ab)^2 \}$  d'où l'ordre de  $H$  est 3 ainsi l'ordre de  $G$  est 12 et on a :

$$G = \{ 1, ab, (ab)^2, a, aba, (ab)^2 a, b, ab^2, (ab)^2 b, ba, ab^2 a, (ab)^2 ba \}$$



## CHAPITRE II

### ETUDE DES GROUPES DONT LA PRESENTATION EST UN PRODUIT LIBRE OU UN PRODUIT LIBRE AMALGAME

En vue d'exposer la méthode de résolution du problème du mot dans le cas où  $\mathcal{R}$  est réduit à une seule relation  $\mathcal{R} = \{R\}$ , on va rappeler la notion de produit libre et celle de produit libre amalgamé.

#### 1. PRODUIT LIBRE.

##### 1.1. Présentation qui est un produit libre.

Définition :

$G = \langle X ; \mathcal{R} \rangle$  est la présentation d'un produit libre lorsque on peut partitionner  $X = X_1 \cup X_2$  ( $X_1 \cap X_2 = \emptyset$ ) et  $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$  ( $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2 = \emptyset$ ) les relations de  $\mathcal{R}_1$  sont des mots en  $X_1 \cup \bar{X}_1$  et les relations de  $\mathcal{R}_2$  sont des mots en  $X_2 \cup \bar{X}_2$ .

Propriété [19] :

Désignant par A et B les groupes

$$A = \langle X_1 ; \mathcal{R}_1 \rangle \text{ et } B = \langle X_2 ; \mathcal{R}_2 \rangle .$$

Le groupe G est uniquement déterminé par A et B. Plus précisément, G contient deux sous-groupes  $\bar{A}$  et  $\bar{B}$  respectivement isomorphes à A et B tels que  $\bar{A} \cap \bar{B} = \{1\}$ . On identifie  $\bar{A}$  à A et  $\bar{B}$  à B et le groupe G se note :

$$G = A * B.$$

Exemple :

La présentation  $\langle a, b ; a^5, b^3 \rangle$  est celle d'un produit libre des groupes cycliques respectifs

$$A = \langle a ; a^5 \rangle \text{ et } B = \langle b ; b^3 \rangle$$

1.2. Manipulation explicite d'un produit libre de deux groupes A,B  
tels que  $A \cap B = 1$ .

Définition 1 :

On appelle séquence toute suite finie  $(x_1 \dots x_n)$  (éventuellement vide  $n = 0$ ) d'éléments de  $A \cup B$ . Si  $x_i \neq 1$  et  $x_i \in A$  (resp.  $B$ ) on notera  $F(x_i) = A$  (resp.  $B$ ).

On dit qu'une séquence  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  est alternée lorsque ou bien  $n = 0$  (séquence vide) ou bien  $\forall i \ x_i \neq 1$  et  $F(x_i) \neq F(x_{i+1})$ .

Définition 2 :

On définit l'opération de réduction  $\pi$  de l'ensemble des séquences dans lui-même récursivement par :

-  $\pi( ) = ( )$  pour la séquence vide

-  $\pi(x_1) = \begin{cases} x_1 & \text{si } x_1 \neq 1 \\ ( ) & \text{si } x_1 = 1 \end{cases}$  pour la séquence à un élément

- et si  $\pi(x_1, \dots, x_{n-1}) = (y_1, \dots, y_r)$

alors  $\pi(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) = \begin{cases} (y_1, \dots, y_r) & \text{si } x_n = 1 \\ (y_1, \dots, y_{r-1}) & \text{si } x_n = \bar{y}_r \\ (y_1, \dots, y_r \cdot x_n) & \text{si } x_n \neq \bar{y}_r \text{ et } F(x_n) = F(y_r) \\ (y_1, \dots, y_r, x_n) & \text{si } F(x_n) \neq F(y_r). \end{cases}$

Propriétés :

Soit  $\xi$  une séquence  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

L'opération de réduction  $\pi$  a les propriétés suivantes :

-  $\pi(\xi)$  est alternée

- si  $\xi$  est alternée, alors  $\pi(\xi) = \xi$

-  $\pi(\xi, \xi') = \pi(\pi(\xi), \xi')$  où  $\xi'$  est une autre séquence

-  $\pi(\xi, x, \bar{x}, \xi') = \pi(\xi, \xi')$ .

Théorème [19] :

Le produit libre  $G = A * B$  est isomorphe à l'ensemble des séquences alternées muni du produit.

$\xi \cdot \xi' = \pi (\xi, \xi')$  où  $(\xi, \xi')$  est la mise bout à bout des séquences  $\xi$  et  $\xi'$ .

Exemple :

Dans l'exemple 1.1., les séquences suivantes sont alternées

$$\begin{aligned} \xi &= (a, b^2, a^3) & \xi' &= (a^2, b, a, b^2) \\ \text{alors } \xi \cdot \xi' &= \pi (a, b^2, a^3, a^2, b, a, b^2) = (a^2, b^2) \end{aligned}$$

Remarque :

Si l'on assimile chaque séquence alternée  $(x)$  de longueur 1 à l'élément  $x \neq 1$  (appartenant à  $A$  ou  $B$ ), il est clair que tout élément  $g$  (défini par sa séquence alternée  $(x_1, \dots, x_n)$ ) s'exprime

$$g = (x_1) \cdot (x_2) \cdot \dots \cdot (x_n) = x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n$$

de manière unique.

### 1.3. Problème du mot dans un produit libre $A * B$ .

Soit  $G = \langle X, Y ; \mathcal{S}, \mathcal{C} \rangle$  une présentation du produit libre des groupes

$$A = \langle X ; \mathcal{S} \rangle \text{ et } B = \langle Y ; \mathcal{C} \rangle .$$

Nous allons justifier très rapidement que lorsque le problème du mot dans les présentations de  $A$  et  $B$  est résoluble, alors il l'est dans la présentation de  $G$ .

Soit  $W$  un mot par rapport aux lettres de  $X \cup Y \cup \bar{X} \cup \bar{Y}$ . On découpe le mot en syllabes

$$W = W_1 W_2 \dots W_q$$

où chaque  $W_i$  (appelé syllabe) est un mot par rapport à  $X \cup \bar{X}$  (resp.  $Y \cup \bar{Y}$ ), l'élément  $W_{i+1}$  étant un mot par rapport à  $Y \cup \bar{Y}$  (resp.  $X \cup \bar{X}$ ).



Cette décomposition est d'ailleurs unique. Chaque mot  $W_i$  définit un élément  $[W_i]$  du sous-groupe A (resp. B). On appellera  $q$  la longueur syllabique de  $W$ .

Exemple :

Dans  $G = \langle a, b ; a^5, b^3 \rangle$   
 le mot  $a^2 b^4 \bar{b}^4 \bar{a}^3 b^3 \bar{a}^2$   
 a pour longueur syllabique 5 et ses syllabes sont :

$$a^2, b^4 \bar{b}^4, \bar{a}^3, b^3, \bar{a}^2.$$

Pour savoir si  $W \sim 1$ , on peut supposer au départ que  $W$  est librement réduit, car dans tout groupe, chaque mot est équivalent au mot librement réduit associé.

Partons alors de la décomposition syllabique de

$$W = W_1 W_2 \dots W_q$$

On définit récursivement  $\alpha(W)$  de la manière suivante :

- si  $q = 0$   $\alpha( ) = ( )$
- si  $q = 1$   $\alpha(W_1) = \begin{cases} ( ) & \text{si } W_1 \sim 1 \\ (W_1) & \text{sinon} \end{cases}$

- si  $q = r - 1 \geq 1$ . Supposons que

$$\alpha(W_1, W_2, \dots, W_{r-1}) = (u_1, u_2, \dots, u_s) \quad (s \geq 0)$$

alors

$$\alpha(W_1, W_2, \dots, W_r) = \begin{cases} \text{si } W_r \sim 1 \text{ alors } (u_1, \dots, u_s) \\ \text{sinon si } F[u_s] \neq F[W_r] \text{ alors } (u_1, \dots, u_s, W_r) \\ \text{sinon si } u_s W_r \sim 1 \text{ alors } (u_1, \dots, u_{s-1}) \\ \text{sinon } (u_1, \dots, u_s, W_r) \end{cases}$$

Il est clair alors que

$$W \sim 1 \Leftrightarrow \alpha(W) = ( )$$

Par ailleurs, le calcul de  $\alpha$  ne conduit qu'à la recherche de l'équivalence à 1 de mots appartenant à A ou B.

Exemple :

Dans l'exemple 1.1., le mot  $W = a b^2 \bar{a}^5 b a^4$  est équivalent à 1.

En effet : par lecture successive de ses syllabes, on obtient par  $\alpha$

a  
a, b<sup>2</sup>  
a, b<sup>2</sup>  
a  
( )

Remarque :

Dans la recherche de la réponse à la question  $W \sim 1$ , on peut supposer que les syllabes  $W_1, W_q$  sont tels que

$$F [W_1] \neq F [W_q].$$

1.4. Produit libre de plusieurs groupes.

Ayant défini le produit libre de deux groupes, on peut l'étendre à plusieurs groupes  $G_1, G_2, \dots, G_n$ . Désignons par  $G_i$  et  $R_i$  respectivement l'ensemble des générateurs et l'ensemble des relations de  $G_i$

$$\forall i = 1, 2, \dots, n.$$

Posons  $G = \bigcup_{i=1}^n G_i$  et

$$R = \bigcup_{i=1}^n R_i, \text{ alors le groupe}$$

$$G = \langle G ; R \rangle$$

est le produit libre de  $G_1, \dots, G_n$ .

Le produit libre est commutatif et associatif

$$A * B = B * A$$

$$\text{et } (A * B) * C = A * (B * C)$$

où A, B et C sont trois présentations des groupes.

Remarque :

Un groupe libre  $\langle x, y, \dots, t ; \emptyset \rangle$   
 peut être considéré comme le produit libre de  $\langle x ; \emptyset \rangle * \langle y ; \emptyset \rangle * \dots * \langle t ; \emptyset \rangle$

## 2. PRODUIT LIBRE AVEC SOUS-GROUPES AMALGAMES.

Le groupe  $\langle a, b ; a^4, b^6 \rangle$  est le produit libre de deux groupes cycliques  $\langle a ; a^4 \rangle$  et  $\langle b ; b^6 \rangle$ . Le groupe  $\langle a, b ; a^4, b^6, a^2 b^3 \rangle$  ( $\langle a, b ; a^4, b^6, a^2 = b^3 \rangle$ ) n'a pas la présentation d'un produit libre de deux groupes mais s'en rapproche d'une certaine manière.

### 2.1. Produit libre amalgamé.

Définition :

Soit le groupe  $G$  présenté par

$$G = \langle a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m ; R(a_i), \dots, S(b_j), \dots, U_1(a_i) = V_1(b_j), \dots, U_q(a_i) = V_q(b_j) \rangle$$

et soient

$A'$  le sous-groupe de  $G$  engendré par  $[a_1], \dots, [a_n]$ ,

$B'$  le sous-groupe de  $G$  engendré par  $[b_1], \dots, [b_m]$ ,

$H'$  le sous-groupe de  $A'$  engendré par  $[U_1(a_i)], \dots, [U_q(a_i)]$ ,

$K'$  le sous-groupe de  $B'$  engendré par  $[V_1(b_j)], \dots, [V_q(b_j)]$ ,

$G$  est appelé le produit libre de  $A'$  et  $B'$  avec les sous-groupes  $H'$  et  $K'$  amalgamés par l'application  $[U_i(a_i)] \dashrightarrow [V_i(b_j)]$ .

Exemples :

$$\begin{aligned} - \text{ Si } G &= \langle a, b ; a^4, b^6, a^2 = b^3 \rangle, \text{ alors} \\ A' &= \langle a ; a^4 \rangle = \{ 1, [a], [a]^2, [a]^3 \} \\ B' &= \langle b ; b^6 \rangle = \{ 1, [b], [b]^2, [b]^3, [b]^4, [b]^5 \} \\ H' &= \{ 1, [a]^2 \} \\ K' &= \{ 1, [b]^3 \} \end{aligned}$$

H' et K' sont amalgamés par l'application

$$\begin{array}{ccc} \{ 1, [a]^2 \} & \longrightarrow & \{ 1, [b]^3 \} \\ 1 & \longrightarrow & 1 \\ [a]^2 & \longrightarrow & [b]^3 \end{array}$$

- Autre exemple

$$G = \langle x, y ; x^3 \bar{y}^3 \rangle, \text{ alors}$$

$$A' = \langle x ; \emptyset \rangle$$

$$B' = \langle y ; \emptyset \rangle$$

$$H' = \langle x^3 ; \emptyset \rangle$$

$$K' = \langle y^3 ; \emptyset \rangle$$

H' et K' sont amalgamés par l'application  $x^3 \longrightarrow y^3$ .

La question qui se pose est la suivante :

Quand, dans le groupe G, les sous-groupes A' et B' auront-ils les présentations naturelles

$$\langle a_1, \dots, a_n ; R(a_i), \dots \rangle$$

et  $\langle b_1, \dots, b_m ; S(b_j), \dots \rangle$  respectivement ?

La réponse est donnée par le théorème suivant démontré dans [19].

Théorème [19] :

Appelons

$$A = \langle a_1, \dots, a_n ; R(a_i), \dots \rangle$$

$$B = \langle b_1, \dots, b_m ; S(b_j), \dots \rangle$$

et  $G = \langle a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m ; R(a_i), \dots, S(b_j), \dots, U_1(a_i) = V_1(b_j), \dots$

$$U_q(a_i) = V_q(b_j) \rangle .$$

Si A' est le sous-groupe de G engendré par  $[a_1], \dots, [a_n]$ ,

et B' le sous-groupe de G engendré par  $[b_1], \dots, [b_m]$ ,

alors A est isomorphe à A' par l'application  $[a_i]_A \longrightarrow [a_i]_G$

et B est isomorphe à B' par l'application  $[b_j]_B \longrightarrow [b_j]_G$

si et seulement si l'application

$$\left[ U_i(a_\ell) \right]_A \longrightarrow \left[ V_i(b_j) \right]_B$$

induit un isomorphisme  $\varphi$  entre le sous-groupe H de A engendré par les  $\left[ U_i(a_\ell) \right]_A$  et le sous-groupe K de B engendré par les  $\left[ V_i(b_j) \right]_B$ .

Remarques :

- Si on a  $A \cap B = 1$ , on appelle G produit libre de A et B avec les sous-groupes amalgamés H et K par  $\varphi$  et on note G par :

$$\ast (A, B, H, K, \varphi).$$

comme  $\varphi$  est un isomorphisme ; on appelle G le produit libre de A et B avec un sous-groupe amalgamé H. A et B sont appelés les facteurs de l'amalgamation et K sera déterminé par les générateurs  $V_i$  qui seront déterminés par les générateurs  $U_i$  et l'isomorphisme  $\varphi$ .

$$G = \ast (A, B, H, K, \varphi).$$

Le produit libre des groupes avec un sous-groupe amalgamé est une généralisation du produit libre, ce dernier en effet n'est autre que le produit libre amalgamé avec le sous-groupe trivial  $\{1\}$ .

## 2.2. Manipulation explicite du produit libre amalgamé.

Elle est nettement plus délicate et même dans le cadre du théorème précédent. Nous renvoyons à [ [19] pp. 201].

## 2.3. Aperçu du problème du mot dans un produit libre amalgamé.

Supposons que nous sommes dans les conditions du théorème précédent et que nous avons choisi des éléments représentant les classes à droite de  $(A \text{ mod. } H)$  et  $(B \text{ mod. } K)$ . On désigne par  $\{C_1, C_2, \dots\}$  l'ensemble de ces représentants et par  $\bar{g}$  le représentant de g dans  $(A \text{ mod. } H)$  ou  $(B \text{ mod. } K)$ .

Pour savoir si un mot  $W \sim 1$ , on peut supposer au départ que W est librement réduit.

Partons alors de la décomposition syllabique de

$$W = W_1 W_2 \dots W_q.$$

On définit récursivement  $\beta(W)$  de la manière suivante :

-  $\beta ( ) = 1$  l'élément identité de H

$$- \beta (W_r) = \begin{cases} W_r, & \text{si } W_r \in H ; \\ \varphi^{-1} (W_r), & \text{si } W_r \in K ; \\ (h, \overline{W_r}) \text{ où } h = W_r \overline{W_r}^{-1}, & \text{si } W_r \in A, W_r \notin H ; \\ (h, \overline{W_r}) \text{ où } h = \varphi^{-1} (W_r \overline{W_r}^{-1}), & \text{si } W_r \in B, W_r \notin K ; \end{cases}$$

Supposons que

$$\beta (W_2, \dots, W_r) = (h, C_2, C_3, \dots, C_q) \text{ où } h \in H ; \text{ alors}$$

$$\beta(W_1, W_2, \dots, W_r) = \begin{cases} * (W_1 \cdot h, C_2, C_3, \dots, C_q), & \text{si } W_1 \in H ; \\ * (\varphi^{-1}(W_1) \cdot h, C_2, \dots, C_q), & \text{si } W_1 \in K ; \\ * (h', \overline{W_1 h}, C_2, C_3, \dots, C_q) \text{ où } h' = (W_1 h) \cdot (\overline{W_1 h})^{-1}, \\ & \text{si } W_1 \in A, W_1 \notin H, C_2 \notin A ; \\ * (h', \overline{W_1 \varphi(h)}, C_2, C_3, \dots, C_q) \text{ où } h' = \varphi^{-1} [W_1 \varphi(h) \cdot \overline{W_1 \varphi(h)}^{-1}], \\ & \text{si } W_1 \in B, W_1 \notin K, C_2 \notin B ; \\ * (W_1 h C_2, C_3, \dots, C_q), & \text{si } W_1 \in A, W_1 \notin H, C_2 \in A, \\ & W_1 h C_2 \in H ; \\ * (\varphi^{-1}(W_1 \varphi(h) C_2), C_3, \dots, C_q), & \text{si } W_1 \in B, W_1 \notin K, \\ & C_2 \in B, W_1 \varphi(h) C_2 \in K ; \\ * (h', W_1 h C_2, C_3, \dots, C_q) \text{ où } h' = (W_1 h C_2) \cdot (\overline{W_1 h C_2})^{-1}, \\ & \text{si } W_1 \in A, W_1 \notin H, C_2 \in A, W_1 h C_2 \notin H ; \\ * (h', \overline{W_1 \varphi(h) C_2}, C_3, \dots, C_q) \text{ où} \\ & h' = \varphi^{-1} [(W_1 \varphi(h) C_2) \cdot \overline{(W_1 \varphi(h) C_2)}^{-1}], \\ & \text{si } W_1 \in B, W_1 \notin K, C_2 \in B, W_1 \varphi(h) C_2 \notin K. \end{cases}$$

Remarque : Le point (.) signifie l'élément associé dans H, c'est-à-dire  $x.y = [xy]$ .

En utilisant cette fonction récursive  $\beta$  Magnus [ [19] pp. 201 ] a démontré que :

A chaque élément  $[W]$  de G, on peut associer une séquence unique

$$(h, C_1, C_2, \dots, C_r).$$

telle que

- h est un élément, éventuellement 1, de H
- $C_i$  est un représentant de (A mod. H) ou de (B mod. K)
- $C_i \neq 1$
- $C_i$  et  $C_{i+1}$  ne sont pas à la fois dans A ou B
- si  $h', C'_i$  sont les éléments de G qui correspondent à h,  $C_i$  par les homomorphismes  $[a_j] \rightarrow [a'_j]$  et  $[b_\ell] \rightarrow [b'_\ell]$  de A dans G et de B dans G respectivement ; alors

$$[W] = h' C'_1 C'_2 \dots C'_r$$

Soit un mot W de syllabes  $W_1, W_2, \dots, W_r$  ; on applique  $\alpha$  à  $W_1, W_2, \dots, W_r$ , en tenant compte des groupes A et B seulement, c'est-à-dire du groupe  $A * B$ , on aura la séquence  $u_1, u_2, \dots, u_\ell$ . Ensuite, on applique  $\beta$  à la séquence  $u_1, u_2, \dots, u_\ell$ . On obtient la séquence unique

$$(h, C_1, C_2, \dots, C_q).$$

Il en résulte que :

$$W \sim 1 \Leftrightarrow \beta(\alpha(W)) = 1.$$

Ainsi,  $\beta$  et  $\alpha$  sont bien définis d'une manière récursive et si  $\varphi$  est constructif, on pourra décider si W est équivalent ou non à 1.

Exemple :

Soit le groupe  $G = \langle a, b ; a^9, b^{12}, a^3 = b^4 \rangle$

On a successivement :

$$A = \langle a ; a^9 \rangle$$

$$B = \langle b ; b^{12} \rangle$$

$$H = \{ 1, a^3, a^6 \}$$

$$K = \{ 1, b^4, b^8 \}$$

H et K sont deux groupes cycliques d'ordre trois et l'application  $a^3 \rightarrow b^4$  induit un isomorphisme  $\varphi$  entre H et K. En utilisant la méthode de Mendelsohn, on peut écrire :

$$A = H \cup H a \cup H a^2$$

$$\text{et } B = K \cup K b \cup K b^2 \cup K b^3.$$

Le mot  $W = a^6 b^8 a^6 b^{12}$  est équivalent à 1.

