



**HAL**  
open science

# Quelques problèmes d'interpolation à plusieurs variables

Patrick Chenin

► **To cite this version:**

Patrick Chenin. Quelques problèmes d'interpolation à plusieurs variables. Modélisation et simulation. Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG; Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1974. Français. NNT: . tel-00284680

**HAL Id: tel-00284680**

**<https://theses.hal.science/tel-00284680>**

Submitted on 3 Jun 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**THESE**

présentée à

**UNIVERSITE SCIENTIFIQUE ET MEDICALE DE GRENOBLE**

**INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE**

par

**pour obtenir le grade de**

**Docteur de troisième cycle**

Spécialité : MATHEMATIQUES APPLIQUEES

**Patrick CHENIN**

***Quelques problèmes d'interpolation  
à plusieurs variables.***

Thèse soutenue le 26 juin 1974 devant la Commission d'Examen :

Président : Monsieur N. GASTINEL  
Examineurs { Monsieur M. ATTEIA  
Monsieur P.J. LAURENT  
Monsieur B. MALGRANGE



Président : Monsieur Michel SOUTIF  
Vice-Président : Monsieur Gabriel CAU

PROFESSEURS TITULAIRES

MM.	ANGLES D'AURIAC Paul	Mécanique des fluides
	ARNAUD Georges	Clinique des maladies infectieuses
	ARNAUD Paul	Chimie
	AUBERT Guy	Physique
	AYANT Yves	Physique approfondie
Mme	BARBIER Marie-Jeanne	Electrochimie
MM.	BARBIER Jean-Claude	Physique expérimentale
	BARBIER Reynold	Géologie appliquée
	BARJON Robert	Physique nucléaire
	BARNOUD Fernand	Biosynthèse de la cellulose
	BARRA Jean-René	Statistiques
	BARRIE Joseph	Clinique chirurgicale
	BENOIT Jean	Radioélectricité
	BERNARD Alain	Mathématiques Pures
	BESSON Jean	Electrochimie
	BEZES Henri	Chirurgie générale
	BLAMBERT Maurice	Mathématiques Pures
	BOLLINET Louis	Informatique (IUT B)
	BONNET Georges	Electrotechnique
	BONNET Jean-Louis	Clinique ophtalmologique
	BONNET-EYMARD Joseph	Pathologie médicale
	BONNIER Etienne	Electrochimie Electrometallurgie
	BOUCHERLE André	Chimie et Toxicologie
	BOUCHEZ Robert	Physique nucléaire
	BOUSSARD Jean-Claude	Mathématiques Appliquées
	BRAVARD Yves	Géographie
	BRISSONNEAU Pierre	Physique du solide
	BUYLE-BODIN Maurice	Electronique
	CABANAC Jean	Pathologie chirurgicale
	CABANEL Jean	Clinique rhumatologique et hydrologie
	CALAS François	Anatomie
	CARRAZ Gilbert	Biologie animale et pharmacodynamie
	CAU Gabriel	Médecine légale et Toxicologie
	CAUQUIS Georges	Chimie organique
	CHABAUTY Claude	Mathématiques Pures
	CHARACHON Robert	Oto-Rhino-Laryngologie
	CHATEAU Robert	Thérapeutique
	CHENE Marcel	Chimie papetière
	COEUR André	Pharmacie chimique
	CONTAMIN Robert	Clinique gynécologique
	COUDERC Pierre	Anatomie Pathologique
	CRAYA Antoine	Mécanique

Mme	DEBELMAS Anne-Marie	Matière médicale
MM.	DEBELMAS Jacques	Géologie générale
	DEGRANGE Charles	Zoologie
	DESRE Pierre	Métallurgie
	DESSAUX Georges	Physiologie animale
	DODU Jacques	Mécanique appliquée
	DOLIQUE Jean-Michel	Physique des plasmas
	DREYFUS Bernard	Thermodynamique
	DUCROS Pierre	Cristallographie
	DUGOIS Pierre	Clinique de Dermatologie et Syphiligraphie
	FAU René	Clinique neuro-psychiatrique
	FELICI Noël	Electrostatique
	GAGNAIRE Didier	Chimie physique
	GALLISSOT François	Mathématiques Pures
	GALVANI Octave	Mathématiques Pures
	GASTINEL Noël	Analyse numérique
	GEINDRE Michel	Electroradiologie
	GERBER Robert	Mathématiques Pures
	GIRAUD Pierre	Géologie
	KLEIN Joseph	Mathématiques Pures
Mme	KOFLER Lucie	Botanique et Physiologie végétale
MM.	KOSZUL Jean-Louis	Mathématiques Pures
	KRAVTCHENKO Julien	Mécanique
	KUNTZMANN Jean	Mathématiques appliquées
	LACAZE Albert	Thermodynamique
	LACHARME Jean	Biologie végétale
	LAJZEROWICZ Joseph	Physique
	LATREILLE René	Chirurgie générale
	LATURAZE Jean	Biochimie pharmaceutique
	LAURENT Pierre-Jean	Mathématiques appliquées
	LEDRU Jean	Clinique médicale B
	LLIBOUTRY Louis	Géophysique
	LOUP Jean	Géographie
Mlle	LUTZ Elisabeth	Mathématiques Pures
MM.	MALGRANGE Bernard	Mathématiques Pures
	MALINAS Yves	Clinique obstétricale
	MARTIN-NOEL Pierre	Seméiologie médicale
	MASSEPORT Jean	Géographie
	MAZARE Yves	Clinique médicale A
	MICHEL Robert	Minéralogie et Pétrographie
	MOURIQUAND Claude	Histologie
	MOUSSA André	Chimie nucléaire
	NEEL Louis	Physique du solide
	OZENDA Paul	Botanique
	PAUTHENET René	Electrotechnique
	PAYAN Jean-Jacques	Mathématiques Pures
	PEBAY-PEYROULA Jean-Claude	Physique
	PERRET René	Servomécanismes
	PILLET Emile	Physique industrielle
	RASSAT André	Chimie systématique
	RENARD Michel	Thermodynamique
	REULOS René	Physique industrielle
	RINALDI Renaud	Physique
	ROGET Jean	Clinique de pédiatrie et de puériculture
	SANTON Lucien	Mécanique
	SEIGNEURIN Raymond	Microbiologie et Hygiène
	SENGEL Philippe	Zoologie
	SILBERT Robert	Mécanique des fluides
	SOUTIF Michel	Physique générale

MM.	TANCHE Maurice	Physiologie
	TRAYNARD Philippe	Chimie générale
	VAILLAND François	Zoologie
	VALENTIN Jacques	Physique nucléaire
	VAUQUOIS Bernard	Calcul électronique
Mme	VERAIN Alice	Pharmacie galénique
M.	VERAIN André	Physique
Mme	VEYRET Germaine	Géographie
MM.	VEYRET Paul	Géographie
	VIGNAIS Pierre	Biochimie médicale
	YOCCOZ Jean	Physique nucléaire théorique

#### PROFESSEURS ASSOCIES

MM.	BULLEMER Bernhard	Physique
	HANO JUN-ICHI	Mathématiques Pures
	STEPHENS Michaël	Mathématiques appliquées

#### PROFESSEURS SANS CHAIRE

MM.	BEAUDOING André	Pédiatrie
Mme	BERTRANDIAS Françoise	Mathématiques Pures
MM.	BERTRANDIAS Jean-Paul	Mathématiques appliquées
	BIAREZ Jean-Pierre	Mécanique
	BONNETAIN Lucien	Chimie minérale
Mme	BONNIER Jane	Chimie générale
MM.	CARLIER Georges	Biologie végétale
	COHEN Joseph	Electrotechnique
	COUMES André	Radioélectricité
	DEPASSEL Roger	Mécanique des fluides
	DEPORTES Charles	Chimie minérale
	GAUTHIER Yves	Sciences biologiques
	GAVEND Michel	Pharmacologie
	GERMAIN Jean-Pierre	Mécanique
	GIDON Paul	Géologie et Minéralogie
	GLENAT René	Chimie organique
	HACQUES Gérard	Calcul numérique
	JANIN Bernard	Géographie
Mme	KAHANE Josette	Physique
MM.	MULLER Jean-Michel	Thérapeutique
	PERRIAUX Jean-Jacques	Géologie et Minéralogie
	POULOUJADOFF Michel	Electrotechnique
	REBECQ Jacques	Biologie (CUS)
	REVOL Michel	Urologie
	REYMOND Jean-Charles	Chirurgie générale
	ROBERT André	Chimie papetière
	DE ROUGEMONT Jacques	Neurochirurgie
	SARRAZIN Roger	Anatomie et chirurgie
	SARROT-REYNAULD Jean	Géologie
	SIBILLE Robert	Construction mécanique
	SIROT Louis	Chirurgie générale
Mme	SOUTIF Jeanne	Physique générale

MAITRES DE CONFERENCES ET MAITRES DE CONFERENCES AGREGES

Mle	AGNIUS-DELORD Claudine	Physique pharmaceutique
	ALARY Josette	Chimie analytique
MM.	AMBLARD Pierre	Dermatologie
	AMBROISE-THOMAS Pierre	Parasitologie
	ARMAND Yves	Chimie
	BEGUIN Claude	Chimie organique
	BELORIZKY Elie	Physique
	BENZAKEN Claude	Mathématiques appliquées
	BILLET Jean	Géographie
	BLIMAN Samuel	Electronique (EIE)
	BLOCH Daniel	Electrotechnique
Mme	BOUCHE Liane	Mathématiques (CUS)
MM.	BOUCHET Yves	Anatomie
	BOUVARD Maurice	Mécanique des fluides
	BRODEAU François	Mathématiques (IUT B)
	BRUGEL Lucien	Energétique
	BUISSON Roger	Physique
	BUTEL Jean	Orthopédie
	CHAMBAZ Edmond	Biochimie médicale
	CHAMPETIER Jean	Anatomie et organogénèse
	CHIAVERINA Jean	Biologie appliquée (EFP)
	CHIBON Pierre	Biologie animale
	COHEN-ADDAD Jean-Pierre	Spectrométrie physique
	COLOMB Maurice	Biochimie médicale
	CONTE René	Physique
	COULOMB Max	Radiologie
	CROUZET Guy	Radiologie
	DURAND Francis	Métallurgie
	DUSSAUD René	Mathématiques (CUS)
Mme	ETERRADOSSI Jacqueline	Physiologie
MM.	FAURE Jacques	Médecine légale
	GENSAC Pierre	Botanique
	GIDON Maurice	Géologie
	GRIFFITHS Michaël	Mathématiques appliquées
	GROULADE Joseph	Biochimie médicale
	HOLLARD Daniel	Hématologie
	HUGONOT Robert	Hygiène et Médecine préventive
	IDELMAN Simon	Physiologie animale
	IVANES Marcel	Electricité
	JALBERT Pierre	Histologie
	JOLY Jean-René	Mathématiques Pures
	JOUBERT Jean-Claude	Physique du solide
	JULLIEN Pierre	Mathématiques Pures
	KAHANE André	Physique générale
	KUHN Gérard	Physique
	LACOUME Jean-Louis	Physique
Mme	LAJZEROWICZ Jeannine	Physique
MM.	LANCIA Roland	Physique atomique
	LE JUNTER Noël	Electronique
	LEROY Philippe	Mathématiques
	LOISEAUX Jean-Marie	Physique nucléaire
	LONGEQUEUE Jean-Pierre	Physique nucléaire
	LUU DUC Cuong	Chimie organique
	MACHE Régis	Physiologie végétale
	MAGNIN Robert	Hygiène et Médecine préventive
	MARECHAL Jean	Mécanique
	MARTIN-BOUYER Michel	Chimie (CUS)

MM.	MAYNARD Roger	Physique du solide
	MICHOULIER Jean	Physique (IUT A)
	MICOUD Max	Maladies infectieuses
	MOREAU René	Hydraulique (INP)
	NEGRE Robert	Mécanique
	PARAMELLE Bernard	Pneumologie
	PECCOUD François	Analyse (IUT B)
	PEFFEN René	Métallurgie
	PELMONT Jean	Physiologie animale
	PERRET Jean	Neurologie
	PERRIN Louis	Pathologie expérimentale
	PFISTER Jean-Claude	Physique du solide
	PHELIP Xavier	Rhumatologie
Mlle	RIERY Yvette	Biologie animale
MM.	RACHAIL Michel	Médecine interne
	RACINET Claude	Gynécologie et obstétrique
	RENAUD Maurice	Chimie
	RICHARD Lucien	Botanique
Mme	RINAUDO Marquerite	Chimie macromoléculaire
MM.	ROMIER Guy	Mathématiques (IUT B)
	SHOM Jean-Claude	Chimie générale
	STIEGLITZ Paul	Anesthésiologie
	STOEBNER Pierre	Anatomie pathologique
	VAN CUTSEM Bernard	Mathématiques appliquées
	VEILLON Gérard	Mathématiques appliquées (INP)
	VIALON Pierre	Géologie
	VOOG Robert	Médecine interne
	VIROUSSOS Constantin	Radiologie
	ZADWORNÝ François	Electronique

MAITRES DE CONFERENCES ASSOCIES

MM.	BOUDOURIS Georges	Radioélectricité
	CHEEKE John	Thermodynamique
	GOLDSCHMIDT Hubert	Mathématiques
	SIDNEY STUARD	Mathématiques Pures
	YACOUD Mahmoud	Médecine légale

CHARGES DE FONCTIONS DE MAITRES DE CONFERENCES

Mme	BERIEL Hélène	Physiologie
Mme	RENAUDET Jacqueline	Microbiologie

Fait le 30 mai 1972.





Ce travail a été préparé à l'Institut de Recherche de Mathématiques Avancées de Grenoble.

Il a été réalisé sous la direction de Monsieur N. GASTINEL, Professeur à l'Université Scientifique et Médicale de Grenoble, mon Maître. Sa constante disponibilité, les orientations qu'il a pu me conseiller, ses encouragements ont permis mon initiation au travail de recherche.

Qu'il veuille bien accepter ici l'expression de ma gratitude et mes plus sincères remerciements.

Monsieur M. ATTEIA, Maître de Conférences à l'Université de Toulouse, a bien voulu s'intéresser à ce travail qui lui doit beaucoup. Je tiens à lui exprimer mes remerciements respectueux et chaleureux.

Je remercie Monsieur P.J. LAURENT, Professeur à l'Université Scientifique et Médicale de Grenoble, qui a bien voulu faire partie du jury.

Monsieur B. MALGRANGE, Professeur à l'Université Scientifique et Médicale de Grenoble, a bien voulu m'encourager au début de mon troisième cycle d'études. Je lui suis reconnaissant de l'intérêt qu'il porte à l'Analyse Numérique en m'honorant de sa présence au sein du jury.

Je veux aussi remercier l'ensemble de mes amis, collègues et aînés du Laboratoire de Mathématiques Appliquées et ceux en particulier de l'Equipe d'Analyse Numérique, pour la sympathie, les encouragements ou conseils qu'ils ont pu me prodiguer.

Mademoiselle TOURNIER a utilisé son temps et sa compétence en calcul formel pour des travaux qui n'apparaissent pas dans ce texte.

Qu'elle en soit ici remerciée.

Ma reconnaissance ira à Mademoiselle PAYERNE et le Service de Reprographie du Laboratoire pour la célérité et la compétence qu'ils ont apporté à la réalisation matérielle de ce travail.



## INTRODUCTION

L'intérêt porté depuis quelques années aux méthodes d'éléments finis a relancé l'étude des problèmes d'interpolation à plusieurs variables. Deux types de questions se posent : la construction de tels procédés d'une part, l'estimation de l'erreur d'autre part. La première question est développée dans la littérature relative aux méthodes d'éléments finis (Zienckiewicz [ 6 ] par exemple). L'étude de l'erreur d'interpolation est habituellement réalisée par des formules de Taylor ou par l'étude de l'espace de polynômes invariant par le procédé (voir Raviart [ 5 ] par exemple) mais ne fournit pas d'expression explicite de l'erreur (sous forme de noyau intégral).

L'un des objets de ce travail est d'obtenir des méthodes assez automatiques pour construire les procédés d'interpolation en essayant d'obtenir, par la construction même, une expression intégrale de l'erreur. Dans le cas du rectangle (ou du cube) des méthodes dues à Gordon ([ 4 ]) sont utilisées pour l'obtention d'éléments finis. Des procédés supposant la fonction à interpoler connue sur les lignes d'un quadrillage sont utilisés et étudiés. Dans le cas du triangle, la théorie due à Gordon n'est plus utilisable directement. On propose quelques nouveaux procédés d'interpolation. Dans certains cas, il est possible de donner une expression de l'erreur.

Monsieur ATTEIA a montré ([ 1 ], [ 2 ], [ 3 ]) l'intérêt de l'utilisation des fonctions-spline pour l'étude de méthodes d'éléments finis. L'utilisation du même type de technique pour obtenir des fonctions-spline avec valeurs données sur des lignes nous amène à considérer un problème de trace. Si l'on sait conclure dans  $\mathbb{R}^2$ , ce n'est pas le cas pour  $\mathbb{R}^3$ .

L'étude nous permet néanmoins d'introduire de nouveaux procédés d'interpolation.



Nous suivons donc le plan suivant :

## PREMIERE PARTIE

CHAPITRE I		pages
	Interpolation à une variable	1
0	Quelques définitions	2
1	Interpolation par une famille de fonctions $C^k([0,1])$ La théorie générale de l'interpolation linéaire est rapidement rappelée. On étudie un cas particulier où le Wronskien s'annule aux extrémités du segment (p. 11).	3
2	Une classe de procédés d'interpolation Il est proposé un procédé d'interpolation de construction très aisée et fournissant un interpolé "régulier".	14
CHAPITRE II		
	Procédés d'interpolation "rectangles"	22
1	Les treillis distributifs de projecteur Les éléments essentiels de la théorie de Gordon sont rappelés.	23
2	Procédés d'interpolation rectangle-généralisés	27
3	Exemples de procédés d'interpolation rectangle sur $[0,1]^2$ Un grand nombre d'éléments finis sont étudiés. On montre la convergence d'un procédé de Coons (p. 38) et on étudie un procédé d'interpolation de construction simple et fournissant un interpolé régulier (p. 41).	31
4	Exemples de procédés d'interpolation rectangle sur $[0,1]^3$ Quelques exemples sont explicités.	46
5	Quelques autres procédés d'interpolation sur $[0,1]^2$ ou $[0,1]^3$ En partie, on construit et donnons l'erreur de l'élément non conforme classique à quatre point.	53

### CHAPITRE III

	Procédés d'interpolation sur des simplexes de $\mathbb{R}^n$	56
1	Systèmes de coordonnées relatifs à un simplexe.	58
2	Procédés d'interpolation sur un triangle. Généralités.	64
	Quatre familles de procédés d'interpolation sont construites par l'utilisation de systèmes de coordonnées particuliers au triangle.	
3	Exemples de procédés d'interpolation sur un triangle On explicite dans quelques cas particuliers les familles précédentes.	86
4	Procédés d'interpolation sur un tétraèdre. La méthode de construction est rapidement expliquée.	98

## DEUXIEME PARTIE

### CHAPITRE IV

	Noyaux et espaces de Hilbert	100
1	Rappels et définitions à propos des noyaux	101
2	Image par une application linéaire continue Le cas de fonction semi-hilbertienne est étudié .	105
3	Fonctions-spline.	108

### CHAPITRE V

1	Exemple de fonctions semi-hilbertienne sur $\mathbb{R}^{[0,1]^2}$ $H^k([0,1]^2)$ est défini et des résultats dûs à Ducateau [ 7 ] sont rappelés.	110
2	Fonction semi-hilbertienne sur le triangle On considère la trace de la fonction semi- hilbertienne du paragraphe précédent sur le triangle.	112
3	Fonction semi-hilbertienne sur le triangle comme trace de fonction semi-hilbertienne sur $\mathbb{R}^{[0,1]^3}$	115

4	Approche pour la caractérisation de $H^k_0(T)$ $H^k_0(T)$ est caractérisé comme espace satisfaisant un problème d'équations aux dérivées partielles dans $\mathbb{R}$ .	120
5	Applications Deux procédés d'interpolation sont étudiés.	130
6	Etude d'un cas particulier $H^1_0([0,1])$ est constrict comme trace de $H^1_0([0,1]^2)$ sur une diagonale du carré.	137

## BIBLIOGRAPHIE

-	de l'introduction	143
-	de la première partie	144
-	de la deuxième partie	146





E R R A T A

-----

Page 25 , ligne 19 : à la place de  $\dot{+}$                     lire :  $\ominus$

Page 28 , ligne 4 : à la place de  $x$                     lire :  $n$   
ligne 18 : à la place de ... sur) lire : ...  $W$ )

Page 31 dans les intégrales doubles, on doit lire :  $((K-1)!)^2$

Page 35 , ligne 7 : à la place de (cf. chapitre I, §0)  
lire : (chapitre I, §1, p.10)

Page 36 , dernière ligne :  
à la place de  $\frac{d^4}{dt^4_3}$                     lire :  $\frac{d^4}{dt^4}$

Page 41 , ligne 10 : à la place de  $[ ] [ ]$                     lire :  $[2] [13]$



PREMIERE PARTIE





## CHAPITRE I

### INTERPOLATION A UNE VARIABLE

Dans ce chapitre, il est rappelé quelques définitions et les éléments de théorie d'interpolation linéaire à une variable.

Un exemple dans lequel le wronskien est nul aux extrémités de l'intervalle est étudié.

D'autre part, un procédé d'interpolation est présenté. Il permet de construire un interpolé plus régulier (dérivable) que les données ne le permettent à priori. Ce type de problème est d'habitude traité par les fonctions-splines. On montre la convergence uniforme du procédé.

0 - QUELQUES DEFINITIONS

Nous ne nous intéressons qu'à des procédés d'interpolation linéaire que l'on définit par :

DEFINITION 1 :

Un procédé d'interpolation sur  $[a,b] \subset \mathbb{R}$  est défini par la donnée de :

- une famille de K fonctionnelles ponctuelles à support dans  $[a,b]$  (masses de Dirac ou leurs dérivées) linéairement indépendantes :

$$\{\lambda_i\}_{i=1}^{i=K} .$$

- une famille de fonctions  $\{\phi_k\}_{k=1}^{k=K}$  définies sur  $[a,b]$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  , telles que :

$$\langle \lambda_i, \phi_k \rangle = \delta_{ik} \quad i, k = 1, 2, \dots, K$$

(où  $\delta_{ik}$  : symbole de Kronecker).

Les fonctions  $\{\phi_k\}$  sont supposées telles que, pour tout i et j,  $\langle \lambda_i, \phi_k \rangle$  sont définis et sont appelées "fonctions de base" du procédé.

DEFINITION 2 :

Soit  $(\lambda_i, \phi_i)_{i=1}^{i=K}$  un procédé d'interpolation sur  $[a,b]$ . L'interpolé d'une fonction u définie sur  $[a,b]$ , à valeurs réelles et suffisamment dérivable est alors :

$$\pi u(x) = \sum_{i=1}^K \langle \lambda_i, u \rangle \phi_i(x)$$

L'erreur d'interpolation est la fonction définie sur  $[a,b]$  :

$$Ru(x) = u(x) - \pi u(x) .$$

REMARQUES 3 :

Soit un procédé d'interpolation  $(\lambda_i, \phi_i)_{i=1}^{i=K}$ .

Soit  $\underline{U}$  l'ensemble des fonctions de  $\mathbb{R}^{[a,b]}$  telles que leur interpolé existe.

Alors :

- .  $\underline{U}$  est un espace vectoriel réel pour les opérations habituelles.
- . Les fonctions  $\{\phi_k\}$  sont des éléments de  $\underline{U}$  et constituent un système libre.
- .  $\pi$  et  $R$  sont des opérateurs linéaires de  $\underline{U}$  dans  $\underline{U}$ .
- .  $\pi$  est un projecteur sur le sous-espace de  $\underline{U}$  engendré par les  $\{\phi_k\}_{k=1}^{k=K}$  c'est-à-dire :  $\pi(\pi u) = \pi u$  pour tout  $u$  de  $\underline{U}$  et  $\pi u = \sum a_i \phi_i$  où  $a_i \in \mathbb{R}$ .
- .  $R$  est un projecteur sur le sous-espace vectoriel de  $\underline{U}$  des fonctions  $v$  de  $\underline{U}$  qui vérifient :  
$$\langle \lambda_i, v \rangle = 0 \quad i=1, \dots, K .$$
- . On a :  $\pi(Ru) = R(\pi u) = 0$  pour tout  $u$  de  $\underline{U}$ .

-----x-----

DEFINITION 4 :

$C^K([a,b])$  est l'espace vectoriel réel des fonctions définies sur  $[a,b]$ , à valeurs réelles  $K$  fois continuellement dérivables.

HYPOTHESES 5 :

Dans la suite de ce chapitre, nous nous placerons sur l'intervalle  $[0,1]$  et pour tous les procédés d'interpolation introduits, on supposera que les fonctionnelles linéaires associées seront des dérivées de masses de Dirac d'ordre au plus  $K-1$ .



I - INTERPOLATION PAR UNE FAMILLE DE FONCTIONS DE  $C^K[0,1]$

Soit donc un procédé d'interpolation  $\{\lambda_i, \phi_i\}_{i=1}^{i=K}$  défini au paragraphe précédent et on suppose :  $\phi_i \in C^K([0,1])$ .

Nous introduisons de façon classique (DAVIS [5], HOUSEHOLDER [10], GORDON [8]) une représentation intégrale de l'erreur. Pour cela, nous construisons un opérateur différentiel  $D$  linéaire tel que  $\{\phi_k\}_{k=1}^K$  constitue une base du "noyau" de  $D$  c'est-à-dire que :

$$(i) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Psi \in C^K([0,1]) \\ \text{pour tout } x \in ]0,1[ \quad D \Psi(x) = 0 \end{array} \right.$$

équivalent à :

$$(ii) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{il existe un vecteur } (a_i) \text{ de } \mathbb{R}^K \text{ tel que} \\ \Psi(x) = \sum_{i=1}^K a_i \phi_i(x) \text{ pour tout } x \text{ de } ]0,1[. \end{array} \right.$$

Soit 
$$\Psi(x) = \sum_{i=1}^K a_i \phi_i(x)$$

alors pour tout  $v$ ,  $0 \leq v \leq K$ .

$$\Psi^{(v)}(x) = \sum_{i=1}^K a_i \phi_i^{(v)}(x)$$

d'où, pour tout  $x$  de  $[0,1]$  :

$$\det \begin{vmatrix} -\Psi(x) & \phi_1(x) & \dots & \phi_K(x) \\ -\Psi^{(1)}(x) & \phi_1^{(1)}(x) & \dots & \phi_K^{(1)}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\Psi^{(K)}(x) & \phi_1^{(K)}(x) & \dots & \phi_K^{(K)}(x) \end{vmatrix} = 0$$

et en développant le déterminant précédent par rapport à la première colonne :

$$W(x) \cdot \Psi^{(K)}(x) + W_{K-1}(x) \Psi^{(K-1)}(x) + \dots + W_0(x) \Psi(x) = 0$$

où :

$$W_i(x) = (-1)^i \det \begin{vmatrix} \phi_1(x) & \dots & \phi_K(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \phi_1^{(i-1)}(x) & \dots & \phi_K^{(i-1)}(x) \\ \phi_1^{(i+1)}(x) & \dots & \phi_K^{(i+1)}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \phi_1^{(K)}(x) & \dots & \phi_K^{(K)}(x) \end{vmatrix} \quad i=0, \dots, K$$

$$W(x) = W_K(x)$$

$W(x)$  est appelé Wronskien des fonctions  $\{\phi_i\}_{i=1}^{i=K}$ .

Il vient le :

LEMME 1 :

Si  $\Psi(x) = \sum_{i=1}^{i=K} a_i \phi_i(x)$  et si  $\bar{D}$  est l'opérateur différentiel :

$$\bar{D} = W(x) \frac{d^K}{dx^K} + W_{K-1}(x) \frac{d^{K-1}}{dx^{K-1}} + \dots + W_0(x) \text{Id.}$$

alors  $\bar{D} \Psi \equiv 0$ .

$\alpha)$  Cas où  $W(x)$  est non nul sur  $[0,1]$ .

Ce cas est celui traditionnellement étudié.

Dans ce cas, l'opérateur différentiel  $D = \frac{1}{W(x)} \bar{D}$  est bien défini pour tout  $x$  de  $[0,1]$ .

D'après le lemme 1, si  $\Psi(x)$  est combinaison linéaire des fonctions  $\phi_i$ , on a :

$$D\Psi(x) = 0 \text{ pour tout } x \text{ de } [0,1].$$

Réciproquement, soit  $\Psi$  une fonction de  $C^K([0,1])$  telle que :

$$D\Psi(x) = 0 \text{ pour tout } x \text{ de } [0,1].$$

$D$  étant un opérateur différentiel d'ordre  $K$  linéaire à coefficients réguliers et coefficient de plus haut degré étant non nul ( $\equiv 1$ ), la dimension du noyau

de  $D$  est  $K$  or, pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq K$ ,  $\phi_i$  est élément de ce noyau donc :

$$\Psi(x) = \sum_{i=1}^K a_i \phi_i(x) \quad \text{pour } x \text{ dans } [0,1].$$

Posons alors :

$$\bar{k}(x,s) = \frac{1}{W(s)} \det \begin{vmatrix} \phi_1(s) & \dots & \phi_K(s) \\ \vdots & & \vdots \\ \phi_1^{(K-2)}(s) & \dots & \phi_K^{(K-2)}(s) \\ \phi_1(x) & \dots & \phi_K(x) \end{vmatrix}$$

En développant par rapport à la dernière ligne :

$$\bar{k}(x,s) = \sum_{i=1}^K k_i(s) \phi_i(x) \quad \text{avec } k_i(s) = \langle \lambda_i, \bar{k}(\cdot, s) \rangle$$

et donc, pour tout  $s$  de  $[0,1]$ :

$$D_x \bar{k}(x,s) = 0$$

$$\left. \frac{\partial^j}{\partial x^j} \bar{k}(x,s) \right|_{x=s} = \begin{cases} 0 & \text{si } j=0, \dots, K-2 \\ 1 & \text{si } j=K-1 \end{cases}$$

PROPOSITION 2 :

Pour tout vecteur  $\{\alpha_i\}_{i=1}^K$  de  $\mathbb{R}^K$  et toute fonction  $\Psi$  de  $C^K([0,1])$ , la fonction :

$$y(x) = \sum_{i=1}^K \alpha_i \phi_i(x) + \int_0^x \bar{k}(x,s) \Psi(s) ds$$

vérifie :

a)  $Dy(x) = \Psi(x)$

b)  $\langle \lambda_i, y \rangle = \alpha_i + \langle \lambda_i, \int_0^x \bar{k}(x,s) \Psi(s) ds \rangle$

DEMONSTRATION :

Le deuxième point est trivial.

D'après le lemme 1,  $D(\sum_{i=1}^K \alpha_i \phi_i(x)) = 0$  pour tout  $x$  de  $[0,1]$ .

d'où :

$$Dy(x) = D[\int_0^x \bar{k}(x,s)\Psi(s)ds].$$

Calculons les dérivées successives de l'intégrale :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int_0^x \bar{k}(x,s)\Psi(s)ds &= \frac{d}{dx} \sum_{i=1}^K \phi_i(x) \cdot \int_0^x k_i(s)\Psi(s)ds = \\ &= \sum_{i=1}^K [\phi_i'(x) \cdot \int_0^x k_i(s)\Psi(s)ds + \phi_i(x)k_i(x)\Psi(x)] = \\ &= \sum_{i=1}^K \phi_i'(x) \cdot \int_0^x k_i(x)\Psi(s)ds \end{aligned}$$

car  $\bar{k}(x,x) = 0$ .

De la même façon, pour  $j$ ,  $0 \leq j \leq K-1$

$$\frac{d^j}{dx^j} [\int_0^x \bar{k}(x,s)\Psi(s)ds] = \sum_{i=1}^K \phi_i^{(j)}(x) \int_0^x k_i(s)\Psi(s)ds$$

et :

$$\frac{d^K}{dx^K} [\int_0^x \bar{k}(x,s)\Psi(s)ds] = \sum_{i=1}^K \phi_i^{(K)}(x) \int_0^x k_i(s)\Psi(s)ds + \Psi(x)$$

car  $\frac{\partial^{K-1}}{\partial x^{K-1}} \bar{k}(x,s)|_{x=s} = 1$

d'où :

$$\begin{aligned} D[\int_0^x \bar{k}(x,s)\Psi(s)ds] &= \int_0^x D_x \bar{k}(x,s)\Psi(s)ds + \Psi(x) \\ &= \Psi(x) \end{aligned}$$

D'où le résultat.

PROPOSITION 3 :

$$Dy(x) = \Psi(x)$$

Le problème  $\langle \lambda_i, y \rangle = 0 \quad i=1, \dots, K$  admet une et une seule solution qui s'exprime par :

$$y(x) = \int_0^x \bar{k}(x,s)\Psi(s)ds - \sum_{i=1}^K \langle \lambda_i, \int_0^x \bar{k}(x,s)\Psi(s)ds \rangle \phi_i(x)$$

La démonstration est immédiate sous les hypothèses de ce paragraphe et en utilisant la proposition 2.

On peut alors donner une expression du reste d'interpolation :

$$Ru(x) = u(x) - \sum_{i=1}^K \lambda_i [u] \phi_i(x)$$

En effet,  $Ru(x)$  est solution du problème :

$$DRu(x) = Du(x)$$

$$\langle \lambda_i, Ru(\cdot) \rangle = 0$$

d'où, conséquence immédiate de ce qui précède, le :

THEOREME 4 :

Etant donné un procédé d'interpolation dont les fonctions de bases sont dans  $C^K([0,1])$  et telles que leur wronskien soit non nul sur  $[0,1]$ , pour toute fonction  $u$  de  $C^K([0,1])$  l'erreur d'interpolation a pour expression :

$$\begin{aligned} Ru(x) &= u(x) - \pi u(x) = \\ &= \int_0^x \bar{k}(x,s)Du(s)ds - \sum_{i=1}^K \langle \lambda_i, \int_0^x \bar{k}(x,s)Du(s)ds \rangle \phi_i(x) \end{aligned}$$

où  $\bar{k}$  et  $D$  sont définis précédemment.

Nous avons précisé dans nos hypothèses (0.5) que les fonctionnelles ponctuelles  $\lambda_i$  étaient des masses de Dirac ou leurs dérivées d'ordre au plus  $K-1$ , (à un coefficient près).

De ceci et de la démonstration de la proposition 2, il vient :

$$\langle \lambda_i, \int_0^x \bar{k}(x,s) Du(s) ds \rangle = \int_0^{x_{[i]}} k_i(s) Du(s) ds$$

où

$$x_{[i]} = \text{supp } [\lambda_i].$$

En posant, avec  $(t)_+ = +1$  si  $t > 0$  ; 0 sinon .

$$k(x,s) = [\bar{k}(x,s)(x-s)_+ - \sum_{i=1}^K k_i(s) \phi_i(x)(x_{[i]}-s)_+]$$

on obtient le :

COROLLAIRE 5 :

$$R u(x) = \int_0^1 k(x,s) Du(s) ds$$

REMARQUE :

$k(x,s)$  est continuellement dérivable jusqu'à l'ordre  $K-2$  (pour  $s$  fixé, dérivée par rapport à  $x$ ) ; la dérivée d'ordre  $K-1$  admettant une discontinuité pour  $x = s$ .

