HAL open science

Modèles ordonnés dans un produit direct d'ordres totaux : applications à l'analyse des questionnaires

Yves Kergall

To cite this version:

Yves Kergall. Modèles ordonnés dans un produit direct d'ordres totaux : applications à l'analyse des questionnaires. Modélisation et simulation. Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG; Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1975. Français. NNT : . tel-00285871

HAL Id: tel-00285871

https://theses.hal.science/tel-00285871v1

Submitted on 6 Jun 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre

THESE

Présentée à

L'UNIVERSITE SCIENTIFIQUE ET MEDICALE DE GRENOBLE

pour obtenir

le grade de Docteur de troisième cycle

INFORMATIQUE

PAR

Yves Kergall

MODELES ORDONNES DANS UN PRODUIT DIRECT D'ORDRES TOTAUX APPLICATIONS A L'ANALYSE DES QUESTIONNAIRES

Thèse soutenue le 19 décembre 1975 devant la commission d'examen :

Monsieur C. BENZAKEN, Président

Monsieur B. MONJARDET, Examinateur

UNIVERSITE SCIENTIFIQUE ET MEDICALE DE GRENOBLE

INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE

M. Michel SOUTIF	Présidents	M. Louis NEEL
M. Gabriel CAU	Vice-Présidents	MM. Lucien BONNETAIN Jean BENOIT

MEMBRES DU CORPS ENSEIGNANT DE L'U.S.M.G.

PROFESSEURS TITULAIRES

MM.	ANGLES D'AURIAC Paul	Mécanique des fluides
	ARNAUD Paul	Chimie
	AUBERT Guy	Physique
	AYANT Yves	Physique approfondie
Mme	BARBIER Marie-Jeanne	Electrochimie
MM.	BARBIER Jean-Claude	Physique expérimentale
	BARBIER Reynold	Géologie appliquée
	BARJON Robert	Physique nucléaire
	BARNOUD Fernand	Biosynthèse de la cellulose
	BARRA Jean-René	Statistiques
	BARRIE Joseph	Clinique chirurgicale
	BEAUDOING André	Clinique de Pédiatrie et Puériculture
	BERNARD Alain	Mathématiques Pures
Mme	BERTRANDIAS Françoise	Mathématiques Pures
MM.	BEZES Henri	Pathologie chirurgicale
	BLAMBERT Maurice	Mathématiques Pures
	BOLLIET Louis	Informatique (IUT B)
	BONNET Georges	Electrotechnique
	BONNET Jean-Louis	Clinique ophtalmologique
	BONNET-EYMARD Joseph	Pathologie médicale
	BOUCHERLE André	Chimie et toxicologie
	BOUCHEZ Robert	Physique nucléaire
	BOUSSARD Jean-Claude	Mathématiques appliquées
	BRAVARD Yves	Géographie
	CABANEL Guy	Clinique rhumatologique et hydrologie
	CALAS François	Anatomie
	CARLIER Georges	Biologie végétale
	CARRAZ Gilbert	Biologie animale et pharmacodynamie
	CAU Gabriel	Médecine légale et toxicologie
	CAUQUIS Georges	Chimie organique
	CHABAUTY Claude	Mathématiques Pures
	CHARACHON Robert	Clinique Oto-Rhino-Laryngologique
	CHATEAU Robert	Thérapeutique (Neurologie)
	CHIBON Pierre	Biologie animale
	COEUR André	Pharmacie chimique et chimie analytique
	CONTAMIN Robert	Clinique gynécologique
	COUDERC Pierre	Anatomie pathologique
	CRAYA Antoine	Mécanique
Mme	DEBELMAS Anne-Marie	Matière médicale
MM.	DEBERNARDI Jacques	Géologie générale
	DECRANGE Charles	Zoologie
	DELORMAS Pierre	Pneumo-Phtisiologie
	DEPORTES Charles	Chimie minérale
	DESRE Pierre	Métallurgie
	DESSAUX Georges	Physiologie animale
	DODU Jacques	Mécanique appliquée

MM.	DOLIQUE Jean-Michel	Physique des plasmas
	DREYFUS Bernard	Thermodynamique
	DRUCROS Pierre	Cristallographie
	DUGOIS Pierre	Clinique de dermatologie et syphiligrap
	FAU René	Clinique neuro-psychiatrique
	GAGNAIRE Didier	Chimie physique
	GALLISSOT François	Mathématiques pures
	GALVANI Octave	Mathématiques pures
	GASTINEL Noël	Mathématiques appliquées
	GAVEND Michel	Pharmacologie
	GEINDRE Michel	Electroradiologie
	GERBER Robert	Mathématiques pures
	GERMAIN Jean-Pierre	Mécanique
	GIRAUD Pierre	Géologie
	JANIN Bernard	Géographie
	KAHANE André	Physique Générale
	KLEIN Joseph	Mathématiques pures
	KOSZUL Jean-Louis	Mathématiques pures
	KRAVTCHENKO Julien	Mécanique
	KUNTZMANN Jean	Mathématiques appliquées
	LACAZE Albert	Thermodynamique
	LACHARME Jean	Biologie végétale
	LAJZEROWICZ Joseph	Physique
	LATREILLE René	Chirurgie générale
	LATURAZE Jean	Biochimie pharmaceutique
	LAURENT Pierre-Jean	Mathématiques appliquées
	LEDRU Jean	Clinique médicale B
	LLIBOUTRY Louis	Géophysique
	LONGEQUEUE Jean-Pierre	Physique nucléaire
	LOUP Jean	Géographie
Mlle	LUTZ Elisabeth	Mathématiques pures
	MALGRANGE Bernard	Mathématiques pures
	MALINAS Yves	Clinique obstétricale
	MARTIN-NOEL Pierre	Seméiologie médicale
	MAZARE Yves	Clinique médicale A
	MICHEL Robert	Minéralogie et pétrographie
	MICOUD Max	Clinique maladies infectieuses
	MOURIQUAND Claude	Histologie
	MOUSSA André	Chimie nucléaire
	MULLER Jean-Michel	Thérapeutique (néphrologie)
	NEEL Louis	Physique du solide
	OZENDA Paul	Botanique
	PAYAN Jean-Jacques	Mathématiques pures
	PEBAY-PEYROULA Jean-Claude	Physique
	RASSAT André	Chimie systématique
	RENARD Michel	Thermodynamique
	RINALDI Renaud	Physique
	DE ROUGEMONT Jacques	Neuro-chirurgie
	SEIGNEURIN Raymond	Microbiologie et hygiène
	SENGEL Philippe	Zoologie
	SIBILLE Robert	Construction mécanique
	SOUTIF Michel	Physique générale
	TANCHE Maurice	Physiologie
	TRAYNARD Philippe	Chimie générale
	VAILLANT François	Zoologie
	VALENTIN Jacques	Physique nucléaire
	VAUQUOIS Bernard	Calcul électronique
Mme	VERAIN Alice	Pharmacie galénique
MM.	VERAIN André	Physique
	VEYRET Paul	Géographie
	VIGNAIS Pierre	Biochimie médicale

PROFESSEURS ASSOCIES

MM.	CHEEKE John	Thermodynamique
	COPPENS Philip	Physique
	CORCOS Gilles	Mécanique
	CRABBE Pierre	CERMO
	GILLESPIE John	I.S.N.
	ROCKAFELLAR Ralph	Mathématiques appliquées

PROFESSEURS SANS CHAIRE

Mlle	AGNIUS-DELORD Claudine	Physique pharmaceutique
	ALARY Josette	Chimie analytique
MM.	AMBROISE-THOMAS Pierre	Parasitologie
	BELORIZKY Elie	Physique
	BENZAKEN Claude	Mathématiques appliquées
	BERTRANDIAS Jean-Paul	Mathématiques pures
	BIAREZ Jean-Pierre	Mécanique
	BILLET Jean	Géographie
Mme	BONNIER Jane	Chimie générale
MM.	BOUCHET Yves	Anatomie
	BRUGEL Lucien	Energétique
	CONTE René	Physique
	DEPASSEL Roger	Mécanique des fluides
	GAUTHIER Yves	Sciences biologiques
	GAUTRON René	Chimie
	GIDON Paul	Géologie et Minéralogie
	GLENAT René	Chimie organique
	GROULADE Joseph	Biochimie médicale
	HACQUES Gérard	Calcul numérique
	HOLLARD Daniel	Hématologie
	HUGONOT Robert	Hygiène et Méd. Préventive
	IDELMAN Simon	Physiologie animale
	JOLY Jean-René	Mathématiques pures
	JULLIEN Pierre	Mathématiques appliquées
Mme	KAHANE Josette	Physique
MM.	KUHN Gérard	Physique
	LOISEAUX Jean	Physique nucléaire
	LUU-DUC-Cuong	Chimie organique
	MAYNARD Roger	Physique du solide
	PELMONT Jean	Biochimie
	PERRIAUX Jean-Jacques	Géologie et minéralogie
	PFISTER Jean-Claude	Physique du solide
Mlle	PIERY Yvette	Physiologie animale
MM.	RAYNAUD Hervé	Mathématiques appliquées
	REBECQ Jacques	Biologie (CUS)
	REVOL Michel	Urologie
	REYMOND Jean-Charles	Chirurgie générale
	RICHARD Lucien	Biologie végétale
Mme	RINAUDO Marguerite	Chimie macromoléculaire
MM.	ROBERT André	Chimie papetière
	SARRAZIN Roger	Anatomie et chirurgie
	SARROT-REYNAULD Jean	Géologie
	SIROT Louis	Chirurgie générale
Mme	SOUTIF Jeanne	Physique générale
MM.	VIALON Pierre	Géologie
	VAN CUTSEM Bernard	Mathématiques appliquées

MAITRES DE CONFERENCES ET MAITRES DE CONFERENCES AGREGES

MM.	AMBLARD Pierre	Dermatologie
	ARMAND Gilbert	Géographie
	ARMAND Yves	Chimie
	BARGE Michel	Neurochirurgie
	BEGUIN Claude	Chimie organique
Mme	BERIEL Hélène	Pharmacodynamique
M.	BOUCHARLAT Jacques	Psychiatrie adultes
Mme	BOUCHE Liane	Mathématiques (CUS)
MM.	BRODEAU François	Mathématiques (IUT B)
	BUISSON Roger	Physique
	BUTEL Jean	Orthopédie
	CHAMBAZ Edmond	Biochimie médicale
	CHAMPETIER Jean	Anatomie et organogénèse
	CHARDON Michel	Géographie
	CHERADAME Hervé	Chimie papetière
	CHIAVERINA Jean	Biologie appliquée (EFP)
	COHEN-ADDAD Jean-Pierre	Spectrométrie physique
	COLOMB Maurice	Biochimie médicale
	CORDONNIER Daniel	Néphrologie
	COULOMB Max	Radiologie
	CROUZET Guy	Radiologie
	CYROT Michel	Physique du solide
	DELOBEL Claude	M.I.A.G.
	DENIS Bernard	Cardiologie
	DOUCE Roland	Physiologie végétale
	DUSSAUD René	Mathématiques (CUS)
Mme	ETERRADOSSI Jacqueline	Physiologie
MM.	FAURE Jacques	Médecine légale
	FONTAINE Jean-Marc	Mathématiques pures
	GAUTIER Robert	Chirurgie générale
	GENSAC Pierre	Botanique
	GIDON Maurice	Géologie
	GRIFFITHS Michaël	Mathématiques appliquées
	GROS Yves	Physique (stag.)
	GUITTON Jacques	Chimie
	HICTER Pierre	Chimie
	IVANES Marcel	Electricité
	JALBERT Pierre	Histologie
	KOLODIE Lucien	Hématologie
	KRAKOWIAK Sacha	Mathématiques appliquées
Mme	LAJZEROWICZ Jeannine	Physique
MM.	LEROY Philippe	Mathématiques
	MACHE Régis	Physiologie végétale
	MAGNIN Robert	Hygiène et médecine préventive
	MARECHAL Jean	Mécanique
	MARTIN-BOUYER Michel	Chimie (CUS)
	MICHOULIER Jean	Physique (IUT A)
Mme	MINIER Colette	Physique
MM.	NEGRE Robert	Mécanique
	NEMOZ Alain	Thermodynamique
	PARAMELLE Bernard	Pneumologie
	PECCOUD François	Analyse (IUT B)
	PEFFEN René	Métallurgie
	PERRET Jean	Neurologie
	PHELIP Xavier	Rhumatologie
	RACHAIL Michel	Médecine interne
	RACINET Claude	Gynécologie et obstétrique
	RAMBAUD Pierre	Pédiatrie
Mme	RENAUDET Jacqueline	Bactériologie
MM.	ROBERT Jean-Bernard	Chimie-Physique

MM.	ROMIER Guy	Mathématiques (IUT B)
	SHOM Jean-Claude	Chimie générale
	STIEGLITZ Paul	Anesthésiologie
	STOEBNER Pierre	Anatomie pathologique
	VROUSOS Constantin	Radiologie

MAITRES DE CONFERENCES ASSOCIES

MM.	COLE Antony	Sciences nucléaires
	FORELL César	Mécanique
	MOORSANI Kishin	Physique

CHARGES DE FONCTIONS DE MAITRES DE CONFERENCES

MM.	BOST Michel	Pédiatrie
	CONTAMIN Charles	Chirurgie thoracique et cardio-vasculaire
	FAURE Gilbert	Urologie
	MALLION Jean-Michel	Médecine du travail
	ROCHAT Jacques	Hygiène et hydrologie

Fait à Saint Martin d'Hères, OCTOBRE 1974.

"MEMBRES DU CORPS ENSEIGNANT DE L'I.N.P.G."

PROFESSEURS TITULAIRES

MM.	BENOIT Jean	Radioélectricité
	BESSON Jean	ELectrochimie
	BONNETAIN Lucien	Chimie Minérale
	BONNIER Etienne	Electrochimie, Electrométallurgie
	BRISSONNEAU Pierre	Physique du solide
	BUYLE-BODIN Maurice	ELectronique
	COUMES André	Radioélectricité
	FELICI Noël	Electrostatique
	PAUTHENET René	Physique du solide
	PERRET René	Servomécanismes
	SANTON Lucien	Mécanique
	SILBER Robert	Mécanique des fluides

PROFESSEUR ASSOCIE

M.	BOUDOURIS Georges	Radioélectricité

PROFESSEURS SANS CHAIRE

MM.	BLIMAN Samuel	Electronique
	BLOCH Daniel	Physique du solide et cristallographie
	COHEN Joseph	Electrotechnique
	DURAND Françis	Metallurgie
	MOREAU René	Mécanique
	POLOUJADOFF Michel	ELectrotechnique
	VEILLON Gérard	Informatique fondamentale et appliquée
	ZADWORNY François	Electronique

MAITRES DE CONFERENCES

MM.	BOUVARD Maurice	Génie mécanique
	CHARTIER Germain	Electronique
	FOULARD Claude	Automatique
	GUYOT Pierre	Chimie minérale
	JOUBERT Jean Claude	Physique du solide
	LACOUME Jean Louis	Géophisique
	LANCIA Roland	Physique atomique
	LESPINARD Georges	Mécanique
	MORET Roger	Electrotechnique nucléaire
	ROBERT François	Analyse numérique
	SABONNADIERE Jean Claude	Informatique fondamentale et appliquée
Mme	SAUCIER Gabrièle	Informatique fondamentale et appliquée

MAITRE DE CONFERENCES ASSOCIE

M.	LANDAU Ioan Doré	Automatique

CHARGE DE FONCTIONS DE MAITRES DE CONFERENCES

M.	ANCEAU François	Mathématiques appliquées

Fait à Saint Martin d'Hères JANVIER 1974

Je remercie Monsieur C. BENZAKEN, Professeur, de s'être intéressé à mon travail et d'avoir accepté la présidence de ce jury.

Je remercie Monsieur B. MONJARDET, Docteur es Sciences Mathématiques, qui m'a fait profiter à de nombreuses reprises de son expérience sur le sujet, a critiqué les rédactions successives tant sur le fond que sur la forme, et a accepté de participer à ce jury.

Je tiens aussi à remercier Madame G. SAUCIER, Maître de Conférences, de l'intérêt témoigné pour mon travail et d'avoir accepté de faire partie de ce jury.

Je remercie enfin Monsieur R. ESTABLET, auteur de nombreux ouvrages de sociologie, de la confiance témoignée pour mon travail lors de nos nombreux échanges où il a toujours su me rappeler le côté réel des choses.

Mesdames JAHAN et JUTON, de l'Université de Tours, ont assuré avec beaucoup de soin la frappe et le tirage de ce travail. Qu'elles trouvent ici l'expression de ma reconnaissance.

INTRODUCTION

En analyse hiérarchique on considère un ensemble $E = \{q_1, \ldots, q_n\}$ de n questions que l'on soumet à une population. Le n-uplet formé des n réponses aux n questions données par un individu est appelé patron. L'ensemble des patrons donnés par la population est appelé protocole.

On cherche à représenter le protocole obtenu au moyen d'un modèle ordonné. Le modèle le plus simple est la chaîne ou échelle de Guttman qui s'interprète par une relation de préordre total sur E ou sur la population elle-même. Ayant ajusté un protocole à une échelle, on associe à chaque patron de l'échelle un "score" et à chaque patron hors de l'échelle le score du patron de l'échelle qui lui est le plus proche, ce point étant déterminé différemment (Guttman, Torgerson) suivant la distance que l'on définit entre deux patrons. L'échelle définit ainsi une mesure ordinale et on parle en sociologie d' "échelles d'attitude".

On connaît les limites d'une telle analyse (voir en particulier : Michel TORT "Le quotient intellectuel"); de plus on peut citer C. FLAMENT qui affirme dans (10) "n'avoir jamais rencontré une échelle de Guttman qui semble être une approximation satisfaisante d'un protocole d'enquête".

En combinant plusieurs échelles on obtient la notion de tresse de Guttman souvent très proche du protocole et qui s'interprète par une relation de préordre sur E plus souple et plus voisine de la réalité qu'une relation de préordre total.

De plus on définit sur une tresse la même mesure que sur une échelle, et cette mesure sera d'autant plus justifiée que la tresse se rapprochera d'une échelle ((7) Pages 57-60).

Ces modèles ont fait l'objet de nombreuses études en supposant que chaque question n'admet que deux réponses possibles. Nous présentons ici une étude algébrique des modèles ordonnés dans un produit direct d'ordres totaux, c'est-à-dire en supposant que chacune des n questions admet p modalités de réponses possibles, totalement ordonnées, ce qui est le cas dans la plupart des questionnaires. Il nous faudra supposer de plus que les modalités à 2 questions sont comparables entre elles.

Les problèmes d'ajustement seront rapidement évoqués vers la fin de ce travail : ces problèmes sont basés sur l'élaboration d'un coefficient mesurant l'ajustement d'un protocole et de son modèle. La littérature américaine est riche à ce sujet. D'une façon plus générale, on étudie les modèles ordonnés à l'aide de méthodes algébriques à l'exclusion de méthodes statistiques.

Au premier chapitre, après divers rappels, on construit une correspondance de Galois entre l'ensemble des parties d'un ensemble et un treillis, qui généralise la correspondance de Galois introduite par M. BARBUT et celle introduite par B. MONJARDET ([2], [20]). Dans une deuxième partie on étudie les tresses en algèbre de Boole, en repport avec diverses notions : préordres, treillis, fonctions et chaînes. On retrouve des résultats classiques, en particulier ceux de l'analyse booleenne des questionnaires établis par C. FLAMENT dans (9) et (10).

Dans les chapitres suivants, on se place dans un produit direct d'ordres totaux, noté H.

Le chapitre II est consacré à l'étude des tresses et des préordres. Ces tresses sont construites à l'aide de la correspondance de Galois introduite au chapitre I. Les problèmes d'effectifs et de conservation sont ensuite abordés ainsi que les problèmes de caractérisation géométrique des tresses après des résultats généraux sur les sous-treillis de H qui permettent de généraliser certains résultats de l'analyse booléenne des questionnaires.

Au chapitre III on introduit la notion de fonctions à arguments rangés qui caractérisent le complémentaire d'une tresse. On étudie quelques unes de leurs propriétés -en particulier étude de leurs monômes premiers- et de leurs applications.

Le chapitre IV est consacré à l'étude des chaînes : chaînes respectant un préordre, chaînes complètes et incomplètes, sous-treillis de H union de chaînes complètes, et enfin degrés d'imbrication et type d'une chaîne qui permettent une classification des chaînes respectant un même ordre total.

Divers problèmes relatifs à l'analyse hiérarchique sont ensuite abordés au chapitre V au point de vue algorithmique : recherche d'une ou plusieurs chaînes, problème de codage, de seuil, élimination de questions, mesure d'une préférence, voisinage. La plupart de ces problèmes, et d'autres, sont programmés au chapitre VI où l'on donne quelques exemples d'utilisation.

Enfin, quelques perspectives de travail sont évoquées brièvement après le chapitre VI : problème d'ajustement d'un protocole à une tresse, modèles approchés, cas de l'algèbre à p valeurs.

CHAPITRE I

PRELIMINAIRES

MODELES ORDONNES EN ALGEBRE DE BOOLE

PLAN DU CHAPITRE

1. PRELIMINAIRES

1.1 : Treillis
1.2 : Treillis des préordres
1.3 : Fermeture
1.4 : Correspondance de Galois
1.5 : Fonctions booleennes de variables booleennes, monomes premiers.

2. MODELES ORDONNES EN ALGEBRE DE BOOLE

2.1 : Tresses et préordres
2.2 : Tresses et treillis
2.3 : Tresses et fonctions
2.4 : Tresses et chaînes

Les subdivisions du paragraphe 2 seront reprises dans la suite comme tête des chapitres II, III et IV.

1. PRELIMINAIRES

1.1 : Treillis

1ère définition : Un treillis est un ensemble T muni de 2 lois notées $\wedge$ et $\vee$ qui sont respectivement associatives, commutatives, idempotentes et absorbantes.

2ème définition : Un treillis est un ensemble T muni d'une relation d'ordre, notée $\leqslant$, telle que quels que soient a, b $\in$ T, sup(a,b) et inf(a, b) existent et sont, par nature, uniques.

Les deux définitions sont équivalentes :

- si T est donné par la première définition, la relation d'ordre est définie par :

  $a \leqslant b \Longleftrightarrow a \wedge b = a \Longleftrightarrow a \vee b = b$

- si T est donné par la deuxième définition, les 2 lois sont définies par :

  $a \vee b = \sup(a,b)$

  $a \wedge b = \inf(a,b)$

1.2 : Treillis des préordres

Soit E un ensemble fini, $E = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ que l'on écrira plus simplement $\{1, 2, \ldots, n\}$, et P_E l'ensemble de tous les préordres sur E. i et j désignent dans la suite, deux éléments quelconques de E.

P_E est un treillis, on définit en effet sur P_E une relation d'ordre et 2 lois qui ont les propriétés vues plus haut.

relation d'ordre :

On dit qu'un préordre P_1 est plus fin qu'un préordre P_2 si et seulement si $i \leqslant j \Longrightarrow i \leqslant j$ que l'on note par $P_1 \subseteq P_2$. Si on not

<u>Notations dans $\mathcal{P}_E$</u> :

Sur {i, j} inclus dans E, on peut définir quatre préordres :

$P_{ij} = [i \leqslant j]$

$P_{ji} = [j \leqslant i]$

$P_{i=j} = [i \equiv j]$

$P_{i \| j} = [\overset{i}{\cdot} \quad \overset{j}{\cdot}]$

$P_{\{ij\}}$ désigne l'un quelconque des quatre préordres précédents, ou la restriction d'un préordre P quelconque à l'ensemble {i, j}.

<u>Propriété</u> :

$\mathcal{P}_E$ est un treillis atomique ([2]); on peut donc écrire :

$$P = \bigcup_{(i,j) \in P} P_{ij}$$

$$P = \bigcup_{\{i,j\} \in E \times E} P_{\{ij\}}$$

G_P le graphe représentatif d'une relation d'ordre comme le sous-ensemble correspondant de ExE, on a :

$$P_1 \underset{\mathcal{P}_E}{\subseteq} P_2 \Longleftrightarrow G_{P_1} \underset{ExE}{\subseteq} G_{P_2}$$

<u>Section finissante</u> : On appelle section finissante d'un préordre P sur E, l'ensemble noté F(P) de tous les préordres moins fins que P.

$$F(P) = \{P' \in \mathcal{P}_E : P \subseteq P'\}$$

<u>Intersection</u>

$P = P_1 \wedge P_2$ est défini par $i \underset{P}{\leqslant} j \Longleftrightarrow i \underset{P_1}{\leqslant} j$ et $i \underset{P_2}{\leqslant} j$

on a $P = P_1 \wedge P_2 \Longleftrightarrow G_P = G_{P_1} \cap G_{P_2}$

<u>Union</u>

L'union "ensembliste" de 2 préordres P_1 et P_2 définie par :

$$i \underset{P_1 \vee P_2}{\leqslant} j \Longleftrightarrow i \underset{P_1}{\leqslant} j \quad \text{ou} \quad i \underset{P_2}{\leqslant} j$$

n'est pas nécessairement un préordre.

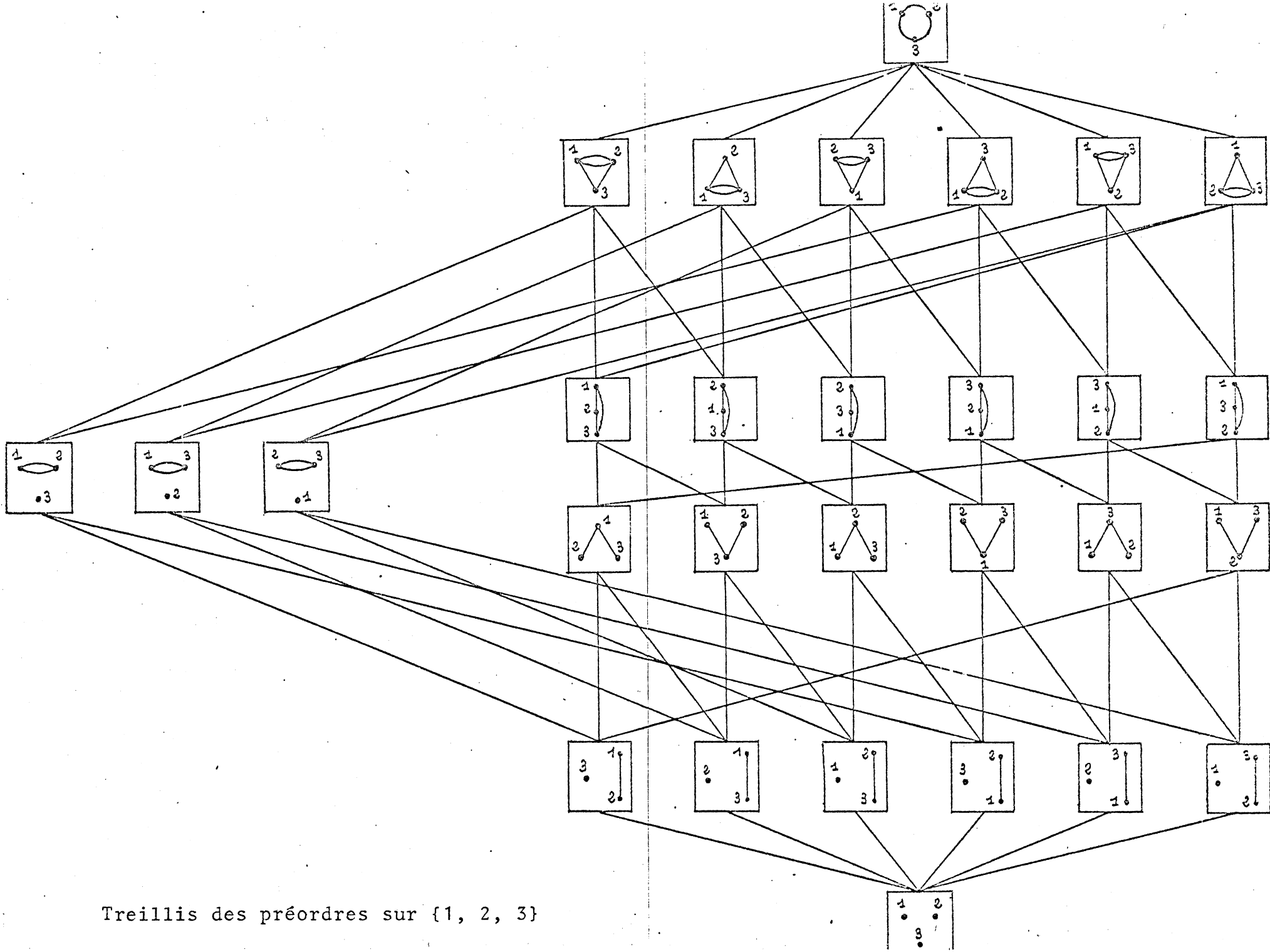
On définit donc l'union de 2 préordres dans $\mathcal{P}_E$ par la fermeture transitive de $P_1 \vee P_2$ ce que l'on note $\overline{P_1 \vee P_2}$.

On a : $P = \overline{P_1 \vee P_2}$ $\qquad G_P = \overline{G_{P_1} \underset{ExE}{\cup} G_{P_2}}$

$\mathcal{P}_E$, l'ensemble des préordres sur E, est un treillis <u>coatomique</u>, l'ensemble de ses coatomes (il y en a 2^n-2) étant l'ensemble des préordres totaux à 2 classes que l'on appelle préordres maximaux. Le treillis des préordres $\mathcal{P}_E$ est étudié plus en détail dans [2] (chapitre VI On représente, page suivante, $\mathcal{P}_E$ avec E = {1, 2, 3}.

1.3 : <u>Fermeture</u>

<u>Définition</u> : On appelle fermeture dans un ensemble ordonné $(K, \leqslant)$ une application $g : K \longrightarrow K$ ayant les 3 propriétés :



Treillis des préordres sur {1, 2, 3}

a) $\forall x, \forall y \in K \qquad x \leqslant y \Longrightarrow g(x) \leqslant g(y)$

b) $\forall x \in K \qquad x \leqslant g(x)$

c) $\forall x \in K \qquad g(g(x)) = g(x)$

Un fermé est un élément x de K tel que $g(x) = x$.

Propriété : Dans un treillis, l'intersection de 2 fermés est un fermé.

1.4 : Correspondance de Galois

Définition : On a une correspondance de Galois entre deux ensembles ordonnés G et F s'il existe 2 applications φ de G dans F et ψ de F dans G vérifiant :

1) $\forall x, \forall x' \in G$ alors $x \leqslant x' \Longrightarrow \varphi(x') \leqslant \varphi(x)$

$\forall y, \forall y' \in F$ alors $y \leqslant y' \Longrightarrow \psi(y') \leqslant \psi(y)$

2) on pose $f = \varphi \circ \psi$ et $g = \psi \circ \varphi$

alors $\forall x \in F \qquad x \leqslant f(x)$

$\forall y \in G \qquad y \leqslant g(y)$

Propriété 1 : g et f sont deux fermetures dans G et F.

Propriété 2 : Si on a une correspondance de Galois entre deux treillis G et F alors l'ensemble des fermés de G et de F sont deux treillis duaux. Dans l'ensemble des fermés de G (de F) on conserve l'intersection de G (de F) et pour union on prend la fermeture de l'union dans G (dans F).

Définitions

Soit H un ensemble quelconque et T un treillis. Soit φ une application de H dans T. Cette application φ induit une application de $P(H)$, ensemble des parties de H, dans T.

$$H \xrightarrow{\varphi} T \qquad\qquad P(H) \xrightarrow{\varphi} T$$

$$x \qquad \varphi(x) \qquad\qquad X \qquad \varphi(X) = \bigwedge_{x \in X} \varphi(x)$$

Soit ψ l'application de T dans $P(H)$ définie par :

$$T \xrightarrow{\psi} P(H)$$
$$t \qquad \psi(t) = \{x \in H : t \leqslant \varphi(x)\}$$

<u>Propriétés</u>

<u>Proposition 1</u> (φ, ψ) est une correspondance de Galois entre $P(H)$ et T.

On pose $f = \varphi \circ \psi$ et $g = \psi \circ \varphi$

a) Pour tout X_1 et X_2 de $P(H)$ alors $X_1 \subseteq X_2$ implique $\varphi(X_2) \leqslant \varphi(X_1)$

Soit $t_1 = \varphi(X_1)$

$t_2 = \varphi(X_2 - X_1)$.

On a par définition de φ : $\varphi(X_2) = t_1 \wedge t_2$
donc $\varphi(X_2) \leqslant \varphi(X_1)$

b) Pour tout t_1 et t_2 appartenant à T, $t_1 \leqslant t_2$ implique $\psi(t_2) \subseteq \psi(t_1)$: soit $x \in \psi(t_2)$; alors $t_2 \leqslant \varphi(x)$ et $t_1 \leqslant \varphi(x)$ donc $x \in \psi(t_1)$ et $\psi(t_2) \subseteq \psi(t_1)$.

c) Pour tout $X \in P(H)$, $X \subseteq \psi \circ \varphi(X)$

Soit $x \in X$; alors $\varphi(X) \leqslant \varphi(x)$ et $x \in \psi \circ \varphi(X)$

d) Quel que soit $t \in T$, $t \leqslant \varphi \circ \psi(t)$

$\psi(t) = \{x \in H : t \leqslant \varphi(x)\}$

donc $\varphi(\psi(t)) = \wedge \varphi(x)$ avec $t \leqslant \varphi(x)$

et $t \leqslant \varphi(x)$, quel que soit x, implique $t \leqslant \wedge\varphi(x) = \varphi \circ \psi(t)$.