En effet : par lecture successive de ses syllabes, on obtient par  $\alpha$

$$a^6, b^8, a^6$$

puis on obtient par  $\beta$

$$a^6$$

$$\varphi^{-1}(b^8) \cdot a^6 = a^6 \cdot a^6 = a^3$$

$$a^6 \cdot a^3 = a^9 = 1.$$





CHAPITRE III

GROUPES AVEC UNE SEULE RELATION DEFINIE.

On rappelle que le problème du mot en général est indécidable. Pour étudier les groupes qui possèdent une présentation ayant une seule relation définie, on applique la théorie du produit libre, et du produit libre amalgamé. On démontre que le problème du mot dans ce cas est résoluble grâce au théorème d'indépendance de Freiheitssatz. [19].

Lemme :

Soit  $S_1 \subset S_2 \subset \dots \subset S_n \subset \dots$  une séquence d'ensembles de symboles.

Soit  $T_1 \subset T_2 \subset \dots \subset T_n \subset \dots$  une séquence d'ensembles de mots,

où  $T_i$  est un ensemble de mots par rapport aux symboles de  $S_i$ . Soit

$G_i = \langle S_i ; T_i \rangle$  et supposons que pour chaque  $i$ , le sous-groupe de  $G_i$  engendré par les symboles de  $S_{i-1}$  est isomorphe à  $G_{i-1}$  sous l'application identique.

Démontrons qu'en posant  $S = \bigcup_{i \geq 1} S_i$ ,  $T = \bigcup_{i \geq 1} T_i$  et  $G = \bigcup_{i \geq 1} G_i$ ,  $G$  est isomorphe à  $\langle S ; T \rangle$ .

1) -  $G_n$  peut être assimilé à un ensemble  $W_n$  de mots en  $S_n$ . En effet :

$G_1$  peut être assimilé à un ensemble  $W_1 \subset (S_1 \cup \bar{S}_1)^*$ . On peut représenter

$G_2 \setminus G_1$  par des mots  $W_2$  en  $S_2$

d'où  $W_1 \subset W_2 \subset \dots \subset W_n \subset \dots$

$W = \bigcup_{n \geq 1} W_n$  représente alors par (une bijection appropriée) les

éléments de  $G = \bigcup_{n \geq 1} G_n$ . On peut y définir un produit induit (qui n'est plus

la concaténation) de telle sorte que  $W$  soit un groupe isomorphe à  $G$ . Montrons que  $W \simeq \langle S ; T \rangle$ .

2) - Nous pouvons définir  $\pi : S \longrightarrow W$  par :

$s \in S$  donc  $s \in S_n - S_{n-1}$  alors  $\pi(s)$  est l'élément de  $W_n$  tel que

$s \underset{n}{\sim} \pi(s)$ . Il est clair que  $\pi(S)$  engendre  $W$  pour le produit induit dans  $W$ .

Par suite, il suffit de démontrer (étant donnée la propriété universelle d'une présentation) que

$$\begin{cases} \sigma \in (S \cup \bar{S})^* \\ \pi(\sigma) = 1 \text{ dans } W \Leftrightarrow \sigma \underset{n}{\sim} 1 \text{ dans } \langle S ; T \rangle, \end{cases}$$

où  $\pi(\sigma) = \pi(s_1)^{\epsilon_1} \cdot \pi(s_2)^{\epsilon_2} \cdot \dots \cdot \pi(s_k)^{\epsilon_k}$  (avec  $\sigma = s_1^{\epsilon_1} s_2^{\epsilon_2} \dots s_k^{\epsilon_k}$ ).

\* Pour cela : si  $\sigma \in T$  donc  $\sigma \in T_n - T_{n-1}$  donc  $\pi(\sigma) \in W_n$  et comme

$$\pi(\sigma) \underset{n}{\sim} \sigma \underset{n}{\sim} 1 \text{ d'où } \pi(\sigma) = 1.$$

\* De même : si  $\pi(\sigma) = 1$ , or  $\sigma \in (S_n \cup \bar{S}_n)^*$  pour un certain  $n$ .

Donc  $\sigma \underset{n}{\sim} \pi(\sigma) = 1$  dans  $W_n$ . Par suite  $\sigma$  est déduit de  $T_n$  et  $\sigma \underset{n}{\sim} 1$  dans

$$\langle S ; T \rangle$$

### THEOREME D'INDEPENDANCE

Théorème :

Soit  $R(a_1, a_2, \dots, a_n)$  ( $n \geq 2$ ) un mot cycliquement réduit par rapport à  $a_1, a_2, \dots, a_n$  qui contient  $a_n$  ; le sous-groupe de

$$G = \langle a_1, a_2, \dots, a_n ; R(a_1, a_2, \dots, a_n) \rangle$$

engendré par  $A_1 = \{a_1, a_2, \dots, a_{n-1}\}$  est librement engendré par  $A_1$ .

Donc chaque relation non triviale de  $G$  doit contenir  $a_n$ .

Remarque :

$G$  peut avoir un nombre infini de générateurs. La relation définie  $R$  engendre seulement un nombre fini de générateurs. Les générateurs qui ne figurent pas dans  $R$  engendrent librement un sous-groupe  $H$  de  $G$ , alors  $G$  sera considéré comme le produit libre de  $H$  et le sous-groupe  $G'$  de  $G$  défini par les générateurs qui figurent dans  $R$  et la relation définie  $R$ .

Par exemple si :

$$G = \langle a, b, c, d, e ; a^2 b^2 e^2 \rangle, \text{ alors}$$
$$H = \langle c, d ; \emptyset \rangle, \quad G' = \langle a, b, e ; a^2 b^2 e^2 \rangle$$

et  $G = H * G' = \langle c, d ; \emptyset \rangle * \langle a, b, e ; a^2 b^2 e^2 \rangle.$

Démonstration :

Compte tenu de la remarque précédente et du fait que le produit libre de deux groupes libres est un groupe libre, on peut supposer que tous les générateurs de  $G$  figurent dans  $R$  et pour faciliter l'expression de la solution, on note :  $a_n$  par  $t$

et  $a_1, a_2, \dots$  par  $b, c, \dots$ .

$$\text{Ainsi, } G = \langle b, c, \dots, t ; R(b, c, \dots, t) \rangle.$$

Pour démontrer ce théorème, on va utiliser le raisonnement par induction sur la longueur de la relation définie  $R$ , (notée  $l(R)$ ).

\* Le théorème est vrai si  $l(R) = 1$  (cela est trivial).

\* Supposons que le théorème reste vrai pour tous les groupes avec une relation définie  $R$ , où  $l(R) \leq r - 1$  et démontrons-le pour  $l(R) = r$ .

Nous étudierons deux cas :

A) :  $R$  contient deux générateurs.

B) :  $R$  contient trois générateurs ou plus.

Notation :

On désigne par  $d_a(R)$  la somme des exposants du générateur  $a$  dans  $R$ .

- Si  $R$  contient un seul générateur, cela veut dire  $R = t^r$ , alors

$G = \langle t ; t^r \rangle$  est manifestement le groupe cyclique d'ordre  $r$ .

A) :  $R$  contient deux générateurs d'où

$$G = \langle b, t ; R(b, t) \rangle.$$

A1) : Supposons que  $d_t(R) \neq 0$ .

Dans ce cas, si  $b$  est d'ordre fini, cela revient à dire qu'il existe un entier  $k$  tel que  $b^k \simeq 1$ , donc  $b^k$  appartient au sous-groupe normal  $N$  de  $G$  engendré par  $R$ , d'où

$$b^k = \prod_i S_i R^{\epsilon_i} S_i^{-1} \quad \text{où } S_i \in (A \cup \bar{A})^*, A = \{b, t\} \text{ et } \epsilon_i = \pm 1 \forall i.$$

$$\text{Alors, } k = d_b(b^k) = d_b\left(\prod_i S_i R^{\epsilon_i} S_i^{-1}\right) = \sum_i d_b(R^{\epsilon_i}) = \left(\sum_i \epsilon_i\right) d_b(R);$$

$$0 = d_t(b^k) = \sum_i d_t(R^{\epsilon_i}) = \left(\sum_i \epsilon_i\right) d_t(R).$$

Comme  $d_t(R) \neq 0$ , on doit avoir  $\left(\sum_i \epsilon_i\right) = 0$ , alors  $k = 0$ , ainsi  $b$  a un ordre infini dans  $\langle b, t; R(b, t) \rangle$  et engendre librement un groupe.

A2) :  $d_t(R) = 0$ .

Dans ce cas, on va examiner le comportement de  $b$  dans le sous-groupe normal  $N$  de  $G$  engendré par  $b$ . Pour cela, il faut essayer de présenter  $N$  en utilisant le procédé de réécriture de Reidemeister-Schreier. On prend comme système représentatif de Schreier pour  $G \text{ mod. } N$  l'ensemble de  $t^k$ , où  $k$  parcourt tous les entiers.  $N$  est engendré par  $b$  et les conjugués de  $b$  ( $t^k b^\ell t^{-k}$  ou  $t^k b^{-\ell} t^{-k}$ ). Ainsi, un mot  $W(b, t)$  définit un élément de  $N$  si et seulement si  $d_t(W) = 0$ ; d'où le représentant  $\bar{W}$  d'un mot  $W \text{ mod. } N$  sera  $t^k$ , où  $k = d_t(W)$ . On peut conclure que  $N$  est engendré par les éléments  $b_k$  définis par  $b_k = t^k b t^{-k} = t^k \cdot b \cdot \overline{(t^k b)^{-1}}$ , et pour chaque mot  $W$  qui définit un élément de  $N$ , nous obtenons une chaîne  $\tau(W)$  de  $W$  par rapport aux termes  $b_k$ ; ceci de la manière suivante :

Chaque terme  $b^\epsilon$ , ( $\epsilon = \pm 1$ ), dans  $W$  est remplacée par  $b_k^\epsilon$  où  $k$  est la somme des exposants des symboles  $t$  qui précèdent cet élément particulier  $b^\epsilon$  dans  $W$ . Ainsi, le mot

$$W = t^2 b t^3 b^{-1} t^{-4} b^2 t^{-1} b$$

appartient à  $N$  car  $d_t(W) = 0$  d'où

$$\tau(W) = b_2 b_5^{-1} b_1^2 b_0.$$

Il est clair que ce procédé de codage  $R \longrightarrow \tau(R)$  est tel que  $\ell(\tau(R)) < \ell(R)$  car  $t$  figure dans  $R$  au moins une fois et pas dans  $\tau(R)$ . Si on adopte la notation

$$\tau(R) = P(\dots, b_k, \dots) = P_0 \text{ alors}$$

$$\tau(t^m R t^{-m}) = P(\dots, b_{k+m}, \dots) = P_m,$$

$N$  sera engendré par les  $b_k$  et aura comme relations définies les  $P_i$ .

$$N = \langle \dots, b_{-1}, b_0, b_1, \dots ; \dots, P_{-1}, P_0, P_1, \dots \rangle.$$

Montrons que  $b$  est d'ordre infini dans

$$G = \langle b, t ; R(b, t) \rangle.$$

Or,  $b = t^0 b t^{-0} = b_0$  ;  $R$  est cycliquement réduit et  $d_t(R) = 0$ , ainsi  $R \neq t^\alpha b^\beta t^\gamma$  où  $\alpha, \gamma \neq 0$ , et  $\alpha + \gamma = 0$  car dans ce cas  $R$  n'est pas cycliquement réduit et on peut le remplacer par  $R = b^\beta$ , cas déjà étudié. Donc  $R$  contient un sous-mot de la forme  $b^\alpha t^\beta b^\gamma$  où  $\alpha, \beta$  et  $\gamma \neq 0$ . Si la somme des exposants de  $t$  dans le segment initial de  $R$  précédant  $b^\alpha$  est  $k$ , en appliquant  $\tau$  à  $b^\alpha t^\beta b^\gamma$ , on aura :  $\dots b_k^\alpha b_{k+\beta}^\gamma \dots$ .

Comme  $R$  est cycliquement réduit, par conséquent  $\tau(R) = P_0 \implies k + \beta \neq k$  (notons  $q = k + \beta$ ). Ainsi,  $P_0$  doit contenir au moins deux  $b_i$  différents ( $b_k$  et  $b_q$ ).

Soient  $m$  et  $M$  les indices minimum et maximum respectivement de  $b$  dans  $P_0$ ,  $m < M$ . Pour chaque entier  $i$ , on va définir

$$N_i = \langle b_{m+i}, b_{m+i+1}, \dots, b_{M+i} ; P_i \rangle$$

$$\text{où } N_0 = \langle b_m, b_{m+1}, \dots, b_M ; P_0 \rangle.$$

Comme la longueur de  $P_i$  est inférieure à celle de  $R$  pour tout  $i$  on a :

$$(1) :: \{ b_{m+i}, b_{m+i+1}, \dots, b_{M+i-1} \}$$

engendre un sous-groupe libre de  $N_i$ , de même pour

$$(2) :: \{ b_{m+i+1}, \dots, b_{M+i} \}$$

car  $b_{M+i}$  et  $b_{m+i}$  figurent dans  $P_i$ , et ceci reste vrai pour n'importe quel sous-ensemble de (1) et (2).

On désigne par

$$N_{0,1} = \langle b_m, b_{m+1}, \dots, b_M, b_{M+1} ; P_0, P_1 \rangle$$

le produit libre de  $N_0$  et  $N_1$  avec le sous-groupe libre dans chacun librement engendré par  $b_{m+1}, b_{m+2}, \dots, b_M$  amalgamé par l'application identique  $\varphi = \text{id.}$

Comme  $N_0 \subset N_{0,1}$  et

$$N_0 = \langle b_m, b_{m+1}, \dots, b_M ; P_0 \rangle,$$

il suit que  $b_m, b_{m+1}, \dots, b_{M-1}$  engendrent librement un sous-groupe libre dans  $N_{0,1}$ , aussi dans

$$N_{-1} = \langle b_{m-1}, b_m, \dots, b_{M-1} ; P_{-1} \rangle.$$

$N_{-1,1}$  est le produit libre de  $N_{-1}$  et  $N_{0,1}$  amalgamé par le sous-groupe librement engendré par  $b_m, b_{m+1}, \dots, b_{M-1}$  dans  $N_{-1}$  et  $N_{0,1}$  ( $\varphi$  sera l'application identique  $\varphi = \text{id.}$ ) ;

$$N_{-1,1} = \langle b_{m-1}, b_m, b_{m+1}, \dots, b_{M-1}, b_M, b_{M+1} ; P_{-1}, P_0, P_1 \rangle.$$

De même, puisque  $N_1 \subset N_{0,1} \subset N_{-1,1}$ ,

$(b_{m+2}, \dots, b_{M+1})$  engendrent librement un sous-groupe libre de  $N_{-1,1}$ . On considère maintenant

$$N_{-1,2} = N_{-1,1} * N_2, \text{ puis } N_{-2,2} = N_{-2} * N_{-1,2}, \dots.$$

En continuant ainsi, on obtient la chaîne des groupes

$$(3) :: N_0 \subset N_{0,1} \subset N_{-1,1} \subset \dots \subset N_{-i+1,i} \subset N_{-i,i} \subset N_{-i,i+1} \subset \dots,$$

où  $N_{-i,i}$  est le produit libre de  $N_{-i}$  et  $N_{-i+1,i}$  amalgamé par un sous-groupe libre, et  $N_{-i,i+1}$  est le produit libre de  $N_{-i,i}$  et  $N_{i+1}$  avec un sous-groupe libre amalgamé. D'après le lemme démontré au début de ce chapitre, on peut conclure que  $N$  est l'union de cette chaîne (3) de groupes. Puisque chaque  $N_i$  est un sous-groupe d'un certain groupe de (3), alors  $N_i$  est un sous-groupe de  $N$ . Etant donné que  $m < M$  entraîne n'importe quel générateur de  $N_i$  engendre un groupe libre dans  $N_i$  donc dans  $N$ . Mais il existe un certain entier  $i_0$  tel que  $b_0 \in N_{i_0}$ , ainsi  $b_0$  engendre un groupe libre dans  $N_{i_0}$  donc dans  $N$ , ainsi  $b$  engendre un groupe libre dans  $G$  car  $N$  est un sous-groupe de  $G$ .

Exemple :

Soit le groupe

$$G = \langle b, t ; t^{-1} b t b^2 t b^{-3} t^{-1} \rangle$$

$$d_t(R) = 0, \tau(R) = b_{-1} b_0^2 b_1^{-3} \text{ d'où } m = -1 \text{ et } M = 1.$$

$$N = \langle \dots, b_{-1}, b_0, b_1, \dots ; \dots, b_{-1} b_0^2 b_1^{-3}, \dots \rangle$$

$$N_i = \langle b_{i-1}, b_i, b_{i+1} ; b_{i-1} b_i^2 b_{i+1}^{-3} \rangle$$

$$N_{0,1} = \langle b_{-1}, b_0, b_1, b_2 ; b_{-1} b_0^2 b_1^{-3}, b_0 b_1^2 b_2^{-3} \rangle = N_0 * N_1$$

$$N_{-1,1} = \langle b_{-2}, b_{-1}, b_0, b_1, b_2 ; b_{-2} b_{-1}^2 b_0^{-3}, b_{-1} b_0^2 b_1^{-3}, b_0 b_1^2 b_2^{-3} \rangle =$$

$$N_{-1} * N_{0,1}.$$

Ici, on peut choisir  $N_{i_0} = N_0$ .

B) :  $R$  contient au moins trois générateurs  $b, c, \dots, t$ .

B1) : La somme des exposants d'un générateur de  $R$ , autre que  $t$ , est nulle.  
Par exemple  $d_b(R) = 0$ .



On va démontrer qu'il n'existe pas de relations  $\mathcal{S}(b, c, \dots)$  de  $G$  qui ne contiennent pas  $t$  ; pour montrer ceci, on va supposer le contraire c'est-à-dire on suppose qu'il existe une telle relation  $\mathcal{S}(b, c, \dots)$ .

Comme  $R(b, c, \dots, t)$  est la relation définie de  $G$  et  $d_b(R) = 0$ , on doit avoir  $d_b(\mathcal{S}) = 0$  pour la même raison que précédemment. De même, on va utiliser le même raisonnement que pour -A2- sous une forme plus détaillée. Comme  $d_b(R) = 0$ , il est naturel de considérer le sous-groupe normal  $N$  de  $G$  engendré par  $c, \dots, t$  c'est-à-dire par tous les générateurs de  $G$  en excluant  $b$ . Un mot  $W(b, c, \dots, t)$  définit un élément de  $N$  si et seulement si  $d_b(W) = 0$ . Pour obtenir une présentation de  $N$ , nous utilisons un procédé de réécriture  $\tau$  de Reidemeister-Schreier qui a comme système représentatif de Schreier  $\{b^k, k \text{ un entier quelconque}\}$ .

Nous notons les éléments  $b^k c b^{-k}, \dots, b^k t b^{-k}$  par

$c_k, \dots, t_k$  respectivement.

Le représentant de  $W(b, c, \dots, t)$  est  $b^k$  où  $k = d_b(W)$ .

Pour représenter un élément  $V(b, c, \dots, t)$  de  $N$  par rapport aux  $c_k, \dots, t_k$ , on remplacera chaque symbole  $c^\epsilon, \dots, t^\epsilon$  de  $V$ , ( $\epsilon = \pm 1$ ), à l'aide de  $\tau$ , par  $c_k^\epsilon, \dots, t_k^\epsilon$ , où  $k$  est la somme des exposants de  $b$  du segment initial de  $V$  précédant  $c^\epsilon, \dots, t^\epsilon$ , respectivement.

Par exemple :  $\tau(b c t d c^2 t^2 b^{-2} t^{-2} d b t c) = c_1 t_1 d_1 c_1^2 t_1^2 t_{-1}^{-2} d_{-1} t_0 c_0$ .

$$\text{On pose } \begin{cases} \tau(R) & = P(\dots, c_k, \dots, t_k, \dots) & = P_0 \\ \tau(b^m R b^{-m}) & = P(\dots, c_{k+m}, \dots, t_{k+m}, \dots) & = P_m \end{cases}$$

Ainsi,  $N$  sera présenté par

$$(4) :: N = \langle \dots, c_{-1}, c_0, c_1, \dots, t_{-1}, t_0, t_1, \dots ; \dots, P_{-1}, P_0, P_1, \dots \rangle.$$

On va démontrer que les générateurs de  $N$  autres que les  $t_i$ , ( $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ), engendrent librement un groupe libre.