EXEMPLES :

a) Formule de Taylor :

Les fonctionnelles  $\{\lambda_i\}$  sont :  $\lambda_i = \delta_{(0)}^{(i-1)}$   $i=1, \dots, K$  .

Pour  $i=1, \dots, K$  ,  $\phi_i(x) = x^{i-1}$  ;

et on a l'identité, pour  $u$  dans  $C^K([0,1])$

$$u(x) = \sum_{i=1}^K \frac{1}{(i-1)!} u^{(i-1)}(0) x^{i-1} + \int_0^x \frac{(x-t)^{K-1}}{(K-1)!} \frac{d^K}{dx^K} u(s) ds .$$

b) Interpolation de Lagrange :

Les fonctionnelles ponctuelles sont les masses de Dirac aux points  $0 = x_1 < x_2 < \dots < x_k = 1$ .

Les fonctions de base :

$$\phi_i(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^K \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}$$

et on a l'identité, pour  $u$  dans  $C^K([0,1])$  :

$$u(x) = \sum_{i=1}^K u(x_i) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^K \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)} + \int_0^1 k(x,s) \frac{d^K}{dx^K} u(s) ds$$

où, en posant  $\bar{k}(x,s)$  comme dans la théorie générale,

$$k(x,s) = [\bar{k}(x,s)(x-s)_+ - \sum_{i=1}^K k_i(s) \phi_i(x)(x_i-s)_+]$$

c) Interpolation de Hermite à deux points :

Les fonctionnelles ponctuelles sont

$$\lambda_1 = \delta_{(0)} \quad \lambda_2 = \delta_{(0)}^{(1)}$$

$$\lambda_3 = \delta_{(1)} \quad \lambda_4 = \delta_{(1)}^{(1)}$$

et les fonctions de base :

$$\phi_1(x) = x^2(2x-3)+1 \quad \phi_2(x) = x(x-1)^2$$

$$\phi_3(x) = -x^2(2x-3) \quad \phi_4(x) = x^2(x-1)$$

L'opérateur différentiel associé est alors  $D = \frac{d^4}{dx^4}$  et le "noyau" associé :

$$k(x,s) = \frac{(x-s)^3}{6} - \frac{(1-s)^3}{6} \phi_3(x) - \frac{(1-s)^2}{2} \phi_4(x).$$

β) Cas où  $W(x)$  peut être nul en 0 ou 1 :

Tout ce qui a été fait dans le paragraphe précédent peut être justifié dans ce cas à condition que les différentes expressions intervenant sous le signe intégrale admette une limite quand  $s$  tends vers 0 ou 1.

Nous ne savons pas donner des conditions suffisantes sur les fonctions  $\{\phi_i\}$  pour qu'il en soit ainsi. Aussi nous nous contentons de donner un exemple (néanmoins utile dans la pratique car il permet de donner une estimation de l'erreur dans le procédé de Coons à deux dimensions (Cf. chapitre II).

Soit donc le procédé d'interpolation défini par :

•  $\lambda_1 = \delta_{(0)}$      $\lambda_2 = \delta_{(1)}$  : masses de Dirac aux points 0 et 1

•  $\phi_1$  et  $\phi_2$  de fonctions de  $C^2([0,1])$  telles que :

$$\lambda_i[\phi_j] = \delta_{ij} \quad i, j=1,2$$

$$\phi_1(x) + \phi_2(x) = 1 \quad \text{pour tout } x \text{ de } [0;1]$$

$$\phi_1'(0) = \phi_1'(1) = 0$$

$$\phi_1''(0) \text{ et } \phi_1''(1) \text{ nons nuls}$$

$$\phi_1'(x) \neq 0 \quad \text{pour } x \text{ dans } ]0,1[ .$$

Avec ces hypothèses :  $W(x) = -\phi_1'(x)$  qui s'annule en 0 et 1

$$W_1(x) = -\phi_1''(x)$$

$$W_0(x) = 0$$

$$D = \frac{1}{W(x)} \quad \bar{D} = \frac{d^2}{dx^2} - \frac{\phi_1''(x)}{\phi_1'(x)} \frac{d}{dx}$$

est défini pour  $x$  dans  $]0,1[$ .



$$\bar{k}(x,s) = \frac{\phi_1(x) - \phi_1(s)}{\phi_1'(s)} \quad x \in [0,1] \quad s \in ]0,1[$$

$$k(x,s) = \begin{cases} \frac{1}{\phi_1'(s)} \phi_1(x)(\phi_1(s)-1) & s \leq x \\ \frac{1}{\phi_1'(s)} \phi_1(s)(\phi_1(x)-1) & s \geq x \end{cases} \quad \begin{matrix} x \in [0,1] \\ s \in ]0,1[ \end{matrix}$$

Considérons l'expression :

$$Ru(x) = \int_0^1 k(x,s) Du(s) ds .$$

PROPOSITION 6 :

Avec les hypothèses précédentes, pour tout  $u$  de  $C^2([0;1])$ ,  $Ru(x)$  est définie pour tout  $x$  de  $[0,1]$  et on a :

$$u(x) = u(0)\phi_1(x) + u(1)\phi_2(1) + Ru(x) .$$

Preuve : Soit  $x \in ]0,1[$ .

$$Ru(x) = \int_0^x \frac{\phi_1(x)(1-\phi_1(s))}{\phi_1'(s)} \left[ \frac{d^2}{ds^2} - \frac{\phi_1''(s)}{\phi_1'(s)} \frac{d}{ds} \right] u(s) ds$$

$$+ \int_x^1 \frac{\phi_1(s)[1-\phi_1(x)]}{\phi_1'(s)} \left[ \frac{d^2}{ds^2} - \frac{\phi_1''(s)}{\phi_1'(s)} \frac{d}{ds} \right] u(s) ds$$

Il suffit d'étudier le premier terme, le second présentant la même difficulté. Or,  $1-\phi_1(s)$  admet un zéro d'ordre 2 en  $s=0$  et  $\phi_1'(s)$  d'ordre 1, car on a supposé  $\phi_1''(0) \neq 0$ .

Le résultat suit et  $Ru(x)$  a un sens pour tout  $x$  dans  $]0,1[$ .

L'expression de  $u(x)$  est obtenue par intégration par partie. Par la continuité des fonctions  $u$ ,  $\phi_1$  et  $\phi_2$ ,  $Ru$  est défini sur  $[0,1]$ .

Les polynomes de degré minimal vérifiant les conditions imposées sont :

$$\phi_1(x) = x^2(2x-3)+1$$

$$\phi_2(x) = -x^2(2x-3)$$

On a alors, pour  $u$  dans  $C^2([0,1])$  :

$$u(x) = u(0)\phi_1(x) + u(1)\phi_2(x) + \int_0^1 k(x,s)Du(s)ds$$

où :

$$D = \frac{d^2}{ds^2} - \frac{2s-1}{s(s-1)} \frac{d}{ds}$$

$$k(x,s) = \begin{cases} \frac{[1+x^2(2x-3)](3-2s)s}{6(s-1)} & x \geq s \\ \frac{[1+s^2(2s-3)](3-2x)x^2}{6s(s-1)} & x < s \end{cases}$$

## II - UNE CLASSE DE PROCÉDES D'INTERPOLATION

On se place toujours sur l'intervalle  $[0,1]$  de  $\mathbb{R}$  et soient

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 \dots < x_N = 1$$

disposés à intervalles réguliers :

$$x_{i+1} - x_i = \frac{1}{N} \quad i=1, \dots, N.$$

En chaque point  $(x_i)$  on considère les fonctionnelles ponctuelles  $\delta_{x_i}^{(j)}$ ,  $j=0, \dots, L$  avec  $L$  indépendant de  $i$  et de  $N$ .

Pour chaque  $N$  entier, on associe un procédé d'interpolation tel que :

- $\pi_N u$  soit "régulière"
- $\pi_N u$  converge uniformément vers  $u$  quand  $N$
- $\pi_N u(x)$  doit pouvoir être calculé "facilement", pour tout  $x$ .

Nous allons construire un tel procédé.

Soit  $\alpha$  un entier positif. On associe à  $\alpha$  un procédé d'interpolation, défini sur  $[0,1]$  :

- $y_i = \frac{i}{2\alpha} \quad i=0, \dots, 2\alpha.$
- Les fonctionnelles ponctuelles sont  $\delta_{y_i}^{(j)}$ ,  $i=0, \dots, 2\alpha$  ;  $j=0, \dots, L$ .
- Les  $(2\alpha+1)(L+1)$  fonctions de base  $\phi_{m\ell}$  telles que :

$$\langle \delta_{y_i}^{(j)}, \phi_{m\ell} \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } m=i \text{ et } \ell=j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- Leur wronskien est non nul sur  $[0,1]$ .

Alors, pour toute fonction  $v \in C^{(k+1)(2\alpha+1)}([0,1])$ , on a :

$$v(x) = \sum_{m=0}^{2\alpha} \sum_{\ell=0}^L \delta_{y_m}^{(\ell)} \langle v, \phi_{m\ell}(x) \rangle + \int_0^1 k(x,s) Dv(s) ds$$

où  $k$  et  $D$  sont définis comme dans le théorème I.4.

Pour tout  $i$ ,  $\alpha \leq i \leq N-\alpha$ , on considère l'application  $g_i$  (affine) qui applique  $[0,1]$  sur  $[x_{i-\alpha}, x_{i+\alpha}]$ .

On appellera  $g_i^{-1}$  son inverse :

$$g_i^{-1}(x) = \frac{x - x_{i-\alpha}}{x_{i+\alpha} - x_{i-\alpha}}$$

Soit enfin une fonction  $\Psi_1$  définie sur  $[0,1]$  telle que :

$$\Psi_1(0) = 1 \qquad \Psi_1(1) = 0$$

et pour un  $m$ , entier fixé,  $m \geq k$ .

$$\Psi_1^{(i)}(0) = \Psi_1^{(i)}(1) = 0 \quad \text{pour } 1 \leq i \leq m.$$

Posons :

$$\Psi_2(x) = 1 - \Psi_1(x)$$

On appelle alors  $\Psi_{1i}$  et  $\Psi_{2i}$ , pour  $0 \leq i < N$

$$\Psi_{1i}(x) = \Psi_1\left(\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\right)$$

$$x \in [x_i, x_{i+1}]$$

$$\Psi_{2i}(x) = \Psi_2\left(\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\right)$$

DESCRIPTION DU PROCÉDÉ :

Soit  $u \in C^{(k+1)(2\alpha+1)}([0,1])$

Sur un intervalle  $x_i, x_{i+1}$ ,  $\pi u$  vaut :

si  $0 \leq i < \alpha$  :

$$\pi_N u(x) = \sum_{k=0}^{2\alpha} \sum_{\ell=0}^L \delta_{x_k}^{(\ell)} [u] \phi_{k\ell}(g^{-1}(x)) \cdot \left(\frac{N}{\alpha}\right)^\ell$$

si  $\alpha \leq i \leq N-\alpha$

$$\begin{aligned} \pi_N u(x) = & \Psi_{1i}(x) \left[ \sum_{k=0}^{2\alpha} \sum_{\ell=0}^L \left(\frac{N}{\alpha}\right)^\ell \delta_{x_{i+k-\alpha}}^{(\ell)} [u] \phi_{k\ell}(g_i^{-1}(x)) \right] \\ & + \Psi_{2i}(x) \left[ \sum_{k=0}^{2\alpha} \sum_{\ell=0}^L \left(\frac{N}{\alpha}\right)^\ell \delta_{x_{i+k}}^{(\ell)} [u] \phi_{k\ell}(g_i^{-1}(x)) \right] \end{aligned}$$

si  $N-\alpha < i \leq N-1$

$$\pi_N u(x) = \sum_{k=0}^{2\alpha} \sum_{\ell=0}^L \left(\frac{N}{\alpha}\right)^\ell \delta_{x_{N+k-2\alpha}}^{(\ell)} [u] \phi_{k\ell}(g_{i+1}^{-1}(x))$$

Par les expressions précédentes  $\pi_N u$  est défini de façon unique en tout point  $x$  de  $[0,1]$  et il est immédiat que la construction précédente définit un procédé d'interpolation au sens du paragraphe 0.

PROPOSITION 1 :

Pour tout  $u$  de  $C^{(k+1)(2\alpha+1)}$

$$\delta_{x_i}^{(\ell)} [\pi_N u] = \delta_{x_i}^{(\ell)} [u] \quad \begin{array}{l} i=0, \dots, N \\ \ell=0, \dots, L \end{array}$$

Si  $0 \leq i < \alpha$  ou si  $N-\alpha < i \leq N-1$ , c'est immédiat.

Si  $\alpha \leq i \leq N-\alpha$ , on doit montrer qu'il y a bien accord sur deux intervalles consécutifs au point  $x_i$ .

Considérons  $x_i$  et évaluons les différentes dérivées de  $\pi u(x)$  quand  $x \in [x_{i-1}, x_i]$  et  $x$  tend vers  $x_i$ . Rappelons que  $m \geq k$ .

Comme les dérivées et la fonction  $\Psi_{1i-1}(x)$  valent 0 au point  $x_i$  et qu'en ce point,  $\Psi_{2i-1}(x)$  vaut 1 et ses dérivées sont nulles on a :

$$\frac{d^\ell}{dx^\ell} (\pi u(x_i^-)) = \frac{d^\ell}{dx^\ell} u(x_i) \quad 0 \leq \ell \leq L$$

Lorsqu'on considère les dérivées à droite, les rôles de  $\Psi_{1i}$  et  $\Psi_{2i}$  sont inversés et l'on obtient le résultat.

-----x

La démonstration précédente montre même la :

PROPOSITION 2 :

$\pi_N u(x)$  est  $m$ -fois continuellement différentiable sur  $[0,1]$ .

THEOREME 3 :

Etant donné un nombre entier  $\alpha$  et les fonctions  $\Psi_i$  et  $\phi_{i\ell}$  comme précédemment et telles que, de plus, l'opérateur différentiel associé  $D$  soit

de la forme : 
$$D = \frac{d^k}{dx^k} + \dots + a(x) \frac{d}{dx} ,$$

si  $\pi_N$  est le procédé d'interpolation défini plus haut, on a :

$$\text{Max}_{x \in [0,1]} |u(x) - \pi_N u(x)| \leq \frac{2\alpha}{N} C$$

où  $C$  est une constante indépendante de  $N$  et dépendant de la fonction  $u$ , des fonctions  $\phi_{k\ell}$  et de  $\alpha$ .

$\pi_N u$  converge donc uniformément vers  $u$  quand  $N \rightarrow \infty$ .

Il nous faut donc donner des majorations de :

$$\text{Max}_{x \in [0,1]} |u(x) - \pi_N u(x)| = \text{Max}_{i=0, \dots, N-1} \text{Max}_{x \in [x_i, x_{i+1}]} |u(x) - \pi_N u(x)|$$

Considérons  $\alpha \leq i \leq N-\alpha$  ,  $x \in [x_i, x_{i+1}]$

$$\begin{aligned} u(x) - \pi_N u(x) &= \Psi_{1i}(x) \left[ u(x) - \sum_k \sum_\ell \left(\frac{N}{\alpha}\right)^\ell \delta_{x_{i+k-\alpha}}^{(\ell)} [u] \phi_{k\ell}(g_i^{-1}(x)) \right] \\ &+ \Psi_{2i}(x) \left[ u(x) - \sum_k \sum_\ell \left(\frac{N}{\alpha}\right)^\ell \delta_{x_{i+k+1-\alpha}}^{(\ell)} [u] \phi_{k\ell}(g_{i+1}^{-1}(x)) \right] \end{aligned}$$

Il suffit donc d'estimer les quantités entre crochets.

Considérons le premier par exemple, et posons  $v(y) = u(g_i(y))$  :

$$\begin{aligned} u(x) - \sum_k \sum_\ell \left(\frac{N}{\alpha}\right)^\ell \delta_{x_{i+k-\alpha}}^{(\ell)} [u] \phi_{k\ell}(g_i^{-1}(x)) &= \\ &= v(y) - \sum_k \sum_\ell \delta_{y_i}^{(\ell)} [v] \phi_{k\ell}(y) \\ &= \int_0^1 k(y,s) Dv(s) ds \\ &= \int_0^1 k(y,s) D_s^- u(g_i(s)) ds \end{aligned}$$

$$\text{Max}_{x \in [x_i, x_{i+1}]} \left| u(x) - \sum_k \sum_\ell \left(\frac{N}{\alpha}\right)^\ell \delta_{x_{i+k-\alpha}}^{(\ell)} [u] \phi_{k\ell}(g_i^{-1}(x)) \right| \leq$$

$$\leq \text{Max}_{y \in [0,1]} \int_0^1 |k(y,s)| \cdot ds \times \text{Max}_{s \in [0,1]} |D_s^- u(g_i(s))|$$

Or, comme :  $D = \frac{d^k}{dx^k} + \dots + \frac{d}{dx}$  ,

Donc :

$$\max_{s \in [0,1]} |D_s u(g_i(s))| \leq \frac{2\alpha}{N} \times M$$

où  $M$  est une constante dépendante des fonctions  $\phi_{k\ell}$ , et de  $u$  et indépendante de  $N$ .

Il est évident que pour  $i$ ,  $0 \leq i < \alpha$  et  $N-\alpha < i \leq N-1$  on la même majoration. Au total on a donc que

$$|u(x) - \pi_N u(x)| \leq \frac{2\alpha}{N} C$$

où  $C$  ne dépend pas de  $N$ , d'où le résultat.

—————\*

REMARQUE :

• Pour obtenir des majorations d'erreur sur les dérivées, il faudrait étudier les dérivées de

$$\int_0^1 k(x,s) Du(s) ds.$$

Nous ne le ferons pas ici.

- Une propriété essentielle est le résultat de la proposition 2.
- Le procédé proposé pourrait être étudié sur des "grilles" irrégulières de la même façon.

EXEMPLE :

On prend :  $\alpha = 1$ ,  $L = 1$ .

Les  $\phi_{m\ell}$  sont les polynomes de Lagrange basés sur trois points

$$\Psi_1(x) = x^2(2x-3)+1$$

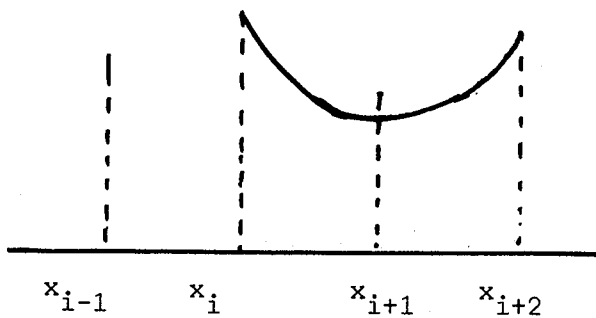
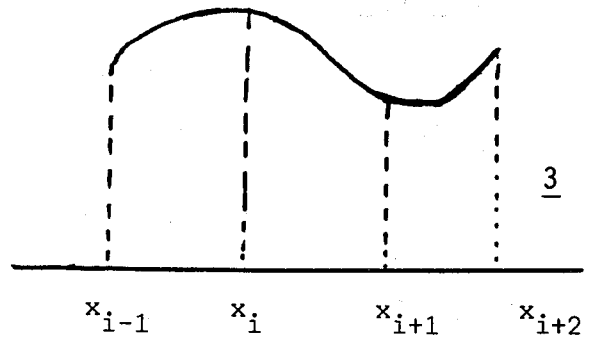
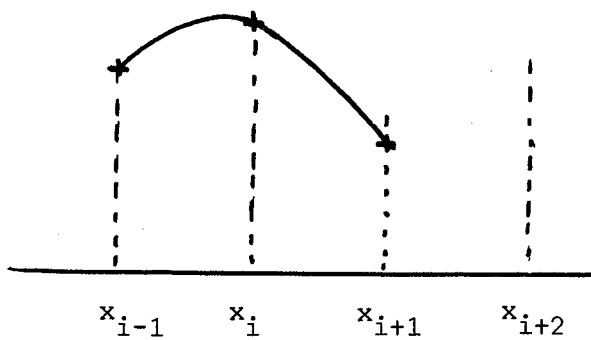


Sur un segment  $[x_i, x_{i+1}]$  ( $i \geq 1$ ) on obtient :

$$\pi_N u(x) = \left[ \left( \frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i} \right)^2 \left( 2 \frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i} - 3 \right) + 1 \right] \left[ \sum_{j=-1}^{+1} u(x_{i+j}) \prod_{\substack{k=-1 \\ k \neq j}}^{+1} \frac{(x-x_{i+k})}{(x_{i+j}-x_{i+k})} \right]$$

$$- \left[ \left( \frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i} \right)^2 \left( 2 \frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i} - 3 \right) \right] \left[ \sum_{j=0}^{+2} u(x_{i+j}) \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{+2} \frac{(x-x_{i+k})}{(x_{i+j}-x_{i+k})} \right]$$

D'après le proposition 2,  $\pi_N u(x)$  est continuellement dérivable sur  $[0;1]$



Les courbes de gauche sont des paraboles . La courbe de droite est un polynome de degré 5.

$\pi_N u(x)$  est donc constituée de morceaux de polynomes de degré 5.

On a :

$$\underline{3} = \Psi_1(x) \times \underline{1} + [1 - \Psi_1(x)] \times \underline{2} .$$

REMARQUE IMPORTANTE :

Supposons que , dans l'exemple précédent, les valeurs de la fonction  $u$  ne soient pas données aux points  $x_i$  mais en des points  $\{y_j\}$ , tels que, sur deux intervalles consécutifs, c'est-à-dire sur  $[x_i, x_{i+2}]$ , on ait trois points  $y_j$ .

Alors sur chaque intervalle  $[x_i, x_{i+2}]$  on peut interpoler la fonction  $u$  par la formule de Lagrange à trois points basée sur les  $y_j$  contenus dans cet intervalle, soit  $u_i$  le résultat. On obtient encore un polynome du second degré.

La fonction interpolante finale est obtenue sur chaque intervalle  $[x_i, x_{i+1}]$  par :

$$\pi_N u(x) = \Psi_1(x) \times u_{i-1}(x) + \Psi_2(x)u_i(x)$$

$\pi_N u$  est encore dérivable sur  $[0;1]$  et comme  $\Psi_1(x) + \Psi_2(x) = 1$

$$\pi_N u(y_i) = u(y_i) .$$

En procédant comme dans la démonstration du théorème 3, on peut obtenir un résultat de convergence.



## CHAPITRE II

### PROCEDES D'INTERPOLATION "RECTANGLES"

Dans ce chapitre, on utilise, après l'avoir rappelée aux paragraphes I et II la théorie de Gordon [ 7 ], pour l'étude de l'interpolation sur  $[0,1]^2$  (paragraphe III) et  $[0,1]^3$  (paragraphe IV).

En particulier, on étudie quelques procédés utilisés dans la méthode des éléments finis. L'intérêt que présente la théorie de Gordon réside dans le fait que la construction d'éléments finis est assez automatique, en particulier dans les cas où on veut éviter les noeuds intérieurs . D'autre part, on montre la convergence d'un procédé de Coons [4] [6] et étudions un procédé du type de celui étudié au chapitre I paragraphe II.

Dans un dernier paragraphe, on étudie trois éléments "non conformes".

## I - LES TREILLIS DISTRIBUTIFS DE PROJECTEUR

Soit  $X$  un ensemble et  $\mathbb{R}^X$  l'ensemble des fonctions définies sur  $X$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . Soit  $E$  un sous-espace vectoriel quelconque de  $\mathbb{R}^X$ .

Rappelons la :

### DEFINITION 1 :

Un projecteur  $P$  sur  $E$  est une application linéaire de  $E$  dans  $E$  idempotente, c'est-à-dire telle que :

$$P \circ P = P$$

Sur l'ensemble des projecteurs sur  $E$  on peut définir deux opérations ; si  $P$  et  $Q$  sont deux projecteurs sur  $E$  :

- le produit : c'est la composition au sens des applications linéaire :  $P \circ Q$  est encore un projecteur
- somme "booléenne" :

$$P \oplus Q = P + Q - P \circ Q$$

est aussi un projecteur (+ et - sont les opérations habituelles pour les applications linéaires).

Il est à noter que, en général, le produit n'est pas commutatif.

On introduit un ordre sur l'ensemble des projecteurs sur  $E$  par la :

### DEFINITION 2 :

$$P \leq Q \Leftrightarrow P \circ Q = P$$

REMARQUES :

- l'ordre ainsi défini n'est pas total
  - nous avons vu (chapitre I, 0) que des procédés d'interpolation linéaires sur un intervalle définissaient des projecteurs.
- Dire que  $\pi_1 \leq \pi_2$ , cela revient à exprimer que  $\pi_2$  est "meilleur" que  $\pi_1$  ; précisons par un exemple.

EXEMPLE :

Posons  $X = [0,1]$  et soient  $N_1$  et  $N_2$  deux nombres entiers tels que  $N_1 \leq N_2$ .

$$0 \leq x_1 < x_2 < \dots, x_{N_2} \leq 1.$$

A ces  $N_2$  points, on associe le procédé d'interpolation de Lagrange qui à,  $u$  de  $\mathbb{R}^{[0,1]}$ , fait correspondre  $\pi_2[u]$ .

Soient  $N_1$  points parmi les  $N_2$  précédents.

A ces  $N_1$  points, on associe de même le procédé d'interpolation de Lagrange et à  $u$  de  $\mathbb{R}^{[0,1]}$ , on fait ainsi correspondre  $\pi_1(u)$ .

Il est alors évident que :

$$\pi_1[\pi_2(u)] = \pi_1(u)$$

soit

$$\pi_1 \circ \pi_2 = \pi_1$$

et donc :

$$\pi_1 \leq \pi_2$$

$\pi_2$ , qui "utilise" plus de points, est "meilleur" que  $\pi_1$ .

On vérifie également sur cet exemple que si  $\pi_1$  et  $\pi_2$  n'utilisent pas des points communs, alors les deux procédés ne sont pas comparables.

DEFINITION 3 :

On dit qu'un ensemble ordonné est un treillis si deux éléments quelconques admettent un plus grand minorant et un plus petit majorant.

Soient  $P_1, P_2, \dots, P_m$ ,  $m$  projecteurs sur  $E$ , qui commutent deux à deux, c'est-à-dire :

$$P_i \circ P_j = P_j \circ P_i \quad i, j = 1, 2, \dots, m$$

On a alors aussi :

$$P_i \oplus P_j = P_j \oplus P_i \quad i, j = 1, 2, \dots, m$$

Notons  $\Phi$  l'ensemble des projecteurs pouvant être construit par combinaisons des  $m$  projecteurs précédents par les opérations  $\circ$  et  $\oplus$ .

Alors (W.J. GORDON [ 7 ]) :

THEOREME 4 :

- $\Phi$  est un treillis.
- si  $T$  et  $U$  sont dans  $\Phi$ , le plus petit majorant de  $T$  et de  $U$  est  $T \oplus U$ , leur plus grand minorant est  $T \circ U$ .
- $\Phi$  est un treillis distributif c'est-à-dire que, si  $T$ ,  $U$  et  $V$  sont dans  $\Phi$ , on a :

$$T \circ (U \oplus V) = (T \circ U) \oplus (T \circ V)$$

$$T \oplus (U \circ V) = (T \oplus U) \circ (T \oplus V)$$

A la suite de ce théorème, on trouve que :

le plus petit majorant de  $P_1, \dots, P_m$  est

$$P_1 \oplus P_2 \oplus \dots \oplus P_m$$

et le plus grand minorant de  $P_1, \dots, P_m$  est

$$P_1 \circ P_2 \circ \dots \circ P_m$$

Soit  $I$ , l'opérateur identité sur  $E$  et  $0$  l'opérateur nul.  
Ce sont des projecteurs. Si  $P$  est un projecteur sur  $E$ , on note

$$\bar{P} = I - P$$

qui est encore un projecteur.

Alors on a :

$$\bar{P} \circ P = P \circ \bar{P} = 0 \quad \text{et} \quad P \oplus \bar{P} = I$$

$$\overline{P \oplus U} = \bar{P} \circ U \quad \text{et} \quad \overline{P \circ U} = \bar{P} \oplus U$$

$$\bar{\bar{P}} = P$$

De ce qui précède, il vient aisément :

$$I = (P_1 \oplus P_2 \oplus \dots \oplus P_m) + (\bar{P}_1 \circ \bar{P}_2 \circ \dots \circ \bar{P}_m)$$

$$I = (P_1 \circ P_2 \circ \dots \circ P_m) + (\bar{P}_1 \oplus \bar{P}_2 \oplus \dots \oplus \bar{P}_m)$$

—————  
X

DEFINITION 5 :

Etant donné  $X$  un ensemble et  $E$  un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^X$ ,  
un procédé d'approximation pour les fonctions de  $E$  est défini par un pro-  
jecteur  $P$  sur  $E$ , si  $u$  est dans  $E$  :

$P(u)$  est approximant de  $u$

$\bar{P}(u)$  est l'erreur.

DEFINITION 6 :

Etant donné  $X$  une partie de  $\mathbb{R}^2$  ( $\mathbb{R}^3$ ) et un procédé d'approxima-  
tion sur un espace de fonctions  $E$  de  $\mathbb{R}^X$ , on dira qu'il s'agit d'un procédé  
d'interpolation si, pour tout  $u$  de  $E$ ,  $P(u)$  n'utilise de  $u$  que ses valeurs, ou  
celles de ses dérivées partielles en des points ou des lignes (resp. points,  
lignes, surfaces).

Le procédé est ponctuel si  $P(u)$  n'utilise de  $u$  que ses valeurs ou  
celles de ses dérivées ponctuelles en des points.



DEFINITION 7 :

$P^k(\mathbb{R}^n)$  ( $P^k$  s'il n'y a pas d'ambiguïté) désignera l'ensemble des polynomes de degré au plus  $k$  en l'ensemble des variables.

II - PROCÉDES D'INTERPOLATION RECTANGLE - GENERALITES

Soit  $n$  un entier, strictement supérieur à 1 et posons :

$$X = [0,1]^n \subset \mathbb{R}^n$$

Soient  $(\lambda_i^j, \phi_i^j)_{i=1}^{i=K_j}$  ( $j=1,2,\dots,n$ )  $n$  procédés d'interpolation sur  $[0,1]$  (Cf. chapitre I, §0).

Soit  $\underline{U}_j$  l'espace des fonctions de  $\mathbb{R}^{[0,1]}$  telles que le  $j^{\text{ième}}$  procédé d'interpolation soit défini et soit  $\pi_j$  le projecteur associé à ce procédé et désignons par  $\underline{V}_j$  l'image de  $\underline{U}_j$  par  $\pi_j$ .

Soit  $\underline{U}$  (resp.  $\underline{V}$ ) le sous-espace de  $\mathbb{R}^X$  tel que, pour tout  $u$  de  $\underline{U}$  on ait : quel que soit  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  de  $X$ , et pour tout  $j$ ,  $1 \leq j \leq n$ , la fonction d'une variable :

$$\lambda \rightarrow u(x_1, \dots, x_{j-1}, \lambda, x_{j+1}, \dots, x_n)$$

soit dans  $\underline{U}_j$  (resp.  $\underline{V}_j$ )

Pour  $j$ ,  $1 \leq j \leq n$ , on définit alors l'application de  $\underline{U}$  dans lui-même :

$$\pi_j = \text{Id}_1 \otimes \text{Id}_2 \otimes \dots \otimes \text{Id}_{j-1} \otimes \pi_j \otimes \text{Id}_{j+1} \otimes \dots \otimes \text{Id}_n$$

qui à  $u$  dans  $\underline{U}$  fait correspondre

$$\pi_j.[u(x_1, x_2, \dots, x_{j-1}, \cdot, x_{j+1}, \dots, x_n)]$$

LEMME 1 :

$\mathbb{1}_j$  est un projecteur sur  $\underline{U}$  pour tout  $j$ ,  $1 \leq j \leq n$ .

LEMME 2 :

$\mathbb{1}_j \circ \mathbb{1}_k = \mathbb{1}_k \circ \mathbb{1}_j$  pour tous  $j, k$ ,  $1 \leq j, k \leq n$ .

Ces lemmes sont immédiats.

Les opérateurs  $\mathbb{1}_j$  sont encore des projecteurs (commutant deux à deux) sur tout espace de fonctions,  $W$ , tel que :

$$\underline{V} \subset W \subset \underline{U}.$$

On est donc dans le cadre de la théorie rappelée au paragraphe I.

On pourra en particulier définir les projecteurs :

$$P_m = \mathbb{1}_1 \circ \mathbb{1}_2 \circ \dots \circ \mathbb{1}_n$$

$$P_M = \mathbb{1}_1 \oplus \mathbb{1}_2 \oplus \dots \oplus \mathbb{1}_n$$

$P_m$  est l'élément minimal du treillis engendré par  $\mathbb{1}_1, \dots, \mathbb{1}_n$

$P_M$  est l'élément maximal.

En particulier, si pour un  $j$ ,  $1 \leq j \leq n$ , on indice  $\mathbb{1}_j$  par un paramètre  $h$  tel que, pour un certain espace  $W$ ,  $\underline{V} \subset W \subset \underline{U}$ ,

$$(\text{Id} - \mathbb{1}_j^h)[u] = \overline{\mathbb{1}_j^h[u]}$$

tend vers zéro (au sens d'une notion de convergence sur  $\underline{U}$ ) alors, on peut vérifier que :

$$\overline{P_M^h[u]}$$

tend vers zéro mais ce n'est pas le cas  $\overline{P_m^h}$

Rappelons (Gordon [ 8 ]) le cas assez général suivant.

Pour tout  $j, 1 \leq j \leq n$ , on suppose que le procédé d'interpolation

$$(\lambda_i^j, \phi_i^j)_{i=1}^{i=k_j}$$

est tel que les fonctions  $\phi_i^j$  sont dans  $C^{K_j}([0,1])$  et ont leur wronskien non nul sur  $[0,1]$ .