On dit qu'un treillis T est inf-expressible si tout élément de T est infimum d'éléments inf-irréductibles. Dans le cas particulier où tout élément de T est infimum de coatomes, T est dit coatomique. Notons I l'ensemble des élements inf-irréductibles du treillis T.

Proposition 2

Dans la correspondance de Galois (φ, ψ) entre $P(H)$ et un treillis inf-expressible T, la fermeture sur T, $f = \varphi \circ \psi$, est l'application identique si et seulement si $\varphi(H)$ contient l'ensemble I des inf-irréductibles de T.

Démonstration

. Supposons que $\varphi(H) \supseteq I$. Soit $t \in T$; $t = \wedge t_i$, $t_i \in I$; pour tout t_i, il existe $x_i \in H$ avec $t_i = \varphi(x_i)$ fermé de T. Donc $t = \wedge \varphi(x_i)$ est un fermé et $t = f(t)$.

. Supposons que pour tout t de T, $t = f(t)$. En particulier si $t \in I$, $t = \varphi \circ \psi(t)$. Posons $X = \psi(t) = \{x \in H : t \leqslant \varphi(x)\}$. On a $t = \varphi(X) = \bigwedge_X \varphi(x)$. Mais t étant inf-expressible, il existe $x \in X$ avec $t = \varphi(x)$.

Soit t un élément du treillis T; on pose

$F(t) = \{t' \in T : t \leqslant t'\}$

$F^1(t) = F(t) \cap \varphi(H) = \{\varphi(x) : t \leqslant \varphi(x)\} = \{\varphi(x) : x \in \psi(t)\}$

$F^2(t) = \{$éléments minimaux de $F^1(t)\} \supseteq F(t) \cap \{$éléments minimaux de $\varphi(H)\}$

Proposition 3

Dans la correspondance de Galois (φ, ψ) entre $P(H)$ et T, on a

$$\psi(t) = \bigcup_{F(t)} \psi(t_i) = \bigcup_{F^1(t)} \psi(t_i) = \bigcup_{F^2(t)} \psi(t_i)$$

Démonstration

Pour tout $t_i \in F(t)$ on a $t \leqslant t_i$, donc $\psi(t_i) \subseteq \psi(t)$; donc

$$\bigcup_{F^2(t)} \psi(t_i) \subseteq \bigcup_{F^1(t)} \psi(t_i) \subseteq \bigcup_{F(t)} \psi(t_i) \subseteq \psi(t)$$

Il suffit donc de montrer $\psi(t) \subseteq \bigcup_{F^2(t)} \psi(t_i)$. Or $x \in \psi(t)$ implique $t \leqslant \varphi(x)$, donc $\varphi(x) \in F^1(t)$. Dans $F^1(t)$ il existe un élément minimal $t_i = \varphi(y)$, tel que $t \leqslant t_i \leqslant \varphi(x)$; donc $x \in \psi(t_i)$, $t_i \in F^2(t)$ et $x \in \bigcup_{F^2(t)} \psi(t_i)$.

Cas particuliers

1) Soit E un ensemble fini; posons $H = \mathcal{P}(E)$, $T = \mathcal{P}(E^2)$. Si X est une partie de E posons $\varphi(X) = \{(x, y) ; x \in X, y \in E\}$. La correspondance de Galois (φ,ψ) de la proposition 1 n'est autre que la classique correspondance de Galois induisant la dualité entre préordres et topologies définies sur E ([20]).

2) Soient E et E' deux ensembles finis; posons H = E et $T = \mathcal{P}(E')$ et considérons une application φ de H dans T, c'est-à-dire une correspondance entre E et E'. La correspondance de Galois (φ,ψ) de la proposition 1 n'est autre que la classique correspondance de Galois associée à une correspondance φ entre deux ensembles ([20],[2] chapitre V).

1.5 : Fonctions booleennes de variables booleennes, monomes premiers

Définition :

Soit $y = f(x_1, \ldots, x_n)$. On dit que f est une fonction booleenne si y ne prend que deux valeurs 0 ou 1 en fonction des variables booleennes $x_1, \ldots, x_n$.

Définition :

Un monôme $m \leqslant f$ est un momome premier de f s'il n'existe pas de monome m_1 tel que $m < m_1 \leqslant f$.
(voir Algèbre de Boole, J. KUNTZMANN, DUNOD, Paris, 1968).

2. MODELES ORDONNES EN ALGEBRE DE BOOLE

2.1 : Tresses et préordres

Soit $E = \{1, 2, \ldots, n\}$ et $L_i = \{0, 1\}$. On pose $H = \prod_{i=1}^{n} L_i$, et on note $x = (x_1, \ldots, x_n)$ ou $M = (m_1, \ldots, m_n)$ les éléments de H. Soit $\mathcal{P}_E$ le treillis des préordres sur E. On définit une application φ de H dans $\mathcal{P}_E$ qui, à un point x de H fait correspondre un préordre total sur les composantes :

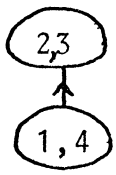
$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{P}_E \\ x = (x_1, \ldots, x_n) & & \varphi(x) = \{(i,j) \in E \times E \ / \ x_i \leqslant x_j\} \end{array}$$

$\varphi(x)$ a au plus deux classes. On dit que $\varphi(x)$ est le préordre attaché à x.

Exemples : $(n = 4)$

si $x = (0, 0, 0, 0)$ alors $\varphi(x) = [1 \equiv 2 \equiv 3 \equiv 4]$

si $x = (0, 1, 1, 0)$ alors $\varphi(x) =$



On étend la définition de φ : à une partie X de H on fait correspondre le préordre $\varphi(X)$ défini par :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(H) & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{P}_E \\ X & & \varphi(X) = \bigcap_{x \in X} \varphi(x) \end{array}$$

$\varphi(X)$ a k classes, $1 \leqslant k \leqslant n$; on dit que $\varphi(X)$ est le préordre attaché à X.

Inversement on définit une application ψ de $\mathcal{P}_E$ dans $\mathcal{P}(H)$, par

$$\mathcal{P}_E \xrightarrow{\psi} \mathcal{P}(H)$$

$$P \qquad \psi(P) = \{x \in H : P \subseteq \varphi(x)\}$$
$$= \{x : \forall (i, j) \in P,\ x_i \leqslant x_j\}$$

On dit que les points x de $\psi(P)$ respectent le préordre P.

<u>Propriété 1</u>

(φ,ψ) est une correspondance de Galois

- évident d'après le paragraphe précédent.

<u>Propriété 2</u>

$f = \varphi \circ \psi$ est l'application identique

Il faut montrer que pour tout $P \in \mathcal{P}_E$ on a $P = \varphi \circ \psi\ (P)$

$$\varphi \circ \psi\ (P) = \bigcap_{x \in \psi(P)} \varphi(x)$$

Or on sait ([9],[20]) qu'un préordre P est égal à l'intersection de tous les préordres moins fins que lui

donc $f(P) = P$

On sait que $f = \varphi \circ \psi$ dans $\mathcal{P}_E$ et $g = \psi \circ \varphi$ dans $\mathcal{P}(H)$ sont des opérations de fermeture et que les deux ensembles de fermés de $\mathcal{P}_E$ et $\mathcal{P}(H)$ forment deux treillis duaux (voir rappels). L'ensemble des fermés de $\mathcal{P}_E$ est $\mathcal{P}_E$ lui-même d'après la proposition 2.

Les fermés de $\mathcal{P}(H)$ sont les images par ψ des préordres. Ce sont donc les ensembles de la forme $X = \psi(P)$.

<u>Définitions</u>

1) On dit que $x \in H$ respecte le préordre P si $x \in \psi(P)$ c'est-à-dire si $P \subseteq \varphi(x)$.

2) On appelle <u>tresse</u> un fermé de $\mathcal{P}(H)$ pour g, donc un ensemble de la forme $X = g(X) = \psi(P)$, c'est-à-dire l'ensemble de tous les points

3) Si $X \subseteq H$, on appelle $g(X)$ la tresse associée à X, c'est-à-dire la plus petite tresse qui contient X.

Soit $\mathcal{T}$ le treillis des tresses; il est dual du treillis des préordres sur E. On définit l'union ($\vee$) et l'intersection ($\wedge$) de deux tresses par :

$$T_1 \wedge T_2 = T_1 \cap T_2$$

$$T_1 \vee T_2 = g(T_1 \cup T_2)$$

De plus en notant P_1 et P_2 les préordres associés à T_1 et T_2 et $\overline{P_1 \cup P_2}$ la fermeture transitive de $P_1 \cup P_2$:

$$T_1 \wedge T_2 = \psi(P_1) \wedge \psi(P_2) = \psi(\overline{P_1 \cup P_2})$$

$$T_1 \vee T_2 = g(\psi(P_1) \cup \psi(P_2)) = \psi(P_1 \cap P_2)$$

Rappelons enfin que du fait de la correspondance de Galois entre $\mathcal{P}_E$ et $\mathcal{P}(H)$ on a la relation suivante quels que soient P_1, P_2 de $\mathcal{P}_E$

$$P_1 \subseteq P_2 \Longrightarrow \psi(P_2) \subseteq \psi(P_1)$$

<u>Définitions</u>

<u>Définition préliminaire</u>

On appelle <u>fonction attachée</u> à un ensemble X de H, la fonction caractéristique du complémentaire de X dans H. Si X est une tresse, c'est-à-dire s'il existe un préordre P tel que $X = \psi(P)$, on parlera de fonction attachée à X ou au préordre P. Cette fonction est booleenne.

<u>Notation</u> : On note $f(X)$ cette fonction ou encore $f(X)$ ou $f(P)$ si $X = \psi(P)$.

Définitions équivalentes

Les trois définitions suivantes d'une tresse sont équivalentes. Dans les paragraphes suivants nous démontrons 1 => 2 => 3 => 1. (prorpiétés 3, 4 et 5).

Définition 1 : Tresse et préordre

Une tresse est un ensemble X de la forme $X = \psi(P)$, c'est-à-di l'ensemble de tous les points de H respectant le même préordre P.

Définition 2 : Tresse et treillis

Une tresse est un sous-treillis de H contenant ses deux pôles

Définition 3 : Tresse et fonction

Une tresse est un ensemble X tel que les monomes premiers de la fonction f(X) qui lui est attachée soient tous de la forme ij', produit d'une variable sous forme primée et d'une variable sous forme non primée ($i, j \in E$).

2.2 : Tresses et treillis

Cas particuliers : Dans P_E on note Δ l'élément supremum, c'est-à-dire le préordre le moins fin, celui qui n'a qu'une seule classe.

$\psi(\Delta)$ est constitué des deux pôles de H, le point (00, ... 0) et le point (11, ... 1). $\psi(\Delta)$ est la diagonale de H. On note $D = \psi(\Delta)$. De même si $\cup$ est l'élément infimum de P_E, alors $\psi(\cup) = H$.

Remarque :

Soit $T = \psi(P)$ la tresse associée à un préordre P; alors $T = \psi(P) \supseteq D$.

En effet $P \subseteq \Delta$ implique $\psi(P) \supseteq D$.

Propriété 3 : Une tresse est un sous-treillis de H contenant

Démonstration : On sait que toute tresse contient D. Montrons qu'une tresse est un sous-treillis de H :

Soit $M = (m_1, \ldots, m_i, \ldots, m_n)$ et $M' = (m'_1, \ldots, m'_i, \ldots, m'_n)$ deux points de H appartenant à une tresse c'est-à-dire dont les coordonnées m_i et m'_i respectent un même préordre P; On a M et M' qui appartiennent à $\psi(P)$ et donc $P \subseteq \varphi(M)$ et $P \subseteq \varphi(M')$.

Supposons que $i \underset{P}{\leqslant} j$:

$$i \underset{P}{\leqslant} j \text{ implique } \begin{cases} m_i \underset{P}{\leqslant} m_j \\ \\ m'_i \underset{P}{\leqslant} m'_j \end{cases} \quad \text{implique } \begin{cases} \max(m_i, m'_i) \underset{P}{\leqslant} \max(m_j, m'_j) \\ \\ \min(m_i, m'_i) \underset{P}{\leqslant} \min(m_j, m'_j) \end{cases}$$

On a donc $P \subseteq \varphi(M \cup M')$ et $P \subseteq \varphi(M \cap M')$ d'où $M \cap M'$ et $M \cup M'$ appartiennent à $\psi(P)$.

<u>Propriété 4</u> :

Si T est un sous-treillis de H contenant ses deux pôles et f la fonction attachée à T, alors tous les monômes premiers de f sont de la forme ij', produit d'une variable sous forme primée et d'une variable sous forme non primée.

Supposons qu'un monôme premier m, de f, contienne deux variables x et y non primées :

$m = P\,xy\,Q$ P et Q sont des ensembles de variables sous forme quelconque.

alors il existe R_1 tel que $Px'yQR_1$ appartient à T -sinon $Px'yQ$ appartient à f et PyQ appartient à f- et il existe R_2 tel que $Pxy'QR_2$ appartienne à T. Posons $\overline{R} = \sup(R_1, R_2)$. On a alors $PxyQ\overline{R}$ qui appartient à T ce qui contredit le fait que PxyQ soit monôme premier de f.

2.3 : Tresses et fonctions

Propriété 5 : Soit T un sous-ensemble de H dont la fonction attachée s'écrit $f = \Sigma\, ij'$. Alors il existe un préordre P tel que $T = \psi(P)$.

On a $ij' = 1 \iff i > j$

et donc $ij' = 0 \iff i \leqslant j$

Soit $P_{ij} = [i \leqslant j]$ ce préordre élémentaire. Tout point $M(m_1, \ldots, m_n)$ de T respecte le préordre P_{ij}, quel que soit $\{i,j\} \subset E$, ce qui veut dire que le préordre sur $\{i,j\}$ associé à M par φ, est moins fin que P_{ij}. Donc M respecte le préordre $P = \bigcup_{ij}^{\wedge} P_{ij}$

Réciproquement soit M un point de $\psi(P)$. M respecte tout préordre élémentaire P_{ij} sur les composantes et on a donc pour M, $ij' = 0$, quel que soit $\{i,j\} \subset E$, donc $\Sigma ij' = 0$.

On vient donc de démontrer aux paragraphes 2.2 et 2.4 :

tresse = $\psi(P) \Longrightarrow$ sous treillis de H $\Longrightarrow f = \Sigma ij' \Longrightarrow$ tresse = $\psi(P)$

Applications :

1) On sait que le complémentaire d'une tresse se met sous forme d'une somme de monômes premiers : $f = \Sigma ij'$. Ainsi les monômes premiers de f, par leur simple écriture, permettent de retrouver le préordre P associé à la tresse.

2) Problème du codage : Soit X un protocole. Le problème est de recoder les questions de telle façon que X se structure en sous-treillis dans le nouvel hypercube ainsi défini.

Exemple :

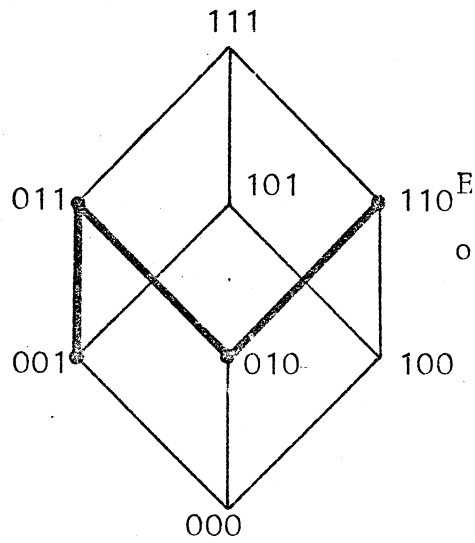
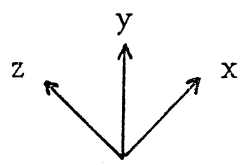


Fig. 1

En recodant z on obtient :



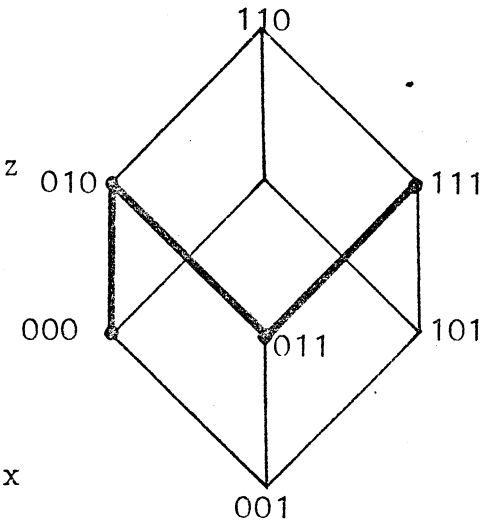


Fig. 2

Le complémentaire de X sur la figure 1 s'écrit :

$f = y'z' + xy' + xz$

X sera structurable en sous-treillis si et seulement si tout monôme premier se met sous la forme ij'. Ici une solution est évidemment de poser $z = z'$. f s'écrit alors (fig. 2) $f = y'z + xy' + xz'$.

Remarque : Partant d'une somme de monômes premiers à 2 variables ce problème peut avoir 0 solution, 1 solution (et sa duale) ou plusieurs solutions.

S'il y a plusieurs solutions, on a un partage de la fonction en plusieurs sous fonctions disjointes ou, ce qui est équivalent, partage du questionnaire en plusieurs sous-questionnaire disjoints ([9]).

Exemple : $f = (xy' + x'y) + (zt' + z't)$

On a deux codages $\begin{cases} x \longrightarrow x' \\ y \longrightarrow y' \end{cases}$ ou/et $\begin{cases} z \longrightarrow z' \\ t \longrightarrow t' \end{cases}$

<u>Monômes obligatoires, facultatifs, inutiles de la fonction attachée à une tresse</u>

Soit P le préordre associé à la tresse : $P = \hat{\bigcup}_{ij} P_{\{ij\}}$.
A chaque $P_{\{ij\}}$ sont associés 1 ou 2 monômes de la forme ij' que l'on essaie de classer en monômes obligatoires, facultatifs ou inutiles.

Ce problème est le même que celui consistant à recouvrir le préordre P par une famille minimale de préordres élémentaires $P_{\{ij\}}$ de telle façon que $P = \hat{\bigcup}_{ij} P_{ij}$ (relation de couverture).

On distingue 5 cas. On s'occupe d'abord des liaisons à l'intérieur d'une même classe de P (§ a et b), puis des liaisons entre classes (§ c, d et e).

a) Soit une classe de P formée de deux éléments x et y.

Les monômes xy' et $x'y$ sont obligatoires car ils ne peuvent être obtenus par consensus.

b) Soit une classe de P ayant plus de deux éléments.

Aucun monôme n'est obligatoire et aucun n'est inutile car

$xy' + yz' + zx' = x'y + y'z + z'x$

Tous ces monômes sont donc facultatifs.

<u>Remarque</u> : On peut noter que les monômes xy' peuvent évidemment être considérés comme des liaisons entre les éléments x et y, et constituent ainsi un réseau isovalent minimal ([16]).

<u>Propriété</u> : Soit k le nombre d'éléments dans une même classe. Alors il y a 2(k-1) monômes au plus et k au moins.

En effet, il faut au moins une liaison partant de chaque élément. Le minimum est obtenu lorsque les k éléments sont organisés en cycle unique.

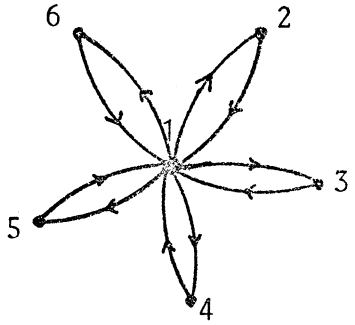
Montrons la valeur maximale par recurrence. On part d'un élément quelconque et on suit les flèches d'une manière arbitraire. On trouve obligatoirement un cycle de p éléments, $2 \leqslant p \leqslant n$. On remplace le cycle par un élément. On a toujours isovalence et minimalité. On a k-p connexions, k-p+1 éléments. Le maximum devient 2(k-p+1)-2

et $2(k-p+1)-2+p = 2k-p \leqslant 2n-2$ car $p \geqslant 2$.

Le maximum est atteint si p = 2 pour tout cycle, c'est-à-dire pour une organisation des éléments en rosace ([23]).

<u>Exemple</u> : n = 6;

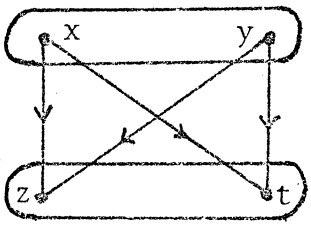
10 connexions ou monômes obligatoires



c) Soit deux classes consécutives chacune formée d'un élément (x pour l'une, y pour l'autre). Alors le monôme xy' est obligatoire car il ne peut être obtenu par consensus.

d) Soit deux classes consécutives, l'une au moins comprenant plusieurs éléments.

<u>Exemple</u> :

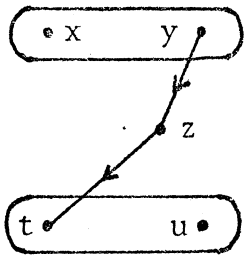


Les monômes de la forme xz', où x est d'une classe et z d'une autre classe, sont tous facultatifs : un seul, n'importe lequel, doit figurer dans toute base et permet de retrouver tous les autres (xz' implique xt', yz' et yt').

e) Classes non consécutives

Les monômes sont tous inutiles car ils s'obtiennent par consensus à partir des monômes obligatoires.

Exemple :



xt' est inutile car :

cons(xy', yz') = xz'

et cons(xz', zt') = xt'

Conséquence :

Pour un ordre, les monômes sont obligatoires (éléments consécutifs) ou inutiles (éléments non consécutifs, donc monômes obtenus par consensus).

2.4 : Tresses et préordres totaux

Relation d'ordre dans H

On dit que $M(m_1, \ldots, m_n) \leqslant M'(m'_1, \ldots, m'_n)$ si et seulement si $m_i \leqslant m'_i$ pour tout $i = 1, \ldots, n$.

Définition

Une chaîne de H est un ensemble totalement ordonné pour la relation d'ordre précédente.

Une chaîne est dite complète ou maximale si elle est formée de (n+1) points, incomplète sinon.

Propriétés

1) Si C est une chaîne complète, $\varphi(C)$ est un ordre total sur E.

L'ordre associé est l'ordre dans lequel varient les questions sur la chaîne, ou son dual.

A une chaîne incomplète on associe un préordre total sur E.

2) Soit P un ordre. Il s'exprime ([2]) comme intersection d'une famille $\{O_i\}$ d'ordres totaux. A chacun est associé une chaîne complète de la tresse $T = \psi(P)$ et réciproquement.

Définition 4 : Tresse et préordres totaux

Une tresse est un ensemble de chaînes donc de préordres totaux tels que si deux préordres totaux sont présents dans la tresse, alors tous les "intermédiaires" le sont aussi.

L'équivalence de cette quatrième définition avec les trois précédentes est montrée dans ([9], [20]). Ceci revient à définir une tresse comme un fuseau de préordre ([20]). L'un des intérêts de cette quatrième équivalence réside dans le fait que si un préordre total O, est moins fin qu'un préordre P, alors la chaîne $\psi(O)$ est contenue dans la tresse $\psi(P)$, la réciproque étant vraie. Ce résultat est évident ici d'après les propriétés de la correspondance de Galois (φ, ψ) entre $\mathcal{I}(H)$ et $\mathcal{P}_E$. (paragraphe 2 ci-dessus).

Les notions d'intermédiaire, de fuseaux d'ordres, parties convexes et diverses dualités sont développées dans ([20]). Nous n'y revenons pas ici.

CHAPITRE II

TRESSES ET PREORDRES, TRESSES ET TREILLIS

DANS UN PRODUIT DIRECT D'ORDRES TOTAUX

Introduction

De nombreux questionnaires sont composés de questions ayant plus de 2 modalités de réponses et pour conserver les modèles introduits en algèbre de Boole, on est obligé de bipartitionner l'ensemble des modalités de réponses de chaque question, ou bien de poser un nombre élevé de questions à 2 réponses.

La première méthode conduit à une perte d'information très discutable :

- des protocoles différents se réduisent au même protocole dans un hypercube booleen.

- Comment bipartitionner l'ensemble des modalités ?

Si on a par exemple les quatre réponses possibles suivantes :

- très satisfait
- satisfait

- mécontent
- très mécontent

On regroupera les deux premières réponses ensemble et les deux dernières ensemble. Mais si on prévoit une cinquième réponse possible pour les indifférents, faut-il les regrouper plutôt avec les satisfaits ou plutôt avec les mécontents ?

Un exemple de ce type de difficulté est donné par le questionnaire de Suchman repris dans [6] où l'on demande à des soldats américains s'ils ont eu certaines réactions durant la dernière guerre mondiale, en prévoyant qu'ils ont pu avoir ces réactions :

a) souvent
b) quelquefois
c) une fois
d) jamais
e) pas de réponse

Sur les dix réactions possibles, pour 8 d'entre elles on regroupe a et b d'une part, c, d et e d'autre part et pour les deux autres c est regroupé avec a et b.

Remarquons encore que dans [8] on passe de questions ouvertes à des questions binaires en analysant les réponses de chaque individu à chacune des questions; ceci laisse entière liberté au questionné qui n'a pas à s'insérer dans un cadre de réponse pré-établi.

La deuxième méthode alourdit considérablement le questionnaire, puisque à chaque question ayant p modalités de réponses, on doit associer k(tel que $2^k > p$) questions à 2 réponses. Dans l'exemple précédent (avec 5 modalités), trois questions binaires sont nécessaires. Ceci justifie une étude avec modalités multiples.

2.1 : Tresses et préordres

2.1.1 : Construction, définition

Soit $E = \{1, 2, \ldots, n\}$ et $L_i = \{0, 1, \ldots, p-1\}$. On pose $H = \prod_{i=1}^{n} L_i$. H, treillis distributif produit direct de n chaînes L_i, est encore appelé algèbre à p modalités ou algèbre de Post ou hyperpavé. Nous utiliserons ici le terme d'hyperpavé. On note H(n, p) ou H l'hyperpavé, et $x = (x_1, \ldots, x_n)$ un élément de H.

Soit $\mathcal{P}_E$ le treillis des préordres sur E.

On définit une application φ de H dans $\mathcal{P}_E$ qui, à un point x de H fait correspondre un préordre total sur les composantes :

$$H \xrightarrow{\quad\varphi\quad} \mathcal{P}_E$$

$$x = (x_1, \ldots, x_n) \qquad \varphi(x) = \{(i, j) \in E \times E \,/\, x_i \leqslant x_j\}$$

Exemple : $n = 8$, $p = 3$

$$x = (0, 2, 1, 1, 0, 2, 2, 0)$$

$\varphi(x)$ a au plus q classes, avec $q = \min(p, n)$

On étend la définition de φ : à une partie X de H on fait correspondre le préordre $\varphi(X)$ défini par :

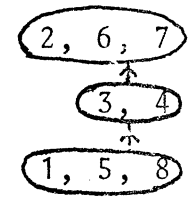


Fig. 1

$$\mathcal{P}(H) \xrightarrow{\quad\varphi\quad} \mathcal{P}_E$$

$$X \qquad \varphi(X) = \bigcap_{x \in X} \varphi(x)$$

et on définit : $\mathcal{P}_E \xrightarrow{\quad\psi\quad} \mathcal{P}(H)$

$$P \qquad \psi(P) = \{x \in H : P \subset \varphi(x)\}$$

$$= \{x \in H : \forall (i,j) \in P, x_i \leqslant x_j\}$$

On peut alors utiliser les résultats du chapitre I.

Proposition 1 : (φ, ψ) est une correspondance de Galois.

<u>Proposition 2</u> : $f = \varphi \circ \psi$ est l'application identique. Il suffit de montrer que $\varphi(H)$ contient l'ensemble des coatomes de P_E.

En effet soit P_o un coatome de P_E.

Il s'écrit (Fig. 2) :

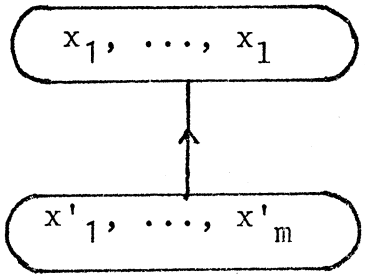


Fig. 2

Le point x_o obtenu en affectant 1 aux composantes $x_i (i = 1, \ldots, 1)$ et 0 aux composantes $x'_j (j = 1, \ldots, m)$ vérifie bien $P_o = \varphi(x_o)$.

Donc $\varphi(H) \supseteq \{\text{coatomes de } P_E\}$ et pour tout P, $\varphi \circ \psi(P) = P$.

On sait que $f = \varphi \circ \psi$ dans P_E et $g = \psi \circ \varphi$ dans $P(H)$ sont des opérations de fermeture et que les deux ensembles de fermés de P_E et $P(H)$ forment deux treillis duaux (voir rappels). L'ensemble des fermés de P_E est P_E lui-même d'après la proposition 2.

Les fermés de $P(H)$ sont les images par ψ des préordres. Ce sont donc les ensembles de la forme $X = \psi(P)$

<u>Définitions</u>

1) On dit que $x \in H$ respecte le préordre P si $x \in \psi(P)$ c'est-à-dire si $P \subseteq \varphi(x)$.

2) On appelle <u>tresse</u> un fermé de $P(H)$ pour g, donc un ensemble de la forme $X = g(X) = \psi(P)$, c'est-à-dire l'ensemble de tous les points de H respectant le même préordre P.

3) Si $X \subseteq H$, on appelle $g(X)$ la tresse associée à X, c'est-à-dire la plus petite tresse qui contient X. (exemple Fig. 3).

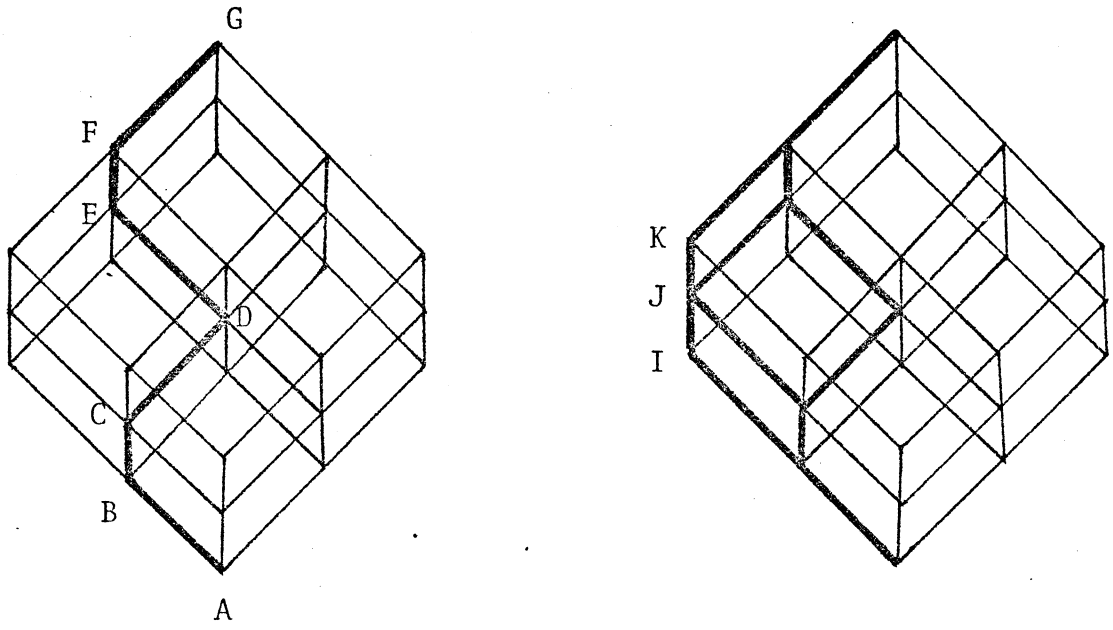


Fig. 3

On a sur la figure 3 :

$$X = \{A, B, C, D, E, F, G\} \quad \text{et} \quad g(X) = X \cup \{I, J, K\}$$

$$\varphi(X) = [x \leqslant y \leqslant z]$$

Soit $\mathcal{T}$ le treillis des tresses, il est dual du treillis des préordres sur E. On définit l'union (V) et l'intersection (Λ) de deux tresses par :

$$T_1 \wedge T_2 = T_1 \cap T_2$$

$$T_1 \vee T_2 = g\,(T_1 \cup T_2)$$

De plus en notant P_1 et P_2 les préordres associés à T_1 et T_2 et $\overline{P_1 \cup P_2}$ la fermeture transitive de $P_1 \cup P_2$:

$$T_1 \wedge T_2 = \psi(P_1) \wedge \psi(P_2) = \psi(\overline{P_1 \cup P_2})$$

$$T_1 \vee T_2 = g(\psi(P_1) \cup \psi(P_2)) = \psi(P_1 \cap P_2)$$

<u>Notations</u> : On note $c(P)$ le nombre de classes du préordre P et $q = \min(c(P), p)$.