R étant cycliquement réduit,  $\tau(R) = P_0$  l'est aussi par rapport aux  $(c_k, \dots, t_k)$ . En outre, t figure dans R, il suit que  $P_0$  contient quelques  $t_k$ . Soient m et M respectivement les indices minimum et maximum de t dans  $P_0$  et soit  $N_i$  engendré par tous les générateurs de (4) à l'exception des  $t_j$  où  $j < m + i$  et  $j > M + i$ , et soit

$P_i = \tau(b^i R b^{-i}) = P(\dots, c_{k+i}, \dots, t_{k+i}, \dots)$  la seule relation définie de  $N_i$ . On a :

$$(5) :: N_i = \langle \dots, c_{-1}, c_0, c_1, \dots, t_{m+i}, \dots, t_{M+i} ; P_i \rangle .$$

R contient b, donc  $\tau(R) = P_0$  a une longueur plus petite que celle de R. On obtient les  $P_i$  par une simple translation des indices, donc on peut appliquer l'hypothèse d'induction sur les  $N_i$ . Les générateurs de (5), sauf  $t_{m+i}$  (ou  $t_{M+i}$ ) engendrent librement un sous-groupe libre de  $N_i$ .

Soit  $N_{0,1} = \langle \dots, c_{-1}, c_0, c_1, \dots, t_m, t_{m+1}, \dots, t_{M+1} ; P_0, P_1 \rangle$ ,  
(on trouve ici tous les générateurs de (4) sauf les  $t_k$  pour  
 $k < m$  et  $k > M + 1$ ),

le produit libre de  $N_0$  et  $N_1$  amalgamé par le sous-groupe librement engendré par  $\dots, c_{-1}, c_0, c_1, \dots, t_{m+1}, \dots, t_M$  et par l'application identique ( $\varphi = \text{id.}$ ).

Comme  $N_0 \subset N_{0,1}$ , alors les éléments  $\dots, c_{-1}, c_0, c_1, \dots, t_m, t_{m+1}, \dots, t_{M-1}$  engendrent librement un sous-groupe libre de  $N_{0,1}$  et ainsi on peut définir

$$N_{-1,1} = \langle \dots, c_{-1}, c_0, c_1, \dots, t_{m-1}, t_m, \dots, t_M, t_{M+1} ; P_1, P_0, P_1 \rangle$$

comme étant le produit libre de  $N_{-1}$  et  $N_{0,1}$  amalgamé par le sous-groupe librement engendré par  $\dots, c_{-1}, c_0, c_1, \dots, t_m, \dots, t_{M-1}$  et par l'application identique ( $\varphi = \text{id.}$ ).

$$N_1 \subset N_{0,1} \subset N_{-1,1}$$

d'où les éléments  $\dots, c_{-1}, c_0, c_1, \dots, t_{m+2}, \dots, t_{M+1}$  engendrent librement un sous-groupe libre de  $N_{-1,1}$ , donc on peut définir  $N_{-1,2}$  et ainsi de suite, on construit une chaîne de groupes

$$N_0 \subset N_{0,1} \subset N_{-1,1} \subset \dots \subset N_{-i+1,i} \subset N_{-i,i} \subset N_{-i,i+1} \subset \dots$$

où  $N_{-i,i}$  est le produit libre de  $N_{-i}$  et  $N_{-i+1,i}$  amalgamé par le sous-groupe librement engendré par

$$\dots, c_{-1}, c_0, c_1, \dots, t_{m-i+1}, \dots, t_{M-i}$$

et par l'application identique ( $\varphi = \text{id.}$ ).

De même  $N_{-i,i+1}$  est le produit libre de  $N_{-i,i}$  et  $N_{i+1}$  amalgamé par le sous-groupe librement engendré par

$$\dots, c_{-1}, c_0, c_1, \dots, t_{m+i+1}, \dots, t_{M+i}$$

et par l'application identique ( $\varphi = \text{id.}$ ).

En utilisant le résultat du lemme, on peut en déduire que  $N$  est l'union de cette chaîne. Puisque les générateurs de  $N_i$  autres que les  $t_k$  engendrent librement un groupe libre (hypothèse d'induction) en particulier ceux de  $N_0$ ; et comme  $N_0 \subset N$  alors, les générateurs de  $N$  autres que les  $t_k$  engendrent librement un groupe libre dans  $N$ .

Reconsidérons la relation  $\mathcal{S}(b, c, \dots)$ . On remarque que  $d_b(\mathcal{S}) = 0$ ; donc si l'on suppose que  $\mathcal{S}$  est cycliquement réduit et différent du mot vide, alors  $\tau(\mathcal{S})$  est cycliquement réduit et il ne contient aucun  $t_k$  car  $t$  ne figure pas dans  $\mathcal{S}(b, c, \dots)$ . Il contient du même coup d'autres générateurs que  $b$ ; par conséquent  $\tau(\mathcal{S})$  est une relation non vide de  $N$  où ne contient aucun  $t_k$ , ce qui est contraire à ce qu'on vient de démontrer. Ainsi chaque relation non triviale de  $G$  contient  $t$ , et par suite les générateurs de  $G$  autres que  $t$  engendrent librement un sous-groupe libre.

B2) : La somme des exposants de chaque générateur dans R, autre que t, est non nulle.

On va essayer de ramener ce cas au cas B1.

Comme R contient au moins trois générateurs b, c, t, on pose  $\beta = d_b(R)$  et  $\gamma = d_c(R)$  où  $\beta$  et  $\gamma$  sont différents de zéro. On va appliquer homomorphiquement

$$G = \langle b, c, \dots, t ; R(b, c, \dots, t) \rangle$$

dans le groupe

$$E = \langle x, c, \dots, t ; R(x^\gamma, c, \dots, t) \rangle$$

en appliquant  $b \longrightarrow x^\gamma, c \longrightarrow c, \dots, t \longrightarrow t$ .

Pour démontrer que b, c, ... sans t engendrent librement un sous-groupe libre de G, il suffit de démontrer que x, c, ... sans t engendrent librement un sous-groupe libre de E, car on a ici une application homomorphe et on remarque que si l'image homomorphe des générateurs est un ensemble libre de générateurs, l'ensemble original des générateurs l'est aussi.

On pose  $y = c x^\beta$  et en appliquant la transformation de Tietze à E on obtient :

$$\begin{aligned} E &= \langle x, c, \dots, t ; R(x^\gamma, c, \dots, t) \rangle \\ &\simeq \langle x, c, \dots, t, y ; R(x^\gamma, c, \dots, t), y = c x^\beta \rangle \\ &\simeq \langle x, y, \dots, t ; R(x^\gamma, yx^{-\beta}, \dots, t) \rangle . \end{aligned}$$

$$d_x(R(x^\gamma, yx^{-\beta}, \dots, t)) = \beta \gamma - \gamma \beta = 0.$$

Si l'on réduit cycliquement  $R(x^\gamma, yx^{-\beta}, \dots, t)$  t y figure encore ; sinon,  $R(x^\gamma, (c x^\beta) x^{-\beta}, \dots, t)$  cycliquement réduit ne contient pas t, d'où  $R(x^\gamma, c, \dots, t)$  et  $R(b, c, \dots, t)$  cycliquement réduits ne contiennent pas t ; or, ce résultat est inexact car  $R(b, c, \dots, t)$  contient t.

$R(x^\gamma, y \bar{x}^{-\beta}, \dots, t)$  peut aussi avoir par rapport aux  $x, y, \dots, t$  une longueur supérieure à celle de  $R(b, c, \dots, t)$  par rapport à  $b, c, \dots, t$  ; mais cette augmentation de la longueur n'est due qu'à des symboles  $x$ . Quand on réécrit en utilisant le symbole  $x$  pour définir les indices des nouveaux générateurs la longueur de  $\tau(R(x^\gamma, y \bar{x}^{-\beta}, \dots, t))$ , tout compte fait, aura diminué et par suite

$$l(\tau(R(x^\gamma, y \bar{x}^{-\beta}, \dots, t))) < l(R(b, c, \dots, t)).$$

Ainsi, le théorème est vérifié.

APPLICATION DU THEOREME D'INDEPENDANCE POUR RESOUDRE LE PROBLEME DU MOT :

Soit  $G = \langle a_1, a_2, \dots, a_n ; R(a_1, \dots, a_n) \rangle$  une présentation d'un groupe avec une seule relation définie  $R(a_1, \dots, a_n)$  supposée cycliquement réduite, et soit  $N$  le sous-groupe normal du groupe libre.

$$F = \langle a_1, \dots, a_n ; \emptyset \rangle$$

engendré par  $R(a_1, \dots, a_n)$ .  $N$  est engendré par  $R$  et les conjugués de  $R$ .  $G$  peut s'écrire

$$G = F/N.$$

Soit un mot  $W$  de  $(A \cup \bar{A})^*$ , où  $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ , et on suppose que  $W$ , cycliquement réduit, est différent du vide.

Théorème :

La condition nécessaire pour que  $W$  soit équivalent à 1 est que  $d_{a_i}(W) / d_{a_i}(R)$  soit un entier  $\forall i = 1, \dots, n$ .

Si  $W$  est équivalent à 1 dans  $G$  et pas dans  $F$ , c'est-à-dire  $W \in N$ , alors  $W$  est librement équivalent à un produit fini

$$T_1 R^{\epsilon_1} T_1^{-1} \dots T_q R^{\epsilon_q} T_q^{-1} \text{ où } \epsilon_i = \pm 1 \text{ pour } i = 1, 2, \dots, q ;$$

$$W \approx \prod_{i=1}^q T_i R^{\epsilon_i} T_i^{-1}$$

où les  $T_i$  appartiennent à  $F$ , sont librement réduits et ne contiennent pas un sous-mot de la forme  $R^{\pm 1}$ . D'où la condition nécessaire

$$d_{a_i}(W) \text{ est divisible par } d_{a_i}(R) \forall \text{ le générateur } a_i.$$

Remarque :

Soit un mot  $V$  qui s'écrit  $V = s_1 s_2 s_3$  où  $s_1, s_2$  et  $s_3$  sont aussi des mots ; alors  $s_1, s_2$  ou  $s_3$  sont dits des sous-mots de  $V$ .

Etant donné un mot quelconque  $W$  où on veut étudier son équivalence à 1. On commence par le test de la divisibilité. Si  $d_{a_i}(W) / d_{a_i}(R)$  est vrai pour tous les  $a_i$ , alors le mot  $W$  peut être équivalent à 1 ; par contre, s'il existe au moins un  $a_{i_0}$  tel que  $d_{a_{i_0}}(R)$  ne divise pas  $d_{a_{i_0}}(W)$ , alors  $W$  n'est pas équivalent à 1.

Dans le cas où le mot  $W$  peut être équivalent à 1, on va résoudre un problème plus général :

l'extension du problème du mot.

Définition :

Soit  $A \neq \emptyset$ ,  $A$  éventuellement vide, et soit un élément  $W \in (A \cup \bar{A})^*$ . L'extension du problème du mot, c'est d'étudier la possibilité d'exprimer l'élément  $W$  par rapport aux seuls générateurs de  $A$ , et dans le cas positif de l'exprimer au moins d'une manière.  $A$  est appelé un sous-ensemble propre de  $A$ .

En utilisant le résultat du théorème d'indépendance et sa méthode de démonstration, on peut en déduire que :

Résoudre l'extension du problème du mot par rapport à un sous-ensemble propre quelconque  $A$ , revient à le résoudre par rapport à un sous-ensemble propre maximal  $B$  qui contient  $A$ , puis on réduit librement l'élément exprimé en fonction des termes de  $B$ .



## CHAPITRE IV

### ALGORITHMES

Nous expliquons d'abord brièvement chacun des algorithmes que nous avons programmés, la plupart avec un exemple au moins pour faciliter leur compréhension, puis nous donnons un organigramme de chaque algorithme, cet organigramme étant suivi du programme correspondant.

#### 1. PRESENTATION D'UN GROUPE FINI.

Chaque groupe dénombrable est isomorphe à un groupe de transformations, lequel est isomorphe à un sous-groupe d'un groupe à deux générateurs [ [19] pp. 259 ] ; ceci reste vrai pour un groupe fini. Nous nous bornerons à trouver une présentation d'un groupe fini de transformations à deux générateurs. En utilisant la représentation graphique d'un groupe et le résultat de [2], on peut trouver une présentation d'un groupe de transformations.

A partir de deux permutations quelconques de  $\sigma_n$ , on définit la table de Cayley du groupe et d'après cette table on construit la matrice d'incidence (sommets-branches) du graphe associé. Comme c'est un groupe à deux générateurs, la matrice est de catégorie deux [2] et sa dernière ligne est la somme des autres lignes restantes (modulo 2) car dans chaque colonne, il y a seulement deux composantes de valeur 1. Soit  $p$  l'ordre du groupe. La matrice sera d'ordre  $(p, 2p)$ . Comme la dernière ligne est une combinaison linéaire des autres (modulo 2), on peut l'éliminer et on aura une matrice d'ordre  $(p-1, 2p)$ . Par la technique de Jordan, on peut l'écrire sous la forme  $M = [I, K]$  où  $I$  et  $K$  sont respectivement la matrice unité d'ordre  $(p-1, p-1)$  et une matrice d'ordre  $(p-1, p+1)$ . En partant de la matrice  $A = \begin{bmatrix} T & \\ & K, I \end{bmatrix}$  où  $I$  est la matrice unité d'ordre  $(p+1, p+1)$ , on aura une base de cycles du graphe associé (chaque ligne de  $A$  forme un élément de cette base). On associe les relations algébriques à cette base et on aura un système de relations (en général redondantes même après avoir enlevé les relations algébriques qui sont égales à une autre ou qui s'obtiennent par permutation circulaire d'une autre).

Ainsi, on a une présentation d'un groupe fini.



Exemple : Soient les deux permutations de  $\sigma_4$

$$\begin{array}{l} \text{a (notée 2)} \quad (1 \ 2 \ 3 \ 4) \xrightarrow{2} (1 \ 2 \ 4 \ 3) \\ \text{et b (notée 3)} \quad (1 \ 2 \ 3 \ 4) \xrightarrow{3} (2 \ 1 \ 4 \ 3) \end{array}$$

La table de Cayley est la suivante :

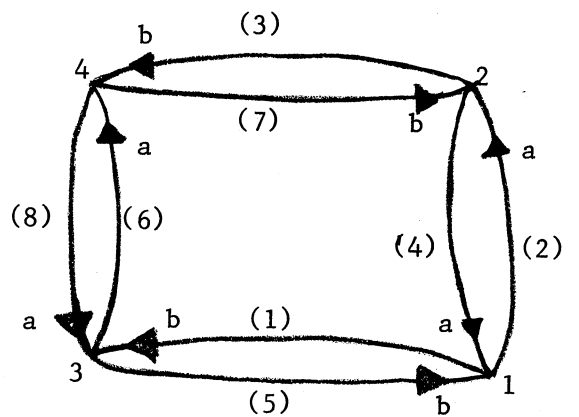
G	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	1	4	3
3	3	4	1	2
4	4	3	2	1

où 1 et 4 sont respectivement la permutation identique et la permutation

$$(1 \ 2 \ 3 \ 4) \xrightarrow{4} (2 \ 1 \ 3 \ 4)$$

La matrice d'incidence (sommets-branches) est d'ordre (4,8).

M	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
1	1	1		1	1			
2		1	1	1			1	
3	1				1	1		1
4			1			1	1	1



On remarque que la 4ème ligne est égale à

$$M(1,*) \oplus M(2,*) \oplus M(3,*).$$

Ainsi on peut simplifier M en M'

M'	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
1	1	1		1	1			
2		1	1	1			1	
3	1				1	1		1

Puis on aura par la technique de Jordan

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
1	1				1	1		1
2		1		1		1		1
3			1			1	1	1

= (I,K)

d'où la matrice  $A = [T_K, I_5] =$

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
1		1		1				
2	1				1			
3	1	1	1			1		
4			1				1	
5	1	1	1					1

Les cycles de base sont :

(2).(4) , (1).(5) , (1).(2).(3).(6) , (3).(7) et (1).(2).(3).(8).

Les relations algébriques associées sont :

aa, bb,  $\bar{b}ab\bar{a}$ , bb et  $\bar{b}aba$ .

En simplifiant, on obtient : aa, bb,  $\bar{b}ab\bar{a}$  et  $\bar{b}aba$ .

On remarque que  $\bar{b}ab\bar{a}.aa \approx \bar{b}aba$ .

## 2. RESOLUTION DU PROBLEME DU MOT.

### 2.1. Représentation utilisée.

On représente un mot  $a_1^{\epsilon_1} a_2^{\epsilon_2} \dots a_n^{\epsilon_n}$ , par une suite de (couples d'entiers) séparés par un blanc, les couples étant séparés par une virgule. Pour indiquer la fin d'un mot, on met 0 0. Les résultats sont représentés par une suite de la forme  $A i j A i' j' \dots$  où  $(i, j; i', j', \dots)$  sont des entiers et un couple  $(i, j)$  représente respectivement l'indice et l'exposant d'un générateur.

### Présentation de l'algorithme pratique du problème du mot.

Soit le groupe

$$G = \langle a_1, \dots, a_n ; R(a_1, \dots, a_n) \rangle$$

et soit  $W$  un mot par rapport aux générateurs  $a_1, \dots, a_n$ .

$W$  est-il équivalent à un ?

Pour répondre à cette question, on va appliquer les deux phases essentielles (d) et (e) suivantes, successivement plusieurs fois si cela est nécessaire.

(d) : On effectue le test de divisibilité (cf. Ch. III) ; si ce test est vérifié, alors  $W$  peut être équivalent à 1, sinon il n'est pas équivalent à 1 et le problème de décision a une réponse négative.

(e) : Dans le cas où la divisibilité est vérifiée, on va essayer de réduire le problème du mot à un problème où la relation définie  $R'$  (déduite de  $R$ ) est résoluble ou vide et ceci en réduisant chaque fois la longueur de la relation définie correspondante, c'est-à-dire en suivant le même principe de la démonstration du théorème d'indépendance.

On suppose qu'il existe un générateur  $a_{i_0}$  qui figure dans  $R$  tel que  $d_{a_{i_0}}(R) = 0$ , sinon le programme prévoit de faire une transformation sur  $R$ . On calcule  $\tau(W) = W'$ ,  $W'$  appartient au sous-groupe normal de  $G$  engendré par  $A - a_{i_0}$  (où  $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ ).

On décompose  $W'$  en ses formes canoniques par rapport aux sous-groupes  $N_i$  de  $N$  qui ont les relations correspondantes  $P_i$  dont la longueur est inférieure à la longueur de  $R$  et où  $\varphi$  est l'application identique. Pour chaque syllabe  $W'_j$  de  $W'$ , on recommence (d) et (e) et puis on appliquera les propriétés du produit libre et du produit libre amalgamé pour les sous-groupes  $N_i$ . Toutes les autres techniques de la résolution pratique du problème du mot, c'est-à-dire de la programmation, se trouvent plus détaillées dans le programme.

Exemples :

-1- Soit le groupe  $G = \langle a, b ; aba^2b \rangle$  et soit le mot  $W = aba^{-1}b^{-1}$  dont on va étudier son équivalence à un.

(d) : On remarque facilement que :

$$d_a(W)/d_a(R) = 0/3 = 0 \text{ et } d_b(W)/d_b(R) = 0/2 = 0, \text{ d'où } W \text{ peut être équivalent à 1.}$$

(e) :  $R = aba^2b$  n'est pas résoluble ;  $d_a(R)$  et  $d_b(R)$  sont différents de zéro, ainsi on doit faire la transformation

$$a \longrightarrow x^2 \text{ et } b \longrightarrow yx^{-3} \text{ ce qui nous donne}$$

$$\begin{aligned} \langle a, b ; aba^2b \rangle &\xrightarrow{\text{hom}} \langle x, b ; x^2 b x^4 b \rangle \xrightarrow{i} \langle x, b, y ; x^2 b x^4 b, y = bx^3 \rangle \\ &\xrightarrow{i} \langle x, y ; x^2 y x^{-3} x^4 y x^{-3} \rangle \end{aligned}$$

En réduisant cycliquement  $x^2 y x^{-3} x^4 y x^{-3}$ , on aura :

$$R'(x, y) = x^{-1} y x y.$$

En appliquant la même transformation au mot  $W$ , on obtiendra le mot

$$W'(x, y) = x^2 y x^{-3} x^{-2} x^3 y^{-1} \approx x^2 y x^{-2} y^{-1} \text{ (cycliquement).}$$

Ainsi, tout revient à étudier l'équivalence à 1 de  $W'$  dans le groupe

$$G' = \langle x, y ; x^{-1} y x y \rangle$$

(On remarque que  $l(R) = 5 > l(R') = 4$ ).

(d) : Comme on a fait un changement de générateurs, on recommence le test de divisibilité par rapport à  $x$  et  $y$  et on trouvera :

$d_x(W') = d_x(R') = 0$  et  $d_y(W') / d_y(R') = 0/2 = 0$ , d'où  $W'$  peut être équivalent à 1.

(Le deuxième exemple montrera qu'à ce stade le travail s'arrête, ce qui montre chaque fois qu'on fait un changement sur les générateurs, il faut recommencer le test).

