



**HAL**  
open science

# Déformations d'interfaces fluides par la pression de radiation acoustique

B. Issenmann

► **To cite this version:**

B. Issenmann. Déformations d'interfaces fluides par la pression de radiation acoustique. Acoustique [physics.class-ph]. Université Sciences et Technologies - Bordeaux I, 2007. Français. NNT: . tel-00283449

**HAL Id: tel-00283449**

**<https://theses.hal.science/tel-00283449v1>**

Submitted on 30 May 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE

PRÉSENTÉE À

## L'UNIVERSITÉ BORDEAUX I

ÉCOLE DOCTORALE DES SCIENCES PHYSIQUES ET DE L'INGÉNIEUR

PAR **Bruno ISSENMANN**

POUR OBTENIR LE GRADE DE

### DOCTEUR

SPÉCIALITÉ : LASERS ET MATIÈRE DENSE

\*\*\*\*\*

## Déformations d'interfaces fluides par la pression de radiation acoustique

\*\*\*\*\*

Soutenue le 12 Décembre 2007

Après avis de :

<b>M. Stéphan FAUVE</b>	Professeur à l'École Normale Supérieure de Paris	<b>Rapporteur</b>
<b>M. Jean-Louis THOMAS</b>	Chargé de Recherche au CNRS	<b>Rapporteur</b>

Devant la commission d'examen formée de :

<b>Mme Michèle ADLER</b>	Directrice de Recherche au CNRS	<b>Présidente</b>
<b>M. Hamid KELLAY</b>	Professeur à l'Université Bordeaux I	<b>Rapporteur</b>
<b>M. Christophe JOSSERAND</b>	Chargé de Recherche au CNRS	<b>Examineur</b>
<b>M. Jean-Pierre DELVILLE</b>	Directeur de Recherche au CNRS	<b>Directeur de thèse</b>
<b>M. Régis WUNENBURGER</b>	Maître de Conférences à l'Université Bordeaux I	<b>Co-directeur de thèse</b>

# Remerciements

Ce travail de thèse a été réalisé au Centre de Physique Moléculaire Optique et Hertzienne, sous la direction de Jean-Pierre Delville et Régis Wunenburger. Je tiens à les remercier de m'avoir fait confiance pour mener à bien ce travail durant ces trois années. J'ai reçu de leur part un encadrement idéal, qui m'a permis de bien avancer pendant mon travail tout en acquérant une bonne autonomie. Leur exigence n'avait d'égal que leur bienveillance, ce qui m'a permis de réaliser cette thèse dans des conditions idéales.

Je remercie aussi Fabrice Vallée, Jean-Marie Turllet et Éric Freysz, directeurs successifs du laboratoire, pour avoir accepté de m'accueillir au sein du CPMOH pour réaliser ce travail.

Nous avons travaillé en collaboration avec Sébastien Manneville, du CRPP, qui m'a fait profiter de son expérience. Je lui suis particulièrement reconnaissant pour toutes ces conversations très enrichissantes qui ont été d'une grande utilité dans la progression de cette thèse. Ce travail a aussi fait l'objet d'une collaboration avec Didier Lasseux et Hamza Chraïbi, du TREFLE. Je leur exprime toute ma gratitude pour leur travail d'analyse numérique qui m'a lui aussi été d'une grande aide.

Je souhaite remercier aussi Alice Nicolas et Olivier Misère, dont les expériences préliminaires m'ont permis de commencer ma thèse d'un bon pied, ainsi que tous les stagiaires que j'ai été amené à co-encadrer pendant ma thèse, François Reynal, Florian Dartois, Arnaud Auberon et Nicolas Bertin. Le travail sérieux qu'ils ont tous fourni pendant leur stage a permis de bien faire avancer certaines questions, et m'a été d'une précieuse aide dans la suite de mon travail de thèse.

Je remercie aussi beaucoup Stéphan Fauve et Jean-Louis Thomas pour avoir accepté la lourde tâche de relire attentivement mon manuscrit, ainsi que Michèle Adler, Christophe Jossierand et Hamid Kellay pour avoir accepté de faire partie de mon jury. Ma soutenance a été l'occasion d'échanges très riches avec toutes ces personnes.

Je tiens aussi à remercier les personnels techniques et administratifs du laboratoire, en particulier Touati Douar et Eddie Maillard qui ont confectionné de nombreuses pièces pour les expériences, ainsi que Joël Plantard, William Benharbone, Sébastien Cassagnère et Philippe Maire pour leur assistance technique au niveau de l'électronique.

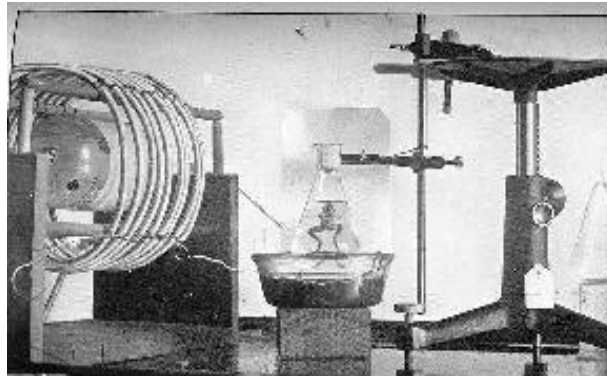
J'ai eu l'occasion de donner des cours à l'université, et remercie à ce titre tous les enseignants avec qui j'ai eu l'occasion d'interagir, et plus particulièrement Touria Cohen-Bouhacina, Lucie Nguyen et Frédéric Perrot. Un immense merci aussi à Claude Antoniazzi pour les conseils constructifs qu'il m'a donné lors des stages Voix et Gestes, qui m'ont beaucoup servi lors de cette expérience d'enseignement mais également lors des communications orales où j'ai présenté mon travail de thèse. Ses conseils continueront à coup sûr à m'être d'une grande utilité dans la suite de ma vie professionnelle.

Je dirai un grand merci à tous les amis, thésards et post-docs que j'ai rencontrés lors de ma thèse dans ce laboratoire : Stéphane, David (Lasne), David (Dulin), Gerhard, Louis,

---

Yann, Vivien, Jean-Baptiste, Moustapha, Matthieu et Nicolas de chez JP, Matthieu et Nicolas de chez Hamid, Fanny, Émilie, François, Julien, Pierre, Gilles, Hélène et Sébastien. Leur constante bonne humeur et leurs blagues toujours très fines (Dudu, j'ai particulièrement pensé à toi en écrivant ceci) ont beaucoup enrichi ces trois années passées à Bordeaux, et ont permis d'épicer un peu les côtes de mouton grillées et les salsifis au jus que nous avons eu la joie immense de manger ensemble tous les midis dans la cantine de l'université... Je remercie enfin Carmen pour la sauce qu'elle est bonne.

Talence, le 6 février 2008  
Bruno ISSENMANN



Wood, Loomis, *Phil. Mag. Series 7*, 4(22) :417-436, 1927

*Comment ils font pour faire rentrer la grenouille à l'intérieur de leur erlen ?*

# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>3</b>
<b>Publications et communications</b>	<b>11</b>
<b>Introduction</b>	<b>13</b>
Références de l'introduction . . . . .	14
<b>1 Historique de la notion de pression de radiation acoustique</b>	<b>15</b>
1.1 Les premières études : travaux de Rayleigh . . . . .	15
1.2 Travaux de Brillouin . . . . .	17
1.3 Travaux de Langevin . . . . .	19
1.4 Travaux expérimentaux réalisés sur la pression de radiation acoustique . .	21
1.5 La lévitation acoustique . . . . .	22
1.6 Applications de la pression de radiation à la manipulation de liquides en millifluidique . . . . .	26
Références du chapitre 1 . . . . .	28
<b>2 Calcul de la pression de radiation acoustique</b>	<b>31</b>
2.1 Modèle à une dimension d'ondes acoustiques d'amplitude infiniment petite	31
2.1.1 Position du problème . . . . .	31
2.1.2 Équation de propagation de l'onde acoustique . . . . .	32
2.1.3 Conditions d'écriture des équations à l'ordre le plus bas . . . . .	33
2.1.4 Impédance acoustique . . . . .	33
2.1.5 Énergie de l'onde acoustique . . . . .	34
2.1.6 Coefficients de réflexion et de transmission à la traversée d'une in- terface fluide . . . . .	35
2.2 Coordonnées eulériennes et coordonnées lagrangiennes . . . . .	39
2.3 La pression de radiation . . . . .	41
2.3.1 Position du problème . . . . .	41
2.3.2 Calcul de la pression de radiation acoustique s'exerçant sur l'obstacle	42
2.3.3 Pression acoustique eulérienne moyenne . . . . .	43
2.3.4 Pression acoustique lagrangienne moyenne . . . . .	45
2.3.5 Cas de Langevin et cas de Rayleigh : rôle du milieu extérieur . . . .	46
2.3.6 Pression de radiation acoustique s'exerçant sur un obstacle en inci- dence oblique . . . . .	51
2.4 Le streaming acoustique . . . . .	53
Conclusion . . . . .	58
Références du chapitre 2 . . . . .	59

<b>3</b>	<b>Dispositif expérimental, observations générales et modélisation statique</b>	<b>61</b>
3.1	Principe de l'expérience . . . . .	61
3.1.1	L'émetteur acoustique . . . . .	62
3.1.2	L'amplificateur de puissance . . . . .	63
3.1.3	Le générateur de fonction . . . . .	63
3.1.4	L'oscilloscope . . . . .	64
3.1.5	La caméra et l'éclairage . . . . .	64
3.1.6	Cavitation . . . . .	66
3.1.7	Fluides utilisés . . . . .	66
3.2	Caractérisation du transducteur . . . . .	66
3.2.1	Montage . . . . .	66
3.2.2	Calibration du transducteur . . . . .	70
3.2.3	Précision des capteurs de pression . . . . .	71
3.2.4	Cas des transducteurs troués . . . . .	71
3.3	Allure et sens des déformations observées . . . . .	73
3.3.1	Invariance haut/bas . . . . .	73
3.3.2	Rupture d'invariance de forme . . . . .	74
3.3.3	Comparaison avec les déformations d'interfaces par la pression de radiation optique . . . . .	75
3.4	Déformation d'une interface fluide induite par la pression de radiation d'un champ acoustique bessélien d'amplitude modérée . . . . .	77
3.4.1	Mise en équations . . . . .	77
3.4.2	Résolution exacte de l'équation . . . . .	80
3.4.3	Une résolution approchée de l'équation 3.28 . . . . .	80
3.4.4	Comparaison des résultats exact et approché . . . . .	82
3.5	Interprétation de ces résultats . . . . .	82
3.6	Couples de fluides utilisés pour les expériences . . . . .	85
	Conclusion . . . . .	85
	Références du chapitre 3 . . . . .	86
<b>4</b>	<b>Modélisation dynamique. Application à la mesure de tensions interfaciales.</b>	<b>87</b>
4.1	Quelques méthodes de mesure de la tension interfaciale . . . . .	88
4.1.1	La méthode de Wilhelmy [2] . . . . .	88
4.1.2	La méthode de la goutte pendante . . . . .	89
4.1.3	Une méthode de mesure de tension de surface sans contact utilisant la pression de radiation acoustique . . . . .	90
4.1.4	Une méthode de mesure de tension de surface sans contact utilisant la pression de radiation optique . . . . .	92
4.2	Principe de la méthode de mesure de tensions interfaciales . . . . .	94
4.3	Montage utilisé . . . . .	98
4.3.1	Description du montage . . . . .	98
4.3.2	Intérêt du prisme de Glan et du cube séparateur . . . . .	99
4.3.3	Col du faisceau au niveau de la déformation . . . . .	102
4.4	Modélisation dynamique de la déformation à un fluide . . . . .	103
4.4.1	Expression générale de la courbure de la déformation . . . . .	103
4.4.2	Expression de la courbure de la déformation en régime non-visqueux . . . . .	106
4.4.3	Expression de la courbure de la déformation en régime visqueux . . . . .	107

4.4.4	Adaptation de ce calcul dans le cas de l'interface entre deux fluides	111
4.5	Terme source bessélien . . . . .	113
4.6	Comparaison de la théorie avec l'expérience . . . . .	116
4.6.1	Résultats expérimentaux . . . . .	116
4.6.2	Conditions d'application des modèles théoriques . . . . .	122
4.7	Mesure de la tension interfaciale et de la viscosité à partir du temps du premier maximum et de l'atténuation . . . . .	123
	Conclusion . . . . .	126
	Références du chapitre 4 . . . . .	126
<b>5</b>	<b>Étude expérimentale des déformations d'interfaces fluides transparentes aux ondes acoustiques</b>	<b>129</b>
5.1	Choix du couple de fluides . . . . .	129
5.2	Forme de la déformation . . . . .	131
5.3	Vérification expérimentale de l'invariance haut-bas . . . . .	133
5.4	Observation du streaming acoustique . . . . .	133
5.5	Mesure de la vitesse du son dans le chloroforme . . . . .	136
5.6	Hauteur de la déformation de l'interface entre l'eau et le chloroforme en régime stationnaire . . . . .	138
5.6.1	Déformation quasi-statique . . . . .	138
5.6.2	Test de la théorie de la pression de radiation . . . . .	138
5.6.3	Comportement aux grandes déformations . . . . .	140
5.7	Hauteur de la déformation de l'interface eau-huile DC704 en régime stationnaire . . . . .	142
5.8	Dynamique de la déformation de l'interface eau-chloroforme . . . . .	143
	Conclusion . . . . .	144
	Références du chapitre 5 . . . . .	144
<b>6</b>	<b>Étude expérimentale des interfaces fluides réfléchissant totalement les ondes acoustiques</b>	<b>145</b>
6.1	Dispositif expérimental et observations . . . . .	145
6.2	Modélisation de l'hystérésis . . . . .	147
6.2.1	Explication qualitative . . . . .	147
6.2.2	Cavité Pérot-Fabry . . . . .	148
6.2.3	Équilibre mécanique . . . . .	148
6.2.4	Stabilité des points d'équilibre . . . . .	151
6.2.5	Modification de la longueur de la cavité au repos . . . . .	153
6.2.6	Tracé de la courbe de résonance expérimentale . . . . .	156
6.3	Hystérésis en fréquence . . . . .	157
6.4	Apparition de l'hystérésis pour de petites amplitudes acoustiques . . . . .	159
6.4.1	Montage . . . . .	160
6.4.2	Modélisation . . . . .	161
6.4.3	Résultats . . . . .	163
	Conclusion . . . . .	164
	Références du chapitre 6 . . . . .	164

<b>7</b>	<b>Action de la pression de radiation acoustique sur une onde capillaire</b>	<b>165</b>
7.1	Position du problème . . . . .	165
7.2	Dispositif expérimental . . . . .	167
7.3	Modélisation théorique de l'atténuation des ondes capillaires au niveau de la déformation . . . . .	168
7.4	Mesure de l'amplitude de l'onde capillaire incidente en l'absence de déformation	170
7.4.1	Principe de la méthode . . . . .	170
7.4.2	Prise en compte de l'atténuation et des ondes stationnaires . . . . .	172
7.4.3	Comparaison de cette méthode avec celle consistant à mesurer directement l'amplitude de l'onde incidente sur les images . . . . .	172
7.5	Mesure de l'amplitude des oscillations au sommet de la déformation . . . . .	176
7.5.1	Mesure de l'amplitude des oscillations à partir de la tension mesurée aux bornes du transducteur . . . . .	177
7.5.2	Mesure de l'amplitude des oscillations par mesure directe sur les images	182
7.6	Mesure expérimentale de la pente de la courbe de résonance de Pérot-Fabry	182
7.7	Résultats expérimentaux . . . . .	184
7.7.1	Atténuation . . . . .	184
7.7.2	Dépendance en fréquence de l'atténuation . . . . .	186
7.7.3	Discussion . . . . .	187
7.7.4	Une explication possible de l'écart de l'atténuation par rapport à la loi linéaire (zone 2) . . . . .	188
7.7.5	Théorie faiblement non linéaire de l'atténuation de l'onde au niveau de la déformation . . . . .	189
7.8	Diffusions d'ondes capillaires par la cavité Pérot-Fabry . . . . .	193
7.8.1	Visualisation de l'onde capillaire diffusée au niveau de la déformation	193
7.8.2	La diffusion est causée par l'effet de cavité . . . . .	197
	Conclusion . . . . .	200
	Références du chapitre 7 . . . . .	201
<b>8</b>	<b>Oscillations spontanées auto-entretenues du sommet de la déformation</b>	<b>203</b>
8.1	Observations . . . . .	203
8.2	Fréquence caractéristique de ces oscillations . . . . .	203
8.3	Évolution de la fréquence des oscillations avec les différents paramètres expérimentaux . . . . .	206
8.4	Observations antérieures d'une instabilité d'oscillation de cavités optiques déformables . . . . .	207
8.5	Hauteur et tension seuil d'apparition et de disparition des oscillations . . . . .	207
	Conclusion . . . . .	210
	Références du chapitre 8 . . . . .	210
	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>213</b>
<b>A</b>	<b>Transformée de Hankel du champ de pression bessélien</b>	<b>217</b>
A.1	Relation entre la transformée de Fourier et la transformée de Hankel . . . . .	217
A.2	Transformée de Hankel du champ de pression bessélien . . . . .	217
A.3	Démonstration de la nullité de cette fonction pour $k > \frac{2\pi}{\lambda}$ . . . . .	218
A.4	Comparaison entre la figure de diffraction par une fente d'Young et la figure de diffraction par un trou d'Young . . . . .	219



Références de l'annexe A . . . . .	222
<b>B Capteurs de pression utilisés pour étalonner les transducteurs</b>	<b>223</b>
B.1 Montage utilisé . . . . .	224
B.2 Comparaison des champs de pression mesurés par les trois capteurs . . . . .	225
B.2.1 Champs de pression mesurés sur un transducteur focalisé . . . . .	225
B.2.2 Recalibration de l'aiguille de 200 $\mu\text{m}$ . . . . .	227
B.3 Problème associé aux capteurs membrane . . . . .	228
B.4 Vérification de l'étalonnage du transducteur à partir des données fournies par son constructeur . . . . .	231
Conclusion . . . . .	233
Références de l'annexe B . . . . .	233
<b>C Mesure du coefficient de réflexion de l'onde acoustique à la surface du transducteur</b>	<b>235</b>
C.1 Mesure expérimentale du coefficient de réflexion en pression de l'onde à la surface du transducteur . . . . .	235
C.2 Coefficient de réflexion effectif du transducteur . . . . .	237
<b>D Propagation d'un faisceau gaussien</b>	<b>245</b>
D.1 Faisceau gaussien . . . . .	245
D.2 Transformation d'un faisceau gaussien par une lentille . . . . .	247
D.3 Mesure du col d'un faisceau laser . . . . .	249
D.3.1 Mesure du col du faisceau émis par le laser en amont de la lentille $L_1$	249
D.3.2 Mesure du col du faisceau laser en sortie de l'expandeur de faisceau	249
D.3.3 Mesure du col du faisceau en sortie de $L_4$ . . . . .	250
Références de l'annexe D . . . . .	252
<b>E Calculs du chapitre 4 :</b>	
<b>Modélisation dynamique. Application à la mesure de tensions interfaciales.</b>	<b>253</b>
E.1 Expression de la courbure de la déformation en régime non-visqueux . . . . .	254
E.2 Expression de la courbure de la déformation en régime visqueux . . . . .	257
Références de l'annexe E . . . . .	260
<b>F Problèmes expérimentaux rencontrés dans l'étude du chapitre 7</b>	<b>261</b>
F.1 Utilisation d'une plage pour atténuer la réflexion de l'onde capillaire en bout de cellule . . . . .	261
F.1.1 Dynamique du vibreur . . . . .	262
F.2 Validité du critère de positionnement de l'axe du transducteur . . . . .	262
F.3 Vérification de la relation de dispersion des ondes capillaires . . . . .	264
F.3.1 Mesure de la longueur d'onde de l'onde capillaire incidente . . . . .	264
F.3.2 Résultats expérimentaux . . . . .	267
<b>Physical Review Letters 97, 074502, 2006</b>	<b>269</b>



## Publications et communications

Cette thèse a donné lieu aux publications et communications suivantes :

- Bistability of a Compliant Cavity Induced by Acoustic Radiation Pressure (**Physical Review Letters** 97, 074502, 2006) (reproduit aux pages 269 à 272.)
- Opto-hydrodynamic instability of fluid interfaces (**Proceedings of SPIE** 5930, 59300P, 2005)
- Bistabilité d'une surface liquide induite par la pression de radiation acoustique (**Comptes Rendus de la 9ème Rencontre du Non-Linéaire**, 135, Paris, 2006)
- Bistabilité d'une surface liquide induite par la pression de radiation acoustique et application à l'atténuation d'ondes capillaires (**Comptes Rendus du 18ème Congrès Français de Mécanique**, Grenoble, 2007)
- Déformations et instabilités d'interfaces liquides induites par la pression de radiation acoustique (**Comptes Rendus du 17ème Congrès Français de Mécanique**, Troyes, 2005)



# Introduction

La pression de radiation acoustique est un phénomène non-linéaire qui a été très étudié théoriquement depuis les premiers travaux de Rayleigh [1]. Elle a fait l'objet de nombreux travaux expérimentaux décrivant en particulier le déplacement de cibles solides induites par la pression de radiation acoustique [2, 3], dans le but par exemple de développer des appareils servant à calibrer des sources acoustiques [4].

En revanche, l'étude des déformations d'interfaces fluides par la pression de radiation acoustique, comme celle représentée sur la figure 1, a fait l'objet de relativement peu de travaux expérimentaux, ceux-ci étant restés assez qualitatifs [5, 6, 7], bien que les travaux théoriques ne manquent pas à ce sujet [8]. Le but de cette thèse est d'étudier expérimentalement ces déformations et de confronter ces expériences aux travaux théoriques existants.

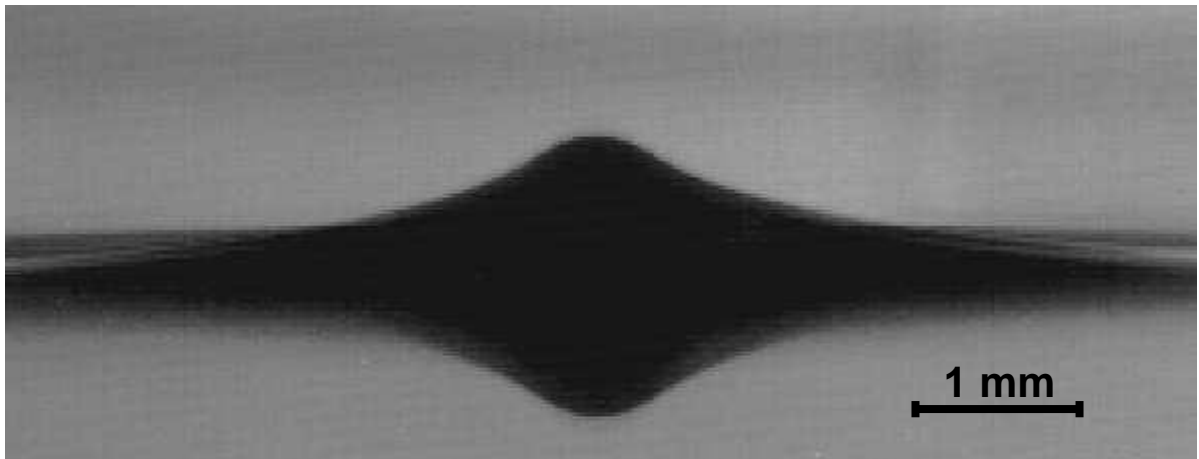


FIG. 1 – Déformation de l'interface eau-air par la pression de radiation d'une onde acoustique focalisée, arrivant verticalement depuis l'eau.

Après quelques considérations historiques (chapitre 1), nous développerons une théorie de la pression de radiation dans le chapitre 2. Dans le chapitre 3, nous présenterons l'appareillage expérimental que nous avons utilisé et quelques résultats expérimentaux basiques, que nous expliquerons par une théorie décrivant l'influence de la pression de radiation sur une interface fluide en statique. Pour aller plus loin dans l'étude quantitative de ces effets, il est nécessaire de connaître avec une grande précision la tension interfaciale de l'interface liquide utilisée. Pour ce faire, nous avons développé une méthode de mesure *in situ* de la tension interfaciale entre deux fluides, qui utilise l'étude théorique dynamique des déformations d'interfaces. Le but du chapitre 4 est de présenter cette étude dynamique et de présenter la méthode de mesure de tensions interfaciales que nous avons développée

à la suite de cette étude. Dans le chapitre 5, nous présenterons une étude métrologique des déformations sur des interfaces transparentes (comme l'interface eau-chloroforme) et vérifierons, comme le prévoit la théorie, que la hauteur de la déformation obtenue sur ce type d'interfaces est proportionnelle à la pression de radiation acoustique exercée. Dans ce chapitre, nous verrons également que des phénomènes non-linéaires parasites sont susceptibles de fausser les expériences sur certains couples de fluides visqueux. Les trois chapitres suivants seront consacrés aux interfaces totalement réfléchissantes comme l'interface eau-air. Nous verrons dans le chapitre 6 que sur ce type d'interfaces, un couplage se met en place entre la déformation de l'interface et la propagation de l'onde, couplage qui se traduit lors des expériences par une hystérésis de la hauteur de la déformation lorsqu'on fait croître puis décroître l'amplitude de l'onde acoustique issue de l'émetteur. Nous expliquerons dans ce chapitre l'établissement de cette bistabilité par la présence d'une cavité Pérot-Fabry entre l'interface réfléchissante et la surface de l'émetteur acoustique, elle-même partiellement réfléchissante, et vérifierons que cette théorie permet de décrire avec précision les effets observés. Les chapitres 7 et 8 seront plus particulièrement consacrés à l'effet de raideur induit par cette cavité Pérot-Fabry sur l'interface. Dans le chapitre 7, nous vérifierons que des ondes capillaires rencontrant une déformation d'interface forcée acoustiquement sont atténuées et diffusées au niveau de cette déformation, et nous vérifierons que cette atténuation et cette diffusion ne sont pas dues principalement à la présence de la déformation mais plutôt à la présence de la cavité acoustique. Enfin, le chapitre 8 sera consacré à l'étude d'oscillations paramétriques spontanées et auto-entretenuës d'une déformation.

## Références de l'introduction

- [1] Lord Rayleigh. On the Pressure of Vibrations. *Philos. Mag.*, 3 :338–346, 1902.
- [2] W. Altberg. Über die Druckkräfte der Schallwellen und die absolute Messung des Schallintensität. *Annalen der Physik (Leipzig)*, 2 :405–420, 1903.
- [3] E. M. J. Herrey. Experimental studies on acoustic radiation pressure. *J. Acoust. Soc. Am.*, 27(5) :891–896, 1955.
- [4] K. Beissner. Primary measurement of ultrasonic power and dissemination of ultrasonic power reference values by means of standard transducers. *Metrologia*, 36 :313–320, 1999.
- [5] R. W. Wood et A. L. Loomis. The Physical and Biological Effects of High-frequency Sound-waves of Great Intensity. *Phil. Mag. Series 7*, 4(22) :417–436, 1927.
- [6] G. Hertz et H. Mende. Der Schallstrahlungsdruck in Flüssigkeiten. *Z. Phys.*, 114 :354, 1939.
- [7] M. Kornfeld et V. I. Triers. Swelling of a liquid surface under the influence of ultrasound. *Zh. Tekh. Fiz.*, 26 :2778, 1956.
- [8] B. T. Chu et R. E. Apfel. Acoustic radiation pressure produced by a beam of sound. *J. Acoust. Soc. Am.*, 72(6) :1673–1687, 1982.

# Chapitre 1

## Historique de la notion de pression de radiation acoustique

Le but de cette partie est de présenter un rapide historique des principaux travaux portant sur la pression de radiation acoustique. Dans un premier temps, nous présenterons les principaux travaux théoriques fondateurs décrivant la pression de radiation acoustique. Dans un deuxième temps, nous nous intéresserons à quelques travaux expérimentaux historiques (paragraphe 1.4). Enfin, nous présenterons quelques travaux portant sur la lévitation acoustique et quelques unes de ses applications (paragraphe 1.5), et enfin nous nous intéresserons à quelques applications de la pression de radiation acoustique dans la manipulation sans contact de fluides (paragraphe 1.6).

Cette partie s'appuie, en le développant, sur un article de R. T. Beyer paru en 1978 [1].

### 1.1 Les premières études : travaux de Rayleigh

La notion de pression de radiation électromagnétique a été introduite en 1874 par Maxwell [2], qui la déduisait de ses équations générales décrivant les champs électromagnétiques. En 1901, Lebedev [3] en a vérifié l'existence expérimentalement, mais c'est Lord Rayleigh [4] qui a tenté de généraliser ce phénomène aux autres types d'ondes en 1902.

Rayleigh imagine tout d'abord le système suivant (figure 1.1).

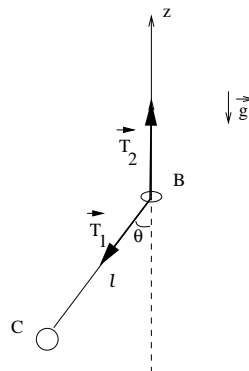


FIG. 1.1 – Forces exercées par la corde d'un pendule simple sur un anneau contraint à rester sur l'axe vertical.

Considérons un pendule constitué d'une masse  $C$  attachée au bout d'une corde. Un anneau  $B$ , libre de coulisser le long de la corde, peut se déplacer verticalement mais est contraint de rester sur l'axe vertical. Soit  $T$  la valeur de la tension de la corde. La portion de la corde se trouvant sous l'anneau exerce dessus une force  $\vec{T}_1$ . La portion se trouvant au-dessus exerce une force  $\vec{T}_2$ , qui a la même norme que  $\vec{T}_1$  mais pas la même direction. La corde exerce donc sur l'anneau une force totale dont la composante suivant l'axe  $\vec{z}$  vaut  $F_z = T(1 - \cos \theta)$ , qui tend à faire monter l'anneau. Rayleigh démontre que cette force vaut  $F_z = \frac{1}{2} \frac{E}{l}$ , où  $E$  est l'énergie mécanique du système et  $l$  la longueur de la partie de la corde située sous l'anneau.

Il applique le même raisonnement sur une onde transversale le long d'une corde (figure 1.2).

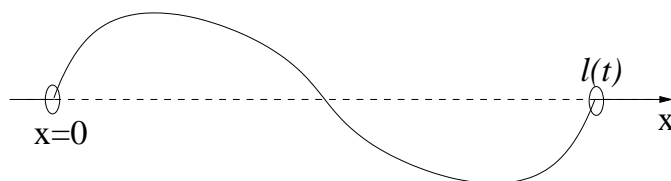


FIG. 1.2 – Onde transversale se propageant le long d'une corde et confinée entre deux anneaux.

Soient deux anneaux enfilés autour d'une corde infinie. L'un est fixe en  $x = 0$  et l'autre est libre de coulisser le long de la corde mais est contraint de rester sur un axe horizontal. Les vibrations de la corde sont confinées entre ces deux anneaux. Rayleigh démontre alors par un raisonnement analogue au précédent que la force de radiation exercée sur les deux anneaux vaut  $F = E/l$ , où  $E$  est l'énergie mécanique du système et  $l$  la distance séparant les deux anneaux.

Dans ces deux problèmes, si l'anneau est libre de se déplacer indéfiniment, l'énergie de vibration de la corde se transformera totalement en travail, utilisé pour déplacer l'anneau.

Pour tenter de généraliser cette notion de force de radiation aux ondes acoustiques, Rayleigh imagine alors le problème représenté sur la figure 1.3.

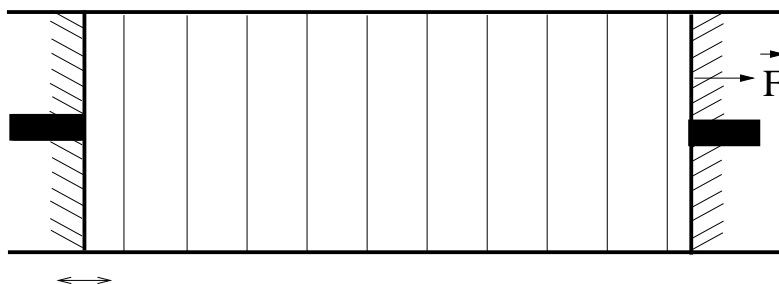


FIG. 1.3 – Onde acoustique plane confinée dans un cylindre fermé par deux pistons.

Dans ce système, un cylindre est rempli d'air et un piston, situé à l'une de ses extrémités, est animé d'un mouvement sinusoïdal. Une onde acoustique plane se propage alors dans le cylindre. Cette onde s'étend sur toute la largeur du cylindre et Rayleigh démontre que le piston situé à l'autre extrémité subit une force de la part de l'onde acoustique. Il en déduit que les ondes acoustiques exercent, comme les ondes électromagnétiques, une pression de



radiation sur un obstacle. En 1905, il publie une étude plus approfondie de ce problème [5] en partant de l'idée de Poynting suivant laquelle « si la réflexion d'un train d'onde exerce une pression sur un réflecteur, cela ne peut être que parce que le train d'onde lui-même possède une quantité de mouvement » [6]. De cette étude, il déduit que la pression de radiation exercée par une onde acoustique plane dans un gaz en incidence normale sur une surface parfaitement réfléchissante vaut  $(\gamma + 1)\langle E \rangle / 2$ , où  $\gamma$  est le rapport des chaleurs spécifiques du gaz et  $\langle E \rangle$  est la densité d'énergie moyenne de l'onde stationnaire résultant de la superposition des ondes acoustiques incidente et réfléchie.

## 1.2 Travaux de Brillouin

En 1920, Brillouin reprend ces travaux dans le cadre du calcul de la dilatation thermique des solides [7]. En effet, pour modéliser la dilatation thermique des solides, il suppose que l'agitation thermique peut être décomposée en ondes élastiques de toutes fréquences se propageant en tous sens, qui exercent sur les parois du solide une pression de radiation. La densité d'énergie de ces ondes élastiques augmentant avec la température, la pression de radiation augmente également et le solide se dilate.

Pour Brillouin, les résultats obtenus par Lord Rayleigh peuvent être déduits directement de la formule des invariants adiabatiques de Boltzmann et Ehrenfest [8]. Soit un système mécanique où se produit un phénomène périodique de fréquence  $\nu$  et de période  $\tau$ . Alors

$$\tau \langle K \rangle = cte \quad (1.1)$$

$\langle K \rangle$  étant l'énergie cinétique moyenne du système. Cela reste vrai si le système est soumis à une transformation adiabatique et réversible [9].

Appliquons ce résultat au problème de la corde vibrante, présenté sur la figure 1.2. La longueur  $l$  de la corde est modifiée de façon très lente et progressive, ce qui correspond à une transformation adiabatique en mécanique statistique. Alors la force  $F$  qui s'exerce sur l'anneau mobile exerce un travail mécanique  $dW$

$$dW = F dl = -dE \quad (1.2)$$

$dE$  étant la variation de l'énergie vibratoire du système. Supposons que la corde vibre de façon sinusoïdale. Alors  $\langle K \rangle = E/2$  et l'équation 1.1 implique que

$$\frac{d\tau}{\tau} + \frac{dE}{E} = 0 \quad (1.3)$$

soit, en introduisant l'équation 1.2

$$F = \frac{E}{\tau} \frac{d\tau}{dl} \quad (1.4)$$

Si l'anneau se déplace d'une longueur  $dl$ , la corde s'allonge de  $dl$  et la période des oscillations est modifiée de  $d\tau$ , car les conditions de résonance impliquent que

$$\frac{1}{2} nu\tau = n \frac{\lambda}{2} = l \quad (1.5)$$

$u$  étant la vitesse de propagation des ondes et  $n$  un entier, d'où

$$\frac{d\tau}{\tau} = \frac{dl}{l} \quad (1.6)$$

On retrouve alors le résultat de Rayleigh :

$$F = \frac{E}{l} \quad (1.7)$$

En 1925 [10], Brillouin réalise que la notion de quantité de mouvement d'une onde acoustique introduite par Poynting est totalement erronée. Une onde acoustique ne possède pas de quantité de mouvement moyenne. En effet, un contre-exemple est présenté sur la figure 1.4 [11].

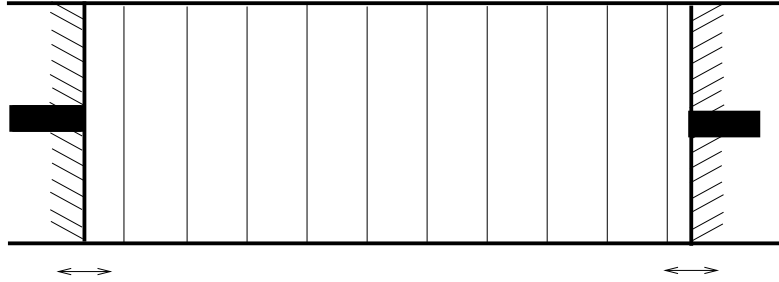


FIG. 1.4 – Onde acoustique plane progressive se propageant de la gauche vers la droite dans un cylindre fermé par deux pistons : il n'y a pas de transport de matière.

Un cylindre, fermé par deux pistons à ses deux extrémités, est rempli d'un fluide non-visqueux. Le piston de gauche émet une onde acoustique plane, progressive, à une dimension et celui de droite absorbe totalement l'onde. À l'équilibre, chaque piston vibre autour d'une position moyenne. La conservation de la masse impose que le centre de masse du fluide n'ait pas de mouvement moyen : chaque particule fluide oscille autour d'une position moyenne fixe. Par conséquent, la quantité de mouvement moyenne des particules fluides est nulle. Brillouin suppose alors non pas que l'onde possède une quantité de mouvement, mais qu'elle transporte la quantité de mouvement du piston de gauche jusqu'au piston de droite. Il développe alors une théorie de la pression de radiation en y introduisant le flux de quantité de mouvement. Par ailleurs, Brillouin fait remarquer que la pression de radiation n'est pas à proprement parler une pression. En effet, « le terme de pression doit être réservé pour des forces proportionnelles à l'élément de surface sur lequel elles s'exercent, et indépendantes de l'orientation de celui-ci. Les forces dues aux radiations varient essentiellement suivant l'orientation des surfaces émettrices, absorbantes ou réfléchissantes sur lesquelles on les observe » [10] (cela sera confirmé par Herrey dans ses expériences en 1955 [12], ainsi que par Beissner en 1986 [13]). Brillouin préfère alors parler de « tension de radiation » et calcule cette tension de radiation sous forme tensorielle. Cela vient en fait de façon naturelle de l'introduction du flux  $\phi$  de quantité de mouvement, qui est une grandeur tensorielle du deuxième ordre :

$$\phi = \begin{pmatrix} \rho v_1^2 & \rho v_1 v_2 & \rho v_1 v_3 \\ \rho v_1 v_2 & \rho v_2^2 & \rho v_2 v_3 \\ \rho v_1 v_3 & \rho v_2 v_3 & \rho v_3^2 \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

$v_1$ ,  $v_2$  et  $v_3$  désignent les composantes de la vitesse du fluide en coordonnées eulériennes selon trois axes en coordonnées cartésiennes.  $\rho$  désigne la masse volumique du fluide au point considéré.  $\rho v_i v_j$  désigne le flux surfacique de la quantité de mouvement  $\rho v_i$  à travers une surface orthogonale à l'axe  $j$ .

Brillouin se rend également compte d'un aspect important du problème : lorsqu'on étudie des ondes acoustiques d'amplitude notable (c'est-à-dire suffisamment intenses pour que l'ordre 2 ne soit plus négligeable devant l'ordre 1 dans les équations, mais suffisamment faibles pour que les ordres supérieurs restent négligeables, ce que nous désignerons dans la suite par l'expression « ondes d'amplitude finie »), il est indispensable de bien distinguer les quantités eulériennes et les quantités lagrangiennes. Les quantités eulériennes sont mesurées en un point fixe de l'espace alors que les quantités lagrangiennes sont mesurées en suivant une particule fluide.

En effet, pour un observateur lié à une particule fluide, les efforts se réduisent toujours à une pression  $p$  si le fluide est parfait. La densité tensorielle des efforts vaut, en coordonnées lagrangiennes :

$$\Theta^L = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix} \quad (1.9)$$

En coordonnées eulériennes, on ne peut observer que la densité tensorielle « effort et flux de quantité de mouvement » :

$$\Theta^E = \begin{pmatrix} -p - \rho v_1^2 & -\rho v_1 v_2 & -\rho v_1 v_3 \\ -\rho v_1 v_2 & -p - \rho v_2^2 & -\rho v_2 v_3 \\ -\rho v_1 v_3 & -\rho v_2 v_3 & -p - \rho v_3^2 \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

À partir du moment où on étudie des ondes acoustiques d'amplitude finie, il faut tenir compte des termes d'advection non-linéaires et  $\Theta^L$  et  $\Theta^E$  ne sont pas égaux.

Cependant, Brillouin a négligé dans son calcul un autre effet du deuxième ordre, le straining acoustique, c'est-à-dire la modification du volume moyen d'une particule fluide relativement à son volume initial lors du passage de l'onde, et qui introduit une très légère dilatation du milieu dans lequel l'onde se propage (typiquement, si la source et la cible sont éloignées de 10 cm au repos et si une onde acoustique d'intensité 1 W/cm<sup>2</sup> se propage dans l'eau, l'onde éloigne la source et la cible d'environ 5 Å) [14]. Cette erreur le fait surestimer d'un facteur 2 la pression de radiation acoustique. C'est l'un de ses étudiants, Fubini, qui la corrige et publie son calcul dans une revue italienne [15] et une revue française [16]. Son article de 1935 dans *Alta Frequenza* a été traduit en 1984 par Beyer [17]. Westervelt publie ce calcul corrigé dans une revue anglo-saxonne en 1950 [18].

### 1.3 Travaux de Langevin

Indépendamment des travaux de Rayleigh et Brillouin, Langevin s'intéresse également au problème de la pression de radiation acoustique, mais utilise une autre méthode pour la calculer. Il n'a pas publié ces travaux mais les a exposés en 1923 pendant son cours au Collège de France, et c'est Biquard, l'un de ses élèves, qui les a rapportés dans trois articles publiés en 1932 et 1933 [19, 20, 21].

On considère ici un fluide parfait en écoulement irrotationnel, et deux particules fluides  $A$  et  $B$ , reliées par une ligne continue dans le fluide (figure 1.5). Au cours du temps, cette ligne suit le mouvement des particules fluides dont elle est constituée.

On note  $C$  la circulation de la vitesse  $\vec{u}$  le long de la courbe  $AB$  :

$$C = \int_A^B \sum_i u_i dx_i \quad (1.11)$$

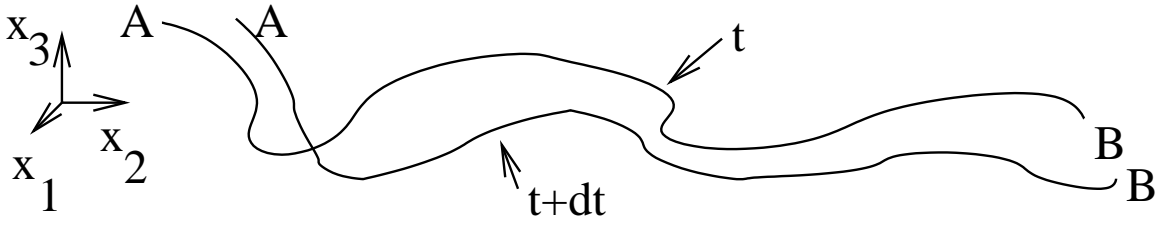


FIG. 1.5 – Deux particules fluides  $A$  et  $B$  du fluide reliés par une ligne continue dans le fluide. La ligne suit les trajectoires des particules fluides au cours du temps.

Langevin utilise un résultat démontré par Thomson [22], dont on peut lire la démonstration dans la référence [23], selon lequel

$$\frac{dC}{dt} = \left( \frac{u^2}{2} - \mathcal{P} \right)_A - \left( \frac{u^2}{2} - \mathcal{P} \right)_B \quad (1.12)$$

$\mathcal{P}$  étant la grandeur  $\int_0^p \frac{dp}{\rho(p)}$ , où  $p$  est la pression acoustique au point considéré et  $\rho(p)$  la masse volumique du fluide.  $C$  étant périodique, ce résultat implique que la grandeur

$$\left\langle \frac{u^2}{2} - \mathcal{P} \right\rangle \quad (1.13)$$

est la même en tout point du fluide. On utilise le développement limité à l'ordre 1 de  $\rho(p)$  autour de  $\rho_0$  :

$$\rho = \rho_0 (1 + \alpha p - \beta p^2 + \dots) \quad (1.14)$$

$\alpha$  et  $\beta$  étant des constantes. Dans ce cas, le fait que la grandeur 1.13 ne dépende pas du point du fluide où on la calcule se traduit par l'équation suivante :

$$\langle p_A \rangle - \langle p_B \rangle = \langle E_A \rangle - \langle E_B \rangle \quad (1.15)$$

$\langle E \rangle$  étant l'énergie volumique moyenne de l'onde acoustique.

Langevin imagine alors un dispositif tel que celui représenté sur la figure 1.6.

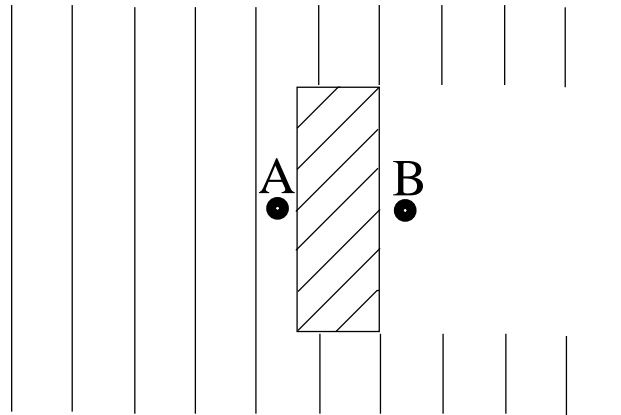


FIG. 1.6 – Onde acoustique plane arrivant en incidence normale sur un obstacle réfléchissant.

Soit une onde acoustique plane se réfléchissant sur l'une des faces d'un obstacle, le fluide étant au repos de l'autre côté de l'obstacle. Soient deux points du fluide situés de part et d'autre de cet obstacle, le point A se trouvant infiniment près de la face avant de l'obstacle et le point B infiniment près de sa face arrière. Alors  $\langle E_B \rangle = 0$  et  $p_B = 0$  et l'équation 1.15 devient  $\langle p_A \rangle = \langle E_A \rangle$ .

L'obstacle est donc soumis à une pression moyenne de la part du fluide, cette pression étant égale à l'énergie volumique moyenne de l'onde acoustique.

Langevin ne tient cependant pas compte du fait que la pression de radiation dépend de l'orientation de l'obstacle par rapport à l'onde.

## 1.4 Travaux expérimentaux réalisés sur la pression de radiation acoustique

Tout au long du XX<sup>e</sup> siècle, la pression de radiation acoustique a fait l'objet de nombreux travaux théoriques et expérimentaux, mais assez peu de travaux expérimentaux ont été menés sur son influence sur des interfaces fluides.

Altberg [24] utilise la pression de radiation en 1903 pour mesurer l'amplitude d'ondes ultra-sonores : il utilise un pendule de torsion pour mesurer le déplacement d'un petit disque placé sur le trajet d'un faisceau acoustique. Le déplacement du disque est induit par la pression de radiation acoustique.

En 1927, Wood et Loomis [25] étudient les ondes acoustiques en général. Ils émettent des ultrasons dans un bain d'huile grâce à une plaque de quartz. Ils découvrent que si l'on essaye d'enfoncer une plaque de verre horizontalement dans le fluide (figure 1.7), on rencontre périodiquement une grande résistance à cet enfoncement. Ils décrivent également le phénomène de fontaine acoustique (figure 1.8) : lorsqu'une onde acoustique de forte

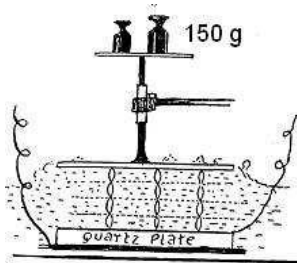


FIG. 1.7 – Une plaque de quartz émet une onde ultra-sonore se propageant vers le haut dans un fluide. Cette onde subit des réflexions successives entre la plaque de quartz et un plateau de verre, qui peut supporter 150 g sans s'enfoncer [25]

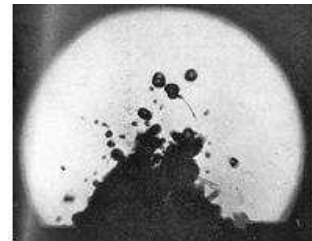


FIG. 1.8 – Fontaine acoustique observée par Wood et Loomis en 1927 à la surface du benzène [25]

intensité arrive à la surface d'un liquide (ils utilisent du benzène), le liquide est projeté en très petites gouttelettes, sous forme d'un brouillard. Ce phénomène était cependant déjà connu [26].

En 1939, Hertz et Mende étudient la déformation d'interfaces fluides par la pression de radiation acoustique [27] (figure 1.9). Ils utilisent deux interfaces : eau- $\text{CCl}_4$  (figure de gauche) et eau-aniline (figures du milieu et de droite). L'interface eau- $\text{CCl}_4$  est totalement

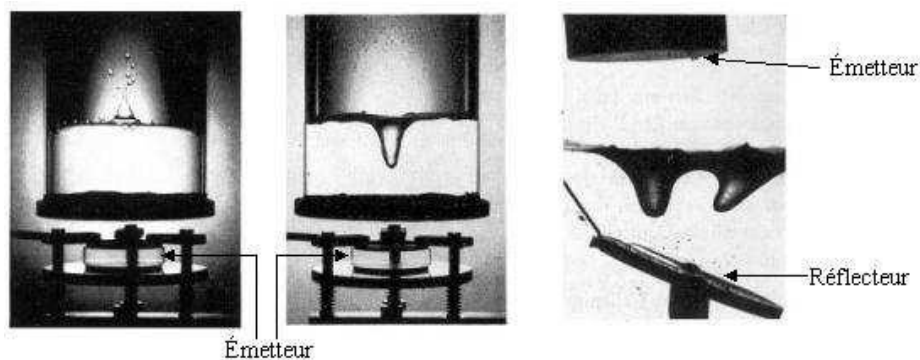


FIG. 1.9 – Déformations d’interfaces liquides observées par Hertz et Mende en 1939 [27]. À gauche : il s’agit d’une interface eau- $\text{CCl}_4$  (le  $\text{CCl}_4$  se trouve en bas), presque transparente. Au milieu et à droite, il s’agit d’une interface eau-aniline (l’aniline se trouve en bas), dont le coefficient de réflexion en pression vaut 7%.

transparente aux ondes acoustiques, mais subit quand même l’action de la pression de radiation, car on la voit se déformer. Ils vérifient également que sur les interfaces eau- $\text{CCl}_4$  et eau-aniline, le sens de la déformation ne dépend pas du sens de propagation de l’onde acoustique incidente (figure de droite).

En 1955, Herrey [12] utilise le dispositif représenté sur la figure 1.10 afin de vérifier expérimentalement que l’orientation de la pression de radiation acoustique sur un obstacle est indépendante de l’orientation de l’obstacle (figure 1.11) et qu’elle n’est donc pas exactement une pression, comme l’avait proposé Brillouin.

Kornfeld et Triers, en 1956, réalisent des déformations d’interfaces liquide-air [28] et se rendent compte que la hauteur de la déformation obtenue est une fonction périodique de la distance entre l’émetteur ultrasonore et l’interface au repos, la période de la fonction étant  $\lambda/2$ ,  $\lambda$  étant la longueur d’onde de l’onde acoustique.

## 1.5 La lévitation acoustique

En 1934, Louis King calcule la force que la pression de radiation acoustique exercerait sur une sphère rigide [29]. Son étude est reprise en 1969 par Hasegawa et Yosioka [30], qui l’étendent au cas d’une sphère élastique et la comparent à l’expérience. Ils tracent le paramètre  $Y_p = \Pi / \langle E \rangle$  en fonction de  $ka$ ,  $\Pi$  étant la pression de radiation exercée sur la sphère,  $\langle E \rangle$  l’énergie acoustique moyenne,  $a$  le rayon de la sphère et  $k$  le nombre d’onde et le comparent à leur calcul et à celui de King. Leurs résultats sont reproduits sur la figure 1.12.

Des expériences avaient déjà été faites par Goldman et Ringo en 1949 [32]. Un émetteur acoustique placé au fond d’un récipient d’eau saturée en  $\text{CO}_2$  émet vers la surface une onde acoustique intense à 60 kHz. L’onde est réfléchiée par la surface et il s’établit un système d’ondes acoustiques stationnaires entre l’émetteur et la surface. Des bulles de gaz se forment par cavitation dans l’eau et se retrouvent piégées par lévitation sur des couches horizontales bien précises, situées au niveau des nœuds de pression de cette onde acoustique stationnaire.

Récemment, Xie et Wei ont réussi à faire léviter des billes de polymère ou de tungstène de haute densité au niveau des nœuds de pression d’une onde acoustique stationnaire [31]

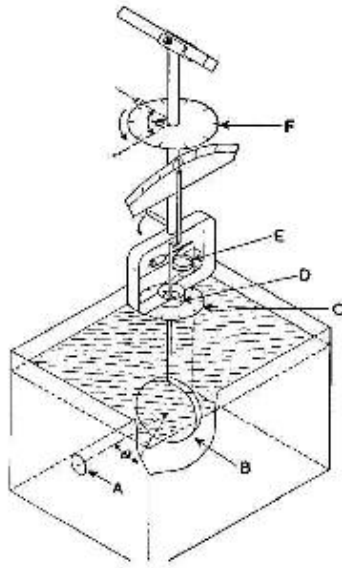


FIG. 1.10 – Dispositif utilisé par Herrey pour vérifier que l'orientation de la pression de radiation acoustique sur un obstacle est indépendante de l'orientation de l'obstacle. *A* : émetteur ultrasonore. *B* : disque réfléchissant ou absorbant, lié à une tige verticale libre de tourner autour de l'axe horizontal *D*. Le plateau *C* permet de lire l'angle d'incidence  $\theta$  de l'onde acoustique sur le disque *B*. Lorsque l'onde acoustique est émise, le disque *B* est poussé par pression de radiation. On place alors des poids sur le plateau *E* de manière à ramener ce disque à la verticale. De la masse totale déposée dans le plateau, on déduit la composante perpendiculaire à l'axe *D* de la force de radiation qui s'exerce sur le disque *B*. On peut faire tourner l'ensemble du dispositif d'un angle  $\Psi$  lu sur le plateau *F* afin de pouvoir mesurer les différentes composantes de cette force. [12]

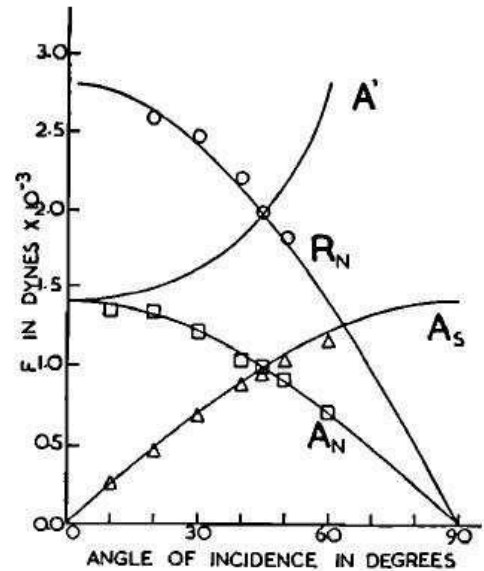


FIG. 1.11 – Composantes de la force de radiation en fonction de l'angle d'incidence. Les carrés, les ronds et les triangles sont des données mesurées. Les courbes continues sont des courbes théoriques : *A'* représente la force qui s'exercerait sur un disque absorbant si la pression de radiation était isotrope. Les courbes  $A_N$ ,  $A_S$ ,  $R_N$  représentent les composantes normales (*N*) et tangentiels (*S*) de la force de radiation s'exerçant sur un disque parfaitement absorbant (*A*) ou parfaitement réfléchissant (*R*), en supposant que la pression de radiation s'exerce de façon unidirectionnelle dans la direction de propagation de l'onde acoustique. Les données expérimentales sont en bon accord avec cette deuxième hypothèse. La composante tangentielle de la force de radiation sur un disque parfaitement réfléchissant vaut  $R_S = 0$  [12].

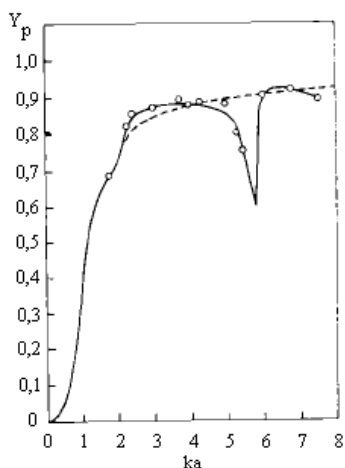


FIG. 1.12 – Résultats de Hasegawa et Yosioka. La ligne pointillée représente le calcul de King pour des sphères d'acier rigides. La courbe continue représente le calcul pour des sphères d'acier élastiques. Les ronds représentent les mesures expérimentales [30].

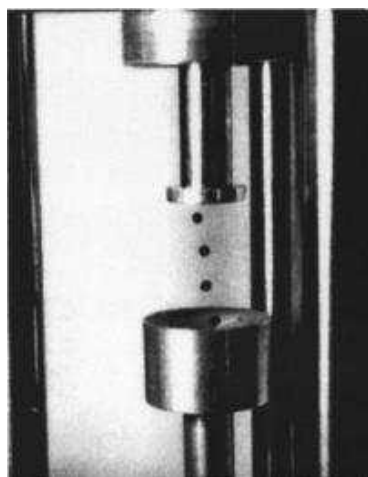


FIG. 1.13 – Lévitation acoustique de quatre sphères de polymère de 3 mm de diamètre dans l'air. L'émetteur acoustique se trouve en haut. Le réflecteur permettant d'obtenir l'onde stationnaire se trouve en bas [31].

(figure 1.13).

La lévitation acoustique permet ainsi de manipuler des objets sans contact : en 1992 [33], Whitworth et Coakley ont placé des billes de polystyrène de 9  $\mu\text{m}$  en suspension dans l'eau dans une cellule cylindrique comme celle schématisée sur la figure 1.14 : une céramique

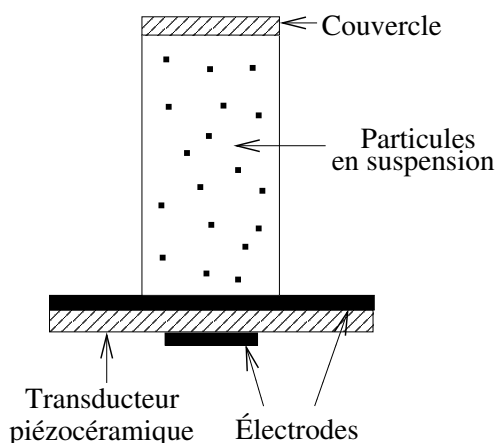


FIG. 1.14 – Dispositif utilisé par Whitworth et Coakley pour répartir des particules sur les plans nodaux d'une onde acoustique stationnaire.

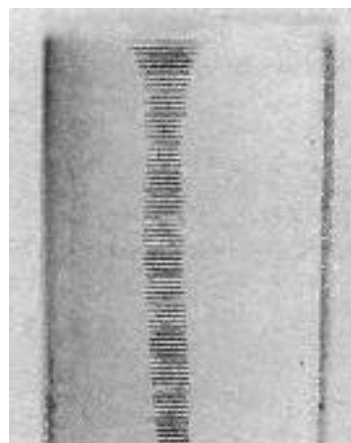


FIG. 1.15 – Photographie des particules réparties sur les plans nodaux dans l'expérience de Whitworth et Coakley [33].

piézoélectrique est excitée à une fréquence de l'ordre du MHz à l'aide des électrodes et émet une onde acoustique dans l'eau contenant les particules en suspension. L'onde est partiellement réfléchi par le couvercle de la cellule. Un système d'ondes stationnaires se forme alors et les particules, par lévitation acoustique, se répartissent sur les nœuds de



pression, ce que l'on peut voir sur la photographie de la figure 1.15.

En 1994, Coakley, Whitworth, Grundy, Gould et Allman ont modifié cette expérience afin de mettre au point une technique permettant de séparer des cellules vivantes de tailles différentes à l'aide de la lévitation acoustique [34]. Ils ont remplacé le couvercle de la cellule par un deuxième transducteur, émettant à une fréquence très légèrement différente du premier (la fréquence d'émission des transducteurs vaut environ 3 MHz et la différence de fréquence vaut entre 2 et 100 Hz). La superposition des ondes acoustiques émises par les deux transducteurs crée une onde quasi-stationnaire dont les plans nodaux se déplacent au cours du temps en direction de l'un des deux transducteurs. Ainsi, les particules piégées au niveau des plans nodaux sont peu à peu ramenées vers ce transducteur et peuvent ensuite être collectées. Ils ont ainsi réussi à enlever jusqu'à 93% des particules présentes dans la solution en deux minutes. Mais pour pouvoir déplacer les particules de cette façon, il faut que la pression de radiation acoustique, qui maintient les particules dans les plans nodaux, soit plus forte que la force de Stokes, qui s'oppose au déplacement des particules advectées par le mouvement des plans nodaux. Ces deux forces varient différemment en fonction de la taille des particules (la pression de radiation est proportionnelle au cube de leur rayon et la force de Stokes est proportionnelle à leur rayon [35]). Aussi, le seuil de pression acoustique permettant le déplacement des particules avec les plans nodaux de l'onde pseudo-stationnaire dépend de leur taille. On peut ainsi trier des particules de différentes tailles en exerçant une onde acoustique dont l'amplitude est suffisamment forte pour que certaines particules soient transportées par l'onde stationnaire, mais suffisamment faible pour que les autres ne soient pas transportées. Ils ont ainsi pu séparer des bactéries de deux populations (*Bacillus megaterium* et *Escherichia coli*) en suspension dans la même solution. Ces deux bactéries ont la forme de petits bâtonnets de diamètre  $1,3 \mu\text{m}$ , *E. coli* ayant une longueur de  $2 \mu\text{m}$  et *B. megaterium* ayant une longueur de  $3,5 \mu\text{m}$ .

Brodeur *et al.* ont utilisé la lévitation acoustique pour mesurer la taille des fibres dans de la pâte à papier [36] [37]. Les fibres, en suspension dans de l'eau, sont placées entre deux transducteurs entre lesquels on crée un système d'ondes stationnaires. Les fibres se concentrent alors au niveau des nœuds de pression (figure 1.16). Les parois latérales de la cellule sont transparentes, afin de pouvoir y faire passer un faisceau parallèle de lumière blanche (figure 1.17).

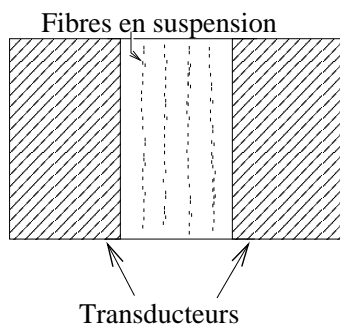


FIG. 1.16 – Dans l'expérience de Brodeur, la suspension de fibres est placée entre deux transducteurs et les fibres se concentrent autour des plans nodaux de l'onde stationnaire créée par les transducteurs.

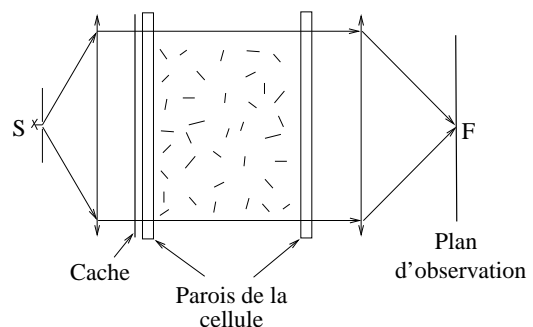


FIG. 1.17 – Montage optique utilisé par Brodeur pour mesurer la dynamique de migration des fibres vers les plans nodaux.

Un cache (représenté sur la figure 1.18) est disposé sur la face d'entrée de la cellule afin que la lumière ne passe que dans les plans où les fibres se concentrent. Une lentille convergente en sortie de la cellule permet de faire converger en un point  $F$  la lumière qui n'a pas été diffusée dans la solution. Les rayons diffusés croisent le plan d'observation en d'autres endroits qu'au point  $F$ . Une photodiode que l'on peut déplacer dans le plan d'observation permet de recueillir une partie de cette lumière diffusée. À l'aide de l'évolution temporelle de la lumière diffusée (figure 1.19), Brodeur *et al.* remontent à la dynamique de la migration des fibres vers les plans nodaux et donc à leur taille caractéristique.

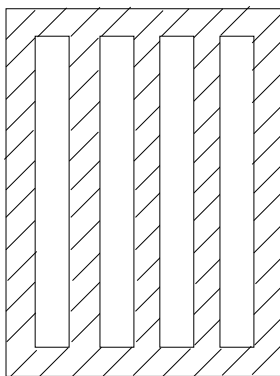


FIG. 1.18 – Cache utilisé par Brodeur pour n'éclairer que les plans de la cellule où les fibres ont tendance à se concentrer.

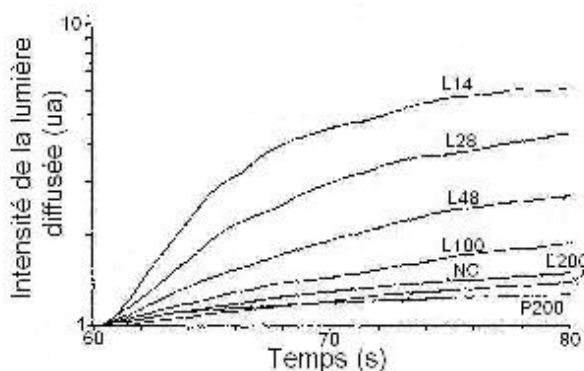


FIG. 1.19 – Évolution temporelle de l'intensité de lumière diffusée pour différentes longueurs de fibres [36].

Toutes les solutions testées sur la courbe de la figure 1.19 sont de même concentration. 6 solutions standard ont été utilisées (L14 : fibres de 3,05 mm en moyenne ; L28 : 2,00 mm ; L48 : 1,23 mm ; L100 : 0,70 mm ; L200 : 0,35 mm ; P200 : 0,2 mm). On vérifie que plus les particules sont longues, plus elles migrent vite vers les plans nodaux de l'onde stationnaire.

La courbe NC correspond à la solution que l'on teste, constituée de 1,5 % de L14, 10,5 % de L28, 20,2 % de L48, 17,9 % de L100, 14,7 % de L200 et 35,2 % de P200. Les particules y ont donc une taille moyenne d'environ  $0,75 \pm 2$  mm, ce qui est compatible avec la courbe observée.

## 1.6 Applications de la pression de radiation à la manipulation de liquides en millifluidique

Du fait de la possibilité de manipuler des fluides sans contact, la pression de radiation acoustique a beaucoup d'applications potentielles.

Katou, Miyake et Terayama [38], l'utilisent dans un micromélangeur sans contact (figure 1.20).

Une cellule est remplie à mi-hauteur d'un mélange eau-colorant. Deux sources ultrasonores, l'une en bas de la cellule, l'autre sur le côté, utilisent la pression de radiation acoustique pour brasser le liquide. La section de la cellule mesure 4 mm sur 5. Typiquement, ce système permet d'homogénéiser 150 mL de liquide en 1 s.

Il est très intéressant de pouvoir manipuler de très petites quantités de liquides, par exemple pour des tests chimiques (diminution des rejets de produits) ou des tests médicaux (diminution de la quantité de prélèvement à effectuer sur les patients).

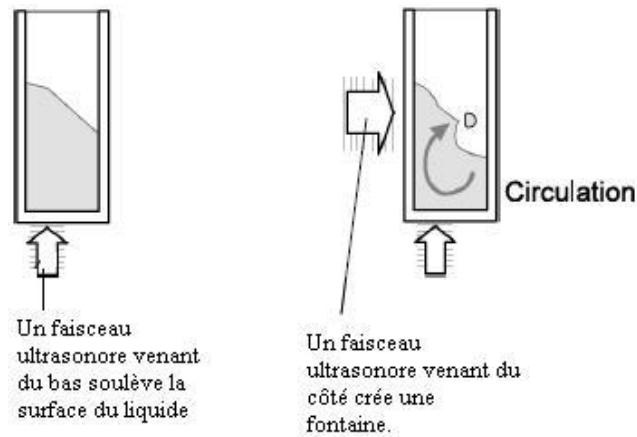


FIG. 1.20 – Micromélangeur sans contact de Katou, Miyake et Terayama.

On observe des éjections de gouttes sur les figures 1.8 et 1.9 (sur l'image de gauche). Ce phénomène est utilisé industriellement et de nombreux brevets, concernant en particulier des systèmes d'imprimantes à jet d'encre, ont été déposés [39] [40]. Le principe est représenté sur la figure 1.21. Un transducteur acoustique focalisé (10) est plongé dans un

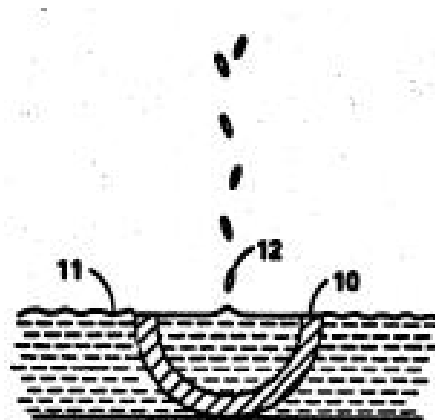


FIG. 1.21 – Principe de l'émission de gouttes par la pression de radiation acoustique [39].

liquide (11) et émet une onde acoustique vers le haut. Son plan focal est situé sur la surface du liquide. Lors de l'émission de l'onde, la pression de radiation acoustique éjecte des gouttes de liquide (12). On peut maîtriser la fréquence d'émission des gouttes et leur taille en modulant en amplitude ou en fréquence le signal d'alimentation du transducteur [41].

Dans les imprimantes à jet d'encre classiques, la taille des gouttes émises est déterminée par le diamètre des buses dans lesquelles l'encre circule. Aussi, pour avoir une bonne résolution d'impression, il faut que ces buses soient de faible diamètre, ce qui est la source de nombreux problèmes car elles se bouchent alors très facilement. Un grand avantage de l'impression par la pression de radiation acoustique est que le système n'utilise pas de buses de petite taille, la résolution de l'impression étant directement liée à la taille de la goutte

émise.

Ce principe peut être également utilisé pour transférer sans contact des gouttes de fluide d'un réservoir vers un autre, par exemple pour mettre en contact ce fluide avec un autre afin de réaliser une réaction chimique. Ce procédé est très attractif en particulier dans des domaines comme les biotechnologies, où il est important de ne pas contaminer les fluides utilisés par des impuretés. Par une technique sans contact comme l'éjection de gouttes par la pression de radiation acoustique, on évite de toucher le fluide à l'aide d'objets comme des pipettes, ce qui évite de les contaminer [42].

Des brevets ont également été déposés concernant des techniques utilisant la pression de radiation acoustique pour mesurer des grandeurs physiques comme la tension de surface et la viscosité d'un fluide. En effet, lorsque l'on crée une déformation d'une interface fluide à l'aide de la pression de radiation acoustique et que l'on arrête l'émission de l'onde acoustique, l'interface relaxe et une onde capillaire est émise. L'étude de la dynamique de cette relaxation ou de ces ondes capillaires permet de déduire des grandeurs telles que la tension interfaciale ou la viscosité des fluides. Cette méthode de mesure a fait l'objet de la thèse de Can Cinbis [43] [44] [45] et une variante en a été brevetée par EDC Biosystems [46]. Nous la présentons plus en détail dans le chapitre 4 de cette thèse, et dans ce même chapitre, nous présenterons une autre méthode de mesure de la tension de surface que nous avons développée et qui utilise le même principe.

## Références du chapitre 1

- [1] R. T. Beyer. Radiation pressure—the history of a mislabeled tensor. *J. Acoust. Soc. Am.*, 63(4), 1978.
- [2] J. C. Maxwell. *A Treatise on Electricity and Magnetism*, volume 2, chapter 792. Clarendon, Oxford, 1874.
- [3] P. N. Lebedev. Investigations on the pressure forces of light. *Ann. Phys.*, 6 :433–458, 1901.
- [4] Lord Rayleigh. On the Pressure of Vibrations. *Philos. Mag.*, 3 :338–346, 1902.
- [5] Lord Rayleigh. On the Momentum and Pressure of Gaseous Vibrations, and on the Connexion with the Virial Theorem. *Philos. Mag.*, 10 :364–374, 1905.
- [6] J. H. Poynting. Radiation Pressure. *Philos. Mag.*, 9 :393, 1905.
- [7] L. Brillouin. La théorie des solides et des quantas, chapitre V. *Ann. Ec. Norm. Sup.*, série 3, t. 37 :408–423, déc. 1920.
- [8] L. Brillouin. Les pressions et tensions de radiation. *Revue d'Acoustique*, 5 :99–111, 1936.
- [9] P. Ehrenfest. Adiabatic Invariants and the Theory of Quanta. *Philos. Mag.*, 33 :500–513, 1917.
- [10] L. Brillouin. Sur les tensions de radiation. *Annales de Physique (Paris)*, 4 :528–586, 1925.
- [11] M. E. McIntyre. On the 'wave momentum' myth. *J. Fluid. Mech.*, 106 :331–347, 1981.
- [12] E. M. J. Herrey. Experimental studies on acoustic radiation pressure. *J. Acoust. Soc. Am.*, 27(5) :891–896, 1955.
- [13] K. Beissner. Two concepts of acoustic radiation pressure. *J. Acoust. Soc. Am.*, 79(5) :1610–1612, 1986.

- [14] B. T. Chu et R. E. Apfel. Acoustic radiation pressure produced by a beam of sound. *J. Acoust. Soc. Am.*, 72(6) :1673–1687, 1982.
- [15] E. Fubini-Ghiron. Anomalies in the propagation of an acoustic wave of large amplitude. *Alta Freq.*, 4 :532–581, 1935.
- [16] E. Fubini-Ghiron. La tension de radiation acoustique et les ondes de grande amplitude. *Revue d'Acoustique*, 6 :118–127, 1937.
- [17] R. T. Beyer. *Nonlinear acoustics in fluids*, volume 18 of *Benchmark Papers in Acoustics*, pages 118–177. Van Nostrand Reinhold Company Inc., 135 West 50th Street New York, New York 10020, 1984.
- [18] P. J. Westervelt. The mean pressure and velocity in a plane acoustic wave in a gas. *J. Acoust. Soc. Am.*, 22(3) :319–327, 1950.
- [19] P. Biquard. Les ondes ultra-sonores. *Revue d'Acoustique*, 1 :93–109, 1932.
- [20] P. Biquard. Les ondes ultra-sonores, II. *Revue d'Acoustique*, 1 :315–335, 1932.
- [21] P. Biquard. Les ondes ultra-sonores, III. *Revue d'Acoustique*, 2 :288–299, 1933.
- [22] Thomson. *Vortex Motion*. Edinburgh Transactions, 1869.
- [23] Sir Horace Lamb. *Hydrodynamics*, chapter III, section 33. Cambridge University Press, 6ème édition, 1932.
- [24] W. Altberg. Über die Druckkräfte der Schallwellen und die absolute Messung des Schallintensität. *Annalen der Physik (Leipzig)*, 2 :405–420, 1903.
- [25] R. W. Wood et A. L. Loomis. The Physical and Biological Effects of High-frequency Sound-waves of Great Intensity. *Phil. Mag. Series 7*, 4(22) :417–436, 1927.
- [26] V. Dvorak. *Ann. Physik*, 7 :42, 1876.
- [27] G. Hertz et H. Mende. Der Schallstrahlungsdruck in Flüssigkeiten. *Z. Phys.*, 114 :354, 1939.
- [28] M. Kornfeld et V. I. Triers. Swelling of a liquid surface under the influence of ultrasound. *Zh. Tekh. Fiz.*, 26 :2778, 1956.
- [29] L. V. King. On the Acoustic Radiation Pressure on Spheres. *Proc. R. Society. London - A*, 147 :212–240, 1934.
- [30] T. Hasegawa et K. Yosioka. Acoustic-Radiation Force on a Solid Elastic Sphere. *J. Acoust. Soc. Am.*, 46(5) :1139–1143, 1969.
- [31] W. J. Xie et B. Wei. Parametric study of single-axis acoustic levitation. *Appl. Phys. Lett.*, 79 :881–883, 2001.
- [32] D. E. Goldman et G. R. Ringo. Determination of Pressure Nodes in Liquids. *J. Acoust. Soc. Am.*, 21(3) :270, 1949.
- [33] G. Whitworth et W. T. Coakley. Particle column formation in a stationary ultrasonic field. *J. Acoust. Soc. Am.*, 91(1) :79–85, 1992.
- [34] W. T. Coakley, G. Whitworth, M. A. Grundy, R. K. Gould, et R. Allman. Ultrasonic manipulation of particles and cells. *Bioseparation*, 4 :73–83, 1994.
- [35] G. Whitworth, M. A. Grundy, et W. T. Coakley. Transport and harvesting of suspended particles using modulated ultrasound. *Ultrasonics*, 29 :439–444, 1991.
- [36] P. Brodeur, J. L. Dion, J. J. Garceau, G. Pelletier, et D. Massicotte. Fiber Characterization in a Stationary Ultrasonic Field. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, 36(5) :549–553, 1989.

- [37] P. Brodeur. Motion of fluid-suspended fibres in a standing wave field. *Ultrasonics*, 29 :302–307, 1991.
- [38] T. Terayama H. Katou, R. Miyake. Non-Contact Micro-Liquid Mixing Method Using Ultrasound. *JSME International Journal Series B*, 48(2) :350–355, 2005.
- [39] K. T. Lovelady et L. F. Toye. Liquid drop emitter. U.S. Patents n° 4 308 547, 1981.
- [40] T. W. Smith, K. M. McGrane, D. J. Luca, et W. W. Limburg. Ink jet printing process. U.S. Patents n° 6 871 945, 2003.
- [41] S. A. Elrod, B. Hadimioglu, B. T. Khuri-Yakub, E. G. Rawson, E. Richley, N. N. Mansour, et T. S. Lundgren. Nozzleless droplet formation with focused acoustic beams. *J. Appl. Phys.*, 65(9) :3441–3447, 1989.
- [42] M. Forbush Jr, R. O. Williams, N. N. Mansour, L. Lee Jr, et T. Singh. Non-contact fluid transfer methods apparatus and uses thereof. Canadian Patents Database, Patent n°CA 2430422, 2002.
- [43] C. Cinbis. *Noncontacting techniques for measuring surface tension of liquids*. PhD thesis, Stanford University, 1992.
- [44] C. Cinbis et B. T. Khuri-Yakub. A noncontacting technique for measuring surface tension of liquids. *Rev. Sci. Instrum.*, 63(3) :2048–2050, 1991.
- [45] C. Cinbis, N. N. Mansour, et B. T. Khuri-Yakub. Effect of surface tension on the acoustic radiation pressure-induced motion of the water-air interface. *J. Acoust. Soc. Am.*, 94(4) :2365–2372, 1993.
- [46] R. O. Williams. Non-contact techniques for measuring viscosity and surface tension information of a liquid. U.S. Patents n° 6 925 856, 2005.

## Chapitre 2

# Calcul de la pression de radiation acoustique

Le but de ce chapitre est de présenter une théorie de la pression de radiation acoustique, que nous confronterons à l'expérience dans la suite. Nous allons d'abord rappeler quelques éléments de la théorie des ondes acoustiques d'amplitude infiniment petite (partie 2.1), avant de rappeler les relations liant coordonnées eulériennes et coordonnées lagrangiennes (partie 2.2), qui se révéleront utiles dans le calcul de la pression de radiation acoustique (partie 2.3). Enfin, nous présenterons le phénomène de streaming acoustique (partie 2.4), qui est un écoulement permanent apparaissant dans un fluide dans lequel se propage une onde acoustique intense, et que nous avons cherché à minimiser tout au long des expériences réalisées durant cette thèse.

### 2.1 Modèle à une dimension d'ondes acoustiques d'amplitude infiniment petite

Dans cette partie, qui s'inspire en grande partie du livre de Kinsler [1], nous allons considérer des ondes d'amplitude infiniment petite, ce qui permet dans tous les calculs de ne conserver que les termes d'ordre le plus bas.

#### 2.1.1 Position du problème

Considérons une onde acoustique plane monochromatique se propageant le long de l'axe  $Ox$  dans un fluide non-visqueux, dans le sens des  $x$  croissants (figure 2.1). On note  $\vec{x}$  le vecteur unitaire de l'axe  $Ox$ .

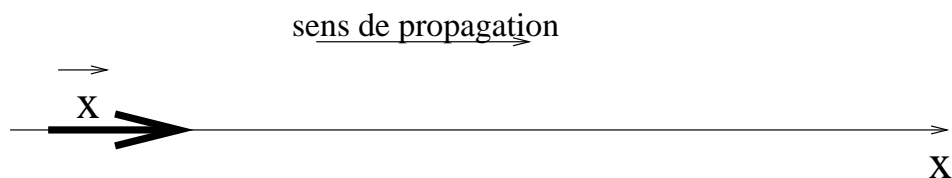


FIG. 2.1 – Propagation d'une onde acoustique dans un milieu fluide

L'onde acoustique est une onde de compression-détente, induisant de petites perturbations isentropiques autour d'un état d'équilibre où le fluide est au repos, homogène et isotrope (on néglige la pesanteur dans toute la suite de ce chapitre). On suppose, dans l'approximation linéaire, que la pression, la densité du fluide et la vitesse des particules fluides évoluent suivant les équations suivantes, en notations complexes :

$$p = p_0 + p_{10}e^{i(kx-\omega t)} \quad (2.1)$$

$$\rho = \rho_0 + \rho_{10}e^{i(kx-\omega t)} \quad (2.2)$$

$$\vec{u} = u_{10}e^{i(kx-\omega t+\phi)}\vec{x} \quad (2.3)$$

$p_0$  et  $\rho_0$  désignent la pression et la masse volumique du fluide au repos.  $p_1 = p_{10}e^{i(kx-\omega t)}$  et  $\rho_1 = \rho_{10}e^{i(kx-\omega t)}$  désignent respectivement l'excès de pression et de masse volumique dus à l'onde acoustique.  $\vec{u}_1 = u_{10}e^{i(kx-\omega t+\phi)}\vec{x}$  est la vitesse acquise par les particules fluides au passage de l'onde.

### 2.1.2 Équation de propagation de l'onde acoustique

Le fluide, considéré comme non visqueux, obéit à l'équation de conservation de la masse, à l'équation d'Euler et à la relation constitutive du milieu :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \rho \vec{u} = 0 \quad (2.4)$$

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} = -\vec{\nabla} p \quad (2.5)$$

$$\chi_S = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_S \quad (2.6)$$

$\chi_S$  désignant la compressibilité isentropique du milieu.

Ces équations s'écrivent, à l'ordre 1 en  $\left| \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \right|$  (l'indice 1 désignant les quantités d'ordre 1 en  $\left| \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \right|$ ) :

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{u}_1 = 0 \quad (2.7)$$

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{u}_1}{\partial t} = -\vec{\nabla} p_1 \quad (2.8)$$

$$\chi_{S0} = \frac{1}{\rho_0} \frac{\rho_1}{p_1} \quad (2.9)$$

L'équation 2.9 permet de déduire que

$$\rho_1 = \chi_{S0} \rho_0 p_1 \quad (2.10)$$

En injectant ce résultat dans 2.7 et en soustrayant la dérivée temporelle de 2.7 et la divergence de 2.8, on obtient l'équation de propagation de l'onde acoustique :

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = 0 \quad (2.11)$$

où  $c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_{S0}}}$  désigne la vitesse de propagation de l'onde. De ces équations, on déduit :

$$\frac{1}{c^2} = \rho_0 \chi_{S0} = \frac{\rho_1}{p_1} \quad (2.12)$$



### 2.1.3 Conditions d'écriture des équations à l'ordre le plus bas

Dans le paragraphe précédent, nous avons écrit les équations 2.4, 2.5 et 2.6 à l'ordre 1 en  $\left| \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \right|$ . Cela revient à dire dans le cas de l'onde acoustique plane monochromatique que nous étudions ici que  $\left| \frac{\rho_1}{\rho_0} \right| \ll 1$ .

L'équation 2.7 revient à dire que

$$\omega \rho_1 = \rho_0 k u_1 = \rho_0 k u \quad (2.13)$$

soit encore

$$u = \frac{\omega \rho_1}{k \rho_0} \quad (2.14)$$

$$= c \frac{\rho_1}{\rho_0} \quad (2.15)$$

donc

$$\frac{u}{c} = \frac{\rho_1}{\rho_0} \quad (2.16)$$

La condition  $\frac{\rho_1}{\rho_0} \ll 1$  est donc équivalente à la condition  $\frac{u}{c} \ll 1$ , qui traduit le fait que les particules fluides se déplacent à une vitesse très inférieure à la vitesse de propagation de l'onde acoustique.

Si l'on note  $\xi$  le déplacement des particules fluides par rapport à leur position au repos, leur vitesse  $u$  est définie par l'équation

$$u = \frac{\partial \xi}{\partial t} \quad (2.17)$$

$$= \omega \xi \quad (2.18)$$

La condition  $\frac{u}{c} \ll 1$  revient donc à dire que  $\frac{\omega \xi}{c} \ll 1$  soit  $\xi \ll \frac{c}{\omega}$ . Comme  $\omega = ck$ , cela revient à dire que  $k\xi \ll 1$  ou encore que  $\xi \ll \lambda$ ,  $\lambda$  étant la longueur d'onde acoustique.

Les trois conditions suivantes sont donc équivalentes :

$\frac{\rho_1}{\rho_0} \ll 1$  : la variation de la densité du fluide due au passage de l'onde acoustique est très faible devant la densité du fluide au repos.

$\frac{u}{c} \ll 1$  : la vitesse instantanée des particules fluides est très inférieure à la vitesse de propagation de l'onde acoustique.

$\frac{\xi}{\lambda} \ll 1$  : le déplacement des particules fluides par rapport à leur position au repos est très inférieur à la longueur d'onde acoustique.

En revanche, il est faux de dire que cela est équivalent à  $\frac{p_1}{p_0} \ll 1$  : en effet, on peut utiliser l'équation 2.9 pour vérifier que  $\frac{p_1}{\rho_0} = \chi_{S0} p_1$ . La condition sur la pression n'est donc pas  $p_1 \ll p_0$  mais  $p_1 \ll \chi_{S0}^{-1}$ . Dans le cas d'un liquide,  $\chi_{S0}^{-1} \gg p_0$ , ce qui n'équivaut pas à  $p_1/p_0 \ll 1$ .

### 2.1.4 Impédance acoustique

Si l'on injecte les équations 2.1 et 2.3 dans l'équation 2.8, on obtient

$$\frac{p_{10}}{u_{10} e^{i\phi}} = \rho_0 \frac{\omega}{k} = \rho_0 c = Z \quad (2.19)$$

On en déduit que dans une onde plane progressive, la pression et la vitesse des particules fluides oscillent en phase ( $\phi = 0$ ) et qu'elles sont proportionnelles l'une à l'autre, le coefficient de proportionnalité  $Z = \rho_0 c$  étant appelé l'impédance acoustique du milieu.

Pour une onde acoustique plane progressive se propageant dans le sens des  $x$  décroissants, on aurait trouvé

$$\frac{p_{10}}{u_{10}e^{i\phi}} = -\rho_0 c = -Z \quad (2.20)$$

L'impédance acoustique s'exprime en Rayleigh (1 Rayl = 1 kg.m<sup>-2</sup>s<sup>-1</sup>).

### 2.1.5 Énergie de l'onde acoustique

L'énergie volumique  $E$  de l'onde acoustique est la somme de l'énergie cinétique volumique  $K$  des particules fluides et de l'énergie potentielle volumique  $V$  de compression du fluide.

$$K = \frac{1}{2}\rho_0 u^2 \quad (2.21)$$

Calculons l'énergie potentielle de compression d'une particule fluide d'un volume  $v_0$  à un volume  $v$  sous l'action d'une pression acoustique  $p_1$ . Cette énergie est égale à  $v_0 \times V$  :

$$v_0 \times V = - \int_{v_0}^v p_1 dv \quad (2.22)$$

Comme il y a conservation de la masse,  $(\rho_0 + \rho_1)v = \rho_0 v_0$ , d'où l'on déduit

$$dv = -\frac{v}{\rho} d\rho_1 \quad (2.23)$$

Or,

$$\frac{d\rho_1}{dp_1} = \rho_0 \chi_s = \frac{1}{c^2} \quad (2.24)$$

donc

$$dv = -\frac{v}{\rho c^2} dp_1 \quad (2.25)$$

Par conséquent,

$$v_0 \times V = \frac{v_0}{\rho_0 c^2} \int_0^{p_1} p_1 dp_1 \quad (2.26)$$

d'où l'on déduit l'énergie potentielle volumique :

$$V = \frac{1}{2} \frac{p_1^2}{\rho_0 c^2} \quad (2.27)$$

L'énergie acoustique volumique vaut alors, pour une onde plane progressive :

$$E = K + V \quad (2.28)$$

$$= \frac{1}{2}\rho_0 u^2 + \frac{1}{2} \frac{p_1^2}{\rho_0 c^2} \quad (2.29)$$

$$= \frac{1}{2}\rho_0 u^2 + \frac{1}{2} \frac{Z^2 u^2}{\rho_0 c^2} \quad (2.30)$$

$$= \rho_0 u^2 \quad (2.31)$$

$$= \frac{p_1^2}{\rho_0 c^2} \quad (2.32)$$

En acoustique linéaire, l'énergie cinétique et l'énergie potentielle de compression du fluide sont toutes deux égales à la moitié de l'énergie totale de l'onde.

L'énergie est une quantité d'ordre 2 en  $\chi_{s0}p_1$  et  $u/c$ . Dans la suite, lorsqu'on voudra calculer l'énergie à l'ordre le plus bas, il suffira donc de calculer  $u$  et  $p_1$  à l'ordre 1.

### 2.1.6 Coefficients de réflexion et de transmission à la traversée d'une interface fluide

Considérons maintenant une onde acoustique, désignée dans la suite de ce paragraphe par l'exposant  $i$ , arrivant en incidence normale sur l'interface entre deux fluides  $A$  et  $B$ , située en  $x = 0$  (figure 2.2).

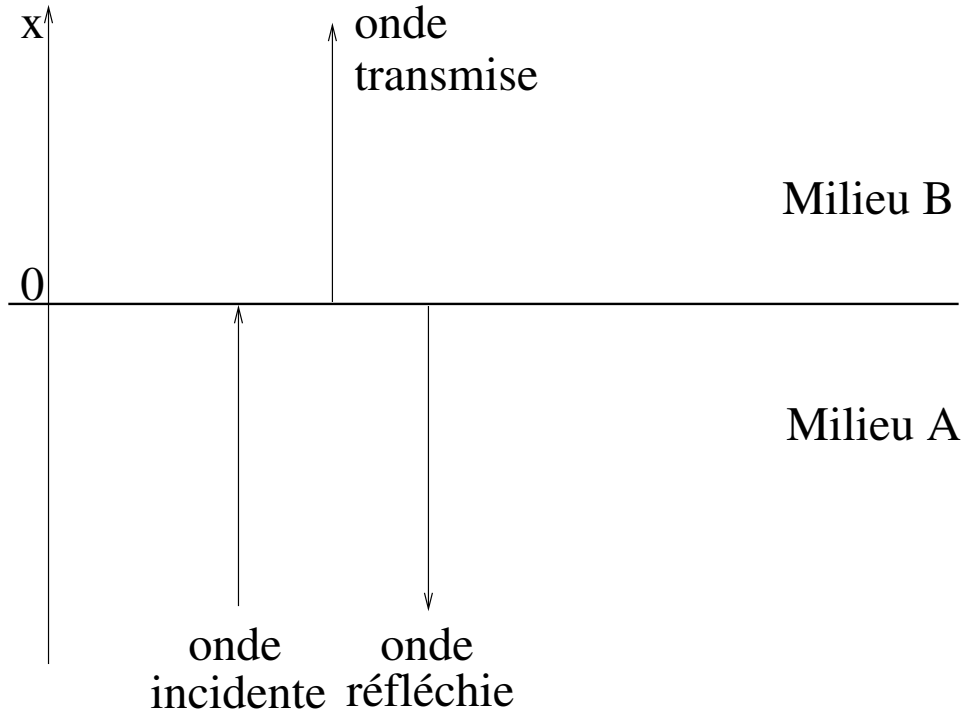


FIG. 2.2 – Réflexion et transmission d'une onde acoustique arrivant en incidence normale à l'interface entre deux fluides

Cela crée une onde réfléchie dans le milieu  $A$  et une onde transmise dans le milieu  $B$ , désignées respectivement par les exposants  $r$  et  $t$ .

$$p_1^i = p_{10}^i e^{i(kx - \omega t)} \quad (2.33)$$

$$p_1^r = p_{10}^r e^{i(kx + \omega t)} \quad (2.34)$$

$$p_1^t = p_{10}^t e^{i(kx - \omega t)} \quad (2.35)$$

$$(2.36)$$

#### Conditions aux limites

Lors de la traversée de l'interface, les deux fluides ne s'interpénètrent pas. Cela implique que les composantes normales des vitesses des particules fluides de chaque côté de l'interface

sont égales.

Par ailleurs, considérons une particule fluide de section  $S$  et d'épaisseur  $2e$ , située de part et d'autre de l'interface, comme indiqué sur la figure 2.3.

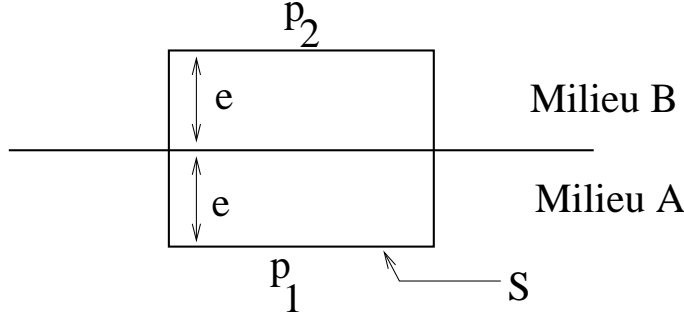


FIG. 2.3 – Particule fluide située de part et d'autre de l'interface.

Cette particule fluide est soumise aux pressions  $p_1$  et  $p_2$ , somme de la pression hydrostatique, de la pression acoustique et de la pression de Laplace de part et d'autre de l'interface. L'équation du mouvement de cette particule s'écrit :

$$eS(\rho_1 + \rho_2) \frac{d^2\xi}{dt^2} = S(p_1 - p_2) \quad (2.37)$$

Lorsqu'on fait tendre  $e$  vers 0, la seule possibilité pour que l'accélération de la particule ne diverge pas est que  $p_1 - p_2$  s'annule. Aussi, le saut de pression à l'interface doit être nul.

Soit  $u$  la vitesse instantanée de la particule fluide. La pression acoustique  $p_{ac} = p - p_0$  s'écrit dans le milieu  $i$

$$p_{aci} = \rho_i c_i u \quad (2.38)$$

$$= \rho_i c_i \omega \xi \quad (2.39)$$

$\rho_i$  et  $c_i$  étant respectivement la masse volumique du milieu  $i$  et la vitesse du son dans ce milieu. Le déplacement de la particule vaut par conséquent

$$\xi = \frac{p_{aci}}{\rho_i c_i \omega} \quad (2.40)$$

La différence de pression hydrostatique entre les deux milieux vaut donc

$$\Delta\rho g \xi = \frac{\Delta\rho g}{\rho_i c_i \omega} p_{aci} \quad (2.41)$$

donc, pour une onde dont la fréquence est de l'ordre du MHz, arrivant à l'interface eau-air :

$$\frac{\Delta\rho g \xi}{p_{aci}} = \frac{\Delta\rho g}{\rho_i c_i \omega} \quad (2.42)$$

$$\approx \frac{10^3 \cdot 10}{10^3 \cdot 10^3 \cdot 10^6} \quad (2.43)$$

$$\approx 10^{-8} \quad (2.44)$$

La surpression de Laplace vaut, en notant  $\sigma$  la tension superficielle de l'interface et  $\omega_0$  la largeur caractéristique de l'onde acoustique, voisine dans nos expériences de la longueur d'onde acoustique :

$$\frac{\sigma\xi}{\omega_0^2} = \frac{\sigma}{\rho_i c_i \omega \omega_0^2} p_{aci} \quad (2.45)$$

$$= \frac{10^{-2}}{10^3 10^3 10^6 10^{-8}} p_{aci} \quad (2.46)$$

$$= 10^{-6} p_{aci} \quad (2.47)$$

La surpression de Laplace et la surpression hydrostatique sont donc négligeables devant la surpression acoustique lorsqu'une onde acoustique dont la fréquence est de l'ordre du MHz arrive à l'interface entre deux fluides. Aussi,  $p_1 - p_2 \approx p_{ac1} - p_{ac2}$ .

La condition aux limites  $p_1 - p_2 = 0$  se traduit donc par l'égalité des surpressions acoustiques de part et d'autre de l'interface :

$$p_{ac1} = p_{ac2} \quad (2.48)$$

En revanche, comme le montre l'équation 2.42, lorsque  $\omega$  tend vers 0, cela devient faux, le terme hydrostatique se mettant à prendre de l'importance par rapport au terme acoustique. De même, lorsque  $\omega$  tend vers l'infini, le terme de Laplace prend de l'importance par rapport au terme acoustique (équation 2.45). Lorsque nous étudierons les effets d'ordre 2 comme la pression de radiation acoustique, cela va avoir de l'importance, car nous verrons que la pression acoustique contiendra une composante continue.

### Coefficients de réflexion et de transmission en pression

Notons  $R$  et  $T$  les coefficients de réflexion et de transmission en pression de l'interface :

$$R = \frac{p_{10}^r}{p_{10}^i} \quad (2.49)$$

$$T = \frac{p_{10}^t}{p_{10}^i} \quad (2.50)$$

Les conditions aux limites imposent que la vitesse des particules et la surpression acoustique soient les mêmes de chaque côté de l'interface, à tout instant. Par conséquent, en utilisant les relations 2.19 et 2.20,

$$p_{10}^i + p_{10}^r = p_{10}^t \quad (2.51)$$

$$\frac{p_{10}^i}{Z_A} - \frac{p_{10}^r}{Z_A} = \frac{p_{10}^t}{Z_B} \quad (2.52)$$

soit

$$1 + R = T \quad (2.53)$$

$$\frac{1}{Z_A} - \frac{R}{Z_A} = \frac{T}{Z_B} \quad (2.54)$$

d'où l'on déduit les coefficients de réflexion et de transmission en pression de l'onde acoustique à l'interface :

$$R = \frac{Z_B - Z_A}{Z_B + Z_A} \quad (2.55)$$

$$T = \frac{2Z_B}{Z_A + Z_B} \quad (2.56)$$

### Coefficients de réflexion et de transmission en intensité

Considérons la figure 2.4.

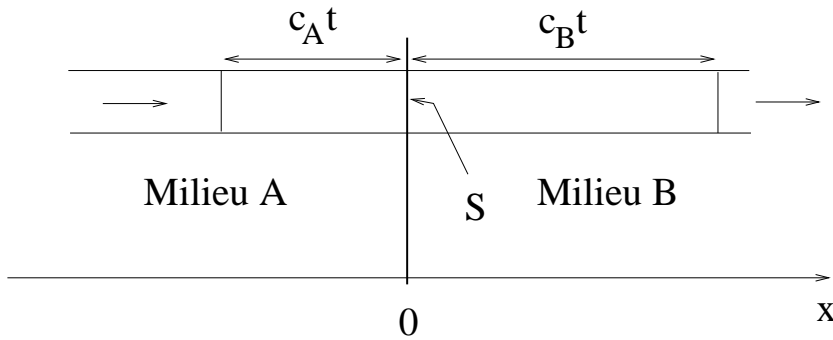


FIG. 2.4 – Réflexion et transmission d'une onde acoustique arrivant en incidence normale à l'interface entre deux fluides

Soit  $S$  un élément de surface de l'interface. L'énergie acoustique incidente pendant une durée  $t$  grande devant la période de l'onde acoustique sur cet élément de surface vaut  $\mathcal{E}^i = \langle E^i \rangle S c_A t$ . L'énergie acoustique réfléchie pendant la même durée vaut  $\mathcal{E}^r = \langle E^r \rangle S c_A t$  et l'énergie acoustique transmise vaut  $\mathcal{E}^t = \langle E^t \rangle S c_B t$ , où la notation  $\langle q \rangle$  désigne la moyenne temporelle de la grandeur  $q$ .

Par définition, l'intensité acoustique est l'énergie acoustique traversant une unité de surface pendant une unité de temps, donc l'intensité de l'onde incidente vaut  $I^i = \langle E^i \rangle c_A$ , l'intensité de l'onde réfléchie vaut  $I^r = \langle E^r \rangle c_A$  et l'intensité de l'onde transmise vaut  $I^t = \langle E^t \rangle c_B$ .

Le coefficient de réflexion en intensité vaut

$$\mathcal{R} = \frac{I^r}{I^i} \quad (2.57)$$

$$= \frac{\langle E^r \rangle}{\langle E^i \rangle} \quad (2.58)$$

$$= \left( \frac{p_{10}^r}{p_{10}^i} \right)^2 \quad (2.59)$$

$$= R^2 \quad (2.60)$$

Le coefficient de transmission en intensité vaut

$$\mathcal{T} = \frac{I^t}{I^i} \quad (2.61)$$

$$= \frac{c_B \langle E^t \rangle}{c_A \langle E^i \rangle} \quad (2.62)$$

$$= \frac{c_B \rho_A c_A^2}{c_A \rho_B c_B^2} \left( \frac{p_{10}^t}{p_{10}^i} \right)^2 \quad (2.63)$$

$$= \frac{Z_A}{Z_B} T^2 \quad (2.64)$$

Par conséquent,

$$\mathcal{R} = \left( \frac{Z_A - Z_B}{Z_A + Z_B} \right)^2 \quad (2.65)$$

$$\mathcal{T} = \frac{4Z_A Z_B}{(Z_A + Z_B)^2} \quad (2.66)$$

Si les impédances acoustiques des milieux  $A$  et  $B$  sont très différentes, l'intensité acoustique est totalement réfléchiée par l'interface. Inversement, s'ils sont d'impédances égales, alors l'intensité acoustique est totalement transmise.

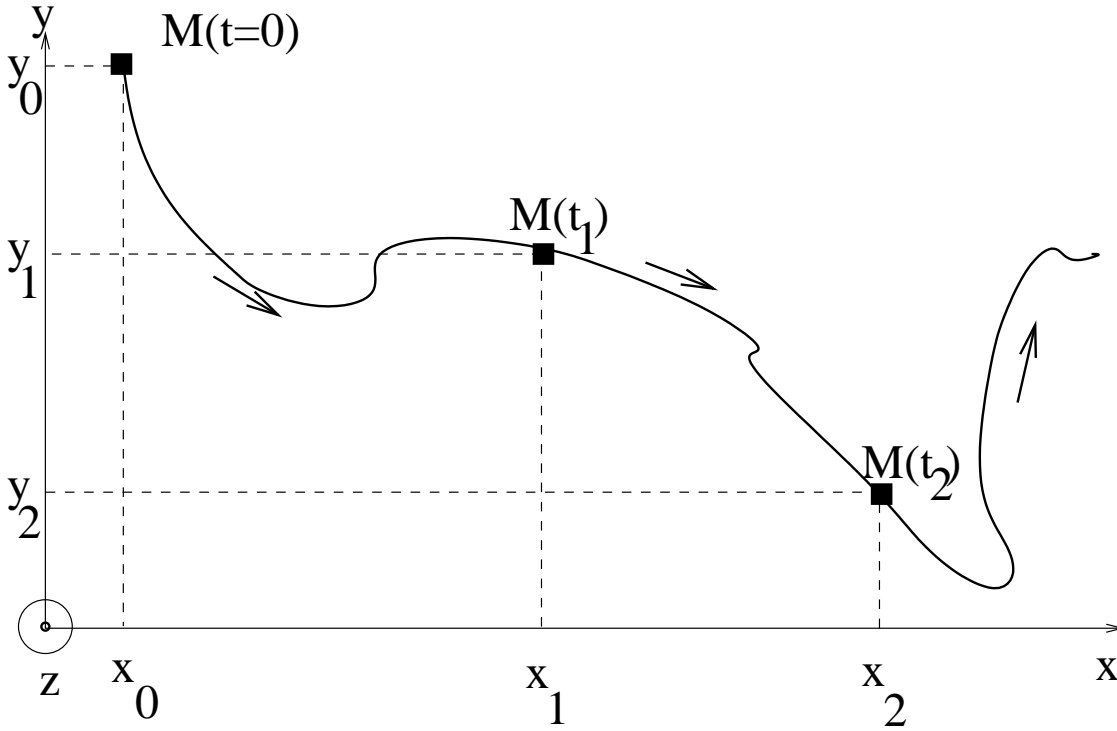
## 2.2 Coordonnées eulériennes et coordonnées lagrangiennes

Après ces quelques rappels d'acoustique linéaire, nous allons maintenant nous intéresser à des effets non-linéaires des ondes acoustiques. Il s'agit d'effets d'ordre supérieur à l'ordre 1. Nous considérons dans tout la suite de cette thèse des ondes acoustiques dont l'amplitude n'est pas infiniment faible, mais est cependant suffisamment faible pour que l'on puisse négliger les termes d'ordre 3 devant les termes d'ordre 2. Il devient alors indispensable de bien distinguer les quantités lagrangiennes et les quantités eulériennes. En effet, dans une onde acoustique, les particules fluides oscillent autour d'une position d'équilibre et dans les problèmes d'acoustique non-linéaire comme l'étude de la pression de radiation, on ne peut pas faire abstraction de ce mouvement des particules. En coordonnées eulériennes, on évalue les quantités physiques en un point fixe de l'espace. En coordonnées lagrangiennes, on les évalue en suivant le mouvement des particules (figure 2.5).

Soit une particule fluide  $P$  se trouvant en  $M(x_0, y_0, z_0)$  à l'instant  $t = 0$ . Soit  $q$  une quantité physique quelconque,  $q^L$  son évaluation en coordonnées lagrangiennes et  $q^E$  son évaluation en coordonnées eulériennes.  $q^E(x_0, y_0, z_0, t)$  est l'évaluation de  $q$  en  $M(x_0, y_0, z_0)$  à l'instant  $t$ , alors que  $q^L(x_0, y_0, z_0, t)$  est son évaluation à l'instant  $t$  au point où se trouve alors la particule  $P$ . Par exemple,  $q^L(x_0, y_0, z_0, t_1)$  est l'évaluation de  $q$  à l'instant  $t_1$  en  $M(t_1)$ , soit  $q^L(x_0, y_0, z_0, t_1) = q^E(x_1, y_1, z_1, t_1)$ . De façon générale, la relation liant  $q^L$  et  $q^E$  est

$$q^L(x_0, y_0, z_0, t) = q^E(x_0 + \xi_x(x_0, y_0, z_0, t), y_0 + \xi_y(x_0, y_0, z_0, t), z_0 + \xi_z(x_0, y_0, z_0, t), t) \quad (2.67)$$

la particule se trouvant à l'instant  $t$  en  $x_0 + \xi_x, y_0 + \xi_y, z_0 + \xi_z$ .


 FIG. 2.5 – Trajectoire de la particule fluide qui se trouve à l'instant  $t = 0$  en  $M(t = 0)$ 

Considérons un mouvement ondulatoire à une dimension.  $x$  est la coordonnée d'espace et  $t$  est la coordonnée de temps. Soit  $x$  la position à l'instant  $t$  de la particule fluide qui se trouve en  $x_0$  à l'équilibre.

$$x(x_0, t) = x_0 + \xi(x_0, t) \quad (2.68)$$

où  $\xi(x_0, t)$  est le déplacement de la particule par rapport à sa position d'équilibre. Pour des déplacements de faible amplitude, la quantité  $q$  en coordonnées lagrangiennes  $q^L$  et la quantité  $q$  en coordonnées eulériennes  $q^E$  sont reliées, au premier ordre en  $\xi/L$  ( $L$  étant l'échelle caractéristique de variation de la grandeur  $q$ ), par les relations

$$q^L(x_0, t) = q^E(x_0 + \xi(x_0, t), t) \quad (2.69)$$

$$\approx q^E(x_0, t) + \left( \frac{\partial q^E}{\partial x} \right)_t (x_0, t) \xi(x_0, t) \quad (2.70)$$

$$q^E(x, t) = q^L(x_0 = x - \xi(x_0, t), t) \quad (2.71)$$

$$\approx q^L(x, t) - \left( \frac{\partial q^L}{\partial x} \right)_t (x, t) \xi(x_0, t) \quad (2.72)$$

$$\approx q^L(x, t) - \left( \frac{\partial q^L}{\partial x} \right)_t (x, t) \xi(x, t) \quad (2.73)$$

Par exemple, si l'on applique cette expression à la vitesse : en coordonnées lagrangiennes, la vitesse de la particule vaut

$$u^L(x_0, t) = \left( \frac{\partial \xi}{\partial t} \right)_{x_0} (x_0, t) \quad (2.74)$$



En coordonnées eulériennes,

$$u^E(x, t) = u^L(x, t) - \left( \frac{\partial u^L}{\partial x} \right)_t (x, t) \xi(x, t) \quad (2.75)$$

$$= \frac{\partial \xi}{\partial t} - \frac{\partial^2 \xi}{\partial t \partial x} \xi(x, t) \quad (2.76)$$

L'équation 2.73 montre par contre que pour des grandeurs d'ordre 2 en  $\xi$  comme l'énergie acoustique, la grandeur eulérienne et la grandeur lagrangienne sont égales à l'ordre 2 :  $E^E = E^L$  à l'ordre 2. Aussi, dans toute la suite de ce chapitre, où tous les calculs que je fais sont à l'ordre 2, je ne distingue pas  $E^E$  et  $E^L$ . En revanche, s'agissant de la vitesse, de la masse volumique ou de la pression, cette distinction est indispensable.

## 2.3 La pression de radiation

### 2.3.1 Position du problème

Dans ce paragraphe et le suivant, j'expose un raisonnement réalisé par F. E. Borgnis en 1953 [2], qui a le mérite d'être très physique : considérons une onde ultrasonore plane se propageant dans un fluide. Cette onde rencontre un obstacle en incidence normale (figure 2.6). L'obstacle est entièrement immergé dans le fluide et est maintenu immobile par un opérateur extérieur.

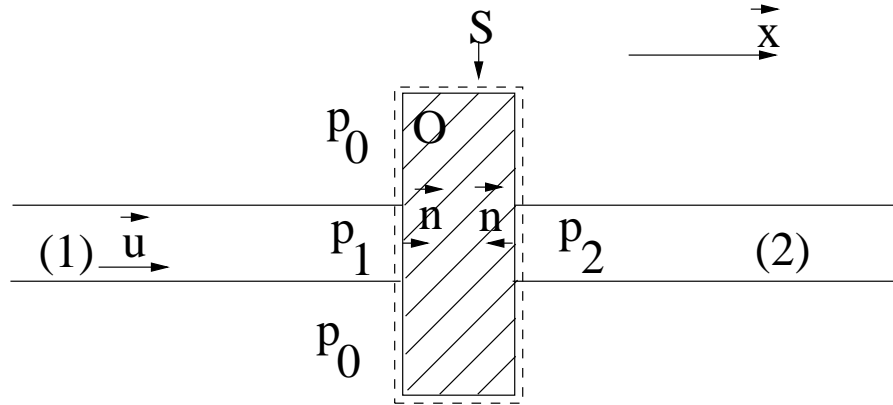


FIG. 2.6 – Onde acoustique plane rencontrant un obstacle en incidence normale

En pratique, la réalisation d'ondes rigoureusement planes est impossible. En général, le faisceau est limité dans l'espace et est entouré de fluide non perturbé par l'onde. L'approximation d'ondes planes est une bonne approximation pour décrire des faisceaux dont le diamètre est large comparé à la longueur d'onde acoustique. Ici, nous supposons que l'onde est uniforme sur toute la section du faisceau, et que le fluide extérieur au faisceau n'est pas perturbé par l'onde, c'est-à-dire que nous négligeons les effets de diffraction. L'obstacle peut réfléchir, absorber et transmettre l'onde acoustique.

### 2.3.2 Calcul de la pression de radiation acoustique s'exerçant sur l'obstacle

L'onde considérée étant ultrasonore, sa fréquence est de l'ordre du MHz. Soient  $A$  la section du faisceau et  $\Pi$  la pression de radiation acoustique exercée par l'onde sur l'obstacle. L'onde acoustique exerce sur l'obstacle une force  $\Pi A\vec{x}$ . Pour maintenir l'obstacle en équilibre, l'opérateur doit donc exercer dessus une force  $\vec{f}_{op} = -\Pi A\vec{x}$ .

