



HAL
open science

Applications d'algorithmes d'optimisation à des problèmes d'approximation avec contraintes

Danièle Villemain

► **To cite this version:**

Danièle Villemain. Applications d'algorithmes d'optimisation à des problèmes d'approximation avec contraintes. Modélisation et simulation. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1973. Français. NNT: . tel-00284050

HAL Id: tel-00284050

<https://theses.hal.science/tel-00284050>

Submitted on 2 Jun 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre

THESE

présentée à

L'UNIVERSITE SCIENTIFIQUE ET MEDICALE DE GRENOBLE

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR DE TROISIEME CYCLE

"Mathématiques Appliquées"

par

Danièle VILLEMMAIN

— o —

**APPLICATIONS D'ALGORITHMES D'OPTIMISATION A DES
PROBLEMES D'APPROXIMATION AVEC CONTRAINTES**

— o —

Thèse soutenue le 25 Juin 1973 devant la commission d'examen

PRESIDENT : MONSIEUR N. GASTINEL

EXAMINATEURS : MESSIEURS P.J. LAURENT

A. AUSLENDER

Président : Monsieur Michel SOUTIF
Vice-Président : Monsieur Gabriel CAU

PROFESSEURS TITULAIRES

MM.	ANGLES D'AURIAC Paul	Mécanique des fluides
	ARNAUD Georges	Clinique des maladies infectieuses
	ARNAUD Paul	Chimie
	AUBERT Guy	Physique
	AYANT Yves	Physique approfondie
Mme	BARBIER Marie-Jeanne	Electrochimie
MM.	BARBIER Jean-Claude	Physique expérimentale
	BARBIER Reynold	Géologie appliquée
	BARJON Robert	Physique nucléaire
	BARNOUD Fernand	Biosynthèse de la cellulose
	BARRA Jean-René	Statistiques
	BARRIE Joseph	Clinique chirurgicale
	BENOIT Jean	Radioélectricité
	BERNARD Alain	Mathématiques Pures
	BESSON Jean	Electrochimie
	BEZES Henri	Chirurgie générale
	BLAMBERT Maurice	Mathématiques Pures
	BOLLIET Louis	Informatique (IUT B)
	BONNET Georges	Electrotechnique
	BONNET Jean-Louis	Clinique ophtalmologique
	BONNET-EYMARD Joseph	Pathologie médicale
	BONNIER Etienne	Electrochimie Electrometallurgie
	BOUCHERLE André	Chimie et Toxicologie
	BOUCHEZ Robert	Physique nucléaire
	BOUSSARD Jean-Claude	Mathématiques Appliquées
	BRAVARD Yves	Géographie
	BRISSONNEAU Pierre	Physique du solide
	BUYLE-BODIN Maurice	Electronique
	CABANAC Jean	Pathologie chirurgicale
	CABANEL Jean	Clinique rhumatologique et hydrologie
	CALAS François	Anatomie
	CARRAZ Gilbert	Biologie animale et pharmacodynamie
	CAU Gabriel	Médecine légale et Toxicologie
	CAUQUIS Georges	Chimie organique
	CHABAUTY Claude	Mathématiques Pures
	CHARACHON Robert	Oto-Rhino-Laryngologie
	CHATEAU Robert	Thérapeutique
	CHENE Marcel	Chimie papetière
	COEUR André	Pharmacie chimique
	CONTAMIN Robert	Clinique gynécologique
	COUDERC Pierre	Anatomie Pathologique
	CRAYA Antoine	Mécanique

Mme	DEBELMAS Anne-Marie	Matière médicale
MM.	DEBELMAS Jacques	Géologie générale
	DEGRANGE Charles	Zoologie
	DESRE Pierre	Métallurgie
	DESSAUX Georges	Physiologie animale
	DODU Jacques	Mécanique appliquée
	DOLIQUE Jean-Michel	Physique des plasmas
	DREYFUS Bernard	Thermodynamique
	DUCROS Pierre	Cristallographie
	DUGOIS Pierre	Clinique de Dermatologie et Syphiligraphie
	FAU René	Clinique neuro-psychiatrique
	FELICI Noël	Electrostatique
	GAGNAIRE Didier	Chimie physique
	GALLISSOT François	Mathématiques Pures
	GALVANI Octave	Mathématiques Pures
	GASTINEL Noël	Analyse numérique
	GEINDRE Michel	Electroradiologie
	GERBER Robert	Mathématiques Pures
	GIRAUD Pierre	Géologie
	KLEIN Joseph	Mathématiques Pures
Mme	KOFLER Lucie	Botanique et Physiologie végétale
MM.	KOSZUL Jean-Louis	Mathématiques Pures
	KRAVTCHENKO Julien	Mécanique
	KUNTZMANN Jean	Mathématiques appliquées
	LACAZE Albert	Thermodynamique
	LACHARME Jean	Biologie végétale
	LAJZEROWICZ Joseph	Physique
	LATREILLE René	Chirurgie générale
	LATURAZE Jean	Biochimie pharmaceutique
	LAURENT Pierre-Jean	Mathématiques appliquées
	LEDRU Jean	Clinique médicale B
	LLIBOUTRY Louis	Géophysique
	LOUP Jean	Géographie
Mlle	LUTZ Elisabeth	Mathématiques Pures
MM.	MALGRANGE Bernard	Mathématiques Pures
	MALINAS Yves	Clinique obstétricale
	MARTIN-NOEL Pierre	Séméiologie médicale
	MASSEPORT Jean	Géographie
	MAZARE Yves	Clinique médicale A
	MICHEL Robert	Minéralogie et Pétrographie
	MOURIQUAND Claude	Histologie
	MOUSSA André	Chimie nucléaire
	NEEL Louis	Physique du solide
	OZENDA Paul	Botanique
	FAUTHENET René	Electrotechnique
	PAYAN Jean-Jacques	Mathématiques Pures
	PEBAY-PEYROULA Jean-Claude	Physique
	PERRET René	Servomécanismes
	PILLET Emile	Physique industrielle
	RASSAT André	Chimie systématique
	RENARD Michel	Thermodynamique
	REULOS René	Physique industrielle
	RINALDI Renaud	Physique
	ROGET Jean	Clinique de pédiatrie et de puériculture
	SANTON Lucien	Mécanique
	SEIGNEURIN Raymond	Microbiologie et Hygiène
	SENGEL Philippe	Zoologie
	SILBERT Robert	Mécanique des fluides
	SOUTIF Michel	Physique générale

MM.	TANCHE Maurice	Physiologie
	TRAYNARD Philippe	Chimie générale
	VAILLAND François	Zoologie
	VALENTIN Jacques	Physique nucléaire
	VAUQUOIS Bernard	Calcul électronique
Mme	VERAIN Alice	Pharmacie galénique
M.	VERAIN André	Physique
Mme	VEYRET Germaine	Géographie
MM.	VEYRET Paul	Géographie
	VIGNAIS Pierre	Biochimie médicale
	YOCOZ Jean	Physique nucléaire théorique

PROFESSEURS ASSOCIES

MM.	BULLEMER Bernhard	Physique
	HANO JUN-ICHI	Mathématiques Pures
	STEPHENS Michaël	Mathématiques appliquées

PROFESSEURS SANS CHAIRE

MM.	BEAUDOING André	Pédiatrie
Mme	BERTRANDIAS Françoise	Mathématiques Pures
MM.	BERTRANDIAS Jean-Paul	Mathématiques appliquées
	BIAREZ Jean-Pierre	Mécanique
	BONNETAIN Lucien	Chimie minérale
Mme	BONNIER Jane	Chimie générale
MM.	CARLIER Georges	Biologie végétale
	COHEN Joseph	Electrotechnique
	COUMES André	Radioélectricité
	DEPASSEL Roger	Mécanique des fluides
	DEPORTES Charles	Chimie minérale
	GAUTHIER Yves	Sciences biologiques
	GAVEND Michel	Pharmacologie
	GERMAIN Jean-Pierre	Mécanique
	GIDON Paul	Géologie et Minéralogie
	GLENAT René	Chimie organique
	HACQUES Gérard	Calcul numérique
	JANIN Bernard	Géographie
Mme	KAHANE Josette	Physique
MM.	MULLER Jean-Michel	Thérapeutique
	PERRIAUX Jean-Jacques	Géologie et Minéralogie
	POULOUJADOFF Michel	Electrotechnique
	REBECQ Jacques	Biologie (CUS)
	REVOL Michel	Urologie
	REYMOND Jean-Charles	Chirurgie générale
	ROBERT André	Chimie papetière
	DE ROUGEMONT Jacques	Neurochirurgie
	SARRAZIN Roger	Anatomie et chirurgie
	SARROT-REYNAULD Jean	Géologie
	SIBILLE Robert	Construction mécanique
	SIROT Louis	Chirurgie générale
Mme	SOUTIF Jeanne	Physique générale

MAITRES DE CONFERENCES ET MAITRES DE CONFERENCES AGREGES

Mlle	AGNIUS-DELORE Claudine	Physique pharmaceutique
	ALARY Josette	Chimie analytique
MM.	AMBLARD Pierre	Dermatologie
	AMBROISE-THOMAS Pierre	Parasitologie
	ARMAND Yves	Chimie
	BEGUIN Claude	Chimie organique
	BELORIZKY Elie	Physique
	BENZAKEN Claude	Mathématiques appliquées
	BILLET Jean	Géographie
	BLIMAN Samuel	Electronique (EIE)
	BLOCH Daniel	Electrotechnique
Mme	BOUCHE Liane	Mathématiques (CUS)
MM.	BOUCHET Yves	Anatomie
	BOUVARD Maurice	Mécanique des fluides
	BRODEAU François	Mathématiques (IUT B)
	BRUGEL Lucien	Energétique
	BUISSON Roger	Physique
	BUTEL Jean	Orthopédie
	CHAMBAZ Edmond	Biochimie médicale
	CHAMPETIER Jean	Anatomie et organogénèse
	CHIAVERINA Jean	Biologie appliquée (EFP)
	CHIBON Pierre	Biologie animale
	COHEN-ADDAD Jean-Pierre	Spectrométrie physique
	COLOMB Maurice	Biochimie médicale
	CONTE René	Physique
	COULOMB Max	Radiologie
	CROUZET Guy	Radiologie
	DURAND Francis	Métallurgie
	DUSSAUD René	Mathématiques (CUS)
Mme	ETERRADOSSI Jacqueline	Physiologie
MM.	FAURE Jacques	Médecine légale
	GENSAC Pierre	Botanique
	GIDON Maurice	Géologie
	GRIFFITHS Michaël	Mathématiques appliquées
	GROULADE Joseph	Biochimie médicale
	HOLLARD Daniel	Hématologie
	HUGONOT Robert	Hygiène et Médecine préventive
	IDELMAN Simon	Physiologie animale
	IVANES Marcel	Electricité
	JALBERT Pierre	Histologie
	JOLY Jean-René	Mathématiques Pures
	JOUBERT Jean-Claude	Physique du solide
	JULLIEN Pierre	Mathématiques Pures
	KAHANE André	Physique générale
	KUHN Gérard	Physique
	LACOUME Jean-Louis	Physique
Mme	LAJZEROWICZ Jeannine	Physique
MM.	LANCIA Roland	Physique atomique
	LE JUNTER Noël	Electronique
	LEROY Philippe	Mathématiques
	LOISEAUX Jean-Marie	Physique nucléaire
	LONGEQUEUE Jean-Pierre	Physique nucléaire
	LUU DUC Cuong	Chimie organique
	MACHE Régis	Physiologie végétale
	MAGNIN Robert	Hygiène et Médecine préventive
	MARECHAL Jean	Mécanique
	MARTIN-BOUYER Michel	Chimie (CUS)

MM.	MAYNARD Roger	Physique du solide
	MICHOULIER Jean	Physique (IUT A)
	MICOUD Max	Maladies infectieuses
	MOREAU René	Hydraulique (INP)
	NEGRE Robert	Mécanique
	PARAMELLE Bernard	Pneumologie
	PECCOUD François	Analyse (IUT B)
	PEFFEN René	Métallurgie
	PELMONT Jean	Physiologie animale
	PERRET Jean	Neurologie
	PERRIN Louis	Pathologie expérimentale
	PFISTER Jean-Claude	Physique du solide
	PHELIP Xavier	Rhumatologie
Mlle	RIERY Yvette	Biologie animale
MM.	RACHAIL Michel	Médecine interne
	RACINET Claude	Gynécologie et obstétrique
	RENAUD Maurice	Chimie
	RICHARD Lucien	Botanique
Mme	RINAUDO Marquerite	Chimie macromoléculaire
MM.	ROMIER Guy	Mathématiques (IUT B)
	SHOM Jean-Claude	Chimie générale
	STIEGLITZ Paul	Anesthésiologie
	STOEBNER Pierre	Anatomie pathologique
	VAN CUTSEM Bernard	Mathématiques appliquées
	VEILLON Gérard	Mathématiques appliquées (INP)
	VIALON Pierre	Géologie
	VOOG Robert	Médecine interne
	VROUSSOS Constantin	Radiologie
	ZADWORNY François	Electronique

MAITRES DE CONFERENCES ASSOCIES

MM.	BOUDOURIS Georges	Radioélectricité
	CHEEKE John	Thermodynamique
	GOLDSCHMIDT Hubert	Mathématiques
	SIDNEY STUARD	Mathématiques Pures
	YACOUD Mahmoud	Médecine légale

CHARGES DE FONCTIONS DE MAITRES DE CONFERENCES

Mme	BERIEL Hélène	Physiologie
Mme	RENAUDET Jacqueline	Microbiologie

Fait le 30 mai 1972.

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à
Monsieur N. GASTINEL, Professeur à l'Université Scientifique
et Médicale de Grenoble, qui a bien voulu me faire l'honneur
de présider le Jury,

à Monsieur P.J. LAURENT, Professeur à l'Université Scientifique
et Médicale de Grenoble,

et à Monsieur A. AUSLENDER, Maître de Conférences à l'Université
de Clermont-Ferrand, qui par leurs conseils et leurs encouragements
m'ont aidé à mener à bien ce travail.

Je tiens à remercier aussi Mademoiselle C. PAYERNE ainsi
que le Service Tirage qui ont apporté le plus grand soin à la réali-
sation pratique et technique de cette thèse.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION.

CHAPITRE I : POSITION DES PROBLEMES CONSIDERES

- I Définition des problèmes d'approximation considérés.
- II Formulation des problèmes d'optimisation correspondants.

CHAPITRE II : APPLICATION D'ALGORITHMES DUAUX A DES PROBLEMES D'APPROXIMATION.

- I Position du problème
- II Stabilité et dualité pour un problème de minimisation convexe.
- III Méthodes duales.
- IV Applications de ces méthodes aux problèmes PL_2 et PC_1 .
Exemples Numériques.

CHAPITRE III : METHODE D'ECLATEMENT DES CONTRAINTES POUR LA RESOLUTION APPROCHEE DE PROBLEMES AVEC CONTRAINTES.

- I Algorithme de résolution.
- II Généralisation de l'algorithme.
- III Exemples Numériques.

CHAPITRE IV : METHODE DE SOUS-GRADIENT.

- I Méthode de résolution dans le cas où F est fortement convexe et où $D = \mathbb{R}^N$.
- II Méthode de résolution dans le cas où F est seulement convexe et où $D = \mathbb{R}^N$.
- III Méthode de résolution dans le cas où F est convexe ou strictement convexe et D un sous ensemble convexe fermé de \mathbb{R}^N .
- IV Applications des algorithmes II et III aux problèmes PC_0 .

CONCLUSION.

BIBLIOGRAPHIE.

INTRODUCTION

Ce travail a pour but la mise au point et l'expérimentation d'algorithmes d'optimisation appliqués à des problèmes d'approximation.

Nous nous intéressons à trois problèmes type de recherche d'une meilleure approximation dans un convexe d'un sous espace vectoriel de dimension finie, lesquels correspondent à trois normes usuelles : norme de Tchebycheff, norme quadratique, norme faisant intervenir la dérivée.

Dans le cas où la fonctionnelle à minimiser est strictement convexe, nous appliquons à ces problèmes, dans le chapitre II, une famille d'algorithmes duaux qui sont en fait des méthodes de déplacements admissibles appliqués à un dual du problème considéré.

Nous utilisons également dans le chapitre III une méthode dite d'éclatement des contraintes, qui, elle aussi, admet une interprétation duale.

Dans le chapitre IV, la fonctionnelle à minimiser n'étant pas différentiable mais possédant des propriétés de sous différentiabilité, nous utilisons pour résoudre le problème considéré une méthode de sous gradient.

En conclusion, les différents algorithmes seront comparés entre eux sur des exemples numériques.

CHAPITRE I

CHAPITRE I

Dans ce premier chapitre, nous définissons trois problèmes d'approximation. Nous montrerons ensuite comment ces problèmes peuvent se mettre sous la forme de problèmes d'optimisation classiques.

I - DEFINITION DES PROBLEMES D'APPROXIMATION CONSIDERES.

On désigne $C_0[a,b]$ l'ensemble des fonctions continues sur un intervalle $[a,b]$ de \mathbb{R} .

A) Approximation uniforme d'une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$ avec contraintes de type convexe.

Soient $[a,b]$ et $[c,d]$ deux intervalles quelconques de \mathbb{R} .
Pour un élément $f \in C_0[a,b]$, on note :

$$\|f\| = \max_{t \in [a,b]} |f(t)| .$$

Soient v_i , $i=1,2,\dots,N$, N éléments donnés appartenant à $C_0[a,b]$ et linéairement indépendants. On désigne par v un élément quelconque de la variété linéaire V engendrée par les v_i , $i=1,2,\dots,N$.

$$v = \sum_{i=1}^N x_i v_i .$$

Etant donnés par ailleurs, φ_i , $i=1,2,\dots,N$ et φ , $N+1$ éléments appartenant à $C_0[c,d]$, on définit :

$$(I-1) \quad C = \left\{ v = \sum_{i=1}^N x_i v_i / \sum_{i=1}^N x_i \varphi_i(t) \leq \varphi(t), \forall t \in [c,d] \right\}$$

Etant donné $f \in C_0[a,b]$, $f \notin C$, on cherche un élément $v^* \in C$ (meilleur approximant) s'il existe tel que :

$$\|f-v^*\| = \inf_{v \in C} \|f-v\| = \inf_{v \in C} \left(\max_{t \in [a,b]} |f(t)-v(t)| \right)$$

Nous appellerons ce problème PC_0 .

Remarque :

Dans la suite nous considérons également le problème $P'C_0$ suivant, cas particulier intéressant du problème précédent.

Soient $[a,b]$ et $[c,d]$ deux intervalles disjoints de \mathbb{R} . On pose $K = [a,b] \subset [c,d]$ et pour un élément $h \in C_0[K]$, on note encore :

$$\|h\| = \max_{t \in [a,b]} (h(t))$$

Soient v_i , $i=1,2,\dots,N$, N éléments donnés appartenant à $C_0[K]$ et linéairement indépendants sur K ; on désigne toujours par v un élément quelconque de la variété linéaire V engendrée par les v_i .

Etant donné un élément φ appartenant à $C_0[c,d]$, on désigne par C le sous ensemble de V défini par :

$$C = \{v \in V \mid v(t) \leq \varphi(t), \forall t \in [c,d]\} \quad (I2)$$

Etant donné $f \in C_0[a,b]$, $f \notin C$, on cherche un élément $v^* \in C$, (meilleur approximant), s'il existe, tel que :

$$\|f-v^*\| = \inf_{v \in C} \|f-v\| = \inf_{v \in C} \left(\max_{t \in [a,b]} |f(t)-v(t)| \right)$$

B) Approximation en moyenne quadratique d'une fonction continue, avec contraintes de type convexe.

L'ensemble $C_0[a,b]$ est ici muni de la norme associée au produit scalaire :

$$(f|g) = \int_a^b f(t)g(t)dt .$$

Soient v_i , $i=1,2,\dots,N$, N éléments donnés appartenant à $C_0[a,b]$ et linéairement indépendants, on désigne toujours par v un élément quelconque de la variété linéaire V engendrée par les v_i et par C le sous ensemble de V défini par l'expression (I1) ou (I2).

Soit alors $f \in C_0[a,b]$, $f \notin C$. On cherche un élément $v^* \in C$, (meilleur approximant) s'il existe tel que :

$$\|f-v^*\|^2 = \inf_{v \in C} (\|f-v\|^2)$$

soit encore :

$$\int_a^b [f(t)-v^*(t)]^2 dt = \inf_{v \in C} \left[\int_a^b [f(t)-v(t)]^2 dt \right]$$

Nous noterons ce problème PL_2 .

C) Approximation d'une fonction continue et à dérivée continue avec contraintes de type convexe.

Soit $[a,b]$ un intervalle réel et $C_1[a,b]$ l'ensemble des fonctions continues, à dérivées continues. On suppose que $0 \in [a,b]$.

$C_1[a,b]$ est muni du produit scalaire :

$$(f|g) = f(0).g(0) + \int_a^b f'(t)g'(t)dt.$$

et de la norme associée :

$$\|f\|^2 = |f(0)|^2 + \int_a^b f'^2(t)dt.$$

Soient v_i , $i=1,2,\dots,N$, N éléments donnés appartenant à $C_1[a,b]$ linéairement indépendants. Soit V la variété linéaire engendrée par les v_i et C le sous-ensemble de V défini comme précédemment.

Soit alors $f \in [a,b]$, $f \notin C$. On cherche $v^* \in C$, (meilleur approximant), s'il existe tel que :

$$\|f-v^*\|^2 = \inf_{v \in C} \|f-v\|^2$$

Soit

$$|f(0)-v^*(0)|^2 + \int_a^b (f'(t)-v^{*'}(t))^2 dt = \inf_{v \in C} \left[|f(0)-v(0)|^2 + \int_a^b (f'(t)-v'(t))^2 dt \right]$$

Ce problème est noté PC_1 .

II - FORMULATION DU PROBLEME PC_0

A) Formulation du problème PC_0

En introduisant la variable auxiliaire x_{N+1} , le problème PC_0 peut s'énoncer ainsi :

Minimiser x_{N+1} sur le domaine convexe D défini dans \mathbb{R}^{N+1} par :

$$\left. \begin{aligned} - \sum_{i=1}^N x_i v_i(t) - x_{N+1} + f(t) &\leq 0 \\ + \sum_{i=1}^N x_i v_i(t) - x_{N+1} - f(t) &\leq 0 \end{aligned} \right\} \quad \forall t \in [a, b]$$

$$+ \sum_{i=1}^N x_i \varphi_i(t) - \varphi(t) \leq 0 \quad \forall t \in [c, d]$$

Pour l'application de certains algorithmes, on imposera par ailleurs au vecteur x de \mathbb{R}^{N+1} d'appartenir à un sous-ensemble convexe et compact défini par :

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^{N+1} \mid \sum_{i=1}^{N+1} x_i^2 \leq r^2\}$$

r désignant un scalaire positif.

On pose : $F(x) = x_{n+1}$

$$\left. \begin{aligned} g_1(x, t) &= - \sum_{i=1}^N x_i v_i(t) - x_{N+1} - f(t) \\ g_2(x, t) &= \sum_{i=1}^N x_i v_i(t) - x_{N+1} + f(t) \end{aligned} \right\} \quad t \in [a, b]$$

$$g_3(x, t) = \sum_{i=1}^N x_i \varphi_i(t) - \varphi(t) \quad t \in [c, d]$$

On doit donc résoudre le problème d'optimisation suivant :
trouver un élément $x^* \in Q \cap D$, s'il existe tel que :

$$x_{N+1}^* = \inf_{x \in Q \cap D} (x_{N+1})$$

où le domaine convexe D est défini par :

$$D = \{x \in \mathbb{R}^{N+1} \mid g_j(x,t) \leq 0, \forall t \in [a,b], \text{ si } j=1,2\} \\ \forall t \in [c,d], \text{ si } j=3$$

B) Formulation du problème PL₂

$$\text{On pose : } F(x) = \int_a^b [f(t) - \sum_{i=1}^N x_i v_i(t)]^2 dt,$$

$$g_1(x,t) = \sum_{i=1}^N x_i \varphi_i(t) - \varphi(t).$$

Si l'on pose :

$$\alpha_{ij} = \int_a^b v_i(t)v_j(t)dt, \quad \forall i=1,2,\dots,N, \\ \forall j=1,2,\dots,N,$$

$$\beta_i = -2 \int_a^b f(t)v_i(t)dt, \quad \forall i=1,2,\dots,N,$$

$$\delta = \int_a^b f^2(t)dt.$$

la fonctionnelle F se met alors sous la forme :

$$F(x) = \sum_{i,j} \alpha_{ij} x_i x_j + \sum_i \beta_i x_i + \delta.$$

Le problème revient donc à minimiser la forme quadratique F sur le domaine D défini dans \mathbb{R}^N par :

$$D = \{x \in \mathbb{R}^N \mid g_1(x,t) \leq 0, \quad \forall t \in [c,d]\}.$$

c) Formulation du problème PC₁

On pose :

$$F(x) = \left[f(0) - \sum_{i=1}^N x_i v_i(0) \right]^2 + \int_a^b \left[f'(t) - \sum_{i=1}^N x_i v_i'(t) \right]^2 dt$$

$$g_1(x,t) = \sum_{i=1}^N x_i \varphi_i(t) - \varphi(t) .$$

Si l'on pose :

$$\alpha_{ij} = v_i(0) \cdot v_j(0) + \int_a^b v_i'(t) v_j'(t) dt \quad \begin{array}{l} \forall i=1,2,\dots,N, \\ \forall j=1,2,\dots,N, \end{array}$$

$$\beta_i = -2v_i(0) - 2 \int_a^b f'(t) v_i'(t) dt$$

$$\delta = (f(0))^2 + \int_a^b f'^2(t) dt$$

La fonctionnelle F s'écrit sous la même forme qu'en b).

Comme dans le cas du problème PL₂, nous devons minimiser la forme quadratique F sur le domaine convexe D de \mathbb{R}^N défini comme précédemment.

CHAPITRE II

APPLICATION D'ALGORITHMES DUAUX
A DES PROBLEMES D'APPROXIMATION

CHAPITRE II

APPLICATION D'ALGORITHMES DUAUX

A DES PROBLEMES D'APPROXIMATION

Dans ce chapitre, nous donnons des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un élément soit solution d'un problème de minimisation convexe dans l'espace $X = \mathbb{R}^N$.

Au problème initial, nous associons une famille de problèmes perturbés ; dans cette étude nous nous intéressons en fait uniquement à des perturbations verticales.

Nous rappelons les théorèmes généraux relatifs aux relations entre stabilité et dualité et à la caractérisation des solutions du problème considéré. Ces théorèmes, démontrés dans le cas d'espaces vectoriels topologiques, localement convexes, et pour des perturbations quelconques, sont énoncés ici dans le cas où $X = \mathbb{R}^N$ et où les perturbations sont de type vertical. Ils nous permettent, connaissant les solutions du problème dual d'en déduire les solutions du problème primal. Nous avons alors construit un algorithme de résolution du problème dual dont le principe est exposé et appliqué dans les troisième et quatrième paragraphes de ce chapitre.

I - POSITION DU PROBLEME.

Soit $X = \mathbb{R}^N$. Le dual de X noté Y est donc \mathbb{R}^N .

Soit Q une partie convexe fermée de \mathbb{R}^N ,

c, d deux scalaires,

F une application continue, convexe de Q dans \mathbb{R} ,

g_j $j=1,2,\dots,p$ des fonctions continues de $Q \times [a,b]$ dans \mathbb{R} .

Les fonctions g_j , $j=1,2,\dots,p$ sont convexes par rapport à la première variable $x \in Q$.

Le problème [P] s'énonce de la façon suivante :

Trouver $\bar{x} \in Q \cap D$, s'il existe, tel que :

$$\alpha = F(\bar{x}) = \inf_{x \in Q \cap D} F(x)$$

où

$$D = \{x \in Q \mid g_j(x,t) \leq 0, \forall t \in [c,d] \}$$

$$\forall j = 1,2,\dots,p$$

est supposé non vide,

ce qui peut s'écrire encore :

$$\alpha = \inf_{x \in X} F_0(x)$$

$$\text{où } F_0(x) = \begin{cases} F(x) & \text{si } x \in Q \cap D = C, \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases}$$

ou encore :

$$\alpha = \inf_{x \in X} \{F_1(x) + \chi_Q(x)\}$$

$$\text{où } \chi_Q(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in Q \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

$$F_1(x) = \begin{cases} F(x) & \text{si } x \in D \\ +\infty & \text{si } x \notin D \end{cases}$$

Notons que F_0 appartient à $\Gamma(X)$, ensemble des fonctions appartenant à $\bar{\mathbb{R}}^X$ qui sont enveloppes supérieures de familles de fonctions affines continues.

$X = \mathbb{R}^N$ est appelé l'espace des variables pour le problème P.

Etant donné un problème de minimisation (P) :

$$\alpha = \inf_{x \in X} F_0(x), \quad F_0 \in \Gamma(X),$$

on lui associe une famille de problèmes perturbés de la façon suivante :
soient U et U' deux espaces vectoriels de Hausdorff localement convexes mis en dualité par rapport à la forme bilinéaire $\langle u, \sigma \rangle$, $u \in U$, $\sigma \in U'$.
 U désigne l'espace des perturbations du problème (P).

Supposons que nous ayons une fonctionnelle $\varphi \in \Gamma_0(X \times U)$ telle que :

$$F_0(x) = \varphi(x, 0) \quad \forall x \in X$$

A la perturbation $u \in U$ correspond alors le problème perturbé

$$P_u = h(u) = \inf_{x \in X} \varphi(x, u)$$

Le problème initial P correspond à $u = 0$

$$\alpha = h(0)$$

Nous prenons ici : $U = C_p[c, d]$ l'ensemble des fonctions continues définies sur $[a, b]$ à valeurs dans \mathbb{R}^p , muni de la norme du Max

$$u \in U \rightarrow \|u\| = \max_{\substack{t \in [c, d] \\ j=1, 2, \dots, p}} |u_j(t)|$$

$$u = (u_1, u_2, \dots, u_p)$$

Soit $U' = C'_p[c, d]$ le dual topologique de $C_p[a, b]$ muni de la topologie de la convergence faible $\sigma(C'_p, C_p)$.

Tout élément de $C'_p[c, d]$ est une mesure vectorielle $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p)$ dont les composantes appartiennent à $C'_1[c, d]$. Pour tout $u \in C_p[c, d]$, on note $\langle u, \sigma \rangle$ la valeur de σ au point u .

Si $\tilde{\sigma}_j$ représente la fonction à variations bornées associée à la $j^{\text{ème}}$ composante de la mesure vectorielle σ , on a :

$$\langle u, \sigma \rangle = \sum_{j=1}^p \int_c^d u_j(t) d\tilde{\sigma}_j(t)$$

D'autre part, un élément $\sigma \in U'$ sera dit positif si $\forall u \in U$ vérifiant :

$$u_j(t) \geq 0 \quad \forall t \in [c, d] \quad \text{et} \quad \forall j = 1, 2, \dots, p$$

$$\text{on a : } \langle u, \sigma \rangle \geq 0$$

On désigne par U'^+ l'ensemble des mesures positives sur $[c, d]$, par U'^- celui des mesures négatives. U désignant l'espace des perturbations, à la perturbation $u \in U$ correspond le problème noté P_u

$$P_u : \begin{cases} h(u) = \inf_{x \in Q \cap D_u} (F(x)) \\ D_u = \{x \in X \mid g_j(x,t) \leq u_j(t) \quad \forall t \in [c,d]\} \\ \quad \quad \quad \forall j = 1,2,\dots,p \end{cases}$$

ce qui correspond à la fonctionnelle

$$\varphi(x,u) = \begin{cases} F(x) & \text{si } x \in Q \cap D_u \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Le problème initial (P) correspond à la perturbation $u = 0$:

$$\alpha = h(0)$$

Soit Ψ la fonctionnelle conjuguée de φ

$$\Psi(y,\sigma) = \sup_{\substack{x \in X \\ u \in U}} (\langle x,y \rangle + \langle u,\sigma \rangle - \varphi(x,u))$$

Désignons par g_x l'application :

$$t \in [c,d] \rightarrow [g_1(x,t), g_2(x,t), \dots, g_p(x,t)]$$

Par définition de D_u

$$\forall x \in D_u : g_j(x,t) \leq u_j(t), \quad \forall t \in [c,d], \quad \forall j=1,2,\dots,p$$

donc

$$\forall \sigma \in U' = C'_p[a,b] : \langle g_x, \sigma \rangle \geq \langle u, \sigma \rangle$$

On a donc :

$$\Psi(y,\sigma) = \begin{cases} \sup_{x \in \mathcal{L}} (\langle x,y \rangle + \langle g_x, \sigma \rangle - F(x)) & \text{si } \sigma \in C'_p[c,d] \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Le problème dual (Q) du problème (P) s'énonce alors :

$$\beta = \inf_{\sigma \in U' = C'_p[a,b]} \{ \sup_{x \in Q} (\langle g_x, \sigma \rangle - F(x)) \}$$

Le problème dual d'un problème de minimisation se met généralement sous forme d'un problème de maximisation. On peut se ramener à cette formulation habituelle en écrivant l'expression de $-\beta$ (nous remplaçons en même temps σ par $-\sigma$)
Le problème Q ainsi modifié s'écrit

$$-\beta = \sup_{\sigma \in U^+} \inf_{x \in Q} (F(x) + \langle g_x, \sigma \rangle)$$

Posons

$$\Phi(x, \sigma) = F(x) + \langle \sigma, g_x \rangle$$

$$\text{et } \theta(\sigma) = \inf_{x \in Q} (\Phi(x, \sigma))$$

Le problème Q modifié s'énonce alors :

Trouver $\bar{\sigma} \in C_p^+[c, d]$ tel que

$$(Q_m) \quad -\beta = \theta(\bar{\sigma}) = \sup_{\sigma \in U^+} \theta(\sigma).$$

Pour le problème Q , U' est l'espace des variables et Y l'espace des perturbations. A la perturbation $y \in Y$, correspond le problème dual perturbé noté Q_y .

$$(Q_y) \quad k(y) = \inf_{\sigma \in U^+} \sup_{x \in Q} (\langle x, y \rangle + \langle g_x, \sigma \rangle - F(x))$$

ou le problème dual perturbé modifié $Q_{m,y}$

$$(Q_{m,y}) \quad -k(y) = \sup_{\sigma \in U^+} (\inf_{x \in Q} (\Phi(x, \sigma) - \langle x, y \rangle))$$

Notons que h appartient à $\text{Conv}(v)$ (ensemble des fonctionnelles appartenant à \bar{R}^U qui sont convexes) mais pas en général à $\Gamma_0(U)$. De même k appartient à $\text{Conv}(Y)$ mais pas en général à $\Gamma_0(Y)$.

II - STABILITE ET DUALITE POUR UN PROBLEME DE MINIMISATION CONVEXE.

Rappelons d'abord quelques définitions [5] .

DEFINITION 1

Un problème (P) est dit stable si $h(0)$ est fini et h continue au point $0 \in U$.