On a vu (chapitre I, §1) qu'alors, si  $u \in C^{K_j}([0,1])$  :

$$u(\lambda) = \sum_{i=1}^{i=K_j} \langle \lambda_i^j, u \rangle \phi_i^j(\lambda) + \int_0^1 k_j(\lambda, \mu) D_j u(\mu) d\mu .$$

Notons :

- $\Omega = \{ \alpha \in \mathbb{N}^n, \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), 0 \leq \alpha_i \leq K_i \}$
- $\overset{\circ}{\Omega} = \{ \alpha \in \mathbb{N}^n, \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), 1 \leq \alpha_i \leq K_i \}$
- si  $\alpha \in \mathbb{N}^n$ ,  $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$ ,  $\|\alpha\| :=$  nombre de  $\alpha_i$  nuls.
- pour tout  $\alpha \in \Omega$ ;  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ,  $x \in X$ ,  $x = (x_1, \dots, x_n)$

$$\Lambda_\alpha = \lambda_{\alpha_1}^1 \otimes \lambda_{\alpha_2}^2 \otimes \dots \otimes \lambda_{\alpha_n}^n \quad \text{avec} \quad \lambda_0^j = \text{Id}$$

$$\phi_\alpha(x) = \phi_{\alpha_1}^1(x_1) \dots \phi_{\alpha_n}^n(x_n) \quad \text{avec} \quad \phi_0^j \equiv 1$$

- pour tout  $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \in (\{0,1\})^n$ ;  $x, y \in X$  :

$$\kappa_\beta(x, \bar{y}) = [k_1(x_1, y_1)]^{\beta_1} \times \dots \times [k_n(x_n, y_n)]^{\beta_n}$$

$$D_\beta = D_1^{\beta_1} \otimes D_2^{\beta_2} \otimes \dots \otimes D_n^{\beta_n}$$

$$D_\beta u(\bar{y}) = D_\beta u(z_1, z_2, \dots, z_n) \quad \text{avec} \quad z_i = \begin{cases} x_i & \text{si } \beta_i = 0 \\ y_i & \text{si } \beta_i = 1 \end{cases}$$

- Pour  $K = (K_1, K_2, \dots, K_n)$

$C^K(X)$  désigne l'ensemble des fonctions continues telles que

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} u(x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ existe et est continue pour } \alpha \in \Omega .$$

Alors on a immédiatement les identités suivantes, pour  $u$  dans  $C^K(X)$

$$\begin{aligned} u(x) &= P_m[u](x) + \bar{P}_m[u(x)] \\ &= \sum_{\alpha \in \Omega} \langle \Lambda_{\alpha}, u \rangle \phi_{\alpha}(x) + \sum_{\beta \in \{0,1\}^n} (-1)^{|\beta|+1} \int_{[0,1]^{|\beta|}} \kappa_{\beta}(x, \bar{v}) D_{\beta} u(y, \bar{v}) d\bar{v} \\ &\quad + \sum_{\beta \in \{0,1\}^n} (-1)^{|\beta|+1} \int_{[0,1]^{|\beta|}} \kappa_{\beta}(x, y) D_{\beta} u(\bar{y}) d\bar{y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u(x) &= P_M[u](x) + \bar{P}_M[u](x) \\ &= \sum_{\alpha \in \Omega} (-1)^{n+1-|\alpha|} \langle \Lambda_{\alpha}, u \rangle \phi_{\alpha}(x) + \int_{[0,1]^n} \kappa_{(1,1,\dots,1)}(x,y) D_{(1,1,\dots,1)} u(\bar{y}) dy \end{aligned}$$

- On voit donc que la théorie présentée par Gordon permet de donner l'expression intégrale de l'erreur d'interpolation. Dans les paragraphes suivants, nous traiterons des exemples explicitement.
- On remarquera que l'ordre des opérateurs différentiels apparaissant dans  $\bar{P}_M$  est le produit de l'ordre des opérateurs différentiels de plus bas degré apparaissant dans  $\bar{P}_m$ .

III - EXEMPLES DE PROCÉDES D'INTERPOLATION RECTANGLE SUR  $[0,1]^2$

1) Pour  $j=1,2$ ,  $\{\lambda_i^j, \phi_i^j\}_{i=1}^{k=K} = \{\delta_{(0)}^{(i)}, x^i\}_{i=0}^{i=K-1}$

alors, pour tout  $x = (x_1, x_2)$  de  $[0,1]^2$ ,  $u \in C^{K,K}([0,1]^2)$

$$u(x) = \sum_{k,\ell=0}^{K-1} x_1^k x_2^\ell \frac{\partial^{k+\ell}}{\partial x_1^k \partial x_2^\ell} u(0,0) + \int_0^{x_1} \frac{(x_1-t)^{K-1}}{(K-1)!} \frac{\partial^K}{\partial x_1^K} u(x_1, t) dt$$

$$+ \int_0^{x_2} \frac{(x_2-t)^{K-1}}{(K-1)!} \frac{\partial^K}{\partial x_2^K} u(x_1, t) dt - \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} \frac{(x_1-t)^{K-1} (x_2-s)^{K-1}}{((K-1)!)^2} \frac{\partial^{2K}}{\partial x_1^K \partial x_2^K} u(s, t) ds dt$$

et

$$u(x) = \sum_{k=0}^{K-1} x_1^k \frac{\partial^k}{\partial x_1^k} u(0, x_2) + \sum_{k=0}^{K-1} x_2^k \frac{\partial^k}{\partial x_2^k} u(x_1, 0)$$

$$- \sum_{k,\ell=0}^{K-1} x_1^k x_2^\ell \frac{\partial^{k+\ell}}{\partial x_1^k \partial x_2^\ell} u(0,0) + \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} \frac{(x_1-t)^{K-1} (x_2-s)^{K-1}}{((K-1)!)^2} \frac{\partial^{2K}}{\partial x_1^K \partial x_2^K} u(s, t) ds dt$$

La première identité est une formule de Taylor.

2) INTERPOLATION DE TYPE LAGRANGE

Soient  $0 \leq x_1^1 < x_2^1 < \dots < x_{K_1}^1 \leq 1$   
 $0 \leq x_1^2 < x_2^2 < \dots < x_{K_2}^2 \leq 1$

On considère les procédés d'interpolation sur  $[0,1] : \{\lambda_i^j, \phi_i^j\}_{i=1}^{i=K_j}$

$(j=1,2)$  où  $\lambda_i^j = \delta_{(x_i^j)}$  ( $j=1,2, 1 \leq i \leq K_j$ )

et  $\phi_i^j(x) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{K_j} \frac{(x-x_k^j)}{(x_i^j-x_k^j)}$   $j=1,2$ .

On appellera  $k_1(x,s)$  et  $k_2(x,s)$  les "noyaux" erreurs associés à ces procédés (pour leur expression cf. chapitre I, §1).

On en déduit alors, pour tout  $u \in C^{K_1, K_2}([0,1]^2)$ , les identités (avec  $x = (x^1, x^2)$ ) :

$$\begin{aligned}
 u(x) &= \sum_{\ell=1}^{K_1} \sum_{m=1}^{K_2} u(x_{\ell}^1, x_m^2) \phi_{\ell}^1(x^1) \phi_m^2(x^2) + \int_0^1 k_1(x^1, s) \frac{\partial^{K_1}}{\partial s^{K_1}} u(s, x^2) ds, \\
 &+ \int_0^1 k_2(x^2, t) \frac{\partial^{K_2}}{\partial t^{K_2}} u(x^1, t) dt - \int_0^1 \int_0^1 k_1(x^1, s) k_2(x^2, t) \frac{\partial^{K_1+K_2}}{\partial s^{K_1} \partial t^{K_2}} u(s, t) ds dt \\
 u(x) &= \sum_{\ell=1}^{K_1} \phi_{\ell}^1(x^1) u(x_{\ell}^1, x^2) + \sum_{\ell=1}^{K_2} \phi_{\ell}^2(x^2) u(x^1, x_{\ell}^2) - \sum_{\ell=1}^{K_1} \sum_{m=1}^{K_2} \phi_{\ell}^1(x^1) \phi_m^2(x^2) u(x_{\ell}^1, x_m^2) \\
 &+ \int_0^1 \int_0^1 k_1(x^1, s) \cdot k_2(x^2, t) \frac{\partial^{K_1+K_2}}{\partial s^{K_1} \partial t^{K_2}} u(s, t) ds dt
 \end{aligned}$$

La première identité fournit l'expression d'un procédé d'interpolation utilisant les valeurs de la fonction  $u$  aux points de la grille

$\{(x^1, x^2)\} \quad 1 \leq \ell \leq K_1$     alors que dans la seconde, on doit connaître la  
 $1 \leq m \leq K_2$

fonction sur les lignes du quadrillage.

Dans le premier cas, le plus grand espace  $P_k$  invariant par le procédé d'interpolation est  $P_{\text{Min}(K_1-1, K_2-1)}$ , dans le second  $P_{K_1+K_2-1}$ .

— x —

Les exemples suivants sont utilisés dans la méthode des éléments finis pour la résolution d'équation aux dérivées partielles.

3) ELEMENTS DE TYPE LAGRANGE

Reprenons l'exemple précédent avec  $x_1^1 = x_1^2 = 0$  et  $x_2^1 = x_2^2 = 1$ .

Soit alors  $u \in C^{2,2}([0,1]^2)$ . La première identité du paragraphe précédent donne :

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad u(x_1, x_2) &= (1-x_1)(1-x_2)u(0,0) + (1-x_1)x_2u(0,1) \\ &+ x_1(1-x_2)u(1,0) + x_1x_2 u(1,1) \\ &+ \int_0^1 k(x_1, s) \frac{\partial^2}{\partial s^2} u(s, x_2) ds + \int_0^1 k(x_2, t) \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x_1, t) dt \\ &- \int_0^1 \int_0^1 k(x_1, s) k(x_2, t) \frac{\partial^4}{\partial s^2 \partial t^2} u(s, t) ds dt \end{aligned}$$

où :

$$k(x, s) = \begin{cases} s(x-1) & x \geq s \\ x(s-1) & x \leq s \end{cases}$$

La deuxième identité donne (surface de Coons de première espèce [4][6][8][9])

$$\begin{aligned} \text{(ii)} \quad u(x_1, x_2) &= (1-x_1)u(0, x_2) + x_1 u(1, x_2) + (1-x_2)u(x_1, 0) + x_2 u(x_1, 1) \\ &- (1-x_1)(1-x_2)u(0,0) - (1-x_1)x_2 u(0,1) \\ &- x_1(1-x_2)u(1,0) + x_1x_2 u(1,1) \\ &+ \int_0^1 \int_0^1 k(x_1, s) \cdot k(x_2, t) \frac{\partial^4}{\partial s^2 \partial t^2} u(s, t) ds dt \end{aligned}$$

La première identité fournit l'élément fini rectangle à quatre points. On peut en déduire des majorations de l'erreur.

Par exemple :

$$\|u - \pi u\|_{L^2([0,1]^2)} = \left( \int_0^1 \int_0^1 |Ru(x_1, x_2)|^2 dx_1 dx_2 \right)^{1/2}$$

en utilisant le fait que  $\int_0^1 \int_0^1 |k(x, s)|^2 dx ds = \frac{1}{90}$ , et l'inégalité de Schwarz ;

on trouve :

$$\|u - \pi u\|_{L^2([0,1]^2)} \leq \sqrt{\frac{1}{15} + \frac{1}{8100}} \left[ \left\| \frac{\partial^2}{\partial s^2} u \right\|_{L^2}^2 + \left\| \frac{\partial^2}{\partial t^2} u \right\|_{L^2}^2 + \left\| \frac{\partial^4}{\partial s^2 \partial t^2} u \right\|_{L^2}^2 \right]^{1/2}$$

On peut de même donner des majorations des normes  $L^2$  des dérivées partielles de  $u - \pi u$  à condition de supposer que  $u$  admet des dérivées partielles d'ordre 3 continues. On obtient aussi des majorations en norme du Maximum

$$\begin{aligned} \|u - \pi u\|_{\infty} &\leq \frac{1}{8} \left[ \sup_{0 \leq s, t \leq 1} \left| \frac{\partial^2}{\partial s^2} u(s, t) \right| + \sup_{0 \leq s, t \leq 1} \left| \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(s, t) \right| \right] \\ &+ \frac{1}{64} \left[ \sup_{0 \leq s, t \leq 1} \left| \frac{\partial^4}{\partial s^2 \partial t^2} u(s, t) \right| \right] \end{aligned}$$

En utilisant l'identité (ii), on peut encore donner d'autres formules d'interpolation ponctuelle en interpolant la fonction sur chaque côté du carré.

α) Si on interpole linéairement sur chaque côté, alors on retrouve comme interpolé, l'interpolé linéaire précédent mais avec pour expression de l'erreur :

$$\begin{aligned} &\int_0^1 k(x_1, s) \left[ \frac{\partial^2}{\partial s^2} u(s, 0) + \frac{\partial^2}{\partial s^2} u(s, 1) \right] ds \\ &+ \int_0^1 k(x_1, t) \left[ \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(0, t) + \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(1, t) \right] dt \\ &- \int_0^1 \int_0^1 k(x_1, s) k(x_2, t) \frac{\partial^4}{\partial s^2 \partial t^2} u(s, t) ds dt . \end{aligned}$$

Les majorations obtenues par ces expressions sont plus mauvaises que celles obtenues précédemment.



β) Soit  $g \in C([0,1])$  alors en utilisant le procédé d'interpolation de Lagrange à trois points, on a, pour  $t \in [0,1]$  :

$$g(t) = 2(t - \frac{1}{2})(t-1)g(0) - 4t(t-1)g(\frac{1}{2}) + 2t(t - \frac{1}{2})g(1) + \int_0^1 h(t,s) \frac{d^3}{dt^3} g(s)ds$$

où

$$h(t,s)$$

est le "noyau" associé à l'interpolation de Lagrange (cf. chapitre I, §0) sur  $0, \frac{1}{2}, 1$ .

Alors, si  $u$  admet ses dérivées partielles

$$\frac{\partial^{\alpha_1 + \alpha_2}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2}} u \quad \alpha_1 + \alpha_2 \leq 4$$

continues on obtient l'identité :

$$\begin{aligned} u(x_1, x_2) = & u(0,0)(1-x_1)(1-x_2)(1-2x_1-2x_2) \\ & + x_1(1-x_2)(1-2x_1-2x_2) u(1,0) \\ & + x_1 x_2 (1-2x_1-2x_2) u(1,1) \\ & + (1-x_1)x_2 (1-2x_1-2x_2) u(0,1) \\ & + 4(1-x_2)(1-x_1)x_1 u(\frac{1}{2},0) \\ & + 4x_1 x_2 (1-x_2) u(1,\frac{1}{2}) \\ & + 4x_1 x_2 (1-x_1) u(\frac{1}{2},1) \\ & + 4(1-x_1)(1-x_2)x_2 u(0,\frac{1}{2}) \\ & + \int_0^1 \int_0^1 k(x_1,s)k(x_2,t) \frac{\partial^4}{\partial s^2 \partial t^2} u(s,t) ds dt \\ & + \int_0^1 h(x_1,s) [\frac{\partial^3}{\partial s^3} u(s,0) + \frac{\partial^3}{\partial s^3} u(s,1)] ds \\ & + \int_0^1 h(x_2,t) [\frac{\partial^3}{\partial t^3} u(0,t) + \frac{\partial^3}{\partial t^3} u(1,t)] dt \end{aligned}$$

Il est immédiat que le reste est nul pour tous les polynomes de degré inférieur ou égal à 2 en l'ensemble des variables.

γ) En utilisant une formule de Lagrange à quatre points sur chaque côté et si on appelle encore h le noyau correspondant

$$\begin{aligned}
 u(x_1, x_2) = & \pi u(x_1, x_2) + \int_0^1 \int_0^1 k(x_1, s) k(x_2, t) \frac{\partial^4}{\partial s^2 \partial t^2} u(s, t) ds dt \\
 & + \int_0^1 h(x_1, s) \left[ \frac{\partial^4}{\partial s^4} u(s, 0) + \frac{\partial^4}{\partial s^4} u(s, 1) \right] ds \\
 & + \int_0^1 h(x_2, t) \left[ \frac{\partial^4}{\partial t^4} u(0, t) + \frac{\partial^4}{\partial t^4} u(1, t) \right] dt
 \end{aligned}$$

Ici, le reste est nul pour les polynomes de degré inférieur ou égal à 2 en chacune des variables (et non 3) mais pour les polynomes de degré inférieur ou égal à 3 en l'ensemble des variables (ce qui importe pour la convergence de la méthode des éléments finis).

On constate qu'il est impossible d'augmenter l'ordre de l'erreur en augmentant encore le nombre de points (au delà de 4) sur le bord du carré.

#### 4) INTERPOLATION DE TYPE HERMITE

Pour  $g \in C^4([0, 1])$ , nous avons vu, (chapitre I, §1) que :

$$\begin{aligned}
 g(s) = & g(0)[s^2(2s-3)+1] + g(1)[-s^2(2s-1)] \\
 & + g'(0)[s(s-1)^2] + g'(1) s^2(s-1) \\
 & + \int_0^1 k(s, t) \frac{d^4}{dt^4} g(t) dt
 \end{aligned}$$

avec :

$$k(s,t) = \frac{(s-t)^3(s-t)}{6} + \frac{(1-t)^3}{6} s^2(2s-1) - \frac{(1-t)^2}{2} s^2(s-1)$$

Alors, pour  $u \in C^{4,4}([0,1]^2)$ , on a l'identité :

$$\begin{aligned} u(x_1, x_2) = & u(0,0)[x_1^2(2x_1-3)+1][x_2^2(2x_2-3)+1] + u(0,1)[x_1^2(2x_1-3)+1][x_2^2(2x_2-1)] \\ & + u(1,1)[x_1^2(2x_1-1)][x_2^2(2x_2-1)] + u(1,0)[x_1^2(2x_1-1)][x_2^2(2x_2-3)+1] \\ & + \frac{\partial}{\partial x_1} u(0,0)[x_1(x_1-1)^2][x_2^2(2x_2-3)+1] \\ & + \frac{\partial}{\partial x_2} u(0,0)[x_1^2(2x_1-3)+1][x_2(x_2-1)^2] \\ & + \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} u(0,0)[x_1(x_1-1)^2][x_2(x_2-1)^2] \\ & + \frac{\partial}{\partial x_1} u(0,1)[x_1(x_1-1)^2][x_2^2(2x_2-1)] \\ & + \frac{\partial}{\partial x_2} u(0,1)[x_1^2(2x_1-3)+1][x_2^2(x_2-1)] \\ & + \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} u(0,1)[x_1(x_1-1)^2][x_2^2(x_2-1)] \\ & + \frac{\partial}{\partial x_1} u(1,1)[x_1(x_1-1)^2][x_2^2(2x_2-1)] \\ & + \frac{\partial}{\partial x_2} u(1,1)[x_1^2(2x_1-1)][x_2^2(x_2-1)] \\ & + \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} u(1,1)[x_1^2(x_1-1)][x_2^2(x_2-1)] \\ & + \frac{\partial}{\partial x_1} u(1,0)[x_1^2(x_1-1)][x_2^2(2x_2-3)+1] \\ & + \frac{\partial}{\partial x_2} u(1,0)[x_1^2(2x_1-1)][x_2^2(x_2-1)^2] \\ & + \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} u(1,0)[x_1^2(x_1-1)][x_2^2(x_2-1)^2] \\ & + \int_0^1 k(x_1, s) \frac{\partial^4}{\partial s^4} u(s, x_2) ds + \int_0^1 k(x_2, t) \frac{\partial^4}{\partial t^4} u(x_1, t) dt \\ & - \int_0^1 \int_0^1 k(x_1, s) k(x_2, s) \frac{\partial^8}{\partial s^4 \partial t^4} u(s, t) ds dt . \end{aligned}$$

Cette identité fournit un élément qui permet un raccord de la fonction et de ses dérivées premières (on dit qu'il est de classe  $C^1$ ). Néanmoins, la présence des dérivées croisées aux sommets rend son utilisation difficile dans la méthode des éléments finis. Appelons  $P_m u$  l'interpolé fournit par l'identité précédente.

L'autre identité s'écrit :

$$\begin{aligned} u(x_1, x_2) = & u(x_1, 0) (x_2^2(2x_2-3)+1) + u(x_1, 1) (-x_2^2(2x_2-1)) \\ & + \frac{\partial}{\partial x_2} u(x_1, 0) (x_2(x_2-1)^2) + \frac{\partial}{\partial y_2} u(x_1, 1) x_2^2(x_2-1) \\ & + u(0, x_2) (x_1^2(2x_1-3)+1) + u(1, x_2) (-x_1^2(2x_1-1)) \\ & + \frac{\partial}{\partial x_1} u(0, x_2) (x_1(x_1-1)^2) + \frac{\partial}{\partial x_1} u(1, x_2) (x_1^2(x_1-1)) \\ & - P_m u(x_1, x_2) + \int_0^1 \int_0^1 k(x_1, s) k(x_2, s) \frac{\partial^8}{\partial s^4 \partial t^4} u(s, t) ds dt . \end{aligned}$$

Ceci correspond aux surfaces de Coons de seconde espèce.

La construction de l'interpolé nécessite, comme dans le cas précédent, la connaissance des dérivées croisées aux sommets du quadrillage.

On pourrait encore utiliser cette dernière identité pour construire des éléments (interpolation ponctuelle) en vue de la résolution de problèmes d'équations aux dérivées partielles, en interpolant la fonction et les dérivées normales sur chaque côté mais, du point de vue pratique, cela conduirait à des procédés ayant un trop grand nombre d'inconnues et on conserve toujours les dérivées croisées.

##### 5) PROCEDE DE COONS

Dans les exemples précédents, nous avons fait référence aux surfaces de Coons. Leurs formules d'erreur et en particulier le rapport avec les fonctions splines a été largement étudié (op. cit.). Néanmoins, Coons [4] a introduit un procédé qui, connaissant la fonction sur les lignes d'un

quadrillage (et non les dérivées normales) fournit un interpolé dérivable. Nous en explicitons ici l'erreur.

Considérons, pour  $y \in C^2([0,1])$ , l'identité (cf. I, §1,β) :

$$g(x) = [s^2(2s-3)+1]g(0) - s^2(2s-3)g(1) + \int_0^1 k(s,t)Dg(t)dt$$

où

$$D = \frac{d^2}{dt^2} - \frac{2t-1}{t(t-1)} \frac{d}{dt}$$

Posons :

$$\phi_1(s) = s^2(2s-3)+1$$

$$\phi_2(s) = -s^2(2s-3)$$

Pour  $u \in C^{2,2}([0,1]^2)$ , considérons l'identité (de deuxième type) (l'autre ne présente aucun intérêt) :

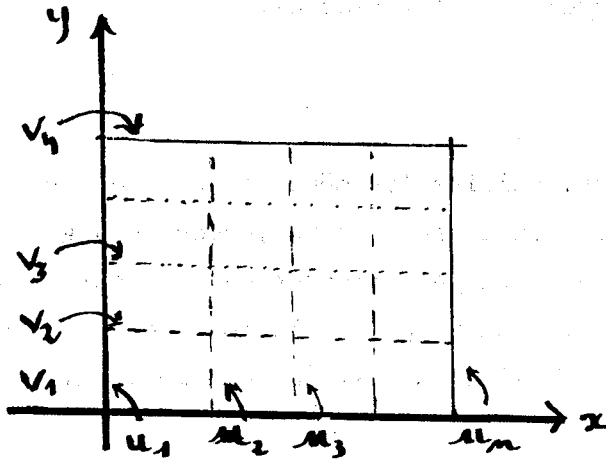
$$\begin{aligned} u(x_1, x_2) &= \phi_1(x_1)u(0, x_2) + \phi_2(x_1)u(1, x_2) + \phi_1(x_2)u(x_1, 0) + \phi_2(x_2)u(x_1, 1) \\ &\quad - \phi_1(x_1)\phi_1(x_2)u(0, 0) - \phi_1(x_1)\phi_2(x_2)u(0, 1) \\ &\quad - \phi_2(x_1)\phi_1(x_2)u(1, 0) - \phi_2(x_1)\phi_2(x_2)u(1, 1) \\ &\quad + \int_0^1 \int_0^1 k(x_1, s)k(x_2, t)D_s D_t u(s, t) ds dt \end{aligned}$$

On appelle  $\pi u$  l'interpolé .

Considérons la dérivée normale de  $\pi u$  sur un côté du carré, en tenant compte du fait que les dérivées de  $\phi_1$  et  $\phi_2$  en 0 et 1 sont nulles :

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \pi u(x_1, 0) = \phi_1(x_1) \frac{\partial}{\partial x_2} u(0, 0) + \phi_2(x_1) \frac{\partial}{\partial x_2} u(1, 0) .$$

Donc si on se donne sur les lignes d'un quadrillage des fonctions dérivables  $v_1(y), v_2(y), \dots, v_n(y)$ ,  $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)$  (figure ci-contre)



qui sont égales aux points d'intersection de la grille, on obtient un interpolé admettant des dérivées partielles continues partout si on utilise sur chaque rectangle le procédé précédent (à une transformation affine près).

Si on interpole la fonction  $u$  sur chaque côté par l'interpolation de Hermite à deux points, on obtient, avec  $\phi_1$  et  $\phi_2$  comme précédemment et

$$\phi_3(s) = -s^2(2s-3) \quad \phi_4(s) = s^2(s-1)$$

$$\begin{aligned} u(x_1, x_2) = & u(0,0) [\phi_1(x_1)\phi_1(x_2)] + u(0,1)[\phi_1(x_1)\phi_2(x_2)] \\ & + u(1,0) [\phi_1(x_2)\phi_2(x_1)] + u(1,1)[\phi_2(x_1)\phi_2(x_2)] \\ & + \frac{\partial}{\partial x_1} u(0,0) \phi_3(x_1)\phi_1(x_2) + \frac{\partial}{\partial x_2} u(0,0)\phi_3(x_2)\phi_1(x_1) \\ & + \frac{\partial}{\partial x_1} u(1,0) \phi_4(x_1)\phi_1(x_2) + \frac{\partial}{\partial x_2} u(1,0)\phi_3(x_2)\phi_2(x_1) \\ & + \frac{\partial}{\partial x_1} u(0,1) \phi_3(x_1)\phi_2(x_2) + \frac{\partial}{\partial x_2} u(0,1)\phi_4(x_2)\phi_1(x_1) \\ & + \frac{\partial}{\partial x_1} u(1,1) \phi_4(x_1)\phi_2(x_2) + \frac{\partial}{\partial x_2} u(1,1)\phi_2(x_1)\phi_4(x_2) \\ & + \int_0^1 h(x_1, s) \left[ \frac{\partial^4}{\partial s^4} u(1,0) + \frac{\partial^4}{\partial s^4} u(1,1) \right] ds \\ & + \int_0^1 h(x_2, t) \left[ \frac{\partial^4}{\partial t^4} u(0,t) + \frac{\partial^4}{\partial t^4} u(1,t) \right] dt \\ & - \int_0^1 \int_0^1 k(x_1, s)k(x_2, t) D D u(s, t) ds dt . \end{aligned}$$

On a donc un élément à douze variables qui est de classe  $C^1$ . Ce procédé laisse invariant un ensemble de polynôme qui contient les polynômes de degré au plus 1 en l'ensemble des variables.

REMARQUE :

Il existe un élément qui utilise les mêmes données qui est seulement de classe  $C^0$  mais laisse invariant les polynômes de degré au plus 3 en l'ensemble des variables : on peut trouver cet élément en utilisant 3, (ii) de ce paragraphe et en interpolant la fonction  $u$  sur chaque côté du carré par le procédé de Hermite aux extrémités (rectangle de Adini [ ], [ ]).

6) UNE CLASSE DE PROCÉDES D'INTERPOLATION SUR  $[0,1]^2$

Considérons le procédé d'interpolation d'une variable proposé au chapitre I, (II).

Ce procédé était défini par  $N, \alpha, L, \{\phi_{\ell i}\}_{i=2, \ell=L}^{i=0, \ell=0}$  et par  $m \geq L$

Alors si  $g \in C^{(2\alpha+1)(L+1)}([0,1])$ , on a :

$$g(x) = \pi_N g(x) + R_N g(x) \quad \text{pour tout } x \in [0,1].$$

Soient :

$$\begin{aligned} \mathbb{N}_{N,1} &= \pi_N \otimes \text{Id}_2 & R_{N,1} &= R_N \otimes \text{Id}_2 \\ \mathbb{N}_{N,2} &= \text{Id}_1 \otimes \pi_N & R_{N,2} &= \text{Id}_1 \otimes R_N \end{aligned}$$

Alors pour tout  $u$  de  $C^{(2\alpha+1)(L+1), (2\alpha+1)(L+1)}([0,1] \times [0,1])$ , on a les identités : pour  $x = (x_1, x_2) \in [0,1]^2$

$$\begin{aligned} u(x_1, x_2) &= \mathbb{N}_{N,1} \circ \mathbb{N}_{N,2} [u](x_1, x_2) + R_{N,1} [u](x_1, x_2) + R_{N,2} [u](x_1, x_2) - \\ &\quad - R_{N,1} \circ R_{N,2} [u](x_1, x_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u(x_1, x_2) &= \mathbb{N}_{N,1} [u](x_1, x_2) + \mathbb{N}_{N,2} [u](x_1, x_2) - \mathbb{N}_{N,1} \circ \mathbb{N}_{N,2} [u](x_1, x_2) + \\ &\quad + R_{N,1} \circ R_{N,2} [u](x_1, x_2) \end{aligned}$$

Posons :  $\mathcal{P}_{N,\min} = \mathcal{P}_{N,1} \circ \mathcal{P}_{N,2}$

$$\mathcal{P}_{N,\max} = \mathcal{P}_{N,1} + \mathcal{P}_{N,2} - \mathcal{P}_{N,1} \circ \mathcal{P}_{N,2}$$

THEOREME 1 :

Si  $u \in C^{(2\alpha+1)(L+1), (2\alpha+1)(L+1)}([0,1] \times [0,1])$ ,

$\mathcal{P}_{N,\min} u$  et  $\mathcal{P}_{N,\max} u$  convergent uniformément vers  $u$   
quand  $N$  tend vers l'infini.

PREUVE

$$|u(x) - \mathcal{P}_{N,\min}(x)| \leq |R_{N,1}[u](x)| + |R_{N,2}[u](x)| + |R_{N,1} \circ R_{N,2}[u](x)|$$

et :

$$|u(x) - \mathcal{P}_{N,\max}(x)| \leq |R_{N,1} \circ R_{N,2}[u](x)|$$

D'après le résultat du théorème 3 (chapitre I, §II), on obtient bien ce résultat.

—————x

Sous les hypothèses précédentes :

PROPOSITION 2 :

- $\mathcal{P}_{N,\min}[u]$  est dans  $C^{m,m}([0,1] \times [0,1])$
- $\mathcal{P}_{N,\max}[u]$  est dans  $C^{m,m}([0,1] \times [0,1])$

dès que  $u$  appartient à cet espace.



Ceci résulte immédiatement de la proposition 2, chapitre I, §II.

Explicitons  $\mathbb{P}_{N,\min}[u]$  dans le cas où  $\alpha = 1$ ,  $L = 1$ ,  $m = 1$

avec  $\Psi_1(x) = x^2(2x-3)+1$

et on utilise les polynomes de Lagrange à trois points.

Posons  $1 \leq i \leq N-1$  et  $1 \leq j \leq N-2$

$$U_{ij} = \begin{vmatrix} u(x_{i-1}, y_{j+2}) & u(x_i, y_{j+2}) & u(x_{i+1}, y_{j+2}) & u(x_{i+1}, y_{j+2}) \\ u(x_{i-1}, y_{j+1}) & u(x_i, y_{j+1}) & u(x_{i+1}, y_{j+1}) & u(x_{i+2}, y_{j+1}) \\ u(x_{i-1}, y_j) & u(x_i, y_j) & u(x_{i+1}, y_j) & u(x_{i+2}, y_j) \\ u(x_{i-1}, y_{j-1}) & u(x_i, y_{j-1}) & u(x_{i+1}, y_{j-1}) & u(x_{i+2}, y_{j-1}) \end{vmatrix}$$

$$A_{ij} = \begin{vmatrix} \frac{(y-y_{j+1})(y-y_j)}{(y_{j+2}-y_{j+1})(y_{j+2}-y_j)} & \frac{(y-y_{j+2})(y-y_j)}{(y_{j+1}-y_{j+2})(y_{j+1}-y_j)} & \frac{(y-y_{j+2})(y-y_{j+1})}{(y_j-y_{j+2})(y_j-y_{j+1})} & 0 \\ 0 & \frac{(y-y_j)(y-y_{j-1})}{(y_{j+1}-y_j)(y_{j+1}-y_{j-1})} & \frac{(y-y_{j+1})(y-y_{j-1})}{(y_j-y_{j+1})(y_j-y_{j+1})} & \frac{(y-y_{j+1})(y-y_j)}{(y_{j-1}-y_{j+1})(y_{j-1}-y_j)} \end{vmatrix}$$

$$B_{ij} = \begin{array}{|c|c|} \hline \frac{(x-x_i)(x_i-x_{i+1})}{(x_{i-1}-x_i)(x_{i-1}-x_{i+1})} & 0 \\ \hline \frac{(x-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})}{(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})} & \frac{(x-x_{i+1})(x-x_{i+2})}{(x_i-x_{i+1})(x_i-x_{i+2})} \\ \hline \frac{(x_i-x_{i-1})(x-x_i)}{(x_{i+1}-x_{i-1})(x_{i+1}-x_i)} & \frac{(x-x_i)(x-x_{i+2})}{(x_{i+1}-x_i)(x_{i+1}-x_{i+2})} \\ \hline 0 & \frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})}{(x_{i+2}-x_i)(x_{i+2}-x_{i+1})} \\ \hline \end{array}$$

$$C_{ij} = \left| \frac{(y-y_j)^2}{(y_{j+i}-y_j)^2} \left[ 2 \frac{y-y_j}{y_{j+1}-y_j} - 3 \right] + 1, - \frac{(y-y_j)^2}{(y_{j+1}-y_j)^2} \left[ 2 \frac{y-y_j}{y_{j+1}-y_j} - 3 \right] \right|$$

$D_{ij}$  est obtenu en remplaçant  $y$  par  $x$ ,  $j$  par  $i$ , et on transpose  $C_{ij}$ .

Pour  $i$  (resp.  $j$ ) = 0 on remplace la première colonne (resp. ligne) de

$$B_{ij} \text{ (resp. } A_{ij}) \text{ par } 0 \text{ et on fait } C_{0j} = (0,1) \text{ (resp. } D_{i0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} )$$

Pour  $i$  (resp.  $j$ ) =  $N-1$  on remplace la deuxième colonne (resp. ligne) de

$$B_{ij} \text{ (resp. } A_{ij}) \text{ par } 0 \text{ et on fait } C_{N-1,j} = (1,0) \text{ (resp. } D_{iN-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} ) .$$

Alors pour  $0 \leq i \leq N-1$ ,  $0 \leq j \leq N-1$  et  $x \in [x_i, x_{i+1}]$ ,  $y \in [y_j, y_{j+1}]$

$$\mathbb{1}_{N, \min} u(x,y) = C_{ij} \cdot A_{ij} \cdot U_{ij} \cdot B_{ij} \cdot D_{ij} .$$

D'autre part, d'après la proposition 2,  $\mathbb{N}_{N,\min}[u]$  est une fonction continuellement dérivable et sur chaque rectangle intérieur au domaine c'est un polynôme de degré 5 en chacune des variables.

Ce procédé est utilisé en cartographie ([11]).

REMARQUES :

- Supposons que, la fonction  $u$  ne soit pas connue aux sommets de la grille mais en des points  $(x_i, y_j)$  tels que chaque carré  $[x_i, x_{i+2}] \times [y_j, y_{j+2}]$  ( $0 \leq i \leq N-2$ ,  $0 \leq j \leq N-2$ ) contienne  $M$  points au plus. Alors on interpole la fonction  $u$  sur ce carré par l'interpolation de Lagrange. Soit  $\theta_{ij}(x)$  l'interpolé. On définit alors, pour  $x \in [x_i, x_{i+1}]$ ,  $y \in [y_j, y_{j+1}]$

$$\mathbb{N}[u](x,y) = C_{ij} \times \begin{vmatrix} \theta_{i-1,j}(x) & \theta_{i,j}(x) \\ \theta_{i-1,j-1}(x) & \theta_{i,j-1}(x) \end{vmatrix} \times D_{ij}$$

On peut vérifier que  $\mathbb{N}[u](x)$  est continuellement dérivable.