Soit  $p^E$  la pression eulérienne au sein du fluide. En-dehors du faisceau,  $p^E = p_0$ ,  $p_0$  étant la pression du fluide non perturbé par le faisceau acoustique. La force pressante totale s'exerçant sur l'obstacle vaut alors :

$$\vec{f}_{press} = \iint p^E \vec{n} da = (p_{ac1}^E - p_{ac2}^E) A\vec{x} \quad (2.77)$$

$p_{ac1}^E$  et  $p_{ac2}^E$  étant les pressions acoustiques eulériennes respectivement en amont et en aval de l'obstacle, et  $\vec{n}$  le vecteur unitaire orthogonal à la surface de l'obstacle, dirigé vers l'intérieur de l'obstacle.

Soit  $S$  une surface stationnaire proche de la surface de l'obstacle, mais entièrement dans le fluide à tout instant. Le flux de quantité de mouvement entrant dans  $S$  par unité de temps vaut

$$\vec{\Phi} = \iint_S (\rho \vec{u})(\vec{u} \cdot \vec{n}) da = (\rho_1 u_1^2 - \rho_2 u_2^2) A\vec{x} \quad (2.78)$$

$\vec{n}$  étant le vecteur normal à  $S$ , dirigé vers l'obstacle. La variation de quantité de mouvement de l'obstacle en fonction du temps s'écrit donc, d'après le théorème d'Euler :

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho \vec{u} dV = \vec{\Phi} + \vec{\mathcal{F}} \quad (2.79)$$

$\vec{\mathcal{F}}$  désignant la somme de toutes les forces agissant sur l'obstacle. On s'intéresse ici aux effets de l'onde acoustique ne dépendant pas du temps, donc à la valeur moyenne des différentes grandeurs, définie pour une grandeur  $q$  par  $\langle q \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T q(t) dt$ ,  $T$  étant la période de l'onde acoustique.

$$\left\langle \frac{d}{dt} \iiint_V \rho \vec{u} dV \right\rangle = \langle \vec{\Phi} \rangle + \langle \vec{f}_{press} \rangle + \vec{f}_{op} \quad (2.80)$$

Or, d'après la définition de la valeur moyenne, pour une quantité  $q(t)$  quelconque, périodique de période  $T$ ,

$$\left\langle \frac{dq}{dt} \right\rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{dq}{dt} dt = \frac{q(T) - q(0)}{T} = 0 \quad (2.81)$$

donc

$$\vec{f}_{op} = -\langle \vec{\Phi} \rangle - \langle \vec{f}_{press} \rangle \quad (2.82)$$

soit

$$-\Pi A\vec{x} = -\langle \rho_1 u_1^2 - \rho_2 u_2^2 \rangle A\vec{x} - \langle p_{ac1}^E - p_{ac2}^E \rangle A\vec{x} \quad (2.83)$$

soit encore

$$\Pi = \langle p_{ac1}^E \rangle + \langle \rho_1 u_1^2 \rangle - \langle p_{ac2}^E \rangle - \langle \rho_2 u_2^2 \rangle \quad (2.84)$$

On aurait pu réaliser le même calcul en utilisant non pas les coordonnées eulériennes mais les coordonnées lagrangiennes : l'obstacle est soumis aux forces pressantes  $\vec{f}_{press}$  que le fluide exerce dessus et à la force  $\vec{f}_{op}$  appliquée par l'opérateur pour le maintenir immobile.

Le respect des conditions aux limites impose que les parois de l'obstacle se déplacent à la même vitesse que les particules fluides qui sont en contact avec elles. La pression que le fluide exerce sur l'obstacle est par conséquent la pression lagrangienne  $p^L$  des particules en contact avec ses parois. Les forces pressantes totales exercées par le fluide sur l'obstacle valent donc

$$\vec{f} = \iint p^L \vec{n} da \quad (2.85)$$

À l'extérieur du faisceau acoustique,  $p^L$  vaut  $p_0$ , la pression hydrostatique au repos. À l'intérieur du faisceau acoustique,  $p^L$  vaut  $p_0 + p_{ac1}^L$  sur la face avant de l'obstacle et  $p_0 + p_{ac2}^L$  sur sa face arrière. Par conséquent,

$$\vec{f} = (p_{ac1}^L - p_{ac2}^L) A \vec{x} \quad (2.86)$$

L'opérateur exerce sur l'obstacle une force constante qui équilibre la valeur moyenne des forces acoustiques :

$$\vec{F} = - \langle p_{ac1}^L - p_{ac2}^L \rangle A \vec{x} \quad (2.87)$$

La pression de radiation vaut alors

$$\Pi = \langle p_{ac1}^L \rangle - \langle p_{ac2}^L \rangle \quad (2.88)$$

Le but des paragraphes 2.3.3 et 2.3.4, qui reprennent une étude réalisée en 1993 par Lee et Wang [3], est de calculer l'expression des valeurs moyennes des pressions eulérienne et lagrangienne, et d'en déduire l'expression de la pression de radiation acoustique. Ils permettront de vérifier, entre autres résultats, que les résultats 2.84 et 2.88 sont équivalents.

### 2.3.3 Pression acoustique eulérienne moyenne

Nous allons établir une expression pour la surpression moyenne  $\langle p^E - p_0 \rangle$  induite par l'onde acoustique en coordonnées eulériennes pour un fluide parfait.

Une onde acoustique induit un écoulement irrotationnel du fluide. On peut donc écrire  $\vec{u} = \vec{\nabla} \phi$  ( $\vec{u}$  étant ici la vitesse eulérienne  $\vec{u}^E$  et  $\phi$  le potentiel des vitesses associé à cette onde). L'écoulement est régi par l'équation d'Euler

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = -\vec{\nabla} p \quad (2.89)$$

qui peut s'écrire sous la forme

$$\rho \vec{\nabla} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) + \rho \vec{\nabla} \left( \frac{u^2}{2} \right) = -\vec{\nabla} p \quad (2.90)$$

ou encore

$$\vec{\nabla} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\vec{\nabla} \phi|^2 \right) = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} \quad (2.91)$$

Soit  $T$  la température du fluide. On note  $dS$  la variation de son entropie massique,  $dH$  la variation de son enthalpie massique et  $dp$  la variation de sa pression associées au passage de l'onde acoustique. D'après le premier principe de la thermodynamique,

$$dH = T dS + \frac{dp}{\rho} \quad (2.92)$$

Dans un fluide parfait (où il n'y a pas de phénomènes dissipatifs associés à la diffusion de quantité de mouvement par viscosité et de chaleur par conduction thermique), la propagation d'une onde acoustique correspond à des cycles de compression-détente adiabatiques et réversibles donc isentropiques.  $dS$  est donc nul et

$$\vec{\nabla}H = \frac{\vec{\nabla}p}{\rho} \quad (2.93)$$

En introduisant cette équation dans 2.91, on obtient

$$\vec{\nabla} \left( \frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}|\vec{\nabla}\phi|^2 \right) = -\vec{\nabla}H \quad (2.94)$$

ce qui donne après intégration suivant les variables d'espace :

$$H = -\frac{\partial\phi}{\partial t} - \frac{1}{2}|\vec{\nabla}\phi|^2 + C(t) \quad (2.95)$$

$C(t)$  est une fonction du temps  $t$  mais ne dépend pas des variables d'espace.

On peut développer la pression  $p$  en série de  $H$  de la façon suivante :

$$p = p_0 + p_{ac1} = p_0 + \left( \frac{dp}{dH} \right)_{S, \acute{e}q} H + \frac{1}{2} \left( \frac{d^2p}{dH^2} \right)_{S, \acute{e}q} H^2 \quad (2.96)$$

Or, d'après 2.92,

$$\left( \frac{dp}{dH} \right)_S = \rho \quad (2.97)$$

donc

$$\left( \frac{d^2p}{dH^2} \right)_S = \left( \frac{d\rho}{dH} \right)_S = \left( \frac{d\rho}{dp} \right)_S \left( \frac{dp}{dH} \right)_S = \rho \left( \frac{d\rho}{dp} \right)_S \quad (2.98)$$

Or, lors de la propagation d'une onde acoustique (cf. équation 2.12),

$$\left( \frac{d\rho}{dp} \right)_S = \frac{1}{c^2} \quad (2.99)$$

$c$  étant la vitesse de propagation de l'onde, donc

$$\left( \frac{d^2p}{dH^2} \right)_{S, \acute{e}q} = \frac{\rho_0}{c^2} \quad (2.100)$$

En introduisant ces résultats dans 2.96, on obtient finalement

$$p = p_0 + \rho_0 H + \frac{1}{2} \frac{\rho_0}{c^2} H^2 \quad (2.101)$$

soit, en introduisant 2.95

$$p = p_0 + \rho_0 \left( -\frac{\partial\phi}{\partial t} - \frac{1}{2}|\vec{\nabla}\phi|^2 + C(t) \right) + \frac{1}{2} \frac{\rho_0}{c^2} \left( -\frac{\partial\phi}{\partial t} - \frac{1}{2}|\vec{\nabla}\phi|^2 + C(t) \right)^2 \quad (2.102)$$

ce qui donne, moyenné sur le temps et calculé à l'ordre 2 en  $v/c$  :

$$\langle p - p_0 \rangle = -\frac{1}{2}\rho_0 \langle |\vec{\nabla}\phi|^2 \rangle + \frac{1}{2} \frac{\rho_0}{c^2} \left\langle \left( \frac{\partial\phi}{\partial t} \right)^2 \right\rangle - \frac{\rho_0}{c^2} \left\langle \frac{\partial\phi}{\partial t} C(t) \right\rangle - \frac{\rho_0}{2c^2} \left\langle |\vec{\nabla}\phi|^2 C(t) \right\rangle + Q \quad (2.103)$$

en notant  $Q = \rho_0 \langle C(t) \rangle + \frac{1}{2} \frac{\rho_0}{c^2} \langle C^2(t) \rangle$ .

D'après l'équation 2.92,  $H = p_1/\rho_0$ , ce qui est égal à  $-\partial\phi/\partial t$  d'après l'équation d'Euler linéarisée. Par conséquent,  $C$  est une quantité d'ordre au moins 2 d'après l'équation 2.95, donc dans un calcul à l'ordre 2,  $Q = \rho_0 \langle C(t) \rangle$  et l'équation précédente devient :

$$\langle p - p_0 \rangle = -\frac{1}{2}\rho_0 \langle |\vec{\nabla}\phi|^2 \rangle + \frac{1}{2} \frac{\rho_0}{c^2} \left\langle \left( \frac{\partial\phi}{\partial t} \right)^2 \right\rangle + Q \quad (2.104)$$

Or,

$$\vec{u} = \vec{\nabla}\phi \quad (2.105)$$

et à l'ordre 1,

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = -\frac{p_1}{\rho_0} \quad (2.106)$$

donc

$$\langle p - p_0 \rangle = -\frac{1}{2}\rho_0 \langle \vec{u}^2 \rangle + \frac{1}{2\rho_0 c^2} \langle p_1^2 \rangle + Q \quad (2.107)$$

$$= -\langle K \rangle + \langle V \rangle + Q \quad (2.108)$$

$\langle K \rangle$  et  $\langle V \rangle$  étant respectivement l'énergie cinétique volumique moyenne et l'énergie potentielle volumique moyenne de l'onde.

Ce calcul a été fait en coordonnées eulériennes : ce qui vient d'être calculé est donc la surpression acoustique moyenne en coordonnées eulériennes :

$$\langle p^E - p_0 \rangle = \langle p_{ac}^E \rangle = -\langle K \rangle + \langle V \rangle + Q \quad (2.109)$$

Cette équation, publiée par Biquard [4], a été appelée « deuxième relation de Langevin » par Beissner [5].

### 2.3.4 Pression acoustique lagrangienne moyenne

Cette fois, nous allons calculer la pression acoustique moyenne  $\langle p^L - p_0 \rangle$  vue par une particule fluide en suivant son mouvement. C'est cette pression acoustique lagrangienne moyenne qui a un sens en terme de force exercée sur une interface ou un obstacle.

Il est assez facile de la calculer en partant de  $\langle p^E - p_0 \rangle$  et en utilisant l'équation 2.70 généralisée à 3 dimensions :

$$q^L(\vec{x}_0, t) = q^E(\vec{x}_0, t) + \vec{\nabla}q^E(\vec{x}_0, t) \cdot \vec{\xi}(\vec{x}_0, t) \quad (2.110)$$

Appliqué à  $p$  :

$$\langle p^L - p_0 \rangle = \langle p^E - p_0 \rangle + \left\langle \vec{\nabla}p^E \cdot \vec{\xi} \right\rangle \quad (2.111)$$

Pour calculer  $\langle p^L - p_0 \rangle$  à l'ordre 2, on peut se contenter de calculer  $\vec{\nabla}p^E$  à l'ordre 1, celui-ci étant multiplié par le déplacement de la particule  $\vec{\xi}$ , qui est lui-même une quantité d'ordre 1. D'après l'équation d'Euler 2.89, à l'ordre 1 :

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{u}^E}{\partial t} = -\vec{\nabla}p^E \quad (2.112)$$

En y introduisant l'expression 2.76 de la vitesse en coordonnées eulériennes, on obtient :

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \vec{\xi}}{\partial t^2} = -\vec{\nabla} p^E \quad (2.113)$$

et en introduisant ce résultat dans 2.111 :

$$\langle p^L - p_0 \rangle = \langle p^E - p_0 \rangle - \rho_0 \left\langle \frac{\partial^2 \vec{\xi}}{\partial t^2} \cdot \vec{\xi} \right\rangle \quad (2.114)$$

En intégrant par partie :

$$\langle p^L - p_0 \rangle = \langle p^E - p_0 \rangle + \rho_0 \left\langle \frac{\partial \vec{\xi}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{\xi}}{\partial t} \right\rangle \quad (2.115)$$

$$= \langle p^E - p_0 \rangle + \rho_0 \langle \vec{u}^2 \rangle \quad (2.116)$$

d'où l'on tire ce que Beissner [5] appelle la « première relation de Langevin » :

$$\langle p^L - p_0 \rangle = \langle K \rangle + \langle V \rangle + Q = \langle E \rangle + Q \quad (2.117)$$

$\langle E \rangle$  est l'énergie volumique moyenne totale de l'onde. Cette équation a elle aussi été publiée par Biquard en 1932 [6].

Une particule fluide voit donc une surpression acoustique dont la valeur moyenne n'est pas nulle, mais directement liée à la valeur moyenne de l'énergie volumique totale de l'onde.

On vérifie alors, d'après les équations 2.109 et 2.117 que

$$\langle p^L - p_0 \rangle = \langle p_{ac}^L \rangle = \langle p^E - p_0 \rangle + \langle \rho u^2 \rangle = \langle p_{ac}^E \rangle + \langle \rho u^2 \rangle \quad (2.118)$$

$u$  étant la vitesse des particules fluides. Cela permet donc de vérifier que les résultats 2.84 et 2.88 sont équivalents.

### 2.3.5 Cas de Langevin et cas de Rayleigh : rôle du milieu extérieur

#### Définition des deux cas

Les études évoquées dans le chapitre 1 (celle de Rayleigh, reprise par Brillouin, et celle de Langevin) étudient en fait deux cas différents :

- Le cas de Rayleigh : l'onde acoustique n'interagit pas avec le milieu extérieur (par exemple si elle est d'extension infinie ou si elle est confinée entre des parois fixes).
- Le cas de Langevin : l'onde acoustique interagit avec le milieu extérieur au faisceau.

Les schémas présentés sur la figure 2.7 permettent de bien comprendre la différence entre les deux cas.

Dans les deux cas, le mur sur lequel l'onde acoustique arrive est de position moyenne fixe, et c'est sur lui qu'on va calculer la pression de radiation acoustique. Pour satisfaire les conditions aux limites, la face du mur en contact avec le fluide doit se déplacer sous l'action de l'onde acoustique. La pression à laquelle cette face est soumise est donc égale à la pression lagrangienne moyenne  $\langle p^L \rangle$  des particules fluides en contact avec elle. Le mur est alors soumis à la différence de pression  $\langle p^L \rangle - p_0$  entre ses deux faces.

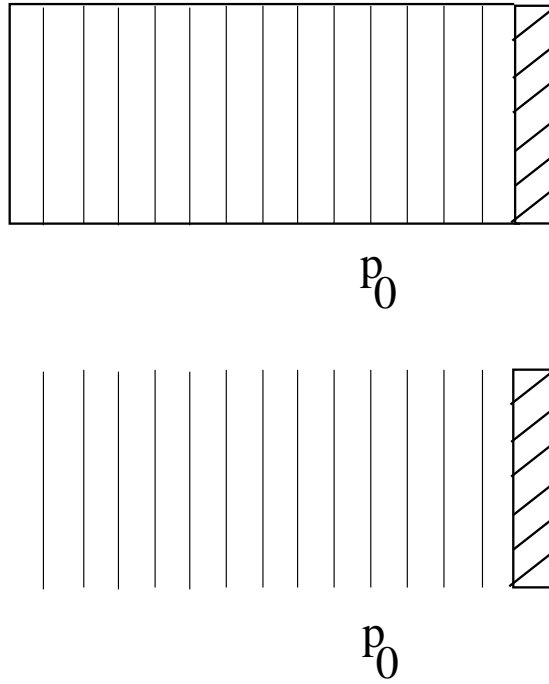


FIG. 2.7 – En haut : cas de Rayleigh : l’onde acoustique est confinée entre des parois solides rigides. En bas : cas de Langevin : le faisceau acoustique n’est pas confiné et est directement entouré de fluide non perturbé. Dans les deux cas, une onde harmonique plane se propage de la gauche vers la droite jusqu’à un mur fixe. Pour simplifier, nous considérons ici que le mur ne transmet pas l’onde acoustique au milieu extérieur. La pression extérieure est homogène et notée  $p_0$ .

### Cas de Langevin

Considérons le cas de Langevin, dessiné sur le schéma du bas : ici, l’onde interagit avec le milieu extérieur : un mouvement de liquide orthogonal à la direction de propagation du faisceau égalise la pression eulérienne moyenne à l’intérieur et à l’extérieur du faisceau. En régime permanent, la pression eulérienne moyenne du fluide vaut par conséquent en tout point  $\langle p_{Lan}^E \rangle = p_0$ . Le mur est soumis à la différence de pression  $\langle p_{Lan}^L \rangle - p_0$  entre ses deux faces.

Les deux relations de Langevin 2.109 et 2.117 sont valables en tout point du fluide. En particulier, hors du faisceau,  $\langle p^L - p_0 \rangle = 0$  et  $\langle E \rangle = 0$  et de l’équation 2.117, on déduit alors que  $Q = 0$ . Les relations de Langevin deviennent alors, en tout point du fluide :

$$\langle p^E - p_0 \rangle = -\langle K \rangle + \langle V \rangle \quad (2.119)$$

et

$$\langle p^L - p_0 \rangle = \langle K \rangle + \langle V \rangle = \langle E \rangle \quad (2.120)$$

De ces deux résultats et des résultats 2.84 et 2.88, on déduit que dans le cas de Langevin, la pression de radiation exercée par une onde acoustique sur un obstacle en incidence normale vaut

$$\boxed{\Pi = \langle E_1 \rangle - \langle E_2 \rangle} \quad (2.121)$$

$E_1$  et  $E_2$  étant les énergies acoustiques volumiques en aval et en amont de l’obstacle. Cette expression est l’expression fondamentale que nous allons utiliser dans toute la suite de

cette thèse pour évaluer la pression de radiation acoustique dans les expériences. Il y a une convention de sens :  $\Pi$  est la valeur algébrique de la force surfacique exercée par l'onde incidente depuis le milieu 1, mesurée le long de la normale à l'interface 1-2 orientée de 1 vers 2.  $\Pi$  est positif si la force exercée par l'onde acoustique est orientée du milieu amont 1 vers le milieu aval 2, et est négatif si elle est orientée dans l'autre sens.

Dans le cas représenté sur la figure 2.7, le mur ne transmettant pas l'onde acoustique, la pression de radiation que l'onde exerce dessus est égale à son énergie volumique :

$$\Pi = \langle E \rangle \quad (2.122)$$

### Cas de Rayleigh

Dans le cas de Rayleigh, l'onde acoustique n'interagissant pas avec le milieu extérieur, l'égalisation des pressions eulériennes moyennes à l'extérieur et à l'intérieur du faisceau ne peut s'effectuer. Nous allons vérifier dans le calcul qui suit, inspiré de l'étude de Lee et Wang de 1993 [3], que la pression de radiation à laquelle est soumis le mur n'est alors pas égale à celle calculée dans le cas de Langevin. Dans ce calcul, nous nous restreignons au cas où le mur est parfaitement réfléchissant (figure 2.8).

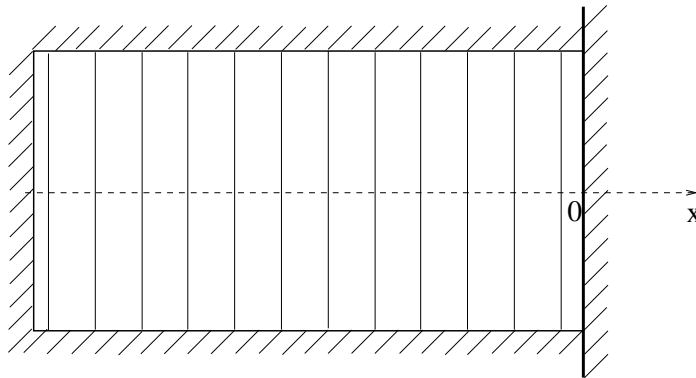


FIG. 2.8 – Onde acoustique plane confinée incidente sur un mur parfaitement réfléchissant

On considère un problème à une dimension : une onde plane qui progresse le long de l'axe  $x$  est parfaitement réfléchié par un mur plan fixe et rigide, situé à l'abscisse  $x = 0$ . Une onde stationnaire est créée, résultant de la superposition de l'onde incidente et de l'onde réfléchié.

Soit  $\mathcal{P}$  l'amplitude de pression de l'onde stationnaire. En coordonnées eulériennes, la pression et la vitesse acoustiques  $p_{ac}$  et  $u$  sont données au premier ordre par les relations

$$p^E - p_0 = p_{ac} = \mathcal{P} \cos(kx) \sin(\omega t) \quad (2.123)$$

$$u = -\frac{\mathcal{P}}{\rho_0 c_0} \sin(kx) \cos(\omega t) \quad (2.124)$$

$\rho_0$  étant la densité du milieu non perturbé,  $c_0$  la vitesse de l'onde acoustique dans le milieu à la densité  $\rho_0$ ,  $\omega$  la pulsation de l'onde, et  $k = \omega/c_0$ .

Dans ce cas, on utilise les expressions de l'énergie potentielle et de l'énergie cinétique



volumiques moyennes :

$$\langle V \rangle = \frac{1}{2\rho_0 c_0^2} \langle p_{ac}^2 \rangle \quad (2.125)$$

$$= \frac{\mathcal{P}^2}{4\rho_0 c_0^2} \cos^2(kx) \quad (2.126)$$

$$\langle K \rangle = \frac{1}{2}\rho_0 \langle u^2 \rangle \quad (2.127)$$

$$= \frac{\mathcal{P}^2}{4\rho_0 c_0^2} \sin^2(kx) \quad (2.128)$$

et on les réintroduit dans l'équation 2.109

$$\langle p^E - p_0 \rangle = -\frac{\mathcal{P}^2}{4\rho_0 c_0^2} \sin^2(kx) + \frac{\mathcal{P}^2}{4\rho_0 c_0^2} \cos^2(kx) + Q \quad (2.129)$$

$$= \frac{\mathcal{P}^2}{4\rho_0 c_0^2} \cos(2kx) + Q \quad (2.130)$$

$$= \langle E \rangle \cos(2kx) + Q \quad (2.131)$$

$\langle E \rangle = \langle K \rangle + \langle V \rangle$  étant l'énergie volumique de l'onde stationnaire.

Développons au deuxième ordre l'équation d'état du fluide, qui lie la surpression acoustique  $p^E - p_0$  à l'excès de densité acoustique  $\rho^E - \rho_0$  :

$$\rho^E - \rho_0 = a(p^E - p_0) + b(p^E - p_0)^2 \quad (2.132)$$

$a$  et  $b$  ne sont pas les paramètres usuels mesurant *via* leur rapport  $B/A$  la non-linéarité du fluide [7]. En effet,  $A$  et  $B$  sont les coefficients du développement de  $p^E$  en puissances de  $\rho^E - \rho_0$  et non pas de  $\rho^E - \rho_0$  en puissances de  $p$ .

De ce développement, il résulte que

$$\langle \rho^E - \rho_0 \rangle = a \langle p^E - p_0 \rangle + b \langle (p^E - p_0)^2 \rangle \quad (2.133)$$

D'après l'équation 2.123,

$$\langle (p^E - p_0)^2 \rangle = \frac{1}{2} \mathcal{P}^2 \cos^2(kx) \quad (2.134)$$

ce qui donne, introduit avec 2.131 dans 2.133 :

$$\langle \rho^E - \rho_0 \rangle = a (\langle E \rangle \cos(2kx) + Q) + \frac{b}{2} \mathcal{P}^2 \cos^2(kx) \quad (2.135)$$

Intégrons cette égalité entre  $x$  quelconque et  $x + \frac{2\pi}{k}$ .

$$\int_x^{x+\frac{2\pi}{k}} \langle \rho^E - \rho_0 \rangle = a \int_x^{x+\frac{2\pi}{k}} (\langle E \rangle \cos(2kx) + Q) + \frac{b}{2} \int_x^{x+\frac{2\pi}{k}} \mathcal{P}^2 \cos^2(kx) \quad (2.136)$$

La conservation de la masse impose que

$$\int_x^{x+\frac{2\pi}{k}} \langle \rho^E - \rho_0 \rangle = 0 \quad (2.137)$$

et donc l'équation précédente devient

$$\frac{2\pi}{k}aQ + \frac{b\mathcal{P}^2}{2} \int_x^{x+\frac{2\pi}{k}} \frac{1 + \cos(2kx)}{2} = 0 \quad (2.138)$$

d'où l'on déduit que

$$Q = -\frac{b\mathcal{P}^2}{4a} \quad (2.139)$$

soit, en utilisant l'équation  $\langle E \rangle = \frac{\mathcal{P}^2}{4\rho_0 c_0^2}$  :

$$Q = -\frac{b\rho_0 c_0^2}{a} \langle E \rangle \quad (2.140)$$

ce qui donne, réintroduit dans 2.131 :

$$\langle p^E - p_0 \rangle = \left( \cos(2kx) - \frac{b}{a}\rho_0 c_0^2 \right) \langle E \rangle \quad (2.141)$$

En utilisant les deux relations de Langevin 2.109 et 2.117, on en déduit que

$$\langle p^L - p_0 \rangle = \left( \cos(2kx) - \frac{b}{a}\rho_0 c_0^2 \right) \langle E \rangle + 2 \langle K \rangle \quad (2.142)$$

$$= \left( \cos(2kx) - \frac{b}{a}\rho_0 c_0^2 + 2 \sin^2(kx) \right) \langle E \rangle \quad (2.143)$$

soit au niveau du mur, en  $x = 0$  :

$$\langle p^L - p_0 \rangle = \left( 1 - \frac{b}{a}\rho_0 c_0^2 \right) \langle E \rangle \quad (2.144)$$

Le mur est donc ici soumis à une pression de radiation acoustique

$$\Pi = \left( 1 - \frac{b}{a}\rho_0 c_0^2 \right) \langle E \rangle \quad (2.145)$$

alors que dans le cas de Langevin, il était soumis à une pression de radiation acoustique

$$\Pi = \langle E \rangle \quad (2.146)$$

Ceci illustre bien la différence entre le cas de Rayleigh et le cas de Langevin : ici, l'onde acoustique est confinée et n'a donc pas d'interactions avec un milieu extérieur. Le cas considéré est par conséquent le cas de Rayleigh. On a démontré que la constante  $Q$  n'était pas nulle, contrairement au cas de Langevin. Dans le problème qui vient d'être considéré, la pression eulérienne moyenne varie sinusoidalement avec la position  $x$ . Or, dans le cas de Langevin, l'onde n'étant pas confinée mais interagissant avec le milieu extérieur, la pression eulérienne moyenne dans le faisceau est égale à la pression hydrostatique à l'extérieur du faisceau et donc  $\langle p^E - p_0 \rangle = 0$ .

Les interactions entre le faisceau acoustique et le milieu extérieur ont donc une grande importance dans l'étude de la pression de radiation acoustique. Dans tout ce qui suit, on considère le cas de Langevin, où l'onde n'est pas confinée : c'est en effet le cas que j'ai étudié expérimentalement tout au long de ma thèse, car j'ai créé des faisceaux acoustiques

se propageant dans un fluide dont une partie, à l'extérieur du faisceau, restait au repos, le faisceau et le fluide au repos n'étant pas isolés l'un de l'autre. Dans cette situation expérimentale, le mouvement de liquide orthogonal à la direction de propagation du faisceau égalisant la pression eulérienne moyenne à l'intérieur et à l'extérieur du faisceau tend à faire diminuer la densité moyenne du liquide au sein du faisceau. Torr [8] a calculé la variation relative de cette densité et a démontré qu'elle était égale à  $\frac{\langle p_{ac}^E \rangle}{\rho c^2}$  et très inférieure (de 5 ordres de grandeur) aux variations de densité dues à l'onde acoustique elle-même. Elle n'a jamais été détectée expérimentalement.

Le cas de Rayleigh a été étudié expérimentalement par Michel Mathiot [9]. Il a vérifié (figure 2.9) que la pression de radiation exercée sur un obstacle solide dans ce cas était proportionnelle à l'énergie volumique de l'onde acoustique incidente, conformément à l'expression 2.145.

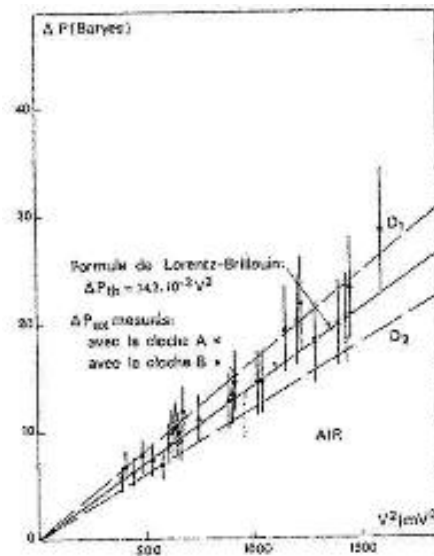


FIG. 2.9 – Mathiot a vérifié expérimentalement que la pression de radiation exercée sur un obstacle solide dans ce cas était proportionnelle à l'énergie volumique de l'onde acoustique incidente.

### 2.3.6 Pression de radiation acoustique s'exerçant sur un obstacle en incidence oblique

Il faut souligner que le calcul qui a été fait au paragraphe 2.3.2 n'est valable que pour une onde plane arrivant en incidence normale sur un obstacle. Or, comme le faisait remarquer Brillouin [10] et comme l'a vérifié expérimentalement Herrey [11], la pression de radiation n'est pas une pression mais une tension, sa valeur dépendant de l'angle d'incidence de l'onde acoustique sur l'obstacle. Le but de ce paragraphe, qui s'inspire d'une étude réalisée par F. E. Borgnis en 1952 [12], est de généraliser les résultats qui viennent d'être obtenus à une onde acoustique plane en incidence oblique sur un obstacle.

Soit une onde acoustique plane arrivant sur un obstacle  $O$  avec un angle d'incidence  $\theta_i$  (figure 2.10). L'obstacle peut par exemple être l'interface entre deux fluides. Là encore, on néglige la gravité et les effets de diffraction. Cette onde est émise par un plan émetteur

$E$ . Une partie est réfléchiée par  $O$  vers un plan absorbant  $A_r$  et une partie est transmise vers un autre plan absorbant  $A_t$ . Le plan émetteur et les deux plans absorbants sont perpendiculaires à la direction de propagation de l'onde.

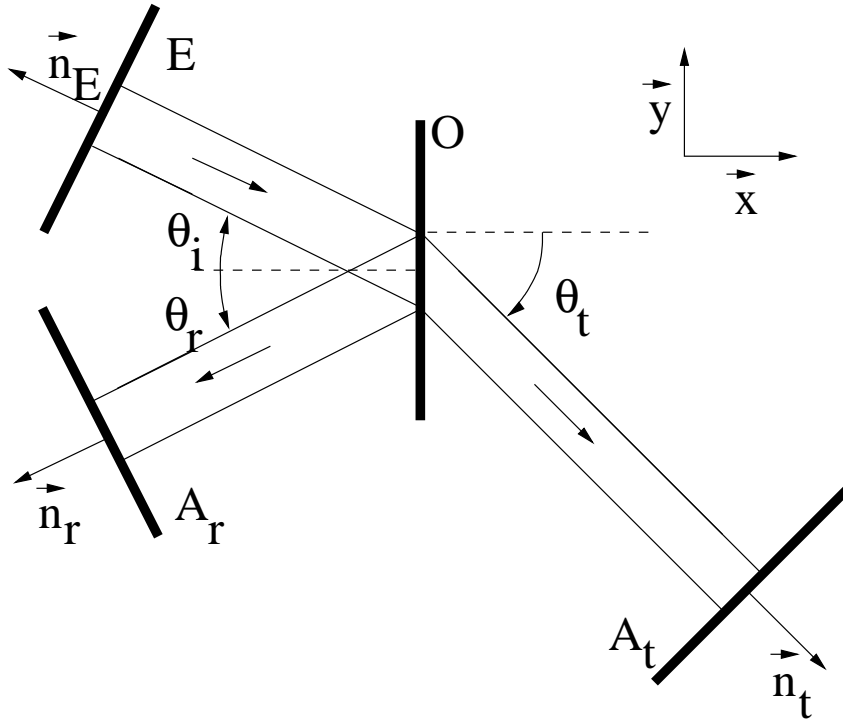


FIG. 2.10 – Onde acoustique plane rencontrant un obstacle en incidence oblique

On considère le système constitué du fluide délimité par l'obstacle  $O$ , le plan émetteur  $E$  et les deux plans absorbants  $A_r$  et  $A_t$ . Le système mécanique étant fermé (le fluide n'est pas animé de mouvements latéraux), la somme des forces que les quatre plans exercent sur le système est nulle. Les forces agissant sur le fluide peuvent être calculées d'après le principe d'action-réaction et compte-tenu de ce qui précède (équation 2.117 avec  $Q = 0$  car le cas étudié ici est le cas de Langevin) :

- La force  $\vec{F}_E$  exercée par  $E$  :  $\vec{F}_E = -\langle E_i \rangle S_i \vec{n}_E$
- La force  $\vec{F}_r$  exercée par  $A_r$  :  $\vec{F}_r = -\langle E_r \rangle S_r \vec{n}_r$
- La force  $\vec{F}_t$  exercée par  $A_t$  :  $\vec{F}_t = -\langle E_t \rangle S_t \vec{n}_t$
- La force  $\vec{F}_O$  exercée par  $O$  :  $\vec{F}_O = -NS_O \vec{x} - TS_O \vec{y}$

$S_j$  étant la surface du plan  $j$  contenue dans le faisceau acoustique.

$$\vec{F}_E + \vec{F}_r + \vec{F}_t + \vec{F}_O = \vec{0} \quad (2.147)$$

donc en projetant sur les axes  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$  :

$$\begin{pmatrix} -NS_O \\ -TS_O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\langle E_i \rangle S_i \cos(\theta_i) - \langle E_r \rangle S_r \cos(\theta_r) + \langle E_t \rangle S_t \cos(\theta_t) \\ -\langle E_i \rangle S_i \sin(\theta_i) - \langle E_r \rangle S_r \sin(\theta_r) + \langle E_t \rangle S_t \sin(\theta_t) \end{pmatrix} \quad (2.148)$$

Or,  $S_i = S_r$  et  $S_O = \frac{S_i}{\cos \theta_i} = \frac{S_t}{\cos \theta_t}$ .

Par conséquent,

$$S_i = S_r = S_O \cos \theta_i \quad (2.149)$$

et

$$S_t = S_O \cos \theta_t \quad (2.150)$$

On note  $\mathcal{R}(\theta_i)$  et  $\mathcal{T}(\theta_i)$  les coefficients de réflexion et de transmission en intensité de l'obstacle, à l'angle  $\theta_i$ . Les grandeurs  $\langle E^i \rangle$ ,  $\langle E^r \rangle$  et  $\langle E^t \rangle$  désignant respectivement les densités volumiques d'énergie incidente, réfléchie et transmise, elles sont reliées par les relations

$$\langle E^r \rangle = \mathcal{R}(\theta_i) \langle E^i \rangle \quad (2.151)$$

$$\langle E^t \rangle = \frac{c_i}{c_t} \mathcal{T}(\theta_i) \langle E^i \rangle \quad (2.152)$$

$c_i$  et  $c_t$  désignant la vitesse du son respectivement dans le milieu en amont et en aval de l'interface (équations 2.58 et 2.62).

Par ailleurs,  $\theta_r = -\theta_i$ . Le système précédent devient alors :

$$\begin{pmatrix} -NS_O \\ -TS_O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\langle E_i \rangle S_O \cos^2 \theta_i - \mathcal{R}(\theta_i) \langle E_i \rangle S_O \cos^2 \theta_i + \frac{c_i}{c_t} \mathcal{T}(\theta_i) \langle E_i \rangle S_O \cos^2 \theta_t \\ -\langle E_i \rangle S_O \frac{\sin(2\theta_i)}{2} + \mathcal{R}(\theta_i) \langle E_i \rangle S_O \frac{\sin(2\theta_i)}{2} + \frac{c_i}{c_t} \mathcal{T}(\theta_i) \langle E_i \rangle S_O \frac{\sin(2\theta_t)}{2} \end{pmatrix} \quad (2.153)$$

La force totale par unité de surface exercée par les trois ondes sur l'obstacle  $O$  vaut par conséquent, dans le repère  $(\vec{x}, \vec{y})$  :

$$\begin{pmatrix} N \\ T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle E_i \rangle \cos^2 \theta_i + \mathcal{R}(\theta_i) \langle E_i \rangle \cos^2 \theta_i - \frac{c_i}{c_t} \mathcal{T}(\theta_i) \langle E_i \rangle \cos^2 \theta_t \\ \langle E_i \rangle \frac{\sin(2\theta_i)}{2} - \mathcal{R}(\theta_i) \langle E_i \rangle \frac{\sin(2\theta_i)}{2} - \frac{c_i}{c_t} \mathcal{T}(\theta_i) \langle E_i \rangle \frac{\sin(2\theta_t)}{2} \end{pmatrix} \quad (2.154)$$

Cette force a deux composantes : une composante de cisaillement  $T$  et une composante normale  $N$ . La composante de cisaillement est nulle si l'onde arrive en incidence normale sur l'interface ( $\theta_i = \theta_t = 0$ ) ou s'il y a réflexion totale ( $\mathcal{R}(\theta_i) = 1, \mathcal{T}(\theta_i) = 0$ ). Dans le cas de l'incidence normale, on retrouve le résultat obtenu précédemment : l'obstacle est soumis à une force qui lui est normale et dont la valeur par unité de surface vaut  $\langle E_1 \rangle - \langle E_2 \rangle$ ,  $E_1$  et  $E_2$  étant les énergies volumiques des ondes acoustiques se trouvant dans les milieux amont et aval de l'obstacle.

## 2.4 Le streaming acoustique

Tous les calculs qui précèdent ont été réalisés dans le cas d'un fluide non visqueux. Un fluide réel, c'est-à-dire de viscosité de cisaillement et de dilatation non nulles, obéit à l'équation de Navier-Stokes :

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \right) = -\vec{\nabla} p + \left( \mu' + \frac{1}{3} \mu \right) \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) + \mu \vec{\Delta} \vec{u} \quad (2.155)$$

$\mu$  et  $\mu'$  étant respectivement la viscosité de cisaillement et la viscosité de dilatation du fluide [13].

Un effet de volume d'une onde acoustique sur un fluide visqueux est le streaming acoustique. Il s'agit d'un écoulement permanent induit dans un fluide par une onde acoustique lorsque cette onde subit une atténuation. Cet écoulement exerce sur l'interface fluide des efforts de l'ordre de  $(\mu + \mu') \frac{u_s}{a}$ ,  $u_s$  désignant la vitesse associée à l'écoulement de streaming et  $a$  la longueur caractéristique de variation de cette vitesse, de l'ordre du rayon du faisceau acoustique. Cela entraîne une déformation parasite de l'interface qui se superpose à

la déformation de l'interface par la pression de radiation acoustique. Il est donc nécessaire que les efforts liés au streaming acoustique soient très petits devant la pression de radiation  $\Pi$  :

$$r = \frac{\Pi}{(\mu + \mu') \frac{u_s}{a}} \gg 1 \quad (2.156)$$

Le calcul suivant, qui explique comment ce phénomène apparaît, est dû à Wesley L. Nyborg [14].

Le fluide obéit à l'équation de conservation de la masse 2.4 et à l'équation de Navier-Stokes 2.155. Or,

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \frac{\partial \rho \vec{u}}{\partial t} - \vec{u} \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (2.157)$$

soit, d'après 2.4 :

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \frac{\partial \rho \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) \quad (2.158)$$

L'équation de Navier-Stokes peut donc s'écrire :

$$\frac{\partial \rho \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) + \rho (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = -\vec{\nabla} p + \left( \mu' + \frac{1}{3} \mu \right) \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) + \mu \vec{\Delta} \vec{u} \quad (2.159)$$

Des expressions à l'ordre 1 en  $\left| \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \right|$  de l'équation de conservation de la masse 2.7 et de l'équation de Navier-Stokes

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{u}_1}{\partial t} = -\vec{\nabla} p_1 + \left( \mu' + \frac{1}{3} \mu \right) \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_1) + \mu \vec{\Delta} \vec{u}_1 \quad (2.160)$$

on peut déduire le coefficient  $\alpha$  d'absorption par dissipation visqueuse d'une onde acoustique sinusoïdale de pulsation  $\omega$  (dans le cas d'un liquide comme l'eau, on peut négliger l'absorption par diffusion thermique devant l'absorption par dissipation visqueuse) [1] :

$$\alpha = \frac{\omega^2}{2\rho_0 c^3} \left( \frac{4}{3} \mu + \mu' \right) \quad (2.161)$$

Écrivons l'équation de Navier-Stokes à l'ordre 2 :

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{u}_2}{\partial t} + \frac{\partial \rho_1 \vec{u}_1}{\partial t} + \vec{u}_1 \vec{\nabla} \cdot (\rho_0 \vec{u}_1) + \rho_0 (\vec{u}_1 \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_1 = -\vec{\nabla} p_2 + \left( \mu' + \frac{1}{3} \mu \right) \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_2) + \mu \vec{\Delta} \vec{u}_2 \quad (2.162)$$

À l'ordre 1, l'onde acoustique est sinusoïdale et de pulsation  $\omega$ . Alors les solutions des équations d'ordre 2 contiennent des termes constants (de pulsation nulle) et des termes sinusoïdaux de pulsation  $2\omega$ . Ce sont les termes constants qui nous intéressent ici, le streaming étant un écoulement permanent. On moyenne donc sur le temps l'équation de Navier-Stokes à l'ordre 2 :

$$\left\langle \vec{u}_1 \vec{\nabla} \cdot (\rho_0 \vec{u}_1) + \rho_0 (\vec{u}_1 \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_1 \right\rangle = \left\langle -\vec{\nabla} p_2 + \left( \mu' + \frac{1}{3} \mu \right) \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_2) + \mu \vec{\Delta} \vec{u}_2 \right\rangle \quad (2.163)$$

La composante constante de  $\vec{u}_2$  n'est autre que la vitesse  $\vec{u}_s$  associée au streaming. Notons également  $p_s$  la composante constante de  $p_2$ . On suppose que l'écoulement permanent induit par l'onde acoustique est incompressible, et par conséquent  $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_s = 0$  :

$$\left\langle \vec{u}_1 \vec{\nabla} \cdot (\rho_0 \vec{u}_1) + \rho_0 (\vec{u}_1 \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_1 \right\rangle = -\vec{\nabla} p_s + \mu \vec{\Delta} \vec{u}_s \quad (2.164)$$

Cette équation est en réalité exactement similaire à l'équation linéarisée qui gouverne l'écoulement permanent et incompressible d'un fluide visqueux sous l'action d'un champ de forces extérieur  $\vec{F}_e$ , en l'absence d'onde acoustique :

$$\vec{0} = \vec{F}_e - \vec{\nabla}p + \mu\vec{\Delta}\vec{u} \quad (2.165)$$

C'est la quantité  $\vec{F}_e = -\langle \vec{u}_1 \vec{\nabla} \cdot (\rho_0 \vec{u}_1) + \rho_0 (\vec{u}_1 \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_1 \rangle$  qui joue ici le rôle de la force extérieure. Le fait d'avoir linéarisé l'équation implique que le raisonnement qui précède n'est valable que lorsque l'écoulement de streaming acoustique se fait à petit nombre de Reynolds, c'est-à-dire lorsque la source sonore est relativement peu puissante [15]. Typiquement, dans l'eau, ce raisonnement est valable tant que la vitesse du streaming ne dépasse pas quelques mm/s.

Une solution générale de l'équation 2.165 en un point d'observation  $(x, y, z)$  est donnée par l'équation

$$\vec{u} = \frac{1}{8\pi\mu} \int \left( \frac{\vec{F}_e}{r} + \frac{(\vec{F}_e \cdot \vec{r})}{r^3} \vec{r} \right) dv \quad (2.166)$$

$\vec{F}_e$  étant la force appliquée en  $(x', y', z')$ , localisation de l'élément de volume  $dv$  et  $\vec{r}$  étant le vecteur position du point d'observation par rapport à cet élément de volume [15] [16].

Supposons que cette force soit appliquée de façon uniforme dans un volume de fluide qui ait la forme d'un disque de rayon  $a$  et d'épaisseur  $\epsilon$ , centré sur l'origine  $O$  du repère, et qu'elle soit dirigée suivant l'axe  $x$  (figure 2.11).



FIG. 2.11 – Vitesse créée au sein d'un fluide par une force appliquée de façon uniforme sur un élément de volume cylindrique de rayon  $a$  et d'épaisseur  $\epsilon$

Alors la vitesse  $\vec{u}$  du fluide en un point  $M$  situé sur l'axe  $x$  et d'abscisse  $x$  vaut [14]

$$\vec{u} = \frac{\epsilon F_e a^2}{4\mu\sqrt{a^2 + x^2}} \vec{x} \quad (2.167)$$

Nous allons appliquer ce résultat à un faisceau acoustique convergent, en calculant la vitesse induite par l'onde acoustique au foyer de ce faisceau. Pour ce faire, nous allons modéliser le faisceau par un cylindre dont la longueur  $L$  est la longueur de la tache focale et le rayon  $a$  est le rayon du faisceau au niveau du point focal (figure 2.12). Le diamètre du faisceau est très petit devant la taille du récipient contenant le fluide.

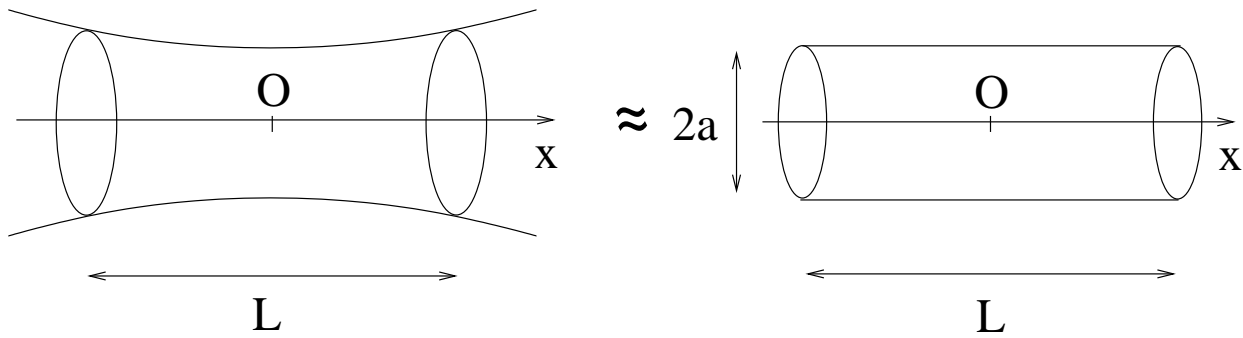


FIG. 2.12 – À gauche : faisceau acoustique focalisé. À droite : on modélise le faisceau par un cylindre dont la longueur est la longueur  $L$  de la tache focale et dont le rayon est le rayon  $a$  du faisceau au point focal.

Considérons le champ acoustique d'une onde plane se propageant dans la direction  $x$ . À l'ordre 1, la vitesse des particules peut alors s'écrire :

$$\vec{u}_1 = u_{10} e^{-(\alpha+ik)x} e^{i\omega t} \vec{x} \quad (2.168)$$

$u_{10}$  étant l'amplitude de vitesse en  $x = 0$  et  $\alpha$  le coefficient d'amortissement de l'onde. Alors en remplaçant dans l'équation 2.164, la force  $\vec{F}_e$  induite sur le fluide par l'onde acoustique vaut

$$\vec{F}_e = - \left\langle \vec{u}_1 \vec{\nabla} \cdot (\rho_0 \vec{u}_1) + \rho_0 \left( \vec{u}_1 \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{u}_1 \right\rangle \quad (2.169)$$

$$= \rho_0 \alpha u_{10}^2 e^{-2\alpha x} \vec{x} \quad (2.170)$$

La vitesse induite en un point  $M$  d'abscisse  $x_0$  par un disque élémentaire du faisceau d'abscisse  $x$  et d'épaisseur  $dx$  vaut, en appliquant la formule 2.167 :

$$d\vec{u}_s = \frac{\rho_0 \alpha u_{10}^2 a^2}{4\mu} \frac{e^{-2\alpha x}}{\sqrt{a^2 + (x_0 - x)^2}} dx \vec{x} \quad (2.171)$$

La vitesse induite au point  $O$  d'abscisse 0 par le faisceau acoustique vaut donc

$$\vec{u}_s = \frac{\rho_0 \alpha u_{10}^2 a^2}{4\mu} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{e^{-2\alpha x}}{\sqrt{a^2 + x^2}} dx \vec{x} \quad (2.172)$$

Si l'on suppose que l'absorption de l'onde est faible, c'est-à-dire que  $\alpha \ll 1/L$ , alors

$$\vec{u}_s = \frac{\rho_0 \alpha u_{10}^2 a^2}{4\mu} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}} dx \vec{x} \quad (2.173)$$

soit

$$\vec{u}_s = \frac{\rho_0 \alpha u_{10}^2 a^2}{4\mu} \ln \left( \frac{\sqrt{4a^2 + L^2} + L}{\sqrt{4a^2 + L^2} - L} \right) \vec{x} \quad (2.174)$$

En remplaçant  $\alpha$  par son expression 2.161, on obtient

$$\vec{u}_s = \frac{\omega^2}{2c^3} \left( \frac{1}{3} + \frac{\mu'}{4\mu} \right) u_{10}^2 a^2 \ln \left( \frac{\sqrt{4a^2 + L^2} + L}{\sqrt{4a^2 + L^2} - L} \right) \vec{x} \quad (2.175)$$



On a donc démontré qu'un faisceau acoustique convergent subissant une absorption induisait une vitesse constante d'ordre 2 du fluide à son point focal. Cette vitesse est proportionnelle au carré de l'amplitude  $u_{10}$  de l'onde acoustique, et est proportionnelle au coefficient d'absorption  $\alpha$  de l'onde lors de sa propagation.

L. N. Liebermann a fait des expériences pour visualiser ce streaming acoustique en plaçant de petites particules d'aluminium dans l'eau et en visualisant leur trajectoire [13]. Une photo de son expérience, schématisée sur la figure 2.13, est représentée sur la figure 2.14.

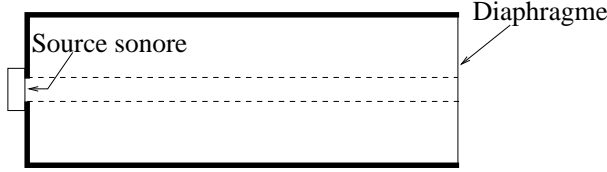


FIG. 2.13 – Schéma de l'expérience de Liebermann : le liquide est contenu dans un cylindre de verre. Le faisceau acoustique est cylindrique et est transmis sans réflexion au niveau du diaphragme.

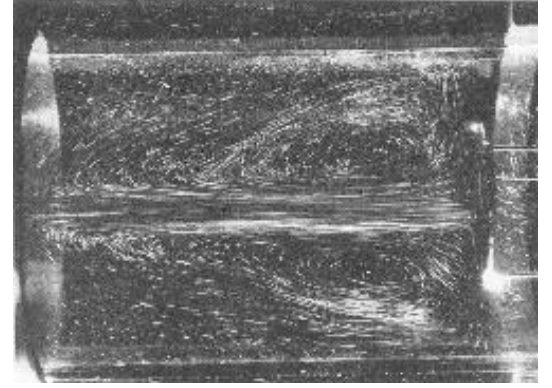


FIG. 2.14 – Écoulement de streaming induit par une onde acoustique dans de l'eau, visualisé grâce à de petites particules d'aluminium [13].

La condition pour qu'on puisse négliger les effets sur l'interface entre deux fluides du streaming devant ceux de la pression de radiation est donnée par l'expression 2.156, qui traduit le fait que les efforts exercés sur l'interface par la pression de radiation doivent être très supérieurs à ceux exercés par l'écoulement de streaming. Calculons le rapport  $r_i$  (respectivement  $r_t$ ), qui compare les efforts exercés par la pression de radiation à ceux exercés par le streaming dans le fluide où se trouve le faisceau incident (respectivement le faisceau transmis). En remplaçant dans l'expression 2.156 la vitesse du streaming par l'expression 2.175 et la pression de radiation par l'expression 2.154, on obtient

$$r_{i/t} = \frac{\langle E_i \rangle + \mathcal{R} \langle E_i \rangle - \frac{c_i}{c_t} \mathcal{T} \langle E_i \rangle}{\left( \mu_{i/t} + \mu'_{i/t} \right) \frac{\omega^2}{2c_{i/t}^3} \left( \frac{1}{3} + \frac{\mu'_{i/t}}{4\mu_{i/t}} \right) u_{10}^2 a \ln \left( \frac{\sqrt{4a^2 + L^2} + L}{\sqrt{4a^2 + L^2} - L} \right)} \quad (2.176)$$

$$= \frac{p_{10}^2}{2\rho_i c_i^2} \frac{1 + \left( \frac{\rho_i c_i - \rho_t c_t}{\rho_i c_i + \rho_t c_t} \right)^2 - \frac{4\rho_i \rho_t c_i^2}{(\rho_i c_i + \rho_t c_t)^2}}{\left( \mu_{i/t} + \mu'_{i/t} \right) \frac{\omega^2}{2c_{i/t}^3} \left( \frac{1}{3} + \frac{\mu'_{i/t}}{4\mu_{i/t}} \right) u_{10}^2 a \ln \left( \frac{\sqrt{4a^2 + L^2} + L}{\sqrt{4a^2 + L^2} - L} \right)} \quad (2.177)$$

$$= \frac{(\rho_i c_i u_{10})^2}{\rho_i c_i^2} \frac{\frac{\rho_i^2 c_i^2 + \rho_t^2 c_t^2 - 2\rho_i \rho_t c_i^2}{(\rho_i c_i + \rho_t c_t)^2}}{\left( \mu_{i/t} + \mu'_{i/t} \right) \frac{\omega^2}{2c_{i/t}^3} \left( \frac{1}{3} + \frac{\mu'_{i/t}}{4\mu_{i/t}} \right) u_{10}^2 a \ln \left( \frac{\sqrt{4a^2 + L^2} + L}{\sqrt{4a^2 + L^2} - L} \right)} \quad (2.178)$$

$$= \rho_i \frac{\frac{\rho_i^2 c_i^2 + \rho_t^2 c_t^2 - 2\rho_i \rho_t c_i^2}{(\rho_i c_i + \rho_t c_t)^2}}{\left( \mu_{i/t} + \mu'_{i/t} \right) \frac{\omega^2}{2c_{i/t}^3} \left( \frac{1}{3} + \frac{\mu'_{i/t}}{4\mu_{i/t}} \right) a \ln \left( \frac{\sqrt{4a^2 + L^2} + L}{\sqrt{4a^2 + L^2} - L} \right)} \quad (2.179)$$

On déduit de cette expression que ce rapport ne dépend pas de l'amplitude de l'onde

acoustique : on ne peut par conséquent pas espérer diminuer l'importance relative du streaming par rapport à la pression de radiation en modifiant l'amplitude de l'onde. Si les effets du streaming sont trop importants, il faut trouver un autre couple de fluides qui minimise ce rapport  $r$ .

Le tableau suivant indique les rapports  $r_i$  et  $r_t$  pour trois interfaces que nous avons beaucoup utilisées lors de cette thèse (l'interface eau-air, l'interface eau-chloroforme et l'interface eau-DC704, l'huile DC704 étant une huile silicone). La tache focale du faisceau acoustique considéré a un rayon  $a = 300 \mu\text{m}$  et une longueur  $L = 4 \text{ mm}$  au total, soit 2 mm dans chaque fluide, le faisceau étant focalisé sur l'interface. L'onde acoustique a une fréquence  $f = 2,25 \text{ MHz}$ . Ces valeurs correspondent à celles que nous avons utilisé le plus souvent dans les expériences et sont dictées par les caractéristiques des émetteurs que nous utilisons. L'amplitude de l'onde acoustique utilisée pour calculer la vitesse de streaming dans chaque fluide est  $p_{10} = 10 \text{ bars}$ , ce qui correspond en ordre de grandeur aux valeurs que nous utilisons lors des expériences.

Fluide i	Eau	Eau	Eau
Fluide t	Air	Chloroforme	DC704
$\rho_i$ (kg/m <sup>3</sup> )	1000	1000	1000
$\rho_t$ (kg/m <sup>3</sup> )	1,2	1500	1070
$c_i$ (m/s)	1500	1500	1500
$c_t$ (m/s)	340	1000	1400
$\mu_i$ (Pa.s)	$1.10^{-3}$	$1.10^{-3}$	$1.10^{-3}$
$\mu_t$ (Pa.s)	$2.10^{-5}$	$5,6.10^{-4}$	$4.10^{-2}$
$\mu'_i$ (Pa.s)	$2,4.10^{-3}$	$2,4.10^{-3}$	$2,4.10^{-3}$
$\mu'_t$ (Pa.s)	0	$1,3.10^{-2}$	0,4
$u_{si}$ (mm/s)	4	4	4
$u_{st}$ (mm/s)	520	97	16
$r_i$	$9.10^3$	$2.10^3$	330
$r_t$	$1.10^4$	25	0,7

De ces résultats, on déduit que les efforts que les écoulements de streaming exercent sur l'interface fluide sont bien négligeables devant la pression de radiation pour les interfaces eau-air et eau-chloroforme,  $r_i$  et  $r_t$  étant grands devant 1 (ce qui signifie que la pression de radiation est grande devant les efforts du streaming). En revanche, en ce qui concerne l'interface eau-DC704, les efforts que le streaming dans l'huile DC704 exerce sur l'interface sont du même ordre de grandeur que la pression de radiation acoustique. Nous verrons dans le chapitre 5 qu'effectivement, le streaming nous a énormément gênés dans l'étude de cette interface.

## Conclusion

Nous avons montré dans ce chapitre qu'une onde acoustique arrivant en incidence normale sur un obstacle plan (par exemple une interface fluide) exerçait dessus une pression de radiation égale à la différence des pressions acoustiques lagrangiennes moyennes de chaque côté de l'obstacle. Dans le cas de Langevin (où l'onde n'est pas confiné spatialement), qui est le cas que j'ai étudié tout au long de cette thèse, cette pression de radiation est égale à la différence des énergies acoustiques volumiques de part et d'autre de l'obstacle. Les

efforts que l'onde exerce sur l'obstacle dépendent de l'angle d'incidence de l'onde. En particulier, en incidence oblique, l'onde exerce aussi une force de cisaillement sur l'obstacle. Dans toute la suite de cette thèse, nous considérons que l'onde arrive en incidence normale sur l'interface fluide que nous étudions. Enfin, nous avons montré qu'une onde acoustique de forte intensité induisait dans le fluide un écoulement permanent de streaming, qui lui aussi exerce des efforts sur l'interface. Le rapport entre ces efforts et la pression de radiation acoustique ne dépend pas de l'intensité de l'onde acoustique, mais du couple de fluides utilisés, en particulier de leur viscosité, de leur vitesse du son et de leur masse volumique.

## Références du chapitre 2

- [1] L. E. Kinsler, A. R. Frey, A. B. Coppens, et J. V. Sanders. *Fundamentals of Acoustics*, chapter 8, pages 210–218. John Wiley & Sons, Inc, 2000.
- [2] F. E. Borgnis. Acoustic Radiation Pressure of Plane Compressional Waves. *Rev. Mod. Phys.*, 25(3) :653–664, 1953.
- [3] C. P. Lee et T. G. Wang. Acoustic radiation pressure. *J. Acoust. Soc. Am.*, 94(2) :1099–1109, 1993.
- [4] P. Biquard. Les ondes ultra-sonores. *Revue d'Acoustique*, 1 :93–109, 1932.
- [5] K. Beissner. Two concepts of acoustic radiation pressure. *J. Acoust. Soc. Am.*, 79(5) :1610–1612, 1986.
- [6] P. Biquard. Les ondes ultra-sonores, II. *Revue d'Acoustique*, 1 :315–335, 1932.
- [7] R. T. Beyer. The Parameter B/A. In *Nonlinear Acoustics*, chapter 2, pages 25–39. Academic Press, 1998.
- [8] G. R. Torr. The acoustic radiation force. *Am. J. Phys.*, 52(5) :402–408, 1984.
- [9] M. Mathiot. Étude expérimentale du terme isotrope de la tension de radiation acoustique dans un gaz. *Ann. Phys. t. 1*, pages 235–269, 1966.
- [10] L. Brillouin. Sur les tensions de radiation. *Annales de Physique (Paris)*, 4 :528–586, 1925.
- [11] E. M. J. Herrey. Experimental studies on acoustic radiation pressure. *J. Acoust. Soc. Am.*, 27(5) :891–896, 1955.
- [12] F. E. Borgnis. Acoustic Radiation Pressure of Plane-Compressional Waves at Oblique Incidence. *J. Acoust. Soc. Am.*, 24(5) :468–469, 1952.
- [13] L. N. Liebermann. The Second Viscosity of Liquids. *Physical Review*, 75(4) :1415–1422, 1949.
- [14] W. L. Nyborg. Acoustic Streaming. In *Nonlinear Acoustics*, chapter 7, pages 207–231. Academic Press, 1998.
- [15] Sir James Lighthill. Acoustic streaming. *Journal of Sound and Vibration*, 61(3) :391–418, 1978.
- [16] J. Happel et H. Brenner. *Low Reynolds number hydrodynamics, with special applications to particulate media*, chapter 3.4, pages 79–85. Kluwer Academic Publishers, 1991.



## Chapitre 3

# Dispositif expérimental, observations générales et modélisation statique

Dans ce chapitre, je présente le principe de base des expériences réalisées lors de cette thèse et les principales caractéristiques des montages et du matériel utilisé. J'expose également les observations de base indispensables à la compréhension des expériences, et je présente une théorie permettant de décrire la déformation d'interfaces par la pression de radiation acoustique.

### 3.1 Principe de l'expérience

Le montage que j'ai utilisé pendant ma thèse repose sur le principe représenté sur la figure 3.1. Le but de l'expérience est d'étudier la déformation de l'interface entre deux

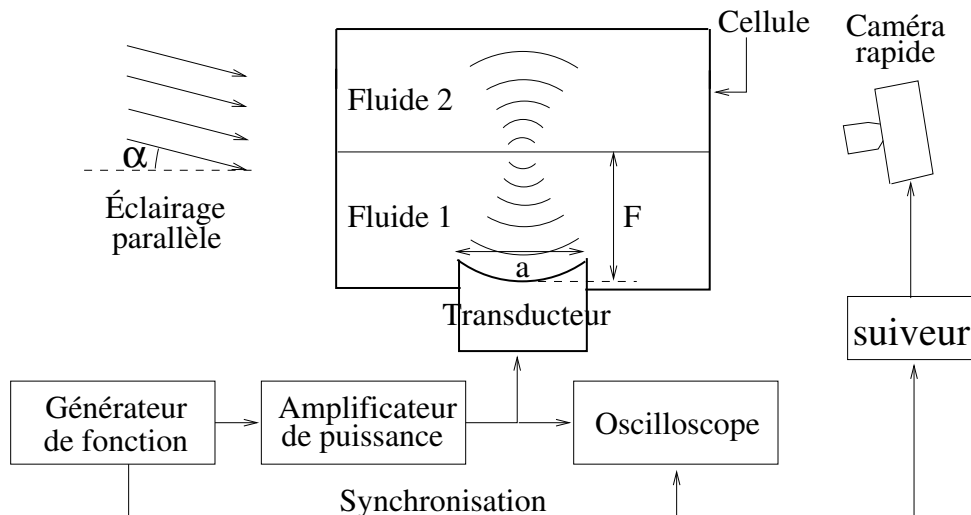


FIG. 3.1 – Montage de base des expériences

fluides par la pression de radiation acoustique. Un transducteur électroacoustique émet une onde acoustique focalisée sur l'interface et une caméra rapide permet de filmer les déformations de l'interface pendant l'émission de l'onde.

### 3.1.1 L'émetteur acoustique

L'émetteur acoustique utilisé est un transducteur électroacoustique *Imasonic* sphérique, qui émet un faisceau ultrasonore focalisé, schématisé sur la figure 3.2. Il est constitué d'une céramique piézoélectrique, qui oscille mécaniquement lorsqu'elle est soumise à une différence de potentiel électrique oscillante, ce qui permet d'émettre des ondes acoustiques lorsqu'un liquide est au contact de l'émetteur. En réalité, il ne s'agit pas d'une simple plaque de céramique piézoélectrique. En effet, si on utilisait une plaque de céramique, les ondes de surface le long de la surface émettrice émettraient des ondes acoustiques parasites dans le fluide. Pour supprimer ces vibrations latérales, la surface du transducteur est en réalité composée de petits bâtonnets piézoélectriques, orthogonaux à la surface du transducteur et coulés dans une matrice de polymère [1] (figure 3.3).

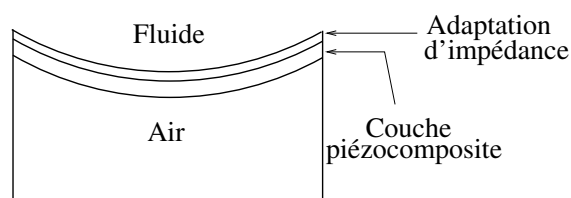


FIG. 3.2 – Schéma du transducteur : la couche piézocomposite émet une onde acoustique radiale, la couche d'air au dos de cette couche piézocomposite empêche l'émission d'ultrasons vers l'intérieur du transducteur. À l'avant se trouve une couche d'adaptation d'impédance qui optimise l'émission des ultrasons dans un fluide de même impédance acoustique que l'eau à la fréquence de résonance de l'émetteur, soit 2,25 MHz.

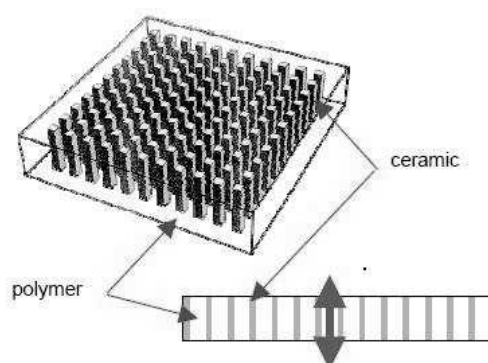


FIG. 3.3 – Schéma de la couche émettrice du transducteur : de petits bâtonnets piézoélectriques oscillent dans le sens de leur longueur sous l'action d'un potentiel électrique oscillant, chacun émettant une onde acoustique dans la direction de sa longueur. Les bâtonnets sont séparés par une matrice de polymère, ce qui limite la génération d'ondes de surface le long de la surface émettrice [1].

Au dos de la couche émettrice se trouve de l'air, qui, du fait de sa très faible impédance acoustique par rapport à celle de la couche piézocomposite, empêche l'émission d'ultrasons vers l'intérieur du transducteur : en effet, l'onde acoustique émise vers l'intérieur du transducteur est totalement réfléchi au niveau de l'interface couche piézocomposite-air. À l'avant se trouve une couche d'adaptation d'impédance, qui est adaptée à l'eau : elle permet à l'onde acoustique émise au niveau de la couche piézoélectrique d'être totalement transmise dans le fluide si celui-ci est de même impédance acoustique que l'eau.

Il faut faire attention lorsqu'on plonge ce transducteur dans un fluide, et s'assurer au préalable que le fluide n'attaque pas la couche d'adaptation d'impédance et la couche piézocomposite. Nous avons eu ce problème lorsque nous avons voulu utiliser du chloroforme : il a fallu protéger la surface du transducteur à l'aide d'une fine couche de téflon en spray.

La distance focale  $F$  du transducteur est égale au diamètre  $a$  de sa surface émettrice :  $F = a = 38$  mm. D'après le constructeur, le transducteur ne peut émettre d'onde acous-

tique pendant plus de 5 s d'affilée ni pendant plus de 20% du temps. Effectivement, lors de mauvaises manipulations, il nous est arrivé de détériorer des transducteurs. En effet, pendant certaines expériences, le générateur de signaux émettait un signal carré modulé en amplitude à partir d'un signal de modulation émis par un GBF analogique. Ce signal de modulation valait 5 V pendant 20 % du temps et était nul le reste du temps. Cependant, il arrivait que ce GBF analogique se dérègle légèrement de sorte que le signal qu'il émettait n'était plus tout à fait nul lorsqu'il était supposé l'être. Le transducteur émettait alors en continu une onde acoustique, et nous avons détruit un transducteur de cette façon.

Ces transducteurs sont utilisés en médecine pour casser les calculs rénaux. Ils sont donc conçus pour émettre des ondes acoustiques de grande amplitude : on peut les alimenter à l'aide d'un signal électrique d'amplitude 50 V et de puissance 80 W (le transducteur ayant une impédance d'entrée typique de  $(20 - 5j)\Omega$ ) et ils émettent alors une onde acoustique, dont l'amplitude au point focal est de l'ordre de la dizaine de MPa, donc de la centaine de bars. Dans nos expériences, nous utilisons des ondes acoustiques dont l'amplitude au point focal était située entre 1 bar et 30 bar.

On place le transducteur au fond ou en haut de la cellule, de façon à ce que le faisceau émis soit vertical. Ensuite, deux fluides non miscibles sont introduits dans la cellule, de sorte que l'interface qui les sépare soit située dans le plan focal du transducteur. On règle ce positionnement à l'aide du temps que met une impulsion acoustique, si elle est au moins partiellement réfléchi par l'interface, pour effectuer un aller-retour entre le transducteur et l'interface. On peut mesurer ce temps de vol à l'aide de l'oscilloscope, qui permet de visualiser le signal électrique envoyé par l'amplificateur au transducteur, ainsi que le signal que le transducteur génère dans le circuit électrique lorsque l'onde acoustique retour revient à sa surface (l'onde acoustique fait osciller la surface du transducteur, qui émet un signal électrique par effet piézoélectrique).

La fréquence de fonctionnement optimale du transducteur est de 2,25 MHz. Cependant, sa bande passante valant 600 kHz, cela nous a permis d'explorer une petite bande de fréquences autour de cette fréquence centrale dans certaines expériences. Dans la suite, sauf mention contraire, la fréquence  $f$  utilisée est 2,25 MHz. La longueur d'onde vaut alors, dans l'eau,  $\lambda = 660 \mu\text{m}$ .

La longueur de la tache focale du transducteur est de 4 mm, très supérieure à la longueur d'onde de l'onde acoustique, ce qui permet de considérer comme plane l'onde acoustique arrivant sur l'interface.

### 3.1.2 L'amplificateur de puissance

Le transducteur est alimenté par un amplificateur de puissance *Amplifier Research* 75A250, de bande passante 10 kHz-250 MHz, qui amplifie en puissance le signal émis par un générateur de fonction *Agilent* 33250A. Le gain en puissance de l'amplificateur, qui peut aller de 18 dB à 49 dB, peut être réglé manuellement grâce à un bouton de réglage situé sur l'amplificateur. Son impédance d'entrée et son impédance de sortie valent toutes deux  $50 \Omega$ .

### 3.1.3 Le générateur de fonction

Le générateur de fonction *Agilent* 33250A, que nous avons utilisé pendant toute cette thèse, permet de générer des signaux électriques périodiques de fréquence pouvant aller jusqu'à 80 MHz, et d'amplitude pouvant aller jusqu'à 10 V. Son impédance de sortie est

réglable, mais nous l'avons toujours réglée à  $50 \Omega$  afin de l'adapter en impédance avec l'amplificateur. Le signal de sortie peut être modulé, en amplitude ou en fréquence, à l'aide de fonctions prédéfinies, que nous pouvons programmer nous-mêmes, ou en suivant un signal électrique entrant sur la borne *Modulation in*. Par ailleurs, cet appareil possède une sortie de synchronisation, qui permet de régler le déclenchement d'autres appareils, comme l'oscilloscope ou la caméra rapide. Il possède également une entrée GPIB permettant de l'interfacer à l'aide de Labview.

### 3.1.4 L'oscilloscope

L'oscilloscope utilisé est un *Lecroy 9361*. Il possède deux voies d'entrée, ainsi qu'une entrée de synchronisation.

Son impédance d'entrée est réglable et peut prendre deux valeurs ( $50 \Omega$  et  $1 M\Omega$ ) suivant la mesure que l'on souhaite faire. Lorsqu'il était monté comme l'indique le montage 3.1, il était réglé sur  $1 M\Omega$ , afin de le protéger contre une surintensité en provenance de l'amplificateur. Il nous a également servi lors de la calibration du transducteur, pour mesurer la tension en sortie d'un capteur de pression placé dans le champ du transducteur. Dans ce cas, nous réglions l'impédance d'entrée de l'oscilloscope sur  $50 \Omega$ , les capteurs de pression ayant été calibrés grâce à une chaîne de mesure d'impédance  $50 \Omega$ .

L'oscilloscope possède aussi des fonctions mathématiques qui lui permettent de moyenniser dans le temps le signal d'entrée, ou encore de tracer sa transformée de Fourier. Il possède une entrée GPIB permettant de l'interfacer à l'aide de Labview.

### 3.1.5 La caméra et l'éclairage

L'interface est éclairée en lumière blanche par un éclairage rasant, et est filmée par une caméra CCD rapide *Redlake Imaging Motionmeter* pouvant prendre entre 50 et 1000 images par seconde. Elle possède une mémoire cyclique de 2048 images : elle mémorise 2048 images et à partir de la 2049<sup>e</sup>, elle efface la plus ancienne et la remplace par la plus récente. Elle possède une entrée de synchronisation : lorsqu'elle reçoit un signal TTL sur cette entrée, elle enregistre encore 2048 images, puis elle s'arrête d'enregistrer afin de ne pas écraser ces 2048 images. Cette entrée de synchronisation est branchée à la sortie de synchronisation du générateur de fonction. Ainsi, celui-ci contrôle la caméra afin qu'elle enregistre les images à partir du moment où il lui envoie un signal de synchronisation, ce qui correspond au début de l'expérience. Cette entrée de synchronisation de la caméra avait le défaut de perturber le circuit de synchronisation : si la caméra était directement branchée à la sortie de synchronisation du générateur de fonction, cela perturbait le déclenchement de l'oscilloscope. C'est pourquoi nous avons fait fabriquer par le service d'électronique du laboratoire un montage suiveur permettant d'isoler la caméra du reste du circuit de synchronisation.

Pour certaines expériences, en particulier sur l'interface eau-air, l'éclairage parallèle et la caméra étaient inclinés d'un angle  $\alpha \approx 5^\circ$  par rapport à l'horizontale. En effet, sur cette interface, toutes les déformations se formaient vers le haut et le ménisque présent sur les bords de la cellule aurait empêché de la voir sans ce petit angle. Pour ces expériences, nous utilisons une cellule de base rectangulaire ( $200 \times 80$  mm), que nous disposons dans le sens de la longueur afin d'être le moins gênés possible par le ménisque.

Après chaque expérience, nous étalonnions la caméra de la façon suivante (figure 3.4). La source  $S$  de lumière blanche, la lentille permettant d'obtenir un faisceau parallèle et



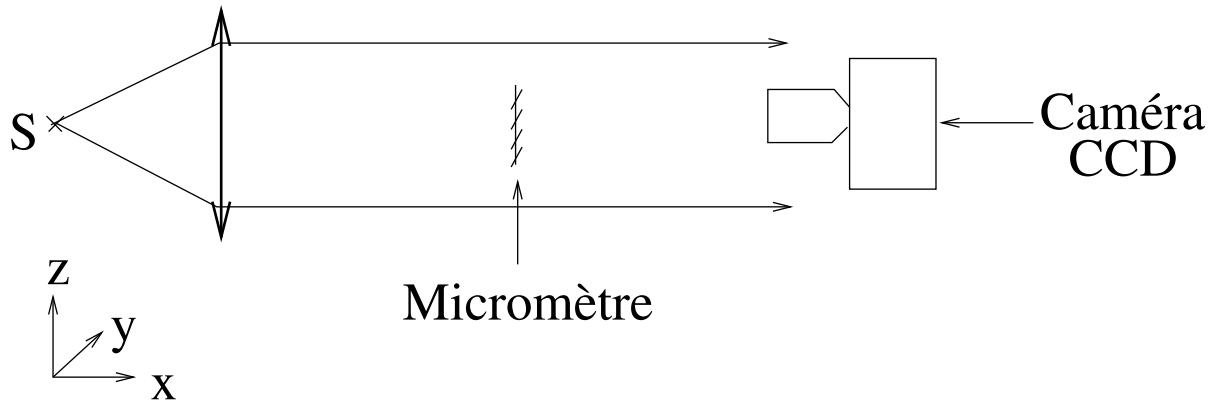


FIG. 3.4 – Montage utilisé pour l'étalonnage de la caméra.

la caméra étaient laissées en place après l'expérience de déformation d'interface, et leurs réglages, en particulier la mise au point de la caméra, n'étaient pas modifiés. Seule la cellule était enlevée, et remplacée par un micromètre gradué issu d'un oculaire de microscope. Ce micromètre était placé sur des platines microcontrôle, permettant de le déplacer précisément dans les directions  $x$ ,  $y$  et  $z$ . Nous le déplaçons en particulier le long de la direction  $x$  afin qu'il apparaisse net à la caméra. Il était alors placé à la même distance de la caméra que la déformation, et le grossissement par la caméra était alors le même que pendant les expériences. Il suffisait alors d'enregistrer l'image (figure 3.5), de mesurer avec

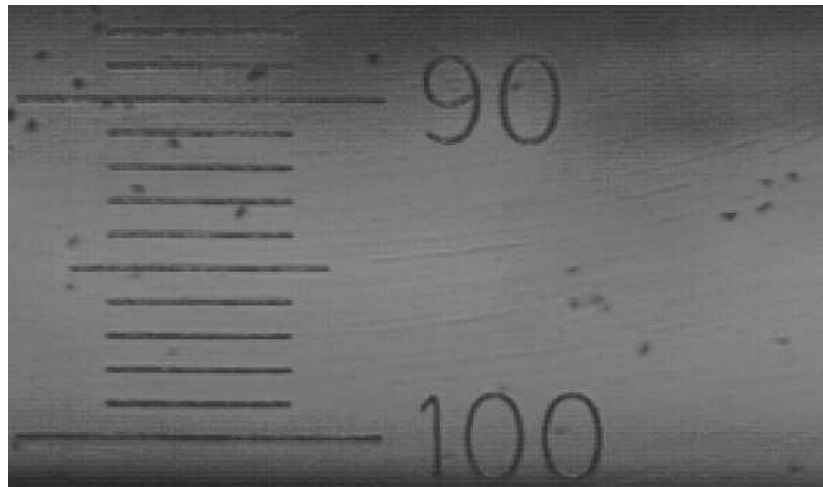


FIG. 3.5 – Photo du micromètre observé à la caméra, avec le grossissement utilisé dans une expérience de déformation d'interface.

le logiciel ImageJ l'écart (en pixels) entre deux traits du micromètre et de le diviser par leur distance réelle pour connaître le grossissement de la caméra en pixels par millimètre. Deux petits traits consécutifs sur les graduations du micromètre sont espacés de  $100\ \mu\text{m}$ .

Suivant les expériences, on pouvait modifier le grandissement de la caméra en rajoutant des bagues supplémentaires sur l'objectif (nous avons fait fabriquer trois bagues à l'atelier, qui pouvaient augmenter le tirage de l'objectif respectivement de 1, 2 et 4 cm. Elles étaient cumulables.)

### 3.1.6 Cavitation

Il faut noter que lors de mes expériences, l'amplitude de pression au point focal du transducteur est de l'ordre de 1 MPa, soit 10 bars. Autrement dit, la pression oscille avec une fréquence de 2,25 MHz entre 11 bars et  $-9$  bars. Cela signifie que l'eau a tendance à caviter lorsque la pression devient localement inférieure à la pression de vapeur saturante de l'eau : elle a localement tendance à se vaporiser et former des bulles. En utilisant des ondes de fréquence élevée, on évite ce phénomène, la cavitation n'ayant pas le temps de s'effectuer avant que la pression locale passe à nouveau au-dessus de la pression de vapeur saturante de l'eau. Une précaution supplémentaire pour éviter ce phénomène a consisté tout au long de ma thèse à dégazer l'eau avec une trompe à eau avant d'entamer les expériences.

### 3.1.7 Fluides utilisés

Les transducteurs que nous avons utilisés sont adaptés en impédance à l'eau. Ils ne peuvent donc émettre d'onde acoustique d'amplitude conséquente que dans des fluides d'impédance voisine de celle de l'eau. En effet, nous avons vu à la page 39 que lorsqu'une onde acoustique arrive à l'interface entre deux milieux, elle est totalement réfléchi par cette interface si ces deux milieux sont d'impédances acoustiques très différentes. Dans notre cas, si le transducteur est plongé dans un fluide d'impédance très différente à la sienne, l'onde qu'il émet n'est pas transmise dans le fluide et est totalement réfléchi vers l'intérieur du transducteur.

Pour l'eau :  $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$  et  $c = 1500 \text{ m/s}$ , donc  $Z_{eau} = 1,5 \text{ Mrayl}$ .

Pour l'air :  $\rho = 1,2 \text{ kg/m}^3$  et  $c = 340 \text{ m/s}$ , donc  $Z_{air} = 400 \text{ rayl}$ .

Aussi, le transducteur n'émet quasiment aucune onde acoustique dans l'air.

## 3.2 Caractérisation du transducteur

### 3.2.1 Montage

Kino [2] a calculé le champ de pression acoustique émis par un transducteur sphérique focalisé au niveau de son plan focal (figure 3.6). Il utilise le principe de Huygens-Fresnel pour démontrer que dans l'approximation paraxiale, le champ des potentiels de vitesse de l'onde acoustique de nombre d'onde  $k$  émise par le transducteur vaut

$$\phi(r, z) = -e^{-jk(z+r^2/2z)} \frac{u_0}{z} \int_0^a J_0\left(\frac{kr r'}{z}\right) e^{-(jkr'^2/2)(1/z-1/z_0)} r' dr' \quad (3.1)$$

$u_0$  étant la vitesse radiale de la surface du transducteur, considérée comme uniforme, et  $a$  le rayon de la surface émettrice du transducteur.

De là, il déduit que le champ de pression acoustique émise par le transducteur en son plan focal est un champ besselien qui s'écrit, dans le cas où  $a = z_0/2$  (ce qui était le cas des transducteurs que nous utilisions) :

$$p_{ac}(r) = 2 \frac{J_1\left(\frac{\pi r}{\lambda}\right)}{\frac{\pi r}{\lambda}} p_{ac}(r=0) \quad (3.2)$$

$\lambda$  étant la longueur d'onde de l'onde acoustique.

François Coulouvrat a publié un modèle numérique du champ émis par le transducteur sphérique, qui n'utilise pas l'approximation paraxiale. Ce modèle est donc plus précis que

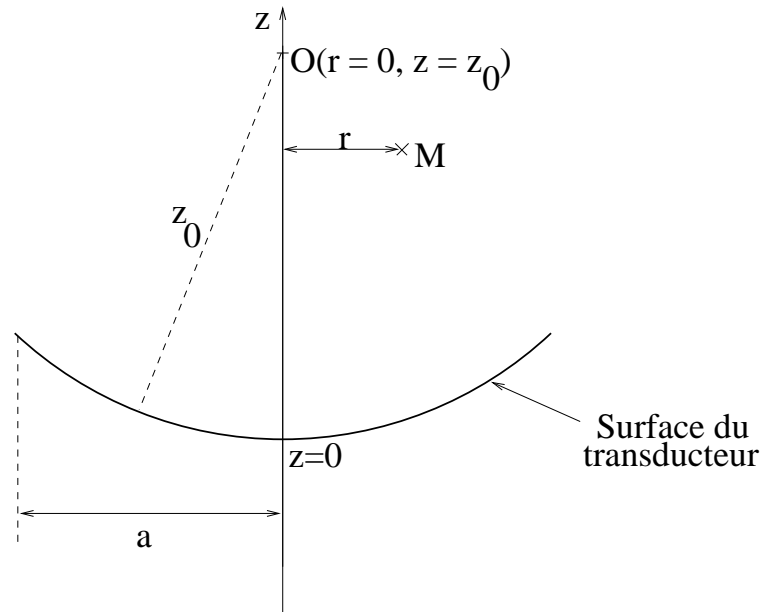


FIG. 3.6 – Transducteur sphérique centré en  $O$ , de rayon de courbure  $z_0$ . On note  $z$  la coordonnée le long de l'axe du transducteur, l'origine étant prise au sommet du transducteur, et  $r$  la distance à l'axe  $z$ .

celui de Kino. Cependant, sur le plan focal, le résultat est très proche de celui obtenu par Kino [3, 4].

Avec le dispositif représenté sur la figure 3.7, j'ai pu vérifier expérimentalement cette expression.

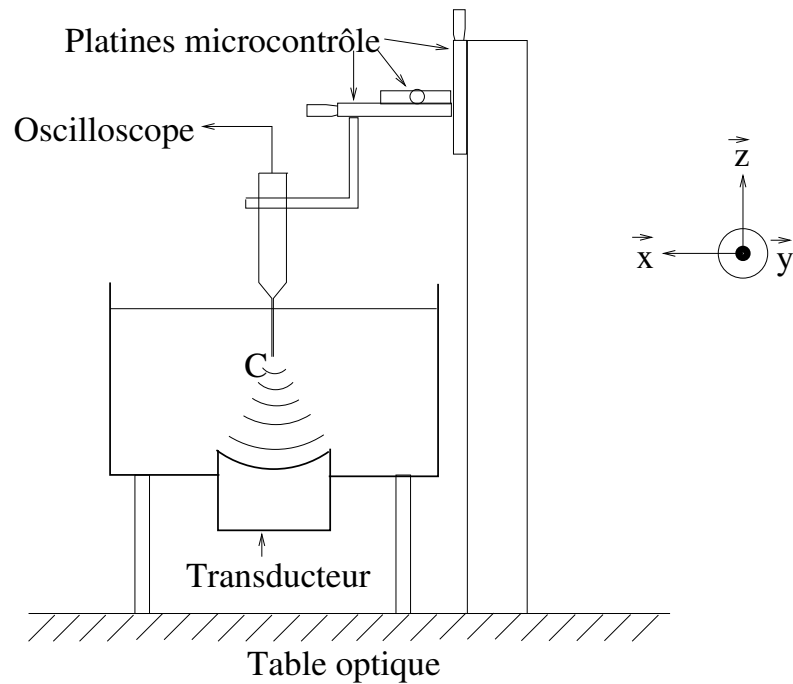


FIG. 3.7 – Dispositif utilisé pour cartographier le champ de pression du transducteur

Le transducteur émet une onde acoustique focalisée dans de l'eau. Pour cette expérience, la surface de l'eau est placée plusieurs cm au-dessus du point focal, de sorte que celui-ci se trouve à l'intérieur du volume d'eau. Un capteur de pression calibré  $C$  est déplacé dans l'eau autour du point focal du transducteur, grâce à trois platines microcontrôle dirigées suivant les axes  $\vec{x}$ ,  $\vec{y}$ ,  $\vec{z}$ . Plusieurs capteurs de pression (fabriqués par *Precision Acoustics*) de différentes tailles ont été utilisés.

Pour la calibration du transducteur, celui-ci était alimenté par 20 périodes d'un signal sinusoïdal de fréquence 2,25 MHz et d'amplitude pic-pic  $V$  toutes les 10 ms, le transducteur étant au repos le reste du temps. Le but est d'éviter que le train d'onde émis par le transducteur n'interfère avec le train d'onde réfléchi par l'interface eau-air, faussant la mesure de la pression mesurée par le capteur  $C$ .

Le signal de pression acoustique  $p_{ac}$  en fonction du temps  $t$  est visualisé grâce à l'oscilloscope. Il est représenté sur la figure 3.8.

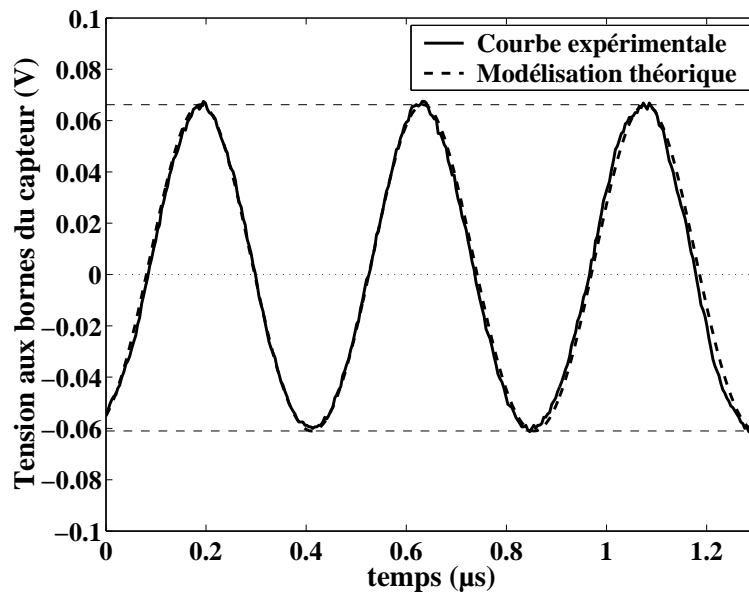


FIG. 3.8 – Signal de pression au point focal mesuré en fonction du temps pour une tension d'alimentation du transducteur  $V_{pp} = 12,7$  V.

On observe que ce signal est asymétrique : il est bien décrit par la somme d'un mode fondamental à la fréquence  $f = 2,25$  MHz et une harmonique de fréquence double due aux non-linéarités de propagation de l'onde acoustique, de telle sorte que

$$p_{ac}(t) = p_1 \cos(2\pi ft) + p_2 \cos(4\pi ft) \quad (3.3)$$

avec

$$p_1 = \frac{p_+ - p_-}{2} \quad (3.4)$$

$$p_2 = \frac{p_+ + p_-}{2} \quad (3.5)$$

$p_+$  et  $p_-$  étant respectivement le maximum et le minimum du signal de pression mesuré. C'est à partir de cette expression que j'ai tracé la modélisation théorique du signal de pression représenté sur la figure 3.8.

Les valeurs maximale et minimale de la pression sont telles que

$$p_+ - p_- = 2p_1 \quad (3.6)$$

$$p_+ + p_- = 2p_2 \quad (3.7)$$

Aussi, l'amplitude pic-pic du signal est égale au double de celle du mode fondamental, et son asymétrie est toujours égale à l'amplitude de la deuxième harmonique.

L'énergie volumique moyenne de l'onde acoustique est proportionnelle à

$$\langle E \rangle \propto \langle p_{ac}^2 \rangle \quad (3.8)$$

$$\propto p_1^2 + p_2^2 \quad (3.9)$$

J'ai tracé en fonction de la tension d'alimentation du transducteur l'amplitude mesurée du mode fondamental et de la deuxième harmonique au point focal du transducteur (représentés sur la figure 3.9) en appliquant les expressions 3.6 et 3.7 aux mesures faites à l'oscilloscope.

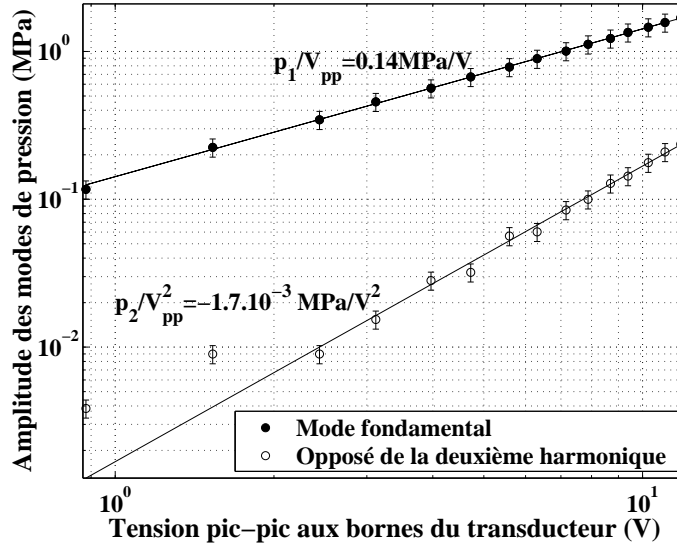


FIG. 3.9 – Amplitude au point focal du mode fondamental et de la première harmonique de la pression acoustique en fonction de la tension d'alimentation du transducteur

On remarque sur cette courbe que l'amplitude  $p_1$  du mode fondamental est proportionnelle à la tension d'alimentation  $V_{pp}$  du transducteur, alors que l'amplitude  $p_2$  de la deuxième harmonique est proportionnelle à son carré :

$$p_1 = aV_{pp} \quad (3.10)$$

$$p_2 = bV_{pp}^2 \quad (3.11)$$

avec  $a = 0,14 \text{ MPa/V}$  et  $b = -1,7 \cdot 10^{-3} \text{ MPa/V}^2$ . Aussi,

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{b}{a^2} p_1 \quad (3.12)$$

Ainsi, pour  $p_1 = 2 \text{ MPa}$ , la deuxième harmonique est de l'ordre de 20% du mode fondamental en pression, donc de 4% en énergie et en pression de radiation. Aussi, elle

joue un rôle marginal tant que l'amplitude de l'onde acoustique n'est pas trop importante. Dans toute la suite, j'ai négligé l'influence des harmoniques dans la pression de radiation mesurée tant que l'amplitude du mode fondamental n'atteignait pas 4 MPa. Dans ce dernier cas, la deuxième harmonique est de l'ordre de 10% en énergie du mode fondamental. J'ai donc considéré que l'amplitude de pression de l'onde acoustique valait  $p_1$ .

### 3.2.2 Calibration du transducteur

En déplaçant le capteur de pression dans une petite zone autour du point focal du transducteur, on peut mesurer le champ de pression  $p_1$  de celui-ci, représenté sur les figures 3.10 et 3.11. On vérifie sur la figure 3.10 que le champ de pression est bien décrit par la

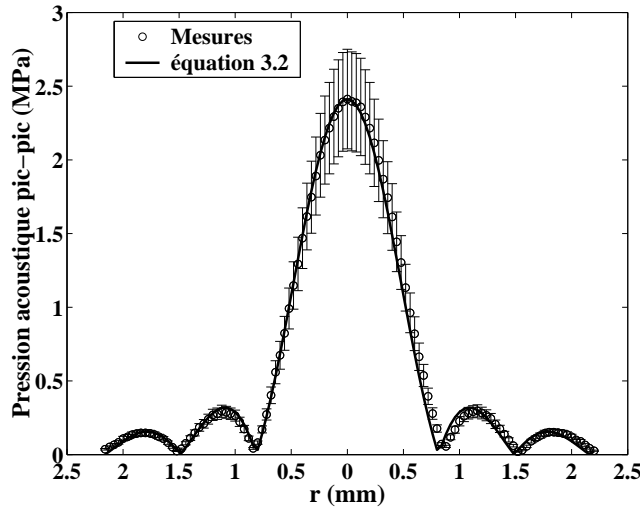


FIG. 3.10 – Champ de pression émis par le transducteur dans son plan focal le long d'un axe perpendiculaire à l'axe du transducteur. La courbe théorique est la courbe prédite par l'équation 3.2.

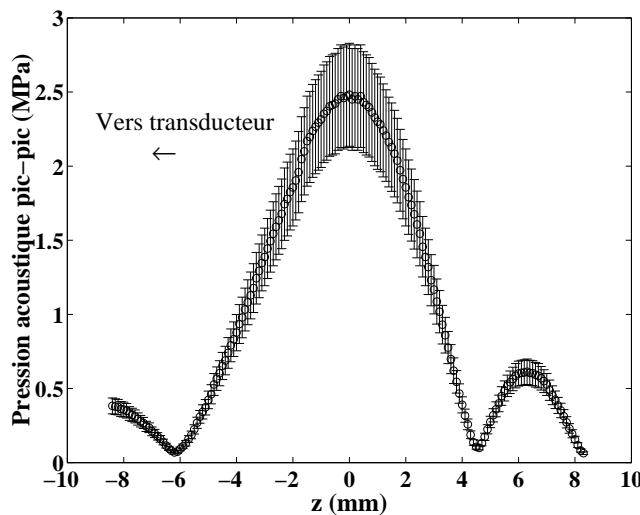


FIG. 3.11 – Champ de pression émis par le transducteur le long de son axe.

prédiction analytique de Kino [2].

Une fois le point focal localisé précisément grâce à ces courbes (il s'agit du point auquel l'amplitude de pression acoustique est maximale), on peut déterminer la courbe de calibration du transducteur, représentée sur la figure 3.12. Cette courbe permettra, connaissant

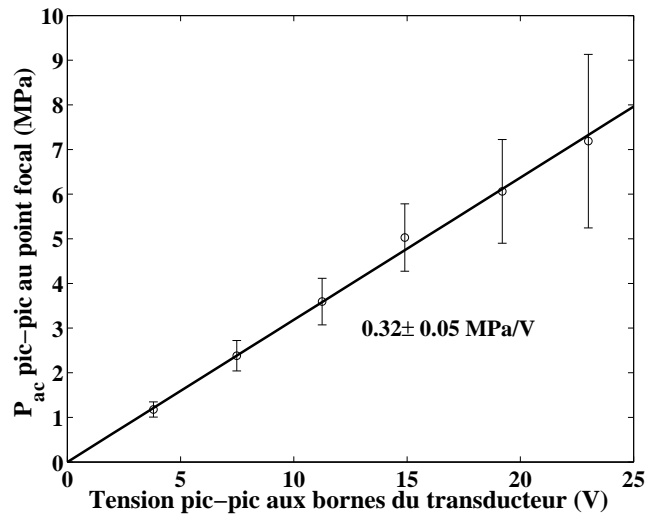


FIG. 3.12 – Courbe de calibration du transducteur dans l'eau.

la tension appliquée aux bornes du transducteur, de connaître l'amplitude de la pression acoustique à son point focal. Elle doit être refaite à chaque fois qu'on modifie le fluide dans lequel le transducteur émet : l'impédance acoustique, l'absorption de l'onde et la largeur de la tache focale dépendant du fluide utilisé, l'amplitude de pression au point focal du transducteur en dépend également.

### 3.2.3 Précision des capteurs de pression

La calibration des capteurs de pression par leur constructeur est relativement peu précise, imprécision qui se répercute sur les mesures de pression que j'ai effectuées. J'ai utilisé deux sortes de capteurs : certains se présentaient sous forme d'une aiguille, le capteur proprement dit étant au bout de l'aiguille et d'autres se présentaient sous forme d'une membrane, le capteur étant au centre de la membrane. Les capteurs à aiguille étaient calibrés à 14% près en pression, et les capteurs à membrane, moins sensibles mais plus précis, étaient calibrés à 7% près. Ces capteurs à membrane étant cependant plus larges que les capteurs à aiguilles, ils avaient tendance à moyenniser le champ de pression sur une plus grande surface et n'étaient finalement pas adaptés à la mesure de la pression acoustique émise par nos transducteurs focalisés (figure 3.13). Ils pourraient cependant être d'une grande utilité pour améliorer la calibration des capteurs à aiguille par comparaison des mesures du champ d'un transducteur non focalisé réalisées par les deux types de capteurs. L'annexe B fournit une discussion plus précise sur les capteurs et en particulier sur l'effet de moyenne observé sur les champs de pression mesurés par le capteur à membrane.

### 3.2.4 Cas des transducteurs troués

Dans certaines expériences, il était nécessaire de faire passer un faisceau laser à travers le transducteur afin d'étudier sa défocalisation par la déformation de l'interface. Pour ce faire,

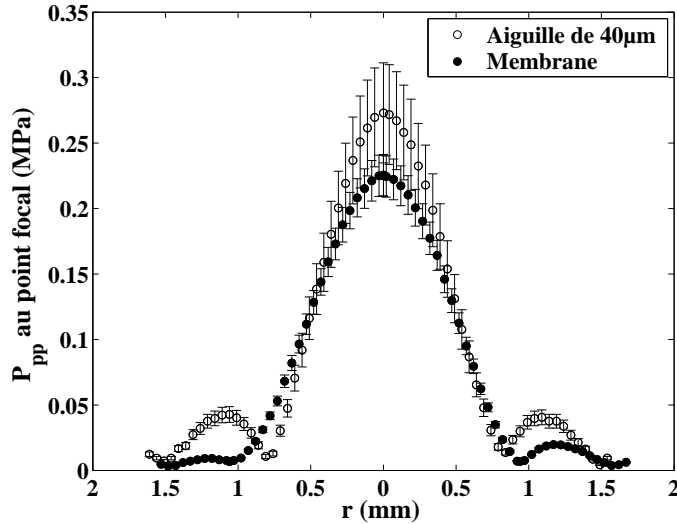


FIG. 3.13 – Champ de pression d’un transducteur focalisé mesuré par un capteur à aiguille de 40  $\mu\text{m}$  et un capteur à membrane, pour une tension pic-pic de 1 V aux bornes du transducteur.

nous avons commandé à *Imasonic* des transducteurs spéciaux comportant un trou central le long de leur axe, dans lequel nous avons collé un barreau de verre, comme indiqué sur la figure 3.14. L’un de ces transducteurs est photographié sur la figure 3.15. J’ai pu vérifier

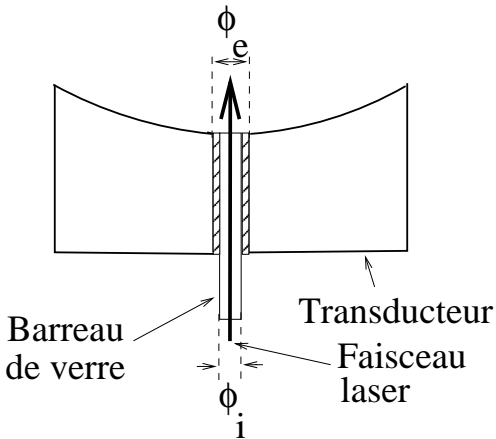


FIG. 3.14 – Transducteur troué permettant le passage d’un faisceau laser. Le trou a un diamètre intérieur  $\phi_i = 2$  mm et un diamètre extérieur  $\phi_e = 2,3$  mm.

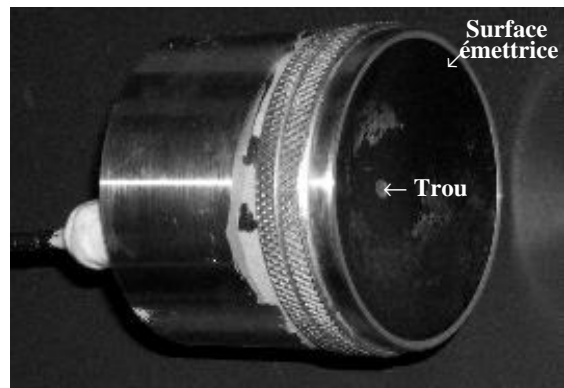


FIG. 3.15 – Photo d’un transducteur troué. Le trou, par où on peut faire passer un faisceau laser, se trouve au centre de la surface émettrice. Il traverse tout le transducteur et un barreau de verre est collé à l’intérieur. Les traces blanches que l’on voit sur la surface émettrice sont des restes de téflon, le transducteur ayant été recouvert de téflon pour pouvoir être protégé lors des expériences au chloroforme.



que la réduction de l'aire de la surface émettrice par le trou central était suffisamment faible pour ne pas altérer notablement le champ de pression acoustique émis par celui-ci (figure 3.16).

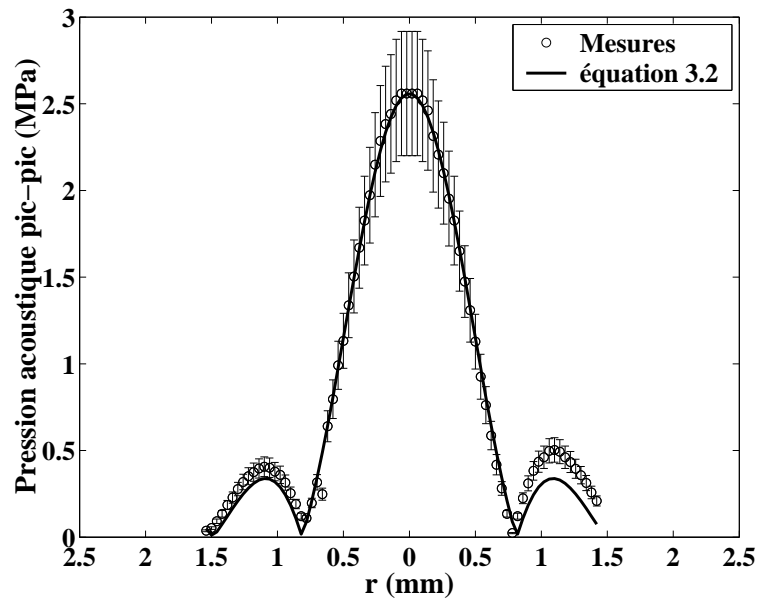


FIG. 3.16 – Champ de pression radiale émis par un transducteur troué dans son plan focal.

### 3.3 Allure et sens des déformations observées

#### 3.3.1 Invariance haut/bas

Lorsque l'émetteur émet une onde acoustique d'amplitude modérée, on observe une déformation de l'interface telle que celle représentée sur la figure 3.17.

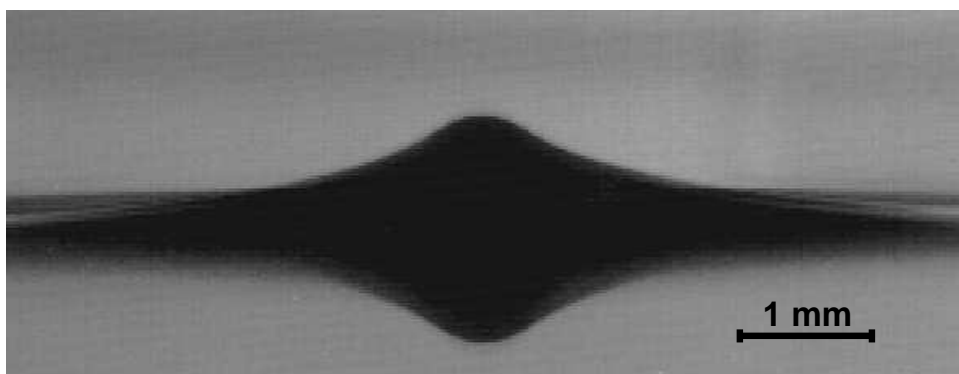


FIG. 3.17 – Déformation observée à l'interface eau-air, formée par une onde acoustique incidente se propageant verticalement, de fréquence  $f = 2,46$  MHz et d'amplitude sur l'axe  $p_{i0} = 0,93$  MPa. Ici, l'onde acoustique se propage dans l'eau de bas en haut.

Pour certains couples de fluides, on observe une invariance haut/bas : le sens et la forme de la déformation ne dépendent que des deux fluides utilisés et non du sens de propagation

de l'onde (figure 3.18). Ce résultat, dont nous allons discuter la validité dans la suite de ce chapitre, avait déjà été observé par Hertz et Mende en 1939 [5].

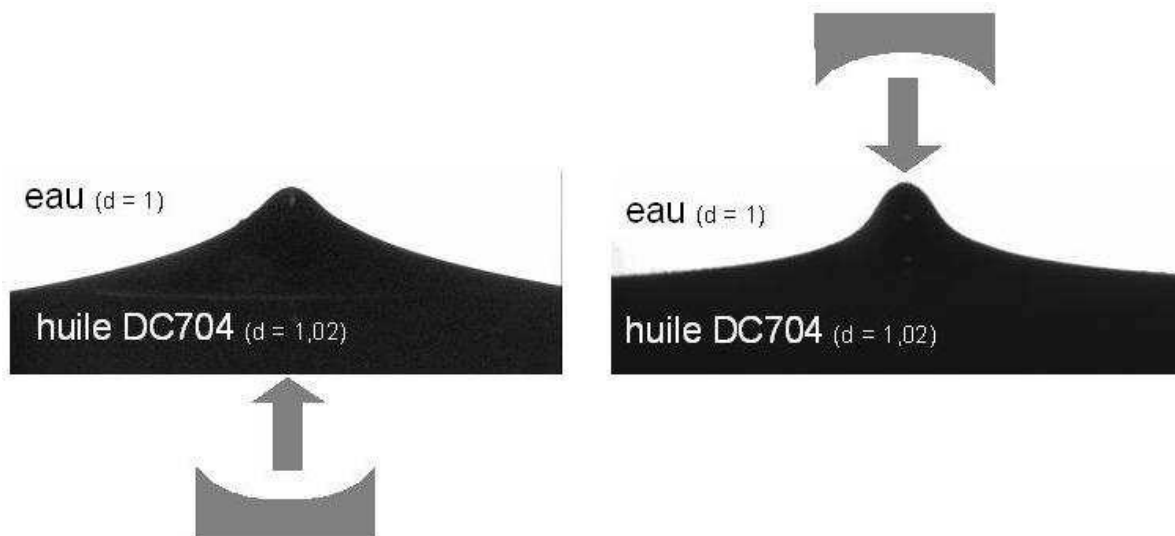


FIG. 3.18 – La déformation de l'interface eau-DC-704 se forme toujours vers le haut, quel que soit le sens de propagation de l'onde acoustique incidente.

### 3.3.2 Rupture d'invariance de forme

Il y a une brisure de l'invariance de forme pour des déformations de grande amplitude : si la déformation croît dans le sens de propagation de l'onde acoustique, on observe un jet (figure 3.19). Si elle croît en sens opposé, on observe une tétine (figure 3.20).

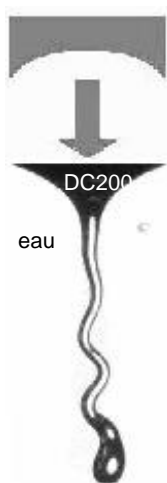


FIG. 3.19 – Jet liquide induit par la pression de radiation d'une onde acoustique à l'interface entre de l'huile DC200 et de l'eau : l'onde acoustique se propage de haut en bas (flèche).

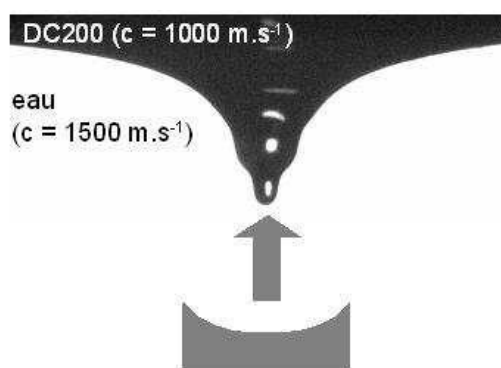


FIG. 3.20 – Déformation en forme de tétine induite par la pression de radiation d'une onde acoustique à l'interface entre de l'eau et de l'huile DC200 : l'onde acoustique se propage de bas en haut (flèche).

### 3.3.3 Comparaison avec les déformations d'interfaces par la pression de radiation optique

Les déformations d'interfaces par la pression de radiation optique ont fait l'objet de la thèse d'Alexis Casner [6] [7]. Au lieu d'utiliser l'interface eau-air, il a utilisé un mélange diphasique proche de son point critique, ce qui permet d'obtenir des interfaces fluides à très faible tension interfaciale. On peut alors obtenir, en focalisant un faisceau laser sur l'interface, des déformations de quelques centaines de microns de long, représentées sur les figures 3.21 et 3.22.



