Isomorphisme, immersion et recouvrement de graphes

Claudine Turcat

▶ **To cite this version:**

Claudine Turcat. Isomorphisme, immersion et recouvrement de graphes. Modélisation et simulation. Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG; Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1974. Français. NNT : . tel-00284712

HAL Id: tel-00284712
https://theses.hal.science/tel-00284712

Submitted on 3 Jun 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE

présentée à

UNIVERSITE SCIENTIFIQUE ET MEDICALE DE GRENOBLE

pour obtenir le grade de

Docteur de Spécialité (3e cycle)

Spécialité : INFORMATIQUE

par

Claudine TURCAT

Isomorphisme, immersion et recouvrement de graphes.

Thèse soutenue le 29 avril 1974 devant la commission d'examen :

Président : Monsieur J. KUNTZMANN

Examinateurs : Monsieur C.F. PICARD
Monsieur C. BENZAKEN
Madame G. SAUCIER

UNIVERSITE SCIENTIFIQUE
ET MEDICALE DE GRENOBLE

LISTE DES PROFESSEURS

Président : Monsieur Michel SOUTIF
Vice-Président : Monsieur Gabriel CAU

PROFESSEURS TITULAIRES

MM.	ANGLES D'AURIAC Paul	Mécanique des fluides
	ARNAUD Georges	Clinique des maladies infectieuses
	ARNAUD Paul	Chimie
	AUBERT Guy	Physique
	AYANT Yves	Physique approfondie
Mme	BARBIER Marie-Jeanne	Electrochimie
MM.	BARBIER Jean-Claude	Physique expérimentale
	BARBIER Reynold	Géologie appliquée
	BARJON Robert	Physique nucléaire
	BARNOUD Fernand	Biosynthèse de la cellulose
	BARRA Jean-René	Statistiques
	BARRIE Joseph	Clinique chirurgicale
	BENOIT Jean	Radioélectricité
	BERNARD Alain	Mathématiques Pures
	BESSON Jean	Electrochimie
	BEZES Henri	Chirurgie générale
	BLAMBERT Maurice	Mathématiques Pures
	BOLLIET Louis	Informatique (IUT B)
	BONNET Georges	Electrotechnique
	BONNET Jean-Louis	Clinique ophtalmologique
	BONNET-EYMARD Joseph	Pathologie médicale
	BONNIER Etienne	Electrochimie Electrométallurgie
	BOUCHERLE André	Chimie et Toxicologie
	BOUCHEZ Robert	Physique nucléaire
	BOUSSARD Jean-Claude	Mathématiques Appliquées
	BRAVARD Yves	Géographie
	BRISSONNEAU Pierre	Physique du solide
	BUYLE-BODIN Maurice	Electronique
	CABANAC Jean	Pathologie chirurgicale
	CABANEL Jean	Clinique rhumatologique et hydrologie
	CALAS François	Anatomie
	CARRAZ Gilbert	Biologie animale et pharmacodynamie
	CAU Gabriel	Médecine légale et Toxicologie
	CAUQUIS Georges	Chimie organique
	CHABAUTY Claude	Mathématiques Pures
	CHARACHON Robert	Oto-Rhino-Laryngologie
	CHATEAU Robert	Thérapeutique
	CHENE Marcel	Chimie papetière
	COEUR André	Pharmacie chimique
	CONTAMIN Robert	Clinique gynécologique
	COUDERC Pierre	Anatomie Pathologique
	CRAYA Antoine	Mécanique

Mme	DEBELMAS Anne-Marie	Matière médicale
MM.	DEBELMAS Jacques	Géologie générale
	DEGRANGE Charles	Zoologie
	DESRE Pierre	Métallurgie
	DESSAUX Georges	Physiologie animale
	DODU Jacques	Mécanique appliquée
	DOLIQUE Jean-Michel	Physique des plasmas
	DREYFUS Bernard	Thermodynamique
	DUCROS Pierre	Cristallographie
	DUGOIS Pierre	Clinique de Dermatologie et Syphiligraph
	FAU René	Clinique neuro-psychiatrique
	FELICI Noël	Electrostatique
	GAGNAIRE Didier	Chimie physique
	GALLISSOT François	Mathématiques Pures
	GALVANI Octave	Mathématiques Pures
	GASTINEL Noël	Analyse numérique
	GEINDRE Michel	Electroradiologie
	GERBER Robert	Mathématiques Pures
	GIRAUD Pierre	Géologie
	KLEIN Joseph	Mathématiques Pures
Mme	KOFLER Lucie	Botanique et Physilogie végétale
MM.	KOSZUL Jean-Louis	Mathématiques Pures
	KRAVTCHENKO Julien	Mécanique
	KUNTZMANN Jean	Mathématiques appliquées
	LACAZE Albert	Thermodynamique
	LACHARME Jean	Biologie végétale
	LAJZEROWICZ Joseph	Physique
	LATREILLE René	Chirurgie générale
	LATURAZE Jean	Biochimie pharmaceutique
	LAURENT Pierre-Jean	Mathématiques appliquées
	LEDRU Jean	Clinique médicale B
	LLIBOUTRY Louis	Géophysique
	LOUP Jean	Géographie
Mle	LUTZ Elisabeth	Mathématiques Pures
MM.	MALGRANGE Bernard	Mathématiques Pures
	MALINAS Yves	Clinique obstétricale
	MARTIN-NOEL Pierre	Seméiologie médicale
	MASSEPORT Jean	Géographie
	MAZARE Yves	Clinique médicale A
	MICHEL Robert	Minéralogie et Pétrographie
	MOURIQUAND Claude	Histologie
	MOUSSA André	Chimie nucléaire
	NEEL Louis	Physique du solide
	CZENDA Paul	Botanique
	PAUTHENET René	Electrotechnique
	PAYAN Jean-Jacques	Mathématiques Pures
	PEBAY-PEYROULA Jean-Claude	Physique
	PERRET René	Servomécanismes
	PILLET Emile	Physique industrielle
	RASSAT André	Chimie systématique
	RENARD Michel	Thermodynamique
	REULOS René	Physique industrielle
	RINALDI Renaud	Physique
	ROGET Jean	Clinique de pédiatrie et de puériculture
	SANTON Lucien	Mécanique
	SEIGNEURIN Raymond	Microbiologie et Hygiène
	SENGEL Philippe	Zoologie
	SILBERT Robert	Mécanique des fluides
	SOUTIF Michel	Physique générale

MM.	TANCHE Maurice	Physiologie
	TRAYNARD Philippe	Chimie générale
	VAILLAND François	Zoologie
	VALENTIN Jacques	Physique nucléaire
	VAUQUOIS Bernard	Calcul électronique
Mme	VERAIN Alice	Pharmacie galénique
M.	VERAIN André	Physique
Mme	VEYRET Germaine	Géographie
MM.	VEYRET Paul	Géographie
	VIGNAIS Pierre	Biochimie médicale
	YOCCOZ Jean	Physique nucléaire théorique

PROFESSEURS ASSOCIES

MM.	BULLEMER Bernhard	Physique
	HANO JUN-ICHI	Mathématiques Pures
	STEPHENS Michaël	Mathématiques appliquées

PROFESSEURS SANS CHAIRE

MM.	BEAUDOING André	Pédiatrie
Mme	BERTRANDIAS Françoise	Mathématiques Pures
MM.	BERTRANDIAS Jean-Paul	Mathématiques appliquées
	BIAREZ Jean-Pierre	Mécanique
	BONNETAIN Lucien	Chimie minérale
Mme	BONNIER Jane	Chimie générale
MM.	CARLIER Georges	Biologie végétale
	COHEN Joseph	Electrotechnique
	COUMES André	Radioélectricité
	DEPASSEL Roger	Mécanique des fluides
	DEPORTES Charles	Chimie minérale
	GAUTHIER Yves	Sciences biologiques
	GAVEND Michel	Pharmacologie
	GERMAIN Jean-Pierre	Mécanique
	GIDON Paul	Géologie et Minéralogie
	GLENAT René	Chimie organique
	HACQUES Gérard	Calcul numérique
	JANIN Bernard	Géographie
Mme	KAHANE Josette	Physique
MM.	MULLER Jean-Michel	Thérapeutique
	PERRIAUX Jean-Jacques	Géologie et Minéralogie
	POULOUJADOFF Michel	Electrotechnique
	REBECQ Jacques	Biologie (CUS)
	REVOL Michel	Urologie
	REYMOND Jean-Charles	Chirurgie générale
	ROBERT André	Chimie papetière
	DE ROUGEMONT Jacques	Neurochirurgie
	SARRAZIN Roger	Anatomie et chirurgie
	SARROT-REYNAULD Jean	Géologie
	SIBILLE Robert	Construction mécanique
	SIROT Louis	Chirurgie générale
Mme	SOUTIF Jeanne	Physique générale

MAITRES DE CONFERENCES ET MAITRES DE CONFERENCES AGREGES

Mle	AGNIUS-DELORD Claudine	Physique pharmaceutique
	ALARY Josette	Chimie analytique
MM.	AMBLARD Pierre	Dermatologie
	AMBROISE-THOMAS Pierre	Parasitologie
	ARMAND Yves	Chimie
	BEGUIN Claude	Chimie organique
	BELORIZKY Elie	Physique
	BENZAKEN Claude	Mathématiques appliquées
	BILLET Jean	Géographie
	BLIMAN Samuel	Electronique (EIE)
	BLOCH Daniel	Electrotechnique
Mme	BOUCHE Liane	Mathématiques (CUS)
MM.	BOUCHET Yves	Anatomie
	BOUVARD Maurice	Mécanique des fluides
	BRODEAU François	Mathématiques (IUT B)
	BRUGEL Lucien	Energétique
	BUISSON Roger	Physique
	BUTEL Jean	Orthopédie
	CHAMBAZ Edmond	Biochimie médicale
	CHAMPETIER Jean	Anatomie et organogénèse
	CHIAVERINA Jean	Biologie appliquée (EFP)
	CHIBON Pierre	Biologie animale
	COHEN-ADDAD Jean-Pierre	Spectrométrie physique
	COLOMB Maurice	Biochimie médicale
	CONTE René	Physique
	COULOMB Max	Radiologie
	CROUZET Guy	Radiologie
	DURAND Francis	Métallurgie
	DUSSAUD René	Mathématiques (CUS)
Mme	ETERRADOSSI Jacqueline	Physiologie
MM.	FAURE Jacques	Médecine légale
	GENSAC Pierre	Botanique
	GIDON Maurice	Géologie
	GRIFFITHS Michaël	Mathématiques appliquées
	GROULADE Joseph	Biochimie médicale
	HOLLARD Daniel	Hématologie
	HUGONOT Robert	Hygiène et Médecine préventive
	IDELMAN Simon	Physiologie animale
	IVANES Marcel	Electricité
	JALBERT Pierre	Histologie
	JOLY Jean-René	Mathématiques Pures
	JOUBERT Jean-Claude	Physique du solide
	JULLIEN Pierre	Mathématiques Pures
	KAHANE André	Physique générale
	KUHN Gérard	Physique
	LACOUME Jean-Louis	Physique
Mme	LAJZEROWICZ Jeannine	Physique
MM.	LANCIA Roland	Physique atomique
	LE JUNTER Noël	Electronique
	LEROY Philippe	Mathématiques
	LOISEAUX Jean-Marie	Physique nucléaire
	LONGEQUEUE Jean-Pierre	Physique nucléaire
	LUU DUC Cuong	Chimie organique
	MACHE Régis	Physiologie végétale
	MAGNIN Robert	Hygiène et Médecine préventive
	MARECHAL Jean	Mécanique
	MARTIN-BOUYER Michel	Chimie (CUS)

MM.	MAYNARD Roger	Physique du solide
	MICHOULIER Jean	Physique (IUT A)
	MICOUD Max	Maladies infectieuses
	MOREAU René	Hydraulique (INP)
	NEGRE Robert	Mécanique
	PARAMELLE Bernard	Pneumologie
	PECCOUD François	Analyse (IUT B)
	PEFFEN René	Métallurgie
	PELMONT Jean	Physiologie animale
	PERRET Jean	Neurologie
	PERRIN Louis	Pathologie expérimentale
	PFISTER Jean-Claude	Physique du solide
	PHELIP Xavier	Rhumatologie
Mlle	RIERY Yvette	Biologie animale
MM.	RACHAIL Michel	Médecine interne
	RACINET Claude	Gynécologie et obstétrique
	RENAUD Maurice	Chimie
	RICHARD Lucien	Botanique
Mme	RINAUDO Marquerite	Chimie macromoléculaire
MM.	ROMIER Guy	Mathématiques (IUT B)
	SHOM Jean-Claude	Chimie générale
	STIEGLITZ Paul	Anesthésiologie
	STOEBNER Pierre	Anatomie pathologique
	VAN CUTSEM Bernard	Mathématiques appliquées
	VEILLON Gérard	Mathématiques appliquées (INP)
	VIALON Pierre	Géologie
	VOOG Robert	Médecine interne
	VROUSSOS Constantin	Radiologie
	ZADWORNY François	Electronique

MAITRES DE CONFERENCES ASSOCIES

MM.	BOUDOURIS Georges	Radioélectricité
	CHEEKE John	Thermodynamique
	GOLDSCHMIDT Hubert	Mathématiques
	SIDNEY STUARD	Mathématiques Pures
	YACOUD Mahmoud	Médecine légale

CHARGES DE FONCTIONS DE MAITRES DE CONFERENCES

Mme	BERIEL Hélène	Physilogie
Mme	RENAUDET Jacqueline	Microbiologie

Fait le 30 mai 1972.

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à Monsieur le Professeur J. KUNTZMANN qui a dirigé ce travail et dont les conseils m'ont permis de le mener à bien.

Je suis sensible à l'honneur qu'il me fait en acceptant de présider le Jury de cette thèse.

Je remercie sincèrement Monsieur C. BENZAKEN, Maître de Conférences, pour l'aide qu'il m'a apportée par ses critiques et ses conseils.

Je remercie vivement Monsieur PICARD, Directeur de Recherches au CNRS, et Madame G. SAUCIER, Maître de Conférences, d'avoir bien voulu accepter de faire partie du Jury.

Je tiens aussi à remercier mes camarades de l'équipe "Mathématiques du Hardware" pour l'aide amicale que j'ai trouvée auprès d'eux, et également Madame G. DUFFOURD et le service tirage pour le soin avec lequel l'impression de ce travail a été réalisée.

PLAN

1ere PARTIE

I - Rappels de définitions

II - Approche matricielle

A - Graphes simples finis
B - Réseaux orientés et non marqués
C - Réseaux marqués
D - Hypergraphes

III - Utilisation de fonctions locales

A - Utilisation des fonctions nodales

- principe des méthodes
- algorithme de G. SAUCIER et programmation
- application aux hypergraphes

B - Utilisation des voisinages

- principe
- méthode générale et exemples
- comparaison des méthodes
- application aux hypergraphes

IV - Applications à des problèmes pratiques

A - Isomorphisme de réseaux de boites et de fils

B - Utilisation de ces méthodes pour des problèmes de testabilité de réseaux.

2e PARTIE

I - Immersion et sous-graphes partiels isomorphes maximaux

A - Immersion d'un graphe G' dans un graphe G

B - Recherche dans deux réseaux marqués de sous-réseaux isomorphes maximaux

II - Recouvrement d'un réseau avec un réseau donné

INTRODUCTION

Par ce travail nous avons cherché à utiliser, de manière pratique et si possible efficace, des notions de théorie des graphes pour résoudre différents types de problèmes rencontrés en "hardware".

Dans la première partie, nous abordons le problème de l'isomorphisme de graphes G = (X,U) et G' = (X',U'). Cependant, comme les graphes simples sont des modèles peu adaptés aux problèmes technologiques, nous étudions également l'isomorphisme de réseaux; en particulier nous utilisons de préférence la terminologie des réseaux si nous avons des orientations ou des marques. Ce problème déjà ancien a été étudié dans des cas très particuliers par KELLY (14), MENON (19), TURNER (25), WEINBERG (29); CORNEIL dans (7) l'a étudié dans le cas général. Nous reprenons, dans le chapitre II une approche matricielle du problème (Cf (4), (10), (26)) et nous donnons une caractérisation de réseaux isomorphes par les réduites de Jordan de leurs matrices de définition, mais ceci reste une approche théorique et peu utilisable en pratique.

Dans le chapitre III nous étudions l'isomorphisme plutôt par des propriétés locales, liées aux articulations : tout d'abord, nous définissons des fonctions nodales et des fonctions de voisinages, puis nous étudions comment les utiliser pour rechercher un isomorphisme. Ces méthodes consistent à affiner des partitions sur les ensembles de sommets X et X' grâce aux fonctions locales; cependant, dans les deux cas, les partitions suivant les classes d'automorphismes ne peuvent être affinées et nous pouvons être amenés à terminer cette recherche en effectuant, de manière exhaustive, toutes les hypothèses encore possibles. Notre programme, écrit à partir de l'algorithme de G. SAUCIER (22) donne des résultats performants pour des graphes simples d'une vingtaine de sommets.

Le chapitre IV est consacré à des problèmes plus pratiques et actuels, que nous cherchons à résoudre en prolongeant les notions définies au chapitre pré cédent. D'une part, vérifier l'implantation d'un schéma logique revient à rechercher l'isomorphisme de deux réseaux de boites et de fils et les Sociétés TELEMECANIQUE et SESCOSEM se heurtent actuellement à cette difficulté. Nous donnc ici une méthode qui peut être utilisée . D'autre part, pour ce qui concerne les pannes dans un circuit logique, la recherche de "pannes équivalentes" (Cf.(28)) e simplifiée par la connaissance des automorphismes du circuit et par suite le nomb de vecteurs de test à déterminer est très notablement abaissé.

Dans la partie II, nous nous intéressons à des problèmes voisins de l'i morphisme. Dans le chapitre I nous cherchons si un graphe G' = (X',U') est immerg dans G = (X,U), c'est à dire est isomorphe à un sous-graphe partiel de G. Notre méthode utilise les notions de voisinage et une méthode booléenne pour donner la ou les solutions si elles existent. Une extension du problème, lorsque G' n'est pas immergeable dans G est de rechercher dans G' et dans G, des sous-graphes partiels isomorphes qui aient un nombre maximum de connexions : la méthode utilisée est très voisine mais cependant plus complexe dans ce cas.

Au chapitre II nous abordons un problème fréquemment rencontré, celui d recouvrement d'un réseau par un réseau d'un type donné. Nous déterminons une solu tion qui peut ne pas être la meilleure, par une méthode de construction pas à pas

PREMIERE PARTIE

-o-o-o-

RAPPELS DE DEFINITIONS

Nous rassemblons dans ce chapitre les principales définition que nous utiliserons par la suite :

I - Principales définitions

1) Graphes finis non orientés

Un graphe fini $G = (X,U)$ est constitué par la donnée :

- d'un ensemble fini X
- d'une famille finie $U = \{u_1, u_2, \ldots u_m\}$ de paires d'éléments de X.

Nous noterons la paire $\{x, y\}$ d'éléments de X, indifféremment (x, y) ou (y, x).

Le graphe sera <u>simple</u> si tous les éléments de U sont distincts.

Un <u>sous-graphe</u> d'un graphe (X, U) est un graphe (A, U_A) tel que :

$$\begin{cases} A \subset X \\ \text{et} \\ u = (x_1, x_2) \in U_A \iff \{ x_1 \in A \ \& \ x_2 \in A \ \& \ u \in U \} \end{cases}$$

Un tel sous-graphe s'appelle aussi <u>sous-graphe engendré</u> par l'ensemble des sommets A.

Un <u>graphe partiel</u> du graphe (X,U) est un graphe (X,Δ) où Δ est inclus dans U.

Un sous-graphe partiel du graphe (X,U) est un graphe (A,Δ_A) tel que :

$$\begin{cases} A \subset X \\ \text{et} \\ u = (x_1,x_2) \in \Delta_A \Rightarrow \{x_1 \in A \ \& \ x_2 \in A \ \& \ u \in U\} \end{cases}$$

2) Hypergraphes

Un hypergraphe fini $H = (X,\mathcal{E})$ est constitué par la donnée :

- d'un ensemble fini X
- d'une famille $\mathcal{E}$ de parties de X : $\mathcal{E} = \{(E_i)\}$ telle que :

$$\begin{cases} \forall i \quad E_i \neq \emptyset \\ \\ \bigcup_i E_i = X \end{cases}$$

Si dans $\mathcal{E}$, tous les E_i sont distincts, l'hypergraphe est dit simple.

3) Réseaux (d'après J. KUNTZMANN)

J. KUNTZMANN a introduit la notion de réseaux d'articulations, mieux adaptée aux problèmes technologiques qui peuvent se poser.

Une articulation est un organe qui communique avec l'extérieur en un nombre fini de points qui sont ses connecteurs.

Les connecteurs peuvent être soit des entrées, soit des sorties soit indifférents.

Un réseau d'articulations $R = (\mathcal{A}, \mathcal{C})$ est formé d'un ensemble fini $\mathcal{A}$ d'articulations et d'un ensemble $\mathcal{C}$ de connexions.

Une connexion est une paire de connecteurs telle que :

- les deux connecteurs d'une paire sont distincts
- tout connecteur fait partie d'une paire au plus
- les paires de connecteurs ne peuvent être que des types entrée-sortie, sortie-entrée ou indifférent-indifférent.

Le réseau est simple si, entre deux articulations, n'existe qu'une connexion d'un type donné.

Un réseau de noeuds et d'étoiles est un réseau dont les articulations se partagent en deux classes disjointes :

- la classe des étoiles
- la classe des noeuds

et lorsque deux articulations sont connectées, l'une est une étoile, et l'autre un noeud.

REMARQUE :

La donnée d'un hypergraphe fini simple $H = (X, \mathcal{E})$ est équivalente à la donnée d'un réseau de noeuds et d'étoiles $R = (\mathcal{A}, \mathcal{C})$ où :

$$\begin{cases} \mathcal{A} = X \cup \mathcal{E} \\ \text{et} \\ c = (x,e) \in \mathcal{C} \iff x \in e \end{cases}$$

Dans la suite nous utiliserons le terme réseau si certaines connexions sont orientées ou si les articulations portent des marques.

II - Isomorphisme d'hypergraphes et de graphes simples

Deux hypergraphes simples finis $H = (X, \mathcal{E})$ et $H' = (X', \mathcal{E}')$ sont isomorphes s'il existe une application bijective σ

$$\sigma : X \longrightarrow X'$$

telle que, si $\bar{\sigma}$ est l'application définie par :

$$\bar{\sigma} : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X')$$

$$\{x, y, z, \ldots\} \longrightarrow \{\sigma(x), \sigma(y), \sigma(z), \ldots\}$$

$\bar{\sigma}_{/\mathcal{E}}$ est une surjection de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{E}'$

Cette définition est également valable pour les graphes simples, qui sont des hypergraphes particuliers.

Un automorphisme d'un graphe $G = (X, U)$ est un isomorphisme de G sur lui-même.

Propriété 1 :

L'ensemble des automorphismes d'un graphe fini de n sommets a une structure de groupe : c'est un groupe isomorphe à un sous-groupe du groupe des permutations $\mathcal{S}_n$.

Propriété 2 :

Dans X la relation : "il existe un automorphisme de G qui envoie x sur y" est une relation d'équivalence.

Les classes d'équivalence correspondantes sont appelées classes d'automorphismes de G.

Un graphe transitif est un graphe qui n'a qu'une seule classe d'automorphismes, c'est à dire :

$\forall x \in X, \forall y \in X \qquad \exists \sigma \in Aut(G) \Rightarrow y = \sigma(x)$

III - Isomorphisme de réseaux d'articulations

Soient deux réseaux simples $R = (\mathcal{A}, \mathcal{C})$ et $R' = (\mathcal{A}', \mathcal{C}')$ ayant même ensemble M de marques sur les articulations et même ensemble N de marques sur le connexions.

Une connexion d'un réseau d'articulations sera notée : (A , B , i) où i indique le type de la connexion

i = 0 pour un type entrée-sortie

i = 1 pour un type sortie-entrée

i = φ pour un type indifférent-indifférent.

Nous disons que deux réseaux d'articulations sont isomorphes s'il exi une application bijective σ :

telle que :

- $m' \circ \sigma = m$
- si $\bar{\sigma}$ est défini par :

$\bar{\sigma} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$

$(A,B,i) \longmapsto (\sigma(A), \sigma(B), i)$

$\bar{\sigma}$ est une surjection de $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{C}'$

- $n' \circ \bar{\sigma} = n$

APPROCHE MATRICIELLE

A - GRAPHES SIMPLES FINIS

Définition

Soit un graphe simple fini G = (X,U), d'ensemble de sommets $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. On appelle matrice de définition associée à G la matrice $A_{n*n} = (a_{ij})$ où

$$\begin{cases} a_{ij} = 1 \iff (x_i, x_j) \in U \\ a_{ij} = 0 \iff (x_i, x_j) \notin U \end{cases}$$

Dans cette partie, les matrices de définition seront considérées comm matrices sur le corps des réels; ce sont des matrices symétriques réelles.

Propriété :

G et G' sont des graphes simples finis isomorphes, de matrices de définition A et A' si et seulement si il existe une matrice de permutation $P_{n \times n}$ *telle que :*

$$A' = P^{-1}.A.P$$

A la matrice de permutation P est attachée une permutation σ *de* $\mathcal{S}_n$ *e son inverse, définies par :*

$$\sigma(i) = j \iff p_{ij} = 1 \iff \sigma^{-1}(j) = i$$

P est une représentation de σ *suivant les lignes et une représentatio de* σ^{-1} *suivant les colonnes.*

I - INTRODUCTION DES POLYNOMES CARACTERISTIQUES

I - 1. Condition nécessaire (non suffisante)

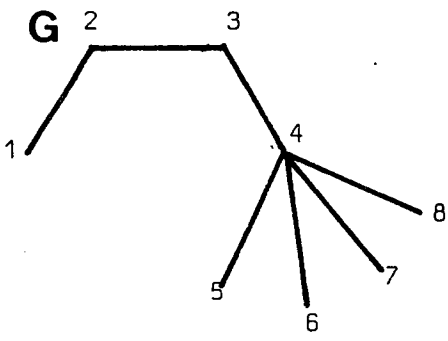
Si G et G' sont isomorphes, les polynômes caractéristiques (sur $\mathbf{R}$) associés aux matrices de définition A et A' sont égaux.

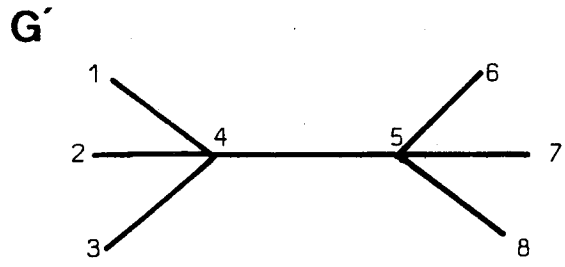
Si A et A' sont les matrices de définition associées à 2 graphes G et G', leurs polynômes caractéristiques peuvent être égaux sans que G et G' soient isomorphes.

Contre exemple :

Ce contre exemple est dû à L. COLLATZ et U. SINOGOWITZ, et est cité par J. TURNER (26).

Soient les graphes suivants :





Les matrices de définition A et A' ont même polynôme caractéristique

$$P(\lambda) = \lambda^4 (\lambda^4 - 7\lambda^2 + 9)$$

En considérant les degrés des sommets, il est clair que G et G' ne sor pas isomorphes, et cependant il est nécessaire de calculer des déterminants d'ordre 8 pour obtenir $P(\lambda)$.

I - 2. Condition suffisante

Si A et A', matrices de définition de deux graphes simples G et G' ont même polynôme caractéristique et s'il existe une matrice de permutation P telle que :

$\forall \lambda \in Spec(A)$, il existe des bases de vecteurs propres $(V_1, V_2, \ldots V_{i_\lambda})$ et $(V'_1, V'_2, \ldots V'_{i_\lambda})$ de $\mathcal{E}_\lambda$ et $\mathcal{E}'_\lambda$ avec pour tout k: $V_k = P.V'_k$, alors G et G' sont isomorphes.

En effet, A et A' étant deux matrices symétriques réelles, nous considérons la base de $\mathbb{R}^n$ formée par les vecteurs propres $(V'_i)_{i=1\ldots n}$

$$\forall_i \quad \begin{cases} A\,V_i = \lambda_i\,V_i \\ A'V'_i = \lambda_i\,V'_i \\ V_i = P\,V'_i \end{cases}$$

$$\forall_i \quad A'V'_i = \lambda_i\,V'_i = \lambda_i\,P^{-1}.\,V_i$$

$$= P^{-1}.\,A.V_i$$

$$= P^{-1}.\,A.P.V'_i$$

$$(A' - P^{-1}.\,A.P).V'_i = 0$$

Comme l'ensemble des V'_i constitue une base de $\mathbb{R}^n$

$$A' = P^{-1}.\,A.P$$

donc G et G' sont isomorphes.

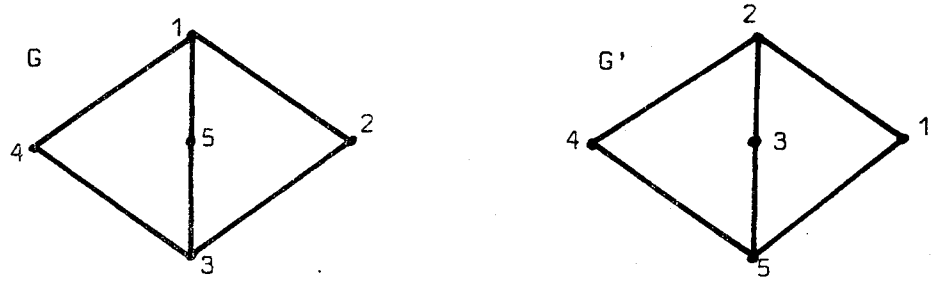
REMARQUE :

Cette condition suffisante est utile lorsque les espaces propres $\mathcal{E}_\lambda$ associés à λ sont de dimension 1 car les vecteurs V_i et V'_i peuvent être normés et il est possible de vérifier si $V_i = P\,V'_i$.

Si les espaces $\mathcal{E}_\lambda$ sont de dimension supérieure à 2, un "bon choix" des V_i et V'_i sera difficile.