DEFINITION 2

Un problème (P) est dit inf-stable si $h(0)$ est finie et h semi-continue inférieurement en $0 \in U$ c'est-à-dire que :

$$\bar{h}(0) = \liminf_{u \rightarrow 0} h(u) = h(0)$$

Notons $h_0(u)$ la dérivée directionnelle de h en 0 , relative à la direction u .

$$h_0(u) = \lim_{\substack{\lambda > 0 \\ \lambda \rightarrow 0}} \frac{h(\lambda u) - h(0)}{\lambda}$$

DEFINITION 3

Un problème est dit diff-stable si $h(0)$ est fini et si h est différentiable au sens de Gâteaux en $0 \in U$ c'est-à-dire s'il existe $\sigma_0 \in U'$ tel que :

$$h_0(u) = \langle u, \sigma_0 \rangle , \forall u \in U$$

DEFINITION 4

Un problème P est dit inf-diff-stable si $h(0)$ est fini et s'il existe $\sigma_0 \in U'$ tel que :

$$h_0(u) \geq \langle u, \sigma_0 \rangle , \forall u \in U .$$

Si un problème (P) est stable, il est aussi inf-diff-stable. La notion d'inf-diff-stabilité est liée de façon étroite à la dualité.

En effet, on a les deux théorèmes suivants :

THEOREME 1

Les trois propriétés suivantes sont équivalentes

- (1) le problème (P) est inf-stable
- (2) Le problème (Q) est inf-stable
- (3) $-\beta = \alpha =$ un nombre fini.

THEOREME 2

Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

- (1) Le problème (P) est inf-diff-stable
- (2) Le problème (P) est inf-stable et le problème Q a au moins une solution.

COROLLAIRE 1

Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

- (1) Les problèmes (P) et (Q) sont inf-stables et ont au moins une solution.
- (2) Les problèmes (P) et (Q) sont inf-diff-stable.
- (3) Le problème (P) est inf-diff-stable et a au moins une solution.

Sans hypothèse, nous avons :

THEOREME 3

Si $\bar{x} \in X$ et $\bar{\sigma} \in U'$ satisfont à une des trois conditions :

- (1) $[\bar{x}, 0] \in \partial\Psi(0, \bar{\sigma})$
- (2) $[0, \bar{\sigma}] \in \partial\varphi(\bar{x}, 0)$
- (3) $\varphi(\bar{x}, 0) + \Psi(0, \bar{\sigma}) = 0$

alors \bar{x} est solution de (P) et $\bar{\sigma}$ solution de Q et $-\beta = \alpha$.

($\partial\Psi(0, \bar{\sigma})$ désigne le sous différentiel de la fonction Ψ au point $(0, \bar{\sigma})$ de $Y \times U'$) .

Si nous supposons l'inf-diff-stabilité du problème (P) nous avons :

THEOREME 4

Si le problème (P) est inf-diff-stable, alors $\alpha \in S$ est une solution de (P) si et seulement s'il existe $\bar{\sigma} \in U'$ satisfaisant à l'une des trois conditions du théorème 3. (Un tel élément $\bar{\sigma}$ est alors nécessairement une solution du problème Q).

Le théorème suivant, valable dans le cas tout à fait général, donne une condition suffisante de stabilité donc d'inf-diff-stabilité du problème (P).

THEOREME 5

Si $h(0)$ est fini et s'il existe $x_0 \in X_0$ tel que la fonctionnelle $\varphi_{x_0} : u \in Y \rightarrow \varphi(x_0, u)$ soit finie et continue en $0 \in U$, alors le problème (P) est stable et donc inf-diff-stable.

Appliqué au cas du problème cité § 1, ce théorème s'écrit :

PROPOSITION 1

Si $\alpha = h(0)$ est fini et s'il existe $\tilde{x} \in Q$ tel que $g_j(\tilde{x}, t) < 0$, $\forall t \in [c, d]$, $\forall j=1, 2, \dots, p$, alors le problème (P) est stable, et donc inf-diff-stable.

Dans ces conditions, on peut appliquer le théorème (3) qui dans ce cas s'écrit :

PROPOSITION 2

Si le problème (P) est inf-diff-stable alors un élément $\bar{x} \in Q \cap D$ est solution de (P) s'il existe $\bar{\sigma} \in C_p^1[c, d]$ tel que :

$$F(x) - \langle g_x, \bar{\sigma} \rangle = \min_{x \in Q} (F(x) - \langle g_x, \bar{\sigma} \rangle)$$

$$\text{et } \langle g_x, \bar{\sigma} \rangle = 0$$

Un tel élément $\bar{\sigma}$ est nécessairement solution de Q.

Cette proposition dans le cas du problème dual modifié (Q_m) devient :

PROPOSITION 2'

Si le problème (P) est inf-diff-stable alors un élément $\bar{x} \in Q \cap D$ est solution de (P) s'il existe $\bar{\sigma} \in C_p^+[c,d]$ tel que :

$$F(\bar{x}) + \langle g_{\bar{x}}, \bar{\sigma} \rangle = \text{Min}_{x \in Q} [F(x) + \langle g_x, \bar{\sigma} \rangle]$$

et

$$\langle g_{\bar{x}}, \bar{\sigma} \rangle = 0$$

DEMONSTRATION

En utilisant le théorème (4), $\bar{x} \in Q \cap D$ est une solution de (P) s'il existe $\bar{\sigma} \in C_p^+[a,b]$ satisfaisant à :

$$(i) \quad F(\bar{x}) + \text{Sup}_{x \in Q} (-\langle g_x, \bar{\sigma} \rangle - F(x)) = 0$$

Comme g_x prend des valeurs négatives sur $Q \cap D$ et que $\bar{\sigma} \in C_p^+[a,b]$ on a : $\langle \bar{\sigma}, g_{\bar{x}} \rangle \leq 0$

On en déduit que :

$$-F(\bar{x}) \leq -F(\bar{x}) - \langle \bar{\sigma}, g_{\bar{x}} \rangle \leq \text{Sup}_{x \in Q} (-F(x) - \langle \bar{\sigma}, g_x \rangle)$$

L'égalité (i) est donc équivalente à :

$$- [F(\bar{x}) + \langle \bar{\sigma}, g_{\bar{x}} \rangle] = \text{Sup}_{x \in Q} [-F(x) - \langle \bar{\sigma}, g_x \rangle],$$

et $\langle \bar{\sigma}, g_{\bar{x}} \rangle = 0$

soit

$$\begin{cases} F(\bar{x}) + \langle \bar{\sigma}, g_{\bar{x}} \rangle = \text{Inf}_{x \in Q} [F(x) + \langle \bar{\sigma}, g_x \rangle], \\ \langle \bar{\sigma}, g_{\bar{x}} \rangle = 0. \end{cases}$$

c.q.f.d.

On peut obtenir des théorèmes de caractérisation équivalents en introduisant la notion de Lagrangien généralisé. Le Lagrangien d'un problème de minimisation (P) (auquel est associé le problème dual (Q)) est la fonctionnelle définie sur $X \times U'$ à valeurs dans \bar{R} :

$$l(x, \sigma) = \sup_{u \in U} (\langle u, \sigma \rangle - \varphi(x, u))$$

or Ψ la fonctionnelle conjuguée de φ est définie par :

$$\Psi(y, \sigma) = \sup_{\substack{x \in X \\ u \in U}} (\langle x, y \rangle + \langle u, \sigma \rangle - \varphi(x, u))$$

donc

$$\Psi(y, \sigma) = \sup_{x \in X} (\langle x, y \rangle + l(x, \sigma))$$

Dans le cas de notre problème on a : $U' = C'_p[c, d]$

$$l(x, \sigma) = \begin{cases} \langle \sigma, g_x \rangle - F(x) & \text{si } \sigma \in C'_p[c, d] \text{ et } x \in Q \\ +\infty & \text{si } x \in Q \text{ et si } \sigma \notin C'_p[c, d] \\ -\infty & \text{si } x \notin Q \end{cases}$$

$$\text{et donc : } \Psi(y, \sigma) = \sup_{x \in Q} (\langle x, y \rangle + l(x, \sigma))$$

Le problème dual de minimisation Q associé au problème (P) s'énonce alors :

$$(Q) \quad \beta = \inf_{\sigma \in C'_p[a, b]} (\sup_{x \in Q} l(x, \sigma))$$

Si on présente le dual du problème (P) sous forme d'un problème de maximisation (Q_m) alors :

$$(Q_m) \quad -\beta = \sup_{\sigma \in C'_p[c, d]} (\inf_{x \in Q} \Phi(x, \sigma))$$

$$\text{où } \Phi(x, \sigma) = F(x) + \langle \sigma, g_x \rangle \quad \text{si } \sigma \in U'^+ \text{ et } x \in Q$$

$$\text{et en posant : } \theta(\sigma) = \inf_{x \in Q} \Phi(x, \sigma)$$

$$\text{on a } -\beta = \sup_{\sigma \in U'^+} [\theta(\sigma)]$$

Remarquons à cet effet que le Lagrangien ℓ du problème (P) est au signe près la fonctionnelle Φ définie ci-dessus.

D'autre part on a :

$\ell(x, \sigma) = \varphi_x^*(\sigma)$ où φ_x^* désigne la fonctionnelle conjuguée de la fonctionnelle $x \in X \rightarrow \varphi_x(u) = \varphi(x, u)$.

Or

$$\varphi(x, u) = \varphi_x(u) = \varphi_x^{**}(u) = \sup_{\sigma \in C'_p[c, d]} (\langle u, \sigma \rangle - \varphi_x^*(\sigma))$$

soit :

$$\varphi(x, u) = \sup_{\sigma \in C'_p[c, d]} (\langle u, \sigma \rangle - \ell(x, \sigma))$$

d'où :

$$\alpha = \inf_{x \in Q} \sup_{\sigma \in C'_p[c, d]} (-\ell(x, \sigma))$$

ou encore :

$$\alpha = \inf_{x \in Q} \sup_{\sigma \in C'_p[c, d]} \Phi(x, \sigma).$$

Pour x fixé la fonctionnelle $\sigma \rightarrow -\Phi(x, \sigma)$ est convexe

Pour σ fixé la fonctionnelle $x \rightarrow \Phi(x, \sigma)$ est convexe.

Remarquons que dans le cas où le problème (P) est inf-stable on a :

$$-\beta = \alpha = \inf_{x \in Q} \sup_{\sigma \in C'_p[c, d]} \Phi(x, \sigma) = \sup_{\sigma \in C'_p[a, b]} \inf_{x \in Q} \Phi(x, \sigma)$$

On a alors le théorème de caractérisation suivant :

PROPOSITION 3

Si le problème (P) est inf-diff-stable alors un élément $\bar{x} \in Q$ est une solution de (P) s'il existe $\bar{\sigma} \in C'_p[c, d]$ tel que :

$$\Phi(\bar{x}, \sigma) \leq \Phi(\bar{x}, \bar{\sigma}) \leq \Phi(x, \bar{\sigma})$$

pour tout $x \in Q$ et pour tout $\sigma \in C'_p[c, d]$.

Un tel élément $\bar{\sigma}$ est nécessairement une solution de (Q_m) .

DEMONSTRATION

La première inégalité est équivalente à :

$$F(\bar{x}) + \langle \bar{\sigma}, g_{\bar{x}} \rangle = \inf_{x \in Q} (F(x) + \langle \bar{\sigma}, g_x \rangle)$$

La deuxième inégalité est équivalente à :

$$\langle g_{\bar{x}}, \bar{\sigma} \rangle \leq \langle g_{\bar{x}}, \sigma \rangle, \quad \forall \sigma \in C_p^+[a, b]$$

ce qui est équivalent à :

$$\langle g_{\bar{x}}, \bar{\sigma} \rangle = 0 \quad \text{et} \quad \bar{x} \in Q \cap D.$$

III - METHODE DUALE

Rappelons tout d'abord quelques définitions

DEFINITION 1

Une fonction f définie sur un convexe Q d'un espace vectoriel normé X est dite strictement convexe si pour tout x, y et tout $\alpha \in]0, 1[$, on a :

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) < \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y)$$

DEFINITION 2

Une fonction f est dite fortement convexe, s'il existe $\gamma > 0$ tel que pour tout x et $y \in Q$, et tout $\alpha \in]0, 1[$ on ait

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y) - \gamma \alpha(1-\alpha) \|x-y\|^2$$

Dans le cas d'une fonction f définie et continue sur Q , la définition peut se formuler ainsi : il existe $K > 0$ tel que pour tout x et $y \in Q$, $\forall c \in \partial f(x)$, $\forall d \in \partial f(y)$

$$\langle d-c, y-x \rangle \geq K \|x-y\|^2.$$

Compte tenue de l'étude précédente, pour construire un algorithme permettant d'obtenir une solution de (P), nous supposons que :

H1) Il existe un point $x \in Q$ tel que $g_j(x, t) < 0 \quad \forall j = 1, 2, \dots, p$
et $\forall t \in [c, d]$

H2) F est strictement convexe et pour tout $\sigma \in C_p^+[c, d]$
il existe un point noté x_σ (qui est alors unique) qui réalise le minimum de $\Phi(x, \sigma)$ sur Q (lorsque F est fortement convexe, cette hypothèse est automatiquement vérifiée).

Nous rappelons d'autre part que X est supposé euclidien de dimension N .

Les théorèmes que nous allons maintenant énoncer nous permettront de démontrer la convergence de l'algorithme dual.

THEOREME 6

L'application $\sigma \rightarrow x_\sigma$ de C_p^+ dans le convexe fermé Q de \mathbb{R}^N est continue pour la topologie $\sigma(C_p^+, C_p)$.

DEMONSTRATION

L'ensemble C_p^+ muni de la topologie faible $\sigma(C_p^+, C_p)$ est métrisable. Soit $\sigma_0 \in C_p^+[a, b]$.

F étant strictement convexe, il existe un point unique x_{σ_0}
tel que : $\Phi(x_{\sigma_0}, \sigma_0) = \min_{x \in Q} \Phi(x, \sigma_0)$.

Montrons que l'algorithme $\sigma \rightarrow x_\sigma$ est continue en σ_0 .
Soit $\varepsilon > 0$ arbitraire. Désignons par B_ε la boule fermée centrée en x_{σ_0} ,
de rayon ε et S_ε la frontière de cette boule. Montrons alors qu'il
existe un voisinage \mathcal{U}_{σ_0} de σ_0 tel que pour tout $\sigma \in \mathcal{U}_{\sigma_0} \cap C_p^+$ on ait :
 $x_\sigma \in B_\varepsilon$. Comme $S_\varepsilon \cap Q$ est compact, $\Phi(x, \sigma)$ atteint son minimum et

en raison de l'unicité de ce minimum sur Q , on a :

$$\Phi(x_{\sigma_0}, \sigma_0) < \min_{x \in S_\varepsilon \cap Q} \Phi(x, \sigma_0)$$

Appelons η la différence entre les deux membres de cette inégalité stricte. On va montrer qu'il existe un voisinage \mathcal{U}_{σ_0} de σ_0 tel que pour tout $\sigma \in \mathcal{U}_{\sigma_0} \cap C_p^{'+}$, on ait encore :

$$\Phi(x_{\sigma_0}, \sigma) < \min_{x \in S_\varepsilon \cap Q} \Phi(x, \sigma)$$

Cela prouvera que le minimum de $\Phi(x, \sigma)$ pour $x \in B_\varepsilon \cap Q$ est atteint à l'intérieur de B_ε et qu'il est donc identique au minimum de $\Phi(x, \sigma)$ pour $x \in Q$.

Ainsi, pour tout $\sigma \in \mathcal{U}_{\sigma_0} \cap C_p^{'+}$, on aura : $x_\sigma \in B_\varepsilon$.

Il existe un voisinage \mathcal{V}_{σ_0} de σ_0 tel que pour tout $\sigma \in \mathcal{V}_{\sigma_0}$

on ait : $|\Phi(x_{\sigma_0}, \sigma_0) - \Phi(x_{\sigma_0}, \sigma)| = |\langle g_{x_{\sigma_0}}, \sigma_0 - \sigma \rangle| < \frac{\eta}{2}$

* Il existe donc $m > 0$ tel que, $\forall x \in S_\varepsilon \cap Q$, $\|g_x\| \leq m$. Appelons \tilde{m} la fonction constante égale à m sur $[a, b]$. Pour σ appartenant à $C_p^{'+}$, $\|g_x\| \leq m$ entraîne $|\langle g_x, \sigma \rangle| \leq \langle \tilde{m}, \sigma \rangle$. Il existe donc un voisinage $\tilde{\mathcal{W}}_{\sigma_0}$ de σ_0 tel que pour tout $\sigma \in \tilde{\mathcal{W}}_{\sigma_0} \cap C_p^{'+}$ et tout $x \in S_\varepsilon \cap Q$, on ait :

$$\begin{aligned} |\Phi(x, \sigma_0) - \Phi(x, \sigma)| &= |\langle g_x, \sigma_0 - \sigma \rangle| \leq |\langle g_x, \sigma_0 \rangle| + |\langle g_x, \sigma \rangle| \\ &\leq \langle \tilde{m}, \sigma_0 + \sigma \rangle \leq 2\alpha \end{aligned}$$

où α est une constante vérifiant $\langle \tilde{m}, \sigma_0 \rangle < \alpha$

* Par ailleurs l'application $x \rightarrow g_x$ de Q dans $C[c, d]$ est continue.

En effet soit x_0 fixé appartenant à Q .

Posons $G_t(x) = |g(x,t) - g(x_0,t)|$

et $G(x) = \max_{t \in [a,b]} G_t(x)$

On démontre le théorème suivant [7].

Si (G_t) , $t \in A$ est une famille de fonctionnelles, où A est un compact quelconque et s'il existe un ouvert \mathcal{U} de X tel que l'application :

$$[t,x] \in A \times X \rightarrow G_t(x)$$

soit s.c.s. sur $A \times \mathcal{U}$, alors la fonctionnelle $G = \sup_{t \in A} G_t$ est

s.c.s. en tout $x_0 \in \mathcal{U}$.

Or par hypothèse l'application $(x,t) \rightarrow g(x,t)$ de $Q \times [c,d]$ dans \mathbb{R} est continue par rapport à l'ensemble des variables et par conséquent s.c.i. et s.c.s. sur $Q \times [c,d]$. On en déduit que l'application $(x,t) \rightarrow G_t(x)$ est continue sur $Q \times [c,d]$ et donc d'après le théorème ci-dessus que G est continue sur Q .

Par suite $x_0 \in Q$, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un voisinage \mathcal{V}_{x_0} tel que pour tout $x \in \mathcal{V}_{x_0}$ on ait : $G(x) \leq \varepsilon$ ce qui traduit que l'application $x \rightarrow g_x$ de Q dans $C[c;d]$ est continue.

Ainsi par homothétie, il existe un voisinage \mathcal{W}_{σ_0} de σ_0 tel que pour tout $\sigma \in \mathcal{W}_{\sigma_0} \cap C_p^{1+}$ et $\forall x \in S_\varepsilon \cap Q$, on ait :

$$|\Phi(x, \sigma_0) - \Phi(x, \sigma)| < \frac{\eta}{2}$$

Posons $\mathcal{U}_{\sigma_0} = \mathcal{V}_{x_0} \cap \mathcal{W}_{\sigma_0}$.

On en conclut que pour tout $\sigma \in \mathcal{U}_{\sigma_0} \cap C_p^{1+}$ on a :

$$|\Phi(x_{\sigma_0}, \sigma) - \min_{x \in S_\varepsilon \cap Q} \Phi(x, \sigma)| < \frac{\eta}{2}$$

THEOREME 7

L'application θ de C_p^+ dans \mathbb{R} est concave, continue pour la topologie $\sigma(C_p^+, C_p)$ et admet une dérivée au sens de Gâteaux $\theta'(\sigma)$ telle que pour tout $v \in C_p^+$, différent de σ , on ait :

$$\langle \theta'(\sigma), v \rangle = \langle g_{x_\sigma}, v \rangle$$

x_σ réalisant le minimum de $\Phi(x, \sigma)$ par rapport à x sur Q .

DEMONSTRATION

On a :

$$\theta(\sigma) = \min_{x \in Q} \Phi(x, \sigma) = \min_{x \in Q} (F(x) + \langle g_x, \sigma \rangle) = \Phi(x_\sigma, \sigma)$$

L'application θ est donc concave car enveloppe inférieure de fonctions linéaires affines en σ .

Montrons d'autre part qu'elle est continue, pour la topologie $\sigma(C_p^+, C_p)$. D'après le théorème précédent, l'application $\sigma \rightarrow x_\sigma$ de C_p^+ dans Q est continue ; il suffit donc de démontrer que l'application $(x, \sigma) \rightarrow \Phi(x, \sigma)$ de $Q \times C_p^+[c, d]$ dans \mathbb{R} est continue. Pour simplifier le raisonnement on suppose $p = 1$.

Soit (x, σ) un élément de $Q \times C^+[c, d]$.

On a :

$$|\Phi(x, \sigma) - \Phi(x', \sigma')| \leq |F(x) - F(x')| + |\langle g_x, \sigma \rangle - \langle g_{x'}, \sigma' \rangle|$$

Comme les applications $x \rightarrow g_x$ de Q dans $C[c, d]$ et $x \rightarrow F(x)$ de Q dans \mathbb{R} sont continues, il suffit donc de prouver que l'application $[g, \sigma] \rightarrow \langle g, \sigma \rangle$ est continue sur $C[c, d] \times C^+[c, d]$, c'est-à-dire que :

$\forall \epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ et un voisinage W_σ de σ tels que les relations $\|g - g'\| \leq \eta$ et $\sigma' \in W_\sigma$ entraînent que :

$$|\langle g', \sigma' \rangle - \langle g, \sigma \rangle| \leq \epsilon.$$

$$\begin{aligned} \text{Or } |\langle g, \sigma \rangle - \langle g', \sigma' \rangle| &\leq |\langle g - g', \sigma \rangle| + |\langle g', \sigma - \sigma' \rangle| \\ &\leq \|g - g'\| \times \|\sigma\| + |\langle g', \sigma - \sigma' \rangle| \end{aligned}$$

Pour un choix correct de η , on peut avoir :

$$\|g - g'\| \times \|\sigma'\| \leq \epsilon/2.$$

D'autre part l'application $x \rightarrow g_x$ de Q dans $C[c,d]$ étant continue, il existe $m > 0$ tel que $\|g'\| \leq m$.

Il existe donc un voisinage \tilde{W}_σ de σ tel que pour tout $\sigma' \in \tilde{W}_\sigma$ on ait :

$$|\langle g', \sigma - \sigma' \rangle| \leq \langle m, \sigma + \sigma' \rangle \leq 2\alpha,$$

où α est un nombre vérifiant $\langle m, \sigma \rangle < \alpha$

En choisissant $\tilde{W}_\sigma = \lambda \tilde{W}_\sigma$ avec λ suffisamment petit, on peut donc avoir $|\langle g', \sigma - \sigma' \rangle| \leq \frac{\epsilon}{2}$.

Calculons alors le sous différentiel de la fonction convexe $(-\theta)$. Par définition de l'application θ , pour tout $v \in C_p^+[c,d]$, v différent de σ , on a :

$$\theta(\sigma) - \theta(\sigma+v) = \inf_{x \in Q} (F(x) + \langle g_x, \sigma \rangle) - \inf_{x \in Q} (F(x) + \langle g_x, \sigma+v \rangle)$$

et pour $x = x_\sigma$, qui réalise le minimum unique de $\Phi(x, \sigma)$ sur Q

$$\theta(\sigma) - \theta(\sigma+v) \geq F(x_\sigma) + \langle g_{x_\sigma}, \sigma \rangle - (F(x_\sigma) + \langle g_{x_\sigma}, \sigma+v \rangle)$$

soit

$$\theta(\sigma) - \theta(\sigma+v) \geq -\langle g_{x_\sigma}, v \rangle$$

Par conséquent le sous différentiel de $(-\theta)$ au point σ se réduit à un seul élément g_{x_σ} et la fonction θ admet donc une dérivée au sens de Gâteaux :

$$\langle \theta'(\sigma), v \rangle = \langle g_{x_\sigma}, v \rangle, \quad \forall v \in C_p^+[c,d].$$

THEOREME 8

Quel que soit $\lambda \leq -\beta$, l'ensemble $S_\lambda = \{\sigma \in C_p^+[c,d] \mid \theta(\sigma) \geq \lambda\}$ est fortement borné, fermé pour la topologie $\sigma(C_p^+, C_p)$ donc compact pour cette topologie.

DEMONSTRATION

La continuité de l'application θ pour la topologie $\sigma(C_p^+, C_p)$ entraîne que S_λ est fermée pour cette topologie.

Montrons que S_λ est fortement borné.

D'après l'hypothèse H_1 il existe $\delta > 0$ tel que

$$g_j(\tilde{x}, t) < -\delta < 0 \quad \forall j = 1, 2, \dots, p \text{ et } \forall t \in [c, d]$$

et par conséquent :

$$\forall \sigma \in C_p^+[c, d] \text{ on a : } \langle g_{\tilde{x}}, \sigma \rangle \leq -\delta \|\sigma\|$$

Si S_λ n'est pas borné, il existe une suite $\{\sigma_n\} \in S_\lambda$ telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\sigma_n\| = +\infty \text{ et on a alors}$$

$$\lambda \leq \theta(\sigma_n) \leq F(\tilde{x}) + \langle g_{\tilde{x}}, \sigma_n \rangle \leq F(\tilde{x}) - \delta \|\sigma_n\|$$

En passant à la limite, on obtient une contradiction.

S_λ est donc fortement borné, fermé pour la topologie $\sigma(C_p^+, C_p)$ et d'après le théorème d'Alaoglu compact pour cette topologie.

Ce dernier théorème nous permettra tout particulièrement de démontrer la convergence de l'algorithme dual. Mais avant d'en exposer le principe, il paraît souhaitable de rappeler les méthodes permettant d'obtenir les solutions du problème dual d'un problème d'optimisation convexe avec un nombre fini de contraintes.

EXPOSE DU PROBLEME EN DIMENSION FINIE -METHODE NUMERIQUE DE RESOLUTION

- Soit $X = \mathbb{R}^N$ et Q une partie convexe fermée de \mathbb{R}^N
- F une application continue, convexe de Q dans \mathbb{R}
- $g_j \quad j=1, 2, \dots, p$ des fonctions continues, convexes de Q dans \mathbb{R} .

Le problème P_F s'énonce de la façon suivante :

$$\inf_{x \in Q \cap D} F(x)$$

où $D = \{x \in Q \mid g_j(x) \leq 0 \quad \forall j=1,2,\dots,p\}$ est supposé non vide.

Le Lagrangien de ce problème est défini sur $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^P$ par

$$\Phi(x,\lambda) = \begin{cases} F(x) + \langle \lambda, g(x) \rangle & \text{si } \lambda \in (\mathbb{R}^P)^+ \text{ et } x \in Q \\ +\infty & \text{si } x \in Q \text{ et si } \lambda \notin (\mathbb{R}^P)^+ \\ -\infty & \text{si } x \notin Q \end{cases}$$

Le problème dual associé à P_F et noté Q_F s'énonce alors :

$$\sup_{\lambda \in (\mathbb{R}^P)^+} \theta(\lambda)$$

où

$$\theta(\lambda) = \inf_{x \in Q} [\Phi(x,\lambda)] .$$

On suppose de plus que :

H1) il existe un élément $x_0 \in Q$ tel que $g_j(x_0) < 0 \quad \forall j=1,2,\dots,p$.

H2) F est strictement convexe et que pour tout $\lambda \in (\mathbb{R}^P)^+$ il existe un élément noté x_λ (qui est unique) qui réalise le minimum de $\Phi(x,\lambda)$ sur Q .

Compte tenu des hypothèses faites, on démontre les théorèmes suivants qui sont les versions en dimension finie des propositions (2) et (3) et des théorèmes 6 et 7 énoncés dans les paragraphes précédents.

PROPOSITION 4

Le problème (P_F) étant inf-diff-stable, un élément $\bar{x} \in Q \cap D$ est solution de (P_F) s'il existe $\bar{\lambda} \in (\mathbb{R}^P)^+$ tel que :

$$\Phi(\bar{x}, \bar{\lambda}) = \inf_{x \in Q} (\Phi(x, \bar{\lambda})) \quad \text{et} \quad (g_{x_{\bar{\lambda}}}, \bar{\lambda}) = 0$$

(Un tel élément $\bar{\lambda}$ est nécessairement une solution de Q_F).

En introduisant le Lagrangien Φ , on obtient également la proposition suivante, équivalente à la précédente :

PROPOSITION 5

Le problème P_F étant inf-diff-stable, un élément $\bar{x} \in Q$ est une solution de P_F s'il existe $\bar{\lambda} \in (\mathbb{R}^P)^+$ tel que :

$$\Phi(\bar{x}, \lambda) \leq \Phi(\bar{x}, \bar{\lambda}) \leq \Phi(x, \bar{\lambda})$$

pour tout $x \in Q$, et pour tout $\lambda \in (\mathbb{R}^P)^+$.

Un tel élément $\bar{\lambda}$ est nécessairement une solution de Q_F .

THEOREME 6' [4]

L'application $\lambda \rightarrow x_\lambda$ de $(\mathbb{R}^P)^+$ dans Q est continue.

THEOREME 7'

Les dérivées partielles $(\frac{\partial \theta}{\partial \lambda_j})$, $j=1,2,\dots,p$, existent et sont continues sur $(\mathbb{R}^P)^+$, donc θ est continuellement différentiable.

On a : $(\frac{\partial \theta}{\partial \lambda_j})(\lambda^*) = g_j(x_{\lambda^*})$

D'autre part si $\lambda^* \in (\mathbb{R}^P)^+$ et si $\lambda_j^* = 0$ alors la dérivée partielle

à droite $(\frac{\partial \theta}{\partial \lambda_j})_+$ existe en λ^* .

Ces théorèmes nous permettent de trouver la solution du problème dual en utilisant une méthode de montée, qui tient compte de la contrainte imposée à λ d'appartenir au cône positif de \mathbb{R}^P et qui nous permette en outre de déterminer un point de selle du Lagrangien Φ .

Soit $\lambda_0 \in (\mathbb{R}^P)^+$. On construit une suite $\{\lambda_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, définie par la relation : $\lambda_{n+1} = \lambda_n + \rho_n h_n$.

h_n désignant la direction du déplacement et ρ_n un coefficient positif.

Les conditions que cette suite doit vérifier sont les suivantes :

- 1°) $\theta(\lambda_{n+1}) > \theta(\lambda_n)$, condition qui nécessite que la direction h_n soit choisie telle que : $(\theta'(\lambda_n) / h_n) > 0$.
- 2°) Il existe ρ_n tel que $\lambda_{n+1} = \lambda_n + \rho_n h_n$ appartienne à $(\mathbb{R}^p)^+$
- 3°) S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $(\theta'(\lambda_{n_0}) / h_{n_0}) = 0$, alors λ_{n_0} est solution du problème Q_F et $x_{\lambda_{n_0}}$ qui réalise le minimum de $\Phi(x, \lambda_{n_0})$ sur Q est solution du problème P_F .

Pour qu'il en soit ainsi, il faut que la relation $(\theta'(\lambda_{n_0}) / h_{n_0}) = 0$ implique les deux relations :

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} g_j(x_{\lambda_{n_0}}) \leq 0 \quad \forall j=1,2,\dots,p \\ \sum_{j=1}^p (\lambda_{n_0})_j g_j(x_{\lambda_{n_0}}) = 0 \end{array} \right.$$

On peut être guidé dans la recherche de cette direction de montée h_n par l'interprétation économique du problème.

Effectivement, si l'on considère λ_j comme le prix attribué au $j^{\text{ème}}$ facteur $g_j(x)$ ($j=1,2,\dots,p$) et x_λ le plan optimal pour minimiser le coût :

$$F(x) + \sum_{j=1}^p \lambda_j g_j(x),$$

alors $g_j(x_\lambda)$ représente l'excès d'approvisionnement par rapport à la demande du $j^{\text{ème}}$ facteur. A l'itération suivante, il faut donc déterminer λ_j plus grand si $g_j(x_\lambda) > 0$, et plus petit si $g_j(x_\lambda) \leq 0$.

Par ailleurs, il faut remarquer que, si $g_j(x_\lambda) < 0$ et si $(\lambda_n)_j = 0$, la condition de positivité de $(\lambda_{n+1})_j$ ne peut être vérifiée que si $(h_n)_j = 0$.

Les considérations ci-dessus nous amènent à proposer la direction de montée suivante :

$$(h_n)_j = \begin{cases} 0 & \text{si } j \in I_n \cap J_n \\ g_j(x_{\lambda_n}) & \text{sinon} \end{cases}$$

en posant : $I_n = \{j \in \{1,2,\dots,p\} \mid \lambda_{n_j} = 0\}$

$$J_n = \{j \in \{1,2,\dots,p\} \mid g_j(x_n) < 0\}$$

On note \bar{I}_n et \bar{J}_n les complémentaires respectifs de ces deux ensembles.

Pour tout $j \in \bar{J}_n$ (c'est-à-dire $g_j(x_{\lambda_n}) \geq 0$), il n'intervient aucune restriction sur le choix de ρ_n .

Par contre, pour tout $j \in J_n \cap \bar{I}_n$ (c'est-à-dire si $g_j(x_{\lambda_n}) < 0$ et $(\lambda_n)_j > 0$), ρ_n doit être choisi suffisamment petit afin que, pour tout $j=1,2,\dots,p$, on ait : $(\lambda_{n+1})_j \in \mathbb{R}^+$, condition qui se trouve vérifiée si ρ_n appartient à l'intervalle

$$]0, \min_{j \in J_n \cap \bar{I}_n} \left(- \frac{(\lambda_n)_j}{g_j(x_{\lambda_n})} \right)]$$

Par ailleurs on a :

$$(\theta'(\lambda_n) / h_n) = \sum_{j \in \bar{J}_n \cup \bar{I}_n} g_j^2(x_{\lambda_n})$$

et par conséquent $(\theta'(\lambda_n) / h_n) \geq 0$.

De plus, si $(\theta'(\lambda_n) / h_n) = 0$, ceci implique que, pour tout $\{j \in \{1,2,\dots,p\}\}$, on a :

$$\text{soit } g_j(x_{\lambda_n}) = 0$$

$$\text{soit } g_j(x_{\lambda_n}) < 0 \text{ et } (\lambda_n)_j = 0$$

et que par suite :

$$g_j(x_{\lambda_n}) \leq 0 \quad \forall j=1,2,\dots,p$$

et

$$\sum_j g_j(x_{\lambda_n}) \times (\lambda_n)_j = 0$$

relations qui traduisent le fait que $(\lambda_n, x_{\lambda_n})$ est un point de selle du Lagrangien Φ .