FIG. 3.21 – Jet liquide induit par la pression de radiation d'un faisceau laser à l'interface entre deux fluides : le laser arrive par le haut (flèche noire). Le jet émet des gouttes de façon continue. Le champ de l'image est de  $250\mu\text{m}$  de large sur  $800\mu\text{m}$  de haut. [6]

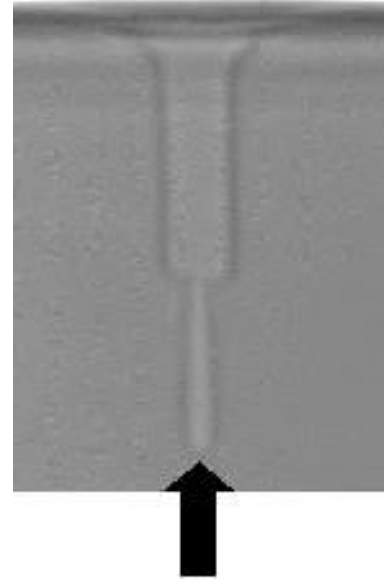


FIG. 3.22 – Déformation en forme de tétine induite par la pression de radiation d'un faisceau laser à l'interface entre deux fluides : le laser arrive par le bas. La tétine n'émet pas de gouttes. Le champ de l'image est de  $50\mu\text{m}$  de large sur  $80\mu\text{m}$  de haut. [6]

Comme en acoustique, on observe que la déformation de l'interface par la pression de radiation optique ne dépend pas du sens de propagation du laser, mais que l'interface se déforme toujours du milieu le plus réfringent vers le moins réfringent. Pour les grandes déformations observées sur ces figures, on observe également une rupture de cette invariance haut-bas similaire à celle que l'on observe sur les figures 3.19 et 3.20 : lorsque le laser arrive du milieu le plus réfringent vers le moins réfringent, un jet se forme, qui émet des gouttes. Lorsque le laser arrive dans l'autre sens, la déformation prend la forme d'une tétine, sans émettre de gouttes. Ces deux formes sont très stables et pour le moment inexplicables.

Il y a cependant de nombreuses différences entre l'optique et l'acoustique. En effet, les interactions entre l'onde et l'interface fluide peuvent être schématisées comme l'indique la figure 3.23.

L'onde, d'intensité incidente  $I$ , agit sur l'interface via la pression de radiation. L'interface rétroagit sur l'onde via les phénomènes de réflexion et de diffraction. Le tableau

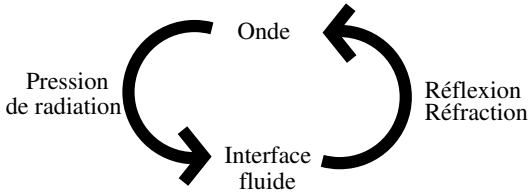


FIG. 3.23 – Interactions entre l’onde et l’interface fluide

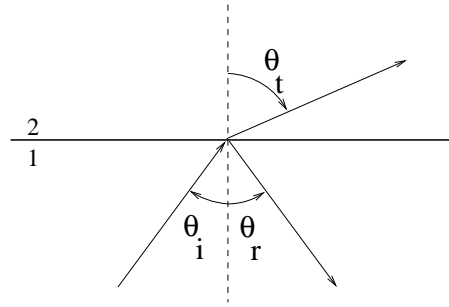


FIG. 3.24 – Angles d’incidence, de réflexion et de réfraction d’une onde optique ou acoustique incidente à l’interface entre deux fluides 1 et 2.

suivant compare ces différentes interactions entre l’onde et l’interface fluide dans le cas de l’optique et dans le cas de l’acoustique.

	Expression en optique	Expression en acoustique
Loi de Descartes pour la réflexion	$\sin(\theta_r) = \sin(\theta_i)$	$\sin(\theta_r) = \sin(\theta_i)$
Loi de Descartes pour la réfraction	$\frac{\sin(\theta_i)}{c_1} = \frac{\sin(\theta_t)}{c_2}$	$\frac{\sin(\theta_i)}{c_1} = \frac{\sin(\theta_t)}{c_2}$
Coefficient de réflexion en énergie en incidence normale	$\left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right)^2$	$\left(\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}\right)^2$
Pression de radiation en incidence normale	$\frac{2n_1}{c} \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} I$ [8]	$\frac{2}{c_1} \frac{\rho_1^2 c_1^2 + \rho_2^2 c_2^2 - 2\rho_1 \rho_2 c_1^2}{(\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2)^2} I$

Dans le cas de l’optique, toutes les interactions entre l’onde et l’interface sont gouvernées par les indices de réfraction  $n_i$  (soit la vitesse de l’onde  $c_i$ ) des deux milieux. En acoustique, la réfraction est gouvernée, comme en optique, par la vitesse  $c_i$  du son dans chaque milieu. Par contre, le coefficient de réflexion ne dépend que de leur impédance acoustique  $Z_i$ , et la pression de radiation dépend de leur masse volumique  $\rho_i$  et de leur vitesse acoustique  $c_i$  (l’expression de la pression de radiation acoustique sera démontrée un peu plus loin dans ce chapitre, page 79). Il y a donc en acoustique une plus grande diversité de situations : on pourra par exemple trouver des couples de fluides où il n’y a pas réflexion de l’onde à l’interface, mais où la pression de radiation n’est pas nulle, ce qui est impossible en optique.

De plus, l’intensité de la pression de radiation est beaucoup plus grande dans l’expérience d’acoustique (de l’ordre de 100 Pa sur 1 mm<sup>2</sup> dans nos expériences) que dans l’expérience d’optique (10 Pa sur 10 μm<sup>2</sup> dans les expériences d’Alexis Casner). Par ailleurs, le faisceau acoustique étant beaucoup plus large que le faisceau laser, la déformation a une courbure moindre à hauteur égale dans le cas de l’acoustique que dans le cas de l’optique, et les forces de tension de surface, qui s’opposent à la déformation de l’interface par la pression de radiation, sont donc moindres. La pression de radiation acoustique permet donc de déformer de façon significative une plus grande diversité d’interfaces fluides sans nécessiter qu’elles aient une faible tension superficielle.

L’étude des déformations de grande amplitude par la pression de radiation acoustique pourrait permettre de détecter les analogies et les différences entre les déformations d’in-

terfaces par la pression de radiation optique et les déformations par la pression de radiation acoustique. Du fait de la plus grande diversité des interfaces pouvant être étudiées avec les ondes acoustiques et de la plus grande taille des déformations ainsi obtenues, l'étude en acoustique pourrait permettre de comprendre certains phénomènes observés en optique, en particulier la forme en jet ou en tétine de la déformation.

### 3.4 Déformation d'une interface fluide induite par la pression de radiation d'un champ acoustique besselien d'amplitude modérée

#### 3.4.1 Mise en équations

Considérons l'expérience représentée sur la figure 3.1, où le faisceau acoustique besselien émis verticalement par le transducteur est focalisé sur l'interface entre deux fluides. On observe alors une déformation de l'interface fluide semblable à celle photographiée sur la figure 3.17 et schématisée sur la figure 3.25.

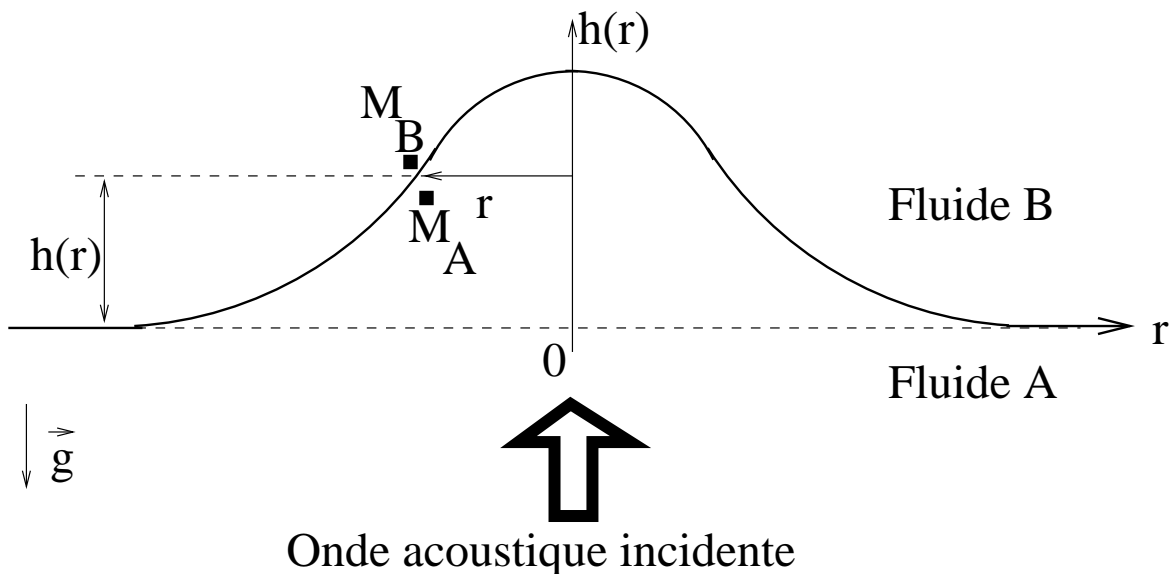


FIG. 3.25 – Déformation d'une interface fluide par la pression de radiation d'une onde acoustique

On note  $A$  le fluide inférieur et  $B$  le fluide supérieur. Soit  $h(r)$  la hauteur de l'interface par rapport à sa hauteur au repos à la distance  $r$  de l'axe du faisceau acoustique.

La pression de radiation tend à déformer l'interface. Elle s'oppose par conséquent à la tension interfaciale et à la gravité, qui tendent à l'aplatir. Soient  $M_A$  et  $M_B$  deux points infiniment proches de l'interface situés à la distance  $r$  de l'axe, respectivement dans les fluides  $A$  et  $B$ . La différence de pression entre ces deux points vaut, suivant la loi de Laplace :

$$P_A - P_B = -\sigma\kappa(r) \quad (3.13)$$

$\sigma$  désignant la tension de surface et  $\kappa$  la courbure de l'interface :

$$\kappa(r) = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( \frac{r h'(r)}{\sqrt{1 + h'(r)^2}} \right) \quad (3.14)$$

On fait ici l'hypothèse que la déformation est de petite amplitude et que le faisceau incident arrive en incidence normale.  $P_j$ , avec  $j = A$  ou  $j = B$ , est la somme de la pression hydrostatique  $P_0 - \rho_i g h$  ( $P_0$  désignant la pression à l'interface au repos) et de la pression acoustique lagrangienne moyenne  $\langle E_j \rangle$  s'exerçant sur le côté  $j$  de l'interface, égale à la densité volumique d'énergie acoustique. Par conséquent,

$$P_A - P_B = (\rho_B - \rho_A) g h(r) + \langle E_A(r) \rangle - \langle E_B(r) \rangle \quad (3.15)$$

Or,  $\langle E_A(r) \rangle - \langle E_B(r) \rangle$  est égal à la pression de radiation  $\Pi(r)$  s'exerçant sur l'interface (équation 2.121. Ici, c'est l'interface entre les deux fluides qui joue le rôle de l'obstacle). La condition d'équilibre de l'interface s'écrit par conséquent :

$$(\rho_A - \rho_B) g h(r) - \sigma \kappa(r) = \Pi(r) \quad (3.16)$$

ou encore

$$\Delta \rho g h(r) - \sigma \kappa(r) = \Pi(r) \quad (3.17)$$

$\Delta \rho = \rho_A - \rho_B$  désignant le contraste de densité entre les deux fluides.

Ici, nous nous intéressons à de petites déformations. Aussi, on peut considérer que  $h'(r) \ll 1$ . Il en résulte qu'on peut considérer que

$$\kappa(r) = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r h'(r)) \quad (3.18)$$

$$= \Delta_r h(r) \quad (3.19)$$

$\Delta_r$  désignant l'opérateur laplacien en coordonnées cylindriques.

Aussi, l'équilibre 3.17 peut s'écrire

$$\Delta \rho g h(r) - \sigma \Delta_r h(r) = \Pi(r) \quad (3.20)$$

Or,

$$\Pi(r) = \langle E_A(r) \rangle - \langle E_B(r) \rangle \quad (3.21)$$

Dans la suite, il va être plus commode d'utiliser non pas les indices  $A$  et  $B$  désignant respectivement les fluides inférieur et supérieur, mais les indices 1 et 2 désignant respectivement le fluide d'où vient l'onde incidente et le fluide vers lequel elle se dirige. Deux cas sont possibles :

L'onde se propage de bas en haut en venant du fluide inférieur : dans ce cas, le fluide

$A$  est le fluide 1 et le fluide  $B$  est le fluide 2 :  $\rho_A = \rho_1$ ,  $c_A = c_1$ ,  $\rho_B = \rho_2$  et  $c_B = c_2$ .

L'onde se propage de haut en bas en venant du fluide supérieur : dans ce cas, le fluide

$A$  est le fluide 2 et le fluide  $B$  est le fluide 1 :  $\rho_A = \rho_2$ ,  $c_A = c_2$ ,  $\rho_B = \rho_1$  et  $c_B = c_1$ .

Le tableau suivant résume ces deux cas.  $\mathcal{R} = \left( \frac{Z_A - Z_B}{Z_A + Z_B} \right)^2$  et  $\mathcal{T} = \frac{4Z_A Z_B}{(Z_A + Z_B)^2}$  désignent respectivement les coefficients de réflexion et de transmission en intensité de l'interface, en incidence normale,  $\langle E_i(r) \rangle$  désigne la densité volumique d'énergie acoustique incidente à l'interface et  $p_i(r, t)$  désigne la pression acoustique incidente.

Cas étudié	L'onde vient du fluide inférieur $A$	L'onde vient du fluide supérieur $B$
$\langle E_A(r) \rangle$	$(1 + \mathcal{R}) \langle E_i(r) \rangle$	$\frac{c_B}{c_A} \mathcal{T} \langle E_i(r) \rangle$
$\langle E_B(r) \rangle$	$\frac{c_A}{c_B} \mathcal{T} \langle E_i(r) \rangle$	$(1 + \mathcal{R}) \langle E_i(r) \rangle$
$\langle E_A(r) \rangle - \langle E_B(r) \rangle$ $= \Pi(r)$	$\left(1 + \mathcal{R} - \frac{c_A}{c_B} \mathcal{T}\right) \langle E_i(r) \rangle$ $= 2 \frac{\rho_A^2 c_A^2 + \rho_B^2 c_B^2 - 2\rho_A \rho_B c_A^2}{(\rho_A c_A + \rho_B c_B)^2} \langle E_i(r) \rangle$ $= \frac{2}{\rho_A c_A^2} \frac{\rho_A^2 c_A^2 + \rho_B^2 c_B^2 - 2\rho_A \rho_B c_A^2}{(\rho_A c_A + \rho_B c_B)^2} \langle p_i(r)^2 \rangle$	$-\left(1 + \mathcal{R} - \frac{c_B}{c_A} \mathcal{T}\right) \langle E_i(r) \rangle$ $= -2 \frac{\rho_A^2 c_A^2 + \rho_B^2 c_B^2 - 2\rho_A \rho_B c_B^2}{(\rho_A c_A + \rho_B c_B)^2} \langle E_i(r) \rangle$ $= -\frac{2}{\rho_B c_B^2} \frac{\rho_A^2 c_A^2 + \rho_B^2 c_B^2 - 2\rho_A \rho_B c_B^2}{(\rho_A c_A + \rho_B c_B)^2} \langle p_i(r)^2 \rangle$
$A$	$\frac{1}{\rho_A c_A^2} \frac{\rho_A^2 c_A^2 + \rho_B^2 c_B^2 - 2\rho_A \rho_B c_A^2}{(\rho_A c_A + \rho_B c_B)^2}$ $= \frac{1}{\rho_1 c_1^2} \frac{\rho_1^2 c_1^2 + \rho_2^2 c_2^2 - 2\rho_1 \rho_2 c_1^2}{(\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2)^2}$	$-\frac{1}{\rho_B c_B^2} \frac{\rho_A^2 c_A^2 + \rho_B^2 c_B^2 - 2\rho_A \rho_B c_B^2}{(\rho_A c_A + \rho_B c_B)^2}$ $= -\frac{1}{\rho_1 c_1^2} \frac{\rho_1^2 c_1^2 + \rho_2^2 c_2^2 - 2\rho_1 \rho_2 c_1^2}{(\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2)^2}$

Le facteur  $A$  est défini par l'expression

$$\Pi(r) = 2A \langle p_i^2(r) \rangle \quad (3.22)$$

On retrouve l'expression établie par Landau [9]

$$\Pi(r) = 2 \langle E_i(r) \rangle \frac{\rho_1^2 c_1^2 + \rho_2^2 c_2^2 - 2\rho_1 \rho_2 c_1^2}{(\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2)^2} \quad (3.23)$$

$$\stackrel{2.32}{=} \frac{2}{\rho_1 c_1^2} \frac{\rho_1^2 c_1^2 + \rho_2^2 c_2^2 - 2\rho_1 \rho_2 c_1^2}{(\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2)^2} \langle p_i(r)^2 \rangle \quad (3.24)$$

au signe négatif près lorsque l'onde vient du fluide supérieur. Cela vient du fait que Landau définit la pression de radiation comme la composante normale à l'interface de l'impulsion perdue par l'onde acoustique par unité de temps et d'aire. Autrement dit, il la définit par  $\Pi(r) = \langle E_1(r) \rangle - \langle E_2(r) \rangle = \langle E_B(r) \rangle - \langle E_A(r) \rangle$  lorsque l'onde acoustique vient du fluide supérieur  $B$ . Cela explique la différence de signe, car nous avons ici défini la pression de radiation comme étant égale à  $\langle E_A(r) \rangle - \langle E_B(r) \rangle$  dans tous les cas.

En terme d'intensité, l'intensité acoustique étant définie par  $I = \langle p_i v_i \rangle = \langle p_i^2 \rangle / Z_1$ , la pression de radiation s'écrit

$$\Pi(r) = \pm \frac{2}{c_1} \frac{\rho_1^2 c_1^2 + \rho_2^2 c_2^2 - 2\rho_1 \rho_2 c_1^2}{(\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2)^2} I(r) \quad (3.25)$$

L'équation 3.20 devient, en y introduisant l'équation 3.22

$$\Delta \rho g h(r) - \sigma \Delta_r h(r) = 2A \langle p_i(r)^2 \rangle \quad (3.26)$$

Or, le champ de pression incident à l'interface est donné par l'expression <sup>1</sup>

$$p_i(r, t) = 2p_{i0} \frac{J_1\left(\frac{\pi r}{\lambda}\right)}{\frac{\pi r}{\lambda}} \cos(\omega t + \phi(r)) \quad (3.27)$$

$p_{i0}$  étant l'amplitude de la pression acoustique incidente au point focal. Il en résulte que

$$\Delta \rho g h(r) - \sigma \Delta_r h(r) = 4A p_{i0}^2 \left( \frac{J_1\left(\frac{\pi r}{\lambda}\right)}{\frac{\pi r}{\lambda}} \right)^2 \quad (3.28)$$

<sup>1</sup>Ceci est une hypothèse très forte dans le cas où l'interface est réfléchissante. En effet, dans ce cas, l'onde acoustique incidente est la superposition de l'onde émise par le transducteur et des réflexions successives qui, après s'être réfléchies sur l'interface puis sur le transducteur, reviennent vers l'interface. Rien n'indique alors que ces ondes aient la même structure bessélienne que l'onde émise par le transducteur. Cependant, cette hypothèse donne des résultats tout à fait raisonnables, comme la suite nous le fera constater.

### 3.4.2 Résolution exacte de l'équation

Pour résoudre cette équation différentielle, nous allons maintenant calculer la transformée de Hankel de cette expression. Par définition, la transformée de Hankel d'une fonction  $f(r)$  s'écrit [10] :

$$\tilde{f}(k) = \int_0^\infty f(r) J_0(kr) r dr \quad (3.29)$$

$f(r)$  est la transformée de Hankel inverse de  $\tilde{f}(k)$  et s'écrit

$$f(r) = \int_0^\infty \tilde{f}(k) J_0(kr) k dk \quad (3.30)$$

La transformée de Hankel du laplacien cylindrique d'une fonction  $f$  vaut

$$\widetilde{\Delta_r f}(k) = -k^2 \tilde{f}(k) \quad (3.31)$$

Si l'on note  $\phi(r) = \left( \frac{J_1\left(\frac{\pi r}{\lambda}\right)}{\frac{\pi r}{\lambda}} \right)^2$ , l'équilibre de l'interface devient, dans l'espace de Fourier :

$$(\Delta \rho g + \sigma k^2) \tilde{h}(k) = 4Ap_{i0}^2 \tilde{\phi}(k) \quad (3.32)$$

soit

$$\tilde{h}(k) = \frac{4Ap_{i0}^2}{\Delta \rho g + \sigma k^2} \tilde{\phi}(k) \quad (3.33)$$

et donc

$$h(r) = 4Ap_{i0}^2 \int_0^\infty \frac{\tilde{\phi}(k)}{\Delta \rho g + \sigma k^2} J_0(kr) k dk \quad (3.34)$$

On peut montrer que

$$\begin{cases} \tilde{\phi}(k \leq \frac{2\pi}{\lambda}) = \frac{\lambda^2}{2\pi^2} \left( 1 - \frac{\lambda k}{\pi^2} \sqrt{1 - \frac{k^2 \lambda^2}{4\pi^2}} - \frac{2}{\pi} \arcsin\left(\frac{\lambda k}{2\pi}\right) \right) \\ \tilde{\phi}(k > \frac{2\pi}{\lambda}) = 0 \end{cases} \quad (3.35)$$

(sur les propriétés de cette fonction, voir l'annexe A en page 217).

En conclusion, le profil de hauteur et la hauteur en  $r = 0$  de la déformation sont données par les expressions

$$h(r) = \frac{2\lambda^2}{\pi^2} Ap_{i0}^2 \int_0^{2\pi/\lambda} \frac{1}{\Delta \rho g + \sigma k^2} \left( 1 - \frac{\lambda k}{\pi^2} \sqrt{1 - \frac{k^2 \lambda^2}{4\pi^2}} - \frac{2}{\pi} \arcsin\left(\frac{\lambda k}{2\pi}\right) \right) J_0(kr) k dk \quad (3.36)$$

$$h(r = 0) = \frac{2\lambda^2}{\pi^2} Ap_{i0}^2 \int_0^{2\pi/\lambda} \frac{1}{\Delta \rho g + \sigma k^2} \left( 1 - \frac{\lambda k}{\pi^2} \sqrt{1 - \frac{k^2 \lambda^2}{4\pi^2}} - \frac{2}{\pi} \arcsin\left(\frac{\lambda k}{2\pi}\right) \right) k dk \quad (3.37)$$

### 3.4.3 Une résolution approchée de l'équation 3.28

On peut cependant simplifier ces expressions en approximant le faisceau acoustique bessélien par un faisceau gaussien comme indiqué sur la figure 3.26.



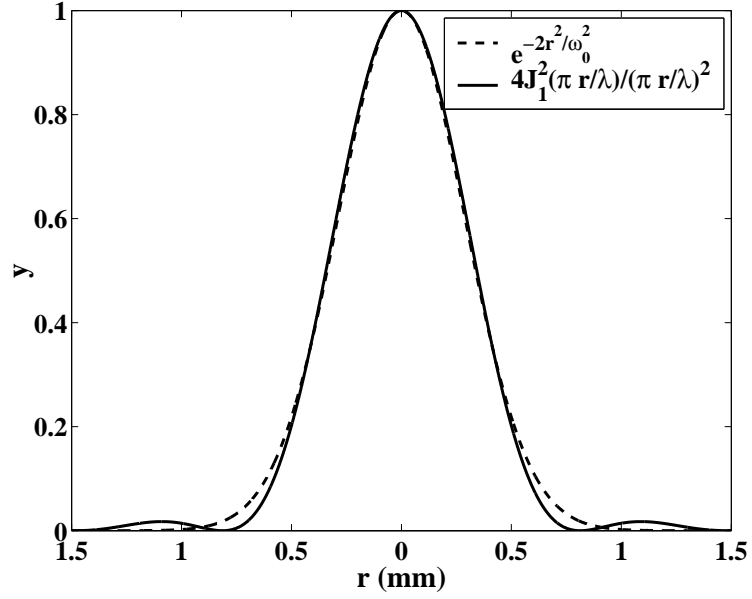


FIG. 3.26 – Comparaison d’un profil bessélien ( $y = 4 \left( \frac{J_1(x)}{x} \right)^2$  avec  $x = \frac{\pi r}{\lambda}$ , en trait plein), et d’un profil gaussien ( $y = e^{-2r^2/\omega_0^2}$  avec  $\omega_0 = 0,86\lambda$ , en pointillés).

On fait alors l’approximation empirique

$$4 \left( \frac{J_1 \left( \frac{\pi r}{\lambda} \right)}{\frac{\pi r}{\lambda}} \right)^2 \approx e^{-2r^2/\omega_0^2} \quad (3.38)$$

avec  $\omega_0 = 0,86\lambda$ . Cette approximation revient à remplacer la source de taille finie par une source gaussienne d’extension infinie.

En effet, comme l’indique la figure 3.26, cette approximation décrit très bien le centre du faisceau, où la densité d’énergie acoustique est maximale (la densité d’énergie acoustique au maximum du lobe secondaire vaut moins de 2% de la densité d’énergie acoustique en  $r = 0$ ). La pression de radiation étant directement la différence de densité d’énergie acoustique entre les deux fluides, cette approximation décrit très bien le profil de pression de radiation  $\Pi(r)$ .

Dans le cadre de cette approximation, l’équation 3.28 devient

$$\Delta \rho g h(r) - \sigma \Delta_r h(r) = A p_{i0}^2 e^{-2r^2/\omega_0^2} \quad (3.39)$$

et l’équation 3.33 devient

$$\tilde{h}(k) = \frac{A p_{i0}^2}{\Delta \rho g + \sigma k^2} \tilde{\psi}(k) \quad (3.40)$$

avec  $\psi(r) = e^{-2r^2/\omega_0^2}$ . La transformée de Hankel de cette fonction  $\psi$  est [10]

$$\tilde{\psi}(k) = \frac{\omega_0^2}{4} e^{-\omega_0^2 k^2/8} \quad (3.41)$$

et le profil de hauteur de la déformation est alors

$$h(r) = \frac{A p_{i0}^2 \omega_0^2}{4} \int_0^\infty \frac{e^{-\omega_0^2 k^2/8}}{\Delta \rho g + \sigma k^2} J_0(kr) k dk \quad (3.42)$$

La hauteur de la déformation vaut, en notant  $l_c = \sqrt{\frac{\sigma}{\Delta\rho g}}$  la longueur capillaire,

$$h(r=0) = \frac{Ap_{i0}^2\omega_0^2}{4\Delta\rho g} \int_0^\infty \frac{e^{-\omega_0^2 k^2/8}}{1+l_c^2 k^2} k dk \quad (3.43)$$

$$\stackrel{u=k^2}{=} \frac{Ap_{i0}^2}{\Delta\rho g} \frac{\omega_0^2}{8} \int_0^\infty \frac{e^{-\omega_0^2 u/8}}{1+l_c^2 u} du \quad (3.44)$$

$$= \frac{Ap_{i0}^2}{\Delta\rho g} \frac{\omega_0^2}{8l_c^2} \int_0^\infty \frac{e^{-\omega_0^2 u/8}}{\frac{1}{l_c^2} + u} du \quad (3.45)$$

$$= \frac{A\omega_0^2 p_{i0}^2}{8\sigma} \int_0^\infty \frac{e^{-\omega_0^2 u/8}}{\frac{1}{l_c^2} + u} du \quad (3.46)$$

Or, on démontre que, pour  $\beta \geq 0$  et  $\mu > 0$ ,

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\mu u}}{u + \beta} du = e^{\beta\mu} E_1(\beta\mu) \quad (3.47)$$

où  $E_1(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt$  est la fonction exponentielle intégrale.

En posant  $\beta = 1/l_c^2$  et  $\mu = \omega_0^2/8$ , on déduit de ce résultat que

$$h(0) = \frac{A\omega_0^2 p_{i0}^2}{8\sigma} e^{Bo/8} E_1(Bo/8) \quad (3.48)$$

en notant  $Bo = (\omega_0/l_c)^2$  le nombre de Bond acoustique, carré du rapport de la grandeur caractéristique de l'onde acoustique (le col du faisceau) et de la longueur capillaire de l'interface. De ce résultat, on déduit que le sens dans lequel la déformation pousse ne dépend que du signe de  $A$ . Ce signe ne dépend pas nécessairement du sens de propagation de l'onde, comme nous allons le vérifier dans le paragraphe 3.5, ce qui explique que sur certaines interfaces, le sens de la déformation ne dépende pas du sens de propagation de l'onde acoustique.

### 3.4.4 Comparaison des résultats exact et approché

On peut comparer les résultats prédits par les expressions exacte 3.36 et approchée 3.42 du profil de la déformation sur la figure 3.27, modélisant la déformation d'une interface eau-air par une onde acoustique de fréquence 2,46 MHz et d'amplitude 0,93 MPa.

On déduit de cette courbe que l'approximation du faisceau bessélien par un faisceau gaussien est bien justifiée, les deux profils obtenus étant très proches. En particulier, l'expression approchée décrit bien le milieu de la déformation et la hauteur de celle-ci. Dans la suite, j'utiliserai toujours cette approximation dans les calculs statiques.

On peut voir sur la figure 3.28 que le profil théorique qui vient d'être calculé (avec l'approximation du faisceau gaussien) est en très bon accord avec l'expérience.

## 3.5 Interprétation de ces résultats

Les deux expressions de la hauteur de la déformation 3.37 et 3.48 prédisent que celle-ci est proportionnelle au carré de l'amplitude de pression acoustique incidente à l'interface sur l'axe du transducteur :

$$h(r=0) \propto p_{i0}^2 \quad (3.49)$$

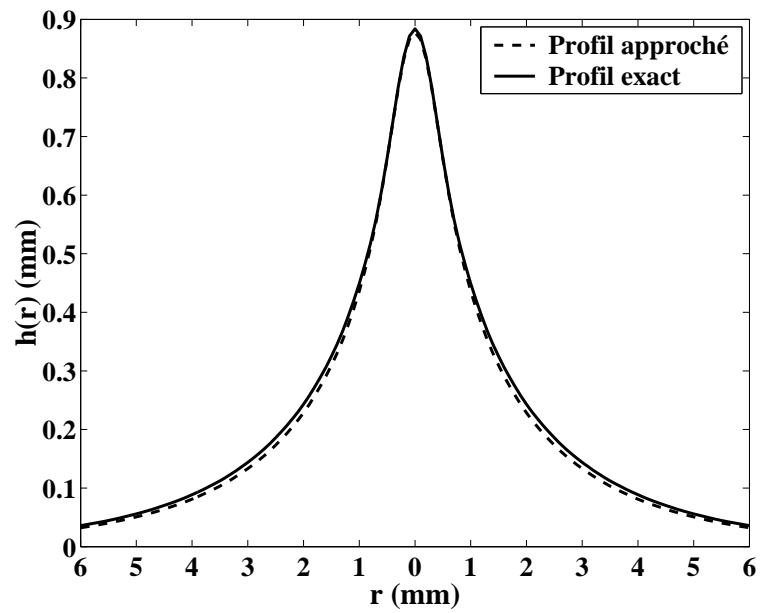


FIG. 3.27 – Profils théoriques de la déformation d’une interface eau-air par une onde de pression d’amplitude 0,93 MPa et de fréquence 2,46 MHz, prédits par les expressions 3.36 (trait plein) et 3.42 (pointillés).

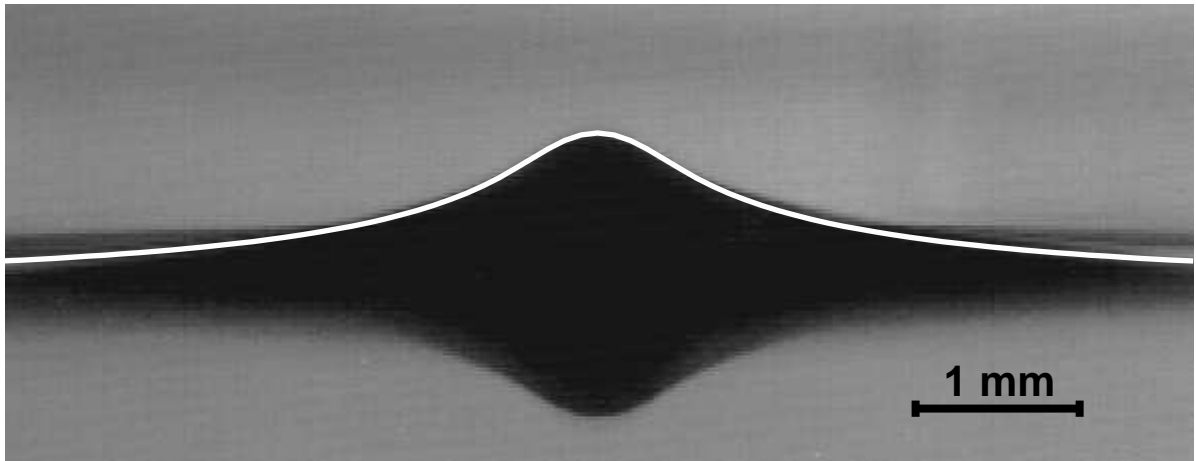


FIG. 3.28 – Comparaison du profil prédit par l’expression 3.42 avec l’expérience. L’interface utilisée ici est une interface eau-air, déformée par une onde acoustique incidente se propageant verticalement, de fréquence  $f = 2,46$  MHz et d’amplitude sur l’axe  $p_{i0} = 0,93$  MPa, arrivant par l’eau.

ce que nous allons vérifier par la suite.

Par ailleurs, on constate au vu de l'expression 3.48 que  $h(r)$  est du signe de  $A$  c'est-à-dire de

$$(\rho_1 - \rho_2)(\rho_1^2 c_1^2 + \rho_2^2 c_2^2 - 2\rho_1 \rho_2 c_1^2) \quad (3.50)$$

(le facteur  $(\rho_1 - \rho_2)$  traduit le fait que l'expression de  $A$  change de signe lorsque le sens de propagation de l'onde change, comme indiqué dans le tableau de la page 79).  $h(r)$  est donc du signe de

$$\rho_1^3 c_1^2 \left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_1}\right) \left(1 + \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^2 \left(\frac{c_2}{c_1}\right)^2 - 2\frac{\rho_2}{\rho_1}\right) \quad (3.51)$$

soit, en posant  $x = c_2/c_1$  et  $y = \rho_2/\rho_1$ , de

$$(1 - y)(1 + (xy)^2 - 2y) \quad (3.52)$$

Le sens de la déformation est donc donné par le signe de cette expression. Modifier le sens de propagation de l'onde revient dans cette expression à remplacer  $x$  par  $1/x$  et  $y$  par  $1/y$ . Si cette transformation modifie le signe de l'expression 3.52, alors le sens de la déformation dépend du sens de propagation de l'onde. Sinon, il n'en dépend pas. On peut voir sur le diagramme 3.29 les domaines d'existence de ces deux régimes suivant les

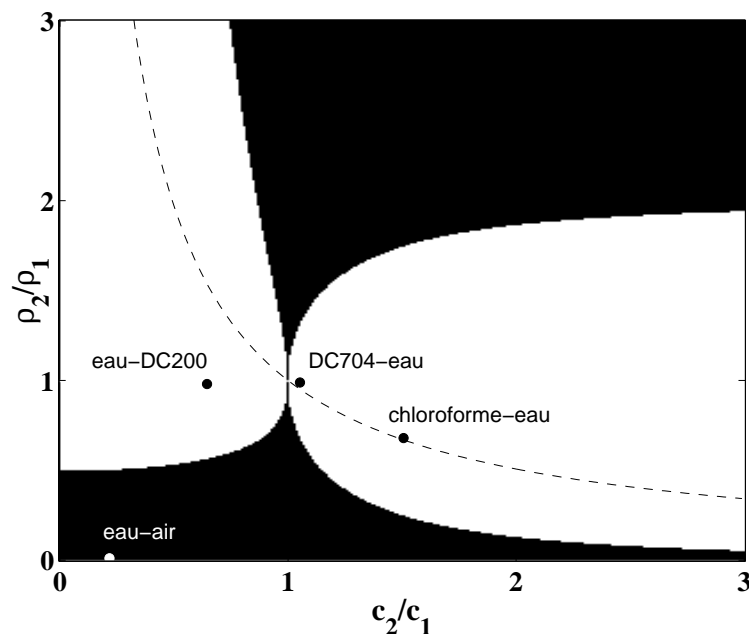


FIG. 3.29 – Domaine d'existence des deux régimes de dépendance du sens de la déformation avec le sens de propagation de l'onde : en noir, le sens de la déformation dépend du sens de propagation de l'onde. En blanc, il n'en dépend pas. La courbe pointillée représente l'ensemble des couples de fluides tels que  $\rho_1 c_1 = \rho_2 c_2$ , c'est-à-dire tels que l'interface est totalement transparente aux ondes acoustiques.

caractéristiques des deux fluides utilisés. On vérifie que dans le cas du couple eau-DC200, le sens de la déformation ne dépend pas du sens de propagation de l'onde, ce qui est vérifié expérimentalement sur les figures 3.19 et 3.20. On vérifie le même résultat concernant le couple eau-DC704, ce que confirme la figure 3.18. L'affirmation empirique d'Hertz et

Mende [5] suivant laquelle le sens de la déformation ne dépend pas du sens de propagation de l'onde est donc à nuancer au vu de ces résultats [11] : le sens de la déformation ne dépend pas du sens de propagation de l'onde si le point caractéristique du couple de fluides utilisés se trouve dans les zones blanches de ce diagramme.

### 3.6 Couples de fluides utilisés pour les expériences

De ces calculs, on déduit que les caractéristiques des fluides intervenant sur le profil de la déformation sont leur masse volumique  $\rho_i$ , la vitesse des ondes sonores  $c_i$  dans ces fluides et la tension interfaciale  $\sigma$  entre ces deux fluides.

$\rho_i$  et  $c_i$  jouent en particulier un rôle important par l'intermédiaire de l'impédance acoustique  $Z_i = \rho_i c_i$ . C'est le saut d'impédance entre les deux fluides qui va déterminer s'il y a réflexion ou non à l'interface, ce qui aura une forte influence sur le profil de la déformation. En effet, s'il y a réflexion au niveau de l'interface, l'onde réfléchie va se propager vers le transducteur dans le milieu 1, et une partie de cette onde va à nouveau être réfléchie au niveau du transducteur, revenir vers l'interface et donc jouer sur la pression de radiation que celle-ci subit. Les interfaces réfléchissantes feront l'objet des chapitres 6 à 8.

Les interfaces que j'ai étudiées principalement sont les interfaces eau-air et eau-chloroforme. Le tableau suivant indique les grandeurs caractéristiques théoriques des fluides à 25°C.

Fluide 1	Fluide 2	$\rho_1$ kg/m <sup>3</sup>	$\rho_2$ kg/m <sup>3</sup>	$c_1$ m/s	$c_2$ m/s	$Z_1$ rayl	$Z_2$ rayl	$\mathcal{R}$ %	$\mathcal{T}$ %
eau	air	998	1,2	1497	340	1,49.10 <sup>6</sup>	408	99,9	0,1
eau	chloroforme	998	1489	1497	987	1,49.10 <sup>6</sup>	1,47.10 <sup>6</sup>	1,00	99

Ces deux interfaces ont été choisies pour leurs coefficients de réflexion et de transmission : l'interface eau-chloroforme est quasiment transparente, alors que l'interface eau-air est quasiment totalement réfléchissante.

## Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté le principe de base des expériences réalisées durant cette thèse, en particulier l'émetteur acoustique, dont nous avons vérifié qu'il émettait un champ acoustique bessélien. Nous avons vérifié que l'amplitude du mode fondamental de l'onde acoustique émise au point focal du transducteur était proportionnelle à la tension appliquée à ses bornes. Dans toute la suite de cette thèse, nous négligeons la deuxième harmonique, proportionnelle au carré de la tension appliquée aux bornes du transducteur.

On observe que l'onde acoustique focalisée sur l'interface entre deux fluides déforme cette interface, le sens de croissance de la déformation étant sur certains couples de fluides indépendant du sens de propagation de l'onde acoustique. Lorsque l'onde acoustique est de grande amplitude, la déformation peut prendre la formation d'un jet ou d'une tétine suivant que la déformation croît dans le sens de propagation de l'onde acoustique ou dans le sens inverse. Dans cette thèse, nous ne nous sommes cependant intéressés qu'aux déformations de petite amplitude.

Enfin, nous avons présenté une théorie suivant laquelle c'était la pression de radiation qui était responsable de cette déformation, théorie qui nous a permis de prédire la forme et la hauteur de la déformation. Nous avons en particulier montré que sa hauteur devait

être proportionnelle au carré de l'amplitude de l'onde acoustique incidente. Cette théorie prédit, comme il a été observé expérimentalement, que sur certaines interfaces fluides, le sens de la déformation ne dépend pas du sens de propagation de l'onde acoustique.

## Références du chapitre 3

- [1] G. Fleury, R. Berriet, O. Le Baron, et B. Huguenin. New piezocomposite transducers for therapeutic ultrasound. In *2nd International Symposium on Therapeutic Ultrasound*, 2002.
- [2] G. S. Kino. *Acoustic waves : devices, imaging and analog signal processing*, chapter 3 Wave Propagation with Finite Exciting Sources. Prentice-Hall, 1987.
- [3] F. Coulouvrat. Continuous field radiated by a geometrically focused transducer : Numerical investigation and comparison with an approximate model. *J. Acoust. Soc. Am.*, 94(3) :1663–1675, 1993.
- [4] H. T. O'Neil. Theory of Focusing Radiators. *J. Acoust. Soc. Am*, 21(5) :516–526, 1949.
- [5] G. Hertz et H. Mende. Der Schallstrahlungsdruck in Flüssigkeiten. *Z. Phys.*, 114 :354, 1939.
- [6] A. Casner. *Déformations, manipulations et instabilités d'interfaces liquides induites par la pression de radiation d'une onde laser*. PhD thesis, Université Bordeaux I, 2002.
- [7] R. Wunenburger, A. Casner, et J.-P. Delville. Light-induced deformation and instability of a liquid interface. I. Statics. *Phys. Rev. E*, 73(3) :036314, 2006.
- [8] A. Casner et J.-P. Delville. Giant Deformations of a Liquid-Liquid Interface Induced by the Optical Radiation Pressure. *Phys. Rev. Lett.*, 87(5) :054503, 2001.
- [9] L. Landau et E. Lifchitz. *Mécanique des fluides*, volume 6 of *Physique théorique*, pages 370–371. MIR, 2ème édition, 1989.
- [10] M. Chossat. *Aide-mémoire de mathématiques de l'ingénieur*, pages 183–185. Dunod, 1977.
- [11] B. T. Chu et R. E. Apfel. Acoustic radiation pressure produced by a beam of sound. *J. Acoust. Soc. Am.*, 72(6) :1673–1687, 1982.

## Chapitre 4

# Modélisation dynamique. Application à la mesure de tensions interfaciales.

Nous avons vu au chapitre précédent que la tension interfaciale  $\sigma$  de l'interface fluide intervenait dans l'expression du profil et de la hauteur de la déformation en statique. Pour pouvoir comparer les prédictions théoriques aux expériences, il est donc indispensable de connaître  $\sigma$  avec précision. Or, on ne peut pas toujours se fier aux tables existantes, car elles ont généralement été mesurées sur des fluides très purs, ce qui n'était pas le cas de ceux que nous avons utilisés. Par exemple, la tension interfaciale tabulée de l'interface eau-chloroforme est de 32,80 mN/m [1]. Cependant, le chloroforme que nous avons utilisé était stabilisé par 1% d'éthanol. L'éthanol étant soluble dans le chloroforme et dans l'eau, il est raisonnable de penser que la tension interfaciale entre l'eau et le mélange chloroforme-éthanol que nous utilisons soit plus faible que la valeur tabulée correspondant à l'interface entre l'eau et le chloroforme pur.

Par ailleurs, une mesure *in situ* de la tension interfaciale des deux fluides utilisés est souhaitable, dans la mesure où la tension interfaciale est très sensible à l'état de pureté des deux fluides. Si l'on a besoin, pour mesurer la tension interfaciale  $\sigma$ , d'échantillons de fluide différents de ceux réellement utilisés dans l'expérience, la tension interfaciale mesurée peut différer de celle réellement mise en jeu dans l'expérience car les fluides dont on aura mesuré la tension interfaciale ne seront pas nécessairement dans le même état de pureté que ceux utilisés dans l'expérience.

L'enjeu du travail présenté dans ce chapitre est le développement d'une méthode de mesure de la tension de surface utilisant la déformation de l'interface par la pression de radiation acoustique. Nous commencerons par présenter rapidement quelques méthodes de mesure de la tension de surface existant déjà (paragraphe 4.1). Ensuite, nous présenterons le principe de la méthode que nous avons développée (paragraphe 4.2) et le montage utilisé (paragraphe 4.3). Elle repose sur le même principe que les deux méthodes que je présente dans les paragraphes 4.1.3 et 4.1.4, tout en utilisant un matériel plus simple et un modèle plus précis de la dynamique de la déformation, présenté dans les parties 4.4 et 4.5, tenant compte à la fois des effets superficiels, de la gravité, de la viscosité, de la présence de deux fluides et de la nature bessélienne de l'onde acoustique. Deux régimes ont été étudiés : le régime inertiel faiblement visqueux et le régime suramorti. Ce modèle exploite la dynamique de la déformation dans le régime linéaire, cette dynamique étant par conséquent indépendante de l'amplitude de l'excitation. On n'a donc pas besoin de connaître celle-ci avec exactitude pour mesurer la tension interfaciale.

Enfin, nous présenterons les mesures expérimentales de la tension de surface que ce

travail nous a permis d'obtenir (paragraphe 4.6 et 4.7).

## 4.1 Quelques méthodes de mesure de la tension interfaciale

### 4.1.1 La méthode de Wilhelmy [2]

Le principe de cette méthode est schématisé sur la figure 4.1.

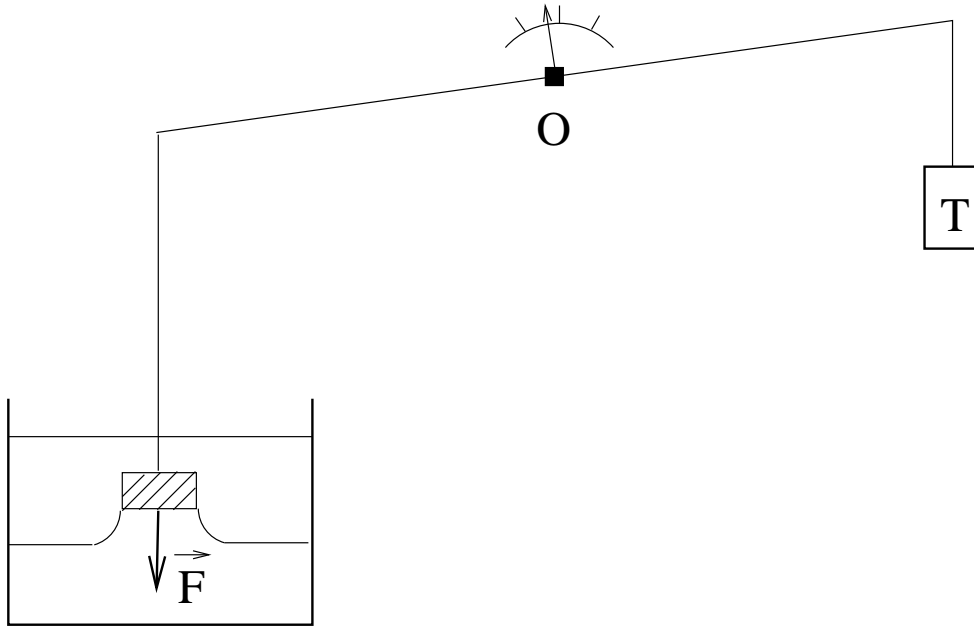


FIG. 4.1 – Principe de la mesure de la tension interfaciale par la méthode de Wilhelmy.

Une lame de platine, reliée à un tensiomètre, est entièrement plongée dans le liquide inférieur. Le tensiomètre a préalablement été réglé de manière à être à l'équilibre lorsque la lame ne subit que son poids et la poussée d'Archimède exercée par le fluide supérieur. La lame est progressivement remontée jusqu'à ce qu'elle atteigne l'interface entre les deux fluides. Elle subit alors une force capillaire  $\vec{F}$  de la part de l'interface. Juste avant que la lame ne s'arrache de l'interface, la force mesurée par le tensiomètre est maximale et vaut

$$F = 2\sigma L \quad (4.1)$$

$L$  étant la longueur de la plaque. Après avoir mesuré cette force, et connaissant  $L$ , on en déduit alors  $\sigma$ .

Cette méthode a l'inconvénient d'être très peu précise, le résultat dépendant énormément de l'état de propreté de la lame de platine. Par ailleurs, l'expression donnée ci-dessus suppose que l'angle de contact entre la lame et l'interface est nul, ce qui n'est pas toujours vérifié, en particulier en présence de surfactants cationiques. Elle est peu adaptée aux mesures de très faibles tensions de surface et difficile à mettre en œuvre pour mesurer la tension interfaciale entre deux liquides, car il faut alors tenir compte des forces de tension interfaciale que la surface du fluide supérieur exerce sur le fil auquel est suspendue la lame. Par ailleurs, l'introduction de la lame de platine dans la solution est susceptible de polluer celle-ci, ce qui rend délicate l'application de cette méthode *in situ*.



### 4.1.2 La méthode de la goutte pendante

La méthode de la goutte pendante repose sur le fait qu'une goutte pendue au bout d'une pipette ne tombe pas car son poids est compensé par la force capillaire à laquelle la goutte est soumise au niveau de sa ligne de contact avec le bout de la pipette. Plus on injecte de liquide dans la goutte, plus celle-ci grossit et plus son poids augmente. Lorsque celui-ci devient supérieur aux forces capillaires, la goutte tombe. En général, il se forme une goutte principale  $P$  et une goutte satellite  $S$  qui tombent, ainsi qu'une goutte résiduelle  $R$ , qui reste accrochée à la pipette (figure 4.2).

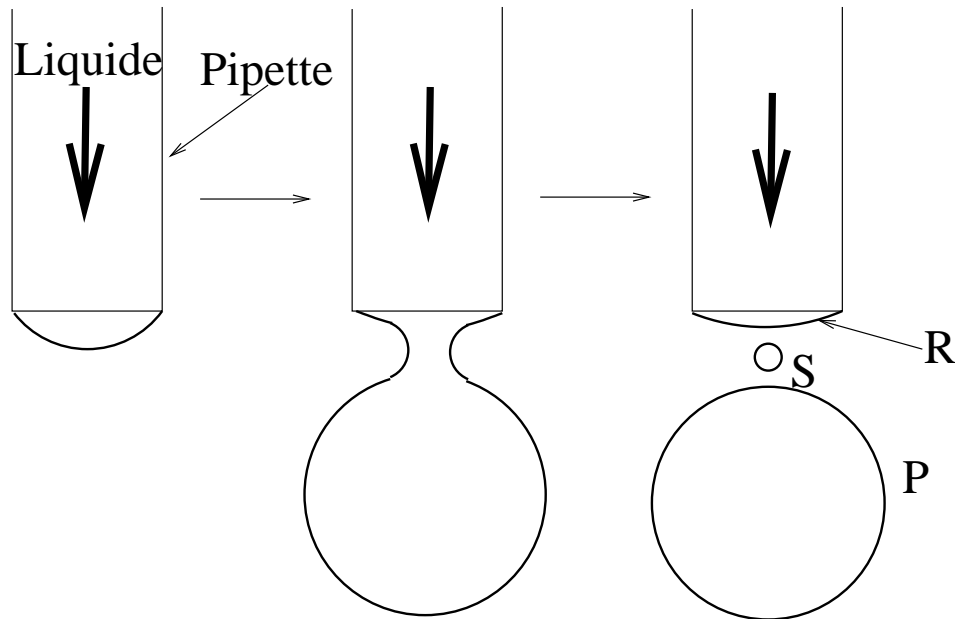


FIG. 4.2 – Formation d'une goutte au bout d'une pipette : à mesure que le fluide arrive, la goutte grossit jusqu'à se détacher lorsque les forces capillaires ne peuvent plus contrebalancer son poids.

Harkins et Brown ont démontré en 1919 que la tension de surface  $\sigma$  pouvait alors être déduite de l'expression

$$\sigma = \frac{mg}{2\pi r} \Psi \left( \frac{r}{V^{1/3}} \right) \quad (4.2)$$

où  $r$  est le rayon de l'orifice de la pipette,  $m$  et  $V$  sont respectivement la masse et le volume de la goutte,  $g$  est l'accélération de la pesanteur [3]. La fonction  $\Psi$  a été évaluée expérimentalement par Harkins et Brown pour différentes valeurs de  $r/V^{1/3}$ .

Cette méthode est généralisable au cas d'un fluide 1 introduit à l'aide d'une pipette dans un fluide 2,  $g$  devant être alors remplacé par l'accélération de la pesanteur effective tenant compte de la poussée d'Archimède à laquelle la goutte est alors soumise.

Cette méthode peut atteindre une précision de l'ordre de 1% [4]. Cependant, elle ne peut être réalisée *in situ* : elle nécessite d'utiliser des échantillons de fluides différents de ceux utilisés dans notre expérience de déformation d'interface.

### 4.1.3 Une méthode de mesure de tension de surface sans contact utilisant la pression de radiation acoustique

Une méthode originale utilisant la pression de radiation acoustique a été développée par Can Cinbis dans sa thèse en 1992 [2] [5]. Elle est schématisée sur la figure 4.3.

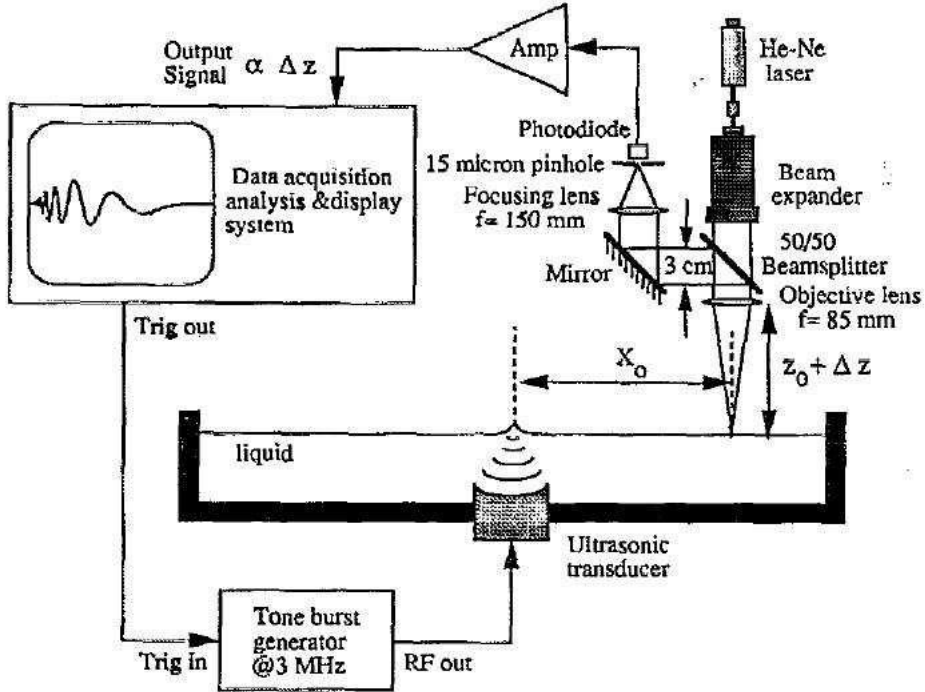


FIG. 4.3 – Montage utilisé par Cinbis pour mesurer une tension de surface par l'étude des ondes de surface générées par la déformation [5]

Une déformation de l'interface est créée par pression de radiation acoustique. Lorsqu'on stoppe l'émission de l'onde acoustique, la déformation disparaît et une onde de surface se propage. Le principe de la mesure consiste alors à mesurer la hauteur  $h(t, x_0)$  de l'interface en fonction du temps  $t$  à une distance  $x_0$  de l'axe de la déformation à l'aide d'un microscope confocal et à déterminer la tension de surface à partir de la transformée de Fourier temporelle de  $h(t, x_0)$  selon le principe expliqué dans ce qui suit.

La relation de dispersion des ondes capillaires à la surface du liquide s'écrit, si la profondeur du liquide est considérée comme infinie, et en négligeant les effets visqueux :

$$\Omega^2(k) = \left( gk + \frac{\sigma}{\rho} k^3 \right) \quad (4.3)$$

$\Omega(k)$  désignant la pulsation de l'onde et  $k$  son nombre d'onde.

Soit  $\hat{h}(\Omega, x_0)$  la transformée de Fourier de  $h(t, x_0)$  :

$$\hat{h}(\Omega, x_0) = |\hat{h}(\Omega, x_0)| e^{i\Phi(\Omega, x_0)} \quad (4.4)$$

avec  $\Phi(\Omega, x_0) = kx_0 - \Phi_0$ ,  $\Phi_0$  étant une constante. L'équation 4.3 s'écrit

$$\Omega^2 = \left( g \frac{\Phi(\Omega, x_0) + \Phi_0}{x_0} + \frac{\sigma}{\rho} \left( \frac{\Phi(\Omega, x_0) + \Phi_0}{x_0} \right)^3 \right) \quad (4.5)$$

d'où l'on déduit

$$\sigma = \frac{x_0^3 \rho \Omega^2}{(\Phi(\Omega, x_0) + \Phi_0)^3} - \frac{x_0^2 \rho g}{(\Phi(\Omega, x_0) + \Phi_0)^2} \quad (4.6)$$

D'après Cinbis, cette méthode de mesure est fiable à moins de 0,3% près pour un liquide pur considéré comme non-visqueux. Des résultats de mesures de tension de surface par cette méthode comparées avec des mesures par la méthode de Wilhelmy sont représentés sur la figure 4.4.

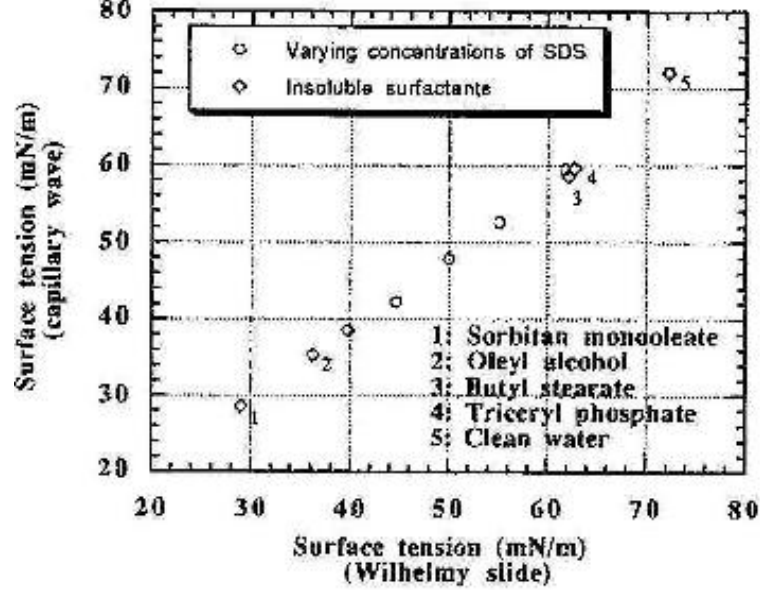


FIG. 4.4 – Comparaison des mesures de la tension de surface de l'eau avec différents surfactants par la méthode de Cinbis avec des mesures réalisées par la technique de Wilhelmy [5].

Dans un autre article [6], il présente une variante de cette méthode dans laquelle au lieu d'observer avec son microscope confocal les ondes de surface créées par la déformation au moment où celle-ci disparaît, il regarde directement la déformation elle-même, créée par un court train d'onde acoustique. Du temps  $\tau$  où la hauteur de la déformation est maximale (figure 4.5), il déduit la tension interfaciale  $\sigma$  à l'aide de l'expression :

$$\sigma = 0,0538 \frac{\lambda^3 F^3 \rho}{\tau^2} \quad (4.7)$$

$\lambda$  étant la longueur d'onde acoustique et  $F$  l'ouverture numérique du transducteur, rapport de sa distance focale et de son diamètre, le préfacteur 0,0538 ayant été déterminé numériquement. Là encore, il considère le fluide comme non-visqueux. Ce calcul a été fait dans une situation où les effets de gravité sont négligeables devant les effets de tension de surface, la gravité n'apparaissant pas dans cette équation. Cette expression peut être écrite sous la forme

$$\tau = 0,116 \frac{2\lambda^{3/2} F^{3/2} \rho^{1/2}}{\sigma^{1/2}} \quad (4.8)$$

Cinbis compare ce temps théorique de croissance de la déformation d'une interface eau-air au temps mesuré expérimentalement, ses résultats étant présentés dans le tableau suivant

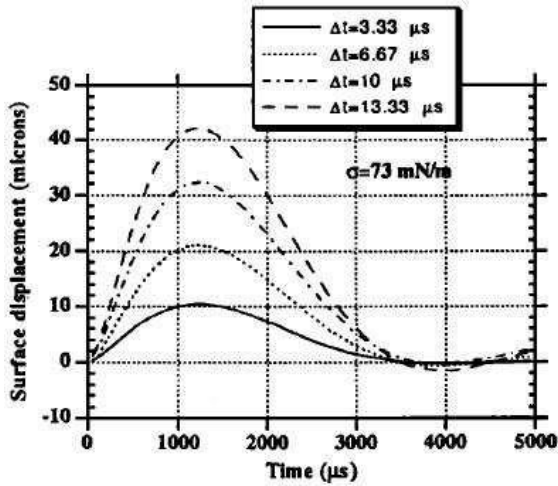


FIG. 4.5 – Hauteur de la déformation en fonction du temps calculée numériquement par Cinbis, lorsque l'interface est soumise à un train d'onde acoustique de durée  $\Delta t$  [6].

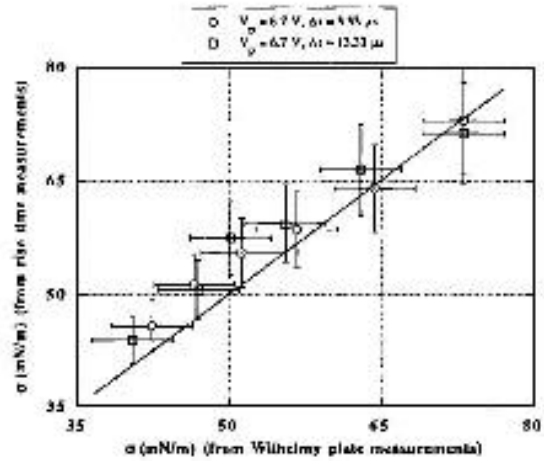


FIG. 4.6 – Comparaison des mesures de Cinbis par la dynamique de la déformation avec des mesures réalisées par la technique de Wilhelmy [6].

Fréquence (MHz)	Ouverture numérique du transducteur	$\tau_{exp}$ ( $\mu s$ )	$\tau_{theo}$ ( $\mu m$ )	Erreur relative (%)
3,0	3	1270	1577	19,6
3,0	1	312	304	-2,6
10,0	3	263	259	-1,5

Il y a une forte erreur relative dans la première des trois situations testées. C'est celle des trois où le faisceau acoustique est le plus large, la gravité prenant alors plus d'importance. On peut donc penser que l'écart vient du fait que Cinbis a négligé la gravité dans son calcul numérique, hypothèse que nous allons tester dans la suite de ce chapitre.

Des résultats de mesures de tension de surface par cette méthode comparées avec des mesures par la méthode de Wilhelmy sont représentés sur la figure 4.6.

Cette méthode est proche de celle développée dans cette thèse, mais elle néglige les effets visqueux, ainsi que la gravité. Dans la suite de ce travail, nous allons développer un modèle tenant compte de ces paramètres afin d'améliorer la mesure.

#### 4.1.4 Une méthode de mesure de tension de surface sans contact utilisant la pression de radiation optique

Une autre méthode de mesure de tension de surface utilisant cette fois les déformations d'interfaces par la pression de radiation optique a été développée par S. Mitani et K. Sakai à l'université de Tokyo [7]. Elle repose sur un principe voisin de la précédente (figure 4.7).

Deux faisceaux laser sont utilisés : un faisceau pompe (Nd-YAG) de 400 mW modulé à l'aide d'un modulateur acousto-optique (AOM) est focalisé sur l'interface fluide et la déforme par pression de radiation optique. La hauteur  $h$  de la déformation est modulée suivant la modulation de ce laser, sa réponse à cette modulation dépendant de sa tension interfaciale. Un faisceau sonde (He-Ne) est réfléchi par l'interface au niveau de la déformation puis passe à travers un diaphragme avant d'atteindre une photodiode. La

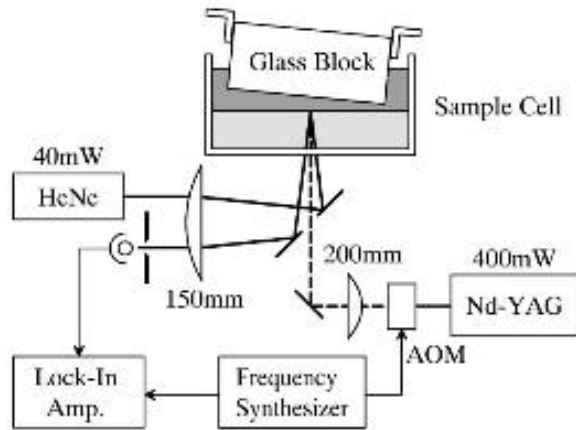


FIG. 4.7 – Montage utilisé par Mitani et Sakai pour mesurer la tension interfaciale de deux fluides à partir des ondes de surface générées par un faisceau laser modulé à l'interface entre deux fluides [7].

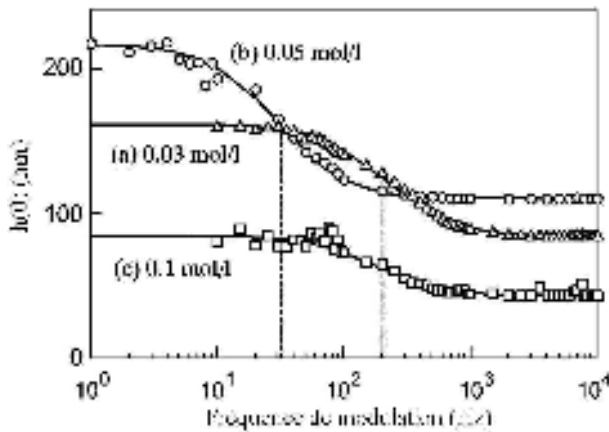


FIG. 4.8 – Spectres de réponse de l'interface obtenus par Sakai pour différents systèmes heptane-eau-AOT avec différentes concentrations en NaCl. Les lignes pointillées représentent les fréquences de coupure des trois courbes. L'axe vertical est renormalisé de sorte que la limite à basse fréquence du signal de réponse dynamique corresponde à la hauteur de la déformation mesurée en statique [7].

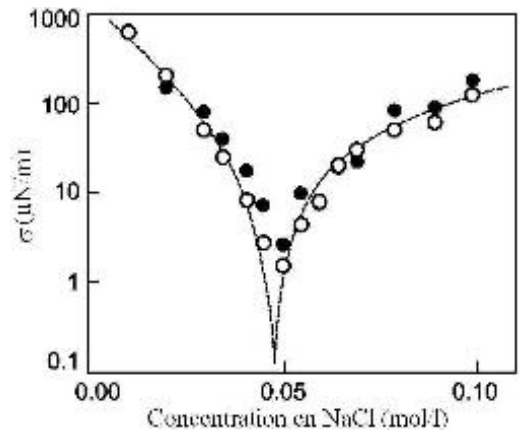


FIG. 4.9 – Tension interfaciale mesurée par Sakai sur le système heptane-eau-AOT en fonction de la concentration en NaCl présente [7].

direction du faisceau réfléchi dépendant de la pente de la déformation en son point d'incidence, l'intensité lumineuse passant à travers le diaphragme en dépend également. Ainsi, à partir de la dynamique de l'intensité lumineuse recueillie par la photodiode, on peut remonter à la dynamique de la déformation elle-même, donc à la tension interfaciale (figure 4.8). L'équation de dispersion liant la fréquence angulaire complexe  $\omega^*$  (dont la partie réelle représente la fréquence du signal et la partie imaginaire le temps caractéristique de

décroissance) au vecteur d'onde  $k$  est la suivante :

$$\left(i\omega^* + 2\frac{\eta}{\rho}k^2\right)^2 + \frac{\sigma}{\rho}k^3 + \frac{\Delta\rho}{\rho}gk = 4\frac{\eta^2}{\rho^2}k^4 \left(1 + \frac{i\rho\omega^*}{\eta k^2}\right)^{1/2} \quad (4.9)$$

$\eta = \eta_1 + \eta_2$  est la viscosité totale des deux fluides,  $\rho = \rho_1 + \rho_2$  est leur masse volumique totale,  $\Delta\rho = \rho_1 - \rho_2$  est la différence entre leurs masses volumiques.

Le bloc de verre permet d'éviter les ondes parasites à l'interface et d'éviter les réflexions parasites des faisceaux sur l'interface supérieure, en réfléchissant dans une autre direction la lumière qui traverse l'interface.

Cette méthode permet de mesurer des tensions de surface allant de  $10^{-1}$  à  $10^{-6}$  mN/m (figure 4.9). Ici, le modèle prend en compte les effets gravitationnels et visqueux. Par contre, la mesure nécessite un laser YAG pour déformer l'interface.

## 4.2 Principe de la méthode de mesure de tensions interfaciales que j'ai utilisée au cours de ma thèse

Ces deux dernières méthodes, qui sont assez précises d'après leurs auteurs, ne peuvent être appliquées simplement à mon expérience dans la mesure où elles nécessitent toutes deux du matériel assez lourd (un microscope confocal pour l'une et un laser de 400 mW pour l'autre). Je me suis cependant inspiré de ces deux méthodes pour en mettre au point une troisième, qui est particulièrement adaptée à la mesure *in situ* et sans contact de la tension interfaciale mise en jeu dans mon expérience car elle utilise directement la déformation créée par la pression de radiation acoustique : l'étude de la dynamique de la courbure de la déformation nous permettra de déduire  $\sigma$ .

Le principe de cette méthode est schématisé sur la figure 4.10. Un faisceau laser incident arrive verticalement au niveau de l'axe de la déformation, son col étant situé sur l'interface fluide. En aval de l'interface, un iris en laisse passer une section constante, dont la puissance est ensuite mesurée par un compteur de photons. Lorsqu'il n'y a pas de déformation (à gauche), l'interface n'a pas d'influence sur le laser. Lorsqu'il y a une déformation (à droite), le laser est focalisé ou défocalisé suivant le sens de la déformation et le signe de  $n - n'$ . La puissance lumineuse passant par l'iris est alors modifiée. L'évolution temporelle de la puissance lumineuse mesurée permettra de remonter à la dynamique de courbure de l'interface et donc à la tension interfaciale.

On suppose que la taille de la déformation est très petite devant la distance séparant l'interface et l'iris (la taille de la déformation est très exagérée sur la figure 4.10. En pratique, celle-ci mesure environ 10  $\mu\text{m}$  de haut dans cette expérience et environ 80 cm séparent l'interface et l'iris). On assimile l'interface fluide à un dioptre sphérique séparant le fluide d'indice  $n$  du fluide d'indice  $n'$ . On peut alors modéliser ce problème par le montage représenté sur la figure 4.11.

Calculons alors la puissance lumineuse mesurée par le détecteur en fonction de la courbure de la déformation.

On note  $P$  la puissance totale du faisceau avant qu'il traverse l'iris,  $P_0$  la puissance du faisceau traversant l'iris en l'absence de déformation,  $P_\kappa$  la puissance du faisceau traversant l'iris lorsque la courbure de l'interface vaut  $\kappa$ ,  $\Omega_0$  la largeur caractéristique du faisceau au niveau de l'iris en l'absence de déformation, et  $\Omega_\kappa$  sa largeur caractéristique au niveau de l'iris lorsqu'il a été focalisé ou défocalisé par une déformation de courbure  $\kappa$ .

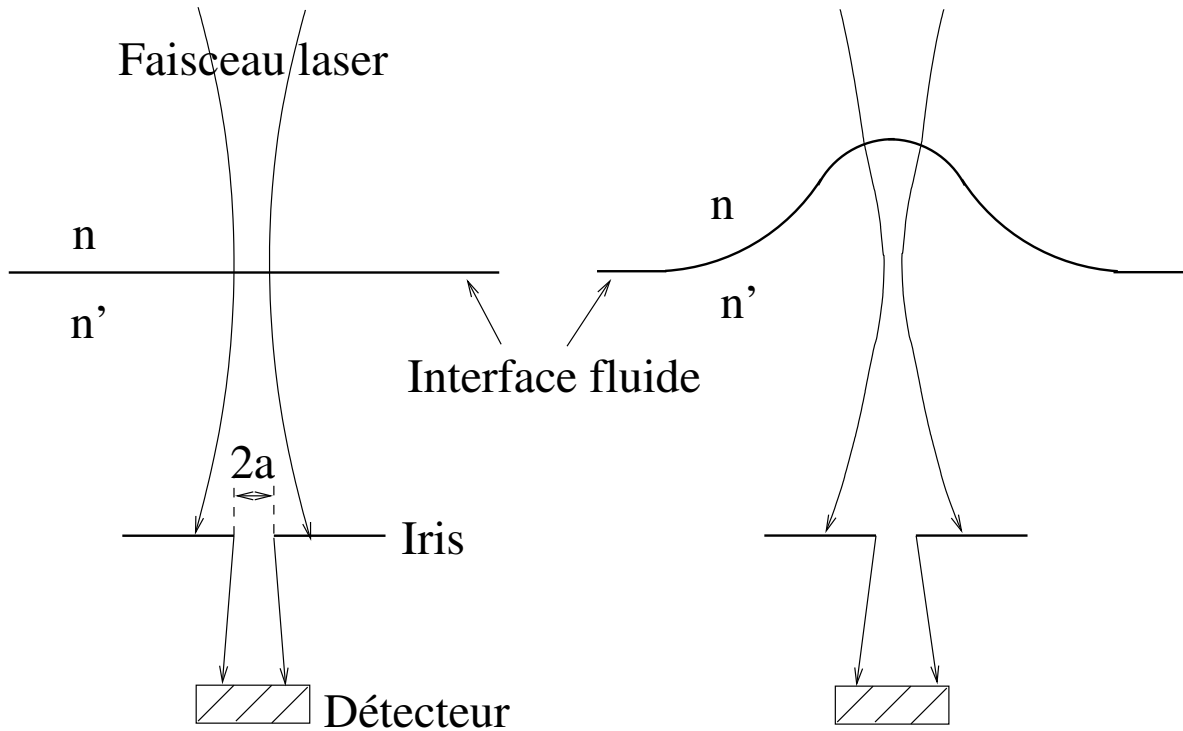


FIG. 4.10 – Principe de la mesure de tension de surface utilisée pendant ma thèse.

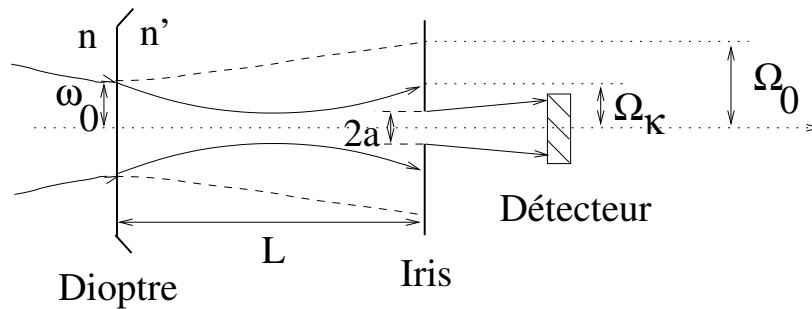


FIG. 4.11 – Modélisation du problème présenté sur la figure 4.10 : la déformation est modélisée par un dioptre sphérique dont la focale est  $f = \frac{2n'}{\kappa(n'-n)}$  [8]. Le facteur 2 vient du fait que la courbure de l'interface, considérée comme sphérique, vaut  $\kappa = 2/R$ ,  $R$  étant le rayon de la sphère. Le faisceau tracé en pointillé représente le faisceau en aval du dioptre si celui-ci est plan (c'est-à-dire en l'absence de déformation).

La puissance mesurée par le détecteur en l'absence de déformation vaut

$$P_0 = 2\pi I_0 \int_0^a e^{-2r^2/\Omega_0^2} r dr \quad (4.10)$$

$I_0$  étant l'intensité sur l'axe du faisceau non modifié par l'interface et  $a$  le rayon de l'iris. En présence de déformation, le détecteur mesure la puissance

$$P_\kappa = 2\pi I_0 \frac{\int_0^\infty e^{-2r^2/\Omega_0^2} r dr}{\int_0^\infty e^{-2r^2/\Omega_\kappa^2} r dr} \int_0^a e^{-2r^2/\Omega_\kappa^2} r dr \quad (4.11)$$

et donc le rapport de ces deux puissances vaut

$$\frac{P_\kappa}{P_0} = \frac{\int_0^\infty e^{-2r^2/\Omega_0^2} r dr \int_0^a e^{-2r^2/\Omega_\kappa^2} r dr}{\int_0^\infty e^{-2r^2/\Omega_\kappa^2} r dr \int_0^a e^{-2r^2/\Omega_0^2} r dr} \quad (4.12)$$

$$= \frac{1 - e^{-2a^2/\Omega_\kappa^2}}{1 - e^{-2a^2/\Omega_0^2}} \quad (4.13)$$

La largeur  $\Omega_\kappa$  caractéristique du faisceau laser au niveau de l'iris vaut, suivant le calcul réalisé dans l'annexe D (expression D.27) :

$$\Omega_\kappa = \omega_0 \sqrt{1 + \left(\frac{L}{z_0}\right)^2 - \frac{2L}{f} + \left(\frac{L}{f}\right)^2} \quad (4.14)$$

$\omega_0$  étant le col du faisceau incident,  $L$  la distance entre l'interface fluide et l'iris,  $f$  la focale du dioptré et  $z_0$  la longueur de Rayleigh du faisceau incident :  $z_0 = \frac{\pi\omega_0^2}{\lambda}$  ( $\lambda$  est la longueur d'onde du laser.)

Il en résulte que

$$\Omega_\kappa^2 = \Omega_0^2 - \omega_0^2 \left( \frac{2L}{f} - \left(\frac{L}{f}\right)^2 \right) \quad (4.15)$$

et donc

$$\frac{P_\kappa}{P_0} = \frac{1 - e^{-2a^2/(\Omega_0^2 - \omega_0^2(\frac{2L}{f} - (\frac{L}{f})^2))}}{1 - e^{-2a^2/\Omega_0^2}} \quad (4.16)$$

soit, en supposant que  $f \gg L$  :

$$\frac{P_\kappa}{P_0} = 1 + \frac{4a^2\omega_0^2}{\Omega_0^4} \frac{e^{-2a^2/\Omega_0^2}}{1 - e^{-2a^2/\Omega_0^2}} \frac{L}{f} \quad (4.17)$$

$$= 1 + \frac{2a^2\omega_0^2 L}{\Omega_0^4} \frac{e^{-2a^2/\Omega_0^2}}{1 - e^{-2a^2/\Omega_0^2}} \frac{(n' - n)}{n'} \kappa \quad (4.18)$$

Il faut veiller à travailler avec de toutes petites déformations pour que l'hypothèse  $L \ll f$  soit vérifiée. Dans ce cas, la luminosité détectée est une fonction linéaire de la courbure de la déformation.

Une variante, que j'ai beaucoup utilisée, consiste à travailler non pas en transmission, mais en réflexion. Au lieu de mesurer la puissance du faisceau transmis par la déformation, on mesure celle du faisceau réfléchi. Ceci est souvent préférable car dans le montage en transmission, le faisceau doit passer par un barreau de verre inséré le long de l'axe du transducteur, comme sur la figure 3.14. Or, les barreaux de verre que nous possédions n'étaient pas de très bonne qualité et la qualité du faisceau en sortie était souvent assez mauvaise, ce qui peut réduire la fiabilité de la mesure.

Le principe de la mesure est alors représenté sur la figure 4.12 et modélisé par le montage représenté sur la figure 4.13.

Cette fois, l'interface fluide joue le rôle d'un miroir. Le faisceau laser incident arrive verticalement au niveau de l'axe de la déformation, son col étant situé sur l'interface fluide. Un iris laisse passer une section constante du faisceau réfléchi, dont la puissance est ensuite mesurée par un compteur de photons. Lorsqu'il n'y a pas de déformation (à gauche de la figure 4.12), l'interface n'a pas d'influence sur le laser. Lorsqu'il y a une déformation (à droite), le laser est focalisé ou défocalisé suivant le sens de la déformation. La puissance



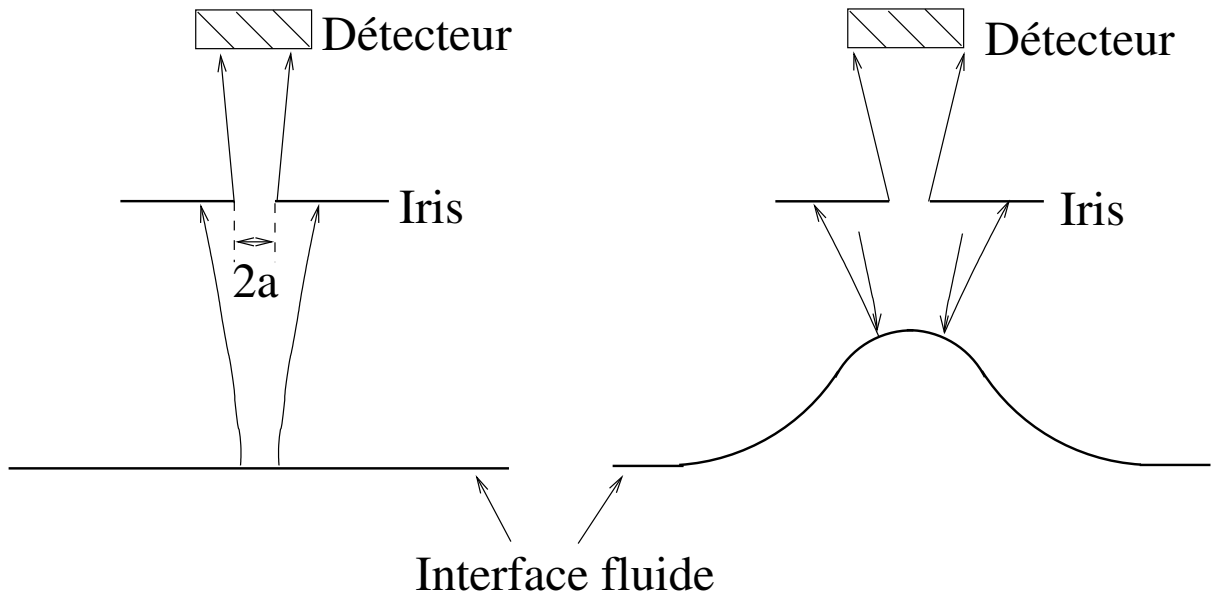
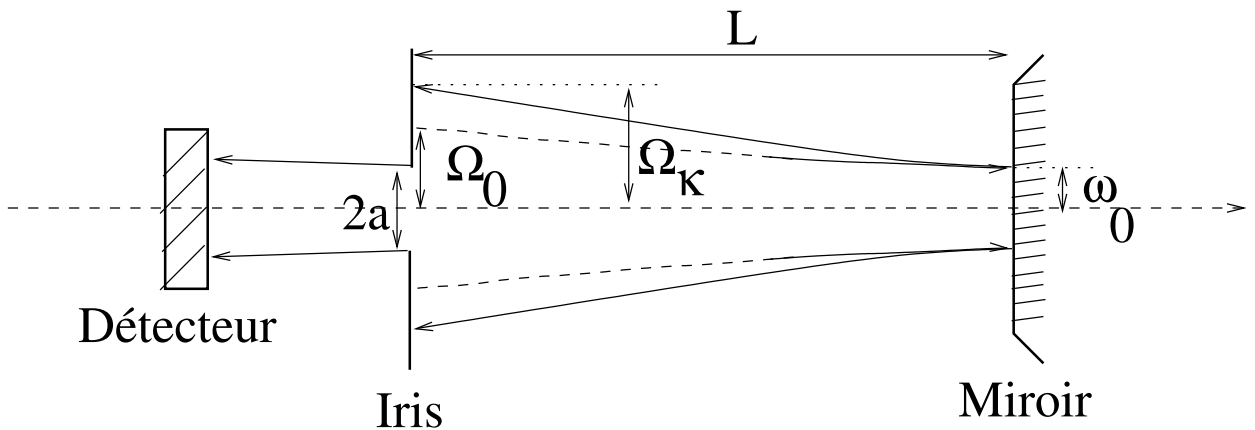


FIG. 4.12 – Principe de la mesure en réflexion.


 FIG. 4.13 – Modélisation du problème présenté sur la figure 4.12 : la déformation est modélisée par un miroir sphérique dont la focale est  $f = \frac{1}{\kappa}$  [8]. Le faisceau tracé en pointillé représente le faisceau réfléchi si le miroir est plan (c'est-à-dire en l'absence de déformation).

lumineuse passant par l'iris est alors modifiée. L'évolution temporelle de la puissance lumineuse mesurée permettra de remonter à la dynamique de courbure de l'interface et donc à la tension interfaciale.

Dans ce cas de figure, l'expression 4.18 devient

$$\frac{P_{\kappa}}{P_0} = 1 + \frac{4a^2\omega_0^2 L}{\Omega_0^4} \frac{e^{-2a^2/\Omega_0^2}}{1 - e^{-2a^2/\Omega_0^2}\kappa} \quad (4.19)$$

Dans les deux cas (transmission ou réflexion), tant que  $f$  reste très grand devant  $L$ , c'est-à-dire que le rayon de courbure de la déformation est grand devant la distance séparant la déformation de l'iris, la puissance lumineuse détectée par le compteur de photons est une

fonction affine en  $\kappa$  et sa dynamique permet donc de déduire directement la dynamique de la courbure  $\kappa$  de la déformation, à un facteur multiplicatif près.

Dans ce paragraphe, on a fait plusieurs hypothèses :

- On a supposé que la déformation était sphérique, et donc que le col du faisceau laser incident  $\omega_0$  était très petit devant la taille caractéristique de la déformation. Nous allons vérifier cela dans la suite.
- On a supposé que le faisceau était en partie intercepté par l'iris, ce qui signifie que le rayon de celui-ci doit rester inférieur à la largeur caractéristique  $\Omega_\kappa$  du faisceau incident sur l'iris. Cela suppose que la déformation ne fasse pas trop converger le faisceau, et donc qu'elle reste relativement petite. Au minimum, le rayon caractéristique du faisceau sur l'iris vaut  $\sqrt{\Omega_0^2 - \omega_0^2}$  lorsque  $f=L$ . Cette condition était vérifiée dans toutes les expériences.
- On a également supposé que le rayon de courbure de la déformation restait grand devant la distance séparant l'interface de l'iris. Nous allons discuter cette condition dans la suite.
- On a supposé que la totalité de la lumière passant l'iris arrive sur le détecteur, condition vérifiée dans toutes les expériences que j'ai réalisées.

Cette méthode de mesure de la tension de surface  $\sigma$  est particulièrement adaptée à mon expérience, dans la mesure où elle peut être réalisée *in situ*. En effet, le seul instrument à introduire dans la cellule afin de mesurer  $\sigma$  est le même transducteur que celui que j'utilise dans toutes mes autres expériences. Elle est par ailleurs sans contact, ce qui évite de contaminer l'interface par des impuretés.

## 4.3 Montage utilisé

### 4.3.1 Description du montage

Le montage que j'ai utilisé pour mesurer des tensions de surface est schématisé sur la figure 4.14 et photographié sur la figure 4.15.

Pour cette mesure de la tension de surface, le transducteur envoyait à l'interface des trains d'onde acoustique successifs de 20 périodes toutes les 10 ms, c'est-à-dire suffisamment courts pour ne pas interférer par réflexion sur l'interface et le transducteur, et assez séparés les uns des autres pour que l'interface ait le temps de relaxer entre deux trains d'onde successifs. Aussi, la déformation croissait lorsque le train d'onde arrivait à l'interface, continuait à croître par inertie après le passage du train d'onde, puis décroissait et disparaissait avant que le train d'onde suivant n'arrive. Le montage présenté sur la figure 4.14 permet de remonter à la dynamique de la déformation. Pour pouvoir déduire la tension interfaciale de cette expérience, il faut modéliser fidèlement cette dynamique, ce qui est l'objet du paragraphe 4.4.

Le laser est un laser helium-néon de 15 mW, dont le col, situé au fond du tube, est de l'ordre de 500  $\mu\text{m}$ . Le faisceau traverse un système de 4 lentilles  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$  et  $L_4$ , ceci afin de minimiser sa taille au niveau de l'interface : le laser doit en effet arriver très précisément sur le sommet de la déformation et être suffisamment fin pour qu'il soit valable d'assimiler la déformation par une lentille ou un miroir sphérique dont le rayon serait le rayon de courbure de la déformation sur son axe.

Puis le faisceau traverse un prisme de Glan PG, qui le polarise, et un cube séparateur CS, qui réfléchit vers le haut la composante polarisée perpendiculairement au plan du

schéma, et transmet sans modification de direction la composante polarisée dans le plan du schéma. Les miroirs  $M_1$  à  $M_5$  sont destinés à diriger le faisceau de sorte qu'il arrive verticalement sur le sommet de la déformation, puis à le ramener vers le cube séparateur, qui le dirige ensuite vers l'iris et le détecteur CP. Le détecteur est un compteur de photons. Chaque photon qui arrive sur la surface sensible du compteur de photons produit un pulse électrique en sortie de celui-ci. L'analyseur multicanal (AMC) branché en sortie du compteur de photons détecte chaque pulse et compte, en fonction du temps  $t$  écoulé depuis l'instant de déclenchement de son acquisition, le nombre de pulses reçus à l'instant  $t$ . L'analyseur multicanal accumule plusieurs acquisitions successives en déclenchant chaque acquisition juste avant le début de l'émission d'un train d'onde par le transducteur. Puis il transfère les résultats à un ordinateur. On obtient ainsi un signal temporel directement proportionnel à la puissance lumineuse reçue par le compteur de photons.

La cellule peut être translatée le long des axes  $x$  et  $y$  grâce à des platines microcontrôle, ce qui permet de régler l'arrivée du faisceau sur le sommet de la déformation, et le long de l'axe  $z$  grâce au réglage vertical du support boy sur lequel elle est montée, ce qui permet de placer l'interface au niveau du col du faisceau laser.

### 4.3.2 Intérêt du prisme de Glan et du cube séparateur

Le faisceau doit à un moment donné traverser le transducteur, qui est muni d'un barreau de verre posé le long de son axe (figure 3.14). Le barreau de verre est cependant un mauvais élément d'optique, qui altère beaucoup le faisceau laser. Pour limiter l'effet de la mauvaise qualité du barreau sur la mesure, on peut décider de faire traverser par le laser d'abord l'interface, puis le transducteur : dans ce cas, les aberrations du barreau ne se répercutent pas sur la façon dont le faisceau est focalisé par la déformation. Suivant que le transducteur est en haut ou en bas de la cellule, on doit alors pouvoir choisir la direction de propagation du faisceau. C'est le rôle du prisme de Glan et du cube séparateur.

La composante du faisceau polarisée dans le plan du schéma traverse le cube séparateur, se réfléchit sur les miroirs  $M_1$  à  $M_3$ , entre dans la cellule, traverse l'interface en venant du bas, ressort par le haut de la cellule, se réfléchit sur les miroirs  $M_4$  et  $M_5$ , puis traverse à nouveau le cube séparateur avant de traverser l'iris et d'arriver dans le détecteur. La composante polarisée dans la direction perpendiculaire au schéma est réfléchie vers le haut par le cube séparateur, se réfléchit sur les miroirs  $M_5$  et  $M_4$ , traverse l'interface en passant par le haut, se réfléchit sur les miroirs  $M_3$ ,  $M_2$  et  $M_1$ , puis est à nouveau réfléchie vers l'iris et le détecteur par le cube séparateur.

Le prisme de Glan qui précède le cube séparateur permet de choisir la direction de polarisation du faisceau laser et donc de choisir si celui-ci va rentrer la cellule en entrant par le haut ou par le bas.

Une autre façon, déjà décrite précédemment, de s'affranchir de la mauvaise qualité du barreau est de travailler sur le faisceau réfléchi par l'interface au lieu du faisceau transmis, le faisceau n'ayant alors plus à traverser le transducteur. Dans ce cas, il faut disposer un cache sur le trajet du faisceau transmis pour éviter que celui-ci ne gêne la mesure. Il faut par ailleurs placer une lame quart-d'onde (non-représentée sur la figure 4.14 mais visible sur la photo 4.15) sur le trajet du faisceau entre le cube séparateur et l'interface (comme sur la figure 4.16). Le faisceau qui sort du cube séparateur CS polarisé rectilignement traverse la lame quart d'onde, ce qui le polarise circulairement. Ce faisceau polarisé circulairement se réfléchit sur l'interface (représentée sur la figure 4.16 par le miroir M) puis traverse à nouveau la lame quart d'onde, ce qui le polarise rectilignement dans la direction ortho-

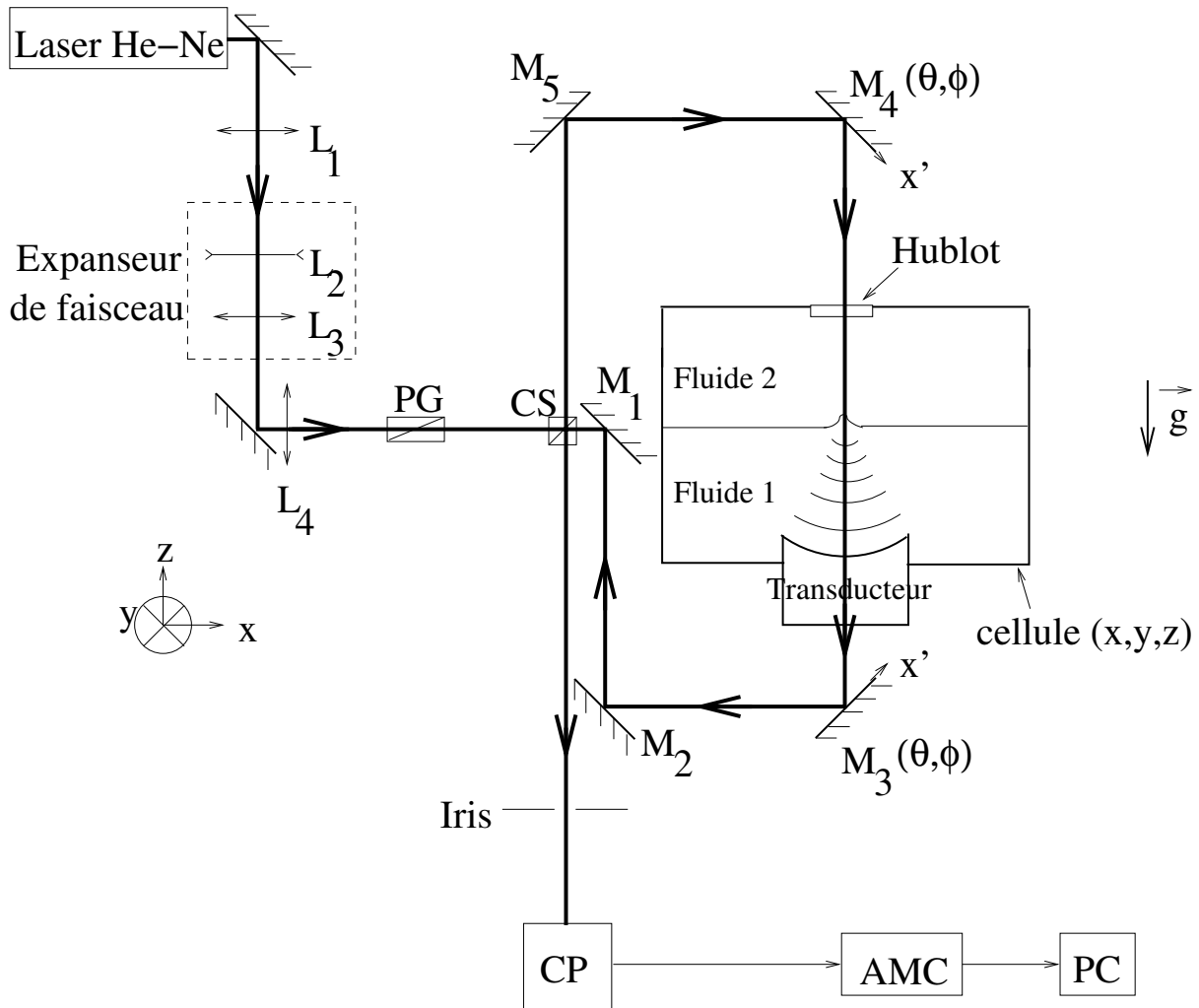


FIG. 4.14 – Montage en transmission utilisé pour mesurer la tension interfaciale de deux fluides. Le plan de la feuille correspond à un plan vertical dans l'expérience. Les miroirs  $M_3$  et  $M_4$  peuvent tourner d'un angle  $\theta$  autour de l'axe  $\vec{x}'$  associé à chaque miroir et d'un angle  $\phi$  autour de l'axe  $\vec{z}$  afin de régler la verticalité du faisceau laser traversant l'interface. La cellule peut être translattée le long des axes  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$  pour régler l'arrivée du faisceau sur le sommet de la déformation et le long de l'axe  $\vec{z}$  pour placer l'interface sur le col du faisceau laser.

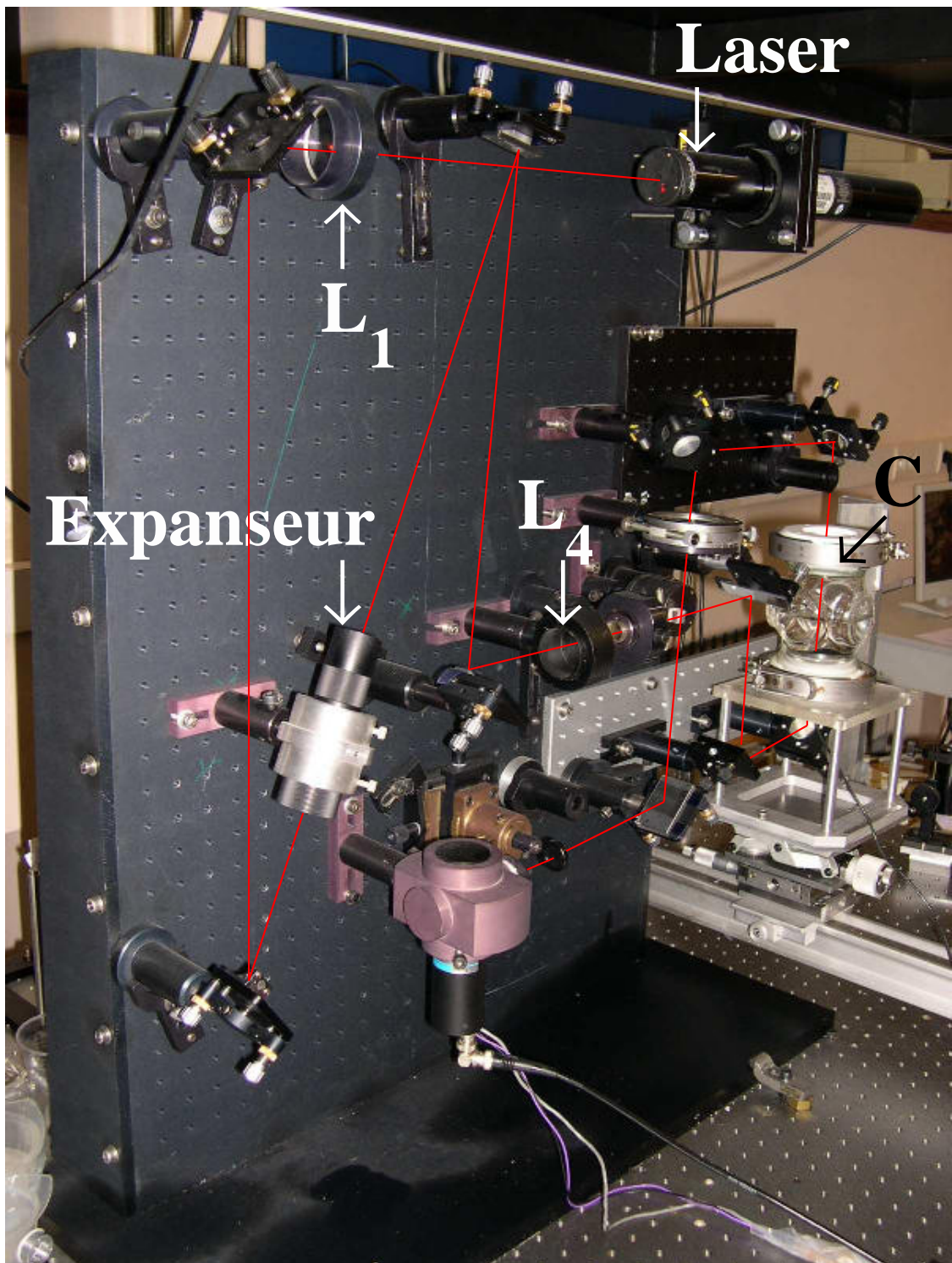


FIG. 4.15 – Photographie du montage utilisé pour mesurer la tension interfaciale de deux fluides. Le trajet du faisceau laser est matérialisé par la ligne rouge. L'expansor de faisceau est constitué des lentilles  $L_2$  et  $L_3$ . La lettre  $C$  indique la cellule où se trouvent les deux fluides dont on mesure la tension interfaciale.

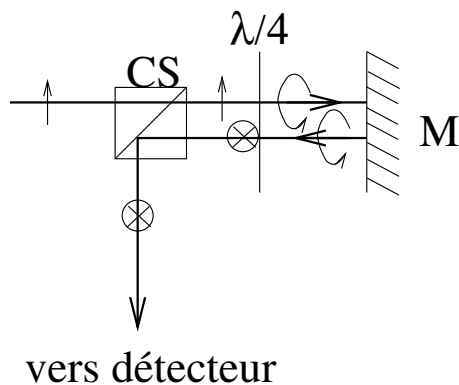


FIG. 4.16 – Principe du montage en réflexion

gonale à sa direction de polarisation initiale. Cela permet au faisceau, au niveau du cube séparateur, d'être dirigé vers l'iris et le détecteur au lieu de revenir sur ses pas.

### 4.3.3 Col du faisceau au niveau de la déformation

Pour pouvoir assimiler la déformation à une lentille sphérique (ou à un miroir sphérique si l'on travaille en réflexion), il faut que le faisceau laser arrivant sur le sommet de la déformation soit très fin par rapport à la taille caractéristique de la déformation. Or, le col du faisceau émis par le laser vaut  $409 \pm 20 \mu\text{m}$  (annexe D). La déformation ayant une largeur typique de l'ordre de 1 mm, il faut que le faisceau incident soit beaucoup plus fin que celui qui est directement émis par le laser, et il faut donc focaliser celui-ci. C'est le rôle du jeu de quatre lentilles  $L_1$  à  $L_4$  présentes dans le montage. Nous avons conçu le montage pour obtenir un col en aval de la lentille  $L_4$  de l'ordre de 50 à 100  $\mu\text{m}$ .

Considérons le schéma de la figure 4.17. La lentille  $L_n$  ( $n = 1$  à 4) de distance focale

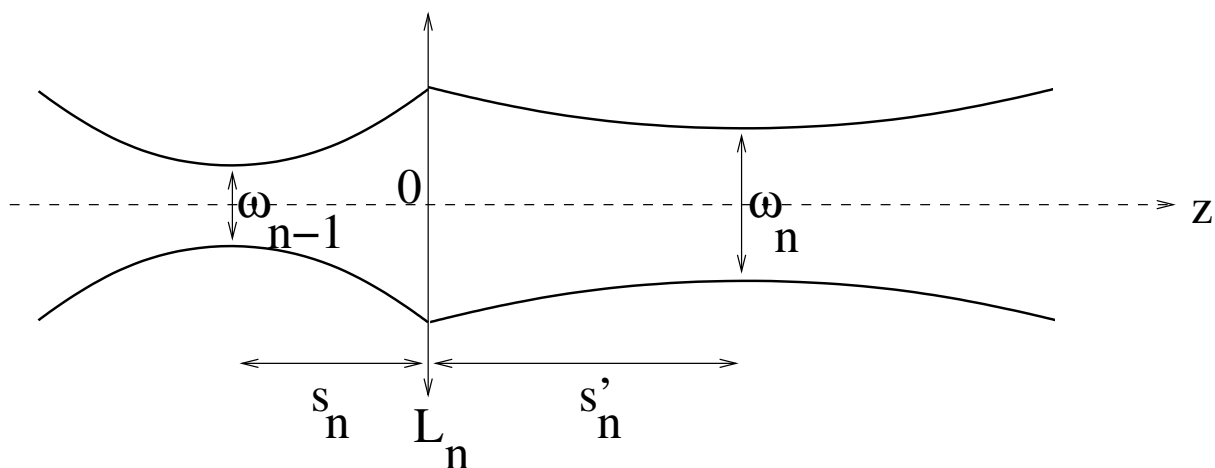


FIG. 4.17 – Faisceau gaussien traversant une lentille

$f_n$  est placée dans le plan  $z = 0$ . Le faisceau gaussien incident dont le col, de largeur  $\omega_{n-1}$ , est situé en  $z = -s_n$ , traverse cette lentille. Le faisceau transmis est un faisceau gaussien dont le col, de largeur  $\omega_n$ , est situé en  $z = s'_n$ . La relation entre  $\omega_{n-1}$  et  $\omega_n$  est donnée par

l'expression suivante [9] :

$$\frac{\omega_n}{\omega_{n-1}} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{s_n}{f_n}\right)^2 + \left(\frac{\pi\omega_{n-1}^2}{f_n\lambda}\right)^2}} \quad (4.20)$$

$\lambda$  étant la longueur d'onde du laser.

Le col  $\omega_4$  du faisceau en aval de la lentille  $L_4$  s'exprime donc en fonction du col  $\omega_3$  du faisceau en amont de cette lentille à partir de la formule

$$\omega_4 = \frac{\omega_3}{\sqrt{\left(1 - \frac{s_4}{f_4}\right)^2 + \left(\frac{\pi\omega_3^2}{f_4\lambda}\right)^2}} \quad (4.21)$$

La relation de conjugaison s'écrit [9] :

$$s'_n - f = \frac{f^2}{(z - f)^2 + z_0^2} (s_n - f) \quad (4.22)$$

Le terme en  $\left(1 - \frac{s_4}{f_4}\right)^2$  est de l'ordre de l'unité. Par conséquent, si  $\omega_3$  est tel que  $\left(\frac{\pi\omega_3^2}{f_4\lambda}\right)^2 \gg 1$ , c'est-à-dire  $\omega_3 \gg \sqrt{\frac{f_4\lambda}{\pi}}$ , on peut écrire

$$\omega_4 = \frac{f_4\lambda}{\pi\omega_3} \quad (4.23)$$

Plus  $\omega_3$  est grand, plus  $\omega_4$  est petit, à condition que  $\omega_3 \gg \sqrt{\frac{f_4\lambda}{\pi}}$ , soit  $\omega_3 \gg \sqrt{\frac{0,55 \times 632,10^{-9}}{\pi}}$  pour une lentille  $L_4$  de focale 55 cm, soit  $\omega_3 \gg 330 \mu\text{m}$ .

Le rôle de l'expandeur de faisceau constitué des lentilles  $L_2$  et  $L_3$  est d'élargir au maximum le faisceau en amont de la lentille  $L_4$ . Le rôle de la lentille  $L_1$  est de projeter le col du faisceau émis par le laser au foyer objet de la lentille  $L_2$ .

Les lentilles  $L_1$ ,  $L_2$  et  $L_3$  sont disposées de sorte que le col du faisceau amont se trouve proche du plan focal objet de la lentille, le col du faisceau aval se trouvant alors proche de son plan focal image (expression 4.22) :  $70 \pm 2$  cm séparent le fond du laser de la lentille  $L_1$ .  $68 \pm 2$  cm séparent les lentilles  $L_1$  et  $L_2$ .  $10 \pm 0,1$  cm séparent  $L_2$  et  $L_3$ .  $82 \pm 2$  cm séparent  $L_3$  et  $L_4$ . La lentille  $L_1$  est une lentille convergente de focale  $f_1 = 70$  cm. Les lentilles  $L_2$  et  $L_3$  sont les deux lentilles constituant un expandeur de faisceau *Melles Griot*.  $L_2$  est une lentille divergente de focale  $f_2 = -2$  cm et  $L_3$  est une lentille convergente de focale  $f_3 = 12$  cm.  $L_4$  est une lentille convergente de focale  $f_4 = 55$  cm.

Comme indiqué dans l'annexe D, le col du faisceau en sortie de l'expandeur de faisceau vaut  $\omega_3 = 2,1 \pm 0,1$  mm, et le col en sortie de la lentille  $L_4$  vaut  $75 \pm 15 \mu\text{m}$  et se trouve à  $60,5 \pm 1$  cm de la lentille. Dans toutes les expériences, j'ai placé l'interface fluide au niveau du col du faisceau en sortie de la lentille  $L_4$ .

## 4.4 Modélisation dynamique de la déformation à un fluide

### 4.4.1 Expression générale de la courbure de la déformation

Cette étude adapte une étude des déformations d'interfaces fluides par la pression de radiation électromagnétique réalisée par G. V. Ostrovskaja en 1987 [10]. On considère ici

dans un premier temps la surface d'un liquide surmonté par du vide. Dans ce paragraphe, nous allons faire un calcul général, que nous appliquerons à un fluide non-visqueux dans le paragraphe 4.4.2 et à un fluide visqueux dans le paragraphe 4.4.3. Puis, dans le paragraphe 4.4.4, nous adapterons ces calculs au cas de l'interface entre deux fluides.

On considère les fluides comme incompressibles. En effet, on peut ici décomposer la vitesse des particules fluides en deux composantes :

- Une composante compressible, correspondant à l'onde acoustique, qui oscille à une fréquence de 2,25 MHz donc à une période de 0,5  $\mu\text{s}$  et qui est de moyenne nulle.
- Une composante incompressible, correspondant à la dynamique de la déformation, qui évolue sur des temps beaucoup plus longs, de l'ordre de la ms.

Ici, nous étudions la dynamique de la déformation. C'est donc cette deuxième composante incompressible de la vitesse que nous étudions, la composante compressible pouvant être moyennée sur le temps du fait de son temps caractéristique beaucoup plus court, donc pouvant être considérée comme nulle.

En utilisant l'équation de Navier-Stokes instationnaire linéarisée, l'équation de conservation de la masse et l'équation de Laplace, Ostrovskaia démontre que dans le cas d'une interface liquide/vide, le liquide étant incompressible et de profondeur infinie, la déformation  $h$  de l'interface sous l'action d'une pression extérieure  $\Pi(r, t)$  varie en fonction de  $r$  et  $t$  suivant la loi

$$h(r, t) = \int_0^t \int_0^\infty k J_0(kr) W(t, k) dk dt \quad (4.24)$$

où  $W(t, k)$  est la transformée de Laplace inverse de la fonction

$$\bar{W}(s, k) = \frac{1}{\rho \nu^2 k^3} \frac{\check{\Pi}(s, k) s}{(X^2(s, k) + 1)^2 - 4X(s, k) + \Delta(k)} \quad (4.25)$$

en notant

$$\check{\Pi}(s, k) = \int_0^\infty e^{-st} \int_0^\infty r J_0(kr) \Pi(r, t) dr dt \quad (4.26)$$

$$X^2(s, k) = 1 + \frac{s}{\nu k^2} \quad (4.27)$$

$$\Delta(k) = \frac{gk + \frac{\sigma}{\rho} k^3}{(\nu k^2)^2} \quad (4.28)$$

$$= \left( \frac{\Omega(k)}{\omega(k)} \right)^2 \quad (4.29)$$

Ici,  $\rho$  désigne la masse volumique du fluide,  $\nu$  sa viscosité cinématique,  $\sigma$  sa tension de surface et  $g$  l'accélération de la pesanteur.  $1/\omega(k) = 1/(\nu k^2)$  est le temps caractéristique de diffusion de la quantité de mouvement par viscosité sur l'échelle spatiale caractéristique  $2\pi/k$  et  $1/\Omega(k) = 1/\sqrt{gk + \frac{\sigma}{\rho} k^3}$  est le temps caractéristique de la dynamique inertielle de la déformation d'interface de taille  $2\pi/k$ . Si  $\Delta(k) \gg 1$ , la diffusion visqueuse de quantité de mouvement n'a pas le temps de se produire durant la déformation de l'interface : l'interface se déforme en régime non-visqueux. Inversement, si  $\Delta(k) \ll 1$ , la diffusion visqueuse de quantité de mouvement a le temps de se produire durant la déformation de l'interface : l'interface se déforme en régime visqueux.