Soit $\varphi(H) = \{\varphi(M), M \in H\}$

$$F(P) = \{P' \in \mathcal{P}_E : P \subseteq P'\}$$
$$F^1(P) = F(P) \cap \varphi(H)$$

$F^2(P)$ = {préordres minimaux de $F^1(P)$, pour la relation d'ordre ($\subseteq$) dans $\mathcal{P}_E$ }.

<u>Lemme 1</u>

$\varphi(H)$ = {préordres totaux $P \in \mathcal{P}_E$ avec $c(P) \leqslant q_1$} où $q_1 = \min(n, p)$.

Il est clair que si $P \in \varphi(H)$ alors P est un préordre total qui ne peut avoir plus de n classes et plus de p classes.

Réciproquement à un préordre total $P \in \mathcal{P}_E$ ayant q' ($q' \leqslant q_1$) classes, on peut toujours associer un point x de H tel que $\varphi(x) = P$.

Soit P un préordre total ayant q' classes notées $c_1, \ldots, c_{q'-1}, c_{q'}$. Alors, puisque $q' \leqslant q_1 \leqslant p$, on peut affecter aux composantes de $c_i (1 \leqslant i \leqslant q')$ la valeur i et ainsi faire correspondre à P un point x de H tel que $\varphi(x) = P$.

<u>Lemme 1'</u>

$F^1(P) = F(P) \cap \varphi(H)$

= {préordres totaux $P_i \in \mathcal{P}_E$ avec $P \subseteq P_i$ et $c(P_i) \leqslant q = \min(c(P), p)$}

<u>Lemme 2</u>

$F^2(P)$ = {préordres totaux P_i, à q classes, $P \subseteq P_i$}

Soit P_2, préordre total ayant q classes et $P \subseteq P_2$. Supposons que P_2 ne soit pas un élément minimal de $F^1(P)$. Alors il existe $P_1 \in F^1(P)$ tel que $P_1 \subset P_2$ et $c(P_1) \leqslant q$.

On a $P_1 \subset P_2$ et donc P_1 est un préordre total auquel on a rajouté au moins un couple pour obtenir P_2. P_2 a donc au moins une classe de moins que P_1 et $c(P_1) > c(P_2) = q$, ce qui est impossible donc P_2 est minimal dans $F^2(P)$.

Réciproquement : soit $P_1 \in F^2(P)$. P_1 est un préordre total minimal dans $F^1(P)$. On sait que $c(P_1) \leqslant q$. Montrons que $c(P_1) = q$.

Supposons que $c(P_1) = k < q \leqslant c(P)$. Montrons qu'il existe alors un préordre total P_2 tel que $P \subseteq P_2 \subset P_1$ et $c(P_2) \leqslant q$ ce qui contredira la minimalité de P_1.

En effet, si $P \subset P_1$ alors les classes de P_1 sont union de classes de P. Il existe au moins une classe c_i de P_1, union d'au moins deux classes de P : $c_i = c_{i1} + c_{i2} + \ldots$

On pose $c'_i = c_{i1}$ et $c''_i = c_i - c_{i1}$. Soit P_2 le préordre total obtenu en remplaçant c_i par c'_i et c''_i : $c(P_2) = k+1 \leqslant q$ et $P_2 \subset P_1$, cqfd.

On a donc d'après la proposition 3 du paragraphe 2.4 :

$$\boxed{\psi(P) = \bigcup_{P_i \in F(P)} \psi(P_i) = \bigcup_{P_i \in F^1(P)} \psi(P_i) = \bigcup_{P_i \in F^2(P)} \psi(P_i)}$$

<u>Cas particuliers</u>

- p = 2 Si p = 2 alors $F^2(P)$ est l'ensemble des préordres

totaux à 2 classes moins fins que P et l'on a :

$$P = \bigcap_{P_i \in F^2(P)} P_i \qquad \psi(P) = \bigcup_{P_i \in F^2(P)} \psi(P_i)$$

- Ordres partiels : soit O un ordre partiel; alors $c(O) = n$ et $q = \min(p, n)$.

Supposons $n \leqslant p$; on a $q = n$ et $F^2(P)$ n'est autre que l'ensemble des ordres totaux O_i, moins fins que O et $\psi(O) = \bigcup_i \psi(O_i)$

2.1.2 : <u>Ordres, préordres totaux sur E et effectifs des tresses associées</u>

Soit $O = [1 \leqslant 2 \leqslant \ldots \leqslant n]$

$$\psi(O) = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in H : x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n\}$$

<u>Effectif d'une tresse associée à un ordre total en algèbre à p modalités</u>

On ne restreint pas le problème en supposant que l'ordre total sur E est $1 \leqslant 2 \leqslant \ldots \leqslant n$. Soit $N(n, p)$ le nombre de points de H respectant cet ordre total sur les n composantes.

$$N(n, p) = \sum_{i=0}^{p-1} N_i(n, p)$$

où $N_i(n, p)$ désigne le nombre de points respectant l'ordre et situés dans le (n-1) hyperpavé d'équation $x_n = i$.

On a $N_{p-1}(n, p) = N(n-1, p)$

et d'une façon générale $N_i(n,p) = N(n-1, i+1)$

On en déduit : $N(n, p) = N(n-1, p) + \underbrace{N(n-1,p-1)+\ldots+N(n-1,1)}_{N(n,\ p-1)}$

et $N(n, p) = N(n-1, p) + N(n, p-1)$

$N(n, p)$ se calcule facilement à partir de $N(n, 1) = 1$ et $N(1, p) = p$

et $N(n, p) = C^{n}_{p+n-1}$ (combinaisons avec répétitions)

Si $p = 2$, on a $C^{n}_{2+n-1} = n+1$ et on retrouve l'effectif d'une chaîne complète.

Effectif d'une tresse associée à un préordre total

Soit P un préordre total sur E ayant m classes d'équivalence; alors $|\psi(P)| = N(m, p)$.

En effet à un point de $\psi(P)$ on peut faire correspondre un point de $\psi(P')$, $\psi(P') \subseteq H(m, p)$, où P' est l'ordre total obtenu en prenant une composante quelconque dans chaque classe, et réciproquement.

$$|\psi(P')| = N(m, p) = C^{m}_{m+p-1}$$

En particulier, les coatomes sont caractérisés par 2 sous-ensembles A et $\bar{A}$ de E et $\Psi(P_{A\bar{A}}) = \{x \in H : \forall i \in A, \forall j \in \bar{A}, x_i = k$ et $x_j = k'$ avec $k \leqslant k'$ et $|\psi(P_{A\bar{A}})| = C^{2}_{p+1} = \frac{p(p+1)}{2}$

Les atomes sont définis par $P_{\{ij\}} = [i \leqslant j]$ (les autres composantes étant incomparables) et $\psi(P_{\{ij\}}) = \{x \in H : x_i \leqslant x_j\}$ et $|\psi(P_{\{ij\}})| = p^{n-2} C^{2}_{p+1} = \frac{p^{n-1}(p+1)}{2}$

2.1.3 : Plus grande tresse contenue dans un ensemble

Soit F un sous-ensemble de H contenant les points diagonaux $(i, i \ldots i)$, $0 \leqslant i \leqslant p-1$, et $P_1 = \bigcap_{M \in F} P_M$ le préordre associé. Soit

$T_1 = \psi(P_1)$. On peut se demander quelle est la plus grande tresse T_o (ou les plus grandes tresses car à priori il n'y a pas nécessairement unicité) contenue dans F, c'est-à-dire pour laquelle il n'existe pas de tresse T telle que $T_o \subset T \subset T_1$. Une telle tresse existe puisque F contient la tresse associée au préordre à une seule classe.

On pose $A = \{P_M / M \in F\}$

Considérons l'ensemble S de tous les préordres P_i de $F(P_1)$ vérifiant $\psi(P_i) \subset F$. On a $A \subset F(P_1)$ et $S \subset F(P_1)$.

<u>Remarque</u> : Si F est une tresse alors $A \subset S$ (réciproque fausse : contre exemple fig. 5).

Soit $P_M \in A$; $P_1 = \bigcap_{M \in F} P_M \subseteq P_M$ donc $\psi(P_M) \subseteq \psi(P_1) = F$ et $P_M \in S$.

<u>Propriété</u> : S est un sup-demi-treillis; en effet

$\psi(P_i)$ et $\psi(P_j) \subseteq F$ implique $\psi(\overline{P_i \cup P_j}) = \psi(P_i) \wedge \psi(P_j) \subseteq F$

donc $P_i, P_j \in S$ implique $\overline{P_i \cup P_j} \in S$

On recherche des tresses T_o telles qu'il n'existe pas de tresse T vérifiant $T_o \subset T \subset T_1$ ce qui revient à rechercher des préordres $P_o \in S$ tels qu'il n'existe pas de préordre $P \in S$ vérifiant

$$P_1 \subset P \subset P_o$$

P_o est un préordre minimal de S auquel correspond une tresse maximale incluse dans F. (exemple fig. 5).

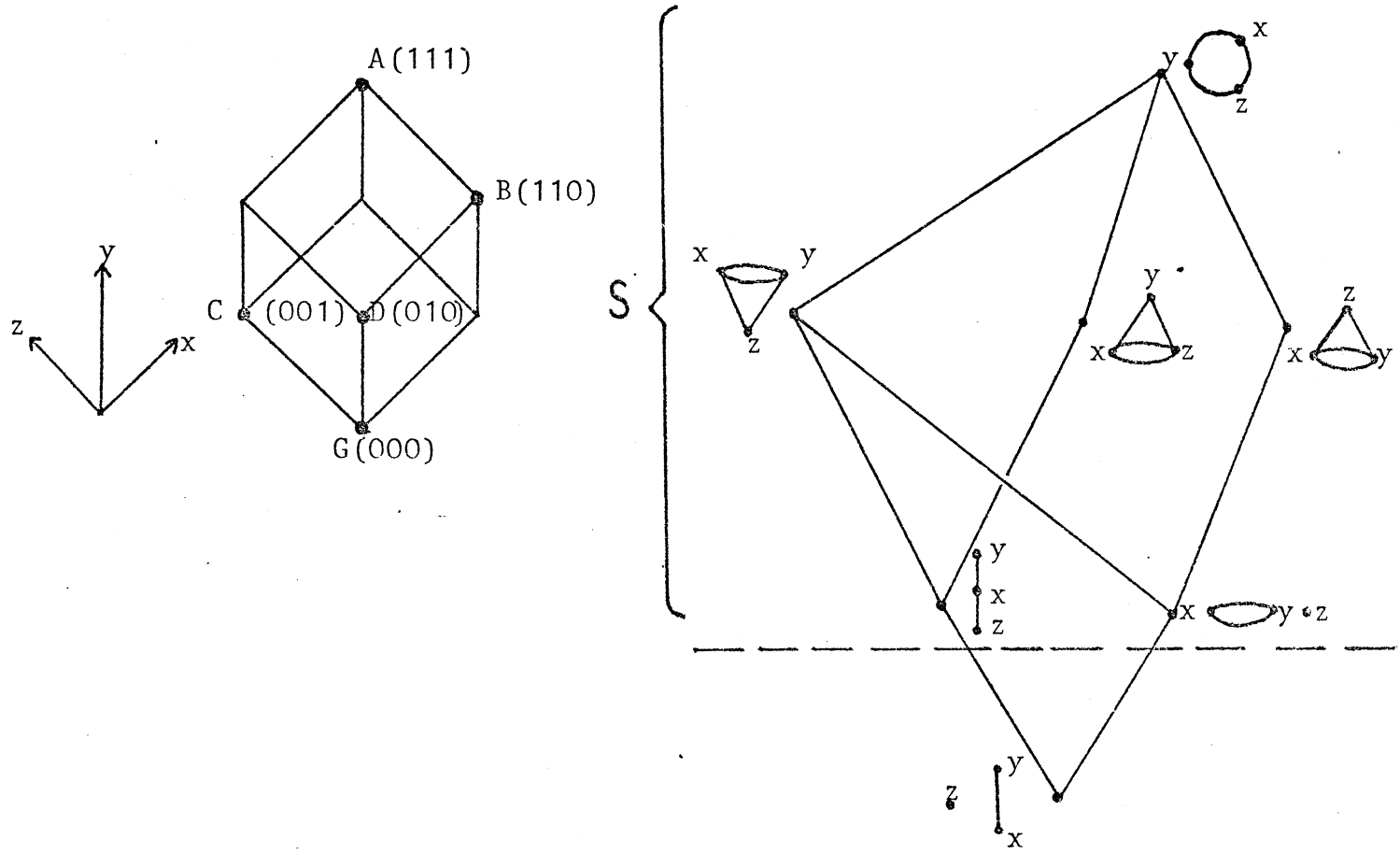


Fig. 5

On a 2 préordres minimaux : y x z et x y z auxquels correspondent deux tresses maximales : {A, B, D, G} et {A, B, C, G} .

2.1.4 : Conservation des tresses

Conservation des tresses par réduction de p

Définition : Sur l'ensemble {0, 1, ..., p-1} on définit une réduction notée R $[i_1, i_2, \ldots, i_l]$ avec $2 \leqslant l < p$ et $\{i_1, \ldots, i_l\} \subset \{0, 1, \ldots, p-1\}$ comme étant la suppression de certaines valeurs de {0, 1, ..., p-1} dont on ne garde que les valeurs $i_1, \ldots, i_l$.

On note $H' = H(i_1, \ldots, i_l)$ la réduction de H(n, p) à H(n, l).

Pour H on a défini plus haut les deux applications :

φ : $\mathcal{P}(H) \longrightarrow \mathcal{P}_E$

ψ : $\mathcal{P}_E \longrightarrow \mathcal{T}$ (ensemble des tresses de H)

On définit de même pour H' :

φ' : $\mathcal{P}(H') \longrightarrow \mathcal{P}_E$

ψ' : $\mathcal{P}_E \longrightarrow \mathcal{T}'$

avec quel que soit $A \subset H'$ alors $\varphi'(A) = \varphi(A)$

et quel que soit $P \in \mathcal{P}_E$ alors $\psi'(P) = \psi(P) \cap H'$

<u>Propriété</u>

Soit T une tresse de H et P le préordre associé; alors quelle que soit la réduction $R[i_1, \ldots, i_1]$, $T \cap H'$ est une tresse dans H' dont le préordre associé est P.

En effet, on a $\psi(P) = T$

donc $\psi'(P) = \psi(P) \cap H' = T \cap H'$

<u>Application</u> : Recherche du préordre associé à une tresse

Soit T une tresse de H et P le préordre associé. On prendra, d'après ce qui précède, la réduction la plus forte possible, soit R[i, j], pour i et j quelconques. L'hyperpavé restant, H', n'est autre que l'hypercube booleen à n dimensions.

On a : $P = \bigcap_{M \in T} P_M = \bigcap_{M \in H' \cap T} P_M$

Ainsi, on réduit de beaucoup le nombre de préordres dont on doit faire le produit pour calculer P. Par exemple, si P est un ordre total, $|T| = C^n_{n+p-1}$ et $|T \cap H'| = n+1$ (exemple fig. 6).

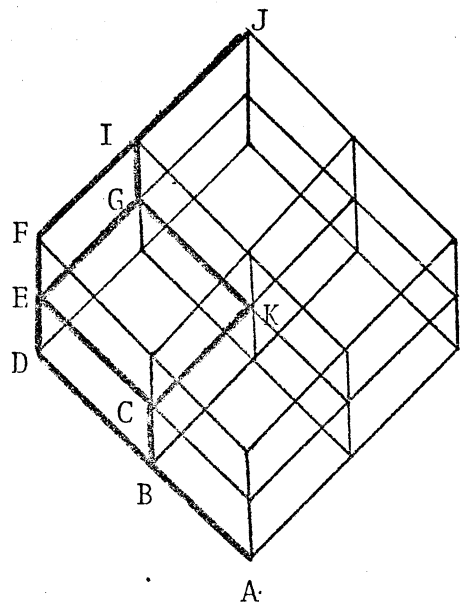


Fig. 6

Soit la tresse L = {A, B, C, D, E, F, G, K, I, J}

$$P = \varphi(L) = P_A \cap P_B \cap P_C \ldots P_I \cap P_J$$

grâce à la propriété précédente on peut écrire plus simplement :

$$\varphi(L) = P_A \cap P_B \cap P_C \cap P_K$$

$$\text{ou} \quad \varphi(L) = P_K \cap P_G \cap P_I \cap P_J$$

$$\text{ou} \quad \varphi(L) = P_A \cap P_D \cap P_F \cap P_J$$

L est la tresse de H associée à P. L'ensemble {A, B, C, K} est la tresse de H(0, 1) associée à P; {K, G, I, J} est la tresse de H(1, 2) et {A, D, F, J} est la tresse de H(0, 2) associée à P.

<u>Remarque</u>

Soit L un sous-ensemble de H, $P = \varphi(L)$, tel que pour toute réduction $R(i_1, i_2, \ldots, i_1)$ alors $L \cap H(i_1, \ldots, i_1)$ soit la tresse de $H(i_1, \ldots, i_1)$ associée à P. Alors L n'est pas forcément la tresse de H associée à P.

<u>Exemple</u> : Soit L = {A, B, C, D, F, G, I, J, K} (mêmes points que dans l'exemple précédent, avec E en moins). On considère R(0, 1)

et l'ensemble {A, B, C, K} puis R(0, 2) et l'ensemble {A, D, F, J} et enfin R(1, 2) et {K, G, I, J} . Ces trois ensembles sont les trois tresses de H(0, 1), H(0, 2) et H(1, 2) associées au préordre $[x \leqslant y \leqslant z]$ et L n'est pas une tresse puisque $L \neq g(L) = L \cup \{E\}$.

Remarque :

Les réductions recouvrent tous les points de H seulement si $n < p$ et dans ce cas seul la réciproque de la remarque précédente est vraie.

Si $n = p$, le nombre de points de H non recouverts par $H(i_1, \ldots, i_1)$ est n! : en effet chaque point non recouvert correspond à un ordre total sur les n composantes.

Exemple ($n = 3$, $p = 3$) :

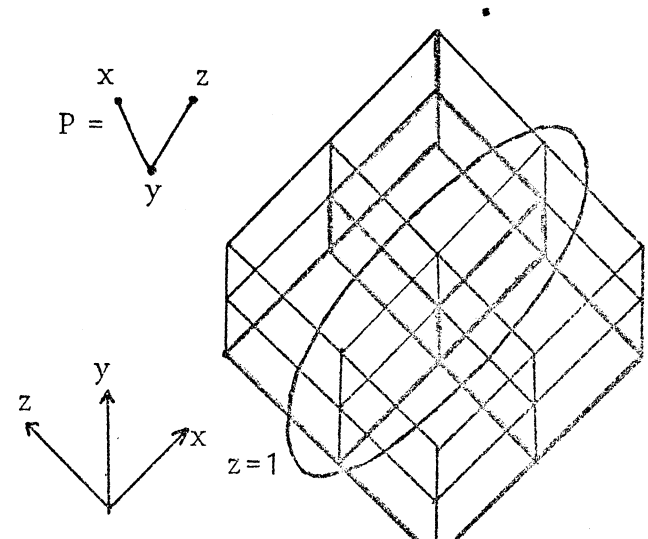
Les 6 = 3! points non recouverts sont : (x désigne la première composante, y la seconde et z la troisième).

(021) : $x \leqslant z \leqslant y$	(201) : $y \leqslant z \leqslant x$
(012) : $x \leqslant y \leqslant z$	(210) : $z \leqslant y \leqslant x$
(102) : $y \leqslant x \leqslant z$	(120) : $z \leqslant x \leqslant y$

Conservation des tresses par restriction à un (k-1) pavé

Soit P un préordre et $T = \psi(P)$. Soit $x_k (1 \leqslant k \leqslant n)$ une composante quelconque et $l (0 \leqslant l \leqslant p-1)$ une valeur quelconque de cette composante.

Alors la restriction de T au (n-1) hyperpavé d'équation $x_k = l$ n'est pas forcément une tresse pour ce (n-1) hyperpavé. Dans l'exemple de la figure 7, l'intersection de T avec le (n-1) hyperpavé $z = 1$ n'est pas une tresse.



Par contre soit x une composante telle qu'il n'existe pas d'autres composantes x' vérifiant $x \underset{p}{\leqslant} x'$; alors l'intersection de T avec le (n-1) hyperpavé d'équation $x = p$ est une tresse pour ce (n-1) hyperpavé.

De même soit y une composante telle qu'il n'existe pas y' vérifiant $y' \underset{p}{\leqslant} y$; alors l'intersection de T avec le (n-1) hyperpavé d'équation $y = 0$ est une tresse pour ce (n-1) hyperpavé. Dans ces 2 cas le préordre P' associé est la restriction de P aux (n-1) composantes restantes.

Conservation des tresses par projection

Les tresses se conservent par projection sur un k-hyperpavé ($2 \leqslant k \leqslant n$), le préordre P' associé étant la restriction de P aux k composantes restantes.

2.2 : Tresses et treillis

Notations

Dans $\mathcal{P}_E$ on note Δ l'élément supremum, c'est-à-dire le préordre le moins fin, celui qui n'a qu'une seule classe.

$$\psi(\Delta) = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in H : x_i = k, \forall i \in E, \text{ et } 0 \leqslant k \leqslant p-1\}$$

$\psi(\Delta)$ est la diagonale de H. On note $D = \psi(\Delta)$

De même si U est l'élément infimum de $\mathcal{P}_E$, alors $\psi(U) = H$.

Remarque

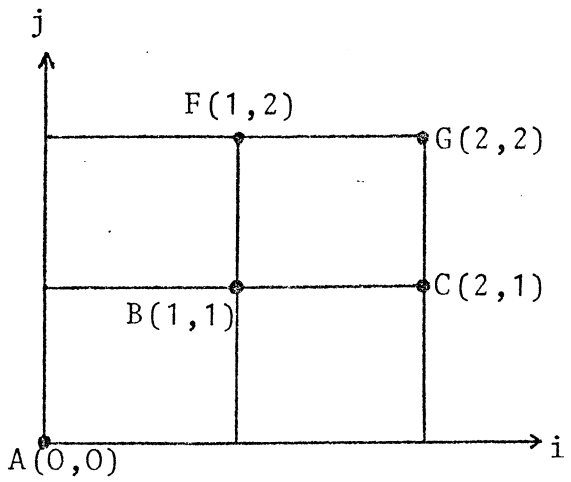
Soit $T = \psi(P)$ la tresse associée à un préordre P; alors $T = \psi(P) \supseteq D$.

En effet $P \subseteq \Delta$ implique $\psi(P) \supseteq D$.

Propriété

Une tresse est un sous-treillis de H contenant D.

On ne reprend pas la démonstration qui est la même que celle du cas booleen (ch. I, § 2.2). Par contre, si la réciproque est vraie à 2 valeurs, il n'en est pas de même ici comme le montre l'exemple de la figure 4 :



$D = \{A, B, G\}$

$K = \{A, B, C, F, G\}$ et $D \subseteq K$

$P_C = (j \leqslant i)$

$P_F = (i \leqslant j)$, où i et j désignent deux éléments différents, quelcon de E.

Fig. 4

Donc $\varphi(K)$ est le préordre "vide" c'est-à-dire pour lequel i et j sont incomparables; alors $\psi(\varphi(K))$ est formé des 9 points.

K est donc un sous-treillis qui contient D sans être une tresse car $g(K) \neq K$.

2.2.1 : Propriétés des sous-treillis de H

Lemme 1 : Soit deux triplets (x_1, x_2, x_3), (a_1, a_2, a_3) d'éléments de $[0, p-1]$; il existe i et $j \in \{1, 2, 3\}$ tels que:soit $x_i \leqslant a_i$ et $x_j \leqslant a_j$, soit $x_i \geqslant a_i$ et $x_j \geqslant a_j$.

Définition : Soit $x = (x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) \in H$, et $A \subseteq E$. On pose $\mathrm{proj}_A x = \{x_i, i \in A\}$. On dit que deux éléments x et $y \in H$ sont associés sur A si et seulement si $\mathrm{proj}_A x = \mathrm{proj}_A y$.

Si $X \subset H$, on pose $\text{proj}_A X = \{\text{proj}_A x,\ x \in X\}$. On dit que y est associé à X si et seulement si y est associé à un élément de X, c'est-à-dire si $\text{proj}_A y \in \text{proj}_A X$. (On note y^X).

Lemme 2 :

Soit T un sous-treillis de H et $y \in H$. S'il existe $k \geqslant 2$, tel que, quel que soit $A \subset E$, avec $|A| = k$, il existe x^A appartenant à T associé à y sur A, alors quel que soit $B \subset E$, $|B| = k+1$, il existe x^B appartenant à T, associé à y sur B.

. Vrai pour $n = 2$; supposons $n > 2$

. Soit $y = (y_1, \ldots, y_i, \ldots, y_n)$ et $B = \{1, \ldots, k+1\}$

Posons $A_1 = \{1, \ldots, k\}$

$A_2 = \{1, \ldots, k-1, k+1\}$

$A_3 = \{1, \ldots, k-2, k, k+1\}$

Il existe x^{A_1}, x^{A_2} et x^{A_3} vérifiant :

$x^{A_1} \in T$ et $x^{A_1} = (y_1, \ldots, y_k, a_1, \ldots)$

$x^{A_2} \in T$ et $x^{A_2} = (y_1, \ldots, y_{k-1}, a_2, y_{k+1}, \ldots)$

$x^{A_3} \in T$ et $x^{A_3} = (y_1, \ldots, y_{k-2}, a_3, y_k, y_{k+1}, \ldots)$

Considérons les deux triplets (a_1, a_2, a_3) et (y_{k-1}, y_k, y_{k+1})

D'après le lemme 1 on a par exemple $y_k \leqslant a_2$ et $y_{k+1} \leqslant a_1$

d'où $x^{A_1} \cap x^{A_2} = (y_1, \ldots, y_k, y_{k+1}, \ldots) \in T$

donc il existe x^B associé à y sur B.

Théorème 1

Soit T un sous-treillis de H et $y \in H$. S'il existe k, $k \geqslant 2$, tel que quel que soit $A \subset E$, avec $|A| = k$, il existe $x \in T$ associé à y sur A, alors y appartient à T.

En effet d'après le lemme 2 on déduit que la propriété est vraie pour tout $k' \geqslant k$ et donc pour $k' = n$, ce qui signifie qu'il existe $x' \in T$, associé à y sur E et donc $y = x' \in T$.

Corollaire 1

Soit T un sous-treillis de H et $y \notin T$; alors il existe $A \subset E$, $|A| \geqslant 2$, et $\mathrm{proj}_A(y) \notin \mathrm{proj}_A(T)$, c'est-à-dire que y n'est associé à aucun élément de T sur A.

Corollaire 2

Soit T un sous-treillis de H et $y \in H$; si quel que soit i, $j \in E$ il existe $x \in T$, associé à y sur $\{i, j\}$, alors $y \in T$.

Corollaire 2'

Soit T un sous-treillis de H et $y \notin T$; alors il existe i et $j \in E$ tel que $\mathrm{proj}_{ij}(y) \notin \mathrm{proj}_{ij}(T)$. (On note proj_{ij} la projection sur $L_i \times L_j$).

Corollaire 3

Si deux sous-treillis de H, T_1 et T_2 vérifient :

pour tout $\{i, j\} \in E$, $\mathrm{proj}_{ij}(T_1) = \mathrm{proj}_{ij}(T_2)$

alors $\quad T_1 = T_2 \quad$ (évident)

Conséquence

Soit A un sous-treillis de H et $A_{ij} = \mathrm{proj}_{ij}(A)$

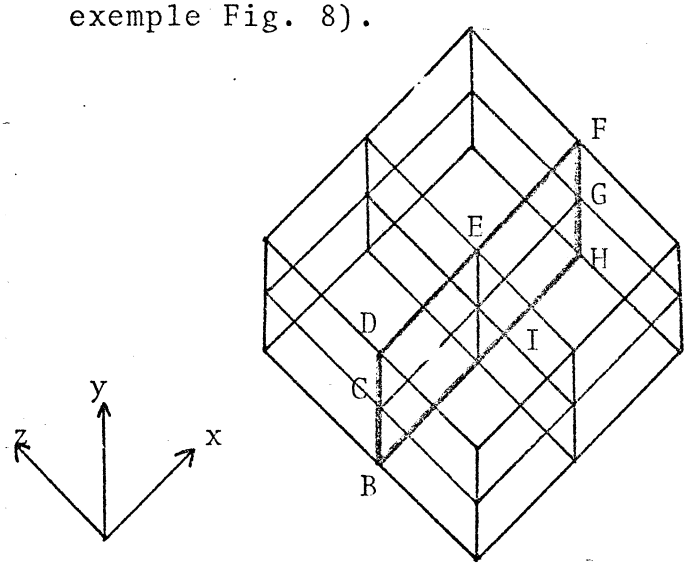
alors $$A = \bigcap_{ij} \mathrm{proj}_{ij}^{-1}(A_{ij}) \qquad (1)$$

et $$\complement_H A = \bigcup_{ij} \complement_H \mathrm{proj}_{ij}^{-1}(A_{ij})$$

Soit f_{ij} la fonction caractéristique du complémentaire de $\mathrm{proj}_{ij}^{-1}(A_{ij})$ et f celle du complémentaire de A

Alors $\boxed{f = \Sigma f_{ij}}$

Ceci généralise le résultat obtenu en algèbre de Boole ([9]) où le complémentaire d'un sous-treillis était caractérisé par une fonction f de la forme $f = \Sigma\, ij'$. Mais si en algèbre de Boole la réciproque était vraie, dans un hyperpavé un ensemble vérifiant la propriété (1) n'est pas obligatoirement un sous-treillis (contre-exemple Fig. 8).



$A = \{B, C, D, E, F, G, H, I\}$

On a bien :

$$A = \bigcap_{ij} \mathrm{proj}_{ij}^{-1}(A_{ij})$$

et A n'est pas un sous-treillis

Fig. 8

Autres conséquences équivalentes :

1) Soit T un sous-treillis de H et $x = (x_1, \ldots, x_n) \notin T$.

Alors on peut faire varier (n-2) variables x_i de x convenablement choisies sans arriver à un point de T.

2) Le complémentaire d'un sous-treillis est union de (n-2) pavés.

<u>Théorème 2</u>

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble $A \subset H$ respecte un préordre P, est que quels que soient i et $j \in E$, $\mathrm{proj}_{ij}(A) \subset \mathrm{proj}_{ij}(\psi(P))$

nécessaire : $A \subset \psi(P)$ implique que pour tout $(i, j) \in E$:

$$\mathrm{proj}_{ij}(A) \subset \mathrm{proj}_{ij}(\psi(P))$$

suffisant : découle immédiatement du théorème 1 :

$\mathrm{proj}_{ij}(A) \subset \mathrm{proj}_{ij}(\psi(P))$, quels que soient i et $j \in E$, implique $A \subset \psi(P)$ car $\psi(P)$ est un sous-treillis de H. c.q.f.d.

2.2.2 : Caractérisation (géométrique des tresses)

Lemme

Soit P un préordre, i et j deux composantes quelconques de E et $P_{\{ij\}}$ la restriction de P à $\{i,j\}$.

alors $\mathrm{proj}_{ij}(\psi(P)) = \mathrm{proj}_{ij}(\psi(P_{\{ij\}}))$

1) Soit $\psi(P)$ et $P = \bigcup_{\{i,j\}\in E^2} P_{\{ij\}}$; donc P est moins fin que $P_{\{ij\}}$ et $P_{\{ij\}} \subset P$ implique $\psi(P) \subset \psi(P_{\{ij\}})$.

donc $\mathrm{proj}_{ij}(\psi(P)) \subset \mathrm{proj}_{ij}(\psi(P_{\{ij\}}))$

2) Soit $M = (x_i, x_j)$ un point de $L_i \times L_j$ respectant le préordre $P_{\{ij\}}$. Alors il existe un point $A = (11\ldots 1x_i 1\ldots 1x_j 1\ldots 11)$ appartenant à $\psi(P)$ tel que $\mathrm{proj}_{ij}(A) = M$; il est clair que $A \in \psi(P)$

donc $\mathrm{proj}_{ij}(\psi(P_{\{ij\}})) \subset \mathrm{proj}_{ij}(\psi(P))$

Ce résultat nous sera utile pour la démonstration du théorème suivant.

Définition : Dans $L_i \times L_j$ on appelle diagonale principale l'ensemble des points $M(x_i, x_j)$ tels que $x_i = x_j$; d'autre part tous les points situés du même côté de la diagonale principale sont caractérisés par $x_i \leqslant x_j$ ou $x_i \geqslant x_j$.