Uzawa a également proposé pour résoudre ce problème de point de selle une méthode de gradient à pas constant dans \mathbb{R}^p qui est la suivante :

$$\forall j=1,2,\dots,p : (\lambda_{n+1})_j = \text{Max} \{0, (\lambda_n)_j + \rho g_j(x_{\lambda_n})\}$$

Il a établi le théorème suivant [1] :

THEOREME

Les hypothèses H1 et H2 étant vérifiées, il existe $\rho_0 > 0$, tel que pour tout $\rho \leq \rho_0$, la suite $\{x_{\lambda_n}\}$ converge vers la solution \bar{x} du problème (P_P) .

Nous allons maintenant exposer, pour résoudre un problème d'optimisation à une infinité de contraintes, une méthode de recherche de point de selle du Lagrangien associé, analogue à celle employée dans le cas d'un nombre fini de contraintes.

PRINCIPE DE L'ALGORITHME DUAL

Remarquons tout d'abord que toute fonction $\tilde{\sigma} \in C_p^+[c,d]$ peut servir à définir un élément σ de $C_p^+[c,d]$ de la façon suivante :

$$\sigma : u \in C_p[c,d] \rightarrow \sum_{j=1}^p \int_c^d u_j(t) \tilde{\sigma}_j(t) dt$$

La fonctionnelle linéaire continue σ ainsi associée à la fonction continue $\tilde{\sigma}$ est positive si $\tilde{\sigma}$ est positive c'est-à-dire si : $\tilde{\sigma}_j(t) \geq 0$ pour tout $t \in [c,d]$ et pour tout $j=1,2,\dots,p$.

L'algorithme de résolution que nous allons proposer, fera intervenir des éléments de $C_p^+[c,d]$ qui sont de la forme indiquée ci-dessus. D'ailleurs, nous pouvons tout aussi bien raisonner sur les fonctions continues que sur les éléments de $C_p^+[c,d]$ et c'est ce que nous ferons au cours de l'exposé de notre procédé itératif.

La méthode consiste à résoudre le problème Q_m et à obtenir comme sous-produit une solution de (P), ce qui revient, d'après les théorèmes de caractérisation des solutions énoncés précédemment, à déterminer un point de selle du Lagrangien $\Phi(x,\sigma)$.

Pour simplifier cette étude, nous supposons que $p = 1$. On construit de façon récurrente une suite $\{\tilde{\sigma}_n\} \in C^+[c,d]$ une suite $\{\tilde{e}_n\} \in C[c,d]$ et une suite ρ_n de scalaires positifs, le procédé itératif étant défini par la relation :

$$\tilde{\sigma}_{n+1} = \tilde{\sigma}_n + \rho_n \tilde{e}_n$$

Supposons donné $\tilde{\sigma}_0$ et calculés $\tilde{\sigma}_k$ ($k=1,2,\dots,n$), ρ_k ($k=1,2,\dots,n-1$) Il convient alors de déterminer une direction $\tilde{e}_n \in C_1[c,d]$ (à laquelle est associée la mesure $e_n \in C^+[c,d]$ et le pas ρ_n à effectuer dans cette direction, de telle sorte que les trois conditions suivantes soient vérifiées :

- C1) $\langle \theta'(\sigma_n), e_n \rangle \geq 0$, condition nécessaire pour que
 $\theta(\sigma_{n+1}) \geq \theta(\sigma_n)$.
- C2) Il existe $\rho_n > 0$ tel que $\sigma_n + \rho_n e_n$ appartienne à $C_1^+[c,d]$.
- C3) Si $\langle \theta'(\sigma_n), e_n \rangle = 0$ alors σ_n est solution du problème (Q_m)
 et l'élément x_{σ_n} associé est solution du problème (P).

Pour qu'il en soit ainsi la condition $\langle \theta'(\sigma_n), e_n \rangle = 0$ doit impliquer
 que 1) $g_{x_{\sigma_n}}(t) \leq 0 \quad \forall t \in [c,d]$
 2) $\langle g_{x_{\sigma_n}}, \sigma_n \rangle = 0$.

Dans le cas contraire $\langle \theta'(\sigma_n), e_n \rangle$ est strictement positif et on peut
 trouver $\rho_n > 0$ tel que :

$$\theta(\sigma_n + \rho_n e_n) > \theta(\sigma_n).$$

D'après le théorème 7, on sait que : $\langle \theta'(\sigma_n), e_n \rangle = \langle g_{x_{\sigma_n}}, e_n \rangle$

où x_{σ_n} réalise l'unique minimum de $\Phi(x, \sigma)$ sur Q .

Ainsi, sans les contraintes imposées, on pourrait poser $\tilde{e}_n = g_{x_{\sigma_n}}$

(direction du gradient) mais il faut respecter la condition de positivité
 sur la variable σ .

Posons : $T_n^- = \{t \in [c,d] ; g_{x_{\sigma_n}}(t) < 0\}$

$T_n^+ = \{t \in [c,d] ; g_{x_{\sigma_n}}(t) \geq 0\}$

Si l'on pose : $\tilde{e}_n(t) = \begin{cases} g_{x_{\sigma_n}}(t) & \text{si } t \in T_n^+ \\ 0 & \text{si } t \in T_n^- \end{cases}$

Les conditions C1 et C2 seront vérifiées, sans restriction sur les valeurs de ρ_n . Mais la condition $\langle g_{x_{\sigma_n}}, e_n \rangle = 0$, si elle implique

$g_{x_{\sigma_n}}(t) \leq 0, \forall t \in [c, d]$, ne nous permet pas d'en déduire que

$\langle g_{x_{\sigma_n}}, \sigma_n \rangle = 0$ et donc que l'élément x_{σ_n} associé à la mesure σ_n est

solution du problème (P).

Par ailleurs, il convient de noter que si $t \in T_n^-$, alors si $\tilde{\sigma}_n(t) > 0$, la condition C2 sera vérifiée pour des valeurs de ρ suffisamment petites, mais si $\tilde{\sigma}_n(t) = 0$ alors il faut que $\tilde{e}_n(t) = 0$. Et par conséquent \tilde{e}_n doit s'annuler au moins pour les valeurs de t qui annule $\tilde{\sigma}_n$.

Par suite on pourrait poser :

$$\tilde{e}_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in T_n^+ \\ \tilde{\sigma}_n(t) \times g_{x_{\sigma_n}}(t) & \text{si } t \in T_n^- \end{cases}$$

mais là encore la condition C3 n'est pas vérifiée :

en effet si : $\langle g_{x_{\sigma_n}}, e_n \rangle = 0$, alors $\langle g_{x_{\sigma_n}}, \sigma_n \rangle = 0$, mais on ne peut

en déduire que $g_{x_{\sigma_n}}(t) \leq 0$ pour tout $t \in [c, d]$, c'est-à-dire que

l'élément x_{σ_n} associé à σ_n appartient à $Q \cap D$.

Les considérations précédentes nous amènent à proposer par exemple, la direction de montée suivante (cf. Auslender)

$$\tilde{e}_n(t) = g_{x_{\sigma_n}}^+(t) + \tilde{\sigma}_n(t) g_{x_{\sigma_n}}^-(t) / \ell_n$$

où :

$$g_{x\sigma_n}^+(t) = \begin{cases} g_{x\sigma_n}(t) & \text{si } t \in T_n^+ \\ 0 & \text{si } t \in T_n^- \end{cases}$$

$$g_{x\sigma_n}^-(t) = \begin{cases} g_{x\sigma_n}(t) & \text{si } t \in T_n^- \\ 0 & \text{si } t \in T_n^+ \end{cases}$$

$$l_n = \max_{t \in T_n^-} |g_{x\sigma_n}(t)|$$

Un tel choix répond aux trois conditions requises. En effet, on a :

$$\tilde{\sigma}_{n+1}(t) = \tilde{\sigma}_n(t) + \rho_n [g_{x\sigma_n}^+(t) + g_{x\sigma_n}^-(t) \tilde{\sigma}_n(t) / l_n] .$$

Soit

$$\tilde{\sigma}_{n+1}(t) = \tilde{\sigma}_n(t) (1 + \rho_n g_{x\sigma_n}^-(t) / l_n) + \rho_n g_{x\sigma_n}^+(t)$$

Or

$$\forall t \in T_n^- |g_{x\sigma_n}(t)| < l_n$$

et donc si l'on choisit ρ_n dans l'intervalle $]0,1]$, $\tilde{\sigma}_{n+1}$ appartient à $C^+[c,d]$. La condition C2 est alors vérifiée.

Par ailleurs :

$$\langle \theta'(\sigma_n), e_n \rangle = \langle g_{x\sigma_n}, e_n \rangle = \int_c^d [g_{x\sigma_n}^+(t)]^2 dt + \int_c^d [g_{x\sigma_n}^-(t)]^2 \times \tilde{\sigma}_n(t) dt$$

$\tilde{\sigma}_n$ appartenant à $C^+[c,d]$, on a donc :

$$\langle \theta'(\sigma_n), e_n \rangle \geq 0 .$$

Si $\langle \theta'(\sigma_n), e_n \rangle = 0$, on en déduit que :

$$1^\circ) \quad g_{x_{\sigma_n}}^+(t) = 0 \quad \forall t \in [c, d] \quad \text{donc que} \quad g_{x_{\sigma_n}}(t) \leq 0 \quad \forall t \in [c, d]$$

$$2^\circ) \quad \langle g_{x_{\sigma_n}}^2, \sigma_n \rangle = 0 \quad \text{donc} \quad \langle g_{x_{\sigma_n}}, \sigma_n \rangle = 0.$$

Or d'après la proposition 2', σ_n est solution du problème (Q_m) et x_{σ_n} solution du problème (P).

On peut également proposer la direction de montée suivante :

$$\tilde{e}_n(t) = \mu g_{x_{\sigma_n}}^+(t) + (1-\mu) g_{x_{\sigma_n}}^-(t) \times \tilde{\sigma}_n(t) / \ell_n$$

Les valeurs de μ égales à 0 et 1 sont à rejeter ; on a en effet démontré que les directions correspondantes ne vérifiaient pas la condition C3.

Par contre si μ appartient à l'intervalle $]0, 1[$, les trois conditions C1, C2, C3 sont vérifiées, si l'on choisit ρ_n dans l'intervalle $]0, \frac{1}{1-\mu}]$.

On constate ainsi que si la valeur de μ est voisine de 0, le pas que l'on peut effectuer dans la direction \tilde{e}_n reste limité. Si μ est voisin de 1, le déplacement peut être plus important, mais la direction \tilde{e}_n ainsi obtenue s'éloigne de celle du gradient.

On remarque, pour l'une comme pour l'autre des directions proposées, que l'on a multiplié $g_{x_{\sigma_n}}(t)$ par $\tilde{\sigma}_n(t)$ pour les valeurs de $t \in T_n^-$, afin que si $\tilde{\sigma}_n(t) = 0$ ($t \in T_n^-$), $\tilde{e}_n(t)$ s'annule également. En fait il n'est nécessaire d'effectuer cette multiplication qu'au voisinage des points où $\tilde{\sigma}_n$ s'annule sur T_n^- .

Posons donc : $h_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon} \min(\varepsilon, \tilde{\sigma}_n(t))$, $t \in T_n^-$

On considère la direction suivante :

$$\tilde{e}_n(t) = \mu g_{x_{\sigma_n}}^+(t) + (1-\mu)h_\varepsilon(t)g_{x_{\sigma_n}}^-(t) / \ell_n$$

Montrons que si μ appartient à l'intervalle $]0,1[$ les trois conditions C1, C2, C3 sont vérifiées.

. En effet on a :

$$\begin{aligned} \text{si } t \in T_n^+ : \quad & \tilde{\sigma}_{n+1}(t) = \tilde{\sigma}_n(t) + \rho_n \mu g_{x_{\sigma_n}}^+(t) \\ \text{si } t \in T_n^- : \quad & \left\{ \begin{array}{l} \tilde{\sigma}_{n+1}(t) = \tilde{\sigma}_n(t) + \rho_n (1-\mu) g_{x_{\sigma_n}}^-(t) / \ell_n \\ \text{ou} \\ \tilde{\sigma}_{n+1}(t) = \tilde{\sigma}_n(t) + (1-\mu) \rho_n \tilde{\sigma}_n(t) g_{x_{\sigma_n}}^-(t) / \ell_n \end{array} \right. \end{aligned}$$

Ainsi pour tout $t \in T_n^+$, $\tilde{\sigma}_{n+1}(t)$ est positif, quel que soit la valeur de ρ_n ($\rho_n > 0$) ; par contre afin que pour tout $t \in T_n^-$ on ait $\tilde{\sigma}_{n+1}(t) \geq 0$

il faut choisir $\rho_n \leq \frac{\varepsilon}{1-\mu}$

. $\tilde{\sigma}_{n+1}(t)$ étant positif, $\forall t \in [c,d]$, il est alors aisé de vérifier que $\langle \theta'(\sigma_n), e_n \rangle \geq 0$.

En effet

$$\langle \theta'(\sigma_n), e_n \rangle = \mu \int_c^d [g_{x_{\sigma_n}}^+(t)]^2 dt + (1-\mu) \int_c^d h_\varepsilon(t) [g_{x_{\sigma_n}}^-(t)]^2 dt .$$

. Si $\langle \theta'(\sigma_n), e_n \rangle = 0$ on en déduit, d'après l'expression ci-dessus que

$$1) \quad g_{x_{\sigma_n}}^+(t) = 0, \forall t \in [c,d] \text{ donc que } g_{x_{\sigma_n}}^-(t) \leq 0 \quad \forall t \in [c,d] .$$

2) $h_\varepsilon(t)[g_{x_{\sigma_n}}^-(t)]^2 = 0 \quad \forall t \in [c,d]$, ce qui implique que l'on a pour tout $t \in [c,d]$, soit $g_{x_{\sigma_n}}(t) = 0$, soit $h(t) = 0$ c'est-à-dire $\tilde{\sigma}_n(t) = 0$. Et par conséquent $\langle g_{x_{\sigma_n}}, \sigma_n \rangle = 0$.

Une fois déterminée cette direction de montée, il convient de déterminer la longueur du pas à effectuer dans cette direction de telle sorte que $\theta(\sigma_{n+1}) > \theta(\sigma_n)$.

Or il existe $r_n \in]0, \rho_n[$ tel que :

$$\frac{\theta(\sigma_n + \rho_n e_n) - \theta(\sigma_n)}{\rho_n} = \langle \theta'(\sigma_n + r_n e_n), e_n \rangle$$

expression qui peut encore se mettre sous la forme

$$\frac{\theta(\sigma_n + \rho_n e_n) - \theta(\sigma_n)}{\rho_n \langle \theta'(\sigma_n), e_n \rangle} = 1 + \frac{\langle \theta'(\sigma_n + r_n e_n) - \theta'(\sigma_n), e_n \rangle}{\langle \theta'(\sigma_n), e_n \rangle}$$

Posons :

$$b(\sigma_n, \rho) = \frac{\theta(\sigma_n + \rho e_n) - \theta(\sigma_n)}{\rho \langle \theta'(\sigma_n), e_n \rangle}$$

Il existe donc r appartenant à $]0, \rho[$ tel que :

$$b(\sigma_n, \rho) = 1 - \frac{\langle \theta'(\sigma_n + r e_n) - \theta'(\sigma_n), e_n \rangle}{\langle \theta'(\sigma_n), e_n \rangle}$$

Afin d'obtenir la continuité de cette fonction, lorsque ρ tend vers zéro, on pose, en outre :

$$b(\sigma_n, 0) = 1.$$

On choisit alors ρ_n de la façon suivante :

- . $0 < \rho_n < \rho^*$, ρ^* désignant la valeur maximum que peut prendre ρ afin que la condition C2 soit vérifiée
- . ρ_n doit être tel que :

$$\theta(\sigma_n + \rho_n e_n) - \theta(\sigma_n) \geq \alpha \rho_n \langle \theta'(\sigma_n), e_n \rangle ,$$

appartenant à l'intervalle $]0,1[$ compte tenu du fait que l'on a l'inégalité suivante :

$$\theta(\sigma_n + \rho_n e_n) - \theta(\sigma_n) \leq \rho_n \langle \theta'(\sigma_n), e_n \rangle .$$

On prend $\alpha < \frac{1}{2}$.

- . si $b(\sigma_n, \rho^*) \geq \alpha$ alors $\rho_n = \rho^*$
- . si $b(\sigma_n, \rho^*) < \alpha$ alors comme la fonction $b(\sigma_n, \rho)$ est continue sur l'intervalle $]0, \rho^*[$ et que $b(\sigma_n, 0) = 1$, il existe donc ρ_n appartenant à $]0, \rho^*[$ tel que :

$$\alpha < b(\sigma_n, \rho_n) < 1 - \alpha$$

et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ on aura : $\theta(\sigma_{n+1}) - \theta(\sigma_n) \geq \rho_n \alpha \langle \theta'(\sigma_n), e_n \rangle$.

Nous remarquons, au terme de cette étude, que le déroulement de l'algorithme nécessite la connaissance de l'élément x_{σ_n} qui réalise le minimum de $\Phi(x, \sigma_n)$ sur Q . La première phase de l'algorithme consistera donc à chaque itération en la recherche de cet élément.

Les considérations précédentes nous amènent à proposer les méthodes suivantes notées respectivement M1, M2, M3 suivant les trois types de directions admissibles considérées précédemment.

Supposons donnés $\tilde{\sigma}_0$ et calculés $\tilde{\sigma}_k$, $k=1,2,\dots,n$; x_{σ_k} , ρ_k $k=1,2,\dots,n-1$. Soit α un réel positif inférieur à $1/2$. Alors :

1) par un algorithme A, $\tilde{\sigma}_n$ étant donné, on détermine le point x_{σ_n} tel que :

$$\Phi(x_{\sigma_n}, \sigma_n) = \inf_{x \in Q} [\Phi(x, \sigma_n)]$$

2) Pour tout $j=1,2,\dots,p$:

Notons :

$$T_{n,j}^+ = \{t \in [c,d] : g_j(x_{\sigma_n}, t) \geq 0\}$$

$$T_{n,j}^- = \{t \in [c,d] : g_j(x_{\sigma_n}, t) < 0\}$$

$$[g_{x_{\sigma_n}}^+(t)]_j = \begin{cases} [g_{x_{\sigma_n}}(t)]_j & \text{si } t \in T_{n,j}^+ \\ 0 & \text{si } t \in T_{n,j}^- \end{cases}$$

$$[g_{x_{\sigma_n}}^-(t)]_j = \begin{cases} (g_{x_{\sigma_n}}(t))_j & \text{si } t \in T_{n,j}^- \\ 0 & \text{si } t \in T_{n,j}^+ \end{cases}$$

$$l_{j,n} = \max_{t \in T_{n,j}^-} |(g_{x_{\sigma_n}}(t))_j|$$

$$l_n = \max_{j=1,2,\dots,p} l_{j,n}$$

alors pour directions admissibles, on peut prendre :

$$(M1) \quad (\tilde{e}_n)_j = (g_{x_{\sigma_n}}^+)_j + (g_{x_{\sigma_n}}^-)_j \times (\sigma_n)_j / \ell_n \quad j=1,2,\dots,p$$

$$(M2) \quad (\tilde{e}_n)_j = \mu(g_{x_{\sigma_n}}^+)_j + (1-\mu)(g_{x_{\sigma_n}}^-)_j \times (\tilde{\sigma}_n)_j / \ell_n \quad j=1,2,\dots,p$$

μ appartenant à l'intervalle $]0,1[$.

$$(M3) \quad (\tilde{e}_n)_j = \mu(g_{x_{\sigma_n}}^+)_j + (1-\mu)(g_{x_{\sigma_n}}^-)_j \times h_{\varepsilon,j} / \ell_n \quad j=1,2,\dots,p$$

μ appartenant à l'intervalle $]0,1[$ et la fonction h_ε étant définie par :

$$t \in T_{n,j}^- \rightarrow h_{\varepsilon,j}(t) = \frac{1}{\varepsilon} \text{Min}(\varepsilon, \sigma_{n,j}(t))$$

3) Si $\theta'(\sigma_n, e_n) = 0$ alors σ_n est solution du problème (Q_m) et x_{σ_n} solution du problème (P), sinon $\langle \theta'(\sigma_n), e_n \rangle$ est strictement positif et il existe donc ρ_n tel que $\theta(\sigma_n + \rho_n e_n) > \theta(\sigma_n)$. ρ_n doit être choisi de la façon suivante :

$$a) \quad (M1) \quad 0 < \rho_n < 1 \quad (\rho^* = 1)$$

$$(M2) \quad 0 < \rho_n < \frac{1}{1-\mu} \quad (\rho^* = \frac{1}{1-\mu})$$

$$(M3) \quad 0 < \rho_n < \frac{\varepsilon}{1-\mu} \quad (\rho^* = \frac{\varepsilon}{1-\mu})$$

$$b) \quad \text{Posons : } b(\sigma_n, \rho) = \frac{\theta(\sigma_n + \rho e_n) - \theta(\sigma_n)}{\rho \langle \theta'(\sigma_n), e_n \rangle}$$

Si $b(\sigma_n, \rho^*) \geq \alpha$ alors $\rho_n = \rho^*$

sinon on choisit ρ_n dans l'intervalle $]0, \rho^*[$ de telle façon que :

$$\alpha \leq b(\sigma_n, \rho_n) \leq 1 - \alpha.$$

4) $\tilde{\sigma}_n, \tilde{e}_n, \rho_n$ étant déterminés, on obtient $\tilde{\sigma}_{n+1}$ par la relation

$$\tilde{\sigma}_{n+1} = \tilde{\sigma}_n + \rho_n \tilde{e}_n .$$

THEOREME 10 : Convergence de ces algorithmes.

Les algorithmes ci-dessus sont bien définis. La suite $\theta(\sigma_n)$ est croissante et la suite σ_n est maximisante pour le problème Q_m . Il existe alors une partie infinie $N_1 \subset \mathbb{N}$ telle que :

$$\lim_{\substack{n \in N_1 \\ n \rightarrow +\infty}} \sigma_n = \bar{\sigma} \quad (\text{solution de } Q_m)$$

et

$$\lim_{\substack{n \in N_1 \\ n \rightarrow +\infty}} x_{\sigma_n} = \bar{x} \quad (\text{solution de } P)$$

DEMONSTRATION [2]

a) Supposons $p = 1$ pour simplifier l'exposé.

On a démontré, que le choix des directions et des pas à effectuer dans ces directions sont tels que :

1°) $\langle \theta'(\sigma_n), e_n \rangle \geq 0$

2°) Si $\langle \theta'(\sigma_n), e_n \rangle = 0$, alors σ_n est solution du problème Q_m et x_{σ_n} solution du problème (P).

3°) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, σ_n appartient à $C^+[c,d]$

4°) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $\rho_n > 0$, tel que :

$$\alpha \leq \frac{\theta(\sigma_n + \rho_n e_n) - \theta(\sigma_n)}{\rho_n \theta'(\sigma_n, e_n)} \leq 1 - \alpha .$$

Donc les conditions C1, C2, C3 sont vérifiées.

b) Démontrons dans le cas général la convergence de tels algorithmes.

Si $\langle \theta'(\sigma_n), e_n \rangle > 0$, le choix de ρ_n est tel que :
pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait :

$$\theta(\sigma_{n+1}) - \theta(\sigma_n) \geq \alpha \rho_n \langle \theta'(\sigma_n), e_n \rangle$$

La suite $\theta(\sigma_n)$ est donc croissante et la suite $\{\sigma_n\}$ appartient à l'ensemble $S_{\sigma_0} = \{\sigma \in C^+[c,d] : \theta(\sigma) \geq \theta(\sigma_0)\}$ ensemble qui est compact pour la topologie $\sigma(C^+[c,d], C^+[c,d])$.

Montrons alors que $\lim_n \langle \theta'(\sigma_n), e_n \rangle = 0$.

Supposons qu'il n'en soit pas ainsi :

il existe donc $L > 0$ et un rang n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$ on ait :
 $\theta(\sigma_n + \rho_n e_n) - \theta(\sigma_n) \geq \rho_n L \alpha$.

L'hypothèse d'inf-diff-stabilité du problème (P) est équivalente à :
 $\alpha = -\beta = \theta(\bar{\sigma})$ est un nombre fini.

La suite $\theta(\sigma_n)$ est donc bornée par $\theta(\bar{\sigma})$ et par suite
$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} \rho_n < \frac{\theta(\bar{\sigma}) - \theta(\sigma_0)}{\alpha L}$$
.

$\{\rho_n\}$ est donc une suite de Cauchy convergente vers 0.

D'autre part, la suite $\{\sigma_n\}$ appartenant à S_{σ_0} (fortement borné), la suite $\{g_{x_{\sigma_n}}\}$ est uniformément bornée. Or, les directions admissibles \tilde{e}_n , pour répondre à la condition C2, doivent être des fonctions de $g_{x_{\sigma_n}}$ et de $\tilde{\sigma}_n$ et il existe donc $M > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\|e_n\| < M$$

Donc la suite définie par :

$$\sigma'_n = \sigma_r \quad \text{si } n = 2r$$

$$\sigma'_n = \sigma_r + s_r e_r \quad \text{si } n = 2r+1 \quad 0 \leq s_r \leq \rho_r$$

est donc une suite de Cauchy appartenant à S_{θ, σ_0} complet pour la topologie $\sigma(C_1^+, C_1)$ et la suite $\{\sigma'_n\}$ converge faiblement vers $\bar{\sigma} \in S_{\sigma_0}$.

La continuité de l'application : $\sigma \rightarrow x_\sigma$ de $C^+[c,d]$ dans Q et de l'application $x \rightarrow g_x$ de Q dans $C[c,d]$ entraîne que

$$\lim_n | \langle g_{x_{\sigma_n + s_n e_n}} - g_{x_{\sigma_n}}, e_n \rangle | = 0$$

donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n'_0 tel que, pour tout $n \geq n'_0$ on ait

$$-\varepsilon \leq \langle g_{x_{\sigma_n + \theta_n e_n}} - g_{x_{\sigma_n}}, e_n \rangle \leq +\varepsilon$$

et par conséquent, d'après la définition de $b(\sigma_n, \rho_n)$ et le choix de ρ_n :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall n \geq N_0 = \max(n_0, n'_0)$$

$$1 - \alpha \geq b(\sigma_n, \rho_n) \geq 1 - \frac{\varepsilon}{L}$$

ε pouvant être inférieur à αL , d'où la contradiction ; donc :

$$\lim_n \langle \theta'(\sigma_n), e_n \rangle = 0.$$

c) Soit $\{\sigma_m\}$, $m \in N' \subset \mathbb{N}$, une sous suite de $\{\sigma_n\}$ telle que

$$\lim_n \langle \theta'(\sigma_m), e_m \rangle = 0.$$

La suite $\{\sigma_m\}$ appartient au compact S_{θ, σ_0} (pour la topologie

$\sigma(C_1^+, C_1)$). Il existe donc une sous suite $\{\sigma_\ell\}$ qui converge faiblement

vers un élément $\bar{\sigma}$ appartenant à $S_{\theta_{\sigma_0}}$.

D'après le théorème (6'), les applications $x \rightarrow g_x$ de Q dans $C[c,d]$ et $\sigma \rightarrow x_\sigma$ de $C^+[c,d]$ dans Q sont continues. Les suites $\{g_{x_{\sigma_\ell}}^+\}$ et $\{g_{x_{\sigma_\ell}}^-\}$ convergent donc respectivement vers $\{g_{x_{\bar{\sigma}}}^+\}$ et $\{g_{x_{\bar{\sigma}}}^-\}$.

Par ailleurs, le choix de la direction e_n est tel que :

$$\langle \theta'(\sigma_n), e_n \rangle = 0$$

implique que :

$$\text{et } \left\{ \begin{array}{l} g_{x_{\sigma_n}}^+(t) = 0 \quad \forall t \in [c,d] \\ \langle g_{x_{\sigma_n}}, \sigma_n \rangle = 0 \end{array} \right.$$

Par suite on en déduit, sachant que $\lim_{\ell \rightarrow +\infty} \langle \theta'(\sigma_\ell), e_\ell \rangle = 0$

que : $\lim_{\ell \rightarrow +\infty} (g_{x_{\sigma_\ell}}^+(t)) = g_{x_{\bar{\sigma}}}^+(t) = 0$, $\forall t \in [c,d]$

et $\lim_{\ell \rightarrow +\infty} \langle g_{x_{\sigma_\ell}}, \sigma_\ell \rangle = \langle g_{x_{\bar{\sigma}}}, \bar{\sigma} \rangle = 0$

D'après la proposition (2'), ces deux relations traduisent que $\bar{\sigma}$ est solution du problème (Q_m) et $x_{\bar{\sigma}}$ solution de (P).

En conclusion, il existe une sous suite de la suite $\{\sigma_n\}$ qui converge vers $\bar{\sigma}$ solution de Q et d'après le théorème (6'), il est évident que la même sous suite de $\{x_{\sigma_n}\}$ converge vers \bar{x} solution du problème (P).

L'algorithme qui suit, connu sous le nom de méthode des pénalités ne fait intervenir que l'espace $X = \mathbb{R}^N$ du problème primal. Il est néanmoins possible d'en donner une interprétation duale et de s'appuyer pour démontrer la convergence de cet algorithme sur les mêmes théorèmes de caractérisation des solutions que précédemment (proposition 2').

METHODE DES PENALITES.

On suppose que les hypothèses H1 et H2 sont vérifiées et que pour toute direction $h \in Q$ et pour tout $j=1,2,\dots,p$, la fonction $x \rightarrow g_j(x,t)$ admet une dérivée directionnelle $D(x,h,t)$ et que l'application $(x,h,t) \rightarrow D(x,h,t)$ de $Q \times Q \times [c,d]$ dans \mathbb{R} est continue (hypothèse H3).

PRINCIPE DE LA METHODE.

Soit k_n une suite de scalaires positifs tels que $\lim_n k_n = +\infty$

La méthode consiste à construire une suite $\{x_n\}$ de Q de la façon suivante :

$$F(x_n) + k_n \int_c^d \sum_{j=1}^p [g_j^+(x_n, t)]^2 dt = \text{Inf}_{x \in Q} \{F(x) + k_n \int_c^d \sum_{j=1}^p g_j^+(x, t)^2 dt\}$$

On montre [2] que sous les hypothèses faites cet algorithme a une interprétation duale, la mesure σ_n associée à x_n étant telle que :

$$\tilde{\sigma}_n = 2k_n g_{x_n}^+ = 2k_n g_{x_{\sigma_n}}^+ .$$

Aussi se sert-on pour démontrer la convergence de la méthode de la proposition (2') relative à la caractérisation des problèmes P et Q .

THEOREME 11

Sous les hypothèses précédentes, il existe une sous suite de la suite $\{\sigma_n\}$ qui converge vers la solutions $\bar{\sigma}$ du problème Q pour la topologie $\sigma(C_p^+, C_p)$.

La sous suite de la suite $\{x_{\sigma_n} = x_n\}$ associée converge vers la solution \bar{x} du problème P .

DEMONSTRATION :

On suppose $p = 1$ pour simplifier l'exposé. On a :

$$\theta(\sigma_n) = F(x_{\sigma_n}) + \langle g_{x_{\sigma_n}}, \sigma_n \rangle$$

expression, qui, dans ce cas, s'écrit :

$$\theta(\sigma_n) = F(x_n) + 2k_n \int_c^d [g_{x_n}^+(t)]^2 dt$$

et par conséquent, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \theta(\sigma_n) \geq F(x_n)$$

Le problème P est inf-diff-stable, d'après les hypothèses vérifiées. Et par conséquent $\alpha = F(\bar{x}) = -\beta = \theta(\bar{\sigma})$ est un nombre fini. Puisque pour tout n , $\theta(\sigma_n) \leq \theta(\bar{\sigma})$ et que $\lim_n k_n = +\infty$, on a alors :

$$\lim_n \int_c^d [g_{x_n}^+(t)]^2 dt = 0 .$$

Par ailleurs F est bornée inférieurement sur Q et par suite il existe λ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\theta(\sigma_n) \geq \lambda$. Donc la suite $\{\sigma_n\}$ appartient à l'ensemble $S_\lambda = \{\sigma \in C^1[c,d] : \theta(\sigma) \geq \lambda\}$ qui est compact pour la topologie $\sigma(C_1^+, C_1')$. Il existe donc une sous suite $\{\sigma_m\}$ de la suite $\{\sigma_n\}$ qui converge vers un élément $\bar{\sigma} \in S_\lambda$.

La continuité des applications $(\sigma \rightarrow x)$ et $(x \rightarrow g_x)$ entraînent alors que :

$$\lim_m \int_c^d [g_{x_{\sigma_m}}^+(t)]^2 dt = \int_c^d (g_{x_{\bar{\sigma}}})^2 dt = 0$$

c'est-à-dire que $g_{x_{\bar{\sigma}}}(t) \leq 0$ pour tout $t \in [c,d]$.

Par suite on a : $\theta(\bar{\sigma}) = F(x_{\bar{\sigma}})$ ce qui entraîne que $\langle g_{x_{\bar{\sigma}}}, \bar{\sigma} \rangle = 0$.

D'après la proposition (2'), $\bar{\sigma}$ est solution du problème (Q) et $x_{\bar{\sigma}} = \bar{x}$ est solution de (P).

IV - APPLICATION DE CES METHODES AUX PROBLEMES PL_2 et PC_1

1) METHODE DUALE

L'espace vectoriel X considéré est euclidien, de dimension N , la fonction F à minimiser fortement convexe par rapport à $x \in \mathbb{R}^N$.

a) Application au problème PL_2

Le problème s'énonce de la façon suivante :

trouver $x^* \in D$, tel que :

$$\alpha = F(x^*) = \inf_{x \in D} F(x)$$

$$\text{où } D = \{x \in \mathbb{R}^N : \sum_{i=1}^N x_i \varphi_i(t) \leq \varphi(t), \forall t \in [c, d]\}$$

Dans ce cas, on a d'une part :

$$F(x) = \int_a^b [f(t) - \sum_{i=1}^N x_i v_i(t)]^2 dt.$$

D'autre part la fonctionnelle Φ (qui au signe près est le Lagrangien du problème PL_2) s'écrit :

$$\Phi(x, \sigma) = \int_a^b [f(t) - \sum_{i=1}^N x_i v_i(t)]^2 dt + \sum_{i=1}^N x_i \langle \varphi_i, \sigma \rangle - \langle \varphi, \sigma \rangle, \quad \sigma \in C^+[c, d]$$

Si $\tilde{\sigma}$ représente l'élément de $C^+[c, d]$ qui sert à définir un élément σ de $C^+[c, d]$ de la façon suivante :

$$\sigma : u \in C[c, d] \rightarrow \int_c^d u(t) \tilde{\sigma}(t) dt$$

la fonctionnelle Φ se met également sous la forme :

$$\Phi(x, \sigma) = \int_a^b [f(t) - \sum_{i=1}^N x_i v_i(t)]^2 dt + \int_c^d [\sum_{i=1}^N x_i \varphi_i(t) - \varphi(t)] \tilde{\sigma}(t) dt$$

Si on pose alors :

$$\beta_{ij} = \int_a^b v_i(t)v_j(t)dt$$

$$\delta_i = -2 \int_a^b f(t)v_i(t)dt + \int_c^d \varphi_i(t)\tilde{\sigma}(t)dt$$

$$\gamma = \int_a^b f^2(t)dt - \int_c^d \varphi(t)\tilde{\sigma}(t)dt$$

on a :

$$\Phi(x, \sigma) = \sum_{i,j}^N \beta_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^N \delta_i x_i + \gamma .$$

et

$$\theta(\sigma) = \inf_{x \in \mathbb{N}^N} (\Phi(x, \sigma)) .$$

Soit Q_{L_2} le problème dual de PL_2 , qui s'énonce de la façon suivante : Trouver $\sigma^* \in C_1^+[c,d]$ tel que :

$$\theta(\sigma^*) = \sup_{\sigma \in C_1^+[c,d]} (\theta(\sigma)) .$$

L'hypothèse H2 (F strictement convexe) est vérifiée. On suppose H1 également vérifiée afin d'assurer l'inf-diff-stabilité du problème PL_2 . La méthode duale s'applique donc à ce problème.