- L'étude précédente pourrait être faite avec des maillages irréguliers.
- L'exemple traité est utilisé sur des maillages réguliers en cartographie (JUNKINS, MILLER, JANCAITIS, A weighting Function Approach to Modeling of Irregular Surfaces [11]).

IV - EXEMPLES DE PROCÉDES D'INTERPOLATION RECTANGLE SUR  $[0,1]^3$ .

Nous allons donner l'expression de quelques éléments finis.

Rappelons, avec les notations du paragraphe II, que l'on a les identités :

$$\begin{aligned} \cdot I &= \overline{\mathbb{1}_1} + \overline{\mathbb{1}_2} + \overline{\mathbb{1}_3} - \overline{\mathbb{1}_1 \circ \mathbb{1}_2} - \overline{\mathbb{1}_1 \circ \mathbb{1}_3} - \overline{\mathbb{1}_2 \circ \mathbb{1}_3} + \overline{\mathbb{1}_1 \circ \mathbb{1}_2 \circ \mathbb{1}_3} + \overline{\mathbb{1}_1 \circ \mathbb{1}_2 \circ \mathbb{1}_3} \\ &= P_M + R_M . \end{aligned}$$

$P_M$  est le projecteur maximal construit par les opérations  $\circ$  et  $\oplus$  à l'aide de  $\mathbb{1}_1, \mathbb{1}_2, \mathbb{1}_3$ . On notera que l'expression  $P_M(u)$  nécessite la connaissance de  $u$  et/ou de dérivées partielles de  $u$  sur des plans perpendiculaires aux axes.

$$\begin{aligned} \cdot I &= \overline{\mathbb{1}_1 \circ \mathbb{1}_2 \circ \mathbb{1}_3} + \overline{\mathbb{1}_1} + \overline{\mathbb{1}_2} + \overline{\mathbb{1}_3} - \overline{\mathbb{1}_1 \circ \mathbb{1}_2} - \overline{\mathbb{1}_1 \circ \mathbb{1}_3} - \overline{\mathbb{1}_2 \circ \mathbb{1}_3} + \overline{\mathbb{1}_1 \circ \mathbb{1}_2 \circ \mathbb{1}_3} \\ &= P_m + R_m \end{aligned}$$

$P_m$  est le projecteur minimal construit à l'aide de  $\mathbb{1}_1, \mathbb{1}_2, \mathbb{1}_3$ .

$P_m(u)$  utilise des valeurs de  $u$  (et/ou dérivées) en des points.

$$\begin{aligned} \cdot I &= \overline{\mathbb{1}_1 \circ \mathbb{1}_2} + \overline{\mathbb{1}_1 \circ \mathbb{1}_3} + \overline{\mathbb{1}_2 \circ \mathbb{1}_3} - 2\overline{\mathbb{1}_1 \circ \mathbb{1}_2 \circ \mathbb{1}_3} + \\ &\quad + \overline{\mathbb{1}_1 \circ \mathbb{1}_2} + \overline{\mathbb{1}_1 \circ \mathbb{1}_3} + \overline{\mathbb{1}_2 \circ \mathbb{1}_3} - 2\overline{\mathbb{1}_1 \circ \mathbb{1}_2 \circ \mathbb{1}_3} \\ &= P + R . \end{aligned}$$

Relativement à la relation d'ordre sur les projecteurs,

$$P_m \leq P \leq P_M$$

$P(u)$  nécessite la connaissance de  $u$  et/ou de dérivées partielles de  $u$  sur des segments perpendiculaires aux axes.

1) FORMULES DE TAYLOR :

Pour  $j = 1, 2, 3$ , posons :  $\{\lambda_i^j, \phi_i^j\} = \{\delta_{(0)}^{(i)}, x_i\}_{i=0}^{i=K-1}$

alors, pour tout  $x = (x_1, x_2, x_3)$  de  $[0, 1]^3$  et  $u \in C^{K, K, K}([0, 1]^3)$  :

$$u(x) = \sum_{k, \ell, m=0}^{K-1} x_1^k x_2^\ell x_3^m \frac{\partial^{k+\ell+m}}{\partial x_1^k \partial x_2^\ell \partial x_3^m} u(0, 0, 0) + R_m[u](x)$$

avec,  $i=1, 2, 3$  :  $\overline{\mathbb{T}}_i u(x_1, x_2, x_3) = \int_0^{x_i} \frac{(x_i - t)^{K-1}}{(K-1)!} \frac{\partial^K}{\partial x_i^K} u(y) dt$

avec  $y = (y_1, y_2, y_3)$  où  $y_i = t$  et  $y_j = x_j$  pour  $j \neq i$

$$\begin{aligned} u(x) = & \sum_{k=0}^{K-1} x_1^k \frac{\partial^k}{\partial x_1^k} u(0, x_2, x_3) + \sum_{k=0}^{K-1} x_2^k \frac{\partial^k}{\partial x_2^k} u(x_1, 0, x_3) + \sum_{m=0}^{K-1} x_3^m \frac{\partial^m}{\partial x_3^m} u(x_1, x_2, 0) - \\ & - \sum_{k, \ell=0}^{K-1} x_1^k x_2^\ell \frac{\partial^{k+\ell}}{\partial x_1^k \partial x_2^\ell} u(0, 0, x_3) - \sum_{k, m=0}^{K-1} x_1^k x_3^m \frac{\partial^{k+m}}{\partial x_1^k \partial x_3^m} u(0, x_2, 0) - \\ & - \sum_{\ell, m=0}^{K-1} x_2^\ell x_3^m \frac{\partial^{\ell+m}}{\partial x_2^\ell \partial x_3^m} u(x_1, 0, 0) + \sum_{k, \ell, m=0}^{K-1} x_1^k x_2^\ell x_3^m \frac{\partial^{k+\ell+m}}{\partial x_1^k \partial x_2^\ell \partial x_3^m} u(0, 0, 0) + \\ & + R_M[u](x) \end{aligned}$$

avec  $\overline{\mathbb{T}}_i$  comme précédemment.

$$\begin{aligned}
 u(x) = & \sum_{k,\ell=0}^{K-1} x_1^k x_2^\ell \frac{\partial^{k+\ell}}{\partial x_1^k \partial x_2^\ell} u(0,0,x_3) + \sum_{k,m=0}^{K-1} x_1^k x_3^m \frac{\partial^{k+m}}{\partial x_1^k \partial x_3^m} u(0,x_2,0) \\
 & + \sum_{k,m=0}^{K-1} x_2^\ell x_3^m \frac{\partial^{\ell+m}}{\partial x_2^\ell \partial x_3^m} u(x_1,0,0) - 2 \sum_{k,\ell,m=0}^{K-1} x_1^k x_2^\ell x_3^m \frac{\partial^{k+\ell+m}}{\partial x_1^k \partial x_2^\ell \partial x_3^m} u(0,0,0) \\
 & + R[u](x)
 \end{aligned}$$

avec  $\overline{\eta}_i$  comme précédemment.

## 2) ELEMENTS FINIS RECTANGLES.

Posons, pour  $j=1,2,3$ ,

$$\lambda_1^j = \delta_{(0)}$$

$$\lambda_2^j = \delta_{(1)}$$

$$\phi_1^j(s) = 1-s$$

$$\phi_2^j(s) = s$$

$$0 \leq s \leq 1.$$

Alors, en explicitant les résultats du paragraphe II, et du début de ce paragraphe, on a, pour  $u \in C^{2,2,2}([0,1]^3)$ , les identités :

$$(x = (x_1, x_2, x_3) \in [0,1]^3) :$$

$$\begin{aligned}
 \text{(i) } u(x_1, x_2, x_3) = & (1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)u(0,0,0) + x_1 x_2 x_3 u(1,1,1) + \\
 & + (1-x_1)(1-x_2)x_3 u(0,0,1) + (1-x_1)x_2(1-x_3)u(0,1,0) + x_1(1-x_2)(1-x_3)u(1,0,0) \\
 & + (1-x_1)x_2 x_3 u(0,1,1) + x_1 x_2(1-x_3)u(1,1,0) + x_1(1-x_2)x_3 u(0,1,0) \\
 & + R_m[u](x_1, x_2, x_3)
 \end{aligned}$$

où :

$$\overline{P}_i[u](x_1, x_2, x_3) = \int_0^1 k(x_i, t) \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} u(y) dt \quad (i=1,2,3)$$

où  $y = (y_1, y_2, y_3)$  avec  $y_i = t$  et  $y_j = x_j$  pour  $j \neq i$

$$\text{et } k(x, s) = \begin{cases} s(x-1) & x > s \\ x(s-1) & x < s \end{cases}$$

Dans la suite de ce paragraphe, on notera  $C_m[u]$  l'interpolé de  $u$  fourni par cette identité.

On notera que, pour tout polynome  $p \in P^1$

$$P_m[p] = p .$$

$$\begin{aligned} \text{(ii) } u(x_1, x_2, x_3) &= (1-x_1)u(0, x_2, x_3) + x_1u(1, x_2, x_3) + \\ &+ (1-x_2)u(x_1, 0, x_3) + x_2u(x_1, 1, x_3) \\ &+ (1-x_3)u(x_1, x_2, 0) + x_3u(x_1, x_2, 1) \\ &- (1-x_1)(1-x_2)u(0, 0, x_3) - (1-x_1)x_2u(0, 1, x_3) - (1-x_2)x_1u(1, 0, x_3) - \\ &- x_1x_2u(1, 1, x_3) - (1-x_1)(1-x_3)u(0, x_2, 0) - (1-x_1)x_3u(0, x_2, 1) - \\ &- x_1(1-x_3)u(1, x_2, 0) - x_1x_3u(1, x_2, 1) - (1-x_2)(1-x_3)u(x_1, 0, 0) - \\ &- (1-x_2)x_3u(x_1, 0, 1) - x_2(1-x_3)u(x_1, 1, 0) - x_2x_3u(x_1, 1, 1) \\ &+ P_m[u](x) + \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 k(x_1, y_1)k(x_2, y_2)k(x_3, y_3) \frac{\partial^6}{\partial x_1^2 \partial x_2^2 \partial x_3^2} u(y_1, y_2, y_3) dy_1 dy_2 dy_3 \end{aligned}$$

Notons  $P_M$  l'interpolé fourni par cette identité.

Pour tout  $p \in P^5$

$$P_M[p] = p$$

$$\begin{aligned}
 \text{(iii)} \quad u(x_1, x_2, x_3) &= (1-x_1)(1-x_2)u(0,0,x_3) + (1-x_1)x_2u(0,1,x_3) + (1-x_1)x_2u(1,0,x_3) \\
 &+ (x_1x_2u(1,1,x_3) + (1-x_1)(1-x_3)u(0,x_2,0) + (1-x_1)x_3u(0,x_2,1) \\
 &+ x_1(1-x_3)u(1,x_2,0) + x_1x_3u(1,x_2,1) + (1-x_2)(1-x_3)u(x_1,0,0) \\
 &+ (1-x_2)x_3u(x_1,0,1) + x_2(1-x_3)u(x_1,1,0) + x_2x_3u(x_1,1,1) - 2P_m[u] \\
 &+ \int_0^1 \int_0^1 k(x_1, y_1)k(x_2, y_2) \frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} u(y_1, y_2, x_3) dy_1 dy_2 + \\
 &+ \int_0^1 \int_0^1 k(x_1, y_1)k(x_3, y_3) \frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial x_3^2} u(y_1, x_2, y_3) dy_1 dy_3 \\
 &+ \int_0^1 \int_0^1 k(x_2, y_2)k(x_3, y_3) \frac{\partial^4}{\partial x_2^2 \partial x_3^2} u(x_1, y_2, y_3) dy_2 dy_3 \\
 &+ 2 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 k(x_1, y_1)k(x_2, y_2)k(x_3, y_3) \frac{\partial^6}{\partial x_1^2 \partial x_2^2 \partial x_3^2} u(y_1, y_2, y_3) dy_1 dy_2 dy_3
 \end{aligned}$$

Notons  $P$  l'interpolé fourni par cet interpolé.

Pour tout  $p \in P^3$

$$P[p] = p .$$

Seule la première identité donne un élément, qui est l'élément de type Lagrange classique.

A l'aide des deux autres, on peut construire d'autres éléments finis en interpolant la fonction  $u$  sur les faces et les arêtes du cube. Nous ne le ferons qu'avec l'égalité (iii) (les formules obtenues à l'aide (ii) comportant trop de points).



Pour  $g \in C^3([0,1])$  on a , pour  $t \in [0,1]$  :

$$g(t) = 2(t - \frac{1}{2})(t-1)g(0) - 4t(t-1)g(\frac{1}{2}) + 2t(t - \frac{1}{2})g(1) \\ + \int_0^1 h(t,s) \frac{d^3}{ds^3} g(s)ds$$

où h est le "noyau" associé à l'interpolation de Lagrange basée en  $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$ .

Alors si  $u \in C^{3,3,3}([0,1]^3)$ , on peut interpoler u par :

$$\begin{aligned} & 2 (1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)(\frac{1}{2} - x_1 - x_2 - x_3) u(0,0,0) \\ + & 2 x_1 (1-x_2)(1-x_3)(x_1 - x_2 - x_3 - \frac{1}{2}) u(1,0,0) \\ + & 2 (1-x_1) x_2 (1-x_3)(x_2 - x_1 - x_2 - \frac{1}{2}) u(0,1,0) \\ + & 2 (1-x_1)(1-x_3) x_3 (x_3 - x_1 - x_2 - \frac{1}{2}) u(0,0,1) \\ + & 2 x_1 x_2 (1-x_3)(x_1 + x_2 - x_3 - \frac{3}{2}) u(1,1,0) \\ + & 2 x_1 (1-x_2) x_3 (x_1 + x_3 - x_2 - \frac{3}{2}) u(1,0,1) \\ + & 2 (1-x_1) x_2 x_3 (x_2 + x_3 - x_1 - \frac{3}{2}) u(0,1,1) \\ + & 2 x_1 x_2 x_3 (x_1 + x_2 + x_3 - \frac{5}{2}) u(1,1,1) \\ + & 4 (1-x_2)(1-x_3) x_1(1-x_1) u(\frac{1}{2},0,0) \\ + & 4 (1-x_1)(1-x_3) x_2(1-x_2) u(0,\frac{1}{2},0) \\ + & 4 (1-x_1)(1-x_2) x_3(1-x_3) u(0,0,\frac{1}{2}) \\ + & 4 x_1 (1-x_3) x_2(1-x_2) u(1,\frac{1}{2},0) \\ + & 4 (1-x_1) x_2 x_3(1-x_3) u(0,1,\frac{1}{2}) \\ + & 4 (1-x_2) x_3 x_1(1-x_1) u(\frac{1}{2},0,1) \\ + & 4 x_1 (1-x_2) x_3(1-x_3) u(1,0,\frac{1}{2}) \\ + & 4 (1-x_1) x_3 x_2(1-x_2) u(0,\frac{1}{2},1) \\ + & 4 x_2 (1-x_2) x_1(1-x_1) u(\frac{1}{2},1,0) \\ + & 4 x_1 x_2 x_3(1-x_3) u(1,1,\frac{1}{2}) \\ + & 4 x_1 x_2 x_2(1-x_2) u(1,\frac{1}{2},1) \\ + & 4 x_2 x_3 x_1(1-x_1) u(\frac{1}{2},1,1) \end{aligned}$$

On vérifiera facilement que ce procédé d'interpolation laisse invariant les polynomes de  $P^3$  .

De la même façon, on peut construire l'analogue dans  $\mathbb{R}^3$  du rectangle d'Adini (cf. paragraphe III) en interpolant dans (iii) la fonction sur chaque arête par le procédé de Hermite basé à deux points. Un tel élément nécessite la connaissance de  $u$  et de ses dérivées partielles premières aux sommets du cube. Il laisse invariant les polynômes de  $P^3$ . Il assure un raccord continu ( $C^0$ ).

On pourrait aussi construire un élément qui assure le raccord des dérivées partielles sur les faces du cube comme (paragraphe III ; 5), mais cet élément ne laisse encore invariant que les polynômes  $P^1$ .

3)

Le procédé d'interpolation dans  $\mathbb{R}^3$  correspondant à l'étude du paragraphe III.6 peut être étudié par la même méthode en utilisant

$$P_m = \mathcal{T}_1 \circ \mathcal{T}_2 \circ \mathcal{T}_3$$

où  $\mathcal{T}_i$  est construit par les résultats du chapitre I, paragraphe II.

V - QUELQUES AUTRES PROCÉDES D'INTERPOLATION SUR  $[0,1]^2$  OU  $[0,1]^3$

A l'aide des procédés décrits dans les paragraphes précédents, on peut construire quelques éléments finis utiles dans les méthodes non conformes.

Pour cela, on peut utiliser l'identité (ii) de III.3. Nous donnerons une méthode directe.

Sur  $g \in C^1([0,1])$  on considère l'identité :

$$g(x) = g\left(\frac{1}{2}\right) + \int_{\frac{1}{2}}^x g'(s) ds$$

soit

$$g = \pi g + Rg .$$

$\alpha)$  Posons  $\pi_1 = \pi_2 = \pi$

On construit alors

$$\mathbb{P}_1 = \pi_1 \otimes \text{Id} \quad \mathbb{P}_2 = \text{Id} \otimes \pi_2 \quad \text{comme en (II)}.$$

On a alors :

$$I = \mathbb{P}_1 + \mathbb{P}_2 - \mathbb{P}_1 \circ \mathbb{P}_2 + \mathbb{P}_1 \circ \mathbb{P}_2$$

et pour  $u \in C^{1,1}([0,1]^2)$  :

$$u(x_1, x_2) = u\left(\frac{1}{2}, x_2\right) + u\left(x_1, \frac{1}{2}\right) - u\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) + \int_{\frac{1}{2}}^{x_1} \int_{\frac{1}{2}}^{x_2} \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} u(s, t) ds dt .$$

En interpolant linéairement  $u\left(\frac{1}{2}, x_2\right)$  (resp.  $u\left(x_1, \frac{1}{2}\right)$ ) et en exprimant  $u\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$  en fonction de  $u\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ ,  $u\left(\frac{1}{2}, 1\right)$  et  $u\left(0, \frac{1}{2}\right)$ ,  $u\left(1, \frac{1}{2}\right)$  on obtient, pour  $u \in C^{2,2}([0,1]^2)$  :

$$\begin{aligned}
 u(x, x_2) = & \left[ \left( \frac{3}{4} - x_2 \right) u\left(\frac{1}{2}, 0\right) + \left( x_2 - \frac{1}{4} \right) u\left(\frac{1}{2}, 1\right) \right. \\
 & + \left. \left( \frac{3}{4} - x_1 \right) u\left(0, \frac{1}{2}\right) + \left( x_1 - \frac{1}{4} \right) u\left(1, \frac{1}{2}\right) \right] \\
 & + \left[ \int_{\frac{1}{2}}^{x_1} \int_{\frac{1}{2}}^{x_2} \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} u(s, t) ds dt - \frac{1}{2} \int_0^1 k(x_1, s) \frac{\partial^2}{\partial s^2} u(s, x_2) ds \right. \\
 & \left. - \frac{1}{2} \int_0^1 k(x_2, t) \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x_1, t) dt \right]
 \end{aligned}$$

où  $k(.,.)$  est le "noyau" du reste de l'interpolation de Lagrange aux deux points 0 et 1 (cf. Chapitre I, paragraphe III).

Il est important de remarquer que ceci ne fournit pas un procédé d'interpolation. Néanmoins, si on note  $T$  l'opérateur, linéaire, qui à  $u \in C^{2,2}([0,1]^2)$  associe le premier crochet dans l'identité précédente,  $T$  laisse invariant les polynômes de  $P^1$ .

Par contre,  $T$  laisse bien un projecteur (et alors on a bien un procédé d'interpolation) pour les fonctions de  $C^{2,2}([0,1]^2)$  qui vérifient la relation :

$$u\left(\frac{1}{2}, 0\right) + u\left(\frac{1}{2}, 1\right) = u\left(0, \frac{1}{2}\right) + u\left(1, \frac{1}{2}\right)$$

Ceci se vérifie directement en calculant  $T \circ \Pi[u]$ .

β) Posons  $\pi_1 = \pi_2 = \pi_3 = \pi$

et soient  $\mathbb{P}_1 = \pi_1 \otimes \text{Id} \otimes \text{Id}$

$\mathbb{P}_2 = \text{Id} \otimes \pi_2 \otimes \text{Id}$

$\mathbb{P}_3 = \text{Id} \otimes \text{Id} \otimes \pi_3$

On considère, avec les notations de (IV) :

$$I = \mathbb{1}_1 \circ \mathbb{1}_2 + \mathbb{1}_1 \circ \mathbb{1}_3 + \mathbb{1}_2 \circ \mathbb{1}_3 - \mathbb{1}_1 \circ \mathbb{1}_2 \circ \mathbb{1}_3 + R$$

$$I = \mathbb{1}_1 + \mathbb{1}_2 + \mathbb{1}_3 - \mathbb{1}_1 \circ \mathbb{1}_2 - \mathbb{1}_1 \circ \mathbb{1}_3 - \mathbb{1}_2 \circ \mathbb{1}_3 + \mathbb{1}_1 \circ \mathbb{1}_2 \circ \mathbb{1}_3 + R_M$$

Utilisant la première identité et en procédant comme en (α) ; pour  $u \in C^{2,2,2}([0,1]^3)$  :

$$\begin{aligned} u(x_1, x_2, x_3) &= u\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, x_3\right) + u\left(\frac{1}{2}, x_2, \frac{1}{2}\right) + u\left(x_1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) - u\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) + R[u](x_1, x_2, x_3) \\ &= \left[\left(\frac{5}{6} - x_3\right) u\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) + \left(x_3 - \frac{1}{6}\right) u\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)\right] \\ &\quad + \left[\left(\frac{5}{6} - x_2\right) u\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right) + \left(x_2 - \frac{1}{6}\right) u\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right)\right] \\ &\quad + \left[\left(\frac{5}{6} - x_1\right) u\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) + \left(x_1 - \frac{1}{6}\right) u\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right] \\ &\quad - \frac{1}{3} \int_0^1 k(x_1, y_1) \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} u(y_1, x_2, x_3) dy_1 - \frac{1}{3} \int_0^1 k(x_2, y_2) \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} u(x_1, y_2, x_3) dy_2 \\ &\quad - \frac{1}{3} \int_0^1 k(x_3, y_3) \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} u(x_1, x_2, y_3) dy_3 + \int_{\frac{1}{2}}^{x_1} \int_{\frac{1}{2}}^{x_2} \int_{\frac{1}{2}}^{x_3} \frac{\partial^3}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3} u(y_1, y_2, y_3) dy_1 dy_2 dy_3 \end{aligned}$$

Si T est l'opérateur qui, à u fait correspondre l'expression entre crochets, on a encore que T laisse invariant les polynômes de  $P^1$  et les fonctions de  $C^{2,2,2}$  vérifiant :

$$2\left(u\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) + u\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)\right) = u\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) + u\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) + u\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right) + u\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right)$$

et

$$2\left(u\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) + u\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right) = u\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) + u\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right) + u\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right) + u\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right)$$

En utilisant la seconde identité, on peut interpolier la fonction u sur les faces et les arêtes du cube, mais on ne peut pas obtenir un opérateur laissant invariant les polynômes de  $P^2$  sans "conserver" la valeur du point  $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ .

### CHAPITRE III

#### PROCEDES D'INTERPOLATION SUR DES SIMPLEXES DE $\mathbb{R}^n$ ( $n=2,3$ )

Nous avons vu dans le chapitre précédent, l'intérêt que présente la théorie des projecteurs de Gordon pour construire et étudier les procédés d'interpolation "rectangles".

Nous voulions établir une théorie analogue pour l'étude de procédés d'interpolation sur des simplexes.

La construction de procédés ponctuels est réalisée d'habitude (ZIENCKIEWICZ [13], CIARLET-RAVIART [3a], [3b], RAVIART [12]), par l'introduction des coordonnées barycentriques. On construit alors des procédés avec des valeurs nodales intérieures au simplexe et on élimine celles-ci en diminuant la dimension de l'espace invariant (par l'introduction de relations linéaires sur les polynomes de cet espace).

Pour fixer les idées, plaçons-nous dans  $\mathbb{R}^2$ , c'est-à-dire le cas du triangle. La géométrie du problème semble alors impliquer l'utilisation de trois projecteurs mais alors, on ne sait pas trouver trois projecteurs pour lesquels l'opération " $\circ$ " (chapitre II, paragraphe I) soit associative et commutative, condition nécessaire pour la construction d'un treillis (chapitre II, paragraphe I).

On est alors amené à considérer trois couples de projecteurs et d'en faire une somme pondérée.

Après avoir fixé les notations au paragraphe I, on introduit, au second quantre familles de procédés d'interpolation sur le triangle :

- Dans le cas des deux premières familles, on sait expliciter des restes, mais ces procédés ne semblent pas laisser invariants des espaces de polynomes de degré élevé. Elles semblent utile pour la représentation de surfaces.

- Dans le cas des autres familles on ne sait pas expliciter des restes mais laisse invariant des polynomes de degré plus élevés que précédemment. On trouve comme cas particulier un procédé introduit par BARHNILL, BIRKHOFF, GORDON [1] de façon différente.

Au paragraphe III, on explicite des exemples.

Le paragraphe IV présente la méthode pour généraliser ces résultats au cas du tétraèdre sans expliciter d'exemples.

I. SYSTEMES DE COORDONNEES RELATIFS A UN SIMPLEXE

Soit  $\mathbb{R}^n$ . Un point  $x$  de  $\mathbb{R}^n$  aura pour coordonnées cartésiennes  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . On notera  $O$  l'origine des coordonnées cartésiennes.

Soient  $O_1, \dots, O_{n+1}$  des points de  $\mathbb{R}^n$  de coordonnées

$$(O_{1,i})_{i=1}^{i=n}, \dots, (O_{n+1,i})_{i=1}^{i=n}$$

tels que

$$\text{la matrice } A = \begin{bmatrix} O_{11} & O_{21} & \dots & O_{n+1 1} \\ O_{12} & O_{22} & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ O_{1n} & O_{2n} & \dots & O_{n+1 n} \\ 1 & 1 & & 1 \end{bmatrix} \quad \text{soit inversible}$$

Alors pour tout point  $x$  de  $\mathbb{R}^n$  on définit ses coordonnées barycentriques  $\lambda_i = \lambda_i(x)$  ( $i, 1 \leq i \leq n+1$ ) par :

$$x = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i(x) O_i$$

$$) 1 = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i(x)$$

Autrement dit le système des  $\lambda_i$  est solution de :

$$A(\lambda_i) = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{bmatrix}$$



L'enveloppe convexe fermée des  $\{O_i\}_{i=1}^{n+1}$  est dite n-simplexe. Autrement dit, c'est l'ensemble des points  $x$  tels que :

$$\forall i \quad 1 \leq i \leq n+1 \quad 0 \leq \lambda_i(x) \leq 1 .$$

On sera amené à considérer d'autres systèmes de coordonnées. Soit  $M$  un point de  $\mathbb{R}^n$  alors, pour chaque  $i$  ( $i=1, \dots, n+1$ ) .

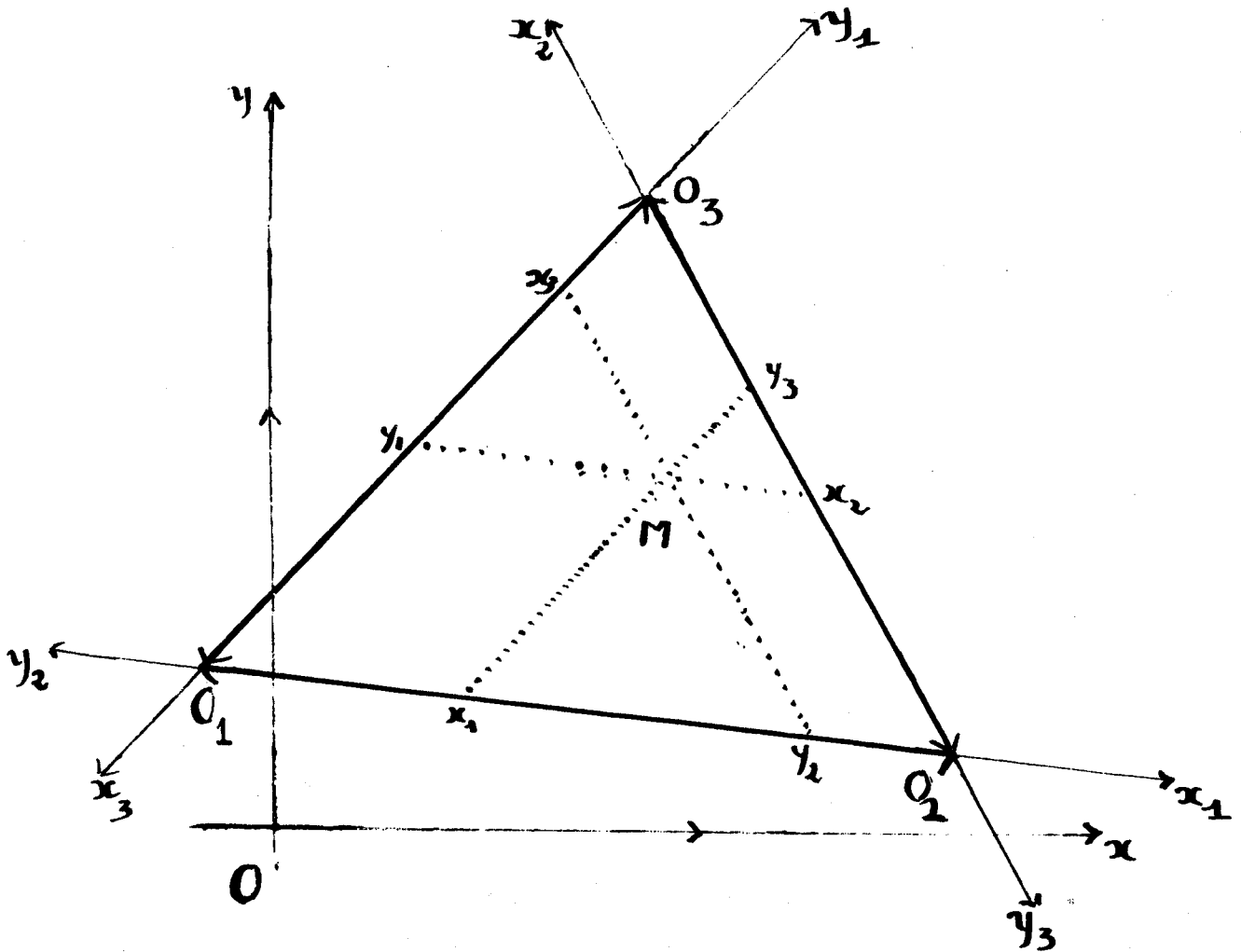
$$\vec{O}_M = \vec{O}_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+1} x_{ij} \vec{O}_j$$

où les  $x_{ij}$  sont solutions du système :

$$x_k = 0_{ik} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+1} x_{ij} (0_{jk} - 0_{ik}) \quad k=1, \dots, n .$$

Cela revient à considérer  $n+1$  repères d'origine un sommet du simplexe, d'axes portés par les arêtes aboutissant à ce sommet et de vecteur unitaire l'arête.

Précisons dans le cas  $n = 2$  :



un point du triangle T pourra être représenté par :

. coordonnées cartésiennes  $(x, y)$

. coordonnées  $O_1 x_1 y_1$   $(x_1, y_1)$  de vecteurs unitaires  $\overrightarrow{O_1 O_2}$ ,  $\overrightarrow{O_1 O_3}$

. coordonnées  $O_2 x_2 y_2$   $(x_2, y_2)$  de vecteurs unitaires  $\overrightarrow{O_2 O_3}$ ,  $\overrightarrow{O_2 O_1}$

. coordonnées  $O_3 x_3 y_3$   $(x_3, y_3)$  de vecteurs unitaires  $\overrightarrow{O_3 O_1}$ ,  $\overrightarrow{O_3 O_2}$

. coordonnées barycentriques  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$

On pourra remarquer que :

$$\begin{aligned}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) &= (1-x_1-y_1, x_1, y_1) \\ &= (x_3, y_3, 1-x_3-y_3) \\ &= (y_2, 1-x_2-y_2, x_2)\end{aligned}$$

On notera d'autre part, pour un point  $M = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  :

$T_i(M)$  l'ensemble des points  $N = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)$  de  $T$  tels que, pour  $j \neq i$ ,  $\mu_j \leq \lambda_j$ . (Quand il n'y aura pas ambiguïté on notera  $T_i$ ).

Un sommet  $O_i$  du triangle  $T$  aura pour coordonnées dans  $Oxy$  :

Soit  $i$ ,  $i=1,2,3$  et  $M$  un point de coordonnées  $(x_i, y_i)$  dans le repère  $O_i x_i y_i$ .

Alors :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_{ix} \\ 0_{iy} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0_{jx} - 0_{ix} & 0_{jy} - 0_{iy} \\ 0_{kx} - 0_{ix} & 0_{ky} - 0_{iy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}$$

où  $(i,j;k) = (1,2,3)$  à une permutation circulaire près.

Si  $M$  est donnée par ses coordonnées barycentriques :

$$M = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$$

alors :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_{1x} & 0_{2x} & 0_{3x} \\ 0_{1y} & 0_{2y} & 0_{3y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}$$

Si M est donné par ses coordonnées cartésiennes :

$$M = (x, y) :$$

$$\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} = A_i^{-1} \begin{pmatrix} x - 0_{ix} \\ y - 0_{iy} \end{pmatrix} \quad i=1,2,3$$

où  $(i, j, k) = (1, 2, 3)$

$$A_i = \begin{pmatrix} 0_{jx} & -0_{ix} & 0_{jy} & -0_{iy} \\ 0_{kx} & -0_{ix} & 0_{ky} & -0_{iy} \end{pmatrix}$$

$$A_i^{-1} = \frac{1}{\sin \theta_i} \begin{pmatrix} 0_{ky} & -0_{iy} & 0_{iy} & -0_{jy} \\ 0_{ix} & -0_{kx} & 0_{jx} & -0_{ix} \end{pmatrix}$$

où  $\theta_i$  est l'angle  $0_j 0_i 0_k$ .