La courbure de la déformation vaut, dans le cas de petites déformations :

$$\kappa(r, t) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r h'(r)) \quad (4.30)$$

$$= \frac{h'(r)}{r} + h''(r) \quad (4.31)$$

$$= - \int_0^t \int_0^\infty k^3 J_0(kr) W(t, k) dk dt \quad (4.32)$$

Dans le problème qui nous intéresse ici, la pression extérieure à laquelle est soumise l'interface fluide est la pression de radiation de l'onde acoustique, proportionnelle au carré de la pression acoustique incidente :

$$\Pi(r, t) = C p_{i0}^2 \phi(r) \psi(t) \quad (4.33)$$

avec<sup>1</sup>  $\phi(r) = \left( \frac{J_1\left(\frac{\pi r}{\lambda}\right)}{\frac{\pi r}{\lambda}} \right)^2$  et  $\psi(t) = H(\Delta t - t)H(t)$ ,  $H$  désignant la fonction de Heaviside et  $\Delta t$  la durée du train d'onde ultrasonore, le temps  $t = 0$  correspondant à l'instant où le train d'onde arrive à l'interface.  $p_{i0}$  est l'amplitude de l'onde acoustique en  $r = 0$  et  $\lambda$  la longueur d'onde de l'onde acoustique.  $C$  est une constante.

$$\check{\Pi}(s, k) = \int_0^\infty e^{-st} \int_0^\infty r J_0(kr) \Pi(r, t) dr dt \quad (4.34)$$

$$= C p_{i0}^2 \int_0^\infty \psi(t) e^{-st} dt \int_0^\infty r J_0(kr) \phi(r) dr \quad (4.35)$$

$$= C p_{i0}^2 \bar{\psi}(s) \tilde{\phi}(k) \quad (4.36)$$

$\tilde{\phi}(k)$  est la transformée de Hankel de  $\phi(r)$  et  $\bar{\psi}(s)$  est la transformée de Laplace de  $\psi(t)$  :

$$\tilde{\phi}(k) = \int_0^\infty r J_0(kr) \phi(r) dr \quad (4.37)$$

$$\bar{\psi}(s) = \int_0^\infty e^{-st} \psi(t) dt \quad (4.38)$$

La courbure de la déformation vaut alors

$$\kappa(r, t) = - \frac{C p_{i0}^2}{\rho \nu^2} \int_0^t \int_0^\infty J_0(kr) \tilde{\phi}(k) w(t, k) dk dt \quad (4.39)$$

où  $w(t, k)$  est la transformée de Laplace inverse de la fonction

$$\bar{w}(s, k) = \frac{s \bar{\psi}(s)}{(X^2(s, k) + 1)^2 - 4X(s, k) + \Delta(k)} \quad (4.40)$$

L'expression de  $\tilde{\phi}(k)$  fait l'objet de l'annexe A :

$$\begin{cases} \tilde{\phi}(k \leq \frac{2\pi}{\lambda}) = \frac{\lambda^2}{2\pi^2} \left( 1 - \frac{\lambda k}{\pi^2} \sqrt{1 - \frac{k^2 \lambda^2}{4\pi^2}} - \frac{2}{\pi} \arcsin\left(\frac{\lambda k}{2\pi}\right) \right) \\ \tilde{\phi}(k > \frac{2\pi}{\lambda}) = 0 \end{cases} \quad (4.41)$$

<sup>1</sup>Ici, nous utilisons le terme source exact sous forme bessélienne, et non son approximation sous forme gaussienne. Les raisons en seront expliquées plus en détail au paragraphe 4.5

$\lambda$  étant la longueur d'onde de l'onde acoustique. On en déduit que

$$\kappa(r, t) = -\frac{Cp_{i0}^2}{\rho\nu^2} \int_0^t \int_0^{\frac{2\pi}{\lambda}} J_0(kr) \tilde{\phi}(k) w(t, k) dk dt \quad (4.42)$$

La hauteur de l'interface, elle, vaut (d'après cette expression, ainsi que les expressions 4.24 et 4.32) :

$$h(r, t) = \frac{Cp_{i0}^2}{\rho\nu^2} \int_0^t \int_0^{\frac{2\pi}{\lambda}} \frac{J_0(kr) \tilde{\phi}(k) w(t, k)}{k^2} dk dt \quad (4.43)$$

Les seules valeurs de  $k$  intervenant dans ce calcul sont celles qui sont inférieures à  $2\pi/\lambda$ . Ainsi, comme  $\Delta(k)$  est décroissante en  $k$ , si  $\Delta(2\pi/\lambda) \gg 1$ , on pourra dire que tous les phénomènes superficiels provoqués par la pression de radiation acoustique évoluent en régime non visqueux.

#### 4.4.2 Expression de la courbure de la déformation en régime non-visqueux

Intéressons-nous tout d'abord au régime non-visqueux, où  $\Delta(k) \gg 1$ . Cela signifie que le temps  $1/\omega(k)$  caractéristique de la diffusion de quantité de mouvement par viscosité sur l'échelle  $2\pi/k$  est grand devant le temps caractéristique  $1/\Omega(k)$  de la dynamique inertielle de la déformation de taille  $2\pi/k$ , et donc les valeurs de  $s$  qui dominent dans l'équation 4.40 sont telles que  $1/\nu k^2 \gg 1/s$ , soit  $X(s, k) \gg 1$ .

Le résultat du calcul, détaillé dans l'annexe E, est le suivant :

Si  $\Delta(k) \gg 1$  pour tout  $k < 2\pi/\lambda$ , la courbure de la déformation est donnée par

$$\begin{aligned} \kappa(r, t < \Delta t) = & \quad (4.44) \\ & -\frac{Cp_{i0}^2}{\rho\nu^2} \int_0^{2\pi/\lambda} J_0(kr) \tilde{\phi}(k) \frac{\omega^2(k)}{\Omega(k)} \frac{e^{-2\omega(k)t} (-2\omega(k) \sin(\Omega(k)t) - \Omega(k) \cos(\Omega(k)t)) + \Omega(k)}{4\omega^2(k) + \Omega^2(k)} dk \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \kappa(r, t \geq \Delta t) = & \\ & -\frac{Cp_{i0}^2}{\rho\nu^2} \int_0^{2\pi/\lambda} J_0(kr) \tilde{\phi}(k) \frac{\omega^2(k)}{\Omega(k)} e^{-2\omega(k)t} \times \\ & \left[ \frac{-2\omega(k) (\sin(\Omega(k)t) - e^{2\omega(k)\Delta t} \sin(\Omega(k)(t - \Delta t)))}{4\omega^2(k) + \Omega^2(k)} \right. \\ & \left. - \frac{\Omega(k) (\cos(\Omega(k)t) - e^{2\omega(k)\Delta t} \cos(\Omega(k)(t - \Delta t)))}{4\omega^2(k) + \Omega^2(k)} \right] dk \quad (4.45) \end{aligned}$$

et sa hauteur par

$$\begin{aligned} h(r, t < \Delta t) = & \quad (4.46) \\ & \frac{Cp_{i0}^2}{\rho\nu^2} \int_0^{2\pi/\lambda} \frac{J_0(kr) \tilde{\phi}(k)}{k^2} \frac{\omega^2(k)}{\Omega(k)} \frac{e^{-2\omega(k)t} (-2\omega(k) \sin(\Omega(k)t) - \Omega(k) \cos(\Omega(k)t)) + \Omega(k)}{4\omega^2(k) + \Omega^2(k)} dk \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 h(r, t \geq \Delta t) = & \\
 & \frac{Cp_{i0}^2}{\rho\nu^2} \int_0^{2\pi/\lambda} \frac{J_0(kr)\tilde{\phi}(k)}{k^2} \frac{\omega^2(k)}{\Omega(k)} e^{-2\omega(k)t} \times \\
 & \left[ \frac{-2\omega(k) (\sin(\Omega(k)t) - e^{2\omega(k)\Delta t} \sin(\Omega(k)(t - \Delta t)))}{4\omega^2(k) + \Omega^2(k)} \right. \\
 & \left. - \frac{\Omega(k) (\cos(\Omega(k)t) - e^{2\omega(k)\Delta t} \cos(\Omega(k)(t - \Delta t)))}{4\omega^2(k) + \Omega^2(k)} \right] dk \quad (4.47)
 \end{aligned}$$

On vérifie qu'en utilisant l'approximation sous forme gaussienne du terme source, on retrouve les résultats présentés par Ostrovskaja dans son article [10] concernant le profil spatial de la déformation et l'évolution temporelle de sa hauteur (figures 4.18 et 4.19).

L'évolution de la courbure sur l'axe de la déformation est représentée sur les figures 4.20 pour  $t < \Delta t$  et 4.21 pour  $t > \Delta t$  (le terme source utilisé pour tracer ces figures étant un terme source bessélien.)

Comparons les résultats de cette théorie avec celle de Can Cinbis, présentée sur le tableau de la page 92. Le tableau suivant reprend les trois situations testées par Cinbis (différentes fréquences acoustiques  $f$  et différentes ouvertures numériques  $F$  du transducteur). Les temps expérimentaux sont ceux mesurés par Cinbis. Les temps théoriques sont ceux prédits par la théorie qui vient d'être présentée, respectivement pour  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$  et  $g = 0$  (ce qui revient à négliger les effets de gravité, comme l'avait fait Cinbis).

f (MHz)	F	$\tau_{exp}$ ( $\mu\text{s}$ )	$\tau_{theo}$ ( $\mu\text{m}$ ) $g = 9,81\text{m/s}^2$	$\tau_{theo}$ ( $\mu\text{m}$ ) $g = 0$	Erreur relative (%) $g = 9,81\text{m/s}^2$	Erreur relative (%) $g = 0$
3,0	3	1270	1565	1585	18,8	19,9
3,0	1	312	305	310	-2,3	-0,6
10,0	3	263	260	260	-1,2	-1,2

En comparant les résultats théoriques avec ceux de la page 92, on vérifie que cette théorie est en bon accord avec celle de Can Cinbis. Cependant, le fait que Cinbis ait négligé les effets de gravité et de viscosité ne semble pas expliquer l'erreur relative importante qui existe entre ses valeurs théoriques et ses mesures expérimentales dans le cas d'un transducteur d'ouverture numérique 3 avec une onde acoustique de fréquence 3,0 MHz : même en les introduisant, comme dans la théorie qui vient d'être présentée, l'écart relatif est toujours du même ordre.

### 4.4.3 Expression de la courbure de la déformation en régime visqueux

En régime visqueux, le temps caractéristique  $1/\omega(k)$  de diffusion de quantité de mouvement par viscosité sur l'échelle  $2\pi/k$  est très petit devant le temps caractéristique  $1/\Omega(k)$  de la dynamique inertielle de la déformation de taille  $2\pi/k$  et donc  $\Delta(k) \ll 1$ .

Les valeurs de  $s$  qui dominant dans l'équation 4.40 sont donc telles que le temps  $1/(\nu k^2)$  caractéristique de la viscosité est petit devant le temps caractéristique  $1/s$  des effets de surface que l'on cherche à décrire et donc  $X(s, k) \approx 1$ .

On ne peut plus négliger  $X(s, k)$  devant  $X^2(s, k)$  dans l'équation 4.40.  $X$  étant défini par l'expression  $X^2(s, k) = 1 + \frac{s}{\nu k^2}$ , il faut alors déterminer si la bonne valeur de  $X(s, k)$  est  $X(s, k) = \sqrt{1 + \frac{s}{\omega(k)}}$  ou  $X(s, k) = -\sqrt{1 + \frac{s}{\omega(k)}}$ .

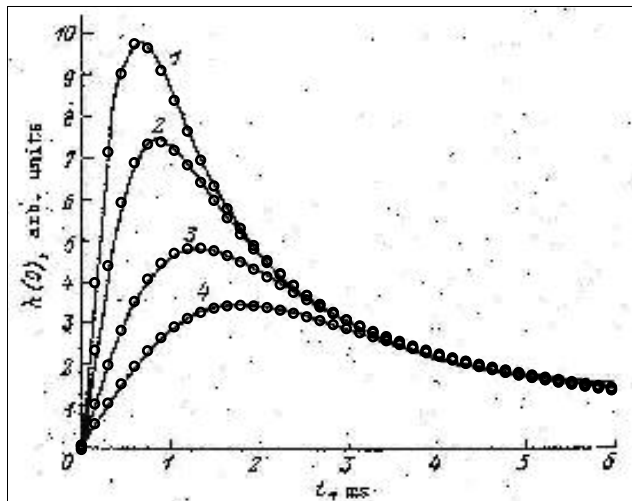


FIG. 4.18 – Évolution temporelle de la hauteur de la déformation sur une interface eau-vide déformée par un faisceau gaussien. Le col  $\omega_0$  de la déformation vaut 0,07 cm pour la courbe 1, 0,085 cm pour la courbe 2, 0,11 cm pour la courbe 3 et 0,14 cm pour la courbe 4. Mes calculs (représentés par les cercles) sont en bon accord avec ceux d'Ostrovskaja (lignes continues) [10]. Dans mes calculs, l'onde acoustique, de fréquence 2,25 MHz, est émise depuis l'eau pendant 20 périodes.

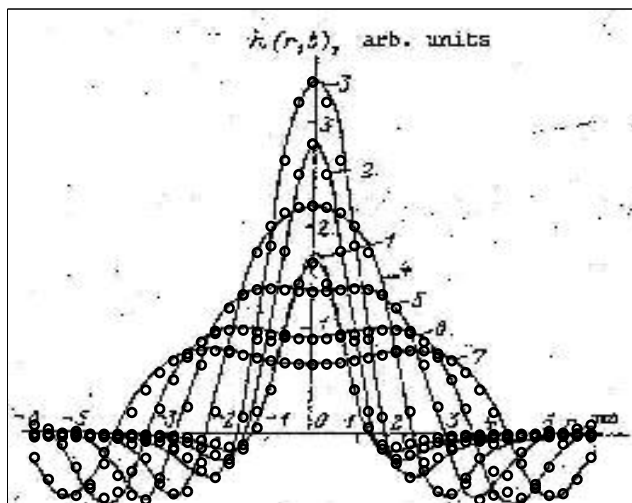


FIG. 4.19 – Profil de la déformation d'une interface eau-vide déformée par un faisceau gaussien. Le col  $\omega_0$  de la déformation vaut ici 0,14 cm. Le profil est calculé à 0,5 ms (courbe 1), 1 ms (courbe 2), 2 ms (courbe 3), 4 ms (courbe 4), 6 ms (courbe 5), 8 ms (courbe 6) et 10 ms (courbe 7). Mes calculs (représentés par les cercles) sont en bon accord avec ceux d'Ostrovskaja (lignes continues) [10]. Dans mes calculs, l'onde acoustique, de fréquence 2,25 MHz, est émise depuis l'eau pendant 20 périodes.

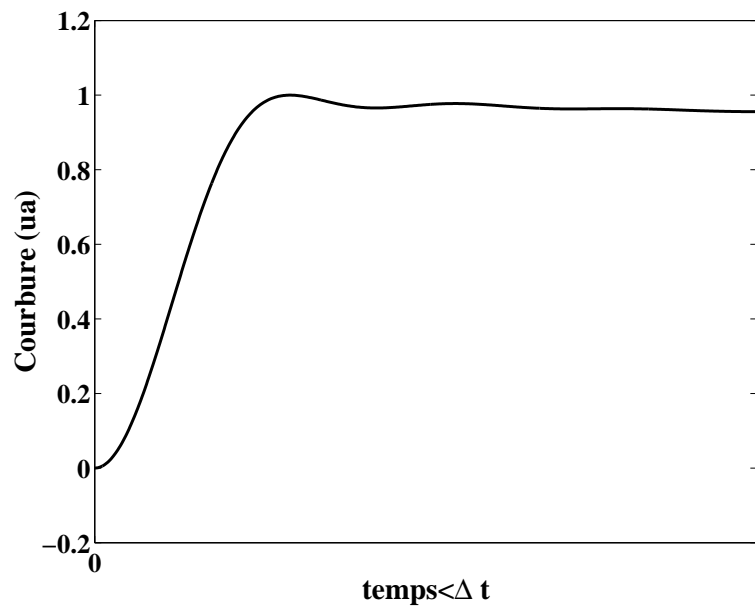


FIG. 4.20 – Évolution temporelle de la courbure de la déformation pour  $t < \Delta t$  prédite par l'expression 4.44.

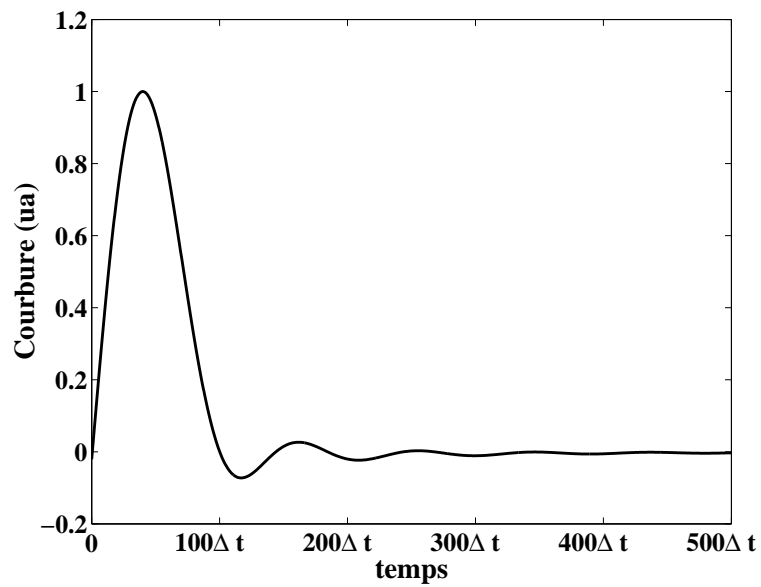


FIG. 4.21 – Évolution temporelle de la courbure de la déformation pour  $t \geq \Delta t$  prédite par l'expression 4.45.

Les valeurs de  $s$  qui dominent dans l'équation 4.40 sont les racines du dénominateur  $D(s, k) = (X^2(s, k) + 1)^2 - 4X(s, k) + \Delta(k)$ . L'équation  $D(s, k) = 0$  a deux solutions, qui ne sont pas les mêmes suivant que  $X(s, k)$  vaut  $\sqrt{1 + \frac{s}{\omega(k)}}$  ou  $-\sqrt{1 + \frac{s}{\omega(k)}}$  et qui valent, en supposant que  $\Delta(k) \ll 1$  :

$X(s, k)$	$\sqrt{1 + \frac{s}{\omega(k)}}$	$-\sqrt{1 + \frac{s}{\omega(k)}}$
Racines	$s_1(k) \approx -0,91\omega(k)$	$s_3(k) \approx (-3,54 + 2,23i)\omega(k)$
de $D(s, k)$	$s_2(k) \approx -\Omega^2(k)/2\omega(k)$	$s_4(k) \approx (-3,54 - 2,23i)\omega(k)$

Lamb [11] démontre que pour qu'une de ces racines  $s_i(k)$  ait un sens physique, il faut que  $Re((s_i(k) + 2\omega(k))^2 + \Omega^2(k)) \geq 0$ , faute de quoi la vitesse du liquide à une profondeur infinie diverge. Cette condition n'est vérifiée que pour les racines  $s_1(k)$  et  $s_2(k)$ . La valeur de  $X(s, k)$  à retenir est donc  $X(s, k) = \sqrt{1 + \frac{s}{\omega(k)}}$ .

Le calcul est détaillé dans l'annexe E. La courbure de la déformation vaut, suivant que  $t$  est inférieur ou supérieur à  $\Delta t$  :

$$\begin{aligned} \kappa(r, t \leq \Delta t) = & -\frac{Cp_{i0}^2}{\rho\nu^2} \int_0^{\frac{2\pi}{\lambda}} J_0(kr) \tilde{\phi}(k) \sum_{i=1}^4 \frac{a_i X_i(k)}{X_i(k)^2 - 1} \left( -1 - X_i(k) \operatorname{erf}(\sqrt{\omega(k)t}) \right. \\ & \left. + \left( 1 + \operatorname{erf}(X_i(k)\sqrt{\omega(k)t}) \right) \exp((X_i(k)^2 - 1)\omega(k)t) \right) dk \end{aligned} \quad (4.48)$$

$$\begin{aligned} \kappa(r, t > \Delta t) = & -\frac{Cp_{i0}^2}{\rho\nu^2} \int_0^{\frac{2\pi}{\lambda}} J_0(kr) \tilde{\phi}(k) \sum_{i=1}^4 \frac{a_i X_i(k)}{X_i(k)^2 - 1} \times \\ & \left( -X_i(k) \left( \operatorname{erf}(\sqrt{\omega(k)t}) - \operatorname{erf}(\sqrt{\omega(k)(t - \Delta t)}) \right) \right. \\ & \left. - \left( 1 + \operatorname{erf}(X_i(k)\sqrt{\omega(k)(t - \Delta t)}) \right) \exp((X_i(k)^2 - 1)\omega(k)(t - \Delta t)) \right. \\ & \left. + \left( 1 + \operatorname{erf}(X_i(k)\sqrt{\omega(k)t}) \right) \exp((X_i(k)^2 - 1)\omega(k)t) \right) dk \end{aligned} \quad (4.49)$$

et sa hauteur vaut

$$\begin{aligned} h(r, t \leq \Delta t) = & \frac{Cp_{i0}^2}{\rho\nu^2} \int_0^{\frac{2\pi}{\lambda}} J_0(kr) \frac{\tilde{\phi}(k)}{k^2} \sum_{i=1}^4 \frac{a_i X_i(k)}{X_i(k)^2 - 1} \left( -1 - X_i(k) \operatorname{erf}(\sqrt{\omega(k)t}) \right. \\ & \left. + \left( 1 + \operatorname{erf}(X_i(k)\sqrt{\omega(k)t}) \right) \exp((X_i(k)^2 - 1)\omega(k)t) \right) dk \end{aligned} \quad (4.50)$$

$$\begin{aligned} h(r, t > \Delta t) = & \frac{Cp_{i0}^2}{\rho\nu^2} \int_0^{\frac{2\pi}{\lambda}} J_0(kr) \frac{\tilde{\phi}(k)}{k^2} \sum_{i=1}^4 \frac{a_i X_i(k)}{X_i(k)^2 - 1} \times \\ & \left( -X_i(k) \left( \operatorname{erf}(\sqrt{\omega(k)t}) - \operatorname{erf}(\sqrt{\omega(k)(t - \Delta t)}) \right) \right. \\ & \left. - \left( 1 + \operatorname{erf}(X_i(k)\sqrt{\omega(k)(t - \Delta t)}) \right) \exp((X_i(k)^2 - 1)\omega(k)(t - \Delta t)) \right. \\ & \left. + \left( 1 + \operatorname{erf}(X_i(k)\sqrt{\omega(k)t}) \right) \exp((X_i(k)^2 - 1)\omega(k)t) \right) dk \end{aligned} \quad (4.51)$$

où les valeurs de  $X_i$  et  $a_i$  sont données par :

$i$	1	2	3	4
$X_i(k)$	$\sqrt{1 - \frac{\Delta(k)}{2}}$	0,30	$-0,65 + 1,72i$	$-0,65 - 1,72i$

$$a_1 = \frac{1}{4} \quad (4.52)$$

$$a_{i,i=2,3,4} = -\frac{5}{44}X_i(k)^2 - \frac{3}{22}X_i(k) - \frac{7}{22} \quad (4.53)$$

#### 4.4.4 Adaptation de ce calcul dans le cas de l'interface entre deux fluides

On peut adapter ce calcul au cas d'une interface entre deux fluides de densités  $\rho_1$  et  $\rho_2$ , de viscosités dynamiques  $\eta_1$  et  $\eta_2$  et de tension interfaciale  $\sigma$ . La constante  $C$ , définie par l'équation 4.33, vaut alors, d'après l'équation 3.24 :

$$C = \pm \frac{4}{\rho_1 c_1^2} \frac{\rho_1^2 c_1^2 + \rho_2^2 c_2^2 - 2\rho_1 \rho_2 c_1^2}{(\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2)^2} \quad (4.54)$$

l'indice 1 désignant le fluide d'où vient l'onde incidente et l'indice 2 celui vers lequel elle se dirige. Cette expression est précédée d'un signe  $+$  si l'onde se dirige du fluide inférieur vers le fluide supérieur et d'un signe  $-$  si elle se dirige en sens inverse.

Il faut aussi effectuer les transformations suivantes dans les résultats trouvés précédemment [12] [13] :

$$\rho \leftrightarrow \rho_1 + \rho_2 \quad (4.55)$$

$$gk + \frac{\sigma k^3}{\rho} \leftrightarrow \frac{|\rho_1 - \rho_2|}{\rho_1 + \rho_2} gk + \frac{\sigma}{\rho_1 + \rho_2} k^3 \quad (4.56)$$

$$\eta \leftrightarrow \eta_1 + \eta_2 \quad (4.57)$$

L'expression de  $\Delta(k)$  devient

$$\Delta(k) = \left( \frac{\Omega(k)}{\omega(k)} \right)^2 \quad (4.58)$$

avec

$$\Omega(k) = \sqrt{\frac{|\rho_1 - \rho_2|}{\rho_1 + \rho_2} gk + \frac{\sigma k^3}{\rho_1 + \rho_2}} \quad (4.59)$$

$$\omega(k) = \frac{\eta_1 + \eta_2}{\rho_1 + \rho_2} k^2 \quad (4.60)$$

Les équations 4.44 et 4.45, qui décrivent la courbure de l'interface en régime non-visqueux, c'est-à-dire lorsque  $\Delta(k) \gg 1$  pour tout  $k < 2\pi/\lambda$ , deviennent

$$\begin{aligned} \kappa(r, t < \Delta t) = & -\frac{C p_{i0}^2 (\rho_1 + \rho_2)}{(\eta_1 + \eta_2)^2} \times \\ & \int_0^{2\pi/\lambda} J_0(kr) \tilde{\phi}(k) \frac{\omega^2(k) e^{-2\omega(k)t} (-2\omega(k) \sin(\Omega(k)t) - \Omega(k) \cos(\Omega(k)t)) + \Omega(k)}{4\omega^2(k) + \Omega^2(k)} dk \end{aligned} \quad (4.61)$$

$$\begin{aligned} \kappa(r, t \geq \Delta t) = & -\frac{Cp_{i0}^2(\rho_1 + \rho_2)}{(\eta_1 + \eta_2)^2} \times \\ & \int_0^{2\pi/\lambda} J_0(kr) \tilde{\phi}(k) \frac{\omega^2(k)}{\Omega(k)} e^{-2\omega(k)t} \left[ \frac{-2\omega(k) (\sin(\Omega(k)t) - e^{2\omega(k)\Delta t} \sin(\Omega(k)(t - \Delta t)))}{4\omega^2(k) + \Omega^2(k)} \right. \\ & \left. - \frac{\Omega(k) (\cos(\Omega(k)t) - e^{2\omega(k)\Delta t} \cos(\Omega(k)(t - \Delta t)))}{4\omega^2(k) + \Omega^2(k)} \right] dk \end{aligned} \quad (4.62)$$

Les équations 4.46 et 4.47, qui décrivent la hauteur de l'interface en régime non-visqueux, deviennent

$$\begin{aligned} h(r, t < \Delta t) = & \frac{Cp_{i0}^2(\rho_1 + \rho_2)}{(\eta_1 + \eta_2)^2} \times \\ & \int_0^{2\pi/\lambda} \frac{J_0(kr) \tilde{\phi}(k)}{k^2} \frac{\omega^2(k)}{\Omega(k)} e^{-2\omega(k)t} \frac{(-2\omega(k) \sin(\Omega(k)t) - \Omega(k) \cos(\Omega(k)t)) + \Omega(k)}{4\omega^2(k) + \Omega^2(k)} dk \end{aligned} \quad (4.63)$$

$$\begin{aligned} h(r, t \geq \Delta t) = & \frac{Cp_{i0}^2(\rho_1 + \rho_2)}{(\eta_1 + \eta_2)^2} \times \\ & \int_0^{2\pi/\lambda} \frac{J_0(kr) \tilde{\phi}(k)}{k^2} \frac{\omega^2(k)}{\Omega(k)} e^{-2\omega(k)t} \left[ \frac{-2\omega(k) (\sin(\Omega(k)t) - e^{2\omega(k)\Delta t} \sin(\Omega(k)(t - \Delta t)))}{4\omega^2(k) + \Omega^2(k)} \right. \\ & \left. - \frac{\Omega(k) (\cos(\Omega(k)t) - e^{2\omega(k)\Delta t} \cos(\Omega(k)(t - \Delta t)))}{4\omega^2(k) + \Omega^2(k)} \right] dk \end{aligned} \quad (4.64)$$

Les équations 4.48 et 4.49, qui décrivent la courbure de l'interface en régime visqueux, c'est-à-dire lorsque  $\Delta(k) \ll 1$  pour tout  $k < 2\pi/\lambda$ , deviennent

$$\begin{aligned} \kappa(r, t \leq \Delta t) = & -\frac{Cp_{i0}^2(\rho_1 + \rho_2)}{(\eta_1 + \eta_2)^2} \int_0^{2\pi/\lambda} J_0(kr) \tilde{\phi}(k) \times \\ & \sum_{i=1}^4 \frac{a_i X_i(k)}{X_i(k)^2 - 1} \left( -1 - X_i(k) \operatorname{erf}(\sqrt{\omega(k)t}) \right) \\ & + \left( 1 + \operatorname{erf}(X_i(k) \sqrt{\omega(k)t}) \right) \exp((X_i(k)^2 - 1)\omega(k)t) dk \end{aligned} \quad (4.65)$$

$$\begin{aligned} \kappa(r, t > \Delta t) = & -\frac{Cp_{i0}^2(\rho_1 + \rho_2)}{(\eta_1 + \eta_2)^2} \int_0^{2\pi/\lambda} J_0(kr) \tilde{\phi}(k) \sum_{i=1}^4 \frac{a_i X_i(k)}{X_i(k)^2 - 1} \times \\ & \left( -X_i(k) \left( \operatorname{erf}(\sqrt{\omega(k)t}) - \operatorname{erf}(\sqrt{\omega(k)(t - \Delta t)}) \right) \right. \\ & \left. - \left( 1 + \operatorname{erf}(X_i(k) \sqrt{\omega(k)(t - \Delta t)}) \right) \exp((X_i(k)^2 - 1)\omega(k)(t - \Delta t)) \right) \\ & + \left( 1 + \operatorname{erf}(X_i(k) \sqrt{\omega(k)t}) \right) \exp((X_i(k)^2 - 1)\omega(k)t) dk \end{aligned} \quad (4.66)$$

et les équations 4.50 et 4.51, qui décrivent la hauteur de l'interface en régime visqueux, deviennent

$$\begin{aligned} h(r, t \leq \Delta t) = & \frac{Cp_{i0}^2(\rho_1 + \rho_2)}{(\eta_1 + \eta_2)^2} \int_0^{2\pi/\lambda} J_0(kr) \frac{\tilde{\phi}(k)}{k^2} \sum_{i=1}^4 \frac{a_i X_i(k)}{X_i(k)^2 - 1} \left( -1 - X_i(k) \operatorname{erf}(\sqrt{\omega(k)t}) \right) \\ & + \left( 1 + \operatorname{erf}(X_i(k) \sqrt{\omega(k)t}) \right) \exp((X_i(k)^2 - 1)\omega(k)t) dk \end{aligned} \quad (4.67)$$



$$\begin{aligned}
 h(r, t > \Delta t) = & \frac{Cp_{i0}^2(\rho_1 + \rho_2)}{(\eta_1 + \eta_2)^2} \int_0^{\frac{2\pi}{\lambda}} J_0(kr) \frac{\tilde{\phi}(k)}{k^2} \sum_{i=1}^4 \frac{a_i X_i(k)}{X_i(k)^2 - 1} \times \\
 & \left( -X_i(k) \left( \operatorname{erf}(\sqrt{\omega(k)t}) - \operatorname{erf}(\sqrt{\omega(k)(t - \Delta t)}) \right) \right) \\
 & - \left( 1 + \operatorname{erf}(X_i(k)\sqrt{\omega(k)(t - \Delta t)}) \right) \exp \left( (X_i(k)^2 - 1)\omega(k)(t - \Delta t) \right) \\
 & + \left( 1 + \operatorname{erf}(X_i(k)\sqrt{\omega(k)t}) \right) \exp \left( (X_i(k)^2 - 1)\omega(k)t \right) dk \quad (4.68)
 \end{aligned}$$

Par exemple, dans le cas du couple eau-air, l'onde acoustique venant de l'eau,  $k$  étant pris égal à  $2\pi/\lambda$  :

$$\rho_1 = 1000 \text{ kg/m}^3 \quad (4.69)$$

$$\rho_2 = 1,2 \text{ kg/m}^3 \quad (4.70)$$

$$\eta_1 = 1.10^{-3} \text{ Pa.s} \quad (4.71)$$

$$\eta_2 = 2.10^{-5} \text{ Pa.s} \quad (4.72)$$

$$c_1 = 1500 \text{ m/s} \quad (4.73)$$

$$c_2 = 340 \text{ m/s} \quad (4.74)$$

$$\sigma = 72.10^{-3} \text{ N/m} \quad (4.75)$$

$$g = 9,81 \text{ m/s}^2 \quad (4.76)$$

$$k = 9,4.10^3 \text{ m}^{-1} \quad (4.77)$$

On calcule  $\Omega(k) \approx 8.10^3 \text{ s}^{-1}$  et  $\omega(k) \approx 90 \text{ s}^{-1}$ . Dans le cas du couple eau-chloroforme, on trouve  $\Omega(k) \approx 3.10^3 \text{ s}^{-1}$  et  $\omega(k) \approx 55 \text{ s}^{-1}$ . Dans ces deux cas, le régime est par conséquent non-visqueux.

La courbure théorique en fonction du temps est représentée, dans le cas de l'interface eau-air (en régime non-visqueux), sur la figure 4.22, pour différentes valeurs de la distance  $r$  à l'axe de la déformation. On observe sur ces courbes que l'évolution temporelle de la courbure dépend très peu de  $r$  pour  $r < 100 \mu\text{m}$ . Dans le cas de mon expérience, le faisceau laser que j'utilise a un col de  $75 \mu\text{m}$ . La part d'énergie lumineuse arrivant sur l'interface à moins de  $100 \mu\text{m}$  de l'axe de la déformation vaut donc

$$\frac{\int_0^{100\mu\text{m}} e^{-2r^2/(75\mu\text{m})^2} dr}{\int_0^{\infty} e^{-2r^2/(75\mu\text{m})^2} dr} > 99\% \quad (4.78)$$

Plus de 99% de l'énergie lumineuse arrive à moins de  $100 \mu\text{m}$  de l'axe de la déformation. Par conséquent, il est tout à fait légitime de modéliser la déformation par un dioptre ou un miroir sphérique.

De même, le même calcul a été fait en régime visqueux dans le cas de l'interface huile DC200-air (l'huile DC200 a une densité de  $968 \text{ kg/m}^3$ , une vitesse du son de  $980 \text{ m/s}$  et une viscosité de  $0,1 \text{ Pl}$ . La tension interfaciale DC200-air vaut  $20 \text{ mN/m}$ . Dans ce cas,  $\Omega(2\pi/\lambda) \approx 8.10^3 \text{ s}^{-1}$ ,  $\omega(2\pi/\lambda) \approx 2.10^4 \text{ s}^{-1}$  donc  $\Delta(2\pi/\lambda) \approx 0,1$ , le régime est par conséquent visqueux. Les résultats sont représentés sur la figure 4.23. On observe là encore que l'évolution temporelle de la courbure dépend très peu de  $r$  pour  $r < 100 \mu\text{m}$ .

## 4.5 Terme source bessélien

Dans tous les calculs de ce chapitre, j'ai utilisé la forme exacte bessélienne du terme source, et non son approximation gaussienne, présentée à la page 81. En effet, les lobes

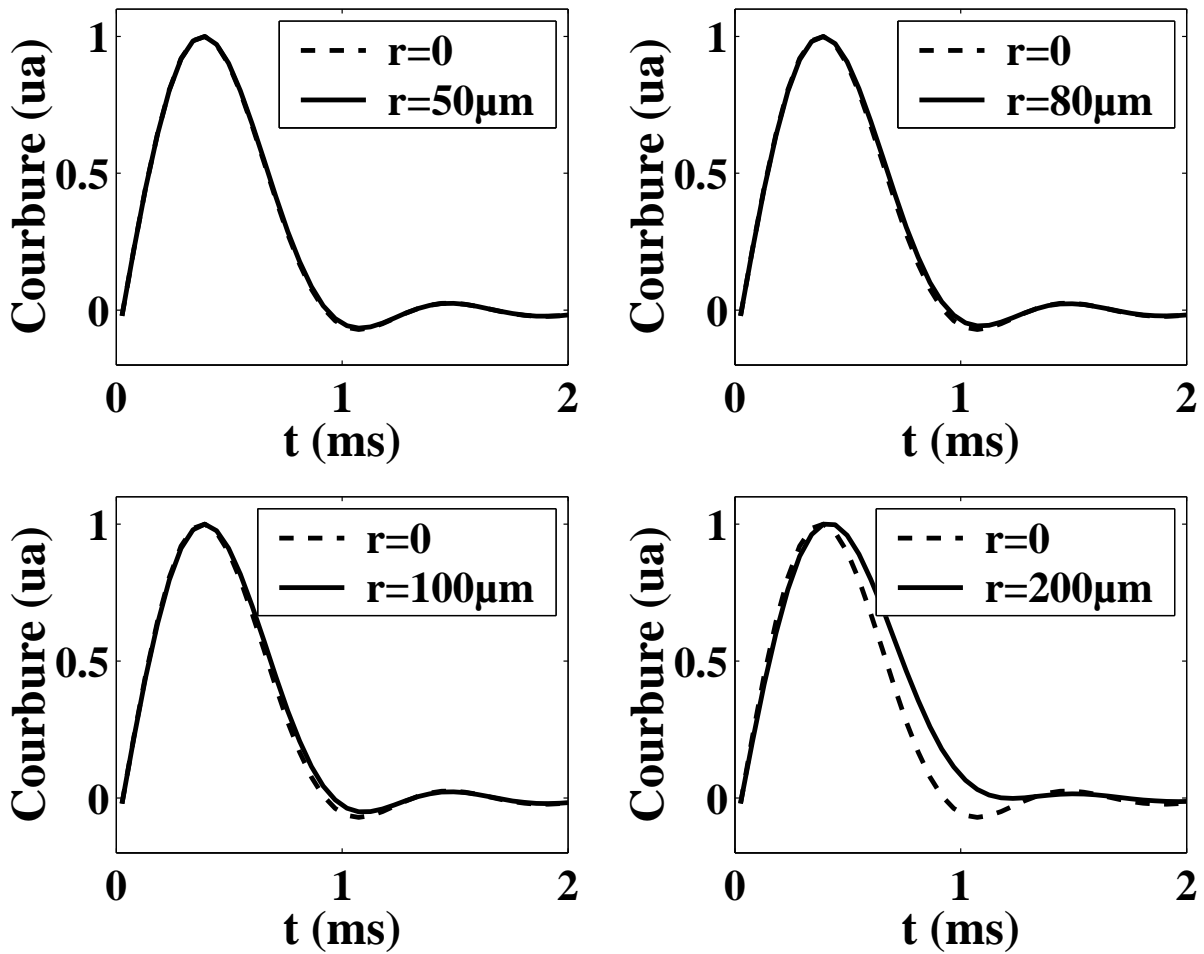


FIG. 4.22 – Courbure de l’interface eau-air en fonction du temps en régime non-visqueux, pour différentes valeurs de la distance à l’axe de la déformation

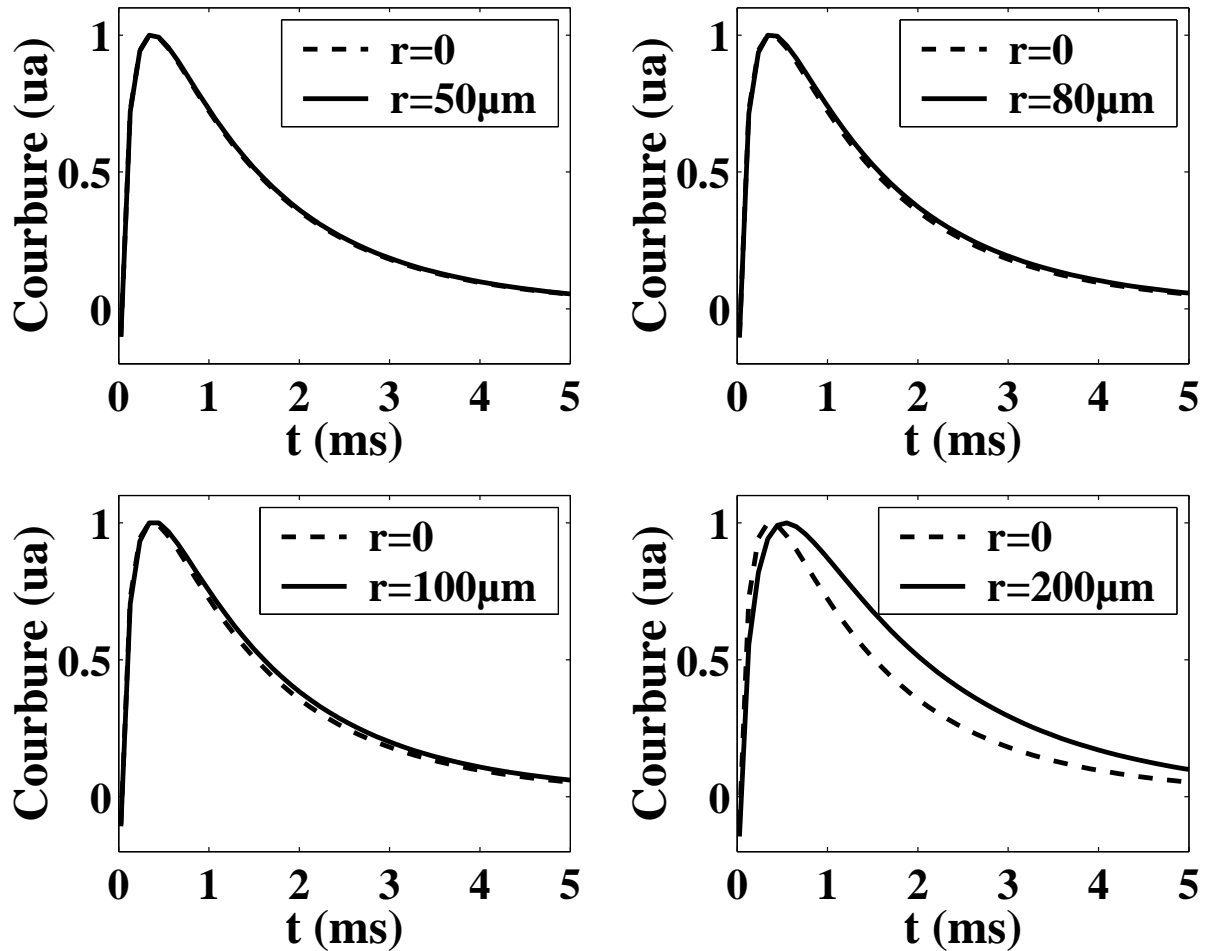


FIG. 4.23 – Courbure de l'interface DC200-air en fonction du temps en régime visqueux, pour différentes valeurs de la distance à l'axe de la déformation. Ces courbes ont été tracées en utilisant l'équation 4.49.

secondaires du terme source bessélien participent à la déformation de l'interface, en créant une petite déformation circulaire centrée sur un cercle de rayon  $r_0$  autour de la déformation principale, comme indiqué de façon très exagérée sur la figure 4.24.

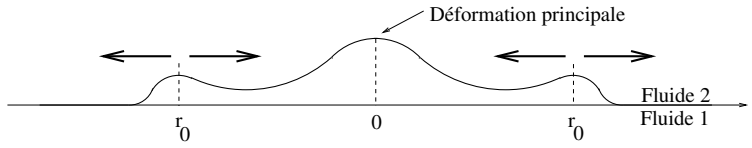


FIG. 4.24 – Déformation principale et déformation secondaire créées par une onde bessélienne.

L'énergie acoustique du lobe secondaire à son maximum valant 2% de l'énergie acoustique en  $r = 0$ , la hauteur de cette déformation circulaire vaut 2% de la hauteur de la déformation principale. Dans le calcul statique, la faible hauteur relative de cette déformation secondaire par rapport à la déformation principale permettait de négliger sa présence et de considérer le terme source comme gaussien. Dans cette expérience, on utilise une onde ultrasonore impulsionnelle. Lorsque l'impulsion s'arrête, la pression de radiation acoustique s'annule et la déformation circulaire qui avait été créée par les lobes secondaires de l'onde ultrasonore disparaît, ce qui crée deux ondes capillaires (indiquées par les flèches sur la figure), l'une convergent vers le centre de la déformation et l'autre divergent. À un moment donné, l'onde capillaire qui converge est concentrée en  $r = 0$ . Il devient alors faux de négliger la présence des lobes secondaires du terme source, comme l'indiquent les figures 4.25 et 4.26. Ces courbes représentent le profil de hauteur et le profil de courbure de la déformation à différents instants, les lignes en trait plein désignant la prédiction utilisant un terme source bessélien et les lignes en pointillés la prédiction utilisant un terme source gaussien. Toutes ces courbes correspondent au couple eau-air, l'onde acoustique venant de l'eau, ayant une fréquence de 2,25 MHz et étant émise pendant 20 périodes, soit pendant  $\Delta t = 8,89 \mu\text{s}$ . On voit qu'en particulier, si l'on utilise un terme source gaussien, on se trompe d'un facteur 10 sur la courbure de la déformation en  $r = 0$  à  $t = 100\Delta t$ . Les figures 4.27 et 4.28 montrent la hauteur et la courbure en  $r = 0$  en fonction du temps, suivant que la théorie utilise un terme source gaussien ou bessélien. On constate qu'il y a des différences très nettes, en particulier sur la courbure du sommet de la déformation : si le terme source est gaussien, on n'observe pas d'oscillations notables de la courbure, alors qu'on observe des oscillations très nettes si le terme source est bessélien. Ces oscillations peuvent s'interpréter comme l'arrivée au centre des ondes capillaires convergentes créées par les lobes secondaires de la pression de radiation.

## 4.6 Comparaison de la théorie avec l'expérience

### 4.6.1 Résultats expérimentaux

Plusieurs expériences ont été réalisées sur différents couples de fluides. Les paramètres qui jouent sur l'évolution temporelle de la courbure sont la densité  $\rho_1$  du fluide d'où vient l'onde acoustique, la densité  $\rho_2$  du fluide vers lequel elle se dirige, la longueur d'onde  $\lambda$  des ondes acoustiques dans le fluide 1, les viscosités dynamiques  $\eta_1$  et  $\eta_2$  des deux fluides, leur tension interfaciale  $\sigma$  ainsi que la durée  $\Delta t$  de l'impulsion acoustique.

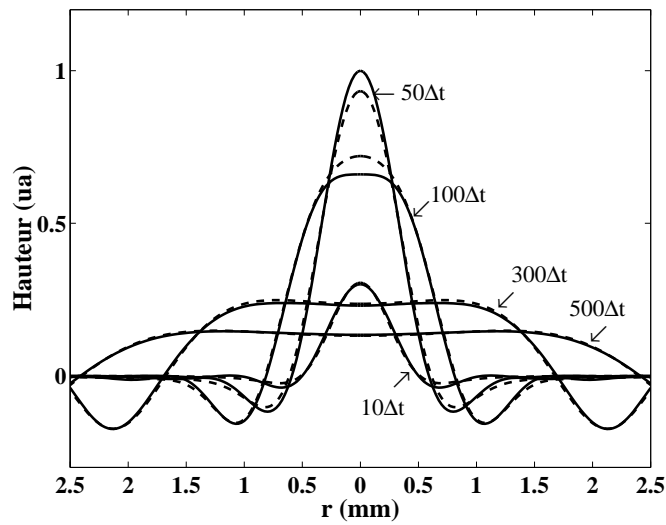


FIG. 4.25 – Profil de hauteur de la déformation de l’interface eau-air à différents instants. Les courbes en trait plein représentent la prédiction utilisant un terme source bessélien et les traits pointillés représentent la prédiction utilisant un terme source gaussien. L’onde acoustique, de fréquence 2,25 MHz, est émise depuis l’eau pendant 20 périodes.

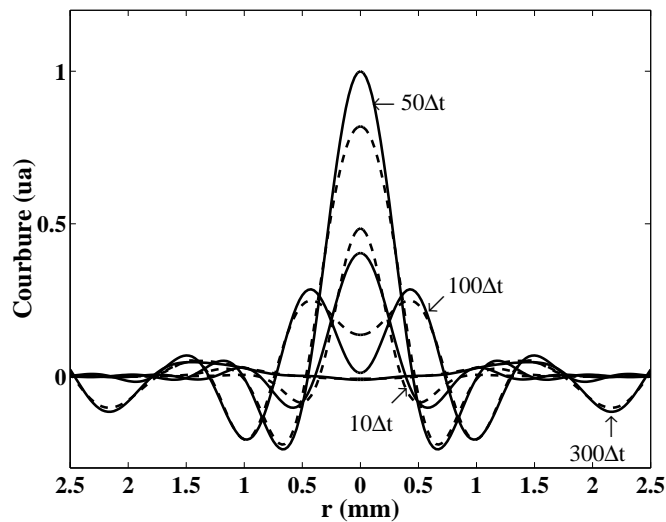


FIG. 4.26 – Profil de courbure de la déformation de l’interface eau-air à différents instants. Les courbes en trait plein représentent la prédiction utilisant un terme source bessélien et les traits pointillés représentent la prédiction utilisant un terme source gaussien. L’onde acoustique, de fréquence 2,25 MHz, est émise depuis l’eau pendant 20 périodes.

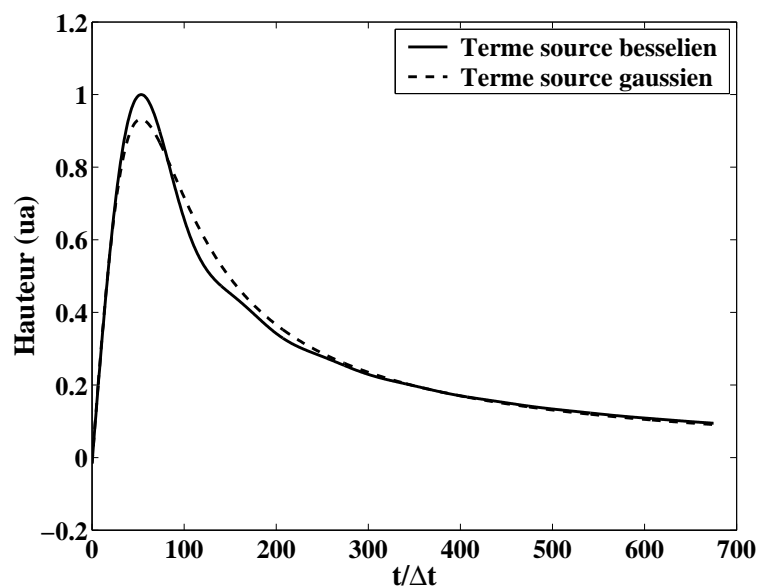


FIG. 4.27 – Évolution temporelle de la hauteur de la déformation sur une interface eau-air. L'onde acoustique, de fréquence 2,25 MHz, est émise depuis l'eau pendant 20 périodes.

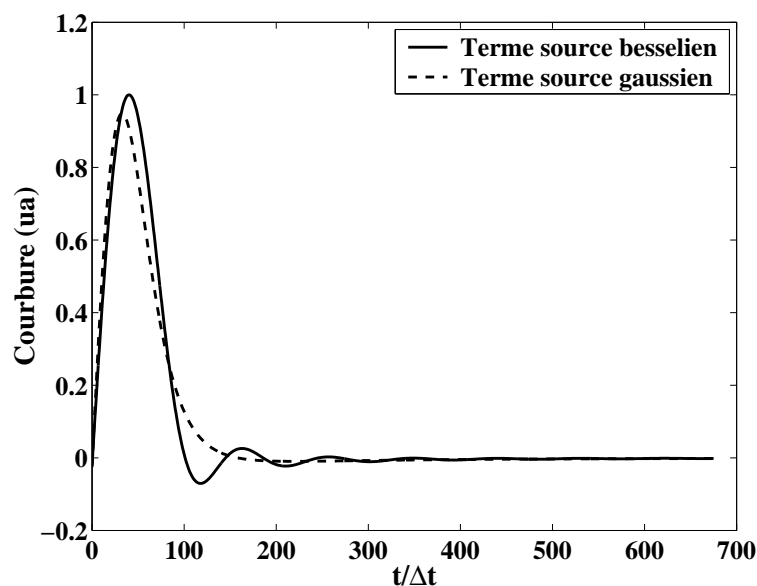


FIG. 4.28 – Évolution temporelle de la courbure sur l'axe de la déformation sur une interface eau-air. L'onde acoustique, de fréquence 2,25 MHz, est émise depuis l'eau pendant 20 périodes.

Pour toutes les expériences, l'onde acoustique était une onde sinusoïdale de fréquence 2,25 MHz, émise pendant 20 périodes. La durée de l'impulsion était donc  $\Delta t = \frac{20}{2,25 \cdot 10^6} = 8,9 \mu\text{s}$ .

Les caractéristiques de ces fluides sont indiquées dans le tableau suivant, pour une température de 25°C.

Couple de fluides	eau-air	eau-chloroforme stabilisé	eau-dodécane [14]	DC200-air
$\rho_1$ (kg/m <sup>3</sup> )	998	998	998	968
$\rho_2$ (kg/m <sup>3</sup> )	1,2	1490	745	1,2
$c_1$ (m/s)	1497	1497	1497	980
$c_2$ (m/s)	340	987	1288	340
$\lambda$ (μm)	665	665	665	436
$\eta_1$ (Pl)	$8,9 \cdot 10^{-4}$	$8,9 \cdot 10^{-4}$	$8,9 \cdot 10^{-4}$	0,1
$\eta_2$ (Pl)	$1,9 \cdot 10^{-5}$	$5,37 \cdot 10^{-4}$	$1,33 \cdot 10^{-3}$	$1,9 \cdot 10^{-5}$

En utilisant les valeurs données dans ce tableau, et en comparant la prédiction théorique aux courbes expérimentales pour différentes valeurs de la tension interfaciale  $\sigma$ , on arrive à déterminer la tension interfaciale du couple de fluides étudié. Les résultats sont présentées sur les courbes 4.29, 4.30, 4.31, et 4.32.

Des courbes 4.29, 4.30 et 4.31, j'ai pu déduire la tension interfaciale de ces différents couples de fluides :

$$\sigma_{\text{eau-air}} = 72 \pm 5 \text{ mN/m} \quad (4.79)$$

$$\sigma_{\text{eau-dodécane}} = 53 \pm 3 \text{ mN/m} \quad (4.80)$$

$$\sigma_{\text{eau-chloroforme stabilisé}} = 19 \pm 1 \text{ mN/m} \quad (4.81)$$

$$(4.82)$$

Les barres d'erreur sont déterminées en traçant la courbe théorique pour différentes valeurs de  $\sigma$  et en voyant à l'œil à partir de quelle valeur la courbe théorique s'éloigne trop de la courbe expérimentale.

Dans les cas des interfaces eau-air et DC200-air, celles-ci étant totalement réfléchissantes aux ondes acoustiques, j'ai dû tenir compte des ondes retour : l'onde réfléchie sur l'interface (avec un coefficient de réflexion en intensité quasiment égal à 1) se réfléchit à nouveau sur le transducteur, revient ensuite vers l'interface et déforme à nouveau celle-ci. Les courbes théoriques correspondantes tiennent compte de l'influence des 6 premières ondes retour, décalées les unes par rapport aux autres du temps que met l'onde acoustique pour effectuer un aller-retour entre l'interface et le transducteur. La méthode de mesure du coefficient de réflexion sur le transducteur est décrite dans l'annexe C : lorsque le transducteur est plongé dans l'eau, l'onde acoustique est réfléchie à sa surface avec un coefficient de réflexion en pression de  $0,38 \pm 0,05$ . Lorsqu'il est plongé dans l'huile DC200, ce coefficient de réflexion devient  $0,56 \pm 0,05$ .

Le tableau suivant récapitule les valeurs théoriques et expérimentales des tensions interfaciales des couples utilisés :

Couple de fluides	$\sigma_{\text{théorique}}$ (mN/m)	$\sigma_{\text{expérimental}}$ (mN/m)
eau-air	72	$72 \pm 5$
eau-dodécane	52,8 [1]	$53 \pm 3$
eau-chloroforme stabilisé	$22 \pm 4^2$	$19 \pm 1$

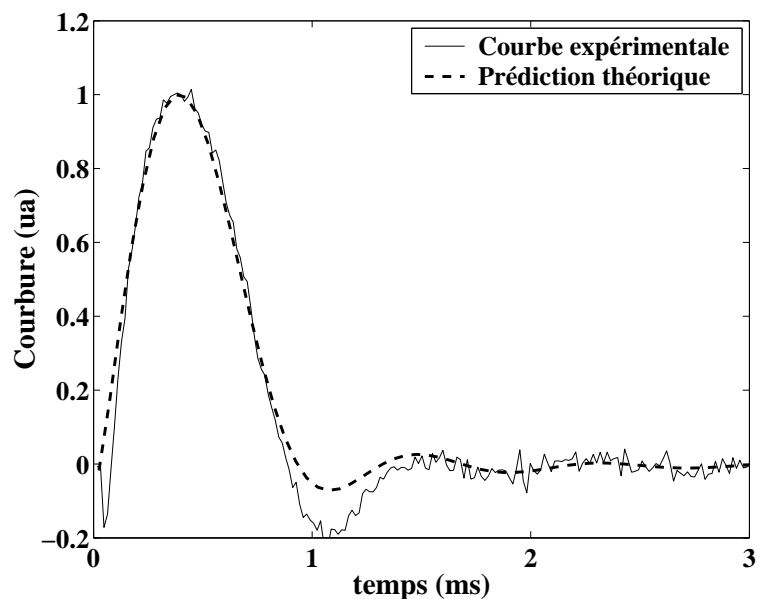


FIG. 4.29 – Évolution temporelle de la courbure de la déformation pour le couple eau-air. La courbe théorique est tracée pour  $\sigma = 72 \text{ mN/m}$  en régime non-visqueux (équation 4.62). Amplitude de l'onde acoustique lors de l'expérience : 0,13 MPa.

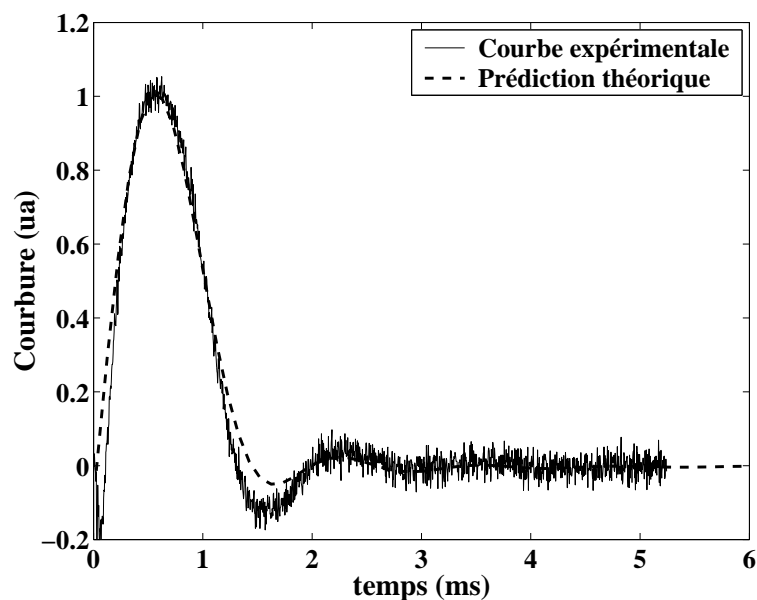


FIG. 4.30 – Évolution temporelle de la courbure de la déformation pour le couple eau-dodécane. La courbe théorique est tracée pour  $\sigma = 53 \text{ mN/m}$  en régime non-visqueux (équation 4.62). Amplitude de l'onde acoustique lors de l'expérience : 1,2 MPa.



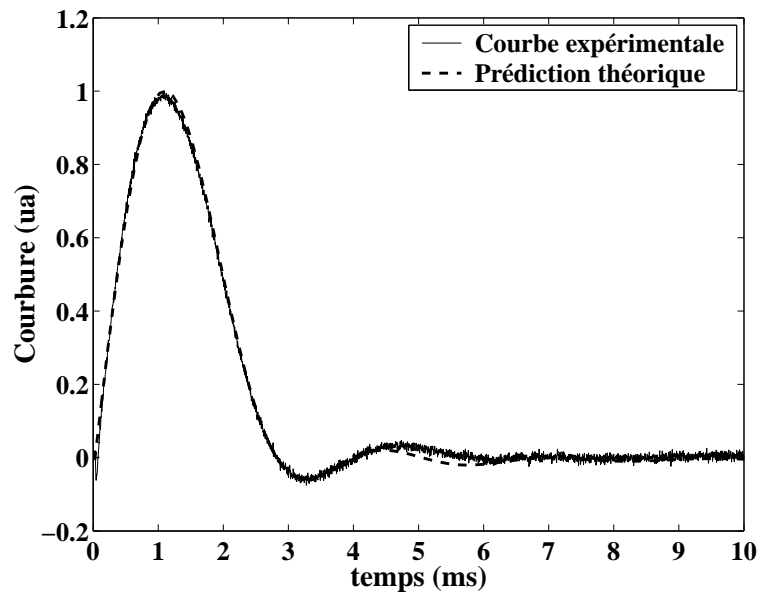


FIG. 4.31 – Évolution temporelle de la courbure de la déformation pour le couple eau-chloroforme. La courbe théorique est tracée pour  $\sigma = 19$  mN/m en régime non-visqueux (équation 4.62). Amplitude de l'onde acoustique lors de l'expérience : 0,40 MPa.

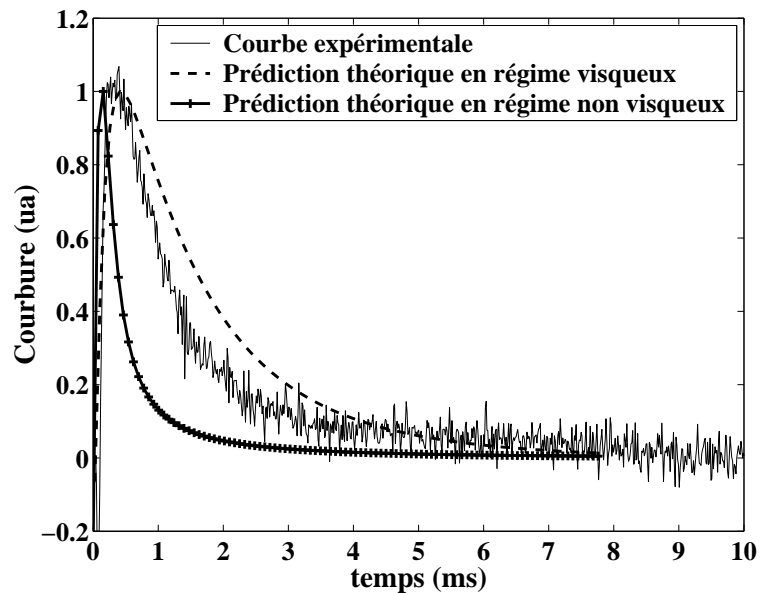


FIG. 4.32 – Évolution temporelle de la courbure de la déformation pour le couple DC200-air. Les courbes théoriques sont tracées pour  $\sigma = 20$  mN/m (équations 4.62 en régime non-visqueux, 4.66 en régime visqueux. Dans la somme de l'équation 4.66, les termes  $i = 3$  et  $i = 4$  sont négligés). Amplitude de l'onde acoustique lors de l'expérience : 0,25 MPa.

Il y a un bon accord entre la théorie et l'expérience pour les interfaces eau-air et eau-dodécane. La tension interfaciale mesurée sur l'interface eau-chloroforme est en bon accord avec des mesures que nous avons faites précédemment par la méthode de la goutte pendante, où nous avons mesuré  $\sigma_{eau-chloroforme} = 22 \pm 4$  mN/m. La valeur théorique de la tension interfaciale eau-chloroforme est de 32,80 mN/m [1]. La différence s'explique par le fait que le chloroforme que nous utilisons était stabilisé par une petite quantité d'éthanol. Celui-ci étant miscible à la fois dans le chloroforme et dans l'eau, il a tendance à faire diminuer la tension interfaciale.

Dans le seul cas de régime suramorti étudié ici (l'interface DC200-air, dont la tension interfaciale théorique est de 20,9 mN/m [15]), la courbe expérimentale se trouve entre les courbes théoriques décrivant les régimes visqueux et non-visqueux (figure 4.32). Il semble qu'on soit dans le cas d'un régime intermédiaire. Il faut noter que pour tracer la courbe théorique en régime visqueux, on a négligé dans la somme intervenant dans l'équation 4.66 les termes  $i = 3$  et  $i = 4$ . En effet, si l'on en tient compte, la courbe théorique obtenue n'est plus du tout en accord avec l'expérience (figure 4.33).

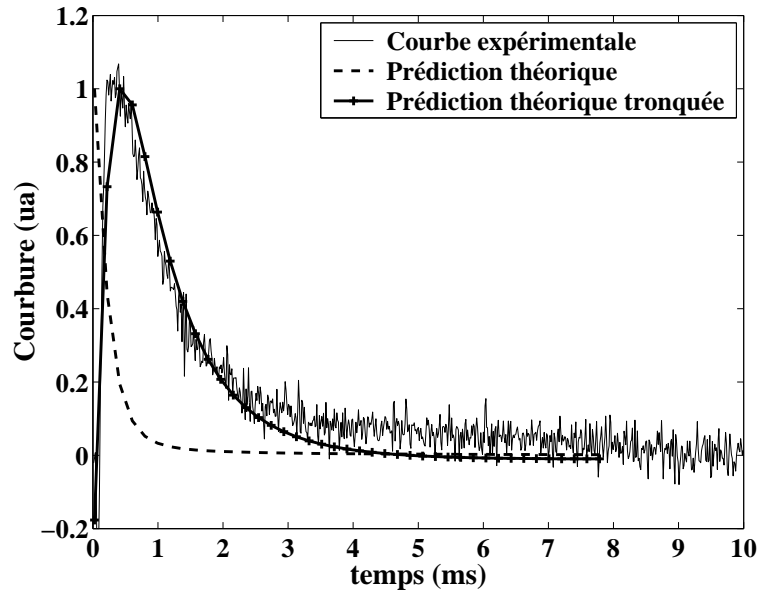


FIG. 4.33 – Évolution temporelle de la courbure de la déformation pour le couple DC200-air. Les courbes théoriques sont tracées pour  $\sigma = 35$  mN/m en régime visqueux, en utilisant l'équation 4.66. Si l'on tronque cette équation en supprimant de la somme les termes  $i = 3$  et  $i = 4$ , on décrit beaucoup mieux l'expérience que si on ne tronque pas l'équation. Amplitude de l'onde acoustique lors de l'expérience : 0,25 MPa.

## 4.6.2 Conditions d'application des modèles théoriques

On peut vérifier s'il est légitime de considérer que le régime est non-visqueux pour les interfaces eau-air, eau-chloroforme et eau-dodécane et visqueux pour l'interface DC200-air. Le régime est non-visqueux si  $\Delta(2\pi/\lambda) \gg 1$ .

<sup>2</sup>Il s'agit ici d'une mesure que nous avons faite à l'aide d'un tensiomètre à goutte pendante.

	eau-air	eau-dodécane	eau-chloroforme	DC200-air
$\Omega \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right) (s^{-1})$	$7,8 \cdot 10^3$	$5,1 \cdot 10^3$	$2,5 \cdot 10^3$	$8,1 \cdot 10^3$
$\omega \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right) (s^{-1})$	81	110	51	$2,1 \cdot 10^4$
$\Delta \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)$	9000	2000	2500	0,1

On constate que  $\Delta(2\pi/\lambda) \gg 1$  pour les couples eau-air, eau-dodécane et eau-chloroforme, ce qui justifie d'utiliser le calcul en régime non-visqueux pour modéliser l'évolution temporelle de la courbure de la déformation concernant ces couples. Par contre, pour le couple DC200-air,  $\Delta(2\pi/\lambda) \ll 1$ . Pour ce couple de fluides, le régime est donc plus visqueux. Par un calcul d'ordre de grandeur, on trouve une valeur de  $\Delta$  qui n'est pas très éloignée de 1, comparé à ce qu'on trouve pour les autres couples de fluides. On serait en réalité en régime intermédiaire, ce qui expliquerait peut-être que la théorie en régime visqueux ne décrit pas bien la courbe expérimentale. En diminuant la taille du faisceau acoustique, c'est-à-dire en diminuant la longueur d'onde, on pourrait atteindre un régime plus visqueux.

On peut enfin déterminer la sensibilité de cette mesure à partir de la courbure maximale atteinte par la déformation sur les expériences représentées sur les figures 4.29, 4.30, 4.31 et 4.32, calculée en utilisant les équations 4.62 et 4.66 :

Couple de fluides	eau-air	eau-chloroforme	eau-dodécane	DC200-air
$\kappa_{max} (m^{-1})$	2,2	5,6	4,0	14
$R_{min} (cm)$	91	36	50	7

On remarque que le rayon de courbure minimal atteint par les déformations lors de ces expériences est inférieur à la distance de 80 cm séparant l'interface et l'iris (sauf dans le cas du couple eau-air). Cela est très étonnant, en particulier pour le couple eau-dodécane. En effet, toutes ces mesures ont été réalisées par réflexion, toutes sur des interfaces déformées se comportant comme des miroirs divergents, sauf la mesure sur eau-dodécane, où elle se comportait comme un miroir convergent. Le point focal du miroir passe donc à travers l'iris dans ce cas, la focale du miroir passant d'une valeur infinie à 25 cm au minimum (car  $f = 1/\kappa = R/2$ ). La monotonie de la luminosité en fonction de la courbure ne devrait pas être vérifiée sur les expériences sur l'interface eau-dodécane (la luminosité détectée est maximale lorsque le point focal du miroir convergent se trouve sur l'iris). On ne détecte cependant pas cet effet sur les expériences. Pour les autres expériences, il est normal que cette monotonie soit tout de même vérifiée (lorsque le miroir est divergent, même très fortement, la luminosité détectée décroît toujours avec la courbure du miroir).

Par ailleurs, cette valeur relativement faible du rayon de courbure de la déformation fait penser que la linéarité de la luminosité avec la courbure de la déformation ne devrait être vérifiée dans aucune de ces quatre expériences. Cela permettrait d'expliquer que la partie où la courbure est négative soit mal décrite par la théorie dans le cas des interfaces eau-air et eau-dodécane.

## 4.7 Mesure de la tension interfaciale et de la viscosité à partir du temps du premier maximum et de l'atténuation

On peut envisager d'utiliser cette expérience pour mesurer la viscosité  $\eta = \eta_1 + \eta_2$  du couple de fluides. En effet, celle-ci joue un rôle dans l'atténuation des oscillations de la

courbure.

La tension de surface peut être connue par la valeur du temps  $\tau_1$  du premier maximum de la courbe (figure 4.34).

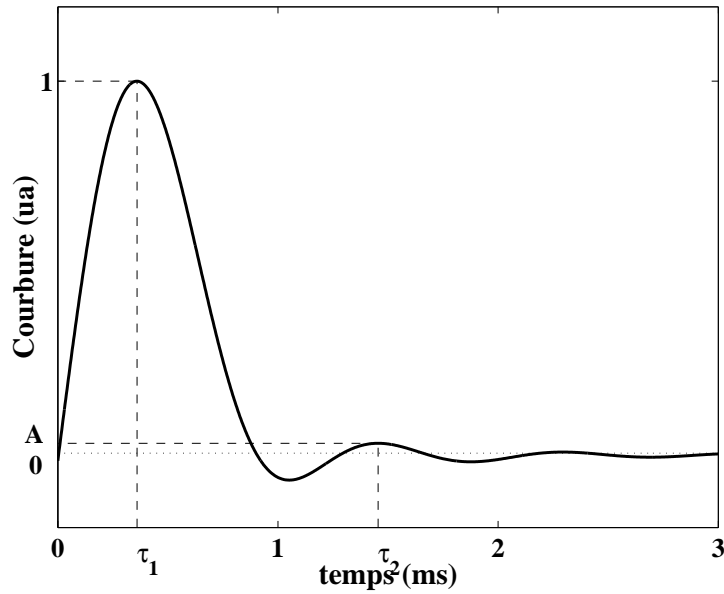


FIG. 4.34 – Notations utilisées dans ce paragraphe. Cette courbe a été réalisée en utilisant les valeurs  $\eta_1 = 8,9 \cdot 10^{-4}$  mPa.s,  $\eta_2 = 1,9 \cdot 10^{-5}$  mPa.s et  $\sigma = 72$  mN/m.

Cette courbe, ainsi que tous les calculs qui suivent, ont été réalisés en utilisant les valeurs suivantes des différents paramètres de contrôle :

$c_1$ (m/s)	1497
$f$ (MHz)	2,25
$\rho_1$ (kg/m <sup>3</sup> )	998
$\rho_2$ (kg/m <sup>3</sup> )	1,2
$g$ (m/s <sup>2</sup> )	9,81
$\Delta t$ ( $\mu$ s)	8,89

Cela correspond aux valeurs théoriques des différentes grandeurs physique pour le couple eau-air, l'onde acoustique, de fréquence 2,25 MHz, étant émise dans l'eau sur une durée de 20 périodes.

Si l'on fait varier théoriquement la viscosité des deux fluides et leur tension interfaciale et que l'on trace la courbe de l'évolution temporelle de la courbure de la déformation, on voit, comme l'indique la courbe 4.35, que le temps  $\tau_1$  du premier maximum de la courbe ne dépend que très peu de la viscosité. Cela permet de déduire la tension interfaciale à partir de ce temps par l'expression empirique  $\tau_1 = \frac{0,095}{\sigma^{1/2}}$  soit  $\sigma = 0,009/\tau_1^2$ ,  $\tau_1$  étant ici exprimé en ms et  $\sigma$  en N/m. Cette expression est très proche de la réalité pour des viscosités  $\eta < 2$  mPa.s. Pour des viscosités  $\eta > 10$  mPa.s, la condition de régime non-visqueux  $\Delta(2\pi/\lambda) \gg 1$  n'est plus vérifiée. On retrouve la même loi d'échelle en  $\sqrt{\sigma}$  que dans l'expression du temps caractéristique de la dynamique inertielle de la déformation d'interface de taille  $2\pi/k$  :  $\tau(k) = \sqrt{\frac{\sigma k^3}{\rho}}$  (en négligeant les effets de la gravité : en effet, le

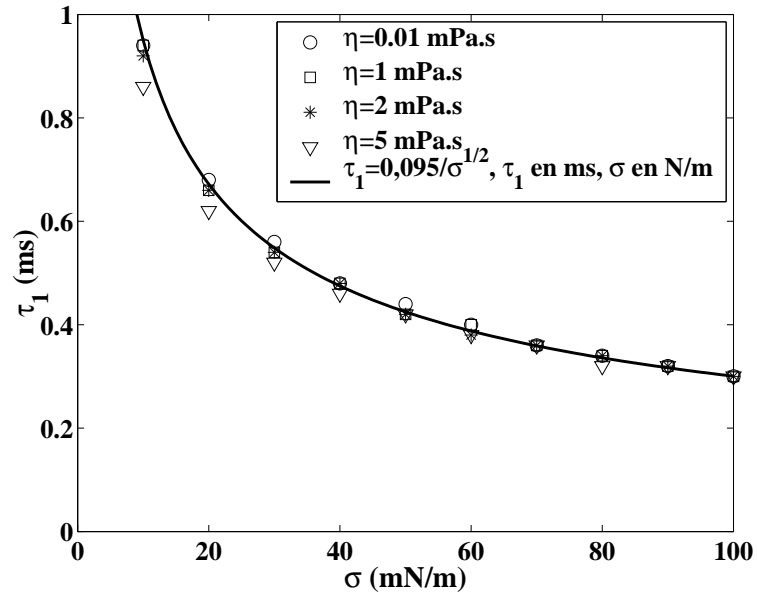


FIG. 4.35 – Temps du premier maximum de la courbure en fonction de la tension interfaciale, pour différentes valeurs de la viscosité.

nombre de Bond  $Bo = (\omega_0/l_c)^2$ , qui compare les effets gravitationnels aux effets de tension de surface, est ici de l'ordre de 0,04).

Connaissant la tension interfaciale et l'atténuation  $A$  des oscillations entre le premier maximum de la courbure et le deuxième, on peut déduire la viscosité  $\eta = \eta_1 + \eta_2$ , à l'aide des courbes de la figure 4.36.

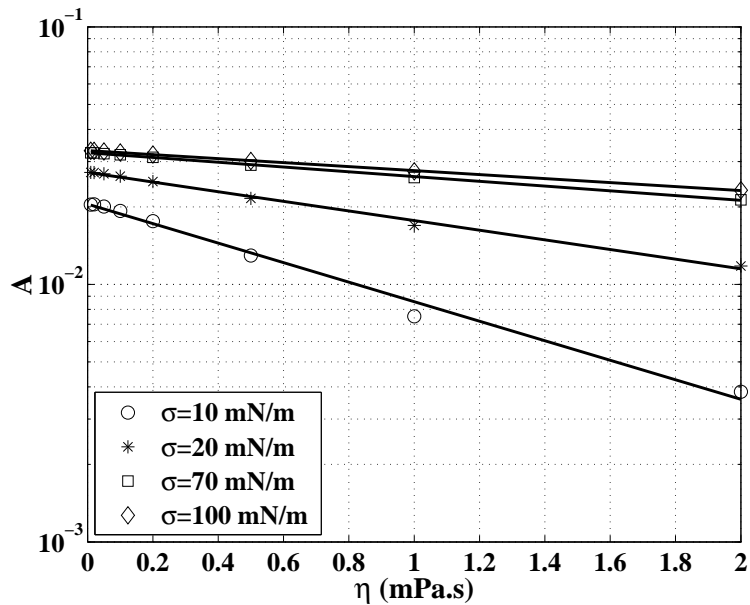


FIG. 4.36 – Atténuation  $A$  de la courbure entre son premier maximum et son deuxième maximum en fonction de la viscosité, pour différentes valeurs de la tension interfaciale.

La figure 4.36 indique que l'atténuation des oscillations de courbure de l'interface vaut

$$A = e^{a(\sigma)\eta + b(\sigma)} \quad (4.83)$$

Les valeurs de  $a(\sigma)$  et  $b(\sigma)$  sont répertoriées dans le tableau suivant pour différentes valeurs de  $\sigma$  :

$\sigma$ (mN/m)	$a(\sigma)$ (m.s.kg <sup>-1</sup> )	$b(\sigma)$
10	-872,91	-3,8867
20	-430,65	-3,6039
30	-333,21	-3,5185
40	-283,72	-3,4777
50	-251,36	-3,4544
60	-230,75	-3,4374
70	-213,28	-3,4274
80	-196,72	-3,4219
90	-185,91	-3,4145
100	-178,83	-3,4087

Ainsi, pour l'expérience sur le couple eau-air présentée sur la figure 4.29, les résultats trouvés sont les suivants :  $\tau_1 = 0,40$  ms soit  $\sigma = (10\tau_1)^{-0,5} = 59$  mN/m.  $A = 0,01$  soit  $\eta = \eta_{eau} + \eta_{air} = (\ln(A) + 3,4374)/(-230,75) = 5,1$  mPa.s.

Les valeurs théoriques sont  $\sigma = 72$  mN/m et  $\eta = 0,9$  mPa.s. Cette méthode permet donc d'obtenir des ordres de grandeur de la tension interfaciale et de la viscosité, mais est très imprécise.

## Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté la méthode que nous avons développée pour mesurer une tension interfaciale en se servant de la déformation comme d'une lentille ou d'un miroir sphérique jouant sur la focalisation d'un faisceau laser, et nous avons montré le montage expérimental que nous avons utilisé à cette fin. Nous déduisons la tension interfaciale de la dynamique de la déformation. Nous avons donc développé une théorie de cette dynamique suivant que l'interface se déforme en régime visqueux ou en régime non-visqueux. La comparaison entre la théorie et l'expérience permet de mesurer précisément la tension interfaciale, en particulier en régime non-visqueux. Enfin, nous avons essayé d'utiliser ces expériences pour mesurer aussi la viscosité d'un fluide, mais le résultat est très imprécis, même si l'ordre de grandeur mesuré est le bon.

## Références du chapitre 4

- [1] A. H. Demond et A. S. Lindner. Estimation of Interfacial Tension between Organic Liquids and Water. *Environ. Sci. Technol.*, 27(12) :2318–2331, 1993.
- [2] C. Cinbis. *Noncontacting techniques for measuring surface tension of liquids*. PhD thesis, Stanford University, 1992.
- [3] W. D. Harkins et F. E. Brown. The determination of surface tension (free surface energy), and the weight of falling drops : the surface tension of water and benzene by the capillary height method. *J. Amer. Chem. Soc.*, 41(4) :499–524, 1919.

- [4] T. L. Huo. *The Effect of Dynamic Surface Tension on Oxygen Transfer Coefficient in Fine Bubble Aeration System*. PhD thesis, University of California, 1998.
- [5] C. Cinbis et B. T. Khuri-Yakub. A noncontacting technique for measuring surface tension of liquids. *Rev. Sci. Instrum.*, 63(3) :2048–2050, 1991.
- [6] C. Cinbis, N. N. Mansour, et B. T. Khuri-Yakub. Effect of surface tension on the acoustic radiation pressure-induced motion of the water-air interface. *J. Acoust. Soc. Am.*, 94(4) :2365–2372, 1993.
- [7] S. Mitani et K. Sakai. Measurement of ultralow interfacial tension with a laser interface manipulation technique. *Phys. Rev. E*, 66(3) :031604, 2002.
- [8] P. Roux. *Optique*, chapter 5. Ellipses, 1994.
- [9] B. E. A. Saleh et M. C. Teich. *Fundamentals of photonics*, chapter 3. John Wiley & Sons, Inc, 1991.
- [10] G. V. Ostrovskaia, I. I. Komissarova, et E. N. Shedova. Deformation of the free surface of a liquid under the pressure of light. *Sov. Phys. Tech. Phys.*, 33(4) :465–470, 1988.
- [11] Sir Horace Lamb. *Hydrodynamics*, chapter XI, section 349. Cambridge University Press, 6ème édition, 1932.
- [12] M. S. Plesset et C. G. Whipple. Viscous effects in Rayleigh-Taylor instability. *Phys. Fluids*, 17(1) :1–7, 1974.
- [13] K. Kumar et L. S. Tuckerman. Parametric instability of the interface between two fluids. *Journal of Fluid Mechanics*, 279 :49–68, 1994.
- [14] T. M. Aminabhavi et V. B. Patil. Density, Refractive Index, Viscosity, and Speed of Sound in Binary Mixtures of Ethenylbenzene with Hexane, Heptane, Octane, Nonane, Decane, and Dodecane. *J. Chem. Eng. Data*, 42 :641–646, 1997.
- [15] <http://www.dowcorning.com/applications/search/default.aspx?r=76en>.
- [16] G. B. Arfken et H. J. Weber. *Mathematic Methods for Physicists*, page 1003. Academic, New York, 4ème édition, 1995.
- [17] R. Wunenburger, A. Casner, et J.-P. Delville. Light-induced deformation and instability of a liquid interface. II. Dynamics. *Phys. Rev. E*, 73(3) :036315, 2006.





# Chapitre 5

## Étude expérimentale des déformations d'interfaces fluides transparentes aux ondes acoustiques

Nous allons maintenant étudier les déformations d'interfaces fluides par la pression de radiation acoustique en régime permanent. Autrement dit, au lieu d'émettre des ondes acoustiques impulsionnelles comme c'était le cas dans le chapitre précédent, le transducteur émet des ondes acoustiques de façon continue pendant plusieurs secondes (au maximum 5 secondes).

Le but de ce chapitre est de vérifier expérimentalement les calculs en régime stationnaire qui ont été faits au chapitre 3, en particulier l'expression 3.48, dans le cas d'une interface transparente. Utiliser une interface transparente permet d'éviter les phénomènes d'interférences entre les réflexions successives des ondes sur l'interface et le transducteur. Des travaux ont déjà été réalisés sur des interfaces réfléchissantes comme l'interface eau-air [1]. Des expériences qualitatives ont été faites sur des interfaces transparentes [2]. Des études ont aussi été réalisées sur le déplacement d'une cible solide par la pression de radiation acoustique [3], ce qui est une technique de calibration des sources acoustiques de forte puissance. Mais à notre connaissance, aucune étude quantitative n'a été faite sur la déformation d'interfaces transparentes par la pression de radiation acoustique qui permettrait de vérifier la théorie présentée au chapitre 3. Nous vérifierons qu'il y a un bon accord entre les expériences et la théorie, à condition que les efforts exercés sur l'interface par les écoulements de streaming induits par l'onde acoustique soient négligeables devant la pression de radiation.

Les expériences sur l'interface eau-DC704 présentées dans ce chapitre ont été réalisées en collaboration avec Alice Nicolas et Sébastien Manneville (CRPP Bordeaux).

### 5.1 Choix du couple de fluides

La condition pour que l'interface fluide soit transparente aux ondes acoustiques est que les deux fluides aient la même impédance acoustique :

$$\rho_1 c_1 = \rho_2 c_2 \tag{5.1}$$

Nous avons identifié deux couples de fluides non miscibles pouvant répondre à cette exigence : le couple eau-DC704 (l'huile DC704 est une huile silicone commerciale) et le couple eau-chloroforme.

Chacun de ces deux couples a ses avantages et ses inconvénients. Les caractéristiques physiques principales de ces trois fluides sont résumées dans le tableau suivant, à 25°C :

Fluide	Eau	DC704	Chloroforme
Masse volumique $\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	998	1070	1490
Vitesse du son $c$ (m/s)	1497	1409 (à 26°C)	987
Viscosité $\eta$ (mPa.s)	0,89	42	0,537
Impédance acoustique $Z$ (MRayl)	1,49	1,51	1,47

Le coefficient de réflexion en énergie de l'interface eau-DC704 vaut

$$\mathcal{R}_{eau-DC704} = \left( \frac{Z_{eau} - Z_{DC704}}{Z_{eau} + Z_{DC704}} \right)^2 = 2.10^{-5} \quad (5.2)$$

Celui de l'interface eau-chloroforme vaut

$$\mathcal{R}_{eau-chloroforme} = \left( \frac{Z_{eau} - Z_{chloroforme}}{Z_{eau} + Z_{chloroforme}} \right)^2 = 6.10^{-5} \quad (5.3)$$

Du fait des très faibles valeurs de ces deux coefficients de réflexion, on peut considérer ces deux interfaces comme totalement transparentes.

Le chloroforme a l'inconvénient d'être difficile à manipuler : il est très réactif chimiquement et attaque de nombreux matériaux. Pour faire des expériences avec du chloroforme, il faut donc faire attention à n'utiliser que des matériaux inertes chimiquement. Nous avons utilisé une cellule de verre, fermée par deux couvercles de téflon. Les joints utilisés pour assurer l'étanchéité de la cellule sont des joints résistants au chloroforme. Les joints permettant d'éviter les fuites au niveau du transducteur et du hublot (figure 4.14) sont des joints en viton. Il faut également protéger la surface émettrice du transducteur, la couche d'adaptation d'impédance risquant vraisemblablement d'être attaquée par le chloroforme. Nous l'avons protégé par une fine couche de téflon, réalisée en pulvérisant du téflon en spray sur la surface du transducteur. Cependant, pour éviter de prendre le risque de détériorer définitivement le transducteur, toutes les expériences sur le couple eau-chloroforme ont été faites avec le transducteur émettant dans l'eau, donc placé en haut de la cellule (l'eau est moins dense que le chloroforme). Nous avons pu vérifier en faisant des cartes du champ de pression émis par le transducteur et des courbes de calibration que le profil du champ de pression en  $\left( \frac{J_1(\pi r/\lambda)}{\pi r/\lambda} \right)^2$  n'était pas modifié par la couche de téflon, et qu'aucune modification notable de l'amplitude de pression acoustique, à tension d'alimentation égale, n'était visible.

L'huile DC704 n'a pas cet inconvénient de la forte réactivité chimique. Par contre, sa viscosité relativement élevée risque de gêner les expériences. En effet, nous avons vu à la fin du chapitre 2 qu'une onde acoustique subissant un amortissement, par exemple à cause des effets visqueux, lors de sa propagation dans un liquide génère un écoulement permanent de streaming dans ce fluide, représenté approximativement sur la figure 5.1. La viscosité est à la fois le frein et le moteur de cet écoulement. Il n'est par conséquent pas nécessairement moins fort lorsque la viscosité des fluides utilisés est plus faible. Nous avons vu à la fin du chapitre 2 que les efforts exercés par le streaming sur l'interface fluide étaient du même ordre de grandeur que ceux exercés par la pression de radiation. Du fait de ces efforts qu'il exerce sur l'interface fluide, l'écoulement de streaming, qui n'a pas été pris en compte dans

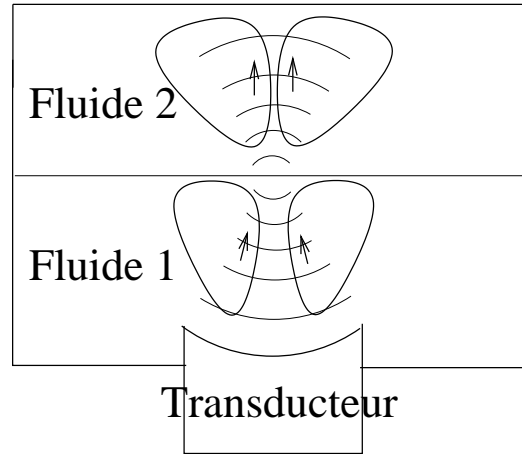


FIG. 5.1 – Représentation qualitative des écoulements de streaming induits par l’onde acoustique. Dans tout ce chapitre, les indices 1 et 2 désignent respectivement le fluide où l’onde est émise et celui vers lequel elle se dirige. Nous utiliserons aussi dans certains passages les indices  $A$  et  $B$ , qui désigneront respectivement le fluide inférieur et le fluide supérieur.

les calculs décrivant la déformation de l’interface par la pression de radiation acoustique, peut avoir un effet non négligeable sur la forme de la déformation.

Dans la suite, nous allons présenter des expériences réalisées à l’aide de ces deux couples de fluides, le couple eau-chloroforme ayant permis d’obtenir des résultats quantitatifs beaucoup plus satisfaisant.

## 5.2 Forme de la déformation

Comme nous l’avons démontré en page 81, le profil de la déformation de l’interface peut être décrit par l’équation suivante :

$$h(r) = \frac{Ap_{i0}^2\omega_0^2}{4} \int_0^\infty \frac{e^{-\omega_0^2 k^2/8}}{(\rho_1 - \rho_2)g + \sigma k^2} J_0(kr) k dk \quad (5.4)$$

$r$  désignant la distance à l’axe de la déformation,  $h(r)$  la hauteur de l’interface en  $r$ ,  $p_{i0}$  l’amplitude de la pression acoustique incidente en  $r = 0$ .  $\rho_1$  et  $\rho_2$  désignent les masses volumiques respectives du fluide où l’onde acoustique est émise et du fluide vers lequel elle se dirige.  $\sigma$  est la tension interfaciale,  $g$  l’accélération de la pesanteur. Le paramètre  $\omega_0$  vaut  $0,86\lambda$ ,  $\lambda$  étant la longueur d’onde de l’onde acoustique dans le fluide où elle est émise.  $A$  est défini à la page 79 et vaut  $A = \pm \frac{1}{\rho_1 c_1^2} \frac{\rho_1^2 c_1^2 + \rho_2^2 c_2^2 - 2\rho_1 \rho_2 c_1^2}{(\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2)^2}$ ,  $c_1$  et  $c_2$  désignant la vitesse des ondes acoustiques respectivement dans le milieu où l’onde est émise et dans le milieu vers lequel elle se dirige (l’expression de  $A$  est précédée d’un signe  $-$  si l’onde acoustique vient du fluide supérieur et d’un signe  $+$  si elle vient du fluide inférieur).

La hauteur de la déformation est déterminée par l’équation 3.48 :

$$h(0) = \frac{A\omega_0^2 p_{i0}^2}{8\sigma} e^{Bo/8} E_1(Bo/8) \quad (5.5)$$

Une interface transparente telle que celles que nous étudions dans ce chapitre est telle que  $\rho_1 c_1 = \rho_2 c_2$ , et donc

$$A = \pm \frac{1}{\rho_1 c_1^2} \frac{\rho_1^2 c_1^2 + \rho_2^2 c_2^2 - 2\rho_1 \rho_2 c_1^2}{(\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2)^2} \quad (5.6)$$

$$= \pm \frac{1}{\rho_1 c_1^2} \frac{2\rho_1^2 c_1^2 - 2\rho_1 \rho_2 c_1^2}{4\rho_1^2 c_1^2} \quad (5.7)$$

$$= \pm \frac{1}{2\rho_1 c_1^2} - \frac{\rho_2}{2\rho_1^2 c_1^2} \quad (5.8)$$

$$= \pm \frac{1}{2\rho_1 c_1^2} - \frac{\rho_2}{2\rho_2^2 c_2^2} \quad (5.9)$$

$$= \pm \frac{1}{2\rho_1 c_1^2} - \frac{1}{2\rho_2 c_2^2} \quad (5.10)$$

$$= \pm \frac{1}{2}(\chi_{S1} - \chi_{S2}) \quad (5.11)$$

$$= \frac{1}{2}(\chi_{SA} - \chi_{SB}) \quad (5.12)$$

L'indice  $A$  désigne le fluide inférieur et l'indice  $B$  le fluide supérieur,  $\chi_{Si}$  désignant la compressibilité isentropique du fluide  $i$ .

Le signe de  $A$  ne dépend alors pas du sens de propagation de l'onde. Cela permet de vérifier (équation 5.5) que dans le cas d'une interface totalement transparente, le sens de la déformation ne dépend jamais du sens de propagation de l'onde. La déformation croît toujours du fluide le plus compressible vers le moins compressible.

Le couple eau-DC704 est tel que  $\rho_A \approx \rho_B$  et  $c_A \approx c_B$ , et donc  $\chi_{SA} - \chi_{SB} \ll \chi_{SA}$ . Cela n'est pas le cas pour le couple eau-chloroforme. Il faudra donc, pour obtenir une même hauteur de déformation, une onde acoustique plus intense dans le cas du couple eau-DC704 que dans le cas du couple eau-chloroforme.

L'incertitude relative sur  $A = \Delta\chi_S/2$  avec  $\Delta\chi_S = \chi_{SA} - \chi_{SB}$  vaut :

$$\left| \frac{dA}{A} \right| = \frac{d\Delta\chi_S}{\Delta\chi_S} \quad (5.13)$$

Or,  $\Delta\chi_S = \frac{1}{\rho_A c_A^2} - \frac{1}{\rho_B c_B^2}$  donc

$$d\Delta\chi_S = \frac{1}{\rho_A^2 c_A^2} d\rho_A + \frac{2}{\rho_A c_A^3} dc_A + \frac{1}{\rho_B^2 c_B^2} d\rho_B + \frac{2}{\rho_B c_B^3} dc_B \quad (5.14)$$

$$= \chi_{SA} \frac{d\rho_A}{\rho_A} + 2\chi_{SA} \frac{dc_A}{c_A} + \chi_{SB} \frac{d\rho_B}{\rho_B} + 2\chi_{SB} \frac{dc_B}{c_B} \quad (5.15)$$

Supposons que  $\rho_A$ ,  $\rho_B$ ,  $c_A$  et  $c_B$  soient tous connus à 1% près. Alors

$$d\Delta\chi_S = \frac{1}{100} (3\chi_{SA} + 3\chi_{SB}) \quad (5.16)$$

et donc

$$\left| \frac{dA}{A} \right| = \frac{d\Delta\chi_S}{\chi_S} = \frac{1}{100} \frac{3\chi_{SA} + 3\chi_{SB}}{|\chi_{SA} - \chi_{SB}|} \quad (5.17)$$

Le tableau suivant récapitule l'incertitude sur  $A$  (donc sur la hauteur  $h(0)$  de la déformation) entraînée par une incertitude de 1% sur les vitesses du son et les masses volumiques des deux fluides utilisés, dans le cas d'une interface eau-chloroforme et dans le cas d'une interface eau-DC704 :

Fluide $A$	Eau	Eau
Fluide $B$	DC704	Chloroforme
$c_A$ (m/s)	1497	1497
$c_B$ (m/s)	1409	987
$\rho_A$ (kg/m <sup>3</sup> )	998	998
$\rho_B$ (kg/m <sup>3</sup> )	1070	1490
$\chi_{SA} = \frac{1}{\rho_A c_A^2}$ (ms <sup>2</sup> kg <sup>-1</sup> )	$4,47 \cdot 10^{-10}$	$4,47 \cdot 10^{-10}$
$\chi_{SB} = \frac{1}{\rho_B c_B^2}$ (ms <sup>2</sup> kg <sup>-1</sup> )	$4,71 \cdot 10^{-10}$	$6,89 \cdot 10^{-10}$
Incertitude relative sur $A$ (%)	120	15

Ces calculs montrent pourquoi, en plus du risque d'apparition du streaming, le couple eau-DC704 n'est pas un très bon choix : les petites incertitudes sur les masses volumiques et les vitesses du son dans les fluides (par exemple à cause de leur dépendance en température ou de la reproductibilité du dégazage de l'eau) entraînent de très grosses incertitudes sur le coefficient  $A$  et donc sur la hauteur de la déformation.

Cependant, les expériences sur ce couple eau-DC704 permettent d'obtenir des résultats qualitatifs intéressants.

Nous avons mesuré indépendamment la masse volumique de l'eau et de l'huile DC704 avec une balance de Mohr et un densimètre, à 19°C. Les résultats sont présentés dans le tableau suivant :

	Balance de Mohr	Densimètre
$\rho_{eau}$ (kg/m <sup>3</sup> )	1,020	1,01
$\rho_{DC704}$ (kg/m <sup>3</sup> )	1,072	1,072

Les mesures de la masse volumique de l'huile DC704 sont en accord avec la valeur tabulée dans le tableau précédent à 0,2% près. Cependant, en théorie, la masse volumique de l'eau à cette température vaut 998 kg/m<sup>3</sup>. On peut donc estimer à environ 2% l'incertitude sur ces mesures.

### 5.3 Vérification expérimentale de l'invariance haut-bas

Nous avons vérifié expérimentalement sur l'interface eau-DC704 que le sens de la déformation ne dépendait pas du sens de propagation de l'onde acoustique et qu'elle se faisait toujours de l'huile DC704 vers l'eau, ce que l'on peut observer sur les photos des figures 5.2 et 5.3.

### 5.4 Observation du streaming acoustique

On observe sur les photos 5.2 et 5.3 que la déformation n'a pas la même forme suivant que l'onde acoustique arrive par le haut ou par le bas. En effet, ces deux photos sont à la même échelle et prises avec des ondes de même fréquence et d'amplitude comparables.

On peut également observer que sur l'interface eau-DC704, le profil théorique de la déformation prédit par l'équation 5.4 n'est pas du tout en accord avec le profil expérimental, comme l'indiquent les figures 5.2 et 5.3.

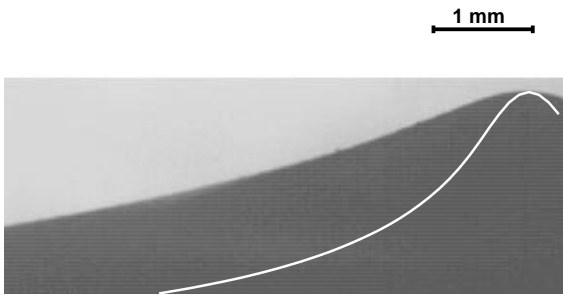


FIG. 5.2 – Déformation de l'interface eau-DC704 par une onde acoustique d'amplitude 3,6 MPa, l'onde acoustique arrivant par le bas. La théorie sous-estime la largeur de la déformation. L'origine en hauteur de la courbe théorique a été choisie de façon arbitraire de façon à ce que le sommet de la courbe théorique coïncide avec celui de la déformation photographiée. En effet, sur cette image, on ne peut pas repérer l'origine des hauteurs.

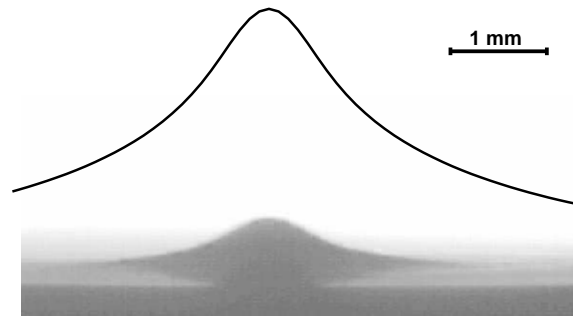


FIG. 5.3 – Déformation de l'interface eau-DC704 par une onde acoustique d'amplitude 3,5 MPa. L'onde acoustique arrive par le haut. La théorie surestime la hauteur de la déformation. Elle surestime aussi sa largeur. L'origine en hauteur de la courbe théorique a été prise au niveau de la queue de la déformation, qui correspond à la hauteur de l'interface au repos.

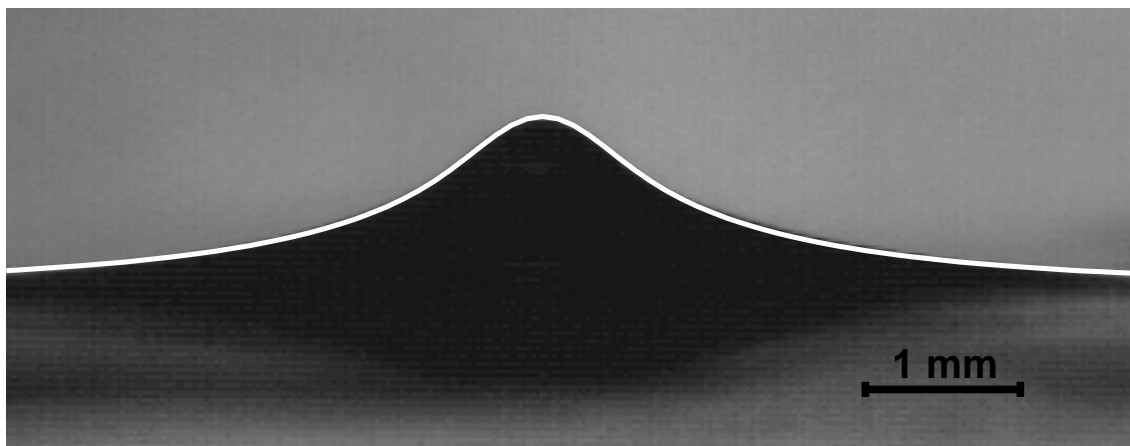


FIG. 5.4 – Déformation de l'interface eau-chloroforme par une onde acoustique d'amplitude 1,17 MPa. L'onde acoustique arrive par le haut. Le profil théorique est en bon accord avec le profil expérimental.

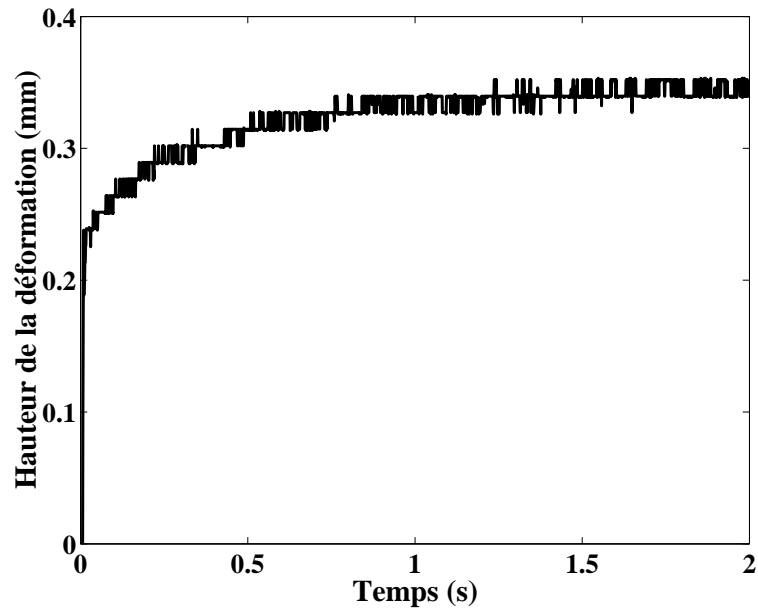


FIG. 5.5 – Hauteur de la déformation de l'interface eau-DC704 en fonction du temps. Le transducteur est placé en haut de la cellule (l'onde acoustique vient donc de l'eau). L'amplitude de l'onde est de 4,2 MPa.

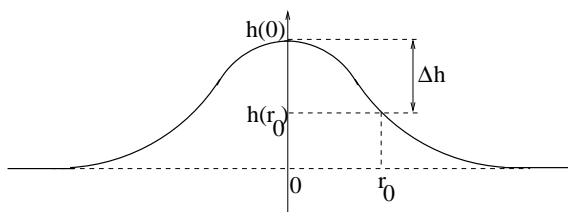


FIG. 5.6 – Principe de la mesure de la modification de la forme de la déformation : on mesure à chaque instant la hauteur en  $r = 0$  et la hauteur en une valeur  $r_0$  donnée de  $r$ , puis on calcule la différence  $\Delta h$  entre ces deux hauteurs.

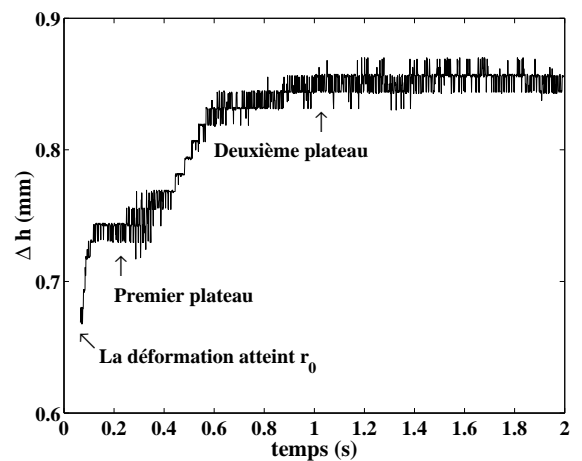


FIG. 5.7 – Évolution temporelle de  $\Delta h$  pour le couple eau-DC704, l'onde acoustique venant de l'eau. Ici,  $r_0 = 3,8$  mm. L'amplitude de l'onde est de 4,2 MPa.

En revanche, sur l'interface eau-chloroforme, le profil théorique décrit très bien le profil expérimental (figure 5.4).

Nous avons interprété ces résultats sur le couple eau-DC704 comme étant peut-être dû à l'écoulement de streaming acoustique. Les efforts que cet écoulement exerce sur l'interface fluide expliqueraient son influence sur la forme de la déformation.

L'écoulement de streaming est indépendant de la pression de radiation acoustique. Il est donc possible qu'il se traduise au niveau de la déformation par des phénomènes ayant un temps caractéristique différent du temps de croissance de la déformation. La courbe 5.5 montre la hauteur de la déformation de l'interface eau-DC704 en fonction du temps. La hauteur croît en fonction du temps avec un temps caractéristique de l'ordre de 500 ms. On n'observe pas clairement sur cette courbe de deuxième temps caractéristique.

En revanche, lorsqu'on mesure l'évolution temporelle de la différence  $\Delta h$  entre la hauteur de l'interface sur l'axe de la déformation et sa hauteur à une distance  $r_0$  de l'axe (comme indiqué sur la figure 5.6), on observe sur le couple eau-DC704 que la forme de la déformation évolue en deux temps caractéristiques (figure 5.7) :  $\Delta h$  commence par atteindre un premier plateau, puis croît à nouveau avant d'atteindre un deuxième plateau. Il y a donc bien un phénomène indépendant de la pression de radiation, qui se traduit par une modification de la forme de la déformation avec un temps caractéristique différent. Nous verrons au paragraphe 5.8 que la théorie ne tenant compte que de la pression de radiation prévoit que la courbure au sommet de la déformation (de l'ordre de  $\Delta h/r_0^2$ ) atteint un plateau, mais qu'elle n'en prévoit pas de deuxième.

Les mesures sur l'interface eau-DC704 sont donc faussées à cause d'un phénomène dont la théorie présentée dans le chapitre 3 ne tient pas compte, qui est peut-être le streaming acoustique, qui ne semble pas intervenir dans le cas du couple eau-chloroforme. Le streaming est en effet beaucoup plus gênant dans le cas de l'interface eau-DC704 que dans le cas de l'interface eau-chloroforme.

En effet, nous avons déjà montré (page 58) que les efforts que le streaming exerçait sur l'interface eau-chloroforme étaient négligeables devant la pression de radiation alors qu'ils étaient du même ordre de grandeur dans le cas de l'interface eau-DC704.

## 5.5 Mesure de la vitesse du son dans le chloroforme

Le chloroforme que nous utilisons étant stabilisé par 1% d'éthanol, nous avons voulu vérifier la valeur de sa vitesse du son. Pour ce faire, nous avons appliqué la méthode du temps de vol en utilisant le montage présenté sur la figure 5.8.

Un transducteur électroacoustique non focalisé  $T_1$  (*Valpey Fisher* ISO202GP), adapté en impédance à l'eau (donc au chloroforme) et protégé par une fine couche de téflon, émet une onde acoustique verticalement dans le liquide. Un transducteur identique  $T_2$ , fonctionnant en réception, convertit cette onde acoustique en signal électrique.  $T_1$  est branché en sortie de l'amplificateur de puissance, qui amplifie le signal émis par le générateur de fonction. La tension aux bornes de  $T_1$  et la tension aux bornes de  $T_2$  sont visualisées sur un oscilloscope, grâce auquel on peut mesurer le décalage temporel  $\tau$  de ces deux signaux. Le transducteur  $T_2$  est monté sur une platine microcontrôle verticale qui permet de le translater d'une distance connue le long de l'axe vertical  $z$ .

Le générateur de fonction émet un signal sinusoïdal de fréquence 2,25 MHz pendant 20 périodes toutes les 10 ms.

Les mesures sont présentées sur les courbes 5.9 et 5.10. Lors des expériences, la tempé-



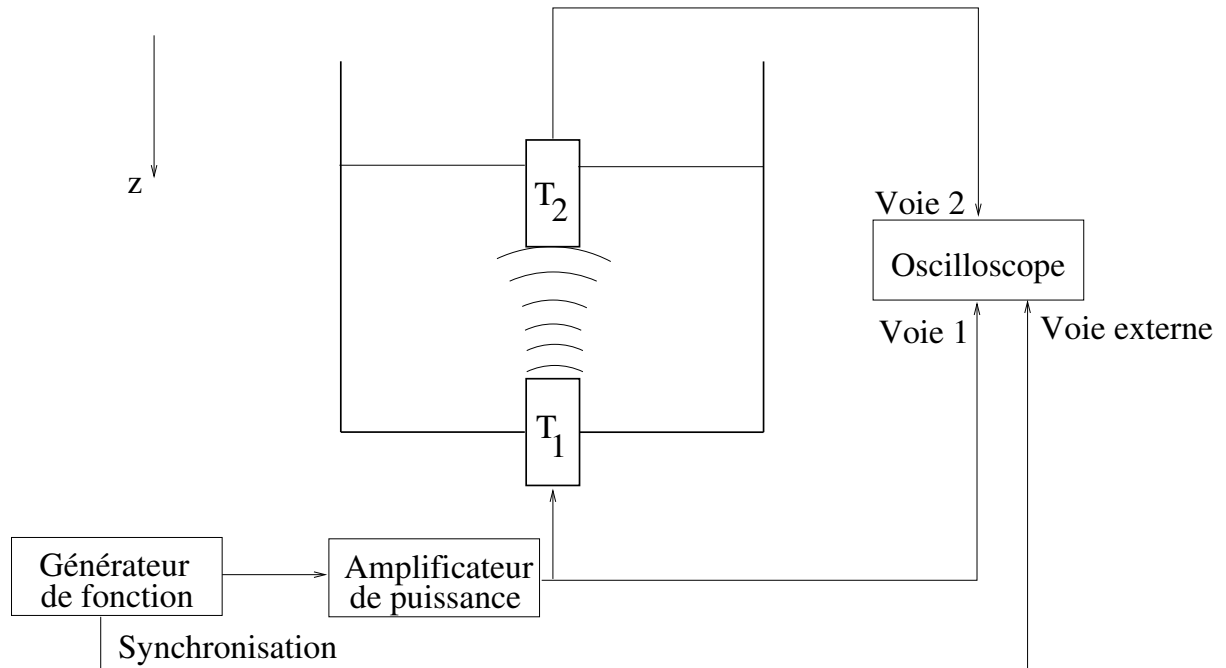


FIG. 5.8 – Montage utilisé pour mesurer la vitesse du son dans un liquide.