. La première phase de l'algorithme consiste à minimiser la forme quadratique $\Phi(x, \sigma)$ sur \mathbb{R}^N , ce qui revient à résoudre le système linéaire en x_i , $i=1,2,\dots,N$:

$$\frac{\partial \Phi(\sigma_n, x)}{\partial x_i} = 0 \quad \forall i = 1,2,\dots,N .$$

Soit x_{σ_n} la solution de ce système.

. Pour déterminer \tilde{e}_n , on calcule les racines de :

$g(x_{\sigma_n}, t) = \sum_{i=1}^N x_{\sigma_n}^{(i)} \varphi_i(t) - \varphi(t)$ sur l'intervalle $[c, d]$ par un procédé dichotomique et on prend pour l_n une majoration de la valeur absolue du minimum de $g_{x_{\sigma_n}}$ sur $[c, d]$.

. On a $\theta'(\sigma_n, e_n) = \int_c^d g_{x_{\sigma_n}}(t) \times \tilde{e}_n(t) dt$

Si $\theta'(\sigma_n, e_n) < \varepsilon$, ε étant donné arbitrairement petit, alors l'élément x_{σ_n} déterminé dans la première phase de l'algorithme est solution du problème PL_2 .

Si $\theta'(\sigma_n, e_n) > \varepsilon$, alors on choisit ρ_n de la manière exposée précédemment :

si $b(\sigma_n, 1) = \frac{\Delta(\sigma_n, 1)}{\theta'(\sigma_n, e_n)} \geq \alpha$ ($0 < \alpha < \frac{1}{2}$) alors $\rho_n = 1$,

(on rappelle que $\Delta(\sigma_n, \rho) = \theta(\sigma_n + \rho e_n) - \theta(\sigma_n)$)

sinon afin de déterminer une valeur ρ_n de ρ telle que $\alpha \leq b(\sigma_n, \rho_n) \leq 1 - \alpha$, on fait décroître ρ par pas de $\frac{1}{8}$ ou $\frac{1}{16}$ à partir de 1 jusqu'à l'obtention de la condition ci-dessus.

Il est évident que le balayage de l'intervalle $]0, 1]$ ne nous donne qu'une valeur approximative du pas optimum ρ_n à effectuer dans la direction e_n .

b) Le problème (PC_1) ne diffère du problème (PL_2) que par la fonction F à minimiser, donc du point de vue de l'approximation. Dans ce cas :

$$F(x) = [f(0) - \sum_{i=1}^N x_i v_i(0)]^2 + \int_a^b [f'(t) - \sum_{i=1}^N x_i v_i'(t)]^2 dt$$

et la fonctionnelle Φ s'écrit :

$$\Phi(x, \sigma) = F(x) + \sum_{i=1}^N x_i \langle \varphi_i, \sigma \rangle - \langle \varphi, \sigma \rangle, \quad \sigma \in C^1[c, d].$$

Si la mesure $\sigma \in C^+[c,d]$ est associée de la même manière que dans le a) à la fonction $\tilde{\sigma} \in C^+[c,d]$, on peut également mettre la fonctionnelle Φ sous la forme :

$$\Phi(x, \sigma) = F(x) + \int_c^d \left[\sum_{i=1}^N x_i \varphi_i(t) - \varphi(t) \right] \tilde{\sigma}(t) dt$$

et si on pose :

$$\beta_{ij} = v_i(0)v_j(0) + \int_a^b v_i'(t)v_j'(t) dt$$

$$\delta_i = -2v_i(0)f(0) - 2 \int_a^b v_i'(t)f'(t) dt + \int_c^d \varphi_i(t) \tilde{\sigma}(t) dt$$

$$\gamma = [f(0)]^2 + \int_a^b f'^2(t) dt - \int_c^d \varphi(t) \tilde{\sigma}(t) dt$$

on a alors :

$$\Phi(x, \sigma) = \sum_{i,j} \beta_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^N \delta_i x_i + \gamma$$

2) METHODE DES PENALITES.

La méthode des pénalités consiste à construire une suite $\{x^{(m)}\} \in Q$ convexe fermée de \mathbb{R}^N , telle que :

$$G(x^{(m)}) = F(x^{(m)}) + k_m \int_c^d g^+(x^{(m)}, t)^2 dt = \inf_{x \in Q} [F(x) + k_m \int_c^d [g^+(x, t)]^2 dt]$$

a) Dans le cas du problème PL_2 , cette expression s'écrit :

$$\int_a^b \left[f(t) - \sum_{i=1}^N x_i^{(m)} v_i(t) \right]^2 dt + k_m \int_c^d \left[\left(\sum_{i=1}^N x_i^{(m)} \varphi_i(t) - \varphi(t) \right)^+ \right]^2 dt =$$

$$\inf_{x \in Q} \left[\int_a^b \left[f(t) - \sum_{i=1}^N x_i v_i(t) \right]^2 dt + k_m \int_c^d \left[\left(\sum_{i=1}^N x_i \varphi_i(t) - \varphi(t) \right)^+ \right]^2 dt \right]$$

Pour faciliter la résolution de ce problème de minimisation on suppose Q compact de la forme :

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^N : \sum_{i=1}^N x_i^2 \leq r^2\}$$

et on prend le rayon de cette hypersphère suffisamment grand afin que la contrainte imposée ne soit pas active.

On utilise alors pour résoudre ce problème l'algorithme de Frank et Wolfe.

La méthode comporte deux phases :

a) k_m étant fixé, soit $x^{(m_0)} \in Q$.

On construit les suites $\{x^{m_j}\}$ et $\{\bar{x}^{m_j}\}$ de la façon suivante :

Supposons calculés $x^{(m_1)}, x^{(m_2)}, \dots, x^{(m_j)}$

on détermine alors l'élément $\bar{x}^{m_j} \in Q$ tel que :

$$\langle \nabla G(x^{m_j}), \bar{x}^{m_j} \rangle = \min_{x \in Q} \langle \nabla G(x^{m_j}), x \rangle$$

Désignons par $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p$, les racines de $g(x^{m_j}, t)$ sur $[c, d]$. Posons $\xi_0 = c$ et $\xi_{p+1} = d$.

La première phase de l'algorithme consiste à minimiser la forme linéaire :

$$l(x) = \sum_{i=1}^N a_i x_i \quad (x \in Q)$$

où
$$a_i = \frac{\partial G}{\partial x_i} = -2 \int_a^b [f(t) - \sum_{k=1}^N x_k^{m_j} v_k(t)] v_i(t) +$$

$$2 \int_c^d [\sum_{k=1}^N x_k^{m_j} \varphi_k(t) - \varphi(t)] \varphi_i(t) dt$$

ce qui s'écrit encore :

$$a_i = 2k_m \sum_{\ell} \int_{\xi_{k+2\ell}}^{\xi_{k+2\ell+1}} g(x^{m_j}, t) v_i(t) dt - 2 \int_a^b (f(t) - \sum_{k=1}^N x_k^{m_j} v_k(t)) v_i(t)$$

où

$$\text{si } g(x^{m_j}, c) > 0 \left\{ \begin{array}{l} \text{si } p=2p' \text{ alors } k=0 \text{ et } 0 \leq \ell \leq \frac{p}{2} \\ \text{si } p=2p'+1 \text{ alors } k=0 \text{ et } 0 \leq \ell \leq \frac{p-1}{2} \end{array} \right.$$

$$\text{si } g(x^{m_j}, c) < 0 \left\{ \begin{array}{l} \text{si } p=2p' \text{ alors } k=1 \text{ et } 0 \leq \ell \leq \frac{p-2}{2} \\ \text{si } p=2p'+1 \text{ alors } k=2 \text{ et } 0 \leq \ell \leq \frac{p-1}{2} \end{array} \right.$$

On a alors :
$$\bar{x}_i^{(m_j)} = - \frac{ra_i}{(\sum_{i=1}^N a_i^2)^{1/2}}$$

b) A partir de x^{m_j} et \bar{x}^{m_j} , on détermine $x^{m_{j+1}}$ de la façon suivante :

$$G(x^{m_{j+1}}) = \text{Min } (G(x) / x \in [x^{(m_j)}, \bar{x}^{(m_j)}])$$

ce qui revient à minimiser la fonction :

$$\tau(\lambda) = G(\lambda x^{(m_j)} + (1-\lambda)\bar{x}^{m_j})$$

λ appartenant à $[0,1]$.

Posons
$$\bar{g}(x^{m_j}, t, \lambda, \bar{x}^{m_j}) = \sum_{i=1}^N \lambda (x_i^{m_j} - \bar{x}_i^{m_j}) \varphi_i(t) + \sum_{i=1}^N \bar{x}_i^{m_j} \varphi_i(t) - \varphi(t)$$

Par suite on a :

$$\tau(\lambda) = F(\lambda x^{m_j} + (1-\lambda)\bar{x}^{m_j}) + k_m \int_c^d [\bar{g}^+(x_{m_j}, t, \lambda, \bar{x}_{m_j})]^2 dt$$

Pour déterminer la valeur λ_m^* telle que $\tau(\lambda_m^*) = \min(\tau(\lambda), \tau \lambda \in [0,1])$, on utilise une méthode dichotomique. A l'intérieur de cette procédure, on calcule pour chaque valeur de λ utilisée

les racines de $\bar{g}(x_i^{m_j}, \bar{x}^{m_j}, t, \lambda)$ sur $[c,d]$. On a alors :

$$x_i^{m_{j+1}} = x_i^{m_j} + \lambda_m^*(x_i^{m_j} - \bar{x}^{m_j}) \quad i=1,2,\dots,N.$$

La suite $\{x^{(m_j)}\}$ converge vers la solution $x^{(m)}$ telle que :

$$G(x^{(m)}) = \min_{x \in Q} [G(x)]$$

A ce stade, on fait un test d'arrêt sur le nombre j d'itérations de cette méthode, m étant fixé.

c) On réitère la méthode de Frank et Wolfe pour des valeurs croissantes de k_m (par exemple $k_m = 10^m$, $m \in \mathbb{N}^+$) en prenant pour valeur initiale $x^{(m+1)_0}$ la valeur $x^{(m)}$ trouvée à la précédente itération en m .

On fait alors un deuxième test d'arrêt sur l'indice m .

Pour le problème PC_1 , la méthode de résolution est identique à celle du problème PL_2 . (Seule la fonction F change).

3) NOTICE D'EMPLOI DU PROGRAMME RESOLVANT LES PROBLEMES PL_2 ET PC_1
PAR LES METHODES DUALES M_1 ET M_2

Comme paramètres d'entrée, le programme comporte :

- les matrices BETA, DELTA1 :

$$\left. \begin{aligned} \text{BETA } [I,J] &= \int_a^b v_i(t) \cdot v_j(t) dt & \begin{matrix} i=1,2,\dots,N \\ j=1,2,\dots,N \end{matrix} \\ \text{DELTA1 } [I] &= 2 \int_a^b f(t) \cdot v_i(t) dt & i=1,2,\dots,N \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{s'il s'agit du} \\ \text{problème } PL_2 \end{array}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{BETA } [I,J] &= \int_a^b v_i'(t) v_j'(t) dt + v_i(0) v_j(0) \\ \text{DELTA } [I] &= 2 \int_a^b f'(t) v_i'(t) dt + 2v_i'(0) f'(0) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{s'il s'agit du} \\ \text{problème } PC_1 \end{array}$$

où f , la fonction à approximer, est définie sur l'intervalle $[A,B]$ ainsi que les fonctions v_i , $i=1,2,\dots,N$, qui engendrent la variété linéaire V .

- le réel GAMMA1 : $GAMMA1 = \int_a^b f^2(t) dt$ pour le problème PL_2

$$GAMMA1 = \int_a^b f'^2(t) dt + f^2(0) \quad \text{pour le problème } PC_1$$

- les fonctions φ_i , $i=1,2,\dots,N$ et φ (précisées par les "réel procédure" PHII et PHI définies sur l'intervalle $[A1,A2]$

- la valeur d'entrée de la fonction $\tilde{\sigma}$, (précisée par la "réel procédure" SIGMA1 (T,COMPTE)), définie elle aussi sur l'intervalle $[A1,A2]$.

- la valeur du réel μ (dans le cas de la méthode M_2), représenté dans le programme par MU).

- la valeur du réel α appartenant à $[0,1[$ précisé dans le programme par le réel OMEGA.

Le nombre d'itérations est représenté par l'entier COMPTE.

A chaque itération, la procédure BISSECTION permet de calculer les racines de la fonction $g(x_{\sigma_n}, t)$ (précisée par la "réel procédure" G1 (T,COMPTE) sur

l'intervalle $[A1, A2]$) et ainsi de définir la nouvelle direction de montée représentée dans le programme par la "réel procédure" E(T,COMPTE).

Le programme comporte le test d'arrêt suivant :

A chaque itération, l'algorithme calcule, à l'aide de la méthode de SIMPSON, la valeur $\theta(\sigma_n, e_n)$ précisé par le réel C1 et égal à l'intégrale sur l'intervalle $[A1, A2]$ de la fonction précisée par la "réel procédure" E1G1. Les calculs s'arrêtent lorsque $C1 \leq EPS2$.

4) EXEMPLE NUMERIQUE

Considérons l'approximation de la fonction $\sin(t)$ sur $[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$ par un polynôme de degré 4. On impose de plus au meilleur approximant

$$v^*(t) = \sum_{i=1}^5 x_i^* t^{i-1} \text{ de vérifier :}$$

$$\cos(t) - v^*(t) \leq 0.02 \quad t \in [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}] .$$

$$\text{On pose : } g(x_{\sigma_n}, t) = \cos t - \sum_{i=2}^5 (x_{\sigma_n})_i \times (i-1)t^{i-2} - 0.02$$

et

$$G^n = \text{Max}_{t \in [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]} g(x_{\sigma_n}, t) .$$

a) Résolution numérique du problème PL_2 par la méthode duale M1.

On choisit $EPS = 10^{-4}$ et après 8 itérations, on trouve :

x_1	=	0.0001807
x_2	=	0.9845215
x_3	=	- 0.0008579
x_4	=	- 0.1282950
x_5	=	0.0002587

G^8 prend la valeur $- 4.51255 \cdot 10^{-3}$

Le temps de calcul a été de 1mn 14s.

b) Résolution numérique du problème PL₂ par la méthode duale M₂

On choisit comme précédemment $\text{EPS} = 10^{-4}$.

. si on donne à μ la valeur 0.75 on trouve après 6 itérations.

$x_1 =$	0.0003069
$x_2 =$	0.9849978
$x_3 =$	- 0.0006240
$x_4 =$	- 0.1310241
$x_5 =$	0.0001205

G^6 prend la valeur $- 4.99773 \cdot 10^{-3}$

Le temps de calcul a été de 1mn 3s.

. si on donne à μ la valeur 0.25, on trouve après 12 itérations :

$x_1 =$	0.0002065
$x_2 =$	0.9813085
$x_3 =$	- 0.0003930
$x_4 =$	- 0.1310189
$x_5 =$	0.0000884

G^{12} prend la valeur $- 1.30844 \cdot 10^{-3}$.

Le temps calcul a été de 2mn 7s.

c) Résolution numérique du problème PC₁ par la méthode duale M1.

On choisit toujours $\text{EPS} = 10^{-4}$.

. Après 7 itérations on trouve

$x_1 = 0.000000$
$x_2 = 0.9808192$
$x_3 = - 0.0005380$
$x_4 = - 0.1306721$
$x_5 = 0.0018890$

G^7 prend la valeur $- 8.19206 \cdot 10^{-4}$

Le temps calcul a été de 1mn 4s.

d) Résolution numérique du problème PC_1 par la méthode duale M2 .

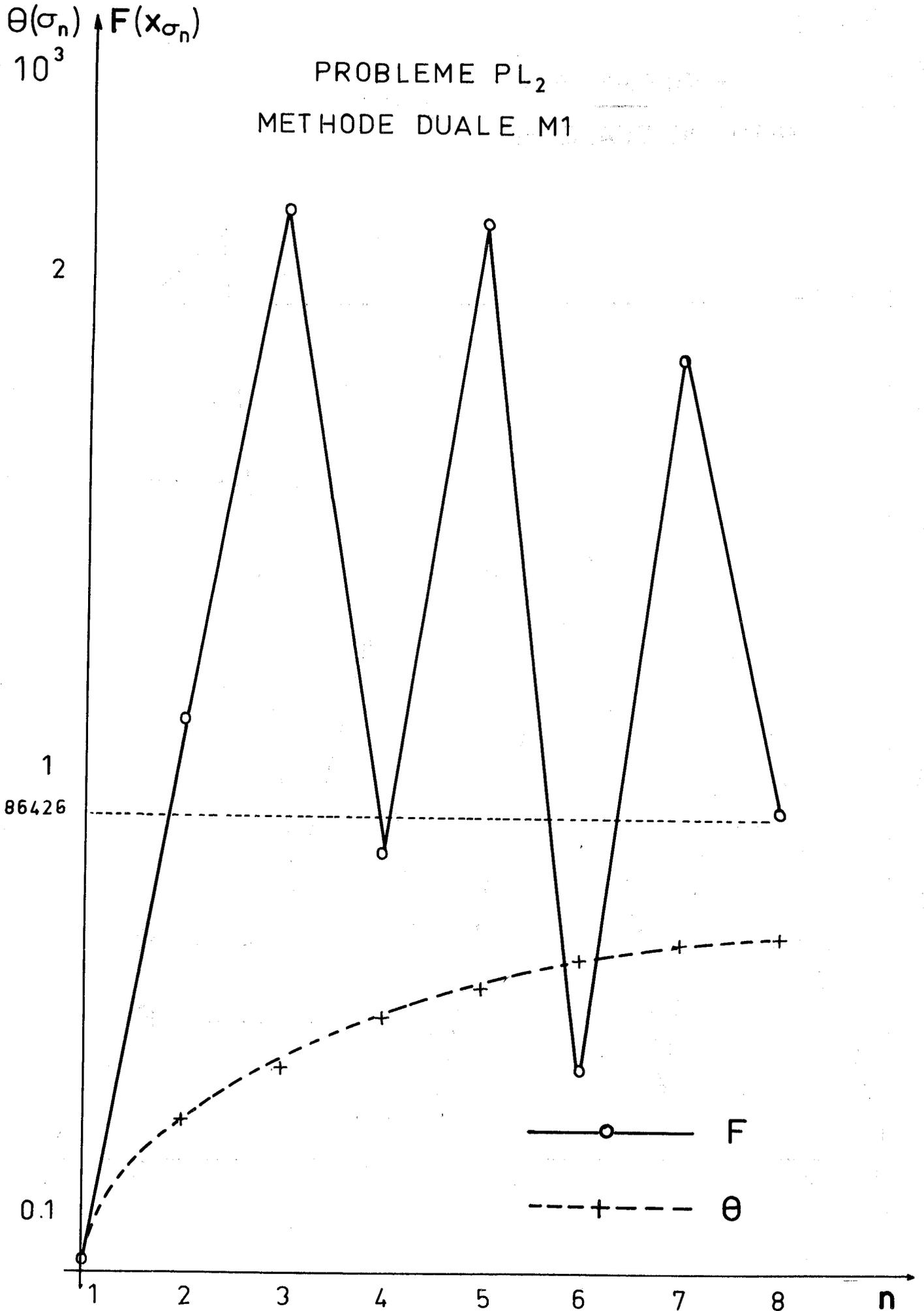
On donne à μ la valeur 0.25, et à EPS la valeur 10^{-4} .

On trouve, après 11 itérations :

$x_1 = 0.000000$
$x_2 = 0.9803478$
$x_3 = - 0.0005244$
$x_4 = - 0.1304451$
$x_5 = - 0.0018293$

G^{11} a pris la valeur $- 3.47853 \cdot 10^{-4}$.

Le temps calcul a été de 1mn 42s.



$\theta(\sigma_n)$ $F(x_{\sigma_n})$
 $\times 10^4$

PROBLEME PL_2
METHODE DUALE M2

$\mu = 0.25$

8

7

6

5

4

3

2

1

6.89913

---+--- θ

—o— F

n

1

2

3

4

5

6

7

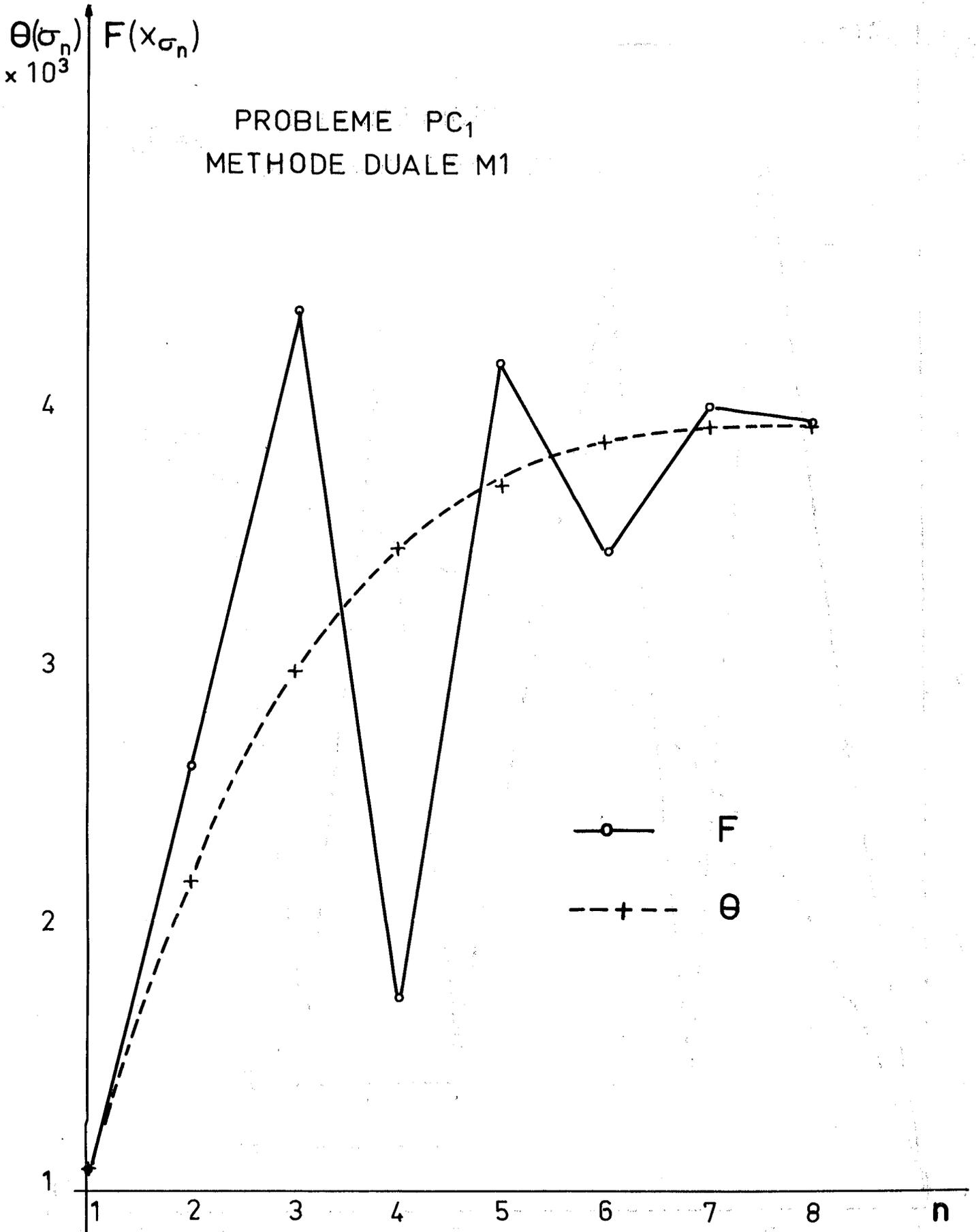
8

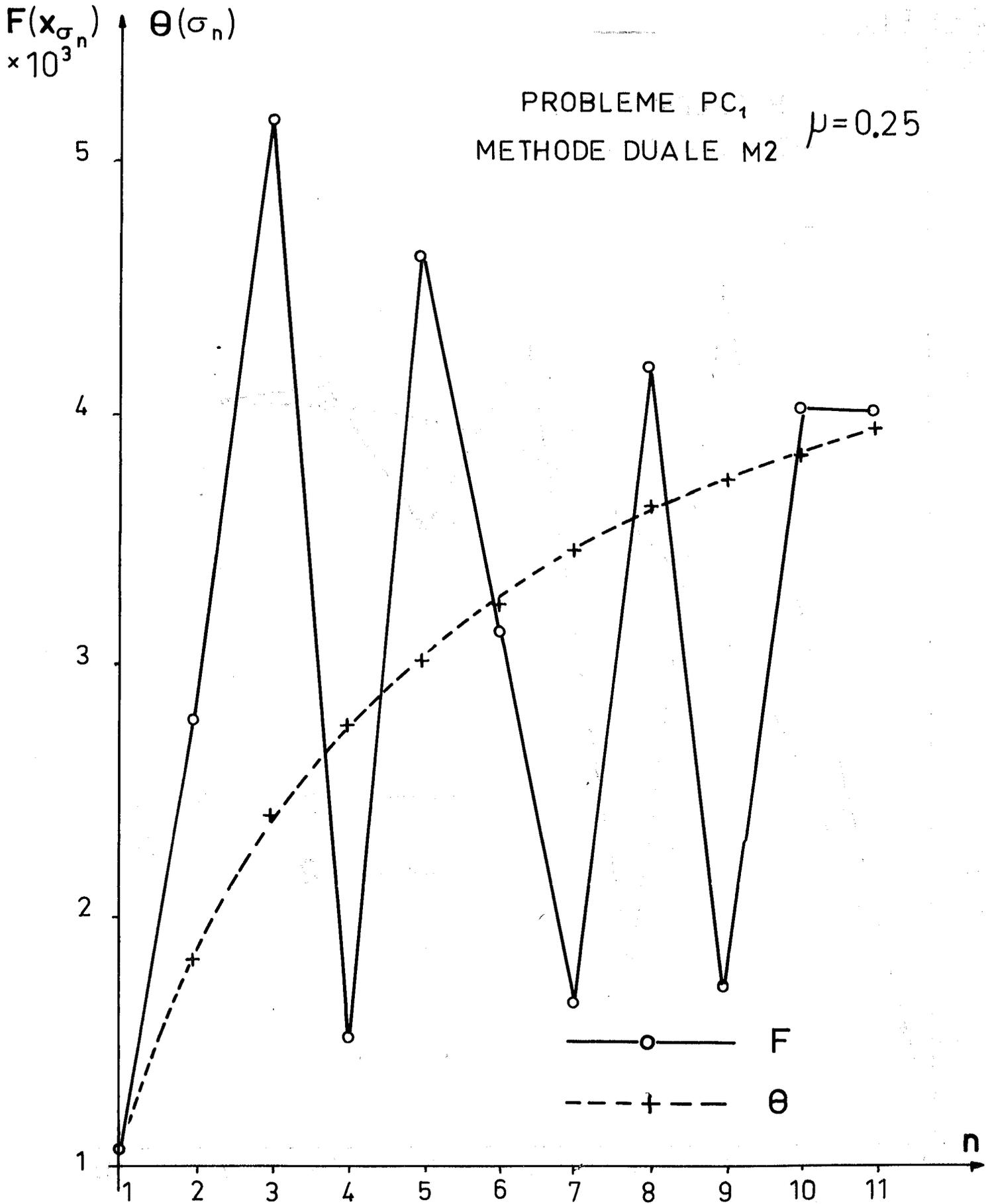
9

10

11

12





5) NOTICE D'EMPLOI DU PROGRAMME RESOLVANT LES PROBLEMES PL_2 et PC_1
PAR LA METHODE DES PENALITES.

Comme paramètres d'entrée le programme comporte :

- les matrices A1 et B1 :

$$\left. \begin{aligned} A1 [I,J] &= \int_a^b v_i(t)v_j(t)dt \\ B1 [I] &= 2 \int_a^b v_i(t)f(t)dt \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{s'il s'agit du} \\ \text{problème } PL_2 \end{array}$$

et

$$\left. \begin{aligned} A1 [I,J] &= v_i(0)v_j(0) + \int_a^b v_i'(t)v_j'(t)dt \\ B1 [I] &= 2v_i(0)f(0) + \int_a^b v_i'(t)f(t)dt \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{s'il s'agit du} \\ \text{problème } PC_1 \end{array}$$

- la suite k_m précisée à chaque itération par l'entier KN
- une primitive des fonctions $\varphi_i \times \varphi_j$, ($i=1,2,\dots,N$; $j=1,2,\dots,N$) précisée par la "réel procédure" IP (T,I,J)
- une primitive des fonctions $\varphi \times \varphi_i$, ($i=1,2,\dots,N$) précisée par la "réel procédure" IPV (T,I).

Le programme comporte deux tests d'arrêt :

. Le numéro m de l'itération étant fixé, l'algorithme de Frank et Wolfe calcule $\|x^{m+1} - x^m\|$ et les calculs s'arrêtent lorsque cette différence est inférieure à EPS.

. L'algorithme calcule pour deux itérations successives l'écart $\|x^{m+1} - x^m\|$ et on arrête les calculs lorsque cet écart est inférieur à EPS.

6) EXEMPLE NUMERIQUE

On considère le même exemple que précédemment.

a) Résolution du problème PL₂ par la méthode des pénalités.

On choisit $k_m = 10^m$ (m variant de 1 à 10) et $EPS = 10^{-3}$.

Après 7 itérations, on trouve :

$x_1 = - 0.0002051$
$x_2 = 0.9801393$
$x_3 = 0.0026347$
$x_4 = - 0.131487$
$x_5 = - 0.001321$

G^7 a pris la valeur $-1.39236 \cdot 10^{-4}$

Le temps calcul a été de 8mn 32s.

b) Résolution du problème PC₁ par la méthode des pénalités.

On choisit, comme pour le problème PL₂ $k_m = 10^m$ et $EPS = 10^{-3}$.