Théorème 3

Soit F un sous-treillis de H.

Une condition nécessaire et suffisante pour que F soit une tresse est que quels que soient i et j appartenant à E, les projections de F dans tous les 2-pavés $L_i \times L_j$, contiennent la diagonale principale, et que si elles contiennent un point situé hors de cette diagonale principale, alors elles contiennent tous les points situés du même côté de la diagonale principale que ce point.

nécessaire :

Soit F une tresse : il existe un préordre P tel que $F = \psi(P)$ et F est un sous-treillis de H. Soit i et j deux composantes de E. $P_{\{i,j\}}$ ne peut être que :

a) $i \equiv j$ si i et j sont équivalents et $\mathrm{proj}_{ij}(\psi(P_{\{ij\}})$ occupe la diagonale principale de $L_i \times L_j$.

b) i et j incomparables et $\mathrm{proj}_{ij}(\psi(P_{\{i,j\}}))$ occupe tout $L_i \times L_j$.

c) $i \leqslant j$ et $\mathrm{proj}_{ij}(\psi(P_{\{i,j\}}))$ devient :

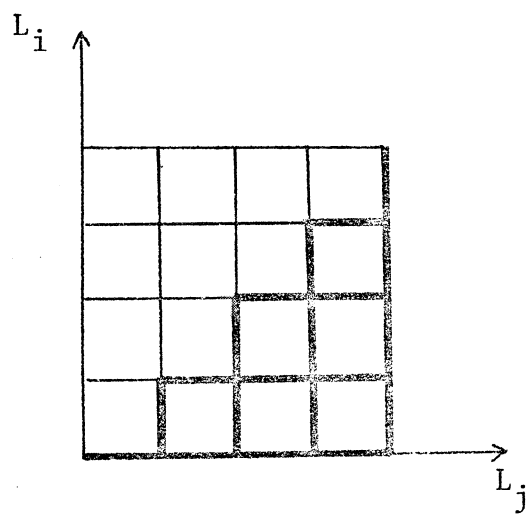


Fig. 9

D'autre part on sait que

$\mathrm{proj}_{ij}(\psi(P)) = \mathrm{proj}_{ij}(\psi(P_{\{ij\}}))$

La condition nécessaire est donc démontrée.

<u>suffisante</u> :

Soit F un sous-treillis vérifiant la condition de l'énoncé. Montrons que F est une tresse, c'est-à-dire que tout point de F respecte un certain préordre P et que tout point qui respecte P ou un préordre moins fin appartient à F.

De la projection de F dans les 2-pavés $L_i \times L_j$ on déduit $\frac{n(n-1)}{2}$ préordres sur i et j notés $P_{\{ij\}}$, que respectent tous les points de F, car $F \subset \psi(P_{\{ij\}})$. Donc $F \subset \bigcap_{ij} \psi(P_{\{ij\}}) = \psi(\bigcup_{ij} P_{\{ij\}})$

Soit $P = \bigcup_{\{i,j\} \in E \times E} P_{\{ij\}}$

Soit $M \in \psi(P)$. Alors $M \in \psi(P_{\{ij\}})$ quels que soient i et j, donc $\mathrm{proj}_{ij}(M) \in \mathrm{proj}_{ij}(F)$ et ce, quel que soit i et j. Donc d'après le théorème 1, $M \in F$.

Donc F est une tresse, et $F = \psi(P) = \bigcap_{ij} \psi(P_{\{ij\}}) = \psi(\bigcup P_{\{ij\}})$.

CHAPITRE III

TRESSES ET FONCTIONS

DANS UN PRODUIT DIRECT D'ORDRES TOTAUX

Introduction

On a vu au chapitre précédent que les fonctions attachées aux tresses en tant que sous-treillis de H, s'écrivent $f = \Sigma f_{ij}$ et que cette écriture généralise la forme $f = \Sigma ij'$ obtenue en algèbre de Boole.

Il reste à définir et construire de telles fonctions capables de représenter les tresses dans un produit direct d'ordres totaux, comme les fonctions booleennes de la forme $\Sigma ij'$ représentent les tresses en algèbre de Boole.

C'est l'objet de ce chapitre.

1. DEFINITIONS, NOTATIONS ET PREMIERES PROPRIETES.

On se place dans $H = \prod_{i=1}^{n} L_i$, où $L_i = \{0, 1, \ldots, p-1\}$. On note $x = (x_1, \ldots, x_n)$ un point de H; x_i désigne un point quelconque de L_i.

Définition

On appelle fonction monotone, croissante ou décroissante, toute application monotone f_i, de L_i dans $\{0, 1\}$. On se donne f_i par la suite de ses p valeurs.

Exemple, pour $p = 6$: $f_i = (001111)$

On dit que f_i est égale à 1 si $f_i(x_i) = 1$, pour tout x_i de L_i.

Définition

On appelle monôme à arguments rangés, le produit de n fonctions $f_1, \ldots, f_n$ de $L_1, \ldots, L_n$ dans $\{0, 1\}$, dont $(n-2)$ sont égales à 1, les deux autres étant l'une croissante et l'autre décroissante.

La valeur d'un monôme à arguments rangés en un point $x = (x_1, \ldots, x_n)$ de H est donnée par le produit booléen $\prod_{i=1}^{n} f_i(x_i)$.

Définition

On appelle ensemble associé à un monôme à arguments rangés, l'ensemble des points de H pour lesquels la valeur du monôme est égale à 1. Un monôme à arguments rangés prend donc les mêmes valeurs que la fonction caractéristique de l'ensemble qui lui est associé.

Notations

On ne conserve dans la notation d'un monôme à arguments rangés que les deux indices i et j des deux fonctions qui ne sont pas égales à 1; on écrit $m_{ij} = [f_i \; f_j]$.

L'ensemble associé à m_{ij} est noté $\{m_{ij}\}$. D'une façon générale, étant donnée f une fonction de H dans {0, 1}, on note

$$\{f\} = \{x \in H \ / \ f(x) = 1\} .$$

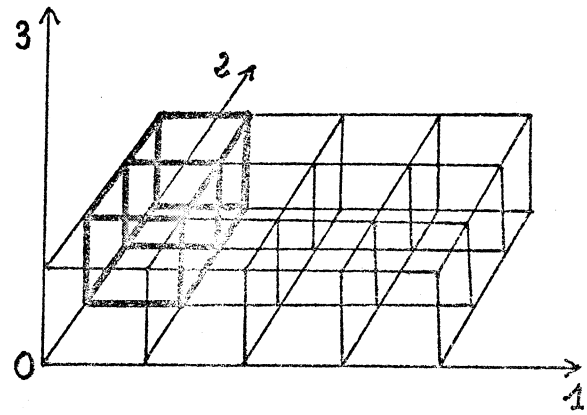


Fig. 1

<u>Exemple</u> n = 3

$m_{12} = [\,(11000)_1 \ (0111)_2]$

L'ensemble $\{m_{12}\}$ est représenté par des gros points sur la figure 1 :

On a deux <u>types</u> de monômes, que l'on présente ci-dessous dans $L_i \times L_j$:

<u>type a</u> : f_i croissante,

f_j décroissante

Exemple : $m_{ij}=[\,(001111)_i(111000)_j]$

<u>type b</u> : f_i décroissante,

f_j croissante

Exemple : $m_{ij}=[\,(111000)(000111)]$

Lorsqu'on écrit $m_{ij} = [(111000)_i(000111)_j]$, on a $\{m_{ij}\} = \{x \in H / x_i \leqslant 2 \text{ et } x_j \geqslant 3\}$. Ainsi à chaque monôme à arguments rangés on associe un point, ici le point ($x_i = 2$, $x_j = 3$). Ce point et le type du monôme caractérisent l'ensemble associé.

<u>Définition</u>

Un monôme à arguments rangés est <u>croissant</u> s'il s'exprime comme un produit de deux fonctions croissantes.

<u>Remarques</u> :

1) Si on note $\leqslant$ la relation d'ordre sur H définie par : soit $x = (x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$ et $x' = (x'_1, \ldots, x'_i, \ldots, x'_n)$ deux points de H, alors $x \leqslant x' \Longleftrightarrow x_i \leqslant x'_i$, pour tout i de E, on peut alors dire qu'un monôme m_{ij} est croissant si quel que soit x de $\{m_{ij}\}$, $x \leqslant x'$

D'une façon générale, une fonction f de H dans $\{0, 1\}$ est <u>croissante</u> si $x \leqslant x'$ implique $f(x) \leqslant f(x')$.

2) On a défini les monômes à arguments rangés comme un produit de fonctions dont <u>deux</u> ne sont pas égales à 1 : en effet dans la suite on ne s'occupe que de sous-treillis et de tresses c'est-à-dire de préordres sur E et on sait que le treillis des préordres est atomique et pour tout P préordre P de $\mathcal{P}_E$ on a $P = \cup P_{\{ij\}}$, pour tout $\{i,j\}$ de $E \times E$. Pour les treillis on énonce le lemme suivant :

<u>Lemme 1</u>

Soit S un sous-treillis de H contenant les deux pôles de H et f la fonction attachée à S. Si f s'exprime comme une somme de monômes à arguments rangés, les monômes premiers de f sont à arguments rangés.

a) Les monômes de f ne peuvent être des produits de fonctions monotones, toutes décroissantes ou toutes croissantes sinon le point (0, ..., 0) ou le point $(n_1, n_2, \ldots, n_n)$ n'appartiendrait pas à S.

b) Soit $m_1\, m_2 \ldots m_p\, \mu_1\, \mu_2 \ldots \mu_q$ un monôme premier de f, les fonctions m_i étant de la forme (111...000) et les fonctions μ_i de la forme (000...111). Soit $\overline{m}_1$ obtenu en rajoutant un 1 en première position possible à m_1. On peut trouver un point appartenant à $\{\overline{m}_1\, m_2 \ldots m_p\, \mu_1 \ldots \mu_q\}$ et S ; de même pour $\{m_1\, \overline{m}_2 \ldots m_p\, \mu_1 \ldots \mu_q\}$ et S . On en déduit par intersection un point de S qui appartient à $\{m_1\, m_2 \ldots m_p\, \mu_1 \ldots \mu_q\}$, d'où contradiction.

<u>Définition</u>

On appelle <u>fonction à arguments rangés</u> (f. a. r. en abrégé) une somme de monômes à arguments rangés.

Remarques

- Le nombre de variables d'une f. a. r. est quelconque.
- La somme de 2 f. a. r. est une f. a. r.
- Les f. a. r. dont les monômes sont tous du même type a ou b, se ramènent à des fonctions croissantes en définissant dans $L_i \times L_j$, où on note $M(x_i, x_j)$ un point de M de coordonnées x_i et x_j :

1) Une relation d'ordre $\preceq$

pour le type a) : $M(x_i, x_j) \preceq M'(x'_i, x'_j) \Longleftrightarrow x'_i \geqslant x_i$

et $x'_j \leqslant x_j$

pour le type b) : $M(x_i, x_j) \preceq M'(x'_i, x'_j) \Longleftrightarrow x'_i \leqslant x_i$

et $x'_j \geqslant x_j$

2) Et en définissant une fonction croissante par :

pour tout X, Y tels que $X \preceq Y$ alors $f(X) \leqslant f(X)$

Ainsi, certains résultats établis dans ([15]) sur les fonctions croissantes, sont vrais ici et réciproquement.

Définition

On appelle monôme complet un monôme m_{ij} à arguments rangés tel que pour tout α, $0 \leqslant \alpha \leqslant p-1$, $f_i(\alpha) \neq f_j(\alpha)$.

Remarque

Pour chaque couple de variables (i, j) de E x E, on peut avoir (p-1) monômes de chaque type.

Exemple : Si p = 4 :

[(0001)(1110)], [(0011)(1100)], [(0111)(1000)] : 3 monômes du type a

[(1110)(0001)], [(1100)(0011)], [(1000)(0111)] : 3 monômes du

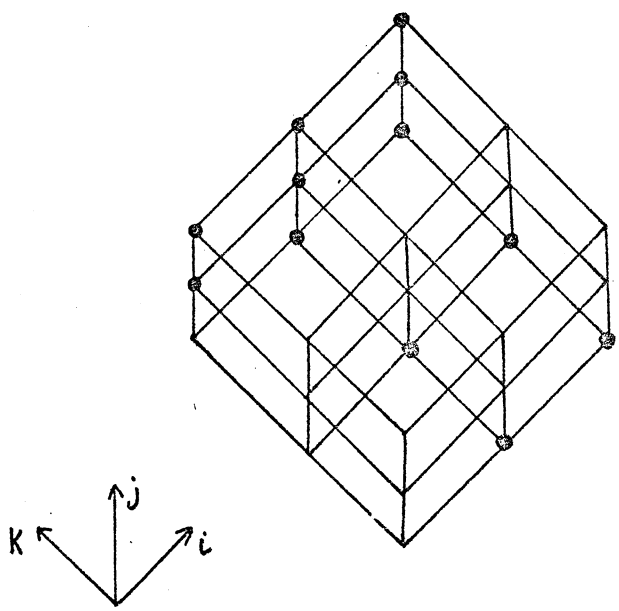
Définition et notation

On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des f. a. r. pour lesquelles, pour tout couple (i, j) de E x E et chaque type a ou b, on a soit 0 soit (p-1) monômes complets.

On appelle fonctions complètes les éléments de $\mathcal{F}$.

Exemples : n = 3

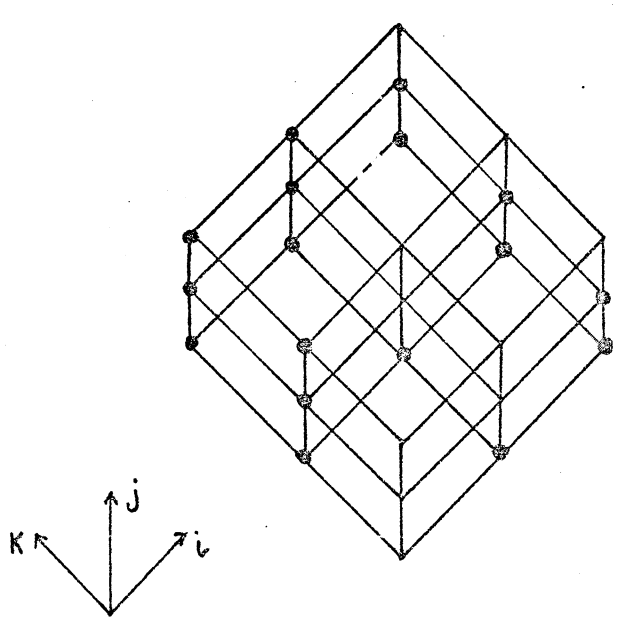
p = 3



$f_1 = [(011)_i (100)_j] + [(110)_j (001)_k]$

$f_1 \notin \mathcal{F}$

(les éléments de $\{f_1\}$ sont représentés par des gros points dans $L_i \times L_j \times L_k$).



$f_2 = [(001)_i (110)_j] + [(011)_i (100)_j]$

$+ [(100)_i (011)_k] + [(110)_i (001)_k]$

$f_2 \in \mathcal{F}$

Propriété 1 :

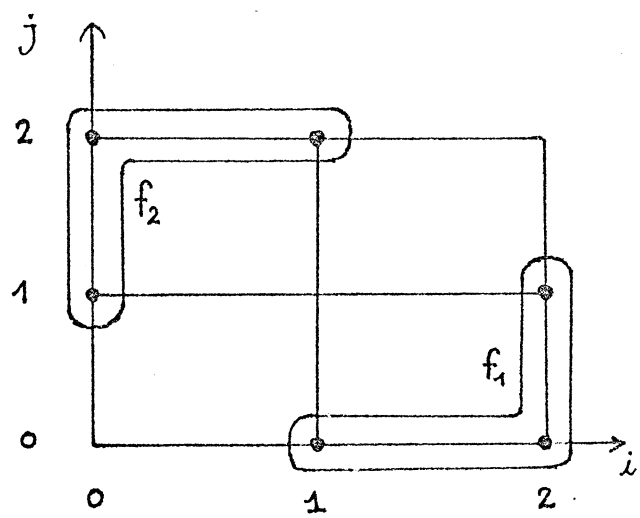
Soit f une fonction complète et D la diagonale de H. Alors $D \cap \{f\} = \emptyset$.

En effet pour qu'une f. a. r. couvre un point de la diagonale, il est nécessaire qu'elle comporte dans son écriture au moins un monôme à arguments rangés $m = [f_i \; f_j]$ vérifiant pour au moins une valeur α : $f_i(\alpha) = f_j(\alpha)$.

Propriété 2 :

La somme de deux fonctions complètes est une fonction complète (évident d'après la définition).

Exemple :



$f_1 = [(011)_i (100)_j] + [(001)_i (110)_j]$;

$f_1 \in F$

$f_2 = [(100)_i (011)_j] + [(110)_i (001)_j]$;

$f_2 \in F$

et $f_1 + f_2 \in F$

2. BIJECTION ENTRE TRESSES ET FONCTIONS COMPLETES.

Propriété 3

Le complémentaire de $\psi(P_{\{ij\}})$ est caractérisé par l'ensemble des points $x(x_1, \ldots, x_n)$ de H vérifiant :

si $P_{\{ij\}} = P_{ij}$ alors $\complement_H \psi(P_{\{ij\}}) = \{x \in H \;/\; x_i > x_j\}$

si $P_{\{ij\}} = P_{ji}$ alors $\complement_H \psi(P_{\{ij\}}) = \{x \in H \;/\; x_i > x_j\}$

si $P_{\{ij\}} = P_{i=j}$ alors $\complement_H \psi(P_{\{ij\}}) = \{x \in H \ / \ x_i < x_j \text{ ou } x_j > x_i\}$

si $P_{\{ij\}} = P_{i \| j}$ alors $\complement_H \psi(P_{\{ij\}}) = \emptyset$

La fonction attachée à $\psi(P_{\{ij\}})$ est une fonction complète. Notons $f(\psi(P_{\{ij\}}))$ cette fonction. On a :

$$f(\psi(P_{ij})) = \sum_{\alpha=1}^{p-1} m_{ij} \text{ avec } m_{ij} = (\underbrace{1\ldots10}_{\alpha}\ldots0)_i \ (\underbrace{0\ldots01}_{\alpha}\ldots1)_j$$

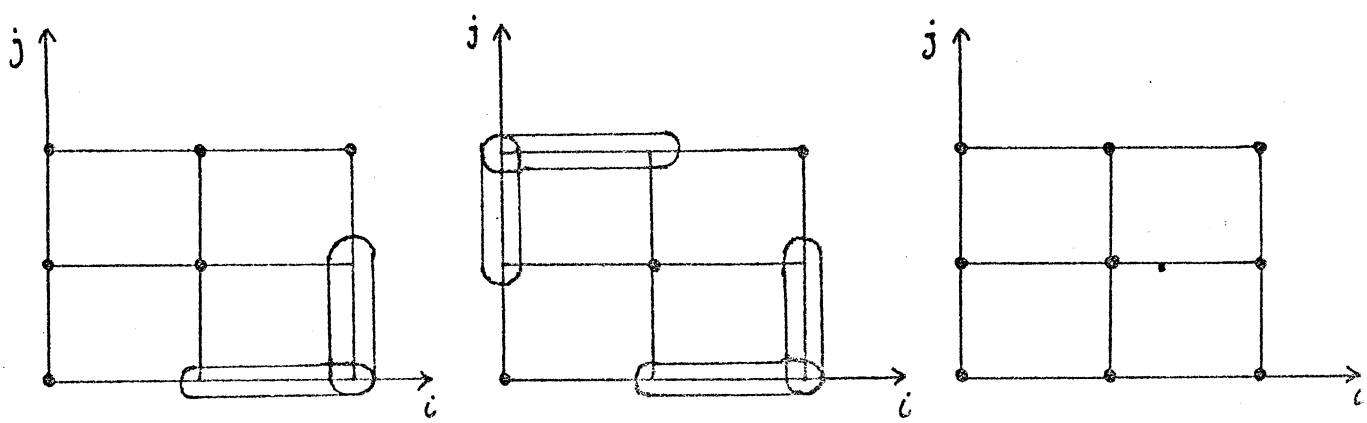
$$f(\psi(P_{ji})) = \sum_{\alpha=1}^{p-1} m_{ij} \text{ avec } m_{ij} = (\underbrace{0\ldots01}_{\alpha}\ldots1)_i \ (\underbrace{1\ldots10}_{\alpha}\ldots0)_j$$

$$f(\psi(P_{i=j})) = f(\psi(P_{ij})) + f(\psi(P_{ji})) \text{ car } P_{i=j} = P_{ij} \cup P_{ji}$$

$$f(\psi(P_{i \| j})) = 0$$

et quel que soit $P_{\{ij\}}$, $f(\psi(P_{\{ij\}}))$ est une fonction complète.

<u>Exemple</u> : p = 3



$[i \leqslant j]$	$[i = j]$	i et j non comparables
$f_{ij} = [(001)_i(110)_j]$	$f_{ij} = [(100)_i(011)_j]$	$f_{ij} = 0$
$+[(011)_i(100)_j]$	$+[(110)_i(001)_j]$	
	$+[(011)_i(100)_j]$	

Théorème

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble T de H soit une tresse est que la fonction f(T) soit complète.

Démonstration

Soit $T = \psi(P)$ une tresse et f(T) la fonction attachée à T.

$P = \bigcup_{ij} P_{\{ij\}}$ car $\mathcal{P}_E$ est un treillis atomique et $\psi(P) = \bigcap_{ij} \psi(P_{\{ij\}})$.

$$\{f(T)\} = \int_H \psi(P) = \bigcup_{ij} \int_H \psi(P_{ij}) = \bigcup_{ij} \{f_{ij}\} \text{ et } f(T) = \sum_{ij} f_{ij}$$

$$\text{et } f_{ij} \in \mathcal{F} \Longrightarrow f(T) \in \mathcal{F} \quad \text{(Propriétés 2 et 3)}$$

On peut donner une autre démonstration :

Notons proj_{ij} la projection sur $L_i \times L_j$ et $T_{ij} = \text{proj}_{ij}(T)$

Puisque T est un sous-treillis de H, on peut écrire (chapitre I

$$T = \bigcap_{ij} \text{proj}_{ij}^{-1}(T_{ij}) \quad \text{et} \quad \text{proj}_{ij}^{-1}(T_{ij}) = \psi(P_{\{ij\}}).$$

$$\text{donc} \int_H T = \bigcup_{ij} \int_H \psi(P_{\{ij\}}) \Longrightarrow f = \sum_{ij} f_{ij}$$

Réciproquement, soit f un élément de $\mathcal{F}$

On peut écrire $f = \sum f_{ij}$ et donc :

$$\{f\} = \cup\{f_{ij}\} = \bigcup_{ij} \int_H \psi(P_{\{ij\}}) = \int_H \cap \psi(P_{\{ij\}}) = \int_H \psi(\bigcup_{ij} P_{\{ij\}}) = \int_H \psi($$

en posant $P = \bigcup_{ij} P_{\{ij\}}$

P est bien sûr un préordre car si on a $P_{ij} = [i \leqslant j]$, $P_{jk} = [j \leqslant k]$ alors sur les 3 variables i, j, k on a :

soit $[i \equiv j \equiv k]$ si $P_{\{ik\}} = [k \leqslant i]$

soit $[i \leqslant j \leqslant k]$ sinon

donc $f = f(\psi(P))$

Montrons le sur l'exemple suivant où on représente en gros points les sommets de H vérifiant la relation $i > j$ ou $j > k$.

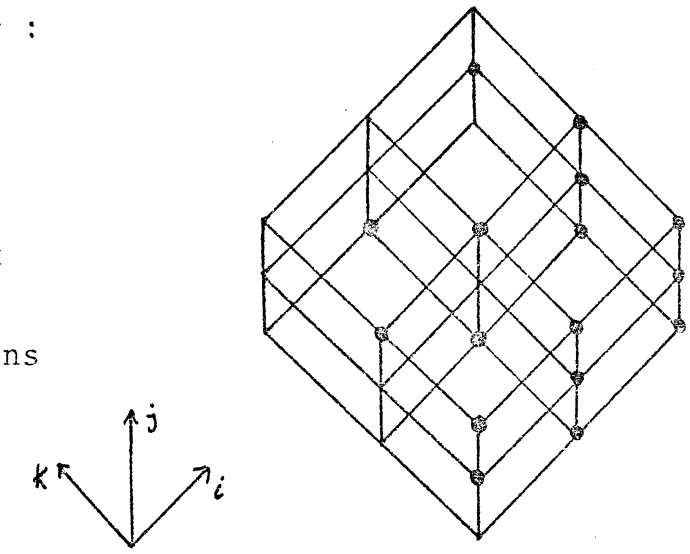
Pour f_{ik} on peut avoir :

$f_{ik} = (001)_i (110)_k + (011)_i (100)_k$

ou $f_{ik} = (110)_i (001)_k + (100)_i (011)_k$

ou f_{ik} = somme des deux expressions précédentes

ou $f_{ik} = 0$



La première expression implique que $i \leqslant j \leqslant k$. La deuxième et la troisième implique que $i \equiv j \equiv k$. La quatrième implique que i, j et k ne sont pas comparables. Dans chaque cas P est bien un préordre sur {i, j, k} .

Remarque

Si p = 2 (algèbre de Boole) et si on a par exemple $P_{\{ij\}} = [\, i \geqslant$ alors $f_{ij} = (01)_i \ (10)_j$ ce que l'on écrit : $f_{ij} = ij'$

et $f = \sum_{ij} ij'$

On retrouve les résultats de Flament qui montre dans ([9]) que le complémentaire d'une tresse -en algèbre de Boole- est une fonction qui se met sous la forme $f = \sum_{ij} ij'$.

Conséquence

Soit f_1 et f_2 deux éléments de . On a $\{f_1\} = \complement_H T_1$ et $\{f_2\} = \complement_H T_2$, T_1 et T_2 étant deux tresses.

$$\text{Alors}\{f_1 + f_2\} = \complement_H T_1 \cup \complement_H T_2 = \complement_H T_1 \wedge T_2 \ .$$

La somme des fonctions attachées à chacune des tresses est la fonction attachée à l'intersection des deux tresses.

3. MONOMES PREMIERS DE LA FONCTION ATTACHEE A UNE TRESSE.

Propriété 4

Soit T une tresse, P le préordre associé et f la fonction complète attachée à T. On a $f = \Sigma f_{ij}$, $f_{ij} = \Sigma m_{ij}$. Les monômes m_{ij}, à arguments rangés, complets, sont premiers.

Soit m_{ij} un monôme de la forme $[(0\ldots01\ldots1)_i\ (1\ldots10\ldots0)_j]$ avec $1 \leqslant \alpha \leqslant p-1$. Si m_{ij} n'est pas premier, il existe un monôme M tel que $m_{ij} < M \leqslant f$. Pour que M soit supérieur à m_{ij}, il faut que M possède en i et en j un "1" à la même place. Donc M recouvre un point diagonal ce qui est impossible (propriété 1). $f = \Sigma m_{ij}$ est donc une base première de f.

Cas particulier : Si p = 2, $f = \sum_{ij} ij'$ et les monômes ij' sont des monômes premiers de f. On retrouve ici le résultat démontré au chapitre I, c'est-à-dire que les CVM de Flament, les classes vides de rang minimal, correspondant à des monômes premiers de f.

Notons cependant que si, en algèbre de Boole, tous les monômes premiers sont à arguments rangés, il n'en est pas de même ici où l'on a, par exemple, dans le cas n = 3, p = 3 et $P = [x \geqslant y \geqslant z]$, le monôme $[(110)_x\ (101)_y\ (011)_z]$ qui est premier. Nous verrons d'autres exemples au paragraphe 4. Ici, et dans la suite on a $\{x, y, z\} \subset E$.

Propriété 5

Les monômes complets obtenus par consensus à partir de monômes complets, représentent les préordres élémentaires obtenus par transitivité.

$\complement_H [x \leqslant y]$ est représenté par des monômes complets de la forme

$$[(\underbrace{0\ldots0}_{\alpha}1\ldots1)_x\ (\underbrace{1\ldots1}_{\alpha}0\ldots0)_y]\ ,\quad 1 \leqslant \alpha \leqslant p-1$$

$\mathcal{C}_H\,[y \leqslant z]$ est représenté par :

$$[\,(\underbrace{0\ldots0}_{\beta}1\ldots1)_y\ (\underbrace{1\ldots1}_{\beta}0\ldots0)_z]\ ,\quad 1 \leqslant \beta \leqslant p-1$$

Les consensus en y donnent des monômes de la forme :

$$[\,(\underbrace{0\ldots0}_{\alpha}1\ldots1)_x\ (\underbrace{\underbrace{1\ldots1}_{\alpha}0\ldots0}_{\beta}1\ldots1)_y\ (\underbrace{1\ldots1}_{\beta}0\ldots0)_z]$$

On sait que l'on peut ne conserver que les monômes complets, c'est-à-dire ceux obtenus pour $\alpha = \beta$. En effet, si $\alpha > \beta$ les monômes à arguments rangés, obtenus par consensus, ne sont pas premiers, et si $\alpha < \beta$, les monômes ne sont pas à arguments rangés. Pour $\alpha = \beta$, on obtient par consensus des monômes de la forme :

$[\,(\underbrace{0\ldots0}_{\alpha=\beta}1\ldots1)_x\ (\underbrace{1\ldots1}_{\alpha=\beta}0\ldots0)_z]$ qui caractérisent $\mathcal{C}_H\,[x \leqslant z]$, et on les obtient tous.

4. MONOMES PREMIERS INUTILES, FACULTATIFS, OBLIGATOIRES DE LA FONCTION ATTACHEE A UNE TRESSE.

Définitions

Un monôme premier de f est inutile s'il n'apparaît jamais dans une base première de f.

Un monôme premier est dit facultatif s'il existe au moins deux bases premières irredondantes telles que le monôme premier appartienne à l'une et pas à l'autre.

Un monôme premier est obligatoire s'il apparaît dans toute base première irredondante de f.

Lemme

Soit T une tresse et f la fonction attachée à T.

Les monômes premiers obligatoires de f sont des monômes complets.

(évident d'après la propriété 4).

A) Dans une première partie pour se rapprocher de l'algèbre de Boole, on n'admettra comme monômes premiers que ceux qui sont à arguments rangés. On se limitera de plus à ceux qui sont complets car si un monôme à arguments rangés, m, n'est pas complet, quelle que soit f il existe un monôme complet M tel que $m < M \leqslant f$.

Cas d'un ordre

1) Soit deux éléments x et y de E tels que x couvre directement y. Montrons que les monômes complets correspondants sont tous obligatoires.

1.a - Ordre total

Considérons $1 \leqslant 2 \leqslant \ldots \leqslant n-1 \leqslant n$.

Soit le point $(\underset{1}{k}, \underset{2}{k}, \ldots, \underset{i-1}{k}, \underset{i}{k+1}, \underset{i+1}{k}, \underset{\ldots}{k+1}, \ldots, \underset{n}{k+1})$ donné par ses n coordonnées. Il respecte tous les préordres élémentaires sauf $[\, i \leqslant i+1 \,]$. Il n'est donc recouvert que par des monômes à arguments rangés produit d'une fonction f_i de L_i dans $\{0, 1\}$ et f_{i+1} de L_{i+1} dans $\{0, 1\}$, et de plus il n'est recouvert que par un seul monôme de cette forme, le monôme $[\,(\underbrace{00\ldots0}_{k+1}1\ldots1)_i\ (\underbrace{1\ldots10}_{k+1}\ldots0)_{i+1}]$.

Ce monôme complet est donc obligatoire. On obtient pour $k=0,\ldots p-2$, les p-1 monômes complets représentant la fonction attachée à $P_{\{i,i+1\}}$, qui sont donc tous obligatoires. Ce raisonnement est évidemment valable pour tout $i = 1, \ldots, n-1$.

1.b - Ordre quelconque

On suppose là aussi que $y \leqslant x$. On donne la valeur k à la composante x et k+1 à la composante y. On donne la valeur k à toute variable inférieure à x et k+1 aux autres. Le point obtenu respecte tout préordre élémentaire, sauf $P_{\{xy\}}$, sinon il existe une composante z telle que $y \leqslant z \leqslant x$ <ce qui est impossible. Comme précédemment les monômes complets représentant la fonction attachée à $P_{\{xy\}}$ sont tous obligatoires.

2) Soit deux composantes x et y telles que x ne couvre pas directement y, c'est-à-dire il existe au moins un z tel que $y \leqslant z \leqslant x$.

Alors d'après la propriété 5 les monômes complets associés à $P_{\{xy\}}$ sont obtenus par consensus à partir de monômes qui eux sont obligatoires (d'après 1.a). Ils sont donc tous inutiles. On ne gardera donc que les monômes complets associés à la relation de couverture (c'est-à-dire $P = \hat{\cup} P_{\{ij\}}$ et pour tout $\{i, j\} \subset E^2$, il n'existe pas de $k \in E$ tel que $i \leqslant k \leqslant j$).