(e) :  $R' = x^{-1} y x y$  n'est pas résoluble, mais  $d_x(R') = 0$  ; ainsi, soit  $N$  le sous-groupe normal de  $G'$  engendré par  $y$ .

$$P'_0 = \tau_x (x^{-1} y x y) = y_{-1} y_0$$

$$P'_i = \tau_x (x^i \cdot x^{-1} y x y \cdot x^{-i}) = y_{i-1} y_i \quad \text{et}$$

$$N = \langle \dots, y_{-1}, y_0, y_1 \dots ; \dots, P'_{-1}, P'_0, P'_1, \dots \rangle$$

$$W'_0 = \tau_x (x^2 y x^{-2} y^{-1}) = y_2 y_0^{-1}.$$

Etudions l'équivalence à 1 de  $W'_0$  dans  $N$  en tenant compte du produit libre amalgamé des sous-groupes

$$N_i = \langle y_{i-1}, y_i ; y_{i-1} y_i \rangle \text{ de } N \text{ avec } \varphi = \text{id}.$$

On remarque que chaque relation  $P'_i$  est résoluble par rapport à un quelconque de ses générateurs.

$$P'_2 = y_1 y_2, \text{ d'où } y_2 = y_1^{-1} \text{ et } W'_0 = y_2 y_0^{-1} \simeq y_1^{-1} y_0^{-1}.$$

En plus,  $P'_1 = y_0 y_1$ , d'où  $y_1 = y_0^{-1}$  et  $W' \simeq y_1^{-1} y_0^{-1} \simeq y_0 y_0^{-1} \simeq 1$ .

Ainsi, le mot  $W = aba^{-1}b^{-1} \simeq 1$  dans le groupe  $G = \langle a, b ; aba^2b \rangle$  c'est-à-dire  $ab = ba$  ; alors on peut conclure que ce groupe est commutatif, ce qui facilite le traitement du problème du mot pour un autre mot  $V$  de ce groupe.

- 2 - Soit le groupe

$$G = \langle a, b ; a^{-2} b^2 a^{-2} b^2 \rangle \text{ et soit le mot}$$

$W = b^4 a^2 b^{-2} a^{-2} b^4 a^{-2} b^{-2} a^2$  dont on veut étudier l'équivalence à 1.

On suit la même marche que tout à l'heure ; on aura successivement :

(d) :  $d_a(W)/d_a(R) = 0/4 = 0$  et  $d_b(W)/d_b(R) = 4/4 = 1$ , alors le mot donné

$W$  peut être équivalent à 1.

(e) :  $R$  n'est pas résoluble ;  $d_a(R)$  et  $d_b(R)$  sont différents de zéro.

On fait la transformation  $a \longrightarrow x^4$  et  $b \longrightarrow yx^4$  dans  $G$  et on aura :

$$G' = \langle x, y ; x^{-4} y x^4 y x^{-4} y x^4 y \rangle$$

et  $W' = y x^4 y x^4 y x^4 y x^8 y^{-1} x^{-4} y^{-1} x^{-8} y x^4 y x^4 y x^4 y x^{-8} y^{-1} x^{-4} y^{-1} x^8$

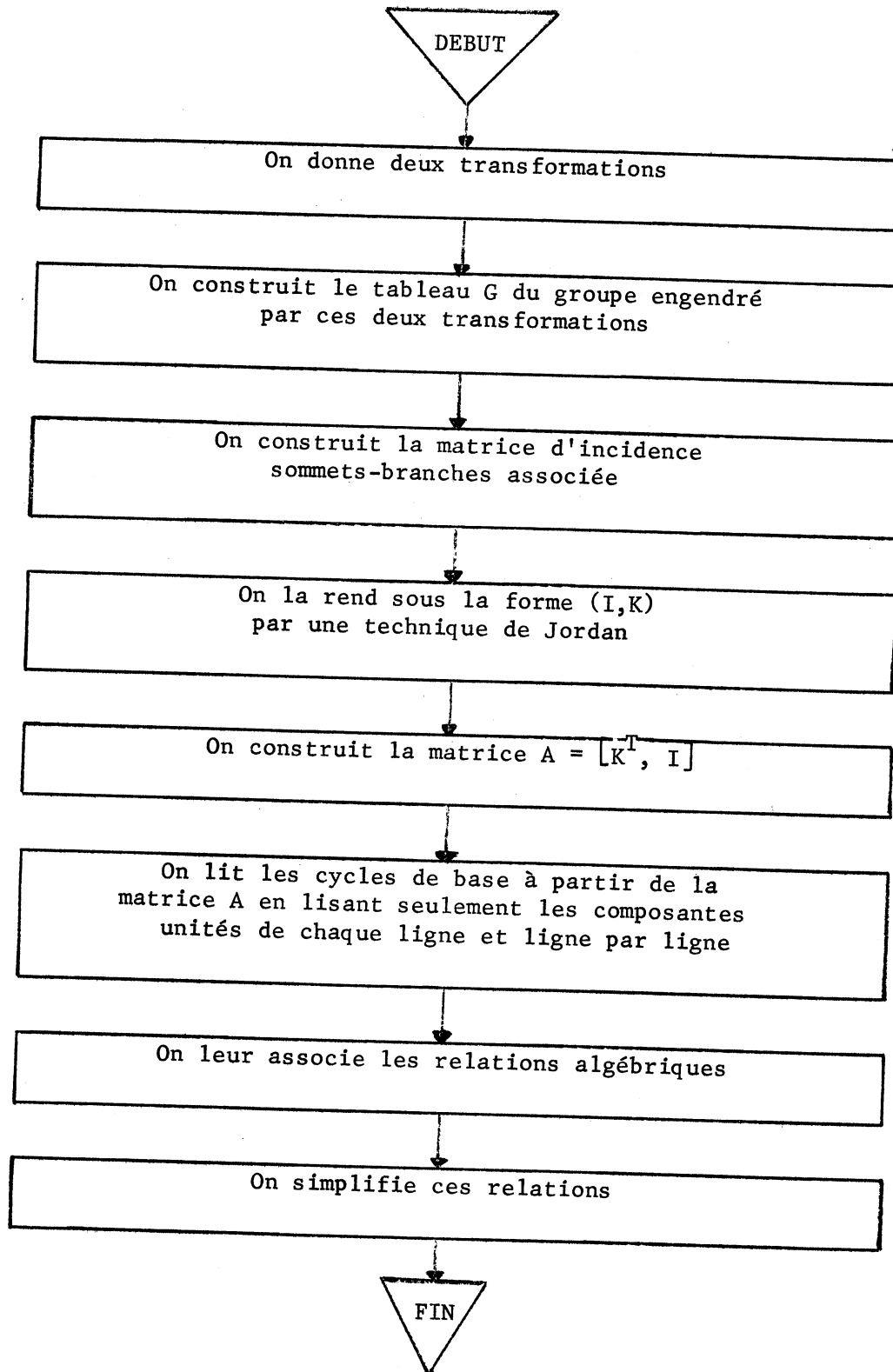
(d) :  $d_x(W')/d_x(R') = 16/0$  n'est pas divisible et par suite on conclut que le mot  $W'$  (donc  $W$ ) n'est pas équivalent à 1.

### 3. LANGAGE DE DYCK.

Pour cet algorithme trivial, nous renvoyons à l'organigramme qui précède le programme.



ORGANIGRAMME DE LA PRESENTATION D'UN GROUPE FINI







```

PRESGRO: PROC OPTICNS(MAIN) ;
  DCL(N,N1,N2,I,J,K,L,C1,C2) DEC FIXED(3) ;
  DCL(ALPHA,G)(N2,N2) DEC FIXED(3) CTL ;
  DCL BETA(N) DEC FIXED(3) CTL ;
  GET DATA(N) ; N2=1 ;
  DO I=2 TO N ; N2=N2*I ; END ;
  ALLOCATE ALPHA,G,BETA ;
  ALPHA,G=0 ;
  DO I=1 TO N ; ALPHA(1,I)=I ; END ;
  DO K=2 TO 3 ;
  GET DATA(N1) ; DC L=1 TO N1 ;
  GET LIST(I,J) ; ALPHA(K,I)=J ;
  END ; END ;
  /* C'EST LA CONSTRUCTION DU PREMIER GENERATEUR ALPHA(K,*) */
  DO I=1 TO N ;
  IF ALPHA(2,I)=0 THEN ALPHA(2,I)=I ;
  IF ALPHA(3,I)=0 THEN ALPHA(3,I)=I ;
  END; G(1,1)=1; N1=2;
  C1,C2=3 ; /* 3 EST LE NOMBRE DES ELEMENTS DU GROUPE AU DEPART */
RECOM: PUT LIST('LE GROUPE N'EST PAS ENCORE DEFINI'); PUT SKIP(3);
  DO I=1 TO C1;
  DO J=1 TO C1;
  IF (I<N1)&(J<N1) THEN GOTO EXTER;
  DO L=1 TO N ;
  BETA(L)=ALPHA(I,ALPHA(J,L)) ;
  END ;
  DO K=1 TO C2;
  DO L=1 TO N;
  IF BETA(L)~=ALPHA(K,L) THEN GOTO NOUVEAU;
  END;
  G(I,J)=K; GOTO EXTER;
NOUVEAU: ; /* TESTER L'EGALITE POUR UN AUTRE ELEMENT */
  END;
  C2=C2+1;
  DO L=1 TO N; ALPHA(C2,L)=BETA(L); END;
  G(I,J)=C2 ;
EXTER: ;
  END ; END ;
  IF C1 ~= C2 THEN DO ; N1=C1+1;
  C1=C2 ; GOTO RECOM ; END ;
  /* LE GROUPE G EST DEFINI MAINTENANT PAR UN TABLEAU */
  PUT PAGE ;
  DO K=1 TO C2 ;
  DO I=1 TO N ;
  PUT EDIT('ALPHA(' ,K,',',I,')=',ALPHA(K,I))(A(6),
  F(2),A(1),F(2),A(2),F(2)) ;
  PUT SKIP ;

```

```

END ; PUT SKIP(3) ;
END ; PUT PAGE ;
/* IMPRESSION DU TABLEAU DU GROUPE */
PUT EDIT('VOICI LE GROUPE ENGENDRE PAR LES GENERATEURS 2 ET 3 DEFINI:
CI_DESSUS')(A) ; PUT SKIP ;
PUT EDIT('ET REPRESENTE PAR LE TABLEAU G1')(A) ; PUT SKIP(2) ;
PUT EDIT(' |')(A(3)) ;
DO I=1 TO C2 ;
PUT EDIT(' |')(A(4)) ;
END ; PUT SKIP ;
PUT EDIT('G1')(A(3)) ;
DO I=1 TO C2 ;
PUT EDIT(I, '|')(F(3),A(1)) ;
END ; PUT SKIP ;
DO I=1 TO C2 ;
PUT EDIT(' _ |')(A(3)) ;
DO J=1 TO C2 ;
PUT EDIT(' _ _ |')(A(4)) ;
END ; PUT SKIP ; PUT EDIT(I, '|')(F(2),A(1)) ;
DO J=1 TO C2 ;
PUT EDIT(G(I,J), '|')(F(3),A(1));
END ; PUT SKIP ;
END ;
PUT EDIT(' _ _ |')(A(3));
DO J=1 TO C2;
PUT EDIT(' _ _ _ |')(A(4));
END; PUT SKIP;
MATINCID: BEGIN; /* CCNSTRUCTION DE LA BASE DE CYCLES */
/* PUIS DEDUCTION DES RELATIONS DEFINIES DU GROUPE ASSOCIE */
DCL CH1 CHAR(4);
DCL (L1,L3,L4,I2,J2) DEC FIXED(3) ;
DCL LIG(2*C2) DEC FIXED(3) ;
DCL (C3,C4,K1,K2,K3,REF,REP,REP1,J1) DEC FIXED(3) ;
DCL C5 DEC FIXED(3,2) ;
DCL MISB(C2,2*C2) DEC FIXED(1) ;
DCL SOMISB(C2-1,2*C2) DEC FIXED(1) ;
DCL VECTL(2*C2) DEC FIXED(1) ;
DCL VECTC(C2-1) DEC FIXED(1) ;
DCL MATTR(C2+1,2*C2) DEC FIXED(1) ;
/* MISB EST LA MATRICE D'INCIDENCE SOMMETS BRANCHES */
/* VECTL RESP. VECTC SCNT DEUX MATRICES A UNE DIMENSION */
/* POUR MANIPULER MISB PAR UNE TECHNIQUE DU JOURDAN */
/* MATTR EST LA TRANSPSEE DE MISB APRES MANIPULATION */
DCL CA1 CHAR(6) ;
DCL (CA,CAR1,CAR2) CHAR(240) VARYING ;
DCL TABCHA(C2+1) CHAR(120) ;
/* LIG EST UNE MATRICE LIGNE QUI PORTE LES NOMS DES ARCS DU GRAPHE */

```

```

/* ASSOCIE AU GROUPE DEFINI CI_DESSUS DANS L'ORDRE DE LEURS          */
/* APPARITIONS DANS MISB,SOMISB ET MATTR                             */
/* LES ARCS DU GRAPHE ASSOCIE SONT NOMMES DE LA FACON SUIVANTE :    */
/* SOIT UN ARC D'ORIGINE I ET D'EXTREMITE J,SI J=IA ALORS ON LUI    */
/* ATTRIBUERA LE NCM (2*I) SINON,C_A_D. SI J=IB,ON LUI ATTRIBUERA   */
/* LE NCM (2*I-1) */
C3=2*C2 ; DO I=1 TC C3 ; LIG(I)=I ; END ;
PUT EDIT('MATRICE LIGNE DES BRANCHES')(A) ;
PUT SKIP ; /* MATRICE DE L'ORDRE DES ARCS */
DO I=1 TO C3 ;
PUT EDIT('LIG(',I,')=',LIG(I))(A(4),F(3),A(2),F(3));
PUT SKIP ; END ;
/* RECHERCHE DES CYCLES DE BASE POUR EN TIRER */
/* LES RELATIONS DEFINIES DU GROUPE */
MISB=0 ; DC I=1 TO C2 ;
MISB(I,2*I),MISB(G(I,2),2*I)=1 ;
MISB(I,2*I-1),MISB(G(I,3),2*I-1)=1 ; END; PUT PAGE;
PUT EDIT('MATRICE D'INCIDENCE SOMMETS BRANCHES MISB')(A);
CHI='MISB'; L3=C2; L4=C3;
CALL IMPRIM(CHI,L3,L4,MISB);
PUT EDIT('ON REMARQUE QUE LA DERNIERE LIGNE EST LA SOMME DES AUTRES
MODULO 2')(A) ; PUT SKIP ;
PUT EDIT('ON PEUT L'ELIMINER')(A) ; PUT SKIP ;
C4=C2-1; I=1;
DO WHILE(I <= C4) ; K1=I+1;
RET: IF MISB(I,I)=0 THEN DO ; I2=I+2 ; C5=LIG(I)/2 ;
IF(CEIL(C5)=FLOOR(C5)) THEN J1=C3 ;
ELSE J1=C3-1 ;
DO K=J1 TO I2 BY -2 ;
IF MISB(I,K)=1 THEN DO ; VECTC=0 ;
DO L=1 TO C4 ; VECTC(L)=MISB(L,K) ;
MISB(L,K)=MISB(L,I) ;
MISB(L,I)=VECTC(L) ;
END ; L=LIG(I) ; LIG(I)=LIG(K) ; LIG(K)=L ;
GO TO RET; END;
ELSE IF K=I2 THEN DO ;
/* ON PERMUTE LES LIGNES I ET C4 */
DC J2=1 TO C3 ;
MISB(I,J2)=MISB(C4,J2) ; END; C4=C4-1 ; GO TO RET ; END ;
END ; END ;
DC J=1 TO C4 ;
IF (J=I | MISB(J,I)=0) THEN GO TO AUGM ;
CALL SMMCD2(MISB(I,*),MISB(J,*),VECTL);
DC K=1 TO C3 ;
MISB(J,K)=VECTL(K) ; END ;
AUGM: ; END ;
I=I+1 ; END ; PUT PAGE;

```

```

PUT EDIT('MATRICE D'INCIDENCE, SOMMETS BRANCHES MISB, MISE SOUS LA FO
ME SUIVANTE')(A) ; PUT SKIP ;
PUT EDIT('PAR UNE TECHNIQUE DE JORDAN')(A) ; L3=L3-1 ;
CH1='SCMI' ; L3=C2-1 ;
DO I=1 TO L3 ; DC J=1 TO L4 ;
    SOMISB(I,J)=MISB(I,J) ; END ; END ;
CALL IMPRIM(CH1,L3,L4,SCMISB) ;
    PUT SKIP ; DC J1=1 TO C3 ;
    PUT EDIT('LIG(' , J1, ')=' , LIG(J1))(A(4),F(3),A(2),F(3)) ;
    PUT SKIP ; END ;
    MATTR=0 ;
    /* ON VA TRANSPOSER LA MATRICE MISB */
    DC J=1 TO C4 ;
    DO L=C2 TO C3 ;
    MATTR(L-C4,J)=MISB(J,L) ;
    END ; END ;
    DC L=C2 TO C3 ;
    MATTR(L-C4,L)=1 ; END ; PUT PAGE ;
PUT EDIT('MATRICE TRANSPOSEE DE MISB OU CHACUNE DE SES LIGNES EST UN
ELEMENT')(A) ; PUT SKIP ;
PUT EDIT('DE LA BASE DE CYCLES')(A) ;
CH1='MATT' ; L3=C2+1 ; L4=C3 ;
CALL IMPRIM(CH1,L3,L4,MATTR) ; C4=C2+1 ;
/* RECHERCHE DES CYCLES DE BASE */
PUT EDIT('ON A' , C4, 'CYCLES DE BASE')(A(4),F(3),X(3),A(14)) ;
    PUT SKIP ;
    DO I=1 TO C4 ; CA='' ; TABCHA(I)='' ; I2=1 ;
    DC J=1 TO C3 ;
    IF MATTR(I,J)=0 THEN GOTO AUTRE ;
    CA1=LIG(J) ; K=1 ;
    DO WHILE(SUBSTR(CA1,K,1)='') ; K=K+1 ; END ;
    CA=CA || '.' || SUBSTR(CA1,K) ;
AUTRE: ; END ;
CAR1,CAR2='' ; J,N=2 ; L1=0 ;
DO WHILE(SUBSTR(CA,N,1)~='.') ; N=N+1 ; L1=L1+1 ; END ;
CAR1=CAR1 || SUBSTR(CA,J,L1) ; N2=LENGTH(CAR1) ;
CAR2=CAR2 || SUBSTR(CA,N) ; N1=SUBSTR(CA,J,L1) ;
L=0 ; C5=N1/2 ; L3=LENGTH(CAR2) ;
IF(CEIL(C5)=FLOOR(C5)) THEN DO ; K1=N1/2 ;
K2=G(K1,2) ; REP=1 ; END ;
ELSE DO ; K1=(N1+1)/2 ; K2=G(K1,3) ; REP=0 ; END ;
CAR2=CAR2 || '.' ;
DO WHILE(L<L3) ; J1=K2 ; J2=K1 ; N=J ; L1=0 ;
DO WHILE(SUBSTR(CAR2,N,1)~='.') ; N=N+1 ; L1=L1+1 ; END ;
N1=SUBSTR(CAR2,J,L1) ; C5=N1/2 ;
IF(CEIL(C5)=FLOOR(C5)) THEN DO ;
K=N1/2 ; K3=G(K,2) ; REP1=1 ; END ;

```

```

ELSE DO ;          K=(N1+1)/2 ;          K3=G(K,3) ; REP1=0 ; END ;
IF(K2=K | K2=K3 | K1=K | K1=K3) THEN DO ;
  CAR1=CAR1 || SUBSTR(CAR2,1,L1+1) ; L=LENGTH(CAR1)-N2 ;
  CAR2=SUBSTR(CAR2,N) ;
  IF(K=K2 | K2=K3) THEN DO ;
    IF REP=0 THEN TABCHA(I)=SUBSTR(TABCHA(I),1,I2) || 'BN' ;
      ELSE TABCHA(I)=SUBSTR(TABCHA(I),1,I2) || 'AN' ;
    END ;
    ELSE DO ;
      IF REP=0 THEN TABCHA(I)=SUBSTR(TABCHA(I),1,I2) || 'BI' ;
        ELSE TABCHA(I)=SUBSTR(TABCHA(I),1,I2) || 'AI' ;
      END ; I2=I2+2 ; REP=REP1 ; K2=K3 ; K1=K ; END ;
  ELSE DO ; CA=SUBSTR(CAR2,J,L1) ;
    CAR2=SUBSTR(CAR2,N) || CA || '.' ; END ;
  END ; CA=CAR1 ;
/* K EST L'ORIGINE DE L'ARC QU'ON PARCOURT A CET INSTANT */
/* K1 EST L'CRIGINE DE L'ARC PRECEDEMENT PARCOURU */
/* K2 EST L'EXTREMITE DE L'ARC PRECEDEMENT PARCOURU */
/* K3 EST L'EXTREMITE DE L'ARC QU'ON PARCOURT A CET INSTANT */
/* J1 ET J2 SONT COMME K2 ET K1 RESP. L'EXTREMITE ET L'ORIGINE RESP. */
/* DE L'ARC PRECEDEMENT PARCOURU */
/* REP ET REP1 SONT DEUX REPERES QUI ONT LA VALEUR 0 SI L'ARC */
/* PARCOURU CORRESPOND AU DEUXIEME GENERATEUR ET LA VALEUR 1 SI */
/* C'EST LE CONTRAIRE . REP REPERE L'ARC PRECEDEMENT PARCOURU */
/* PAR CONTRE REP1 REPERE L'ARC PARCOURU A CET INSTANT */
IF(K1=J1 | K1=J2) THEN DO ;
  IF REP=1 THEN TABCHA(I)=SUBSTR(TABCHA(I),1,I2) || 'AN' ;
    ELSE TABCHA(I)=SUBSTR(TABCHA(I),1,I2) || 'BN' ; END ;
  ELSE DO ;
    IF REP=1 THEN TABCHA(I)=SUBSTR(TABCHA(I),1,I2) || 'AI' ;
      ELSE TABCHA(I)=SUBSTR(TABCHA(I),1,I2) || 'BI' ; END ;
  PUT EDIT('LE CYCLE DE BASE',I,'EST LE SUIVANT')
  (A(16),F(3),X(2),A(14)) ;
  PUT SKIP ; PUT EDIT(CA)(A) ; PUT SKIP ;
  END ; PUT SKIP(2) ;
PUT LIST('LES RELATIONS ALGEBRIQUES ASSOCIEES SONT LES SUIVANTES:');
DO I=1 TO C4 ; PUT SKIP ;
  PUT EDIT(I,TABCHA(I))(F(3),X(3),A) ; END ; PUT PAGE ;
  PUT EDIT('RELATIONS CORRESPONDANTES DE BASE')(SKIP,A) ;
  PUT SKIP ; REF=1 ;
  PUT EDIT('LA',REF,
  'RELATION DE L'ENSEMBLE GENERATEUR EST LA SUIVANTE:')
  (A(2),F(3),X(2),A(51)) ; PUT SKIP ;
  PUT EDIT(TABCHA(I))(A) ; PUT SKIP ;
  DO I=2 TO C4 ; DO J=1 TO REF ;
  IF TABCHA(I)=TABCHA(J) THEN GO TO AUTRECH ;
  END ; REF=REF+1 ;