Après 7 itérations, on obtient comme résultat :

$x_1 = 0.000000$
$x_2 = 0.980442$
$x_3 = - 0.0005344$
$x_4 = - 0.1304561$
$x_5 = - 0.001803$

PROGRAMME RESOLVANT LES PROBLEMES PL_2 ET PC_1 PAR DES METHODES DUALES

```
'BEGIN' 'INTEGER' I, J, K, N, CCMPTE, CT1, CT, C, N1 ;
'REAL' T, A, P, RO1, EPS1, ETA, EPS2, GAMMA1,
GAMMA2, GAMMA, GAMRC2, GAMRC, C1, STEP, RC, A1, A2,
Y1, Y2, ROOT, EPS, OMEGA, THETA1, THETA2, C1, E1, S1, L, MU, IC ;
'BOOLEAN' SCFT ;
ININTEGER(C, N) ; ININTEGER(C, CT1) ;
ININTEGER(C, C) ; ININTEGER(C, CT) ; ININTEGER(C, N1) ;
INREAL(O, EPS1) ; INREAL(C, EPS2) ; INREAL(C, ETA) ;
INREAL(O, A) ; INREAL(O, P) ; INREAL(C, OMEGA) ; INREAL(O, S1) ;
INREAL(O, MU) ; INREAL(O, A1) ; INREAL(C, A2) ;
'BEGIN' 'ARRAY' BETA, C(/1:N, 1:N/), DELTA, DELTA1, DELFC,
DELTA2, D, DELFC2, DRC, X, XRC, XSIG(/1:N/),
Y, T), LX(/1:C/), PSI(/1:N1, 1:CT1/), IM(/1:CT1/),
XSIGN(/1:N, 1:CT1/), FCN(/1:CT1/) ;
'INTEGER' 'ARRAY' P1(/1:CT1/) ;

'REAL' 'PROCEDURE' PHI(T) ; 'REAL' T ;
PHI:=S1-COS(T) ;

'REAL' 'PROCEDURE' PHII(T, I) ; 'REAL' T ; 'INTEGER' I ;
'BEGIN' PHII:= 'IF' I=1 'THEN' C.C 'ELSE' 'IF' I=2
'THEN' -1.0 'ELSE' -(I-1)*T**(I-2) ;
'END' ;
'REAL' 'PROCEDURE' C1(T, CCMPTE) ;
'REAL' T ; 'INTEGER' CCMPTE ;
'BEGIN' 'INTEGER' I ; 'REAL' S ;
'FOR' T:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'
S:=S+XSIGN(/I, CCMPTE/)*PHII(T, I) ;
G1:=S-PHI(T) ;
'END' ;

'REAL' 'PROCEDURE' SIGMA1(T, CCMPTE) ; 'REAL' T ; 'INTEGER' CCMPTE ;
'BEGIN' 'INTEGER' K ; 'REAL' S ;
'IF' CCMPTE=1 'THEN' SIGMA1:=C.C
'ELSE' 'BEGIN' S:=C.O ;
'FOR' K:=1 'STEP' 1 'UNTIL' CCMPTE-1 'DO'
S:=S+FCN(/K/)*E(T, K) ;
SIGMA1:=S ;
'END' ;
'END' ;
```

```
'REAL' 'PROCEDURE' F(T,COMPTE) ; 'REAL' T ; 'INTEGER' COMPTE;  
'BEGIN' 'INTEGER' K ;  
  'IF' P1(/COMPTE/) = 0 'THEN'  
    'BEGIN'  
      'IF' G1(A1,COMPTE) > C.O 'THEN'  
        E := ML * G1(T,COMPTE)  
      'ELSE' E := SIGMA1(T,COMPTE) * G1(T,COMPTE) * (1-ML) / LM(/COMPTE/) ;  
    'END' ; 'GOTO' ACHEVE ;  
  'IF' P1(/COMPTE/) = 1 'THEN'  
    'BEGIN'  
      'IF' G1(A1,COMPTE) > C.O 'THEN'  
    'BEGIN' 'IF' T >= A1 & T <= PSI(/1,COMPTE/) 'THEN'  
      E := ML * G1(T,COMPTE) ;  
      'IF' T > PSI(/1,COMPTE/) & T <= A2 'THEN'  
        E := SIGMA1(T,COMPTE) * G1(T,COMPTE) * (1-ML) / LM(/COMPTE/) ;  
      'END'  
    'ELSE'  
    'BEGIN' 'IF' T >= A1 & T <= PSI(/1,COMPTE/) 'THEN'  
      E := SIGMA1(T,COMPTE) * G1(T,COMPTE) * (1-ML) / LM(/COMPTE/) ;  
      'IF' T > PSI(/1,COMPTE/) & T <= A2 'THEN'  
        E := ML * G1(T,COMPTE) ;  
      'END' ;  
    'END' ; 'GOTO' ACHEVE ;  
  'IF' P1(/COMPTE/) = 2 'THEN'  
    'BEGIN'  
      'IF' G1(A1,COMPTE) > C.O 'THEN'  
    'BEGIN' 'IF' T >= A1 & T <= PSI(/1,COMPTE/) 'THEN'  
      E := ML * G1(T,COMPTE) ;  
      'IF' T > PSI(/1,COMPTE/) & T <= PSI(/2,COMPTE/) 'THEN'  
        E := SIGMA1(T,COMPTE) * G1(T,COMPTE) * (1-ML) / LM(/COMPTE/) ;  
      'IF' T > PSI(/2,COMPTE/) & T <= A2 'THEN'  
        E := ML * G1(T,COMPTE) ;  
      'END'  
    'ELSE'  
    'BEGIN' 'IF' T >= A1 & T <= PSI(/1,COMPTE/) 'THEN'  
      E := SIGMA1(T,COMPTE) * G1(T,COMPTE) * (1-ML) / LM(/COMPTE/) ;  
      'IF' T > PSI(/1,COMPTE/) & T <= PSI(/2,COMPTE/) 'THEN'  
        E := ML * G1(T,COMPTE) ;  
      'IF' T > PSI(/2,COMPTE/) & T <= A2 'THEN'  
        E := SIGMA1(T,COMPTE) * G1(T,COMPTE) * (1-ML) / LM(/COMPTE/) ;  
      'END' ; 'END' ; 'GOTO' ACHEVE ;  
  'IF' G1(A1,COMPTE) > C.O 'THEN'  
    'GOTO' AIG1 'ELSE' 'GOTO' AIG2 ;
```

```

AICI: 'IF' T >= A1 & T < PSI(I,COMPTE/) 'THEN'
  E:=M*G1(T,COMPTE) ;
  'IF' 2*ANTILOG(P1(/COMPTE/)/2)=F1(/COMPTE/) 'THEN'
'BEGIN' 'FOR' K:=2 'STEP' 2 'UNTIL' F1(/COMPTE/)-2 'DO'
  'IF' T > PSI(/K,COMPTE/) & T <= PSI(/K+1,COMPTE/) 'THEN'
    E:=M*G1(T,COMPTE) ;
'FOR' K:=1 'STEP' 2 'UNTIL' F1(/COMPTE/)-1 'DO'
  'IF' T > PSI(/K,COMPTE/) & T <= PSI(/K+1,COMPTE/) 'THEN'
    E:=SICM1(T,COMPTE)+G1(T,COMPTE)*(1-M)/LM(/COMPTE/) ;
    'IF' T > PSI(/P1(/COMPTE/),COMPTE/) & T <= A2 'THEN'
      E:=M+G1(T,COMPTE) ;
'END'
'ELSE' 'BEGIN'
'FOR' K:=2 'STEP' 2 'UNTIL' P1(/COMPTE/)-1 'DO'
  'IF' T > PSI(/K,COMPTE/) & T <= PSI(/K+1,COMPTE/) 'THEN'
    E:=M*G1(T,COMPTE) ;
'FOR' K:=1 'STEP' 2 'UNTIL' F1(/COMPTE/)-2 'DO'
  'IF' T > PSI(/K,COMPTE/) & T <= PSI(/K+1,COMPTE/) 'THEN'
    E:=SICM1(T,COMPTE)+G1(T,COMPTE)*(1-M)/LM(/COMPTE/) ;
    'IF' T > PSI(/P1(/COMPTE/),COMPTE/) & T <= A2 'THEN'
      E:=SICM1(T,COMPTE)+G1(T,COMPTE)*(1-M)/LM(/COMPTE/) ;
'END' ;
AIC2: 'IF' T >= A1 & T < PSI(I,COMPTE/) 'THEN'
  E:=SICM1(T,COMPTE)+G1(T,COMPTE)*(1-M)/LM(/COMPTE/) ;
  'IF' 2*ANTILOG(P1(/COMPTE/)/2)=F1(/COMPTE/) 'THEN'
    'BEGIN'
'FOR' K:=1 'STEP' 2 'UNTIL' F1(/COMPTE/)-1 'DO'
  'IF' T > PSI(/K,COMPTE/) & T <= PSI(/K+1,COMPTE/) 'THEN'
    E:=M*G1(T,COMPTE) ;
'FOR' K:=2 'STEP' 2 'UNTIL' F1(/COMPTE/)-2 'DO'
  'IF' T > PSI(/K,COMPTE/) & T <= PSI(/K+1,COMPTE/) 'THEN'
    E:=SICM1(T,COMPTE)+G1(T,COMPTE)*(1-M)/LM(/COMPTE/) ;
    'IF' T > PSI(/P1(/COMPTE/),COMPTE/) & T <= A2 'THEN'
      E:=SICM1(T,COMPTE)+G1(T,COMPTE)*(1-M)/LM(/COMPTE/) ;
'END'
'ELSE' 'BEGIN'
'FOR' K:=1 'STEP' 2 'UNTIL' P1(/COMPTE/)-2 'DO'
  'IF' T > PSI(/K,COMPTE/) & T <= PSI(/K+1,COMPTE/) 'THEN'
    E:=M*G1(T,COMPTE) ;
'FOR' K:=2 'STEP' 2 'UNTIL' F1(/COMPTE/)-1 'DO'
  'IF' T > PSI(/K,COMPTE/) & T <= PSI(/K+1,COMPTE/) 'THEN'
    E:=SICM1(T,COMPTE)+G1(T,COMPTE)*(1-M)/LM(/COMPTE/) ;
    'IF' T > PSI(/P1(/COMPTE/),COMPTE/) & T <= A2 'THEN'
      E:=M+G1(T,COMPTE) ;
'END' ;
'CH V1: 'END' ;

```

```

'REAL' 'PROCEDURE' SIFH(T,I,COMPTE) ;
'REAL' T ; 'INTEGER' (COMPTE,I) ;
SIFH:=S(T,COMPTE)+PHI(T,I) ;
'REAL' 'PROCEDURE' SIFH(T,COMPTE) ;
'REAL' T ; 'INTEGER' (COMPTE) ;
SIFH:=S(T,COMPTE)+PHI(T) ;
'REAL' 'PROCEDURE' F1(T,COMPTE) ; 'REAL' T ; 'INTEGER'
COMPTE ;
F1:=S(T,COMPTE)+G1(T,COMPTE) ;

```

```
'REAL' 'PROCEDURE' INTEG(A,B,FV,EPS,CT,I,SCRT) ;
'REAL' A,B,EPS ; 'INTEGER' CT,I ; 'REAL' 'PRCCEDURE' FV ;
'BOOLEAN' SORT ;
'BEGIN' 'REAL' H,SANT,SPAIR,SIGM,SNOUV ;
'INTEGER' P,TOUR,K ;
SCRT:= 'FALSE' ;
H:=(E-A)/2 ;
SANT:=FV(A,I)+FV(P,I) ;
SIGM:=FV(A+H,I) ;
SPAIR:=SANT+2*SIGM ;
SANT:=SANT+4*SIGM ;
P:=3 ; TOUR:=1 ;
ITER2: H:=H/2 ;
SIGM:=C.0 ;
'FOR' K:=1 'STEP' 2 'UNTIL' P 'DO'
SIGM:=SIGM+FV(A+K*H,I) ;
SNOUV:=SPAIR+4*SIGM ;
'IF' ABS(SNOUV-2*SANT)<=EPS 'THEN'
'BEGIN' SORT:= 'TRUE' ; 'GOTO' RESULT ; 'END' ;
'IF' TOUR < CT 'THEN' 'BEGIN'
TOUR:=TOUR+1 ;
SPAIR:=SPAIR+2*SIGM ;
P:=2*P+1 ;
SANT:=SNOUV ; 'GOTO' ITER2 ; 'END' ;
RESULT: INTEG:=SNOUV*H/3 ;
'END' INTEG ;
```

```
'REAL' 'PROCEDURE' PRIMITIVE(A,B,G,EPS,CT,I,COMPTE,SCRT) ;
'REAL' A,B,EPS ; 'INTEGER' CT,I,COMPTE ;
'REAL' 'PROCEDURE' G ; 'BOOLEAN' SCRT ;
'BEGIN' 'REAL' H,SANT,SPAIR,SIGM,SNOUV ;
'INTEGER' P,TOUR,K ;
SCRT:= 'FALSE' ;
H:=(E-A)/2 ;
SANT:=G(A,I,COMPTE)+G(B,I,COMPTE) ;
SIGM:=G(A+H,I,COMPTE) ;
SPAIR:=SANT+2*SIGM ;
SANT:=SANT+4*SIGM ;
P:=3 ; TOUR:=1 ;
ITER3: H:=H/2 ;
SIGM:=C.0 ;
'FOR' K:=1 'STEP' 2 'UNTIL' P 'DO'
SIGM:=SIGM+G(A+K*H,I,COMPTE) ;
SNOUV:=SPAIR+4*SIGM ;
'IF' ABS(SNOUV-2*SANT)<=EPS 'THEN'
'BEGIN' SORT:= 'TRUE' ; 'GOTO' EVALLE ; 'END' ;
'IF' TOUR < CT 'THEN' 'BEGIN'
TOUR:=TOUR+1 ;
SPAIR:=SPAIR+2*SIGM ;
P:=2*P+1 ;
SANT:=SNOUV ; 'GOTO' ITER3 ; 'END' ;
EVALLE: PRIMITIVE:=SNOUV*H/3 ;
'END' PRIMITIVE ;
```

```
'PROCEDURE' BISSECTION(G,Y1,Y2,EPS,E1A,FCCT,NDRCT,CCMPT) ;
'REAL' 'PROCEDURE' G ; 'REAL' Y1,Y2,EPS,E1A,FCCT ;
'LABEL' NDRCT ; 'INTEGER' CCMPT ;
  'BEGIN' 'INTEGER' J,K,L ; 'REAL' V1,V2 ;
  J:=K:=L:=1 ;
  FCCT:=Y2 ;
  ZETA: V1:=G(FCCT,CCMPT) ;
  'IF' ABS(V1) < EPS 'THEN' 'GOTO' TERM ;
  'IF' J=1 'THEN' 'BEGIN' J:=2 ;
  V2:=V1 ; FCCT:=Y1 ; 'GOTO' ZETA ; 'END' ;
  'IF' SIGN(V1)=SIGN(V2) 'THEN' 'BEGIN' 'IF' K=1
  'THEN' 'GOTO' NDRCT ;
  Y2:=FCCT ; 'GOTO' TEST ; 'END' ;
  'IF' L=1 'THEN' 'BEGIN' K:=L:=2 ;
  'GOTO' MILIEU ; 'END' ;
  Y1:=FCCT ;
  TEST: 'IF' ABS(Y1-Y2) < E1A 'THEN' 'GOTO' TERM ;
  MILIEU: ROOT:=(Y1+Y2)/2 ; 'GOTO' ZETA ;
  TERM: 'END' BISSECTION ;
```

```
'PROCEDURE' ABSMAX(E,A,B,TC,MAX),CCMPT) ;
'REAL' 'PROCEDURE' E ; 'REAL' A,B,TC,MAX ; 'INTEGER' CCMPT ;
'BEGIN' 'REAL' S,RES,FC,H1,V1,V2,V3,T1,T2 ;
'BCCLEAN' BCL ;
S:=ABS(E(A,CCMPT)) ; RES:=A ; T2:=A ;
HO:=H1:=(B-A)/100 ;
REP: BCL:='FALSE' ;
DEF: V1:=E(T2,CCMPT) ; V2:=E(T2+H1,CCMPT) ;
V3:=E(T2+2*H1,CCMPT) ;
IDEM: 'IF' (V3-V2)*(V2-V1) < 0 'THEN' 'GOTO' DIV ;
'IF' T2+2.5*H1 > B 'THEN' 'GOTO' TESTER ;
T2:=T2+H1 ; V1:=V2 ; V2:=V3 ; V3:=E(T2+2*H1,CCMPT) ;
'GOTO' IDEM ;
TESTER: 'IF' ABS(E(B,CCMPT)) > S 'THEN' 'BEGIN'
S:=ABS(E(B,CCMPT)) ; RES:=B ; 'END' ;
'GOTO' SORT ;
DIV: 'IF' 'NOT' BCL 'THEN' T1:=T2+H1 ;
H1:=H1/2 ; BCL:='TRUE' ;
'IF' H1/HO > 0.001 'THEN' 'GOTO' DEF ;
'IF' ABS(V2) > S 'THEN'
'BEGIN' S:=ABS(V2) ; RES:=T2+H1 ; 'END' ;
T2:=T1 ; H1:=HO ; 'GOTO' REP ;
SORT: TO:=RES ; MAX:=S ;
'END' ABSMAX ;
```

```
'PROCEDURE' GRESOLSYSLINE(C,F,X,N,IMPOSSIBLE) ;
'ARRAY' C,D,X ; 'INTEGER' N ; 'LABEL' IMPOSSIBLE ;
'BEGIN' TRIANGULARISATION:
  'BEGIN' 'INTEGER' J,K,L ; 'REAL' F ;
  'FOR' L:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N-1 'DO'
    'BEGIN' NORMAL:
      'BEGIN' 'IF' ABS(C(/L,L/))=0.0 'THEN' 'GOTO'
      ECHANGE DE LIGNES ;
    'FOR' J:=L+1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'
      'BEGIN' R:=C(/J,L/)/C(/L,L/) ;
      'FOR' K:=L+1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'
        C(/J,K/):=C(/J,K/)-R*C(/L,K/) ;
      C(/J/):=D(/J/)-R*D(/L/) ; 'END' ;
    'END' ; 'GOTO' RETOUR ;
  ECHANGE DE LIGNES:
  'BEGIN' 'INTEGER' M ;
  M:=L+1 ;
  RET: 'IF' ABS(C(/M,L/))=0 'THEN' M:=M+1
  'ELSE' 'GOTO' CONT ;
  'IF' M=N+1 'THEN' 'GOTO' IMPOSSIBLE 'ELSE' 'GOTO' RET ;
  CONT: 'FOR' K:=L 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'
    'BEGIN' R:=C(/L,K/) ;
    C(/L,K/):=C(/M,K/) ;
    C(/M,K/):=R ;
  'END' ;
  F:=D(/L/) ; D(/L/):=D(/M/) ; D(/M/):=F ;
  'GOTO' NORMAL ; 'END' ;
  RETOUR: 'END' ; 'END' TRIANGULARISATION ;
  RESSYSTRI:
  'BEGIN' 'INTEGER' J,K ; 'REAL' TX ;
  'FOR' J:=N 'STEP' -1 'UNTIL' 1 'DO'
    'BEGIN' TX:=0.0 ;
    'FOR' K:=N 'STEP' -1 'UNTIL' J+1 'DO'
      TX:=TX-X(/K/)*C(/J,K/) ;
  'IF' C(/J,J/)=0.0 'THEN' 'GOTO' IMPOSSIBLE ;
  X(/J/):=(D(/J/)+TX)/C(/J,J/) ; 'END' ;
  'END' RESSYSTRI ;
'END' GRESOLSYSLINE ;
```

```
'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'  
'FOR' J:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'  
C(/J,J/):=BETA(/I,J/)+BETA(/J,I/);  
COMPTI:=1;  
STEP:=(A2-A1)/10;  
'FOR' K:=1 'STEP' 1 'UNTIL' G 'DO'  
Y(/K/):=A1+K*STEP;  
BOUCLE:  
  'IF' COMPTI=1 'THEN'  
  'BEGIN'  
  'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'  
  'BEGIN' DELTA2(/I/):=0.0;  
  DELTA(/I/):=DELTA1(/I/)+DELTA2(/I/);  
  D(/I/):=-DELTA(/I/);  
  'END';  
  GAMMA2:=0.0;  
  'END'  
  'ELSE' 'BEGIN'  
  'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'  
  'BEGIN' DELTA2(/I/):=DELTA2(/I/);  
  DELTA(/I/):=DELTA1(/I/)+DELTA2(/I/);  
  D(/I/):=-DELTA(/I/);  
  'END';  
  GAMMA2:=GAMMA2;  
  'END';  
  GAMMA:=GAMMA1-GAMMA2;  
  SYSACT(1,12,1); SYSACT(1,2,2);  
  OUTSTRING(1,(' LES VALEURS DES DELTA2 SONT'));  
  SYSACT(1,14,1); SYSACT(1,2,2);  
  CUTAFRAY(1,DELTA2);  
  SYSACT(1,14,1); SYSACT(1,2,2);  
  GRESOL SYSLINE(C,D,XSIG,N,IMPOSSIBLE);  
  SYSACT(1,12,1);  
  'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'  
  'BEGIN'  
  CUTREAL(1,XSIG(/I/));  
  XSIG(/I,COMPTI/):=XSIG(/I/);  
  'END';  
  SYSACT(1,14,2); SYSACT(1,2,2);  
  'IF' SIGN(G1(A1,COMPTI))=SIGN(G1(Y(/I/),COMPTI)) 'THEN'  
  P1(/COMPTI/):=0 'ELSE' 'BEGIN' P1(/COMPTI/):=1;  
  BISSECTION(G1,A1,Y(/I/),EPS1,ETA,PSI(/P1(/COMPTI/),COMPTI/),  
  NOROCT,COMPTI); 'END';  
  'FOR' K:=1 'STEP' 1 'UNTIL' G-1 'DO'  
  'IF' SIGN(G1(Y(/K/),COMPTI))=SIGN(G1(Y(/K+1/),COMPTI)) 'THEN'  
  P1(/COMPTI/):=P1(/COMPTI/) 'ELSE' 'BEGIN' P1(/COMPTI/):=  
  P1(/COMPTI/)+1;  
  BISSECTION(G1,Y(/K/),Y(/K+1/),EPS1,ETA,  
  PSI(/P1(/COMPTI/),COMPTI/),NOROCT,COMPTI); 'END';  
  'FOR' K:=P1(/COMPTI/)+1 'STEP' 1 'UNTIL' N1 'DO'  
  PSI(/K,COMPTI/):=0.0;  
  SYSACT(1,12,1); OUTSTRING(1,('P1='));  
  OUTAFRAY(1,P1);
```

```
DELRC2(/I/):=DELRC(/I/)+PRIMITIVE(PSI(/F1(/COMPTE/)),COMPTE/),
A2,E1PH,EPS1,CT,I,COMPTE,SCRT) ;
'END' ;
DELRC2(/I/):=DELTA2(/I/)+R01*DELRC2(/I/) ;
'END' ;
'IF' F1(/COMPTE/)=0 'THEN'
GAMRC2:=INTEG(A1,A2,E1PH,EPS1,CT,COMPTE,SCRT) ;
'IF' F1(/COMPTE/)=1 'THEN'
GAMRC2:=INTEG(A1,PSI(/I,COMPTE/),E1PH,EPS1,CT,COMPTE,SCRT)+
INTEG(PSI(/I,COMPTE/),A2,E1PH,EPS1,CT,COMPTE,SCRT)
'ELSE' 'BEGIN'
GAMRC2:=0.0 ;
GAMRC2:=GAMRC2+INTEG(A1,PSI(/I,COMPTE/),E1PH,EPS1,
CT,COMPTE,SCRT) ;
'FOR' K:=1 'STEP' 1 'UNTIL' P1(/COMPTE/)-1 'DO'
GAMRC2:=GAMRC2+INTEG(PSI(/K,COMPTE/),PSI(/K+1,COMPTE/),
E1PH,EPS1,CT,COMPTE,SCRT) ;
GAMRC2:=GAMRC2+INTEG(PSI(/P1(/COMPTE/),COMPTE/),A2,E1PH,
EPS1,CT,COMPTE,SCRT) ;
'END' ;
GAMRC2:=GAMMA2+R01*GAMRC2 ;
'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'
'BEGIN' DELRC(/I/):=DELTA1(/I/)+DELFC2(/I/) ;
DRC(/I/):=-DELRC(/I/) ;
'END' ;
GAMRO:=GAMMA1-GAMRO2 ;
GRESOLSYSLINE(C,DRC,XRC,N,IMPOSSIBLE) ;
THETA1:=0.0 ;
'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'
'FOR' J:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'
THETA1:=THETA1+BETA(/I,J)*XSIG(/I/)*XSIG(/J/) ;
'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'
THETA1:=THETA1+DELTA(/I/)*XSIG(/I/) ;
THETA1:=THETA1+GAMMA ;
SYSACT(1,12,1) ; SYSACT(1,2,2) ;
OUTSTRING(1,(' THETA=')) ; CUTREAL(1,THETA1) ;
SYSACT(1,14,1) ; SYSACT(1,2,2) ;
THETA2:=0.0 ;
'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'
'FOR' J:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'
THETA2:=THETA2+BETA(/I,J)*XRC(/I/)*XFC(/J/) ;
'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'
THETA2:=THETA2+DELRC(/I/)*XRC(/I/) ;
THETA2:=THETA2+GAMRO ;
D1:=THETA2-THETA1 ;
```

```
    SYSACT(1,14,1) ; SYSACT(1,2,2) ;
    ABSMAX(G1,A1,Y(/1/),TX(/1/),LX(/1/),CCMPTE) ;
    TO:=TX(/1/) ;
    L:=LX(/1/) ;
    'FOR' K:=1 'STEP' 1 'UNTIL' G-1 'DO'
'BEGIN'
    ABSMAX(G1,Y(/K/),Y(/K+1/),TX(/K+1/),LX(/K+1/),CCMPTE) ;
    'IF' LX(/K+1/) > L 'THEN'
    'BEGIN' L:=LX(/K+1/) ; TC:=TX(/K+1/) ;
    'END'
    'ELSE' 'BEGIN' L:=L ; TC:=TC ; 'END' ;
    'END' ;
SYSACT(1,12,1);SYSACT(1,2,2);OUTSTRING(1,('L='));OUTREAL(1,L);
SYSACT(1,14,1);SYSACT(1,2,2);
    LM(/CCMPTE/):=L ;
    'IF' P1(/CCMPTE/)=0 'THEN'
        C1:=INTEG(A1,A2,E1G1,EPS1,CT,CCMPTE,SCRT) ;
    'IF' P1(/CCMPTE/)=1 'THEN'
        C1:=INTEG(A1,PSI(/1,CCMPTE/),E1G1,EPS1,CT,CCMPTE,SCRT)+
        INTEG(PSI(/1,CCMPTE/),A2,E1G1,EPS1,CT,CCMPTE,SCRT)
    'ELSE' 'BEGIN'
        C1:=C.0 ;
        C1:=C1+INTEG(A1,PSI(/1,CCMPTE/),E1G1,EPS1,CT,CCMPTE,SCRT) ;
        'FOR' K:=1 'STEP' 1 'UNTIL' P1(/CCMPTE/)-1 'DO'
C1:=C1+INTEG(PSI(/K,CCMPTE/),PSI(/K+1,CCMPTE/),E1G1,EPS1,
CT,CCMPTE,SCRT) ;
C1:=C1+INTEG(PSI(/P1(/CCMPTE/),CCMPTE/),A2,E1G1,EPS1,CT,
CCMPTE,SCRT) ; 'END' ;
        SYSACT(1,12,1) ; SYSACT(1,2,2) ;
        OUTSTRING(1,('C1=')) ; OUTREAL(1,C1) ;
SYSACT(1,14,1) ; SYSACT(1,2,2) ;
'IF' ABS(C1) <= EPS2 'THEN' 'GOTO' FINI ;
```

```
ROI:=1/(1-MU) ;
RET1: SYSACT(1,12,1) ; CUTREAL(1,ROI) ;
    'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'
    'BEGIN'
    'IF' P1(/CCMPTE/)=0 'THEN'
        DELRC2(/I/):=PRIMITIVE(A1,A2,E1PHI,EPS1,CT,I,CCMPTE,SCRT) ;
    'IF' P1(/CCMPTE/)=1 'THEN'
        DELRC2(/I/):=PRIMITIVE(PSI(/1,CCMPTE/),A2,E1PHI,EPS1,CT,I,
        CCMPTE,SCRT)+PRIMITIVE(A1,PSI(/1,CCMPTE/),E1PHI,EPS1,CT,
        I,CCMPTE,SCRT)
    'ELSE' 'BEGIN' DELRC2(/I/):=(C.C ;
        DELRC2(/I/):=DELRC2(/I/)+PRIMITIVE(A1,PSI(/1,CCMPTE/),E1PHI,
        EPS1,CT,I,CCMPTE,SCRT) ;
        'FOR' K:=1 'STEP' 1 'UNTIL' P1(/CCMPTE/)-1 'DO'
        DELRC2(/I/):=DELRC2(/I/)+PRIMITIVE(PSI(/K,CCMPTE/),
        PSI(/K+1,CCMPTE/),E1PHI,EPS1,CT,I,CCMPTE,SCRT) ;
```

```
'IF' R01=1/(1-MU) 'THEN' 'GOTO' REST1 'ELSE' 'GOTO' REST2 ;
REST1: R1:=C1/C1 ;
'IF' R1 >= OMEGA 'THEN'
    'BEGIN' RCN(/COMPTE/):=R01 ; COMPTE:=COMPTE+1 ;
'GOTO' BOUCLE ; 'END'
    'ELSE' 'BEGIN' R01:=R01-0.125 ; 'GOTO' RET1 ; 'END' ;
REST2: R1:=C1/C1/R01 ;
    'IF' B1 >= OMEGA & R1 <= 1-OMEGA
    'THEN' 'BEGIN' RCN(/COMPTE/):=R01 ;
        COMPTE:=COMPTE+1 ;
'GOTO' BOUCLE ; 'END'
    'ELSE' 'BEGIN' R01:=R01-0.125 ;
'IF' R01=0.0 'THEN' 'GOTO' DIV1 'ELSE' 'GOTO' RET1 ;
'END' ;
'IF' COMPTE >= CT1 'THEN' 'GOTO' DIV2 ;
NOPROT: OUTSTRING(1,('PAS DE RACINE')) ;
SYSACT(1,12,1) ; SYSACT(1,14,1) ; SYSACT(1,2,2) ;
IMPOSSIBLE: OUTSTRING(1,('PAS DE SOLUTION AU SYSTEME LINEAIRE')) ;
    DIV1: OUTSTRING(1,('PAS DE LONGUEUR DE FAS')) ;
        SYSACT(1,12,1) ; SYSACT(1,14,1) ; SYSACT(1,2,2) ;
        DIV2: OUTSTRING(1,('LA METHODE CONVERGE LENTEMENT')) ;
        SYSACT(1,12,1) ; SYSACT(1,14,1) ; SYSACT(1,2,2) ;
FINI: OUTSTRING(1,('LES COEFFICIENTS DE LA MEILLEURE APPROXIMATION SC
NT')) ;
    SYSACT(1,12,1) ; SYSACT(1,14,1) ; SYSACT(1,2,2) ;
    OUTARFAY(1,XSIG) ; 'END' ; 'END' ;
```

PROGRAMME RESOLVANT LES PROBLEMES PL_2 ET PC_1 PAR LA METHODE DES PENALITES.