Conclusion

Les résultats de l'algèbre de Boole sur les monômes de la forme xy' se généralisent dans le cas d'un ordre, aux monômes complets.

Cas d'un préordre

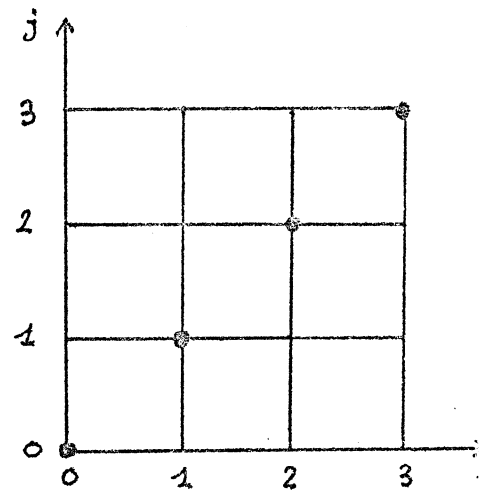
On montrerait d'une façon analogue à celle d'un ordre que si on a 2 éléments dans une classe, tous les monômes complets sont obligatoires, si on a q ($q > 2$) éléments dans une classe ou si on a 2 classes consécutives dont une a au moins 2 éléments, alors tous les monômes complets correspondants sont facultatifs et enfin si on a 2 classes non consécutives, les monômes complets correspondants sont tous inutiles.

Le problème est le même qu'en algèbre de Boole, et c'est un problème de couverture : certaines liaisons (i, j) du préordre sont obligatoires, d'autres sont facultatives, d'autres enfin sont inutiles, et les monômes correspondants qui sont à 2 valeurs les monômes ij', et à p valeurs, les monômes complets, sont tous obligatoires, facultatifs ou inutiles.

B) Dans une deuxième partie, nous ne nous restreignons pas aux monômes à arguments rangés.

B.1 - Deux éléments dans la même classe

Il est facile de lister tous les monômes premiers de la fonction attachée à $P_{\{i,j\}} = [i \equiv j]$. On prend ici p = 4.



$m_1 = [(0001)(1110)]$ $\quad m_8 = [(1000)(0111)]$

$m_2 = [(0010)(1101)]$ $\quad m_9 = [(1001)(0110)]$

$m_3 = [(0011)(1100)]$ $\quad m_{10} = [(1010)(0101)]$

$m_4 = [(0100)(1011)]$ $\quad m_{11} = [(1011)(0100)]$

$m_5 = [(0101)(1010)]$ $\quad m_{12} = [(1100)(0011)]$

$m_6 = [(0110)(1001)]$ $\quad m_{13} = [(1101)(0010)]$

$m_7 = [(0111)(1000)]$ $\quad m_{14} = [(1110)(0001)]$

C'est-à-dire d'une façon générale $m_k = [(\alpha)(\beta)]$ où α représente l'écriture en binaire de k et β, le complément, en binaire, de α par rapport à 2^p-1.

Il est évident que tous ces monômes sont premiers (si on leur rajoute un 1 le monôme obtenu couvre un point diagonal) et que tous les monômes premiers sont obtenus (un monôme premier est de la forme $m = [(\alpha)(\beta)]$ avec $\alpha+\beta = 2^p-1$). Il y a 2^p-2 monômes premiers dont $2(p-1)$ à arguments rangés.

Cherchons les bases premières irredondantes :

Il existe quatre bases premières irredondantes ne contenant que des monômes non à arguments rangés :

$$b_1 = m_5 + m_6 + m_9 + m_{10}$$
$$b_2 = m_5 + m_6 + m_{10} + m_{11} + m_{13}$$
$$b_3 = m_2 + m_4 + m_5 + m_9 + m_{10}$$
$$b_4 = m_2 + m_4 + m_5 + m_{10} + m_{11} + m_{13}$$

et une ne contenant que des monômes à arguments rangés, complets :

$$b_5 = m_1 + m_3 + m_7 + m_8 + m_{12} + m_{14}$$

Tous les monômes sont donc facultatifs.

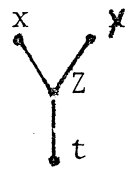
B.2 - A fortiori si on a $q (q > 2)$ éléments dans la même classe, ou 2 classes consécutives dont une au moins à q éléments, les monômes premiers associés sont tous facultatifs.

B.3 - <u>Cas d'un ordre</u>

Nous avons traité trois exemples :

a) $n = 3,\ p = 4$ et $P = [x \leqslant y \leqslant z]$

b) $n = 4,\ p = 3$ et $P = [x \leqslant y \leqslant z \leqslant t]$

c) $n = 4,\ p = 3$ et $P =$ 

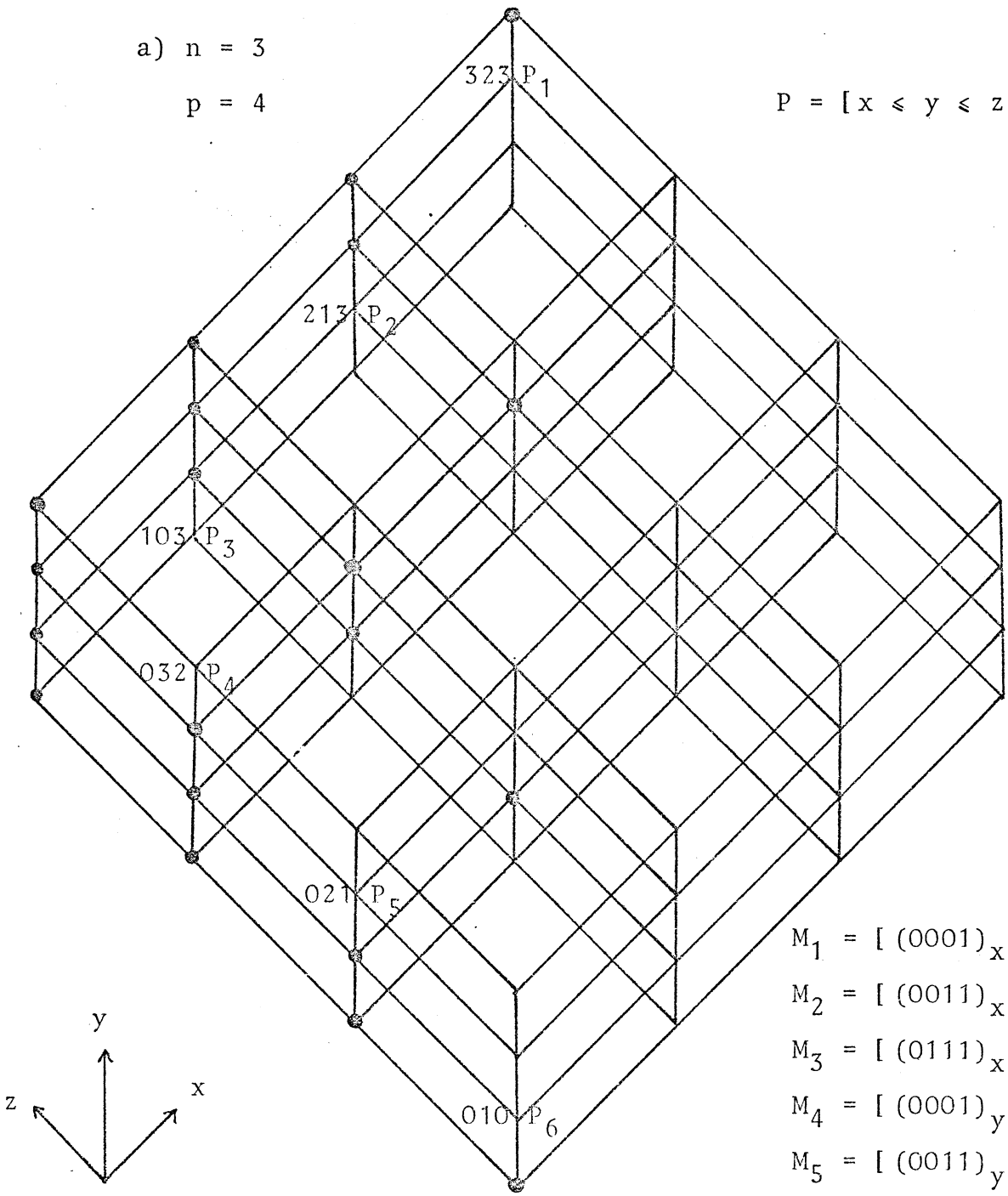
Dans les trois cas nous avons cherché les bases premières irredondantes de la fonction attachée à P. Pour chaque cas cette base est unique et s'exprime comme la somme des monômes complets associés aux préordres élémentaires de la forme $P_{\{ij\}}$, où i couvre directement j. Ce résultat devrait raisonnablement s'étendre quel que soit P.

Nous reprenons ici les exemples a) et b); pour chacun d'eux les sommets pleins désignent les éléments de $\psi(P)$, les sommets soulignés désignent les points du complémentaire de $\psi(P)$ recouverts par un seul monôme, complet, qui est donc obligatoire.

a) $n = 3$

$p = 4$

$P = [x \leqslant y \leqslant z]$



$M_1 = [(0001)_x \ (1110)_y]$

$M_2 = [(0011)_x \ (1100)_y]$

$M_3 = [(0111)_x \ (1000)_y]$

$M_4 = [(0001)_y \ (1110)_z]$

$M_5 = [(0011)_y \ (1100)_z]$

$M_6 = [(0111)_y \ (1000)_z]$

P_i est recouvert seulement par M_i, $i = 1$ à 6

Seule base première irredondante : $M_1 + M_2 + M_3 + M_4 + M_5 + M_6$

Liste des monômes premiers non obligatoires :

$M_7 = [(0001)_x(1110)_z]$ $\quad$ $M_{10} = [(0011)_x(1101)_y(1110)_z]$

$M_8 = [(0011)_x(1100)_z]$ $\quad$ $M_{11} = [(0111)_x(1001)_y(1110)_z]$

$M_9 = [(0111)_x(1000)_z]$ $\quad$ $M_{12} = [(0111)_x(1011)_y(1100)_z]$

---

b) $n = 4$

$p = 3$ $\qquad$ $P = [x \leqslant y \leqslant z \leqslant t]$

$M_1 = [(001)_x(110)_y]$

$M_2 = [(011)_x(100)_y]$

$M_3 = [(001)_y(110)_z]$

$M_4 = [(011)_y(100)_z]$

$M_5 = [(001)_z(110)_t]$

$M_6 = [(011)_z(100)_t]$

P_i est recouvert seulement par M_i, $i = 1$ à 6.

Une seule base première irredondante : $M_1+M_2+M_3+M_4+M_5+M_6$

Liste des monômes premiers non obligatoires :

$M_7 = [(001)_x(110)_z]$ $\quad$ $M_8 = [(011)_x(100)_z]$

$M_9 = [(001)_x(110)_t]$ $\quad$ $M_{10} = [(011)_x(100)_t]$

$M_{11} = [(001)_y(110)_t]$ $\quad$ $M_{12} = [(011)_y(100)_t]$

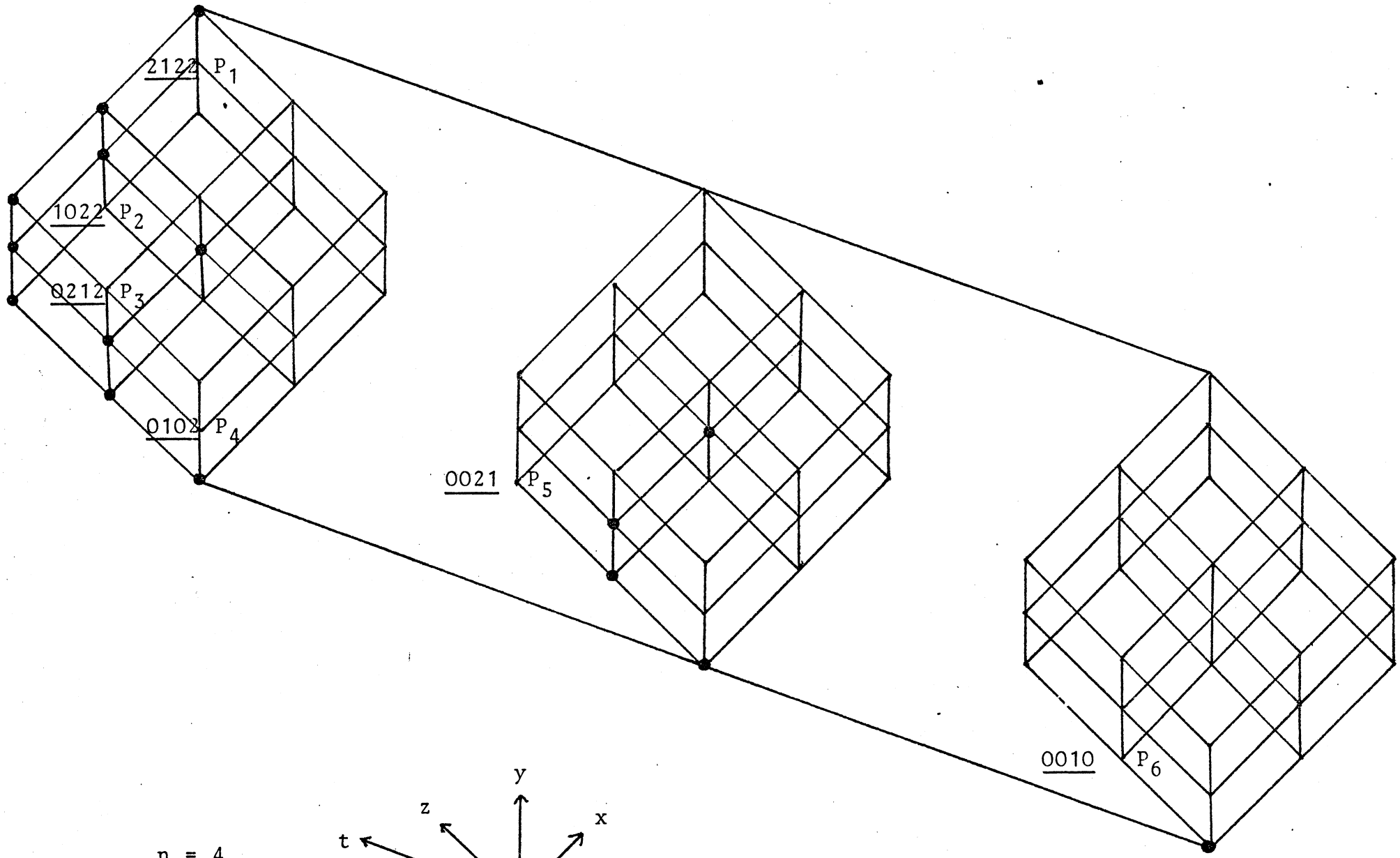
$M_{13} = [(011)_x(101)_y(110)_z]$

$M_{14} = [(011)_x(101)_y(110)_t]$

$M_{15} = [(011)_x(101)_z(110)_t]$

$M_{16} = [(011)_y(101)_z(110)_t]$

$\psi(P)$ est représenté sur la figure de la page suivante.



n = 4

p = 3

$P = [x \leqslant y \leqslant z \leqslant t]$

5. REPRESENTATION BINAIRE DES MONOMES.

Définition

On appelle représentation binaire d'une fonction élémentaire f_i de L_i dans {0, 1}, le nombre : $n = \sum_{x_k \in L_i} f_i(x_k).2^{(p-1)-x_k}$

Exemple : p = 5

$L_i = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

$f_i = (0, 1, 1, 0, 1)$

et $n = \overset{\downarrow}{0} + \overset{\downarrow}{8} + \overset{\downarrow}{4} + \overset{\downarrow}{0} + \overset{\downarrow}{1} = 13$

Définition

La représentation binaire d'un monôme est la suite des représentations binaires associées aux fonctions élémentaires qui constituent ce monôme.

Propriété

Soit P un ordre total et f la fonction attachée à $\psi(P)$. Soit $m = [(f_x)(f_y)(f_z)]$ un monôme obtenu par consensus à partir de deux monômes complets et $(n_x)(n_y)(n_z)$ sa représentation binaire.

L'ordre total sur n_x, n_y, n_z redonne la restriction de P à {x, y, z} .

Exemple :

Pour $x \geqslant y \geqslant z$ on a obtenu par consensus le monôme $[(110)_x\ (101)_y\ (011)_z]$ qui correspond à $(6)_x\ (5)_y\ (3)_z$ et redonne directement l'ordre $[x \geqslant y \geqslant z]$ car $n_x > n_y > n_z$.

Montrons le dans le cas général.

$x \leqslant y$ est représenté par $[(\underbrace{0\ldots0}_{\alpha}1\ldots1)_x\ (\underbrace{1\ldots1}_{\alpha}0\ldots0)_y]$ et $y \leqslant z$ est représenté par $[(\underbrace{0\ldots0}_{\beta}1\ldots1)_y\ (\underbrace{1\ldots1}_{\beta}0\ldots0)_z]$ avec $1 \leqslant \alpha, \beta \leqslant p-1$.

Par consensus on obtient des monômes de la forme

Si $\alpha \geqslant \beta$ on ne garde que les termes en x et z. Sinon, la représentation binaire de ces monômes devient :

$$\left(\sum_{i=0}^{p-\alpha} 2^i\right)_x \left(\sum_{i=0}^{p-\beta} 2^i + \sum_{i=p-\alpha+1}^{p-1} 2^i\right)_y \left(\sum_{i=p-\beta+1}^{p-1} 2^i\right)_z$$

Notons ces nombres : (n_1) $(n_2 + n_3)$ (n_4)

Puisque $\alpha < \beta$ il est évident que l'on a

$n_1 < n_2 + n_3 < n_4$

<u>Exemple</u> : p = 4

$x \leqslant y$ est représenté par :	La représentation binaire s'écrit :
[(0001) (1110)]	(1) (14)
[(0011) (1100)]	(3) (12) la somme fait évidemment 15.
[(0111) (1000)]	(7) (8)

$y \leqslant z$ est représenté par les mêmes monômes. Par consensus on obtient :

$[(0011)_x\ (1101)_y\ (1110)_z]$ qui donne $3 < 13 < 14$

$[(0111)_x\ (1011)_y\ (1100)_z]$ qui donne $7 < 11 < 12$

$[(0111)_x\ (1001)_y\ (1110)_z]$ qui donne $7 < 9 < 14$

<u>Remarque</u>

Posons q = min(n, p). Quelle que soit f, il existe un monôme premier de f qui s'écrit $m = [(f_{x1})(f_{x2}) \ldots (f_{xq})]$. Si $n \leqslant p$ l'ordre total sur $n_{x1}, \ldots, n_{xq}$ est identique à P.

<u>Exemple</u> n = 4, p = 4 $P = [x \leqslant y \leqslant z \leqslant t]$

Le monôme premier $(0011)_x\ (1011)_y\ (1101)_z\ (1110)_t$ admet comme représentation binaire $(3)_x\ (11)_y\ (13)_z\ (15)_t$ qui redonne directement $x \leqslant y \leqslant z \leqslant t$.

6. APPLICATIONS.

6.1 : Préordre associé à une fonction complète - Réciproque

Soit f une f. a. r. de $\mathcal{F}$ et $T = \complement_H f$. On sait trouver ([21]) tous les monômes premiers de f parmi lesquels on peut ne conserver que les monômes complets d'après le paragraphe 3. Chacun de ces monômes détermine un préordre élémentaire $P_{\{ij\}}$ et le préordre P associé à f s'écrit $P = \cup P_{\{ij\}}$. On peut aussi chercher une base première irredondante et le préordre P s'écrit comme fermeture transitive des préordres élémentaires $P_{\{ij\}}$ (d'après la propriété 5).

La réciproque est évidente. On écrit $P = \hat{\cup} P_{\{ij\}}$ par une relation de couverture; on associe les monômes complets à chaque préordre $P_{\{ij\}}$. La somme est la fonction complète attachée à P. (voir les exemples de la fin du paragraphe 4).

Remarque

Si pour f_{ij}, fonction attachée à $P_{\{ij\}}$, les fonctions f_i sont croissantes et les fonctions f_j décroissantes, il est clair que $P_{\{ij\}} = [i \leqslant j]$ et réciproquement.

Si les fonctions f_i sont les unes croissantes, les autres décroissantes, alors $P_{\{ij\}} = [i \equiv j]$. Si $f_{ij} = 0$, alors $P_{\{ij\}} = [\overset{i}{\cdot}\ \overset{j}{\cdot}]$.

Ainsi l'écriture des monômes complets de f redonne le préordre associé à la tresse dont f est le complément, tout comme en algèbre de Boole l'écriture des variables sous forme primée ou non primée donnait le schéma des implications sur les variables ([9]), ([10]) .

6.2 : <u>Représentation des monômes à arguments rangés</u>

Pour chaque variable on fait apparaître 2p-1 valeurs; par exemple pour p = 3, on a 5 valeurs qui sont :

$\delta = (100)$, $\varepsilon = (110)$, $\gamma = (111)$, $\beta = (001)$, $\alpha = (011)$

On pose $\delta = \alpha'$, $\varepsilon = \beta'$ et on omet γ .

On pose $\alpha' < \beta' < \gamma < \beta < \alpha$

Ainsi, le monôme $(011)_x\ (100)_y$ s'écrit $x_\alpha\ y_{\alpha'}$; le monôme $(111)_x\ (110)_y$ s'écrit $y_{\beta'}$, etc...

Le diagramme suivant permet de retrouver tous les monômes à arguments rangés, dépendant des deux variables x et y :

Les monômes complets sont soulignés

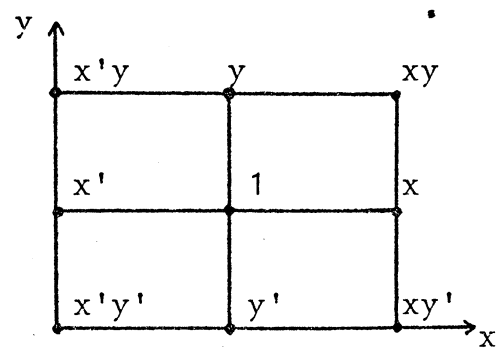
$\underline{x_{\alpha'}\ y_\alpha}$	$x_{\beta'} y_\alpha$	y_α	$x_\beta\ y_\alpha$	$x_\alpha\ y_\alpha$
$x_{\alpha'}\ y_\beta$	$\underline{x_{\beta'}\ y_\beta}$	y_β	$x_\beta\ y_\beta$	$x_\alpha\ y_\beta$
$x_{\alpha'}$	$x_{\beta'}$	1	x_β	x_α
$x_{\alpha'}\ y_{\beta'}$	$x_{\beta'}\ y_{\beta'}$	$y_{\beta'}$	$\underline{x_\beta\ y_{\beta'}}$	$x_\alpha\ y_{\beta'}$
$x_{\alpha'}\ y_{\alpha'}$	$x_{\beta'}\ y_{\alpha'}$	$y_{\alpha'}$	$x_\beta\ y_{\alpha'}$	$\underline{x_\alpha\ y_{\alpha'}}$

<u>Cas particulier</u> : p = 2 $\Longrightarrow$ 2p-1 = 3

On pose x = (01), x' = (10), 1 = (11)

On a x' < (11) < x

Le diagramme devient :



<u>Remarque</u> :

Cette représentation se généralise à un nombre quelconque de variables prenant un nombre quelconque de valeurs.

CHAPITRE IV

ETUDE DES CHAINES DANS UN PRODUIT DIRECT D'ORDRES TOTAUX

Ce chapitre comprend quatre paragraphes :

Les deux premiers paragraphes sur les chaînes respectant un préordre et les chaînes complètes et incomplètes servent d'introduction et permettent d'énoncer quelques propriétés utiles pour la suite.

Le troisième paragraphe étudie les sous-treillis qui s'expriment comme une union de chaînes complètes en liaison, en particulier, avec la notion de fonction à arguments rangés.

Le dernier paragraphe introduit les notions de degrés d'imbrication et de type d'une chaîne qui permettent une classification des chaînes respectant un même ordre total.

1. CHAINES RESPECTANT UN PREORDRE

On se place dans $H = L_1 \times L_2 \times \ldots \times L_n$ où $L_i = \{0,1,2,\ldots,n_i\}$, et soit $E = \{1,2,\ldots,n\}$ l'ensemble des composantes. Chacune des composantes variant naturellement de 0 à n_i ou de n_i à 0, les extrêmités d'une chaîne sont des points de la forme $(a_1\ a_2\ \ldots\ a_i\ \ldots\ a_n)$ avec $a_i \in \{0, n_i\}$. En resuspendant l'hyperpavé H on se ramènera facilement à des chaînes allant de $(00\ \ldots\ 0)$ à $(n_1\ n_2\ \ldots\ n_n)$; c'est de ces chaînes que nous nous occupons ici. Dès que l'on parlera de préordre sur les composantes, on se restreindra à $L_i = \{0,1,2,\ldots,p-1\}$, pour tout $i=1,\ldots,n$

Notation

On note $M\ (m_1, \ldots, m_n)$ un point de H.

Définitions

1) Une chaîne de H est un ensemble de points totalement ordonné par la relation d'ordre :

$$M(m_1,\ldots,m_i,\ldots,m_n) \leqslant M'(m'_1,\ldots,m'_i,\ldots,m'_n) \Longleftrightarrow m_i \leqslant m'_i, \forall i=1,\ldots,n$$

2) On dit qu'une chaîne $C = \{M_i\}$ respecte le préordre P si chaque point M_i respecte P (Chap. I p.8).

3) Une chaîne de H est dite complète ou maximale si elle est formée de $1 + \sum_i n_i$ points; elle est dite incomplète sinon.

Propriétés équivalentes

1) Une chaîne C respecte un préordre P si et seulement si $C \subseteq \psi(P)$.

2) Une chaîne C respecte un préordre P si et seulement si pour tout $M\ (m_1, \ldots, m_n)$ appartenant à C, P_M, préordre total associé à M, est moins fin que P, c'est-à-dire pour tout $\{i, j\} \subset E$, $i \underset{P}{\leqslant} j$ implique $m_i \leqslant m_j$.

Pour vérifier si une chaîne C respecte un préordre P sur les composantes, on se servira du théorème 2 chapitre II :

$$C \subseteq \psi(P) \iff \forall (i,j) \mathrm{proj}_{ij}(C) \subseteq \mathrm{proj}_{ij}\ (\psi(P)) = \mathrm{proj}_{ij}\ (\psi(P_{\{ij\}}))$$

On peut aussi remarquer qu'une chaîne <u>complète</u> détermine (p-1) <u>ordres</u> totaux P_l, où P_l est l'ordre total sur E, dual de celui suivant lequel les composantes prennent la valeur $l (1 \leqslant l \leqslant p-1)$. On note $P^l_{\{ij\}}$ l'ordre élémentaire dual de celui suivant lequel les composantes i et j prennent la valeur l.

On a $(i,j) \in P^l_{\{ij\}} \iff \{M \in C / \mathrm{proj}_i(M) \geqslant l\} \subset \{M \in C / \mathrm{proj}_j(M) \geqslant l\}$ c'est-à-dire que la $j^{ème}$ composante prend la valeur l avant la $i^{ème}$. On a donc $P_l = \bigcup_{ij} P^l_{\{ij\}}$.

<u>Notation</u> : On note $i \leqslant j$ pour indiquer $(i,j) \in P_l$.

<u>Exemple</u> : (n=3, p=3)

1	2	3
0	0	0
0	1	0
1	1	0
2	1	0
2	1	1
2	1	2
2	2	2

$P_1 = [3 \leqslant 1 \leqslant 2]$

$P_2 = [2 \leqslant 3 \leqslant 1]$

<u>Théorème 1</u>

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une chaîne complète C respecte un ordre total P est que les (p-1) ordres P_l soient identiques et égaux à P.

Soit $C \subseteq \psi(P)$ et supposons que $i \underset{P}{\leqslant} j$. Alors quel que soit $M(m_1, \ldots, m_n)$ de C on a $m_i \leqslant m_j$ et donc $i \underset{P_l}{\leqslant} j$, pour tout l. Donc $P \subseteq P_l$. Inversement si $i \underset{P_l}{\leqslant} j$ pour tout l, on a évidemment $i \underset{P}{\leqslant} j$.

La réciproque est immédiate : supposons $P_l = P$, pour tout l, et soit $M(m_1, \ldots, m_n)$ un point quelconque de C. Si on a $i \underset{P}{\leqslant} j$ et $m_i > m_j$ alors $i \underset{P_{m_i}}{\geqslant} j$ et $P_{m_i} \neq P$ contredit l'hypothèse. Donc pour tout $\{i, j\}$: $m_i \leqslant m_j$ et $M \in \psi(P)$ et donc $C \subset \psi(P)$.

<u>Cas particulier : p = 3</u>

<u>Propriété 1</u>

Soit C une chaîne complète et Δ_i l'ensemble des points de C pour lesquels la $i^{\text{ème}}$ composante est égale à 1. Une condition nécessaire et suffisante pour que C respecte un ordre total est qu'il n'existe pas de couple $\{i, j\} \subset E$ vérifiant $\Delta_i \subset \Delta_j$.

<u>Théorème 2</u>

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une chaîne complète C respecte un ordre P est que les (p-1) ordres totaux P_l soient plus fins que P.

- Soit $C \subseteq \psi(P)$ et supposons $i \underset{P}{\leqslant} j$. Alors il est évident que $i \underset{P_l}{\leqslant} j$, pour tout l, et $(i \underset{P}{\leqslant} j \Longrightarrow i \underset{P_l}{\leqslant} j) \Longleftrightarrow P \subseteq P_l$.

- Réciproquement si $P \subseteq P_l$, pour tout l, alors soit $P_1 = \underset{l}{\pi} P_l$. On sait que $P \subseteq P_l \Longrightarrow P \subseteq P_1$. On a $C \subseteq \psi(P_1)$ donc $C \subseteq \psi(P)$.

2. CHAINES COMPLETES - CHAINES INCOMPLETES

Lemme 1

Pour tout $\{i, j\} \in E$, une chaîne complète de H se projette dans $L_i \times L_j$ en une chaîne complète.

Soit C une chaîne complète de H. Alors pour aller, sur C, de tout point de la forme $(\ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots)$ au point $(\ldots, x_i+1, \ldots, x_j+1, \ldots)$ on passe par au moins un point de la forme $(\ldots, x_i+1, \ldots, x_j, \ldots)$ ou $(\ldots, x_i, \ldots, x_j+1, \ldots)$. Par projection cette propriété s'énonce : "pour aller sur C, de tout point (x_i, x_j) à (x_i+1, x_j+1), on passe soit par (x_i, x_j+1), soit par (x_i+1, x_j)", et caractérise les chaînes complètes de $L_i \times L_j$.

Lemme 2

Si, dans H, C est une chaîne incomplète, il existe au moins un couple $\{i, j\} \in E$ tel que la projection de C dans $L_i \times L_j$ soit une chaîne incomplète.

Soit C une chaîne incomplète. Alors il existe au moins deux points I et J de C tels que $I < J$ et pour lesquels, pour tout point K de H vérifiant $I < K < J$, alors K n'appartient pas à C. Puisque C est un sous-treillis de H, pour tout K il existe au moins un couple $(i, j) \in E$ tel que $\mathrm{proj}_{ij}(K) \notin \mathrm{proj}_{ij}(C)$ -d'après le corollaire 2', Ch.II- et $\mathrm{proj}_{ij}(C)$ est une chaîne incomplète.

Conséquence des lemmes 1 et 2

Une chaîne C de H est complète si et seulement si pour tout $\{i, j\} \subset E$, $\mathrm{proj}_{ij}(C)$ est une chaîne complète.

Corollaire

Le préordre associé à une chaîne complète de H est un ordre.

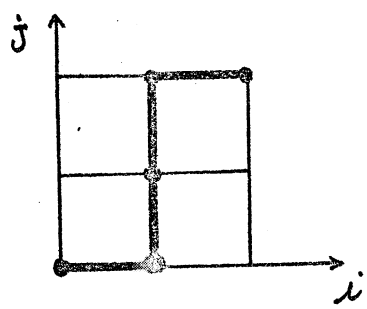
Evident si $p = 2$ (dans le cas booleen, il y a bijection entre les n! chaînes complètes du cube et les n! ordres totaux sur les

Si p > 2 : Soit P le préordre associé à une chaîne complète C.

$$P = \bigcap_{M \in C} P_M$$

Si P n'est pas un ordre, soit i et j deux composantes appartenant à une même classe de P. Pour tout point M $(m_1, \ldots, m_n)$ de C, on a $m_i = m_j$. C inclus dans $\psi(P)$ implique que la projection de C dans $L_i \times L_j$ est incluse dans la projection de $\psi(P)$ dans $L_i \times L_j$, laquelle occupe les points diagonaux de $L_i \times L_j$; $proj_{ij}(C)$ étant une chaîne incomplète, d'après le lemme 1, C est aussi une chaîne incomplète ce qui contredit l'hypothèse et le préordre P est donc un ordre.