$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$  sont obtenus comme solution du système

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_{1x} & 0_{2x} & 0_{3x} \\ 0_{1y} & 0_{2y} & 0_{3y} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}$$

ce qui donne pour solution :

$$\lambda_1 = \frac{1}{\det A} [(0_{2y} - 0_{3y})x + (0_{3x} - 0_{2x})y + 0_{2x}0_{3y} - 0_{3x}0_{2y}]$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{\det A} [(0_{3y} - 0_{1y})x + (0_{1x} - 0_{3x})y + (0_{1y}0_{3x} - 0_{1x}0_{3y})]$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{\det A} [(0_{1y} - 0_{2y})x + (0_{2x} - 0_{1x})y + (0_{1x}0_{2y} - 0_{1y}0_{2x})]$$

Or

$$A = \begin{pmatrix} 0_{1x} & 0_{2x} & 0_{3x} \\ 0_{1y} & 0_{2y} & 0_{3y} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

d'où :

$$\det A = \begin{vmatrix} 0_{1x} - 0_{3x} & 0_{2x} - 0_{3x} & 0_{3x} \\ 0_{1y} - 0_{3y} & 0_{2y} - 0_{3y} & 0_{3y} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = |0_1 0_3| |0_2 0_3| \sin \theta_3$$

d'où :

$$\begin{aligned} \det A &= |0_1 0_3| |0_2 0_3| \sin \theta_3 = |0_1 0_2| |0_3 0_2| \sin \theta_2 \\ &= |0_2 0_1| |0_3 0_1| \sin \theta_1 \end{aligned}$$

si  $|A.B|$  désigne la longueur de AB.

Considérons une fonction  $u$ , à valeurs réelles, et définie sur  $T$

$$u : T \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x,y) \in T \rightarrow u(x,y)$$

Alors nous définissons les quatre fonction :

$$u(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = u(x,y)$$

$$\text{où } (x,y) \simeq M \simeq (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$$

$$i = 1, 2, 3$$

$$u_i(x_i, y_i) = u(x,y) \quad \text{où } (x_i, y_i) \simeq M \simeq (x,y)$$

## II - PROCÉDES D'INTERPOLATION SUR UN TRIANGLE - GENERALITES

On désignera par  $T$  un triangle quelconque (non dégénéré) du plan  $\mathbb{R}$ .

### II.1. PROCÉDES DE BASE

Soit  $u$  une fonction définie sur  $T$  et suffisamment régulière, (afin que toutes les quantités introduites aient un sens). Notons bien que  $u$  est l'expression de la fonction considérées dans le repère cartésien.

Soient alors  $(P_{x_i}, P_{y_i})_{i=1,2,3}$  une famille de trois couples de procédés d'interpolation sur  $[0,1]$  de support  $0$ , (cette dernière hypothèse est capitale ! ) (définition chapitre I, §0).

Pour  $i=1,2,3$ , considérons la représentation  $u_i$  de  $u$  dans le repère  $O_i x_i y_i$ . Alors, avec les notations du chapitre II, paragraphe 0,I :

$$\begin{aligned} \cdot P_{x_i} \circ P_{y_i}[u_i](x_i, y_i) &= P_{x_i} \otimes P_{y_i}[u_i](x_i, y_i) \\ \cdot P_{x_i} \otimes P_{y_i}[x_i, y_i] &= P_{x_i} \otimes \text{Id}_{y_i}[u_i](x_i, y_i) + \text{Id}_{x_i} \otimes P_{y_i}[u_i](x_i, y_i) \\ &\quad - P_{x_i} \otimes P_{y_i}[u_i](x_i, y_i) . \end{aligned}$$

Si on note  $P_i$  l'un ou l'autre de ces procédés pour chaque  $i$  ( $i=1,2,3$ ), et  $R_i$  le reste correspondant nous aurons donc :

$$u_i \equiv P_i u_i + R_i u_i \quad i=1,2,3$$

Soient alors trois fonctions  $\varphi_i$  définies sur le triangle  $T$

$$\boxed{\sum_i \varphi_i u_i = \sum_i \varphi_i P_i u_i + \sum_i \varphi_i R_i u_i}$$

Cette inégalité (triviale !) va nous permettre d'obtenir, en précisant le choix des fonctions  $\varphi_i$ , des formules d'interpolation.

Nous supposons toujours  $\sum_i \varphi_i(M) \neq 0$  pour tout  $M$  de  $T$ .

On peut alors proposer :

$$u(M) = \sum_i \frac{\varphi_i(M)}{\sum_j \varphi_j(M)} P_i u_i(M) + \sum_i \frac{\varphi_i(M)}{\sum_j \varphi_j(M)} R_i u_i(M) .$$

Supposons d'autre part que  $\sum_i \varphi_i(M) = C^{te}$  pour tout  $M$  de la frontière de  $T$  :

Soit alors 
$$Pu(M) = \frac{1}{C^{te}} \sum_i \varphi_i(M) P_i u_i(M)$$

d'où :

$$u(M) = Pu(M) + \sum_i \frac{\varphi_i(M)}{\sum_j \varphi_j(M)} R_i (u - Pu)(M) .$$

En raison des propriétés des projecteurs  $P_i$ ,  $Pu$  ne dépend que des valeurs de  $u$  ou de ses dérivées partielles sur la frontière de  $T$ .

### II.1.1. Construction d'une première famille :

On prend  $P_{x_i} = P_{y_i}$  pour tout  $i=1,2,3$  où  $P$  est, pour  $n$  donné, le procédé d'interpolation :

$$u(x) = Pu(x) + Ru(x) = \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} x^i u^{(i)}(0) + \frac{1}{i!} \int_0^x (x-s)^n u^{(n+1)}(s) ds$$

Soit d'autre part  $\varphi$  une fonction définie sur  $[0,1]$  telle que

$$\varphi(0) = 0$$

$$\varphi(1) = 1$$

$$\varphi^{(k)}(0) = \varphi^{(k)}(1) = 0$$

$$0 < k \leq 2n$$

On prendra pour  $\varphi$  le polynome de degré minimal vérifiant ces contraintes. Pour  $i=1,2,3$  et  $M = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ , on pose :

$$\varphi_i(M) = \varphi(\lambda_i) .$$

Il est aisé de vérifier que  $\sum_i \varphi_i(M) \neq 0$  pour tout  $M$  de  $T$ .

LEMME a :

$$\text{Si } M \text{ est sur la frontière de } T, \quad \sum_{i=1}^3 \varphi_i(M) = 1$$

En effet si  $M$  est sur  $\partial T$ , l'un des  $\lambda_i$  est nul et il suffit de constater que  $\varphi(x) + \varphi(1-x) = 1$  en raison de la symétrie du graphe de  $\varphi$  par rapport au point  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ .

—————x

LEMME b :

Pour  $j=1,2,3$  et  $i=1,2,3$  et  $0 < k + \ell \leq 2n$  :

$$\frac{\partial^{k+\ell}}{\partial x_i^k \partial y_i^\ell} \varphi_j(M) = 0$$

où  $M = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  est tel que  $\lambda_j = 0$

On rappelle que  $(x_i, y_i)$  désigne les coordonnées de  $M$  dans le repère  $O_i x_i y_i$ .

. Supposons  $i \neq j$

alors si  $M = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  on a :

$$\text{soit } \varphi_j(M) = \varphi(x_i) \quad \text{soit} \quad \varphi_j(M) = \varphi(y_i) .$$



Si on considère le premier cas (le deuxième se traite de la même façon), on a :  $x_i = \lambda_j$ .

Autrement dit, si  $M$  est tel que  $\lambda_j = 0$ ,  $x_i = 0$  et d'après l'hypothèse sur les dérivées de  $\varphi$  en  $0$ , on a bien la propriété énoncée.

Supposons maintenant  $i=j$ .

$$\text{alors } \varphi_j(M) = \varphi(1-x_i-y_i)$$

$$\frac{\partial^{k+l}}{\partial x_i^k \partial y_i^l} \varphi_i(M) = (-1)^{k+l} \varphi^{(k+l)}(1-x_i-y_i)$$

Si  $M$  est tel que  $\lambda_i = 0$  ou  $\lambda_i = 1$ , ceci correspond à  $x_i + y_i = 1$  ou  $x_i + y_i = 0$ , d'où le lemme.

-----X

LEMME c :

Pour  $(i,j,k)$  égal à  $(1,2,3)$  à une permutation circulaire près, et  $0 < l \leq n$ , pour tout  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  tel que  $\lambda_j = 0$  ou  $\lambda_k = 0$

$$\frac{\partial^l}{\partial x_j^l} \varphi_i(M) = \frac{\partial^l}{\partial y_k^l} \varphi_i(M) = 0$$

C'est immédiat.

-----X

Considérons maintenant les fonctions, définies sur le triangle  $T$  par :

$$\psi_i(M) = \frac{\varphi_i(M)}{\sum_j \varphi_j(M)} \quad i=1,2,3 .$$

LEMME d :

Pour  $i=1,2,3$  :  $\Psi_i(M)$  est bien définie sur T

- si  $M = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$   $\Psi_i(M) = 0$  pour tout M tel que  $\lambda_i = 0$

$\Psi_i(M) = 1$  pour M tel que  $\lambda_i = 1$

- si  $M = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  est tel que  $\lambda_i = 0$

$$\frac{\partial^{k+l}}{\partial x_j^k \partial y_j^l} \Psi_i(\ ) = 0 \quad \text{pour } j \neq i, \text{ et } k+l \leq 2n$$

- si  $M = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  est tel que  $\lambda_i = 0$

$$\frac{\partial^{k+l}}{\partial x_j^k \partial y_j^l} [\Psi_j(M) + \Psi_k(M)] = 0 \text{ pour } j \text{ et } k \text{ différents de } i, \\ 0 < k + l \leq 2n.$$

DEMONSTRATION :

Remarquons tout d'abord que :

• les fonctions  $\Psi_i$  sont bien définies puisque  $\sum_j \varphi_j(M) > 0$

- Immédiat.

- D'après la formule de Leibniz

$$\frac{\partial^{k+l}}{\partial x_j^k \partial y_j^l} \Psi_i(M) = \sum_{\substack{m \leq k \\ p \leq l}} C_{m,p}^{k,l} \frac{\partial^{m+p}}{\partial x_j^m \partial y_j^p} \varphi_i(M) \frac{\partial^{k+l-m-p}}{\partial x_i^{k-m} \partial y_i^{l-p}} \frac{1}{\sum_g \varphi_g(M)}$$

où  $C_{m,p}^{k,l}$  désigne une constante.

Or d'après le lemme b, et le point précédent

si pour  $m+p \leq 2n$ ,  $\frac{\partial^{m+p}}{\partial x_j^m \partial y_j^p} \varphi_i(M) = 0$ , ceci est vérifié tant que  $k + \ell \leq 2n$ .

D'où le troisième point.

. Ceci est immédiat d'après ce qui précède et le fait que

$$\sum_i \Psi_i(M) = 1 \text{ pour tout } M \text{ dans } T.$$

—————x

$$\begin{aligned} \text{Posons } P_i &= P_{x_i} \otimes P_{y_i} = P_{x_i} \circ P_{y_i} \\ \tilde{P}_i &= P_{x_i} \otimes I_{y_i} + I_{x_i} \otimes P_{y_i} - P_{x_i} \otimes P_{y_i} \\ &= P_{x_i} \oplus P_{y_i} \end{aligned}$$

THEOREME II.1.1.

Les opérateurs :

$$P = \sum_{i=1}^3 \Psi_i(M) P_i \quad (\text{de support les sommets de } T)$$

et

$$\tilde{P} = \sum_{i=1}^3 \Psi_i(M) \tilde{P}_i \quad (\text{de support la frontière de } T)$$

sont, avec les définitions précédentes des projecteurs.

DEMONSTRATION :

- Il est immédiat que  $P$  et  $\tilde{P}$  sont linéaires.

- Considérons  $P$  et étudions :

$$P_i P = \sum_{j=1}^3 P_i (\Psi_j(M) \cdot P_j)$$

D'après les définitions, pour une fonction  $u$  définie sur le triangle, suffisamment régulière :  $u \in C^{2n}(\bar{T})$ , on a :

$$P_i (\Psi_j(M) P_j) u = \sum_{k, \ell=1}^n \frac{1}{\ell! k!} x_i^k y_i^\ell \left[ \frac{\partial^{k+\ell}}{\partial x_i^k \partial y_i^\ell} \Psi_j(x_i, y_i) P_j u(x_i, y_i) \right] \Big|_{(0,0)}$$

Or, d'après le lemme d, et la formule de Leibniz :

$$\frac{\partial^{k+\ell}}{\partial x_i^k \partial y_i^\ell} [\Psi_j(x_i, y_i) P_j u(x_i, y_i)] \Big|_{(0,0)} = (\Psi_j(x_i, y_i)) \frac{\partial^{k+\ell}}{\partial x_i^k \partial y_i^\ell} P_j u(x_i, y_i) \Big|_{(0,0)}$$

et deux cas sont à considérer :

- soit  $i=j$  et dans ce cas :

$$\Psi_j(0,0) = 1 \text{ et } \frac{\partial^{k+\ell}}{\partial x_i^k \partial y_i^\ell} P_i u(0,0) = \frac{\partial^{k+\ell}}{\partial x_i^k \partial y_i^\ell} u(0,0)$$

- soit  $i \neq j$  et dans ce cas :

$$\Psi_j(0,0) = 0 .$$

et finalement  $P_i P = P_i$

d'où :

$$P P = P$$

est bien un projecteur.

- Considérons  $\tilde{P}$ .

On remarque que pour démontrer la propriété, il suffit de vérifier :

(α) pour  $M = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  tel que  $\lambda_i = 0$  pour un  $i = 1, 2, 3$ .

$$(\alpha.1) \quad Pu(M) = u(M)$$

$$(\alpha.2) \quad \frac{\partial^\ell}{\partial y_k^\ell} Pu(M) = \frac{\partial^\ell}{\partial y_k^\ell} u(M) \quad \text{où } k = 2 \text{ ou } 3 \text{ ou } 1 \\ \text{si } i = 1, 2, 3 \text{ et } 0 < \ell \leq n.$$

( $\beta$ ) pour  $i = 1, 2, 3$ .

$$\frac{\partial^{\ell+m}}{\partial x_i^\ell \partial y_i^m} \tilde{P}u(0_i) = \frac{\partial^{\ell+m}}{\partial x_i^\ell \partial y_i^m} u(0_i) \quad \text{pour } 0 < \ell + m \leq 2n$$

Montrons ( $\alpha$ ) :

( $\alpha_1$ ) est évident puisque  $\tilde{P}_j u(M) = u(M)$  pour  $j \neq i$ ,  $\Psi_i(M) = 0$   
et  $\sum_j \Psi_j(M) = 1$ .

( $\alpha_2$ ) D'après le lemme d, et la formule de Leibniz

$$\frac{\partial^\ell}{\partial y_k^\ell} [\varphi_i(M) \tilde{P}_i u(M)] = 0$$

D'après la formule de Leibniz et la définition de  $\tilde{P}_j$ , pour  $j \neq i$

$$\frac{\partial^\ell}{\partial y_k^\ell} [\varphi_j(M) \tilde{P}_j u(M)] = \frac{\partial^\ell}{\partial y_k^\ell} u(M)$$

Au total, d'après la dernière partie du lemme d, et ce qui précède :

$$\frac{\partial^\ell}{\partial y_k^\ell} \tilde{P}u = \sum_{j \neq i} \frac{\partial^\ell}{\partial y_k^\ell} (\varphi_j(M) \tilde{P}_j u(M)) = \frac{\partial^\ell}{\partial y_k^\ell} u(M).$$

La partie ( $\beta$ ) se démontre comme la précédente.

REMARQUES 2.1.1.2.

1) On peut montrer que l'opérateur  $\sum_i \varphi_i(M)P_i$  est un projecteur.

Malheureusement, même les constantes ne sont pas invariantes

du fait que  $\sum_{i=1}^3 \varphi_i(M) \neq 1$  à l'intérieur de T.

2) Il est facile de voir que les conditions sur  $\varphi$  sont trop fortes.

On peut se contenter d'imposer, les résultats des lemmes (b) et (c) restant valables :

$$\varphi(0) = 0 \quad \varphi(1) = 1 \quad \text{et} \quad \varphi^{(k)}(0) = 0 \quad 0 < k \leq 2n .$$

Ceci pourra nous permettre d'utiliser comme fonction  $\varphi$  :

$$\varphi(t) = t^{2n+1} \text{ par exemple.}$$

—————x—————

On appellera  $R_i$  (resp.  $\tilde{R}_i$ ) les restes relatifs aux opérateurs  $R_i$  (resp.  $\tilde{R}_i$ ) .

THEOREME 2.1.1.3.

Soit  $u \in C^{2n+2}(\bar{T})$  et soit  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (x_i, y_i)$ . Alors :

$$\begin{aligned} u(M) &= u(M) - Pu(M) = \sum_i \Psi_i(M) R_i u(M) \\ &= \sum_i \Psi_i(M) \left[ \frac{1}{n!} \int_0^{x_i} (x_i-s)^n \frac{\partial^{n+1}}{\partial s^{n+1}} u_i(s, y_i) ds \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{n!} \int_0^{y_i} (y_i-t)^n \frac{\partial^{n+1}}{\partial t^{n+1}} u_i(x_i, t) dt \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{n!n!} \int_0^{x_i} \int_0^{y_i} (x_i-s)^n (y_i-t)^n \frac{\partial^{2n+2}}{\partial s^{n+1} \partial t^{n+1}} u_i(s, t) ds dt \right] \\ \tilde{R}u(M) &= u(M) - \tilde{P}u(M) = \sum_i \Psi_i(M) \tilde{R}_i u(M) \\ &= \sum_i \Psi_i(M) \frac{1}{n!n!} \int_0^{x_i} \int_0^{y_i} (x_i-s)^n (y_i-t)^n \frac{\partial^{2n+2}}{\partial s^{n+1} \partial t^{n+1}} u_i(s, t) ds dt \end{aligned}$$

La démonstration est immédiate : il suffit d'appliquer les définitions et résultats du chapitre II, paragraphe II et III.

)

————— x —————

COROLLAIRE :

Supposons  $n \geq 1$  .

L'ensemble des polynomes (en  $\lambda_i$ ) pour lesquels :

$P$  est invariant contient les polynomes  $\lambda_i^k \lambda_j^\ell$  ,  $k+\ell \leq n$  ,

$\tilde{P}$  est invariant contient les polynomes  $\lambda_i^k \lambda_j^\ell$  ,  $k+\ell \leq 2n$  .

REMARQUE :

Ce corollaire est valable pour n'importe quel choix de fonction  $\varphi$  (en particulier celui proposé dans la remarque 2.1.1.2.,(2)).

DEMONSTRATION :

Pour étudier le cas de  $P$ , il suffit d'étudier les solutions du système :

$$\frac{\partial^{n+1}}{\partial s^{n+1}} u = 0 ; \frac{\partial^{n+1}}{\partial t^{n+1}} u = 0 ; \left( \frac{\partial}{\partial s} - \frac{\partial}{\partial t} \right)^{n+1} u = 0 .$$

si  $k+l \leq n$ , on a :  $k \leq n$  et  $l \leq n$

$$\text{d'où } \frac{\partial^{n+1}}{\partial s^{n+1}} s^k t^l = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^{n+1}}{\partial t^{n+1}} s^k t^l = 0$$

d'autre part :

$$\left( \frac{\partial}{\partial s} - \frac{\partial}{\partial t} \right)^{n+1} s^k t^l = \sum_{m=0}^{n+1} A_m \frac{\partial^m}{\partial s^m} \frac{\partial^{n+1-m}}{\partial t^{n+1-m}} s^k t^l$$

on remarque alors que si  $m > k$ ,  $l \leq n-k - n-m$  d'où le résultat.

On procède de la même façon pour étudier le cas de  $\tilde{P}$ .

—————x—————

Comme on le verra plus loin, ce résultat n'est certainement pas "optimal".



II.1.2. CONSTRUCTION D'UNE SECONDE FAMILLE DE PROCÉDES.

Nous avons vu que l'utilisation de la première famille de procédés nécessitait la connaissance de dérivées "croisées" aux sommets du triangle d'ordre supérieur à l'ordre voulu.

Soit  $P_{x_i} = P_{y_i} = P$  :

$$u(x) = Pu(x) + u(x) = \sum_{i=0}^n \frac{1}{n!} x^i u^{(i)}(0) + \frac{1}{n!} \int_0^x (x-s)^n u^{(n+1)}(s) ds$$

et soit  $\varphi$  définie sur  $[0,1]$  vérifiant au moins les relations :

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= 0 & \varphi(1) &= 1 \\ \varphi^{(k)}(0) &= 0 & 0 < k \leq K & \text{ avec } K > 2n. \end{aligned}$$

On considère alors le procédé, avec les notations habituelles (2.1.1.)

$$\tilde{P} = \sum_{i=1}^3 \psi_i(M) \tilde{P}_i$$

PROPOSITON :

Etant donnée  $u$  suffisamment régulière,  $\tilde{P}u$  vérifie les propriétés :

a)  $\frac{\partial^k}{\partial \eta^k} \tilde{P}u = \frac{\partial^k}{\partial \eta^k} u$  sur la frontière du triangle où

-  $\eta$  est la dérivée normale au côté considéré

-  $0 \leq k \leq n$ .

b)  $\frac{\partial^{\ell+n}}{\partial x_i^\ell \partial y_i^n} \tilde{P}u(0_i) = \frac{\partial^{\ell+n}}{\partial x_i^\ell \partial y_i^n} u(0_i) \quad \begin{matrix} i=1,2,3 \\ 0 \leq \ell+n \leq 2n \end{matrix}$

c) Pour  $k, n < k \leq K$   $\frac{\partial^k}{\partial \eta^k} \tilde{P}u(M)$  ne dépend que des valeurs des

des dérivées de  $u$  au point  $M$  et aux sommets adjacents au côté auquel  $M$  appartient.

DEMONSTRATION :

- Les points a) et b) sont immédiats en se reportant à II.1.1.
- Pour démontrer le dernier point il suffit d'appliquer la formule de Leibnitz pour calculer :

$$\frac{\partial^k}{\partial \eta^k} \tilde{P}_u(M) = \sum_i \sum_{j=0}^k C_k^j \frac{\partial^{k-j}}{\partial \eta^{k-j}} \psi_i(M) \frac{\partial^j}{\partial \eta^j} P_i u(M)$$

et si M appartient au côté  $\lambda_{i_0} = 0$

- $\frac{\partial^{k-j}}{\partial \eta^{k-j}} \psi_{i_0}(M) = 0$  pour  $k-j \leq K$
- $\sum_{i \neq i_0} \frac{\partial^{k-j}}{\partial \eta^{k-j}} \psi_i(M) = 0$  pour  $0 \leq k-j \leq K$

et dont il suffit alors de constater que  $\frac{\partial^k}{\partial \eta^k} \tilde{P}_i u(M)$  ne dépend que des dérivées de u au point M et au point  $O_i$  :

$$\begin{aligned} \tilde{P}_i u(M) &= \sum \frac{x_i^\ell}{\ell!} \frac{\partial^\ell}{\partial x_i^\ell} u_i(0, y_i) + \sum \frac{y_i^h}{h!} \frac{\partial^h}{\partial y_i^h} u_i(x_i, 0) \\ &\quad - \sum \sum \frac{x_i^\ell y_i^h}{\ell! h!} \frac{\partial^{h+\ell}}{\partial x_i^\ell \partial y_i^h} u_i(0, 0) . \end{aligned}$$

)

—————x—————

II.1.3. UNE TROISIEME FAMILLE DE PROCEDES

Soit  $[0, h] \subset \mathbb{R}$  ( $h \neq 0$ ) et considérons pour une fonction définie sur cette intervalle :

$$P_h u(x) = (x-h)^n \sum_{k=0}^{n-1} \left[ \frac{d^k}{dx^k} \frac{u(x)}{(x-h)^n} \right]_{x=0} \frac{x^k}{k!}$$

$$Pu(x) = (x-h)^n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} \sum_{i=0}^k C_k^i u^{(i)}(0) (-1)^{k-i} \frac{(n-1+k-i)!}{(n-1)!} \frac{1}{(-h)^{n+k-i}}$$

LEMME :

P est un projecteur.

Il suffit de constater que :

$$(Pu)^j(0) = u^{(j)}(0) \quad \text{pour} \quad 0 \leq j \leq n-1 .$$

Or le polynome (Cf. Davis [ , ]) )

$$P(x) = z^n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{d^k}{dz^k} \left[ \frac{u(z)}{z^n} \right]_{z=h} \frac{(z-h)^k}{k!} + (z-h)^n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{d^k}{dz^k} \left[ \frac{u(z)}{(z-h)^n} \right]_{z=0} \frac{z^k}{k!}$$

est le seul polynome de degré  $2n-1$  au plus vérifiant :

$$P^{(k)}(0) = u^{(k)}(0) \quad \text{et} \quad P^{(k)}(h) = u^{(k)}(h) \quad 0 \leq k \leq n-1$$

Comme les  $n-1$  premières dérivées du premier terme sont nulles en zéro on obtient le résultat.

-----x-----

Soit  $u(x,y)$  une fonction de deux variables suffisamment régulière définies sur le triangle T. On suppose pour l'instant que T est de sommets  $(0,0)$ ,  $(0,1)$ ,  $(1,0)$ .

Posons :

$$P_1 u(x,y) = [P_{1-y} \otimes I_y] u(x,y)$$

$$P_2 u(x,y) = [I_x \otimes P_{1-x}] u(x,y)$$

On notera que  $P_1 u$  et  $P_2 u$  ne sont pas définies aux points  $(0,1)$  et  $(1,0)$ .

D'après le lemme précédent  $P_1$  et  $P_2$  sont des projecteurs.

LEMME :

$$P_1 P_2 = P_2 P_1$$

$$P_1 u(x,y) = (x-1+y)^n \sum_{k=0}^{n-1} \left[ \frac{\partial^k}{\partial x^k} \frac{u(x,y)}{(x+y-1)^n} \right]_{x=0} \frac{x^k}{k!}$$

$$P_2 P_1 u(x,y) = (x+y-1)^n \sum_{k,j=0}^{n-1} \left[ \frac{\partial^j}{\partial y^j} \left[ \frac{\partial^k}{\partial x^k} \frac{u(x,y)}{(x+y-1)^n} \right] \right]_{y=0} \frac{x^k}{k!} \frac{y^j}{j!}$$

$$P_2 P_1 u(x,y) = (x+y-1)^n \sum_{k,j=0}^{n-1} \left[ \frac{\partial^{j+k}}{\partial x^k \partial y^j} \frac{u(x,y)}{(x+y-1)^n} \right]_{\substack{x=0 \\ y=0}} \frac{x^k}{k!} \frac{y^j}{j!}$$

Cette expression est bien symétrique en  $x$  et  $y$ .

On peut donc introduire les projecteurs :

$$\underline{P} = P_1 P_2 \quad \text{et} \quad \tilde{P} = P_1 + P_2 - P_1 P_2$$

On remarquera que  $\underline{P}u(x,y) = 0$

$$\tilde{P}u(x,y) = 0 \quad \text{pour } x+y = 1 \quad x \neq 1, \quad y \neq 1$$

Considérons maintenant un triangle  $T$  quelconque.

Soit  $u$  définie sur  $T$ ,  $u(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ , à laquelle on associe les fonctions  $u_i(x_i, y_i)$  ( $i=1,2,3$ ) dans les repères  $O_i x_i y_i$ . Dans chaque repère et pour la fonction  $u_i$  correspondante, on pourra considérer les projecteurs précédents que l'on notera  $P_i$  et  $\tilde{P}_i$  pour indiquer le repère.

Considérons alors :

$$Pu = \sum_i P_i u_i$$

$$\tilde{P}u = \frac{1}{2} \sum_i \tilde{P}_i u_i$$

THEOREME :

$P$  et  $\tilde{P}$  sont des projecteurs.

Notons que pour  $Pu$  et  $\tilde{P}u$  n'ont pas encore été définis aux sommets du triangle.

Ces fonctions sont  $C^{n-1}$  en tout point  $T$  excepté les sommets.

Considérons alors les limites de ces fonctions.

$$A = \lim_{\lambda_1 \rightarrow 0} P_1 u(\lambda_1, 1-\lambda_1, 0) \quad \text{et} \quad B = \lim_{\lambda_3 \rightarrow 0} Pu(0, 1-\lambda_3, \lambda_3)$$

$$A = \lim_{\lambda_1 \rightarrow 0} [P_1 u_1(1-\lambda_1, 0) + P_2 u_2(0, \lambda_1)]$$

$$A = \lim_{\lambda_1 \rightarrow 0} [\lambda_1 u_1(0, 0) + (1-\lambda_1) u_2(0, 0)]$$

$$= u_2(0, 0)$$

Le calcul analogue pour  $B$  montre que  $A = B$ .

On peut donc prolonger  $P$  aux sommets de  $T$ , les dérivées étant prolongées par continuité.

Pour  $\tilde{P}$ , on constate que sur chaque côté du triangle  $\tilde{P}u$  est égale à  $u$  et admet donc même limite que quand on tend vers un sommet. Ainsi  $Pu$  et  $\tilde{P}u$  sont définies sur le triangle  $T$ . Pour montrer que  $P$  et  $\tilde{P}$  sont des projecteurs, il suffit alors de vérifier, ce qui se fait sans difficulté, que les dérivées de  $Pu$  aux sommets (normales aux côtés et aux sommets pour  $\tilde{P}u$ ) coïncident avec celles de  $u$  jusqu'aux ordres indiqués dans l'expression de  $Pu$  (resp.  $\tilde{P}u$ ). (voir l'étude de la quatrième famille au paragraphe suivant).

~~— X —~~

La famille  $\tilde{P}$  est introduite de façon différente par Barnhill-Birkhoff - Gordon [1]. Leur méthode ne leur permet pas de trouver la famille  $P$ .

II .4. UNE QUATRIEME FAMILLE DE PROCEDES

Il s'agit en fait d'une généralisation de la famille précédente.

Soit  $[0, h] \subset [0, 1]$  et considérons, pour une fonction définie sur cet intervalle et  $x \in [0, h[$  :

$$P_h u(x) = \varphi(h-x) \sum_{k=0}^{n-1} \left[ \frac{d^k}{dx^k} \left( \frac{u(x)}{\varphi(h-x)} \right) \right]_{x=0} \frac{x^k}{k!}$$

où  $\varphi(t)$  est une fonction définie sur  $[0, 1]$  telle que :

$$\varphi^{(k)}(0) = 0 \quad \text{pour} \quad 0 \leq k \leq n-1$$

$$\varphi(t) \neq 0 \quad 1 \geq t > 0 .$$

LEMME 1 :

$P_h$  est un projecteur.

—————x

En effet :

$$\begin{aligned} P_h [P_h u](x) &= \varphi(h-x) \left[ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{d^k}{dx^k} \left[ \sum_{i=0}^{n-1} \left( \frac{d^i}{dy^i} \frac{u(y)}{\varphi(h-y)} \right)_{y=0} \frac{y^i}{i!} \right]_{x=0} \frac{x^k}{k!} \right] \\ &= \varphi(h-x) \left[ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{d^k}{dx^k} \left[ \frac{u(y)}{\varphi(h-y)} \right]_{y=0} \frac{x^k}{k!} \right] \end{aligned}$$

—————x

LEMME 2 :

$$\text{Pour } 0 \leq k \leq n-1, \quad \frac{d^k}{dx^k} (P_h u)(0) = \frac{d^k}{dx^k} u(0)$$

—————x

Il est immédiat que :

$$\left[ \frac{d^k}{dx^k} \frac{P_h u(x)}{\varphi(h-x)} \right]_{x=0} = \left[ \frac{d^k}{dx^k} \frac{u(x)}{\varphi(h-x)} \right]_{x=0}$$

et en procédant par récurrence sur  $k$ , on obtient le résultat en tenant compte du fait que  $\varphi(t) \neq 0$  pour  $t = 0$ .

-----x

Si  $T$  désigne le triangle de sommets  $(0,0)$   $(0,1)$   $(1,0)$  et en posant comme dans le paragraphe précédent :

$$P_1 u(x,y) = [P_{1-y} \otimes I_y] u(x,y)$$

$$P_2 u(x,y) = [I_x \otimes P_{1-x}] u(x,y)$$

Il est encore aisé de vérifier que :

$$P_1 \circ P_2 = P_2 \circ P_1$$

On introduit par la même construction que dans le paragraphe précédent (s'y reporter pour les définitions)

$$P_u = \sum_{i=1}^3 P_{-i} u_i$$

$$\tilde{P}_u = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \tilde{P}_{-i} u_i$$

On vérifie encore que  $P_u$  et  $\tilde{P}_u$  sont définis sur le triangle fermé tout entier.

THEOREME 3 :

$P$  et  $\tilde{P}$  sont des projecteurs.



Considérons P

$$P = \sum_{i=1}^3 \underline{P}_i$$

$$P \circ P = \sum_{i=1}^3 \underline{P}_i \left[ \sum_{j=1}^3 \underline{P}_j \right]$$

On sait que  $\underline{P}_i \circ \underline{P}_i = \underline{P}_i$  (par les résultats du chapitre II et l'étude de la troisième famille de procédés).

Il reste donc à évaluer  $\underline{P}_i \circ \underline{P}_j$  pour  $i \neq j$ .

$$\underline{P}_j u_j(x_j, y_j) = \varphi(1-x_j-y_j) \left( \left[ \sum_{\substack{k=0 \\ \ell=0}}^{n-1} \left[ \frac{\partial^{k+\ell}}{\partial x_j^k \partial y_j^\ell} \frac{u_j(x_j, y_j)}{\varphi(1-x_j-y_j)} \right] \right) \begin{matrix} x_j^k & y_j^\ell \\ k! & \ell! \end{matrix} \right) \Bigg|_{\substack{x_j=0 \\ y_j=0}}$$

Comme  $i \neq j$  on a :  $y_j = x_i$  ou  $x_j = y_i$ .

Les deux cas étant symétriques, étudions le premier. On a alors :

$$[\underline{P}_j(u_j)]_i(x_i, y_i) = \varphi(y_i) \left( \sum_{\substack{k=0 \\ \ell=0}}^{n-1} \left[ \frac{\partial^{k+\ell}}{\partial x_j^k \partial y_j^\ell} \frac{u_j(x_j, y_j)}{\varphi(1-x_j-y_j)} \right] \right) \begin{matrix} (1-x_i-y_i)^k & x_i^\ell \\ k! & \ell! \end{matrix} \Bigg|_{\substack{x_j=0 \\ y_j=0}}$$

et un simple calcul montre que :

$$\frac{\partial^{k+\ell}}{\partial x_i^k \partial y_i^\ell} [\underline{P}_j(u_j)]_i(0,0) = 0 \quad \text{pour} \quad \begin{matrix} 0 \leq k \leq n-1 \\ 0 \leq \ell \leq n-1 \end{matrix}$$

Il suit alors que :

$$\underline{P}_i \circ \underline{P}_j \equiv 0 \quad \text{pour} \quad i \neq j$$

d'où P est un projecteur car  $P \circ P = P$ .

Etudions  $\tilde{P}$ .

On vérifie que sur un côté  $\lambda_{i_0} = 0$  du triangle,  $\tilde{P}_{i_0} u$  est nulle ainsi que toutes ses dérivées normales jusqu'à l'ordre  $n-1$  (car  $\varphi^{(k)}(0) = 0$ ,  $0 \leq k \leq n-1$ ).

Comme d'autre part, pour  $i \neq i_0$ , sur ce même côté ( $\lambda_{i_0} = 0$ ):

$$\frac{\partial^\ell}{\partial n_{i_0}^\ell} \tilde{P}_i u = \frac{\partial^\ell}{\partial n_{i_0}^\ell} u \quad 0 \leq \ell \leq n-1$$

(où  $\frac{\partial^\ell}{\partial n_{i_0}^\ell}$  désigne la dérivée normale au côté  $\lambda_{i_0} = 0$  d'ordre  $\ell$ ).