(Pour les paramètres d'entrée à définir se reporter à la notice d'emploi page II.55).

```
'BEGIN' 'INTEGER' I,J,K,P,Q,R,CCMFI,KN,M,P1,P2,N1,N2,N ;
'REAL' T,A,B,C,D,STEP,EPS,ETA,S,B1,B2,TH,THETA,C1,TOTAL,RC,
CZ,CO,L1,CCRT,HI ;
'INTEGER' SORT ;
ININTEGER(0,N), ININTEGER(0,M) ;
ININTEGER(0,N1), ININTEGER(0,N2) ;
INREAL(0,A) ; INREAL(0,B) ; INREAL(0,C) ;
INREAL(0,D) ; INREAL(0,EPS) ; INREAL(0,ETA) ;
INREAL(0,L1) ; INREAL(0,RC) ;
'BEGIN' 'ARRAY' X,X0,X1,X2,X10,AF1,AF2,AF,B1(/1:N/),
Y(/1:N/),PSI(/1:N1/),KH1(/1:N2/),A1(/1:N,1:N/);
```

```
'REAL' 'PROCEDURE' GX1(I,X) ; 'REAL' T ; 'ARRAY' X ;
'BEGIN' 'REAL' S ; 'INTEGER' I ;
'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'
S:=S+X(/I/)*PHI(T,I) ;
GX1:=S-PHI(T) ;
'END' ;
'REAL' 'PROCEDURE' GI(T) ; 'REAL' T ;
GI:=GX1(I,X0) ;
'REAL' 'PROCEDURE' GLX1(T,X0,X1,THETA) ;
'REAL' I,THETA ; 'ARRAY' X0,X1 ;
'BEGIN' 'REAL' S ; 'INTEGER' I ;
S:=0.0 ;
'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'
S:=S+(X0(/I/)+THETA*(X1(/I/)-X0(/I/)))*PHI(T,I) ;
GLX1:=S-PHI(T) ;
'END' ;
'REAL' 'PROCEDURE' GLI(T) ; 'REAL' T ;
GLI:=GLX1(T,X0,X1,TH) ;
```

```
    COMPTE:=1 ;
    BOUCLE: SYSACT(1,12,1) ; SYSACT(1,2,2) ;
    OUTSTRING(1,(' LE NUMERO DE LITERATION EST')) ;
    OUTINTEGER(1,COMPTE) ;
    SYSACT(1,14,1) ; SYSACT(1,2,2) ;
    KN:=2*(COMPTE) ;
    RECOM: 'IF' SIGN(G1(C))=SIGN(G1(Y(/1/))) 'THEN'
        P1:=0 'ELSE' 'BEGIN' P1:=1 ;
    BISSECTION(G1,C,Y(/1/),EPS,ETA,PSI(/P1/),NOROOT) ;
    'END' ;
    'FOR' K:=1 'STEP' 1 'UNTIL' M-1 'DO'
        'IF' SIGN(G1(Y(/K/)))=SIGN(G1(Y(/K+1/))) 'THEN'
    P1:=P1 'ELSE' 'BEGIN' P1:=P1+1 ;
    BISSECTION(G1,Y(/K/),Y(/K+1/),EPS,ETA,PSI(/P1/),NOROOT) ;
    'END' ;
    'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'
    'BEGIN' S:=0.0 ;
    'FOR' J:=I 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'
    S:=S+2*A1(/I,J/)*X0(/J/) ;
    S:=S+B1(/I/) ;
    AF1(/I/):=S ; 'END' ;
    'IF' P1=0 'THEN' 'BEGIN' 'IF' G1(C) > 0.0 'THEN'
    'BEGIN' 'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'
    'BEGIN' S:=0.0 ;
    'FOR' J:=I 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'
    S:=S+2*X0(/J/)*(IP(D,I,J)-IP(C,I,J)) ;
    S:=S-2*(IPV(D,I)-IPV(C,I)) ;
    AF2(/I/):=S ; 'END' ; 'END'
    'ELSE' 'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'
    AF2(/I/):=0.0 ; 'END' ;
    'GOTO' SUITE ;
    'IF' P1=1 'THEN' 'BEGIN' 'IF' G1(C) > 0.0 'THEN'
    'BEGIN'
    'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'
    'BEGIN' S:=0.0 ;
    'FOR' J:=I 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'
    S:=S+2*X0(/J/)*(IP(PSI(/1/),I,J)-IP(C,I,J)) ;
    S:=S-2*(IPV(PSI(/1/),I)-IPV(C,I)) ;
    AF2(/1/):=S ; 'END' ; 'END'
    'ELSE' 'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'
    'BEGIN' S:=0.0 ;
    'FOR' J:=I 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'
    S:=S+2*X0(/J/)*(IP(D,I,J)-IP(PSI(/1/),I,J)) ;
```

```
S:=S-2*(IPV(D,I)-IPV(PSI(/1/),I)) ;
AF2(/1/):=S ; 'END' ; 'END' ;
'GOTO' SUITE ;
'IF' P1=2 'THEN' 'BEGIN' 'IF' G1(C) >0.0 'THEN'
  'BEGIN' 'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'
    'BEGIN' S:=0.0 ;
    'FOR' J:=I 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'
      S:=S+2*X0(/J/)*(IP(PSI(/1/),I,J)-IP(C,I,J)
        +IP(D,I,J)-IP(PSI(/2/),I,J)) ;
      S:=S-2*(IPV(PSI(/1/),I)-IPV(C,I)+IPV(D,I)
        -IPV(PSI(/2/),I)) ;
      AF2(/1/):=S ; 'END' ; 'END'
    'ELSE' 'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'
      'BEGIN' S:=0.0 ;
      'FOR' J:=I 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'
        S:=S+2*X0(/J/)*(IP(PSI(/2/),I,J)-IP(PSI(/1/),I,J)) ;
        S:=S-2*(IPV(PSI(/2/),I)-IPV(PSI(/1/),I)) ;
        AF2(/1/):=S ; 'END' ; 'END' ;
      'GOTO' SUITE ;
'IF' G1(C) >.0 'THEN' 'GOTO' AIG1 'ELSE' 'GOTO' AIG2 ;
AIG1 : 'IF' 2*ENTIER(P1/2)=P1 'THEN'
'BEGIN' 'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'
  'BEGIN' S:=0.0 ;
  'FOR' J:=I 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'
    'BEGIN' S:=S+2*X0(/J/)*(IP(PSI(/1/),I,J)-IP(C,I,J)
      +IP(D,I,J)-IP(PSI(/P1/),I,J)) ;
    'FOR' K:=2 'STEP' 2 'UNTIL' P1-2 'DO'
      S:=S+2*X0(/J/)*(IP(PSI(/K+1/),I,J)-IP(PSI(/K/),I,J)) ;
    'END' ;
    S:=S-2*(IPV(PSI(/1/),I)-IPV(C,I)
      +IPV(D,I)-IPV(PSI(/P1/),I)) ;
    'FOR' K:=2 'STEP' 2 'UNTIL' P1-2 'DO'
      S:=S-2*(IPV(PSI(/K+1/),I)-IPV(PSI(/K/),I)) ;
      AF2(/1/):=S ; 'END' ; 'END'
    'ELSE' 'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'
      'BEGIN' S:=0.0 ;
      'FOR' J:=I 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'
        'BEGIN' S:=S+2*X0(/J/)*(IP(PSI(/1/),I,J)-IP(C,I,J)) ;
        'FOR' K:=2 'STEP' 2 'UNTIL' P1-1 'DO'
          S:=S+2*X0(/J/)*(IP(PSI(/K+1/),I,J)-IP(PSI(/K/),I,J)) ;
        'END' ;
        S:=S-2*(IPV(PSI(/1/),I)-IPV(C,I)) ;
        'FOR' K:=2 'STEP' 2 'UNTIL' P1-1 'DO'
          S:=S-2*(IPV(PSI(/K+1/),I)-IPV(PSI(/K/),I)) ;
          AF2(/1/):=S ; 'END' ;
        'GOTO' SUITE ;
AIG2: 'IF' 2*ENTIER(P1/2)=P1 'THEN'
'BEGIN' 'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'
```

```
'BEGIN' S:=0.0 ;
'FOR' J:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'
'FOR' K:=1 'STEP' 2 'UNTIL' P1-1 'DO'
S:=S+2*X0(/J/)*(IP(Psi(/K+1/),I,J)-IP(ESL(/K/),I,J)) ;
'FOR' K:=1 'STEP' 2 'UNTIL' P1-1 'DO'
S:=S-2*(IPV(Psi(/K+1/),I)-IPV(Psi(/K/),I)) ;
AF2(/I/):=S ; 'END' ; 'END'
'ELSE' 'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'
'BEGIN' S:=0.0 ;
'FOR' J:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'
'BEGIN' 'FOR' K:=1 'STEP' 2 'UNTIL' P1-2 'DO'
S:=S+2*X0(/J/)*(IP(Psi(/K+1/),I,J)-IP(Psi(/K/),I,J)) ;
S:=S+2*X0(/J/)*(IP(D,I,J)-IP(Psi(/P1/),I,J)) ;
'END' ;
'FOR' K:=1 'STEP' 1 'UNTIL' P1-2 'DO'
J:=J-2*(IPV(Psi(/K+1/),I)-IPV(Psi(/K/),I)) ;
S:=S-2*(IPV(D,I)-IPV(Psi(/P1/),I)) ;
AF2(/I/):=S ; 'END' ;
'GOTO' SJITE ;
SJITE: 'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'
AF(/I/):=AF1(/I/)+KN*AF2(/I/);
S:=0.0 ;
'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'
S:=S+AF(/I/)*AF(/I/);
S:=SQRT(S) ;
'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'
'BEGIN' X1(/I/):=-R0*AF(/I/)/S ;
X10(/I/):=X1(/I/)-X0(/I/);
SYSACT(1,12,1) ; SYSACT(1,2,2) ;
JUTREAL(1,X1(/I/)) ;
'END' ;
SYSACT(1,12,1) ; SYSACT(1,14,1) ; SYSACT(1,2,2) ;
```

```
TH:=LD ; H:=1/500 ; P:=1 ;
RETOUR: D1:=0.0 ;
'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'
'FOR' J:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'
'BEGIN' D1:=D1+2*TH*A1(/I,J)*X10(/I/)*X10(/J/);
D1:=D1+2*A1(/I,J)*X10(/I/)*X0(/J/);
'END' ;
'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'
D1:=D1+B1(/I/)*X10(/I/);
'IF' SIGN(GL1(C))=SIGN(GL1(Y(/I/))) 'THEN'
P2:=0 'ELSE' 'BEGIN' P2:=1 ;
BISSECTION(GL1,C,Y(/I/),EPS,ETA,KHI(/P2/),NOFOOT) ;
'END' ;
'FOR' K:=1 'STEP' 1 'UNTIL' M-1 'DO'
'IF' SIGN(GL1(Y(/K+1/)))=SIGN(GL1(Y(/K/))) 'THEN'
P2:=P2 'ELSE' 'BEGIN' P2:=P2+1 ;
```

```
DISSECTION(GL1,Y(/K/),Y(/K+1/),EPS,ETA,KHI(/P2/),NGROOT) ;
  'END' ;
  'IF' P2=0 'THEN' 'BEGIN' 'IF' GL1(C) > 0.0 'THEN'
  'BEGIN' S:=0.0 ;
  'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'
  'BEGIN' 'FOR' J:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'
  S:=S+2*(TH*X10(/I/)*X10(/J/)+X10(/I/)*XC(/J/))*(IP(D,I,J)
  -IP(C,I,J)) ;
  S:=S-2*X10(/I/)*(IPV(D,I)-IPV(C,I)) ; 'END' ;
  D2:=S ; 'END'
  'ELSE' D2:=0.0 ; 'END' ;
  'GOTO' APRES ;
  'IF' P2=1 'THEN' 'BEGIN' 'IF' GL1(C) > 0.0 'THEN'
  'BEGIN' S:=0.0 ;
  'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'
  'BEGIN' 'FOR' J:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'
  S:=S+2*(TH*X10(/I/)*X10(/J/)+X10(/I/)*XC(/J/))*
  (IP(KHI(/I/),I,J)-IP(C,I,J)) ;
  S:=S*X10(/I/)*(IPV(KHI(/I/),I)-IPV(C,I)) ; 'END' ;
  D2:=S ; 'END'
  'ELSE' 'BEGIN' S:=0.0 ;
  'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'
  'BEGIN' 'FOR' J:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'
  S:=S+2*(TH*X10(/I/)*X10(/J/)+X10(/I/)*XC(/J/))*
  (IP(D,I,J)-IP(KHI(/I/),I,J)) ;
  S:=S-2*(IPV(D,I)-IPV(KHI(/I/),I))*X10(/I/)) ;
  'END' ;
  D2:=S ; 'END' ; 'END' ;
  'GOTO' APRES ;
  'IF' P2=2 'THEN' 'BEGIN' 'IF' GL1(C) > 0.0 'THEN'
  'BEGIN' S:=0.0 ;
  'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'
  'BEGIN' 'FOR' J:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'
  S:=S+2*(TH*X10(/I/)*X10(/J/)+X10(/I/)*XC(/J/))*
  (IP(KHI(/I/),I,J)-IP(C,I,J)-IP(KHI(/2/),I,J)+IP(D,I,J)) ;
  S:=S-2*X10(/I/)*(IPV(KHI(/I/),I)-IPV(C,I)+IPV(D,I)
  -IPV(KHI(/2/),I)) ;
  'END' ;
  D2:=S ; 'END'
  'ELSE' 'BEGIN' S:=0.0 ;
  'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'
  'BEGIN' 'FOR' J:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'
  S:=S+2*(TH*X10(/I/)*X10(/J/)+X10(/I/)*XC(/J/))*
  (IP(KHI(/2/),I,J)-IP(KHI(/I/),I,J)) ;
  S:=S-2*X10(/I/)*(IPV(KHI(/2/),I)-IPV(KHI(/I/),I)) ;
  'END' ;
  D2:=S ; 'END' ; 'END' ;
  'GOTO' APRES ;
```

```
'IF' SIGN(GL1(C)) > 0.0 'THEN' 'GOTO' ETI1
'ELSE' 'GOTO' ETI2 ;
ETI1: 'IF' 2*ENTIER(P2/2)=P2 'THEN'
'BEGIN' S:=0.0 ;
'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'
'BEGIN' 'FOR' J:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'
'BEGIN'
S:=S+2*(TH*X10(/I/)*X10(/J/)+X10(/I/)*XC(/J/))*
(IP(KHI(/I/),I,J)-IP(C,I,J)+IP(D,I,J)-IP(KHI(/P2/),I,J)) ;
'FOR' K:=2 'STEP' 2 'UNTIL' P2-2 'DO'
S:=S+2*(TH*X10(/I/)*X10(/J/)+X10(/I/)*XC(/J/))*
(IP(KHI(/K+1/),I,J)-IP(KHI(/K/),I,J)) ;
'END' ;
S:=S-2*X10(/I/)*(IPV(KHI(/I/),I)-IPV(C,I)+
IPV(D,I)-IPV(KHI(/P2/),I)) ;
'FOR' K:=2 'STEP' 2 'UNTIL' P2-2 'DO'
S:=S-2*X10(/I/)*(IPV(KHI(/K+1/),I)-IPV(KHI(/K/),I)) ;
'END' ;
D2:=S ; 'END'
'ELSE' 'BEGIN' S:=0.0 ;
'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'
'BEGIN' 'FOR' J:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'
'BEGIN' S:=S+2*(TH*X10(/I/)*X10(/J/)+X10(/I/)*XC(/J/))*
(IP(KHI(/I/),I,J)-IP(C,I,J)) ;
'FOR' K:=2 'STEP' 2 'UNTIL' P2-1 'DO'
S:=S+2*(TH*X10(/I/)*X10(/J/)+X10(/I/)*XC(/J/))*
(IP(KHI(/K+1/),I,J)-IP(KHI(/K/),I,J)) ;
'END' ;
S:=S-2*X10(/I/)*(IPV(KHI(/I/),I)-IPV(C,I)) ;
'FOR' K:=2 'STEP' 2 'UNTIL' P2-1 'DO'
S:=S-2*X10(/I/)*(IPV(KHI(/K+1/),I)-IPV(KHI(/K/),I)) ;
'END' ;
D2:=S ; 'END' ; 'GOTO' APRES ;
ETI2: 'IF' 2*ENTIER(P2/2)=P2 'THEN'
'BEGIN' S:=0.0 ;
'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'
'BEGIN' 'FOR' J:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'
'FOR' K:=1 'STEP' 2 'UNTIL' P2-1 'DO'
S:=S+2*(TH*X10(/I/)*X10(/J/)+X10(/I/)*XC(/J/))*
(IP(KHI(/K+1/),I,J)-IP(KHI(/K/),I,J)) ;
'FOR' K:=1 'STEP' 2 'UNTIL' P2-1 'DO'
S:=S-2*X10(/I/)*(IPV(KHI(/K+1/),I)-IPV(KHI(/K/),I)) ;
'END' ;
D2:=S ; 'END'
'ELSE' 'BEGIN' S:=0.0 ;
'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'
'BEGIN' 'FOR' J:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'
'BEGIN' S:=S+2*(TH*X10(/J/)*X10(/I/)+X10(/I/)*XC(/J/))*
(IP(D,I,J)-IP(KHI(/P2/),I,J)) ;
'FOR' K:=1 'STEP' 2 'UNTIL' P2-2 'DO'
S:=S+2*(TH*X10(/I/)*X10(/J/)+X10(/I/)*XC(/J/))*
(IP(KHI(/K+1/),I,J)-IP(KHI(/K/),I,J)) ;
'END' ;
S:=S-2*X10(/I/)*(IPV(D,I)-IPV(KHI(/P2/),I)) ;
'FOR' K:=1 'STEP' 2 'UNTIL' P2-2 'DO'
S:=S-2*X10(/I/)*(IPV(KHI(/K+1/),I)-IPV(KHI(/K/),I)) ;
'END' ;
```

```
D2:=S ; 'END' ;
'GOTO' APRES ;
APRES : TOTAL:=D1+KN*D2 ;
C1:=TOTAL ;
'IF' ABS(C1) < EPS 'THEN' 'GOTO' TERM ;
'IF' P<502 'THEN' 'BEGIN' TH:=TH+H ; P:=P+1 ;
'GOTO' RETOUR ; 'END'
'ELSE' 'BEGIN' 'IF' SIGN(C1) > 0.0 'THEN'
'BEGIN' TH:=0.0 ; 'GOTO' TERM ; 'END'
'ELSE' 'BEGIN' TH:=1.0 ; 'GOTO' TERM ; 'END' ;
'END' ;
TERM: 'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'
X2(/I/):=X0(/I/)+TH*(X1(/I/)-X0(/I/)) ;
SYSACT(1,12,1) ; CUTARRAY(1,X2) ;
SYSACT(1,14,1) ; SYSACT(1,2,2) ;
ECART:=0.0 ;
'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'
ECART:=ECART+(X2(/I/)-X0(/I/))**2 ;
ECART:=SQRT(ECART) ;
'IF' ECART < EPS 'THEN' 'GOTO' ENCORE
'ELSE' 'BEGIN'
'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'
X0(/I/):=X2(/I/) ; 'GOTO' RECCM ;
'END' ;
ENCORE: 'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'
X0(/I/):=X2(/I/) ;
COMPTI:=COMPTI+1 ;
'IF' COMPTI <= 10 'THEN' 'GOTO' BOUCLE
'ELSE' 'GOTO' FINI ;
FINI: OUTSTRING(1,(' LES COEFFICIENTS DE LA MEILLEURE
APPROXIMATION SONT')) ;
SYSACT(1,12,1) ; SYSACT(1,2,2) ;
OUTARRAY(1,X2) ; 'GOTO' FIN ;
NOKOUT: OUTSTRING(1,(' LE DEUXIEME PAS DIVERGE')) ;
'IF' SIGN(C1) > 0.0 'THEN'
'BEGIN' TH:=0.0 ; 'GOTO' TERM ; 'END'
'ELSE' 'BEGIN' TH:=1.0 ; 'GOTO' TERM ; 'END' ;
FIN: 'END' ; 'END' ;
```


CHAPITRE III

METHODE D'ECLATEMENT DES CONTRAINTES POUR
LA RESOLUTION APPROCHEE DE PROBLEMES AVEC CONTRAINTES

CHAPITRE III

METHODE D'ECLATEMENT DES CONTRAINTES POUR LA RESOLUTION APPROCHEE DE PROBLEMES AVEC CONTRAINTES

Soit $C^2[a,b]$, l'espace des fonctions continues sur un intervalle $[a,b]$ de \mathbb{R} , muni du produit scalaire

$$\langle f/g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt$$

et de la norme associée $\|f\| = (\langle f/f \rangle)^{1/2}$.

Soient v_1, v_2, \dots, v_N , N éléments linéairement indépendants appartenant à $C^2[a,b]$, qui engendrent un sous espace $V = L(v_1, v_2, \dots, v_N)$.

Dans \mathbb{R}^N , on note $(x/y) = \sum_{i=1}^N x_i y_i$ le produit scalaire ordinaire et la norme euclidienne $|x| = (x/x)^{1/2}$.

Dans \mathbb{R}^N , on considère l'ensemble convexe fermé suivant :

$$C = \{x \in \mathbb{R}^N / \sum_{i=1}^N x_i \varphi_i(t) \leq c(t), \forall t \in T\}$$

où les φ_i , $i=1,2,\dots,N$ sont des fonctions numériques continues définies sur un compact T , qui est soit un intervalle $[c,d]$, soit une union finie d'intervalles de \mathbb{R} .

Pour chaque $t \in T$, l'ensemble

$$C_t = \{x \in \mathbb{R}^N / \sum_{i=1}^N x_i \varphi_i(t) \leq c(t)\}$$

est un demi-espace fermé de \mathbb{R}^N et l'on a

$$C = \bigcap_{t \in T} C_t$$

A l'ensemble C , on associe le convexe fermé \tilde{C} de V :

$$\tilde{C} = \{v \in V / v = \sum_{i=1}^N x_i v_i, x \in C\}$$

Etant donné un élément $f \in C^2[a,b]$, on sait qu'il existe un élément unique v^* , meilleure approximation de f dans \tilde{C} :

$$\|v^* - f\| = \min_{v \in \tilde{C}} \|v - f\|.$$

Pour obtenir v^* , on peut d'abord chercher la meilleure approximation \bar{v} de f dans V : l'élément v^* est alors la meilleure approximation de \bar{v} dans \tilde{C} .

Supposons que l'on ait déterminé $\bar{v} = \sum_{i=1}^N \bar{x}_i v_i$ (par résolution du système linéaire classique). Le problème de la détermination de $v^* = \sum_{i=1}^N x_i^* v_i$

se fait alors entièrement dans V (ou dans \mathbb{R}^N) :

$$\|v^* - \bar{v}\| = \min_{v \in \tilde{C}} \|v - \bar{v}\| = \left\| \sum_{i=1}^N (x_i^* - \bar{x}_i) v_i \right\| = \min_{x \in C} \left\| \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x}_i) v_i \right\|$$

Pour ne pas multiplier les notations, pour $x \in \mathbb{R}^N$ et $y \in \mathbb{R}^N$, on note encore :

$$\langle x/y \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^N x_i v_i / \sum_{i=1}^N x_i v_i \right\rangle$$

et

$$\|x\| = \left\| \sum_{i=1}^N x_i v_i \right\|$$

Avec la notation définie plus haut pour le produit scalaire dans \mathbb{R}^N , on a donc :

$$\langle x/y \rangle = (x / Wy)$$

où W est la matrice carrée de terme $\langle v_i / v_j \rangle$.

Pour une valeur de t fixée ($t \in T$), posons $y_t = (\varphi_i(t))$, y_t appartient donc à \mathbb{R}^N , et on a :

$$C_t = \{x \in \mathbb{R}^N \mid (x/y_t) \leq c(t)\} .$$

Soit z_t l'élément unique de \mathbb{R}^N tel que :

$$Wz_t = y_t$$

on a alors : $(x/y_t) = (x|Wz_t) - \langle x|z_t \rangle$

d'où : $C_t = \{x \in \mathbb{R}^N \mid \langle x|z_t \rangle \leq c(t)\}$.

Dans la suite, on étudiera donc le problème dans \mathbb{R}^N muni du produit scalaire $\langle ./.\rangle$ et de la norme associée.

I - ALGORITHME [6]

La méthode est directement basée sur la formule de dualité suivante (dans laquelle \tilde{D} désigne un demi espace fermé de V) :

$$d = \min_{v \in \tilde{C}} \|v - \bar{v}\| = \max_{D \subset \tilde{C}} (\min_{v \in D} \|v - \bar{v}\|) = \min_{x \in \tilde{C}} \|x - \bar{x}\| = \max_{D \subset \tilde{C}} \min_{x \in D} \|x - \bar{x}\|$$

On construit donc une suite de demi-espaces $D^v \supset C$ tels que :

$$a) \quad \lim_{v \rightarrow +\infty} \min_{x \in D^v} \|x - \bar{x}\| = d .$$

$$b) \quad \lim_{v \rightarrow +\infty} x^v = x^* , \text{ où } x^v \text{ est la projection de } \bar{x} \text{ sur } D^v$$

(au sens de la norme $\|\cdot\|$ dans \mathbb{R}^N) .

Soit x^v tel que $D^v = \{x \in \mathbb{R}^N \mid \langle x^v - \bar{x} / x - x^v \rangle \geq 0\}$ contienne C . Si $x^v \in C$, alors $x^v = x^*$. Supposons qu'il existe $t^v \in T$ tel que $x^v \notin C_{t^v}$ et appelons x^{v+1} la projection de \bar{x} sur $D^v \cap C_{t^v}$ (au sens de la norme $\|\cdot\|$) .

Considérons alors le demi-espace fermé :

$$D^{v+1} = \{x \in \mathbb{R}^N \mid \langle x^{v+1} - \bar{x} / x - x^{v+1} \rangle \geq 0\}$$

(Par construction, x^{v+1} est la projection de \bar{x} sur D^{v+1} au sens de la norme $\|\cdot\|$) .

On a alors les propriétés suivantes :

1) $C \subset D^{v+1}$: en effet puisque x^{v+1} est la projection de \bar{x} sur $D^v \cap C_t^v$, nous avons :

$\langle x^{v+1} - \bar{x} / x - x^{v+1} \rangle \geq 0$ pour tout x appartenant à $D^v \cap C_t^v$ et a fortiori pour tout $x \in C$, puisque $C \subset D^v \cap C_t^v$.

2) Comme x^v est meilleure approximation de \bar{x} dans D^v , x^{v+1} est meilleure approximation de \bar{x} dans $D^v \cap C_t^v$, x^* est meilleure approximation de \bar{x} dans C , et que $D^v \supset D^v \cap C_t^v \supset C$, nous avons :

$$\|x^v - \bar{x}\| \leq \|x^{v+1} - \bar{x}\| \leq \|x^* - \bar{x}\|$$

3) Nous avons :

$$\bar{x} - x^{v+1} = (\bar{x} - x^v) + (x^v - x^{v+1})$$

donc :

$$\|\bar{x} - x^{v+1}\|^2 = \|\bar{x} - x^v\|^2 + \|x^v - x^{v+1}\|^2 + 2 \langle \bar{x} - x^v / x^v - x^{v+1} \rangle$$

or x^{v+1} étant la projection de \bar{x} sur $D^v \cap C_t^v$, nous avons :

$$\langle \bar{x} - x^v / x^v - x^{v+1} \rangle \geq 0,$$

donc :

$$\|\bar{x} - x^{v+1}\|^2 \geq \|\bar{x} - x^v\|^2 + \|x^v - x^{v+1}\|^2,$$

soit

$$\|\bar{x} - x^{v+1}\|^2 - \|\bar{x} - x^v\|^2 \geq \|x^v - x^{v+1}\|^2 \quad (1)$$

Choix de t^v

Si x^v n'appartient à C_t , $t \in T$, (où C_t est défini comme précédemment, la distance de x^v à C_t est donnée par :

$$d(x^v, C_t) = \min_{x \in C_t} \|x - x^v\| = \langle x^v / z_t \rangle - c(t)$$

$$= \frac{(x^v / y_t) - c(t)}{\|z_t\|}$$

La détermination de la valeur de t^v telle que $d(x^v, C_t)$ soit maximum, est rendue assez difficile en raison du calcul de $\|z_t\|$ qui nécessite pour chaque t la résolution d'un système linéaire d'ordre N . (y_t étant connu, il faudrait en effet calculer z_t tel que : $Wz_t = y_t$ et l'on aurait alors :

$$\|z_t\|^2 = \langle z_t, z_t \rangle = (z_t / Wz_t) = (z_t / y_t) .$$

Pour éviter cette complication du problème, on choisit la valeur t^v qui maximise :

$$\varepsilon_t^v = \|z_t\| \cdot d(x^v, C_t) .$$

On a donc :

$$\varepsilon_{t^v}^v = \max_{t \in T} \varepsilon_t^v = \max_{t \in T} \left(\sum_{i=1}^N x_i^v \varphi_i(t^v) - c(t^v) \right) = \max_{t \in T} \left(\sum_{i=1}^N x_i^v \varphi_i(t) - c(t) \right) .$$

On suppose que $\varepsilon_{t^v}^v > 0$, sinon x^v appartient à C et est solution du problème considéré.

CONVERGENCE

La suite $\|x^v - \bar{x}\|$ est croissante et bornée supérieurement par $\|x^* - \bar{x}\|$. Elle converge donc vers un nombre γ tel que $\gamma \leq \|x^* - \bar{x}\|$.

Comme $\lim_{v \rightarrow +\infty} (\|x^{v+1} - \bar{x}\|^2 - \|x^v - \bar{x}\|^2) = 0$, on en déduit, d'après (1), que :

$$\lim_{\nu \rightarrow +\infty} \|x^\nu - x^{\nu+1}\|^2 = 0$$

Par ailleurs, on a :

$$d(x^\nu, C_{t^\nu}) = \frac{\varepsilon_{t^\nu}^\nu}{\|z_{t^\nu}^\nu\|}$$

(où $\|z_{t^\nu}^\nu\|$ est défini comme plus haut) .

Les fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N$ étant continues sur I et y atteignant donc leur maximum et leur minimum, la matrice W étant inversible, l'ensemble :

$$\{z_t \in \mathbb{R}^N \mid Wz_t = y_t, t \in T\}$$

est borné .

Soit donc

$$L = \max_{t \in T} \|z_t\|$$

Or, on a :

$$\|x^\nu - x^{\nu+1}\| \geq d(x^\nu, C_{t^\nu}) = \frac{(x^\nu/y_{t^\nu}) - c(t^\nu)}{\|z_{t^\nu}^\nu\|} \geq$$

$$\frac{1}{L} (x^\nu/y_{t^\nu}) - c(t^\nu) = \frac{\max_{t \in T} (x^\nu/y_t) - c(t)}{L}$$

on en déduit que :

$$\overline{\lim}_{\nu \rightarrow +\infty} (\max_{t \in T} ((x^\nu/y_t) - c(t))) \leq 0 \quad (2)$$

La suite x^ν étant bornée, on peut en extraire une sous suite convergente. Soit \tilde{x} la limite. On aura :

$$\|\tilde{x} - \bar{x}\| = \gamma \leq d = \|x^* - \bar{x}\| .$$

D'autre part, l'inégalité (2) entraîne que $\tilde{x} \in C$,
donc que :

$$\|x^* - \bar{x}\| \leq \|\tilde{x} - \bar{x}\|$$

d'où l'égalité et en raison de l'unicité de la solution $\tilde{x} = x^*$.
Du fait que la suite $\|x^v - \bar{x}\|$ est croissante, on a :

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \|x^v - \bar{x}\| = \|x^* - \bar{x}\| .$$

Comme d'une part x^v appartient à D^v , on a :

$$\|x^* - \bar{x}\|^2 - \|x^v - \bar{x}\|^2 \geq \|x^v - x^*\|^2 .$$

D'autre part on sait que :

$$\lim_{v \rightarrow +\infty} (\|x^* - \bar{x}\|^2 - \|x^v - \bar{x}\|^2) = 0$$

on en déduit alors, compte tenue de l'expression (2) que :

$$\lim_{v \rightarrow +\infty} x^v = x^* .$$

ASPECT NUMERIQUE DE LA METHODE

1) CHOIX DE T^v

Rappelons qu'à la $v^{\text{ième}}$ itération on choisit t^v tel que

$$\varepsilon_t^v = \max_{t \in T} (\varepsilon_t^v) = \max_{t \in T} \left(\sum_{i=1}^N x_i \varphi_i(t) - c(t) \right) .$$

Afin d'obtenir numériquement la valeur maximum de ε_t^v et celle de t^v , nous utilisons une méthode dichotomique sur T (qui est un intervalle borné, ou une union finie d'intervalles bornés).

2) CALCUL DE x^{v+1}

Deux cas peuvent se présenter :

Premier cas :

On projette \bar{x} sur C_{t^v} . Soit

$$\bar{x}^{-v+1} = \text{proj}_{C_{t^v}}(\bar{x})$$

Si \bar{x}^{-v+1} appartient à D^v , c'est-à-dire vérifie l'inégalité :
 $\langle x^v - \bar{x} / \bar{x}^{-v+1} - x^v \rangle \geq 0$, alors $\bar{x}^{-v+1} = x^{v+1}$.

\bar{x}^{-v+1} est la projection de \bar{x} sur l'hyperplan d'équation :

$$\{x / \langle x / z_{t^v} \rangle = c(t^v)\}$$

L'erreur $\bar{x}^{-v+1} - \bar{x}$ doit être orthogonale à cet hyperplan, donc proportionnelle à z_{t^v} . On a donc :

$$\bar{x}^{-v+1} - \bar{x} = k z_{t^v}$$

k est choisi de telle façon que x^{v+1} appartienne à l'hyperplan soit :

$$\langle \bar{x} + k z_{t^v} / z_{t^v} \rangle = c(t^v)$$

On a alors :

$$k = \frac{c(t^v) - \langle \bar{x} / z_{t^v} \rangle}{\langle z_{t^v} / z_{t^v} \rangle}$$

et finalement :

$$x^{v+1} = \bar{x} + k z_{t^v} = \bar{x} + \frac{c(t^v) - \langle \bar{x} / z_{t^v} \rangle}{\|z_{t^v}\|^2} z_{t^v}$$

soit encore :

$$x^{v+1} = \bar{x} + [c(t^v) - \sum_{i=1}^N \bar{x}_i \varphi_i(t^v)] \frac{z_t^v}{\|z_t^v\|^2}$$

$$\text{avec } \|z_t^v\|^2 = (z_t^v / y_t^v) .$$

Deuxième cas

Si \bar{x}^{-v+1} n'appartient pas à D^v , alors x^{v+1} , projection de \bar{x} sur $D^v \cap C_{t^v}$, est la projection de \bar{x} sur l'intersection des deux hyperplans frontières :

$$\text{Fr}(D^v) = \{x \in \mathbb{R}^N \mid \langle x^v - \bar{x} / x - x^v \rangle = 0\}$$

ou
$$\text{Fr}(D^v) = \{x \in \mathbb{R}^N \mid \langle x^v - \bar{x} / x \rangle = \langle x^v - \bar{x} / x^v \rangle\}$$

$$\text{Fr}(C_{t^v}) = \{x \in \mathbb{R}^N \mid \langle z_t^v / x \rangle = c(t^v)\} .$$

L'erreur $\bar{x}^{-v+1} - \bar{x}$ doit être orthogonale aux hyperplans homogènes correspondants, donc être de la forme :

$$\bar{x}^{-v+1} - \bar{x} = \lambda z_t^v + \mu (x^v - \bar{x}) \tag{3}$$

λ et μ sont déterminés de telle sorte que x^{v+1} appartienne aux deux hyperplans frontières :

$$\langle x^v - \bar{x} / x - x^v + \mu z_t^v + \mu (x^v - \bar{x}) \rangle = 0$$

$$\langle z_t^v / x + \lambda z_t^v + \mu (x^v - \bar{x}) \rangle = c(t^v)$$

d'où le système linéaire :

$$\begin{cases} \lambda \langle x^v - \bar{x} / z_t^v \rangle + \mu \langle x^v - \bar{x} / x^v - \bar{x} \rangle = \langle x^v - \bar{x} / x^v - \bar{x} \rangle \\ \lambda \langle z_t^v / z_t^v \rangle + \mu \langle x^v - \bar{x} / z_t^v \rangle = c(t^v) - \langle z_t^v / \bar{x} \rangle \end{cases}$$

avec

$$\langle z_{t^V} / z_{t^V} \rangle = (z_{t^V} / y_{t^V})$$

et

$$\langle x_{t^V} - \bar{x} / z_{t^V} \rangle = \sum_{i=1}^N (x_i^V - \bar{x}_i) \varphi_i(t^V) .$$

On en déduit alors les valeurs de λ et μ que l'on reporte dans l'expression (3).

II - GENERALISATION DE L'ALGORITHME

L'algorithme proposé ci-dessus permet d'obtenir la projection v^* de \bar{v} (\bar{v} n'appartenant pas à \mathcal{C}) sur \mathcal{C} . Si l'on s'exprime non plus en terme de projection mais en terme de minimum d'une fonctionnelle convexe sur un convexe, le problème précédent peut alors s'énoncer comme dans le (§II;chap. I) sous la forme suivante :

minimiser $(F(x)/x \in C)$

$$\text{où } C = \{x \in \mathbb{R}^N : \sum_{i=1}^N x_i \varphi_i(t) - c(t) \leq 0, \forall t \in T\}$$

La fonction F étant fortement convexe, il existe x^* appartenant à C , unique, tel que :

$$\alpha = F(x^*) = \min_{x \in C} (F(x)) .$$

L'algorithme basé sur le même principe que le précédent est le suivant :

ALGORITHME

Soit K^V un convexe fermé tel que

- 1) $K^V \supset C$
- 2) $x^V \in K^V$
- 3) $F(x^V) = \min_{x \in K^V} (F(x)) .$

. Si x^v appartient à C , alors x^v est solution du problème considéré.

. Si x^v n'appartient pas à C , alors on choisit $t^v \in T$ de la même façon que dans l'algorithme précédent c'est-à-dire tel que :

$$\epsilon_t^v = \max_{t \in T} (\epsilon_t^v) = \max_{t \in T} \left(\sum_{i=1}^N x_i \varphi_i(t) - c(t) \right)$$

La fonction F étant fortement convexe, il existe x^{v+1} unique appartenant à $K^v \cap C_t^v$, tel que :

$$F(x^{v+1}) = \min_{x \in K^v \cap C_t^v} (F(x^v)) .$$

On choisit alors K^{v+1} convexe fermé, tel que :

- 1') $K^{v+1} \supset C$
- 2') $x^{v+1} \in K^{v+1}$
- 3') $F(x^{v+1}) = \min_{x \in K^{v+1}} F(x^{v+1})$

Supposons que la fonction F admette une différentielle F' (ce qui correspond au cas de notre problème), comme F est minimum sur $K^v \cap C_t^v$, on a :

$$(F'(x^{v+1}) / x - x^{v+1}) \geq 0 .$$

Si donc on choisit pour

$$K^{v+1} = \{x \in \mathbb{R}^N : (F'(x^{v+1}) / x - x^{v+1}) \geq 0\}$$

on a : $K^{v+1} \supset C$.

D'autre part F est minimum sur K^{v+1} en x^{v+1} .

On obtient donc une méthode d'éclatement des contraintes analogue à la précédente.

CONVERGENCE

Comme $K^v \supset K^v \cap C_t^v \supset C$, on a :

$$F(x^v) \leq F(x^{v+1}) \leq F(x^*)$$

Posons $z = x^v + \frac{1}{2} (x^{v+1} - x^v)$

Nous avons :

$$F(z) \geq F(x^v) + (F'(x^v)/z - x^v)$$

Soit $F(z) \geq F(x^v) + \frac{1}{2} (F'(x^v), x^{v+1} - x^v)$

Comme $x^{v+1} \in K^v$, on sait que :

$$(F'(x^v), x^{v+1} - x^v) \geq 0$$

par suite $F(z) \geq F(x^v)$ (4)

D'autre part, la fonction F étant fortement convexe, il existe $k > 0$, tel que :

$$F(z) \leq \frac{1}{2} [F(x^v) + F(x^{v+1})] - \frac{1}{4} k \|x^{v+1} - x^v\|^2$$

Compte tenu de l'inégalité (4), on en déduit que :

$$F(z) \leq F(x^{v+1}) - \frac{1}{2} k \|x^{v+1} - x^v\|^2$$

d'où $k \|x^{v+1} - x^v\|^2 \leq 2[F(x^{v+1}) - F(x^v)]$ (5)

La suite $F(x)$ étant croissante et bornée supérieurement on a :

$$\lim_{v \rightarrow +\infty} F(x^{v+1}) - F(x^v) = 0$$

et donc d'après (5) $\|x^{v+1} - x^v\| = 0$ (6)

Comme x^v appartient à C_{t^v} , on a :

$$\|x^{v+1} - x^v\| \geq d(x^v, C_{t^v}) = \frac{\varepsilon_t^v}{\left(\sum_{i=1}^N \varphi_i^2(t^v) \right)^{1/2}}$$

donc

$$\|x^{v+1} - x^v\| \geq \frac{\varepsilon_t^v}{M} \quad \text{pour tout } t \in T$$

avec
$$M = \left(\sum_{i=1}^N \text{Max}_{t \in T} (\varphi_i(t))^2 \right)^{1/2}$$

Compte tenu (6) nous avons donc : $\lim_{v \rightarrow +\infty} (\varepsilon_t^v) = 0$ pour tout $t \in T$ (7)

Puisque $F(x^v) \leq F(x^{v+1}) \leq F(x^*)$, et la fonction F étant fortement convexe, l'ensemble

$$\{x \in \mathbb{R}^N, F(x) \leq F(x^*)\}$$

est compact.

On peut donc, de la suite $\{x^v\}$, extraire une sous suite convergente vers \tilde{x} . La fonction F étant semi-continue inférieurement on aura $F(\tilde{x}) \leq F(x^*)$.

D'après (7), \tilde{x} appartient à C . Donc $F(x^*) \leq F(\tilde{x})$ et du fait de l'unicité de la solution $\tilde{x} = x^*$.

D'autre part, $x^* \in C \subset K^v$. D'après (5)

$$k \|x^* - x^v\|^2 \leq 2(F(x^*) - F(x^v))$$

Par suite on a d'après (6) :

$$\lim_{v \rightarrow +\infty} \|x^v - x^*\| = 0.$$

METHODE D'ACCUMULATION DES CONTRAINTES

Si dans l'algorithme précédent, on prend $K_1 = \mathbb{R}^N$ et $K^{v+1} = K^v \cap C_{t^v}$, les conditions (1', 2', 3') sont vérifiées.