I - 3. Exemple

Considérons les graphes G et G' suivants :



Les polynômes caractéristiques sont égaux à :

$p(\lambda) = -\lambda^3(\lambda^2 - 6)$

Les espaces propres associés à $\lambda = 0$ sont de dimension 3. Ils sont définis par les équations :

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases} \quad \text{pour } \mathcal{E}_0$$

$$\begin{cases} y_2 + y_5 = 0 \\ y_1 + y_3 + y_4 = 0 \end{cases} \quad \text{pour } \mathcal{E}'_0$$

S'il existe une matrice de permutation P telle que pour des vecteurs propres de $\mathcal{E}_0$ et $\mathcal{E}'_0$: V = P V', alors :

$$x_i = y_{\sigma(i)}$$

Donc, si σ existe, elle est telle que :

$$\sigma \begin{cases} (1,3) \rightarrow (2,5) \\ (2,4,5) \rightarrow (1,3,4) \end{cases}$$

Parmi les 3! x2! permutations possibles nous choisissons celle à laquelle est associée

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

et nous vérifions que $A' = P^{-1}.A.P.$

II - Polynômes caractéristiques généralisés

L'isomorphisme entre deux graphes G et G' n'étant pas caractérisé par l'identité des spectres de A et A', J. TURNER a défini, à partir des matrices, des fonctions "plus fines" qui éventuellement le caractériseraient [26].

I - 1. Définitions

Soit A une matrice carrée $(n \times n)$ et χ un caractère du groupe symétriqu $\mathcal{S}_n$. On appelle déterminant généralisé la quantité

$$d_\chi(A) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \chi(\sigma)\, a_{1\sigma(1)}\, a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

REMARQUE :

Si $\chi(\sigma) = 1$ pour une permutation paire et $\chi(\sigma) = -1$ pour une permutation impaire, alors $d_\chi(A)$ est le déterminant classique de A.

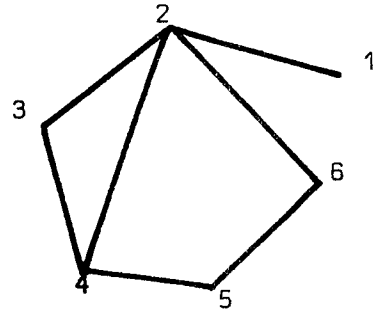
Le polynôme caractéristique généralisé correspondant au caractère χ e

$$p_\chi(\lambda) = d_\chi(A - \lambda I).$$

Dans un graphe simple, un "cycle au sens large" est, soit un cycle élémentaire, soit une arête, soit un sommet isolé.

Une dissection dans un graphe G est une collection de "cycles au sens large" tel que tout sommet de G appartienne à un cycle et un seul de la collection.

Exemple :



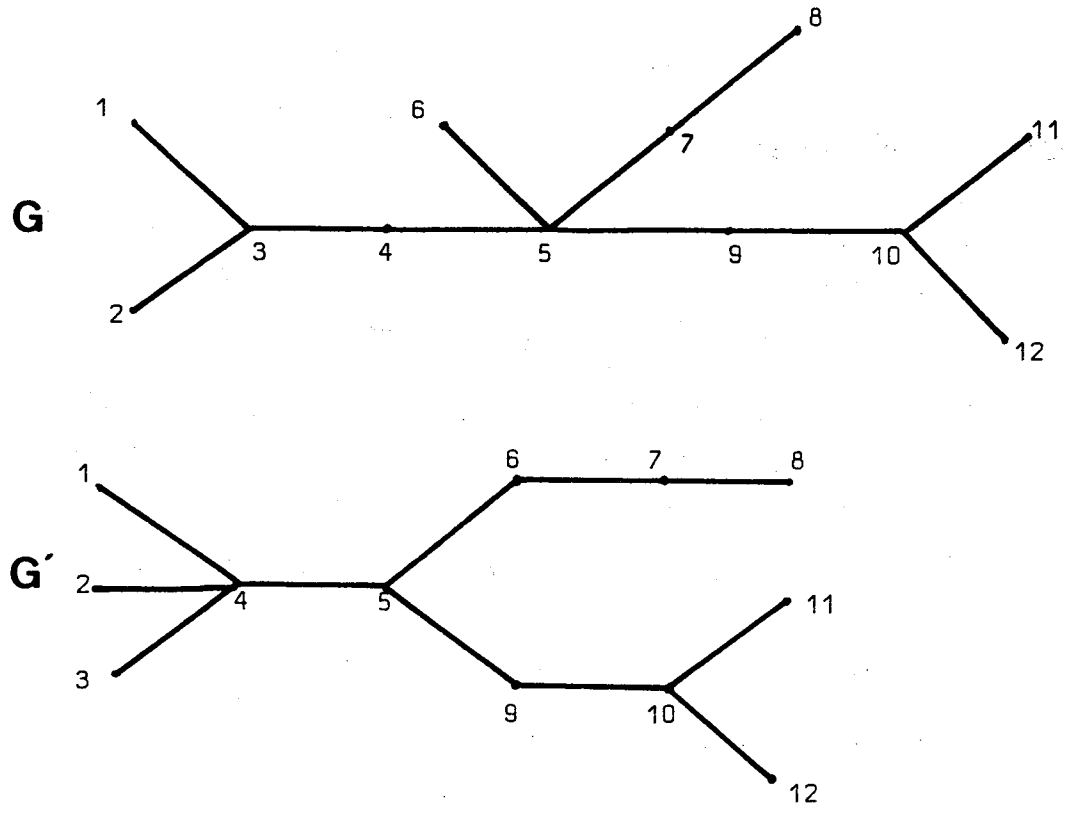
Le graphe ci-contre admet comme dissections :

- (1) (2 3 4) (5 6)
- (1) (2 3 4 5 6)
- (1 2) (3 4) (5 6)
- .....

II - 2. Théorème [26]

Deux graphes G et G', de n sommets, ont des polynômes caractéristique généralisés égaux si et seulement si ils ont le même nombre de dissections correspondant à chaque partition de l'entier n.

Malheureusement, deux graphes ayant le même nombre de dissections correspondant à chaque partition de l'entier n, ne sont pas nécessairement isomorphes. C'est le cas pour les deux graphes suivants, donnés par J. TURNER.



Conclusion :

Les polynômes caractéristiques ou les polynômes caractéristiques généralisés semblent peu utiles pour rechercher l'isomorphisme éventuel de 2 graphes : les calculs sont vite compliqués dès que le nombre de sommets est un peu important et on ne peut conclure que dans les cas de non isomorphisme.

B - RESEAUX ORIENTES ET NON MARQUES

Définition

Soit un réseau $R = (X, \mathcal{C})$, d'ensemble d'articulations, $X = (x_1, x_2, \ldots x_n)$
La matrice de définition A associée à R est définie par :

$A = (a_{ij})$ où $\begin{cases} a_{ij} = 1 \iff \text{il existe une connexion du type sortie-entrée indifférent-indifférent allant d'un connecteur de } x_i \text{ à un connecteur de } x_j. \\ a_{ij} = 0 \quad \text{dans les autres cas.} \end{cases}$

I - CONDITIONS NECESSAIRES

Si deux réseaux orientés R et R' sont isomorphes ($\exists P | A' = P^{-1}AP$) alors :

1) ils ont même polynôme caractéristique (dans $\mathbb{C}$)

2) $\forall \lambda \in Spec(A) \quad \forall V \in \mathcal{E}_\lambda \Rightarrow P^{-1}V \in \mathcal{E}'_\lambda$

3) Supposons que λ soit de multiplicité p et que $\mathcal{E}_\lambda$ et $\mathcal{E}'_\lambda$ soient de dimension r, alors il existe p-r vecteurs W_j de profondeur $1,2,\ldots\ell$ dan $\text{Ker}(A-\lambda I)^p$ associés aux vecteurs propres $V_1, V_2, \ldots V_r$ et tels que :
$\forall W_{ij}^{(\ell)}$ vecteur de profondeur ℓ associé à $V_i \Rightarrow W'^{(\ell)}_{ij} = P^{-1}.W_{ij}^{(\ell)}$

En effet si $W_{ij}^{(\ell)}$ est vecteur de profondeur ℓ associé à V_i relativement

$$A.W_{ij}^{(\ell)} = \lambda W_{ij}^{(\ell)} + W_{ij}^{(\ell-1)}$$

$$P^{-1}.A.W_{ij}^{(\ell)} = \lambda P^{-1}.W_{ij}^{(\ell)} + P^{-1}.W_{ij}^{(\ell-1)}$$

$$A'.P^{-1}W_{ij}^{(\ell)} = A'.W'^{(\ell)}_{ij} = \lambda W'^{(\ell)}_{ij} + W'^{(\ell-1)}_{ij}$$

Soit H la matrice (n,n), construite avec les vecteurs propres et leurs vecteurs de profondeur associés :

$$H = (V_1^{(\lambda_1)}, W_{11}^{(\lambda_1)}, W_{12}^{(\lambda_1)} \ldots, V_2^{(\lambda_1)}, W_{2,1}^{(\lambda_1)} \ldots, V_2^{(\lambda_1)}, W_{r1}^{(\lambda_1)} \ldots, V_1^{(\lambda_2)},$$

H est la matrice de passage permettant de passer de A à sa réduite de Jordan :

$$J = H^{-1}.A.H.$$

II - CONDITION SUFFISANTE

Si A et A', matrices de définition de 2 réseaux R et R' sont telles que :

1) elles ont même réduites de Jordan

$$J = H^{-1} A H = J' = H'^{-1} A' H'$$

2) il existe une matrice de permutation P telle que H = PH' alors R et R' sont isomorphes et P définit l'isomorphisme sur a.

En effet :

$$J = H^{-1} A H = H'^{-1} (P^{-1} A P) H' = J' = H'^{-1} A' H'$$

$$H'^{-1} (A' - P^{-1} A P) H' = 0$$

Comme H' est régulière : $A' = P^{-1} A P$

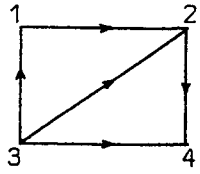
REMARQUE :

Cette condition sera intéressante à utiliser si les vecteurs propres associés à une valeur propre λ sont "simples" et en particulier si les sous-espaces propres sont de dimension 1.

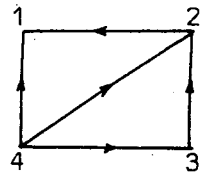
III - EXEMPLE

Considérons les 2 réseaux orientés R et R' suivants :

R



R'



$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Les polynômes caractéristiques sont égaux : $P(\lambda) = \lambda^4$

Les sous-espaces propres $\mathcal{E}_0$ et $\mathcal{E}'_0$ sont de dimension 1 et :

$$V = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x \\ 0 \end{bmatrix} \qquad V' = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ x \end{bmatrix}$$

Les matrices de permutation P telles que $V = PV'$ sont telles que :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x \\ 0 \end{bmatrix}$$

D'où la forme de P :

$$P = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 0 \end{bmatrix}$$

Nous avons six choix possibles pour la matrice P.

Déterminons les vecteurs de profondeur 1 associés à V et V'

$$AW_1 = V = \begin{bmatrix} W_2 \\ W_4 \\ W_1+W_2+W_4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$W_1 = \begin{bmatrix} X \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad W_1' = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ X \\ 0 \end{bmatrix}$$

Pour que $W_1 = PW_1'$, il est nécessaire que :

$$\begin{cases} a_{13} = 1 \\ a_{23} = a_{43} = 0 \end{cases}$$

Nous trouvons pour vecteurs de profondeur 2 associés à V et V'

$$W_2 = \begin{bmatrix} -X \\ +X \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad W_2' = \begin{bmatrix} 0 \\ X \\ -X \\ 0 \end{bmatrix}$$

La seule matrice P vérifiant les conditions a la forme :

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_{41} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Nécessairement $a_{41} = 1$, pour que P soit une matrice de permutation.

Les deux réseaux sont isomorphes et l'isomorphisme est donné par P, lue suivant les lignes.

REMARQUE :

Nous pouvons noter que si $B = P^{-1} A P$, alors

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad B^n = P^{-1} A^n P$$

De plus, si P est une matrice de permutation ($p_{ij} = 1 \iff \exists \sigma \in \mathcal{S}_n \ \sigma(i)=j$) alors :

$$b_{ij} = a_{\sigma^{-1}(i),\, \sigma^{-1}(j)}$$

Dans l'exemple précédent, si nous calculons les puissances successive de A et de A' :

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad A'^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad A'^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = A'^4 = 0$$

Avec les puissances troisièmes, nous obtenons :

$$b_{41} = a_{\sigma^{-1}(4),\,\sigma^{-1}(1)} = a_{34} \quad \text{donc} \quad \sigma : \begin{cases} 4 \to 1 \\ 3 \to 4 \end{cases}$$

Avec les puissances deuxièmes :

$$b_{41} \wedge b_{42} = a_{32} \wedge a_{34} = a_{\sigma^{-1}(4),\,\sigma^{-1}(1)} \wedge a_{\sigma^{-1}(4),\sigma^{-1}(2)} \qquad \text{et } \sigma : \begin{cases} 2 \to 2 \\ 3 \to 4 \end{cases}$$

C - RESEAUX MARQUES

En chimie, des éléments peuvent être considérés comme des réseaux marqués (sur les articulations et les connexions).

J.C. SAILLARD et AZEMA recherchent des représentations graphiques de formules chimiques, celles-ci étant données sous forme de matrices. Nous allons rechercher l'isomorphisme de deux structures en étudiant leurs matrices de définition.

I - MATRICES DE DEFINITION

Soit un réseau $R = (a, \mathcal{C})$ d'ensemble de marques sur les articulations $M = \{m_1, m_2, \ldots, m_p\}$ et d'ensemble de marques sur les connexions $N = \{n_1, n_2, \ldots, n_q\}$. La matrice de définition A(nxn) associée à R est définie par :

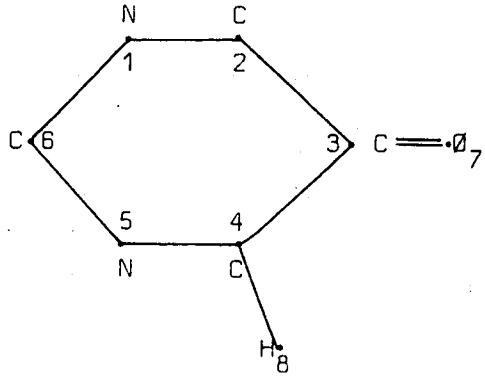
$A = (a_{ij})$ où
- a_{ii} = marque de l'articulation i
- a_{ij} = 0 s'il n'existe pas de connexion allant de i à j
- a_{ij} = marque de la connexion allant de i à j

Exemple :

Si l'ensemble des marques des articulations est l'ensemble {C,N,Ø,H} et si l'ensemble des marques des connexions est $\{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\psi\}$

- α représente une liaison simple
- β " " double
- ψ " "liaison appartenant à un noyau benzène

Le réseau suivant a pour matrice de définition :



$$A = \begin{bmatrix} N & \psi & 0 & 0 & 0 & \psi & 0 & 0 \\ \psi & C & \psi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \psi & C & \psi & 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \psi & C & \psi & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & \psi & N & \psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \psi & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 0 & 0 & 0 & \emptyset & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 & H \end{bmatrix}$$

Les éléments des matrices de définition ne sont ni dans un corps, ni dans un anneau ni dans un dioïde; cependant, si nous considérons les marques des articulations et des connexions comme des paramètres, nous pouvons chercher à prolonger les méthodes d'équations caractéristiques et de vecteurs propres.

Dans l'exemple précédent, nous obtenons pour polynôme caractéristique

$$P(\lambda) = d_2(H-\lambda)\cdot\left[-\beta^2 D_3 + (\emptyset-\lambda)(C-\lambda)\,D_3 - \psi^2(\emptyset-\lambda)\,d_2\right]$$
$$- \psi^2(N-\lambda)(\emptyset-\lambda)\cdot\left[-a^2 d_2 + (H-\lambda)D_3\right] - a\,\psi^6(\emptyset-\lambda)$$

où $\begin{cases} d_2 = (N-\lambda)(C-\lambda) - \psi^2 \\ D_3 = (C-\lambda)\cdot\left[(N-\lambda)(C-\lambda) - 2\,\psi^2\right] \end{cases}$

Le calcul des valeurs propres, puis des vecteurs propres paraissant compliqué, nous chercherons directement, en utilisant des vecteurs particuliers, la forme d'une matrice P, si elle existe, telle que $A' = P^{-1}.\,A.\,P$

II - METHODE DE RECHERCHE DE L'ISOMORPHISME EVENTUEL

S'il existe P telle que $A' = P^{-1} A.P$, alors

$\forall V \qquad P.(A'.V) = A.(P.V)$

Principe : Si A'V et PV sont connus, on aura des renseignements sur la permutati σ associée à P, en notant que

Si $Y = P\ X$, alors $y_j = x_{\sigma(j)}$

Nous cherchons à déterminer P en utilisant des vecteurs particuliers

1) Si $V_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$, alors $V_0 = P.V_0$. Calculons $A'.V_0$ et $A.P.V_0$ et recherchons les conditions que doit nécessairement vérifier une permutation σ associée à P si elle existe.

2) Choisissons des vecteurs V tels que PV soit connu grâce aux conditions obtenues à l'étape précédente.
Vérifier s'il peut exister P telle que P(A'V) = A.P.V.

- si ce n'est pas possible, il ne peut y avoir isomorphisme
- sinon on cherche des conditions nécessaires permettant de mieux définir σ . Si σ est mieux connu, aller en 2; sinon,

3) Déterminer la forme générale des matrices P possibles et faire successivement tous les essais possibles, en effectuant des produits de matrices

- si on trouve P telle que $A' = P^{-1}A\ P$, on a trouvé un isomorphisme
- si tous les essais possibles sont infructueux, il n'y a pas isomorphisme.

Exemple d'utilisation :

Soient les 2 matrices de définition suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} N & \psi & 0 & 0 & 0 & \psi & 0 \\ \psi & C & \psi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \psi & C & \psi & 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & \psi & C & \psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \psi & N & \psi & 0 \\ \psi & 0 & 0 & 0 & \psi & C & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 0 & 0 & 0 & \emptyset \end{bmatrix} \qquad A' = \begin{bmatrix} C & \psi & 0 & 0 & 0 & 0 & \psi \\ \psi & N & \psi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \psi & C & \psi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \psi & C & \beta & \psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta & \emptyset & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \psi & 0 & C & \psi \\ \psi & 0 & 0 & 0 & 0 & \psi & N \end{bmatrix}$$

1) $Y = A\,P\,V_0 = \begin{bmatrix} N+2\psi \\ C+2\psi \\ C+2\psi+\beta \\ C+2\psi \\ N+2\psi \\ C+2\psi \\ \emptyset+\beta \end{bmatrix} \qquad X = A'\,V_0 = \begin{bmatrix} C+2\psi \\ N+2\psi \\ C+2\psi \\ C+2\psi+\beta \\ \emptyset+\beta \\ C+2\psi \\ N+2\psi \end{bmatrix}$

$y_1 = y_5 = x_{\sigma(1)} = x_{\sigma(5)} = x_2 = x_7$

donc σ, si elle existe, vérifie nécessairement :

$$\sigma : \begin{cases} (1,5) \to (2,7) \\ (2,4,6) \to (1,3,6) \\ 3 \to 4 \\ 7 \to 5 \end{cases}$$

2) Soit $V = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ d'où $PV = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $Y = APV = \begin{bmatrix} N \\ \psi \\ 0 \\ \psi \\ N \\ 2\psi \\ 0 \end{bmatrix}$ $X = A'V = \begin{bmatrix} 2\psi \\ N \\ \psi \\ 0 \\ 0 \\ \psi \\ N \end{bmatrix}$

σ, si elle existe, est telle que :

$$\sigma : \begin{cases} (1,5) \rightarrow (2,7) \\ (2,4) \rightarrow (3,6) \\ 3 \rightarrow 4 \\ 6 \rightarrow 1 \\ 7 \rightarrow 5 \end{cases}$$

3) Nous faisons des hypothèses

α) Si nous supposons que $\begin{cases} 1 \rightarrow 7 \\ 2 \rightarrow 3 \end{cases}$ ce qui entraîne $\begin{cases} 5 \rightarrow 2 \\ 4 \rightarrow 6 \end{cases}$

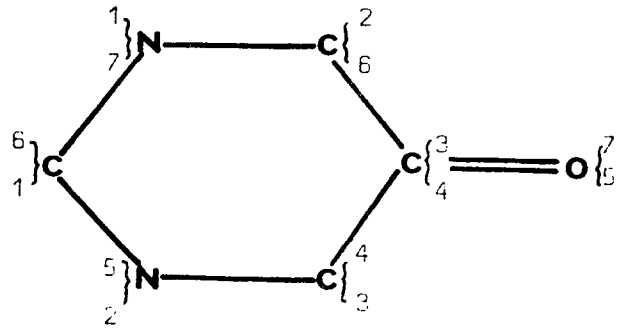
Alors la matrice P_1 associée est telle que :

$A' \neq P^{-1}.A.P_1$

β) Supposons que $\begin{cases} 1 \rightarrow 7 \\ 2 \rightarrow 6 \end{cases}$ ce qui entraîne $\begin{cases} 5 \rightarrow 2 \\ 4 \rightarrow 3 \end{cases}$

Nous vérifions dans ce cas, que la matrice P associée est telle que : $A' = P^{-1}.A.P$

Une représentation de ces réseaux est :



REMARQUE :

A la fin de l'étape 2, nous avons séparé les articulations 3, 6 et 7 dans R et leurs images 4, 1 et 5 dans R'; nous pouvons alors nous ramener à chercher une similitude entre les matrices $\tilde{A}$ et $\tilde{A}'$ d'ordre inférieur et obtenues en supprimant les lignes et les colonnes correspondantes, soit :

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} N & \psi & 0 & 0 \\ \psi & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & \psi \\ 0 & 0 & \psi & N \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} \qquad \tilde{A}' = \begin{bmatrix} N & \psi & 0 & 0 \\ \psi & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & \psi \\ 0 & C & \psi & N \end{bmatrix} \begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 6 \\ 7 \end{matrix}$$

Nous trouvons un autre isomorphisme possible σ' :

σ' ↓	1	2	3	4	5	6	7
	2	3	4	6	7	1	5

D - HYPERGRAPHES

Définition

Soit un hypergraphe simple fini $H = (X, \mathcal{E})$ où $X = \{x_1, \ldots x_n\}$ et $\mathcal{E} = \{E_1, E_2, \ldots, E_m\}$. On appelle matrice d'incidence M associée à H la matrice $M = (m_{ij})$ définie par :

$$\begin{cases} m_{ij} = 1 \iff x_j \in E_i \\ m_{ij} = 0 \quad \text{sinon} \end{cases}$$

Rechercher l'isomorphisme éventuel de deux hypergraphes H et H' revient à résoudre le problème suivant :

Etant données 2 matrices M et M' de dimensions (m x n) et composées de 0 et de 1, peut-on réordonner les lignes et les colonnes de M pour la rendre identique à M'?

Propriété :

Deux hypergraphes H et H', de matrices d'incidence M et M' sont isomorphes si et seulement si il existe 2 matrices de permutation P(n x n) et Q(m x m) telles que :

$$M' = Q^{-1}.M.P$$

Recherche de P et Q si elles existent

Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$ la permutation attachée aux lignes de P et $\tau \in \mathcal{S}_m$ la permutation attachée aux lignes de Q.

${}^tM \times M$ représente la matrice d'incidence du réseau des distances 2 entre sommets de H. (Le produit matriciel est effectué dans le corps des réels).

a) Si deux hypergraphes H et H' sont isomorphes, alors :

$${}^tM' \times M' = {}^tP.{}^tM.{}^tQ^{-1}.Q^{-1}.M.P$$

$$= P^{-1}.({}^tM \times M).P$$

et par suite, si $^{t}M \times M = (x_{ij})$

$^{t}M' \times M' = (y_{ij})$

nous obtenons des renseignements sur σ , car nécessairement

$x_{ij} = y_{\sigma(i),\, \sigma(j)}$

De même : $M' \times {}^{t}M' = Q^{-1} (M \times {}^{t}M)\, Q$

Nous obtenons des renseignements sur τ car nécessairement, si U_{ij} e l'élément courant de $M \times {}^{t}M$

$$U_{ij} = V_{\tau(i),\, \tau(j)}$$

b) Nous pouvons également chercher à déterminer P et Q à l'aide de vecteurs lignes ou colonnes particuliers.

Notons d'abord que :

$X, Y \in \mathcal{M}_{(m,1)}$ $\qquad Y = Q.X$

$y^{i} = x^{\tau(i)}$

$X, Y \in \mathcal{M}_{(1,n)}$ $\qquad Y = X.P$

$y_j = x_{\sigma^{-1}(j)}$ ou $x_K = y_{\sigma(K)}$

Si H et H' sont isomorphes, nous aurons des conditions nécessaires portant sur σ et τ , en utilisant les relations :

$\forall\, V \in \mathcal{M}_{(m,1)}$ $\qquad (MPV) = Q(M'V)$

$\forall\, W \in \mathcal{M}_{(1,n)}$ $\qquad WQM' = (WM)\, P$

c) Il reste clair cependant que si ceux sommets sont dans la même classe d'automorphisme, nous ne réussirons pas à les distinguer, et i faudra faire des hypothèses .

Exemple :

Soient 2 hypergraphes déterminés par les matrices d'incidence :

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad M' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Etudions les produits matriciels $M.{}^tM$ et $M'.{}^tM'$

$$M.{}^tM = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad M'.{}^tM' = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

d'où τ vérifie, si elle existe :

$$\tau : \begin{cases} (I,III) \rightarrow (I,IV) \\ II \rightarrow III \\ IV \rightarrow II \end{cases}$$

b) Etudions les produits matriciels ${}^tM.M$ et ${}^tM'.M'$

$${}^tM.M = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \qquad {}^tM'.M' = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

σ doit vérifier $\sigma : \begin{cases} 4 \rightarrow 5 \\ (2,3) \rightarrow (1,4) \\ (1,5) \rightarrow (2,3) \end{cases}$

Comme avec des vecteurs particuliers, nous ne trouvons aucun affinement pour τ ou σ, nous faisons l'hypothèse suivante :

$$\tau : \begin{cases} I \rightarrow IV \\ III \rightarrow I \\ II \rightarrow III \\ IV \rightarrow II \end{cases}$$

En prenant pour vecteur particulier :

$W = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\qquad$ $WQ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Nous obtenons :

$Y = WQM' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\qquad$ $X = WM = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Ce qui avec les résultats précédents détermine complètement σ :

$$\sigma : \begin{cases} 1 \to 3 \\ 2 \to 1 \\ 3 \to 4 \\ 4 \to 5 \\ 5 \to 2 \end{cases}$$

Nous pouvons vérifier que $M' = Q^{-1}.M.P$

Lien entre isomorphisme de graphes et isomorphisme d'hypergraphes

Nous pouvons rechercher l'isomorphisme de réseaux en recherchant de isomorphismes entre hypergraphes très simples.

En effet, supposons qu'à une étape donnée nous ayons obtenu une partition des articulations de G en classes C_1, C_2,... C_p, de cardinaux n_1, n_2,... Soit B la matrice d'incidence du graphe G obtenue en prenant, dans l'ordre, le articulations de C_1, puis celles de C_2, etc... Soit B' la matrice correspondan pour G'. Les matrices B et B' sont composées de blocs de la forme $C_j \times C_k$ où j et k varient de 1 à p.

Chaque sous-matrice $C_j \times C_k$ où $j \neq k$ peut être considérée comme la matrice d'un hypergraphe ayant n_j arêtes et n_k sommets.

Si deux graphes sont isomorphes, alors nécessairement les hypergrap associés à chaque matrice $C_j \times C_k$ sont isomorphes. Nous utiliserons cette prop té pour chercher à subdiviser les classes de la partition initiale mais en uti lisant des matrices de dimensions beaucoup plus faibles.

Exemple :

Reprenons l'exemple de la partie C, où nous avions des réseaux marqués de 7 articulations. Après la première étape, nous avions obtenu les partitions :

$$\begin{cases} (1,5) \longrightarrow (2,7) & C_1 \\ (2,4,6) \longrightarrow (1,3,6) & C_2 \\ 3 \longrightarrow 4 & C_3 \\ 7 \longrightarrow 5 & C_4 \end{cases}$$

et les nouvelles matrices d'incidence B et B' ont la forme :

$B =$

	1	5	2	4	6	3	7
1	N	0	ψ	0	ψ	0	0
5	0	N	0	ψ	ψ	0	0
2	ψ	0	C	0	0	ψ	0
4	0	ψ	0	C	0	ψ	0
6	ψ	ψ	0	0	C	0	0
3	0	0	ψ	ψ	0	C	β
7	0	0	0	0	0	β	∅

$B' =$

	2	7	1	3	6	4	5
2	N	0	ψ	ψ	0	0	0
7	0	N	ψ	0	ψ	0	0
1	ψ	ψ	C	0	0	0	0
3	ψ	0	0	C	0	ψ	0
6	0	ψ	0	0	C	ψ	0
4	0	0	0	ψ	ψ	C	β
5	0	0	0	0	0	β	∅

Les blocs $C_1 \times C_2$ donnent directement comme nouvelle subdivision :

$$\begin{cases} (2,4) \rightarrow (3,6) \\ 6 \rightarrow 1 \end{cases}$$

Ce résultat était obtenu dans la partie précédente en essayant de faire des produits matriciels de A et de A' avec des matrices unicolonnes particulieres. Ici le résultat est obtenu beaucoup plus rapidement.

Nous pouvons également ramener la recherche d'isomorphisme d'hypergraphes à celle d'hypergraphes beaucoup plus réduits, et par la même méthode.

Exemple :

Reprenons l'exemple de la page 30. Nous étions arrivés, après l'ét (a) aux correspondances suivantes :

- entre équipotentielles		- entre articulations	
(I,III)	→ (I,IV)	(1,5)	→ (2,3)
(II)	→ (III)	(2,3)	→ (1,4)
(IV)	→ (II)	4	→ 5
du type C_i	→ C'_i	du type P_j	→ P'_j

et les nouvelles matrices associées correspondant à ces partitions sont :

$$B = \begin{array}{c} \\ I \\ III \\ II \\ IV \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 5 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|cc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array} \qquad B' = \begin{array}{c} \\ I \\ IV \\ III \\ II \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|cc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array}$$

Nous sommes ramenés à trouver les isomorphismes compatibles entre

$$\begin{cases} C_1 \times P_1 \text{ et } C'_1 \times P'_1 \\ \text{et} \\ C_1 \times P_2 \text{ et } C'_1 \times P'_2 \end{cases}$$

Nous en trouvons, ici, deux possibilités :

$$\begin{cases} I \to I \\ III \to IV \\ 1 \to 2 \\ 5 \to 3 \\ 2 \to 4 \\ 3 \to 1 \end{cases} \qquad \text{ou} \qquad \begin{cases} I \to IV \\ III \to I \\ 1 \to 3 \\ 5 \to 2 \\ 2 \to 1 \\ 3 \to 4 \end{cases}$$

Le deuxième isomorphisme était le seul trouvé par la méthode précédente, qui consistait à faire des tentatives pour des vecteurs particuliers.