```

GRO: PRLC OPTICNS(MAIN) ;

- 26 -

```
PUT EDIT('LA',REF,
'RELATION DE L'ENSEMBLE GENERATEUR EST LA SUIVANTE:')
(A(2),F(3),X(2),A(51)) ; PUT SKIP ;
PUT EDIT(TABCHA(I))(A) ; PUT SKIP ;
AUTRECH: ; END;
PUT EDIT('LE GROUPE EST REPRESENTÉ PAR LES GENERATEURS A ET B C-A-D. 2
ET 3')(A) ; PUT SKIP ;
PUT EDIT('DEFINIS CI_DESSUS ET LES RELATIONS DEFINIES ET ECRITES CI.
DESSUS')(A) ;
/* PROCEDURE POUR CALCULER LA SOMME MODULO 2 */
SOMMOD2: PFC(VECT1,VECT2,VECTL);
DCL(VECT1,VECT2,VECTL)(C3) DEC FIXED(1);
DCL I1 DEC FIXED(3);
DO I1=1 TO C3 ;
VECTL(I1)=VECT2(I1)+VECT1(I1);
IF VECTL(I1) > 1 THEN VECTL(I1)=0 ;
END ;
END SOMMOD2 ;
/* PROCEDURE POUR IMPRIMER LES TABLEAUX */
IMPRIM: PFC(CH1,L3,L4,TAB);
DCL CH1 CHAR(4);
DCL (L3,L4) DEC FIXED(3);
DCL TAB(L3,L4) DEC FIXED(1);
PUT SKIP(2);
PUT EDIT(' |')(A) ;
DO I=1 TO L4 ; PUT EDIT(' |')(A) ; END ; PUT SKIP ;
PUT EDIT(CH1||'|')(A);
DO I=1 TO L4 ;
PUT EDIT(LIG(I),'|')(F(2),A(1)) ; END ; PUT SKIP ;
PUT EDIT('----|')(A) ; DO I=1 TO L4 ;
PUT EDIT('--|')(A) ; END ; PUT SKIP ;
DO J=1 TO L3 ;
PUT EDIT(J,'|')(F(4),A(1));
DO I=1 TO L4 ;
PUT EDIT(TAB(J,I),'|')(F(2),A(1)) ;
END ; PUT SKIP ;
PUT EDIT('----|')(A) ; DO I=1 TO L4 ;
PUT EDIT('--|')(A) ; END ; PUT SKIP ; END ;
END IMPRIM;
PUT SKIP ;
PUT LIST('FIN DU TRAITEMENT DU PROBLEME DE LA PRESENTATION D'UN GROUPE
FINI'); PUT SKIP;
END MATINCID;
END PRESGRO ;
```

LE GROUPE N'EST PAS ENCORE DEFINI

- a7 -

LE GROUPE N'EST PAS ENCORE DEFINI

ALPHA( 1, 1)= 1  
ALPHA( 1, 2)= 2  
ALPHA( 1, 3)= 3

ALPHA( 2, 1)= 2  
ALPHA( 2, 2)= 1  
ALPHA( 2, 3)= 3

ALPHA( 3, 1)= 3  
ALPHA( 3, 2)= 1  
ALPHA( 3, 3)= 2

ALPHA( 4, 1)= 3  
ALPHA( 4, 2)= 2  
ALPHA( 4, 3)= 1

ALPHA( 5, 1)= 1  
ALPHA( 5, 2)= 3  
ALPHA( 5, 3)= 2

ALPHA( 6, 1)= 2  
ALPHA( 6, 2)= 3  
ALPHA( 6, 3)= 1



VOICI LE GROUPE ENGENDRE PAR LES GENERATEURS 2 ET 3 DEFINIS CI\_DESSUS ET REPRESENTE PAR LE TABLEAU G1

G1	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	1	4	3	6	5
3	3	5	6	2	4	1
4	4	6	5	1	3	2
5	5	3	2	6	1	4
6	6	4	1	5	2	3

MATRICE LIGNE DES BRANCHES

- LIG( 1) = 1
- LIG( 2) = 2
- LIG( 3) = 3
- LIG( 4) = 4
- LIG( 5) = 5
- LIG( 6) = 6
- LIG( 7) = 7
- LIG( 8) = 8
- LIG( 9) = 9
- LIG( 10) = 10
- LIG( 11) = 11
- LIG( 12) = 12

MATRICE D'INCIDENCE SOMMETS BRANCHES MISB

MISB	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0
2	0	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0
3	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0
4	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1
5	0	0	0	0	0	1	1	0	1	1	0	0
6	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1

CN REMARQUE QUE LA DERNIERE LIGNE EST LA SOMME DES AUTRES MODULO 2  
 DONC CN PEUT L'ELIMINER

MATRICE D'INCIDENCE, SOMMETS BRANCHES MISB, MISE SOUS LA FORME SUIVANTE PAR UNE TECHNIQUE DE JCRCAN

SCMI	1	2	3	12	9	6	7	8	5	10	11	4
1	1	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0
2	0	1	0	0	0	1	0	0	1	1	1	1
3	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0
4	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	1	0
5	0	0	0	0	1	1	1	0	0	1	0	0

- LIG( 1) = 1
- LIG( 2) = 2
- LIG( 3) = 3
- LIG( 4) = 12
- LIG( 5) = 9
- LIG( 6) = 6
- LIG( 7) = 7
- LIG( 8) = 8
- LIG( 9) = 5
- LIG( 10) = 10
- LIG( 11) = 11
- LIG( 12) = 4

MATRICE TRANSPOSEE DE MISB OU CHACUNE DE SES LIGNES EST UN ELEMENT DE LA BASE DE CYCLES

MATT	1	2	3	12	9	6	7	8	5	10	11	4
1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0
2	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0
3	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0
4	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0
5	1	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0
6	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0
7	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

- CN A 7 CYCLES DE BASE
- LE CYCLE DE BASE 1 EST LE SUIVANT  
1.2.9.6
- LE CYCLE DE BASE 2 EST LE SUIVANT  
3.9.7
- LE CYCLE DE BASE 3 EST LE SUIVANT  
12.8
- LE CYCLE DE BASE 4 EST LE SUIVANT  
1.2.3.12.5
- LE CYCLE DE BASE 5 EST LE SUIVANT  
1.2.9.10
- LE CYCLE DE BASE 6 EST LE SUIVANT  
2.3.12.11
- LE CYCLE DE BASE 7 EST LE SUIVANT

LES RELATIONS ALGEBRIQUES ASSOCIEES SONT LES SUIVANTES:

- 1 BIANBIAI
- 2 EIBIBI
- 3 ANAN
- 4 BIANBNAIBI
- 5 BIANBIAN
- 6 ANBNAIBN
- 7 ANAN

RELATIONS CORRESPONDANTES DE EASE

LA 1 RELATION DE L'ENSEMBLE GENERATEUR EST LA SUIVANTE:  
BIANBIAI

LA 2 RELATION DE L'ENSEMBLE GENERATEUR EST LA SUIVANTE:  
BIBIBI

LA 3 RELATION DE L'ENSEMBLE GENERATEUR EST LA SUIVANTE:  
ANAN

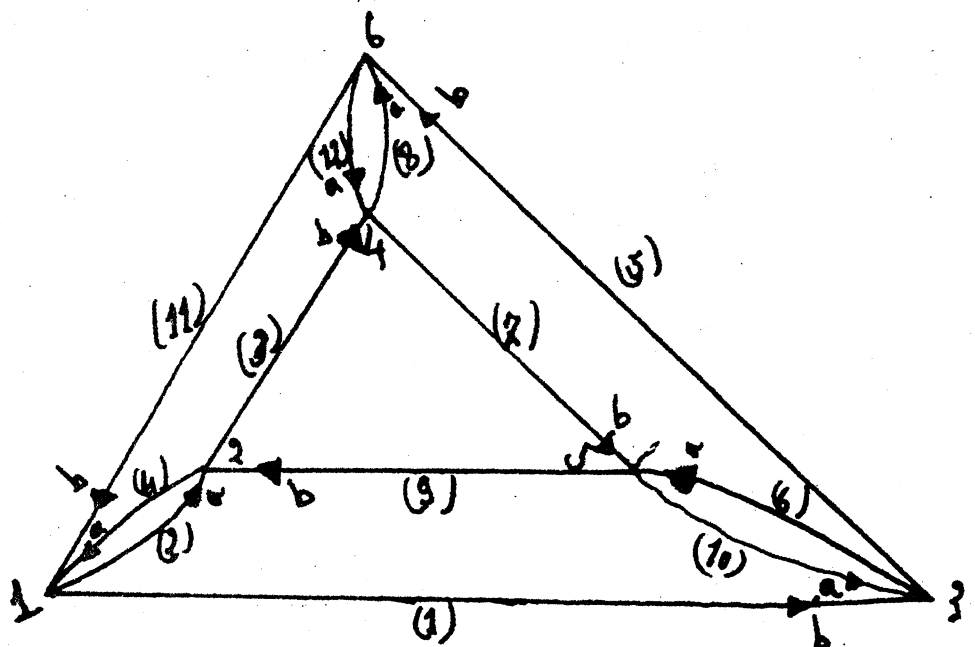
LA 4 RELATION DE L'ENSEMBLE GENERATEUR EST LA SUIVANTE:  
BIANBNAIBI

LA 5 RELATION DE L'ENSEMBLE GENERATEUR EST LA SUIVANTE:  
BIANBIAN

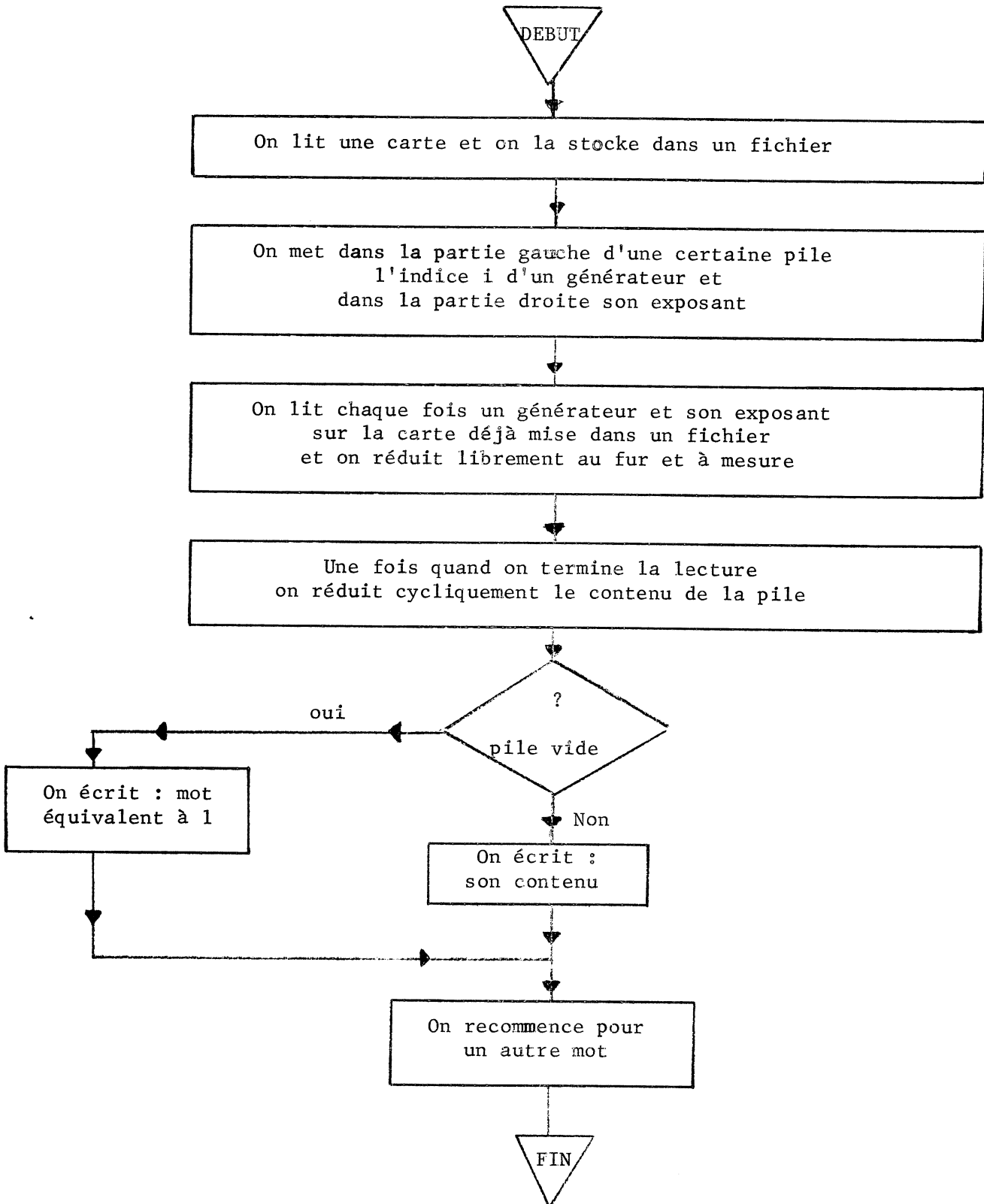
LA 6 RELATION DE L'ENSEMBLE GENERATEUR EST LA SUIVANTE:  
ANBNAIBN

LE GROUPE EST REPRESENTE PAR LES GENERATEURS A ET B C-A-D. 2 ET 3  
DEFINIS CI\_DESSUS ET LES RELATIONS DEFINIES ET ECRITES CI\_DESSUS  
FIN DU TRAITEMENT DU PROBLEME DE LA PRESENTATION D'UN GROUPE FINI

Graphes associe' a' cet exemple



ORGANIGRAMME DE LA REDUCTION LIBRE (LANGAGE DE DYCK)





DDR2	STMT	SOURCE	STATEMENT
	3	ANALYZ	OSECT
	4		USING ANALYZ,12
009C	5		STM 14,12,12(13)
	6		LR 2,13
	7		LR 12,15
Q4FC	8		LA 13,SAVE
0008	9		ST 13,8(0,2)
0004	10		ST 2,4(0,13)
	11		OPEN (LECTUR,INPUT,ECRIT,OUTPUT)
0750	17	NCH	L 4,=A(PILE)
	20		LR 5,4
0778	21		SH 5,=H'2'
0754	22		L 6,=A(FINPILE)
	23		GET LECTUR,CARTE
0105	28		LA 2,CARTE
	29		MVI ERPSW,X'0'
	30		MVI LIGNE,C' '
025B	31		MVC LIGNE+1(79),LIGNE
	32	NCUVEL	CLI 0(2),C' '
0060	33		BNE NVIRGL
0186	34		BAL 11,AVANC2
0050	35		B NOUVEL
	36	NVIRGL	CLI 0(2),C','
C38C	37		BE YMP
0104	38		BAL 11,DECBIN
0758	39		C 1,=F'1'
00FC	40		BL ERRCCH
075C	41		C 1,=F'256'
00FC	42		BH ERRCCH
	43		BCTR 1,0
0610	44		STC 1,NUMSYMB
	45		CLI 0(2),C','
00EC	46		BE EXPOS1
	47		CLI 0(2),C' '
00EC	48		BE EXPOS1
	49		CLI 0(2),C'+'
00AA	50		BE EXPOPLUS
	51		CLI 0(2),C'-'
00CA	52		BE EXPCM0IN
0174	53		BAL 11,ERRPRT
0164	54		B FBLANC
0186	56	EXPOPLUS	BAL 11,AVANC2
0104	57		BAL 11,DECBIN
0758	58		C 1,=F'1'
00F4	59		BL ERREXP
0760	60		C 1,=F'127'
00F4	61		BH ERREXP
0611	62		STC 1,EXPVAL
02E0	63		B EXPOS
0186	64	EXPCM0IN	BAL 11,AVANC2
0104	65		BAL 11,DECBIN
0758	66		C 1,=F'1'
00F4	67		BL ERREXP

ADDR	STMT	SOURCE	STATEMENT
C764	63	C	1,=F'128'
C0F4	69	BH	ERREXP
	70	LCR	1,1
C611	71	STC	1,EXPVAL
C2E0	72	B	EXPCS
	73	EXPOS1	MVI EXPVAL,X'1'
C2F0	74	B	EXPCS
0174	75	ERREXP	BAL 11,ERRPRT
C164	76	B	FBLANC
C174	77	ERRCH	BAL 11,ERRPRT
C164	78	B	FBLANC
C154	79	DECBIN	ST 11,DECBRETA
	80	SR	3,3
	81	CLI	0(2),C'0'
C15C	82	BL	ERCHIF
	83	CLI	0(2),C'9'
C15C	84	BH	ERCHIF
0000	85	IC	3,0(2)
C158	86	S	3,F0
C186	88	DECBUC	BAL 11,AVANC2
	89	CLI	0(2),C'0'
C14A	90	BL	DECBRET
	91	CLI	0(2),C'9'
C14A	92	BH	DECBRET
077A	93	MH	3,=H'10'
	94	SR	1,1
0000	95	IC	1,0(2)
C158	96	S	1,F0
	97	AR	3,1
C122	98	B	DECBUC
	100	DECBRET	LR 1,3
C154	101	L	11,DECBRETA
	102	BR	11
	103	DECBRETA	DS F
	104	FC	DC A(X'F0')
E174	105	ERCHIF	BAL 11,ERRPRT
D164	106	B	FBLANC
	107	FBLANC	CLI 0(2),C' '
F050	108	BE	NOUVFL
D186	109	BAL	11,AVANC2
D164	110	B	FBLANC
C768	111	ERRPRT	L 3,=A(LIGNE-CARTE)
	112	AR	3,2
	113	MVI	0(3),C'5'
	114	OI	ERRSW,X'FF'
	115	BR	11
	116	ERRSW	DS C
F001	117	AVANC2	LA 2,1(2)
C76C	118	C	2,=A(CARTE+72)
	119	BLR	11
	120	PUT	ECRIT,LIGNE1

ADDR2	STMT	SOURCE	STATEMENT
0700	125	CLC	LIGNE(80),=CL80'
0100	126	BE	AVANCG
	127	PUT	ECRIT,LIGNE2
	132	MVI	LIGNE,C'
0258	133	MVC	LIGNE+1(79),LIGNE
	134	GET	LECTUR,CARTE
0105	139	LA	2,CARTE
	140	BR	11
	141	DC	C'
	142	DS	CL80
	143	DC	53C'
	144	DC	C'
	145	DS	CL80
	146	DC	53C'
	147	TM	ERRSW,X'FF'
050	149	BNZ	NOUVEL
	150	CR	5,4
036E	151	BL	MISENPIL
000	152	CLC	NUMSYMB,0(5)
0352	153	BNE	TMISEN
0611	154	IC	1,EXPVAL
0018	155	SLL	1,32-8
018	156	SRA	1,32-8
0001	157	IC	3,1(5)
018	158	SLL	3,32-8
018	159	SRA	3,32-8
	160	AR	1,3
0760	161	C	1,=F'127'
0330	162	BH	EXPOVER
0770	163	C	1,=F'-128'
0330	164	BL	EXPOVER
	165	LTR	1,1
034A	166	BNZ	REMLAC
0778	167	SH	5,=H'2'
0384	168	B	IMPRET
	169	PUT	ECRIT,=CL133' DEBORDE EXP'
0174	174	BAL	11,ERRPRT
	175	OI	ERRSW,X'FF'
0050	176	B	NOUVEL
0001	177	STC	1,1(5)
0384	178	B	IMPRET
	179	CR	5,6
036E	180	BL	MISENPIL
	181	PUT	ECRIT,=CL133' PILE DEBORDEE'
	186	OI	ERRSW,X'FF'
0050	187	B	NOUVEL
0002	188	LA	5,2(,5)
	189	CR	5,6
0358	190	BNL	PILDEB
0610	191	MVC	0(1,5),NUMSYMB
0611	192	MVC	1(1,5),EXPVAL
043E	193	BAL	11,IMPYLE
0050	194	B	NOUVEL