Il suit que, sur le côté  $\lambda_{i_0} = 0$ :

$$\frac{\partial^\ell}{\partial n_{i_0}^\ell} \tilde{P}u = \frac{\partial^\ell}{\partial x_{i_0}^\ell} u \quad 0 \leq \ell \leq n-1$$

On vérifie de même que :

$$\frac{\partial^{k+l}}{\partial x_i^k \partial y_i^\ell} \tilde{P}u_i(0,0) = \frac{\partial^{k+l}}{\partial x_i^k \partial y_i^\ell} u_i(0,0) \quad 0 \leq k, \ell \leq n-1.$$

Comme la construction de  $\tilde{P}u$  n'utilise de  $u$  que les quantités citées précédemment,  $\tilde{P}$  est bien un projecteur.

-----x

THEOREME 4 :

Si  $\varphi$  vérifie de plus  $\varphi^{(k)}(0) = 0$  pour  $n \leq k \leq m$ , alors :

$\frac{\partial^k}{\partial n_i^k} [\tilde{P}u](M)$ , pour  $M$  sur le côté  $\lambda_i = 0$ , ne dépend que des valeurs

des dérivées partielles de  $u$  d'ordre inférieur à  $k$ , aux extrémités de ce côté et au point considéré pour  $n \leq k \leq m$ .

-----x

Sur le côté  $\lambda_i = 0$ ,  $\tilde{P}_i(u)$  a ses dérivées partielles nulles jusqu'à l'ordre  $m$  donc il suffit de considérer :

$$\frac{\partial^k}{\partial n_i^k} [\tilde{P}_j u + \tilde{P}_\ell u](M) \quad \text{avec} \quad j \neq i, \quad j \neq \ell, \quad \ell \neq i.$$

Il suffit alors, pour  $j$  fixé par exemple, d'exprimer  $\frac{\partial^k}{\partial x_i^k}$  en fonction de  $\frac{\partial^p}{\partial x_j^p}$  et  $\frac{\partial^q}{\partial y_j^q}$  ( $q, p \leq k$ ).

~~— x —~~

III - EXEMPLES DE PROCÉDES D'INTERPOLATION SUR UN TRIANGLE

III.1. EXEMPLES RELATIFS A LA PREMIERE FAMILLE

Nous précisons pour  $n=0$  et  $n=1$  les procédés du type II.1.

Cas  $n = 0$

Ici on prendra :  $\varphi(t) = t$  . Alors :

$$Pu(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \lambda_1 u(1, 0, 0) + \lambda_2 u(0, 1, 0) + \lambda_3 u(0, 0, 1)$$

$$Ru(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \int_0^{x_i} \frac{\partial u}{\partial s} i(s, y_i) ds + \int_0^{y_i} \frac{\partial u}{\partial t} i(x_i, t) dt - \int_0^{x_i} \int_0^{y_i} \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} u_i(s, t) ds dt.$$

$$\begin{aligned} \tilde{P}u(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) &= \lambda_1 [u(1-\lambda_2, \lambda_2, 0) + u(1-\lambda_3, 0, \lambda_3) - u(1, 0, 0)] \\ &+ \lambda_2 [u(\lambda_1, 1, \lambda_1, 0) + u(0, 1-\lambda_3, \lambda_3) - u(0, 1, 0)] \\ &+ \lambda_3 [u(\lambda_1, 0, 1-\lambda_1) + u(0, \lambda_2, 1-\lambda_2) - u(0, 0, 1)] \end{aligned}$$

$$\tilde{R}u(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \int_0^{x_i} \int_0^{y_i} \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} u_i(s, t) ds dt .$$

PROPOSITION : Les polynômes  $P$  et  $\tilde{P}$  sont invariants sur les polynômes au moins du premier degré en l'ensemble des variables :  $\sum \alpha_i \lambda_i$  .

$P$  et  $\tilde{P}$  sont invariants sur les polynômes au moins du premier degré en l'ensemble des variables :  $\sum \alpha_i \lambda_i$  .

En effet :

$$P[\Sigma \alpha_i \lambda_i] = \sum_{i=1}^3 \lambda_i (\alpha_i) = \sum \alpha_i \lambda_i$$

$$\tilde{P}[\Sigma \alpha_i \lambda_i] = \sum_{i=1}^3 \lambda_i (\alpha_i (1-\lambda_k) + \alpha_k \lambda_k + \alpha_i (1-\lambda_j) + \alpha_j \lambda_j - \alpha_i)$$

$$= \sum_{i=1}^3 \lambda_i (\alpha_i \lambda_i + \alpha_k \lambda_k + \alpha_j \lambda_j) = \sum_{i=1}^3 \alpha_i \lambda_i$$

— x —

PROPOSITION :

Pour  $i = 1, 2, 3$  et  $\ell > 0$

$$\begin{aligned} \tilde{P}[\lambda_i^\ell] &= (1-\lambda_j)^{\ell+1} - \lambda_k (1-\lambda_j)^\ell + \lambda_j (1-\lambda_j - \lambda_k)^\ell \\ &+ (1-\lambda_k)^{\ell+1} - \lambda_j (1-\lambda_k)^\ell + \lambda_k (1-\lambda_j - \lambda_k)^\ell \\ &+ \lambda_j + \lambda_k - 1 \end{aligned}$$

Pour  $i, j = 1, 2, 3$   $\ell, m > 0$

$$\tilde{P}[\lambda_i^\ell \lambda_j^m] = \lambda_i (1-\lambda_j)^\ell \lambda_j^m + \lambda_j \lambda_i^\ell (1-\lambda_i)^m$$

Il suffit de faire le calcul.

On remarquera que les seconds membres sont invariants par  $\tilde{P}$  puisque  $\tilde{P}$  est un projecteur.

D'autre part, les transformés des polynomes  $\lambda_i^l$  sont des polynomes de même degré (il suffit de remarquer que les signes des monomes de degré  $l+1$  sont de signes opposés).

Nous allons donner des estimations d'erreur.

On veut étudier l'erreur au point N du triangle T de coordonnées  $(x_i, y_i)$ , dans le repère  $O_i x_i y_i$ ,  $(x, y)$  dans le repère  $Oxy$ ,  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  en coordonnées barycentriques.  $u$  désigne l'expression de  $u$  dans le repère  $xy$ ;  $u_i$  désigne l'expression de  $u$  dans le repère  $O_i x_i y_i$ .

Considérons tout d'abord :

$$\int_0^{x_i} \int_0^{y_i} \frac{\partial^2}{\partial s_i \partial t_i} u_i(s_i, t_i) ds_i dt_i$$

$$u(M) = u_i(s_i, t_i) = u(a_1^i s_i + b_1^i t_i + c_1^i, a_2^i s_i + b_2^i t_i + c_2^i)$$

d'où :

$$\frac{\partial^2}{\partial s \partial t} u_i(M) = a_1^i b_1^i \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(M) + (a_1^i b_2^i + a_2^i b_1^i) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} u(M) + a_2^i b_2^i \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(M).$$

Soit d'autre part le jacobien  $J_i(x, y)$  de la transformation linéaire de  $(x, y)$  en  $(x_i, y_i)$ ; alors :

$$\int_0^{x_i} \int_0^{y_i} \frac{\partial^2}{\partial s_i \partial t_i} u_i(s_i, t_i) ds_i dt_i = \int_T \chi(T_i(x, y); s, t) J_i(s, t) [a_1^i b_1^i \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(s, t) + (a_1^i b_2^i + a_2^i b_1^i) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} u(s, t) + a_2^i b_2^i \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(s, t)] ds dt$$

où  $\chi$  est la fonction caractéristique du parallélogramme  $T_i(N)$ .

Au total :

$$\tilde{P}[u](x,y) = \sum_{\substack{i,j=0 \\ i+j=2}}^2 \int_T K_{ij}(x,y;s,t) \frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial y^i} u(s,t) ds dt$$

avec :

$$K_{2,0}(x,y;s,t) = \sum_{i=1}^3 \chi(T_i(x,y);s,t) J_i(s,t) a_1^i b_1^i \lambda_i(x,y)$$

$$K_{1,1}(x,y;s,t) = \sum_{i=1}^3 \chi(T_i(x,y);s,t) J_i(s,t) a_1^i b_2^i + a_2^i b_1^i \lambda_i(x,y)$$

$K_{0,2}$  est comme  $K_{2,0}$  en remplaçant  $a_1^i b_1^i$  par  $a_2^i b_2^i$ .

On obtient ainsi une majoration de l'erreur en la norme voulue :

$$\|\tilde{R}[u](x,y)\| \leq \sum_{\substack{i,j=0 \\ i+j=2}}^2 \left\| \int_T K_{ij}(x,y;s,t) \frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial y^i} u(s,t) ds dt \right\|$$

Si  $p$  et  $q$  sont tels que :  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , on a en particulier :

$$\|\tilde{R}[u](x,y)\|_{L^p(T)} \leq \sum_{\substack{i,j=0 \\ i+j=2}}^2 \left( \int_T \int_T |K_{ij}(x,y;s,t)|^q ds dt dx dy \right)^{1/q} \left\| \frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial y^i} u \right\|_{L^p(T)}$$

Etudions :  $\int_T |K_{ij}(x,y;s,t)|^q ds dt$ .

D'après la définition des  $K_{ij}$  si  $N = (x,y)$  et  $M = (s,t)$

on note que :  $K_{ij}(N,M) = 0$  si  $M \notin T_k(N)$  pour  $k = 1,2,3$ ,

$$= \chi(T_k) J_k(s,t) f_{ij}^k(a,b) \lambda_k(x,y) \text{ si } M \in T_k(N)$$

D'où :

$$\int_T \int_T |K_{ij}(x,y;s,t)|^q ds dt dx dy = \sum_{k=1}^3 \int_T \int_T |\chi(T_k) J_k(s,t) f_{ij}^k(a,b) \lambda_k(x,y)|^q ds dt dx dy$$

Pour chaque  $k$ , nous exprimons le terme correspondant dans le repère  $O_k x_k y_k$  d'où :

$$= \sum_{k=1}^3 \int_T \int_T |\chi(T_k)(1-x_k-y_k)|^q |f_{ij}^k(a,b)|^q |J_k(s_k,t_k)|^{q-2} ds_k dt_k dx_k dy_k$$

Au total :

$$\|\tilde{R}[u]\|_{L^p(T)} \leq C \left[ \sum_{i+j=2}^2 \sum_{k=1}^3 (\sin \theta_k)^{2-q} |f_{ij}^k|^q \right]^{1/q} \left[ \sum_{i,j=0}^2 \left\| \frac{\partial^{i+j} u}{\partial x^i \partial y^j} \right\|_{L^p(T)}^p \right]^{1/p}$$

où  $C = \left( \frac{1}{(q+1)(q+2)(q+3)} \left( 1 + \frac{1}{q+4} \right) \right)^{1/q}$

Dans le cas où le triangle  $T$  a pour sommets, dans  $(Oxy)$  :

$$O_1 = (0,0) ; O_2 = (h,0) ; O_3 = (0,h)$$

$$\|\tilde{R}[u]\|_{L^p(T)} \leq C [1+(\sqrt{2})^{2-q} 2^{q-1}]^{1/q} h^2 \left[ \sum_{i+j=2} \left\| \frac{\partial^{i+j} u}{\partial x^i \partial y^j} \right\|_{L^p}^p \right]^{1/p}$$

Considérons maintenant le procédé :

$$Ru(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \sum_{i=1}^3 \left[ \int_0^{x_i} \frac{\partial u_i}{\partial s} (s, y_i) ds + \int_0^{y_i} \frac{\partial u_i}{\partial t} (x_i, t) dt \right] \lambda_i \tilde{R}u(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$$

On a vu comment estimer  $\tilde{R}u$ .

Estimons :

$$\lambda_i \int_0^{x_i} \frac{\partial u_i}{\partial s} (s, y_i) ds + \lambda_{i+1} \int_0^{y_{i+1}} \frac{\partial u_{i+1}}{\partial t} (x_{i+1}, t) dt$$

et en exprimant ceci dans le repère  $O_i x_i y_i$  :

$$(1-x_i-y_i) \int_0^{x_i} \frac{\partial u_i}{\partial s} (s, y_i) ds + x_i \int_{x_i}^{1-y_i} \frac{\partial u_i}{\partial s} (s, y_i) ds .$$



En intégrant par partie, on sait que ceci donne :

$$(1-x_i-y_i) \int_0^{x_i} s \frac{\partial u_i}{\partial s^2} (s, y_i) ds + x_i \int_{x_i}^{1-y_i} (1-y_i-s) \frac{\partial^2 u_i}{\partial s^2} (s, y_i) ds$$

soit :

$$\int_0^{1-y_i} k_i(x_i, y_i, s) \frac{\partial^2 u_i}{\partial s^2} (s, y_i) ds .$$

En réalisant le même calcul pour  $i=1,2,3$ .

$$u(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \sum_i \int_0^{1-y_i} k_i(x_i, y_i, s) \frac{\partial^2 u_i}{\partial s^2} (s_i, y_i) ds_i - \tilde{R}u(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$$

On peut alors, par un procédé analogue à celui utilisé pour estimer  $\tilde{R}u(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ , donner une estimation de  $\|Ru\|_{L^p(T)}$  :

$$\|Ru\|_{L^p(T)} \leq C h^2 \left[ \sum_{\substack{i,j=0 \\ i+j=2}}^2 \frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial y^j} u \right]_{L^p(T)}^{1/p}$$

Cas  $n = 1$

Posons  $\varphi(t) = t^3$

On obtient alors :

$$\varphi_i(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \frac{\lambda_i^3}{\sum_{j=1}^3 \lambda_j^3}$$

et

$$Pu(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \sum_{i=1}^3 \varphi_i(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) [u_i(\lambda_j, 0) + u_i(0, \lambda_k) +$$

$$\lambda_j \frac{\partial}{\partial \lambda_j} u_i(0, \lambda_k) + \lambda_k \frac{\partial}{\partial \lambda_k} u_i(\lambda_j, 0) - u_i(0, 0) -$$

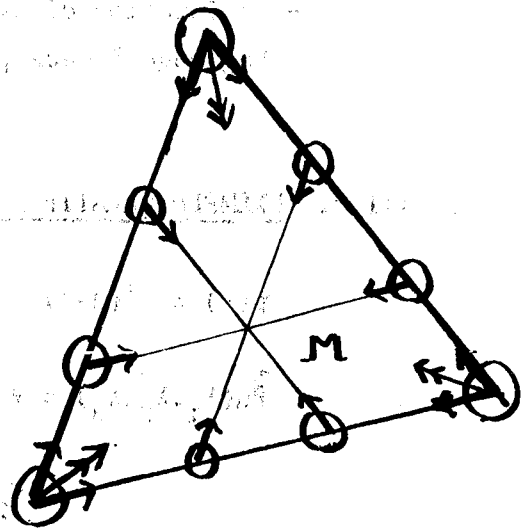
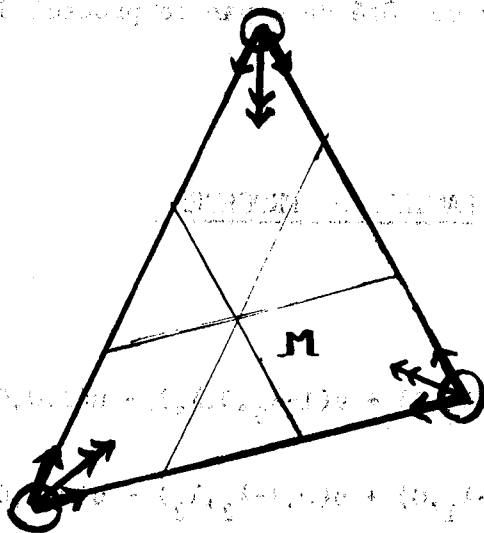
$$\lambda_j \frac{\partial}{\partial \lambda_j} u_i(0, 0) - \lambda_k \frac{\partial}{\partial \lambda_k} u_i(0, 0) - \lambda_j \lambda_k \frac{\partial^2}{\partial \lambda_j \partial \lambda_k} u_i(0, 0)]$$

$$Pu(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \sum_{i=1}^3 \varphi_i(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) [u_i(0, 0) + \lambda_j \frac{\partial}{\partial \lambda_j} u_i(0, 0) +$$

$$\lambda_j \frac{\partial}{\partial \lambda_k} u_i(0, 0) + \lambda_j \lambda_k \frac{\partial^2}{\partial \lambda_j \partial \lambda_k} u_i(0, 0)]$$

**P**

**$\tilde{P}$**



⊙ valeur au point

→ dérivées partielles d'ordre 1 dans cette direction

→→ dérivée partielle croisée d'ordre 2

Les résultats du paragraphe précédent permettent d'affirmer que :

- $Pu$  et  $\tilde{P}u$  assurent le raccord continu de l'interpolé et de ses dérivées partielles premières.
- $Pu$  laisse invariant les polynomes de  $P_1$  (à douze valeurs nodales)
- $\tilde{P}u$  laisse invariant les polynomes de  $P_3$

On pourrait construire un élément fini à l'aide de  $\tilde{P}u$  à dix-huit valeurs nodales et laissant invariant les polynomes de  $P_2$  en interpolant sur chaque côté :

- la fonction  $u$  par le procédé d'Hermite jusqu'aux dérivées secondes incluses aux extrémités,
- la fonction dérivée normale à ce côté de  $u$  par le procédé de Lagrange à deux points.

### III.2. EXEMPLE RELATIF A LA DEUXIEME FAMILLE DE PROCEDES.

$$\varphi(t) = t^2(3-2) \quad ; \quad n = 1 .$$

$$\begin{aligned} \tilde{P}u(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) &= \Psi_1(\lambda_1)[u(1-\lambda_2, \lambda_2, 0) + u(1-\lambda_3, 0, \lambda_3) - u(1, 0, 0)] \\ &\quad + \Psi_2(\lambda_2)[u(\lambda_1, 1-\lambda_1, 0) + u(0, 1-\lambda_3, \lambda_3) - u(0, 1, 0)] \\ &\quad + \Psi_3(\lambda_3)[u(\lambda_1, 0, 1-\lambda_1) + u(0, \lambda_2, 1-\lambda_2) - u(0, 0, 1)] \end{aligned}$$

On pourra vérifier que les dérivées de  $\tilde{P}u$  d'ordre 1 aux sommets de  $T$  dans les directions des côtés coïncident avec celles de  $u$ .

Ceci nous permet de donner l'expression d'un élément à neuf paramètres.

Dans l'expression précédente on interpole la fonction  $u$  sur chacun des côtés :

Soit  $\phi_i$  les quatre fonctions de base du procédé de Hermite :

$$\phi_1(x) = x^2(2x-3)+1 \quad \phi_2(x) = x(x-1)^2$$

$$\phi_3(x) = x^2(3-2x) \quad \phi_4(x) = x^2(x-1)$$

On prend pour triangle  $T$  celui qui a pour sommet dans  $\mathbb{R}^2$   $(0,0)$   $(0,1)$  et  $(1,0)$ .

On interpole :

$$u(x,0)$$

par :

$$\phi_1(x)u(0,0) + \phi_2(x) \frac{\partial}{\partial x} u(0,0) + \phi_3(x)u(1,0) + \phi_4(x) \frac{\partial}{\partial x} u(1,0)$$

$u(x,y)$   $(x+y=1)$  par :

$$\phi_1(y)u(1,0) + \phi_2(y) \left( \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \right) u(1,0) + \phi_3(y)u(0,1) + \phi_4(y) \left( \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \right) u(0,1)$$

$u(0,y)$  par :

$$\phi_1(y)u(0,0) + \phi_2(y) \frac{\partial}{\partial y} u(0,0) + \phi_3(y)u(0,1) + \phi_4(y) \frac{\partial}{\partial y} u(0,1) .$$

Nous n'explicitons pas davantage ici cet élément.

Il est immédiat d'après les résultats du paragraphe II.2, que le procédé ainsi construit laisse invariant les polynômes de  $P_1$  .

III.3. EXEMPLES RELATIFS A LA TROISIEME FAMILLE DE PROCÉDES.

- Dans le cas  $n = 1$  :

$$Pu(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \lambda_1 u(1,0,0) + \lambda_2 u(0,1,0) + \lambda_3 u(0,0,1)$$

on retrouve l'interpolation linéaire :

$$\begin{aligned} \tilde{P}u(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = & \frac{1}{2} \left[ \lambda_1 \left\{ \frac{u(1-\lambda_2, \lambda_2, 0)}{1-\lambda_2} + \frac{u(1-\lambda_3, 0, \lambda_3)}{1-\lambda_3} - u(1,0,0) \right\} \right. \\ & + \lambda_2 \left\{ \frac{u(\lambda_1, 1-\lambda_1, 0)}{1-\lambda_1} + \frac{u(0, 1-\lambda_3, \lambda_3)}{1-\lambda_3} - u(0,1,0) \right\} \\ & \left. + \lambda_3 \left\{ \frac{u(\lambda_1, 0, 1-\lambda_1)}{1-\lambda_1} + \frac{u(0, \lambda_2, 1-\lambda_2)}{1-\lambda_2} - u(0,0,1) \right\} \right] \end{aligned}$$

On vérifie aisément que  $\tilde{P}$  laisse invariant les polynômes de  $P_2$ .

En interpolant  $u$  sur chaque côté du triangle par le procédé d'Hermite interpolant les valeurs de la fonction et de ses dérivées premières aux extrémités, on obtiendra un élément à neuf valeurs nodales qui n'a aucune raison d'être  $C^1$ .

- Cas  $n = 2$  :

Nous ne donnons que l'expression de  $Pu$  (avec les notations de I) :

$$\begin{aligned} Pu(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = & \sum_{i=1}^3 \lambda_i^2 \{ u_i(0,0) + \left( \frac{\partial}{\partial x_i} u_i(0,0) + 2u_i(0,0) \right) x_i \\ & + \left( \frac{\partial}{\partial y_i} u_i(0,0) + 2u_i(0,0) \right) y_i \\ & + \left( \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial y_i} u_i(0,0) + 2 \frac{\partial}{\partial x_i} u_i(0,0) + 2 \frac{\partial}{\partial y_i} u_i(0,0) \right) x_i y_i \} \end{aligned}$$

### III.4. EXEMPLE RELATIF A LA QUATRIEME FAMILLE DE PROCEDES.

Posons  $\varphi(t) = t^2$ .

L'expression de  $\tilde{P}$  est alors :

$$\begin{aligned} \tilde{P}u(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = & \frac{1}{2} \lambda_1^2 \left[ \frac{u(1-\lambda_2, \lambda_2, 0)}{(1-\lambda_2)} + \frac{u(1-\lambda_3, 0, \lambda_3)}{(1-\lambda_3)} - u(1, 0, 0) \right] \\ & + \frac{1}{2} \lambda_2^2 \left[ \frac{u(\lambda_1, 1-\lambda_1, 0)}{(1-\lambda_1)} + \frac{u(0, 1-\lambda_3, \lambda_3)}{(1-\lambda_3)} - u(0, 1, 0) \right] \\ & + \frac{1}{2} \lambda_3^2 \left[ \frac{u(\lambda_1, 0, 1-\lambda_1)}{(1-\lambda_1)} + \frac{u(0, \lambda_2, 1-\lambda_2)}{(1-\lambda_2)} - u(0, 0, 1) \right] \end{aligned}$$

On pourrait utiliser ceci pour construire un élément fini à neuf valeurs, qui assure des raccords  $C^1$  en interpolant la fonction  $u$  sur chaque côté par le procédé de Hermite à deux points.

Malheureusement,  $\tilde{P}$  ne laisse pas invariant les constantes et on ne sait pas trouver de fonction  $\varphi$  acceptable.

#### REMARQUES SUR LES PROCEDES D'INTERPOLATION SUR LE TRIANGLE :

Dans l'un des chapitres suivants, on présentera d'autres procédés d'interpolation sur le triangle (construit à l'aide de formule de Green-Ostrogradski par exemple).

On peut utiliser également certains des procédés précédents  $\tilde{P}$  de l'une ou l'autre des familles.

Nous n'avons pas pu trouver d'ensembles de projecteurs dont le produit soit associatif et commutatif. C'est pourquoi, l'obtention d'expression intégrale de l'erreur des procédés d'interpolation sur le triangle reste difficile et ne donne pas les résultats escomptés.

#### IV - PROCEDES D'INTERPOLATION SUR UN TETRAEDRE

Tous les procédés proposés pour interpoler des fonctions définies sur un triangle sont généralisables au cas du tétraèdre.

Donnons rapidement les méthodes de construction :

On considère alors, si le tétraèdre a pour sommets  $O_1, O_2, O_3, O_4$ , les repères associés comme au paragraphe I à chacun des sommets  $O_i$  ( $i=1,2,3,4$ ).

Les processus de construction des quatre familles correspondantes au cas du triangle sont alors immédiat :

- Pour les deux premières familles, on considère un procédé d'interpolation sur  $[0,1]$  de support  $\{0\}$  ce qui permet, comme au chapitre II de construire des rprocédés d'interpolation dans  $\mathbb{R}$ .

En considérant l'un d'eux, on l'écrit dans chacun des repères de sommet  $O_i$ , soit  $P_i$ . On définira alors :

$$P = \sum_{i=1}^4 \frac{\varphi(\lambda_i)}{\sum_{j=1}^4 \varphi(\lambda_j)} P_i$$

où  $\varphi$  est une fonction d'une variable du type de celles introduites en II.1 et II.2. Comme dans ces paragraphes, en introduisant des conditions suffisantes sur la fonction  $\varphi$ , on vérifiera que  $P$  un projecteur.

- Pour les deux dernières familles, on considère  $P_h$  comme en II.3 et II.4. Sur  $[0,1]^3$ , on introduit les projecteurs :

$$P_1 = I_x \otimes I_y \otimes P_{1-x-y}$$

$$P_2 = I_x \otimes P_{1-x-z} \otimes I_z$$

$$P_3 = P_{1-y-z} \otimes I_y \otimes I_z$$

On peut encore construire, à l'aide des opérateurs  $\circ$  et  $\oplus$ , des projecteurs sur  $[0,1]^3$  que l'on écrit dans chacun des repères et on procède par somme pour obtenir des projecteurs sur des espaces vectoriels de fonctions définies sur le tétraèdre.

—————~~x~~—————

On constate que l'on peut construire ainsi des procédés supposant connues les valeurs de la fonction (et/ou de ses dérivées partielles) sur :

- les sommets du tétraèdre
- les arêtes
- les faces.

Nous n'explicitons pas d'exemples dans ce cas.

REMARQUE :

On peut construire des procédés d'interpolation sur des prismes de la façon suivante :

On considère un procédé d'interpolation sur le triangle  $T$  de sommets  $(0,0,0)$ ,  $(0,1,0)$ ,  $(1,0,0)$  et on appelle  $P_1$  le projecteur associé à ce procédé.

On se donne un procédé d'interpolation sur  $[0,1]$  et on appelle (avec les conventions du chapitre II)  $P_2$  le projecteur associé sur la direction  $\vec{Oz}$ .

On peut alors définir  $P_1 \circ P_2$  et  $P_1 \oplus P_2$ .

Suivant la nature de  $P_1$  on obtiendra des procédés d'interpolation faisant intervenir des valeurs sur les arêtes, les sommets, les faces du prisme.





DEUXIEME PARTIE





## CHAPITRE IV

### NOYAUX ET ESPACES DE HILBERT

Dans ce chapitre, on rappelle l'essentiel de la théorie des noyaux de Schwartz, noyaux reproduisants en liaison avec les fonctions hilbertiennes.

Au deuxième paragraphe, on adapte le théorème d'image linéaire continue d'espace de Hilbert au cas de fonctions semi-hilbertiennes.

Dans un rapide troisième paragraphe, on rappelle la définition générale du problème de fonctions splines.

La bibliographie est donnée au long des paragraphes.

I - RAPPELS ET DEFINITIONS A PROPOS DES NOYAUX

Considérons  $X$  un ensemble et soit  $\mathbb{R}^X$  muni de la topologie de la convergence ponctuelle.  $\mathbb{R}^X$  est mise en dualité (BOURBAKI [ 5 ] , P.J. LAURENT [ 9 ]) avec l'espace vectoriel réel  $(\mathbb{R}^X)'$  des combinaisons linéaires finies de masses de Dirac sur  $X$ .

DEFINITION 1 :

$h$  , fonction définie sur  $\mathbb{R}^X$  à valeurs dans  $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  sera dite fonction hilbertienne si  $h$  est :

- convexe de domaine  $(\{x \in \bar{\mathbb{R}}^X, h(x) < +\infty\})$  un sous espace vectoriel de  $\bar{\mathbb{R}}^X$ ,
- quadratique (pour tout  $\lambda$  réel et  $x$  dans  $\bar{\mathbb{R}}^X$  on a  $h(\lambda x) = \lambda^2 h(x)$  , et l'application  $x \rightarrow h(x+y) - h(x) - h(y)$  est linéaire sur le domaine de  $h$ ),
- inf-faiblement compacte (c'est-à-dire  $\{x \in \bar{\mathbb{R}}^X, h(x) \leq 1\}$  est un ensemble compact pour  $\sigma(\bar{\mathbb{R}}^X, (\bar{\mathbb{R}}^X)')$ ).

DEFINITION 2 :

Un sous-espace vectoriel  $H$  de  $\mathbb{R}^X$  est dit sous-espace hilbertien de  $\mathbb{R}^X$  si l'injection de  $H$  (muni de sa topologie hilbertienne) dans  $\mathbb{R}^X$  est continue.

On a alors la situation suivante :

$$(\mathbb{R}^X)' \xrightarrow{t_j} H' \xrightarrow{\Lambda} H \xrightarrow{j} \mathbb{R}^X$$

- où
- $j$  est l'injection canonique de  $H$  dans  $\mathbb{R}^X$
  - $t_j$  est l'application transposée de  $j$
  - $\Lambda$  est l'isomorphisme canonique de  $H'$ , dual de  $H$ , sur  $H$  .

DEFINITION 3 :

Le noyau de Schwartz associé à  $H$ , sous-espace hilbertien de  $\mathbb{R}^X$ , est l'application de  $(\mathbb{R}^X)'$  dans  $\mathbb{R}^X$  :

$$H = j \circ \Lambda \circ t_j$$

THEOREME 4 :

1. Il y a correspondance biunivoque entre les fonctions  $h$  hilbertiennes sur  $\mathbb{R}^X$  et les sous-espaces hilbertiens  $H$  de  $\mathbb{R}^X$  :

$$h(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \|x\|^2 & \text{si } x \in H \text{ } (\| \cdot \| \text{ est la norme sur } H) \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

2. Le noyau  $H$  associé à  $h$  est aussi l'application sous-différentielle de la fonction polaire de  $h$ , soit :

$$H = \partial f^*$$

En fait, il y a de plus correspondance biunivoque entre les noyaux de Schwartz (applications linéaires de  $(\mathbb{R}^X)'$  dans  $\mathbb{R}^X$  positives, symétriques, compactes pour  $\tau((\mathbb{R}^X)', \mathbb{R}^X)$  dans  $\sigma((\mathbb{R}^X)', \mathbb{R}^X)$ ).

Pour toutes ces notions on se reportera à DUCATEAU-JOLY [ 7 ], DUCATEAU [ 6 ].

DEFINITION 5 :

Etant donné  $H$  un sous-espace hilbertien de  $\mathbb{R}^X$  et  $H$  son noyau de Schwartz, la fonction de  $\mathbb{R}^X \times \mathbb{R}^X$  dans  $\mathbb{R}$  définie par  $g(x, \xi) = \langle H\delta_x, \delta_\xi \rangle$  (où  $\langle, \rangle$  désigne la dualité entre  $\mathbb{R}^X$  et  $(\mathbb{R}^X)'$ ,  $\delta_x(\delta_\xi)$  les masses de Dirac au point  $x$  ( $\xi$ )) est appelée noyau reproduisant de  $H$ .

PROPOSITION 6 :

- Le noyau reproduisant  $g$  de  $H$  est de type positif, c'est-à-dire pour tout entier  $n$ , tous  $\lambda = (\lambda_i)$ ,  $\mu = (\mu_i)$  de  $\mathbb{R}^n$ ,  $x = (x_i)$  et  $y = (y_i)$  de  $X^n$ , on a :

$$\sum_{i,j=1}^n \lambda_i \mu_j g(x_i, y_j) \geq 0$$

- le noyau  $g$  est symétrique :

$$g(x, y) = g(y, x)$$

- l'application  $x \rightarrow g(\cdot, y)$  de  $X$  dans  $\mathbb{R}$  est dans  $H$  (à  $y$  fixé dans  $X$ ).

Réciproquement ,

si  $g$ , élément de  $\mathbb{R}^{X \times X}$  est symétrique et de type positif, alors il existe un sous-espace hilbertien  $H$  de  $\mathbb{R}^X$  dont  $g$  soit le noyau reproduisant.

Pour ceci, on verra N. ARONSZAJN ([ 3 ]), M. DUC-JACQUET ([ 8 ]).

DEFINITION 7 :

On dit que  $h$ , fonction de  $\mathbb{R}^X$  dans  $\mathbb{R}$  quadratique et convexe, est semi-hilbertienne sur  $\mathbb{R}^X$  si :

- $\text{Ker } h = \{f \in \mathbb{R}^X, h(f) = 0\}$  est fermé dans  $\mathbb{R}^X$ ,
- si  $\tilde{E} = \mathbb{R}^X / \text{Ker } h$  est muni de la topologie quotient, si  $\tilde{h}(\tilde{f}) = h(f)$  où  $\tilde{f} \in \tilde{E}$  et  $f \in \mathbb{R}^X$  tel que :  $\tilde{f} \in f + \text{Ker } h$  alors  $\tilde{h}$  est une fonction hilbertienne sur  $\tilde{E}$ .

Désignons par  $\varphi$  l'application canonique de  $\mathbb{R}^X$  sur  $\tilde{E}$  défini précédemment.

On a alors :

- $h = \tilde{h} \circ \varphi$
- ${}^t\varphi$ , application transposée de  $\varphi$  est l'injection de  $\tilde{E}'$  (identifié à  $(\text{Ker } h)^\circ = \{e' \in (\mathbb{R}^X)', \langle e, e' \rangle \leq 1 \text{ pour tout } e \text{ de Ker } h\}$ ) dans  $(\mathbb{R}^X)'$ .

Toujours en identifiant  $\tilde{E}'$  avec  $(\text{Ker } h)^\circ$ , la fonction polaire de  $\tilde{h}$ , soit  $\tilde{h}^*$ , est définie sur  $(\text{Ker } h)^\circ$ . Le noyau  $\tilde{H}$  associé à la fonction hilbertienne  $\tilde{h}$  est donc une application linéaire de  $(\text{Ker } h)^\circ$  dans  $\tilde{E}$ . ( $\tilde{H} = \partial \tilde{h}^*$ ).

DEFINITION 8 :

A la fonction semi-hilbertienne  $h$ , on associe le multinoyau  $H$  défini par :  $H = \varphi^{-1} \circ \tilde{H}$ .

C'est la multi-application qui à  $e' \in (\text{Ker } h)^\circ$  associe l'ensemble des éléments de  $H(e')$ .