UTILISATION DES FONCTIONS LOCALES

A - UTILISATION DES FONCTIONS NODALES

Dans l'exemple de la partie B du chapitre précédent, nous aurions pu utiliser le fait que les matrices n'étaient pas symétriques et qu'une ligne de A contenant p éléments non nuls ne pouvait correspondre qu'à une ligne de A' contenant également p éléments non nuls, et de même pour les colonnes. Cette seule remarque suffit d'ailleurs dans l'exemple pour déterminer l'isomorphisme.

Nous pouvons noter que le nombre d'éléments non nuls de la ligne i représente le degré extérieur du sommet i tandis que le nombre d'éléments non nuls de la colonne j représente le degré intérieur du sommet j, et que nous cherchons à différencier les sommets de G et de G' suivant des propriétés qui leur sont liées. Nous présentons donc maintenant un type de méthodes basées sur les "fonctions nodales" et nous explicitons l'algorithme de G. SAUCIER, que nous avons programmé.

I - PRINCIPE DES METHODES

I - 1. Fonctions nodales et partitions associées

Soit $\mathcal{G}$ la famille de tous les graphes, et Y un ensemble quelconque.

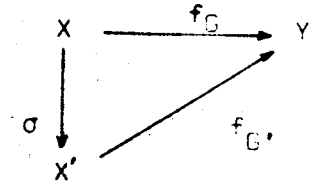
Définition

Une fonction nodale f est une correspondance, qui à un graphe G = (X,U) associe une application f_G de X dans Y

$$G = (X,U) \xrightarrow{\quad f \quad} f_G : X \to Y$$

et telle que :

$$\forall \sigma \in \mathrm{Isom}(G,G'),\ f_{G'} = f_G \circ \sigma^{-1}$$



Conséquence

$$\forall \tau \in \text{Aut } G : \quad f_G = f_G \bullet \tau$$

Convention

f_G et $f_{G'}$, bien que définies sur des ensembles différents, seront dites "mêmes fonctions nodales". Par abus de langage, nous désignerons par fonction nodale, soit f, soit f_G ,soit $f_{G'}$.

Exemples de fonctions nodales :

- le degré d'un sommet : d_G
- l'écartement d'un sommet :

$$e_G(x) = \max_{y \in X} d(x,y)$$

Partition associée à une fonction nodale

Soit f_G une fonction nodale définie sur G =(X,U).

La relation définie sur X :

$$x \, R \, y \iff f_G(x) = f_G(y)$$

est une relation d'équivalence. L'ensemble des classes d'équivalence constitue une partition P_f de X dite partition associée à f.

Propriété 1 :

Dans un graphe G = (X,U), soit Q la partition de X suivant les cla d'automorphismes :

Quelle que soit la fonction nodale f_G définie sur X, Q est une par tion plus fine que P_f.

Soit C une classe de la partition Q

Si x et y appartiennent à C $\Rightarrow \exists \tau \in Aut(G) \quad y = \tau(x)$

$$f_G(x) = f_G \bullet \tau^{-1}(y) = f_G(y)$$

Propriété 2 :

Soit f une fonction nodale. Si σ est un isomorphisme de G sur G', alors les classes des partitions P_{f_G} et $P'_{f_{G'}}$ vérifient $C'_i = \bar{\sigma}(C_i)$

Soient $P_{f_G} = \{C_1, C_2, \ldots, C_k\}$ *et* $P'_{f_{G'}} = \{C'_1, C'_2, \ldots, C'_k\}$

Le nombre de classes dans chaque partition est le même puisque les fonctions f_G et $f_{G'}$ ont même ensemble de valeurs $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_k\}$

Soit $\bar{\sigma}(C_i) = \{x' \in X' \mid \exists x \in C_i \text{ et } x' = \sigma(x)\}$

Comme σ est une bijection, l'ensemble $\{\bar{\sigma}(C_i)\}$ est une partition en k classes de X'.

a) Soit $x' \in C'_i \subset X'$ $\quad (f_{G'}(x') = \alpha_i)$

$\exists x \in X$ *tel que* $x' = \sigma(x)$

$f_G(x) = f_G \cdot \sigma^{-1}(x') = f_{G'}(x') = \alpha_i \Rightarrow x \in C_i$

$C'_i \subseteq \bar{\sigma}(C_i)$ $\qquad x' \in \bar{\sigma}(C_i)$

b) Soit $x' \in \bar{\sigma}(C_i)$ $\quad (\exists x \in C_i \text{ et } x' = \sigma(x))$.

$f_{G'}(x') = f_G \circ \sigma^{-1}(x') = f_G(x) = \alpha_i \Rightarrow x' \in C'_i$

$\bar{\sigma}(C_i) \subseteq C'_i$

REMARQUE

Si f_G et $f_{G'}$ sont injectives, la correspondance entre P_{f_G} et $P'_{f_{G'}}$ établit un isomorphisme de G sur G'.

Pour rechercher un isomorphisme éventuel de G sur G', certaines méthodes utilisent une fonction nodale f et les partitions associées P_{f_G} et $P'_{f_{G'}}$. Si ces partitions ne sont pas constituées de classes à un seul élément une nouvelle fonction nodale h est choisie en espérant que les partitions P_1 et P'_1 obtenues par intersection de P_{f_G} et P_{h_G} et de $P'_{f_{G'}}$ et $P'_{h_{G'}}$ seront plus fines. Il est clair que par cette méthode on est limité par les partitions plus fines que sont Q et Q'

I - 2. Fonctions nodales relatives

Définition :

Soient S et S' deux sommets fixés de deux graphes isomorphes G et G'. Soit $Isom_{(S,S')}(G, G')$ le sous-groupe de Isom (G,G') formé des isomorphismes σ de G sur G' tels que : σ(S) = S'.

Une fonction nodale relative est une fonction nodale telle que :

$$\forall \sigma \in Isom_{(S,S')}(G,G') \qquad f^{S'}_{G'} = f^{S}_{G} \circ \sigma^{-1}$$

Il est clair qu'à une fonction nodale relative, on peut associer des partitions de X - {S} et de X' - {S'} dont les classes vérifient :

$$\forall \sigma \in Isom_{(S,S')}(G,G') \qquad C'_i = \bar{\sigma}(C_i)$$

I - 3. Types d'algorithmes proposés

Nous pouvons décomposer en étapes la démarche généralement suivie :

α : Choix successifs de fonctions nodales (f_j) afin d'obtenir des partitions P_j et P'_j des ensembles de sommets X et X' de plus en plus fines, jusqu'à ce qu'on ne sache plus en trouver.

β : Soient les partitions P_{K_o} et P'_{K_o}

- Si toutes les classes de P_{K_o} et P'_{K_o} ont un seul élément et correspondent 2 à 2 aux mêmes valeurs de f_{K_o} et f'_{K_o} nous avons trouvé un isomorphisme.

- S'il existe des classes de P_{K_o} et P'_{K_o} qui ont plus d'un élément alors :

  . Soit on ne sait pas trouver de nouvelle fonction nodale (f_{K_o+1}), qui permettrait d'avoir une partition plus fine.

. Soit on a trouvé les partitions les plus fines possibles, qui sont en fait les décompositions de X et X' en classes d'automorphismes.

Le choix entre ces deux dernières éventualités ne peut être fait avec les méthodes employées jusqu'ici. Il est nécessaire dans ce cas de terminer par des méthodes exhaustives de recherche d'isomorphisme, en tentant des hypothèses successives.

II - ALGORITHME DE G.SAUCIER (22)

G. SAUCIER fait une brève étude préalable des graphes simples G et G' en comparant les nombres de sommets et d'arêtes. Les premières partitions P_o et P'_o sont obtenues à partir de la paire de fonctions nodales (f_o, f'_o), où

$f_o(x)$ = degré du sommet x dans G.

Ce qui distingue l'algorithme de G. SAUCIER de ceux de UNGER ou de STEEN est que, dès cette première partition, une hypothèse dite de niveau 0 est faite : on cherche à faire "éclater" des classes C et C' correspondantes de P_o et P'_o et ayant un nombre minimal d'éléments. Pour cela S est fixé dans la classe C et on choisit S' dans la classe C'. S'il existe un isomorphisme σ de G sur G' tel que $\sigma(S) = S'$, alors nécessairement pour une fonction nodale f_j : $f_j(S) = f'_j(S')$

II - 1. Fonction d'affinement

Soit S un sommet fixé de X, et supposons que sur chaque couche de la structure en couches construite à partir de S, existe une partition $P_i = \left\{C_1^i, C_2^i \ldots C_{r_i}^i\right\}$

Soit $P = \{\ldots, C_1^i, C_2^i, \ldots C_{r_i}^i, C_1^{i+1}, \ldots\} = \bigcup_i P_i$

Nous appelons fonction d'affinement pour la partition P, la fonction nodale relative à S, définie par :

$$f^{S,P}(x) = \left[t_1(x), t_2(x), t_3(x)\right]$$

où si le sommet x de la couche i est relié à r sommets (y_j) de la couche (i-1), alors :

$t_1(x)$ est la liste non décroissante des r indices des classes auxquelles appartiennent les y_j.

$t_2(x)$ et $t_3(x)$ ont des définitions similaires pour la même couche et la couche suivante.

A cette fonction nodale particulière est associée une nouvelle part tion dont l'intersection avec P donne une partition P' qui peut être plus fine P. Nous pouvons réutiliser la fonction d'affinement pour P', etc... jusqu'à obt des partitions stationnaires.

II - 2. Algorithme

Nous pouvons distinguer les différentes étapes suivantes :

1) Partitions de X, et X' suivant les marques.

Partition suivant les degrés : $P_o = \{C_1, C_2, \ldots C_K\}$

$P'_o = \{ C'_1, C'_2, \ldots C'_K \}$

2) Choix de $S \in C$

3) Choix de $S' \in C'$ si c'est possible
Sinon G et G' ne sont pas isomorphes

4) Utilisation des fonctions nodales suivantes :

$f_1(x)$ = nombre de couches de la structure en couches à partir du sor met x, c'est à dire l'écartement du sommet x, d'après BERGE :

$$f_1(x) = \max_{y \in X} d(x,y)$$

$f_2(x) = (n_1, n_2, \ldots, n_{f_1(x)})$ où n_i est le nombre de sommets de la i^{eme} couche dans la structure en couches à partir de x.

Si $f_i(S) \neq f_i(S')$ pour i = 1 ou 2, on revient en 3.

5) Utilisation de la fonction nodale relative :

$f_3^S(x) = (m_1(x), m_2(x), m_3(x))$

où $m_1(x)$ est le nombre de liaisons de $x \in X$ avec des sommets de la couche précédente, dans la structure en couches à partir de S.
m_2 et m_3 représentent respectivement les nombres de liaisons de X av des sommets de la même couche ou de la couche suivante.

Si les partitions P_3 et P'_3 associées à f_3^S et $f_3^{S'}$ ne peuvent se correspondre, revenir en 3.

6) Utilisation de la fonction d'affinement pour P_3 et P'_3 jusqu'à obtenir des partitions correspondantes stationnaires.

Si à un moment P_K et P'_K ne peuvent se correspondre, revenir en 3.

7) Si P_K et P'_K sont telles qu'il n'y a qu'un seul sommet par classe et si les valeurs correspondantes de la fonction d'affinement sont égales, G et G' sont isomorphes par un isomorphisme tel que $\sigma(S) = S'$

Si P_K et P'_K ont des classes comportant plus d'un sommet, soient C_{i_0} et C'_{i_0} les deux premières classes correspondantes ayant plus d'un sommet :

7.a : Choix de x_0 dans C_{i_0}

7.b : Choix de x'_0 dans C'_{i_0} si c'est possible

Sinon aller en 3

Soient Q_{K_0} et Q'_{K_0} les partitions déduites de P_{K_0} et P'_{K_0} en coupant la classe C_{i_0} en 2 classes $\{x_0\}$ et $C_{i_0} - \{x_0\}$ et de même pour C'_{i_0}.

7.c : Affinement de Q_{K_0} avec la fonction d'affinement

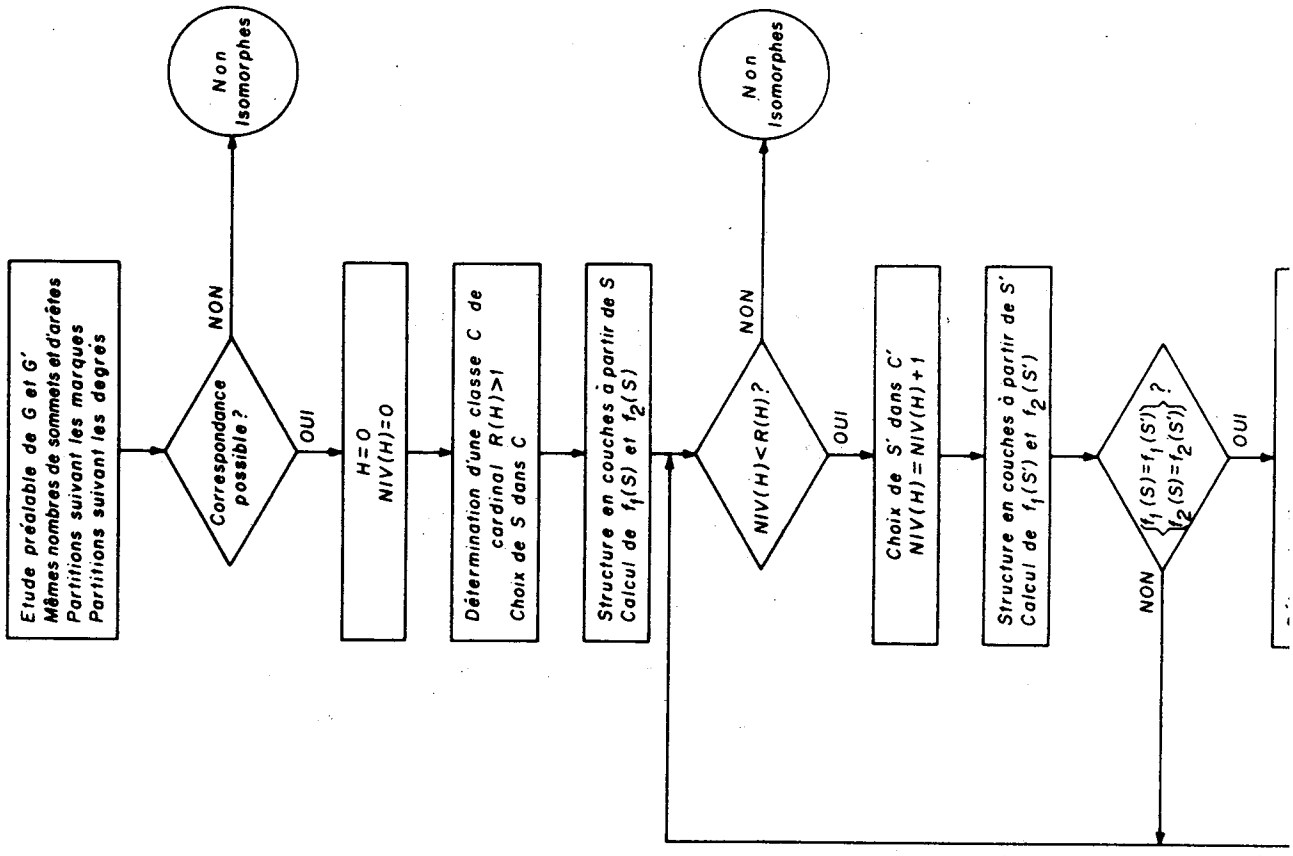
Si on arrive à une impossibilité aller en 7.b

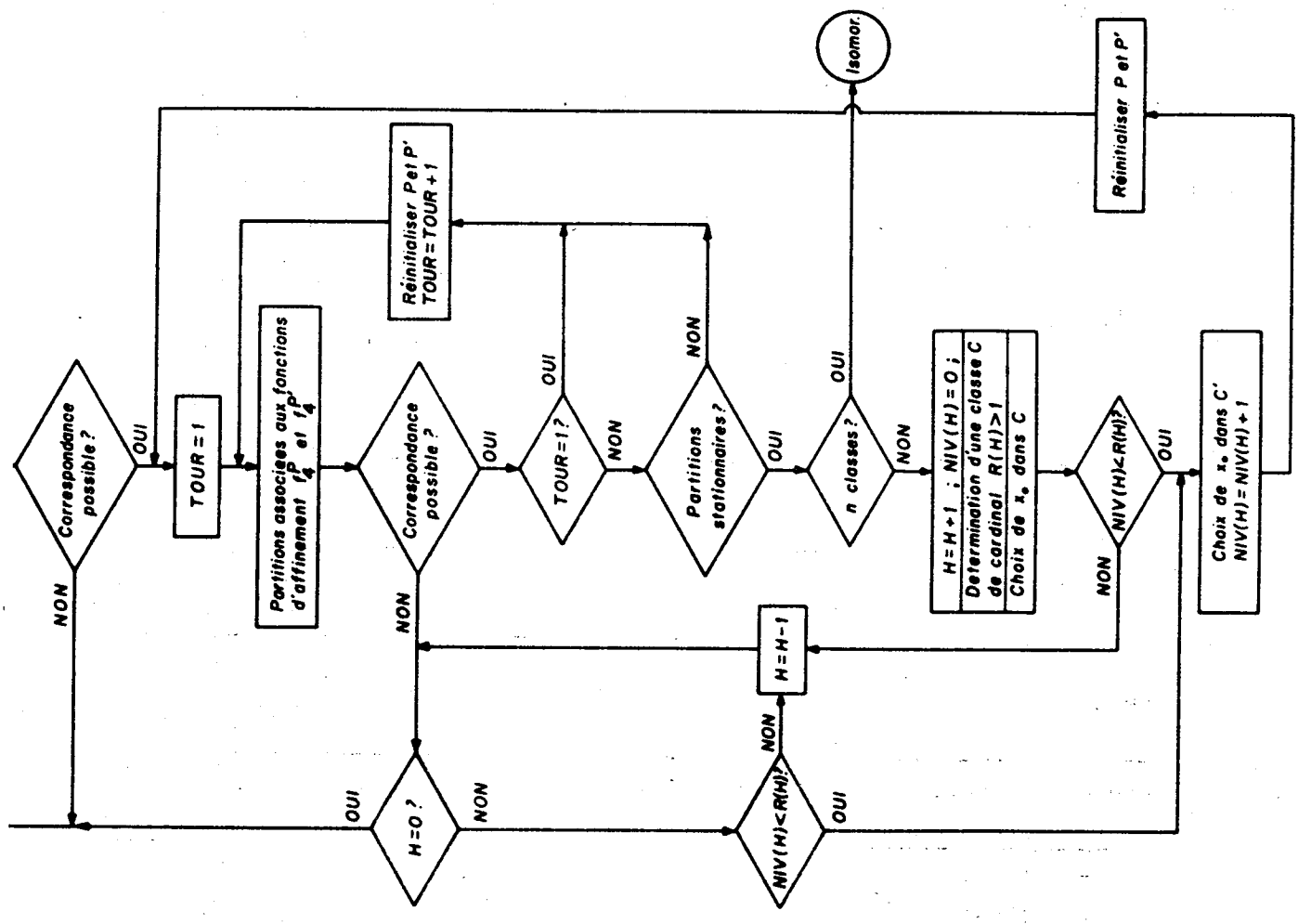
Continuer jusqu'à stationnarité et aller en 7.

II - 3. Organigramme

Nous pouvons shématiser la recherche de l'isomorphisme entre G et G' par l'organigramme suivant :

- H représente le niveau des hypothèses faites
- NIV(H) compte le nombre de tentatives faites au niveau H
- R(H) est le cardinal de la classe pour laquelle des hypothèses de niveau H sont faites
- TOUR est un indice permettant de comparer des partitions successives.


Etude préalable de G et G'
Mêmes nombres de sommets et d'arêtes
Partitions suivant les marques
Partitions suivant les degrés
Correspondance possible ?
NON
Non Isomorphes
OUI
H=0
NIV(H)=0
Détermination d'une classe C de cardinal R(H)>1
Choix de S dans C
Structure en couches à partir de S
Calcul de f1(S) et f2(S)
NIV(H)<R(H) ?
NON
Non Isomorphes
OUI
Choix de S' dans C'
NIV(H) = NIV(H) + 1
Structure en couches à partir de S'
Calcul de f1(S') et f2(S')
f1(S)=f1(S') / f2(S)=f2(S') ?
NON
OUI


Correspondance possible ?
OUI
NON
TOUR = 1
Partitions associées aux fonctions d'affinement f_q^P et $f_q^{P'}$
Réinitialiser P et P'
TOUR = TOUR + 1
Correspondance possible ?
OUI
NON
TOUR=1 ?
OUI
NON
Partitions stationnaires ?
OUI
NON
n classes ?
OUI
NON
Isomor.
Réinitialiser P et P'
H = H+1 ; NIV(H) = 0 ;
Détermination d'une classe C de cardinal R(H) > 1
Choix de x_0 dans C
NIV(H) < R(H) ?
OUI
NON
Choix de x_0 dans C'
NIV(H) = NIV(H) + 1
H = H-1
H = 0 ?
OUI
NON
NIV(H) < R(H) ?
NON
OUI

III - PROGRAMMATION

Nous avons programmé l'algorithme précédent en PL1, et le programme été exécuté par l'ordinateur IBM 360/65 de l'IMAG.

Entrées-sorties :

Les deux graphes sont entrés par leurs matrices de définition. Pour deux graphes les résultats intermédiaires, tels les valeurs des fonctions f_3 et $f_4^{S,P}$ et les partitions associées de chaque couche sont écrites.S'il y a isomorphisme, le programme se termine en donnant une correspondance sommet à sommet.

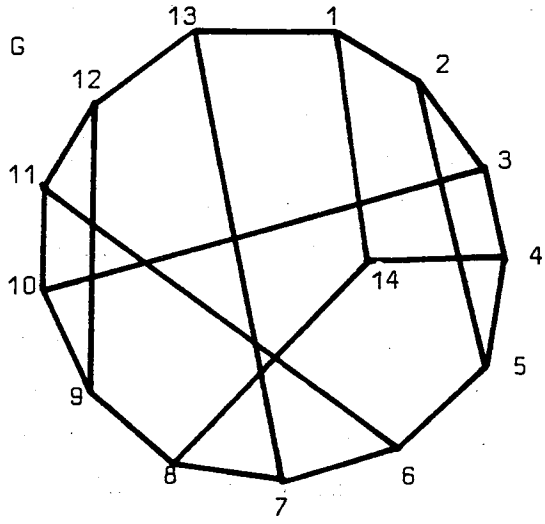
Résultats :

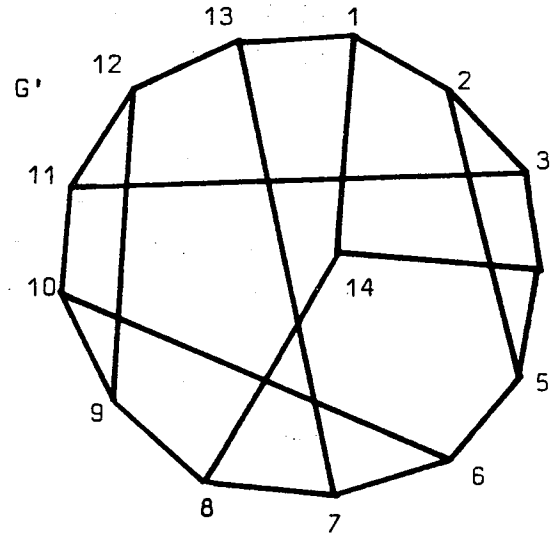
Ce programme est compilé en 35''.

Nous obtenons, pour les graphes tracés à la page suivante, les résultats suivants :

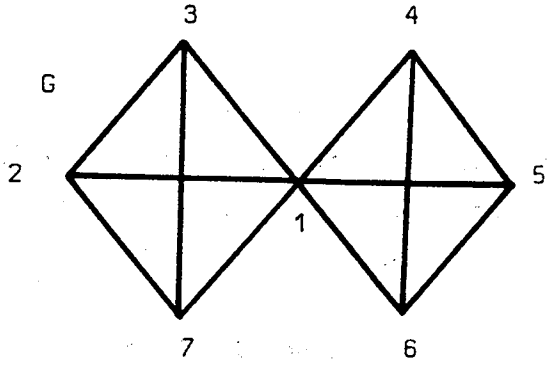
	n	Temps d'exe.	Résultat
Graphes Steen (1)	14	10.72s	isomorphes
Graphes Corneil (2)	7	3.44s	non isomorphes
Graphes dont un est de Petersen (3)	10	45.08s	non isomorphes
Graphes Corneil	16	15.61s	isomorphes
Graphes Corneil id. (autre choix de S)	16	15.29s	isomorphes

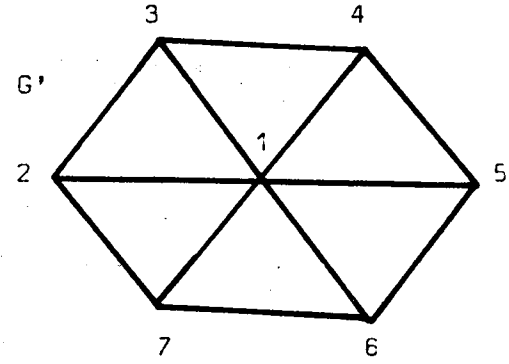
Exemple 1 : Graphes de STEEN



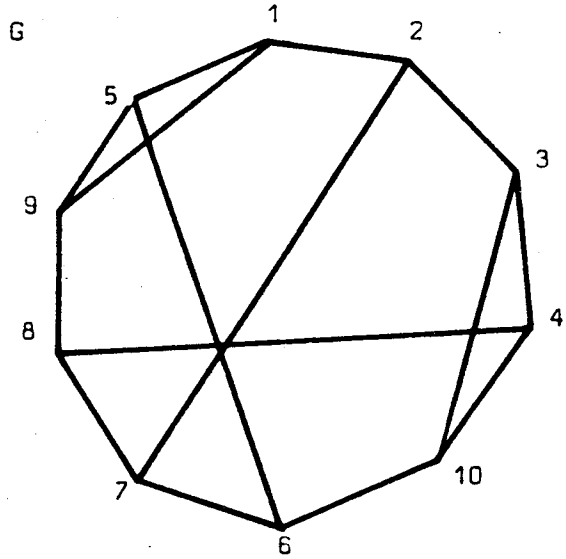


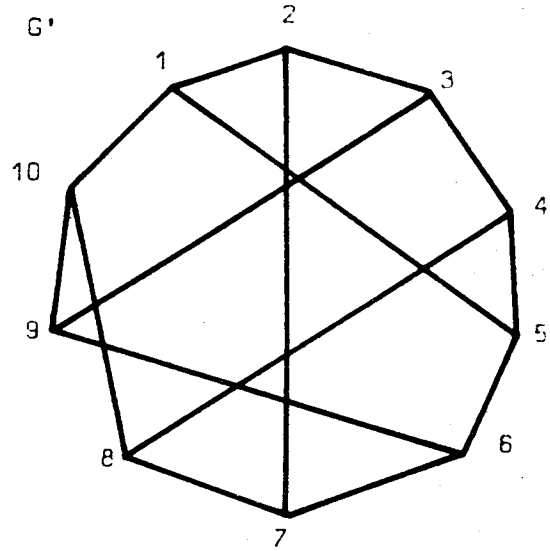
Exemple 2 : Graphes de Corneil





Exemple 3 :





Nous avons choisi ces exemples parmi les graphes les moins faciles à étudier : en particulier tous ont des marques triviales et sont souvent régu liers,de telle façon que les partitions initiales sont les partitions banales

Dans l'exemple 3, nous sommes dans le cas le plus défavorable où le graphe G' est un graphe de Petersen, c'est à dire que tous ses sommets sont d la même classe d'automorphisme. On est, dans ce cas, amené à faire successive ment une vingtaine d'hypothèses dont aucune n'aboutit favorablement.

Ce programme,conçu pour vérifier un algorithme et mesurer son efficacité présente un inconvénient pour l'exploitation par des utilisateurs éventuels : décrire les graphes par leurs matrices de définition occupe beaucoup de place en mémoire. Il serait cependant possible de modifier ce programm en rentrant les données avec des procédés de listes. Cependant, les problèmes concrets qui se posent à des utilisateurs industriels sont plutôt des problème de recherche d'isomorphisme pour des réseaux de boites et de fils.(Cf.Chap. IV

IV - ISOMORPHISMES D'HYPERGRAPHES

Rechercher un isomorphisme entre deux hypergraphes $H = (\mathcal{A}, \mathcal{E})$ et $H' = (\mathcal{A}', \mathcal{E}')$ revient à chercher un isomorphisme entre les deux réseaux de noeuds et d'étoiles (ou les deux graphes bipartis) qui leur sont associés.

Les algorithmes utilisant des fonctions nodales permettent de résoud ce problème, sachant que les partitions de départ sur l'ensemble des articulations sont celles qui séparent les noeuds des étoiles.

B - UTILISATION DES VOISINAGES

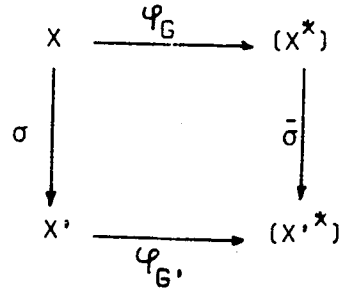
Dans cette partie, nous définissons une notion plus générale que les fonctions nodales mais qui leur est assez étroitement liée.

I - PRINCIPE

I - 1. Définition d'une fonction de voisinage

Une fonction de voisinage φ est une correspondance qui, à un graphe $G = (X,U)$ associe une application φ_G de X dans $\mathcal{G}^*$, où $\mathcal{G}^*$ est l'ensemble des sous-graphes de G, telle que :

$$\forall \sigma \in \mathrm{Isom}(G,G'),\ \varphi_{G'} = \bar{\sigma} \circ \varphi_G \circ \sigma^{-1}$$



I - 2. Fonctions de voisinage particulières

Dans la suite, nous prendrons comme fonctions de voisinage particulières les fonctions suivantes :

α) pour des graphes simples

Voisinage d'ordre k : $\tilde{V}_k : s \longrightarrow \tilde{V}_k(s)$

$\tilde{V}_k(s)$ est le sous-graphe engendré par les sommets situés à une distance de s inférieure ou égale à k.