DDNS	SYNT	SOURCE STATEMENT
	195 IMP	TM ERRSW,X'FF'
0417	196	BNZ ERRCHAN
	197 IMPRED	LR 3,5
0770	199	SH 3,=H'2'
	200	CR 3,4
0404	201	BNH IMPEND
0000	202	CLC 0(1,4),0(5)
0404	203	BNE IMPEND
	204	SR 1,1
	205	SR 3,3
0001	206	IC 1,1(4)
0010	207	SLL 1,32-8
0018	208	SRA 1,32-8
0001	209	IC 3,1(5)
0010	210	SLL 3,32-8
0010	211	SRA 3,32-8
	212	AR 1,3
0700	213	C 1,=F'127'
03EE	214	BH IMPDEB
0770	215	C 1,=F'-120'
03FE	216	BL IMPDEB
0001	217	STC 1,1(4)
0770	218	SH 5,=H'2'
	219	LTR 1,1
0404	220	BNZ IMPEND
0002	221	LA 4,2(,4)
0304	222	B IMPRED
	223 IMPDEB	PUT ECRIT,=CL133' DEB EXP'
	228	OI ERRSW,X'FF'
0022	229	B NCH
	230 IMPEND	PUT ECRIT,LIGNE1
043E	235	BAL 11,IMPILE
0022	236	B NCH
	237 ERRCHAN	PUT ECRIT,LIGNE2
	242	PUT ECRIT,=CL133' ERREUR DANS CHAINE'
	247	OI ERRSW,X'FF'
0022	248	B NCH
05E0	249 IMPILE	STM 0,11,IMPSAVE
	250	CR 5,4
04E6	251	BL IMPVIDE
	252	LR 7,4
	253	MVI LIGNOUT,C'
0544	254	MVC LIGNOUT+1(132),LIGNOUT
0545	255	LA 9,LIGNOUT+1
	256 IMPN	SR 1,1
0000	257	IC 1,0(7)
0001	258	LA 1,1(0,1)
0500	259	CVD 1,SYMBD
	260	SR 1,1
0001	261	IC 1,1(7)
018	262	SLL 1,32-8
010	263	SRA 1,32-8
500	264	CVD 1,EXPD

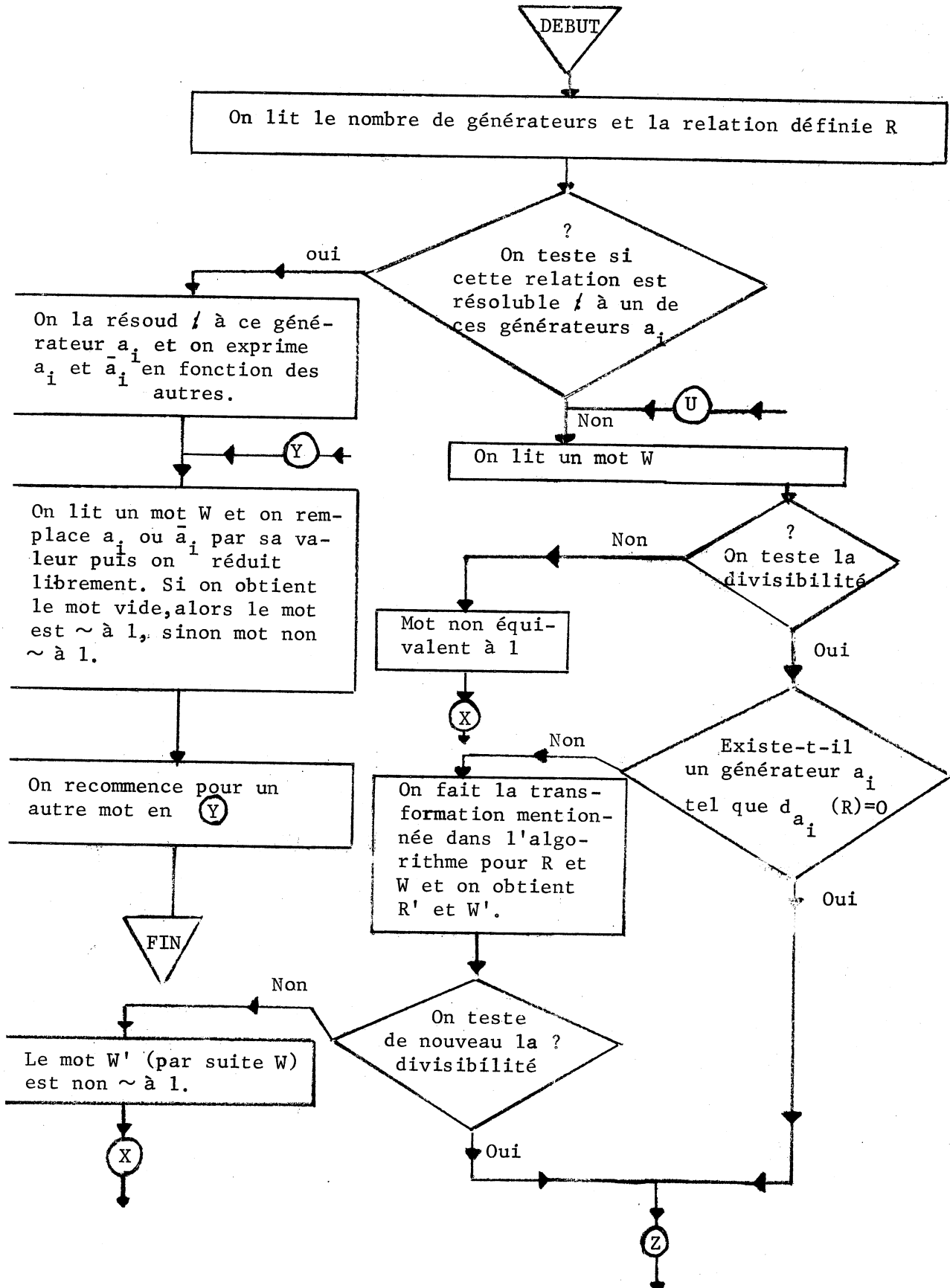
DR2	STMT	SOURCE	STATEMENT
	265		MVI 0(9),C'A'
586	266		UNPK 1(3,9),SYMBD+6(2)
	267		OI 3(9),X'F0'
	268		MVI 4(9),C'+'
	269		LTR 1,1
894	270		BMM #A0
	271		MVI 4(9),C'-'
5DE	272		UNPK 5(3,9),EXPD+6(2)
	273		OI 7(9),X'F0'
	274		MVI 8(9),C' '
009	275		LA 9,9(0,9)
774	276		C 9,=ALLIGNOUT+133-9)
4CA	277		DL IMPHXT
	278		PUT ECRIT,LIGNOUT
545	283		LA 9,LIGNOUT+1
	284		MVI LIGNOUT,C' '
544	285		MVC LIGNOUT+1(132),LIGNOUT
002	286	IMPHXT	LA 7,2(,7)
	287		CR 7,5
458	288		BMM IMPRN
	289		PUT ECRIT,LIGNOUT
4F4	294		D IMPPRET
	295	IMPVIDE	PUT ECRIT,=CL133' MOT EQUIVALENT A 1'
586	300	IMPPRET	LM 0,11,IMPSAVE
	301		BR 11
	302	SAVE	DS 12F
	303	LIGNOUT	DS CL133
	304	SYMBD	DS D
	305	EXPD	DS D
	306	IMPSAVE	DS 12F
	307	NUMSYMB	DS C
	308	EXPVAL	DS C
	309	LECTUR	DCB DDNAME=LECT,LRECL=80,EODAD=FININ,DSORG=PS, BLKSIZE=80,MACRF=GM,RECFM=F
	365	ECRIT	DCB DDNAME=IMPRI,LRECL=133,BLKSIZE=133,RECFM=FA,DSORG=PS MACRF=PM
	421	FININ	PUT ECRIT,=CL133' FIN DE FICHIER EN ENTREE'
	426		CLOSE (LECTUR,,ECRIT)
004	434		L 13,4(,13)
01C	435		LM 2,12,28(13)
00C	436		L 14,12(,13)
	437		BR 14
	439	LTORG	
	440		=CL80' '
	441		=A(PILE)
	442		=A(FINPILE)
	443		=F'1'
	444		=F'256'
	445		=F'127'
	446		=F'120'
	447		=A(LIGNE-CARTE)
	448		=A(CARTE+72)
	449		=F'-128'

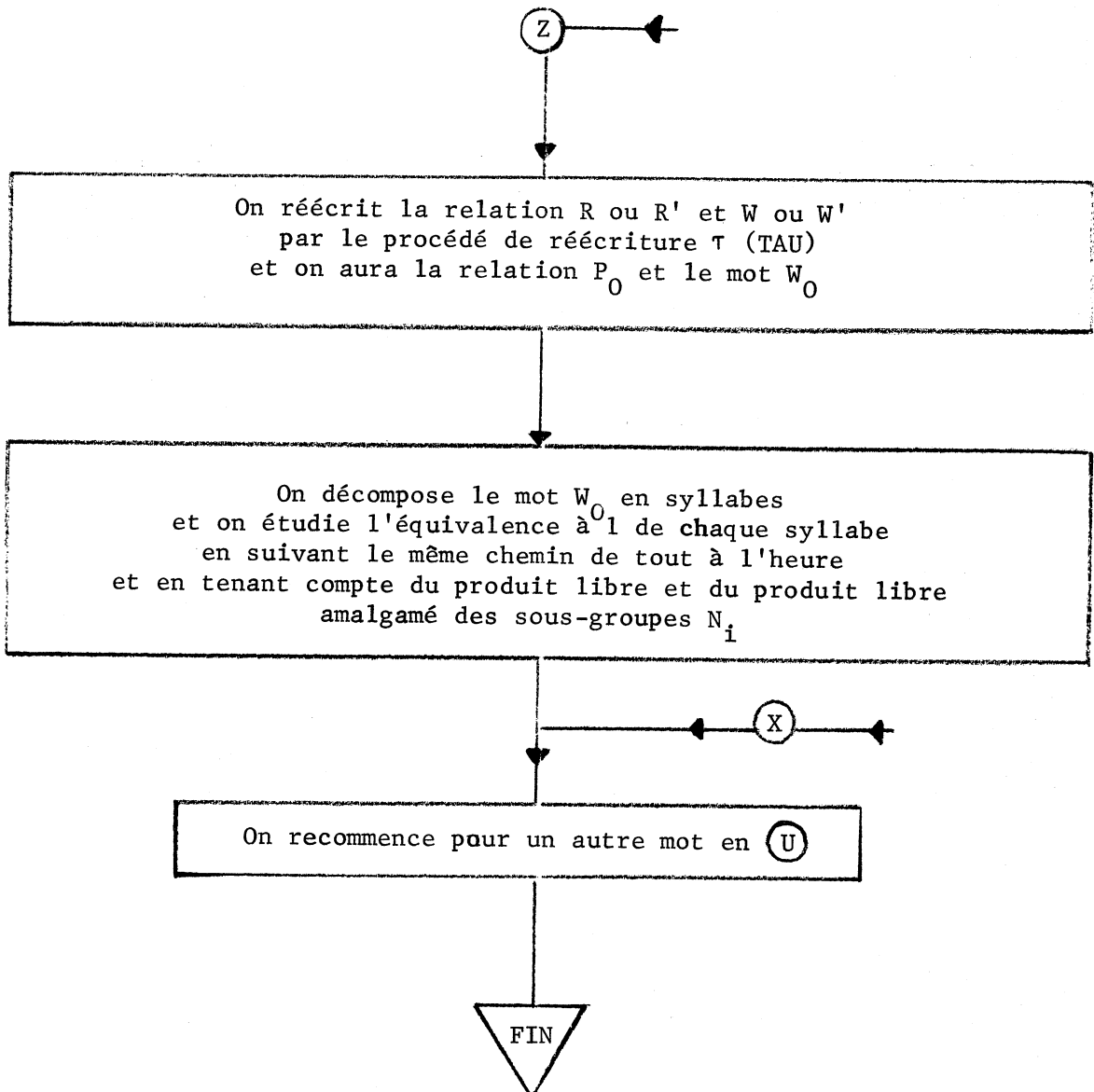
ICR2	STMT	SCURCE STATEMENT
	450	=A(LIGNOUT+133-9)
	451	=H'2'
	452	=H'10'
	453	=CL133' DEBORDE EXP'
	454	=CL133' PILE DEBORDEE'
	455	=CL133' DEB EXP'
	456	=CL133' ERREUR DANS CHAINE'
	457	=CL133' MOT EQUIVALENT A 1'
	458	=CL133' FIN DE FICHER EN ENTREE'
	460	PILE DC 1000F'0'
	461	FINPILE EQU *
	462	END

ACC5+CC1  
NOT EQUIVALENT A 1  
5 5-1,  
NOT EQUIVALENT A 1  
A001+CC1  
1  
A001+CC1  
A004+CC1  
ACC4+CC3  
ACC4+CC2  
4 4+2 4-1,  
ACC4+CC2  
A004+CC1  
A004+CC1 ACC5-001  
A004+CC1 ACC5-001 A004-CC1  
4 5-1 4-1,  
ACC5-CC1  
A001+CC1  
A001+CC1 A002+CC1  
A001+CC1 A002+CC1 A003+CC1  
1 2 3,  
A001+CC1 A002+CC1 A003+CC1  
AC12-CC1  
NOT EQUIVALENT A 1  
12-1 12,  
NOT EQUIVALENT A 1  
A012+CC1  
NOT EQUIVALENT A 1  
12 12-1,  
NOT EQUIVALENT A 1  
A012+CC1  
AC12+CC1 A001+002  
AC12+CC1 A001+002 A012-CC1  
12 1+2 12-1,  
A001+CC2  
A001+CC1  
A001+CC1 AC11-001  
A001+CC1 A011+001  
AC01+CC1 AC11+CC1 A001-001  
1 11-1 11+2 1-1,  
A011+CC1  
A012+CC1  
A012+CC1 A013+002  
A012+CC1 AC13-003  
A012+CC1 AC13-003 A001-002  
A012+CC1 AC13-003 A001-005  
A012+CC1 AC13-003 A001-005 A012-CC4  
12 13+2 13-5 1-2 1-3 12-4,  
A012-CC3 A013-003 A001-005  
FIN DE FICHER EN ENTREE



ORGANIGRAMME DE LA RESOLUTION DU PROBLEME DU MOT D'UNE PRESENTATION  
D'UN GROUPE AVEC UNE SEULE RELATION DEFINIE





```

PROEQUI: PROC OPTIONS(MAIN);
/* ***** */
/* *
/* *      CE PROGRAMME PERMET D'ANALYSER LE PROBLEME DU MOT.      * */
/* *
/* ***** */
DCL (TA(N),PR(N),PW(N)) DEC FIXED(3) CTL;
DCL (CAR,CUI,CUN,CARR) CHAR(240) VARYING;
DCL (CA,RO) CHAR(240) VARYING;
DCL (C1,C2) CHAR(6);
DCL (CC1,CC2) CHAR(3);
DCL CU CHAR(8);
DCL (R,I,J,K,L,M,N,IN,EX) DEC FIXED(3);
DCL (MAX0,MIN0,KO,U,I1,RP1) DEC FIXED(3);
DCL (MAX2,MAX1,MIN2,MIN1,K2,K1) DEC FIXED(3);
DCL (TI(MIN0:MAX0),TN(MIN0:MAX0)) DEC FIXED(3) CTL;
DCL (TAO(MIN2:MAX2),PRO(MIN2:MAX2)) DEC FIXED(3) CTL;
DCL REMP ENTRY RETURNS(CHAR(240) VARYING);
DCL LIBRED ENTRY RETURNS(CHAR(240) VARYING);
DCL APP ENTRY RETURNS(CHAR(240) VARYING);
DCL REMPEQUI ENTRY RETURNS(CHAR(240) VARYING);
DCL (NR,L3) DEC FIXED(3);
/* ***** */
/* *
/* *      LECTURE DE LA RELATION R.      * */
/* *
/* ***** */
GET DATA(NR) COPY; PUT SKIP;
DO L3=1 TO NR;
CAR='';
GET DATA(N) COPY; /*LECTURE DU NOMBRES**** */
PUT SKIP; /*DE GENERATEURS**** */
ALLOCATE TA,PR,PW;
PR,TA=0;
LECTR: GET LIST(IN,EX) COPY; /*LECTURE DE LA */
PUT SKIP; /*RELATION R */
DO WHILE(EX/=0);
C1=IN;C2=EX;CC1=SUBSTR(C1,4,3);
CC2=SUBSTR(C2,4,3);
CAR=CAR||' '||'A'||CC1||CC2;
PR(IN)=PR(IN)+EX;
TA(IN)=TA(IN)+1; GO TO LECTR;
END;
CARR=CAR; /*CONSERVATION DE LA RELATION R*/
PUT LIST('FIN DE LECTURE DE LA RELATION R***');
PUT SKIP;PUT LIST(CAR);PUT SKIP;
DO I=1 TO N;

```



```

PUT EDIT('PR(',I,',') =',PR(I))(R(ETIQ2));
ETIQ2:  FFORMAT(X(2),A(3),F(2),A(3),F(2));
PUT EDIT('TA(',I,',') =',TA(I))(R(ETIQ2));
PUT SKIP;
END;
CALL MAXMIN(CAR,MAXO,MINO,KO);
PUT LIST(MAXO,MINO,KO); PUT SKIP;
CALL EXIUG(TA,PR,MAXO,MINO,K,R);/*TEST SUR L UNICITE */
PUT EDIT('K=',K,'R=',R)(A(2),F(2),X(2),A(2),F(2)); PUT SKIP
IF ABS(K) = 1 THEN GO TO TEST2;
ELSE DC; /*EXPRIMER LE GEN.UNIQ.EN FCT.DAU*/
U=0; ALLCCATE TI,TN;
TI,TN=0;
CALL EXPR(CAR,CUI,CUN,CU);
PUT EDIT('CUI=',CUI)(A(4),A); PUT SKIP;
PUT EDIT('CUN=',CUN)(A(4),A);
END;
GET DATA(M) COPY; /*LECTURE DU NOMBRE */
PUT SKIP; /* DES MOTS DONNES */
DO J=1 TO N;
PW=0; /*INITIALISATION DU TABLEAU PW A 0 */
CAR=''; /*INITIALISATION DE CAR A VIDE */
PUT EDIT('LECTURE DU MOT W',J)(A(10),X(2),
F(1));
/* ***** */
/* *
/* * LECTURE DU MOT W.
/* *
/* ***** */
LECTN: GET LIST(IN,EX) COPY; /*LECTURE D UN MOT W */
PUT SKIP;
DO WHILE(EX/=0);
IF IN=R THEN DC;
IF EX<0 THEN DC;
EX=ABS(EX);
DO I=1 TO EX;
CAR=CAR||CUI;
END;
DO L=1 TO N-1;
PW(L)=PW(L)+EX*TI(L);
END; END;
ELSE DO;
DO I=1 TO EX;
CAR=CAR||CUN;
END;
DO L=1 TO N-1;
PW(L)=PW(L)+EX*TN(L);

```

```

END; END;
GO TO LECTM; END;
ELSE DC;
C1=IN;C2=EX; /*CONVERSION EN UNE CHAINE*/
CC1=SUBSTR(C1,4,3); /*RACCOURCISSEMENT*/
CC2=SUBSTR(C2,4,3); /*DE CES CHAINES */
CAR=CAR||' '||'A' ||CC1||CC2; /*CCNCATEN*/
PW(IN)=PW(IN)+EX; GO TO LECTM;
END;
END;
PUT EDIT('***FIN DE LECTURE DU MOT W',J)(A(26),
F(2)); PUT SKIP;
PUT LIST(CAR); /*IMPRESSION DU CAR POUR */
PUT SKIP; /*TESTER LA MARCHE DU PROGRA*/
DO I=1 TO N-1;
IF PW(I)=0 THEN GO TO CONT3;
ELSE GO TO DEH;
CONT3: ;
PUT EDIT('PW(',I,') =',PW(I))(R(ETIQ1));
ETIQ1: FORMAT(X(2),A(3),F(2),A(3),X(2),F(2));
PUT SKIP;
END;
PUT LIST('MOT PEUT ETRE EQUIVALENT A 1 ');
PUT SKIP;
RO=LIBREC(CAR);
PUT LIST(RO); PUT SKIP; GO TO CONT1;
DEH: PUT LIST('MOT N, EST PAS EQUIVALENT A 1 MAIS EQUIVALENT A');
PUT SKIP; RO=LIBREC(CAR);
PUT SKIP;
CONT1: ;
END;
GO TO REDLI;
/* ***** */
/* * CAS CU LA RELATION R NE CONTIENT PAS UN GENERATEUR * */
/* * A LA PUISSANCE PLUS OU MOINS UN. * */
/* * ***** */
TEST2: BEGIN;
DCL (CAR1,CAR2,W) CHAR(240) VARYING AUTO;
DCL REP DEC FIXED(3) AUTO;
DCL PWO(MINI:MAXI) DEC FIXED(3) CTL;
DCL (L6,R1) DEC FIXED(3);
DCL DIVISIB ENTRY RETURNS(BIT(1));
DCL VALLOGI BIT(1);
/* ***** */
/* *