On a aussi que si  $\text{Ker } h$  admet un supplémentaire topologique  $S$  dans le domaine de  $h$  muni de la topologie de  $\mathbb{R}^X$  et si on définit  $k$ , fonction sur  $\mathbb{R}^X$  par :

$$k(f) = h(f) \text{ si } f \in S, \quad +\infty \text{ sinon}$$

$k$  est une fonction hilbertienne et on a :

pour  $e' \in (\text{Ker } h)^\circ$   $H(e') = K(e') + \text{Ker } h$  (K noyau associé à  $k$ )



## II - IMAGE PAR UNE APPLICATION LINEAIRE CONTINUE

Une méthode importante pour construire des espaces de Hilbert ou pour trouver le noyau de cet espace (noyau reproduisant s'il existe) est de partir d'un espace de Hilbert connu (ensemble, produit scalaire, noyaux) et de procéder par transport de ces données par une application linéaire. On trouvera un certain nombre d'exemples dans un séminaire de M. ATTEIA [ 2 ] .

Soient donc  $x$  et  $y$  deux ensembles et une application  $u$ , linéaire continue de  $\mathbb{R}^X$  dans  $\mathbb{R}^Y$ .

A) Considérons  $H$  un sous-espace hilbertien de  $\mathbb{R}^X$ , la fonction hilbertienne correspondante  $h$  et de noyau de Schwartz  $H$ .

$K$  désignera le sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^Y$  image de  $H$  par  $u$  muni de la structure hilbertienne image de celle de  $H/\text{Ker } u$  : c'est-à-dire si  $k$  est la fonction hilbertienne associée à  $K$  : pour tout  $g$  dans  $K$  :

$$k(g) = \inf_{\substack{f \in H \\ u(f)=g}} h(g)$$

Si  $( , )$  (resp.  $( , )_K$ ) est le produit scalaire sur  $H$  (resp.  $K$ ) : pour  $f_1, f_2$  dans  $H$  :

$$(u(f_1), u(f_2))_K = (f_1, f_2)$$

On prouve que  $K$ , le noyau de Schwartz, est défini par :

$$K = u \circ H \circ {}^t u$$

( ${}^t u$  étant l'application transposée de  $u$ ).

B) Considérons  $h$  une fonction semi-hilbertienne sur  $\mathbb{R}^X$ .

On suppose de plus  $u(\text{Ker } h)$  fermé dans  $\mathbb{R}^Y$

Pour tout  $g$  dans  $\mathbb{R}^Y$ , on définit la fonction :

$$k(g) = \inf_{\substack{f \in \mathbb{R}^X \\ u(f)=g}} h(f)$$

Il n'y a pas de difficulté à montrer que  $k$  est convexe, quadratique, de domaine un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^Y$ .

$$\begin{aligned} \text{Ker } k &= \{g \in \mathbb{R}^Y, k(g) = 0\} \\ &= u(\text{Ker } h) \end{aligned}$$

D'après l'hypothèse faite, on a donc  $\text{Ker } k$  fermé.

On peut donc considérer  $\mathbb{R}^Y / \text{Ker } k = \mathbb{R}^Y / u(\text{Ker } h)$  muni de la topologie quotient.

Considérons le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^X & \xrightarrow{u} & \mathbb{R}^Y \\ \varphi_X \downarrow & & \downarrow \varphi_Y \\ \mathbb{R}^X / \text{Ker } h & \xrightarrow{\hat{u}} & \mathbb{R}^Y / \text{Ker } k \end{array}$$

On a :

$$\hat{u} \circ \varphi_X = \varphi_Y \circ u$$

et  $\hat{u}$  est continue.

Notons :

$$\begin{aligned} \dot{h}(\dot{f}) &= h(f) && \text{pour } \dot{f} \in \mathbb{R}^X / \text{Ker } h && \text{avec } f \in \dot{f} \\ \dot{k}(\dot{g}) &= k(g) && \text{pour } \dot{g} \in \mathbb{R}^Y / \text{Ker } k && \text{avec } g \in \dot{g} \end{aligned}$$

On sait, par hypothèse que  $h$  est une fonction hilbertienne et il s'agit de montrer que  $k$  est une fonction hilbertienne sur  $\mathbb{R}^Y / \text{Ker } k = \mathbb{R}^Y / u(\text{Ker } h)$ .

On obtient le résultat car  $\hat{u}$  est continu (pour les topologies quotient) et car :

$$\{\dot{g} \in \mathbb{R}^Y / \text{Ker } k, \dot{k}(\dot{g})\} = \hat{u}(\{\dot{f} \in \mathbb{R}^X / \text{Ker } h, h(\dot{f}) \leq 1\})$$

La fonction  $k$  est donc une fonction semi-hilbertienne sur  $\mathbb{R}^Y$ .

On peut encore définir un multi-noyau associé à la fonction semi-hilbertienne  $k$ .

Notons  $\tilde{K}$ , resp.  $\tilde{H}$ , le noyau associé à la fonction hilbertienne  $\dot{k}$  (resp.  $\dot{h}$ ). On a alors :

$$\tilde{K} = u \circ \tilde{H} \circ t_u$$

et le noyau associé à la fonction semi-hilbertienne sera la multi-application linéaire définie sur  $(\text{Ker } k)^\circ$  à valeurs dans  $E$  (valeurs définies à un élément de  $\text{Ker } k$  près)

$$K = \varphi_Y^{-1} \circ u \circ \tilde{H} \circ t_u$$

Nous utiliserons ce qui précède en particulier quand  $u$  est une application de restriction des fonctions définies sur  $X$  à un sous-ensemble de  $X$ .

### III - FONCTIONS SPLINES

Nous reprenons la formulation générale des fonctions "splines" due à DUCATEAU [ 6 ] :

Soit  $h$  une fonction semi-hilbertienne sur  $\mathbb{R}^X$  et  $\chi$  une fonction convexe dans  $\mathbb{R}^X$ . Alors on cherche un élément  $\sigma$  de  $\mathbb{R}^X$  qui minimise  $h(u) + \chi(u)$  pour  $u$  dans  $\mathbb{R}^X$ .

Nous aurons à considérer le cas où  $\chi$  est la fonction indicatrice d'un translaté  $f+A$  d'un sous espace vectoriel  $A$  de  $\mathbb{R}^X$  avec  $f \in \mathbb{R}^X$  c'est-à-dire :

$$\chi(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u \in f+A \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Dans ce cas, on montre que ([ 6 ]) les solutions au problème de fonction spline sont les éléments de  $H(v)$ , où  $v$  est dans le polaire  $A^\circ$  de  $A$ , qui appartiennent à  $f+A$  ; sous les hypothèses qui suivent :

- .  $h$  et  $\chi$  sont dans  $\Gamma_0(\mathbb{R}^X)$
- .  $h$  et  $\chi$  sont un couple uni de fonctions
- . l'une des deux fonctions est quasi-continue

(pour les définitions consulter P.J. LAURENT [ 9 ]).

C'est encore  $\{ \sigma \in \mathbb{R}^X, \sigma \in f+A, b \in \partial h(\sigma) \cap b \in A^\circ \}$ .



## CHAPITRE V

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques résultats dû à DUCATEAU [ 6 ] concernant les fonctions semi-hilbertiennes sur  $[0,1]^2$  .

On essaye d'étudier, par un procédé de trace, des fonctions hilbertiennes sur le triangle. Mais il semble difficile de caractériser l'espace obtenu ainsi.

Une formule d'Ostrogradski construite permet de chercher une formule interpolant une fonction sur les bords du triangle et d'ordre 3.

I - EXEMPLE DE FONCTIONS SEMI-HILBERTIENNE SUR  $\mathbb{R}^{[0,1]^2}$

Considérons  $[0,1]^2$  et un entier  $k$ ,  $k \geq 1$ .

L'espace  $H^{k,k}([0,1]^2)$  désignera l'espace des distributions dont les dérivées en  $x$  et en  $y$ , d'ordre inférieur ou égal à  $k$ , appartiennent à  $L^2([0,1]^2)$  :

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta}}{\partial x^\alpha \partial y^\beta} f \in L^2([0,1]^2) \quad \alpha, \beta \leq k.$$

muni du produit scalaire :

$$(f, g) = \sum_{\alpha, \beta \leq k} \int_{[0,1]^2} \frac{\partial^{\alpha+\beta}}{\partial x^\alpha \partial y^\beta} g(x, y) \frac{\partial^{\alpha+\beta}}{\partial x^\alpha \partial y^\beta} f(x, y) dx dy$$

On prendra dans cet espace le représentant continu de chaque classe (il existe d'après un théorème de SOBOLEV) si bien que  $H^{k,k}([0,1]^2)$  est un sous-espace hilbertien de  $\mathbb{R}^{[0,1]^2}$ .

On peut montrer (DUCATEAU [6], comme produit tensoriel de fonctions semi-hilbertiennes sur  $\mathbb{R}^{[0,1]}$ ) que :

$$h(f) = \begin{cases} \int_{[0,1]^2} \left( \frac{\partial^{2k}}{\partial x^k \partial y^k} f \right)^2 dx dy & \text{pour } f \in H^{k,k}([0,1]^2) \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

est une fonction semi-hilbertienne sur  $\mathbb{R}^{[0,1]^2}$  et, le noyau de  $h$  est :

$$\text{Ker } h = \left\{ f \in \mathbb{R}^{[0,1]^2} ; f(x, y) = \sum_{i=0}^{k-1} x^i \varphi_i(y) + \sum_{i=0}^{k-1} y^i \varphi_{k+i}(x) \right\}$$

où les fonctions  $\varphi_i$  ( $0 \leq i \leq 2k-1$ ) sont arbitraires.

Pour étudier le multinoyau, il faut caractériser  $(\text{Ker } h)^\circ$ . Ici,  $(\text{Ker } h)^\circ$  est l'ensemble des mesures sur  $\mathbb{R}^{[0,1]^2}$ , combinaisons linéaires de mesures de la forme :

$$\delta_{\xi_1, \dots, \xi_k, \zeta_1, \dots, \zeta_k} = \sum_{i,j=0}^k (-1)^{i+j} \binom{k}{i} \binom{k}{j} \delta_{\xi_i, \xi_j}$$

où  $\delta_{\xi_i, \xi_j}$  est la masse de Dirac au point  $(\xi_i, \xi_j)$ .

Le multi-noyau H est alors défini, à un élément de  $\text{Ker } h$  près, pour tout élément  $e'$  de  $(\text{Ker } h)^\circ$  par la combinaison linéaire de différences finies d'ordre k :

$$\begin{aligned} H(e') &= H\left(\sum C_i \delta_{\xi_1^i, \dots, \xi_k^i, \zeta_1^i, \dots, \zeta_k^i}\right) \\ &= \sum C_i \Delta_{\xi_1^i, \dots, \xi_k^i, \zeta_1^i, \dots, \zeta_k^i} + v \end{aligned}$$

où  $v \in \text{Ker } h$ ,  $\Delta_{\xi_1^i, \dots, \xi_k^i, \zeta_1^i, \dots, \zeta_k^i}$  est la différence d'ordre k associée

à  $\delta_{\xi_1^i, \dots, \xi_k^i, \zeta_1^i, \dots, \zeta_k^i}$ .

On peut alors, dans ce cadre, rechercher l'existence et la caractérisation de fonctions splines :

- Vérifiant un nombre fini de contraintes : on considère un maillage sur  $[0,1]^2$  (produit cartésien d'ensembles discrets sur  $[0,1]$ ) et pour avoir l'unicité, on rajoute des conditions de minimisation au bord — on retrouve ainsi certains éléments finis rectangles.

- Vérifiant une infinité de contraintes, on retrouve alors certains des procédés de Coons étudiés au chapitre II.

(Pour plus de détails voir Ahlberg Nilson Walsh [1], Ducateau [6]).



## II - FONCTION SEMI-HILBERTIENNE SUR LE TRIANGLE

Considérons  $T = \{(x,y) \in [0,1]^2, x+y \leq 1\}$ .

Soit  $U$  l'application de  $\mathbb{R}^{[0,1]^2}$  dans  $\mathbb{R}^T$  qui, à toute fonction définie sur le carré, associe sa restriction au triangle.

À la fonction semi-hilbertienne définie au paragraphe précédent, on peut associer par  $U$  une fonction semi-hilbertienne sur  $\mathbb{R}^T$  que l'on notera  $k$ .

On note que :

- $U$  est linéaire, continue pour les topologies faibles.
- $U(\text{Ker } h)$  est fermé dans  $\mathbb{R}^T$
- si  $g \in \mathbb{R}^T$  et  $k(g) < +\infty$  alors  $g \in H^{k,k}(T)$

Nous allons montrer que :

$$k(g) = \int_T \left( \frac{\partial^{2k}}{\partial x^k \partial y^k} g \right)^2 dx dy \quad \text{pour tout } g \in H^{k,k}(T)$$

Pour cela, il suffit de montrer que  $g$  admet un prolongement, soit  $f$ , à  $[0,1]^2$  tel que :

- $f \in H^{k,k}([0,1]^2)$
- $k(g) = h(f)$ .

On va définir  $f$  de la façon suivante :

$$\text{pour } (x,y) \in T \quad f(x,y) = g(x,y)$$

$$\text{pour } (x,y) \in [0,1]^2 \setminus T :$$

on pose :

$$\frac{\partial^{2k-2}}{\partial x^{k-1} \partial y^{k-1}} f(x,y) = x \frac{\partial^{2k-2}}{\partial x^{k-1} \partial y^{k-1}} g(x,1-x)+y \frac{\partial^{2k-2}}{\partial x^{k-1} \partial y^{k-1}} g(1-y,y)$$

(ce qui a un sens car  $\frac{\partial^{2k-2}}{\partial x^{k-1} \partial y^{k-1}} f(x,y)$  est continue sur T).

Puis

$$\frac{\partial^{2k-3}}{\partial x^{k-2} \partial y^{k-1}} f(x,y) = \int_{1-y}^x \frac{\partial^{2k-2}}{\partial x^{k-1} \partial y^{k-1}} g(t,1-t) dt + \frac{\partial^{2k-3}}{\partial x^{k-2} \partial y^{k-1}} g(x,1-x)$$

et ainsi de suite :

En définissant successivement les dérivées partielles de f par ordre décroissant (par intégrations successives) on définit la fonction f qui appartient à  $H^{k,k} ([0,1]^2)$  et est telle que

$$\int_T \left( \frac{\partial^{2k}}{\partial x^k \partial y^k} g \right) dx dy = \int_{[0,1]^2} \left( \frac{\partial^{2k}}{\partial x^k \partial y^k} f \right) dx dy$$

car  $\frac{\partial^{2k}}{\partial x^k \partial y^k} f(x,y) = 0$  si  $x+y > 1$   $(x,y) \in [0,1]^2$ .

La fonction semi-hilbertienne k est ainsi complètement déterminée. Son noyau est l'image par U du noyau de h soit :

$$\text{Ker } k = \left\{ \sum_{i=0}^{k-1} x^i \varphi_i(y) + \sum_{i=0}^{k-1} y^i \varphi_{k+i}(x) \right\}$$

où les fonctions  $\varphi_i$  sont arbitraires.

L'espace de définition du multi-noyau K associé à k est :

$$(\text{Ker } k)^\circ = (U(\text{Ker } h))^\circ$$

et d'après BOURBAKI ([ 5 ], p. 101), étant donné  $e' \in (\mathbb{R}^T)'$  :

$$e' \in (U(\text{Ker } h))^\circ \Leftrightarrow {}^t U(e') \in (\text{Ker } h)^\circ.$$

Ainsi, le multinoyau  $K$  est défini sur l'ensemble des éléments de  $(\text{Ker } h)^\circ$  dont le support (au sens des distributions) est dans  $T$  et un tel élément  $e'$  est une combinaison linéaire de  $\delta_{\xi_1, \dots, \xi_k, \xi_1, \dots, \xi_k}$

(cf. paragraphe précédent) où  $(\xi_i, \xi_j) \in T$ ,  $1 \leq i \leq k$ ,  $1 \leq j \leq k$ .

$K(e')$  est la combinaison linéaire finie des différences finies associées, à un élément de  $\text{Ker } k$  près.

On pourra donc encore définir des fonctions splines à l'aide de cette fonction semi-hilbertienne.

Mais les procédés d'interpolation ainsi obtenus ne sont pas "adaptés" au triangle :

- On ne peut pas obtenir de procédés interpolant la fonction aux sommets du triangle car le multinoyau n'est pas défini dans ce cas.
- Si on cherche une fonction spline interpolant le long des côtés du triangle une fonction donnée  $f$ , ceci est impossible en général car la fonction spline solution doit vérifier

$$\frac{\partial^{4k}}{\partial x^{2k} \partial y^{2k}} \sigma = T$$

où  $T$  est une mesure à support la frontière du triangle ; or pour toute fonction  $\varphi$ , régulière à support compact, dans l'intérieur du triangle, on a :

$$\left\langle \frac{\partial^{4k}}{\partial x^{2k} \partial y^{2k}} \sigma, \varphi \right\rangle \neq 0$$

$$\text{(sauf si } f = \sum_{i=0}^{2k-1} x^i \varphi_i(y) + \sum_{i=0}^{2k-1} y^i \varphi_{i+k}(x) \text{)} .$$

(On peut également établir l'impossibilité de la solution au problème en considérant encore l'espace de définition du multinoyau  $k$  .

III - FONCTION SEMI-HILBERTIENNE SUR LE TRIANGLE COMME TRACE DE FONCTION

SEMI-HILBERTIENNE SUR  $\mathbb{R}^{[0,1]^3}$

Soit  $H^{k,k,k}([0,1]^3)$  l'espace des distributions sur  $[0,1]^3$  telles que  $\frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma}}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma} f \in L^2([0,1]^3)$  pour  $\alpha, \beta, \gamma \leq k$ ,

muni de la norme :

$$\left[ \sum_{\alpha, \beta, \gamma \leq k} \int_{[0,1]^3} \left( \frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma}}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma} f \right)^2 dx dy dz \right]^{1/2}$$

On considère unique la fonction (ou une fonction) continue de chaque classe et cet espace et ainsi  $H^{k,k,k}([0,1]^3)$  est un sous-espace hilbertien de  $\mathbb{R}^{[0,1]^3}$ .

Soit la fonction semi-hilbertienne sur  $\mathbb{R}^{[0,1]^3}$  :

$$h(f) = \begin{cases} \int_{[0,1]^3} \left( \frac{\partial^{3k}}{\partial x^k \partial y^k \partial z^k} f(x,y,z) \right)^2 dx dy dz & \text{si } f \in H^{k,k,k} \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

En procédant comme en II, on peut considérer l'application restriction

$$U : \mathbb{R}^{[0,1]^3} \longrightarrow \mathbb{R}^\Delta$$

où :  $\Delta = \{(x,y,z) \in [0,1]^3 \mid x+y+z \leq 1\}$ .

On définit alors sur  $\mathbb{R}^\Delta$  la fonction semi-hilbertienne :

$$k(g) = \begin{cases} \int_{\Delta} \left( \frac{\partial^{3k}}{\partial x^k \partial y^k \partial z^k} g(x,y,z) \right)^2 dx dy dz & \text{si } f \in H^{k,k,k}(\Delta) \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

et on notera  $\| \cdot \|_{\Delta,k}$  la norme associée.

Notons  $T = \{(x,y,z) \in [0,1]^3 \mid x+y+z = 1\}$

et  $v$  l'application restriction :

$$v : \mathbb{R}^\Delta \longrightarrow \mathbb{R}^T$$

et notons  $\ell$  la fonction semi-hilbertienne obtenue comme image de  $k$  par  $v$  (il est immédiat que  $v(\text{Ker } k)$  est fermé dans  $\mathbb{R}^T$ ). Un problème est: donner une expression de  $\ell$ .

On pourrait essayer d'expliciter le multinoyau de  $\ell$  mais nous ne savons pas caractériser correctement  $(\text{Ker } \ell)^\circ$  c'est-à-dire l'espace sur lequel ce multinoyau est défini.

Aussi allons nous nous ramener au cas hilbertien.

Soit  $H_0^k([0,1]^3)$  le sous-espace de  $H^{k,k,k}([0,1]^3)$  des fonctions splines

telles que (ce qui a un sens car pour  $\alpha, \beta, \gamma < k$   $\frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma}}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma} f$  est continue si  $f$  est un élément de  $H^{k,k,k}([0,1]^3)$ ):

pour  $0 \leq \alpha \leq k-1$  ;  $0 \leq \beta \leq k-1$  ,  $0 \leq \gamma \leq k-1$  et  $(x,y,z) \in [0,1]^3$  :

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} f(0,y,z) = \frac{\partial^\beta}{\partial y^\beta} f(x,0,z) = \frac{\partial^\gamma}{\partial z^\gamma} f(x,y,0) = 0$$

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta}}{\partial x^\alpha \partial y^\beta} f(0,0,z) = \frac{\partial^{\alpha+\gamma}}{\partial x^\alpha \partial z^\gamma} f(0,y,0) = \frac{\partial^{\beta+\gamma}}{\partial y^\beta \partial z^\gamma} f(x,0,0) = 0$$

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma}}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma} f(0,0,0) = 0$$

Alors  $H_0^k([0,1]^3)$  est un sous-espace de Hilbert de  $\mathbb{R}^{[0,1]^3}$  pour la norme :  $(2 h(f))^{1/2}$  pour tout  $f$  de  $H_0^k([0,1]^3)$  et où  $h$  est la fonction semi-hilbertienne définie plus haut.

A  $H_0^k([0,1]^3)$  est associée la fonction hilbertienne :

$$h_0(f) = \begin{cases} h(f) & \text{si } f \in H_0^k([0,1]^3) \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Comme sous-espace hilbertien de  $\mathbb{R}^{[0,1]^3}$ ,  $H_0^k([0,1]^3)$  admet un noyau reproduisant.

LEMME 1 :

$$\text{Soit } g(x,t) = \begin{cases} \int_0^x \frac{(x-s)^{n-1}}{(n-1)!} \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} ds & \text{si } 0 \leq x \leq t \leq 1 \\ \int_0^t \frac{(x-s)^{n-1}}{(n-1)!} \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} ds & \text{si } 0 \leq t \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$g$  est le noyau reproduisant de l'espace de Hilbert  $\kappa$  des fonctions définies sur  $[0,1]$ , dont les dérivées distributions sont dans  $L^2([0,1])$  jusqu'à l'ordre  $n$ , telles que, pour  $0 \leq i \leq n-1$   $f^{(i)}(0) = 0$ , muni de la norme

$$\left( \int_0^1 (f^{(n)}(t))^2 dt \right)^{1/2}.$$

PREUVE :

Les fonctions de  $C^n([0,1])$  vérifiant les conditions ponctuelles imposées dans le lemme étant denses dans cet espace il suffit de vérifier que : (cf. chapitre IV)

- $g(x, \cdot) \in \kappa$
- $\langle g(x, \cdot), f \rangle_{\kappa} = f(x)$  pour tout  $f \in \kappa \cap C^n([0,1])$

Le premier point est facilement vérifié et on remarquera que :

$$\frac{\partial^n}{\partial t^n} g(x,t) = \begin{cases} \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} & 0 \leq t \leq x \leq 1 \\ 0 & 0 \leq x < t \leq 1 \end{cases}$$

De ce qui précède et de la formule de Taylor résulte le deuxième point.

— x —

DEFINITION 2 :

Soit  $G(x,t)$  la fonction définie de  $[0,1]^3 \times [0,1]^3$  à valeur dans  $\mathbb{R}$  ( $x = (x_1, x_2, x_3)$  ;  $t = (t_1, t_2, t_3)$ ) par :

$$G(x,t) = \prod_{i=1}^3 g(x_i, t_i)$$

LEMME 3 :

$G$  est le noyau reproduisant de l'espace  $H_0^k([0,1]^3)$  .

Ce lemme est une conséquence immédiate du lemme 1.

En vérifiant les conditions :

- $G(x, \cdot) \in H_0^k([0,1]^3)$
- $\langle G(x, \cdot), f \rangle_{H_0^k} = f(x)$  .

— x —

Soit  $H_o^k(\Delta)$  l'image par  $U$  de  $H_o^k([0,1]^3)$

$H_o^k(\Delta)$  est un espace de Hilbert de fonction hilbertienne associée :

$$k_o(g) = \begin{cases} k(g) & \text{si } g \in H_o^k(\Delta) \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

D'après les rappels du chapitre IV, paragraphe II, le noyau reproduisant  $G_\Delta$  est la restriction de  $G$  à  $\Delta \times \Delta$  .

De même, soit  $H_o^k(T)$  l'image par  $V$  de  $H_o^k(\Delta)$ .

Nous ne savons pas donner une expression de la fonction hilbertienne associée à  $H_o^k(T)$  ; par contre, on sait que son noyau reproduisant est la restriction de  $G_\Delta$  à  $T \times T$  . Nous le noterons  $G_T$  .

Au paragraphe suivant, nous allons donner une approche de la définition de  $H_o^k(T)$  .



IV - APPROCHE POUR LA CARACTERISATION DE  $H^k_o(T)$ .

QUELQUES NOTATIONS :

- $H^k_{oo}(\Delta)$  désignera le sous-espace vectoriel des fonctions de  $H^k_o(\Delta)$  nulles sur T, (ce qui a un sens puisque les fonctions de  $H^k_o(\Delta)$  sont continues). C'est un sous-espace fermé.
- $H^k_{o1}(\Delta)$  désignera le supplémentaire topologique de  $H^k_{oo}(\Delta)$  dans  $H^k_o(\Delta)$ .
- Dans le plan de  $\mathbb{R}^3$  qui porte T, soit :

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x+y+z = 1\}$$

On supposera le repère (non orthonormé) d'origine le point A de  $\mathbb{R}^3$  (1,0,0) et de vecteurs unitaires d'origine A et d'extrémités B et C respectivement de coordonnées dans  $\mathbb{R}^3$ , (0,1,0) et (0,0,1) et on notera  $(\tilde{x}, \tilde{y})$  les coordonnées d'un point de T dans ce repère.

- Etant donné une fonction f de  $H^k_o(\Delta)$  on notera  $H^k_{of}(\Delta)$  le sous-espace vectoriel translaté des fonctions de  $H^k_o(\Delta)$  qui sont égales à f sur T

$$H^k_{of}(\Delta) = \{g \in H^k_o(\Delta), g-f \in H^k_{oo}(\Delta)\} .$$

—————\*

L'espace  $H^k_o(T)$  est, par définition, (cf. le paragraphe précédent) l'espace des traces de  $H^k_o(\Delta)$  sur  $\Delta$  muni de la norme :

$$\|\tilde{f}\|_{T,k} = \inf_{\substack{f \in H^k_o(\Delta) \\ \tilde{f} = f|_T}} \|f\|_{\Delta,k} \quad \text{pour tout } \tilde{f} \in H^k_o(T) .$$

Si  $f$  désigne une fonction quelconque de  $H^k_0(\Delta)$  telle que sa trace sur  $T$  soit  $\tilde{f}$  :

$$\|\tilde{f}\|_{T,k} = \inf_{g \in H^k_{0f}(\Delta)} \|g\|_{\Delta,k}$$

Il s'agit de trouver la fonction  $\bar{f}$  réalisant cet "inf".

L'existence est assurée puisque c'est un problème de meilleure approximation de l'origine dans un sous-espace vectoriel translaté fermé d'un espace de Hilbert.

Une caractérisation de  $\bar{f}$  est donnée par :

- $\bar{f} \in H^k_0(\Delta)$
- $\langle \bar{f}, g \rangle_{H^k_0(\Delta)} = 0$  pour tout  $g$  dans  $H^k_{0,o}(\Delta)$
- $\bar{f}(x,y,z) = \tilde{f}(x,y,z)$  pour tout  $(x,y,z) \in T$ .

Nous allons montrer, qu'avec des hypothèses de régularité, ce problème est un problème d'équation aux dérivées partielles avec conditions aux limites.

Pour cela introduisons une formule d'Ostrogradski.

On suppose les fonctions  $\varphi$  et  $\psi$  indéfiniment différentiables, définies sur  $\Delta$  :  $\varphi, \psi \in C^\infty(\Delta)$ .

Pour simplifier, on notera :  $\frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma}}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma} \varphi = \varphi_{\alpha,\beta,\gamma}$ .

Soit  $i$  un entier tel que  $0 \leq i \leq k-1$ . Alors :

$$A_i = \frac{\partial}{\partial x} [\varphi_{k-i-1, k-i, k-i} \cdot \psi_{k+i, k+i, k+i}] =$$

$$\varphi_{k-i, k-i, k-i} \cdot \psi_{k+i, k+i, k+i} + \varphi_{k-i-1, k-i, k-i} \psi_{k+i+1, k+i, k+i}$$

$$B_i = \frac{\partial}{\partial y} [\varphi_{k-i-1, k-i-1, k-i} \cdot \psi_{k+i+1, k+i, k+i}] =$$

$$\varphi_{k-i-1, k-i, k-i} \cdot \psi_{k+i+1, k+i, k+i} +$$

$$\varphi_{k-i-1, k-i-1, k-i} + \psi_{k+i+1, k+i+1, k+i}$$

$$C_i = \frac{\partial}{\partial z} [\varphi_{k-i-1, k-i-1, k-i-1} \cdot \psi_{k+i+1, k+i+1, k+i}] =$$

$$\varphi_{k-i-1, k-i-1, k-i} \cdot \psi_{k+i+1, k+i+1, k+i} +$$

$$\varphi_{k-i-1, k-i-1, k-i-1} \cdot \psi_{k+i+1, k+i+1, k+i+1}$$

D'où :

$$A_i - B_i + C_i = \varphi_{k-i, k-i, k-i} \cdot \psi_{k+i, k+i, k+i}$$

$$+ \varphi_{k-i-1, k-i-1, k-i-1} \cdot \psi_{k+i+1, k+i+1, k+i+1}$$

Et en sommant sur i :

$$\sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i [A_i - B_i + C_i] = \varphi_{k, k, k} \psi_{k, k, k} + (-1)^{k-1} \varphi \cdot \psi_{2k, 2k, 2k}$$

En permutant l'ordre de dérivation pour obtenir  $A_i, B_i, C_i$  on peut obtenir cinq autres formules semblables.

Intégrons les deux membres de l'identité précédente sur  $\Delta$  :

$$\sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \int_{\Delta} [A_i - B_i + C_i] dx dy dz = \int_{\Delta} \varphi_{k,k,k} \Psi_{k,k,k} dx dy dz + (-1)^{k-1} \int_{\Delta} \varphi \cdot \Psi_{2k,2k,2k} dx dy dz$$

Pour un  $i$  fixé,  $0 \leq i \leq k-1$ , on a :

$$\begin{aligned} \int_{\Delta} A_i - B_i + C_i dx dy dz = & \int_{\Delta} \varphi_{k-i-1, k-i, k-i} \Psi_{k+i, k+i, k+i} \cdot \cos(\vec{n}, \vec{x}) d\Gamma \\ & - \int_{\Delta} \varphi_{k-i-1, k-i-1, k-i} \cdot \Psi_{k+i+1, k+i, k+i} \cos(\vec{n}, \vec{y}) d\Gamma \\ & + \int_{\Delta} \varphi_{k-i-1, k-i-1, k-i-1} \cdot \Psi_{k+i+1, k+i+1, k+i} \cos(\vec{n}, \vec{y}) d\Gamma, \end{aligned}$$

où  $\Gamma$  désigne la frontière de  $\Delta$  et  $\vec{n}$  la normale extérieure à  $\Gamma$  au point d'intégration.

$\Gamma$  est constituée de quatre faces :

$$\Gamma_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0 \quad x+y \leq 1 \quad x \geq 0 \quad y \geq 0\}$$

$$\Gamma_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0 \quad x+z \leq 1 \quad x \geq 0 \quad z \geq 0\}$$

$$\Gamma_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0 \quad y+z \leq 1 \quad y \geq 0 \quad z \geq 0\}$$

Si on prend  $\varphi$  indéfiniment dérivable et élément de  $H_o^k(\Delta)$  :

pour  $(x,y,z) \in \Gamma_3$  :  $\varphi_{i,o,o}(x,y,z) = 0$  pour  $0 \leq i \leq k-1$

et par suite :  $\varphi_{k-i-1,k-i,k-i}(x,y,z) \neq 0$  pour  $0 \leq i \leq k-1$

Comme sur  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ ,  $\cos(\vec{n}, \vec{x}) = 0$ , le premier terme du deuxième membre se réduit à l'intégrale sur T seulement.

On montre de la même façon que les deux autres intégrales se réduisent aussi à des intégrales sur T.

Ainsi, on obtient, pour  $\varphi \in C^\infty(\Delta) \cap H_o^k(\Delta)$   $\Psi \in C^\infty(\Delta)$  l'identité I :

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{aligned}
 & \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \frac{1}{\sqrt{3}} \int_T \varphi_{k-i-1,k-i,k-i} \cdot \Psi_{k+i,k+i,k+i} - \\
 & \quad - \varphi_{k-i-1,k-i-1,k-i} \cdot \Psi_{k+i+1,k+i,k+i} + \\
 & \quad + \varphi_{k-i-1,k-i-1,k-i-1} \cdot \Psi_{k+i+1,k+i+1,k+i} \, dT = \\
 & = \int_{\Delta} \varphi_{k,k,k} \Psi_{k,k,k} \, dx dy dz + (-1)^{k-1} \int_{\Delta} \varphi \cdot \Psi_{2k,2k,2k} \, dx dy dz
 \end{aligned} \right\} \text{I}
 \end{aligned}$$

On admettra donc dans la suite que la solution de notre problème initial de caractérisation, soit  $\bar{f}$ , est suffisamment régulière.

Pour tout  $g \in H_o^k(\Delta)$ , on doit avoir :

$$\langle \bar{f}, g \rangle_{H_o^k(\Delta)} = 0$$

a) En particulier pour toute fonction  $\varphi$  de  $D(\Delta)$  (espace des fonctions de base des distributions sur  $\Delta$ ), on doit avoir, d'après l'identité précédente :

$$\int_{\Delta} \varphi \frac{\partial^{6k}}{\partial x^{2k} \partial y^{2k} \partial z^{2k}} \bar{f} \, dx dy dz = 0 .$$

soit :

$$\frac{\partial^{6k}}{\partial x^{2k} \partial y^{2k} \partial z^{2k}} \bar{f} = 0$$

sur  $\Delta$  au sens des distributions.

b) En tenant compte de ce qui précède, pour tout  $\varphi$  de  $H_{0,0}^k(\Delta)$  suffisamment régulière, on a l'identité II :

$$\text{II} \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \int_{T} \varphi_{k-i-1, k-i, k-i} \bar{f}_{k+i, k+i, k+i} - \varphi_{k-i-1, k-i-1, k-i} \bar{f}_{k+i+1, k+i, k+i} \\ + \varphi_{k-i-1, k-i, k-i} \bar{f}_{k+i+1, k+i+1, k+i} \, dT = 0 . \end{array} \right.$$

Par des choix particuliers de la fonction  $\varphi$ , on va trouver des conditions sur la fonction  $\bar{f}$  :

Soit :

$$\varphi_j(x, y, z) = x^k y^k z^k (1-x-y-z)^{3k-j}$$

- . où  $l_j$  est une fonction suffisamment régulière  $l_j(x, y, z)$ ,
- . où  $j$  est un entier tel que  $0 < j < 3k$ ,

Pour de tels  $j$ , la fonction  $\varphi_j$  est dans  $H_{0,0}^k(\Delta)$ .