Voisinage pointé d'ordre k : V_k : s → $V_k(s)$

$V_k(s)$ est le sous-graphe précédent moins le sommet s et les arêtes incidentes à s.

β) pour des réseaux non marqués et orientés

Voisinage descendant d'ordre k : $V_k^+(s)$ est le sous-réseau engendré p les descendants de s à une "distance" inférieure ou égale à k, sauf s.

Voisinage ascendant d'ordre k : $V_k^-(s)$: c'est à dire le sous-réseau engendré par les ascendants de s dont la "distance" à s est inférieure ou égale à k, sauf s.

α) pour des réseaux marqués

Nous avons les mêmes notions, mais les voisinages sont des sous-rése marqués.

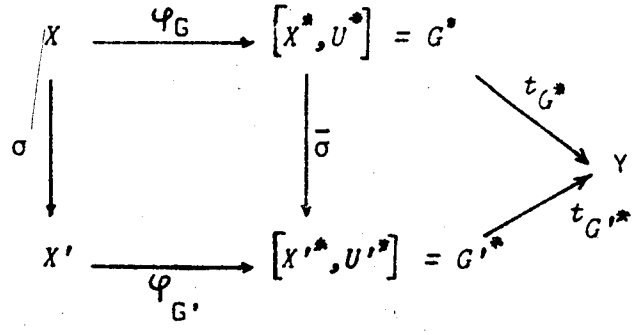
I - 3. Lien entre fonctions nodales et fonctions de voisinage

Appelons Inv la famille des applications t qui à un graphe G font correspondre un invariant de G.

Propriété 1 :

Si φ est une fonction de voisinage et t une application de Inv, alor $h = t \circ \varphi$ est une fonction nodale.

En effet, soient G et G' deux graphes isomorphes :



Comme φ est une fonction de voisinage, G^* et G'^* sont des graphes isomorphes par $\bar{\sigma}$.

$$t \in Inv \iff t_{G'^*} \circ \bar{\sigma} = t_{G^*} \qquad \forall \bar{\sigma} \in Isom(G^*, G'^*)$$

$$h_G \circ \sigma^{-1} = t_{G^*} \circ \varphi_G \circ \sigma^{-1}$$

$$= t_{G^*} \circ \bar{\sigma}^{-1} \circ \varphi_{G'}$$

$$= t_{G'^*} \circ \varphi_{G'}$$

$$= h_{G'}$$

Exemple :

Si t_{G^*} = nombre de sommets de G^* et si la fonction de voisinage est le voisinage d'ordre 1

$$h_G(s) = t_{G^*} \circ V_G^1(s) = \text{degré de } s.$$

Propriété 2 :

Si φ est une fonction de voisinage et f une fonction nodale, alors $f \circ \varphi$ est une fonction nodale.

Démonstration identique.

I - 4. Partitions associées à h_G et $h_{G'}$

Comme h_G et $h_{G'}$ sont des fonctions nodales définies sur G et G', si G est isomorphe à G' par σ, alors les partitions associées

$P_{h_G} = \{ C_1, C_2, \ldots, C_k \}$

$P'_{h_{G'}} = \{C'_1, C'_2, \ldots, C'_k\}$

sont telles que $C'_i = \bar{\sigma}(C_i)$

Une méthode pour rechercher l'isomorphisme éventuel de 2 graphes G et G' est d'utiliser les partitions associées à h_G et $h_{G'}$. En changeant de fonctions nodales, on affinera par intersection les partitions obtenues.

Pour changer de fonction nodale h, nous pourrons jouer sur deux points :

- soit changer de fonction de voisinage, en prenant $V_1, V_2, \ldots V_k$..
- soit changer de fonction d'invariance t

Il est clair que nous serons toujours limités par la partition Q de classes d'automorphismes et qu'il pourra être nécessaire d'utiliser une méthod exhaustive d'hypothèses.

I - 5. Limitation de l'ordre k des voisinages

Associer à chaque sommet s un sous-graphe $V_k(s)$ peut être lourd si ces sous-graphes sont presque aussi complexes que G et G'.

Il semble nécessaire de pouvoir trouver un critère permettant de choisir, à partir d'un certain moment, entre :

- soit continuer en utilisant des voisinages
- soit continuer par une méthode exhaustive, en faisant des hypothès

D'après les exemples traités, nous avons constaté que les voisinages d'ordre k sont utilisables tant qu'ils n'ont qu'assez peu de sommets et en particulier tant qu'en moyenne il n'ont que la moitié des sommets de G :

C'est à dire, si nous définissons :

- pour des graphes simples :

$$n_k(s) = |V_k(s)|$$

- pour des réseaux orientés :

$$n_k(s) = |V_k^+(s)| + |V_k^-(s)|$$

$$= n_k^+(s) + n_k^-(s)$$

le nombre moyen de sommets des voisinages d'ordre k sera :

$$n(k) = \sum_{s \in S} n_k(s)) \times \frac{1}{n} \qquad \text{si } |X| = n$$

Nous utiliserons des voisinages d'ordre k tant que :

$$n(k) < \frac{n}{2} .$$

II - METHODE GENERALE POUR DES RESEAUX MARQUES

1) Partition des articulations de X et X' suivant les marques

$$\text{Part } (X) = \{(M_i)\}$$

$$\text{Part } (X') = \{(M'_i)\}$$

$s \in M_i$ <=> s porte la marque m_i

Si il existe i pour lequel $|M_i| \neq |M'_i|$, nous avons la conclusion : (G et G' ne peuvent être isomorphes).

2) k = 0

3) k = k+1

4) Détermination de $V_k(s)$ (ou de $V_k^+(s)$ et $V_k^-(s)$ si les graphes sont orientés) pour les sommets de chaque classe M_i et M_i', ainsi que de n(k) et n'(

. Si $n(k) \neq n'(k)$, conclusion N

. Si pour tout s, $n_k(s) = n-1$ ou si $n(k) = n'(k) > \frac{n}{2}$

terminer par une méthode exhaustive d'hypothèses. Si nous supposons que $s' = \sigma$ alors $V_k'(s') = \bar{\sigma}(V_k(s))$ et nous affinons les partitions précédentes en cassant les classes contenant s et s' et en prenant les intersections de $V_k(s)$ avec les partitions précédentes.

5) Utilisation de la fonction nodale $n_k = \text{card} \circ V_K$ $(n_k(s) = |V_k(s)|$ Des classes correspondantes de la partition précédente sont subdivisées suivant les $n_k(s)$ croissants et on obtient par intersection de nouvelles partitions :

$$\text{Part}(X) = \{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$$

$$\text{Part}(X') = \{A_1', \ldots\ldots, A_k',\}$$

.Si ces partitions ne peuvent se correspondre, conclusion N

.Si ces partitions n'ont qu'un seul élément par classe, nous avons un isomorphisme.

6) Appelons ncc la fonction qui à un graphe G^* associe le nombre de ses composantes connexes. Alors $ncc \circ V_k$ est une fonction nodale.

Nous classons les sommets d'une classe A_i dont les voisinages d'ordre k ont le même nombre de composantes connexes également suivant le nombre croissant de sommets dans chaque composante connexe de $V^k(X)$, pour obtenir des partitions finales :

$$\text{Part}(X) = \{(B_i)\}$$

$$\text{Part}(X') = \{(B_i')\}$$

Par exemple : Si A_i = {a, b, c} et si

V_k(a) a 2 composantes connexes de 1 et 5 sommets

V_k(b) " " " 3 " 3 "

V_k(c) " " " 2 " 4 "

les classes (B_i) associées seront, dans l'ordre : {a} , {c} , {b}.

Si les deux partitions ne peuvent se correspondre ou si, pour des sommets s et s' dans les classes B_i et B'_i les marques des sommets des composantes connexes de V_k(s) et V_k(s') ne peuvent se correspondr nous avons la conclusion N.

Si les partitions n'ont qu'un seul élément par classe, nous avons un isomorphisme.

7) Le nombre de sommets de degré r est un invariant dans un graphe. En utilisant cette fonction invariante, construisons une fonction nodale composée m_k, définie, si V_k(s) a p composantes connexes par :

$$m_k(s) = (v_1(s), v_2(s), \ldots, v_p(s))$$

où $v_i(s)$ est un mot sur {1,2,..., n}

$v_i(s) = 1^{\alpha_1}\, 2^{\alpha_2}, \ldots \ell^{\alpha_2} \ldots$ si α_ℓ est le nombre de sommets de degr

ℓ dans la i^{eme} composantes connexe de V_k(s).

Les classes de l'ancienne partition sont subdivisées, grâce à la fonc tion nodale m_k, suivant les valeurs croissantes dans l'ordre lexicographique de m_k(s), pour obtenir les partitions :

Part X = {(C_i)}

Part X' = {(C'_i)}

Si les partitions ne peuvent se correspondre, nous avons la conclusion N.

Si les partitions obtenues n'ont qu'un élément par classe, nous avons un isomorphisme.

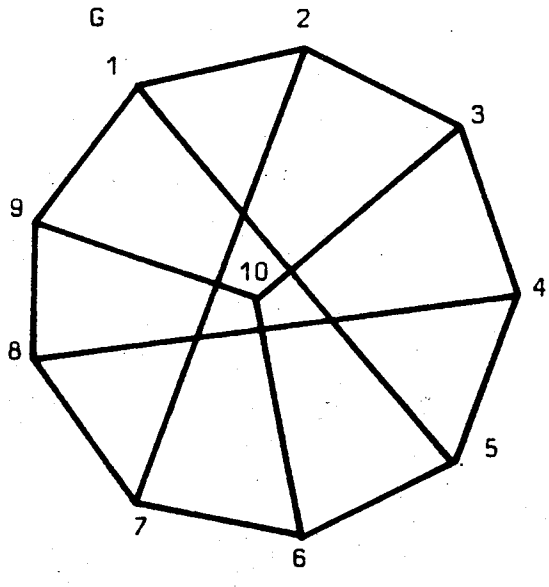
Si certaines classes des partitions ont plus d'un élément, aller en 3.

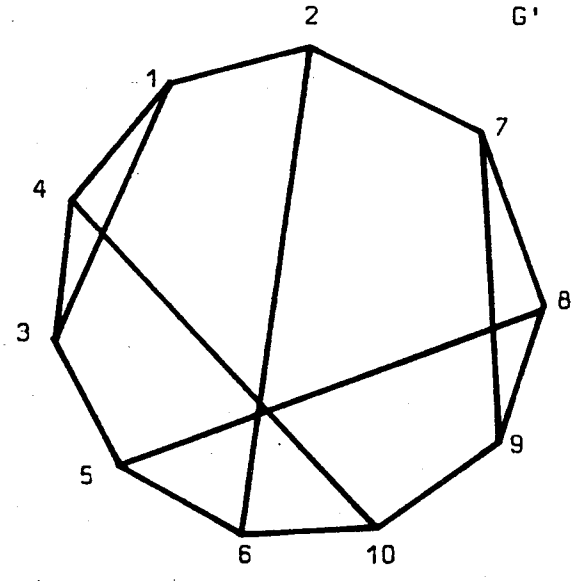
III - EXEMPLES ET COMPARAISON DES METHODES

Nous prenons pour exemples des réseaux non marqués, dont l'étude est en principe plus difficile car nous avons moins d'informations.

III - 1. Exemple 1 :

Soient les 2 graphes réguliers d'ordre 3 suivants :





Considérons les voisinages d'ordre 1; nous obtenons :

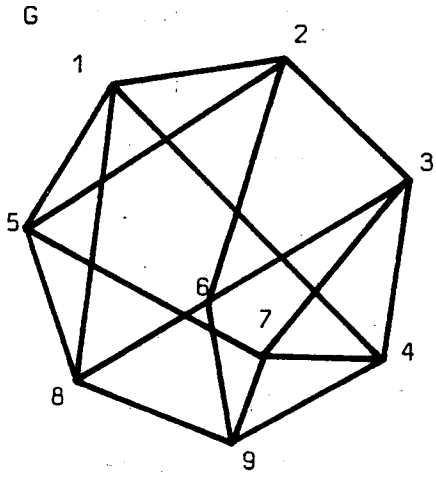
Pour G :		Pour G' :	
$V_1(1)$	: 2/5/9	$V_1(1)$	: 2/9/10
$V_1(2)$	: 1/3/7	$V_1(2)$	: 1/3/7
$V_1(3)$	: 2/4/10	$V_1(3)$	: 2/45
$V_1(4)$	: 3/5/8	$V_1(4)$	: 8/35
$V_1(5)$	: 1/4/6	$V_1(5)$	: 6/34
$V_1(7)$	: 6/8/2	$V_1(6)$	: 6/7/10
$V_I(8)$	: 4/7/9	$V_1(7)$	: 2/6/8
$V_1(9)$	: 1/8/10	$V_1(8)$	: 4/7/9
$V_1(10)$	: 3/6/9	$V_1(9)$	: 1/8/10
		$V_1(10)$	: 1/6/9

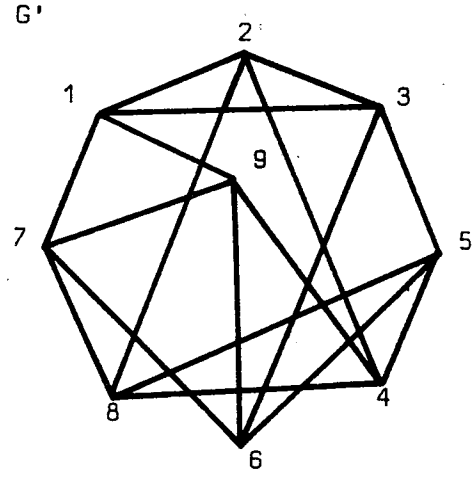
Il est clair que G et G' ne sont pas isomorphes, car les voisinages d'ordre 1 de G sont tous formés de 3 sommets déconnectés, alors que certains voisinages de G' sont formés de 3 sommets dont 2 sont connectés.

(Le graphe G est le classique graphe de Petersen dont tous les sommets sont dans la même classe d'automorphisme).

III - 2. Exemple 2 :

Soient les 2 graphes réguliers d'ordre 4 suivants :





1.2.3. k = 1

4. Les voisinages d'ordre 1 sont :

Pour G :

$V_1(1)$: 4/258

$V_1(2)$: 15/36

$V_1(3)$: 47/26

$V_1(4)$: 1/379

$V_1(5)$: 7/218

$V_1(6)$: 23/89

$V_1(7)$: 5/349

$V_1(8)$: 15/69

$V_1(9)$: 47/68

Pour G':

$V_1(1)$: 23/79

$V_1(2)$: 13/48

$V_1(3)$: 12/56

$V_1(4)$: 9/285

$V_1(5)$: 36/48

$V_1(6)$: 35/79

$V_1(7)$: 8/196

$V_1(8)$: 7/542

$V_1(9)$: 4/176

$n(k) = n'(k) = 4 < \frac{9}{2}$

5 et 6 => Part X = $\{B_1, B_2\}$

Part X'= $\{B'_1, B'_2\}$

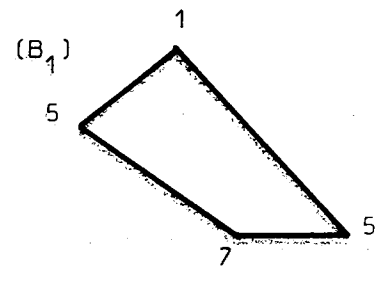
avec $\begin{cases} B_1 = (1,4,5,7) \longrightarrow B'_1 = (4,7,8,9) \\ B_2 = (2,3,6,8,9) \longrightarrow B'_2 = (1,2,3,5,6) \end{cases}$

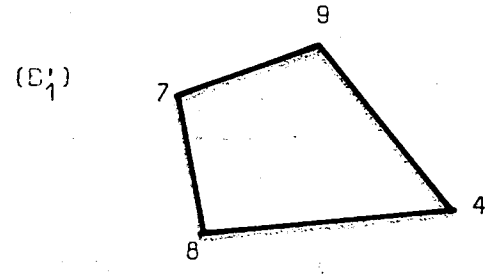
Nous n'affinons pas les partitions et nous revenons en 3 mais $n(2) = n'(2) = 8 > \frac{n}{2}$

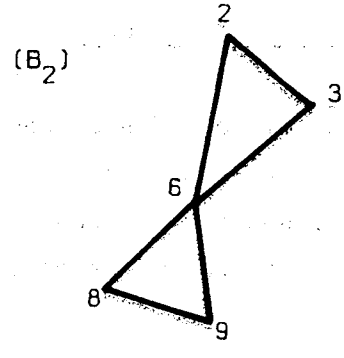
Nous continuons donc par une méthode d'hypothèses.

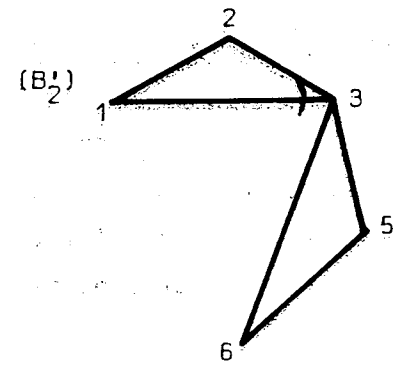
REMARQUE :

Si G et G' sont isomorphes par σ , alors $B'_i = \bar{\sigma}(B_i)$ et en particulier les graphes (B_i) et (B'_i) engendrés dans G et G' sont isomorphes.









Donc, si σ existe, nécessairement :

$$\begin{cases} 6 & \longrightarrow & 3 \\ (2,3)(8,9) & \longrightarrow & (1,2)(5,6) \\ (1,4,5,7) & \longrightarrow & (4,7,8,9) \end{cases}$$

Hypothèse H_1 : Supposons que $1 \rightarrow 4$

Nous prenons l'intersection des partitions correspondantes précédente avec :

$$\left.\begin{array}{lcl} 4 & \rightarrow & 9 \\ (2\ 5\ 8) & \rightarrow & (2\ 8\ 5) \end{array}\right\} \text{ car } V_1^{G'}(4) = \bar{\sigma}\left[V_1^{G}(1)\right]$$

$$\text{d'où} \begin{cases} 6 \rightarrow 3 \\ 1 \rightarrow 4 \\ 4 \rightarrow 9 \\ 5 \rightarrow 8 \\ 7 \rightarrow 7 \end{cases} \qquad \begin{array}{ccc} (2,3)(8,9) & \rightarrow & (1,2)(5,6) \\ (2,8) & \rightarrow & (2,5) \end{array}$$

Hypothèse H_2 : Supposons que $2 \rightarrow 2$

Nous trouvons une correspondance entre sommets :

G	1	2	3	4	5	6	7	8	9
G'	4	2	1	9	8	3	7	5	6

qui est bien un isomorphisme de G sur G' car tous les voisinages d'ordre 1 pour des sommets correspondants vérifient bien $\bar{\sigma}\ (V_k^{G'}(s')) = V_k^{G}(s)$.

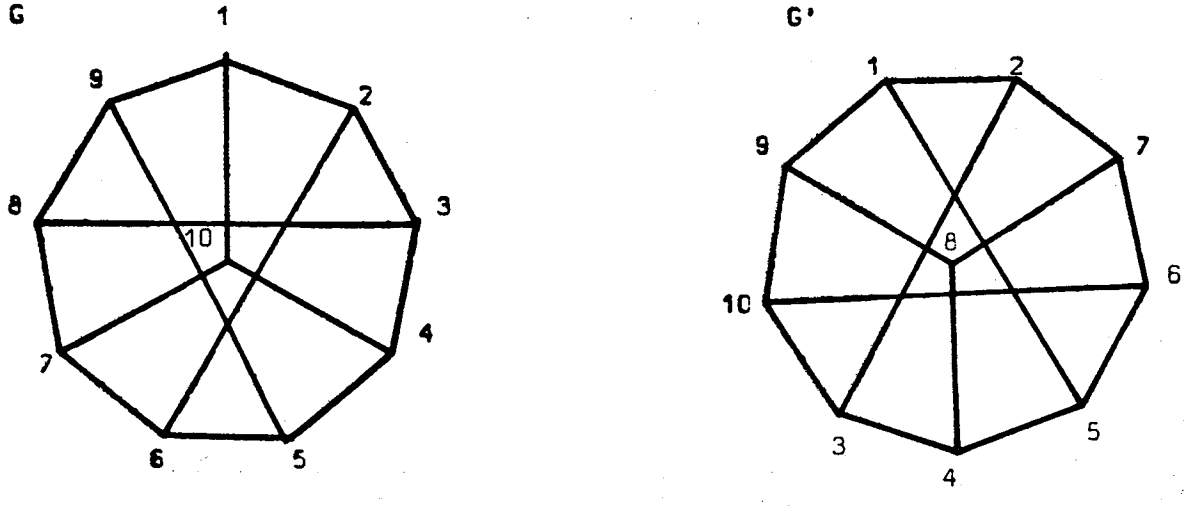
III - 3. Comparaison des méthodes utilisant les fonctions locales

Par la méthode de G. SAUCIER, l'étude globale des 2 graphes est très brève et ne permet pas d'éliminer dès le départ certains graphes non isomorphes. En particulier si G' est un graphe dont les classes d'automorphismes contiennent plusieurs sommets, et si le choix de S dans G n'est pas favorable, il est pos-

sible de faire un grand nombre d'hypothèses successives, pour finalement conclure au non-isomorphisme. Il est clair que faire des hypothèses sans succès est couteux, tant du point de vue temps d'exécution que du point de vue encombrement mémoire : en effet, la suite de toutes les tentatives essayées doit être gardée en mémoire pour pouvoir revenir en arrière et changer d'hypothèse.

Sur le premier exemple présenté par la méthode des voisinages, nous concluons rapidement au non-isomorphisme en ne calculant que les voisinages d'ordre 1, alors que par la méthode de G. SAUCIER, nous avons obtenu, après programmation, un temps d'exécution de 45.08 s et nous avons dû faire 36 hypothèses infructueuses.

Par ailleurs, la méthode des voisinages peut se révéler couteuse. En effet, considérons les 2 graphes suivants :



Pour chacun de ces 2 graphes, tous les voisinages d'ordre 1 sont du type a/b/c. En cherchant les voisinages d'ordre 2, nous trouvons qu'ils sont tous du même type et identiques à G et G'. Nous n'avons donc aucun renseignement supplémentaire et il est nécessaire de faire des hypothèses. Mais cette méthode aura été couteuse, car nous aurons dû garder en mémoire et simultanément 10 copies de G et de G'.

En fait, nous sommes ici dans le cas le plus défavorable de graphes transitifs isomorphes. C'est ce qui nous a incité à chercher un critère permettant de choisir, à partir d'un certain moment, une méthode plutôt qu'une autre et nous a amenés à introduire un critère lié au nombre n(k).

En conclusion, aucune des méthodes ne sera "la meilleure" dans tous les cas. Cependant, la méthode des voisinages nous a permis de préciser des notions qui seront utiles pour les problèmes d'immersion d'un réseau dans un autre ou pour les problèmes de recouvrement (Cf. Partie II).

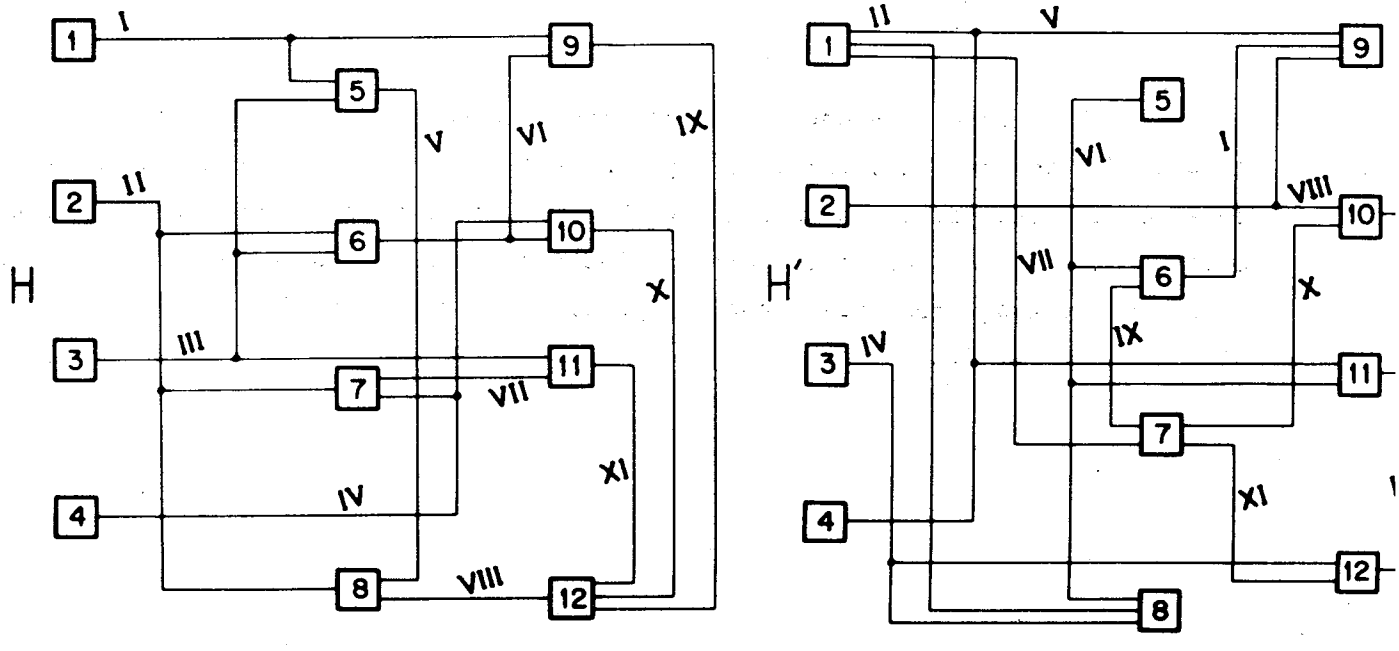
IV - APPLICATION AUX HYPERGRAPHES

Soient deux hypergraphes H = $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ et H' = $(\mathcal{A}', \mathcal{E}')$ auxquels nous associons de manière classique les 2 réseaux de noeuds et d'étoiles G = (X,U) et G' = (X',U'), (où X = $\mathcal{A} \cup \mathcal{E}$, $\mathcal{A}$ étant l'ensemble des noeuds, et $\mathcal{E}$ l'ensemble des étoiles).

Recherchant une application bijective σ entre $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$, nous n'utiliserons, dans G et G' que les voisinages des noeuds.

Exemple :

Soient les deux réseaux suivants :



Nous pouvons les considérer comme deux hypergraphes dont les ensembles de sommets sont constitués par les composants technologiques et les ensembles d'arêtes par les équipotentielles matérialisées.

Les voisinages d'ordre 1, dans G et G', des ensembles de noeuds, sont

$V_1(1)$ = I — $V'_1(1)$ = II, V, VIII

$V_1(2)$ = II — $V'_1(2)$ = VII

$V_1(3)$ = III — $V'_1(3)$ = IV

....

Les premières partitions correspondantes obtenues avec la fonction nodale n_1 = card $\circ V_1$ sont : $A_i \rightarrow A'_i$

$$\begin{cases} (1,2,3,4) & \longrightarrow & (2,3,4,5) \\ (5,6,7,8,9,10,11) & \longrightarrow & (1,6,8,9,10,11,12) \\ (12) & \longrightarrow & (7) \end{cases}$$

Puis les voisinages d'ordre 2 sont :

$$\begin{cases} V_2(1) = \text{I} \quad 5,9 \\ V_2(2) = \text{II} \quad 6,7,8 \\ V_2(3) = \text{III} \quad 5,6,11 \\ V_2(4) = \text{IV} \quad 7,10 \end{cases} \qquad \begin{cases} V'_2(2) = \text{VII} \ 9,10 \\ V'_2(3) = \text{IV} \ 8,12 \\ V'_2(4) = \text{V} \ 1,9,11 \\ V'_2(5) = \text{VI} \ 6,8,11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_2(5) = \text{I } 1,9 \text{ III } 3,6,11 \text{ V } 8 \\ V_2(6) = \text{II } 2,7,8 \text{ III } 3,5,11 \text{ VI } 9,10 \\ V_2(7) = \text{II } 2,6,8 \text{ IV } 4,10 \text{ VII } 11 \\ V_2(8) = \text{II } 2,6,7 \text{ V } 5 \text{ VIII } 12 \\ V_2(9) = \text{I } 1,5 \text{ VI } 6,10 \text{ IX } 12 \\ V_2(10) = \text{IV } 4,7 \text{ VI } 6,9 \text{ X } 12 \\ V_2(11) = \text{III } 3,5,6 \text{ VII } 7 \text{ XI } 12 \end{cases} \qquad \begin{cases} V'_2(1) = \text{II } 8 \text{ V } 4,9,11 \text{ VIII } 7 \\ V'_2(6) = \text{I } 9 \text{ VI } 5,8,11 \text{ IX } 7 \\ V'_2(8) = \text{II } 1 \text{ IV } 3,12 \text{ VI } 5,6,11 \\ V'_2(9) = \text{I } 6 \text{ V } 1,4,11 \text{ VII } 2,10 \\ V'_2(10) = \text{III } 11,12 \text{ VII } 2,9 \text{ X } 7 \\ V'_2(11) = \text{III } 10,12 \text{ VI } 5,6,8 \text{ V } 1,4,9 \\ V'_2(12) = \text{III } 10,11 \text{ IV } 3,8 \text{ XI } 7 \end{cases}$$

$V_2(12) = \text{VIII } 8 \text{ IX } 9 \text{ X } 10 \text{ XI } 11$ — $V'_2(7) = \text{VIII } 1 \text{ IX } 6 \text{ X } 10 \text{ XI } 12$

Les affinements successifs des partitions précédentes grâce aux fonctions nodales n_2 et $n_{cc} \circ V_2$, donnent les partitions correspondantes

B_i	→	B'_i
(1,4)	→	(2,3)
(2,3)	→	(4,5)
(8,11)	→	(1,6)
(9,10)	→	(10,11)
(5,7)	→	(8,9)
(6)	→	(11)
(12)	→	(7)

En faisant alors l'hypothèse que $1 \longrightarrow 2$, nous trouvons aisément, puisqu'alors $V'_2(2) = \bar{\sigma}(V_2(1))$, qu'il existe un isomorphisme tel que :

H	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
H'	2	5	4	3	9	11	8	6	10	12	1	7

APPLICATIONS A DES PROBLEMES PRATIQUES

A - ISOMORPHISME DE RESEAUX DE BOITES ET DE FILS

Nous résolvons dans ce chapitre un problème d'isomorphisme de réseaux de boites et de fils posé par la SESCOSEM, et nous donnons un algorithme adapté aux réseaux réels qui se présentent.