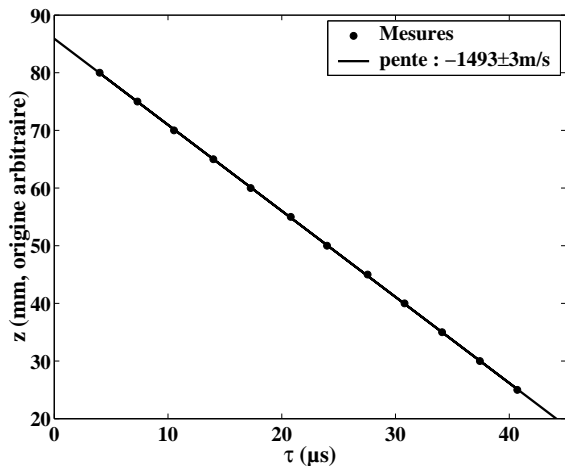


FIG. 5.9 – Mesure de la vitesse du son dans l'eau

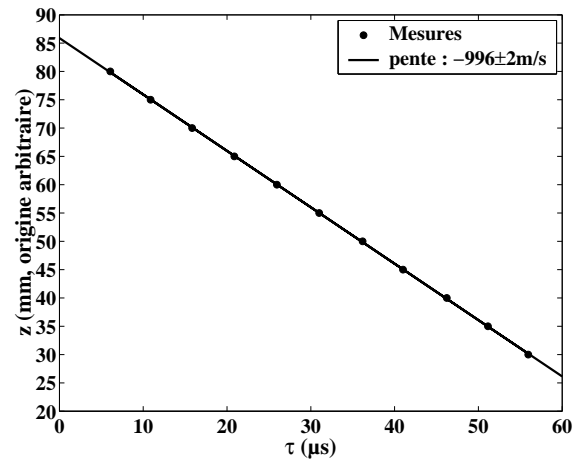


FIG. 5.10 – Mesure de la vitesse du son dans le chloroforme

rature de l'eau était de  $21,9^\circ\text{C}$  et celle du chloroforme de  $23,3^\circ\text{C}$ . La vitesse du son vaut alors, d'après les tables,  $1489\text{ m/s}$  dans l'eau à  $21,9^\circ\text{C}$  et  $993\text{ m/s}$  dans le chloroforme pur à  $23,3^\circ\text{C}$ . La mesure de la vitesse du son dans l'eau permet d'établir la précision de l'expérience à  $0,3\%$ . La comparaison de la mesure de la vitesse du son dans le chloroforme avec les tables permet de conclure que la présence de  $1\%$  d'éthanol dans le chloroforme ne modifie pas de façon significative la vitesse du son dans celui-ci.

Les incertitudes sur la vitesse du son  $c$  dans le chloroforme et dans l'eau ont été évaluées grâce à l'expression suivante [4] :

$$dc = \sqrt{\frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (z(i) - c\tau(i))^2}{\sum_{i=1}^n (\tau(i) - \bar{\tau})^2}} \quad (5.18)$$

$n$  désignant le nombre de points de mesure et  $\bar{\tau}$  la moyenne de  $\tau$  sur tous ces points.

## 5.6 Hauteur de la déformation de l'interface entre l'eau et le chloroforme en régime stationnaire

### 5.6.1 Déformation quasi-statique

La théorie prévoit que la hauteur de la déformation en régime stationnaire soit proportionnelle au carré de l'amplitude de pression acoustique incidente (équation 5.5).

Pour tester la validité de cette équation, nous avons soumis l'interface eau-chloroforme à des pressions de radiations acoustiques variant linéairement en fonction du temps. Le montage utilisé pour cette expérience est représenté sur la figure 5.11. Le générateur de fonction a été programmé pour émettre pendant 5 s un signal modulé en amplitude comme l'indique la figure 5.12. Pendant 2,5 s, l'amplitude de l'onde acoustique émise par le transducteur croît proportionnellement à la racine carrée du temps. Pendant les 2,5 s suivantes, elle décroît de façon symétrique. La pression de radiation étant proportionnelle au carré de la pression acoustique, elle subit une rampe linéaire croissante puis une rampe linéaire décroissante. Le temps caractéristique de relaxation de la déformation étant d'une dizaine de millisecondes, la déformation évolue adiabatiquement pendant les rampes de pression de radiation. Par conséquent, la déformation évolue de manière quasi-stationnaire, sa forme axisymétrique  $h(r)$  résultant comme dans tout ce qui précède de la compétition entre la pression de radiation d'une part et la gravité  $g$  et la tension superficielle  $\sigma$  d'autre part. Un extracteur d'amplitude, constitué d'un montage redresseur de tension conçu par le service d'électronique du CPMOH, permet d'envoyer à l'oscilloscope un signal de tension proportionnel à l'amplitude du signal émis par le générateur. À l'instant où le générateur de fonction commence à émettre une rampe, il envoie un signal de synchronisation qui permet de déclencher simultanément l'oscilloscope et la caméra rapide. Puis le signal de tension mesuré par l'oscilloscope est transmis à un ordinateur, ainsi que les images prises par la caméra. À partir du signal de tension mesuré par l'oscilloscope, on peut remonter à l'évolution temporelle de l'amplitude de la pression acoustique.

### 5.6.2 Test de la théorie de la pression de radiation

Pour connaître la variation de la hauteur  $h$  de la déformation en fonction de l'amplitude de pression acoustique  $p_0$ , il suffit de mesurer  $h$  en fonction du temps  $t$  sur les images de la caméra, puis  $p_0$  en fonction de  $t$  à partir du signal de l'oscilloscope, et de tracer  $h$  fonction de  $p_0^2$ . Les résultats sont reproduits sur les figures 5.13 et 5.14. Tant que la hauteur de la déformation ne dépasse pas la longueur de la tache focale du faisceau acoustique (figure 5.13), on vérifie bien que la hauteur de la déformation est proportionnelle au carré de l'amplitude de pression de radiation acoustique, et en bon accord avec l'expression théorique donnée par l'équation 5.5, compte tenu de l'incertitude sur la mesure de l'amplitude de pression acoustique. Cela confirme la théorie de la pression de radiation acoustique présentée dans le chapitre 3.

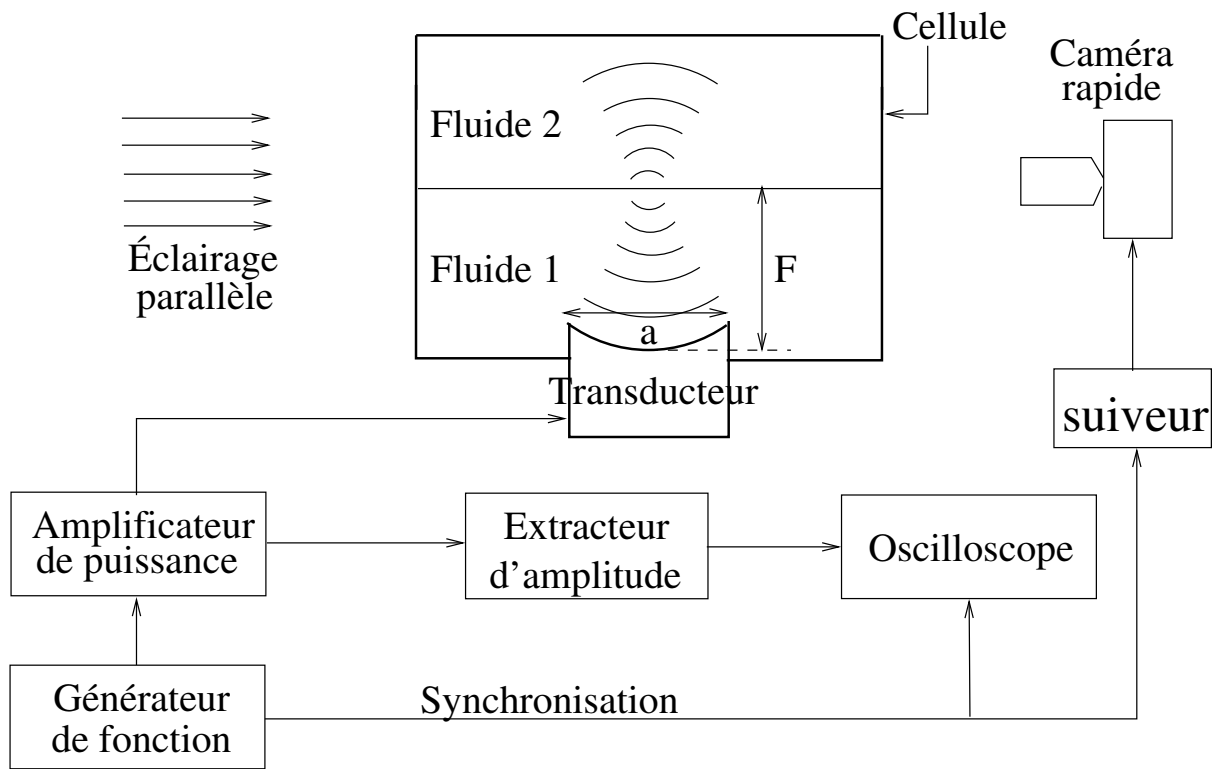


FIG. 5.11 – Montage électronique utilisé pour les expériences de balayage en tension.

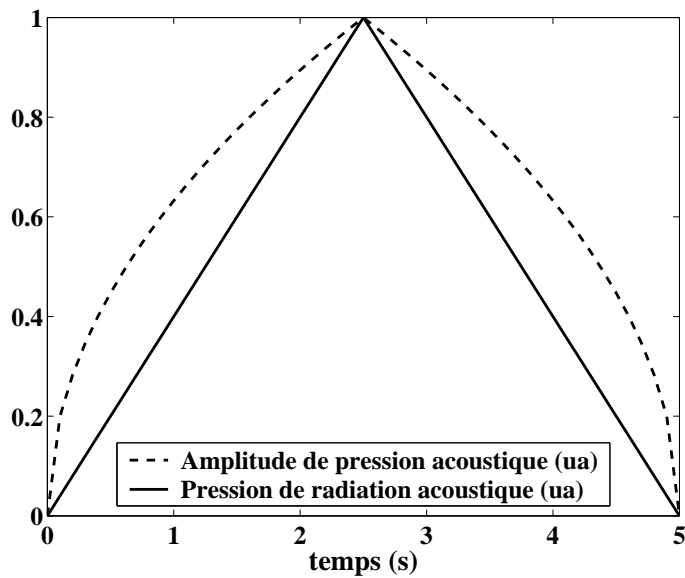


FIG. 5.12 – Rampe de pression de radiation acoustique

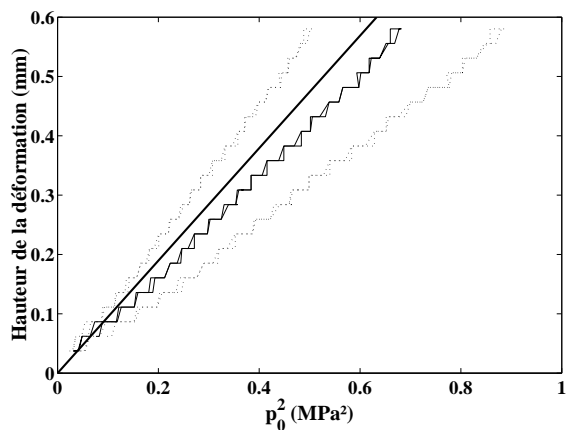


FIG. 5.13 – Hauteur de la déformation de l'interface eau-chloroforme pour une rampe de pression de petite amplitude. La courbe en trait gras représente la courbe théorique, donnée par l'équation 5.5. La courbe noire en trait fin représente la courbe expérimentale. Les deux courbes pointillées représentent les courbes expérimentales extrêmes, compte tenu du fait qu'à cause de l'imprécision du capteur de pression, la pression expérimentale est connue à 14% près. La discrétisation des valeurs de la hauteur de la déformation est due à la pixellisation des images.

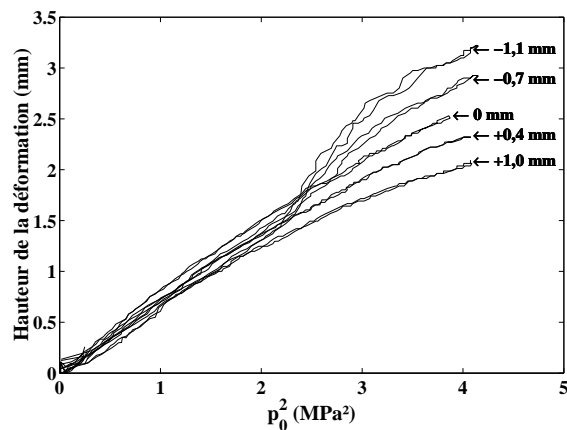


FIG. 5.14 – Hauteur de la déformation de l'interface eau-chloroforme pour des rampes de pression de grande amplitude, et pour différentes positions de l'interface au repos. La position indiquée en mm correspond à la distance entre l'interface au repos et le plan focal du transducteur, une valeur négative correspondant à une interface au repos en-dessous du point focal.

### 5.6.3 Comportement aux grandes déformations

Lorsque la hauteur de la déformation devient de l'ordre de la longueur de la tache focale du faisceau (figure 5.14), on observe que cette linéarité n'est plus observée. La courbe  $h = f(P_0^2)$  dépend de la position initiale de l'interface fluide par rapport au plan focal du transducteur. Une explication est illustrée par la figure 5.15. La déformation se forme toujours vers le haut dans le cas du couple eau-chloroforme. Si l'interface au repos est en-dessous du plan focal du transducteur (schéma de gauche), alors quand elle se déforme, elle se rapproche du plan focal et la pression de radiation s'exerçant sur l'interface croît. Si au contraire, l'interface au repos est dans le plan focal ou au-dessus de ce plan, alors la déformation l'éloigne du plan focal la pression de radiation s'exerçant sur l'interface décroît.

On peut observer cet effet sur la figure 5.14. Sur l'expérience où l'interface au repos est à 1,1 mm en-dessous du plan focal (indiquée par l'annotation  $-1,1$  mm), on observe que la déformation croît linéairement avec l'amplitude de pression acoustique, se met à croître plus fortement puis moins fortement à mesure que l'amplitude de l'onde augmente. On observe aussi cet effet sur l'expérience où l'interface au repos est à 0,7 mm en-dessous du plan focal. En revanche, pour les expériences où elle est dans le plan focal ou au-dessus, on observe uniquement le fait que plus l'amplitude de pression acoustique est grande, moins la croissance de la déformation avec l'amplitude de pression acoustique est forte.

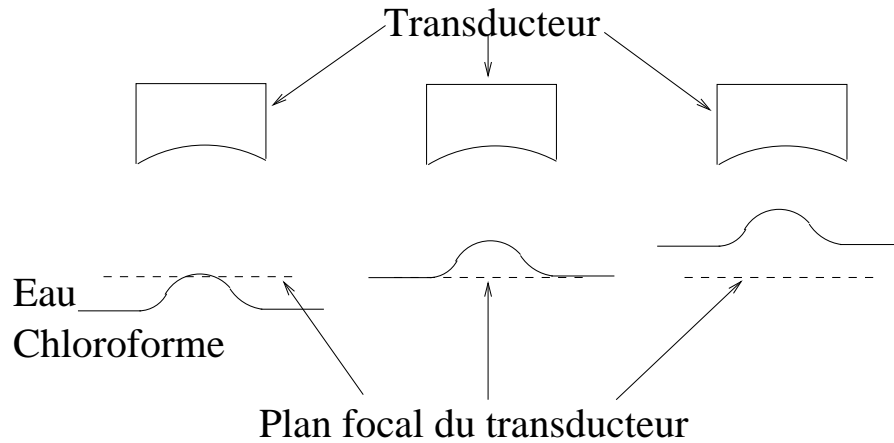


FIG. 5.15 – Suivant que l’interface au repos est en-dessous ou au-dessus du plan focal, la déformation l’en rapproche ou l’en éloigne.

On observe une hystérésis de la hauteur lors de la rampe décroissante de pression sur les expériences à  $-1,1$  et  $-0,7$  mm, mais nous ne l’avons pas expliquée. Cette hystérésis de hauteur s’accompagne d’une hystérésis de forme : pour ces expériences, la déformation avait une forme de tétine lorsque l’amplitude de l’onde était à son maximum (figure 5.16). Elle a gardé cette forme pendant toute la rampe décroissante d’amplitude alors qu’elle ne l’avait acquise qu’à la fin de la rampe croissante.

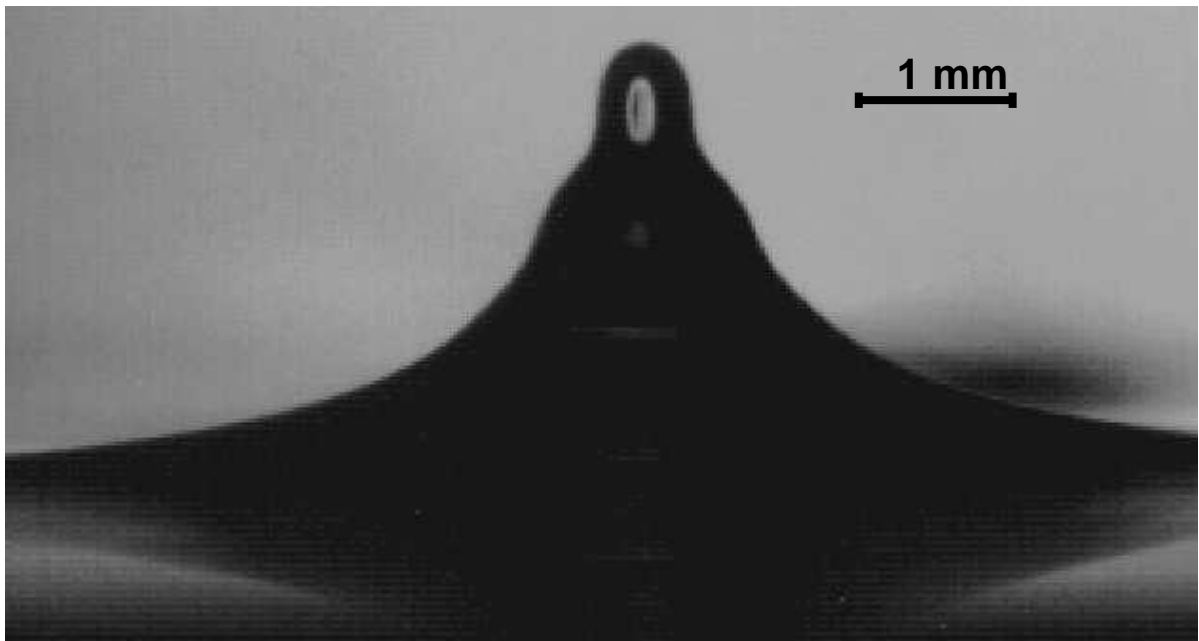


FIG. 5.16 – Déformation en forme de tétine observée sur une interface eau-chloroforme. L’onde acoustique vient du haut, c’est-à-dire de l’eau.

## 5.7 Hauteur de la déformation de l'interface eau-huile DC704 en régime stationnaire

Dans le cas de l'interface eau-DC704, la hauteur de la déformation en régime permanent en fonction de l'amplitude de pression acoustique au point focal est représentée sur la figure 5.17.

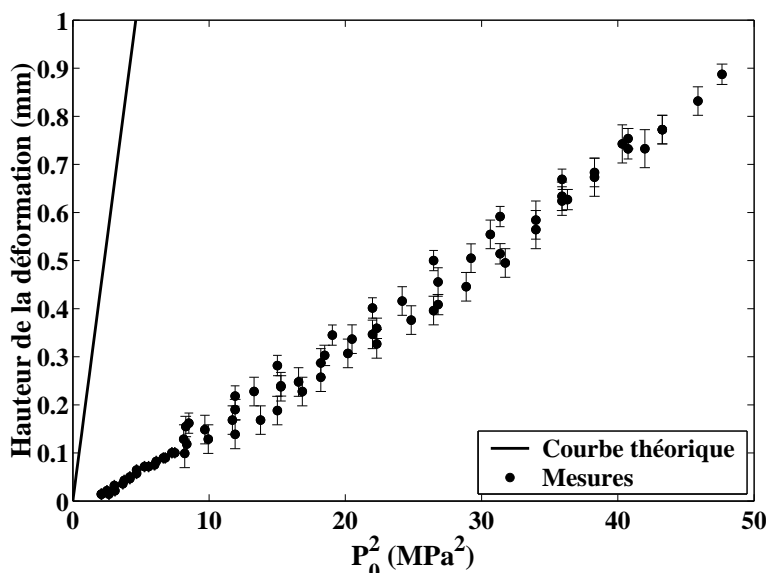


FIG. 5.17 – Hauteur de la déformation de l'interface eau-DC704 en fonction du carré de l'amplitude de pression acoustique. Le transducteur est placé en haut de la cellule (c'est-à-dire dans l'eau).

Le protocole expérimental n'est ici pas tout à fait le même que sur l'interface eau-chloroforme : au lieu de faire une rampe croissante en amplitude, suivie d'une rampe décroissante, j'ai réalisé des déformations statiques à amplitude fixe et mesuré leur taille en régime permanent. Dans une expérience de rampe en amplitude, la déformation n'évoluerait pas adiabatiquement dans le cas de ce couple de fluides. En effet, on constate sur la figure 5.7 que l'évolution temporelle de la déformation est dans ce cas caractérisé par des temps caractéristiques beaucoup plus long que dans le cas du couple eau-chloroforme.

On observe sur la figure 5.17 que la hauteur est bien proportionnelle au carré de l'amplitude de pression acoustique, donc à l'intensité acoustique, mais que le coefficient directeur de la droite n'est pas du tout celui prévu par la théorie, qui suppose que les seules forces agissant sur l'interface sont la pression de radiation, la gravité et la tension superficielle. De cette courbe, on peut déduire que le phénomène supplémentaire qui intervient dans le cas de cette interface, qui est manifestement prépondérant, qui n'a pas été pris en compte dans la théorie et qui fausse les mesures, est comme la pression de radiation proportionnel à l'intensité acoustique. Cela est tout à fait en accord avec l'hypothèse selon laquelle il s'agit du streaming acoustique.

## 5.8 Dynamique de la déformation de l'interface eau-chloroforme

Dans cette partie, nous allons nous intéresser à la dynamique de la déformation avant que celle-ci n'atteigne son régime stationnaire, afin de valider le modèle présenté dans le chapitre précédent sur un créneau de pression de radiation. En effet, toutes les expériences présentées dans le chapitre précédent ont été faites avec une impulsion acoustique de courte durée, et la dynamique observée correspondait à la dynamique de la déformation après la fin de l'impulsion. Elles n'ont permis de valider l'expression de la courbure que pour  $t > \Delta t$ ,  $\Delta t$  étant la durée d'émission de l'onde acoustique (équation 4.62).

Nous allons maintenant confronter aux expériences l'expression de la courbure pour  $t < \Delta t$  (équation 4.61). L'expérience a été réalisée sur l'interface eau-chloroforme, le transducteur émettant depuis l'eau une onde acoustique de fréquence 2,25 MHz et d'amplitude 0,059 MPa. Le transducteur émettait une onde acoustique pendant 40 ms toutes les 170 ms. En utilisant le montage présenté sur la figure 4.14, j'ai pu mesurer l'évolution de la courbure de la déformation avec le temps, représentée sur la figure 5.18. On ob-

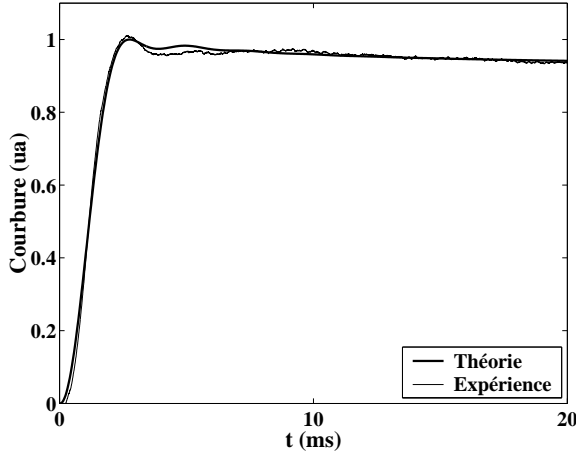


FIG. 5.18 – Dynamique de la courbure de la déformation

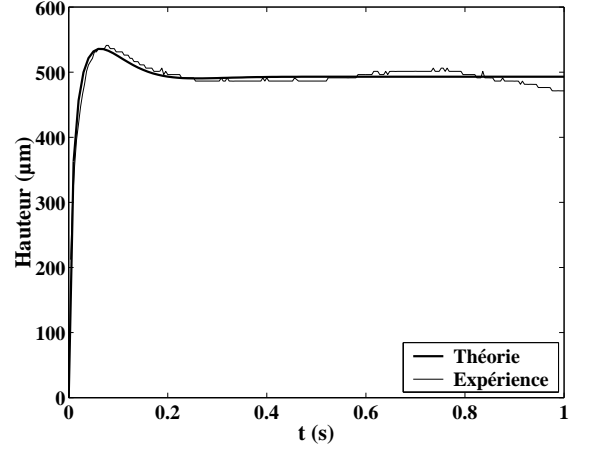


FIG. 5.19 – Dynamique de la hauteur de la déformation

serve sur cette courbe que la théorie reproduit bien le comportement de la courbure de la déformation en son sommet. La dynamique de la hauteur de la déformation est également bien reproduite par la théorie. En effet, de l'équation 4.63, on déduit que la hauteur de la déformation en  $r = 0$  vaut

$$h(0, t < \Delta t) = \frac{C p_{i0}^2 (\rho_1 + \rho_2)}{(\eta_1 + \eta_2)^2} \times \int_0^{2\pi/\lambda} \frac{1}{k^2} \tilde{\phi}(k) \frac{\omega^2(k) e^{-2\omega(k)t} (-2\omega(k) \sin(\Omega(k)t) - \Omega(k) \cos(\Omega(k)t)) + \Omega(k)}{4\omega^2(k) + \Omega^2(k)} dk \quad (5.19)$$

Le résultat numérique de ce calcul est présenté sur la figure 5.19 et est en bon accord avec l'expérience (même interface, transducteur émettant depuis l'eau, fréquence 2,25 MHz, amplitude 0,77 MPa, émission pendant 5 s toutes les 20 s). La petite remontée de hauteur visible sur la courbe expérimentale autour de  $t = 0,7$  ms correspond au retour de l'onde capillaire émise par la déformation, qui s'est réfléchi sur les bords de la cellule.

## Conclusion

Cette étude sur les interfaces transparentes aux ondes acoustiques permet de valider la théorie suivant laquelle c'est la pression de radiation qui provoque les déformations d'interfaces observées lorsqu'on focalise une onde acoustique sur une interface fluide. Elle a en particulier permis de vérifier les équations 3.42, 4.61 et 4.63. Cependant, des phénomènes parasites peuvent apparaître, en particulier le streaming acoustique. Par ailleurs, la structure tridimensionnelle du faisceau acoustique a un rôle également dans la forme et la hauteur de la déformation si celle-ci sort de la tache focale du transducteur.

## Références du chapitre 5

- [1] M. Kornfeld et V. I. Triers. Swelling of a liquid surface under the influence of ultrasound. *Zh. Tekh. Fiz.*, 26 :2778, 1956.
- [2] G. Hertz et H. Mende. Der Schallstrahlungsdruck in Flüssigkeiten. *Z. Phys.*, 114 :354, 1939.
- [3] K. Beissner. Primary measurement of ultrasonic power and dissemination of ultrasonic power reference values by means of standard transducers. *Metrologia*, 36 :313–320, 1999.
- [4] K. W. Smillie. *An introduction to regression and correlation*. Academic Press, 1966.



## Chapitre 6

# Étude expérimentale des interfaces fluides réfléchissant totalement les ondes acoustiques

Le but de ce chapitre est d'étudier le cas des interfaces totalement réfléchissantes, comme l'interface eau-air. Contrairement aux interfaces transparentes, qui ont été étudiées dans le chapitre précédent, l'onde acoustique est ici confinée dans une cavité acoustique limitée par l'interface fluide déformée et par la surface du transducteur. Il en résulte des effets non linéaires liés au couplage entre la propagation de l'onde acoustique et sa résonance dans la cavité déformée. L'étude présentée dans ce chapitre a été menée en collaboration avec Sébastien Manneville (CRPP Bordeaux).

### 6.1 Dispositif expérimental et observations

L'expérience est ici menée sur une interface eau-air, totalement réfléchissante aux ondes acoustiques (le coefficient de transmission en intensité vaut  $10^{-3}$  en incidence normale). Une déformation observée sur cette interface est montrée sur la figure 6.1.

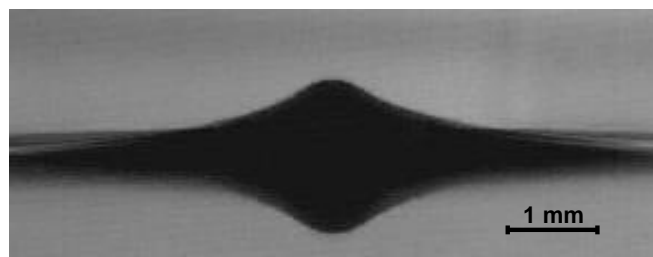


FIG. 6.1 – Photo de la déformation stationnaire de la surface libre et de sa réflexion sur l'interface eau-air, observée pour une amplitude de pression incidente  $p_{i0} = 0,93$  MPa au point focal et une fréquence  $f = 2,46$  MHz.

Nous avons effectué la même expérience que précédemment, en alimentant le transducteur par un signal de tension sinusoïdal de fréquence 2,5 MHz modulé en amplitude suivant des rampes similaires à celle représentée sur la figure 5.12. Simultanément, nous mesurons les variations de la hauteur  $h$  de la déformation en fonction du temps. Le montage

électronique utilisé ici est le même que celui présenté au chapitre précédent, représenté sur la figure 5.11 et repris sur la figure 6.2. Ici, l'éclairage parallèle et la caméra sont inclinés d'un angle d'environ  $5^\circ$ , pour éviter que la déformation ne soit cachée par le ménisque.

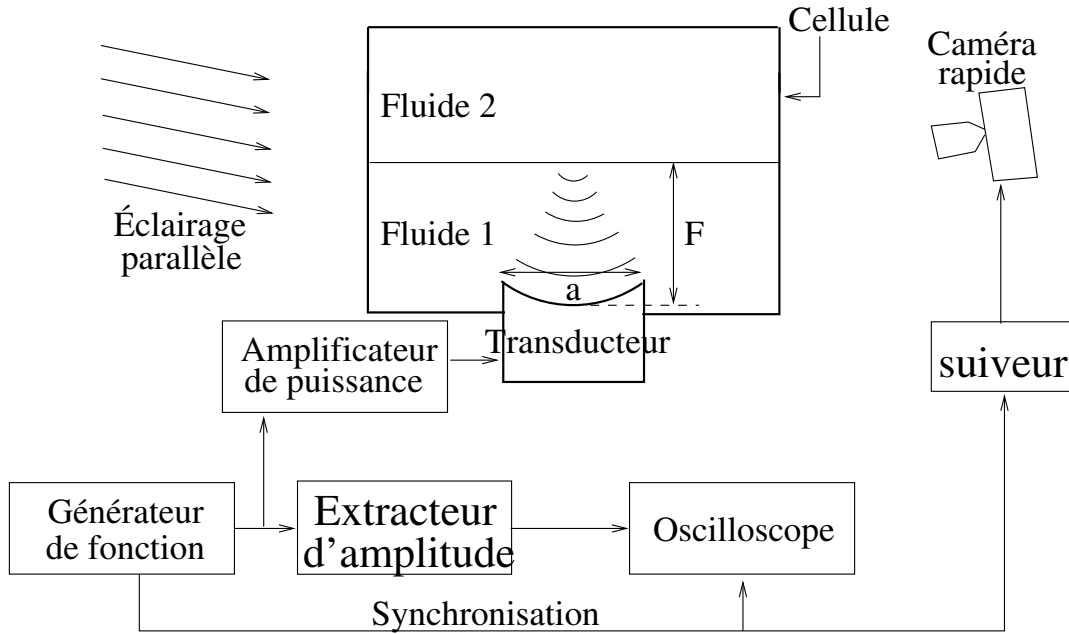


FIG. 6.2 – Montage utilisé pour les expériences de variation d'amplitude présentées dans ce chapitre.

Comme le montre la figure 6.3, la variation de la hauteur de la déformation en fonction du carré de l'amplitude  $p_{e0}$  de pression acoustique émise par le transducteur présente cette fois plusieurs cycles d'hystérésis. Dans le cas des interfaces transparentes, nous observons des droites (figure 5.13).

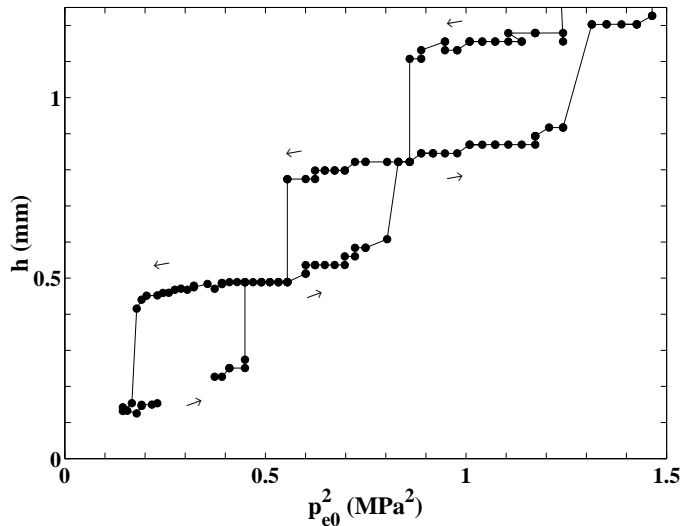


FIG. 6.3 – Hauteur  $h$  de la déformation en fonction du carré de l'amplitude de pression  $p_{e0}^2$  du faisceau acoustique émis par le transducteur ( $f = 2,5$  MHz).

## 6.2 Modélisation de l'hystérésis

### 6.2.1 Explication qualitative

On observe sur la figure 6.3 que pour une certaine amplitude de pression acoustique émise par le transducteur, la hauteur de la déformation peut prendre plusieurs valeurs discrètes, séparées les unes des autres d'environ une demi-longueur d'onde acoustique (soit environ  $330 \mu\text{m}$ ).

En effet, l'interface eau-air étant totalement réfléchissante et la surface du transducteur l'étant partiellement, le faisceau subit des réflexions successives entre la surface de l'eau et le transducteur (figure 6.4), restant ainsi confiné dans une cavité acoustique délimitée

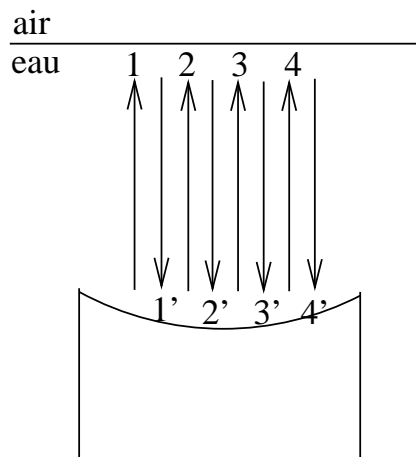


FIG. 6.4 – Le faisceau entrant dans la cavité, directement émis par le transducteur (faisceau 1) est réfléchi par l'interface eau-air (faisceau 1'), puis à nouveau réfléchi par le transducteur (faisceau 2) et ainsi de suite. Le faisceau incident à l'interface est la superposition des faisceaux se dirigeant vers l'interface, donc des faisceaux 1, 2, 3, 4 etc.

par la surface du transducteur et l'interface, dans laquelle un système d'ondes acoustiques stationnaires se forme. Il convient de bien distinguer le faisceau acoustique *incident* à l'interface du faisceau acoustique *entrant* dans la cavité.

Le faisceau entrant dans la cavité est le faisceau émis par le transducteur, ne tenant pas compte des réflexions successives. Le faisceau acoustique incident à l'interface est le faisceau acoustique total se dirigeant vers l'interface, c'est-à-dire la superposition du faisceau entrant et des faisceaux réfléchis successifs se dirigeant vers l'interface.

Le faisceau acoustique incident influe sur la hauteur de la déformation par l'intermédiaire de la pression de radiation acoustique, mais la hauteur de la déformation influe en retour sur le faisceau incident à l'interface car elle conditionne les conditions de résonance au sein de la cavité. Cette rétroaction induit des effets non-linéaires et en particulier l'hystérésis que l'on observe sur la figure 6.3. En 1927, Wood et Loomis avaient déjà observé qu'en enfonçant une plaque de verre dans de l'eau dans laquelle une onde acoustique plane était émise verticalement, ils rencontraient périodiquement une grande résistance à cet enfoncement [1]. Kornfeld et Triers avaient déjà remarqué en 1956, en réalisant des déformations de l'interface eau-air par la pression de radiation acoustique, que la hauteur de la déformation variait avec la distance entre l'émetteur et l'interface suivant une fonction périodique de période  $\lambda/2$ ,  $\lambda$  étant la longueur d'onde acoustique [2].

Des observations similaires ont été faites sur des cavités Pérot-Fabry optiques [3, 4]. La figure 6.5, extraite de la référence [3], montre un cycle d'hystérésis obtenu pour un interféromètre de Pérot-Fabry optique plan dont l'un des miroirs, très léger, est monté sur un ressort. Le déplacement du miroir mobile étant très faible dans cette cavité optique, on ne peut pas le mesurer directement, mais on le détecte grâce à la variation de l'intensité en sortie de l'interféromètre, qui dépend des conditions de résonance à l'intérieur de la cavité Pérot-Fabry.

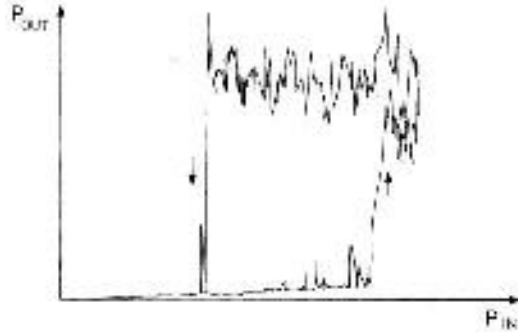


FIG. 6.5 – Cycle d'hystérésis entre la puissance lumineuse  $P_{OUT}$  mesurée en sortie de l'interféromètre et la puissance lumineuse  $P_{IN}$  injectée dedans, observé sur un interféromètre de Pérot-Fabry optique plan dont l'un des miroirs, très léger, est monté sur un ressort [3].

## 6.2.2 Cavité Pérot-Fabry

Pour modéliser l'hystérésis observée, nous considérons uniquement le couplage entre la déformation de la surface et l'onde acoustique induite par la pression de radiation, c'est-à-dire que nous négligeons l'effet des non-linéarités de volume (nous avons vérifié qu'au point focal, l'amplitude de la première harmonique de pression ne dépassait pas 10 % de celle du fondamental dans le régime étudié) et des écoulements redressés comme le streaming acoustique [5].

## 6.2.3 Équilibre mécanique

Dans tout ce chapitre, nous considérons une interface eau-air, l'onde acoustique venant de l'eau. Nous négligeons alors  $\rho_2$  devant  $\rho_1$  et  $\rho_2 c_2$  devant  $\rho_1 c_1$ . Nous noterons alors  $\rho$  la masse volumique de l'eau et  $c$  la vitesse du son dans l'eau.

Modélisons d'abord la déformation de cette cavité par la pression de radiation. Comme précédemment, le temps caractéristique de relaxation de la déformation étant d'une dizaine de millisecondes, la déformation de l'interface eau-air évolue adiabatiquement pendant les rampes de pression de radiation. Par conséquent, comme dans tout ce qui précède, sa forme axisymétrique  $h(r)$  résulte de la compétition entre la pression de radiation d'une part et la gravité  $g$  et la tension superficielle  $\sigma$  d'autre part.  $h(r)$  vérifie donc l'équation 3.42.

$$h(r) = \frac{p_{i0}^2 \omega_0^2}{4\rho c^2} \int_0^\infty J_0(kr) \frac{\exp\left(-\frac{k^2 \omega_0^2}{8}\right)}{\rho g + \sigma k^2} k dk \quad (6.1)$$

et la hauteur de la déformation sur l'axe du transducteur vaut

$$h = h(r = 0) = \frac{p_{i0}^2 \omega_0^2}{8\sigma \rho c^2} \exp\left(\frac{Bo}{8}\right) E_1\left(\frac{Bo}{8}\right) \quad (6.2)$$

où  $E_1(x) = \int_x^\infty \frac{\exp(-u)}{u} du$  et  $Bo = \omega_0^2 \rho g / \sigma$ .

Modélisons d'autre part la cavité acoustique limitée par le transducteur et la surface libre de l'eau comme un résonateur de Pérot-Fabry à une dimension (figure 6.6).

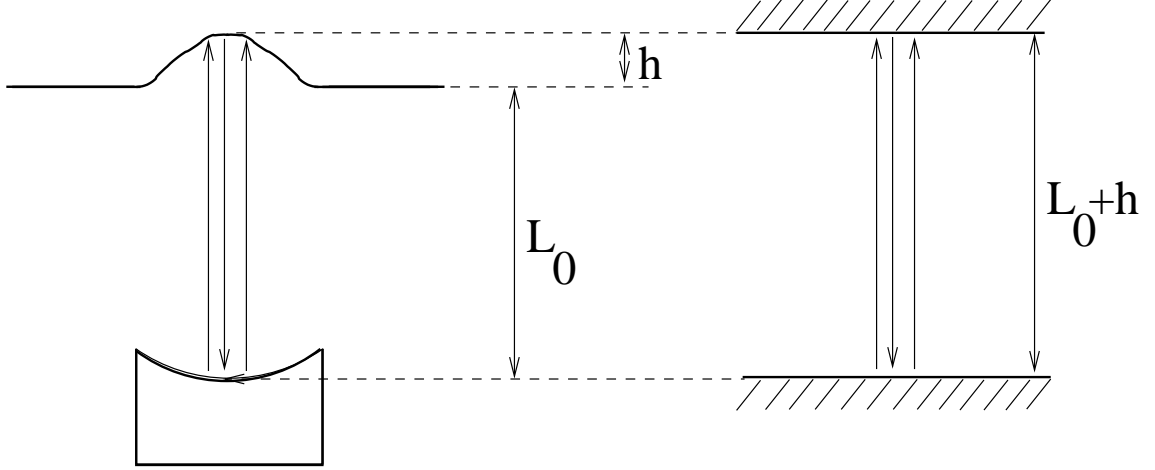


FIG. 6.6 – Modélisation de la cavité acoustique (à gauche) par un résonateur de Pérot-Fabry plan (à droite) dont l'épaisseur est la distance entre le fond du transducteur et le sommet de la déformation.

L'amplificateur de puissance envoie un signal électrique de puissance  $\mathcal{P}_e(t)$  au transducteur, qui à son tour émet une onde acoustique de puissance  $\mathcal{P}(t) \propto \mathcal{P}_e(t)$ . Le faisceau acoustique émis par le transducteur est totalement réfléchi par l'interface (dont le coefficient de réflexion en amplitude vaut  $R = -1$ ) et revient vers le transducteur, où une partie du faisceau est à nouveau réfléchi vers l'interface et une autre partie est convertie par la couche piézoélectrique du transducteur en signal électrique. Grâce à l'expérience présentée dans l'annexe C (paragraphe C.1), nous avons pu estimer le coefficient de réflexion en amplitude du transducteur à  $R' = -0,38 \pm 0,05$ .

Typiquement, l'amplitude de pression acoustique entrante au point focal vaut  $P = 0,04$  à 1,4 MPa. La surface libre de l'eau, située au foyer du transducteur, est déformée par la pression de radiation, qui vaut (expression 3.24) :

$$\Pi(r) = \frac{2}{\rho c^2} \langle p_i(r, t)^2 \rangle_t \quad (6.3)$$

où  $p_i(r, t) = p_i(r) \cos(2\pi ft)$  est le champ de pression du faisceau incident au point focal,  $\rho$  est la masse volumique de l'eau et  $c$  est la vitesse du son dans l'eau.

En considérant que l'énergie acoustique incidente est totalement réfléchi par la partie plane de la déformation proche de l'axe du faisceau et que l'onde réfléchi reste plane, on s'attend à ce qu'il y ait résonance lorsque  $2(L_0 + h) = n\lambda$  avec  $n$  entier ( $L_0$  étant la longueur de la cavité en l'absence de déformation, et  $h$  la hauteur de la déformation).

Plus précisément, la pression acoustique incidente est la somme des pressions acoustiques de tous les faisceaux se dirigeant vers l'interface eau-air. On note  $p_j(r, t)$  la pression

acoustique du  $j^{\text{e}}$  faisceau réfléchi vers l'interface à une distance  $r$  de l'axe et à l'instant  $t$ .  $j = 0$  correspond au faisceau entrant dans la cavité acoustique. Son amplitude vaut  $p_e(r) = 2p_{e0} \frac{J_1\left(\frac{\pi r}{\lambda}\right)}{\left(\frac{\pi r}{\lambda}\right)}$ .  $\phi = 4\pi(L_0 + h)/\lambda$  est le déphasage que subit l'onde lors d'un aller-retour dans la cavité. L'onde incidente sur l'interface eau-air, qui résulte des interférences de toutes les ondes  $j$  incidentes sur l'interface, a pour expression

$$p_i(r, t) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j(r, t) \quad (6.4)$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} (RR'e^{i\phi})^j p_e(r) e^{-i\omega t} \quad (6.5)$$

$$= \frac{p_e(r)}{1 - RR'e^{i\phi}} e^{-i\omega t} \quad (6.6)$$

qui peut s'écrire sous la forme

$$p_i(r, t) = \left| \frac{p_e(r)}{1 - RR'e^{i\phi}} \right| e^{i(\psi - \omega t)} \quad (6.7)$$

où  $\psi$  est la phase de  $p_i(r, t)$  à l'origine des temps.

L'amplitude  $p_i$  de la pression incidente à l'interface dépend donc de la hauteur  $h$  de la déformation suivant l'expression

$$p_i(r) = \left| \frac{p_e(r)}{1 - RR'e^{i\phi}} \right| \quad (6.8)$$

avec  $\phi = 4\pi(L_0 + h)/\lambda$ , soit encore

$$\frac{p_i(r)}{p_e(r)} = \left| \frac{1}{1 - RR'e^{4i\pi(L_0+h)/\lambda}} \right| \quad (6.9)$$

soit

$$\left( \frac{p_{i0}}{p_{e0}} \right)^2 = \left| \frac{1}{1 - RR'e^{4i\pi(L_0+h)/\lambda}} \right|^2 \quad (6.10)$$

Par ailleurs, nous avons déjà vu (équation 6.2) que la hauteur de la déformation était proportionnelle à  $p_{i0}^2$ , où  $p_{i0} = p_i(r = 0)$  :

$$h = \frac{\omega_0^2 p_{i0}^2}{8\sigma\rho c^2} e^{Bo/8} E_1(Bo/8) \quad (6.11)$$

soit

$$\left( \frac{p_{i0}}{p_{e0}} \right)^2 = \frac{8\sigma\rho c^2}{\omega_0^2 e^{Bo/8} E_1(Bo/8)} \frac{h}{p_{e0}^2(r)} \quad (6.12)$$

où  $p_{e0} = p_e(r = 0)$ .

Les états stationnaires de la cavité vérifient simultanément la loi interférentielle 6.10 et l'équation d'équilibre mécanique 6.12. Pour une valeur de  $p_{e0}$  donnée, la hauteur de la déformation est donc définie par l'intersection des deux courbes définies par les équations 6.10 et 6.12. Pour déterminer graphiquement comment évolue(nt) le(s) point(s) de fonctionnement de la cavité avec  $p_{e0}$ , il est judicieux de représenter ces deux lois dans la

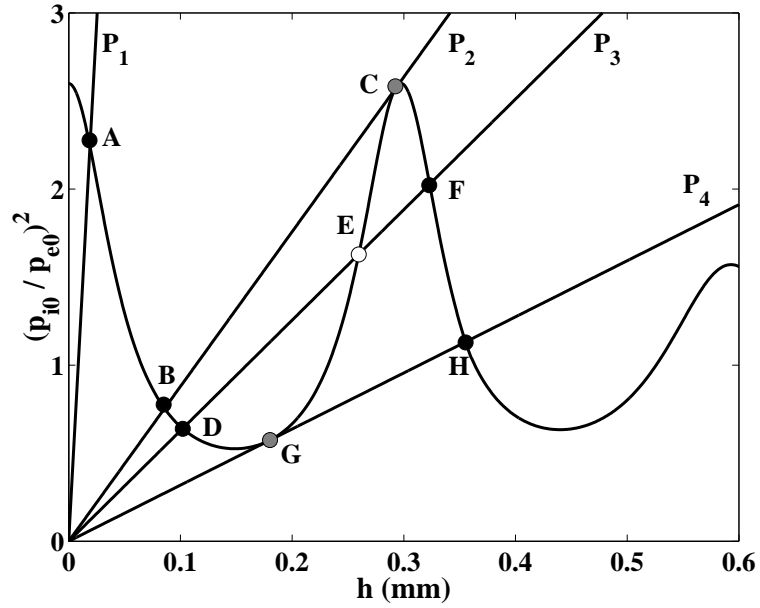


FIG. 6.7 – Modélisation de l’hystérésis acoustique. La courbe de résonance de la cavité Pérot-Fabry est décrite par l’équation 6.9. Elle est tracée pour une onde acoustique se propageant dans l’eau, de fréquence  $f = 2,5079$  MHz et pour une longueur  $L_0$  de la cavité au repos telle que  $2L_0/\lambda$  est un entier. La décroissance des pics de cette courbe lorsque  $h$  augmente modélise la défocalisation du faisceau acoustique par la déformation (annexe C). Les droites représentent la relation linéaire entre la hauteur  $h$  de la déformation et la pression de radiation (cf Eq. 6.12) pour des pressions entrantes  $P_1 < P_2 < P_3$ . Les points noirs, blancs et gris représentent respectivement les points d’équilibre stable, instable et marginal de la surface libre.

représentation  $(p_{i0}/p_{e0})^2 = f(h)$  (figure 6.7). En effet, dans cette représentation, la courbe d’Airy traduisant la résonance de l’onde acoustique dans la cavité Pérot-Fabry ne dépend pas de l’amplitude  $p_{e0}$  de l’onde émise par le transducteur (équation 6.10) alors que la droite représentant la réponse de la hauteur de la déformation à la pression de radiation (équation 6.12) a un coefficient directeur qui décroît avec  $p_{e0}$ . Ainsi, quand  $p_{e0}$  varie comme indiqué sur la figure 5.12, la courbe de résonance de l’interféromètre n’est pas modifié alors que la pente de la droite varie.

La loi interférentielle 6.10 et l’équation d’équilibre mécanique 6.12 sont représentées sur la figure 6.7. Les points d’intersection représentent les points d’équilibre du système acousto-mécanique, dont la stabilité est étudiée au paragraphe qui suit.

## 6.2.4 Stabilité des points d’équilibre

Considérons la particule fluide d’épaisseur  $e$  se trouvant au sommet de la déformation, c’est-à-dire à une distance  $r = 0$  de l’axe de la déformation. Elle est soumise à trois forces : la force résultant de la pression de radiation  $\Pi$ , les forces pressantes hydrostatiques  $\rho gh$  et la tension superficielle  $-\sigma \Delta h$ . L’équation du mouvement moyennée sur la période acoustique de cette particule fluide s’écrit, lorsque  $h$  subit de petites variations autour de l’équilibre :

$$\rho e \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = \Pi - \rho gh + \sigma \Delta h \quad (6.13)$$

Le profil de hauteur de la déformation s'écrit sous la forme (équation 6.1) :

$$h(r) = \frac{p_{i0}^2 \omega_0^2}{4\rho c^2} \int_0^\infty J_0(kr) \frac{\exp\left(-\frac{k^2 \omega_0^2}{8}\right)}{\rho g + \sigma k^2} k dk \quad (6.14)$$

Aussi,  $\Delta h(r) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial h}{\partial r} \right)$  vaut

$$\Delta h(r) = \frac{p_{i0}^2 \omega_0^2}{4\rho c^2} \int_0^\infty \frac{e^{-\omega_0^2 k^2/8}}{\rho g + \sigma k^2} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial J_0(kr)}{\partial r} \right) k dk \quad (6.15)$$

$$= -\frac{p_{i0}^2 \omega_0^2}{4\rho c^2} \int_0^\infty \frac{k e^{-\omega_0^2 k^2/8}}{\rho g + \sigma k^2} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r J_1(kr)) k dk \quad (6.16)$$

$$= -\frac{p_{i0}^2 \omega_0^2}{4\rho c^2} \int_0^\infty \frac{k^3 e^{-\omega_0^2 k^2/8}}{\rho g + \sigma k^2} J_0(kr) dk \quad (6.17)$$

donc en posant  $l_c = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}}$  :

$$\Delta h(0) = -\frac{p_{i0}^2 \omega_0^2}{4g\rho^2 c^2} \int_0^\infty \frac{k^3 e^{-\omega_0^2 k^2/8}}{1 + l_c^2 k^2} dk \quad (6.18)$$

$$= \frac{p_{i0}^2 \omega_0^2}{4g\rho^2 c^2} \left( \frac{1}{2l_c^4} e^{Bo/8} E_1(Bo/8) - \frac{4}{\omega_0^2 l_c^2} \right) \quad (6.19)$$

$$= \frac{h(0)}{l_c^2} - \frac{p_{i0}^2}{\sigma \rho c^2} \quad (6.20)$$

De là, il résulte que

$$\sigma \Delta h - \rho g h = \frac{\sigma h}{l_c^2} - \frac{p_{i0}^2}{\rho c^2} - \rho g h \quad (6.21)$$

$$= -\frac{p_{i0}^2}{\rho c^2} \quad (6.22)$$

$$= -\frac{8\sigma}{\omega_0^2 e^{Bo/8} E_1(Bo/8)} h \quad (6.23)$$

L'équation du mouvement 6.13 s'écrit alors

$$\rho e \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = F_1(h) + F_2(h) \quad (6.24)$$

avec  $F_1(h) = \Pi(h)$  et  $F_2(h) = -\frac{8\sigma}{\omega_0^2 e^{Bo/8} E_1(Bo/8)} h = -\frac{p_{i0}^2}{\rho c^2}$ , d'où il résulte que

$$\rho e \ddot{h} = F_1(h) \dot{h} + F_2(h) \dot{h} \quad (6.25)$$

On peut alors introduire une énergie potentielle  $E_p$  telle que

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \rho e \dot{h}^2 = -E_p \\ E_p = -\int (F_1 + F_2) dh \end{cases} \quad (6.26)$$

Il y a équilibre si  $\frac{\partial E_p}{\partial h} = 0$ . L'équilibre est stable si  $\frac{\partial^2 E_p}{\partial h^2} > 0$  et instable si  $\frac{\partial^2 E_p}{\partial h^2} < 0$ .

$$\frac{\partial E_p}{\partial h} = -\Pi(h) + \frac{p_{i0}^2}{\rho c^2} \quad (6.27)$$

$$\frac{\partial^2 E_p}{\partial h^2} = -\frac{\partial \Pi}{\partial h} + \frac{1}{\rho c^2} \frac{\partial p_{i0}^2}{\partial h} \quad (6.28)$$



Sur la figure 6.7, la courbe de résonance représente  $\rho c^2 \Pi(h)/p_{e0}^2$  et la droite représente  $p_{i0}^2/p_{e0}^2$ . Les points d'équilibre stable sont par conséquent ceux où la pente de la droite est plus élevée que celle de la courbe de résonance. On vérifie qu'il peut y avoir plusieurs points d'équilibre stables pour une seule pression  $p_{e0}$  entrante donnée. La multistabilité qui en résulte conduit à une hystérésis à mesure que la pente de la ligne droite varie avec  $p_{e0}$  : en effet, supposons qu'au départ, l'amplitude de pression du faisceau entrant vaille  $P_1$ , et qu'elle augmente, ce qui se traduit dans cette représentation par une diminution de la pente de la droite. Le point d'équilibre passe du point  $A$  au point  $B$ , puis au point  $D$  et enfin au point  $G$  de la figure 6.7. La hauteur de la déformation augmente modérément au cours de cette transformation. Si la pression entrante continue d'augmenter, la pente de la droite continue de diminuer, et le point de fonctionnement saute brutalement à proximité du point  $H$ . La hauteur de la déformation augmente alors brutalement, ce qui se traduit par les sauts de hauteur observés sur la courbe 6.3. Si maintenant on fait diminuer l'amplitude de pression du faisceau entrant, la pente de la droite se remet à augmenter et le point de fonctionnement passe du point  $H$  au point  $F$  lorsque cette pression atteint  $P_3$ . Ainsi, au lieu de se trouver en  $D$  lorsque la pression entrante vaut  $P_3$ , comme précédemment, il se trouve en  $F$ , ce qui correspond à une hauteur beaucoup plus élevée. Cela explique l'hystérésis observée sur la courbe expérimentale 6.3. Enfin, si on continue à faire diminuer la pression, le point de fonctionnement finit par atteindre le point marginalement stable  $C$  puis à sauter au point  $B$ .

Le comportement prédit de  $h$  en fonction de  $P^2$  modélisé par ce raisonnement (figure 6.8) est en bon accord avec les mesures.

Pour tracer cette courbe théorique, nous avons tenu compte de la modification du coefficient de réflexion effectif du transducteur par la courbure de la déformation (annexe C), qui traduit le fait que la défocalisation du faisceau par la courbure de la déformation induit des pertes d'énergie acoustique, certains rayons acoustiques n'étant pas réfléchis vers le transducteur. Si l'on n'en tient pas compte, on obtient la courbe de la figure 6.9, les cycles d'hystérésis prévus par le modèle étant alors beaucoup plus larges que les cycles observés expérimentalement.

On observe sur la figure 6.8 que les plateaux de hauteur prévus par la théorie sont un peu plus bas que ceux observés expérimentalement. Cela peut être expliqué par la forme de la déformation. En effet, la théorie modélise la déformation par un miroir plan situé à la hauteur de son sommet. En réalité, les points de la déformation sont en moyenne plus bas que son sommet, et la déformation serait alors équivalente à un miroir plan situé à une hauteur un peu inférieure à celle de son sommet. Cela explique que le sommet de la déformation soit toujours un peu plus haut que la hauteur calculée par la théorie pour un miroir plan.

### 6.2.5 Modification de la longueur de la cavité au repos

Pour conforter encore ce modèle, une expérience consiste à modifier la hauteur de l'interface au repos, ce qui permet de vérifier que la hauteur de la déformation n'est pas déterminée uniquement par la pression acoustique entrant dans la cavité, mais aussi par la longueur de la cavité elle-même. Pour cette expérience, nous avons réalisé plusieurs rampes de tension successives, en rajoutant ou en enlevant un peu d'eau entre deux expériences. La caméra ayant tendance à légèrement bouger entre deux mesures, un réglet était disposé au-dessus de l'interface pour servir de repère fixe en hauteur (figure 6.10). Il était monté sur trois platine microcontrôles, l'une, verticale, permettant de le faire monter ou descendre

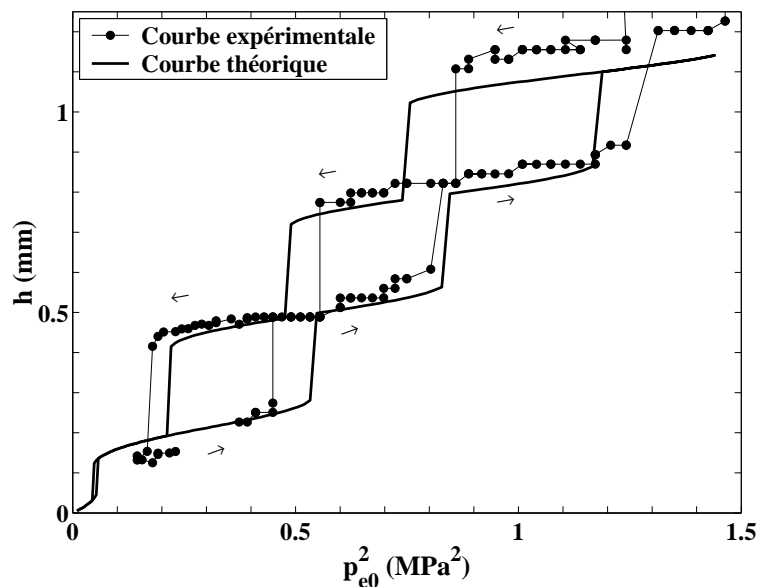


FIG. 6.8 – Le modèle de Péroto-Fabry prédit une courbe d’hystérésis en bon accord avec la courbe expérimentale, compte-tenu des approximations faites (en particulier, la théorie considère un interféromètre de Péroto-Fabry plan).

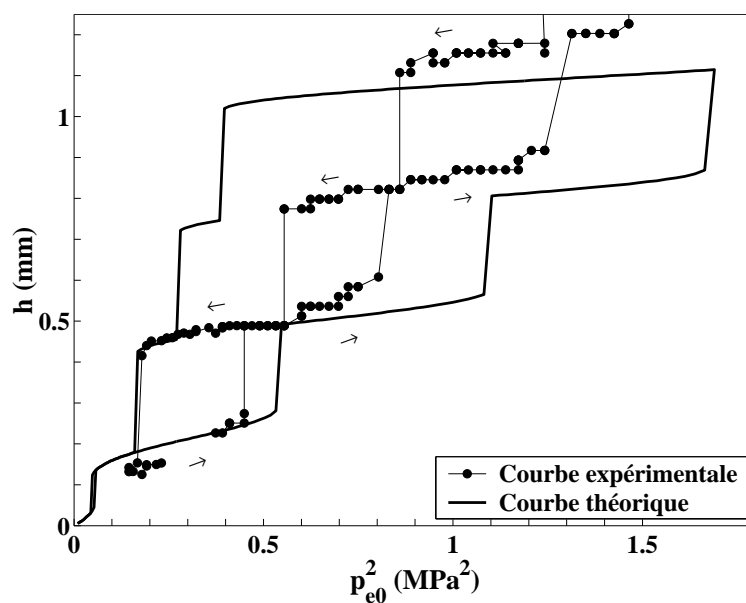


FIG. 6.9 – Si l’on ne tient pas compte de la modification du coefficient de réflexion effectif du transducteur par la courbure de la déformation, le modèle de Péroto-Fabry prédit une courbe d’hystérésis dont les cycles sont beaucoup plus larges que ceux observés expérimentalement.

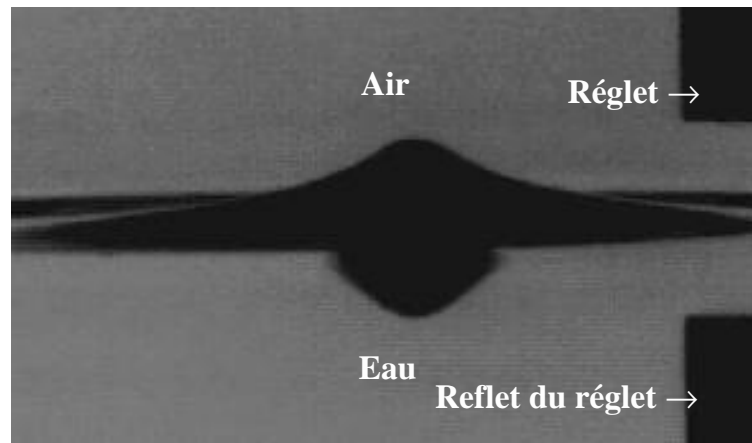


FIG. 6.10 – Pour l'expérience de variation de la longueur de la cavité au repos, il fallait mesurer la hauteur par rapport à un repère commun à toutes les expériences. C'est le rôle du réglet que l'on voit sur cette photo, qui était monté sur des platines microcontrôle situées au-dessus de la cellule.

d'une distance connue lorsqu'on déplaçait l'interface, une autre permettant de le déplacer dans la direction de visée de la caméra, afin qu'il soit net sur l'écran, et l'autre dans la direction perpendiculaire afin de le placer dans le champ de vision de la caméra. Il suffit alors de mesurer la hauteur de la déformation par rapport au bas du réglet. Connaissant la hauteur du réglet pour chaque expérience, cela permet de la mesurer par rapport à un repère commun à toutes les expériences.

Les résultats de cette expérience sont représentés sur la figure 6.11. On observe que

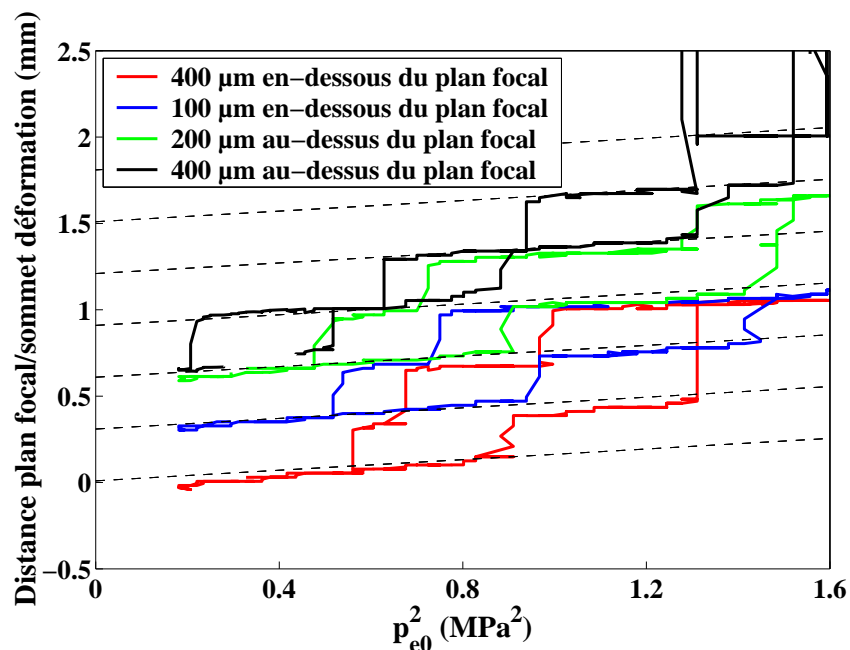


FIG. 6.11 – Hauteur du sommet de la déformation par rapport au plan focal, en fonction du carré de l'amplitude de pression émise par le transducteur pour différentes positions de l'interface au repos par rapport au plan focal.

la position par rapport au plan focal du sommet de la déformation se répartit sur des positions bien déterminées, symbolisées par les lignes obliques pointillées, séparées les unes des autres d'environ une demi longueur d'onde acoustique. Cela est compatible avec le fait que la hauteur de la déformation est déterminée par les conditions de résonance dans la cavité acoustique. La position de l'interface au repos, mesurée grâce au temps d'aller-retour de l'onde acoustique entre le transducteur et l'interface, est connue à 100  $\mu\text{m}$  près, à cause des incertitudes (environ 0,1  $\mu\text{s}$ ) sur la mesure du temps de vol.

### 6.2.6 Tracé de la courbe de résonance expérimentale

À partir de l'expérience représentée sur la figure 6.3, on peut remonter expérimentalement au peigne de Pérot-Fabry réel : en effet, on connaît la hauteur  $h$  de la déformation (que l'on va représenter sur l'axe des abscisses) à tout instant. On connaît également l'amplitude de pression  $p_{e0}$  du faisceau entrant à tout instant. De  $h$  et  $p_{e0}$ , on peut déduire le rapport de l'amplitude de pression incidente à l'amplitude de pression entrante  $p_{i0}/p_{e0}$  à l'aide de l'expression 6.12. En traçant  $(p_{i0}/p_{e0})^2$  en fonction de  $h$ , on obtient le résultat représenté sur la figure 6.12.

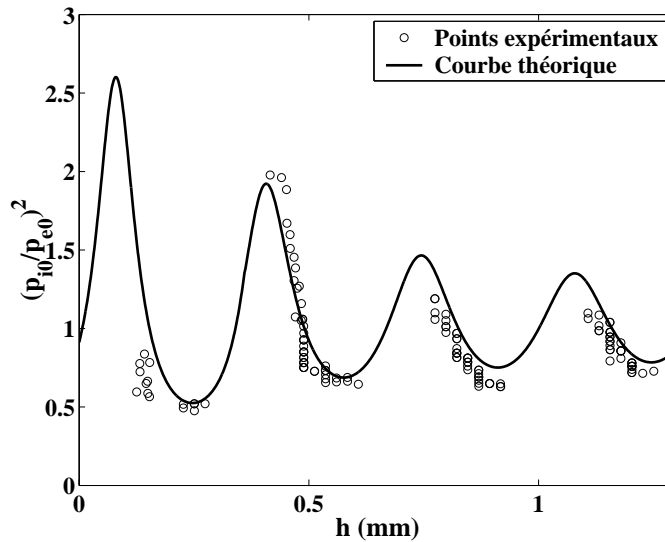


FIG. 6.12 – Courbe de Pérot-Fabry expérimentale correspondant à l'expérience représentée sur la figure 6.3. Il y a un bon accord entre la courbe expérimentale et la courbe théorique. On vérifie que certaines zones du graphe théorique ne sont pas atteintes dans l'expérience, car ce sont des zones où l'équilibre de l'interface est instable.

Il faut noter que pour établir l'expression 6.12, nous avons fait une hypothèse forte : nous avons supposé que la pente  $h'(r)$  de la déformation était suffisamment faible pour pouvoir linéariser l'équation 3.17 en considérant que la courbure  $\kappa(r)$ , en toute rigueur égale à  $\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( \frac{r h'(r)}{\sqrt{1+h'(r)^2}} \right)$ , pouvait être approximée par l'expression  $\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r h'(r)) = \Delta_r h(r)$ .

### 6.3 Hystérésis en fréquence

Si au lieu d'émettre une onde acoustique modulée en amplitude, le transducteur émet une onde acoustique modulée en fréquence, alors on devrait aussi voir apparaître une variation de la hauteur à l'équilibre de la déformation, la variation de fréquence modifiant les conditions de résonance à l'intérieur de la cavité Pérot-Fabry. Pour observer ce phénomène, nous avons utilisé la rampe linéaire en fréquence représentée sur la figure 6.14. Le montage électronique est celui représenté sur la figure 6.13. La seule différence avec le montage

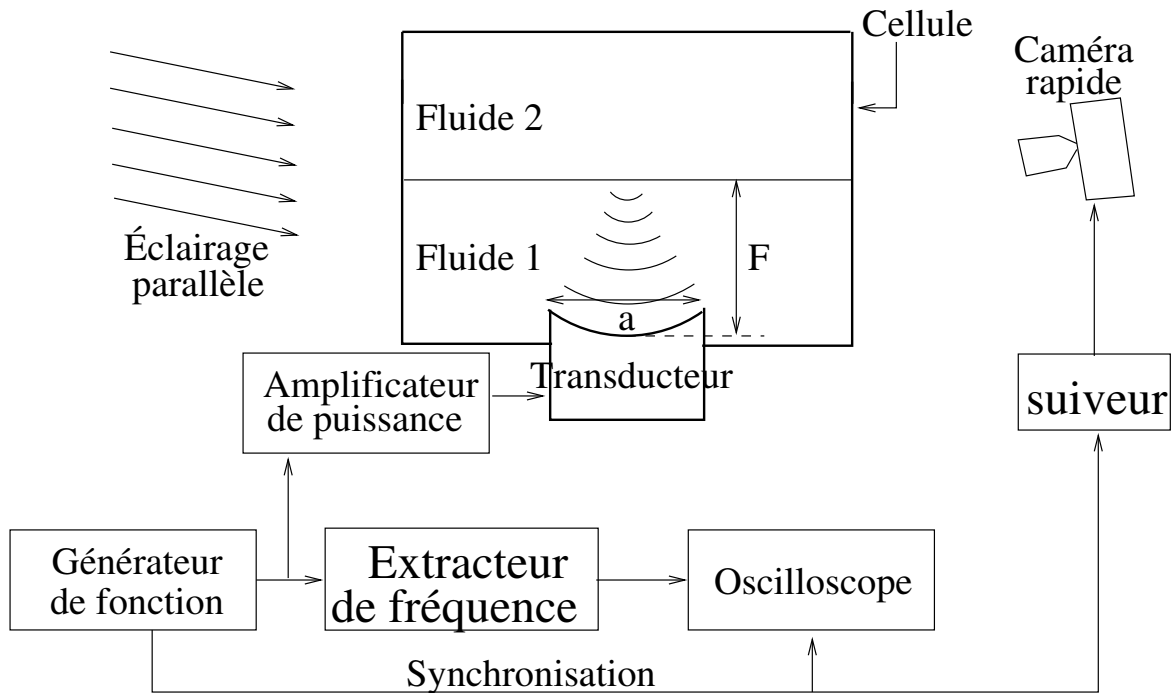


FIG. 6.13 – Montage électronique utilisé pour les expériences de modulation en fréquence

présenté sur la figure 6.2 est que l'extracteur d'amplitude est remplacé par un extracteur de fréquence numérique, fabriqué par le service d'électronique du laboratoire, dont le signal de sortie est une tension continue qui est une fonction affine de la fréquence du signal d'entrée. Le générateur de signaux piloté par ordinateur émet un signal électronique modulé en fréquence comme indiqué sur la figure 6.14. Ce signal est amplifié par l'amplificateur de puissance et transmis au transducteur, qui le convertit en onde acoustique. Le signal émis par le générateur de signaux est aussi transmis à l'extracteur de fréquence, dont le signal de sortie est envoyé à l'oscilloscope puis à l'ordinateur. Il permet de connaître à chaque instant la fréquence exacte de l'onde acoustique. La déformation est toujours filmée, ce qui permet de connaître à chaque instant sa hauteur. Le résultat obtenu est visible sur la figure 6.15.

On observe un cycle d'hystérésis unique présentant une forme en « dents de scie » très caractéristique.

Lorsque la fréquence de l'onde acoustique est modulée, la courbe de résonance de la figure 6.7 est essentiellement translatée horizontalement : le déphasage total que subit l'onde acoustique lors d'un aller-retour dans la cavité au repos vaut  $\phi_0 = \frac{4\pi L f_0}{c}$  et est modifié, lorsque la fréquence varie de  $f_0$  à  $f_0 + \Delta f$ , de  $\Delta\phi = \phi_0 \frac{\Delta f}{f_0}$ . Dans notre expérience,

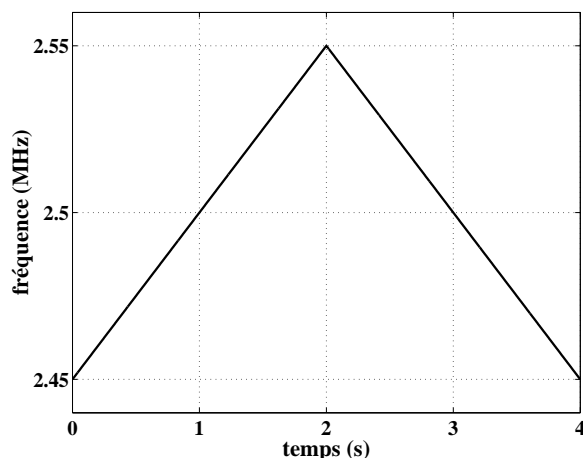


FIG. 6.14 – Rampe de fréquence utilisée pour observer l'influence de la fréquence sur la hauteur de la déformation.

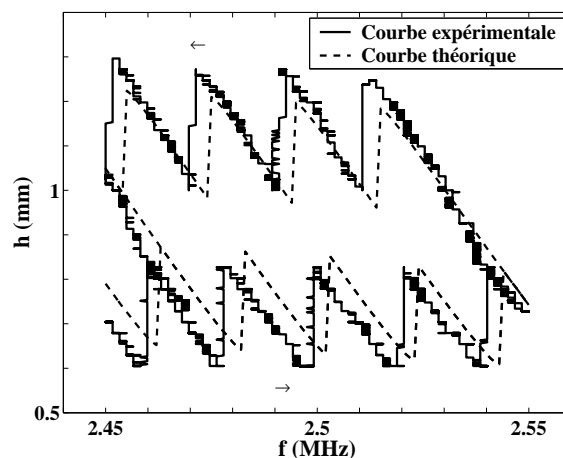


FIG. 6.15 – Cycle d'hystérésis observé lorsque la fréquence de l'onde acoustique est modulée comme indiqué sur la courbe 6.14.

$L = 38$  mm,  $f_0 = 2,5$  MHz,  $c = 1500$  m/s et  $\Delta f = 0,05$  MHz. Par conséquent,  $\phi_0 = 253,33\pi$  et  $\Delta\phi = 5,07\pi$ . D'après l'expression 6.8, la pression acoustique incidente à l'interface lorsque celle-ci est au repos est maximale lorsque  $\phi = 2n\pi$ , où  $n$  est un entier. Ici,  $\Delta\phi$  dépasse plusieurs fois  $2\pi$ , donc lors du balayage en fréquence, la courbe se translate horizontalement de plusieurs longueurs d'onde. La longueur d'onde acoustique, elle, est modifiée au maximum de  $\Delta\lambda = \lambda_0 \frac{\Delta f}{f_0}$  soit de 2%, ce qui est quasiment imperceptible en comparaison de la translation de la courbe. La droite décrivant la relation de proportionnalité entre la hauteur de la déformation et la pression de radiation n'est quant à elle pas modifiée.

On peut suivre sur la figure 6.16 ce qu'il se passe dans cette expérience. La courbe

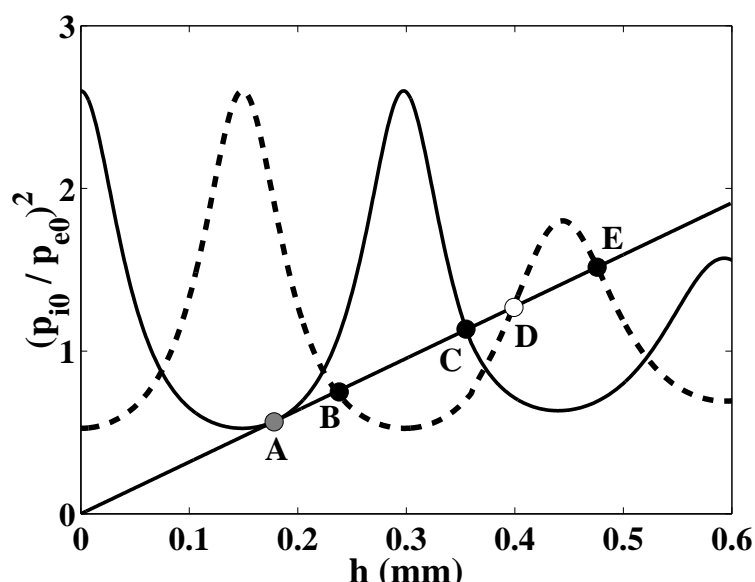


FIG. 6.16 – Évolution de la courbe de résonance lors d'une variation de fréquence : la courbe en trait plein correspond à une fréquence de 2,5079 MHz et la courbe en trait pointillé à une fréquence de 2,4982 MHz.

de résonance est translatée dans le sens des  $h$  décroissants si la fréquence augmente, et dans le sens des  $h$  croissants si elle diminue. Supposons que la fréquence acoustique soit de 2,4982 MHz (courbe en pointillés de la figure 6.16). Le point de fonctionnement de la cavité se trouve alors en  $B$ . On fait augmenter la fréquence. La courbe de résonance se translate alors dans le sens des  $h$  décroissants. Lorsque la fréquence acoustique atteint 2,5079 MHz (courbe en trait plein), le point de fonctionnement se trouve en  $A$ , marginalement stable. La hauteur de la déformation a alors diminué. Si la fréquence acoustique continue d'augmenter, le point de fonctionnement saute brutalement en  $C$ , car il n'y a plus de point de fonctionnement stable à proximité du point  $A$ . La hauteur de la déformation augmente alors brutalement. Cela explique le motif en dents de scie observé sur le cycle d'hystérésis expérimental. Si une fois que le point de fonctionnement est en  $C$ , la fréquence se met à diminuer, le point de fonctionnement ne repasse pas directement au point  $A$ , d'où l'hystérésis observée. Lorsque la fréquence vaut à nouveau 2,4982 MHz, le point de fonctionnement se trouve en  $E$  : la hauteur de la déformation a augmenté. Si la fréquence continue de baisser, le point de fonctionnement finit par atteindre un point d'équilibre marginalement stable et par sauter sur le pic voisin, cette fois avec une brusque chute de la hauteur de la déformation. On constate sur la figure 6.15 que ce modèle décrit bien le cycle d'hystérésis en fréquence.

En réalité, dans les expériences, on décrit à nouveau le début de la rampe de fréquence une fois que celle-ci est terminée et avant d'arrêter complètement l'émission acoustique : cela permet de fermer le cycle d'hystérésis expérimental.

## 6.4 Apparition de l'hystérésis pour de petites amplitudes acoustiques

En réalité, on se rend compte que le phénomène de bistabilité n'apparaît que si l'onde acoustique est suffisamment intense : sur la figure 6.7, on peut s'apercevoir que si la pression acoustique émise par le transducteur vaut  $P_1$ , un seul point d'équilibre est possible quelle que soit la valeur de la fréquence, la pente de la droite correspondante étant plus élevée que la pente de la courbe de résonance en tout point. Si l'onde acoustique émise est modulée en fréquence comme précédemment, on ne devrait alors pas observer de cycle d'hystérésis.

Le but de l'expérience présentée dans cette section est de mettre en évidence l'apparition de l'hystérésis lorsque l'amplitude acoustique est faible et de vérifier que pour des amplitudes suffisamment faibles, on n'observe pas cette hystérésis. Comme les déformations que l'on réalise alors sont très petites (de l'ordre de la centaine de microns), on ne peut plus mesurer leur hauteur directement sur des films. Nous avons alors choisi de les mesurer suivant un montage reposant sur le même principe que celui servant à mesurer des tensions interfaciales présenté dans le chapitre 4. Le montage est cependant moins abouti, l'expérience présentée ici étant historiquement plus ancienne que les expériences de mesures de tensions interfaciales. Notamment, le faisceau laser passait par le barreau de verre collé le long de l'axe du transducteur, qui est un très mauvais élément optique et altère beaucoup le faisceau. Par ailleurs, nous n'avons pas encore réalisé qu'il fallait que le faisceau soit très fin devant la largeur caractéristique de la déformation pour pouvoir assimiler celle-ci à un dioptre sphérique.

### 6.4.1 Montage

Le montage utilisé est présenté sur la figure 6.17. Le transducteur est un transducteur

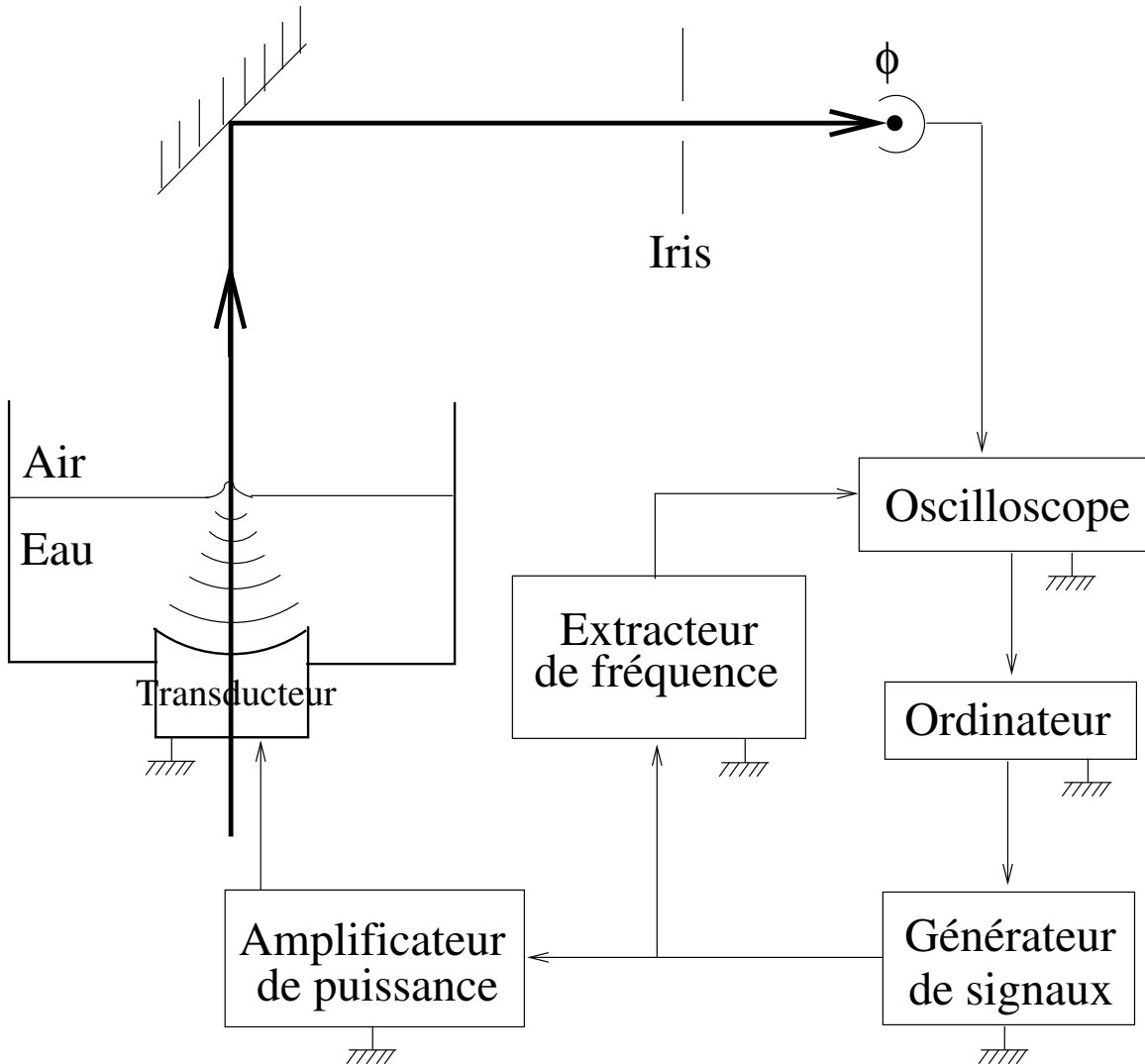


FIG. 6.17 – Montage utilisé pour visualiser l'apparition de l'hystérésis aux petites amplitudes acoustiques.

percé d'un trou le long de son axe, trou dans lequel un barreau de verre est collé. Un faisceau laser arrive dans la cellule de bas en haut, puis est intercepté par un diaphragme avant d'atteindre une photodiode. Le montage électronique est le même que celui décrit sur la figure 6.13, qui permet au transducteur d'émettre une onde acoustique modulée en fréquence comme décrit précédemment. Le signal de sortie de la photodiode est lui aussi envoyé à l'oscilloscope, qui transmet le signal de fréquence et le signal de luminosité à l'ordinateur. À partir de l'évolution temporelle de la luminosité et de l'évolution temporelle de la fréquence acoustique, on peut tracer l'évolution de la courbure de la déformation avec la fréquence.



## 6.4.2 Modélisation

Un gros inconvénient de ce montage est l'utilisation du barreau de verre glissé le long de l'axe du transducteur : en effet, ce barreau ayant été probablement étiré (et non taillé et poli), c'est un très mauvais élément optique, et le faisceau laser gaussien qui pénètre dans ce barreau en ressort complètement altéré, le faisceau émergent n'étant plus gaussien du tout. Pour cette raison, dans la suite de cette partie, nous n'allons pas considérer le faisceau laser comme gaussien, mais comme un faisceau cylindrique homogène. Comme dans le chapitre 4, nous considérons la déformation comme un dioptre sphérique (figure 6.18) dont la distance focale est  $F = \frac{2}{(1-n)\kappa}$ ,  $n$  étant l'indice de réfraction de l'eau et  $\kappa$  la courbure de la déformation en son centre. Le laser n'est ici pas refocalisé par un système

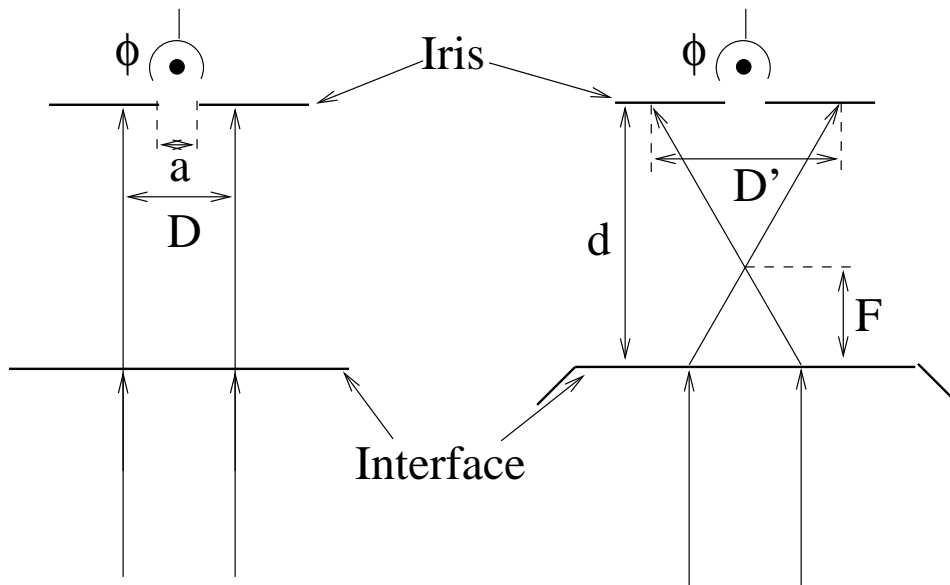


FIG. 6.18 – À gauche, il n'y a pas de déformation. Le faisceau laser traverse l'interface sans modifications. À droite, la déformation de courbure  $\kappa$  agit sur le faisceau comme un dioptre sphérique de focale  $F = \frac{2}{(1-n)\kappa}$ .

de lentilles avant de pénétrer dans la cellule. Nous considérons ici le faisceau comme un pinceau cylindrique de diamètre  $D$ . En l'absence de déformation, le faisceau atteignant l'iris a un diamètre  $D$  et la puissance lumineuse traversant l'iris vaut

$$\mathcal{P}'_0 = \frac{a^2}{D^2} \mathcal{P} \quad (6.29)$$

$a$  étant le diamètre de l'iris et  $\mathcal{P}$  la puissance totale du faisceau laser incident.

En présence de déformation, le faisceau atteignant l'iris n'est plus cylindrique mais conique et son diamètre au niveau de l'iris vaut  $D' = \frac{|d-F|}{F} D$ ,  $d$  étant la distance entre l'interface et l'iris et  $F$  la focale du dioptre. La puissance traversant l'iris vaut, pour une

déformation de courbure  $\kappa$  :

$$\mathcal{P}'_{\kappa} = \frac{a^2}{D'^2} \mathcal{P} \quad (6.30)$$

$$= \frac{a^2}{D^2} \mathcal{P} \frac{D^2}{D'^2} \quad (6.31)$$

$$= \frac{D^2}{D'^2} \mathcal{P}'_0 \quad (6.32)$$

$$= \left( \frac{(1-n)\kappa d}{2} - 1 \right)^{-2} \mathcal{P}'_0 \quad (6.33)$$

On démontre que  $\kappa = -1,62 \frac{h}{\omega_0^2}$  (la démonstration se trouve ci-dessous). Le rapport de la puissance mesurée par la photodiode en l'absence de déformation et de la puissance mesurée en présence d'une déformation de courbure  $\kappa$  vaut donc

$$\frac{\mathcal{P}'_0}{\mathcal{P}'_{\kappa}} = \left( 0,81 \frac{(n-1)hd}{\omega_0^2} - 1 \right)^2 \quad (6.34)$$

### Démonstration de $\kappa = -1,62 \frac{h}{\omega_0^2}$

Le profil de hauteur de la déformation lorsque l'onde acoustique est approximée par une onde gaussienne vaut

$$h(r) = \frac{p_{i0}^2 \omega_0^2}{4\rho c^2} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\omega_0^2 k^2 / 8}}{\rho g + \sigma k^2} J_0(kr) k dk \quad (6.35)$$

$$\stackrel{u=\omega_0 k}{=} \frac{p_{i0}^2 \omega_0^2}{4g\rho^2 c^2} \int_0^{\infty} \frac{e^{-u^2/8}}{\omega_0^2 + l_c^2 u^2} J_0\left(\frac{ur}{\omega_0}\right) u du \quad (6.36)$$

en notant  $l_c$  la longueur capillaire :  $l_c = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}}$ . Or,

$$\kappa(r) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial h}{\partial r} \right) \quad (6.37)$$

$$= -\frac{p_{i0}^2}{4g\rho^2 c^2} \int_0^{\infty} \frac{e^{-u^2/8}}{\omega_0^2 + l_c^2 u^2} J_0\left(\frac{ur}{\omega_0}\right) u^3 du \quad (6.38)$$

donc la hauteur totale de la déformation et sa courbure en son centre valent

$$h = h(0) = \frac{p_{i0}^2 \omega_0^2}{4g\rho^2 c^2} \int_0^{\infty} \frac{e^{-u^2/8}}{\omega_0^2 + l_c^2 u^2} u du \quad (6.39)$$

et

$$\kappa = \kappa(0) = -\frac{p_{i0}^2}{4g\rho^2 c^2} \int_0^{\infty} \frac{e^{-u^2/8}}{\omega_0^2 + l_c^2 u^2} u^3 du \quad (6.40)$$

Dans le cas d'une onde de fréquence 2,5 MHz se propageant dans l'eau, la largeur caractéristique du faisceau vaut  $\omega_0 = 0,86\lambda = 515 \mu\text{m}$ . Pour l'interface eau-air,  $\sigma = 72 \text{ mN/m}$ ,  $\rho = 998 \text{ kg/m}^3$ ,  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$  donc  $l_c = 2,71 \text{ mm}$  et on peut alors calculer sous Maple les intégrales intervenant dans les deux expressions précédentes :

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-u^2/8}}{\omega_0^2 + l_c^2 u^2} u du = 3,38.10^5 \text{ m}^{-2} \quad (6.41)$$

et

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-u^2/8}}{\omega_0^2 + l_c^2 u^2} u^3 du = 5,48.10^5 m^{-2} \quad (6.42)$$

et de là, on déduit que

$$\kappa = -\frac{1,62}{\omega_0^2} h \quad (6.43)$$

### 6.4.3 Résultats

La figure 6.19 montre les résultats de cette expérience pour trois pressions entrantes différentes. La courbe théorique est calculée grâce à la formule 6.34, la hauteur théorique

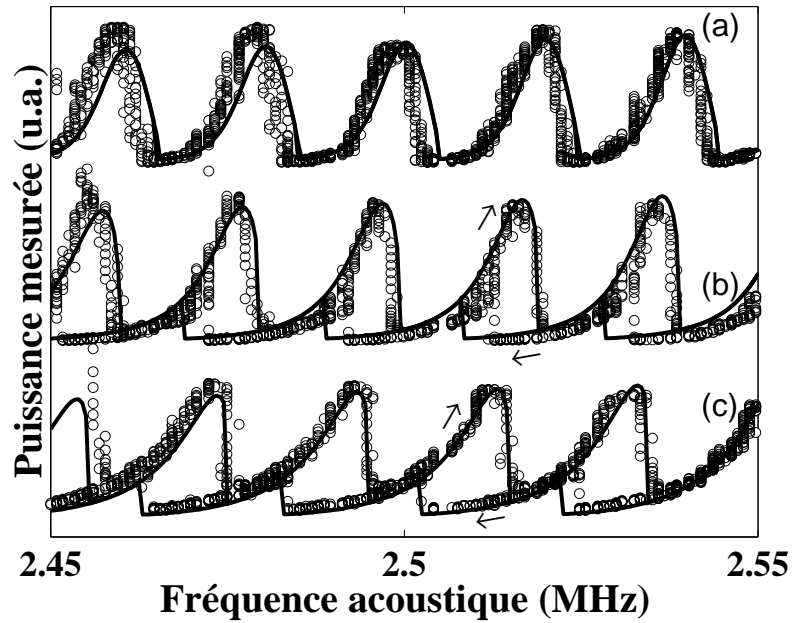


FIG. 6.19 – Puissance lumineuse mesurée en fonction de la fréquence de l'onde acoustique pour trois expériences à faible amplitude acoustique. Pour chaque expérience, la courbe en trait gras représente la prédiction théorique et les symboles représentent les points expérimentaux. L'expérience (a) est réalisée pour une amplitude acoustique de 0,19 MPa, l'expérience (b) pour une amplitude de 0,36 MPa et l'expérience (c) pour une amplitude de 0,48 MPa.

étant déterminée grâce au modèle décrit précédemment sur la figure 6.7. On observe que qualitativement, ces courbes sont en bon accord, même si quantitativement, il a fallu multiplier par un facteur 400 à 1000 l'intensité théorique pour qu'il y ait un bon accord (par 375 pour l'expérience (a), 950 pour l'expérience (b) et 500 pour l'expérience (c)). Ceci est probablement dû au raisonnement d'optique qui est très approximatif, le faisceau n'étant pas en réalité un faisceau cylindrique homogène et le dioptre n'étant pas sphérique, car le faisceau est large par rapport à la déformation. On observe sur ces expériences l'apparition du cycle d'hystérésis en fréquence : pour une amplitude de 0,19 MPa, il n'y a pas d'hystérésis. Il y en a une pour 0,36 MPa, et le cycle s'ouvre de plus en plus quand l'amplitude augmente. Quand on continue à augmenter l'amplitude acoustique, les branches supérieure et inférieure du cycle d'hystérésis finissent par se séparer, comme sur le cycle représenté sur la figure 6.15.

## Conclusion

Nous avons présenté l'hystérésis de forme d'une cavité acoustique établie entre un transducteur ultrasonore sphérique immergé et la surface libre de l'eau située en son point focal. Cette hystérésis peut être décrite précisément en utilisant un modèle de résonateur de Pérot-Fabry à une dimension, en supposant que la pression de radiation acoustique est le seul couplage mécanique entre la longueur de la cavité et le champ acoustique. Cette étude démontre que, au moins dans une situation stationnaire et à une dimension, le couplage entre une onde et un résonateur par la pression de radiation peut-être décrit de manière universelle pour les ondes électromagnétiques et les ondes acoustiques [3, 4]. Ces expériences d'acoustique permettent cependant de remonter directement à la cause du couplage entre l'onde et le résonateur (le déplacement du miroir), ce que les expériences menées en optique ne permettaient pas à cause de la faiblesse de ce déplacement.

Dans les deux chapitres suivants, nous allons explorer d'autres effets liés à ce couplage.

## Références du chapitre 6

- [1] R. W. Wood et A. L. Loomis. The Physical and Biological Effects of High-frequency Sound-waves of Great Intensity. *Phil. Mag. Series 7*, 4(22) :417–436, 1927.
- [2] M. Kornfeld et V. I. Triers. Swelling of a liquid surface under the influence of ultrasound. *Zh. Tekh. Fiz.*, 26 :2778, 1956.
- [3] A. Dorsel, J. D. McCullen, P. Meystre, et E. Vignes. Optical Bistability and Mirror Confinement Induced by Radiation Pressure. *Phys. Rev. Lett.*, 51(17) :1550–1553, 1983.
- [4] P. Meystre, E. M. Wright, J. D. McCullen, et E. Vignes. Theory of radiation-pressure-driven interferometers. *J. Opt. Soc. Am. B*, 2(11) :1830–1840, 1985.
- [5] W. L. Nyborg. Acoustic Streaming. In *Nonlinear Acoustics*, chapter 7, pages 207–231. Academic Press, 1998.

## Chapitre 7

# Action de la pression de radiation acoustique sur une onde capillaire

Dans ce chapitre, nous allons étudier l'influence de la pression de radiation acoustique sur une onde capillaire, en particulier dans le cas d'une interface fluide totalement réfléchissante comme l'interface eau-air.

### 7.1 Position du problème

L'effet de cavité présenté dans le chapitre précédent est susceptible de modifier la dynamique de la surface libre. Considérons en effet le point de fonctionnement  $C$  représenté sur la figure 7.1, qui constitue un point d'équilibre stable pour la déformation, et considérons qu'une perturbation  $\delta h$  de la hauteur de la déformation se produit. Si la perturbation tend

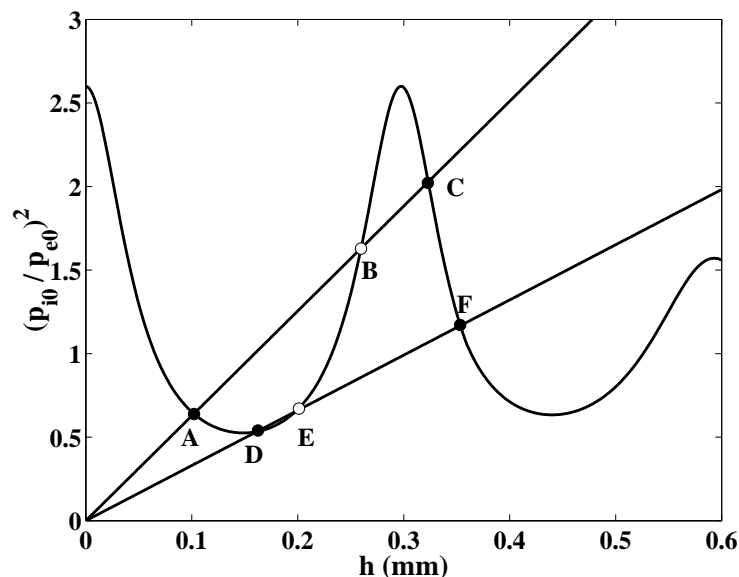


FIG. 7.1 – Modélisation de la cavité résonante acoustique. La courbe illustre les résonances de la cavité. La droite représente la relation linéaire entre la hauteur  $h$  de la déformation et la pression de radiation (équation 6.2) pour une pression entrante donnée. Les points noirs et blancs représentent respectivement les points d'équilibre stable et instable de la surface libre.

à faire augmenter la hauteur de la déformation, alors  $\delta h > 0$ . La cavité se désaccorde et comme  $\left. \frac{d(p_{i0}/p_{e0})^2}{dh} \right|_C < 0$  à  $p_{e0}$  constante, l'intensité acoustique incidente diminue, donc la pression de radiation s'exerçant sur la surface libre diminue. Cet effet s'oppose donc à la perturbation qui tendait à faire augmenter la hauteur de la déformation. Un raisonnement similaire avec  $\delta h < 0$  conduit à la même conclusion. L'effet de cavité couplé à la pression de radiation acoustique procure à l'interface, par ce phénomène de rétroaction passive, une « raideur » dynamique qui s'ajoute à sa raideur intrinsèque due à la gravité et à la tension de surface. C'est la conséquence de la stabilité mécanique de la position d'équilibre adoptée par la déformation.

Cet effet avait déjà été prédit théoriquement dans le cas de cavités optiques [1, 2] et de nombreux ressorts optiques ont été observés expérimentalement [3, 4, 5]. Il existe un certain nombre d'applications à ce phénomène, comme la stabilisation de pointes d'AFM (figure 7.2).

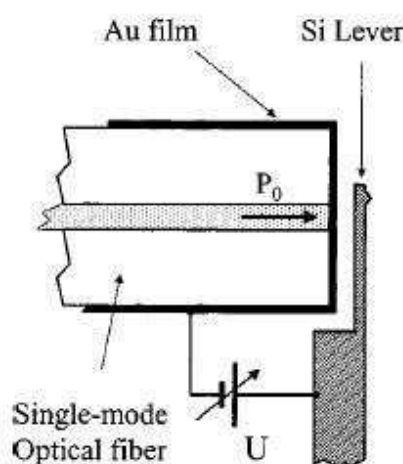


FIG. 7.2 – Stabilisation d'une pointe de microscope à force atomique par pression de radiation optique : une cavité Pérot-Fabry est formée par l'extrémité d'une fibre optique et le levier de silicium, tous deux couverts d'un film d'or. Un faisceau laser arrive par la fibre optique et est piégé dans la cavité. Il exerce une pression de radiation sur le levier, cette pression dépendant de la distance entre le levier et le bout de la fibre. Le levier est alors piégé au voisinage de ses positions d'équilibre stable. Ce mécanisme permet de diminuer le bruit thermique du levier, potentiellement utilisé comme support de pointe d'AFM [4].

Dans le cas de ces expériences d'optique, le miroir associé au film d'or déposé sur le levier de silicium était un oscillateur à un degré de liberté et la raideur ajoutée par l'effet de cavité était bien décrite par un modèle à une dimension. Ici, nous cherchons à mettre en évidence, dans le cas de l'acoustique, cet effet de raideur ajoutée par l'effet de cavité en l'étendant à une surface liquide, c'est-à-dire un système bidimensionnel possédant un continuum de degrés de liberté.

Nous allons essayer dans ce chapitre de mettre cet effet en évidence sur des ondes acoustiques, en vérifiant que des ondes capillaires se propageant à l'interface eau-air sont bien atténuées lorsqu'elles atteignent la déformation induite par la pression de radiation.

Notons que si le point de fonctionnement se trouve à un endroit où la courbe de

résonance est croissante (par exemple au point  $D$ ), la « raideur » dynamique procurée par l'effet de cavité à l'interface sera négative. En effet, une petite augmentation de hauteur tend à faire augmenter la pression de radiation. Cependant dans cette zone où l'équilibre est encore stable, cela ne suffit pas à faire à nouveau augmenter la hauteur, car la gravité et la tension de surface s'y opposent. Néanmoins, si cela suffit à rendre négative la raideur totale de l'interface, l'interface devient instable et se met à osciller spontanément autour du point d'équilibre stable  $D$ , phénomène que nous étudierons plus en détail dans le chapitre 8.

## 7.2 Dispositif expérimental

Pour mettre en œuvre cette expérience, nous avons utilisé le dispositif expérimental représenté sur la figure 7.3. Une lame, mise en contact avec la surface liquide et oscillant

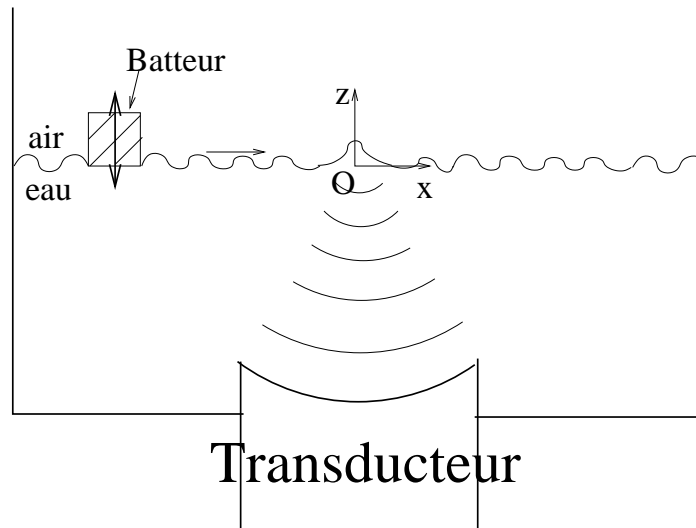


FIG. 7.3 – Premier montage utilisé pour étudier l'influence de la cavité Pérot-Fabry acoustique sur les ondes capillaires.

verticalement et sinusoidalement, émet une onde capillaire plane, progressive et harmonique, qui se propage sur l'interface eau-air. Elle est mise en mouvement par un vibreur électromécanique alimenté par un générateur basse fréquence. Ce vibreur a une bande passante de 1 kHz, une amplitude maximale de 7 mm, une puissance maximale de 8 W et une impédance d'entrée de 8  $\Omega$ . Le transducteur émet une onde acoustique pendant une durée de l'ordre de 5 s. Cette onde acoustique est alors confinée dans la cavité limitée par la surface du transducteur et la surface de l'eau. Une déformation se crée à la surface de l'eau. Le but de ce chapitre est d'étudier l'influence de la cavité Pérot-Fabry sur les ondes capillaires émises par la lame vibrante. Pour ce faire, nous allons mesurer l'amplitude  $H_0$  de l'onde capillaire en  $O$  en l'absence de déformation, puis son amplitude  $H$  en présence de déformation et comparer  $H$  et  $H_0$ .

### 7.3 Modélisation théorique de l'atténuation des ondes capillaires au niveau de la déformation

Le but de ce paragraphe est de modéliser l'atténuation de l'onde capillaire par l'effet de cavité décrit précédemment. L'interface est ici considérée comme parfaitement réfléchissante. On suppose que l'onde acoustique est émise depuis le fluide inférieur. Considérons les figures 7.4 et 7.5. Considérons les points  $A_1$  et  $A_2$ , situés au sommet de la déformation

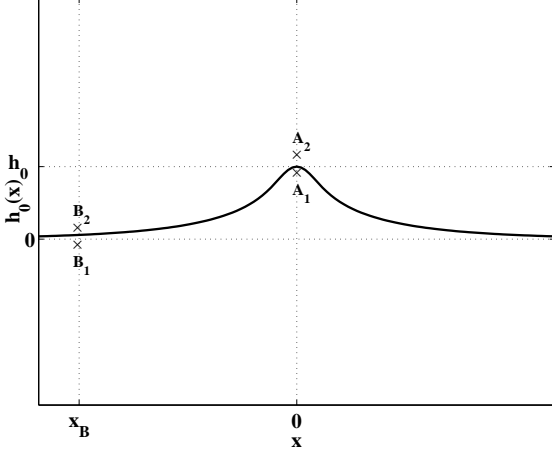


FIG. 7.4 – Déformation d'interface non perturbée.

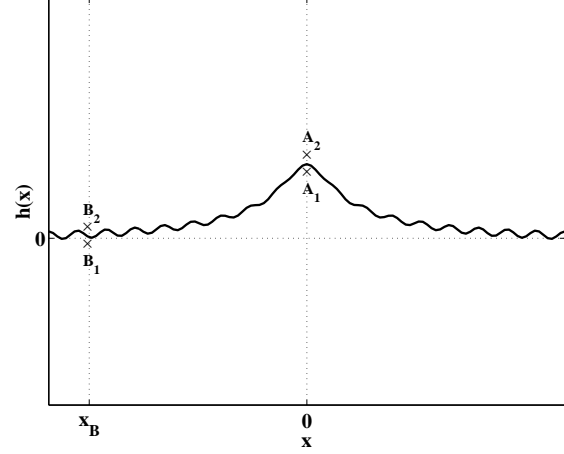


FIG. 7.5 – Déformation de l'interface perturbée par une onde capillaire plane incidente.

(abscisse  $x_A = 0$ ), infiniment proches de l'interface, respectivement dans le fluide 1 et dans le fluide 2. On considère également les points  $B_1$  et  $B_2$ , infiniment proches de l'interface, respectivement dans le fluide 1 et le fluide 2, loin de la déformation, c'est-à-dire à une abscisse  $x_B$  telle que l'amplitude de pression acoustique puisse y être considérée comme nulle.

D'après la loi de Laplace,  $P(B_1) - P(B_2) = -\sigma\kappa(x_B)$  et  $P(A_1) - P(A_2) = -\sigma\kappa(0)$ ,  $\kappa(x)$  étant la courbure de l'interface à l'abscisse  $x$ .

On suppose que l'onde capillaire est monochromatique et progressive et qu'il n'y a pas d'onde rétrograde. Le déplacement vertical de la surface de l'eau par rapport à sa position en l'absence d'onde capillaire mais en présence de déformation s'écrit par conséquent  $\eta(x, t) = \eta_0(x)e^{i(\omega t - kx)}$ ,  $\eta_0$  variant lentement avec  $x$  (c'est-à-dire que l'échelle caractéristique de variation de  $\eta_0$  est grande devant la longueur d'onde  $\Lambda$  de l'onde capillaire).

On note  $h_0(r)$  le profil de hauteur de la déformation non perturbée. On considère de plus que la déformation et l'onde capillaire sont d'amplitude suffisamment faible pour que l'on puisse considérer que  $\frac{\partial h_0}{\partial r} \ll 1$  et  $\frac{\partial \eta}{\partial x} \ll 1$ , ce qui implique que  $\kappa \approx \Delta h$ .

On peut alors écrire

$$P(B_1) - P(B_2) = \sigma k^2 \eta_0(x_B) e^{i(\omega t - kx_B)} \quad (7.1)$$

$$P(A_1) - P(A_2) = \sigma k^2 \eta_0(0) e^{i\omega t} - \sigma \kappa_0 \quad (7.2)$$

$\kappa_0$  étant la courbure de la déformation non perturbée en  $x = 0$ .

La pression totale en un point  $M$  est la somme de la pression hydrostatique  $P_h(M)$  en  $M$  et de la pression acoustique lagrangienne moyenne  $\langle E(M) \rangle$  en  $M$ .



Les pressions hydrostatiques sont liées par les relations suivantes :

$$P_h(B_1) - P_h(A_1) = \rho_1 g (h(A_1) - h(B_1)) \quad (7.3)$$

$$= \rho_1 g (h_0 + \eta_0(0)e^{i\omega t} - \eta_0(x_B)e^{i(\omega t - kx_B)}) \quad (7.4)$$

$$P_h(B_2) - P_h(A_2) = \rho_2 g (h_0 + \eta_0(0)e^{i\omega t} - \eta_0(x_B)e^{i(\omega t - kx_B)}) \quad (7.5)$$

$h_0$  étant la hauteur de la déformation non perturbée.

Ici, les points  $B_1$  et  $B_2$  sont suffisamment éloignés de l'axe de la déformation pour qu'on puisse y considérer comme nulle la pression acoustique lagrangienne moyenne. Par ailleurs, l'interface étant considérée comme parfaitement réfléchissante aux ondes acoustiques et l'onde acoustique venant du fluide 1,  $\langle E(A_2) \rangle = 0$ .

La pression totale en  $B_1$ ,  $B_2$  et  $A_2$  est donc égale à la pression hydrostatique en ces points. En revanche, la pression totale en  $A_1$  vaut  $P(A_1) = P_h(A_1) + \langle E(A_1) \rangle$ .

Par définition, la pression de radiation acoustique à laquelle l'interface est soumise vaut  $\Pi = \langle E(A_1) \rangle - \langle E(A_2) \rangle = \langle E(A_1) \rangle$  donc  $P(A_1) = P_h(A_1) + \Pi$ .

La pression de radiation  $\Pi$  peut s'écrire  $\Pi \approx \Pi_0 + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial h}\right)_{p_{e0}} (\langle h \rangle) \eta(0, t)$ .  $\Pi_0$  est la pression de radiation qui s'exerce sur l'interface en l'absence d'onde de surface.  $\langle h \rangle$  est la hauteur de la déformation moyennée sur une période de l'onde de surface. La pression  $p_{e0}$ , maintenue constante, est l'amplitude de pression acoustique entrant dans la cavité Pérot-Fabry.