```



```

IN=IN+1;GO TO TEST3;
END;
REP=1; RO=REMP(CA,PR);
PUT LIST(RO);PUT SKIP;CA=RO;
RO=LIBRED(CA);
CA=RO; I1=MIN2; /* ON MET DANS I1 MIN2 QUAND S(AI) EST=0 */
W=REMP(CAR,PR); CAR=W;
PUT EDIT('W=',W)(A(2),A); PUT SKIP;
W=LIBRED(CAR); CAR=W;
CALL MAXMIN(CA,MAX2,MIN2,K2);
CALL MAXMIN(CAR,MAX1,MIN1,K1);
  ALLOCATE TAO,PRO,PWO;
CALL TAPCAL(CA,MAX2,MIN2,TAO,PRO);
I=3; L=LENGTH(CAR)-5; PWO=0;
DO WHILE(I<=L);
  IN=SUBSTR(CAR,I,3); EX=SUBSTR(CAR,I+3,3);
  PWO(IN)=PWO(IN)+EX; I=I+8;
END;
VALLOGI=DIVISIB(PRO,PWO);
IF VALLOGI='0'B THEN DO; PUT SKIP;
  PUT LIST('MOT N'EST PAS EQUIVALENT A 1');
  PUT SKIP; GO TO IMPRI; END;
FREE TAO,PRO,PWO;
PUT LIST('MOT PEUT_ETRE EQUIVALENT A 1'); PUT SKIP;
END;
ELSE DO;I1=IN; /*CN MET DANS I1 IN QD UN S(AI)=0 */
REP=0; /* CONSERVATION D UNE TEST POUR CONTINUER LEPROG. */
END;
RO=APP(CA);
PUT EDIT('RO=',RO)(A(3),A);PUT SKIP;CA=RO;
CALL MAXMIN(CA,MAX2,MIN2,K2);
PUT EDIT('MAX2=',MAX2)(A(5),F(3)); PUT SKIP;
PUT EDIT('MIN2=',MIN2)(A(5),F(3)); PUT SKIP;
PUT EDIT('K2=',K2)(A(3),F(3)); PUT SKIP;
ALLOCATE TAO,PRO;
CALL TAPCAL(RO,MIN2,MAX2,TAO,PRO);
CALL EXIUG(TAO,PRO,MAX2,MIN2,K,R);
R1=R; /* CONSERVATION DE LA VALEUR INITIALE DE R */
FREE TAO,PRO;
PUT EDIT('K=',K,'R=',R)(A(2),F(2),X(2),
A(2),F(2)); PUT SKIP;
PUT LIST('PAS DE REMPLACEMENT DANS CE CAS POUR LE MOT W ');
PUT SKIP;
W=APP(CAR);
PUT EDIT('W=',W)(A(2),A); PUT SKIP;
IF ABS(K)-=1 THEN GO TO CONT4;
W=REMPEQUI(W,RO,R1); GO TO IMPRI;

```

```

/* **** */
/* *
/* * ETUDE DE L'EQUIVALENCE A UN, DES SOUS_CHAINES. *
/* * *
/* **** */
CCNT4: BEGIN;
DCL (C,RI,W4) CHAR(240) VARYING;
DCL (DIFABS,NI,I4,NG,I3,J1,REP1) DEC FIXED(3);
DCL (I2,MAX,LM,I5,LI) DEC FIXED(3);
DCL (RMAX2,RMIN2,REFERENC) DEC FIXED(3);
CALL MAXMIN(R0,MAX2,MIN2,K2);
RMAX2=MAX2; RMIN2=MIN2;
NG=1; L=LENGTH(R0)-5;
DO I3=11 TO L BY 8;
I4=I3-8;
DC J1=3 TO I4 BY 8;
IF IN=SUBSTR(R0,J1,3) THEN GO TO SORTIE;
END;
NG=NG+1;
PUT EDIT('NG=',NG)(A(3),F(3)); PUT SKIP;
SORTIE: ;
END; DIFABS=ABS(MAX2-MIN2);
REETUDE: L=LENGTH(W)-5; REFERENC=0; /* UNE REFERENCE POUR VOIR SI
ON PEUT TROUVER UNE TRANCHE EQUIVALENTE A 1 */
W4=''; I3=3;
ALTREMOT: DO WHILE(I3<=L);
C=''; NI,REP1=0; I2=I3;
IF REP1=0 THEN DO;
REP1=1; GO TO MOTINITI;
END;
ELSE DC;
SEPARMOT: IN=SUBSTR(W,I3,3);
IF ABS(IN-SUBSTR(W,I2,3))<=DIFABS THEN DO;
I4=I3-8;
DC J1=I2 TO I4 BY 8;
IF IN=SUBSTR(W,J1,3) THEN GO TO PASAUGIN;
END; END;
ELSE GC TO TESTEQUI;
MOTINITI: NI=NI+1;
PASAUGIN: C=C||SUBSTR(W,I3-2,8); I3=I3+8;
PUT EDIT('C=',C)(A(2),A); PUT SKIP;
IF I3<=L THEN GC TO SEPARMOT;
TESTEQUI: IF NI<NG THEN DO;
PUT EDIT('LA TRANCHE',C,'DU MOT',W,'N, EST PAS EQUIVALENT A 1'
(10),X(2),A,X(2),A(6),X(2),A,X(2),A(24)); PUT SKIP;
PUT LIST('*****')

```

DEQUI: PROC OPTIONS(MAIN);

-CZ-

PUT SKIP;

END;

ELSE DO;

PUT EDIT('ETUDIER L'EQUIVALENCE A 1 DE LA TRANCHE',C,  
'DU MOT INITIAL',W)(A(39),X(2),A,X(2),A(14),X(2),A); PUT SKIP;

MAX=SUBSTR(C,3,3); LM=LENGTH(C)-5; J1=11;

DO WHILE(J1<=LM);

IN=SUBSTR(C,J1,3);

IF MAX<IN THEN MAX=IN;

J1=J1+8;

END;

J1=3; LM=LENGTH(RO)-5; RI='';

DO WHILE(J1<=LM);

CC2=SUBSTR(RO,J1+3,3);

IN=SUBSTR(RO,J1,3); IN=IN+(MAX-RMAX2);

C1=IN; CC1=SUBSTR(C1,4,3);

RI=RI||' '||'A'||CC1||CC2; J1=J1+8;

END;

PUT EDIT('LA RELATION CORRESPONDANTE EST RI=',RI)(A(34),A);

PUT SKIP;

PUT LIST('\*\*\*\*\*'); PUT SKIP;

PUT SKIP;

CALL MAXMIN(RI,MAX2,MIN2,K2);

I1=MIN2; ALLOCATE TAO,PRO;

CALL TAPCAL(RI,MIN2,MAX2,TAO,PRO);

CALL MAXMIN(C,MAX1,MIN1,K1);

ALLOCATE PWO;

I5=3; LI=LENGTH(C)-5; PWO=0;

DO WHILE(I5<=LI);

IN=SUBSTR(C,I5,3); EX=SUBSTR(C,I5+3,3);

PWO(IN)=PWO(IN)+EX; I5=I5+8;

END;

VALLOGI=DIVISIB(PRO,PWO);

IF VALLOGI='0'B THEN GO TO SORTIR;

PUT LIST('MOT PEUT ETRE EQUIVALENT A 1'); PUT SKIP;

RI=REMP(RI,PRO); C=REMP(C,PRO);

RI=LIBRED(RI); C=LIBRED(C);

RI=APP(RI); C=APP(C);

FREE TAO,PRO,PWO;

CALL MAXMIN(RI,MAX2,MIN2,K2);

CALL MAXMIN(C,MAX1,MIN1,K1);

ALLOCATE TAO,PRO;

CALL TAPCAL(RI,MIN2,MAX2,TAO,PRO);

CALL EXIUG(TAO,PRO,MAX2,MIN2,K,R); RP1=R;

IF ABS(K)-=1 THEN DO;

PUT LIST('MOT N'EST PAS EQUIVALENT A 1'); PUT SKIP; END;

ELSE DO; ALLOCATE PWO;



REQUI: PROC OPTIONS(MAIN);

-69-

```
D1=PWO(I)/PRO(I);
PGE=CEIL(D1); /* PLUS GRAND ENTIER */
PPE=FLOOR(D1); /* PLUS PETIT ENTIER */
IF PGE=PPE THEN GO TO RETESTER;
ELSE RETURN('O'B);
END;
```

```
RETESTER: ;
END;
RETURN('1'B);
END DIVISIB;
END TEST2;
```

```
/* ***** */
/* *
/* *          CHANGEMENT DES DONNEES.          *
/* *          *
/* ***** */
```

```
REDLI: PUT SKIP(4);
      PUT LIST('TRAITEMENT DU DEUXIEME PROBLEME, S'IL Y EN A, EN CHANG
ANT LA RELATION'); PUT SKIP;
END;
```

```
/* ***** */
/* *
/* *          FONCTION PROCEDURE POUR REMPLACER UNE SOUS_CHAINE
/* *          PAR UNE AUTRE EQUIVALENTE.
/* *          *
/* ***** */
```

```
REMPEQUI: PROC(CA,RO,RP1) RETURNS(CHAR(240) VARYING);
DCL (CA,RR,RO,CAR1,CAR2) CHAR(240) VARYING;
DCL (RP1,L5) DEC FIXED(3);
DCL PWO(MIN1:MAX1) DEC FIXED(3) CTL;
TEST6: PUT LIST('*****');
      PUT SKIP;
      CALL MAXMIN(CA,MAX1,MIN1,K1);
      PUT LIST(MAX1,MIN1,K1); PUT SKIP;
      ALLOCATE PWO;
      IF ABS(K1)>=ABS(K2) THEN DO;
      J=MAX1-RP1; RR=''; I=3; L=LENGTH(RO)-5;
      DO WHILE (I<=L);
      CC2=SUBSTR(RO,I+3,3);
      IN =SUBSTR(RO,I,3);
      IN=IN+J;C1=IN;CC1=SUBSTR(C1,4,3);
      RR=RR||' '||'A'||CC1||CC2; I=I+8;
      END;
      CALL MAXMIN(RR,MAX2,MIN2,K2);
      MINO=MIN2; MAXO=MAX2;
      ALLOCATE TI,TN;
      ALLOCATE TAO,PRO;
```



EQUI: PROC OPTIONS(MAIN);

- 610 -

```
CALL TAPCAL(RR,MIN2,MAX2,TAO,PRO);
TI,TN=0;
R=RP1+J;
CALL EXPR (RR,CUI,CUN,CU);
PUT EDIT('CUI=',CUI)(A(4),A);PUT SKIP;
PUT EDIT('CUN=',CUN)(A(4),A);PUT SKIP;
PUT EDIT('CU =',CU)(A(4),A); PUT SKIP;
CAR=CA; L=LENGTH(CAR)-5; I=3;
DO WHILE(I<=L);
IN=SLBSTR(CA,I,3);
IF IN=R THEN DC;
EX=SUBSTR(CA,I+3,3);
CAR1=SUBSTR(CA,I,I-3);
CAR2=SUBSTR(CA,I+6);
IF EX<0 THEN DO;
EX=ABS(EX); CA=CAR1;
L5=LENGTH(CUI);
DO J=1 TO EX;
CA=CA||CUI; I=I+L5;
END;
CA=CA||CAR2; EX=-EX;
END;
ELSE DO;
CA=CAR1;
L5=LENGTH(CUN);
DO J=1 TO EX;
CA=CA||CUN; I=I+L5;
END;
CA=CA||CAR2;
END;
END;
I=I+8; L=LENGTH(CA)-5;
END;
CAR=CA; PUT EDIT('CA=',CA)(A(3),A); PUT SKIP;
I=3;L=LENGTH(CA)-5; PWO=0;
DO WHILE(I<=L);
IN=SLBSTR(CA,I,3);
EX=SUBSTR(CA,I+3,3);
PWO(IN)=PWO(IN)+EX; I=I+8;
END;
CA=LIBRED(CAR);
PUT EDIT('CA=',CA)(A(3),A); PUT SKIP;
L=LENGTH(CA);
IF L=0 THEN DC;
FREE PWO,TAO,PRO,TI,TN;
GO TO TEST6; END;
ELSE DC; PUT LIST('MOT EQUIVALENT A 1'); PUT SKIP;
```

```

FREE TI, TN, TAO, PRO, PWO; RETURN(CA); END;
END;
ELSE DC;
CAR=CA; CA=LIBRED(CAR);
L=LENGTH(CA);
IF L=0 THEN DO;
PUT LIST('MOT EQUIVALENT A 1'); PUT SKIP;
FREE TI, TN, TAO, PRO, PWO; RETURN(CA); END;
ELSE DC;
PUT LIST('MOT N, EST PAS EQUIVALENT A 1 ');
PUT SKIP(2);
FREE TI, TN, TAO, PRO, PWO; RETURN(CA);
END;
END; RETURN(CA);
END REMPEQUI;
/* ***** */
/* *
/* * PROCEDURE POUR CALCULER LES TABLEAUX TAO ET PRO. *
/* *
/* ***** */
TAPCAL: PROC(CA, MIN2, MAX2, TAO, PRO);
DCL CA CHAR(240) VARYING;
DCL (MIN2, MAX2) DEC FIXED(3);
DCL (TAO(MIN2:MAX2), PRO(MIN2:MAX2)) DEC FIXED(3);
I=3; L=LENGTH(CA)-5;
TAO, PRO=0;
DO WHILE(I<=L);
IN=SUBSTR(CA, I, 3);
EX=SUBSTR(CA, I+3, 3);
PRO(IN)=PRO(IN)+EX;
TAO(IN)=TAO(IN)+1;
I=I+8;
END;
END TAPCAL;
/* ***** */
/* *
/* * PROCEDURE POUR TESTER SI ON PEUT EXPRIMER UN GENERATEUR *
/* * DE LA RELATION EN FONCTION DES AUTRES. *
/* *
/* ***** */
EXIUG: PROC(TA4, PR4, MAX0, MIN0, K4, R4);
DCL (MAX0, MIN0) DEC FIXED(3);
DCL (K4, R4) DEC FIXED(3);
DCL (TA4(MIN0:MAX0), PR4(MIN0:MAX0)) DEC FIXED(3);
L, K4, R4=0;
DO I=MIN0 TO MAX0;
IF (TA4(I)=1)&(ABS(PR4(I))=1) THEN DO;

```

```

IF L=1 THEN DC;
IF R4>=I THEN PUT LIST('PAS DE CHANGEMENT');
ELSE DC;
R4=I;K4=PR4(I);
END;END;
ELSE DC;
L=I;R4=I;K4=PR4(I);
END; END;
END;
END EXIUG;
/* **** */
/* *
/* *   CALCUL D'UN GENERATEUR DE R PAR RAPPORT AUX AUTRES. *
/* *
/* **** */
EXPR: PROC(CA,CUI,CUN,CU);
DCL (CA,CUI,CUN) CHAR(240) VARYING;
DCL CU CHAR(8);
DCL (C1I,C2I,CAR1,CAR2) CHAR(240) VARYING;
DCL (L1,L2) DEC FIXED(3) AUTO;
C1I='';C2I=''; C2=K;C1=R;
CC1=SUBSTR(C1,4,3);CC2=SUBSTR(C2,4,3);
CU=' '|'|'A'|'|CC1'|'|CC2';
PUT LIST(CU); PUT SKIP;
L=INDEX(CA,CU);
CAR1=SUBSTR(CA,1,L-1);
CAR2=SUBSTR(CA,L+8);
L2=LENGTH(CAR2);L1=LENGTH(CAR1);
IF K=-1 THEN DC;
CUN=CAR2||CAR1;
DO I=1 TO L2 BY 8;
IN=SUBSTR(CAR2,I+2,3);
EX=-SUBSTR(CAR2,I+5,3);
C1=IN;C2=EX;
CC1=SUBSTR(C1,4,3);CC2=SUBSTR(C2,4,3);
C2I=' '|'|'A'|'|CC1'|'|CC2'|'|C2I';
END;
DO J=1 TO L1 BY 8;
IN=SUBSTR(CAR1,J+2,3);
EX=-SUBSTR(CAR1,J+5,3);
C1=IN;C2=EX;
CC1=SUBSTR(C1,4,3);CC2=SUBSTR(C2,4,3);
C1I=' '|'|'A'|'|CC1'|'|CC2'|'|C1I';
END;
CUI=C1I||C2I;
IF U=0 THEN DO I=1 TO N;
TN(I)=PR(I); TI(I)=-PR(I); END;

```

```

ELSE DO I=MINO TC MAXO;
TN(I)=PRO(I); TI(I)=-PRO(I); END;
END;
ELSE DO;
CUI=CAR2||CAR1;
DO I=1 TO L2 BY 8;
IN=SLBSTR(CAR2,I+2,3);
EX=-SUBSTR(CAR2,I+5,3);
C1=IN;C2=EX;
CC1=SUBSTR(C1,4,3);CC2=SUBSTR(C2,4,3);
C2I=' '||'A'||CC1||CC2||C2I;
END;
DO J=1 TO L1 BY 8;
IN=SLBSTR(CAR1,J+2,3);
EX=-SUBSTR(CAR1,J+5,3);
C1=IN;C2=EX;
CC1=SUBSTR(C1,4,3);CC2=SUBSTR(C2,4,3);
C1I=' '||'A'||CC1||CC2||C1I;
END;
CUN=C1I||C2I;
IF U=0 THEN DO I=1 TO N;
TN(I)=-PR(I); TI(I)=PR(I); END;
ELSE DO I=MINO TC MAXO;
TN(I)=-PRO(I); TI(I)=PRO(I); END;
END;
PUT LIST('LE PROBLEME EST EQUIVALENT A UN PROBLEME DE REDUCTION
LIBRE'); PUT SKIP;
END EXPR;
/* ***** */
/* *
/* *          FCNCTICN PRCCEDURE POUR METTRE UN GENERATEUR          * */
/* *          A LA PUISSANCE ZERO.                                * */
/* *
/* ***** */
REMP: PROC(CA,PRO) RETURNS(CHAR(240) VARYING);
DCL CA CHAR(240) VARYING;
DCL PRO(MIN2:MAX2) DEC FIXED(3);
DCL (X,Y) DEC FIXED(3);
DCL L4 DEC FIXED(3);
J=3;L=LENGTH(CA);
X,Y=0;DCL (CAR1,CAR2) CHAR(240) VARYING;
DO WHILE(J<=L);
IN=SUBSTR(CA,J,3);
IF IN=MIN2 THEN DO;
CAR1=SLBSTR(CA,1,J-3);
CAR2=SUBSTR(CA,J+6);
EX=SLBSTR(CA,J+3,3);

```

```

L4=PRO(MAX2)*EX; C2=L4; CC2=SUBSTR(C2,4,3);
C1=MIN2; CC1=SUBSTR(C1,4,3);
CA=CARI||' '||'A'||CC1||CC2||CAR2;
PUT LIST(CA); PUT SKIP;
X=X+PRO(MAX2)*EX;
END;
ELSE DC;
IF IN=MAX2 THEN GC TO ITER;
ELSE DC;
GAR1=SUBSTR(CA,1,J-3);
CAR2=SUBSTR(CA,J+6);
EX=SUBSTR(CA,J+3,3);
IF EX<0 THEN DC;
C2=PRO(MIN2); CC2=SUBSTR(C2,4,3);
CA=CARI;EX=ABS(EX);
DO I=1 TO EX;
C1=MIN2; CC1=SUBSTR(C1,4,3);
CA=CA||' '||'A'||CC1||CC2;
C1=MAX2; CC1=SUBSTR(C1,4,3);
CA=CA||' '||'A'||CC1||' -1';
END;
CA=CARI||CAR2; EX=-EX;
END;
ELSE DC;
C2=-PRO(MIN2); CC2=SUBSTR(C2,4,3);
CA=CARI;
DO I=1 TO EX;
C1=MAX2; CC1=SUBSTR(C1,4,3);
CA=CA||' '||'A'||CC1||' 1';
C1=MIN2; CC1=SUBSTR(C1,4,3);
CA=CA||' '||'A'||CC1||CC2;
END;
CA=CARI||CAR2;
END;
Y=Y+EX; X=X-PRO(MIN2)*EX; J=J-8+16*ABS(EX);
END; END;
ITER: J=J+8; L=LENGTH(CA);
END;
I=1; RETURN(CA);
END REPP;
/* *****
/* *
/* *          FONCTION PROCEDURE POUR LA REDUCTION LIBRE.
/* *
/* *****
LIBRED:PROC(CA) RETURNS(CHAR(240) VARYING);
DCL CA CHAR(240) VARYING;