I - PRESENTATION DU PROBLEME

I - 1. Définitions

Un réseau de boîtes et de fils est un ensemble de composants ayant la forme de boitiers et munis de pattes à la périphérie (les pattes sont des connecteurs particuliers). Les pattes sont réunies entre elles par des fils.

Une équipotentielle est un ensemble de fils ou de métallisations jointives reliant plusieurs pattes de boitiers entre elles. L'équipotentielle est dite d'ordre n si elle est jointive à n pattes de boitiers.

I - 2. Position du problème

Les problèmes qui nous intéressent se situent au stade de l'implantation d'un réseau. Pour implanter un réseau logique R_0 initial, on le décrit dans deux langages différents, la description A étant utilisée pour vérifier la validité du réseau, c'est à dire sa conformité à l'usage qu'on veut en faire, la description B étant utilisée pour obtenir un tracé automatique de masques géométriques permettant de réaliser R_0. Supposons que le langage A décrive un réseau R_A et le langage B un réseau R_B; pour être sûr de la validité de l'implantation, on est amené à comparer les 2 réseaux R_A et R_B, c'est à dire à rechercher s'ils sont isomorphes.

En fait, comme dans chaque réseau presque toutes les marques sont différentes (en réalité les marques des boitiers se répètent beaucoup mais on distingue les boitiers entre eux par des marques de positionnement), l'applicat bijective σ portant sur les boitiers est presque déterminée et rechercher s'il y a isomorphisme revient pratiquement à rechercher si les connecteurs des boitier se correspondent, ainsi que les équipotentielles.

De plus, nous admettons que R_A est le "bon" réseau et que R_B, s'il n'est pas isomorphe à R_A doit être modifié dans ce but : la recherche d'isomorph me est, dans ce cas, plutôt une recherche de localisation de fautes. Pratiquemer pour des réseaux de 200 à 1000 boitiers ayant chacun de 3 à 10 pattes, on peut s'attendre à trouver de 2 à 3 fautes.

I - 3. Description d'un réseau de boites et de fils

Le point délicat pour décrire un réseau de boites et de fils est de trouver une description à la fois économique pour ce qui est de l'emplacement mémoire et utilisable pour le travail envisagé, ici la recherche d'un isomorphi

Nous proposons une description voisine de celle des réseaux de noeu et d'étoiles particuliers, aussi appelés "tissus".

Pour décrire ces réseaux, nous donnerons dans l'ordre, la descripti de composants particuliers :

- des boitiers
- des équipotentielles d'ordre supérieur ou égal à 3 (ayant 1 connexion d'entrée et au moins 2 de sortie)

puis nous donnerons les relations de jointivité entre boites et équipotentielle

REMARQUE :

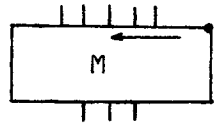
Dans cette description une équipotentielle d'ordre 2 ne sera pas considérée comme équipotentielle et n'interviendra que dans les relations de jointivité entre 2 boitiers.

Pour décrire une équipotentielle d'ordre ≥ 3, nous lui donnerons le nom de la seule connexion sortie de boitier et nous listerons le nom de toutes les pattes entrant dans d'autres boitiers.

Pour décrire les liaisons d'une boite avec ce qui l'entoure nous distinguerons dans l'ordre :

- les entrées qui sont entrées du réseau ou entrées primaires (notées E)
- les sorties qui sont sorties du réseau ou sorties primaires (notées S)
- les entrées de la boite qui proviennent d'une autre boite par l'intermédiaire d'une équipotentielle. Ces entrées seront appelées entrées secondaires et notées e.
- les sorties de la boîte qui sont reliées à d'autres boites par des équipotentielles. Ces sorties seront appelées sorties secondaires et notées s.

Pour décrire une boite (en général de forme rectangulaire et n'ayant des pattes que sur 2 côtés), nous donnerons



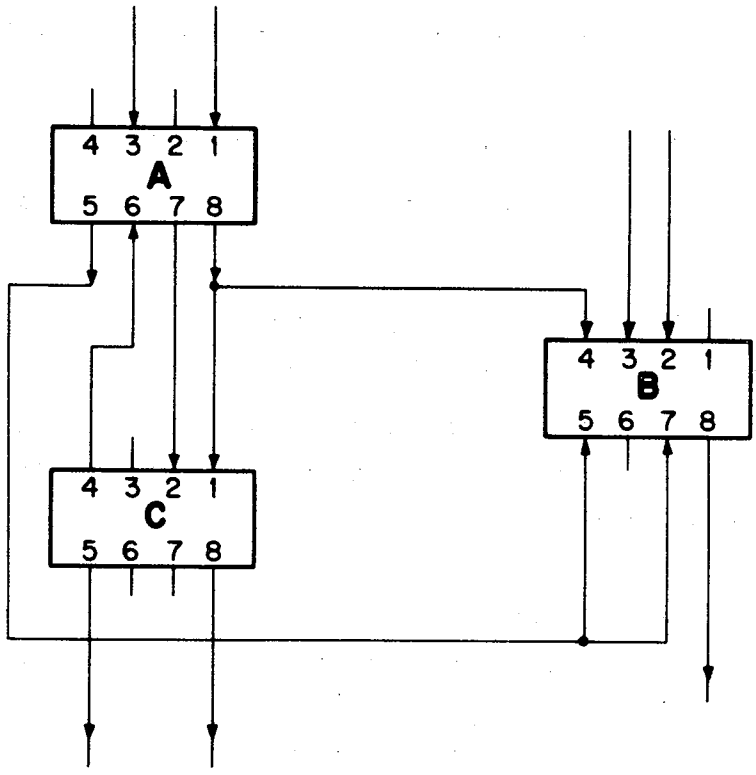
- la marque M
- le type des pattes rencontrées lorsqu'on parcourt le bord du boitier dans le sens direct à partir du coin supérieur droit; à chaque patte est associé le symbole E, S, e, s, ou ψ si la patte est inutilisée.

A chaque boitier nous associons donc un mot formé sur {E, S, e, s} que nous appelons "séquence symbolique" du boitier. L'application s telle que :

boitier X $\xrightarrow{s}$ séquence symbolique de X

est une fonction nodale définie sur l'ensemble des boitiers. Ce mot peut être décomposé en deux demi-mots, chacun des demi-mots représentant la séquence symbolique associée aux pattes situées d'un côté du boitier.

Exemple :



Ce réseau sera décrit de la façon suivante :

Boitiers :

A : E ψ E ψ ; s e s s
B : ψ E E e ; e ψ e S
C : e e ψ s ; S ψ ψ S

Equipotentielles :

$$\begin{cases} a_5 \overset{\rightarrow}{2} (b_5, b_7) \\ a_8 \overset{\rightarrow}{2} (b_4, c_1) \end{cases}$$

Liaisons :

A : $\begin{cases} (a_1), (a_3) & \text{entrées primaires} \\ \emptyset & \text{sorties primaires} \\ (a_6 \leftarrow C_4) & \text{entrées secondaires} \\ (a_5 \rightarrow {}_2); (a_7 \rightarrow c_2); (a_8 \rightarrow {}_2) & \text{sorties secondaires} \end{cases}$

B : $\begin{cases} (b_2), (b_3) \\ (b_8) \\ (b_4 \overset{\leftarrow}{2} a_8); (b_5, b_7 \overset{\leftarrow}{2} a_5) \\ \emptyset \end{cases}$

C : $\begin{cases} \emptyset \\ (c_5); (c_8) \\ (c_1 \overset{\leftarrow}{2} a_8); (c_2 \leftarrow a_7) \\ (c_4 \rightarrow a_6) \end{cases}$

Une telle description du réseau est légèrement redondante, mais nous évitons cependant de décrire totalement et n fois une équipotentielle à n branches; et cette description sera maniable car les voisinages ascendants et descendants de chaque boîte sont décrits au départ.

De plus, cette description du réseau n'a pas à être faite uniquement dans ce but ni à ce moment; en principe ces informations doivent déjà avoir été stockées en mémoire et utilisées.

II - RECHERCHE D'ISOMORPHISME DE RESEAUX DE BOITES ET DE FILS

II - 1. Fonctions nodales

Soient deux réseaux R = ($\mathcal{A}, \mathcal{E}$) et R' = ($\mathcal{A}'$, $\mathcal{E}'$) de boites et fils. La fonction nodale "séquence symbolique" s, définie sur l'ensemble des boitiers détermine des partitions correspondantes de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$, soit P et P', si R et R' so isomorphes.

REMARQUE :

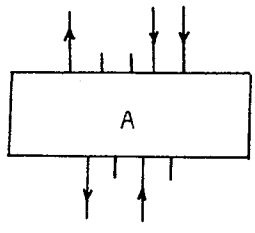
Une faute couramment trouvée est celle c'un retournement de boitier Supposons que le boitier A' soit obtenu à partir du boitier A par retournement autour de l'axe "horizontal", alors la séquence symbolique de A' sera la séquenc symbolique symétrique de celle de A :

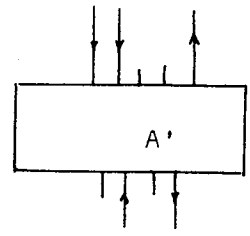
si s(A) = e e ψs S; ψ ψ S

alors s(A')= S ψ ψ; S s ψ e e

Si le boitier A' est obtenu par rotation de A autour de l'axe "vert du boitier, la séquence symbolique associée à A' est obtenue par réflexion des deux demi-mots constituant s(A).

Ainsi, si



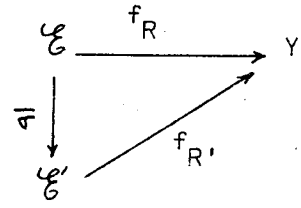


s(A) = e e ψ ψ s; s ψ e ψ

s(A')= s ψ ψ e e; ψ e ψ s

II - 2. Fonctions "équinodales"

Nous dirons qu'une fonction $f_R : \mathcal{E} \longrightarrow Y$ est une fonction équinodale si elle se conserve par isomorphisme, c'est à dire



$$f_{R'} = f_R \circ \bar{\sigma}^{-1}$$

Si nous considérons le réseau de noeuds et d'étoiles ayant pour ensemble d'articulations $\{\mathcal{A} \cup \mathcal{E}\}$, une fonction équinodale est une fonction nodale restreinte au sous-ensemble $\mathcal{E}$.

S'il existe un isomorphisme de R sur R', alors une fonction équinodale définit des partitions correspondantes Q et Q' sur l'ensemble des équipotentielles.

Les fonctions équinodales utilisées seront :

1) l'ordre d'une équipotentielle
2) le nombre de boitiers touchés
3) si des équipotentielles sont décrites par

$$e : A_i \xrightarrow[q]{} \left[(A_{j1})_{n_1}, (A_{j2})_{n_2}, \ldots, (A_{jq})_{n_q}\right]$$

$$e' : A'_i \xrightarrow[q]{} \left[(A'_{j1})_{n'_1}, (A'_{j2})_{n'_2}, \ldots, (A'_{jq})_{n'_q}\right]$$

Les classes des partitions Q et Q' précédentes peuvent être subdivisées grâce à la fonction équinodale qui, à l'équipotentielle e fait correspondre la liste des indices des pattes des boitiers touchés

$$e \longrightarrow (n_1, n_2, \ldots n_q)$$

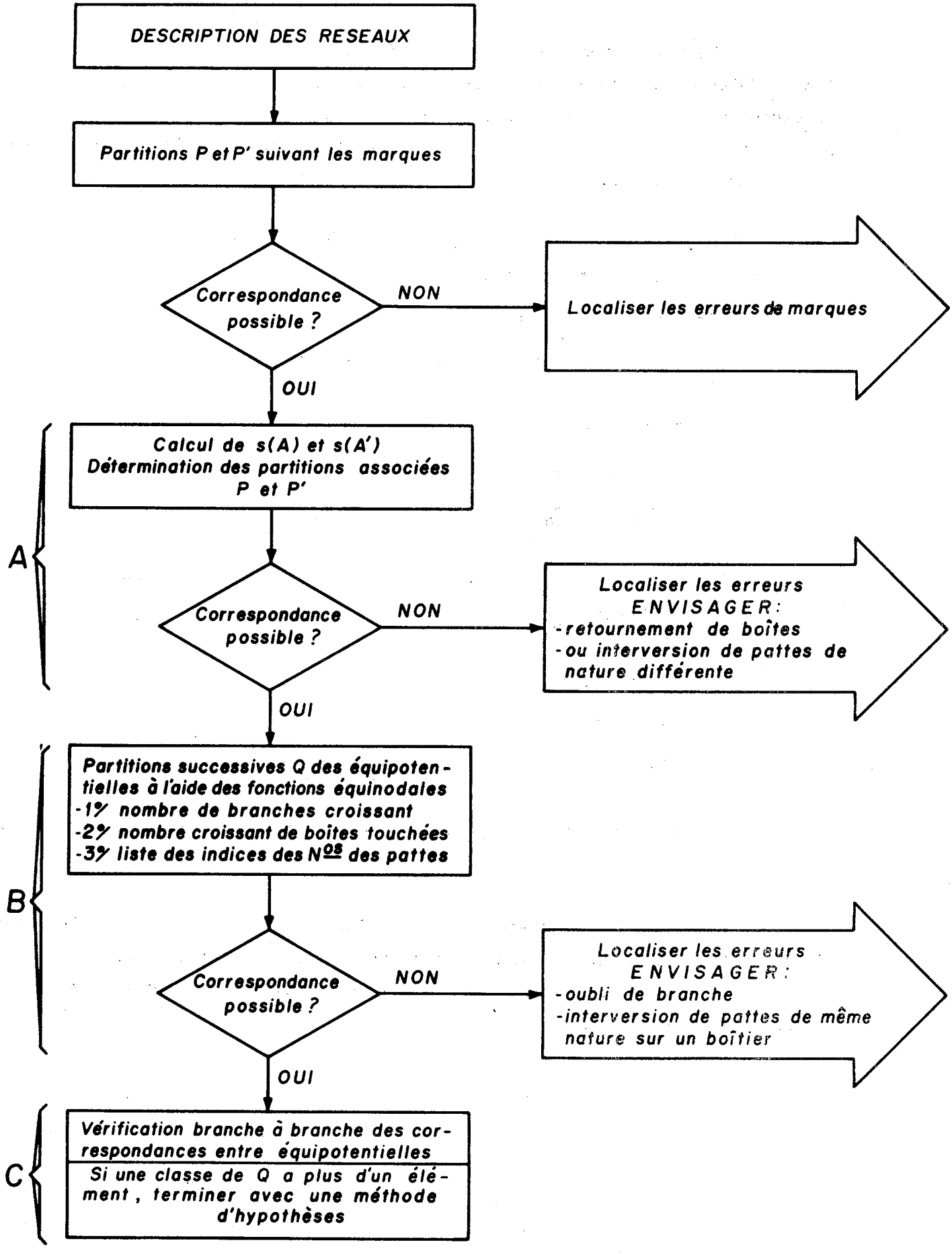
II - 3. Algorithme

La recherche d'un isomorphisme entre R et R' se fait :

- d'une part en affinant des partitions P sur les boitiers à l'aid
  des marques et de la fonction nodale "séquence symbolique"

- d'autre part en affinant des partitions Q sur les équipotentiell
  à l'aide de fonctions équinodeles.

Nous donnons le schéma de recherche suivant :


DESCRIPTION DES RESEAUX
Partitions P et P' suivant les marques
Correspondance possible ?
NON
Localiser les erreurs de marques
OUI
A
Calcul de s(A) et s(A')
Détermination des partitions associées P et P'
Correspondance possible ?
NON
Localiser les erreurs
ENVISAGER:
-retournement de boîtes
-ou interversion de pattes de nature différente
OUI
B
Partitions successives Q des équipotentielles à l'aide des fonctions équinodales
-1° nombre de branches croissant
-2° nombre croissant de boîtes touchées
-3° liste des indices des N°s des pattes
Correspondance possible ?
NON
Localiser les erreurs
ENVISAGER:
-oubli de branche
-interversion de pattes de même nature sur un boîtier
OUI
C
Vérification branche à branche des correspondances entre équipotentielles
Si une classe de Q a plus d'un élément, terminer avec une méthode d'hypothèses

Dans les étapes A et B, nous affinons des partitions grâce à des f
tions nodales ou équinodales. En supposant que nous arrivions à un cas où une
correspondance n'est pas possible, il faut localiser les boitiers ou les équip
tentielles qui ne se correspondent pas et chercher à modifier R' de manière à
tenir la compatibilité.

Raisonnons sur la fonction nodale séquence symbolique s; soient s_α, s_β, s_γ,.... les valeurs possibles de s.

Soit $C = \{A_1, A_2\}$ une classe de P avant l'étape A et

$C' = \{A'_1, A'_2\}$ la classe correspondante.

1) Supposons que :

$$\begin{cases} s(A_1) = s_\alpha \\ s(A_2) = s_\alpha \end{cases} \qquad \begin{cases} s(A'_1) = s_\alpha \\ s(A'_2) = s_\beta \end{cases}$$

Dans ce cas il est simple de voir qu'une correction probable est d
modifier A'_2 pour obtenir s_α.

2) Supposons que :

$$\begin{cases} s(A_1) = s_\alpha \\ s(A_2) = s_\beta \end{cases} \qquad \begin{cases} s(A'_1) = s_\alpha \\ s(A'_2) = s_\alpha \end{cases}$$

Dans ce cas, nous ne pouvons savoir s 'il est préférable de modifie
A'_1 ou A'_2.

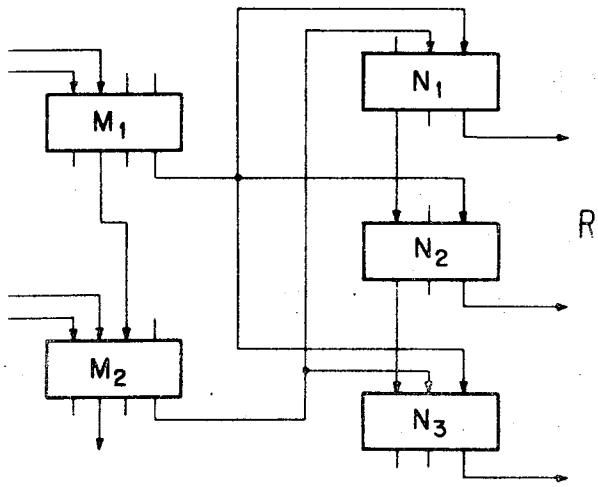
Si à la fin de l'étape B, des boitiers ou des équipotentielles n'or
pû être différenciés, nous terminons par une méthode d'hypothèses en assignant
à des boitiers, soit à des équipotentielles de se correspondre et en réaffinant
les partitions précédentes.

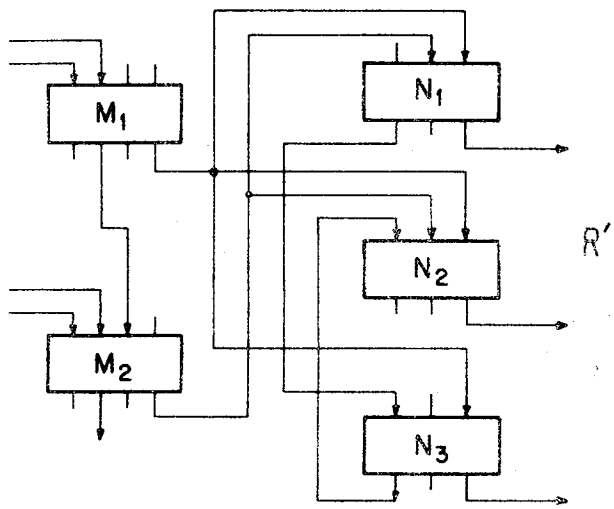
III - EXEMPLES

Nous traitons 2 exemples qui, bien que ne comportant que peu de boîtiers, illustrent les types de problèmes rencontrés en pratique, en particulier l'interversion entre branches d'équipotentielles.

Exemple 1 :

Soient les réseaux suivants :





L'ensemble des marques de ces deux réseaux est l'ensemble (M,N), les indices qui interviennent ne servant qu'à distinguer les boîtiers de même marque les uns des autres.

1) Les partitions P et P', suivant les marques sont :

$$P = \{(M_1, M_2), (N_1, N_2, N_3)\}$$

$$P' = \{(M_1, M_2), (N_1, N_2, N_3)\}$$

Les descriptions des réseaux sont :

boites :

$$\begin{cases} M_1 : \psi\ \psi\ E\ E;\ \psi\ s\ \psi\ s \\ M_2 : \psi\ e\ E\ E;\ \psi\ s\ \psi\ s \end{cases} \qquad \begin{cases} M_1 : \psi\ \psi\ E\ E;\ \psi\ s\ \psi\ s \\ M_2 : \psi\ e\ E\ E;\ \psi\ s\ \psi\ s \end{cases}$$

$$\begin{cases} N_1 : e\ e\ \psi;\ s\ \psi\ S \\ N_2 : e\ \psi\ e;\ s\ \psi\ S \\ N_3 : e\ e\ e;\ \psi\ \psi\ S \end{cases} \qquad \begin{cases} N_1 : e\ e\ \psi;\ s\ \psi\ S \\ N_2 : e\ e\ e;\ \psi\ \psi\ S \\ N_3 : e\ \psi\ e;\ s\ \psi\ S \end{cases}$$

Equipotentielles à plus de 2 branches

Pour R

$$(m_1)_8 \xrightarrow{3} ((n_1)_1, (n_2)_1, (n_3)_1)$$

$$(m_2)_8 \xrightarrow{2} ((n_1)_2, (n_3)_2)$$

Pour R'

$$(m_1)_8 \xrightarrow{3} ((n_1)_1, (n_2)_1, ($$

$$(m_2)_8 \xrightarrow{2} ((n_2)_2, (n_1)_2)$$

Liaisons

$$M_1 : \begin{cases} (3)\ (4) \\ \emptyset \\ \emptyset \\ (m_1)_6 \rightarrow (m_2)_2;\ (m_1)_8 \xrightarrow{3}; \end{cases} \qquad M_1 : \begin{cases} (m_1)_3;\ (m_1)_4 \\ \emptyset \\ \emptyset \\ (m_1)_6 \rightarrow (m_2)_2;\ (m_1)_8 \end{cases}$$

$$M_2 : \begin{cases} (m_2)_3;\ (m_2)_4 \\ (m_2)_6 \\ (m_2)_2 \leftarrow (m_1)_6\ ; \\ (m_2)_8 \xrightarrow{2}\ ; \end{cases} \qquad M_2 : \begin{cases} (m_2)_3;\ (m_2)_4 \\ (m_2)_6 \\ (m_2)_2 \leftarrow (m_1)_6\ ; \\ (m_2)_8 \xrightarrow{2}\ ; \end{cases}$$

N_1 : $\emptyset$; $(n_1)_6$; $(n_1)_1 \xleftarrow{3} (m_1)_8$; $(n_1)_2 \xleftarrow{2} (m_2)_8$; $(n_1)_4 \rightarrow (n_2)_3$;

N_1 : $\emptyset$; $(n_1)_6$; $(n_1)_1 \xleftarrow{3} (m_1)_8$; $(n_1)_2 \xleftarrow{2} (m_2)_8$; $(n_1)_4 \rightarrow (n_3)_3$;

N_2 : $\emptyset$; $(n_2)_6$; $(n_2)_1 \xleftarrow{3} (m_1)_8$; $(n_2)_3 \leftarrow (n_1)_4$; $(n_2)_4 \leftarrow (n_3)_3$

N_2 : $\emptyset$; $(n_2)_6$; $(n_2)_1 \xleftarrow{3} (m_1)_6$; $(n_2)_2 \leftarrow (m_2)_8$; $(n_2)_3 \leftarrow (n_3)_4$; $\emptyset$

N_3 : $\emptyset$; $(n_3)_4$; $(n_3)_1 \xleftarrow{3} (m_1)_6$; $(n_3)_2 \xleftarrow{2} (m_2)_6$; $(n_3)_3 \leftarrow (n_2)_4$; $\emptyset$

N_3 : $\emptyset$; $(n_3)_4$; $(n_3)_1 \xleftarrow{3} (m_1)_8$; $(n_3)_3 \leftarrow (n_1)_4$; $(n_3)_4$ $(n_2)_3$

Les séquences sumboliques montrent que, s'il y a isomorphisme, nécessairement :

$M_1 \rightarrow M_1$

$M_2 \rightarrow M_2$

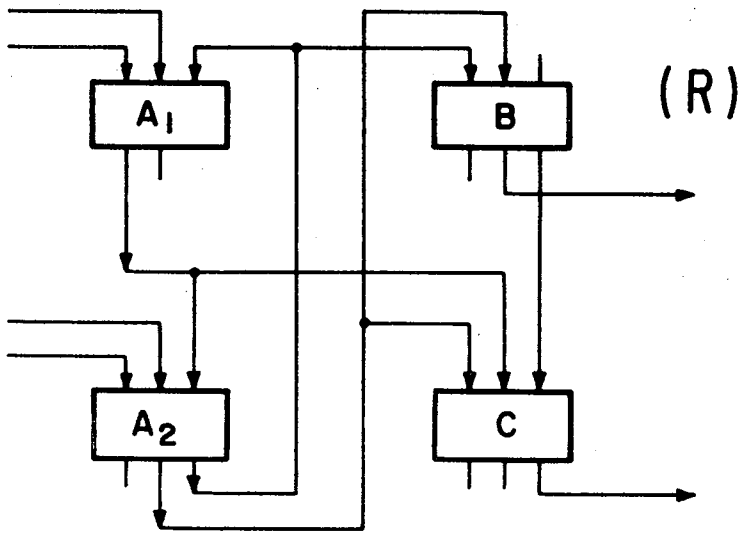
$N_1 \rightarrow N_1$

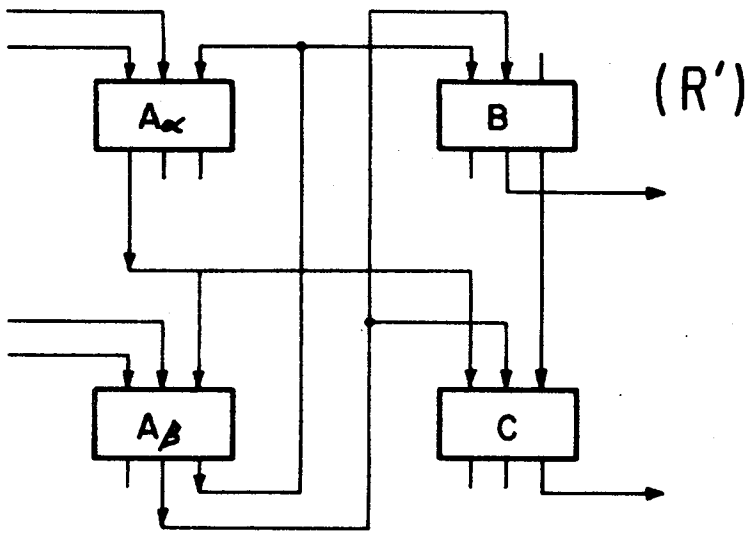
$N_2 \rightarrow N_3$

$N_3 \rightarrow N_2$

Nous vérifions de plus que les équipotentielles correspondent bien à la bijection entre pattes de boitiers, donc les deux réseaux de boites et de fils sont isomorphes.

Exemple 2 :





L'ensemble des marques de ces réseaux est l'ensemble (A,B,C).

Nous obtenons pour partitions initiales suivant les marques :

(A_1, A_2)	→	(A_α, A_β)
B	→	B
C	→	C

Les descriptions de ces réseaux sont :

Boitiers

$\begin{cases} A_1 : e\ E\ E;\ s\ \psi\ \psi \\ A_2 : e\ E\ E;\ \psi\ s\ s \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} A_\alpha : e\ E\ E;\ s\ \psi\ \psi \\ A_\beta : e\ E\ E;\ \psi\ s\ s \end{cases}$

$B : \psi\ e\ e;\ \psi\ S\ s$ $\qquad$ $B : \psi\ e\ e;\ \psi\ S\ s$

$C : e\ e\ e;\ \psi\ \psi\ S$ $\qquad$ $C : e\ e\ e;\ \psi\ \psi\ S$

Equipotentielles d'ordre ≥ 3

$(a_1)_4 \overset{\rightarrow}{2} ((a_2)_1, c_2)$ $\qquad$ $(a_\alpha)_4 \overset{\rightarrow}{2} ((a_\beta)_1, c_3)$

$(a_2)_5 \overset{\rightarrow}{2} (b_2, c_3)$ $\qquad$ $(a_\beta)_5 \overset{\rightarrow}{2} (b_2, c_2)$

$(a_2)_6 \overset{\rightarrow}{2} ((a_1)_1, b_3)$ $\qquad$ $(a_\beta)_6 \overset{\rightarrow}{2} ((a_\alpha)_1, b_3)$

La partition suivant les séquences symboliques donne :

$A_1 \rightarrow A_\alpha$ $\qquad$ $B \rightarrow B$

$A_2 \rightarrow A_\beta$ $\qquad$ $C \rightarrow C$

En vérifiant si les équipotentielles se correspondent, nous apercevons qu'il y a incompatibilité entre les équipotentielles.

$\begin{cases} (a_1)_4 \text{ et } (a_\alpha)_4 \\ (a_2)_5 \text{ et } (a_\beta)_5 \end{cases}$

car les indices des pattes des boites touchées ne correspondent pas.

Nous sommes donc amenés à modifier le réseau R' pour qu'un isomorphisme soit possible; pour ceci, nous échangeons les pattes 2 et 3 du boitier C de R' ou plutôt nous faisons aboutir en c_3 la branche d'équipotentielle qui arrivait en c_2 et vice versa. Le nouveau réseau R' modifié est isomorphe à R.

B - UTILISATION DE CES METHODES POUR DES PROBLEMES DE TESTABILITE DE RESEAUX

Recherchant les pannes dans les circuits logiques et en particulier les collages (c'est à dire les pannes qui consistent à rendre constante en une connexion la valeur d'une information alors qu'elle doit varier) A. VERDILLON pose des problèmes apparentés à des problèmes d'isomorphismes.