Les deux équations précédentes deviennent alors

$$P(B_1) - P(A_1) + \Pi = \rho_1 g (h_0 + \eta_0(0)e^{i\omega t} - \eta_0(x_B)e^{i(\omega t - kx_B)}) \quad (7.6)$$

$$P(B_2) - P(A_2) = \rho_2 g (h_0 + \eta_0(0)e^{i\omega t} - \eta_0(x_B)e^{i(\omega t - kx_B)}) \quad (7.7)$$

soit, en les soustrayant et en introduisant les équations 7.1 et 7.2 :

$$\begin{aligned} \sigma k^2 (\eta_0(x_B)e^{-ikx_B} - \eta_0(0)) e^{i\omega t} + \sigma \kappa_0 = \\ (\rho_1 - \rho_2)g (h_0 + \eta_0(0)e^{i\omega t} - \eta_0(x_B)e^{i(\omega t - kx_B)}) - \Pi_0 - \left(\frac{\partial \Pi}{\partial h}\right)_{p_{e0}} (\langle h \rangle) \eta(0, t) \end{aligned} \quad (7.8)$$

L'équation d'équilibre de la déformation non perturbée s'écrit

$$(\rho_1 - \rho_2)gh_0(r) - \sigma \kappa_0(r) = \Pi_0(r) \quad (7.9)$$

ce qui implique, en  $r = 0$ , que

$$(\rho_1 - \rho_2)gh_0 - \sigma \kappa_0 = \Pi_0 \quad (7.10)$$

En la réintroduisant dans l'équation 7.8, on obtient

$$\begin{aligned} \sigma k^2 (\eta_0(x_B)e^{-ikx_B} - \eta_0(0)) e^{i\omega t} = \\ (\rho_1 - \rho_2)g (\eta_0(0)e^{i\omega t} - \eta_0(x_B)e^{i(\omega t - kx_B)}) - \left(\frac{\partial \Pi}{\partial h}\right)_{p_{e0}} (\langle h \rangle) \eta_0(0)e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (7.11)$$

soit

$$\eta_0(0) \left( (\rho_1 - \rho_2)g + \sigma k^2 - \left(\frac{\partial \Pi}{\partial h}\right)_{p_{e0}} (\langle h \rangle) \right) e^{i\omega t} = \eta_0(x_B) ((\rho_1 - \rho_2)g + \sigma k^2) e^{i(\omega t - kx_B)} \quad (7.12)$$

d'où

$$\left| \frac{\eta_0(x_B)}{\eta_0(0)} \right| = 1 - \frac{1}{(\rho_1 - \rho_2)g + \sigma k^2} \left( \frac{\partial \Pi}{\partial h} \right)_{pe0} (\langle h \rangle) \quad (7.13)$$

Si l'on suppose que l'onde capillaire incidente est homogène en l'absence de déformation, alors  $\eta_0(x_B) = H_0$ ,  $H_0$  étant son amplitude en  $x = 0$  en l'absence de déformation. Si l'on note  $H$  son amplitude en  $x = 0$  en présence de déformation, l'équation précédente devient

$$\left| \frac{H_0}{H} \right| = 1 - \frac{1}{(\rho_1 - \rho_2)g + \sigma k^2} \left( \frac{\partial \Pi}{\partial h} \right)_{pe0} (\langle h \rangle) \quad (7.14)$$

Ce calcul prévoit que l'atténuation est une fonction affine de  $\left( \frac{\partial \Pi}{\partial h} \right)_{pe0} (\langle h \rangle)$  et est d'autant plus forte que  $\left| \left( \frac{\partial \Pi}{\partial h} \right)_{pe0} (\langle h \rangle) \right|$  est grand. Plus la pente de la courbe de résonance de Pérot-Fabry (figure 7.1) est grande en valeur absolue, plus l'effet d'atténuation devrait être fort. Si cette pente est nulle, il ne devrait y avoir aucune atténuation, l'effet de raideur s'annulant alors. En conséquence, si  $\left( \frac{\partial \Pi}{\partial h} \right)_{pe0} (\langle h \rangle) = 0$ , alors  $\left| \frac{H_0}{H} \right| = 1$

Par ailleurs, ce calcul prévoit aussi que l'atténuation est d'autant plus faible que le nombre d'onde  $k$  de l'onde capillaire est grand, c'est-à-dire que sa fréquence est grande.

Pour vérifier ce résultat expérimentalement, il faut donc mesurer trois quantités :

- L'amplitude  $H_0$  de l'onde capillaire à la verticale du transducteur en l'absence de déformation. Cette mesure fera l'objet du paragraphe 7.4.
- L'amplitude  $H$  de l'onde capillaire au sommet de la déformation en présence de déformation. Cette mesure fera l'objet du paragraphe 7.5.
- La pente expérimentale de la courbe de résonance  $\left( \frac{\partial \Pi}{\partial h} \right)_{pe0} (\langle h \rangle)$ . Cette mesure fera l'objet du paragraphe 7.6.

## 7.4 Mesure de l'amplitude de l'onde capillaire incidente en l'absence de déformation

Dans tout ce paragraphe, le transducteur n'émet aucune onde acoustique, et il n'y a donc pas de déformation induite par la pression de radiation acoustique à l'interface.

### 7.4.1 Principe de la méthode

Pour mesurer l'amplitude de l'onde capillaire émise par le batteur, nous avons utilisé la déflexion d'un faisceau laser incident à l'interface, grâce au principe représenté sur la figure 7.6.

Un faisceau laser en incidence oblique sur l'interface est réfléchi par celle-ci vers un écran. La hauteur  $y$  à laquelle un rayon arrive sur l'écran dépend de l'angle que fait l'interface avec l'horizontale à l'endroit où le rayon l'a atteinte (figure 7.7).

Considérons un rayon incident à l'interface et incliné d'un angle  $\alpha$  par rapport à l'horizontale. L'interface, elle, fait un angle  $\theta$  avec l'horizontale au point d'incidence du rayon. Le rayon réfléchi repart avec une inclinaison  $\alpha + 2\theta$ , et arrive sur l'écran à une hauteur  $y$ . La valeur de  $y$  permet de remonter à l'inclinaison  $\theta$  de l'interface par l'intermédiaire de l'expression

$$y = d \tan(\alpha + 2\theta) \quad (7.15)$$

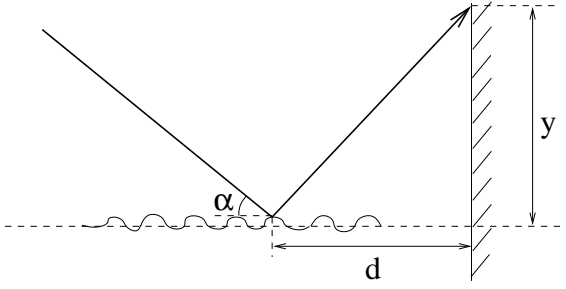


FIG. 7.6 – Principe de mesure de l'amplitude des ondes capillaires par la déflexion d'un faisceau laser.

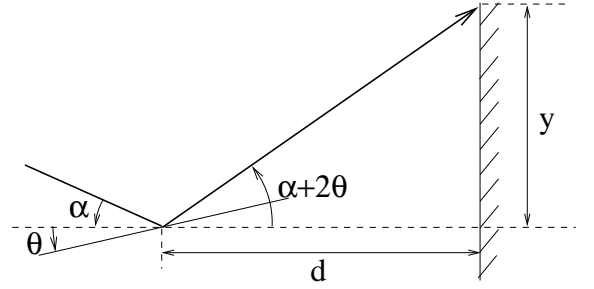


FIG. 7.7 – Faisceau laser se réfléchissant sur une interface inclinée d'un angle  $\theta$  par rapport à l'horizontale.

Si une onde capillaire harmonique se propage à l'interface, l'inclinaison  $\theta$  de celle-ci oscille sinusoidalement entre deux valeurs  $\theta_0$  et  $-\theta_0$  :

$$\theta(x, t) = \theta_0 \sin(\omega t - kx) \quad (7.16)$$

En l'absence de déformation, on considère que l'amplitude  $\eta_0$  de l'onde ne dépend pas de  $x$ . La forme instantanée de l'interface soumise à l'onde capillaire s'écrit alors

$$\eta(x, t) = \eta_0 \cos(\omega t - kx) \quad (7.17)$$

et donc

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = k\eta_0 \sin(\omega t - kx) \quad (7.18)$$

$$= \tan \theta \quad (7.19)$$

$$\approx \theta \quad (7.20)$$

en supposant que  $\theta_0 \ll 1$ . De là, on déduit que

$$\theta_0 = k\eta_0 \quad (7.21)$$

La hauteur du point où le rayon arrive sur l'écran oscille entre les deux valeurs extrêmes  $y_{max}$  et  $y_{min}$ . L'amplitude  $\delta y = y_{max} - y_{min}$  de déviation du rayon est donc liée à l'amplitude  $\eta_0$  de l'onde capillaire par l'expression

$$\delta y = 2\theta_0 \left( \frac{\partial y}{\partial \theta} \right)_{\theta=0} \quad (7.22)$$

$$= 4kd\eta_0(1 + \tan^2 \alpha) \quad (7.23)$$

On déduit donc  $\eta_0$  de la mesure de  $\delta y$  par l'expression

$$\eta_0 = \frac{\Lambda \delta y}{8\pi d(1 + \tan^2 \alpha)} \quad (7.24)$$

$\Lambda$  étant la longueur d'onde de l'onde capillaire.

### 7.4.2 Prise en compte de l'atténuation et des ondes stationnaires

En réalité, après avoir traversé toute la cellule, l'onde capillaire est réfléchi sur la face opposée au batteur. L'onde réfléchi interfère alors avec l'onde incidente, créant une onde partiellement stationnaire visible si la fréquence de l'onde capillaire est inférieure à 40 Hz. Nous avons tenté d'atténuer l'onde réfléchi pour limiter cet effet d'onde stationnaire (annexe F, paragraphe F.1), mais nous n'y sommes pas parvenus de façon satisfaisante. Par ailleurs, l'onde capillaire a tendance à s'atténuer lors de sa propagation. Enfin, la taille finie du capteur peut induire des effets de diffraction qui rendent l'amplitude de l'onde inhomogène. À cause de ces trois effets, son amplitude dépend de la position dans la cellule. Il faut donc la mesurer exactement à l'endroit où la déformation va apparaître, c'est-à-dire à la verticale du transducteur. Pour résoudre cette difficulté, nous avons utilisé non pas un faisceau laser, mais une nappe laser créée en intercalant une lentille cylindrique entre la source laser et l'interface, comme indiqué sur les figures 7.8 et 7.9.

La figure observée à l'écran en l'absence d'onde capillaire est photographiée sur la figure 7.10 : le segment  $AB$  de la figure 7.9 est projeté sur l'écran selon le segment  $A'B'$  de la figure 7.10. En présence d'onde capillaire, les différents rayons réfléchis oscillent chacun verticalement entre deux positions extrêmes. À cause de la persistance rétinienne, chacun apparaît sur l'écran sous forme d'un trait vertical. La tache lumineuse alors observée est photographiée sur la figure 7.11.

L'observation de ces inhomogénéités spatiales de l'onde capillaire implique que pour mesurer l'amplitude de l'onde capillaire en l'absence de déformation, il faut que le faisceau laser arrive bien sur l'interface à l'endroit où devrait apparaître la déformation lorsque le transducteur émettra l'onde acoustique. On réalise ce réglage en jouant sur l'inclinaison du miroir  $M$  visible sur la figure 7.8. Pour ce faire, on fait émettre par le transducteur, en l'absence d'onde capillaire, une onde acoustique de très petite amplitude, ce qui crée une toute petite déformation à l'interface. Lorsque la nappe laser arrive bien sur la déformation, on observe sur l'écran la figure photographiée sur la figure 7.12. Il suffit alors de repérer sur l'écran l'abscisse  $x_0$  des rayons arrivant au niveau de la déformation pour pouvoir repérer sur une figure telle que celle représentée sur la figure 7.11 le lieu d'arrivée des rayons réfléchis à la verticale du transducteur.

L'utilisation de la lentille cylindrique rend particulièrement aisé le positionnement de la nappe laser à l'endroit où apparaîtra la déformation. C'est pourquoi dans toutes les expériences où j'ai utilisé cette méthode de mesure, je l'ai utilisée avec la lentille cylindrique pour créer une nappe laser.

Un montage voisin de celui qui vient d'être présenté (mais ne comportant pas de lentille cylindrique) nous a permis de déterminer la dynamique du vibreur (paragraphe F.1.1). Lorsque celui-ci vibre à une fréquence supérieure à 100 Hz, l'amplitude de l'onde capillaire résultante est indétectable avec ce montage. Pour cette raison, nous avons dû utiliser dans toute cette étude des ondes capillaires de fréquence inférieure à 100 Hz.

### 7.4.3 Comparaison de cette méthode avec celle consistant à mesurer directement l'amplitude de l'onde incidente sur les images

Une autre méthode de mesure de l'amplitude de l'onde capillaire incidente consiste à mesurer directement leur amplitude sur les images de déformations, comme indiqué sur la figure 7.13. On mesure l'amplitude d'un point situé sur la queue de la déformation : la

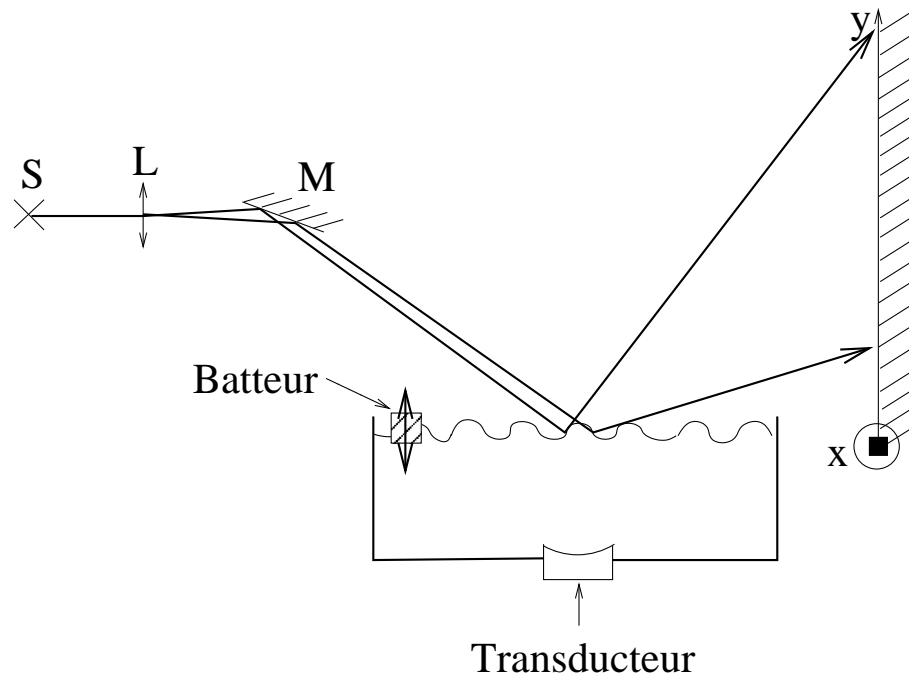


FIG. 7.8 – Le faisceau émis par la source laser  $S$  passe par une lentille cylindrique  $L$ , qui le fait diverger dans une direction. Puis il est dirigé vers l'interface par un miroir  $M$  et réfléchi par l'interface vers l'écran. Suivant l'endroit de l'interface où ils ont été réfléchis, les rayons n'arrivent pas à la même hauteur sur l'écran.

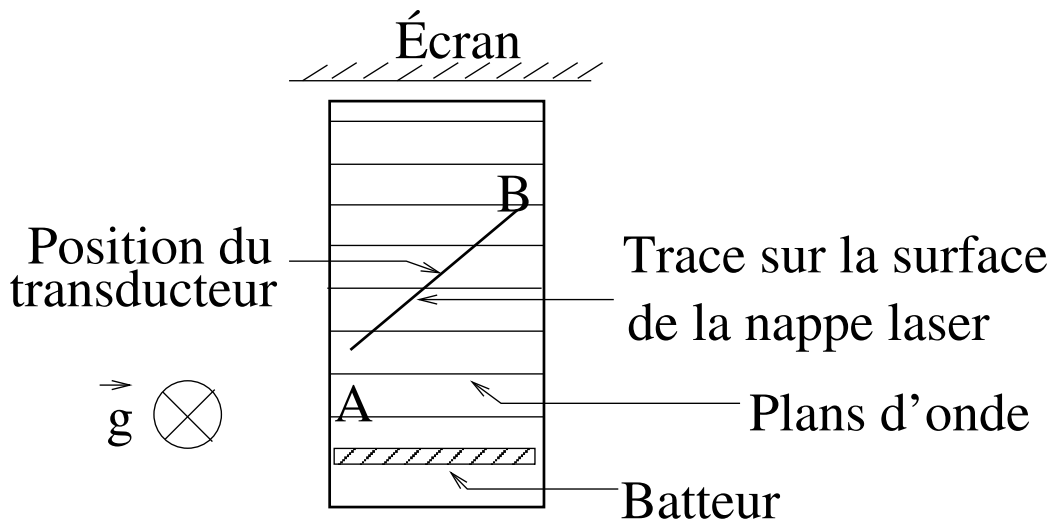


FIG. 7.9 – La lentille cylindrique est inclinée de telle sorte que la nappe laser arrive de biais sur l'interface et éclaire un segment de droite  $AB$ , ce qui permet de mesurer l'amplitude de l'onde capillaire sur plusieurs plans d'onde.

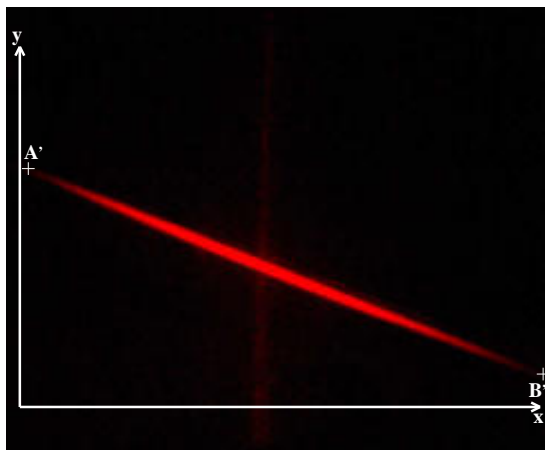


FIG. 7.10 – Figure observée sur l'écran s'il n'y a ni onde capillaire ni déformation par la pression de radiation sur l'interface.

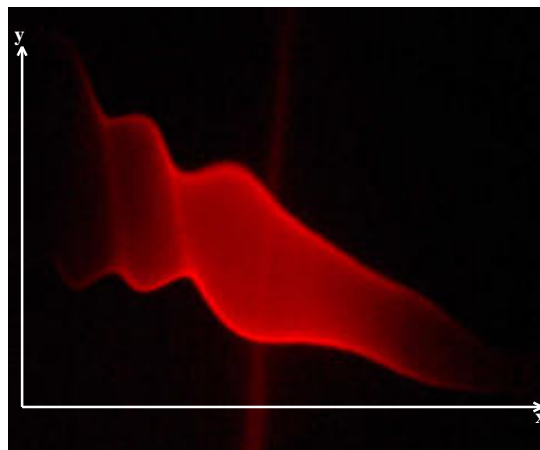


FIG. 7.11 – Figure observée sur l'écran s'il y a une onde capillaire se propageant à l'interface, mais aucune déformation par la pression de radiation. Ici, l'onde capillaire a une fréquence de 40 Hz. On observe un effet de diffraction près du vibreur, qui entraîne une inhomogénéité de l'amplitude de l'onde.

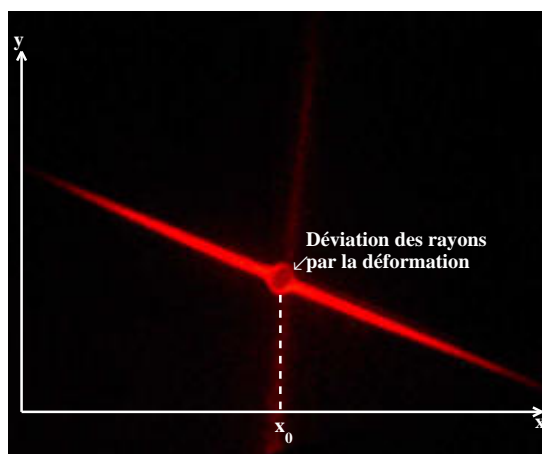


FIG. 7.12 – Figure observée sur l'écran s'il y a une toute petite déformation par la pression de radiation sur l'interface, mais aucune onde capillaire.

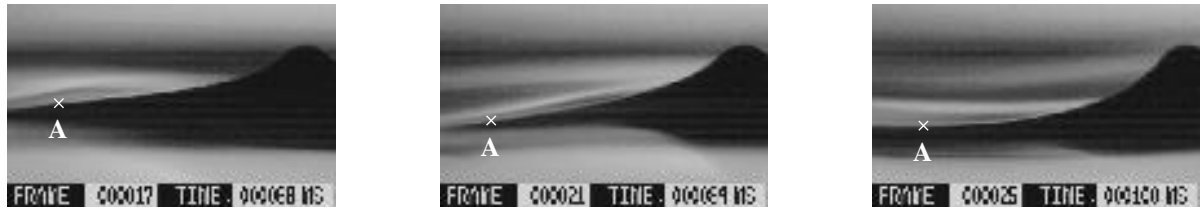


FIG. 7.13 – Mesure de l’amplitude de l’onde capillaire incidente : on mesure l’amplitude d’oscillation du point  $A$  d’abscisse fixe. L’onde capillaire arrive de la gauche. Cette méthode ne peut être utilisée qu’en présence d’une déformation, car ce n’est qu’à la surface de celle-ci qu’on voit nettement l’onde capillaire incidente.

pression de radiation étant quasiment nulle à cet endroit-là, elle ne fausse pas la mesure.

On peut comparer les résultats que donne cette méthode avec ceux obtenus à partir de la déviation du faisceau laser sur la figure 7.14. On observe sur cette courbe que même

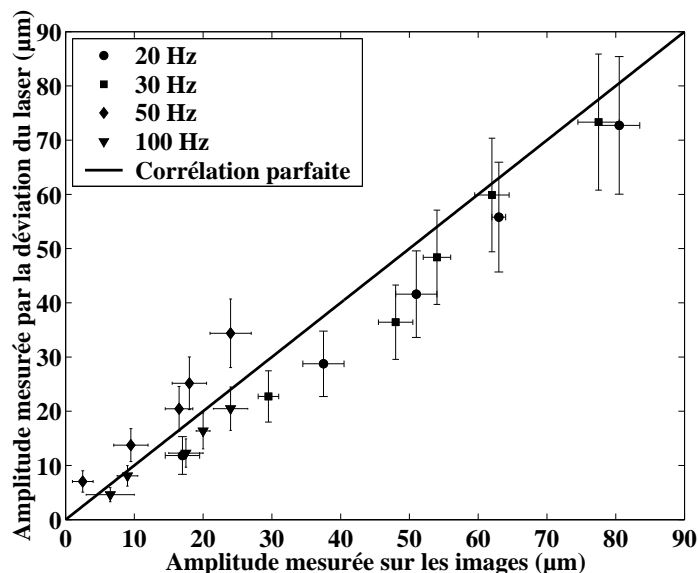


FIG. 7.14 – Comparaison de la mesure directe de l’amplitude des ondes de surface sur les images et de la mesure par la déviation du faisceau laser.

si ces deux méthodes donnent des résultats du même ordre de grandeur, elles ne sont pas en très bon accord, les incertitudes ne permettant pas toujours d’expliquer l’écart entre les deux mesures. En particulier, la méthode de mesure sur les images a presque toujours tendance à surestimer l’amplitude des ondes capillaires par rapport à la méthode de mesure par la déviation du faisceau laser.

Le problème réside dans le fait que lorsqu’on mesure l’amplitude de l’onde stationnaire directement sur les images, on a besoin qu’il y ait une déformation afin de voir nettement les oscillations de l’interface. Même si à l’endroit où on prend la mesure, la pression de radiation acoustique est trop faible pour avoir une influence directe sur l’onde capillaire, la mesure est faussée par la déformation. En effet, celle-ci diffuse l’onde capillaire incidente dans toutes les directions. Nous étudierons cette diffusion plus en détail dans le paragraphe 7.8. L’onde capillaire incidente venant de la gauche sur l’image (figure 7.13), une onde stationnaire se

créée du côté gauche de la déformation, résultant de la superposition de l'onde capillaire incidente et de l'onde capillaire rétrodiffusée par la déformation. Le point de mesure  $A$  peut osciller plus ou moins suivant sa localisation par rapport aux nœuds et aux ventres de l'onde stationnaire, ce qui fausse la mesure de l'amplitude de l'onde capillaire.

On peut observer ces ondes stationnaires en acquérant un film de la déformation en l'absence d'onde stationnaire et un autre en présence d'onde, puis en soustrayant les deux profils. On obtient alors le profil de l'onde capillaire. Comme l'indique la figure 7.15, on observe bien que celle-ci comporte une composante stationnaire : les points situés à 2 mm à gauche du sommet de la déformation oscillent moins que ceux situés à 1 mm.

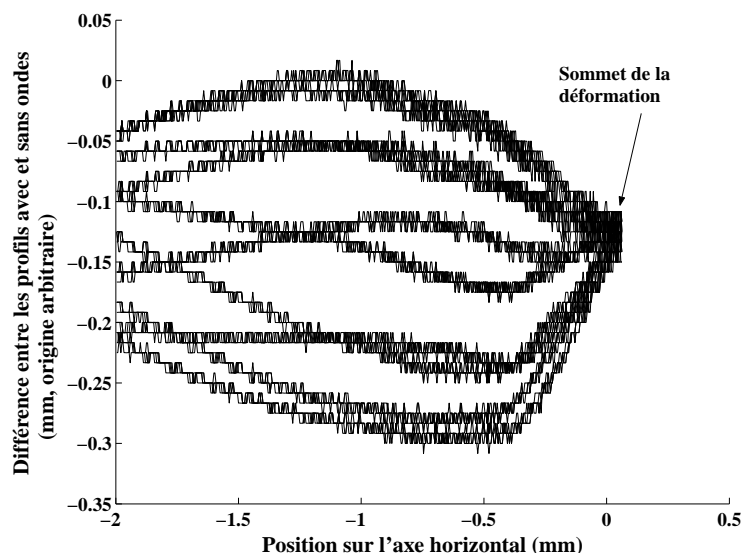


FIG. 7.15 – Profil de l'onde stationnaire sur le côté gauche de la déformation. Les courbes représentent la différence entre le profil de la déformation en présence d'onde capillaire et son profil en l'absence d'onde capillaire, à différents instants  $t$ .

Pour mesurer l'amplitude de l'onde stationnaire incidente, la méthode de mesure par déviation d'un faisceau laser est donc préférable à celle consistant à mesurer l'amplitude directement sur les images. Nous allons maintenant voir comment mesurer l'amplitude de l'onde capillaire au sommet de la déformation, ce qui nous permettra de déduire son atténuation.

## 7.5 Mesure de l'amplitude des oscillations au sommet de la déformation

Pour mesurer l'amplitude des oscillations au sommet de la déformation, la méthode la plus simple est de la mesurer directement sur les images. Cependant, cela oblige à utiliser des ondes capillaires incidentes d'assez grande amplitude. En effet, la cavité Pérot-Fabry ayant pour effet d'atténuer cette onde, si l'on utilise des ondes capillaires de trop petite amplitude, le sommet de la déformation n'oscille pratiquement pas. Or, la théorie qui a été présentée dans le paragraphe 7.3 suppose que l'onde capillaire incidente est de petite amplitude. Par ailleurs, il n'est pas évident de localiser précisément le sommet de la déformation. Nous avons en effet constaté que celui-ci était animé d'un mouvement de



va-et-vient de gauche à droite. C'est pourquoi nous nous sommes d'abord intéressés à une méthode alternative de mesure, que nous présentons dans le paragraphe 7.5.1, qui s'est avérée impraticable bien qu'intéressante.

### 7.5.1 Mesure de l'amplitude des oscillations à partir de la tension mesurée aux bornes du transducteur

#### Principe de la méthode

La tension mesurée aux bornes du transducteur est liée à la hauteur de la déformation dans le cas d'une interface réfléchissante. En effet, considérons la cavité Pérot-Fabry que l'on a représentée sur la figure 7.16 et considérons le point  $A$  situé dans l'eau, infiniment près de la surface du transducteur. Toutes les ondes acoustiques réfléchies sur l'interface

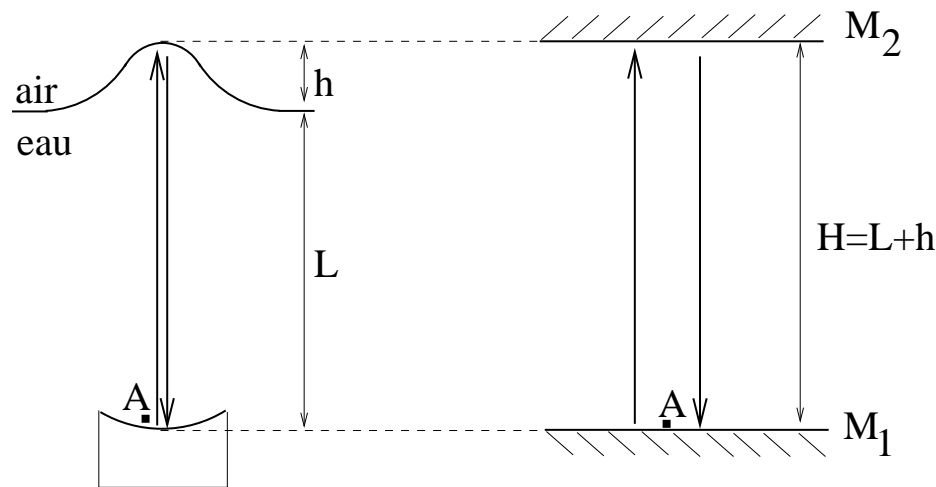


FIG. 7.16 – L'onde acoustique émise par le transducteur est confinée dans la cavité Pérot-Fabry formée par la surface du transducteur et l'interface eau-air (à gauche). On modélise cette cavité par un interféromètre de Pérot-Fabry aux miroirs plans distants de la distance  $H$  égale à la distance entre le fond du transducteur et le sommet de la déformation.

eau-air et arrivant sur le transducteur induisent un signal électrique dans le circuit par transduction acousto-électrique.

Grâce à l'extracteur d'amplitude électronique placé entre l'amplificateur et l'oscilloscope (montage de la figure 6.2), on peut mesurer l'amplitude instantanée de la tension aux bornes du transducteur. Lorsqu'une onde capillaire se propage à la surface de l'eau, on obtient un signal tel que celui représenté sur la figure 7.17.

L'intérêt de cette méthode est la précision du signal traité (la tension étant codée sur 8 bits). En comparaison, la mesure directe de l'amplitude par traitement d'images discrétise plus le signal à cause de la pixelisation des images. Par ailleurs, cette méthode a une sensibilité interférométrique, l'intensité de l'onde acoustique revenant vers le transducteur dépendant fortement de la hauteur de la déformation et étant sensible à toutes les petites variations de longueur de la cavité. Ceci permet de détecter des ondes de plus faible amplitude qu'avec la mesure directe sur les images et permettrait probablement un test plus précis de l'équation 7.14.

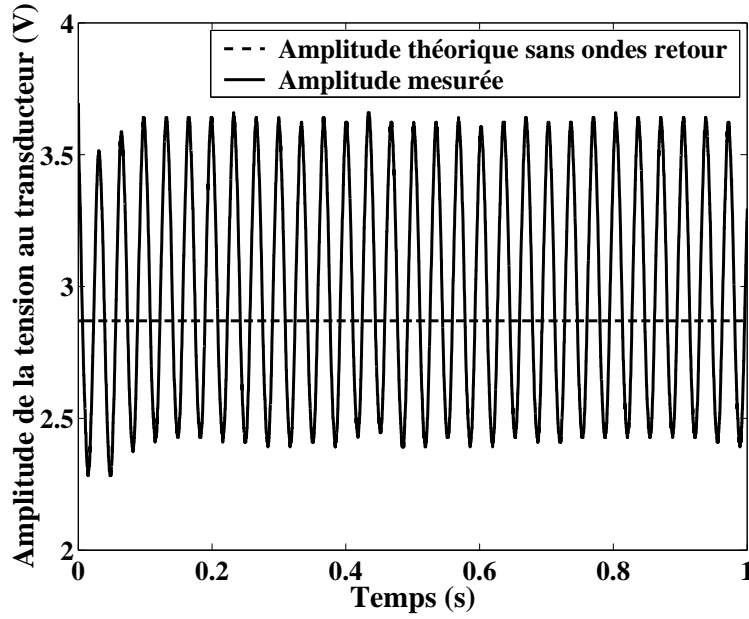


FIG. 7.17 – Amplitude de la tension aux bornes du transducteur. Une onde capillaire se propage à l'interface eau-air et module la longueur de la cavité acoustique. Si l'onde acoustique n'était pas réfléchiée par l'interface fluide, la tension aux bornes du transducteur serait une tension sinusoïdale d'amplitude constante imposée par l'amplificateur (courbe en pointillés). Au contraire, on mesure une tension d'amplitude variable, due aux interférences entre les réflexions successives à la surface de l'eau (courbe en trait plein).

Avant que la première onde réfléchiée n'atteigne le transducteur, la tension aux bornes de celui-ci est uniquement imposée par l'amplificateur qui l'alimente, et vaut  $U_i(t) = U_0 e^{i\omega t}$ . La pression acoustique émise par le transducteur vaut alors, au point  $A$ ,  $p_1(A) = KU_0 e^{i\omega t}$ ,  $K$  étant le coefficient de transduction électromécanique du transducteur. Cette onde subit des réflexions successives entre l'interface eau-air et la surface du transducteur. La  $n^{\text{ième}}$  onde réfléchiée sur l'interface arrivant au point  $A$  s'écrit  $p_{nr}(A) = KU_0 (RR' e^{i\phi})^{n-1} R e^{i\omega t} e^{i\phi}$ .  $R$  et  $R'$  sont les coefficients de réflexion de l'onde acoustique respectivement sur l'interface eau-air et sur la surface du transducteur.  $\phi$  est le déphasage que subit l'onde lorsqu'elle effectue un aller-retour dans la cavité. La pression acoustique totale due aux ondes se dirigeant de l'interface vers le transducteur vaut donc, au point  $A$  :

$$p_{Ar} = KU_0 R e^{i\omega t} e^{i\phi} \sum_{n=1}^{\infty} (RR' e^{i\phi})^{n-1} \quad (7.25)$$

$$= KU_0 \frac{R e^{i\phi}}{1 - RR' e^{i\phi}} e^{i\omega t} \quad (7.26)$$

Toutes ces ondes induisent dans le circuit électrique une tension électrique

$$U_r(t) = KK' U_0 \frac{R e^{i\phi}}{1 - RR' e^{i\phi}} e^{i\omega t} \quad (7.27)$$

$K'$  étant le coefficient de transduction acousto-électrique du transducteur. La tension

électrique totale aux bornes du transducteur vaut par conséquent

$$U(t) = U_i(t) + U_r(t) \quad (7.28)$$

$$= U_0 e^{i\omega t} \left( 1 + KK' \frac{Re^{i\phi}}{1 - RR' e^{i\phi}} \right) \quad (7.29)$$

Elle est directement reliée à la hauteur  $h$  de la déformation par l'intermédiaire du déphasage  $\phi$  que subit l'onde acoustique lorsqu'elle effectue un aller-retour dans la cavité Pérot-Fabry :

$$\phi = \frac{4\pi}{\lambda}(L + h) \quad (7.30)$$

C'est donc cette phase  $\phi$  que nous allons calculer à présent. L'expérience présentée dans l'annexe C (paragraphe C.1) permet de connaître la norme du coefficient  $KK'$  : il s'agit du rapport entre l'amplitude du premier signal retour et l'amplitude du signal d'émission mesurées lors de cette expérience, le coefficient de réflexion de l'onde acoustique sur l'interface valant 1 :

$$|KK'| = \frac{2,344}{5,25} \quad (7.31)$$

$$= 0,45 \quad (7.32)$$

La phase de  $KK'$  nous est en revanche inconnue. Dans toute la suite, nous allons supposer que  $KK'$  est réel. Soit  $U$  l'amplitude de la tension totale aux bornes du transducteur :

$$U = U_0 \left| 1 + KK' \frac{Re^{i\phi}}{1 - RR' e^{i\phi}} \right| \quad (7.33)$$

$$= U_0 \left| \frac{1 + (KK'R - RR')e^{i\phi}}{1 - RR' e^{i\phi}} \right| \quad (7.34)$$

soit

$$U^2 |1 - RR' e^{i\phi}|^2 = U_0^2 |1 + (KK'R - RR')e^{i\phi}|^2 \quad (7.35)$$

En développant les modules, on trouve

$$\cos \phi = \frac{U^2 (1 + (RR')^2) - U_0^2 (1 + (KK'R - RR')^2)}{2RR'U^2 + 2U_0^2(KK'R - RR')} \quad (7.36)$$

Or, par définition,  $\phi = \frac{4\pi(L+h)}{\lambda}$ , d'où il résulte que la hauteur  $h$  de la déformation vaut :

$$h = \frac{\lambda}{4\pi} \left( \arccos \left( \frac{U^2 (1 + (RR')^2) - U_0^2 (1 + (KK'R - RR')^2)}{2RR'U^2 + 2U_0^2(KK'R - RR')} \right) + 2n\pi \right) - L \quad (7.37)$$

$n$  étant un entier relatif.

### Test expérimental de cette méthode de mesure

Pour tester cette méthode, j'ai réalisé plusieurs expériences, où une déformation était présente, et où le batteur émettait une onde capillaire à l'interface fluide. Les expériences consistaient à filmer la déformation et à mesurer sa hauteur sur chaque image, ce qui permet de déterminer l'amplitude des oscillations de hauteur induites par l'onde capillaire. Parallèlement, l'amplitude de tension aux bornes du transducteur était enregistrée, puis

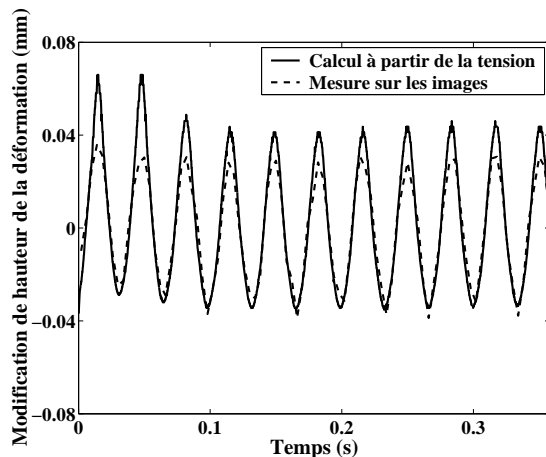


FIG. 7.18 – Évolution temporelle de l'écart de la hauteur de la déformation à sa hauteur moyenne, mesuré directement sur les images et déduit de l'amplitude de la tension aux bornes du transducteur. Pour cette expérience, l'amplitude de pression de l'onde acoustique émise par le transducteur valait 0,41 MPa.

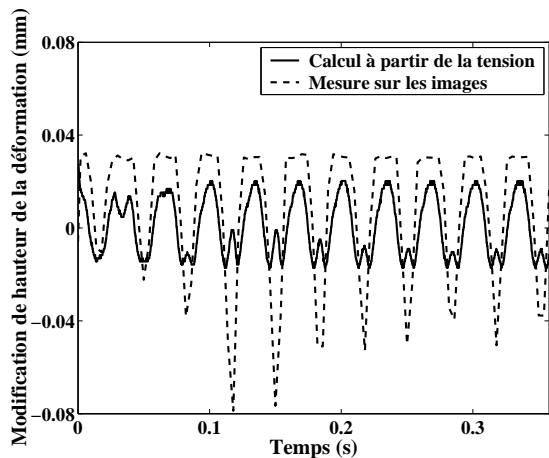


FIG. 7.19 – Évolution temporelle de l'écart de la hauteur de la déformation à sa hauteur moyenne, mesuré directement sur les images et déduit de l'amplitude de la tension aux bornes du transducteur. Pour cette expérience, l'amplitude de pression de l'onde acoustique émise par le transducteur valait 0,61 MPa. On observe un doublement de fréquence du signal calculé à partir de la tension par rapport au signal mesuré sur les images.

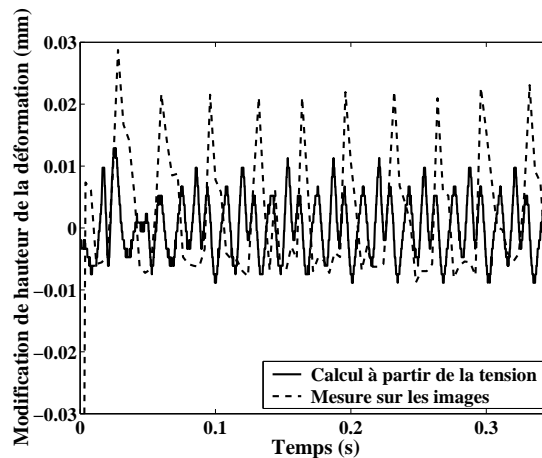


FIG. 7.20 – Évolution temporelle de l'écart de la hauteur de la déformation à sa hauteur moyenne, mesuré directement sur les images et déduit de l'amplitude de la tension aux bornes du transducteur. Pour cette expérience, l'amplitude de pression de l'onde acoustique émise par le transducteur valait 0,60 MPa. On observe un triplement de fréquence du signal calculé à partir de la tension par rapport au signal mesuré sur les images.

traitée à l'aide de l'équation 7.37 pour en déduire la hauteur de la déformation. Dans tous ces traitements, la valeur de  $KK'$  utilisée était  $-0,3$ , valeur qui donnait les résultats les plus vraisemblables.

La figure 7.18 montre le résultat de l'une de ces expériences : les courbes tracées représentent l'écart de la hauteur de la déformation à sa hauteur moyenne en fonction du temps. On observe que cette méthode permet d'obtenir un bon ordre de grandeur de l'amplitude des oscillations de hauteur de la déformation, même si elle la surestime d'environ 25%.

Les figures 7.19 et 7.20 montrent les résultats de deux autres expériences, où on observe des phénomènes de doublement et de triplement de fréquence de la hauteur prédite à partir de la tension par rapport à la hauteur mesurée sur les images, ce qui invalide cette méthode de mesure de l'amplitude des oscillations *via* la mesure de l'amplitude de tension aux bornes du transducteur.

Ce triplement de fréquence peut être expliqué comme l'indique la figure 7.21.

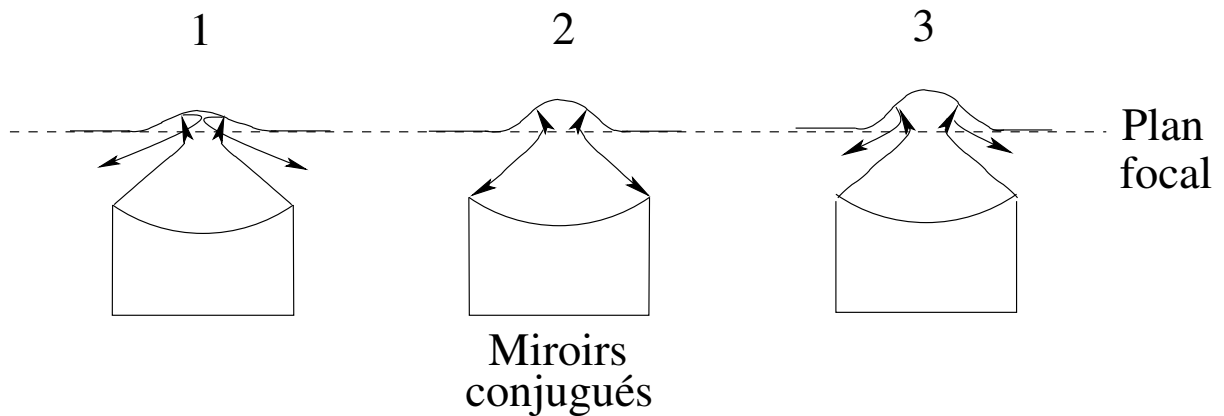


FIG. 7.21 – Il se peut que lorsque la déformation subit des oscillations à cause de la présence de l'onde capillaire, sa forme se superpose mieux aux plans d'onde de l'onde acoustique à certains moments qu'à d'autres. À ces instants (schéma 2), les miroirs de la cavité sont conjugués et le faisceau est totalement réfléchi vers le transducteur. Aux autres instants (schémas 1 et 3), le faisceau est en partie transmis hors du transducteur, le miroir formé par la déformation étant trop focalisant (schéma 1) ou trop défocalisant (schéma 3). Le schéma 2 correspond donc à un instant où la tension est susceptible d'être maximale aux bornes du transducteur, alors que la hauteur de la déformation n'est pas maximale. Ainsi, si la déformation oscille entre les états 1 et 3 en passant par l'état 2, lors d'une oscillation de la déformation, la tension aux bornes du transducteur peut passer 2 fois par un maximum : une fois lorsque la déformation de hauteur croissante est dans l'état 2 et une fois pendant sa décroissance lorsqu'elle est à nouveau dans l'état 2. Cela entraîne un doublement, voire un triplement de fréquence du signal de tension aux bornes du transducteur par rapport aux oscillations de la hauteur de la déformation.

On déduit de ces expériences que même si cette méthode de mesure de la hauteur de la déformation à partir de l'amplitude de la tension électrique aux bornes du transducteur est intéressante, le résultat n'est pas précis et dépend de la structure tridimensionnelle de l'onde acoustique, de l'interface fluide et de la surface du transducteur, ce dont la théorie présentée ne tient pas compte. Pour cette raison, nous avons fini par abandonner cette

méthode, pour finalement n'utiliser que la méthode de mesure de l'amplitude directement sur les images.

### 7.5.2 Mesure de l'amplitude des oscillations par mesure directe sur les images

Cela nous a obligés à travailler avec des ondes capillaires d'amplitude relativement grande. Le grandissement typique de la caméra vaut en effet au maximum 300 pixels pour un millimètre. Pour que les oscillations aient une amplitude d'environ 20 pixels sur les images, il faut alors que les oscillations du sommet de la déformation vailent 70  $\mu\text{m}$ . Compte tenu de l'atténuation des ondes capillaires par l'effet de cavité, l'onde incidente doit avoir une amplitude d'au moins 500  $\mu\text{m}$ , ce qui n'est pas négligeable devant la taille de la déformation, qui a elle-même une hauteur typique de l'ordre du millimètre.

Par ailleurs, nous avons déjà dit précédemment qu'un autre inconvénient de cette méthode était que le sommet de la déformation avait tendance à osciller de gauche à droite, ce qui rend difficile la localisation de l'axe du transducteur en présence d'onde capillaire : la figure 7.22 permet de se rendre compte de ce phénomène.

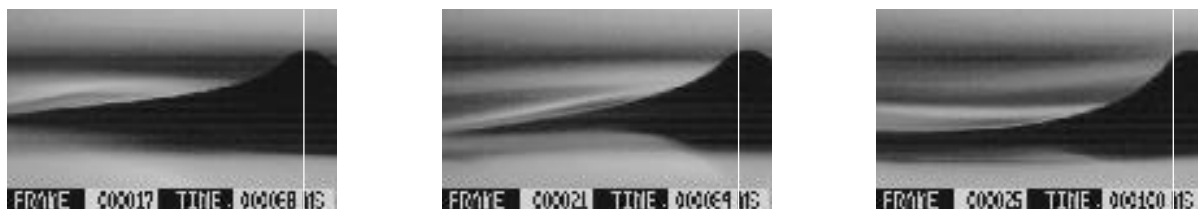


FIG. 7.22 – En présence d'ondes capillaires venant ici du côté gauche de l'image, le point le plus haut de la déformation est animé d'un mouvement oscillant horizontal : on distingue ce mouvement sur ces trois images prises à trois instants différents. Sur les trois images, la ligne blanche est à la même position, qui correspond à la position du point le plus haut de la déformation sur l'image de gauche. On voit que sur les deux autres images, le point le plus élevé s'est déplacé vers la droite par rapport à sa position sur l'image de gauche.

Ce phénomène peut être expliqué en réalisant que des points situés hors de l'axe du transducteur peuvent osciller plus que le point situé sur l'axe (ce que l'on voit bien sur la figure 7.15). À cause de cette oscillation plus forte, ces points peuvent se retrouver à certains instants au-dessus du point de la déformation se trouvant sur l'axe du transducteur. Le point le plus élevé de la déformation n'est donc pas toujours le point se trouvant sur l'axe du transducteur.

Dans la suite, j'ai considéré que l'axe du transducteur était la ligne verticale d'abscisse égale à la position moyenne du point le plus élevé de la déformation. Ce critère n'est pas évident et nous le discutons au paragraphe F.2.

## 7.6 Mesure expérimentale de la pente de la courbe de résonance de Pérot-Fabry

La théorie présentée au paragraphe 7.3 prédit que l'atténuation des ondes capillaires par l'effet de cavité dépend de la pente de la courbe de résonance de Pérot-Fabry  $\left| \left( \frac{\partial \Pi}{\partial h} \right)_{pe0} \right|$

(figure 7.1). Il faut donc, en plus de mesurer l'amplitude de l'onde capillaire incidente et l'amplitude de l'onde capillaire au sommet de la déformation, mesurer cette pente. Dans cette mesure, aucune onde capillaire n'était présente. Le transducteur était alimenté par une rampe de tension comme celle décrite sur la figure 5.12. La déformation décrivait alors tout un cycle d'hystérésis (figure 7.23). On a alors accès à l'évolution temporelle de l'amplitude de la pression acoustique entrant dans la cavité, et à l'évolution temporelle de la hauteur de la déformation (figure 7.24). À partir de ces données, on peut reconstituer

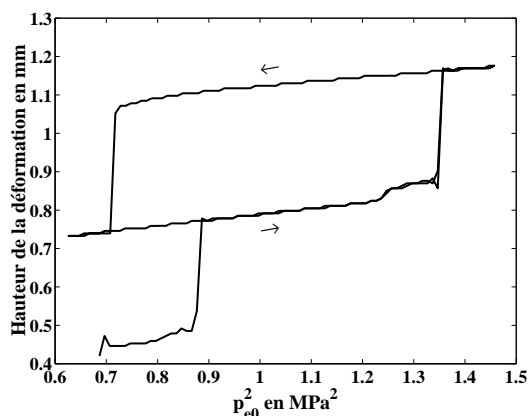


FIG. 7.23 – Pour ces expériences, la déformation de l'interface décrivait un cycle d'hystérésis comme ceux décrits dans le chapitre précédent.

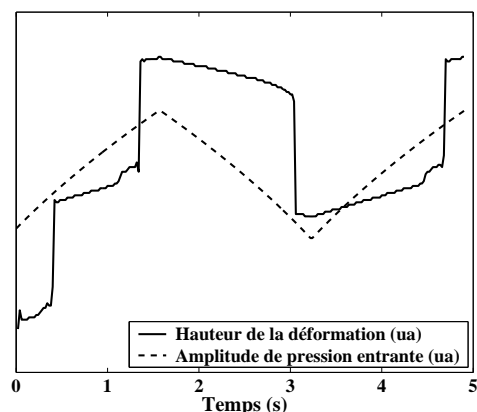


FIG. 7.24 – Hauteur de la déformation et amplitude de pression acoustique entrant dans la cavité en fonction du temps.

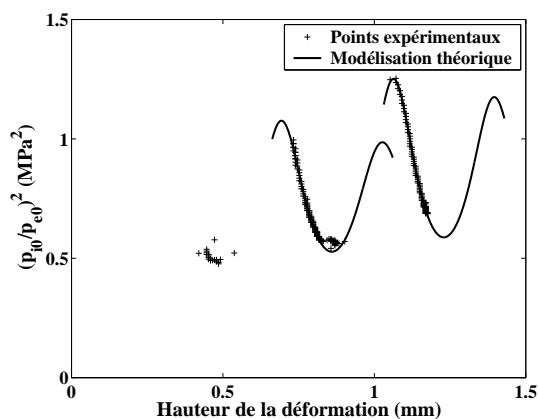


FIG. 7.25 – Peigne de Pérot-Fabry expérimental, dont on a modélisé chaque pic par une portion du peigne théorique.

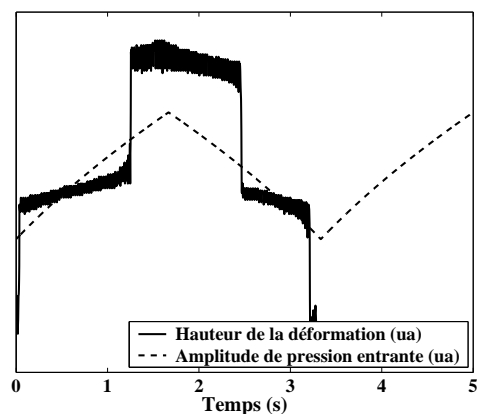


FIG. 7.26 – Hauteur de la déformation et amplitude de pression acoustique entrant dans la cavité en fonction du temps, en présence d'onde capillaire.

la courbe de Pérot-Fabry expérimentale, comme décrit au paragraphe 6.2.6, et modéliser chaque pic par une portion du peigne théorique de la figure 7.1 (figure 7.25).

À partir de cette modélisation théorique, on calcule la pente de la courbe de résonance, que l'on connaît donc en fonction de la hauteur de la déformation. Dans les expériences d'atténuation d'ondes, il faudra donc déterminer la hauteur moyenne autour de laquelle la déformation oscille à un instant  $t$  donné, en déduire la pente de la courbe de résonance à

cette hauteur-là, afin de connaître l'atténuation des ondes de surface en fonction de cette pente. Les figures 7.23, 7.24 et 7.25 ont toutes été réalisées à partir de la même expérience.

On constate sur la figure 7.26, qui représente l'évolution temporelle de la pression entrant dans la cavité et de la hauteur du point de la déformation se trouvant sur l'axe du transducteur en présence d'onde capillaire, que lorsque l'onde capillaire est présente, les sauts de la déformation d'un plateau à l'autre ont lieu plus tôt qu'en l'absence d'onde capillaire (figure 7.24). En effet, la seule différence entre les deux expériences ayant permis de réaliser ces deux figures est qu'il y avait une onde capillaire dans l'expérience de la figure 7.26 et qu'il n'y en avait pas dans celle de la figure 7.24. Ce résultat très reproductible vient du fait que lorsque le point de fonctionnement du système se trouve à proximité d'un point marginalement stable, une perturbation comme cette onde capillaire peut le faire sauter très facilement d'un plateau à l'autre.

## 7.7 Résultats expérimentaux

### 7.7.1 Atténuation

Le but des expériences est de mesurer :

- l'amplitude de l'onde capillaire incidente (par la méthode de déviation d'un faisceau laser présentée au paragraphe 7.4)
- l'amplitude de l'onde capillaire au sommet de la déformation (par la mesure directe sur les images de la déformation, présentée au paragraphe 7.5)
- la pente de la courbe de Pérot-Fabry  $\left| \left( \frac{\partial \Pi}{\partial h} \right)_{p_{e0}} (\langle h \rangle) \right|$  (par la méthode présentée au paragraphe 7.6).

afin d'en déduire l'atténuation des ondes en fonction de cette pente.

Pour mesurer l'atténuation de l'onde capillaire pour diverses valeurs de cette pente, on fait décrire à la déformation un cycle d'hystérésis, comme décrit dans le chapitre précédent (figure 7.23). Simultanément, une onde capillaire plane est émise par le batteur.

Les courbes obtenues sont représentées sur les figures 7.27 à 7.31.

Elles représentent le rapport des amplitudes  $H_0$  et  $H$  en fonction de la pente de la courbe de résonance  $\left( \frac{\partial p_{i0}^2}{\partial h} \right)_{p_{e0}} (\langle h \rangle)$  pour différentes fréquences des ondes de surface.  $H_0$  est l'amplitude de l'onde capillaire incidente non perturbée (mesurée à la verticale du transducteur en l'absence de déformation) et  $H$  est l'amplitude de l'onde capillaire mesurée au sommet de la déformation. Sur chacune de ces courbes, les points rouges sont les points de mesure sur le plateau inférieur du cycle d'hystérésis lors de la phase de pression croissante. Les points bleus sont les points de mesure sur le plateau supérieur. Les points verts sont les points de mesure sur le plateau inférieur lors de la phase de pression décroissante. La droite en trait plein représente la prédiction théorique (expression 7.14). Les droites en pointillés sont les droites qui passent au mieux par les points expérimentaux et le point de coordonnées (0, 1) pour chacun des deux plateaux du cycle (nous avons en effet déjà vu au paragraphe 7.3 que si la pente  $\left( \frac{\partial p_{i0}^2}{\partial h} \right)_{p_{e0}} (\langle h \rangle)$  était nulle, l'onde capillaire ne devait théoriquement pas être atténuée par l'effet de cavité. Aussi, la courbe représentant l'atténuation en fonction de cette pente doit passer par le point de coordonnées (0, 1)).

À 30 Hz (figure 7.27), le cycle d'hystérésis décrit était le cycle immédiatement en-dessous de celui décrit sur toutes les autres expériences. L'expérience à 40 Hz (figure 7.28) est celle qui a aussi servi à tracer la figure 7.26.



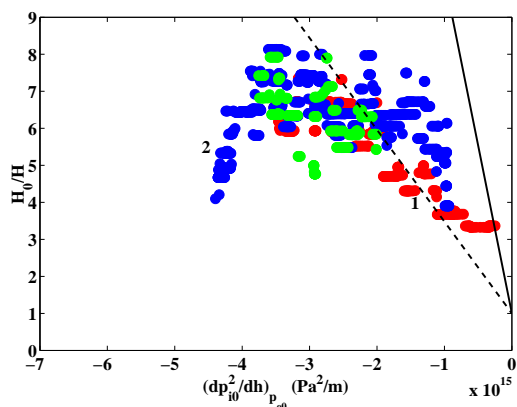


FIG. 7.27 – Atténuation d’une onde capillaire en fonction de la pente de la courbe de résonance. La fréquence de l’onde capillaire est de 30 Hz.

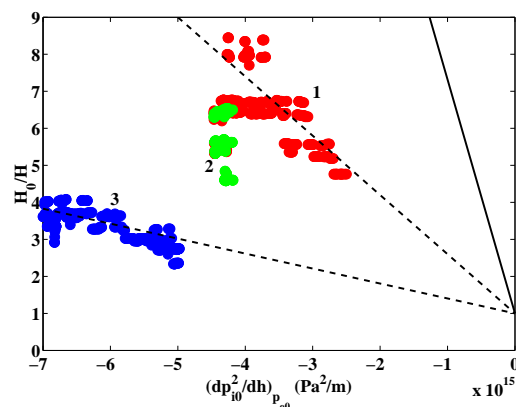


FIG. 7.28 – Atténuation d’une onde capillaire en fonction de la pente de la courbe de résonance. La fréquence de l’onde capillaire est de 40 Hz.

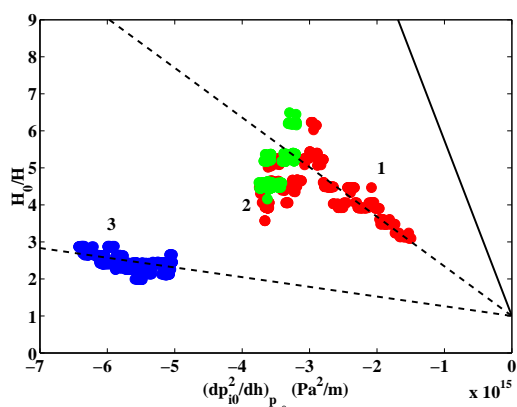


FIG. 7.29 – Atténuation d’une onde capillaire en fonction de la pente de la courbe de résonance. La fréquence de l’onde capillaire est de 50 Hz.

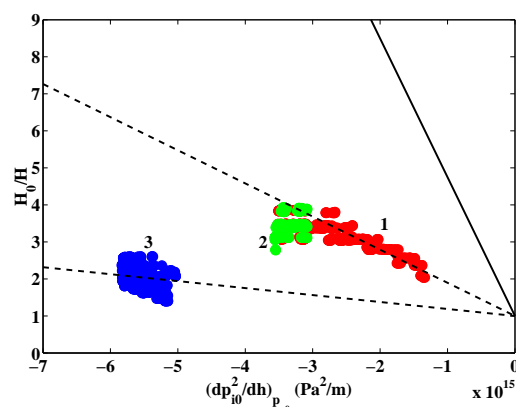


FIG. 7.30 – Atténuation d’une onde capillaire en fonction de la pente de la courbe de résonance. La fréquence de l’onde capillaire est de 60 Hz.

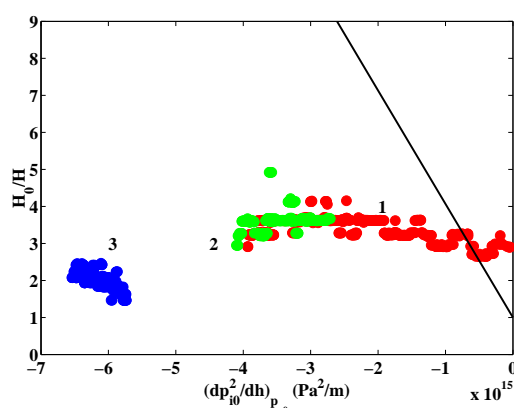


FIG. 7.31 – Atténuation d’une onde capillaire en fonction de la pente de la courbe de résonance. La fréquence de l’onde capillaire est de 70 Hz.

Toutes ces courbes ont des allures similaires : l'atténuation est une fonction affine de  $\left(\frac{\partial p_{i0}^2}{\partial h}\right)_{p_{e0}}$  (zone 1) puis elle se met à suivre une loi affine de pente différente (zone 2). Enfin, il y a une troisième zone affine (zone 3). On rencontre les zones 1 et 2 sur le plateau inférieur du cycle d'hystérésis décrit sur les expériences à 40, 50, 60 et 70 Hz et sur les deux plateaux du cycle décrit sur l'expérience à 30 Hz. On rencontre la zone 3 sur le plateau supérieur du cycle décrit lors des expériences à 40, 50, 60 et 70 Hz.

De ces mesures expérimentales, on déduit que l'onde capillaire incidente est en effet atténuée au sommet de la déformation, l'atténuation pouvant atteindre un facteur 9 (soit 19 dB d'atténuation en intensité des ondes capillaires). En revanche, la théorie présentée au paragraphe 7.3 ne décrit pas bien le comportement quantitatif de cette atténuation. En particulier, elle prévoit une atténuation très supérieure à ce qui est réellement observé et elle ne prévoit pas, contrairement à ce qu'on observe, que cette atténuation dépende du plateau de hauteur décrit par la déformation (elle est en effet moins efficace sur le plateau supérieur, ce que l'on constate sur la zone 3 des graphes). Elle prévoit un comportement linéaire de l'atténuation avec la pente de la courbe de résonance. Ce comportement linéaire est observé sur les courbes expérimentales, hormis une chute de l'atténuation visible pour  $\left|\left(\frac{\partial p_{i0}^2}{\partial h}\right)_{p_{e0}}(\langle h \rangle)\right|$  de l'ordre de 3 ou  $4 \cdot 10^{15}$  Pa<sup>2</sup>/m.

Lorsqu'une onde capillaire se propage à la surface de l'eau, elle a tendance à faire sauter la déformation d'un plateau à l'autre bien avant que le point de fonctionnement n'atteigne le point marginalement stable. C'est la raison pour laquelle on n'atteint pas expérimentalement des points proches du point de coordonnées (0, 1).

### 7.7.2 Dépendance en fréquence de l'atténuation

On constate que la pente expérimentale des droites  $\frac{H_0}{H} = f\left(\left(\frac{\partial p_{i0}^2}{\partial h}\right)_{p_{e0}}(\langle h \rangle)\right)$  dépend de la fréquence des ondes capillaires, comme l'indique la figure 7.32. Ce résultat est en accord

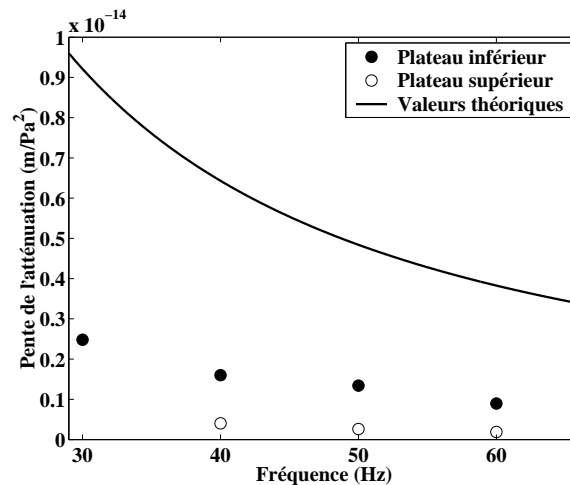


FIG. 7.32 – Variation de la valeur absolue de la pente de la droite  $\frac{H_0}{H} = f\left(\left(\frac{\partial p_{i0}^2}{\partial h}\right)_{p_{e0}}(\langle h \rangle)\right)$  avec la fréquence de l'onde capillaire, suivant que le plateau de hauteur décrit est le plateau inférieur du cycle d'hystérésis décrit dans les expériences à 40, 50, 60 et 70 Hz ou le plateau supérieur.

avec l'expression 7.14, qui prévoit en effet que cette pente diminue (en valeur absolue) avec la fréquence  $f$  des ondes capillaires, suivant l'expression

$$\left| \frac{H_0}{H} \right| = 1 - \frac{1}{(\rho_1 - \rho_2)g + \sigma \left( \frac{2\pi f}{c} \right)^2} \left( \frac{\partial \Pi}{\partial h} \right)_{pe0} (\langle h \rangle) \quad (7.38)$$

### 7.7.3 Discussion

Les divergences entre la théorie et les expériences peuvent être expliquées par le fait que plusieurs hypothèses considérées ne sont pas vérifiées dans le cas des expériences :

- La théorie suppose que l'onde capillaire est de petite amplitude. Cependant, pour pouvoir mesurer directement sur les images l'amplitude de l'onde sur le sommet de la déformation, il fallait que le mouvement soit perceptible malgré l'atténuation de l'onde au niveau de la déformation et la pixellisation de la caméra, ce qui impose d'utiliser des ondes capillaires d'amplitude relativement élevée.
- La théorie suppose que l'échelle de variation caractéristique de l'amplitude de l'onde capillaire est grande devant la longueur d'onde de l'onde capillaire. Or, l'amplitude de l'onde capillaire varie sur une échelle typique de l'ordre du millimètre (la taille de la déformation) et la longueur d'onde de l'onde capillaire utilisée était plutôt de l'ordre du centimètre. En effet, compte tenu de la dynamique du vibreur, il fallait utiliser des ondes capillaires d'une fréquence maximale de 100 Hz (soit d'une longueur d'onde minimale de 3 mm) pour que les oscillations du sommet de la déformation soient perceptibles sur les images et pour pouvoir mesurer l'amplitude de l'onde stationnaire incidente par la déflexion du faisceau laser.
- La zone de rétroaction passive est à symétrie circulaire alors que l'onde capillaire est plane. Aussi, la comparaison entre l'expérience et le modèle à une dimension présenté au début de ce chapitre n'est pas parfaite.
- La théorie suppose que la hauteur de la déformation et l'amplitude de l'onde capillaire sont suffisamment faibles pour que l'on puisse approximer la courbure de l'interface par le laplacien de sa hauteur. Dans le paragraphe suivant, nous effectuons un calcul faiblement non-linéaire pour tenter d'expliquer les écarts que l'on observe entre la théorie linéaire et l'expérience.
- La théorie suppose par ailleurs que l'onde capillaire incidente est plane et progressive, ce qui n'est pas le cas compte tenu du fait qu'il y a réflexion de l'onde capillaire sur la paroi de la cellule opposée au batteur, ce qui induit une onde capillaire partiellement stationnaire.

Par ailleurs, la méthode de mesure de l'amplitude de l'onde capillaire incidente par la déviation du faisceau laser réfléchi est également sujette à caution : en effet, dans le calcul de l'amplitude de l'onde à partir de la déviation totale du faisceau laser, on a supposé que l'onde capillaire incidente était harmonique. Or, à cause des non-linéarités de la propagation d'une onde capillaire à la surface de l'eau, il est probable que ce ne soit pas exactement le cas. On pourrait améliorer cette méthode de mesure en utilisant une barette linéaire de photodiodes (figure 7.33), qui détecte à chaque instant la déviation du faisceau, au lieu de ne détecter que ses déviations extrêmes, comme on l'a fait ici. Cette méthode permettrait d'étudier la dynamique de l'onde capillaire, ce qui permettrait de tenir compte des non-linéarités de propagation.

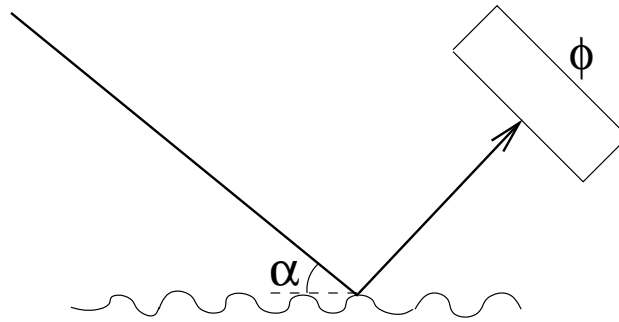


FIG. 7.33 – Suggestion d’amélioration de la technique de mesure de l’amplitude de l’onde capillaire incidente en utilisant une barette linéaire de photodiodes.

### 7.7.4 Une explication possible de l’écart de l’atténuation par rapport à la loi linéaire (zone 2)

Sur les courbes observées précédemment, on observe que l’atténuation maximale n’est pas atteinte lorsque la valeur absolue maximale de  $\left(\frac{\partial p_{i0}^2}{\partial h}\right)_{p_{e0}}$  est atteinte : en effet, à un moment, elle diminue avec la pente de la courbe de résonance, ce que l’on voit sur la zone 2 des courbes expérimentales. Cela peut être dû au fait que l’onde incidente est d’amplitude élevée. En effet, supposons (figure 7.34) que le point de fonctionnement se trouve sur le point d’inflexion  $I$  de la courbe de résonance (c’est-à-dire au point de plus forte pente). Plus l’onde capillaire tend à l’éloigner de  $I$ , plus l’effet de raideur est faible car plus la

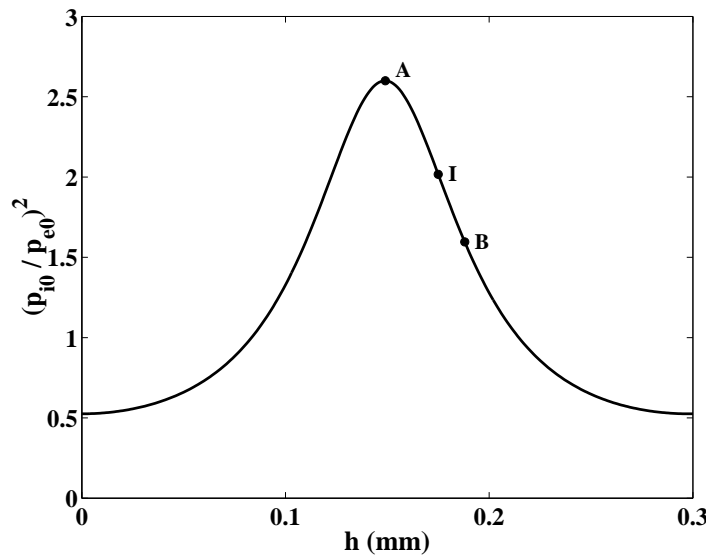


FIG. 7.34 – Courbe de résonance de la cavité acoustique.

pente de la courbe au point de fonctionnement instantané est faible. Il n’est donc pas très difficile d’éloigner beaucoup le point de fonctionnement instantané du point  $I$ . Il est par ailleurs plus facile de faire fortement diminuer la hauteur de la déformation que de la faire fortement augmenter, car en diminuant sa hauteur, on atteint plus facilement des points de fonctionnement comme  $A$  où l’effet de raideur est nul.

Inversement, supposons que le point de fonctionnement en l'absence d'onde capillaire se trouve en  $B$ . Alors il sera très difficile aux ondes capillaires de faire diminuer la hauteur de la déformation, car plus la hauteur diminue, plus l'effet de raideur augmente. Il est plus facile de faire fortement augmenter la hauteur de la déformation que de la faire fortement diminuer.

L'onde capillaire incidente au sommet de la déformation est donc soumise à une raideur instantanée de l'interface qui varie pendant une période. Dans le traitement de ces expériences, nous avons considéré que la raideur vue par l'onde capillaire était liée à la pente de la courbe de résonance correspondant à la hauteur moyenne du sommet de la déformation. Il n'est pas évident que cela soit justifié, et il est peut-être plus légitime de considérer que l'onde capillaire voit une raideur liée plutôt à la pente moyenne de la courbe de résonance aux différentes hauteurs visitées par le sommet de la déformation. La figure 7.35 montre qu'en réalité, ce raisonnement n'est pas meilleur.

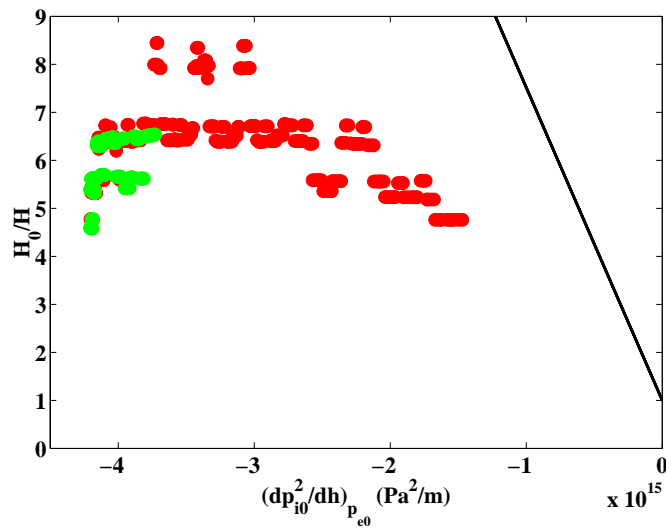


FIG. 7.35 – Atténuation d'une onde capillaire en fonction de la pente de la courbe de résonance. La fréquence de l'onde capillaire est de 40 Hz. Ici, on a considéré que la raideur à laquelle l'onde capillaire est soumise est liée à la pente moyenne de la courbe de résonance aux différentes hauteurs visitées par le sommet de la déformation.

Cette figure a été obtenue en traitant la même expérience que celle présentée sur la figure 7.28, sauf qu'au lieu de considérer la pente  $\left(\frac{\partial p_{i0}^2}{\partial h}\right)_{p_{e0}}(\langle h \rangle)$  à la valeur moyenne de la hauteur atteinte par le sommet de la déformation, on considère la pente moyenne  $\left\langle \left(\frac{\partial p_{i0}^2}{\partial h}\right)_{p_{e0}}(h) \right\rangle$  vue par la déformation lors d'une oscillation de l'onde capillaire. On constate que ce raisonnement n'améliore pas la chute de l'atténuation. Seul le plateau inférieur du cycle d'hystérésis a été traité.

### 7.7.5 Théorie faiblement non linéaire de l'atténuation de l'onde au niveau de la déformation

Dans ce paragraphe, nous allons à nouveau calculer l'atténuation de l'onde capillaire, mais cette fois dans le cadre d'une théorie faiblement non linéaire tenant compte de la forme

de la déformation. Dans un deuxième temps, nous allons voir que cette théorie ne permet pas d'expliquer pourquoi l'atténuation dépend du plateau de hauteur sur lequel se trouve le point de fonctionnement, c'est-à-dire pourquoi la zone 3 des graphes expérimentaux 7.28 à 7.31 ne se trouve pas dans le prolongement de la zone 1. Ensuite, nous allons présenter une théorie alternative expliquant l'atténuation de l'onde par la présence de la déformation d'interface sans nécessiter la présence de la cavité acoustique. Nous montrerons au paragraphe 7.8 que cette théorie ne suffit pas à expliquer l'atténuation des ondes capillaires, ce qui démontrera que celle-ci est due principalement à la rétroaction passive par la cavité acoustique.

### Théorie faiblement non linéaire

Reprenons le calcul du paragraphe 7.3, qui avait été traité dans le cadre d'une théorie linéaire, et que nous allons ici retraiter dans le cas d'une théorie faiblement non-linéaire.

Pour simplifier, nous considérons ici un problème à une dimension : une onde plane se propage sur une interface fluide déformée, la déformation étant ici invariante par translation le long d'une des directions horizontales (figures 7.36 et 7.37).

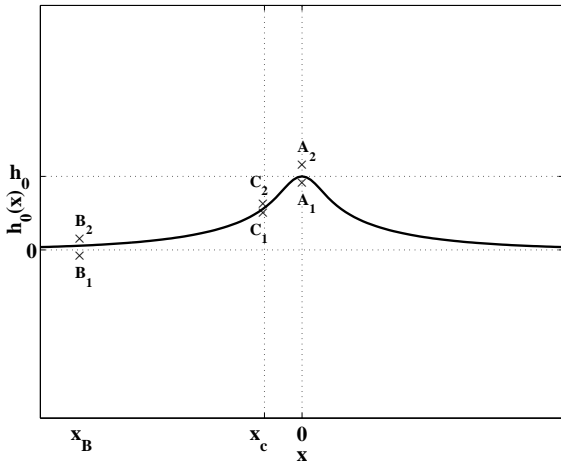


FIG. 7.36 – Déformation d'interface non perturbée. Dans ce paragraphe, on considère que la déformation est invariante par translation dans la direction perpendiculaire à la feuille.

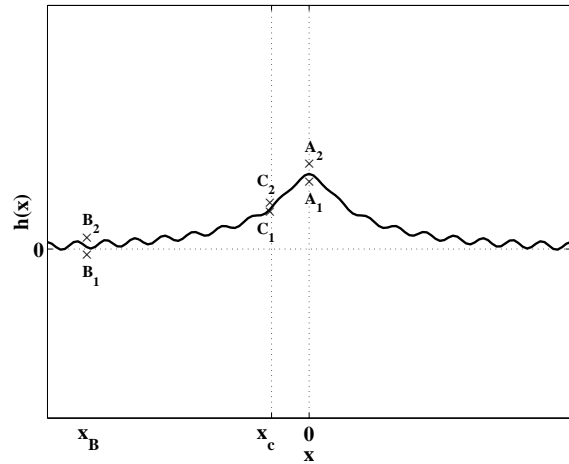


FIG. 7.37 – Déformation de l'interface perturbée par une onde capillaire plane incidente.

On note  $h_0(x)$  le profil de la déformation non perturbée et  $\eta(x, t) = \eta_0(x) \exp(i(\omega t - kx))$  celui de l'onde capillaire.  $h(x, t) = h_0(x) + \eta(x, t)$  est le profil de l'interface résultant de la superposition de l'onde capillaire et de la déformation.

La différence de pression entre les deux côtés de l'interface en une position  $x$  et à un

instant  $t$  donnés s'écrit, l'indice 1 désignant l'eau et l'indice 2 désignant l'air :

$$P_1(x) - P_2(x) = -\sigma\kappa(x, t) \quad (7.39)$$

$$= -\sigma \frac{\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}}{\left(1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2\right)^{3/2}} \quad (7.40)$$

$$= -\sigma \frac{\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}}{\left(1 + \left(\frac{\partial h_0}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2\right)^{3/2}} \quad (7.41)$$

$$= -\sigma \frac{\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}}{\left(1 + \left(\frac{\partial h_0}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial h_0}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^{3/2}} \quad (7.42)$$

On suppose que l'amplitude de l'onde capillaire est suffisamment faible pour que l'on puisse développer cette expression à l'ordre 1 en  $\partial\eta/\partial x$  :

$$P_1(x) - P_2(x) = -\sigma \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \left( \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{\partial h_0}{\partial x}\right)^2\right)^{3/2}} - \frac{3\frac{\partial h_0}{\partial x}}{\left(1 + \left(\frac{\partial h_0}{\partial x}\right)^2\right)^{5/2}} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \quad (7.43)$$

$$= -\sigma \left( 1 - \frac{3\frac{\partial h_0}{\partial x}}{1 + \left(\frac{\partial h_0}{\partial x}\right)^2} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \frac{\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}}{\left(1 + \left(\frac{\partial h_0}{\partial x}\right)^2\right)^{3/2}} \quad (7.44)$$

$$= -\sigma \frac{\frac{\partial^2 h_0}{\partial x^2}}{\left(1 + \left(\frac{\partial h_0}{\partial x}\right)^2\right)^{3/2}} - \sigma \frac{\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}}{\left(1 + \left(\frac{\partial h_0}{\partial x}\right)^2\right)^{3/2}} + \frac{3\sigma \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial h_0}{\partial x} \frac{\partial^2 h_0}{\partial x^2}}{\left(1 + \left(\frac{\partial h_0}{\partial x}\right)^2\right)^{5/2}} \quad (7.45)$$

$$= -\sigma\kappa_0(x) - \sigma \frac{\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}}{\left(1 + \left(\frac{\partial h_0}{\partial x}\right)^2\right)^{3/2}} + \frac{3\sigma \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial h_0}{\partial x} \frac{\partial^2 h_0}{\partial x^2}}{\left(1 + \left(\frac{\partial h_0}{\partial x}\right)^2\right)^{5/2}} \quad (7.46)$$

**Ce calcul faiblement non linéaire prévoit la même atténuation théorique de l'onde capillaire au sommet de la déformation que le calcul linéaire**

Les points  $B_1$  et  $B_2$  sont suffisamment loin de l'axe pour que les effets de la pression de radiation ne s'y fassent plus sentir. L'interface y est donc plane. Aussi, cette expression devient en  $x_B$  :

$$P(B_1) - P(B_2) = -\sigma \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \quad (7.47)$$

$$= \sigma k^2 \eta_0(x_B) \exp(i(\omega t - kx_B)) \quad (7.48)$$

$$(7.49)$$

en supposant que l'échelle caractéristique de variation de  $\eta_0$  est grande devant la longueur d'onde  $\Lambda$  de l'onde capillaire.

Au sommet de la déformation,  $\frac{\partial h_0}{\partial x} = 0$ , donc on obtient

$$P(A_1) - P(A_2) = -\sigma\kappa_0(0) + \sigma k^2 \eta_0(0) \exp(i\omega t) \quad (7.50)$$

On obtient donc exactement les mêmes équations que précédemment (équations 7.1 et 7.2). Le fait qu'elles n'aient pas été modifiées dans ce calcul faiblement non-linéaire par rapport

au calcul linéaire vient de la nullité de la pente de la déformation non-perturbée  $\frac{\partial h_0}{\partial x}$  loin de la déformation et en son sommet, qui annule les termes correctifs dans l'équation 7.46.

La suite du calcul, concernant le calcul de la pression hydrostatique et de la pression de radiation, n'est pas modifiée par l'introduction de ce terme non-linéaire. Aussi, les équations 7.6 et 7.7 ne sont pas modifiées, et le calcul faiblement non-linéaire donne par conséquent exactement le même résultat que le calcul linéaire concernant l'atténuation de l'onde capillaire au sommet de la déformation. Il ne permet donc pas d'expliquer les écarts expérience-théorie que nous avons observés.

### Atténuation de l'onde capillaire sur les bords de la déformation.

Considérons maintenant les points  $C_1$  et  $C_2$ , situés infiniment près de l'interface, respectivement dans l'eau et dans l'air, sur le bord de la déformation. En  $x_C$ ,  $\frac{\partial h_0}{\partial x}$  n'est plus nul et

$$P(C_1) - P(C_2) = -\sigma\kappa_0(x_C) - \sigma \frac{\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}(x_C)}{\left(1 + \left(\frac{\partial h_0}{\partial x}(x_C)\right)^2\right)^{3/2}} + \frac{3\sigma \frac{\partial \eta}{\partial x}(x_C) \frac{\partial h_0}{\partial x}(x_C) \frac{\partial^2 h_0}{\partial x^2}(x_C)}{\left(1 + \left(\frac{\partial h_0}{\partial x}(x_C)\right)^2\right)^{5/2}} \quad (7.51)$$

Par le même raisonnement que dans le paragraphe 7.3, on calcule la différence de pression entre les points  $B$  et  $C$  :

$$P(B_1) - P(C_1) + \Pi(x_C) = \rho_1 g (h_0(x_C) + \eta_0(x_C)e^{i(\omega t - kx_C)} - \eta_0(x_B)e^{i(\omega t - kx_B)}) \quad (7.52)$$

$$P(B_2) - P(C_2) = \rho_2 g (h_0(x_C) + \eta_0(x_C)e^{i(\omega t - kx_C)} - \eta_0(x_B)e^{i(\omega t - kx_B)}) \quad (7.53)$$

En soustrayant ces deux équations et en y introduisant les équations 7.48 et 7.51, on calcule

$$-\Pi(x_C) + (\rho_1 - \rho_2)g (h_0(x_C) + \eta_0(x_C)e^{i(\omega t - kx_C)} - \eta_0(x_B)e^{i(\omega t - kx_B)}) = \quad (7.54)$$

$$\sigma k^2 \eta_0(x_B)e^{i(\omega t - kx_B)} + \sigma\kappa_0(x_C) + \sigma \frac{\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}(x_C)}{\left(1 + \left(\frac{\partial h_0}{\partial x}(x_C)\right)^2\right)^{3/2}} - \frac{3\sigma \frac{\partial \eta}{\partial x}(x_C) \frac{\partial h_0}{\partial x}(x_C) \frac{\partial^2 h_0}{\partial x^2}(x_C)}{\left(1 + \left(\frac{\partial h_0}{\partial x}(x_C)\right)^2\right)^{5/2}}$$

Or,  $\Pi(x_C) \approx \Pi_0(x_C) + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial h}\right)_{p_{e0}} (\langle h(x_C) \rangle) \eta(x_C, t)$  et l'équation d'équilibre de la déformation non perturbée s'écrit

$$(\rho_1 - \rho_2)gh_0(x) - \sigma\kappa_0(x) = \Pi_0(x) \quad (7.55)$$

Par conséquent, l'équation 7.54 devient

$$-\left(\frac{\partial \Pi}{\partial h}\right)_{p_{e0}} (\langle h(x_C) \rangle) \eta_0(x_C)e^{-ikx_C} + (\rho_1 - \rho_2)g (\eta_0(x_C)e^{-ikx_C} - \eta_0(x_B)e^{-ikx_B}) = \quad (7.56)$$

$$\sigma k^2 \eta_0(x_B)e^{-ikx_B} - \sigma k^2 \frac{\eta_0(x_C)e^{-ikx_C}}{\left(1 + \left(\frac{\partial h_0}{\partial x}(x_C)\right)^2\right)^{3/2}} + 3ik\sigma \frac{\eta_0(x_C)e^{-ikx_C} \frac{\partial h_0}{\partial x}(x_C) \frac{\partial^2 h_0}{\partial x^2}(x_C)}{\left(1 + \left(\frac{\partial h_0}{\partial x}(x_C)\right)^2\right)^{5/2}}$$

d'où il résulte que

$$\frac{\eta_0(x_B)e^{-ikx_B}}{\eta_0(x_C)e^{-ikx_C}} = \frac{-\left(\frac{\partial \Pi}{\partial h}\right)_{p_{e0}} (\langle h(x_C) \rangle) + (\rho_1 - \rho_2)g + \frac{\sigma k^2}{1 + \left(\frac{\partial h_0}{\partial x}(x_C)\right)^2} - 3ik\sigma \frac{\frac{\partial h_0}{\partial x}(x_C) \frac{\partial^2 h_0}{\partial x^2}(x_C)}{1 + \left(\frac{\partial h_0}{\partial x}(x_C)\right)^2}}{(\rho_1 - \rho_2)g + \sigma k^2} \quad (7.57)$$



soit

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\eta_0(x_B)}{\eta_0(x_C)} \right| & (7.58) \\ & = \frac{\sqrt{\left( -\left( \frac{\partial \Pi}{\partial h} \right)_{p_{e0}} (\langle h(x_C) \rangle) + (\rho_1 - \rho_2)g + \frac{\sigma k^2}{1 + \left( \frac{\partial h_0}{\partial x} \right)^2} \right)^2 + \left( 3k\sigma \frac{\frac{\partial h_0}{\partial x} \frac{\partial^2 h_0}{\partial x^2}}{1 + \left( \frac{\partial h_0}{\partial x} \right)^2} \right)^2}}{(\rho_1 - \rho_2)g + \sigma k^2}} & (7.59) \end{aligned}$$

On constate que l'atténuation théorique de l'onde capillaire sur les bords de la déformation est différente de son atténuation au sommet de la déformation. En particulier, il y a une renormalisation de la tension interfaciale  $\sigma_{eff} = \frac{\sigma}{1 + \left( \frac{\partial h_0}{\partial x} \right)^2}$  : la tension interfaciale effective sur les bords de la déformation est plus faible que la tension interfaciale  $\sigma$  loin de la déformation ou à son sommet.

On pourrait penser que cette variation de tension interfaciale effective, due uniquement à la présence de la déformation et non à l'effet de cavité, peut expliquer une atténuation de l'onde au sommet de la déformation : en effet, la variation de tension interfaciale effective pourrait induire une diffusion de l'onde capillaire, qui augmenterait avec  $|\sigma_{eff} - \sigma|$  et donc avec la hauteur de la déformation. À cause de cette diffusion sur les bords de la déformation, l'onde capillaire incidente au sommet de la déformation serait d'amplitude plus faible que l'onde capillaire émise par le batteur. Ce raisonnement ne suppose pas la présence de la cavité acoustique pour expliquer l'atténuation de l'onde capillaire. Il ne permet cependant pas d'expliquer que l'atténuation de l'onde capillaire dépend de la fréquence de l'onde capillaire.

Le but du paragraphe suivant est d'étudier la diffusion de l'onde capillaire au niveau de la déformation pour vérifier que l'hypothèse d'une renormalisation de  $\sigma$  par la déformation ne suffit pas à expliquer l'atténuation de l'onde.

## 7.8 Diffusions d'ondes capillaires par la cavité Pérot-Fabry

Nous avons vu précédemment qu'une onde stationnaire se formait entre le batteur et la déformation, et nous avons supposé que cette onde résultait de la superposition de l'onde capillaire incidente et de l'onde capillaire rétrodiffusée par la déformation agissant comme une inhomogénéité d'impédance. Le but de cette partie est d'étudier l'onde capillaire diffusée au niveau de la déformation, et de montrer que cette diffusion n'est pas uniquement due à la déformation elle-même, mais à l'effet de cavité Pérot-Fabry entre la surface du transducteur et la surface de l'eau.

### 7.8.1 Visualisation de l'onde capillaire diffusée au niveau de la déformation

La visualisation de l'onde capillaire diffusée par la cavité Pérot-Fabry a fait l'objet du stage de Master I d'Arnaud Auberon, au printemps 2006.

Pour visualiser l'onde diffusée, nous avons utilisé le montage de la figure 7.38. Une

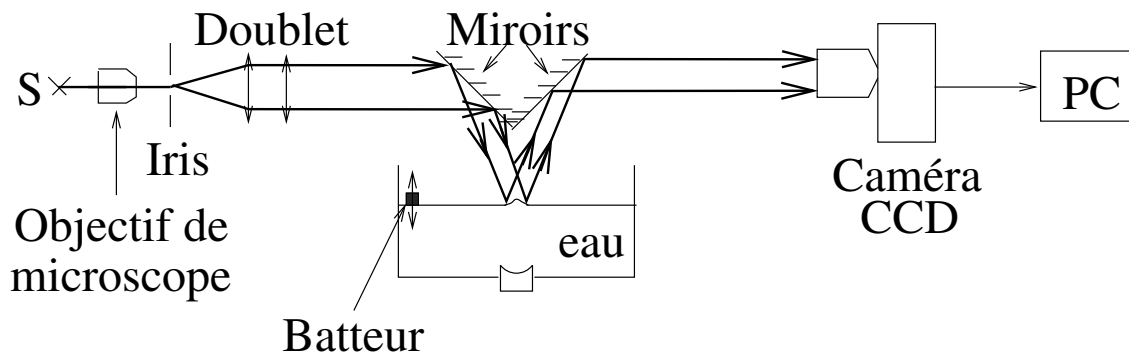


FIG. 7.38 – Montage utilisé pour visualiser l'onde diffusée au niveau de la déformation.

source  $S$  de lumière blanche est focalisée vers un diaphragme afin de créer une source secondaire ponctuelle de lumière blanche. Le faisceau passe alors à travers un doublet de lentilles, qui le rend parallèle. Il est alors dirigé vers la surface de l'eau par un premier miroir, partiellement réfléchi par la surface de l'eau, puis dirigé vers la caméra CCD par un deuxième miroir. La caméra transmet ensuite les images à un ordinateur. Au moment où le faisceau se réfléchit sur l'interface, les creux de l'interface se comportent comme des miroirs convergents et apparaissent à la caméra comme des zones brillantes. Inversement, les crêtes se comportent comme des miroirs divergents et apparaissent à la caméra comme des zones sombres (figure 7.39).

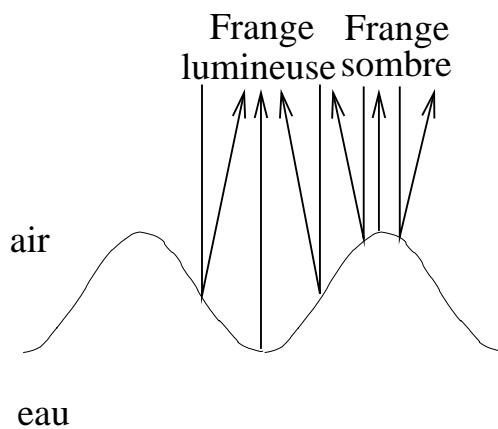


FIG. 7.39 – Principe de l'expérience

Ce dispositif permet donc d'observer les ondes à la surface de l'eau, comme sur la figure 7.40.

On constate sur cette photo que l'onde diffusée, si elle existe, est imperceptible. Cet effet ne peut par conséquent pas expliquer à lui seul une atténuation d'un facteur 10 de l'amplitude de l'onde capillaire au sommet de la déformation. Le raisonnement présenté à la fin du paragraphe précédent n'est donc pas suffisant pour expliquer l'atténuation. L'effet de cavité est indispensable pour l'expliquer.

En traitant les images filmées par la caméra, nous allons pouvoir détecter l'onde capillaire rétrodiffusée au niveau de la déformation. Comme l'onde diffusée est d'amplitude plus faible que l'onde incidente, leur interférence en rétrodiffusion donne une superposition

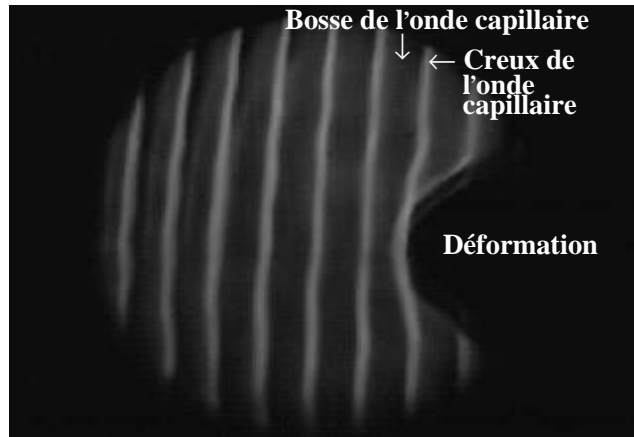


FIG. 7.40 – Image brute visualisée grâce au dispositif schématisé sur la figure 7.38 : on distingue l'onde capillaire incidente, et la déformation.

d'une onde progressive et d'une onde stationnaire, qui elle seule démontre l'existence de l'onde diffusée. Il faut donc que notre traitement d'image filtre l'onde progressive et mette en évidence l'onde stationnaire. L'objectif de la technique de traitement d'image est de discriminer onde stationnaire et onde progressive, quelle que soit la structure des ondes (plane, cylindrique...). Chaque image est une matrice  $344 \times 646$  d'intensité codée en 256 niveaux de gris. Le motif lumineux associé à une onde de surface sinusoïdale n'est sinusoïdal qu'aux très petites amplitudes, et dans ce cas il n'est pas assez contrasté. Si l'on moyenne des images présentant un profil d'intensité non sinusoïdal, c'est-à-dire un profil d'intensité de forme non symétrique par rapport à sa valeur moyenne temporelle (franges brillantes plus fines que les franges sombres, ce que l'on voit sur la figure 7.40), l'onde stationnaire est mise en évidence. En effet, les franges sombres ne compensent pas exactement les franges claires, donc l'intensité moyenne à l'endroit d'un ventre est différente de celle à l'endroit d'un noeud (figure 7.41). Ainsi, la valeur moyenne de l'intensité des images instantanées

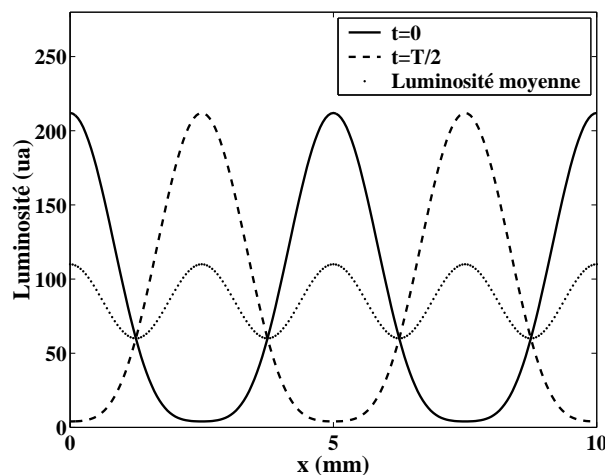


FIG. 7.41 – Moyennage spatial d'un motif lumineux non-sinusoïdal : l'intensité moyenne (tracée ici de façon approximative) n'est pas la même au niveau des noeuds et des ventres de vibration.

n'est pas uniforme, et ce traitement permet toujours de détecter une onde stationnaire. La fréquence spatiale du profil d'intensité de l'image est doublée sur une image moyennée.

Par contre, le profil d'intensité d'une onde progressive, même non symétrique par rapport à sa valeur moyenne, parcourt toujours toutes les positions au cours du temps. Donc, si on effectue une moyenne simple des images instantanées acquises, le profil de luminosité résultante est toujours uniforme en tous points de l'image moyenne : l'onde progressive est toujours filtrée par ce traitement. Ainsi, notre technique de traitement d'image permet théoriquement de discriminer onde stationnaire et onde progressive, quel que soit le profil d'intensité lumineuse.

Il suffit par conséquent de moyenner les images du film pour observer la composante stationnaire de l'onde capillaire, comme l'indique la figure 7.42.

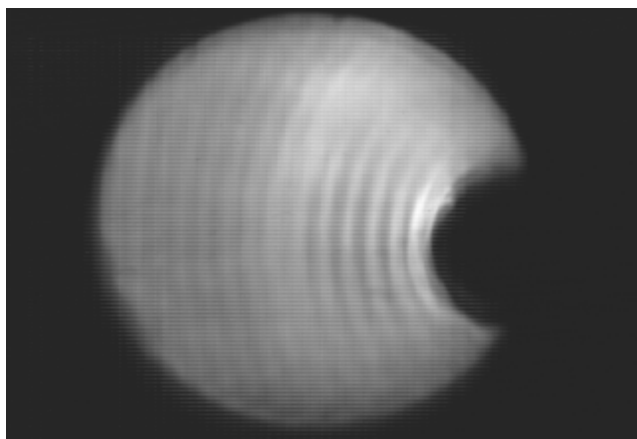


FIG. 7.42 – Le moyennage de l'ensemble des images d'un film telles que l'image 7.41 permet d'éliminer des images la composante progressive de l'onde capillaire, pour ne garder visible que sa composante stationnaire.

Le profil d'onde stationnaire observé est en bon accord avec un calcul de l'onde stationnaire résultant de la superposition d'une onde plane et d'une onde cylindrique (figure 7.43).

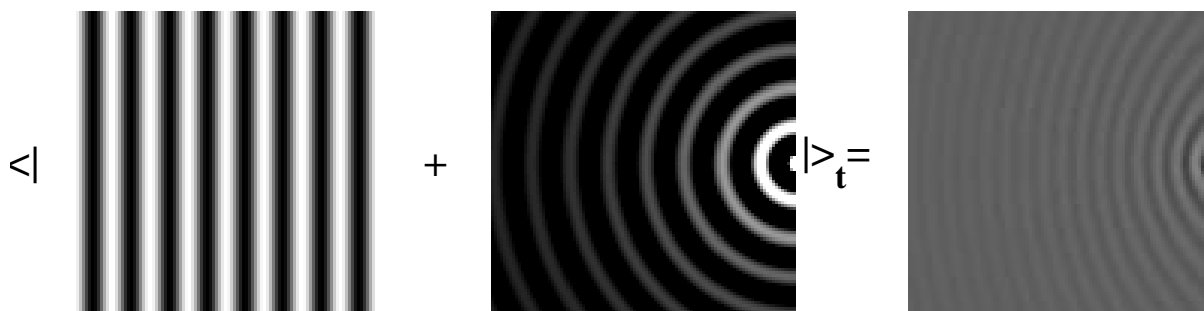


FIG. 7.43 – Calcul de la moyenne temporelle du carré de la superposition d'une onde plane et d'une onde cylindrique.

Ces résultats sont donc en bon accord avec l'hypothèse suivant laquelle l'onde capillaire plane progressive arrivant sur la déformation est diffusée de façon cylindrique quand elle atteint la déformation.

### 7.8.2 La diffusion est causée par l'effet de cavité

Le but de cette partie est de mettre en évidence le fait que ce n'est pas la déformation de l'interface qui diffuse l'onde, mais qu'il s'agit surtout de l'effet de raideur induit par rétroaction passive par la cavité acoustique. Pour ce faire, nous avons fait une expérience consistant à décrire un ou deux plateaux des cycles d'hystérésis décrits dans le chapitre 6, de moyenner les images sur une fenêtre temporelle glissante, ce qui permet d'obtenir une image semblable à celle de la figure 7.42, et de mesurer à chaque instant l'amplitude des oscillations de lumière sur cette image moyennée, sur quelques lignes horizontales consécutives de part et d'autre du centre de la déformation (figure 7.44).

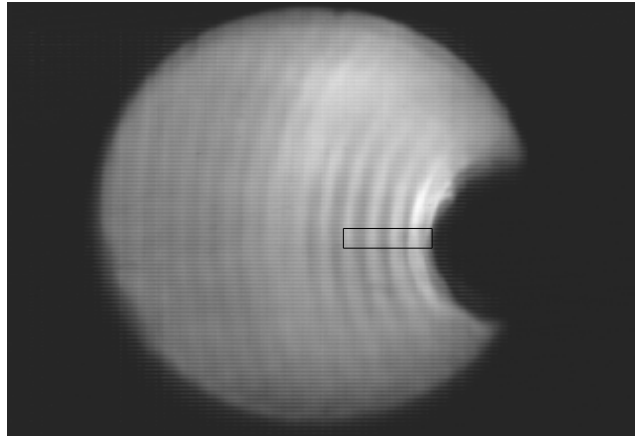


FIG. 7.44 – On mesure l'amplitude des oscillations de lumière sur la zone encadrée : on moyenne entre elles toutes les lignes de pixels contenues dans cette zone, et on calcule l'amplitude des oscillations de ce signal moyenné.

Lorsqu'un seul plateau du cycle d'hystérésis est parcouru, on obtient la courbe de la figure 7.45. Entre les points  $A$  et  $H$  de ce graphe, un seul plateau de hauteur a été parcouru. On vérifie cela grâce au signal de tension aux bornes de transducteur : en effet, lorsque la déformation saute d'un plateau à un autre, on observe une brusque variation de tension sur ce signal (ce que l'on voit juste avant d'atteindre le point  $A$ , lorsque la déformation saute sur le plateau de hauteur que l'on étudie dans cette expérience). On n'observe pas de telle variation aux temps compris entre les points  $A$  et  $H$ .

La hauteur de la déformation est une fonction croissante de la tension appliquée aux bornes du transducteur. Pourtant, l'amplitude de l'onde stationnaire ne croît pas avec la tension. Si la présence de la déformation d'interface suffisait à expliquer cette diffusion, l'amplitude de l'onde stationnaire serait d'autant plus grande que la déformation serait grande (car  $|\sigma_{eff} - \sigma|$  augmente avec  $|\frac{\partial h_0}{\partial x}|$  c'est-à-dire avec la hauteur de la déformation, d'après l'équation 7.46). Il est donc sûr que c'est l'effet de raideur lié à la cavité acoustique qui diffuse l'onde capillaire.

Lorsque la déformation parcourt un cycle d'hystérésis entier, on obtient la courbe de la figure 7.47. Sur l'expérience de la figure 7.45, c'est le plateau inférieur de ce cycle qui avait été décrit.

La déformation parcourt la partie du plateau inférieur du cycle comprise entre les points  $A$  et  $B$ , puis saute sur le plateau supérieur (points  $C$  à  $D$  puis  $E$  à  $F$ ) et enfin retombe sur le plateau inférieur (points  $G$  à  $H$ ). Les points symbolisés par des ronds correspondent au

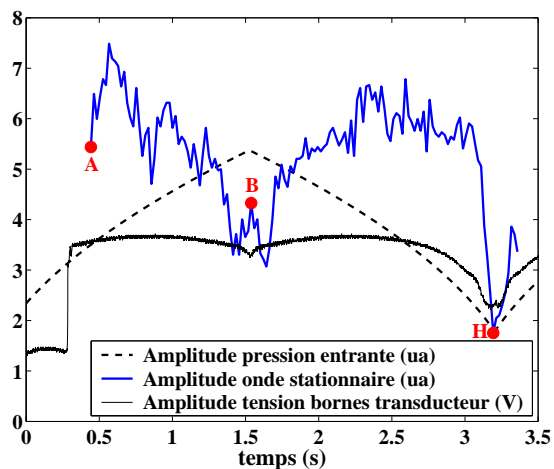


FIG. 7.45 – Évolution temporelle de l'amplitude de luminosité sur l'image moyennée lors du balayage d'un plateau de hauteur.

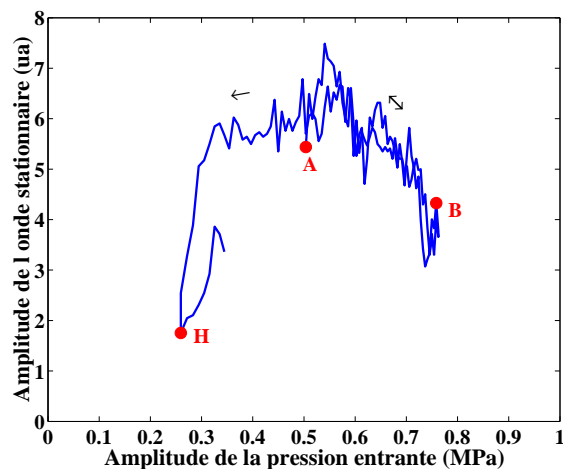


FIG. 7.46 – Évolution de l'amplitude de luminosité avec la tension envoyée au transducteur, pour la même expérience que la courbe 7.45.

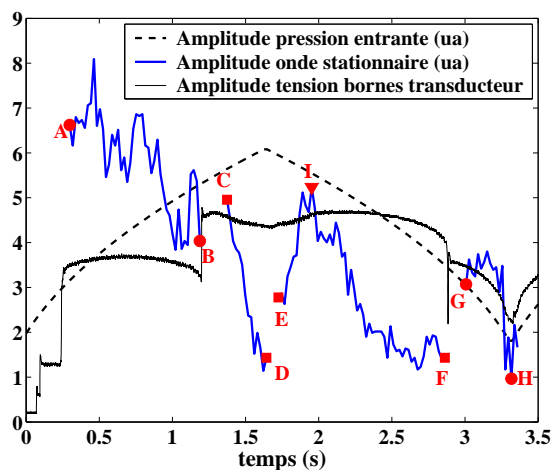


FIG. 7.47 – Évolution temporelle de l'amplitude de luminosité sur l'image moyennée lors du balayage d'un cycle d'hystérésis entier.

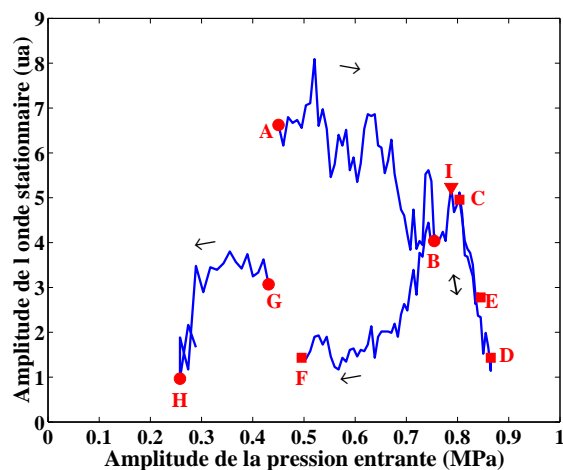


FIG. 7.48 – Évolution de l'amplitude de luminosité sur l'image moyennée avec la tension envoyée au transducteur, pour la même expérience que la courbe 7.47.

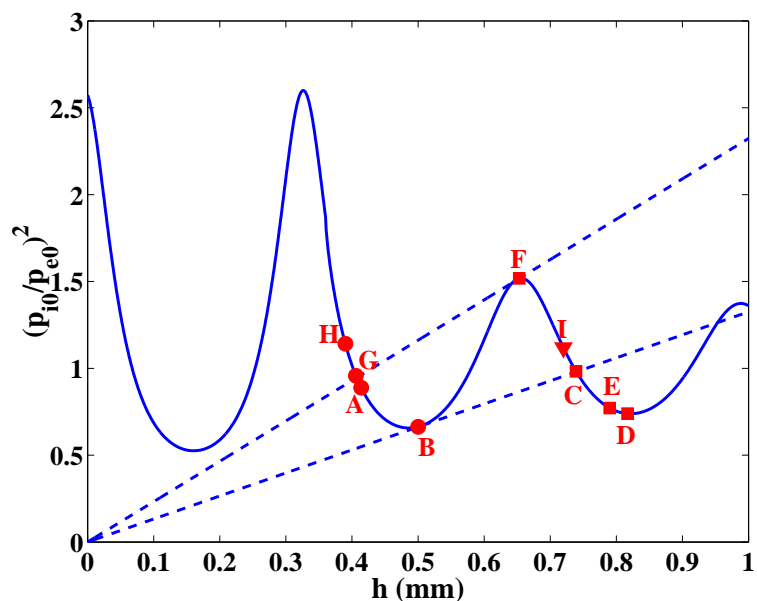


FIG. 7.49 – Évolution du point de fonctionnement du système lors de la description d'un unique cycle d'hystérésis, comme celui qui a été décrit dans l'expérience représentée sur les figures 7.47 et 7.48.

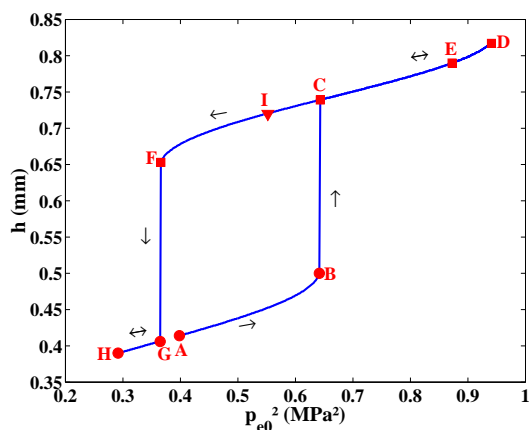


FIG. 7.50 – Modélisation d'un cycle d'hystérésis unique en hauteur.

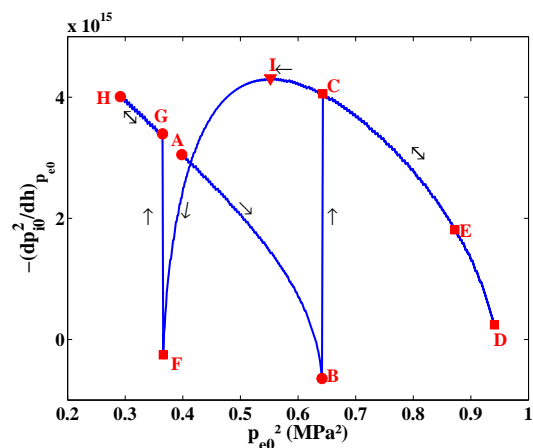


FIG. 7.51 – Modélisation du cycle d'hystérésis en raideur : plus la pente de la courbe de résonance est forte, plus l'onde diffusée par la déformation doit être élevée. Cette modélisation est à comparer à la courbe 7.48.

plateau inférieur du cycle et les points symbolisés par des carrés correspondent au plateau supérieur. Juste après les sauts, il n'était pas possible de mesurer l'amplitude de l'onde stationnaire, celle-ci étant trop perturbée par l'onde capillaire générée par le saut de la déformation. Le point *I*, symbolisé par un triangle, est le point d'inflexion de la courbe de résonance, correspondant à une pente maximale.

On observe une hystérésis de l'amplitude de l'onde stationnaire avec la tension aux bornes du transducteur (figure 7.48), que l'on n'observait pas sur l'expérience précédente (figure 7.46). Nous allons essayer de reproduire théoriquement cette hystérésis.