D'autre part,  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  sont des entiers positifs tels que  $\alpha + \beta + \gamma < 3k-j$ ,

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma}}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma} \varphi_j(x,y,z) = 0 \quad \text{pour} \quad x+y+z = 1,$$

Si  $\alpha + \beta + \gamma = 3k-j$  alors, pour  $x+y+z = 1$  :

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma}}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma} \varphi_j(x,y,z) = C x^k y^k z^k \ell_j(x,y,z),$$

Pour  $j = 1$ , on pose  $\ell_1(x,y,z) = \bar{f}_{k,k,k}(x,y,z)$ ,

et d'après les remarques précédentes, l'identité II se réduit à :

$$\int_T x^k y^k z^k (\bar{f}_{k,k,k}(x,y,z))^2 dT = 0,$$

d'où  $\bar{f}_{k,k,k}$  est nulle sur  $T$ .

Pour  $j = 2$ , on pose  $\ell_2(x,y,z) = \bar{f}_{k+1,k,k}(x,y,z)$ ,

et d'après ce qui précède, l'identité II se réduit à :

$$\int_T x^k y^k z^k (\bar{f}_{k+1,k,k}(x,y,z))^2 dT = 0$$

d'où

$$\bar{f}_{k+1,k,k}$$

est nulle sur  $T$ .

En choisissant successivement  $\ell_j$  égal à

$$\begin{aligned} & \bar{f}_{k+1,k+1,k} ; \bar{f}_{k+1,k+1,k+1} ; \bar{f}_{k+2,k+1,k+1} ; \bar{f}_{k+2,k+2,k+1} ; \dots \\ & \dots ; \bar{f}_{k+i,k+i,k+i} ; \bar{f}_{k+i+1,k+i,k+i} ; \bar{f}_{k+i+1,k+i+1,k+i} ; \dots \\ & \dots ; \bar{f}_{2k-1,2k-1,2k-1} ; \bar{f}_{2k,2k-1,2k-1} ; \end{aligned}$$

On montrera que ces fonctions sont nulles sur T .

Ces résultats ont été obtenus en utilisant l'identité I qui utilise une permutation (x,y,z) de ces variables.

En utilisant les cinq autres permutations, on obtiendra finalement que  $\bar{f}$  doit être solution du problème :

$$\frac{\partial^{6k}}{\partial x^{2k} \partial y^{2k} \partial z^{2k}} \bar{f}(x,y,z) = 0 \quad \text{pour } (x,y,z) \in \overset{\circ}{\Delta}$$

Pour  $(x,y,z) \in \Delta$  et  $0 \leq \alpha, \beta, \gamma < k$

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} \bar{f}(0,y,z) = \frac{\partial^\beta}{\partial y^\beta} \bar{f}(x,0,z) = \frac{\partial^\gamma}{\partial z^\gamma} \bar{f}(x,y,0) = 0$$

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta}}{\partial x^\alpha \partial y^\beta} \bar{f}(0,0,z) = \frac{\partial^{\beta+\gamma}}{\partial y^\beta \partial z^\gamma} \bar{f}(x,0,0) = \frac{\partial^{\beta+\gamma}}{\partial x^\alpha \partial z^\gamma} \bar{f}(0,y,0) = 0$$

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma}}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma} \bar{f}(0,0,0) = 0 .$$

Pour  $(x,y,z) \in T$  :

- $\bar{f}(x,y,z) = f(x,y,z)$
- pour  $k \leq \alpha, \beta, \gamma \leq 2k$   $\alpha+\beta+\gamma \leq 6k-2$

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma}}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma} \bar{f}(x,y,z) = 0 .$$



Nous ne savons pas trouver la solution de ce problème (il s'agit d'avoir une solution sous forme analytique), même pour  $k=1$ . Il semble pourtant que si on connaissait une telle solution, on pourrait donner l'expression du produit scalaire sur  $H_0^k(T)$ . En effet, en utilisant les résultats précédents, si on remplace, dans l'identité I, la fonction  $\Psi$  par la fonction  $\bar{f}$  on obtient,  $\varphi$  étant toujours dans  $H_0^k(\Delta)$  :

$$\frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{3}} \int_T \varphi \cdot \bar{f}_{2k,2k,2k-1} dT = \int_{\Delta} \varphi_{k,k,k} \cdot \bar{f}_{k,k,k} dx dy dz$$

Alors :

- avec  $\varphi = \bar{f}$ , on obtient d'après les rappels du début de ce paragraphe et l'identité précédente :

$$\|\tilde{f}\|_{T,k} = \|\bar{f}\|_{\Delta,k}^2 = \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{3}} \int_T \bar{f} \cdot \bar{f}_{2k,2k,2k} dT .$$

- avec  $\varphi = G_{\Delta}(x,y,z ; \dots)$  :

$$\begin{aligned} \bar{f}(x,y,z) &= \langle G_{\Delta}(x,y,z ; \dots), \bar{f} \rangle_{H_0^k(\Delta)} = \\ &= \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{3}} \int_T G_{\Delta}(x,y,z ; s,t,u) \bar{f}_{2k,2k,2k-1}(s,t,u) dT \end{aligned}$$

et si  $(x,y,z) \in T$  :

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x,y,z) &= \bar{f}(,sy,z) = \\ &= \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{3}} \int_T G_T(x,y,z;s,t,u) \bar{f}_{2k,2k,2k-1}(s,t,u) dT . \end{aligned}$$

Quelques remarques concernant la régularité des fonctions de  $H_0^k(T)$

- On peut remarquer que les fonctions de  $H_0^k(\Delta)$  sont dans  $C^{k-1}(\Delta)$ , espace des fonctions  $k-1$  fois dérivable continuellement. Il en sera donc de même des fonctions de  $H_0^k(T)$ .

- Soit  $f$  une fonction suffisamment dérivable, définie sur  $\Delta$  et soit  $\tilde{f}$  sa trace sur  $T$

Avec les notations introduites au début du paragraphe, on a :

$$x = 1 - (\tilde{x} + \tilde{y}) \quad , \quad y = \tilde{x} \quad , \quad z = \tilde{y}$$

et

$$\tilde{f}(\tilde{x}, \tilde{y}) = f(1 - \tilde{x} - \tilde{y}, \tilde{x}, \tilde{y})$$

d'où :

$$\frac{\partial}{\partial x} \tilde{f}(\tilde{x}, \tilde{y}) = - \frac{\partial}{\partial x} f(1 - \tilde{x} - \tilde{y}, \tilde{x}, \tilde{y}) + \frac{\partial}{\partial y} f(1 - \tilde{x} - \tilde{y}, \tilde{x}, \tilde{y})$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \tilde{f}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right] f(1 - \tilde{x} - \tilde{y}, \tilde{x}, \tilde{y})$$

On voit ici que si  $k=1$ , il semble difficile d'obtenir l'appartenance de  $\frac{\partial}{\partial x} \tilde{f}$  et de  $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \tilde{f}$  à  $L^2(T)$ .

(Pour le premier cas la technique habituelle consiste à écrire

$$\frac{\partial}{\partial x} \tilde{f}(\tilde{x}, \tilde{y}) = - \int_0^{1 - \tilde{x} - \tilde{y}} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(t, \tilde{x}, \tilde{y}) dt + \int_0^{1 - \tilde{x} - \tilde{y}} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(t, \tilde{x}, \tilde{y}) dt \quad ,$$

utiliser l'inégalité triangulaire, d'appliquer l'inégalité de Schwarz et d'intégrer sur le triangle. Mais pour  $k=1$ , nous n'avons aucune hypothèse sur  $\frac{\partial^2}{\partial x^2} f \dots$ ).

Pourtant, le noyau  $G_T$  de  $H_0^1(T)$  est tel que

$$\frac{\partial}{\partial s} G_T(\tilde{x}, \tilde{y}; \dots) \quad , \quad \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} G_T(\tilde{x}, \tilde{y}; \dots) \quad \text{sont dans } L^2(T) \quad .$$

V - APPLICATIONS

1°/ INTERPOLATION PONCTUELLE.

Dans la mesure où l'on connaît le noyau de l'espace de Hilbert  $H_0^k(T)$ , on peut exprimer les fonctions splines vérifiant des contraintes ponctuelles en utilisant le critère donné au chapitre IV, paragraphe III.

La fonction semi-hilbertienne est ici une fonction hilbertienne et la fonction  $\chi$  est la fonction caractéristique de l'ensemble des fonctions de  $H_0^k(T)$  qui vérifient les contraintes :

$$(k_i, f)_{T,k} = \alpha_i \quad i=1, \dots, n$$

où  $k_i$  sont des fonctionnelles linéaires continues sur  $H_0^k(T)$  (on considère ici leur représentation par le théorème de Riez) et  $\alpha_i$  des nombres réels. On suppose les fonctionnelles  $k_i$  linéairement indépendantes.

Alors la fonction spline s'exprime par :

$$\sigma(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i (k_i, G_T(x, \cdot))_{T,k}$$

où les  $\lambda_i$  sont obtenus par la résolution d'un système linéaire. (Il peut ne pas y avoir existence et/ou unicité !)

EXEMPLE :

- Soit  $k=1$ ,  $n=3$ , les fonctionnelles  $k_i$  étant les masses de Dirac aux points  $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}), (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}), (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$  (coordonnées barycentriques)

Les  $k_i$  sont alors bien continues sur  $H_0^1(T)$ .

On a alors pour  $G_T$  exprimé en coordonnées barycentriques :

$$G_T(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 ; \nu_1, \nu_2, \nu_3) = \text{Min}(\lambda_1, \nu_1) \text{Min}(\lambda_2, \nu_2) \text{Min}(\lambda_3, \nu_3)$$

On remarque alors qu'à l'intérieur du triangle formé par les trois points, la fonction-spline associée, pour des  $(\alpha_i)$  quelconques est linéaire.

Pour  $k=2$ , en considérant les mêmes trois points que précédemment, on constate que  $G_T$  s'exprime, sur l'intérieur du triangle formé par ces trois points, par des polynômes de degré 3.

On doit pouvoir définir les fonctions-spline de façon unique en imposant dix conditions ponctuelles mais nous n'avons pas approfondi ce problème.

M. ATTEIA ([ 2 ]) a introduit et étudié les éléments finis comme trace sur  $T$  de noyaux définis sur  $\mathbb{R}^3$  par le produit cartésien d'espace de Hilbert.

## 2°/ INTERPOLATION SUR DES LIGNES

L'espace des contraintes étant de dimension infinie, on ne peut pas utiliser ici la caractérisation des fonctions-spline par le noyau (ou multi-noyau) car  $\chi$  n'est plus quasi-continue : la codimension du domaine de  $\chi$  n'est pas finie.

On est donc obligé d'utiliser la caractérisation par le sous-différentiel (p. 108). Or ici nous n'avons pas l'expression de  $h$ .

Néanmoins, en utilisant la formule d'Ostrogradski proposée au paragraphe précédent, on peut obtenir des procédés d'interpolation.

On se place dans  $H^1_0(\Delta)$ . On a alors l'identité :

(en fait on peut supposer uniquement que  $f \in H^1_0(\Delta)$  et que  $g$  est suffisamment régulière).

$$\int_{\Delta} f_{1,1,1} g_{1,1,1} + f g_{2,2,2} d\Delta =$$

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \int_T g_{1,1,1} [f_{0,1,1} + f_{1,0,1} + f_{1,1,0}] dT$$

$$- \frac{1}{\sqrt{3}} \int_T f_{1,0,0} (g_{1,1,2} + g_{1,2,1}) + f_{0,1,0} (g_{1,1,2} + g_{2,1,1}) +$$

$$+ f_{0,0,1} (g_{2,1,1} + g_{1,2,1}) dT$$

$$+ \frac{2}{\sqrt{3}} \int_T f (g_{1,2,2} + g_{2,1,2} + g_{2,2,1}) dT$$

a) Soit pour f la fonction  $G_{\Delta}$ , noyau de  $H^1_0(\Delta)$ , c'est-à-dire :

$$G_{\Delta}(x,y,z,s,t,u) = \text{Min}(x,s) \text{Min}(y,t) \text{Min}(z,u)$$

Il est immédiat que :

$$\int_{\Delta} \frac{\partial^3}{\partial s \partial t \partial u} G_{\Delta}(x,y,z,s,t,u) \frac{\partial^3}{\partial s \partial t \partial u} g(s,t,u) ds dt du =$$

$$g(x,y,z) - g(0,y,z) - g(x,0,z) - g(x,y,0) +$$

$$+ g(x,0,0) + g(0,y,0) + g(0,0,z) - g(0,0,0).$$

b) Soit maintenant une fonction définie sur T, soit  $\Phi$  exprimée en coordonnées barycentriques :  $\Phi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ .

A cette fonction, on peut faire correspondre trois fonctions (ceci est semblable à ce que l'on a fait au chapitre IV) ;  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  :

$$(t,u) \rightarrow \varphi_1(t,u) = \Phi(1-t-u,t,u) \quad t,u \geq 0 \quad t+u \leq 1$$

$$(u,s) \rightarrow \varphi_2(u,s) = \Phi(s,1-s-u,u) \quad s,u \geq 0 \quad s+u \leq 1$$

$$(s,t) \rightarrow \varphi_3(s,t) = \Phi(s,t,1-s-t) \quad s,t \geq 0 \quad s+t \leq 1$$

On constate que pour  $s, t, u$  tels que :  
 $s+t+u = 1 \quad s, t, u \geq 0$  :

$$\varphi_1(t, u) = \varphi_2(u, s) = \varphi_3(s, t)$$

Ces fonctions sont définies, d'autres part, pour tout  $(s, t, u) \in \Delta$ .

c) Posons :

$$g(s, t, u) = s \varphi_1(t, u) + t \varphi_2(u, s) + u \varphi_3(s, t)$$

Sur  $T$ ,  $g$  coïncide avec la fonction donnée initialement  $\Phi$ .

En utilisant (a), on a :

$$R(g) = \int_0^x \int_0^y \int_0^z \frac{\partial^3}{\partial x \partial y \partial z} G_{\Delta} \cdot g \, d\Delta =$$

$$\begin{aligned} g(x, y, z) - y \varphi_2(z, 0) - z \varphi_3(0, y) - x \varphi_1(0, z) \\ - y \varphi_2(0, x) - z \varphi_3(x, 0) - x \varphi_1(y, 0) \\ + y \varphi_2(0, 0) + z \varphi_3(0, 0) + x \varphi_1(0, 0) \end{aligned}$$

Ceci est le procédé d'interpolation donné au chapitre III page 86 si on en considère la trace sur  $T$ .

En considérant  $R(g)$  dans la formule d'Ostrogradski rappelée plus haut, on a :

$$\begin{aligned}
 R(g)(x,y,z) &= \frac{2}{\sqrt{3}} \int_T \left[ \frac{\partial^2}{\partial t \partial u} \varphi_1 + \frac{\partial^2}{\partial u \partial s} \varphi_2 + \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} \varphi_3 \right] F_1 dT \\
 &- \frac{1}{\sqrt{3}} \int_T \left[ \frac{\partial^3}{\partial s \partial t^2} \varphi_1 + \frac{\partial^3}{\partial s^2 \partial t} \varphi_2 + \frac{\partial^3}{\partial t^2 \partial u} \varphi_1 + \frac{\partial^3}{\partial s \partial t^2} \varphi_3 \right] dT \\
 &- \frac{1}{\sqrt{3}} \int_T \left[ \frac{\partial^3}{\partial u \partial s^2} \varphi_2 + \frac{\partial^3}{\partial s^2 \partial t} \varphi_3 + \frac{\partial^3}{\partial s \partial t^2} \varphi_1 + \frac{\partial^3}{\partial s^2 \partial t} \varphi_2 \right] dT \\
 &+ \frac{2}{\sqrt{3}} \int_T \left[ \frac{\partial^4}{\partial t^2 \partial u^2} \varphi_1 + \frac{\partial^4}{\partial u^2 \partial s^2} \varphi_2 + \frac{\partial^4}{\partial s^2 \partial t^2} \varphi_3 \right] dT
 \end{aligned}$$

On constate donc que la formule d'interpolation donnée est d'ordre 2 pour des fonctions suffisamment régulière.

d) Pour obtenir une formule d'ordre supérieur, soit 3, on peut chercher à trouver une autre expression de  $g$ , qui permette de vérifier :

$$\frac{\partial^3}{\partial x \partial y \partial z} g(x,y,z) = 0 \quad \text{pour} \quad x+y+z = 1 \quad x,y,z \geq 0.$$

Soit  $g$  de la forme :

$$g = a \varphi_1 + b \varphi_2 + c \varphi_3$$

où  $a, b$  et  $c$  sont des fonctions à déterminer

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^3}{\partial s \partial t \partial u} g &= \frac{\partial^3}{\partial s \partial t \partial u} a \cdot \varphi_1 + \frac{\partial^3}{\partial s \partial t \partial u} b \cdot \varphi_2 + \frac{\partial^3}{\partial s \partial t \partial u} c \cdot \varphi_3 \\
 &+ \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} a \frac{\partial}{\partial u} \varphi_1 + \frac{\partial^2}{\partial t \partial u} c \frac{\partial}{\partial s} \varphi_3 + \\
 &+ \frac{\partial^2}{\partial s \partial u} a \frac{\partial}{\partial t} \varphi_1 + \frac{\partial^2}{\partial t \partial u} b \frac{\partial}{\partial s} \varphi_2 + \\
 &+ \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} b \frac{\partial}{\partial u} \varphi_2 + \frac{\partial^2}{\partial s \partial u} c \frac{\partial}{\partial t} \varphi_3 + \\
 &+ \frac{\partial}{\partial s} a \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} \varphi_1 + \frac{\partial}{\partial t} b \frac{\partial^2}{\partial s \partial u} \varphi_2 + \frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} \varphi_3
 \end{aligned}$$

En tenant compte du fait que pour  $s+t+u = 1$  :

$$\cdot \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 1$$

$$\cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial t} = 0 ; \frac{\partial}{\partial s} \varphi_3 + \frac{\partial}{\partial t} \varphi_1 = 0 ; \frac{\partial}{\partial s} \varphi_3 + \frac{\partial}{\partial u} \varphi_1 = 0$$

pour obtenir le résultat, on doit avoir, pour  $s+t+u = 1$

$$\frac{\partial^3}{\partial s \partial t \partial u} (a+b+c) = 0 \quad , \quad a+b+c = 1$$

$$\frac{\partial^2}{\partial s \partial t} a = \frac{\partial^2}{\partial t \partial u} c$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t \partial u} b = \frac{\partial^2}{\partial s \partial u} a$$

$$\frac{\partial^2}{\partial s \partial u} c = \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} b$$

$$\frac{\partial}{\partial s} a \frac{\partial^2}{\partial t \partial u} \varphi_1 + \frac{\partial}{\partial t} b \frac{\partial^2}{\partial s \partial u} \varphi_2 + \frac{\partial}{\partial u} c \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} \varphi_3 = 0$$

Une solution est donnée par :

$$a = 2(s-ts-us+tu)-s^2$$

$$b = 2(t-st-ut+us)-t^2$$

$$c = 2(u-us-ut+st)-u^2$$

En utilisant (a) =

$$\int_{\Delta} \frac{\partial^3}{\partial s \partial t \partial u} G_{\Delta}(x,y,z;\dots) \frac{\partial^3}{\partial s \partial t \partial u} g \, dT =$$

$$\begin{aligned} & g(x,y,z) - [2yz \varphi_1(y,z) + [2(1-z)y-y^2] \varphi_2(z,0) + [2(1-y)z-z^2] \varphi_3(0,y)] \\ & - [2zx \varphi_2(y,z) + [2(1-z)x-x^2] \varphi_1(0,z) + [2(1-x)z-z^2] \varphi_3(x,0)] \\ & - [2xy \varphi_3(x,y) + [2(1-y)x-x^2] \varphi_1(y,0) + [2(1-x)y-y^2] \varphi_2(0,y)] \\ & + (2x-x^2) \varphi_1(0,0) + (2y-y^2) \varphi_2(0,0) + (2z-z^2) \varphi_3(0,0) . \end{aligned}$$



En utilisant la formule d'Ostrogradski construite, on a bien identité d'ordre 3.

Pour  $x, y, z$  tels que  $x+y+z = 1$  ;  $x, y, z \geq 0$

On a  $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 0$

et  $1-2yz-2zx-2xy = x^2 + y^2 + z^2$ .

On obtient alors la formule d'ordre 3 :

$$\begin{aligned}
 P\Phi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) &= \frac{2\lambda_1 - \lambda_1^2}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2} [\Phi(1-\lambda_2, \lambda_2, 0) + \Phi(1-\lambda_3, 0, \lambda_3) - \Phi(1, 0, 0)] \\
 &+ \frac{2\lambda_2^2 - \lambda_2^2}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2} [\Phi(\lambda_1, 1-\lambda_1, 0) + \Phi(0, 1-\lambda_3, \lambda_3) - \Phi(0, 1, 0)] \\
 &+ \frac{2\lambda_3^2 - \lambda_3^2}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2} [\Phi(0, \lambda_2, 1-\lambda_2) + \Phi(1-\lambda_1, 0, \lambda_1) - \Phi(0, 0, 1)] \\
 &- \frac{2\lambda_2 \lambda_3}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2} [\Phi(0, \lambda_2, 1-\lambda_2) + \Phi(0, 1-\lambda_3, \lambda_3)] \\
 &- \frac{2\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2} [\Phi(\lambda_1, 1-\lambda_1, 0) + \Phi(1-\lambda_2, \lambda_2, 0)] \\
 &- \frac{2\lambda_1 \lambda_3}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2} [\Phi(\lambda_1, 0, 1-\lambda_1) + \Phi(1-\lambda_3, 0, \lambda_3)]
 \end{aligned}$$

Il ne semble pas possible d'obtenir une formule d'ordre 4 avec les neuf points seulement utilisés ici et sans utiliser des dérivées partielles.

VI - ETUDE D'UN CAS PARTICULIER

Nous montrons ici que la méthode proposée au paragraphe V pour caractériser  $H^1_0(\Gamma)$  est "efficace" dans le cas où on cherche la trace de  $H^1_0([0,1]^2)$  sur la diagonale du carré.

Rappelons que le noyau de  $H^1_0([0,1]^2)$  espace des fonctions  $f$  de  $L^2([0,1]^2)$  telle que les dérivées distributions :

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta}}{\partial x^\alpha \partial y^\beta} f$$

soient dans  $L^2([0,1]^2)$  pour  $\alpha, \beta$

inférieurs ou égaux à 1 et qui sont nulles (ce qui a un sens car ces fonctions sont continues) pour  $x = 0$  ou  $y = 0$ ,  $(x,y)$  désignant un point de  $[0,1]^2$ .

On vérifie facilement que cet espace muni de la norme :

$$\|f\|_1 = \left( \int_{[0,1]^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f \right)^2 dx dy \right)^{1/2}$$

est un espace de Hilbert et a pour noyau reproduisant

$$G(x,y;s,t) = \text{Min}(x,s) \cdot \text{Min}(y,t) \quad 0 \leq x,y,s,t \leq 1$$

Par les résultats du chapitre IV et du paragraphe II de ce chapitre, si :

$$\Delta = \{(x,y) \in [0,1]^2, \quad x+y \leq 1\}$$

et si  $H^1_0(\Delta)$  est l'espace des fonctions  $f$  définies sur  $\Delta$  telles que :

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta}}{\partial x^\alpha \partial y^\beta} f$$

soient dans  $L^2([0,1]^2)$  pour  $\alpha, \beta \leq 1$

et nulles pour  $x=0$  ou  $y=0$  muni de la norme :

$$\left( \int_{[0,1]^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f \right)^2 dx dy \right)^{1/2}$$

alors cet espace admet pour noyau reproduisant  $G_\Delta$  la trace de  $G$  sur  $\Delta \times \Delta$  soit :

$$G_\Delta = (x,y;s,t) = \text{Min}(x,s) \cdot \text{Min}(y,t) \quad \begin{array}{l} 0 \leq x,y,s,t \leq 1 \\ x+y \leq 1 \\ s+t \leq 1 \end{array}$$

On cherche l'espace  $H^1_\circ(T)$ , trace des fonctions de  $H^1_\circ([0,1]^2)$  et de  $H^1_\circ(\Delta)$  sur  $T = \{(x,y) \in \Delta, x+y = 1\}$ .

$H^1_\circ(T)$  est isomorphe à l'espace des fonctions  $g$  de  $H^1_\circ(\Delta)$  solution de,  $\tilde{h}$  parcourant  $H^1_\circ(\Delta)$  :

$$\|g\|_{\Delta,1} = \inf_{\substack{h \in H^1_\circ(\Delta) \\ h - \tilde{h}|_T = 0}} \|h\|_{\Delta,1}$$

C'est un problème de meilleure approximation de l'origine dans un sous-espace vectoriel translaté fermé de  $H^1_\circ(\Delta)$ . Il y a existence et unicité et on va l'écrire sous forme d'un problème aux limites en se souvenant que la solution est caractérisée par :

$$g \in H^1_\circ(\Delta) \quad , \quad g \text{ étant donnée égale à } \tilde{g} \text{ sur } T .$$

$$\langle g, \varphi \rangle_{H^1_\circ(\Delta)} = 0 \quad \text{pour tout } \varphi \in H^1_\circ(\Delta) \text{ , } \varphi \text{ nulle sur } T .$$

On supposera les fonctions  $f$  et  $h$  suffisamment régulières, alors :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial}{\partial y} f \cdot \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} h \right) = \frac{\partial f}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y^2} h$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( f \cdot \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} h \right) = \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} h + f \cdot \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} h$$

En faisant la différence de ces deux identités et en intégrant sur  $\Delta$ , on trouve :

$$\begin{aligned} \int_{\Delta} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial}{\partial y} f \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} h \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( f \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} h \right) dx dy &= \\ &= \int_{\Delta} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} h dx dy - \int_{\Delta} f \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} h dx dy \end{aligned}$$

On a une identité du même type en permutant les rôles de  $x$  et  $y$  pour la dérivation.

En utilisant la formule de Green-Riemann et en tenant compte des conditions aux limites :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \int_T \frac{\partial}{\partial x} f \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} h - f \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} h dT \right] &= \\ &= \int_{\Delta} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f \cdot \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} h dx dy - \int_{\Delta} f \cdot \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} h dx dy \end{aligned}$$

Pour  $h = g$  et une fonction  $\varphi$  de base des distributions sur  $\Delta$ , donc à support compact dans l'intérieur de  $\Delta$  :

$$\langle g, \varphi \rangle_{H^1_0(\Delta)} = \int_{\Delta} \varphi \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} g dx dy = 0,$$

Donc  $\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} g = 0$  au sens des distributions.

Pour toute fonction  $\varphi$  de  $H^1_0(\Delta)$ , nulle sur  $T$ , on doit donc avoir :

$$\langle g, \varphi \rangle_{H^1_0(\Delta)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_T \frac{\partial}{\partial x} \varphi \cdot \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} g dT = 0.$$

Prenons pour  $\varphi$  la fonction :

$$\varphi(x,y) = (1-x-y)xy \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} g(x,y)$$

alors  $\varphi \in H^1_0(\Delta)$  et pour  $(x,y) \in T$

$$\frac{\partial}{\partial x} \varphi(x,y) = -xy \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} g(x,y)$$

Comme  $x$  et  $y$  sont toujours positifs, ceci impose que :

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} g \text{ est nulle sur } T.$$

On obtient donc que si la solution de notre problème est régulière elle doit satisfaire à :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} g = 0 \quad \text{sur } \overset{\circ}{\Delta} \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} g = 0 \quad \text{sur } T, \quad g = \tilde{g} \quad \text{sur } T. \end{array} \right.$$

$g$  est nulle pour  $x = 0$  ou  $y = 0$ .

Réciproquement, si  $g$  est une fonction de  $H^1_0(\Delta)$  satisfaisant ces équations, pour toute fonction  $\varphi$  dans  $C^\infty(\Delta) \cap H^1_0(\Delta)$

$$\langle g, \varphi \rangle_{H^1_0(\Delta)} = 0$$

et par densité, on obtient que  $g$  est solution de notre problème.

Si  $\tilde{g}$  est une fonction de  $H^1_0(\Delta)$  suffisamment régulière et posons

$$g(x,y) = y \tilde{g}(x,1-x) + x \tilde{g}(1-y,y)$$

Alors :

$$\bullet \quad g \in H^1_0(\Delta)$$

$$\bullet \quad g = \tilde{g} \text{ sur } T \quad \bullet \quad \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} g = 0 \text{ sur } T$$

$$\bullet \quad \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} g = 0 \text{ sur } T.$$

Donc  $g$  est solution de notre problème.

Mais on sait que la fonction  $H^1_0(T)$ , soit  $\bar{g}$ , qui lui correspond est telle que :

$$\|\bar{g}\|_{H^1_0(T)}^2 = \|g\|_{H^1_0(\Delta)}^2$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \|\bar{g}\|_{H^1_0(T)}^2 &= \langle g, g \rangle_{H^1_0(\Delta)} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \int_T g \cdot \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} g \, dT \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} g &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \tilde{g} - 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \tilde{g} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \tilde{g} \\ &= \left( \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 \tilde{g} \end{aligned}$$

Ainsi si on prend sur T comme repère, l'origine au point A de coordonnées (0,1) et comme vecteur unitaire :

$$\sqrt{2} \vec{AB}$$

où B est le point de coordonnées (1,0) ; en appelant s la variable et ds l'élément infinitésimal :

$$\| \bar{g} \|_{H^1_0(T)}^2 = \int_T \tilde{g}(s) \frac{d}{ds} \tilde{g}(s) ds$$

où  $\tilde{g}(s) = \tilde{g}(s,s)$ .

En intégrant par partie et en tenant compte des conditions aux limites :

$$\begin{aligned} \| \bar{g} \|_{H^1_0(T)}^2 &= \int_T \frac{d}{ds} \tilde{g} \cdot \frac{d}{ds} \tilde{g} ds \\ &= \int_T \frac{d}{ds} \bar{g} \cdot \frac{d}{ds} \bar{g} ds \end{aligned}$$

puisque  $\tilde{g}$  et  $\bar{g}$  sont égales sur T.

En tenant compte des propriétés de densité, on obtient finalement que  $H^1_0(T)$  est l'espace  $H^1_0([0,1])$  ce à quoi on pouvait s'attendre vu l'expression du noyau (voir DUC-JACQUET [ 8 ], ARONZAJN [ 3 ]), qui est

$$G_T(s,t) = \begin{cases} s(1-t) & 0 \leq s \leq t \leq 1 \\ (1-s)t & 0 \leq t \leq s \leq 1 . \end{cases}$$

BIBLIOGRAPHIE

BIBLIOGRAPHIE DE L'INTRODUCTION

- [1] M. ATTEIA  
Colloque Analyse Numérique 1973, C.N.R.S. (La Colle sur Loup)
  
- [2] M. ATTEIA  
"Fonction-Spline et Méthodes d'Eléments Finis"  
Université de Toulouse, septembre 1973.
  
- [3] M. ATTEIA  
Colloque Analyse Numérique 1974, C.N.R.S. (Gourette).
  
- [4] GORDON  
Distributions lattices and the...  
dans Approximations with Special Emphasis on Spline Functions  
Ed. Schoenberg (A.P.) 1969.
  
- [5] RAVIART  
Cours de D.E.A., Année 1971-72, Université Paris VI.
  
- [6] ZIENCKIEWICZ  
Méthode des Eléments Finis. Ediscience 1973.



BIBLIOGRAPHIE DE LA PREMIERE PARTIE

- [1] BARNHILL - BIRKHOFF - GORDON  
Smooth interpolation in triangles.  
Journal of Approximation theory 8 p.11-128 (1973).
- [2] CIARLET  
Conforming and non-conforming finite element for solving the  
plate problem.  
Conference on the Numerical Solution of Differential Equations.  
University of Dundee (1973).
- [3a] CIARLET - RAVIART  
General Lagrange and Hermite interpolation in  $\mathbb{R}^n$  with applications  
to finite element methods.  
(Arch. Rat. Mech. Anal. 46 ; (1972).
- [3b] CIARLET - RAVIART  
INTERPOLATION theory over curved element, with applications  
to finite element methods.  
Comp. Math. Appl. Mech. Eng. 1 (1972), p.217-249.
- [4] COONS, S.A.  
Surfaces for computer aided design of space forms.  
Massachusetts Institute of Technology (june 1967).
- [5] DAVIS  
Interpolation and Approximation.  
Brown University (1960), Blaisdell Pub. Comp.
- [6] DUCATEAU, Ch.Fr.  
Quelques problèmes d'interpolation.  
Thèse, Grenoble (1971).

- [7] GORDON, W.J.  
Distributions lattices and multivariate approximations dans  
"Approximation with special emphasis on splines"  
(Schoenberg Ed.) Academic Press (1969).
- [8] GORDON, W.J.  
Blending function ...  
S.I.A.M. J. Num. Anal. 8, (1971).
- [9] GORDON, W.J.  
Spline-Blended surface interpolation through curve networks.  
Journal of Math. and Mechanics, vol. 18 N° 10 (1969).
- [10] HOUSEHOLDER  
Principle of Numerical Analysis.  
McGraw-Hill (1953).
- [11] JUNKINS - MILLER - JANCAITIS  
A weighting Function Approach to modeling of irregular surfaces.  
Journal of Geophysical research, vol. 78 N\_ 11, (april 10, 1973).
- [12] RAVIART  
Cours de D.E.A. de troisième cycle (1971-1972).  
Université de Paris VI.
- [13] ZIENCKIEWICZ  
La méthode des éléments finis.  
Ediscience (1973).

BIBLIOGRAPHIE DE LA DEUXIEME PARTIE

- [1] AHLBERG - NILSON WALSH  
The theory of spline and his applications.  
Academic Press (1967).
- [2] M. ATTEIA  
Méthodes d'éléments finis et fonctions "splines".  
Université P. Sabatier, Toulouse (septembre 1973).
- [3] N. ARONSZAJN  
Theory of reproducing Kernels.  
Transactions of the A.M.S. - 68 (1950).
- [4] BARNHILL - BIRKHOFF - GORDON  
Smooth interpolation in triangles.  
Journal of Approximation Theory 8 p. 11-128 (1973).
- [5] BOURBAKI  
Espace vectoriel topologique.  
XVIII Livre V, chapitre 4 p. 101.
- [6] C.F. DUCATEAU  
Thèse Grenoble (1971).
- [7] C.F. DUCATEAU - J.L. JOLY  
Fonctions Inf-Localement compactes. Fonctions hilbertiennes.  
Fonctions Splines.  
Université Scientifique et Médicale de Grenoble, Laboratoire  
de Mathématiques Appliquées (1969).

- [8] M. DUC-JACQUET  
Thèse. Grenoble (1973).
  
- [9] P.J. LAURENT  
Approximation et Optimisation  
Hermann (1972).
  
- [10] L. SCHWARTZ  
Sous-espaces Hilbertiens et Antinoyaux associés.  
Séminaire Bourbaki (1961/62) n° 238.