I - PRESENTATION DU PROBLEME

A. VERDILLON [28] montre que des collages peuvent être indiscernables entre eux et qu'il est suffisant de rechercher les collages d'un type particulier. Pour ces collages, nous donnons la définition suivante :

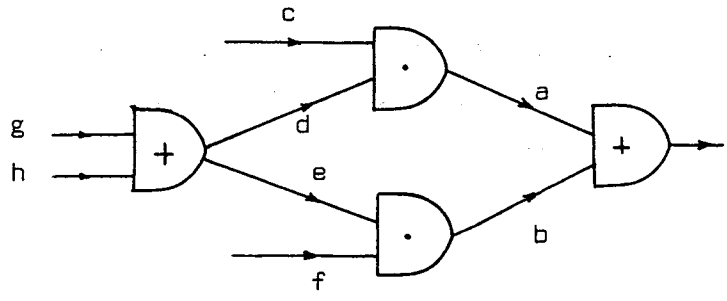
Support d'un collage :

Soit un réseau d'articulations $R = (\mathcal{A}, \mathcal{C})$, totalement orienté, avec des sources et des puits, sans circuit, portant des marques non triviales sur les articulations, et non nécessairement simple. Nous appelons support d'un collage une liste de connexions $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$ ayant les 2 propriété suivantes :

1) pour tout i, il existe un chemin allant d'une source à un puits passant par α_i et ne passant par aucun des α_j $(j \neq i)$

2) il n'existe pas d'articulation dont tous les arcs entrants soient dans la liste α.

Exemple :



{a,e} ; {b,d}; {f} sont des supports de collage

Par ailleurs, deux réseaux d'articulations R = ($\mathcal{A}$, $\mathcal{C}$) et R' = ($\mathcal{A}'$, $\mathcal{C}'$ seront dits isomorphes s'il existe une application bijective σ :

$$\sigma : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}'$$

$$A \longmapsto A' = \sigma(A)$$

telle que :

1) A et σ(A) ont les mêmes marques

2) $\bar{\sigma} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$

$$(A,B,i) \longrightarrow (\sigma(A),\ \sigma(B),\ i)$$

est une bijection de $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{C}'$.

Cette définition recouvre bien le fait que, s'il existe p connexions d'un certain type entre A et B dans R, il en existe également p du même type entre σ(A) et σ(B).

Supports de collage équivalents :

Dans un réseau R ayant les propriétés ci-dessus, nous dirons que les collages $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p)$ et $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p)$ sont équivalents s'il existe un automorphisme σ de R tel que

$$\forall_i = 1, \ldots, p \qquad \bar{\sigma}(\alpha_i) = \beta_i$$

La relation précédente est une relation d'équivalence sur les ensembles de connexions; nous nommerons les classes des P- classes.

Pour minimiser le nombre de tests de détection de collages, on peut se limiter dans un premier temps à ne tester que des collages dont les supports sont dans des P- classes distinctes. En effet, si T_α est le vecteur de test détectant le collage de support α et si α' est équivalent à α par l'automorphisme $\bar{\sigma}$, alors $T_{\alpha'} = T_{\bar{\sigma}(\alpha)}$

Nous allons donc chercher les P- classes de R.

II - DEFINITIONS

Soit un réseau d'ensemble d'articulations $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \ldots A_n\}$ et d'ensemble de connexions $\mathcal{C} = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$.

Nous rappelons que nous appelons transposition sur un ensemble X fin toute permutation de X qui ne déplace que deux objets de X.

II - 1. H.équivalence et S.équivalence sur les articulations

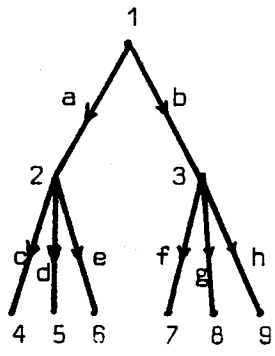
a) Soit H(R) le groupe des automorphismes du réseau marqué et orient R.

A_i et A_j sont des articulations H-équivalentes si elles appartien nent à la même classe d'automorphismes.

b) A_i et A_j sont des articulations S-équivalentes si elles sont égal (i=j) ou s'il existe un automorphisme de R qui soit une transposi tion sur X échangeant précisément A_i et A_j.

Il est clair que la S-équivalence est plus fine que la H.équivalence

Exemple :



Nous avons pour H-classes
{1}{2,3}{4,5,6,7,8,9}

et pour S-classes
{1}{2}{3}{4,5,6}{7,8,9}

Nous pouvons considérer la S.équivalence comme l'intersection de 2 relations d'équivalence $\bar{S}$ et $\underline{S}$ définies par :

$A_i \ \bar{S} \ A_j \iff A_i$ et A_j ont mêmes successeurs et mêmes marques

$A_i \ \underline{S} \ A_j \iff A_i$ et A_j ont mêmes antécédents et mêmes marques

II - 2. $\overset{\vee}{S}$-équivalence entre connexions

Des connexions $x_i = (A_i, B_i)$ et $x_j = (A_j, B_j)$ sont dits $\overset{\vee}{S}$-équivalents si elles sont égales (i=j) ou s'il existe un automorphisme σ de R tel que

. $\bar{\sigma}$ soit une transposition échangeant x_i et x_j

. σ se réduit au produit de composition des 2 transpositions (peut être triviales) : $\tau_1 = (A_i, A_j)$ et $\tau_2 = (B_i, B_j)$.

Sur l'exemple précédent, c, d, e sont dans la même $\overset{\vee}{S}$-classe.

REMARQUE :

Deux connexions ayant mêmes extrêmités et même orientations sont dans une même $\overset{\vee}{S}$-classe.

III - RECHERCHE DES CLASSES DE SUPPRESSION POUR LES CONNEXIONS

Nous nous plaçons dans des réseaux orientés R, marqués sur les articulations, sans circuits, et non nécessairement simples.

Deux supports de collage n'ayant qu'une seule connexion $\{x_i\}$ et $\{x_j\}$ ne peuvent appartenir à une même P-classe que s'il existe un automorphisme $\bar{\sigma}$ de qui les fasse se correspondre ainsi que leurs extrêmités.

Nous allons modifier et prolonger la méthode utilisant les fonctions nodales en définissant également une fonction définie sur les connexions et en affinant simultanément les partitions sur les articulations et celles sur les connexions de la façon suivante :

1) partitions successives sur les articulations

1.1. partition suivant les marques

1.2. " " les demi-degrés extérieurs croissar

1.3. " " " intérieurs croissar

Les classes de la partition finale sont numérotées.

2) partition sur les connexions

2.1. les connexions reliées à l'extérieur et entrant dans un même opérateur, sont dans une même $\overset{\vee}{S}$.classe.

2.2. à chaque connexion x_i non dans une $\overset{\vee}{S}$.classe déterminé précédemment, nous associons l'expression

$m_i = (n_i^1, n_i^2)$ où n_i^1 est le numéro de la classe

l'articulation origine de x_i.

n_i^2 est le numéro de la classe de l'a

l'articulation extrêmité de x_i.

Nous partitionnons l'ensemble des connexions en classes C_1, C_2, .. C_p suivant les valeurs croissantes dans l'ordre lexicographique c m_i.

Considérons la première classe ayant plus d'un seul élément et qui ne soit pas une $\overset{\vee}{S}$.classe précedemment trouvée; elle est constitu par exemple des connexions $(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots x_{i_p})$.

3) Faisons l'hypothèse qu'il existe $\bar{\sigma}$ tel que $x_{i_1} \xrightarrow{\bar{\sigma}} x_{i_2}$

Nous obtenons dans les ensembles d'articulations des ensembles correspondants plus fins en utilisant les correspondances entre extrémités des connexions x_{i_1} et x_{i_2}. puis nous affinons les partition des connexions en utilisant la fonction m_i.

a) si on arrive à une incompatibilité, x_{i_1} et x_{i_2} ne peuve se correspondre dans un automorphisme de $\bar{R}$; faire un autre choix de x_{i_2} et aller en 3.

b) si les partitions correspondantes sur les articulations n'ont qu'un élément par classe, nous avons trouvé un automorphisme de R qui induit à la $\overset{\vee}{S}$.équivalence près, un $\bar{\sigma}$ possible sur les connexions :

$$x_{i_1} \xrightarrow{\bar{\sigma}} x_{i_2} = \bar{\sigma}(x_{i_1})$$

$$x_i \longrightarrow \bar{\sigma}(x_i)$$

et tout ensemble $\{x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots x_{j_p}\}$ de connexions est P-équivalent à l'ensemble $\{\bar{\sigma}(x_{j_1}), \bar{\sigma}(x_{j_2}), \ldots, \bar{\sigma}(x_{j_q})\}$

Pour obtenir tous les ensembles P.équivalents, nous devons déterminer tous les automorphismes possibles de R, donc épuiser toutes les hypothèses possibles $x_{i_1} \xrightarrow{\bar{\sigma}} x_{i_\ell}$, en revenant à 3 puis passer aux classes suivantes.

c) si les partitions sur les articulations ont plus d'un élément, on fait une hypothèse de niveau supérieur et on répète le processus décrit en 3.

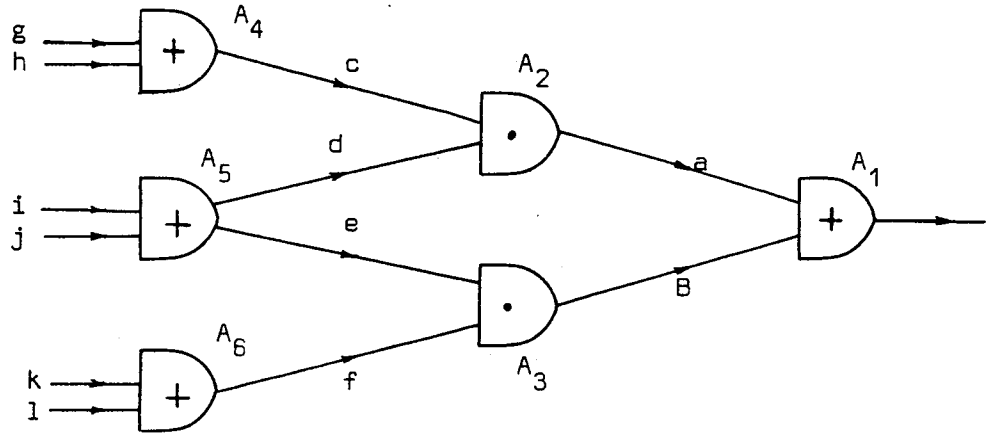
Lorsque tous les choix sont épuisés, l'algorithme est terminé.

REMARQUE :

La partition sur les connexions faite en utilisant la fonction m_i permet de diminuer considérablement le nombre de choix possibles en 3.

III - EXEMPLE

Soit le réseau suivant :



1) Partitions successives sur les articulations :

- Suivant les marques : (A_1, A_4, A_5, A_6) (A_2, A_3)
- suivant les demi-degrés extérieurs croissants, puis les demi-degrés intérieurs croissants :

(A_1) (A_4, A_6) (A_5) (A_2, A_3)
C_1 C_2 C_3 C_4

2) Partitions sur les connexions

Nous avons comme S.classes : (g, h), (i, j), (k, l)

m(a) = (4, 1)
m(b) = (4, 1)
m(c) = (2, 4)
m(d) = (3, 4)
m(e) = (3, 4)
m(f) = (2, 4)

Nous obtenons une partition de l'ensemble des connexions :

(c,f) (d,e) (a,b) [(g,h) (k,l) (i,j)]

3) Supposons qu'il existe $\bar{\sigma}$ tel que c $\xrightarrow{\bar{\sigma}}$ f

Alors σ vérifie nécessairement $\begin{cases} A_4 \rightarrow A_6 \\ A_2 \rightarrow A_3 \end{cases}$

et $\bar{\sigma}$ $\begin{cases} a \longleftrightarrow b \\ c \longleftrightarrow f \\ d \longleftrightarrow e \\ (g,h) \longleftrightarrow (k,l) \\ (i,j) \longleftrightarrow (i,j) \end{cases}$

Nous obtenons comme automorphismes de R

- tous ceux qui laissent les articulations fixes et n'échangent que des connexions à l'intérieur d'une $\overset{v}{S}$-classe.
- ceux qui échangent des articulations et par suite les connexio c et f. Nous obtenons des ensembles de connexions P-équivalent en faisant correspondre à tout ensemble de connexions de la première colonne son correspondant dans la deuxième colonne. Par exemple :

$$\{a,e,l\} \overset{p}{\sim} \{a,e,k\} \overset{p}{\sim} \{b,d,g\} \sim \{b,d,h\}$$

REMARQUE :

Il est inutile dans cet exemple, d'épuiser les autres hypothèses d $\xrightarrow{\bar{\sigma}}$ e et a $\xrightarrow{\bar{\sigma}}$ b, car le premier automorphisme trouvé est tel que $\bar{\sigma}$ est un produit de transpositions portant sur ces connexions.

DEUXIEME PARTIE

-o-o-o-

ISOMORPHISME ET IMMERSION

Le problème de recherche d'isomorphisme de deux graphes apparaît comme un cas particulier d'un problème plus général qui s'énoncerait ainsi :

Problème A :

Etant donnés deux graphes G = (X,U) et G' = (X',U'), trouver des sous-ensembles de sommets S de X et S' de X' tels que les sous-graphes engendrés G(S) et G' (S') soient isomorphes (nécessairement $|S| = |S'|$).

Cas particulier 1

En imposant S' = X', nous abordons le problème de la recherche d'un sou graphe de G isomorphe à G'.

Cas particulier 2

L'existence d'une solution avec S = X et S' = X' prouve l'isomorphisme G et de G'.

Nous pouvons généraliser successivement ce problème A en les problèmes B et C suivants :

Problème B :

Etant donnés deux graphes G = (X,U) et G' = (X',U') trouver des sous-ensembles de sommets S et S' tels que G'(S') soit isomorphe à un graphe partiel de G(S). (nécessairement $|S| = |S'|$).

Cas particulier 1

En imposant S' = X', le problème devient celui de l'isomorphisme de G' à un sous-graphe partiel de G (ou encore de l'immersion de G' dans G).

Cas particulier 2

Si $|X| = |X'|$ l'existence d'une solution pour $S' = X'$ et $S = X$ est équivalente à l'existence d'un isomorphisme entre G' et un graphe partiel de G : c'est une immersion particulière.

Un problème voisin mais plus général est le suivant :

Problème C :

Etant donnés deux graphes $G = (X,U)$ et $G' = (X',U')$ et des sous-ensemb de sommets S et S' tels que $|S| = |S'|$, trouver des graphes R et R' qui soient de graphes partiels respectivement de G(S) et de G'(S') et qui soient isomorphes.

Il est clair que ce problème, pour S et S' donnés tels que $|S| = |S'|$ admet toujours des solutions, par exemple $R = (S,\emptyset)$ et $R' = (S',\emptyset)$.

Parmi ces graphes partiels solutions, il en existe des maximaux pour l'inclusion des ensembles d'arêtes : un tel couple (R,R') sera dit couple de sous graphes partiels isomorphes (S-S') maximaux.

Cas particulier

Si $|X| = |X'|$ et en choisissant $S = X$ et $S' = X'$, des sous-graphes partiels isomorphes (S-S') maximaux seront dits graphes partiels isomorphes maximaux.

Dans la première partie, nous avons cherché à résoudre le problème de l'isomorphisme lié à la question (A). Nous allons maintenant aborder les problèmes B et C.

IMMERSION ET SOUS-GRAPHES PARTIELS ISOMORPHES MAXIMAUX

A - IMMERSION D'UN GRAPHE G' DANS UN GRAPHE G

Définition

Soient deux graphes simples $G = (X,U)$ et $G' = (X',U')$. G' est dit immer dans G s'il existe une injection σ de X' dans X:

$$\sigma : X' \to X$$

telle que, si $S = \sigma(X')$, G' soit isomorphe à un graphe partiel $G_S = (S,U_S)$ de $G(S)$, c'est à dire telle que

$$\bar{\sigma} : \quad U' \longrightarrow U_S$$

$$u' = (x'_1, x'_2) \to (\sigma(x'_1), \sigma(x'_2)).$$

soit une bijection de U' sur U_S.

I - Cas particulier : G' est isomorphe à un graphe partiel de G

Nous notons $\bar{G} = (X,\bar{U})$ le graphe complémentaire du graphe simple sans boucles $G = (X,U)$.

I - 1. *Propriété :*

$G' = (X',U')$ est isomorphe à un graphe partiel de G par la bijection $\sigma : X' \to X$ si et seulement si $\bar{G}$ est isomorphe à un graphe partiel de G' par la bijection $\sigma^{-1} : X \to X'$.

En effet, soit la bijection $\sigma: X' \to X$ qui induit une immersion de G' dar G. Ceci signifie que :

$$\forall (s'_1,s'_2) \in U' \Rightarrow \left[\sigma(s'_1), \sigma(s'_2)\right] \in U$$

Soit $(s_1,s_2) \in \overline{U}$; *alors* $\left[\sigma^{-1}(s_1),\ \sigma^{-1}(s_2)\right] \notin U'$ *car sinon* (s_1,s_2) *appartiendrait à* U.

Nous obtenons donc :

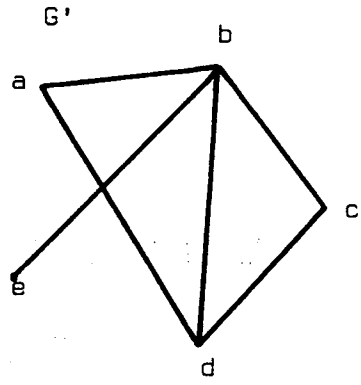
$(s_1,s_2) \in \overline{U} \Rightarrow \left[\sigma^{-1}(s_1),\ \sigma^{-1}(s_2)\right] \in \overline{U}'$

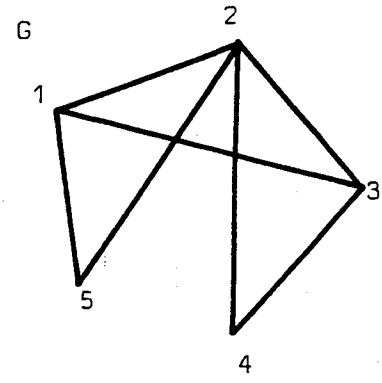
$\overline{G}$ *est immergé dans* $\overline{G}'$ *par la bijection* $\sigma^{-1} : X \to X'$

Cette remarque est intéressante lorsque les graphes complémentaires $\bar{G}$ et $\bar{G}'$ ont moins d'arêtes que G et G'.

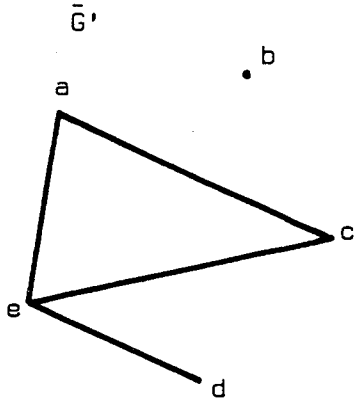
I - 2. Exemple :

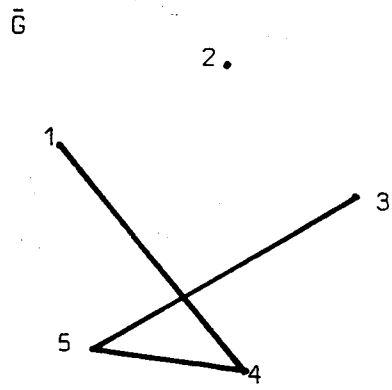
Soient les graphes simples G et G' suivants :





Alors





Nous avons 4 immersions possibles de $\bar{G}$ dans $\bar{G}'$, entre autres :

σ_1^{-1} : (1,2,3,4,5) → (a,b,d,c,e)

et nous obtenons une immersion σ_1 de G' dans G, donnée par :

(a,b,c,d,e) → (1,2,4,3,5)

II - Conditions nécessaires d'immersion

Nous pouvons généraliser la définition de l'immersion pour des réseaux R et R' porteurs de marques sur les articulations ou orientés : R' = (X', $\mathcal{C}'$) est immergé dans R = (X, $\mathcal{C}$) si R' est isomorphe à un sous-réseau partiel R_S = (S, $\mathcal{C}_S$) de R.

II - 1. Utilisation des marques

S'il existe une immersion σ : X' → X telle que σ (x') = x alors nécessairement les marques de x' et de x sont les mêmes.

Soient donc les partitions de X et X' suivant les marques des articulations :

$$\text{Part } X' = \{C'_{m_1}, C'_{m_2}, \ldots, C'_{m_k}, \ldots\}$$

$$\text{Part } X = \{C_{m_1}, C_{m_2}, \ldots, C_{m_k}, \ldots, C_{m_q}\}$$

Propriété :

S'il existe une immersion σ : X' → X, alors nécessairement :

$$\forall k \qquad |C'_{m_k}| \leq |C_{m_k}|$$

Nous appellerons C_{m_k} un ensemble de correspondants possibles pour les sommets de C'_{m_k} puisque, s'il existe une immersion σ: X' ⟶ X alors

$$\forall\, x' \in C'_{m_k} \Rightarrow \sigma(x') \in C_{m_k}$$

II - 2. Immersion et fonctions nodales

Soit f une fonction nodale. S'il existe une immersion $\sigma : X' \to X$ telle que $\sigma(x') = x$, alors les valeurs des fonctions nodales sont telles que :

$$f_{G'}(x') = f_{G_S}(x)$$

Cette égalité est peu utilisable puisque le problème est justement de déterminer G_S et que $f_{G_S}(x)$ ne peut être connue.

Cas particulier :

Considérons comme fonction nodale particulière la fonction degré d.

Propriété :

S'il existe une immersion de G' dans G, alors

$$d_{G'}(x') = d_{G_S}(x) \leq d_G(x)$$

Conséquence

Considérons les partitions de X et X' en classes $\{C_i\}$ et $\{C'_i\}$ correspondant aux degrés croissants dans G et G'.

$$\text{Part } X' = \{C'_0, C'_1, C'_2, \ldots, C'_k, \ldots\}$$

$$\text{Part } X = \{C_0, C_1, \ldots\ldots, C_k, \ldots\}$$

$$(x' \in C'_k \iff d_{G'}(x') = k \quad \text{et} \quad x \in C_k \iff d_G(x) = k)$$

Si $x' \in C'_k$ et s'il existe une immersion $\sigma : X' \to X$, alors nécessairement

$$\sigma(x') \in C_k \cup C_{k+1} \cup \ldots$$

$C_k \cup C_{k+1} \cup \ldots$ est un ensemble de correspondants possibles de C'_k.

II - 3. Immersion et voisinages

S'il existe une immersion de G' dans G, c'est à dire une application $\sigma : X' \to S \subset X$ telle que $x = \sigma(x')$, ceci entraîne nécessairement que :

$$\begin{cases} \forall k & V_{G'}^{k}(x') \text{ est isomorphe à } V_{G_S}^{k}(x) \\ \text{ou} & \\ \forall k & V_{G'}^{k}(x') \text{ est isomorphe à un sous-graphe partiel de } V_{G}^{k}(x) \end{cases}$$

Dans la suite nous utiliserons principalement les immersions partielles de voisinages d'ordre 1 de G' dans les voisinages d'ordre 1 de G et nous chercherons à associer à chaque classe d'une partition de X' :

$$\text{Part } X' = \{A'_1, A'_2, \ldots, A'_k,\}$$

des ensembles correspondants possibles.

II - 4. Monôme associé à une immersion

Représentons par des lettres les sommets de G' et par des nombres les sommets de G :

$$X' = \{x_1, x_2, \ldots, x_{n'}\}$$

$$X = \{1, 2, \ldots\ldots, n-1, n\}$$

S'il existe une immersion de G' dans G telle que σ envoie X' dans X, alors la notation $x_{k,\, i_k}$ signifiera que :

$$\sigma(x_k) = i_k \quad \text{avec } i_k \in \{1, 2, \ldots n\}$$

Considérons maintenant l'ensemble des variables

$$\mathcal{X} = \{x_{k,i_k}\} \quad \text{où} \begin{cases} k \in \{1, \ldots, n'\} \\ i_k \in \{1, \ldots, n\} \end{cases}$$

S'il existe une immersion de G' dans G, elle sera représentée par une expression

$x_{1,i_1}\, x_{2,i_2} \cdots x_{n',i_{n'}}$ où tous les i_k sont distincts.

Réciproquement, toute expression de ce type définit une injection σ de X' dans X, mais il n'est pas sûr que G' soit isomorphe à un graphe partiel de $G\left[\sigma(X')\right]$.

III - Méthode générale de recherche d'immersion pour des graphes sans sommets isolé

Cette méthode est exhaustive et combinatoire. Dans une première étape, nous chercherons à réduire le nombre de combinaisons possibles en affinant les ensembles correspondants possibles de chaque sommet x_k de X'.

III - 1. Structure de l'ensemble $\mathcal{X}$

L'ensemble $\mathcal{X}$ des variables $\{x_{k,i_k}\}$ est considéré comme un ensemble de variables booléennes muni des deux opérations habituelles (+, .) et vérifiant de plus :

$$\begin{cases} 1)\ \text{si } i_j \neq i_\ell & x_{k,i_j} \cdot x_{k,i_\ell} = 0 \\ 2)\ \text{si } j \neq \ell & x_{j,i_k} \cdot x_{\ell,i_k} = 0 \end{cases}$$

La condition 1) signifie que, si σ existe, σ est bien une application, et 2) que σ est une injection.

III - 2. Affinement des ensembles correspondants possibles de x_k

a) Partageons les ensembles X' et X suivant les partitions associées aux marques :

$$\text{Part } X' = \{C'_{m_1}, C'_{m_2}, \ldots C'_{m_k}\}$$

$$\text{Part } X = \{C_{m_1}, C_{m_2}, \ldots C_{m_k}, \ldots C_{m_q}\}$$

- S'il existe k tel que $|C'_{m_k}| > |C_{m_k}|$ il ne peut y avoir d'immersion
- sinon C_{m_k} est un ensemble de correspondants possibles pour les articulations de C'_{m_k}.

b) En prenant les intersections de ces partitions avec les partitions associées aux degrés croissants, nous obtenons de nouvelles partitions :

$$\text{Part } X' = \{C'^1_1, C'^1_2 \ldots, C'^1_{i_1}, C'^2_1 \ldots C'^2_{i_2}, \ldots, C'^k_1, \ldots, C'^k_{i_k}, \ldots\}$$

$$\text{Part } X = \{C^1_1, C^1_2, \ldots, C^k_1, \ldots, C^k_{i_k}, C^k_{i_{k+1}}, \ldots, C^k_{j_k}, \ldots\}$$

Nous obtenons donc des ensembles correspondants possibles du type :

$$C'^k_\ell \rightarrow C^k_\ell \cup C^k_{\ell+1} \cup \ldots \cup C^k_{j_k} = E^k_\ell$$

(les indices supérieurs sont les indices de marques, les indices inférieurs ceux correspondant aux degrés).

III - 3. Méthode de recherche

Cette méthode recherche des immersions partielles d'un sommet et de ses voisins et élimine les immersions partielles non compatibles ceux à deux.

Supposons que des ensembles correspondants possibles soient du type :

$$C'_1 = \{x_1, x_2, \ldots, x_\ell\} \longrightarrow \{i_1, i_2, \ldots, i_r\} = E_1 \quad \ell \leq r$$

Nous déterminons dans G' et dans G les voisinages des sommets de C'_1 et de E_1 :

$$\begin{cases} V^1_{G'}(x_1) = \{x_{\alpha_{1,1}}, x_{\alpha_{1,2}}, \ldots, x_{\alpha_{1,u}}\} \\ V^1_{G'}(x_2) = \{x_{\alpha_{2,1}}, x_{\alpha_{2,2}}, \ldots, x_{\alpha_{2,v}}\} \\ \cdots\cdots \end{cases} \qquad \begin{cases} V^1_G(i_1) = \{i_{\beta_{1,1}}, i_{\beta_{1,2}}, \ldots, i_{\beta_{1,q}}\} \\ V^1_G(i_2) = \{i_{\beta_{2,1}}, i_{\beta_{2,2}}, \ldots, i_{\beta_{2,t}}\} \\ \cdots\cdots \end{cases}$$

S'il existe une immersion de G' dans G telle que $\sigma(x_1) = i_1$, elle induit une immersion de $V^1_{G'}(x_1)$ dans $V^1_G(i_1)$ que nous représentons par l'expression suivante

$$x_{1,i_1}\left(x_{\alpha_{1,1},i_{\beta_{1,1}}} + x_{\alpha_{1,1},i_{\beta_{1,2}}} + \ldots + x_{\alpha_{1,1},i_{\beta_{1,q}}}\right)\left(x_{\alpha_{1,2},i_{\beta_{1,1}}} + x_{\alpha_{1,2},i_{\beta_{1,2}}} + \ldots\right)$$

REMARQUE :

Si $i_{\beta_{1,\ell}}$ n'est pas, du fait des marques, un correspondant possible de $x_{\alpha_{1,k}}$, il est inutile de faire figurer la variable $x_{\alpha_{1,k},i_{\beta_{1,\ell}}}$ dans l'expression précédente.

Une immersion telle que $\sigma(x_1) = i_2$ sera représentée par une expression du même type ayant en tête la variable x_{1,i_2}. Soit A_{x_1} la somme de toutes les expressions de ce type : A_{x_1} peut être calculée sous forme de somme de monômes non nuls, chaque monôme représentant une immersion possible de x_1 et de ses voisins à distance 1 dans G.

Calculons les expressions A_{x_i} pour tous les sommets de X', puis le produit $A = A_{x_1} \cdot A_{x_2} \ldots A_{x_{n'}}$.

A étant exprimé sous forme de somme de monômes non nuls, chaque monôme sera de la forme :

$x_{1,i_1} \cdot x_{2,i_2} \cdots x_{n',i_{n'}}$, où tous les i_k sont distincts.

III - 4. *Propriété*

Les monômes non nuls de A représentent toutes les immersions possibles de G' dans G.

a) Toute immersion est obtenue car la méthode est exhaustive

b) Soit un monôme $x_{1i_1}, x_{2i_2} \cdots x_{n'i_{n'}}$ *de A.*

Considérons l'ensemble $S = \{i_1, i_2, \ldots, i_{n'}\} \subset X$ et soit U_S le sous-ensemble de connexions de U suivant :

$$U_S = \left\{ u = (i_k, i_\ell) \in U \,/\, i_k \in S \;\&\; i_\ell \in S \;\&\; (x_k, x_\ell) \in U' \right\}$$

Soit σ l'application de X' sur S définie par $\sigma(x_k) = i_k$, pour tout k.

σ est une bijection qui induit une application $\bar{\sigma}$ telle que :

$$\bar{\sigma} : \mathcal{P}_2(X') \longrightarrow \mathcal{P}_2(S)$$

$$(x_k, x_\ell) \longrightarrow (\sigma(x_k), \sigma(x_\ell)) = (i_k, i_\ell).$$

1) $\bar{\sigma}$ restreinte à U' est une application de U' dans U.