A chaque itération, on ajoute alors une contrainte supplémentaire, et on a :

$$K^{v+1} = K^v \cap \{x \in \mathbb{R}^N \mid \sum_{i=1}^N x_i \varphi_i(t^v) \leq c(t^v)\}$$

$$F(x^{v+1}) = \inf_{x \in K^{v+1}} (F(x^v))$$

Cette méthode d'accumulation des contraintes n'est autre que l'algorithme de Cheney-Goldstein.

L'inconvénient de cette méthode réside dans le fait qu'à chaque itération on ajoute une contrainte supplémentaire. Aussi propose-t-on ci-dessous une méthode qui ne retienne à chaque itération que des contraintes actives.

ALGORITHME AVEC EPURATION

Supposons que nous ayons construit une suite de convexes fermés K^j de \mathbb{R}^N ($j=1,2,\dots,v$, $K^1 = \mathbb{R}^N$), une suite x^j d'éléments de \mathbb{R}^N ($j=1,2,\dots$, $x^j \in K^j$) et une suite t^j de scalaires appartenant à T ($j=1,2,\dots,v-1$), telles que, quel que soit $j=1,2,\dots,v$, on ait :

- 1) $K_j \supset C$
- 2) t^j réalise le maximum de $\sum_{i=1}^N x_i^j \varphi_i(t) - c(t)$
- 3) $F(x^j) = \min_{x \in K^j} (F(x))$.

Soit alors $t^v \in T$ tel que

$$\sum_{i=1}^N x_i^v \varphi_i(t^v) - c(t^v) = \text{Max}_{t \in T} \left(\sum_{i=1}^N x_i^v \varphi_i(t) - c(t) \right).$$

Posons : $K^{v+1} = K^v \cap C_t^v$

et soit x^{v+1} l'élément de \mathbb{R}^N tel que :

$$F(x^{v+1}) = \min_{x \in K_{v+1}} (F(x))$$

Notons

$$T^{v+1} = \{t \in T^v \cup \{t^v\} / x^{v+1} \in Fr(C_t)\}$$

alors

$$K^{v+1} = \bigcap_{t \in T^{v+1}} (C_t)$$

On constate que le convexe K^{v+1} vérifie les propriétés requises plus haut, et donc que la suite x^v ainsi construite converge vers la solution x^* du problème considéré.

III RESULTATS NUMERIQUES

1) NOTICE D'EMPLOI DU PROGRAMME RESOLVANT LE PROBLEME PL_2 PAR LA METHODE D'ECLATEMENT DES CONTRAINTES.

Comme paramètres d'entrée, le programme comporte :

- les matrices W et D1 :

$$W[I, J] = \int_a^b v_i(t) \cdot v_j(t) dt \quad \begin{matrix} i=1,2,\dots,N \\ j=1,2,\dots,N \end{matrix}$$

$$D1[I] = 2 \int_a^b f(t) \cdot v_i(t) dt \quad i=1,2,\dots,N$$

f étant la fonction dont on cherche la meilleure approximation sur l'intervalle $[A, B]$ et les v_i , $i=1,2,\dots,N$, les fonctions qui engendrent le sous espace V.

- les fonctions φ_i , $i=1,2,\dots,N$, et φ (précisées par les "réel procédure" PHI et PHIO) sont définies sur l'intervalle $[C, D]$.

La procédure ALGMAX permet, à chaque itération v, de déterminer la valeur t_v de l'intervalle $[C, D]$ pour laquelle la fonction :

$$DIST(t, x^v) = \sum_{i=1}^N x_i^v \varphi_i(t) - \varphi(t)$$

est maximum..

Le programme comporte deux tests d'arrêt :

- Si $\text{DIST}(t, x^v)$ est négatif, alors les x_i^v sont les coefficients du meilleur approximant de f sur l'intervalle $[a, b]$.
- Sinon l'algorithme calcule à chaque itération la valeur $\|x^v - x^{v-1}\|$ et on arrête les calculs lorsque $\|x^v - x^{v-1}\| < \text{EPS}$.

2) EXEMPLE NUMERIQUE.

Comme dans le chapitre précédent, on cherche, parmi les polynômes de degré 4, le meilleur approximant de la fonction $\sin(t)$ sur $[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$, au sens de la norme en moyenne quadratique. On impose de plus au meilleur approximant :

$$v^*(t) = \sum_{i=1}^5 x_i^* \times t^{i-1}$$

de vérifier :

$$\cos t - v^{*'}(t) \leq 0.02 \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$$

Notons

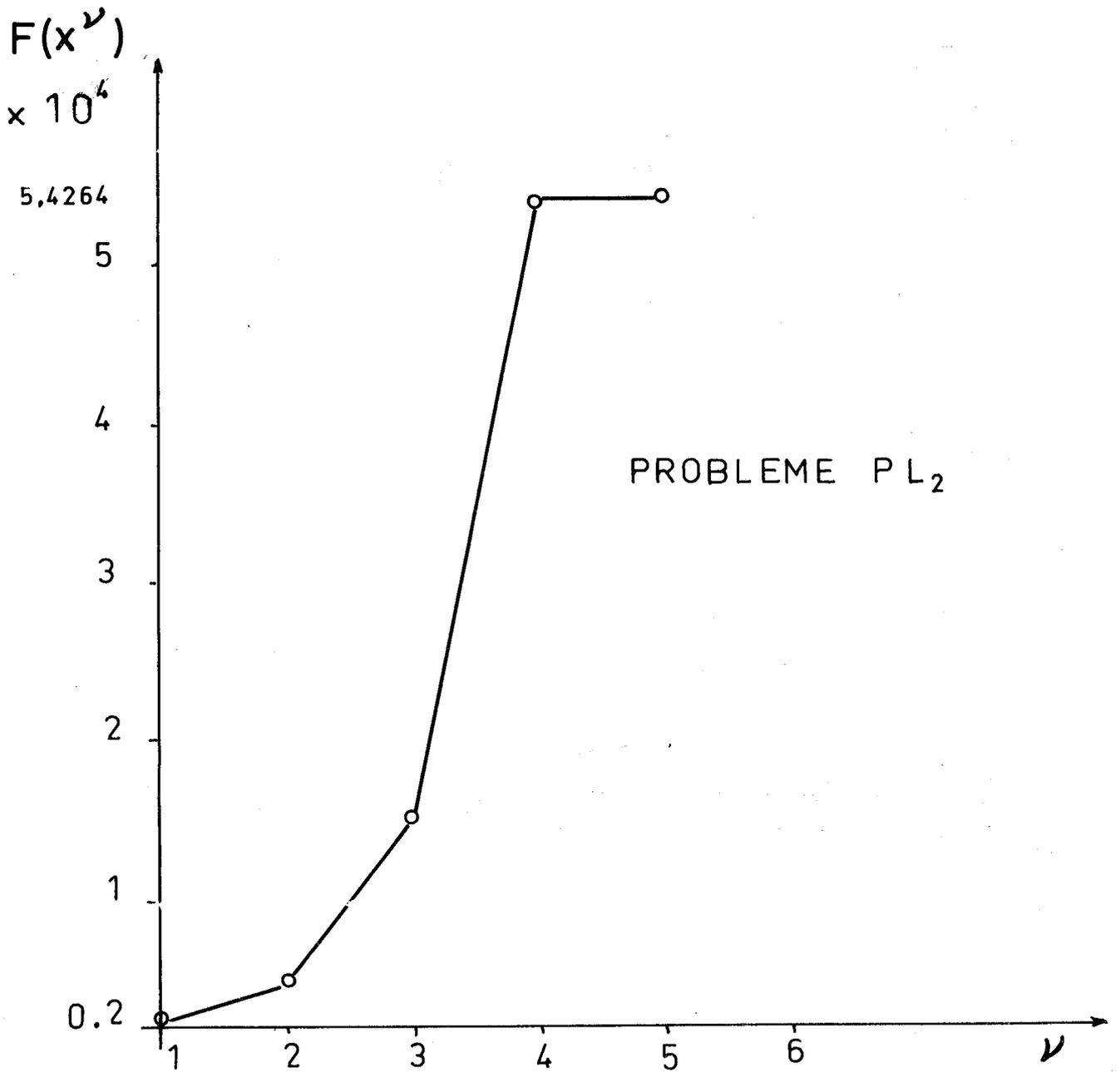
$$G^v = \text{Max}_{t \in \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]} (\text{DIST}(t, x^v))$$

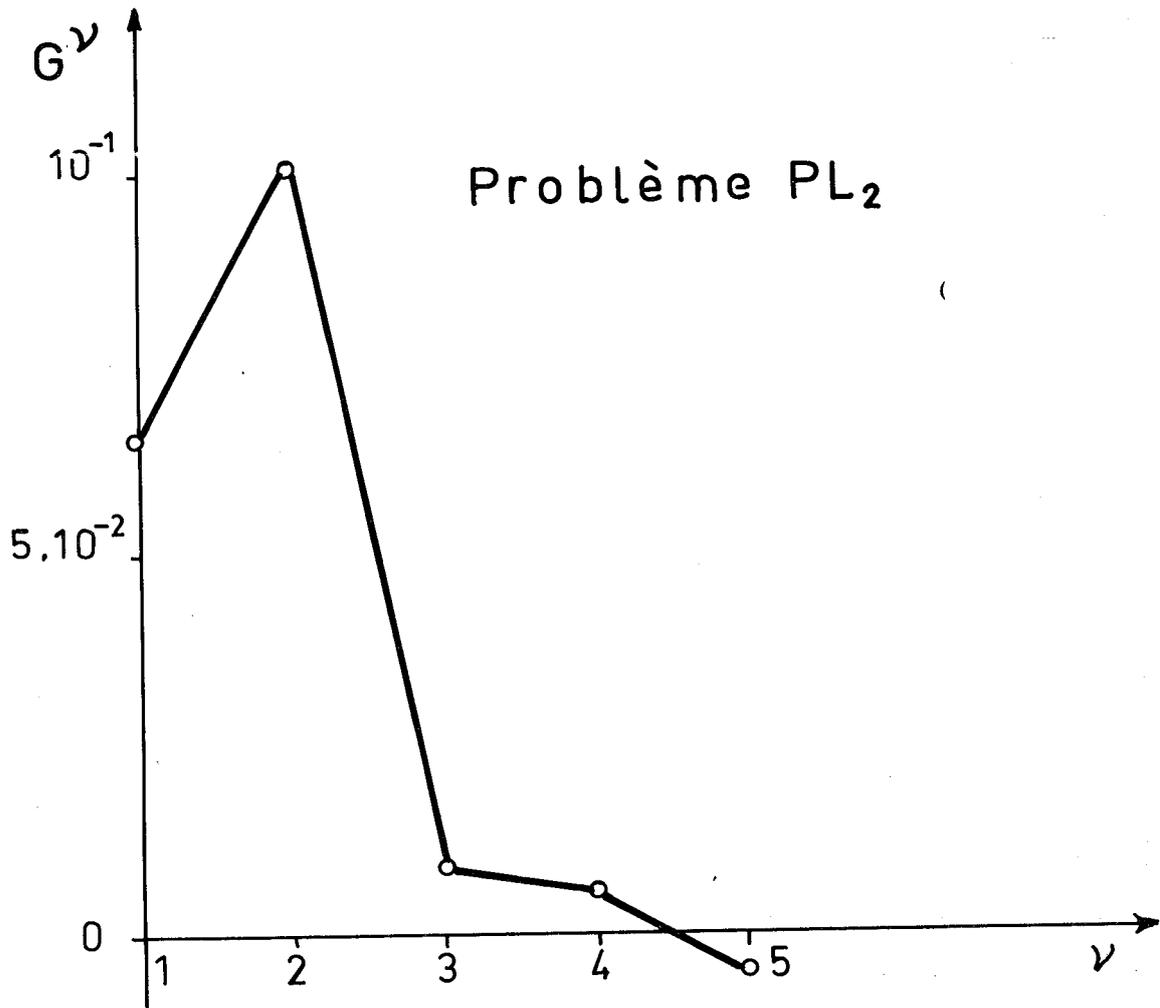
On choisit $\text{EPS} = 10^{-4}$.

A la cinquième itération, G^5 prend la valeur $-5.50747 \cdot 10^{-5}$ et on trouve donc comme coefficients du meilleur approximant :

$x_1 = -0.0005184$
$x_2 = 0.9800550$
$x_3 = 0.0025255$
$x_4 = -0.1315810$
$x_5 = -0.0012803$

Le temps de calcul a été de 3s.2.





PROGRAMME RESOLVANT LE PROBLEME PL_2 PAR LA METHODE D'ECLATEMENT DES CONTRAINTES

```
'BEGIN'  
'INTEGER' I,J,K,N,COMPTE;  
'REAL' A,B,C,D,TO,MAX,DNU,DNU1,LAMBDA,MU,K1,NORME,ECART,ST,EPS  
PAS ;  
  
ININTEGER(O,N);  
INREAL(O,A);INREAL(O,B);INREAL(O,C);INREAL(O,D);INREAL(O,EPS);  
  
'BEGIN' 'ARRAY' XO,X1,X2,XP,Y,Z,D1(/1:N/),W,C1(/1:N,1:N/),  
Y1,TD,MAXD(/1:20/);  
  
INARRAY(O,W);INARRAY(O,D1);  
  
'BEGIN' 'REAL' 'PROCEDURE' PHI(T,I); 'REAL' T; 'INTEGER' I;  
B-----  
  
    'REAL' 'PROCEDURE' PHIO(T); 'REAL' T ;  
    -----  
  
    'REAL' 'PROCEDURE' DIST(T); 'REAL' T;  
    'BEGIN' 'INTEGER' I ; 'REAL' S ;  
    S:=0.0 ;  
    'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'  
    S:=S+XO(/I/)*PHI(T,I) ;  
    DIST:=S-PHIO(T) ;  
    'END' DIST ;  
  
    'PROCEDURE' GRESOLSYSLINE(C1,D1,X,N,IMPOSSIBLE);  
    'ARRAY' C1,D1,X; 'INTEGER' N; 'LABEL' IMPOSSIBLE;  
    -----  
  
    'PROCEDURE' ALGMAX(E,C,D,TO,MAX);  
    'REAL' 'PROCEDURE' E; 'REAL' C,D,TO,MAX;  
    -----  
  
    'PROCEDURE' PROJECTION(XP,XO,X2,Y,Z,LAMBDA,MU,TO,W);  
    'ARRAY' XP,XO,X2,Y,Z,W; 'REAL' LAMBDA,MU,TO;  
    'BEGIN' 'INTEGER' I,J; 'REAL' S1,S2,S3,S4,S;  
    S1:=0.0;S2:=0.0;S3:=0.0;S4:=0.0;  
    'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'  
    'BEGIN'  
    S1:=S1+(XO(/I/)-XP(/I/))*Y(/I/);  
    S2:=S2+Y(/I/)*Z(/I/);  
    S:=0.0 ;  
    'FOR' J:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'  
    S:=S+W(/I,J/)*(XO(/J/)-XP(/J/));  
    S3:=S3+(XO(/I/)-XP(/I/))*S ;  
    S4:=S4+XP(/I/)*Y(/I/);  
    'END' ;  
    S4:=PHIO(TO)-S4 ;  
    LAMBDA:=(S3*S1-S3*S4)/(S1*S1-S3*S2) ;  
    MU:=(S1*S4-S3*S2)/(S1*S1-S3*S2) ;  
    'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'  
    X2(/I/):=XP(/I/)+LAMBDA*Z(/I/)+MU*(XO(/I/)-XP(/I/));  
    'END' PROJECTION ;
```

```
'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'  
'FOR' J:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'  
    C1(/I,J/):=W(/I,J/)+W(/J,I/);  
GRESOLSYSLINE(C1,D1,XP,N,IMPOSSIBLE);  
SYSACT(1,12,1);SYSACT(1,2,2);  
'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'  
OUTREAL(1,XP(/I/));  
SYSACT(1,14,1);SYSACT(1,2,2);  
  
'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'  
X0(/I/):=XP(/I/);  
  
COMPTE:=1;  
BOUCLE: SYSACT(1,12,1);  
    OUTSTRING(1,('LE NUMERO DE L'ITERATION EST'));  
    OUTINTEGER(1,COMPTE);  
    SYSACT(1,14,1);SYSACT(1,2,2);  
PAS:=(D-C)/20;  
'FOR' K:=1 'STEP' 1 'UNTIL' 20 'DO'  
    Y1(/K/):=C+K*PAS;  
ALGMAX(DIST,C,Y1(/I/),TD(/I/),MAX(/I/));  
MAX:=MAXD(/I/);  
TO:=TD(/I/);  
'FOR' K:=1 'STEP' 1 'UNTIL' 19 'DO'  
'BEGIN'  
ALGMAX(DIST,Y1(/K/),Y1(/K+1/),TD(/K+1/),MAXD(/K+1/));  
'IF' MAXD(/K+1/) > MAX 'THEN'  
'BEGIN' MAX:=MAXD(/K+1/); TO:=TD(/K+1/); 'END'  
'ELSE' 'BEGIN' MAX:=MAX; TO:=TO;  
'END';  
  
'IF' MAX < 0.0 'THEN' 'GOTO' FIN2;  
  
'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'  
Y(/I/):=PHI(TO,I);  
GRESOLSYSLINE(W,Y,Z,N,IMPOSSIBLE);  
NORME:=0.0; K1:=0.0;  
'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'  
'BEGIN' NORME:=NORME+Y(/I/)*Z(/I/);  
    K1:=K1+XP(/I/)*Y(/I/);  
'END';  
K1:=(PHI0(TO)-K1)/NORME;  
'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'  
X1(/I/):=XP(/I/)+K1*Z(/I/);  
'GOTO' SUITE
```

```
SUITE: DNU:=0.0 ;
'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'
'BEGIN' DNU1:=0.0 ;
'FOR' J:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'
DNU1:=DNU1+W(/I,J/)*(X1(/J/)-X0(/J/)) ;
DNU:=DNU+(X0(/I/)-XP(/I/))*DNU1 ;
'END' ;

'IF' DNU >=0.0 'THEN'
'BEGIN' SYSACT(1,12,1) ;
'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'
'BEGIN' OUTREAL(1,X1(/I/)) ;
      X2(/I/):=X1(/I/)) ;
'END' ;
'GOTO' APRES ;
'END'
'ELSE' 'BEGIN'
PROJECTION(XP,X0,X2,Y,Z,LAMBDA,MU,TO,W) ;
'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'
OUTREAL(1,X2(/I/)) ;
SYSACT(1,14,1) ; SYSACT(1,2,2) ;
'GOTO' APRES ;
'END' ;

APRES: ECART:=0.0 ;
'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'
'BEGIN' ST:=0.0 ;
'FOR' J:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'
ST:=ST+W(/I,J/)*(X2(/J/)-X0(/J/)) ;
ECART:=ECART+(X2(/I/)-X0(/I/))*ST ;
'END' ;
ECART:=SQRT(ECART) ;

'IF' ECART <= EPS'THEN' 'GOTO' FIN2
'ELSE' 'BEGIN'
'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'
X0(/I/):=X2(/I/)) ;
COMPTE:=COMPTE+1 ;
'GOTO' BOUCLE ;
'END' ;

IMPOSSIBLE: OUTSTRING(1,(' SYSTEME LINEAIRE NON RESOLVABLE')) ;
'GOTO' TERMINE ;

FIN2:
OUTSTRING(1,(' LES COEFFICIENTS DE LA MEILLEURE APPROXIMATION SONT')) ;
OUTARRAY(1,X0) ;

TERMINE: 'END' ; 'END' ; 'END' ;
```


CHAPITRE IV

METHODE DE SOUS GRADIENTS

CHAPITRE IV

METHODE DE SOUS GRADIENTS

Soit $C_0[a,b]$, l'ensemble des fonctions continues sur un intervalle $[a,b]$ de \mathbb{R} , muni de la norme

$$f \in C_0[a,b] \rightarrow \|f\| = \max_{t \in [a,b]} |f(t)|$$

D'après ce qui a été établi dans le chapitre (I), la résolution du problème PC_0 consiste à minimiser sur $Q \cap D$ la fonction F définie par :

$$F(x) = \left\| f - \sum_{i=1}^N x_i v_i \right\| = \max_{t \in [a,b]} \left| f(t) - \sum_{i=1}^N x_i v_i(t) \right|$$

où Q désigne un sous ensemble convexe, borné, fermé de \mathbb{R}^N et D le sous ensemble convexe fermé suivant dans \mathbb{R}^N :

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R}^N \mid \sum_{i=1}^N x_i \varphi_i(t) \leq \varphi(t), \forall t \in T \right\} ;$$

les φ_i $i=1,2,\dots,N$ et φ sont des fonctions numériques continues définies sur un compact T qui est soit un intervalle $[c,d]$ de \mathbb{R} , soit une union finie d'intervalles.

Or cette fonction F n'est pas différentiable et les méthodes de gradients ne sont pas valables. Par ailleurs, cette fonction n'est pas strictement convexe et les méthodes duales (chapitre II) ne peuvent également pas s'appliquer à ce problème.

Néanmoins la fonction F étant convexe et continue la propriété de sous différentiabilité permet de résoudre le problème ci-dessus par une méthode de sous gradient.

Soit donc $X = \mathbb{R}^N$, Q un sous ensemble convexe, borné fermé de \mathbb{R}^N , D un sous ensemble convexe fermé.

Notons C le sous ensemble $Q \cap D$.

Soit F une fonction convexe, continue de Q dans \mathbb{R} .
Le problème est le suivant : trouver un point x^* appartenant à D
tel que :

$$\alpha = F(x^*) = \min_{x \in C} F(x)$$

Rappelons tout d'abord quelques définitions.

DEFINITION 1

On appelle sous différentiel de F au point x_0 le sous ensemble de \mathbb{R}^N (éventuellement vide) note $\partial F(x_0)$ et défini par :

$$\partial F(x_0) = \{c_0 \in \mathbb{R}^N \mid F(x) - F(x_0) \geq \langle c_0, x - x_0 \rangle, \forall x \in \mathbb{R}^N\} .$$

Les éléments de $\partial F(x_0)$ sont appelés sous gradients de F au point x_0 .

THEOREME 1

Si F est une fonction convexe et continue, $\partial F(x_0)$ est non vide, convexe et compact.

DEFINITION 2

Si la fonction F est fortement convexe sur Q , alors il existe $K > 0$ tel que pour tout x_1 et x_2 appartenant à Q , pour tout c_1 appartenant à $\partial F(x_1)$ et c_2 appartenant à $\partial F(x_2)$ on ait :

$$\langle c_1, c_2 \mid x_1 - x_2 \rangle \geq K \|x_1 - x_2\|^2$$

(.,.) désignant le produit scalaire usuel dans \mathbb{R}^N et $\|\cdot\|$ la norme associée.

DEFINITION 3

La multiapplication ∂F est contractante sur Q si quels que soient x et y dans Q et quel que soit c_x dans $\partial F(x)$ et c_y dans $\partial F(y)$ on a :

$$\|c_x - c_y\|^2 \leq \|x - y\|^2 .$$

I - METHODE DE RESOLUTION DANS LE CAS OU F EST FORTEMENT CONVEXE ET OU

$$D = \mathbb{R}^N \quad [1]$$

ρ désignant un scalaire strictement positif, on construit, à partir d'un élément x_0 appartenant à Q , une suite $\{x_n\}$ appartenant à Q de la façon suivante :

$$x_{n+1} = P_Q(x_n - \rho c_{x_n})$$

c_{x_n} désignant un élément quelconque de $\partial F(x_n)$.

F étant fortement convexe, notons x^* l'élément unique qui réalise le minimum de F sur Q :

$$F(x^*) = \min_{x \in Q} (F(x)) .$$

On a le théorème de convergence suivant :

THEOREME 2

Quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe $\rho_0(\varepsilon) > 0$ et $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $\rho \leq \rho_0(\varepsilon)$ et pour tout $n > n_0(\varepsilon)$ on ait :

$$\|x_n - x^*\| \leq \varepsilon .$$

DEMONSTRATION

La fonction F est fortement convexe sur Q . Par conséquent, il existe $K > 0$ tel que :

$$(c_x - c_y | x - y) \geq K \|x - y\|^2, \quad \forall x, y \in Q$$

et $\forall c_x \in \partial F(x)$ et $\forall c_y \in \partial F(y)$.

Par ailleurs au point x^* qui réalise le minimum de F sur Q , il existe $c_{x^*} \in \partial F(x^*)$ tel que :

$$(c_{x^*} | x - x^*) \geq 0, \quad \forall x \in Q .$$

Posons $u_n = x_n - x^*$

D'après la définition de la suite $\{x_n\}$, on a :

$$u_{n+1} = P_Q(x_n - \rho c_{x_n}) - x^*$$

D'après les propriétés de projection, on peut écrire :

$$\|u_{n+1}\|^2 \leq \|u_n\|^2 + \rho^2 \|c_{x_n} - c_{x^*}\|^2 - 2\rho(c_{x_n} - c_{x^*} | x_n - x^*)$$

soit encore :

$$\|u_{n+1}\|^2 \leq \|u_n\|^2(1-2\rho K) + \rho^2 \|c_{x_n} - c_{x^*}\|^2 \quad (IV,1)$$

Si on suppose que ∂F est uniformément borné sur Q , il existe une constante C telle que :

$$\|c_{x_n} - c_{x^*}\| < C, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

On en déduit alors que :

$$\|u_{n+1}\|^2 \leq \|u_0\|^2(1-2\rho K)^{n+1} + \frac{\rho^2 C^2}{2K}$$

En supposant donc que $2\rho K < 1$ et en prenant $\rho_0 = \text{Min}(\frac{1}{2K}, \frac{K\varepsilon^2}{C^2})$, il existera n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$ on ait :

$$\|x_{n+1} - x^*\| \leq \varepsilon.$$

En fait, il est intéressant du point de vue pratique de déterminer la valeur de ρ pour laquelle le nombre d'itérations nécessaires pour obtenir la convergence de l'algorithme soit minimum.

Il est difficile sans autres hypothèses que celles envisagées de résoudre ce problème.

Supposons donc qu'il existe une constante $K' > 0$ telle que pour tout x appartenant à $\partial F(x)$ et c_y appartenant à $\partial F(y)$ on ait :

$$\|c_y - c_x\|^2 \leq K' \|x - y\|^2.$$

On a évidemment $K < K'$.

Dans ces conditions l'expression (IV,1) s'écrit alors :

$$\|u_{n+1}\|^2 \leq \|u_n\|^2 (1 - 2\rho K + K'\rho^2)$$

d'où on déduit que :

$$\|u_{n+1}\|^2 \leq \|u_0\|^2 (1 - 2\rho K + K'\rho^2)^{n+1} .$$

x_0 étant fixé, on choisit la valeur ρ_0 qui minimise la fonction :

$$h(\rho) = 1 - 2\rho K + K'\rho^2$$

Soit $\rho_0 = \frac{K}{K'}$ ($\rho_0 < 1$) .

Dans ce cas, on a :

$$\|u_{n+1}\|^2 \leq \|u_0\|^2 \left(1 - \frac{K^2}{K'}\right)^{n+1}$$

et à condition que $\frac{K^2}{K'} < 1$, il existe $n_0(\varepsilon)$ tel que pour tout

$n \geq n_0(\varepsilon)$ on ait : $\|u_{n+1}\|^2 \leq \varepsilon^2$.

Il faut noter que ρ_0 est ici indépendant de la valeur ε que l'on s'est fixé et le nombre d'itérations nécessaires pour atteindre une certaine précision ne dépend que de la valeur initiale x_0 .

II - METHODE DE RESOLUTION DANS LE CAS OU F EST SEULEMENT CONVEXE ET OU $D = \mathbb{R}^N$.

Soit β un scalaire strictement positif.

Considérons la fonction :

$$G_\beta(x) = F(x) + \beta \|x\|^2$$

La fonction G est fortement convexe par rapport à x et par conséquent il n'existe qu'un seul élément x_β réalisant, β étant fixé, le minimum de G_β sur Q . Par ailleurs si c_x désigne un élément quelconque du sous différentiel $\partial F(x)$, tout élément du sous différentiel $\partial G(x)$ est

de la forme $c_x + 2\beta x$.

Dans ce cas le coefficient de coercitivité K (def 2) est égal à 2β .

La méthode, que nous allons maintenant exposer, pour résoudre le problème dans le cas où F est simplement convexe, n'est autre que la méthode (I) appliquée à la fonction G_β .

METHODE

On construit, à partir d'un point $x_0 \in Q$, une suite $\{x_n\}$ appartenant à Q définie par la relation :

$$x_{n+1} = P_Q(x_n - \rho(2\beta x_n + c_{x_n}))$$

c_{x_n} étant un élément quelconque du sous différentiel $\partial F(x_n)$.

Notons :

$$S_F = \{\bar{x} \in Q \mid \alpha = F(\bar{x}) = \min_{x \in Q} F(x)\}$$

et x^* l'élément de S_F tel que :

$$\|x^*\| = \min_{\bar{x} \in S_F} \|\bar{x}\|.$$

THEOREME 3

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\beta_0 > 0$, $\rho_0 > 0$, $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que pour tout β appartenant à $]0, \beta_0]$, pour tout ρ appartenant à $]0, \rho_0]$ et pour tout $n \geq n_0$, on ait :

$$\|x_n - x^*\| \leq \varepsilon.$$

DEMONSTRATION :

β étant fixé et x_β réalisant le minimum de G_β sur Q , d'après le théorème 2, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\rho_0(\varepsilon) > 0$ et $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $\rho \leq \rho_0$ et tout $n \geq N$ on ait :

$$\|x_n - x_\beta\| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pour achever la démonstration du théorème (3), il suffit alors de montrer que :

pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\beta_0(\epsilon)$ tel que, pour tout β vérifiant $0 < \beta \leq \beta_0(\epsilon)$ on ait :

$$\|x_\beta - x^*\| \leq \frac{\epsilon}{2} .$$

La suite $\{x_\beta\}$ ($\lim_{\beta \rightarrow 0} \beta = 0$) appartient à l'ensemble compact Q .

Soit \tilde{x} une valeur d'adhérence de cette suite.

La continuité de la fonction F entraîne que, pour tout $\bar{x} \in S_{F'}$, on a :

$$F(\tilde{x}) \leq \lim_{\beta \rightarrow 0} F(x) \leq \lim_{\beta \rightarrow 0} (F(x_\beta) + \beta \|x_\beta\|^2) \leq \lim_{\beta \rightarrow 0} (F(\bar{x}) + \beta \|\bar{x}\|^2)$$

On déduit de cette suite d'inégalités que \tilde{x} appartient à S_F .

D'autre part la semi-continuité inférieure de l'application $x \rightarrow \|x\|^2$ entraîne que, pour tout $\bar{x} \in S_F$, on a :

$$\|\tilde{x}\|^2 \leq \lim_{\beta \rightarrow 0} \|x_\beta\|^2 \leq \overline{\lim}_{\beta \rightarrow 0} \|x_\beta\|^2 \leq \|\bar{x}\|^2$$

Par suite $\tilde{x} = x^*$ et $\lim_{\beta \rightarrow 0} \|x_\beta\|^2 = \|x^*\|^2$; ce qui entraîne que :

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \|x_\beta - x^*\|^2 = 0 .$$

III - METHODE DE RESOLUTION DANS LE CAS OU F EST CONVEXE OU STRICTEMENT CONVEXE ET D UN SOUS ENSEMBLE CONVEXE FERME DE \mathbb{R}^N .

L'ensemble D est défini dans l'introduction de ce chapitre.

Soit $\{\lambda_n\}$ une suite de nombres telle que :

$$\lambda_n > 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = +\infty$$

On suppose, en outre que :

a) Pour tout $x \in Q$, il existe un élément noté t_x appartenant à T tel que :

$$\|x - P_{D_{t_x}}(x)\| = \text{Max}_{t \in T} (\|x - P_{D_t}(x)\|)$$

où $D_t = \{x \in \mathbb{R}^N \mid \sum_{i=1}^N x_i \varphi_i(t) \leq \varphi(t)\}$

et où $P_{D_t}(x)$ désigne la projection d'un élément x appartenant à Q sur le demi-espace défini ci-dessus.

b) il existe un point $x^* \in Q \cap D$ tel que :

$$F(x^*) = \text{Min}_{x \in Q \cap D} (F(x))$$

c) L'ensemble $\overset{\circ}{D} \cap Q$ n'est pas vide ($\overset{\circ}{D}$ désigne l'intérieur de D).

METHODE

A partir d'un point x_0 appartenant à Q , on construit de façon récurrente une suite $\{x_n\} \in Q$ et une suite $\{h_n\}$:

1) Soit $\partial F(x_n)$ le sous différentiel de la fonction F au point x_n .
 . Si x_n appartient à D , on choisit comme direction de déplacement la direction opposée à un sous gradient quelconque, élément de $\partial F(x_n)$.

$$\text{soit } d_n = -C_{x_n}$$

. Si x_n n'appartient pas à D , on retourne à D de la façon suivante :
 soit t_n l'élément de T qui maximise la distance de x_n à D_{t_n} ,
 $t \in T$.

On utilise comme direction celle de l'opposé du vecteur orthogonal à l'hyperplan défini par :

$$\{x \in \mathbb{R}^N \mid \sum_{i=1}^N x_i \varphi_i(t_n) = \varphi(t_n)\}$$

$$\text{soit } d_n = -(x_n - P_{D_{t_n}}(x_n))$$

On peut ainsi réaliser un gain appréciable d'itérations pour revenir à D .

2) On détermine alors le déplacement h_n à effectuer à partir de x_n de la façon suivante :

$$\text{si } d_n = 0 \text{ alors } h_n = 0$$

$$\text{sinon } h_n = \lambda_n \frac{d_n}{\|d_n\|}$$

3) x_{n+1} est obtenu à partir de x_n et h_n par la relation

$$x_{n+1} = P_Q(x_n + h_n) .$$

THEOREME 4

Il existe une partie infinie $N_1 \subset \mathbb{N}$ telle que

$$\lim_{\substack{m \in N_1 \\ m \rightarrow +\infty}} d(x_m, D) = 0 ,$$

(d désigne la distance d'un élément $x \in Q$ à l'ensemble D) et

$$\lim_{\substack{m \in N_1 \\ m \rightarrow +\infty}} F(x_m) = F(x^*)$$

DEMONSTRATION : [2]

Soient η un nombre réel tel que $\eta > F(x^*)$,

$$\text{et } S_\eta = \{x \in Q \mid F(x) \leq \eta\} \cap \{x, d(x, D_{t_x}) \leq \eta - F(x^*)\}, \quad t \in T\}$$

Soit x^0 un élément de $\overset{\circ}{D} \cap Q$. Il existe alors $\rho > 0$ tel que : $\|x - x^0\| \leq \rho$ entraîne que $x \in S_\eta$.