```

```

DCL (IN2,EX2) DEC FIXED(3);
DCL (CAR1,CAR2) CHAR(240) VARYING AUTO;
L=LENGTH(CA)-13; I=3;
DO WHILE(I<=L);
IN=SUBSTR(CA,I,3);
IN2=SUBSTR(CA,I+8,3);
IF IN=IN2 THEN DO;
EX=SUBSTR(CA,I+3,3);
EX2=SUBSTR(CA,I+11,3); EX=EX+EX2;
IF EX=0 THEN DC;
CAR1=SUBSTR(CA,I,I-3);
CAR2=SUBSTR(CA,I+14);
CA=CAR1||CAR2;
GO TO COM; END;
C2=EX; CC2=SUBSTR(C2,4,3);
SUBSTR(CA,I+3,3)=CC2;
CAR1=SUBSTR(CA,I,I+5);
CAR2=SUBSTR(CA,I+14);
CA=CAR1||CAR2;
COM: L=LENGTH(CA)-13;
IF I>8 THEN I=I-8;
ELSE I=3; END;
ELSE I=I+8;
END;
L=L+13;
DO WHILE(L>3);
IN=SUBSTR(CA,3,3);
IN2=SUBSTR(CA,L-5,3);
IF IN=IN2 THEN DO;
EX=SUBSTR(CA,6,3);
EX2=SUBSTR(CA,L-2,3); EX=EX+EX2;
IF EX=0 THEN DC;
CA=SUBSTR(CA,9,L-16); GO TO TES;
END;
C2=EX; CC2=SUBSTR(C2,4,3);
SUBSTR(CA,6,3)=CC2;
CA=SUBSTR(CA,1,L-8);
TES: L=LENGTH(CA);END;
ELSE GO TO IMP;
END;
IMP: IF L=0 THEN DO;
PUT LIST('NOT EQUIVALENT A 1'); PUT SKIP;
END;
ELSE DO;
PUT LIST('UNE CHAINE EQUIVALENTE A'); PUT SKIP;
PUT LIST(CA); PUT SKIP;
END;

```

```

        RETURN(CA);
        END LIBRED;
/* ***** */
/* *
/* *      FONCTION PROCEDURE POUR CALCULER LA FONCTION TAU.
/* *
/* ***** */
APP:   PROC(R5) RETURNS(CHAR(240) VARYING);
        DCL (RPO,R5) CHAR(240) VARYING;
        DCL (CH1,CH2) CHAR(3) VARYING;
        DCL CH3 CHAR(3);
        DCL (Z1,Z2) CHAR(240) VARYING;
        DCL (S,INDICE,PUMAXPI1) DEC FIXED(3);
        J=3; L=LENGTH(R5)-5;
        DO WHILE(J<=L);
            IF I1=SUBSTR(R5,J,3) THEN DO;
                PUMAXPI1=SUBSTR(R5,J+3,3);
                GO TC PERMUTA;          END;
            J=J+8;
        END;
PERMUTA: INDICE=J-3; J=J+8;
        DO WHILE(J<=L);
            EX=SUBSTR(R5,J+3,3);
            IF ((I1=SUBSTR(R5,J,3))&(PUMAXPI1<=EX)) THEN DO;
                PUMAXPI1=EX; INDICE=J-3;          END;
            J=J+8;
        END;
        Z1=SUBSTR(R5,1,INDICE);
        Z2=SUBSTR(R5,INDICE+1);
        R5=Z2||Z1;
        RPO=''; S=0; J=3;
        DO WHILE(J<=L);
            IN=SUBSTR(R5,J,3);
            IF I1=IN THEN DO;
                EX=SUBSTR(R5,J+3,3);
                S=S+EX; END;
            ELSE DO;
                C1=S; CC1=SUBSTR(C1,4,3); CC2=SUBSTR(R5,J+3,3);
                C1=IN; CH3=SUBSTR(C1,4,3); I=1;
                DO WHILE((I<=3)&(SUBSTR(CC1,I,1)=' '));
                    I=I+1;
                END; CH2=SUBSTR(CC1,I); I=1;
                DO WHILE((I<=3)&(SUBSTR(CH3,I,1)=' '));
                    I=I+1;
                END; CH1=SUBSTR(CH3,I); CH3=CH1||CH2;
                IN=CH3; C1=IN; CC1=SUBSTR(C1,4,3);
                RPO=RPO||' '||'A'||CC1||CC2;

```

DEQUI: PROC OPTICS(MAIN);

- CER -

```
      PUT EDIT('RPO=',RPO)(A(4),A); PUT SKIP;
      END;
      J=J+8;
      END; RETURN(RPO);
      ENC APP;
/* ***** */
/* *
/* * PROCEDURE POUR CALCULER LES INDICES MAXIMUM ET MINIMUM * */
/* * DE LA CHAINE DONNEE CA. * */
/* *
/* * ***** */
MAXMIN: PRCC(CA,MAX3,MIN3,K3);
      DCL CA CHAR(240) VARYING;
      DCL (MAX3,MIN3,K3) DEC FIXED(3);
      IN=SUBSTR(CA,3,3);
      MAX3,MIN3=IN;
      L=LENGTH(CA)-5; I=11;
      DO WHILE(I<=L);
      IN=SUBSTR(CA,I,3);
      IF MIN3<=IN THEN DO;
      IF MAX3>=IN THEN GO TO CROIS;
      ELSE MAX3=IN; END;
      ELSE MIN3=IN;
CROIS: I=I+8;
      END; K3=MAX3-MIN3+1;
      END MAXMIN;
/* ***** */
/* *
/* * FIN DU PROGRAMME ANALYSANT LE PROBLEME DU MOT. * */
/* *
/* * ***** */
      PUT LIST('FIN DU TRAITEMENT DE PROBLEME');
      ENC PRCEQUI;
```



NR=5;

N=2;

1  
1,  
2  
1,  
1  
2,  
2  
1,  
0  
0,

\*FIN DE LECTURE DE LA RELATION R\*\*\*

A 1 1 A 2 1 A 1 2 A 2 1

PR( 1) = 3 TA( 1) = 2

PR( 2) = 2 TA( 2) = 2

2 1 2  
K= 0 R= 0  
M=1;

LECTURE DU MOT W 1

1  
1,  
2  
1,  
1  
-1,  
2  
-1,  
0  
0,

\*\*\* FIN DE LECTURE DU MOT W 1

A 1 1 A 2 1 A 1 -1 A 2 -1

PW( 1) = C PW( 2) = 0

LE MOT

A 1 1 A 2 1 A 1 -1 A 2 -1

PEUT ETRE EQUIVALENT A 1

A 1 2 A 2 1 A 1 2 A 2 1

A 1 2 A 2 1 A 1 -3 A 1 4 A 2 1

A 1 2 A 2 1 A 1 -3 A 1 4 A 2 1 A 1 -3

UNE CHAINE EQUIVALENTE A

A 1 -1 A 2 1 A 1 1 A 2 1

A 1 2 A 2 1 A 1 -1 A 2 -1

A 1 2 A 2 1 A 1 -3 A 1 -2 A 2 -1

W= A 1 2 A 2 1 A 1 -3 A 1 -2 A 1 3 A 2 -1

UNE CHAINE EQUIVALENTE A

A 1 2 A 2 1 A 1 -2 A 2 -1

MOT PEUT\_ETRE EQUIVALENT A 1

RPO= A 21 1

RPO= A 21 1 A 20 1

RO= A 21 1 A 20 1

MAX2= 21

MIN2= 20

K2= 2

K= 1 R=21

PAS DE REMPLACEMENT DANS CE CAS POUR LE MOT W

RPO= A 22 1

RPO= A 22 1 A 20 -1

W= A 22 1 A 20 -1

\*\*\*\*\*

22

20

3

A 22 1

LE PROBLEME EST EQUIVALENT A UN PROBLEME DE REDUCTION LIBRE

CUI= A 21 1

CUN= A 21 -1

CU = A 22 1

CA= A 21 -1 A 20 -1

UNE CHAINE EQUIVALENTE A

A 21 -1 A 20 -1

CA= A 21 -1 A 20 -1

\*\*\*\*\*

21

20

2

A 21 1

LE PROBLEME EST EQUIVALENT A UN PROBLEME DE REDUCTION LIBRE

CUI= A 20 1

CUN= A 20 -1

CU = A 21 1

CA= A 20 1 A 20 -1

MOT EQUIVALENT A 1

CA=

MOT EQUIVALENT A 1

TRAITEMENT DU DEUXIEME PROBLEME, S'IL Y EN A, EN CHANGEANT LA RELATION R=2;

1  
2,

2  
2,

1  
-2,

2  
-2,

C  
C,

\*FIN DE LECTURE DE LA RELATION R\*\*\*

A 1 2 A 2 2 A 1 -2 A 2 -2

PR( 1) = 0 TA( 1) = 2

PR( 2) = 0 TA( 2) = 2

2

1

K= C R= 0

M=1;

2

LECTURE DU MOT W 1

1  
3,

- C20 -

2  
3,

1  
-3,

2  
-3,

0  
0,

\*\*\* FIN DE LECTURE DU MOT W 1

A 1 3 A 2 3 A 1 -3 A 2 -3  
PW( 1) = C PW( 2) = 0

LE MOT

A 1 3 A 2 3 A 1 3 A 2 -3  
PEUT ETRE EQUIVALENT A 1  
RPO= A 22 2

RPO= A 22 2 A 20 -2

RO= A 22 2 A 20 -2

MAX2= 22

MIN2= 20

K2= 3

K= 0 R= 0

PAS DE REMPLACEMENT DANS CE CAS POUR LE MOT W

RPO= A 23 3

RPO= A 23 3 A 20 -3

K= A 23 3 A 20 -3

NG= 2

C= A 23 3

LA TRANCHE A 23 3 DU MOT A 23 3 A 20 -3 N'EST PAS EQUIVALENT A 1

\*\*\*\*\*

H4= A 23 3

C= A 20 -3

LA TRANCHE A 20 -3 DU MOT A 23 3 A 20 -3 N'EST PAS EQUIVALENT A 1

\*\*\*\*\*

H4= A 23 3 A 20 -3

MOT NON EQUIVALENT A 1

TRAITEMENT DU DEUXIEME PROBLEME, S'IL Y EN A, EN CHANGEANT LA RELATION  
N=3:

1  
2,

2  
1,

3

FIN DE LECTURE DE LA RELATION R\*\*  
A N A 2 I A U A 2 - 2 A 1 I A 2 1  
P R A N E O T A N M S N A  
P R A N E O T A N M S N A

LE PROBLEME EST EQUIVALENT A UN PROBLEME DE REDUCTION LIBRE  
CUI A N - 2 A I I A N I A I 2 A 2 I  
CUI A N - 2 A I I A N I A I 2 A 2 I  
A 4 I I A N I A I 2 A 2 I

LECTURE DU MOT N

FIN DE LECTURE DU MOT N  
CUI EST PAS EQUIVALENT A I MAIS EQUIVALENT A I A 2 2 A 2 2  
CUI EST PAS EQUIVALENT A I MAIS EQUIVALENT A I A 2 2 A 2 2  
A I A 2 I A I - 2 A 2 I A I - I A 2 4

A P P E N D I C E

NOTIONS SUR LA RESOLUTION DU PROBLEME DU MOT POUR UN MONOIDE M [ [1] PP. 47 ]

Soit un monoïde M présenté par un ensemble de générateurs

$E = \{ a_1, a_2, \dots, a_n \}$  et un ensemble de relations définies

$\Sigma = \{ A_i = B_i \text{ pour } i = 1, 2, \dots, m \text{ où } A_i, B_i \text{ sont différents du mot vide} \}$ .

E est appelé l'alphabet du monoïde. A une telle présentation de monoïde, on associe un groupe G défini par la présentation

$$\langle E ; \Sigma \rangle$$

Définition :

- 1) Soient X et Y deux mots quelconques de M, ( $X$  et  $Y \in E^*$ ), et soit  $A_i = B_i$  de  $\Sigma$ , alors la transformation du mot  $X A_i Y$  au mot  $X B_i Y$  (ou l'inverse) est appelée transformation élémentaire de M.

$$X A_i Y \longrightarrow X B_i Y \text{ ou } X B_i Y \longrightarrow X A_i Y.$$

On appelle  $X \longrightarrow X$  la transformation identique.

- 2) Soient X et Y deux mots de  $E^*$ , X et Y sont équivalents (et on note  $X \equiv Y$ ) si et seulement si on peut trouver une séquence de transformations élémentaires de M telle que :

$$X = X_0 \longrightarrow X_1 \longrightarrow \dots \longrightarrow X_i \longrightarrow X_{i+1} \longrightarrow \dots \longrightarrow X_k = Y.$$

A toute relation  $A = B$  de  $\Sigma$ , on associe une paire droite (a,b) (éventuellement réduite à un singleton  $a = b$ ) où a et b sont les premières lettres respectivement de A et B. De même on associe une paire gauche (a',b') où a' et b' sont les dernières lettres de A et B. Une paire gauche (resp. droite) peut être associée à plus d'une relation de  $\Sigma$  ; pour cela, on va attribuer à chaque paire ainsi associée le nombre de relations définies de  $\Sigma$  qu'elle représente à gauche (resp. à droite).

On définit alors deux graphes symétriques, éventuellement avec boucles, gauche et droite. On considère tous les générateurs qui figurent dans les relations définies de  $\Sigma$  comme les sommets de ces deux graphes. Le graphe gauche (resp. droite) a pour branches les paires (a,b) gauches (resp. droites) par analogie avec la théorie des graphes, on dit que  $\Sigma$  n'a pas de cycles gauches (resp. droites) si le graphe gauche (resp. droit) associé n'en a pas ; si  $\Sigma$  n'a ni cycles gauches, ni de cycles droits, on dira que  $\Sigma$  n'a pas de cycles (On considère les boucles comme des cycles).

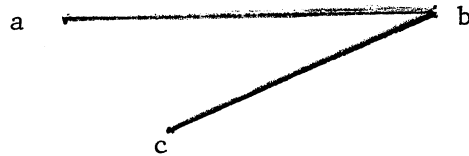
Exemples :

1) Soit le monoïde présenté par

$$E = \{ a, b, c \} \text{ et } \Sigma = \{ b^2 = c^2 a, a^2 b = b^2 c \}.$$

- Les paires gauches sont : (b,c) et (a,b).

Le graphe gauche associé est le suivant :



- Les paires droites sont : (b,a) et (b,c).

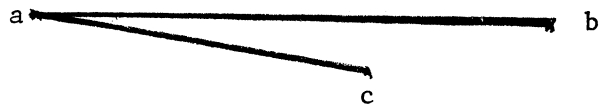
Le graphe droit est le suivant :



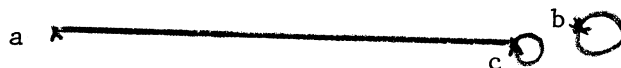
On remarque qu'ils sont identiques.

2) Soit  $E = \{ a, b, c \}$  et soit  $\Sigma = \{ ab = b, ac = c, bc = a \}$  ; on a respectivement comme précédemment :

- (a,b), (a,c) et (b,a) ; d'où le graphe gauche :



- (b,b), (c,c) et (c,a) ; d'où le graphe droit qui a deux boucles.



Adjan [1] a démontré la propriété suivante :

Supposons que le système des relations définies  $\Sigma$  du monoïde  $M$  n'a pas de cycles et soient  $X, Y$  deux mots par rapport à l'alphabet  $E$  de  $M$ . Si l'équation  $X \equiv Y$  est vraie dans  $M$ , alors il est nécessaire et suffisant qu'elle soit vraie dans le groupe

$$G = \langle E ; \Sigma \rangle.$$

Ensuite, il a démontré que sous ces mêmes conditions,  $M$  est plongeable dans le groupe  $G$  (c'est-à-dire il existe un isomorphisme entre  $M$  et le sous-groupe  $H$  de  $G$  engendré par l'alphabet positif  $E$  seulement).

En particulier, considérons le cas d'un monoïde  $[E ; \Sigma]$  où  $\Sigma$  ne comporte qu'une seule relation.

On dit que la relation définie  $A = B$  de  $\Sigma$  est réduite à gauche (resp. à droite) dans  $M$  si les premières (resp. les dernières) lettres de  $A$  et  $B$  sont distinctes. La relation  $A = B$  est dite réduite si elle est à la fois réduite à gauche et à droite. Il est évident que  $A = B$  ( $A$  et  $B$  sont différents du vide) sera réduit si et seulement si  $\Sigma$  n'a pas de boucles.

Ainsi, si  $\Sigma$  ne comporte qu'une seule relation définie réduite  $A = B$  ( $A$  et  $B$  sont différents du vide),  $G$  sera présenté par

$$\langle E ; A \bar{B} \rangle.$$

Etant donné que le problème du mot est résolu dans  $\langle E ; A \bar{B} \rangle$  et  $M$  est isomorphe à  $H$  ; alors, il existe un algorithme pour résoudre le problème du mot d'un monoïde  $M$  qui a une seule relation définie réduite  $A = B$ .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] - ADJAN S.I.  
Defining relations and algorithmic problems for groups and semigroups.  
American Mathematical Society, providence, R.I., 1967.
- [2] - BENZAKEN C.  
Synthèse des réseaux de contact  
Université de GRENOBLE, Institut de Mathématiques Appliquées.  
Séminaire de Logique 20 Décembre 1965.
- [3] - BRITTON J.L.  
Solution of the word problem for certain types of Groups I.  
Proc. Glasgow Math. Assoc., 3 (1956), 45-54.
- [4] - BRITTON J.L.  
Solution of the word problem for certain types of Groups II.  
Proc. Glasgow Math. Assoc., 3 (1957), 68-90.
- [5] - BRITTON J.L.  
The word problem for Groups.  
Proc. London Math. Soc., 8, No. 32 (3<sup>rd</sup> series) (1958), 493-506.
- [6] - BRITTON J.L.  
The word problem  
Ann. of Math. (2) 77 (1963), 16-32.
- [7] - BOONE WILLIAM W.  
The word problem  
Ann. of Math. (2) 70 (1959), 207-265.



- [8] - BOONE WILLIAM W.  
Certain simple unsolvable problems of group theory.  
Indig. Math. 16, (1955), 231-237, 492-497 ;  
17, (1955), 252-256 ;  
19, (1955), 22-27, 227-232.
- [9] - BENSON CLARK T. ; MENDELSON N.S.  
A calculus for a certain class of word problems in Groups.  
J. Combinatorial Theory 1 (1966), 202-208.
- [10]- BAUMSLAG Gilbert  
Groups with one defining relator.  
J. Austral. Math. Soc. 4 (1964), 385-392.
- [11]- CHOMSKY N. and SCHUTZENBERGER M.P.  
The algebraic theory of context-free languages, in "computer programming and Formal Systems".  
(F. Braffort et al., eds.)  
North-Holland publ., Amsterdam, 1963.
- [12]- GREENDLINGER M.  
Dehn's Algorithm for the word problem.  
Comm. pure and appl. Math., 13 (1960), 67-83.
- [13]- GREENDLINGER M.  
On Dehn's algorithms for the conjugacy and word problems, with applications  
Comm. pure and Appl. Math., 13 (1960), 641-677.

- [14] - GRINDLINGER E.I.  
The word problem for a class of semigroups with a finite number of  
defining relations (Russian).  
Sibirsk. Mat.  $\hat{Z}$ . 5 (1964), 77-85.
- [15] - GRINDLINGER M.  
Solutions of the word problem for a class of groups by generalization  
of Dehn's algorithm. (Russian)  
Dokl. Akad. Nauk SSSR 154 (1964), 507-509.
- [16] - GROSS M. LENTIN A.  
Notions sur les grammaires formelles  
Gauthier - Villars Paris.
- [17] - LYNDON ROGER C.  
On Dehn's algorithm.  
Math. Ann. 166 (1966), 208-228.
- [18] - LYNDON ROGER C.  
Cohomology Theory of groups with a single defining relation.  
Annals of Math., 52 (1950), 650-665.
- [19] - MAGNUS W. , KARRASS A. , SOLITAR D.  
Combinatorial Group Theory (presentations of groups in terms of  
Generators and Relations).
- [20] - MENDELSON N.S.  
An algorithmic Solution for a word problem in group Theory.  
Canad. J. Math. 16 (1964), 509-516.

- [21] - MENDELSON N.S.  
Correction to : An algorithmic solution for a word problem in group Theory.  
Canad. J. Math. 17 (1965), 505.
- [22] - NOVIKOV P.S.  
On the Algorithmic unsolvability of the word problem in group theory.  
Trudy Mat. Inst. im Steklov No 44, 143 PP.  
Izdat. Akad. Nauk. SSSR, Moscow (Russian), MR 17, (1955), 706.  
English text in "Russian translations", series 2, Vol. 9, 1958.  
Edited by the American Math. Soc.
- [23] - TRUFFAULT Bernard  
Sur le problème des mots pour les groupes de Greendlinger.  
C.R. Acad. Sci. Paris, Sér. A-B 267 (1968), A1-A3.
- [24] - VAUQUOIS B.  
Calculabilité des langages.  
Université de Grenoble - Service de Mathématiques Appliquées, 1970.