Soit $(x_k, x_\ell) \in U'$

Puisque σ est défini à partir du monôme $x_{1,i_1}\, x_{2,i_2} \cdots x_{n',i_{n'}}$, nous avons utilisé en cours de calcul :

$$A_{x_k} = \ldots + x_{k,i_k}(x_{\ell,j_1} + x_{\ell,j_2} + \ldots + x_{\ell,i_\ell} + \ldots)(\ldots)(\ldots) + \ldots.$$

ce qui signifie que $(i_k, i_\ell) \in U$

2) $\bar{\sigma}/_U$, est une surjection sur U_S

Ceci d'après la définition même de U_S

3) $\bar{\sigma}/_U$, est une injection

En effet, G et G' sont des graphes simples et σ est une bijection.

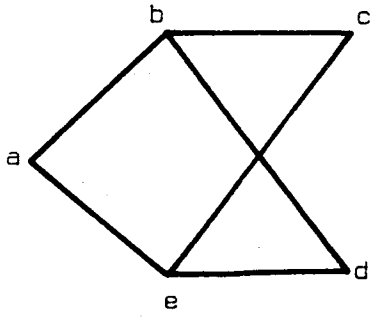
En conclusion, au monôme considéré nous associons une application bijective $\sigma : X' \longrightarrow S$ telle que G' soit isomorphe à $G(S, U_S)$.

IV - EXEMPLES

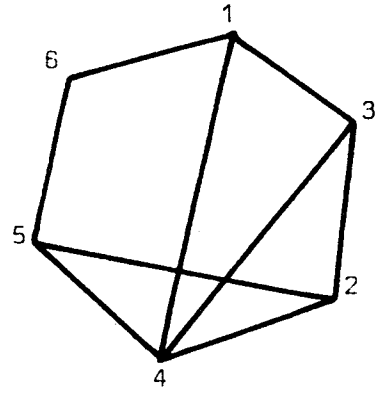
Exemple 1 :

Cherchons à immerger G' dans G :

G'



G



G' et G ne portent pas de marques. En considérant les degrés nous obt
comme ensembles correspondants :

$\{a,c,d\} \longrightarrow \{1,2,3,4,5,6\}$

$\{b,e\} \longrightarrow \{1,2,3,4,5\}$

$$A_a = a_1.(b_3+b_4+b_6)(e_3+e_4+e_6) + a_2.(b_3+b_4+b_5)(e_3+e_4+e_5)$$
$$+ a_3.(b_1+b_2+b_4)(e_1+e_2+e_4) + a_4.(b_1+b_2+b_3+b_5)(e_1+e_2+e_3+e_5)$$
$$+ a_5.(b_2+b_4+b_6)(e_2+e_4+e_6) + a_6.(b_1+b_5)(e_1+e_5)$$

A_c et A_d sont obtenus en changeant a respectivement en c et en d puis
$V^1_{G'}(a) = V^1_{G'}(c) = V^1_{G'}(d)$.

$$A_a \cdot A_c = a_2c_1\ (b_3+b_4)(e_3+e_4) + a_5c_1\ (b_4+b_6)(e_4+e_6) + a_1c_2\ (b_3+b_4)(e_3+$$
$$+ a_4c_2\ (b_3+b_5)(e_3+e_5) + a_4c_3\ (b_1+b_2)(e_1+e_2) + a_5c_3\ (b_2+b_4)(e_2+$$
$$+ a_2c_4\ (b_3+b_5)(e_3+e_5) + a_3c_4\ (b_1+b_2)(e_1+e_2) + a_6c_4\ (b_1+b_5)(e_1+$$
$$+ a_1c_5\ (b_4+b_6)(e_4+e_6) + a_2c_5\ (b_4+b_6)(e_4+e_6) + a_3c_5\ (b_2+b_4)(e_2+$$
$$+ a_4c_6\ (b_1+b_5)(e_1+e_5).$$

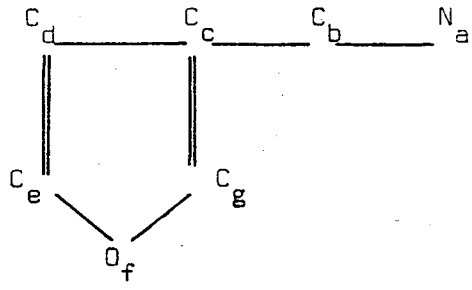
$A_a \cdot A_c \cdot A_d = 0$

Il n'existe donc aucune immersion de G' dans G.

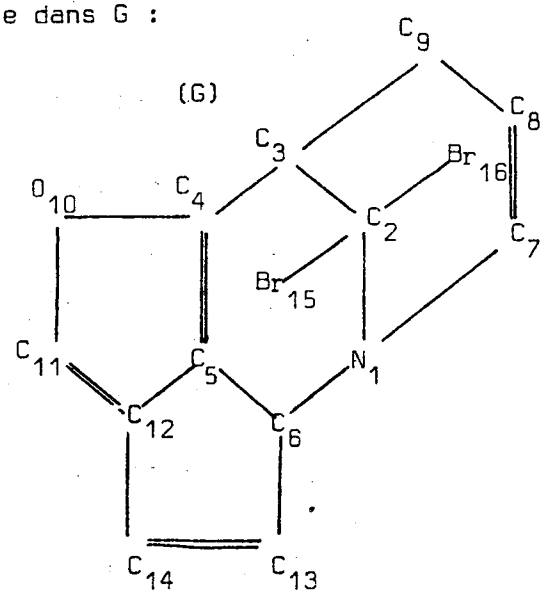
Exemple 2 (24)

Recherchons si G' est immergeable dans G :

(G')



(G)



1) Les partitions suivant les marques donnent, comme ensembles correspondants possibles :

$\{a\} \longrightarrow \{1\}$

$\{f\} \longrightarrow \{10\}$

$\{b,c,d,e,g\} \longrightarrow \{2,3,4,5,6,7,8,9,11,12,13,14\}$

2) Affinement des ensembles correspondants possibles, à l'aide de la fonction modale composée :

$m(s) = (m_1(s), m_2(s))$

où $\begin{cases} m_1(s) \text{ est le nombre de liaisons simples de } s \text{ avec les sommets adjacents} \\ m_2(s) \quad " \quad " \quad " \quad \text{doubles} \quad " \quad " \quad " \end{cases}$

Nous obtenons comme nouveaux ensembles correspondants possibles :

$\{a\} \rightarrow \{1\}$

$\{f\} \rightarrow \{10\}$

$\{c\} \rightarrow \{4,5,12\}$

$\{b\} \rightarrow \{2,3,4,5,6,9,12\}$

$\{d,e,g\} \rightarrow \{4,5,7,8,11,12,13,14\}$

3) Calculons d'abord les immersions partielles pour les sommets dont ensembles correspondants possibles ont le cardinal le plus faible. Nous nous servirons des résultats pour affiner les autres ensembles correspondants possibles

$$A_a = a_1(b_2+b_6+b_7)$$

$$A_f = f_{10}(g_4+g_{11})(e_4+e_{11})$$

Nous obtenons comme nouveaux ensembles correspondants possibles :

$$\begin{cases} a \rightarrow 1 \\ b \rightarrow (2,6) \\ c \rightarrow (4,5,12) \\ d \rightarrow (4,5,7,8,11,12,13,14) \end{cases} \qquad \begin{cases} e \rightarrow (4,11) \\ f \rightarrow 10 \\ g \rightarrow (4,11) \end{cases}$$

$$A_b = b_2\ (a_1+a_3)(c_1+c_3+c_{15}+c_{16}) + b_6\ (a_1+a_5+a_{13})(c_1+c_5+c_{13})$$

Puisque c ne peut correspondre qu'à (4,5,12), nous supprimons toutes les variables non compatibles, pour obtenir :

$$A_b = a_1 b_6 c_5$$

Ce qui entraîne que dans A_c, seuls les monômes contenant la variable c sont à considérer :

$$A_c = c_5\ (b_4+b_6+b_{12})(d_4+d_6+d_{12})(g_4+g_6+g_{12})$$

$$= c_5\ b_6\ d_{12}\ g_4 \quad \text{après simplification.}$$

Nous trouvons dès maintenant une application σ

$$\sigma(a) = 1 \qquad \sigma(e) = 11$$
$$\sigma(b) = 6 \qquad \sigma(f) = 10$$
$$\sigma(c) = 5 \qquad \sigma(g) = 4$$
$$\sigma(d) = 12$$

qui sera effectivement une immersion si $A_a\ A_b \ldots A_g \neq 0$ et contient le monôme associé :

$A_d = d_{12}\ (c_5+c_{11}+c_{14})(e_5+e_{11}+e_{14}) = d_{12}c_5e_{11}$

$A_e = e_{15}\ (d_{10}+d_{12})(f_{10}+f_{12}) = e_{11}d_{12}f_{10}$

En définitive :

$A = a_1b_6c_5d_{12}e_{11}f_{10}g_4$

Nous obtenons dans ce cas une et une seule immersion.

B - RECHERCHE DANS DEUX RESEAUX MARQUES OU NON DE SOUS-RESEAUX ISOMORPHES MAXIM

Ce problème est une généralisation du précédent : lorsque G' = (X',U' ne peut être immergé dans G = (X,U), nous chercherons quel est le plus grand so graphe partiel (au sens de l'inclusion des arêtes) de G' immergeable dans G.

Dans ce cas, ce n'est pas la question de l'existence d'une solution q nous intéressera car nous sommes assurés qu'il en existe, mais de trouver parmi les sous-graphes partiels de G' et de G, des sous-graphes isomorphes ayant un nombre maximum de connexions.

Comme nous cherchons à déterminer des sous-ensembles d'articulations S' et S de X' et de X, et une application σ :

$$\sigma : S' \rightarrow S$$

nous procéderons comme dans la partie A, en désignant les articulations de X' pa des lettres et celles de X par des nombres et en associant des variables x_{k,i_k}.

I - Limitation du nombre de variables

Les ensembles X' et X d'articulations sont partagés en classes suivant les marques.

Soit par exemple C'_{m_i} correspondant à C_{m_i}.

Il est inutile de chercher à associer à une articulation x' de C'_{m_i} un indice ne figurant pas dans C_{m_i}, car dans un isomorphisme de sous-graphes partie x' ne peut correspondre qu'à une articulation de C_{m_i}.

Soit $\mathcal{X} = \{x_{k,i_k}\}$ l'ensemble des variables restreint ce cette manière, qui représente donc l'ensemble des variables utiles.

II - Etude préalable

Nous supposons que les réseaux sont orientés (s'ils ne le sont pas, nous faisons le même raisonnement avec les voisinages d'ordre 1 au lieu des voisinages descendants d'ordre 1).

G et G' n'ont pas de sommets isolés.

II - 1. Liens entre certaines variables

Supposons que x_k et i_k aient même marque, donc que la variable x_{k,i_k} existe dans $\mathcal{X}$.

Déterminons les voisinages descendants d'ordre 1, de x_k et de i_k :

$$V_G^{1,+}(x_k) = \{x_{d_1}, x_{d_2}, \ldots, x_{d_h}\}$$

$$V_G^{1,+}(i_k) = \{i_{\alpha_1}, i_{\alpha_2}, \ldots, i_{\alpha_p}\}$$

Dans ces voisinages apparaissent des articulations de marques différentes. Considérons les intersections de ces voisinages avec les classes associées aux marques, soit par exemple pour la marque m_i :

$$\{x_{d_1}, x_{d_2}, \ldots, x_{d_\ell}\} \subset V^{1+}(x_k)$$

$$\{i_{\alpha_1}, \ldots\ldots\ldots i_{\alpha_r}\} \subset V^{1+}(i_k)$$

x_{d_1} et i_{α_1} ayant même marque m_1, la variable $x_{d_1,i_{\alpha_1}}$ appartient à $\mathcal{X}$.

De plus, en prenant simultanément les variables x_{k,i_k} et $x_{d_1,i_{\alpha_1}}$ (c'est à dire en imposant que $\sigma(x_k) = i_k$ et que $\sigma(x_{d_1}) = i_{\alpha_1}$), alors l'arc (x_k, x_{d_1}) de U' a pour image par $\bar{\sigma}$ l'arc (i_k, i_{α_1}) de U : $\bar{\sigma}(x_k, x_{d_1}) = (i_k, i_{\alpha_1})$

Nous dirons que dans ce cas, la variable x_{k,i_k} <u>incite</u> la variable $x_{d_1,i_{\alpha_1}}$

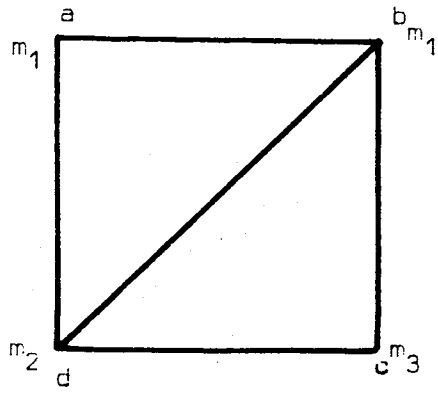
II - 2. Graphe des incitations $\tilde{G} = (\mathcal{X}, \mathcal{A})$

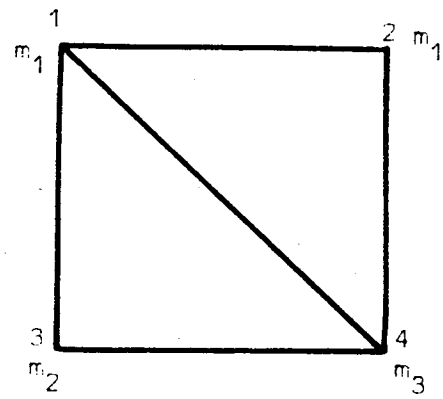
Soit le graphe (orienté si G et G' le sont) défini de la façon suivan

- il a pour ensemble de sommets l'ensemble $\mathcal{X}$ des variables
- $(x_{k,i_k}, x_{d_1,i_{\alpha_1}}) \in \mathcal{A}$ si et seulement si la variable x_{k,i_k} incite la variable $x_{d_1,i_{\alpha_1}}$.

Exemple

Soient les deux réseaux marqués sur les articulations :





L'ensemble des variables est :

$\mathcal{X} = \{a_1, a_2, b_1, b_2, d_3, c_4\}$

De plus, ces variables sont liées par :

a_1 incite b_2 et d_3

a_2 " b_1

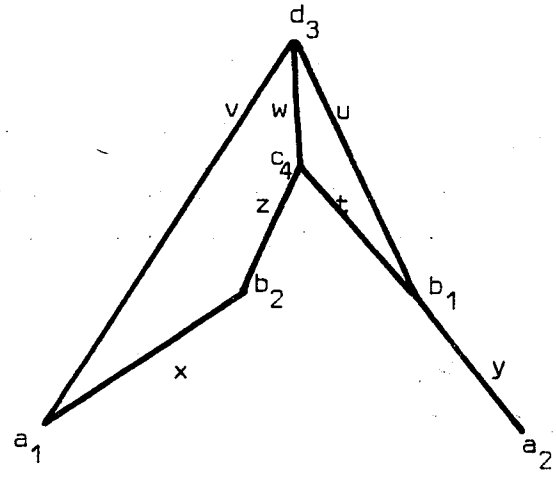
b_1 " c_4 et d_3 et a_2

b_2 " c_4 et a_1

d_3 " a_1, b_1 et c_4

c_4 " b_1, b_2 et d_3

Le graphe $\tilde{G} = (\mathcal{X}, \mathcal{A})$ est donc :



Proposition :

A tout sous-graphe $\tilde{G}$ $(\tilde{S})$ de $\tilde{G}$, ayant m arcs et engendré par un sous-ensemble $\tilde{S} = \{x_k, i_k\}$ où tous les x_k sont distincts et tous les i_k sont distincts correspondent deux sous-graphes partiels isomorphes de G' et de G :

$G'_{S'} = (S', U'_{S'})$ et $G_S = (S, U_S)$ où

$S' = \{x_k \mid \exists\, i_k \text{ et } (x_k, i_k) \in \tilde{S}\}$

$S = \{i_k \mid \exists\, x_k \text{ et } (x_k, i_k) \in \tilde{S}\}$

et $\left.\begin{array}{l} (x_k, x_{d_1}) \in U'_{S'} \\ (i_k, i_{\alpha_1}) \in U_S \end{array}\right\} \iff (x_k, i_k, x_{d_1}, i_{\alpha_1}) \in \mathcal{A}$

Un tel sous-graphe $\tilde{G}$ $(\tilde{S})$ sera dit avoir la propriété (P)

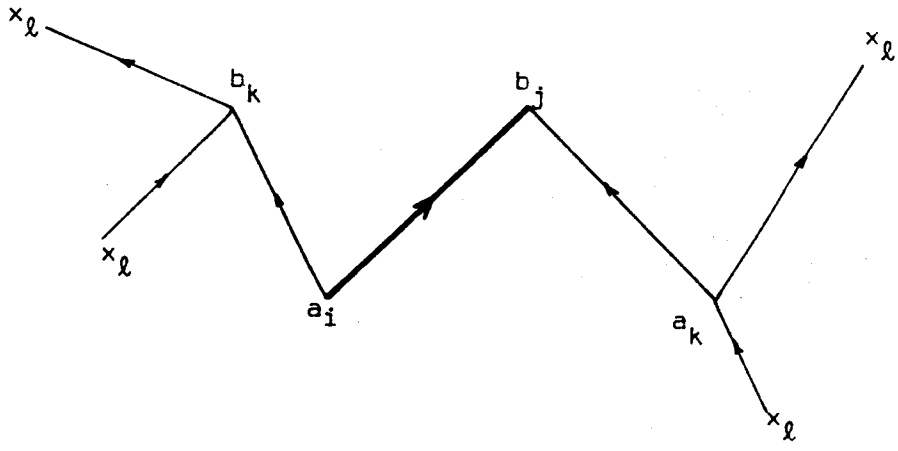
Le problème initial est donc ramené au problème suivant :

Déterminer dans $\tilde{G} = (\mathcal{X}, \mathcal{A})$ un ensemble de sommets $\tilde{S} = (x_{k,i_k})$ tel que

- tous les x_k soient distincts
- tous les i_k soient distincts

Puis choisir, parmi tous les $\tilde{S}$ possibles ceux qui engendrent dans $\tilde{G}$ un sous-graphe ayant un nombre maximum de connexions.

Propriété de $\tilde{G}(\tilde{S}) = (\tilde{S}, \tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{S}})$



Si l'arc (a_i, b_j) est un arc de $\tilde{G}(\tilde{S})$, alors nécessairement

$$\begin{cases} \forall x_\ell \in \mathcal{X} & \forall k \neq i & (a_k, x_\ell) \text{ et } (x_\ell, a_k) \notin \tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{S}} \\ \forall x_\ell \in \mathcal{X} & \forall k \neq j & (x_\ell, b_k) \text{ et } (b_k, x_\ell) \notin \tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{S}} \end{cases}$$

Conséquence :

Associons à chaque connexion de $\mathcal{A}$ une variable booléenne : A,B,C,... et imposons un ordre arbitraire sur ces variables.

La présence d'une connexion (a_i,b_j) dans un sous-graphe ayant la propriété (P) interdisant d'autres connexions, les incompatibilités entrainées par (a_i,b_j) sont traduites par l'expression :

$$I_{(a_i,b_j)} = (a_i,b_j) + \prod_{K \neq i} (a_k,x_\ell)(x_\ell,a_k) \cdot \prod_{k \neq j} (x_\ell,b_k)(b_k,x_\ell)$$

La quantité $I = \prod_{(a_i,b_j)\varepsilon\mathcal{A}} \left[I_{(a_i,b_j)} \right]$ donnera les ensembles minimaux de connexions (ainsi éventuellement que leurs extrêmités) qu'il est nécessaire d'enlever de $\tilde{G}$ pour obtenir un sous-graphe $\tilde{G}(\tilde{S})$ ayant la propriété (P). Aux monômes de degré minimum correspondent des sous-graphes $\tilde{G}(\tilde{S})$ ayant la propriété (P) et ayant un nombre maximum de connexions.

Le calcul de I est en fait le calcul de la fonction duale d'une fonction homogène croissante de degré deux. C. BENZAKEN dans (1) donne un algorithme, dans ce cas particulier : A étant une variable et m = B C...L un monôme ne contenant pas A, déterminer le produit

$i = g.[A + m]$ où g est une somme de monômes irréductibles.

Exemple :

Pour cet exemple très simple, soit (x,y,z,t,u,v,w) l'ensemble des connexions de $\mathcal{A}$:

Nous avons :

$I = (x+ytu)\,(y+zv)(z+u)(t+v)(u+v)$

$= xzv + ytu$

Nous obtenons 2 graphes $\tilde{G}(\tilde{S})$ ayant 4 connexions, en prenant :

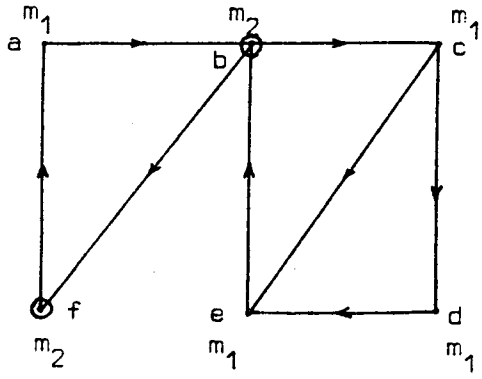
$$\tilde{S}_1 = \{a_1, b_2, c_4, d_3\}$$

$$\tilde{S}_2 = \{a_2, b_1, c_4, d_3\}$$

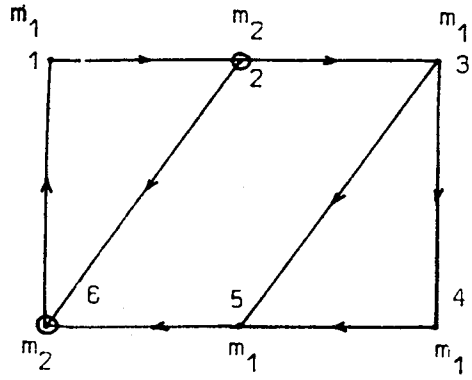
II - 3. Exemple

Soient les graphes orientés :

G'



G



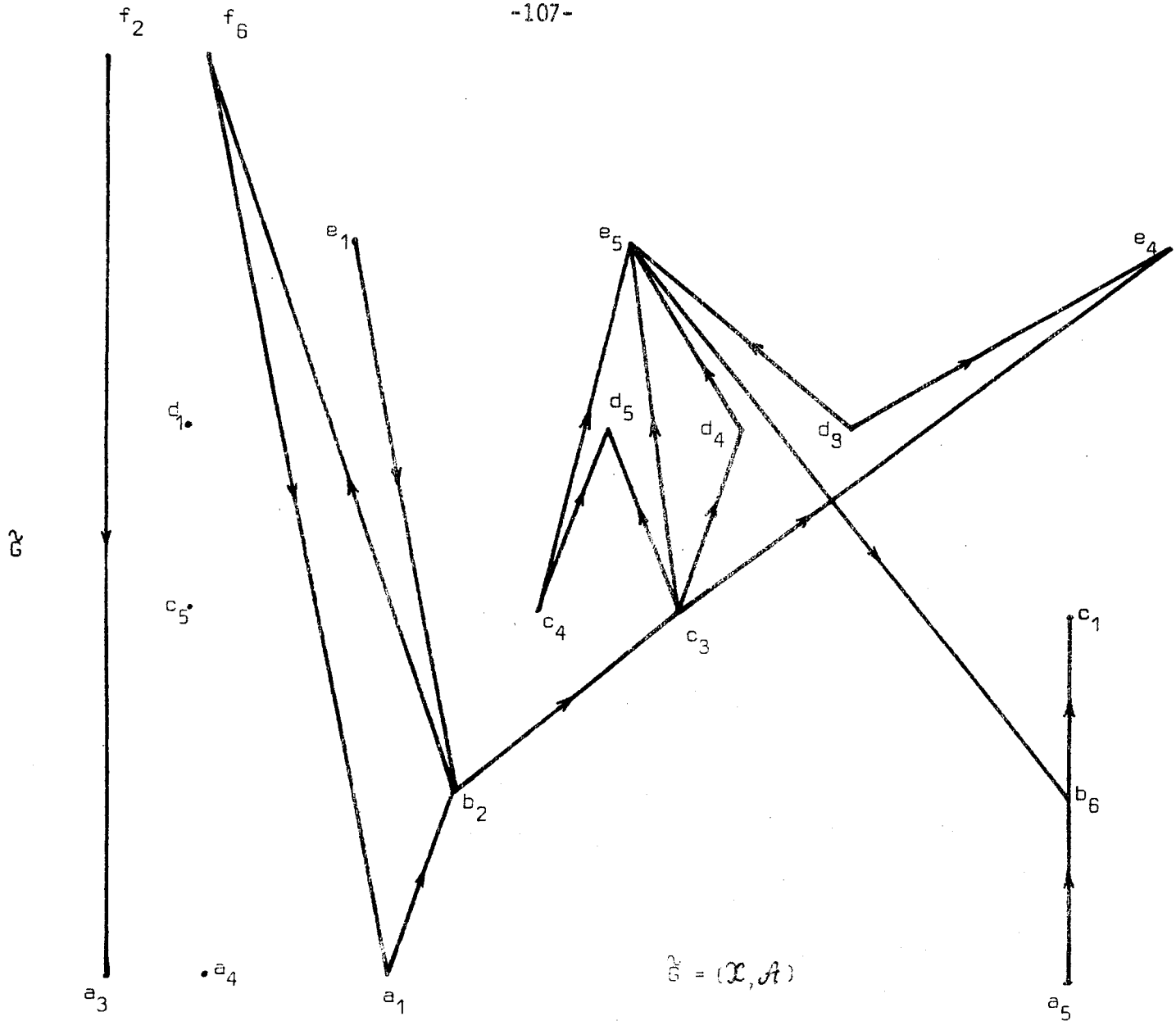
L'ensemble $\mathcal{X}$ des variables est connu d'après les correspondances entre marques :

$$\begin{cases} (a,c,d,e) \to (1,3,4,5) \\ (b,f) \to (2,6) \end{cases}$$

Le graphe $\tilde{G} = (\mathcal{X}, \mathcal{A})$ est déterminé par les incitations suivantes :

$$\begin{cases} a_1 \to b_2 \\ a_3 \to \emptyset \\ a_4 \to \emptyset \\ a_5 \to b_6 \end{cases} \qquad \begin{cases} b_2 \to (c_3, f_6) \\ b_6 \to c_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} c_1 \to \emptyset \\ c_3 \to (d_4, d_5, e_4, e_5) \\ c_4 \to (d_5, e_5) \\ c_5 \to \emptyset \end{cases}$$

$$\begin{cases} d_1 \to \emptyset \\ d_3 \to (e_4, e_5) \\ d_4 \to e_5 \\ d_5 \to \emptyset \end{cases} \qquad \begin{cases} e_1 \to b_2 \\ e_3 \to \emptyset \\ e_4 \to \emptyset \\ e_5 \to b_6 \end{cases} \qquad \begin{cases} f_2 \to a_3 \\ f_6 \to a_1 \end{cases}$$



Le sous-graphe de $\tilde{G}$ vérifiant les propriétés des indices et ayant un nombre maximum de connexions est unique et est engendré par :

$$\tilde{S} = (a_1, b_2, c_3, d_4, e_5, f_6).$$

D'où les sous-graphes de G' et G, isomorphes maximaux ont 7 connexions.

RECOUVREMENT D'UN RESEAU AVEC UN RESEAU DONNE

Soit G = (X,E) un réseau ayant X pour ensemble d'articulations et E pour ensemble de connexions. Soit M l'ensemble des marques des articulations. Soit $G_0 = (X_0, E_0)$ un réseau ayant même ensemble de marques.

I - Définitions

G peut être recouvert par G_0 s'il existe p sous-réseaux partiels $G_i = (X_i, E_i)$ tels que :

$$\begin{cases} X = \bigcup_{i=1}^{p} X_i \\ E = \bigcup_{i=1}^{p} E_i \end{cases}$$

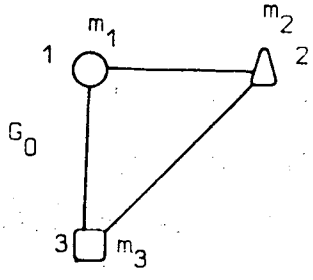
et tels que, pour tout i, G_i est immergeable dans G_0.

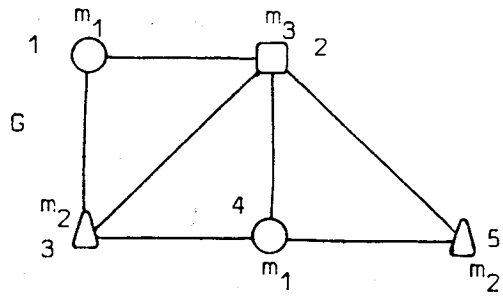
Nous appellerons G_i une spécification de G_0

REMARQUE :

Les ensembles X_i (resp. E_i) peuvent ne pas être disjoints : une articulation (ou une connexion) peut appartenir à un ou plusieurs G_i.

Exemple :





Un recouvrement possible de G par G_0 est :

$$\begin{cases} G_1 = (1,2,3) & \text{comportant les connexions } (1,2),\ (1,3),\ (2,3) \\ G_2 = (2,4,5) & \text{" } \quad \text{" } \quad (2,5),\ (4,5),\ (2,4) \\ G_3 = (2,3,4) & \text{" } \quad \text{" } \quad (3,4),\ (2,3),\ (2,4) \end{cases}$$

Dans ce cas nous voyons que les articulations 2,3 et 4 sont recouvertes plusieurs fois ainsi que les connexions (2,3) et (2,4).

Recouvrement minimal

C'est un recouvrement tel qu'en enlevant un des G_i, la propriété de recouvrement ne soit plus vérifiée.

Recouvrement à nombre minimum de spécifications

C'est un recouvrement minimal ayant un nombre minimum de spécifications

Recouvrement réduit

C'est un recouvrement tel qu'il ne soit pas possible d'enlever une connexion ou une articulation (avec les connexions qui lui soient incidentes) d'un des G_i sans perdre la propriété de recouvrement.

Il est clair qu'un recouvrement réduit est disjoint sur les connexions (pas nécessairement sur les articulations).

Dans l'exemple donné, le recouvrement proposé n'est pas réduit car G_3 contient l'articulation (2) ainsi que les connexions (2,3) et (2,4) qui peuvent êt supprimées.