Cet ordre peut, bien sûr, ne pas être total :



ordre associé : $\begin{array}{cc} i & j \\ [. & .] \end{array}$

En algèbre à p valeurs une chaîne complète ne respecte pas nécessairement un ordre total sur les composantes comme en algèbre de boole. Cependant aux n! chaînes du n-cube booleen correspondent n! chaînes complètes situées sur les arêtes de H et pour lesquelles les composantes varient l'une après l'autre de 0 à (p-1). On dit que ces chaînes ont des <u>composantes non imbriquées</u>. Elles seront utiles pour la suite.

<u>Lemme 3</u>

Si une chaîne incomplète, C, respecte un ordre P, on peut la compléter dans la tresse associée à P.

Soit A et B deux points de C tels que A < B et tels qu'il n'existe pas de point K de C vérifiant A < K < B. Considérons A et B comme les pôles d'un hyperpavé H_1 à q dimensions (q < n) et appelons

v l'ensemble de ces q composantes qui sont celles qui varient en passant de A à B. Soit P' la restriction de P aux q composantes de v. Soit enfin, C_1 une chaîne complète de $\psi(P')$ dans H_1. Cette chaîne complète C; Montrons qu'elle appartient à $\psi(P)$.

Supposons $i \leqslant j$ dans P et soit $M(m_1, \ldots, m_n)$ un point de C_1. Si i et j appartiennent à v on a : $i \underset{P}{\leqslant} j \Longrightarrow i \underset{P'}{\leqslant} j \Longrightarrow m_i \leqslant m_j$. Si i appartient à v et j n'appartient pas à v :

on a $a_i = m_i = b_i$ et $a_j \leqslant m_j \leqslant b_j$

et $a_i \leqslant a_j$, $b_i \leqslant b_j$ implique $m_i \leqslant m_j$

Si i et j n'appartiennent pas à v alors $a_i = b_i = m_i$ et $a_j = b_j = m_j$ et $a_i \leqslant a_j$ implique $m_i \leqslant m_j$.

Ce lemme n'est vrai que dans le cas d'un ordre, puisque d'après la démonstration du corollaire précédent, si P n'est pas un ordre, toute chaîne incluse dans la tresse associée à P est incomplète.

3. SOUS-TREILLIS UNION DE CHAINES COMPLETES

On énonce tout d'abord quelques propriétés dans $L_i \times L_j$ où l'on note $X(x_i, x_j)$ un point de $L_i \times L_j$, puis on se place dans H où on étudie les rapports entre les sous-treillis union de chaînes complètes et les fonctions à arguments rangés.

Proposition

Dans $L_i \times L_j$, une chaîne est équivalente à la donnée d'une relation R de L_i dans L_j vérifiant :

$$x_i \; R \; x_j \text{ et } x'_i \; R \; x'_j \implies \text{si } x_i < x'_i \text{ alors } x_j \leqslant x'_j \qquad (1)$$

On a une propriété analogue pour j et la propriété (1) devient

$$x_i \; R \; x_j \text{ et } x'_i \; R \; x'_j \implies \text{si } x_j < x'_j \text{ alors } x_i \leqslant x'_i$$

Remarque :

à une chaîne C on associe, comme précédemment, une relation R et réciproquement d'après : $X(x_i, x_j) \in C \iff x_i \; R \; x_j$.

On note $R(x_i)$ l'ensemble des valeurs x_j telles que $x_i \; R \; x_j$. Une chaîne est complète si et seulement si $R(x_i) \neq \emptyset$ pour tout x_i tel que : $0 \leqslant x_i \leqslant n_i$, et pour tout i de E.

Lemme 1

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un sous-ensemble F de $L_i \times L_j$ union de chaînes complètes soit un sous-treillis, est qu'il existe 2 chaînes complètes C_1 et C_2 de F vérifiant :

(on note R_1 et R_2 les deux relations associées à C_1 et C_2)

Pour tout $X(x_i, x_j)$ tel qu'il existe y_k et y_l de L_j avec $y_k \; R_1 \; x_i$ et $y_l \; R_2 \; x_i$ et vérifiant $y_k \leqslant x_j \leqslant y_l$, alors X appartient à F.

Intuitivement, il existe deux chaînes complètes C_1 et C_2 qui limitent F et tout point compris entre C_1 et C_2 appartient à F.

<u>nécessaire</u> : Soit F un sous-treillis qui s'exprime comme une union de chaînes complètes.

a) On construit deux relations R_1 et R_2 définies par :

$$\left.\begin{array}{l} \min R_1(x_i) = \min \{x_j / X(x_i, x_j) \in F\} \\ \max R_1(x_i) = \min R_1(x_i + 1) \text{ et } R_1(n_i) = n_j \end{array}\right\} (1)$$

$$\left.\begin{array}{l} \min R_2(x_i) = \max R_2(x_i - 1) \text{ et } R_2(0) = 0 \\ \max R_2(x_i) = \max \{x_j / X(x_i, x_j) \in F\} \end{array}\right\} (2)$$

On a $x_i \; R_1 \; x_j$ et $x'_i \; R_1 \; x'_j \Longrightarrow$ si $x_i < x'_i$ alors $x_j \leqslant x'_j$ et $R_1(x_i) \neq \emptyset$, pour tout x_i. De même pour R_2. Les deux sous-ensembles C_1 et C_2 associés à R_1 et R_2 sont donc deux chaînes, complètes, de F.

b) Soit $X(x_i, x_j)$ un point de $L_i \times L_j$ tel qu'il existe y_k et y_l de L_j avec $y_k \; R_1 \; x_i$ et $y_l \; R_2 \; x_i$, et $y_k \leqslant x_j \leqslant y_l$. Montrons que X appartient à F.

Si X appartient à C_1 ou C_2 c'est démontré. On considère donc $y_k < x_j < y_l$. Soit $A(a_1, a_2)$ un point de C_2 tel que $a_1 = x_i$ et $B(b_1, b_2)$ un point de C_1 tel que $b_2 = x_j$. A et B existent par définition de R_1 et R_2. On a $a_2 > x_j$ puisque X n'appartient pas à C_2 et $b_1 > x_i$ puisque X n'appartient pas à C_1. Donc $A \cap B = (a_1, b_2) = (x_i, x_j) = X$

$A \in C_2$, $B \in C_1 \Longrightarrow A \cap B = X \in F$.

<u>suffisant</u> : Soit $A(a_1, a_2)$ et $d \in R_1(a_1)$, $e \in R_2(a_1)$ avec $d \leqslant a_2 \leqslant e$.

Soit $B(b_1, b_2)$ et $f \in R_1(b_1)$, $g \in R_2(b_1)$ avec $f \leqslant b_2 \leqslant g$.

On suppose par exemple $a_1 < b_1$, $a_2 > b_2$ donc $A \cup B = (b_1, a_2)$.

On a $f \leqslant b_2$ or $a_2 > b_2$ donc $f < a_2$

De même $a_2 \leqslant e \leqslant g$ car $a_1 < b_1$ donc $f < a_2 \leqslant g$ et $A \cup B \in F$; on montrerait de même que $A \cap B \in F$ et F est un sous-treillis.

Propriété 2

Dans $L_i \times L_j$, si A (a, b) est recouvert par une fonction f à arguments rangés, alors tout point $X(x_i, x_j)$ vérifiant $x_i \geqslant a$ et $x_j \leqslant b$ ou $x_i \leqslant a$ et $x_j \geqslant b$, appartient à {f}.

Suivant le type de la fonction f, le point A caractérise deux monômes à arguments rangés :

$$m_1 = [(\underbrace{00\ldots0}_{a}1\ldots1)_i \ (\underbrace{1\ldots1}_{b+1}0\ldots0)_j]$$

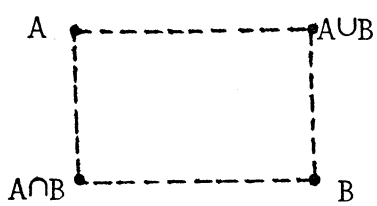
$$m_2 = [(\underbrace{1\ldots1}_{a+1}0\ldots0)_i \ (\underbrace{0\ldots0}_{b}1\ldots1)_j]$$

Chacun de ces deux monômes est le plus petit des monômes de même type couvrant le point A. On a donc $\{m_1\} \subset \{f\}$, $\{m_2\} \subseteq \{f\}$.

Or m_1 caractérise les points $M(x_i, x_j)$ de $L_i \times L_j$ vérifiant $x_i \geqslant a$ et $x_j \leqslant b$ et m_2 caractérise les points vérifiant $x_i \leqslant a$ et $x_j \geqslant b$.

Propriété 3

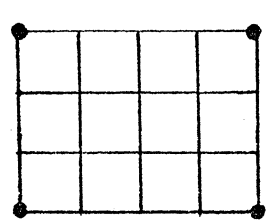
Soit f une fonction à arguments rangés de $L_i \times L_j$. Alors $\complement\{f\}$ est un sous-treillis de $L_i \times L_j$.



Soit A et B deux points du complémentaire de f.

Si $A \cup B$ n'appartient pas au complémentaire, alors d'après la propriété 2, A ou B n'appartient pas au complémentaire. De même pour $A \cap B$. Donc le complémentaire de {f} est un sous-treillis.

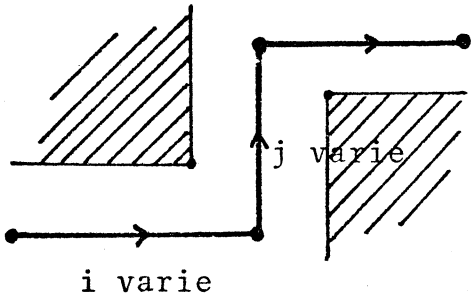
La réciproque est fausse :



Lemme 3

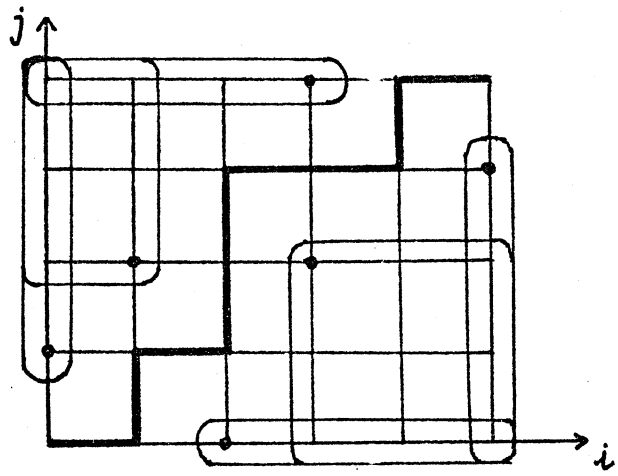
La fonction attachée dans $L_i \times L_j$ à

On appelle changement de direction sur la chaîne, le fait qu'après la variable i(resp. j) c'est la variable j(resp. i) qui varie.



Chaque changement de direction détermine un point qui caractérise un monôme à arguments rangés du complémentaire de la chaîne. La somme de tous ces monômes à arguments rangés, caractérise le complémentaire de la chaîne.

Exemple :



Soit f la fonction caractéristique de la chaîne. On a :

$$f = [(001111)_i \ (10000)_j] + [(00111) \ (11100)]$$
$$+ [(000001) \ (11110)] + [(100000)(01111)]$$
$$+ [(110000) \ (00111)] + [(111100)(00001)]$$

Lemme 4

Dans $L_i \times L_j$ la fonction caractéristique du complémentaire d'un sous-treillis union de chaînes complètes est une fonction à arguments rangés.

Soit F un sous-treillis de $L_i \times L_j$, union de chaînes complètes.

On sait d'après le lemme 1 qu'il existe deux chaînes C_1 et C_2 et donc deux relations R_1 et R_2 vérifiant : pour tout $X(x_i, x_j)$ tel qu'il existe y_k et y_l de L_j avec $y_k \ R_1 \ x_i$ et $y_l \ R_2 \ x_i$ et vérifiant

$y_k \leqslant x_j \leqslant y_l$ alors $\overset{X}{\vee}$ appartient à F. D'après le lemme 3 les fonctions caractéristiques des complémentaires de C_1 et C_2, s'écrivent :

$$f_1 = \Sigma\, m_k + \Sigma\, m_l \quad \text{et} \quad f_2 = \Sigma\, m'_k + \Sigma\, m'_l$$

d'où $\{f_1\} = \complement C_1 = (\cup\{m_k\}) \cup (\cup\{m_l\})$

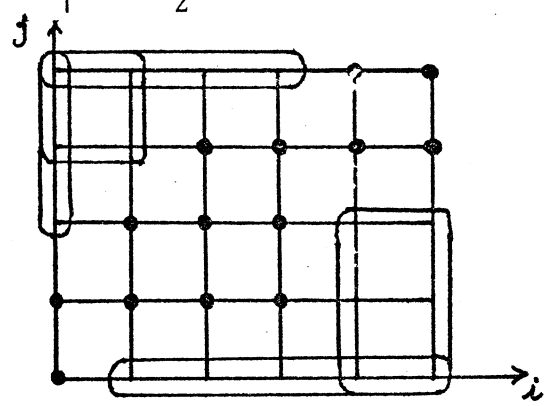
$\{f_2\} = \complement C_2 = (\cup\{m'_k\}) \cup (\cup\{m'_l\})$

avec m_k et m'_k de la forme $[(0\ldots01\ldots1)_i\ (1\ldots10\ldots0)_j]$

et m_l et m'_l de la forme $[(1\ldots10\ldots0)_i\ (0\ldots01\ldots1)_j]$

Alors, $f = \Sigma\, m_k + \Sigma\, m'_l$. (Cette écriture est une base première de f.) On vérifie aisément que tout point de F n'est pas recouvert par f et inversement que tout point du complémentaire de F est recouvert par f, par définition de f_1 et f_2.

Exemple



$$f = [(011111)\ (10000)] + [(000011)\ (11100)]$$
$$+ [(100000)\ (00111)] + [(110000)\ (00011)]$$
$$+ [(111100)\ (00001)]$$

On se place dans H où on énonce le théorème suivant :

Théorème

Dans H, la fonction caractéristique du complémentaire d'un sous-treillis union de chaînes complètes, est une fonction à arguments rangés.

Soit F un sous-treillis union de chaînes complètes. On sait d'après le paragraphe 2.2.1 du chapitre II, que si f_{ij} est la fonction caractéristique du complémentaire de la projection de F sur $L_i \times L_j$ alors f, fonction caractéristique du complémentaire de F dans H, s'écrit : $f = \Sigma f_{ij}$. f_{ij} est une fonction à arguments rangés et donc d'après la propriété 2 du chapitre III, f est une fonction à arguments rangés.

Application

Soit F un protocole de H. Recouvrons F par k chaînes complètes

En ne retenant que des chaînes dont l'union soit un sous-treilli de H, on sait que le complémentaire de cette union s'exprime, sous forme de base première, comme une somme de monômes à arguments rangés. Chacun précise, par son écriture, l'allure dans $L_i \times L_j$ du protocole, c'est-à-dire la nature de la relation liant les deux composantes i et j .

Deux chaînes particulières

Soit P un ordre; on peut lui associer deux chaînes complètes particulières : on appelle chaîne à composantes non imbriquées la chaîne de $\psi(P)$ pour laquelle les composantes varient l'une après l'autre de 0 à p-1; on appelle chaîne à composantes fortement imbriquées la chaîne, C, de $\psi(P)$ qui vérifie :

$$M(m_1, m_2, \ldots, m_n) \in C \Longrightarrow \max_{i,j} |m_i - m_j| = 1$$

Ces notions nous seront aussi utiles pour le chapitre V.

Exemple

Soit $P = [1 \leqslant 2 \leqslant 3]$, et n = 3, p = 3.

Ces deux chaînes s'écrivent ici :

Composantes non imbriquées $\begin{cases} 000 \\ 001 \\ 002 \\ 012 \\ 022 \\ 122 \\ 222 \end{cases}$

Composantes fortement imbriquées $\begin{cases} 000 \\ 001 \\ 011 \\ 111 \\ 112 \\ 122 \\ 222 \end{cases}$

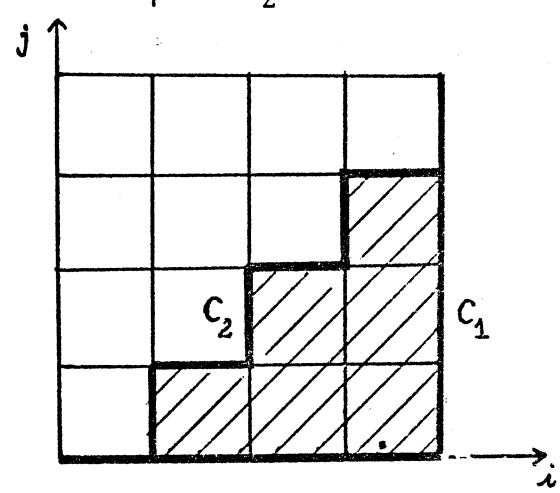
<u>Théorème</u>

Soit C_1 et C_2 les chaînes à composantes non imbriquées et fortement imbriquées respectant un ordre total P; alors $\psi(P)$ est le plus petit sous-treillis de H contenant C_1 et C_2.

Soit F un sous treillis de H, contenant C_1 et C_2, et supposons $F \subset \psi(P)$. On a :

$$\mathrm{proj}_{ij}(F) \supset \mathrm{proj}_{ij}(C_1)$$

$$\mathrm{proj}_{ij}(F) \supset \mathrm{proj}_{ij}(C_2)$$



La projection dans $L_i \times L_j$ de F est un sous-treillis. Elle contient donc (lemme 1) tous les points de la partie hachurée (les points "entre" C_1 et C_2).

Soit M appartenant à $\psi(P)$ et M n'appartenant pas à F. Il existe (i,j) tel que $\mathrm{proj}_{ij}(M) \in \mathrm{proj}_{ij}(\psi(P))$ et proj_{ij} M n'appartient pas à $\mathrm{proj}_{ij}(F)$. Or $\mathrm{proj}_{ij}(F) \supset \mathrm{proj}_{ij}(\psi(P_{\{ij\}})) = \mathrm{proj}_{ij}(\psi(P))$. Donc M n'appartient pas à $\psi(P)$ et on arrive à une contradiction. Donc $F \supseteq \psi(P)$.

4. TYPOLOGIE DES CHAINES RESPECTANT UN ORDRE TOTAL SUR LES COMPOSANTES

Soit $E = \{1, 2, \ldots, n\}$ l'ensemble des composantes, chacune variant de 0 à p-1.

Soit $P = [1 \leqslant 2 \leqslant \ldots \leqslant n]$ un ordre total. Pour une chaîne donnée et pour chaque couple de composantes (1, 2), (1, 3), ..., (1,n), (2, 3), ...,((n-1), n) on associe la valeur absolue maximale de leur différence sur la chaîne. C'est ce que l'on appelle degré d'imbrication de i et j et que l'on note $[i, j]$, $i < j$. A chaque chaîne on associe $\frac{n(n-1)}{2}$ degrés d'imbrication. Pour tout $\{i, j\}$ on a $1 \leqslant [i, j] \leqslant p-1$; On appelle <u>type d'une chaîne</u> le $\frac{n(n-1)}{2}$ -uplet formé des $\frac{n(n-1)}{2}$ degrés d'imbrication pris par ordre lexicographique : si on a 4 composantes x, y, z et t, les degrés d'imbrication sont pris dans l'ordre : $[x, y]$, $[x, z]$, $[x, t]$, $[y, z]$, $[y, t]$, $[z, t]$.

Une chaîne détermine donc un point dans un hyperpavé, noté H_1, ayant $\frac{n(n-1)}{2}$ composantes, chacune prenant p-1 valeurs. Le pôle supérieur de H_1 s'écrit ((p-1) (p-1)...(p-1)) et correspond à la chaîne de $\psi(P)$ dont les composantes sont non imbriquées, le pôle inférieur (1, 1, ..., 1) correspondant à la chaîne dont les composantes sont fortement imbriquées.

Pour une chaîne associée à l'ordre total $P = [1 \leqslant 2 \leqslant \ldots \leqslant n]$, on a les inégalités suivantes :

$$\underset{i=1,\ldots,n-1}{\forall\, i<j} \quad : [i, j] \leqslant [p, q] \quad \text{avec } p \leqslant i \text{ et } q \geqslant j$$

Ce qui est équivalent à:

$$\underset{i=1,\ldots,n-1}{\forall\, i<j} \quad : \begin{cases} [i, j] \leqslant [i - 1, j] \\ [i, j] \leqslant [i, j + 1] \end{cases}$$

et qui définit un ordre P_1 dans H_1, sur les degrés d'imbrication.

Exemple :

$P = [1 \leqslant 2 \leqslant 3 \leqslant 4]$

A une chaîne respectant P on associe le $\frac{4x3}{2}$-uplet suivant :

([1, 2], [1, 3], [1, 4], [2, 3], [2, 4], [3, 4])

Avec comme inégalités :

$[1, 2] \leqslant [1, 3]$

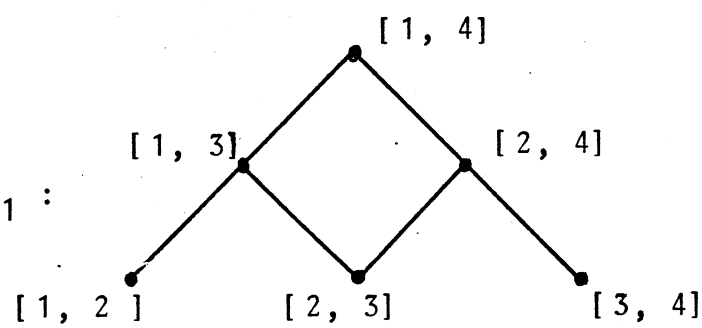
$[2, 3] \leqslant [1, 3]$ et $[2, 3] \leqslant [2, 4]$

$[3, 4] \leqslant [2, 4]$

$[1, 3] \leqslant [1, 4]$

$[2, 4] \leqslant [1, 4]$ ce qui représente un ordre P_1 :

P_1 :



Ainsi, soit P un ordre total sur les composantes de H et $\mathcal{C}$ l'ensemble des chaînes complètes de $\psi(P)$. A chaque chaîne de $\mathcal{C}$ on associe son type, et à chaque type on associe un point de l'hyperpavé H_1. (Si $p > 3$, la réciproque n'est plus vraie et à un type on peut associer plusieurs chaînes). Alors, il existe un préordre P_1 sur les composantes de H_1 tel que l'ensemble des types des chaînes de $\psi(P)$ n'est autre que la tresse $\psi(P_1)$.

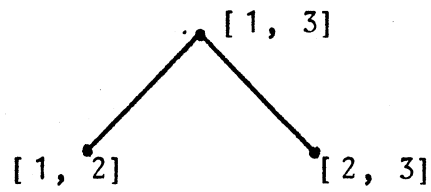
Théorème

L'ensemble des types des chaînes associées à un ordre total P est une tresse de H_1 associée à un ordre P_1, déduit de P.

<u>Exemple</u>

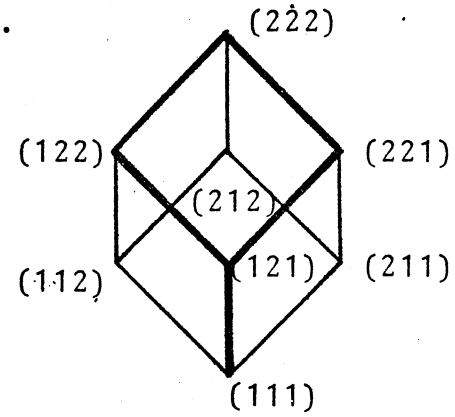
$n = 3,\ p = 3$ et $P = [1 \leqslant 2 \leqslant 3]$

P_1 s'écrit :



H_1 est donc l'hyperpavé à $\frac{3x2}{3}$ composantes, chacune variant de 1 à p-1.

$\psi(P_1)$:



A chaque sommet de H_1 correspond le type d'une chaîne respectant P. Un sommet est donc un triplet :

([1, 2], [1, 3], [2, 3])

Les 5 chaînes associées aux 5 types de $\psi(P_1)$ sont :

Type	(111)	(121)	(122)	(221)	(222)
	000	000	000	000	000
Chaîne	001	001	001	001	001
associée	011	011	002	011	002
	111	012	012	012	012
	112	112	112	022	022
	122	122	122	122	122
	222	222	222	222	222

CHAPITRE V

ETUDE DE DIVERS PROBLEMES RENCONTRES EN ANALYSE HIERARCHIQUE

Dans ce chapitre on reprend quelques problèmes classiques pour lesquels on propose des méthodes de résolution qui pour la plupart ont été programmées. Les programmes correspondants et les exemples seront présentés dans le chapitre VI.

1. ANALYSE HIERARCHIQUE UNIDIMENSIONNELLE, PROBLEME DU CODAGE ET PROBLEME DU SEUIL.

Soit $L_i = \{0, 1, \ldots, n_i-1\}$ et $H = \prod_{i=1}^{n} L_i$

Soit X un protocole, c'est-à-dire un ensemble de points M de H, affectés d'un poids $p(M)$, leur effectif. On note $X = \{M; p(M)\}$. Le problème est de déterminer, puis de construire, la chaîne qui "s'ajuste le mieux au protocole". On utilisera la terminologie de chaîne qui "représente au mieux le protocole", qui correspond plus à la méthode introduite ici.

1a) Méthode

Habituellement, ([1], [18]) on définit une distance sur H et on détermine la chaîne qui minimise la somme des distances de chaque point de X à la chaîne, pondérées par l'effectif du point.

Ici, aussi, il nous faut choisir une distance. Les 3 distances les plus utilisées sont les suivantes (voir aussi dans [18]) que l'on présente dans $L_i \times L_j$:

a) d est la distance de Hamming définie par :

soit $M(m_1,\ldots,m_i,\ldots,m_n)$ et $M'(m'_1,\ldots,m'_i,\ldots,m'_n)$ deux points de H.

On pose :

$$d(M,M') = \sum_{i=1}^{n} | m_i - m'_i |$$

b) d_1 est une distance définie par :

$d_1(M,M') = 1$ si $M \neq M'$, 0 sinon.

c) $d_2(M,M')$ est le nombre minimum d'arcs séparant M et M' dans $L_i x L_j$ complété en reliant tout couple de sommets (M, M') tels que

$$\text{et} \quad \begin{cases} d(O, M) = d(O, M') \\ d(M, M') = 2 \end{cases}$$

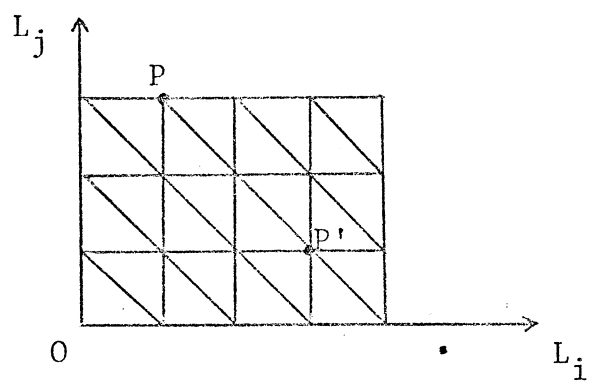


Fig 1

<u>Exemple</u> (Fig. 1)

$d(P, P') = 4$

$d_1(P,P') = 1$

$d_2(P,P') = 2$

On choisit pour toute la suite la distance de Hamming, car c'est elle qui nous paraît la plus justifiée au point de vue de l'interprétation sociologique, en particulier la distance d_2 utilisée dans ([18]) nous semble délicate à interpréter et la distance d_1 est trop grossière.

Après le choix d'une distance, la deuxième étape consiste à affecter à tout point M de X, une pondération t_M.

On a choisi $t_M = \sum_{N \in X} p(N) \cdot \alpha_{NM}$

α_{NM} est un coefficient qui est décroissant en fonction de d(M,N), par exemple $\alpha_{NM} = \frac{1}{d(M,N)+1}$. Nous nous servirons de cette valeur dans toute la suite. Si, pour la valeur $\alpha_{NM} = \frac{1}{d(M,N)+1}$, le voisinage de M a un poids trop fort ou, au contraire, pas assez fort, il conviendra de modifier α_{NM} en conséquence. Ce choix dépendra de la nature du questionnaire.

Intuitivement, le coefficient t_M attaché à M, mesure l'intégration de M au protocole. On notera $X' = \{M;\ t(M)\}$ et on appellera pseudo-protocole ce nouveau protocole obtenu à partir de X. Sur X', on définit un seuil en dessous duquel un point M sera considéré comme ayant un poids t_M négligeable.

L'intérêt de définir un seuil sur X' et non sur X est de permettre l'élimination d'un point M isolé mais d'effectif non négligeable, qui de toutes façons nuira à toute analyse hiérarchique puisque aucune chaîne complète ne pourra passer par M, et inversement le seuil sur X' n'éliminera pas un point M d'effectif faible mais bien intégré au protocole, donc de poids t_M non négligeable.

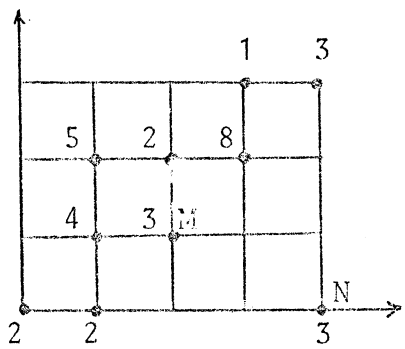
La pondération t_M peut s'écrire différemment en faisant intervenir la notion de voisinage. Si on note V_M^d l'ensemble des points de X à distance d de M et si on pose $\mathrm{card}\{V_M^d\} = \sum_{N \in V_M^d} p(N)$,

alors on a :

$$t_M = \sum_{d=0}^{\beta} \frac{\mathrm{card}\{V_M^d\}}{d+1} \qquad \text{avec } 0 \leqslant \beta \leqslant \sum_{i=1}^{n} (n_i - 1)$$

Dans la pratique on se limitera à des valeurs de β faibles par rapport à $\Sigma(n_i-1)$. Le cas où $\beta = 0$ revient à ne pas considérer le voisinage et alors $t_M = p_M$. On est alors ramené au cas de la distance d_1, citée précédemment.

Exemple :



si $\beta = 0$ $p_M = t_M = 3$ et $p_N = t_N = 3$

si $\beta = 1$ $t_M = 6$ et $t_N = 3$

si $\beta = 2$ et le seuil choisi pour t est de 4, seul le point N sera d'effectif negligeable.

Ayant défini une distance sur H et une pondération sur le protocole, il ne reste qu'à définir le critère retenu : La chaîne C que l'on choisit pour représenter X est celle qui maximise la quantité $\sum_{M \in C} t_M$.

1b) Algorithme

On ne retient pas ici l'algorithme classique de recherche d'un chemin de poids maximal pour des raisons de rapidité, de simplicit et de méthode que l'on développera dans le paragraphe suivant et au chapitre VI. De même on ne définit pas une chaîne comme un ensemble totalement ordonné par une relation d'ordre (voir chap. I) mais comme un ensemble de points $V_0, V_1, V_2, \ldots, V_l$ vérifiant pour tout $i<j<k$: $d(V_i, V_j) + d(V_j, V_k) = d(V_i, V_k)$.

On choisit parmi les k patrons du pseudo-protocole $X' = \{M; t(M)\}$, les deux de poids les plus forts. On impose à la chaîne de passer par ces deux points qui forment les extrémités provisoires de la chaîne. Parmi les (k-2) patrons restants, on regarde si le patron de poids le plus fort forme une chaîne avec les deux

Si oui, on le rajoute à la chaîne qui comprend donc 3 points et dont une des extrémités peut être le nouveau point; sinon on le rejette et on recommence avec, parmi les (k-3) patrons restants celui qui est de poids maximum. On s'arrête lorsqu'on a (n+1) patrons dans la chaîne ou lorsqu'on a épuisé tous les patrons du protocole. La chaîne peut donc ne pas être complète.

La chaîne trouvée n'est pas nécessairement celle de poids le plus fort construite à partir du protocole. Aussi on recherchera plutôt par le même algorithme, les $\frac{x(x-1)}{2}$ chaînes passant par 2 des x points de poids les plus forts. x, choisi de façon à ce que raisonnablement, la meilleure chaîne passe par au moins 2 des x points retenus, a pris des valeurs comprises entre 5 et 10 dans nos exemples.

1c) Avantages et inconvénients de la méthode

Dans l'algorithme classique de recherche d'une chaîne de poids optimal, on part de l'une des extrémités, V_0, de la chaîne et on construit pas à pas la chaîne en choisissant à l'étape 1 le point à distance 1 de V_0 qui optimise la somme de la quantité optimale de l'étape 1-1 et de la quantité rajoutée par le point de l'étape 1.

Ici c'est l'algorithme lui même qui, en construisant la chaîne, détermine ses extrémités et donc permet de résoudre le problème du codage, c'est-à-dire qui, en recodant certaines questions permet à la chaîne trouvée d'être un sous-treillis de H. Dans ces conditions on est obligé de vérifier que sur la chaîne toute question i, i = 1,... varie de 0 à n_i-1 ou de n_i-1 à 0. Pour cela il suffit de vérifier que la $i^{ème}$ composante des extrémités de la chaîne est 0 ou n_i-1, et ce, pour tout i = 1, 2, ..., n.