Montrons alors qu'il existe un indice n tel que $x_n \in S_\eta$.
Supposons qu'il n'en soit pas ainsi et montrons alors que :

$$\|x_{n+1} - x^0\|^2 \leq \|x_n - x^0\|^2 + \lambda_n^2 - 2\lambda_n \rho$$

Pour tout n , on distingue deux cas, suivant que x_n appartient à D ou non .

1) x_n n'appartient pas à D :

Dans ce cas, pour tout $x \in S_n$ on a :

$$(d_n | x) \geq (d_n | x_n)$$

En particulier puisque le point $x^0 - \rho \frac{d_n}{\|d_n\|}$ appartient à S_n on a :

$$\left(\frac{d_n}{\|d_n\|} | x_n - x^0 \right) \leq -\rho$$

Par ailleurs, d'après les propriétés de projection, on a :

$$\|x_{n+1} - x^0\|^2 \leq \|x_n - x^0\|^2 + \lambda_n^2 \frac{(d_n | d_n)}{\|d_n\|^2} + 2\lambda_n (x_n - x^0) / \frac{d_n}{\|d_n\|}$$

$$\text{d'où} \quad \|x_{n+1} - x^0\|^2 \leq \|x_n - x^0\|^2 - 2\rho\lambda_n + \lambda_n^2 \quad (\text{IV.2})$$

2) si x_n appartient à D , on a de même :

$$(d_n | x_n - x) \leq 0, \text{ pour tout } x \in S_r.$$

Le point $x^0 - \rho \frac{d_n}{\|d_n\|}$ appartenant à S_n , on en déduit que

$$\left(\frac{d_n}{\|d_n\|} | x_n - x^0 \right) \leq -\rho$$

Par suite :

$$\|x_{n+1} - x^0\|^2 \leq \|x_n - x^0\|^2 - 2\rho\lambda_n + \lambda_n^2 \quad (\text{IV.2})$$

D'après les propriétés de la suite $\{\lambda_n\}$, il existe N tel que pour tout $n \geq N$, on ait :

$$\lambda_n < \rho \quad (\text{IV.3})$$

De la relation (IV,2), on déduit alors que :

$$0 \leq \|x_{N+r+1} - x^0\| \leq \|x_N - x^0\|^2 + \sum_{n=N}^{n=N+r} \lambda_n (\lambda_n - 2\rho)$$

soit encore, en tenant compte de (IV,3) ,

$$0 \leq \|x_{N+r+1} - x^0\| \leq \|x_N - x^0\|^2 - \rho \sum_{n=N}^{n=N+r} \lambda_n$$

et comme $\sum_{n=N}^{N+r} \lambda_n = +\infty$, on aboutit à une contradiction.

Il existe donc un indice n tel que $x_n \in S_n$.

Si on fait tendre n vers $F(x^*)$ et en tenant compte de la propriété ci-dessus, on en déduit alors qu'il existe $\mathbb{N}_1 \subset \mathbb{N}$ tel que :

$$F(x^*) = \lim_{\substack{m \in \mathbb{N}_1 \\ m \rightarrow +\infty}} F(x_m) \quad (\text{IV,4})$$

$$\lim_{\substack{n \in \mathbb{N}_1 \\ n \rightarrow +\infty}} d(x_n, D_{t_n}) = 0 \quad (\text{IV,5})$$

Pour achever la démonstration de ce théorème, il suffit alors de montrer que la relation (IV,5) entraîne que :

$$\lim_{\substack{m \in \mathbb{N}_1 \\ m \rightarrow +\infty}} d(x_m, D) = 0 .$$

Comme $\overset{\circ}{D} \cap Q$ n'est pas vide, il existe $\overset{\circ}{x} \in \overset{\circ}{D} \cap Q$ et $\rho > 0$ tels que $\|x - x^0\| \leq \rho$ entraîne que $x \in D$.

Posons : $y_n = d(x_n, D_{t_n})$

$$z_m = \frac{y_m}{y_m + \rho} x^0 + \rho \frac{x_m}{y_m + \rho}, \quad m \in \mathbb{N}_1$$

$$v_{m,t} = x^0 + \rho \frac{x_m - P_{D_t}(x_m)}{y_m}$$

Or pour $t \in T$, on a :

$$\|x_m - P_{D_t}(x_m)\| \leq y_m$$

et donc $v_{m,t}$ appartient à D , quel que soit $t \in T$.

On peut alors exprimer z_m en fonction de $v_{m,t}$:

$$\text{pour tout } t \in T, \quad z_m = \frac{y_m}{y_m + \rho} v_{m,t} + \frac{\rho}{y_m + \rho} P_{D_t}(x_m)$$

Compte tenu que a) $D \subset D_t$ pour tout $t \in T$,

b) $v_{m,t}$ appartient à D ,

c) Pour tout $t \in T$, D_t est convexe,

d) $P_{D_t}(x_m)$ appartient à D , pour tout $t \in T$,

on en déduit que z_m appartient à D .

On a alors :

$$d(x_m, D) \leq d(x_m, z_m) \leq \frac{y_m}{y_m + \rho} \|x_m^0 - x_m\|$$

Il existe donc une constante C telle que :

$$d(x_m, D) \leq C \times d(x_m, D_{t_m})$$

et par suite $\lim_{\substack{m \in \mathbb{N}_1 \\ m \rightarrow +\infty}} d(x_m, D) = 0$.

IV - APPLICATIONS DES ALGORITHMES II ET III AU PROBLEME PC_0

La mise en oeuvre de ces algorithmes est très simple.

D'après ce que nous avons établi dans l'introduction de ce chapitre, la fonction F à minimiser sur $Q \cap D$ est définie par :

$$F(x) = \|f - \sum_{i=1}^N x_i v_i\| = \text{Max}_{t \in [a,b]} |f(t) - \sum_{i=1}^N x_i v_i(t)|.$$

Le sous différentiel de cette fonction au point x_0 est défini par :

$$\partial F(x_0) = \{c_{x_0} \in \mathbb{R}^N \mid F(x) - F(x_0) \geq (c_{x_0} \mid x - x_0)\}$$

Pour déterminer cet ensemble, on utilise le théorème de Valadier [7], qui s'énonce ainsi :

THEOREME 5

Soit (f_α) , $\alpha \in A$ une famille de fonctionnelles $f_\alpha \in \text{Conv}(X)$, où A est un compact quelconque. Posons $f = \sup_{\alpha \in A} f_\alpha$.

Supposons qu'il existe un ouvert U de X tel que l'application :

$$[\alpha, x] \in A \times U \rightarrow f_\alpha(x)$$

soit finie est continue sur $A \times U$. Alors en tout $x_0 \in U$,

- (i) la fonctionnelle f est continue,
- (ii) $\partial f(x_0) = \overline{\text{Co}}(\bigcap_{\alpha \in F(x_0)} f_\alpha(x_0))$.

$$\text{où } F(x_0) = \{\alpha \in A \mid f_\alpha(x_0) = f(x_0)\}$$

($\overline{\text{Co}}(E)$ désigne ici l'enveloppe convexe fermée de E).

Posons alors :

$$T_{x_0} = \{t_0 \in T : F(x_0) = |f(t_0) - \sum_{i=1}^N x_{0i} v_i(t_0)|\}$$

et soit c_{t_0} le vecteur de \mathbb{R}^N défini par :

$$(c_{t_0})_i = \text{signe} (f(t_0) - \sum_{i=1}^N x_{0i} v_i(t_0)) \times v_i(t_0), \quad i=1,2,\dots,N$$

D'après le théorème ci-dessus, nous avons :

$$\partial F(x_0) = \overline{\text{Co}}(\bigcup_{t_0 \in T_{x_0}} c_{t_0})$$

1) NOTICE D'EMPLOI DU PROGRAMME RESOLVANT LE PROBLEME PC_0 DANS LE CAS OU $D = \mathbb{R}^N$.

Comme paramètres d'entrée, ce programme comporte :

- La fonction f à approximer (précisée par la "réel procédure" F) définie sur l'intervalle $[A,B]$, ainsi que les fonctions v_i , $i=1,2,\dots,N$, qui engendrent la variété linéaire V .
- Le rayon r de l'hypersphère $Q = \{x \in \mathbb{R}^N, \|x\| \leq r\}$, précisé par le réel MU .
- La valeur initiale du vecteur x_0 ($x_0 \in Q$).
- Les valeurs de ρ et β (précisés par les réels RO et $BETA$).

A chaque itérations n , x_n étant déterminé, la procédure ABSMAX permet la détermination de la valeur de t_n , qui réalise le maximum de la valeur absolue de la fonction :

$$e(t, x_n) = f(t) - \sum_{i=1}^N (x_n)_i v_i(t)$$

sur l'intervalle $[A,B]$.

Le programme comporte le test d'arrêt suivant :

A chaque itération l'algorithme calcule l'écart $\|x_n - x_{n-1}\|$ et on arrête les calculs lorsque $\|x_n - x_{n-1}\| < EPS$.

2) EXEMPLE NUMERIQUE TRAITÉ PAR L'ALGORITHME 2.

On cherche le meilleur approximant parmi les polynômes de degré 4, de la fonction $\sin(t)$ sur l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$, sans imposer de contrainte au meilleur approximant.

On choisit :

- r suffisamment grand pour que la contrainte, imposée par le compact Q , ne soit pas active.
- $\beta = 5 \cdot 10^{-4}$
- $\rho = 5 \cdot 10^{-3}$
- $EPS = 10^{-4}$

et on trouve, après 30 itérations :

\bar{x}_1	=	0.0000000
\bar{x}_2	=	0.9855296
\bar{x}_3	=	- 0.0000000
\bar{x}_4	=	- 0.1425670
\bar{x}_5	=	0.0000000

On trouve $F(\bar{x})$ égal à 0.0044921.

Le temps de calcul a été de 1mn32s.

3) NOTICE D'EMPLOI DU PROGRAMME RESOLVANT LE PROBLEME PC_0 DANS LE CAS OU D EST UN CONVEXE DE \mathbb{R}^N .

Comme paramètres d'entrée le programme comporte :

- La fonction f à approximer (précisée par la "réel procédure" F) définie sur l'intervalle $[A,B]$, ainsi que les fonctions v_i , $i=1,2,\dots,N$, qui engendrent la variété linéaire V
- Les fonctions φ_i et φ (précisées par les "réel procédure" PHII et PHI) définies sur l'intervalle $[C,D]$.
- La suite λ_n précisée à chaque itération par le réel LAMBDA
- Le rayon r de l'hypersphère Q.

$$\text{Notons } \varepsilon_0(t, x_n) = f(t) - \sum_{i=1}^N (x_i)_n v_i(t)$$

$$\varepsilon_1(t, x_n) = \sum_{i=1}^N (x_i)_n \times \varphi_i(t) - \varphi(t)$$

Ces deux fonctions sont précisées par les "réel procédure" E_0 et E_2 .

A l'itération n , x_n étant déterminé, la procédure ALGMAX permet de déterminer la valeur TD qui réalise le maximum de ε_1 sur l'intervalle $[C,D]$ et la procédure ABSMAX la valeur TO qui réalise le maximum de la valeur absolue de la fonction ε_0 sur l'intervalle $[A,B]$.

$$\text{Soient : } \text{MAXD}_n = \text{Max}_{t \in [c,d]} (\varepsilon_1(t, x_n))$$

$$\text{MAXO}_n = \text{Max}_{t \in [a,b]} (|\varepsilon_0(t, x_n)|)$$

Le programme comporte le test d'arrêt suivant :

Soit p et q les numéros d'itérations successives pour lesquelles MAXD_p et MAXD_q sont négatifs. L'algorithme calcule alors $|\text{MAXO}_p - \text{MAXO}_q|$ et on arrête les calculs lorsque cet écart est inférieur à EPS.

4) EXEMPLE NUMERIQUE TRAITÉ PAR L'ALGORITHME 3

On cherche le meilleur approximant, parmi les polynômes de degré 4, de la fonction $\sin t$ sur l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$.

On impose au meilleur approximant v^* de vérifier :

$$\text{Cost} - v^{*'}(t) \leq 0.02 \quad t \in [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$$

On choisit r suffisamment grand pour que la contrainte, imposée par le compact Q , ne soit pas active

$$- \lambda_n = \frac{1}{(n)^{2/3}}$$

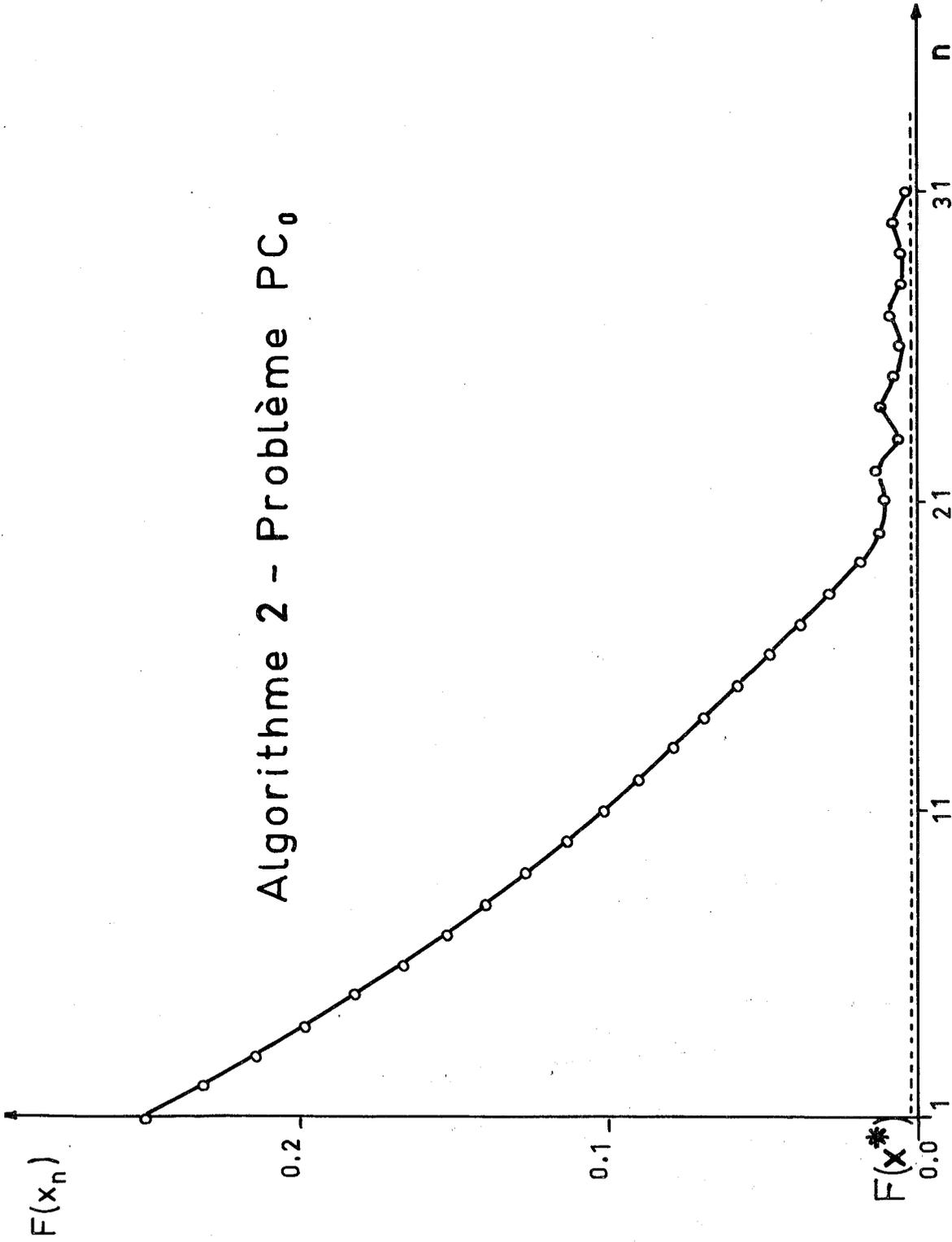
$$- \text{EPS} = 10^{-4}$$

Après 456 itérations, on trouve :

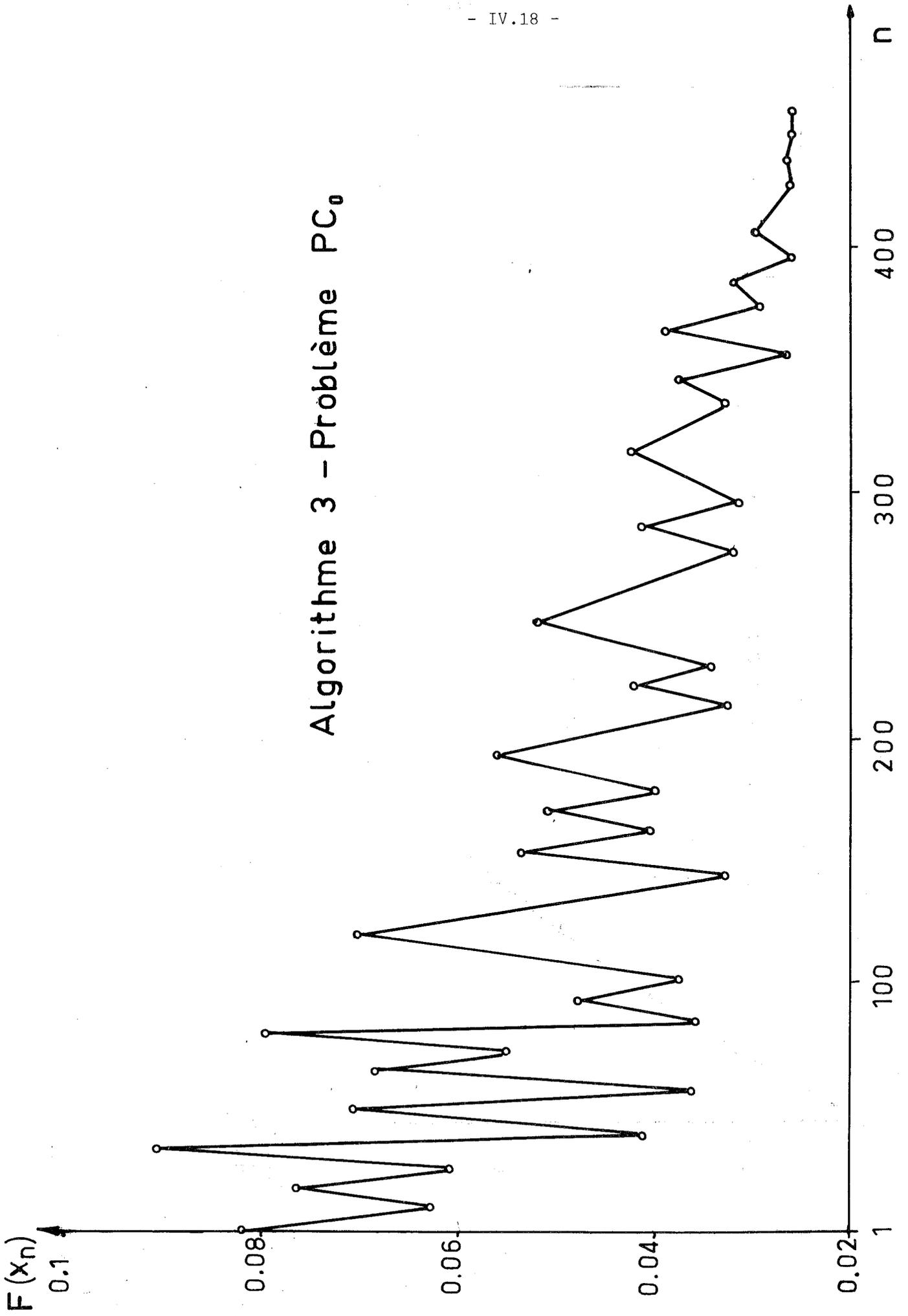
$x_1 =$	0.00250007
$x_2 =$	0.0980769
$x_3 =$	- 0.0034009
$x_4 =$	- 0.133252
$x_5 =$	0.0012326

MAXO prend la valeur $2.54426 \cdot 10^{-2}$ et MAXD la valeur $- 6.53625 \cdot 10^{-4}$.

Algorithme 2 - Problème PC₀



Algorithme 3 - Problème PC_0



PROGRAMME 2 RESOLVANT LE PROBLEME PC_0 DANS LE CAS OU $D = \mathbb{R}^N$

```
'BEGIN' 'INTEGER' I,N,COMPTE,K ;
'REAL' A,B,TO,MAX,BETA,RO,MU,ECART,CARRE,PAS,EPS ;

ININTEGER(O,N) ;
INREAL(O,A);INREAL(O,B);INREAL(O,MU);INREAL(O,EPS);
INREAL(O,BETA);INREAL(O,RO);

'BEGIN' 'ARRAY' XO,X1,XP,CX(/1:N/),Y,TN,MAXN(/1:20/);

  'REAL' 'PROCEDURE' V(T,I); 'REAL' T ; 'INTEGER' I ;
  -----

  'REAL' 'PROCEDURE' F(T) ; 'REAL' T ;
  -----

  'REAL' 'PROCEDURE' E(T) ; 'REAL' T ;
    'BEGIN' 'INTEGER' I ; 'REAL' S ;
    'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'
      S:=S+XO(/I/)*V(T,I) ;
      E:=F(T)-S ;
    'END' E ;

  'PROCEDURE' ABSMAX(E,A,B,TO,MAX) ;
    'REAL' 'PROCEDURE' E ; 'REAL' A,B,TO,MAX ;
  -----
```

```
COMPTE:=1 ;
BOUCLE: SYSACT(1,12,1);SYSACT(1,2,2);
OUTSTRING(1,('LE NUMERO DE L'ITERATION EST'));
OUTINTEGER(1,COMPTE);
SYSACT(1,14,1);SYSACT(1,2,2);

PAS:=(B-A)/20 ;
'FOR' K:=1 'STEP' 1 'UNTIL' 20 'DO'
Y(/K/):=A+K*PAS ;
ABSMAX(E,A,Y(/1/),TN(/1/),MAXN(/1/)) ;
TO:=TN(/1/);
MAX:=MAXN(/1/);
'FOR' K:=1 'STEP' 1 'UNTIL' 19 'DO'
  'BEGIN'
  ABSMAX(E,Y(/K/),Y(/K+1/),TN(/K+1/),MAXN(/K+1/)) ;
  'IF' MAXN(/K+1/) > MAX 'THEN'
  'BEGIN' TO:=TN(/K+1/); MAX:=MAXN(/K+1/); 'END'
  'ELSE' 'BEGIN' TO:=TO; MAX:=MAX; 'END' ;
'END' ;
```

```
SYSACT(1,12,1) ;
OUTSTRING(1,('LA VALEUR DU MAXIMUM DE L'ERREUR EST')) ;
OUTREAL(1,MAX); SYSACT(1,14,1);SYSACT(1,2,2);

'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'
'BEGIN' CX(/I/):=-SIGN(E(TO))*V(TO,I) ;
        X1(/I/):=XO(/I/)*(1-2*BETA*RO)-RO*CX(/I/) ;
'END' ;
CARRE:=0.0 ;
'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'
CARRE:=CARRE+X1(/I/)*X1(/I/) ;
CARRE:=SQRT(CARRE) ;
'IF' CARRE < MU 'THEN' 'BEGIN'
'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'
XP(/I/):=X1(/I/) ;
'END'
'ELSE' 'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'
XP(/I/):=MU*X1(/I/)/CARRE ;
SYSACT(1,12,1);
OUTARRAY(1,XP);
SYSACT(1,14,1);SYSACT(1,2,2);

ECART:=0.0 ;
'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'
ECART:=ECART+(XP(/I/)-XO(/I/))**2 ;
ECART:=SQRT(ECART) ;

'IF' ECART < EPS 'THEN' 'GOTO' FINI
'ELSE' 'BEGIN'
COMPTE:=COMPTE+1 ;
'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'
XO(/I/):=XP(/I/);
'GOTO' BOUCLE ;
'END' ;

FINI :
OUTSTRING(1,('LES COEFFICIENTS DE LA MEILLEURE APPROXIMATION SONT')) ;
SYSACT(1,14,1) ; SYSACT(1,2,2);
OUTARRAY(1,XP) ;

'END' ; 'END' ;
```

PROGRAMME 3 RESOLVANT LE PROBLEME PC_0 DANS LE CAS OU D EST UN CONVEXE DE \mathbb{R}^N

```

'BEGIN'
'INTEGER' I,K,N,COMPTE,CT ;
'REAL' EPS,ETA,TO,TD,MU,LAMBDA,NORME1,NORME,CARRE,ECART,MAXD,
      MAXO,MAXP,MAXQ,A,B,C,D;
'ININTEGER(O,N) ;
INREAL(O,EPS); INREAL(O,ETA); INREAL(O,A); INREAL(O,B);
INREAL(O,C); INREAL(O,D); INREAL(O,MU) ;

'BEGIN' 'ARRAY' X0,X1,X2,XP(/1:N/),Y,TN,MAXN(/1:20/) ;

      'REAL' 'PROCEDURE' V(T,I) ; 'REAL' T ; 'INTEGER' I ;
      -----

      'REAL' 'PROCEDURE' F(T) ; 'REAL' T ;
      -----

      'REAL' 'PROCEDURE' EO(T) ; 'REAL' T ;
          'BEGIN' 'INTEGER' I ; 'REAL' S ;
          S:=0.0 ;
          'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'
          S:=S+X0(/I/)*V(T,I);
          E:=F(T)-S ;
          'END' E ;

      'REAL' 'PROCEDURE' PHII(T,I); 'REAL' T; 'INTEGER' I ;
      -----

      'REAL' 'PROCEDURE' PHI(T) ; 'REAL' T ;
      -----

      'REAL' 'PROCEDURE' E2(T) ; 'REAL' T ;
          'BEGIN' 'INTEGER' I ; 'REAL' S ;
          S:=0.0 ;
          'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'
          S:=S+X0(/I/)*PHII(T,I) ;
          E2:=S-PHI(T) ;
          'END' E ;

'PROCEDURE' ABSMAX(E0,A,B,TO,MAX);
      'REAL' 'PROCEDURE' EO; 'REAL' A,B,TO,MAX ;
      -----

'PROCEDURE' ALGMAX(E2,C,D,TD,MAXD) ;
      'REAL' 'PROCEDURE' E2 ; 'REAL' C,D,TD,MAXD ;
      -----

```

```
COMPTE:=1 ; CT:=1 ;  
'FOR' K:=1 'STEP' 1 'UNTIL' 20 'DO'  
'BEGIN' Y(/K/):=A+K*(B-A)/20 ;  
        Z(/K/):=C+K*(D-C)/20 ;  
'END' ;
```

```
BOUCLE :  
LAMBDA:=1/COMPTE**(2/3) ;  
SYSACT(1,12,1) ; SYSACT(1,2,2) ;  
OUTSTRING(1,(' LE NUMERO DE L'ITERATION EST')) ;  
OUTINTEGER(1,COMPTE) ; SYSACT(1,14,1) ; SYSACT(1,2,2) ;
```

```
ALGMAX(E2,C,Z(/1/),TN(/1/),MAXN(/1/)) ;  
TD:=TN(/1/) ;  
MAXD:=MAXN(/1/) ;  
'FOR' K:=1 'STEP' 1 'UNTIL' 19 'DO'  
'BEGIN' ALGMAX(E2,Z(/K/),Z(/K+1/),TN(/K+1/),MAXN(/K+1/)) ;  
        'IF' MAXN(/K+1/) > MAXD 'THEN'  
            'BEGIN' MAXD:=MAXN(/K+1/) ;  
                    TD:=TN(/K+1/) ;  
            'END'  
        'ELSE' 'BEGIN' MAXD:=MAXD ; TD:=TD ; 'END'  
'END'
```

```
'IF' MAXD < 0.0 'THEN'  
'BEGIN' ABSMAX(E0,A,Y(/1/),TN(/1/),MAXN(/1/)) ;  
        TO:=TN(/1/) ;  
        MAXO:=MAXN(/1/) ;  
        'FOR' K:=1 'STEP' 1 'UNTIL' 19 'DO'  
        'BEGIN' ABSMAX(E0,Y(/K/),Y(/K+1/),TN(/K+1/),MAXN(/K+1/)) ;  
                'IF' MAXN(/K+1/) > MAXO THEN  
                    'BEGIN' MAXO:=MAXN(/K+1/) ; TO:=TN(/K+1/) ; 'END'  
                'ELSE' 'BEGIN' MAXO:=MAXO ; TO:=TO ; 'END' ;  
        'END' ;  
        NORME:=0.0 ;  
        'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'  
        NORME:=NORME+V(TO,I)*V(TO,I) ;  
        NORME:=SQRT(NORME) ;  
        'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'  
            X1(/I/):=SIGN(E0(TO))*V(TO,I)*LAMBDA/NORME ;  
'END'  
'ELSE' 'BEGIN'  
        CARRE:=0.0 ;  
        'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'  
        'BEGIN' X1(/I/):=-E2(TD)*PHI I(TD,I) ;  
                CARRE:=CARRE+X1(/I/)*X1(/I/) ;  
        'END' ;  
        CARRE:=SQRT(CARRE) ;  
        'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'  
            X1(/I/):=X1(/I/)*LAMBDA/CARRE ;  
        'END' ;
```

```
'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'  
X2(/I/):=X0(/I/)+X1(/I/);  
NORME1:=0.0;  
'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'  
NORME1:=NORME1+X2(/I/)*X2(/I/);  
NORME1:=SQRT(NORME1);  
  
'IF' NORME1 <= MU 'THEN' 'BEGIN'  
'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'  
XP(/I/):=X2(/I/); 'END'  
'ELSE' 'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'  
XP(/I/):=MU*X2(/I/)/NORME1;  
SYSACT(1,12,1); OUTARRAY(1,XP); SYSACT(1,14,1); SYSACT(1,2,2);
```

```
'IF' MAXD < 0.0 'THEN'  
'BEGIN' 'IF' CT=1 'THEN'  
  'BEGIN' MAXP:=MAXO;  
    'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'  
      XO(/I/):=XP(/I/);  
      COMPTE:=COMPTE+1;  
      CT:=CT+1;  
      'GOTO' BOUCLE;  
  'END'  
  'ELSE' 'BEGIN' MAXQ:=MAXO;  
    ECART:=ABS(MAXQ-MAXP);  
    'IF' ECART < EPS 'THEN' 'GOTO' FINI  
    'ELSE' 'BEGIN' MAXP:=MAXQ;  
      'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'  
        XO(/I/):=XP(/I/);  
        COMPTE:=COMPTE+1  
        'GOTO' BOUCLE;  
      'END';  
    'END'; 'END'  
  'ELSE' 'BEGIN' 'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'  
    XO(/I/):=XP(/I/);  
    COMPTE:=COMPTE+1;  
    'GOTO' BOUCLE;  
  'END';
```

```
FINI: OUTSTRING(1,(' LES COEFF DE LA MEILLEURE APPROXIMATION SONT'));  
  SYSACT(1,14,1); SYSACT(1,2,2);  
  OUTARRAY(1,XP);
```

```
'END'; 'END';
```


CONCLUSION

Au terme de cette étude, il convient de comparer du point de vue numérique ces différents algorithmes.

Seules les méthodes de sous gradients sont applicables pour le problème de meilleure approximation selon la norme de Tchebycheff, mais la précision des résultats est moins bonne et le temps calcul plus élevé que pour d'autres algorithmes, tel celui de Rémès.

Les méthodes de recherche de la meilleure approximation selon la norme quadratique, ne nous permettent pas de comparer la précision des résultats obtenus, car les tests d'arrêt sont différentes suivant les algorithmes.

Néanmoins, la méthode d'éclatement des contraintes demande beaucoup moins de temps de calcul que les méthodes duales ou que la méthode des pénalités. Elle est également plus facilement programmable que les méthodes duales qui nécessitent un nombre important d'appels de "procédures" et provoquent, au bout de quelques itérations, un "encombrement machine".

BIBLIOGRAPHIE

- [1] ARROW-HURWITCZ :
Studies in linear and non linear programming.
Stanford University Press.
- [2] AUSLENDER A. :
Méthodes numériques pour la résolution des problèmes d'optimisation
avec contraintes.
Thèse. Grenoble 1969.
- [3] CEA J. :
Optimisation. Dunod 1970.
- [4] FALK J.E. :
Lagrange multipliers and non linear programming.
J. Math. Anal. Appl. 19, 141-159.
- [5] LAURENT P.J. et JOLY J.L. :
Stability and duality in convex minimization problems.
Rev. Franç. d'Inf. et de Rech. Opér., R2, (1971), 3-42.
- [6] LAURENT P.J. et B. MARTINET :
Méthodes duales pour le calcul du minimum d'une fonction convexe
sur une intersection de convexes.
Symposium on optimization, Nice (France), june 29-july 5, 1969.
Lecture Notes in Math, Springer Verlag (1970), 159-180.
- [7] VALADIER :
- Quelques propriétés de sous-gradients.
Rapport de l'I.R.I.A., Aut. 6833 ; sept. 68.
- Sous différentiels d'une borne supérieure et d'une somme
continue de fonctions convexes.
C.R. Acad. Sci. Paris 268, 39-42. 1969.

ERRATA

Page I-2	ligne 4, lire	$K = [a,b] \cup [c,d]$
Page II-3	ligne 15, lire	... le dual topologique de $C_p[c,d]$
Page II-4	ligne 17, lire	$\Psi(y,\sigma) = \begin{cases} \text{Sup } (< \dots) \\ x \in Q \\ + \infty \end{cases}$
Page II-5	ligne 19, lire	... h appartient à Conv (U)
Page II-8	ligne 2, lire	... alors $\bar{x} \in X$
Page II-8	ligne 10, lire	... $u \in U \rightarrow \varphi(x_0, u)$
Page II-10	ligne 16, lire	(Q) $\beta = \text{Inf}_{\sigma \in C'_p[c,d]} (\dots)$
Page II-11	ligne 17, lire	$-\beta = \alpha = \dots = \text{Sup}_{\sigma \in C'_p[c,d]} \text{Inf}_{x \in Q} \dots$
Page II-13	théorème 6, lire	... la topologie $\sigma(C'_p, C_p)$
Page II-13	ligne 14, lire	... topologie faible $\sigma(C'_p, C_p)$
Page II-13	ligne 15, lire	soit $\sigma_0 \in C'_p[c,d]$
Page II-16	ligne 3, lire	... topologie $\sigma(C'_p, C_p)$
Page II-16	ligne 13, lire	... topologie $\sigma(C'_p, C_p)$
Page II-17	ligne 23, lire	... topologie $\sigma(C'_p, C_p)$
Page II-18	ligne 2, lire	... topologie $\sigma(C'_p, C_p)$
Page II-18	ligne 13, lire	... topologie $\sigma(C'_p, C_p)$
Page II-29	ligne 11, lire	... on ait $\tilde{\sigma}_{n+1}(t) > 0$
Page III-1	ligne 1, lire	Soit $C_0[a,b] \dots$
Page III-1	ligne 6, lire	appartenant à $C_0[a,b]$

ERRATUM

Page II.14

le paragraphe précédé du premier * est à insérer
page II.15 avant le paragraphe "Ainsi par homothétie...".