Les courbes 7.49, 7.50 et 7.51 sont une représentation théorique de ce problème : on a modélisé l'évolution de la hauteur de la déformation lorsque l'amplitude de la pression acoustique entrant dans la cavité subit une rampe comme celle qui a été utilisée dans ces expériences, en calculant pour chaque pression entrante le point de fonctionnement du système, comme décrit dans le chapitre 6 (figure 7.49). Cela permet de modéliser un cycle d'hystérésis unique tel que celui décrit dans l'expérience (figure 7.50). Si au lieu de tracer la hauteur de la déformation pour chaque valeur de l'amplitude de pression entrante, on trace la pente de la courbe de résonance, on obtient le cycle d'hystérésis de la figure 7.51. On peut comparer ce cycle au cycle expérimental de l'amplitude de l'onde capillaire diffusée en fonction de l'amplitude de pression entrante (figure 7.48). En effet, plus la pente de la courbe de résonance est élevée, plus l'onde diffusée est intense.

On constate expérimentalement que la diffusion de l'onde est moins efficace sur le plateau supérieur du cycle que sur le plateau inférieur (l'amplitude de l'onde stationnaire étant moins forte) et que sur le plateau supérieur, elle est moins efficace que ce que prévoit la théorie. Cela est en accord avec le fait que l'atténuation des ondes est moins efficace sur ce plateau, ce que l'on avait déjà constaté sur les figures 7.28 à 7.31.

Une expérience complémentaire permettant de montrer que cette diffusion de l'onde capillaire par la déformation est surtout liée à l'effet de raideur induit par la cavité acoustique consisterait à travailler sur une interface transparente comme l'interface eau-chloroforme. Il n'y aurait alors pas de cavité acoustique et l'onde stationnaire devrait être alors beaucoup moins intense.

## Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons vérifié expérimentalement qu'une onde capillaire se propageant à la surface de l'eau était atténuée d'un facteur pouvant atteindre 10 lorsqu'elle arrivait sur la déformation, et que cette atténuation ne pouvait être expliquée uniquement par la présence d'une inhomogénéité de surface au niveau de la déformation. Une théorie linéaire selon laquelle la présence de la cavité acoustique entre la surface de l'eau et le transducteur modifie la raideur de la surface au niveau de la déformation permet d'expliquer une telle atténuation, même si nous avons rencontré de nombreux problèmes expérimentaux qui nous ont empêchés de réaliser l'expérience dans les conditions optimales (nous avons dû utiliser des ondes capillaires d'amplitude relativement importante et dont la longueur d'onde était du même ordre de grandeur que la largeur typique de la déformation, contrairement aux hypothèses posées par la théorie).

L'étude de la diffusion de l'onde capillaire par la déformation a permis de confirmer la présence d'un effet de raideur supplémentaire apportée à l'interface par la cavité : l'évolution de l'amplitude de l'onde diffusée expérimentalement est en accord avec l'évolution théorique de la raideur conférée à l'interface par l'effet de cavité.



## Références du chapitre 7

- [1] V. B. Braginskii et A. B. Manukin. Ponderomotive effects of electromagnetic radiation. *Soviet Physics JETP*, 25(4) :653–655, 1967.
- [2] V. B. Braginskii, A. B. Manukin, et M. Y. Tikhonov. Investigation of dissipative ponderomotive effects of electromagnetic radiation. *Soviet Physics JETP*, 31(5) :829–830, 1970.
- [3] B. S. Sheard, M. B. Gray, C. M. Mow-Lowry, et D. E. McClelland. Observation and characterization of an optical spring. *Phys. Rev. A*, 69 :051801, 2004.
- [4] M. Vogel, C. Mooser, et K. Karrai. Optically tunable mechanics of microlevers. *Applied Physics Letters*, 83(7) :1337–1339, 2003.
- [5] C. Hühberger Metzger et K. Karrai. Cavity cooling of a microlever. *Nature*, 432 :1002–1004, 2004.



# Chapitre 8

## Oscillations spontanées auto-entretenues du sommet de la déformation

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'effet inverse de ce qui a été présenté dans le chapitre précédent : en effet, supposons que le point de fonctionnement se trouve à un endroit où la pente de la courbe de résonance est positive, comme au point  $D$  de la figure 7.1. Alors la « raideur » dynamique procurée par l'effet de cavité à l'interface, dont nous avons parlé au chapitre précédent, est négative. Cela peut rendre négative la raideur totale de l'interface. Celle-ci devient alors instable et se met à osciller spontanément. Nous avons effectivement observé l'apparition d'oscillations spontanées et auto-entretenues du sommet de la déformation, qui pourraient être expliquées de cette façon. Ce phénomène apparaît sur des interfaces totalement réfléchissantes comme l'interface eau-air, sur laquelle j'ai fait toutes les expériences présentées dans ce chapitre.

### 8.1 Observations

Nous avons remarqué que si l'interface au repos était éloignée de 1 ou 2 mm du point focal, le sommet de la déformation se mettait quelquefois à osciller spontanément dans la direction verticale, phénomène que l'on peut observer sur la série de photos visibles sur les figures 8.1 à 8.10. La croix blanche est placée à la même position sur toutes les photos. Sur l'expérience présentée sur ces photos, la fréquence acoustique valait 2,5 MHz et l'interface au repos se trouvait 1,4 mm au-dessus du plan focal du transducteur. L'amplitude de pression de l'onde acoustique était de 1,8 MPa. La fréquence typique de ces oscillations est de l'ordre de la centaine de Hertz (figures 8.11 et 8.12).

### 8.2 Fréquence caractéristique de ces oscillations

Pour savoir quels paramètres expérimentaux influaient sur la fréquence des oscillations, nous nous sommes mis dans des conditions favorables à leur apparition et avons réalisé un cycle d'hystérésis entre deux plateaux. L'évolution temporelle de la hauteur de la déformation est représentée sur la figure 8.13. Nous avons traité ce signal à l'aide d'un programme réalisé sous Matlab, qui calcule la transformée de Fourier du signal de hauteur sur une fenêtre de 200 ms et cherche automatiquement les fréquences caractéristiques

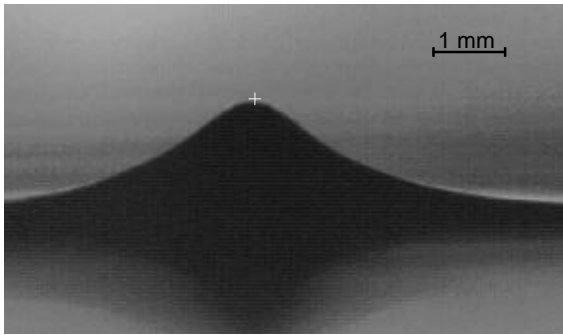


FIG. 8.1 -  $t = 0$

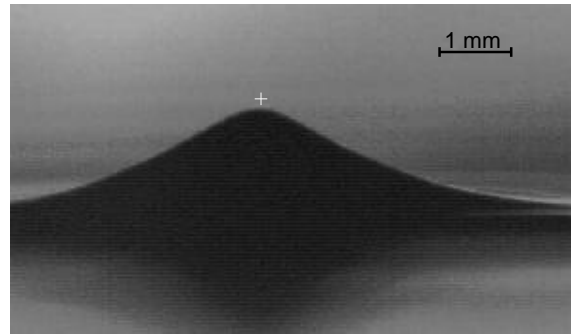


FIG. 8.2 -  $t = 4$  ms

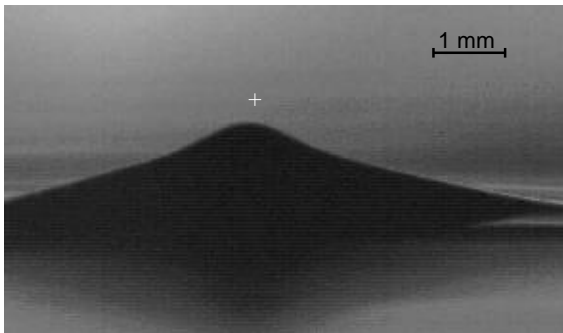


FIG. 8.3 -  $t = 8$  ms

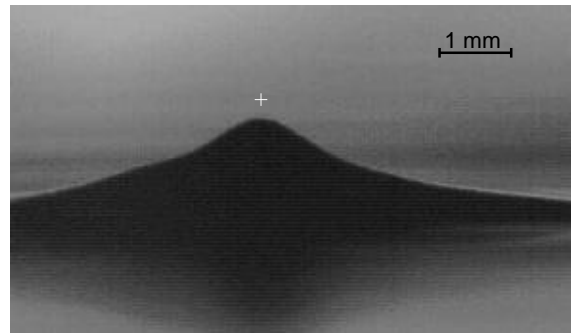


FIG. 8.4 -  $t = 12$  ms

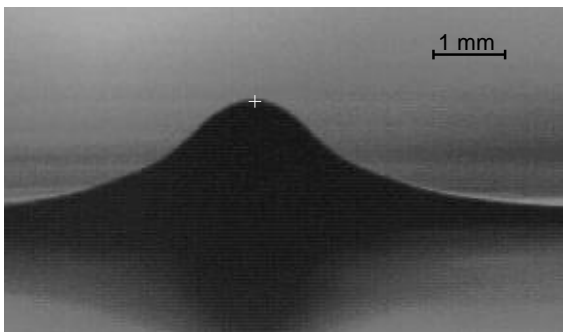


FIG. 8.5 -  $t = 16$  ms

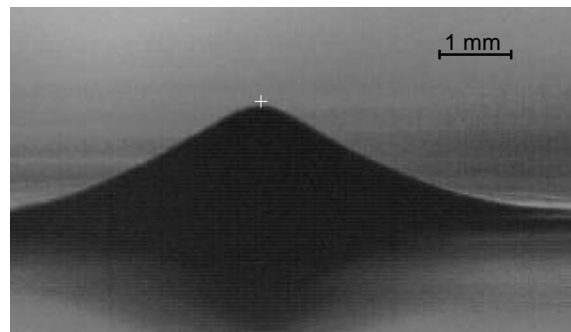


FIG. 8.6 -  $t = 20$  ms

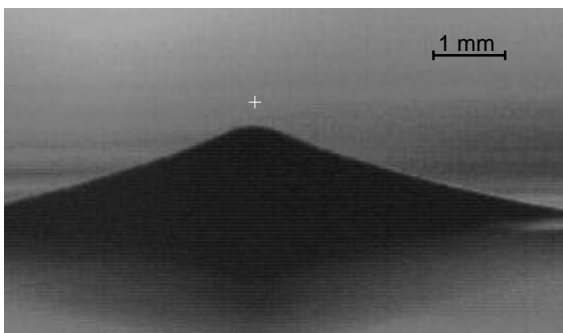


FIG. 8.7 -  $t = 24$  ms

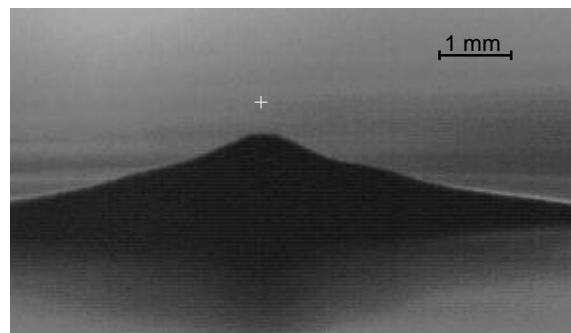


FIG. 8.8 -  $t = 28$  ms

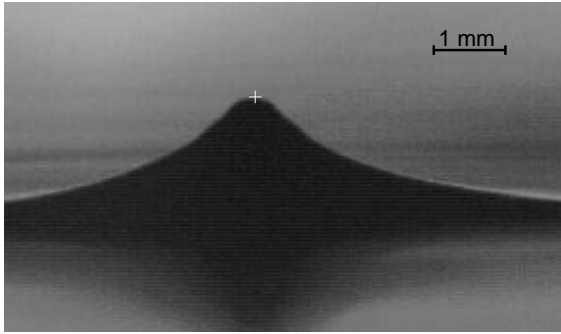


FIG. 8.9 –  $t = 32$  ms

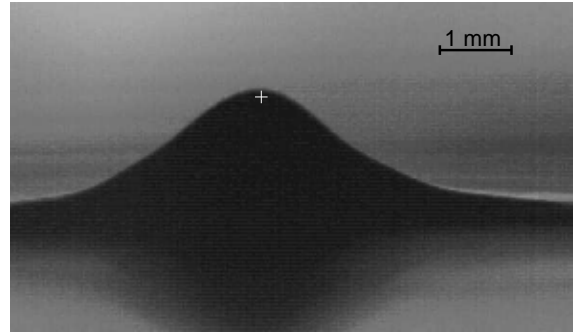


FIG. 8.10 –  $t = 36$  ms

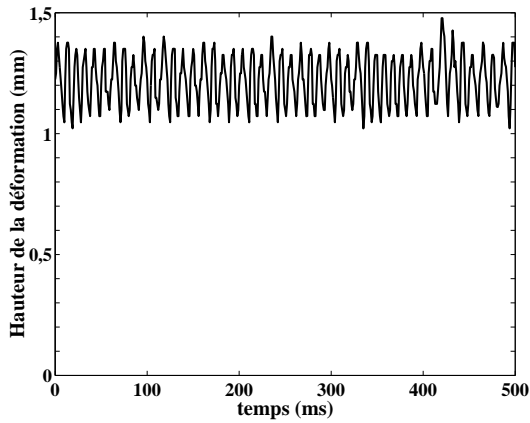


FIG. 8.11 – Oscillations spontanées de la hauteur de la déformation

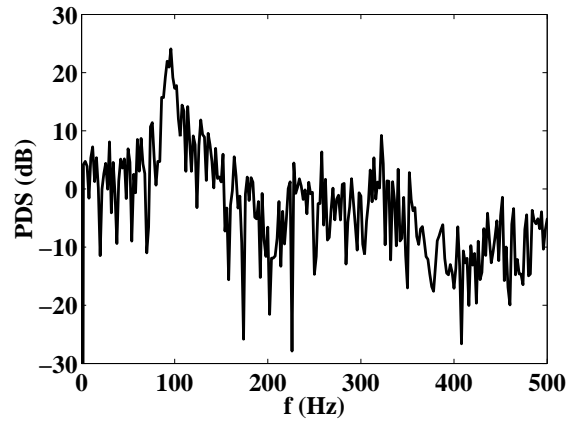


FIG. 8.12 – Spectre de puissance des oscillations de la hauteur de la déformation, correspondant au signal observé sur la figure 8.11

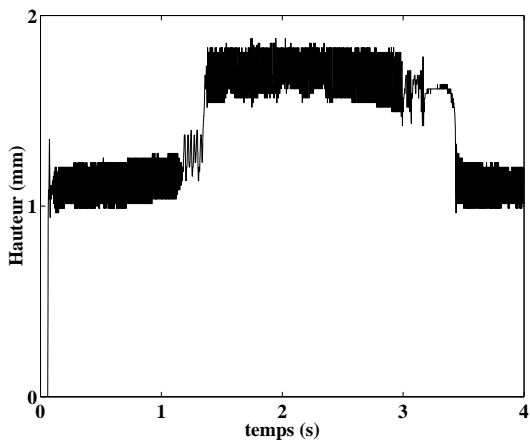


FIG. 8.13 – Évolution temporelle de la hauteur de la déformation. La puissance acoustique entrant dans la cavité évoluait suivant une rampe linéaire croissante de 2 s, puis une rampe linéaire décroissante de 2 s. La tension aux bornes du transducteur variait entre 8,4 et 9,9 V.

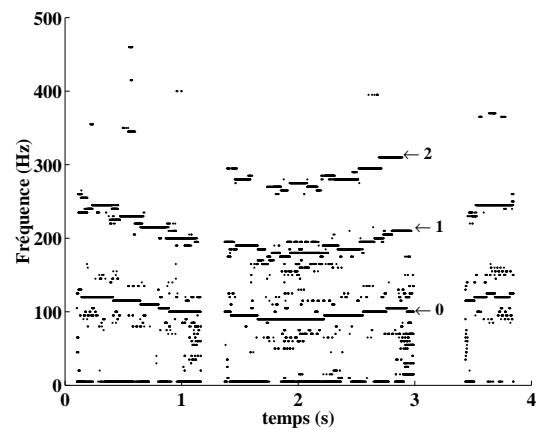


FIG. 8.14 – Évolution temporelle des fréquences caractéristiques des oscillations de la hauteur de la déformation.

apparaissant dans cette transformée de Fourier. Le programme réalise cette étude sur des fenêtres glissantes décrivant au total l'ensemble du signal. Cela permet de tracer l'évolution temporelle des fréquences caractéristiques des oscillations (figure 8.14). On observe systématiquement une fréquence caractéristique autour de 100 Hz (indiquée par un 0 sur ce graphe), et on observe très fréquemment une harmonique entre 200 et 250 Hz (indiquée par un 1) et une autre vers 300 Hz (2). Les temps auxquels aucune fréquence caractéristique n'a été calculée, autour de 1,25 et 3 s, correspondent aux moments des sauts de la déformation et à leur voisinage.

### 8.3 Évolution de la fréquence des oscillations avec les différents paramètres expérimentaux

Les fréquences caractéristiques des oscillations varient en fonction du temps. Deux autres paramètres varient au cours du temps : il s'agit de la puissance de l'onde acoustique (liée à l'amplitude de pression, elle même proportionnelle à la tension délivrée par le générateur de signaux) et de la hauteur de la déformation (liée à la longueur de la cavité). Comme nous l'avons vu précédemment, ces deux paramètres ne sont pas indépendants l'un de l'autre, la hauteur de la déformation variant avec la puissance des ondes en décrivant des cycles d'hystérésis. Nous avons voulu savoir quels paramètres déterminaient la fréquence des oscillations. Aussi, nous avons tracé la fréquence du mode fondamental en fonction de la hauteur de la déformation et de la tension aux bornes du générateur de signaux. Les résultats obtenus sont représentés sur les courbes 8.15 et 8.16. La courbe représentant la fréquence du mode fondamental des oscillations en fonction de la hauteur moyenne de la déformation présente un cycle d'hystérésis. Celle qui décrit le comportement de cette même

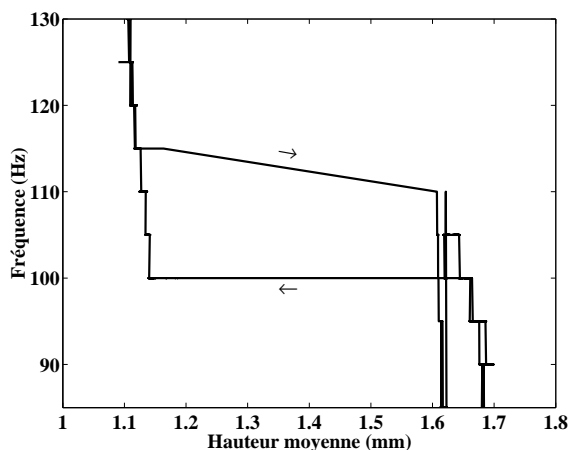


FIG. 8.15 – Évolution de la fréquence du mode fondamental des oscillations avec la hauteur moyenne de la déformation. On observe un cycle d'hystérésis.

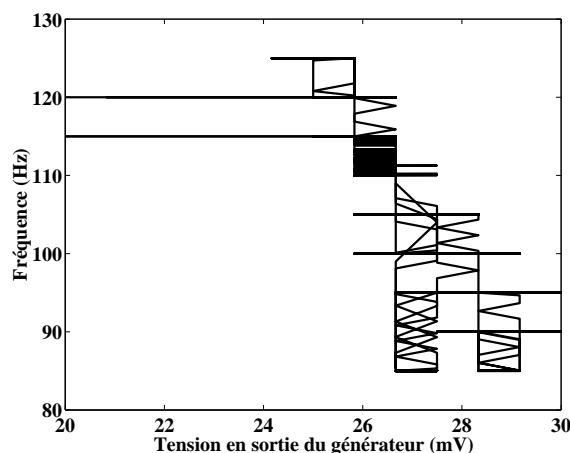


FIG. 8.16 – Évolution de la fréquence du mode fondamental des oscillations avec la tension aux bornes du générateur de signaux. On n'observe pas de cycle d'hystérésis très net. Cependant, il est peut-être noyé dans le bruit expérimental.

fréquence en fonction de la tension aux bornes du générateur de signaux ne semble pas en présenter, même si cette affirmation est à prendre avec prudence étant donné le mauvais rapport signal sur bruit de la tension aux bornes du générateur.

## 8.4 Observations antérieures d'une instabilité d'oscillation de cavités optiques déformables

Il a déjà été montré dans divers travaux théoriques antérieurs que la pression de radiation électromagnétique pouvait provoquer une instabilité paramétrique d'oscillation de cavités optiques déformables [1], suivant le mécanisme que nous avons déjà présenté dans l'introduction de ce chapitre. Cela a été vérifié dans des travaux expérimentaux sur des cavités de configurations diverses [2, 3, 4, 5]. Cet effet pourrait limiter la miniaturisation des résonateurs optiques ainsi que les performances des détecteurs d'ondes gravitationnelles [6, 7, 8]. Le mécanisme proposé est le suivant, adapté à une cavité acoustique : lorsque la raideur que la cavité confère à l'interface devient négative, celle-ci peut devenir instable et se mettre à osciller spontanément. Cette oscillation de la longueur de la cavité à la fréquence  $f_1$  très petite devant la fréquence  $f$  de l'onde acoustique engendre par modulation de phase une onde acoustique à la fréquence  $f \pm f_1$  à la réflexion [9]. Les ondes aux fréquences  $f + f_1$  et  $f - f_1$  sont amplifiées différentiellement dans la cavité acoustique et interfèrent avec les ondes de fréquence  $f$ . Le battement des ondes aux fréquences  $f$  et  $f \pm f_1$  engendre une modulation de la pression de radiation à la fréquence  $f_1$  qui peut amplifier l'oscillation de la cavité lorsque l'amplification de l'onde à fréquence  $f \pm f_1$  dans la cavité compense sa dissipation [6]. Cette instabilité s'observe donc pour des intensités d'autant plus faibles que le facteur de qualité de la cavité est élevé, ce qui a été observé expérimentalement sur des microcavités optiques [3].

## 8.5 Hauteur et tension seuil d'apparition et de disparition des oscillations

Nous avons voulu savoir si le seuil d'apparition des oscillations dans nos expériences dépendait du facteur de qualité de la cavité, comme semblerait l'indiquer cette explication. Nous ne savons pas comment évaluer ce facteur de qualité. Cependant, nous pouvons raisonnablement supposer qu'il est maximal lorsque les deux miroirs de la cavité sont conjugués, c'est-à-dire lorsque la forme de la déformation d'interface épouse parfaitement celle des surfaces d'onde du faisceau acoustique, comme l'indique la figure 8.17. Au cours de la croissance de la déformation, le facteur de qualité de la cavité peut varier car la forme de la déformation varie et la puissance acoustique perdue lors d'un aller-retour dans la cavité évolue. Le facteur de qualité de la cavité dépend énormément de la géométrie tridimensionnelle du faisceau acoustique. Aussi, il dépend de la hauteur de la déformation, mais aussi de la position de l'interface au repos par rapport à la position du plan focal du transducteur. En particulier, nous avons déjà signalé que les oscillations n'apparaissaient que lorsque l'interface au repos était éloignée d'un millimètre ou deux du plan focal. Cela signifierait qu'on atteindrait des facteurs de qualité plus élevés dans ces conditions.

Aussi, nous avons réalisé des expériences de rampe de tension à différentes positions de l'interface au repos afin de repérer la présence ou non d'oscillations en fonction de la hauteur de la déformation. Nous avons mesuré les hauteurs seuil d'apparition et de disparition des oscillations. Lors de ces expériences, l'évolution temporelle de la hauteur avait typiquement l'allure de celle représentée sur la figure 8.18. Cette courbe permet de repérer à quelle hauteur et à quelle tension aux bornes du générateur apparaissent et disparaissent les oscillations spontanées de l'interface. Ces grandeurs sont représentées sur

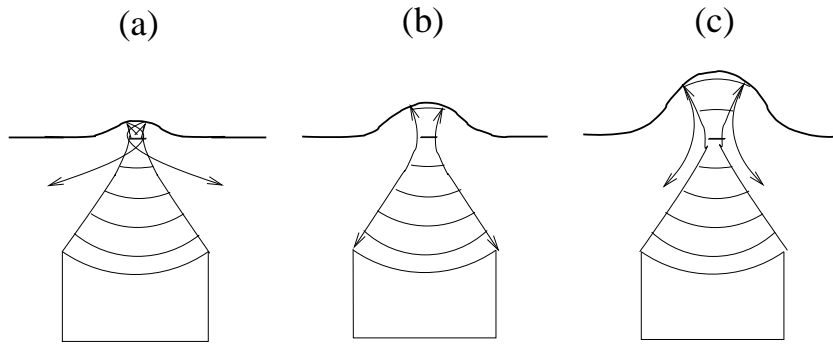


FIG. 8.17 – Influence de la forme de la déformation sur le facteur de qualité  $Q$  de la cavité acoustique : (a) et (c) la déformation n'épouse pas parfaitement un plan d'onde, le faisceau réfléchi ne revient pas sur ses pas et une partie ne revient pas vers le transducteur. Le facteur de qualité  $Q$  de la cavité est alors relativement faible, car une partie non négligeable de la puissance acoustique est perdue. (b) la forme de la déformation épouse parfaitement celle d'une surface d'onde, le faisceau réfléchi revient sur ses pas et la totalité de la puissance acoustique est réfléchie vers le transducteur. Si en plus de cela, la longueur de la cavité est égale à un nombre entier de fois la demi-longueur d'onde (condition de résonance de la cavité), le facteur de qualité  $Q$  de la cavité est alors élevé.

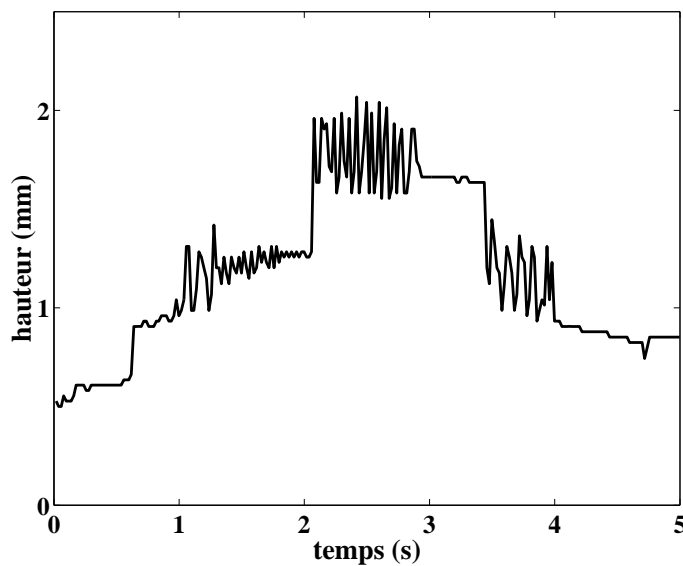


FIG. 8.18 – Évolution temporelle de la hauteur de la déformation lors d'une expérience de rampe de pression. L'interface au repos était ici à 39,1 mm du transducteur, soit très au-dessus de son plan focal (sa distance focale était de 38 mm). Il apparaît des oscillations de l'interface pour certaines hauteurs bien définies. Cette courbe est très reproductible. Le signal est sous-échantillonné, cependant cela n'a pas d'influence sur la mesure des hauteurs seuil d'apparition et de disparition des oscillations.



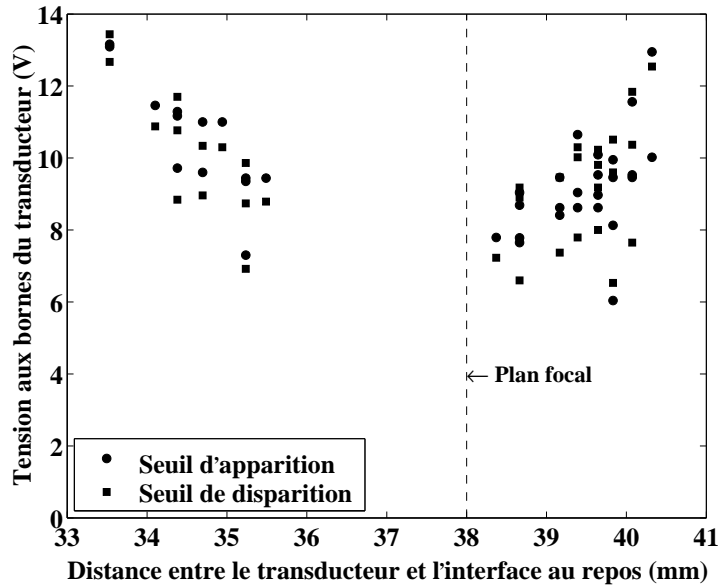


FIG. 8.19 – Tension seuil d'apparition et de disparition des oscillations pour diverses positions de l'interface au repos.

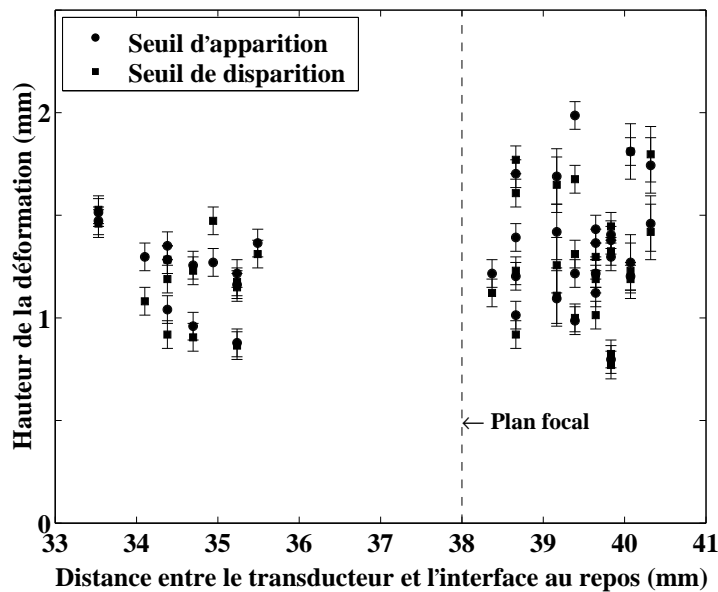


FIG. 8.20 – Hauteur seuil d'apparition et de disparition des oscillations pour diverses positions de l'interface au repos.

les figures 8.19 et 8.20. Au vu de ces résultats, on constate que la tension seuil d'apparition des oscillations est d'autant plus forte que la hauteur de l'interface au repos est éloignée du plan focal mais que la hauteur seuil de la déformation ne semble pas avoir de dépendance nette avec la position de l'interface au repos par rapport au plan focal. On constate par ailleurs qu'on n'observe jamais d'oscillations lorsque l'interface au repos est proche du plan focal.

Ces résultats sont à relativiser. Le transducteur utilisé dans ces expériences était un

transducteur troué comportant un barreau de verre le long de son axe. La cavité acoustique résultante avait alors un facteur de qualité plus faible que si le transducteur avait été une calotte sphérique parfaite. De plus, la plupart des transducteurs que nous possédions avaient de petits défauts de surface. Celui utilisé pour les expériences présentées dans ce paragraphe ne présentait pas de défaut de concavité apparent mais avait un trou central. Celui utilisé pour les expériences des paragraphes 8.1 à 8.3 avait un défaut de fabrication et possédait de petites cloques à sa surface (ce qui ne modifiait pas le champ acoustique émis). Nous l'avions également couvert d'une couche de téflon pour le protéger du chloroforme lors d'autres expériences. Nous possédions un transducteur qui avait une surface sphérique bien lisse sans trou central. Avec ce transducteur, il était beaucoup plus facile d'obtenir des oscillations de l'interface eau-air (il était même plutôt difficile de faire des expériences où les oscillations n'apparaissaient pas). Nous ne l'avons pas utilisé dans ces expériences d'oscillations car nous ne le possédions pas encore au moment des investigations décrites par ces expériences. Néanmoins, cela semble conforter l'idée que le seuil d'apparition des oscillations est d'autant plus fort que le facteur de qualité de la cavité est grand. En effet, avec le transducteur sans défaut de concavité apparent, ce facteur de qualité est nécessairement plus grand qu'avec les transducteurs qui ont des défauts de surface, et les oscillations sont effectivement beaucoup plus faciles à voir.

Il est étonnant d'observer des oscillations spontanées lorsque l'interface au repos est en-dessous du point focal du transducteur (figure 8.20). En effet, le faisceau acoustique converge alors en arrivant à l'interface, et les surfaces d'onde ont donc leur courbure vers le haut. Pourtant, la déformation a sa courbure vers le bas. Elle n'épouse alors pas du tout les surfaces d'onde, et le facteur de qualité de la cavité devrait être faible. On ne devrait alors pas voir d'oscillations. Une étude complémentaire est encore nécessaire sur ce point, mais on peut déjà suspecter que le fait que l'onde acoustique ne soit pas plane en-dehors de la tache focale joue un rôle important dans l'apparition de ces oscillations, ce qui distinguerait ce mécanisme d'oscillation de celui proposé pour les cavités optiques planes.

## Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié l'instabilité d'oscillation de la déformation de l'interface, semblable à ce qui a été prédit et observé sur des cavités Pérot-Fabry optiques. Il est probable que l'apparition de ces oscillations soit favorisée par un grand facteur de qualité de la cavité acoustique. Il semble que la structure tridimensionnelle du faisceau acoustique joue un rôle important dans l'apparition de ces oscillations.

## Références du chapitre 8

- [1] V. B. Braginskii et A. B. Manukin. Ponderomotive effects of electromagnetic radiation. *Soviet Physics JETP*, 25(4) :653–655, 1967.
- [2] V. B. Braginskii, A. B. Manukin, et M. Y. Tikhonov. Investigation of dissipative ponderomotive effects of electromagnetic radiation. *Soviet Physics JETP*, 31(5) :829–830, 1970.

- [3] T. J. Kippenberg, H. Rokhsari, T. Carmon, et K. J. Vahala. Analysis of the Radiation-Pressure Induced Mechanical Oscillation of an Optical Microcavity. *Phys. Rev. Lett.*, 95 :033901, 2005.
- [4] T. Carmon, H. Rokhsari, L. Yang, T. J. Kippenberg, et K. J. Vahala. Temporal Behavior of Radiation-Pressure-Induced Vibrations of an Optical Microcavity Phonon Mode. *Phys. Rev. Lett.*, 94 :223902, 2005.
- [5] B. S. Sheard, M. B. Gray, C. M. Mow-Lowry, et D. E. McClelland. Observation and characterization of an optical spring. *Phys. Rev. A*, 69 :051801, 2004.
- [6] V. B. Braginsky, S. E. Strigin, et S. P. Vyatchanin. Parametric oscillatory instability in Fabry-Perot interferometer. *Phys. Lett. A*, 287 :331–338, 2001.
- [7] V. B. Braginsky, S. E. Strigin, et S. P. Vyatchanin. Analysis of parametric oscillatory instability in power recycled LIGO interferometer. *Phys. Lett. A*, 305 :111–124, 2002.
- [8] A. Pai, S. V. Dhurandhar, P. Hello, et J.-Y. Vinet. Radiation pressure induced instabilities in laser interferometric detectors of gravitational waves. *Eur. Phys. J. D*, 8 :333–346, 2000.
- [9] R. Wunenburger, N. Mujica, et S. Fauve. Experimental study of the Doppler shift generated by a vibrating scatterer. *J. Acoust. Soc. Am.*, (115) :507–514, 2004.



# Conclusion et perspectives

Lors de cette thèse, nous avons principalement étudié des déformations d'interfaces de petite amplitude. Ces études nous ont permis de confirmer la théorie suivant laquelle les déformations que l'on observe en focalisant une onde acoustique sur une interface fluide sont créées par la pression de radiation acoustique, et que leur forme résulte de la compétition entre d'une part la pression de radiation, qui tend à déformer l'interface, et d'autre part la gravité et la tension interfaciale, qui tendent à l'aplatir. Cette théorie est en très bon accord avec les déformations statiques observées sur des interfaces transparentes (chapitre 5) et sur des interfaces réfléchissantes (chapitre 6).

La théorie décrivant la dynamique de l'interface sous l'action de ces trois forces nous a également permis de mettre au point une méthode de mesure fiable et sans contact des tensions interfaciales (chapitre 4).

Enfin, nous avons vu que le couplage entre la forme de la déformation et la propagation de l'onde observé sur les interfaces totalement réfléchissantes entraînait l'atténuation et la diffusion d'ondes capillaires sur le sommet de la déformation (chapitre 7) ou au contraire l'apparition d'oscillations paramétriques spontanées et auto-entretenues du sommet de la déformation (chapitre 8).

Nous avons cependant pu constater que d'autres phénomènes pouvaient agir sur l'interface, comme par exemple le streaming acoustique, dont nous avons vu dans le chapitre 5 qu'il pouvait avoir une forte influence sur la forme de la déformation dans certaines situations.

Nous avons rapidement parlé dans le chapitre 3 des déformations de grande amplitude, qui peuvent prendre des formes très différentes de celle prédite par la théorie ne prenant en compte que la pression de radiation, la tension de surface et la gravité (figures 8.21 et 8.22).

Lors de son stage de master II, qui a eu lieu au printemps 2007, Nicolas Bertin a confirmé que la forme en tétine en particulier n'était pas une solution de l'équation d'équilibre entre la pression de radiation et les forces de gravité et de tension interfaciale. Cela signifie qu'il y a au moins une force supplémentaire qui agit sur la déformation lorsque l'onde acoustique est de grande amplitude et qui lui donne cette forme. Peut-être s'agit-il du streaming. Sa thèse portera sur ce sujet et devrait y apporter des éclaircissements.

Concernant les jets, une hypothèse permettant d'expliquer leur formation, aussi bien dans le cas de la pression de radiation optique (figure 8.23) que dans celui de la pression de radiation acoustique (figure 8.21) est que l'onde subit une réflexion totale sur les bords de la déformation et est focalisée sur son sommet, ce qui induirait une forte augmentation de la pression de radiation en ce point et provoquerait l'apparition du jet.

Une étude en acoustique sur diverses interfaces ayant des angles de réflexion totale différents permettrait de vérifier s'il y a corrélation entre le seuil d'instabilité de jet et la valeur de l'angle d'incidence maximal des rayons acoustiques sur l'interface déformée, ce

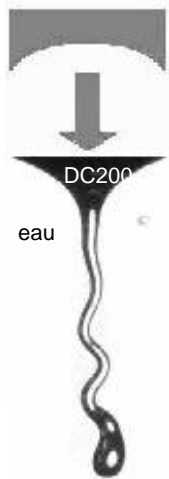


FIG. 8.21 – Jet liquide induit par la pression de radiation d’une onde acoustique à l’interface entre de l’huile DC200 et de l’eau : l’onde acoustique se propage de haut en bas (flèche).

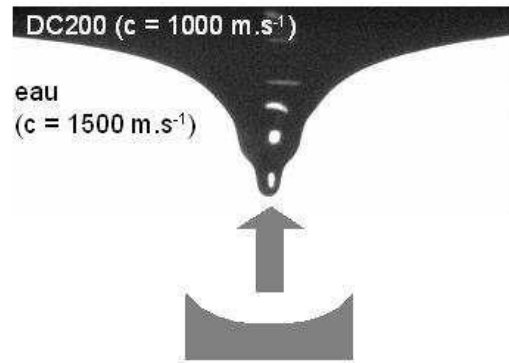


FIG. 8.22 – Déformation en forme de tétine induite par la pression de radiation d’une onde acoustique à l’interface entre de l’eau et de l’huile DC200 : l’onde acoustique se propage de bas en haut (flèche).



FIG. 8.23 – Jet liquide induit par la pression de radiation d’un faisceau laser à l’interface entre deux fluides : le laser arrive par le haut (flèche noire). Le jet émet des gouttes de façon continue. Le champ de l’image est de  $250\mu\text{m}$  de large sur  $800\mu\text{m}$  de haut.

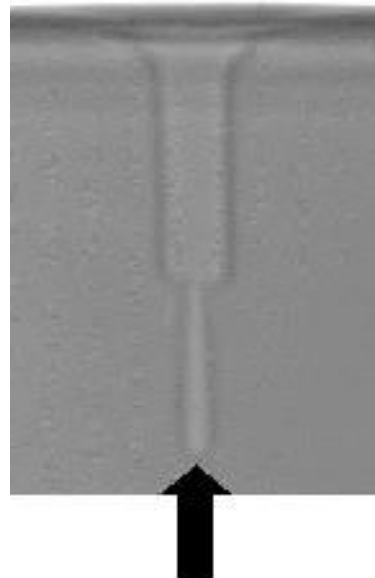


FIG. 8.24 – Déformation en forme de tétine induite par la pression de radiation d’un faisceau laser à l’interface entre deux fluides : le laser arrive par le bas. La tétine n’émet pas de gouttes. Le champ de l’image est de  $50\mu\text{m}$  de large sur  $80\mu\text{m}$  de haut.

qui permettrait de corroborer cette hypothèse.

Ces études sur les tétines et les jets obtenus par pression de radiation acoustique pourraient permettre d'expliquer ces mêmes formes obtenues lors des expériences de pression de radiation optique, l'acoustique permettant de faire des expériences sur une plus grande diversité d'interfaces et donc dans une plus grande diversité de conditions expérimentales. Le but final est d'étudier expérimentalement les analogies et les différences entre les effets mécaniques et hydrodynamiques des ondes électromagnétiques et des ondes acoustiques, chacun des deux domaines s'enrichissant mutuellement.





## Annexe A

# Transformée de Hankel du champ de pression bessélien

### A.1 Relation entre la transformée de Fourier et la transformée de Hankel

Ce paragraphe s'inspire du livre de Walter Appel [1].

Soit une fonction complexe  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^2$ . La transformée de Fourier de  $f$  s'écrit

$$\hat{f}(k_x, k_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{2i\pi(k_x x + k_y y)} dx dy \quad (\text{A.1})$$

Supposons que  $f$  soit à symétrie cylindrique :  $f(x, y) = \phi(r)$  avec  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Alors  $\hat{f}$  est également à symétrie cylindrique et  $\hat{f}(k_x, k_y) = \tilde{\phi}(k)$  où  $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$  et  $\tilde{\phi}$  est la transformée de Hankel de  $\phi$  :

$$\tilde{\phi}(k) = \int_0^{\infty} \phi(r) J_0(kr) r dr \quad (\text{A.2})$$

La transformée de Hankel est son propre inverse :

$$\phi(r) = \int_0^{\infty} \tilde{\phi}(k) J_0(kr) k dk \quad (\text{A.3})$$

La transformée de Hankel est donc une formulation particulière de la transformée de Fourier, particulièrement adaptée aux problèmes à géométrie cylindrique.

### A.2 Transformée de Hankel du champ de pression bessélien

Soit  $\phi$  la fonction définie pour  $r \geq 0$  par

$$\phi(r) = \left( \frac{J_1\left(\frac{\pi r}{\lambda}\right)}{\frac{\pi r}{\lambda}} \right)^2 \quad (\text{A.4})$$

Par définition, sa transformée de Hankel vaut

$$\tilde{\phi}(k) = \int_0^\infty \phi(r) J_0(kr) r dr \quad (\text{A.5})$$

$$= \int_0^\infty \left( \frac{J_1\left(\frac{\pi r}{\lambda}\right)}{\frac{\pi r}{\lambda}} \right)^2 J_0(kr) r dr \quad (\text{A.6})$$

avec  $k \geq 0$ . Son expression analytique m'a été donnée par Maple :

$$\begin{cases} \tilde{\phi}\left(k \leq \frac{2\pi}{\lambda}\right) = \frac{\lambda^2}{2\pi^2} \left( 1 - \frac{\lambda k}{\pi^2} \sqrt{1 - \frac{k^2 \lambda^2}{4\pi^2}} - \frac{2}{\pi} \arcsin\left(\frac{\lambda k}{2\pi}\right) \right) \\ \tilde{\phi}\left(k > \frac{2\pi}{\lambda}\right) = 0 \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

Elle est en très bon accord avec un calcul numérique réalisé sous Matlab d'approximation de  $\tilde{\phi}(k) = \int_0^\infty \phi(r) J_0(kr) r dr$  par la méthode des rectangles (figure A.1).

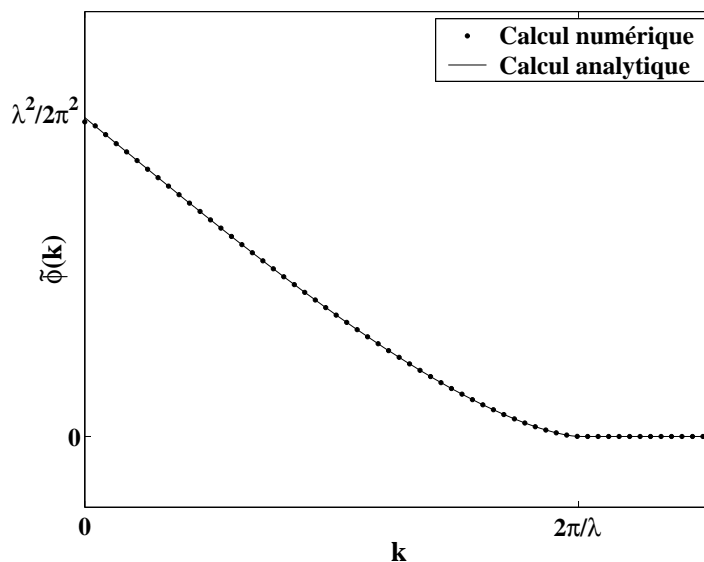


FIG. A.1 – Comparaison de l'expression 3.35 avec le calcul numérique.

### A.3 Démonstration de la nullité de cette fonction pour $k > \frac{2\pi}{\lambda}$

Tout ce qui est présenté dans ce paragraphe et dans toute la suite de cette annexe A a fait l'objet d'une discussion avec Michel Daumens, que je tiens à remercier pour tous les éclaircissements qu'il a bien voulu m'apporter.

On peut démontrer que la transformée de Hankel de la fonction  $\phi$  définie par l'expression A.4 est effectivement nulle pour  $k > \frac{2\pi}{\lambda}$ , en accord avec l'expression A.7. Il existe en effet un théorème mathématique suivant lequel

$$\int_0^\infty r^{\lambda-\mu-\nu+1} J_\nu(ar) J_\mu(br) J_\lambda(cr) dr = 0 \quad (\text{A.8})$$

si  $Re(\lambda) > -1$ ,  $Re(\lambda - \mu - \nu) < \frac{1}{2}$ ,  $c > b > 0$ ,  $0 < a < c - b$  [2].

Il suffit d'appliquer ce théorème au cas  $\lambda = 0$ ,  $\mu = \nu = 1$ ,  $a = b = \frac{\pi}{\lambda}$  et  $c = k$ , les conditions d'application du théorème imposant  $k > \frac{2\pi}{\lambda}$  :

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{r} \left( J_1 \left( \frac{\pi r}{\lambda} \right) \right)^2 J_0(kr) dr = 0 \quad (\text{A.9})$$

soit

$$\left( \frac{\pi}{\lambda} \right)^2 \int_0^{\infty} \left( \frac{J_1 \left( \frac{\pi r}{\lambda} \right)}{\frac{\pi r}{\lambda}} \right)^2 J_0(kr) r dr = 0 \quad (\text{A.10})$$

d'où l'on déduit  $\tilde{\phi} \left( k > \frac{2\pi}{\lambda} \right) = 0$ .

## A.4 Comparaison entre la figure de diffraction par une fente d'Young et la figure de diffraction par un trou d'Young

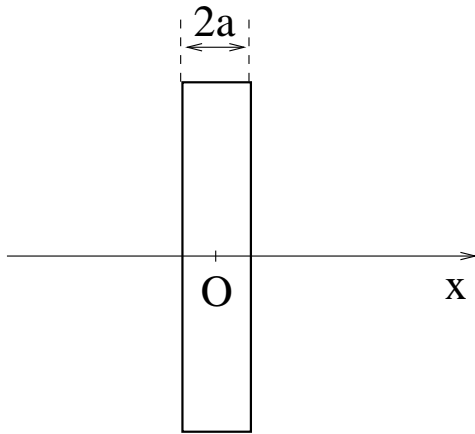


FIG. A.2 – Fente d'Young

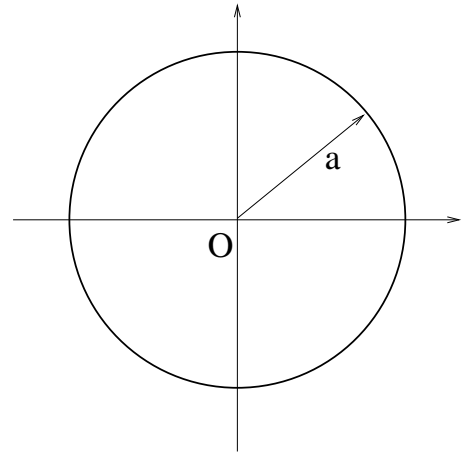


FIG. A.3 – Trou d'Young

Le problème de la fente d'Young (figure A.2) est un problème à une dimension : l'ouverture de largeur  $2a$  diffractant un faisceau lumineux peut être décrite par la fonction porte  $F$  (figure A.4), définie sur l'axe  $x$  par :

$$\begin{cases} F(x, |x| < a) = 1 \\ F(x, |x| \geq a) = 0 \end{cases} \quad (\text{A.11})$$

La figure de diffraction observée à l'infini est décrite par la fonction sinus cardinal  $\hat{F}$ , transformée de Fourier de cette fonction porte :

$$\hat{F}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x) e^{2i\pi kx} dx \quad (\text{A.12})$$

$$= \int_{-a}^a e^{2i\pi kx} dx \quad (\text{A.13})$$

$$= 2a \frac{\sin(2\pi ak)}{2\pi ak} \quad (\text{A.14})$$

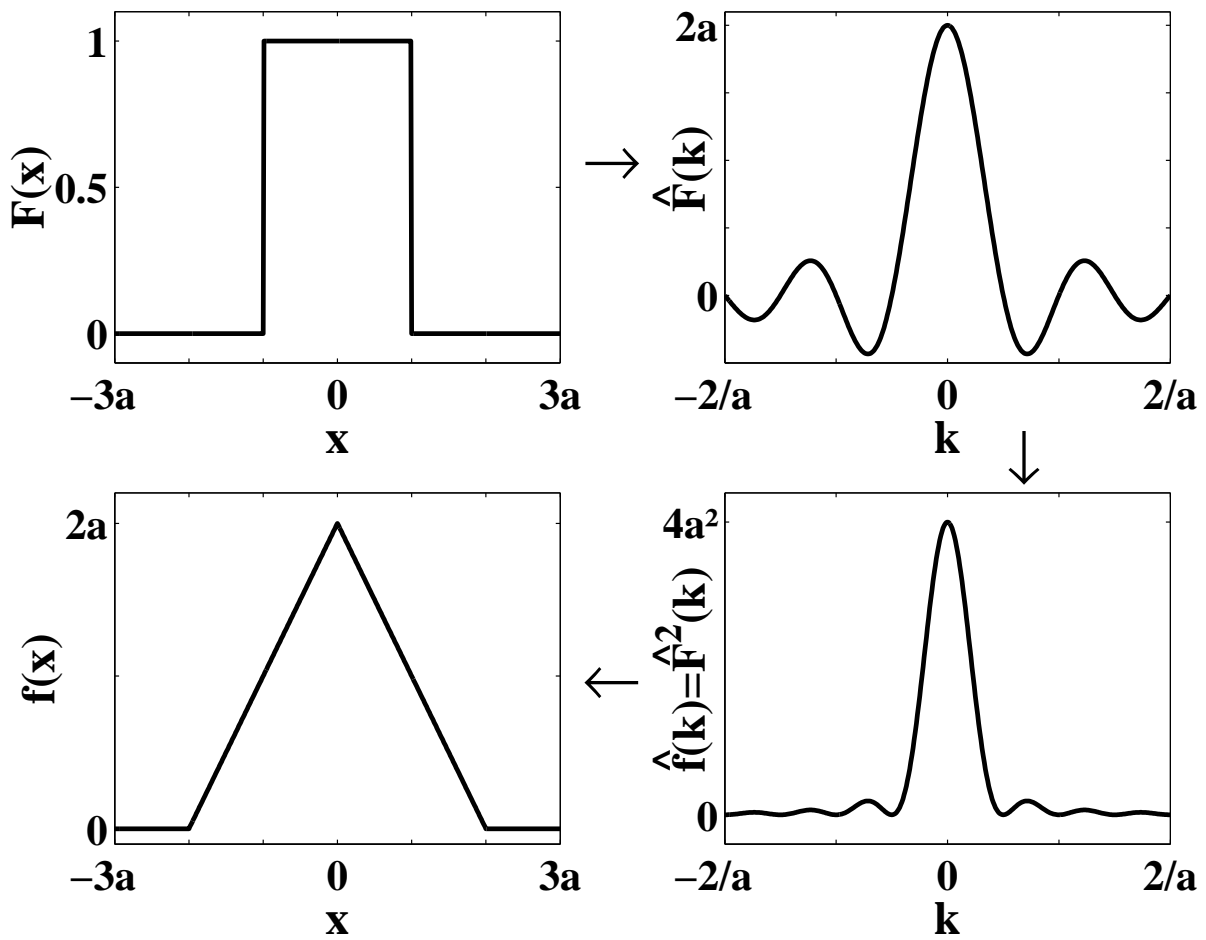


FIG. A.4 – On considère la fonction porte  $F$  (en haut à gauche). Sa transformée de Fourier  $\hat{F}$  est la fonction sinus cardinal (en haut à droite), dont le carré est la fonction  $\hat{f}$  représentée en bas à droite. La transformée de Fourier inverse de  $\hat{f}$  est la fonction  $f$  représentée en bas à gauche.

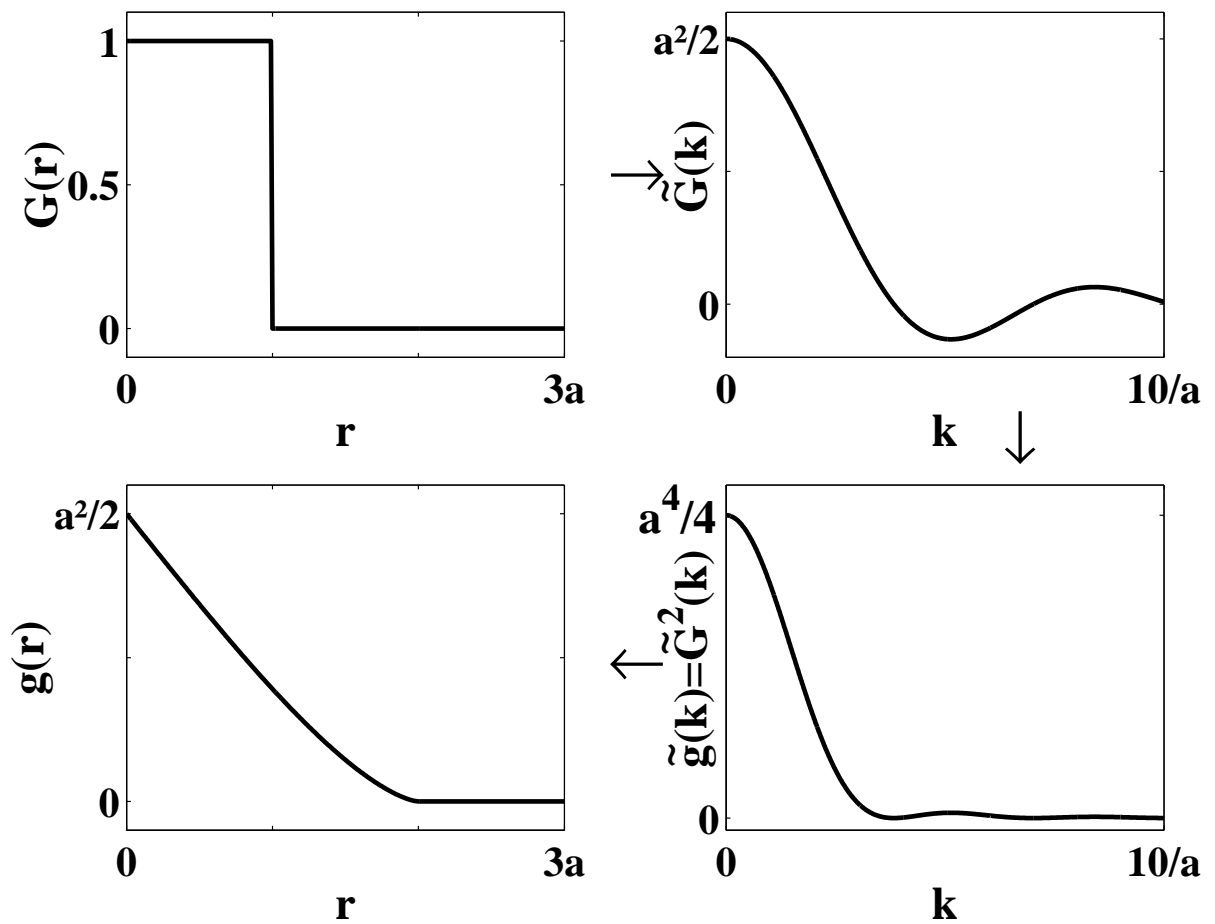


FIG. A.5 – On considère la fonction porte  $G$  (en haut à gauche). Sa transformée de Hankel  $\tilde{G}$  est la fonction  $a^2 \frac{J_1(ka)}{ka}$  (en haut à droite), dont le carré est la fonction  $\tilde{g}$  représentée en bas à droite. La transformée de Hankel inverse de  $\tilde{g}$  est la fonction  $g$  représentée en bas à gauche.

L'intensité lumineuse observée à l'infini est donnée par le carré  $\hat{f}$  de cette fonction  $\hat{F}$  :

$$\hat{f}(k) = 4a^2 \left( \frac{\sin(2\pi ak)}{2\pi ak} \right)^2 \quad (\text{A.15})$$

La transformée de Fourier inverse de cette fonction  $\hat{f}$  est

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{-2i\pi kx} dk \quad (\text{A.16})$$

et vaut

$$\begin{cases} f(x, |x| < 2a) = 2a - |x| \\ f(x, |x| \geq 2a) = 0 \end{cases} \quad (\text{A.17})$$

Ces transformations successives sont résumées sur la figure A.4.

Considérons maintenant le problème à symétrie cylindrique de diffraction par un trou d'Young de rayon  $a$  (figure A.3). Cette fois, l'ouverture peut-être décrite, en coordonnées cylindriques, par la fonction porte  $G$  (figure A.5), définie sur l'axe des réels positifs par

$$\begin{cases} G(r, r < a) = 1 \\ G(r, r \geq a) = 0 \end{cases} \quad (\text{A.18})$$

La figure de diffraction observée à l'infini est décrite par la fonction  $\tilde{G}$ , transformée de Hankel de cette fonction porte :

$$\tilde{G}(k) = \int_0^{\infty} G(r) J_0(kr) r dr \quad (\text{A.19})$$

$$= \int_0^a J_0(kr) r dr \quad (\text{A.20})$$

$$= a^2 \frac{J_1(ka)}{ka} \quad (\text{A.21})$$

L'intensité lumineuse observée à l'infini est donné par le carré  $\tilde{g}$  de cette fonction  $\tilde{G}$  :

$$\tilde{g}(k) = a^4 \left( \frac{J_1(ka)}{ka} \right)^2 \quad (\text{A.22})$$

La transformée de Hankel inverse de cette fonction  $\tilde{g}$  est

$$g(r) = \int_0^{\infty} \tilde{g}(k) J_0(kr) k dk \quad (\text{A.23})$$

et vaut

$$\begin{cases} \tilde{g}(r \leq 2a) = \frac{a^2}{2} \left( 1 - \frac{r}{a\pi} \sqrt{1 - \frac{r^2}{4a^2}} - \frac{2}{\pi} \arcsin \left( \frac{r}{2a} \right) \right) \\ \tilde{g}(r > 2a) = 0 \end{cases} \quad (\text{A.24})$$

Ces transformations successives sont résumées sur la figure A.5.

## Références de l'annexe A

- [1] W. Appel. *Mathématiques pour la physique et les physiciens*, pages 278–280. H&K Éditions, octobre 2002.
- [2] I. S. Gradshteyn et I. M. Ryzhik. *Table of Integrals, Series, and Products*, page 694. Academic Press, 4ème édition, 1965.

## Annexe B

# Capteurs de pression utilisés pour étalonner les transducteurs

Comme l'indique le chapitre 3, deux sortes de capteurs de pression ont été utilisés pour étalonner les transducteurs :

- Deux capteurs à aiguille, l'un d'une largeur de  $40\ \mu\text{m}$  et l'autre d'une largeur de  $200\ \mu\text{m}$ . Ces capteurs se présentent sous la forme d'une aiguille, au bout de laquelle se trouve le capteur proprement dit (figure B.1).
- Un capteur à membrane. Ce capteur se présente sous la forme d'une membrane circulaire de plusieurs centimètres de diamètre, au centre de laquelle se trouve le capteur proprement dit. D'après le constructeur, la partie sensible avait un diamètre de  $200\ \mu\text{m}$  (figure B.2).

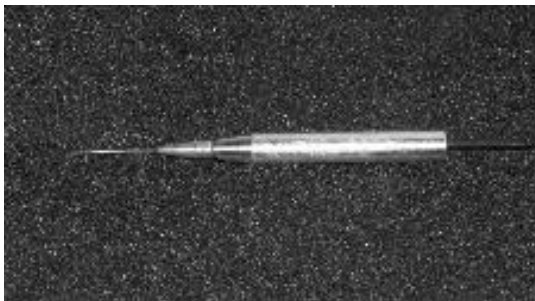


FIG. B.1 – Photographie du capteur à aiguille : la partie sensible se trouve au bout de l'aiguille. Dans les expériences, l'aiguille est orientée dans le sens de propagation de l'onde acoustique, avec sa partie sensible en direction de l'émetteur.

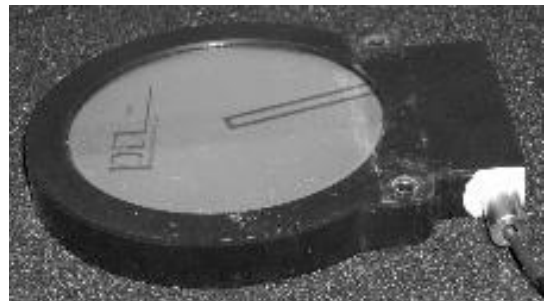


FIG. B.2 – Photographie du capteur à membrane : la partie sensible se trouve au centre de la membrane. Dans les expériences, la membrane est placée orthogonalement au sens de propagation de l'onde acoustique.

Tous ces capteurs sont des capteurs piézoélectriques fabriqués par *Precision Acoustics*. Les capteurs à aiguille ont été étalonnés par *Precision Acoustics* et les capteurs à membrane par le *National Physical Laboratory*. Ils se comportent comme des générateurs de tension, la tension de sortie étant proportionnelle à la surpression acoustique instantanée. Le coefficient de proportionnalité dépend de la fréquence de l'onde acoustique. Leur résistance de sortie est de  $50\ \Omega$ .

Suivant le type de capteur, la précision de l'étalonnage n'est pas la même : les capteurs à aiguille sont étalonnés avec une incertitude de 14%. Le capteur à membrane est étalonné

avec une incertitude de 7%. Cette imprécision est relativement importante, d'autant plus qu'il s'agit d'une incertitude sur le coefficient liant la pression acoustique  $P$  à la tension  $U$  en sortie du capteur. La pression de radiation étant proportionnelle au carré de  $P$ , elle est connue avec une incertitude double : 28% si la mesure est faite avec un capteur à aiguille, et 14% si elle est faite avec un capteur à membrane.

Un autre paramètre à prendre en compte est la taille de ces capteurs : le faisceau acoustique ayant une largeur typique de l'ordre de 660  $\mu\text{m}$  dans l'eau, le capteur doit être beaucoup plus petit que cette valeur pour donner une mesure non-moyennée spatialement.

Le choix du capteur finalement utilisé doit résulter du compromis entre ces deux contraintes : l'incertitude sur l'étalonnage est plus faible sur le capteur à membrane, par contre celui-ci est plus large que l'aiguille de 40  $\mu\text{m}$ .

Le but de ce chapitre est de présenter les mesures qui ont été faites à partir de ces différents capteurs pour les comparer entre eux afin de tester leur fiabilité et d'en déduire quel est le plus adapté à notre expérience.

## B.1 Montage utilisé

Avec le dispositif représenté sur la figure B.3, j'ai pu tracer le champ de pression du transducteur à l'aide des différents capteurs. Le capteur représenté sur cette figure est un capteur à aiguille.

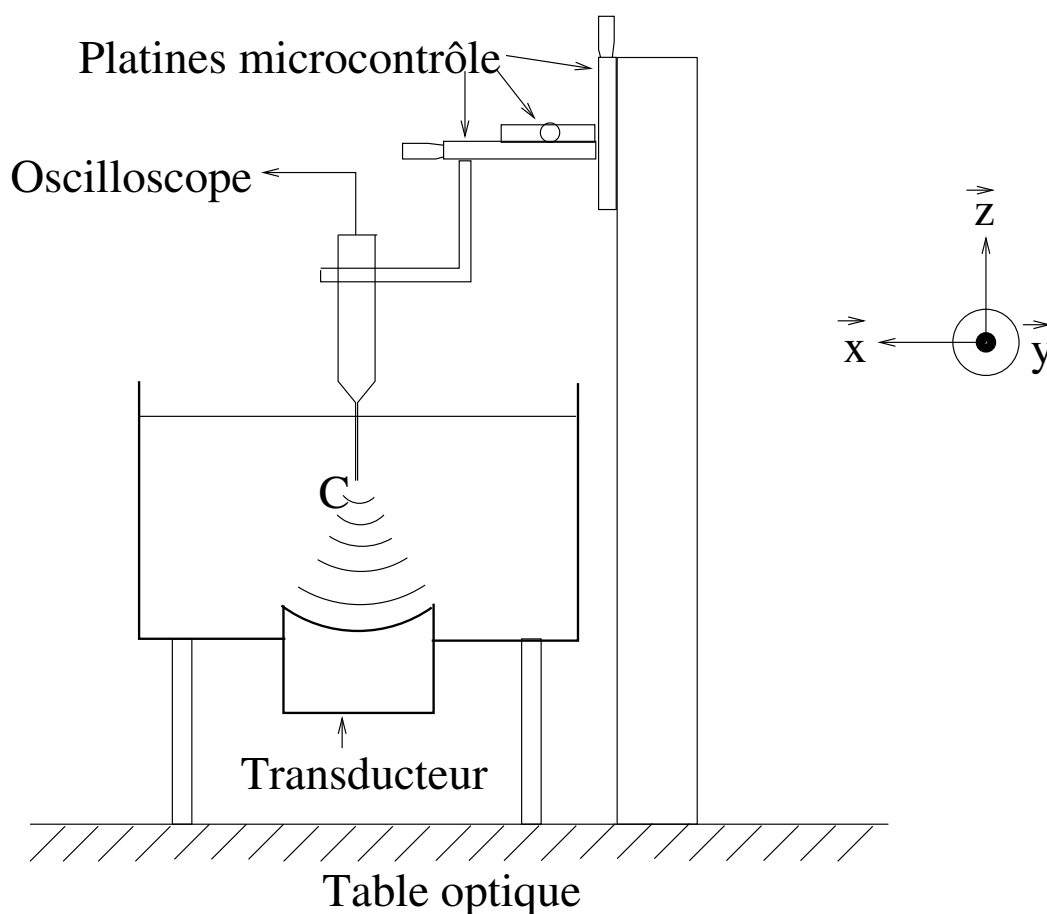


FIG. B.3 – Dispositif utilisé pour cartographier le champ de pression du transducteur



Le transducteur émet une onde acoustique focalisée dans de l'eau. La surface de l'eau est placée plusieurs cm au-dessus du point focal, de sorte que celui-ci se trouve à l'intérieur du volume d'eau. Le capteur de pression est déplacé dans l'eau autour du point focal du transducteur, grâce à trois platines microcontrôle dirigées suivant les axes  $\vec{x}$ ,  $\vec{y}$ ,  $\vec{z}$ .

Le transducteur était alimenté par 20 périodes d'un signal sinusoïdal de fréquence 2,25 MHz et d'amplitude pic-pic  $V$  toutes les 10 ms, le transducteur étant au repos le reste du temps. Le but est d'éviter que le train d'onde émis par le transducteur n'interfère avec le train d'onde réfléchi par l'interface eau-air, faussant la mesure de la pression mesurée par le capteur  $C$ .

L'oscilloscope possédait un réglage permettant de fixer son impédance d'entrée à 50  $\Omega$ , ce qui permettait d'adapter son impédance d'entrée à l'impédance de sortie de 50  $\Omega$  du capteur de pression.

## B.2 Comparaison des champs de pression mesurés par les trois capteurs

### B.2.1 Champs de pression mesurés sur un transducteur focalisé

Dans les expériences de déformation d'interface, l'interface fluide se trouvant dans le plan focal du transducteur, c'est le champ de pression acoustique dans ce plan qui nous intéresse et que nous avons mesuré. La première étape consiste donc à placer le capteur de pression dans ce plan : en le déplaçant suivant les trois directions  $\vec{x}$ ,  $\vec{y}$ ,  $\vec{z}$  et en visualisant le signal sur l'oscilloscope, on finit par trouver grossièrement le point focal, correspondant à la position où le signal mesuré est d'amplitude maximale. Ensuite, on mesure le champ pour différentes valeurs de  $x$  autour de ce point, en gardant  $y$  et  $z$  constants. En faisant un fit parabolique du champ de pression obtenu et en cherchant son maximum, on mesure plus précisément la position  $x$  du point focal et on place le capteur à cette position. On effectue la même opération pour mesurer précisément les positions  $y$  et  $z$  du point focal. Le capteur étant maintenant précisément placé au point focal, il suffit de le déplacer le long de l'axe  $x$  pour mesurer le profil radial du champ de pression du transducteur en son plan focal.

La figure B.4 compare les résultats donnés par les trois capteurs.

On observe sur cette figure que ces trois capteurs ne donnent pas tous le même résultat : par rapport à l'aiguille de 40  $\mu\text{m}$ , l'aiguille de 200  $\mu\text{m}$  sous-estime la pression acoustique. De là, on conclut que l'une des deux aiguilles est mal étalonnée. Le capteur membrane sous-estime lui aussi la pression acoustique au point focal par rapport à l'aiguille de 40  $\mu\text{m}$ . Par ailleurs, le profil mesuré avec ce capteur est plus large que celui mesuré avec les aiguilles (il s'annule à des distances plus grandes de l'axe du transducteur).

Ce profil mesuré à l'aide du capteur membrane peut s'expliquer par la largeur de celui-ci : ce capteur étant relativement large (200  $\mu\text{m}$  d'après le constructeur) par rapport à la largeur typique du faisceau acoustique (600  $\mu\text{m}$ ), la pression qu'il mesure est la moyenne des pressions acoustiques en tous les points de sa surface. La figure B.5 montre l'effet que peut avoir ce moyennage sur le champ mesuré. Les champs de pression théoriques tracés sur ce graphique sont le champ réel

$$p(r) = 2 \frac{J_1\left(\frac{\pi r}{\lambda}\right)}{\frac{\pi r}{\lambda}} \quad (\text{B.1})$$

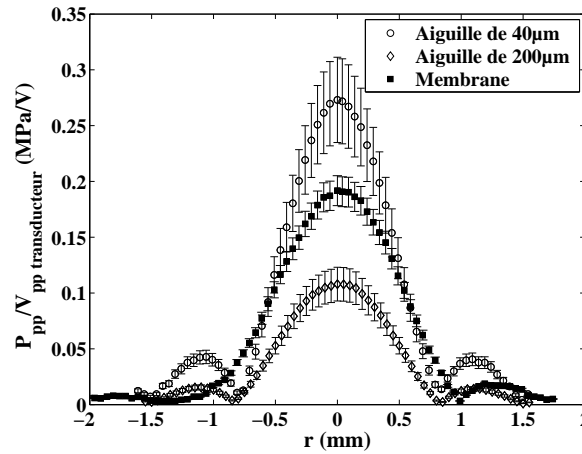


FIG. B.4 – Profil radial du champ de pression d'un transducteur mesuré dans son plan focal par trois capteurs différents : une aiguille de 200  $\mu\text{m}$ , une aiguille de 40  $\mu\text{m}$ , et une membrane de 200  $\mu\text{m}$ . Les capteurs n'ayant pas tous les trois la même sensibilité, le transducteur émettait une onde plus intense pour certains que pour d'autres. Les signaux sont donc renormalisés par l'amplitude pic-pic de la tension d'alimentation du transducteur afin de les mettre à la même échelle.

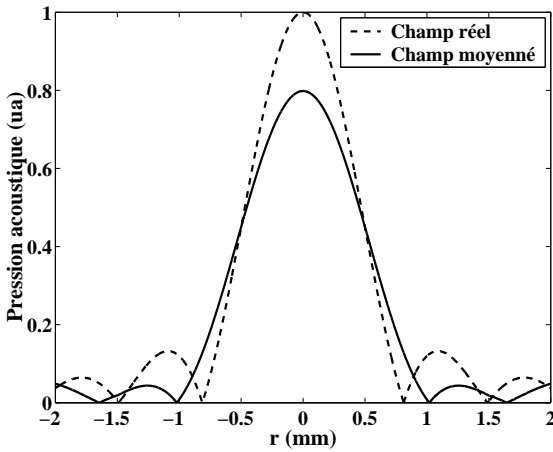


FIG. B.5 – Profil radial théorique du champ de pression acoustique dans le plan focal du transducteur. Le point de mesure en  $r$  du champ moyenné correspond à la moyenne du champ réel entre  $r - 500 \mu\text{m}$  et  $r + 500 \mu\text{m}$ . Cela modélise le champ qui serait mesuré par un capteur linéaire de 1 mm de long.

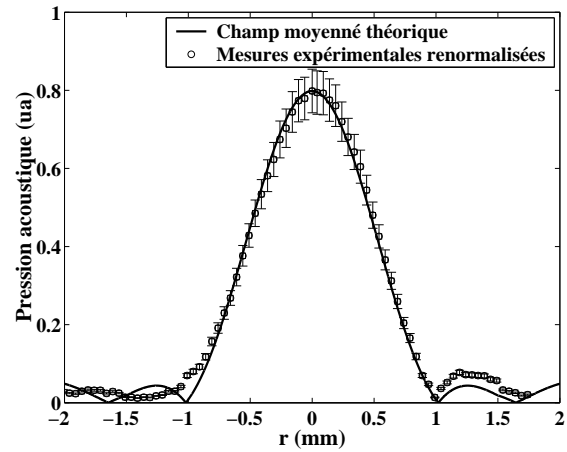


FIG. B.6 – Profil radial expérimental du champ de pression acoustique dans le plan focal du transducteur mesuré par le capteur membrane, comparé avec le profil théorique moyenné déjà présenté sur la figure B.5.

et le champ moyenné

$$p_m(r) = \frac{1}{d} \int_{r-d/2}^{r+d/2} p(r) dr \quad (\text{B.2})$$

avec  $\lambda = 667 \mu\text{m}$  (la longueur d'onde correspondant à une onde de 2,25 MHz se propageant dans l'eau) et  $d = 1 \text{ mm}$ . Ce champ moyenné modélise le champ qui serait mesuré par un capteur linéaire de longueur  $d$ .

On observe effectivement que le champ moyenné est plus faible sur l'axe que le champ réel, et qu'il est plus large. Enfin, la courbe B.6 compare cette courbe moyennée théorique au champ expérimental mesuré par le capteur membrane. L'accord est assez bon, bien que la géométrie exacte du capteur membrane n'ait pas été prise en compte dans le calcul de la courbe théorique.

Il semble donc que le capteur membrane soit trop large pour faire une mesure fiable du champ émis par ce transducteur focalisé. Il semble par ailleurs beaucoup plus large que ce qu'annonce le constructeur (plutôt 1 mm que 200  $\mu\text{m}$ ).

Pour vérifier que cette mauvaise mesure est bien due au fait que le capteur membrane est trop large par rapport au champ acoustique, nous avons mesuré, à l'aide des trois capteurs, le champ acoustique émis par un transducteur non-focalisé (*Valpey Fisher* ISO202GP). Ce champ acoustique est par conséquent beaucoup plus large que celui émis par le transducteur focalisé dans son plan focal, et donc la largeur du capteur membrane ne devrait plus altérer la mesure. À cause de la divergence du faisceau, la distance entre le transducteur et le capteur doit être la même dans les trois mesures. Pour ce faire, à chaque changement de capteur, j'ai mesuré le temps de décalage entre le signal électrique envoyé au transducteur et le signal électrique émis par le capteur (correspondant au temps de propagation de l'onde acoustique entre le transducteur et le capteur) et j'ai placé les capteurs de façon que les temps de vol (donc les distances transducteur-capteur) soient identiques pour les trois capteurs. Puis j'ai localisé l'axe du transducteur précisément en suivant le même protocole que celui décrit précédemment pour localiser le point focal du transducteur focalisé (à la différence près que dans cette situation-ci, on cherche juste à localiser l'axe et donc on ne translate pas le capteur suivant la direction  $\vec{z}$ ). Enfin, j'ai traduit le capteur dans la direction  $\vec{x}$  pour mesurer le profil radial du champ acoustique émis par le transducteur non-focalisé. Le résultat est présenté sur la figure B.7.

## B.2.2 Recalibration de l'aiguille de 200 $\mu\text{m}$

On constate sur ce graphe que le profil mesuré par la membrane coïncide cette fois avec celui mesuré par l'aiguille de 40  $\mu\text{m}$ . En revanche, l'aiguille de 200  $\mu\text{m}$  sous-estime le champ de pression, comme on l'avait déjà vu sur la figure B.4. C'est cette aiguille qui semble mal étalonnée. Il est probable qu'elle se soit altérée depuis son étalonnage, soit par usure, soit à la suite d'une mauvaise manipulation. La courbe B.8 reprend les mêmes résultats afin de déterminer le coefficient rectificatif à appliquer à la calibration de cette aiguille : sur cette courbe sont tracées les mesures réalisées à l'aide des autres capteurs en fonction de celles réalisées à l'aide de l'aiguille de 200  $\mu\text{m}$  pour chaque valeur de  $r$ . Ce graphe permet de vérifier qu'il faut corriger le facteur de calibration de l'aiguille de 200  $\mu\text{m}$  d'un facteur  $x_{cap}$  ( $x_{cap}$  étant le coefficient directeur de la droite liant les mesures réalisées avec le capteur de référence *cap* à celles réalisées avec l'aiguille de 200  $\mu\text{m}$ ) : le facteur de calibration corrigé de l'aiguille de 200  $\mu\text{m}$  vaut

$$FC' = \frac{FC}{x_{cap}} \quad (\text{B.3})$$

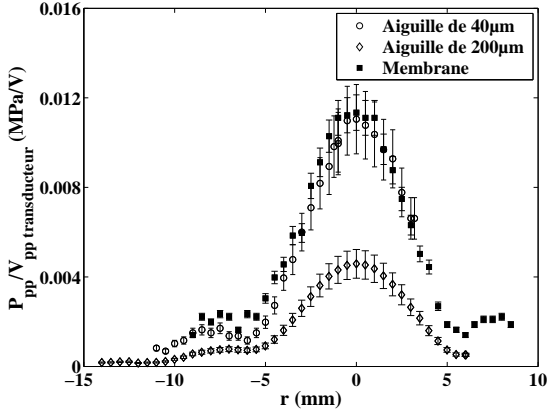


FIG. B.7 – Profil radial du champ acoustique émis par un transducteur non-focalisé à 4,4 cm du transducteur, mesuré par les trois capteurs.

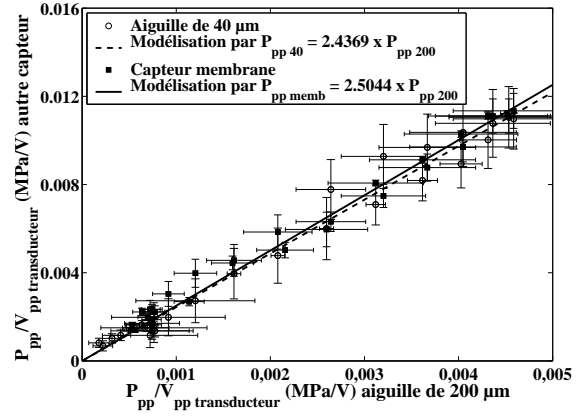


FIG. B.8 – Étalonnage de l'aiguille de 200 µm à l'aide des autres capteurs.

$FC$  étant son facteur de calibration fourni lors de la livraison.  $FC = 80 \pm 11$  mV/MPa pour une onde acoustique de 2,25 MHz.

L'incertitude sur  $x_{cap}$  vaut [1]

$$dx_{cap} = \sqrt{\frac{1}{n} \frac{\sum_{i=1}^n (V_{ppcap}(i) - x_{cap} V_{pp200}(i))^2}{\sum_{i=1}^n (V_{pp200}(i) - \overline{V_{pp200}})^2}} \quad (\text{B.4})$$

$n$  désignant le nombre de mesures réalisées avec chaque capteur, et  $\overline{V_{pp200}}$  la moyenne des mesures réalisées avec l'aiguille de 200 µm.

Le tableau suivant regroupe les facteurs de calibration corrigés de l'aiguille de 200 µm, suivant que le capteur de référence  $cap$  est l'aiguille de 40 µm ou la membrane.

Capteur de référence	Aiguille de 40µm	Membrane de 200µm
$x_{cap}$	2,44	2,50
$dx_{cap}$	0,06	0,05
$FC'$ (mV/MPa)	33	32
$dFC'$ (mV/MPa)	6	3

À partir de ces données, on vérifie que l'étalonnage de l'aiguille de 200 µm par le capteur membrane est plus précis que celui réalisé avec l'aiguille de 40 µm, ce qui est normal, le capteur membrane ayant été étalonné plus précisément. Le coefficient de calibration corrigé de l'aiguille de 200µm vaut, pour une fréquence acoustique de 2,25 MHz,

$$FC' = 32 \pm 3mV/MPa \quad (\text{B.5})$$

### B.3 Problème associé aux capteurs membrane

Nous avons vu que le capteur membrane semblait être trop large et moyenner le champ acoustique émis par le transducteur focalisé. Or, sa partie sensible est supposée avoir la

même taille que l'aiguille de  $200\ \mu\text{m}$ , qui, elle, ne moyenne pas (le profil radial du champ acoustique dans le plan focal du transducteur focalisé mesuré avec cette aiguille n'est pas plus large que celui mesuré avec l'aiguille de  $40\ \mu\text{m}$  d'après la figure B.4). La partie sensible du capteur membrane est donc plus large que ce qui est annoncé par le constructeur, la courbe B.6 indiquant même qu'elle mesurerait plutôt  $1\ \text{mm}$  (cependant, la courbe moyennée théorique ne tient pas compte de la géométrie exacte de la partie sensible du capteur, qui nous est inconnue). Nous avons écrit au constructeur pour lui signaler ce défaut. À la suite de notre courrier, il s'est effectivement aperçu que les capteurs membrane qu'il construisait étaient beaucoup plus large que ce qu'il annonçait. Après avoir revu son procédé de fabrication, il nous a envoyé un deuxième capteur membrane, dont il avait vérifié précédemment que la surface sensible mesurait bien  $200\ \mu\text{m}$  : en balayant la surface de ce capteur à l'aide d'un faisceau acoustique émis par un transducteur focalisé à  $25\ \text{MHz}$ , le constructeur a obtenu en sortie du capteur le profil représenté sur la figure B.9 et déduit de ce graphe que le capteur a une largeur de  $200\ \mu\text{m}$ .

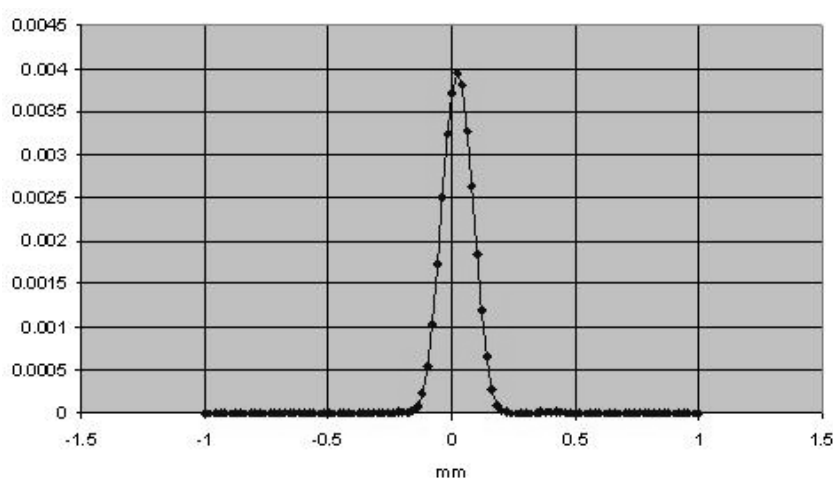


FIG. B.9 – Réponse du capteur à un faisceau acoustique focalisé de  $25\ \text{MHz}$  en fonction de la position de ce faisceau par rapport au centre du capteur, mesurée par le constructeur du capteur.

En traçant un profil radial du champ de pression émis par un de nos transducteurs focalisés à  $2,25\ \text{MHz}$ , nous avons obtenu le résultat représenté sur la figure B.10.

Nous constatons sur cette courbe que même s'il est moins large que l'ancien capteur membrane (il moyenne sur une surface plus petite, la valeur du champ mesuré au point focal étant plus grande que sur l'ancien capteur), le nouveau capteur membrane semble d'après nos mesures plus large que l'aiguille de  $200\ \mu\text{m}$  (la valeur mesurée au point focal est plus faible qu'avec cette aiguille, et le profil mesuré est plus large). Il est donc lui aussi beaucoup trop large, et mesure beaucoup plus de  $200\ \mu\text{m}$ .

La différence avec la mesure réalisée par le constructeur résulte sans doute dans la taille caractéristique du faisceau acoustique utilisé : le constructeur utilisait un faisceau de  $25\ \text{MHz}$ , donc d'une largeur typique de  $60\ \mu\text{m}$ , beaucoup plus fin que la partie sensible du capteur. Nous utilisons un faisceau de  $2,25\ \text{MHz}$ , d'une largeur typique de  $600\ \mu\text{m}$ , beaucoup plus large que la partie sensible du capteur. Il est probable que la membrane de ce capteur, même la partie qui n'est pas sensible aux ondes acoustiques, joue un rôle dans la largeur effective du capteur, comme indiqué sur la figure B.11.

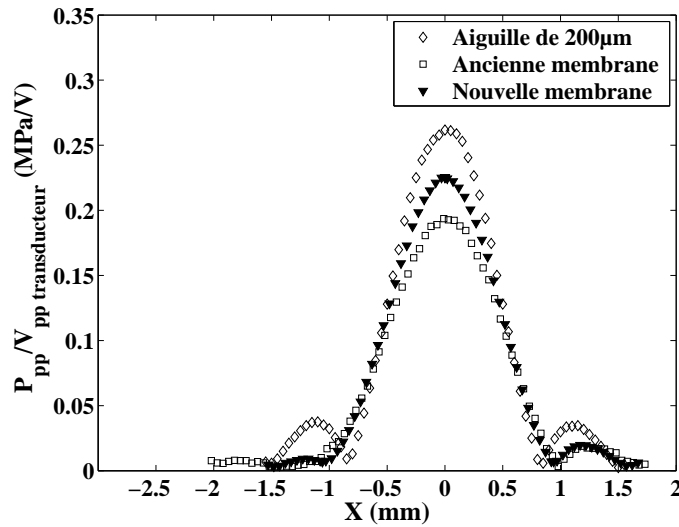


FIG. B.10 – Profil radial du champ émis par un transducteur focalisé dans son plan focal, mesuré par l’aiguille de 200 µm et les deux capteurs membrane.

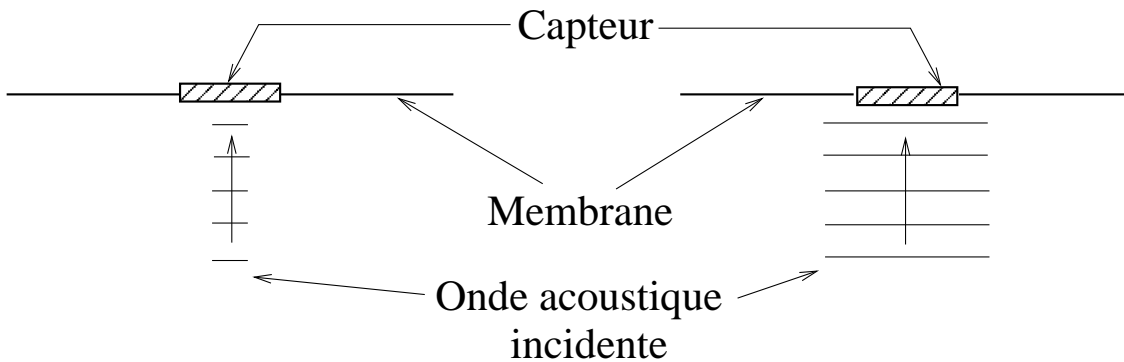


FIG. B.11 – À gauche, le faisceau acoustique est beaucoup plus fin que la partie sensible du capteur. En déplaçant le capteur perpendiculairement au faisceau acoustique, celui-ci finit par sortir de la partie sensible du capteur, qui ne délivre alors plus aucun signal. C’est de cette façon que le constructeur a déterminé la taille du capteur. À droite, le faisceau acoustique est plus large que le capteur (ce qui correspond à la configuration de mes expériences). Il semble que même si une partie du faisceau se trouve en-dehors du capteur, elle ait tout de même une influence sur celui-ci par l’intermédiaire de la membrane, qu’elle ferait par exemple vibrer. Le capteur est donc sensible à des ondes acoustiques arrivant bien au-delà de sa partie sensible. À cause de cet effet, la zone sensible du capteur a une largeur effective plus grande que sa largeur réelle.

On a cependant vu que du fait de leur calibration plus précise, ces capteurs peuvent d’être d’une grande utilité pour améliorer l’étalonnage des capteurs à aiguille à l’aide d’un champ non-focalisé, même s’ils ne peuvent pas eux-mêmes être utilisés pour mesurer le champ acoustique émis par un transducteur focalisé.

## B.4 Vérification de l'étalonnage du transducteur à partir des données fournies par son constructeur

Le transducteur avait déjà été calibré par son constructeur en envoyant le faisceau acoustique sur une cible d'aire  $A$  [2]. Le déplacement de la cible sous l'action de l'onde acoustique permet de déduire la puissance acoustique atteignant la cible, et par conséquent l'amplitude de la pression acoustique. La documentation fournie par le constructeur fournissait, pour différentes valeurs de la tension pic-pic  $V_{pp}$  aux bornes du transducteur, la puissance acoustique  $W$  mesurée sur la cible d'aire  $A$ , et la puissance par unité de surface  $W/A$ . On peut en déduire  $A$  et le rayon  $R$  de la cible, en supposant que celle-ci soit un disque.

$V_{pp}$ (V)	$W$ (W)	$W/A$ (W/cm <sup>2</sup> )	$A$ (cm <sup>2</sup> )	$R$ (cm)
43	5,61	0,46	12,2	2,0
72	19,96	1,64	12,2	2,0
101	41,94	3,45	12,2	2,0
108	48,65	4	12,2	2,0

L'énergie volumique de l'onde acoustique vaut

$$\langle E \rangle = \frac{P^2}{2\rho c^2} \quad (\text{B.6})$$

$$= \frac{W}{cA} \quad (\text{B.7})$$

où  $P$  est l'amplitude de pression acoustique,  $\rho$  est la masse volumique du milieu de propagation,  $c$  est la vitesse du son dans ce milieu,  $W$  est la puissance acoustique reçue par la cible et  $A$  est l'aire de la cible. Il en résulte que

$$W = \frac{AP^2}{2\rho c} \quad (\text{B.8})$$

On suppose que la cible qui a été utilisée par le constructeur pour faire ces mesures est un disque circulaire de rayon  $R$ . La puissance  $dW$  reçue par la portion de cible entre  $r$  et  $r + dr$  vaut

$$dW = \frac{P^2(r)}{2\rho c} dA \quad (\text{B.9})$$

$$= \frac{\pi r P^2(r)}{\rho c} dr \quad (\text{B.10})$$

et la puissance totale reçue par la cible vaut donc

$$W = \frac{\pi}{\rho c} \int_0^R r P^2(r) dr \quad (\text{B.11})$$

L'amplitude de pression acoustique vaut

$$P(r) = 2P \frac{J_1\left(\frac{\pi r}{\lambda}\right)}{\frac{\pi r}{\lambda}} \quad (\text{B.12})$$

$P$  étant l'amplitude de la pression acoustique au point focal et  $\lambda$  la longueur d'onde acoustique, et donc

$$W = \frac{4\pi P^2}{\rho c} \int_0^R r \left( \frac{J_1\left(\frac{\pi r}{\lambda}\right)}{\frac{\pi r}{\lambda}} \right)^2 dr \quad (\text{B.13})$$

$$= \frac{2\lambda^2 P^2}{\pi \rho c} \left[ 1 - J_0^2\left(\frac{\pi r}{\lambda}\right) - J_1^2\left(\frac{\pi r}{\lambda}\right) \right]_0^R \quad (\text{B.14})$$

$$\stackrel{R \gg \lambda}{=} \frac{2\lambda^2 P^2}{\pi \rho c} \quad (\text{B.15})$$

On en déduit que

$$P = \sqrt{\frac{\pi \rho c W}{2}} \frac{1}{\lambda} \quad (\text{B.16})$$

Cette expression permet de déterminer  $P$  à partir des données du tableau précédent :

$V_{pp}$ (V)	$W$ (W)	$P$ (MPa)
43	5,61	5,45
72	19,96	10,3
101	41,94	14,9
108	48,65	16,1

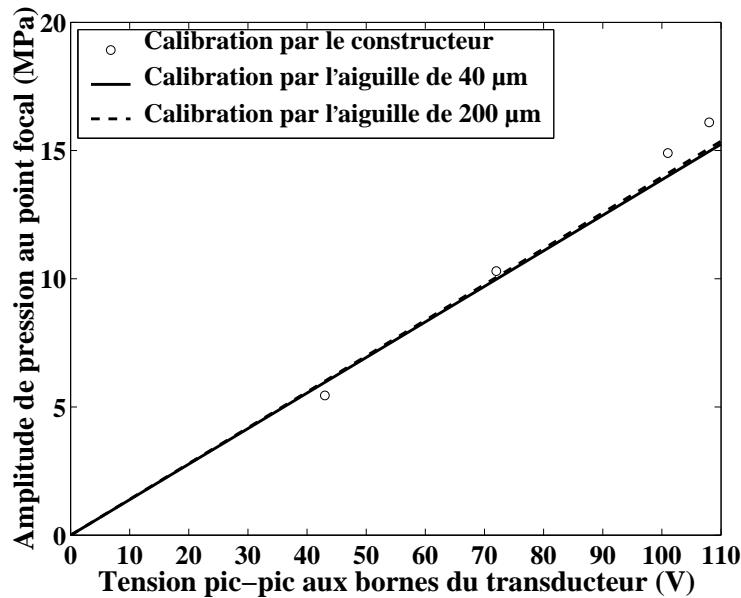


FIG. B.12 – Comparaison des mesures données par le constructeur avec les calibrations obtenue à l'aide de l'aiguille de 40 µm et de l'aiguille de 200 µm (après lesquelles nous avons obtenu des pentes de  $0,14 \pm 0,02$  MPa/V).

Les résultats de ces mesures, comparés avec la calibration que nous avons obtenu à l'aide de l'aiguille de 40 µm, sont représentés sur la figure B.12. Il y a bon accord entre la calibration du constructeur et nos calibrations utilisant nos deux capteurs à aiguille, d'où l'on peut déduire que ces deux capteurs sont adaptés à la calibration de nos transducteurs.



## Conclusion

Les résultats présentés dans ce chapitre permettent de déduire que les deux capteurs à aiguille sont bien adaptés à la calibration de nos transducteurs focalisés, moyennant de corriger le facteur de calibration de l'aiguille de 200  $\mu\text{m}$ , mais que les capteurs à membrane, eux, sont beaucoup trop larges. En revanche, ils sont très utiles pour améliorer la calibration des aiguilles, en utilisant des champs acoustiques non focalisés.

## Références de l'annexe B

- [1] K. W. Smillie. *An introduction to regression and correlation*. Academic Press, 1966.
- [2] S. E. Fick et F. R. Breckenridge. Ultrasonic Power Output Measurement by Pulsed Radiation Pressure. *Journal of Research of the National Institute of Standards and Technology*, 101(5) :659–669, 1996.



## Annexe C

# Mesure du coefficient de réflexion de l'onde acoustique à la surface du transducteur

### C.1 Mesure expérimentale du coefficient de réflexion en pression de l'onde à la surface du transducteur

Lors des expériences sur les interfaces réfléchissantes (chapitre 6), l'onde acoustique se réfléchit successivement sur l'interface fluide et la surface du transducteur et est confinée dans la cavité acoustique ainsi formée. Afin de traiter ces expériences, il est indispensable de bien caractériser le coefficient de réflexion de l'onde acoustique sur la surface du transducteur, car l'amplitude de l'onde acoustique totale incidente à l'interface est directement dépendante de ce coefficient de réflexion.

Pour déterminer le coefficient de réflexion de la surface du transducteur lorsque celui-ci est plongé dans l'eau, j'ai pu utiliser le signal de tension mesuré par l'oscilloscope (figure 3.1). En effet, l'onde retour, lorsqu'elle revient vers le transducteur, induit un signal électrique dans le circuit par transduction acousto-électrique au niveau de la couche piézoélectrique du transducteur. Ce signal est un signal sinusoïdal de même fréquence que l'onde acoustique, et peut être visualisé sur l'oscilloscope. Il est représenté sur la figure C.1.

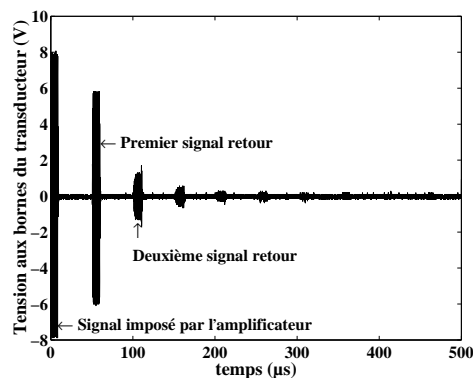


FIG. C.1 – Tension aux bornes du transducteur visualisée à l'oscilloscope : on visualise le signal d'émission et les ondes retour successives.

Les mesures sur un tel signal de l'amplitude pic-pic  $V_i$  de la  $i^e$  onde retour peuvent être lues sur le tableau suivant (pour ces mesures, le transducteur émettait des impulsions acoustiques de fréquence 2,25 MHz pendant 30 périodes. Lors de l'émission, il était alimenté par un signal d'amplitude 5,25 V. Le liquide était de l'eau, dont la surface se trouvait dans le plan focal du transducteur) :

Onde retour n°i	1	2	3	4	5	6	7
$V_i$ (V)	2,344	1,000	0,4125	0,1797	0,07750	0,02563	0,00875
$V_{i+1}/V_i$	0,43	0,41	0,44	0,43	0,33	0,34	

De ce tableau, en négligeant l'absorption de l'onde acoustique et en considérant l'interface eau-air comme totalement réfléchissante, on déduit que le coefficient de réflexion de la surface du transducteur vaut  $-0,38 \pm 0,05$ .

Il est négatif à cause de la structure du transducteur, schématisée sur la figure C.2. Un

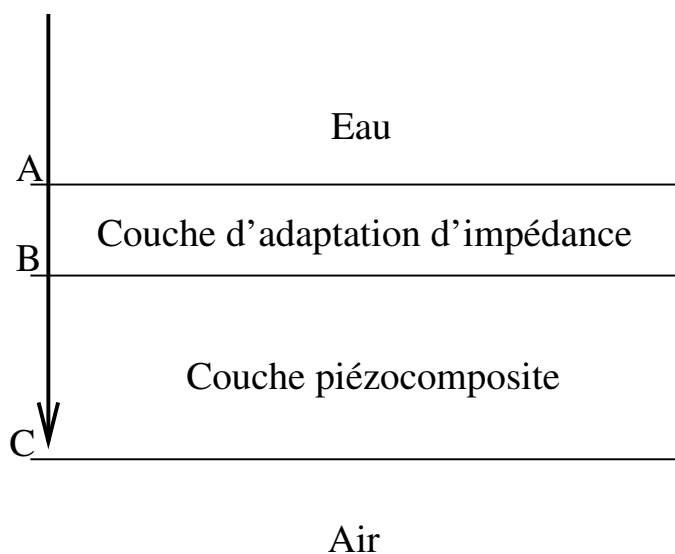


FIG. C.2 – Coupe de la surface émettrice du transducteur.

rayon acoustique, réfléchi par la surface de l'eau, arrive sur le transducteur en passant par les points  $A$ ,  $B$  et  $C$ , situés respectivement aux interfaces eau-adaptation d'impédance, adaptation d'impédance-couche piézocomposite et couche piézocomposite-air. Le rôle de l'adaptation d'impédance est d'éviter que les ondes acoustiques émises par la couche piézocomposite ne soient réfléchies vers l'intérieur du transducteur, et qu'elles soient totalement transmises à l'eau. Cela est réversible : les ondes acoustiques venant de l'eau sont totalement transmises vers l'intérieur du transducteur et le rayon acoustique n'est réfléchi ni en  $A$ , ni en  $B$ . Le seul endroit où il est réfléchi est en  $C$ , à l'interface couche piézocomposite-air. Le coefficient de réflexion de cette interface est

$$R = \frac{Z_{air} - Z_{piézo}}{Z_{air} + Z_{piézo}} \quad (C.1)$$

La couche piézocomposite étant un solide, son impédance acoustique est nécessairement très grand devant celui de l'air et le  $R = -1$ . En pratique, une partie de l'onde acoustique n'est pas réfléchi car elle est absorbée en traversant les trois couches du transducteur, ce qui explique que  $|R| < 1$ , mais le coefficient de réflexion du transducteur est nécessairement négatif.

Pour déterminer le coefficient de réflexion de la surface du transducteur lorsque celui-ci est plongé dans un autre liquide (comme l'huile silicone DC200 par exemple), on peut utiliser le résultat précédent en calculant l'impédance acoustique  $Z_{transd}$  du transducteur connaissant l'impédance  $Z_{eau}$  de l'eau et le coefficient de réflexion  $R_{eau-transd}$  sur l'interface eau/transducteur :

$$R_{eau-transd} = \frac{Z_{transd} - Z_{eau}}{Z_{transd} + Z_{eau}} \quad (C.2)$$

donc

$$Z_{transd} = Z_{eau} \frac{1 + R_{eau-transd}}{1 - R_{eau-transd}} \quad (C.3)$$

Ensuite, on calcule le coefficient de réflexion  $R_{liquide-transd}$  sur l'interface liquide/transducteur connaissant l'impédance du transducteur et l'impédance  $Z_{liquide}$  du liquide :

$$R_{liquide-transd} = \frac{Z_{transd} - Z_{liquide}}{Z_{transd} + Z_{liquide}} \quad (C.4)$$

On obtient pour l'huile DC200 un coefficient de réflexion de  $-0,56 \pm 0,05$ .

## C.2 Coefficient de réflexion effectif du transducteur

Le but de cette partie est de calculer le coefficient de réflexion effectif du transducteur tenant compte du fait que certains rayons acoustiques, à cause de la courbure de l'interface, ne reviennent pas vers le transducteur. Dans toute cette partie, nous considérons une interface eau-air, totalement réfléchissante.

Lorsque l'interface liquide est plane et située dans le plan focal du transducteur, les miroirs acoustiques formés par la surface du transducteur et l'interface fluide sont conjugués. Lorsque l'interface est déformée par la pression de radiation, ces deux miroirs ne sont plus conjugués : le fait que la surface libre de l'eau soit courbée entraîne une défocalisation du faisceau et donc une réduction de l'amplitude des échos à l'intérieur de la cavité, certains rayons acoustiques étant réfléchis en dehors de la surface du transducteur. Cette perte d'énergie peut être estimée grâce à l'acoustique géométrique : certains rayons acoustiques réfléchis par l'interface ne reviennent pas vers le transducteur, mais sont réfléchis à l'extérieur de celui-ci (figure C.3). Plus l'interface est courbée, plus nombreux sont les

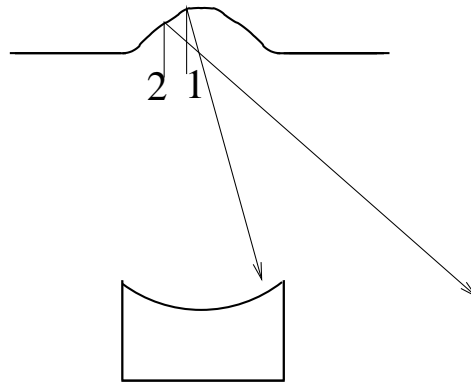


FIG. C.3 – Le rayon acoustique 1, après réflexion sur la déformation, est réfléchi vers le transducteur. Le rayon acoustique 2 est réfléchi en-dehors du transducteur.

rayons acoustiques qui sont réfléchis en-dehors du transducteur et qui ne sont donc pas réfléchis par celui-ci. Ce phénomène peut donc être modélisé en introduisant un coefficient de réflexion effectif du transducteur décroissant avec la courbure de la déformation. Considérons un rayon arrivant sur l'interface, celle-ci étant située dans le plan focal du transducteur ou près de ce plan (figure C.4). Le rayon incident est vertical, l'onde acous-

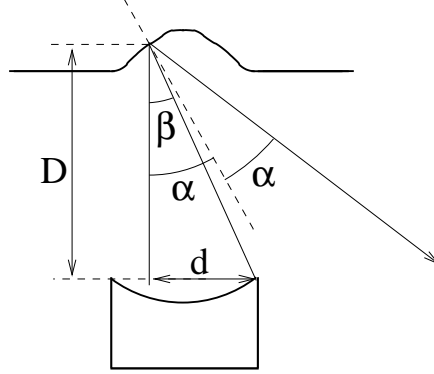


FIG. C.4 – Un rayon acoustique arrivant sur l'interface avec un angle d'incidence  $\alpha$  est réfléchi avec un angle de réflexion  $\alpha$ . L'angle maximal entre le rayon incident et le rayon réfléchi qui soit tel que celui-ci revienne vers le transducteur est l'angle  $\beta$ .

tique incidente étant considérée comme plane dans la tache focale. L'angle d'incidence est par conséquent égal à l'angle d'inclinaison de l'interface par rapport à l'horizontale à l'endroit où le rayon est réfléchi. Le rayon réfléchi revient sur le transducteur à condition que l'angle entre le rayon incident et le rayon réfléchi soit inférieur à l'angle limite  $\beta$  tel que  $\tan(\beta) = \frac{d}{D}$ . Le rayon de la tache focale étant très petit devant celui du transducteur,  $d$  est approximativement égal au rayon  $a$  du transducteur. L'interface étant située dans le plan focal ou proche de celui-ci, et la hauteur de la déformation étant très petite devant la distance focale du transducteur,  $D$  est approximativement égale à la distance focale  $F = 2a$  du transducteur et donc

$$\tan(\beta) = \frac{1}{2} \quad (\text{C.5})$$

Le rayon est réfléchi vers le transducteur si  $2\alpha \leq \beta$  soit

$$\alpha \leq \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{1}{2}\right) \quad (\text{C.6})$$

ce qui vaut approximativement  $13,3^\circ$ .

Tant que l'amplitude de pression acoustique incidente sur l'axe du faisceau  $p_{i0}$  est suffisamment faible pour que l'interface ne soit à aucun endroit inclinée de plus de  $13,3^\circ$ , la totalité de l'énergie acoustique incidente est réfléchie vers le transducteur, et le coefficient de réflexion effectif de celui-ci vaut  $-0,38 \pm 0,05$ . Pour une certaine valeur seuil  $p_{is}$  de  $p_{i0}$ , cette condition est violée au point d'inflexion de l'interface, situé à une distance  $r_0$  de l'axe de la déformation. Pour des valeurs de  $p_{i0}$  supérieures à  $p_{is}$ , elle est violée sur la portion de l'interface comprise entre deux valeurs  $r_1$  et  $r_2$  telles que  $r_2 - r_1$  augmente avec  $p_{i0}$ , et telles que  $r_1 < r_0 < r_2$  (figure C.5).

Le coefficient de réflexion effectif du transducteur décroît donc avec la pression incidente  $p_{i0}$  sur l'axe de la déformation (donc avec la hauteur de la déformation). Nous avons déjà calculé le profil radial de la déformation (expression 6.1), qui va nous permettre, à partir de

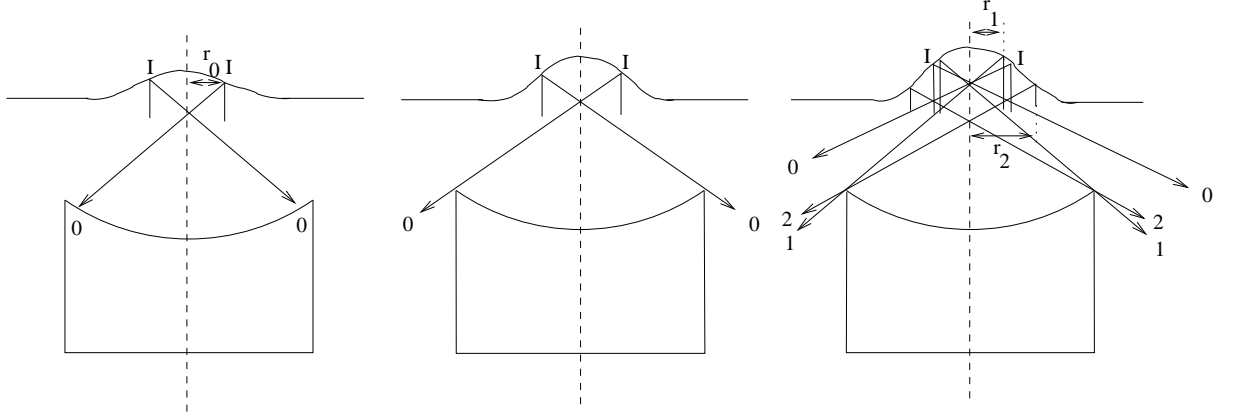


FIG. C.5 – Sur ces trois schémas, l'indice 0 désigne le rayon qui est réfléchi par l'interface en son point d'inflexion  $I$ , situé à une distance  $r_0$  de l'axe de la déformation. Pour une valeur seuil  $p_{is}$  de l'amplitude de pression acoustique incidente  $p_{i0}$  (schéma du milieu), l'interface est inclinée en son point d'inflexion d'un angle  $\beta/2$  par rapport à l'horizontale. Seuls les rayons arrivant à la distance  $r_0$  de l'axe sont réfléchis en-dehors du transducteur. Pour  $p_{i0} < p_{is}$  (schéma de gauche), l'interface n'est à aucun endroit suffisamment inclinée pour que des rayons soient réfléchis en dehors du transducteur. Pour  $p_{i0} > p_{is}$  (schéma de droite), il existe toute une portion de l'interface inclinée d'un angle supérieur à  $\beta/2$  par rapport à l'interface, délimitée par les distances à l'axe  $r_1$  et  $r_2$  (correspondant aux points d'incidence des rayons 1 et 2 représentés sur ce schéma). L'énergie acoustique arrivant dans cette zone ne sera pas réfléchi par la surface du transducteur. Il en résulte une diminution du coefficient de réflexion effectif de celui-ci.

la dérivée du profil radial, de calculer l'angle d'incidence d'un rayon arrivant verticalement en tout point de la déformation :

$$h(r) = \frac{p_{i0}^2 \omega_0^2}{4\rho c^2} \int_0^\infty J_0(kr) \frac{\exp\left(-\frac{k^2 \omega_0^2}{8}\right)}{\rho g + \sigma k^2} k dk \quad (\text{C.7})$$

avec  $A = \pm \frac{1}{\rho_1 c_1^2} \frac{\rho_1^2 c_1^2 + \rho_2^2 c_2^2 - 2\rho_1 \rho_2 c_1^2}{(\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2)^2}$  et  $\omega_0 = 0,86\lambda$ ,  $\lambda$  étant la longueur d'onde acoustique. Le signe de  $A$  dépend du sens de propagation de l'onde acoustique (tableau de la page 79). Sa dérivée vaut

$$h'(r) = -\frac{p_{i0}^2 \omega_0^2}{4\rho c^2} \int_0^\infty \frac{e^{-\omega_0^2 k^2 / 8}}{(\rho_1 - \rho_2)g + \sigma k^2} J_1(kr) k^2 dk \quad (\text{C.8})$$

La valeur absolue de  $h'(r)$  vaut  $\tan(\alpha)$ , et la valeur maximale de  $|h'(r)|$  pour que le rayon réfléchi revienne vers le transducteur est donc telle que

$$|h'(r_{1,2})| = \tan\left(\frac{\beta}{2}\right) \quad (\text{C.9})$$

Or,  $\tan(\beta) = \frac{2 \tan(\beta/2)}{1 - \tan^2(\beta/2)}$  donc

$$\tan\left(\frac{\beta}{2}\right) = -\frac{1}{\tan(\beta)} \left(1 \pm \sqrt{1 + \tan^2(\beta)}\right) \quad (\text{C.10})$$

$\beta/2$  étant compris entre  $0$  et  $90^\circ$ , sa tangente est positive et la seule solution acceptable est

$$\tan\left(\frac{\beta}{2}\right) = -\frac{1}{\tan(\beta)} \left(1 - \sqrt{1 + \tan^2(\beta)}\right) \quad (\text{C.11})$$

soit, en utilisant le fait que  $\tan(\beta) = 1/2$  :

$$\tan\left(\frac{\beta}{2}\right) = \sqrt{5} - 2 \quad (\text{C.12})$$

donc les valeurs de  $r$  telles que les rayons arrivant en  $r$  soient réfléchis en-dehors du transducteur sont celles pour lesquelles

$$|h'(r)| > \sqrt{5} - 2 \quad (\text{C.13})$$

Un programme réalisé sous Matlab permet de calculer, pour différentes valeurs de l'amplitude de pression incidente  $p_{i0}$ , la hauteur  $h$  de la déformation en  $r = 0$  à partir de l'expression C.7, et la dérivée de sa hauteur pour toute valeur de  $r$  à partir de C.8. De là, on déduit, pour chaque valeur de la hauteur  $h$  de la déformation, s'il y a des valeurs de  $r$  telles que  $|h'(r)| > \sqrt{5} - 2$  (les rayons arrivant à ces distances de l'axe ne seront pas réfléchis vers le transducteur) et si oui, quelles sont les valeurs extrêmes  $r_1$  et  $r_2$  entre lesquelles ces rayons arrivent. Les mesures de  $r_1$  et  $r_2$  en fonction de  $h$  sont présentées sur la figure C.6.