On recode ensuite toutes les questions qui varient de n_i-1 à 0 en posant pour $0 \leqslant m \leqslant n_i-1$: $m' = (n_i-1) - m$. Toute chaîne retenue

se ramène ainsi à une chaîne variant du point (0, 0, ..., 0) au point $(n_1-1, n_2-1, \ldots, n_n-1)$. En algèbre de Boole toute chaîne respecte la condition sur les composantes des extrémités et il suffit de complémenter($0 \longleftrightarrow 1$) les questions variant de 1 à 0 (voir chapitre VI).

L'algorithme proposé permet de plus la construction de plusieurs chaînes d'extrémités diverses qui donnent une idée précise sur la forme du protocole. Il accepte, enfin, des chaînes incomplètes c'est-à-dire qu'une chaîne peut être constituée de l points, avec $2 \leqslant l \leqslant \sum_i (n_i-1) + 1$.

2. ANALYSE HIERARCHIQUE MULTIDIMENSIONNELLE.

Soit $X = \{M;\ p(M)\}$ un protocole et $X' = \{M;\ t(M)\}$, le pseudo-protocole associé. Le problème est de recouvrir X' par un certain nombre de chaînes C_i. En pratique la famille de chaînes que l'on cherchera à construire ici, vérifiera les deux conditions suivantes :

(1) Pour tout M de X' tel que $t_M \geqslant t_0$ (seuil à fixer), il existe au moins une chaîne passant par M.

(2) Soit S la somme des effectifs des points recouverts par les diverses chaînes. Alors on doit avoir

$$S \geqslant \beta \cdot \left(\sum_{M \in X'} t_M \right), \quad 0 < \beta \leqslant 1 \quad \text{à fixer.}$$

2a) Méthode

Dans une première étape on détermine les extrémités A et B des chaînes qui recouvriront le protocole. Cette détermination est effectuée en observant les extrémités des chaînes de poids maximal construites par l'algorithme du paragraphe 1b. Ensuite nous construisons

à l'aide du même algorithme la chaîne de poids maximum passant par A, B et M_1, point de poids maximum dans X" qui est le pseudo-protocole X' privé de A et B. Puis nous construisons la chaîne passant par A, B et M_2, point de poids maximum dans $\{X''-M_1\}$ et ainsi de suite jusqu'à la chaîne passant par M_l. l est déterminé en fonction des effectifs des points de X de façon à ce que les conditions (1) et (2) soient vérifiées.

Remarques :

En cas de points de poids égaux, on pourra faire intervenir un voisinage plus vaste permettant d'attribuer à ces points un poids différent. Si malgrè cela le poids reste le même pour plusieurs points, on pourra construire les chaînes reliant les deux pôles et passant par chacun des points de poids égaux pris dans un ordre arbitraire et s'arrêter quand la condition (2) sera satisfaite.

On pourra évidemment trouver plusieurs chaînes identiques.

2b) Méthode classique

Cette méthode est présentée dans [(18)].

Soit A = (0,...,0) et B = $(n_1, n_2, \ldots, n_n)$ les extrémités choisies arbitrairement pour les chaînes. Sur H on définit la relation d'ordre :

$$M(m_1,\ldots, m_n) \leqslant P(p_1,\ldots,p_n) \Longleftrightarrow \forall i,\ m_i \leqslant p_i$$

Soit $\{F_1, F_2, \ldots, F_k\}$ une partie libre maximale pour cette relation d'ordre, formée d'éléments de X. Pour tout F_i de la partie libre on recherche une chaîne C_i passant par A, B et F_i.

2c) Conclusion

La recherche d'une partie libre maximale nuit au rendement de la deuxième méthode. La première méthode implique la recherche d'un nombre élevé de chaînes. Nous verrons au chapitre VI des temps de recherche de chaînes en algèbre de Boole sur IBM 370/168 où 5 à 6 secondes suffisent pour trouver une cinquantaine de chaînes avec 10 questions dans un protocole de 120 patrons.

3. ELIMINATION DE QUESTIONS.

Un problème que l'on rencontre assez souvent en analyse hierarchique, est l'élimination de questions. Par exemple ce problème se pose si le nombre de patrons d'un protocole est faible par rapport au nombre de points de H. Alors, sauf si le protocole est fortement hierarchisé, il sera difficile de représenter ce protocole par des modèles ordonnés. On cherchera, dans ces conditions, à éliminer des questions suivant divers critères et on projettera le protocole dans le sous-ensemble de H formé par les questions restantes. Dans nos exemples (chapitre VI) on utilise certains critères classiques introduits par Matalon ([19] p.47-49), comme par exemple l'élimination des questions non discriminantes.

En outre, on définit deux indices, à partir des tris croisés des questions 2 à 2 pour déterminer les questions qui nuisent le plus à la hiérarchisation du protocole.

1 : Première méthode

Les tris croisés se présentent sous la forme suivante :

j \ i	0	1
0	$n_{i'j'}$	$n_{ij'}$
1	$n_{i'j}$	n_{ij}

Pour chaque question q_k nous calculons la valeur

$$K(q_k) = \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{n} \min(n_{lk'} , n_{l'k})$$

$K(q_k)$ indique le nombre minimum de désaccords qu'il y aura pour n'importe quel ordre, si on conserve la question q_k. Les questions à enlever sont donc celles pour lesquelles la valeur $K(q_k)$ est la plus élevée.

2 : Pour la <u>deuxième méthode</u>, on calcule l'indice $L(q_k)$ de la méthode "Estimation d'une position relative" ([12], p.48).

$$L(q_k) = \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{n} n_{lk'} - \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{n} n_{l'k}$$

Les questions dont la valeur $L(q_k)$ est positive et élevée sont les questions qui impliquent nettement les autres. Les questions dont la valeur $L(q_k)$ est négative et élevée sont celles qui sont nettement impliquées par les autres. Les questions pour lesquelles l'indice $L(q_k)$ est voisin de 0, sont les questions qui n'ont pas une place forte dans la hiérarchie. C'est elles que nous enlèverons en premier.

Exemple : de M. Maurice repris par Degenne ([7], p.68) sur le syndicalisme des cadres.

On obtient pour K et L :

	a	b	c	d	e	f
K	150	192	207	278	239	194
L	-435	-231	-189	-105	351	609

K est maximum pour la question d, et L est minimum en valeur absolue pour d. C'est d qu'on enlèvera en premier. Degenne arrive au même résultat.

Remarque :

Les questions enlevées par ces deux méthodes diffèrent, en théorie. Celles qui sont sélectionnées par la première méthode sont les questions qui perturbent le plus; les questions éliminées par la deuxième méthode sont celles qui n'apportent rien de net.

On peut remarquer tout de même que si une question k a une place nette dans la hiérarchie, alors on a forcément $n_{lk'}$ ou $n_{l'k}$ qui est voisin de zéro, quel que soit l, et donc $K(q_k) \sim 0$. La réciproque n'est pas vraie. On peut très bien avoir $K(q_k) \sim 0$ et $L(q_k) \sim 0$: ceci est vérifié pour les questions qui sont nettement impliquées par un certain nombre de questions et qui impliquent nettement un même nombre d'autres questions.

Ces deux méthodes d'élimination de questions ont été programmées. Nous y reviendrons au chapitre VI.

4. MESURE D'UNE PREFERENCE. THEORIE DES FACETTES.

Soit deux produits A et B, chacun noté de 0 à p-1 par une population. Un patron de réponse est donc un couple (α,β), α note pour A, β note pour B. Si on veut avoir une bonne idée de la structure des comportements de la population, on projettera dans $\{0, 1, \ldots, p-1\} \times \{0, 1, \ldots, p-1\}$ où l'interprétation sera immédiate. En particulier si on ajuste le protocole par une chaîne, l'étude du type de la chaîne aidera à l'interprétation.

Si $|A-B| \sim 0$ les deux produits sont considérés comme équivalents (voir plus en détail aux chapitres III, IV). Si $A \geqslant B$ et $A-B \sim 0$, le produit A sera faiblement préféré au produit B(Fig.1), alors que si $A > B$ et A-B grand, alors la préférence sera grande pour le produit A (fig.2).

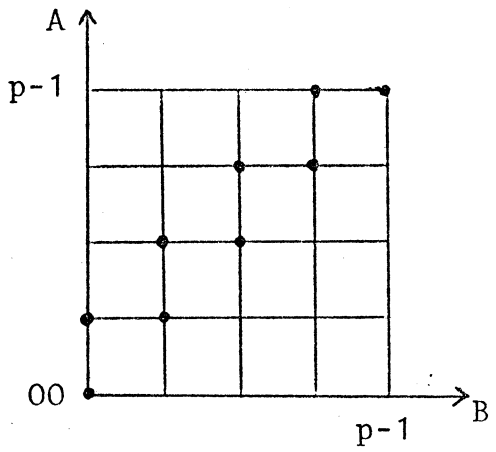


Fig. 1

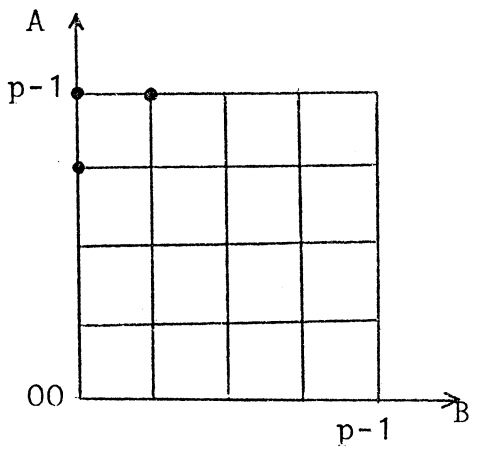


Fig. 2

La production de ces "tris croisés" permettra d'éliminer certaines questions dans la théorie des facettes.([19], p.59-62); par exemple pour le protocole de la figure 2 on éliminera des questions complémentaires du type "Resteriez-vous fidèle au produit A s'il augmentait de x francs ou si B baissait de x francs ?",

dans lesquelles x est petit, alors que dans le cas de la figure 1 au contraire on choisira x petit.

5. VOISINAGE D'UNE CHAINE COMPLETE.

Définition :

Soit $C = \{V_o, \ldots, V_i, \ldots, V_p\}$ une chaîne complète.

On appelle voisinage de C et on note V(C), le sous-ensemble de H défini par : $V(C) = \{M \in H / \exists V_i \in C \text{ et } d(M, V_i) = 1\}$.

5a) Effectif du voisinage en algèbre de Boole

Propriété : En algèbre de Boole on a $\text{card}(V(C)) = n(n-1)+2$, où n est la dimension de l'hypercube booléen H.

Démonstration : La propriété est vraie pour $n = 2$.

Supposons la propriété vraie pour $n-1$.

On a alors $\text{card}(V(C)) = (n-1)(n-2) + 2$. On considère que les n points de la chaîne sont dans une moitié d'un n-cube, celle où, par exemple, la $n^{\text{ième}}$ composante est égale à zéro. Soit $x_1\, x_2 \ldots x_{n-1}$ un point de la chaîne. On l'écrira donc $x_1\, x_2 \ldots x_{n-1}\, 0$. A ce point on peut associer son voisin $x_1\, x_2 \ldots x_{n-1}\, 1$. On a donc n voisins dont 1 est le $(n+1)^{\text{ième}}$ point de la chaîne. Ce point a n voisins dont 2 ont déjà été comptés (le $n^{\text{ième}}$ point de la chaîne et un voisin du $(n-1)^{\text{ième}}$ point). On a donc :

$$\begin{aligned}\text{card}(V(C)) &= (n-1)\ (n-2) + 2 + n + (n-2)\\ &= (n-1)\ (n-2) + 2\ (n-1) + 2\\ &= n\ (n-1) + 2\end{aligned}$$

Construisons le tableau donnant les valeurs

$$r_1 = \frac{\text{card}(V(C))}{2^n} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{n+1}{2^n}$$

représentant le rapport entre le cardinal du voisinage d'une chaîne et le cardinal de H d'une part, et le rapport entre le cardinal d'une chaîne et le cardinal de H d'autre part.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n+1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2^n		4	8	16	32	64	128	256	512	1024
Card(V(C))			8	14	22	32	44	58	74	92
r_1			1	0,875	0,69	0,5	0,34	0,236	0,145	0,0915
r_2		0,75	0,5	0,31	0,189	0,11	0,0625	0,035	0,02	0,011

On a $r_1(10) = 0{,}0915$ et $r_2(6) = 0{,}11$.

Il nous paraît donc aussi justifié de parler d'une chaîne et de ses voisins avec 10 questions, que de parler d'une chaîne seule avec moins de 6 questions. En fait, on parlera de voisinage à partir de 7 ou 8 questions et cette notion de voisinage sera d'autant plus justifiée qu'on se rapprochera d'un espace isotrope dans lequel un point et ses voisins ne diffèreront que dans une faible mesure, et seront assimilables à une attitude commune.

5b) Effectif du voisinage dans un produit direct d'ordres totaux quelconques.

Définition : On dit qu'une chaîne change de direction si, sur la chaîne, après qu'une composante i ait varié, c'est une composante j, $j \neq i$, qui varie.

Alors qu'en algèbre de Boole le cardinal du voisinage d'une chaîne ne dépendait pas de la chaîne, il n'en est plus de même ici. Rapidement, et d'une manière intuitive, une chaîne d'effectif minimum se trouvera sur les arêtes de l'hyperpavé ou aura des degrés d'imbrication (chapitre IV) minimum, c'est-à-dire que la chaîne change de direction un nombre maximum de fois. Inversement une chaîne de voisinage maximum s'éloignera au plus vite des faces de l'hyperpavé, puis dans l'hyperpavé, elle aura des degrés d'imbrication maximum pour tout couple de composantes. On ne peut donc donner que des bornes.

Pour $n = 2$ $\quad 2p - 3 \leqslant \text{card}\,(V(C)) \leqslant 4p - 9$

Pour $n = 3$ $\quad 6p - 8 \leqslant \text{card}\,(V(C)) \leqslant 2(6p-11)$ etc...

Ces résultats partiels sont néanmoins nécessaires pour calculer $\dfrac{\text{card}(V(C))}{\text{card}(H)}$ et justifier l'utilisation du voisinage lors d'une enquête.

CHAPITRE VI

APPLICATIONS : PROGRAMMES ET EXEMPLES D'UTILISATION

1. Programmes
2. Exemples

1. PROGRAMMES.

Nous avons été amené, lors de l'étude de nos exemples, à rédiger de nombreux programmes représentant un millier d'instructions environ. Le matériel disponible nous a imposé l'usage du FORTRAN. Certains de ces programmes sont classiques : production de tris croisés des questions 2 à 2, calcul et impression de divers coefficients d'ajustement du protocole au modèle ([22]) etc...; Nous n'y reviendrons pas ici.

Nous présentons brièvement les autres programmes : tous sont rédigés sous forme de sous-programmes et sont disponibles. Nous donnons au cours de ce chapitre des extraits de listings utilisés dans l'étude des exemples et illustrant le travail effectué par les programmes.

1.1 : PØNDER : sous-programme de pondération

Le sous-programme PØNDER (ALPHA, BETA) calcule pour chaque point, ou patron, M : $TM = \sum_{l=0}^{\beta} \frac{\text{card}\ \{V_M^l\}}{l+1}$ et ne retient que les points pour lesquels TM est supérieur ou égal à ALPHA. Ce programme, comme tous les suivants, utilise la fonction D(I, J) qui calcule la distance de Hamming séparant les deux points I et J.

1.2 : VØISIN : effectif du voisinage

Le sous-programme VØISIN dresse pour chacun des points du protocole la liste de ses voisins (distance de Hamming égale à 1) avec les divers effectifs. Ce sous-programme peut être soit appliqué sur X, soit sur X' (notations chapitre V).

1.3 : ELIMIN : Elimination de questions

Les deux coefficients utilisés pour déterminer quelles questions enlever en priorité, ont été présentés au chapitre V. Le programme correspondant ne présente aucune difficulté.

1.4 : DIKØTØ : dichotomisation des données

Le problème de la dichotomisation des données s'est rencontré lors des études de cas biologiques. Lorsque nous avions une variable à dichotomiser, un poids par exemple, nous avons tracé l'histogramme des poids pour toute la population, ce qui permet par exemple de voir l'existence de deux sous-populations et donc de "couper" entre ces deux sous-populations. Lorsqu'il n'existe pas deux sous-populations nettes, nous avons dichotomisé, à l'aide du sous-programme DIKOTO, suivant la moyenne de la médiane.

Dans nos exemples les résultats étant sensiblement les mêmes, nous nous en sommes tenus à la moyenne.

Remarque :

On peut noter que si la moyenne est proche du mode, ce qui est souvent le cas dans les exemples biologiques pour la plupart de type gaussien, la présence de quelques poids aberrants va modifie la moyenne et entraîner un codage qui peut être assez différent de celui obtenu sans ces poids aberrants. Il semble prudent avant d'analyser un protocole, de vérifier que celui-ci est stable, c'est-à-dire qu'il n'est pas profondément modifié par une variation minime du paramètre (moyenne ou médiane) servant à la dichotomisation des variables.

1.5 : Contrôle des variables (non programmé)

En vue d'éliminer un maximum d'erreurs de mesure lorsqu'on est en présence d'une variable continue pour laquelle on a ramené le domaine de variation de 0 à 100, il nous a paru intéressant de couper ce domaine en trois classes : [0,25],]25, 75],]75, 100] , ou [0, 33, 66, 100] , et de ne retenir dans un premier temps comme points du protocole, que ceux dont toutes les coordonnées ont un caractère fortement marqué appartenant à une des deux classes extrêmes. En d'autres termes; cela revient à déterminer autour de la moyenne ou de la médiane, une zone considérée comme floue ([13]).

Dans un deuxième temps on essaie de structurer ces points forts. Si cela ne donne rien on s'arrête; sinon on essaiera d'étoffer le protocole obtenu en rajoutant à ces points forts des points "voisins" ayant une ou plusieurs composantes floues.

Chaque composante se trouve scindée en trois classes notées 0,1 et 2, les regroupements possibles étant :

	0	1	2
0	oui	oui	NON
1	oui	oui	oui
2	NON	oui	oui

Par exemple, le point 2012 peut être regroupé avec 2002 ou 2022. On essaiera d'éliminer ces ambiguités en commençant par rajouter des voisins aux points d'effectifs les plus élevés.

1.6 : GRØUPE : regroupement des données

Si le nombre de patrons différents d'un protocole est élevé,on peut douter à priori de la précision qu'il y a à représenter ce protocole par une chaîne. Si toutefois on essaie, il semble opportun dans un premier temps de regrouper le protocole et de structurer le nouveau protocole obtenu. Ce problème s'est posé lors de l'étude des cas biologiques (paragraphe 2.2).

Soit N le nombre de questions ou composantes et KA le nombre de points au départ. Les données initiales, des poids d'organes ici, sont stockées dans le tableau VINIT; chaque composante est dichotomisée suivant la moyenne; soit V le tableau obtenu par dichotomisation à partir de VINIT. Dans V et VINIT, chaque ligne représente un point. Au départ tous les points ont un effectif égal à 1. Après le regroupement on note NN(K) l'effectif du point d'indice K.

Considérons le point d'indice L défini par V(L, I), I = 1 à N et NN(L). Essayons de lui rattacher le point défini par V(J, I), I = 1 à N, d'effectif égal à 1. Si pour chaque composante I pour laquelle V(L, I) est différent de V(J, I) on a au moins VINIT(L, I) ou VINIT(J, I) qui est proche (à définir) de la moyenne de la I^{ème} composante notée AMØY(I), on regroupera ces deux points en un troisième, noté VO(I), I = 1 à N, d'effectif NN(L)+1, défini par :

si NN(L).|VINIT(L,I)-AMØY(I)| ≥ |VINIT(J,I)-AMØY(I)|

alors VO(I) = V(L, I)

sinon VO(I) = V(J, I)

(on choisit comme résultante la composante ayant la valeur, pondérée par l'effectif, la plus éloignée de la moyenne).

VINIT(L, I) prend alors la valeur :

VINIT(L,I) = (NN(L)*VINIT(L,I) + VINIT(J,I))/(NN(L)+1)

où 1 représente NN(J).

La composante VINIT(L, I) sera considérée comme "proche" de la moyenne de la I^{ème} composante si

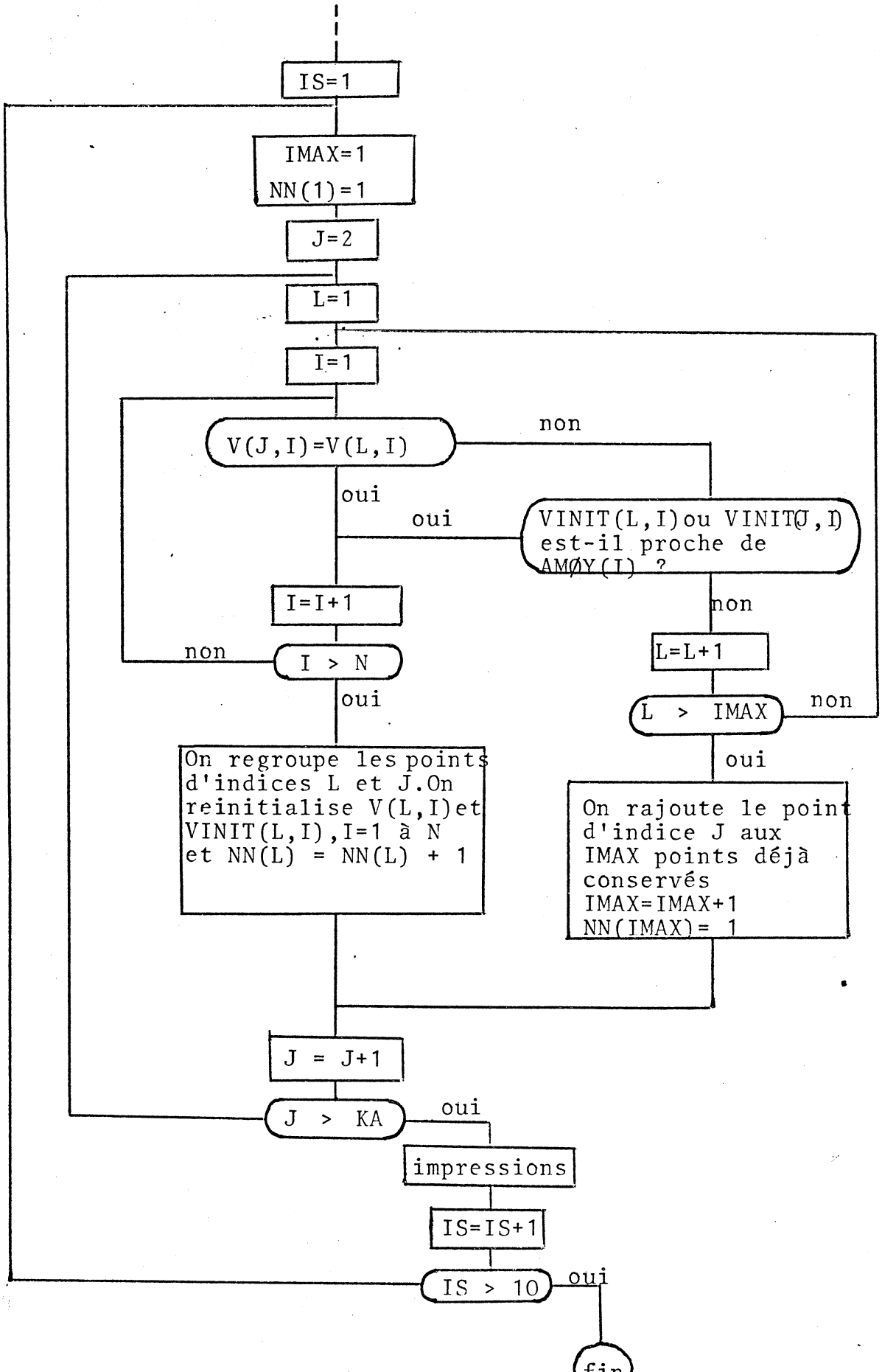
$$|VINIT(L, I) - AMØY(I)| \leq \frac{IS.AMØY(I)}{100}$$

où IS est une constante que l'on a fait varier dans nos exemples entre 1 et 10. Ceci revient à considérer une zône floue d'amplitude $\frac{2.IS.AMØY(I)}{100}$ autour de la moyenne AMØY(I).

<u>Organigramme succinct du programme</u> : page suivante

<u>Notation</u> : IMAX est le nombre de patrons différents après regroupement.

ORGANIGRAMME DU SOUS-PROGRAMME DE REGROUPEMENT DES DONNEES



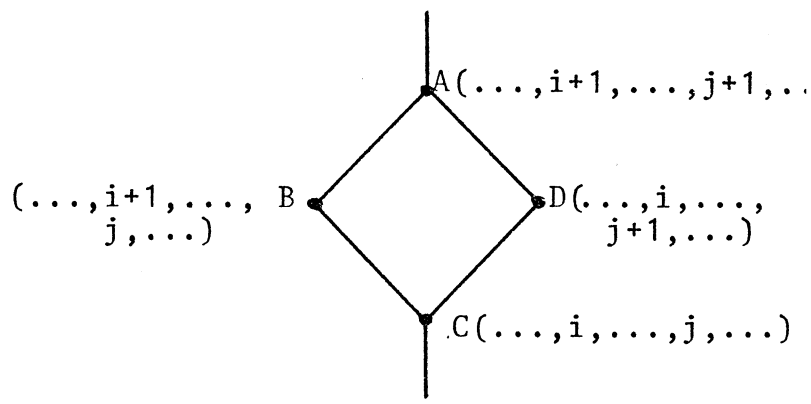
1.7 : PRØJET : projection du protocole dans les 3-cubes

Soit $Q = \{q_1,\ldots,q_n\}$ un ensemble de questions dichotomiques et P un protocole. Les tris croisés de questions 2 à 2 sont à la base de nombreuses méthodes pour mettre en évidence les implications entre questions. Si la recherche de l'effectif d'une chaîne associée à n'importe quel ordre total est vite impossible ([12]), on peut, par contre, jusqu'à des valeurs assez élevées de n, projetter le protocole dans tout 3-cube $q_i \times q_j \times q_k$, et en déduire la meilleure chaîne et son effectif. Ces projections complètent les projections dans les 2-cubes que sont les tris croisés 2 à 2 et donnent des précisions sur les implications qui formeront le modèle ordonné représentatif du protocole.

1.8 : FACE : Recherche de faces

Définition :

On appelle face accolée à un protocole P, l'ensemble formé par quatre points, A, B, C, D, de la forme suivante :



où A, B et C appartiennent à P. On a $d(A, B) = d(B, C) = 1$.
On rajoute à P le point D tel que $d(A, D) = d(C, D) = 1$.

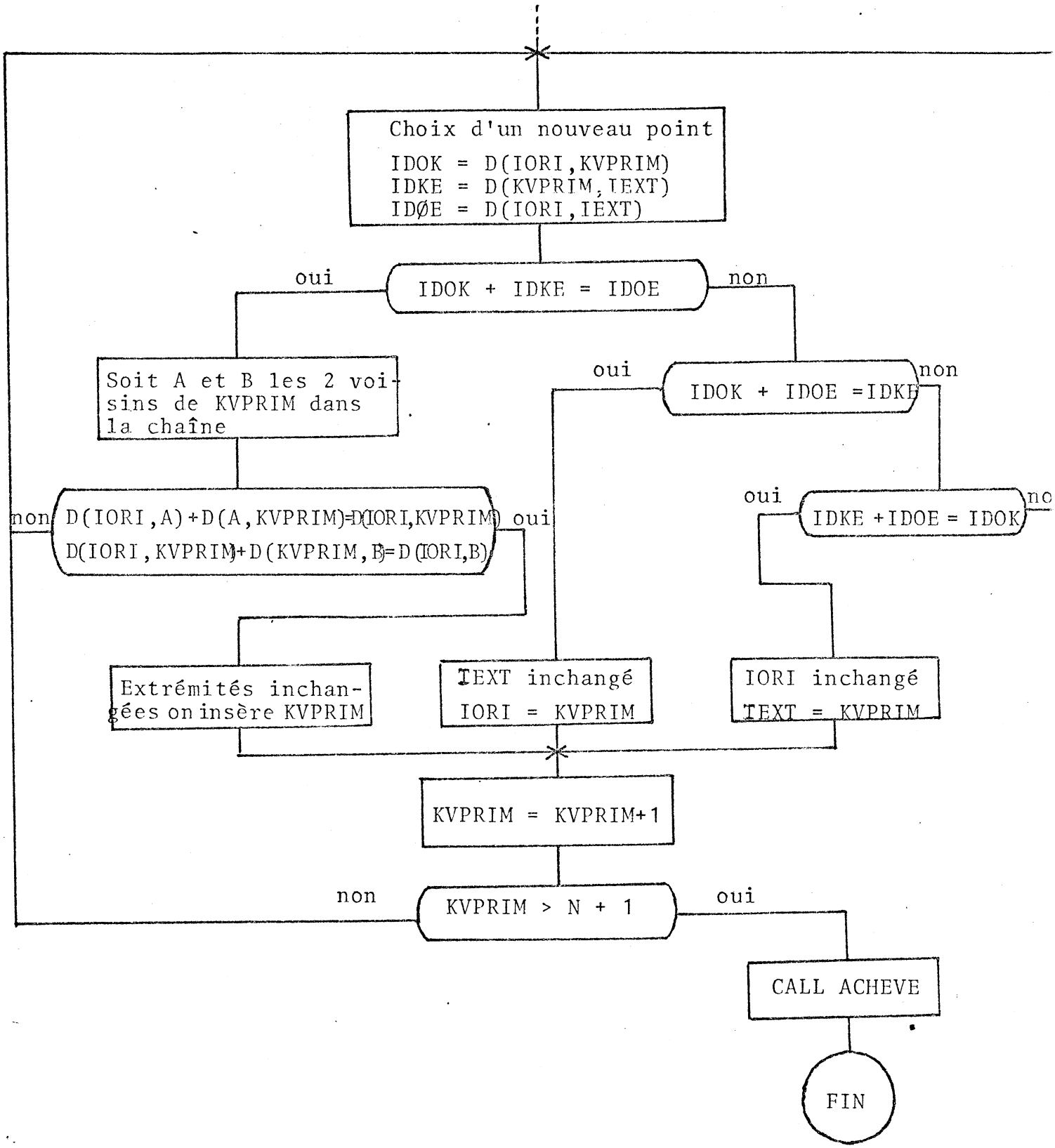
Le sous-programme FACE recherche toutes les faces que l'on peut accoller à un modèle, chaîne ou tresse, et recommence cette recherche sur la figure obtenue. Ceci permet d'étudier le voisinage d'un modèle et d'en déduire comment ce modèle s'intègre au protocole. Notons qu'à partir d'un sous-treillis, la figure obtenue n'est pas forcément un sous-treillis.

1.9 : CHAINE : recherche de chaînes dans un protocole. Problème du codage

Ce programme recherche, en premier lieu, les meilleures chaînes du protocole au point de vue de l'effectif. Ces chaînes sont formées de p points, $2 \leqslant p \leqslant n+1$, le programme admettant l'existence de chaînes incomplètes. Après avoir effectué un codage dichotomique à priori des réponses, par diverses méthodes spécifiques de chaque utilisateur, le programme recode les questions de telle façon que les chaînes trouvées soient des sous-treillis de H, ce qui revient à resuspendre H par une des extrémités de la chaîne. L'ordre et le codage sont alors imprimés, ainsi que le "scalogramme parfait" qui en résulte.

Nous avons présenté la méthode au chapitre V. Nous ne donnons ici que l'algorithme du traitement d'un point, déterminant si ce point peut être rajouté à la chaîne incomplète déjà construite.

Notations : IØRI désigne l'origine actuelle de la chaîne, IEXT son extrémité. KVPRIM désigne le nouveau point examiné, N est le nombre de questions. ACHEVE est le sous-programme qui resuspend la chaîne par une de ses extrémités, imprime le scalogramme et l'ordre -ou préordre- obtenu. Si une question Q(I) a été recodée, elle apparaît dans l'ordre imprimé sous la forme NØN Q(I).



Ce sous-programme CHAINE est formé de 6 sous-programmes. Il comporte 300 instructions, a une durée d'occupation CPU d'une douzaine de secondes sur un IBM 370/168. Il occupe en moyenne 38 K octets en exécution dans nos exemples. On trouvera la liste des instructions de CHAINE et divers compléments dans [(14')]

Exemple : "Le syndicalisme des cadres" ([7], p.68)

Le questionnaire comporte 6 questions : a, b, c, d, e, f. A. Degenne écrit dans ([7]) à propos de cette enquête : "On constate sur le graphe une assez grande dispersion conduisant à mettre en doute d'emblée le bien-fondé d'une échelle de Guttman à partir de tels résultats. Si toutefois nous tentons l'expérience, à titre d'exemple, nous sommes conduits à retenir l'ordre a > b > c > d > e > f".