Si nous prenons le recouvrement suivant :

$$\begin{cases} G'_1 = (1,2,3) & \text{comportant les connexions } (1,2) \text{ et } (1,3) \\ G'_2 = (2,4,5) & \text{" } \quad \text{" } \quad (2,5) \text{ et } (4,5) \\ G'_3 = (2,3,4) & \text{" } \quad \text{" } \quad (2,3),\ (2,4) \text{ et } (3,4) \end{cases}$$

nous obtenons un recouvrement réduit mais non disjoint sur les articulations.

Proposition :

G peut être recouvert avec G_0 si et seulement si, pour toute connexion entre marques (m_i, m_j) dans G, il en existe au moins une dans G_0 entre des articulations portant les mêmes marques m_i et m_j.

=> évident

<= si G a m connexions, un recouvrement possible de G est obtenu avec m spécifications de G_0, chacune recouvrant une connexion de G.

II - Méthode de recherche

II - 1. Propriété

En supposant G recouvrable par G_0, si n et m et n_0, m_0 sont respectivement le nombre d'articulations et de connexions de G et G_0, si $(\alpha,\beta,\gamma,\ldots)$ et $(\alpha_0,\beta_0,\gamma_0,\ldots)$ sont les nombres d'articulations de G et de G_0 ayant pour marques (a,b,c,...), alors le nombre p de spécifications de G_0 nécessaires pour un recouvrement de G vérifie :

$$p \geq p_0 = e\left(\left\{\sup\left(\frac{m}{m_0}, \frac{n}{n_0}, \frac{\alpha}{\alpha_0}, \frac{\beta}{\beta_0}, \ldots\right)\right\}\right)$$

où e(x) est le plus petit entier supérieur ou égal à x.

Un recouvrement pour lequel $p = p_0$ est alors un recouvrement à nombre minimum de réseaux.

II - 2. Méthode de recherche

Cette méthode est heuristique dans la mesure où la suite des opérations dépend en partie de l'étude préliminaire de G_0.

Elle peut se décomposer en 2 temps :

α) Recherche des immersions possibles de G_0 ou seulement d'un graphe partiel de G_0 dans G, d'où une famille $\{G_i\}$ de spécifications de G.

β) Choix parmi les éléments de cette famille d'un recouvrement à nombre minimum de spécifications : c'est un problème de couverture résolub par des méthodes booléennes.

II - 3. Approche algorithmique

1) Etude préliminaire de G_0

Détermination du rayon de G_0

Choix de k, ordre des voisinages auxquels se limiter : en particulier, si le rayon est 1 nous utiliserons les voisinages d'ordre 1 uniqu ment et si le rayon est 2 nous utiliserons les voisinages d'ordre 1 et Plus exactement, nous utiliserons les ensembles d'articulations appelés encore voisinages et définis de la manière suivante :

$$V^1(x) = \{y \in X \ / \ d(x,y) = 1\}$$

$$V^2(x) = \{y \in X \ / \ \exists z \in V^1(x) \text{ et } d(z,y) = 1\} - \{x\}$$

2) Immersion de sous-graphes partiels de G_0 dans G

a- Pour toutes les articulations de G_0, de marque m, déterminer le voisinages V^1, V^2,... V^k, en donnant la liste des marques des articulations constituant les voisinages.

b- Pour toutes les articulations x de G, déterminer $V^1(x)$, $V^2(x)$.. ... $V^k(x)$.

c- Pour toute articulation x de X, de marque m :

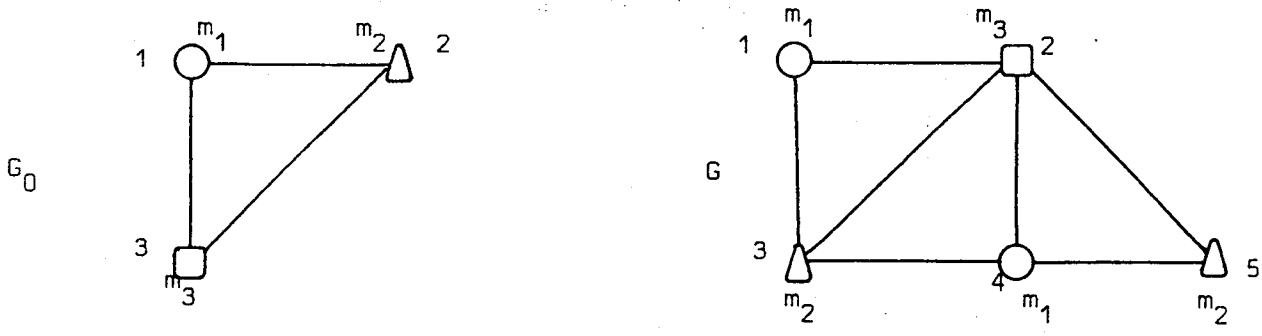
Recouvrir $V^1(x)$ avec r spécifications de G_0, chacune étant un grap partiel de $V^1(m)$: ceci est possible puisque G peut être recouvert par G_0. De plus, si des voisinages d'ordre k(k > 1) ont été calculés, chercher des spécifications couvrant le plus grand nombre d'articulations d $V^1(x) \cap V^2(x), \ldots, V^k(x)$.

3) Pour chaque connexion de G, déterminer parmi toutes les spécificatic trouvées, celles qui peuvent recouvrir cette connexion.

4) Détermination d'un nombre minimum de spécifications

C'est le problème de la couverture des connexions par une famille de spécifications données.

Exemple 1 :



. Etude de G_0

G_0 est un graphe complet, de rayon 1; nous n'utiliserons que les voisinages à distance 1.

. Immersion de sous-graphes partiels de G_0 dans G

Voisinages dans G_0

$V^1(m_1) = (m_2, m_3)$

$V^1(m_2) = (m_1, m_3)$

$V^1(m_3) = (m_1, m_2)$

Voisinages dans G

m_1 { $V^1(1) = (3,2)\ (m_2, m_3)$; $V^1(4) = (3,5,2)\ (m_2, m_2, m_3)$

m_2 { $V^1(3) = (1,4,2)\ (m_1, m_1, m_3)$; $V^1(5) = (4,2)\ (m_1, m_3)$

m_3 { $V^1(2) = (1,4,3,5)\ (m_1, m_1, m_2, m_2)$

Nous obtenons des spécifications de G_0 pouvant couvrir au moins 2 connexions de G :

	m_1 m_2 m_3
G_1, noté a, a pour ensemble d'articulations	(1, 3, 2)
G_2, noté b, " "	(4, 3, 2)
G_3, noté c, " "	(4, 5, 2)
G_4, noté d " "	(1, 5, 2)

Nous avons les relations d'appartenance :

(1,2) ε a U d
(1,3) ε a
(2,3) ε a U b
(2,4) ε b U c
(2,5) ε c U d
(3,4) ε b
(4,5) ε c

Pour déterminer un nombre minimum de spécifications, on effectue le produit :

(a+d).a.(a+b).(b+c).(c+d).bc = abc

Nous obtenons un recouvrement de G avec 3 spécifications de G_0.
C'est un recouvrement minimal car :

$p_0 = e\ (\sup\ \frac{5}{3}, \frac{7}{3}, 2, 2, 1\ ) = e\ (\frac{7}{3}) = 3$

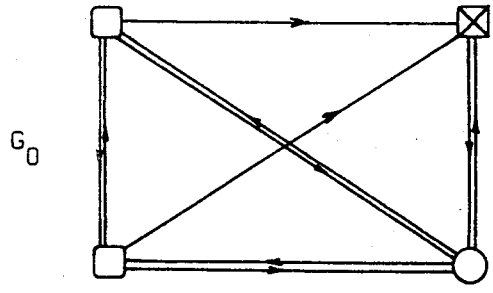
Exemple 2

Cet exemple est inspiré du travail de J. MERMET qui, à partir de réseau complexes, arrive après plusieurs réductions, à un réseau orienté G, marqué sur les articulations et n'ayant que 3 marques : m_1, m_2 et m_3, notées □, O, ☒ . Ce réseau obéit aux contraintes suivantes :

- d'une articulation marquée O, une connexion ne peut aller que vers une articulation marquée □ ou ⊠ .

- d'une articulation marquée ⊠ , une connexion ne peut aller que vers une articulation marquée O.

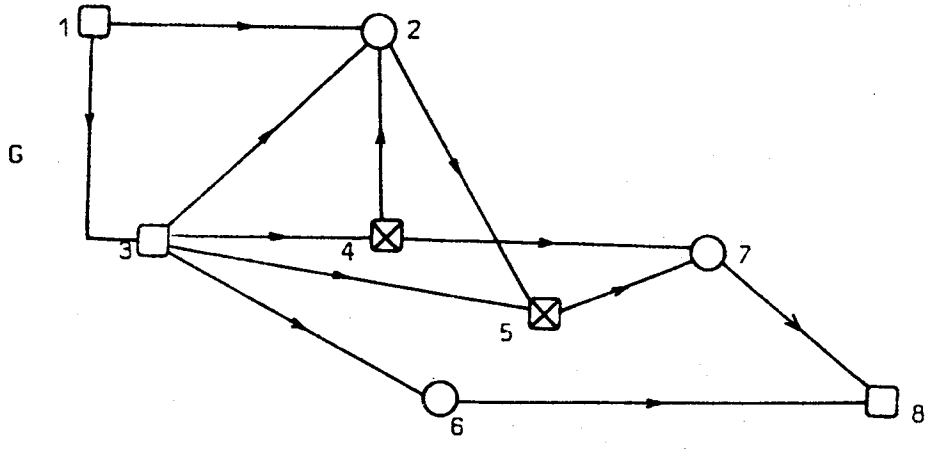
On cherche alors à décomposer le réseau G en sous-réseaux plus simples ce problème peut être formulé comme un problème de recouvrement, et vu les contraintes imposées, le réseau G_0 le plus simple pouvant recouvrir G peut être :



a) Dans G_0, l'écart maximal entre 2 sommets est 2, donc, on utilisera voisinages à distance 1 et 2 de chaque articulation.

De plus, les réseaux étant orientés, on utilisera les voisinages ascendants V^- ou descendants V^+. En fait, les voisinages descendants seront suffisants car on étudiera toutes les articulations de G et on suppose que G n'a pas d'articulation isolée.

Soit le réseau G suivant :



b) Etude des voisinages d'ordre 1 et 2 dans G_0 et G

Partition des articulations de G suivant les marques :

(1,3,8) (4,5) (2,6,7)

Voisinages descendants dans G_0

$V_1^+(m_1) = (m_1, m_2, m_3)$ $\quad$ $V_2^+(m_1) = (m_1, m_2, m_3)$

$V_1^+(m_2) = (m_3)$ $\quad$ $V_2^+(m_2) = (m_1, m_1)$

$V_1^+(m_3) = (m_1, m_1, m_2)$ $\quad$ $V_2^+(m_3) = (m_1, m_1, m_2)$

Voisinages descendants dans G

m_1

$V_1^+(1) = (2,3)\ (m_3, m_1)$ $\quad$ $V_2^+(1) = (5,2,4,6)(m_2, m_3, m_2, m_3)$

$V_1^+(3) = (2,4,5,6)\ (m_3, m_2, m_2, m_3)$ $\quad$ $V_2^+(3) = (2,7,5,8)(m_3, m_3, m_2, m_1)$

$V_1^+(8) = \emptyset$ $\quad$ $V_2^+(8) = \emptyset$

m_2

$V_1^+(4) = (2,7)\ (m_3, m_3)$ $\quad$ $V_2^+(4) = (5,8)(m_2, m_1)$

$V_1^+(5) = (7)\ (m_3)$ $\quad$ $V_2^+(5) = (8)(m_1)$

m_3

$V_1^+(2) = (5)\ (m_2)$ $\quad$ $V_2^+(2) = (7)(m_3)$

$V_1^+(6) = (8)\ (m_1)$ $\quad$ $V_2^+(6) = \emptyset$

$V_1^+(7) = (8)\ (m_1)$ $\quad$ $V_2^+(7) = \emptyset$

Nous trouvons donc, comme G_i ayant au moins 2 connexions communes avec G_0 :

		m_1	m_1	m_2	m_3
(a)	d'ensembles d'articulations	(1	3	4	2)
(b)	"	(1	3	5	2)
(c)	"	(1	3	4	6)
(d)	"	(1	3	5	6)
(e)	"	(8	3	4	2)
(f)	"	(8	3	4	6)
(g)	"	(8	3	5	2)
(h)	"	(8	3	5	6)
(i)	"	(8	3	5	7)
(j)	"	(8	3	4	7)

Pour trouver, à partir de ces 10 spécifications de G_0 un recouvrement à nombre minimum de spécifications, nous considérons le produit booléen P.

$$P = (a+b)(a+b+c+d)(b+g)(a+b+e+g)(a+c+e+f+j)(b+d+g+h+i)(c+d+f+h)(a+e)(j)(i)(f+h)(i+j)$$

$$P = (a+b)(b+g)(a+e)i.j.(f+h)$$

$$= (ab+ag+be)i.j.(f+h)$$

A partir de ces 10 spécifications, il existe 6 recouvrements de G à nombre minimum de spécifications : {a,b,f,i,j}

{a,b,h,i,j}

{a,g,f,i,j}

{a,g,h,i,j}

{b,e,f,i,j}

{b,e,h,i,j}

Si nous choisissons le recouvrement {b,e,f,i,j} nous obtenons un recouvrement de G avec 5 spécifications de G_0, ces spécifications ayant pour ensembles de sommets :

(1,3,5,2)
(8,3,4,2)
(8,3,4,6)
(8,3,5,7)
(8,3,4,7)

Ce n'est pas un recouvrement réduit, mais il est possible de trouver à partir de ce recouvrement un recouvrement réduit, par exemple :

(1 3 5 2) sans la connexion (3,2)
(3 4 2) sans la connexion (3,2)
(8 3 6)
(8 5 7)
(4 7)

III - Modification du problème

Le recouvrement trouvé, non disjoint sur les articulations n'est en fait pas très intéressant au point de vue technologique car il ne correspond pas à une réalisation physique.

Nous modifions donc le problème de la façon suivante :

Le réseau orienté G précédent est transformé en un réseau R de noeuds et d'étoiles : les articulations de G seront les noeuds de R; de plus, à chaque articulation x de G, nous associons une étoile x^* de R telle que, si p connexions sortaient de x, dans G, pour entrer dans p noeuds $x_1, x_2, \ldots, x_p$, alors dans R il existe une seule connexion sortant de x et entrant dans x^* et p connexions sortant de x^* et entrant dans $x_1, x_2, \ldots, x_p$.

Le réseau G_0 est transformé de même en un réseau R_0. Les réseaux R et R_0 de noeuds et d'étoiles obtenus sont des tissus (17).

Nous recherchons un recouvrement tel que seules les articulations qui sont des étoiles puissent être couvertes plusieurs fois.

Technologiquement, ceci signifie qu'il n'est pas souhaitable qu'une articulation (représentant un composant technologique) soit utilisée plusieurs fois mais que par contre, sa sortie peut attaquer plusieurs autres articulations.

Nous supposerons que le réseau R construit, qui a une structure de tissu possède une ou plusieurs sources et un ou plusieurs puits, ou bien peut s'y ramener par adjonction d'articulations supplémentaires.

III - 1. Principe de recherche d'un recouvrement

Nous construisons un recouvrement de proche en proche, en partant d'un noeud source.

1) Etude préalable de R_0, pour déterminer à quels voisinages se limiter.

Nous ne raisonnerons que sur les noeuds, donc nous ne considérerons que les voisinages d'ordre pair des noeuds.

Détermination des voisinages pour les noeuds de R_0 ayant des marques différentes. Supposons que nous nous limitions à V_2^+ et V_4^+.

2) Soit L une liste d'articulations :

$L = \emptyset$

3) Soit x_0 un noeud source de R.

Détermination de $V_2^+(x_0)$ et de $V_4^+(x_0)$.

4) Construire une spécification de R_0, en prenant x_0 et parmi les noeuds de $V_2^+(x_0)$ et de $V_4^+(x_0)$ ceux dont les marques sont compatibles avec celles de x_0. En particulier, si $V_2^+(x_0) \cap V_4^+(x_0) \neq \emptyset$, prendre de préférence les noeuds de cette intersection.

Soit $\{x_0, x_1, \ldots, x_k\}$ l'ensemble des noeuds de cette spécification.

Rechercher si les antécédents de chaque noeud $x_1, x_2, \ldots x_k$ appartiennent à $L \cup \{x_0, x_1, \ldots, x_k\}$.

- si c'est le cas, soit $N = \{x_0, x_1, \ldots x_k\}$ et construire une nouvelle spécification de R_0, d'ensemble de noeuds N.

- si ce n'est pas le cas, rejeter tous les noeuds pour lesquels ce n'est pas vérifié, et avec les noeuds retenus, construire une nouvelle spécification de R_0. Soit N l'ensemble des noeuds retenus.

5) Ajouter à la liste L l'ensemble de noeuds N.

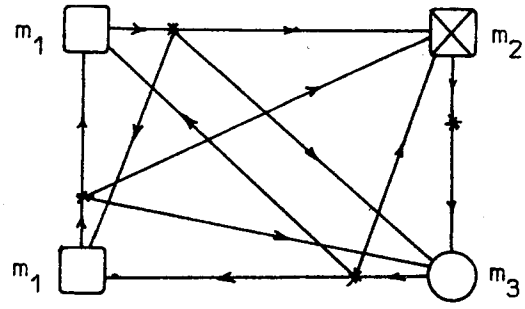
$L = L \cup N$

Si $L = X$, l'algorithme est terminé, sinon constituer un nouveau réseau R en supprimant les noeuds de N ainsi que leurs connexions (entrantes et sortantes). Déterminer les nouvelles sources de R et aller en 3.

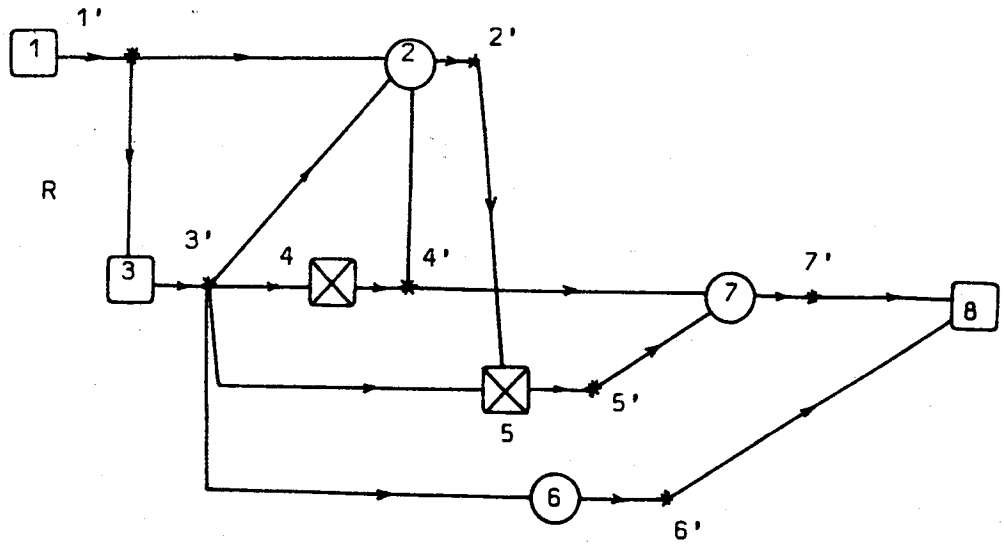
III - 2. Retour à l'exemple 2

Les tissus R et R_0 obtenus à partir de G et G_0 sont :

R_0



R



Dans R, 1 est un noeud source et 8 un noeud puits.

1) Etude de R_0

Nous n'étudions que les voisinages V_2^+ et V_4^+ :

$V_2^+(m_1) = (m_1, m_2, m_3)$ $\qquad$ $V_4^+(m_1) = (m_1, m_2, m_3)$

$V_2^+(m_2) = (m_3)$ $\qquad$ $V_4^+(m_2) = (m_1, m_1, m_3)$

$V_2^+(m_3) = (m_1, m_1, m_2)$ $\qquad$ $V_4^+(m_3) = (m_1, m_1, m_2)$

2) Le noeud 1 est noeud source, de marque m_1

$V_2^+(1) = (3,2)\ (m_1, m_3)$ $\qquad$ $V_4^+(1) = (4,5,2,6)(m_2, m_2, m_3, m_3)$

3) Construction de spécifications possibles de R_0 :

Nous obtenons 2 spécifications possibles, d'ensembles de noeuds

$$\begin{matrix} & m_1 & m_1 & m_2 & m_3 \\ N_1 = (& 1 & , 3 & , 4 & , 2) \end{matrix}$$

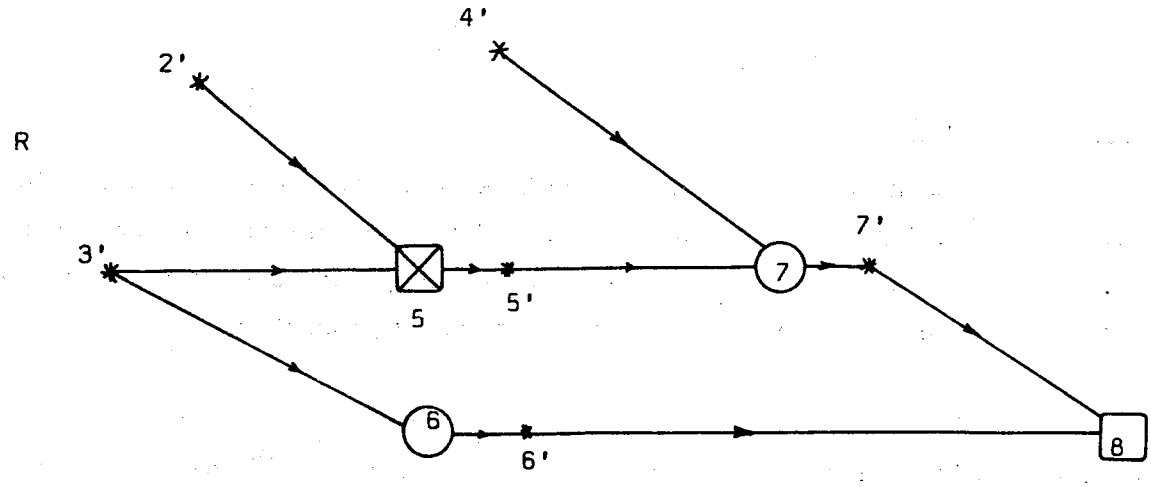
$$N_1' = (1 \ , 3 \ , 5 \ , 2)$$

Tous les antécédents des noeuds de N_1 appartiennent à N_1, donc nous choisissons comme première spécification le sous réseau partiel de R_0 recouvrant

REMARQUE :

N_1' n'aurait pû être retenu car tous les antécédents de 2 (en particulie n'appartiennent pas à N_1'. On aurait alors dû se limiter à $N_1'' = \{1,3\}$.

5) En supprimant N_1, le nouveau réseau obtenu R est :



Dans le nouveau réseau R, 5 est un noeud source, de marque m_2.

V_2^+ (5) = (7) (m_3) V_4^+ (5) = (8) (m_1)

Dans l'ensemble de noeuds N_2 = (8,5,7), le noeud 8 doit être supprimé car il a pour antécédent 6 qui n'appartient ni à la spécification construite ni à N_2. Prendre N_2 = (5,7).

En définitive, nous obtenons un recouvrement avec seulement 3 spécifications, qui ont pour ensembles de noeuds :

N_1 = {1, 3, 4, 2}

N_2 = { 5, 7}

N_3 = { 8, , 6}

REMARQUE :

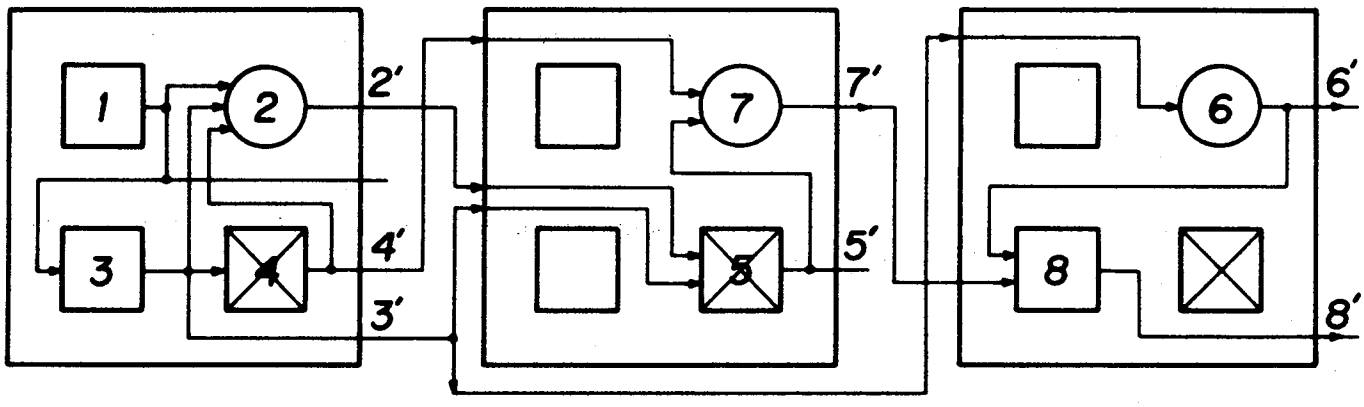
Ce recouvrement est effectué avec 3 spécifications alors qu'avec la méthode précédente il en fallait 5.

Technologiquement

Cherchons une réalisation physique de ce problème : nous appelons "plaquette" une implantation technologique des 4 composants représentés par les 4 noeuds de R_0 et où les entrées et les sorties de 4 noeuds sont reliées à des born qui peuvent être accessibles de l'extérieur de la plaquette.

Réaliser le réseau R_0 revient à déterminer p "plaquettes" recouvrant le réseau R ainsi que les connexions qu'il faut tracer sur ces plaquettes ou entre une plaquette et celles qui la précèdent pour recouvrir toutes les connexions de l

Pour l'exemple donné, une réalisation technologique est la suivante :



Il est clair que le réseau R_0 utilisé pourrait être maintenant plus simp et en particulier il n'est pas nécessaire qu'il y ait 2 noeuds de marques m_1 dans R_0 : en effet, une liaison (m_1,m_1) peut être réalisée avec des interconnexions entre 2 spécifications de R_0.

IV - Prolongement possible

Cette méthode, conçue à partir d'un exemple pratique donné par J. MERMET est constructive et nécessite une rapide étude du réseau R_0 au préalable. Cependant, n'utilisant pas de méthodes de retour-arrière, elle semble efficace et donne un recouvrement minimal pour l'exemple choisi.

Un autre problème peut être posé : étant donné un réseau R de noeuds et d'étoiles, déterminer un réseau R_0 qui puisse recouvrir R et tel qu'il existe un recouvrement de R avec R_0 utilisant un nombre minimum de spécifications de R_0.

BIBLIOGRAPHIE

1- C. BENZAKEN : Contribution des structures algébriques ordonnées à la théorie des réseaux, Thèse, Grenoble 1968.

2- C. BERGE : Graphes et hypergraphes : Dunod 1970.

3- C. BERGE, RADO : Note sur des hypergraphes isomorphes et quelques extensions du théorème de Whitney à des familles d'ensembles, Séminaire Paris 1972.

4- C. BOHM, A. SANTOLINI : A quasi-decision algorithm for the P.equivalence of two matrices, I.C.C. Bull, 3(1964) pp. 57-69.

5- M. CHEIN : Sur des problèmes de décompositions d'un graphe, liés à l'implantation, Thèse, Grenoble 1970.

6- D.G. CORNEIL : Graph isomorphism, Thesis - Toronto 1970.

7- D.G. CORNEIL, C.L. GOTLIEB : An efficient algorithm for graph isomorphism, Journal of the A.C.M., Vol 17, N°1, Janv.70, pp. 51-64.

8- R. HALIN, H.A. JUNG : Note on isomorphisms of graphs, Journal of the London Mathematical Society (42) 1967, pp. 254-256.

9- F. HARARY : Graph theory, Addison-Wesley

10- F. HARARY : The determinant of the adjacency matrix of a graph, SIAM review 4 (1962) pp. 202-210.

11- R.L. HEMMINGER, B. ZELINKA : Line Isomorphisms on dipseudographs, Journal of Comb. Theory (B) 14, 1973, pp. 105-121.

12- J. JOLY : Utilisation des graphes dans des problèmes d'analyse et de classement de structures sociales, Thèse de 3e cycle, Maths Appliquées, Nancy 1966.

13- A. KAUFMANN : Méthodes et modèles de la recherche opérationnelle, Tome 2, Dunod 68.

14- P. KELLY, D. MERRIEL : A class of graphs, Transactions of the American Mathematical Society Vol 96. 1960, pp. 488-492.

15- P. KELLY : On some mappings related to graphs, Pacific Journal of Mathematics 14, (1964).

16- J. KUNTZMANN : Mathématiques de la physique et de la technique, Hermann 1968.

17- J. KUNTZMANN : Théorie des réseaux, graphes, Dunod 1972.

18- Y. MALGRANGE : Présentation d'un algorithme, Application à certains problèmes de la théorie des graphes, Publication BULL, Utilisation des calculateurs électroniques en R.O. 1961.

19- V.V. MENON : The isomorphism between graphs and their adjoint graphs, Canad. Mathematical Bull. (8.1965). pp. 7-15.

20- F. REYNAUD-GAROCHE : Théorie des écoulements dans les réseaux, Thèse de 3e cycl Informatique, Grenoble 1973.

21- J.C. SAILLARD, M. SARRET : Le programme DESMAG, Onde électrique, Janvier 1969.

22- G. SAUCIER : Codage des automates asynchrones, Thèse, Grenoble 1970.

23- J.P. STEEN : Algorithme de recherche d'un isomorphisme entre 2 graphes, Thèse de 3e cycle, Math. Appliquées, Lille 1968.

24- E.H. SUSSENGUTH : A graph-theoretic algorithm for matching chemical structures, J. Chem. Doct 5, 1(1965), pp. 36-43.

25- J. TURNER : Point-symetric graphs with a prime number of points, J. Comb. theory 3 (1967) pp. 136-145.

26- J. TURNER : Generalized matrix functions and the graph-isomorphism problem : SIAM Journ. of Applied Mathematics, Vol 16, N°3, May 1968.

27- S.H. UNGER : GIT-A heuristic program for testing pairs of directed line-graphs for isomorphism, Comm. of the A.C.M., Vol 7. N°1, janvier 1964.

28- A. VERDILLON : Pannes dans les réseaux acycliques, Thèse 3e cycle Informatique, Grenoble 1972.

29- L. WEINBERG : A simple and efficient algorithm for determining isomorphism of plana triply connected graphs. IEEE Trans. on Circuit Theory, Vol CT.13, N°2 (1966).