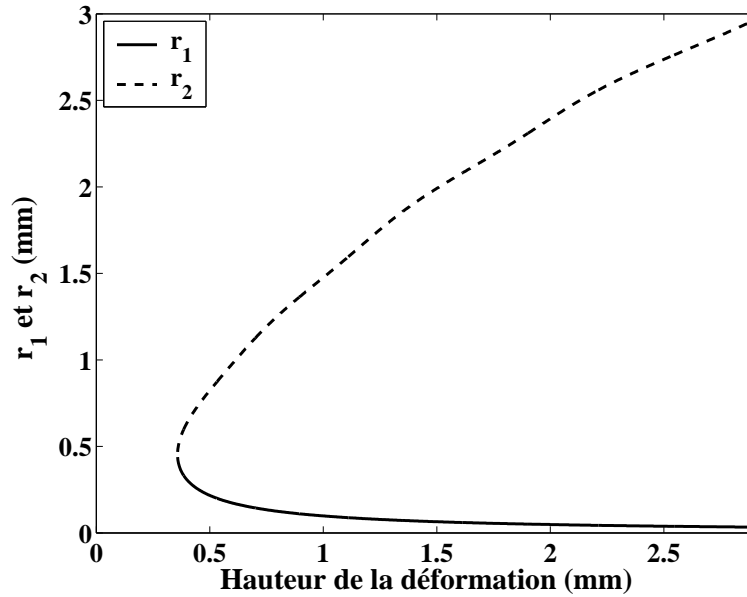


FIG. C.6 – Rayons  $r_1$  et  $r_2$  entre lesquels les rayons arrivant sont réfléchis en-dehors du transducteur.

La puissance acoustique totale revenant vers le transducteur est alors égale à

$$\mathcal{P} = \int_0^{r_1} I_i(r) 2\pi r dr + \int_{r_2}^{\infty} I_i(r) 2\pi r dr \quad (\text{C.14})$$



$I_i(r)$  désignant le profil radial en intensité du faisceau acoustique incident à l'interface :

$$I_i(r) = \frac{p_i(r)^2}{2\rho c} \quad (\text{C.15})$$

$$= \frac{2p_i^2(0)}{\rho c} \left( \frac{J_1\left(\frac{\pi r}{\lambda}\right)}{\frac{\pi r}{\lambda}} \right)^2 \quad (\text{C.16})$$

Pour obtenir cette dernière expression, une hypothèse très forte a été faite : on a en effet supposé que le profil de pression incidente était bessélien. Cela est vrai pour le faisceau entrant, mais il n'est pas évident que cela reste vrai pour les faisceaux réfléchis successifs.

La puissance revenant vers le transducteur vaut alors

$$\mathcal{P} = \frac{2p_i^2(0)}{\rho c} \left( \int_0^{r_1} \left( \frac{J_1\left(\frac{\pi r}{\lambda}\right)}{\frac{\pi r}{\lambda}} \right)^2 2\pi r dr + \int_{r_2}^{\infty} \left( \frac{J_1\left(\frac{\pi r}{\lambda}\right)}{\frac{\pi r}{\lambda}} \right)^2 2\pi r dr \right) \quad (\text{C.17})$$

$$= \frac{2\lambda^2 p_i^2(0)}{\pi \rho c} \left( 1 - J_0^2\left(\frac{\pi r_1}{\lambda}\right) - J_1^2\left(\frac{\pi r_1}{\lambda}\right) + J_0^2\left(\frac{\pi r_2}{\lambda}\right) + J_1^2\left(\frac{\pi r_2}{\lambda}\right) \right) \quad (\text{C.18})$$

La puissance acoustique incidente totale valant

$$\mathcal{P}_i = \frac{4\lambda^2 p_i^2(0)}{\rho c} \int_0^{\infty} \frac{J_1^2\left(\frac{\pi r}{\lambda}\right)}{\pi r} dr \quad (\text{C.19})$$

$$= \frac{2\lambda^2 p_i^2(0)}{\pi \rho c} \quad (\text{C.20})$$

le coefficient de réflexion effectif en intensité du transducteur vaut

$$\mathcal{R}^* = R'^2 \left( 1 - J_0^2\left(\frac{\pi r_1}{\lambda}\right) - J_1^2\left(\frac{\pi r_1}{\lambda}\right) + J_0^2\left(\frac{\pi r_2}{\lambda}\right) + J_1^2\left(\frac{\pi r_2}{\lambda}\right) \right) \quad (\text{C.21})$$

$R'$  étant son coefficient de réflexion en pression lorsque le faisceau incident est entièrement réfléchi vers le transducteur. Le coefficient de réflexion effectif en pression du transducteur vaut par conséquent

$$R^* = R' \sqrt{1 - J_0^2\left(\frac{\pi r_1}{\lambda}\right) - J_1^2\left(\frac{\pi r_1}{\lambda}\right) + J_0^2\left(\frac{\pi r_2}{\lambda}\right) + J_1^2\left(\frac{\pi r_2}{\lambda}\right)} \quad (\text{C.22})$$

Ce coefficient de réflexion effectif est représenté sur la figure C.7.

Nous avons utilisé, pour démontrer cette expression, l'expression bessélienne C.16 du profil radial en intensité du faisceau acoustique incident à l'interface tout en ne perdant pas de vue le fait que cette expression suppose l'hypothèse très forte suivant laquelle les faisceaux qui se sont réfléchis plusieurs fois sur le transducteur et l'interface eau-air restent besséliens. Nous allons maintenant tester l'influence de ce terme spatial sur le coefficient de réflexion effectif du transducteur. En effet, nous aurions pu utiliser l'expression gaussienne approchée du faisceau incident :

$$I_i(r) = \frac{p_i^2(0)}{2\rho c} e^{-2r^2/\omega_0^2} \quad (\text{C.23})$$

avec  $\omega_0 = 0,86\lambda$ . Dans ce cas, la puissance réfléchiée vers le transducteur vaut

$$\mathcal{P} = \frac{p_i^2(0)}{2\rho c} \left( \int_0^{r_1} e^{-2r^2/\omega_0^2} 2\pi r dr + \int_{r_2}^{\infty} e^{-2r^2/\omega_0^2} 2\pi r dr \right) \quad (\text{C.24})$$

$$= \frac{\omega_0^2 \pi p_i^2(0)}{4\rho c} \left( e^{-2r_2^2/\omega_0^2} - e^{-2r_1^2/\omega_0^2} + 1 \right) \quad (\text{C.25})$$

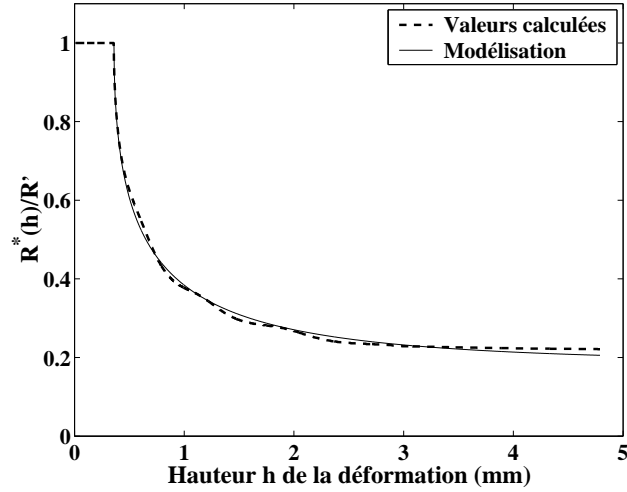


FIG. C.7 – Coefficient de réflexion effectif en pression  $R^*$  du transducteur en fonction de la hauteur de la déformation, calculé d’après l’expression C.22. On le modélise par l’expression  $\frac{R^*(h)}{R'} = a + (1 - a) \exp\left(-\sqrt{\frac{h-h_0}{b}}\right)$  avec  $a=0,186$  et  $b=0,320$  mm.  $h_0 = 0,36$  mm est la hauteur seuil de la déformation, déterminée numériquement, pour laquelle seuls les rayons acoustiques arrivant sur le point d’inflexion de la déformation sortent du transducteur.

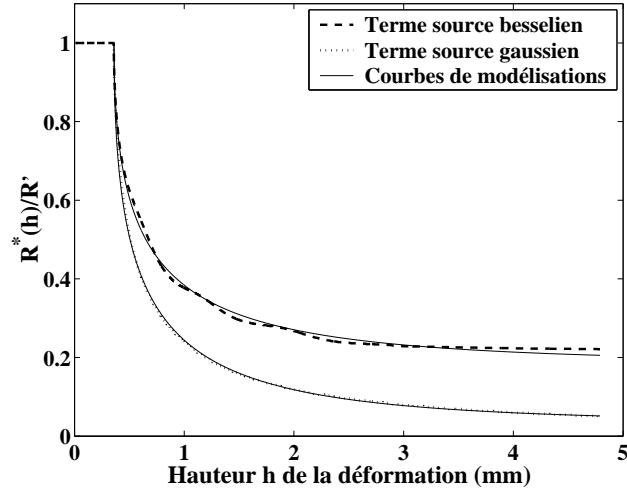


FIG. C.8 – Coefficient de réflexion effectif en pression  $R^*$  du transducteur en fonction de la hauteur de la déformation, pour un terme source bessilien (expression C.22) et un terme source gaussien (expression C.28). On le modélise par l’expression  $\frac{R^*(h)}{R'} = a + (1 - a) \exp\left(-\sqrt{\frac{h-h_0}{b}}\right)$  avec  $a=0,186$  et  $b=0,320$  mm pour le terme source bessilien,  $a=0,034$  et  $b=0,275$  mm pour le terme source gaussien.  $h_0 = 0,36$  mm est la hauteur seuil de la déformation, déterminée numériquement, pour laquelle seuls les rayons acoustiques arrivant sur le point d’inflexion de la déformation sortent du transducteur.

La puissance incidente totale valant dans ce cas

$$\mathcal{P}_i = \frac{\omega_0^2 \pi p_i^2(0)}{4\rho c} \quad (\text{C.26})$$

le coefficient de réflexion effectif en énergie du transducteur vaut

$$\mathcal{R}^* = R'^2 \left( e^{-2r_2^2/\omega_0^2} - e^{-2r_1^2/\omega_0^2} + 1 \right) \quad (\text{C.27})$$

et donc son coefficient de réflexion effectif en pression vaut

$$R^* = R' \sqrt{e^{-2r_2^2/\omega_0^2} - e^{-2r_1^2/\omega_0^2} + 1} \quad (\text{C.28})$$

La figure C.8 permet de comparer les expressions C.22 et C.28. On constate que le coefficient de réflexion effectif du transducteur est très sensible au terme source utilisé pour décrire le faisceau acoustique incident à l'interface. En particulier, le coefficient calculé en utilisant un terme source gaussien est systématiquement inférieur à celui calculé en utilisant un terme source bessélien (à cause du poids des lobes de diffraction). Comme la forme exacte du faisceau incident n'est pas connue et que les effets de diffraction n'ont pas été pris en compte dans ce modèle d'acoustique géométrique, l'évaluation de  $R^*(h)$  reste semi-quantitative. Dans toute cette thèse, nous avons utilisé l'expression C.22, car c'est en utilisant cette expression que nous décrivions le mieux les courbes expérimentales.



## Annexe D

# Propagation d'un faisceau gaussien

### D.1 Faisceau gaussien

Dans cette annexe, inspirée de la référence [1], nous allons décrire la propagation d'un faisceau laser gaussien. Un faisceau laser se propage le long de l'axe  $Oz$ . On note  $r$  la distance à l'axe  $z$  (figure D.1).

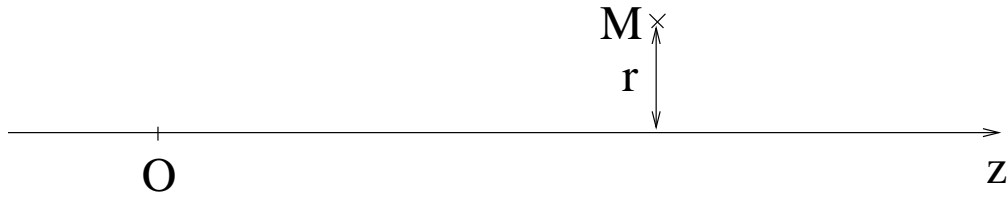


FIG. D.1 – Notations utilisées dans cette annexe : le faisceau laser se propage le long de l'axe  $Oz$ . La distance à l'axe est notée  $r$ .

L'équation d'onde s'écrit

$$\vec{\Delta}\vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad (\text{D.1})$$

$\vec{E}$  étant le champ électrique associé à l'onde électromagnétique, et  $c$  la vitesse de propagation de l'onde. Supposons qu'il s'agisse d'une onde monochromatique. On peut alors écrire  $|\vec{E}| = A(x, y, z)e^{i\omega t}$  et écrire l'équation d'onde sous la forme

$$\Delta A + k^2 A = 0 \quad (\text{D.2})$$

On cherche la solution sous la forme d'une onde plane perturbée :

$$A(x, y, z) = e^{-ikz} \psi(x, y, z) \quad (\text{D.3})$$

En introduisant cette forme dans l'équation d'onde, celle-ci devient

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - 2ik \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0 \quad (\text{D.4})$$

En supposant que  $\psi$  varie lentement suivant  $z$ , on peut écrire

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - 2ik \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0 \quad (\text{D.5})$$

La solution de cette équation s'écrit sous la forme

$$\psi(x, y, z) = \exp \left( -i \left( P(z) + \frac{kr^2}{2q(z)} \right) \right) \quad (\text{D.6})$$

$P(z)$  est un paramètre complexe traduisant le comportement de l'onde le long de l'axe  $Oz$  (sa partie réelle décrit l'évolution de la phase de l'onde sur l'axe, et sa partie imaginaire décrit l'évolution de l'amplitude de l'onde sur l'axe).  $q(z)$  est un paramètre complexe traduisant le comportement de l'onde au voisinage de l'axe  $Oz$  (sa partie réelle décrit l'évolution de la surface d'onde et sa partie imaginaire décrit l'évolution de l'amplitude de l'onde dans la direction radiale.)

En réintroduisant cette expression dans l'équation d'onde, on démontre que

$$\frac{dP}{dz} = -\frac{i}{q(z)} \quad (\text{D.7})$$

$$\frac{dq}{dz} = 1 \quad (\text{D.8})$$

Dans la suite de cette annexe, nous allons nous intéresser principalement au paramètre  $q(z)$ . Il résulte des résultats qui précèdent qu'on peut écrire  $q(z)$  sous la forme

$$q(z) = q_0 + z \quad (\text{D.9})$$

ou encore, en introduisant deux paramètres réels  $R(z)$  et  $\omega(z)$  :

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{R(z)} - i \frac{\lambda}{\pi\omega^2(z)} \quad (\text{D.10})$$

$\lambda$  est la longueur d'onde du laser.  $R(z)$  est le rayon de courbure de l'onde en  $z$  et  $\omega(z)$  la distance caractéristique de décroissance de son amplitude.

On définit l'origine de l'axe  $Oz$  en un point tel que  $R(0) = \infty$ , c'est-à-dire que les surfaces d'onde sont planes en  $z = 0$ . Alors

$$q_0 = i \frac{\pi\omega_0^2}{\lambda} \quad (\text{D.11})$$

et comme

$$\frac{1}{q_0 + z} = \frac{1}{R(z)} - i \frac{\lambda}{\pi\omega^2(z)} \quad (\text{D.12})$$

on déduit les expressions de  $R(z)$  et  $\omega(z)$  :

$$R(z) = z \left( 1 + \left( \frac{z_0}{z} \right)^2 \right) \quad (\text{D.13})$$

$$\omega(z) = \omega_0 \sqrt{1 + \left( \frac{z}{z_0} \right)^2} \quad (\text{D.14})$$

la longueur  $z_0 = \frac{\pi\omega_0^2}{\lambda}$  étant appelée la longueur de Rayleigh du faisceau.

Le profil en intensité du faisceau s'écrit sous la forme  $I(r, z) = I_0(z)e^{-2r^2/\omega^2(z)}$  et est représenté sur la figure D.2.  $\omega(z)$  est la distance à l'axe telle que  $I(\omega(z)) = I_0(z)e^{-2}$ . Son évolution en fonction de  $z$  est représentée sur la figure D.3. La position sur l'axe  $z$  telle que  $\omega(z)$  est minimal est appelée le col du faisceau.

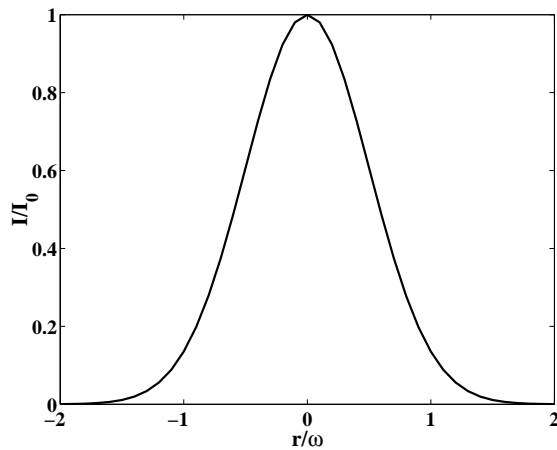


FIG. D.2 – Profil transversal du faisceau gaussien

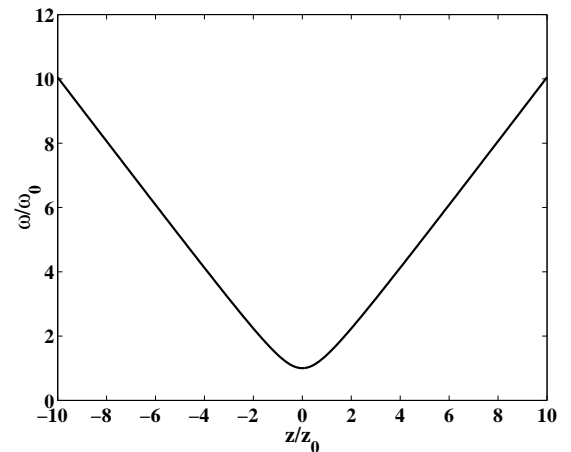


FIG. D.3 – Profil longitudinal du faisceau gaussien

## D.2 Transformation d'un faisceau gaussien par une lentille

On cherche ici à calculer la largeur du faisceau gaussien transmis à travers une lentille en fonction de la distance  $z$  à la lentille.

On démontre qu'une lentille conserve la nature gaussienne de l'onde. Elle ne change que son rayon de courbure : le paramètre  $q$  du faisceau est modifié, de sorte que

$$\frac{1}{q'(z)} = \frac{1}{q(z)} - \frac{1}{f} \quad (\text{D.15})$$

$f$  étant la focale de la lentille.

Considérons un faisceau gaussien incident sur une lentille  $L$  de focale  $f$ , le col du faisceau incident se trouvant sur la lentille, en  $z = 0$ . Le col du faisceau incident vaut  $\omega_0$  (figure D.4).

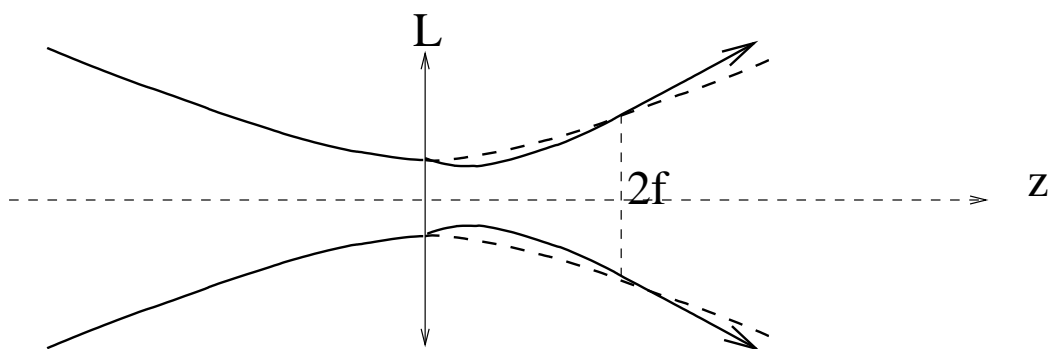


FIG. D.4 – Transformation d'un faisceau gaussien par une lentille. Les lignes pointillées représentent le profil qu'aurait le faisceau aval en l'absence de lentille.

Le faisceau en aval de la lentille est décrit par le paramètre  $q'(z)$  tel que

$$\begin{cases} \frac{1}{q'_0} = \frac{1}{q_0} - \frac{1}{f} \\ q'(z) = q'_0 + z \end{cases} \quad (\text{D.16})$$

De ces équations, on déduit que

$$\begin{cases} q'_0 = \frac{q_0 f}{f - q_0} \\ q'(z) = \frac{z f + q_0 (f - z)}{f - q_0} \end{cases} \quad (\text{D.17})$$

Le col du faisceau incident étant situé en  $z = 0$ ,  $q_0 = iz_0$  avec  $z_0 = \frac{\pi \omega_0^2}{\lambda}$ .

$$\frac{1}{q'(z)} = \frac{f - q_0}{z f + q_0 (f - z)} \quad (\text{D.18})$$

$$= \frac{(f - q_0)(z f - q_0 (f - z))}{(z f + q_0 (f - z))(z f - q_0 (f - z))} \quad (\text{D.19})$$

$$= \frac{z f^2 + q_0^2 (f - z) - z f q_0 - f q_0 (f - z)}{(z f)^2 - q_0^2 (f - z)^2} \quad (\text{D.20})$$

$$= \frac{z f^2 - z_0^2 (f - z) - i z f z_0 - i f z_0 (f - z)}{(z f)^2 + z_0^2 (f - z)^2} \quad (\text{D.21})$$

La largeur caractéristique  $\omega(z)$  du faisceau aval est donnée par l'expression :

$$\text{Im} \left( \frac{1}{q'(z)} \right) = -\frac{\lambda}{\pi \omega^2(z)} \quad (\text{D.22})$$

d'où

$$\frac{\pi \omega^2(z)}{\lambda} = \frac{(z f)^2 + z_0^2 (f - z)^2}{z f z_0 + f z_0 (f - z)} \quad (\text{D.23})$$

$$= \frac{1}{z_0} \frac{(z f)^2 + z_0^2 (f - z)^2}{f^2} \quad (\text{D.24})$$

$$= z_0 \left( \left( \frac{z}{z_0} \right)^2 + \left( 1 - \frac{z}{f} \right)^2 \right) \quad (\text{D.25})$$

$$= \frac{\pi \omega_0^2}{\lambda} \left( \left( \frac{z}{z_0} \right)^2 + \left( 1 - \frac{z}{f} \right)^2 \right) \quad (\text{D.26})$$

d'où l'on déduit que

$$\omega^2(z) = \omega_0^2 \left( 1 + \left( \frac{z}{z_0} \right)^2 - \frac{2z}{f} + \left( \frac{z}{f} \right)^2 \right) \quad (\text{D.27})$$

En l'absence de lentille, c'est-à-dire pour  $f = \infty$ , on aurait obtenu

$$\omega^2(z) = \omega_0^2 \left( 1 + \left( \frac{z}{z_0} \right)^2 \right) \quad (\text{D.28})$$

On suppose que la lentille  $L$  est convergente, c'est-à-dire  $f > 0$  : ces expressions permettent de déduire que pour les valeurs de  $z$  telles que  $z \ll f$ , le faisceau est plus fin qu'en l'absence de lentille : la lentille fait converger le faisceau. En revanche, pour les valeurs de  $z$  telles que  $z \gg f$ , le faisceau est plus large qu'en l'absence de lentille. Pour  $z = 2f$ , le faisceau a la même largeur avec et sans lentille.

Un miroir ou un dioptre modifient le faisceau de la même façon (hormis un changement de direction de propagation dans le cas du miroir), c'est-à-dire sans modifier la nature gaussienne du faisceau et avec la même relation de transformation  $\frac{1}{q'} = \frac{1}{q} - \frac{1}{f}$ . Le calcul précédent reste donc tout à fait valable dans le cas de la transmission d'un faisceau gaussien par un dioptre ou de sa réflexion par un miroir.



## D.3 Mesure du col d'un faisceau laser

Dans le chapitre 4, j'ai eu besoin de mesurer précisément le col du faisceau laser utilisé pour mesurer la tension interfaciale (montage de la figure 4.14). Le but de ce qui suit annexe est de préciser la méthode utilisée pour mesurer le col du faisceau en différents endroits de ce montage.

### D.3.1 Mesure du col du faisceau émis par le laser en amont de la lentille $L_1$

Pour connaître le col du faisceau émis par le laser, j'ai utilisé le montage représenté sur la figure D.5. Le faisceau parcourt une distance totale de plusieurs mètres. Une photodiode  $\phi$  solidaire d'un iris, que l'on peut traduire le long de l'axe  $x$ , permet de mesurer l'intensité lumineuse en fonction de la distance à l'axe du faisceau. Le résultat est présenté sur la figure D.6.

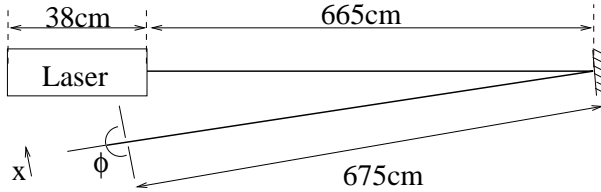


FIG. D.5 – Montage utilisé pour mesurer le col du faisceau laser

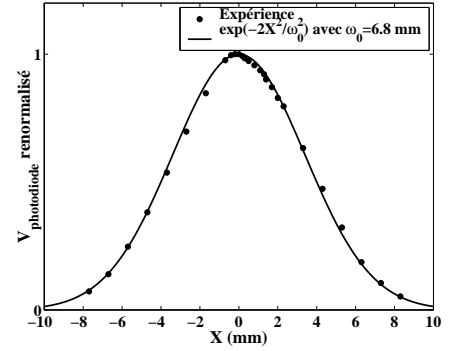


FIG. D.6 – Profil mesuré du faisceau laser

Le rayon caractéristique du faisceau à  $13,8 \pm 0,1$  m de son col vaut  $\omega = 6,8 \pm 0,3$  mm. Or, en théorie [1], le rayon caractéristique d'un faisceau gaussien à la distance  $z$  de son col vaut

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 + \left( \frac{\lambda z}{\pi \omega_0^2} \right)^2} \quad (\text{D.29})$$

et par conséquent, le col  $\omega_0$  du laser vaut

$$\omega_0 = 409 \pm 20 \mu\text{m} \quad (\text{D.30})$$

### D.3.2 Mesure du col du faisceau laser en sortie de l'expandeur de faisceau

Avant de placer la lentille  $L_4$ , j'avais mesuré le col du faisceau en sortie de l'expandeur de faisceau, par un dispositif analogue à celui représenté sur la figure D.5, la photodiode étant cette fois déplacée perpendiculairement au faisceau laser dans le plan focal de la lentille  $L_3$ . Les résultats sont présentés sur la figure D.7. Le col du faisceau en sortie de l'expandeur de faisceau vaut  $\omega_3 = 2,1 \pm 0,1$  mm.

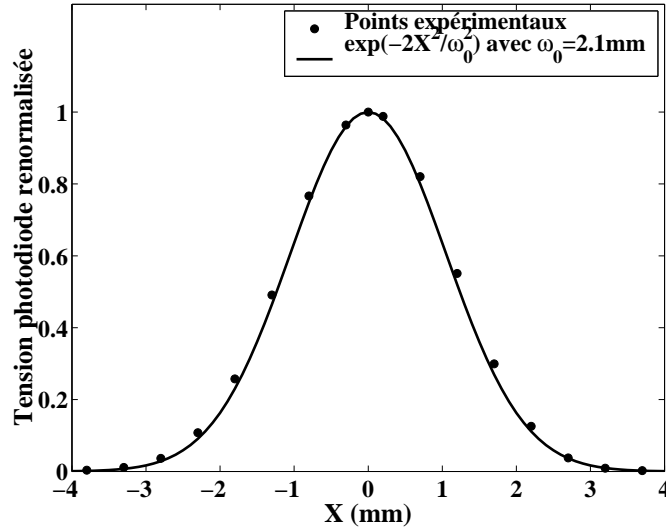
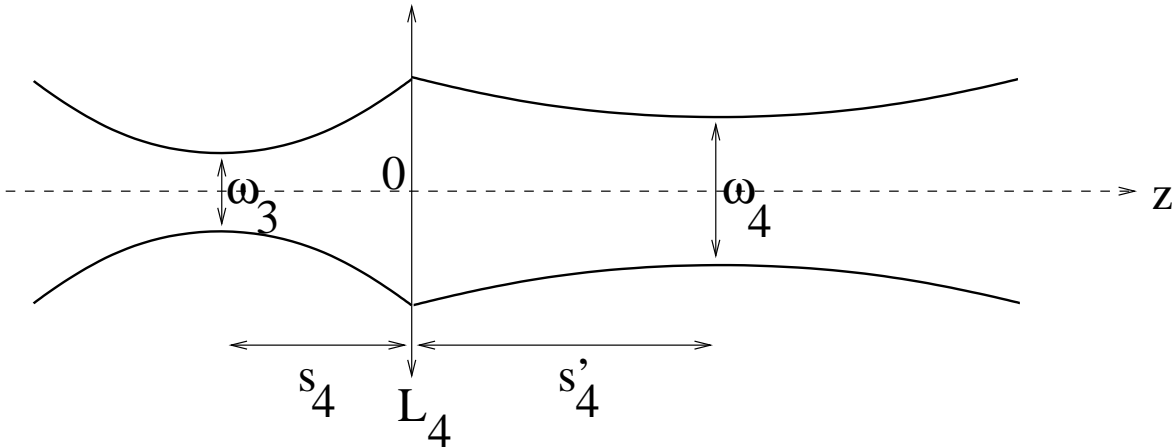


FIG. D.7 – Profil du faisceau en sortie de l'expandeur de faisceau

### D.3.3 Mesure du col du faisceau en sortie de $L_4$

Considérons le schéma de la figure D.8. La lentille  $L_4$  de distance focale  $f_4$  est placée


 FIG. D.8 – Faisceau gaussien traversant la lentille  $L_4$ .

dans le plan  $z = 0$ . Le faisceau gaussien incident dont le col, de largeur  $\omega_3$ , est situé en  $z = -s_4$ , traverse cette lentille. Le faisceau transmis est un faisceau gaussien dont le col, de largeur  $\omega_4$ , est situé en  $z = s'_4$ . Les relations entre  $\omega_3$ ,  $\omega_4$ ,  $s_4$  et  $s'_4$  sont données par les expressions suivantes [1] :

$$\frac{\omega_4}{\omega_3} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{s_4}{f_4}\right)^2 + \left(\frac{\pi\omega_3^2}{f_4\lambda}\right)^2}} \quad (\text{D.31})$$

$$s'_4 - f_4 = \left(\frac{\omega_4}{\omega_3}\right)^2 (s_4 - f_4) \quad (\text{D.32})$$

$\lambda$  étant la longueur d'onde du laser.

$\omega_3$  valant 2,1 mm,  $\frac{\pi\omega_3^2}{f_4\lambda} = -40$ .  $s_4$  et  $f_4$  étant du même ordre de grandeur, les expressions D.31 et D.32 se simplifient alors en

$$\omega_4 \approx \frac{f_4\lambda}{\pi\omega_3} \quad (\text{D.33})$$

$$s'_4 = f_4 \left( 1 + \left( \frac{f_4\lambda}{\pi\omega_3^2} \right)^2 \frac{s_4 - f_4}{f_4} \right) \quad (\text{D.34})$$

$$\approx f_4 \quad (\text{D.35})$$

Aussi, la valeur de  $s_4$  n'a pas d'influence critique sur  $\omega_4$  et  $s'_4$ . Le col du faisceau en aval de la lentille  $L_4$  devrait se trouver à 55 cm de  $L_4$  et  $\omega_4$  devrait valoir

$$\omega_4 = \frac{0,55 \times 632.10^{-9}}{\pi \times 2,1.10^{-3}} \quad (\text{D.36})$$

$$= 53 \pm 3\mu\text{m} \quad (\text{D.37})$$

Pour vérifier cela, j'ai mesuré la largeur du faisceau à différentes distances de  $L_4$ . Pour ce faire, j'ai utilisé le dispositif représenté sur la figure D.9 : une lame de rasoir, pouvant être déplacée suivant l'axe  $x$ , intercepte une partie du faisceau laser. Une photodiode  $\phi$  située en aval mesure la puissance lumineuse qui n'est pas interceptée par la lame.

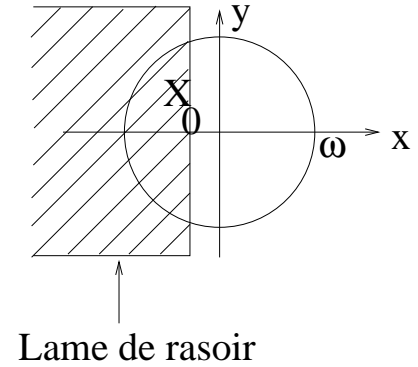
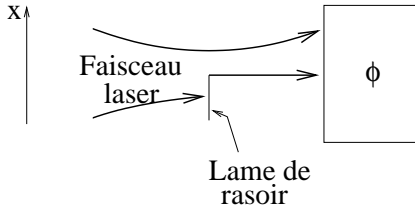


FIG. D.9 – Montage utilisé pour mesurer le col du faisceau laser en sortie de la lentille  $L_4$

FIG. D.10 – Interception du faisceau laser de col  $\omega$  par une lame de rasoir

Le profil en intensité du faisceau juste avant d'arriver sur la lame de rasoir est

$$I(x, y) = e^{-2(x^2+y^2)/\omega^2} \quad (\text{D.38})$$

$\omega$  étant la largeur caractéristique du faisceau à l'endroit où se trouve la lame. En aval de la lame, ce profil devient

$$\begin{cases} I(x \leq X_0, y) = 0 \\ I(x > X_0, y) = e^{-2(x^2+y^2)/\omega^2} \end{cases} \quad (\text{D.39})$$

L'intensité totale détectée par la photodiode vaut alors

$$I_{total} = \int_{x=X_0}^{\infty} e^{-2x^2/\omega^2} dx \int_{y=-\infty}^{\infty} e^{-2y^2/\omega^2} dy \quad (\text{D.40})$$

$$= \frac{\pi\omega^2}{4} \left( 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{\sqrt{2}X_0}{\omega} \right) \right) \quad (\text{D.41})$$

erf désignant la fonction d'erreur, définie par  $\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$ . Les résultats de cette mesure sont représentés sur la figure D.11, la lame étant alors positionnée à 60,5 cm en aval de  $L_4$ .

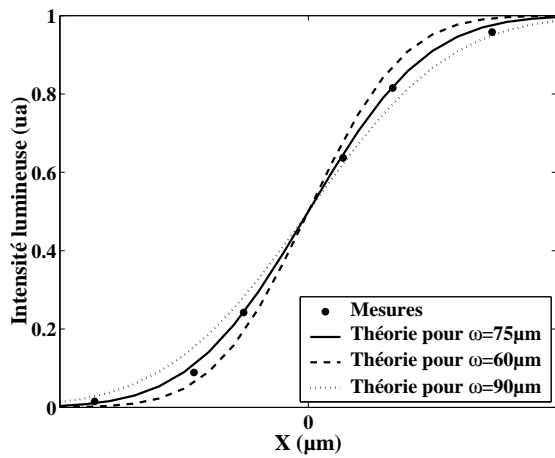


FIG. D.11 – Puissance laser détectée par la photodiode en fonction de la position  $X$  de la lame de rasoir, la lame étant à 60,5 cm en aval de  $L_4$ .

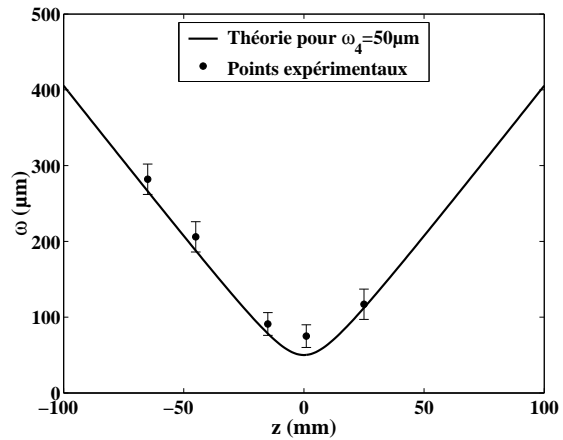


FIG. D.12 – Largeur du faisceau en fonction de la distance au col

La courbe de la figure D.11 permet de déduire que la largeur du faisceau à 60,5 cm de la lentille  $L_4$  est  $\omega = 75 \pm 15 \mu\text{m}$ . D'autres mesures ont été faites, qui sont consignées dans le tableau suivant et rapportées sur la figure D.12. Cette figure représente la largeur du faisceau en fonction de  $z$ .  $z = 0$  correspond à une distance en aval de la lentille de 60,5 cm.

Distance en aval de la lentille (cm)	54	56	59	60,5	63
$\omega$ ( $\mu\text{m}$ )	282	206	91	75	117

On constate que ces données ne correspondent pas à ce que donne la théorie : la théorie prévoit un col  $\omega_4 = 53 \pm 3 \mu\text{m}$  situé à 55 cm de la lentille, l'expérience montre que ce col vaut  $75 \pm 15 \mu\text{m}$  et qu'il se trouve à  $60,5 \pm 1$  cm de la lentille. La présence du prisme de Glan et du cube séparateur a donc vraisemblablement une influence sur le faisceau, en particulier sur la position et la valeur du col.

## Références de l'annexe D

- [1] B. E. A. Saleh et M. C. Teich. *Fundamentals of photonics*, chapter 3. John Wiley & Sons, Inc, 1991.

## Annexe E

# Calculs du chapitre 4 : Modélisation dynamique. Application à la mesure de tensions interfaciales.

Dans cette annexe sont détaillés certains calculs du chapitre 4 concernant la modélisation de la dynamique de la déformation de la surface d'un fluide par la pression de radiation. Le but est de calculer l'expression de la courbure de la déformation, donnée par l'expression 4.42

$$\kappa(r, t) = -\frac{Cp_{i0}^2}{\rho\nu^2} \int_0^t \int_0^{\frac{2\pi}{\lambda}} J_0(kr) \tilde{\phi}(k) w(t, k) dk dt \quad (\text{E.1})$$

$C$  est une constante,  $p_{i0}$  est l'amplitude de pression acoustique sur l'axe de la déformation,  $\rho$  et  $\nu$  sont la masse volumique et la viscosité cinématique du fluide,  $\lambda$  est la longueur d'onde acoustique.  $t$  désigne le temps et  $r$  la distance du point de calcul par rapport à l'axe de la déformation.

L'expression de  $\tilde{\phi}(k)$  fait l'objet de l'annexe A :

$$\begin{cases} \tilde{\phi}(k \leq \frac{2\pi}{\lambda}) = \frac{\lambda^2}{2\pi^2} \left( 1 - \frac{\lambda k}{\pi^2} \sqrt{1 - \frac{k^2 \lambda^2}{4\pi^2}} - \frac{2}{\pi} \arcsin\left(\frac{\lambda k}{2\pi}\right) \right) \\ \tilde{\phi}(k > \frac{2\pi}{\lambda}) = 0 \end{cases} \quad (\text{E.2})$$

$w(t, k)$  est la transformée de Laplace inverse de la fonction

$$\bar{w}(s, k) = \frac{s\bar{\psi}(s)}{(X^2(s, k) + 1)^2 - 4X(s, k) + \Delta(k)} \quad (\text{E.3})$$

avec

$$X^2(s, k) = 1 + \frac{s}{\nu k^2} \quad (\text{E.4})$$

$$\Delta(k) = \frac{gk + \frac{\sigma}{\rho} k^3}{(\nu k^2)^2} \quad (\text{E.5})$$

$$= \left( \frac{\Omega(k)}{\omega(k)} \right)^2 \quad (\text{E.6})$$

et  $\bar{\psi}(s)$  est la transformée de Laplace de la fonction  $\psi(t) = H(\Delta t - t)H(t)$ .

## E.1 Calculs du paragraphe 4.4.2 : Expression de la courbure de la déformation en régime non-visqueux

Intéressons-nous tout d'abord au régime non-visqueux, où  $\Delta(k) \gg 1$ . Cela signifie que le temps  $1/\omega(k)$  caractéristique de la diffusion de quantité de mouvement par viscosité sur l'échelle  $2\pi/k$  est grand devant le temps caractéristique  $1/\Omega(k)$  de la dynamique inertielle de la déformation de taille  $2\pi/k$ , et donc les valeurs de  $s$  qui dominent dans l'équation E.3 sont telles que  $1/\nu k^2 \gg 1/s$ , soit  $X(s, k) \gg 1$ . L'équation E.3 peut donc être approximée par

$$\bar{w}(s, k) \approx \frac{s\bar{\psi}(s)}{X^4(s, k) + 2X^2(s, k) + 1 + \Delta(k)} \quad (\text{E.7})$$

$$\approx \frac{s\bar{\psi}(s)}{(X^2 + 1 + i\sqrt{\Delta(k)})(X^2 + 1 - i\sqrt{\Delta(k)})} \quad (\text{E.8})$$

$$\approx \frac{s\bar{\psi}(s)}{(2 + \frac{s}{\nu k^2} + i\sqrt{\Delta(k)})(2 + \frac{s}{\nu k^2} - i\sqrt{\Delta(k)})} \quad (\text{E.9})$$

$$\approx \omega^2(k) \frac{s\bar{\psi}(s)}{(s + s_1(k))(s + s_2(k))} \quad (\text{E.10})$$

en posant  $s_1(k) = \nu k^2(2 + i\sqrt{\Delta(k)}) = 2\omega(k) + i\Omega(k)$  et  $s_2(k) = \nu k^2(2 - i\sqrt{\Delta(k)}) = 2\omega(k) - i\Omega(k)$ .

La transformée de Laplace inverse de  $\frac{s}{(s+s_1(k))(s+s_2(k))}$  est  $\frac{s_1(k)e^{-s_1(k)t} - s_2(k)e^{-s_2(k)t}}{s_1(k) - s_2(k)}$  et celle de  $\bar{\psi}(s)$  est  $\psi(t)$ . Aussi, d'après le théorème de convolution, la transformée de Laplace inverse du produit de ces deux fonctions est le produit de convolution de leurs transformées de Laplace inverses :

$$w(t, k) = \frac{\omega^2(k)}{s_1(k) - s_2(k)} \int_0^t (s_1(k)e^{-s_1(k)\tau} - s_2(k)e^{-s_2(k)\tau}) \psi(t - \tau) d\tau \quad (\text{E.11})$$

$$= \frac{\omega^2(k)}{2i\Omega(k)} \int_0^t (s_1(k)e^{-s_1(k)\tau} - s_2(k)e^{-s_2(k)\tau}) H(\Delta t - t + \tau) d\tau \quad (\text{E.12})$$

$$(\text{E.13})$$

Si  $t < \Delta t$  :

$$w(t < \Delta t, k) = \frac{\omega^2(k)}{2i\Omega(k)} \int_0^t (s_1(k)e^{-s_1(k)\tau} - s_2(k)e^{-s_2(k)\tau}) d\tau \quad (\text{E.14})$$

$$= \frac{\omega^2(k)}{2i\Omega(k)} (e^{-s_2(k)t} - e^{-s_1(k)t}) \quad (\text{E.15})$$

Si  $t \geq \Delta t$  :

$$w(t \geq \Delta t, k) = \frac{\omega^2(k)}{2i\Omega(k)} \int_{t-\Delta t}^t (s_1(k)e^{-s_1(k)\tau} - s_2(k)e^{-s_2(k)\tau}) d\tau \quad (\text{E.16})$$

$$= -\frac{\omega^2(k)}{2i\Omega(k)} (e^{-s_1(k)t} (1 - e^{s_1(k)\Delta t}) - e^{-s_2(k)t} (1 - e^{s_2(k)\Delta t})) \quad (\text{E.17})$$

Or, la courbure de la déformation vaut

$$\kappa(r, t) = -\frac{Cp_{i0}^2}{\rho\nu^2} \int_0^t \int_0^{2\pi/\lambda} J_0(kr) \tilde{\phi}(k) w(t, k) dk dt \quad (\text{E.18})$$

$$= -\frac{Cp_{i0}^2}{\rho\nu^2} \int_0^{2\pi/\lambda} J_0(kr) \tilde{\phi}(k) \int_0^t w(t, k) dt dk \quad (\text{E.19})$$

Si  $t < \Delta t$  :

$$\int_0^t w(t, k) dt = \frac{\omega^2(k)}{2i\Omega(k)} \int_0^t (e^{-s_2(k)t} - e^{-s_1(k)t}) dt \quad (\text{E.20})$$

$$= \frac{\omega^2(k)}{2i\Omega(k)} \left( \frac{e^{-s_1(k)t} - 1}{s_1(k)} - \frac{e^{-s_2(k)t} - 1}{s_2(k)} \right) \quad (\text{E.21})$$

$$= \frac{\omega^2(k)}{2i\Omega(k)} \frac{s_2(k)e^{-s_1(k)t} - s_1(k)e^{-s_2(k)t} + s_1(k) - s_2(k)}{s_1(k)s_2(k)} \quad (\text{E.22})$$

$$= \frac{\omega^2(k)}{\Omega(k)} \frac{e^{-2\omega(k)t} (-2\omega(k) \sin(\Omega(k)t) - \Omega(k) \cos(\Omega(k)t)) + \Omega(k)}{4\omega^2(k) + \Omega^2(k)} \quad (\text{E.23})$$

donc si  $\Delta(k) \gg 1$  pour tout  $k < 2\pi/\lambda$  :

$$\begin{aligned} \kappa(r, t < \Delta t) = & \quad (\text{E.24}) \\ & -\frac{Cp_{i0}^2}{\rho\nu^2} \int_0^{2\pi/\lambda} J_0(kr) \tilde{\phi}(k) \frac{\omega^2(k)}{\Omega(k)} \frac{e^{-2\omega(k)t} (-2\omega(k) \sin(\Omega(k)t) - \Omega(k) \cos(\Omega(k)t)) + \Omega(k)}{4\omega^2(k) + \Omega^2(k)} dk \end{aligned}$$

Si  $t \geq \Delta t$  :

$$\begin{aligned}
 \int_0^t w(t, k) dt &= \int_0^{\Delta t} w(t < \Delta t, k) dt + \int_{\Delta t}^t w(t \geq \Delta t, k) dt \\
 &= \frac{\omega^2(k)}{2i\Omega(k)} \frac{s_2(k)e^{-s_1(k)\Delta t} - s_1(k)e^{-s_2(k)\Delta t} + s_1(k) - s_2(k)}{s_1(k)s_2(k)} \\
 &\quad - \frac{\omega^2(k)}{2i\Omega(k)} \int_{\Delta t}^t e^{-s_1(k)t} (1 - e^{s_1(k)\Delta t}) - e^{-s_2(k)t} (1 - e^{s_2(k)\Delta t}) dt \\
 &= \frac{\omega^2(k)}{2i\Omega(k)} \frac{s_2(k)e^{-s_1(k)\Delta t} - s_1(k)e^{-s_2(k)\Delta t} + s_1(k) - s_2(k)}{s_1(k)s_2(k)} \\
 &\quad + \frac{\omega^2(k)}{2i\Omega(k)} \frac{(1 - e^{s_1(k)\Delta t}) (e^{-s_1(k)t} - e^{-s_1(k)\Delta t})}{s_1(k)} \\
 &\quad - \frac{\omega^2(k)}{2i\Omega(k)} \frac{(1 - e^{s_2(k)\Delta t}) (e^{-s_2(k)t} - e^{-s_2(k)\Delta t})}{s_2(k)} \\
 &= \frac{\omega^2(k)}{2i\Omega(k)} \frac{s_2(k)e^{-s_1(k)\Delta t} - s_1(k)e^{-s_2(k)\Delta t} + s_1(k) - s_2(k)}{s_1(k)s_2(k)} \\
 &\quad + \frac{\omega^2(k)}{2i\Omega(k)} \frac{s_2(k)e^{-s_1(k)t} - s_2(k)e^{-s_1(k)\Delta t} - s_2(k)e^{-s_1(k)(t-\Delta t)} + s_2(k)}{s_1(k)s_2(k)} \\
 &\quad - \frac{\omega^2(k)}{2i\Omega(k)} \frac{s_1(k)e^{-s_2(k)t} - s_1(k)e^{-s_2(k)\Delta t} - s_1(k)e^{-s_2(k)(t-\Delta t)} + s_1(k)}{s_1(k)s_2(k)} \\
 &= \frac{\omega^2(k)}{2i\Omega(k)} \frac{s_2(k)e^{-s_1(k)t} - s_2(k)e^{-s_1(k)(t-\Delta t)} - s_1(k)e^{-s_2(k)t} + s_1(k)e^{-s_2(k)(t-\Delta t)}}{s_1(k)s_2(k)} \\
 &= \frac{\omega^2(k)}{2i\Omega(k)} \frac{s_2(k)e^{-s_1(k)t} (1 - e^{s_1(k)\Delta t}) - s_1(k)e^{-s_2(k)t} (1 - e^{s_2(k)\Delta t})}{s_1(k)s_2(k)} \\
 &= \frac{\omega^2(k)}{\Omega(k)} e^{-2\omega(k)t} \left[ \frac{-2\omega(k) (\sin(\Omega(k)t) - e^{2\omega(k)\Delta t} \sin(\Omega(k)(t - \Delta t)))}{4\omega^2(k) + \Omega^2(k)} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\Omega(k) (\cos(\Omega(k)t) - e^{2\omega(k)\Delta t} \cos(\Omega(k)(t - \Delta t)))}{4\omega^2(k) + \Omega^2(k)} \right] \tag{E.25}
 \end{aligned}$$

donc si  $\Delta(k) \gg 1$  pour tout  $k < 2\pi/\lambda$  :

$$\begin{aligned}
 \kappa(r, t \geq \Delta t) &= \\
 &\quad - \frac{Cp_{i0}^2}{\rho\nu^2} \int_0^{2\pi/\lambda} J_0(kr) \tilde{\phi}(k) \frac{\omega^2(k)}{\Omega(k)} e^{-2\omega(k)t} \times \\
 &\quad \left[ \frac{-2\omega(k) (\sin(\Omega(k)t) - e^{2\omega(k)\Delta t} \sin(\Omega(k)(t - \Delta t)))}{4\omega^2(k) + \Omega^2(k)} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\Omega(k) (\cos(\Omega(k)t) - e^{2\omega(k)\Delta t} \cos(\Omega(k)(t - \Delta t)))}{4\omega^2(k) + \Omega^2(k)} \right] dk \tag{E.26}
 \end{aligned}$$



## E.2 Calculs du paragraphe 4.4.3 : Expression de la courbure de la déformation en régime visqueux

Nous devons calculer la transformée de Laplace inverse de la fonction

$$\bar{w}(s, k) = \frac{s\bar{\psi}(s)}{(X^2(s, k) + 1)^2 - 4X(s, k) + \Delta(k)} \quad (\text{E.27})$$

$$= s\bar{f}(s, k)\bar{\psi}(s) \quad (\text{E.28})$$

en posant

$$\bar{f}(s, k) = \frac{1}{(X^2(s, k) + 1)^2 - 4X(s, k) + \Delta(k)}. \quad (\text{E.29})$$

et

$$X(s, k) = \sqrt{1 + \frac{s}{\omega(k)}} \quad (\text{E.30})$$

On peut décomposer en éléments simples la fonction  $\bar{f}(s, k)$  :

$$\bar{f}(s, k) = \sum_{i=1}^4 \frac{a_i}{X(s, k) - X_i(k)} \quad (\text{E.31})$$

$X_1(k)$ ,  $X_2(k)$ ,  $X_3(k)$  et  $X_4(k)$  sont les racines de  $(X^2(s, k) + 1)^2 - 4X(s, k) + \Delta(k)$  dans la limite  $\Delta(k) \ll 1$  :

$i$	1	2	3	4
$X_i(k)$	$\sqrt{1 - \frac{\Delta(k)}{2}}$	0,30	$-0,65 + 1,72i$	$-0,65 - 1,72i$
$s_i(k)$	$-\Omega^2(k)/2\omega(k)$	$-0,91\omega(k)$	$(-3,54-2,23i)\omega(k)$	$(-3,54+2,23i)\omega(k)$

Les coefficients  $a_i$  intervenant dans la décomposition valent :

$$a_1 = \frac{1}{4} \quad (\text{E.32})$$

$$a_{i=2,3,4} = -\frac{5}{44}X_i(k)^2 - \frac{3}{22}X_i(k) - \frac{7}{22} \quad (\text{E.33})$$

En explicitant  $X(s, k)$  :

$$\bar{f}(s, k) = \sum_{i=1}^4 \frac{a_i}{\sqrt{1 + \frac{s}{\omega(k)}} - X_i(k)} \quad (\text{E.34})$$

Or, la transformée de Laplace inverse de l'expression  $\bar{q}(s) = \frac{1}{\sqrt{s - X_i(k)}}$  vaut

$$q(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} + X_i(k) \exp(X_i(k)^2 t) \left(1 + \operatorname{erf}(X_i(k)\sqrt{t})\right) \quad (\text{E.35})$$

Pour en déduire  $f(t, k)$ , il suffit d'utiliser les expressions générales suivantes, applicables à une fonction  $Q$  quelconque :

Fonction originale	Transformée de Laplace
$Q(t)$	$\bar{Q}(s)$
$\exp(-t)Q(t)$	$\bar{Q}(s+1)$
$\omega Q(\omega t)$	$\bar{Q}\left(\frac{s}{\omega}\right)$

ce qui donne

$$f(t, k) = \omega(k) \exp(-\omega(k)t) \sum_{i=1}^4 a_i \left( \frac{1}{\sqrt{\pi\omega(k)t}} \right) \quad (\text{E.36})$$

$$+ X_i(k) \exp(X_i(k)^2 \omega(k)t) \left( 1 + \operatorname{erf}(X_i(k) \sqrt{\omega(k)t}) \right) \quad (\text{E.37})$$

On vérifie aisément que  $\sum_{i=1}^4 a_i = 0$  et par conséquent que

$$f(t, k) = \omega(k) \exp(-\omega(k)t) \sum_{i=1}^4 a_i X_i(k) \exp(X_i(k)^2 \omega(k)t) \left( 1 + \operatorname{erf}(X_i(k) \sqrt{\omega(k)t}) \right) \quad (\text{E.38})$$

La transformée de Laplace inverse de  $s\bar{f}(s, k)$  est  $f'(t, k) + f(0, k)\delta(t)$ .

Nous allons maintenant utiliser le théorème de convolution pour calculer la transformée de Laplace inverse de  $\bar{w}(s, k) = s\bar{f}(s, k)\bar{\psi}(s)$  :

$$w(t, k) = \int_0^t (f'(\tau, k) + f(0, k)\delta(\tau))\psi(t - \tau)d\tau \quad (\text{E.39})$$

$$= \int_0^t f'(\tau, k)\psi(t - \tau)d\tau + f(0, k)\psi(t) \quad (\text{E.40})$$

Si  $t \leq \Delta t$  :

$$w(t, k) = f(t, k) \quad (\text{E.41})$$

Si  $t > \Delta t$  :

$$w(t, k) = f(t, k) - f(t - \Delta t, k) \quad (\text{E.42})$$

Pour calculer la courbure de la déformation, il faut maintenant calculer  $\int_0^t w(t, k)dt$  (équation 4.42).

Si  $t \leq \Delta t$  :

$$\int_0^t w(t, k)dt = \int_0^t f(t, k)dt \quad (\text{E.43})$$

$$= \omega(k) \sum_{i=1}^4 a_i X_i(k) \int_0^t \exp((X_i(k)^2 - 1)\omega(k)t) \left( 1 + \operatorname{erf}(X_i(k) \sqrt{\omega(k)t}) \right) dt$$

$$= \sum_{i=1}^4 a_i X_i(k) \frac{\exp((X_i(k)^2 - 1)\omega(k)t) - 1}{X_i(k)^2 - 1} +$$

$$\omega(k) \sum_{i=1}^4 a_i X_i(k) \int_0^t \exp((X_i(k)^2 - 1)\omega(k)t) \operatorname{erf}(X_i(k) \sqrt{\omega(k)t}) dt \quad (\text{E.44})$$

Par intégration par partie, on démontre que

$$\begin{aligned} \int_0^t \exp((X_i(k)^2 - 1)\omega(k)t) \operatorname{erf}(X_i(k)\sqrt{\omega(k)t}) dt = \\ \frac{\exp((X_i(k)^2 - 1)\omega(k)t)}{(X_i(k)^2 - 1)\omega(k)} \operatorname{erf}(X_i(k)\sqrt{\omega(k)t}) \\ - \frac{X_i(k)}{(X_i(k)^2 - 1)\omega(k)} \operatorname{erf}(\sqrt{\omega(k)t}) \end{aligned} \quad (\text{E.45})$$

d'où l'on conclut que

$$\begin{aligned} \int_0^t w(t, k) dt &= \sum_{i=1}^4 a_i X_i(k) \left( \frac{\exp((X_i(k)^2 - 1)\omega(k)t) - 1}{X_i(k)^2 - 1} + \right. \\ &\quad \left. \frac{\exp((X_i(k)^2 - 1)\omega(k)t)}{X_i(k)^2 - 1} \operatorname{erf}(X_i(k)\sqrt{\omega(k)t}) - \frac{X_i(k)}{X_i(k)^2 - 1} \operatorname{erf}(\sqrt{\omega(k)t}) \right) \\ &= \sum_{i=1}^4 \frac{a_i X_i(k)}{X_i(k)^2 - 1} \left( \left( 1 + \operatorname{erf}(X_i(k)\sqrt{\omega(k)t}) \right) \exp((X_i(k)^2 - 1)\omega(k)t) - 1 \right. \\ &\quad \left. - X_i(k) \operatorname{erf}(\sqrt{\omega(k)t}) \right) \end{aligned} \quad (\text{E.46})$$

et donc (équations 4.42 et 4.43) que

$$\begin{aligned} \kappa(r, t \leq \Delta t) &= -\frac{Cp_{i0}^2}{\rho\nu^2} \int_0^{\frac{2\pi}{\lambda}} J_0(kr) \tilde{\phi}(k) \sum_{i=1}^4 \frac{a_i X_i(k)}{X_i(k)^2 - 1} \left( -1 - X_i(k) \operatorname{erf}(\sqrt{\omega(k)t}) \right. \\ &\quad \left. + \left( 1 + \operatorname{erf}(X_i(k)\sqrt{\omega(k)t}) \right) \exp((X_i(k)^2 - 1)\omega(k)t) \right) dk \end{aligned} \quad (\text{E.47})$$

$$\begin{aligned} h(r, t \leq \Delta t) &= \frac{Cp_{i0}^2}{\rho\nu^2} \int_0^{\frac{2\pi}{\lambda}} J_0(kr) \frac{\tilde{\phi}(k)}{k^2} \sum_{i=1}^4 \frac{a_i X_i(k)}{X_i(k)^2 - 1} \left( -1 - X_i(k) \operatorname{erf}(\sqrt{\omega(k)t}) \right. \\ &\quad \left. + \left( 1 + \operatorname{erf}(X_i(k)\sqrt{\omega(k)t}) \right) \exp((X_i(k)^2 - 1)\omega(k)t) \right) dk \end{aligned} \quad (\text{E.48})$$

Si  $t > \Delta t$  :

$$\int_0^t w(t, k) dt = \int_0^t f(t, k) dt - \int_{\Delta t}^t f(t - \Delta t, k) dt \quad (\text{E.49})$$

$$= \int_0^t f(t, k) dt - \int_0^{t-\Delta t} f(t, k) dt \quad (\text{E.50})$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^4 \frac{a_i X_i(k)}{X_i(k)^2 - 1} \left( \left( 1 + \operatorname{erf}(X_i(k)\sqrt{\omega(k)t}) \right) \exp((X_i(k)^2 - 1)\omega(k)t) \right. \\ &\quad \left. - \left( 1 + \operatorname{erf}(X_i(k)\sqrt{\omega(k)(t - \Delta t)}) \right) \exp((X_i(k)^2 - 1)\omega(k)(t - \Delta t)) \right. \\ &\quad \left. - X_i(k) \left( \operatorname{erf}(\sqrt{\omega(k)t}) - \operatorname{erf}(\sqrt{\omega(k)(t - \Delta t)}) \right) \right) \end{aligned} \quad (\text{E.51})$$

et donc

$$\begin{aligned}
 \kappa(r, t > \Delta t) &= -\frac{Cp_{i0}^2}{\rho\nu^2} \int_0^{\frac{2\pi}{\lambda}} J_0(kr) \tilde{\phi}(k) \sum_{i=1}^4 \frac{a_i X_i(k)}{X_i(k)^2 - 1} \times \\
 &\quad \left( -X_i(k) \left( \operatorname{erf}(\sqrt{\omega(k)t}) - \operatorname{erf}(\sqrt{\omega(k)(t - \Delta t)}) \right) \right. \\
 &\quad \left. - \left( 1 + \operatorname{erf}(X_i(k)\sqrt{\omega(k)(t - \Delta t)}) \right) \exp((X_i(k)^2 - 1)\omega(k)(t - \Delta t)) \right. \\
 &\quad \left. + \left( 1 + \operatorname{erf}(X_i(k)\sqrt{\omega(k)t}) \right) \exp((X_i(k)^2 - 1)\omega(k)t) \right) dk \quad (\text{E.52})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 h(r, t > \Delta t) &= \frac{Cp_{i0}^2}{\rho\nu^2} \int_0^{\frac{2\pi}{\lambda}} J_0(kr) \frac{\tilde{\phi}(k)}{k^2} \sum_{i=1}^4 \frac{a_i X_i(k)}{X_i(k)^2 - 1} \times \\
 &\quad \left( -X_i(k) \left( \operatorname{erf}(\sqrt{\omega(k)t}) - \operatorname{erf}(\sqrt{\omega(k)(t - \Delta t)}) \right) \right. \\
 &\quad \left. - \left( 1 + \operatorname{erf}(X_i(k)\sqrt{\omega(k)(t - \Delta t)}) \right) \exp((X_i(k)^2 - 1)\omega(k)(t - \Delta t)) \right. \\
 &\quad \left. + \left( 1 + \operatorname{erf}(X_i(k)\sqrt{\omega(k)t}) \right) \exp((X_i(k)^2 - 1)\omega(k)t) \right) dk \quad (\text{E.53})
 \end{aligned}$$

## Références de l'annexe E

- [1] G. B. Arfken et H. J. Weber. *Mathematic Methods for Physicists*, page 1003. Academic, New York, 4ème édition, 1995.

## Annexe F

# Problèmes expérimentaux rencontrés dans l'étude du chapitre 7

Dans cette annexe, nous présentons un certain nombre d'expériences annexes que nous avons réalisées dans l'étude de l'atténuation d'ondes capillaires au niveau de la déformation, que nous avons été amenés à réaliser suite aux divers problèmes expérimentaux que nous avons rencontrés lors de cette étude.

### F.1 Utilisation d'une plage pour atténuer la réflexion de l'onde capillaire en bout de cellule

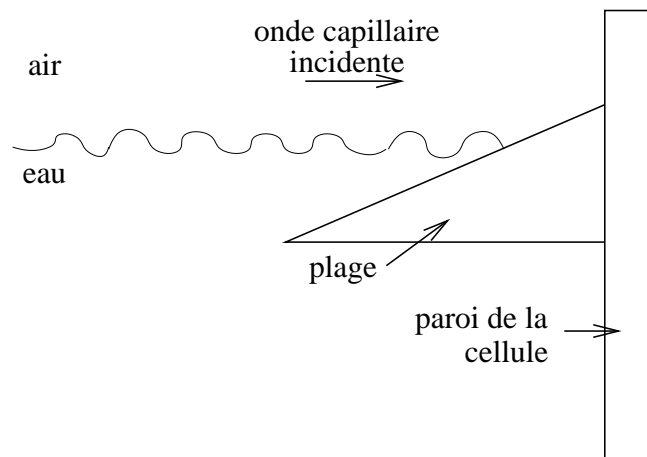


FIG. F.1 – Plage supposée atténuer la réflexion de l'onde capillaire au niveau de la paroi de la cellule.

Nous avons vu au paragraphe 7.4.2 que l'onde capillaire émise par le batteur se propageait sur toute la longueur de la cellule, se réfléchissait sur la face de la cellule opposée au batteur, et que la superposition de l'onde incidente et de l'onde réfléchie entraînait l'apparition d'une onde capillaire stationnaire à la surface de l'eau. À cause de cette onde stationnaire, l'amplitude de l'onde capillaire dépend énormément de la position où on se place dans la cellule, suivant que l'on se place en un nœud ou un ventre de vibrations.

Pour nous affranchir de la présence de cette onde stationnaire, nous avons envisagé d'utiliser une « plage », telle que celle représentée sur la figure F.1. L'onde capillaire incidente arrivant sur la plage devrait moins bien se réfléchir qu'une onde capillaire arrivant directement sur la paroi de la cellule, induisant une onde stationnaire moins importante. En pratique, la plage n'a eu quasiment aucun effet, et nous avons très vite cessé de l'utiliser.

### F.1.1 Dynamique du vibreur

Le montage présenté sur la figure F.2 nous a permis de déterminer la dynamique du vibreur. La seule différence avec celui présenté dans le paragraphe 7.4.2 est l'absence de lentille cylindrique.

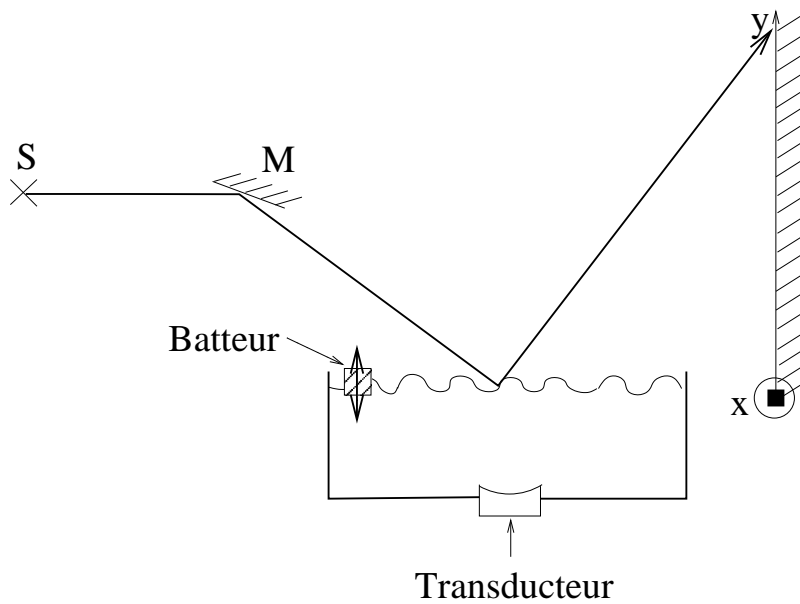


FIG. F.2 – Montage utilisé pour déterminer la dynamique du vibreur.

Le vibreur était soumis à une tension sinusoïdale dont on faisait varier la fréquence  $f$ , et on mesurait l'amplitude  $\delta y$  de la déviation du spot sur l'écran en fonction de la fréquence d'alimentation du vibreur. Pour chaque fréquence, l'amplitude  $V$  de la tension aux bornes du vibreur était connue. La courbe de résonance est visible sur la figure F.3.

L'amplitude de l'onde capillaire émise par le batteur est donc maximale pour des fréquences de l'ordre de 30 Hz. Au-delà de 100 Hz, l'amplitude de l'onde émise est indétectable avec notre dispositif. Dans tout ce chapitre, on est donc contraint d'utiliser des ondes capillaires de fréquences inférieures à 100 Hz.

## F.2 Validité du critère de positionnement de l'axe du transducteur

Nous avons vu au paragraphe 7.5.2 que pour mesurer l'amplitude de l'onde capillaire au sommet de la déformation (c'est-à-dire sur l'axe du transducteur), il fallait d'abord localiser précisément l'axe du transducteur. Cela est difficile, car dans ces expériences, le point le plus élevé de la déformation oscille de gauche à droite. Nous avons alors supposé que l'axe du

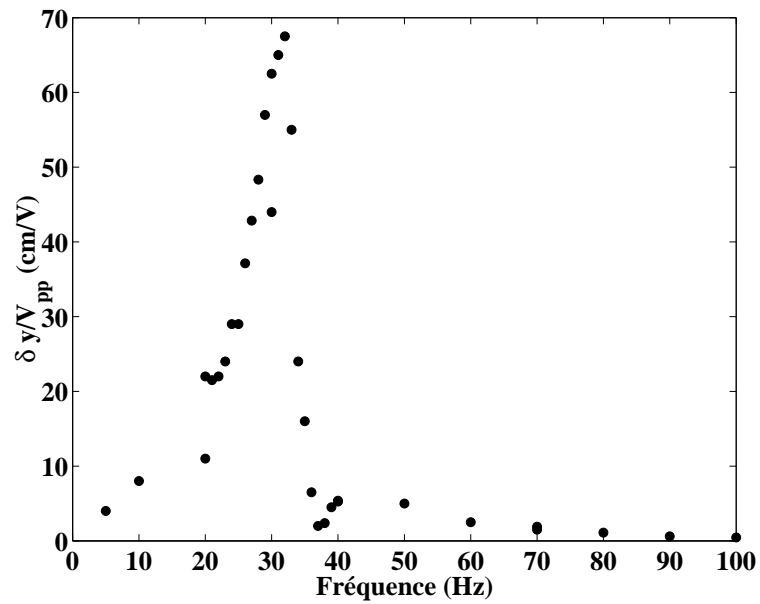


FIG. F.3 – Courbe de résonance du vibreur.

transducteur était la ligne verticale dont l'abscisse est égale à l'abscisse moyenne du point le plus élevé de la déformation. Ce critère n'est pas évident : en effet, du fait de la présence d'une onde stationnaire sur le côté gauche de la déformation et non sur le côté droit (l'onde diffusée se propageant alors dans le même sens que l'onde incidente), il n'est pas évident que le mouvement horizontal du sommet soit symétrique par rapport à l'axe du transducteur. D'autres critères auraient pu être utilisés, comme celui consistant à considérer l'axe du transducteur comme l'abscisse du point oscillant le moins. Des expériences ont cependant montré que le point oscillant le moins n'est pas nécessairement à la même abscisse suivant le plateau de hauteur considéré, comme l'indiquent les figures F.4 et F.5.

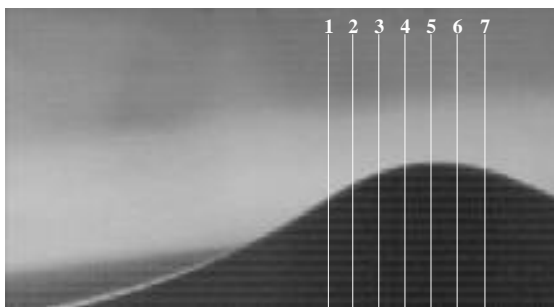


FIG. F.4 – Position des points dont on mesure l'évolution temporelle de l'amplitude d'oscillations. Deux points successifs sont distants d'environ  $100 \mu\text{m}$ .

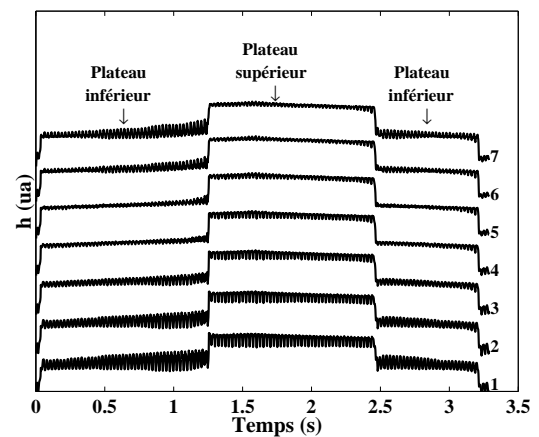


FIG. F.5 – Évolution temporelle de la hauteur de la déformation aux différents points 1 à 7 présentés sur la photo de gauche. Les courbes sont tracées avec des origines en hauteur différentes pour mieux les distinguer les unes des autres.

La distance entre le bord gauche de l'image et les différentes positions considérées sont reportées dans le tableau suivant :

Position i	1	2	3	4	5	6	7
d (mm)	1,212	1,303	1,401	1,498	1,596	1,694	1,798

On observe sur les courbes de la figure F.5 que sur le plateau de hauteur inférieure, c'est aux positions 4 ou 5 que les oscillations sont d'amplitude minimale. En revanche, sur le plateau de hauteur supérieure, c'est à la position 6.

Par ailleurs, si l'on trace en fonction du temps l'abscisse du point le plus haut de la déformation, on obtient la figure F.6. On observe que la position moyenne du point le

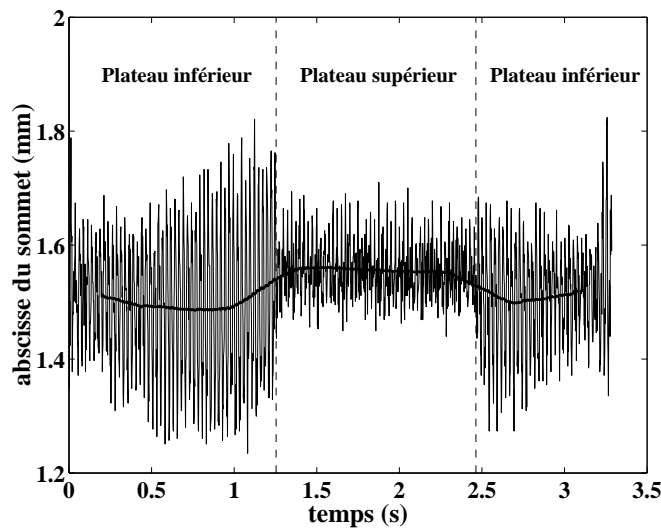


FIG. F.6 – Évolution temporelle de l'abscisse du point le plus haut de la déformation par rapport au bord gauche de l'image. La courbe en gras représente la moyenne temporelle de cette position, calculée sur 200 points de mesure en fenêtre glissante.

plus élevé de la déformation dépend légèrement du plateau décrit. Par ailleurs, on observe également que le point le plus élevé de la déformation atteint très rarement la valeur de 1,694 mm, valeur où l'amplitude d'oscillations est minimale sur le plateau supérieur d'après la figure F.5. Pour cette raison, j'ai jugé peu crédible l'hypothèse suivant laquelle l'axe du transducteur était au point où les oscillations sont minimales. En réalité, la largeur du faisceau acoustique n'étant pas nulle, il y a une ligne de points au voisinage de l'axe du transducteur où l'onde capillaire est très atténuée par l'effet de raideur induit par la cavité. Ce n'est pas nécessairement exactement le point de l'axe qui oscille le plus faiblement.

## F.3 Vérification de la relation de dispersion des ondes capillaires

### F.3.1 Mesure de la longueur d'onde de l'onde capillaire incidente

Le montage de mesure de l'amplitude de l'onde incidente grâce à la déflexion d'une onde laser peut être utilisé pour mesurer sa longueur d'onde  $\Lambda$ . Lorsque la fréquence de



l'onde est inférieure à 40 Hz, la figure observée à l'écran a l'allure représentée sur la figure F.8. La grandeur  $\Lambda'$  mesurée sur cette tache lumineuse permet de remonter à la longueur d'onde  $\Lambda$  de l'onde capillaire à la surface de l'eau (figure F.7).

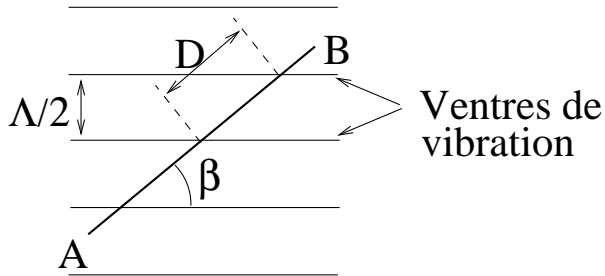


FIG. F.7 – Nappe laser incidente à l'interface

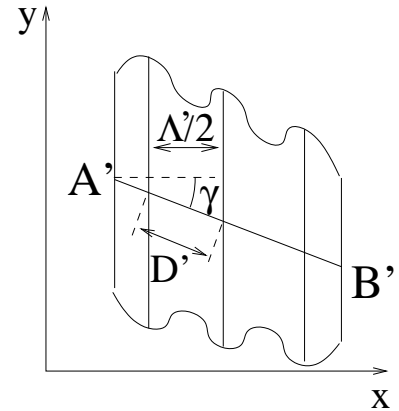


FIG. F.8 – Nappe laser incidente sur l'écran

En effet, l'onde stationnaire, qui provoque l'ondulation de longueur d'onde  $\Lambda'/2$  sur la figure observée sur l'écran (figure F.8), est de longueur d'onde  $\Lambda/2$ . À cause de la divergence du faisceau, il y a un grandissement  $G$  de la nappe laser entre la surface de l'eau et l'écran :

$$G = \frac{A'B'}{AB} \quad (\text{F.1})$$

$$= \frac{D'}{D} \quad (\text{F.2})$$

Or,

$$D' = \frac{\Lambda'}{2 \cos \gamma} \quad (\text{F.3})$$

$$D = \frac{\Lambda}{2 \sin \beta} \quad (\text{F.4})$$

et par conséquent,

$$G = \frac{\Lambda' \sin \beta}{\Lambda \cos \gamma} \quad (\text{F.5})$$

d'où l'on déduit

$$\Lambda = \frac{\Lambda' \sin \beta}{G \cos \gamma} \quad (\text{F.6})$$

Pour mesurer  $G$ , j'ai mesuré, en l'absence d'onde capillaire, la longueur  $A'B'$ , puis la longueur  $AB$  en posant un papier sur l'interface, en faisant une trace sur  $A$  et  $B$  avec un feutre et en mesurant la distance. Enfin, j'ai utilisé l'expression  $G = A'B'/AB$ .

Pour connaître l'angle  $\beta$ , il faut considérer le schéma de la figure F.9.

La nappe laser arrive sur l'interface eau-air le long du segment  $AB$ , puis est réfléchi, en l'absence d'onde capillaire, selon un plan incliné d'un angle  $\alpha$  par rapport à l'horizontale. Elle croise le plan parallèle à l'écran et passant par  $B$  le long du segment  $CB$ . On peut alors écrire les égalités suivantes :

$$\tan \alpha = \frac{CD}{AD} \quad (\text{F.7})$$

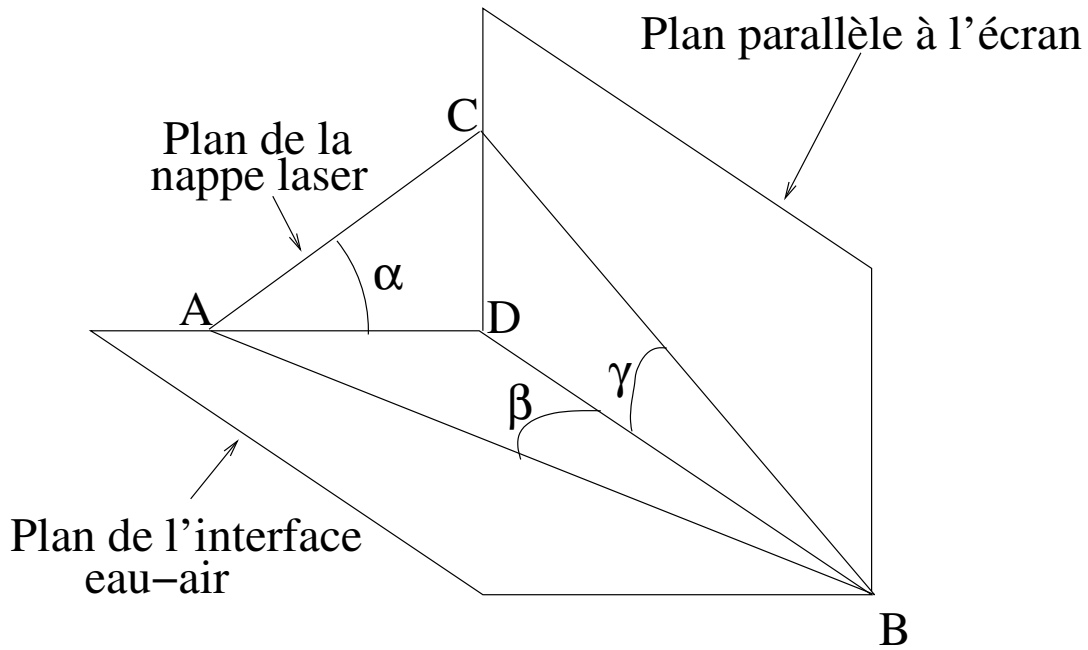


FIG. F.9 – Calcul de  $\beta$  connaissant  $\alpha$  et  $\gamma$ .

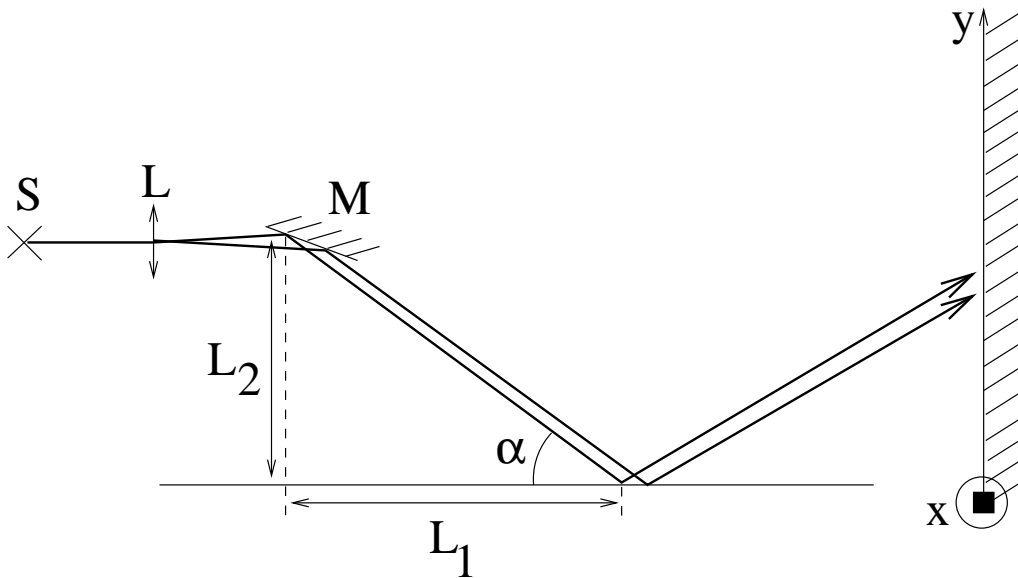


FIG. F.10 – Mesure de l'angle d'incidence de la nappe laser sur l'interface :  $\tan \alpha = \frac{L_2}{L_1}$

$$\tan \beta = \frac{AD}{BD} \quad (\text{F.8})$$

$$\tan \gamma = \frac{CD}{BD} \quad (\text{F.9})$$

d'où il résulte que

$$\tan \beta = \frac{\tan \gamma}{\tan \alpha} \quad (\text{F.10})$$

soit

$$\beta = \arctan \left( \frac{\tan \gamma}{\tan \alpha} \right) \quad (\text{F.11})$$

Pour mesurer l'angle  $\alpha$ , il suffit de connaître l'angle d'incidence de la nappe laser sur l'interface eau-air, comme indiqué sur la figure F.10.

### F.3.2 Résultats expérimentaux

La mesure de la longueur d'onde  $\Lambda$  des ondes capillaires permet, connaissant la fréquence  $f$  de vibration du vibreur, de vérifier la validité de la relation de dispersion théorique des ondes capillaires à la surface de l'eau, qui lie  $\Omega = 2\pi f$  à  $k = 2\pi/\Lambda$  :

$$\Omega(k) = \sqrt{gk + \frac{\sigma k^3}{\rho}} \quad (\text{F.12})$$

Les résultats théoriques sont présentés sur la figure F.11. On observe que la relation de dispersion est relativement bien vérifiée.

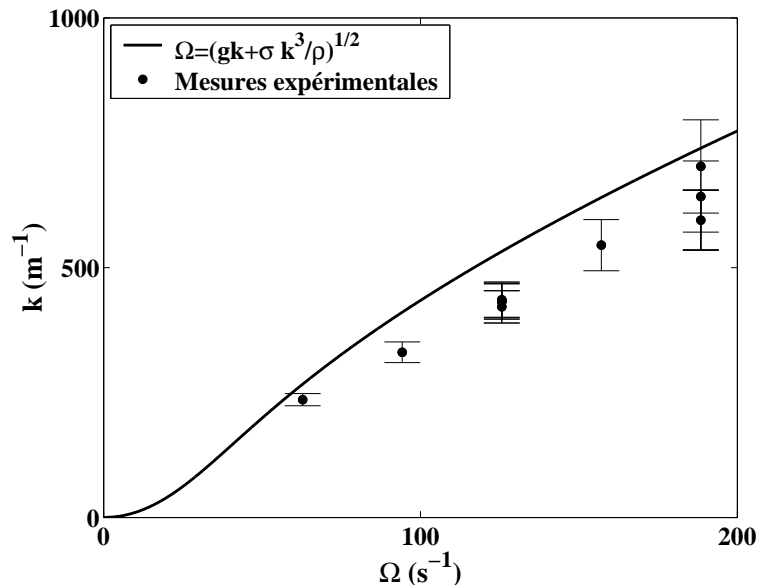


FIG. F.11 – Relation de dispersion théorique et expérimentale.



## Bistability of a Compliant Cavity Induced by Acoustic Radiation Pressure

Bruno Issenmann,<sup>1</sup> Régis Wunenburger,<sup>1,\*</sup> Sébastien Manneville,<sup>2</sup> and Jean-Pierre Delville<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Centre de Physique Moléculaire Optique et Hertzienne, UMR CNRS 5798, Université Bordeaux I, 351 cours de la Libération, 33405 Talence Cedex, France

<sup>2</sup>Centre de Recherche Paul Pascal, UPR CNRS 8641, Avenue Schweitzer, 33600 Pessac, France

(Received 13 November 2005; published 18 August 2006)

We report on the first observation of multiple-order bistability due to acoustic radiation pressure in a compliant acoustic cavity formed between a spherical ultrasonic transducer immersed in water and the free liquid surface located at its focus. The hysteretic behavior of the cavity length, observed both with amplitude ramps and frequency sweeps, is accurately described using a one-dimensional model of a compliant Fabry-Pérot resonator assuming the acoustic radiation pressure to be the only coupling between the cavity and the acoustic field.

DOI: 10.1103/PhysRevLett.97.074502

PACS numbers: 47.20.Ma, 43.25.+y, 47.20.Ky

The coupling between the path length of a Fabry-Pérot resonator and the intensity of the light traveling back and forth inside it leads to a rich variety of steady and dynamic nonlinear phenomena, e.g., bistability, regenerative oscillations, monostable pulse generation, and chaos [1]. The optical path may vary either from an intensity-dependent refractive index of the material filling the resonator (bulk nonlinearities) or from the variation of the actual distance between the mirrors due to their interaction with light (boundary nonlinearities) through several mechanisms, among them radiation pressure (RP). Although the RP based mechanism for inducing optical bistability of compliant Fabry-Pérot resonators has been shown in the 1980s [2,3], RP has recently attracted renewed attention for two main reasons: (i) the miniaturization down to the micro-scale of optical resonators used in nano or quantum detectors that increases their compliance and makes boundary nonlinearities dominant over bulk nonlinearities [4–6], and (ii) the high laser power required in the extremely compliant, vacuum filled interferometric gravitational waves detectors (GWD's). Indeed, if on one hand, RP has been shown to allow for an efficient control of the position, stiffness and signal to noise ratio of microlevers [5], on the other hand, RP is likely to alter the response of the GWD interferometers [7,8]. Thus, the ambiguous role played by RP in these new applications fields motivates new research effort on its effects.

Although the above listed nonlinear phenomena have been mainly studied using electromagnetic waves, similar manifestations of the coupling between a wave and a resonator have also been observed using mechanical waves [9,10]. Bistability of high amplitude acoustic waves standing in rigid closed cavities has been reported [9], due to the amplitude dependence of the wave velocity arising from bulk nonlinearities [11]. Surprisingly, while acoustic RP has been evidenced for a long time [12,13] and is the basis of several processes [14,15] and measurement techniques [16,17], to our knowledge, it has never been used to trigger the bistability of compliant resonators. Still, the assets of using acoustics to study the physics of waves are mainly

(i) the low frequencies and the large wavelengths involved, which allow for a direct measurement of the phase of the waves and of the path length, (ii) the strength of the acoustic RP, which makes its mechanical effects noticeable at the macroscopic scale, even at moderate acoustic intensity and focusing. Finally, such an investigation addresses the question of the universality of the mechanical effects of the RP (i.e. of their independence with respect to the nature of the exciting wave), which remains a matter of intense debate [18,19].

In this Letter, we report on the first observation of multiple-order bistability in a compliant Fabry-Pérot resonator solely due to the acoustic RP. The cavity, sketched in Fig. 1(a), is filled with water and is bounded on one side by an immersed spherical ultrasonic transducer emitting vertically and on the other side by the perfectly reflecting free surface of water (intensity transmission coefficient of  $10^{-3}$  at normal incidence) located at the focus of the transducer. We measure the deformations of the free surface induced by RP as function of the input acoustic power and frequency, and using a simple one-dimensional model of Fabry-Pérot cavity, we demonstrate that RP is actually responsible for the observed bistability.

A spherical *Imasonic* ultrasonic transducer (UT, focal length  $F = 38$  mm, aperture  $NA = 1$ ,  $f = 2.25$  MHz central frequency, 600 kHz bandwidth, focal zone length  $z = 4$  mm, 5 s maximal sonication time), bored with a cylindrical hole of diameter 2 mm along its axis and filled with a glass cylinder, is immersed vertically in pure, degassed water contained in a transparent tank; see Fig. 1(a). It is fed by an *Amplifier Research* 75A250 power amplifier (PA) driven by a PC-controlled waveform generator (WG). The instantaneous amplitude of the WG output signal is extracted using an amplitude demodulator, and sent to a digital oscilloscope. Independent pressure measurements in a large water tank showed that in the focal plane the amplitude  $P_0(r)$  of the pressure field  $p_0(r, t)$  due to the beam emitted by the UT (hereafter called *input beam*) is well described by the usual expression for spherical, non-bored transducers [20]  $P_0(r) = P|J_1(\pi r/\lambda)/(\pi r/2\lambda)|$ , as

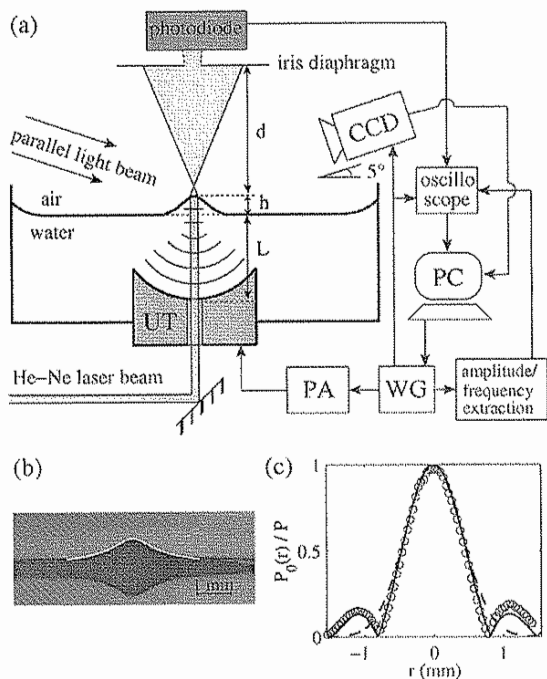


FIG. 1. (a) Experimental setup. (b) Picture of the steady free surface deformation (and of its reflection on the air-water interface) observed for a pressure amplitude  $P = 0.93$  MPa at focus and  $f = 2.46$  MHz. Solid white line: predicted shape using Eq. (1). (c) Symbols: rescaled amplitude of the pressure field of the input beam measured in the focal plane. Solid line: prediction from Ref. [20]. Dashed line: Gaussian approximation.

shown in Fig. 1(c) ( $J_i$  is the  $i$ th order Bessel function,  $r$  is the radius in cylindrical coordinates, and  $\lambda = 660 \mu\text{m}$  is the acoustic wavelength at central frequency). Typical pressure amplitudes at focus are  $P = 0.04$ – $1.4$  MPa. The liquid free surface, located at focus ( $L \approx F$ ), totally reflects the incident acoustic beam and is deformed by RP, which expresses as  $\Pi(r) = \frac{2\langle p_i^2(r,t) \rangle_t}{\rho c^2}$  [21], where  $p_i(r,t) = P_i(r) \cos(2\pi ft)$  is the pressure field of the incident beam in the focal plane (i.e. of the input beam  $p_0(r,t)$  combined with its multiple reflections incident on the surface),  $\rho$  is the water density, and  $c$  the sound speed in water. It is illuminated at grazing incidence by a parallel beam of white light, and the pictures of the surface deformation are captured at 50 fps using a high-speed CCD camera triggered by the WG. For continuous and moderate acoustic intensities, the liquid surface deformations are stationary, bell-shaped, and of diameter at half height comparable to the diameter at half maximum in energy of the acoustic beam,  $650 \mu\text{m}$ ; see Figs. 1(b) and 1(c).

To evidence the acoustic bistability, we ramp  $P^2 \propto \Pi(0)$  linearly up and down within 5 s and simultaneously measure the variations of the height  $h$  of the surface deformation, defined in Fig. 1(a), as a function of time. The variations of  $h$  versus  $P^2$  are plotted in Fig. 2.  $h$  exhibits

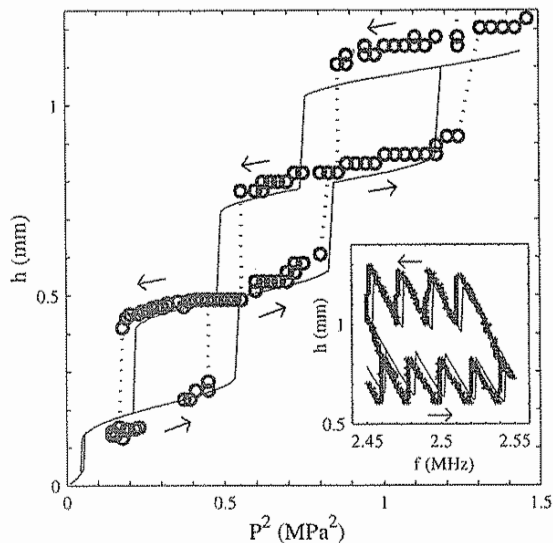


FIG. 2. Surface deformation height  $h$  versus the square of the pressure amplitude  $P$  at focus due to the input beam ( $f = 2.5$  MHz). Symbols: experiment. Solid line: theoretical prediction using the model illustrated in Fig. 3. Inset:  $h$  versus the acoustic frequency  $f$  at  $P = 0.97$  MPa. Symbols: experiment. Solid line: theoretical prediction.

several hysteresis cycles. Above  $h \approx 1.4$  mm, irregular jetting and atomization-induced fog intermittently appear, a phenomenon usually called “acoustic fountain” [12].

To model the observed hysteresis, we consider only the coupling between the RP induced surface deformation and the condition for resonance of the compliant acoustic cavity. Since the measured characteristic time scale of relaxation of the surface deformation is a tens of milliseconds, the deformation evolves adiabatically during the RP ramps. Thus, its instantaneous axisymmetric shape  $h(r)$  results from the balance between RP and the restoring effects of both gravity  $g$  and surface tension  $\sigma$ ; i.e., it verifies  $\rho gh(r) - \sigma \kappa(r) = \Pi(r)$ , where  $\kappa(r)$  is the surface curvature. Assuming small deformations, i.e.,  $|h'(r)| \ll 1$  and  $h \ll z$ , and taking  $P_i(r) = P_i \exp(-r^2/\omega_0^2)$ , where  $\omega_0 = 0.86\lambda$ , for the pressure amplitude of the incident beam in the focal plane [see Fig. 1(c)], the surface shape reads [22]:

$$h(r) = \frac{P_i^2 \omega_0^2}{4\rho c^2} \int_0^\infty J_0(kr) \frac{\exp(-\frac{k^2 \omega_0^2}{8})}{\rho g + \sigma k^2} k dk, \quad (1)$$

and its height along the beam axis is

$$h = h(r=0) = \frac{P_i^2 \omega_0^2}{8\sigma \rho c^2} \exp\left(\frac{\rho g \omega_0^2}{8\sigma}\right) E_1\left(\frac{\rho g \omega_0^2}{8\sigma}\right), \quad (2)$$

where  $E_1$  is the 1-argument exponential function [22]. Figure 1(b) illustrates the accuracy of this linear model.

On the other hand, we model the acoustic cavity bounded by the UT and the free liquid surface as a one-

dimensional Fabry-Pérot resonator. Considering that the incident acoustic energy is totally reflected by the flat part of the deformation close to the beam axis and that the reflected wave remains plane, acoustic resonance is expected to occur when  $2(L+h) = n\lambda$ ,  $n$  integer [see Fig. 1(a)]. More precisely,

$$P_i = \left| 1 - RR' \exp\left(i \frac{4\pi(L+h)}{\lambda}\right) \right|^{-1} P, \quad (3)$$

where  $R = -0.38 \pm 0.05$ ,  $R' = -1$  are the pressure reflection coefficients of the UT surface, of the air-water interface measured independently. However, due to the curvature of the free surface, some acoustic energy leaks out of the cavity (see sketch in Fig. 3). This results in an effective reflection coefficient  $R_{\text{eff}}$  estimated by determining numerically which vertically incident acoustic rays impinge the UT after reflection on a deformation of shape given by Eq. (1). The variation of  $R_{\text{eff}}/R$  versus  $h$  is plotted in the inset of Fig. 3.

Finally, as illustrated in Fig. 3, the deformation height can be graphically determined as the intersection of the reduced resonance curve  $(P_i/P)^2(h)$  defined by Eq. (3) where  $R$  is replaced by  $R_{\text{eff}}(h)$ , with the linear relationship

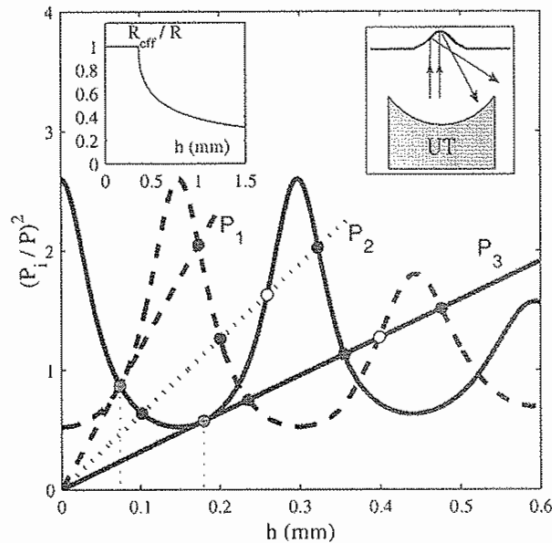


FIG. 3. Model for acoustic hysteresis. Curves: resonance curves of the cavity, represented by the square of the pressure amplitude  $P_i$  at focus due to the incident beam rescaled by the pressure amplitude  $P$  at focus versus the surface deformation height  $h$  [Eq. (3)] for  $2L/\lambda$  half-integer,  $f = 2.4982$  MHz (dashed line),  $2L/\lambda$  integer,  $f = 2.5079$  MHz (solid line). Straight lines: linear relationship between  $h$  and the radiation pressure [Eq. (2)] at  $P_1 = 0.292$  MPa,  $P_2 = 0.400$  MPa,  $P_3 = 0.563$  MPa. Black (white, gray) points correspond to stable (unstable, marginally stable) equilibrium of the free surface. Left inset: variation versus  $h$  of the effective reflection coefficient of the UT  $R_{\text{eff}}$  rescaled by  $R$ ; see sketch and text. Right inset: sketch for the energy leak calculation.

$(P_i/P)^2 \propto h/P^2$  deduced from Eq. (2). The resulting multi-stability leads to hysteresis as the slope of the straight line varies with  $P$ . The predicted hysteretic behavior of  $h$  versus  $P^2$ , shown in Fig. 2, agrees quantitatively with the measurements. Note that, contrary to previous studies of bistability induced by optical forces [2,3,5], the model involves no free parameter, since the acoustic path length of the undeformed resonator  $2L/\lambda$  is experimentally accessed through  $\tau$ , the round-trip time of flight of a wave train inside the cavity, measured independently:  $2L/\lambda = f\tau = 128.60 \pm 0.08$  for the experiment reported in Fig. 2.

Additionally, we investigated RP induced acoustic bistability by varying the frequency at fixed  $P$ , as is often done when bulk nonlinearities are studied [9]. We sweep the driving frequency  $f$  linearly up and down within 5 s at constant voltage amplitude, and measure it using a digital counter (accuracy 1 kHz, sampling rate 50 Hz). In this frequency ramp mode, the deformation height also exhibits hysteresis above a threshold in  $P$  which depends on  $2L/\lambda$ . More precisely, the above model predicts that the minimum height at which bistability occurs (marginal stability) varies from  $74 \mu\text{m}$  for  $2L/\lambda = n + 1/2$  to  $180 \mu\text{m} \approx \lambda/4$  for  $2L/\lambda = n$ ,  $n$  integer (gray points in Fig. 3). In order to detect such small deformations, we use the lens effect of the surface deformation on a laser beam, a technique recently developed for contactless surface tension measurements [23]. A Gaussian He-Ne laser beam (beam waist  $500 \mu\text{m}$ ) passing vertically through the glass cylinder inserted in the UT hole is focused by the surface deformation and filtered through a diaphragm distant of  $d$  from the surface; see Fig. 1(a). Its power  $P_{\text{opt}}$  is measured using a linear photodetector. Assuming the liquid lens to be spherical, its focal length is  $f_{\text{opt}} = (\kappa(n_w - 1)/2)^{-1}$  where  $n_w$  is the water refractive index and  $\kappa = \frac{1}{r} \frac{d}{dr}(rh')(0)$  is the linearized surface curvature on beam axis, of value  $1.6h/\omega_0^2$  deduced from Eq. (1). In the ray optics approximation,  $P_{\text{opt}} \propto (df_{\text{opt}}^{-1} - 1)^{-2}$ . As shown in Fig. 4, when  $P$  is increased from small values, the resonance curves of the compliant cavity exhibit increasing asymmetry (curve a in Fig. 4), and ultimately show hysteresis (curve b). Using the refraction model presented above, our model of hysteresis can predict the variation of  $P_{\text{opt}}$  versus  $h$  in the frequency sweep mode. When the frequency is swept, the successive equilibrium surface heights can also be determined graphically in Fig. 3 by now mainly translating the cavity resonance curve (variable acoustic path length  $2L/\lambda$ ) while the straight line remains unchanged (fixed  $P$ ). The measured and predicted values of  $P_{\text{opt}}$  were found to differ by a factor of typically 20, probably because (i) the laser beam slightly diverges, (ii) the beam intensity strongly differs from Gaussian after transmission through the roughly polished glass cylinder and (iii) the bell-shaped liquid lens induces spherical aberrations. Nevertheless, their dependence versus  $f$  are qualitatively very similar, as shown in Fig. 4. Moreover, the predicted threshold in  $P$  at which hysteresis occurs quantitatively agrees with ex-

074502-3

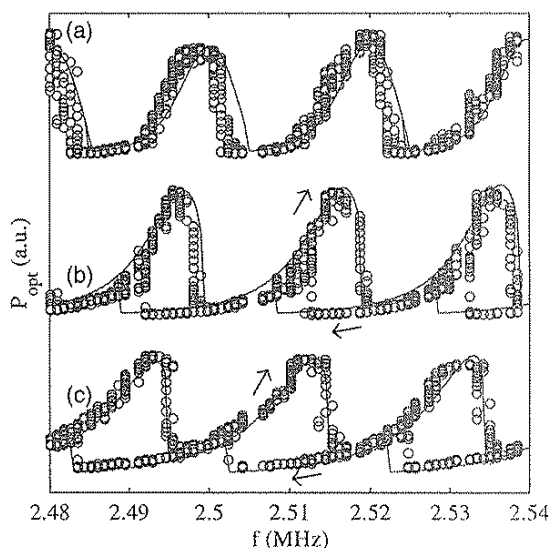


FIG. 4. Power  $P_{\text{opt}}$  of the laser beam refracted by the surface deformation versus acoustic frequency  $f$ . Symbols: experiment at (a)  $P = 0.19$  MPa, (b)  $P = 0.36$  MPa, (c)  $P = 0.48$  MPa. Solid lines: theoretical prediction. Curves have been vertically shifted and rescaled for clarity.

periment. When  $P$  is further increased, the hysteresis cycles broaden (curve c in Fig. 4). At large  $P$ , the height variations for increasing and decreasing frequency eventually split and give birth to a unique hysteresis cycle extending over the whole frequency span, as shown in the inset of Fig. 2, where  $h$  was measured through image analysis. This behavior is also shown to be quantitatively well described by our model.

To conclude, the multiple-order hysteresis of a compliant acoustic cavity formed between a spherical UT and a liquid free surface located at its focus was observed for the first time and was accurately described using a one-dimensional model of Fabry-Pérot resonator assuming acoustic RP to be the only coupling between the cavity and the acoustic field. Unlike former investigations of optical RP, the variation of the cavity length, on which bistability relies, is directly evidenced. This study demonstrates that, at least in stationary and one-dimensional situations, the coupling between a wave and a resonator through the RP can be described in a universal manner for electromagnetic and acoustic waves. Finally, we note that electromagnetic RP was recently shown to trigger a parametric oscillatory instability [5,6,24] that may limit the miniaturization of optical resonators as well as the performances of GWD [25]. Investigating this instability in acoustics would extend to dynamical behaviors our study on the universality of the effects of RP.

The authors thank A. Nicolas and O. Misère for preliminary experiments, and J. Plantard and S. Cassagnere for

technical assistance. This work was supported by Centre National de la Recherche Scientifique, Université Bordeaux 1, and Conseil Régional d'Aquitaine under Contract No. 2005-1101010A.

\*Corresponding author.

Electronic address: r.wunenburger@cpmoh.u-bordeaux1.fr

- [1] H. M. Gibbs, *Optical Bistability: Controlling Light with Light* (Academic, New York, 1985).
- [2] A. Dorsel, J. D. Mc Cullen, P. Meystre, E. Vignes, and H. Walter, *Phys. Rev. Lett.* **51**, 1550 (1983).
- [3] A. Gozzini, F. Maccarone, F. Mango, I. Longo, and S. Barbarino, *J. Opt. Soc. Am. B* **2**, 1841 (1985).
- [4] R. S. Tucker, D. M. Baney, W. V. Sorin, and C. A. Flory, *IEEE J. Sel. Top. Quantum Electron.* **8**, 88 (2002).
- [5] C. Hühberger Metzger and K. Karrai, *Nature (London)* **432**, 1002 (2004).
- [6] T. J. Kippenberg, H. Rokhsari, T. Carmon, A. Scherer, and K. J. Vahala, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 033901 (2005).
- [7] B. S. Sheard, M. B. Gray, C. M. Mow-Lowry, D. E. McClelland, and S. E. Whitcomb, *Phys. Rev. A* **69**, 051801(R) (2004).
- [8] A. Pai, S. V. Dhurandhar, P. Hello, and J. L. Vinet, *Eur. Phys. J. D* **8**, 333 (2000).
- [9] C. C. Lawrenson, B. Lipkens, T. S. Lucas, D. K. Perkins, and T. W. Van Doren, *J. Acoust. Soc. Am.* **104**, 623 (1998).
- [10] A. Boudaoud, Y. Couder, and M. Ben Amar, *Eur. Phys. J. B* **9**, 159 (1999).
- [11] Y. A. Ilinskii, B. Lipkens, and E. A. Zabolotskaya, *J. Acoust. Soc. Am.* **109**, 1859 (2001).
- [12] R. W. Wood and A. L. Loomis, *Philos. Mag.* **4**, 417 (1927).
- [13] G. Hertz and H. Mende, *Z. Phys.* **114**, 354 (1939).
- [14] E. H. Brandt, *Nature (London)* **413**, 474 (2001).
- [15] M. J. Marr-Lyon, D. B. Thiessen, and P. L. Marston, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 2293 (2001).
- [16] C. Cinbis and B. T. Khuri-Yakub, *Rev. Sci. Instrum.* **63**, 2048 (1992).
- [17] M. Fatemi and J. F. Greenleaf, *Science* **280**, 82 (1998).
- [18] M. Mansuripur, *Opt. Express* **12**, 5375 (2004).
- [19] G. T. Silva, S. Chen, and L. P. Viana, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 234301 (2006).
- [20] G. S. Kino, *Acoustic Waves, Devices, Imaging and Analog Signal Processing* (Prentice-Hall, Engelwood Cliffs, NJ, 1987).
- [21] B. Chu and R. E. Apfel, *J. Acoust. Soc. Am.* **72**, 1673 (1982).
- [22] A. Casner and J. P. Delville, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 054503 (2001).
- [23] K. Sakai, D. Mizuno, and K. Takagi, *Phys. Rev. E* **63**, 046302 (2001).
- [24] T. Carmon, H. Rokhsari, T. J. Kippenberg, and K. J. Vahala, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 223902 (2005); H. Rokhsari, T. K. Kippenberg, T. Carmon, and K. J. Vahala, *Opt. Express* **13**, 5293 (2005).
- [25] V. B. Braginsky, S. E. Strigin, and S. P. Vyatchanin, *Phys. Lett. A* **305**, 111 (2002).



## Résumé :

Nous avons étudié expérimentalement la statique et la dynamique des déformations d'interfaces fluides induites par la pression de radiation acoustique d'un faisceau focalisé. Deux situations expérimentales ont été plus particulièrement étudiées :

- nous avons réalisé un travail de métrologie pour tester pour la première fois la validité de l'expression de la pression de radiation acoustique sur des interfaces acoustiquement transparentes. Ce test a nécessité de mettre au point une technique de mesure de tension interfaciale *in situ* et sans contact utilisant la pression de radiation acoustique et de modéliser précisément la dynamique de la déformation d'interface.
- lorsque l'interface liquide est parfaitement réfléchissante, une cavité acoustique se forme entre l'interface et l'émetteur, qui induit un fort couplage entre la propagation des ondes ultrasonores et la déformation de l'interface. Nous avons montré que ce couplage donne lieu à des phénomènes d'hystérésis, d'atténuation d'ondes capillaires par rétroaction passive, et d'oscillations spontanées de l'interface liquide.

## Mots-clés :

*Acoustique non linéaire*

*Systèmes acoustiques et dynamiques non linéaires*

*Ondes capillaires*

*Tension de surface et phénomènes associés*

*Pression de radiation*

*Mesures et instrumentation en acoustique*

*Écoulements interfaciaux*

*Structure de l'interface liquide-liquide : mesures et simulations*

---

## Abstract:

We experimentally studied the statics and the dynamics of the deformations of fluid interfaces induced by the acoustic radiation pressure of a focused beam. Two experimental situations were investigated:

- We performed a metrological study to test for the first time the validity of the expression of the acoustic radiation pressure on acoustically transparent interfaces. This study required us to develop an *in situ* and contactless technique to measure the interfacial tension using the acoustic radiation pressure and to precisely model the dynamics of the interface deformation.
- When the liquid interface is perfectly reflecting, an acoustic cavity settles between the interface and the emitter, inducing a strong coupling between the acoustic propagation and the interface deformation. We have shown that this coupling triggers hysteretic phenomena, attenuation of capillary waves by passive retroaction and spontaneous oscillations of the liquid interface.

## Keywords:

*Nonlinear acoustics*

*Nonlinear acoustical and dynamical systems*

*Capillary waves*

*Surface tension and related phenomena*

*Radiation pressure*

*Acoustical measurements and instrumentation*

*Interfacial flows*

*Liquid-liquid interface structure: measurements and simulations*