La chaîne correspondant à cet ordre est trouvée par notre programme. Elle regroupe 133 personnes sur 355. Le programme donne en outre de nombreuses chaînes d'effectif plus fort, le maximum étant de 156 obtenu par 2 chaînes. (On reproduit page suivante un extrait du listing donnant une de ces chaînes et montrant le travail de ACHEVE sur les chaînes.)

L'ordre imprimé est 6 —> NON 4 —> 5 —> 3 —> 2 —> 1 , ce qui signifie que la question 4 a été recodée (1, 2, 3, 4, 5 et 6 désignent les questions a, b, c, d, e et f).

Cet exemple montre que le fait de recoder certaines questions peut améliorer une analyse hiérarchique. On passe, ici, d'une chaîne regroupant 133 personnes, à une chaîne qui en regroupe 156.

Le syndicalisme des cadres : impression d'une chaîne d'effectif maximum.

CHAINE OBTENUE

CETTE CHAINE REPRESENTE 156 PATRONS SOIT 43.9 POUR 100 DE L EFFECTIF TOTAL

PATRONS	EFFECTIFS
111101	27
111100	48
111110	28
111010	36
110010	2
100010	11
000010	4

CUBE RE-SUSPENDU PAR UNE EXTREMITE DE LA CHAINE

PATRONS	EFFECTIFS
111111	27
111110	48
111100	28
111000	36
110000	2
100000	11
000000	4

RE-ARRANGEMENT DES COLONNES

PATRONS	EFFECTIFS
111111	27
011111	48
001111	28
000111	36
000011	2
000001	11
000000	4

SCHEMA DES IMPLICATIONS
LA PREMIERE QUESTION ENTRAINE LA SECONDE,QUI ENTRAINE LA TROISIEME...ETC...

Q(6)

NON Q(5)

Q(4)

Q(3)

Q(2)

Q(1)

2. EXEMPLES.

2.1 : Exemple sociologique

Cet exemple nous a été proposé par R. ESTABLET, sociologue. Nous ne présentons ici que l'analyse quantitative des résultats. Les problèmes posés par l'élaboration des questions, le codage des réponses et l'interprétation sociologique des résultats se trouvent dans ([8]).

Le thème de l'enquête est l'enseignement du français à l'école élémentaire. En ce domaine, les enseignants se trouvent placés dans une situation-charnière dans la mesure où beaucoup ont pratiqué leur enseignement sous le régime des Instructions Officielles (désormais I.O.) de 1938 et se voient maintenant confrontés aux I.O. préparées dans le Plan Rouchette mis en vigueur en 1973-1974.

Le but de l'enquête est de déterminer si, dans leurs pratiques et leurs opinions, les instituteurs de Tours sont plus près du texte de 1938 ou de celui de 1972.

Sur les 190 instituteurs de l'agglomération tourangelle interrogés, 146 ont répondu très soigneusement. On peut noter que ces 146 instituteurs sont représentatifs de l'ensemble des instituteurs par leur âge, leur sexe et leur catégorie socio-professionnelle d'origine.

A tous ces instituteurs nous avons remis un questionnaire rigoureusement anonyme, que nous avons construit en fonction de la problématique exposée plus haut, mais sans faire mention de la dualité entre I.O. de 1938 et de 1972.

De ce document nous avons extrait 10 questions particulièrement pertinentes dont nous résumons l'énoncé dans le tableau de la figure 1, page suivante. Pour chacune des dix questions ouvertes nous avons appliqué des consignes de codage strictes et explicites que nous ne pouvons rappeler ici.

Analyse du protocole :

Le tableau de la figure 1 permet de préordonner totalement les questions : 4 —> (2 5) —> 1 —> 6 —> 8 —> (9 10) —> (7 3).

C. Flament dans ([10]) considère aussi le préordre obtenu de cette façon. Le fait que les pourcentages de novateurs varient beaucoup (de 18 à 63 %) est une condition nécessaire au bon rendement d'une analyse hiérarchique.

Recherche des chaînes :

La meilleure chaîne possible regrouperait les 11 patrons d'effectifs les plus élevés, soit 27 instituteurs (27/146 = 0,175) ainsi, il est impossible d'avoir une chaîne représentative avec un tel type de protocole où les instituteurs ne se regroupent pas et restent dispersés sur 116 patrons. La meilleure chaîne obtenue est constituée des 10 points suivants avec leurs effectifs entre parenthèses :

0001000000	(1)
0001100000	(1)
0101100000	(2)
1101100000	(4)
1101110000	(2)
1101110010	(2)
1101110110	(1)
1101110111	(2)

Codage :

0 : novateur

1 : conservateur

ANALYSE DES REPONSES AUX 10 QUESTIONS PRISES UNE A UNE :

Fig. 1

	Pourcentage d'instituteurs ayant une pratique ou une opinion traditionnelle (1938)	Pourcentage d'instituteurs ayant une pratique ou une opinion novatrice (proche de l'esprit Rouchette)
1.-Importance de la correction comme objectif de l'enseignement du français (opinion)	60	40
2.-Utilisation des documents fournis par les élèves dans la préparation des cours (pratique)	79	21
3.-Importance de l'orthographe dans la hiérarchie des disciplines du français (opinion)	37	63
4.-Utilisation de l'autodictée dans l'enseignement de l'orthographe (pratique)	82	18
5.-Explication de l'échec actuel de l'enseignement du français (opinion)	78	22
6.-Travail en commun à plusieurs instituteurs (pratique)	58	42
7.-Souhait du travail en équipe (opinion)	37	63
8.-Connaissance du plan Rouchette (pratique)	45	55
9.-Utilisation de la punition comme sanction du travail (pratique)	39	61

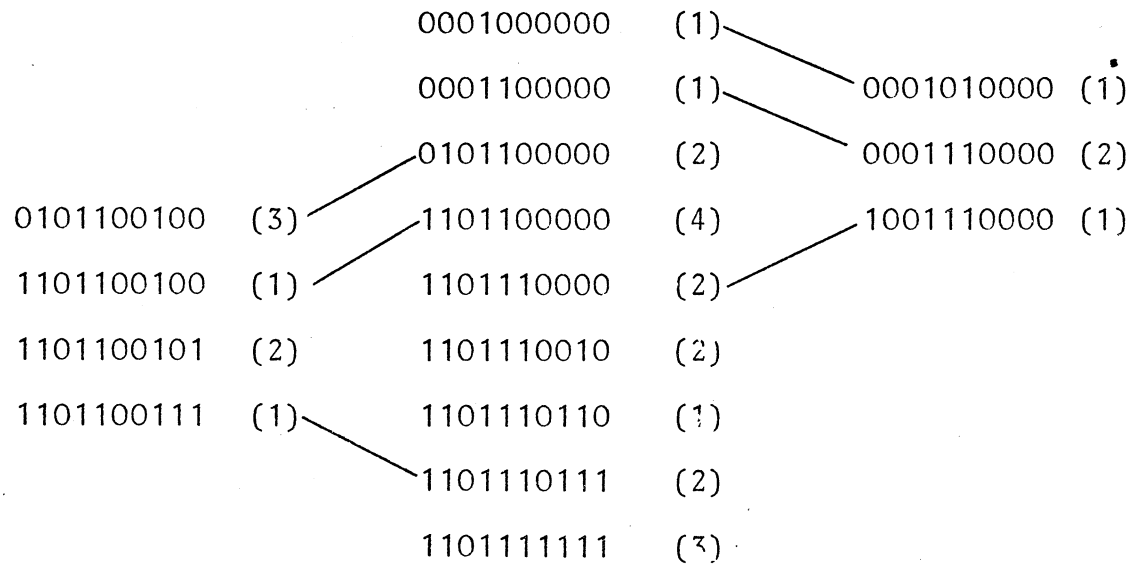
qui représentent 20 instituteurs soit 13,7 % de la population, ce qui est négligeable. L'ordre associé est :

4 —> 5 —> 2 —> 1 —> 6 —> 9 —> 8 —> 10 —> 7 —> 3

On remarque de suite que cette chaîne ne comprend que 10 patrons au lieu de 11, car toutes les questions prennent 2 valeurs (0 et 1) sauf une, la question 4 qui vaut toujours 1 : sur cette question, seuls $\frac{146-119}{146}$ = 17,5 % des instituteurs sont novateurs : q_4 n'est pas discriminante.

L'effectif de chaque patron étant très faible, on lui ajoute l'effectif des 10 patrons voisins, c'est-à-dire, ceux qui ne diffèrent du premier que par une seule composante, les 9 autres étant identiques. Ceci n'est possible que parce que le nombre de questions est élevé et que le fait de ne diverger que sur une question par rapport à un patron de référence, représente une certaine attitude commune.

La chaîne et son voisinage représente $\frac{47}{146}$ = 32 % de la population. A côté de cette chaîne principale, on trouve quatre autres chaînes, proches de la première, l'ensemble de ces cinq chaîne conduisant au modèle suivant :



Ce modèle représente 31 instituteurs et son voisinage 39, soit 70 en tout, correspondant à un pourcentage de 48 %.

Les implications communes à ces 5 chaînes donnent le préordre :

$$4 \longrightarrow 5 \longrightarrow \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \longrightarrow 7 \longrightarrow 3 \qquad \text{(I)}$$

En conclusion, de par l'effectif très faible de chaque patron, on ne peut retenir valablement un modèle formé à partir de chaînes.

Etude des questions :

Nous allons essayer d'éliminer des questions à l'aide des deux indices $K(q_k)$ et $L(q_k)$ définis au chapitre V. On obtient :

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$K(q_k)$	184	116	176	125	118	189	163	189	187	189
$L(q_k)$	-62	-342	268	-382	-332	-32	268	148	238	228

Le préordre déterminé par $L(q_k)$ est :

$$4 \longrightarrow 2 \longrightarrow 5 \longrightarrow 1 \longrightarrow 6 \longrightarrow 10 \longrightarrow 8 \longrightarrow 9 \longrightarrow \begin{pmatrix}7\\3\end{pmatrix}$$

Nous sommes conduits à éliminer les questions 6,1, 10,8 et 9.

Nous allons étudier diverses projections sur les questions restantes :

a) Projection sur les questions (2, 3, 4, 5 et 7)

4 chaînes ont un effectif élevé, qui conduisent à retenir le modèle de la figure 2 :

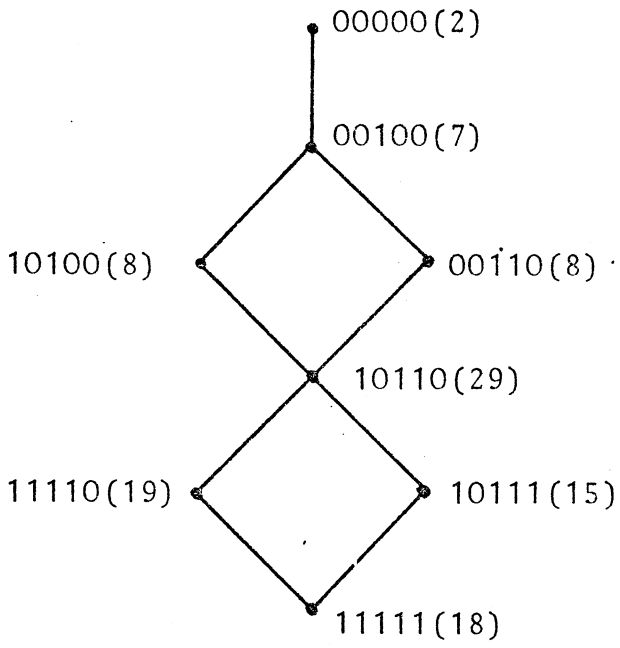


Fig. 2

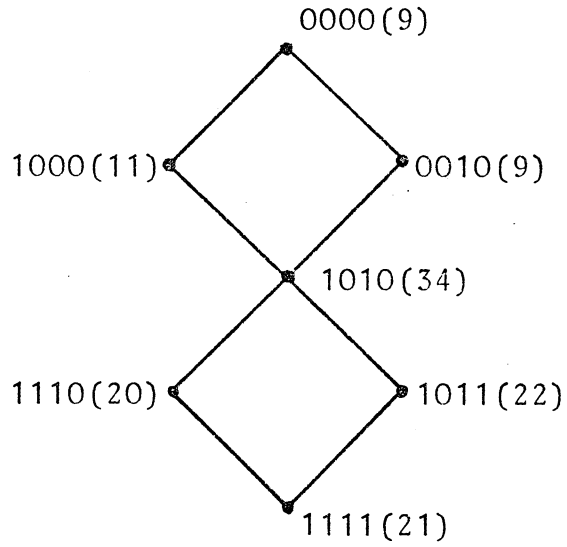
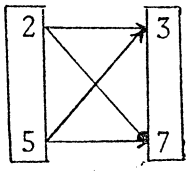


Fig. 3

Ce modèle représente 106 instituteurs sur 146-15 (on peut enlever 15 patrons isolés) soit 81 %. Il est clair que la question 4 n'apporte rien et que le patron 00000 est d'effectif très faible dû au fait que seuls 17,5 % de la population sont novateurs en 4. On projette donc ce modèle sur 2, 3, 5, 7 (figure 3).

Le préordre associé est :

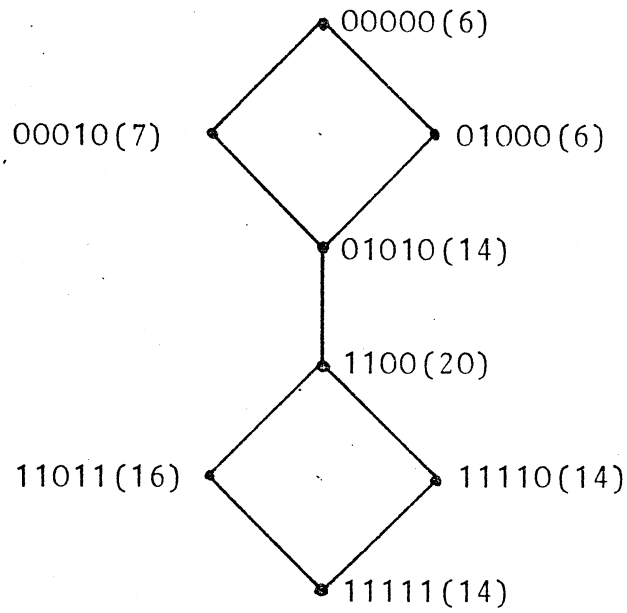


Le modèle obtenu représente 126 patrons sur 146-10 soit 93 %. Calculons le coefficient C, ou coefficient d'implication du modèle :

$$C = \frac{273 - 31}{273} = 90\ \%$$

pour une largeur 1 = 0,33 ([7]). Outre ces résultats il convient de signaler que la chaîne d'effectif maximal obtenu avec 10 questions se projette sur ces modèles.

b) Projection sur (1, 2, 3, 5, 7)



Le préordre associé est (2,5) → (1) → (7,3)

Le modèle représente 97 instituteurs sur 146-18 soit 76 %. Il faut remarquer, comme pour tous les pourcentages, que leurs faiblesses relatives est dûe au fait qu'il y a peu de novateurs et donc les effectifs des modèles sont faibles au voisinage du patron 000 ... 00.

Etude de 2 groupes de questions : (2, 4, 5) et (3, 7, 10).

Nous confondons chaque groupe de questions avec une nouvelle question qui prend la valeur prise par la majorité des questions du

groupe. Le modèle (2, 4, 5) ⟶ (3, 7, 10) représente 131/132 instituteurs, un seul (1000111001) n'étant pas en accord avec le modèle -donc implication très forte au niveau de ces 2 groupes de questions-.

Remarque :

On peut noter que le modèle sur $\{2, 3, 5, 7\}$ s'écrit, en notant x une réponse positive a q_2, y à q_3, z à q_5 et t à q_7 :

$$f = y' t' + xz$$

Chaque monôme s'interprète alors comme une opinion commune (pour les questions qui ne varient pas sur le monôme), le reste étant laissé au choix de chacun. $f' = x'y+x't+z'y+z't$ donne les implications Pour le modèle sur {1, 2, 3, 5, 7}, on peut écrire f en notant chaque question comme précédemment et u pour q_1 :

$$f = u'y't' + xy' zt' + uxz$$

Conclusion-interprétation :

Un des intérêts d'une analyse hiérarchique avec ce type de questionnaires, est l'interprétation du modèle ordonné, chaîne ou tresse, sous forme de "courant social" allant, dans notre exemple, de la tradition vers la novation.

Cette analyse permet de plus de définir les étapes importantes dans ce courant : par exemple on réfléchira utilement à la place qu'occupe la mise en cause de l'orthographe comme discipline primordiale puisqu'aucune démarche pédagogique novatrice ne peut être entreprise qui n'implique pas celle-là.

Notons encore que dans ([8]) nous avons étudié, en fonction du sexe, de l'âge et de la catégorie socio-professionnelle d'origine,

quels sont les instituteurs qui se retrouvent sur les 3 modèles étudiés ici.

2.2 : Exemples biologiques

Cette étude comporte 3 générations de 139, 141 et 111 cailles, dont on a pour chacune, le poids total et le poids de 6 organes. La deuxième génération est obtenue par croisements à partir de la 1ère génération et la troisième par croisements à partir de la deuxième. Nous présentons rapidement l'étude de la première génération; notons que si les résultats de la deuxième génération sont différents de ceux de la génération parente, par contre les résultats de la troisième génération sont identiques à ceux de la première.

Etude de la première génération : les poids sont dichotomisés suivant leur moyenne (0 pour les poids légers, 1 pour les lourds). En étudiant combien de cailles ont 7 ou 6 ou ... ou zéro poids lourds, on s'aperçoit que l'on a en fait deux sous-populations de cailles "régulières" : une formée de cailles lourdes (6 ou 7 organes au-dessus de la moyenne) et une formée de cailles légères (6 ou 7 organes en-dessous de la moyenne), ces deux sous-populations étant reliées par quelques patrons d'effectifs non négligeables. Ceci est confirmé par les résultats du programme CHAINE qui construit, entre autres, les deux chaînes suivantes qui sont celles d'effectif le plus élevé :

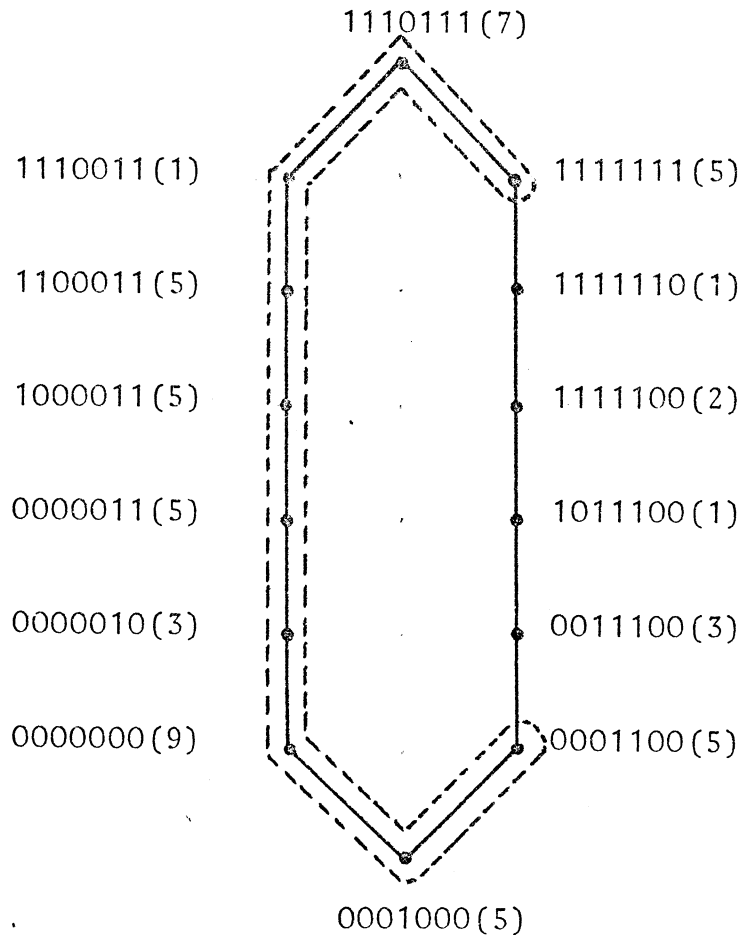
$$C\,1 \begin{cases} 1110111 & (7) \\ 1110011 & (1) \\ 1100011 & (5) \\ 1000011 & (5) \\ 0000011 & (5) \\ 0000010 & (3) \\ 0000000 & (9) \\ 0001000 & (5) \end{cases} \qquad C\,2 \begin{cases} 1100011 & (5) \\ 1000011 & (5) \\ 0000011 & (5) \\ 0000010 & (3) \\ 0000000 & (9) \\ 0001000 & (5) \\ 0001100 & (5) \\ 0011100 & (3) \end{cases}$$

Alors que la chaîne C1 relie les poids forts aux poids faibles, la chaîne C2 est, elle, située dans les poids légers; en étudiant les voisinages des patrons du 7-cube, on s'aperçoit que le patron ayant k zéros dans son écriture ($0 < k \leqslant 7$), dont le voisinage est le plus élevé, est quel que soit $k > 0$, un point de C1 (fig. 1). On s'intéressera donc à C1 qui, bien que d'effectif faible, semble bien intégrée au protocole.

Nombre de zéros	Patron de voisinage le plus élevé	Effectif du voisinage
7	0000000	27
6	0001000 et 0000010	29 et 21
5	0000011	21
4	1000011	18
3	1100011	13
2	1110011	16
1	1110111	20
0	1111111	16

Fig. 1

L'effectif faible de C1 (40 cailles soit seulement 28,8 % de la population) conduit à envisager d'épaissir la chaîne C1 : ceci se révèle rapidement impossible; on peut alors, en reprenant les chaînes données par le programme CHAINE, essayer de l'allonger. On obtient le modèle suivant :



On a donc deux chaînes, dont une d'effectif faible, reliant les cailles régulières. Ce modèle regroupe 57 cailles et 56 dans son voisinage soit 113 cailles (81,5 %). Il semble préférable d'opter pour le modèle entouré de pointillé qui laisse de côté les patrons d'effectifs faibles. Ce modèle est bien approché par C1 et son voisinage (notons qu'une chaîne et son voisinage dans un espace à 7 dimensions recouvrent 34 % des points

du 7-cube, soit autant qu'une chaîne seule dans un 4-cube). Si on élimine les patrons d'effectif inférieur à 1 %, C1 représente 39 cailles et ses voisins immédiats 41 soit 76 %. Si on fixe le seuil à 2 %, on obtient encore 39 cailles sur la chaîne et 35 voisins soit plus de 90 %. La chaîne C1 semble donc assez représentative du protocole ainsi que l'ordre associé :

5 —> 3 —> 2 —> 1 —> 7 —> 6 —> NON 4.

Le rôle particulier de 4(poids de l'estomac) est à remarquer.

2.3 : Notes d'étudiants

Nous ne reprenons ici que deux exemples.

2.3.1 : PC2 Grenoble

Les 74 étudiants composent dans quatre matières : mathématiques, mécanique, physique, chimie. Les notes sont dichotomisées suivant leur moyenne. La chimie se révèle vite comme ayant aucune liaison avec les autres matières. La chaîne suivante regroupe 72 étudiants :

Maths	Meca	Physique	Effectifs
0	0	0	13
1	0	0	25
1	1	0	23
1	1	1	11

Ainsi le niveau en mécanique d'un étudiant, garantit son niveau en mathématiques, et le niveau en physique garantit un niveau en mathématiques et mécanique.

2.3.2 : CP1 Tours

Les 83 étudiants composent en mathématiques, physique-chimie, anglais et dessin technique. La chaîne suivante regroupe 79 étudiants :

Physique-chimie	Mathématiques	Dessin	Anglais	Effectifs
0	0	0	0	4
0	0	0	1	14
0	0	1	1	45
0	1	1	1	13
1	1	1	1	3

Là encore, du fait des variations importantes entre les moyennes des différentes disciplines, une chaîne est très représentative de la population.

REMARQUES

1. PROBLEMES D'AJUSTEMENT D'UN PROTOCOLE A UNE TRESSE

Nous n'avons pas parlé de ces problèmes d'ajustement mais il sera nécessaire avant de représenter un protocole par une tresse, de vérifier si la tresse n'est pas trop éloignée du protocole. Soit S un ensemble de H et $T = \psi(\varphi(S))$; On posera

$$d(S,T) = \sum_{X \in T} n(X).d(S.X) \quad \text{où} \quad d(S,X) = \min_{M \in S} d(M,X)$$

d est la distance de Hamming, n(X) est l'effectif du point X. Ces problèmes sont abordés en particulier dans (7) p. 58-76.

2. MODELES APPROCHES

Soit deux questions i et j et supposons que le protocole obtenu conduise au schéma de la figure 1. On a alors $P_{\{i,j\}} = P_{ij}$

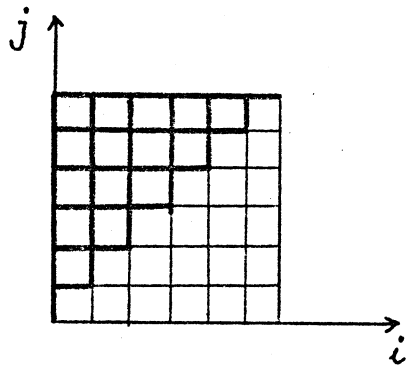


Fig. 1

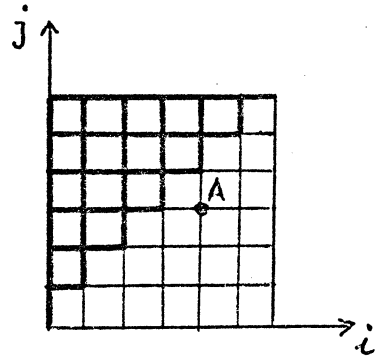


Fig. 2

Si on rajoute à ce protocole le point A, on doit alors associer au protocole de la figure 2, le préordre $P = [i\ j]$, où i et j sont incomparables. Il est évidemment regrettable de devoir rejetter un modèle correspondant à un certain préordre P, sur l'ensemble des variables, pour un seul patron situé hors du modèle. Si ce patron est d'effectif faible, on peut songer à l'éliminer

(c'est ce que fait Flament en posant $R = R^{\circ}UR^{\star}$, (Voir (10), ch. V)). Si le patron est d'effectif élevé on est conduit à élargir le modèle. Par exemple, on peut ajouter les points à distance inférieure ou égale à α du modèle (α à déterminer). On peut aussi nuancer le modèle et définir une fonction d'appartenance, f, pour un point M, à distance k du modèle, de la façon suivante : ($k \leqslant n(p-1)$, où n est le nombre de questions, p le nombre de modalités).

$$d(M, \text{modèle}) = k \Longleftrightarrow f(M) = 1 - \frac{k}{n(p-1)}$$

On rejoint en cela, les idées développées par ZADEH, et ceci symbolis les embarras que peut procurer une question à laquelle on n'est pas forcément "pour" ou "contre", mais pour laquelle on peut avoir un avis nuancé.

On peut aussi songer à considérer le modèle suivant : Soit $T = \psi(P)$ une tresse et notons R l'ensemble des points $M(m_1, \ldots, m_n)$ de H pour lesquels pour tout $\{i,j\} \subset E$ on a $|m_i - m_j| \leqslant \varepsilon$, ($\varepsilon$ à déterminer). Ces points sont dits "réguliers". L'ensemble $T \cup R$ représente l'union de l'ensemble des points respectant un préordre P, et des points réguliers. Ce modèle se révèle inintéressant : $T \cup R$ n'est pas un sous-treillis de H, et de plus les points de R peuvent être assez éloignés de T. Par contre, il nous paraît intéressant lorsqu'un protocole peut être représenté par un modèle ordonné, de nuancer le préordre lui-même et d'étudier le modèle qui en résulte.

<u>Exemple</u> :

On a défini sur $\{i,j\}$ P_{ij} par : $(i,j) \in P_{ij} \Longleftrightarrow i \leqslant j$

On définit P^{ε}_{ij} par $(i,j) \in P^{\varepsilon}_{ij} \Longleftrightarrow i \leqslant j + \varepsilon$.

Cette définition s'étend à un préordre P quelconque, les ensembles associés présentent des propriétés intéressantes et l'on peut envisager une étude voisine de celle des tresses en liaison avec les notions de fonctions, sous-treillis, etc...

3. ALGEBRE A p-VALEURS

L'information attachée aux fonctions introduites ici (ch. III) est binaire : un point appartient ou n'appartient pas à un modèle. Il paraît plus intéressant de considérer les fonctions introduites dans (15) qui tiennent compte, en plus, des effectifs, ces fonctions pouvant être définies de $L_1 \times L_2 \times \ldots \times L_n$ dans $\mathbb{N}$.

Les questions de seuil, de voisinage deviennent inutiles. De plus on peut directement, à l'aide des modèles algébriques, étudier des algorithmes de recherche d'une chaîne à distance minimum d'un protocole (1) par exemple ou d'autres problèmes de nature statistique comme les questions d'ajustement.

BIBLIOGRAPHIE

(1) BARBUT M.

Echelles à distance minimum d'une partie donnée d'un treillis distributif fini.
Math. Sci. Hum. n°18, Paris 1967.

(2) BARBUT M., MONJARDET B.

Ordre et classification, algèbre et combinatoire.
Paris, Presses Universitaires de France, 1970, 2t

BARBUT M. (voir (11))

(3) BENZECRI J.P.

L'analyse des données. Tome 1 : "La Taxinomie",
Tome 2 : "L'analyse des correspondances".
Paris, Dunod, 1973.

BERGE C. (voir (23))

(4) BIRKOFF G.

Lattice theory.
Amer. math. Soc., 1948.

(5) BOURBAKOF V.N.

Resolution de quelques problèmes d'optimisation.
METRA, Vol. IX, N°1, 1970, Paris, p.129-139.

(6) COMBSC H., DAWES R.M., TVERSKY A.

Psychologie Mathématique. Tome 1 : "Modèles et processus de décision".
Paris, P.U.F., 1975.

(7) DEGENNE A.

L'analyse ordinale des données : Méthodes statistiques et métriques.
Paris, Hachette, 1973.

(8) ESTABLET R., KERGALL Y.
Enquête sur les attitudes pédagogiques des instituteurs de Tours face à l'enseignement du français.
B.R.E.F., N°3, Paris, Larousse, Septembre 1975.

(9) FLAMENT C.
Tresses de Guttman, Ordres : Travaux du séminaire sur les ordres totaux finis.
Aix en Provence, Juillet 1967, p.245-254.
Paris, Mouton et Gauthier-Villars, 1970.

(10) FLAMENT C.
L'analyse algébrique de questionnaire (Thèse de doctorat d'état).
Mouton-Gauthier-Villars, Paris 1970.

(11) FREY L., BARBUT M.
Techniques ordinales en analyse des données. Algèbre et combinatoire.
Paris, Hachette, 1971.

(12) GUIGOU J.L.
Analyse des données et choix à critères multiples.
Dunod, Paris, 1974.

(13) KAUFMANN A.
Introduction à la théorie des sous-ensembles flous. 2 t.
Paris, Masson, 1973.

(14) KERGALL Y.
Etudes des tresses de Guttman en algèbre à p valeurs (☆).
Math. Sci. Hum. n° 46, Paris 1974.

(14') KERGALL Y.
Chaîne : un programme d'analyse hiérarchique.
Inf. et Sci. Hum. N° 26, p.57-80, Paris, 1975

KERGALL Y. (voir (8))

(15) KERGALL E.
Monômes et fonctions en algèbre à p valeurs.
Thèse Grenoble, Décembre 1975.

(16) KUNTZMANN J.
Théorie des réseaux.
Paris, Dunod, 1972.

(17) LERMAN J.C.
Les bases de la classification automatique.
Gauthier-Villars, 1970.

(18) LERMAN J.C.
Analyse d'une classe d'échelles.
Chapitre 8 d'un cours sur la Reconnaissance et classification des structures finies en analyse des données. Rennes. 1975.

(19) MATALON B.
L'analyse hiérarchique.
Mouton Gauthier-Villars, Paris, 1965.

(20) MONJARDET B.
Tresses, fuseaux, préordres et topologies.
Math. Sci. Hum. Paris, N° 30, 1970.

MONJARDET B. (Voir (2))

(21) PICHAT E.
Contribution à l'algorithmique non numérique dans les ensembles ordonnés.
Thèse Grenoble, 1970.

(22) WERNER R.
A program for Guttman and other scalogramm analyses.
Northwestern University, Evanston, Illinois 60220

(23) BERGE C.

Graphes et hypergraphes.
Dunod, Paris, 1970.

(☆) Il s'agit dans cet article d'une algèbre à p <u>modalités</u>, c'est-à-dire un produit direct d'ordres totaux quelconques dans lequel les fonctions ne prennent que deux <u>valeurs</u> 0 et 1 et non p valeurs

VU

Grenoble, le

Le Président de la thèse

Vu, et permis d'imprimer,

Grenoble, le

Le Président de l'Université
Scientifique et Médicale